高等数学 A 上笔记

by 允文君

1.极限与连续

2.导数与微分

3.一元函数积分学

4.矩阵与线性方程组（线代选讲）

5.空间解析几何

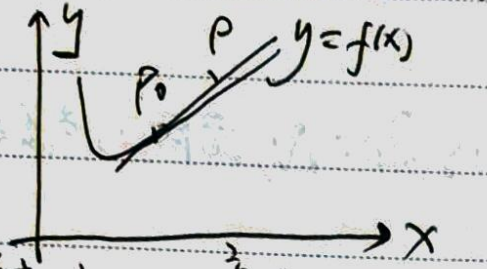
物理系的允文君

导言 No. 1 Date: 9.5

* 等周不等式：封闭曲线周长为 L，面积为 A

则 $L^2 - 4\pi A \geq 0$. （当且仅当圆形为周时取等号）

* 变化率是动态数学的精华（无穷小分析）



$y=f(x)$ 在 P_0 处变化率

$= \lim\limits_{P\to P_0} k_{PP_0} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

* 樊映川《高数讲义》，高等教育出版社，1983.

* 美国数学家谱网站

* 建议：文化修养、环境良好、明确知识来龙去脉，平常心，敬业精神。学科之父

第一章 极限与连续

§1 实数

1.1 实数的定义

1. * 微积分主要研究实数 → 生成方式：在 $\mathbb{R}$ 上生成（x轴）

* 在 $\mathbb{R}$ 上有：四则运算（0不能作为除数即除0外的实数运算均是封闭的）

* 基本概念：区间的概念，绝对值的定义（略）

* 邻域：$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$，则 $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ 是以 x_0 为中心的，以 ε 为半径的邻域，也叫"x_0 点的 ε 邻域".

* 序关系：$\forall x, y \in \mathbb{R}$，则 $x<y$，$x=y$，$x>y$ 必居其一

* 算术运算法则：$2\times 3 = 3\times 2 = 6$

⇒ 实数中：$\sqrt{a}\times\sqrt{b} = \sqrt{b^2}\sqrt{a} = \sqrt{ab}$.

GuangBo

No. 2 Date: 9.5

以上是对实数域的基本介绍.

2. 函数 二要素、定义域 $D(f)$, 对应关系 f.

($y=f(x)$)

1.2 函数的表示

1. 列举法: 若 $D(f)$ 是有限集或 $D_f=N$, 常用此法表示函数

(其实就是数列)

形式:

x	1	2	3	4	...	n	...
y	a_1	a_2	a_3	a_4	...	a_n	...

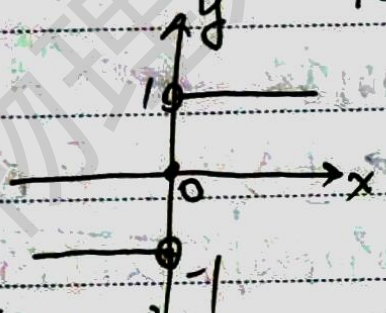
($\{a_n\}_1^{+\infty}$ 是定义在 N^* 上的函数).

2. 图象法(略)

3. 公式法(解析法)

eg. (1) 符号函数 $\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$.

图象:



(2) 取整函数, 绝对值函数 ... (略)

1.3 函数的特征、性质

1. 单调性 2. 有界性 3. 周期性 4. 奇偶性

(在此略去 1.3.4) 对于 $y=f(x)$, $x\in D_f$ (一般 D_f 为区间). 对于 $A\subset D_f$, 若对 $\forall x\in A$, $\exists M>0$ (M可以与f或A有关但与x无关) 使 $|f(x)|\le M$, 则

补一函数的定义: 对于 $y=f(x)$, $D_f\subset R$, $\forall x\in D_f$, 必 $\exists$ 唯一 $y\in R$ 使 $f(x)=y$, 则 y 与 x 有函数关系. y 的范围 R_f 为值域.

物理系的兄弟

称 $f(x)$ 在 A 上有界。{上界：$f(x)\le M$（例题：教材 P.16/8(3)）；下有界：$f(x)\ge -M$}

1.4 函数的运算

1. 两个函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相等，记作 $f(x)=g(x)$ 或 $f=g$.

条件：① $D_f=D_g$. ② $\forall x\in D_f=D_g$, $f(x)=g(x)$.

2. 函数四则运算：

$\forall x\in D_f\cap D_g$，还定义函数

$f(x)\pm g(x)$，$f(x)\cdot g(x)$，$\frac{f(x)}{g(x)}(g(x)\neq 0)$

3. 函数的复合：

设有两个函数 f,g，定义在集合 $\{x\mid x\in D_g, g(x)\in D_f\}$ 上的函数 $f(g(x))=f\circ g(x)$ 为 g 与 f 的复合函数。

※ 可将复合函数看成两个函数的一种运算。

※ 有时记 $u=g(x)$ 为中间变量，于是 $f\circ g(x)$ 可表述成 $y=f(u)$, $u=g(x)$, $x\in D_g$ 的复合。

eg $f(u)=\sqrt{u}$，$u=g(x)=a^2-x^2$ $(a>0)$

则 $D_f=[0,+\infty)$, $D_g=R$.

于是 $y=f\circ g(x)=\sqrt{a^2-x^2}$，$D_{f\circ g}=[-a,a]$.

而 $g\circ f(x)=a^2-x$, $D_{g\circ f}=[0,+\infty)$.

注：① 复合运算不具有交换性，即 $f\circ g\neq g\circ f$.

② “复合”可以将复杂函数拆分成简单函数。

eg $F(x)=2^{\arccos\sqrt{1-x^2}}$ 的拆分：

$f(x)=2^x$；$g(x)=\arccos x$；$h(x)=\sqrt{x}$；$j(x)=1-x^2$.

则 $F(x)=f\circ g\circ h\circ j(x)$.

补——无界的表达：$\forall M>0$（无论多大），总 $\exists x_M\in A$ 使得 $|f(x_M)|>M$，则 $f(x)$ 在 A 上无界。

GuangBo

8. 判断下列函数在给定区间上是否有界：

(1) $f(x)=\dfrac{x+2}{x-2}$，$x\in(2,4)$；

(2) $f(x)=x^2\sin x$，$x\in(0,+\infty)$；

(3) $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$，$x\in(0,1)$；

(4) $f(x)=x+\sin x$，$x\in(1,+\infty)$.

9. 设 $f(x)=x^2$，$g(x)=2^x$. 求 $f\circ g$，$g\circ f$，$f\circ f$，$g\circ g$.

10. 下列函数分别是由哪几个较简单的函数复合而成的：

(1) $f(x)=\sqrt{3x-5}$；

(2) $f(x)=\sqrt{\lg\sqrt{x}}$；

(3) $f(x)=\sin[\lg(x^2+1)]$.

11. 求下列函数的反函数，并指出反函数的定义域：

(1) $f(x)=2\sin 3x$；

(2) $f(x)=\dfrac{a^x}{a^x+1}$；

(3) $f(x)=\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}$；

(4) $f(x)=4\arcsin\sqrt{1-x^2}$，$D(f)=[0,1]$.

§2 数列的极限

人们是从研究数列一般项的变化趋势开始认识并建立极限理论的．用圆内

物理系的分支看

No. 4 Date: 9.7

1.5 反函数

一个函数 $y=f(x)$ 可以看成从 D_f 到 R_f 的映照/运算.

由此, 它可能会有逆映照/逆运算.

定义: 设有 $y=f(x)$, 若对 $\forall y\in R_f$ 都有唯一的 $x\in D_f$ 使得 $f(x)=y$, 则映照 $y\to x$ 是 $f(x)$ 反函数, 写作 $f^{-1}(y)=x$.

(原特反函数记为 $f^{-1}(x)$).

注: 对于 f 与 f^{-1}, 有 $f\circ f^{-1}(x)=x$. $(x\in R_f)$.

$f^{-1}\circ f(x)=x$. $(x\in D_f)$.

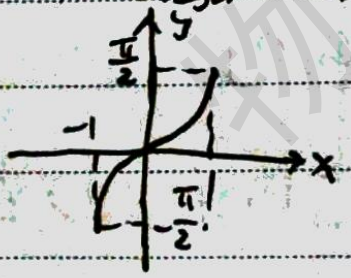
(以上两个映照亲兄弟一样, 但都属于恒等映照 $Id(x)$).

*命题: 严格单调增(减)的函数的反函数一定存在, 并且也是严格单调增(减) (作业).

e.g. ① $y=\sin x$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上严格单调增.

所以它在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上存在反函数, 记为 $y=\arcsin x$.

于是, 此反函数定义域为 $[-1,1]$, 值域为 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.



② 与上面同理, $y=\cos x$ 在 $[0,\pi]$ ↓

→ 反函数 $f(x)=\arccos x$, $D_f=[-1,1]$, $R_f=[0,\pi]$.

1.6 初等函数.

1. 定义 n 个基本初等函数 —— 有以下六类:

GuangBo

No. 5 Date: 9.7

① 常数函数 $f(x)=C$, $D_f=R$.

② 幂函数 $f(x)=x^\alpha$ (此处 $\alpha\neq 0$). 定义域与 α 有关.

③ 指数函数 $f(x)=a^x$ ($a>0, a\neq 1$), $D_f=R$.

④ 对数函数 $f(x)=\log_a^x$ ($a>0, a\neq 1$), $D_f=(0,+\infty)$.

⑤ 三角函数: $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$ ···

⑥ 反三角函数: $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, $\operatorname{arccot} x$.

2. 初等函数的定义: 上述6种基本初等函数经过有限次的四则混合运算与有限次的复合, 所得的函数统称为初等函数.

e.g. 下面的函数是初等函数:

① $f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$, $x\neq 0$.

② $f(x)=\dfrac{\sin x+\sqrt{1-x^2}}{\tan x}$.

③ $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ ($a_n\neq 0$). (多项式函数)

④ $R(x)=\dfrac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m}$ ($a_n, b_m\neq 0$). (有理函数)

下面的函数不是初等函数.

① $f(x)=\operatorname{sgn}(x)$, 当 $D_f=R$ 时, 它不是初等的. 但它可以在某些区间上成为初等函数.

② 把数列 $\{x_n\}_1^{+\infty}$ 看成 N^* 上的函数时它不是初等的, 因为它不可能由基本初等函数运算得来.

③ $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ 这类函数也不是初等的.

No. 6 Date: 9.7

§2 数列的极限

2.1 关于数列

1. 一个数列可以用 $\{a_n\}_1^\infty$ 来表示，它可以看成 N^* 上的一个函数.

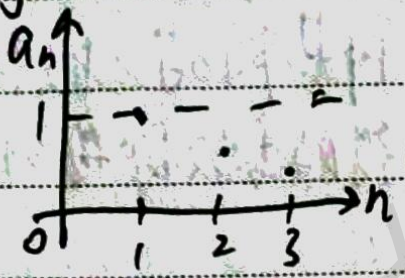
事实上，我们研究数列主要就是研究极限，看它的变化趋势.

e.g. ① $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$ 可写为 $\left\{\frac{1}{n}\right\}_1^\infty$,

② $\sin 1, \sin 2, \cdots, \sin n$ 可写为 $\{\sin n\}_1^\infty$.

2. 数列的图象

如上面的①:



3. 数列除了有公式法、图象法、列举法还有一种表现形式：

递推式.

e.g. 斐波那契数列 $\begin{cases} F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \ (n \geq 2). \\ F_0 = F_1 = 1. \end{cases}$

$$\Rightarrow F_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

4. 数列的性质

(1) 单调性.

(2) 有界性: $\exists M > 0$ (与 n 无关), 对 $\forall n$, $|a_n| \leq M$.

2.2 数列的极限

定义 对于给定的数列 $\{a_n\}_1^\infty$, 若存在常数 A 满足以下条件:

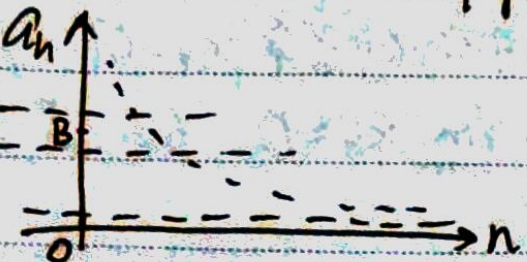
任给 $\varepsilon > 0$ (不论多小), 总 $\exists N$ (可能与 ε 有关) 使得当 $n > N$ 时必有 $|a_n - A| < \varepsilon$.

则称当 $n\to+\infty$ 时 $\{a_n\}$ 以 A 为极限，即

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A.$$ 此时 $\{a_n\}$ 收敛.

如果这样 A 不存在，则称 $\{a_n\}_1^\infty$ 是发散的. (如何定义发散?).

下数列收敛的几何解释.



在 y 轴上取一个 B 点的 ε 邻域 $(y_B-\varepsilon, y_B+\varepsilon)$. 不管 ε 多么小，总存在 N，当 $n>N$ 时，点 (n, a_n) 均落在 $(y_B-\varepsilon, y_B+\varepsilon)$ 的带状区域中 (即直线 $y=y_B-\varepsilon$ 与 $y=y_B+\varepsilon$ 之间).

例. ① 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

证明：由极限的定义，要证明 $\forall \varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时有

$$\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon \text{ 成立.} \quad (*).$$

事实上，$(*)$ 等价于 $n>\frac{1}{\varepsilon}$.

于是取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$，则当 $n>N$ 时，一定有 $\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$.

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

② 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$.

证明：要证 $\forall \varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时有 $\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$.

$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1}<\varepsilon \Rightarrow n+1>\frac{1}{\varepsilon}$.

只要取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]+1$，则 $\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$ 对 $\forall n>N$ 恒成立.

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$.

2. 对于给定数列 $\{a_n\}_1^\infty$，若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$，则称 $\{a_n\}_1^\infty$ 为无穷小量，记为 $a_n=O(1)(n\to\infty)$.

注：① 无穷小量不是0，它是一个变化过程，其最终形态为0.

② 我们将0看成一个变化过程时（即 $a_n=0, n\in N^*$），数列 $\{0\}_1^\infty$ 也是无穷小量.

③ 无穷小量的重要性：若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A\neq 0$，则可令 $x_n=a_n-A$. 则新数列 $\{x_n\}_1^\infty$ 为无穷小量，即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$. 反之，若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$.

e.g. 设 $a>1$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

证明：令 $y_n=\sqrt[n]{a}-1$, $n=1,2,3\cdots$

于是只需证明 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$.

由 y_n 定义式及二项式定理可知.

$$a=(y_n+1)^n=1+ny_n+C_n^2y_n^2+\cdots+y_n^n. \quad (*)$$

由 $a>1$ 可知 $y_n=\sqrt[n]{a}-1>0$,

∴由 $(*)$ 知 $a>1+ny_n$. 即 $y_n<\dfrac{a-1}{n}$. $(**)$

∀ $\varepsilon>0$. 取 $N=\left[\dfrac{a-1}{\varepsilon}\right]+1$，则对 $\forall n>N$，有

$$|y_n-0|<\frac{a-1}{n}<\varepsilon.$$

∴ $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

2.3 收敛数列的性质.

1. 数列极限的四则运算.

[定理] 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=B$. 则

No. 9 Date: 9.9

① $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = A \pm B = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$.
(lim 符号可加减运算可交换).

② $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = AB = (\lim_{n\to\infty} a_n)\cdot(\lim_{n\to\infty} b_n)$.

③ $B\neq 0$ 时 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$.

($B=0$ 时不成立).

eg. ① 设 $a_n = \frac{2n^2-n+2}{4-n^2}$, 求 $\lim_{n\to\infty} a_n = ?$

解: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-n+2}{4-n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{\frac{4}{n^2}-1} = \frac{\lim_{n\to\infty}(2-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2})}{\lim_{n\to\infty}(\frac{4}{n^2}-1)}$

$= -2$.

② 证明: 当 $a>0$ 时, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$.

证明: 1° $a>1$. (用夹).

2° $a=1$, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$.

3° $0<a<1$. 由 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = \frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = \frac{1}{1} = 1$.

*思考: 如何证明 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$? (无法用四则运算来做).

*作业: 证明定理中的②③两条.

下面给出①的证明: 要求 $\forall \varepsilon>0$, $\exists N$, 当 $n>N$ 时

$$|(a_n \pm b_n) - (A\pm B)| < \varepsilon.$$

而左边 $= |(a_n - A) \pm (b_n - B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B|$

又 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, 故 $\forall \varepsilon>0$, $\exists N_1$, 当 $n>N_1$ 时

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

对于这个ε，$\exists N_2$，当$n>N_2$时，

$$|b_1-B|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

∴取$N=\max\{N_1,N_2\}$，则$n>N$时，$|a_1-A|<\frac{\varepsilon}{2}$与$|b_1-B|<\frac{\varepsilon}{2}$同时成立

∴$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，$n>N$时，必有

$$|(a_n\pm b_n)-(A\pm B)|\le|a_n-A|+|b_n-B|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

∴$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=A\pm B=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

2、收敛数列的有界性

[定理] 若数列$\{a_n\}$收敛，则它必有界. 反之，有界数列未必收敛. (后者可由例如：$\{(-1)^n\}_1^\infty$是发散的，但是有界)

证明：∵$\{a_n\}$收敛，即$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$.

∴$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当$n>N$时，$|a_n-A|<\varepsilon$.

特别地，取$\varepsilon=1$，则有相应的$N_0=N(1)$，当$n>N_0$时有$|a_n-A|<1$，∴$A-1<a_n<A+1$，对$\forall n>N_0$也成立.

∴取$M=\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_{N_0}|,|A-1|,|A+1|\}$，对一切有$|a_n|\le M$，从而$\{a_n\}_1^\infty$有界.

3、子数列的收敛性

(1) 定义：对于给定数列$\{a_n\}_1^\infty$，$n=1,2,3\cdots$，取一个无界集合$\{n_1,n_2,n_3,\cdots\}\subseteq N$，且$n_1<n_2<\cdots$，则$\{a_{n_k}\}_{k=1}^\infty$是$\{a_n\}_{n=1}^\infty$的一个子列.

(2) [定理] 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，则$\{a_n\}_1^\infty$的任何子列$\{a_{n_k}\}_{k=1}^\infty$也收敛，且$\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=A$.

注(3) 一旦 $\{a_n\}_1^\infty$ 存在两个子列极限不相等，则 $\{a_n\}_1^\infty$ 发散.

e.g. 对于 $a_n=(-1)^n$，其子列 $\{a_{2n}\}_1^\infty$ 极限为1，$\{a_{2n-1}\}_1^\infty$ 极限为 -1，因此 $\{(-1)^n\}_1^\infty$ 发散.

4. 夹逼性

[定理] 若有3个数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$、$\{c_n\}$，若满足以下条件：

① 夹条件——存在 N_0，对 $\forall n>N_0$，$a_n\le b_n\le c_n$.

(夹条件只一定从 $n=1$ 开始).

② 逼条件——$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=A$.

则有 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=A$.

注此：需求 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，对 $n>N$ 有 $|b_n-A|<\varepsilon$.

显然，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N_1$，对 $n>N_1$，有 $|a_n-A|<\varepsilon$.

$\forall\varepsilon>0$，$\exists N_2$，对 $n>N_2$，有 $|c_n-A|<\varepsilon$.

于是 $A-\varepsilon<a_n<A+\varepsilon$，$A-\varepsilon<c_n<A+\varepsilon$.

$\because a_n\le b_n\le c_n$，$\therefore$ 取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，则当 $n>N$ 时

$A-\varepsilon<a_n\le b_n\le c_n<A+\varepsilon$，即 $|b_n-A|<\varepsilon$.

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}b_n=A$.

e.g. ① 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right]$.

解：记 $b_n=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}$.

可见 $b_n\ge\frac{1}{(2n)^2}+\frac{1}{(2n)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}=\frac{1}{4n}$

$b_n\le\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{n}{(n+1)^2}$.

$\therefore\frac{1}{4n}\le b_n\le\frac{n}{(n+1)^2}$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{4n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)^2}=0$.

GuangBo

∴ 由夹逼定理知 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

② (1995 考研) 求

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+2n}\right].$$

解: 记 $b_n = \frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+2n}$.

一方面 $b_n \geq \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+2n} = \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n(n+2)} = \frac{n+1}{2(n+2)}$.

另一方面 $b_n \leq \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{n^2+n}{n^2+n+1}$.

∴ $\frac{1}{2}\cdot\frac{n^2+n}{n^2+n+1} \leq b_n \leq \frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n+2}$.

又 $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2(n+2)} = \frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2(n^2+n+1)}$.

∴ $\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2}$.

③ 求 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$.

解: 由于 $1 \leq \sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}} \leq \sqrt[n]{1+1+\cdots+1} = \sqrt[n]{n}$.

而 $\lim_{n\to\infty} 1 = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$.

∴ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}} = 1$.

2.4 无穷小量及其性质

1. 定义: 满足 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 的数列 $\{a_n\}$ 是无穷小量.

即: 设 $|q|<1$, 则等比数列 $\{q^n\}_{n=1}^{\infty}$ 为无穷小量.

GuangBo

No. 13 Date: 9.9.

即 $\lim_{n\to\infty} q^n = 1$.

[定理] 两个无穷小量的和差为无穷小量. ($0 \pm 0 = 0$).

[推论] 将"两个"改为"有限多个", 上述定理仍成立.

[定理] 有界量与无穷小量的乘积为无穷小量. 特别地, 两个无穷小量相乘仍为无穷小量.

e.g. 求 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sin n$.

解: 由于当 $n\to\infty$ 时, $\frac{1}{n}$ 为无穷小量, $\sin n$ 是有界量,

因此 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sin n = 0$.

物理系的大门用

即 $\lim_{n\to\infty} q^n = 1$.

[定理] 两个无穷小量的和差为无穷小量. ($0 \pm 0 = 0$).

[推论] 将"两个"改为"有限多个", 上述定理仍成立.

[定理] 有界量与无穷小量的乘积为无穷小量. 特别地, 两个无穷小量相乘仍为无穷小量

eg. 求 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sin n$.

解: 由于当 $n\to\infty$ 时, $\frac{1}{n}$ 为无穷小量, $\sin n$ 是有界量,

因此 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sin n = 0$.

2. 无穷小量是一个以0为极限的变化过程

3. 无穷小量的高——引入无穷大量.

(1) 定义: 对于给定数列 $\{a_n\}_1^\infty$, 若对于任给的大的数 $K>0$, 总有 $N = N(K)$, 使得当 $n>N$ 时, 有 $|a_n| > K$ (*) 成立, 则称数列 $\{a_n\}_1^\infty$ 是一个无穷大量, 记成 $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

(2) 注意: 当(*)改为 $a_n > K\ (\forall n>N)$ 时,

称 $\{a_n\}_1^\infty$ 为正的无穷大量, 即 $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

当(*)改为 $a_n < -K\ (\forall n>N)$, 则 $\{a_n\}_1^\infty$ 为负的无穷大量, 即 $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

(3) [定理] 若 $\{a_n\}_1^\infty$ 为无穷小量且 $a_n \neq 0$, 则 $\{\frac{1}{a_n}\}_1^\infty$ 为无穷大量. 反之亦然.

证明: ∵ $\{a_n\}_1^\infty$ 为无穷小量即 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

∴ 为证明 $\{\frac{1}{a_n}\}_1^\infty$ 为无穷大量, 要求 $\forall K>0$ 无论怎么大, $\exists N = N(K)$ 使得当 $n>N$ 时 $|\frac{1}{a_n}| > K$.

∵ $a_n \neq 0$.

$\Leftarrow$ 上述不等式等价于 $|a_n|<\frac{1}{k}$ (*)

而(*)的成立只需令 $\varepsilon=\frac{1}{k}$ 即可.

也即 $\forall \varepsilon=\frac{1}{k}>0$, $\exists N$, 使得 $n>N$ 时 $|a_n|<\varepsilon$.

$\Leftarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=\infty$, 故 $\{a_n\}$ 为无穷大量.

(标准写法: $\forall K>0$, 不管它多大, 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, 故对 $\forall \varepsilon=\frac{1}{K}>0$, $\exists N=N(\varepsilon)=N(K)$, 使得 $n>N$ 时 $|a_n|<\frac{1}{K}$. 又 $a_n\neq 0$, 故上述不等式等价于 $\left|\frac{1}{a_n}\right|>K$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=\infty$.)

(4)还需注意:

① 实数系中不存在 ∞, $\pm\infty$ 这种数. 由此可见, 不存在运算 $\infty=\frac{1}{0}$, 即0不可以做除数(运算非封闭).

② 两个无穷小量作除法, 实为极限理论的重要组成部分, 这是因为做除法之后会出现各种情况.

e.g. 取 $a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=\frac{1}{n^2}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_n}=1$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}n=+\infty$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

③ 接着②, 我们将无穷小量相除称为"$\frac{0}{0}$型". 能定型的变化过程, 也叫"未定式". 求未定式的极限是重要工作.

2.5 单调有界数列的极限

[定理] 单调有界数列必有极限.

(此定理的证明需用到实数理论).

e.g. 单调上升数列 $a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_n\leq\cdots\leq M$ (常数)

GuangBo

单调下降数列 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots \geq M'$.

(注：上界的最小值叫上确界，下界的最大值叫下确界)

对上述的极限，实为数列的上(下)确界。

Eg. $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$, $n=1,2,\cdots$. 求证：$\{a_n\}$ 收敛。

即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在.

注：要求证的 $\{a_n\}$ 单调而有界.

(1) 证明 $\{a_n\}$ 单调上升. 事实上，由二项式定理知，

$$a_n = (1+\frac{1}{n})^n = 1 + \frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n!}{n!}(\frac{1}{n})^n \quad (*)$$

$$= 1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) + \cdots + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})$$

同理，$a_{n+1} = 1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n+1}) + \cdots + \frac{1}{(n+1)!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\cdots(1-\frac{n}{n+1})$.

可见，这个展开式中，从第三项起，a_{n+1} 的每一项均大于 a_n 的对应项，并且 a_{n+1} 还多一项，故 $a_{n+1} > a_n$, $\{a_n\}$ 单调上升.

(2) 证明 $\{a_n\}$ 有界. 由 $(*)$ 知

$$0 < a_n < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

$$< 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$= 1+\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} < 1+2 = 3.$$

现 $\{a_n\}$ 单调上升且上有界，从而 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在.

记这个极限为 e，故

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e \approx 2.71828\cdots$$

e 也叫"自然对数底".

GuangBo

No. 16 Date: 9.12

(注：$e^{i\pi}+1=0$ 被称为"欧拉公式".)

eg: ① 求 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{2}{n})^n$.

解：原式 $=\lim_{n\to\infty}[(1+\frac{1}{\frac{n}{2}})^{\frac{n}{2}}]^2=[\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{\frac{n}{2}})^{\frac{n}{2}}]^2=e^2$.

② 设 $x_1=2$, $x_{n+1}=2+\frac{1}{x_n}$, $n=1,2\cdots$, 判断 $\{x_n\}$ 是否收敛? 若收敛, 求其极限.

解：(解法一) $\forall n$, $x_n>0$.

∴ 由通推式可得 $x_n>2$. ∴ $\frac{1}{x_n}<1$.

∴ $0<x_n=2+\frac{1}{x_{n-1}}<2+1=3$. $(n\geq 2)$.

∴ $0<x_1<3$

∴ $\{x_n\}$ 有界.

$x_{n+1}-x_n=(2+\frac{1}{x_n})-(2+\frac{1}{x_{n-1}})=\frac{x_{n-1}-x_n}{x_nx_{n-1}}$.

$=-\frac{x_n-x_{n-1}}{x_nx_{n-1}}$.

由此, $x_{n+1}-x_n$ 与 x_n-x_{n-1} 异号, 故 $\{x_n\}$ 不是整体单调.

但是, $x_{n+2}-x_n=-\frac{x_{n+1}-x_{n-1}}{x_{n+1}x_{n-1}}=\frac{x_n-x_{n-2}}{x_{n+1}x_{n-1}x_nx_{n-2}}$.

故 $x_{n+2}-x_n$ 与 x_n-x_{n-2} 同号.

∵ $x_1=2$, $x_2=\frac{5}{2}$, $x_3=\frac{12}{5}$, $x_4=\frac{29}{12}$.

∴ $x_4-x_2=-\frac{1}{12}<0$, $x_3-x_1=\frac{2}{5}>0$

∴ $\{x_{2n-1}\}_1^\infty$ 单调上升, $\{x_{2n}\}_1^\infty$ 单调下降.

从而 $\lim_{n\to\infty}x_{2n}$ 与 $\lim_{n\to\infty}x_{2n-1}$ 均存在.

设它们分别为 A 与 B.

利用通推式, $x_{n+1}=2+\frac{1}{x_n}$.

两边分别在 n 为奇数偶数取极限, 有

$\begin{cases} B=2+\frac{1}{A} \\ A=2+\frac{1}{B} \end{cases}$ 解得 $A=B=\sqrt{2}+1$.

$\therefore \lim_{n\to\infty} x_n = A = B = \sqrt{2}+1$.

(解法二) 易证 (见解法一), $x_n > 2$.

若 $A=\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在, 则在递推关系两边取极限, 则

$$A = 2+\frac{1}{A} \quad (A>2).$$

于是 $A = 1+\sqrt{2}$.

$$\therefore 0<|x_n-A| = \left|(2+\frac{1}{x_{n-1}})-(2+\frac{1}{A})\right| = \frac{|x_{n-1}-A|}{Ax_{n-1}} < \frac{1}{2}|x_{n-1}-A|.$$

$$< \cdots < \frac{1}{2^{n-1}}|x_1-A|$$

而 $|x_1-A|$ 为有界量, $\frac{1}{2^{n-1}}$ 为无穷小量.

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{|x_1-A|}{2^{n-1}} = 0.$$

由夹逼定理知 $\lim_{n\to\infty}|x_n-A|=0$.

$$\therefore \lim_{n\to\infty} x_n = A = 1+\sqrt{2}.$$

2.6 Cauchy 收敛准则

1. 在极限定义中, 一定要先知道极限再验证, 进而极限往往不能事先知道. Cauchy 的准则可以在不知道极限的值时证明一个数列收敛.

2. Cauchy 收敛准则: 数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是:

$\forall \varepsilon>0$ (不管如何小), 总 $\exists N=N(\varepsilon)$, 使得当 $m, n>N$ 时,

$$|a_m-a_n|<\varepsilon \text{ 成立}.$$

(作业: 证明 Cauchy 准则的必要性, 即由收敛得为后续证明).

GuangBo

18 9.12

例：① 证明：数列 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$（调和数列，$n=1,2\cdots$）是发散的

（分析：利用 Cauchy 准则，即要求 $\exists \varepsilon_0>0$，对 $\forall N$，$\exists m_0, n_0\geq N$，使得 $|a_{n_0}-a_{m_0}|\geq\varepsilon_0$）.

证明：取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$，那么对 $\forall N\in\mathbb{N}^*$，取 $n_0=N$，$m_0=2N$，

则 $|a_{2N}-a_N|=\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N+2}+\cdots+\frac{1}{2N}\geq\underbrace{\frac{1}{2N}+\frac{1}{2N}+\cdots+\frac{1}{2N}}_{N\text{个}}$

$=\frac{1}{2}=\varepsilon_0$.

$\therefore\{a_n\}$ 发散.

② 证明：$a_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 收敛.

证明：利用 Cauchy 准则. 假设 $m>n$.

先求 $|a_m-a_n|=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\cdots+(-1)^{m-n-1}\frac{1}{m}>0$.

（我们可以保证以上写法是正确的）

$\Rightarrow|a_m-a_n|=\frac{1}{n+1}-\left[\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}+\cdots+(-1)^{m-n}\frac{1}{m}\right]<\frac{1}{n+1}$.

$\forall\varepsilon>0$，只要 $\frac{1}{n+1}<\varepsilon$ 即可满足 Cauchy 准则. 即 $n>\frac{1}{\varepsilon}-1$

$\therefore$ 令 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $m>n>N$ 时，$|a_m-a_n|<\varepsilon$.

$\Rightarrow\{a_n\}$ 收敛.

物理系的允文君

19. 9.14

☆习题课(函数,数列)

一、函数

1. 概念:

$D\subseteq R$, $f: D\to R$, $x\to f(x)$ 满足 $\forall x\in D$, 有唯一 $y=f(x)$ 与之对应, 则称 $f(x)$ 是定义在 D 上按法则 f 的一个函数.

e.g. $x^2+y^2=1$ 确定的 y 与 x 关系不是函数. $y=\pm\sqrt{1-x^2}$.

只有上半/下半个圆才是函数.

2. 性质 { 单调性 / 周期性 / 奇偶性 / 有界性

3. 运算 { 四则运算(逆定加减乘除) / 复合($D_{f\circ g}=\{x\mid x\in D_g, g(x)\in D_f\}$) / 反函数($D_f\leftrightarrow R_f$ 互换)

4. 初等函数类 { 6种基本初等函数($C, x^\alpha, a^x, \log_a x, \sin x, \arcsin x$) / 更多初等函数(以上函数的有限次运算) / 超越函数

5. 函数图象 —— 几何化与代数化. (微积分发展的基础).

[例]① 求函数 $y=\sqrt{\frac{(x-1)^2}{x-3}}$ 的定义域.

解: x 满足 $\begin{cases}\frac{(x-1)^2}{x-3}\geq 0 \Rightarrow x-1=0 \text{ 或 } x-3>0.\\ x-3\neq 0\end{cases}$

$\Rightarrow D=\{1\}\cup(3,+\infty)$. ($\{1\}$ 不要忘记)

② 证明 $y=f(x)=x\sin x$ 是 R 上的无界函数.

证明：用反证法，若$f(x)$在R有界，则$\exists$绝对常数$M>0$
使$|x\sin x|\le M$对$\forall x\in R$成立。
但是取$x_n=2n\pi+\frac{\pi}{2}$代入上式，则
$$M\ge|f(x_n)|=2n\pi+\frac{\pi}{2}.$$
可见，当n很大时(如$n>\max\{1,[\frac{M-\frac{\pi}{2}}{2\pi}]\}$)，$M\ge 2n\pi+\frac{\pi}{2}$
不成立，矛盾。
$\therefore f(x)$在R上无界。

③设$f(x)=\begin{cases}\sqrt{2x}, & x>0\\ 0 & x\le 0,\end{cases}$求$f(f(x))$.

解：由复合运算可见$f(f(x))=\begin{cases}\sqrt{2f(x)}, & f(x)>0\\ 0, & f(x)\le 0,\end{cases}$

$=\begin{cases}\sqrt{2\sqrt{2x}}, & x>0\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$

④试将$y=F(x)=\ln(1+\sin^2 2x)$，$x\in R$拆成若干个简单函数的复合。

解：$f(x)=\ln x$，$D_f=(0,+\infty)$.
$g(x)=1+x^2$，$D_g=R$.
$h(x)=\sin x$，$D_h=R$
$j(x)=2x$，$D_j=R$
则$F=f\circ g\circ h\circ j$.

【注：对于$f(g(x))=f\circ g(x)$，一般看成$y=f(u)$，$u=g(x)$，

u为中间变量.

二、数列的极限.

1. 数列可以看成定义在N_+上的函数 $a_n=f(n)$.

注① $\{a_n\}$中的每个数都必须是实数.

② n下标定义可以从0甚至负整数开始,但不可以从$-\infty$开始

2. 极限的定义 ($\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$是数列$\{a_n\}$经过极限运算后所得的结果) ($\varepsilon$-N语言)

($\lim\limits_{n\to\infty}a_n$是数列中主要的研究对象).

3. (解决如何求极限)收敛数列的性质.

设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$.

① 四则运算.

② 唯一性: 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$, 则A是唯一的.

(可用ε-N语言证明).

③ 有界性(收敛数列必有界).

④ 有序性($a_n\le b_n\Rightarrow A\le B$.)

⑤ 夹逼性(夹条件与逼条件)

⑥ $\{a_n\}$收敛于A$\Leftrightarrow$$\{a_n\}$任一子列均收敛于A.

4. 无穷小(大)量.

① $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0\Leftrightarrow\{a_n\}$是无穷小量. 无穷大量.

② 无穷小量的运算性质.(加,减,乘,(倒数)).

5. 单调有界数列必收敛

GuangBo

No. 22 Date: 9.14

① $e=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$.

② Stolz定理可以用于递推式求极限.

③ (Stolz定理) 设$\{a_n\}$严格单调上升且趋于无穷大, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}=a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=a$.

6. Cauchy 收敛准则.

否命题: $\{a_n\}$发散 $\Leftrightarrow$ $\exists\varepsilon_0>0$, 对 $\forall N$, $\exists m_0, n_0>N$, 有 $|a_{m_0}-a_{n_0}|\geq\varepsilon_0$ $\Leftrightarrow$ $\{a_n\}$存在发散子列或存在两个极限不等的子列.

[例] ① 计算以下极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n})$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\cos^2 n}{n^2+n+2}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n$.

解: (1) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\frac{2}{2}=1$

(2) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cos^2 n}{n+1+\frac{2}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}(\cos^2 n\cdot\frac{1}{n+1+\frac{2}{n}})=0$.

(3) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n-1}{n})^n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n-1})^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}\cdot(1+\frac{1}{n-1})}$

$=\frac{1}{e\times 1}=\frac{1}{e}$.

② (1) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=A$

(2) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$.

GuangBo

No. 23 Date: 9.14.

(1)证明：首先 $\forall \varepsilon>0$, $\exists N_1=N_1(\varepsilon)$, 当 $n>N_1$ 时, $|a_n-A|<\frac{\varepsilon}{2}$.

$\therefore \left\{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{N_1}-N_1A}{n}\right\}$ 为无穷小. (*)

$\therefore \forall \varepsilon>0$, $\exists N_2=N_2(\varepsilon)$, 当 $n>N_2$ 时,

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{N_1}-AN_1}{n}\right|<\frac{\varepsilon}{2} \quad (**)$$

$\therefore$ 取 $N=\max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$, 则当 $n>N$ 时, (*) 与 (**) 同成立.

从而 $\left|\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}-A\right|=\left|\frac{(a_1-A)+(a_2-A)+\cdots+(a_n-A)}{n}\right|$.

$$\leq\left|\frac{(a_1-A)+(a_2-A)+\cdots+(a_{N_1}-A)}{n}\right|+\left|\frac{(a_{N_1+1}-A)+\cdots+(a_n-A)}{n}\right|$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{n-N_1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}=A$.

(2)证明：$0\leq\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=\sqrt[n]{1\cdot\frac{1}{2}\cdots\frac{1}{n}}\leq\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}$

再利用(1)的结论可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}=0$.

由夹逼定理知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$.

$\forall a>0$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=+\infty$.

GuangBo

No. 24 Date: 9.14

③ 记 $a_1=\sqrt{2}$, $a_{n+1}=\sqrt{3+2a_n}$. $(n\geq 1)$. 证明其收敛并且求极限A.

证明：首先用数归证明

$0<a_{n+1}<\sqrt{3+2\times 3}=3$.

另外，$a_{n+1}-a_n=\sqrt{3+2a_n}-a_n=\dfrac{3+2a_n-a_n^2}{a_n+\sqrt{3+2a_n}}>0$.

$\therefore\{a_n\}$ 单调上升且有界，因此它有极限.

在递推关系中取极限，$A=\sqrt{3+2A}\Rightarrow A=3$ 或 $A=-1$ (舍去)

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}a_n=3$.

物理学的公式库

[推论] 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$, 且 $f(x)\le g(x)$ 在 x_0 附近成立, 则 $A\le B$. (极限的逆命题).

4. 复合运算下的极限.

设 $y=f(g(x))$ 被分成 $y=f(u)$, $u=g(x)$, 且 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$, $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$.

我们要注意的是, $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))=\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$ 不一定成立.

反例: $f(u)=\begin{cases}0, & u=0\\ 1, & u\neq 0,\end{cases}$ $g(x)=x\sin\frac{1}{x}$.

则 $f\circ g(x)=\begin{cases}0, & x\sin\frac{1}{x}=0\\ 1, & x\sin\frac{1}{x}\neq 0\end{cases}=\begin{cases}0, & x=\frac{1}{n\pi}\ (n\in\mathbb{Z})\\ 1, & x\neq\frac{1}{n\pi}\ (n\in\mathbb{Z})\end{cases}$.

取数列 $a_n=\frac{1}{n\pi}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} f\circ g(a_n)=0$.

取 $b_n=\frac{1}{n\pi+\frac{1}{2}}\neq\frac{1}{k\pi}\ (k\in\mathbb{Z})$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} f\circ g(b_n)=1$.

于是, $\lim\limits_{x\to 0} f\circ g(x)$ 不存在.

可见不可以用 $\lim\limits_{x\to 0} f\circ g(x)=\lim\limits_{u\to 0} f(u_0)=1$ 来求极限.

由此, 复合运算中极限不一定保持 (保持涉及到连续性).

参考书中的定理, 需求 $g(x)\neq u_0$ 才有

$$\lim_{x\to x_0} f\circ g(x)=A.$$

No. 31 Date: 9.19

三、单侧极限

1. 当 $x \to x_0$ 时，有两种趋近方式，从左或从右，我们把从一个方向趋向 x_0 的过程称为单侧极限。

2. 定义：$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, s.t. 当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时 $|f(x) - A| < \varepsilon$. （右极限），

（左极限 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$，则当 $0 < x_0 - x < \delta$.）.

3. [定理] $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$.

证明：① 必要性

$\because \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$. $\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, s.t. 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，$|f(x) - A| < \varepsilon$.

特别地，若 $0 < x - x_0 < \delta$ 或 $0 < x_0 - x < \delta$，则 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 显然成立.

$\therefore \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$.

② 充分性. $\because \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$.

$\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon, x_0)$, s.t. 当 $0 < x - x_0 < \delta_1$ 时，$|f(x) - A| < \varepsilon$.

又 $\exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon, x_0)$, 当 $0 < x_0 - x < \delta_2$ 时，$|f(x) - A| < \varepsilon$.

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$，则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，$|f(x) - A| < \varepsilon$.

$\therefore \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

e.g.① 符号函数 $y=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$.

可知 $\lim\limits_{x\to 0^+}\operatorname{sgn}(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}1=1$.

$\lim\limits_{x\to 0^-}\operatorname{sgn}(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-1)=-1\neq 1$.

故 $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sgn}(x)$ 不存在.

② 求 a,b 的值，使得 $f(x)\begin{cases}ax+1, & x>0\\ x^2-b, & x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的极限存在.

解：$\because \lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(ax+1)=1$.

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2-b)=-b$.

$\therefore -b=1$ 即 $b=-1$ 时，对于任意 $a\in R$，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在.

四、自变量趋于无穷时函数的极限.

1. 对于 $y=f(x)$，若 $D_f=(-\infty,C)\cup(C,+\infty)$（$C>0$ 为常数），考虑 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 这一重要情形.

2. 定义：$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$，$\exists M=M(\varepsilon)>0$，s.t. 当 $|x|>M$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

e.g. 验证 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$.

（取 $M=\frac{1}{\varepsilon}$ 即可）.

3. 注意：对于 $x\to\infty$ 也有单侧极限，即 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

（在定义中分别有 $x>M$ 与 $x<-M$）.

[定理] $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

GuangBo

① e.g. 讨论 $\lim_{x\to\infty}\arctan x$ 是否存在.

解: 由 $\arctan x$ 的性质可知

$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}\neq\frac{\pi}{2}$.

$\therefore \lim_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

② 证明 $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$.

(回忆 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$)

证明: 根据 $x\to\infty$ 的左右极限, 可证

$\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$.

1° $x\to+\infty$. 事实上, $\forall x>0$, 有 $[x]\leq x<[x]+1$

$\therefore (1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]}\leq(1+\frac{1}{x})^x\leq(1+\frac{1}{[x]})^{[x]+1}$

又 $\lim_{[x]\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]}=\lim_{[x]\to+\infty}\frac{(1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]+1}}{1+\frac{1}{[x]+1}}=\frac{e}{1}=e$.

$\lim_{[x]\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]})^{[x]+1}=\lim_{[x]\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]})^{[x]}\cdot(1+\frac{1}{[x]})=e\times1=e$.

$\therefore$ 由夹逼定理知 $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$.

2° $x\to-\infty$. 令 $t=-x$, 则 $t\to+\infty$.

$\therefore \lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\lim_{t\to+\infty}(1-\frac{1}{t})^{-t}=\lim_{t\to+\infty}(\frac{t-1}{t})^{-t}$

$=\lim_{t\to+\infty}(\frac{t}{t-1})^t=\lim_{t\to+\infty}(1+\frac{1}{t-1})^{t-1}\cdot(1+\frac{1}{t-1})=e\times1=e$.

GuangBo

于是 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$.

故 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$.

⊗ $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$ 与 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ 是重要极限.

⊗ $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

e.g. ① 求以下极限

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{4}{x^2})^x$ (2) $\lim\limits_{x\to0}(\frac{1+2\sin x}{1+\sin x})^{\frac{1}{x}}$.

解: (1) 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^x\cdot(1-\frac{2}{x})^x$

$=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^x\cdot\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{2}{x})^x$

$=\left[\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^{\frac{x}{2}}\right]^2\cdot\left[\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{2}{x})^{-\frac{x}{2}}\right]^{-2}$

$=e^2\cdot e^{-2}=1$.

(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to0}(1+\frac{\sin x}{1+\sin x})^{\frac{1}{x}}$

$=\lim\limits_{x\to0}\left[(1+\frac{\sin x}{1+\sin x})^{\frac{1+\sin x}{\sin x}}\right]^{\frac{\sin x}{x(1+\sin x)}}$

$=e^1=e$. (用到了三角函数连续性).

② 放射物的放射率与其含量成正比. 设初始时刻 $t=0$. 放射物质量为 m_0, 求该放射物在 t 时刻的质量 $m(t)$.

解: 注意到放射物随 t 减少, 故放射率也减少.

GuangBo

我们将 $[0,t]$ 分为 n 小时段

$$[0,\tfrac{t}{n}),[\tfrac{t}{n},\tfrac{2t}{n}),\cdots,[\tfrac{n-1}{n}t,t].$$

近似地，认为每一小段放射率恒定取值，为

$$km_0, km(\tfrac{t}{n}), \cdots, km(\tfrac{n-1}{n}t).$$

于是，$m(\frac{t}{n}) \doteq m_0 - km_0\frac{t}{n} = m_0(1-\frac{kt}{n})$.

$$m(\frac{2t}{n}) \doteq m(\frac{t}{n}) - k\cdot m(\frac{t}{n})\cdot\frac{t}{n} \doteq m(\frac{t}{n})(1-\frac{kt}{n}).$$

故 $m[\frac{(i+1)t}{n}] \doteq m(\frac{it}{n})(1-\frac{kt}{n}) \doteq m_0(1-\frac{kt}{n})^{i+1}$.

取 $i=n-1$,

于是 $m(t) \doteq m_0(1-\frac{kt}{n})^n$.

精确地说，$m(t) = \lim_{n\to\infty} m_0(1-\frac{kt}{n})^n$

$$= m_0\left[\lim_{n\to\infty}(1-\frac{kt}{n})^{-\frac{n}{kt}}\right]^{-kt} = m_0e^{-kt}.$$

§4 连续函数

设 $y=f(x)$, $x\in(a,b)$, 对 $\forall x_0\in(a,b)$, $f(x)$ 在 x_0 的一个邻域中有定义. 在 x_0 处让 x 有一个增量 Δx 即 $\Delta x = x-x_0$, 它会导致 y 发生改变, 即 $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. Δy 与 Δx 之间的关系大为重要, 它引起了我们对连续、导数、微分、积分的研究.

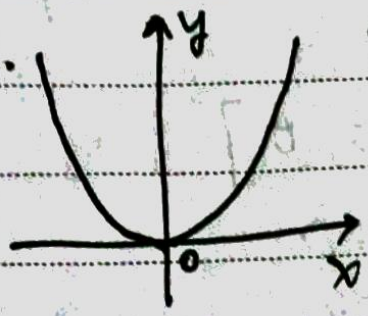
§4 连续函数

设 $y=f(x)$，$x\in(a,b)$，对 $\forall x_0\in(a,b)$，$f(x)$ 在 x_0 的一个邻域中有定义，在 x_0 处让 x 有一个增量 Δx，即 $\Delta x=x-x_0$，它会引发 y 发生改变，即 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，$\Delta y$ 与 Δx 之间的关系大为重要，它引起了我们对连续、导数、微分、积分的研究。

一、连续的概念

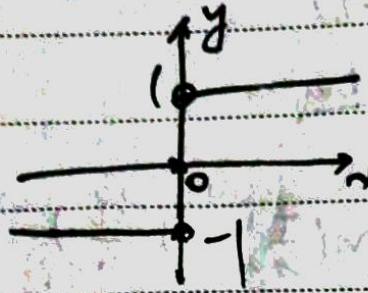
1. 设 $y=f(x)$，当 x 增加一个很小的 Δx 时，y 也会相应地增加 Δy，但 Δy 就一样。

GuangBo

e.g. 

$y=x^2$ 在 $x=0$ 处连续. Δx 趋于0时 Δy 可以很小.

即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$.



$y=\operatorname{sgn}x$ 在 $x=0$ 处不连续.

因为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\Delta y=1\neq 0$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\Delta y=-1\neq 0$.

2. 定义1: 假设 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某邻域 $U(x_0,\delta)$ 内有定义, 当 $x\in U(x_0,\delta)$, 令 $\Delta x=x-x_0$, $\Delta y=f(x)-f(x_0)$

$=f(x_0+\Delta x)-f(x)$, 若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ (*),

则称 $y=f(x)$ 在 x_0 处连续.

注 因为 $\Delta x\to 0$ 等价于 $x\to x_0$, $\Delta y\to 0$ 等价于 $f(x)\to f(x_0)$.

故 (*) 式可改写为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

当然, 此式也可以用 ε-δ 语言叙述, 即 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 当

$|x-x_0|<\delta$ 时 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

3. $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\Delta y=0\Leftrightarrow$ 右连续

$\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\Delta y=0\Leftrightarrow$ 左连续

} 单侧连续.

4. 若 $f(x)$ 在 x_0 处既左连续又右连续, 则它在 x_0 处连续.

5. 由以上定义可以看出, $y=f(x)$ 在 x_0 处连续有三个必要条件:

① $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有定义.

② $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在.

GuangBo

③ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

以上三个条件，任一不满足，则 $f(x)$ 在 x_0 处不连续.

e.g. 证明 $y=\sin x$ 在 R 上任一点都连续.

证明：$\forall x_0 \in R$. 则 $\Delta x = x - x_0$,

$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x_0 = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x_0+\frac{\Delta x}{2})$.

$\Delta x \to 0$ 时显然有 $|\Delta x| < \frac{\pi}{2}$.

故 $|\Delta y| \le 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right| \le |\Delta x|$.

即 $0 \le |\Delta y| \le |\Delta x|$. 而 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}|\Delta x| = 0$.

∴ 由夹逼性知 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}|\Delta y| = 0$, 故 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$.

∴ $y=\sin x$ 在 R 上任一点都连续.

二、连续函数的性质.

1. [定理] 假设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均在 x_0 处连续，则

$f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x_0)\neq 0$) 在 x_0 处连续

即 $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x)) = f(x_0)\pm g(x_0)$

$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = f(x_0)\cdot g(x_0)$

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$ ($g(x_0)\neq 0$).

2. [定理] 设 $y=f(u)$ 在 u_0 处连续，$u=g(x)$ 在 x_0 处连续.

则 $y=f\circ g(x)$ 在 x_0 处连续.

证明：∵ $y=f(u)$ 在 u_0 处连续

∴ $\forall \varepsilon>0$, $\exists \eta>0$, 使得当 $|u-u_0|<\eta$ 时 $|f(u)-f(u_0)|<\varepsilon$.

∵ $u=g(x)$ 在 x_0 处连续.

∀给上述 $\eta>0$，$\exists \delta>0$，使得当 $|x-x_0|<\delta$ 时

$|u-u_0|=|g(x)-g(x_0)|<\eta$.

(这一步相当于用 η 代替 ε，或者说令 $\varepsilon=\eta$).

于是对 $\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时

$|f\circ g(x)-f\circ g(x_0)|<\varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{x\to x_0} f\circ g(x)=f\circ g(x_0)$.

$\therefore f[g(x)]$ 在 x_0 处连续.

※ 对于连续函数，函数运算与极限运算可以交换.

如 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(\lim\limits_{x\to x_0} x)=f(x_0)$.

于是上述定理也可以用 $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))=f(\lim\limits_{x\to x_0} g(x))$

$=f[g(x_0)]$ 来证明.

3. [定理] 若 $f(x)$ 是严格单调连续的，则其反函数 $f^{-1}(x)$ 是与之单调性相同的连续函数.

证明：e.g. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格增加且连续，则

$R_f=[\alpha,\beta]$，其中 $\alpha=f(a)$，$\beta=f(b)$.

并且，$\forall y_0\in[\alpha,\beta]$，$\exists$ 唯一 $x_0\in[a,b]$ 使 $f(x_0)=y_0$.

即 $y_0=f^{-1}(x_0)$.

$\forall \varepsilon>0$，要找 $\delta>0$，使得 $|y-y_0|<\delta$ 时，

$$|f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)|<\varepsilon.$$

即 $x_0-\varepsilon<f^{-1}(y)<x_0+\varepsilon$.

令 $y_1=f(x_0-\varepsilon)$，$y_2=f(x_0+\varepsilon)$，则 $y_1<y_0<y_2$，

∴取 $\delta=\min\{y_0-y_1, y_2-y_0\}$. 则

当 $|y-y_0|<\delta$ 时, $x_0-\varepsilon<f^{-1}(y)<x_0+\varepsilon$.

即 $|f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)|<\varepsilon$.

∴$f^{-1}(x)$ 在 y_0 处连续. 由 y_0 任意性可知 $f^{-1}(x)$ 在 (α,β) 上连续.

三、间断点及其分类.

1. 由连续的必要条件, 可知 $y=f(x)$ 在 x_0 处不连续有三种情况:

① $f(x)$ 在 x_0 处无定义.

② $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在.

③ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在但不等于 $f(x_0)$.

2. 三类基本的间断点

① 无穷间断点: $y=f(x)$ 在 x_0 处无定义, 并且

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty.$$

e.g. $y=\frac{1}{x}$, 则 0 是它的一个无穷间断点.

② 跳跃间断点: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 均存在但不相等.

e.g. $y=\operatorname{sgn}x$, $x=0$ 是一个跳跃间断点.

③ 可去间断点: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在但不等于 $f(x_0)$ (或 x_0 处无定义).

e.g. $y=\frac{\sin x}{x}$, 它在 $x=0$ 处无定义, 而 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

* 可去间断点可通过重新定义 $f(x_0)$ 使 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

如 $y=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处是连续的.

3. 间断点还有一些别的类型.

GuangBo

No. 40 Date: 9.21

eg $y=\sin\frac{1}{x}$ 在 $[-1,1]$ 上振荡，在 $x=0$ 处无定义，而 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 又不存在(而且不是无穷大)，故 $x=0$ 不是以上三类的间断点(是振荡间断点).

四. 区间上的连续函数.

1. 定义 如果在开区间 (a,b) 上任一点 x 处，$f(x)$ 都连续，则称 $f(x)$ 是 (a,b) 上的连续函数.

2. 定义 如果 $y=f(x)$ 在 (a,b) 上连续，并且在 $x=a$ 处右连续，在 $x=b$ 处左连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

3. [定理] 一切初等函数在其定义域内均连续.

(由此可知，若 $f(x)$ 为初等函数，且 $x_0\in D_f$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.)

五. 闭区间上连续函数的性质.

1. [有界定理] 设 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，即 $\exists M>0$ 使得对 $\forall x\in[a,b]$ 有 $|f(x)|\le M$

(也可以说 $\exists m,M>0$，$\forall x\in[a,b]$，$m\le f(x)\le M$)

#此定理对开区间不一定成立.

eg $y=\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上连续但无界 $(\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty)$.

2. [最值定理] 设 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有最大、最小值，即 $\exists x_1\in[a,b]$ 与 $x_2\in[a,b]$，使得对 $\forall x\in[a,b]$，有 $f(x_1)\le f(x)\le f(x_2)$.

(对开区间仍然不一定成立).

3. [介值定理] 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且最小值为 m，最大值为 M. 则对 $\forall C\in[m,M]$，$\exists\xi\in[a,b]$ 使 $f(\xi)=C$.

No. 41 Date: 9.21

※4. [零点存在定理] 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则 $y=f(x)$ 在 (a,b) 上至少有一个零点.

e.g. 证明 $x^3x-1=0$ 在 $(1,2)$ 内有一个实根并求其近似值，误差小于 $\frac{1}{10}$.

解: $f(1)\cdot f(2)=(-1)\cdot 5=-5<0 \Rightarrow (1,2)$ 内有实根.

$f(\frac{3}{2})=\frac{7}{8}>0 \Rightarrow$ 此根(设为 x_0)在 $(1,\frac{3}{2})$ 内.

$f(\frac{5}{4})=-\frac{19}{64}<0 \Rightarrow x_0\in(\frac{5}{4},\frac{3}{2})$.

$f(\frac{11}{8})=\frac{115}{512}>0 \Rightarrow x_0\in(\frac{5}{4},\frac{11}{8})$

取 $(\frac{5}{4},\frac{11}{8})$ 的中点 $\frac{21}{16}$，则 $|x_0-\frac{21}{16}|<|\frac{11}{8}-\frac{21}{16}|=|\frac{21}{16}-\frac{5}{4}|=\frac{1}{16}<\frac{1}{10}$.

∴取 $x_0\approx\frac{21}{16}$，误差小于 $\frac{1}{10}$.

※4. [零点存在定理] 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则 $y=f(x)$ 在 (a,b) 上至少有一个零点.

eg. 证明 $x^3x-1=0$ 在 $(1,2)$ 内有一个实根，并求其近似值，误差小于 $\frac{1}{10}$.

解: $f(1)\cdot f(2)=(-1)\cdot 5=-5<0 \Rightarrow (1,2)$ 内有实根.

$f(\frac{3}{2})=\frac{7}{8}>0 \Rightarrow$ 有根(设为 x_0)在 $(1,\frac{3}{2})$ 内.

$f(\frac{5}{4})=-\frac{19}{64}<0 \Rightarrow x_0\in(\frac{5}{4},\frac{3}{2})$.

$f(\frac{11}{8})=\frac{115}{512}>0 \Rightarrow x_0\in(\frac{5}{4},\frac{11}{8})$

取 $(\frac{5}{4},\frac{11}{8})$ 的中点 $\frac{21}{16}$，则 $|x_0-\frac{21}{16}|<|\frac{11}{8}-\frac{21}{16}|=|\frac{21}{16}-\frac{5}{4}|=\frac{1}{16}<\frac{1}{10}$.

∴取 $x_0\approx\frac{21}{16}$，误差小于 $\frac{1}{10}$.

(此解法有两个必要，因为满足值同号的区间中也可能有零点，我们只能说一定有一个零点近似为 $\frac{21}{16}$.)

六、连续型无穷小与无穷大.

1. 注意连续型无穷小(大)常强调 x 趋于哪个为 ∞, $-\infty$, $+\infty$, x_0, x_0^-, x_0^+, x_0. (数列仅考虑 $n\to\infty$).

2. 定义: 如果 $\lim\alpha(x)=0$，则称在此极限过程下，$\alpha(x)$ 为无穷小量，即 $\alpha(x)=o(1)$.

eg. $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$，故当 $x\to 0$ 时 $\sin x$ 为无穷小量.

3. 无穷小是一个很小的"变量"，而不是常数，并且它是否为无穷小与极限过程有关. 如 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x=1$，故不能说 $\sin x$ 一定是无穷小量，在 $x\to\frac{\pi}{2}$ 时就不是.

4. 无穷小的性质 → 设 $\lim\alpha(x)=\lim\beta(x)=0$，则

① $\alpha(x)\pm\beta(x)$ 仍为无穷小.

GuangBo

② $\alpha(x)\cdot\beta(x)$ 为无穷小.

③ 无穷小乘以有界量仍为无穷小.

④ 无穷小量的商未必为无穷小.

eg. 设 $\lambda>0$, 求 $\lim_{t\to+\infty} e^{-\lambda t}\sin(\omega t+\alpha)$

解: $\because |\sin(\omega t+\alpha)|\le 1$, $\lim_{t\to+\infty} e^{-\lambda t}=0$.

$\therefore \lim_{t\to+\infty} e^{-\lambda t}\sin(\omega t+\alpha)=0$.

5. 定义: 若 $\lim \frac{1}{f(x)}=0$, 则在此极限过程中 $f(x)$ 为无穷大量, 记作 $\lim f(x)=\infty$ (宽泛极限不存在)

6. 无穷大的性质: 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在某极限过程中为无穷大,

则 ① $f(x)\cdot g(x)$ 为无穷大.

② $f(x)\pm g(x)$ 与 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 也不一定是无穷大.

③ 无穷大乘以有界量也不一定是无穷大.

eg. $\lim_{x\to\infty} x^n=\infty$, $\lim_{x\to\infty} e^{-x^2}=0$ (有界)

但 $\lim_{x\to\infty} x^n e^{-x^2}=0$.

eg. $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x>0; \\ 0, & x\le 0. \end{cases}$ 考虑它的连续性.

解: 初等函数性质可知, $f(x)$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上连续.

而 $\lim_{x\to 0^-} f(x)=0$,

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x^2}}=0$.

$\therefore \lim_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$.

$\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 处也连续.

GuangBo

(f(x)在R上连续.

7. 无穷小的比较.

(1) 定义: 设 $\lim u(x) = \lim v(x) = 0$, 若 $\lim \frac{u(x)}{v(x)} = 0$, 则 $u(x)$ 是 $v(x)$ 的高阶无穷小, 即 $u(x) = o[v(x)]$.

eg. $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^3} = 0$, 而

$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$, 故 $\frac{1}{x^3} = o(\frac{1}{x^2})$.

(2) 若 $\lim \frac{u(x)}{v(x)} = \alpha \neq 0 \ (\alpha \in R)$, 则称在此极限下, $u(x)$ 与 $v(x)$ 为同阶无穷小, 即 $u(x) = O[v(x)]$.

eg $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}$. 故 $\sin x = O(2x)$.

(3) 特别地, 若 $\lim \frac{u(x)}{v(x)} = 1$, 则称 $u(x)$ 是 $v(x)$ 的等价无穷小. 即 $u(x) \sim v(x)$.

eg $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2} = 1$. 故 $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$, 即 $\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}$.

(4) 若 $\lim \frac{u(x)}{v(x)} = \infty$, 则 $v(x)$ 为 $u(x)$ 的高阶无穷小.

(5) $\lim f(x) = A \Leftrightarrow$ 在此极限下 $f(x) = A + o(1)$.

即 $u \sim v \Leftrightarrow u = v + o(v)$.

(6) 等价无穷小的意义在于, 可以在极限式中相互替换.

eg. ① $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} \xrightarrow{y = e^x - 1} \lim_{y\to 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}} = 1$.

$\because e^x - 1 \sim x$, $y \sim \ln(1+y)$.

GuangBo

② $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)-1}{x[(1+x)^{\frac{n-1}{n}}+(1+x)^{\frac{n-2}{n}}+\cdots+1]}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+x)^{\frac{n-1}{n}}+(1+x)^{\frac{n-2}{n}}+\cdots+1}=\frac{1}{n}$.

于是 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{\frac{x}{n}}=1$. 故

$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x$.

(事实上, $x\to 0$ 时, 对 $\forall\alpha\in R$, $(1+x)^{\alpha}\sim 1+\alpha x$,

因为 $(1+x)^{\alpha}=e^{\alpha\ln(1+x)}\sim 1+\alpha\ln(1+x)\sim 1+\alpha x$.)

③ $x=\sin(\arcsin x)\sim\arcsin x$. $(x\to 0)$

同理 $x\sim\arctan x$. $(x\to 0)$.

[定理] 设 $u(x)$, $v(x)$, $f(x)$ 为三个函数.

① 若 $u(x)\sim v(x)$, 且 $\lim f(x)\cdot u(x)=A$.

则 $\lim f(x)\cdot v(x)=A$.

② 若 $u(x)\sim v(x)$, 且 $\lim\frac{f(x)}{u(x)}=A$

则 $\lim\frac{f(x)}{v(x)}=A$

eg.① 求 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+xe^x)}{\ln(\sin x+\sqrt{1+x})}$.

解: $\because \ln(1+xe^x)\sim xe^x\sim x(1+x)\sim x$. $(x^2=o(x))$

$\ln(\sin x+\sqrt{1+x})=\ln(1+\sin x+\sqrt{1+x}-1)$

$\sim\sin x+\sqrt{1+x}-1\sim x+\frac{1}{2}x\sim\frac{3}{2}x$.

$\therefore$ 原式 $=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\frac{3}{2}x}=\frac{2}{3}$.

② 求 $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$.

解：由于 $x\sim\sin x$，此时将 $\sin x$ 换成 x 并不合理.

注意到 $\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$，故

$$x-\sin x \sim \frac{x^3}{6}.$$

∴原式 $=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^3}{x^3}=\frac{1}{6}$.

③ 求 $\lim_{x\to\infty} x^2(e^{\frac{2}{x^2}}-1)$.

解：$x\to\infty$ 时，$e^{\frac{2}{x^2}}-1\sim\frac{2}{x^2}$.

∴原式 $=x^2\cdot\frac{2}{x^2}=2$.

七、函数的渐近线.

1. 定义：① 设有曲线 $y=f(x)$ 与直线 $ax+b-y=0$.

若 $\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax-b)=0$，则该直线是 $y=f(x)$ 的斜渐近线 $(a\neq 0)$.（$a=0$ 时为水平渐近线）.

② 若 $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$，则直线 $x=x_0$ 是 $y=ax+b$ 的垂直渐近线.

2. a 与 b 的确定

∵ $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$.

∴ $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-ax-b}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-a\right)=0$.

∴ $a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$.

再 $b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)$.

e.g. 求 $f(x)=\frac{x^3}{(x-1)^2}$，$D_f=\{x|x\neq 1\}$ 的渐近线.

解：∵ $x\to 1$ 时 $f(x)\to\infty$. ∴ 有垂直渐近线 $x=1$.

∵ $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(x-1)^2}=1$.

No. 46 Date: 9.23

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{(x-1)^2}-x\right)=2$

∴ 有斜渐近线 $y=x+2$.

物理学的兵文君

No. 46 Date: 9.23, 9.26.

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{(x-1)^2}-x\right)=2$

∴ 有斜渐近线 $y=x+2$.

习题课

(一) 函数的极限

一、概念

1. ε-δ 定义

2. 两个重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

3. 数列极限与函数极限关系. (Heine 定理)

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall x_n\to x_0$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$.

二、证明函数极限是否存在

三、计算极限.

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 型

[例] ① 证明 $\lim\limits_{x\to 2} x^2=4$

证明：$\forall\varepsilon>0$, 要找 $\delta>0$, 当 $0<|x-2|<\delta$ 时, $|x^2-4|<\varepsilon$.

∵ $|x^2-4|=|x+2|\cdot|x-2|$.

不妨设 $|x-2|<1$. ($|x-2|$ 极小) 即 $-1<x<3$.

故 $|x+2|<5$.

∴ 要 $|x^2-4|<5|x-2|<\varepsilon$ 即 $|x-2|<\frac{\varepsilon}{5}$ 即可.

∴ 取 $\delta=\min\{\frac{\varepsilon}{5},1\}$, 即当 $0<|x-2|<\delta$ 时, $|x^2-4|<\varepsilon$

② 设 $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$.

证明 $\lim_{x\to\infty}|P(x)|=+\infty$

证明：对任M>0，要∃δ>0，使|x|>δ时|P(x)|>M.

∵$|P(x)|=|a_0x^n|\cdot\left|1+\frac{a_1}{a_0x}+\cdots+\frac{a_n}{a_0x^n}\right|$

$\geq|a_0x^n|\cdot\left|1-\left|\frac{a_1}{a_0x}+\cdots+\frac{a_n}{a_0x^n}\right|\right|$

而 $\lim_{x\to\infty}\left|\frac{a_1}{a_0x}+\cdots+\frac{a_n}{a_0x^n}\right|=0$.

∴∃E>0, s.t. |x|>E时 $\left|1-\left|\frac{a_1}{a_0x}+\cdots+\frac{a_n}{a_0x^n}\right|\right|>\frac{1}{2}$.

此时 $|P(x)|>\frac{1}{2}|a_0x^n|>M$

即，只需 $|x|>\sqrt[n]{\frac{2M}{|a_0|}}$ 即可.

∴令 $\delta=\max\left\{E,\sqrt[n]{\frac{2M}{|a_0|}}\right\}$，则当|x|>δ时 |P(x)|>M.

∴$\lim_{x\to\infty}|P(x)|=+\infty$.

2. 证某极限不存在.

[例] 设 $\lim_{x\to+\infty}(a\sin x+b\cos x)$ 存在，证明 a=b=0.

证明：取 $x_n=2n\pi\to+\infty$，$x_n'=(2n+1)\pi\to+\infty$.

则由 $\lim_{x\to+\infty}(a\sin x+b\cos x)$ 存在可知

$\lim_{n\to\infty}(a\sin 2n\pi+b\cos 2n\pi)=b=\lim_{n\to\infty}(a\sin(2n+1)\pi+b\cos(2n+1)\pi)$

$=-b\Rightarrow b=0$.

同理，取 $y_n=(2n+\frac{1}{2})\pi\to+\infty$，$y_n'=(2n+\frac{3}{2})\pi\to+\infty$.

GuangBo

No. 48 Date: 9.26.

可知 a=0.

于是 a=b=0.

3. 求极限的值.

(1) 利用两个重要极限

e.g. ① 求 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{\sin nx}$.

解: 原式 $=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin mx}{mx}}{\frac{\sin nx}{nx}}\cdot\frac{m}{n}=\frac{m}{n}$.

(注意: 当 $x\to 0$ 时, 何时 $\frac{\sin x}{x}\to 1$)

② 求 $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin mx}{\sin nx}$ $(m,n\in Z)$.

解: 令 $x-\pi=y$, 则 $x\to\pi$ 时 $y\to 0$.

$\therefore$ 原式 $=\lim_{y\to 0}\frac{\sin(m\pi+my)}{\sin(n\pi+ny)}=\lim_{y\to 0}\frac{(-1)^m\sin my}{(-1)^n\sin ny}=(-1)^{m-n}\cdot\frac{m}{n}$.

③ 求 $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$.

解: 利用 $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

设 $t=\tan x-1$. $\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

$\therefore$ 原式 $=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{2(t+1)}{-t(t+2)}}=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{-2(t+1)}{t+2}}$

$=\left[\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^{\lim_{t\to 0}\frac{-2(t+1)}{t+2}}=e^{-1}$.

④ 求 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$.

解: 原式 $=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\csc^2 x)^{-\frac{\tan x}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cot^2 x)^{\frac{1}{\cot^2 x}\cdot(-\frac{\cot x}{2})}$

$=e^0=1$.

GuangBo

(2) 利用夹逼性 $\left\{\begin{array}{l} f\le g\le h \\ \lim f=\lim h=A \end{array}\right\}\Rightarrow \lim g=A$

eg. 求 $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]$.

解: $\because x-1<[x]\le x$.

$\therefore \frac{1}{x}-1<\left[\frac{1}{x}\right]\le \frac{1}{x}$

1° $x\to 0^+$, 则 $1-x<x\left[\frac{1}{x}\right]\le 1$.

而 $\lim\limits_{x\to 0^+}(1-x)=1$.

$\therefore \lim\limits_{x\to 0^+} x\left[\frac{1}{x}\right]=1$.

2° $x\to 0^-$, 则 $1\le x\left[\frac{1}{x}\right]\le 1-x$.

同理, $\lim\limits_{x\to 0^-} x\left[\frac{1}{x}\right]=1$.

$\therefore \lim\limits_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]=1$.

(3) 利用恒等变形.

eg. ① 求 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(2x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+1}{2x+1}=\frac{2}{3}$.

($\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=1$. $\Rightarrow$ 看最低次幂).

($\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ 看最高次幂).

(4) 利用连续函数 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

(5) 洛必达法则.

(6) 等价无穷小的代换.

eg. ① 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\sqrt{1+x^2}-1)}{(1+x)^x-1}$

GuangBo

No. 5.0 Date: 9.26

解：$x\to 0$ 时 $\sin(\sqrt{1+x^2}-1)\sim \sqrt{1+x^2}-1\sim \frac{x^2}{2}$

$(1+x)^x-1=e^{x\ln(1+x)}-1\sim e^{x^2}-1\sim x^2$.

$\therefore$ 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{2}$.

② 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+3x^2}-\sqrt{1+4x^2}}{\tan^2 2x}$.

解：$x\to 0$ 时，$\sqrt[3]{1+3x^2}-\sqrt{1+4x^2}\sim 1+\frac{3}{3}x^2-\left(1+\frac{4}{2}x^2\right)$

$=-x^2$.

$\tan^2 2x\sim (2x)^2=4x^2$.

$\therefore$ 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-x^2}{4x^2}=-\frac{1}{4}$.

(6) Taylor 展开与高阶等价代换.

(略. 如 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}$).

(二) 连续函数

一、极无念

1. 三种定义

2 间断点及其分类.

3. 开、闭区间上连续函数的性质

4. 渐近线

5. 无穷小与无穷大.

2. 判断函数的连续性.

物理研究生

[例] ① 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{|x|}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ 判断其连续性

解: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}=-1$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1\neq -1$.

$\Rightarrow x=0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点.

② 求 $f(x)=[x]+[-x]$ 的间断点.

解: 首先, $f(x)$ 为偶函数.

其次, 当 $x\in\mathbb{Z}$ 时, $f(x)=0$.

再次, 当 $x\notin\mathbb{Z}$ 时. 不妨设 $x>0$ 且 $\{x\}=x-[x]$.

于是 $f(x)=[x]+[-x-(1-\{x\})]=-1$.

$\therefore x\in\mathbb{Z}$ 时的 $f(x)$ 的可去间断点.

③ 求 $f(x)=\operatorname{sgn}(\sin x)$ 的间断点.

解: 1° 当 $x=k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$ 时 $f(x)=0$.

2° 当 $x\in(2k\pi, 2k\pi+\pi)$ 时, $f(x)=1$.

3° 当 $x\in(2k\pi-\pi, 2k\pi)$ 时, $f(x)=-1$.

三、连续函数的运用

[例] 设 $f(x)$ 对 R 上任意 x 有 $f(x^2)=f(x)$, 并且 $f(x)$ 在 $x=0$ 与 $x=1$ 处连续. 证明: $f(x)$ 在 R 上是常数函数.

证明: 1° $x>0$ 时, $f(x)=f(x^{\frac{1}{2}})=f(x^{\frac{1}{4}})=\cdots=f(x^{\frac{1}{2^n}})=\cdots$

$\therefore f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f(x^{\frac{1}{2^n}})$.

$\because f(x)$ 在 $x=1$ 处连续, 且 $n\to\infty$ 时 $x^{\frac{1}{2^n}}\to 1$.

GuangBo

∴ $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x^{\frac{1}{2^n}}) = f(1)$.

即 $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x^{\frac{1}{2^n}}) = f(1)$.

2° $x<0$ 时, $x^2>0$.

$f(x) = f(x^2) = f(1)$.

3° $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(1)$.

∴ 对 $\forall x\in R$, $f(x) = f(1)$.

∴ $f(x)$ 是 R 上的常数函数.

四. 渐近线.

[例] 求 $f(x) = (3x-1)e^{\frac{1}{x-1}}$ 的渐近线.

解: ∵ $f(x)$ 在 $x=1$ 处无定义, 且 $x\to 1$ 时 $f(x)\to\infty$.

∴ $f(x)$ 有垂直渐近线 $x=1$.

又 $\lim_{x\to+\infty}(3-\frac{1}{x})e^{\frac{1}{x-1}} = 3$.

$\lim_{x\to+\infty}[(3x-1)e^{\frac{1}{x-1}} - 3x] = \lim_{x\to+\infty}[3x(e^{\frac{1}{x-1}}-1) - e^{\frac{1}{x-1}}]$

$= \lim_{x\to+\infty}(\frac{3x}{x-1} - e^{\frac{1}{x-1}}) = 3-1 = 2$.

∴ 还有斜渐近线 $y = 3x+2$.

五. 零点定理.

[例] 设 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 上连续, $f(0) = f(2a)$, 证明 $\exists \xi\in[0,a]$, 使 $f(\xi) = f(\xi+a)$ (ξ 可能不等于 a)

证明: 令 $g(x) = f(x) - f(x+a)$.

则 $g(0) = f(0) - f(a)$, $g(a) = f(a) - f(2a) = f(a) - f(0)$

1° $f(0) = f(a) \Rightarrow$ 取 $\xi\in\{0,a\}$.

2° $f(0)\neq f(a) \Rightarrow g(0)\cdot g(a) < 0 \Rightarrow \exists \xi\in(0,a)$ 使 $g(\xi) = 0$

GuangBo

No. 53 Date: 9.26.

设, $\exists \varphi \in [0, q]$, 有 $f(\varphi) = f(\varphi + q)$.

② 用幂函数代替无穷小量: $\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}$.

解: 原式 $= [(1+2x)^3]^{\frac{1}{6}} - [(1+3x)^2]^{\frac{1}{6}}$

$$= \frac{(1+2x)^3 - (1+3x)^2}{[(1+2x)^3]^{\frac{5}{6}} + [(1+2x)^3]^{\frac{4}{6}}[(1+3x)^2]^{\frac{1}{6}} + \cdots + [(1+3x)^2]^{\frac{5}{6}}}$$

$$= \frac{8x^3 + 3x^2}{(\cdots)\text{略}} \sim \frac{3x^2}{1 \times 6} = \frac{x^2}{2}.$$

第二章 导数与微分

*在研究 $y=f(x)$ 在 x_0 处的局部性质时引入 $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. 通过 $\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$ 即 $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ 得到 $f(x)$ 在 x_0 处的连续性. 下面还要继续讨论 Δx 与 Δy 的关系.

§1 导数

一、速度

*设质点直线运动的方程是 $S=S(t)$. 求质点在 $t=t_0$ 时的速度.

⇒ 设时间在 t_0 处有一个增量 Δt, 则它在 $[t_0, t_0+\Delta t]$ 时运动的路程为 $S(t_0+\Delta t)-S(t_0)$.

于是在这段时间内的速度 $\bar{v} = \dfrac{S(t_0+\Delta t)-S(t_0)}{\Delta t}$.

平均

GuangBo

No. 54 Date: 9.28

瞬时速度 $v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$.

二、切线问题

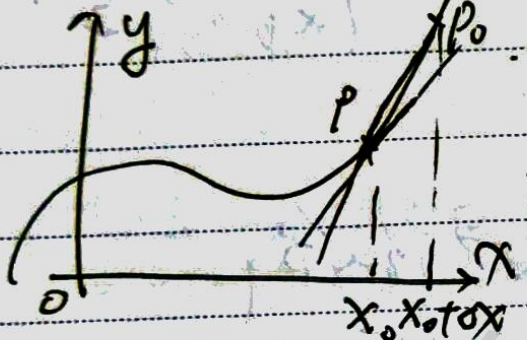
求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的切线.

即设法在上求曲线在 $x=x_0$ 处的变化率 k_{x_0}.

则切线为 $y-y_0=k_{x_0}(x-x_0)$.

那么，k_{x_0} 怎么求？

⇒ 设 x_0 处有一增量 Δx，则割线的斜率



$k_{割}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

那么，一旦切线存在，则

$k_{x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

则切线方程可求.

三、导数的定义

1. 定义：导数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数，被定义为

$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

若上述极限存在，则 $f(x)$ 在 x_0 处可导. 这个导数被写为 $f'(x_0)$ 或 $\frac{dy}{dx}\big|_{x=x_0}$ 或 $\frac{df(x)}{dx}\big|_{x=x_0}$，也叫 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的变化率.

2. 左、右导数：若 $\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在，

GuangBo

则称此极限为 $y=f(x)$ 在 x_0 处的左导数，记为 $f'(x_0-0)$ 或 $f'(x_0^-)$.

同理，$\Delta x\to 0^+$ 时，有右导数的概念.

3. [定理] 设 $y=f(x)$ 在 x_0 的一个邻域 $U(x_0,\delta)$ 上有定义，则 $f(x)$ 在 x_0 处可导 $\Longleftrightarrow$ $f'(x_0^-)=f'(x_0^+)=f'(x_0)$ 均存在.
(即左右导数都存在并且相等).

eg. 设 $\varphi(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，讨论 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 处可导并求 $\varphi'(0)$.

解：由导数定义可知，$\varphi'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\varphi(0+\Delta x)-\varphi(0)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\varphi(\Delta x)-\varphi(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x^2\sin\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\Delta x\sin\dfrac{1}{\Delta x}\right)=0.$

$\therefore\varphi(x)$ 在 $x=0$ 处可导且 $\varphi'(0)=0$.

② 讨论绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geq 0\\ -x, & x<0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的可导性.

解：先求左、右导数.

$f'(0^-)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{-\Delta x}{\Delta x}=-1.$

$f'(0^+)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\Delta x}{\Delta x}=1.$

$\because f'(0^-)\neq f'(0^+)$. $\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

GuangBo

4. 注意：① 不可导函数还有可导函数.

② 存在连续而连续不可导的函数，但这种函数要通过初等函数来构造几乎不可能，常用到超越函数.

5. 连续与可导的关系.

1. [定理] 设 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，则它必在 x_0 处连续，反之则不一定（连续未必可导，$y=|x|$ 即为反例）.

证明：设 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \text{ 存在}.$$

故 $\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\Delta x\right)=\lim_{\Delta x\to 0}f'(x_0)\cdot\Delta x=0.$

$\therefore f(x)$ 在 x_0 处连续. [推论 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处间断，则它在 $x=x_0$ 处不可导]

例. 设 $f(x)=\begin{cases}\sin a(x-1), & x\le 1\\ \ln x+b, & x>1\end{cases}$

确定常数 a,b，使得 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导.

解：$\because f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，$\therefore f(x)$ 也在 $x=1$ 处连续.

$\therefore \lim_{x\to 1^+}f(x)=b=\lim_{x\to 1^-}=0\Rightarrow b=0.$

于是 $f'(1^+)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x}{x-1}$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln(1+x-1)}{x-1}=1.$$

$f'(1^-)=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{\sin a(x-1)}{x-1}=a.$

即 $a=1$.

综上可知 $\begin{cases}a=1\\b=0\end{cases}$ 时 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导.

2. 假定 $f(x)$ 在 (a,b) 或 $[a,b]$ 内连续且可导，那么让 x 在这个区间内运动，可以得到 $f(x)$ 的导函数 $y=f'(x)$，$x\in(a,b)$（或 $[a,b]$）.

§2 求导运算

* 在定义导数后，主要解决如何求导的问题. 在此先解决初等函数的求导问题.

一、n个基本初等函数的导数.

1° $f(x)=C\Rightarrow f'(x)=0$.

证明：$\forall x\in\mathbb{R}$，$\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{C-C}{\Delta x}=0$.

2° 幂函数 $f(x)=x^n(n\in\mathbb{Z})$

$\Rightarrow f'(x)=nx^{n-1}$.

注：该公式对 $\forall\alpha\in\mathbb{R}$（即 $f(x)=x^\alpha$）都成立，但一般只证 $n\in\mathbb{Z}$ 时.

证 $n\in\mathbb{Z}$ 时，$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{x^n-x^n+nx^{n-1}\Delta x+\cdots}{\Delta x}$

略去高阶无穷小 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{nx^{n-1}\Delta x}{\Delta x}=nx^{n-1}$.

GuangBo

No. 58 Date: 9.28

3° $f(x)=e^x \Rightarrow f'(x)=e^x$.

证: $f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x+\Delta x}-e^x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^x(e^{\Delta x}-1)}{\Delta x}\overset{\text{小量代换}}{=}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^x\cdot\Delta x}{\Delta x}$

$=e^x$.

注: 若 $a>0$ 且 $a\neq 1$, 则 $(a^x)'=a^x\ln a$.

4° $f(x)=\sin x \Rightarrow f'(x)=\cos x$.

$f(x)=\cos x \Rightarrow f'(x)=\sin x$.

证: $f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin x(\cos\Delta x-1)+\cos x\sin\Delta x}{\Delta x}$

$=\sin x\cdot 0+\cos x\cdot 1=\cos x$.

二、导数四则运算.

1. 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 x 处可导, 则

① $[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$.

② $[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$.

③ 当 $g(x)\neq 0$ 时, $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$.

②的证明: (①③为作业)

设 $F(x)=f(x)\cdot g(x)$, 其中 f 与 g 在 x 处可导. (自变量任意可导处连续).

对于 x 处的一个增量 Δx, 它导致 F 的增量.

为 $\Delta F=f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)$.

GuangBo

$= f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x+\Delta x) + f(x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)$

$= (f(x+\Delta x)-f(x))g(x+\Delta x) + f(x)(g(x+\Delta x)-g(x))$.

$= (\Delta f)\cdot g(x+\Delta x) + (\Delta g)\cdot f(x)$.

$\therefore \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}\cdot g(x+\Delta x) + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta g}{\Delta x}\cdot f(x)$,

$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0} g(x+\Delta x) + \left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta g}{\Delta x}\right)\cdot f(x)$.

$= f'(x)\cdot g(x) + g'(x)\cdot f(x)$.

这个法则也叫莱布尼茨法则. [推论: $(Cf(x))' = Cf'(x)$.

eg. ① 求 $F(x) = 2x^2 + 3x + 1$ 的导数

解: $F'(x) = 4x + 3$.

② 求 $f(x) = 3e^x + x^2\sin x$ 的导数.

解: $f'(x) = 3e^x + 2x\sin x + x^2\cos x$.

2. 莱布尼茨法则对 n 个也成立:

$(u_1u_2\cdots u_n)' = u_1'u_2u_3\cdots u_n + u_1u_2'\cdots u_n + \cdots + u_1u_2\cdots u_{n-1}u_n'$.

eg. 求 $f(x) = \tan x$, $g(x) = \cot x$ 的导数.

解: $f'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x\cdot\cos x - (-\sin x)\cdot\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$.

$g'(x) = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(-\sin x)\cdot\sin x - \cos x\cdot\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$.

GuangBo

No. 10 Date: 9.30

三、复合函数求导法则

1.[定理]链式法则:若 $u=\varphi(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导,同时 $y=f(u)$ 在 $u=u_0=\varphi(x_0)$ 处可导,则 f 与 φ 的复合函数 $y=f\circ\varphi(x)=f(\varphi(x))$ 在 $x=x_0$ 处可导,

并且 $[f\circ\varphi(x_0)]'=f'(\varphi(x_0))\cdot\varphi'(x_0)$.

证明:设 x 在 $x=x_0$ 处有一个增量 $\Delta x\neq 0$.

导致 $\Delta u=\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)$

而 $\varphi'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$.

同时导致了 $\Delta y=f(u_0+\Delta u)-f(u_0)$.

而 $f'(u_0)=\lim\limits_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}$.

于是对于复合函数 $y=f\circ\varphi(x)$ 而言,有

$\Delta y_{复}=f\circ\varphi(x_0+\Delta x)-f\circ\varphi(x_0)$.

$=f(\varphi(x_0+\Delta x))-f(\varphi(x_0))$

又 $\varphi(x_0+\Delta x)=\varphi(x_0)+\Delta u=u_0+\Delta u$.

$\therefore \Delta y_{复}=f(u_0+\Delta u)-f(u_0)=\Delta y$.

∵可导函数的连续 ∴$\Delta x\to 0$ 时 $\Delta u\to 0$.

$\therefore \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)=\lim\limits_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$.

$=f'(u_0)\cdot\varphi'(x_0)=f'(\varphi(x_0))\cdot\varphi'(x_0)$.

eg. ① 求 $f(x)=\sin 2x$ 与 $g(x)=\sin^2 2x$ 的导数.

解:根据链式求导法则,

$f'(x) \overset{2x=u}{=\!=\!=} (\sin u)' \cdot u' = \cos u \cdot 2 = 2\cos 2x.$

$g'(x) \overset{\sin 2x = a,\ 2x = b}{=\!=\!=\!=\!=} (a^2)' \cdot (\sin b)' \cdot b'$

$= 2a \cdot \cos b \cdot 2 = 4\sin 2x \cos 2x = 2\sin 4x.$

※ $[f\circ g\circ \varphi(x)]' = f'(g(\varphi(x))) \cdot g'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x).$

② 求一般指数函数 $f(x) = a^x$ ($a>0$, $a\neq 1$) 的导数.

解: $\because (e^x)' = e^x$

$\therefore f'(x) = (a^x)' = (e^{x\ln a})' = e^{x\ln a} \cdot (x\ln a)'$

$= a^x \cdot \ln a.$

③ 求一般幂函数 $f(x) = x^\mu$ 的导数. ($\mu \in R$).

(事实上, 一般的幂函数 $y = x^\mu$ 是用 $e^{\mu\ln x}$ 定义的.)

解: $f'(x) = (e^{\mu\ln x})' = e^{\mu\ln x} \cdot (\mu\ln x)' = \mu x^{\mu-1}$

而 $(\ln x)'$ 的求法, 请看下面.

四、反函数的导数.

1. 一般来说, 一个函数未必存在反函数. 但是, 如果一个函数在某个区间上单调, 则其反函数在该区间上存在, 且单调性与该函数一致. 进一步地, 若原来的函数在该区间上连续, 则反函数在对应区间上也连续.

2. [定理] (反函数求导法则) 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的严格单调的连续函数, $x_0 \in (a,b)$. 若 $f(x)$ 在 x_0 处可导且 $f'(x_0) \neq 0$, 则反函数 $f^{-1}(y)$ 在 $y_0 = f(x_0)$ 处也可导, 且

$$(f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

GuangBo

证明：$y=f(x)$ 严格单调.

$\because \Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 在 $\Delta x\neq 0$ 时恒为 0.

$\therefore \Delta x = f^{-1}(y_0+\Delta y)-f^{-1}(y_0)\neq 0$.

注意到 $f(x)$ 在 x_0 处连续，$f^{-1}(y)$ 在 y_0 处连续.

$\therefore \Delta x\to 0$ 时，$\Delta y\to 0$，反之亦然.

$\therefore$ 在 y_0 处，$(f^{-1}(y_0))' = \lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$

$= \left(\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)^{-1} = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

eg. ① 求对数函数 $y=\log_a x$ 的导数. $(a>0, a\neq 1)$

解：令 $f(x)=\log_a x$，则 $f^{-1}(y)=x=a^y$.（单调而连续）

由反函数求导法则，有

$$f'(x)=(\log_a x)' = \frac{1}{(a^y)'} = \frac{1}{a^y\ln a} = \frac{1}{x\ln a}.$$

（$\log_a x$：对 x 求导；a^y：对 y 求导）

特别地，$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.

② 幂函数：$(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$(\arcsin x)'$，$\arcsin x = y$，$y\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

$$= \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

No. 63 Date: 9.30

反正切的证明:

$(\arctan x)' \xrightarrow{\arctan x = y} \frac{1}{(\tan y)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$

二. 基本初等函数求导公式整理

1. 常数 $(C)' = 0$

2. 幂函数 $(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$.

3. 指数函数 $(a^x)' = a^x \ln a$. $[(e^x)' = e^x]$.

4. 对数函数 $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$. $[(\ln x)' = \frac{1}{x}]$.

5. 三角函数:

$(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

6. 反三角函数:

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$, $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

7. 四则运算: $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

$(uv)' = u'v + uv'$.

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - vu}{v^2}$.

8. 复合运算: $[f(\varphi(x))]' = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$.

9. 反函数: $[f^{-1}(y)]' = \frac{1}{f'(x)}$.

六. 对数求导法

1. 对数求导法是指对于形如 $f(x) = u(x)^{v(x)}$ $(u(x) > 0)$ 的函数求导的方法.

GuangBo

No. 64 Date: 9.30

2. 具体的说：$y=f(x)=u(x)^{v(x)}$.

两边取对数，有 $\ln y=v(x)\ln u(x)$.

两边对x求导有 $\frac{y'}{y}=v'(x)\ln u(x)+v(x)\cdot\frac{u'(x)}{u(x)}$.

$\therefore y'=\frac{y'}{y}\cdot y=u(x)^{v(x)}\left[v'(x)\ln u(x)+\frac{v(x)u'(x)}{u(x)}\right]$.

例①求 $y=\cos x^{\sin x}$ 的导数. $(\cos x>0)$

解：$\cos x>0$ 时，取对数，

$\ln y=\sin x\ln\cos x$.

求导 $\frac{y'}{y}=\cos x\ln\cos x+\sin x\cdot\frac{-\sin x}{\cos x}$.

$\therefore y'=(\cos x)^{\sin x}\cdot\left(\cos x\ln\cos x-\frac{\sin^2 x}{\cos x}\right)$.

②求 $y=\sqrt[5]{\frac{(x-2)^2(x+5)^2}{(x+4)^4}}$ 的导数.

解：[法一]直接求导：

$\because y=(x-2)^{\frac{2}{5}}(x+5)^{\frac{2}{5}}(x+4)^{-\frac{4}{5}}$.

$\therefore y'=\frac{2}{5}(x-2)^{-\frac{3}{5}}(x+5)^{\frac{2}{5}}(x+4)^{-\frac{4}{5}}$

$+\frac{2}{5}(x-2)^{\frac{2}{5}}(x+5)^{-\frac{3}{5}}(x+4)^{-\frac{4}{5}}$

$-\frac{4}{5}(x-2)^{\frac{2}{5}}(x+5)^{\frac{2}{5}}(x+4)^{-\frac{9}{5}}$.

[法二]复合函数求导：

$y'=\frac{1}{5}\left[\frac{(x-2)^2(x+5)^2}{(x+4)^4}\right]^{-\frac{4}{5}}\cdot\left[\frac{(x-2)^2(x+5)^2}{(x+4)^4}\right]'$

$=\cdots$ (略).

物理教研论坛

[法三]对数求导:

$\ln y = \frac{1}{5}[2\ln(x-2)+2\ln(x+5)-4\ln(x+4)]$.

$\frac{y'}{y} = \frac{1}{5}\left(\frac{2}{x-2}+\frac{2}{x+5}-\frac{4}{x+4}\right)$.

$y' = \frac{1}{5}\sqrt[5]{\frac{(x-2)^2(x+5)^2}{(x+4)^2}}\left(\frac{2}{x-2}+\frac{2}{x+5}-\frac{4}{x+4}\right)$.

③求 $y=\sqrt{1+x^2}$ 的导数.

解: $y' = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

④求 $y = e^{\frac{3x-2}{3x+2}}$ 的导数.

解: $y' = e^{\frac{3x-2}{3x+2}} \cdot \left(1-\frac{4}{3x+2}\right)' \times 3$.

$= e^{\frac{3x-2}{3x+2}} \cdot \frac{12}{(3x+2)^2}$.

七、高阶导(函)数.

1. $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 可以有一阶导函数 $f'(x)$. 若 $f'(x)$ 仍可导, 则称 $[f'(x)]' = f''(x)$ 为二阶导数...

依此类推, n 次导的结果为 $f^{(n)}(x)$, 叫作 $f(x)$ 的 n 阶导数.

(注: 二阶以上的导数统称为 $f(x)$ 的高阶导数).

eg. 求 $y = x^k$ ($k \in N_+$) 的高阶导数 $y^{(n)}$.

解: $y' = kx^{k-1}$. $y'' = k(k-1)x^{k-2}$.

... $y^{(k-1)} = k(k-1)\cdots 2\times x$.

规定 $y^{(0)} = y$.

于是 $y^{(k)} = k(k-1)\cdots\times 2\times 1 = k!$

综上, $y^{(n)} = \begin{cases} k(k-1)\cdots(k-n+1)\cdot x^{k-n}, & n \le k \\ 0, & n \ge k+1 \end{cases}$

GuangBo

② 求 $y=\sin x$ 的 n 阶导数 $(n\in N_+)$.

解: 显然, $y'=\cos x$, $y''=-\sin x$, $y'''=-\cos x$, $y^{(4)}=\sin x$.

由此, $y^{(k+4)}=y^{(k)}$.

猜想 $y^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$. (*)

可用数学归纳法证明.

1° $n=1,2,3,4$, (*) 显然成立.

2° 假设 $n=k-1$ $(k\in N_+, k\geq 2)$ 时 (*) 成立, 即

$$y^{(k-1)}=\sin\left[x+\frac{(k-1)\pi}{2}\right].$$

则当 $n=k$ 时, $y^{(k)}=\left[y^{(k-1)}\right]'=\cos\left[x+\frac{(k-1)\pi}{2}\right]$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{k\pi}{2}-x\right)=\sin\left(x+\frac{k\pi}{2}\right).$$

由 1°, 2° 知 $y^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$. $(n\in N_+)$

同理可得, $(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$.

③ 求 $y=\ln x$ 的 n 阶导数.

解: $y'=\frac{1}{x}$, $y''=-\frac{1}{x^2}$, $y'''=\frac{2}{x^3}$, ……

猜想 $y^{(n)}=(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!\cdot x^{-n}$. (规定 $0!=1$)

即 $\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}=(-1)^n\cdot\frac{n!}{x^{n+1}}$.

2. n 阶导数的四则运算法则.

① $[\alpha f(x)+\beta g(x)]^{(n)}=\alpha f^{(n)}(x)+\beta g^{(n)}(x)$. $(\alpha,\beta\in R$ 为常数)

(可由一阶导数的线性性质推得)

② 乘法: Leibniz 公式

$[f(x)\cdot g(x)]^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$. (可用归纳法证明，要用组合恒等式 $C_n^k+C_n^{k+1}=C_{n+1}^{k+1}$)

(含x 0阶导的函数自身).

$n=2$ 时，$[f(x)\cdot g(x)]''=f''(x)g(x)+2f'(x)g'(x)+f(x)g''(x)$.

① 求 $y=\frac{7x+5}{x^2-2x-3}$ 的n阶导数.

解：先化简：令 $y=\frac{7x+5}{(x-3)(x+1)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+1}$，A、B待定.

∴ $7x+5=A(x+1)+B(x-3)$，故 $\begin{cases}A+B=7,\\ A-3B=5.\end{cases}$ ∴ $\begin{cases}A=\frac{13}{2},\\ B=\frac{1}{2}.\end{cases}$

(以上方程组的一种巧妙解法：令 $x=3$，则 $4A=26$，$A=\frac{13}{2}$.

令 $x=-1$，$-4B=-2$，$B=\frac{1}{2}$.)

∴ $y=\frac{\frac{13}{2}}{x-3}+\frac{\frac{1}{2}}{x+1}$.

∴ $y^{(n)}=\frac{13}{2}\cdot(-1)^n\cdot\frac{n!}{(x-3)^{n+1}}+\frac{1}{2}\cdot(-1)^n\cdot\frac{n!}{(x+1)^{n+1}}$

$=\frac{(-1)^n\cdot n!}{2}\left[\frac{13}{(x-3)^{n+1}}+\frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right]$.

② 求 $f(x)=(x-a)^n\cdot\varphi(x)$ 在 a 处的 $f^{(n)}(a)$. 其中 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处有 $(n-1)$ 阶连续导数.

(分析：由于 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处仅有 $(n-1)$ 阶连续导数，它就存在 n 阶导数，所以不能直接使用 n 阶的 Leibniz 公式.)

解：利用 $(n-1)$ 阶 Leibniz 公式，有

$f^{(n-1)}(x)=(x-a)^n\varphi^{(n-1)}(x)+(n-1)\cdot n(x-a)^{n-1}\cdot\varphi^{(n-2)}(x)+\cdots$

$+n!(x-a)\varphi(x)$.

GuangBo

可见 $f^{(n-1)}(a)=0$.

$$\text{故 } f^{(n)}(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(a+\Delta x)-f^{(n-1)}(a)}{\Delta x},$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x)}{x-a}=\lim_{x\to a}\left[(x-a)^{n-1}\varphi^{(n-1)}(x)+(n-1)n(x-a)^{n-2}\varphi^{(n-2)}(x)\right.$$

$$\left.+\cdots+n!\varphi(a)\right]=n!\varphi(a).$$

② 设 $y=(x+\sqrt{x^2+1})^n$，验证微分方程

$$(x^2+1)y''+xy'=n^2y \text{ 的解.}$$

证明：两边取对数，$\ln y=n\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

两边对 x 求导有 $\frac{y'}{y}=\frac{n}{\sqrt{x^2+1}}$.

$$\Rightarrow (1+x^2)y'^2=n^2y^2.$$

再关于 x 求导，有

$$2xy'^2+(1+x^2)\cdot 2y'y''=n^2\cdot 2yy'. \quad (\text{显然 } y'\neq 0)$$

$$\Rightarrow (x^2+1)y''+xy'=n^2y.$$

§3 微分及其运算.

一、微分的定义.

1. 设 $y=f(x)$，x 的改变量 Δx 引起 y 的改变量 Δy.

若有 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$ (存在时). (导性分析)

2. 微分是从改变量角度理解 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$，即 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 在 $\Delta x\to 0$ 时以怎样的方式趋于 $f'(x)$?

e.g. 正方形面积 $S(x)=x^2$.

给出x一个增量Δx，则

$\Delta S=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+\Delta x^2$.

在这个表达式中，线性部分是$2x\Delta x$，它有重要作用.

由于$\Delta x^2=o(\Delta x)$，故这一项可忽略不计.

3. 定义：当自变量x有一个增量Δx时，函数$y=f(x)$在x处的改变量$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$如果可以写成$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$（A是与$\Delta x$无关的量），则$A\Delta x$被称为$\Delta y$的线性部分.

此时，称$y=f(x)$在x处可微，线性部分$A\Delta x$称为$y=f(x)$在x处的微分，记成$dy=A\Delta x$.

4. [定理] $y=f(x)$在x处可微$\Leftrightarrow f(x)$在x处可导，且$dy=f'(x)\Delta x$.

（该定理仅对一元函数成立，对多元函数$z=F(x,y)$未必成立）

证明：①必要性——可微$\Rightarrow$可导.

$\because f(x)$在x处可微. $\therefore \Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$.

得$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(A+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right)=A$.

故$f(x)$在x处可导且导数为A.

②充分性——可导$\Rightarrow$可微.

$\because f(x)$在x处可导. $\therefore \exists A\in R$使$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)=A$.

$\therefore$令$\alpha=\frac{\Delta y}{\Delta x}-A$. 则$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha=0$.

得$\Delta y=f'(x)\Delta x+\alpha\Delta x=A\Delta x+\alpha\Delta x$.

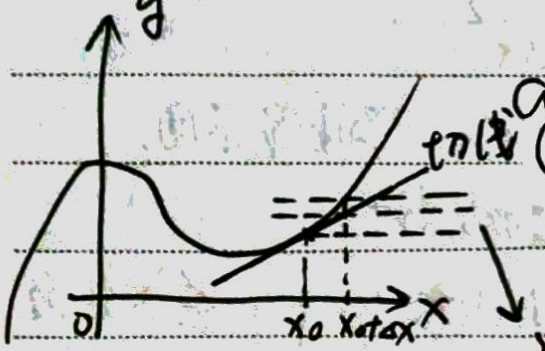
又显然有$\alpha\Delta x=o(\Delta x)$.

$\therefore \Delta y=f'(x)\Delta x+o(\Delta x)\Rightarrow f(x)$在x处可微，且$dy=f'(x)\Delta x$.

GuangBo

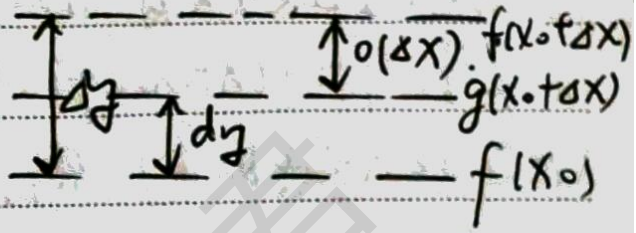
No. 70 Date: 10.9

5. 微分的几何意义.



$g(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

当 Δx 很小时：



6. 上述分析告诉我们

$$df=dy=f'(x)\Delta x.$$

我们用如下方式定义 dx：

特别地，当 $y=x$ 时，$dy=dx=(x)'\Delta x=\Delta x$.

即 $dx=\Delta x$.

我们可以表达成 $dy=f'(x)dx$. 即 $\frac{dy}{dx}=f'(x)$.

由此，尽管 dx 是无穷小，但它完全可以参与除法运算.

二. 基本初等函数的微分公式.

利用 $dy=f'(x)dx$ 与求导公式可得

1. 基本初等函数微分公式（附后）.

2. 微分四则运算法则

① $d(\alpha f+\beta g)=\alpha df+\beta dg$

② $d(fg)=f dg+g df$.

③ $(g\neq 0)\ d\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{g df-f dg}{g^2}$.

物理系中公文库

(注：双曲函数 $shx=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, $chx=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$.
$thx=\frac{shx}{chx}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$, $cthx=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$.).

3. 复合运算 —— 一阶微分形式不变性.

① 若 $y=f(u)$, $u=g(x)$ 均是x处的可微函数，则
$y=f\circ g(x)$ 仍可微.（无需证明. 因为可微⇔可导.）

② 为算微分 dy：由复合函数求导公式可知

$$dy=f'(g(x))\cdot g'(x)dx. \quad (*)$$

注意到 —— 对于 $u=g(x)$. 有 $du=g'(x)dx$.

∴(*)式等价于 $dy=f'(u)du$.

我们发现. 只论u是自变量还是中间变量，

$dy=f'(u)du$ 形式均不变，均成立。这就是形式不变性.

(Pfaff form) 它与复合函数求导法则相一致.

③ 对任一初等函数 $y=f(x)$, dy 均可求.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

e.g.① 设 $y=\ln(1+e^{2x})$, 求 dy.

解: $dy=\frac{d(1+e^{2x})}{1+e^{2x}}=\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}d(2x)=\frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}dx$.

② 设 $y=y(x)$ 满足 $e^{xy}+y^2-x=0$, 求 dy 与 $y'(x)$.

(注：一般情况下，解析式 $F(x,y)=0$ 确定的 y 关于 x 的

GuangBo

函数，叫做由$F(x,y)=0$确定的隐函数. 如$x^2+y^2=1$确定$y=\pm\sqrt{1-x^2}$这两个函数，必须进一步确定y的范围，才能得到正常单值函数，否则$x^2+y^2=1$确定的是多值函数。
隐函数是通常函数的推广.)

解：视$y=y(x)$为x的一个函数.

原方程两边对x求微分：

$$d(e^{xy}+y^2-x)=0.$$

$$\Rightarrow e^{xy}(ydx+xdy)+2ydy-dx=0.$$

$$\Rightarrow dy=\frac{1-ye^{xy}}{xe^{xy}+2y}dx$$

$$y'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{1-ye^{xy}}{xe^{xy}+2y}.$$

③ 椭圆方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a,b>0)$决定两个函数$y=\pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$，求它们的导数.

解：[法一] 由隐函数定义，两边求微分.

$$\frac{2xdx}{a^2}+\frac{2ydy}{b^2}=0.$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=y'(x)=-\frac{b^2x}{a^2y}.$$

[法二] 对$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$直接求导.

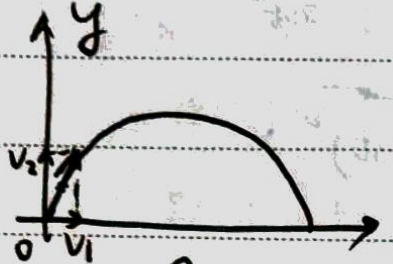
$$y'=\pm\frac{b}{a}\cdot\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{b^2x}{a^2y}.$$

④ 开普勒方程：$y-x-\varepsilon\sin y=0$.

GuangBo

(y: 天体在椭圆上走过的弧度. x: 时间)
事实上, y不可能用x的初等函数来表示.
(用法, 见书 P.88-89).

⑤ 参数方程的微分.



物体的斜抛运动, 初始分速度为 v_1、v_2. 求何时合速度与地平行?

解: 如图. 运动学方程为 $\begin{cases} x = v_1 t \\ y = v_2 t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$ $(0 \le t \le \frac{2v_2}{g})$

当速度与地平行时, $v_y = 0$, 故 $y'(x) = 0$.

由一阶微分形式不变性, 有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(v_2 - gt)dt}{v_1 dt} \xrightarrow{\text{约去 } dt} \frac{v_2 - gt}{v_1} = 0.$$

$\therefore t = \frac{v_2}{g}$.

如例⑤本质上是求参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ 所决定的函数

$y = y(x)$ 的导数、微分, 也自然含有 t.

而 $\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)dt}{\varphi'(t)dt} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$.

⑥ 摆线参数方程 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$

求 $y(x)$ 二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

GuangBo

解: $\frac{dy}{dx}=\frac{a\frac{d}{dt}(1-\cos t)}{a\frac{d}{dt}(t-\sin t)}=\frac{\sin t}{1-\cos t}$

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\frac{dy}{dx}}{dx}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin t}{1-\cos t}\right)}{\frac{d}{dt}[a(t-\sin t)]}$

$=\frac{\frac{\cos t(1-\cos t)-\sin^2 t}{(1-\cos t)^2}}{a(1-\cos t)}=-\frac{1}{a(1-\cos t)^2}$.

4. 近似计算——微分的运用

(1) 微分的思想就是在Δx极小时, 用线性部分$f'(x)\Delta x$代替$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$. 取$x=x_0$有

$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$.

这是近似计算的数学原理. (前提: $f(x)$可微).

e.g. 计算$\sqrt[3]{7.95}$的近似值.

解: 设$y=f(x)=\sqrt[3]{x}$. 则$x_0=8$, $\Delta x=-0.05$.

$\because y'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$. $\therefore f'(8)=\frac{1}{12}$.

$\therefore \sqrt[3]{7.95}\approx f(8)+f'(8)\times(-0.05)=2-0.05\times\frac{1}{12}$

$=1.996$.

(2) 常用近似公式($|x|$越小越精确).

$(1+x)^\alpha\approx 1+\alpha x$.

$e^x\approx 1+x$.

$\sin x\approx x\approx\tan x$.

$\ln(1+x)\approx x$.

e.g. 由于$(1+x)^{\frac{1}{3}}\approx 1+\frac{1}{3}x$, 则上例中

$\sqrt[3]{7.95}=\sqrt[3]{8\left(1-\frac{0.05}{8}\right)}\approx 2\times\left(1-\frac{0.05}{24}\right)\approx 1.996$.

GuangBo

No. 75 Date: 10.10

习题课

一、导数

1. 导数的定义
2. 左右导数、可导的充要条件
3. 导数的几何意义——切线斜率⇒切线方程、法线方程
4. 导数四则运算、复合运算公式
5. 反函数求导法则
6. 基本初等函数导数公式
7. 对数求导法
8. 高阶导数

[例] ① $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}$, $x>0$, 求 $f'(x)$

解：注意到 $x>0$ 时，有

$$\max\left\{1, x, \frac{x^2}{2}\right\}\le f(x)\le \sqrt[n]{3}\max\left\{1, x, \frac{x^2}{2}\right\}.$$

∴由夹逼定理知 $f(x)=\max\left\{1, x, \frac{x^2}{2}\right\}=\begin{cases}1, & 0<x\le 1,\\ x, & 1<x\le 2\\ \frac{x^2}{2}, & x>2.\end{cases}$

只看分段点，有 $f'(x)=\begin{cases}0, & 0<x<1,\\ 1, & 1<x<2,\\ x, & x>2.\end{cases}$

∵ $f_+'(1)=1\neq f_-'(1)=0$，∴ $f'(1)$ 不存在

∵ $f_+'(2)=2\neq f_-'(2)=1$，∴ $f'(2)$ 不存在（最终结果如上）.

GuangBo

No. 76 Date: 10.12

② 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$ 存在，
证明 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导(可微)。
证明：由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，故

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)}{x}\cdot x\right]$$
$$=A\lim_{x\to 0}x=0.$$

从而 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A.$

于是 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，$f'(0)=A$.

二. 微分.
1. 定义 —— $\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$，则 $dy=A\Delta x$.
(在 Δx 极小时，用线性函数 $A\Delta x$ 逼近 Δy).
2. 可导 $\Leftrightarrow$ 可微，$dy=f'(x)\Delta x=f'(x)dx$.
3. 微分的几何意义.
4. 微分基本公式与四则运算.
5. 一阶微分形式不变性(复合函数微分).
6. 隐函数与参数函数的导数、微分.
7. 近似计算(与误差估计).
(暂不举例).

No. 77 Date: 10.12

§4 微分学中值定理

*我们已经会在小范围内衡量 $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ 与 $dy = A\Delta x$ 的变化程度，但在大范围（如 (a,b)）上，怎样处理 $f(b)-f(a)$？（这才是微分学真正的用处）

一、极值与费马引理

1. 极值的定义：设 $y=f(x)$ 在 x_0 的一个邻域上有定义，如 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$，且在此邻域[或更小邻域 $(x_0-\delta_1, x_0+\delta_1)$，$0<\delta_1<\delta$]上恒有 $f(x)\le f(x_0)$ 或 $f(x)\ge f(x_0)$，则称 x_0 是 $f(x)$ 的极大（小）值点。

*最大（小）值是大范围的概念（而非小邻域中的）。

2. 费马引理：若 x_0 是 $y=f(x)$ 的极值，并且 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，则必有 $f'(x_0)=0$。

①这个定理说明，要求 $y=f(x)$ 的极值点，只要求 $f'(x)=0$ 的点和不可导的点（还要再筛选）。

②我们称 $f'(x)=0$ 的点（可导）为临界点，临界点与不可导点统称为驻点。

③引理证明：不妨设 $f(x)$ 在全邻域 $U(x_0,\delta)$ 中恒有 $f(x)\le f(x_0)$，即 x_0 是 $f(x)$ 的极大值点。（极小值点类似）

∵任给 x_0 处的增量 Δx（$|\Delta x|<\delta$），则 $f(x_0+\Delta x)\le f(x_0)$。

∴ $f'_+(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\le 0$。

$f'_-(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\ge 0$。

∴ $f(x)$ 在 x_0 处可导。

GuangBo

$\therefore f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=f'(x_0)$

$\because f'(x_0)\geq 0$ 且 $f'(x_0)\leq 0$.

$\therefore f'(x_0)=0$.

④ 引理说明：$f(x)$ 在极值点处的切线是水平的.

二、罗尔中值定理

1. [定理] (Rolle) 设 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，且 $f(a)=f(b)$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使

$$f'(\xi)=0.$$

证明：$\because f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

$\therefore f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有最大值最小值，记为 M,m.

1° $M=m$，此时 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的常数函数.

$\therefore$ 显然有 $\xi\in(a,b)$ 使 $f'(\xi)=0$.

2° $M>m$. $\because f(a)=f(b)$. 记为 η.

$\therefore M$ 与 m 中至少有一个不等于 η.

不妨设 $M\neq\eta$，即 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值点 $x_0\in(a,b)$，这说明 x_0 也是局部极大值点.

由费马引理知 $f'(x_0)=0$，即存在 $\xi=x_0\in(a,b)$.

证毕.

2. 此定理中的三个条件缺一不可！

e.g. Legendre 多项式

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \quad (n\in\mathbb{N}_+).$$

用罗尔中值定理证明：n次Legendre多项式在$[-1,1]$上恰有n个零点.
($P_n(x)$)

证明：首先，注意到：$\forall 0\le k<n$，有

$$\frac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^n=\sum_{i=0}^{k}C_k^i\left[(1+x)^n\right]^{(i)}\cdot\left[(x-1)^n\right]^{(k-i)}.$$

可见，当$0\le k<n$时，±1均是$\frac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^n=0$的根.

∴由罗尔中值定理，取$k=1$，则$\frac{d}{dx}(x^2-1)^n=0$有根

$\xi_{1,1}\in(-1,1)$.

再取$k=2$，则$\frac{d^2}{dx^2}(x^2-1)^n=0$有根$\xi_{2,1}$与$\xi_{2,2}$，且

$$-1<\xi_{2,1}<\xi_{1,1}<\xi_{2,2}<1.$$

以此类推，取$k=n-1$，则$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n=0$在$(-1,1)$上有$n-1$个不等根，记为$-1<\xi_{n-1,1}<\cdots<\xi_{n-1,n-1}<1$.

∴在$\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$中再用罗尔中值定理，可知$P_n(x)=0$在

$(-1,\xi_{n-1,1})$，$(\xi_{n-1,1},\xi_{n-1,2})$，…，$(\xi_{n-1,n-1},1)$上各有一根.

∴$P_n(x)$在$(-1,1)$上至少有n个根.

进而$P_n(x)$是n次多项式，所以$P_n(x)$在$(-1,1)$上有且只有n个根.

三. 拉格朗日(Lagrange)中值定理

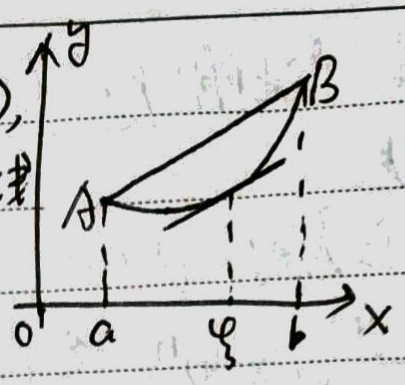
1. [定理] 设$y=f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导，则至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

(若$a=x_0$，$b=x_0+\Delta x$，$\xi=x_0+\theta\Delta x$ $(0<\theta<1)$，则

$\Delta y=f'(x_0+\theta\Delta x)\cdot\Delta x$.)

GuangBo

2. 几何意义：存在$\xi\in(a,b)$，使得$f(x)$在ξ处切线与割线AB斜率相同.



3. 证明：由几何意义，构造

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a).$$

要验证$F(x)$满足Rolle定理的条件.

∵$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导.

∴$F(x)$也具有这样的性质.

又$F(a)=f(a)$，$F(b)=f(b)-(f(b)-f(a))=f(a)$.

∴$F(a)=F(b)$.

于是，由Rolle定理，$\exists\xi\in(a,b)$，使

$$F'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0.$$

$$\therefore f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

4. 解法：若$f(x)$在(a,b)上可微，且$\forall x\in(a,b)$，$f'(x)=0$，则$f(x)$是(a,b)上的常值函数.

证明：即证$\forall a<x_1<x_2<b$，有$f(x_1)=f(x_2)$.

∵$f(x)$在$[x_1,x_2]$上连续，在(x_1,x_2)上可导.

∴$\exists\xi\in(x_1,x_2)$，使$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$.

而$f'(\xi)=0$. ∴$f(x_1)=f(x_2)$.

∴$f(x)$是(a,b)上的常值函数.

物理系的小文君

作业讲评

1. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

[一]证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{\ln n}{n}}=1$ $(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0)$

[二]设 $y_n=\sqrt[n]{n}-1$, 即证 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$

对 $n=(1+y_n)^n$, n 为大于1时 $n>1+ny_n+\frac{n(n-1)}{2}y_n^2$

$>\frac{n(n-1)}{2}y_n^2$

$\Rightarrow y_n<\sqrt{\frac{2}{n-1}}\Rightarrow \forall \varepsilon\ N=[\frac{2}{\varepsilon^2}]+1$

对 $n>N$ 时 $|y_n-0|<\varepsilon$

$\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

2. (书P13/(10)) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

解: 可以用定义证明 $\lim b_n=\frac{1+\sqrt5}{2}$.

事实 $|b_n-\frac{1+\sqrt5}{2}|=|1+\frac{1}{b_{n-1}}-\frac{1+\sqrt5}{2}|=\frac{\sqrt5-1}{2}\cdot\left|\frac{b_{n-1}-\frac{1+\sqrt5}{2}}{b_{n-1}}\right|$

$\because b_{n-1}=1+\frac{1}{b_{n-2}}>1$ $\therefore |b_n-\frac{1+\sqrt5}{2}|<\frac{\sqrt5-1}{2}|b_{n-1}-\frac{1+\sqrt5}{2}|$.

以此类推, $0\le|b_n-\frac{1+\sqrt5}{2}|<(\frac{\sqrt5-1}{2})^{n-1}|b_1-\frac{1+\sqrt5}{2}|$

$=(\frac{\sqrt5-1}{2})^n$.

$\because 0<\frac{\sqrt5-1}{2}<1$. $\therefore\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{\sqrt5-1}{2})^n=0$.

由夹逼定理, $\lim\limits_{n\to\infty}|b_n-\frac{\sqrt5+1}{2}|=0$.

即对任意 $\varepsilon>0$, $\exists N$, 当 $n>N$ 时 $|b_n-\frac{\sqrt5+1}{2}|-0|=|b_n-\frac{\sqrt5+1}{2}|<\varepsilon$

物理系的大吴君

GuangBo

∴ $\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

3. (补充) $a_1=1$, $a_{n+1}=\frac{1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}-\sqrt{2}$. 求 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

解: 设 $\sum_{i=1}^{n} a_i = S_n$.

则 $a_{n+1}=\frac{1}{S_n}-\sqrt{2}$, $a_n=\frac{1}{S_{n-1}}-\sqrt{2}$ $\Rightarrow a_{n+1}-a_n=\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n-1}}$

$=\frac{-a_n}{S_nS_{n-1}} \Rightarrow a_{n+1}=a_n\left(1-\frac{1}{S_nS_{n-1}}\right)$.

先用归纳法证明 $S_n=S_{n-1}+\frac{1}{S_{n-1}}-\sqrt{2}\geq 2-\sqrt{2}$. $(n\geq 2)$.

再用归纳法证明 $n\geq 4$ 时 $0<a_{n+1}<a_n$.

$\because a_4=\frac{2}{3}(\sqrt{2}-1)>0$ 且 $S_3S_4=(\frac{9}{2}+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)^2>(\sqrt{2}+1)^2(\sqrt{2}-1)^2=1$,

故 $a_5=a_4\left(1-\frac{1}{S_3S_4}\right)\in(0,a_4)$ 其次, 且 $0<a_{k+1}<a_k$,

则 $S_{k+1}>S_{k-1}$, $a_{k+1}=a_k\left(1-\frac{1}{S_kS_{k+1}}\right)\in(0,a_{k+1})$] 于是 $\{a_n\}$ 单调

有界. 设 $\lim_{n\to\infty} a_n=A>0$, 则 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{S_n}-\sqrt{2}\right)=A$, $\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{A+\sqrt{2}}$. 由

$S_{n+1}-S_n=\frac{1}{S_n}-\sqrt{2}$ 知 $A=0$, 故 $\lim_{n\to\infty} S_n=\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. 设 $\lim_{x\to a} f(x)=A>0$, 证明 $\lim_{x\to a}\sqrt{f(x)}=\sqrt{A}$.

证明: 显然 $0\leq|\sqrt{f(x)}-\sqrt{A}|=\frac{|f(x)-A|}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{A}}\leq\frac{|f(x)-A|}{\sqrt{A}}$.

$\because \lim_{x\to a} f(x)=A$.

$\therefore \lim_{x\to a}\frac{|f(x)-A|}{\sqrt{A}}=0$.

由夹逼定理, $\lim_{x\to a}|\sqrt{f(x)}-\sqrt{A}|=0$, 故 $\lim_{x\to a}\sqrt{f(x)}=\sqrt{A}$.

(课课练 P.80 内容)

5. 拓展2: 若 $f(x)$, $g(x)$ 在 (a,b) 上可导且 $f'(x)=g'(x)$,

则 $f(x)=g(x)+C$

证明: 令 $F(x)=f(x)-g(x)$, 则 $F'(x)=f'(x)-g'(x)=0$.

由拓展1可知 $F(x)=C$. $\therefore f(x)=g(x)+C$.

(链接：原函数，不定积分，$\int f(x)dx = F(x)+C$.)

2. Cauchy中值定理

1. [定理] (Cauchy) 假定 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，且 $\forall x \in (a,b)$, $g'(x) \neq 0$. 则必存在一点 $\xi \in (a,b)$ 使得 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ $(g(b) \neq g(a))$.

证明：构造函数 $F(x) = f(x) - \frac{f(x)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))$.

可以验证 $F(x)$ 在 (a,b) 上满足 Rolle 中值定理的条件

$\therefore \exists \xi \in (a,b)$ 使 $F'(\xi)=0$.

整理得 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

(特别地，当 $g(x)=x$，则此定理即为 Lagrange 中值定理)

eg: ① 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，且 $f(a)=f(b)=0$，证明一定 $\exists \xi \in (a,b)$ 使得 $f(\xi)+f'(\xi)=0$.

证明：(构造)辅助函数：令 $F(x) = e^x f(x)$, $x \in [a,b]$,

则 $F'(x) = e^x(f(x)+f'(x))$.

($f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导.)

又 $F(a)=F(b)=0$.

$\therefore$ 必 $\exists \xi \in (a,b)$, 使 $F'(\xi) = e^{\xi}(f(\xi)+f'(\xi)) = 0$.

即 $f(\xi)+f'(\xi)=0$.

② 证明：对 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$，有以下不等式成立：

GuangBo

No. 84 Date: 10.14

$e^x \geq ex$.

证明：设函数 $f(x)=e^x-ex$

由Lagrange中值定理，在1与x之间(x≠1)存在ξ使

$$f(x)-f(1)=f'(\xi)(x-1).$$

∵ $f(1)=0$. ∴ $f(x)=(e^\xi-e)(x-1)$.

1° $x>1$ 时，$1<\xi<x$，故 $f(x)=(e^\xi-e)(x-1)>0$.

2° $x<1$ 时，$x<\xi<1$，故 $f(x)=(e^\xi-e)(x-1)>0$.

3° $x=1$ 时，$f(x)=0$.

综上，$f(x)\geq 0$，即 $x\in R$ 时有 $e^x\geq ex$.

③ 证明：当 $p\in N_+$ 时有

$$\frac{1}{p+1}n^{p+1}\leq 1+2^p+\cdots+n^p\leq\frac{1}{p+1}(n+1)^{p+1}.$$

并以此证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\dfrac{1}{p+1}$.

证明：对函数 $f(x)=x^{p+1}$，那么在 $[k,k+1]$ 上运用Lagrange中值定理，可知，$\exists\xi\in(k,k+1)$ 使

$$\frac{(k+1)^{p+1}-k^{p+1}}{(k+1)-k}=(k+1)^{p+1}-k^{p+1}=f'(\xi)=(p+1)\xi^p.$$

于是 $(p+1)k^p\leq(k+1)^{p+1}-k^{p+1}\leq(p+1)(k+1)^p$. (*)

将(*)式中的不等式从 $k=0,1,2,\cdots,n-1$ 累加，

有 $(p+1)[1+2^p+\cdots+(n-1)^p]\leq n^p\leq(p+1)(1+2^p+\cdots+n^p)$.

现已证得 $\frac{1}{p+1}\cdot n^p\leq 1+2^p+\cdots+n^p$，即得证不等式左半边.

再将(*)从0,1,2,…,n累加.

GuangBo

No. 85 Date: 10.14.

有 $|a_{n+1}-a_n| \le \frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$，即得证不等式右半边.

右侧的极限可用夹逼定理证.

物理系许成君

有 $|n!-1-\cdots-n|\le\frac{1}{n+1}(n+1)!$ 即得证不等式右半边.

右侧的极限可用夹逼定理证.

2. 注意: Cauchy中值定理不是对 $f(x)$, $g(x)$ 各用一次 Lagrange 中值定理证得的, 两次 Lagrange 的 ξ_1、ξ_2 未必相等.

§5 L'Hospital 法则.

* 利用导数来求极限是很有用的工具.

一、不定型, 在一个变化过程中, 某些极限的存在与取值是不定的.

$\frac{0}{0}$ 型 (如 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}$), $\frac{\infty}{\infty}$ 型 (如 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n}$).

$\infty-\infty$ 型 (如 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$), 1^∞ 型 (如 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x$),

∞^0 型 (如 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}$), 0^0 型 (如 $\lim\limits_{x\to0}x^x$).

以上均是不定型, 但它们其实均可以化成 $\frac{0}{0}$ (或 $\frac{\infty}{\infty}$).

二、$\frac{0}{0}$ 型 L'Hospital 法则 ($x\to a$ 为有限值时).

1. [定理] 设 $f(x)$, $g(x)$ 满足以下条件:

(1) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$.

(2) 在 a 的某一去心邻域 $\mathring{U}(a,\delta)$ 中, $f(x)$、$g(x)$ 均可导, 并且在此邻域中 $g'(x)\neq0$.

(3) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 (记为 A).

GuangBo

则 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$.

证明：$\because \lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$.

$\therefore$ 如有必要，则定义 $f(a)=g(a)=0$. 这样，对 $\forall x_0\in\mathring{U}(a,\delta)$，

$f(x),g(x)$ 在 x_0 与 a 之间连(闭)且可导(开).

应用 Cauchy 中值定理，可知

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

其中 ξ 在 x 与 a 之间.

把 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim\limits_{\xi\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=A$.

eg. ① 设 $a>0,b>0$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}$.

解：这是一个 $\frac{0}{0}$ 型极限.

由 L'Hospital 法则

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{a^x\ln a-b^x\ln b}{1}=\ln a-\ln b.$$

② 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$.

解：由 L'Hospital 法则知

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}.$$

三、$\frac{\infty}{\infty}$ 型 L'Hospital 法则

L[定理]在上一个定理中，把(1)条件改为 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$，

其余条件不变，则 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$.

(证明作为作业)

eg. ① 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(\sin mx)}{\ln(\sin nx)}$，其中 $m,n\in N_+$.

解：这是 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限，由 L'Hospital 法则，

原式 $=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{m\cos mx}{\sin mx}}{\frac{n\cos nx}{\sin nx}}=\frac{m}{n}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin nx}{\sin mx}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{\sin nx}{nx}}{\frac{\sin mx}{mx}}$

$=1$.

② 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}$，其中 $\alpha>0$

解：由 L'Hospital 法则，

原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\alpha x^\alpha}=0$.

三、其他不定型.

e.g. ① 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[\ln(2^x+1)\cdot\ln(1+\frac{3}{x})]$.

解：当 $x\to+\infty$ 时 $\ln(2^x+1)\to+\infty$，$\ln(1+\frac{3}{x})\to 0$.

这是 $\infty\times 0$ 的极限.

∴ 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln(1+\frac{3}{x})}{\frac{3}{x}}\cdot\frac{3}{x}\ln(2^x+1)\right]$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\frac{3}{x})}{\frac{3}{x}}\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{3}{x}\ln(2^x+1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{3}{x}\ln(2^x+1)\right]$.

$=3\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2^x\ln 2}{2^x+1}=3\ln 2$.

② 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{\sin x}\right)$.

解：$x\to 0$ 时，$\ln x\to 0$，$\sin x\to 0$，这是 $\infty-\infty$ 型极限.

GuangBo

一般来说这类极限无通分再用 L'Hospital 法则.

$\therefore$ 原式 $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - \ln(1+x)}{\ln(1+x)\cdot \sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - \ln(1+x)}{x^2}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \frac{1}{1+x}}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\sin x + \frac{1}{(1+x)^2}}{2} = \dfrac{1}{2}.$

③ 求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$.

解: 由于 $x^x = e^{x\ln x}$, 故

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x}$.

而 $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+}(-x) = 0.$

于是原式 $= e^0 = 1$.

④ 求 $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.

解: 这是 $\frac{\infty}{\infty}$ 型. 由 L'Hospital 法则.

原式 $= \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \cdots$

如此循环往复, 无法求极限. (L'Hospital 法则也有局限)

事实上, 上式可直接计算:

原式 $= \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}} = 1$.

§6 Taylor 公式

* 若 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可微, 则当 $|x-x_0|$ 很小时,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x-x_0)(x-x_0) + o(x-x_0).$$

GuangBo

由此，可否用多项式函数 $a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n$ 来逼近 $f(x)$？

一、带有Peano余项的Taylor公式：

1. 对于给定 $f(x)$，若它在 x_0 处有 n 阶导数，则在 x_0 附近，希望有 $f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+o[(x-x_0)^n]$，即 $f(x)$ 与多项式函数 $P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n$ 只相差一个 Peano 余项 $o[(x-x_0)^n]$，它是很高阶的无穷小。

2. 如何确定系数 $a_i\ (0\le i\le n)$？

由于上述式子成立，故令 $x=x_0$，有 $a_0=f(x_0)$.

得 $f(x)-f(x_0)=a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+o[(x-x_0)^n]$.

得 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}[a_1+a_2(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^{n-1}]$

$=a_1$.

进而类似处理，有 $a_2=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{(x-x_0)^2}$

$=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{2(x-x_0)}=\dfrac{f''(x_0)}{2!}$.

以此类推，当 $0\le k\le n$ 时，$a_k=\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$.（约定 $0!=1$，且 $f^{(0)}(x)=f(x)$）.

最终，$f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o[(x-x_0)^n]$.（*）

3.［定理］设 $f(x)$ 在 x_0 的一个邻域上有 n 阶导数，则上述（*）式必定成立.

No. 90 Date: 10.17

设 $R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$.

其实只要证 $\lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$, 即 $R_n(x) = o[(x-x_0)^n]$.

事实上, $R_n(x_0) = R_n'(x_0) = R_n''(x_0) = \cdots = R_n^{(n)}(x_0) = 0$.

反复利用洛必达法则, 有

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{R_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} = \lim_{x\to x_0} \frac{R_n''(x)}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}}$$

$$= \cdots = \lim_{x\to x_0} \frac{R_n^{(n)}(x)}{n!} = \frac{R_n^{(n)}(x_0)}{n!} = 0.$$

于是上述定理成立.

二. 带有 Lagrange 余项的 Taylor 公式.

1. [定理] 设 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域上有 $(n+1)$ 阶导数, 则在 x_0 附近有 $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$.

其中 ξ 介于 x 与 x_0 之间, 可以写为 $\xi = x_0 + \theta(x-x_0)$, $0<\theta<1$.

证明: 将 Cauchy 中值定理反复利用可知,

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{R_n(x)-R_n(x_0)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{R_n'(\xi_1)-R_n'(x_0)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n}$$

($R_n'(x_0) \to 0$)

$$= \frac{R_n''(\xi_2)-R_n''(x_0)}{(n+1)\cdot n(\xi_2-x_0)^{n-1}} = \cdots = \frac{R_n^{(n)}(\xi_n)-R_n^{(n)}(x_0)}{(n+1)!(\xi_n-x_0)}$$

($R_n^{(n)}(x_0) \to 0$)

其中, $x_0 < \xi_n < \xi_{n-1} < \cdots < \xi_1 < x$ 或 $x < \xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_n < x_0$.

于是 $\lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \lim_{\xi_n\to x_0} \frac{R_n^{(n)}(\xi_n)-R_n^{(n)}(x_0)}{(n+1)!(\xi_n-x_0)} = \frac{R_n^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}$

$$= \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} \overset{\xi_n\to x_0}{=\!=} \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!}.$$ 取定理中 $\xi = \xi_n$ 即可.

物理系的大君

2. 特别地，若 $|f^{(n+1)}(x)| \le M$ 在 x_0 的邻近成立，则

$$\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right| \le \frac{M}{(n+1)!}\left|(x-x_0)^{n+1}\right|.$$

这可以用来估计余项的大小.

三. Maclaurin公式：

1. 我们把 $x_0=0$ 时的 Taylor 展开式称为 Maclaurin 公式.

即 $f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$.

若用 Lagrange 余项，则余项为 $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$，

其中 ξ 介于 0 与 x 之间.

2. 五个常见的 Maclaurin 公式：

(1) $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$.

(2) $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+1})$.

(3) $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n})$.

(4) $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$.

$(\alpha\neq 0,\ \alpha\in\mathbb{R})$.

(5) $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}+o(x^n)$.

证明：* 由定理，若求出相应高阶导数在 $x=0$ 处的值，即可得到相应展开式.

(1) 对于 $f(x)=e^x$，有 $f^{(k)}(x)=e^x$. 即 $f^{(k)}(0)=1$. $(0\le k\le n)$.

代入展开式，有 $e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+o(x^n)$.

(2) 对于 $f(x)=\sin x$，有 $f^{(k)}(x)=\sin(x+\frac{k}{2}\pi)$. 即，

GuangBo

$$f^{(k)}(0)=\begin{cases}1, & k=4m+1,\\ 0, & k\text{为偶数},\\ -1, & k=4m+3.\end{cases}\quad (m=0,1,2\cdots)$$

(2)代即可.

(3)(4)略去.

(5)对于$f(x)=\ln(1+x)$,有$f^{(k)}(x)=\dfrac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(1+x)^k}$.

则$\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}=\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$.从而得到结论.

3. Taylor的贡献在于提出级数的概念,如

$$e^x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.\ (\text{无余项!})$$

他还提出,在一些时候,级数展开只是P在$x\to x_0$时才成立,它对任意$x\in D_f$均成立.

这一说法使Euler给出$e^{ix}=\cos x+i\sin x$可被证明:

$$e^{ix}=1+\frac{ix}{1!}+\frac{(ix)^2}{2!}+\cdots+\frac{(ix)^n}{n!}+\cdots.$$

故$\mathrm{Re}(e^{ix})=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\cdots+\dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\cdots=\cos x.$

$\mathrm{Im}(e^{ix})=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\cdots+\dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots=\sin x.$

于是$e^{ix}=\cos x+i\sin x$.

4. 相关链接:解析函数,光滑函数,连续函数.

e.g. 求$f(x)=\sqrt[3]{1-3x+x^2}$带Peano余项的三阶Maclaurin公式.

解:利用$(1+x)^\alpha$的Maclaurin公式:

$$f(x)=(1+x^2-3x)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{\frac{1}{3}}{1!}(x^2-3x)+\frac{\frac{1}{3}\cdot(-\frac{2}{3})}{2!}(x^2-3x)^2+\frac{\frac{1}{3}\cdot(-\frac{2}{3})\cdot(-\frac{5}{3})}{3!}(x^2-3x)^3+o(x^3)$$

$= 1 - x - \frac{2}{3}x^2 - x^3 + o(x^3)$

② 利用带Peano余项的展开式求极限：

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x\cos x}{e^{x^3}-1}$.

解：由Maclaurin公式，有

原式 $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) - x\left[1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2)\right]}{x^3 + o(x^3)}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{3} + o(1)}{1 + o(1)} = \dfrac{1}{3}$.

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{x^2}{2} + 1 - \sqrt{1+x^2}}{(\cos x - e^{x^2})\sin^2 x}$.

解：由Taylor展开，得

原式 $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{x^2}{2} + 1 - \left[1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)\right]}{\left[1 - \frac{x^2}{2!} - (1+x^2) + o(x^2)\right]\cdot x^2}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{8}x^4 + o(x^4)}{-\frac{3}{2}x^4 + o(x^4)} = -\dfrac{1}{12}$.

四. Taylor展开用于近似计算.

eg. 求e的近似值(精确到10^{-4}).

解：由e^x的Taylor展开可得

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}\cdot (0<\xi<1).$$

估计余项：$\left|\dfrac{e^{\xi}}{(n+1)!}\right| \le \dfrac{e}{(n+1)!} < \dfrac{3}{(n+1)!}$.

GuangBo

事实上，取 $n=9$，计算可得

$$e\approx 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{9!}$$

$$=2.7183.$$

§7 函数的单调性与凸性

*我们可以把微分学中值定理用于函数性质的整体刻画.

一、函数的单调性

1.[定理] 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，则：

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调上升(下降)的充要条件是

$\forall x\in(a,b)$，$f'(x)\geq 0(\leq 0)$.

证明：(1)必要性. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调上升(下降类似).

$\therefore \forall x,x'\in(a,b)$，若 $x>x'$，则 $f(x)\geq f(x')$.

$\therefore$ 恒有 $\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}\geq 0$. 当 $x<x'$ 时此式仍成立.

又 $\because \forall x\in(a,b)$，$f'(x)$ 存在.

$\therefore$ 当 $x'\to x$ 时有 $\lim\limits_{x'\to x}\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}=f'(x)\geq 0$.

(2)充分性. 设 $f'(x)\geq 0$，$\forall x\in(a,b)$，则任给 $x_1,x_2\in(a,b)$.

若 $x_1>x_2$，则由 Lagrange 中值定理，

$f(x_1)-f(x_2)=f'(\xi)(x_1-x_2)\geq 0\ (x_2<\xi<x_1)$.

$\therefore f(x_1)\geq f(x_2)$，即 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调上升.

($f'(x)\leq 0$ 时类似可得，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调下降).

*由以上证明可知：当 $f'(x)>0$ (<0) 对 $x\in(a,b)$ 恒成立时，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调上升(下降)。(逆命题未必成立。)

2. 我们可以用上述定理讨论函数单调区间。

eg 讨论 $f(x)=x^{\frac{2}{3}}(2-x)^{\frac{1}{3}}$ 的单调区间。

解：该函数定义域为 $D_f=\mathbb{R}$。

当 $x\neq 0$ 且 $x\neq 2$ 时，$f'(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(2-x)^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}}(2-x)^{-\frac{2}{3}}$

$=\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}(2-x)^{-\frac{2}{3}}[2(2-x)-x]$

$=\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}(2-x)^{-\frac{2}{3}}(4-3x)$。

令 $f'(x)=0$，则 $x=\frac{4}{3}$。于是 $0,\frac{4}{3},2$ 是 $f(x)$ 的驻点。它们将 $(-\infty,+\infty)$ 分成四个区间，如下表：

x	$(-\infty,0)$	$(0,\frac{4}{3})$	$(\frac{4}{3},2)$	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$-$
$f(x)$	↘	↗	↘	↘

故 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 和 $(\frac{4}{3},2)$，$(2,+\infty)$ 上严格单调下降，在 $(0,\frac{4}{3})$ 上严格单调上升。

3. 函数不等式的证明。

eg. 证明：当 $x>0$ 时，$x>\sin x>x-\frac{x^3}{6}$。

证明：先证左端不等式。

令 $f(x)=x-\sin x$，$x\in(0,+\infty)$。

则 $f'(x)=1-\cos x>0$，如果取 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$，则 $f'(x)>0$。

物理学的兄弟

No. 96 Date: 10.19

∴ $f(x) > f(0) = 0$. ∴ $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$, $x > \sin x$.

当 $x \geq \frac{\pi}{2}$ 时，上述不等式显然成立.

故 $x > 0$ 时，$x > \sin x$.

下面证右端，令 $g(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$, $x \in (0, +\infty)$

$\therefore g'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2} - 2\sin^2\frac{x}{2} = 2\left[\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \sin^2\frac{x}{2}\right]$.

由左端可知 $g'(x) > 0$. ∴ 右端也成立.

物理学术交流

∴ $f(x) > f(0) = 0$. ∴ $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$, $x > \sin x$.

当 $x \geq \frac{\pi}{2}$ 时，上述不等式显然成立.

故 $x > 0$ 时，$x > \sin x$.

下面证右端，令 $g(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$, $x \in (0, +\infty)$.

∴ $g'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2} - 2\sin^2\frac{x}{2} = 2\left[\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \sin^2\frac{x}{2}\right]$.

由左端可知 $g'(x) > 0$. ∴ 右端也成立.

② 证明：$\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$, $x < \tan x$.

证明：令 $f(x) = x - \tan x$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

$f'(x) = 1 - \frac{1}{\cos^2 x} = -\tan^2 x < 0$.

∴ $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上严格单调递减.

∴ $f(x) < f(0) = 0$.

于是上述不等式成立.

③ 证明：当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时，$\frac{2}{\pi} < \frac{\sin x}{x} < 1$.

证明：令 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \in (0, \frac{\pi}{2}], \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

∴ $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上连续，在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上可导.

而 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时，$f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x^2}(x - \tan x) < 0$.

∴ $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2})$ 上严格单调递减.

∴ $f(\frac{\pi}{2}) \leq f(x) < f(0)$. 故 $\frac{2}{\pi} \leq f(x) \leq 1$, $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

∴ $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时 $\frac{2}{\pi} < \frac{\sin x}{x} < 1$.

④ 若 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$，且 $f''(x) > 0$ 对任意 $x \in \mathbb{R}$ 恒成立.

证明：$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq x$.

物理系的吴君

证明：[一] 首先，由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$ 与 $f''(x)$ 存在，可知 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 在 R 上连续.

$\therefore f(0)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{x}\cdot x\right)=1\times 0=0$.

又 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$.

令 $F(x)=f(x)-x$.

则 $F'(x)=f'(x)-1$.

$F''(x)=f''(x)>0\Rightarrow F'(x)$ 在 R 上单调上升.

$\therefore x>0$ 时，$F'(x)\geq F'(0)=0$.

$x<0$ 时 $F'(x)\leq F'(0)=0$.

于是 $F(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调下降，在 $(0,+\infty)$ 上单调上升.

$\therefore x=0$ 是 $F(x)$ 最小值点.

于是 $x\neq 0$ 时，$F(x)>F(0)=0$.

$\therefore x\in R$ 时 $f(x)\geq x$.

[二] 首先，$f(0)$ 与 $f'(0)$ 求法同上.

再根据 Taylor 公式有

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\underbrace{\frac{f''(\xi)}{2}x^2}\geq x$.

得证.

二、函数的极值.

1. 由 Fermat 引理，若 x_0 是 $f(x)$ 极值点且 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则 $f'(x_0)=0$. 由此，$f(x)$ 在 (a,b) 上的极值点只可能是

$f'(x)=0$ 或不可导的点. 但是, 驻点未必是极值点. 如 $y=x^{2n+1}$ ($n\in\mathbb{N}_+$) 满足 $y'(0)=0$, 但不是极值点.

2. [定理] (函数极值的充分条件)

设 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 满足以下条件:

(1) $f'(x)$ 在 x_0 某个左邻域上(或右) 恒 >0 (或 ≤ 0).

(2) $f'(x)$ 在 x_0 某个右邻域上(或左) 恒 ≤ 0 (或 >0).

则 x_0 是 $f(x)$ 的极大(小)值点.

证明: 设上述邻域合别为 $(x_0-\delta_1, x_0)$ 与 $(x_0, x_0+\delta_2)$.

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 则 $\forall x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时,

恒有 $f(x)\le(\ge) f(x_0)$.

$\therefore x_0$ 是 $f(x)$ 极大(小)值点.

eg. P.95 例8, 极大值点为 $\frac{4}{3}$, 极小值点为 0.

3. [定理] 设 x_0 是 $f(x)$ 的驻点(驻点), 即 $f'(x_0)=0$.

若 $f''(x_0)$ 存在, 则当 $f''(x_0)>0$ 时, x_0 是 $f(x)$ 极小值点.

当 $f''(x_0)<0$ 时, x_0 是 $f(x)$ 极大值点. 当 $f''(x_0)=0$ 时, 待定.

证明: 由 Taylor 公式,

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2+o[(x-x_0)^2].$$

$\because f'(x_0)=0$.

$$\therefore f(x)=f(x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2+o[(x-x_0)^2].$$

1° $f''(x_0)>0$, 只要 $x-x_0$ 充分小, 必有 $f(x)>f(x_0)$.

故 x_0 是 $f(x)$ 极小值点.

2°同理，当$f''(x_0)<0$时，$f(x_0)$是$f(x)$的极大值.

3°$f''(x_0)=0$，则$f(x)=f(x_0)+o[(x-x_0)^2]$.

对Peano余项再做展开，有

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x-x_0)^4+o[(x-x_0)^4]$$

是由x_0的情况不确定.

比如，$f'''(x_0)\neq 0$时，$f(x_0)$一定不是极值

若$f''(x_0)=0$，则
$$\begin{cases} f^{(4)}(x_0)>0 \Rightarrow x_0 \text{是极小值点} \\ f^{(4)}(x_0)<0 \Rightarrow x_0 \text{是极大值点} \\ f^{(4)}(x_0)=0 \Rightarrow \text{待定} \end{cases}$$

e.g. $f(x)=ax+\frac{b}{x}+c$，$x\in(0,+\infty)$，$a,b,c>0$为常数.

求$f(x)$的极值.

解：$f'(x)=a-\frac{b}{x^2}$. 令$f'(x)=0$，则$x=\sqrt{\frac{b}{a}}$为$f(x)$驻点.

又$f''(x)=\frac{2b}{x^3}>0$，$\therefore \sqrt{\frac{b}{a}}$是$f(x)$的极小值点.

极小值为$f(\sqrt{\frac{b}{a}})=2\sqrt{ab}+c$.

三、函数的最大、最小值.

1. 具体求最值的步骤：

(1) 求$f(x)$在(a,b)上的极大、极小值.

(2) 将它们与端点值$f(a)$、$f(b)$做比较.

由此可得$f(x)$在$[a,b]$上的最值.

e.g. 求$f(x)=x^{\frac{2}{3}}-(x^2-1)^{\frac{1}{3}}$在$[0,2]$上的最值.

解：(1) 求极值.

No. 100 Date: 10.21

令 $f'(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}(x^2-1)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2x=\frac{2}{3}\cdot\frac{(x^2-1)^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}(x^2-1)^{\frac{2}{3}}}=0$,

解得 $x\in[0,2]$, 只有 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 说明 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 上的驻点.

但是, $x=0$ 与 $x=1$ 是 $f(x)$ 的不可导点, 也是驻点. Δ

(2) 比较: $f(0)=1$, $f(1)=1$, $f(\frac{\sqrt{2}}{2})=4^{\frac{1}{3}}$, $f(2)=4^{\frac{1}{3}}-3^{\frac{1}{3}}$,

由此, $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上最大值为 $f(\frac{\sqrt{2}}{2})=\sqrt[3]{4}$,

最小值为 $f(2)=\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3}$.

2. [定理] 若 $f(x)$ 在 (a,b) 上有连续导数, 且它在 (a,b) 上只有一个临界点 x_0, 则: $\begin{cases} f''(x_0)>0 \Rightarrow f(x) \text{ 在 } [a,b] \text{ 上最小值为 } f(x_0) \\ f''(x_0)<0 \Rightarrow f(x) \text{ 在 } [a,b] \text{ 上最大值为 } f(x_0). \end{cases}$

证明: $\because f'(x)$ 在 (a,b) 上只有一个零点 x_0.

且 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{x-x_0}=f''(x_0)$.

$\because$ 不妨设 $f''(x_0)>0$, 则在 x_0 附近, $\frac{f'(x)}{x-x_0}>0$.

$\therefore x>x_0$ 时 $f'(x)>0$, $x<x_0$ 时 $f'(x)<0$.

于是 $f(x)$ 在 (a,x_0) 上单调下降, 在 (x_0,b) 上单调上升.

$\therefore f(x)$ 在 $[a,b]$ 上最小值为 $f(x_0)$.

e.g. 求函数 $f(x)=ax+\frac{b}{x}+c$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最小值.

解: $\because x=\sqrt{\frac{b}{a}}$ 是 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的仅有一个临界点.

且 $f''(\sqrt{\frac{b}{a}})<0$.

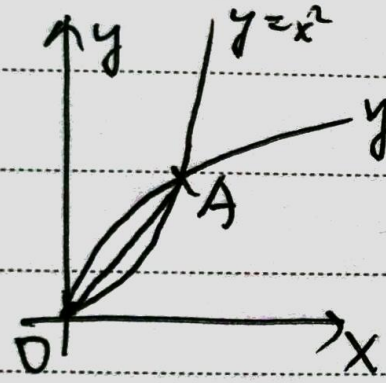
$\therefore f(x)$ 最小值为 $f(\sqrt{\frac{b}{a}})=2\sqrt{ab}+c$.

四. 函数的凸性

GuangBo

No. 10 Date: 10.21

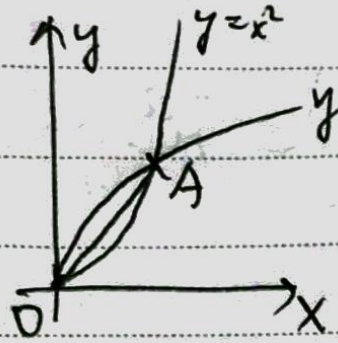
1. 举例：$y=x^2$ 与 $y=\sqrt{x}$ 的抛物线。



我们发现两个函数的开口方向不同，
一为凸性。
我们取弦OA，则 $y=x^2$ 与 $y=\sqrt{x}$
分别为下凸、上凸函数。

2. 定义：设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，若 $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$，且 $x_1<x_2$，有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上下凸。
若 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上上凸。

1. 举例：$y=x^2$ 与 $y=\sqrt{x}$ 的开口方向不同。



我们发现两个函数的开口方向不同，也为凸性。

我们取弦 OA，则 $y=x^2$ 与 $y=\sqrt{x}$ 分别为下凸、上凸函数。

2. 定义：设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，若 $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$，且 $x_1<x_2$，有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \le \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上下凸。

若 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \ge \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上上凸。

3. [定理] 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上二阶可导。

(1) 若 $f''(x)>0$ 在 (a,b) 上恒成立，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上下凸。

(2) 若 $f''(x)\le 0$ 在 (a,b) 上恒成立，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上上凸。

4. 定义：若 $f(x)$ 二阶可导，则称 $f''(x)=0$ 的点为拐点。这是函数从上(下)凸向下(上)凸转换的可疑点(可能不是)。

5. 3中定理的证明：(仅证(1))。

不妨设 $x_1<x_2$。考察 $\frac{1}{2}(f(x_1)+f(x_2))-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$，

令 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$，则上式 $=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{2}+\frac{f(x_2)-f(x_0)}{2}$。

$\because f(x)$ 二阶可导，$\therefore f'(x)$ 存在且在 (a,b) 上连续。

由 Lagrange 中值定理，上式 $=\frac{1}{2}f'(\xi)(x_1-x_0)+\frac{1}{2}f'(\eta)(x_2-x_0)$。

其中 $x_1<\xi<x_0<\eta<x_2$。代入 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$，

得上式 $=\frac{1}{2}(f'(\eta)-f'(\xi))\cdot\frac{x_2-x_1}{2}$。

再用一次 Lagrange 中值定理，有

上式 $=\frac{1}{4}f''(\zeta)(\eta-\xi)(x_2-x_1)$，(其中 $\xi<\zeta<\eta$)

GuangBo

∵ $f''(\xi)\geq 0$, $\eta-\xi>0$, $x_2-x_1>0$

∴上式 ≥ 0.

∴ $f(\frac{x_1+x_2}{2})\leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, $f(x)$在(a,b)上下凸.

eg. ① 讨论曲线 $y=\ln(1+x^2)$ 的凹性.

解: 首先, $y'=\frac{2x}{1+x^2}$, $y''=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$.

可见 y'' 在 $(-1,1)$ 上为正, 在 $(-\infty,-1)$ 与 $(1,+\infty)$ 上为负.

∴此曲线在 $(-1,1)$ 上下凸, 在 $(-\infty,-1)$ 与 $(1,+\infty)$ 上上凸.

② (1) 设连续函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上下凸. 证明: $\forall x_1,\cdots,x_n\in(a,b)$ 成立 $f(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n})\leq\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$.

(2) 证明: 任给 n 个正数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$, 成立 $\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leq\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$.

证明: (1) 由下凸的定义, $\forall x_1,x_2\in(a,b)$, 有 $f(\frac{x_1+x_2}{2})\leq\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

即原不等式在 $n=2$ 时成立.

由此可得 $f(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4})\leq\frac{f(\frac{x_1+x_2}{2})+f(\frac{x_3+x_4}{2})}{2}\leq\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_4)}{4}$.

即 $n=4$ 时也成立.

利用归纳法, 可以证明原不等式对 $n=2^k$ 成立 $(k\in N)$.

(这一步作为作业)

下面要在此基础上证明, 原不等式对一般的 n 成立.

若 $n\neq 2^k(k\in N)$, 则选取 k 使 $2^{k-1}\leq n<2^k$.

GuangBo

记 $\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$. 我们在 $x_1\sim x_n$ 的基础上再加入 2^k-n 个 $\bar{x}$. 凑成 2^k 个数!

得 $f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n+(2^k-n)\bar{x}}{2^k}\right)\le\frac{1}{2^k}\cdot\left(f(x_1)+\cdots f(x_n)+(2^k-n)f(\bar{x})\right)$

而 $x_1+\cdots+x_n=n\bar{x}$.

$\therefore$ 左边 $=f\left(\frac{2^k\bar{x}}{2^k}\right)=f(\bar{x})\le\frac{1}{2^k}(f(x_1)+\cdots+f(x_n))+\frac{2^k-n}{2^k}f(\bar{x})$

移项, $\frac{n}{2^k}f(\bar{x})\le\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{2^k}$.

$\therefore f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)\le\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}$.

(2) 令 $f(x)=-\ln x$. $\because f''(x)=\frac{1}{x^2}>0$. $(x>0)$.

$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上下凸.

$\therefore$ 利用(1)可知 $-\ln\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\le-\frac{\ln x_1+\cdots+\ln x_n}{n}$

$=-\frac{\ln(x_1\cdots x_n)}{n}$.

于是 $\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}\le\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$.

五、曲线的拐点(一阶导数的极值点)

1. $f(x)$ 的拐点, 是指曲线 $y=f(x)$ 凸性改变的临界点.

2. 引理1: 若 $f''(x)$ 存在, 且 x_0 是 $f(x)$ 的拐点, 则 $f''(x_0)=0$.

引理2: 若 $f''(x_0)=0$, 且 $f''(x)$ 在 x_0 两侧符号相反, 则 x_0 是 $f(x)$ 的拐点

(证明从略).

GuangBo

e.g. 求曲线 $y=xe^{-x}$ 的凹性区间与拐点.

解: $y'=(1-x)e^{-x}$. $y''=(x-2)e^{-x}$.

令 $y''=0$, 则 $x=2$ 为可疑拐点.

又 $f''(x)$ 在 $(-\infty,2)$ 上为负, 在 $(2,+\infty)$ 上为正.

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,2)$ 上上凸, 在 $(2,+\infty)$ 上下凸.

由此, $x=2$ 是该曲线的拐点.

六. 函数图象的描绘.

1. 利用 $f'(x)$ 与 $f''(x)$, 可以较精确地画出 $f(x)$ 图像.

2. 作图步骤.

(1) 确定 $f(x)$ 定义域, 奇偶性, 周期性.

(2) 计算 $f'(x)$, 并引出临界点(驻点)与不可导点, 由此确定 $f(x)$ 的单调区间与极值点.

(3) 计算 $f''(x)$, 确定 $f(x)$ 的凹性区间与拐点.

(4) 讨论 $y=f(x)$ 的斜渐近线, 以及垂直/平行渐近线.

(5) 求出一些重要的点: 极值点、拐点.

(6) 由单调性、凹性, 用一条光滑曲线连接各点.

e.g. 作出函数 $y=x^2+\frac{1}{x}$ 的图形.

解: (1) 定义域: $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

无奇偶性、周期性.

(2)(3) $y'=2x-\frac{1}{x^2}$, $y''=2+\frac{2}{x^3}$.

令 $y'=0 \Rightarrow x=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.

令 $y''=0 \Rightarrow x=-1$

下面列表说明单调性、凹性、极值点、拐点.

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	$(0,\sqrt[3]{\frac{1}{2}})$	$\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$	$(\sqrt[3]{\frac{1}{2}},+\infty)$
y'	$-$		$-$	$-$	0	$+$
y''	$+$	0	$-$	$+$		$+$
y	↘凸	拐点	↘凹	↘凹	极小值	↗凹

(4) 讨论渐近线: ① $\because \lim\limits_{x\to 0} y=\infty$.

$\therefore x=0$ 为一条垂直渐近线.

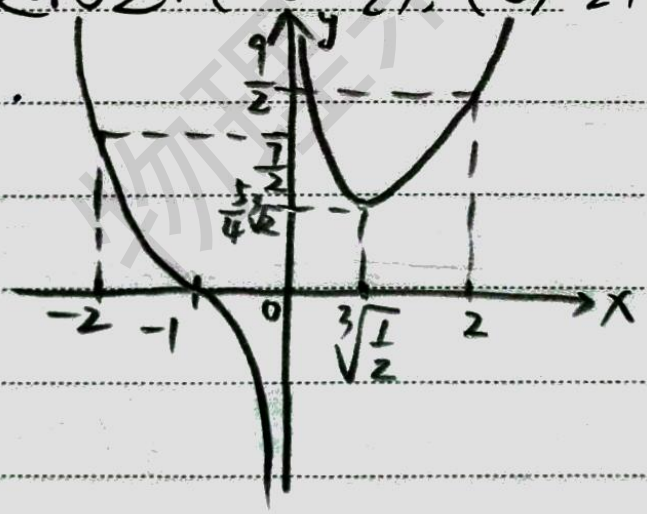
② $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}(x+\frac{1}{x^2})=\infty$. $\therefore$ 无斜渐近线

③ $\lim\limits_{x\to\infty} y=\infty$ $\therefore$ 无水平渐近线.

(5) 特点: $(-1,0)$, $(\sqrt[3]{\frac{1}{2}},\frac{5}{4}\sqrt[3]{2})$.

我们再选两点: $(-2,\frac{7}{2})$, $(2,\frac{9}{2})$.

(6) 图像.



期中复习

(一) 极限与连续

一、函数

1. 定义：$f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $\forall x \in D$ 有唯一 $y \in \mathbb{R}$ 与之对应.

GuangBo

物理系的汶君

2. 要素：定义域、对应关系.（两者均相同的函数是相等的，不管自变量与因变量字母选取是否一样. 如 $\sum_{i=1}^{n} i = \sum_{k=1}^{n} k$.）

3. 性质：奇偶性，周期性，有界性，单调性.

4. 运算：四则运算、复合运算.

5. 反函数.

6. 初等函数 { 六类基本初等函数 ← 有限次四则、复合
其他初等函数

e.g. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x)+2f\left(\frac{2-x}{1+x}\right)=3x$ 的函数方程. 求 $f(x)$.

解：令 $u=\frac{2-x}{1+x}$. 则 $x=\frac{2-u}{1+u}$.

代入函数方程，可得 $f\left(\frac{2-u}{1+u}\right)+2f(u)=\frac{3(2-u)}{1+u}$.

$\therefore f\left(\frac{2-x}{1+x}\right)+2f(x)=\frac{3(2-x)}{1+x}$ ①

$2f(x)+2f\left(\frac{2-x}{1+x}\right)=3x$ ②

$\therefore$ 由①② 得 $f(x)=\frac{4-3x-x^2}{1+x}$.

二. 数列的极限

1. $\{a_n\}$，可看成定义在 $\mathbb{Z}_+$ 上的函数. 我们重要研究 $n\to\infty$ 时 $\{a_n\}$ 的状态.

2. 极限的定义 ε-N 语言.

3. 收敛与发散；收敛数列的性质.

(1) 极限四则运算. (2) 极限的唯一性

(3) 收敛数列必有界. (4) 夹逼性.

4. 无穷小与无穷大.

5. 单调有界数列 {必有极限
Stolz定理: {b_n}单调, $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, 则
$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$.

6. 柯西准则.

eg. 证明 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)=2$.

[一]证明: $\because \{\sqrt{n}\}_1^{\infty}$ 单调上升且趋于无穷大.

$\therefore$ 由Stolz定理

原式 $= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)=2$.

[二] 夹逼性: $2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) = \frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} < \frac{1}{\sqrt{k}} < \frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}} = 2(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})$

对 $k=1$ 到 $k=n$ 进行累加, 有

$2(\sqrt{n+1}-1) < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}$.

故 $2\cdot\frac{\sqrt{n+1}-1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} < 2$.

又 $\lim_{n\to\infty}\frac{2(\sqrt{n+1}-1)}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} 2\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \frac{2}{\sqrt{n}} = 2$.

$\therefore$ 原式 $= 0$.

三、函数的极限.

1. 定义 ε-δ 语言.

2. 函数极限的性质: 四则运算, 唯一性, 夹逼性, 有界性, 有序性.

3. 单侧极限. (可用于判断极限是否存在.

4. 两个重要极限: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

GuangBo

三. 连续函数

1. 连续的定义：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

2. 连续函数的性质：

连续性在函数的四则运算、复合运算中保持不变.

3. 间断点（八大类）

4. 闭区间上连续函数的性质

(1) 有界性. (2) 最大，最小值点的存在性.

(3) 介值定理. $\Rightarrow$ (4) 零点存在性定理.

5. 渐近线 $\begin{cases} \text{垂直} \\ \text{斜} \\ \text{水平} \end{cases}$

e.g. 函数 $f: [a,b] \to [a,b]$ $(R_f \subseteq [a,b])$.

若 $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$, $|f(x_1) - f(x_2)| \le k|x_1 - x_2|$ (k 为常数且 >0),

证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

证明：不妨设 $x_1 \neq x_2$

于是 $k \ge \left|\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}\right| \ge 0$.

令 $f(x_1) - f(x_2) = \Delta y$, $x_1 - x_2 = \Delta x$

于是显然有 $0 \le |\Delta y| \le k|\Delta x|$.

由夹逼定理，$\lim\limits_{\Delta x\to 0} |\Delta y| = 0$.

所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$.

于是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

GuangBo

(二) 一元函数微分学.

一、微分与导数：研究 Δy 与 Δx 的关系.

1. 导数的定义：$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

2. 左右导数及其与可导的关系.

3. 微分与可微：若 $\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$，则 $dy=A\Delta x=Adx$.

$\Rightarrow$ 可导等价于可微(一元)，$dy=f'(x)dx$.

4. 导数的几何意义：切线斜率.

5. 基本初等函数的导数、微分公式(包括四则运算、复合运算、反函数).(连接：一次微分形式不变性、Leibniz法则，对数求导法)

6. 高阶导数.

7. 微分的相应法则.

二、中值定理与相关应用

1. 理解Fermat引理与三个中值定理的条件、结论.

2. 中值定理的应用.

(1) 洛必达法则. (2) 函数的单调区间与极值.

(3) 函数不等式.

3. Taylor展开 { Peano余项
Lagrange余项.
Maclaurin公式.

GuangBo

4. 用一阶导数判断单调性与极值.

5. 用二阶导数判断凹性与拐点.

6. 函数图象的描绘(六部曲).

eg. ① 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 上可导,且 $f(0)=0$, 当 $x\in(0,1)$ 时 $f(x)\neq 0$. 证明对于 $\forall n\in N_+$, $\exists \xi\in(0,1)$, 使得 $\frac{nf'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$.

[分析] 变形: $\frac{nf'(\xi)}{f(\xi)}-\frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}=0$,

$\Rightarrow [n\ln f(\xi)+\ln f(1-\xi)]'=0$.

$\Rightarrow [\ln f^n(\xi)\cdot f(1-\xi)]'=0$.

[证明] 令 $F(x)=f^n(x)\cdot f(1-x)$.

显 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 上可导.

又 $f(0)=f(1)=0$. $\therefore$ 由 Rolle 定理,

$\exists \xi\in(0,1)$, 有 $F'(\xi)=nf^{n-1}(\xi)f(1-\xi)-f^n(\xi)f'(1-\xi)=0$.

$\because f(\xi)\neq 0$, $f(1-\xi)\neq 0$.

$\therefore$ 两边同除以 $f^{n-1}(\xi)f(1-\xi)$, 即

$$\frac{nf'(\xi)}{f(\xi)}-\frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}=0.$$

证毕.

② 求 $\lim_{x\to\infty}[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})]$.

[一]解：令 $u=\frac{1}{x}$，则 $x\to\infty$ 时 $u\to 0$.

$\therefore$ 原式 $=\lim_{u\to 0}[\frac{1}{u}-\frac{\ln(1+u)}{u^2}]$.

$=\lim_{u\to 0}[\frac{1}{u}-\frac{1}{u^2}(u-\frac{u^2}{2}+o(u^2))]$.

$=\frac{1}{2}$.

[二]解：(L'Hospital法则)

原式 $=\lim_{u\to 0}\frac{u-\ln(1+u)}{u^2}=\lim_{u\to 0}\frac{1-\frac{1}{u+1}}{2u}$

$=\lim_{u\to 0}\frac{1}{2(u+1)^2}=\frac{1}{2}$.

③ 求 $f(x)=(x-1)\ln(1+x)$ 带 Peano 余项的 Maclaurin 公式，并求 $f^{(n)}(0)$.（解答答在后面）

④ 求 $y=(x-1)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$ 的单调区间与极值，并求该曲线的渐近线.（2000 考研）

解：$\because y'=e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}+(x-1)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}\cdot\frac{1}{1+x^2}$.

$=e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}\cdot\frac{x^2+x}{1+x^2}$.

$\therefore$ 令 $y'=0$，则 $x=0$ 或 -1.

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	极大值	↘	极小值	↗

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 与 $(0,+\infty)$ 上单调上升，在 $(-1,0)$ 上单调下降.

$f(x)$ 极大值为 $f(-1)=-2e^{\frac{\pi}{4}}$，极小值为 $f(0)=-e^{\frac{\pi}{2}}$.

No. 112 Date: 10.26

下面求渐近线.(显然无垂直渐近线).

设斜(水平)渐近线为 $y=ax+b$.

则 $a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$

$=e^{\frac{\pi}{2}+\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x}$.

显然, $x\to+\infty$ 与 $x\to-\infty$ 情况不同, 故有

$a_1=e^{\frac{\pi}{2}+\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x}=e^{\pi}$,

$a_2=e^{\frac{\pi}{2}+\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x}=e^{0}=1$.

于是有

$b_1=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-a_1x)=\lim\limits_{x\to+\infty}[(x+1)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}-e^{\pi}x]$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\pi}x(e^{\arctan x-\frac{\pi}{2}}-1)-\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\pi}\cdot\frac{\arctan x-\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}-e^{\pi}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\pi}\cdot\frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}-e^{\pi}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\pi}\cdot(-\frac{x^2}{1+x^2})-e^{\pi}=-2e^{\pi}$.

$b_2=\lim\limits_{x\to-\infty}[(x+1)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}-x]=\lim\limits_{x\to-\infty}x(e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}-1)-\lim\limits_{x\to-\infty}e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\frac{\pi}{2}+\arctan x}{\frac{1}{x}}-1=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}-1$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}-\frac{x^2}{1+x^2}-1=-2$.

∴ $y=f(x)$ 有两条渐近线,

$y=e^{\pi}x-2e^{\pi}$ 与 $y=x-2$.

GuangBo

No. 113 Date: 10.26.

关③的解答.

解: $\because \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + o(x^n)$.

$\therefore (x-1)\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^{k+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + o(x^n)$.

$= \sum_{k=2}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k-1} x^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + o(x^n)$.

$= \sum_{k=2}^{n} (-1)^k \left(\frac{1}{k-1} + \frac{1}{k}\right) x^k + \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^{n+1} - x + o(x^n)$

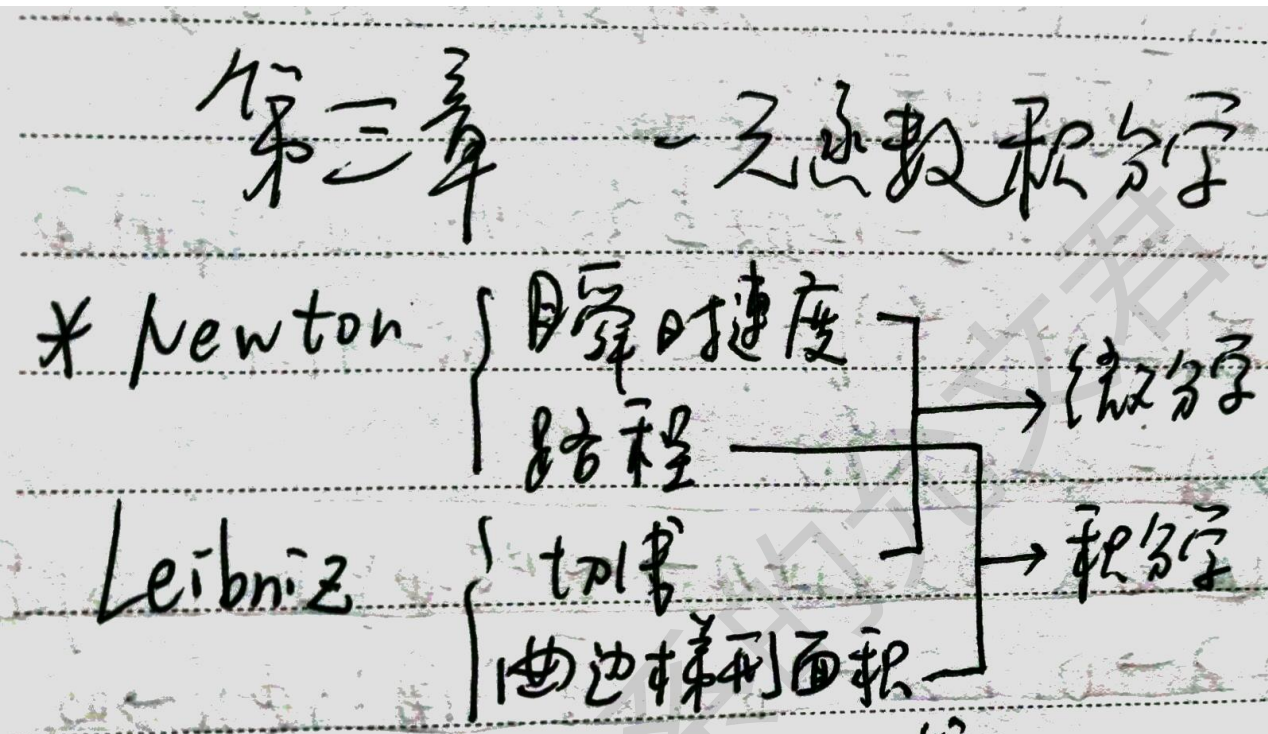
$= -x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{6}x^3 + \cdots + (-1)^n \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}\right) x^n + o(x^n)$.

考察 x^n 系数, 有 $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = (-1)^n \cdot \frac{2n-1}{n(n-1)} \cdot (n \geq 2)$.

$\therefore f^{(n)}(0) = \begin{cases} (-1)^n \cdot (2n-1) \cdot (n-2)!, & n \geq 2. \\ -1, & n = 1. \end{cases}$

物理学的交易

第三章 一元函数积分学



微分与积分是互逆的两种运算.

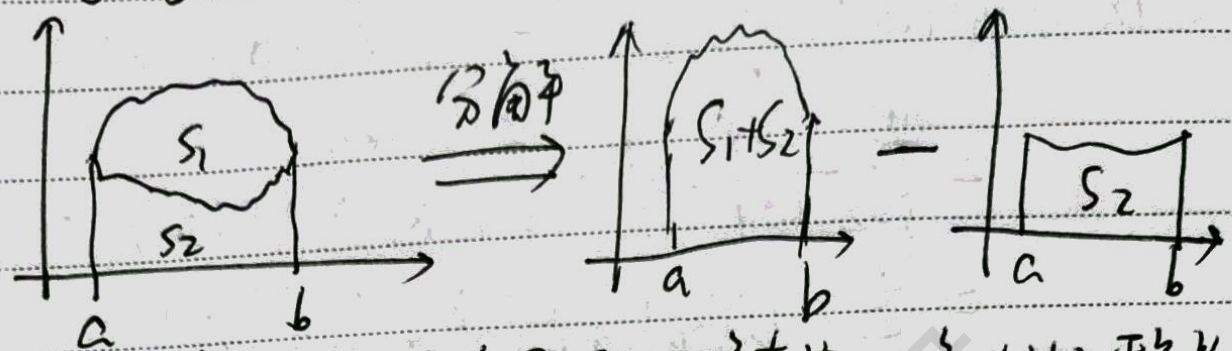
§1 定积分的定义、性质与基本定理

一、两个实例.

No. 114 Date: 10.31

1. 面积问题

对于一个不规则的曲边图形，怎样求面积？



(1) 我们将右边的两个图形（三条直边、一条曲边）称为曲边梯形。

(2) 求图中的 S_1，可以先求 (S_1+S_2)，再求 S_2，

于是 $S_1=(S_1+S_2)-S_2$。

(3) 曲边梯形面积的基本求法：分割。

① 用分点 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$ 将 $[a,b]$ 分成 n 个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$，当 n 越大时，每个小区间内的曲边梯形均可近似看成矩形。

② 求和：在每个 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取点 ξ_i，则小曲边梯形面积 A_i 可近似看成 $\Delta x_i f(\xi_i)$，其中 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$。

于是大曲边梯形 $A\approx\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i f(\xi_i)$。

记 Δx_i 的最大值为 λ，为保证 $n\to\infty$ 时每个小区间都足够小，我们要让 $\lambda\to 0$。（$\lambda\to 0$ 的双重作用：使 $n\to\infty$，且 $\Delta x_i\to 0$，$i=1,2,\cdots,n$）。

于是 $A=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta x_i f(\xi_i)$。

2. 路程问题

GuangBo

设一个质点做变速运动，速度为 $v(t)$，求它在时间段 $[a,b]$ 内运动的路程。

(1) 分割：类似地引入点 $a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=b$.
它们将 $[a,b]$ 分成 n 个小区间 $[t_{i-1},t_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$.
n 越来越大时，质点在每个小区间内的运动都可近似为匀速直线运动.

(2) 求和：任取 $\xi_i\in[t_{i-1},t_i]$.
则 $[t_{i-1},t_i]$ 内的位移 $s_i\doteq \Delta t_i v(\xi_i)$. $(\Delta t_i=t_i-t_{i-1})$
于是总路程 $s\doteq \sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i$.

记 $\lambda=\max\{\Delta t_i\}$，则 $s=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i$.

二、定积分

1. 定义：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义. 对 $f(x)$ 做这样的运算：

(1) 分割：任取 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 将 $[a,b]$ 分成 n 个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$. 记 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，$\lambda=\max\{\Delta x_i\}$.

(2) 求和：任取 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，对 $\Delta x_i f(\xi_i)$ 求和.

(3) 取极限：如果 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta x_i f(\xi_i)$ 存在，则称这个极限为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分，记为 $\int_a^b f(x)\,dx$.

其中 a,b 分别为积分下限与积分上限.
$f(x)$ 称为被积函数，x 为积分变量.
上述积分也叫 Riemann 积分，$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 也叫 Riemann 和.

2. 定积分是一个定值，它与 x_i，ξ_i 的选取无关.

3. 规定 $\int_a^a f(x)dx = 0$.

4. 上下限可颠倒：

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

5. 定积分的几何意义.

(1) $f(x) > 0$ 时，$\int_a^b f(x)dx$ 即为曲边梯形面积.

(2) $f(x) < 0$ 时，$\int_a^b f(x)dx$ 是对应曲边梯形面积的相反数.

(3) 当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有正有负时，$\int_a^b f(x)dx$ 是各个曲边梯形面积的代数和.

6. 可积：若 $\exists I \in R$，$\forall \varepsilon > 0$，都 $\exists \delta > 0$，使得 $\lambda < \delta$ 时，

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i f(\xi_i) - I \right| < \varepsilon.$$

则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且 $\int_a^b f(x)dx = I$.

2. [定理] 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，并且有有限个间断点，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

* 有界未必可积. 如对于 $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \cap Q \\ 0, & x \in [0,1] \cap Q^c \end{cases}$

(狄利克雷函数)，它在 $[0,1]$ 上不可积，因为 Riemann 和与 ξ_i 的选取有关，也即 Riemann 和极限不存在.

e.g. ① 求 $\int_a^b k dx$.

解：任取分割 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$，将 $[a,b]$ 划 n 个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$. 记 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，$\lambda = \max\{\Delta x_i\}$，

任取 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$，求和

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = k\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = k(b-a).$$

于是 $\int_a^b k\,dx = \lim_{\lambda\to 0} k(b-a) = k(b-a)$.

② 求 $\int_0^1 x^2 dx$.

解：∵ $f(x)=x^2$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续.

∴ x^2 在 $[0,1]$ 上可积，即 $\int_0^1 x^2 dx$ 与分割、取点方式无关.

在此，我们选一个特殊的点 $0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=1$，

它们将 $[0,1]$ n 等分，于是 $x_i = \frac{i}{n}$.

所以 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n}$，$\lambda = \frac{1}{n}$.

取 $\xi_i = \frac{i}{n}$ $(i=1,2,\cdots,n)$. 求和

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{n^3} = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

取极限得 $\int_0^1 x^2 dx = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{1}{3}$.

三、定积分的性质

设 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则：

1. $\alpha f(x)+\beta g(x)$ 也在 $[a,b]$ 上可积，且

$$\int_a^b [\alpha f(x)+\beta g(x)]dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx.$$

这是因为 Riemann 和具有线性：

$$\int_a^b [\alpha f(x)+\beta g(x)]dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[\alpha f(\xi_i)+\beta g(\xi_i)]\Delta x_i$$

$$= \alpha\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + \beta\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i$$

$$= \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx.$$

GuangBo

2. $\forall c$，有 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

证明：1° $c \in (a,b)$ 时，设 $[a,c]$ 上的 Riemann 和为 $\Sigma' f(\eta_i)\Delta x_i$，且 $\lambda_1 = \max\{\Delta x_i\}$

设 $[c,b]$ 上的 Riemann 和为 $\Sigma'' f(\xi_i)\Delta x_i'$，且 $\lambda_2 = \max\{\Delta x_i'\}$.

则 $[a,b]$ 上的 Riemann 和为

$\Sigma' f(\xi_i)\Delta x_i + \Sigma'' f(\eta_i)\Delta x_i'$.

取 $\lambda = \max\{\lambda_1, \lambda_2\}$.

于是 $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\left(\Sigma' f(\xi_i)\Delta x_i + \Sigma'' f(\eta_i)\Delta x_i'\right)$.

$= \lim_{\lambda_1\to 0}\Sigma' f(\xi_i)\Delta x_i + \lim_{\lambda_2\to 0}\Sigma' f(\eta_i)\Delta x_i'$

$= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

2° $c < a < b$. 由 1° 可知

$\int_c^b f(x)dx = \int_c^a f(x)dx + \int_a^b f(x)dx$

于是 $\int_a^b f(x)dx = \int_c^b f(x)dx - \int_c^a f(x)dx$

$= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

3° $a < b < c$. 由 1° 可知

$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$.

$\therefore \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx$.

$= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

上述结论叫定积分的可加性.

GuangBo

3. 保序性：若 $f(x) \le g(x)$ 在 $[a,b]$ 上成立，则

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$$

4. $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$

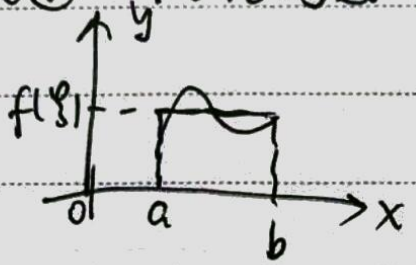
这是因为 $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$.

根据保序性，对上述三者求积分即可.

5. 积分中值定理：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则

$\exists \xi \in (a,b)$，使 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$.

* 此定理的几何意义：存在一个矩形与曲边梯形面积相等.



严格证明：$\because f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

$\therefore \exists m, M$ 使 $m \le f(x) \le M$.

积分有 $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.

由介值定理，存在 $\xi \in (a,b)$ 使

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(\xi).$$ 证毕.

课堂笔记分享

GuangBo

关于一元定积分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 的求法的探究

四、原函数

1.[定理] 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则

$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ 满足 $F'(x)=f(x)$，$x\in(a,b)$.

证明：由导数定义，若 $F(x)$ 在 x 处可导，则

物理学霸化学君

$$F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\int_a^{x+\Delta x}f(t)dt-\int_a^{x}f(t)dt\right]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\cdot\int_x^{x+\Delta x}f(t)dt.$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}f(\xi)\Delta x \quad (\xi\text{介于}x\text{与}x+\Delta x\text{之间})$$

$$=\lim_{\xi\to x}f(\xi)=f(x). \quad \text{证毕.}$$

2. 原函数的定义：若$F(x)$, $f(x)$是$[a,b]$上的两个函数，且$F'(x)=f(x)$，则称$F(x)$是$f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数.

注：①由此可见，$\int_a^x f(x)dx$是$f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数.

②原函数不唯一. 若$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，则$F(x)+C$（C为常数）均为$f(x)$的原函数.

证明：设$F(x)$与$G(x)$均为$f(x)$原函数，则

$$F'(x)=G'(x)=f(x).$$

由微分中值定理推论，$F(x)-G(x)=C$. 证毕.

③由②可知，$f(x)$在$[a,b]$上的原函数一定可以写成

$$\int_a^x f(t)dt+C.$$

④由定理可知，$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$.

可见$\frac{d}{dx}$与$\int_a^x$为互逆运算，当然有时会差一个常数.

e.g.① 设$f(x)=\int_0^{\sin x}\sin(t^2)dt$, $g(x)=x^3+x^4$. 判断当$x\to 0$时，$f(x)$与$g(x)$是当的同阶无穷小.

解：当 $x\to 0$ 时，$g(x)=x^3+x^4\sim x^3$.

而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{3x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin^2 x)\cdot\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x\cdot 1}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$.

$\Rightarrow f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶无穷小（$x\to 0$ 时）.

② 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

解：用积分思想解此题.

一方面，$\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}}<\dfrac{1}{n}\left(\sin\dfrac{\pi}{n}+\sin\dfrac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\dfrac{n\pi}{n}\right)$

$=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n}\cdot\sin\dfrac{i\pi}{n}\xrightarrow{\text{收敛到}}\int_0^1\sin\pi x\,dx$.

另一方面，$\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}}>\dfrac{1}{n+1}\left(\sin\dfrac{\pi}{n}+\sin\dfrac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\dfrac{n\pi}{n}\right)$

$=\dfrac{n}{n+1}\cdot\dfrac{1}{n}\left(\sin\dfrac{\pi}{n}+\cdots+\sin\dfrac{n\pi}{n}\right)$

$\longrightarrow\int_0^1\sin\pi x\,dx$

∴ 由夹逼性，原式 $=\int_0^1\sin\pi x\,dx\left(=\dfrac{2}{\pi}\right)$.

五、微积分基本定理.

1.【定理】(Newton-Leibniz 公式) 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b$.

物理学习小文库

GuangBo

No. 122 Date: 11.2

证明：记 $G(x)=\int_a^x f(t)dt$，则 $G(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数。

于是 $F(x)=G(x)+C$，其中 C 是待定自由常数。

由定积分的性质，$G(a)=\int_a^a f(t)dt=0$。代入上式，有

$$0=F(a)+C,\quad 故\ C=-F(a).$$

也即 $\int_a^x f(t)dt=F(x)-F(a)$。

特别地，取 $x=b$，则 $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$。证毕。

2. 上述公式表明，积分实为微分的逆运算，并且一旦知道了原函数，即可得定积分的值。定积分求解的关键转移到了对原函数的寻找。

§2 不定积分

一、定义：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上原函数的全体叫 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的不定积分，记为 $\int f(x)dx=F(x)+C$，其中 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数。

二、性质

1. $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)\Rightarrow d\int f(x)dx=f(x)dx$.

2. $\int F'(x)dx=F(x)+C\Rightarrow \int dF(x)=F(x)+C$.

（注：$\int_a^b f(x)dx$（若存在）$\in R$，但 $\int f(x)dx$ 是函数。两者之间由 Newton-Leibniz 公式连接。）

3. 定积分是求导（$\frac{d}{dx}$）的逆运算有以下事实：

$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$，即幂函数求导还是幂函数。

但幂函数的不定积分 $\int x^\alpha dx$ 未必还是幂函数。

因为当 $\alpha=-1$ 时 $\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$，这是幂函数的范围.
这也体现出积分难度比求导大一些.（链接自学函数论）.

三、基本积分公式.

1. $\int x^\alpha dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C.$ $(\alpha\neq-1)$
2. $\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+C.$
3. $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C.$ $(a>0, a\neq1)$.
   特别地，$\int e^x dx=e^x+C.$
4. $\int \sin x dx=-\cos x+C.$
5. $\int \cos x dx=\sin x+C.$
6. $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx=\int \sec^2 x dx=\tan x+C.$
7. $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx=\int \csc^2 x dx=-\cot x+C.$
8. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+C.$
9. $\int \frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x+C.$
10. 不定积分也具有线性性.
    $\int(\alpha f(x)+\beta g(x))dx=\alpha\int f(x)dx+\beta\int g(x)dx.$

e.g. ① 求 $\int(2x^3-\frac{4}{x^2}+\sqrt{x})dx.$

解：原式 $=2\int x^3dx-4\int\frac{1}{x^2}dx+\int\sqrt{x}dx$
$=\frac{1}{2}x^4+\frac{4}{x}+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C.$

② 求 $\int\frac{4x^2-1}{1+x^2}dx.$

解：原式 $=\int\frac{4(1+x^2)-5}{1+x^2}dx$
$=\int 4dx-5\int\frac{1}{1+x^2}dx$
$=4x-5\arctan x+C.$

No. 124 Date: 11.2

③ 求 $\int \cos^2\frac{x}{2}\,dx$.

解：原式 $= \int \frac{1+\cos x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos x\,dx$

$= \frac{x}{2} + \frac{\sin x}{2} + C$.

④ 求 $\int \tan^2 x\,dx$.

解：原式 $= \int (\sec^2 x - 1)\,dx = \int \sec^2 x\,dx - \int dx$

$= \tan x - x + C$.

物理系的允浩君

No. 127 Date: 11.4, 11.7

理 $\lim_{n\to\infty} x_n^{n+1} = 0$. 这是因为 $0 < x_n^{n+1} \le \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+1}$.

所以 $\lim_{n\to\infty}(x_n^n + x_n^{n-1} + \cdots + x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_n^{n+1}}{1-x_n} = \frac{A-0}{1-A}$.

$\therefore A = \frac{1}{2}$.

P124-127 期中试卷评讲

(接 P.124 积分部分)

四、第一类变量代换积分法——凑微分法.

1. e.g. 求 $I = \int e^{2x} dx$.

解: 我们知道, $\int e^u du = e^u + C$.

理, 为了配凑 $\int e^u du$, 有

$I = \left[\int e^{2x} d(2x)\right] \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} e^{2x} + C$.

也可以直接令 $u = 2x$, 有 $I = \frac{1}{2}\int e^u du = \frac{1}{2} e^u + C = \frac{1}{2} e^{2x} + C$.

2. [定理] 若在 $\int f(x)dx$ 中, 被积函数 $f(x)$ 可以凑成

$f(x)dx = g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = g(\varphi(x))d\varphi(x)$.

且 $\int g(u)du = G(u) + C$ 可求.

则只要令 $u = \varphi(x)$, 就有 $\int f(x)dx = G(\varphi(x)) + C$.

这种变量代换的方法叫凑微分法, 是第一类换元法.

e.g. ① 求 $\int \frac{1}{x \ln x} dx$.

解: 原式 $= \int \frac{1}{\ln x} d(\ln x) = \ln|\ln x| + C$.

GuangBo

② 求 $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.

解: 原式 $= 2\int \frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx = 2\int \sin\sqrt{x}\,d\sqrt{x}$

$= -2\cos\sqrt{x} + C$.

③ 求 $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$.

解: 原式 $= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+(\frac{x}{a})^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d(\frac{x}{a})}{1+(\frac{x}{a})^2}$

$= \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$.

④ 求 $\int \sin^5 x\cos^3 x\,dx$.

解: 原式 $= \int \sin^5 x\cdot\cos^2 x\cdot d(\sin x)$

$= \int \sin^5 x(1-\sin^2 x)\,d(\sin x)$

$= \int (\sin^5 x - \sin^7 x)\,d(\sin x)$

$= \frac{1}{6}\sin^6 x - \frac{1}{8}\sin^8 x + C$.

⑤ 求 $\int \tan x\,dx$.

解: 原式 $= \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$

$= \ln|\sec x| + C$.

⑥ 求 $\int \sin 5x\cos 3x\,dx$.

解: 原式 $= \frac{1}{2}\int (\sin 8x + \sin 2x)\,dx$.

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}\int \sin 8x\,d(8x) + \frac{1}{2}\int \sin 2x\,d(2x)\right)$

$= -\frac{1}{16}\cos 8x - \frac{1}{4}\cos 2x + C$.

⑦ 求 $\int \frac{dx}{1+e^x}$.

解: 原式 $= \int \frac{e^{-x}dx}{1+e^{-x}} = -\int \frac{d(e^{-x}+1)}{1+e^{-x}}$

$= -\ln(1+e^{-x}) + C$.

物理兴趣公众号

⑧求 $\int \frac{1-\sin x}{1+\sin x}dx$.

解: 原式 $= \int \frac{1-\cos(\frac{\pi}{2}-x)}{1+\cos(\frac{\pi}{2}-x)}dx = \int \frac{2\sin^2(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})}{2\cos^2(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})}dx$

$= \int \tan^2(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})dx = \int [\sec^2(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})-1]dx$

$= -2\int \sec^2(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})d(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}) - \int dx$

$= -2\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}) - x + C.$

⑨求 $\int \frac{1+x}{x(1+xe^x)}dx$.

解: 原式 $= \int \frac{(1+x)e^x}{xe^x(1+xe^x)}dx = \int \frac{1}{xe^x(1+xe^x)}d(xe^x)$

$= \int (\frac{1}{xe^x} - \frac{1}{xe^x+1})d(xe^x)$

$= \ln|xe^x| - \ln|xe^x+1| + C$

$= \ln\left|\frac{xe^x}{1+xe^x}\right| + C.$

⑩(作业)求 $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx$.

解: 原式 $= 2\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{1+(\sqrt{x})^2}d\sqrt{x} = 2\int \arctan\sqrt{x}\,d(\arctan\sqrt{x})$

$= \arctan^2\sqrt{x} + C.$

对第类换元法是先看为 $\int f(x)dx = \int g(\varphi(x))d\varphi(x)$, 然后再求解, 令 $u=\varphi(x)$ 即可.

GuangBo

No. 150 Date: 11.7

五、第二类换元法.

1. 与第一类不同本法直接令 $x=\psi(u)$, 然后代简

$$\int f(x)dx = \int f(\psi(u))\psi'(u)du.$$

2. [定理] 设 $f(x)$ 连续, $\psi(u)$ 连续而可导, 且 $\psi^{-1}(u)$ 存在 (在一般情况下要求 $\psi(u)$ 单调). 若

$$\int f(\psi(u))\psi'(u)du = F(u)+C \text{ 可求},$$

则 $\int f(x)dx = F(\psi^{-1}(x))+C$. (令 $x=\psi(u)$)

证明: 由上述条件, $\frac{d}{du}F(u) = f(\psi(u))\cdot\psi'(u)$.

于是 $\frac{d}{dx}[F(\psi^{-1}(x))+C] = \frac{d}{du}F(u)\cdot\frac{du}{dx}$.

$$= f(\psi(u))\psi'(u)\cdot\frac{1}{\psi'(u)}$$

$$= f(\psi(u)) = f(x).$$

$\Rightarrow \int f(x)dx = F(\psi^{-1}(x))+C$.

eg. ① 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

解: 令 $x=t^6 (t>0)$, 于是 $dx = 6t^5dt$.

于是原式 $= \int \frac{6t^5dt}{t^3+t^2} = 6\int \frac{t^3}{1+t}dt$

$$= 6\int (t^2-t+1-\frac{1}{1+t})dt = 6(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln|1+t|)+C$$

$$= 2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln(1+\sqrt[6]{x})+C.$$

② 求 $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$. $(a>0)$

解: 令 $x=a\sin t$, $t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, 以除去根号.

于是 $t = \arcsin\frac{x}{a}$.

原式 $= \int a\cos t \cdot a\cos t\,dt$

$= a^2\int \cos^2 t\,dt$

$= a^2\int \frac{1+\cos 2t}{2}dt$

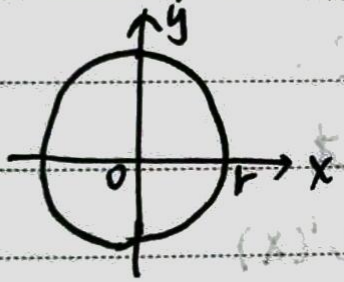
$= \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4}\sin 2t + C$

$= \frac{a^2}{2}(t+\sin t\cos t) + C$

$= \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{a}\cdot\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}\right) + C$

$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + C.$

*本题的推论：圆面积的计算.



根据对称性，圆面积

$S = 4\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx$

$= \left(2r^2\arcsin\frac{x}{r} + \frac{1}{2}x\sqrt{r^2-x^2}\right)\Big|_0^r$

$= 2r^2\cdot\frac{\pi}{2} + 0 = \pi r^2.$

③ 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$ $(a>0)$

解：令 $x = a\tan t$，则 $dx = a\sec^2 t\,dt$. $[t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})]$

原式 $= \int \frac{\cos t}{a}\cdot a\frac{dt}{\cos^2 t} = \int \frac{dt}{\cos t} = \int \frac{\cos t\,dt}{\cos^2 t}$

$= \int \frac{d(\sin t)}{1-\sin^2 t} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-\sin t} + \frac{1}{1+\sin t}\right)d(\sin t)$

$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\frac{(1+\sin t)^2}{\cos^2 t} + C$

$= \ln\left|\frac{1+\sin t}{\cos t}\right| + C = \ln|\sec t + \tan t| + C$

$= \ln\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a} + C = \ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) + C'.\ (C' = C-\ln a)$

GuangBo

No. 132 Date: 11.7

※这一题要作为额外的公式来记忆.

④ 求 $\int \frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}}$.

解: 令 $x=\sin t$, $t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. 故 $t=\arcsin x$.

于是原式 $=\int \frac{\cos t\,dt}{\sin t+\cos t} \overset{※}{=} \frac{1}{2}\int \frac{(\cos t+\sin t)+(\cos t-\sin t)}{\sin t+\cos t}dt$.

$=\frac{1}{2}\int\left(1+\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}\right)dt$

$\overset{※}{=}\frac{1}{2}\int dt+\frac{1}{2}\int\frac{d(\sin t+\cos t)}{\sin t+\cos t}$

$=\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\ln|\sin t+\cos t|+C$.

$=\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{1-x^2})+C$.

六、分部积分法——由 Leibniz 公式引出

$\because [u(x)v(x)]'=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$

$\Rightarrow u'(x)v(x)=[u(x)v(x)]'-u(x)v'(x)$.

积分 $\int u'(x)v(x)dx=u(x)v(x)-\int u(x)v'(x)dx$.

即 $\int v(x)du(x)=u(x)v(x)-\int u(x)dv(x)$.

这就是分部积分公式.

2. 例题.

① 求 $\int \ln x \, dx$.

解: 原式 $= x\ln x - \int x \, d(\ln x)$

$= x\ln x - \int dx$

$= x\ln x - x + C$.

GuangBo

物理实验文档

No. 133 Date: 11.9

② 求 $\int x\cos x\,dx$.

解：利用分部积分有

原式 $= \int x\,d(\sin x) = x\sin x - \int \sin x\,dx$

$= x\sin x + \cos x + C$.

③ 求 $\int x^2 e^x\,dx$.

解：原式 $= \int x^2\,d(e^x) = x^2e^x - \int e^x\,d(x^2)$

$= x^2e^x - 2\int xe^x\,dx$

$= x^2e^x - 2\int x\,d(e^x)$

$= x^2e^x - 2(xe^x - \int e^x\,dx)$

$= x^2e^x - 2[xe^x - (e^x + C)]$

$= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$

$= e^x(x^2 - 2x + 2) + C$.

④ 计算 $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx$ $(a>0)$.

解：可用分部积分公式，

原式 $= x\sqrt{x^2+a^2} - \int x\,d\sqrt{x^2+a^2}$

$= x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$

$= x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{x^2+a^2-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx$

$= x\sqrt{x^2+a^2} + a^2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} - \underbrace{\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx}_{\text{即原式}}$.

于是原式 $= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a^2} + a^2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)$

$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$.

GuangBo

No. 134 Date: 11.9

⑤ 求 $\int e^{ax}\sin bx\,dx$. $(a,b>0)$

解: 原式 $=\frac{1}{a}\int \sin bx\, d(e^{ax})$

$=\frac{1}{a}\left(e^{ax}\sin bx-\int e^{ax}\cdot b\cos bx\,dx\right)$

$=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\,dx$

同理, $\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{1}{a}\int \cos bx\, d(e^{ax})$

$=\frac{1}{a}\left(e^{ax}\cos bx+b\int e^{ax}\sin bx\,dx\right)$.

$=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a}\underbrace{\int e^{ax}\sin bx\,dx}_{\text{原式}}$.

令原式 $=I$, 则

$I=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a}\left(\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a}I\right)$.

$\Rightarrow$ 原式 $=I=\frac{e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}+C$.

同时, 有 $\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{e^{ax}(b\sin bx+a\cos bx)}{a^2+b^2}+C$.

[注一般地, 分部积分适用于求如下形式的不定积分:

(1) $\int P_m(x)e^{ax}dx$ $(P_m(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m)$

(2) $\int P_m(x)\cos bx\,dx$ ($\sin bx$ 也类似)

(3) $\int P_m(x)\cdot(\ln x)^k dx$.

(4) $\int P_m(x)\cdot \arcsin x\,dx$. ($\arctan x$ 也类似)]

三. 综合问题 (两类换元与分部的结合)

⑥ 求 $\int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}dx$.

解: 令 $x=\tan t$, 则 $t=\arctan x$

则 原式 $=\int \frac{t}{\tan^2 t}dt=\int t\left(\frac{1}{\sin^2 t}-1\right)dt$

GuangBo

$$= \int \frac{t}{\sin^2 t}dt - \int t\,dt$$
$$= -\int t\,d(\cot t) - \frac{t^2}{2}$$
$$= -\frac{t^2}{2} - t\cot t + \int \cot t\,dt$$
$$= -\frac{t^2}{2} - t\cot t + \int \frac{d(\sin t)}{\sin t}$$
$$= -\frac{t^2}{2} - t\cot t + \ln|\sin t| + C$$
$$= -\frac{1}{2}\arctan^2 x - \frac{\arctan x}{x} + \ln\left|\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right| + C.$$

⑦ 求 $\int \frac{\ln^2 x}{x^3}dx$.

解: 原式 $= -\frac{1}{2}\int \ln^2 x\, d\left(\frac{1}{x^2}\right)$.
$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{\ln^2 x}{x^2} - \int \frac{1}{x^2}d(\ln^2 x)\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{\ln^2 x}{x^2} - \int \frac{2\ln x}{x^3}dx\right)$$
$$= -\frac{\ln^2 x}{2x^2} - \frac{1}{2}\int \ln x\, d\left(\frac{1}{x^2}\right)$$
$$= -\frac{\ln^2 x}{2x^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\ln x}{x^2} - \int \frac{1}{x^3}dx\right)$$
$$= -\frac{\ln^2 x + \ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C.$$

⑧ 求 $\int (\arcsin x)^2 dx$

解: 原式 $= x\arcsin^2 x - \int x \cdot 2\arcsin x \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
$$= x\arcsin^2 x + 2\int \arcsin x\, d\sqrt{1-x^2}$$
$$= x\arcsin^2 x + 2\left(\sqrt{1-x^2}\arcsin x - \int \sqrt{1-x^2}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$
$$= x\arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C.$$

GuangBo

物理学霸张文君

No. 136 Date: 11.9

七. 有理函数的积分

1. 有理函数是指多项式之比，即 $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$.

2. 事实上，任一有理函数在初等函数类中均可积，且原函数均为初等函数.

3. 注明：我们知道任一有理式均可写成多项式+真分式，只要证明真分式都可积即可.（分子次数小于分母次数的分式叫真分式）

如[Gauss代数基本定理] 任一多项式 $P_n(x)$ 均可写成

$$P_n(x) = a_0(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\cdots(x-x_p)^{k_p}\cdot(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{l_1}\cdots \times (x^2+\alpha_q x+\beta_q)^{l_q}.$$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_p$ 均是 $P_n(x)$ 的实零点，$\alpha_i^2-4\beta_i<0$ 包含了 $P_n(x)=0$ 的所有虚根.

显然 $n = k_1+k_2+\cdots+k_p+2(l_1+l_2+\cdots+l_q)$.

如[Ostrogradski分解] 任一真分式 $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ 均可分解.

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A_{11}}{(x-x_1)}+\frac{A_{12}}{(x-x_1)^2}+\cdots+\frac{A_{1k_1}}{(x-x_1)^{k_1}}+\cdots$$
$$+\frac{A_{p1}}{(x-x_p)}+\cdots+\frac{A_{pk_p}}{(x-x_p)^{k_p}}+\frac{B_{11}x+C_{11}}{(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)}+\cdots$$
$$+\frac{B_{1l_1}x+C_{1l_1}}{(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{l_1}}+\cdots+\frac{B_{q1}x+C_{q1}}{(x^2+\alpha_q x+\beta_q)}+\cdots$$
$$+\frac{B_{ql_q}x+C_{ql_q}}{(x^2+\alpha_q x+\beta_q)^{l_q}}.$$

这个分解的每一项都可积，因此真分式可积！

物理学院公式用

No. 137 Date: 11.9

eg. ① 求真分式 $\frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)^2}$ 的 Ostrogradski 分解.

解：令原式 $= \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$，

其中 A、B、C、D、E 为待定.

通分，$x+1 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x-1)(x^2+1)$

$+ (Dx+E)(x-1)$

$= (A+B)x^4 + (C-B)x^3 + (2A+B-C+D)x^2 + (C-B+E-D)x$

$+A-C-E.$

于是 $\begin{cases} A+B=0 \\ C-B=0 \\ 2A+B-C+D=0 \\ C-B+E-D=1 \\ A-C-E=1 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=-\frac{1}{2} \\ C=-\frac{1}{2} \\ D=-1 \\ E=0 \end{cases}$

即 $\frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}{x^2+1} - \frac{x}{(x^2+1)^2}$.

② 求 $\int \frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)^2}\,dx$.

解：由 ① 可知

原式 $= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx - \int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx$

$= \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\int \frac{2x+2}{x^2+1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,d(x^2+1)$

GuangBo

No. 138 Date: 11.9

$$= \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\int \frac{d(x^2)}{x^2+1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{2(x^2+1)} + C.$$

物理系论文君

$$= \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\int \frac{d(x^2)}{x^2+1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{2(x^2+1)} + C.$$

4. 补充3个积分式：

(1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C.$

(2) $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C.$

(3) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$

八、有理无理函数的积分

形如 $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ (其中 $R(x,y)$ 是 x,y 的有理函数，且 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$) 的函数在初等函数类中可积.

(即 $R(x,y) = \frac{P_m(x,y)}{P_n(x,y)}$)

事实上，只需令 $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$，则 $x = \frac{b-dt^n}{ct^n-a}$. 于是原式可以化成 $\int R\left(\frac{b-dt^n}{ct^n-a}, t\right)\cdot\left(\frac{b-dt^n}{ct^n-a}\right)'dt$.

此时 dt 前的这个被积函数就是 t 的有理函数.

从而 $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ 可积.

eg. ① 求 $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,dx$

解：令 $t = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$，则 $x = \frac{t^2+1}{t^2-1}$.

$$\therefore dx = \frac{d}{dt}\left(1 + \frac{2}{t^2-1}\right) = -\frac{4t}{(t^2-1)^2}dt.$$

于是原式 $= \int \frac{t}{\frac{t^2+1}{t^2-1}}\cdot(-4t)\cdot\frac{1}{(t^2-1)^2}dt$

$$= -4\int \frac{t^2}{(t^2+1)(t^2-1)}dt = -2\int\left(\frac{1}{t^2-1} + \frac{1}{t^2+1}\right)dt$$

$$= -2\arctan t - \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C$$

GuangBo

$$=-2\arctan\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+\ln\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}+C.$$

② 求 $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}$.

解：原式 $=\int\frac{1+\sqrt{x}-\sqrt{1+x}}{(1+\sqrt{x})^2-(\sqrt{1+x})^2}dx=\frac{1+\sqrt{x}-\sqrt{1+x}}{2\sqrt{x}}dx$

$$=\int 1+\sqrt{x}-\sqrt{1+(\sqrt{x})^2}\,d\sqrt{x}$$

$$=\sqrt{x}+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\int\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,dx$$

下面求 $\int\sqrt{\frac{x+1}{x}}dx$.

令 $t=\sqrt{\frac{1+x}{x}}$，则 $x=\frac{1}{t^2-1}$，$dx=-\frac{2t}{(t^2-1)^2}dt$.

于是 $\int\sqrt{\frac{x+1}{x}}dx=-2\int\frac{t^2}{(t^2-1)^2}dt$.

设 $\frac{t^2}{(t^2-1)^2}=\frac{A}{t+1}+\frac{B}{(t+1)^2}+\frac{C}{t-1}+\frac{D}{(t-1)^2}$.

待定系数，得 $A=-\frac{1}{4}$，$B=C=D=\frac{1}{4}$.

$$\therefore\int\sqrt{\frac{x+1}{x}}dx=-2\cdot\frac{1}{4}\int\left(-\frac{1}{t+1}+\frac{1}{(t+1)^2}+\frac{1}{t-1}+\frac{1}{(t-1)^2}\right)dt$$

$$=-\frac{1}{2}\left(-\ln(t+1)-\frac{1}{t+1}+\ln(t-1)-\frac{1}{t-1}\right)+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|+\frac{1}{2(t+1)}+\frac{1}{2(t-1)}+C.$$

$$=\ln(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})+\sqrt{x(1+x)}+C.$$

∴原积分 $=\sqrt{x}+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\ln(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})-\frac{1}{2}\sqrt{x(1+x)}+C.$

九、三角有理函数的积分.

1. 三角有理函数指形如 $R(\sin x,\cos x)$ 的函数（R 为有理函数）.

事实上，这样的函数在初等函数中均可积.

No. 140 Date: 11.11

2、万能代换公式：令 $t=\tan\frac{x}{2}$，则 $x=2\arctan t$.

于是 $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$，$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$，$dx=\frac{2}{1+t^2}dt$.

所以 $\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2})\cdot\frac{2}{1+t^2}dt$，变成了关于 t 的有理函数的积分，从而可积.

e.g. ① 求 $\int\frac{dx}{a+b\cos x}$，其中 $a>b>0$.

解：令 $t=\tan\frac{x}{2}$，则由万能代换知

$$\text{原式}=\int\frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{a+b\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{2dt}{(a+b)+(a-b)t^2}$$

$$=\frac{2}{a+b}\int\frac{dt}{1+\frac{a-b}{a+b}t^2}=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\int\frac{d(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}t)}{1+(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}t)^2}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}t+C$$

$$=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right)+C.$$

② 求 $\int\frac{dx}{1+\sin x}$.

解：[法一] 令 $t=\tan\frac{x}{2}$，由万能代换，

$$\text{原式}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}}=2\int\frac{dt}{(t+1)^2}=-2\cdot\frac{1}{t+1}+C$$

$$=-\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}}+C.$$

[法二] $\text{原式}=\int\frac{1+\sin x}{\cos^2x}dx=\int\frac{dx}{\cos^2x}+\int\frac{d(\cos x)}{\cos^2x}$

$$=\tan x-\frac{1}{\cos x}+C.$$

[法三] 原式 $=\int \frac{dx}{1+\cos(\frac{\pi}{2}-x)}=\int \frac{dx}{2\cos^2(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})}$

$=-\int \frac{d(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})}=-\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})+C.$

④三种方法得到了三个不一样的函数形式，但它们其实至多只差一个常数，因此全都正确。

③求 $\int \frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$.

解：本题可以用万能公式解（但复杂）。下面提供另一常用方法。

原式 $=\int \frac{dx}{1-2\sin^2 x\cos^2 x}=\int \frac{dx}{1-\frac{1}{2}\sin^2 2x}=\int \frac{d(2x)}{2-\sin^2 2x}$

$=\int \frac{-d(\cot 2x)}{\frac{2}{\sin^2 2x}-1}=-\int \frac{d(\cot 2x)}{2\cot^2 2x+1}=-\frac{1}{2}\int \frac{d(\cot 2x)}{\cot^2 2x+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}$

$=-\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan(\sqrt{2}\cot 2x)+C.$

十、有很多初等函数的不定积分不是初等函数，如

$\frac{\sin x}{x}$, $\frac{e^x}{x}$, $\frac{1}{\ln x}$, e^{-x^2}, $\sqrt{1-\varepsilon\sin^2 t}$ $(0<\varepsilon<1)$.

§3 定积分的计算

*会求原函数并掌握 Newton-Leibniz 公式，可以解决许多定积分，但对于上一节末尾所说的原函数非初等的函数还要再讨论一、分部积分法求定积分。

1.[定理] 若 $u(x)$, $v(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续可微函数，则

No. 142 Date: 11.11

$\int_a^b v(x)\,du(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u(x)\,dv(x)$.

e.g. 求曲线 $y = x\sin x\ (0 \le x \le \pi)$ 与 x 轴围成的图形的面积.

解：由定积分的几何意义，

所求面积 $A = \int_0^\pi x\sin x\,dx = -\int_0^\pi x\,d(\cos x)$

$= -x\cos x\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos x\,dx$

$= (\sin x - x\cos x)\Big|_0^\pi = \pi$.

※ 当曲线有一部分在 x 轴下方时，必须用 $\int_a^b |f(x)|\,dx$ 来算面积.

No. 142 Date: 11.11, 11.14

$\int_a^b v(x)\,du(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u(x)\,dv(x)$.

e.g. ① 求曲线 $y = x\sin x\ (0 \le x \le \pi)$ 与 x 轴围成的图形的面积.

解：由定积分的几何意义，

所求面积 $A = \int_0^\pi x\sin x\,dx = -\int_0^\pi x\,d(\cos x)$

$= -x\cos x\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos x\,dx$

$= (\sin x - x\cos x)\Big|_0^\pi = \pi$.

若曲线有一部分在 x 轴下方时，必须用 $\int_a^b |f(x)|\,dx$ 来算面积.

② 计算 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$, $n \in N$.

解：显然 $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$.

$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

当 $n \ge 2$ 时，$I_n = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x\,d(\cos x)$

$= -\cos x \sin^{n-1} x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,(n-1)\sin^{n-2} x\,dx$

$= 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2} x\,(1-\sin^2 x)\,dx$

$= (n-1)(I_{n-2} - I_n)$.

由此有递推式 $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$. $(n \ge 2)$

于是，$I_n = \begin{cases} \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\frac{\pi}{2}, & n \text{ 为偶数} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$

③ (作业) 求 $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n\,dx$.

二、换元法

1. [定理] 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，$\varphi(t)$ 是定义在七个子 α 与 β 之间的单调连续可微函数，且其值域为 $[a,b]$ 即 $a=\varphi(\alpha), b=\varphi(\beta)$，

则 $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

(即作换元 $x=\varphi(t)$.)

2. 证明：∵ $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

∴ $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有原函数 $F(x)$ (如 $\int_a^x f(t)dt$.)

则 $\frac{d}{dt}F(\varphi(t)) = f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$.

于是由 Newton-Leibniz 公式有

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) = F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))$$
$$= \int_\alpha^\beta \frac{d}{dt}F(\varphi(t))dt$$
$$= \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

e.g. ① 计算 $\int_1^2 \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx$.

解：令 $\sqrt{x-1}=t$，即 $x=1+t^2$，则 $dx=2tdt$ 且 $t\in[0,1]$.

∴ 原式 $= \int_0^1 \frac{2t^2}{1+t^2}dt = 2\int_0^1(1-\frac{1}{1+t^2})dt$

$= 2(t-\arctan t)\Big|_0^1 = 2(1-\frac{\pi}{4})-0 = 2-\frac{\pi}{2}$.

② 用换元法算圆面积(略)

③ 当 $n\in N$ 时，证明：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx$.

证明：令 $x=\frac{\pi}{2}-t$，则 $dx=-dt$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^n(\tfrac{\pi}{2}-t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx.$$

GuangBo

④ (1) 设 $a>0$, $f(x)$ 是 $[-a,a]$ 上的连续函数.

[1] $f(x)$ 为奇函数时, 证明 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

[2] $f(x)$ 为偶函数时, 证明 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$.

(2) 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数且连续. 证明:

$\forall t_0$, $\int_{t_0}^{t_0+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx$. $(T>0)$

证明: (1) [1] $\because f(x)$ 为奇函数.

$\therefore f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in [-a,a]$.

$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$.

对于 $\int_{-a}^{0} f(x)dx$, 令 $x=-t$, $t\in[0,a]$, 则

$\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{a}^{0} f(-t)dt = -\int_{0}^{a} f(t)dt = -\int_{0}^{a} f(x)dx$.

$\therefore \int_{-a}^{a} f(x)dx = -\int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = 0$.

[2] 与上一问类似, 可证 $\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx$.

(2) $\because f(x)$ 连续且以 $T>0$ 为周期.

$\therefore \forall t_0$, $\int_{t_0}^{t_0+T} f(x)dx = \int_{t_0}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{T} f(x)dx + \int_{T}^{t_0+T} f(x)dx$.

而 $\int_{t_0}^{0} f(x)dx = -\int_{0}^{t_0} f(x)dx$.

$\int_{T}^{t_0+T} f(x)dx \xrightarrow{x=T+t} \int_{0}^{t_0} f(t+T)dt = \int_{0}^{t_0} f(t)dt = \int_{0}^{t_0} f(x)dx$.

$\therefore \int_{t_0}^{t_0+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx$. 证毕.

⑤ 证明: 当 $n\in\mathbb{N}$ 时, $\int_{0}^{2\pi} \cos^n x dx = \int_{0}^{2\pi} \sin^n x dx = \begin{cases} 0, & n \text{ 为奇数}. \\ 4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx, & n \text{ 为偶数}. \end{cases}$

证明: 首先, 令 $t = x+\frac{\pi}{2}$, 则

$\int_{0}^{2\pi} \cos^n x dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} \cos^n\left(t-\frac{\pi}{2}\right)dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} \cos^n\left(\frac{\pi}{2}-t\right)dt$

$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} \sin^n t dt = \int_{0}^{2\pi} \sin^n x dx$.

下面证明第二个等号成立.

1° n 为奇数时, $\sin^n x$ 为奇函数, 且以 2π 为周期.

$\therefore \int_0^{2\pi} \sin^n x\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^n x\,dx = 0.$

2° n 为偶数时, $\sin^n x$ 为偶函数, 且以 π 为周期.

$\therefore \int_0^{2\pi} \sin^n x\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^n x\,dx = 2\int_0^{\pi} \sin^n x\,dx = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$

$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx.$

证毕.

三. 某些只能求原函数的函数的积分.

eg. ① 求 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}}\,dx$. ② 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin x)}{f(\sin x)+f(\cos x)}\,dx$,

其中 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数.

解: ① 令 [原式 $= I$], $x = -t$, 则

$$I = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 t}{1+e^{t}}\,dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{1+e^{x}}\,dx.$$

又 $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^x \sin^2 x}{1+e^x}\,dx.$

$\therefore I + I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\,dx.$

$\therefore I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}.$

GuangBo

② 令[换元=I], $x=\frac{\pi}{2}-t$.

$\therefore I=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{f(\cos t)}{f(\sin t)+f(\cos t)}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(\cos x)}{f(\sin x)+f(\cos x)}dx$.

$\therefore I+I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2}$.

$\therefore I=\frac{\pi}{4}$.

③ 求 $I=\int_{-1}^{1}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx$.

[错解] $\because\int\frac{1+x^2}{1+x^4}dx=\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx=\int\frac{d(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}+C$.

$\therefore I=\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}\Big|_{-1}^{1}=0$.

错误! 应当 $I>0$.

思考: 我们发现 $\lim_{x\to0}(\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}})$ 是不存在的.

所以这个原函数在0处不连续, 不应该将它作为原函数之.

[正确] (法一) $I=2\int_0^1\frac{1+x^2}{1+x^4}dx$.

(法二) 对原函数做修正.

取 $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}, & -1\le x<0,\\ \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, & x=0,\\ \frac{\sqrt{2}}{2}(\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}+\pi), & 0<x\le1.\end{cases}$

这样做是为了使原函数在0处连续.

最终, 原式 $=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$.

四, 数值积分

1. 概念: 利用近似方法求定积分的方法叫数值积分.

GuangBo

No. 147 Date: 11.14

2. 梯形公式 (Newton): 为了求 $\int_a^b f(x)dx$ 的近似值, 将 $[a,b]$ n 等分, 即 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, $x_i=a+\frac{i}{n}(b-a)$.

于是 $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$ 的等于梯形面积 $\frac{1}{2}(y_i+y_{i-1})(x_i-x_{i-1})$.

其中 $y_i=f(x_i)$, $y_{i-1}=f(x_{i-1})$, $x_i-x_{i-1}=\frac{b-a}{n}$.

从而 $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}\right)$.

3. 抛物线公式 (Simpson公式): 在 $[a,b]$ 上插入 $2n-1$ 个等分点, 用经过 (x_{2i-2}, y_{2i-2}), (x_{2i-1}, y_{2i-1}), (x_{2i}, y_{2i}) 这三点的抛物线 $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ 代替 $f(x)$.

则 $\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)dx \approx \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} (\alpha x^2+\beta x+\gamma)dx$

$=\frac{\alpha}{3}(x_{2i}^3-x_{2i-2}^3)+\frac{\beta}{2}(x_{2i}^2-x_{2i-2}^2)+\gamma(x_{2i}-x_{2i-2})$.

最后, $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}\left(y_0+y_{2n}+4\sum_{i=1}^{n} y_{2i-1}+2\sum_{i=1}^{n-1} y_{2i}\right)$.

§4 定积分的应用

*微元思想：将 $I=\int_a^b f(x)dx$ 的推导过程等效为

$I=\sum \Delta I_i$，将 I 看成 x 的函数，

即 $\Delta I=I(x+\Delta x)-I(x)\approx I'(x)\Delta x$

$\approx f(x)dx+o(\Delta x)$.

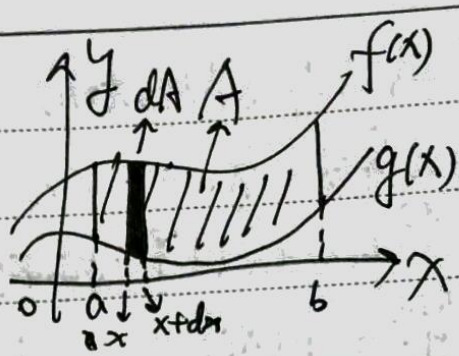
从而 $dI=f(x)dx \Rightarrow I=\int_a^b f(x)dx$ 是 dI 累加所得.

一、面积（直角坐标系）的计算

设由 $y=f(x)$，$y=g(x)$ $(f(x)\geq g(x))$ 与 $x=a$，$x=b$ 围成的

GuangBo

图形的面积为A.



由微元思想，在区间[x, x+dx]

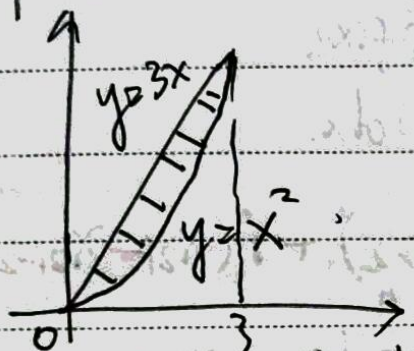
上 $dA = \Delta A - o(\Delta x)$

$\approx \Delta A = (f(x) - g(x))\,dx$.

$\Rightarrow A = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$.

eg 求 $y = x^2$ 与 $y = 3x$ 围成的图形的面积.

解：通过作图来确定该图形. 交点为 (0,0) 与 (3,9).



由面积公式，

$A = \int_0^3 (3x - x^2)\,dx = \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^3$

$= \frac{9}{2}$.

※ 我们也可以将 y 当成自变量，即 $x = \frac{1}{3}y$ 与 $x = \sqrt{y}$, $0 \le y \le 9$.

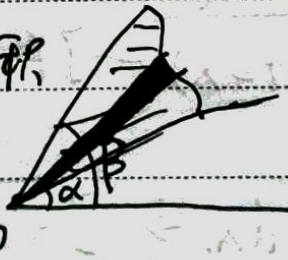
$\therefore A = \int_0^9 (\sqrt{y} - \frac{1}{3}y)\,dy = \left(\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} - \frac{y^2}{6}\right)\Big|_0^9 = \frac{9}{2}$.

二、面积（极坐标系中）的计算.

设所求区域介于曲线 $r = r(\theta)$ 与直线 $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ 之间.

我们考虑 $[\theta, \theta + d\theta]$ 上的面积

微元 $dA = \frac{1}{2}r^2(\theta)\,d\theta$.



$\Rightarrow A = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}r^2(\theta)\,d\theta$.

eg. 计算心形线 $r = a(1+\cos\theta)$ $(-\pi \le \theta \le \pi)$ 所包围的面积.

解：由面积公式，$A = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} a^2(1+\cos\theta)^2\,d\theta$

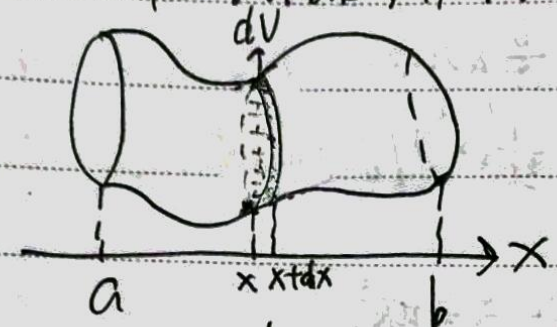
$= a^2\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^2\,d\theta = 4a^2\int_0^{\pi}\cos^4\frac{\theta}{2}\,d\theta \xrightarrow{t=\frac{\theta}{2}} 8a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\,dt$

理学的公子君

$=8a^2 \cdot \frac{3!!}{4!!} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi a^2$.

三. 体积的计算.

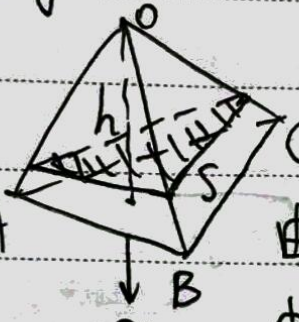
1. 已知平行截面面积后的体积计算.



设一个立体图形介于 $x \in [a,b]$ 之间，并已知截面积是 x 的函数 $A(x)$，那么在 $[x, x+dx]$ 上的体积微元 $dV = A(x)dx$.

于是 $V = \int_a^b A(x)dx$.

e.g. 求底面积为 S，高为 h 的三棱锥的体积.



解：以顶点 O 作底面的垂线并将其作为 x 轴.

记 x 处的与底面平行的截面的面积为 $A(x)$.

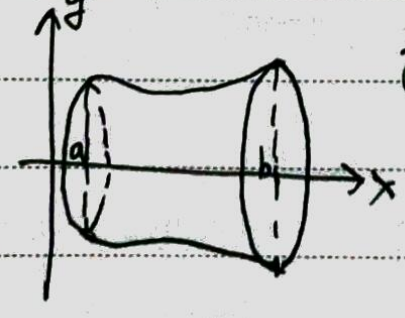
由几何关系知 $\frac{A(x)}{S} = \frac{x^2}{h^2}$. 故 $A(x) = \frac{S}{h^2}x^2 \ (0 \le x \le h)$.

由体积公式，

$$V = \int_0^h \frac{S}{h^2}x^2 dx = \frac{S}{3h^2}x^3\Big|_0^h = \frac{1}{3}Sh.$$

2. 旋转体的体积.

设空间图形由平面图形 $\{(x,y) \mid 0 \le y \le f(x), a \le x \le b\}$ 绕 x 轴旋转所得. 在 $[x, x+dx]$ 上，认为旋转体截面积 $A(x) = \pi f^2(x)$.



于是 $V = \int_a^b A(x)dx = \pi \int_a^b f^2(x)dx$.

GuangBo

No. 150 Date: 11.16

eg. 求椭圆曲线 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (a,b 为常数) 绕 x 轴旋转所得旋转体(椭球)的体积. (绕 y 轴旋转同理).

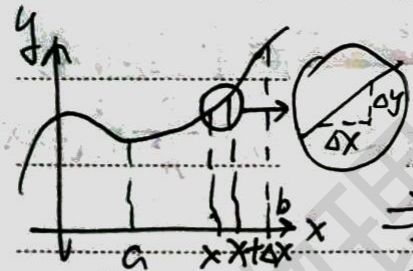
解: 由体积公式 $V=\pi\int_a^a y^2dx$

$$=\pi\int_{-a}^{a}\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)dx$$
$$=2\pi\int_0^a(b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2)dx$$
$$=2\pi(b^2x-\frac{b^2}{3a^2}x^3)\Big|_0^a$$
$$=\frac{4}{3}\pi ab^2.$$

特别地, 当 $a=b=R$ 时, 对应球体积为 $\frac{4}{3}\pi R^3$.

弧长计算

1. 设有光滑曲线(可导) $y=f(x)$, $x\in[a,b]$.



对区间 $[x,x+\Delta x]$, 弧长微元

$$ds=\Delta s=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\sqrt{1+y'^2}dx.$$

$$\Rightarrow s=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}dx=\int_a^b ds.$$

2. 若曲线由参数 $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$ $(\alpha\le t\le\beta)$ 给出, 则

$dx=x'(t)dt$, $dy=y'(t)dt$.

故 $s=\int_\alpha^\beta\sqrt{[x'(t)dt]^2+[y'(t)dt]^2}=\int_\alpha^\beta\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt.$

3. 特别地, 当曲线由极坐标方程 $r=r(\theta)$ 表示, $\alpha\le\theta\le\beta$, 则

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{[r(\theta)\cos\theta]'^2+[r(\theta)\sin\theta]'^2}\,d\theta$$
$$=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,d\theta.$$

eg.① 求圆 $x^2+y^2=r^2$ 的周长. ($r>0$)

解: 取右上的 $\frac{1}{4}$ 圆弧, 由对称性,

GuangBo

周长 $s=4\int_0^r\sqrt{1+y'^2}\,dx=4\int_0^r\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2}dx$

$=4r\int_0^r\frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}}=4r\arcsin\frac{x}{r}\Big|_0^r=2\pi r.$

② 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的周长.

解：利用参数方程 $\begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=b\sin\theta\end{cases}\ (0\le\theta<2\pi)$

由对称性，椭圆周长 $s=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}\,d\theta$

$=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\theta}\,d\theta.$

其中离心率 $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$.

这是一个椭圆积分，无法直接计算…

五、更多应用(例题)

*补充：证明 e 是无理数.

证明：假设 $e=\frac{n}{m}(m,n\in\mathbb{Z})$ 为有理数.

$\because e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^\xi x^{n+1}}{(n+1)!}$.（$\xi$ 介于 0, x 之间）

$\therefore e^{-1}=1+(-1)+\frac{(-1)^2}{2!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}+\frac{e^\xi(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$ (*)

其中 n 就是 $\frac{n}{m}$ 中的 n. 只好设 $n\in\mathbb{Z}^+$.

(*) 两边乘 n!，有 $(n-1)!m=n!\left[1+(-1)+\frac{(-1)^2}{2!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\right]$

$+\frac{(-1)^{n+1}e^\xi}{n+1}$. (**)

$\because -1<\xi<0.\ \therefore\left|(-1)^{n+1}\frac{e^\xi}{n+1}\right|<1$，它不是整数.

但 (**) 中其他项全为整数，此式不可能成立.

$\Rightarrow$ e 为无理数.

光博士的论文库

GuangBo

$= \left| mgR^2 \cdot \frac{1}{r} \right|_{R_1}^{R_2} = mgR^2\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$.

当物体能飞离地球时，$R_2 \to +\infty$，$R_1 = R$，则

$W_\infty = \lim\limits_{R_2 \to +\infty} W = mgR = \frac{1}{2}mv_0^2$.

$\therefore v_0 = \sqrt{2gR}$.

注 $\int_R^{+\infty} f(r)\,dr$ 是反常积分（广义积分）.

§5 反常积分

以往定义积分时，我们要求积分区间有限，并且函数有界. 本节将对条件进行适当放松.（如上节最后的 $\int_R^{+\infty} \frac{1}{r^2}dr$）

一、无限区间上的反常积分

1. $[a,+\infty)$ 上的反常积分（a 是有限实数）：

设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有定义，且 $\forall A > a$，$f(x)$ 在 $[a,A]$ 上可积，即 $\int_a^A f(x)\,dx$ 均存在，则规定 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上的反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{A \to +\infty} \int_a^A f(x)\,dx$.

如果上述极限存在，则称 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛，反之则发散.

2. 类似地，可定义 $(-\infty, b]$ 上的反常积分

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{B \to -\infty} \int_B^b f(x)\,dx \quad (B < b).$$

以及 $(-\infty,+\infty)$ 上的反常积分：

由 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 可知，若右端 2 个反常积分均存在，则将上式作为 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ 的定义. 且右边 2 个

反常积分中有一个发散，则 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 发散.（特别地用 Cauchy 主值法来处理右端两积分均发散的情况）

e.g. ① 判别 $\int_0^{+\infty} e^{ax}dx$ 的收敛性，其中 $a\in R$ 为参数.

解：1° $a\neq 0$，则 $\forall A>0$，有

$$\int_0^A e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax}\Big|_0^A = \frac{e^{aA}-1}{a}.$$

当 $a>0$ 时，$\lim\limits_{A\to+\infty}\frac{e^{aA}-1}{a}=+\infty$；

当 $a<0$ 时 $\lim\limits_{A\to+\infty}\frac{e^{aA}-1}{a}=-\frac{1}{a}$.

2° $a=0$，则 $\forall A>0$，有

$$\int_0^A e^{ax}dx = \int_0^A dx = A.$$

而 $\lim\limits_{A\to+\infty} A=+\infty$.

综上，当 $a\geq 0$ 时，上述反常积分发散；

当 $a<0$ 时，上述反常积分收敛.

② 求 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

解：原式 $=\lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^A\frac{dx}{1+x^2}=\lim\limits_{A\to+\infty}\arctan A=\frac{\pi}{2}$.

③ 求曲线 $y=\frac{1}{x^2}$ 与 $x=1$ 和 x 轴包围的面积.

解：所求面积 $A=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx=\lim\limits_{a\to+\infty}\int_1^a\frac{1}{x^2}dx=\lim\limits_{a\to+\infty}(-\frac{1}{x})\Big|_1^a$

$=\lim\limits_{a\to+\infty}(1-\frac{1}{a})=1$.

④ 讨论 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ 的收敛性（敛散性），其中 $p\in R$ 为参数.

解：1° 当 $p\neq 1$ 时，原式 $=\lim\limits_{a\to+\infty}\int_1^a\frac{dx}{x^p}=\lim\limits_{a\to+\infty}\frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_1^a$

$=\lim\limits_{a\to+\infty}\frac{a^{1-p}-1}{1-p}$.

∴当 $p<1$ 时，$1-p>0$，故原式 $=+\infty$.

当 $p>1$ 时，$1-p<0$，故原式 $=\frac{1}{p-1}$.

2° $p=1$ 时，原式 $=\lim_{a\to+\infty}\ln a=+\infty$.

综上，当 $p\le 1$ 时，该积分发散；当 $p>1$ 时，该积分收敛.

3. 由 Newton-Leibniz 公式，若 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，则

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx=F(x)\Big|_a^{+\infty}=F(+\infty)-F(a).$$

其中 $F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x)$.

二、比较判别法 —— 除了 Newton-Leibniz 公式之外的又一种判别方式（可处理原函数非初等的反常积分）

1. [定理] 设 $f(x)$, $g(x)$ 是 $[a,+\infty)$ 上的两个函数，且 $\forall A>a$，它们在 $[a,A]$ 上均可积. 若 $\exists A_0\ge a$，使得 $\forall x\in[A_0,+\infty)$，$|f(x)|\le g(x)$，则

① 只要 $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 收敛，就有 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 均收敛（类似于夹逼性）；

② 只要 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发散，就有 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 与 $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 均发散.

eg. 讨论 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x^3+a}}dx$ 的敛散性. ($a>0$ 为常数).

解：$\because\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x^3+a}}\right|\le x^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$.

而 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}dx$ 收敛.

$\therefore$ 由比较判别法，$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x^3+a}}dx$ 收敛.

2. 推论 (Cauchy 判别法)：设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有定义，且 $\forall A>a$，$f(x)$ 在 $[a,A]$ 可积. 若 $\exists p>1$，使得

Guangbo

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^p|f(x)| = C \neq 0$ 存有限值，则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛.

若 $\exists p \le 1$，使得 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p|f(x)| = C > 0$ (C 可以为 $+\infty$)，则 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 发散.

证明：1° $p > 1$，则 $\exists A_0 > a$，使得 $\forall x > A_0$，

$x^p|f(x)| < C + \frac{1}{2} \Rightarrow |f(x)| < \frac{C+\frac{1}{2}}{x^p}$

而 $\int_a^{+\infty} \frac{C+\frac{1}{2}}{x^p}dx$ 收敛，故 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 与 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛.

2° $p \le 1$，则 $\exists A_0 > a$ 与 $\varepsilon_0 > 0$，当 $x > A_0$ 时，

$C - \varepsilon_0 \le x^p|f(x)|$，即 $\frac{C-\varepsilon_0}{x^p} \le |f(x)|$.

而 $\int_a^{+\infty} \frac{C-\varepsilon_0}{x^p}dx$ 发散，故 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 发散 (但 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 敛散性未知).

e.g. 判别以下积分的收敛性并求当收敛的积分的值：

(1) $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{(x+7)\sqrt{x-2}}$；(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} (x+|x|)e^{-|x|}dx$.

解：(1) $\because \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{(x+7)\sqrt{x-2}} = 1 > 0$，而 $\frac{3}{2} > 1$.

$\therefore \int_3^{+\infty} \frac{dx}{(x+7)\sqrt{x-2}}$ 收敛.

$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{(x+7)\sqrt{x-2}} \xrightarrow{\substack{t=\sqrt{x-2} \\ x=t^2+2}} \int_1^{+\infty} \frac{2tdt}{(t^2+9)t} = 2\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2+9}$

$= \frac{2}{3}\arctan\frac{t}{3}\Big|_1^{+\infty} = \frac{\pi}{3} - \frac{2}{3}\arctan\frac{1}{3}$.

(2) $\forall p > 1$，有 $\lim\limits_{x\to\infty} |x|^p(x+|x|)e^{-|x|} = 0$. (含有 $+\infty$，$-\infty$ 的时候是)

$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty}(x+|x|)e^{-|x|}$ 收敛.

GuangBo

No. 160 Date: 11.21

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(x+|x|)e^{-|x|}dx = \int_{-\infty}^{+\infty}|x|e^{-|x|}dx + \int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-|x|}dx$$

$$= 2\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx + 0$$

$$= -2\int_0^{+\infty}x\,d(e^{-x})$$

$$= -2xe^{-x}\Big|_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty}e^{-x}dx$$

$$= (-2xe^{-x} - 2e^{-x})\Big|_0^{+\infty} = 2.$$

三、无界函数在有限区间上的积分.

1. 定义：设 $\forall \varepsilon > 0$，$f(x)$ 在 $[a+\varepsilon, b]$ 上可积，($\varepsilon < b-a$)（$f(x)$ 可以在 a 处 无界）. 若 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ 存在，则称它是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的反常积分，并称 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛.

类似地，可以定义 $f(x)$ 在 b 处无界的反常积分

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 中的点 c 处无界，则规定

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

上式右端两个反常积分均收敛，$\int_a^b f(x)dx$ 才称存在.

除上式右端两个反常积分均收敛之. $\int_a^b f(x)dx$ 才收存在.

eg① 讨论 $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ $(a>0)$ 的敛散性.

解: $\because \lim_{x\to a^-} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = +\infty$.

$\therefore y=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ 在 a 处无界.

$\therefore$ 原式 $= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^{a-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \arcsin\frac{a-\varepsilon}{a} = \frac{\pi}{2}$.

$\therefore$ 此反常积分收敛.

GuangBo

② 讨论 $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ ($p\in R$) 的敛散性. (与 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ 比较.)

解: 1° $p\neq 1$ 时, 原式 $=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^p}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{1-p}(1-\varepsilon^{1-p})$

$$=\begin{cases}+\infty, & p>1,\\ \frac{1}{1-p}, & p<1.\end{cases}$$

2° 当 $p=1$ 时, 原式 $=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}(-\ln\varepsilon)=+\infty$.

综上, 当 $p\geq 1$ 时, 此积分发散; 当 $p<1$ 时, 收敛.

7. [定理] (比较判别法) 设 $f(x)$, $g(x)$ 在 $x=a$ 处无界, 在 $[a+\varepsilon,b]$ 上可积 ($0<\varepsilon<b-a$), 且 $\exists \varepsilon_0\in(0,b-a)$ 使得当 $x\in(a,a+\varepsilon_0]$, 有 $|f(x)|\leq g(x)$, 则当 $\int_a^b g(x)dx$ 收敛, 有 $\int_a^b f(x)dx$ 与 $\int_a^b |f(x)|dx$ 收敛; 当 $\int_a^b f(x)dx$ 发散, 有 $\int_a^b g(x)dx$ 与 $\int_a^b |f(x)|dx$ 发散.

3. 推论: (Cauchy 判别法) 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处无界, 在 $[a+\varepsilon,b)$ 上可积 ($0<\varepsilon<b-a$). 若 $\exists p<1$ 使得 $\lim\limits_{x\to a}(x-a)^p|f(x)|=C\geq 0$, 则 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛; 若 $\exists p\geq 1$ 使得 $\lim\limits_{x\to a}(x-a)^p|f(x)|=C>0$ (可以是 $+\infty$), 则 $\int_a^b f(x)dx$ 发散.

e.g. ① 讨论 $\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}dx$ 的敛散性.

解: $\forall x$, 有 $\left|\frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}\right|\leq\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$.

而 $\frac{1}{2}<1$, 故 $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx$ 收敛.

GuangBo

∴原积分发散.

② 讨论 $\int_1^2 \frac{dx}{\ln x}$ 的敛散性.

解：易知 $\frac{1}{\ln x}$ 在 $x=1$ 处无界.

而 $\lim_{x\to 1^+}(x-1)\cdot\frac{1}{\ln x}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{\frac{1}{x}}=1>0$.

∴原积分发散.

③ 计算 $I_n=\int_0^{+\infty}x^n e^{-x}dx$ $(n\in N)$

解：首先有 $\forall n\in N$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$

∴取 $p>1$, 有 $\lim_{x\to+\infty}x^p(x^n e^{-x})=0$.

∴I_n 存在. 首先 $I_0=-e^{-x}\Big|_0^{+\infty}=1$.

$n\geq 1$ 时 $I_n=-\int_0^{+\infty}x^n d(e^{-x})$

$=-x^n e^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-x}d(x^n)$

$=-x^n e^{-x}\Big|_0^{+\infty}+nI_{n-1}=nI_{n-1}$.

∴$I_n=n!$.

④ 计算 Euler 积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx$ 与 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\,dx$.

解：∵$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ln\sin x=\lim_{x\to 0^+}2\sqrt{x}\ln\sqrt{x}=0$.

∴$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx$ 收敛.

同理，$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\,dx$ 收敛.

而 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\,dx\xrightarrow{x=\frac{\pi}{2}-t}-\int_{\frac{\pi}{2}}^0\ln\sin t\,dt$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx$.

把两式相加等于 $\frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\,dx\right)$

$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)dx$

$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin 2x\,dx-\frac{\ln 2}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$.

$\xrightarrow{2x=t}\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\ln\sin t\,dt-\frac{\pi}{4}\ln 2$. (记为 I)

而 $\int_0^{\pi}\ln\sin t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t\,dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\ln\sin t\,dt$

$\xrightarrow{t=\frac{\pi}{2}+u}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t\,dt+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos u\,du=2I$.

$\therefore I=\frac{I}{2}-\frac{\pi}{4}\ln 2$, 故 $I=\frac{\pi}{2}\ln 2$.

(2) Cauchy 主值积分.

1. 其实, 根据我们的定义

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\lim_{\substack{A\to+\infty\\B\to-\infty}}\int_B^A f(x)dx.$$

它只有在 $\int_B^a$ 与 $\int_a^A$ 均收敛时才收敛.

但是, 在它们发散时, 可以定义一个 Cauchy 主值使 $\int_B^A f(x)dx$ 收敛.

它的定义是: $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}f(x)dx$.

我们记此主值为 $(CPV)\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$.

e.g. 设 $f(x)=\frac{1+x}{1+x^2}$, $x\in R$ 讨论 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$.

解: $\because \lim_{x\to+\infty}x\cdot\frac{1+x}{1+x^2}=1>0$.

$\therefore$ 由 Cauchy 判别法, $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 发散.

GuangBo

但可以定义 $(CPV)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$

$$= \lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{A} \frac{1+x}{1+x^2}dx$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \left[\arctan x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]\Big|_{-A}^{A}$$

$$= \lim_{A\to+\infty} 2\arctan A = \pi.$$

2. 对于 $a<c<b$, 若 $f(x)$ 在 c 处无界, 则定义

$$(CPV)\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c-\varepsilon}^{b} f(x)dx\right).$$

三. Γ 函数与 B (Beta) 函数

1. 这两个函数由反常积分来定义, 但时不是初等函数.

2. 讨论 $\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx$ 的敛散性:

考虑到 $x^{s-1}e^{-x}$ 在 0 处可能无界, 用

$\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx = \int_0^1 x^{s-1}e^{-x}dx + \int_1^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx$ 来分解.

首先, 由 P.162/③ 可知, $\int_1^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx$ 收敛 $(\forall s\in R)$.

下面考察 $\int_0^1 x^{s-1}e^{-x}dx$.

由于 $\lim_{x\to0^+} x^{1-s}\cdot(x^{s-1}e^{-x}) = 1 > 0$, 故敛散性由 s 决定.

当 $s>0$ 时 $\int_0^1 x^{s-1}e^{-x}dx$ 收敛, 当 $s\le0$ 时它发散.

于是 $\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx$ 在 $s>0$ 时收敛在 $s\le0$ 时发散.

3. 定义 Γ 函数: 记 $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx$, $s\in(0,+\infty)$.

GuangBo

4. Γ函数的性质

(1) 根据P.162/③, $\Gamma(n+1)=n!$.

这里可以认为Γ函数看成阶乘在实数值上的推广.

(2) 当$s>1$时, $\Gamma(s)=(s-1)\Gamma(s-1)$.

这可以看作是一个递推式. 可用分部积分证明.

(3) (余元公式) $\forall s\in(0,1)$, $\Gamma(s)\cdot\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin s\pi}$.

特别地, 有$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$.

(此公式需用含元函数积分证明).

5. 讨论$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$的敛散性. ($p,q\in R$):

可以用Cauchy判别法, $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{1-p}[x^{p-1}(1-x)^{q-1}]=1$.

于是$p>0$且$q>0$时它是收敛的.

6. 定义B函数: 记 $B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}$, $p,q\in(0,+\infty)$.

7. B函数的性质

(1) 对称性: $B(p,q)=B(q,p)$.

(2) B函数与Γ函数的关系: $B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

e.g. ① 计算$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$.

解: $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx \xrightarrow{t=x^2} \int_0^{+\infty} e^{-t}\cdot\frac{dt}{2\sqrt{t}}=\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

② 计算 $I=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^{\frac{1}{4}}}}$.

解: 令$t=x^{\frac{1}{4}}$, 则 $t^4=x$, $dx=4t^3dt$.

$\therefore I=4\int_0^1 t^3(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt=4B(4,\frac{1}{2})=4\times\frac{\Gamma(4)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(4+\frac{1}{2})}$

$=4\cdot\frac{3!\times\sqrt{\pi}}{\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}=\frac{128}{35}$.

No. 166 Date: 11.25

线性代数部分

第四章 矩阵与线性方程组

(选讲)

为线性本身是代数学，它研究线性方程(最简单的代数方程)，并将变元个数扩大至n个，寻求一般条件下的n元一次方程组的解。需引入矩阵行列式等概念以及一些求解方法。

§1 向量与矩阵

一、向量

1. 我们把n个实数或复数$a_1, a_2, \cdots, a_n$按顺序放在一起，记为$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，它就成为一个n维向量，也记成

$$\vec{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

当然，向量也可写为 $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

前者叫横(行)向量，后者叫列向量。

全体行向量的集合 $\mathbb{R}^n = \{\vec{\alpha} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$

或列向量集合 $\widetilde{\mathbb{R}}^n = \left\{\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_i \in \mathbb{R}\right\}$

叫n维向量空间。($\mathbb{R}^n \cong \widetilde{\mathbb{R}}^n$)。

2. 向量有2个运算——加法、数乘。

(1) 加法：$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, \cdots, a_n + b_n)$；

(2) 数乘：$\lambda \vec{a} = (\lambda a_1, \cdots, \lambda a_n)$

物理系毕业论文君

这两种运算满有以下的定律:

(1) 加法交换律 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

(2) 数乘分配律 $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$.

(3) 加法结合律 $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

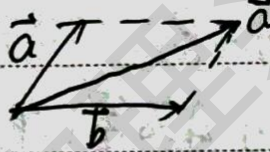
.....

真正的向量空间 $\mathbb{R}^n$ 是 $\{\vec{x}=(x_1,\cdots,x_n)\mid x_i\in\mathbb{R}\}$ 加上两种运算(两种线性运算), 是n维线性空间.

3. [定理] 任一n维线性空间E与$\mathbb{R}^n$同构, 即映射 $\varphi: E\to\mathbb{R}^n$ 可以是一一映射.

4. 在加法、数乘的基础上, 再定义内积 $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$, 则 $\mathbb{R}^n$ 成为n维欧氏空间.

5. $\mathbb{R}^n$ 中加法的几何意义——平行四边形法则



6. 数乘的几何意义: 将 $\vec{a}$ 相对其起点伸缩为 λ 倍 ($\lambda<0$ 时反向) 所得向量为 $\lambda\vec{a}$.

二. 矩阵——向量的进一步推广.

1. 定义 由 $m\times n$ 个实数或复数 a_{ij} $(i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n)$ 按照下列方式组成的式子

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & \cdots & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

GuangBo

叫做一个 m 行 n 列的矩阵，或 $m\times n$ 矩阵，记为

$$A=(a_{ij})_{m\times n}$$

2. $\forall i,j$，$a_{ij}\in\mathbb{R}$，则 A 为实矩阵；

$\forall i,j$，$a_{ij}\in\mathbb{C}$，则 A 为复矩阵.

3. 当 $m=n$ 时，称 A 为 n 阶方阵 $(a_{ij})_{n\times n}$.

若 $m=n=1$，则 A 就代表一个实(复)数 a_{11}.

对于 n 阶方阵，称 a_{ii} $(i=1,\cdots,n)$ 为对角元素，它们构成主对角线.

4. 向量是特殊的矩阵：$1\times n\to$ 行向量；$n\times 1\to$ 列向量

5. 一般大写字母表示矩阵，对应小写字母表示矩阵中的元素.

如 a_{ij} 表示 A 的第 i 行、第 j 列的元素.

6. 两个具有相同行数、列数的矩阵叫同型矩阵.

若 A,B 同型，且 $a_{ij}=b_{ij}$，则 $A=B$.

7. 若 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 且 $a_{ij}=0$，则 A 为零(矩)阵.

记 $A=(0)_{m\times n}$ 或 $A=O$.

8. 方阵中的三个概念

(1) 单位阵：$I_n=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}_{n\times n}$.

在这里记 $a_{ij}=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$，这叫 Kronecker 记号.

(2) 对角矩阵：

$$A=(d_i\delta_{ij})_{n\times n}=\begin{pmatrix}d_1&0&\cdots&0\\0&d_2&&\vdots\\\vdots&&\ddots&0\\0&\cdots&0&d_n\end{pmatrix}=\operatorname{diag}(d_1,\cdots,d_n).$$

(3) 上(下)三角阵

上三角 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}$ 下三角 $\begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}$.

三. 矩阵的运算

1. 加法: 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{m\times n}$ (同型矩阵),

定义 $A\pm B=(a_{ij}\pm b_{ij})_{m\times n}$.

可以验证这一定义满足交换律、结合律.

2. 数乘: $\lambda A=(\lambda a_{ij})_{m\times n}$.

可以验证 $A+(-1)\cdot A=A+(-A)=O$, 以及

$\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$,

$(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$.

3. 全体 $m\times n$ 实矩阵构成集合 $M(m,n)=\{A=(a_{ij})_{m\times n} \mid a_{ij}\in\mathbb{R}\}$,

定义 n 维线性空间. 且同构于 $\mathbb{R}^{m\times n}$.

4. 转置: $A^T=(b_{ij})_{n\times m}$. 其中 $b_{ij}=a_{ji}$.

这里 $i=1,2,\cdots,n$, $j=1,2,\cdots,m$.

e.g. 求列向量 $\vec{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 的转置.

解: 由定义, $\vec{a}^T=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$

以上例子说明, $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & \vdots \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{1n} & a_{2n} & & a_{mn} \end{pmatrix}$

GuangBo

No. 170 Date: 11.25

* 可以验证 $(A^T)^T = A$, $(A+B)^T = A^T + B^T$,

$(\lambda A)^T = \lambda A^T$.

即转置具有线性性.

5. 共轭运算: 若 $A = (c_{ij})_{m\times n}$, $c_{ij} \in C$,

则定义共轭矩阵 $\overline{A} = (\overline{c_{ij}})_{m\times n}$.

可以验证 $\overline{(\overline{A})} = A$, $\overline{A}^T = \overline{(A^T)}$.

2 阶复矩阵 $\overline{A}^T = \overline{(A^T)}$ 运算很重要.

我们定义共轭转置矩阵 $A^H = \overline{A}^T$.

6. 矩阵的乘法

(1) 首先规定 $1\times n$ 行矩阵与 $n\times 1$ 列矩阵的乘积

$$\vec{x}\cdot\vec{y}=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=(x_1,\cdots,x_n)\cdot\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}.$$

(2) 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times p$ 矩阵，定义乘积

$$AB=(a_{ij})_{m\times n}\cdot(b_{ij})_{n\times p}=(c_{ij})_{m\times p}.$$

其中 $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$.

也就是说，c_{ij} 是 A 第 i 行与 B 第 j 列的“内积”.

e.g. ① $A=\begin{pmatrix}2&1\\3&-1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}3&2&0\\5&-1&1\end{pmatrix}$，求 AB.

解：由矩阵乘积的定义，

$$AB=\begin{pmatrix}2&1\\3&-1\end{pmatrix}_{2\times 2}\begin{pmatrix}3&2&0\\5&-1&1\end{pmatrix}_{2\times 3}=\begin{pmatrix}11&3&1\\4&7&-1\end{pmatrix}_{2\times 3}.$$

** 本题求得为 AB，但不能求 BA，因为乘积 BA 不存在，不过

即使BA存在，也不一定等于AB，如下题.

② $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$, 求AB与BA.

解: $AB=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$.

$BA=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$.

我们发现 $AB\neq BA$.

所谓 $AB\neq BA$, 就是指矩阵乘法没有交换律.

(3) 对于n阶单位矩阵 $I_n=\begin{pmatrix}1&&0\\&\ddots&\\0&&1\end{pmatrix}_{n\times n}$.

有以下结论,

① $A_{n\times p}$, 有 $I_nA=A$.

② $A_{m\times n}$, 有 $AI_n=A$.

③ $A_{n\times n}$, 有 $I_nA=AI_n=A$.

(4) 对 $A_{n\times n}$ 有幂的概念:

$A^k=\underbrace{A\cdot A\cdots A}_{k\text{个}A}$ $(k\in Z_+)$, 规定 $A^0=I_n$.

有这个结论是因为矩阵乘法满足结合律: $(AB)C=A(BC)$.

在此基础上定义A的多项式

$P(A)=a_0A^n+a_1A^{n-1}+\cdots+a_{n-1}A+a_nI_n$.

关结合律的条件, A跟B可乘, B与C可乘.

关结合律的证明, 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times l}$, $C=(c_{ij})_{l\times p}$.

则 $AB=\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right)_{m\times l}$, $BC=\left(\sum_{s=1}^{l}b_{is}c_{sj}\right)_{n\times p}$.

于是, $(AB)C=\left(\sum_{s=1}^{l}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ks}\right)c_{sj}\right)_{m\times p}$.

GuangBo

No. 172 Date: 11.28

$$A(BC)=\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot\left(\sum_{s=1}^{l} b_{ks}c_{sj}\right)\right)_{m\times p}.$$

我们发现 $(AB)C$ 与 $A(BC)$ 同型.

对于它们的元素有

$$\sum_{s=1}^{l}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ks}\right)c_{sj}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\left(\sum_{s=1}^{l} b_{ks}c_{sj}\right)$$

$$=\sum_{i=1,s=1}^{n,l} a_{ik}b_{ks}c_{sj},$$

因此 $(AB)C=A(BC)$. 证毕.

(5) 设 $(a_{ij})_{m\times n}$ 具有几何意义.

构造线性映射 $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$, 即 $\forall \vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^m$ 与 $\forall \lambda,\mu\in\mathbb{R}$, 有 $f(\lambda\vec{x}+\mu\vec{y})=\lambda f(\vec{x})+\mu f(\vec{y})$.

在自然基 $\vec{e}_i=(\sim 0,\underset{\text{第}i\text{行}}{1},0\sim)_{1\times m}$

与 $\vec{\tilde{e}}_i=(\sim\sim 0,\underset{\text{第}i\text{行}}{1},0\sim)_{1\times n}$ 的表示下,

如果有 $f(\vec{e}_i)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\vec{\tilde{e}}_j\ (1\le i\le m)$,

则 f 对 $\mathbb{R}^m$ 的作用与 A 是一样的.

于是复合映射可用矩阵乘法表示.

(6) 矩阵乘法满足分配律:

在以下乘法存在的情况下, 有

GuangBo

$(A+B)C = AC+BC$.

$A(B+C) = AB+AC$.

(7) 若 $A.B$ 可乘，则 $(AB)^T = B^T A^T$ (证明作为作业.)

e.g. 把线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$

表示成矩阵的形式.

解：记 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

则原方程组可表示为 $A\vec{x} = \vec{b}$.

* 我们通过这一方式将一元一次方程 $ax=b$ 与多元线性方程组实现了统一. 为了解这类线性方程组，引入以下概念：

(1) A — 系数矩阵.

(2) $\vec{x}$ — 未知向量. 解出之后的 $\vec{x}$ (可能不止一个) 叫解向量

(3) $\vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow$ 此方程组是齐次的. 反之为非齐次.

(4) 对于齐次方程，$\vec{x} = \vec{0}$ 一定为一个解，叫平凡解. 其余的解叫非平凡解.

(5) $m=n$ 时，若方阵 A 可逆，即存在 A^{-1} 使 $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$，则有解 $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$.

四. 分块矩阵

GuangBo

No. 174 Date: 11.28

1. 对于一个较大的矩阵，我们可将其划分为n个区域.

如对于 $A=(a_{ij})_{4\times5}$，可令 $A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}$.

其中取 $A_{11}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$, $A_{12}=\begin{pmatrix}a_{14} & a_{15}\\ a_{24} & a_{25}\\ a_{34} & a_{35}\end{pmatrix}$

$A_{21}=(a_{41},a_{42},a_{43})$, $A_{22}=(a_{44},a_{45})$.

这里的 $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ 叫分块矩阵.

2. $A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}$, 则

A可与B行同型 $\Leftrightarrow$ A与B同型.(可推广到 $m\times n$ 矩阵)

3. 对于上面的矩阵有

(1) $A+B=\begin{pmatrix}A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12}\\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22}\end{pmatrix}$.

(2) $A^T=\begin{pmatrix}A_{11}^T & A_{21}^T\\ A_{12}^T & A_{22}^T\end{pmatrix}$.

(3) $AB=\left(\sum_{k=1}^{2}A_{ik}B_{kj}\right)_{2\times2}$.

4. 分块的一种特殊情况，可把矩阵的每一行(列)分开，看成向量的组合.

§2 行列式

一、行列式的引入

1. 对于线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$，有 $\vec{x}=A^{-1}\vec{b}$ 解的条件是 A^{-1} 存在，即 A 可逆.

2. 为了探究 A 可逆的条件，定义 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$ 的行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

这样定义是因为 $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2\end{cases}$ 的解是

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{a_{22}b_1-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\\[2ex]x_2=\dfrac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\end{cases}$$

可写为

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{\begin{vmatrix}b_1&a_{12}\\b_2&a_{22}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}},\\[2ex]x_2=\dfrac{\begin{vmatrix}a_{11}&b_1\\a_{21}&b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}}.\end{cases}$$

(前提：$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}\neq 0$)

3. 对于 3×3 矩阵 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$，定义

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

二、排列

1. 定义：将 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个数组成的有序的一组数叫一个 n 级排列.

如 $2,4,3$ 是一个 4 级排列，$(4,5,3,1,2)$ 是一个 5 级排列.

显然 n 级排列的总数为 $n!$，它随 n 的增大而指数级增长.

2. 逆序：在一个 n 级排列 $\{j_1,j_2,\cdots,j_n\}=\{1,2,\cdots,n\}$ 中，如果

GuangBo

对于其中一对数 j_k 与 j_l ($k<l$), $j_k>j_l$, 则称在此排列中出现了一个逆序. 一个排列中逆序的总数称为逆序数.

如 2,4,3,1 的逆序数为 4 (2,1; 4,3; 4,1; 3,1).

4,5,3,2,1 的逆序数为 9.

我们把一个排列的逆序数记为 $\tau(j_1, j_2, \cdots, j_n)$.

若 τ 为奇(偶)数, 则称此排列为奇(偶)排.

如 $\tau(1,2,\cdots,n)=0$, 故 1,2,…,n 为偶排.

3. 在 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 中交换某两个数, 其余不变动, 则称对换后所得的排列是前一排列的一个对换.

显然 n 级排列经过若干次对换后都可成 1,2,…,n.

4. [定理] (1) 一次对换可改变排列的奇偶性.

(2) 一个排列经过若干次对换后成为 1,2,…,n, 则对换次数的奇偶性与排列本身的奇偶性一致.

5. 重新认识行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(1,2)} a_{11}a_{22} + (-1)^{\tau(2,1)} a_{12}a_{21}.$$

(行数从1开始递增, 列数按下面的指号排列).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(1,2,3)} a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^{\tau(2,3,1)} a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^{\tau(3,1,2)} a_{13}a_{21}a_{32} + (-1)^{\tau(3,2,1)} a_{13}a_{22}a_{31} + (-1)^{\tau(2,1,3)} a_{12}a_{21}a_{33} + (-1)^{\tau(1,3,2)} a_{11}a_{23}a_{32}.$$

三、n阶行列式

定义n阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

$$= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1, j_2, \cdots, j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$ (展开式)

其中 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的排列.

(含义：先把所有位于不同行、列的元素相乘，然后在带上符号的情况下相加.)

e.g. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

解：按定义算很麻烦，但此式中0很多.

因此，$a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4} \neq 0$ 当且仅当 $(j_1, j_2, j_3, j_4) = (4, 3, 2, 1)$ 时才成立.

故原式 $= (-1)^{\tau(4,3,2,1)} \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$.

对角行列式 $\begin{vmatrix} d_1 & & & 0 \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n \end{vmatrix} = d_1 d_2 \cdots d_n.$

四. 行列式的计算

1. 首先，注意到行列式的一般项其实是 $\prod_{s=1}^{n} (-1)^{\tau(i_1, \cdots, i_n) + \tau(j_1, \cdots, j_n)} a_{i_s j_s}$ ($i_1, i_2, \cdots, i_n$ 也是 $1, 2, \cdots, n$ 的排列).

物理系的公式

GuangBo

所以有这样的性质：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{1n} & \cdots & & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1,\cdots,i_n} (-1)^{\tau(i_1,\cdots,i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

$$= \sum_{j_1,\cdots,j_n} (-1)^{\tau(j_1,\cdots,j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

即 $|A^T| = |A|$.

2. 余子式算法：记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}. \quad (*)$$

其中 A_{1i} 显然不含 a_{1i}.

(1) [定理] (Laplace 展开) 记 Δ_{ij} 是 n 阶行列式中去掉第 i 行与第 j 列所成的 n-1 阶的行列式，则

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}.$$

称 Δ_{ij} 为 a_{ij} 的余子式，A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式.

(2) 与此同时，原行列式可按第 i 行展开等于

$$a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}.$$

(3) 根据 $|A^T| = |A|$，行列式按列展开也是可以的.

(4) (*) 式是行列式按第一行展开，这是 n 阶行列式的标准定义.

3. 行列式的某一行(列)若有公因子，则该公因子可以提出行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \cdots & \lambda a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

P: 用 Laplace 展开(按第i行)就可证明.

*特别地, 当$\lambda=0$时(即有一行/列全为0), 行列式等于0.

4. $$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{i1}+a'_{i1} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a'_{i1} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

5. 若某一行列式中有两行(列)相同, 则此行列式为0.

证明: $$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1,\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1,\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

此展开式中出现了 $(-1)^{\tau(j_1,\cdots,j_i,\cdots,j_k,\cdots,j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$

与 $(-1)^{\tau(j_1,\cdots,j'_i,\cdots,j'_k,\cdots,j_n)} a_{1j_1}\cdots a_{ij'_i}\cdots a_{kj'_k}\cdots a_{nj_n}$

其中 $j'_i = j_k$, $j'_k = j_i$. (两种排列只对换 j_i 与 j_k).

如果行列式第i与第k行相同, 则 $a_{ij_i} = a_{kj_i} = a_{kj'_k}$, $a_{kj_k} = a_{ij_k} = a_{ij'_i}$, 故这两个项的绝对值相等.

但经过一次对换, $\tau(j_1,\cdots,j_n)$ 奇偶性改变, 这两项符号相反, 故和为0, 进而有整个行列式等于0.

GuangBo

6. 若一个行列式中有两行(列)成比例，则行列式等于0.

7. 在行列式中，将某一行(列)乘一个实数λ加到另一行(列)上，则行列式的值不变.

即 $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+\lambda a_{i1} & \cdots & a_{jn}+\lambda a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

8. 对换行列式中某两行(列)，则行列式改变符号.

证明: $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a_{k1} & \cdots & a_{in}+a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ -a_{k1} & \cdots & -a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

$= - \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

9. 上(下)三角行列式的值等于对角元素的乘积.

即 $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \vdots \\ & & \ddots \\ 0 & & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

证明：$\begin{vmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{vmatrix}$

$= a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{vmatrix} = \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$

（*表示元素的值未知，可能是0也可能不是0）

e.g. ① 求 $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -5 \\ 3 & 0 & -4 \end{vmatrix}$.

解：根据行列式的性质，有

原式 $= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -5 \\ 3 & 0 & -4 \end{vmatrix} \overset{r_2+r_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & -4 \end{vmatrix} \overset{c_2 \leftrightarrow c_3}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix}$

$= -(-2)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -13 \end{vmatrix} = 1 \times 6 \times 2 = 12.$

② 求 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}_{n\times n}$

解：将第一行乘 -1，加到第2，3，…，n行.

原式 $= \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 1 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$.

将第2，3，…，n行乘 -1 加到第1行.

GuangBo

原式 $=\begin{vmatrix} n+1 & & & 0 \\ -1 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -1 & 0 & & 1 \end{vmatrix} = n+1.$

③ 证明：n阶行列式

$$V_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & & & & \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j).$$

证明：用数学归纳法.

1° $n=2$ 时，$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2-x_1.$

2° 假设 $n=k$ 时 $V_k=\prod_{1\le j<i\le k}(x_i-x_j)$.

则当 $n=k+1$ 时，有

$$V_{k+1}=\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & x_{k+1} \\ x_1^2 & \cdots & x_{k+1}^2 \\ \cdots & & \\ x_1^{k-1} & \cdots & x_{k+1}^{k-1} \\ x_1^k & \cdots & x_{k+1}^k \end{vmatrix} \xrightarrow{\times(-x_1)\ \text{加到}} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{k+1} \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{k+1}^2 \\ \cdots & & & \\ 0 & x_2^{k-1}(x_2-x_1) & \cdots & x_{k+1}^{k-1}(x_{k+1}-x_1) \end{vmatrix}$$

(这时按第2,3,…,k+1列同一公因子)

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2-x_1 & \cdots & x_{k+1}-x_1 \\ 0 & x_2(x_2-x_1) & \cdots & x_{k+1}(x_{k+1}-x_1) \\ \cdots & & & \\ 0 & x_2^{k-1}(x_2-x_1) & \cdots & x_{k+1}^{k-1}(x_{k+1}-x_1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2-x_1 & \cdots & x_{k+1}-x_1 \\ \cdots & & \\ x_2^{k-1}(x_2-x_1) & \cdots & x_{k+1}^{k-1}(x_{k+1}-x_1) \end{vmatrix}$$

物理系的允勇

$$= \prod_{i=2}^{k+1}(x_i - x_1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_{k+1} \\ x_2^{k-1} & x_3^{k-1} & \cdots & x_{k+1}^{k-1} \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{i=2}^{k+1}(x_i - x_1) \cdot \prod_{2 \le j < i \le k+1}(x_i - x_j) = \prod_{1 \le j < i \le k+1}(x_i - x_j).$$

由此, $n \in Z_+$ $(n \ge 2)$ 时原结论成立.

④ 求 $D_n = \begin{vmatrix} \lambda + a_1 b_1 & \cdots & \lambda + a_1 b_n \\ \lambda + a_2 b_1 & \cdots & \lambda + a_2 b_n \\ \cdots & & \\ \lambda + a_n b_1 & \cdots & \lambda + a_n b_n \end{vmatrix}_{n \times n}$ $(n \ge 2)$.

解: 将第1列乘 -1 后加到第 $2, 3, \cdots, n$ 列.

$$D_n = \begin{vmatrix} \lambda + a_1 b_1 & a_1(b_2 - b_1) & \cdots & a_1(b_n - b_1) \\ \lambda + a_2 b_1 & a_2(b_2 - b_1) & \cdots & a_2(b_n - b_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda + a_n b_1 & a_n(b_2 - b_1) & \cdots & a_n(b_n - b_1) \end{vmatrix}.$$

此时它的第 $2, 3, \cdots, n$ 列对应成比例.

于是 $D_n = 0$. $(n \ge 2)$

五、拓展结论

1. [定理] (Laplace) 对于 $A_{n \times n}$ 有

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = \delta_{ij} |A| = \begin{cases} |A|, & i = j. \\ 0, & i \ne j. \end{cases}$$

(A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式)

GuangBo

证明：1°行列时由|A|定义，显然成立.

2°行，采数设归.

则 $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$

证毕.

2. [定理] $|AB| = |A| \cdot |B|$.

3. [定理] 设 $A_{n\times n}$, $B_{m\times m}$, 有

$$\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|.$$

证明从略.

§3 逆矩阵

一、逆矩阵的概念

1. 定义：对于 $A_{n\times n}$, 若存在 $B_{n\times n}$, 使 $AB = BA = I_n$, 则称A可逆，B叫A的逆矩阵 A^{-1}.

例. 证明 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 无逆阵.

证明：假设 A^{-1} 存在，设 $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

则 $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

物理系钟文君

No. 185 Date: 12.2

但 $|A| \neq 0$. 才是 A^{-1} 是不存在的.

2. [定理] n阶方阵A可逆的充要条件是 $|A| \neq 0$.

物理系的分支君

但 $|A| \neq 0$. 于是 A^{-1} 是不存在的.

2. [定理] n阶方阵A可逆的充要条件是 $|A| \neq 0$

证明: ① 必要性.

由A可逆, 可知 $\exists B_{n\times n}$, 使得 $AB = BA = I_n$.

∴两边取行列式 $|AB| = |A| \cdot |B| = |I_n| = 1$.

∴一定有 $|A| \neq 0$.

② 充分性.

定义A的伴随矩阵 $A^* = (A_{ij})^T_{n\times n} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$.

于是 $AA^* = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}\right)_{n\times n} = \left(\delta_{ij}\cdot|A|\right)_{n\times n}$

$$= \begin{pmatrix} |A| & & 0 \\ & |A| & \\ & & \ddots \\ 0 & & & |A| \end{pmatrix}_{n\times n} = |A| \cdot I_n.$$

同理 $A^*A = |A| \cdot I_n$. (按列展开 $|A|$).

∵ $|A| \neq 0$.

∴可见 $A \cdot \frac{A^*}{|A|} = \frac{A^*}{|A|} \cdot A = I_n$.

于是 $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$. 所以A可逆.

二. 逆矩阵的性质

1. 若 A^{-1} 存在, 则 A^{-1} 唯一.

2. 若 $AB = I$ 或 $BA = I$ 中有一个成立, 则 $B = A^{-1}$.

物理系的公主

3. 若A可逆，则 A^T 与 A^H 均可逆，且 $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$，$(A^H)^{-1}=(A^{-1})^H$.

4. 若A、B同时可逆，则 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

[证明] 1. 唯一性.

假设A有B、C两个逆阵，则

$$C=C\cdot I=C(AB)=(CA)B=IB=B.$$

可见 $A^{-1}=B=C$ 是唯一的.

2. 不妨设 $AB=I$，要证 $BA=I$.

事实上，由 $|AB|=|A||B|=1\neq 0$，可知 $|A|\neq 0$.

即存在 $A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}$，即A可逆.

$\because AB=I$. $\therefore A^{-1}(AB)=(A^{-1}A)B=IB=B=A^{-1}I=A^{-1}$.

从而 $BA=A^{-1}A=I$.

3. 利用 $(AB)^T=B^TA^T$ 与 $AA^{-1}=I$ 可证明.（作业）

4. 事实上，$(B^{-1}A^{-1})(AB)=B^{-1}(A^{-1}A)B=B^{-1}B=I$.

$\therefore (AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

例. 若 $ad-bc\neq 0$，求 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解：首先，$|A|=ad-bc\neq 0$.

$$\therefore A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}=\frac{1}{ad-bc}\cdot\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}.$$

三、用初等变换求逆矩阵

1. [定理] 对于方阵A，若 $\exists B_1, B_2, \cdots, B_k$，使得

$$(B_kB_{k-1}\cdots B_1)A=I.$$

则A可逆且 $A^{-1}=B_kB_{k-1}\cdots B_1$.

(当 $B_1B_2\cdots B_k$ 右乘A时也一样)

2. 辅助矩阵法

构造分块矩阵 $(A|I)_{n\times(2n)}$.

根据上面的定理,

$$B_k\cdots B_1(A|I)=(I|B_k\cdots B_1)=(I|A^{-1}).$$

这个 $B_k\cdots B_1$ 都是要求出的逆阵.

为了让 $B_i\ (i=1,2,\cdots,k)$ 较简单,引入初等变换.

3. 初等变换

(1) 第一类初等变换:将矩阵第i与第j行(列)对换.

(2) 第二类:将矩阵第i行(列)乘上λ,其余元素不变.

(3) 第三类:将矩阵第i行(列)乘上λ后加到第j行(列).

4. [定理]在左乘意义下(对行做变换):

(1) 第一类初等变换相当于左乘

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 \\ & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \cdots & 0 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}=E_{ij}$$

第i行 → 第j行

(2) 第二类相当于左乘 $P_i(\lambda)=$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \lambda & \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

λ → 第i行

(3) 第三类相当于左乘 $T_{ij}(\lambda)=$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & \lambda & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

λ → 第j行第i列.

GuangBo

注明（(1)(2)作为作业）：仅验证(3).

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，有 $T_{ij}(\lambda)A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \\ a'_{j1} & a'_{j2} & \cdots & a'_{jn} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

其中 A 第 j 行发生变化，$a'_{jk}=a_{jk}+\lambda a_{ik}\ (k=1,\cdots,n)$，这是显然正确的.

称以上的 $E(ij)$，$P_i(\lambda)$，$T_{ij}(\lambda)$ 叫初等矩阵.

5. [定理] 矩阵 A 可逆的充要条件是存在有限个初等矩阵 $B_1,\cdots,B_k$（或 $C_1,C_2,\cdots,C_m$），使得

$$B_kB_{k-1}\cdots B_1A=AC_1C_2\cdots C_m=I.$$

此时 $B_kB_{k-1}\cdots B_1=C_1C_2\cdots C_m=A^{-1}$.

6. [推论] 可逆阵 A 可分解为若干个初等矩阵的乘积.

7. 以上分析证明了构造辅助矩阵的正确性.

具体内容：构造 $(A|I)$，进行初等变换（主要是行变换，相当于左乘初等矩阵），直到左半边变成 I，此时右半边即为 A^{-1}.

eg. ① 求 $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆阵.

解：[法一] $A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}=A^*=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

[法二] 构造辅助矩阵 $\left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$.

No. 189 Date: 12.5

初等变换: $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_1(\frac{1}{5})} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{T_{12}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{T_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{P_2(5)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \end{array}\right)$.

$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

物理系的兵哥

② 求 $A=\begin{pmatrix}2&0&-1\\-1&1&2\\1&2&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解: $\begin{pmatrix}2&0&-1&1&0&0\\-1&1&2&0&1&0\\1&2&1&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{E_{13}}\begin{pmatrix}1&2&1&0&0&1\\-1&1&2&0&1&0\\2&0&-1&1&0&0\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{T_{12}(1)T_{13}(-2)}\begin{pmatrix}1&2&1&0&0&1\\0&3&3&0&1&1\\0&-4&-3&1&0&-2\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{P_2(\frac{1}{3})}\begin{pmatrix}1&2&1&0&0&1\\0&1&1&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&-4&-3&1&0&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{T_{23}(4)}\begin{pmatrix}1&2&1&0&0&1\\0&1&1&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&0&1&1&\frac{4}{3}&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{T_{32}(-1)T_{32}(-1)}\begin{pmatrix}1&2&0&-1&-\frac{4}{3}&\frac{5}{3}\\0&1&0&-1&-1&1\\0&0&1&1&\frac{4}{3}&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}\xrightarrow{T_{21}(-2)}\begin{pmatrix}1&0&0&1&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\0&1&0&-1&-1&1\\0&0&1&1&\frac{4}{3}&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$.

$\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix}1&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\-1&-1&1\\1&\frac{4}{3}&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$.

物理系的公子君

No. 190 Date: 12.7

#在上述求解方法中，统一地只能做行的初等变换，不可插入列的初等变换.

③ 设A、B是m阶、n阶可逆方阵，C为m×n矩阵，证明 $T=\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 可逆，并求 T^{-1}.

证明：设有m×n阵D，满足

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_m & D \\ 0 & I_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & AD+C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

是对角阵，即 $AD+C=0$.

于是 $D=-A^{-1}C$.

于是 $\det\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}=|A|\cdot|B|=\det\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} I_m & D \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$

$$=\det\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}\neq 0.$$

说明 $|T|\neq 0$，故T可逆.

由 $T\begin{pmatrix} I_m & -A^{-1}C \\ 0 & I_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 可知

$$T^{-1}=\begin{pmatrix} I_m & -A^{-1}C \\ 0 & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1}.$$

又 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$.（可验证）

$$\therefore T^{-1}=\begin{pmatrix} I_m & -A^{-1}C \\ 0 & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}.$$

数理系的允文君

四、Cramer 法则

1. 求解线性方程组 $Ax=b$.

其中 A 为 n 阶方阵, $x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$.

[定理] (Cramer 法则)

设 $\det(A)\neq 0$, 则方程组 $Ax=b$ 有唯一解 $x=A^{-1}b$, 并且 x 的分量 $x_i=\frac{|A_i|}{|A|}$, 其中 A_i 是将 A 的第 i 列换成 $b=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$ 的矩阵. $(i=1,2,\cdots,n)$.

证明: 首先, 注意到 Laplace 展开式

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}=\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj}=\begin{cases}|A|, & \text{当 } i=j.\\ 0, & \text{当 } i\neq j.\end{cases}$$

↓ 按行展开　　↓ 按列展开

又 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot A^{*}=\frac{1}{|A|}\cdot(A_{ij})^{T}_{n\times n}$.

$$\therefore x=A^{-1}b=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & \cdots & & A_{n2}\\ A_{1n} & \cdots & & A_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}\sum_{k=1}^{n}A_{k1}b_k\\ \vdots\\ \sum_{k=1}^{n}A_{kn}b_k\end{pmatrix}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}|A_1|\\ |A_2|\\ \vdots\\ |A_n|\end{pmatrix}.$$

其中矩阵 A_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 的定义如定理.

从而 $x_i=\frac{|A_i|}{|A|}$. $(i=1,2,\cdots,n)$

物理系的小石

GuangBo

eg. 解方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=5, \\ x_1+2x_2-x_3+4x_4=-2, \\ 2x_1-3x_2-x_3-5x_4=-2, \\ 3x_1+x_2+2x_3+11x_4=0. \end{cases}$

解：记 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \end{pmatrix}$, $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

而 $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \end{vmatrix}=-142.$

$|A_1|=\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 4 \\ -2 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 11 \end{vmatrix}=-142.$

易有 $|A_2|=-284$, $|A_3|=-426$, $|A_4|=142.$

于是 $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2.12 上面例题中可知，Cramer法则计算量往往很大.

*五、另一种解方程组的方法：Gauss消元法.

将方程组 $Ax=b$ 写成如下形式——增广矩阵 $(A|b)$. 对其进行初等变换，直至A变成单位矩阵，此时b就变成了解向量.

eg. 对于上面的例题，构造增广矩阵

$$(A|b)=\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&5\\1&2&-1&4&-2\\2&-3&-1&-5&-2\\3&1&2&11&0\end{array}\right)\xrightarrow[T_{13}(-2)\ T_{14}(-3)\ P_3(-1)]{T_{12}(-1)}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&5\\0&1&-2&3&-7\\0&5&3&7&12\\0&-2&1&8&-15\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[T_{24}(2)]{T_{23}(-5)}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&5\\0&1&-2&3&-7\\0&0&13&-8&47\\0&0&-5&14&-29\end{array}\right)\xrightarrow[P_4(\frac{13}{142})]{T_{34}(\frac{5}{13})}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&5\\0&1&-2&3&-7\\0&0&13&-8&47\\0&0&0&1&-1\end{array}\right)$$

在这里已可得到 $x_4=-1$，然后回代得 x_1, x_2, x_3.

也可继续变换：$\xrightarrow[P_3(\frac{1}{13})]{T_{43}(8)}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&5\\0&1&-2&3&-7\\0&0&1&0&3\\0&0&0&1&-1\end{array}\right)$

$$\xrightarrow[T_{42}(-3)]{T_{32}(2)}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&5\\0&1&0&0&2\\0&0&1&0&3\\0&0&0&1&-1\end{array}\right)\xrightarrow[T_{41}(-1)]{T_{21}(-1)\ T_{31}(-1)}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&1\\0&1&0&0&2\\0&0&1&0&3\\0&0&0&1&-1\end{array}\right).$$

可见 $(x_1, x_2, x_3, x_4)=(1, 2, 3, -1)$.

(线性代数部分仅这讲以上内容)

第六章 空间解析几何

§1 空间直角坐标与空间向量

一、空间直角坐标系

1. $\mathbb{R}^3=\{(x,y,z)\mid x,y,z\in\mathbb{R}\}$ 可以与三维空间 E^3 中的点一一对应. 在直角坐标系 $O-xyz$ 中，$P(x,y,z)$ 这一坐标也可以看成 $\overrightarrow{OP}$ 向量的坐标.

eg. 对于上面的例题，构造增广矩阵

$$(A|b)=\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&5\\1&2&-1&4&-2\\2&-3&-1&-5&-2\\3&1&2&11&0\end{array}\right)\xrightarrow[T_{13}(-2)\ T_{14}(-3)\ P_3(-1)]{T_{12}(-1)}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&5\\0&1&-2&3&-7\\0&5&3&7&12\\0&-2&1&8&-15\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[T_{24}(2)]{T_{23}(-5)}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&5\\0&1&-2&3&-7\\0&0&13&-8&47\\0&0&-5&14&-29\end{array}\right)\xrightarrow[P_4(\frac{13}{142})]{T_{34}(\frac{5}{13})}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&5\\0&1&-2&3&-7\\0&0&13&-8&47\\0&0&0&1&-1\end{array}\right)$$

在这里已可得到 $x_4=-1$，然后回代得 x_1, x_2, x_3.

也可继续变换：$\xrightarrow[P_3(\frac{1}{13})]{T_{43}(8)}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&5\\0&1&-2&3&-7\\0&0&1&0&3\\0&0&0&1&-1\end{array}\right)$

$$\xrightarrow[T_{42}(-3)]{T_{32}(2)}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&5\\0&1&0&0&2\\0&0&1&0&3\\0&0&0&1&-1\end{array}\right)\xrightarrow[T_{41}(-1)]{T_{21}(-1)\ T_{31}(-1)}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&1\\0&1&0&0&2\\0&0&1&0&3\\0&0&0&1&-1\end{array}\right).$$

可见 $(x_1, x_2, x_3, x_4)=(1, 2, 3, -1)$.

(线性代数部分仅这讲以上内容)

第六章 空间解析几何

§1 空间直角坐标与空间向量

一、空间直角坐标系

1. $\mathbb{R}^3=\{(x,y,z)\mid x,y,z\in\mathbb{R}\}$ 可以与三维空间 E^3 中的点一一对应. 在直角坐标系 $O-xyz$ 中，$P(x,y,z)$ 这一坐标也可以看成 $\overrightarrow{OP}$ 向量的坐标.

2. 从线性代数角度看，可定义单位向量
$\vec{e_1}=(1,0,0)$, $\vec{e_2}=(0,1,0)$, $\vec{e_3}=(0,0,1)$.
于是 O-xyz 可以看成 $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ 张成的一个三维空间.

二、空间向量的外积、混合积

1. 回顾：(1) 向量的加法：$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$
(按平行四边形法则)

(2) 向量的数乘：$\lambda\vec{a}=(\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$.

(3) 向量的内积：$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\vec{a}\cdot\vec{b}=(\vec{a},\vec{b})=\sum_{i=1}^{3}a_ib_i$.
$\Rightarrow$ 模长 $\|\vec{a}\|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$.
从而 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\cos\theta$ (θ 是 $\vec{a},\vec{b}$ 的夹角)
于是 $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

(4) $\mathbb{R}^3$ 内任一向量可用空间内的一组基表示，
如 $\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}+a_3\vec{e_3}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$
(两种写法)
从而 $a_1=\vec{a}\cdot\vec{i}=\|\vec{a}\|\cos\alpha$, $a_2=\vec{a}\cdot\vec{j}=\|\vec{a}\|\cos\beta$,
$a_3=\vec{a}\cdot\vec{k}=\|\vec{a}\|\cos\gamma$.
其中定义 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 为 $\vec{a}$ 的方向余弦.
记 $\vec{a}$ 的方向为 $\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

2. 外积运算(叉积)

(1) 定义：设 $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$ $\vec{y}=(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3$.

No. 195 Date: 12.7

记 $\vec{x}\times\vec{y}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}x_2&x_3\\y_2&y_3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}x_1&x_3\\y_1&y_3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x_1&x_2\\y_1&y_2\end{vmatrix}\vec{k}$.

$=(x_2y_3-x_3y_2)\vec{i}+(x_3y_1-x_1y_3)\vec{j}+(x_1y_2-x_2y_1)\vec{k}$

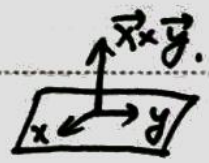
(2) 叉积的几何意义.

由 $(\vec{x}\times\vec{y})\cdot\vec{x}=\begin{vmatrix}x_1&x_2&x_3\\x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\end{vmatrix}=0$ 可知, $\vec{x}\times\vec{y}\perp\vec{x}$.

同理, $\vec{x}\times\vec{y}\perp\vec{y}$. 于是 $\vec{x}\times\vec{y}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中同时与 $\vec{x},\vec{y}$ 垂直的一个向量.

e.g. $\vec{i}\times\vec{j}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&0&0\\0&1&0\end{vmatrix}=\vec{k}=(0,0,1)$.

同时, $\vec{x}\times\vec{y}$ 满足: $\{\vec{x},\vec{y},\vec{x}\times\vec{y}\}$ 成右手系.



物理系的完美

(3) 叉积的性质

① 反对称性(反交换性): $\vec{x}\times\vec{y} = -\vec{y}\times\vec{x}$.

这是因为 $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix}$.

② 线性性: $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, 有

$(\lambda\vec{x}+\mu\vec{y})\times\vec{z} = \lambda\vec{x}\times\vec{z} + \mu\vec{y}\times\vec{z}$.

$\vec{x}\times(\lambda\vec{y}+\mu\vec{z}) = \lambda\vec{x}\times\vec{y} + \mu\vec{x}\times\vec{z}$.

GuangBo

③ 外积的模长：$\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$，有

$$\|\vec{x} \times \vec{y}\| = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \sin\theta.$$

其中 θ 是 $\vec{x}$ 与 $\vec{y}$ 的夹角.

对比：$\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos\theta$.

证明：$\|\vec{x} \times \vec{y}\|^2 = (x_2y_3 - x_3y_2)^2 + (x_3y_1 - x_1y_3)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2$

$= \cdots$ (过程从略) $= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2$

$= \|\vec{x}\|^2 \cdot \|\vec{y}\|^2 - (\vec{x} \cdot \vec{y})^2$

$= \|\vec{x}\|^2 \cdot \|\vec{y}\|^2 (1 - \cos^2\theta) = \|\vec{x}\|^2 \cdot \|\vec{y}\|^2 \sin^2\theta$.

于是 $\|\vec{x} \times \vec{y}\| = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \sin\theta$. 证毕.

※ 外积模长的几何意义：表示 $\vec{x}, \vec{y}$ 张成的平行四边形的面积.

※ 推论：$\vec{x} \parallel \vec{y} \Leftrightarrow \vec{x} \times \vec{y} = \vec{0}$.

若 $\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \neq 0$，则 $\theta = 0$ 或 π.

在 $\vec{x} \neq \vec{0}$ 时，$\exists \lambda \in \mathbb{R}$ 使 $\vec{y} = \lambda \vec{x}$.

三 混合积

(1) 定义：$\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$，有混合积

$$(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = (\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z} = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

(2) 性质：

① 轮换性：$(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = (\vec{y}, \vec{z}, \vec{x}) = (\vec{z}, \vec{x}, \vec{y})$.

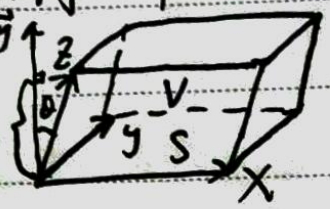
② 反对换性：将 $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ 中的两个对换，混合积变号.

GuangBo

如 $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})=-(\vec{y},\vec{x},\vec{z})=-(\vec{x},\vec{z},\vec{y})$.

③ 混合积的绝对值的几何意义：是 $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ 张成的平行六面体的体积.

证明：$|(\vec{x},\vec{y},\vec{z})|=\|\vec{x}\times\vec{y}\|\cdot\|\vec{z}\|\cdot|\cos\theta|$.



其中 θ 是 $\vec{x}\times\vec{y}$ 与 $\vec{z}$ 的夹角.

我们发现 $\vec{x}\times\vec{y}$ 就是底面积 S，而高 h 就是 $\|\vec{z}\|\cdot|\cos\theta|$.

故体积 $V=Sh=\|\vec{x}\times\vec{y}\|\cdot\|\vec{z}\|\cdot|\cos\theta|=|(\vec{x},\vec{y},\vec{z})|$.

证毕.

命题：设 $\vec{x},\vec{y},\vec{z}\in\mathbb{R}^3$，则

$\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ 共面 $\Leftrightarrow(\vec{x},\vec{y},\vec{z})=0$.

或者，在 $\mathbb{R}^3$ 中任给 $A(x_1,x_2,x_3)$，$B(y_1,y_2,y_3)$，$C(z_1,z_2,z_3)$，$D(w_1,w_2,w_3)$，则这四点共面的充要条件是 $\vec{DA},\vec{DB},\vec{DC}$ 共面，即 $(\vec{DA},\vec{DB},\vec{DC})=\begin{vmatrix} x_1-w_1 & x_2-w_2 & x_3-w_3 \\ y_1-w_1 & y_2-w_2 & y_3-w_3 \\ z_1-w_1 & z_2-w_2 & z_3-w_3 \end{vmatrix}=0$.

e.g. 证 $O(0,0,0)$，$A(3,0,4)$，$B(-4,3,0)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的三个点.

以 $\vec{OA}$、$\vec{OB}$ 为边作平行四边形.

(1) 证明该平行四边形对角线垂直.

(2) 求此平行四边形的面积.

解：(1) $\because\vec{OA}=3\vec{i}+4\vec{k}$，$\vec{OB}=-4\vec{i}+3\vec{j}$.

∴此平行四边形的对角线为 $-\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$ 与 $7\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$.

GuangBo

它们的内积为 $-7-9+16=0$.

$\therefore$ 两对角线垂直.

(2) $S=\|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\|=\left\|\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\3&0&0\\4&3&0\end{vmatrix}\right\|$

$=\|-12\vec{i}-16\vec{j}+9\vec{k}\|=\sqrt{481}$.

§2 平面与直线

一、平面方程

1. 点法式 (1) 对于 $\mathbb{R}^3$ 中的一个平面 Π, 在其上取一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$, 以及 Π 上的一个法向量 $\vec{n}$ (常取成单位向量). P_0 与 $\vec{n}$ 将平面 Π 唯一确定.

(2) 方程推导: 设 $\vec{n}=(A,B,C)\neq\vec{0}$. 任给 $P=(x,y,z)\in\Pi$ 为动点, 则 $\overrightarrow{P_0P}$ 就落在平面 Π 上. 由法向量定义, $\overrightarrow{P_0P}\perp\vec{n}$.

故 $\overrightarrow{P_0P}\cdot\vec{n}=A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$. (*)

也可写成 $Ax+By+Cz+D=0$ (**), 其中

$D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$.

我们称 (*) 为平面 Π 的点法式方程, 称 (**) 为平面 Π 的一般方程.

(3) 我们发现这些方程是 x,y,z 的线性方程.

[推论] 在 $\mathbb{R}^3$ 中, 关于 x,y,z 的线性方程代表一个平面. (这与 $\mathbb{R}^2$ 中直线方程的特点类似.)

e.g. 求过原点 O 与 $P(6,-3,2)$, 且与平面 $4x-y+2z=8$

垂直的平面的方程.

解：设该平面为 π，则 π 的法向量 $\vec{n}$ 与 $\vec{OP}$ 垂直.

又 π 与平面 $4x-y+2z=8$ 垂直，故 $\vec{n} \perp (4,-1,2)$.

于是可以取 $\vec{n} = \vec{OP} \times (4,-1,2) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & -3 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (-4,-4,6)$.

由点法式方程可求得 $\pi: -4x-4y+6z=0$.

即 $2x+2y-3z=0$.

2. 三点式方程

(1) 首先，不共线的三点在 $\mathbb{R}^3$ 中可确定一个平面.

(2) 方程推导：设 π 经过 $A(x_1,x_2,x_3)$, $B(y_1,y_2,y_3)$, $C(z_1,z_2,z_3)$，则 π 的法向量 $\vec{n}$ 可取为 $\vec{CA} \times \vec{CB}$.

利用点法式可得 π 的方程为 $(\vec{CA} \times \vec{CB}) \cdot \vec{CP} = 0 \quad (\forall P \in \pi)$.

即 $\begin{vmatrix} x-z_1 & y-z_2 & z-z_3 \\ x_1-z_1 & x_2-z_2 & x_3-z_3 \\ y_1-z_1 & y_2-z_2 & y_3-z_3 \end{vmatrix} = 0$.

这就是三点式方程.

e.g. 求过点 $P_1(2,3,1)$, $P_2(0,1,0)$, $P_3(-1,0,2)$ 的平面方程.

解：由三点式方程可知其方程为

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

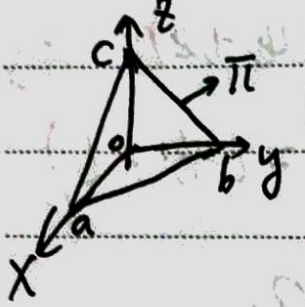
即 $5x-5(y-1)=0$，即 $x-y+1=0$.

GuangBo

No. 200 Date: 12.9

3. 截距式方程 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

其中 a, b, c 分别为平面在 x, y, z 轴上的截距.



注意: 不可表示过原点或与坐标轴垂直的平面.

$\Rightarrow$ 平面 $xOy: z=0$. $(\vec{n}=\vec{k})$

$yOz: x=0$. $(\vec{n}=\vec{i})$

$xOz: y=0$. $(\vec{n}=\vec{j})$

4. 一般式 $Ax+By+Cz+D=0$.

在此, 向量 (A, B, C) 就是平面的法向量.

二. 空间中的直线方程.

1. 空间中直线的基本元素: 过一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$, 以及它的方向向量 $\vec{l}=(m, n, p)$.

2. 点向式方程

(1) 设 $P(x, y, z)\in L$ (直线 L), 则 $\overrightarrow{P_0P}$ 落在 L 上, 故 $\overrightarrow{P_0P}\parallel\vec{l}$. 从而有 $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$.

这便是 L 的点向式方程.

(2) 注意 $m\cdot n\cdot p=0$ 的情况.

① $m=0\Rightarrow\begin{cases}x=x_0,\\ \frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.\end{cases}$

② $n=0\Rightarrow\begin{cases}y=y_0,\\ \frac{x-x_0}{m}=\frac{z-z_0}{p}.\end{cases}$

No. 20 Date: 12.9, 12.12

③ $l=0 \Rightarrow \begin{cases} z=z_0 \\ \frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n} \end{cases}$.

(3) 令 $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{l}=t$, 则 $\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \\ z=z_0+lt. \end{cases}$

这便是L的参数方程. ($t \in \mathbb{R}$)

物理系的先生君

③ $l=0 \Rightarrow \begin{cases} z=z_0 \\ \frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n} \end{cases}$.

(3) 令 $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{l}=t$, 则 $\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \\ z=z_0+lt. \end{cases}$

这便是L的参数方程. ($t\in\mathbb{R}$)

3. 两点式方程

设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$, $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 是直线L上的两点. 则直线方向向量 $\vec{l}=\overrightarrow{P_0P_1}=(x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0)$.

由点向式方程可得直线方程 $\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}$.

4. 一般方程

在 $\mathbb{R}^3$ 中, 一条直线L可看成两个平面 Π_1 与 Π_2 的交线.

所以直线方程可表示为 $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, & (\Pi_1) \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. & (\Pi_2) \end{cases}$

设L方向向量为 $\vec{l}$, 则 $\vec{n_1}\perp\vec{l}$, $\vec{n_2}\perp\vec{l}$.

从而可取 $\vec{l}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}$.

三. 点到平面、直线的距离

1. 点到平面的距离.

给定平面 Π, 即给定其上一点 P_0 与其法向量 $\vec{n}$. 再任取 Π 外一点 P^*.

设 $P^*(x^*,y^*,z^*)$, $P_0(x_0,y_0,z_0)$, $\vec{n}=(A,B,C)$.

连接 P_0P^*, 得向量 $\overrightarrow{P_0P^*}$. 则 P^* 到 Π 的距离 d 就是 $\overrightarrow{P_0P^*}$ 在 $\vec{n}$ 上的投影长度, 即 $d=|\overrightarrow{P_0P^*}\cdot\vec{n_0}|$. 其中 $\vec{n_0}=\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$.

GuangBo

也即 $d=\dfrac{|\overrightarrow{P_0P^*}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}=\dfrac{|A(x^*-x_0)+B(y^*-y_0)+C(z^*-z_0)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

设 π 的方程为 $Ax+By+Cz+D=0$,

则 $d=\dfrac{|Ax^*+By^*+Cz^*+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

eg. 求原点到平面 π: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ 的距离 d.

解: $d=\dfrac{|0+0+0+1|}{\sqrt{(\frac{1}{a})^2+(\frac{1}{b})^2+(\frac{1}{c})^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}$

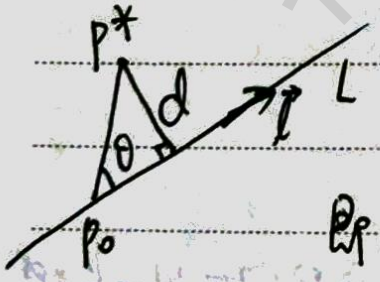
$=\dfrac{|abc|}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$.

2. 点到直线的距离.

给定直线 L, 方向 $\vec{l}=(m,n,l)$, 其上一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$.

对于 L 外一点 $P^*(x^*,y^*,z^*)$, 设 P^* 到 L 距离为 d.

显然, $d=\|\overrightarrow{P_0P^*}\|\cdot\sin\theta=\|\overrightarrow{P_0P^*}\times\vec{l}_0\|$, 其中 $\vec{l}_0=\dfrac{\vec{l}}{\|\vec{l}\|}$.



即 $d=\dfrac{\left\|\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ x^*-x_0&y^*-y_0&z^*-z_0\\ m&n&l\end{vmatrix}\right\|}{\sqrt{m^2+n^2+l^2}}$.

eg. 求点 $P(5,-2,3)$ 到直线 $L:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{3}$ 的距离 d.

解: $d=\dfrac{\|\overrightarrow{P_0P}\times\vec{l}_0\|}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{14}}\left\|\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ 4&-1&3\\ 1&2&3\end{vmatrix}\right\|=\dfrac{\sqrt{9^2+9^2+9^2}}{\sqrt{14}}$

$=\dfrac{9\sqrt{3}}{\sqrt{14}}$.

GuangBo

四. 夹角

1. 平面与平面的夹角

设有两张平面 $\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$,

$\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$,

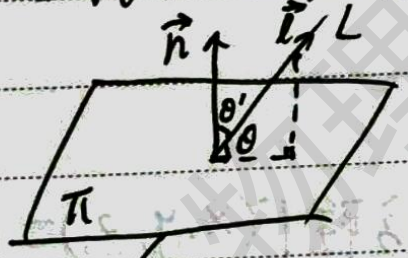
且它们不平行也不重合，则将它们法向量的夹角 θ 当作它们的夹角，即 $\cos\theta=\dfrac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{\|\vec{n_1}\|\cdot\|\vec{n_2}\|}$.

2. 直线与直线的夹角

与平面类似，将两直线方向的夹角 θ 当作它们的夹角，即

$$\cos\theta=\frac{\vec{l_1}\cdot\vec{l_2}}{\|\vec{l_1}\|\cdot\|\vec{l_2}\|}.$$

3. 直线与平面的夹角：图中 θ.



显然，$\theta+\theta'=\dfrac{\pi}{2}$.

于是 $\sin\theta=|\cos\theta'|=\dfrac{|\vec{n}\cdot\vec{l}|}{\|\vec{n}\|\cdot\|\vec{l}\|}$.

e.g. 设直线 $L_1: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{1}$, $L_2: \dfrac{x+2}{-2}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z}{1}$.

证明它们是异面直线.

(1) 求 L_1 与 L_2 的公垂线方程.

(2) 求 L_1 与 L_2 间的距离 d.

解：(1) 显然，公垂线垂直于方向向量 $\vec{l_1}$, $\vec{l_2}$.

∴ 设公垂线方向为 $\vec{l}$，则 $\vec{l}\parallel(\vec{l_1}\times\vec{l_2})=(2,-3,4)$.

为了确定公垂线 L 的位置，作相应平面.

① 过L_1且平行$\vec{l}$的平面π_1，其法向量$\vec{n_1}=\vec{l_1}\times(\vec{l_1}\times\vec{l_2})$
$=(11,-2,-7)$. 故π_1: $11(x-1)-2y-7(z+1)=0$.

② 过L_2且平行于$\vec{l}$的平面π_2，其法向量$\vec{n_2}=\vec{l_2}\times(\vec{l_1}\times\vec{l_2})$
$=(3,10,6)$，故π_2: $3(x+2)+10(y-1)+6z=0$.

从而公垂线就是π_1与π_2的交线 $\begin{cases}11x-2y-7z-18=0,\\ 3x+10y+6z-4=0.\end{cases}$

(2) 取$P_1(1,0,-1)\in L_1$, $P_2(-2,1,0)\in L_2$.

从而d就是$\overrightarrow{P_1P_2}$在公垂线上投影的长度.

于是不妨取$\vec{l}=\vec{l_1}\times\vec{l_2}=(2,-3,4)$，则

$$d=\frac{|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\vec{l}|}{\|\vec{l}\|}=\frac{|(-3,1,1)\cdot(2,-3,4)|}{\sqrt{2^2+3^2+4^2}}=\frac{5}{\sqrt{29}}.$$

§3 曲面、曲线与二次曲面

一、曲面方程.

1. 曲面在$\mathbb{R}^3$中，如果x,y,z满足一般的方程$F(x,y,z)=0$，那么适合上述方程的全体$P(x,y,z)$表示的便是曲面，常记为σ. $F(x,y,z)=0$称为曲面的方程.

2. 曲面方程与曲面的互推

eg. ① 求以$P_0(x_0,y_0,z_0)$为中心，半径为R的球面方程.

解：任取球面上一点$P(x,y,z)$. 由球的特征知$\|\overrightarrow{P_0P}\|=R$.

从而有球面方程$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$.

特别地，当$P_0(0,0,0)$时球面方程为$x^2+y^2+z^2=R^2$.

No. 205 Date: 12.12

② 求过 $P_1(1,-2,1)$ 与 $P_2(2,0,3)$ 连线的垂直平分面方程.

解: 设该平面上一点 $P(x,y,z)$, 则 $\|\overrightarrow{PP_1}\| = \|\overrightarrow{PP_2}\|$. 即

$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2 = (x-2)^2+y^2+(z-3)^2.$$

即 $2x+4y+4z-7=0$.

显然这是平面方程.

* 例①、②均是由轨迹求方程.

② 求过 $P_1(1,-2,1)$ 与 $P_2(2,0,3)$ 连线的垂直平分面方程.

解: 设该平面上一点 $P(x,y,z)$, 则 $\|\overrightarrow{PP_1}\| = \|\overrightarrow{PP_2}\|$. 即

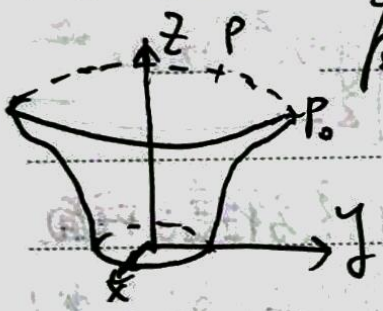
$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2 = (x-2)^2+y^2+(z-3)^2.$$

即 $2x+4y+4z-7=0$.

显然这是平面方程.

* 例①、②均是由轨迹求方程.

再举两题: ③ 将面 Oyz 上的曲线 $f(y,z)=0$ 绕 z 轴旋转一周, 求该曲面的方程.



解: 在原曲线上取一点 $P_0(0,y_0,z_0)$, 则

$$f(y_0,z_0)=0.$$

设 $P(x,y,z)$ 是 P_0 绕 z 轴旋转之后得到的一点(动点), 则 $z=z_0$, $y_0^2=x^2+y^2$.

于是旋转曲面方程为 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$.

* 同理, 此曲线绕 y 轴旋转一周, 则该曲面方程为 $f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$.

若 Oxy 平面的曲线 $f(x,y)=0$ 绕 x 轴旋转一周, 所得曲面方程则为 $f(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$.

.....

④ 求 Oxy 平面上的椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 绕 y 轴旋转一周所得曲面的方程.

解: 由③知曲面方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$.

* 下面进行的是由方程求曲面.

GuangBo

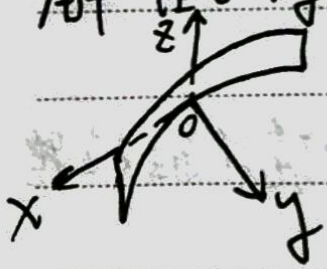
⑤ 求由方程 $x^2+y^2+z^2+2x-4y+2z-2=0$ 所表示的曲面.

解: 整理可得 $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=8$.

∴ 这是一个以 $(-1,2,-1)$ 为球心, $2\sqrt{2}$ 为半径的球面.

⑥ 求 $y=x^2$ 在 $\mathbb{R}^3$ 中表示的曲面.

解: 在 Oxy 平面上, 上述方程表示一条抛物线.



设该抛物线上一点 $P_0(x_0,y_0,0)$.

由于方程 $y=x^2$ 与 z 无关, 故

$\forall z\in\mathbb{R}$, 点 $P(x_0,y_0,z)$ 仍在此曲面上.

∴ 该曲面是平行于 z 轴的直线沿抛物线 $\begin{cases}y=x^2\\ z=0\end{cases}$ 运动所成的曲面(抛物柱面).

如在 $\mathbb{R}^3$ 中, 只要曲面方程中缺一个自变量, 则该方程表示柱面.

柱面定义: 给定曲线 C 与一条直线 l, 则由平行于 l 的直线 L 沿 C 运动得到的曲面叫柱面, C 叫准线, L 叫母线.

由此, $x^2+y^2=a^2$ 是圆柱面, 还有椭圆柱面、双曲柱面等. 特别地, 若 C 为直线, 则柱面化为平面.

二、空间中的曲线.

1. 一般地, $\mathbb{R}^3$ 中的一条曲线可看成是两个曲面的交线.

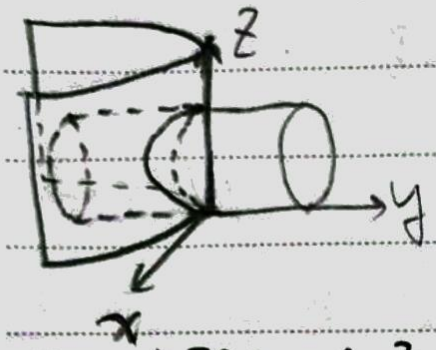
因此曲线方程可写为 $\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\ G(x,y,z)=0.\end{cases}$

这是空间曲线的一般方程.

Eg. ① 求由方程 $\begin{cases}x^2+z^2=4z\\ x^2=-4y\end{cases}$ 表示的曲线.

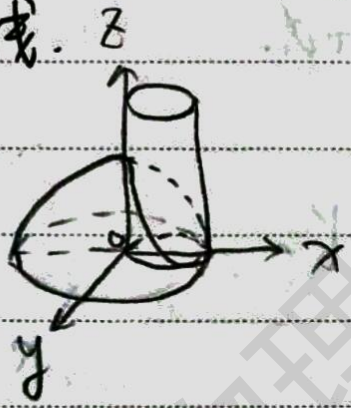
GuangBo

解：虽然该曲线是圆柱面 $x^2+(z-z)^2=4$ 与抛物柱面 $x^2=-4y$ 的交线.



② 求方程组 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x^2+y^2=ax \end{cases}$ $(z>0)$ 表示的曲线.

解：这是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(z>0)$ 与柱面 $(x-\frac{a}{2})^2+y^2=\frac{a^2}{4}$ 的交线.



2. 空间曲线还有参数方程 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$.

其中 $x(t), y(t), z(t)$ 都是连续、光滑函数（所有阶导数都存在）.

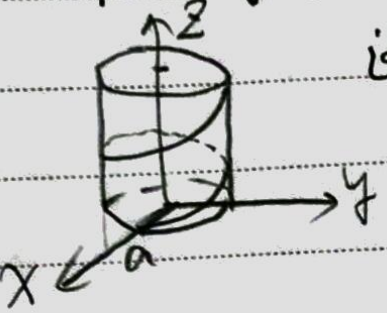
eg. 求方程 $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=a\sin t, \\ z=ct \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ 表示的曲线. $(a>0, c>0)$

解：注意到 $x^2+y^2=a^2$，故该曲线落在圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 上.

GuangBo

$\angle z = ct$.

∴ z 在 x 与 y 周期变化的同时还带上升相应高度.



这条曲线叫螺旋线.

三、二次曲面.

1. 方程 $F(x,y,z)=0$ 可确定 $\mathbb{R}^3$ 中一个曲面 Σ_F.

在此基础上考察 $F(x,y,z)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}xz+a_{33}z^2+2a_{23}yz+c_1x+c_2y+c_3z+d$.

其中 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\neq 0$.

这样的曲面叫二次曲面.

2. 二次曲线的初步研究

(1) 二次曲线 (Oxy 面上) 方程: $a_{11}x+2a_{12}xy+a_{22}y^2+c_1x+c_2y+d=0$. $\left(A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\neq 0\right)$

(2) 非退化二次曲线: 椭圆, 双曲线, 抛物线.

退化二次曲线: 略.

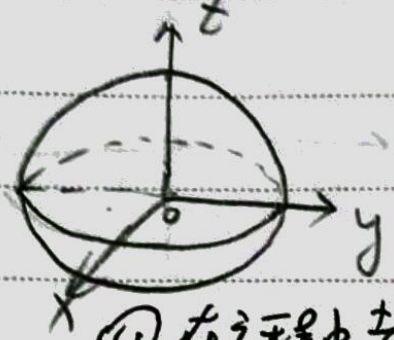
3. 非退化二次曲线所成的曲面.

(1) 椭球面

① 方程: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. $(a>0, b>0, c>0)$

② 图形:

GuangBo



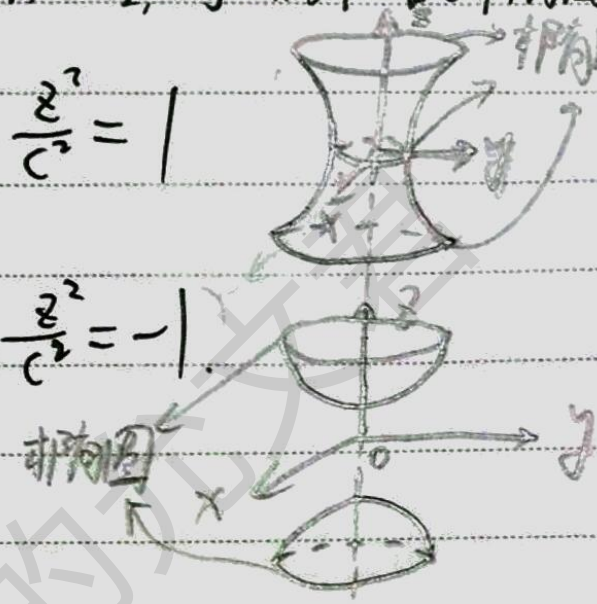
③ 特别地，若 $a=b\neq c$，则它可以看作旋转曲面.

若 $a=b=c$，则它成为球面.

④ 在方程中去掉一个自变量，则该方程表示椭圆柱面.

(2) 22曲面.

① 单一22曲面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$



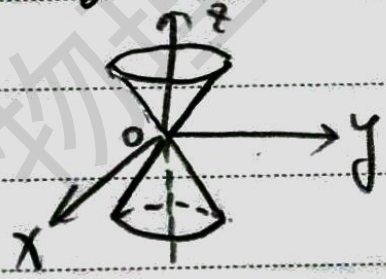
② 220十22曲面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$.

③ 22曲柱面(略)

(3) 锥面

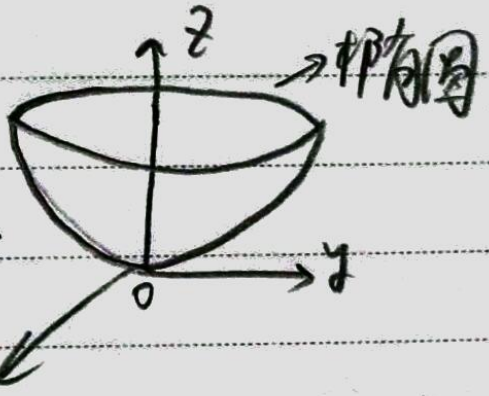
① 方程：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$.

② 图形：

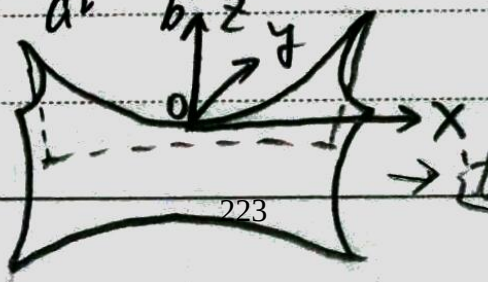


(4) 抛物面

① 椭圆抛物面：$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$.



② 22曲抛物面：$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$，也叫马鞍面.



→ 边缘构为抛物线

物理系的六号

GuangBo

No. 210 Date: 12.16

四、(补充) 平面二次曲线

1. 方程一般形式:

$F(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2b_1x+2b_2y+c=0$.

其中 a_{11}, a_{12}, a_{22} 不全为0.

2. 矩阵形式:

$$(x\ y)\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+2(b_1\ b_2)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+c=0.$$

3. 线性变换简介

(1) 在平面 Oxy 上, 作变换 $M:\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$, 这一变换把点 (x,y) 变成 (x',y').

(2) 我们称 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ 为变换 M 的系数矩阵 (变换矩阵). 特别地, 若 $|A|\neq 0$, 则上述变换是非奇异变换.

(3) 此变换是线性的, 因为当 $P(x,y)$ 在直线 $Ax+By+C=0$ 上运动时, $P'(x',y')$ 的轨迹也是一条直线:

$$\frac{A}{|A|}(dx'-by')+\frac{B}{|A|}(-cx'+ay')+C=0.$$

这可以用 $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$ 来证明.

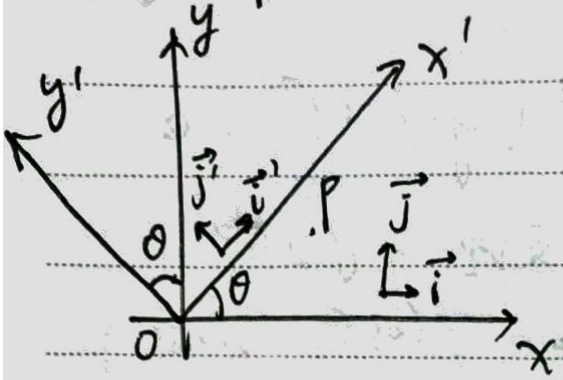
eg. ① 当 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ 时, $\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ -y\end{pmatrix}$.

这是一个关于 x 轴的对称变换.

② 当 $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ 时, $\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ 是一个旋转变

旋转,将P绕O逆时针旋转θ角.

证明:P点不动,将坐标系绕O逆时针转θ角.



显然, $\vec{i}' = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}$,

$\vec{j}' = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}$.

即 $\begin{pmatrix}\vec{i}'\\ \vec{j}'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{i}\\ \vec{j}\end{pmatrix}$

故 $\begin{pmatrix}\vec{i}\\ \vec{j}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{i}'\\ \vec{j}'\end{pmatrix}$

$\because \overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} = (x\cos\theta + y\sin\theta)\vec{i}' + (-x\sin\theta + y\cos\theta)\vec{j}'$

$= x'\vec{i}' + y'\vec{j}'$.

$\therefore \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$.

这相当于在坐标系不动的情况下,P绕O顺时针转动θ角.

故旋转变换公式成立.

并旋转变换有保距性,也有保距性.保右手系性.

另两个保距变换:平移、自身 $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ -\sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$.

4. 二次曲线的分类

(1) 注意交叉项的处理比较复杂.所以有一坐标旋转变换:

$\text{令}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$.

于是二次曲线的一般方程可化为:

GuangBo

$$(x',y')\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$$

$$+2(b_1,b_2)\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}+c=0.$$

其中θ待定，要求上述方程中无交叉项 $x'y'$，即

$$\begin{pmatrix}a'_{11} & 0\\ 0 & a'_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}.$$

从而 $(-a_{11}\sin\theta+a_{12}\cos\theta)\cos\theta+(-a_{12}\sin\theta+a_{22}\cos\theta)\sin\theta=0.$

化简得 $\theta=\frac{1}{2}\arctan\frac{2a_{12}}{a_{11}-a_{22}}$.

把旋转矩阵 $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ 可以将曲线方程化为

$$a'_{11}x'^2+a'_{22}y'^2+2b'_1x'+2b'_2y'+c'=0. \quad (*)$$

同时，有行列式 $I_2=a'_{11}a'_{22}=a_{11}a_{22}-a_{12}^2$ 保持不变.

$$\left(I_2=\begin{vmatrix}a'_{11} & 0\\ 0 & a'_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{vmatrix}\right.$$

$$=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{vmatrix}.$$

1° $I_2=a'_{11}a'_{22}\neq 0$，将 $(*)$ 配方成

$$a'_{11}\left(x+\frac{b'_1}{a'_{11}}\right)^2+a'_{22}\left(y+\frac{b'_2}{a'_{22}}\right)^2+c'-\frac{b'^2_1}{a'_{11}}-\frac{b'^2_2}{a'^2_{22}}=0.$$

令 $\begin{cases} x+\frac{b_1'^2}{a_{11}'^2}=X, \\ y'+\frac{b_2'^2}{a_{22}'^2}=y, \\ \widetilde{C}=C'-\frac{b_1'^2}{a_{11}'^2}-\frac{b_2'^2}{a_{22}'^2}. \end{cases}$

则有 $a_{11}'x^2+a_{22}'y^2+\widetilde{C}=0$.

① $I_2>0$ 且 $a_{11}'\widetilde{C}<0$ $\Rightarrow$ 椭圆曲线.

② $I_2>0$ 且 $a_{11}'\widetilde{C}>0$ $\Rightarrow$ 虚椭圆曲线.(无实轨迹)

③ $I_2>0$ 且 $\widetilde{C}=0$ $\Rightarrow (x,y)=(0,0)$.

④ $I_2<0$ 且 $\widetilde{C}\neq 0$ $\Rightarrow$ 双曲线

⑤ $I_2<0$ 且 $\widetilde{C}=0$ $\Rightarrow$ 两条交叉直线.

2° $I_2=0$, 则 a_{11} 与 a_{22} 中有且只有一个为0. 一旦 $a_{11}'=a_{22}'=0$,

则 $\begin{pmatrix} a_{11}' & 0 \\ 0 & a_{22}' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}=0$.

此时有 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}=0$, 这在二次曲线中是不允许的.

以下, 不妨设 $a_{22}'\neq 0$, 则 $a_{11}'=0$. 此时, (*)化为

$$a_{22}'\left(y'+\frac{b_2'}{a_{22}'}\right)^2+2b_1'x'+C'-\frac{b_2'^2}{a_{22}'^2}=0.$$

① $b_1'\neq 0$, 令 $\begin{cases} x'+\frac{C'-\frac{b_2'^2}{a_{22}'^2}}{2b_1'}=X, \\ y'+\frac{b_2'}{a_{22}'}=y. \end{cases}$

从而有 $a_{22}'y^2+2b_1'x=0$ $\Rightarrow$ 抛物线.

GuangBo

② $b_1'=0$, 令 $\begin{cases} x'=x_1' \\ y'+\frac{b_2'}{a_{22}'}=y \end{cases}$.

则 $a_{22}'y^2+\tilde{c}=0$. 其中 $\tilde{c}=c'-\frac{b_2'^2}{a_{22}'^2}$.

* $a_{22}'\tilde{c}<0$ ⇒ 两条平行直线.

$a_{22}'\tilde{c}>0$ ⇒ 两条虚平行直线 (无实轨迹)

$\tilde{c}=0$ ⇒ 两条重合直线.

(2) 任一二次曲线必属于上述九类之一.

其中 I_2 和为非退化, $I_2=0$ 为退化.

(非空的实曲线: 椭圆、双曲线、抛物线)

5. 以上的思想在 $\mathbb{R}^3$ 中可给出二次曲面的分类. (16类)

其间复习

(一) 题组一: (12.19讲评)

1. 设函数 $g(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有定义, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-g(x)}{\sin x}=1$. 则 ____.

A. $g(x)$ 在 0 处连续但不可导.

B. $g(x)$ 在 0 处可导但 $g'(0)\neq 0$.

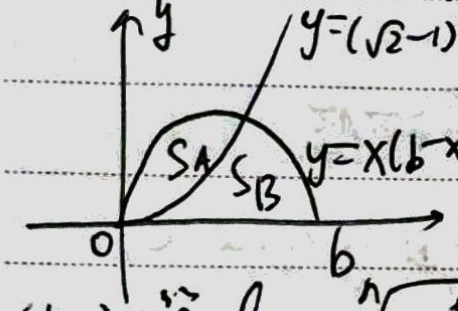
C. $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$ 存在但 $g(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.

D. 当 $x\to 0$ 时 $g(x)$ 是 x 的高阶无穷小.

2. $f(x)=3x^2+\frac{k}{x^3}$ $(k>0)$，当 $x>0$ 时恒有 $f(x)\geq 20$，则 k 的最小值为____.

A. 32　　B. 64　　C. 72　　D. 96.

3. 如图，抛物线 $y=(\sqrt{2}-1)x^2$ 将 $y=x(b-x)$ $(b>0)$ 与 x 轴围成的图形分成 S_A 与 S_B 两块，则____.



A. $S_A<S_B$　　B. $S_A>S_B$

C. $S_A=S_B$　　D. S_A 与 S_B 大小关系与 b 的值有关

4. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{5^n+3}{n}}$.

5. 设 $\begin{cases}x=\int_1^t\sqrt{\ln u}\,du,\\ y=\int_1^{t^2}\sqrt{\ln u}\,du.\end{cases}$ 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

6. 设一个平面经过原点与 $M(6,-3,2)$ 且与平面 $4x-y+2z=8$ 垂直，求此平面的方程.

7. 设函数 $y(x)$ 由方程 $x^y=y^x$ 确定，其中 $x>0$. 求 $y'(1)$.

8. 求不定积分 $\int(2^x+3^x)^2dx$.

9. 求由抛物线 $(y-2)^2=x-1$ 和与之相切于纵坐标 $y_0=3$ 的切线与 x 轴围成的图形的面积.

10. 试就 p 的不同值判别广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{x^p}dx$ 的敛散性.

11. 判别方程 $e^{-\frac{x}{2}}=|x-1|$ 在 $[-2,2]$ 中有几个根，并证明.

GuangBo

No. 216 Date: 12.16, 12.19

12. 求直线 $l:\begin{cases} z=t \\ x=2t \\ y=k \end{cases}$ $(k\neq 0)$ 绕 z 轴旋转一周生成的曲面的方程，并指出该曲面的类型.

13. 已知函数 $f(x)=\frac{x^3}{(x-1)^2}$，求其单调区间、极值、凹性区间、拐点、渐近线，并作出草图.

14. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求其逆矩阵.

15. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $g''(x)\neq 0$，$f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$. 求证：

(1) 在 (a,b) 上，$g(x)\neq 0$.

(2) 至少 $\exists \xi\in(a,b)$ 使得 $\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

物理系小完大君

[讲评]

1. 注意到0处不一定有定义，所以不一定连续或可导.

而 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x-g(x)}{\sin x}\right)=0$

所以 $g(x)=o(x)\ (x\to 0)$ 从而 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$.

(其实最好是先求 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$，再求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}=0$)

答案是D.

※ 若补充 $g(0)=0$，则 $g(x)$ 在0处连续而可导且 $g'(0)=0$

物理系内资料

2. $f(x)=3x^2+kx^{-3}\geq 0 \Rightarrow 3x^5-20x^3+k\geq 0$.

从而 $k\geq 20x^3-3x^5$. 令 $g(x)=20x^3-3x^5$, $x>0$, 则 $k\geq g(x)_{max}$. 令 $g'(x)=60x^2-15x^4=0$ $(x>0)$, 则 $x=2$.

从而 $g(x)$ 在 $(0,2)$ ↗, 在 $(2,+\infty)$ ↘, 故 $g(x)_{max}=g(2)=64$.

从而 $k\geq 64$.

答案是 B.

3. 先求两抛物线交点 $\begin{cases} y=(\sqrt{2}-1)x^2 \\ y=x(b-x) \end{cases}$ 为 $(0,0)$ 与 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}b, \frac{\sqrt{2}-1}{2}b\right)$.

$$\therefore S_A=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}b}[x(b-x)-(\sqrt{2}-1)x^2]dx=\frac{b^3}{12}$$

而 $S_A+S_B=\int_0^b x(b-x)dx=\frac{b^3}{6}$.

故 $S_B=\frac{b^3}{12}=S_A$.

答案是 C.

4. 用夹逼定理, $\sqrt[n]{\frac{5^n}{n}}<\sqrt[n]{\frac{5^n+3}{n}}<\sqrt[n]{\frac{2\cdot 5^n}{n}}$.

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{5^n}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2\cdot 5^n}{n}}=5$.

$\therefore$ 原式 $=5$. (用到了 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$)

5. $\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{2\ln t}\cdot 2t}{\sqrt{\ln t}}=2\sqrt{2}t$.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\ln t}}.$$

GuangBo

218 12.19

6. 平面方程可用三点式即

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 6 & -3 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

即 $2x+2y-3z=0$.

7. $y\ln x = x\ln y \Rightarrow \ln x \cdot y' + \frac{y}{x} = \ln y + \frac{x}{y}\cdot y'$

$x=1$ 时, $y=1 \Rightarrow y'(1)=1$.

8. 原式 $= \int (4^x + 9^x + 2\cdot 6^x)\,dx$

$$= \frac{4^x}{2\ln 2} + \frac{9^x}{2\ln 3} + \frac{2\cdot 6^x}{\ln 6} + C.$$

*补充: 用 Taylor 展开求极限

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\ln\frac{2+x}{2-x}\right).$$

解: 首先, $\ln\frac{2+x}{2-x} = \ln(1+\frac{x}{2}) - \ln(1-\frac{x}{2})$

于是 $\ln\frac{2+x}{2-x} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}(\frac{x}{2})^2 + \frac{1}{3}(\frac{x}{2})^3 + o(x^3)$

$$-\left(-\frac{x}{2} - \frac{1}{2}(-\frac{x}{2})^2 + \frac{1}{3}(-\frac{x^3}{2}) + o(x^3)\right)$$

$$= x + \frac{x^3}{12} + o(x^3).$$

$$\text{原式} = \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\cdot\left(x+\frac{x^3}{12}+o(x^3)\right)\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(1-\frac{1}{12}\right) = \frac{11}{12}.$$

(9略)

10. $\int_0^{+\infty} = \int_0^1 + \int_1^{+\infty}$.

(1) 对于 $\int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{x^p}dx$.

$\because \lim_{x\to 0^+} x^{p-\frac{1}{2}}\cdot\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{x^p} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = 1$.

$\therefore p-\frac{1}{2}<1$ 即 $p<\frac{3}{2}$ 时 $\int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{x^p}dx$ 收敛, 否则发散

(2) 对于 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{x^p}dx$.

$\because \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{p+1}{2}}\cdot\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{x^p} = 0$.

$\therefore p>1$ 时 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{x^p}dx$ 收敛, 否则发散.

综上, 当 $1<p<\frac{3}{2}$ 时 $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{x^p}dx$ 收敛, 否则它发散.

11. 令 $f(x) = e^{\frac{x}{2}}-|x-1| = \begin{cases} e^{\frac{x}{2}}+x-1, & x\in[-2,1], \\ e^{\frac{x}{2}}-x+1, & x\in(1,2]. \end{cases}$

设 $f'(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}+1, & x\in(-2,1),\\ -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}-1, & x\in(1,2)\end{cases}$

从而 $f(x)$ 在 $(1,2)$ ↓.

又 $f(1)=e^{-\frac{1}{2}}>0$, $f(2)=e^{-1}-1<0$.

∴ $f(x)$ 在 $(1,2)$ 上有且只有 1 个零点.

当 $x\in(-2,1)$ 时, 令 $f(x)=0$, 则 $x=-2\ln 2\in(-2,1)$.

∴ $f(x)$ 在 $(-2,-2\ln 2)$ ↓, 在 $(-2\ln 2,1)$ ↑.

又 $f(-2)=e-3<0$, $f(1)=e^{-\frac{1}{2}}>0$, $f(-2\ln 2)=1-2\ln 2<0$.

∴ $f(x)$ 在 $(-2,1)$ 上有且只有一个零点, 它属于 $(-2\ln 2,1)$.

综上, 原方程在 $[-2,2]$ 上有且只有 2 个根, 分别在 $(-2,1)$ 与 $(1,2)$ 上.

12. 在平面 $y=k$ 上取直线 $x=2z$. 在此直线上取一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$, 设它绕 z 轴旋转到 $P(x,y,z)$, 则

$z=z_0$, $\sqrt{x_0^2+k^2}=\sqrt{x^2+y^2}$.

由 $x_0=2z_0$ 可知 $(2z)^2+k^2=x^2+y^2$.

从而 $\frac{x^2}{k^2}+\frac{y^2}{k^2}-\frac{4z^2}{k^2}=1$.

这是一个单叶双曲面.

13. $f'(x)=\frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$, $f''(x)=\frac{6x}{(x-1)^4}$.

GuangBo

令 $f'=0$，则 $x=0$ 或 3，令 $f''(0)$，则 $x=0$.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	$(1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	+	−	0	+
$f''(x)$	−	0	+	+		+
$f(x)$	↗，上凸	拐点	↗下凸	↘下凸	极小	↗下凸

有拐点 $f(0)=0$，极小值 $f(3)=\frac{27}{4}$.

渐近线：① $x=1$. $(\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\infty)$.

② 斜（水平）渐近线，$a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{(x-1)^2}=1$.

$b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-x}{(x-1)^2}=2$.

$\Rightarrow y=x+2$.

（图略）.

令 $f'=0$，则 $x=0$ 或 3，令 $f''(0)$，则 $x=0$.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	$(1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	+	−	0	+
$f''(x)$	−	0	+	+		+
$f(x)$	↗，上凸	拐点	↗下凸	↘下凸	极小	↗下凸

有拐点 $f(0)=0$，极小值 $f(3)=\frac{27}{4}$.

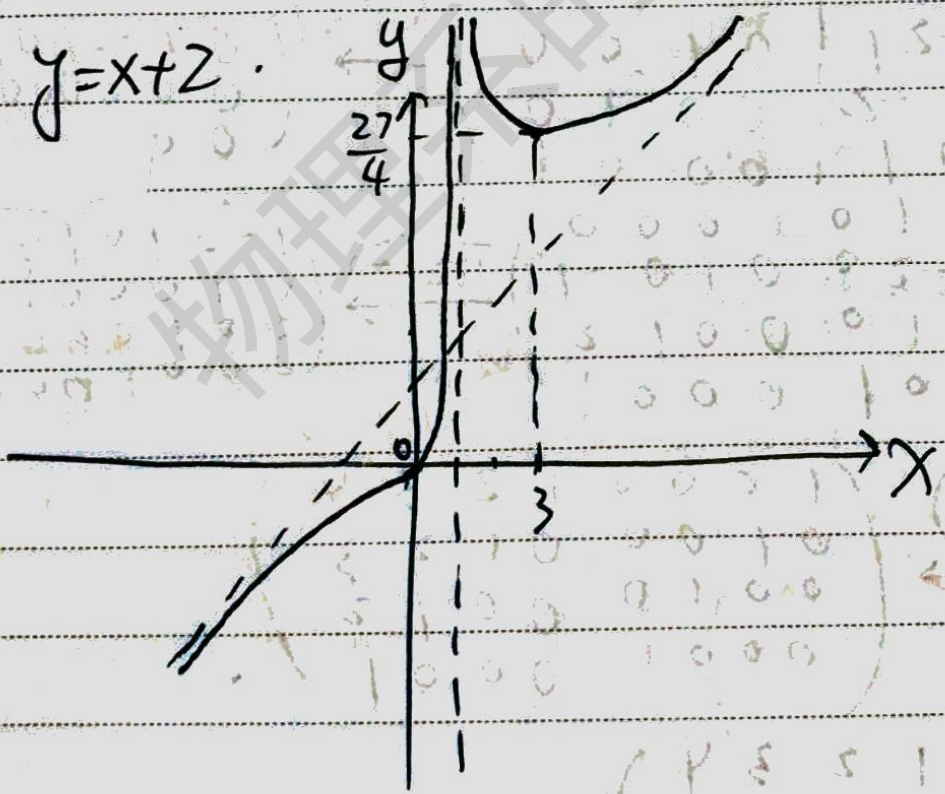
渐近线：① $x=1$. $(\lim_{x\to 1} f(x)=\infty)$.

② 斜（水平）渐近线，$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{(x-1)^2}=1$.

（$y=ax+b$）

$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x}{(x-1)^2}=2$.

$\Rightarrow y=x+2$.



15. (1) 反证：假设 $\exists c\in(a,b)$，$g(c)=0$.（$g(x)$ 连续可导）

由 Rolle 定理，$\exists \xi_1\in(a,c)$，$\xi_2\in(c,b)$，$g'(\xi_1)=g'(\xi_2)=0$

GuangBo

显然 $g'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导

$\therefore \exists \eta \in (\xi_1, \xi_2)$，$g''(\eta)=0$.

这与 $g''(x)\neq 0$ 矛盾.

从而在 (a,b) 上 $g(x)\neq 0$.

(2) 构造 $F(x)=f(x)g'(x)-g(x)f'(x)$, $x\in[a,b]$.

它在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，且 $F(a)=F(b)=0$.

$\therefore \exists \xi \in (a,b)$, $F'(\xi)=f(\xi)g''(\xi)-g(\xi)f''(\xi)=0$

由 $g(\xi)\neq 0$, $g'(\xi)\neq 0$, 可知 $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

14. 构造辅助矩阵：

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{T_{43}(2)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{T_{42}(-1)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{T_{32}(2)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{T_{21}(2)T_{31}(-1)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

$$\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(二)题组二(真题)

1. 确定常数 b，使直线 $y=9x+b$ 为曲线 $y=x^3-3x$ 的切线.

解：令 $y'=3x^2-3=9$，得 $x=\pm 2$

由 $y(2)=2$，$y(-2)=-2$，可得 $b=\pm 16$.

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^2+3x+1)}{\ln(x^3+2x+1)}$，

解：原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left[x^2\left(1+\frac{3x+1}{x^2}\right)\right]}{\ln\left[x^3\left(1+\frac{2x+1}{x^3}\right)\right]}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x^2}{\ln x^3}=\dfrac{2}{3}$.

3. 求不定积分 $\int\dfrac{x}{\sqrt{4-x^4}}dx$.

解：原式 $=\dfrac{1}{2}\int\dfrac{d(x^2)}{\sqrt{4-x^4}}=\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{x^2}{2}+C$.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le 1,\\ 2-x, & x>1.\end{cases}$ 求 $\int_2^4 f(x-2)e^{-x}dx$.

解：$f(x-2)=\begin{cases}x-2, & 0\le x-2\le 1\\ 2-(x-2), & x-2>1\end{cases}$

$=\begin{cases}x-2, & 2\le x\le 3,\\ 4-x, & x>3.\end{cases}$

∴原式 $=\int_2^3(x-2)e^{-x}dx+\int_3^4(4-x)e^{-x}dx$.

物理的无名君

GuangBo

首先, $\int_2^3 (x-2)e^{-x}dx = -\int_2^3 (x-2)de^{-x}$

$= -(x-2)e^{-x}\Big|_2^3 + \int_2^3 e^{-x}dx.$

$= -(x-2)e^{-x}\Big|_2^3 - e^{-x}\Big|_2^3$

$= e^{-2} - 2e^{-3}.$

其次 $\int_3^4 (4-x)e^{-x}dx = \int_3^4 (x-4)de^{-x}$

$= (x-4)e^{-x}\Big|_3^4 - \int_3^4 e^{-x}dx.$

$= (x-4)e^{-x}\Big|_3^4 + e^{-x}\Big|_3^4 = e^{-4}.$

$\therefore$ 原式 $= e^{-2} - 2e^{-3} + e^{-4}.$

*5. (补充) 求 $\int_0^x \ln(1+xt)dt$ 的导数.

解: $d\int_0^x \ln(1+xt)dt = d\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(1+xt)d(1+xt)\right)$

$= d\,\frac{(1+xt)\ln(1+xt) - (1+xt)\Big|_0^x}{x}$

$= d\,\frac{(x^2+1)(\ln(x^2+1)-1)}{x}$

$= \frac{(2x\ln(x^2+1) - 2x + 2x)x - (x^2+1)(\ln(x^2+1)-1)}{x^2}dx$

$$= \frac{(x^2-1)\ln(x^2+1)-x^2-1}{x^2}dx.$$

[另一法] 令 $u=xt$, $du=xdt$.

$$\text{i. } \int_0^x \ln(1+xt)dt = \int_0^{x^2}\frac{\ln(1+u)}{x}du = \frac{1}{x}\int_0^{x^2}\ln(1+u)du$$

$$= \frac{1}{x}\cdot\left((u+1)\ln(u+1)-u-1\right)\Big|_0^{x^2}$$

$$= \frac{(x^2+1)\left(\ln(x^2+1)-1\right)}{x}.$$

其结果与上一方法相同.

6. 要制作一个体积为V的无盖铁桶，如何确定其底面半径与高的关系，可使用料最省？

解：$\because V=\pi r^2 h$. $\therefore h=\frac{V}{\pi r^2}$.



故表面积 $S=\pi r^2+2\pi rh$

$$=\pi r^2+\frac{2V}{r}$$

$\because S'=2\pi r-\frac{2V}{r^2}$.

$\therefore$ 令 $S'=0$, 则 $r=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$.

又当 $r>0$ 时, $S''=2\pi+\frac{4V}{r^3}>0$.

$\therefore r=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ 时 S 取最小值 $3\sqrt[3]{\pi V^2}$. 此时 $h=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$.

也即 $r=h=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ 时用料最省.

7. 设 $f(x)$ 在 R 上有连续二阶导数且满足

$$xf'(x)=f(x)+140x^6.$$

物理学院公文柜

GuangBo

(1) 求 $f(x)$.

(2) 问曲线 $y=f(x)$ 有无拐点? 说明理由.

(3) 是否存在这样的 f, 它在 $(0,1)$ 上恒大于 0, 并且曲线 $y=f(x)$, $x\in(0,1)$ 与直线 $x=1$、$y=0$ 围成的图形的面积为 2? 说明理由.

解: (1) 求导数, $\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)=140x^4$.

于是 $\dfrac{f(x)}{x}=\int 140x^4dx=28x^5+C$.

$\therefore f(x)=28x^6+Cx$.

(2) $\because f''(x)=840x^4\geq 0$.

$\therefore f(x)$ 无拐点.

(3) 首先, $\forall x\in(0,1)$, $28x^6+Cx>0$.

于是有 $C>0$.

其次, $f(0)=0$, 故所求面积为

$$S=\int_0^1 f(x)dx=\left(4x^7+\frac{C}{2}x^2\right)\Big|_0^1=4+\frac{C}{2}=2.$$

解得 $C=-4<0$ (舍去).

$\therefore$ 不存在满足条件的 $f(x)$.

8. 设过点 $(-1,c,c)$ 的直线 L 的方程为 $\begin{cases}cx+y+z=c\\ x-cy+cz=-1\end{cases}$ $(c\in\mathbb{R})$.

(1) 求 L 的对称方程 (点向式).

(2) 当 c 连续变化时, 求 L 移动生成的曲面 Σ 与平面 $z=t$ (t 为常数) 的交线方程.

(3) 求 L 与平面 $z=0$, $z=1$ 围成的图形的体积.

解: (1) 令 $y=0 \Rightarrow$ 过点 $\left(\frac{c^2+1}{c^2-1}, 0, -\frac{2c}{c^2-1}\right)$.

$\Rightarrow \vec{l}_0$(方向向量) $= \left(\frac{2c^2}{c^2-1}, -c, -\frac{2c}{c^2-1}-c\right)$.

取 $\vec{l} = (2c, 1-c^2, -1-c^2)$.

则 L 的方程为 $\frac{x+1}{2c} = \frac{y-c}{1-c^2} = \frac{z-c}{-1-c^2}$.

(2) 在 L 的一般方程中消去 c, 可得

$$\frac{y+z}{1-x} = \frac{x+1}{y-z}, \text{ 故 } x^2+y^2-z^2=1.$$

令 $z=t$, 则 $\begin{cases} x^2+y^2=t^2+1, \\ z=t. \end{cases}$

这表明是交线方程, 对于确定的 t 交线都是圆.

(3) 由于该图形是单叶双曲面与两个平面围成的, 其底面为圆.



所以所求体积为

$$V = \int_0^1 \pi r^2 dt = \int_0^1 \pi(t^2+1)dt$$

$$= \pi\left(\frac{t^3}{3}+t\right)\Big|_0^1 = \frac{4}{3}\pi.$$

物理系的沈君