《经典力学》知识梳理

第一章 牛顿力学总结

一、正交曲线坐标

1、普适曲线坐标：在三维空间中用三个独立的坐标 q_1，q_2，q_3 表示质点的位矢，即 $\vec{r}=\vec{r}(q_1,q_2,q_3)=\big(x(q_1,q_2,q_3),y(q_1,q_2,q_3),z(q_1,q_2,q_3)\big)$

2、坐标面：确定一个坐标，另两个坐标可任取的曲面。

3、坐标线：确定两个坐标，另一个坐标可任取的曲线。

4、基矢

（1）质点在三维空间中运动，基矢方向是可以只让一个坐标变化，另两个坐标不变的方向。

（2）一般用单位矢量作为基矢。$\vec{e}_\alpha=\dfrac{1}{\left|\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial q_\alpha}\right|}\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial q_\alpha}\equiv\dfrac{1}{h_\alpha}\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial q_\alpha}.$

（3）度规系数：$h_\alpha=\left|\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial q_\alpha}\right|=\sqrt{\left(\dfrac{\partial x}{\partial q_\alpha}\right)^2+\left(\dfrac{\partial y}{\partial q_\alpha}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial q_\alpha}\right)^2}.$

5、坐标微分：$\mathrm{d}\vec{r}=\sum\limits_{\alpha=1}^{3}\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial q_\alpha}\mathrm{d}q_\alpha=\sum\limits_{\alpha=1}^{3}h_\alpha\mathrm{d}q_\alpha\vec{e}_\alpha.$

$$(\mathrm{d}\vec{r})^2=\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\left(\sum_{\alpha=1}^{3}h_\alpha\mathrm{d}q_\alpha\vec{e}_\alpha\right)\cdot\left(\sum_{\alpha=1}^{3}h_\alpha\mathrm{d}q_\alpha\vec{e}_\alpha\right)=\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}\vec{e}_\alpha\cdot\vec{e}_\beta h_\alpha h_\beta\mathrm{d}q_\alpha\mathrm{d}q_\beta.$$

（注：微分学习惯把 $\mathrm{d}f$ 的平方写成 $\mathrm{d}f^2$ 或者 $(\mathrm{d}f)^2$，这与 f^2 的微分 $\mathrm{d}(f^2)=2f\mathrm{d}f$ 不同，请注意区分！）

6、正交坐标

（1）定义：若各个坐标在<u>同一点处</u>对应的基矢互相垂直，则此坐标为正交坐标。

（2）正交坐标的性质

①$\vec{e}_\alpha\cdot\vec{e}_\beta=\delta_{\alpha\beta}=\begin{cases}1,&\alpha=\beta\\0,&\alpha\neq\beta\end{cases}.$

②$\mathrm{d}s^2=\sum\limits_{\alpha=1}^{3}h_\alpha^2\mathrm{d}q_\alpha^2.$（$\mathrm{d}s^2$无交叉项）

③$\vec{e}_1\times\vec{e}_2=\vec{e}_3$，$\vec{e}_2\times\vec{e}_3=\vec{e}_1$，$\vec{e}_3\times\vec{e}_1=\vec{e}_2$.（叉乘轮换性）

（3）直角坐标

①$\vec{r}=x\vec{e}_x+y\vec{e}_y+z\vec{e}_z.$

②度规系数：$h_x=h_y=h_z=1.$

③基矢：$\vec{e}_x=(1,0,0)$，$\vec{e}_y=(0,1,0)$，$\vec{e}_z=(0,0,1).$（均是常矢量，一般也记为 $\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$）

④$\mathrm{d}\vec{r}=\mathrm{d}x\vec{e}_x+\mathrm{d}y\vec{e}_y+\mathrm{d}z\vec{e}_z.$

⑤$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2.$

（4）柱坐标

①r：<u>**质点到 z 轴的距离**</u>，也是质点在 xy 面内投影到原点的距离。

θ：质点在 xy 面内投影与原点的连线相对 x 轴转过的角度。

z：同直角坐标的 z。

（实质：xy 面内的极坐标+垂直 xy 面的 z 坐标）

②$\vec{r}=r\cos\theta\cdot\vec{e}_x+r\sin\theta\cdot\vec{e}_y+z\vec{e}_z=r\vec{e}_r+z\vec{e}_z$.

③度规系数：$h_r=h_z=1$，$h_\theta=r$.

④基矢：$\vec{e}_r=(\cos\theta,\sin\theta,0)$，$\vec{e}_y=(-\sin\theta,\cos\theta,0)$，$\vec{e}_z=(0,0,1)$.

⑤$\mathrm{d}\vec{r}=\mathrm{d}r\vec{e}_r+r\mathrm{d}\theta\cdot\vec{e}_\theta+\mathrm{d}z\vec{e}_z$.

⑥$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}r^2+r^2\mathrm{d}\theta^2+\mathrm{d}z^2$.

（5）球坐标（注意与柱坐标的区别）

①r：<u>质点到原点的距离</u>。

θ：经度，<u>质点在 xy 面内投影与原点的连线</u>相对 x 轴转过的角度。

φ：余纬度，<u>质点与原点的连线</u>相对 z 轴转过的角度。

②$\vec{r}=r\sin\varphi\cos\theta\cdot\vec{e}_x+r\sin\varphi\sin\theta\cdot\vec{e}_y+r\cos\varphi\vec{e}_z=r\vec{e}_r$.

③度规系数：$h_r=1$，$h_\theta=r\sin\varphi$，$h_\varphi=r$.

④基矢：

$\vec{e}_r=(\sin\varphi\cos\theta,\sin\varphi\sin\theta,\cos\varphi)$，$\vec{e}_\theta=(-\sin\theta,\cos\theta,0)$，$\vec{e}_\varphi=(\cos\varphi\cos\theta,\cos\varphi\sin\theta,-\sin\varphi)$.

⑤$\mathrm{d}\vec{r}=\mathrm{d}r\vec{e}_r+r\sin\varphi\mathrm{d}\theta\cdot\vec{e}_\theta+r\mathrm{d}\varphi\vec{e}_\varphi$.

⑥$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}r^2+r^2\sin^2\varphi\mathrm{d}\theta^2+r^2\mathrm{d}\varphi^2$.

（6）正交坐标系中的速度与加速度

①$\vec{v}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\sum\limits_{\alpha=1}^{3}\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial q_\alpha}\dfrac{\mathrm{d}q_\alpha}{\mathrm{d}t}=\sum\limits_{\alpha=1}^{3}\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha$.（$\dot{q}_\alpha$ 叫做广义速度）

②$v^2=\vec{v}\cdot\vec{v}=\sum\limits_{\alpha=1}^{3}h_\alpha^2\dot{q}_\alpha^2$.

③经典拉格朗日关系

（注：本知识梳理中的公式大部分有推导，如果没有特殊说明，最终的定理一般是等式的最左边与最右边相等）

【关系 1】$\dfrac{\partial\dot{\vec{r}}}{\partial\dot{q}_\alpha}=\dfrac{\partial}{\partial\dot{q}_\alpha}\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\partial}{\partial\dot{q}_\alpha}\sum\limits_{\beta=1}^{3}\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial q_\beta}\dot{q}_\beta=\sum\limits_{\beta=1}^{3}\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial q_\beta}\dfrac{\partial\dot{q}_\beta}{\partial\dot{q}_\alpha}=\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial q_\alpha}\dfrac{\partial\dot{q}_\alpha}{\partial\dot{q}_\alpha}=\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial q_\alpha}$.

（用到的数学：链式法则展开；坐标的变换函数与速度无关；下标不同的速度之间是独立的，没有偏导数）

【关系 2】$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial q_\alpha}=\sum\limits_{\beta=1}^{3}\dfrac{\partial^2\vec{r}}{\partial q_\beta\partial q_\alpha}\dot{q}_\beta=\sum\limits_{\beta=1}^{3}\dfrac{\partial^2\vec{r}}{\partial q_\alpha\partial q_\beta}\dot{q}_\beta=\dfrac{\partial}{\partial q_\alpha}\sum\limits_{\beta=1}^{3}\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial q_\beta}\dot{q}_\beta=\dfrac{\partial\dot{\vec{r}}}{\partial q_\alpha}$.

（意义：对坐标求导和对时间求导可以互换）

（用到的数学：链式法则展开；二阶混合偏导默认可以交换次序；速度的值与坐标的值无关）

④用正交坐标的基矢分解加速度：$\vec{a}=\dfrac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}=\sum\limits_{\alpha=1}^{3}a_\alpha\vec{e}_\alpha$.

★★用拉格朗日关系表示加速度：

$$a_\alpha=\vec{a}\cdot\vec{e}_\alpha=\frac{1}{h_\alpha}\frac{\mathrm{d}\dot{\vec{r}}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_\alpha}=\frac{1}{h_\alpha}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{\vec{r}}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_\alpha}\right)-\frac{1}{h_\alpha}\dot{\vec{r}}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_\alpha}=\frac{1}{h_\alpha}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{\vec{r}}\cdot\frac{\partial\dot{\vec{r}}}{\partial\dot{q}_\alpha}\right)-\frac{1}{h_\alpha}\dot{\vec{r}}\cdot\frac{\partial\dot{\vec{r}}}{\partial q_\alpha}$$

$$=\frac{1}{h_\alpha}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial\left(\dot{\vec{r}}^2\right)}{\partial\dot{q}_\alpha}\right)-\frac{1}{2}\frac{1}{h_\alpha}\frac{\partial\left(\dot{\vec{r}}^2\right)}{\partial q_\alpha}=\frac{1}{2h_\alpha}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\left(v^2\right)}{\partial\dot{q}_\alpha}-\frac{\partial\left(v^2\right)}{\partial q_\alpha}\right).$$

（用到的数学：逆用函数乘积求导公式；$\vec{F}\cdot\dfrac{\partial\vec{F}}{\partial\tau}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\left(\vec{F}^2\right)}{\partial\tau}$.）

（7）自然坐标（已知轨道方程时较好用）

①使用的参数：确定曲线上一点 O_s，用有向曲线段 O_sP 的弧长 s 表示 P 的坐标。（相当于弯曲的数轴）

②位移微分的的大小等于路程：$\left|\mathrm{d}\vec{r}\right|=\mathrm{d}s.$

速度大小等于速率：$v=\left|\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right|=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}.$

（请区分以下几个式子的异同：$\left|\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right|,\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t};\left|\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right|,\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t},\left|\dfrac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}\right|,\dfrac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}$.<u>在没有特殊说明的情况下</u>，将一个矢量的箭头去掉就是表示它的长度。）

③速度：$\vec{v}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s}\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}.$切向单位矢量$\vec{\tau}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s}.$它沿着$\mathrm{d}\vec{r}$的方向。（回顾高中的向量共线定理：两个向量$\vec{a}$与$\vec{b}$共线等价于存在一个实数$\lambda$使$\vec{a}=\lambda\vec{b}.$在这里这个实数就是$\dfrac{1}{\mathrm{d}s}.$）

④θ：$\vec{\tau}$的倾斜角。

$\left|\vec{\tau}\right|=1$是常值函数：$\dfrac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}s}\cdot\vec{\tau}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}\left(\vec{\tau}^2\right)}{\mathrm{d}s}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}1}{\mathrm{d}s}=0\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}s}\perp\vec{\tau}$。记$\dfrac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}s}$方向单位矢量为$\vec{n}.$

$\vec{\tau}$大小不变，只改变方向（倾角）：$\left|\mathrm{d}\vec{\tau}\right|=1\cdot\mathrm{d}\theta=\mathrm{d}\theta.$所以$\mathrm{d}\vec{\tau}=\vec{n}\mathrm{d}\theta.$（沿着法向）

⑤曲率半径 R：质点转过单位角度时所划过的弧长。是将质点在极短时间内的运动等效成一个圆周运动，同时反映轨迹的弯曲程度。表达式：$R=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}.$

*曲线$y=y(x)$的曲率半径：$R=\left|\dfrac{(1+y'(x))^{\frac{3}{2}}}{y''(x)}\right|.$

*与切向矢量的联系：$\left|\dfrac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}s}\right|=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}=\dfrac{1}{R}$；主法向单位矢量$\vec{n}=R\dfrac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}s}.$

⑥副法向：基矢$\vec{b}=\vec{\tau}\times\vec{n}.$

⑦两个法向的意义：一段空间曲线可能无法居于一个平面之内。在一个点附近的一小段曲线近似属于一个平面（密切平面）；主法向是位于密切平面内的曲线法向，和平面曲线的法向是一致的；副法向是垂直密切平面的曲线法向，反映了垂直于该处曲线的更广的维度，涉及到曲线扭出密切平面的能力（挠率）。

⑧加速度：$\vec{a}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}+v\dfrac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}\vec{\tau}+v\dfrac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}s}\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\ddot{s}\vec{\tau}+\dfrac{\dot{s}^2}{R}\vec{n}=\dot{v}\vec{\tau}+\dfrac{v^2}{R}\vec{n}.$

（巧妙的分解：切向加速度改变速度大小，主法向加速度改变速度方向。副法向没有加速度，也不会产生速度分量；合加速度一定指向曲线内侧）

⑨注意：极坐标中沿θ方向有时候也叫切向（横向），但是这和曲线的切向不一样，前者是垂直于质点位矢的方向，后者一定是自然坐标中的切向，请注意区分。

二、牛顿定律与质点动力学

由于内容基本与《大学物理 A：力学》重合，在此仅做一些总结。

*用牛顿方法处理动力学问题

1、涉及微分方程的导出：牛顿定律（受力分析）、动量定理、角动量定理、变质量体系的密舍尔斯基方程（本质上是动量定理）。

（1）有的问题只要求写到微分方程为止；也有的问题要求解完即给出最终物理量随时间/位置变化的关系式（相当于求出物理量在每个时刻/位置的值），这种问题一般也需要使用微分方程求解。

（2）有的问题要求的是物理量随时间的关系，有的是物理量随位置的变化关系。在构造微分方程时，要尽量使需要的自变量位于导数的分母，比如求一维运动位置与速度的关系，要把对时间的导数转化为对位置的导数，那么加速度就不应该写成$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，而是$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$.尽量消去时间。在涉及转动方位角的问题时，可以引入自然坐标系，尝试使用曲率半径解决问题。

（3）没事多求导：一切几何关系对时间求导，都可以把速度、加速度引出来。

（4）务必熟记常微分方程的解法，在此重点强调凑微分法和$y''=y'\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}y}$。

（5）★符号问题是关键：将一条直线上的矢量的方程化成标量方程，要注意有些物理量可能是负的。加负号的方式有两种：一是规定该字母只能表示其绝对值，再在前面加上负号；二是规定该字母本身可以小于0，当它本身小于0时就不必在它前面再加上负号。

2、不需要使用微分方程的问题：只要求解出某一个时刻或位置的物理量。

（1）常用的定理：动量守恒、机械能守恒、角动量守恒。（对牛顿定律积分了一次，相当于微分方程的降阶）

（2）不同教材对机械能的定义不同。在这里，所有保守力对应的势能都可以算进机械能，因为它们在做功上没有本质区别。

（3）注意质点组动力学：动量定理、角动量定理不需要考虑内力，但是内力做功不可以忽略，因为一对相互作用力的移动距离可能不一样。

（4）角动量要选用合适的参考点，因为它守恒与否和参考点选取有关。

（5）动量和角动量是矢量，其整体可能不守恒，但是投影到某个方向可能是守恒的。对于任意常矢量$\vec{e}$，动量定理可以投影，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{p}\cdot\vec{e})=\vec{F}\cdot\vec{e}$；角动量定理也可以投影，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{L}\cdot\vec{e})=\vec{M}\cdot\vec{e}$.能量是标量，不可以分解，只能对整体使用变化定理与守恒定理。

3、参考系变换：以方便处理问题为原则。

（1）基本变换公式：绝对量（矢量）= 牵连量（矢量）+ 相对量（矢量）。（这里要注意正负号）

（2）地面系和其他惯性系相比没有任何特殊之处，只要把位矢、速度全都换到另一个惯性系中，则动量定理、动能定理、角动量定理在这个惯性系中同样成立。

（3）在非惯性系中，只要引入惯性力，则可以当成惯性系来处理；保守的惯性力也可以定义势能。

（4）质心系是特殊的非惯性系。质点组问题如果在地面系中不方便列式，一般都转化到质心系。动量为总质量乘以质心速度，非常方便；动能有柯尼希定理，角动量有$\vec{L}=\vec{L}_C+\vec{L}'$。之后，熟记各个量的变化率。与此同时，熟悉质心系中的

几个0：质心对自身的位矢、速度、加速度均为0，即 $\sum_i m_i\vec{r}_i'=\vec{0},\sum_i m_i\vec{v}_i'=\vec{0},\sum_i m_i\vec{a}_i'=\vec{0}.$

质心系中总动量为0，惯性力做功为0，惯性力力矩为0。

第二章 拉格朗日力学

一、约束

1、约束方程：关于坐标、速度与时间的方程，它们是物体在约束下运动时必须满足的条件。有了约束方程，知道其中一些坐标，就可以知道另外一些，因此约束的作用是使得一些坐标不独立，减小自由度。

2、几何约束：与速度无关，只与坐标、时间有关的约束。

3、运动约束：涉及到速度的约束方程（也可以有位置与时间）。

4、完整约束：包括几何约束和可积分的运动约束（均是或可以转化为只和坐标、时间有关的约束，实质是能否成为关于坐标的全微分）。完整约束下的系统为完整系统。

5、定常约束：与时间无关的约束。（非定常：相当于一个曲面/曲线随时间移动，约束方程中显含时间）

6、单侧约束：往往对应不等式，只在一侧限制物体的运动。两侧都有限制的约束为双侧约束。（一些教材中也称单侧约束为可解约束，即可以解脱的约束）

6、约束力（也称约束反力）：迫使物体遵循约束条件的力。

7、主动力：质点除约束力外所受的其他力。

二、自由度与广义坐标

1、有限运动中的自由度：确定物体位置所需的最小独立坐标数。（独立坐标越多，质点越自由，越能在更多的维度运动）

2、广义坐标：在空间中，确定物体的位置不一定需要用正交的长度坐标，i 个独立的长度坐标与 s-i 个独立的角坐标就可以确定 s 个自由度的物体的位置，各独立坐标之间也无需正交。以上的坐标称为广义坐标，记为 $q_\alpha(\alpha=1,2,...,s)$。（有时甚至会选择既不是长度也不是角度的坐标，但是可能略为麻烦）

3、广义速度：广义坐标的时间变化率，不一定是速度的 m/s 量纲。

4、无限小运动中的自由度：由于完整约束和非完整约束限制的独立速度分量的个数。由于速度乘以 dt 等于坐标微分，这个自由度相当于是一个点附近有多少个坐标微分是独立的。

三、虚功原理、达朗贝尔原理

1、虚位移 $\delta\vec{r}$：质点在满足约束条件的情况下可能发生的位移。

（1）与 $\mathrm{d}\vec{r}$ 一样属于小量，也满足微分的一切运算性质。

（2）$\delta\vec{r}$ 的意义

①$\mathrm{d}\vec{r}$ 是指一个质点实际发生的位移，而 $\delta\vec{r}$ 则是满足约束条件的一切可能位移。如果对 $\delta\vec{r}$ 列方程，那么方程一定对所有可能的 $\delta\vec{r}$ 都成立，是一个很强的结论。

②如果约束曲面随时间动起来，则 $\delta\vec{r}$ 是质点相对曲面可能发生的位移（相当于时间被冻结，只看曲面上点的位置的变化）；由于 $\mathrm{d}\vec{r}$ 也包括曲面的牵连运动，所以在约束非定常时 $\delta\vec{r}$ 不包含于 $\mathrm{d}\vec{r}$，定常时是包含的。

③虚位移沿着曲面切向，因为逃离曲面必然是沿着法向。

2、虚功：发生虚位移时力所做的功，$\delta W=\vec{F}\cdot\delta\vec{r}$.

3、理想约束：约束力做的总虚功为 0。

4、广义坐标下的虚功原理

（1）用广义坐标表示虚位移：$\delta\vec{r}=\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha$.（与全微分公式完全一致）

（2）广义力：$Q_\alpha=\vec{F}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_\alpha}$.它的量纲与$\frac{W}{q_\alpha}$的量纲一致，但不一定是力的量纲。

（3）虚功原理：在平衡状态，$\sum_{i=1}^{n}(\vec{F}_i+\vec{R}_i)=0$，可以转化为$\sum_{i=1}^{n}(\vec{F}_i+\vec{R}_i)\cdot\delta\vec{r}_i=0.$

理想约束下，$\sum_{i=1}^{n}\vec{R}_i\cdot\delta\vec{r}_i=0$，故$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha=\sum_{\alpha=1}^{s}\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha=0.$

由δq_α的任意性与独立性，平衡时各广义力均为 0，即$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}=0.(\alpha=1,2,...,s)$

（虚功是各个δq_α的线性组合。如果各个δq_α不独立，那么它们的线性组合为 0 不能保证每个组合系数都是 0，因此独立性极为重要。）

（4）当主动力全为保守力时，平衡等价于势能取驻定值，即$\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}=0.(\alpha=1,2,...,s)$

（5）用虚功原理解决静力学问题

①确定体系有几个自由度，然后选择同样多的独立广义坐标；

②列出虚功的表达式；

③如果一开始虚功的表达式很难直接写成最终广义坐标的形式，可以先用简单的坐标代替，然后尝试通过几何关系把简单的坐标转化成最终的广义坐标；

④方程整理好后，令各项系数为 0，把一个方程变成 s 个方程，得到结果；

⑤如果需要求解约束力，可以不承认对应的约束，解放一个自由度，把要求的约束力当做主动力，增加方程个数；当然，如果约束力和其他一些因素有关，可以不解除约束，先求出其他因素，然后直接算约束力（例如先通过标准的虚功原理计算出弹簧伸长量，再算弹簧的弹力）。

5、达朗贝尔原理

（1）$3n$ 维矢量：为了简写，一般将 n 个质点的力的三维坐标首尾接在一起，写成$\vec{F}=(\vec{F}_1,\vec{F}_2,...,\vec{F}_n)$。同理有$\vec{r}=(\vec{r}_1,...,\vec{r}_n)$。

（2）达朗贝尔力：$-m\ddot{\vec{r}}$，即牛顿第二定律中$-m\vec{a}$项的相反数。对于 n 个质点，定义$\vec{D}=(-m_1\ddot{\vec{r}}_1,...,-m_n\ddot{\vec{r}}_n)$。

（3）达朗贝尔原理的常用形式（动力学普遍方程）：在理想约束下，n 个质点的主动力与达朗贝尔力的虚功之和为 0，即$(\vec{F}+\vec{D})\cdot\delta\vec{r}=0.$可以由$\vec{F}+\vec{R}+\vec{D}=0$和$\vec{R}\cdot\delta\vec{r}=0$得到。

四、拉格朗日方程

1、经典拉格朗日关系：$\frac{\partial\dot{\vec{r}}}{\partial\dot{q}_\alpha}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_\alpha}$，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_\alpha}=\frac{\partial\dot{\vec{r}}}{\partial q_\alpha}.$

2、“广义达朗贝尔力”

$$D_\alpha=\vec{D}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_\alpha}=-h_\alpha\sum_{i=1}^{n}m_i\ddot{\vec{r}}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}=-h_\alpha\sum_{i=1}^{n}m_ia_{\alpha i}=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial(m_iv_i^2)}{\partial\dot{q}_\alpha}-\frac{\partial(m_iv_i^2)}{\partial q_\alpha}\right)$$

$=\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\alpha}$，其中$T=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_iv_i^2$为总动能。

3、转化达朗贝尔原理：$(\vec{F}+\vec{D})\cdot\delta\vec{r}=\sum_{\alpha=1}^{s}(\vec{F}+\vec{D})\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha=\sum_{\alpha=1}^{s}(\vec{F}+\vec{D})\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha$

$$=\sum_{\alpha=1}^{s}\left(Q_\alpha+\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\alpha}\right)\delta q_\alpha=0\Rightarrow Q_\alpha+\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\alpha}=0\Rightarrow\quad\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\alpha}-\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}=Q_\alpha}$$

（拉格朗日方程）

4、用广义坐标表示动能

假设约束非定常，位矢表达式显含时间。

$$T=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\dot{\vec{r}}_i\cdot\dot{\vec{r}}_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\left(\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha+\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t}\right)\cdot\left(\sum_{\beta=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\beta}\dot{q}_\beta+\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t}\right)=T_2+T_1+T_0.$$

其中，$T_2=\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\frac{1}{2}M_{\alpha\beta}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta$，$T_1=\sum_{\alpha=1}^{s}P_\alpha\dot{q}_\alpha$，$T_0=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\left(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t}\right)^2$.

其中，$M_{\alpha\beta}=\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\beta}$，$P_\alpha=\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t}$.

（三项分别表示广义速度的二次、一次、零次项）

5、理想完整有势系：是理想系、完整系，并且所有主动力均是保守力。

（1）基本假设：势能与速度无关，也不显含时间，仅仅是位置的函数。也即$\frac{\partial V}{\partial\dot{q}_\alpha}=0,\frac{\partial V}{\partial t}=0$。同时，有$Q_\alpha=\vec{F}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_\alpha}=-\frac{\partial V}{\partial\vec{r}}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_\alpha}=-\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}$.

$\frac{\partial V}{\partial\vec{r}}$是一个记号，实质就是$\nabla V=\left(\frac{\partial V}{\partial x_1},\frac{\partial V}{\partial y_1},\frac{\partial V}{\partial z_1},\frac{\partial V}{\partial x_2},\frac{\partial V}{\partial y_2},\frac{\partial V}{\partial z_2},\ldots,\frac{\partial V}{\partial x_n},\frac{\partial V}{\partial y_n},\frac{\partial V}{\partial z_n}\right)$.

（2）定义拉格朗日函数$L=T-V$，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\alpha}-\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}-Q_\alpha=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\alpha}-\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}+\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial(T-V)}{\partial\dot{q}_\alpha}-\frac{\partial(T-V)}{\partial q_\alpha}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=0.$$

拉格朗日方程为$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=0.}$

（3）如果除了保守力还有其他广义力Q_α'，则$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=Q_\alpha'.}$

6、耗散力

（1）表达式：第 i 个质点的阻尼力$\vec{f}_i=-f_i(v_i)\frac{\dot{\vec{r}}_i}{v_i}$。（$f_i(v_i)>0$）

（2）广义力：$f_\alpha=\sum_{i=1}^{n}-f_i(v_i)\frac{\dot{\vec{r}}_i}{v_i}\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}=-\sum_{i=1}^{n}f_i(v_i)\frac{\dot{\vec{r}}_i}{v_i}\cdot\frac{\partial\dot{\vec{r}}_i}{\partial\dot{q}_\alpha}=-\sum_{i=1}^{n}f_i(v_i)\frac{1}{2v_i}\cdot\frac{\partial\dot{\vec{r}}_i^{\,2}}{\partial\dot{q}_\alpha}$

$$=-\sum_{i=1}^{n}f_i(v_i)\frac{1}{2v_i}\cdot\frac{\partial v_i^2}{\partial\dot{q}_\alpha}=-\sum_{i=1}^{n}f_i(v_i)\frac{1}{2v_i}\cdot2v_i\frac{\partial v_i}{\partial\dot{q}_\alpha}=-\sum_{i=1}^{n}f_i(v_i)\frac{\partial v_i}{\partial\dot{q}_\alpha}.$$

（3）耗散函数：阻尼力对速度的原函数。$D=\sum_{i=1}^{n}\int_0^{v_i} f_i(v_i)\mathrm{d}v_i.$

与广义力的关系：$f_\alpha=-\sum_{i=1}^{n} f_i(v_i)\frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_\alpha}=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial D}{\partial v_i}\frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_\alpha}=-\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_\alpha}.$

（4）将非保守广义力分成耗散力 $f_\alpha=-\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_\alpha}$ 与其他力 Q_α''，则拉格朗日方程改写为 $\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}+\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_\alpha}=Q_\alpha''}$。

7、广义势

（1）定义：若存在广义坐标、广义速度、时间的函数 U 使合外力 $\vec{F}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial U}{\partial \dot{\vec{r}}}-\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}$，则称 U 是合外力 $\vec{F}$ 对应的广义势。

（2）引入广义势的原因：有些时候势能不一定只和位置有关，还和速度有关，拉格朗日方程的第一项无法直接添加势能。

（3）广义力与广义势的关系

$$Q_\alpha=\vec{F}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_\alpha}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{\vec{r}}}\right)\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_\alpha}-\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_\alpha}=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{\vec{r}}}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_\alpha}\right)-\frac{\partial U}{\partial \dot{\vec{r}}}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_\alpha}\right)-\left(\frac{\partial U}{\partial q_\alpha}-\frac{\partial U}{\partial \dot{\vec{r}}}\cdot\frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial q_\alpha}\right)$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{\vec{r}}}\cdot\frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)-\frac{\partial U}{\partial \dot{\vec{r}}}\cdot\frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial q_\alpha}-\frac{\partial U}{\partial q_\alpha}+\frac{\partial U}{\partial \dot{\vec{r}}}\cdot\frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial q_\alpha}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{\vec{r}}}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)-\frac{\partial U}{\partial q_\alpha}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)-\frac{\partial U}{\partial q_\alpha}.$$

（用到的数学：链式法则 $\frac{\partial U}{\partial q_\alpha}=\frac{\partial U}{\partial \dot{\vec{r}}}\frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial q_\alpha}+\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_\alpha}$；经典拉格朗日关系；逆用乘积求导公式。）

（4）修改拉格朗日函数的定义：$L=T-U$，则仍有 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=0.$

（5）达朗贝尔力也有广义势：$-m_i\ddot{\vec{r}}_i=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial(-T)}{\partial \dot{\vec{r}}_i}-\frac{\partial(-T)}{\partial \vec{r}_i}.$

*（6）电磁场中电荷的广义势

①场论公式：$\nabla(\vec{P}\cdot\vec{Q})=\vec{P}\times(\nabla\times\vec{Q})+(\vec{P}\cdot\nabla)\vec{Q}+\vec{Q}\times(\nabla\times\vec{P})+(\vec{Q}\cdot\nabla)\vec{P}.$

其中 $(\vec{P}\cdot\nabla)\vec{Q}=\left(P_x\frac{\partial}{\partial x}+P_y\frac{\partial}{\partial y}+P_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\vec{Q}=\left(\vec{P}\cdot\nabla Q_x,\vec{P}\cdot\nabla Q_y,\vec{P}\cdot\nabla Q_z\right).$

令 $\vec{P}=\dot{\vec{r}}$，$\vec{Q}=\vec{A}$（磁矢势），则 $\nabla\times\vec{P}=0,(\vec{Q}\cdot\nabla)\vec{P}=0.$

故 $\frac{\partial(\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A})}{\partial \vec{r}}=\nabla(\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A})=\dot{\vec{r}}\times(\nabla\times\vec{A})+(\dot{\vec{r}}\cdot\nabla)\vec{A}\equiv\dot{\vec{r}}\times(\nabla\times\vec{A})+\dot{\vec{r}}\cdot\frac{\partial\vec{A}}{\partial\vec{r}}.$

②分析广义势：$\vec{F}=q\vec{E}+q\dot{\vec{r}}\times\vec{B}=-q(\nabla\varphi+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t})+q\dot{\vec{r}}\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)$

$$=-q(\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{r}}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t})+q(\frac{\partial(\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A})}{\partial\vec{r}}-\dot{\vec{r}}\cdot\frac{\partial\vec{A}}{\partial\vec{r}})=q\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{r}}-\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial(\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A})}{\partial\vec{r}}\right)=-\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\left(q\varphi-q\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}\right)-q\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}$$

$$=-\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\left(q\varphi-q\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}\right)-q\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial\dot{\vec{r}}}(\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A})=-\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\left(q\varphi-q\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}\right)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial\dot{\vec{r}}}(q\varphi-q\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}).$$

存在广义势 $U=q\varphi-q\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}.$

★（7）经典力学的基本假设：力的表达式中不含有加速度，至多含有速度。是力决定加速度而不是加速度决定力。

对广义势表达式的要求：最多只能有速度的线性项。（否则$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial U}{\partial \dot{\vec{r}}}$会出现加速度）

五、守恒定律与对称性（理想完整有势系）

1、广义动量

（1）定义：$p_\alpha=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}$称为与广义坐标$q_\alpha$共轭的广义动量。（包含了牛顿力学中的动量与角动量）

（2）广义动量定理：$\frac{\mathrm{d}p_\alpha}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)=\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}.$

（3）广义动量守恒：当$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=0$时，$p_\alpha$不随时间变化，广义动量守恒。此时拉格朗日函数不显含q_α；称这样的广义坐标为可遗坐标。

（4）若$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}}=0$，则拉格朗日函数中完全不显含任何位置，系统所有坐标共轭的广义动量都是守恒的。

2、广义能量

（1）定义：$H=\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha-L=\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha\dot{q}_\alpha-L.$

（2）广义能量定理：$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha-\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\sum_{\alpha=1}^{s}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)\dot{q}_\alpha+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\ddot{q}_\alpha\right]-\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}$

$=\sum_{\alpha=1}^{s}\left[\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\ddot{q}_\alpha\right]-\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial L}{\partial t}.$

（用到的数学：链式法则。$L=L(q_\alpha,\dot{q}_\alpha,t)\Rightarrow\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha+\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\ddot{q}_\alpha+\frac{\partial L}{\partial t}.$）

①广义能量的定义不是随意给出的，本身是在上述的链式法则中才产生的。先有链式法则，后有经过证明得到的$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha-L\right)=-\frac{\partial L}{\partial t}$；这之后才定义了$H$。

②广义能量定理的最终形式是$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial L}{\partial t}.$

（3）广义能量守恒：若拉格朗日函数不显含时间，即$\frac{\partial L}{\partial t}=0$，则$H$不随时间变化，广义能量守恒。

（4）广义能量与机械能的关系

①齐次函数：$f(\lambda x_1,...,\lambda x_n)=\lambda^m f(x_1,...,x_n)$，则称$f$为$m$次齐次函数。

②齐次函数的性质（欧拉定理）

$$\frac{\partial f(\lambda x_1,...,\lambda x_n)}{\partial \lambda}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial(\lambda x_i)}\frac{\partial(\lambda x_i)}{\partial\lambda}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial(\lambda x_i)}x_i=\frac{\partial\lambda^m f(x_1,...,x_n)}{\partial\lambda}=m\lambda^{m-1}f.$$

令$\lambda=1$:$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}x_i=mf.$

③拉格朗日函数分成二次、一次、零次齐次函数：$L_2=T_2$，$L_1=T_1$，$L_0=T_0-V$。前两个都只是速度的函数，而 T_0 是速度的 0 次齐次函数，对速度求导为 0。

$$H=\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L_2}{\partial\dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha+\frac{\partial L_1}{\partial\dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha+\frac{\partial L_0}{\partial\dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha-\left(L_2+L_1+L_0\right)=\left(2L_2+L_1\right)-\left(L_2+L_1+L_0\right)$$

$$=L_2-L_0=T_2-T_0+V.$$

广义能量等于机械能的充要条件：$T_1=T_0=0$，即$T=T_2$.（一个体系可能机械能不守恒，而广义能量守恒）

一个充分条件：非定常约束，$\frac{\partial\vec{r}}{\partial t}\neq 0.$

（5）广义能量可以和广义动量统一起来，-H 相当于和时间共轭的广义动量。

（6）阻尼体系中的广义能量：

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha-\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\sum_{\alpha=1}^{s}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}\right)\dot{q}_\alpha+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}\ddot{q}_\alpha\right]-\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{s}\left[\left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}-\frac{\partial D}{\partial\dot{q}_\alpha}\right)\dot{q}_\alpha+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}\ddot{q}_\alpha\right]-\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\sum_{\alpha=1}^{s}\left[\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}\ddot{q}_\alpha\right]-\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}-\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial D}{\partial\dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha$$

$$=-\frac{\partial L}{\partial t}-\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial D}{\partial\dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha.$$

3、对称性

（1）空间平移对称性：动量守恒（牛顿意义下的动量）

若$\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_1}=\vec{e}$为常矢量，且$\frac{\partial L}{\partial q_1}=0$。令$q_1\to\tilde{q}_1=q_1+\varepsilon$（$\varepsilon\to 0$），其他坐标不变，则$\dot{\tilde{q}}_1=\dot{q}_1$，其他坐标和速度也不变，从而拉格朗日函数的值不变。对应守恒量

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_1}=\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_1}=\frac{\partial}{\partial\dot{q}_1}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\dot{\vec{r}}_i^{\,2}=\sum_{i=1}^{n}m_i\dot{\vec{r}}_i\cdot\frac{\partial\dot{\vec{r}}_i}{\partial\dot{q}_1}=\sum_{i=1}^{n}m_i\dot{\vec{r}}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_1}=\vec{p}\cdot\vec{e}.$$

（2）空间转动对称性：角动量守恒

若$\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_1}=\vec{e}\times\vec{r}_i$，且$\frac{\partial L}{\partial q_1}=0$。令$q_1\to\tilde{q}_1=q_1+\varepsilon$（$\varepsilon\to 0$），其他坐标不变，则$\dot{\tilde{q}}_1=\dot{q}_1$，其他坐标和速度也不变，从而拉格朗日函数的值不变。对应守恒量

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_1}=\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_1}=\frac{\partial}{\partial\dot{q}_1}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\dot{\vec{r}}_i^{\,2}=\sum_{i=1}^{n}m_i\dot{\vec{r}}_i\cdot\frac{\partial\dot{\vec{r}}_i}{\partial\dot{q}_1}=\sum_{i=1}^{n}m_i\dot{\vec{r}}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_1}=\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i\cdot(\vec{e}\times\vec{r}_i)=\sum_{i=1}^{n}\vec{e}\cdot(\vec{r}_i\times\vec{p}_i)$$

$$=\vec{e}\cdot\vec{L}.$$

（用到的数学：混合积的轮换性）

（意义：$\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_1}=\vec{e}\times\vec{r}_i$，意味着$\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_1}$沿着$\vec{r}_i$切向，对应的正是转动。）

（3）时间平移对称性：广义能量守恒。

（4）求解更一般守恒量的方法

①选定合适的广义坐标；

②令其中一个坐标 q_1 任意变化一个小量$\delta q_1=\varepsilon$，写出其他坐标和速度因此发生的

改变；

③令拉格朗日函数的改变量 $\delta L=\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\delta\dot{q}_\alpha=0$，得到一个关于$\varepsilon$的方程。由于$\varepsilon$是任取的，可以使相关系数为 0，得到一个量随时间的变化率为 0。积分之后就可以得到守恒量。

六、位形时空

1、时空的基本思想：把时间看成和位置同等地位的第 s+1 个广义坐标，并纳入自由度的范畴，选取其他自变量对这些自由度进行统一的表示。

2、世界点：位形时空中的点，确定了一个事件，即某时刻某系统的位形。拥有位置和时间共 s+1 个广义坐标。

世界线：世界点的轨迹线，反应了一个体系的演化史。

*3、拉格朗日方程在位形时空中的推广

（1）引入参数τ为 s+1 个广义坐标对应的自变量参数（取代原先时间的位置），并记 $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}=t',\frac{\mathrm{d}q_\alpha}{\mathrm{d}\tau}=q_\alpha'=\frac{\mathrm{d}q_\alpha}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}=t'\dot{q}_\alpha.$（一撇表示对$\tau$求导）

（2）广义能量与时间共轭：$p_t=-H.$

（3）$\mathrm{d}L=\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\mathrm{d}q_\alpha+\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\mathrm{d}\dot{q}_\alpha+\frac{\partial L}{\partial t}=\sum_{\alpha=1}^{s}\dot{p}_\alpha\mathrm{d}q_\alpha+\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha\mathrm{d}\dot{q}_\alpha-\dot{H}\mathrm{d}t.$（*）

（*）$\cdot t'+L\mathrm{d}t'$，凑微分：

$$\mathrm{d}(Lt')=\sum_{\alpha=1}^{s}\dot{p}_\alpha t'\mathrm{d}q_\alpha+\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha t'\mathrm{d}\dot{q}_\alpha-\dot{H}t'\mathrm{d}t+L\mathrm{d}t'$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha'\mathrm{d}q_\alpha+\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha[\mathrm{d}(\dot{q}_\alpha t')-\dot{q}_\alpha\mathrm{d}t']-H'\mathrm{d}t+L\mathrm{d}t'$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha'\mathrm{d}q_\alpha+\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha\mathrm{d}q_\alpha'-\left(\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha\dot{q}_\alpha-L\right)\mathrm{d}t'-H'\mathrm{d}t$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha'\mathrm{d}q_\alpha+p_t'\mathrm{d}t+\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha\mathrm{d}q_\alpha'+p_t\mathrm{d}t'$$

令 $\Lambda=Lt'$，与全微分公式对比：$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial\Lambda}{\partial q_\alpha'}-\frac{\partial\Lambda}{\partial q_\alpha}=0.}$

第三章 两体中心势

一、两体中心势问题的特点

1、孤立性：是孤立两体系统，即两个物体总的合外力为 0。

2、可解耦性：如果用两个物体的位置作为坐标，则 $L=\frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1^{\,2}+\frac{1}{2}m_2\dot{\vec{r}}_2^{\,2}-V(|\vec{r}_1-\vec{r}_2|)$，找不到可遗坐标，不太方便；如果用质心系做过渡，令总质量 $M=m_1+m_2$，约化质量 $\mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$，质心位矢 $\vec{R}=\frac{m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2}$，相对位矢 $\vec{r}=\vec{r}_1-\vec{r}_2$，则由柯尼希定理得 $L=\frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2+\frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^{\,2}-V(|\vec{r}|)$，有可遗坐标 $\vec{R}$；两体问题转化成约化质量的单

体问题。

3、运动方程：质心动量守恒，$\dot{\vec{P}}=M\ddot{\vec{R}}=\frac{\partial L}{\partial \vec{R}}=0$；约化质量的运动满足方程$\dot{\vec{p}}=\mu\ddot{\vec{r}}=\frac{\partial L}{\partial \vec{r}}=-\frac{\partial V}{\partial \vec{r}}.$

4、内力的性质：沿着两物体连线方向，如万有引力、静电力；力的大小只和相对位矢长度（即两质点距离）有关。$\vec{f}_{12}=-\vec{f}_{21}=f(r)\frac{\vec{r}}{r}.$

5、质心系内的角动量（内禀角动量）守恒：$\dot{\vec{l}}'=\vec{M}'=\vec{r}\times f(r)\frac{\vec{r}}{r}=0.$由此可得运动性质——$\mu$必然在与内禀角动量垂直的平面内运动（否则内禀角动量会有其他分量）。

二、运动状态的求解

1、由于μ的运动在一个平面内，故可以用平面极坐标(r,θ)作为其广义坐标。拉格朗日函数$L=\frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)-V(r).$

2、基本运动方程：$\begin{cases}\mu(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)=f(r),\\ \mu(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})=0.\end{cases}$

3、μ的守恒量：$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial\theta}=0\Rightarrow\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=\mu r^2\dot{\theta}=l\text{守恒。}\\ \frac{\partial L}{\partial t}=0\Rightarrow H=\frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+V(r)=E\text{守恒。}\end{cases}$

4、运动方程：各个广义坐标与时间的关系。

（1）$\dot{\theta}=\frac{l}{\mu r^2}\Rightarrow\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2+\frac{l^2}{2\mu r^2}+V(r)=E.$（利用内禀角动量守恒将$\theta$的自由度消去，完全转化成对 r 的研究）

（2）解此微分方程：令有效势$U(r)=\frac{l^2}{2\mu r^2}+V(r)$，则

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\pm\sqrt{\frac{2}{\mu}[E-U(r)]}\Rightarrow t=\pm\sqrt{\frac{\mu}{2}}\int\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{E-U(r)}}.$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{l^2}{2\mu r^2}\Rightarrow\theta=\int\frac{l^2}{2\mu[r(t)]^2}\mathrm{d}t.$$

5、轨道方程：运动过程中各个坐标的关系。（**注意区分轨道方程与运动方程**）

（1）将$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\pm\sqrt{\frac{2}{\mu}[E-U(r)]}$与$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{l}{\mu r^2}$相除，得到$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}=\pm\frac{r^2}{l}\sqrt{2\mu[E-U(r)]}.$

接下来有两种处理方法：一是直接积分，二是进行倒代换——令$u=\frac{1}{r}$，则有$\mathrm{d}u=-\frac{\mathrm{d}r}{r^2}$，从而轨道微分方程可以转化为 u 与θ的关系。

$\boxed{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}=\mp\frac{1}{l}\sqrt{2\mu[E-U(u^{-1})]}}$（一阶比内公式）$\Rightarrow\theta=\mp\int\frac{l\mathrm{d}u}{\sqrt{2\mu[E-U(u^{-1})]}}$. 解出 u 后再

取倒数即得到 r。（倒代换可以把根号外的变量消去，方便积分）

（2）从有心力直接构造轨道微分方程

①基本代换关系：

$$\dot{r}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\frac{l}{\mu r^2}=-\frac{l}{\mu}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta};\quad \ddot{r}=\frac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=-\frac{l}{\mu}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}\frac{l}{\mu r^2}=-\frac{l^2u^2}{\mu^2}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}.$$

②将以上关系代入 $\mu(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)=f(r)$ 可得

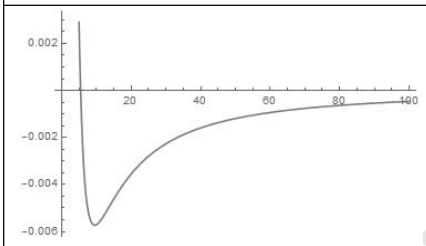
$$-\mu\frac{l^2u^2}{\mu^2}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}-\frac{\mu}{u}\left(\frac{lu^2}{\mu}\right)^2=f(r)\Rightarrow\boxed{\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}+u=-\frac{\mu}{l^2u^2}f(u^{-1}).}$$（二阶比耐公式）

三、引力场下的运动范围与圆轨道

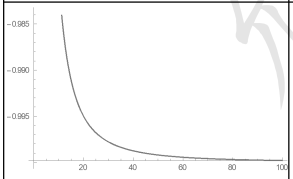
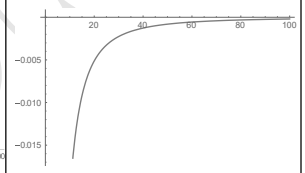
1、运动范围的判断标准：先画出有效势 $U(r)$的曲线，然后用横线 $U=E$ 截这条曲线；在该横线以下的范围是可能的运动。（动能正定，要求势能不超过机械能）

2、假设引力势能表达式为$V=-\frac{\alpha}{r^n}$（$n>0$），则$U(r)=\frac{l^2}{2\mu r^2}-\frac{\alpha}{r^n}$.有以下讨论：

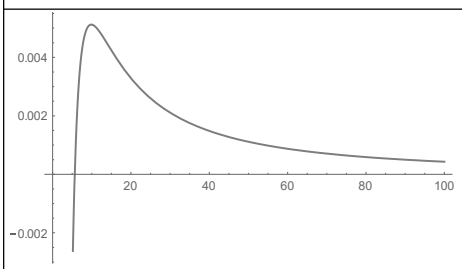
（1）$0<n<2$

$U(r)$曲线大致形状	机械能大小（$E<U_{\min}$ 则运动不可能发生）			
	$E>0$	$E=0$	$U_{\min}<E<0$	$E=U_{\min}$
	r 有下限而无上限，到达无穷远处仍然有速度	r 有下限而无上限，到达无穷远处速度恰为 0	r 有下限与上限，做封闭曲线运动	r 恒定，圆周运动，圆轨道稳定

（2）$n=2$

$U(r)$曲线大致形状		机械能大小			
$\alpha<l^2/2\mu$	$\alpha>l^2/2\mu$	$\alpha<l^2/2\mu$		$\alpha>l^2/2\mu$	
		$E>0$	$E\le0$	$E\ge0$	$E<0$
		r 有下限而无上限，到达无穷远处仍然有速度	运动不存在	可在全空间自由运动	r 有下限与上限，做封闭曲线运动

（3）$n>2$

$U(r)$曲线大致形状	机械能大小（$E>U_{\max}$ 则运动不可能发生）		
	$E=U_{\max}$	$0<E<U_{\max}$	$E\le0$
	r 恒定，圆周运动，圆轨道不稳定	可在两个区间内运动，一个 r 有上限，一个无上限	r 有下限与上限，做封闭曲线运动

注：以上曲线形状可以适当记忆，但是运动范围完全不需要死记硬背，直接读图得出结果即可。

3、圆轨道的存在性与稳定性

（1）存在圆轨道的条件：存在一种运动状态使得 r 取驻定值，即运动过程中 r 不变。解方程 $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}=0$，若有解，则存在圆轨道。

（2）圆轨道的稳定性：与平衡的稳定性具有一样的分析方法。若存在极值点，并且 $\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}r^2}>0$，则该点为极小值点，圆轨道稳定；若 $\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}r^2}<0$，则圆轨道不稳定。

（3）注：在平面极坐标系中，若规定 $r<0$ 时 $(r,\theta)=(|r|,\theta+\pi)$，则 r 可以是负的。如果允许 $r<0$，则或许可以有附加的运动范围与极值点，但是一般的问题中不讨论这一因素。

四、万有引力场与开普勒问题

1、平方反比力场的一般求解（**请关注打方框的式子**）

（1）$f(r)=\frac{\alpha}{r^2}$，$V(r)=\int_r^{+\infty}\frac{\alpha}{r^2}\mathrm{d}r=\frac{\alpha}{r}$．$\alpha>0$ 为斥力，$\alpha<0$ 为引力。

（2）有效势 $U(r)=\frac{l^2}{2\mu r^2}+\frac{\alpha}{r}$，在允许 $r<0$ 的情况下，存在**极小值点** $\boxed{r_{\mathrm{m}}=-\frac{l^2}{\mu\alpha}}$，对应有效势极小值 $\boxed{U_{\min}=-\frac{\mu\alpha^2}{2l^2}<0.}$

（3）轨道比耐公式：$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}+u=-\frac{\mu}{l^2u^2}\frac{\alpha}{r^2}=-\frac{\mu\alpha}{l^2}=\frac{1}{r_{\mathrm{m}}}\Rightarrow u=\frac{1}{r_{\mathrm{m}}}+A\cos(\theta+C)$

$\Rightarrow r=\frac{r_{\mathrm{m}}}{1+Ar_{\mathrm{m}}\cos(\theta+C)}$．将极轴适当旋转，则 $\boxed{r=\frac{r_{\mathrm{m}}}{1+Ar_{\mathrm{m}}\cos\theta}.}$

（4）定义：半通径 $\boxed{p=|r_{\mathrm{m}}|=\begin{cases}r_{\mathrm{m}}, & \alpha<0\\ -r_{\mathrm{m}}, & \alpha>0\end{cases}}$，离心率 $\boxed{e=Ap}$。

①若 $\alpha<0$，则 $\boxed{r=\frac{p}{1+e\cos\theta}}$，**近力心点** $\boxed{r_{\min}=\frac{p}{1+e}}$；若 $\alpha>0$，则 $\boxed{r=\frac{p}{e\cos\theta-1}}$，近力心点 $\boxed{r_{\min}=\frac{p}{e-1}.}$（注：$r_{\min}$ 和 r_{m} 不一样，请区分二者的定义）

②上述所有新定义物理量之间的关系：

$\boxed{\frac{l^2}{2\mu r_{\min}^2}+\frac{\alpha}{r_{\min}}=E}$；$\boxed{U_{\min}(1-e^2)=E}$；$\boxed{e=\sqrt{1-\frac{E}{U_{\min}}}=\sqrt{1+\frac{2El^2}{\mu\alpha^2}}}$

（注：这些不是新的规定，只是在前面定义的基础上推出的，所以不必死记硬背）

（5）轨道类型分析：由极坐标方程可知，轨道必定是圆锥曲线（需要一些数学基础）。根据 E 的正负以及离心率 e 的大小得到更具体的圆锥曲线类型。（原则上不需要背下来，但是建议记忆以便快速判断）

①$\alpha>0$：由于必定有 $E=\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2+\frac{l^2}{2\mu r^2}+\frac{\alpha}{r}>0$，故 $e>1$，轨道为双曲线。

②$\alpha<0$

E 的取值	离心率 e 的大小	轨道类型
$E>0$	$e>1$	双曲线
$E=0$	$e=1$	抛物线
$U_{\min}<E<0$	$0<e<1$	椭圆
$E=U_{\min}$	$e=0$	圆

2、万有引力场的开普勒问题

（1）开普勒第一定律：行星以太阳为焦点，沿椭圆轨道运动。

☆椭圆轨道的参量：

$$a=\frac{1}{2}(r_{\min}+r_{\max})=\frac{1}{2}\left(\frac{p}{1+e}+\frac{p}{1-e}\right)=\frac{p}{1-e^2}=\left|\frac{r_{\mathrm{m}}}{E/U_{\min}}\right|=\left|\frac{l^2}{\mu\alpha}\frac{\mu\alpha^2}{2El^2}\right|=\frac{\alpha}{2E}.$$

（$\alpha<0$，$E<0$，相除正好为正；$E=\dfrac{\alpha}{2a}=-\dfrac{Gm_1m_2}{2a}$. 机械能决定长轴）

$$b=\sqrt{a^2-c^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(r_{\min}+r_{\max})^2-(r_{\min}-r_{\max})^2}=\sqrt{r_{\min}r_{\max}}=\frac{p}{\sqrt{1-e^2}}=\frac{|r_{\mathrm{m}}|}{\sqrt{|E/U_{\min}|}}$$

$$=\frac{l}{\sqrt{2\mu|E|}}.$$（长轴一定，角动量影响短轴）

（2）行星与恒星的掠面速度不变。

①掠面速度：固定一点，单位时间内另一点与之连线扫过的面积。其数学表达式为 $\dfrac{\mathrm{d}\vec{S}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{2}\vec{r}\times\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{2\mu}\vec{r}\times\mu\dot{\vec{r}}=\dfrac{\vec{l}}{2\mu}.$

②在有些教材中，会将内禀角动量写成 μh，其中 $h=\dfrac{l}{\mu}=r^2\dot{\theta}$ 即为掠面速度的两倍。

③掠面周期：$\tau=\dfrac{\pi ab}{\dot{S}}=\dfrac{\pi\dfrac{\alpha}{2E}\dfrac{l}{\sqrt{2\mu|E|}}}{\dfrac{l}{2\mu}}=\pi|\alpha|\sqrt{\dfrac{\mu}{2|E|^3}}=2\pi\sqrt{\dfrac{\mu a^3}{|\alpha|}}.$

（3）行星公转周期的平方正比于椭圆长半轴的立方。

事实上，公转周期就是掠面周期。因此，$\dfrac{\tau^2}{a^3}=\dfrac{4\pi^2\mu}{|\alpha|}=\dfrac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)}\approx\dfrac{4\pi^2}{Gm_2}$. 在这里，$m_2$ 为恒星质量，它远大于行星质量 m_1。（开普勒第三定律是近似规律）

五、斥力场中的粒子散射问题

1、基本假设：认为散射是弹性的，即系统的动量和能量都是守恒的；同时，认为入射粒子一开始从无穷远处飞向靶粒子，远处的斥力场可以忽略不计；一开始靶粒子静止。

2、瞄准距离：靶粒子到入射粒子初始飞行方向的垂直距离。

3、在质心系中观察散射现象（下标 1 为入射粒子，2 为靶粒子）

（1）质心系内总动量恒为 0：$m_1\vec{v}_{1\mathrm{i}}'+m_2\vec{v}_{2\mathrm{i}}'=m_1\vec{v}_{1\mathrm{f}}'+m_2\vec{v}_{2\mathrm{f}}'=0.$

机械能守恒：$\dfrac{1}{2}m_1v_{1\mathrm{i}}'^2+\dfrac{1}{2}m_2v_{2\mathrm{i}}'^2=\dfrac{1}{2}m_1v_{1\mathrm{f}}'^2+\dfrac{1}{2}m_2v_{2\mathrm{f}}'^2.$

由此得到速率关系：$\boxed{v_{1\mathrm{i}}'=v_{1\mathrm{f}}',\ v_{2\mathrm{i}}'=v_{2\mathrm{f}}'.}$ 两粒子在质心系中的速度大小不变，但

是方向发生改变，二者在质心系中朝相同方向转动相同角度θ。

（2）质心系中散射角的计算

①设瞄准距离为 b，两粒子的相对速率为 v。由内动能守恒 $E=\frac{1}{2}\mu v^2$ 与内禀角动量守恒 $l=\mu bv$ 得到角动量与能量的关系：$\boxed{l^2=2\mu b^2E.}$

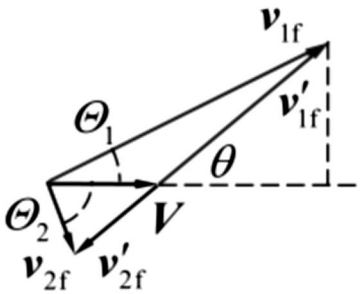
②一阶比耐公式：$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}=\pm\frac{r^2}{l}\sqrt{2\mu[E-V(r)-l^2/2\mu r^2]}=\pm\frac{r^2}{l}\sqrt{2\mu[E-V(r)-b^2E/r^2]}$

$=\pm\frac{r^2}{b}\sqrt{1-\frac{V(r)}{E}-\frac{b^2}{r^2}}.$从无穷远处积分到近力心点处，得到双曲线轨道渐近线与对称轴的夹角φ：$\boxed{\varphi=\int_{r_{\min}}^{+\infty}\frac{b\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{1-\frac{V(r)}{E}-\frac{b^2}{r^2}}}.}$

积分下限为近力心点，通过 $\frac{l^2}{2\mu r_{\min}^2}+V(r_{\min})=\frac{b^2E}{r_{\min}^2}+V(r_{\min})=E$ 解出。

③质心系内散射角 $\theta=\pi-2\varphi$，它由 b 与 E 决定。

（3）地面系（实验室系）中的散射角：用参考系变换矢量图得到。



①实验室系中入射粒子散射角：

$$\Theta_1=\arctan\frac{v'_{1f}\sin\theta}{V+v'_{1f}\cos\theta}=\frac{m_2\sin\theta}{m_1+m_2\cos\theta}.$$

②实验室系中靶粒子散射角：一开始靶粒子相对实验室系静止，故有 $\vec{v}_{2i}=\vec{V}+\vec{v}_{2i}'=0\Rightarrow|v_{2i}'|=|V|$；又已知 $|v_{2i}|=|v_{2f}'|$，故 $|V|=|v_{2f}'|$。（与质心系动量守恒结合可以解释Θ_1的第二个等号）由等腰三角形的性质可得 $\Theta_2=\frac{\pi-\theta}{2}=\varphi.$

4、散射截面

（1）研究散射截面的原因：实际实验不可能只放出一个入射粒子，往往是一群均匀的粒子从无穷远处射来，朝不同方向散射。因此，需要分析朝不同方向出射的粒子的分布密度。

（2）粒子流密度 I：在入射方向上单位截面积上的粒子数。

（3）瞄准距离在 0 至 b 的粒子数为 $N=I\cdot\pi b^2.$分布在 b 至 b+db 的粒子数通过微分得到，$\mathrm{d}N=I\cdot2\pi b\mathrm{d}b=I\cdot2\pi b(\theta)\left|\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\theta}\right|\mathrm{d}\theta.$其中 $b(\theta)$通过前述的$\theta(b)$反解得到。

（4）散射截面：$\mathrm{d}\sigma=\frac{\mathrm{d}N}{I}=2\pi b\mathrm{d}b=2\pi b(\theta)\left|\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\theta}\right|\mathrm{d}\theta.$ **它表示散射角在θ至θ+dθ间的粒子在入射粒子流中所占的截面积**。具体应用时不直接用 dθ表示，而是用散射角微分 dθ对应的立体角微分 dω表示：

取一个以靶粒子为球心的球面（半径为 R），则上述粒子飞行区域与这个球面有相交部分。相交部分对靶粒子所张的立体角为

$\mathrm{d}\omega=\frac{\mathrm{d}S}{R^2}=\frac{2\pi\cdot R\sin\theta\cdot R\mathrm{d}\theta}{R^2}=2\pi\sin\theta\mathrm{d}\theta.$ 因此 $\mathrm{d}\sigma=2\pi b(\theta)\left|\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\theta}\right|\mathrm{d}\theta=\frac{b(\theta)}{\sin\theta}\left|\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\theta}\right|\mathrm{d}\omega.$

（5）单位立体角上的散射截面：$\varsigma(\theta)=\dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\omega}=\dfrac{b(\theta)}{\sin\theta}\left|\dfrac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\theta}\right|$.（教科书上用$\sigma(\theta)$表示，但本人认为这一符号与 d$\sigma$冲突，两个$\sigma$不是同一个物理量，因此在这里做修改）

（6）总散射截面：$\sigma_{\mathrm{t}}=\int\mathrm{d}\sigma=\int\varsigma(\theta)\mathrm{d}\omega=\int_0^{\pi}2\pi b(\theta)\left|\dfrac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\theta}\right|\mathrm{d}\theta=\int_0^{\pi}2\pi\varsigma(\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta$. 对于有些势场，使得散射能够发生的瞄准距离有上限 $b_{\max}$，此时计算较简单：$\sigma_{\mathrm{t}}=\int_0^{b_{\max}}2\pi b\mathrm{d}b=\pi b_{\max}^2$.（总散射截面表示<u>所有发生散射的粒子在入射时所占的面积</u>。对于有限范围内的力场，它表示<u>入射粒子能够与靶粒子发生散射的运动范围的横截面积。</u>）

e.g. 库仑势弹性散射

①$V=\dfrac{\alpha}{r}\Rightarrow\dfrac{1}{r_{\min}}=\dfrac{1}{b^2}\left[\sqrt{\left(\dfrac{\alpha}{2E}\right)^2+b^2}-\dfrac{\alpha}{2E}\right]$.

②$\varphi=\int_{r_{\min}}^{+\infty}\dfrac{b\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{1-\dfrac{\alpha}{Er}-\dfrac{b^2}{r^2}}}=\arccos\dfrac{\dfrac{\alpha}{2E}}{\sqrt{\left(\dfrac{\alpha}{2E}\right)^2+b^2}}\Rightarrow\tan\varphi=\dfrac{2Eb}{\alpha}=\cot\dfrac{\pi-2\varphi}{2}=\cot\dfrac{\theta}{2}$.

③由上式得$b(\theta)=\dfrac{\alpha}{2E}\cot\dfrac{\theta}{2}\Rightarrow\varsigma(\theta)=\dfrac{b(\theta)}{\sin\theta}\left|\dfrac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\theta}\right|=\left(\dfrac{\alpha}{4E}\right)^2\dfrac{1}{\sin^4\dfrac{\theta}{2}}$.（卢瑟福公式）

④总散射截面

$$\sigma_{\mathrm{t}}=\int_0^{\pi}2\pi\varsigma(\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta=\int_0^{\pi}2\pi\left(\frac{\alpha}{4E}\right)^2\frac{\sin\theta}{\sin^4\frac{\theta}{2}}\mathrm{d}\theta=\int_0^{\pi}2\pi\left(\frac{\alpha}{4E}\right)^2\frac{2\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^3\frac{\theta}{2}}\mathrm{d}\theta$$

$\overset{\sin\frac{\theta}{2}=\gamma}{=}\int_0^1 8\pi\left(\dfrac{\alpha}{4E}\right)^2\dfrac{1}{\gamma^3}\mathrm{d}\gamma$. 此积分发散，故总散射截面无限大，由此判断库仑力是长程力。

第四章 微振动

一、微振动的特点

1、振动微小：体系在平衡位置附近做幅度很小的振动，认为其相应的广义坐标是一阶小量。

2、近似处理：一定要将运动方程化成$\ddot{q}+\omega^2q=0$的形式才能说是振动。如果存在一些不符合这一形式的项（如三角函数、指数、对数、非线性幂函数），一般用低阶近似将其线性化。

（1）常用的近似：$\sin\theta\approx\theta$，$\cos\theta\approx1$，$(1+x)^{\alpha}\approx1+\alpha x$。

（2）近似过程中注意对阶数的把握：一般近似到非常数项且<u>未抵消</u>的最低阶。（高阶小量可以舍去，但是不能把所有小量全部舍掉）

e.g. $\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1+x}\approx(1+x+x^2)+(1-x+x^2)=2+x^2$. 这里必须保留二阶，因为两个

一阶项抵消了。否则最后结果为 2，丢失了 x 的全部信息。

（3）对于多项相加的式子的近似，尽量考虑周围式子的环境，选择合适的阶数。尽管大多数情况下 $\cos\theta\approx1$，但是在其他所有非常数项均是二阶时必须保留至二阶：$\cos\theta\approx1-\dfrac{\theta^2}{2}$.

二、三个简单的振动模型

1、单摆：摆长为 l，摆角记为θ。

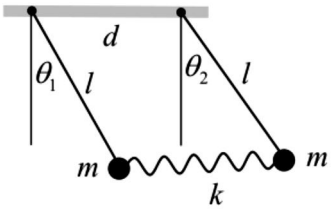
（1）拉格朗日函数 $L=\dfrac{1}{2}ml^2\dot\theta^2-mgl(1-\cos\theta)$.

（2）近似：$L=\dfrac{1}{2}ml^2\dot\theta^2-\dfrac{1}{2}mgl\theta^2$.（这里 $\cos\theta\approx1$ 就不合适）

（3）拉格朗日方程：$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial L}{\partial\dot\theta}\right)=\dfrac{\partial L}{\partial\theta}\Rightarrow l\ddot\theta+g\theta=0.$

（4）运动解：$\theta=A\cos\left(\sqrt{\dfrac{g}{l}}t+\varphi\right).$

2、耦合摆：设弹簧原长为图中的 d。



（1）拉格朗日函数：

$$L\approx\frac{1}{2}ml^2(\dot\theta_1^2+\dot\theta_2^2)-\frac{1}{2}k(l\theta_1-l\theta_2)^2-mgl(1-\cos\theta_1+1-\cos\theta_2)$$

$$\approx\frac{1}{2}ml^2(\dot\theta_1^2+\dot\theta_2^2)-\frac{1}{2}kl^2(\theta_1-\theta_2)^2-\frac{1}{2}mgl(\theta_1^2+\theta_2^2).$$

（2）拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\theta_1}\right)=\frac{\partial L}{\partial\theta_1}\Rightarrow ml\ddot\theta_1+kl(\theta_1-\theta_2)+mg\theta_1=0.$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\theta_2}\right)=\frac{\partial L}{\partial\theta_2}\Rightarrow ml\ddot\theta_2+kl(\theta_2-\theta_1)+mg\theta_2=0.$$

两球做简谐振动，故 $\ddot\theta_1=-\omega^2\theta_1$，$\ddot\theta_2=-\omega^2\theta_2$. 于是 $\begin{cases}(mg+kl-ml\omega^2)\theta_1-kl\theta_2=0.\\-kl\theta_1+(mg+kl-ml\omega^2)\theta_2=0.\end{cases}$

关于θ_1，θ_2 的线性齐次方程组有非 0 解：系数行列式等于 0。

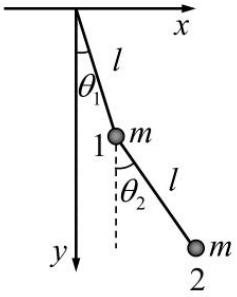
$$\begin{vmatrix}mg+kl-ml\omega^2 & -kl\\ -kl & mg+kl-ml\omega^2\end{vmatrix}=0\Rightarrow\omega_1=\sqrt{\frac{g}{l}},\ \omega_2=\sqrt{\frac{g}{l}+\frac{2k}{m}}.$$

①$\omega=\omega_1$：振幅 $A_1=A_2$.

②$\omega=\omega_2$：振幅 $A_1=-A_2$.

（3）最终的解：$\begin{pmatrix}\theta_1\\\theta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}C_1\cos\left(\sqrt{\dfrac{g}{l}}t+\varphi_1\right)+\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}C_2\cos\left(\sqrt{\dfrac{g}{l}+\dfrac{2k}{m}}t+\varphi_2\right).$

3、双摆



（1）坐标与速度：

$x_1 = l\cos\theta_1$，$y_1 = l\sin\theta_1$，$x_2 = l(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)$，$y_2 = l(\sin\theta_1 + \sin\theta_2)$.

$\dot{x}_1 = -l\dot{\theta}_1\sin\theta_1$，$\dot{y}_1 = l\dot{\theta}_1\cos\theta_1$，（2）拉格朗日

$\dot{x}_2 = -l(\dot{\theta}_1\sin\theta_1 + \dot{\theta}_2\sin\theta_2)$，$\dot{y}_2 = l(\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + \dot{\theta}_2\cos\theta_2)$.

函数：

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + mgl\cos\theta_1 + mgl(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)$$

$$= \frac{1}{2}ml^2(2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) + ml^2\cos(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + 2mgl\cos\theta_1 + mgl\cos\theta_2$$

$$= \frac{1}{2}ml^2(2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2) - \frac{1}{2}mgl(2\theta_1^2 + \theta_2^2) + 3mgl.$$

（涉及的近似：$\cos(\theta_1 - \theta_2) \approx 1$，$\cos\theta_1 \approx 1 - \frac{1}{2}\theta_1^2$，$\cos\theta_2 \approx 1 - \frac{1}{2}\theta_2^2$. 请思考为什么有的只保留 1，有的却保留至二阶。）

（3）拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_1}\right) = \frac{\partial L}{\partial\theta_1} \Rightarrow l(2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + 2g\theta_1 = 0.$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_2}\right) = \frac{\partial L}{\partial\theta_2} \Rightarrow l(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + g\theta_2 = 0.$$

$\ddot{\theta}_1 = -\omega^2\theta_1$，$\ddot{\theta}_2 = -\omega^2\theta_2$. 故 $\begin{cases}(2g - 2l\omega^2)\theta_1 - l\omega^2\theta_2 = 0.\\ -l\omega^2\theta_1 + (g - l\omega^2)\theta_2 = 0.\end{cases}$

关于θ_1，θ_2的线性齐次方程组有非 0 解：系数行列式等于 0。

$$\begin{vmatrix}2g - 2l\omega^2 & -l\omega^2\\ -l\omega^2 & g - l\omega^2\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\left(2 \pm \sqrt{2}\right)\frac{g}{l}}.$$

①$\omega = \omega_1$：振幅 $A_2 = -\sqrt{2}A_1$.

②$\omega = \omega_2$：振幅 $A_2 = \sqrt{2}A_1$.

（4）最终的解：$\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ -\sqrt{2}\end{pmatrix}C_1\cos\left(\sqrt{\left(2+\sqrt{2}\right)\frac{g}{l}}t + \varphi_1\right) + \begin{pmatrix}1\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}C_2\cos\left(\sqrt{\left(2-\sqrt{2}\right)\frac{g}{l}}t + \varphi_2\right)$.

4、处理简单小振动问题的步骤

（1）寻找 s 个独立的广义坐标；

（2）用这些广义坐标表示出动能、势能，写出拉格朗日函数；

（3）在合适的阶数下对拉格朗日函数进行近似；

（4）对近似后的拉格朗日函数求偏导，得到运动方程；

（5）利用简谐振动方程 $\ddot{q} + \omega^2 q = 0$ 将 q 的二阶导化为 q，得到关于广义坐标的 s 元线性齐次方程组（不含常数项）。

（6）振动解不可能是 0，因此要求该方程组有非 0 解，故其系数行列式等于 0，由此解出可能的振动频率；

（7）在各个频率下讨论方程组的解，它是各个坐标振幅的关系；

（8）假设上一步在频率 $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_s$ 下找到 s 个线性无关的振幅解，记为

$\begin{pmatrix} A_1^{(1)} \\ ... \\ A_s^{(1)} \end{pmatrix},...,\begin{pmatrix} A_1^{(s)} \\ ... \\ A_s^{(s)} \end{pmatrix}$，则最终的振动是这些解对应的振动的线性叠加：

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ ... \\ q_s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1^{(1)} \\ ... \\ A_s^{(1)} \end{pmatrix}\cos(\omega_1 t+\varphi_1)+...+\begin{pmatrix} A_1^{(s)} \\ ... \\ A_s^{(s)} \end{pmatrix}\cos(\omega_s t+\varphi_s).$$

（9）若ω存在零解，则对应的振动方程为$\ddot{q}=0$，对应解为$q=At+B$，在最终的解向量中表示为$\begin{pmatrix} 1 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix}(At+B).$

三、多自由度微振动的一般理论（用线性代数呈现）

1、不论回复力是何种力，均将其等效成弹簧模型，对应势能 V。

2、用广义坐标表示势能：$V=\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}k_{\alpha\beta}q_\alpha q_\beta=\frac{1}{2}\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{q}.$

其中$\boldsymbol{q}=\begin{pmatrix} q_1 \\ ... \\ q_s \end{pmatrix}$，弹性矩阵$\boldsymbol{K}=\left(k_{\alpha\beta}\right)_{s\times s}$，$k_{\alpha\beta}=k_{\beta\alpha}=\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_\alpha \partial q_\beta}\right)_0$.（默认二阶偏导可交换；下标 0 表示平衡位置处的值）

动能：$T=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\dot{\vec{r}}_i^{\,2}=\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}m_{\alpha\beta}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta=\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{q}}.$

其中$\dot{\boldsymbol{q}}=\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ ... \\ \dot{q}_s \end{pmatrix}$，惯性矩阵$\boldsymbol{M}=\left(m_{\alpha\beta}\right)_{s\times s}$，$m_{\alpha\beta}=\sum_{i=1}^{n}m_i\left(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\right)_0\cdot\left(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\beta}\right)_0$.

3、拉格朗日函数$L=T-V=\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{q}}-\frac{1}{2}\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{q}=\frac{1}{2}\sum_{\beta,\gamma=1}^{s}(m_{\beta\gamma}\dot{q}_\beta\dot{q}_\gamma-k_{\beta\gamma}q_\beta q_\gamma).$

拉格朗日方程：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}\right)=\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\Rightarrow\sum_{\beta=1}^{s}(m_{\alpha\beta}\ddot{q}_\beta+k_{\alpha\beta}q_\beta)=0.$（$\alpha=1,2,...,s$）

矩阵形式：$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{q}=0.$

4、求解运动方程：对于满足振动方程的$\boldsymbol{q}$，有$\ddot{\boldsymbol{q}}+\omega^2\boldsymbol{q}=0$。对比前述矩阵形式，有$-\ddot{\boldsymbol{q}}=\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K}\boldsymbol{q}=\omega^2\boldsymbol{q}.$由此，$\omega^2$是矩阵$\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K}$的特征值，$\boldsymbol{q}$是对应的特征向量。因此，解$\omega^2$等价于解方程$\left|\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{I}\right|=0$，即$\left|\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}\right|=0$。此方程称为本征方程。

5、解出频率ω_μ^2（$\mu=1,2,...,s$）后，得到它们对应的解向量$\boldsymbol{a}_\mu=\begin{pmatrix} a_{1\mu} \\ ... \\ a_{s\mu} \end{pmatrix}$. 于是方程组的通解为$q_\alpha=\sum_{\mu=1}^{s}a_{\alpha\mu}C_\mu\cos(\omega_\mu t+\varphi_\mu).$

6、简正坐标

（1）在两体中心势问题中已经用质心系对两个质点的运动进行解耦。微振动问题中，由于势能同样涉及相对坐标，所以有时还是不易解耦；简正坐标就是解耦的一组广义坐标，它们的各个分量彼此独立地振动，因此振动微分方程不互相影响，也就能够解耦。

（2）简正坐标必须满足的条件：用简正坐标列出的拉格朗日函数不包含广义坐标、广义速度的交叉项（这样求偏导才能够得到只包含一个坐标及其对应速度的微分方程）。

7、通过线性代数方法列出的拉格朗日函数，实质是关于广义坐标与广义速度的二次型；简正坐标下拉格朗日函数不含交叉项，说明简正坐标使得这个二次型变为标准型，此时 $\boldsymbol{M}$ 与 $\boldsymbol{K}$ 均是对角阵。通过合同变换将二次型的相伴矩阵变成对角阵，其变换矩阵为 $\boldsymbol{A}$；令 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}$，则 $\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}\xi_1\\ \cdots\\ \xi_s\end{pmatrix}$ 是简正坐标，$\boldsymbol{M}'=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{K}'=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{A}$ 同时为对角阵，$L=\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}'\dot{\boldsymbol{\xi}}-\frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}'\boldsymbol{\xi}=\frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{s}(m_\mu\dot{\xi}_\mu^2-k_\mu\xi_\mu^2)$ 为标准型。从中得到的是完全解耦的运动方程 $m_\mu\ddot{\xi}_\mu+k_\mu\xi_\mu=0.$（$\mu=1,2,...,s$）

第五章 刚体力学

一、刚体运动学

1、刚体的特点：其上任意两点的距离不变。$\left|\vec{r}_i-\vec{r}_j\right|=l_{ij}$. 这相当于给了刚体上各点一系列约束方程。

2、刚体的运动自由度：无任何外加约束时，为 6。（确定刚体上任意 3 点即可确定所有点，3 个点之间有 3 个约束方程，$s=3\times3-3=6$）

3、从质心系看刚体的自由度：任意刚体的运动等价于质心的平动加各点绕质心的定点转动。质心平动有 3 个自由度，定点转动有 3 个自由度，共 6 个。

4、刚体运动使用的参考系

（1）空间系(X_0,Y_0,Z_0)：即地面系。在空间系中能够看到刚体的平动和转动。

（2）平动系(X,Y,Z)：相对地面系平动，其速度同刚体平动速度。在平动系中只能看到刚体的转动。

（3）本体系(x,y,z)：相对地面系平动，并且与刚体以完全相同的方式转动。在本体系中刚体没有任何运动，但是不代表本体系没有用，它可以用来代表刚体的运动，并且可以对物理量进行投影。

（4）基点：本体系的坐标原点，一般选取在刚体上。

5、定点转动：刚体上各点绕某一点转动，各点到这一定点的距离始终不变。

（1）刚体的定点转动，就是本体系的定点转动，就是本体系基矢相对平动系基矢的转动，就是将本体系的基矢由初始的一组变换成其他的一组，就是平动系基矢到本体系基矢的过渡矩阵随时间的变化。

（2）任意定点转动可以用矩阵表示。设经过时间Δt，在平动系中观察的本体系基矢从一组变成另一组，则这一转动对应这两组基矢之间的过渡矩阵 $\boldsymbol{P}$。对于标准正交基，$\boldsymbol{P}$ 是正交矩阵。

（3）基矢的变换矩阵与坐标的变换矩阵互逆。经过时间Δt，本体系基矢变化，$(\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2',\boldsymbol{e}_3')=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{P}$；平动系坐标变化为 $\boldsymbol{X}'=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{X}\equiv\boldsymbol{U}\boldsymbol{X}$. 称 $\boldsymbol{U}$ 为旋转矩阵；刚体定点转动相当于将旋转矩阵左乘于坐标。

（4）多次定点转动相当于矩阵连乘：$\boldsymbol{X}''=\boldsymbol{U}_2\boldsymbol{X}'\equiv\boldsymbol{U}_2\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{X}.$

由于矩阵乘法大部分不可交换，故两次转动交换顺序往往不等价。（可自行试验，将一块橡皮绕不同的两根轴以不同顺序各进行一次旋转）

（5）角位移：描述刚体转动过程中转过的角度。

①角位移不是标量，因为不同转轴下转过的角度无法直接代数相加，也即转动具有一定的方向性。

②角位移不是矢量，因为角位移可能不满足加法交换律（即上述的不可交换）。（暗示：有大小、方向不一定是矢量，还需要满足基本的平行四边形运算法则）

③角位移等价于旋转矩阵，其是否可交换等价于对应的矩阵相乘可否交换。

④角位移可看成矢量、加法可交换的充要条件：转动是定轴的。（绕 Z 轴先转 10°再转 20°和先转 20°再转 10°显然是一样的）

（6）定轴转动的数学表示：存在常矢量 $\vec{n}$ 使得 $\mathrm{d}\vec{X}=\vec{n}\times\vec{X}.$

位矢变化量垂直于常矢量 $\vec{n}$，说明运动只在垂直于 $\vec{n}$ 的平面中；位矢变化量在此面内且垂直于位矢，说明变化量沿切向，是为以 $\vec{n}$ 为转轴的定轴转动。

（7）无限小定点转动是定轴转动，无限小角位移可以用矢量表示。

①微小转动的矩阵 $\boldsymbol{U}$ 与三阶单位矩阵 $\boldsymbol{I}_3$ 相差一个微元：$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{I}_3+\boldsymbol{\varepsilon}$，$\boldsymbol{\varepsilon}\to\boldsymbol{O}$。（一个矩阵是无穷小量，等价于它的每个元素都是无穷小量）

②正交矩阵的性质：$\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{I}_3$，故$(\boldsymbol{I}_3+\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{I}_3+\boldsymbol{\varepsilon})=\boldsymbol{I}_3+\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{I}_3$，所以$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{\varepsilon}$。$\boldsymbol{\varepsilon}$ 是反对称矩阵。（二阶小量$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}$舍去）

③$\boldsymbol{\varepsilon}$的对角元等于其相反数（因为反对称），故其对角元素为 0，故可以写为

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{pmatrix}0&-\varepsilon_3&\varepsilon_2\\ \varepsilon_3&0&-\varepsilon_1\\ -\varepsilon_2&\varepsilon_1&0\end{pmatrix}.$$

④转动引起的平动系坐标变化 $\mathrm{d}\vec{X}=\boldsymbol{\varepsilon}\vec{X}=\begin{pmatrix}0&-\varepsilon_3&\varepsilon_2\\ \varepsilon_3&0&-\varepsilon_1\\ -\varepsilon_2&\varepsilon_1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1\\X_2\\X_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varepsilon_2X_3-\varepsilon_3X_2\\ \varepsilon_3X_1-\varepsilon_1X_3\\ \varepsilon_1X_2-\varepsilon_2X_1\end{pmatrix}.$

令矢量 $\vec{\varepsilon}=\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\\varepsilon_2\\\varepsilon_3\end{pmatrix}$，则 $\mathrm{d}\vec{X}=\vec{\varepsilon}\times\vec{X}.$ 因此在每一时刻存在向量 $\vec{\varepsilon}$ 使得其方向为瞬时转轴。（无穷小分析下反对称条件成立，转动矩阵退化为矢量）

⑤$\vec{\varepsilon}$ 与角位移的关系：根据矢量叉乘的长度，$\left|\mathrm{d}\vec{X}\right|=|\vec{\varepsilon}|X_{\perp}.$ $X_{\perp}$表示位矢在垂直转轴方向的投影，它是质点绕瞬时转轴圆周运动的半径，而 $\left|\mathrm{d}\vec{X}\right|$ 则是微小转动所走过的弧长，所以 $\vec{\varepsilon}$ 的长度就是扫过的角度，因此 $\vec{\varepsilon}$ 就是微小角位移 $\mathrm{d}\vec{\varphi}$。其方向表示瞬时转轴方向，与转动平面一一对应。

同理，对任意只做转动的矢量 $\vec{F}$，有 $\mathrm{d}\vec{F}=\mathrm{d}\vec{\varphi}\times\vec{F}.$ 基矢长度不变，因此其变化必然是转动，因此 $\mathrm{d}\vec{e}_i=\mathrm{d}\vec{\varphi}\times\vec{e}_i.$

（8）角速度：由于 $\mathrm{d}\vec{\varphi}$ 是矢量，故对应的速度也是矢量。角速度 $\vec{\omega}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{\varphi}}{\mathrm{d}t}.$ 方向同样沿瞬时转轴方向。

*在 $\mathrm{d}\vec{F}=\mathrm{d}\vec{\varphi}\times\vec{F}$ 两边除以 $\mathrm{d}t$，有 $\dfrac{\mathrm{d}\vec{F}}{\mathrm{d}t}=\dot{\vec{F}}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{\varphi}}{\mathrm{d}t}\times\vec{F}=\vec{\omega}\times\vec{F}.$

（9）角加速度：角速度随时间的变化率。$\vec{\alpha}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\vec{\varphi}}{\mathrm{d}t^2}.$

6、转动参考系坐标变换

（1）**适用范围：一切经典力学下的运动。（不仅仅用于刚体）**

（2）对非刚体仍可以定义地面系、平动系、本体系，只不过在这三个系中能够多观察到一种运动，就是质点之间相对距离的改变（也即本体系中系统内也可以是运动的）。它体现在本体坐标(x,y,z)的改变。

（3）记$(x,y,z)=(x_1,x_2,x_3)$，基点为O。假设本体系与平动系坐标原点重合于O。

①位矢变换公式：地面系中位矢$\vec{r}=\vec{r}_O+\vec{r}'=\vec{r}_O+\sum_{i=1}^{3}x_i\vec{e}_i.$ 其中$\vec{r}_O$是牵连位矢，即O在地面系（空间系）中的位矢。$\vec{r}'=\sum_{i=1}^{3}x_i\vec{e}_i$是本体系中的位矢。

②速度变换公式：位矢变换两边对时间求导。

$$\vec{v}=\vec{v}_O+\frac{\mathrm{d}\vec{r}'}{\mathrm{d}t}=\vec{v}_O+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{3}x_i\vec{e}_i=\vec{v}_O+\sum_{i=1}^{3}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\vec{e}_i+\sum_{i=1}^{3}x_i\dot{\vec{e}}_i=\vec{v}_O+\sum_{i=1}^{3}\dot{x}_i\vec{e}_i+\sum_{i=1}^{3}x_i\vec{\omega}\times\vec{e}_i$$

$$=\vec{v}_O+\sum_{i=1}^{3}\dot{x}_i\vec{e}_i+\vec{\omega}\times\sum_{i=1}^{3}x_i\vec{e}_i=\vec{v}_O+\vec{v}'+\vec{\omega}\times\vec{r}'.$$

其中$\vec{v}'=\sum_{i=1}^{3}\dot{x}_i\vec{e}_i$是在本体系中观察到的速度。（本体系看不到基矢的变化，只有x_1, x_2, x_3的变化）

③加速度变换公式：速度变换两边对时间求导。

$$\vec{a}=\vec{a}_O+\frac{\mathrm{d}\vec{v}'}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{\omega}\times\vec{r}')=\vec{a}_O+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{3}\dot{x}_i\vec{e}_i+\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\vec{r}'+\vec{\omega}\times\frac{\mathrm{d}\vec{r}'}{\mathrm{d}t}$$

$$=\vec{a}_O+\sum_{i=1}^{3}\ddot{x}_i\vec{e}_i+\sum_{i=1}^{3}\dot{x}_i\dot{\vec{e}}_i+\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}'+\vec{\omega}\times(\vec{v}'+\vec{\omega}\times\vec{r}')=\vec{a}_O+\vec{a}'+\sum_{i=1}^{3}\dot{x}_i\vec{\omega}\times\vec{e}_i+\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}'+\vec{\omega}\times\vec{v}'+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')$$

$$=\vec{a}_O+\vec{a}'+\vec{\omega}\times\vec{v}'+\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}'+\vec{\omega}\times\vec{v}'+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')=\vec{a}_O+\vec{a}'+\vec{\alpha}\times\vec{r}'+2\vec{\omega}\times\vec{v}'+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}').$$

其中$\vec{a}'=\sum_{i=1}^{3}\ddot{x}_i\vec{e}_i$是在本体系中观察到的速度。

（4）应用于刚体：刚体的本体系中看不到任何运动，因此$\vec{v}'=0$，$\vec{a}'=0$，所以速度与加速度变换公式可以简化。$\vec{v}=\vec{v}_O+\vec{\omega}\times\vec{r}'$，$\vec{a}=\vec{a}_O+\vec{\alpha}\times\vec{r}'+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}').$

（5）刚体基点选取是任意的：设有两个基点O与O'。记$\vec{r}'=\vec{r}-\vec{r}_O$，$\vec{r}''=\vec{r}-\vec{r}_{O'}$，以$O$与$O$'为基点的角速度分别为$\vec{\omega}$与$\vec{\omega}'$，则$\vec{v}_O=\vec{v}_{O'}+\vec{\omega}'\times(\vec{r}_O-\vec{r}_{O'}).$ 这是在O'参考系中看O。对于其他任意质点，有：

$$\vec{v}=\vec{v}_O+\vec{\omega}\times\vec{r}'=\vec{v}_O+\vec{\omega}\times(\vec{r}-\vec{r}_O)=[\vec{v}_{O'}+\vec{\omega}'\times(\vec{r}_O-\vec{r}_{O'})]+\vec{\omega}\times(\vec{r}-\vec{r}_O)$$

$$=\vec{v}_{O'}+\vec{\omega}'\times(\vec{r}-\vec{r}_{O'})+(\vec{\omega}-\vec{\omega}')\times(\vec{r}-\vec{r}_O).$$

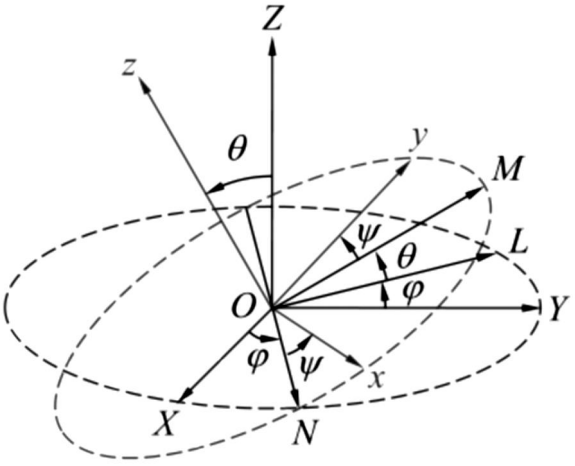
又$\vec{v}=\vec{v}_{O'}+\vec{\omega}'\times(\vec{r}-\vec{r}_{O'})$，故$(\vec{\omega}-\vec{\omega}')\times(\vec{r}-\vec{r}_O)=0$对任意$\vec{r}$都成立。所以$\vec{\omega}=\vec{\omega}'.$

因此不论选取哪一点为基点，定点转动的角速度都一样。

7、欧拉角

（1）意义：是一套较好的描述定点转动的广义坐标。

（2）假设一开始本体系与平动系重合，以此为起点衡量本体系的转动。



①进动角φ：xy 平面绕 Z 轴转动的角度。记 x 轴这一步转动的最终位置为节线 ON。

②章动角θ：进动之后，yz 平面绕节线转动的角度。

③自转角ψ：进动、章动之后，xy 平面绕 z 轴转动的角度。

（3）欧拉角的设计思路：先定瞬时转轴，再让刚体绕瞬时轴转动。定点转动的实质是转轴变化的绕轴转动；在这里把 z 作为瞬时转轴，Z 作为 z 轴变化的基准。

①进动 p：瞬时转轴的经度角，是下一步 z 转出 YZ 平面的角度。

②章动 n：瞬时转轴的余纬度，是 z 与竖轴 Z 的夹角。

③自转 s：确定瞬时转轴 z 之后刚体的转动角。

（4）转动的分解：角速度一定可以分解成进动、章动、自转角速度。

①进动角速度 $\vec{\omega}_{\mathrm{p}}=\dot{\varphi}\vec{e}_Z$ 沿 Z 方向，章动角速度 $\vec{\omega}_{\mathrm{n}}=\dot{\theta}\vec{e}_N$ 沿节线方向，自转角速度 $\vec{\omega}_{\mathrm{s}}=\dot{\psi}\vec{e}_z$ 沿 z 方向。

②总角速度 $\vec{\omega}=\vec{\omega}_{\mathrm{p}}+\vec{\omega}_{\mathrm{n}}+\vec{\omega}_{\mathrm{s}}$；**注意到 z 与 Z 可能不垂直，这个分解不是正交分解，不可以直接使用勾股定理，而应使用平行四边形法则叠加。**

（5）用欧拉角变化率表示角速度的本体系分量

①☆☆☆疑问：本体系中没有转动，为什么能够把角速度投影到本体系？

【解释】参考系不等价于坐标系。参考系影响运观察到的运动，坐标系仅仅影响矢量的投影大小。角速度是在平动系中观察到的，但是不固定的本体坐标轴客观存在，因此自然可以做投影。刚体中尝试用一个随时间变化的坐标轴来表示角速度乃至角动量，并不是将问题复杂化，而是简单化，主要是考虑到了转动惯量表示的方便（见下文）。

②欧拉角方向向量在本体系中的投影：

$\vec{e}_Z=\sin\theta(\sin\psi\vec{e}_x+\cos\psi\vec{e}_y)+\cos\theta\vec{e}_z$. $\vec{e}_N=\cos\psi\vec{e}_x-\sin\psi\vec{e}_y$.

③设 $\vec{\omega}=\omega_1\vec{e}_x+\omega_2\vec{e}_y+\omega_3\vec{e}_z$，则有欧拉运动学方程：

$$\begin{cases}\omega_1=\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi+\dot{\theta}\cos\psi,\\ \omega_2=\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi-\dot{\theta}\sin\psi,\\ \omega_3=\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi}.\end{cases}$$

今后，下标 1,2,3 全都表示本体系中的三个分量。

（如何记忆：一般不建议死记最终的运动学方程，而是将方向向量的投影记住。$\vec{e}_Z$ 相当于三维球坐标投影，$\vec{e}_N$ 相当于平面极坐标投影。这是因为它们都在相对本体的直角坐标系转动。）

二、刚体动力学的一般理论

1、定点转动的角动量

（1）正交分解：$\vec{A}=(\vec{A}\cdot\vec{e})\vec{e}+\vec{e}\times(\vec{A}\times\vec{e})$. 其中$\vec{e}$是单位矢量；第一项是与$\vec{e}$共线的分量，第二项是与$\vec{e}$垂直的分量。

（2）令$\vec{A}=\vec{\omega}$，$\vec{e}=\dfrac{\vec{r}_l}{r_l}$，则$\dfrac{\vec{r}_l}{r_l}\times(\vec{\omega}\times\dfrac{\vec{r}_l}{r_l})=\vec{\omega}-(\vec{\omega}\cdot\dfrac{\vec{r}_l}{r_l})\dfrac{\vec{r}_l}{r_l}$.

两边同乘r_l^2得$\vec{A}=\vec{\omega}$，$\vec{e}=\dfrac{\vec{r}_l}{r_l}$，则$\vec{r}_l\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_l)=r_l^2\vec{\omega}-(\vec{\omega}\cdot\vec{r}_l)\vec{r}_l$.

（3）刚体在平动系中定点转动的角动量：

$$\vec{L}=\sum_l\vec{r}_l\times m_l\dot{\vec{r}}_l=\sum_l\vec{r}_l\times m_l(\vec{\omega}\times\vec{r}_l)=\sum_l m_l[r_l^2\vec{\omega}-(\vec{\omega}\cdot\vec{r}_l)\vec{r}_l].$$

注意：“角动量与角速度平行”只对定轴转动成立，此时$\vec{\omega}\cdot\vec{r}_l=0$.

2、在一般情况下，角动量与角速度不平行，因此定轴转动的$\vec{L}=I\vec{\omega}$结论不成立。但是可以肯定的是，角动量的每个分量应当可以写成角速度各分量的线性组合，因此根据线性代数，存在矩阵$\boldsymbol{I}$使得$\vec{L}=\boldsymbol{I}\vec{\omega}$. 称$\boldsymbol{I}$为惯量矩阵（惯量张量）。

（1）惯量张量的元素：$I_{ij}=\sum_l m_l\left(\delta_{ij}\sum_{k=1}^{3}x_{lk}^2-x_{li}x_{lj}\right)$.

写成积分形式：$I_{11}=\int(y^2+z^2)\mathrm{d}m$，$I_{22}=\int(z^2+x^2)\mathrm{d}m$，$I_{33}=\int(x^2+y^2)\mathrm{d}m$；

$I_{12}=I_{21}=-\int xy\mathrm{d}m$，$I_{13}=I_{31}=-\int zx\mathrm{d}m$，$I_{23}=I_{32}=-\int yz\mathrm{d}m$.

（2）惯量张量的所有元素都使用本体系下的坐标，也即惯量张量是对本体系的惯量张量。使用本体系惯量张量的目的：本体系中刚体的(*x*,*y*,*z*)不随时间变化，因此惯量张量在这里是不变的矩阵。在平动系中由于刚体位形不固定，转动惯量会随时间变化；为了求运动规律需要知道惯量张量，而求惯量张量本身又需要知道运动规律，出现循环，无法得解。因此只有使用本体系中的惯量张量才能将问题进行下去；由于$\vec{L}=\boldsymbol{I}\vec{\omega}$，所以**角动量和角速度也必须和惯量张量选用相同的坐标系进行投影。**

（3）惯量张量的性质

①对称矩阵，$\boldsymbol{I}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}$。

②设第 *l* 个质点在本体系中的坐标向量为$\boldsymbol{x}_l$，则$\boldsymbol{I}=\sum_l m_l\left(\boldsymbol{x}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_l\boldsymbol{I}_3-\boldsymbol{x}_l\boldsymbol{x}_l^{\mathrm{T}}\right)$.（可以由角动量的表达式得到；$\boldsymbol{I}_3$是三阶单位阵。）

③刚体的动能可用二次型表示：$T=\dfrac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{L}=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}\boldsymbol{\omega}$.

④平行轴定理：若刚体对于质心坐标系的惯量张量为$\boldsymbol{I}$’，质心对另一点 *O* 处的坐标系（坐标轴与质心系对应坐标轴平行）的惯量张量为$\boldsymbol{I}_C$，则刚体对 *O* 处坐标系的惯量张量为$\boldsymbol{I}=\boldsymbol{I}_C+\boldsymbol{I}$’。

【证明】设质心坐标向量为$\boldsymbol{X}$，第 *l* 个质点在质心坐标系中的坐标向量为$\boldsymbol{x}_l$’，则有基本结论：$\boxed{\boldsymbol{x}_l=\boldsymbol{X}+\boldsymbol{x}_l',\ \sum_l m_l\boldsymbol{x}_l=M\boldsymbol{X},\ \sum_l m_l\boldsymbol{x}_l'=0.}$所以

$$\boldsymbol{I}=\sum_l m_l\left(\boldsymbol{x}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_l\boldsymbol{I}_3-\boldsymbol{x}_l\boldsymbol{x}_l^{\mathrm{T}}\right)=\sum_l m_l[(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{x}_l')^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{x}_l')\boldsymbol{I}_3-(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{x}_l')(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{x}_l')^{\mathrm{T}}]$$

$$=\sum_l m_l(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{I}_3+\boldsymbol{x}_l'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_l'\boldsymbol{I}_3+2\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_l'\boldsymbol{I}_3-\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{x}_l'\boldsymbol{x}_l'^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{x}_l'\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{x}_l'^{\mathrm{T}})$$

$$=\sum_l m_l\left(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{I}_3-\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\right)+\sum_l m_l\left(\boldsymbol{x}_l'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_l'\boldsymbol{I}_3-\boldsymbol{x}_l'\boldsymbol{x}_l'^{\mathrm{T}}\right)+2\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\sum_l m_l\boldsymbol{x}_l'\boldsymbol{I}_3-\sum_l m_l\boldsymbol{x}_l'\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{X}\left(\sum_l m_l\boldsymbol{x}_l'\right)^{\mathrm{T}}$$

$$=M\left(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{I}_3-\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\right)+\sum_l m_l\left(\boldsymbol{x}_l'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_l'\boldsymbol{I}_3-\boldsymbol{x}_l'\boldsymbol{x}_l'^{\mathrm{T}}\right)=\boldsymbol{I}_C+\boldsymbol{I}'.$$

⑤会聚轴定理：定义刚体对瞬时转轴$\vec{n}$的角动量$L_n=\vec{n}\cdot\vec{L}$和转动惯量$I_n=\dfrac{L_n}{\omega}$，则有$I_n=\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}\boldsymbol{n}.$

【证明】考虑到$\boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{n}$，故$L_n=\vec{n}\cdot\vec{L}=\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}=\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}\boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}\boldsymbol{n}\Rightarrow I_n=\dfrac{L_n}{\omega}=\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}\boldsymbol{n}.$

与此同时，$L_n=\vec{n}\cdot\vec{L}=\sum_l\vec{r}_l\times m_l(\omega\vec{n}\times\vec{r}_l)\cdot\vec{n}=\sum_l m_l\omega(\vec{n}\times\vec{r}_l)\cdot(\vec{n}\times\vec{r}_l)=\omega\sum_l m_l\left|\vec{n}\times\vec{r}_l\right|^2$，故$I_n$的另一表达式为$I_n=\sum_l m_l\left|\vec{n}\times\vec{r}_l\right|^2$. 这个表达式的实质是各个质点质量与其到轴的距离平方的乘积之和。

*转动动能：$T=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}\boldsymbol{\omega}=\dfrac{1}{2}\omega^2\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}\boldsymbol{n}=\dfrac{1}{2}I_n\omega^2.$

（4）惯量主轴：本体坐标系仅仅是与刚体相对静止，但是可以具有不同的取向。使得惯量张量为对角阵的坐标轴叫做惯量主轴（简称主轴）。

①根据线性代数，实对称矩阵必正交相似于实对角阵。因此任何刚体均存在惯量主轴。（将非主轴转到主轴的位置，本质上就是一个正交变换）

②惯量主轴的性质

（i）对应的惯量张量为$\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}I_1&0&0\\0&I_2&0\\0&0&I_3\end{pmatrix}$. 三个对角元素称为主惯量。

（ii）$\vec{L}=\sum_{i=1}^{3}I_i\omega_i\vec{e}_i$，$T=\dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}I_i\omega_i^2.$

（iii）若角动量沿第 *i* 主轴方向，则$\vec{L}=I_i\omega\vec{e}_i=\boldsymbol{I}\omega\vec{e}_i\Rightarrow\boldsymbol{I}\vec{e}_i=I_i\vec{e}_i.$因此主惯量是主轴惯量张量的特征值，<u>主轴是对应的特征向量</u>。（从特征多项式看，这是显然的，但是提供了一种寻找主轴的重要方法：寻找惯量张量的三个正交的特征向量。）

（5）惯量椭球

①定义：以同一点为起点朝各个方向画矢量，每个矢量的长度等于其方向上转动惯量的-1/2 次方，即$\vec{x}=\dfrac{1}{\sqrt{I_n}}\vec{n}$，则这些矢量终点形成的包络面是椭球面，称为惯量椭球。

②椭球面方程：$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}\boldsymbol{x}=\dfrac{1}{I_n}\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}\boldsymbol{n}=1\Rightarrow\sum_{i,j=1}^{3}I_{ij}x_ix_j=1.$

对于主轴系，椭球面对应的二次型为标准型：$I_1x_1^2+I_2x_2^2+I_3x_3^2=1.$

③惯量椭球的作用：确定刚体在任意转轴下的各动力学量。

（i）选定瞬时转轴$\vec{n}$，则角速度沿此转轴方向；

（ii）设瞬时转轴交椭球面于 *N*（该点称为“极”），则$|ON|=\dfrac{1}{\sqrt{I_n}}$；

（iii）动能由角速度和 *ON* 长度决定：$T=\dfrac{1}{2}I_n\omega^2=\dfrac{\omega^2}{2|ON|^2}.$

（iv）过 *N* 点作椭球面的切平面，则角动量方向垂直于该切平面。

【证明】设$f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}\boldsymbol{x}-1$，则椭球面是一等值面，其法向为$f$梯度方向。

$$\nabla f=\nabla(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}\boldsymbol{x})=2\boldsymbol{I}\boldsymbol{x}|_N=2\boldsymbol{I}\frac{\boldsymbol{\omega}}{\sqrt{2T}}=2\frac{\boldsymbol{L}}{\sqrt{2T}}\Rightarrow\boldsymbol{L}//\nabla f.$$

（v）角动量大小与 O 点到切平面的距离有关：

$$r_L=\overrightarrow{ON}\cdot\frac{\vec{L}}{L}=\frac{\vec{\omega}}{\sqrt{2T}}\cdot\frac{\vec{L}}{L}=\frac{\sqrt{2T}}{L}\Rightarrow L=\frac{\sqrt{2T}}{r_L}.$$

（vi）由于惯量椭球是不同本体系坐标轴下的转动惯量，故与刚体相对静止；惯量椭球在平动系内的转动可以用来代表刚体定点转动。

3、欧拉动力学方程——角动量定理的本体系分解

（1）本章除拉格朗日陀螺，均用牛顿力学解决问题。刚体涉及的动力学方程为：

①动量定理——$M\dot{\vec{V}}=\vec{F}_{外}.$

②动能定理——$\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=\vec{V}\cdot\vec{F}_{外}=\vec{\omega}\cdot\vec{M}_{外}.$

③角动量定理——$\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\vec{M}_{外}.$

转动重点研究角动量，故在本体系投影下研究角动量定理。

（2）欧拉动力学方程（主轴坐标系）：

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{3}I_i\omega_i\vec{e}_i=\sum_{i=1}^{3}I_i\dot{\omega}_i\vec{e}_i+\sum_{i=1}^{3}I_i\omega_i\dot{\vec{e}}_i=\sum_{i=1}^{3}I_i\dot{\omega}_i\vec{e}_i+\vec{\omega}\times\sum_{i=1}^{3}I_i\omega_i\vec{e}_i=\sum_{i=1}^{3}I_i\dot{\omega}_i\vec{e}_i+\vec{\omega}\times\vec{L}=\vec{M}_{外}.$$

将$\vec{\omega}\times\vec{L}$写开，投影到三个主轴方向：$\boxed{\begin{cases}I_1\dot{\omega}_1-(I_2-I_3)\omega_2\omega_3=M_1,\\I_2\dot{\omega}_2-(I_3-I_1)\omega_3\omega_1=M_2,\\I_3\dot{\omega}_3-(I_1-I_2)\omega_1\omega_2=M_3.\end{cases}}$（记住一个即可记住另两个，三个方程有轮换对称性）

三、两个重要刚体模型

（一）欧拉陀螺

1、特点：不受任何外力矩作用，故动能、角动量守恒。

注：以下所有的守恒量，如果是矢量，则大小都守恒，方向在平动系内不变，在本体系中是转动的。

2、对称重欧拉陀螺：至少存在两个相等的主惯量，不妨设$I_1=I_2$。

（1）欧拉动力学方程：$\boxed{\begin{cases}I_1\dot{\omega}_1-(I_1-I_3)\omega_2\omega_3=0,\\I_1\dot{\omega}_2-(I_3-I_1)\omega_3\omega_1=0,\\I_3\dot{\omega}_3=0.\end{cases}}$

（2）一个守恒量：$\boxed{\dot{\omega}_3=0\Rightarrow\omega_3\equiv\Omega.}$

（3）另两个角速度分量的关系：$\begin{cases}I_1\dot{\omega}_1-(I_1-I_3)\Omega\omega_2=0,\\I_1\dot{\omega}_2-(I_3-I_1)\Omega\omega_1=0.\end{cases}$

定义$n\equiv\dfrac{I_3-I_1}{I_1}\Omega$，则$\begin{cases}\dot{\omega}_1+n\omega_2=0,\\\dot{\omega}_2-n\omega_1=0.\end{cases}\Rightarrow\ddot{\omega}_1+n^2\omega_1=0\Rightarrow\boxed{\begin{cases}\omega_1=\omega_0\cos(nt+\varphi_0),\\\omega_2=\omega_0\sin(nt+\varphi_0).\end{cases}}$

一个守恒量：$\left.\begin{matrix}L\text{守恒，}\boldsymbol{I}\text{守恒}\Rightarrow\omega\text{守恒}\\\Omega\text{守恒}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\omega_0=\sqrt{\omega^2-\Omega^2}=\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}$守恒。它是角

速度在 *xy* 面内的投影。

（4）两个角度守恒量：

①角速度与 *z* 轴的夹角 $\alpha=\arctan\frac{\omega_0}{\Omega}.$ 由此可确定转轴方向。

②将角动量取向作为 *Z* 轴，则角动量与 *z* 轴的夹角即章动角，

$\theta=\arctan\frac{I_1\omega_0}{I_3\Omega}=\arctan\left(\frac{I_1}{I_3}\tan\alpha\right).$ **刚体无章动。**

（5）自转情况：由欧拉运动学方程的前两式和 $\dot\theta=0$ 得

$\tan\psi=\frac{\omega_1}{\omega_2}=\cot(nt+\varphi_0)\Rightarrow$ $\psi=\frac{\pi}{2}-(nt+\varphi_0).$ 刚体匀速自转，$\dot\psi=-n=-\frac{I_3-I_1}{I_1}\Omega.$

（6）进动情况：由欧拉动力学方程第三式得 $\dot\varphi=\frac{\omega_3-\dot\psi}{\cos\theta}=\frac{\Omega+n}{\cos\theta}=\frac{I_3\Omega/I_1}{I_3\Omega/L}=\frac{L}{I_1}.$ 刚体逆时针匀速进动。

（7）刚体的总体运动方式：匀速进动、匀速自转，无章动。称为规则进动。

（8）两对关系

①三个矢量的关系：$\vec e_z,\vec\omega,\vec L$ 两两具有恒定的夹角，彼此沿锥面绕转。角速度与角动量形成的锥面称为空间极锥（角动量为轴线，角速度为母线），角速度绕 *z* 轴转动的锥面称为本体极锥。两个极锥相切，当$\theta>\alpha$时外切，当$\theta=\alpha$时重合（无自转），当$\theta<\alpha$时内切。本体极锥贴空间极锥做纯滚动。

②欧拉角变化率的关系：$\frac{\dot\varphi}{\sin\alpha}=\frac{\dot\psi}{\sin(\theta-\alpha)}=\frac{\omega}{\sin\theta}.$（通过矢量三角形易得）

3、非对称欧拉陀螺：三个主惯量都不相等，此时只能直接处理动力学方程。

（1）由角动量守恒和动能守恒得到下图两式，进行消元，然后代入欧拉动力学方程的第三式，得到

$$\omega_1=\sqrt{\frac{L^2-2I_2T-I_3(I_3-I_2)\omega_3^2}{I_1(I_1-I_2)}}\equiv\omega_1(\omega_3)$$

$$\omega_2=\sqrt{\frac{L^2-2I_1T-I_3(I_3-I_1)\omega_3^2}{I_2(I_2-I_1)}}\equiv\omega_2(\omega_3)$$

$$I_3\dot\omega_3-(I_1-I_2)\omega_1(\omega_3)\omega_2(\omega_3)=0$$

$$\Rightarrow\frac{I_1-I_2}{I_3}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t=\int_{\omega_{30}}^{\omega_3}\frac{\mathrm{d}\omega_3}{\omega_1(\omega_3)\omega_2(\omega_3)}.$$

由此解出$\omega_3(t)$，再得到另外两个角速度分量。

（2）对惯量椭球的讨论

①$r_L=\frac{\sqrt{2T}}{L}$ 为定值，故惯量椭球在极处的切平面固定（潘索平面）。

②欧拉陀螺的转动，可以用惯量椭球在潘索平面上的纯滚动来代表。极就是椭球面与潘索平面的切点，其在潘索平面上的轨迹称为空间极迹，在惯量椭球上的轨迹称为本体极迹。

4、欧拉陀螺转动的稳定性：假设刚体偏离转轴一个微小角度，认为$\omega_3=\Omega$未发生变化，代入欧拉动力学方程得 $\ddot\omega_{1,2}+\frac{(I_1-I_3)(I_2-I_3)\Omega^2}{I_1I_2}\omega_{1,2}=0.$ 转动稳定的条件是上述方程的解为有界的振动，即 $\frac{(I_1-I_3)(I_2-I_3)}{I_1I_2}>0.$ 如果 I_3 比 I_1 与 I_2 都大或者都小，则该条件可以满足，即主惯量最大或最小的轴为稳定轴；如果 I_3 介于 I_1 与 I_2 之间，则该条件不满足，即主惯量为中间值的轴为不稳定轴。两个角速度

指数变化。

（二）拉格朗日陀螺

1、特点：至少存在两个相等的主惯量，不妨设 $I_1=I_2$；质心在第三主轴上，与转动定点不重合，其距离记为 l；仅受重力矩作用。（取竖直方向为 Z 轴）

2、拉格朗日函数：利用欧拉运动学方程得

$$L=T-V=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}I_i\omega_i^2-Mgl\cos\theta=\frac{I_1}{2}\left(\dot\theta^2+\dot\varphi^2\sin^2\theta\right)+\frac{I_3}{2}\left(\dot\psi+\dot\varphi\cos\theta\right)^2-Mgl\cos\theta.$$

3、可遗坐标与守恒量

（1）$\dfrac{\partial L}{\partial\varphi}=0\Rightarrow\dfrac{\partial L}{\partial\dot\varphi}=\left(I_1\sin^2\theta+I_3\cos^2\theta\right)\dot\varphi+I_3\dot\psi\cos\theta=L_Z$ 为守恒量。（角动量在 Z 轴的投影）

（2）$\dfrac{\partial L}{\partial\psi}=0\Rightarrow\dfrac{\partial L}{\partial\dot\psi}=I_3\left(\dot\psi+\dot\varphi\cos\theta\right)=L_3=I_3\omega_3$ 为守恒量。（角动量在 z 轴的投影）

（3）$\dfrac{\partial L}{\partial t}=0\Rightarrow H=\dfrac{I_1}{2}\left(\dot\theta^2+\dot\varphi^2\sin^2\theta\right)+\dfrac{I_3}{2}\left(\dot\psi+\dot\varphi\cos\theta\right)^2+Mgl\cos\theta=E$ 守恒。

4、等效势：与两体中心势一样，通过守恒量引进等效势，消去一些自由度。

（1）将进动、自转用θ表示：

$$\dot\varphi=\frac{L_Z-L_3\cos\theta}{I_1\sin^2\theta},\quad\dot\psi=\frac{L_3}{I_3}-\frac{(L_Z-L_3\cos\theta)\cos\theta}{I_1\sin^2\theta}=\frac{L_3}{I_3}-\dot\varphi\cos\theta.$$

（2）代入广义能量表达式：

$$E=\frac{1}{2}I_1\dot\theta^2+Mgl\cos\theta+\frac{\left(L_Z-L_3\cos\theta\right)^2}{2I_1\sin^2\theta}+\frac{L_3^2}{2I_3}\equiv\frac{1}{2}I_1\dot\theta^2+U(\theta)$$

$$\Rightarrow\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t=\pm\sqrt{\frac{I_1}{2}}\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{E-U(\theta)}}.$$

解出θ后，回代得到φ与ψ。

（3）讨论等效势曲线与运动范围（曲线图见下页）

①$|L_Z/L_3|\neq1$，等效势曲线如图 1。

$\lvert L_Z/L_3\rvert$的取值	E 的取值	章动范围	$\dot\varphi$ 的取值	进动情况
$\lvert L_Z/L_3\rvert<1$	$E=U_{\min}$	无章动，章动角恒为θ_m	存在θ_0使 $L_Z/L_3=\cos\theta_0$，在θ_0处$\dot\varphi=0$	匀速进动（也匀速自转，故规则进动）
	$U_{\min}<E<U(\theta_0)$	有界往复章动		$\dot\varphi$不变号，进动不反向
	$U_{\min}<E=U(\theta_0)$			存在$\dot\varphi=0$的点但是进动不反向
	$E>U(\theta_0)$			进动周期往复，方向改变
$\lvert L_Z/L_3\rvert>1$	$E=U_{\min}$	无章动，章动角恒为θ_m	不存在θ_0使 $L_Z/L_3=\cos\theta_0$，$\dot\varphi$恒大于 0	匀速进动（也匀速自转，故规则进动）
	$E>U_{\min}$	有界往复章动		$\dot\varphi$不变号，进动不反向

能够规则进动的条件：$U(\theta)$极值点θ_m对应的$\dot\varphi$存在。令 $U'(\theta)=0$，得到

$\dot{\varphi}=\dfrac{L_3}{2I_1\cos\theta_m}\left(1\pm\sqrt{1-\dfrac{4I_1Mgl\cos\theta_m}{L_3^2}}\right)$，其存在的条件是 $L_3^2\geq 4I_1Mgl\cos\theta_m$.

②$L_Z/L_3=1$，曲线如图 2，从上至下分别代表 $L_3^2/4I_1Mgl$ 大于、等于、小于 1，这一数量关系决定曲线有无大于 0 的极小值点。0 一定是曲线的极值点，而且必有 $E=U(0)$。

$L_3^2/4I_1Mgl$ 的取值	章动范围	$\theta=0$ 附近的章动情况
$L_3^2/4I_1Mgl>1$	无章动，章动角恒为 0	稳定直立转动
$L_3^2/4I_1Mgl=1$	无章动，章动角恒为 0	次稳定直立转动
$L_3^2/4I_1Mgl<1$	有界往复章动	不稳定直立转动

☆判断$\theta=0$ 附近的章动稳定性，主要是在 0 处对 $U(\theta)$泰勒展开，考察 0 处 $U(\theta)$各阶导数的正负，从而判断 0 处是极大值还是极小值。

③$L_Z/L_3=-1$，曲线如图 3，有极小值点π，且必有 $E=U(\pi)$。章动角恒为π，做稳定倒悬转动。

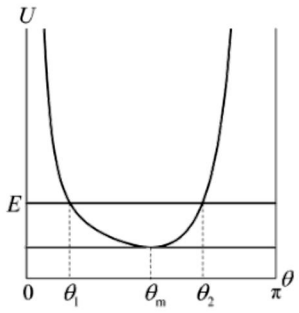


图 1

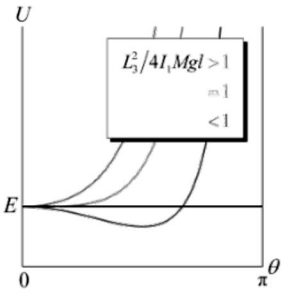


图 2

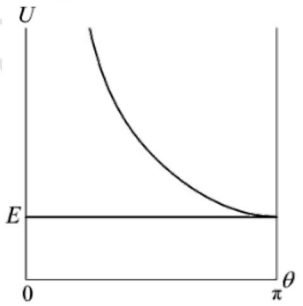


图 3

*四、处理刚体问题的几个小技巧（非套公式型，参考课件最后一道例题）

1、瞬时转轴的寻找：一般在刚体定点转动问题中先找瞬时转轴，有助于迅速确定角速度方向。在平动系中看，刚体上瞬时速度为 0 的点叫做瞬心；**瞬时转轴是定点与瞬心的连线。**（转轴必过定点，而瞬时转轴上的点该瞬时肯定不转，因为瞬时转动半径为 0）

2、找到瞬时转轴后画出角速度（沿瞬时转轴方向），并做两套分解——欧拉角分解和本体系分解。对于对称重刚体，在 xy 面内的投影ω_{12}一般不进一步分成ω_1与ω_2，除非需要求它们；之后主要是通过几何关系得到这两套分解的各分量大小。

3、完成本体系分解之后研究角动量：$\vec{L}=I_1\vec{\omega}_1+I_2\vec{\omega}_2+I_3\vec{\omega}_3$. 对于对称重刚体，有 $\vec{L}=I_1\vec{\omega}_{12}+I_3\vec{\omega}_3$.（画矢量图）

4、对于纯滚动的轮子，必有质心速度等于ω_3乘以**轮子半径**；如果质心还在 XY 面内圆周运动，则还有质心速度等于进动角速度乘以**质心运动半径**。这是纯滚动时的两个重要约束，但是自转与进动角速度的正负号还需要根据坐标轴取向来确定。

5、在有重力的情况下（如拉格朗日陀螺），一般选择竖直方向作为 Z 方向。

6、一般将基点选在定点，防止引入约束力的力矩；注意此时转动惯量的书写，适当运用大一积累的常见转动惯量的结论。

第六章 哈密顿力学

一、哈密顿正则方程

1、哈密顿力学的中心思想：将“速度”完全撇开，用广义坐标及其对应的广义动量来表示力学体系，并通过偏导生成运动规律。

2、勒让德变换

（1）初始函数：$f=f(x,y)$，$u\equiv\dfrac{\partial f}{\partial x}$，$v\equiv\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

（2）全微分公式：$\mathrm{d}f=u\mathrm{d}x+v\mathrm{d}y=\mathrm{d}(ux)-x\mathrm{d}u+v\mathrm{d}y\Rightarrow\mathrm{d}(ux-f)=x\mathrm{d}u-v\mathrm{d}y.$

（3）读取偏导数的方式：任何 n 元函数 $f(x_1,...,x_n)$，只要存在变量 $u_1,...,u_n$，使得全微分 $\mathrm{d}f=u_1\mathrm{d}x_1+...+u_nx_n$，并且 $x_1,...,x_n$ 独立，则 $u_i=\dfrac{\partial f}{\partial x_i}.$（$i=1,...,n$）也即只要对 n 个独立变量的函数写出了全微分公式，则各个微分前的系数就是各个变量对应的偏导数。本章将频繁使用此方法。（注意偏导与显含、隐含密切相关，书写前务必先明确显含变量；全微分中的各项微分代表在函数中显含的独立自变量）

（4）令 $g(u,y)=ux(u,y)-f$（全部转写成 u,y 的式子），则 $\mathrm{d}g=x\mathrm{d}u-v\mathrm{d}y$。读取每个微分前的系数，得到 $x=\dfrac{\partial g}{\partial u}$，$v=-\dfrac{\partial g}{\partial y}.$

（5）勒让德变换的意义：在理论物理学中常常通过对特性函数求偏导生成系统的状态方程，而适应不同场合的特性函数与自变量往往不一样。勒让德变换使得我们观察系统的角度变得不同，有时 g 比 f 更方便，u,y 比 x,y 更方便。（例如，对于一个热力学系统，有时熵、体积比较方便，有时压强、温度比较方便）

（6）拉格朗日函数 L 经勒让德变换得到哈密顿函数 H。（证明见下文）

3、哈密顿正则方程的导出

（1）哈密顿函数：用广义坐标和广义动量表示的广义能量 $H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)$。（哈密顿函数不等价于广义能量，特性函数对显含的变量有要求。显含 $\dot{\boldsymbol{q}}$ 的 H 仍是广义能量，但不叫做哈密顿函数。哈密顿函数不允许显含广义速度，必须用广义动量代替；同样，拉格朗日函数 $L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$ 不允许显含广义动量，必须用广义速度代替。做这一要求的目的是使得求偏导不出现问题。）

（2）用勒让德变换导出正则方程

$$\mathrm{d}L=\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\mathrm{d}q_\alpha+\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}\mathrm{d}\dot{q}_\alpha+\frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t=\sum_{\alpha=1}^{s}\dot{p}_\alpha\mathrm{d}q_\alpha+\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha\mathrm{d}\dot{q}_\alpha-\dot{H}\mathrm{d}t$$

$$=\mathrm{d}\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha\dot{q}_\alpha-\sum_{\alpha=1}^{s}\dot{q}_\alpha\mathrm{d}p_\alpha+\sum_{\alpha=1}^{s}\dot{p}_\alpha\mathrm{d}q_\alpha-\dot{H}\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow\mathrm{d}\left(\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha\dot{q}_\alpha-L\right)=\mathrm{d}H=\sum_{\alpha=1}^{s}\dot{q}_\alpha\mathrm{d}p_\alpha-\sum_{\alpha=1}^{s}\dot{p}_\alpha\mathrm{d}q_\alpha+\dot{H}\mathrm{d}t\Rightarrow\boxed{\begin{cases}\dot{q}_\alpha=\dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha},\\ \dot{p}_\alpha=-\dfrac{\partial H}{\partial q_\alpha},\\ \dot{H}=\dfrac{\partial H}{\partial t}.\end{cases}}$$

（3）正则方程的特点与作用

①第二式与拉格朗日方程 $\dot{p}_\alpha=\dfrac{\partial L}{\partial q_\alpha}$ 异曲同工，可以推导出运动规律。

②第一式与 $p_\alpha=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}$ 异曲同工，实质上就是广义动量的定义式。在本课程中，动量的表达式必须事先定义好，因此这些式子没有带来新信息。

③第三式中，H 对时间的偏导数恰好等于对时间的全导数。这一方面是全微分公式中读取偏导数得到的结果，另一方面也可以直接推导：

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha+\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\dot{p}_\alpha+\frac{\partial H}{\partial t}=-\sum_{\alpha=1}^{s}\dot{p}_\alpha\dot{q}_\alpha+\sum_{\alpha=1}^{s}\dot{q}_\alpha\dot{p}_\alpha+\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial t}.$$

这里蕴含 $\sum_{\alpha=1}^{s}\dfrac{\partial H}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha+\sum_{\alpha=1}^{s}\dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha}\dot{p}_\alpha=0.$

因此，若不显含时间，则 H 守恒。

4、相空间：s 个广义坐标和 s 个广义动量张成的 $2s$ 维空间。

（1）相点：相空间中的点，可以读出体系的坐标与动量，等价于得出坐标与速度，从而得到体系运动状态。

（2）相轨道：相点移动描出的轨道，可以得出体系的演化过程。

（3）当相轨道闭合时，定义其包围的面积为作用量变量：$J=\iint\prod_{\alpha=1}^{s}\mathrm{d}p_\alpha\mathrm{d}q_\alpha.$

5、守恒定律：$\dfrac{\partial H}{\partial q_\alpha}=0\Rightarrow\dot{p}_\alpha=0.$ $\dfrac{\partial H}{\partial t}=0\Rightarrow\dot{H}=0.$

与拉格朗日函数的关系：$\dfrac{\partial H}{\partial q_\alpha}=-\dfrac{\partial L}{\partial q_\alpha}$，$\dfrac{\partial H}{\partial t}=-\dfrac{\partial L}{\partial t}$.（必须在正确的显含变量下）

6、正则方程的矩阵形式（辛形式）：令正则变量向量 $\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}q_1\\ \cdots\\ q_s\\ p_1\\ \cdots\\ p_s\end{pmatrix}$，则

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}=\begin{pmatrix}\dot{q}_1\\ \cdots\\ \dot{q}_s\\ \dot{p}_1\\ \cdots\\ \dot{p}_s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\partial H/\partial p_1\\ \cdots\\ \partial H/\partial p_s\\ -\partial H/\partial q_1\\ \cdots\\ -\partial H/\partial q_s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & & & \cdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1\\ -1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & & & \cdots & & \\ 0 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial H/\partial p_1\\ \cdots\\ \partial H/\partial p_s\\ \partial H/\partial q_1\\ \cdots\\ \partial H/\partial q_s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_s\\ -\boldsymbol{I}_s & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial H/\partial p_1\\ \cdots\\ \partial H/\partial p_s\\ \partial H/\partial q_1\\ \cdots\\ \partial H/\partial q_s\end{pmatrix}.$$

令 $\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_s\\ -\boldsymbol{I}_s & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$，$\dfrac{\partial H}{\partial\boldsymbol{\xi}}=\begin{pmatrix}\partial H/\partial p_1\\ \cdots\\ \partial H/\partial p_s\\ \partial H/\partial q_1\\ \cdots\\ \partial H/\partial q_s\end{pmatrix}$，则有 $\dot{\boldsymbol{\xi}}=\boldsymbol{J}\dfrac{\partial H}{\partial\boldsymbol{\xi}}.$

*$\boldsymbol{J}$ 的性质：正交反对称，$\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{J}^{-1}=-\boldsymbol{J}$；$\boldsymbol{J}^2=-\boldsymbol{I}_{2s}$，$|\boldsymbol{J}|=1.$

二、泛函与变分原理

1、泛函：是函数的函数，从一个函数映射到一个数。例如 $f(x)\mapsto\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$. 实际处理的泛函可能还包括函数的导数，例如 $J[y(x)]=\int_a^b F(x,y,y')\mathrm{d}x.$

2、变分：函数关系式的微小变化，以及泛函值的微小变化。

（1）若函数关系式从 $y(x)$ 做微小变化得到 $\tilde{y}(x)$，则变分 $\delta y(x)=\tilde{y}(x)-y(x)$（趋于 0），导函数也有微小变化 $\delta y'(x)=\tilde{y}'(x)-y'(x).$

（2）微分与变分可交换次序：$\delta(\mathrm{d}y)=\mathrm{d}\tilde{y}-\mathrm{d}y=\mathrm{d}(\tilde{y}-y)=\mathrm{d}(\delta y).$（微分与变分本质上都是作差，所以都具有线性性）

（3）变分与积分可交换次序：根据黎曼积分的定义，

$$\delta\int_a^b F\mathrm{d}x=\delta\left(\lim_{\max\{\Delta x_i\}\to0}\sum_{i=1}^n F(\xi_i)\Delta x_i\right)=\lim_{\max\{\Delta x_i\}\to0}\sum_{i=1}^n\widetilde{F}(\xi_i)\Delta x_i-\lim_{\max\{\Delta x_i\}\to0}\sum_{i=1}^n F(\xi_i)\Delta x_i$$

$$=\lim_{\max\{\Delta x_i\}\to0}\sum_{i=1}^n[\widetilde{F}(\xi_i)-F(\xi_i)]\Delta x_i=\lim_{\max\{\Delta x_i\}\to0}\sum_{i=1}^n\delta F(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b\delta F\mathrm{d}x.$$

（4）变分问题中只变化函数关系式，不处理 x，因此 $\delta x=0$。

（5）泛函同样满足全微分公式：$\delta F(x,y,y')=\dfrac{\partial F}{\partial y}\delta y+\dfrac{\partial F}{\partial y'}\delta y'.$（$\delta x=0$）

（6）泛函变分的计算：

$$\delta J=\delta\int_a^b F\mathrm{d}x=\int_a^b\delta F\mathrm{d}x=\int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right)\mathrm{d}x=\int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\delta y)\right)\mathrm{d}x=\int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\partial F}{\partial y'}(\delta y)\right]-\delta y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y-\delta y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\mathrm{d}x+\int_a^b\mathrm{d}\left[\frac{\partial F}{\partial y'}(\delta y)\right]=\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\Big|_a^b+\int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y\mathrm{d}x.$$

3、固定边值条件的泛函极值问题：一般在讨论泛函极值时会规定函数的边界值不变，即 $\delta y(a)=\delta y(b)=0$，或者 $\tilde{y}(a)=y(a)$，$\tilde{y}(b)=y(b).$

这时，$\dfrac{\partial F}{\partial y'}\delta y\Big|_a^b=0$，从而 $\delta J=\int_a^b\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y\mathrm{d}x.$

（1）泛函取极值（驻定值）的条件是 $\delta J=\int_a^b\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y\mathrm{d}x=0.$ 从积分为 0 不可以直接得到被积函数为 0，但是变分 δy 的值是任意的，因此才有 $\boxed{\dfrac{\partial F}{\partial y}-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dfrac{\partial F}{\partial y'}=0.}$（欧拉方程）

（2）欧拉方程是二阶微分方程，求解较麻烦。如果 $\dfrac{\partial F}{\partial x}=0$，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}y'-F\right)=y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}+\frac{\partial F}{\partial y'}y''-\left(\frac{\partial F}{\partial y}y'+\frac{\partial F}{\partial y'}y''+\frac{\partial F}{\partial x}\right)=y'\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}-\frac{\partial F}{\partial y}\right)-\frac{\partial F}{\partial x}$$

$$=-\frac{\partial F}{\partial x}=0.$$

于是有守恒量$\frac{\partial F}{\partial y'}y'-F$，通过$\boxed{\frac{\partial F}{\partial y'}y'-F=C}$可以使微分方程降阶。

*处理这类问题，首先将泛函写出，然后确定$F(x,y,y')$，再根据欧拉方程或守恒律$\frac{\partial F}{\partial y'}y'-F=C$得到$y$关于$x$的微分方程，解出函数$y(x)$。

4、泛函的实质是变量无限多的多元函数。若将$[a,b]$用分点$a=x_1<...<x_{n+1}=b$拆分，每个分点的纵坐标为$y_1,...,y_{n+1}$，则

$$J=\int_a^b F(x,y,y')\mathrm{d}x\approx\sum_{i=1}^{n}F(x_i,y_i,\frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i})(x_{i+1}-x_i).$$

因此，J可看成关于$x_1,...,x_{n+1},y_1,...,y_{n+1}$的多元函数，而当区间无限小时，自变量个数趋于无穷；变分本质就是$y_1,...,y_{n+1}$的微小变化，而此时不考虑$x_1,...,x_{n+1}$的变化，从而有$\delta x=0$。欧拉方程在此相当于

$$\sum_{i=1}^{n}[\frac{\partial F}{\partial y_i}-\frac{1}{x_{i+1}-x_i}(\frac{\partial F}{\partial\frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}}-\frac{\partial F}{\partial\frac{y_i-y_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}})]\mathrm{d}y_i(x_{i+1}-x_i)=0.$$

5、多元泛函问题：若存在多个函数$y_1(x),...,y_s(x)$（不同于上面的分点纵坐标$y_1,...,y_{n+1}$），则它们可构成多元泛函

$J[y_1(x),...,y_s(x)]=\int_a^b F(x,y_1,...,y_s,y_1',...,y_s')\mathrm{d}x$. 同理可得，在固定所有函数边值条件的情况下，该泛函取极值的条件仍是欧拉方程$\boxed{\frac{\partial F}{\partial y_\alpha}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y_\alpha'}=0.}$（$\alpha=1,2,...,s$）

6、力学变分原理

（1）达朗贝尔原理积分形式

$$\sum_{i=1}^{n}(\vec{F}_i-m_i\ddot{\vec{r}}_i)\cdot\delta\vec{r}_i=\sum_{i=1}^{n}(\vec{F}_i-m_i\frac{\mathrm{d}\dot{\vec{r}}_i}{\mathrm{d}t})\cdot\delta\vec{r}_i=\sum_{i=1}^{n}[\vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_i\dot{\vec{r}}_i\cdot\delta\vec{r}_i)+m_i\dot{\vec{r}}_i\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta\vec{r}_i]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}[\vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i+m_i\dot{\vec{r}}_i\cdot\delta\dot{\vec{r}}_i]-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{n}m_i\dot{\vec{r}}_i\cdot\delta\vec{r}_i=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i+\delta T-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial\dot{\vec{r}}_i}\cdot\delta\vec{r}_i=0$$

$$\Rightarrow\text{在整段时间内积分：}\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i+\delta T\right)\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial\dot{\vec{r}}_i}\cdot\delta\vec{r}_i\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial\dot{\vec{r}}_i}\cdot\delta\vec{r}_i\Big|_{t_1}^{t_2}.$$

对于有势系（统一写成广义势），

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial U}{\partial\dot{\vec{r}}_i}-\frac{\partial U}{\partial\vec{r}_i}\right)\cdot\delta\vec{r}_i=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial U}{\partial\dot{\vec{r}}_i}\cdot\delta\vec{r}_i+\frac{\partial U}{\partial\dot{\vec{r}}_i}\cdot\delta\dot{\vec{r}}_i\right)-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial U}{\partial\dot{\vec{r}}_i}\cdot\delta\dot{\vec{r}}_i+\frac{\partial U}{\partial\vec{r}_i}\cdot\delta\vec{r}_i\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial U}{\partial\dot{\vec{r}}_i}\cdot\delta\vec{r}_i+\frac{\partial U}{\partial\dot{\vec{r}}_i}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta\vec{r}_i)\right)-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial U}{\partial\dot{\vec{r}}_i}\cdot\delta\dot{\vec{r}}_i+\frac{\partial U}{\partial\vec{r}_i}\cdot\delta\vec{r}_i\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial U}{\partial\dot{\vec{r}}_i}\cdot\delta\vec{r}_i\right)-\delta U.$$

$$\Rightarrow\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i+\delta T\right)\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial U}{\partial\dot{\vec{r}}_i}\cdot\delta\vec{r}_i\mathrm{d}t+\int_{t_1}^{t_2}\delta(T-U)\mathrm{d}t$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial U}{\partial\dot{\vec{r}}_i}\cdot\delta\vec{r}_i\Big|_{t_1}^{t_2}+\int_{t_1}^{t_2}\delta(T-U)\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial\dot{\vec{r}}_i}\cdot\delta\vec{r}_i\Big|_{t_1}^{t_2}\Rightarrow\int_{t_1}^{t_2}\delta(T-U)\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(T-U)}{\partial\dot{\vec{r}}_i}\cdot\delta\vec{r}_i\Big|_{t_1}^{t_2}$$

$$\Rightarrow\boxed{\int_{t_1}^{t_2}\delta L\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{\vec{r}}_i}\cdot\delta\vec{r}_i\Big|_{t_1}^{t_2}.}$$

（2）力学变分原理的几种形式

①一般体系，不固定边界条件：$\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i+\delta T\right)\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial\dot{\vec{r}}_i}\cdot\delta\vec{r}_i\Big|_{t_1}^{t_2}$.（最原始形式）

②一般体系，固定边界条件：$\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i+\delta T\right)\mathrm{d}t=0.$

③有势系，不固定边界条件：$\int_{t_1}^{t_2}\delta L\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{\vec{r}}_i}\cdot\delta\vec{r}_i\Big|_{t_1}^{t_2}$.

④有势系，固定边界条件：$\int_{t_1}^{t_2}\delta L\mathrm{d}t=0.$

定义哈密顿作用量$S=\int_{t_1}^{t_2}L\mathrm{d}t$，则有势系固定边界条件的变分原理可以写为哈密顿原理：$\boxed{\int_{t_1}^{t_2}\delta L\mathrm{d}t=\delta S=0.}$（最小作用量原理）

（3）拉格朗日方程的形式与泛函极值的欧拉方程很相似，其实它就是哈密顿作用量取极值的条件：$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=0.}$ 这里 y 就是 q，x 就是 t。当$\frac{\partial L}{\partial t}=0$时，有$\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha-L=H$ 守恒，这就是对拉格朗日方程的降阶。

（4）有势系不固定边界条件，用广义坐标表示变分原理：

$$\delta S=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{\vec{r}}_i}\cdot\delta\vec{r}_i\Big|_{t_1}^{t_2}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial\dot{\vec{r}}_i}\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha\Big|_{t_1}^{t_2}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial\dot{\vec{r}}_i}\cdot\frac{\partial\dot{\vec{r}}_i}{\partial\dot{q}_\alpha}\delta q_\alpha\Big|_{t_1}^{t_2}=\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}\delta q_\alpha\Big|_{t_1}^{t_2}.$$

7、拉格朗日函数的规范不定性

（1）拉格朗日函数并不是一定要表示成 $T-U$，这只是最开始找到的一个较好的定义而已；事实上，只要是一个显含广义坐标、广义速度、时间的函数 L，并且能够通过拉格朗日方程$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=0$得到正确的运动规律，它就可以作为系统的拉格朗日函数。这就是规范不定性。

（2）拉格朗日函数加任意一个常数仍是拉格朗日函数，因为求导时忽略常数项。

（3）拉格朗日函数乘任意一个非 0 常数仍是拉格朗日函数，因为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=0\Rightarrow\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial(cL)}{\partial\dot{q}_\alpha}-\frac{\partial(cL)}{\partial q_\alpha}=0$$

（4）定域规范变换：拉格朗日函数加上任意一个关于广义坐标、时间的函数对时间的全导数$\dot{\alpha}=\frac{\mathrm{d}\alpha(\boldsymbol{q},t)}{\mathrm{d}t}$，仍是系统的拉格朗日函数。

①定域规范变换能够成立，是因为$\frac{\mathrm{d}\alpha(\boldsymbol{q},t)}{\mathrm{d}t}$在拉格朗日方程和变分原理中被消去。

（i）从拉格朗日方程推导：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\dot{\alpha}}{\partial\dot{q}_\beta}-\frac{\partial\dot{\alpha}}{\partial q_\beta}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\alpha}{\partial q_\beta}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\alpha}{\partial q_\beta}=0.$（经典拉格朗日关系对位矢成立，则对关于位置与时间的函数$\frac{\mathrm{d}\alpha(\boldsymbol{q},t)}{\mathrm{d}t}$仍然成立）

（ii）从变分原理推导：如果α也固定边界条件，则$\delta\int_{t_1}^{t_2}\dot{\alpha}\mathrm{d}t=\delta\alpha\Big|_{t_1}^{t_2}=0.$

②定域规范变换的函数是与广义坐标、时间有关的，因此它主要影响广义势的表达式。这时不必去追问$\widetilde{U}=U-\dot{\alpha}$究竟代表什么，我们可以简单地认为它只是做了一个代数变换。（如果一定要明确它的具体意义，可以认为是在某些新参考系下观察到的势能）

定域规范变换能够使拉格朗日函数仍是拉格朗日函数，主要在于未改变广义力：$\widetilde{Q}_\alpha=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial\widetilde{U}}{\partial\dot{q}_\alpha}-\dfrac{\partial\widetilde{U}}{\partial q_\alpha}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial U}{\partial\dot{q}_\alpha}-\dfrac{\partial U}{\partial q_\alpha}-\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial\dot{\alpha}}{\partial\dot{q}_\alpha}-\dfrac{\partial\dot{\alpha}}{\partial q_\alpha}\right)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial U}{\partial\dot{q}_\alpha}-\dfrac{\partial U}{\partial q_\alpha}=Q_\alpha.$

广义力决定运动，广义力不变则运动规律不变。

③广义力对广义动量和广义能量的改变：

$$\widetilde{L}=L+\dot{\alpha}\Rightarrow\widetilde{p}_\alpha=\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial\dot{q}_\alpha}=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}+\frac{\partial\dot{\alpha}}{\partial\dot{q}_\alpha}=p_\alpha+\frac{\partial\alpha}{\partial q_\alpha}.$$

$$\widetilde{H}=\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial\dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha-\widetilde{L}=\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha-L+\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial\dot{\alpha}}{\partial\dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha-\dot{\alpha}=H+\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial\alpha}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha-\left(\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial\alpha}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha+\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)$$

$$=H-\frac{\partial\alpha}{\partial t}.$$

8、由一般体系固定边界的变分原理导出完整系拉格朗日方程（存疑）

首先，$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i=\sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{s}\vec{F}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha=\sum_{\alpha=1}^{s}Q_\alpha\delta q_\alpha.$

其次，$\delta T=\sum_{i=1}^{n}m_i\dot{\vec{r}}_i\cdot\delta\dot{\vec{r}}_i=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_i\dot{\vec{r}}_i\cdot\delta\vec{r}_i)-m_i\ddot{\vec{r}}_i\cdot\delta\vec{r}_i\right]$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_i\dot{\vec{r}}_i\cdot\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha)+\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{D}_i\cdot\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{n}(m_i\dot{\vec{r}}_i\cdot\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial\dot{\vec{r}}_i}{\partial\dot{q}_\alpha}\delta q_\alpha)+\sum_{\alpha=1}^{s}D_\alpha\delta q_\alpha$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\alpha}\delta q_\alpha+\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\alpha}\right)\delta q_\alpha.$$

所以，$\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i+\delta T\right)\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}\sum_{\alpha=1}^{s}\left[\left(Q_\alpha+\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\alpha}\right)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\alpha}\right]\delta q_\alpha\mathrm{d}t$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\sum_{\alpha=1}^{s}\left(Q_\alpha+\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\alpha}\right)\delta q_\alpha\mathrm{d}t+\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\alpha}\delta q_\alpha\Big|_{t_1}^{t_2}=\int_{t_1}^{t_2}\sum_{\alpha=1}^{s}\left(Q_\alpha+\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\alpha}\right)\delta q_\alpha\mathrm{d}t=0.$$

δq_α任意$\Rightarrow Q_\alpha+\dfrac{\partial T}{\partial q_\alpha}-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial T}{\partial\dot{q}_\alpha}=0.$

9、用变分原理推导哈密顿正则方程

（1）哈密顿力学中认为广义坐标与广义动量是独立的。尽管动量实际上是从广义速度定义来的，它们似乎并不独立，但是我们在一开始假设这些定义全部不存在，只有在得出了哈密顿正则方程之后才承认这些定义。在经典力学中这似乎是不可能的，因为哈密顿函数目前只能从拉格朗日函数转写，必须事先承认广义动量的定义才写得出。但是，在其他学科中将有大用。

（2）将拉格朗日函数的变分转成哈密顿函数：

$$\delta L=\delta\left(\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha\dot{q}_\alpha-H\right)=\sum_{\alpha=1}^{s}\left(p_\alpha\delta\dot{q}_\alpha+\dot{q}_\alpha\delta p_\alpha\right)-\delta H$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{s}\left(p_\alpha\delta\dot{q}_\alpha+\dot{q}_\alpha\delta p_\alpha\right)-\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha+\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\delta p_\alpha\right)$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{s}\left(p_\alpha\delta\dot{q}_\alpha+\dot{p}_\alpha\delta q_\alpha\right)-\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\dot{p}_\alpha+\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\right)\delta q_\alpha+\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\dot{q}_\alpha-\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\right)\delta p_\alpha$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha\delta q_\alpha-\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\dot{p}_\alpha+\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\right)\delta q_\alpha+\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\dot{q}_\alpha-\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\right)\delta p_\alpha.$$

$$\Rightarrow\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\delta L\mathrm{d}t=\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha\delta q_\alpha\Big|_{t_1}^{t_2}+\sum_{\alpha=1}^{s}\int_{t_1}^{t_2}\left[\left(\dot{q}_\alpha-\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\right)\delta p_\alpha-\left(\dot{p}_\alpha+\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\right)\delta q_\alpha\right]\mathrm{d}t=0.$$

固定边界条件，则 $\sum_{\alpha=1}^{s}\int_{t_1}^{t_2}\left[\left(\dot{q}_\alpha-\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\right)\delta p_\alpha-\left(\dot{p}_\alpha+\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\right)\delta q_\alpha\right]\mathrm{d}t=0.$

在不承认坐标与动量的关系、认为它们独立时，得到 $2s$ 个方程：

$\dot{q}_\alpha-\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}=0$，$\dot{p}_\alpha+\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}=0.$（$\alpha=1,2,...,s$）此即为哈密顿正则方程。

（3）如果按照旧观点，认为坐标与动量不独立，则不能够直接令被积函数的各个括号为 0，但是仍然可以从其他方式推出正则方程。

①首先，认为不同的广义动量之间是独立的（但是和共轭的广义坐标不完全独立）。此时正则方程第一式不从变分原理也能够得到：

$$\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}=\frac{\partial}{\partial p_\alpha}\left(\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha\dot{q}_\alpha(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)-L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t),t)\right)=\dot{q}_\alpha+\sum_{\beta=1}^{s}p_\beta\frac{\partial\dot{q}_\beta}{\partial p_\alpha}-\sum_{\beta=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\beta}\frac{\partial\dot{q}_\beta}{\partial p_\alpha}$$

$$=\dot{q}_\alpha+\sum_{\beta=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\beta}\frac{\partial\dot{q}_\beta}{\partial p_\alpha}-\sum_{\beta=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\beta}\frac{\partial\dot{q}_\beta}{\partial p_\alpha}=\dot{q}_\alpha.$$

（再次提醒：这里要求把含有 $\dot{\boldsymbol{q}}$ 的式子全部转写成 $\boldsymbol{q}$ 与 $\boldsymbol{p}$；尽管此时 $\boldsymbol{q}$ 与 $\boldsymbol{p}$ 不独立，但是在求偏导时仍然不考虑隐含关系。偏导数只承认显含项。）

②得到第一式后，可直接消去变分原理中的 s 个括号，即

$-\sum_{\alpha=1}^{s}\int_{t_1}^{t_2}\left(\dot{p}_\alpha+\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\right)\delta q_\alpha\mathrm{d}t=0.$ 此时剩下的只有广义坐标的变分，它们互相独立，从而得到剩下的关系：$\dot{p}_\alpha=-\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}.$

（是否认为动量与坐标独立，主要的区别就在于从什么地方导出 $\dot{q}_\alpha=\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}$）

（4）用 $\boldsymbol{q}$ 与 $\boldsymbol{p}$ 表示不固定边界条件的哈密顿原理：$\delta S=\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}\delta q_\alpha\Big|_{t_1}^{t_2}=\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha\delta q_\alpha\Big|_{t_1}^{t_2}.$

10、位形时空的变分原理（略）

三、泊松括号

1、泊松括号的定义：对于显含坐标、动量、时间的函数，泊松括号是对坐标与动量的 Jacobi 行列式。

$$[f,g]=\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial(f,g)}{\partial(q_\alpha,p_\alpha)}=\sum_{\alpha=1}^{s}\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial q_\alpha} & \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\\ \frac{\partial g}{\partial q_\alpha} & \frac{\partial g}{\partial p_\alpha}\end{vmatrix}=\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial g}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial g}{\partial q_\alpha}\right).$$

2、☆基本泊松括号（请记住是哪几个）：$[q_\alpha,q_\beta]=0,\ [p_\alpha,p_\beta]=0,\ [q_\alpha,p_\beta]=\delta_{\alpha\beta}.$

（这时已经完全默认坐标与动量的独立）

3、泊松括号的性质

（1）$[f,f]=0.$（Jacobi 行列式两行一样）

（2）反对易性：$[f,g]=-[g,f].$（Jacobi 行列式换行）

（3）与常数作用：$[f,C]=0.$

（4）分配律：$[f,C_1g+C_2h]=C_1[f,g]+C_2[f,h];\ [C_1g+C_2h,f]=C_1[g,f]+C_2[h,f].$

（5）乘积求导法则：$[f,gh]=[f,g]h+g[f,h].$（利用乘积求导法则）

（注：在本课程中，泊松括号的左乘与右乘没有区别，但量子力学中可能不一样）

（6）与求导结合：若 x 是坐标/动量/时间，则 $\frac{\partial}{\partial x}[f,g]=[\frac{\partial f}{\partial x},g]+[f,\frac{\partial g}{\partial x}].$

（7）☆复合函数求导：$[f,g(h)]=g'(h)[f,h].$

（8）Jacobi 恒等式：轮换式 $[f,[g,h]]+[g,[h,f]]+[h,[f,g]]=0.$

4、用泊松括号表示力学规律

（1）涉及坐标与动量的另两个泊松括号：$[q_\alpha,f]=\frac{\partial f}{\partial p_\alpha},\ [p_\alpha,f]=-\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}.$

（2）对时间求全导与哈密顿函数有关：

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha+\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\dot{p}_\alpha\right)+\frac{\partial f}{\partial t}=\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\right)+\frac{\partial f}{\partial t}=[f,H]+\frac{\partial f}{\partial t}.$$

若 $\frac{\partial f}{\partial t}=0$，则 $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=[f,H].$

（3）哈密顿正则方程：$\dot{p}_\alpha=[p_\alpha,H],\ \dot{q}_\alpha=[q_\alpha,H].$

（4）能量算子：定义 $\hat{H}f\equiv[f,H].$

高阶导数：$\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}t^n}=\hat{H}\hat{H}...\hat{H}f\equiv\hat{H}^n f.$

泰勒展开：$f(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}t^n=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\hat{H}^n}{n!}t^n f(0)\equiv e^{t\hat{H}}f(0).$

（算子都只是玩形式，但是好的形式能够看出一些不用算子很难看出的结论）

（5）用泊松括号表示运动积分

①运动积分 f 的性质：$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=0$，故 $\frac{\partial f}{\partial t}=-[f,H].$

②☆泊松定理：两个运动积分的泊松括号仍为运动积分。

若 $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=0,\ \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}=0$，则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f,g]=\frac{\partial}{\partial t}[f,g]+[[f,g],H]=[\frac{\partial f}{\partial t},g]+[f,\frac{\partial g}{\partial t}]+[[f,g],H]$$

$$=[-[f,H],g]+[f,-[g,H]]+[[f,g],H]=[[H,f],g]+[[f,g],H]+[[g,H],f]$$

$$=-[g,[H,f]]-[H,[f,g]]-[f,[g,H]]=0.$$

泊松括号很大程度地简化了计算。此外，并不能用这个方式无限构造守恒量，因为不断求导后往往只剩下常数项，寻找运动积分的过程只能到此为止。

③角动量的泊松括号

（i）角动量任意两个分量的泊松括号（按顺序）是第三个分量。

$[L_x,L_y]=[yp_z-zp_y,zp_x-xp_z]=-p_y(-x)-yp_x=xp_y-yp_x=L_z.$（不需要使用任何泊松括号的性质，直接利用泊松括号的定义在这里是最方便的）

根据轮换对称性，有$[L_y,L_z]=L_x$, $[L_z,L_x]=L_y.$

（ii）角动量任一分量与 L^2 的泊松括号为 0：例如，

$$[L_z,L^2]=[L_z,L_x^2+L_y^2+L_z^2]=[L_z,L_x^2]+[L_z,L_y^2]+[L_z,L_z^2]$$

$$=2L_x[L_z,L_x]+2L_y[L_z,L_y]+2L_z[L_z,L_z]=2L_xL_y-2L_yL_x+0=0.$$

（iii）若角动量的两个分量守恒，则第三个也守恒。

四、正则变换

1、正则变换的目的：寻找一组好的广义坐标。（这组坐标和对应的广义动量称为正则变量）

（1）什么是好的广义坐标：守恒量的得出越容易越好。希望守恒量都直接从广义动量体现出来，甚至就是广义坐标（哈—雅方程）。守恒量与对称性等价，因此越好的广义坐标具有越强的对称性。有了这些广义坐标 $\boldsymbol{Q}$ 与广义动量 $\boldsymbol{P}$ 之后，再确定它们对应的哈密顿函数 K，即可通过正则方程生成显含 $\boldsymbol{Q}$ 与 $\boldsymbol{P}$ 的运动规律，从而得到原始 $\boldsymbol{q}$ 与 $\boldsymbol{p}$ 的变化规律。（这时已经淡化哈密顿函数 K 作为“广义能量”所包含的具体意义，它和拉格朗日函数一样，只是生成运动规律的一个工具；广义坐标与广义动量的具体意义更加淡化了，很多已经无法形象理解。）

（2）本部分讨论正则变换的一般理论，只讨论怎么算，但是不评价广义坐标的好坏，因此难免会出现“不知道在干什么”的情况。请在学习过程中始终明确正则变换的目的，尽管有些问题中的变换似乎并没有很好地实现这个目的。

2、正则变换的对应关系：

$q_\alpha\to Q_\alpha=Q_\alpha(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)$，$p_\alpha\to P_\alpha=P_\alpha(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)$，$H\to K=K(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P},t).$

要求变换之后的物理量也满足正则方程：$\begin{cases}\dot{Q}_\alpha=\dfrac{\partial K}{\partial P_\alpha},\\ \dot{P}_\alpha=-\dfrac{\partial K}{\partial Q_\alpha}.\end{cases}$

与此同时，$K(\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q},t)=\sum_{\alpha=1}^{s}P_\alpha\dot{Q}_\alpha-L(\boldsymbol{Q},\dot{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q},t),t).$

3、正则变换的必要条件

（1）之所以说是必要条件，是因为我们首先假设变换是正则变换，然后再得到正则变换必须满足的一些性质，然后又用这个性质来说明一个变换是正则的。（事实上，由于等式的推导都是等价推导，所以这样的反推是可行的，也即必要条件实际上也是充要条件）

（2）已知正则方程$\begin{cases}\dot{Q}_\alpha=\dfrac{\partial K}{\partial P_\alpha},\\ \dot{P}_\alpha=-\dfrac{\partial K}{\partial Q_\alpha}\end{cases}$与$\begin{cases}\dot{q}_\alpha=\dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha},\\ \dot{p}_\alpha=-\dfrac{\partial H}{\partial q_\alpha}.\end{cases}$

根据最小作用量原理，在不固定边值条件时，有 $\delta\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha\dot{q}_\alpha-H\right)\mathrm{d}t=\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha\delta q_\alpha\Big|_{t_1}^{t_2}$ 以及 $\delta\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_{\alpha=1}^{s}P_\alpha\dot{Q}_\alpha-K\right)\mathrm{d}t=\sum_{\alpha=1}^{s}P_\alpha\delta Q_\alpha\Big|_{t_1}^{t_2}$. 两式相减，得到

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha\dot{q}_\alpha-\sum_{\alpha=1}^{s}P_\alpha\dot{Q}_\alpha+K-H\right)\mathrm{d}t=\delta\int_{t_1}^{t_2}\left[\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha\dot{q}_\alpha\mathrm{d}t-\sum_{\alpha=1}^{s}P_\alpha\dot{Q}_\alpha\mathrm{d}t+(K-H)\mathrm{d}t\right]$$

$$=\delta\int_{t_1}^{t_2}\left[\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha\mathrm{d}q_\alpha-\sum_{\alpha=1}^{s}P_\alpha\mathrm{d}Q_\alpha+(K-H)\mathrm{d}t\right]=\sum_{\alpha=1}^{s}(p_\alpha\delta q_\alpha-P_\alpha\delta Q_\alpha)\Big|_{t_1}^{t_2}.$$

说明 $\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha\mathrm{d}q_\alpha-\sum_{\alpha=1}^{s}P_\alpha\mathrm{d}Q_\alpha+(K-H)\mathrm{d}t$ 可积，因此它是一个全微分，记为 $\mathrm{d}U_1$。此时可以读取偏导数：$\frac{\partial U_1}{\partial q_\alpha}=p_\alpha$，$\frac{\partial U_1}{\partial Q_\alpha}=-P_\alpha$，$\frac{\partial U_1}{\partial t}=K-H$. 如果一开始预先知道 U_1，那么对其求偏导就可以生成需要的正则变换，每个偏导都是一串式子。称 $U_1(\boldsymbol{q},\boldsymbol{Q},t)$ 为母函数，它是生成正则变换表达式的一种工具，就好像拉格朗日函数与哈密顿函数是生成运动方程的一种工具。

（3）正则变换的可生成条件：变换

$q_\alpha\to Q_\alpha=Q_\alpha(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)$，$p_\alpha\to P_\alpha=P_\alpha(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)$，$H\to K=K(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P},t)$

是正则的，当且仅当存在一个关于 $\boldsymbol{q},\boldsymbol{Q},t$ 的函数 U_1 使得

$$\mathrm{d}U_1=\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha\mathrm{d}q_\alpha-\sum_{\alpha=1}^{s}P_\alpha\mathrm{d}Q_\alpha+(K-H)\mathrm{d}t.$$

（**变换是正则变换，当且仅当存在一个生成正则变换的工具能生成它。**）

4、四类母函数

*为什么要有四类母函数：我们希望不同的母函数能够应对不同的情况，而显含$(\boldsymbol{q},\boldsymbol{Q},t)$的第一类母函数有时候不那么方便，因此需要引入显含$(\boldsymbol{p},\boldsymbol{Q},t)$、$(\boldsymbol{q},\boldsymbol{P},t)$、$(\boldsymbol{p},\boldsymbol{P},t)$的函数。（$\boldsymbol{q}$ 与 $\boldsymbol{p}$ 至少要有一个，$\boldsymbol{Q}$ 与 $\boldsymbol{P}$ 至少要有一个，否则函数中只显含一套坐标，无法得到另一套）

*使用母函数得到正则变换的操作：已知母函数，先判断其类型，然后对其求偏导数，得到关于 $\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P},t$ 的 $2s+1$ 个方程，然后解出 $Q_\alpha(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t),P_\alpha(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t),K(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P},t)$.

（1）第一类母函数：$U_1(\boldsymbol{q},\boldsymbol{Q},t)$。

①全微分表达式：$\mathrm{d}U_1=\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha\mathrm{d}q_\alpha-\sum_{\alpha=1}^{s}P_\alpha\mathrm{d}Q_\alpha+(K-H)\mathrm{d}t$.

②生成正则变换：$p_\alpha=\frac{\partial U_1}{\partial q_\alpha}$，$P_\alpha=-\frac{\partial U_1}{\partial Q_\alpha}$，$K=H+\frac{\partial U_1}{\partial t}$.

（2）第二类母函数：$U_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{Q},t)$。

①与第一类母函数的关系：$\boxed{U_2=U_1-\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha q_\alpha.}$

②全微分表达式：$\mathrm{d}U_2=\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha\mathrm{d}q_\alpha-\sum_{\alpha=1}^{s}P_\alpha\mathrm{d}Q_\alpha+(K-H)\mathrm{d}t-\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha\mathrm{d}q_\alpha-\sum_{\alpha=1}^{s}q_\alpha\mathrm{d}p_\alpha$

$$=-\sum_{\alpha=1}^{s}q_\alpha\mathrm{d}p_\alpha-\sum_{\alpha=1}^{s}P_\alpha\mathrm{d}Q_\alpha+(K-H)\mathrm{d}t.$$

③生成正则变换：$q_\alpha=-\frac{\partial U_2}{\partial p_\alpha}$，$P_\alpha=-\frac{\partial U_2}{\partial Q_\alpha}$，$K=H+\frac{\partial U_2}{\partial t}$.

（3）第三类母函数：$U_3(\boldsymbol{q},\boldsymbol{P},t)$。

①与第一类母函数的关系：$\boxed{U_3 = U_1 + \sum_{\alpha=1}^{s} P_\alpha Q_\alpha .}$

②全微分表达式：$\mathrm{d}U_3 = \sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha \mathrm{d}q_\alpha - \sum_{\alpha=1}^{s} P_\alpha \mathrm{d}Q_\alpha + (K-H)\mathrm{d}t + \sum_{\alpha=1}^{s} P_\alpha \mathrm{d}Q_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{s} Q_\alpha \mathrm{d}P_\alpha$

$= \sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha \mathrm{d}q_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{s} Q_\alpha \mathrm{d}P_\alpha + (K-H)\mathrm{d}t.$

③生成正则变换：$p_\alpha = \dfrac{\partial U_3}{\partial q_\alpha}$，$Q_\alpha = \dfrac{\partial U_3}{\partial P_\alpha}$，$K = H + \dfrac{\partial U_3}{\partial t}.$

（4）第四类母函数：$U_4(\boldsymbol{p},\boldsymbol{P},t)$。

①与前三类母函数的关系：

$$\boxed{U_4 = U_1 + \sum_{\alpha=1}^{s} P_\alpha Q_\alpha - \sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha q_\alpha = U_2 + \sum_{\alpha=1}^{s} P_\alpha Q_\alpha = U_3 - \sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha q_\alpha .}$$

②全微分表达式：

$$\mathrm{d}U_4 = \sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha \mathrm{d}q_\alpha - \sum_{\alpha=1}^{s} P_\alpha \mathrm{d}Q_\alpha + (K-H)\mathrm{d}t + \sum_{\alpha=1}^{s} P_\alpha \mathrm{d}Q_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{s} Q_\alpha \mathrm{d}P_\alpha - \sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha \mathrm{d}q_\alpha - \sum_{\alpha=1}^{s} q_\alpha \mathrm{d}p_\alpha$$

$$= -\sum_{\alpha=1}^{s} q_\alpha \mathrm{d}p_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{s} Q_\alpha \mathrm{d}P_\alpha + (K-H)\mathrm{d}t.$$

③生成正则变换：$q_\alpha = -\dfrac{\partial U_4}{\partial p_\alpha}$，$Q_\alpha = \dfrac{\partial U_4}{\partial P_\alpha}$，$K = H + \dfrac{\partial U_4}{\partial t}.$

*记忆母函数的技巧

①记住四类母函数中的一个，包括它显含的变量与偏导数。（推荐记住 U_3，因为其偏导表达式都没有负号）

②记住四类母函数的关系（框出的式子），从事先记住的那个开始，推导四类母函数的全微分；全微分中出现在等号右边的微分就是这个函数显含的自变量。

③如果想要直接记住偏导数，那么重点在于其正负号。有一条规律：四个函数如果有对 $\boldsymbol{p}$ 或者 $\boldsymbol{Q}$ 求偏导，那么表达式中有负号；对 $\boldsymbol{q}$ 或者 $\boldsymbol{P}$ 求偏导的表达式不含负号。

④如果$\dfrac{\partial U}{\partial t} = 0$，则$K = H$. 为了防止不必要的麻烦，选取母函数一般不显含时间，所以 K 在数值上等于 H，但是需要将 H 转写成 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q},t$ 的式子才是 K。

5、几种常见的正则变换及其母函数

（如果会解偏微分方程，那么这些母函数可以直接从偏微分表达式解出来）

（1）恒等变换：$U_3 = \sum_{\beta=1}^{s} q_\beta P_\beta$，$U_2 = -\sum_{\beta=1}^{s} p_\beta Q_\beta .$

可得$Q_\alpha = \dfrac{\partial U_3}{\partial P_\alpha} = q_\alpha$，$p_\alpha = \dfrac{\partial U_3}{\partial q_\alpha} = P_\alpha$，$q_\alpha = -\dfrac{\partial U_2}{\partial p_\alpha} = Q_\alpha$，$P_\alpha = -\dfrac{\partial U_2}{\partial Q_\alpha} = p_\alpha .$

（前两个式子和后两个式子是等价的，都可以得出正则变换——变换前后的广义坐标与广义动量不变）

（2）平移变换：$U_3 = \sum_{\beta=1}^{s} \left(q_\beta P_\beta + a_\beta q_\beta - b_\beta P_\beta \right)$. 其中$a_\beta, b_\beta$是常数。

可得 $Q_\alpha=\dfrac{\partial U_3}{\partial P_\alpha}=q_\alpha+a_\alpha$，$p_\alpha=\dfrac{\partial U_3}{\partial q_\alpha}=P_\alpha-b_\alpha$. 变换之后坐标与动量均增加了一个常数。

（3）点变换：$\boldsymbol{Q}$ 只和 $\boldsymbol{q},t$ 有关，$\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{P}$ 通过拉格朗日函数对广义速度求偏导生成。这种变换不仅可以保证哈密顿函数不变，也可以保证拉格朗日函数不变。

①变换方式

（i）首先知道广义坐标的变换 $Q_\alpha=Q_\alpha(\boldsymbol{q},t)$ 。

（ii）用 $\boldsymbol{Q}$ 与 $\dot{\boldsymbol{Q}}$ 表示拉格朗日函数中的广义速度 $\dot{\boldsymbol{q}}$：$\dot{q}_\alpha=\sum\limits_{\beta=1}^{s}\dfrac{\partial q_\alpha}{\partial Q_\beta}\dot{Q}_\beta+\dfrac{\partial q_\alpha}{\partial t}$.

（iii）将以上所有式子代入拉格朗日函数，将其化成显含 $\boldsymbol{Q},\dot{\boldsymbol{Q}},t$ 的形式。

（iv）得到广义动量：$p_\alpha=\dfrac{\partial L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)}{\partial q_\alpha}$，$P_\alpha=\dfrac{\partial L(\boldsymbol{Q},\dot{\boldsymbol{Q}},t)}{\partial Q_\alpha}$.

②母函数：$U_3=\sum\limits_{\beta=1}^{s}Q_\beta(\boldsymbol{q},t)P_\beta$.

可得 $p_\alpha=\dfrac{\partial U_3}{\partial q_\alpha}=\sum\limits_{\beta=1}^{s}P_\beta\dfrac{\partial Q_\beta}{\partial q_\alpha}$，$Q_\alpha=\dfrac{\partial U_3}{\partial P_\alpha}=Q_\alpha(\boldsymbol{q},t)$，$K=H+\dfrac{\partial U_3}{\partial t}=H+\sum\limits_{\beta=1}^{s}P_\beta\dfrac{\partial Q_\beta}{\partial t}$.

（4）对偶变换：$U_1=\sum\limits_{\beta=1}^{s}q_\beta Q_\beta$.

可得 $p_\alpha=\dfrac{\partial U_1}{\partial q_\alpha}=Q_\alpha$，$P_\alpha=-\dfrac{\partial U_1}{\partial Q_\alpha}=-q_\alpha$. 动量变成坐标，坐标变成动量。相当于将相空间的坐标轴逆时针转动 90°。（此变换更加体现出坐标与动量的地位平等）

6、无穷小正则变换

（1）如何构造一个无穷小函数：只需要将一个不是无穷小的函数乘以无穷小量即可。例如$\varepsilon\cos x$，$\varepsilon\to0$。无穷小量后面的这个函数（$\cos x$）叫做生成元。（任何初等函数的对应法则，如幂、指数、对数、三角、反三角，本身都不是无限小，只有变化幅度的无限小）

（2）无穷小正则变换：在恒等变换的基础上加上一个无穷小函数，使得变换前后的坐标与动量相差为无穷小：$U_3=\sum\limits_{\beta=1}^{s}q_\beta P_\beta+\varepsilon G(\boldsymbol{q},\boldsymbol{P},t)$.

（3）$p_\alpha=\dfrac{\partial U_3}{\partial q_\alpha}=P_\alpha+\varepsilon\dfrac{\partial G}{\partial q_\alpha}$，$Q_\alpha=\dfrac{\partial U_3}{\partial P_\alpha}=q_\alpha+\varepsilon\dfrac{\partial G}{\partial P_\alpha}\approx q_\alpha+\varepsilon\dfrac{\partial G}{\partial p_\alpha}$，$K=H+\varepsilon\dfrac{\partial G}{\partial t}$.

各物理量的变化

$\delta p_\alpha=P_\alpha-p_\alpha=-\varepsilon\dfrac{\partial G}{\partial q_\alpha}$，$\delta q_\alpha=Q_\alpha-q_\alpha=\varepsilon\dfrac{\partial G}{\partial p_\alpha}$，$\delta H=K-H=\varepsilon\dfrac{\partial G}{\partial t}$.

（4）对称变换：若经过变换之后 $K=H$，则称正则变换为对称变换。

对于无穷小正则变换，

$$\varepsilon\frac{\partial G}{\partial t}=\delta H=\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha+\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\delta p_\alpha\right)=\varepsilon\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\frac{\partial G}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\frac{\partial G}{\partial q_\alpha}\right)=\varepsilon[H,G].$$

因此，$\dfrac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}=[G,H]+\dfrac{\partial G}{\partial t}=-[H,G]+\dfrac{\partial G}{\partial t}=0.$

无穷小变换不改变 H的值 $\Leftrightarrow$ 生成元G为运动积分。

（5）运动本身相当于无穷小正则变换

令生成元为 H，ε为 $\mathrm{d}t$，则

$$\mathrm{d}p_\alpha = P_\alpha - p_\alpha = -\varepsilon\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = \dot{p}_\alpha \mathrm{d}t,\ \ \mathrm{d}q_\alpha = Q_\alpha - q_\alpha = \varepsilon\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = \dot{q}_\alpha \mathrm{d}t,\ \ \mathrm{d}H = K - H = \varepsilon\frac{\partial H}{\partial t} = \dot{H}\mathrm{d}t.$$

令 $P_\alpha(t) = p_\alpha(t+\mathrm{d}t)$，$Q_\alpha(t) = q_\alpha(t+\mathrm{d}t)$，$K(t) = H(t+\mathrm{d}t)$，则可以生成运动。

（正则变换的观点：时间冻结，将同一时刻的一组坐标换成这个时刻的另一组靠得很近的坐标，通过移动坐标架实现。运动的观点：坐标架不变，让一组坐标在极短时间内变成另一组靠得很近的坐标。**“花时间”的正则变换就成了运动。**）

7、正则变换的辛表示

（1）定义相空间向量 $\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \cdots \\ q_s \\ p_1 \\ \cdots \\ p_s \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\Xi} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ \cdots \\ Q_s \\ P_1 \\ \cdots \\ P_s \end{pmatrix}$.

（2）无穷小变换总是可以近似成线性的，因此可以写为

$$\delta\boldsymbol{\Xi} = \begin{pmatrix} \delta Q_1 \\ \cdots \\ \delta Q_s \\ \delta P_1 \\ \cdots \\ \delta P_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial Q_1}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial Q_1}{\partial p_\alpha}\delta p_\alpha \\ \cdots \\ \sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial Q_s}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial Q_s}{\partial p_\alpha}\delta p_\alpha \\ \sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial P_1}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial P_1}{\partial p_\alpha}\delta p_\alpha \\ \cdots \\ \sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial P_s}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial P_s}{\partial p_\alpha}\delta p_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{q}} & \frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{p}} \\ \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{q}} & \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{p}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta q_1 \\ \cdots \\ \delta q_s \\ \delta p_1 \\ \cdots \\ \delta p_s \end{pmatrix} \equiv \boldsymbol{M}\delta\boldsymbol{\xi}.$$

$\boldsymbol{M}$ 是变换矩阵，它相当于多元向量值函数的 Jacobi 矩阵（详见多元函数微分学）。

（3）正则变换是一一映射，因此是可逆变换：$\delta\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{W}\delta\boldsymbol{\Xi} = \boldsymbol{M}^{-1}\delta\boldsymbol{\Xi}$.

其中逆变换矩阵为 $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{M}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial \boldsymbol{Q}} & \frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial \boldsymbol{P}} \\ \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{Q}} & \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{P}} \end{pmatrix}$.

（4）由母函数二阶混合偏导可交换得出的隐含关系（大致了解。其中 **1** 指单位矩阵，**0** 指零矩阵。）

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial q_\beta \partial q_\alpha} = \frac{\partial^2 U_1}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \qquad \sum_{\delta=1}^{s}\frac{\partial Q_\delta}{\partial q_\alpha}\frac{\partial P_\delta}{\partial q_\beta} = \sum_{\delta=1}^{s}\frac{\partial P_\delta}{\partial q_\alpha}\frac{\partial Q_\delta}{\partial q_\beta} \qquad \left(\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{q}}\right)^{\mathrm{T}}\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{q}} - \left(\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{q}}\right)^{\mathrm{T}}\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{q}} = \boldsymbol{0}$$

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial p_\beta \partial q_\alpha} = \frac{\partial^2 U_1}{\partial q_\alpha \partial p_\beta} \qquad \sum_{\delta=1}^{s}\frac{\partial Q_\delta}{\partial q_\alpha}\frac{\partial P_\delta}{\partial p_\beta} - \delta_{\alpha\beta} = \sum_{\delta=1}^{s}\frac{\partial P_\delta}{\partial q_\alpha}\frac{\partial Q_\delta}{\partial p_\beta} \qquad \left(\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{q}}\right)^{\mathrm{T}}\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{p}} - \left(\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{q}}\right)^{\mathrm{T}}\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{p}} = \boldsymbol{1}$$

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial p_\beta \partial p_\alpha} = \frac{\partial^2 U_1}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} \qquad \sum_{\delta=1}^{s}\frac{\partial Q_\delta}{\partial p_\alpha}\frac{\partial P_\delta}{\partial p_\beta} = \sum_{\delta=1}^{s}\frac{\partial P_\delta}{\partial p_\alpha}\frac{\partial Q_\delta}{\partial p_\beta} \qquad \left(\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{p}}\right)^{\mathrm{T}}\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{p}} - \left(\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{p}}\right)^{\mathrm{T}}\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{p}} = \boldsymbol{0}$$

（5）由以上关系得出正则变换的辛条件：**一个变换是正则变换，当且仅当其 Jacobi 矩阵 $\boldsymbol{M}$ 满足以下条件：**

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{q}}\right)^{\mathrm{T}} & \left(\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{q}}\right)^{\mathrm{T}} \\ \left(\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{p}}\right)^{\mathrm{T}} & \left(\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{p}}\right)^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{q}} & \frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{p}} \\ \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{q}} & \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{p}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{M}^{\mathrm{T}}\mathbf{J}\mathbf{M} &= \mathbf{J} \\ \mathbf{M}\mathbf{J}\mathbf{M}^{\mathrm{T}} &= \mathbf{J} \end{aligned}\right\} \quad \textbf{正则变换辛条件}$$

其中 $\boldsymbol{J}$ 的定义见正则方程辛表示。

（6）正则变换 Jacobi 阵的乘积仍是正则变换 Jacobi 阵：

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{M}_1\boldsymbol{J}\boldsymbol{M}_1^{\mathrm{T}} &= \boldsymbol{J} \\ \boldsymbol{M}_2\boldsymbol{J}\boldsymbol{M}_2^{\mathrm{T}} &= \boldsymbol{J} \end{aligned}\right\} \Rightarrow (\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_1)\boldsymbol{J}(\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_1)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{M}_2(\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{J}\boldsymbol{M}_1^{\mathrm{T}})\boldsymbol{M}_2^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{M}_2\boldsymbol{J}\boldsymbol{M}_2^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{J}$$

$\Rightarrow \boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_1$也是一个正则变换对应的Jacobi阵。

于是正则变换是可叠加的，其对应于 Jacobi 阵的左乘。

（7）注意 Jacobi 矩阵不是变换矩阵。无限小变换 $\delta\boldsymbol{\Xi} = \boldsymbol{M}\delta\boldsymbol{\xi}$，但是有限变换并不是 $\boldsymbol{\Xi} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{\xi}$，因为非无穷小时不能用全微分代替变化量。有限的正则变换可以看成无数个无限小正则变换的叠加，即 $\boldsymbol{M}_0 = \boldsymbol{M}_\infty ... \boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_1$.

（8）正则变换矩阵的行列式：$\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{J}\boldsymbol{M}_0^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{J} \Rightarrow |\boldsymbol{M}_0|^2 = 1.$

这样看，$|\boldsymbol{M}_0| = \pm 1$. 但是，考虑到 $\boldsymbol{M}_0$ 是无数个无穷小正则变换 $\boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_2, ..., \boldsymbol{M}_\infty$ 的叠加，故矩阵 $\boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_2, ..., \boldsymbol{M}_\infty$ 趋于单位阵，从而 $|\boldsymbol{M}_0| = |\boldsymbol{M}_\infty| ... |\boldsymbol{M}_2||\boldsymbol{M}_1| = 1.$

***正则变换的行列式必要条件：若变换为正则变换，则其 Jacobi 阵的行列式为 1。**

8、正则变换的不变量

（1）相空间的体积元不变：根据 Jacobi 矩阵的定义，有 $\prod_{i=1}^{2s} \mathrm{d}\Xi_i = |\boldsymbol{M}| \prod_{i=1}^{2s} \mathrm{d}\xi_i = \prod_{i=1}^{2s} \mathrm{d}\xi_i.$

（高数：重积分中 Jacobi 矩阵的行列式是两个坐标空间的体积元之比）

（2）泊松括号不变

①泊松括号的辛表示：$[f,g]_\xi = \sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial g}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial g}{\partial q_\alpha}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\xi}}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{J} \left(\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\xi}}\right).$

②泊松括号在两套正则变量下的值不变：根据链式法则，

$$[f,g]_{\boldsymbol{\Xi}} = \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\Xi}}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{J} \left(\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\Xi}}\right) = \left(\boldsymbol{M}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\xi}}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{J} \left(\boldsymbol{M}\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\xi}}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\xi}}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{M} \left(\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\xi}}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\xi}}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{J} \left(\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\xi}}\right) = [f,g]_\xi.$$

③**正则变换的泊松括号条件：变换为正则变换，当且仅当两套变量下的泊松括号不变。**

9、**正则变换的基本泊松括号条件：变换为正则变换，当且仅当两套变量都满足基本泊松括号。**

10、已知正则变换的含参母函数（或者含参变换关系式），求参数，总是利用正则变换的条件——Jacobi 阵行列式为 1，两套坐标下泊松括号不变，基本泊松括号成立，母函数关于坐标、动量的二阶混合偏导可交换（变量少时使用）。

五、哈密顿—雅可比方程（哈—雅方程，H–J 方程）

1、守恒量概念的扩充：不随时间变化的量都是守恒量。因此，对于力学系统，不能将守恒量局限于广义动量、广义能量，比如运动方程里的积分常数也是个守恒量，它作为初值不会随时间改变，尽管我们可能无法确定它的具体值。每个正则变量关于时间的函数都存在积分常数，因此系统总是至少存在 $2s$ 个独立的守恒量，s 个有广义坐标量纲，s 个有广义动量量纲。如果将它们选定为一组正则变量，则可以找出体系全部的守恒量（积分常数）。H–J 方程就是寻找这样的正则变换，它是对称性考量下“最好”的正则变换。正则变换的表达式就是最终的运动方程，它避开了直接的微分方程求解过程。

2、目标正则变换的特点：所有正则变量不随时间变化，$\begin{cases} Q_\alpha = C_\alpha, \\ P_\alpha = D_\alpha. \end{cases}$ 对应的哈密顿函数满足 $\begin{cases} \dfrac{\partial K}{\partial Q_\alpha} = -\dot{P}_\alpha = 0, \\ \dfrac{\partial K}{\partial P_\alpha} = \dot{Q}_\alpha = 0. \end{cases}$ K 中不显含任何坐标与动量，故不妨令 $K = 0.$

3、寻找这一正则变换的第三类母函数：

$K = H + \dfrac{\partial U_3}{\partial t} = 0 \Rightarrow \boxed{H(\boldsymbol{q}, \dfrac{\partial U_3}{\partial \boldsymbol{q}}, t) + \dfrac{\partial U_3}{\partial t} = 0.}$ 此为 H–J 方程。

4、全积分：满足偏微分方程而可能存在未知函数的解。例如 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0$，则一切关于 y 的函数 $\varphi(y)$ 均是该方程的解，而可以是任何函数类型，此即为全积分；如果能够确定函数类型，只剩下积分常数未定，则称为通积分。

5、H–J 方程的全积分为 $U_3 = S(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{D}, t) + D_0$. S 不含常数项，称为**哈密顿主函数**。

*哈密顿主函数就是哈密顿作用量，也叫哈密顿作用函数：

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial S}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha + \frac{\partial S}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha \dot{q}_\alpha + K - H = \sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha \dot{q}_\alpha - H = L \Rightarrow S = \int L \mathrm{d}t.$$

（**请注意 $\boldsymbol{S}$ 本质上是第三类母函数，因此对 $\boldsymbol{U_3}$ 成立的性质对 $\boldsymbol{S}$ 也成立**）

6、可分离变量系统的 H–J 方程求解（**请注意随时增加的假设，这些假设将会被框出。**）

（1）可分离是指时间、广义坐标可分离：$S(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{D}, t) = W(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{D}) + T(t, \boldsymbol{D})$. **可分离的一个充分条件是 $\boldsymbol{H}$ 不显含时间。** $\boxed{\text{在此，假设 } \dfrac{\partial H}{\partial t} = 0.}$ 于是，H–J 方程变为

$$H(\boldsymbol{q}, \frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{q}}) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

（2）由于 $\boldsymbol{D}$ 是常量，故 $\dfrac{\partial S}{\partial q_\alpha} = \dfrac{\partial W}{\partial q_\alpha}$，$\dfrac{\partial S}{\partial t} = \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$.

（3）一个常用的推理：若自变量不同的两个函数恒等，并且彼此的自变量独立，则它们都等于同一个常数函数（否则在两个函数独立变化时保证不处处相等）。因为 $H(\boldsymbol{q}, \dfrac{\partial S}{\partial \boldsymbol{q}}) = -\dfrac{\partial S}{\partial t} = -\dot{T}(t)$ 是两个关于不同的独立自变量的函数，故它们都是常数，即 $H(\boldsymbol{q}, \dfrac{\partial S}{\partial \boldsymbol{q}}) = -\dot{T}(t) \equiv E.$ 由 $\dot{T}(t) = -E$ 可得 $T(t) = \int_0^t -E\mathrm{d}t = -Et.$（舍去常数项）

（4）由以上各式得到 $H(\boldsymbol{q},\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{q}})=E$，称为定态 H–J 方程；从这里可以看出 H 守恒，其值就是 E。

（5）规定常数$D_1=E.$ 有了这个规定之后的 $W(\boldsymbol{q},\boldsymbol{D})$称为哈密顿特征函数。利用各个函数的关系与第三类母函数的性质，得到

$$p_\alpha=\frac{\partial W}{\partial q_\alpha},\ C_1=\frac{\partial S}{\partial D_1}=\frac{\partial(W+T)}{\partial E}=\frac{\partial W}{\partial E}-t,\ C_\alpha=\frac{\partial S}{\partial D_\alpha}=\frac{\partial W}{\partial D_\alpha}.\ (\alpha=2,...,s)$$

①数学中或许说，常数函数求导为 0，但是偏导数永远只看显含与否，永远根据形式来，不管这些变量的取值。这也就是为什么 $\boldsymbol{C}$ 与 $\boldsymbol{D}$ 是常数，我们却还是可以对其求偏导，因为它们本质上就是 $\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{Q}$，所以得到正则变换表达式的过程是完全一样的。

②规定 $D_1=E$ 的原因：$\frac{\partial H}{\partial t}=0$，故 H 守恒；E 是 H 的大小，是广义能量，是与时间共轭的广义动量，是一个重要的积分常数。除了 E 可同时存在于 W 与 T 中，其他的 D_α（$\alpha=2,...,s$）都只存在于 W 中，这是 E 不同于其他积分常数的特点。因此，在对 $\boldsymbol{D}$ 求导的过程中，对 E 特殊关照，将其放在第一个积分常数，其对应的 C_1 的表达式和其他 $\boldsymbol{C}$ 不一样。

③C_1 的含义：其具有时间量纲，是时间的初始值。（见课件中一维振子例题）

（6）在时间可分离后，对广义坐标也可以分离。**假设 q_1 可分离**，即

$W=W'(q_2,...,q_s,E,D_2,...,D_s)+W_1(q_1,E,D_2,...,D_s).$ 这里的 W'与 W_1 是自变量不同的函数，它们满足 $H(q_{2\sim s},\frac{\partial W'}{\partial q_{2\sim s}},f\left(q_1,\frac{\partial W_1}{\partial q_1}\right))=E$，则必可解出 $q_1,\frac{\partial W_1}{\partial q_1}$ 关于 $q_{2\sim s},\frac{\partial W'}{\partial q_{2\sim s}}$ 的函数：$f\left(q_1,\frac{\partial W_1}{\partial q_1}\right)=g\left(q_{2\sim s},\frac{\partial W'}{\partial q_{2\sim s}}\right)$。这是自变量不同且独立的两个函数，因此它们同时等于一个常数。记 $f\left(q_1,\frac{\partial W_1}{\partial q_1}\right)=d_1$，反解出

$p_1=\frac{\partial W_1}{\partial q_1}=\frac{\mathrm{d}W_1}{\mathrm{d}q_1}=p_1(q_1,d_1)$，于是

$W_1(q_1,d_1)=\int p_1\mathrm{d}q_1,\ S=W'(q_2,...,q_s,E,D_2,...,D_s)+W_1(q_1,d_1)-Et.$

（看上去什么也没做，事实上把 $D_2,...,D_s$ 全部从 W_1 分离了，这才是真正彻底的分离变量；而且在变量没有被彻底分离之前并不知道 W_1 最终的形式，才有 $W_1(q_1,d_1)=\int p_1\mathrm{d}q_1$ 这一步。）

（7）假设$\frac{\partial H}{\partial q_1}=0$且$f(q_1,\frac{\mathrm{d}W_1}{\mathrm{d}q_1})=p_1$，则 $p_1=d_1$，故

$$S=W'(q_2,...,q_s,E,D_2,...,D_s)+d_1q_1-Et.$$

（8）分离 $s-1$ 个广义坐标：假设$\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}=0$且$f_\alpha(q_\alpha,\frac{\mathrm{d}W_\alpha}{\mathrm{d}q_\alpha})=p_\alpha$（$\alpha=1,...,s-1$），则同理有 $p_\alpha=d_\alpha$（$\alpha=1,...,s-1$），$W_s=\int p_s\mathrm{d}q_s$，$S=W_s+\sum_{\alpha=1}^{s-1}d_\alpha q_\alpha-Et.$（完全可分离系统，所有的广义坐标都被解耦）

[参考资料]
[1]复旦大学物理学系徐晓华老师《经典力学》课程
[2]梁昆淼. 力学（第四版下册·理论力学）. 高等教育出版社.

允文君知识梳理