高等数学 A 下笔记

by 允文君

补充：线代概述

7.多元函数微分学

8.多元函数积分学

9.级数

10.常微分方程

附录：复习概述

物理系的允文君

No. 49 Date: 3.24

** 补充：线性代数概述

一、回顾上学期内容

1. 线代的发源：解线性方程组.

2. 向量矩阵的概念，矩阵的加法与乘法(有限制)，数乘，转置.

3. 分块矩阵：a_{ij}不一定是数，也可以是矩阵.

4. 行列式(仅限于方阵)

(1) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$ 有唯一解 $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$.

(2) n阶行列式递推定义及其计算公式(余子式算法)

(3) 行列式的性质(换行变号，等行得0，转置不变，两行相加不变，倍乘性).

(4) 伴随矩阵 $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & & & \\ \vdots & & & \\ A_{1n} & & & A_{nn} \end{pmatrix}$

$A^*A = |A|I$.

5. 逆矩阵：$|A| \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$.

2阶到方程组 $AX=b$：$x = A^{-1}b$.

* 计算行列式，若直接算会很麻烦，所以会引入初等变换.(本质是方程的加减)

二、向量的线性表示、秩

GuangBo

No. 50 Date: 3.24

1. $a_1, \cdots, a_n$ 是 n 个向量 我们考察的是线性组合 $\sum \alpha_i a_i$, 其中 α_i 为组合系数.

2. 这启发我们从另一个角度看待性方程组:

$$x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

3. 线性相关: $\exists \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 不全为 0 使得

$$\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n = 0. \quad (*)$$

(称 $a_1, \cdots, a_n$ 线性相关)

线性无关: 不存在不全为 0 的 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 使得 $(*)$ 成立,

或者一旦 $(*)$ 成立 则 $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

4. 有的时候, 线性方程组中不全是有效的方程, 可能存在矛盾方程或冗余方程. 我们希望探求, 有多少有效方程?

(1) 极大线性无关组: 一组向量中元素数最多且线性无关的子集.

(2) 秩: 即为极大线性无关组的向量个数.

它即为线性方程组中有效方程的个数.

(3) 任一矩阵 $A_{m\times n}$, 可看成 m 个行向量或 n 个列向量, 两种情况下秩相同. (行秩 = 列秩)

(4) $|A| \neq 0 \Leftrightarrow A$ 满秩, $\underline{\text{rank}(A) = n}$.

(实质: 行列式中无成比例的行/列, 各行/列线性无关)

A 的秩

GuangBo

5. 可以用秩来研究 $A_{m\times n}x_{n\times 1}=b_{m\times 1}$ 解的结构. (再给多少条件才能将解确定?)

三、线性变换

1. 线性变换, 本质上就是用矩阵乘向量而使向量改变.

2. $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=2 \end{cases}$ 等价于 $\begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases}$.

即 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 等价于 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

可见不同的系数矩阵可能会表示同一种关系, 其中最具代表性的便是标准形.

(1) A与B矩阵具有同一个标准形, 等价于存在可逆矩阵 T 使 $A=T^{-1}BT$. 称A与B相似 $(A\sim B)$.

此时, $Ax=b \Leftrightarrow TAx=Tb \Leftrightarrow TAT^{-1}Tx=Tb$

$\Leftrightarrow BTx=Tb$. 也即 $Ax=b$ 与 $BTx=Tb$ 是一样的方程组, 它们完全等价.

(2) 标准形可能是对角阵甚至单位阵. 记 $\Lambda=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

若 $A\sim\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$, 则存在矩阵 P, 有 $AP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}P$.

把 P 记为列向量组 $(P_1,\cdots,P_n)$, 则 $AP_i=\lambda_i P_i\ (i=1,\cdots,n)$

从而做 k 次变换, 有 $A^k=(T^{-1}\Lambda T)^k=T^{-1}\Lambda T T^{-1}\Lambda T\cdots T^{-1}\Lambda T$

$=T^{-1}\Lambda^k T$. (简化)

GuangBo

No. 5-2 Date: 3.24

四、二次型

1. 基本形式：x^TAx，其中A为对称阵（$A^T=A$）。

2. 合同矩阵：若$\exists T$使$A=T^TBT$，则A与B是合同的。

意义：令$x=Ty$，则$x^TAx=y^TT^TATy=y^TBy$。

如果我们可以把二次型化到无交叉项，则那一形式为标准形。

No. | Date: 2.27

第七章 多元函数微分学

§1 多元函数的极限与连续

一、与R^n中集合有关的概念

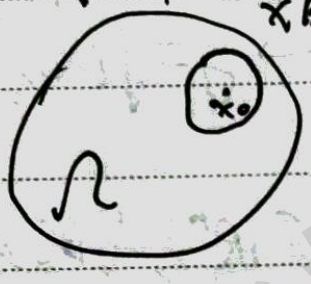
邻域(球)

1. 内点：x_0为Λ内点 $\Leftrightarrow \exists O_\varepsilon(x_0)=\{x \mid d(x,x_0)<\varepsilon\} \subseteq \Lambda$. 其中$d(x,x_0)$是$x$与$x_0$间的距离.

$$d(x,x_0)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{0i})^2}$$

x_i：x的分量；x_{0i}：x_0的分量

几何意义：



*补充距离函数的性质：

(1) $d(x,x_0)\geq 0$.

(2) 对称性：$d(x,x_0)=d(x_0,x)$.

(3) 三角不等式：$d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$.

2. 外点：$\exists O_\varepsilon(x_0)\subseteq \Lambda^c$.

3. 边界点：$\forall O_\varepsilon(x_0)$, $O_\varepsilon(x_0)\cap\Lambda\neq\phi$, $O_\varepsilon(x_0)\cap\Lambda^c\neq\phi$.

4. 开集：$\forall x\in\Lambda \Rightarrow x$为$\Lambda$的内点.

e.g. 开区间即为$\mathbb{R}$中的开集.

5. 闭集：Λ为闭集$\Leftrightarrow\Lambda^c$为开集.

(又开又闭的集：ϕ与R^n.)

6. 闭包：Λ的闭包$\bar{\Lambda}$指包含Λ的最小闭集.

仅供学习交流

GuangBo

7. 边界：是元中 Ω 内点的补集，记为 $\partial\Omega$.

* 数学定义：

$\overline{\Omega} = \{x \mid \exists \{x_n\} \subseteq \Omega, x_n \to x\}$

8. 连通：$\forall x, y \in \Omega$，$\exists$ 曲线 $\gamma \subseteq \Omega$ 将 x, y 相连.

($\gamma: [0,1] \to \mathbb{R}^n$，且 $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$.)

9. (开) 区域：连通开集.

闭区域：连通闭集 (= 连通开集 + 边界).

二、多元函数：多个自变量 (一个向量) 映射到一个数.

$f: x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \to y = f(x_1, \cdots, x_n)$.

其中 $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$.

x 的取值范围为定义域 D ($\subseteq \mathbb{R}^n$)，y 的取值集合为值域 $R_{(f)}$.

* 线性函数，满足 $\begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y), \\ f(\lambda x) = \lambda f(x). \end{cases}$

连过来也成立.

** 基底分解：若 $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$，其中 $e_1 = (1, 0, \cdots, 0)$, $\cdots$, $e_n = (0, \cdots, 0, 1)$.

则 $f(x) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \cdots + x_n f(e_n)$.

记 $f(e_i) = a_i$ ($i = 1, 2, \cdots, n$)，则

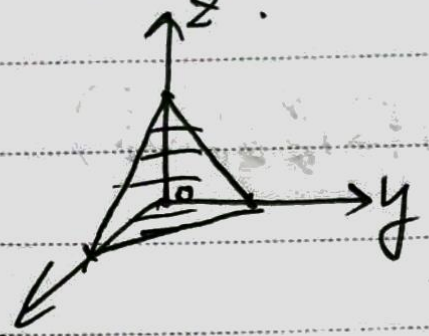
$$f(x) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n$$

$$= (x_1, x_2, \cdots, x_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (a_1, \cdots, a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

此为多元值性函数的形式.

#多元函数也有图象: $\{(x, f(x))\}$, 其中 $x \in \mathbb{R}^n$.

e.g. $z = |-x-y|$, 此二元函数在 $\mathbb{R}^3$ 中有图象一平面.



在这个图像中函数值相等的各点组成的曲线为等高线(等值线).

三、多元函数的极限.

1. 定义: ε-δ 语言.

$x \to x_0$ 时 $f(x) \to A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得当 $d(x, x_0) < \delta$ 时, $|f(x) - A| < \varepsilon$.

记为 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

e.g. 证明 $\lim\limits_{(x_1, x_2) \to (0,0)} (x_1^2 + x_2^2) = 0$. (用#)

2. 多元函数极限的存在, 要求 x 以定义域内任一路径趋近 x_0 时, 函数极限均存在且为同一值.

e.g. 对于 $\lim\limits_{(x_1, x_2) \to (0,0)} \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}$, 当 x_1 和时为 0, x_2 和时为 0.

GuangBo

No. 4 Date: 2.27

但是，如果令 $x_1=kx_2$，则原式 $=\frac{k}{k^2+1}$，只要 $k\neq 0$，则原式 $\neq 0$，这与 $x_1\neq 0$ 或 $x_2\neq 0$ 时的极限不一致，因此，$\lim\limits_{(x_1,x_2)\to(0,0)}\frac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}$ 不存在。

（类似于数列极限与子列极限的关系）

四、多元函数的连续性。

1. 定义：$f(x)$ 在 x_0 处连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$。

2. 复合函数连续性：若 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 连续，$y=g(u)$ 连续，则 $y=g(f(x_1,x_2,\cdots,x_n))$ 连续。

eg. $\lim\limits_{(x_1,x_2)\to(1,1)}[\sin(x_1^2+x_2^2-\sqrt{x_1x_2}+1)]$

$=\sin[\lim\limits_{(x_1,x_2)\to(1,1)}(x_1^2+x_2^2-\sqrt{x_1x_2}+1)]$

$=\sin 2$

故函数 $\sin(x_1^2+x_2^2-\sqrt{x_1x_2}+1)$ 在 $(1,1)$ 处连续。

*内涵：若以上条件在x_0处成立，则

$$\lim_{x\to x_0} g\circ f(x) = g\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right) = g\circ f(x_0).$$

3、闭区域上的多元连续函数.（一般指有界闭区域，紧集）

(1)有界性；(2)有最大、最小值；(3)介值定理.

GuangBo

物理学霸交流

(类似于一元函数)

五、向量值函数

1、定义: $f: D\subseteq \mathbb{R}^n \to R\subseteq \mathbb{R}^m$.

$$f(x)=\begin{pmatrix} f_1(x_1,\cdots,x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1,\cdots,x_n)\end{pmatrix}$$

2、向量值函数也有复合映射:

若 $f: D\subseteq \mathbb{R}^n \to R\subseteq \mathbb{R}^m$, $g: R\subseteq \mathbb{R}^m \to R'\subseteq \mathbb{R}^l$.

则有 $g\circ f: D\subseteq \mathbb{R}^n \to R'\subseteq \mathbb{R}^l$.

§2 全微分与偏导数

一、全微分、偏导数的引入.

1、对于n元数值函数 $f(x)$, 考察变化量

$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$.

类似于一元函数, 希望 $\Delta f = (k_1, k_2, \cdots, k_n)\begin{pmatrix}\Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n\end{pmatrix} + o(\|\Delta x\|)$.

如果此式成立, 则定义全微分

$df = k\,dx$, 其中 $k=(k_1,\cdots,k_n)$, $dx=\begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n\end{pmatrix}$.

也即 $df = k_1 dx_1 + \cdots + k_n dx_n$ 为 dx 的线性函数.

2、考察: k是什么? $k_1,\cdots,k_n$ 如何确定?

(1) 取 $\Delta x_2 = \cdots = \Delta x_n = 0$. 若 x 以此种方式变化, 则

GuangBo

$f(x_1+\Delta x_1, x_2, \cdots, x_n) - f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

$= k_1 \Delta x_1 + o(|\Delta x_1|)$.

同除 Δx_1，有

$$\frac{f(x_1+\Delta x_1, x_2, \cdots, x_n) - f(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\Delta x_1}$$

$$= k_1 + \frac{o(|\Delta x_1|)}{\Delta x_1}.$$

取极限 $\Delta x_1 \to 0$，则

$$k_1 = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(x_1+\Delta x_1, x_2, \cdots, x_n) - f(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\Delta x_1}.$$

将此式定义为 f 对 x_1 的偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x_1}$.

对于 $j = 1, 2, \cdots, n$ 都有 $k_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}$.

（∂ 读作偏导法：partial.）

从而 $df = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)\begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}$.

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

定义 f 在 $x_1, \cdots, x_n$ 各个方向变化的微分.

二、多元函数的连续、可导、可微.

e.g. $f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}, & (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0, & (x_1, x_2) = (0, 0). \end{cases}$

GuangBo

根据上一节的讨论 $\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} f(x_1,x_2)$ 不存在，故 $f(x_1,x_2)$ 在 $(0,0)$ 处不连续.

而 $\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0)=\lim_{\Delta x_1\to 0}\frac{f(\Delta x_1,0)-f(0,0)}{\Delta x_1}=0.$

$\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0)=\lim_{\Delta x_2\to 0}\frac{f(0,\Delta x_2)-f(0,0)}{\Delta x_2}=0.$

两个偏导数均存在.

从而 $\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2=0.$

但是，$\Delta f=\frac{\Delta x_1\Delta x_2}{\Delta x_1^2+\Delta x_2^2}-0$，在一些时候它不可以写成 $o(\sqrt{\Delta x_1^2+\Delta x_2^2})$. 从而 $f(x_1,x_2)$ 在 $(0,0)$ 处不可微.

1. 由此可见：可偏导不一定连续，也不一定可微.
2. 可微的充分条件：若 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在 x_0 处的各个偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x_i}(i=1,2,\cdots,n)$ 均连续，则 f 在 x_0 处可微，$df=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i$.
3. 可微可以得出可偏导. 这是由于全微分的定义.

三、偏导数、全微分的计算

1. $d(f+g)=df+dg.$
2. $d(\lambda f)=\lambda df.$
3. $d(fg)=fdg+gdf.$
4. $d\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{gdf-fdg}{g^2}.$

GuangBo

No. 8 Date: 3/1

5. $\frac{\partial(f+g)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial g}{\partial x_i}$.

6. $\frac{\partial(\lambda f)}{\partial x_i} = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i}$.

7. $\frac{\partial(f \cdot g)}{\partial x_i} = g\frac{\partial f}{\partial x_i} + f\frac{\partial g}{\partial x_i}$.

8. $\frac{\partial(\frac{f}{g})}{\partial x_i} = \frac{g\frac{\partial f}{\partial x_i} - f\frac{\partial g}{\partial x_i}}{g^2}$.

e.g. ① 已知 $z = x^3\sin(y^2) + \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$.

$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2\sin(y^2) + \frac{x}{x^2+y^2}$.

$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y\cdot x^3\cos(y^2) + \frac{y}{x^2+y^2}$.

(要点：对 x_i 求导则将其余变量看成常数，法则类似于一元函数求导.)

② 空间中有一方程：$pV = kT$. 证明 $\frac{\partial p}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p} = -1$.

(各函数是相对的，多元函数中往往任一变量都可视为其余变量的函数.)

证明：对方程变形，有 $p = \frac{kT}{V}$, $V = \frac{kT}{p}$, $T = \frac{pV}{k}$.

则 $\frac{\partial p}{\partial V} = -\frac{kT}{V^2}$, $\frac{\partial V}{\partial T} = \frac{k}{p}$, $\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{V}{k}$.

从而 $\frac{\partial p}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p} = -\frac{kT}{pV} = -1$.

此为试读，需要完整PDF请访问：

No. 9 Date: 3.1

9. $D\subseteq R^n \xrightarrow{f} R\subseteq R^1 \xrightarrow{g} R^1\subseteq R^1$ 复合映射:

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x_i} = g'(f(x_1,\cdots,x_n))\cdot\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot (i=1,2,\cdots,n).$$

$$d(g\circ f) = g'(f(x_1,\cdots,x_n))\cdot df.$$

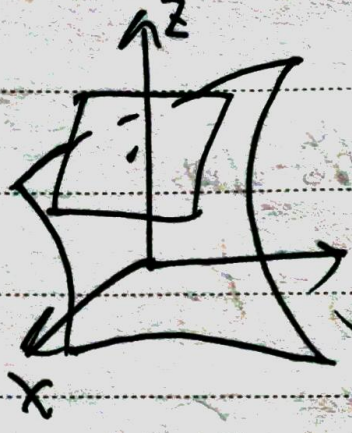
e.g. 已知 $z=\arctan\sqrt{\frac{x}{y}}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\frac{x}{y}}\cdot\sqrt{\frac{1}{y}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2(x+y)}\sqrt{\frac{y}{x}}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\frac{x}{y}}\cdot\sqrt{x}\cdot\left(-\frac{1}{2y\sqrt{y}}\right) = -\frac{1}{2(x+y)}\sqrt{\frac{x}{y}}.$$

物理系的分支

四、切平面



设于 $z=f(x_1,x_2)$，在点 (x_1°, x_2°) 附近有

$$f(x_1,x_2)-f(x_1^\circ,x_2^\circ)$$

$$\approx \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{(x_1^\circ,x_2^\circ)}(x_1-x_1^\circ)+\left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{(x_1^\circ,x_2^\circ)}(x_2-x_2^\circ)$$

$$+o\left(\sqrt{(x_1-x_1^\circ)^2+(x_2-x_2^\circ)^2}\right).$$

舍去高阶量得一平面：

$$z=f(x_1^\circ,x_2^\circ)+\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{(x_1^\circ,x_2^\circ)}(x_1-x_1^\circ)+\left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{(x_1^\circ,x_2^\circ)}(x_2-x_2^\circ).$$

根据平面方程的知识，可得此平面的法向量

$$\vec{n}=\left(\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{(x_1^0,x_2^0)},\left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{(x_1^0,x_2^0)},-1\right).$$

以上过了平面就是曲面 $z=f(x_1,x_2)$ 在 (x_1^0,x_2^0) 处的切平面：$(z_0=f(x_1^0,x_2^0))$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{(x_1^0,x_2^0)}(x_1-x_1^0)+\left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{(x_1^0,x_2^0)}(x_2-x_2^0)-(z-z_0)=0.$$

它是曲面在 (x_1^0,x_2^0) 处的线性近似.

另一种观点：该切平面是曲线 $\begin{cases}z=f(x_1,x_2)\\ x_1=x_1^0\end{cases}$

与 $\begin{cases}z=f(x_1,x_2)\\ x_2=x_2^0\end{cases}$ 在 (x_1^0,x_2^0) 处切线所构成的平面.

设两切线方向上的单位向量分别为 $\vec{t_1}$ 与 $\vec{t_2}$（切向量），则切平面法向量为 $\vec{t_1}\times\vec{t_2}$.

eg. 求曲面 $z=2x_1^2+x_2^2$ 在 $(1,1,3)$ 处的切平面.

解：令 $z=f(x_1,x_2)$，则 $\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{(1,1)}=4x_1|_{(1,1)}=4$.

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{(1,1)}=2x_2|_{(1,1)}=2.$$

从而切平面方程为 $z=3+4(x_1-1)+2(x_2-1)$，即

$$4x+2y-z-3=0.$$

三、高阶偏导数

1. 对于 $f(x_1,\cdots,x_n)$，有函数 $\frac{\partial f}{\partial x_i}(i=1,\cdots,n)$.

这个函数再对 x_i 求偏导，叫做 $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$，此为二阶偏导.

如果是对 $x_j(j\neq i)$ 求偏导，则写为 $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$.

2. 求偏导次序若可交换，则计算将简化. 一般而言，有一充分条件使得它们可交换：

2元函数 $f(x_1,x_2)$，若 $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$ 与 $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ 在 (x_1^0,x_2^0) 的邻域内连续，则 $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}\right|_{(x_1^0,x_2^0)} = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right|_{(x_1^0,x_2^0)}$.

eg① 已知 $z=\sin(2x_1+3x_2)$，求其偏导

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = 2\cos(2x_1+3x_2)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_1} = -6\sin(2x_1+3x_2).$$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}$ 显然也是 $-6\sin(2x_1+3x_2)$.

※ $\frac{\partial^m \partial^n z}{\partial x_2^m \partial x_1^n} = 3^m \cdot 2^n \sin(2x_1+3x_2+\frac{m+n}{2}\pi)$.

② $z=\ln(x_1^2+x_2^2)$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}$.

解：$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \frac{2x_1}{x_1^2+x_2^2}$，故

物理系内部资料

No. 12 Date: 3.3

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} = \frac{2(x_1^2+x_2^2)-4x_1^2}{(x_1^2+x_2^2)^2} = \frac{2(x_2^2-x_1^2)}{(x_1^2+x_2^2)^2}.$$

同理, $\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} = \frac{2(x_1^2-x_2^2)}{(x_1^2+x_2^2)^2}$.

$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} = 0$. (Green函数)

三维: $z = \frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}$.

③ $z=\sin(x-at)$, 求证 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0$.

证明: $\frac{\partial z}{\partial x} = \cos(x-at)$.

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\sin(x-at)$.

$\frac{\partial z}{\partial t} = -a\cos(x-at)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -a^2\sin(x-at)$.

于是 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0$.

六、向量值函数的变化率.

1.2对于 $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1,\cdots,x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1,\cdots,x_n) \end{pmatrix}$, 若有

$f_j(x+\Delta x) - f_j(x) = k^j \Delta x + o(|\Delta x|)$

$= (k_1^j,\cdots,k_n^j)\begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{pmatrix} + o(|\Delta x|)$,

则可得

GUANGBO

$$f(x+\Delta x)-f(x)=\begin{pmatrix} k^1\cdot\Delta x \\ \vdots \\ k^m\cdot\Delta x \end{pmatrix}+o(|\Delta x|)$$

↳ 向量.

$$=\begin{pmatrix} k_1^1 & \cdots & k_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ k_1^m & \cdots & k_n^m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{pmatrix}+o(|\Delta x|).$$

$$=K_{m\times n}\cdot\Delta x+o(|\Delta x|).$$

从而 $df=Kdx$，其中 $K=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$.

它叫做 f 的 Jacobi 矩阵，常写作 J.

eg. ① $f=\begin{pmatrix} 3x+ze^y \\ x^3+y^2\sin z \end{pmatrix}$.

则 $J=\begin{pmatrix} 3 & ze^y & e^y \\ 3x^2 & 2y\sin z & y^2\cos z \end{pmatrix}$

② 直角坐标与极坐标的变换.

对于原点与极点重合、x 轴方向与极轴方向相同的情况，有 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$.

于是 $J=\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$.

GuangBo

No. 14 Date: 3.3, 3.6

即 $d\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}d\begin{pmatrix}r\\\theta\end{pmatrix}$.

对于 $\begin{pmatrix}r\\\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{x^2+y^2}\\ \arctan\frac{y}{x}\end{pmatrix}$，也有相应矩阵.

$$J'=\begin{pmatrix}\frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y}\\ \frac{\partial\theta}{\partial x} & \frac{\partial\theta}{\partial y}\end{pmatrix}.$$

由 $d\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=Jd\begin{pmatrix}r\\\theta\end{pmatrix}$ 与 $d\begin{pmatrix}r\\\theta\end{pmatrix}=J'd\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$，

可知 $J'=J^{-1}$.

所以 J' 不必直接计算.

$$J'=J^{-1}=\frac{1}{|J|}\cdot J^{*}=\frac{1}{r}\begin{pmatrix}r\cos\theta & r\sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}.$$

2、对于一般而言，它是 $\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^n$ 的映射，此时

$$df=Jdx=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x}\\ \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x}\end{pmatrix}dx.$$

↳ 标量.

对应到图形上，相当于用切线逼近曲线.

切线的方程为 $\frac{x_1-x_1^0}{\frac{\partial f_1}{\partial x_1}}=\frac{x_2-x_2^0}{\frac{\partial f_2}{\partial x_1}}=\cdots=\frac{x_n-x_n^0}{\frac{\partial f_n}{\partial x_1}}$，

这里是用 x_1 表示其余 $n-1$ 个分量.

物理学霸笔记

§3 链式求导法则

一、复合映射求导法

1. 对于 $D\subseteq\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} R\subseteq\mathbb{R}^m \xrightarrow{g} R'\subseteq\mathbb{R}^l$.

有 $dg=J_g\,df$, $df=J_f\,dx$.

从而 $d(g\circ f)=J_gJ_f\,dx$.

此为高维链式求导法则.

e.g. ① $u=x^2y+3xy^4$, 其中 $x=e^t$, $y=\sin t$.

$$\frac{du}{dt}=J_uJ_f=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial t}\\ \frac{\partial y}{\partial t}\end{pmatrix}$$

$$=(2xy+3y^4,\ x^2+12xy^3)\begin{pmatrix}e^t\\ \cos t\end{pmatrix}.$$

$$=2e^{2t}\sin t+3e^t\cdot\sin^4 t$$
$$+e^{2t}\cos t+12e^t\cos t\sin^3 t$$
$$=e^{2t}(2\sin t+\cos t)+3e^t\sin^3 t(\sin t+4\cos t).$$

也就有 $\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$.

② $u=e^x\sin y$, $x=s+t$, $y=st$.

$$du=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t}\\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ds\\ dt\end{pmatrix}$$

GuangBo

$$=(e^x\sin y,\ e^x\cos y)\begin{pmatrix}1 & 1\\ t & s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ds\\ dt\end{pmatrix}.$$

$$=\sim\sim$$

也就有 $\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

※ 从而对于 $\mathbb{R}^n_{x_i}\xrightarrow{f}\mathbb{R}^m_{y_i}\xrightarrow{g}\mathbb{R}^l$ 的复合映射，有

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x_i}=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial(g\circ f)}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_i}.\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

eg.① $u=e^{x^2+y^2+z^2}$，$z=x^2\sin y$.

从而 $\frac{\partial u}{\partial x}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{\text{显式}}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}$

$$=2xe^{x^2+y^2+z^2}+0+2ze^{x^2+y^2+z^2}\cdot 2x\sin y$$

$$=2xe^{x^2+y^2+x^4\sin^2 y}(1+2x^2\sin^2 y).$$

② 若 $u=f(x,y,\frac{y}{x})$，令 $\xi_1=x$，$\xi_2=y$，$\xi_3=\frac{y}{x}$，

则 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial\xi_1}\frac{\partial\xi_1}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial\xi_2}\frac{\partial\xi_2}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial\xi_3}\frac{\partial\xi_3}{\partial x}$

$$=\frac{\partial f}{\partial\xi_1}-\frac{y}{x^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial\xi_3}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial\xi_1}\frac{\partial\xi_1}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial\xi_2}\frac{\partial\xi_2}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial\xi_3}\frac{\partial\xi_3}{\partial y}$$

物理系研究生会

$$=(e^x\sin y,\ e^x\cos y)\begin{pmatrix}1 & 1\\ t & s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ds\\ dt\end{pmatrix}.$$

$$=\cdots\sim$$

也就有 $\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

※ 从而对于 $\mathbb{R}^n_{x_i}\xrightarrow{f}\mathbb{R}^m_{y_i}\xrightarrow{g}\mathbb{R}^l$ 的复合映射，有

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x_i}=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial(g\circ f)}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_i}.\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

eg.① $u=e^{x^2+y^2+z^2}$, $z=x^2\sin y$.

从而 $\frac{\partial u}{\partial x}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{\text{显式}}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}$

$$=2xe^{x^2+y^2+z^2}+0+2ze^{x^2+y^2+z^2}\cdot 2x\sin y$$

$$=2xe^{x^2+y^2+x^4\sin^2 y}(1+2x^2\sin^2 y).$$

② 若 $u=f(x,y,\frac{y}{x})$，令 $\xi_1=x$, $\xi_2=y$, $\xi_3=\frac{y}{x}$,

则 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial\xi_1}\frac{\partial\xi_1}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial\xi_2}\frac{\partial\xi_2}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial\xi_3}\frac{\partial\xi_3}{\partial x}$

$$=\frac{\partial f}{\partial\xi_1}-\frac{y}{x^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial\xi_3}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial\xi_1}\frac{\partial\xi_1}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial\xi_2}\frac{\partial\xi_2}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial\xi_3}\frac{\partial\xi_3}{\partial y}$$

$= \frac{\partial f}{\partial \xi_2} + \frac{1}{x}\cdot\frac{\partial f}{\partial \xi_3}$.

2. 复合映射的高阶偏导数.

e.g. 已知 $w = f(x+y+z, xyz)$, 求 $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$.

解: 设 $\xi_1 = x+y+z$, $\xi_2 = xyz$.

则 $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial \xi_1} + yz\frac{\partial w}{\partial \xi_2}$.

我们假设二阶偏导都连续, 则 $\partial x\partial y$ 与 $\partial y\partial x$ 一样.

从而 $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_1^2}\frac{\partial \xi_1}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_2 \partial \xi_1}\frac{\partial \xi_2}{\partial y}$

$+ z\frac{\partial w}{\partial \xi_2} + yz\left(\frac{\partial w}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}\frac{\partial \xi_1}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_2^2}\frac{\partial \xi_2}{\partial y}\right)$

$= \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_1^2} + z(x+y)\frac{\partial^2 w}{\partial \xi_1 \xi_2} + xyz^2\frac{\partial^2 w}{\partial \xi_2^2} + z\frac{\partial w}{\partial \xi_2}$.

二、全微分形式不变性.

1. 与一元函数类似, 对于 $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^l$, 有

$d(g\circ f) = J_g J_f dx = J_{g\circ f}dx = J_g df$.

↓

用中间变量或原变量写, 形式均成立!

2. 复合 Jacobi 矩阵的计算.

e.g. ① 对于 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{g} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{h} w$.

GuangBo

则 $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial \eta_1}\frac{\partial \eta_1}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \eta_2}\frac{\partial \eta_2}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \eta_3}\frac{\partial \eta_3}{\partial x}$

$= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial w}{\partial \eta_i}\left(\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \eta_i}{\partial \xi_j}\frac{\partial \xi_i}{\partial x}\right)$.

这一算法易于发混乱，所以改用矩阵表示：

$$dw = J_{h\circ g\circ f}\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = J_h J_g J_f \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial w}{\partial \eta_1}, \frac{\partial w}{\partial \eta_2}, \frac{\partial w}{\partial \eta_3}\right)\begin{pmatrix} \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_3} \\ \cdots & & \\ \frac{\partial \eta_3}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \eta_3}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \eta_3}{\partial \xi_3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} & \frac{\partial \xi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x} & \frac{\partial \xi_2}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi_3}{\partial x} & \frac{\partial \xi_3}{\partial y} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

② 直角坐标与极坐标的转换.

对于 $f = xy = r^2\cos\theta\sin\theta$，有：

$df = J_1\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$，以及 $df = J_2\begin{pmatrix} dr \\ d\theta \end{pmatrix}$.

对应两个 Jacobi 阵 J_1 与 J_2.

于是 $J_1 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (x, y)$.

$J_2 = \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) = (2r\cos\theta\sin\theta, r^2\cos 2\theta)$.

对于 $(r,\theta) \to (x,y)$，有 $\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = J_0\begin{pmatrix} dr \\ d\theta \end{pmatrix}$.

则 $J_0 = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$.

又2位发现 $J_1 J_0 = J_2$.

(1) 如果要把 $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$ 改写为极坐标形式：

原式 $= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix} = J_1 J_1^T = J_2 J_0^{-1}(J_2 J_0^{-1})^T$

$= J_2 J_0^{-1}(J_0^{-1})^T J_2^T$

$= (2r\cos\theta\sin\theta,\ r^2\cos 2\theta)\underbrace{\frac{1}{r^2}\begin{pmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix} r\cos\theta & -\sin\theta\\ r\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}2r\cos\theta\sin\theta\\ r^2\cos 2\theta\end{pmatrix}$.

注意到 $J_0^{-1}(J_0^{-1})^T = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{r^2}\end{pmatrix}$. 故

原式 $= (2r\cos\theta\sin\theta,\ r^2\cos 2\theta)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{r^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2r\cos\theta\sin\theta\\ r^2\cos 2\theta\end{pmatrix}$.

即 $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2$.

(2) 对于 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$，由于 $\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2}\\ \theta = \arctan\frac{y}{x}\end{cases}$,

首先有 $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x}$.

$= \frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\cdot\left(-\frac{1}{x^2+y^2}\right)$.

故 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{\partial f}{\partial r}$

$- \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\frac{\partial f}{\partial \theta} = \cdots$

其中 $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial r}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}$.

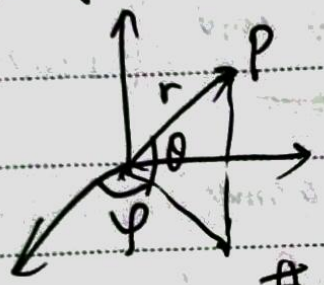
No. 20 Date: 3.8

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial r}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}.$$

最终有 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$.

$$=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}.$$

③ 球坐标：$(x,y,z)\to(r,\theta,\varphi)$.



有 $\begin{cases} x=r\cos\theta\cos\varphi, \\ y=r\cos\theta\sin\varphi, \\ z=r\sin\theta. \end{cases}$

其中 $r\in[0,+\infty)$, $\theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, $\varphi\in[0,2\pi)$.

可以算 $\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}=J\begin{pmatrix} dr \\ d\theta \\ d\varphi \end{pmatrix}$ 的 Jacobi 矩

$$J=\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\cos\varphi & -r\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

④ 有一偏微分方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

作变换 $\begin{cases} \xi=x+y, \\ \eta=x-y. \end{cases}$

则 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta}$.

GuangBo

从而 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}$.

(给后默认 $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}=\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}$.)

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}$.

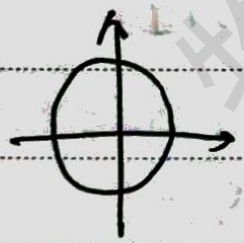
从而原方程可化为 $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}=0$.

若要求解: $\frac{\partial u}{\partial \xi}=\varphi(\xi)$.

故 $u=\int \varphi(\xi)d\xi+\psi(\eta)$.

也即 $u=\phi(x+y)+\psi(x-y)$.

§4 多元隐函数存在定理



对于圆 $x^2+y^2=1$, 在 $x\neq\pm1$ 的任意附近均可找到一个唯一的函数 $y=f(x)$ 描述该处 x 与 y 的关系, 但 $x=\pm1$ 时却无法做一.

这是因为 $x^2+y^2=1$ 对应的 $x\,dx+y\,dy=0$ 在 $x=\pm1$ 时有 $dy=0$, 从而 $x\,dx=0$ 推不出 x 与 y 的关系.

一、多元隐函数存在定理

1. 内容. 对于函数 $z=F(x,y)$, 若存在一点 $P(x_0,y_0)$ 使得 $F(x_0,y_0)=0$ 且 $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq0$, 则在 P 点附近存在函数

GuangBo

No. 22 Date: 3.8

$F(x,y)=0$，可写为 $y=f(x)$. (隐式/显式表达)

[证明] 假设存在 $F(x,f(x))=0$. 对 x 取全微分，

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}df=0.$$

于是 $\frac{df}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$. 此时要求 $\frac{\partial F}{\partial y}\neq 0$.

2. 可以通过求导，得知 $\begin{cases}\frac{df}{dx}=\Phi(x,f(x)),\\ f(x_0)=y_0.\end{cases}$ ↳另一法，构造或 $-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$.

可以用隐函数表示 x 的关系

原理：原方程组等价于 $f(x)-y_0=\int_{x_0}^{x}\Phi(t,f(t))dt$.

构造函数序列 $f_{n+1}(x)-y_0=\int_{x_0}^{x}\Phi(t,f_n(t))dt$,

则 $\{f_n(x)\}$ 必收敛于一个 $f(x)$.

3. 在多个函数中的运用：

对于 $\begin{cases}F_1(x,y,z)=0,\\ F_2(x,y,z)=0\end{cases}$ 两式取全微分，可得

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z}\\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}dy\\ dz\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial x}\\ \frac{\partial F_2}{\partial x}\end{pmatrix}dx.$$

为使 $\begin{pmatrix}dy\\ dz\end{pmatrix}$ 有解，$\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z}\\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z}\end{vmatrix}\neq 0$

这样就有 $\begin{pmatrix}dy\\ dz\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z}\\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial x}\\ \frac{\partial F_2}{\partial x}\end{pmatrix}dx.$

方2 $\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} \end{pmatrix}$.

于是存在唯一的函数 $\begin{cases} f(x)=y \\ g(x)=z \end{cases}$ 与原方程组对应.

4. 二元以上的情况.

(1) 对于 $F(x_1, x_2, y)=0$, 分别对 x_1 与 x_2 求偏导,

$\frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_1} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial x_2} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_2} = 0$.

从而 $\frac{\partial y}{\partial x_1} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$, $\frac{\partial y}{\partial x_2} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_2}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$.

所以只要 $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ 即存在 $y=f(x_1, x_2)$ (唯一).

f 的求解方式: $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ 对 x_1 求积分, 所得函数对 x_2 求偏导, 与 $\frac{\partial y}{\partial x_2}$ 对比, 求出待定的 x_2 式.

(2) 对于 $\begin{cases} F_1(x_1, \cdots, x_n, y, z)=0, \\ F_2(x_1, \cdots, x_n, y, z)=0. \end{cases}$

与前面同理若 $\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{vmatrix} \neq 0$, 则有

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_i} \\ \frac{\partial z}{\partial x_i} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_i} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_i} \end{pmatrix}. \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

GuangBo

eg. ① 开普勒方程: $y-x-\varepsilon\sin y=0$.

两边微分 $dy-dx-\varepsilon\cos y\,dy=0$.

从而当 $1-\varepsilon\cos y\neq 0$ 时 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1-\varepsilon\cos y}$.

取 $|\varepsilon|<1$ 时一定满足上面的条件.

② $F(x,y,z)=1+yz+x^2z^2+z^2$.

对于 $F(x,y,z)=0$, 可能使其中一个变量是另两个的函数.

(a) 考察是否有 $z=z(x,y)$ 在 $(1,1,-1)$ 附近:

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0\\ \frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}$$

当 $\frac{\partial F}{\partial z}\neq 0$ 时, 隐函数存在而

$\frac{\partial F}{\partial z}=y+2z(x^2+1)=-3\neq 0$.

∴在此点附近存在隐函数 $z=z(x,y)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{2z^2x}{y+2z(x^2+1)}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{z}{y+2z(x^2+1)}.$$

(b) 考察 $(1,1,-1)$ 邻近 $x=x(y,z)$ 的存在性.

物理系的先贤

$\because \frac{\partial F}{\partial x} = 2z^2 x = 2 \neq 0.$

$\therefore$ 在 $(1,1,-1)$ 附近存在 $x = x(y,z)$.

(C) 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$:

[一] 对 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 再求一次偏导.

[二] 利用 $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0$

再求偏导: $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}\right)$

$+ \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$

$+ \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0,$

只要 $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 就可求.

可见高阶导数也可由 $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ 来判断.

③ 设 $F(x-y, x+y) = 0$, 是否存在 $y = y(x)$.

解: 设 $\begin{cases} \xi = x - y, \\ \eta = x + y. \end{cases}$

视 $F = 0$ 对 x 求偏导有

$\frac{\partial F}{\partial \xi}(1 - y') + \frac{\partial F}{\partial \eta} \cdot (1 + y') = 0.$

No. 26 Date: 5.10

提示 $\frac{\partial F}{\partial \xi}+\frac{\partial F}{\partial \eta}$ 时 $y'=-\dfrac{\frac{\partial F}{\partial \xi}+\frac{\partial F}{\partial \eta}}{\frac{\partial F}{\partial \eta}-\frac{\partial F}{\partial \xi}}$.

⑭ $\begin{cases} 3x^2+y^2=1+u^2-v^2 \\ x^2+2y^2=1+u^2+v^2 \end{cases}$ 记为 $\begin{cases} F_1(x,y,u,v)=0, \\ F_2(x,y,u,v)=0. \end{cases}$

那么是否存在函数关系 $\begin{cases} x=x(u,v), \\ y=y(u,v). \end{cases}$

解：分别对 u,v 求偏导：

$$\begin{cases} 6x\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+2y\cdot\frac{\partial y}{\partial u}=-2u, \\ 2x\frac{\partial x}{\partial u}+4y\cdot\frac{\partial y}{\partial u}=2u. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x\frac{\partial x}{\partial v}+2y\cdot\frac{\partial y}{\partial v}=-2v, \\ 2x\frac{\partial x}{\partial v}+4y\cdot\frac{\partial y}{\partial v}=-2v. \end{cases}$$

可写为 $\begin{pmatrix} 6x & 2y \\ 2x & 4y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2u \\ 2u \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 6x & 2y \\ 2x & 4y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2v \\ -2v \end{pmatrix}.$$

可知 $\begin{pmatrix} 6x & 2y \\ 2x & 4y \end{pmatrix}$ 可逆即 $\begin{vmatrix} 6x & 2y \\ 2x & 4y \end{vmatrix}=20xy\neq 0$ 时，有对应的逆矩阵.

这代表是 $\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{pmatrix}$.

物理学的无名指

从矩阵上分析：

对于 $\begin{cases} F_1(x_1, \cdots, x_n) = 0, \\ F_2(x_1, \cdots, x_n) = 0, \\ \cdots \\ F_m(x_1, \cdots, x_n) = 0 \end{cases}$ $(m < n)$

能否用 $x_1, \cdots, x_m$ 表示 $x_{m+1}, \cdots, x_n$？

可以对 $F = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_m \end{pmatrix}$ 做全微分，

$$dF = J_{(x_1, \cdots, x_m)} \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_m \end{pmatrix} + J_{(x_{m+1}, \cdots, x_n)} \begin{pmatrix} dx_{m+1} \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}.$$

$$= J_{(x_1, \cdots, x_m)} \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_m \end{pmatrix} + J_{(x_{m+1}, \cdots, x_n)} J_0 \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_m \end{pmatrix}$$

$$= 0.$$

其中 J_0 是把 $(x_1, \cdots, x_m)$ 变到 $(x_{m+1}, \cdots, x_n)$ 的 Jacobi 矩阵.

记 $J_{(x_1, \cdots, x_m)} = J_1$, $J_{(x_{m+1}, \cdots, x_n)} = J_2$, 则

$$(J_1 + J_2 J_0) \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_m \end{pmatrix} = 0.$$

于是 $J_1 + J_2 J_0 = 0$.

只要 J_2 可逆，即 $|J_2| \neq 0$，则 J_0 可解，变换存在.

$J_0 = -J_2^{-1} J_1$.

GuangBo

No. 28 Date: 3.13

二、再次讨论曲面的切平面.

1. 对于曲面 $F(x,y,z)=0$，如何直接由 F（隐式）求出在 (x_0,y_0,z_0) 处的切平面？

2. 假定线性，有 $\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz=0$.

把 $F(x,y,z)-F(x_0,y_0,z_0)$

$=\frac{\partial F}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z}(z-z_0)+o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2})$

$=0$

舍去高阶项，可得切平面方程

$\frac{\partial F}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z}(z-z_0)=0$.

其法向量为 $\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right)\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}$.

e.g. 求曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处的切平面.

解：该面的法向量为 $\left(\frac{2x_0}{a^2},\frac{2y_0}{b^2},\frac{2z_0}{c^2}\right)$.

∴切平面方程为 $\frac{2x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{2y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{2z_0}{c^2}(z-z_0)=0$.

即 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=1$.

3. 以上讨论成立的条件：$\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right)\neq(0,0,0)$.

若等，则切平面不存在.

三、空间曲线的切线

1. 对于曲线 $\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\\ z=z(t).\end{cases}$ 如何求它在 (x_0,y_0,z_0) 处的切线？

2. 对三个方程取微分 $\begin{cases} dx = x'(t_0)dt, \\ dy = y'(t_0)dt, \\ dz = z'(t_0)dt. \end{cases}$

从而 $\begin{cases} x - x_0 = x'(t_0)(t-t_0) + o(t), \\ y - y_0 = y'(t_0)(t-t_0) + o(t), \\ z - z_0 = z'(t_0)(t-t_0) + o(t). \end{cases}$

舍去 $o(t)$，就有切线方程 $\frac{x-x_0}{x'(t_0)} = \frac{y-y_0}{y'(t_0)} = \frac{z-z_0}{z'(t_0)}$.

3. 对于曲线 $\begin{cases} F(x,y,z) = 0, \\ G(x,y,z) = 0. \end{cases}$

(1) 若可以写成 $\begin{cases} y = y(x), \\ z = z(x), \end{cases}$ 则切线方程为 $\frac{x-x_0}{1} = \frac{y-y_0}{y'(x_0)} = \frac{z-z_0}{z'(x_0)}$

此为一种形式.

(2) 若直接取 F, G 的全微分，则 $\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz = 0, \\ \frac{\partial G}{\partial x}dx + \frac{\partial G}{\partial y}dy + \frac{\partial G}{\partial z}dz = 0. \end{cases}$

故 $\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(y-y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(z-z_0) = 0, \\ \frac{\partial G}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial G}{\partial y}(y-y_0) + \frac{\partial G}{\partial z}(z-z_0) = 0 \end{cases}$

这是另一种形式的切线方程.

(3) 若要写成好记形式，可取 $\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) \times \left(\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial z}\right)$ 作为切线的方向向量.

若 $\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$ 与 $\left(\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial z}\right)$ 平行，则切线不存在.

物理系内公文专用

GuangBo

No. 30 Date: 3.13

在线代中，这一命题等价于 $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{pmatrix}=2$，

故 $\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix}$ 至少有一个

不为0，实质也就是隐函数存在，以上三个行列式对应的函数分别为 $\begin{cases} x=x(z), \\ y=y(z), \end{cases}$ $\begin{cases} y=y(x), \\ z=z(x), \end{cases}$ $\begin{cases} z=z(y), \\ x=x(y). \end{cases}$

四、逆映射存在定理

1. 给定 $\begin{cases} y_1=f_1(x_1,\cdots,x_n), \\ \cdots, \\ y_n=f_n(x_1,\cdots,x_n). \end{cases}$ 可否找到逆映射，使得

$\begin{cases} x_1=g_1(y_1,\cdots,y_n), \\ \cdots \\ x_n=g_n(y_1,\cdots,y_n). \end{cases}$?

2. 不妨假设 $\frac{\partial y_j}{\partial y_k}=\frac{\partial}{\partial y_k}f_j(g_1,\cdots,g_n)$

$=\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial x_l}\cdot\frac{\partial g_l}{\partial y_k}=\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f_j}{\partial x_n}\right)\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_k} \\ \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial y_k} \end{pmatrix}$.

而 $\frac{\partial y_j}{\partial y_k}=\begin{cases} 1, & j=k, \\ 0, & j\neq k. \end{cases}$

物理系的公式

No. 31 Date: 3.13

从而 $\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial y_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial y_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial y_n} \end{pmatrix} = I$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial y_1} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial g_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}.$$

$$\equiv FG.$$

要使 G 可逆，则 F 可逆，即 $|F| \neq 0$，此时有 $G = F^{-1}$.

此即为逆映射存在定理.

记 $|F| = \frac{D(f_1, \cdots, f_n)}{D(x_1, \cdots, x_n)}$，则要求 $\frac{D(f_1, \cdots, f_n)}{D(x_1, \cdots, x_n)} \neq 0$.

物理系的笔记君

§5 方向导数、梯度

一、方向导数

1. 一维只有十、一两个方向，对应有右、左导数，但是，高维空间中到一个点有无数个方向，所以每个方向都可以有变化率

2. 考查 n 元函数 $f(x)$ 在 l 方向的变化：

$f(x+\Delta x)-f(x)$，其中 $\Delta x=\Delta t\cdot l$，其中 $\Delta x, l\in\mathbb{R}^n$，$\Delta t\in\mathbb{R}^1$，

如果 $l\parallel e_j$，则 $f(x+\Delta x)-f(x)=\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\Delta t+o(\Delta t)$.

GuangBo

对一般的 Δx，有极限 $\lim\limits_{|\Delta x|\to 0^+} \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{|\Delta x|}$.

而 $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{|\Delta x|} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i + o(|\Delta x|)}{|\Delta x|}$

$= \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}\cdot\dfrac{\Delta x_i}{|\Delta x|} + \dfrac{o(|\Delta x|)}{|\Delta x|}$. (*)

取 $|\Delta x|\to 0^+$ 时的极限，则 $\dfrac{o(|\Delta x|)}{|\Delta x|}\to 0$.

此时 $\dfrac{\Delta x_i}{|\Delta x|}$ 具有研究价值.

记 $l=(l_1, l_2, \sim, l_n)$.

若 $\Delta x = \Delta t\cdot l$，则 $\Delta x_i = \Delta t\cdot l_i$.

可见 $\dfrac{\Delta x_i}{|\Delta x|} = \dfrac{l_i}{|l|}$. $(i=1,2,\sim,n)$.

取方向 $|l|=1$，则 $l_1^2+\sim+l_n^2=1$.

即 $\Delta x_1^2+\sim+\Delta x_n^2=\Delta t^2$.

于是 (*) $= \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\cdot l_i$，(取过了极限)

定义 $f(x)$ 在 l 方向的导数 $\dfrac{\partial f}{\partial l} = \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial f}{\partial x_i} l_i$

$= l\cdot\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \sim, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right)$.

若 l' 不是单位向量，则用 $\dfrac{l'}{|l'|}$ 这一单位向量.

eg. $f(x,y,z)=x^2y^2+z$，$l=-4j+3k$，求 $\dfrac{\partial f}{\partial l}$.

解：令 $\vec{l}=\dfrac{l}{|l|}=-\dfrac{4}{5}j+\dfrac{3}{5}k$.

物理系的公文君

故 $\frac{\partial f}{\partial l} = (0, -\frac{4}{5}, \frac{3}{5}) \cdot (2xy^2, 2yx^2, 1)$

$= -\frac{8}{5}x^2y + \frac{3}{5}$.

3. 近似计算：$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \doteq f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$.

(x,y) e.g. 求 $0.98^{2.02}$.

$(x+\Delta x, y+\Delta y)$

解：令 $f(x,y) = x^y$, $x=1, y=2, \Delta x = -0.02, \Delta y = 0.02$.

原式 $\doteq f(x,y) + yx^{y-1}\Delta x + x^y \ln x \cdot \Delta y$

$\approx 1 + 2\times(-0.02) + 0$

$= 0.96$.

用方向导数近似：$f(x+\Delta x) \doteq f(x) + \frac{\partial f}{\partial l}|\Delta x|$, $x, \Delta x \in \mathbb{R}^n$.

e.g. $0.98^{2.02} \approx 1 + \frac{\partial f}{\partial l} \cdot \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$

$= 1 + 0.02\sqrt{2} \times (-1, 1) \cdot (2, 1)$

$\approx 1 + 0.02 \times 1.4 \times (-1) = 0.972$.

二、梯度

1. l 方向不同时，$\frac{\partial f}{\partial l}$ 往往不同，往往存在一个方向上升最快或下降最快.

考察 $\frac{\partial f}{\partial l} = l \cdot (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$

$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial f}{\partial x_i})^2} \cdot \cos\theta$.

当 $\theta = 0$ 或 π 时，其值最大/最小.

此时 $l \parallel (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$.

GuangBo

可见 $(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$ 有重要意义.

2. 定义 $\text{grad} f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$ 为函数变化最快的方向.

eg. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0. \\ 0, & x^2+y^2 = 0. \end{cases}$

问 f 在 (0,0) 处可微吗?

解: $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = 0.$

$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = 0.$

$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(0,0)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(\Delta t l_1, \Delta t l_2) - f(0,0)}{\Delta t}$

$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2\Delta t^3 l_1 l_2^2}{\Delta t^3 (l_1^2 + l_2^2)} = \frac{2 l_1 l_2^2}{l_1^2 + l_2^2} = 2 l_1 l_2^2.$

可见 f 在 (0,0) 处的任意方向导数均存在.

但是, 按梯度的定义, $\frac{\partial f}{\partial l} = l \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0.$

显然与前面结果矛盾. 因此 f 在 (0,0) 处不可微.

也可以用 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x)$ 不存在来说明. (可导只一定可微)

3. 等值面: $F(x,y,z) = C$. 它表示使 F 取同一值的所

No. 35 Date: 3.15

有点(x,y,z)的缘.它也是曲面.切平面方程为

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z}(z-z_0)=0.$$

我们发现它的法向量$(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z})=\text{grad}F$.

可以在垂直切平面的方向走,F的变化最快.切向走F变化无丢向.

4.梯度的运算性质:(注意都是矢量的运算)

(1) $\text{grad}\,C=0$.

(2) $\text{grad}(\alpha f+\beta g)=\alpha\,\text{grad}f+\beta\,\text{grad}g$.

(3) $\text{grad}(f\cdot g)=g\cdot\text{grad}f+f\cdot\text{grad}g$.

(4) $\text{grad}(\frac{f}{g})=\frac{g\cdot\text{grad}f-f\cdot\text{grad}g}{g^2}\cdot(g\neq0)$

(5) 若φ为一元函数,则$\text{grad}(\varphi\circ f)=(\varphi'\circ f)\cdot\text{grad}f$.

三、场的引入.

1.场:分布着某种物理量的空间区域.

在数学上,它等价于数量值/向量值函数.

2.数量场f的梯度gradf是一个向量场.这是一个特殊的向量场,其各分量场与同一个函数f有关.此时,f与gradf存在对应.若存在这一对应,则称

$V=\text{grad}f$为势量场,f为V的势函数

e.g. 证明引力场是势量场.

证明:设质点M在$(0,0,0)$处,m在(x,y,z)处.

GuangBo

No. 86 Date: 3.15

从m指向M的单位矢量 $\hat{r}=\frac{1}{r}(-x,-y,-z)$

这是引力的方向(m受的引力)，大小为

$\vec{F}=-\frac{GMm}{r^3}(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})$

引入 $f=\frac{1}{r}$，由 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 知

$$\text{grad}\, f=-\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial x},\frac{\partial r}{\partial y},\frac{\partial r}{\partial z}\right)$$

$$=-\frac{1}{r^3}(x,y,z).$$

可见 $\vec{F}=GMm\cdot\text{grad}\frac{1}{r}=\text{grad}\left(\frac{GMm}{r}\right)$.

于是引力是梯量场，势函数为 $\frac{GMm}{r}$.

§6 Taylor 公式

一、从二维开始.

1. 根据以前的经验, $f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$.

2. 当低性部分不足以逼近 f 时, 考虑增加阶数.

令 $\varphi(t) = f(x+t\Delta x, y+t\Delta y)$.

于是可以使用一元 Taylor 展开:

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \frac{1}{2}\varphi''(0)t^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(0)t^n + \frac{1}{(n+1)!}\varphi^{(n+1)}(\theta)t^{n+1}.$$

其中 $0 \le \theta \le t$.

把 t 对付成 f, 有

GuangBo

$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y.$

$\varphi''(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right)$

$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\Delta x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Delta y^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y.$

引入算子 $\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}$. 2y

$\varphi'(t) = \left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right) f.$

$\varphi''(t) = \left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f.$

以此类推. $\varphi^{(n)}(t) = \left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f.$

于是回代至 f. 令 $t=1$, 则

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x,y) + \sum_{i=1}^{n}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^i f(x,y)\cdot\frac{1}{i!} + \left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x+\theta\Delta x, y+\theta\Delta y)\cdot\frac{1}{(n+1)!}$$

其中 $0<\theta<1$.

这就是二元函数的 Taylor 展开.

最后的 $\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x+\theta\Delta x, y+\theta\Delta y)\cdot\frac{1}{(n+1)!}$ 为 Lagrange 余项.

它也对应 Peano 余项 $o\left[(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})^n\right]$.

e.g. ① 求 $f(x,y) = \ln(1+x+y)$ 在 $(0,0)$ 处的二阶 Taylor 展开.

解: $f(0,0) = 0.$

$$\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right) f(0,0) = \Delta x\left.\frac{1}{1+x+y}\right|_{(0,0)} + \Delta y\left.\frac{1}{(1+x+y)}\right|_{(0,0)}$$

$$= \Delta x + \Delta y.$$

GuangBo

$(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y})^2 f(0,0)$

$=\Delta x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)+2\Delta x\Delta y\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$

$+\Delta y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)$

$=-\Delta x^2-2\Delta x\cdot\Delta y-\Delta y^2=-(\Delta x+\Delta y)^2$.

即 $\ln(1+\Delta x+\Delta y)=\Delta x+\Delta y-\frac{1}{2}(\Delta x+\Delta y)^2+o(\Delta x^2+\Delta y^2)$.

以此类推, $\ln(1+\Delta x+\Delta y)=\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i+1}}{i}(\Delta x+\Delta y)^i+o\left(\sqrt{(\Delta x^2+\Delta y^2)^n}\right)$.

② 近似计算 $1.04^{2.02}$.

解: 构造 $f(x,y)=x^y$, $x=1$, $y=2$, $\Delta x=0.04$, $\Delta y=0.02$.

则 $f(1.04,2.02)\approx f(1,2)+0.04\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)+0.02\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)$

而 $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)=yx^{y-1}\big|_{(1,2)}=2$

$\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)=x^y\ln x\big|_{(1,2)}=0$.

故 $f(1.04,2.02)\approx 1.08$.

3. 在导数近似计算中的应用:

(1) $f(x+\frac{h}{2},y)-f(x-\frac{h}{2},y)\approx\frac{\partial f}{\partial x}h$.

(2) $\frac{\partial f}{\partial x}(x+\frac{h}{2},y)-\frac{\partial f}{\partial x}(x-\frac{h}{2},y)\approx\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}h$.

(3) $f(x+h,y)+f(x-h,y)-2f(x,y)\approx\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}h^2$.

对y同样也有类似的式子.

即 $\frac{f(x+h,y)+f(x,y+h)+f(x-h,y)+f(x,y-h)-4f(x,y)}{h^2}$

$\approx \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

这叫做五点格式.

二. n元函数Taylor公式.

1. 令 $\varphi(t)=f(x_1+t\Delta x_1,\cdots,x_n+t\Delta x_n)$.

则 $\varphi(t)=\varphi(0)+\varphi'(0)t+\frac{1}{2!}\varphi''(0)t^2+\cdots$.

易证, $\varphi'(0)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i=(\Delta x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+\Delta x_n\frac{\partial}{\partial x_n})f(x)$.

以此类推, $\varphi^{(n)}(0)=(\Delta x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+\Delta x_n\frac{\partial}{\partial x_n})^n f(x)$.

从而 $f(x_1+\Delta x_1,\cdots,x_n+\Delta x_n)$

$=f(x_1,\cdots,x_n)+\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+\Delta x_n\frac{\partial}{\partial x_n})^i f(x_1,\cdots,x_n)\times\frac{1}{i!}$

$+\frac{1}{(n+1)!}(\Delta x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+\Delta x_n\frac{\partial}{\partial x_n})^{n+1}f(x_1+\theta\Delta x_1,\cdots,x_n+\theta\Delta x_n)$.

2. 二阶展开项对极值问题有用.

而 $(\Delta x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+\Delta x_n\frac{\partial}{\partial x_n})f$

$=(\Delta x_1,\cdots,\Delta x_n)\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}\\ \vdots & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta x_1\\ \vdots\\ \Delta x_n\end{pmatrix}$.

GuangBo

No. 40 Date: 3.17

记 $\Delta X = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$

(H叫Hesse矩阵)

则二阶项为 $\Delta X^T H \Delta X$.

物理系的学习君

§7 极值

一、非条件极值

1. 称极值与一元类似，即是邻域内的最大/最小值.

2. 极值的一个必要条件：$f(x)$ 在 $(x_1^0, \cdots, x_n^0)$ 处取极值，若 $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 在该点处均存在，则

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

3. 进而，仅需一阶导数为0的驻点即是可能极值点. 需要引入二阶导：

$$f(x) = f(x_1^0, \cdots, x_n^0) + \nabla f(x_1^0, \cdots, x_n^0)\cdot \Delta x + \frac{1}{2}\Delta x^T H \Delta x.$$

此处 H 是在取 $x = \xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ 时的阵.

根据一元函数的经验：

$$\nabla f \cdot \Delta x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta x^T H \Delta x > 0 \Rightarrow \text{极小} \\ \Delta x^T H \Delta x < 0 \Rightarrow \text{极大} \end{cases}$$

这对应 H 的正定负定.

*拓展：如果 $\Delta X^T H \Delta X = 0$，则需要看三阶项（用到三阶张量）——总之要看第一个不取0的项.

e.g. ① $z = x^4 + y^4$. 令 $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = (0,0)$.

故 $(0,0)$ 可能为极值点.

而 $H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}$，在 $(x,y) = (0,0)$ 时 $H = O$. 所以不可以用Hesse阵判定.

只能用 $x^4 + y^4 \geq 0 = z(0,0)$ 来说明该处取极小值.

② $z = xy$（马鞍面）：在 $(0,0)$ 处 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

但是，这个点不为极值点. 在某些方向极小，某些方向极大.

它的价值在于 $\nabla z = 0$.

③ $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 6xy + 2z$.

对于极值点，$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 6y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 6x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 2z + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x,y,z) = (0,0,-1)$.

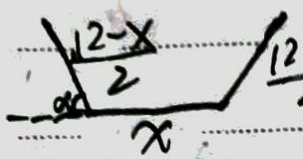
而 $H = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. 这个矩阵非正定也非负定，

因此 $(0,0,-1)$ 不是极值点.

GuangBo

4. 如果要求最值，则要一并考虑极值点，边界、不可导点.

e.g. 将一根12cm的铁丝弯成等腰梯形的三边，问怎样折可以使梯形面积最大？



解：考虑变量 x 与 α.

面积 $S=\frac{1}{2}(x+x+2\cdot\frac{12-x}{2}\cos\alpha)\cdot\frac{12-x}{2}\sin\alpha$.

它是关于 x 与 α 的函数，$\alpha\in(0,\frac{\pi}{2}]$, $x\in(0,12)$.

对于极值点，要求 $\begin{cases}\frac{\partial S}{\partial x}=0\\ \frac{\partial S}{\partial \alpha}=0.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=4,\\ \alpha=\frac{\pi}{3}.\end{cases}$

对于边界位置，$S=0$，显然不会成为最大值

因此还是利用 $x=4$, $\alpha=\frac{\pi}{3}$ 的方案折.

5. 最小二乘法.

对于一组实验数据，要使用一条直线 $y=ax+b$ 拟合，如何确定 a 和 b 使误差最小？

(1) 对于偏差，为了防止直线两侧的偏差抵消，我们取 $\Delta=\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i-b)^2$. 因此要求 Δ 取最小.

(2) 对于以上的问题，把 Δ 看成 a 与 b 的函数：

$$\begin{cases}\frac{\partial\Delta}{\partial a}=\sum_{i=1}^{n}2(ax_i+b-y_i)x_i=0.\\ \frac{\partial\Delta}{\partial b}=\sum_{i=1}^{n}2(ax_i+b-y_i)=0.\end{cases}$$

即 $\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot a + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot b = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot a + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases}$

解得 $a = \dfrac{n\sum_i x_i y_i - \sum_i x_i \sum_i y_i}{n\sum_i x_i^2 - (\sum_i x_i)^2}$, $b = \dfrac{\sum_i x_i^2 \sum_i y_i - \sum_i x_i \sum_i x_i y_i}{n\sum_i x_i^2 - (\sum_i x_i)^2}$.

事实上, $n\sum_i x_i^2 - (\sum_i x_i)^2$ 一定不为0. (和的平均值 > 平均值的平方)

#如果定义 $\Delta = \sum_i |y_i - ax_i - b|^p$, 则在 $p=2$ 时计算特别很麻烦, 甚至推不出线性方程. 因此二次是最方便的.

(3) 有些数据实在不易化为直线, 可能需要抛物线等. 同样可以用二乘法确定系数.

(4) 最小二乘法还可用于方程组的解.

对于 $Ax=b$, 它可能没有解. 我们将其转化为 $\|Ax-b\|=0$. 于是, 我们可以求 $\|Ax-b\|^2$ 达最小时的 x. 如果 $\|Ax-b\|^2$ 最小值恰为0, 则此时的 x 就是解; 即使最小值不是0, 那时的 x 也是最贴近理想状态的解.

$\Rightarrow$ 设 $\|Ax-b\|^2 = D = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} x_j) - b_i \right)^2$.

对于其极值点，有 $\frac{\partial D}{\partial x_i}=0.\ (i=1,2,\cdots,n)$

我们沿用Taylor展开的办法，设 $\phi(t)=D(x+t\Delta x)$.

若x为极值点，则 $\left.\frac{d\phi}{dt}\right|_{t=0}=0.$

GuangBo

物理学报论文君

由于D可写为 $(Ax-b)^T(Ax-b)$，故

$$\begin{aligned}\phi &= (A(x+t\Delta x)-b)^T(A(x+t\Delta x)-b)\\ &= (Ax-b+tA\Delta x)^T(Ax-b+tA\Delta x)\\ &= (Ax-b)^T(Ax-b)+t(Ax-b)^TA\Delta x\\ &\quad +t(A\Delta x)^T(Ax-b)+t^2(A\Delta x)^TA\Delta x.\end{aligned}$$

故 $\left.\frac{d\phi}{dt}\right|_{t=0} = (Ax-b)^TA\Delta x+(A\Delta x)^T(Ax-b)=0$ (*)

事实上，$(Ax-b)^TA\Delta x$ 与 $(A\Delta x)^T(Ax-b)$ 均是行向量乘列向量，故它们其实是相等的.

故 (*) 等价于 $(A\Delta x)^T(Ax-b)=\Delta x^TA^T(Ax-b)=0$.

此式对 $\forall \Delta x$ 均成立，故 $A^T(Ax-b)=0$.

这便等价于 $\frac{\partial D}{\partial x_i}=0$. $(i=1,\cdots,n)$，而此即原方程组的一个 A^T. 由于D必有下确界，故 $A^T(Ax-b)=0$ 一定有解.

(正规方程)

二、条件极值

e.g. 试求斜边为 l 的直角三角形的周长最大值.

[法一] $S=x+y+l$，其中 $x^2+y^2=l^2$.

[法二] $S=x+\sqrt{l^2-x^2}+l$.

两者完全等价，但各有优缺点.

1. 条件极值的表达：$\begin{cases}\min/\max\ F(x_1,\cdots,x_n)\\ G(x_1,\cdots,x_n)=0.\end{cases}$

2. 从以上表达中获得 x_n 与 $x_1, \sim, x_{n-1}$ 的表达式(显式 f)的充分条件是 $\frac{\partial G}{\partial x_n} \neq 0$. 这样一来, 下就成为 n-1 元函数

$F(x_1, \sim, x_{n-1}, f(x_1, \sim, x_{n-1}))$. 求其无条件极值即可.

对这个 F 求偏导, 则在极值点处有 $\frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$.

$(i = 1, \sim, n-1)$.

它等价于 $\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{\partial F}{\partial x_n} \frac{\frac{\partial G}{\partial x_i}}{\frac{\partial G}{\partial x_n}} = 0$.

又论 i 取何值, 都有一个系数 $\frac{\frac{\partial F}{\partial x_n}}{\frac{\partial G}{\partial x_n}}$. 记它为 λ, 则 λ 为常数时,

$\frac{\partial}{\partial x_i}(F - \lambda G) = 0$. $(i = 1, \sim, n-1)$

对于 x_n, 有 $\frac{\partial F}{\partial x_n} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_n}}{\frac{\partial G}{\partial x_n}} \frac{\partial G}{\partial x_n}$ 即 $\frac{\partial}{\partial x_n}(F - \lambda G) = 0$.

所以 $\frac{\partial}{\partial x_i}(F - \lambda G) = 0$. $(i = 1, \sim, n)$.

如果 λ 不是常数, 也可将其作为一个新变量.

构造 $L(x_1, \sim, x_n, \lambda) = F(x_1, \sim, x_n) - \lambda G(x_1, \sim, x_n)$.

则 L 取极值的条件为 $\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \ (i = 1, \sim, n). \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0. \end{cases}$

即 $\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_i} - \lambda \frac{\partial G}{\partial x_i} = 0. \ (i = 1, \sim, n). \\ G(x_1, \sim, x_n) = 0. \end{cases}$

这与上面的方法一样, 所以可以通过构造 L 来解.

这叫 Lagrange 乘数法.

GuangBo

No. 46 Date: 3.22

多元更多情况下，我们构造 $L=F+\lambda G$. 求解 F 在 G 约束下的极值要求 $\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x_i}=\frac{\partial F}{\partial x_i}+\lambda\frac{\partial G}{\partial x_i}=0 \quad (i=1,2,\cdots,n).\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=G=0.\end{cases}$

eg. ① 圆与直角三角形周长的问题：

构造 $L=x+y+l+\lambda(x^2+y^2-l^2)$.

则 $\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x}=1+2\lambda x=0,\\ \frac{\partial L}{\partial y}=1+2\lambda y=0,\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=x^2+y^2-l^2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{l}{\sqrt{2}},\\ y=\frac{l}{\sqrt{2}},\\ \lambda=\frac{1}{\sqrt{2}l}.\end{cases}$

② 设 $a_{ij}=a_{ji}$，在 $\sum_{i=1}^{n}x_i^2=1$ 的条件下求 $\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=f$ 的最大、最小值.

解：把 f 写为 x^TAx，其中 $x=(x_1,\cdots,x_n)$.

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\\ a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$$

构造 $L=\sum_{i,j}a_{ij}x_ix_j+\lambda(\sum_i x_i^2-1)$.

$=x^TAx+\lambda(x^Tx-1)$.

我们可以用这个方法算；（但是，也可以用中值做：

$\phi(t)=(x+t\Delta x)^TA(x+t\Delta x)+\lambda((x+t\Delta x)^T(x+t\Delta x)-1)$.

则 $\frac{d\phi}{dt}\Big|_{t=0}=\Delta x^TAx+x^TA\Delta x+\lambda(\Delta x^Tx+x\Delta x^T)=0$.

由于 $a_{ij}=a_{ji}$，故 $A^T=A$.

GuangBo

No. 47 Date: 3.22

从而 $x^TA\delta x = (A\delta x)^T\delta x = \delta x^TA^Tx = \delta x^TAx$.

于是 $\forall \delta x$, $2\delta x^TAx + 2\lambda\delta x^Tx = 2\delta x^T(Ax+\lambda x) = 0$.

从而 $\begin{cases} Ax+\lambda x = 0, & (|A+\lambda I| = 0) \\ x^Tx = 1 & (\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0) \end{cases}$

可见 $-\lambda$ 为 A 的特征值，x 为 A 的特征向量.

最终可以得到 $f = -\lambda$，从而 $f_{max} = \max\{-\lambda\}$，$f_{min} = \min\{-\lambda\}$.

3. 如果约束条件只止一个，如 $\begin{cases} G_1(x_1, \sim, x_n)=0, \\ \sim\sim \\ G_m(x_1, \sim, x_n)=0. \end{cases}$ $(m<n)$

则可以构造 $L = F + \lambda_1 G_1 + \sim + \lambda_m G_m$.

对应 $\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad (i=1, \sim, n) \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_j} = 0 \quad (j=1, \sim, m) \end{cases}$

还是像无条件极值一样求解.

*前提：约束条件 $G_1, \sim, G_m$ 必须是等式.

e.g. 椭球 $x^2+y^2+4z^2=1$ 与平面 $x+y+z=0$ 交得一椭圆. 求它的长轴长、短轴长.

解：设 $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$，则要求解其最大、最小值.

约束条件：$\begin{cases} G_1(x,y,z) = x^2+y^2+4z^2-1=0, \\ G_2(x,y,z) = x+y+z=0. \end{cases}$

构造 $L = x^2+y^2+z^2+\lambda_1(x^2+y^2+4z^2-1)+\lambda_2(x+y+z)$.

GuangBo

$$\text{令}\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x}=2(1+\lambda_1)x+\lambda_2=0,\\ \frac{\partial L}{\partial y}=2(1+\lambda_1)y+\lambda_2=0,\\ \frac{\partial L}{\partial z}=2(1+4\lambda_1)z+\lambda_2=0,\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1}=x^2+y^2+4z^2-1=0,\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2}=x+y+z=0.\end{cases}$$

解得 ① $\begin{cases}\lambda_1=-1,\\ \lambda_2=0,\\ z=0,\\ x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\\ y=\mp\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{cases}$ 对应 $F=1$.

② $\begin{cases}x=\pm\frac{\sqrt{2}}{6},\\ y=\pm\frac{\sqrt{2}}{6},\\ z=\mp\frac{\sqrt{2}}{3},\\ \lambda_1=\text{---},\\ \lambda_2=\text{---}\end{cases}$ 对应 $F=\frac{1}{3}$.

从而长轴长为 $2\sqrt{1}=2$，短轴长为 $2\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}\sqrt{3}$

(问：如果是平面 $x+y+z=a\neq 0$ 来截，椭圆长短轴在原点，怎么求？)

物理系的先生君

GuangBo

第八章 多元函数积分学

§1 重积分的概念与性质

一、重积分的定义

e.g. 一个物体D的密度在各点处都不同，怎么算质量？



把D分成n个小块Δ_i，体积为ΔV_i.

则可取$\xi_i \in \Delta_i$使$\Delta M_i \approx \Delta V_i \cdot \rho(\xi_i)$.

故总质量$M \approx \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i)\Delta V_i$.

当分割无限小即$\max\{\Delta V_i\} \to 0$时，M的值应是精确的.

1、面积微元：$d\sigma = dxdy$.（直角坐标）

$= rdrd\theta$.（极坐标）

体积微元：$dV = dxdydz$.（直角坐标）

2、二重积分：$\iint_D f(x,y)dxdy = \lim_{\max\{\Delta\sigma_i\}\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta\sigma_i$,

其中ξ_i是D中的点（二维向量）.

GuangBo

3. 可积条件 —— 充分条件：f连续时可积。

证明：设有两种划分$\{\Delta_i\}$、$\{\tilde{\Delta}_j\}$. 相应部分和

$S_1=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta\sigma_i$，$S_2=\sum_{j=1}^{n} f(\eta_j)\Delta\tilde{\sigma}_j$.

再取一个分割$\{\hat{\Delta}_k\}$，它是Δ_i与$\tilde{\Delta}_j$之叠加

的相应部分和 $S_3=\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta\hat{\sigma}_k$

∵ f连续.

∴ 对于P点，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当$\xi,\eta\in U(P,\delta)$时，

$|f(\xi)-f(\eta)|<\varepsilon$. (Cauchy准则)

用同样方法证明$\iint_D f\,dxdy$存在：当Δ_i与$\tilde{\Delta}_j$无限变时，

$\forall\varepsilon>0$，$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta\sigma_i-\sum_{j=1}^{n} f(\eta_j)\Delta\tilde{\sigma}_j\right|$

$\le\sum_{k=1}^{n}|f(\xi_i)-f(\eta_j)|\Delta\hat{\sigma}_k<\varepsilon\sum_{k=1}^{n}\Delta\hat{\sigma}_k$

$=\varepsilon\cdot M(D)\equiv\varepsilon'$.

可见部分和是收敛的.

4. 多重积分也可写成$\int_D f(x_1,\sim,x_n)\underbrace{dx_1\sim dx_n}_{\text{可写为}d\sigma}$.

其中$D\subset\mathbb{R}^n$.

二、重积分的性质

No. 54 Date: 3.27

1. 线性性: $\int_D (\alpha f+\beta g)d\sigma = \alpha\int_D f d\sigma + \beta\int_D g d\sigma$.

2. 可加性: 若 $D = D_1 \cup D_2$ $(D_1 \cap D_2 = \phi)$. 则

$$\int_D f d\sigma = \int_{D_1} f d\sigma + \int_{D_2} f d\sigma.$$

3. 对于 $X \in D$, 若 $f \geq 0$, 则 $\int_D f d\sigma \geq 0$.

(在有限积分中此式子成立)

($f \geq 0$, f 连续, $\int_D f d\sigma = 0 \Rightarrow f = 0$).

4. 对于 $X \in D$, 若 $f \geq g$, 则 $\int_D f d\sigma \geq \int_D g d\sigma$.

$\Rightarrow$ 若 $D \subset \mathbb{R}^n$, D 的 n 维测度为 $V(D)$, $m \leq f \leq M$,

则 $m \cdot V(D) \leq \int_D f d\sigma \leq M \cdot V(D)$.

5. 重积分中值定理: 若 f 在 D 中连续, 则 $\exists \xi \in D$,

使得 $\int_D f d\sigma = f(\xi) \cdot V(D)$.

并且在保证 $\xi \in D$ 的情况下, $\lim\limits_{V(D)\to 0} \dfrac{\int_D f d\sigma}{V(D)} = f(\xi)$.

也即 $\int_D f d\sigma = V(D) \cdot f(\xi) +$ 高阶无穷小.

§2 二重积分的计算

一、累次积分法

1. 直角坐标中以矩形的 $dxdy$ 为面积微元, 如何计算.

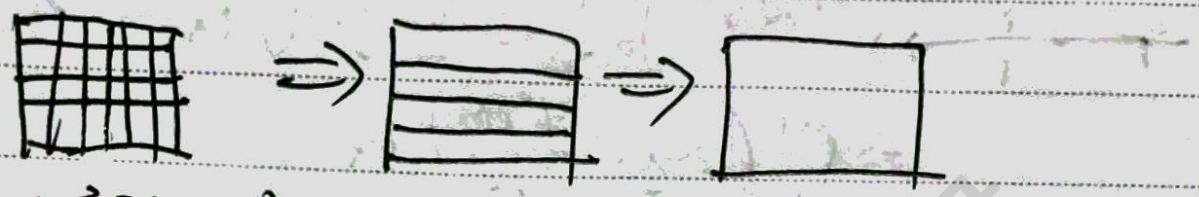
GuangBo

$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$?

2. 累次积分的实质是分步加和;

(1) 把小矩形按行/列加成矩形细条;

(2) 对矩形长条求和.



(3) 部分和中, $\Delta\sigma_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$, 从而

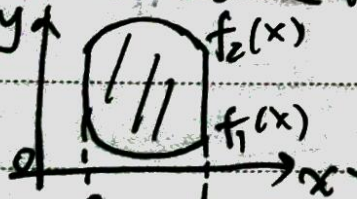
$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta\sigma_i = \sum_j \sum_i f(\xi_i)\Delta y_i \Delta x_j$$

$$= \sum_j \left(\sum_i f(\xi_i)\Delta y_i\right)\Delta x_j$$

因 $\sum_i f(\xi_i)\Delta y_i$ 在极限时就是 $\int f(x,y)\,dy$.

但在求和时 Δx_j 是固定的, 所以里面的 $\int f\,dy$ 是视 x 为常量的 Δx_j 的. 记 $\iint f\,d\sigma = \int(\int f\,dy)\,dx$.

(4) 假如 D 是如图的区域, 则

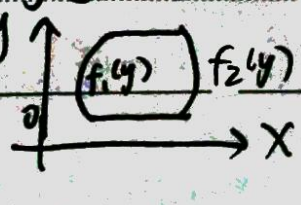


$$\iint_D f\,d\sigma = \int_a^b \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx.$$

此时 $D = \{(x,y) \mid f_1(x) \le y \le f_2(x),\ a \le x \le b\}$

(5) 如果 $D = \{(x,y) \mid f_1(y) \le x \le f_2(y),\ c \le y \le d\}$.

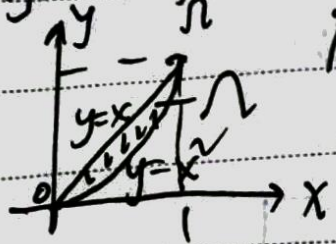
则适合先对 x 积分: $\iint_D f\,d\sigma = \int_c^d \left(\int_{f_1(y)}^{f_2(y)} f(x,y)\,dx\right)dy$.



GuangBo

(6) 积分顺序，要考虑区域形状与方便程度.

e.g. ① 求 $\iint_\Lambda (2-x-y)\,dxdy$，其中 Λ 如图所示.



解：$\Lambda = \{(x,y) \mid x^2 \le y \le x,\ 0 \le x \le 1\}$.

i. 原式 $= \int_0^1 \int_{x^2}^{x} (2-x-y)\,dy\,dx$

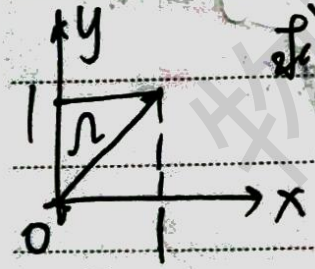
$= \int_0^1 \left((2-x)y - \frac{y^2}{2}\Big|_{x^2}^{x} \right) dx$

$= \int_0^1 \left(2x - x^3 - \frac{7x^2}{2} + \frac{x^4}{2} \right) dx$

$= \left(x^2 - \frac{7x^3}{6} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{10} \right)\Big|_0^1$

$= \frac{11}{60}$.

② Λ 是 (0,0), (0,1), (1,1) 构成的三角形区域，



求 $\iint_\Lambda e^{-y^2} dxdy$.

解：1° 先积 y：原式 $= \int_0^1 \int_x^1 e^{-y^2} dy\,dx$. 无法计算.

2° 先积 x：原式 $= \int_0^1 \int_0^y dx \cdot e^{-y^2} dy$

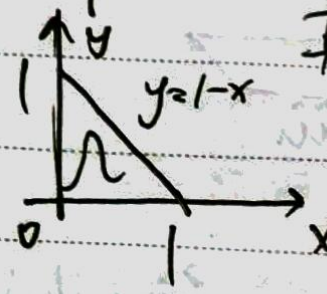
$= \int_0^1 y e^{-y^2} dy = \frac{1}{2}(1-e^{-1})$.

可见积分次序很重要.

另外，可以用二重积分算一元定积分（尤其是难积的一些）.

③ 已知立体由：$z=xy$, $z=x+y$, $x+y=1$, $x=0$, $y=0$. 求它们围的体积.

解：通过一系列作图，可得原图立体的二维区域



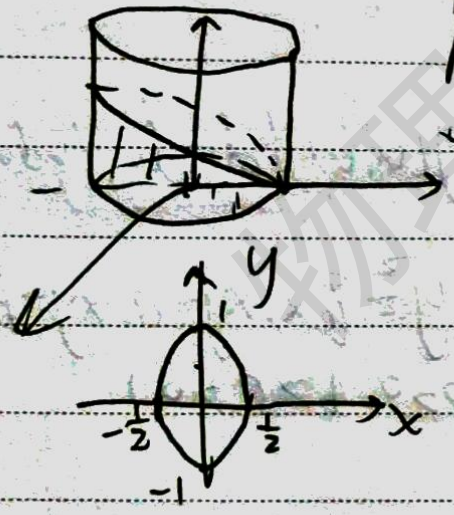
其中 $z=xy$ 又吃去一部分体积. 故

$$V=\iint_{\Omega}(x+y-xy)\,dxdy$$

$$=\int_0^1\int_0^{1-x}(x+y-xy)\,dy\,dx$$

$$=\int_0^1\left(x(1-x)+(1-x)\cdot\frac{1}{2}(1-x^2)\right)dx=\frac{7}{24}.$$

④ 求由 $4x^2+y^2=1$, $z=1-y$, $z=0$ 围成的体积.



解：积分区域是椭圆 $4x^2+y^2\le 1$. 记为 D.

$$\therefore V=\iint_D(1-y)\,dxdy$$

$$=\int_{-1}^{1}\int_{-\frac{\sqrt{1-y^2}}{2}}^{\frac{\sqrt{1-y^2}}{2}}(1-y)\,dx\,dy$$

$$=\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-y^2}\right)dy$$

$$=2\int_0^1\sqrt{1-y^2}\,dy-0=\frac{\pi}{2}.$$

二、变量代换

设 $\begin{cases}x=x(u,v),\\ y=y(u,v),\end{cases}$ 则 $\sum_i f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i=\sum_i f(\xi(u_i,v_i),\eta(u_i,v_i))\Delta\sigma_i'$

GuangBo

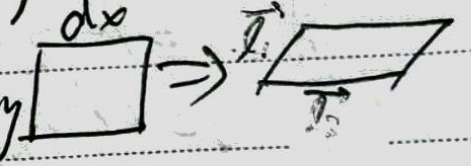
No. 18 Date: 3.29

那么，对于 $(x,y)\to(u,v)$，$D\to\tilde{D}$，$\Delta\sigma$ 与 $\Delta\tilde{\sigma}$ 之间有怎样的差别？

2. 对于直角坐标，$d\sigma=dxdy$.

而 $dx=\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv$.

$dy=\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv$.



此时在 $\tilde{D}$ 中对应一个平行四边形，其中 $\vec{l}_1=(\frac{\partial x}{\partial u}du,\frac{\partial x}{\partial v}dv)$

$\vec{l}_2=(\frac{\partial y}{\partial u}du,\frac{\partial y}{\partial v}dv)$.

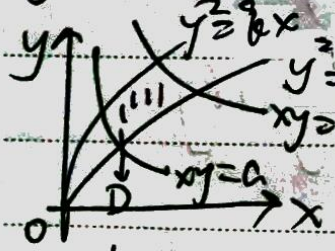
从而平行四边形的面积为 $|\vec{l}_1\times\vec{l}_2|=\left|\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}&\frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u}&\frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\right|dudv$.

也即 $dxdy=\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|dudv$.

即 $\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_{\tilde{D}} f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|dudv$.

eg① 求以下曲线围成的面积：$y^2=px$，$y^2=qx$，$xy=a$，$xy=b$.

$(q>p>0,\ b>a>0)$



解：$S=\iint_D dxdy$.

换元：令 $u=\frac{y^2}{x}$，$v=xy$，$\tilde{D}=[p,q]\times[a,b]$.

在算 $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$ 之前，得先算 $\frac{D(u,v)}{D(x,y)}$.

$$\text{而}\ \frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\left(\frac{D(u,v)}{D(x,y)}\right)^{-1}=\begin{vmatrix}-\frac{y^2}{x^2}&\frac{2y}{x}\\ y&x\end{vmatrix}^{-1}$$

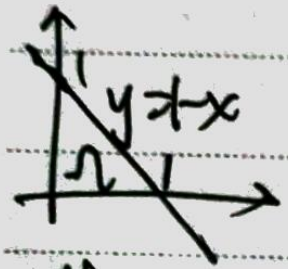
$= -\frac{x}{3y^2} = -\frac{1}{3u}$.

$\therefore S = \iint_D \frac{1}{3u}\,du\,dv = \int_a^b dv \int_p^q \frac{du}{3u} = \frac{b-a}{3}\ln\frac{q}{p}$.

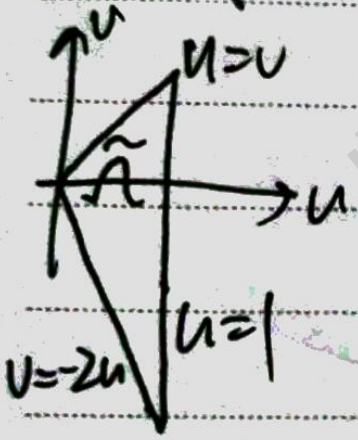
② Ω 是 $x=0, y=0, x+y=1$ 围成的平面区域，求

$$\iint_\Omega \sqrt{x+y}(y-2x)^4\,dx\,dy.$$

解：积分困难，考虑换元：$\begin{cases} u = x+y, \\ v = y-2x. \end{cases}$ $\left(\begin{cases} x = \frac{u-v}{3}, \\ y = \frac{2u+v}{3} \end{cases}\right)$



下面为定区域变换：三边界为 $u-v=0$, $2u+v=0$, $u=1$，对应 (u,v) 空间的一个三角形.



$$\because \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{3}.$$

$$\therefore \text{原式} = \frac{1}{3}\iint_{\tilde{\Omega}} \sqrt{u}\,v^4\,du\,dv$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \int_{-2u}^{u} v^4\sqrt{u}\,dv\,du = \frac{11}{5}\int_0^1 u^{\frac{11}{2}}\,du = \frac{22}{65}.$$

物理学习文档

3. 极坐标变换：$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ $\left|\begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{matrix}\right| = r$.

此时 $dxdy = \left|\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)}\right| drd\theta = r\,dr\,d\theta$.

eg.① 求 $\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$.

物理学部分享

No. 60 Date: 3.31

解：本题用直角坐标极其困难：

原式 $= \int_{-R}^{R}\left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}dy\right)dx$.

在极坐标下，$x^2+y^2\le R^2 \Rightarrow r\le R$. $(0<\theta\le 2\pi)$ 记为 D.

则原式 $= \iint_D e^{-r^2}\cdot r\,dr\,d\theta$

$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^R re^{-r^2}dr\right)d\theta$

$= \pi(1-e^{-R^2})$.

* $R\to+\infty$ 时，有 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy\right)$

$= \left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx\right)^2 = \pi$

即 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

可见重积分可用来计算一元定积分

② $D=\{(x,y)\mid (x^2+y^2)^2\le x^2-y^2,\ x\ge 0\}$.

求 $\iint_D \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^2}$.

解：在极坐标时：$D\to D'$：$\left\{0\le r^2\le\cos 2\theta,\ -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}$.

但是，注意到 $\cos 2\theta\ge 0$，故还需求 $-\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{4}$.

∴原式 $= \iint_{D'}\frac{r\,dr\,d\theta}{(1+r^2)^2} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}}\frac{r\,dr}{(1+r^2)^2}\right)d\theta$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{1+\cos 2\theta}\right)d\theta$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\right)d\theta$$

$$= \theta - \frac{1}{2}\tan\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$$

③ 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$ 的面积.

解：记 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\right\}$.

令 $\begin{cases} x=ar\cos\theta \\ y=br\sin\theta \end{cases}$，$D\to D'$：$\{(r,\theta)\,|\,0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi\}$.

则面积为 $\iint_D dxdy = \iint_{D'}\left|\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)}\right|drd\theta = \iint_{D'} abr\,dr\,d\theta$

$$= ab\iint_{D'} r\,dr\,d\theta = ab\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 r\,dr\right)d\theta = \pi ab.$$

④ 求椭球体体积 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$.

解：根据对称性，可以只算上半球，再乘2.

$D=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\right\}$，则体积为

$V=2\iint_D c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\,dxdy$. 仍令 $\begin{cases} x=ar\cos\theta \\ y=br\sin\theta \end{cases}$

则 $D\to D'=\{(r,\theta)\,|\,0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi\}$.

则 $V=\iint_{D'} 2c\cdot\sqrt{1-r^2}\cdot abr\,dr\,d\theta = 2abc\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1\sqrt{1-r^2}\,r\,dr\right)d\theta$

$$= 2abc\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{3} = \frac{4}{3}\pi abc.$$

GuangBo

No. 62 Date: 3.31

§3 三重积分的计算

一、三重积分的定义

1. 体积微元：将 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 任意分割 ΔV_i.

2. 取点 $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \Delta V_i$.

3. 积分：$\iiint_\Omega f\,dV = \lim\limits_{\max\{\Delta V_i\}\to 0} \sum\limits_i f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta V_i$.

可以类似地定义 n 重积分.

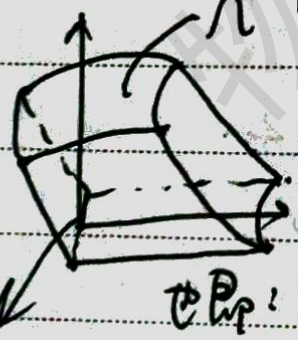
二、累次积分

1. 直角坐标中的体积微元：$dV = dx\,dy\,dz$.

有积分 $\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$.

有时简写成 $\int_\Omega f\,dV$.

2. 在三重积分中同样可以分步累加：



对于 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 中的三重积分，可以先沿一个坐标方向加，再沿第二个坐标方向加，最后沿第三个坐标方向加.

比如：若 $\Omega = \{(x,y,z) \mid \varphi_1(x,y) \le z \le \varphi_2(x,y), \psi_1(x) \le y \le \psi_2(x), a \le x \le b\}$

则 $\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left(\int_{\psi_1}^{\psi_2} \left(\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f\,dz \right) dy \right) dx$.

其中 $\int_a^b \int_{\psi_1}^{\psi_2}$ 这个二重积分的区域是 Ω 在 $z=0$ 上的投影区域.

eg① 用三重积分求球体积.

解：$V=\iiint_{\Omega} dxdydz$

$=\iint_{\widehat{\Omega}}\left(\int_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dz\right)dxdy.$

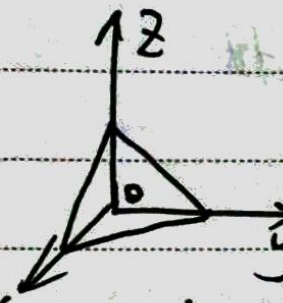
其中 $\widehat{\Omega}=\{(x,y)\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\}$.

从而 $V=\iint_{\widehat{\Omega}} 2c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dxdy.$

这与上一节的结论一致.

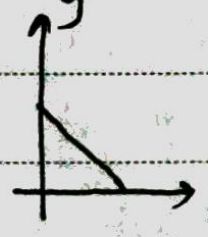
② Ω 是平面 $x+y+z=1, x=0, y=0, z=0$ 围成的区域.

求 $\iiint_{\Omega}\frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}=I.$



解：$0\le z\le 1-x-y,\ 0\le y\le 1-x,\ 0\le x\le 1.$

$\therefore I=\int_0^1\left(\int_0^{1-x}\left(\int_0^{1-x-y}\frac{dz}{(1+x+y+z)^3}\right)dy\right)dx$



$=\int_0^1\left(\int_0^{1-x}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{(1+x+y)^2}\right)dy\right)dx$

$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\int_0^{1-x}\left(\frac{1}{(1+x+y)^2}-\frac{1}{4}\right)dy\right)dx$

$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2}-\frac{1-x}{4}\right)dx$

$=\frac{1}{2}\left(\ln(1+x)-\frac{3}{4}x+\frac{x^2}{8}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{5}{16}.$

物理系小文君

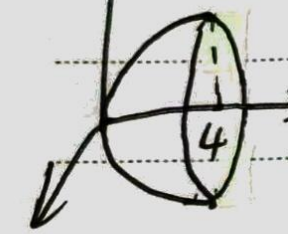
GuangBo

No. 64 Date: 3.31

③ Ω 是曲面 $y=x^2+z^2$ 与 $y=4$ 围成的区域.

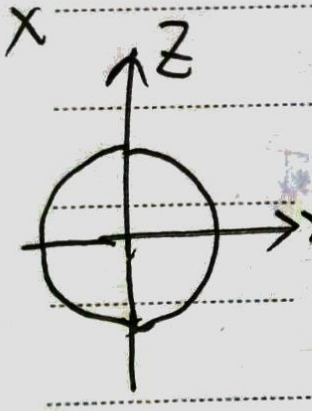
求 $\iiint_\Omega \sqrt{x^2+z^2}\,dxdydz$.

解: $\because x^2+z^2 \le y \le 4$, $-\sqrt{4-x^2} \le z \le \sqrt{4-x^2}$, $-2 \le x \le 2$.



$\therefore$ 原式 $= \int_{-2}^{2}\left(\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\left(\int_{x^2+z^2}^{4}\sqrt{x^2+z^2}\,dy\right)dz\right)dx$.

$= \int_{-2}^{2}\left(\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\sqrt{x^2+z^2}\,(4-x^2-z^2)\,dz\right)dx$.



此时, 不要盲目化简.

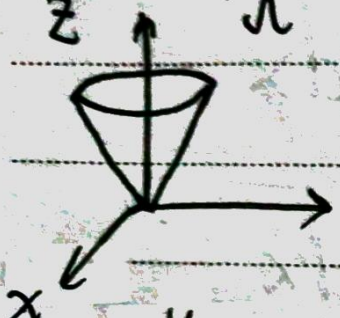
应当用极坐标: $0 \le r \le 2$, $0 \le \theta \le 2\pi$.

$\therefore$ 原式 $= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^2 r(4-r^2)\cdot r\,dr\right)d\theta$

$= 2\pi\int_0^2 (4r^2-r^4)\,dr = \frac{128}{15}\pi$.

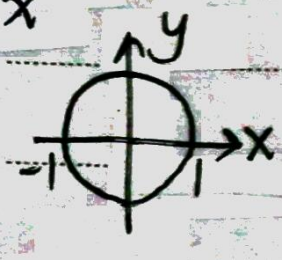
④ 八曲面 $z^2=4(x^2+y^2)$ 与 $z=2$ 围成的区域.

求 $I=\iiint_{\Omega} z^2\,dxdydz$.



解: $\because 2\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 2,\ x^2+y^2\le 1$.

$$\therefore I=\iint_{x^2+y^2\le 1}\left(\int_{2\sqrt{x^2+y^2}}^{2} z^2\,dz\right)dxdy$$



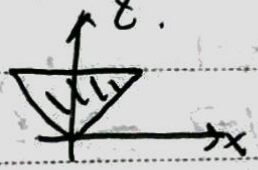
$$=\iint_{x^2+y^2\le 1}\left(\frac{8}{3}-\frac{8}{3}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\right)dxdy$$

GuangBo
物理学科 允君

$$= \iiint_{\substack{0\le r\le 1\\ 0\le\theta\le 2\pi\\ 0\le\varphi\le\pi}} \left(\frac{\delta}{5} - \frac{\delta}{5}r^3\right) r\,dr\,d\varphi\,d\theta$$

$$= \frac{\delta}{5}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (r - r^4)\,dr$$

$$= \frac{\delta}{5} \times 2\pi \times \frac{3}{10} = \frac{\delta}{5}\pi.$$



本也可以先对 y 积，不过区域麻烦.

三、坐标变换.

1. 设 $\begin{cases} x = x(u,v,w), \\ y = y(u,v,w), \\ z = z(u,v,w), \end{cases}$ 则 $\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dV$

$$= \iiint_{\tilde{\Omega}} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))\,d\tilde{V}.$$

2. $d\tilde{V}$ 与 dV 的关系：

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv + \frac{\partial x}{\partial w}dw.$$

dy 与 dz 也类似.

$$\therefore dV = \left|\left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial x}{\partial w}\right) \times \left(\frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial w}\right) \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial w}\right)\right| \cdot du\,dv\,dw$$

(用混合积算体积)

$$= \left|\begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{matrix}\right| du\,dv\,dw$$

$$= \left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw.$$

GuangBo

eg. Ω 是球 $x^2+y^2+z^2=2x+4y+6z$ 包围的区域.

求 $\iiint_{\Omega}(x+y+z)\,dxdydz$.

解: 整理球的方程: $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=14$.

令 $\begin{cases} u=x-1 \\ v=y-2 \\ w=z-3 \end{cases} \Rightarrow \left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right|=1$.

$\Omega \to \tilde{\Omega}: u^2+v^2+w^2 \le 14$.

原式 $=\iiint_{\tilde{\Omega}}(u+v+w+6)\,dudvdw$

根据对称性. $\iiint_{\tilde{\Omega}}(u+v+w)\,dudvdw=0$,

严格证明: $\iiint_{\tilde{\Omega}} u\,dudvdw$

$=\iiint_{\substack{\tilde{\Omega}\\ u\ge 0}} u\,dudvdw+\iiint_{\substack{\tilde{\Omega}\\ u\le 0}} u\,dudvdw$

$u\le 0$ 时令 $-u=t$

$\iiint_{\substack{\tilde{\Omega}\\ u\ge 0}} u\,dudvdw-\iiint_{\substack{\tilde{\Omega}\\ t\ge 0}} t\,dt\,dvdw$

$=0$.

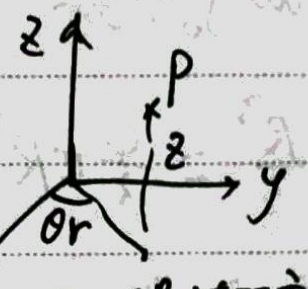
※ 注意 $f(-x,-y,-z)=-f(x,y,z)$, $\iiint_{\tilde{\Omega}} f(x,y,z)\,dxdydz=0$.

GuangBo

M的质量 $= G\iiint_{\Omega} du\,dv\,dw = 6\times\frac{4}{3}\pi\times 14^{\frac{3}{2}} = 112\sqrt{14}\pi.$

3. 柱坐标：两个长度，一个角度 $\to (r,\theta,z)$.

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z. \end{cases}$$



此坐标相当于只变换了 x,y，而 z 保持不变.

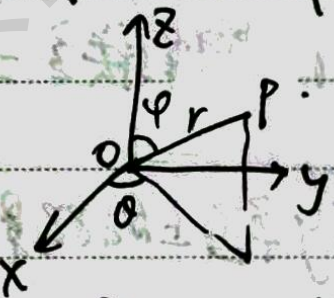
从而 $\left|\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,z)}\right| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$

即 $dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\theta\,dz.$

4. 球坐标：两个角度，一个长度 $\to (r,\theta,\varphi)$.

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi. \end{cases}$$

$0 \le r < +\infty.$
$0 \le \theta < 2\pi$
$0 \le \varphi \le \pi$



$$\left|\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)}\right| = \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi & 0 & -r\sin\varphi \end{vmatrix}$$

$$= r^2\sin\varphi.$$

即 $dx\,dy\,dz = r^2\sin\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi.$

eg. ① 求球 $x^2+y^2+z^2 \le R^2$ 的体积.

解：用球坐标：$\Omega = \{(r,\theta,\varphi) \mid 0 \le r \le R,\ 0 \le \theta < 2\pi,\ 0 \le \varphi \le \pi\}$.

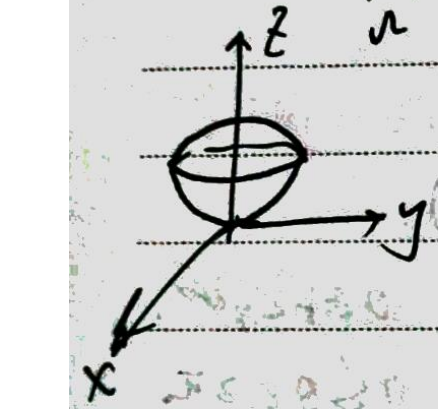
GuangBo

i. $V=\iiint_{x^2+y^2+z^2\le R^2} dxdydz=\iiint_{\Omega} r^2\sin\varphi\, dr d\theta d\varphi$

$=\int_0^{\pi}\sin\varphi\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{R}r^2dr$

$=2\times 2\pi\times\frac{R^3}{3}=\frac{4}{3}\pi R^3.$

② Ω 是上半球 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4\\ z\ge 0\end{cases}$ 与抛物面 $x^2+y^2=3z$ 围成的区域，求 $\iiint_{\Omega} z\,dxdydz$.



解：用柱坐标求解：

$\Omega\to\Omega'$：是 $r^2+z^2=4$ 与 $r^2=3z$ 围成的区域.

两方程联立 $\Rightarrow\begin{cases}z=1,\\ r=\sqrt{3}.\end{cases}$

从而 Ω' 在 xy 平面上的投影为 $r\le\sqrt{3}$, $0\le\theta\le 2\pi$.

$\therefore$ 原式 $=\iiint_{\Omega'} z\,r\,dr\,d\theta\,dz$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}}r\,dr\int_{\frac{r^2}{3}}^{\sqrt{4-r^2}}z\,dz$

$=2\pi\cdot\int_0^{\sqrt{3}}r\,dr\cdot\frac{1}{2}\left(4-r^2-\frac{r^4}{9}\right)$

$=\pi\int_0^{\sqrt{3}}\left(4r-r^3-\frac{r^5}{9}\right)dr=\frac{13}{4}\pi.$

③ Ω 是 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 \\ z\geq 0 \end{cases}$ 与 $x^2+y^2=z^2$ 围成的区域.

求 $\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,dxdydz$.

解、用球坐标求解.



$\Omega \to \Omega'$：边界为 $r=R$ 与 $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

上球面　上锥面.

$\therefore \Omega' = \{(r,\theta,\varphi) \mid 0\leq r\leq R,\ 0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{4},\ 0\leq\theta\leq 2\pi\}$.

$\therefore$ 原式 $= \iiint_{\Omega'} r^2 \cdot r^2\sin\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi$.

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\,d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^4\,dr$

$= (1-\frac{\sqrt{2}}{2})\cdot 2\pi\cdot\frac{R^5}{5} = \frac{2-\sqrt{2}}{5}\pi R^5$.

④ 求椭球 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1$ 的体积.

解：令 $\begin{cases} x=ar\sin\varphi\cos\theta \\ y=br\sin\varphi\sin\theta \\ z=cr\cos\varphi \end{cases}$ 其中 $\begin{cases} 0\leq r\leq 1 \\ 0\leq\varphi\leq\pi \\ 0\leq\theta\leq 2\pi \end{cases} \equiv \Omega$.

$\left|\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)}\right| = abcr^2\sin\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi$.

$\therefore$ 原式 $= \iiint_{\Omega} abcr^2\sin\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi \int_0^1 r^2\,dr \cdot abc$

$= \frac{4}{3}\pi abc$.

GuangBo

No. 70 Date: 4.5

⑤ $\Omega = \{(x,y,z) \mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \le 1\}$.

求 $\iiint_\Omega \sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}\,dxdydz$.

解：令 $\begin{cases} x = ar\sin\varphi\cos\theta \\ y = br\sin\varphi\sin\theta \\ z = cr\cos\varphi \end{cases}$

$\Omega \to \Omega'$: $\{(r,\theta,\varphi) \mid 0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le\varphi\le\pi\}$.

$\therefore$ 原式 $= \iiint_{\Omega'} r \cdot abc\, r^2\sin\varphi\, dr d\theta d\varphi$

$= \int_0^1 r^3 dr \int_0^\pi \sin\varphi\, d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \cdot abc$

$= abc \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot 2\pi = \pi abc$.

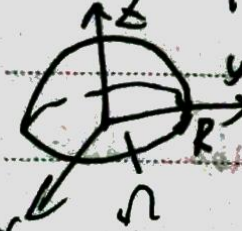
四、重积分的应用

1. 计算质心位置：$x_C = \frac{\iiint_V x\rho dV}{\iiint_V \rho dV}$，$y_C$、$z_C$ 类似.

e.g. 求半球质心的位置（书对）

解：半球密度可设为 ρ.

根据对称性，C一定在z轴上.



也可以证明这一点：

$\iiint_\Omega x\,dxdydz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^R r\sin\varphi\cos\theta \cdot r^2\sin\varphi\, dr d\theta d\varphi$

由于 $\int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta = 0$，故上式为0.

GuangBo

同理 $\iiint_\Omega y\,dxdydz = 0$.

而 $\iiint_\Omega z\,dxdydz = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^R r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\,drd\theta d\varphi$.

$= \int_0^R r^3dr\int_0^{2\pi}d\theta\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi$.

$= \frac{R^4}{4}\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}R^4$.

$\therefore z_c = \frac{\frac{\pi}{4}R^4}{\frac{2}{3}\pi R^3} = \frac{3}{8}R$.

二、转动惯量的计算

eg. 求球 $\Omega: x^2+y^2+(z-1)^2\le 1$ 关于 y 轴的转动惯量.

解：作变换 $\begin{cases}\tilde{x}=x\\ \tilde{y}=y\\ \tilde{z}=z-1\end{cases}$ 则 $\Omega\to\Omega': \{(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})\,|\,\tilde{x}^2+\tilde{y}^2+\tilde{z}^2\le 1\}$.

则 $I_y = \iiint_\Omega (x^2+z^2)\,dxdydz = \iiint_{\Omega'}\left(\tilde{x}^2+(\tilde{z}+1)^2\right)d\tilde{x}d\tilde{y}d\tilde{z}$.

而 $\iiint_{\Omega'}\tilde{x}^2\,d\tilde{x}d\tilde{y}d\tilde{z} = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\sin^2\varphi\cos^2\theta\cdot r^2\sin\varphi\,drd\theta d\varphi$

$= \int_0^{\pi}\sin^3\varphi\,d\varphi\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta\int_0^1 r^4dr$

$= \frac{4}{3}\times\pi\times\frac{1}{5} = \frac{4}{15}\pi$.

$\iiint_{\Omega'}\tilde{z}^2\,d\tilde{x}d\tilde{y}d\tilde{z} = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\cos^2\varphi\cdot r^2\sin\varphi\,drd\theta d\varphi$

物质来的公文君

GuangBo

No. 72 Date: 4.5

$= \int_0^1 r^4 dr \int_0^{\pi} \cos^2\varphi \sin\varphi d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta$

$= \frac{1}{5} \times \frac{2}{3} \times 2\pi = \frac{4}{15}\pi.$

$\iiint_{\Omega'} 2\tilde{z}\, d\tilde{x}\, d\tilde{y}\, d\tilde{z} = 2 \cdot \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\cos\varphi \cdot r^2 \sin\varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi$

$= 2\int_0^1 r^3 dr \cdot \int_0^{\pi} \sin\varphi\cos\varphi d\varphi \cdot \int_0^{2\pi} d\theta = 0.$

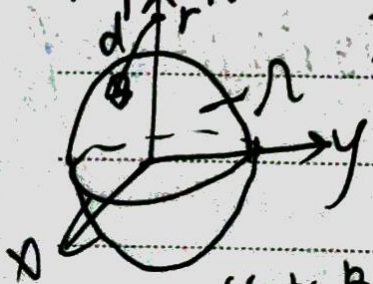
$\iiint_{\Omega'} 1 \cdot dx\,dy\,dz \xrightarrow{\text{球体积}} \frac{4}{3}\pi.$

$\therefore I_y = \frac{4}{15}\pi + \frac{4}{15}\pi + \frac{4}{3}\pi = \frac{28}{15}\pi.$

3、引力的求解

e.g. 求半径为R、密度为ρ的球对z轴上任一点处单位质量的质点的引力大小.

解：根据对称性，这个力仍沿z轴.（证明与前面类似）



取点 $(0,0,a)$ $(a>0)$，则 $dF = dF_z = G \cdot \frac{\rho dV}{d^2} \cdot \frac{\Delta z}{d}$

$= G \cdot \frac{\rho dV}{x^2+y^2+(z-a)^2} \cdot \frac{z-a}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}.$

（先指定 $z>a$）

$\therefore F = \iiint_{\Omega} G \cdot \frac{\rho\, dx\,dy\,dz\,(z-a)}{(x^2+y^2+(z-a)^2)^{\frac{3}{2}}}.$

采用"薄片"方式叠加，它等于



$$G\rho\int_{-R}^{R}\left(\iint_{x^2+y^2\le R^2-z^2}\frac{z-a}{(x^2+y^2+(z-a)^2)^{\frac{3}{2}}}dxdy\right)dz.$$

$$=G\rho\int_{-R}^{R}(z-a)dz\cdot\iint_{\substack{0\le r\le\sqrt{R^2-z^2}\\0\le\theta\le 2\pi}}\frac{rdrd\theta}{(r^2+(z-a)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=G\rho\int_{-R}^{R}(z-a)dz\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot(-2)(r^2+(z-a)^2)^{-\frac{1}{2}}\Big|_0^{\sqrt{R^2-z^2}}$$

$$=G\rho\times 2\pi\int_{-R}^{R}(z-a)\cdot\left(\frac{1}{|z-a|}-\frac{1}{\sqrt{R^2-2az+a^2}}\right)dz$$

而 $\int_{-R}^{R}\frac{z-a}{|z-a|}dz=\int_{-R}^{R}\operatorname{sgn}(z-a)dz$

$$=\begin{cases}\int_{-R}^{R}(-1)dz=-2R, & a>R\\ \int_{a}^{R}(-1)dz+\int_{-R}^{a}dz=-2a, & 0<a<R\end{cases}$$

$$\int_{-R}^{R}\frac{z-a}{\sqrt{R^2-2az+a^2}}dz=\int_{-R}^{R}(z-a)\cdot\left(-\frac{1}{a}\right)d\sqrt{R^2-2az+a^2}$$

$$=-\frac{1}{a}(z-a)\sqrt{R^2+a^2-2az}\Big|_{-R}^{R}+\frac{1}{a}\int_{-R}^{R}(R^2+a^2-2az)^{\frac{1}{2}}dz$$

$$=-\frac{1}{a}(R-a)|R-a|-\frac{1}{a}(R+a)^2-\frac{1}{3a^2}|R-a|^3+\frac{1}{3a^2}(R+a)^3$$

GuangBo

No. 74 Date: 4.5

$$= \begin{cases} \frac{2R^3}{3a^2} - 2R, & a \geq R, \\ -\frac{4}{3}a, & a < R. \end{cases}$$

$$\text{故 } F = \begin{cases} -\frac{4G\rho\pi R^3}{3a^2}, & a \geq R, \\ -\frac{4}{3}G\rho\pi a, & a < R. \end{cases}$$

负号表明是引力.

§4 反常重积分

一、无界区域上的反常二重积分.

1. 设 $B_R=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le R^2\}$. 若 Ω 是无界区域，可定义 $I_R=\iint\limits_{\Omega\cap B_R} f\,d\sigma$. 则反常重积分 $\iint\limits_{\Omega} f\,d\sigma=\lim\limits_{R\to+\infty} I_R$（如果存在）.

eg. $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx=\lim\limits_{R\to+\infty}\int_0^R e^{-x}dx=\lim\limits_{R\to+\infty}(1-e^{-R})=1$.

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}dxdy=\lim_{R\to+\infty}\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} e^{-x^2-y^2}dxdy$$

$$=\lim_{R\to+\infty}\iint\limits_{\substack{0\le r\le R\\ 0\le\theta\le 2\pi}} e^{-r^2}\cdot r\,dr\,d\theta=\pi\lim_{R\to+\infty}(1-e^{-R^2})=\pi.$$

2. 上述定义可以推广至任意形状的覆盖：

对无界区域 Ω，有一区域序列 $\{D_i\}$ 满足 $D_1\subset D_2\subset\cdots\subset D_n\subset\cdots$ 且 $\bigcup\limits_i D_i=\mathbb{R}^2$.

则 $\iint\limits_{\Omega} f\,d\sigma=\lim\limits_{I\to+\infty}\sum\limits_i\iint\limits_{\Omega\cap D_i} f\,d\sigma$（如果存在）.

GuangBo

这个定义可以用别的形状的 D_i 来覆盖.

eg. ① 令 $D_R=\{(x,y)\mid |x|\le R,|y|\le R\}$.

则 $\iint_{\mathbb{R}^2\cap D_R} e^{-x^2-y^2}dxdy=\iint_{D_R} e^{-x^2-y^2}dxdy$

$=\int_{-R}^{R}\left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2-y^2}dy\right)dx$

$=\left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2}dx\right)^2$.

从而 $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}dxdy=\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)^2=\pi$.

我们可以从中得出 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$.

② $\Omega=\{(x,y)\mid 0\le x\le y\}$. 求 $\iint_{\Omega} e^{-(x+y)}dxdy$.

解: 令 $\Omega_R=\{(x,y)\mid 0\le x\le y\le R\}$.

则 $\iint_{\Omega_R} e^{-(x+y)}dxdy=\int_0^R dx\int_x^R e^{-x-y}dy$

$=\int_0^R e^{-x}\cdot(e^{-x}-e^{-R})dx$

$=\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}+e^{-x-R}\right)\Big|_0^R$

$=\frac{1}{2}(1-e^{-2R})+e^{-2R}-e^{-R}$.

$\therefore$ 原式 $=\lim_{R\to+\infty}\left(\frac{1}{2}(1-e^{-2R})+e^{-2R}-e^{-R}\right)=\frac{1}{2}$.

也可以在积分时就取极限:

原式 $=\int_0^{+\infty}dx\int_x^{+\infty}e^{-x-y}dy=\int_0^{+\infty}e^{-2x}dx=\frac{1}{2}$.

物理学霸化大君

GuangBo

3. 无界区域上反常重积分敛散性判定.

(1) 比较判别法: 对于无界区域 Ω, 若 $|f| \le g$, 且 $\iint_{\Omega} g\,d\sigma$ 收敛, 则 $\iint_{\Omega} f\,d\sigma$ 收敛.

* 对于反常二重积分, 可积等价于绝对可积.

于是上述定理可以改写:

对于无界区域 Ω, 若 $0 \le f \le g$, 且 $\iint_{\Omega} g\,d\sigma$ 收敛, 则 $\iint_{\Omega} f\,d\sigma$ 收敛; 若 $\iint_{\Omega} f\,d\sigma$ 发散, 则 $\iint_{\Omega} g\,d\sigma$ 发散.

(2) Cauchy 判别法: 用到 $\frac{1}{r^p}$.

* 先讨论 $\iint_{\Omega} \frac{1}{r^p}\,dx\,dy$ 的敛散性, 其中 $\Omega = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \ge 1\}$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$.

解: 用极坐标计算:

$$\text{原式} = \lim_{R\to+\infty} \iint_{\substack{1\le r\le R \\ 0\le\theta\le 2\pi}} \frac{1}{r^p}\cdot r\,dr\,d\theta$$

$$= 2\pi \cdot \int_1^{+\infty} r^{1-p}\,dr.$$

从而 $p>2$ 时它收敛, $p\le 2$ 时它发散.

* Cauchy: $\exists M>0$, $|f| \le \frac{M}{r^p}$, $p>2$ $\Rightarrow \iint_{\Omega} f\,d\sigma$ 收敛.

$\exists M>0$, $|f| \ge \frac{M}{r^p}$, $p\le 2$ $\Rightarrow \iint_{\Omega} f\,d\sigma$ 发散.

(3) 直积无界区域: $[a,+\infty)\times[b,+\infty) = \{(x,y) \mid x\ge a,\ y\ge b\}$

则 $\iint\limits_{[a,+\infty)\times[b,+\infty)} f\,dxdy = \lim\limits_{\substack{R_1\to+\infty\\ R_2\to+\infty}} \int_a^{R_1}dx\int_b^{R_2} f\,dy$

$= \int_a^{+\infty}dx\int_b^{+\infty} f\,dy$. (如果存在)

二、无界函数的反常重积分.

1. 定义 2 为有界区域 Ω, f 在 P_0 点处无界. 取 $D=O_\varepsilon(P_0)$, 则 $\iint\limits_{\Omega\setminus D} f\,d\sigma$ 是可计算的. 从而可定义反常积分

$$\iint\limits_{\Omega} f\,d\sigma = \lim_{\varepsilon\to0^+}\iint\limits_{\Omega\setminus D} f\,d\sigma.$$

2. 再次讨论 $\frac{1}{r^p}$ 的点之敛散性.

设 $\Omega=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le1\}$. $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le\varepsilon^2\}$.

则 $\iint\limits_{\Omega}\frac{1}{r^p}dxdy = \lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\iint\limits_{\Omega\setminus D}\frac{1}{r^p}dxdy$

$= \lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\iint\limits_{\substack{\varepsilon<r\le1\\ 0\le\theta\le2\pi}}\frac{1}{r^p}\cdot r\,dr\,d\theta = 2\pi\int_0^1 r^{1-p}dr$.

由此, $p<2$ 时上式收敛, $p\ge2$ 时上式发散.

特别地, $\iint\limits_{x^2+y^2\ge1}\frac{1}{r^\alpha}dxdy$ 与 $\iint\limits_{x^2+y^2\le1}\frac{1}{r^\alpha}dxdy$ 同发散.

eg. ① $\Omega=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le x\}$. 求 $\iint\limits_{\Omega}\frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解: 在极坐标中, $\Omega\to\Omega'=\{(r,\theta)\mid -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ 0\le r\le\cos\theta\}$

$\therefore$ 原式 $= \iint\limits_{\Omega'}\frac{1}{r}\cdot r\,dr\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\cos\theta}dr = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta = 2$.

GuangBo

② $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le 1\}$. 求 $\iiint_{\Omega}\frac{dxdydz}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}$.

解：用球坐标求简单. $\Omega'=\{(r,\theta,\varphi)\mid 0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le\varphi\le\pi\}$

原式 $=\iiint_{\Omega'}\frac{r^2\sin\varphi}{\sqrt{1-r^2}}dr\,d\theta\,d\varphi$

$=\int_0^1\frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}}dr\int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi\int_0^{2\pi}d\theta$

$=4\pi\times\int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}-\sqrt{1-r^2}\right)dr$

$=4\pi\times\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\pi^2$.

§5 曲线积分.

一、曲线的长度

1. L 是 $\mathbb{R}^3$ 中的曲线 $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}$ $(\alpha\le t\le\beta)$

则 L 的长度为 $\int_L ds$. 其中 ds 为弧长微元.

2. ds 是的话，$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}$

$=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt$.

所以 $\int_L ds=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt$.

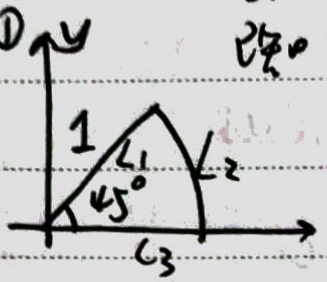
二、第一类曲线积分

1. 设 f 是定义在空间曲线 L 的函数，则在分割无限小时，$\sum_i f_i\Delta s_i\to\int_L f\,ds$.

2. 根据 ds 表达式, $\int_L f\,ds = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt$.

3. 2对于 $\mathbb{R}^2$ 上的曲线 $L:\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}$ 则

$\int_L f(x,y)\,ds = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$.

e.g. ① 

设 L 是 $y=x$, $x^2+y^2=a^2$ 与 x 轴在第一象限围成的曲线, 求 $\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,ds$ $(a>0)$

解: L_1: $y=x \Rightarrow \begin{cases}x=t\\ y=t\end{cases}$ $t\in(0,\frac{\sqrt{2}}{2}a)$.

L_2: $x^2+y^2=a^2 \Rightarrow \begin{cases}x=a\cos t\\ y=a\sin t\end{cases}$ $t\in(0,\frac{\pi}{4})$

L_3: $y=0$, $x=t$, $t\in(0,a)$.

$\int_{L_1} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,ds = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a} e^{\sqrt{2}t}\cdot\sqrt{2}\,dt = e^a-1$.

$\int_{L_2} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,ds = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^a\cdot a\,dt = \frac{\pi}{4}ae^a$.

$\int_{L_3} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,ds = \int_0^a e^t\cdot dt = e^a-1$.

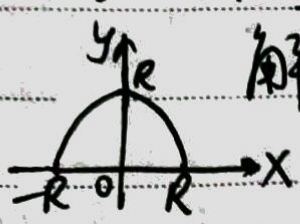
$\therefore \int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,ds = 2(e^a-1)+\frac{\pi}{4}ae^a$.

※第一类曲线积分要求 dt 永远大于0, 因此要选择合适的上下限. 如 L_2 上的积分必须从0到 $\frac{\pi}{4}$, 不可以反过来.

② L 是螺旋线 $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=a\sin t\\ z=bt\end{cases}$ $t\in(0,2\pi)$, 求 $\int_L(x^2+y^2+z^2)\,ds$.

解: 原式 $=\int_0^{2\pi}(a^2+b^2t^2)\sqrt{a^2+b^2}\,dt = 2\pi\sqrt{a^2+b^2}\left(a^2+\frac{4}{3}\pi^2b^2\right)$.

③ 一金属丝弯成上半圆 $y=\sqrt{R^2-x^2}$（记为L），其质量线密度 $\rho(x,y)=x^2+y$，求其质心坐标.



解：$L:\begin{cases}x=R\cos\theta\\ y=R\sin\theta\end{cases}\quad\theta\in(0,\pi)$.

$$\int_L x\rho\,ds=\int_0^{\pi}R\cos\theta\,(R^2\cos^2\theta+R\sin\theta)\cdot R\,d\theta$$

$$=R^4\int_0^{\pi}\left(\cos^3\theta+\frac{\cos\theta\sin\theta}{R}\right)d\theta=0$$

即质心横坐标为0.

$$\int_L y\rho\,ds=\int_0^{\pi}R\sin\theta\,(R^2\cos^2\theta+R\sin\theta)R\,d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}(R^4\cos^2\theta\sin\theta+R^3\sin^2\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{R^3}{6}(3\pi+4R).$$

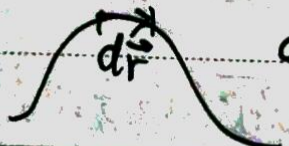
质量 $\int_L\rho\,ds=\int_0^{\pi}(R^2\cos^2\theta+R\sin\theta)R\,d\theta=\frac{R^2}{2}(\pi R+4)$.

故质心纵坐标为 $\frac{\int_L y\rho\,ds}{\int_L\rho\,ds}=\frac{R(3\pi+4R)}{3(\pi R+4)}$.

三、第二类曲线积分

1. 产生的目的：计算一个向量值函数在轨迹方向上的作用.

$dW=\vec{F}\cdot d\vec{r}$. 即 $\int_L dW=\int_L\vec{F}\cdot d\vec{r}$.

2. 

$d\vec{r}$ 是一个微小向量.

$d\vec{r}=(dx,dy,dz)$.

若 $L:\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\\ z=z(t),\end{cases}$ 则 $d\vec{r}=(x',y',z')dt$.

记 $\vec{\tau}=(x',y',z')$ 为t切向量，则 $\vec{F}\cdot d\vec{r}=\vec{F}\cdot\vec{\tau}\,dt$.

3. 若 $\vec{F}=(F_1,F_2,F_3)$，则 $\vec{F}\cdot d\vec{r}=F_1dx+F_2dy+F_3dz$.

这里 $dx=x'dt$，$dy=y'dt$，$dz=z'dt$. dt可以是负的，这是因为 $\vec{F}\cdot d\vec{r}$ 有走向的标志. $\overrightarrow{dr}$ $\overleftarrow{dr}$

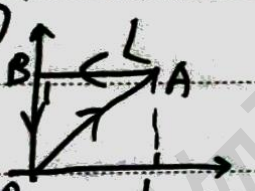
4. 性质：线性性 — $\int_L(\alpha\vec{F}+\beta\vec{G})\cdot d\vec{r}=\alpha\int_L\vec{F}\cdot d\vec{r}+\beta\int_L\vec{G}\,d\vec{r}$.

可加性 — $\int_{L_1+L_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{L_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}+\int_{L_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}$.

有向性 — L反向成 L^-，则 $\int_L\vec{F}\cdot d\vec{r}=-\int_{L^-}\vec{F}\cdot d\vec{r}$.

5. 计算公式：$\int_L\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_\alpha^\beta(F_1x'+F_2y'+F_3z')dt$.

这里要求t从α单调变化到β，写作 $t:\alpha\to\beta$.

e.g.① 

L是逆时针走向的一个三角形.

求 $\int_L 2xydx-x^2dy$.

解：$OA:\begin{cases}x=t\\ y=t\end{cases}$ $t:0\to1$ $\quad AB:\begin{cases}x=t\\ y=1\end{cases}$ $t:1\to0$

$BO:\begin{cases}x=0\\ y=t\end{cases}$ $t:1\to0$

$\therefore\int_{OA}2xydx-x^2dy=\int_0^1(2t^2-t^2)dt=\frac{1}{3}$.

$\int_{AB}2xydx-x^2dy=\int_1^0 2t\,dt=-1$.

$\int_{BO}2xydx-x^2dy=\int_1^0 0\,dt=0$.

$\therefore\int_L 2xydx-x^2dy=-\frac{2}{3}$.

GuangBo

若 $L:\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\\ z=z(t),\end{cases}$ 则 $d\vec{r}=(x',y',z')dt$.

记 $\vec{\tau}=(x',y',z')$ 为t切向量，则 $\vec{F}\cdot d\vec{r}=\vec{F}\cdot\vec{\tau}\,dt$.

3. 若 $\vec{F}=(F_1,F_2,F_3)$，则 $\vec{F}\cdot d\vec{r}=F_1dx+F_2dy+F_3dz$.

这里 $dx=x'dt$，$dy=y'dt$，$dz=z'dt$. dt可以是负的，这是因为 $\vec{F}\cdot d\vec{r}$ 有走向的标志. $\overset{\frown}{d\vec{r}}$ $\overset{\frown}{d\vec{r}}$

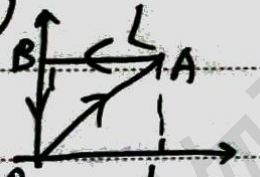
4. 性质：线性性 — $\int_L(\alpha\vec{F}+\beta\vec{G})\cdot d\vec{r}=\alpha\int_L\vec{F}\cdot d\vec{r}+\beta\int_L\vec{G}\,d\vec{r}$.

可加性 — $\int_{L_1+L_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{L_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}+\int_{L_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}$.

有向性 — L反向成 L^-，则 $\int_L\vec{F}\cdot d\vec{r}=-\int_{L^-}\vec{F}\cdot d\vec{r}$.

5. 计算公式：$\int_L\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_\alpha^\beta(F_1x'+F_2y'+F_3z')dt$.

这里要求t从α单调变化到β. 写作 $t:\alpha\to\beta$.

e.g. ① 

L是逆时针走向的一个三角形.

求 $\int_L 2xydx-x^2dy$.

解：$OA:\begin{cases}x=t\\ y=t\end{cases}$ $t:0\to1$ $\quad AB:\begin{cases}x=t\\ y=1\end{cases}$ $t:1\to0$

$BO:\begin{cases}x=0\\ y=t\end{cases}$ $t:1\to0$

$\therefore\int_{OA}2xydx-x^2dy=\int_0^1(2t^2-t^2)dt=\frac{1}{3}$.

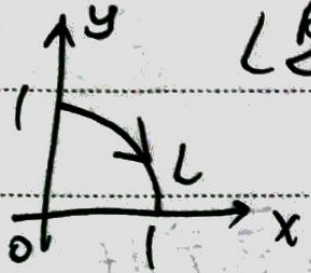
$\int_{AB}2xydx-x^2dy=\int_1^0 2t\,dt=-1$.

$\int_{BO}2xydx-x^2dy=\int_1^0 0\,dt=0$.

$\therefore\int_L 2xydx-x^2dy=-\frac{2}{3}$.

GuangBo

No. 82 Date: 4.10

② 

L是单位圆在第一象限的部分，从(0,1)到(1,0)

求 $\int_L -x^2dx+xydy$.

解：$L:\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\end{cases}$ $t:\frac{\pi}{2}\to 0$

原式 $=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(-\cos^2 t,\sin t\cos t)(-\sin t,\cos t)dt$

$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(\sin t\cos^2 t+\sin t\cos^2 t)dt$

$=-\frac{2\cos^3 t}{3}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0}=-\frac{2}{3}$.

物理系的公文君

③ $L:\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=b\sin\theta \\ z=\frac{h}{2\pi}\cdot\theta \end{cases}$ $\theta: 0\to 2\pi$.

求 $\int_L (x^2-yz)dx+(y^2-zx)dy+(z^2-xy)dz$.

解: $I=\int_0^{2\pi}(a^2\cos^2\theta-b\sin\theta\cdot\frac{h}{2\pi}\theta,\ b^2\sin^2\theta-a\cos\theta\cdot\frac{h}{2\pi}\theta,\ \frac{h^2}{4\pi^2}\theta^2-ab\cos\theta\sin\theta)$

$\cdot(-a\sin\theta, b\cos\theta, \frac{h}{2\pi})d\theta$

$=\int_0^{2\pi}(-a^3\cos^2\theta\sin\theta+\frac{abh}{2\pi}\theta\sin^2\theta+b^3\sin^2\theta\cos\theta-\frac{abh}{2\pi}\theta\cos^2\theta$

$+\frac{h^3}{8\pi^3}\theta^3-\frac{abh}{2\pi}\cos\theta\sin\theta)d\theta=\frac{1}{3}h^3$.

GuangBo

从中可以发现 $\int_L x^2dx = \int_L y^2dy = \int_L z^2dz = 0$.

6. 由于 $d\vec{r} = \vec{\tau}\cdot dt$，其中 $\vec{\tau} = (x', y', z')$，则

$\int_L \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_L (\vec{F}\cdot\vec{\tau})dt$.

若取 t 为弧长参数 s，则 $\vec{\tau} = (\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds})$.

此时 $|\vec{\tau}| = \sqrt{(\frac{dx}{ds})^2 + (\frac{dy}{ds})^2 + (\frac{dz}{ds})^2} = 1$，单位切向量.

记 $\vec{\tau} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$，则

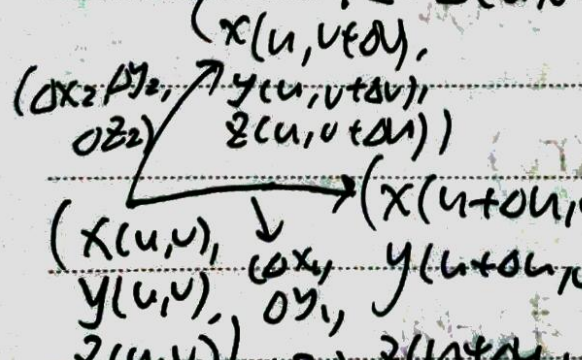
$\int_L \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_L (F_1\cos\alpha + F_2\cos\beta + F_3\cos\gamma)ds$.

可见两类曲线积分是有联系的，$\vec{F}$ 在 L 上的第二类曲线积分等于 $\vec{F}$ 在 L 上切向分量的第一类曲线积分.

§6 第一类曲面积分.

一、曲面的面积.

1. 对于曲面 $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$，它的面积需取微元分析.



$$\text{量纲}, \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta y_1 \\ \Delta z_1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \frac{dx}{du} \\ \frac{dy}{du} \\ \frac{dz}{du} \end{pmatrix} du.$$

$$\begin{pmatrix} \Delta x_2 \\ \Delta y_2 \\ \Delta z_2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \frac{dx}{dv} \\ \frac{dy}{dv} \\ \frac{dz}{dv} \end{pmatrix} dv.$$

No. 84 Date: 4.12

于是这张成的平行四边形面积为

$$\left| du\left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right) \times dv\left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right) \right|$$

$$= \left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \right\| du dv.$$

$$= \sqrt{\left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)^2}\, du dv.$$

它是面积微元 dS.

另种记法: $dS = \left[\left(\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\right)\left(\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right) - \left(\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} du dv.$

记 $r_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)$, $r_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)$,

则 $dS = \sqrt{|r_u|^2 |r_v|^2 - (r_u \cdot r_v)^2}\, du dv$

可以用 $|r_u \times r_v|^2 = (r_u \times r_v)\cdot(r_u \times r_v)$

$= r_u \times r_v \cdot (r_u \times r_v)$

$= (r_u \cdot r_u)(r_v \cdot r_v) - (r_u \cdot r_v)^2$ 来证明.

记 $E = r_u^2$, $F = r_u \cdot r_v$, $G = r_v^2$, 则 $dS = \sqrt{EG - F^2}\, du dv$.

物理学的风度君

eg. 求球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的面积.

解: 球 Ω: $\begin{cases} x=R\sin\varphi\cos\theta \\ y=R\sin\varphi\sin\theta \\ z=R\cos\varphi \end{cases}$ $\begin{matrix}\theta\in(0,2\pi)\\ \varphi\in(0,\pi)\end{matrix}\Big\}\to\Omega'$

$r_\theta=(-R\sin\varphi\sin\theta,\ R\sin\varphi\cos\theta,\ 0)$

$r_\varphi=(R\cos\varphi\cos\theta,\ R\cos\varphi\sin\theta,\ -R\sin\varphi)$

$E=R^2\sin^2\varphi.\quad G=R^2.\quad F=0.$

$\therefore S_\Omega=\iint_{\Omega'}\sqrt{R^4\sin^2\varphi}\,d\theta d\varphi$

$=R^2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi=4\pi R^2.$

(也即 $\iint_\Omega dS=\iint_{\Omega'}\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv.$)

2. 令 $u=x,\ v=y$, 则 $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}=1$, $\dfrac{D(y,z)}{D(u,v)}=-\dfrac{\partial z}{\partial x}$,

$\dfrac{D(z,x)}{D(u,v)}=-\dfrac{\partial z}{\partial y}$. 故 $\iint_\Omega dS=\iint_{\Omega'}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy.$

e.g. 上题中, $S_\Omega=2\iint_{x^2+y^2\le R^2}\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)^2}\,dx\,dy$

$=2R\iint_{\substack{0\le r\le R\\ 0\le\theta\le 2\pi}}\frac{r\,dr\,d\theta}{\sqrt{R^2-r^2}}=2R\int_0^{2\pi}d\theta\cdot\int_0^R\frac{r\,dr}{\sqrt{R^2-r^2}}$

$=4\pi R^2.$

物理学院 冯文君

No. 86 Date: 4.12

在这里, $r_x=(1,0,-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}})$.

$r_y=(0,1,-\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}})$

最终 $EG-F^2=\frac{1}{R^2-x^2-y^2}$.

(一般情况: $E=1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2$, $F=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$, $G=1+(\frac{\partial z}{\partial y})^2$.)

二. 第一类曲面积分.

1. 设f定义在曲面S上的函数 $f(x,y,z)$,

若 $\lim_{\max\{\Delta S_i\}\to 0}\sum f(x_i,y_i,z_i)\Delta S_i=\iint_S f\,dS$ (极限存在).

2. 性质: 线性性 —— $\iint_S(\alpha f+\beta g)dS=\alpha\iint_S f\,dS+\beta\iint_S g\,dS$.

可加性: $\iint_{S_1+S_2} f\,dS=\iint_{S_1} f\,dS+\iint_{S_2} f\,dS$.

物理系的学长君

(或者: $|r_u' \times r_v'| = |r_u'||r_v'|\sin\theta = |r_u'||r_v'|\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$= \sqrt{|r_u'|^2|r_v'|^2 - (|r_u'||r_v'|\cos\theta)^2}$

$= \sqrt{|r_u'|^2|r_v'|^2 - (r_u' \cdot r_v')^2}$.

e.g.① 求 $\iint_S \sin\frac{z}{2}\,dS$, 其中 S: $\begin{cases} x = u\cos v, \\ y = u\sin v, \\ z = v, \end{cases}$ $0 \le u \le a$, $0 \le v \le 2\pi$.

解: $r_u' = (\cos v, \sin v, 0)$, $r_v' = (-u\sin v, u\cos v, 1)$

故 $E = 1$, $G = 1+u^2$, $F = 0$.

GuangBo

$$\therefore \text{原式} = \iint_{S'} \sin\frac{v}{2}\sqrt{1+u^2}\,du\,dv$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin\frac{v}{2}\,dv \int_0^a \sqrt{1+u^2}\,du.$$

$$= 2a\sqrt{1+a^2} + 2\ln\left(a+\sqrt{1+a^2}\right).$$

② 一个球面上各点的密度与该点到 z 轴的距离成正比. 求它的质量 M.

解：密度 $\rho(x,y,z) = k\sqrt{x^2+y^2}$.

又 $z = \sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

$$\therefore dS = \sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)^2}\,dx\,dy$$

$$= \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy. \quad S' = \{(x,y)\mid x^2+y^2 \le R^2\}.$$

$$\therefore M = \iint_S \rho\,dS = \iint_{S'} k\sqrt{x^2+y^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R kr\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-r^2}}\cdot r\,dr$$

$$= 2\pi kR\int_0^R \frac{r^2}{\sqrt{R^2-r^2}}\,dr = \frac{k}{2}\pi^2R^3.$$

③ 求密度为 1 的圆锥面 $z^2 = x^2+y^2\ (0 \le z \le b)$ 对于点 $(0,0,a)$ $(a>b)$ 处单位质量的质点产生的引力.

GuangBo

No. 88 Date: 4.17

解：根据对称性，合力分沿z轴方向

$$dF_z = G\frac{dm}{r^2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = G\frac{1\cdot dS}{r^2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore F_z = \frac{\sqrt{2}}{2}G\iint_{\Sigma}\frac{dS}{r^2}$$

$$\Sigma: z=\sqrt{x^2+y^2}\quad dS=\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\,dxdy$$

$$=\sqrt{2}\,dxdy.\quad \Omega=\{(x,y)\mid a^2\le x^2+y^2\le b^2\}.$$

$$\because r^2=x^2+y^2+z^2=2(x^2+y^2)$$

$$\therefore F_z=\frac{\sqrt{2}}{2}G\iint_{\Omega}\frac{1}{2(x^2+y^2)}\cdot\sqrt{2}\,dxdy$$

$$=\frac{1}{2}G\int_0^{2\pi}d\theta\int_a^b\frac{1}{r^2}\cdot r\,dr \quad \text{这里}r\text{是平面中的}\sqrt{x^2+y^2}\text{与前面的}r\text{含义不同.}$$

$$=G\pi\ln\frac{b}{a}.$$

§7 第二类曲面积分.

一、意义：计算一个向量值函数在曲面法向上的积分：

$$\sum_i(\vec{F}_i\cdot\vec{n}_i)\Delta S_i\to\iint_S\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\iint_S\vec{F}\cdot d\vec{S}.$$

其中$|\vec{n}|=1$，且$d\vec{S}=\vec{n}\,dS$.

二、有向曲面

1. Möbius带：是典型的单侧曲面（相对于正反面被连通）。不需要过边界即可将整个带子走一遍。

2. 有向曲面一定是双侧的，正反面之间只直接连通。外法向与内法向有一定区别。

3. 对于曲面的切平面的求角平：

若曲面为 $\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \\ z=z(u,v) \end{cases}$，则它在一点处有两个特殊的

切向量 r_u' 与 r_v'（定义与前一节相同）

从而切平面法向量为 $r_u' \times r_v' = \left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)}, \frac{D(z,x)}{D(u,v)}, \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right)$.

（原则上是 $\pm r_u' \times r_v'$）

这便与 $\iint \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$ 中的 $\vec{n}$ 有关。由此，在计算积分时必须确定 $\vec{n}$ 的方向。

4. 一般取 $\vec{n}$ 为单位向量 $(\cos(n,x), \cos(n,y), \cos(n,z))$，其中 (n,x)、(n,y)、(n,z) 分别是 $\vec{n}$ 与 x、y、z 轴的夹角。

由此，$\cos^2(n,x) + \cos^2(n,y) + \cos^2(n,z) = 1$。

三个 cos 值的符号决定了 $\vec{n}$ 的方向：

$\cos(n,x) > 0 \Rightarrow$ 朝前。　$\cos(n,y) > 0 \Rightarrow$ 朝右。

$\cos(n,z) > 0 \Rightarrow$ 朝上。

对应也有朝后、朝左、朝下。

GuangBo

No. 90 Date: 4.17, 4.19

三、第二类曲面积分的计算

1. 由于 $\vec{n}=\pm\frac{r_u'\times r_v'}{|r_u'\times r_v'|}$（保证 $|\vec{n}|=1$），故

$$\iint \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\pm\iint \vec{F}\cdot(r_u'\times r_v')\cdot\frac{dS}{|r_u'\times r_v'|}.$$

根据上节的结论，$dS=\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$

$$=|r_u'\times r_v'|\,du\,dv.$$

从而 $\iint \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\pm\iint \vec{F}\cdot(r_u'\times r_v')\,du\,dv.$

若 $\vec{F}=(F_1,F_2,F_3)$，则 $(r_u'\times r_v')\cdot\vec{F}$ 是个混合积，它等于

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}\equiv D,\ \text{则}\iint \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\pm\iint_D D\,du\,dv.$$

物理学习笔记

2、性质①对于一个曲面的两侧 S^+ 与 S^-，有

$$\iint_{S^+} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = -\iint_{S^-} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS.$$

② 线性性、可加性（略）

3、与第一类曲面积分的关系

(1) 对于 $\vec{n}=(\cos(n,x),\cos(n,y),\cos(n,z))$.

有 $\iint \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\iint (P_1\cos(n,x)+P_2\cos(n,y)+P_3\cos(n,z))\,dS.$

物理系的学文君

(2) 考察 $\iint F_1\cos(n,x)dS$，有 $\cos(n,x)dS = dydz$.

但是：$\cos(n,x)$ 有正负，所以这里的 $dydz$ 一般记为 $dy\wedge dz$，以与之前的 $dydz$ 相区别.

同理，$\cos(n,y)dS = dz\wedge dx$，$\cos(n,z)dS = dx\wedge dy$.

这是第二类曲面积分与二重积分最重要的差别之一.

于是，有记法 $\iint \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iint F_1 dy dz + F_2 dz dx + F_3 dx dy$.

eg. 已知曲面 $\Sigma: \begin{cases} y = 2x^2+z^2, \\ x^2+z^2\le 1 \end{cases}$ (左侧)，求 $\iint_\Sigma (x+y)dzdx$.

解：Σ 在 x,z 平面内的投影为 $x^2+z^2\le 1$，而 $dz\wedge dx = -dxdz$.

$\therefore$ 原式 $= -\iint_{x^2+z^2\le 1} (x+2x^2+z^2)dzdx$

$= -\int_{\substack{0\le r\le 1\\ 0\le\theta\le 2\pi}} (r\cos\theta + 2r^2 - r^2\sin^2\theta)\,r\,dr\,d\theta$

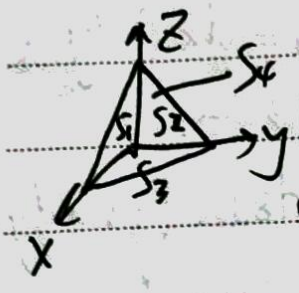
$= -\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{3}\cos\theta + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sin^2\theta\right)d\theta$

$= -\frac{3}{4}\pi$.

物理系部分资料

② 已知流速场 $\vec{v}=(x+1)\vec{i}+y\vec{j}+\vec{k}$，曲面 Σ 是由点 $(-1,0,0)$、$(0,1,0)$、$(0,0,1)$ 构成的三棱锥的表面，求该流速场从 Σ 中流出的量。

解：求流出量，应以外侧为正。



S_4：$x+y+z=1$，$\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$。

（*向内：$\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,-1,-1)$）。

$$\therefore \iint_{S_4}\vec{v}\cdot\vec{n}\,dS=\iint_{S_4}(x+1,y,1)\cdot\frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}dS$$

$$=\iint_{S_4}(x+y+2)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}dS=\iint_{S_3}(x+y+2)\,dxdy.$$

这里用到 $dS=\sqrt{1^2+1^2+1^2}\,dxdy=\sqrt{3}dxdy$，而 S_4 在 xy 平面内的投影就是 S_3：$\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x\}$。

$$\therefore \iint_{S_4}\vec{v}\cdot\vec{n}\,dS=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(x+y+2)\,dy$$

$$=\int_0^1\left[(x+2)(1-x)+\frac{1}{2}(1-x)^2\right]dx=\frac{4}{3}.$$

S_3：$z=0$，$\vec{n}=(0,0,-1)$。

$$\therefore \iint_{S_3}\vec{v}\cdot\vec{n}\,dS=\iint_{S_3}(-1)\,dS=\iint_{S_3}(-1)\,dxdy$$

$$=-\iint_{S_3}dxdy=-\frac{1}{2}.$$

S_2：$x=0$，$\vec{n}=(-1,0,0)$。

$\therefore \iint_{S_2} \vec{v}\cdot\vec{n}\,dS = -\iint_{S_2}(x+1)dS = -\iint_{S_2} dS = -\frac{1}{2}$.

$S_1: y=0,\ \vec{n}=(0,-1,0)$.

$\therefore \iint_{S_1} \vec{v}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_{S_1}(-y)\,dxdz = 0$.

最终，总流量 $\iint_{\Sigma} \vec{v}\cdot\vec{n}\,dS = \frac{4}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{3}$.

③ Σ 是圆锥 $x^2+y^2 \le z^2 \le h^2$ 的表面的外侧 $(z>0)$.

$\vec{F} = (y-z, z-x, x-y)$. 求 $\iint_{\Sigma} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$.

解：对于锥面 $\underbrace{x^2+y^2-z^2=0}_{\text{记为}\Sigma_1}$，$\vec{n} = \underbrace{\frac{(2x,2y,-2z)}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}$ (向外).

即 $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, -1\right)$.

$\therefore \iint_{\Sigma_1} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_{\Sigma_1} (y-z, z-x, x-y)\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, -1\right) dS$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_{\Sigma_1} 2(y-x)\,dS$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_{x^2+y^2\le h^2} 2(y-x)\cdot\sqrt{2}\,dxdy$

$= 2\int_0^{2\pi}(\sin\theta-\cos\theta)\,d\theta \int_0^h r\cdot r\,dr = 0$.

GuangBo

No. 94 Date: 4.19

若Σ的平面部分为Σ_2 $(z=h)$，则$\vec{n}=(0,0,1)$.

$$\iint_{\Sigma_2}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\iint_{\Sigma_2}(x-y)\,dxdy=0.$$

从而$\iint_{\Sigma}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=0$.

另另一思路：先把$dx\wedge dy$，$dy\wedge dz$，$dz\wedge dx$搞清楚.

对于Σ_1，它在三个坐标平面各有投影，记为D_{xy}，D_{yz}，D_{zx}.

现$dz\wedge dx$在Σ_1的$y\le 0$的部分等于$-dzdx$，在Σ_1的$y\ge 0$的部分等于$+dzdx$.

从而$\iint_{\Sigma_1}(z-x)\,dz\wedge dx=\iint_{D_{zx}}(z-x)\cdot(-dzdx)$

$$+\iint_{D_{zx}}(z-x)\cdot(+dzdx)=0.$$

同理，$\iint_{\Sigma_1}(y-z)\,dy\wedge dz=0$，又$\iint_{\Sigma_1}(x-y)\,dx\wedge dy=0$.

从而$\iint_{\Sigma_1}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=0$.

本题中Σ_1具有极好的对称性，因此积分中含项被抵消.

④ 求 $\oint_{\Sigma} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$. 其中,

Σ: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ (外侧).

解: 令 $\begin{cases} x = a+R\sin\varphi\cos\theta, \\ y = b+R\sin\varphi\sin\theta, \\ z = c+R\cos\varphi. \end{cases}$ 其法向量为

$$\vec{n} = \left(\frac{D(y,z)}{D(\varphi,\theta)}, \frac{D(z,x)}{D(\varphi,\theta)}, \frac{D(x,y)}{D(\varphi,\theta)}\right).$$

$$= (R^2\sin^2\varphi\cos\theta, R^2\sin^2\varphi\sin\theta, R^2\sin\varphi\cos\varphi)$$

$$= R^2\sin\varphi(\sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi).$$

对应的单位向量为 $\pm(\sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi)$.

对于 Σ 外侧, $z\geq 0$ 时 $R\cos\varphi\geq 0$, $z\leq 0$ 时 $R\cos\varphi\leq 0$.

因此取 $\vec{n} = +(\sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi)$, 它可以表示 Σ 的外侧.

$$\therefore \text{原式} = \iint_{\Sigma} (x^2, y^2, z^2)\cdot(R^2\sin^2\varphi\cos\theta, R^2\sin^2\varphi\sin\theta, R^2\sin\varphi\cos\varphi)\,d\theta d\varphi$$

$$= \cdots = \frac{8}{3}\pi R^3(a+b+c).$$

⑤ 立是 $x=0$, $y=0$, $z=0$, $z=1$, $y=1$, $x=1$ 围成的正方体的外侧. 求 $\oint_{\Sigma} x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy$.

解: S_1: $\vec{n} = (-1,0,0)$.

$$\iint_{S_1} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_{S_1} -x\,dydz = 0. \quad (x=0)$$

S_1 S_2 S_3 S_4 S_5 S_6

GuangBo

No. 96 Date: 4.21

$S_6: \vec{n}=(1,0,0)$. $\iint_{S_6}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\iint_{S_6}x\,dy\,dz$

$=\iint_{S_6}1\cdot dy\,dz=1$.

类似地可计算 $S_2\sim S_5$ 的积分值.

⑥ Σ 是柱面 $x^2+y^2=1\ (0\le z\le 3)$ 的外侧. 求

$\iint_\Sigma x^2\,dy\,dz+y^2\,dz\,dx+z^2\,dx\,dy$.

解: 使用柱坐标 $\begin{cases}x=\cos\theta\\ y=\sin\theta\\ z=z\end{cases}$

则 $\vec{n}=(\cos\theta,\sin\theta,0)$.

另外, 柱面上的 $dS=R\,d\theta\,dz=d\theta\,dz$. $(R=1)$

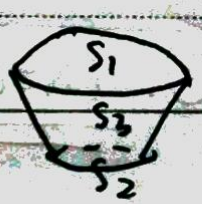
$\therefore$ 原式 $=\iint_\Sigma(x^2,y^2,z^2)(\cos\theta,\sin\theta,0)\,dS$

$=\iint_\Sigma(\cos^3\theta+\sin^3\theta)\,dS$

$=\int_0^3 dz\int_0^{2\pi}(\cos^3\theta+\sin^3\theta)\,d\theta$.

⑦ Σ 是旋转面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=1, z=2$ 所围立体表面的外侧. 求 $\iint_\Sigma\frac{e^z\,dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解:



$S_1:\vec{n}=(0,0,1)$.

GuangBo

$\therefore \iint\limits_{S_1} \frac{e^3\,dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \iint\limits_{x^2+y^2\le 4} \frac{e^2\,dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

S_2: $\vec{n}=(0,0,-1)$.

$\therefore \iint\limits_{S_2} \frac{e^3\,dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \frac{e\,dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

S_3: $z=\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow r_x' = \left(1,0,\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$, $r_y' = \left(0,1,\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.

$\therefore \vec{n} = \pm\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1\right)$, 为了取其外侧, 应取

$\vec{n} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1\right)$ (朝下).

$\therefore \iint\limits_{S_3} \frac{e^3\,dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\iint\limits_{1\le x^2+y^2\le 4} \frac{e^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$.

具体计算在此省略.

⑧ Σ 是椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ($z\ge 0$) 的上侧. 求 $\iint\limits_{\Sigma} yz\,dzdx$.

解: $\vec{n} = \left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2}\right)$. 根据所给符号, 不难判定此 $\vec{n}$ 就是外侧法向量.

下面有2种思路: 1° 化成 $\iint\limits_{\Sigma} \frac{yz\cdot\frac{2y}{b^2}}{\sqrt{\frac{4x^2}{a^4}+\frac{4y^2}{b^4}+\frac{4z^2}{c^4}}}\,dS$.

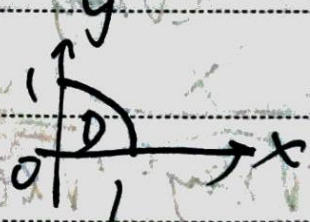
此后将 dS 投影至 xy 平面.

2° 仍用 dzdx 的计算，但左右半球需分开化之.

⑨ $\vec{F}=(xy, yz, zx)$，Σ 是单位球面第一卦限部分的外侧. 求 $\iint_\Sigma \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$.

解：对于单位球，$x^2+y^2+z^2=1$，故 $\vec{n}=(x,y,z)$ 已经是单位向量，并且显然指向外侧.

$\therefore$ 原式 $=\iint_\Sigma (x^2y+y^2z+z^2x)\,dS$.



可以用球坐标或直角坐标化.

方一种：原式 $=\iint_D x^2y+y^2\sqrt{1-x^2-y^2}+(1-x^2-y^2)x\cdot dS$

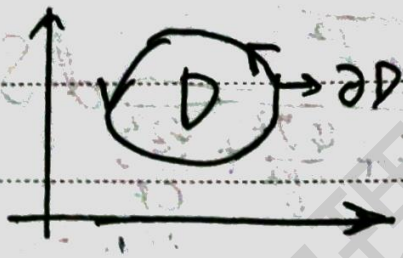
$=\iint_D \left[x^2y+y^2\sqrt{1-x^2-y^2}+(1-x^2-y^2)x\right]\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dx\,dy$.

§8 Green公式、Stokes公式

一、Green公式

1、产生的原因：希望高维积分中也有类似定积分的公式。

2、一个例子：设区域 $D:\{(x,y)\mid a\le y\le b,\ \varphi_1(y)\le x\le\varphi_2(y)\}$，则



$$\oint_{\partial D} x\,dy = \int_{\text{左}} x\,dy + \int_{\text{右}} x\,dy = \int_a^b \varphi_1(y)\,dy + \int_b^a \varphi_2(y)\,dy.$$

GuangBo

物理学院 大君

$= \int_a^b (\varphi_1(y) - \varphi_2(y))dy$.

对于最后这个表达式，它正好就是D的面积，可以写成 $\iint_D dxdy$ 从而 $\oint_{\partial D} x dy = \iint_D dxdy$.

同理，$\oint_{\partial D} y dx = -\iint_D dxdy$.

于是，二重积分与曲线积分之间建立了联系.

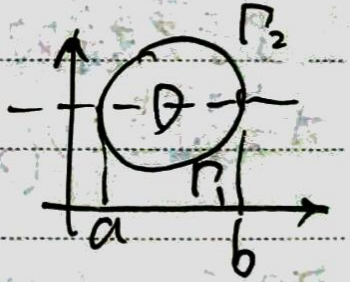
对一般情况：对于边界为∂D的区域D，若选取∂D的逆时针方向作为曲线积分方向，则

$$\oint_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

这便是Green公式.

[证明] 若 $D = \{(x,y) \mid a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$，记D下半为$\Gamma_1$，上半为$\Gamma_2$，则 $\oint_{\partial D} P dx = \int_{\Gamma_1} P dx + \int_{\Gamma_2} P dx$

$= \int_a^b P(x, \varphi_1(x)) dx + \int_b^a P(x, \varphi_2(x)) dx$



$= \int_b^a \left(P(x, \varphi_2(x)) - P(x, \varphi_1(x))\right) dx$

$= -\int_a^b \left(P(x, \varphi_2(x)) - P(x, \varphi_1(x))\right) dx$

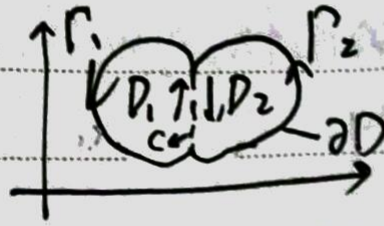
$= -\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy\right) dx$

$= \iint_D \left(-\frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$. 同理 $\oint_{\partial D} Q dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy$.

对于无法用两个单值函数表示边界的区域，可以将其划

No. 100 Date: 4.24

分为较简单的区域. 例如:



此即 $\oint_{\partial D} P\,dx+Q\,dy$

$$=\int_{\Gamma_1} P\,dx+Q\,dy+\int_{\Gamma_2} P\,dx+Q\,dy$$

$$=\int_{\Gamma_1} P\,dx+Q\,dy+\int_{C_上} P\,dx+Q\,dy-\int_{C_上} P\,dx+Q\,dy+\int_{\Gamma_2} P\,dx+Q\,dy$$

$$=\left(\int_{\Gamma_1} P\,dx+Q\,dy+\int_{C_上} P\,dx+Q\,dy\right)+\left(\int_{\Gamma_2} P\,dx+Q\,dy+\int_{C_下} P\,dx+Q\,dy\right)$$

$$=\iint_{D_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy+\iint_{D_2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$$

$$=\iint_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

其中 $C_上, C_下$ 分别表示沿辅助线 C 向上, 向下.

对于更复杂的情形, 也可作类似的分割. 证毕.

*关键点: $P(x,\psi_2(x))-P(x,\psi_1(x))=\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)}\frac{\partial P}{\partial y}\,dy.$

可见 Green 公式是 Newton-Leibniz 公式在二维中的推广.

4. 平面图形 D 的面积 $\iint_D dx\,dy=\frac{1}{2}\oint_{\partial D} x\,dy-y\,dx.$

这可以由 2 得到.

例. ① 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$ 的面积 S.

解: [法一] 用二重积分. (略)

[法二] $S=-\oint_{\partial D} y\,dx=-\int_0^{\pi} b\sin\theta\cdot(-a\sin\theta)\,d\theta$

$=\pi ab.$

GuangBo

[法三] $S=\oint_{\partial D} x\,dy$. (同济)

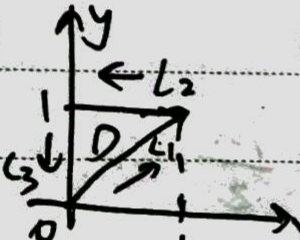
② $L: x^2+y^2=4$ (逆时针). 求 $\oint_L (4y-\sqrt{x^2+x+1})dx+(8x-e^{\cos y})dy$.

解: 由Green公式, 原式 $=\iint_{x^2+y^2\le 4}(8-4)dxdy=4\iint_{x^2+y^2\le 4}dxdy=16\pi$.

我们发现 $\sqrt{x^2+x+1}$ 与 $e^{\cos y}$ 在这个环路积分中没有效果.

※由此: $\oint f(x)dx=0$, $\oint g(y)dy=0$.

它相当于他这3个上下限相等的定积分.

③ 

区域D及其边界方向如图所示. 求 $\iint_D e^{-y^2}dxdy$.

解: [法一] 原式 $=\int_0^1 dy\int_0^y e^{-y^2}dx$.

[法二] $\because \frac{\partial Q}{\partial x}=e^{-y^2}\Rightarrow Q=xe^{-y^2}$.

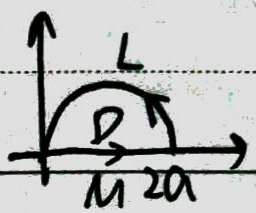
$\therefore$ 原式 $=\oint_{\partial D} xe^{-y^2}dy=\int_{L_1} ye^{-y^2}dy+\int_{L_2} xe^{-y^2}dy+\int_{L_3} 0\cdot e^{-y^2}dy$

$=\int_0^1 ye^{-y^2}dy+\int_1^0 xe^{-y^2}dy+\int_1^0 0\,dy$

$=-\frac{1}{2}e^{-y^2}\Big|_0^1+0+0=\frac{1}{2}(1-e^{-1})$.

此法中, 将 e^{-y^2} 看成 $\frac{\partial Q}{\partial x}$ 是默认 $P=0$, 这样积分较简单.

另外, 原则上 $Q=xe^{-y^2}+\phi(y)$, 但 $\oint\phi(y)dy=0$, 所以 $\phi(y)$ 可忽略.

④ 

L是上半圆 $(x-a)^2+y^2=a^2$ $(y\ge 0)$ (逆时针)

求 $\int_L (e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy$.

解：易使用 Green 公式，补上线段 $M: y=0,\ x: 0\to 2a$.

$$\therefore \oint_{\partial D}(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy$$

$$=\int_L+\int_M=\iint_D(e^x\cos y-e^x\cos y+m)dxdy$$

$$=m\iint_D dxdy=\frac{m}{2}\pi a^2.$$

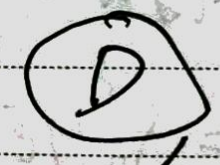
而 $\int_M(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy$

$$=\int_0^{2a}0\,dx=0.$$

ii $\int_L(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy=\frac{m}{2}\pi a^2.$

⑤ 求 $\oint_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$，$L$ 是任意封闭曲线且不包含 $(0,0)$ 点.

$(L\subseteq\mathbb{R}^2)$



解：原式 $=\oint_L(-\frac{y}{x^2+y^2})dx+(\frac{x}{x^2+y^2})dy$.

$$=\iint_D\left(\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}-\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right)dxdy=0.$$

*如果 D 包含 $(0,0)$ 点，取 $D'=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le r^2\}\subseteq D$.

则 $\int_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}-\int_{\partial D'逆}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$

$$=\iint_{D\setminus D'}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0.$$

No. 103 Date: 4.24

这个计算不包含奇点(0,0).

从而原式 $= \oint_{\partial D'} \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} \xrightarrow[y=r\sin\theta]{x=r\cos\theta} \int_0^{2\pi} \frac{(r\cos\theta)^2 d\theta + (r\sin\theta)^2 d\theta}{r^2}$

$= \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi.$

故 $\int_L \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = \begin{cases} 0, & (0,0) \notin (D \cup L). \\ 2\pi, & (0,0) \in D. \\ \underbrace{(\pi, (0,0) \in L.)}_{\text{如果 } L \text{ 在 } (0,0) \text{ 处光滑, 则可以通过“挖半圆”的方式来计算.}} \end{cases}$

5. 留坑. $\iint_D f'(x)\,dx\,dy = \oint_{\partial D} f(x)\,dy.$

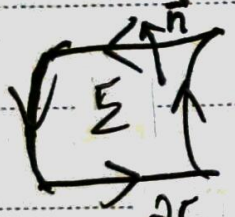
6. ∂D 积分方向的判定：沿边界走，区域在“左边”.



物理系的公共课

二、Stokes公式——Green公式的推广.

1. 侧与方向：对于曲面Σ，若已知$\partial\Sigma$的积分方向，则根据右手法则判断Σ上曲面积分的法向.



2. 公式内容：$\oint_{\partial\Sigma} P\,dx+Q\,dy+R\,dz$

$$=\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\,dz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\,dx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

GuangBo

物理学霸之家

对于空间曲面Σ，其边界上的第二类曲线积分与Σ上的第二类曲面积分有联系.

又当上述积分与z无关时Stokes公式退化成Green公式.

(曲面积分中只剩$dxdy$一项，直接成为二重积分.)

先证明：将Σ在xy面中的投影记为Σ_{xy}显然，$\partial\Sigma$在xy面中的投影就是$\partial\Sigma_{xy}$.

$$\therefore \oint_{\partial\Sigma} P\,dx = \oint_{\partial\Sigma_{xy}} P(x,y,z(x,y))\,dx$$

$$= \iint_{\Sigma_{xy}} -\frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy$$

↳需包括z中所含的y

$$= \iint_{\Sigma_{xy}} -\left(\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)dxdy$$

$$= \iint_{\Sigma_{xy}}\left(-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy + \iint_{\Sigma_{xy}}\left(-\frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right)dxdy$$

下面把这个二重积分转成曲面积分：

假设设Σ的法向量时，则Σ的向量上，$\vec{n}=\dfrac{\left(-\frac{\partial z}{\partial x},-\frac{\partial z}{\partial y},1\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}$.

根据这个向量，上述二重积分即为

$$-\iint_{\Sigma}\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\wedge dy + \iint_{\Sigma}\frac{\partial P}{\partial z}\,dz\wedge dx.$$

[b-项是因为 $\frac{-\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial y})^2+(\frac{\partial z}{\partial x})^2}}dS=\cos(n,y)dS=dz\wedge dx$,

于是 $\oint_{\partial\Sigma}Pdx=-\iint_{\Sigma}\frac{\partial P}{\partial y}dxdy+\iint_{\Sigma}\frac{\partial P}{\partial z}dzdx$.

2打 $\oint_{\partial\Sigma}Qdy$ 与 $\oint_{\partial\Sigma}Rdz$,也有类似的式子.

另外,若Σ不能用单值函数 z(x,y) 表示,则与Green公式的证明类似,可将其进行分割.

($\oint_{\partial\Sigma}Qdy=-\iint_{\Sigma}\frac{\partial Q}{\partial z}dydz+\iint_{\Sigma}\frac{\partial Q}{\partial x}dxdy$,向xy平面投影;

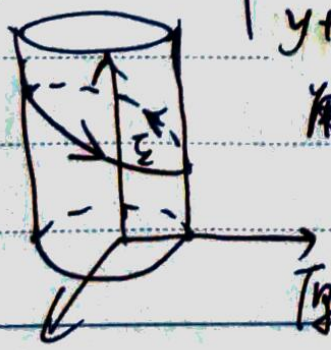
$\oint_{\partial\Sigma}Rdy=\iint_{\Sigma}\frac{\partial R}{\partial y}dydz-\iint_{\Sigma}\frac{\partial R}{\partial x}dzdx$.向xz或yz面投影.)

证毕.

5、行列式记法: $\oint_{\partial\Sigma}Pdx+Qdy+Rdz=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}dydz & dzdx & dxdy\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$.

$=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos(n,x) & \cos(n,y) & \cos(n,z)\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}dS$.

e.g. ① ∂Σ: $\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ y+z=2.\end{cases}$ (逆时针) 求: $\oint_{\partial\Sigma}3zdx+5xdy-2ydz$.



解:Σ的法向是平面 y+z=2 的法向即 $(0,\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2})$

(单位化). 于是:

原式 $=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}0 & \frac{\sqrt2}{2} & \frac{\sqrt2}{2}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 3z & 5x & -2y\end{vmatrix}dS$

GuangBo

$$= \iint_{\Sigma} \left(\frac{5}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}\right) dS = 4\sqrt{2} \iint_{\Sigma} dS.$$

而 $\iint_{\Sigma} dS$ 就是 Σ（椭圆）的面积.

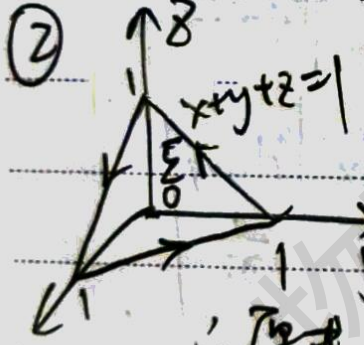
[法一] $\iint_{\Sigma} dS = \sqrt{2} \iint_{x^2+y^2 \le 1} dx\,dy = \sqrt{2}\pi.$

[法二] 用长短轴算，短轴长为1，长轴长为$\sqrt{2}$.

故 $\iint_{\Sigma} dS = \pi a|a\sqrt{2} = \sqrt{2}\pi.$

$\therefore$ 原式 $= 8\pi.$

补充思考：如果Σ不取这个椭圆面，而是别的以 $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y+z=2 \end{cases}$ 为边界的曲面，结果会如何？

② 

$\partial\Sigma$ 是如图的三角形边界（逆时针），求 $\oint_{\partial\Sigma} (y^2-z^2)dx + (z^2-x^2)dy + (x^2-y^2)dz.$

解：Σ 的法向量 $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1).$

$$\therefore \text{原式} = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2-z^2 & z^2-x^2 & x^2-y^2 \end{vmatrix} dS$$

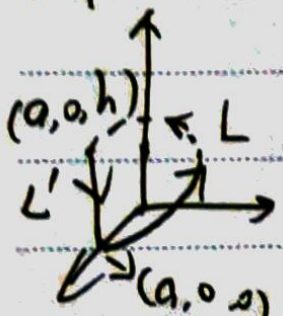
$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \iint_{\Sigma} (-2y-2z-2z-2x-2x-2y)\,dS$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (-4) \iint_{\Sigma} (x+y+z)\,dS = -\frac{4}{3}\sqrt{3} \iint_{\Sigma} dS$$

$$= -\frac{4}{3}\sqrt{3} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -2.$$

③ $L:\begin{cases}x=a\cos\theta,\\ y=a\sin\theta,\\ z=\frac{h}{2\pi}\theta\end{cases}$ 求 $\int_L (x^2-yz)dx+(y^2-zx)dy+(z^2-xy)dz$. $(\theta:0\to 2\pi)$

解：方3用上 Stokes 公式，补上一条边，它是连接点 $(a,0,0)$、$(a,0,h)$ 的线段 L'（向下）. 设它们围成曲面 Σ.



由 $\int_L+\int_{L'}=\iint_\Sigma \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2-yz & y^2-xz & z^2-xy \end{vmatrix}$

$=\iint_\Sigma (-x+x)dydz+(-y+y)dzdx+(-z+z)dxdy=0.$

由 $\int_L=-\int_{L'}=\int_{L'上行}(x^2-yz)dx+(y^2-zx)dy+(z^2-xy)dz$

$=\int_0^h (z^2-a\cdot 0)dz=\frac{1}{3}h^3.$

§9 旋度与无旋场

一、旋度的概念

1. 定义：$\mathrm{rot}\vec{F}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$. 从这个式子看，

$\vec{F}$ 存在旋度要求它存在导数.

2. Stokes 公式的实质：$\oint_{\partial\Sigma}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_\Sigma \mathrm{rot}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$.

3. 对于单连通的向量场 $\vec{F}$，也可以定义旋度；

$\mathrm{rot}\vec{F}\cdot\vec{n}\big|_P = \lim\limits_{\Sigma\to P} \dfrac{\oint_{\partial\Sigma}\vec{F}\cdot d\vec{r}}{S}$. 其中 S 是 Σ 的面积.

$\Sigma\to P$ 表示 Σ 收缩到 P 点.

所以 $\mathrm{rot}\vec{F}\cdot\vec{n}\big|_P = \lim\limits_{\Sigma\to P} \dfrac{\iint_{\Sigma}\mathrm{rot}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS}{S}$.

也用 ∇ 表示: $\mathrm{rot}\vec{F} = \nabla\times\vec{F}$.

e.g. 刚体转动的速度

$\vec{\omega} = (\omega_1,\omega_2,\omega_3)$, $\vec{v} = \vec{\omega}\times(x,y,z)$

$= (\omega_2 z-\omega_3 y)\vec{i} + (\omega_3 x-\omega_1 z)\vec{j} + (\omega_1 y-\omega_2 x)\vec{k}$.

$\therefore \mathrm{rot}\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 2(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$

S_i 称 $\oint_{\partial\Sigma}\vec{F}\cdot d\vec{r}$ 为向量场 $\vec{F}$ 沿 $\partial\Sigma$ 的环量.

二、旋度的运算性质

1. $\nabla\times(\vec{F}+\vec{G}) = \nabla\times\vec{F} + \nabla\times\vec{G}$.
2. $\nabla\times(\lambda\vec{F}) = \lambda\nabla\times\vec{F}$.
3. $\nabla\times(\varphi\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \varphi P & \varphi Q & \varphi R \end{vmatrix}$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y}(\varphi R) - \frac{\partial}{\partial z}(\varphi Q), \text{(同理)}, \text{(同理)}\right)$$

$$= \varphi\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

$$+ \left(R\frac{\partial \varphi}{\partial y} - Q\frac{\partial \varphi}{\partial z}, P\frac{\partial \varphi}{\partial z} - R\frac{\partial \varphi}{\partial x}, Q\frac{\partial \varphi}{\partial x} - P\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right).$$

$$= \varphi \operatorname{rot}\vec{F} + \operatorname{grad}\varphi \times \vec{F}.$$

$$= \varphi(\nabla \times \vec{F}) + (\nabla\varphi) \times \vec{F}.$$

三、无旋场的性质

1. 无旋场 $\vec{F} \Leftrightarrow \nabla \times \vec{F} = 0$.

eg. 证明静电场 $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$ 为无旋场.

证明: $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \equiv \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}(P,Q,R)$.

$$\therefore \nabla \times \vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{-\frac{3}{2}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}(2yz - 2zy, 2zx - 2xz, 2xy - 2yx)$$

$$= (0,0,0).$$

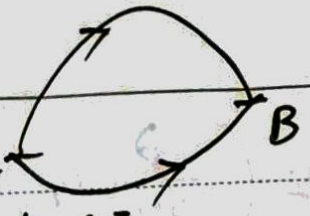
从而 $\vec{E}$ 是无旋场.

2. 对于无旋场 $\vec{F}$, 沿着从 A 点到 B 点的任一曲线积分相等.

物理系的公式君

Guangbo

No. 110 Date: 4.28



即 $\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}$ 是定值，与路径无关.

3. 排除奇点的手段：区别单连通与复连通.

(1) 单连通区域：没有"洞"的区域，对于区域D中的任一曲线L，L一定可以连续收缩到D内某个点.



(2) 复连通区域：有"洞".



如图的曲线L就无法既收缩到一点又不越过D.

4. 原函数存在定理：以下九个结论互相等价(从单连通)

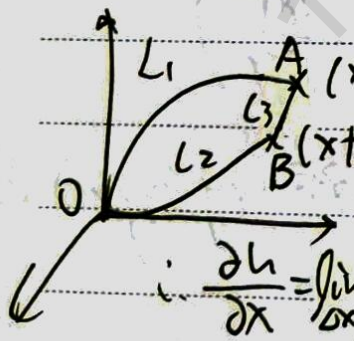
(1) $\nabla\times\vec{F}=0$；　(2) $\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}$ 只与初末位置有关；

(3) 存在函数U使 $dU=\vec{F}\cdot d\vec{r}$，即 $\begin{cases}\frac{\partial U}{\partial x}=P\\ \frac{\partial U}{\partial y}=Q\\ \frac{\partial U}{\partial z}=R\end{cases}$

[证明] (2)→(3):

令 $U=\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)}P\,dx+Q\,dy+R\,dz$.

则 $\frac{\partial U}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{U(x+\Delta x,y,z)-U(x,y,z)}{\Delta x}$.



由于 $\vec{F}$ 的曲线积分与路径无关，故

$\int_{L_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{L_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}+\int_{L_3}\vec{F}\cdot d\vec{r}$.

$\therefore \frac{\partial U}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{U(x+\Delta x,y,z)-U(x,y,z)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_B^A \vec{F}\cdot d\vec{r}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_x^{x+\Delta x}P\,dx}{\Delta x}=P$.

这里B→A选BA连线即可，它恰好与x轴平行，$\int_B^A \vec{F}\cdot d\vec{r}$ 容易算.

GuangBo

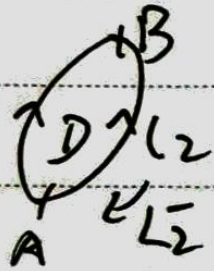
同理 $\frac{\partial u}{\partial y}=0$, $\frac{\partial u}{\partial z}=R$.

(3)→(1): $\mathrm{rot}\vec{F}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix}$

$=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}, \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\right)$

$=0$.

(1)→(2): $\int_{L_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}-\int_{L_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\oint_{L_1\cup L_2^-}\vec{F}\cdot d\vec{r}$



$=\iint_D \nabla\times\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=0$.

$\therefore\int_{L_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{L_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}$. 由 L_1 与 L_2 的任意性可知, $\int_A^B\vec{F}\cdot d\vec{r}$ 与路径无关.

物理系的吴文君

5. 原函数的性质：若 $\vec{F}=\nabla U$，则

$$\vec{F}\cdot d\vec{r}=Pdx+Qdy+Rdz$$

$$=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy+\frac{\partial U}{\partial z}dz=\underline{\underline{dU}}.$$

于是 $\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_A^B dU=U_B-U_A$.

若 $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}$，$t:\alpha\to\beta$，则 $\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_\alpha^\beta U'(t)dt=U\big|_{t=\beta}-U\big|_{t=\alpha}$.

GuangBo

No. 112 Date: 5.3

我们用参数方程更好地证明 $\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = U(B)-U(A)$.

e.g. ① $\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)2} (x-yz)dx+(y^2-xz)dy+(z^2-yx)dz$

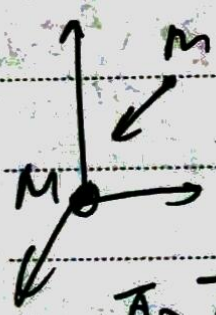
$$= \int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} d\left(\frac{x^3}{3}\right)+d\left(\frac{y^3}{3}\right)+d\left(\frac{z^3}{3}\right)-d(xyz)$$

$$= \int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} d\left(\frac{x^3+y^3+z^3}{3}-xyz\right)$$

$$= \frac{1+1+1}{3}-1-0=0.$$

这里的原函数是 $\frac{x^3+y^3+z^3}{3}-xyz$.

② 引力场的势函数.



$$\vec{F} = \frac{GMm}{r^2}\left(-\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

$$= GMm\left(-\frac{x}{r^3},-\frac{y}{r^3},-\frac{z}{r^3}\right)$$

取 $\vec{G} = \left(-\frac{x}{r^3},-\frac{y}{r^3},-\frac{z}{r^3}\right)$, $U=\frac{1}{r}$,

则 $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^2}\cdot\frac{x}{r} = -\frac{x}{r^3}$.

同理, $\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{y}{r^3}$, $\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{z}{r^3}$,

于是 $\vec{G} = \nabla U$, 也找到了相应势函数.

从而 $\nabla\times\vec{F} = GMm\,\nabla\times\vec{G} = 0$.

物理系的公共课

§10 Gauss公式. 散度.

一、三重如何转为二重



$$\iiint_{\Omega}\frac{\partial R}{\partial z}dxdydz$$

$$=\iint_{\Omega_{xy}}\left(\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)}\frac{\partial R}{\partial z}dz\right)dxdy$$

$$=\iint_{\Omega_{xy}}\Big(R(x,y,\varphi_2(x,y))-R(x,y,\varphi_1(x,y))\Big)dxdy.$$

$$=\iint_{\Omega_{xy}}R(x,y,\varphi_2(x,y))dxdy-\iint_{\Omega_{xy}}R(x,y,\varphi_1(x,y))dxdy\quad(*)$$

考察几边界曲面$\partial\Omega$的取向：如果取外侧，则第一项中，$dxdy=dx\wedge dy$，第二项中，$dxdy=-dx\wedge dy$.

故$(*)=\iint_{\partial\Omega}R\,dx\wedge dy$,

同理，有$\iiint_{\Omega}\frac{\partial Q}{\partial y}dxdydz=\iint_{\partial\Omega}Q\,dz\wedge dx$.

$$\iiint_{\Omega}\frac{\partial P}{\partial x}dxdydz=\iint_{\partial\Omega}P\,dy\wedge dz.$$

GuangBo

二、Gauss公式

1.内容：若$\vec{F}=(P,Q,R)$，则Ω为单连通三维区域，

$$\iint_{\partial\Omega}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\iint_{\partial\Omega}P\,dydz+Q\,dzdx+R\,dxdy$$

$$=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz.$$

2.本公式的证明："一"型最基本的证明.

Ω好无法由两个单值二元函数表示的曲面$\partial\Omega$，可拆成若干个小曲面（分别都在求和时抵消）.

eg.① $\Omega:x^2+y^2+z^2\le 1$.



求$\iiint_{\Omega}dxdydz$.

解：原式$=\iint_{\partial\Omega}z\,dxdy\quad(\vec{F}=(0,0,z))$

$=\iint_{\partial\Omega}y\,dzdx\quad(\vec{F}=(0,y,0))$

$=\iint_{\partial\Omega}x\,dydz\quad(\vec{F}=(x,0,0))$.

比如，用第一个式子算，则

$$\iint_{\partial\Omega}z\,dxdy=\iint_{\partial\Omega_{上}}z\,dxdy-\iint_{\partial\Omega_{下}}z\,dxdy.$$

曲面积分

$$= 2\iint_{D_{xy}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$$

$$= 2\iint_{\substack{0\le r\le 1\\ 0\le\theta\le 2\pi}} \sqrt{1-r^2}\, r\,dr\,d\theta$$

$$= 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,dr = \frac{4}{3}\pi.$$

② Σ 是 Ω: $\begin{cases} x^2+y^2\le 4 \\ 0\le z\le 3 \end{cases}$ 表面外侧.

求 $\iint_\Sigma z^2x\,dydz + x^2y\,dzdx + y^2z\,dxdy$.

解: 原式 $= \iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz$

$$= \iiint_{\substack{0\le r\le 2\\ 0\le\theta\le 2\pi\\ 0\le z\le 3}} (r^2+z^2)\,r\,dr\,d\theta\,dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 dz \int_0^2 (r^3+rz^2)\,dr$$

$$= 2\pi\times\int_0^3 (2z^2+4)\,dz$$

$$= 60\pi.$$

③ Σ 是上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 外侧.

$\vec{v} = (-3y^2-2z,\ 2z-3x^2,\ 3x^2+3y^2)$.

求 $\iint_\Sigma \vec{v}\cdot\vec{n}\,dS$.

No. 16 Date: {1}

取 Ω: $0\le z\le\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

则 $\partial\Omega\setminus\Sigma=\begin{cases}z=0\\ x^2+y^2\le R^2\end{cases}=\Sigma'$. (外侧)

由 $\oint_{\partial\Omega}\vec{v}\cdot\vec{n}\,dS=\iiint_{\Omega}(0+0+0)\,dxdydz=0$

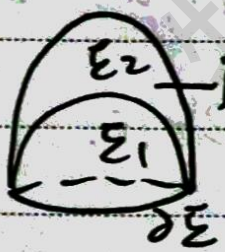
$$=\iint_{\Sigma}\vec{v}\cdot\vec{n}\,dS+\iint_{\Sigma'}\vec{v}\cdot\vec{n}\,dS$$

$$\therefore\iint_{\Sigma}\vec{v}\cdot\vec{n}\,dS=-\iint_{\Sigma'}\vec{v}\cdot\vec{n}\,dS$$

$$=\iint_{x^2+y^2\le R^2}3(x^2+y^2)\,dxdy\to\text{二重积分}.$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R 3r^2\cdot r\,dr=\frac{3}{2}\pi R^4.$$

3. 用Gauss公式解释Stokes公式



由Stokes公式 $-\iint_{\Sigma_1}\mathrm{rot}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$

$$=\iint_{\Sigma_2}\mathrm{rot}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\oint_{\partial\Omega}\vec{F}\cdot d\vec{r}.$$

Σ_1 与 Σ_2 正好包围一块体积, 故

$$\iint_{\Sigma_2}\mathrm{rot}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS-\iint_{\Sigma_1}\mathrm{rot}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$$

$$=\oiint_{\partial D}\mathrm{rot}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS.$$

物理系的公文君

No. 117 Date: 5.3.5

由Gauss公式, $\oiint_{\partial D} \nabla\times\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$

$$=\iiint_D\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\right)dx\,dy\,dz$$

$$=\iiint_D\left(\frac{\partial^2 R}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 R}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 Q}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 P}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 P}{\partial z\partial y}\right)dx\,dy\,dz$$

$=0$. (默认这些二阶偏导可换序)

可见 $\oint_{\partial\Sigma}\vec{F}\cdot d\vec{r}$ 的值与Σ选取无关.

三 散度

1. 定义：若 $\vec{F}=(P,Q,R)$，则 $\mathrm{div}\vec{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$.

2. $\iint\limits_{\partial\Omega}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{div}\vec{F}\,dxdydz$

3. $\mathrm{div}\vec{F}\equiv 0\Leftrightarrow$ 称 $\vec{F}$ 为源场.

   推 $\iint\limits_{\partial\Omega}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=0$.

4. 对存在一些点处不可微的 $\vec{F}$，可重新定义：

$$\mathrm{div}\vec{F}=\lim_{V(\Omega)\to 0}\frac{\iiint\mathrm{div}\vec{F}\,dxdydz}{V(\Omega)}$$

$V(\Omega)$ 是 Ω 的体积.

GuangBo

记 $\operatorname{div}\vec{F} = \lim\limits_{V(\Omega)\to 0} \dfrac{\iint_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS}{V(\Omega)}$.

e.g. 求电场 $\vec{E} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(x,y,z)$ 的散度.

解: $\operatorname{div}\vec{E} = \operatorname{div}\left(\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\cdot \operatorname{grad}\dfrac{1}{r}\right)$

$= -\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\dfrac{1}{r}$.

在无电荷处, div 已有意义, $\operatorname{div}\vec{E}=0$.

* 在这里, 我们可以定义 Laplace 算符 $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$.

于是我们引出两个算符.

四. Hamilton 算符, Laplace 算符.

1. Hamilton 算符 $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$.

2. 梯度 $\nabla f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}\right)$.

旋度 $\nabla\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$.

散度 $\nabla\cdot\vec{F} = \dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}$.

3. Stokes公式：$\oint_{\partial\Sigma} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_{\Sigma} \nabla\times\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$

Gauss公式：$\oiint_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iiint_{\Omega} \nabla\cdot\vec{F}\,dxdydz$

4. Laplace算符：

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$= \nabla\cdot\nabla = \nabla^2$$

$\nabla^2 f$ 相当于梯度的散度，即 $\nabla^2 f = \nabla\cdot(\nabla f) = \mathrm{div}(\mathrm{grad} f)$.

5. 对于三元连续可微函数 u 与 v：

$$\iiint_{\Omega} (\Delta u\cdot v - \Delta v\cdot u)\,dxdydz$$

$$= \iiint_{\Omega} \left((\nabla\cdot(\nabla u))v + \nabla u\cdot\nabla v - \nabla v\cdot\nabla u - (\nabla\cdot(\nabla v))u\right)dxdydz$$

$$= \iiint_{\Omega} \nabla\cdot(v\nabla u - u\nabla v)\,dxdydz$$

$$= \iint_{\partial\Omega} (v\nabla u - u\nabla v)\cdot\vec{n}\,dS.$$

注意到 $\nabla u\cdot\vec{n}$ 与 $\nabla v\cdot\vec{n}$ 均是方向导数，故

上式 $= \iint_{\partial\Omega}\left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right)dS$. 这是偏微分方程中的常用结论.

GuangBo

No. 120 Date: 5.5

6. 调和函数：$\Delta u=0 \Leftrightarrow u$ 是调和函数.

eg. 令 $v=\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}$，则当

$(x,y,z)\neq(x_0,y_0,z_0)$ 时 $\Delta v=0$.

如果 Λ 包含 (x_0,y_0,z_0)，u 是 Λ 上可微的调和函数，则

$$\iiint_{\Lambda}(\Delta u\cdot v-\Delta v\cdot u)\,dxdydz$$

$$=\iint_{\partial\Lambda}\left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)dS$$

$$=\iint_{\partial(\Lambda\setminus B_r)}\left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)dS+\iint_{\partial B_r}\left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)dS$$

其中 $B_r=\{(x,y,z)\mid (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\le r^2\}\subseteq\Lambda$.

一方面，$\iint_{\partial(\Lambda\setminus B_r)}\left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)dS=\iiint_{\Lambda\setminus B_r}(v\Delta u-u\Delta v)\,dxdydz=0$

另一方面，$\iint_{\partial B_r}\left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)dS=\iint_{\partial B_r}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial n}-u\cdot\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right)dS$

$$=\frac{1}{r}\iint_{\partial B_r}\frac{\partial u}{\partial n}dS+\frac{1}{r^2}\iint_{\partial B_r}u\,dS.$$

令 $f\equiv 1$，则 $\iiint_{B_r}(\Delta u\cdot f-\Delta f\cdot u)\,dxdydz$

$$=\iint_{\partial B_r}\frac{\partial u}{\partial n}dS=0.$$

GuangBo

同时, $\lim_{r\to 0}\frac{1}{r^2}\iint_{\partial B_r} u\,dS = \lim_{r\to 0}\frac{4\pi\iint_{\partial B_r} u\,dS}{4\pi r^2}$

$= \lim_{r\to 0}\frac{4\pi\iint_{\partial B_r} u\,dS}{\iint_{\partial B_r} dS} = 4\pi u(x_0,y_0,z_0)$.

由 $\iiint_{\Omega}(v\Delta u - u\Delta v)\,dxdydz$

$= 4\pi\cdot u(x_0,y_0,z_0)$.

可得 $\iint_{\partial\Omega}\left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right)dS = 4\pi\cdot u(x_0,y_0,z_0)$.

也即 Ω 边界的一个积分与 Ω 内的点的函数值有关.

(链接: 静电场高斯定理, 电通量与内部电量有关.)

几乎均值原理: 设调和函数 u, 记

$B_r = \{(x,y,z)\mid (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\le r^2\}$.

则 $u(x_0,y_0,z_0) = \frac{\iint_{\partial B_r} u(x,y,z)\,dS}{4\pi r^2} = \frac{\iint_{\partial B_r} u\,dS}{\iint_{\partial B_r} dS}$.

这个原理可用上一条性质证明.

极值原理: 设调和函数 u, 其在有界闭区域 Ω 内的最值均在 $\partial\Omega$ 上取到.

eg. Σ 是曲面 $x^2+y^2=1$, $z=0$, $z=1$ 所围立体表面外侧. 求

$\iint_{\Sigma}(x-y)\underline{dxdy} + x(y-z)\underline{dydz}$.

(下划线处顺序需注意)

GuangBo

No. 22 Date: 5.5, 5.8

解：原式 $= \iiint_{\Omega} (y-z)\,dxdydz$

$= \iiint_{\substack{0\le r\le 1\\ 0\le\theta\le 2\pi\\ 0\le z\le 1}} (r\sin\theta - z)\, r\,dr\,d\theta\,dz$

$= \int_0^1 r^2 dr \int_0^{2\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^1 dz - \int_0^1 r\,dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 z\,dz$

$= -\frac{\pi}{2}.$

物理系的习题

第九章 级数

§1 数项级数

一、级数的收敛与发散.

1. 对于数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$，其部分和 $S_n=\sum_{i=1}^{n} a_n$.

若存在 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=S$，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

否则，称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

eg. ① $e=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$.（用计算机算 e 的近似值）

② 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛于 $\dfrac{\pi^2}{6}$.

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散.

物理系的刘文君

2、级数收敛的ε-K语言：部分和$\{S_n\}$，若$\forall \varepsilon>0$，$\exists K$，当$n>K$时$|S_n-S|<\varepsilon$，则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

3. Cauchy收敛准则：

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛 $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon>0$, $\exists K$，使得$\forall m,n>K$, $|S_m-S_n|<\varepsilon$.

eg. ① $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$是否收敛？

解：令 $S_n=\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$.

从而 $S_n=1-\frac{1}{n+1}$，故 $\lim_{n\to\infty} S_n=1$.

从而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$收敛于1.

② $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$是否收敛？

解：$S_n=\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}=1+\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \le 1+\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$

$=1+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=2-\frac{1}{n}\le 2$.

又 $S_n>0$. 故$\{S_n\}$有界.

又 $S_{n+1}-S_n=\frac{1}{(n+1)^2}>0$. 故$\{S_n\}$单调有界.

$\therefore \{S_n\}$收敛，也即级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$收敛.

③ $\sum_{n=1}^{\infty} nq^n$ $(0<q<1)$是否收敛？

解：$\because (1-q)\sum_{k=1}^{n} kq^k=(q+2q^2+3q^3+\cdots)-(q^2+2q^3+3q^4+\cdots)$

$=q+q^2+q^3+\cdots+q^n-nq^{n+1}=q\frac{1-q^n}{1-q}-nq^{n+1}$.

$\therefore S_n = \sum_{k=1}^{n} kq^k = \frac{q-q^{n+1}}{(1-q)^2} - \frac{nq^{n+1}}{1-q}$.

$\because \lim_{n\to\infty} nq^{n+1} = 0$, $\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$.

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{q}{(1-q)^2}$. 即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nq^n$ 收敛于 $\frac{q}{(1-q)^2}$.

④ $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{n})$ 是否收敛?

解: $S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{1}{k}) = \sum_{k=1}^{n} \ln\frac{k+1}{k}$

$= \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln k) = \ln(n+1)$.

而 $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$. 故原级数发散.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Rightarrow \{a_n\}$ 收敛于 0. ($S_{n+1} - S_n \to 0$)

(逆命题不成立)

同理, $\forall n, k$, $a_{n+1} + \cdots + a_{n+k} \to 0$.

($S_{n+k} - S_n \to 0$)

以上命题可用于判断级数不收敛.

5. 收敛级数的性质(线性性)

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛:

$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (也收敛)

(反过来, $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ 收敛的结果为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛)

(2) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则将其中有限个项的值修改后的

GuangBo

级数同样收敛.

[证明] 设新级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$, 原级数与新级数分别有部分和 $\{S_n\}$ 与 $\{S'_n\}$.

假设原数列中被换掉的项 $a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_l}$, 其中 $n_1 < n_2 < \cdots < n_l$, 则当 $N_1, N_2 > n_l$ 时,

$$S_{N_1} - S_{N_2} = S'_{N_1} - S'_{N_2}.$$

$\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists k > n_l, \forall N_1, N_2 > K, |S'_{N_1} - S'_{N_2}| < \varepsilon$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ 收敛.

(3) 设 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5) + \cdots$, 也即 b_k 是 $\{a_n\}$ 中连续有限项的和 (即 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 先对其中一部分做加和再成为一个级数), 则 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

[证明] 设 $\{a_n\}$ 与 $\{b_k\}$ 的部分和为 S_n 与 T_k.

显然 $\forall k, \exists N$ 使 $T_k = S_N$.

故 $\{T_k\}$ 实为 $\{S_n\}$ 的一个子列.

由 $\{S_n\}$ 收敛可知 $\{T_k\}$ 收敛于同一极限, 故 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

但是, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ 不一定发散.

eg. $1-1+1-1+\cdots$ 发散, 但

$(1-1)+(1-1)+\cdots$ 收敛.

而原命题逆否命题也成立, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

(4) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛 (即绝对收敛), 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

GuangBo

No. 126 Date: 5.8, 5.10

[证明] ∵ $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛. (设其部分和为 S_n')

∴ $\forall \varepsilon>0$, $\exists K$, $\forall N_1>N_2>K$, $|S_{N_1}'-S_{N_2}'|$

$=|a_{N_2}|+\cdots+|a_{N_1}|<\varepsilon$.

∴ 设 $\{a_n\}$ 部分和为 S_n, 则

$|S_{N_1}-S_{N_2}|=|a_{N_2}+\cdots+a_{N_1}|<|a_{N_2}|+\cdots+|a_{N_1}|<\varepsilon$.

∴ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

不过, 级数本身收敛不能保证绝对收敛.

我们将级数本身收敛而又不绝对收敛称为条件收敛.

二、正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n \geq 0$) 的敛散性判别.

1. 部分和 $S_n \geq 0$; $S_{n+1} - S_n \geq 0$.

也即 $\{S_n\}$ 单调上升(有下界). 于是只有 $\{S_n\}$ 有上界时, 原级数才收敛.

eg. ① 判断 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 的敛散性.

解: $\because \frac{1}{2} + \frac{1}{3} > \frac{2}{4}$, $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} > \frac{4}{8}$,

$\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \sim + \frac{1}{15} > \frac{8}{16}$ ...

$\therefore$ 原式 $> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots$

即部分和 $S_n > 1 + \frac{1}{2}k$. 其中 k 满足 $2^{k-1} < n \leq 2^k$.

即 $k = [\log_2 n] + 1$. 从而 $S_n > 1 + \frac{1}{2}([\log_2 n] + 1)$.

由于 $\frac{1}{2}([\log_2 n] + 1) + 1$ 发散, 故 $\{S_n\}$ 发散. 原级数发散.

② 判断 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 的敛散性.

解: 1° $p \leq 1$, 则 $\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n}$.

GuangBo

$\therefore \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^p} \geq \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n}$.

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散，故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 发散.

2° $p>1$：$\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p} \leq \frac{2}{2^p}$，$\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{7^p} \leq \frac{4}{4^p}$，

$\frac{1}{8^p}+\cdots+\frac{1}{15^p} \leq \frac{8}{8^p}$ ...

$\therefore$ 原式 $\leq 1+\frac{2}{2^p}+\frac{4}{4^p}+\frac{8}{8^p}+\cdots$

$$= 1+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^3+\cdots$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1-\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^n}{1-\frac{1}{2^{p-1}}} = \frac{2^{p-1}}{2^{p-1}-1}.$$

可见原式部分和有上界，故 $p>1$ 时原级数收敛.

2. 比较判别法（由此例而来）：对正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$，

若 $\exists N$，当 $n>N$ 时 $x_n \geq y_n$

1° 若 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 收敛.

2° 若 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散.

3° 若存在 $r=\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$ 且 $r\neq 0$，则两级数敛散性一致.

[证明] 3°：$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = r > 0$（正项级数）.

$\therefore$ 对于 $\varepsilon = \frac{r}{2}$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，$\left|\frac{x_n}{y_n}-r\right| \leq \frac{r}{2}$.

$\therefore \frac{r}{2} < \frac{x_n}{y_n} < \frac{3}{2}r$.

GuangBo

即 $\frac{r}{2}y_n \le x_n \le \frac{3r}{2}y_n$.

$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 收敛，$x_n \le \frac{3}{2}r y_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛.

$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 发散，$x_n \ge \frac{r}{2}y_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散.

① eg 判断 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n+5}$ 的敛散性.

解：$\because \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2+2n+5}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+2n+5} = 1$.

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n+5}$ 收敛.

② 判断 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ 的敛散性.

解：可以知道 $(\ln n)^{\ln n} = e^{\ln(\ln n)\cdot \ln n} = n^{\ln(\ln n)}$.

显然，当 n 充分大时，$\ln(\ln n) > 2$.

此时 $\frac{1}{n^{\ln(\ln n)}} < \frac{1}{n^2}$.

由 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛，可知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln(\ln n)}}$ 收敛，即 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ 收敛.

③ 判断 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n}$ 的敛散性.

解：当 n 充分大时，$n > \ln^2 n$. 故 $\frac{1}{\ln^2 n} > \frac{1}{n}$.

由 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散，可知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n}$ 发散.

3 Cauchy 判别法：对于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$，若存在 $r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$，则

No. 129 Date: 5.10, 5.12

1° $r<1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛；2° $r>1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散.

($r=1$ 时无法判断)

[证明] 1° $0<r<1$ 时, $\lim_{n\to\infty} x_n^{\frac{1}{n}} = r$, 可知 $\forall \varepsilon>0$, $\exists N$, 当 $n>N$ 时 $|x_n^{\frac{1}{n}} - r| < \varepsilon$.

取 $\varepsilon = \frac{1-r}{2}$, 则 $|x_n^{\frac{1}{n}} - r| < \frac{1-r}{2}$, 故 $0 < x_n^{\frac{1}{n}} < \frac{1+r}{2} < 1$.

$\therefore x_n < \left(\frac{1+r}{2}\right)^n$.

由 $\frac{1+r}{2}<1$ 可知 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+r}{2}\right)^n$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛.

2° $r>1$ 时, $\forall \varepsilon>0$, $\exists N$, 当 $n>N$ 时, $|x_n^{\frac{1}{n}} - r| < \varepsilon$.

故 $r-\varepsilon < x_n^{\frac{1}{n}} < r+\varepsilon$.

取 $\varepsilon = \frac{r-1}{2}$, 则 $x_n > \left(\frac{r+1}{2}\right)^n$.

由 $\frac{r+1}{2}>1$ 可知 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r+1}{2}\right)^n$ 发散, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散.

3° $r=1$ 时, 给出以下的例子：

① $x_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散.

② $x_n = \frac{1}{n^2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\right]^2 = 1$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛.

e.g. 判断 $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^5\left(\frac{5}{n}\right)^n$ 的敛散性.

解: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(n+1)^5\left(\frac{5}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}(n+1)^{\frac{5}{n}}\cdot\frac{5}{n}=0<1$.

∴原级数收敛.

4. d'Alembert 判别法: 对正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$, 若存在

$r=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$, 则 $\begin{cases}0<r<1 \Rightarrow \text{收敛}\\ r>1 \Rightarrow \text{发散}\\ r=1 \Rightarrow \text{无法判断}.\end{cases}$

GuangBo

No. 130 Date: 5.12

[证明] 1° $0<r<1$: $\forall \varepsilon>0$, $\exists N$, $\forall n>N$,

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}-r\right|<\varepsilon.$$

取 $\varepsilon=\frac{1-r}{2}$, 则 $0<\frac{x_{n+1}}{x_n}<\frac{1+r}{2}<1$.

记 $\frac{1+r}{2}=q$, 则 $0<x_{n+1}<x_n q<x_{n-1}q^2<\cdots<x_N q^{n-N+1}$.

$\therefore n>N$ 时, 部分和 $S_n=(x_1+\cdots+x_N)+(x_{N+1}+\cdots+x_n)$

$<(x_1+\cdots+x_N)+x_{N+1}(1+q+\cdots+q^{n-N})$.

$\because 0<q<1$ 时, 上面的 $(x_1+\cdots+x_N)+x_{N+1}(1+q+\cdots+q^{n-N})$ 收敛, 故原级数收敛.

2° $r>1$, 取 $\varepsilon=\frac{r-1}{2}$, 则 $\frac{x_{n+1}}{x_n}>\frac{1+r}{2}>1$. ($n>N$ 时)

记 $\frac{1+r}{2}=q$, 则 $x_{n+1}>x_n q>x_{n-1}q^2>\cdots>x_N q^{n-N+1}$.

$\therefore S_n=(x_1+\cdots+x_N)+(x_{N+1}+\cdots+x_n)$

$>(x_1+\cdots+x_N)+x_{N+1}(1+q+\cdots+q^{n-N})$.

$\because q>1$ 时, $1+q+\cdots+q^{n-N}$ 发散. 得原级数发散.

3° $r=1$, 仍进可用之前的例子:

① $x_n=\frac{1}{n}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=1$, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

② $x_n=\frac{1}{n^2}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}=1$, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛.

eg.① 讨论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^n}$ 的敛散性. ($x>0$)

解: 1° $x>1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{1+x^n}=1$.

2° $x=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{1+x^n}=\frac{1}{2}$.

根据级数收敛的必要条件, 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{1+x^n}\neq 0$ 时, 原级数必发散, 故 $x\geq 1$ 时原级数发散.

3° $0<x<1$, $\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{1+x^n}=0$. 此时该级数有可能收敛.

$\because \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x^{n+1}}{1+x^{n+1}}}{\frac{x^n}{1+x^n}}=\lim_{n\to\infty}x\cdot\frac{1+x^n}{1+x^{n+1}}=x<1.$

∴原级数收敛.

(事实上,由 $\frac{x^n}{1+x^n}<x^n$ 与比较判别法即知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^n}$ 收敛.)

综上, $x\geq 1$ 时原级数发散, $0<x<1$ 时原级数收敛.

②讨论 $\sum_{n=1}^{\infty}nq^n$ 的敛散性. $(q>0)$.

解: (用 d'Alembert 判别法)

$\because \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)q^{n+1}}{nq^n}=\lim_{n\to\infty}q\cdot\frac{n+1}{n}=q.$

∴ 1° $q>1$, 原级数发散.

2° $0<q<1$, 原级数收敛.

3° $q=1$, $\sum_{n=1}^{\infty}n$ 显然发散.

③判断 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{2^n\cdot n!}$ 的敛散性.

解: 令 $x_n=\frac{n^n}{2^n\cdot n!}$.

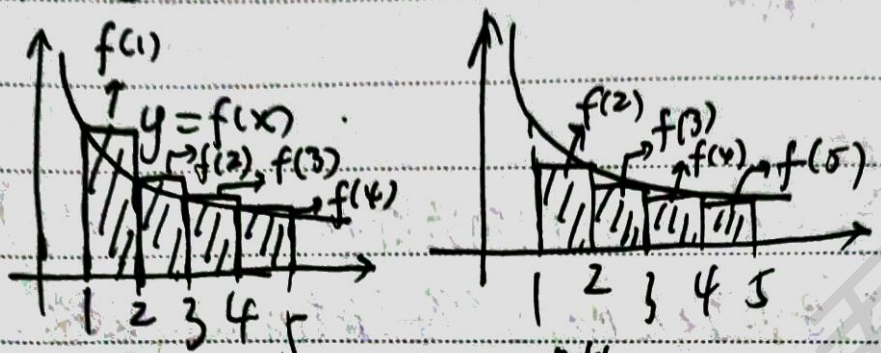
则 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}\cdot(n+1)!}\times\frac{2^n\times n!}{n^n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\times(n+1)\times\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\times\frac{1}{n+1}=\frac{e}{2}>1.$

∴原级数发散.

5. 积分判别法：若函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 单调下降且非负，则 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 与 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 具有相同的敛散性.

[证明]



由以上两图，可知 $f(n+1) \le \int_n^{n+1} f(x)dx \le f(n)$.

(也可用积分中值定理严格证明)

则 $\sum_{n=2}^{N+1} f(n) \le \int_1^N f(x)dx \le \sum_{n=1}^{N} f(n)$.

i) $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛 $\Rightarrow$ 数列 $\{\int_1^N f(x)dx\}$ 单调上升且有界.

又 $\int_1^{[A]} f(x)dx \le \int_1^A f(x)dx < \int_1^{[A]+1} f(x)dx$ $(A \in \mathbb{R}^+)$.

$\therefore \int_1^{+\infty} f(x)dx$ 收敛.

反之，$\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 敛散性时，

由 $\sum_{n=2}^{N+1} f(n) \le \int_1^N f(x)dx$ 可知 $\sum_{n=2}^{N+1} f(n)$ 收敛.

它等价于 $\sum_{n=1}^{N} f(n)$ 收敛.

发散的情况也可类似证明.

例. 讨论 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^q n}$ 的敛散性. $(q>0)$

解：令 $f(x) = \frac{1}{x \ln^q x}$，则 $f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调下降，非负.

GuangBo

而 $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^q x}=\int_2^{+\infty}\frac{d(\ln x)}{\ln^q x}=\begin{cases}\frac{1}{1-q}\ln^{1-q}x\Big|_2^{+\infty}, & q\neq 1,\\ \ln(\ln x)\Big|_2^{+\infty}, & q=1.\end{cases}$

可见，$q>1$ 时，原级数收敛；$0<q\leq 1$ 时，原级数发散.

求阶乘估式：n 充分大时，$n!\to(\frac{2}{e}+\varepsilon)^n(\frac{n}{2})^n$.（$\varepsilon$ 很小）

三、交错级数

1. 定义：$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$，$a_n>0$.

2. 满足 a_n 单调下降且 $a_n\to 0$ 的交错级数叫 Leibniz 级数.

Leibniz 级数一定收敛.

[证明]：$S_{2N+1}-S_{2N-1}=-a_{2N}+a_{2N+1}<0$.

$\therefore\{S_{2N+1}\}$ 单调下降. 又 $S_{2N+1}=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\cdots+(a_{2N-1}-a_{2N})+a_{2N+1}>0$. 故 $\{S_{2N+1}\}$ 有下界.

$\therefore\{S_{2N+1}\}$ 有极限，设为 A.

同理可证 $\{S_{2N}\}$ 有极限（单调上升有上界），设为 B.

又 $\lim_{N\to\infty}(S_{2N+1}-S_{2N})=A-B=\lim_{N\to\infty}a_{2N+1}=0$.

故 $A=B$. 于是 $\lim_{N\to\infty}S_N=A$.（这步证明删去）.

从而原级数收敛.

GuangBo

No. 134 Date: 5.12, 5.15

e.g. ① 求证：$p>0$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ 收敛.

证明：∵ $\{\frac{1}{n^p}\}$ 单调下降且趋于 0. $(p>0)$

∴ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ 收敛.

④ 在 $\{a_n\}$ 单调下降的情况下，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ 收敛 $\Leftrightarrow a_n\to 0$ 是等价的. ∞

物理系白先生君

② 判断 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\sqrt{n^2+1}\,\pi)$ 的敛散性.

解: $\sin(\sqrt{n^2+1}\,\pi) = \sin\left((\sqrt{n^2+1}-n)\pi + n\pi\right)$

$= (-1)^n \sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$.

于是原级数成为交错级数.

又 $\left\{\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\right\}$ 单调下降且趋于0.

∴原级数收敛.

③ 判断 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(e^n+e^{-n})}$ 的敛散性.

解: $x>0$ 时 $\frac{d}{dx}\ln(e^x+e^{-x}) = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} > 0$.

∴ $\ln(e^x+e^{-x})$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调上升.

而 $\lim_{x\to+\infty} \ln(e^x+e^{-x}) = +\infty$.

$\because \left\{\frac{1}{\ln(e^n+e^{-n})}\right\}$ 单调降且趋于0. 原级数收敛.

(四). 绝对收敛

1. 一般级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 的绝对收敛判别法:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = q < 1$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = q < 1$.

由这些方法可以得到 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 本身收敛.

eg. 讨论 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x(x+n)}{n}\right)^n$ 的敛散性.

解: $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\left(\frac{x(x+n)}{n}\right)^n\right|^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{x(x+n)}{n}\right| = |x|$.

1° $|x|<1 \Rightarrow$ 绝对收敛.

2° $|x|>1 \Rightarrow$ 不绝对收敛. $\left(\left(\frac{x(x+n)}{n}\right)^n \not\to |x|^n\right)$, 故原级数也发散.

3° $|x|=1 \Rightarrow$ $\begin{cases} x=1, \text{原式} = \sum_{n=1}^{\infty} (1+\frac{1}{n})^n. \text{由 } (1+\frac{1}{n})^n \to e \neq 0, \text{发散.} \\ x=-1, \text{原式} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1-\frac{1}{n})^n. \text{由 } (1-\frac{1}{n})^n \to \frac{1}{e} \neq 0, \text{发散.} \end{cases}$

2. 绝对收敛是级数本身收敛的充分不必要条件. 不仅要的原因与更序级数有一定关系.

五. 更序级数

1. 定义: 将一个级数求和次序改变后得到的级数.

GuangBo

No. 136 Date: 5.15

eg. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$ (记为A)

与 $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots$ (记为B).

2. 上例中,
如果将B加括号,则 $B=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\right)=\frac{A}{2}$.

可见无限项求和中加括号换律并不成立.

3. 对于绝对收敛的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$, 其任一更序级数绝对收敛于同一值
对于条件收敛的 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$, 其更序级数不绝对收敛.
另外, $\forall\beta\in\mathbb{R}$, 都存在 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 的一个更序级数收敛于 β.
第三句话要求 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛, 而该定理成立的原因在于:
对于条件收敛的 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$, 其正项和必趋于$+\infty$, 负项和必趋于$-\infty$, 故而可以在这一基础上进行更序变换.

六. 级数的乘法.

1. Cauchy乘积: 对角线求积的和.

a_1b_1 a_1b_2 a_1b_3 —
a_2b_1 a_2b_2 a_2b_3 —
a_3b_1 a_3b_2 a_3b_3 —

定义 $c_n=\sum_{i+j=n+1}a_ib_j$
$=a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1$.

Cauchy乘积就是 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$.

提出的意义: 与多项式乘积有关.

即 $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m t^m\right)$

$= \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$. 其中 c_k 即为刚才的定义.

之前的乘积: $d_n = a_1 b_n + a_2 b_n + \cdots + a_n b_n + a_n b_{n-1} + \cdots + a_n b_1$

$a_1 b_1$ $a_1 b_2$ $a_1 b_3$ $\cdots$ 即 $\sum_{n=1}^{\infty} d_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

~~$a_2 b_1$~~ ~~$a_2 b_2$~~ $a_2 b_3$ —

~~$a_3 b_1$~~ ~~$a_3 b_2$~~ ~~$a_3 b_3$~~ ·

3. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 绝对收敛, 则其一切次序的乘积级数 $\sum_{i=1}^{\infty}\left(x_i \sum_{j=1}^{\infty} y_j\right)$ 均绝对收敛, 值为 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} y_n$.

这个值相当于将 $\infty \times \infty$ 矩阵

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ \vdots \end{pmatrix}(y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots) = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & \cdots \\ x_2y_1 & & & \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$$

中的各元素全部加起来.

e.g. 证明 $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$.

(注: $e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$)

解: 首先, (d'Alembert) $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0$.

故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 绝对收敛.

于是, 令 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.

GuangBo

No. 138 Date: 5.15, 5, 17

$f(x)\cdot f(y)$ 写作 Cauchy 乘积：

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^n}{n!}=f(x+y).$$

故 $e^x\cdot e^y=e^{x+y}$.

物理系的公文君

§2 函数项级数

一、函数项级数的概念.

1. 定义：一个与x有关的数项级数，即 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

它是一系列函数的加和，有这个和本身便是一个函数.

2. 收敛域：使 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 收敛的x构成的集合.

3. 函数项级数的收敛：$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, 当 $K, L > N$,

有 $|S_K - S_L| < \varepsilon$. S为部分和.

当N与x无关时，称原级数一致收敛.

在一致收敛条件下，求和(Σ)与积分、求导运算可调换顺序.

例① $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 一致收敛(在任一有界区域上).

证明因为：当 $x \in [-M, M]$ 时，$\left|\frac{x^n}{n!}\right| \le \frac{M^n}{n!}$.

根据 Cauchy 准则，$|S_K - S_L| \le \sum_{n=L+1}^{K} \frac{M^n}{n!}$.

显然 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M^n}{n!}$ 收敛. 故 $|S_K - S_L| < \varepsilon$.

上述过程只依赖 x 取值，故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 一致收敛.

GuangBo

No. 139 Date: 5.17

二、幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的性质

1、若 $x=x_0$ 时 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛，则当 $|x|<|x_0|$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 也收敛.

证：当 $|x|<|x_0|$ 时 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n$.

∵ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ 收敛. ∴ $\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$.

∴ 数列 $\{a_n x_0^n\}$ 有界. 故 $\exists M$ 使 $|a_n x_0^n| \le M$.

故 $|x|<|x_0|$ 时，$|a_n x^n| \le M\left(\frac{x}{x_0}\right)^n$.

∵ $\left|\frac{x}{x_0}\right|<1$. ∴ $\sum_{n=0}^{\infty} M\left(\frac{x}{x_0}\right)^n$ 收敛.

∴ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛.

由此可见，幂级数的收敛域关于数"0"对称，可以写为 $(-r, r)$，$(r>0)$ 我们称 r 为收敛半径.

反过来，若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ 发散，则当 $|x|>|x_0|$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 也发散.

2. 幂级数收敛半径的求解方式

(1) 利用 Cauchy 判别法，若 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = A$，则当 $A|x|<1$ 时收敛，$A|x|>1$ 时发散.

因此，当 $A\neq 0$ 时，收敛半径 $r = \frac{1}{A} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

当 $A=0$ 时，收敛域为 $\mathbb{R}$.

GuangBo

(2) 利用 d'Alembert 判别法,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

记 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = A$, 则 $A|x|<1$ 时收敛,

$A|x|>1$ 时发散.

故收敛半径 $r = \frac{1}{A} = \left(\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)^{-1}$. ($A\neq 0$)

由于一个幂级数的收敛半径唯一, 故在下述两个极限存在的情况下, 有 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$.

eg. ① 求 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 的收敛半径.

解: 系数 $a_n = 1$, 故 $r = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1}} = 1$.

即收敛域为 $(-1,1)$. (端点处易于验证)

② 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 的收敛半径.

解: $\because \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$.

$\therefore r = 1$.

$x=1$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散. $x=-1$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛.

$\therefore$ 收敛域为 $[-1,1)$.

(收敛域要严格确定端点开闭)

类似地，对于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$，有 $r=1$，收敛域为 $[-1,1]$.

③ 对于 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$：$a_n=\frac{1}{n!}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0.$$

$\therefore r=\infty$. 收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

对于 $\sum_{n=0}^{\infty}n!x^n$：$a_n=n!$.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty.$$

$\therefore r=0$. 也即原级数仅在 $x=0$ 处收敛.

④ 对于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}x^n$：$a_n=\frac{n^n}{n!}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

$\therefore r=\frac{1}{e}$.

⑤ 对于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n+(-3)^n}x^{2n-1}$：可直接用 Cauchy 判别法来研究. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{n}{2^n+(-3)^n}x^{2n-1}\right|}=\lim_{n\to\infty}|x|^{2-\frac{1}{n}}n^{\frac{1}{n}}\left|\frac{1}{(-3)^n+2^n}\right|^{\frac{1}{n}}$

物理系研究生文君

$$= x^2 |x| \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3}\right) \left| \frac{1}{1+(-\frac{2}{3})^n} \right|^{\frac{1}{n}}$$

$$= x^2 |x| \times \frac{1}{3} \times 1 = \frac{x^2}{3}.$$

可见 $r = \sqrt{3}$.

又可验证 $x = \pm\sqrt{3}$ 时原级数发散.

故原级数收敛域为 $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

⑥ 对于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{2}+1)^n}{n} (x-\frac{1}{2})^n$: 仅做平移变换.

令 $t = x - \frac{1}{2}$, 则原式 $= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{2}+1)^n}{n} t^n$.

$a_n = \frac{(\sqrt{2}+1)^n}{n}$. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}+1}{n^{\frac{1}{n}}} = \sqrt{2}+1$.

$\therefore r = \sqrt{2}-1$. 收敛域至少是 $t \in (1-\sqrt{2}, \sqrt{2}-1)$.

$t = \sqrt{2}-1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

$t = 1-\sqrt{2}$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 收敛.

$\therefore$ 收敛域为 $t \in [1-\sqrt{2}, \sqrt{2}-1)$, 即 $x \in [\frac{3}{2}-\sqrt{2}, \sqrt{2}-\frac{1}{2})$.

3. 设幂级数收敛半径为 r 的 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 则 $S(x)$ 在 $(-r, r)$ 上连续, 且对 $\forall x \in (-r, r)$, 有

(1) $\lim_{x\to x_0} S(x) = \lim_{x\to x_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\lim_{x\to x_0} a_n x^n)$

$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n = S(x_0)$.

也即求和与求极限可交换次序.

(证明使用到了一致收敛性)

(2) $\forall x_0 \in (-r, r)$, $\int_0^{x_0} S(t)\,dt$

$= \int_0^{x_0} (\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} (\int_0^{x_0} a_n t^n\,dt)$.

也即求和与积分可交换次序.

eg. 用幂级数表示 $\int_0^x e^{t^2}\,dt$;

$e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$.

$\therefore \int_0^x e^{t^2}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \frac{t^{2n}}{n!}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}$.

不过, 这个级数无法写成初等函数.

(3) $S(x)$ 在 $(-r, r)$ 上可导, 且

$S'(x) = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}(a_n x^n)$.

$= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.

↳ 只是0

(4) 上述级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{x_0} a_n t^n\,dt$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 收敛半径也为 r.

GuangBo

No. 144 Date: 5.22

性(1)的证明：首先 $\forall N$，有 $\lim_{x\to x_0}\sum_{n=0}^{N}a_nx^n=\sum_{n=0}^{N}a_nx_0^n$，

且 $\forall\varepsilon>0,\exists N,\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}a_nx^n\right|<\frac{\varepsilon}{4},\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}a_nx_0^n\right|<\frac{\varepsilon}{4}$ $(\varepsilon>0)$

第二个借此可以这样说明：

取 x_0 的 δ 邻域，记 $x_0+\delta=x_1$，则当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|a_nx^n|<|a_nx_1^n|$，$|a_nx_0^n|<|a_nx_1^n|$.$(n>N)$

由限 $\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}a_nx_1^n\right|<\frac{\varepsilon}{4}$，则上述第二个借此成立.

于是，$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，

$$|S(x)-S(x_0)|=\left|\sum_{n=0}^{N}a_nx^n+\sum_{n=N+1}^{\infty}a_nx^n-\sum_{n=0}^{N}a_nx_0^n-\sum_{n=N+1}^{\infty}a_nx_0^n\right|$$

$$\le\left|\sum_{n=0}^{N}a_nx^n-\sum_{n=0}^{N}a_nx_0^n\right|+\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}a_nx^n\right|+\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}a_nx_0^n\right|$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon.\ (\text{这}\delta\text{与}x\text{无关})$$

故 $\lim_{x\to x_0}S(x)=S(x_0)$.

对于积分 $\int_0^x S(t)dt$ 与导函数 $S'(x)$，其收敛半径的计算式与 $S(x)$ 本身的收敛半径完全一致，所以它们收敛半径都相同.

eg① 求 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$.

解：收敛半径为 $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}=1$.

GuangBo

对于 $x\in(-1,1)$，$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot nx^{n-1}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}=1-x+x^2-\cdots=\frac{1}{1+x}$.

故 $S(x)=\int\frac{1}{1+x}dx=\ln(1+x)+C$.

由于 $S(0)=0$，故 $C=0$.

即 $S(x)=\ln(1+x)$，$x\in(-1,1)$.

又与此同时，令 $x=1$，可得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=\ln 2$.

将 x 换成 x^2，有 $\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$.

积分，有 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}=\arctan x$.

它们的收敛半径均为 1.

② 求 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$，并由此计算 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{3^n}$.

解：$S(x)=x\cdot\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'$

$=x\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'=x\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1-x}\right)=\frac{x}{(1-x)^2}$.

当然，要求 $|x|<\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}}=1$.

于是，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{3^n}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$

$=2\times\frac{\frac{1}{3}}{(1-\frac{1}{3})^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=2$.

GuangBo

No. 46 Date: 5.22

③ 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$.

解：原式 $=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$.

收敛半径为 $\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n(n+1)}}}=1$.

先求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$：它的导数为 $\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=1+x+x^2+\cdots=\frac{1}{1-x}$

得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)$.

再求，当 $x\neq0$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}=\frac{1}{x}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n}$

$=\frac{1}{x}\left(-\ln(1-x)-x\right)=-\frac{1}{x}\ln(1-x)-1$.

又 $x=0$ 时原式 $=0$.

∴原式 $=\begin{cases}(\frac{1}{x}-1)\ln(1-x)+1, & x\neq0\text{且}x\in[-1,1)\\ 0, & x=0.\end{cases}$

④ 求 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=S(x)$.

解：收敛半径为 $\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}\right)^{-1}=\infty$.

也即 $S(x)$ 收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

而 $S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=S(x)$.

也即 $\begin{cases}S=\frac{dS}{dx}\\ S(0)=1.\end{cases}$ 解得 $S(x)=e^x$.

GuangBo

No. 147 Date: 5.22

* $f(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots=\sin x$, 如何证明?

(可利用微分方程 $f''(x)=-f(x)$)

三、Taylor级数.

1. Taylor展开: 当 $x\to x_0$ 时,

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

ξ 介于 x_0 与 x 之间.

2. 事实上, 这一展开可以适用于无限多项.

令 $a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, 则 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 在大多数情况下都成立, 但也可能不成立.

eg. $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

可以验证 $f(x)$ 在 0 处有任意阶导数, 且 $\forall n\in\mathbb{N}^*$, 有 $f^{(n)}(0)=0$.

那 $a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=0$, 故 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0\neq f(x)$.

GuangBo

No. 148 Date: 5.22, 5.24

此时的 Taylor 级数完全无法体现 $f(x)$ 的特性.

3. 给定函数 $f(x)$ 与 Taylor 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

则二者相等的充要条件是 $\lim_{N\to\infty} \left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \right| = 0$.

事实上它的含义便是余项趋于0. 即 $\left| \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} x^{N+1} \right| \to 0$.

eg. ① 对于 e^x. $\forall n$, $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$.

∴其 Taylor 级数为 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$.

而余项极限 $\lim_{N\to\infty} \left| \frac{e^{\xi}}{(N+1)!} x^{N+1} \right| = 0$.

∴ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.

物理学院

② 对于 $\sin x$，$\forall n$，有 $f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n}{2}\pi)$.

其 Taylor 级数为 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\frac{n}{2}\pi}{n!} x^n$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$

GuangBo

物理系的吴君

其收敛半径为 $\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(2n+3)!}}{\frac{1}{(2n+1)!}}\right)^{-1}=0^{-1}=+\infty$.

$\forall x\in R$, 考虑极限 $\lim_{N\to\infty}\left|\frac{f^{(2N+2)}(\xi)}{(2N+2)!}x^{2N+2}\right|$.

而 $f^{(2N+2)}(\xi)$ 有界, $\lim_{N\to\infty}\frac{x^{2N+2}}{(2N+2)!}=0$.

故 $\lim_{N\to\infty}\left|\frac{f^{(2N+2)}(\xi)}{(2N+2)!}x^{2N+2}\right|=0$.

从而 $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$

对它求导, 有 $\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$

($x\in R$ 时均成立)

③ 求 $\arctan x$ 的 Taylor 级数.

解: $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$.

而 $\frac{1}{1+x^2}=(1+t)^{-1}\Big|_{t=x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$.

收敛半径为 1.

$\therefore |x|<1$ 时, 积分, $\arctan x=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$

$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$.

GuangBo

No. 15 Date: 5.24

④ 对于 $f(x)=\ln(1+x)$:

$f'(x)=\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \cdot (-1<x<1)$

积分. $f(x)=\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$.

⑤ $f(x)=(1+x)^\alpha$: (α不为正整数)

可以推知 $f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)$.

故 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$.

其中 $\frac{\alpha(\alpha-1)\sim(\alpha-n+1)}{n!}$ 类似于组合数, 记为 $\binom{\alpha}{n}$.

其收敛半径为 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\binom{\alpha}{n+1}}{\binom{\alpha}{n}}\right|^{-1}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right|^{-1}=1$.

需想证明此级数等于 $(1+x)^\alpha$, 还需有条件趋于0 (略)

$$\text{另外, } f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}n x^{n-1}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\sim(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\sim(\alpha-k)}{k!}x^k=\alpha\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha-1)(\alpha-1-1)\sim(\alpha-1-k+1)}{k!}x^k$$

$$=\alpha(1+x)^{\alpha-1}.$$

GuangBo

No. 151 Date: 5.24, 5.26

这个事实可以用 $(1+x)f'(x)=\alpha f(x)$ 来验证.

另外，可以自行验证 $f(x)$ 的收敛域：当 $\alpha\le -1$ 时为 $(-1,1)$，当 $-1<\alpha<0$ 时为 $(-1,1]$，当 $\alpha>0$ 时为 $[-1,1]$.

以上三个是在 α 不为整数时. 若 α 为正整数，则 $f(x)$ 收敛域为 $\mathbb{R}$.

物理竞赛交君

⑥ $f(x)=\arcsin x$.

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}(-x^2)^n.$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\cdots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}(-x^2)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}\times(\frac{1}{2}+1)\cdots(\frac{1}{2}+n-1)}{n!}x^{2n}.$$

$$\text{故 } \arcsin x=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}(-x^2)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)\cdots(\frac{1}{2}+n-1)}{n!(2n+1)}x^{2n+1}$$

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

⑦ 求 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{n}{(n-1)!}x^n$.

解: $S(x)=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{2^n(n-1)!}=x\cdot\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n(n-1)!}$

GuangBo

$$= x \cdot \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^n$$

$$= x \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n \right)$$

$$= x \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{2} e^{\frac{x}{2}} \right) = x \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{4} \right) e^{\frac{x}{2}}.$$

⑧ 将 $f(x) = \frac{1}{x^2}$ 在 $x=3$ 处作幂级数展开.

解: $f(x) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{x-3+3}\right)$

$$= -\frac{1}{3} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\frac{x-3}{3}+1} \right)$$

$$= -\frac{1}{3} \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x-3}{3}\right)^n$$

$$= -\frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^n \left(\frac{x-3}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{3}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n \cdot \frac{(x-3)^{n-1}}{3^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) \cdot \frac{(x-3)^n}{3^{n+2}}.$$

收敛半径为 $\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{3^{n+2}}}{\frac{n}{3^{n+1}}} \right)^{-1} = 3.$

又 $x=0$ 时 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{9}$ 发散. $x=6$ 时 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n+1}{9}$ 发散.

∴ 收敛域为 $(0,6)$.

⑨ 求 $f(x)=\frac{1}{3+5x-2x^2}$ 在0处的Taylor级数

解: $f(x)=\frac{1}{(3-x)(1+2x)}=\frac{A}{3-x}+\frac{B}{1+2x}$.

待定系数 A、B，可解得

$f(x)=\left(\frac{1}{3-x}+\frac{2}{1+2x}\right)\cdot\frac{1}{7}$

$=\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{3}}+\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{1+2x}$

$=\frac{1}{21}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n+\frac{2}{7}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2x)^n$

$=\frac{1}{7}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}-(-2)^{n+1}\right]x^n$.

收敛域为 $\begin{cases}\left|\frac{x}{3}\right|<1\\ |2x|<1\end{cases}$ 即 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

这样展开可以简单地求 $f^{(n)}(0)$.

⑩ 求 $f(x)=\tan x$ 在0处的Taylor展开.

解: $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$. 令 $\tan x=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$

则 $\tan x\cdot\cos x=\sin x\Rightarrow\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}\right)$

$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$.

GuangBo

等号左边用 Cauchy 乘积，有

$$\sinh x = a_0 + a_1 x + \left(a_2 - \frac{a_0}{2!}\right)x^2 + \left(a_3 - \frac{a_1}{2!}\right)x^3 + \cdots$$

对比各项系数，可得 $\tanh x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \cdots$

然而，这个通项并无明确表达式，且收敛域也未定.

七. 用 Taylor 级数做近似计算.

e.g. ① 求 $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ 近似值，精确到 0.0001.

解：由 $e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!}$ 可知

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 x^{2n}dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}.$$

取不小于 0.0001 的项，有

原式 $\approx \sum_{n=0}^{6} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} = 0.7468.$

② 求 $\ln 2$，精确到 0.0001.

解：利用 $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ 可以计算，但计算量可能较大.

GuangBo

我们换一个收敛更快的级数：

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$
$$=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots\right)$$

令 $x=\frac{1}{3}$，则 $\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln 2$.

取前4项和小于0.0001的项，有

$$\ln 2\approx 2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7}\right)=0.6931.$$

5. 更多例子

① 求 $\sum_{n=0}^{\infty}2^{nx}$ 的收敛域.

解：$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{(n+1)x}}{2^{nx}}=2^x<1$.

$\therefore x<0$ 又 $x=0$ 时 $\sum=0$ 收敛.

$\therefore$ 收敛域为 $(-\infty,0)$.

② 求 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{n\cdot 2^n}$ 的收敛域.

解：$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{x^{2n}}{n\cdot 2^n}}=\frac{x^2}{2}<1$.

$\therefore |x|<\sqrt{2}$.

$x=\sqrt{2}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛.

GuangBo

156 5.26, 5.27

$x=-\sqrt{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

∴ 收敛域为 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

物理竞赛助手君

§3 Fourier级数

一、幂级数的局限性：无法表示不连续或不是无穷次可导的函数。从而我们需要找用别的函数来叠加。

二、Fourier级数的概念

1. 基本形式：$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$.

其中 $f(x)$ 定义域为 $(-\pi,\pi)$.

2. 基函数 $\sin nx$ 与 $\cos nx$ 的性质.（n 为正整数）

(1) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx=0$. $\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx=0$.

(2) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(m+n)x+\cos(m-n)x}{2}dx=0$.
$(m\neq n)$.

$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx=0\quad(m\neq n)$.

同样，$\forall m,n$，有 $\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx=0$.（$m$ 可以等于 n）.

利用上述性质确定 a_n 与 b_n：

物理考研公众号

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} a_0\,dx = 2\pi a_0.$$

则 $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx.$

任取 $k \in N_+$, $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx \cos kx + b_n \sin nx \cos kx)\,dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} a_k \cos^2 kx\,dx = \pi.$$

故 $a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx \quad (k \geq 1)$

同理, $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} b_k \sin^2 kx\,dx = \pi. \quad \text{故 } b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx. \quad (k \geq 1).$$

从而确定 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,dx$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,dx.$$

可见 Fourier 级数是通过积分构造的. 由于可积不蕴涵连续, 所以 Fourier 级数适用范围比幂级数更广.

与此同时若将 $f(x)$ 的定义域拓宽，则它将是以 2π 为周期的函数（周期延拓）

4. 考察 $f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 上的性质.

若现在改变定义，$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$，则

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

从而 $\begin{cases}a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\,dx\\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\,dx.\end{cases}$ $(n\geq 0)$.

若 $f(x)$ 周期是任意一个 T $(T>0)$，则令 $t=\frac{x}{T}\cdot 2\pi$.

则 $f(x)=f(\frac{T}{2\pi}t)$，$x\in(0,T)$，$t\in(0,2\pi)$.

从而
$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{2\pi}{T}\cdot nx+b_n\sin\frac{2\pi}{T}nx).$$

从而 $\begin{cases}a_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\frac{n\pi}{T}x\,dx.\\ b_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\frac{n\pi}{T}x\,dx.\end{cases}$ $(n\geq 0)$.

5. $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 的条件

(1) Dirichlet 条件：$f(x)$ 在 $[0,T]$ 上分段单调且有界.

(2) Lipschitz 条件：$f(x)$ 在 $[0,T]$ 上分段可求.

只要满足以上任一条件，则 $f(x)$ 的 Fourier 级数收敛于

$\frac{1}{2}(f(x^+)+f(x^-))$. 当 x 是 f 的连续点时，它等于 $f(x)$；当 x 是 $f(x)$ 间断点且若 $f(x^+)$ 与 $f(x^-)$ 均存在，则它等于 $\frac{1}{2}(f(x^+)+f(x))$.

e.g. 求 $f(x)=\begin{cases}1, & x\in[-\pi,0)\\ 0, & [0,\pi)\end{cases}$ 的 Fourier 级数.

解: $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$

$=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\cos nx\,dx+0\right)$

$=0.\quad (n>0)$

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$

$=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\sin nx\,dx+0\right)=\frac{1}{n\pi}(\cos n\pi-1)$

$=\begin{cases}0, & n\text{为偶数}\\ -\frac{2}{n\pi}, & n\text{为奇数}\end{cases}=\frac{(-1)^n-1}{n\pi}.$

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=1.$

$\therefore f(x)\sim\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n\pi}\sin nx$

$=\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)\pi}\sin(2n-1)x.$

GuangBo

不难验证，$x=k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$ 时，该级数收敛于 $\frac{1}{2}$.

6. 在奇/偶函数中的简化（假定周期为 2π）

(1) 对于偶函数 $f(x)$，有 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 2\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$，

$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = 0$.

于是 $\begin{cases} a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \\ b_n = 0. \end{cases}$

故 $f(x)\sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx$. 不用考虑正弦项.

这种级数叫余弦级数.

(2) 对于奇函数 $f(x)$，类似地有

$f(x)\sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx$，其中 $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$.

eg① $f(x)=|x|,\ x\in[-\pi,\pi)$. 求其 Fourier 级数

解：$f(x)$ 是偶函数，故 $b_n=0$.

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n}dx\right)$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}\left((-1)^n-1\right)\quad (n\geq 1)\qquad \left(a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx=\pi\right)$$

$$\therefore f(x)\sim \frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos nx$$

不难验证，$x=k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$ 时，该级数收敛于 $\frac{1}{2}$.

6. 在奇/偶函数中的简化（假定周期为 2π）

(1) 对于偶函数 $f(x)$，有 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 2\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$，

$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = 0$.

于是 $\begin{cases} a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \\ b_n = 0. \end{cases}$

故 $f(x)\sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx$. 不用考虑正弦项.

这种级数叫余弦级数.

(2) 对于奇函数 $f(x)$，类似地有

$f(x)\sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx$，其中 $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$.

eg① $f(x)=|x|,\ x\in[-\pi,\pi)$. 求其 Fourier 级数

解：$f(x)$ 是偶函数，故 $b_n=0$.

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n}dx\right)$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}\left((-1)^n-1\right)\quad (n\geq 1)\qquad \left(a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx=\pi\right)$$

$$\therefore f(x)\sim \frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos nx$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right)$$

在$[-\pi,\pi)$上每一处都收敛于$|x|$.

令$x=0$, 则 $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right)=0$.

故 $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots = \frac{\pi^2}{8}$.

② 求 $f(x)=x$, $x\in[-\pi,\pi)$ 的 Fourier 级数.

解: $f(x)$ 是奇函数.

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}dx\right)$$

$$= (-1)^{n+1}\frac{2}{n}.$$

$$\therefore f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin nx.$$

在 $-\pi<x<\pi$ 时收敛于 x, 在 $x=\pm\pi$ 时收敛于 0.

* 在以上两例中, $f(x)=x$, $x\in(0,\pi)$ 既有正弦级数也有正弦级数, 二者均收敛于 x $(0<x<\pi)$. 此时, 称 $f(x)=|x|$, $x\in[-\pi,\pi)$ 与 $f(x)=x$, $x\in[-\pi,\pi)$ 分别为 $f(x)=x$, $x\in(0,\pi)$ 的偶延拓与奇延拓.

③ 之前讲 $f(x)=\begin{cases}1, & x\in[-\pi,0)\\ 0, & x\in[0,\pi)\end{cases} \sim \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$.

GuangBo

No. 162 Date: 5.3|, 6.2

对 $f(x)$ 定义作如下延拓：$f(x)=\begin{cases}1, & x\in(-\pi,0)\\ \frac{1}{2}, & x=0\\ 0, & x\in(0,\pi)\end{cases}$

则 $x=\frac{\pi}{2}$，则 $0=\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(n\pi+\frac{\pi}{2})}{2n+1}$.

$=\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\right)$.

于是 $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{\pi}{4}$.

④ 求 $f(x)=\begin{cases}0, & x\in[-1,0)\\ x^2, & x\in[0,1)\end{cases}$ 的 Fourier 级数.

解：$a_n=1\cdot\int_0^1 x^2\cos n\pi x\,dx=\frac{2}{n^2\pi^2}\cos n\pi=(-1)^n\cdot\frac{2}{n^2\pi^2}$.

$a_0=1\cdot\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$.

$b_n=1\cdot\int_0^1 x^2\sin n\pi x\,dx=\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}+\frac{2\cdot[(-1)^n-1]}{n^3\pi^3}$.

$\therefore f(x)\sim\frac{1}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(-1)^n\frac{2}{n^2\pi^2}\cdot\cos nx+\left[(-1)^{n+1}\frac{1}{n\pi}+\frac{2[(-1)^n-1]}{n^3\pi^3}\right]\sin nx\right\}$.

* 对于 $[-T,T)$ 上的 $f(x)$，有

$$\begin{cases}a_n=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{T}x\right)dx.\ (n\geq 0)\\ b_n=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{T}x\right)dx.\ (n\geq 1)\end{cases}$$

物理学院文君

在上面的例子④中，令 $x=0$，则 $0=\frac{1}{6}+\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$.

故 $\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{12}$.

§4 Fourier 变换初步.

一、关于虚数

1. 虚数单位 i：$i^2=-1$.

2. 欧拉公式：$e^{it}=\cos t+i\sin t$. $(t\in\mathbb{R})$.

这个公式可分别对 e^{it}、$\cos t$、$\sin t$ 做 Taylor 展开得到.

(利用 i 乘方的周期性：$i^{4k}=1$，$i^{4k+1}=i$，$i^{4k+2}=-1$，$i^{4k+3}=-i$)

由此公式可得，$\cos t=\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}$，$\sin t=\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$.

3. $(e^{ix})^n=e^{i(nx)}=\cos nx+i\sin nx$.

于是我们可以将 Fourier 级数中的三角函数化为统一形式.

二、Fourier 级数的复数形式

1. 根据欧拉公式，Fourier 级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cdot\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}+b_n\cdot\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}\right)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_ne^{inx}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_nz^n.$$

这个复 Fourier 级数类似于 Taylor 级数，其中 n 可取负值.

2. 由于 $|e^{ix}|=\sqrt{\cos^2x+\sin^2x}=1$，故定义于单位圆上的二元函数

GuangBo

均可用Fourier级数逼近.

三、Fourier级数部分和对函数的逼近情况.

1. 记 $P_N(x) = f(x) - S_N(x)$

$$= f(x) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos nx + b_n \sin nx\right).$$

称 $\delta_N^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_N^2(x)\,dx$ 为 $f(x)$ 与 $S_N(x)$ 之间的平均平方误差.

2. 在逼近最好的情况下, δ_n^2 应取最小. 事实上, 当 δ_n^2 最小时, $\{a_0, a_1, a_2, \cdots, b_1, b_2, \cdots\}$ 就是Fourier级数中的那些系数.

证明: $\frac{\partial(\delta_n^2)}{\partial a_n} = 2\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^{N}(a_k\cos kx + b_k \sin kx)\right)\cos nx\,dx$

$$= 0.$$

即 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx.$

从而 $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx.$

类似地, $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.$

3. 以上的逼近是积分意义上的, 即在 $(-\pi, \pi)$ 上平均比较靠近, 但在一些点上可能并不好; 同时, Fourier级数是平方逼近,

换作其他偏差，如 $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_N^4(x)dx$，Fourier 的系数未必是最优.

4. 求这个 δ_n^2 的最小值：

$$\min(\delta_n^2) = \int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x) - \sum_{n=1}^{N}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) - \frac{a_0}{2}\right)$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - a_0\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx - 2\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sum_{n=1}^{N}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)dx$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)\right]^2 dx.$$

根据三角函数积分的性质，上式中其实有很多项为0.

于是，再用上 a_n, b_n 的定义式，上式为

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n^2+b_n^2)\right).$$

由于 $\min(\delta_n^2)\geq 0$，故有

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n^2+b_n^2) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx \quad (\forall N)$$

这便是 Bessel 不等式.

由此可得 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 的收敛.

5. 上面的不等式中，令 $N\to\infty$，有 Parseval 等式：

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx.$$

与此同时，一定可以得到 $a_n \to 0$, $b_n \to 0$

即有 $\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = 0$.

III. Fourier 变换的引入

1. 定义 $\hat{f}(\omega) = F[f](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \quad (\omega \in \mathbb{R})$

它将 $f(x)$ 映射到了复空间中.

2. $f'(x)$ 的对应积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-i\omega x} dx = f(x) e^{-i\omega x}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + i\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx.$$

由于 $f(x) e^{-i\omega x}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$, 故有 $F[f'] = i\omega F[f]$.

从而 $F[f^{(n)}] = (i\omega)^n F[f]$. n 甚至可以不是整数 (由此可定义分数阶导数).

3. Fourier 变换的好处：将函数从时域空间映射至频率空间，时间化求导与积分.

类似地求导有 $F[\int_{-\infty}^{x} f(t)dt] = \frac{1}{i\omega} F[f]$.

4. 将以上变换逆过来，有 Fourier 逆变换

$$F^{-1}[g(\omega)](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) e^{-i\omega x} d\omega.$$

5. $F^{-1}[F[f(x)]] = \begin{cases} f(x), & x \text{ 连续点} \\ \frac{1}{2}(f(x_+) + f(x_-)), & x \text{ 不连续点} \end{cases}$.

GuangBo

对于同一个可积的$f(x)$，其Fourier级数与$F^{-1}[F[f]]$处处收敛情况完全一致.

三、Fourier变换与Fourier级数的联系.

1. Fourier复数级数可写成$\frac{C_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n}{2}e^{i\frac{n\pi}{T}x}+\frac{C_{-n}}{2}e^{-i\frac{n\pi}{T}x}$，

其中$f(x)$是$[-T,T]$上的可积函数.

则有$C_0=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}f(x)dx$.

$n\neq 0$时$C_n=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}f(x)e^{-i\cdot\frac{n\pi}{T}x}dx$.（$n$可为负整数）

记$\omega_n=\frac{n\pi}{T}$，则$f(x)\sim\frac{1}{2T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-T}^{T}f(t)e^{-i\omega_n t}dt\right)e^{i\omega_n x}$.

2. 由于$\omega_{n+1}-\omega_n=\frac{\pi}{T}$，故有

$$f(x)\sim\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-T}^{T}f(t)e^{-i\omega_n t}dt\right)e^{i\omega_n x}\Delta\omega_n.$$

其中$\Delta\omega_n=\omega_n-\omega_{n-1}=\frac{\pi}{T}$.

记$\left(\int_{-T}^{T}f(t)e^{-i\omega_n t}dt\right)e^{i\omega_n x}=G_T(\omega_n)$，若$T\to\infty$，

则$f(x)\sim\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}G(\omega_n)\Delta\omega_n$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}G(\omega)d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} f(t)\,dt\right) e^{i\omega x}\,dx$$

$$= F^{-1}[F[f]].$$

可见，即使 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的非周期函数，Fourier 变换仍然适用.

六、Fourier 变换的性质.

1. 微分性质、积分性质（见四/2, 4）

2. 线性性质：$F[f]+F[g]=F[f+g]$, $F[\alpha f]=\alpha F[f]$.

3. 位移性质：$F[f(x+a)]=F[f]e^{ia}$.

e.g. 求 $f(x)=\begin{cases} h, & |x|\le a \\ 0, & |x|>a \end{cases}$ 的 Fourier 变换.

解：$F[f]=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} f(x)\,dx$

$$= \int_{-a}^{a} h e^{-i\omega x}\,dx.$$

$\omega=0$ 时，$F[f]=\int_{-a}^{a} h\,dx = 2ha$

$\omega\neq 0$ 时，$F[f]=h\cdot\left(-\frac{1}{i\omega}\right)e^{-i\omega x}\Big|_{-a}^{a}$

$$= h\left(-\frac{1}{i\omega}\right)\left(e^{-i\omega a}-e^{i\omega a}\right) = \frac{2h}{\omega}\sin(\omega a).$$

GuangBo

卷积：$f*g(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x-t)dt$.

(1) 卷积的性质 $\begin{cases} \text{交换律}, & f*g=g*f. \\ \text{结合律}, & (f*g)*h=f*(g*h) \\ \text{分配律}, & f*(g+h)=f*g+f*h. \end{cases}$

(2) 卷积的Fourier变换：

$$F[f*g]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt\cdot e^{i\omega x}dx$$

$$\xrightarrow[\tilde{t}=t]{\tilde{x}=x-t} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tilde{x})g(\tilde{t})e^{i\omega(\tilde{x}+\tilde{t})}d\tilde{x}d\tilde{t}$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tilde{x})e^{i\omega\tilde{x}}d\tilde{x}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tilde{t})e^{i\omega\tilde{t}}d\tilde{t}$$

$$=F[f]\cdot F[g].$$

(3) 根据上一道例题，令 $\varphi(\omega)=\begin{cases} 1, & |\omega|\le a. \\ 0, & |\omega|>a. \end{cases}$

若 f,g 存在一个，令 $F[g]=F[f]\cdot\varphi(\omega)$，则 $g=f*F^{-1}(\varphi)$.

而 $F^{-1}[\varphi]=\int_{-a}^{a} e^{i\omega x}dw\cdot\frac{1}{2\pi}=\frac{1}{2\pi xi}(e^{iax}-e^{-iax})$

$$=\frac{1}{\pi}\frac{\sin ax}{x}.$$

$\therefore g(x)=f(x)*F^{-1}[\varphi](x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\cdot\frac{1}{\pi}\frac{\sin at}{t}dt$.

GuangBo

这便是滤波后的新函数.

5. 与微分性质类似, $F^{-1}[g] = ix F^{-1}[g]$.

理, 令 $g = F[f]$, 则有 $F^{-1}(g') = -ixf$.

从而 $F[xf] = i \cdot g' = i(F[f])'$.

e.g. ① 解微分方程 $u''(x) - x \cdot u(x) = 0$.

解: 作 Fourier 变换, 则

$$(iw)^2 \hat{u} - i(\hat{u})' = 0.$$

$\hat{u}$ 是关于 w 的一元函数.

从而 $w^2 \hat{u} - i \cdot \frac{d\hat{u}}{dw} = 0$, 即 $\frac{d\hat{u}}{\hat{u}} = iw^2 dw$.

从而 $\hat{u} = Ce^{\frac{1}{3}iw^3}$.

故 $u(x) = F^{-1}[\hat{u}] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} Ce^{\frac{1}{3}iw^3} e^{-iwx} dw$.

(链接, 已知 $\lambda > 0$, $\int_0^{+\infty} f(x) e^{-\lambda x} dx$: Laplace 变换).

② 求 $f(x) = e^{-a|x|}$ $(a > 0)$ 的 Fourier 变换

解: $F[f] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-iwx} dx$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-ax} e^{-iwx} dx + \int_{-\infty}^{0} e^{ax} e^{-iwx} dx$$

$\xrightarrow{-x=t} \int_0^{+\infty} e^{-ax} e^{-i\omega x} dx + \int_{+\infty}^{0} e^{-at} e^{i\omega t} d(-t)$

$= \int_0^{+\infty} \left[e^{(-a-i\omega)x} + e^{(-a+i\omega)x} \right] dx$

$= -\frac{e^{(-a-i\omega)x}}{a+i\omega}\Big|_0^{+\infty} + \frac{e^{(-a+i\omega)x}}{-a+i\omega}\Big|_0^{+\infty}$

$= \frac{1}{a+i\omega} - \frac{1}{-a+i\omega} = \frac{2a}{\omega^2+a^2}.$

上式也可用 $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\left(e^{i\omega x} + e^{-i\omega x}\right) dx$

$= \int_0^{+\infty} 2e^{-ax} \cos(\omega x)\, dx.$

于是转化成它的原函数的求解.

由 Parseval 恒等式:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (F[f])^2 d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x) dx.$$

eg ① 求 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$.

解: 根据之前例题, 令 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$

则 $F[f] = \begin{cases} 2, & \omega = 0 \\ \frac{\sin\omega}{\omega}, & \omega \neq 0. \end{cases}$

$$\text{i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 w}{w^2} dw = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x) dx$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{1} 1 \cdot dx = 4\pi.$$

② 解微分方程 $u''(x) - a^2 u(x) + 2af(x) = 0$, 其中 $f(x)$ 为已知函数.

解: 作 Fourier 变换:

$$(iw)^2 F[u] - a^2 F[u] + 2aF[f] = 0.$$

故 $(w^2 + a^2) F[u] = 2aF[f]$.

得 $u(x) = F^{-1}\left(\frac{2a}{w^2+a^2}\right) * f(x)$

$$= e^{-a|x|} * f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x-t|} f(t) dt.$$

这已是可化到的最后的形式.

③ $f(x) = e^{-ax^2}$, 求 $F[f]$.

解: $F[f] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} e^{-iwx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{w^2}{4a}}$.

(计算过程略)

④ 求解定解问题 $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$

No. 173 Date: 6.7

解：记 $\hat{u}$ 为 $u(x,t)$ 的 Fourier 变换（关于 x）

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} - a^2 \cdot (i\omega)^2 \hat{u} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + a^2\omega^2 \hat{u} = 0.$$

故 $\hat{u} = C(x) e^{-a^2\omega^2 t}$

由第二个方程知 $\hat{u}(\omega, 0) = \hat{f}(\omega)$.

$\therefore \hat{u} = e^{-a^2\omega^2 t} \hat{f}(\omega)$.

作 Fourier 逆变换：$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}[e^{-a^2\omega^2 t}] * f(x)$

$$= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2\omega^2 t} \cdot e^{-i\omega x} \, d\omega \right) * f(x)$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{a^2 t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} \right) * f(x)$$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-u)^2}{4a^2 t}} f(u) \, du.$$

物理系的公文君

第十章 常微分方程

§1. 常微分方程基本概念.

1. 常：仅有一个变量，或者说一元函数.（对应：偏微分方程）

2. 微分方程中含有导数、微分.（对应：积分方程，二者合称微积分方程）

3. 积分是全局过程，微分是局部过程. 一般，微分方程可

GuangBo

No. 174 Date: 6.7, 6.9

转化成积分方程，反过来不一定可以.

eg. 自由落体: $\frac{d^2s}{dt^2}=g$.

$\int_0^t \frac{d^2s}{dt^2}dt=\int_0^t g\,dt$. 而 $v=\frac{ds}{dt}$.

于是有速度式 $v(t)=v(0)+gt$.

再积分: $\int_0^t \frac{ds}{dt}dt=\int_0^t (v(0)+gt)dt$.

于是有 $s(t)=s(0)+v(0)t+\frac{1}{2}gt^2$.

4. 微分方程的基本问题: 解的存在性, 唯一性, 稳定性.

5. 通解: 满足微分方程的函数的族体, 往往含有未定常数.

6. 定解: 将各待定常数确定后的一个解. 确定解的条件称为定解条件.

7. 微分方程中, 最高阶导数的阶数称为这个微分方程的阶数.

8. 积分后的函数 $y=\varphi(x)$ 叫积分曲线.

9. 线性常微分方程: $a_0(x)y+a_1(x)y'+a_2(x)y''+\cdots+a_n(x)y^{(n)}+f(x)=0$.

§2 一阶常微分方程

一、基本形式: $F(x,y,y')=0$.

由于 y' 一般不会没有, 故写为 $y'=f(x,y)$.

二、解的存在性

1、对 $y'=f(x,y)$ 两边积分：

$$y(x)=y(0)+\int_0^x f(t,y(t))\,dt$$

只要有初值 $y|_{x=0}=y(0)$，则此式与 $y'=f(x,y)$ 等价.

2. 解存在的条件：$f(x,y)$ 与 $f_y'(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 附近连续，则 $\exists\ y=\varphi(x)$ 在 (x_0,y_0) 附近且它是原方程的唯一解.

三、变量可分离方程：$\frac{dy}{dx}=g(x)\cdot h(y)$

1. 改写：$\frac{dy}{h(y)}=g(x)dx.\ (h(y)\neq 0)$.

故 $\int\frac{dy}{h(y)}=\int g(x)dx$.

于是可写成隐式解 $H(y)=G(x)+C$.

2. 如果 $\exists\ y_1,y_2,\cdots,y_k$ 使 $h(y)=0$，则此方程除了上面的解外还有 $y=y_j\ (j=1,2,\cdots,k)$ 这 k 个解.
(类似于失根问题)

e.g.① 解方程 $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y^2=1$.

解：$\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{1-y^2}$.

GuangBo

No. 176 Date: 6-9

当 $y \neq \pm 1$ 时, $\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \pm dx$.

故 $\arcsin y = \pm x + C$.

得 $y = \sin(x+C)$ 或 $y = \sin(-x+C)$

$= \sin(x-C+\pi) \equiv \sin(x+C')$

于是通解为 $y = \sin(x+C)$.

但: $y=1$ 与 $y=-1$ 也是解.

② 解方程 $\begin{cases} \sin x \frac{dy}{dx} = y \ln y. \\ y(\frac{\pi}{2}) = e. \end{cases}$

解: $\frac{dy}{y \ln y} = \frac{dx}{\sin x}$.

积分: $\ln(\ln y) = \ln(\csc x - \cot x) + C$.

得 $y = e^{e^C(\csc x - \cot x)}$.

$y(\frac{\pi}{2}) = e^{e^C(1-0)} = e \Rightarrow C = 0$.

$\therefore y = e^{\csc x - \cot x}$.

③ 解方程 $\int_1^x f(t)dt = (x^3+x^2) f(x) - 2$.

解: 令 $u(x) = \int_1^x f(t)dt$, 则

$u = (x^3+x^2)\frac{dy}{dx} - 2$. 且 $u(1) = 0$.

GuangBo

$u \neq -2$ 时, $\frac{dx}{x^3+x^2} = \frac{du}{u+2}$.

$\therefore \ln(u+2) = \int \frac{dx}{x^2+x^3} = \int \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx$

$= \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}\right)dx = -\frac{1}{x} + \ln\frac{x+1}{x} + C$.

$\therefore u = -2 + Ce^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{x+1}{x}$.

$u(1) = -2 + Ce^{-1} \cdot 2 = 0$, 故 $C = e$.

$\therefore u = -2 + e^{1-\frac{1}{x}}(1+\frac{1}{x})$.

$f(x) = u'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{1-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2}(1+\frac{1}{x})e^{1-\frac{1}{x}}$

$= \frac{1}{x^3}e^{1-\frac{1}{x}}$.

3. $\frac{dy}{dx} = \frac{a_1x+b_1y}{a_2x+b_2y}$ 可以转化为变量可分离方程;

令 $\frac{y}{x} = u$, 则 $\frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u = \frac{a_1+b_1u}{a_2+b_2u}$.

故 $x\frac{du}{dx} = \frac{a_1+b_1u}{a_2+b_2u} - u$. 这个方程可分离变量.

于是我们也得到了齐次方程 $\frac{dy}{dx} = f(\frac{y}{x})$ 的一般解法;

令 $\frac{y}{x} = u$, 则 $\frac{dy}{dx} = \frac{d(xu)}{dx} = x\frac{du}{dx} + u = f(u)$.

先解 u, 再得 y.

GuangBo

从而 $\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y}{a_2x+b_2y}\right)$ 也可以这么做.

4. 对于 $\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$.

令 $\begin{cases}\tilde{x}=x+\xi\\ \tilde{y}=y+\eta\end{cases}$ 使 $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=a_1\tilde{x}+b_1\tilde{y}\\ a_2x+b_2y+c_2=a_2\tilde{x}+b_2\tilde{y}\end{cases}$.

于是 $\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}$ 可解出 ξ,η.

当然,这要求上述方程有解,即 $\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq 0$.

从而 $\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}}=f\left(\frac{a_1\tilde{x}+b_1\tilde{y}}{a_2\tilde{x}+b_2\tilde{y}}\right)$ 转为齐次方程.

而当 $\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=0$ 时,原方程可能有解或无解.

有解其实就是有解;一旦无解,则 $\exists\lambda$ 使 $(a_2,b_2)=\lambda(a_1,b_1)$ 且 $c_2\neq\lambda c_1$.

在此两种情况下有 $\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\lambda(a_1x+b_1y)+c_2}\right)$.

1° $b_1=0$,则变量可分离;

2° $b_1\neq 0$,令 $a_1x+b_1y=\tilde{y}$,则 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{b_1}\left(\frac{d\tilde{y}}{dx}-a_1\right)$.

故 $\frac{1}{b_1}\left(\frac{d\bar{y}}{dx}-a_1\right)=f\left(\frac{\bar{y}+c_1}{\lambda\bar{y}+c_2}\right)$.

即 $\frac{d\bar{y}}{dx}=b_1\left(f\left(\frac{\bar{y}+c_1}{\lambda\bar{y}+c_2}\right)+a_1\right)$.

可变量可分离.

四、全微分方程

1. 改写: $dy-f(x,y)dx=0$.

如果两边同乘以 $\mu(x,y)$, 则 $\mu(x,y)dy-\mu(x,y)\cdot f(x,y)dx=0$

2. 标准形式: $f(x,y)dx+g(x,y)dy=0$.

如果左边可写成全微分 $dF(x,y)$, 则原方程等价于 $dF=0$, 故解为 $F(x,y)=C$.

eg. 解方程 $ydx-xdy+y^2xdx=0$.

解: $\frac{ydx-xdy}{y^2}+xdx=0$. 故 $d\left(\frac{x}{y}+\frac{x^2}{2}\right)=0$.

从而有隐式解 $\frac{x}{y}+\frac{x^2}{2}=C$.

3. $Mdy-Nfdx=0$ 的形式不是全微, 但要求我们能找到这样的 $\mu(x,y)$ (积分因子), 使得 $\frac{\partial(\mu f)}{\partial y}=-\frac{\partial\mu}{\partial x}$.

eg. 解方程 $(2x\sqrt{x^2+y^2}+x)dx+(\sqrt{x^2+y^2}+y)dy=0$.

解: $\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}d(x^2+y^2)+2xdx+dy=0$. 即

$d(\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y)=0$.

GuangBo

故解为 $\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y=C$.

3、一阶线性微分方程

1. 基本形式：$\frac{dy}{dx}+f(x)\cdot y=g(x)$.

2、一般解法：取 $F(x)=\int f(x)dx$.

同乘之，有 $e^{F(x)}\left(\frac{dy}{dx}+f(x)y\right)=g(x)e^{F(x)}$.

左边可以凑成导数：$\frac{d}{dx}\left(ye^{F(x)}\right)=g(x)e^{F(x)}$.

则有 $y=\frac{\int g(x)e^{F(x)}dx}{e^{F(x)}}$.

另一种写法：$y=f(x_0)e^{F(x)-F(x_0)}+\int_{x_0}^{x} g(t)e^{F(t)-F(x)}dt$.

eg① 解方程 $\frac{dy}{dx}+xy=x^3$

解：$F(x)=\int x\,dx=\frac{x^2}{2}$（取常数项为0）：

$\because e^{\frac{x^2}{2}}\left(\frac{dy}{dx}+xy\right)=x^3e^{\frac{x^2}{2}}$.

$\therefore y=\frac{\int x^3e^{\frac{x^2}{2}}dx}{e^{\frac{x^2}{2}}}=\frac{\frac{1}{2}\int x^2e^{\frac{x^2}{2}}d(x^2)}{e^{\frac{x^2}{2}}}$

$=\frac{2\int \frac{x^2}{2}\cdot e^{\frac{x^2}{2}}d\left(\frac{x^2}{2}\right)}{e^{\frac{x^2}{2}}}=\frac{2\left(\frac{x^2}{2}-1\right)e^{\frac{x^2}{2}}+C}{e^{\frac{x^2}{2}}}$

$=x^2-2+Ce^{-\frac{x^2}{2}}$.

② 解方程 $\begin{cases} x\frac{dy}{dx}+y=e^x, \\ y(1)=e. \end{cases}$

解：$d(xy)=e^x dx$.

积分，$xy=e^x+C$.

$y(1)=e \Rightarrow C=0$. $\therefore y=\frac{e^x}{x}$.

也可用定积分方法. $\int_{(1,e)}^{(x,y)} d(xy)=\int_1^x e^x dx$.

$\therefore xy-e=e^x-e$, 故 $y=\frac{e^x}{x}$.

③ 解方程 $\frac{dy}{dx}=2x-e^y x^3$.

解：$e^{-y}\frac{dy}{dx}=2xe^{-y}-x^3$.

左边是 $-\frac{d}{dx}(e^{-y})$. 令 $e^{-y}=u$, 则

$\frac{du}{dx}=x^3-2xu$.

这回到3-阶线性常微分方程：$\frac{du}{dx}+2xu=x^3$.

令 $F(x)=x^2$, 则 $e^{x^2}\left(\frac{du}{dx}+2xu\right)=x^3e^{x^2}$,

故 $u=\frac{\int x^3e^{x^2}dx}{e^{x^2}}=\frac{\frac{1}{2}\int x^2e^{x^2}d(x^2)}{e^{x^2}}=\frac{\frac{1}{2}(x^2-1)e^{x^2}+C}{e^{x^2}}$

$=\frac{x^2-1}{2}+Ce^{-x^2}$.

$\therefore y=-\ln u=-\ln\left(\frac{x^2-1}{2}+Ce^{-x^2}\right)$.

GuangBo

No. 182 Date: 6.12

④ 解方程 $\frac{dx}{dt}=k(10-x)$.

解: $\frac{dx}{dt}+kx=10k$.

令 $F(t)=kt$, 则 $e^{kt}\left(\frac{dx}{dt}+kx\right)=10k\cdot e^{kt}$.

$\therefore x=\frac{\int 10k\cdot e^{kt}dt}{e^{kt}}=\frac{10e^{kt}+c}{e^{kt}}$

$=10+Ce^{-kt}$.

六、Bernoulli 方程

1. 基本形式: $\frac{dy}{dx}+f(x)y=g(x)y^n$.

2. 解法: $y^{-n}\frac{dy}{dx}+f(x)y^{1-n}=g(x)$.

令 $u=y^{1-n}$, 则 $\frac{du}{dx}=(1-n)\cdot y^{-n}\frac{dy}{dx}$.

代回③得线性方程: $\frac{1}{1-n}\frac{du}{dx}+f(x)u=g(x)$.

即 $\frac{du}{dx}+(1-n)f(x)u=g(x)\cdot(1-n)$

于是 $u=\frac{\int(1-n)g(x)e^{F(x)}dx}{e^{F(x)}}$.

七. 与一阶微分方程相关的数学模型

1. Malthus人口模型：相对增长率 $\frac{P'(t)}{P(t)}$ 为常数 λ.

$$\frac{dP}{dt}=\lambda P \Rightarrow \frac{dP}{P}=\lambda dt \Rightarrow P=P_0 e^{\lambda t}$$

2. 考虑人口过多导致的影响：$\frac{dP}{dt}=(1-\frac{P}{P_m})P\cdot\lambda$.

其中 k, P_m 为常量. 表人口的饱和值.

于是 $\frac{1}{P^2}\frac{dP}{dt}=\frac{\lambda}{P}-\frac{\lambda}{P_m}$.

令 $\frac{1}{P}=u$, 则 $\frac{du}{dt}=-\frac{1}{P^2}\frac{dP}{dt}$.

$\therefore \frac{du}{dt}=\frac{\lambda}{P_m}-\lambda u$.

$$e^{\lambda t}\left(\frac{du}{dt}+\lambda u\right)=\frac{\lambda}{P_m}e^{\lambda t}$$

从而 $P=\frac{1}{u}=\frac{e^{\lambda t}}{\int\frac{\lambda}{P_m}e^{\lambda t}dt}=\frac{P_m}{1+Ce^{-\lambda t}}$.

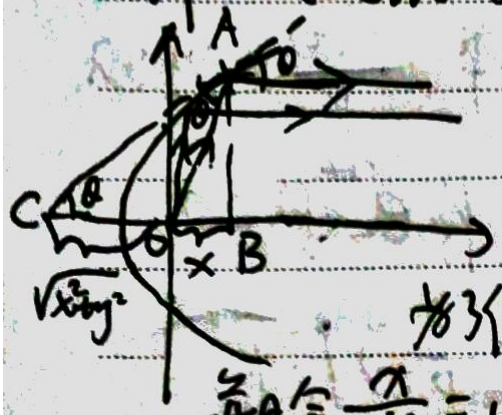
(logistic)

3. 光学问题：求一条曲线，使得存在曲线外一点O，任意从O发出的光线经曲线反射后均成平行光.

(见下页)

GuangBo

解：设光源为原点O.



则，切线斜率 $\tan\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{|AB|}{|BC|}$

$= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$.

为了便于求解，写成 $\frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{y}$.

令 $\frac{x}{y} = u$，则 $u + y\frac{du}{dy} = \sqrt{1+u^2}+u$.

$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{dy}{y}$，即 $\ln(u+\sqrt{1+u^2}) = \ln y + C'$.

$\therefore \frac{x}{y} + \sqrt{1+(\frac{x}{y})^2} = Cy$.

故 $x + \sqrt{x^2+y^2} = Cy^2$.

进一步化简，$x = \frac{Cy^2}{2} - \frac{1}{2C}$.

这是一条抛物线.

*八、数值解法

对于 $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$ 有：

一阶近似，$y(x_0+h) = y_0 + y'(x_0)h$

$= y_0 + f(x_0, y_0)h$.

$y(x_0+2h) = y_0 + y'(x_0+h)h$

$= y_0 + f(x_0+h, y(x_0+h))h$.

GuangBo

以此类推: $y(x_0+nh)=y(x_0+(n-1)h)+f(x_0+(n-1)h, y(x_0+(n-1)h))\cdot h$.

这样可以用一条折线来近似 $y(x)$ 称为 Euler 折线.

§3 二阶线性常微分方程

一. 基本形式: $\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\cdot\frac{dy}{dx}+q(x)y=f(x)$

当 $f(x)$ 恒为0时为非齐次; $f(x)\equiv 0$ 时为齐次.

二. 齐次情况

1. 一般二阶线性微分方程解的存在性:

设 $p(x), q(x), f(x)$ 在 (a,b) 上连续, $x_0\in(a,b)$. 对于 y_0, y_1 初值决定解 $\begin{cases}\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=f(x)\\ y(x_0)=y_0\\ y'(x_0)=y_1\end{cases}$ 是存在并唯一的.

2. 齐次微分方程解的线性性:

若 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 都是 $\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=0$ 的特解, 则对于 α,β, $\alpha y_1(x)+\beta y_2(x)$ 也是原方程的解. (容易验证.)

GuangBo

2. 解的线性相关性

(1) Wronsky 行列式: $W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=y_1y_2'-y_1'y_2$

(2) Liouville 公式: $W(x)=W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x}p(t)dt}$.

证明: $W'(x)=(y_1y_2'-y_1'y_2)'$

$=y_1y_2''+y_1'y_2'-y_1''y_2-y_1'y_2'$

$=y_1(-py_2'-qy_2)-y_2(-py_1'-qy_1)$

$=p(-y_1y_2'+y_1'y_2)=-pW(x)$.

得 $\frac{dW}{W}=-pdx$.

即 $\int_{W(x_0)}^{W(x)}\frac{dW}{W}=\int_{x_0}^{x}-p(t)dt$.

故 $W(x)=W(x_0)e^{\int_{x_0}^{x}-p(t)dt}$.

由证明我们可以看出, $W(x)$ 要么恒为0, 要么恒不为0.

(3) 线性相关函数: 对 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 存在一组不全为0的 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 使 $\sum\lambda_iy_i(x)=0$.

对两个函数 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$, 即求 $\frac{y_1(x)}{y_2(x)}=C$.

(4) 二阶齐次线性微分方程必有两个线性无关的特解.

事实上, 满足 $\begin{cases} y(x_0)=1 \\ y'(x_0)=0 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} y(x_0)=0 \\ y'(x_0)=1 \end{cases}$ 的两函数 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 就是线性无关的, 因为它们的 $W(x)\neq0$.

($\left[\frac{y_1(x)}{y_2(x)}\right]'=-\frac{W(x)}{y_2^2(x)}$, 故 $W(x)$ 是否为0决定了二者

GuangBo

的线性关系.)

(5) 可以证明 $\alpha y_1(x)+\beta y_2(x)$ 就是原方程的全部解,

假设有一个 $y_3(x)$ 也满足原方程,且 $\begin{cases} y_3(x_0)=y_0, \\ y_3'(x_0)=y_1. \end{cases}$

则一定可以用 $y_0 y_1(x)+y_1 y_2(x)$ 表示 $y_3(x)$. 从而

$\alpha y_1(x)+\beta y_2(x)$ 可以包括所有的解.

4. 常系数二阶线性齐次常微分方程

(1) 形式: $\frac{d^2y}{dx^2}+p\frac{dy}{dx}+qy=0.$

其中 p, q 为常数.

(2) 由这个形式, 推测 y, y', y'' 的形式相近.

于是构造特解 $y=e^{\lambda x}$.

代入, 有 $(\lambda^2+p\lambda+q)e^{\lambda x}=0$. ($\lambda^2+p\lambda+q=0$ 称为特征方程)

1° 当 $p^2-4q>0$ 时, 可解出两个解 $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

从而通解 $y(x)=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$.

2° 当 $p^2-4q=0$ 时, 可解出两个重根 $\lambda_1=\lambda_2=-\frac{p}{2}\equiv\lambda_0$.

此时仅找出了一个特解 $y_1(x)=e^{\lambda_0 x}$.

为找出第二个特解, 不妨设为 $y_2(x)=e^{\lambda_0 x}\cdot C(x)$.

代入原方程, 有 $e^{\lambda_0 x}C''(x)+(2\lambda_0+p)e^{\lambda_0 x}C'(x)=0$.

由于 $\lambda_0=-\frac{p}{2}$, 故 $2\lambda_0+p=0$. 于是要求 $C''(x)=0$.

从而 $C(x)=Ax+B$.

得 $y_2(x)$ 与 $y_1(x)$ 线性组合，得通解 $y=(C_1x+C_2)e^{-\frac{p}{2}x}$.

② 当 $p^2-4q<0$ 时 $\lambda_{1,2}=\frac{-p\pm\sqrt{4q-p^2}\,i}{2}=\alpha\pm\beta i$.

∴ 有特解 $y_1(x)=e^{(\alpha+\beta i)x}=e^{\alpha x}\cdot(\cos\beta x+i\sin\beta x)$.

$y_2(x)=e^{(\alpha-\beta i)x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x-i\sin\beta x)$.

这两个函数的线性组合 $\frac{y_1(x)+y_2(x)}{2}=e^{\alpha x}\cos\beta x$

与 $\frac{y_1(x)-y_2(x)}{2i}=e^{\alpha x}\sin\beta x$ 是原方程的解 ($y\in\mathbb{R}$).

∴ $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$ 为通解.

5. 常系数二阶线性非齐次常微分方程

(1) 形式：$\frac{d^2y}{dx^2}+p\frac{dy}{dx}+qy=f(x)$.

其中 p,q 为常数.

(2) 第一种解法：非齐次方程通解 (y^*) + 非齐次方程特解 $(\tilde{y})$.

这是因为 $\begin{cases}\frac{d^2y^*}{dx^2}+p\frac{dy^*}{dx}+qy^*=0\\ \frac{d^2\tilde{y}}{dx^2}+p\frac{d\tilde{y}}{dx}+q\tilde{y}=f(x).\end{cases}$

二者相加所得函数 $y=y^*+\tilde{y}$ 满足原方程.

(3) 第二种解法：常数变易法.

$y=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)$.

其中 $C_1(x)$, $C_2(x)$ 为待定函数，$y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是对应

GuangBo

齐次方程的特解，且线性无关.

下面解 $C_1(x)$ 与 $C_2(x)$：将 $y=C_1y_1+C_2y_2$ 代入方程，

整理得 $2(C_1'y_1'+C_2'y_2')+C_2''y_2+C_1''y_1$

$+P(C_1'y_1+C_2'y_2)=f(x)$.

在这里仅对 C_1 与 C_2 做了一个限定，因此为了确定 C_1 与 C_2，需要再有一个约束条件。由于没有其他特殊条件，这个新条件可以人为确定。我们在此选择的是令 $C_1'y_1+C_2'y_2=0$.

代入，有 $(C_1'y_1'+C_2'y_2')+\underline{(C_1'y_1'+C_1''y_1)+(C_2'y_2'+C_2''y_2)}$

$=(C_1'y_1'+C_2'y_2')+\frac{d}{dx}(C_1'y_1+C_2'y_2)$

$=C_1'y_1'+C_2'y_2'=f(x)$.

于是联立 $\begin{cases}C_1'y_1+C_2'y_2=0,\\ C_1'y_1'+C_2'y_2'=f(x),\end{cases}$ 可解得 C_1' 与 C_2'，从而积分后可以得到 $C_1(x)$ 与 $C_2(x)$.

结果：$\begin{pmatrix}C_1'(x)\\ C_2'(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1(x) & y_2(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0\\ f(x)\end{pmatrix}$.

由于 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 线性无关，故上述解存在且唯一.

e.g. ① 解方程 $y''-3y'+2y=0$.

解：特征方程 $\lambda^2-3\lambda+2=0$. $\lambda_{1,2}=1$ 或 2.

$\therefore y=C_1e^x+C_2e^{2x}$.

② $y''-2y'+4y=0$.

解：特征方程 $\lambda^2-2\lambda+4=0$ $\lambda_{1,2}=1\pm\sqrt{3}i$.

No. 19 Date: 6.14

∴ $y = e^x(C_1\cos 2\sqrt{3}x + C_2\sin 2\sqrt{3}x)$.

(事实上, $e^{(\alpha+\beta i)x}$ 的实部与虚部均是满足原方程的, 因为实部与虚部实质上都是 $e^{(\alpha+\beta i)x}$ 与 $e^{(\alpha-\beta i)x}$ 的组合.)

③ $y''+6y'+9y=0$.

解: 特征根 $\lambda=-3$ 为重根.

∴ 通解为 $y=(C_1x+C_2)e^{-3x}$.

④ $y''-2y'=2x^2+1$.

解: 齐次方程 $y''-2y=0$.

特征根 $\lambda=0;2$. 故 $y=C_1e^{2x}+C_2$.

下面找原方程特解 $\tilde{y}$. 考虑到 $2x^2+1$ 为多项式, 我们寻找的特解显然也可以是多项式.

根据次数, 设 $\tilde{y}=ax^3+bx^2+cx$.

故 $\tilde{y}''-2\tilde{y}'=6ax+2b-2(3ax^2+2bx+c)=2x^2+1$

比较系数, 有 $\begin{cases} a=-\frac{1}{3}, \\ b=-\frac{1}{2}, \\ c=-1. \end{cases}$

∴ $y=C_1e^{2x}+C_2-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-1$.

⑤ $y''+5y'-6y=xe^x$.

解: $y''+5y'-6y=0 \Rightarrow y^*=C_1e^x+C_2e^{-6x}$.

考虑到 $\frac{d}{dx}[P_n(x)e^x]=Q_n(x)e^x$ (P, Q 为多项式), 令 $y=V_n(x)\cdot e^x$, 则 $y''+5y'-6y=(V''+2V'+V)e^x+5(V'+V)-6Ve^x=xe^x$.

于是 $V''+7V'=x$. 可以解得 $V(x)$.

易知，这里的 $U(x)$ 是特解即可，如 $V(x)=\frac{x^2}{14}-\frac{x}{49}$

∴ 最终的解为 $y=C_1e^x+C_2e^{-6x}+(\frac{x^2}{14}-\frac{x}{49})e^x$.

6. Euler 方程：$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+px\frac{dy}{dx}+qy=0$.

其中 p,q 为常数.

(1) 解法：令 $y=x^\lambda$，则 $\lambda(\lambda-1)x^\lambda+p\lambda x^\lambda+qx^\lambda=0$.

于是 $\lambda(\lambda-1)+p\lambda+q=0$. 可以解出两根 λ_1,λ_2.

1° 如果 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 且为实数，则 $y=C_1x^{\lambda_1}+C_2x^{\lambda_2}$.

2° 如果 $\lambda_1=\lambda_2$，为了方便，令 $x=e^t$.

则为 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{dy}{dt}\cdot e^{-t}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{x}$.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy'}{dx}=\frac{dy'/dt}{dx/dt}=\frac{(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt})e^{-t}}{e^t}$$

$$=\frac{d^2y}{dt^2}e^{-2t}-\frac{dy}{dt}e^{-2t}=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right).$$

把原方程变为：$(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt})+p\frac{dy}{dt}+qy=0$.

又回到了前面的形式：$\frac{d^2y}{dt^2}+(p-1)\frac{dy}{dt}+qy=0$.

显然这个方法也适用于 1° 的情况.

§4 可降阶的高阶微分方程

一、$F(x,y^{(n)})=0$.

GuangBo

一般解法是化为 $y^{(n)}=f(x)$，做n次积分.

二、$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \cdots, y^{(n)})=0$. $(k<n)$

解法：设 $y^{(k)}=u(x)$，则

$$F(x, u, u', u'', \cdots, u^{(n-k)})=0.$$

三、$F(y, y', \cdots, y^{(n)})=0$

1. 特点：不显含 x.（自治系统）

2. 解法：令 $p(x)=y'(x)$.

则 $y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$.

$$y'''=\frac{d}{dx}\left(p\frac{dp}{dy}\right)=\frac{d}{dy}\left(p\frac{dp}{dy}\right)\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$=p\left[\left(\frac{dp}{dy}\right)^2+\frac{d^2p}{dy^2}\cdot p\right].$$

记 $p'=\frac{dp}{dy}$，$p''=\frac{d^2p}{dy^2}$，则

$$F(y, p, p'p, p''p^2+p'^2p, \cdots)=0.$$

得到一开始的方程是三阶方程 $F(y, y', y'', y''')=0$，则最终可化成二阶方程 $F(y, p, p'p, p''p^2+p'^2p)=0$.

这个方程把 y 化成自变量，$p=p(y)$ 成为因变量.

最终解出的是 $y'=p(y)$，成了一阶微分方程.

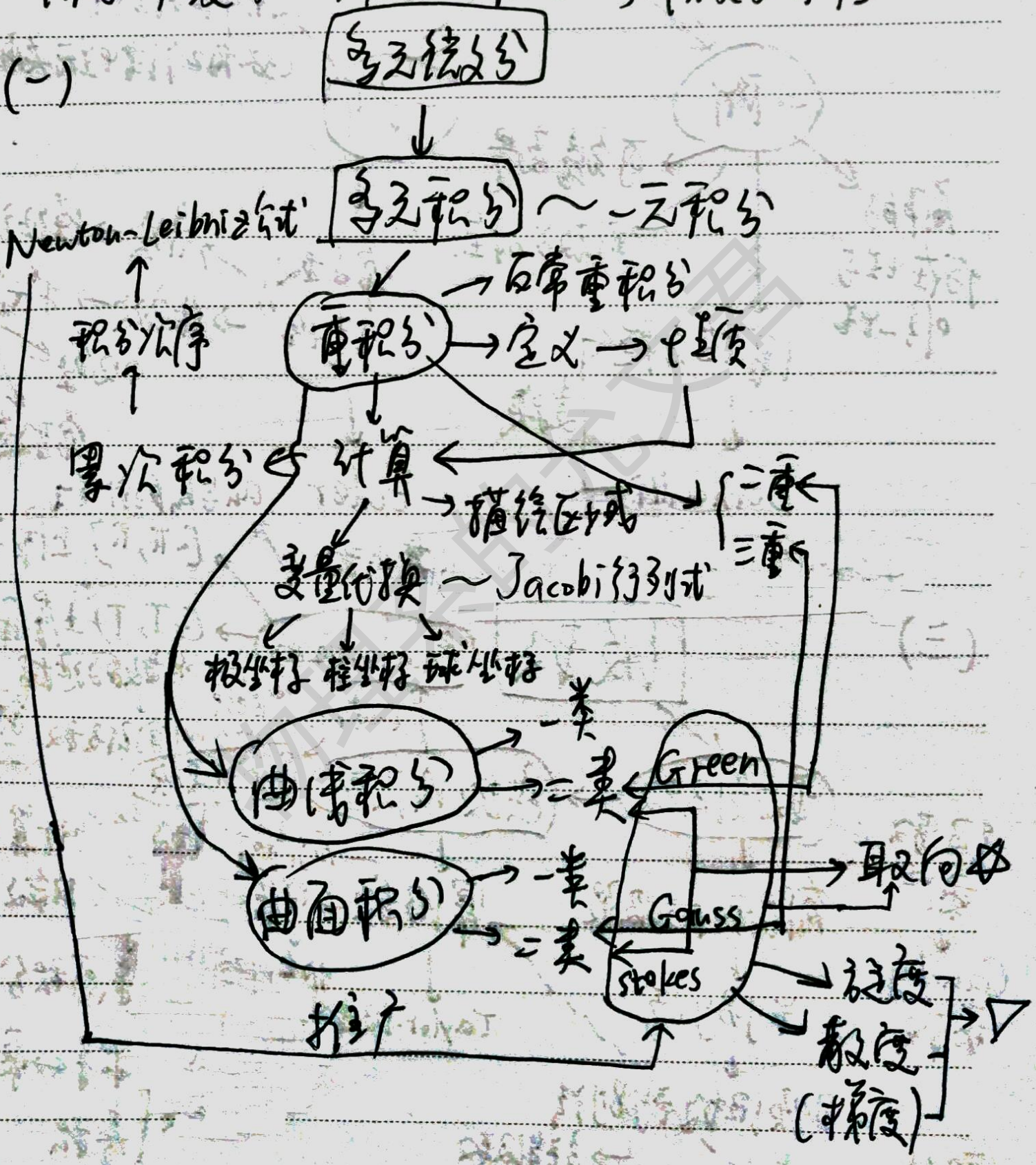
No. 193 Date: 6.16

此时 $\frac{dy}{dx} = p(y)$，则 $\int \frac{dy}{p(y)} = \int dx$.

物理学论文君

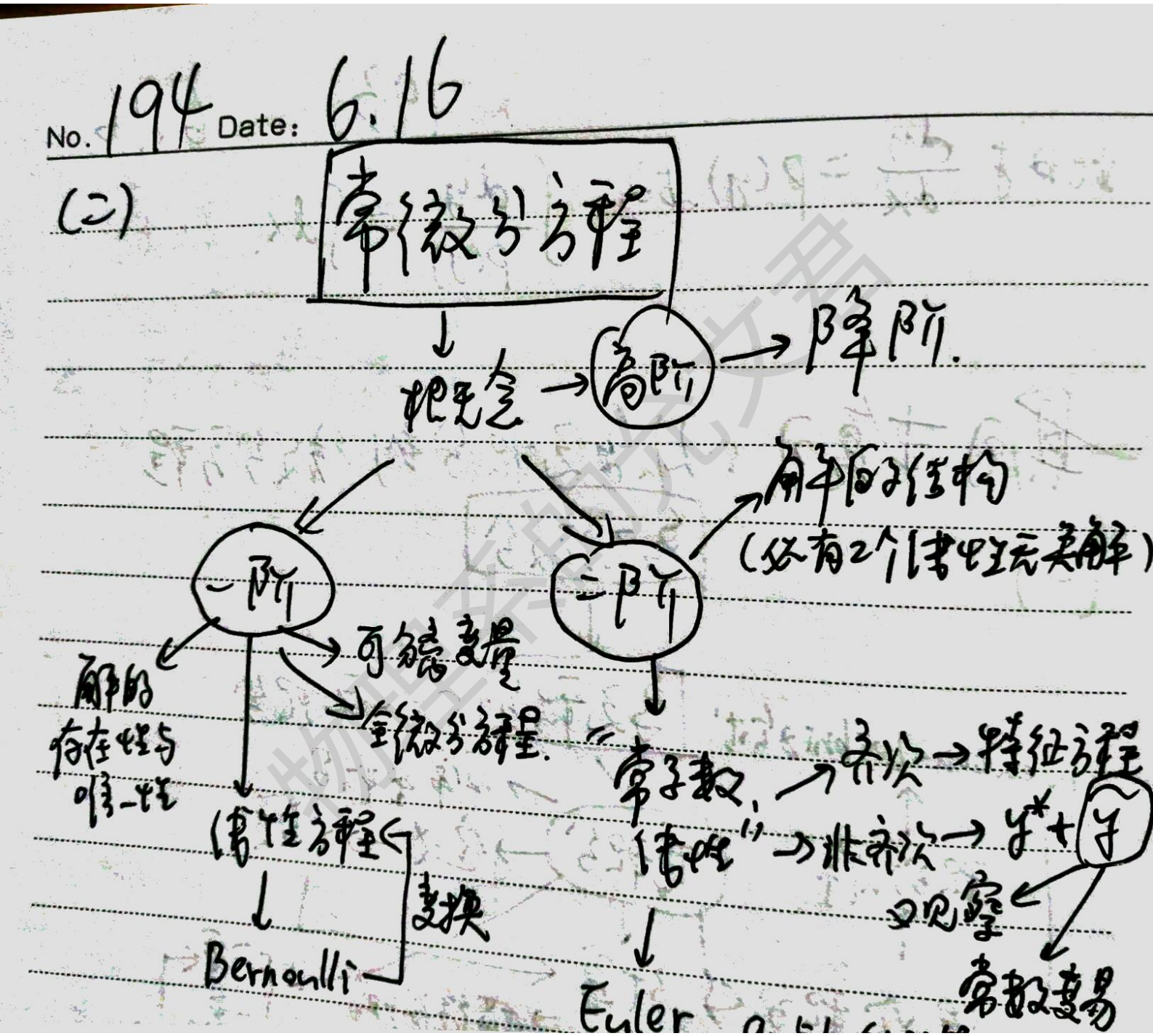
期末复习：从多元积分到微分方程

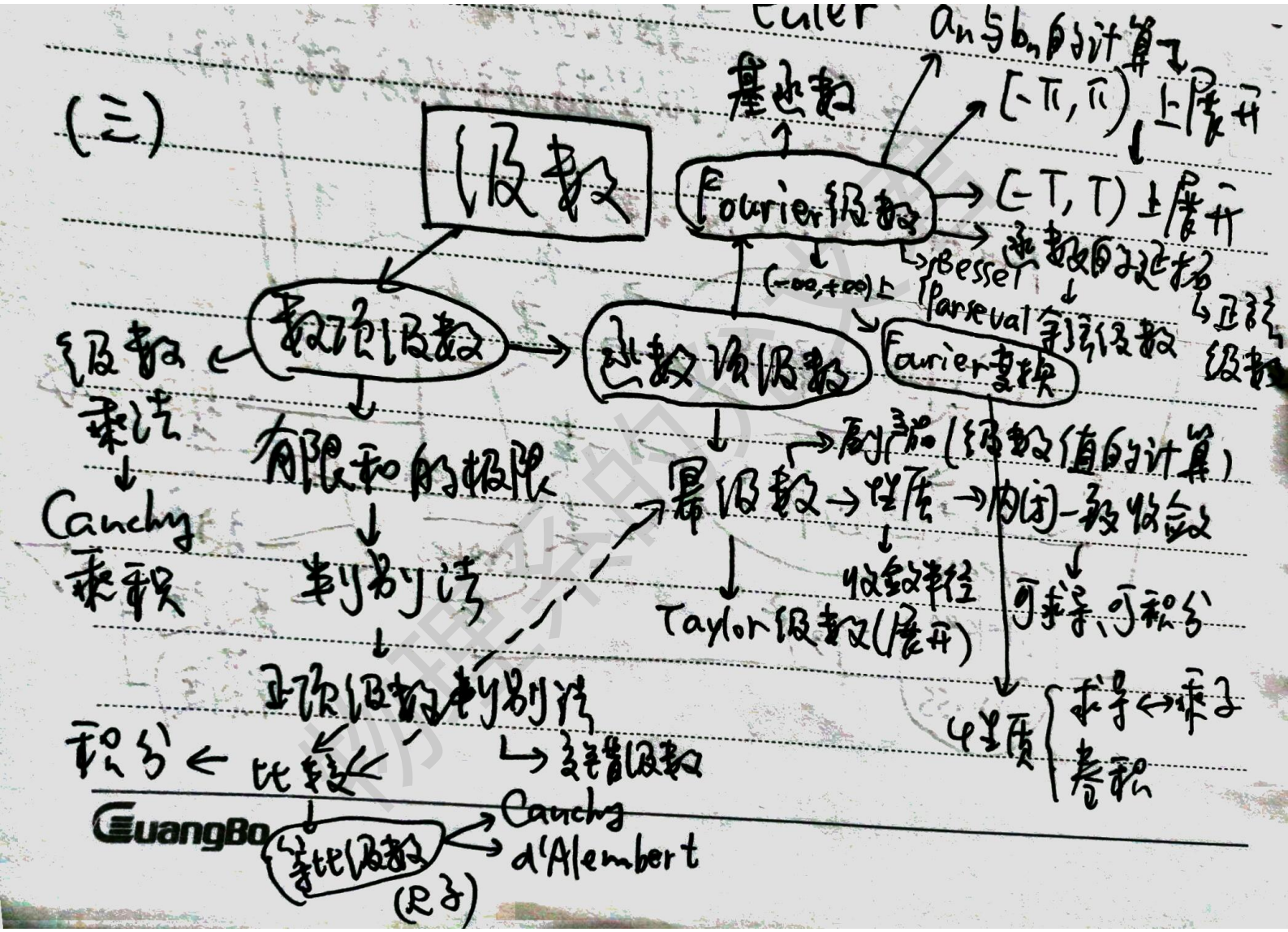
(一)



No. 194 Date: 6.16

(二)




(三)
级数
常数项级数
函数项级数
Fourier级数
Euler
a_n与b_n的计算
$[-\pi,\pi)$上展开
$[-T,T)$上展开
Bessel
Parseval等式
Fourier变换
级数求法
Cauchy乘积
有限和的极限
判别法
正项级数判别法
比较
比式
(尽子)
Cauchy
d'Alembert
积分
幂级数
性质
收敛半径
Taylor级数(展开)
内闭一致收敛
可导、可积分
逐项求导(级数值的计算)
性质
求导↔乘x
积分
GuangBo