1、已知二元函数 $z=f(x,y)$ 在 R^2 上有连续偏导数，在圆形区域 $x^2+y^2=1$ 上恒等于 0. 求证：$f(0,0)=-\lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\dfrac{1}{2\pi}\iint\limits_{D(\varepsilon)}\dfrac{xf_x+yf_y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 其中 $D(\varepsilon)$为圆环形区域

$\varepsilon^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 1$.（注：符号$\partial\Omega$指区域$\Omega$的边界）

证明：记题干中的二重积分为 I.

考虑到f在圆形区域 $x^2+y^2=1$ 上恒等于 0，应当引入极坐标以较好地利用此条件.

区域$D'(\varepsilon)=\{(r,\theta)\,|\,\varepsilon\leq r\leq 1,0\leq\theta\leq 2\pi\}$.

$$\therefore I=\iint\limits_{D(\varepsilon)}\frac{xf_x+yf_y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D'(\varepsilon)}\frac{r\cos\theta f_x+r\sin\theta f_y}{r^2}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\iint\limits_{D'(\varepsilon)}(\cos\theta f_x+\sin\theta f_y)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$=\iint\limits_{D'(\varepsilon)}(\cos\theta(f_r r_x+f_\theta\theta_x)+\sin\theta(f_r r_y+f_\theta\theta_y))\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

而 $r_x=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{r\cos\theta}{r}=\cos\theta$，同理$r_y=\sin\theta$；

$$\theta_x=\frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2+y^2}=-\frac{r\sin\theta}{r^2}=-\frac{\sin\theta}{r},\quad \theta_y=\frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{\cos\theta}{r}.$$

$$\therefore I=\iint\limits_{D'(\varepsilon)}(\cos\theta(f_r\cos\theta-f_\theta\frac{\sin\theta}{r})+\sin\theta(f_r\sin\theta+f_\theta\frac{\cos\theta}{r}))\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\iint\limits_{D'(\varepsilon)}f_r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

根据 Green 公式，令向量值函数 $\vec{F}=(P,Q)=(0,g(r,\theta))$，其中 $g(r,\theta)=f(x,y)$，

则有 $\dfrac{\partial Q}{\partial r}-\dfrac{\partial P}{\partial\theta}=\dfrac{\partial g}{\partial r}=f_r$. 于是 $I=\oint\limits_{\partial D'(\varepsilon)}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\oint\limits_{\partial D'(\varepsilon)}g(r,\theta)\mathrm{d}\theta$.

考虑到这个积分的路径是矩形边界（逆时针方向），故只有平行纵轴的两条边对积分有贡献，从而 $I=\int_0^{2\pi}g(1,\theta)\mathrm{d}\theta+\int_{2\pi}^{0}g(\varepsilon,\theta)\mathrm{d}\theta$. 根据函数$f$的性质，有 $g(1,\theta)\equiv 0$，

$g(0,\theta)=f(0,0)$. 从而由积分中值定理可得

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}I=\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{2\pi}^{0}g(\varepsilon,\theta)\mathrm{d}\theta=-\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_0^{2\pi}g(\varepsilon,\theta)\mathrm{d}\theta=-\lim_{\varepsilon\to 0+}g(\varepsilon,\xi)\cdot 2\pi=-2\pi g(0,\xi)$$

$=-2\pi f(0,0)$. 其中 $\xi\in(0,2\pi)$.

$$\therefore-\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{D(\varepsilon)}\frac{xf_x+yf_y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{I}{2\pi}=f(0,0).$$ 证毕.

2、已知二元连续函数 $z=z(x,y)$，如果该函数中关于 x 与 y 的部分可以分开，即存在两个连续可导的一元函数$\varphi(x)$与$\psi(y)$使得 $z=\varphi(x)\psi(y)$，则称该函数是变量可分离的. 若此函数在定义域上恒正且存在连续的二阶偏导数，证明其变量可分离的充要条件是 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=z\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

证明：首先证明必要性，若 $z=\varphi(x)\psi(y)$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}=\varphi'(x)\psi(y)\cdot\varphi(x)\psi'(y)=\varphi(x)\psi(y)\varphi'(x)\psi'(y),$$

$$z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\varphi(x)\psi(y)\cdot\varphi'(x)\psi'(y).$$

于是 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=z\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

其次，证明充分性，即已知 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=z\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，证明 z 变量可分离.

由于 $z>0$，故有 $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{1}{z}\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)=\dfrac{1}{z^2}\left(z\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=0$. 从而 $\dfrac{1}{z}\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 是一个与 y 无关的函数，即可令 $\dfrac{1}{z}\dfrac{\partial z}{\partial x}=f(x)$. 同理，$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{z}\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=0$，从而可以令 $\dfrac{1}{z}\dfrac{\partial z}{\partial y}=g(y)$.

为了得出最终的函数关系，需要列出关于 x,y,z 的微分方程. 可以利用全微分，$\mathrm{d}z=\dfrac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=zf(x)\mathrm{d}x+zg(y)\mathrm{d}y$，从而 $\dfrac{\mathrm{d}z}{z}=f(x)\mathrm{d}x+g(y)\mathrm{d}y$. 两边积分，得 $\ln z=\int f(x)\mathrm{d}x+\int g(y)\mathrm{d}y$. 从而 $z=e^{\int f(x)\mathrm{d}x+\int g(y)\mathrm{d}y}$. 记 $e^{\int f(x)\mathrm{d}x}=\varphi(x)$，$e^{\int g(y)\mathrm{d}y}=\psi(y)$，则有 $z=\varphi(x)\psi(y)$，其中各个函数的连续性、可导性均满足题设条件，于是 $z(x,y)$ 变量可分离. 证毕.