O411.32/26

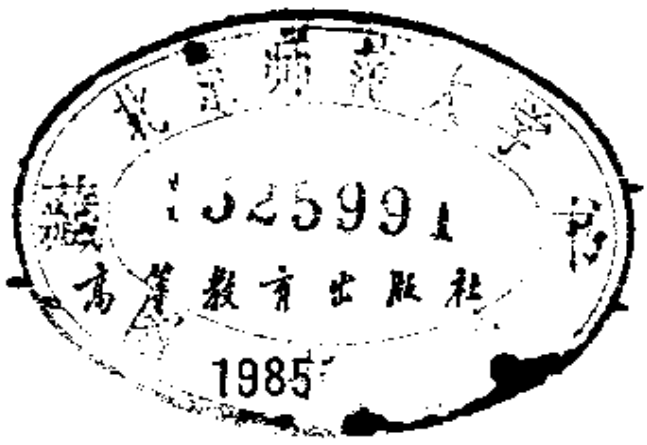
大学物理学基础

第二卷

场与波

[美] M. Alonso
E. J. Finn 合著

梁宝洪 译



内 容 简 介

本书根据 Addison-Wesley Publishing Company 出版的、[美]M. Alonso 和 E. J. Finn 合著《大学物理学基础》第二卷(1983 年，第二版)译出。这套书共三卷，第一卷论述力学和热力学；第二卷论述场和波(包括电磁学、光学和声学)；第三卷论述量子物理和统计物理。

本书可作为高等学校理工科普通物理学课程的教学参考书。

大学物理学基础

第 二 卷

场 与 波

[美] M. Alonso / E. J. Finn 合著

梁宝洪 译

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京顺义县印刷厂印装

开本 850×1168 1/32 印张 23.25 字数 562 000

1989 年11月第 1 版 1989 年11月第 1 次印刷

印数 00,001—2 160

ISBN7-04-002598-1/O·860

定价 7.15 元

第二版前言

物理学是一门基础科学，它对所有其他科学有着深刻的影响。因此，不仅主修物理学的学生，而且期望从事科学事业的每一个人（包括主修生物学、化学和数学的学生），都必须对物理学的基本概念有透彻的理解。

普通物理学课程的主要目的（或者说，它在课程设置中占有一定位置的唯一理由），是使学生对物理学有一个统一的观点。我们希望能够做到这一点，而不必讲太多的细节。这是通过分析基本原理、阐明这些原理的含意并讨论其局限性而达到的。学生将在比较专门的后继课程中，学习这些基本原理的具体应用。因此，本书论述我们认为构成当代物理学核心的那些基本概念。在选择题材以及讲授顺序和方法时，我们认真地考虑了本书以前的使用者和国际顾问编辑委员会的意见和建议。

在许多课程中，讲授物理学时，往往把它看成是多少有些关系的几门科学的汇集，而缺乏真正统一的观点。过去把物理学划分为力学、热学和分子运动论、声学、光学、电学和磁学、现代物理学，这种传统的划分方法，不再具有任何正当的理由。我们不再遵循这种传统的划分，而是采取一种符合逻辑的、统一的叙述，把重点放在守恒原理、场和波的概念以及物质的原子观点上。在全书中广泛运用了狭义相对论，它是任何物理学理论都必须满足的指导原理之一，而且书中相当早地引入了量子物理学的许多概念。

为方便起见，本书分三卷出版，内容分成五个部分：(1) 力学，(2) 相互作用和场，(3) 波，(4) 量子物理学，(5) 统计物理学。

第一卷讲述力学，以便确立描述我们观察到的周围运动所需

要的基本原理．为了适应许多学校的需要，这一卷中还包括了热力学和统计力学的初等导论．

自然界的所有现象，都是相互作用的结果，而相互作用则是用场来分析的．第二部分（在第二卷中）不仅讨论我们最熟悉的那几种相互作用（引力相互作用和电磁相互作用，它们引起我们观察到的大多数宏观现象），而且讨论核相互作用．为方便起见，把引力相互作用的讨论放在第一卷中；在第二卷中，我们相当详细地讨论了电磁学，最后给出麦克斯韦方程的表述．第三部分讨论波的现象（把它作为场概念的结果）；这一部分也包括在第二卷中；这里包括了通常在声学和光学的标题下讲述的大部分材料．然而，重点放在作为麦克斯韦方程的自然延伸的电磁波上．第三部分和第二卷以物质波的讨论（作为量子力学的数学表述的导论）作为结束．这样，第一卷和第二卷就包括了大多数普通物理学导论课程中通常讲述的材料．

第三卷包括本书的最后两部分．在第四部分中，我们先讲述必要的量子力学基础知识，然后分析物质的结构，即原子、分子、原子核和基本粒子．这一部分对物质的量子论作了初步介绍．最后，在第五部分中，讨论宏观物质的性质．首先介绍统计力学的原理，然后把这些原理应用于一些简单的然而却是基本的情况．我们按照统计力学的观点讨论热力学．第五部分以物质热性质的讨论作为结束，说明如何运用统计力学和热力学的原理．这样，第三卷就包括了大多数现代物理学导论课程中讲述的材料，其优点是它构成第一卷和第二卷的合乎逻辑的延伸。

本书不仅在方法上，而且在内容上，不同于一般的大学物理学教科书．书中介绍了许多书中所没有的一些基本论题，而把另外一些传统的论题删去．本书中使用的数学的水平，要求学生已学过少量的入门的微积分，而且同时选修微积分导论课程．此外，学

生最好在高中已经学过物理学课程.基本原理的许多应用，以及若干比较深的课题，以例题的形式出现. 这些内容可以在教师认为适当的时候进行讨论，或者有选择地建议个别学生学习. 这样，例题中的材料可供教师根据自己的意愿和学生的基础知识的情况来灵活地安排. 每章末的习题分为两组：基本习题和较难的习题. 基本习题是为了训练和帮助学生掌握所学的内容. 其中大多数应当不费太大力气就能解出来. 另一方面，较难的习题应起激励学生的作用，测验他的理解力和首创精神.

许多大学受到很大的压力，要求各学科的教学计划中包括新的、比传统的论题更适应需要的课题. 我们期望这套教科书能够通过提高学生对物理概念的理解水平和增加他们处理相应的数学关系式的能力，来减轻这种压力. 这样，我们就能够提高现在大学教学计划中开设的中间课程. 传统的力学、电磁学和现代物理学等课程将由此而获益最多. 这样，主修物理学的学生，与往常可能达到的知识水平相比，将以更高的水平完成他的大学教育. 对于那些就此结束他们的正式训练的学生来说，这是很大的一个好处. 此外，现在有可能开设较新的(也许是更令人兴奋的)、研究生水平的课程. 令人高兴的是，在新近出版的其他学科的基础教科书中，也看到了这种提高的趋势.

这套教科书是为三个学期的普通物理学课程编写的. 也可以用于这样的课程安排，即先用第一卷和第二卷讲普通物理学课程，然后用第三卷讲一学期或两学期现代物理学课程.

我们希望这套教科书将对那些要求改革的物理教师（他们不断地为改进所教的课程而努力）会有所帮助. 我们热切希望这套教科书会激励许多这样的学生：他们应该学到比大多数传统课程的内容更为周密的论述.

致 学 生

这是一套关于物理学基础的书. 它是为理、工科学生编写的. 你将从中学到的一些概念和思想，很可能将成为你的专业生活和思想方法的一部分. 你对它们的理解越深刻，你的大学生和研究生教育的其余部分就会越顺利.

你将开始学习的物理学课程，自然比你的高中物理学课程要深得多. 你必须学会解许多难题. 掌握物理学的定律和方法，有时可能是一个缓慢的、艰苦的过程. 在你进入那些你所向往的物理学领域之前，你必须掌握另外一些虽不那么吸引人、但却非常基本的领域，否则你就不能正确地利用或者理解物理学.

在你学习这门课程时，心目中必须保持两个主要目标：第一，十分熟悉构成物理学核心的为数不多的基本定律和原理. 第二，养成运用这些概念并把他们应用于具体情况的能力；换句话说，就是养成象物理学家那样思考和工作的能力. 你可以通过阅读和反复阅读书中用大号字排印的各节而达到第一个目标. 为了帮助你达到第二个目标，书中安排了许多用小号字排印的例题，每章末尾都有课外作业习题. 我们恳切地建议你首先阅读主要的课文，当你熟悉了主要课文之后，再学习教师指定的例题和习题. 例题或者说明这个理论对于一个具体情况的应用，或者通过讨论这个问题的新的方面而推广这个理论. 有时，例题也为某个理论提供一种证明.

每章末的习题难度不同，分为两类：基本习题和较难的习题. 基本习题主要是读了课文之后就能解出的那一类习题. 这一类习题使你能够把刚学过的内容应用于一个给定的具体情况. 另一方面，较难的习题则要求你完成一系列步骤，才能得出答案；换句话

说，为了解一道习题，可能要求你复习以前学过的内容．一般地讲，最好先用符号或代数形式来求解，最后才把数值代入．如果你不能在合理的时间内解出一道指定的习题，就把它放下，待以后再试一次．对于少数不会求解的习题，应当寻求帮助．一本能教给你解题方法的参考书，是 G. Polya 所著 How to Sove It《如何解题》(第二版)一书(Garde City, N. Y. Doubleday, 1957).

物理学是一门定量的科学，需要用数学来表述它的概念．本书所用的数学，都可以在标准的微积分教科书中找到；每当你不理解一个数学推导时，就要查阅这类教科书．但是，决不应该由于数学上的困难而感到沮丧；当数学上遇到困难时，要请教你的老师或高年级的同学．对于自然科学家和工程师来说，数学是一个工具，其重要性次于对物理概念的理解．为了你的方便起见，书末的一个附录中列出一些最常用的数学关系式．

所有的物理计算都必须采用一致的单位．本书采用国际制(SI)单位．开始时，你可能感到不熟悉；然而，稍加努力，就会熟悉它．此外，SI 是世界所有主要的政府实验室中使用的单位制；在所有主要的科学出版物中，它正在成为标准的单位制．最好一开始就使用一支计算尺或一台电子计算器．这些仪器的准确度和它们能够保持中间结果的能力，会节省你很多计算时间．计算尺，即使是最简单的，也有三位数字的准确度，而这对于本书的许多习题来说，几乎总是够用的．电子计算器有高得多的准确度，看来是未来科学家的不可缺少的工具．

本书不强调物理学的历史方面．那些对物理学思想的发展感兴趣的学生，可参考一些有益的书籍．我们特别推荐 Holton 和 Roller 合著的一本很好的书：《Foundations of Modern Physical Science (现代自然科学的基础)》，第二版(Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1973).

目　录

第二部分

电　磁　场

第一章　电相互作用……3

1.1　引论……3

1.2　电荷……5

1.3　库仑定律……6

1.4　电场……9

1.5　电荷的量子化……15

1.6　电势……18

1.7　点电荷的电势……22

1.8　电场中的能量关系……24

1.9　电流……27

1.10　电偶极子……28

1.11　高阶多极子……36

第二章　静电场……52

2.1　引论……52

2.2　矢量场的通量……52

2.3　电场的定律……54

2.4　高斯定律的微分形式……60

2.5　物质的极化……65

2.6　电位移……69

2.7　电极化率的计算……71

2.8　电容.电容器……79

2.9　电场的能量……82

第三章　电路……95
3.1　引论……95
3.2　电导率、欧姆定律……95
3.3　电阻的起源……98
3.4　焦耳效应……101
3.5　导体、绝缘体和半导体……103
3.6　电动势……107
3.7　非欧姆导体……113
第四章　磁相互作用……122
4.1　引论……122
4.2　作用在运动电荷上的磁力……123
4.3　电荷在磁场中的运动……127
4.4　带电粒子在磁场中运动的几个例子……135
4.5　运动电荷的磁场(非相对论的)……142
4.6　电磁学和相对性原理……144
4.7　运动电荷的电磁场(相对论的)……147
4.8　两个运动电荷之间的相互作用……150
第五章　磁场和电流……167
5.1　引论……167
5.2　作用在电流上的磁力……167
5.3　作用在一闭合电流上的磁转矩……170
5.4　闭合电流回路产生的磁场……173
5.5　直线电流的磁场……175
5.6　电流之间的力……178
5.7　关于SI单位的说明……180
5.8　圆电流回路的磁场……182
第六章　静磁场……195
6.1　引论……195
6.2　磁场的安培定律……195
6.3　安培定律的微分形式……201
6.4　磁通量……203

6.5 物质的磁化……204
6.6 起磁场……206
6.7 磁化率的计算……209
6.8 静态场定律小结……215
第七章 物质的电结构……220
7.1 引论……220
7.2 原子和分子中的电相互作用……220
7.3 原子结构……223
7.4 电子能级.玻尔理论……233
7.5 带电粒子的轨道运动所引起的磁偶极矩……237
7.6 一个在磁场中运动的带电粒子的转矩和能量;空间量子化……240
第八章 与时间有关的电磁场……249
8.1 引论……249
8.2 法拉第-亨利定律……249
8.3 电子感应加速器……253
8.4 导体和磁场的相对运动所引起的电磁感应……256
8.5 电磁感应和相对性原理……259
8.6 电势和电磁感应……260
8.7 法拉第-亨利定律的微分形式……261
8.8 电荷守恒原理……263
8.9 安培-麦克斯韦定律……265
8.10 安培-麦克斯韦定律的微分形式……269
8.11 麦克斯韦方程……271
第九章 随时间变化的电路……283
9.1 引论……283
9.2 自感应……283
9.3 磁场的能量……288
9.4 电路中的自由电振荡……291
9.5 电路中的受迫电振荡……294
9.6 耦合电路……298
9.7 结束语……301

第三部分

波

第十章　波动：弹性波……311

10.1　引论……311

10.2　波动的数学描述……312

10.3　波动的傅里叶分析……317

10.4　波动的微分方程……320

10.5　固体棒中的弹性波……323

10.6　气柱中的压力波……328

10.7　弦中的横波……334

10.8　液体中的表面波……338

10.9　是什么在波动中传播？……342

10.10　群速度……346

10.11　多普勒效应……349

10.12　二维和三维的波……353

10.13　流体中的球面波……358

第十一章　电磁波……371

11.1　引论……371

11.2　平面电磁波……372

11.3　电磁波的能量和动量……377

11.4　振荡电偶极子的辐射……381

11.5　振荡磁偶极子的辐射……387

11.6　高阶振荡多极子的辐射……390

11.7　加速电荷的辐射……391

第十二章　电磁辐射与物质的相互作用……404

12.1　引论……404

12.2　电磁辐射的吸收……404

12.3　束缚电子对电磁辐射的散射……406

12.4 自由电子对电磁波的散射.康普顿效应……408
12.5 光子……414
12.6 关于光子的另一个现象:光电效应……419
12.7 电磁波在物质中的传播:色散……122
12.8 电磁波的多普勒效应……427
12.9 电磁辐射谱……432
第十三章 反射和折射……444
13.1 引论……444
13.2 惠更斯原理……444
13.3 马吕斯定理……447
13.4 平面波的反射和折射……449
13.5 球面波的反射和折射……455
13.6 关于反射和折射定律的进一步讨论……457
13.7 金属表面上的反射和折射……463
13.8 波在非均匀介质中的传播.费马原理……465
第十四章 电磁波的反射和折射,偏振……472
14.1 引论……472
14.2 电磁波的反射和折射……472
14.3 电磁波在各向异性介质中的传播……478
14.4 二向色性……485
14.5 双折射……486
14.6 旋光性……492
第十五章 波动几何学……502
15.1 引论……502
15.2 球面上的反射……503
15.3 球面上的折射……513
15.4 透镜……519
15.5 显微镜……525
15.6 望远镜……527
15.7 棱镜……529
15.8 色散……531

15.9 色差……541
第十六章 干涉……549
16.1 引论……549
16.2 两个同步源产生的波的干涉……549
16.3 几个同步光源的干涉……557
16.4 一维驻波……563
16.5 驻波和波动方程……567
16.6 驻电磁波……574
16.7 二维驻波……578
16.8 三维驻波，共振腔……583
16.9 波导……586
第十七章 衍射……604
17.1 引论……604
17.2 矩形孔的夫琅和费衍射……606
17.3 圆孔的夫琅和费衍射……612
17.4 两个等宽的平行狭缝的夫琅和费衍射……614
17.5 衍射光栅……617
17.6 菲涅耳衍射……622
17.7 散射……629
17.8 晶体对X射线的散射……630
第十八章 量子力学……644
18.1 引论……644
18.2 粒子和场……645
18.3 晶体对粒子的散射……646
18.4 粒子和波包……650
18.5 关于位置和动量的海森伯测不准原理……652
18.6 海森伯原理的例示……653
18.7 关于时间和能量的测不准关系……656
18.8 定态和物质场……657
18.9 波函数和几率密度……660
18.10 薛定谔方程……663

18.11 自由粒子的波函数……665
18.12 势箱中粒子的波函数……666
18.13 简谐振子的波函数……668
18.14 氢原子……670

第二部分　电　磁　场

一旦掌握了支配运动的普遍法则，为了加深对物理学的理解，下一步就要研究引起这些运动的各种相互作用.

引力相互作用在行星运动中和大块物质的运动中表现出来. 引力虽然是已知的一切相互作用中最弱的一种，但却是最先被仔细研究的相互作用. 这是因为，农业上和其他方面的预报需要，很早就引起了天文学界的兴趣，而且因为，引力所引起的许多现象直接影响人们的生活.

电磁相互作用是了解得最清楚的相互作用，也许是对日常生活最重要的相互作用. 每天所观察到的大多数现象，包括化学的和生物的过程，都是原子和分子之间的电磁相互作用的结果.

强(或核)相互作用，使原子核内的质子和中子(统称核子)保持在一起，并引起其他有关现象. 虽然进行了大力研究，但是关于这种相互作用的知识仍不完全.

弱相互作用引起基本粒子之间的某些过程，例如 β 衰变. 我们对于这种相互作用的理解也是不充分的.

上述这些相互作用的相对强度(取强相互作用的强度为 1)分别为：电磁相互作用 $\approx 10^{-2}$，弱相互作用 $\approx 10^{-5}$，引力相互作用 $\approx 10^{-38}$. 物理学迄今尚未解决的问题当中有：为什么看起来只有四种相互作用，为什么它们的强度相差如此之大. 另一方面，人们或许会问：为什么不是仅仅存在一种相互作用，它在不同范围内表现为实验上发现的四种相互作用.

看一下牛顿在 200 年前关于相互作用所说的一段话，是非常有趣的.

物体的小粒子具有某些威力或力量，它们通过这些力彼此作用……而产生大部分自然现象，不是这样吗？因为，如所周知，物体彼此以重力、磁力和电力相互作用……，而且可能有比这些还要强的吸引力……。我在这只不考虑这些吸引是如何进行的……，重力、磁力和电力的吸引能够达到很长的距离……可能有其他的吸引力达到很短的距离，以致至今没有观察到……，(《光学》，第三册，问题31)

为了描述这些相互作用而引入场的概念。场表示一个物理实体，它遍布一个空间区域，由位置和时间二者的函数来描述。引入场这个概念来描述两个粒子之间的相互作用，是适当的，因为它们之间的相互作用取决于它们的相对位置和运动。因此，对于每一种相互作用，都假定一个粒子在其周围产生一个相应的场。这个场又作用在第二个粒子上而产生所需要的相互作用。当然，第二个粒子有它自己的场，这个场作用在第一个粒子上而产生相互作用。

电磁相互作用通常用两个场来描述，即电场和磁场。然而，必须特别指出，这两个场不是独立的实体，而是彼此密切联系着的。电磁场分成这样两个成分，取决于电荷和观察者的相对运动。

另一方面，场的概念并非仅仅用于描述相互作用，而且能够描述其他物理现象。例如，一位气象学家可以把大气压强和温度，都表示为地球表面的纬度和经度以及离开地面的高度的函数。

我们已经开始认识到，为了使一个场能够正确地描述粒子之间的相互作用，这个场的主要特点是它本身必须具有能量和动量，场必须能够把这两种性质从一个粒子传递给另一个粒子。

在本书第一卷中讨论了引力相互作用和引力场。在本卷中，将深入讨论电磁相互作用，并对其余两种相互作用(弱相互作用和强相互作用)，进行描述性的讨论；而在第三卷中将对它们的性质进行详细的讨论。

第一章　电相互作用

1.1 引　　论

我们考虑一个很简单的实验：在一个很干燥的日子里，把梳过头发的梳子移近小纸屑．这时，这些小纸屑立刻受到梳子吸引．如果用一块丝绸摩擦一根玻璃棒，或者用一块毛皮摩擦一根琥珀棒，会发生类似现象．为了描写这些现象，我们说，摩擦之后，这些材料可能获得一种新的性质，叫做电，这个词来源于希腊文，原来的意思是琥珀．这种电性质所引起的相互作用，比引力相互作用强得多．

然而，在电相互作用和引力相互作用之间有几个根本的差别．首先，只存在一种引力相互作用，它导致任意两个质量之间的普遍吸引．但是，实验表明，电相互作用则有两种．当一根带电玻璃棒放在系于悬线下端的小软木球近旁时，玻璃棒就会吸引小球（图1-1a）．当用一琥珀棒重做这个实验时，观察到小球受到同样的吸

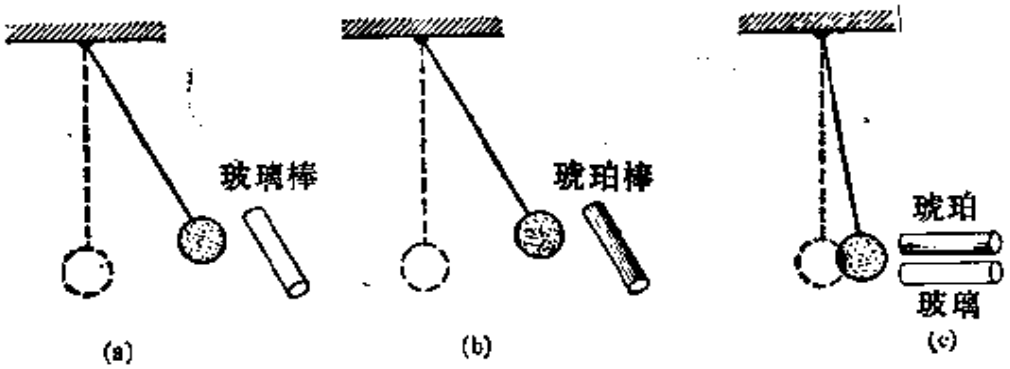


图 1-1　用带电玻璃棒或琥珀棒进行的实验．

引作用（图 1-1b）．但是，如果使这两根棒同时移近小球，如图 1-1

(c)所示，则观察到小球受到的吸引力不是增大，而是减小了，或者等于零．这些简单的实验表明，虽然带电的玻璃棒和琥珀棒都吸引软木球，但它们的作用是相反的物理过程．当两根棒同时存在时，它们的作用互相抵消，因而产生的效应较小，甚至等于零．由此可见，存在着两种带电状态：一种是似玻璃的，一种是似琥珀的．前者称为正的，后者称为负的．

现在我们用一根带电的玻璃棒接触两个软木球．可以认为这两个球也变为带正电的．当这两个球靠近时，它们相互排斥（图1-2a）．当用一根带电的琥珀棒接触两个小球而使它们带电时，得到同样的结果(图1-2b)．然而，如果用玻璃棒接触一个球，而用琥

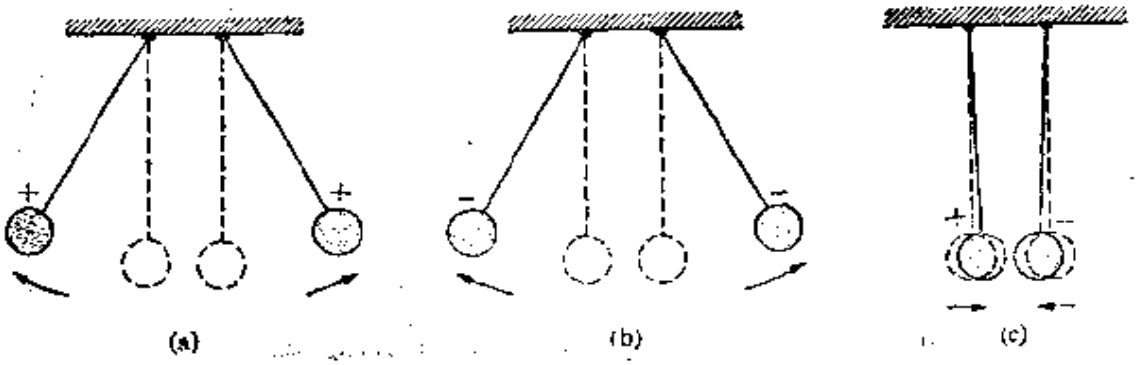


图1-2　同号电荷之间和异号电荷之间的电相互作用．

珀棒接触另一个球，就会观察到这两个球互相吸引(图1-2c)．由此可见，虽然引力作用永远是吸引的，但电相互作用则可以是吸引的，也可以是推斥的．

> 带同种电荷的两个物体（二者都带正电，或二者都带负电）互相推斥，但如果它们带不同种类的电荷(一个带正电，另一个带负电)，则它们相互吸引．

图1-3中概略示出上述论断．如果电相互作用仅仅是吸引的，或者仅仅是推斥的，就会永远也观察不到引力的存在，因为电相互作用要强得多．但是，大多数物体看来是由等量的正电和负电组成的，所以任何两个宏观物体之间的净电相互作用，都非常小．或者

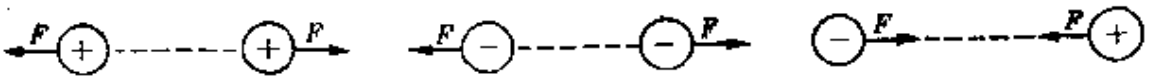


图 1-3　同号电荷之间和异号电荷之间的力.

等于零. 这样，由于质量效应是累积的，所以比电相互作用弱得多的引力相互作用，就表现为占主要地位的宏观相互作用.

1.2 电　　荷

就象我们赋予每一个物体一个引力质量来表征引力相互作用那样，我们可以定义一个电质量(简称电荷，并用符号 q 表示)来表征一个物体的带电状态. 这样，每一块物质或任一质点，都由两种独立的、基本的性质，即质量和电荷，来表征.

既然有两种带电状态，也就有两种电荷：正的和负的. 显示正带电状态的物体具有正电荷，显示负带电状态的物体具有负电荷. 一物体的净电荷等于它的正、负电荷的代数和. 具有等量正、负电荷(即净电荷为零)的物体，称为电中性的. 另一方面，常常称一个具有非零净电荷的质点为离子. 由于大块物质并不显示可觉察的电力，我们可以认为它是由等量的正、负电荷组成的.

我们采用下述步骤给带电体的电荷下一个操作型定义. 取一个任意带电体 Q (图 1-4)，并在离它某一距离 d 处，放置一个电荷

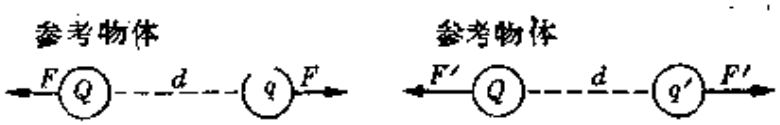


图 1-4　比较两个电荷 q 和 q'，示出它们同第三个电荷 Q 的电相互作用.

q. 测量作用在 q 上的力 F. 然后，把另一个电荷 q' 放在离 Q 同样距离 d 处，并测量作用在 q' 上的力 F'. 我们规定电荷 q 和 q' 的值正比于力 F 和 F'. 即

$$\frac{q}{q'}=\frac{F}{F'}. \tag{1.1}$$

如果我们任意地规定电荷 q' 的值为 1 单位，就能求出 q 的值. 这种比较电荷的方法，与比较两个物体的质量的方法非常相似. 这个电荷定义表示，在所有几何因素都相同的条件下，电相互作用力与质点的电荷成正比.

人们发现，在自然界中迄今观察到的所有过程中，一个孤立系统的净电荷保持恒定. 换句话说：

> 对于一个孤立系统中发生的任何过程，净电荷（即总电荷）不改变.

这个法则没有例外，称为电荷守恒原理. 以后，当我们分析涉及基本粒子的过程时，还将讨论它.

1.3 库仑定律

我们考虑在观察者的惯性参考系中静止（或者，至多以非常小的速度运动）的两个带电质点之间的电相互作用；这种相互作用的研究，构成所谓静电学. 两个带电质点之间的静电相互作用遵从库仑定律；库仑（Charles A. de Coulomb, 1736—1806）是一位法国工程师，他首先提出了如下的定律：

> 两个带电质点之间的静电相互作用，与它们的电荷成正比，而与它们之间距离的平方成反比，其方向沿连结这两个电荷的直线.

这个定律在数学上可以表示为

$$F=K_e\frac{qq'}{r^2}, \tag{1.2}$$

式中 r 是两个电荷 q 和 q' 之间的距离，F 是作用在每一个电荷上的力，K_e 是一个常数，决定于我们所选取的单位. 这个定律与引

力相互作用定律非常相似. 因此，在这里，我们可以利用在第一卷第十三章中已得到的结果，只要用 $K_e qq'$ 代替 $\gamma mm'$ 即可.

在实验上，我们能够通过测量两个已知电荷在几个不同距离上的相互作用力，来验证平方反比定律 (式 1.2). 图 1-5 中示出一个可能的实验装置，此装置与验证引力定律用的卡文迪什扭秤相似. 一端有一个带电球体 B 的杆 AB，悬挂在细丝 OC 上. 然后将另一个带电球体 D 移近球 B. 由于 D 和 B 两个球之间的力的作用，杆 AB 受到一个转矩，从而使细丝 OC 扭转. 测量细丝 OC 恢复平衡时转过的角度 θ，就能求出 B 上的电荷和 D 上的电荷之间的力.

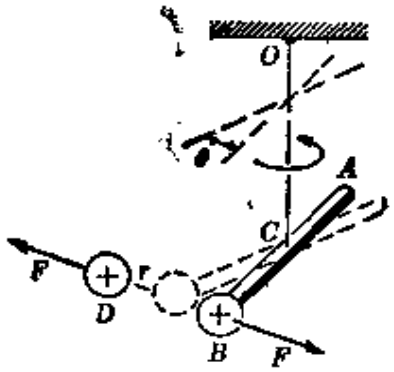


图 1-5 卡文迪什扭秤，用于验证两个电荷之间的电相互作用定律.

方程(1.2)中的常数 K_e 和引力定律中的常数 γ 相似. 不过，在引力的情况下，质量、距离和力的单位均已确定，所以 γ 的值就由实验确定. 而在现在这个情况下，虽然力和距离的单位已经确定，但电荷的单位尚未确定. 如果对电荷单位作出明确规定，K_e 的值就可以由实验确定. 另一方面，如果给出 K_e 的值，则可以用方程 (1.2) 来确定电荷的单位. 在 SI 单位中，规定 K_e 的数值为 $10^{-7}c^2=8.9874\times10^9$，这里 c 是真空中的光速①. 对于实际用途来说，可以认为 K_e 等于 9×10^9. 于是，当距离以 m 为单位，力以 N 为单位时，方程(1.2)变为

$$F=9\times10^9\frac{qq'}{r^2}. \tag{1.3}$$

① 在第 5.7 节中将说明，为什么要取 K_e 等于这个特殊的值.

电荷的单位叫做库仑. 应用方程(1.3),库仑是根据电荷所受的力来规定的:1 库仑电荷在真空中与另一个相等电荷的距离为 1m 时,它所受到的推斥力为8.9874×10^{9}N. 公式(1.3)仅对于真空中相对于观察者为静止的两个带电粒子才成立;也就是说,除这两个电荷之外,没有任何其他电荷或物质存在时,公式(1.3)才成立(见第 2.6 节). 注意,根据方程(1.2),K_e 的单位为 $N\cdot m^2\cdot C^{-2}$ 或 $m^3\cdot kg\cdot s^{-2}C^{-2}$. 由于实用上和计算上的理由,把 K_e 写成下列形式更为方便:

$$K_e=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}, \tag{1.4}$$

上式中的新的物理常数 ε_0 叫做真空电容率. 将 $K_e=10^{-7}c^2$ 代入上式,得出 ε_0 的值为

$$\varepsilon_0=\frac{10^7}{4\pi c^2}=8.854\times10^{-12}N^{-1}\cdot m^{-2}\cdot C^2. \tag{1.5}$$

因此,通常把方程(1.3)写成下列形式:

$$F=\frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}. \tag{1.6}$$

利用方程(1.6)时,必须计入电荷 q 和 q' 的正负符号. F 的负值对应于吸引力,正值对应于推斥力.

例题 1.1 设电荷的分布如图 1-6 所示,图中 $q_1=+1.5\times10^{-8}C$, $q_2=-0.5\times10^{-8}C$, $q_3=+0.2\times10^{-8}C$, $AC=r_1=1.2m$, $BC=r_2=0.5m$,试求作用在电荷 q_3 上的合力.

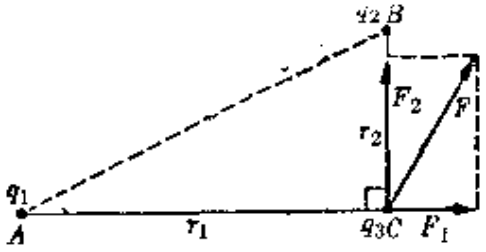


图 1-6 电荷 q_1 和 q_2 作用在电荷 q_3 上的合力.

解 q_1 和 q_2 之间的力 F_1 是推斥的,q_2 和 q_3 之间的力 F_2 是吸引的. 根据方程(1.6),F_1 和 F_2 的值为:

$$F_1=\frac{q_1q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}=1.875\times10^{3}\text{N},\ F_2=\frac{q_2q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}=-3.6\times10^{3}\text{N}.$$

因此，合力的大小

$$F=\sqrt{F_1^2+F_2^2}=4.06\times10^{3}\text{N}.$$

1.4 电　　场

电荷在其中受力作用的任何空间区域，叫做电场．这个力是那个区域中的其他电荷的存在所引起的．例如，把一个电荷 q 放在存在其他电荷 q_1,q_2,q_3，等等的区域中(图 1-7)，这个电荷就受力 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3+\cdots$，我们就说这个电荷处于电荷 q_1，q_2，q_3，…所产生的电场中．(电荷 q 当然也对 $q_1,q_2,q_3,\cdots$施力，但我们现在不考虑这些力．)由于电荷 $q_1,q_2,q_3,\cdots$分别作用在电荷 q 上的力；与 q 成正比，所以合力 $\boldsymbol{F}$ 也与 q 成正比．也就是说，放在电场中的带电质点所受的力与该质点的电荷成正比．因此，为了确定某一区域中是否存在电场，必须把一个小试验电荷带到该区域中，并分析试验电荷所受的力．

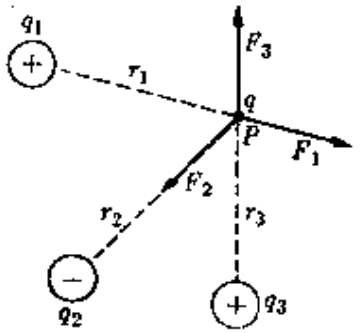


图 1-7　作用在点 P 的正电荷 q 上的电力．作用在 q 上的合力等于所有力的矢量和．

按定义，一点的电场强度 $\boldsymbol{\mathcal{E}}$，等于放在该点的试验电荷每单位电荷所受的力．因此，

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}=\frac{\boldsymbol{F}}{q}\quad\text{或}\quad\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{\mathcal{E}}.\tag{1.7}$$

电场强度 $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ 的单位是 $\text{N}\cdot\text{C}^{-1}$，或者利用基本单位，则为 $\text{m}\cdot\text{kg}\cdot\text{s}^{-2}\cdot\text{C}^{-1}$．

注意，根据定义式(式1.7)，如果 q 为正，则作用在这电荷上的

力 F 的方向与电场 $\mathscr{E}$ 的方向相同；如果 q 为负，则相反（图 1-8）. 因此，如果在有正、负粒子或离子的区域中存在电场，则这电场趋向于使正、负带电体沿相反的方向运动，从而引起电荷的分离；有时称这种效应为极化.

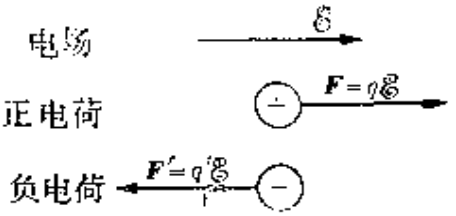


图 1-8　一电场对一个正电荷和一个负电荷的作用力的方向.

我们把方程(1.6)写成 $F=q'(q/4\pi\varepsilon_0 r^2)$. 它表示电荷 q 对一个与它相距为 r 的电荷 q' 的作用力. 根据式 (1.7)，我们也可以说，q' 所在的那一点的电场 $\mathscr{E}$ 使得 $F=q'\mathscr{E}$. 把 F 的这两个表达式加以比较，我们得出结论：在至一点电荷 q 的距离为 r 处的电场等于 $\mathscr{E}=q/4\pi\varepsilon_0 r^2$，或者写成矢量形式：

$$\mathscr{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}u_r, \tag{1.8}$$

式中 u_r 是由电荷 q 向外的径向单位矢量. 式(1.8)对于正、负电荷都适用；$\mathscr{E}$ 相对于 u_r 的方向由 q 的正负号给出. 因此，$\mathscr{E}$ 的方向是从正电荷朝外的，而对于负电荷，则是从外面朝着负电荷. 在相应的引力场公式中则明显地写出负号，因为引力相互作用永远是吸引的. 图 1-9(a)示出一正电荷附近的电场，而图 1-9(b)示出

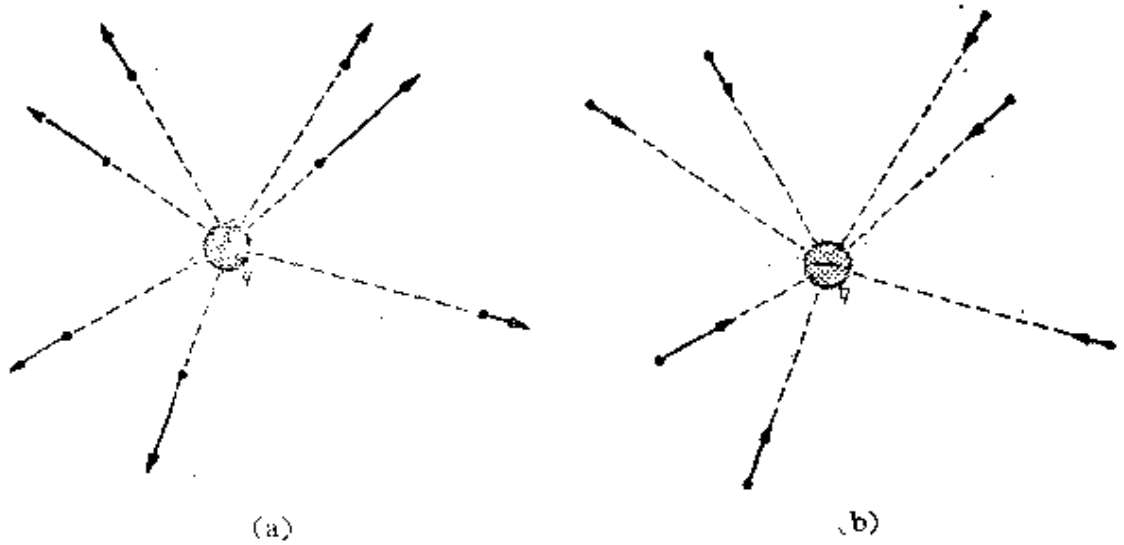
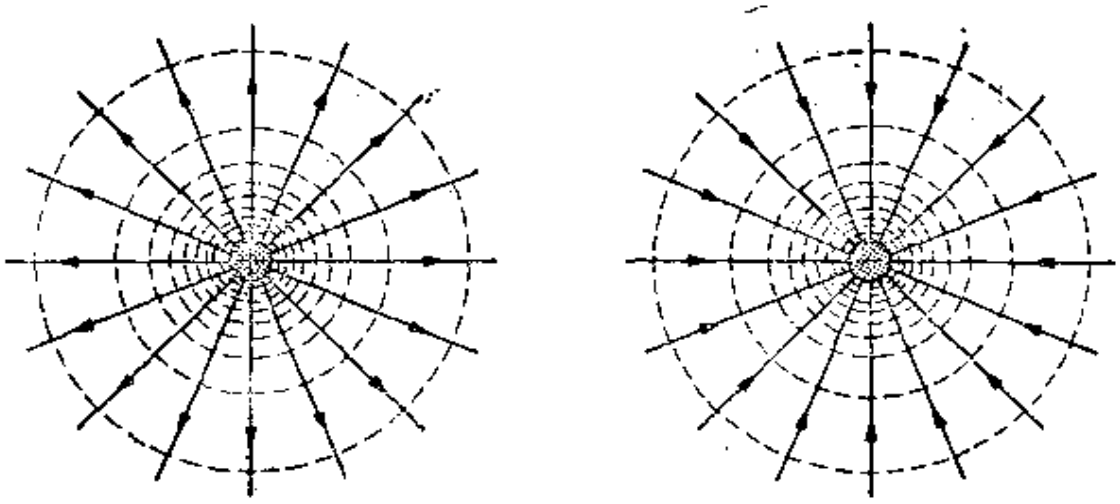


图 1-9　一正电荷与一负电荷所产生的电场.

一负电荷附近的电场.

正如在引力场的情况下那样，电场可以用电力线(或电场线)来表示;电力线是这样一些线，它们在每一点都与该点的电场方向相切. 图 1-10(a)中的电力线描绘一个正电荷的电场，而图 1-10(b) 中的电力线则描绘一个负电荷的电场. 这些电力线都是通过该电荷的径向直线. 这些电场线叫做电力线，因为它们决定放在电场中该点的一个正试验电荷 q' 趋向于移动的方向.



(a)　　(b)

图 1-10　一个正电荷和一个负电荷的电场
的电力线(实线)和等势面(虚线).

如果有若干个电荷存在，如图 1-7 所示，则一点的合电场等于各个电荷在该点产生的电场的矢量和. 即

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}=\boldsymbol{\mathcal{E}}_1+\boldsymbol{\mathcal{E}}_2+\boldsymbol{\mathcal{E}}_3+\cdots=\sum_i \boldsymbol{\mathcal{E}}_i.$$

图 1-11 中示出在两个大小相等的正、负电荷(例如氢原子中的一个质子和一个电子)的情况下，如何求出一点 P 的合电场. 图 1-12 中示出关于两个相等的正电荷(例如一个氢分子中的两个质子)的情况. 在这两个图中，也画出两个电荷产生的合电场的电力线.

匀强电场到处都有相同的强度和方向，可用平行的力线表示

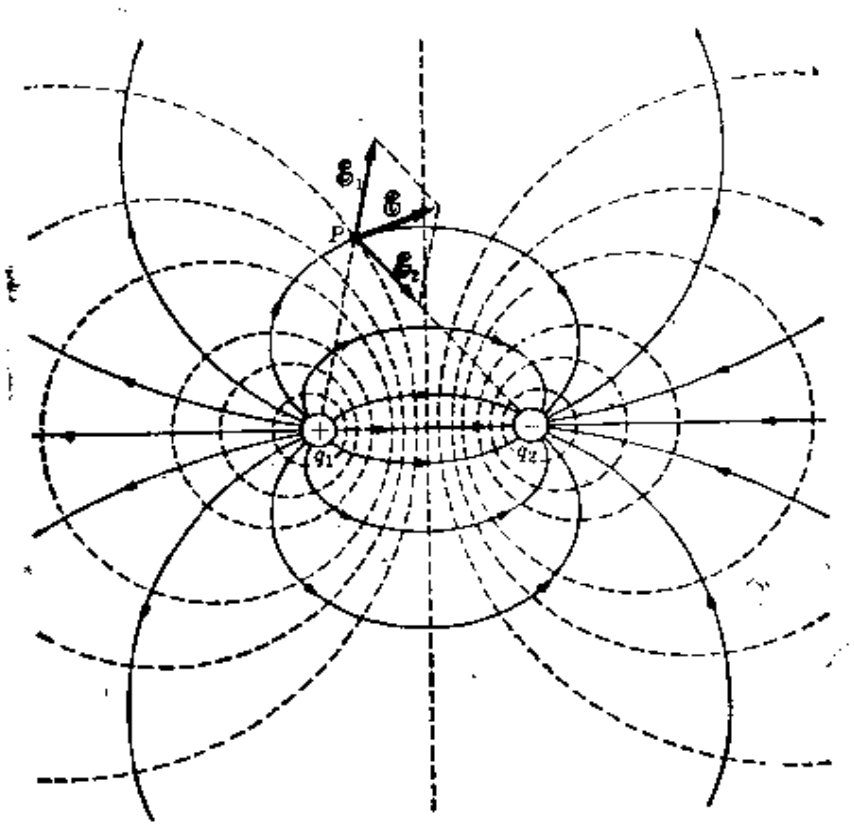


图 1-11　两个等值异号电荷的电场的电力线和等势面.

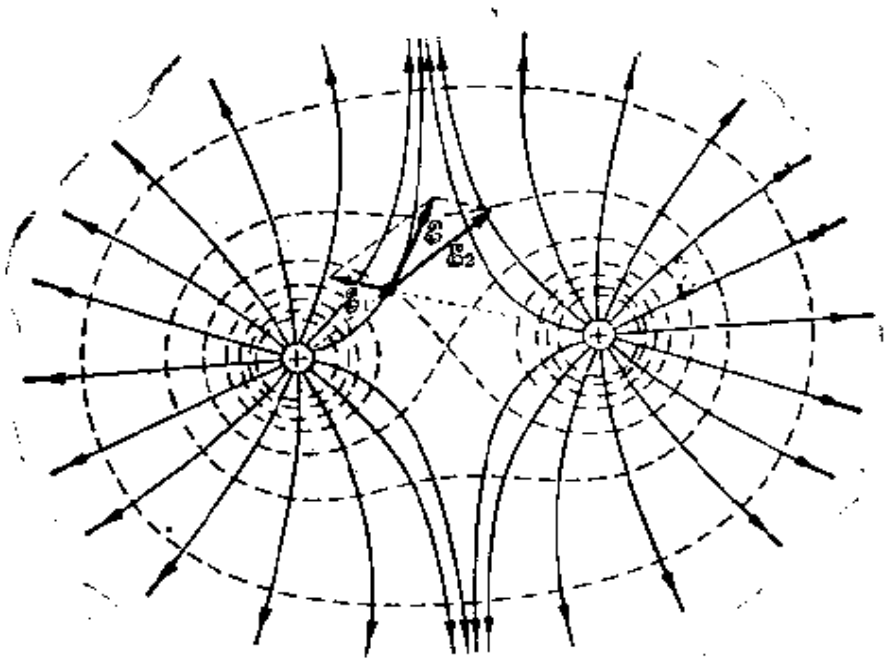


图 1-12　两个全同电荷的电场的电力线和等势面.

(图 1-13). 产生匀强电场的最好办法，是将两块平行的金属板充以大小相等而符号相反的电荷. 对称性表明，这电场是匀强的，以后(第 2.3 节)将证明这个论断.

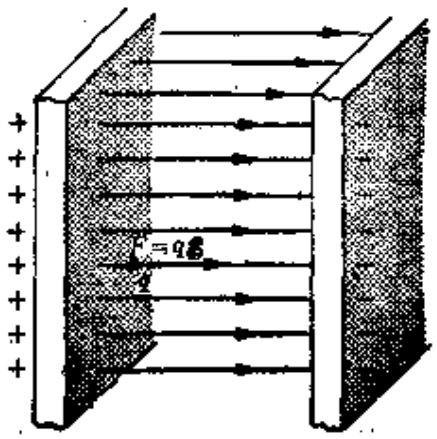


图 1-13 匀强电场.

例题 1.2 试求图 1-14 中两个电荷 q_1 和 q_2 在点 C 产生的电场；有关的数据在例题 1.1 中给出.

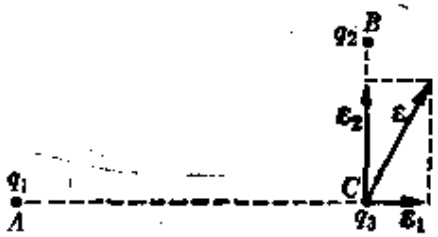


图 1-14 电荷 q_1 和 q_2 在 C 处产生的合电场.

解 有两种解法. 在例题 1.1 中已求出作用在点 C 的电荷 q_3 上的力 F，因此，可以利用式(1.7)而得出

$$E=\frac{F}{q_3}=2.03\times10^7\mathrm{N\cdot C^{-1}}.$$

另一种解法是先利用方程(1.8)计算每个电荷在点 C 产生的电场(图 1-14)，得出

$$E_1=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}=9.37\times10^6\mathrm{N\cdot C^{-1}},$$

$$E_2=\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}=18.0\times10^6\mathrm{N\cdot C^{-1}}.$$

由于这两个电场相互垂直，所以合电场的大小为

$$E=\sqrt{E_1^2+E_2^2}=2.03\times10^7\mathrm{N\cdot C^{-1}}.$$

这两个结果完全相同.

例题 1.3 讨论一电荷在匀强电场中的运动.

解 一个电荷在一电场中的运动方程可求出如下:

$$F=ma=q\mathscr{E} \quad 或 \quad a=\frac{q}{m}\mathscr{E}.$$

由此可见,在一电场中,一物体的加速度取决于比值 q/m. 对于不同的带电质点或离子,这个比值一般是不同的. 因此,它们在同一电场中的加速度也是不同的. 如果电场 $\mathscr{E}$ 是匀强的,则加速度 a 恒定,电荷的路径是一抛物线,恰似一个抛射体在匀强引力场中的运动情况.

下面讨论一个带电质点通过占有有限空间区域的电场的情况(图1-15). 为简单起见. 假定这带电质点进入电场时,它的初速度 v_0 垂直于电场的方向. X 轴平行于质点初速度的方向,Y 轴平行于电场的方向. 穿过电场之后,这质点又作直线运动,但具有不同的速度 v 和不同的方向. 因此,我们说电场使这质点偏转一个角度 α.

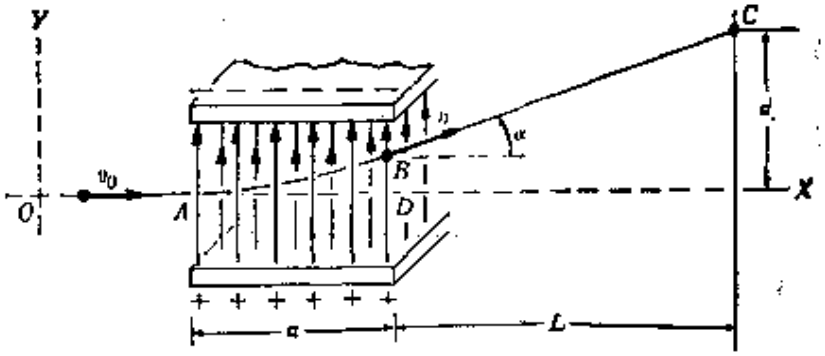


图 1-15 匀强电场使一正电荷偏转.

当这个质点以加速度 $a_y=(q/m)\mathscr{E}$ 通过这个电场时,它的坐标为:

$$x=v_0t, \quad y=\frac{1}{2}(q/m)\mathscr{E}t^2.$$

消去上式中的 t,求得质点路径的方程为

$$y=\frac{1}{2}\left(\frac{q}{m}\right)\left(\frac{\mathscr{E}}{v_0^2}\right)x^2;$$

上式表明,质点的路径为一抛物线. 计算在路径上 $x=a$ 处的斜率 dy/dx,就可求出偏转角 α:

$$\tan\alpha=(dy/dx)_{x=a}=q\mathscr{E}a/mv_0^2.$$

如果我们在距离 L 处放置一个屏 S,则具有给定的 q/m 值和初速 v_0 的质点

将到达屏上一点 C. 注意，$\tan\alpha$ 近似地等于 d/L，因为当 L 很大时，竖直位移 BD 比 d 小很多. 于是我们得到

$$\frac{qBa}{mv_0^2}\approx\frac{d}{L}. \tag{1.9}$$

如果我们知道比值 q/m，则可通过测量 d、L、a 和 B 而求出速率 v_0 或动能. 反之，如果知道 v_0，则可求出 q/m. 因此，当一束具有相同 q/m 的质点通过这电场时，其偏转程度与它们的入射动能成反比.

如图 1-15 所示的那种装置，可以用作能量分析器，将以不同能量运动的全同带电质点分离开. 例如，β 射线是某些放射性物质发射出的电子. 如果把一 β 发射体放在点 O，则所有电子将集中在屏上同一点处(只要它们具有相同的能量). 但是，如果发射出的电子具有不同的能量，它们将铺展在屏上的一个区域内. 实验得到的是第二种情况. 从核结构的观点来看，这个结果具有很大的重要性.

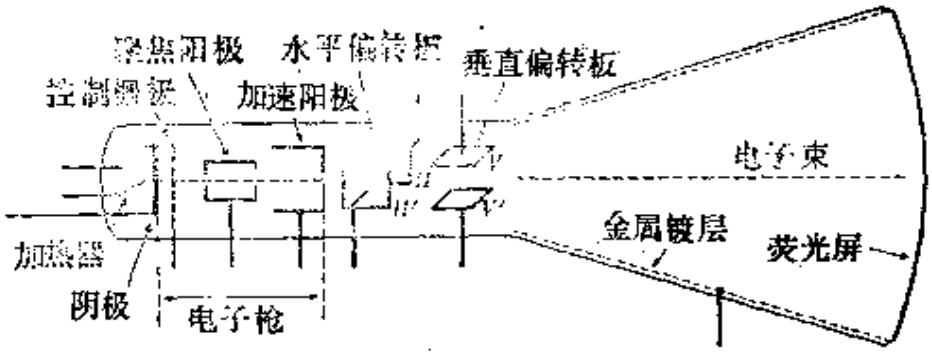


图 1-16 一电荷在交叉电场作用下运动. 电子从阴极发射出来，并被一强电场加速. 电子通过加速阳极上的小孔而离开电子枪，并在两对致偏极板之间通过. 管子内壁的金属镀层起屏蔽外源的作用，并把束电子约束，从而保持右方没有电场.

利用两对平行的带电极板，能够产生两个相互垂直的电场，一个水平电场沿 HH' 的方向，一个竖直电场沿 VV' 的方向，如图 1-16 所示. 调节两个电场的相对强度，能够使电子束偏转到屏上的任意一点. 如果其中一个场(或者两个场)是可变的，则屏上的光点将描出各种曲线或图形. 电视机显象管和示波器中都利用了这种效应.

1.5 电荷的量子化

曾设计了许多种实验来解决这样一个问题：一个物体上的电

荷究竟是一个有限量的整数倍，还是可以连续地再分割下去. 证明电荷不是以任意的数量出现，而是以一个基本单位(即量子) 的倍数出现的，这个经典实验是美国物理学家密立根 (R. A. Millikan, 1869—1953)的油滴实验. 他在本世纪初期花了几年时间完成了现在所谓的油滴实验. 他在两块平行的水平极板 A 和 B 之间建立一个竖直电场 $\mathscr{E}$，此电场可以接通或者切断. 上极板中心处有几个小孔，喷雾器喷出的油滴能够通过这些小孔. 由于喷雾器喷嘴处的摩擦作用，大部分油滴是带电的.

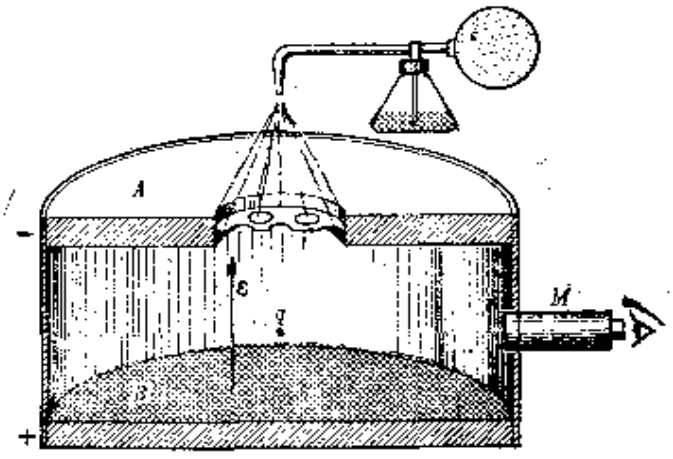


图 1-17　密立根油滴实验. 通过显微镜 M 观察带电油滴的运动.

我们首先从理论的观点分析这个实验. 设一个油滴的质量为 m，半径为 r. 在电场切断的情况下，当这油滴向下的速度为 v 时，它自由下落的运动方程为 $ma=mg-6\pi\eta rv$，此式右边第二项起因于空气的粘滞摩擦[见第一卷方程(7.19)和(7.20)]. 当 $a=0$ 时，这油滴的收尾速度为

$$v_1=\frac{mg}{6\pi\eta r}=\frac{2\rho r^2 g}{9\eta}, \tag{1.10}$$

式中 ρ 代表油的密度，而且利用了关系式 $m=\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)\rho$. [为准确起见，还必须考虑空气的浮力，即以 $(\rho-\rho_a)$ 代替 ρ，这里 ρ_a 是空气的密度.]

如果这油滴带正电荷 q，则当施加电场，而且油滴的速度为 v 时，在朝上的方向上油滴的运动方程为

$$ma=q\mathscr{E}-mg-6\pi\eta rv;$$

当 $a=0$ 时，这油滴在朝上的方向上的收尾速度为

$$v_2=\frac{q\mathscr{E}-mg}{6\pi\eta r},$$

或者，解出 q，并利用方程(1.10)消去 mg，得到

$$q=\frac{6\pi\eta r(v_1+v_2)}{\mathscr{E}}. \tag{1.11}$$

测出 v_1，就能利用方程(1.10)求出油滴半径 r．测出 v_2，就能利用方程(1.11) 求出电荷 q．(如果电荷是负的，则可施加一个朝下的电场来产生朝上的运动．)

实际测定时，则按另一种程序，相继接通和切断电场，对油滴的向上和向下的运动进行若干次观察．速度 v_1 保持不变；但 v_2 偶而会改变，表明油滴的电荷改变．这种改变是由于宇宙射线使周围空气偶然发生电离．油滴通过空气运动时，可能获得一些这种离子，把一个X射线或 γ 射线源放在平行极板附近(这些射线能增加空气的电离程度)，

由方程(1.11) 得出电荷的变化 Δq 与向上速度的变化 Δv_2 之间的关系为：

$$\Delta q=\frac{6\pi\eta r}{\mathscr{E}}\Delta v_2. \tag{1.12}$$

Δq 有时为正，有时为负，依电荷变化的性质而定．用不同油滴多次重复油滴实验，我们可以得出结论：电荷的变化 Δq 总是一个基本电荷 e 的倍数(即 $\Delta q=ne$)，e 的值为

$$e=1.6021\times10^{-19}\text{C}. \tag{1.13}$$

e 叫做基本电荷．在自然界中观察到的一切电荷，等于基本电荷 e，或者为基本电荷 e 的倍数．对于这个法则，迄今未发现例外．因

此，电荷是量子化的这一事实，似乎是自然界的一条基本定律．迄今仍未找到用更基本的概念来说明这一事实的办法．

电荷的另一个重要方面是，基本电荷总是和某一固定质量联系着，从而引起所谓基本粒子．在第 4.4 节中，将讨论测定比值 q/m 的一些方法；这样，如果 q 已知，就能求出 m．已用这种方法发现了几种基本粒子．目前我们假定，一切原子仅仅是由电子、质子和中子三种基本粒子组成的，这三种基本粒子的特性列于表 1-1 中．

表 1-1　电子、质子和中子的质量和电荷

粒　子	质　量	电荷
电　子	$m_e=9.1091\times10^{-31}\text{kg}$	$-e$
质　子	$m_p=1.6725\times10^{-27}\text{kg}$	$+e$
中　子	$m_n=1.67448\times10^{-27}\text{kg}$	0

注意，中子不带电荷；然而，它却具有其他电性质．这将在以后讨论．质子质量约比电子质量大 1840 倍．这一事实在许多物理现象中有着深刻影响．

现在可以指出，1 库仑负的或正的电荷中包含的电子或质子的数目为 $1/(1.6021\times10^{-19})=6.2418\times10^{18}$．

1.6 电　　势

置于电场中的带电粒子由于电场对电荷施力而具有势能，因此，必须作功，才能把电荷带到场中特定地点；也就是说，每当电荷从一处至另一处时，电场作功．电场中一点的电势被定义为置于该点的单位电荷的势能；因此，电势是一个标量．我们用 V 表示一特定点的电势，用 E_p 表示置于同一点的电荷 q 的势能，于是可以写出：

$$V=E_p/q \quad 或 \quad E_p=qV. \tag{1.14}$$

取电势的零点与势能的零点重合；在大多数情况下，电势的零点取在无限远处．电势的 SI 单位是焦耳/库仑 ($J \cdot C^{-1}$)．为了纪念意大利科学家伏特(A. Volta, 1745—1827)，这个单位叫做伏特(V)．采用基本单位时，$V = m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot C^{-1}$．

电势与电场之间的关系十分重要，下面作较详细的讨论．设一电荷 q 在一电场中从 A 点移动到 B 点(图 1-18)．应用方程 (1.14)，可以得出这电荷的势能的变化为

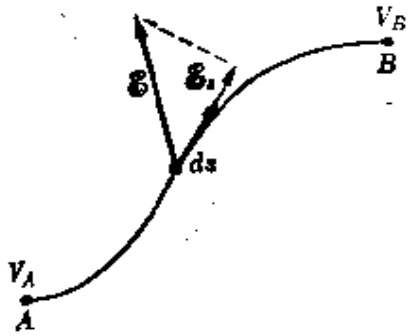


图 1-18

$$E_{p,A} - E_{p,B} = q(V_A - V_B).$$

但是，根据势能的定义，上式左边表示当这电荷从 A 点移动到 B 点时电场对它所做的功．我们用 $W_{A\to B}$ 表示这个功．于是有

$$W_{A\to B} = q(V_A - V_B). \tag{1.15}$$

表达式(1.15)使我们能够把两点之间的电势差定义为，把单位正电荷从第一个点移动到第二个点时，电场所做的功．

作用在电荷上的电力为 $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{\mathscr{E}}$，式中 $\boldsymbol{\mathscr{E}}$ 是电场；根据基本定义，我们可以写出

$$W_{A\to B} = \int_A^B \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_A^B q\boldsymbol{\mathscr{E}} \cdot d\boldsymbol{r},$$

上式中的积分是沿连结 A 和 B 的路径计算的．把这个方程与方程(1.15)结合起来，消去公因子 q，则得

$$\int_A^B \boldsymbol{\mathscr{E}} \cdot d\boldsymbol{r} = V_A - V_B. \tag{1.16}$$

方程(1.16)表示电场和电势差之间的明确关系．注意，如果点 A 与点 B 重合，因而 $A = B$，则积分路线为一闭曲线；因此，

$$\oint \boldsymbol{\mathscr{E}} \cdot d\boldsymbol{r} = 0. \tag{1.17}$$

上式表明，当一电荷沿一闭路径走一周时，静电场所做的功等于零.因此，静电场对应于一保守力.

参看图1-18，方程(1.16)可以写成另一种形式：

$$\int_A^B \mathscr{E}_s ds = V_A - V_B,$$

式中$\mathscr{E}_s$是$\mathscr{E}$沿路径的分量. 也可以写成

$$\int_A^B \mathscr{E}_s ds = -(V_B - V_A) = -\int_A^B dV.$$

现在假定点A和B相距如此之近，以致上述方程中的积分实际上化为一项. 于是得到

$$\mathscr{E}_s ds = -dV \quad 或 \quad \mathscr{E}_s = -\frac{\partial V}{\partial s}. \tag{1.18}$$

这个结果表明，电场在某一方向上的分量，等于在同一方向上每单位长度上电势变化的负值. 例如，电场$\mathscr{E}$的直角分量由下式给出：

$$\mathscr{E}_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \mathscr{E}_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad \mathscr{E}_z = -\frac{\partial V}{\partial z}. \tag{1.19}$$

当象方程(1.18)这样的关系存在时，我们就说，存在一个场，其强度等于势梯度的负值. 在这个情况下，电场是电势梯度的负值. 方程(1.19)还可以写成更紧凑的形式：

$$\mathscr{E} = -\text{grad}\, V. \tag{1.20}$$

当电场已知时，可以用方程(1.18)或(1.19)求出电势，反之亦然.

我们来考虑匀强电场这个简单情况（图1-19）. 设X轴平行于电场，则方程(1.19)的第一式给出$\mathscr{E}dx = -dV$. 由于$\mathscr{E}$为常数，并且假定在$x=0$处$V=0$，所以积分得出

$$\int_0^V dV = -\int_0^x \mathscr{E} dx = -\mathscr{E}\int_0^x dx$$

或

$$V = -\mathscr{E}x. \tag{1.21}$$

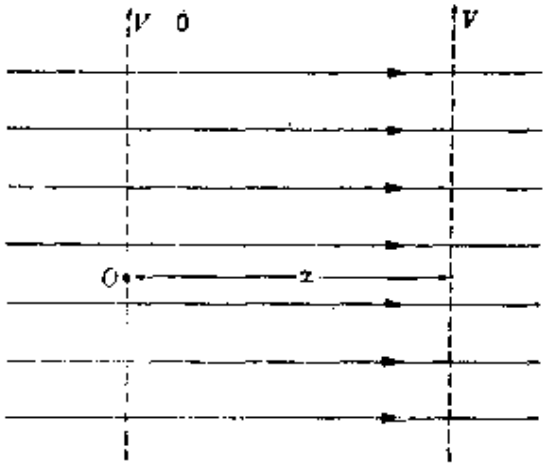


图 1-19 匀强电场.

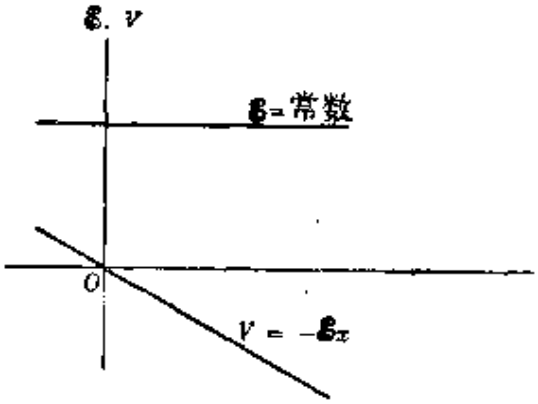


图 1-20 匀强电场的$\mathscr{E}$和V的变化情况.

这是一个很有用的关系式，其图解如图 1-20 所示. 注意，由于方程(1.20)或(1.21)中的负号，电场指向电势减小的方向. 当我们考虑两个点 x_1 和 x_2 时，方程(1.21)给出 $V_1=-\mathscr{E}x_1$，$V_2=-\mathscr{E}x_2$. 二者相减，得到 $V_2-V_1=-\mathscr{E}(x_2-x_1)$；或者，设 $d=x_2-x_1$，则得

$$\mathscr{E}=-\frac{V_2-V_1}{d}=\frac{V_1-V_2}{d}. \tag{1.22}$$

虽然这个关系式只适用于匀强电场，但是，如果相距为 d 的两点之间的电势差(V_1-V_2)已知，则可用上式来估计这两点之间的电场. 如果电势差(V_1-V_2)为正，则电场指向从 x_1 至 x_2 的方向；如果(V_1-V_2)为负，则电场指向相反的方向. 方程(1.22)[事实上，方程(1.18)或(1.19)也如此]表明，也可以用伏特/米为单位表示电场，这个单位与前面给出的单位牛顿/库仑等效. 这可由下式看出:

$$\frac{\text{伏特}}{\text{米}}=\frac{\text{焦耳}}{\text{库仑}\cdot\text{米}}=\frac{\text{牛顿}\cdot\text{米}}{\text{库仑}\cdot\text{米}}=\frac{\text{牛顿}}{\text{库仑}}.$$

按通常习惯，伏特/米(符号为 $\mathrm{V\cdot m^{-1}}$) 比牛顿/库仑(符号为 $\mathrm{N\cdot C^{-1}}$)用得更多，

1.7 点电荷的电势

求一个点电荷的电势时，在方程(1.18)中用距离 r 代替 s，因为这电场是径向的；即 $\mathscr{E}=-\partial V/\partial r$. 利用方程(1.8)，可以写出

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}=-\frac{\partial V}{\partial r}$$

或

$$\int dV=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dr}{r^2}.$$

将上式积分，并象在引力情况下那样，假定 $r=\infty$ 时，$V=0$，则得

$$V=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}. \tag{1.23}$$

电势 V 的正负取决于产生此电势的电荷 q 的符号.

如果有若干个电荷 $q_1, q_2, q_3, \cdots$，则一点 P 的电势(图 1-7)等于这些电荷各自的电势的标量和，即

$$V=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1}+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2}+\frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_3}+\cdots=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i\frac{q_i}{r_i}. \tag{1.24}$$

因此，先计算一电荷分布所产生的电势，然后利用方程(1.17)计算合电场，一般地讲，要比按相反的顺序计算容易.

在其所有的点上电势相同的面(即 $V=$常数)，叫做等势面. 在一等势面的每一点，电场的方向垂直于该面；即力线与等势面正交. 这是因为，当两个点的电势相同时，在这两点之间不做功. 对于一匀强电场，由方程(1.21)可以看出，$V=$常数表示 $x=$常数；因此，等势面为平面，如图 1-19 中的虚线所示. 对于一个点电荷，方程(1.23)表示等势面是 $r=$常数的球面，如图 1-10(a)和(b) 中的虚线所示. 对于几个电荷，按照方程(1.24)，等势面由 $\Sigma_i(q_i/r_i)=$常数给出. 图 1-11 和 1-12 中的虚线表示两个电荷的等势面.

例题 1.4 计算例题 1.1 中的电荷 q_3 的电势能.

解 参看图 1-6，并利用方程(1.23)．位于 A 和 B 的电荷 q_1 和 q_2 在点 C 产生的电势分别为

$$V_1=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1}=11.25\times10^6\text{V},\quad V_2=\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2}=-9\times10^6\text{V}.$$

因此，点 C 的电势为

$$V=V_1+V_2=2.25\times10^6\text{V}.$$

于是电荷 q_3 的势能为

$$E_p=q_3V=(0.2\times10^{-3}\text{C})\,(2.25\times10^6\text{V})=4.5\times10^2\text{J}.$$

把这个例题与例题 1.2 加以比较，即可看出处理电场与处理电势之间的差别．

例题 1.5 一根很长的直金属丝，每单位长度上载有电荷 λ，试求它所产生的电场和电势．

解 我们把这根金属丝分成许多小段，每一段的长度为 ds(图 1-21)，因而每一段上的电荷为 $dq=\lambda ds$．ds 在点 P 产生的电场的大小为

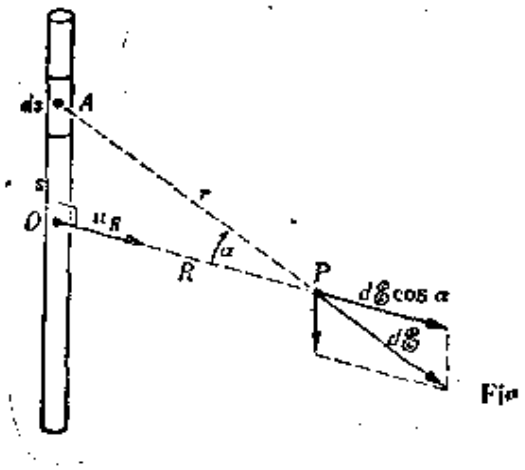


图 1-21 一根很长的带电细丝的电场．

$$d\mathscr{E}=\frac{\lambda ds}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

其方向沿直线 AP．但是，由于这个问题的对称性，对于在点 O 上方距离为 s 处的每一线元 ds，在点 O 下方相同距离处有一对应的线元．因此，当我们把所有线元产生的电场加起来时，平行于细丝的分量之和等于零．因此，合电场平行于 OP．把每一线元 ds 产生的平行于 OP 的电场分量 $d\mathscr{E}\cos\alpha$ 加起来，就得到合电场

$$\mathscr{E}=\int d\mathscr{E}\cos\alpha=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{ds}{r^2}\cos\alpha.$$

由图可知，$r=R\sec\alpha$，$s=R\tan\alpha$，所以 $ds=R\sec^2\alpha d\alpha$。把这些值代入上式，并从 $\alpha=0$ 至 $\alpha=\pi/2$ 积分，再乘以 2（因为细丝上、下两半的贡献相同），则得

$$\mathscr{E}=\frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^{\pi/2}\cos\alpha d\alpha=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}.$$

由此可见，细丝产生的电场与 R 成反比。写成矢量形式，则

$$\mathscr{E}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\boldsymbol{u}_R.$$

求电势时，可以把关系式 $\mathscr{E}=-\text{grad}\ V$ 写成 $\mathscr{E}=-\boldsymbol{u}_R(\partial V/\partial R)$，因为这个电场是径向的。于是得出

$$\frac{dV}{dR}=-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}.$$

将上式积分，得出

$$V=-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\ R+C.$$

给空间某一点的电势规定一个方便的值，就能确定常数 C 的值。在这种情况下，通常取 $R=1$ 处的电势为零，从而得出 $C=0$。

因此，电势为

$$V=-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\ R.$$

建议学生按相反的顺序解这个问题，即先求出电势，然后求电场。

1.8 电场中的能量关系

一个质量为 m，电荷为 q 的带电粒子或离子在一电场中运动时，其总能量为

$$E=E_k+E_p=\frac{1}{2}mv^2+qV. \tag{1.25}$$

当这离子从位置 P_1（这里的电势为 V_1）移动到位置 P_2（这里的电势为 V_2）时，由方程(1.25)和能量守恒原理，可得出

$$\frac{1}{2}mv_1^2+qV_1=\frac{1}{2}mv_2^2+qV_2 \tag{1.26}$$

根据动能的定义，$W=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2$ 是当带电粒子从 P_1 移动到 P_2 时电场对它所做的功. 将方程(1.26)整理后，得出

$$W=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2=q(V_1-V_2). \tag{1.27}$$

方程(1.27) 使我们能够给出伏特的精确定义：1 库仑电荷为获得 1 焦耳能量所必须通过的电势差.

由方程(1.27)可知，一个带正电的粒子($q>0$) 从高电势处移动到低电势处时($V_1>V_2$)获得动能；而一个带负电的粒子($q<0$)，则必须从低电势处移动到高电势处($V_1<V_2$)，才能获得动能.

如果我们取点 P_2 的电势为零(即 $V_2=0$)，并且这样安排我们的实验，以使离子在 P_1 处的速度为零(即 $v_1=0$)，则方程(1.27)变为(去掉下角标)

$$\frac{1}{2}mv^2=qV. \tag{1.28}$$

上式表示一个带电粒子从静止开始，通过一电势差 V 时所获得的动能. 例如，这就是静电加速器中应用的原理.

一台典型的静电加速器 (图 1-22)是由一根抽空的管子组成的，在其两端加上一电势差 V. 管子的一端有一离子源 S，它把带电粒子注入管子里. 这些粒子到达另一端时获得的能量由(1.28)给出. 这些快速的离子撞击在靶子 T 上. 靶子的材料根据实验的性质来选择. 这种碰撞的结果是发生某种核反应. 撞击离子的能量被转移给靶子. 因此，必须不断地冷却靶子，以免靶子熔化或汽化.

静电加速器有若干种类型(考克饶夫特-瓦耳顿加速器、范德格喇夫加速器等等)，它们产生电势差的方法不同. 在任一情况下，静电加速器的能量都受能够施加的最大电势差 (即不会引起所用材料发生电击穿的最大电势差) 的限制. 这个电势差不能超过几

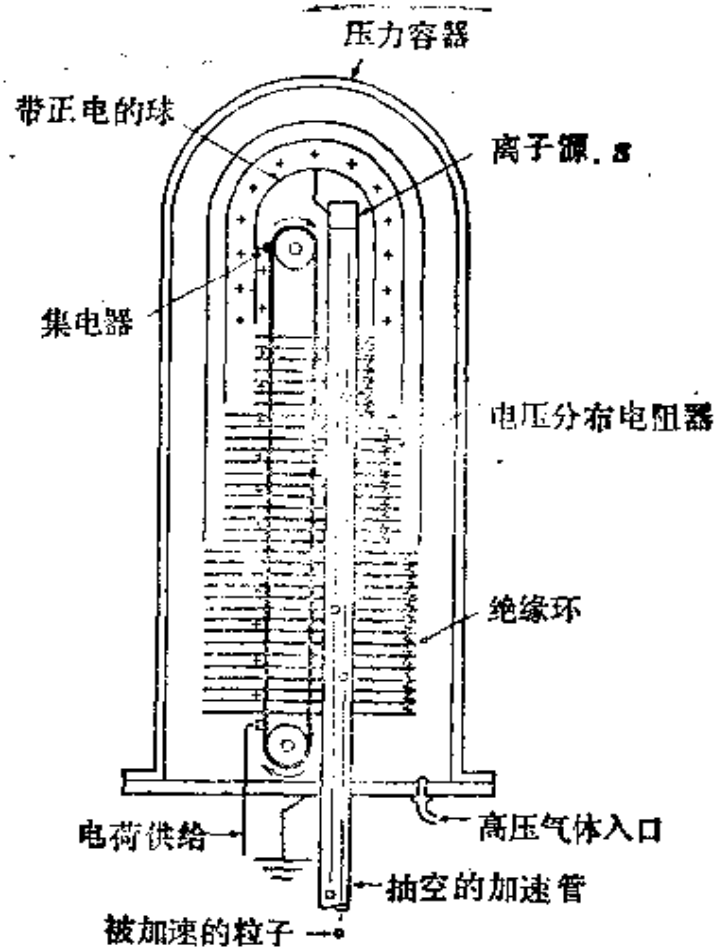


图 1-22　一台范德格喇夫静电加速器的简化截面图．用一台高速电动机带动一条用绝缘材料制成的传送带(它绕过两个滑轮)．来自一电压源的电荷，在下端被传送带拾起，并被送到上方．一个集电器把这电荷吸到顶部的金属球上，在球上建立一个高电势．在高电压端产生的正离子，被带电球和地电势(在另一端)之间的电势差向下加速．

百万伏．

鉴于基本粒子和原子核的电荷等于基本电荷 e 或者为 e 的倍数，我们可以根据方程(1.27) 定义一个新的能量单位，叫做电子伏，符号为 eV．1 电子伏等于一个电荷为 e 的粒子通过 1 伏电势差时所获得的能量．这样，利用方程(1.13)给出的 e 值，得到

$$1\text{eV} = (1.6021\times10^{-19}\text{C})\,(1\text{V}) = 1.6021\times10^{-19}\text{J}.$$

一个具有电荷 ve 的粒子通过一电势差 ΔV 时，获得的能量为 $v\Delta V$ eV．常用的电子伏的倍数是千电子伏(keV)和兆电子伏 (MeV)，

用这种单位表示基本粒子的静质量能，是很有用的．结果如下：

$$E_e = m_e c^2 = 8.1867 \times 10^{-14}\text{J} = 0.5110\text{MeV},$$
$$E_p = m_p c^2 = 1.5032 \times 10^{-10}\text{J} = 938.26\text{MeV}, \quad (1.29)$$
$$E_n = m_n c^2 = 1.5053 \times 10^{-10}\text{J} = 939.55\text{MeV}.$$

1.9 电　　流

在静电加速器这个例子中(第 1.8 节)，一束带电粒子沿着管子快速地被加速；这个例子启示我们引入电流这个非常重要的概念．电流是由一束带电粒子或离子组成的．这个定义不仅适用于各种加速器中的离子，也适用于电解溶液中的离子，电离气体或等离子体中的离子，以及金属导体中的电子．为了产生电流，必须施加电场，以使带电粒子沿着确定的方向运动．

电流强度被定义为每单位时间通过电荷流动区域的截面（例如加速管或金属丝的截面）的电荷．因此，如果在时间 t 内有 N 个带电粒子(每个粒子载有电荷 q)通过一导电媒质的截面，则通过的总电荷为 $Q = Nq$；因此，电流强度为

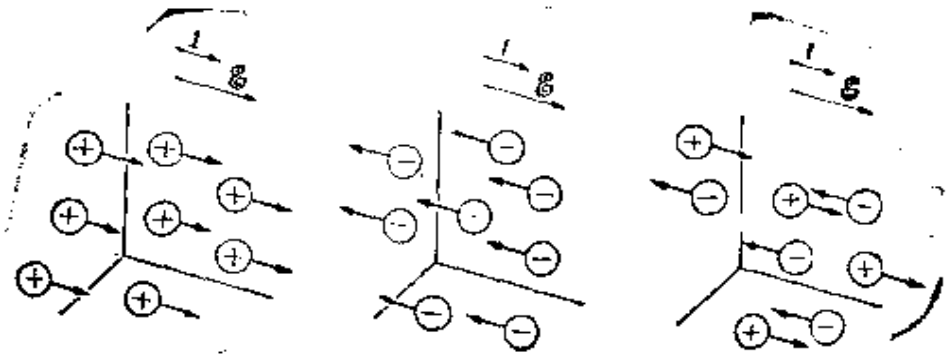
$$I = Nq/t = Q/t. \quad (1.30)$$

实际上，上式表示在时间 t 内的平均电流；瞬时电流为

$$I = dQ/dt. \quad (1.31)$$

电流的单位是库仑/秒或 $\text{C}\cdot\text{s}^{-1}$，这个单位叫做安培(A)；这是为了纪念法国物理学家安培 (A. M. Ampère, 1775—1836)．1 安培对应于每秒钟有 1 库仑电荷通过导体的截面．

电流的方向被认为是运动着的带正电粒子的运动方向．这方向和引起带电粒子运动的外加电场或电势降的方向相同 (图 1-23 a)．因此，如果一个电流是带负电粒子(例如电子)的运动引起的，则按定义，电流方向与电子的实际运动方向相反(图 1-23b)．



(a) 正电荷　　(b) 负电荷　　(c) 正、负电荷

图 1-23　电场 E 引起正负离子的运动而产生电流 I.

由于运动着的离子被电场加速，所以维持电流需要耗费能量. 设在时间 t 内，有 N 个离子(每个离子带有电荷 q) 通过电势差 ΔV 每个离子获得能量 $q\Delta V$，因而获得的总能量为 $Nq\Delta V = Q\Delta V$. 因此，为了维持这个电流，每单位时间所需的能量(即功率)为

$$P = \frac{Q\Delta V}{t} = I\Delta V. \tag{1.32}$$

例如，上式就表示驱动前一节中讨论过的加速器所需的功率. 它也表示把能量转移给加速器靶的功率. 因此，它也表示靶的冷却剂把能量移去的速率. 可见，式(1.32)是普遍适用的，它表示在任一导电媒质中两点之间施加一电势差 ΔV 时，维持一电流 I 所需的功率. 由式(1.32)可知，

$$\text{伏特} \times \text{安培} = \frac{\text{焦耳}}{\text{库仑}} \times \frac{\text{库仑}}{\text{秒}} = \frac{\text{焦耳}}{\text{秒}} = \text{瓦特},$$

所以这些单位是一致的.

1.10　电偶极子

一种重要的电荷排布是电偶极子. 电偶极子由相隔很小距离 a 的两个等值异号电荷 $+q$ 和 $-q$ 组成(图 1-24).

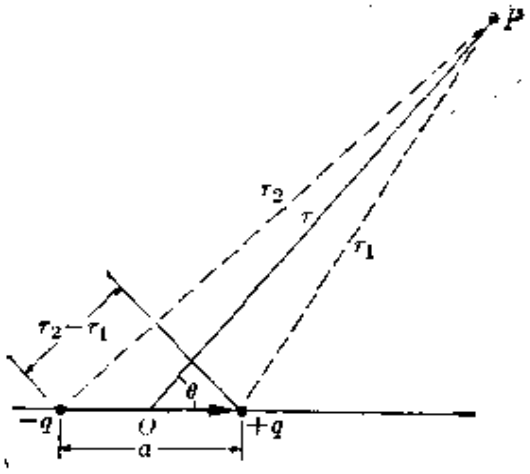


图 1-24

电偶极矩 $\boldsymbol{p}$① 由下式定义：

$$\boldsymbol{p}=q\boldsymbol{a}, \tag{1.33}$$

式中 $\boldsymbol{a}$ 为由负电荷至正电荷的位移. 利用方程(1.24)，一个电偶极子在点 P 产生的电势为

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_1}-\frac{q}{r_2}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q(r_2-r_1)}{r_1r_2}.$$

如果 a 比 r 小很多，我们可以作如下的近似：

$$r_2-r_1=a\cos\theta,\quad r_1r_2=r^2,$$

从而得出

$$V\cong\frac{qa\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0r^2}\quad\text{或}\quad V=\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0r^2}. \tag{1.34}$$

我们利用方程(1.18)求电偶极子的电场强度. 由于方程(1.18)表示在极坐标中的电势，所以 $\mathscr{E}$ 的分量将在极坐标中给出. 求径向分量 $\mathscr{E}_r$ 时，我们注意到 $ds=dr$. 于是由方程(1.18)得到

$$\mathscr{E}_r=-\frac{\partial V}{\partial r}=\frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0r^3}. \tag{1.35}$$

对于横向分量 $\mathscr{E}_\theta$，相应的极坐标元素是弧长 $ds=rd\theta$，于是得到

① 注意：由于习惯，动量和电偶极矩的符号相同.

$$\mathscr{E}_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}. \tag{1.36}$$

图 1-25中示出这两个分量. 图 1-26中示出一个小电偶极子的电力

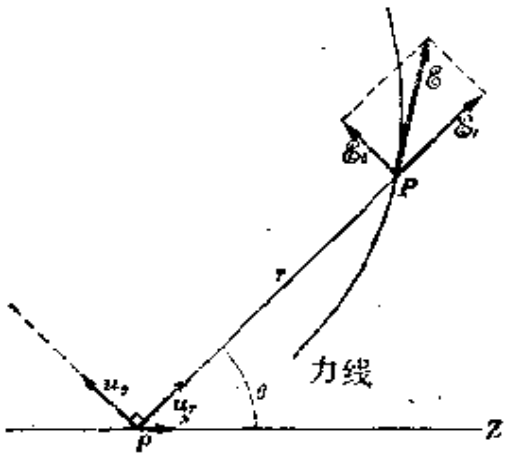


图 1-25

线. 虽然电偶极子中两个电荷等值异号，其净电荷为零，但它们之间稍有距离就足以产生一非零的电场.

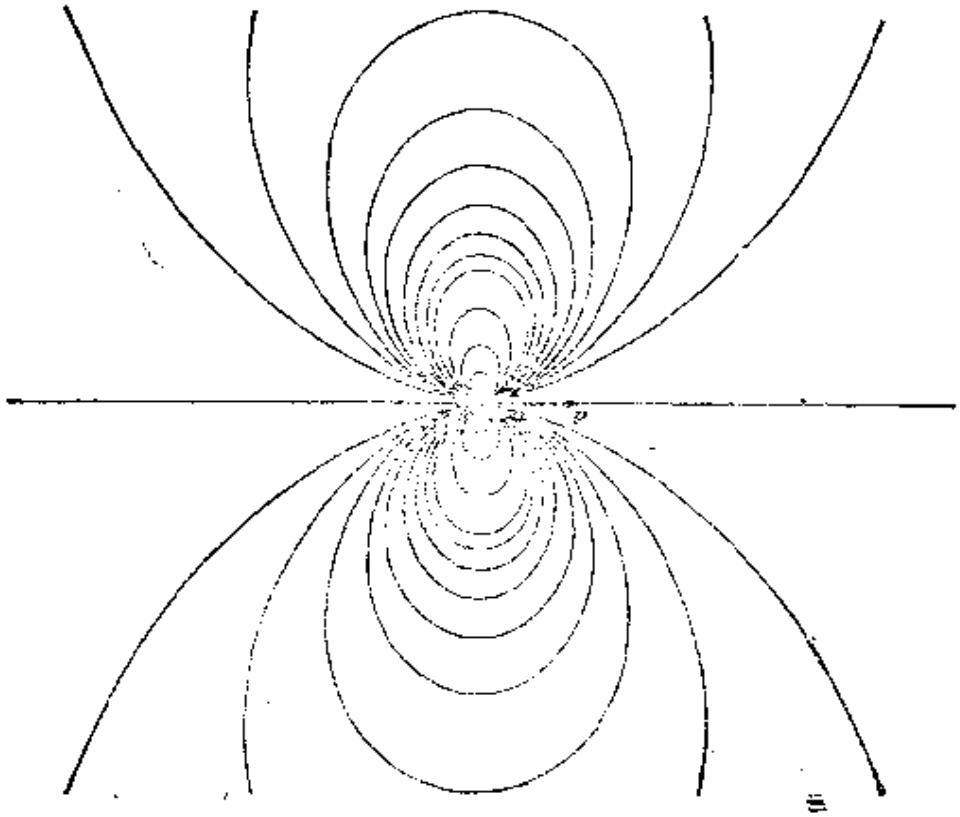
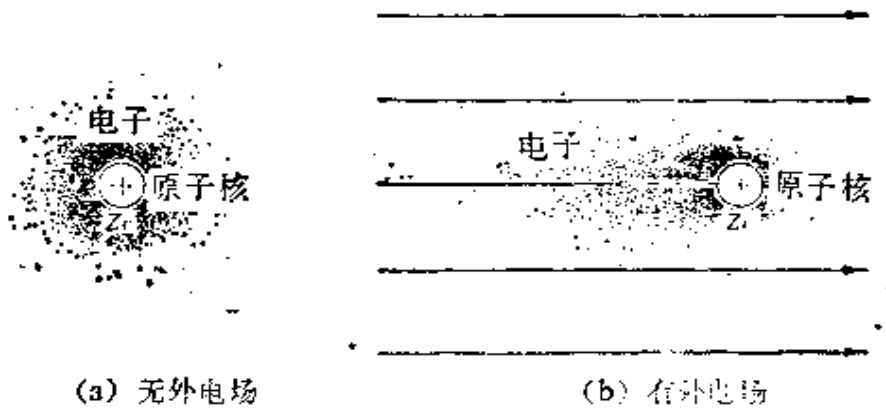


图 1-26　一个电偶极子的电场的电力线.

在原子中，电子的质心与原子核重合，因而原子的平均电偶极矩等于零(图1-27a)．但如果施加一外电场，则电子的运动发生畸变，因而电子的质心相对于原子核有一位移 x (图 1-27b)．这样，原子就极化而成为一个电偶极子，其偶极矩为 p．这个偶极矩与外电场 $\mathscr{E}$ 成正比．



(a) 无外电场　　(b) 有外电场

图 1-27　在外电场作用下原子的极化．

另一方面，分子可以具有永电偶极矩．这种分子叫做有极分子．例如，在 HCl 分子中(图 1-28)，H 原子的电子绕Cl 原子运动的时间比绕 H 原子运动的时间要长．因此，负电荷的中心不与正电荷的中心重合，因而 HCl 分子具有一偶极矩，其方向是从 Cl 原子到 H 原子．也就是说，我们可以写出 H^+Cl^-．HCl 分子的电偶极矩 $p=3.43\times10^{-30}$C·m．在 CO 分子中，电荷分布仅稍微不对称，因而电偶极矩比较小，约为 0.4×10^{-30}C·m，C 原子和 O 原子分别对应于这个分子的正端和负端．

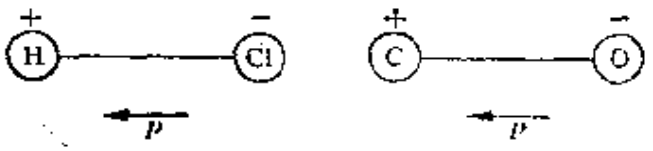


图 1-28　有极或原子分子．

在 H_2O 这样的分子中，两个 H—O 键之间的角略大于90°(图 1-29)，电子力图聚集在 O 原子周围，因而 O 原子相对于 H 原子略显负性．每个 H—O 键都对电偶极矩有贡献．由于对称性，总

电偶极矩沿分子轴的方向，其值等于 6.2×10^{-30}C·m. 但在 CO_2 分子中，所有原子都在一条直线上（图 1-30）. 由于对称性，它的

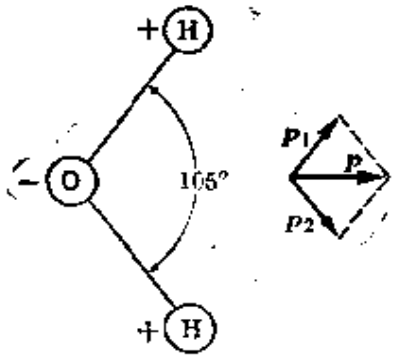


图 1-29　H_2O 分子的电偶极子.

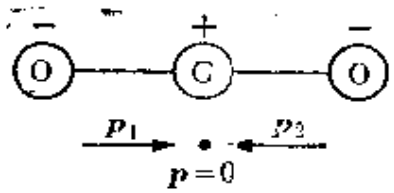


图 1-30　CO_2 分子不具有电偶极子.

总电偶极矩等于零. 由此可见，电偶极矩能够提供关于分子结构的有用信息. 表 1-2 中列出几种有极分子的 p 值.

表 1-2　几种有极分子的电偶极矩

分　子	p,C·m
HCl	3.43×10^{-30}
HBr	2.60×10^{-30}
HI	1.26×10^{-30}
CO	0.40×10^{-30}
H_2O	6.2×10^{-30}
H_2S	5.3×10^{-30}
SO_2	5.3×10^{-30}
NH_3	5.0×10^{-30}
C_2H_5OH	3.66×10^{-30}

* 具有零偶极矩的分子包括：CO_2, H_2, CH_4(甲烷)，C_2H_6(乙烷)和 CCl_4(四氯化碳).

当一电偶极子置于一电场中时，电偶极子的每个电荷都受一力作用(图 1-31). 如果电场是匀强的，则合力为零. 如果电场不是匀强的，则净力为

$$F_{净}=q\mathscr{E}_+-q\mathscr{E}_-=q(\mathscr{E}_+-\mathscr{E}_-).$$

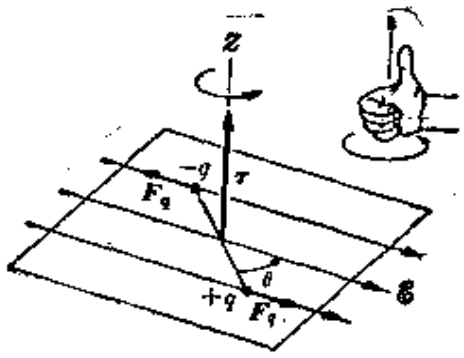


图 1-31　在一外电场中的电偶极子.

我们考虑电场沿 X 轴和偶极子的取向平行于电场这种特殊情况. 这时，如果只考虑量值，则 $\mathscr{E}_+-\mathscr{E}_-=(d\mathscr{E}/dx)a$，因而 $F=p(d\mathscr{E}/dx)$. 这个结果表明，一个取向平行于电场的电偶极子，趋向于沿电场增大的方向移动. 如果这偶极子的取向反平行于电场，则得到相反的结果. 当然，如果电场是匀强的，则不论电偶极子的取向如何，它所受的合力都为零.

偶极子的势能为

$$E_p=qV_+-qV_-=q(V_+-V_-)=-qa\left(-\frac{V_+-V_-}{a}\right).$$

如果用方程(1.9)来描述匀强电场，而且 θ 是偶极子与电场之间的角，则上式最后一个因子正好是电场 $\boldsymbol{\mathscr{E}}$ 的平行于 $\boldsymbol{a}$ 的分量 $\mathscr{E}_a=\mathscr{E}\cos\theta$. 因此，$E_p=-qa\mathscr{E}_a$，或

$$E_p=-p\mathscr{E}\cos\theta=-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\mathscr{E}}. \tag{1.37}$$

当 $\theta=0$ 时，势能最小；这表示，当偶极子的取向平行于电场时，它处于平衡态. 如果我们不考虑 $\boldsymbol{\mathscr{E}}_+$ 与 $\boldsymbol{\mathscr{E}}_-$ 之间的微小差别（或当电场为匀强时），则作用于偶极子的两个电荷上的力 $q\boldsymbol{\mathscr{E}}_+$ 和 $-q\boldsymbol{\mathscr{E}}_-$ 实质上形成一个力偶，其转矩为

$$\tau=a\times(q\boldsymbol{\mathscr{E}})=(q\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{\mathscr{E}}=\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{\mathscr{E}}. \tag{1.38}$$

由上式和图 1-31 可以看出，电场的转矩趋向于使偶极子平行于电场排列. 这转矩的量值为 $\tau=p\mathscr{E}\sin\theta$，其方向如图 1-31 所示.

置于一电场中的偶极子的这些性质，具有非常重要的应用. 例如，溶液中一个离子的电场使这离子周围的溶剂分子极化而呈图1-32所示的取向. 这些已取向的分子在某种程度上附着于这离子上，增加它的有效质量，而减少它的有效电荷；这离子部分地为溶剂分子所屏蔽. 净效应是，在外电场中离子的迁移率降低. 而且，如果气体或液体的分子为永偶极子，则当它们被置于电场中时，由于电场所引起的转矩，分子将趋向于排列成使其偶极子平行. 这时我们说该物质被极化. 这个问题留待下一章讨论.

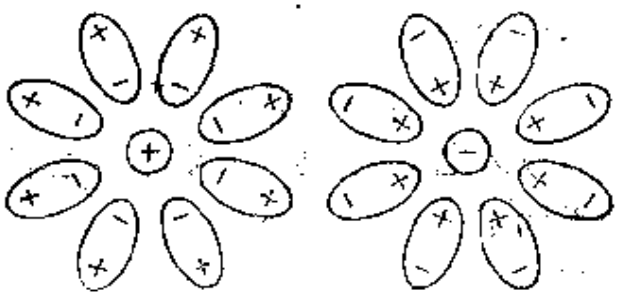


图 1-32　溶液中一个离子的极化效应.

例题 1.6　以矢量形式表示一电偶极子的电场.

解　根据图 1-25，一个电偶极子的电场可以写作

$$\mathscr{E}=u_r\mathscr{E}_r+u_\theta\mathscr{E}_\theta=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(u_r 2p\cos\theta+u_\theta p\sin\theta).$$

由该图还可以看出，电偶极矩可以写作

$$p=p(u_r\cos\theta-u_\theta\sin\theta).$$

利用上式消去 $\mathscr{E}$ 的表达式中的 $p\sin\theta$，则得

$$\mathscr{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(3u_r p\cos\theta-p).$$

又因 $p\cos\theta=u_r\cdot p$，所以上式变为

$$\mathscr{E}=\frac{3u_r(u_r\cdot p)-p}{4\pi\varepsilon_0 r^3},$$

上式就是电偶极子电场的矢量形式.

例题 1.7　试求两个电偶极子之间的相互作用能. 利用所得结果估算两个水分子之间的相互作用能. 讨论相对取向效应.

解 在例题 1.6 中，我们求出一个偶极子在距离为 r 处产生的电场．令 $\boldsymbol{p}_1$ 表示它的电偶极矩，那个结果可以改写为

$$\boldsymbol{E}_1=\frac{3\boldsymbol{u}_r(\boldsymbol{u}_r\cdot\boldsymbol{p}_1)-\boldsymbol{p}_1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}.$$

用 $\boldsymbol{p}_2$ 表示第二个偶极子的电偶极矩，并利用方程(1.37)，可得出这两个偶极子之间的相互作用能为

$$E_{p,12}=-\boldsymbol{p}_2\cdot\boldsymbol{E}_1=-\frac{3(\boldsymbol{u}_r\cdot\boldsymbol{p}_1)(\boldsymbol{u}_r\cdot\boldsymbol{p}_2)-\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{p}_2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}. \tag{1.39}$$

由上式可得出几个重要结论．(1) 相互作用能 $E_{p,12}$ 对于两个偶极子是对称的，因为，如果我们交换 $\boldsymbol{p}_1$ 和 $\boldsymbol{p}_2$，结果保持不变．这个结果是意料之中的．(2) 两个偶极子的相互作用是非有心的，因为它与位矢 r(或单位矢量 $\boldsymbol{u}_r$)同 $\boldsymbol{p}_1$、$\boldsymbol{p}_2$ 所成的角有关系．因此，在偶极子-偶极子相互作用下的运动中，偶极子的轨道角动量不守恒．(3) 两个偶极子之间的力不是沿着连结它们的直线(某些特殊位置除外)．(4) 由于两个电偶极子之间的势能与 r^3 成反比，所以力(它是势能梯度的负值)与 r^4 成反比．因此，与两个电荷之间的相互作用相比，两个电偶极子之间的相互作用随距离减小的速率要快得多．

图 1-33 中示出与方程(1.39)对应的几何排布，其中图(a)对应于一般情况．在图(b)中，两个偶极子的取向沿着连结它们的直线．因此，$\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{p}_2=p_1p_2$，$\boldsymbol{u}_r\cdot\boldsymbol{p}_1=p_1$，$\boldsymbol{u}_r\cdot\boldsymbol{p}_2=p_2$，因而有

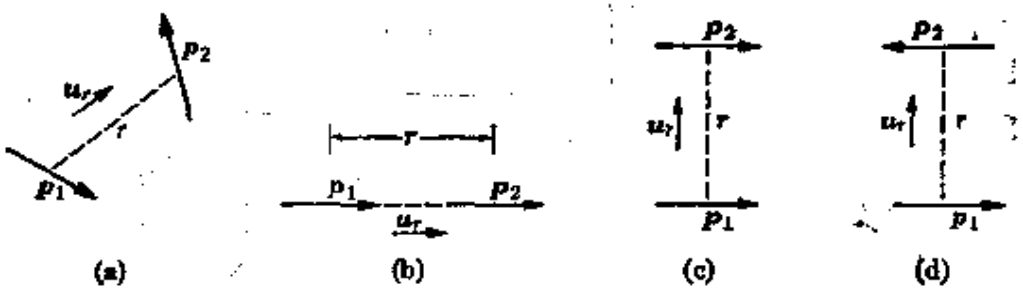


图 1-33 两个电偶极子之间的相互作用．

$$E_{p,12}=-\frac{2p_1p_2}{4\pi\varepsilon_0 r^3},$$

上式中的负号表示这两个偶极子相互吸引．在图(c)中，仍有 $\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{p}_2=p_1p_2$，但 $\boldsymbol{u}_r\cdot\boldsymbol{p}_1=0$，$\boldsymbol{u}_r\cdot\boldsymbol{p}_2=0$，因此有

$$E_{p,12}=+\frac{p_1p_2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}.$$

上式中的正号表示两个偶极子相互排斥. 最后,在(d)中,$p_1\cdot p_2=-p_1p_2$,我们得到

$$E_{p,12}=-\frac{p_1p_2}{4\pi\varepsilon_0r^3},$$

上式中的负号表示两个偶极子相互吸引.

两个偶极子之间的相互作用是非常重要的,因为分子力主要是这种相互作用引起的. 我们考虑两个水分子,其相对位置如图 1-33(b)所示,其间距等于它们在液相中的正常距离,即约为 3.1×10^{-10}m. 它们的电偶极矩为 6.1×10^{-30}m·C. 因此,它们的相互作用势能等于

$$E_{p,12}=\frac{9\times10^9\times2\times(6.1\times10^{-30})^2}{(3.1\times10^{-10})^3}=2.25\times10^{-20}\text{J}.$$

这个结果比我们在第一卷第 13.9 节中利用汽化热的值算出的相互作用能,约大 10 倍. 然而,必须注意,现在这个结果对应于处于图 1-33(b)所示相对位置的两个分子之间的瞬时相互作用能. 但水分子是在不停地运动,所以它们的相对取向是在不断地改变. 因此,求 $E_{p,12}$ 时,必须对一切可能的相对取向求方程(1.37)的平均值. 这样计算,就得到较好的符合.

建议学生把两个水分子之间的电相互作用能 $E_{p,12}$,与在同样位置上的引力相互作用能加以比较.

1.11 高阶多极子

能够定义高阶电矩,即多极子电矩. 例如,图 1-34 所示电荷分布就构成一电四极子,它的总电荷为零;可以证明,它的电偶极矩也等于零. 很难按初等方式给出电四极矩的一般定义. 然而,可以证明,一电荷分布相对于一对称轴(例如 z 轴)的电四极矩由下式定义:

$$Q=\frac{1}{2}\sum_i q_ir_i^2(3\cos\theta_i-1), \tag{1.40}$$

式中 r_i 是电荷 i 至中心的距离, θ_i 是 r_i 与这个轴所成的角(图 1-35). 注意,$z_i=r_i\cos\theta_i$,于是方程(1.40)可以写作

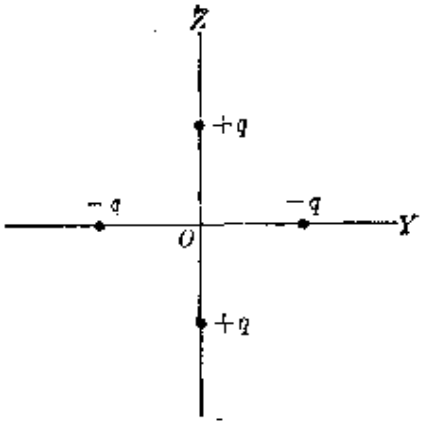


图 1-34　电四极矩

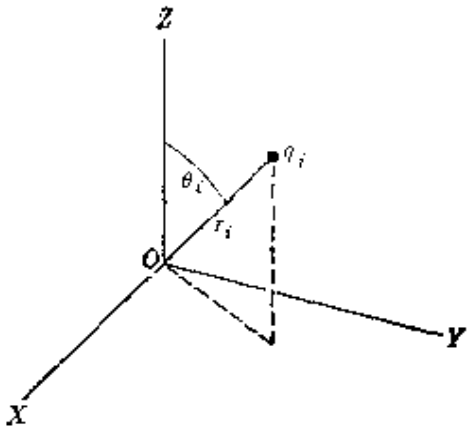
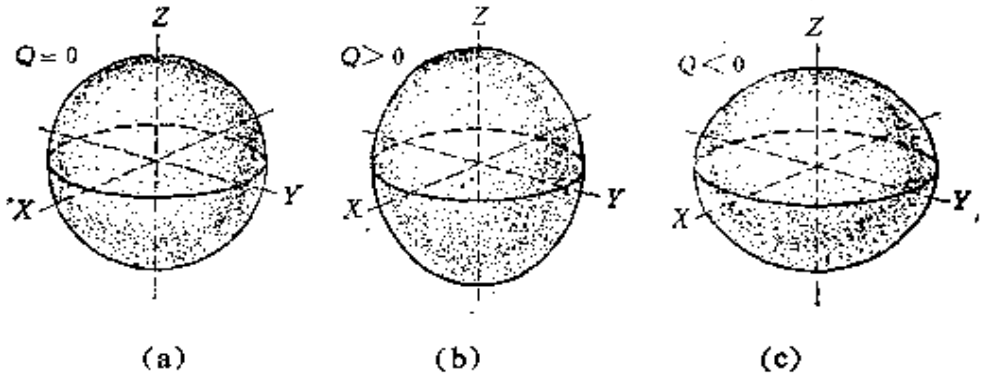


图 1-35

$$Q=\frac{1}{2}\sum_i q_i(3z_i^2-r_i^2). \tag{1.41}$$

球形电荷分布的电四极矩为零. 长椭球形电荷分布的电四极矩有正值，而扁椭球形电荷分布的电四极矩则有负值 (图 1-36).



(a)　(b)　(c)

图 1-36　椭球形电荷分布的电四极子

因此，电四极矩表示电荷分布偏离球形分布的程度. 例如，通常认为原子核是球形的. 但是，精细的测定表明，某些原子核具有相当大的电四极矩. 这被解释为：这些原子核有很大的形变，因而它们所产生的电场，偏离点电荷的电场. 这又影响电子运动的能量.

应注意，一个点电荷的电势与 r 成反比，其电场与 r^2 成反比，而电偶极子的电势与 r^2 成反比，其电场与 r^3 成反比. 类似地可以证明，电四极矩的电势与 r^3 成反比，其电场与 r^4 成反比. 对于更

高阶的多极子，可得到类似的结果．于是我们得出结论：多极子的阶越高，它的电场有显著效应的范围就越小．

例题 1.8 计算图 1-37 所示电荷排布（叫做线性电四极子）的电势．

解 这系统的总电荷等于零，它的电偶极矩也等于零，因为 $p=+q(+a)-2q(0)+q(-a)=0$．但利用方程(1.41)可以算出它的电四极矩为

$$Q=\frac{1}{2}\{q(3a^2-a^2)-2q(0)+q[3(-a)^2-a^2]\}=2qa^2\,.$$

这个电荷系统在点 P 产生的电势为

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_1}-\frac{2q}{r}+\frac{q}{r_2}\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{2}{r}+\frac{1}{r_2}\right). \tag{1.42}$$

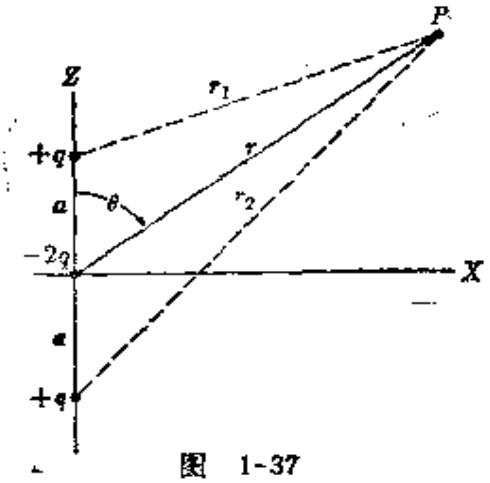


图 1-37

由图可知，

$$r_1=(r^2-2ar\cos\theta+a^2)^{1/2},$$

或

$$r_1=r\left(1-\frac{2a\cos\theta}{r}+\frac{a^2}{r^2}\right)^{1/2},$$

因而

$$\frac{1}{r_1}=\frac{1}{r}\left(1-\frac{2a\cos\theta}{r}+\frac{a^2}{r^2}\right)^{-1/2}. \tag{1.43}$$

其次，假定 a 比 r 小很多．利用附录中的方程(M.22)所表示的二项展开式，得到 $(1+x)^{-1/2}=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\cdots$．令 $x=-2a\cos\theta/r+a^2/r^2$，则方程(1.43)可改写为

$$\frac{1}{r_1}=\frac{1}{r}\left[1-\frac{1}{2}\left(-\frac{2a\cos\theta}{r}+\frac{a^2}{r^2}\right)+\frac{3}{8}\left(-\frac{2a\cos\theta}{r}+\frac{a^2}{r^2}\right)^2+\cdots\right].$$

将上式中的括号展开，只保留分母中含 r^3 或更低次的项，结果得到

$$\frac{1}{r_1}=\frac{1}{r}+\frac{a\cos\theta}{r^2}+\frac{a^2}{2r^3}(3\cos^2\theta-1)+\cdots \tag{1.44}$$

同理，$r_2=(r^2+2ar\cos\theta+a^2)^{1/2}$，因此得到

$$\frac{1}{r_2}=\frac{1}{r}-\frac{a\cos\theta}{r^2}+\frac{a^2}{2r^3}(3\cos^2\theta-1)+\cdots. \tag{1.45}$$

把式(1.44)和(1.45)代入方程(1.42)中并化简，则得电势为

$$V=\frac{qa^2(3\cos^2\theta-1)}{4\pi\varepsilon_0 r^3}.$$

将 $Q=2qa^2$ 代入上式，则得

$$V=\frac{Q(3\cos^2\theta-1)}{2(4\pi\varepsilon_0)r^3}. \tag{1.46}$$

上式表示一个线性电四极子的电势．如同在第 1.10 节中对于电偶极子所做的那样，可以利用方程(1.20)求出电场．

习　题

1.1　氢分子中两个质子的间距为 0.74×10^{-10}m，试求这两个质子之间的电推斥力．并将所得结果与在相同间距下它们之间的引力加以比较．

1.2　假定氢原子中的电子沿一半径为 0.53×10^{-10}m 的圆轨道运动，试求质子与电子之间的电吸引力．并将所得结果与在相同间距下它们之间的引力加以比较．

1.3　试将两个电子之间的静电推斥力与在相同间距下它们之间的引力加以比较．对于两个质子，重做此题．

1.4　质量为 m 的两个完全相同的软木球，具有相等的电荷 q（图 1-38）．两个球系在长为 l 的两根细绳下端．其上端固定在同一点上．试求平衡时两根细绳与竖直线所成的角 θ．

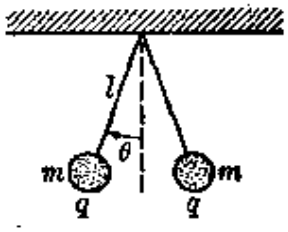


图 1-38

1.5　一个质量为 2×10^{-3}kg 的带电粒子，放在一方向朝下、强度为 500 $N\cdot C^{-1}$ 的匀强电场中．试问：这个粒子必须带有什么样的电荷，才能在实验室中保持静止？

1.6　在某一阴极射线示波器的致偏极板之间的区域中，电场强度为 $3\times10^4N\cdot C^{-1}$．(a) 作用在该区域中一个电子上的力是多少？(b) 在这个力作

用下，电子的加速度是多少？将所得结果与重力加速度加以比较.

1.7 一个$+2.5\times10^{-3}$C的电荷，放在一强度为$5\times10^{4}N\cdot C^{-1}$、方向朝上的匀强电场中. 在下列三种情况下，求电场力对该电荷所做的功：当这电荷(a)水平移动4.5m，(b)向下移动0.8m，(c)与水平线成45°角向上移动2.6m.

1.8 在两块带相反电荷的平面平行板之间的区域中，存在着匀强电场，在负带电板的表面处释放一个初速为零的电子，它在1.5×10^{-8}s后撞击在对面的板上. 设两板的间距为2×10^{-2}m，试求：(a)电场的强度，(b)电子撞击第二块板时的速度.

1.9 在图1-39中，一个电子沿一阴极射线示波器致偏极板的中央轴线以$2\times10^{7}m\cdot s^{-1}$的水平初速射出. 两个极板之间的匀强电场的强度为$2\times10^{4}N\cdot C^{-1}$，方向朝上. 假定在致偏极板边缘处电场急剧地开始和终止. (a)当这个电子到达极板的一端时，它在轴线下方多远的地方？(b)当这个电子离开致偏极板时，它的运动方向与轴线所成的角多大？(c)这个电子将在轴线下方多远的地方撞击在荧光屏S上？

1.10 一个电子被射入强度为$5\times10^{3}N\cdot C^{-1}$的匀强电场中，这电场的方向垂直朝上. 电子的初速为$10^{7}m\cdot s^{-1}$，在水平面上方与水平面成30°角. (a)求这个电子达到它的最大高度时所需的时间. (b)计算这个电子垂直上升的最大距离(相对于它的初始高度). (c)通过多长的水平距离之后，这个电子才能回到原来的高度？(d)概略画出电子的轨道.

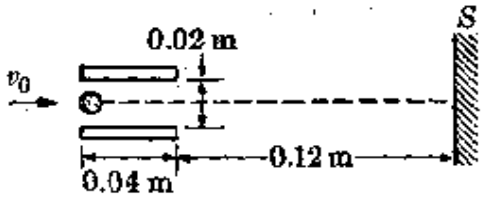


图 1-39

1.11 一个油滴的质量为3×10^{-14}kg，半径为2×10^{-6}m，带有10个过剩的电子. 试求在下列两种情况下它的收尾速度：(a)在无电场的区域中下落时，(b)在一强度为$3\times10^{5}N\cdot C^{-1}$，方向朝下的电场中下落时，空气的粘度为$1.8\times10^{-5}Pa\cdot s$. 忽略空气的浮力.

1.12 在密立根油滴实验的装置中，在无外电场存在的情况下，观察到一个带电油滴在27.4s内下落的距离为1 mm. 这个油滴能够在强度为$2.37\times10^{4}N\cdot C^{-1}$的电场中保持静止. 试问：这个油滴获得多少个过剩电子？空气的粘滞系数为$1.80\times10^{-5}Pa\cdot s$，油滴的密度为800 $kg\cdot m^{-3}$，空气的密度为$1.30kg\cdot m^{-3}$.

1.13 无电场存在时，一带电油滴在空气中在16.0s内以恒速下落4.0 mm. 油滴密度为800kg·m^{-3}，空气密度为1.30kg·m^{-3}，空气的粘滞系数为1.80×10^{-5}Pa·s. (a) 计算这个油滴的半径和质量. (b) 设这油滴带有一个电子的电荷，并处于强度为2×10^{5}N·C^{-1}的电场中，试求作用在油滴上的电场力与油滴重量之比.

1.14 两个点电荷，一个为5μC，一个为−10μC，相距1 m. (a) 试求在至第一个电荷0.6m，至第二个电荷0.8m处电场的大小和方向. (b) 在何处这两个电荷产生的电场等于零？

1.15 在一台用密立根法测定电子电荷e的装置中，电场强度必须为6.34×10^{4}N·C^{-1}，才能使一个带电油滴保持静止. 如果两板的间距为1.5×10^{-2}m，试问：两板之间的电势差必须多大？

1.16 三个正电荷的电量分别为2×10^{-7}C，1×10^{-7}C，3×10^{-7}C，置于一条直线上，第二个电荷位于中心处，相邻两电荷的间距为0.10m. 试求：(a) 每一电荷受另外两个电荷作用的合力，(b) 每一电荷在另外两个电荷的电场中的势能，(c) 这个系统的内势能. (d) 把(c)中得到的结果与(b)中得到的各结果之和加以比较，并予以说明.

1.17 在习题1.16中，设第二个电荷是负的，再解此题.

1.18 在离一个点电荷某一距离处，电势为600V，电场为200N·C^{-1}，试求：(a) 该处至这个点电荷的距离，(b) 这个点电荷的大小.

1.19 一台大型范德格喇夫起电机的球形端子之一所能保持的最大电荷量约为10^{-3}C. 假定这样大小的正电荷均匀分布在真空中的一个半径为2.7m的球的表面上. (a) 计算球外一点(该点至球心的距离为5 m)的电场强度. (b) 假定在该点释放一个电子，试求这个电子的初加速度的大小和方向. (c) 当这个电子到达这个球时，它的速度是多少？

1.20 两块平行的竖直板的间距为5×10^{-2}m. 用一根细线把一个质量为2×10^{-4}kg的小球悬挂在两板之间. 小球上的电荷为6×10^{-9}C. 如果细线与竖直线成10°角，求两板之间的电势差.

1.21 两个正电荷的大小分别为2×10^{-7}C和3×10^{-7}C，二者的间距为0.10m. 计算下列各位置上的电场和电势：(a) 在两电荷连线的中点，(b) 在两电荷的连线上，至第一个电荷的距离为0.04m处，(c) 在两电荷连线的延长线上，至第一个电荷的距离为0.04m处. (d) 在至两个电荷的距离均为0.10m处.

1.22　在习题1.21中，假定第二个电荷是负的，再解该题.

1.23　参看习题1.21. 把4×10^{-7}C的电荷从(c)中的点移动到(d)中的点，试计算必须做的功. 是否必须规定电荷的路径？

1.24　两个点电荷的大小均为q，位于Y轴上$y=+a$和$y=-a$处. (a)作图表明电荷的位置. (b) 原点的电势是多少？ (c) 证明X轴上任一点的电势为

$$V=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2+x^2}}.$$

(d) 在X轴上$x=+5a$至$x=-5a$的区间内，画出电势随x变化的曲线. (e) x取什么值，电势才等于原点处电势的一半？ (f) 根据(c)，求出X轴上的电场.

1.25　对于习题1.24中的电荷，假定一个带正电的粒子的电荷为q'，质量为m，沿X轴的方向稍微离开原点，然后释放 (a) 在无限远处这个粒子的速度是多少？ (b) 画出粒子速度随x变化的曲线. (c) 如果在X轴上原点右方很远处，把这个粒子沿X轴射出，而且粒子的速度等于在(a)中得到的速度的一半，试问：这粒子在离原点多远处静止下来？ (d) 假定一个带负电的粒子在X轴上在离原点很远处从静止释放，试求这粒子通过原点时的速度.

1.26　(a) 对于习题1.24中描述过的电荷，画出在Y轴上从$y=+5a$至$y=-5a$的区间内电势的曲线. (b) 把这个曲线与习题1.24(d)中的曲线加以比较. (c) 在原点处势能有极小值？

1.27　在一直角坐标系中，一个25×10^{-9}C的电荷位于原点处，一个-25×10^{-9}C的电荷位于点$x=6$m，$y=0$处. 试求：(a) $x=3$m，$y=0$处的电场，(b) $x=3$m，$y=4$m处的电场.

1.28　一个边长为0.1m的等边三角形，它的三个顶点上各有一个1μC的电荷. 试计算：(a) 每一个电荷由于同其他电荷相互作用而受的力和具有的势能，(b) 三角形中心处的合电场，(c) 这个系统的内势能.

1.29　(a) 参看习题1.28，画出这三个电荷所产生的电场的力线图. (b) 在同一张图上画出等势面.

1.30　一个电子的初速度为10^7m·s^{-1}，通一个12000V的电势差被加速. 求它的末速度.

1.31　两块平行极板的间距为4×10^{-2}m. 在两板之间建立一个1600V的电势差. 一个电子从负极板上释放，与此同时，一个质子从正极板上释放.

(a) 当它们相遇时，求它们至正极板的距离. (b) 当它们各自撞击在对面的极板上时，试比较它们的速度. (c) 当它们各自撞击在对面的极板上时，试比较它们的能量.

1.32 一台直线加速器的电势差为800kV，产生的质子束的电流为1 mA. 计算: (a) 每秒钟撞击在靶上的质子数目，(b) 加速质子所需的功率，(c) 质子撞击靶时的速度. (d) 假定质子在靶中损失其能量的80%，试计算必须从靶中移去热能的速率(单位是 $cal \cdot s^{-1}$).

1.33 一个电子被565V的电势差加速之后，与电场方向成60°角进入一强度为3500$N \cdot C^{-1}$的匀强电场中. 试求: 5×10^{-8}s后，(a) 电子速度的平行和垂直于电场的分量，(b) 电子速度的大小和方向，(c) 电子相对于进入点的坐标，(d) 电子的总能量.

1.34 两块竖直安装的大平面金属板，其间距为4×10^{-2}m，充电至电势差为200V. (a) 一个电子必须以多大的速度沿水平方向从正板射出，才能使它到达负板时的速度等于$10^7 m \cdot s^{-1}$? (b) 一个电子必须以多大的速度沿与水平面成37°角的方向从正板射出，才能使它到达负板时的速度的水平分量等于$10^7 m \cdot s^{-1}$? (c) 当这电子到达负板时，它的速度的竖直分量的大小是多少? (d) 求每一种情况下，电子从一板至另一板的渡越时间. (e) 假定这电子以$10^6 m \cdot s^{-1}$的速率沿水平方向从正板射出，求它到达负板时的速度.

1.35 (a) 在标准温度和压强下，汽相中的两个水分子由于它们的电偶极矩而相互作用，试求它们之间的平均电吸引力. 考虑它们的电偶极子的几种可能的相对取向. (b) 将这个电吸引力与它们之间的引力加以比较. H_2O分子的电偶极矩为$6.2\times10^{-30}C \cdot m$. (回顾例题1.7.)

1.36 (a) 计算图1-40所示电荷分布相对于z轴的电偶极矩和电四

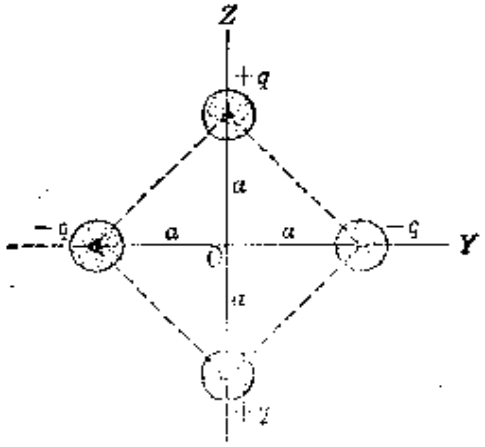


图 1.40

极矩. (b) 求 Z 轴上的点的电势和电场，假定 z 比 a 大很多. (c) 对于 Y 轴再进行计算.

1.37 在习题 1.36 中，假定所有电荷都是正的，再作该题.

较难的习题

1.38 一个边长为 1.0m 的等边三角形三个顶点上电荷的大小相等，其符号如图 1-41 所示. 每个电荷的大小均为 1.0×10^{-6}C. 点 P 是两个正电荷连线的中点. (a) 求点 P 的电场 $\mathscr{E}$ 的大小和方向. (d) 求点 P 的电势.

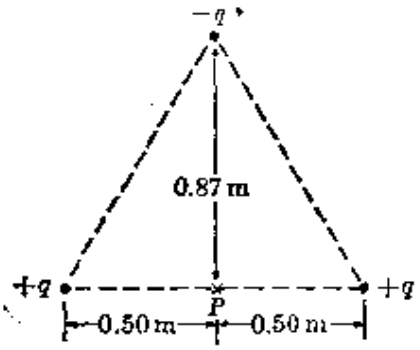


图 1-41

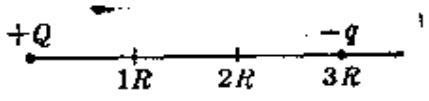


图 1-42

1.39 一个粒子的电荷为 $-q$，质量为 m，在离开一固定电荷 $+Q$ 的距离为 $3R$ 处，从静止释放(图 1-42). (a) 当两个电荷的间距从 $3R$ 变为 $2R$ 时，求势能的变化. (b) 当间距为 $2R$ 时，求这粒子的速率.

1.40 一辆电池车重 800kg，能在 100s 内以恒速驶上长 1000m、高 60m 的斜坡(图 1-43). 这车是用一个 48V 的电池组驱动的. 忽略摩擦力，并假定电能的利用率为 100%，求电池组输出的电流.

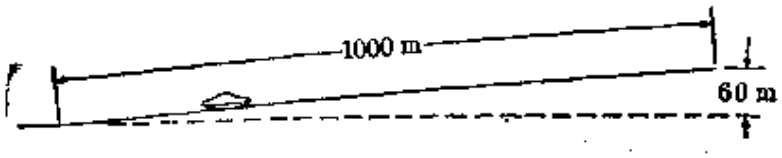


图 1-43

1.41 在图 1-44 所示的 x, y 坐标系中，两个相等的负点电荷 $-Q$ 固定在点 $(0, +d)$ 和点 $(0, -d)$. (a) 求出这两个电荷在 x 轴上任意一点产生的合电场的 x 分量 $\mathscr{E}_x$ 的表达式. (b) 求出在 x 轴上 $\mathscr{E}_x$ 的量值为极大值的点的 x 坐标作为 d 的函数. 用一个带正电的小珠子(它的尺寸比 d 小很多)套在沿 x 轴紧张的细丝上，如图 1-44(b)所示. (c) 证明，作用在小珠子上的

力遵从近似关系式 $F_x=-Kx$，式中 x 表示离开平衡位置的小位移，K 是一个常数．求出 K 作为 Q 和 d 的函数．

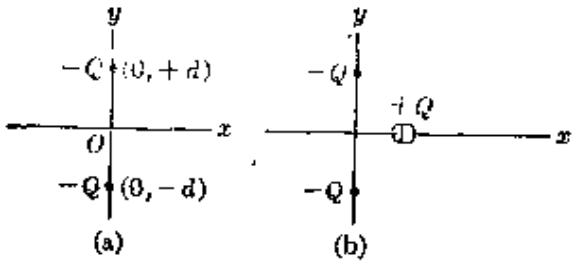


图 1-44

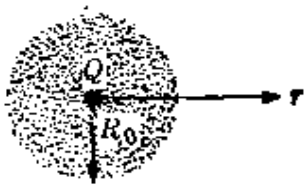


图 1-45

1.42 一个均匀的球形正电荷分布的半径为 R_0，总电荷为 Q，如图 1-45 所示．(a) 设 r 为离开球心的距离，对于 $r>R_0$ 和 $r<R_0$，求这个电荷分布的电场 $\mathscr{E}$ 作为 r 的函数．(b) 对于 $r>R_0$ 和 $r<R_0$，求出这个电荷分布的电势 $V(r)$．当 r 为无限大时，取 $V(r)=0$．(c) 从很远处朝这个电荷分布的中心射出一个正点电荷 q．当 q 离这个电荷分布很远时，它的动能为 K_0．根据 K_0 值的不同，电荷 q 或者通过电荷分布的中心，或者被这电荷分布反射．求出电荷 q 为了通过这个电荷分布必须具有的最小 K_0 值．

1.43 图 1-46 中示出在垂直于两个平行的带电金属圆柱的平面内的几

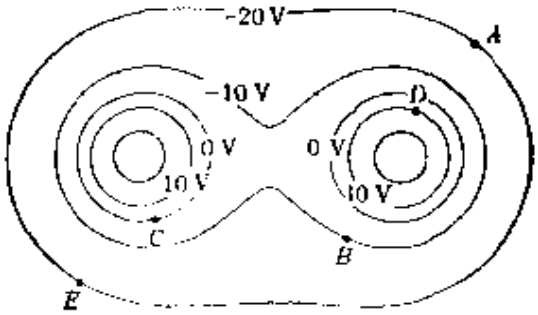


图 1-46

条等势线．每一条线上都标出电势的值．(a) 左边的圆柱体带正电，求另一个圆柱体上电荷的符号．(b) 在一张复制的图上，画出描绘两个带电圆柱体产生的电场的线．(c) 求 A 点和 B 点之间的电势差 V_A-V_B．(d) 如果一个 0.50C 的电荷沿一条路径从 A 点移动到 E 点，然后到 D 点，那么电场所作的功是多少？

1.44 两个全同的电荷 $+Q$ 位于一个等腰三角形的两个顶点 A 和 B 处，如图 1-47 所示．(a) 当一个小试验电荷 $+q$ 从 C 点移动到无限远处时，电场对它所做的功是多少？(b) 根据已知的量，确定第三个电荷 $+2Q$ 应该放

在什么地方，才能使点 O 的电场等于零？(c) 在图上标明这个电荷的位置。

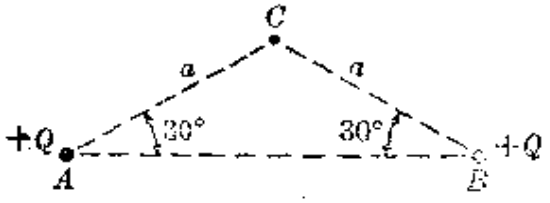


图 1-47

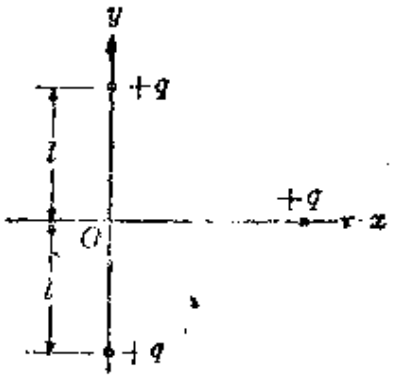


图 1-48

1.45 两个固定的点电荷 $+q$ 位于 y 轴上，如图 1-48 所示。沿 x 轴把第三个电荷 $+q$ 从无限远处带入。(a) 把可动电荷的势能表示为它在 x 轴上的位置的函数。(b) 当可动电荷位于 $x=l$ 处时，求它所受力的大小和方向。(c) 当可动电荷从无限远处移动到原点时，求电场所作的功。

1.46 一个电荷 $+Q$ 均匀分布在一个用金属制成的半径为 R 的环上，如图 1-49 所示。假定在 $x=\infty$ 处电势等于零，x 轴的原点取在环的中心。(a) 求 x 轴上一点 P 的电势。(b) 在 x 轴上，何处电势最大？说明你的答案。(c) 求点 P 的电场 $\mathscr{E}$ 的大小和方向。(d) 在一组轴上，概略画出 $|\mathscr{E}|$ 随沿 x 轴的距离变化的曲线，表明它的重要特点。

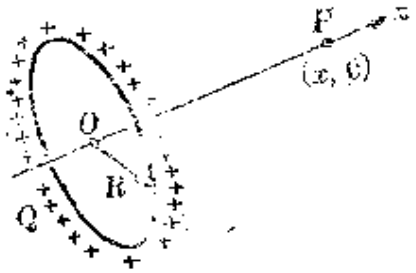


图 1-49

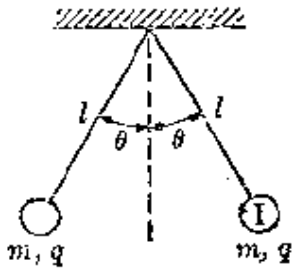


图 1-50

1.47 两个小球的质量均为 m，带有相同的正电荷 q，用长为 l 的轻线挂起来。每根线与竖直线成一角 θ，如图 1-50 所示。(a) 在一张图上画出并标明作用在球 I 上的一切力。(b) 求出用 m，l，θ，q 和 K（库仑定律常数）表示的电荷 q 的表达式。

1.48 一个原来静止的、不稳定原子核，衰变为两个球形碎片．碎片A的半径为r_A，电荷为q_A，静质量为m_A；碎片B的半径为r_B，电荷为q_B，静质量为m_B．(a) 假定衰变之后，碎片A的速度v_A比光速小很多．求出碎片B的动能的表达式作为v_A、m_A和m_B的函数．在衰变过程的某一阶段，两个碎片可以看成是相切的球体，都是静止的，如图1-51所示．(b) 写出两个碎片相切的那一瞬间，它们之间的静电力的表达式．(c) 写出两个碎片相切的那一瞬间，它们的静电势能U的表达式．(d) 写出这个原子核衰变前的静质量m的表达式．

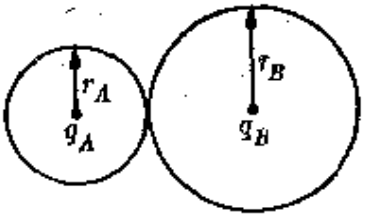


图 1-51

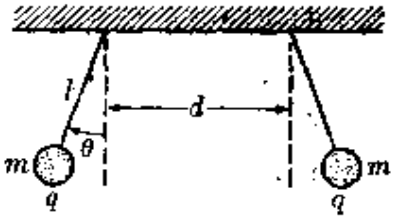


图 1-52

1.49 假定两根细绳的悬点的间距为d(图1-52)，重作习题1.4．怎样利用这个实验装置，通过改变间距d和观察θ角，来验证平方反比律？

1.50 在一个特定的铀核裂变中，两个碎片为^{95}Y和^{141}I，它们的质量分别约等于95u和141u．它们的半径能够用下列公式计算：

$$R=1.2\times10^{-15}A^{1/3}\text{m},$$

式中A是质量数．假定两个碎片原来是静止的，而且彼此相切．试求：(a) 初始力和势能，(b) 它们的末相对速度，(c) 每一碎片相对于它们的质心的末速度．

1.51 四个质子位于一个边长为2×10^{-9}m的正方形的四个顶点上．另一个质子开始时处在通过正方形中心的垂线上，至中心的距离为2×10^{-9}m．试计算：(a) 第五个质子能够到达这个正方形所需的最小初速度，(b) 它的初加速度和末加速度．(c) 画出这个质子的势能随它至正方形中心的距离而变化的曲线．(d) 如果这个质子的初能量小于或者大于(a)中求出的能量，试描述它的运动．

1.52 考虑习题1.24中的电荷．(a) 假定一个带正电荷q'的粒子恰好在原点处，并且从静止释放，会发生什么情况？(b) 如果(a)中的电荷稍微沿Y轴的方向有一位移，会发生什么情况？(c) 如果这个电荷稍微沿X轴的方向有一位移，会发生什么情况？

1.53 证明：一个电荷 q 在距离 r 处产生的电场的直角分量为

$$\mathscr{E}_x=\frac{qx}{4\pi\varepsilon_0 r^3},\ \text{等等}.$$

1.54 建立一个数值关系式，它能给出一个电子或质子的速度（以 $m\cdot s^{-1}$ 为单位）作为它们所通过的电势差（以 V 为单位）的函数．假定它们开始时都是静止的．

1.55 (a) 假定一个电子的质量超过它的静质量的部分不会大于它的静质量的 1 %．试问：能够使这个电子加速的最大电势差是多少？(b) 把这个电子的速度表示为光速 c 的分数．(c) 对于质子，作同样的计算．

1.56 一台高能加速器使电子通过 6.5×10^9V 的电势差加速．(a) 试问：当一个电子离开这加速器时，它的质量 m 与它的静质量 m_0 的比值是多少？(b) 这个电子的速度与光速的比值是多少？(c) 如果按经典力学原理来计算，这电子的速度是多少？

1.57 在某一 X 射线管中，一个电子从静止开始，由阴极到阳极，通过 180,000V 的电势差而被加速．当这电子到达阳极时，(a) 它的动能（以 eV 为单位）是多少？(b) 它的质量是多少？(c) 它的速度是多少？

1.58 假定一台范德格喇夫起电机的球形端子与电荷被喷射到向上运动的传送带上的那一点之间的电势差为 2×10^6V．如果传送带以 $2\times10^{-3}C\cdot s^{-1}$ 的速率把负电荷输送到这球上，试问：必须耗费多大的功率来反抗电力，驱动传送带？

1.59 在一个原子核内部，质子的平均间距约为 10^{-15}m．试估算一原子核内两个质子的电势能的数量级（以 J 和 MeV 为单位）．

1.60 图 1-53 中两块平行板之间的电势差为 100V，两板的间距为 10^{-}

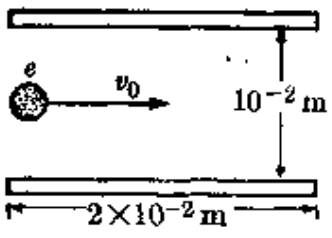


图 1-53

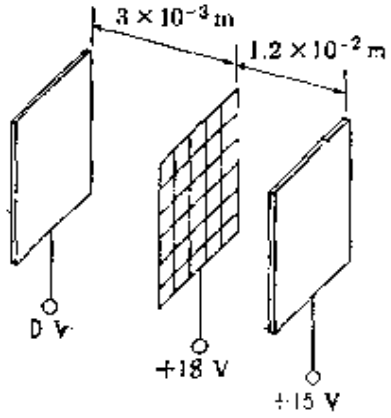


图 1-54

m，长度为 2×10^{-2}m．一个电子以 10^{7}m·s^{-1} 的初速沿垂直于电场的方向射入．(a) 试求：当这个电子离开两板之间时，它的横向偏转和横向速度．(b) 如果把一个屏放在板端右方 0.50m 处，那么这电子将落在屏上什么地方？

1.61 某一真空三极管基本上由下列元件组成．一个平面(阴极)发射初速可忽略不计的电子．一个平行于阴极的疏松细金属丝栅极，放在离阴极 3×10^{-3}m 处，它相对于阴极的电势为 18V．栅极的结构足够疏松，以致电子能够自由地通过它．第二个平面(阳极)离栅极的距离为 1.2×10^{-2}m，它相对于阴极的电势为 15V(图 1-54)．我们可以假定阴极和栅极之间，以及栅极和阳极之间的电场，都是匀强的．(a) 沿着从阴极至阳极的直线，画出电势对距离的曲线．(b) 电子以多大的速度穿过栅极？(c) 电子以多大的速度撞击阳极？(d) 求阴极和栅极之间电场的大小和方向，以及栅极和阳极之间电场的大小和方向．(e) 计算电子在每一区域中加速度的大小和方向．

1.62 一个电子在两块水平板之间，两板的间距为 2×10^{-2}m．两板充电至电势差为 2000V．(a) 将作用在电子上的电力，与重力所引起的力加以比较．(b) 对于一个质子，重作此题．(c) 这是否证明，在本章中忽略引力效应是正确的？

1.63 考虑一个载有均匀电荷密度 σ 的平面．证明：电场和电势分别为

$$\mathscr{E}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\quad 和\quad V=\frac{\sigma z}{2\varepsilon_0},$$

式中 z 是从这个平面至所考虑的点的距离．

1.64 在一条直线上有无限多个正、负交错的电荷 $\pm q$，相邻电荷的间距相同，均为 r(图 1-55)．证明：一个电荷的电势能为 $(-q^2/2\pi\varepsilon_0 r)\ln 2$．

1.65 把电荷放在边长为 a 的正方形中心，就可得到大小相同的正、负交错的电荷的规则的平面排布，如图 1-56 所示．试求象 A 那样一个电荷的势

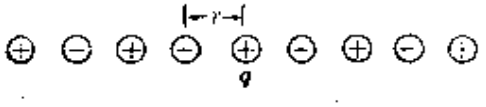


图 1-55

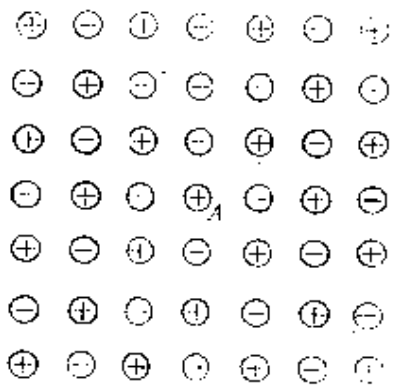


图 1-56

能.（提示：把 A 周围的电荷分成组；每一次考虑至 A 的距离相同的所有电荷.）

1.66　一个圆盘的半径为 R，每单位面积上的电荷为 σ，试求圆盘轴上的点的电势和电场（提示：把圆盘分成许多圆环，然后求所有圆环的贡献之和；参看习题 1.46.）

1.67　参看习题 1.66，求一平面电荷分布的电场和电势，假定它的电荷密度与圆盘的相同.（提示：取 R 非常大，仅保留展开式中的第一项.）

1.68　一根长为 L 的金属丝，载有均匀的线电荷密度 λ（图 1-57）.（a）证明：在离开金属丝某一距离的点上，电场 $\mathscr{E}$ 的垂直于金属丝的分量 $\mathscr{E}_\perp$ 和平行于金属丝的分量 $\mathscr{E}_\parallel$ 由下式给出：

$$\mathscr{E}_\perp = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

$$\mathscr{E}_\parallel = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1),$$

式中 θ_1 和 θ_2 分别为该点至金属丝两端的直线与金属丝的垂线所成的角.（b）当该点至金属丝两端的距离相等时，求电场的表达式.角 θ_1 和 θ_2 的正负号如图所示.

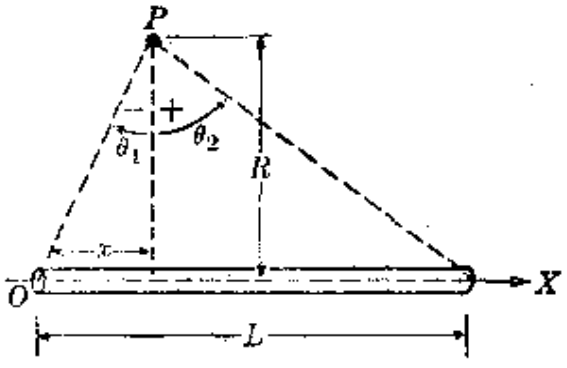


图　1-57

1.69　载有均匀线电荷密度 λ 的一根金属丝，被弯成一个边长为 L 的正方形.试求在垂直于正方形且通过其中心的直线上的点的电场和电势.

1.70　一个平面载有均匀的面电荷密度 σ.假定这平面是由许多宽为 dx 的无限长金属丝组成的.试求这平面的电场和电势的表达式.

1.71　一个以初速 v_0 运动着的快速质子所沿的直线与一个原来静止的电子相距为 a（图 1-58）.由于质子的质量较大，可以假定质子的运动不受扰动.（a）画出质子施于电子上的力的垂直于 v_0 的分量随 x 变化的曲线.（b）

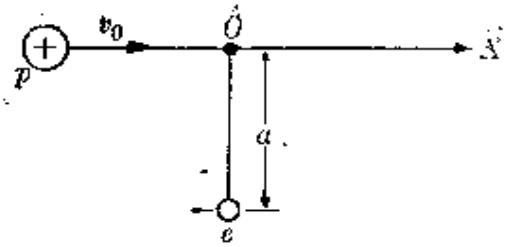


图 1·58

证明：转移给电子的动量为

$$\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)\left(\frac{2}{v_0 a}\right),$$

其方向垂直于 v_0. (c) 估计质子的偏转作为它的速度的函数. 这个例子为分析带电粒子通过物质的运动提供一个近似的基础. (提示：如果我们假定，当质子通过时，电子实际上停留在它原来的位置上，则转移给电子的动量由 $\Delta p=\int \boldsymbol{F}dt$ 给出，而且只需计算垂直于 v_0 的分量. 鉴于力的对称性，从 $-\infty$ 至 $+\infty$ 的积分，可代之以从 0 至 ∞ 的积分，再乘以 2.)

1.72 证明，一个电荷系统的内电势能可以写作下列两种形式之一：

(a) $E_p=\sum_{\substack{\text{一切电}\\\text{荷对}}}\frac{q_iq_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}$, (b) $E_p=\frac{1}{2}\sum_{\substack{\text{一切}\\\text{电荷}}}q_iV_i$,

式中 V_i 是所有其他电荷在 q_i 处产生的电势. (c) 利用 (b) 的结果，证明一个密度为 ρ 的连续电荷分布的电势能为 $E_p=\frac{1}{2}\int\rho V d\tau$. 利用这个表达式，证明均匀分布在一个球形导体整个体积内的电荷 Q 的电势能为 $\frac{3}{5}Q^2/4\pi\varepsilon_0 R$. (c) 把这个结果推广到原子序数为 Z 的原子核的情况.

1.73 证明电力线的微分方程为

$$\frac{dx}{\mathscr{E}_x}=\frac{dy}{\mathscr{E}_y}=\frac{dz}{\mathscr{E}_z},$$

式中 dx、dy 和 dz 对应于电力线上两个相距很近的点. 应用这个方程来求出一个电偶极子的电力线的方程. (提示：注意，由于在此情况下电力线是平面曲线，所以不需要分量 $\mathscr{E}_z$. 用直角坐标表示电偶极子的 $\mathscr{E}_x$ 和 $\mathscr{E}_y$.)

第二章　静　电　场

2.1　引　　论

在前一章中引入了电场的概念．在本章中，我们将讨论电场的特性，并假定这电场是静态的，即与时间无关的．在开始研究静电场之前，我们先讨论电路．在后继各章中，将讨论与时间有关的电磁场．

2.2　矢量场的通量

在许多物理问题中，矢量场的通量是一个非常有用的概念，在本章及以后各章中，它将多次出现．在有电场 v 存在的区域中取一个面 S（图 2-1）。把这个面分成许多非常小(即无限小）的面，其面积分别为 $dS_1, dS_2, dS_3, \cdots$，并在各小面上分别画一个单位矢量 $u_1, u_2, u_3, \cdots$，它们分别垂直于各个小面．这些单位矢量的指向可按右手法则确定：当右手拇指以外的四指沿该面边缘的走向拳曲时，拇指的指向即为单位矢量的指向．设 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \cdots$ 为在这个面上每一点的法向单位矢量 $u_1, u_2, u_3, \cdots$ 和场矢量 $v_1, v_2, v_3, \cdots$ 之间的角，则按定义，矢量场 v 通过面 S 的通量 Φ 为

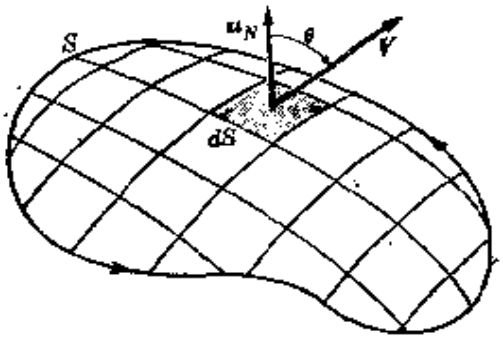


图 2-1　通过一个面的矢量场通量

$$\Phi = V_1 dS_1 \cos\theta_1 + V_2 dS_2 \cos\theta_2 + V_3 dS_3 \cos\theta_3 + \cdots$$

$$= V_1 \cdot u_1 dS_1 + V_2 \cdot u_2 dS_2 + V_3 \cdot u_3 dS_3 + \cdots$$

$$= \sum_i V_i \cdot u_i dS_i,$$

或

$$\Phi = \int_S V\cos\theta dS = \int_S V \cdot u_N dS \tag{2.1}$$

上式中积分号的下角标 S 表示这积分遍及整个的面. 因此，象方程(2.1)那样的表达式，叫做面积分. 由于方程(2.1)中 $\cos\theta$ 因子的存在，通过面元 dS 的通量可以是正的或者负的，依 θ 小于或者大于 $\pi/2$ 而定. 如果场 V 与面元 dS 平行，则 $\theta=\pi/2$，$\cos\theta=0$，因而通过 dS 的通量为零. 总通量 Φ 也可以是正的，负的或零. 当总通量为正时，则称它为“出射的”；当总通量为负时，则称它为“入射的”. 如果这个面是闭合的，例如一个球或椭球，则在积分号上加一个圆圈，于是方程(2.1)变为

$$\Phi = \oint_S V\cos\theta dS = \oint_S V \cdot u_N dS. \tag{2.2}$$

方程(2.1)中的积分之所以称为通量，是由于它在流体流动研究中的应用. 设有一束粒子，它们都以速度 v 运动，如图 2.2 所示. 在时间 t 内通过面元 dS 的那些粒子，都包含在一个其底面为 dS 的斜柱体内；这柱体的母线平行于 v，其长度等于 vt. 这个体积等于 $vt\ dS\cos\theta$. 设每单位体积内有 n 个粒子，则在时间 t 内通过 dS 的粒子的总数为 $nvt\ dS\cos\theta$，因而单位时间通过的粒子数，亦即粒子通量，为 $nv\ dS\cos\theta = n\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}_N\ dS$. 于是通过面 S 的总粒子通量为

$$\Phi = \int_S n\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}_N dS.$$

上式与方程(2.1)相似，不过以 $n\boldsymbol{v}$ 代替矢量场 V. 但是，必须知道，方程(2.1)所表示的“通量”，一般地并不表示实际上有某种东西通过一个面运动，

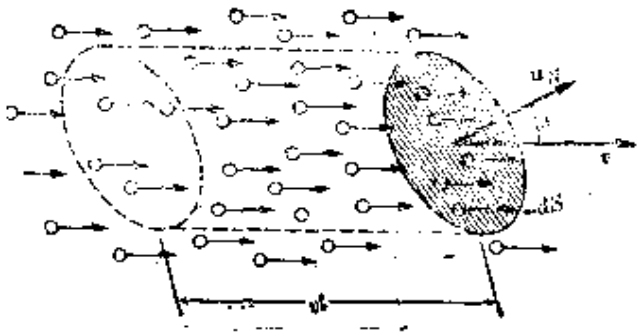


图 2-2　通过一面积的粒子通量.

例题 2.1　把通过一个面的电流表示为电流密度的通量.

解　量 $nv\cdot u_N dS$ 表示每单位时间通过面 dS 的粒子数. 如果每个粒带有电荷 q, 则每单位时间通过面 dS 的电荷(即电流 $dI=dQ/dt$)为

$$qnv\cdot u_N dS=\boldsymbol{j}\cdot u_N dS,$$

式中 $\boldsymbol{j}=nq\boldsymbol{v}$, 叫做电流密度, 其单位为 $\mathrm{A\cdot m^{-2}}$. 因此, 每单位时间通过一个面 S 的总电荷(亦即通过该面的电流 I)为

$$I=\int_S \boldsymbol{j}\cdot u_N dS.$$

换句话说, 通过一个面的电流, 等于通过该面的电流密度的通量. 如果电流密度是均匀的, 而且该面是一平面, 则上式化为

$$I=\boldsymbol{j}\cdot u_N S=jS\cos\theta.$$

2.3　电场的定律

我们考虑一个点电荷 q (图 2-3). 这电荷的电场 $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ 通过一个与该电荷同中心的球面的通量, 可以利用方程(2-2)计算出来. 设 r 为此球的半径, 则该电荷在此球面上每一点产生的电场为

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}u_r.$$

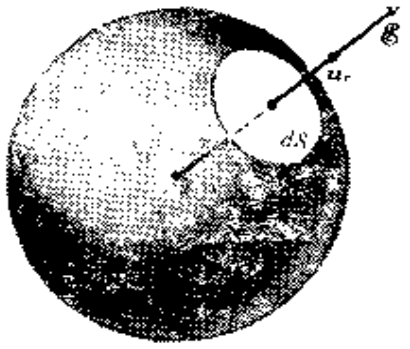


图 2-3　一个 q 电荷通过一球面的电通量

垂直于球面的单位矢量与沿径向的单位矢量 u_r 重合. 因此, 电场 $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ 与法向单位矢量 u_r 之间的角等于零, 因而 $\cos\theta=1$. 因为球面上各点电场的大小相同, 而球的

面积为 $4\pi r^2$，由方程(2.2)得出电通量 Φ_E 为

$$\Phi_E=\int_S \mathscr{E}dS=\mathscr{E}\int_S dS=\mathscr{E}S=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}(4\pi r^2)=\frac{q}{\varepsilon_0}.$$

由此可见，通过这球面的电通量与该电荷成正比，而与该球面的半径无关. 因此，通过以电荷 q 为中心的各同心球面 S_1，S_2，S_3，… (图 2-4) 的电通量相同，都等于 q/ε_0. 这个结果是由于电场对距离的 $1/r^2$ 关系.

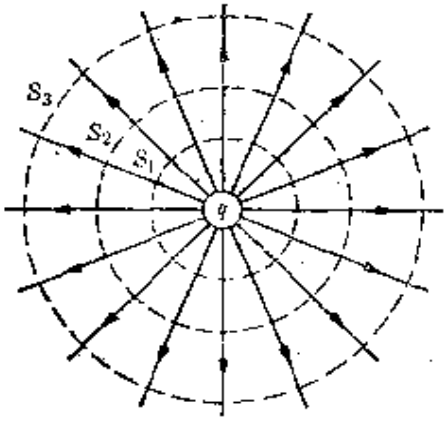


图 2-4　通过以同一电荷为中心的同心球面的电通量相同.

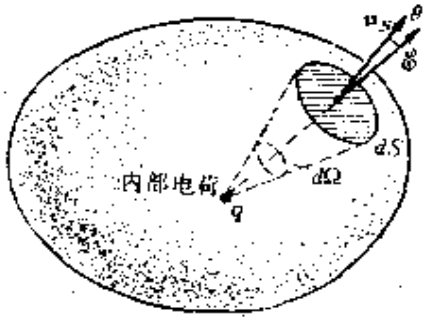


图 2-5　通过包围一电荷的闭合面的电通量，与该面的形状无关.

其次，我们考虑处于一任意闭合面 S 内部的电荷 q (图 2-5). q 所产生的电场通过面 S 的总通量由下式给出:

$$\Phi_E=\oint_S \mathscr{E}\cos\theta dS=\oint_S \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta dS=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \frac{dS\cos\theta}{r^2}.$$

然而，$dS\cos\theta/r^2$ 是从电荷 q 处观看时，面元 dS 所张的立体角 $d\Omega$。由于围绕任意一点的总立体角等于 4π 球面度①，于是有

$$\Phi_E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int d\Omega=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}(4\pi)=\frac{q}{\varepsilon_0}.$$

这个结果和前面关于同心球面的结果相同. 因此，它对于任意闭合面都成立，不论电荷在球面内部的位置如何.

① 参考附录中关于平面角和立体角的讨论.

如果一个电荷，例如 q'，在一闭合面的外部(图 2-6)，则由于入射通量等于出射通量，因而净电通量等于零. 例如，q' 所产生的、通过 dS' 的电通量，其大小等于通过 dS'' 的电通量，但符号却相反，因而二者之和等于零. 这个结果是正确的，因为虽然 dS'' 大于 dS'，但 $\mathscr{E}''$ 却小于 $\mathscr{E}'$. 由图 2-6 可以看出，面元 dS' 和 dS'' 所张的立体角完全相同.

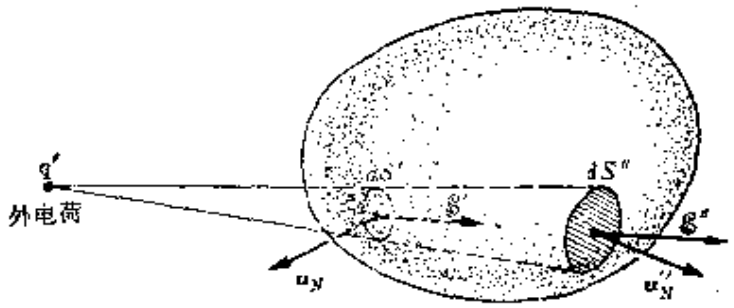


图 2-6　当一电荷在一闭合面外部时，通过该闭合面的电通量等于零.

如果在一闭合面 S 内部有若干个电荷 $q_1, q_2, q_3\cdots$(图 2-7)，则总电通量等于每个电荷所产生的电通量之和. 于是高斯定律可陈述如下：



图 2-7　通过任一闭合面的电通量，与该面内部包含的净电荷成正比.

设一闭合面包围着电荷 $q_1, q_2, q_3, \cdots$，则通过该面的电通量为

$$\Phi_e = \int_S \mathscr{E} \cdot u_N dS = \frac{q}{\varepsilon_0}, \tag{2.3}$$

上式中 $q = q_1 + q_2 + q_3 + \cdots$ 是这闭合面内部的净电荷.

这个定律以德国数学家高斯(K. F. Gauss, 1777—1855) 的名

学命名，因为他创造性地发展了电磁学的数学理论. 如果在一闭合面内部没有电荷，或者，如果净电荷等于零，则通过该面的总电通量等于零. 在一闭合面外部的电荷，例如 q'，q''，…，对总通量没有贡献.

计算具有某些几何对称性(如下述例题所示)的电荷分布所产生的电场时，高斯定律特别有用.

例题 2.2 利用高斯定律，讨论均匀分布在一平面上的电荷的电场.

解 在图 2-8 所示的平面上，每单位面积的电荷为 σ. 这个问题的对称性表明，如果这平面是无限的，则力线垂直于这个平面；又如果电荷是正的，

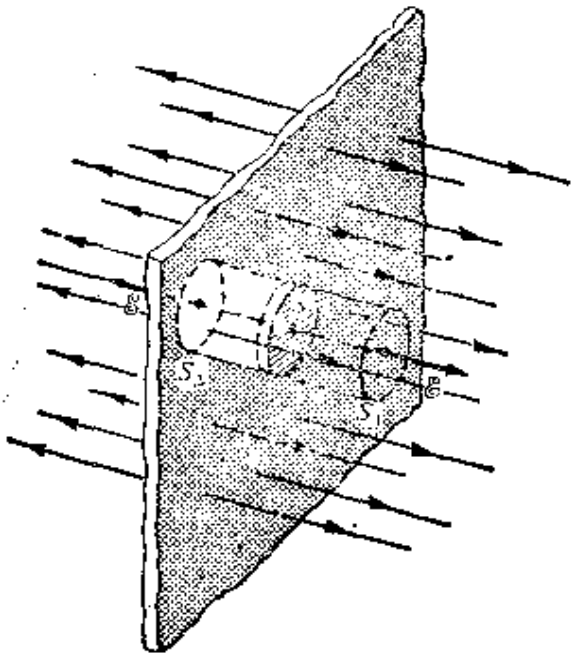


图 2-8 一均匀带电平面的电场.

则力线的方向如图中所示. 对于所选取的闭合面，即图中的柱体，电通量 Φ_e 可以分成三项：通过 S_1 的电通量等于 $+eS$，式中 S 为这柱体底面的面积；通过 S_2 的电通量也等于 $+eS$，因为根据对称性，在平面两侧等距离处电场大小相等，方向相反；通过柱体侧面的电通量等于零，因为电场平行于柱体侧面. 因此，总通量为 $\Phi_e=2eS$. 闭合面内部的电荷，就是加线荫的面积上的电荷，等于 $q=\sigma S$. 应用高斯定律，即方程(2,3)，得出 $2\sigma S=\sigma S/\varepsilon_0$，或

$$e=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

这个结果表明，电场与至这平面的距离无关，因而是均匀的. 利用关系式

$\mathscr{E}=-dV/dx$，并假定这平面的电势为零，则有电势

$$V=-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}x.$$

例题 2.3 利用高斯定律，讨论两个平行平面的电场，假定这两个平面上的电荷是均匀分布的，其电荷密度等值而反号.

解 图 2-9 中示出两个平行平面，它们所带电荷等值而反号. 注意，在

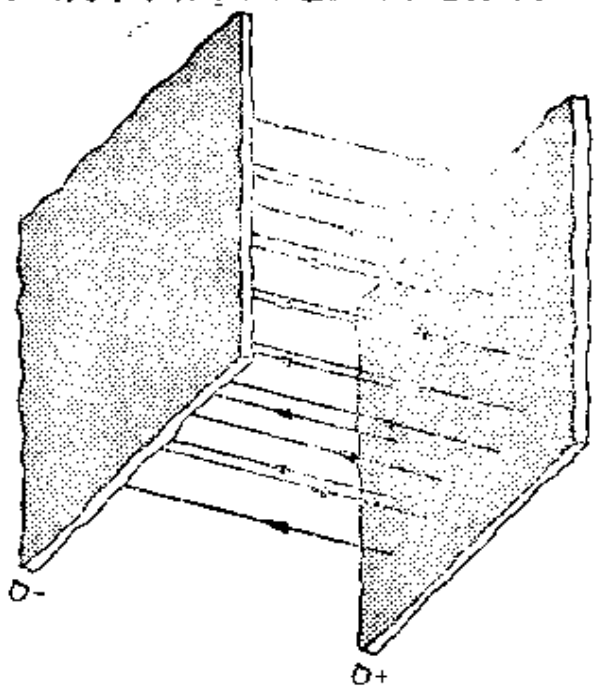


图 2-9 其电荷密度等值反号的一对平行平面之间的电场.

这两个带相反电荷的平面之外的区域里，电场的大小相等而方向相反，因而合电场为零. 然而，在这两个平面之间的区域里，电场的方向相同，因而合电场等于单独一个平面所产生的电场的两倍，即 $\mathscr{E}=\sigma/\varepsilon_0$. 由此可见，带相反电荷的两个平行平面，在它们之间的区域里产生一均匀电场.

例题 2-4 利用高斯定律，讨论一球形电荷分布所产生的电场.

解 这个问题，已在第一卷中对于一球形物体的引力场的情况，按不同方式讨论过. 我们考虑一个半径为 a 带有电荷 Q 的球体(图 2-10). 这个问题的对称性表明，每一点的场必然是径向的，而且只与从该点至球心的距离 r 有关系. 因此，画出一个与带电球体同心的、半径为 r 的球面，就可以看出，通过这个球面的电通量为

$$\Phi_{\mathscr{E}}=\oint_S \mathscr{E}\,dS=\mathscr{E}\oint_S dS=\mathscr{E}(4\pi r^2).$$

首先考虑 $r>a$ 的情况. 面 S 内部的电荷是这球体的总电荷 Q. 由高斯定律，

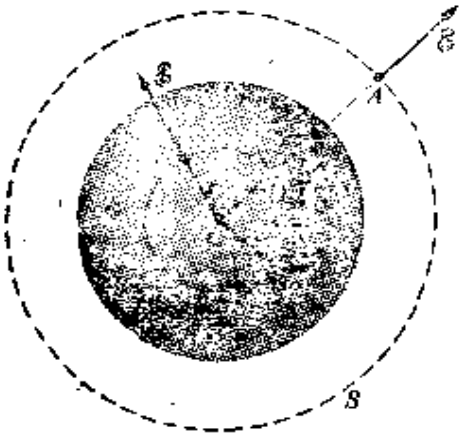


图 2-10

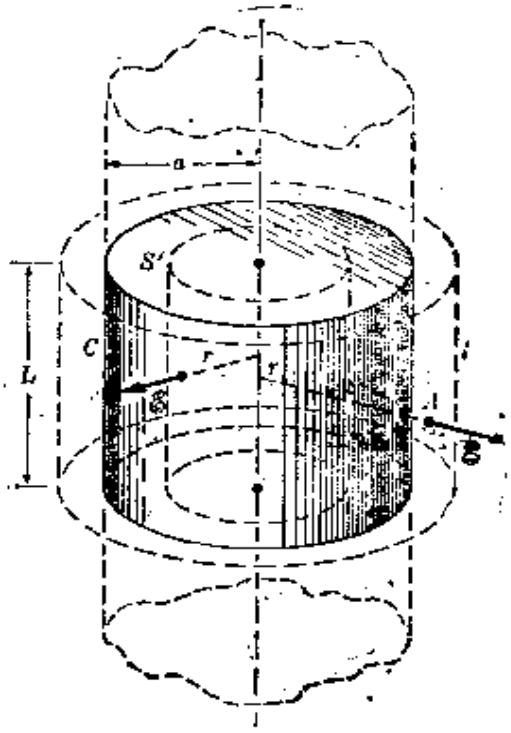


图 2-11

亦即方程(2.3)，可知 $\mathcal{E}(4\pi r^2)=Q/\varepsilon_0$，即

$$\mathcal{E}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

这个结果和一个点电荷的电场的结果相同. 因此，带电球体外部各点的电场，与全部电荷集中在球心时的电场相同.

其次，考虑 $r<a$ 的情况；这有两种可能. 如果全部电荷都集中在球体的表面，则球面 S' 内部的总电荷为零，于是由高斯定律得出 $\mathcal{E}(4\pi r^2)=0$，即 $\mathcal{E}=0$. 因此，如果一个球体仅仅表面带电，则此球体内部各点的电场为零. 如果这个球的整个体积内部均匀带电，而 Q' 是在面 S' 内部的电荷，则

$$Q'=\frac{Q}{4\pi a^3/3}(4\pi r^3/3)=\frac{Qr^3}{a^3}.$$

于是由高斯定律得出 $\mathcal{E}(4\pi r^2)=Q'/\varepsilon_0=Qr^3/\varepsilon_0 a^3$，或

$$\mathcal{E}=\frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3};$$

上式表明，一均匀带电球体内部一点的电场，与从该点至球心的距离成正比. 如用 $Q/4\pi\varepsilon_0$ 代替 m，这些结果就和引力场情况下的结果一致.

例题 2.5 利用高斯定律，讨论一无限长圆柱形电荷分布的电场.

解 一圆柱体 C 的半径为 a，我们考虑它的长度为 L 的一段(图 2-11).

如果 λ 为每单位长度上的电荷，则这段圆柱体上的总电荷为 $q=\lambda L$. 这个问题的对称性表明，一点的电场仅与从该点至圆柱体轴线的距离有关系，其方向沿径向. 我们取一半径为 r，且与此电荷分布同轴的圆柱面，作为积分的闭合面. 在这情况下，通过这个闭合面的电通量包含三项. 其中两项是通过两个底面的通量；但这两项为零，因为电场平行于两个底面. 因此，通过侧面的通量就是全部的电通量，即

$$\Phi_{\mathscr{E}}=2\pi rL\mathscr{E}.$$

如果 $r>a$，则圆柱面 S 内部的总电荷为 $q=\lambda L$，由高斯定律[即方程(2.3)]，得出 $2\pi rL\mathscr{E}=\lambda L/\varepsilon_0$，或

$$\mathscr{E}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

这个结果与例题 1.5 中关于一带电金属丝的电场的表达式相同. 因此，一无限长圆柱形电荷分布外部各点的电场，与假定全部电荷集中在轴线上时所产生的电场相同.

与前一例题类似，$r<a$ 时，也有两种情况. 如果全部电荷都在圆柱体表面上，则在面 S' 内部没有电荷，由高斯定律得出 $2\pi rL\mathscr{E}=0$，即 $\mathscr{E}=0$. 因此，仅在表面带电的圆柱体，其内部各点的电场等于零. 如果电荷均匀分布在圆柱体 C 的整个体积内，则在面 S' 内部的电荷为 $q'=\lambda Lr^2/a^2$；由高斯定律得出 $2\pi rL\mathscr{E}=q'/\varepsilon_0$，或

$$\mathscr{E}=\frac{\lambda r}{2\pi\varepsilon_0 a^2}.$$

因此，一均匀带电无限长圆柱体内部一点的电场，与该点至圆柱体轴线的距离成正比.

2.4 高斯定律的微分形式

在前面一节中已经指出，高斯定律能够应用于任意形状的闭合面. 现在我们来考虑一个闭合面，它包围一无限小的体积，它的边缘平行于 X、Y、Z 轴，如图 2-12所示. 这体积元的边长为 dx、dy、dz. 面 $ABCD$ 的面积等于 $dy\,dz$，通过这个面的电通量为

$$\mathscr{E}\,dS\cos\theta=(\mathscr{E}\cos\theta)\,dy\,dz=\mathscr{E}_x dy\,dz,$$

因为 $\mathscr{E}_x=\mathscr{E}\cos\theta$. 通过面 $A'B'C'D'$ 的电通量具有类似的表达式，

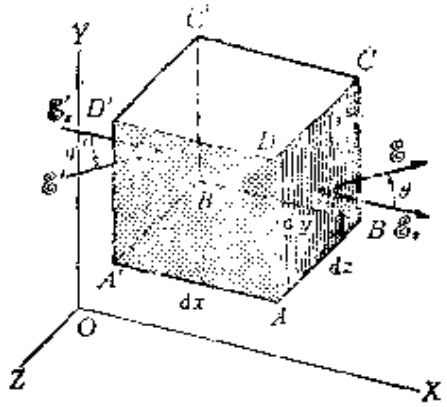


图 2-12　计算高斯定律的微分形式用的体积元.

不过是负的，因为电场指向这体积内部；即为$-\mathscr{E}'_x dy\,dz$. 通过这两个面的总电通量等于二者之和:

$$\mathscr{E}_x dy\,dz+(-\mathscr{E}'_x dy\,dz)=(\mathscr{E}_x-\mathscr{E}'_x)\,dy\,dz.$$

但是，由于这两个面之间的距离$A'A=dx$非常小，所以量$\mathscr{E}_x-\mathscr{E}'_x$也非常小，因而这个差值可以写成一微分:

$$\mathscr{E}_x-\mathscr{E}'_x=d\mathscr{E}_x=\frac{\partial\mathscr{E}_x}{\partial x}dx,$$

上式中$\partial\mathscr{E}_x/\partial x$是$\boldsymbol{\mathscr{E}}$的$x$分量在$X$方向上的变化率. 因此，$X$方向上的总电通量由下式给出:

$$\left(\frac{\partial\mathscr{E}_x}{\partial x}dx\right)dy\,dz=\frac{\partial\mathscr{E}_x}{\partial x}dV\ .$$

量$dV=dx\,dy\,dz$是这个盒子的体积. 对于通过这体积元的其余四个面的电通量，可以得到类似的结果，所以通过这体积元的总电通量为

$$\Phi_{\mathscr{E}}=\frac{\partial\mathscr{E}_x}{\partial x}dV+\frac{\partial\mathscr{E}_y}{\partial y}dV+\frac{\partial\mathscr{E}_z}{\partial z}dV=\left(\frac{\partial\mathscr{E}_x}{\partial x}+\frac{\partial\mathscr{E}_y}{\partial y}+\frac{\partial\mathscr{E}_z}{\partial z}\right)dV.$$

如果dq是这体积元内部的电荷，则由高斯定律得出

$$\frac{\partial\mathscr{E}_x}{\partial x}+\frac{\partial\mathscr{E}_y}{\partial y}+\frac{\partial\mathscr{E}_z}{\partial z}dV=\frac{dq}{\varepsilon_0}.$$

在上式中，令$dq=\rho dV$(这里ρ为电荷密度)，并消去公因子dV，则得

$$\frac{\partial \mathscr{E}_x}{\partial x}+\frac{\partial \mathscr{E}_y}{\partial y}+\frac{\partial \mathscr{E}_z}{\partial z}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \tag{2.4}$$

上式就是高斯定律的微分形式. 方程(2.4)左边的表达式称为 $\mathscr{E}$ 的散度,缩写为 div$\mathscr{E}$,于是高斯定律能够写成下列紧凑形式:

$$\mathrm{div}\mathscr{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{2.5}$$

高斯定律的微分形式的物理意义是,它把空间一点的电场和同一点的电荷分布(由 ρ 表示)联系起来. 也就是说,这个定律表达了这两物理量之间的局部关系. 因此,电荷是电场的源,电荷的分布和量值决定空间每一点的电场,这些说法都是正确的.

例题 2.6 用电势表达的高斯定律.

解 如果我们记得电场 $\mathscr{E}$ 的分量可以用电势 V 表示出来,即 $\mathscr{E}_x=-\partial V/\partial x$, $\mathscr{E}_y=-\partial V/\partial y$, $\mathscr{E}_z=-\partial V/\partial z$(见方程 1.15),则 $\mathscr{E}_x$ 对 x 的变化率可以写作

$$\frac{\partial \mathscr{E}_x}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial V}{\partial x}\right)=-\frac{\partial^2 V}{\partial x^2},$$

对于 $\mathscr{E}_y$ 和 $\mathscr{E}_z$ 有类似的表达式. 把这些结果代入方程(2.4),则得高斯定律的另一表达式:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{2.6}$$

这个表达式叫做泊松方程. 当电荷分布已知时,可以用方程(2.6)来求出电势,反之亦然,只要电荷分布与时间无关. 在没有电荷的自由空间中,$\rho=0$,于是方程(2.5)变为 div$\mathscr{E}=0$,方程(2.6)变为

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0. \tag{2.7}$$

这个方程叫做拉普拉斯方程. 除电磁场理论之外,这个方程还出现在诸如流体运动和弹性之类的许多问题中,它是数学物理中最重要的方程之一.

例题 2.7 试证明,一个点电荷的电势在所有的点都满足拉普拉斯方程(2.7),但原点(即这电荷所在之处)除外.

解 按照方程(1.20),一个点电荷的电势为 $V=q/4\pi\varepsilon_0 r$. 现在 $r^2=x^2+y^2+z^2$,取 r 对 x 的偏导数,则得

$$2r\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)=2x \quad 或 \quad \frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}.$$

既知 $\partial r/\partial x$ 的值，则 $(1/r)$ 对 x 的偏导数为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{x}{r^3}.$$

同理可得

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{r^3}\right)=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x}{r^4}\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5}.$$

于是得到

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{3}{r^3}+\frac{3(x^2-y^2+z^2)}{r^5}=0.$$

用 $q/4\pi\varepsilon_0$ 乘上式，则得方程(2.7)。这种数学方法不适用于原点 $r=0$，因为在该点函数 $1/r$ 变为无限大，不允许在这里取导数；因此，必须将原点排除在外。

例题 2.8 利用拉普拉斯方程，求出两个无限大平行平面（其电势分别为 V_1 和 V_2）之间的空虚区域内的电势和电场。

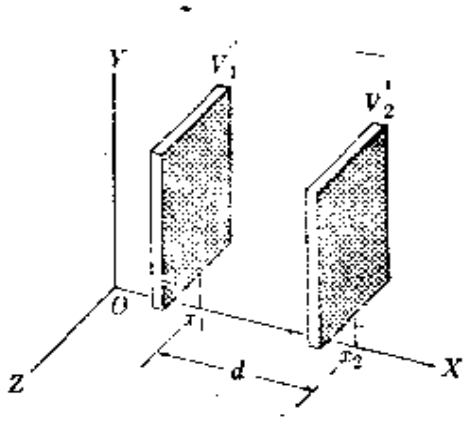


图 2-13

解 这问题的对称性表明，这电场必然只与 x 坐标有关系（图 2-13）。由于在这两个平面之间的空间中没有电荷，我们可以应用拉普拉斯方程(2.7)，得出 $d^2V/dx^2=0$。注意，这里没有用偏导数符号，因为只有一个独立变量 x。将拉普拉斯方程积分一次，得出 dV/dx =常量；但电场为 $\mathscr{E}=-dV/dx$，所以两板之间的电场是恒定的。利用表达式 $\mathscr{E}=-dV/dx$(记住 $\mathscr{E}$ 是常量)，再积分一次，则得

$$\int_{V_1}^{V} dV=-\int_{x_1}^{x}\mathscr{E}dx=-\mathscr{E}\int_{x_1}^{x}dx,$$

由上式得出 $V-V_1=-\mathscr{E}(x-x_1)$ 或 $V=V_1-\mathscr{E}(x-x_1)$。

这个结果表明，电势随距离 x 线性地变化。令 $x=x_2$，则 $V=V_2$。于是得出

$$\mathscr{E}=-\frac{V_2-V_1}{x_2-x_1}=-\frac{V_2-V_1}{d}.$$

这个结果和我们以前的讨论（§1.6）一致，因为 $d=x_2-x_1$ 是两平面的间距。

将这些结果与例题 2.3 的结果加以比较，可以看出，两个均匀带电平面产生匀强电场.

例题 2.9 假定在两个平面之间有均匀的电荷分布，试解例题 2.8 中同样的问题. 这两个平面的电势仍然分别为 V_1 和 V_2. (例如，这可能是真空管的板极之间的情况.)

解 对于这种情况，必须利用泊松方程(2.6). 由于这个问题的对称性，电势只与坐标 x 有关系；$d^2V/dx^2=-\rho/\varepsilon_0$，其中 ρ=常量. 将此式积分，得

$$\int_{x_1}^{x}\frac{d^2V}{dx^2}dx=-\frac{1}{\varepsilon_0}\int_{x_1}^{x}\rho dx=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}\int_{x_1}^{x}dx,$$

由上式得出

$$\frac{dV}{dx}-\left(\frac{dV}{dx}\right)_{x=x_1}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}(x-x_1)$$

或

$$\frac{dV}{dx}=-\mathscr{E}_1-\frac{\rho}{\varepsilon_0}(x-x_1) \tag{2.8}$$

上式中 $\mathscr{E}_1=-(dV/dx)_{x=x_1}$ 是在 $x=x_1$ 处的电场. 因 $\mathscr{E}=-dV/dx$，所以两平面之间的电场为

$$\mathscr{E}=\mathscr{E}_1+\frac{\rho}{\varepsilon_0}(x-x_1),$$

这表明电场随 x 线性地变化，如图 2-14 所示. 为了求出电势作为 x 的函数，我们将方程(2.8)积分，

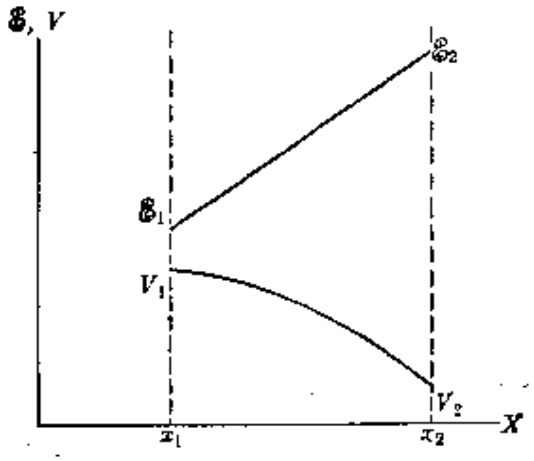


图 2-14

$$\int_{V_1}^{V}dV=-\int_{x_1}^{x}\mathscr{E}_1dx-\frac{\rho}{\varepsilon_0}\int_{x_1}^{x}(x-x_1)dx,$$

由上式得出

$$V=V_1-\mathscr{E}_1(x-x_1)-\frac{\rho}{2\varepsilon_0}(x-x_1)^2. \tag{2.9}$$

电势随 x 的二次方变化，如图 2-14 所示.

2.5 物质的极化

电介质

在本节中，我们将考虑电场对一块物质的作用. 我们知道，原子由于它们的球对称性而不具有永电偶极矩；然而，当原子被放在一电场中时，它们就被极化而在电场方向上获得感生电偶极矩. 这种极化起因于外加电场所引起的电子运动的微扰.

另一方面，许多种分子具有永电偶极矩. 具有永电偶极矩的分子，由于作用在它上面的转矩(由方程 1.36 给出)，而趋向于沿外加电场的方向取向. 由于这两种效应之一，置于电场中的一块物质将变成电极化的. 这就是说，分子(或原子)变成沿局部电场方向取向的电偶极子 (图 2-15). 这或者是由于电子运动的畸变，或者是由于永偶极子的取向. 能被电场极化的介质叫做电介质. 极化作用使一块物质的一侧带有净正电荷，另一侧带有净负电荷. 于是这块物质就变成一个大电偶极子，它趋向于沿电场增加的方向运动，这已在第 1.10 节中讨论过. 这种趋向说明了一个带电玻璃棒或梳子吸引小纸屑或小软木球的现象.

一种材料的电极化强度$\mathscr{P}$被定义为这种介质每单位体积的电偶极矩. 因此，如果 p 是在每个原子或分子中感生的偶极矩，n 是每单位体积中的原子或分子数，则极化强度$\mathscr{P}=np$. 对于大多数电介质，$\mathscr{P}$ 与外加电场 $\mathscr{E}$ 成正比. 由于 $\mathscr{P}$ 的单位是 $(\mathrm{C\cdot m})\mathrm{m}^{-3}=\mathrm{C\cdot m}^{-2}$(即每单位面积的电荷)，而 $\varepsilon_0\mathscr{E}$ 的单位也是 $\mathrm{C\cdot m}^{-2}$(参看方程 1.8)，通常把这个关系写作

$$\mathscr{P}=\chi_e\varepsilon_0\mathscr{E}. \tag{2.10}$$

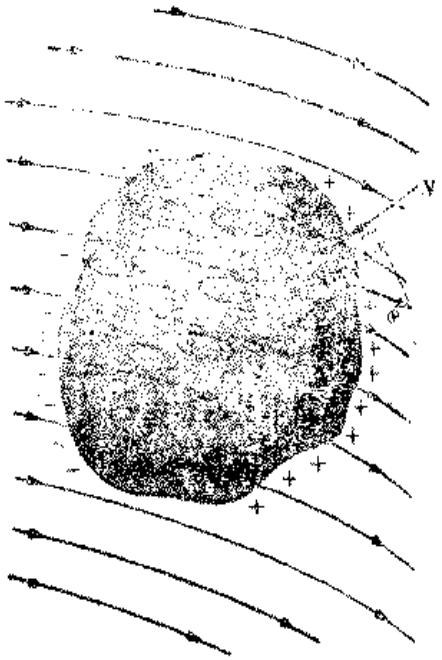


图 2-15 电场使物质极化

量 χ_e 叫做这种材料的电极化率. 电极化率是一纯数，对于大多数物质，它是一个正量. 电极化率描述材料对外电场的响应.

现在考虑一块板材，其厚度为 l，面积为 S，S 垂直于一匀强电场 $\mathscr{E}$(图 2-16). 电极化强度 $\mathscr{P}$ 平行于 $\mathscr{E}$，因而也垂直于 S. 这板材的体积为 lS，按定义，它的总电偶极矩为 $\mathscr{P}(lS)=(\mathscr{P}S)l$；而 l 恰为两个面上出现的正负电荷之间的距离. 又按定义，电偶极矩等于电荷乘距离，所以出现在每一个面上的总电荷为 $\mathscr{P}S$，因而极化板表面上每单位面积的电荷为 $\mathscr{P}$. 这个结果虽然是对于特殊的几何形状得出的，但它是普遍适用的：

一块极化物质表面上每单位面积的电荷 σ_p，等于极化强度 $\mathscr{P}$ 在垂直于该物体表面的方向上的分量

因此，在图 2-15 中，在表面上 A 处单位面积的电荷为 $\mathscr{P}_N=\mathscr{P}\cos\theta=\sigma_p$.

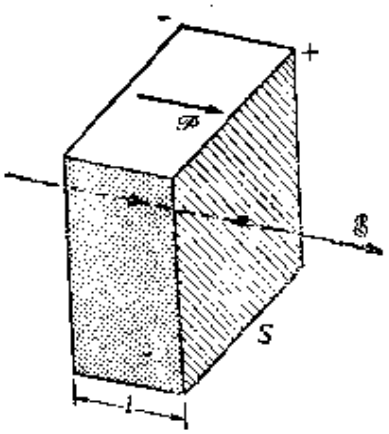


图 2-16　一片极化了的金属.

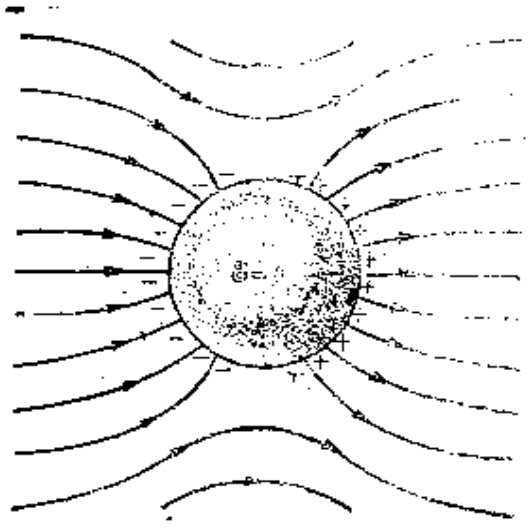


图 2-17　导体内部的电场为零.

导体

有一些材料(例如大多数金属)含有带电粒子，这些粒子在某种程度上能够自由地通过这种材料. 这些材料叫做导体. 当有电场存在时，这些材料也被极化，但极化的方式与电介质的极化有根本的不同. 如果不用适当方法移去，则导体内的可运动电荷在表面上积累，直到它们产生的电场完全抵消导体内部的外加电场，从而实现平衡(图 2-17). 也就是说，在一处于电学平衡态的导体内部，电场为零. 由于同样的原因，导体表面的电场必定垂直于该表面；这是因为，如果有平行的分量，电荷将沿导体表面运动. 此外，由于导体内部的电场为零，所以处于平衡态的导体内各点的电势必定相同. 由于这导体内部的电场为零，又可得出 $\mathrm{div}\mathscr{E}=0$；因此，由高斯定律的微分形式(即方程 2.5)得出 $\rho=0$；所以这导体内部的电荷密度为零. 这个结论表示，一平衡导体的全部电荷，都在它的表面上. 这里"表面"一词所指的并非几何意义上的无限薄表面，而是若干个原子层那么厚的表面区域，即一实际上是有限厚的表面.

例题 2.10　导体表面的电场和表面电荷之间的关系.

解 我们考虑一个任意形状的导体，如图 2-18 所示. 我们要求出恰在这导体表面外部一点的电场. 为此，我们画出一个扁平圆柱面，其形状类似于一个药丸盒. 此盒的一个底面恰在导体表面外部，而另一个底面在导体内部的深度足以使全部表面电荷都处在这圆柱的内部，而且内底面上的电场已经为零. 通过这个扁平圆柱面的电通量由三部分组成：通过内底面的电通量为零，因为该处的电场为零；通过侧面的电通量也为零，因为电场平行于这个面；只有通过外底面的电通量不为零. 设底面的面积为 S，则电通量为 $\Phi_e = \mathscr{E}S$. 另一方面，如果 σ 是这导体的面电荷密度，则这圆柱内部的电荷为 $q = \sigma S$. 于是由高斯定律得出 $\mathscr{E}S = \sigma S/\varepsilon_0$，或

$$\mathscr{E} = \sigma/\varepsilon_0. \tag{2.11}$$

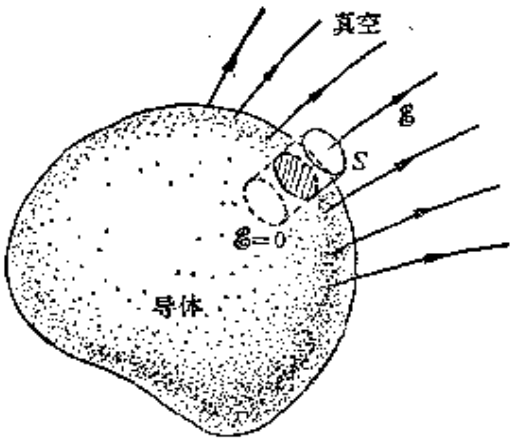


图 2-18 一导体表面的电场垂直于该表面.

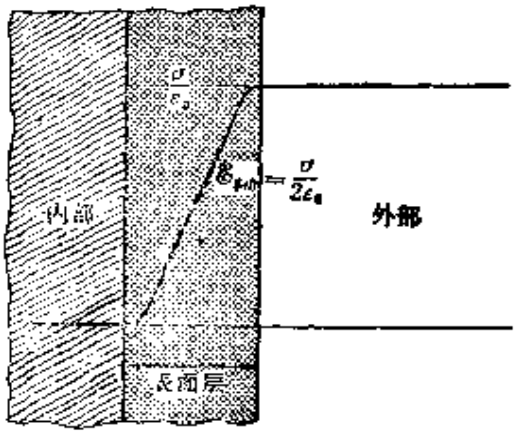


图 2-19 电场穿过一导体表面时的变化情况.

这个方程给出恰在一带电导体表面外部一点的电场，而内部的电场为零. 因此，穿过一带电导体的表面时，电场按某种连续方式变化，如图 2-19 所示.

例题 2.11 试求作用在导体表面单位面积上的电荷的力.

解 导体表面上的每一电荷，都由于该表面上其他电荷的存在而受到一排斥力. 每单位面积上的力，即电应力，等于平均电场乘以每单位面积上的电荷. 由图 2-19 可知，平均电场为 $\mathscr{E}_{平均} = \sigma/2\varepsilon_0$. 因此，电应力为

$$F = \sigma\mathscr{E}_{平均} = \sigma^2/2\varepsilon_0.$$

电应力永远是正的，因为它取决于 σ^2；因此，电应力对应于把电荷从导体上拉开的力.

2.6 电 位 移

在前一节中曾指出，极化电介质的表面上有某些电荷(如果极化强度不是均匀的，则在整个体积内也有某些电荷)．然而，这些极化电荷是"冻结的"，因为它们被束缚于特定的原子或分子，因而不能通过电介质自由地运动．在另外一些材料中，例如在金属或电离气体中，可能存在着能够通过该材料而运动的电荷；因此，称这种电荷为自由电荷．在许多情况下，必须明确区分自由电荷和极化电荷．本节的讨论就是一个恰当的例子．

再次考虑一块电介质平板，它被置于两个导电的平行平板之间(图 2-20)，这两个平板带有等值反号的自由电荷．左边平板上的面电荷密度为$+\sigma_{自由}$，右边平板上的面电荷密度为$-\sigma_{自由}$．这些

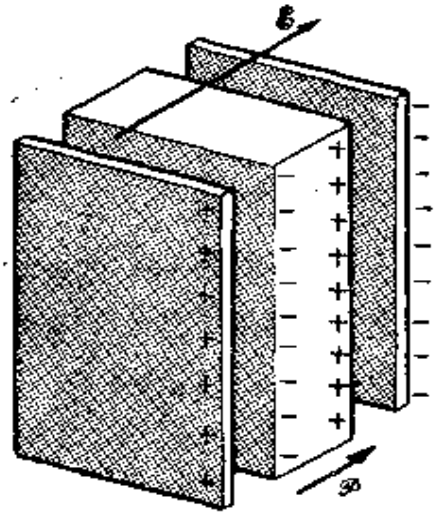


图 2-20　置于带相反电荷的两块平行板之间的电介质．板上的电荷是自由电荷，而电介质表面上的电荷则是束缚的极化电荷．

电荷产生一电场，这电场使电介质平板极化，因而在其两个面上出现极化电荷．这些极化电荷的符号与邻近导电平板上电荷的符号相反．因此，电介质平板表面上的极化电荷部分地抵消了导电平板上的自由电荷．设$\mathscr{P}$为电介质平板中极化强度的大小，则该平板左表面的面电荷密度为 $\mathscr{P}$，右表面的面电荷密度为$+\mathscr{P}$．因

此，左边的有效(或净)面电荷密度为 $\sigma=\sigma_{自由}-\mathscr{P}$，右边的有效面电荷密度则为 $-\sigma_{自由}+\mathscr{P}$. 这些净面电荷产生一匀强电场，按方程(2.11)，这电场由 $\mathscr{E}=\sigma/\varepsilon_0$ 给出. 将 σ 的值代入，我们得到

$$\mathscr{E}=\frac{1}{\varepsilon_0}(\sigma_{自由}-\mathscr{P}) \quad 或 \quad \sigma_{自由}=\varepsilon_0\mathscr{E}+\mathscr{P}.$$

上式表明，被一电介质包围的导体表面上的自由电荷，是电介质中的电场和电介质的极化强度的函数. 上面的结果表示，可以引入一个叫做电位移$\mathscr{D}$的新的矢量场，其定义为

$$\mathscr{D}=\varepsilon_0\mathscr{E}+\mathscr{P}. \tag{2.12}$$

显然，$\mathscr{D}$的单位是 $\mathrm{C\cdot m^{-2}}$，因为这是方程(2.12) 右边两项的单位. 在这里考虑的特殊情况下，$\sigma_{自由}=\mathscr{D}$；也就是说，这导体表面上每单位面积的自由电荷，等于这电介质中的电位移. 这个结果是普遍成立的，可以推广到任意形状的导体. 因此，当一导体埋入一电介质中时，$\mathscr{D}$沿该导体表面法线方向的分量就给出该导体的面电荷密度. 即

$$\sigma_{自由}=\mathscr{D}\cdot\boldsymbol{u}_N,$$

而 $\varepsilon_0\mathscr{E}$的法向分量则给出有效电荷(或净电荷)σ，它计及电介质表面上的电荷所引起的补偿(回顾方程 2.11，$\mathscr{E}=\sigma/\varepsilon_0$). 亦即 $\sigma=\varepsilon_0\mathscr{E}\cdot\boldsymbol{u}_N$. 于是，一导体上的总自由电荷为

$$q_{自由}=\oint_S\sigma_{自由}\,dS=\oint_S\mathscr{D}\cdot\boldsymbol{u}_N dS=\Phi_{\mathscr{D}}. \tag{2.13}$$

更详细的分析(此处省略)表明，在一任意闭合面上$\mathscr{D}$的通量等于该面内部的总“自由”电荷，而不包括介质极化所引起的全部电荷. 因此，方程(2.13)对于任意闭合面都普遍成立.

对于方程(2.10)适用，因而极化强度与电场成正比的情况，

$$\mathscr{D}=\varepsilon_0\mathscr{E}+\varepsilon_0\chi_e\mathscr{E}=(1+\chi_e)\varepsilon_0\mathscr{E}=\varepsilon\mathscr{E}. \tag{2.14}$$

上式中的系数

$$\varepsilon = \frac{\mathscr{D}}{\mathscr{E}} = (1+\chi_e)\varepsilon_0 \tag{2.15}$$

叫做这介质的电容率，其单位与 ε_0 的相同；即为 $m^{-3}\cdot kg^{-1}\cdot s^2\cdot C^2$. 相对电容率定义为

$$\varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_0 = 1+\chi_e, \tag{2.16}$$

它是一纯数，与单位制无关. 相对电容率也叫做介电常数. 大多数物质的介电常数大于 1.

当关系式 $\mathscr{D}=\varepsilon\mathscr{E}$ 适用于一种介质时，方程(2-13) 可以写作 $q_{自由}=\oint \varepsilon\mathscr{E}\cdot u_N dS$，又如果这介质是均匀的，因而 ε 是常数，则有

$$\Phi_E = \oint \mathscr{E}\cdot u_N dS = \frac{q_{自由}}{\varepsilon}. \tag{2.17}$$

方程(2.17)与方程(2.3)的比较表明，如果只考虑自由电荷，则电介质对电场 $\mathscr{E}$ 的影响是以 ε 代替 ε_0. 因此，埋入一电介质中的一个点电荷所产生的电场和电势为

$$\mathscr{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}u_r, \quad V = \frac{q}{4\pi\varepsilon r}. \tag{2.18}$$

于是，埋入一电介质中的两个点电荷之间的相互作用力的大小为

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon r^2}. \tag{2.19}$$

由于 ε 一般大于 ε_0，所以电介质的存在有效地减小了这种相互作用. 这是由于电介质分子的极化所引起的屏蔽作用.

2.7 电极化率的计算

我们引入电极化率 χ_e 这个概念，是为了描述物质对外电场作用的响应. 一种物质的电极化率必然与该物质的原子和分子的特性有关系. 在本节中，将扼要讨论这种特性(宏观性质的)是怎样

与该物质的原子特性联系起来的.

如在前面所看到的，置于一电场中的原子，由于正、负电荷的相对位移，而变成极化的. 如果 $\boldsymbol{p}$ 是外电场 $\boldsymbol{\mathscr{E}}$ 在这原子中感生的电偶极矩，并假定 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{\mathscr{E}}$ 成正比(这个结果已由经验证实)，则这个比例关系可以写成

$$\boldsymbol{p}=\alpha\varepsilon_0\boldsymbol{\mathscr{E}}, \tag{2.20}$$

上式中 α 是每一种原子所特有的常数，叫做原子极化率，它的单位是 m^3. 为方便起见，我们把常数 ε_0 写进上面的方程中. 如果每单位体积中有 n 个原子或分子，则这介质的极化强度为 $\boldsymbol{\mathscr{P}}=n\boldsymbol{p}=n\alpha\varepsilon_0\boldsymbol{\mathscr{E}}$. 将此式与关于该材料的电极化率的方程(2.10)相比较，可得出 $\chi_e=n\alpha$. ①

这样一来，电极化率的计算就化为这物质的原子(或分子)的极化率的计算. 这种计算实际就是确定外电场对原子中电子运动的效应. 但这种确定又要求具有关于原子中电子运动的某些详细数据. 外电场的微扰效应的计算，必须利用量子力学的方法才能完成，而这个问题超出本书范围. 因此，下面只分别论述有关无极物质和有极物质的效应的主要结果.

畸变效应

如果一物质的原子或分子不具有永电偶极矩，则极化的发生完全是由于电场对电子轨道引起的效应. 这种效应可以看作是电子电荷的分布中心相对于原子核有一位移. 结果形成一感生电偶极子. 在原子和大多数分子的情况下，这种偶极子平行于外加电场.

---

① 严格地讲，对于埋在一材料介质中的、并非孤立的原子或分子写出方程(2.20)时，该方程右边出现的电场应为介质中的总电场减去原子本身产生的电场. 作了这种改正之后，χ_e 和 α 之间的关系变为 $\chi_e=n\alpha/(1-n\alpha/3)$，但对于大多数材(主要是气体)，关系式 $\chi_e=n\alpha$ 是很好的近似.

每个原子(或分子)都具有一组特征频率 $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \cdots$，这些频率对应于该物质能够发射或吸收的电磁辐射的频率. 这些频率构成该物质的电磁波谱. 电场恒定时的原子极化率叫做静态原子极化率，由下式给出:

$$\alpha = \frac{e^2}{\varepsilon_0 m_e} \sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2}, \tag{2.21}$$

上式中的 ω_i 指该物质的电磁波谱的任一共振频率，求和是对所有这些频率进行的. f_i 所表示的量叫做该物质的振子强度，它们都是正的，且小于 1. 它们代表电磁波谱的每一共振频率对原子极化率的贡献的相对比率. 这些振子强度满足关系式 $\sum_i f_i = 1$. 方程(2.21)中其他各量具有通常的意义.

与一静电场所引起的效应相联系的频率 ω_i 的存在，可能使学生感到迷惑不解；不过，这可以利用一个非常简单的唯象模型(这将在例题 2.12 中说明)加以论证.

根据关系式 $\chi_e = n\alpha$，静态电极化率为

$$\chi_e = \frac{ne^2}{\varepsilon_0 m_e} \sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2} = 3.19 \times 10^3 n \sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2}. \tag{2.22}$$

这个表达式把一宏观性质 χ_e 与该物质的原子性质 n、ω_i 和 f_i 联系起来. 现在将这些结果与实验加以比较. 如果这原子的辐射处在可见区，则频率 ω_i 约为 5×10^{15}Hz，因而方程(2.22)中的求和约等于 4×10^{-32}. 对于大多数固体和液体，n 约等于 10^{28} 原子/m^3，对于标准温度和压强下的气体，n 约等于 10^{25}原子/m^3. 因此，方程(2.22)表明，在可见区发出辐射的无极材料的静态电极化率 χ_e，对于固体约为 10^0(即 1)，对于气体约为 10^{-3}. 由于这些估计值是非常粗略的，不应期望它们能够准确地复现实验结果. 然而，估计值与几种材料的静态电极化率的实验值(如表 2-1 所示)的比较

表 2-1　室温下的电极化率

物　质	χ_e	物　质	χ_e
固体		气体*	
云母	6	氖	5.0×10^{-4}
瓷	6	氢	0.6×10^{-4}
玻璃	8	氮	5.5×10^{-4}
电木	4.7	氧	5.0×10^{-4}
液体		氨	5.2×10^{-4}
油	1.1	二氧化碳	9.2×10^{-4}
松节油	1.2	水蒸气	7.0×10^{-3}
苯	1.84	空气	5.4×10^{-4}
乙醇	24	空气(10MPa)	5.5×10^{-2}
水	78		

* 在标准温度和压强下(100kPa 和 298K).

表明，就数量级而言，二者是一致的.

上面的讨论仅对于静态电场才是正确的. 如果电场与时间有关系，则动态电极化率应该不同于静态电极化率，因为在与时间有关的电场的作用下，电子运动的畸变显然不同于静态电场作用下的畸变. 假定电场以一定的频率 ω 振荡. 这振荡电场将在电子的固有运动上叠加一个振荡的微扰. 这种微扰类似于第一卷第12.13节中讨论过的受迫振荡①. 如果不考虑阻尼，则利用量子力学方法计算的结果给出动态电极化率为

$$\chi_e=\frac{ne^2}{\varepsilon_0 m_e}\sum_i\frac{f_i}{\omega_i^2-\omega^2}, \tag{2.23}$$

上式中各量具有前面给出的意义. 在例题 2.12 中，对于这个结果给出简单的唯象证明. 注意，如果 $\omega=0$，则动态结果(式 2.23) 化为静态结果(式 2.22).

由方程(2.23)可知，在动态情况下，介质的介电常数即相对电

① 关于自由和受迫振荡的讨论，见第一卷第十二章.

容率为

$$\varepsilon_r = 1 + \chi_e = 1 + \frac{ne^2}{\varepsilon_0 m_e} \sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2 - \omega^2} \tag{2.24}$$

如果画出相对电容率 ε_r 对 ω 的曲线，则可看出，当 ω 等于各特征频率 ω_i 时，ε_r 变为无限大，这不符合观察结果．这个没有物理意义的结果，是由于计算动态电极化率时未包括阻尼项．这种阻尼的出现，不是由于电子在一粘性流体中运动，而是由于电子在受迫振荡时以辐射的形式损失能量(这一点以后还要讨论)．

图 2-21 中示出观察到的 ε_r 随 ω 变化的情况．对于每一种物质的特征频率 $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \cdots$，这图形自行重复．这种变化对于这种物质的光学和电学行为有着深刻的影响．

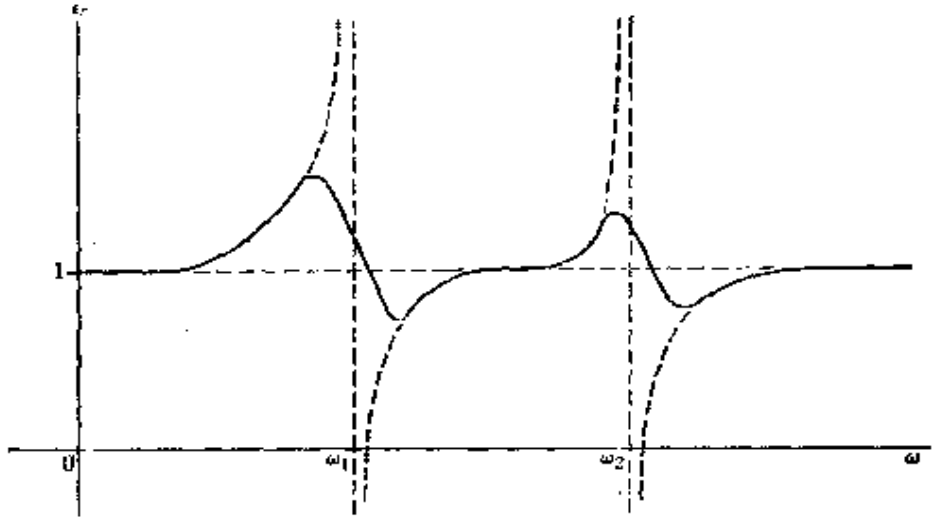
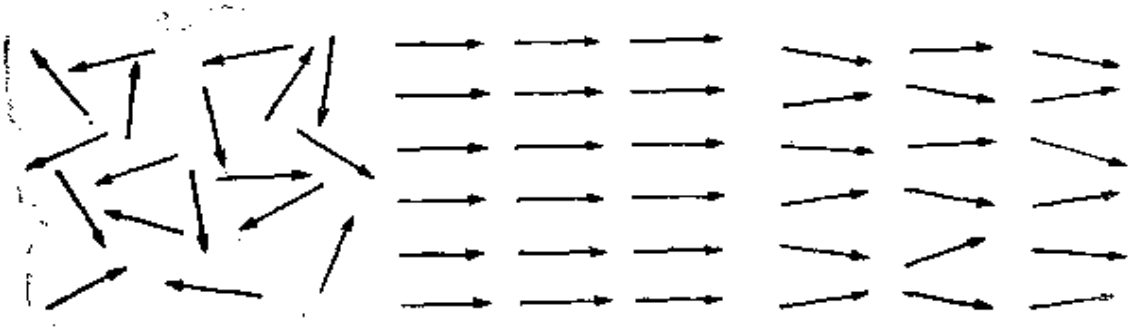


图 2-21　相对电容率随电场频率变化的曲线．虚线是根据方程(2.24)预计的值；实线表示观察到的典型的介质行为．

具有永偶极矩的分子

由方程(2.22)和(2.23)得到的电极化率是"感生的"，因为它们起因于外电场所引起的电子运动的畸变．然而，当分子具有永电偶极矩时，则另一种效应开始起作用．我们考虑一种有极气体，它的分子具有永电偶极矩 p_0．当无外电场存在时，这些偶极矩的取向是无规的，因而观察不到宏观的即集体的电偶极矩(图 2-22)．

然而，当施加一静电场时，这些电偶极子趋向于沿电场的方向取向．如果没有分子相互作用，这种排列将是完美的(图 2-22b)，但是，分子的碰撞趋向于使电偶极子紊乱．这种紊乱不是完全的，因为外加电场的作用有利于偶极子沿电场取向，而不利于逆电场取向（图 2-22c)．因此，一个分子的电偶极矩的平行于电场的分量的平均值由下式给出：



(a) 无电场　(b) 有电场，无分子相互作用　(c) 有电场，有分子相互作用

图 2-22　电偶极子在一电场中的取向．

$$p_{平均}=\frac{p_0^2}{3kT}\mathscr{E}, \tag{2.25}$$

上式中 k 是玻尔兹曼常数，T 是这气体的绝对温度．注意，当温度升高时，$p_{平均}$减小．$p_{平均}$对温度的这种关系，是由于分子骚动随温度的升高而增强．分子运动得越快，它们就越能有效地抵消外电场的排列效应．因而沿电场方向的平均电偶极矩减小．方程(2.25)与方程(2.20)的比较表明，一个分子的平均极化率（或有效极化率)由 $\alpha=p_0^2/3\varepsilon_0kT$ 给出；如果每单位体积中有 n 个分子，则有效电极化率 $\chi_e=n\alpha$ 为①

$$\chi_e=\frac{np_0^2}{3\varepsilon_0kT}, \tag{2.26}$$

上式叫做朗之万公式．分子的电偶极矩的数量级为电子的电荷 $(1.6\times10^{-19}\mathrm{C})$乘以分子的线度$(10^{-10}\mathrm{m})$，即约为 $10^{-30}\mathrm{C\cdot m}$（回顾

① 仅当 $p_0\mathscr{E}/kT\ll1$ 时，方程(2.25)和(2.26)给出的关系式才是好的近似．

表 1-2). 如果把其他常数的值代入方程(2.26)中，则在室温($T=298K$)下，由极性分子组成的物质的电极化率，对于固体约为$10^0=1$，对于气体约为10^{-3}，这结果与大多数极性气体的值一致.

注意，具有永偶极矩的分子的取向所引起的电极化率与绝对温度成反比，而原子或分子中的电子运动的畸变所引起的感生电极化率(方程 2.22)则基本上与温度无关(热膨胀所引起的 n 随温度的变化除外). 温度关系的这种差异提供了在实验上区分这两种效应的方法. 在不同温度测量 χ_e 时，我们应能得到下列形式的温度关系:

$$\chi_e = A + \frac{B}{T}$$

当电场与时间有关系时，得到的结果更复杂.

一类特殊物质叫做铁电体，它们在无外电场存在时，显示出永极化强度；这种特性表明它们的分子的永偶极子有一种固有的排列倾向. 这种排列大概起因于分子的相互作用，从而产生有助于排列的强局部场. 比较熟知的铁电物质有 $BaTiO_3$，$KNbO_3$，$LiTaO_3$ 和罗谢耳盐：$NaK(C_4H_4O_6)\cdot 4H_2O$.

例题 2.12 外电场所引起的原子的极化.

解 我们试图根据一个过分简化的唯象模型来确定外电场对原子内电子运动产生的效应. 我们假定，当电子运动的中心相对于原子核移动一距离 x 时，就有一平均为 $-kx$ 作用在电子上. 这个力趋向于使电子恢复到正常位形. 平衡要求这个力抵消外加电场所引起的力 $-e\mathscr{E}$. 因此，$-kx-e\mathscr{E}=0$，或 $x=-e\mathscr{E}/k$. 负号表示电子轨道在与电场方向相反的方向上移位. 电子运动的微扰在原子中感生的电偶极矩为 $p=-ex=(e^2/k)\mathscr{E}$，因此其方向与电场方向相同. 这个关系式可以按稍微不同的方式写出，这就是使一频率 ω_0 与常数 k 联系起来(对应于谐振荡)，即 $k=m_e\omega_0^2$. 于是得到下列矢量形式:

$$\boldsymbol{p}=\frac{e^2}{m_e\omega_0^2}\boldsymbol{\mathscr{E}}.$$

将这个结果与方程(2.20)给出的定义加以比较，可得出这个简单模型的原子

极化率为

$$\alpha=\frac{e^2}{\varepsilon_0 m_e\omega_0^2}.$$

由关系式 $\chi_e=n\alpha$，得出静态电极化率为

$$\chi_e=\frac{ne^2}{\varepsilon_0 m_e\omega_0^2}=(3.19\times10^{9})\frac{n}{\omega_0^2}. \tag{2.27}$$

如果这模型要有物理意义，就必须认为频率 ω_0 与某种原子性质一致. 当电场 $\mathscr{E}$ 撤去时，恢复力 $-kx$ 把一频率为 ω_0 的振动叠加在电子的固有运动上. 以后，在第十一章中，将证明一振荡电荷辐射能量. 因此，可以认为 ω_0 就是这原子发射的辐射的频率. 所以，如果这物质的电磁波谱只包含一个频率 ω_0，则这模型基本上与方程(2.21)一致.

现在考虑与时间有关系的情况，即外加电场按照 $\mathscr{E}=\mathscr{E}_0\cos\omega t$ 随时间变化的情况. 于是，可以合理地假定一振荡微扰叠加在电子的固有运动上，并导致下列运动方程：

$$m_e\frac{d^2x}{dt^2}=-kx-e\mathscr{E}_0\cos\omega t, \tag{2.28}$$

上式中最后一项是振荡电场产生的力. 如果 $k=m_e\omega_0^2$，则上式可以写作如下形式：

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2x=-\frac{e\mathscr{E}_0}{m_e}\cos\omega t. \tag{2.29}$$

这个方程描述一谐振子的受迫振荡[①]. (与第一卷中受迫振荡的分析之间的主要差别在于这里没有阻尼项.)假定一个解具有形式 $x=A\cos\omega t$；把它代入方程(2.29)，得到 $A=-e\mathscr{E}_0/m_e(\omega_0^2-\omega^2)$. 因此，

$$x=-\frac{e}{m_e(\omega_0^2-\omega^2)}\mathscr{E}_0\cos\omega t=-\frac{e}{m_e(\omega_0^2-\omega^2)}\mathscr{E},$$

因为 $\mathscr{E}=\mathscr{E}_0\cos\omega t$. 感生电偶极子为

$$p=-ex=\frac{e^2}{m_e(\omega_0^2-\omega^2)}\mathscr{E},$$

由此得出这原子的动态极化率为

$$\alpha=\frac{e^2}{\varepsilon_0 m_e(\omega_0^2-\omega^2)}. \tag{2.30}$$

求动态电极化率时，我们再次利用关系式 $\chi_e=n\alpha$，得出

① 见第一卷，第 13.13 节.

$$\chi_{e(\text{动态})}=\frac{ne^2}{\varepsilon_0 m_e(\omega_0^2-\omega^2)}. \tag{2.31}$$

如果在这物质的电磁波谱中只有一个共振频率 ω_0，则上式基本上与方程(2.23)等同. 再一次指出，粗略的唯象模型不能给出精确的结果，其原因之一是，如在静态情况下那样，假定只有一个固有频率 ω_0；另一个原因是电子的运动遵从量子力学(而不是牛顿力学)的定律，在这里忽略了这一事实.

2.8 电容；电容器

已证明，一半径为 R、电荷为 Q 的球形导体表面上的电势为 $V=Q/4\pi\varepsilon_0 R$. 如果这个球被包围在一介质中，则用 ε 代替 ε_0:

$$V=\frac{Q}{4\pi\varepsilon R}.$$

于是，对于球体，$Q/V=4\pi\varepsilon R$ 是一个常量，与电荷 Q 无关. 这是可以理解的，因为如果电势与产生它的电荷成正比，则二者之比必然是一常数. 这个论断对于任意形状的一切带电导体都适用. 因此，把一孤立导体的电容定义为它的电荷与其电势之比:

$$C=\frac{Q}{V}. \tag{2.32}$$

这个方程表明，对于一给定的电势，在一导体上能储存多少电荷.

一孤立球形导体的电容可以写作

$$C_{球}=4\pi\varepsilon R.$$

如果这球体的周围不是电介质，而是真空，则其电容为 $C_{球}=4\pi\varepsilon_0 R$. 因此，用一种电介质包围一个球形导体，或一般而言任何导体，将使它的电容增加到 $\varepsilon/\varepsilon_0$ 倍. 这是由于在靠近导体的电介质表面上感生的相反电荷的屏蔽效应. 这些电荷使导体的有效电荷和导体的电势都减少到 $\varepsilon/\varepsilon_0$ 分之一.

导体电容的单位为 $C\cdot V^{-1}$，这个单位叫做法拉(F)，是为了纪念英国人法拉第(M. Faraday, 1791—1867). 法拉被定义为这样

一个孤立导体的电容，当这孤立导体接受 1 库仑电荷时，它的电势为 1 伏特．用基本单位表示时，$F=C\cdot V^{-1}=m^{-2}\cdot kg^{-1}\cdot s^{2}\cdot C^{2}$．

能够把电容的概念推广到一导体系的情况．我们考虑具有电荷 Q 和 $-Q$ 的两个导体的情况（图 2-23）．如果 V_1 和 V_2 分别为它们的电势，从而 $\Delta V=V_1-V_2$ 为它们的电势差，则这系统的电容被定义为

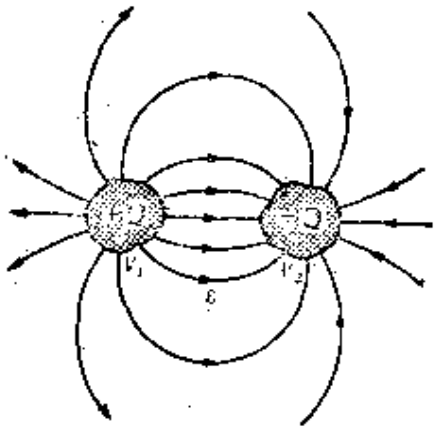


图 2-23　具有等值反号电荷的两个导体构成的系统．

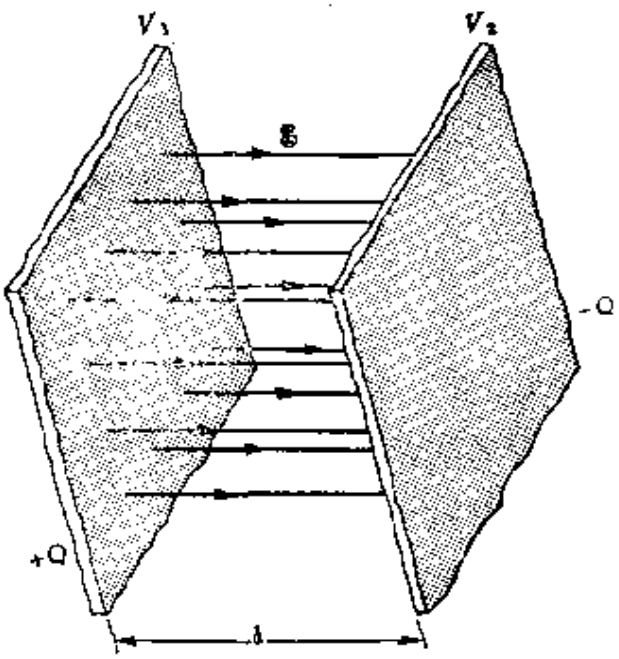


图 2-24　平行板电容器．

$$C=\frac{Q}{V_1-V_2}=\frac{Q}{\Delta V}. \tag{2.33}$$

这种装置构成所谓电容器．电容器被广泛应用于电路中．典型的电容器是两个平行平面导体，它们分开一个距离 d，两板之间的空间充满一种电介质（图 2-24），两板之间的空间中的电场是均匀的，由 $\mathscr{E}=(V_1-V_2)/d$ 给出（根据方程 1.19）．设 σ 为板上的面电荷密度，则按例题 2.2，两板之间的空间中的电场强度为 $\mathscr{E}=\sigma/\varepsilon$．这里用 ε 代替 ε_0，是由于电介质的存在．因此，

$$V_1-V_2=\mathscr{E}d=\frac{\sigma d}{\varepsilon}.$$

另一方面，如果S是金属板的面积，则有$Q=\sigma S$. 因此，代入方程(2.33)，则得这系统的电容

$$C=\frac{Q}{\Delta V}=\frac{\sigma S}{(\sigma d/\varepsilon)}=\frac{\varepsilon S}{d}. \tag{2.34}$$

这个方程提示测定一种材料的相对电容率即介电常数的实用方法. 首先测量其极板间没有这种材料的电容器的电容$C_0=\varepsilon_0 S/d$. 然后，用要研究的材料充满两极板间的空间，再测量其电容$C=\varepsilon S/d$. 于是得出

$$\frac{C}{C_0}=\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}=\varepsilon_r.$$

由此可见，两次测得的电容的比值，就是置于极板间的材料的相对电容率即介电常数.

例题 2.13 电容器的组合.

解 电容器可按两种排列方式组合：串联和并联. 在串联组合中(图 2-25a)，每一个电容器的负极板接到下一个电容器的正极板. 结果是，所有电容器的极板上带有相等的正、负电荷. 设$\Delta V_1, \Delta V_2, \cdots, \Delta V_n$为各电容器上的电势差. 如果$C_1, C_2, \cdots, C_n$是它们各自的电容，则$\Delta V_1=Q/C_1, \Delta V_2=Q/C_2, \cdots, \Delta V_n=Q/C_n$. 因而总电势差为

$$\Delta V=\Delta V_1+\Delta V_2+\cdots+\Delta V_n=\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\cdots+\frac{1}{C_n}\right)Q.$$

可以使这系统等同于一个其电容C满足关系式$\Delta V=Q/C$的电容器. 因此

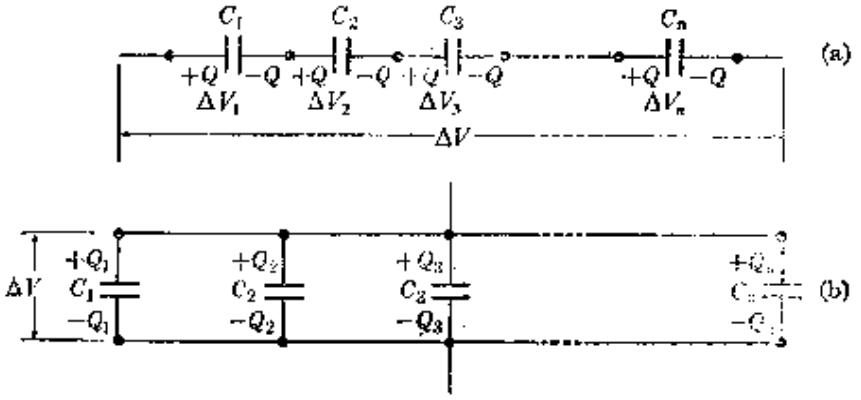


图 2-25 电容器的串联和并联.

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\cdots+\frac{1}{C_n}, \tag{2.35}$$

上式给出串联电容器的总电容.

在并联组合中(图 2-25b),所有的正极板接到一个公共点,所有的负极板接到另一个公共点,因而所有电容器的电势差 ΔV 相同. 因此,如果它们的电荷为 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_n$,则必有 $Q_1=C_1\Delta V,Q_2=C_2\Delta V,\cdots,Q_n=C_n\Delta V$. 这系统上的总电荷为

$$Q=Q_1+Q_2+\cdots+Q_n=(C_1+C_2+\cdots+C_n)\Delta V.$$

可以使这系统等同于一个其电容 C 满足关系式 $Q=C\Delta V$ 的电容器. 因此,

$$C=C_1+C_2+\cdots+C_n. \tag{2.36}$$

上式给出电容器并联组合的总电容. 能够作出既有串联又有并联的电容器组合. 这种组合的总电容,通常能够利用本例题中阐述的规则计算出来.

2.9 电场的能量

使一导体带电,需要耗费能量;这是因为,为了使一导体带有更多的电荷,必须作功来克服这导体上已存在的电荷的排斥力. 这个功使导体的能量增加. 例如,我们考虑一个电容为 C、具有电荷 q 的导体. 这个电容器的电势为 $V=q/C$. 如果把电荷 dq 从无限远处带到电容器的极板上,则按方程 (1.24),所作的功为 $dW=Vdq$. 这个功等于这导体的能量增加 dE_e. 因此,这导体的能量变化为

$$dE_e=\frac{q\,dq}{C}.$$

当电荷从零增加到 Q 时,导体能量的总的增加等于在这过程中所作的功:

$$E_e=\frac{1}{C}\int_0^Q q\,dq=\frac{Q^2}{2C}. \tag{2.37}$$

对于一个球形导体,$C=4\pi\varepsilon R$,因而其能量为

$$E_e=\frac{1}{2}\left(\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon R}\right). \tag{2.38}$$

能够把一个带电球体的能量和该带电球体的电场联系起来；这种联系是非常有意义的。一个带电球体在至其中心的距离 r 大于其半径的点产生的电场的大小为

$$\mathscr{E}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}.$$

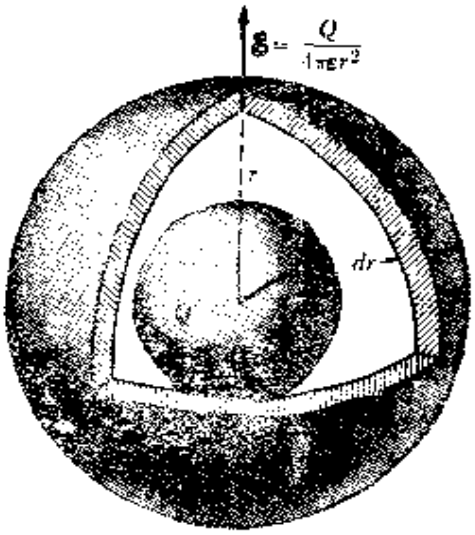


图 2-26

现在我们要计算 $\mathscr{E}^2$ 在球体外部的整个体积中的积分。为了求出积分的体积元，我们把外部空间分割成许多半径为 r、厚度为 dr 的球壳（图 2-26）。每个球壳的面积为 $4\pi r^2$，其体积为 $dv=$面积×厚度$=4\pi r^2dr$。因此，

$$\int_R^\infty \mathscr{E}^2dv=\int_R^\infty\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\right)^2(4\pi r^2dr)=\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon^2}\int_R^\infty\frac{dr}{r^2}=\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon^2R}.$$

将此结果与方程(2.38)加以比较，可以看出，一个带电球体的能量可以写成

$$E_e=\frac{1}{2}\varepsilon\int_R^\infty\mathscr{E}^2dv.$$

更一般的数学计算表明，这个结果是普遍适用的。因此，把一电荷系集合起来所需的能量，可以表示为

$$E_e=\frac{1}{2}\varepsilon\int_{\text{整个空间}}\mathscr{E}^2dv. \tag{2.39}$$

可以给这个表达式以重要的物理解释。我们可以说，使电荷集合起来所消耗的能量，被储存在周围的空间中，因而每一无限小体积 dv 具有一相应的能量 $\frac{1}{2}\varepsilon\mathscr{E}^2dv$。因此，每单位体积的能量，即“储存”在电场中的能量密度 E_e 为

$$E_e=\frac{1}{2}\varepsilon\mathscr{E}^2. \tag{2.40}$$

对于分布在整个空间(其中有电场存在)的带电粒子系的能量的这种解释，在讨论许多过程时，是非常有用的.

例题 2.14 试计算形成一均匀分布的球形电荷所需的能量(图 2-27).

解 设R为这个球的半径，Q为均匀分布于球体内的电荷(图 2-27). 我们把这个球体分割成一系列半径从零一直增加到R的薄球壳. 我们设想按照洋葱的结构方式来构成这个球形电荷分布；即把相继的球壳加起来，直至达到最后的半径. 为了计算球形电荷分布的总能量，我们把累加各球壳时耗费的能量加起来.

整个球体内的电荷密度为

$$\rho=\frac{Q}{4\pi R^3/3}.$$

当球的半径为 r 时，它所包含的电荷为

$$q=\rho\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)=\frac{Qr^3}{R^3}.$$

这球面上的电势为

$$V=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{Qr^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}. \tag{2.41}$$

通过增加一个新的球壳来使球半径增加 dr，这需要增加一电荷 dq. 将方程 (2.41)微分来求出 dq:

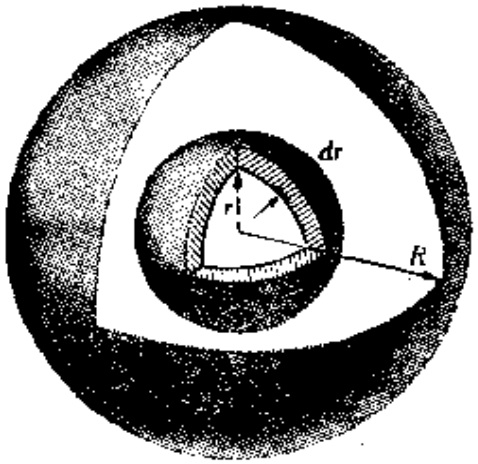


图 2-27

$$dq=\frac{3Qr^2}{R^3}dr.$$

把这个电荷加在球上所需的能量为

$$dE_e=Vdq=\frac{3Q^2r^4}{4\pi\varepsilon_0 R^6}dr.$$

于是，把电荷累加起来达到它的最后值时所需的能量为

$$E_e=\int_0^Q Vdq=\int_0^R\frac{3Q^2r^4}{4\pi\varepsilon_0 R^6}dr=\frac{3Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R^6}\int_0^R r^4dr.$$

积分后得出

$$E_e=\frac{3}{5}\left(\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}\right), \tag{2.42}$$

这个结果与方程(2.38)不同. 这是因为,我们导出方程(2.38)时,是把电荷加在一个半径恒定的球上,而在导出方程(2.42)时,是把相继各球壳加起来,直至达到最后的大小,而构成一个整个体积均匀带电的球. 在此情况下,关系式(2.39)仍然适用,但在计算时,必须包括与球内电场相联系的能量. 这个问题留给学生去证明.

方程(2.42)的一个有意义的应用,是估算一个原子核的电能(即库仑能). 如果核电荷是$Q=Ze$,则有

$$E_e=\frac{3}{5}\frac{Z^2e^2}{4\pi\varepsilon_0 R}. \tag{2.43}$$

然而,在核由质子和中子组成的情况下,电荷在这球体内的分布是不均匀的,只有质子上才有电荷. 更仔细的分析给出稍微不同的结果,在这结果中用$Z(Z-1)$代替Z^2.

例题 2.15 电子的"半径".

解 关于电子的几何形状所知甚少. 我们所能肯定的是,电子是一个带负电荷$-e$的粒子. 我们要估算一下这个电荷集聚于其中的区域的大小. 为了简化计算,我们假定电子是一个半径为R的球. 如果我们对电荷在电子体积内的分布作出某些假定,就能利用上面讲过的方法来计算它的电能. 例如,如果电子集一个半径为R的实心球体,其电荷$-e$的分布具有均匀电荷密度,则其能量为

$$E_e=\frac{3}{5}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

可将这个能量与电子的静质量能m_ec^2加以比较. 令这两个能量相等,则得

$$m_ec^2=\frac{3}{5}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R} \quad 或 \quad R=\frac{3}{5}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{e^2}{m_ec^2}. \tag{2.44}$$

根据所选取的模型,这个表达式给出电子的半径. 如果假定电子仅在其表面带电,而不是一个均匀带电的球体,则必须利用方程(2.37). 这样得到的电子半径的表达式与方程(2.44)类似,不过因子$\frac{3}{5}$被$\frac{1}{2}$所代替. 由于电子不大可能对应于这两种模型之一,所以通常采用下式所表示的量作为电子半径的定义:

$$r_e=\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{e^2}{m_ec^2}=2.8178\times10^{-15}\ \mathrm{m}. \tag{2.45}$$

我们再说一遍,不能认为这个半径有严格的几何意义,它主要作为电子可能

"集聚"于其中的区域的大小的估计.

习　题

2.1　一个边长为 a 的立方形闭合面(图 2-28)，放在一平行于 X 轴的均匀电场中. 设这电场(a)是均匀的，(b)按规律 $\mathscr{E}=Cx$ 变化，试求穿过这个闭合面的电通量和这个面内部的总电荷.

2.2　对于一边长为 a 的立方体(图 2-28)，试求通过其表面的电通量，其内部的总电荷和电荷密度，设这立方体所在处的电场为(a) $\mathscr{E}=u_x cx^2$，(b) $\mathscr{E}=c(u_x y+u_y x)$.

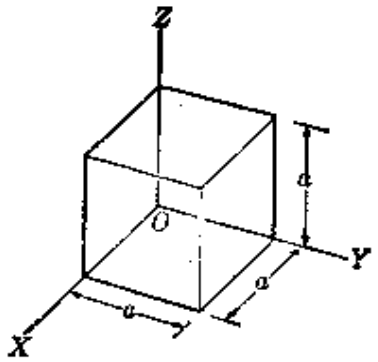


图　2-28

2.3　在一电离介质(例如一气体或一电解质)中，既有正离子又有负离子. 试证明，如果每个离子带有一电荷 $\pm ve$，则电流密度为 $j=ve(n_+v_+-n_-v_-)$，式中 n_+ 和 n_- 分别为单位体积内每一类离子的数目.

2.4　一个半径为 R_1 的导体球，有一个半径为 R_2 的中央空腔. 在空腔中心有一个电荷 q. (a) 求这导体球的内、外表面上的电荷. (b) 计算球外、球内和空腔内的电场和电势. (c) 画出电场和电势对至球心的距离的曲线[提示：导体内部的电场为零.]

2.5　两个半径为 R_1 和 R_2 的导体球，彼此相隔很大距离，用一导线连接起来，因而它们的电势始终相同. 这个系统上有过剩电荷 Q. (a)试证明，在这两个电连通的球上，电荷的分布使得 $\sigma_1/\sigma_2=R_2/R_1$，式中 σ 表示面电荷密度. (b)从而证明，每个球表面上的电场满足条件 $\mathscr{E}_{1表面}/\mathscr{E}_{2表面}=R_2/R_1$. 解此问题时，忽略连接导线的效应.

2.6　两个导体球，其半径分别为 1×10^{-3}m 和 1.5×10^{-3}m，它们的电荷分别为 $+1\times10^{-7}$C 和 $+2\times10^{-7}$C. 两个球接触后再分开. 试计算分开后每个球上的电荷.

2.7　作为方程(2.10)和(2.11)的结果，能够证明，在两种电介质的界面上，电场的切向分量和电位移的法向分量是连续的；亦即它们在界面两侧有相同的值．(第二个论断仅当界面不带电荷时才适用)然后证明，力线与该面的法线所成的角，满足下列关系：

$$\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2}=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$

2.8　金刚石的电容率为 $1.46\times10^{-10}\mathrm{m^{-3}\cdot kg^{-1}\cdot s^2\cdot C^2}$．试求金刚石的(a)介电常数，(b) 极化率．

2.9　一空气电容器，由紧密靠近的两块平行平板构成，其电容为1000 pF．每个板上的电荷为 1 μC．(a)求两板之间的电势差，(b)设电荷保持不变，如果间距加倍，试求两板之间的电势差．

2.10　将一张 $4\times10^{-5}\mathrm{m}$ 厚的纸夹在锡箔之间，能够构成一电容器．设纸的介电常数为 2.8．它在一强度为 $5\times10^{7}\mathrm{V\cdot m^{-1}}$(或更大的)电场中将成为导体，也就是说，这种纸的介电强度为 $50\mathrm{MV\cdot m^{-1}}$．(a)对于一0.3μF的纸-箔电容器，确定所需的板面积．(b)如果纸中的电场不超过电介质强度的一半，试求可施加的最大电荷的值．

2.11　用橡胶作为电介质，构成一平行板电容器．这种橡胶的介电常数为 3，其介电强度为 $20\mathrm{MV\cdot m^{-1}}$．要求这电容器的电容为 0.15μF，它能够承受的最大电势差为 6000V．试求这电容器极板的最小面积．

2.12　(a) 一个电容器由半径为 a 和 b 的两个球壳组成，设 ε_r 为两个球壳之间的介质的相对电容率，试证明这电容器的电容为 $4\pi\varepsilon_r ab/(a-b)$．(b) 证明，由半径为 a 和 b 的两个圆柱壳组成的电容器的电容为 $4\pi\varepsilon_r/2\ln\cdot(b/a)$．

2.13　一个电容器由 25 张薄金属片组成，每张的面积为 $6\times10^{-2}\mathrm{m^2}$，这些金属片彼此之间用 $6\times10^{-4}\mathrm{m}$ 厚的石腊纸(其相对电容率等于 2.6)隔开．试求这系统的电容．

2.14　三个电容器的电容为 1.5μF，2μF 和 3μF．它们(1)串联和(2)并联之后，加上 20V 的电势差．在每一种情况下，试求：(a) 这系统的电容，(b) 每一电容器上的电荷和电势差，(c)这系统的能量．

2.15　(a) 确定图 2-29 所示电容器组合的电容．如果所加电压为 120V，求每个电容器上的(b)电荷和(c)电势差．

2.16　在图 2-30 所示电容器组合中，$C_1=3\mu\mathrm{F}$，$C_2=2\mu\mathrm{F}$，$C_3=4\mu\mathrm{F}$．施

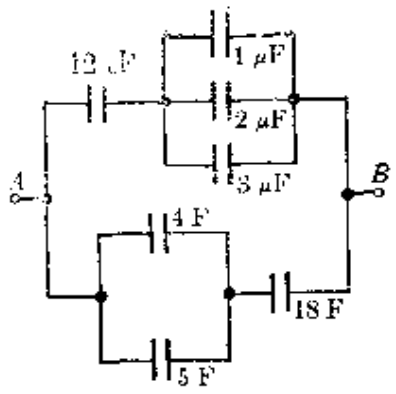


图 2-29

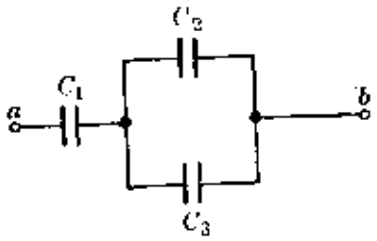


图 2-30

加在 a 点和 b 点之间的电压为 300V．求每一电容器上的电荷和电势差．

2.17 对于图 2-31 所示的电容器组合，证明 C_1 和 C_2 之间的关系必须是 $C_2=0.618C_1$，这系统的电容才会等于 C_2．

2.18 (a) 证明一孤立带电导体的电能等于 $\frac{1}{2}CV^2$．(b) 证明这个结果适用于平行板电容器，而且一般地讲，适用于任何电容器．

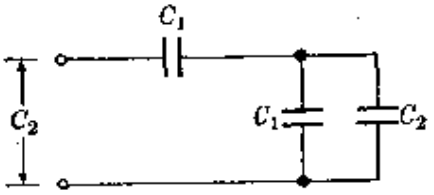


图 2-31

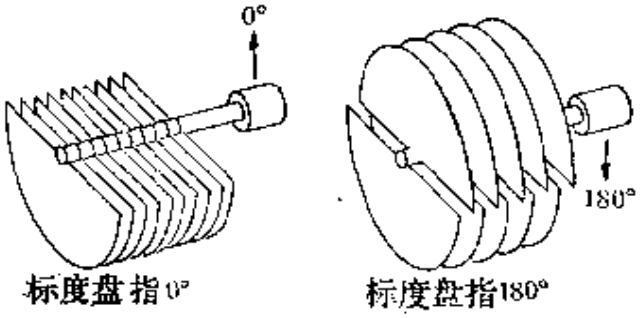


图 2-32

2.19 把一可变电容器的刻度盘从 0° 转到 180°，能够使它的电容从 50pF 变到 950pF，如图 2-32 所示．当刻度盘转到 180° 时，把这电容器接到—400V 的电池组．充电后，使这电容器与电池组断开，并把刻度盘转到 0°．(a) 求这电容器上的电荷．(b) 当刻度盘指 0° 时，求电容器上的电势差．(c) 求在此位置上电容器的能量．(d) 确定转动刻度盘所需的功，摩擦忽略不计．

2.20 一个 20μF 的电容器被充电到电势差为 1000V．然后把已充电的电容器的两个端子接到一个未充电的 5μF 电容器的端子上．试计算，(a) 这系统原来的电荷，(b) 每一电容器的最后电势差，(c) 这系统的最后能量，(d) 当这两个电容器连接起来时，能量减少了多少？

2.21 一个半径为1 m的金属球具有10^{-6}C的净电荷. 用一根导线把这个球和一个半径为0.3m的、原来不带电的球(此球与大球相距甚远)连接起来,因而两个球具有相同的电势. (a) 连接之后,每个球上的平衡电荷是多少?(b)连接之前,带电的球的能量是多少?(c)连接之后,这系统的能量是多少?(d)如果有什么能量损失,试说明这能量到哪里去了.

较难的习题

2.22 一电荷Q均匀分布在一半径为R的半圆弧上,如图2-33所示. 求中心C处电场的大小和方向.

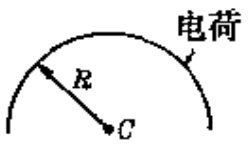


图 2-33

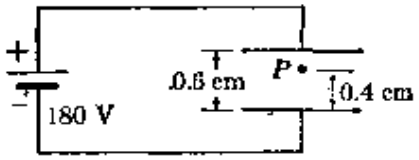


图 2-34

2.23 一电势差为180V的电池组跨接在一电容器上,如图2-34所示. 此电容器极板之间的抽空区域的电场是均匀的. 两极板间的距离为0.6cm,点P至下极板的距离为0.4cm. (a)求点P处电场的大小和方向. (b)求点P与下极板之间的电势差. (c)一个电子在下极板上被释放(其初速为零),求这电子通过点P时的瞬时速率.

2.24 一带正电荷的平的无限大薄片具有均匀的面电荷密度σ,如图2-35所示. (a)利用高斯定律,确定在此薄片上方距离为d的点,这电荷薄片所产生的电场. 假定这薄片在点P处有一小孔,一个电子(其电荷为$-e$,质量为m)在此小孔上方距离为d处被释放(其初速为零). 这电子将通过这个小孔,并作周期运动. (忽略小孔的存在所引起的电场畸变,以及被加速电荷的辐射). (b)根据已知的量,确定电子通过小孔时的速率. (c)根据已知的量,确定这运动的周期.

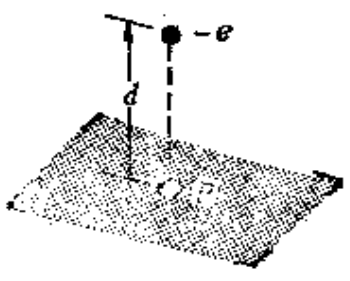


图 2-35

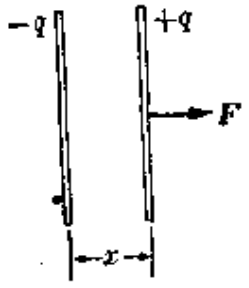


图 2-36

2.25　如图 2-36 所示，用一力 F 将一孤立平行板电容器的极板非常缓慢地拉开．每个极板的面积为 A，电荷为 q．假定边缘效应可忽略不计；亦即假定间距 x 比极板的尺寸小得多．(a) 当 x 增加 dx 时，求出电容的变化．(b) 当 x 增加 dx 时，求出电容器内储存的能量的变化．(c) 确定力 F 与储存的能量之间的关系．求出 F 作为 x、q 和 A 的函数．

2.26　两个半径为 a 和 b 的同心导电球壳具有等值反号的电荷，如图 2-37 所示．(a) 确定在至球心的距离为 r 处的电场．分别求出 $r<a$，$a<r<b$ 和 $r>b$ 时的表达式．(b) 确定在 $r=b$ 和 $r=a$ 处的电势，取无限远处的电势等于零．

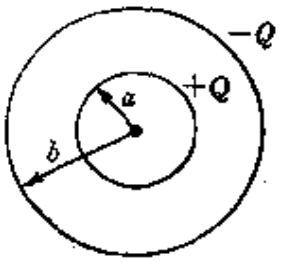


图　2-37

2.27　一间距为 b，面积为 A 的平行板电容器被接至一电压为 V 的电池组，如图 2-38a 所示．开始时，两极板间的空间是空的．(a) 确定两极板之间的电场．(b) 确定每一极板上储存的电荷．然后将一厚度为 a 的铜板插入两极板的正中间，如图 2-38b 所示．(c) 确定这铜板上、下方空间内的电场．(d) 确定两个电容之比：$C_{有铜}/C_{原来}$．

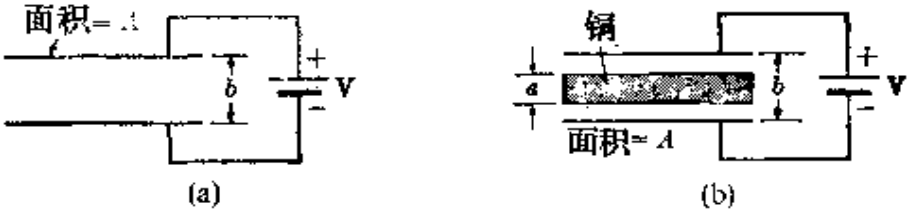


图　2-38

2.28　一个半径为 R 的实心金属球具有电荷 $+2Q$．此球与一半径为 $3R$ 的空球壳同心，此球壳具有净电荷 $-Q$．(图 2-39a)．(a) 在图 2-39b 所示的简图上概略画出球内、外的电力线．(b) 利用高斯定律，求出在两球之间，

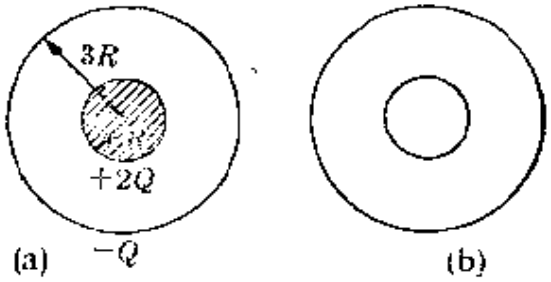


图　2-39

在至球心距离为 r 处($R<r<3R$),电场的大小的表达式. (c)计算两球之间的电势差. (d)如果用一根导线把两个球连接起来,试确定电荷的最后分布情况.

2.29 一个电容器由两个半径分别为 a 和 b 的同心球壳组成,这两个球壳带有等值反号的电荷,如图 2-40 所示. 恰在内球壳表面之外的一点,电场沿径向朝外,其大小为 ε_0. (a)利用高斯定律,把内球壳上的电荷 $+Q$ 表示为 ε_0 和 a 的函数. (b)把两球壳之间一点的电场强度 E 表示为 ε_0、a 和 r 的函数. (c)求出两球壳之间的电势差 V 作为 ε_0, a 和 b 的函数. (d)求出这电容器内储存的能量 U 作为 ε_0, a 和 b 的函数. (e)如果 ε_0 和 b 固定,试问 a 取何值,才能使 U 的值最大?

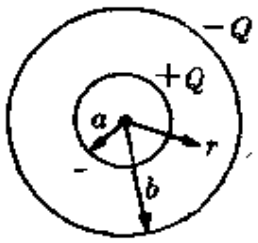


图 2-40

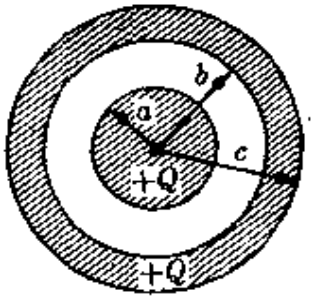


图 2-41

2.30 一个半径为 a 的实心导体球,被一个内半径为 b,,外半径为 a 的空导体球壳包围,如图 2-41 所示. 这个球和球壳各带电荷 $+Q$. 把你的答案表示为 Q、a、b、c 和库仑定律常数的函数. (a)利用高斯定律,导出在 $a<r<b$ 处(r 是至球心的距离)电场大小的表达式. (b)写出在 $r>c$, $b<r<c$ 和 $r<a$ 处电场大小的表达式.

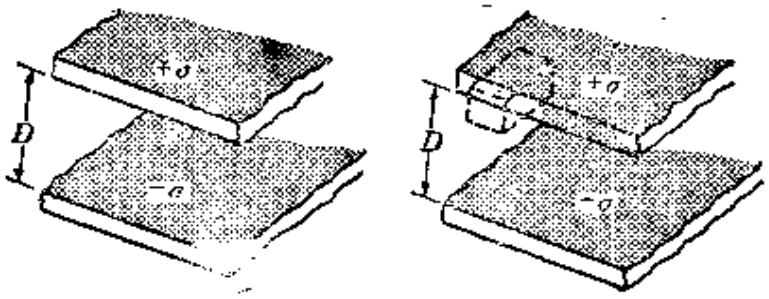
2.31 一根细塑料棒带有均匀的正电荷,其线电荷密度为 λ. 将此棒弯成一半径为 R 的半圆,如图 2-42a 所示. (a)确定 O 点(即半圆的中心)的电势 V_0. (b)标明 O 点电场的方向. 说明你的推理. (c)计算 O 点电场的大小 ε_0. (d)设 P 点位于 O 点正下方, O 与 P 之间有一小距离 s, 如图 2-42b 所示. 试求,为了把一个正点电荷 q 从无限远处移至 P 点,所需功的近似表达



图 2-42

式作为 q、V_0 和 ε_0 的函数.

2.32 一平行板电容器由两块间距为 D 的导电平板构成，如图 2-43a 所示. 两个极板可以看成非常大，因而边缘效应可忽略不计. 两个极板具有等值反号的面电荷密度 σ. 每个极板上的电荷全部在相向的内表面上. (a)在一张图上画出两极板之间的区域中的电力线. (b)画一个长方盒，使它的上表面完全在上面的导电板内部，如图 2-43b 所示；把高斯定律应用于这个长方盒，以确定两极板之间的区域中电场 E 的大小. (c)用一种电介质充满两板之间的区域. 试问：这时的电场是大于、小于还是等于无电介质时的电场？描述引起这种效应的机制. 注意，两个极板不与电池组连接.



(a) (b)

图 2-43

2.33 可以假定一氢原子中的电子"铺展"在整个空间，其密度为 $\rho = Ce^{-2r/a_0}$，式中 $a_0 = 0.53\times10^{-10}$m. (a)求常数 C，以使总电荷等于 $-e$. (b)求一半径为 a_0(a_0 对应于电子的轨道半径)的球内部的总电荷. (c)求出电场作为 r 的函数. (d)在多大距离处，电场与 $-e/4\pi\varepsilon_0 r^2$ 相差 1%？(提示：对于(a)部分，把空间分割成许多球壳，每个球壳的体积为 $4\pi r^2 dr$.)

2.34 一个半径为 R_1 的球体，其中央有一个半径为 R_2 的空腔. 电荷均匀分布在这球的体积内. (a)试求这球的外部、内部和中央空腔中的电场和电势. (b)画出电场和电势随至球心的距离变化的曲线.

2.35 一个电荷 q 放在至一无限大平面导体(它的电势保持为零)的距离为 a 处. 能够证明，在这无限大平面前方的总电场，与用一负电荷 $-q$ 放在距离 $-a$ 处代替该平面所得结果完全相同(图 2-44). 这第二个电荷叫做第一个电荷的象. (a)证明电场垂直于该平面. (b)证明该平面上的电荷密度为 qa/r^3，式中 r 为在该平面上离开点 O 的径向距离. (c)证明该平面上的总电荷等于 $-q$.

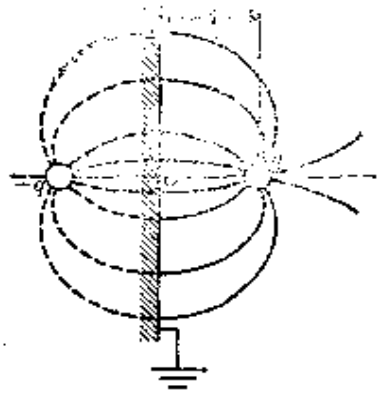


图 2-44

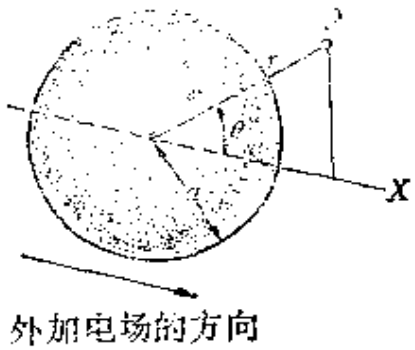


图 2-45

2.36 一个半径为 a 的导体球放在一匀强电场 $\mathscr{E}_0$ 中，如图 2-45 所示。由于这个球必然具有恒定的电势，我们就规定它的电势为零。电场作用在这个球的自由电荷上，这些自由电荷移动到球的表面上，直至球内的电场等于零。这个球变成极化的，并使周围的电场畸变，但在大距离处电场基本上是均匀的。能够证明，要满本题的条件，拉普拉斯方程的电势解为：

$$V=-\mathscr{E}_0 r\cos\theta\left(1-\frac{a^3}{r^3}\right).$$

(a)证明这个球的电势为零。(b)证明，在很大距离处的电势对应于一匀强电场的电势。(c)注意，电势 V 是一个匀强电场的电势与一个电偶极子的电势之和。(d)求出电场的径向和横向分量。(e)证明这导体表面的电场垂直于其表面。(f)画出总电场的电力线。(g)求面电荷密度。讨论它在球面上的变化情况。(h)证明这个球上的总电荷等于零。(i)证明在球心处，面电荷产生的电场为 $-\mathscr{E}_0$。对于球内任一点有同样的情况。你能预料到这个结果吗？

2.37 利用习题 2.17 的结果，证明图 2-45 所示系统的电容等于 0.618 C_1。(提示：注意，如果这系统沿虚线被切开，则右边的部分仍然等于原来的系统，因为它是由无限多个电容器组成的。)

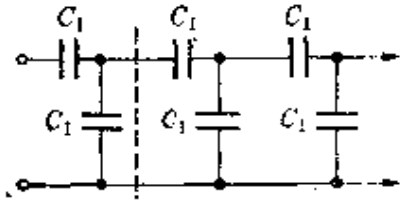


图 2-46

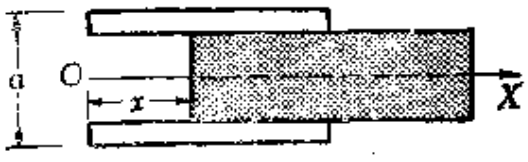


图 2-47

2.38 将一电介质平板部分地插进一平行板电容器的两个极板之间，如图 2-47 所示。作为 x 的函数，试计算(a)这系统的电容，(b)这系统的能量，

(c)作用在电介质平板上的力. 假定加在这电容器上的电压是恒定的. (提示:这系统可以看作两个并联的电容器.)

2.39 在真空中一平行板电容器极板上的电荷为$+Q$和$-Q$,极板的间距为x. 使两极板与充电电压断开,并拉开一小距离dx. (a)试求这电容器电容的变化dC. (b)求出这电容器的能量的变化dE_e. (c)令所作的功Fdx等于能量的增加dE_e,从而求出两极板之间的吸引力F. (d)说明为什么F不等于$Q\mathscr{E}$. 式中$\mathscr{E}$是两极板之间的电场强度.

2.40 对于电压保持恒定的情况,重作习题2.39.

2.41 一静电计,如图2-48所示,是用来测定电势差的. 它由一天平构成,此天平的左盘是一面积为S的圆盘;此圆盘至一水平面的距离为a,二者一起构成一电容器. 当一电势差施加在圆盘和水平面之间时,圆盘就受到一向下的力. 我们把一质量m放在天平的另一盘中,以使天平恢复平衡. 试证明,$V=a\sqrt{2mg/\varepsilon_0 S}$. [注意:在实际仪器中,圆盘为一圆环所环绕;该环保持在同样的电势,以保证在整个圆盘上电场是均匀的.]

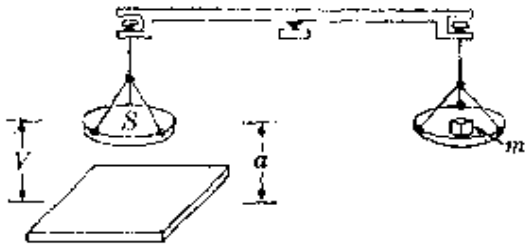


图 2-48

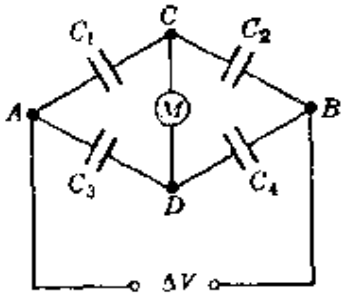


图 2-49

2.42 四个电容器如图2-49所示那样布置. 在端子A和B之间施加一电势差ΔV,在C和D之间接入一电压表,用来确定它们的电势差. 试证明,如果$C_1/C_2=C_3/C_4$,则电压表的读数为零. 利用这种桥式装置,可根据一个标准电容器和两个电容的比值,用测定一待测电容器的电容.

第三章 电 路

3.1 引 论

从电现象的许多实际应用的观点来看，最重要的电现象是电荷通过物质的运动和由此产生的电流。在第 1.9 节中，我们把电流强度定义为每单位时间通过该材料的一个截面的电荷的量. 电流的 SI 单位为安培. 在本章中，我们研究固态金属物质和电流大小恒定的情况. 在本章末我们将扼要讨论电流通过其他物质的情况. 一组导体和维持电荷通过导体运动所需的电场源，构成一电路. 本章将讨论电路的三个重要概念：导体的电阻，施加于一电路上的电动势，欧姆定律.

3.2 电导率；欧姆定律

在第二章中讨论了在外加电场作用下，物质行为的某些方面. 我们曾用材料的电极化率来表示这种行为. 与外电场有关系的另一个重要性质是电导率. 现在将电导率与金属中的电传导联系起来讨论.

当一电场施加于一电介质时，电介质就发生极化. 但是，如果电场施加于有自由电荷存在的区域，电荷就开始运动而产生电流（而不是产生介质的极化）. 电荷被电场加速，因而获得能量.

当一物体中的自由电荷象金属中的电子那样时，它们的运动由于它们与形成金属晶体点阵的正离子相互作用而受到阻碍. 例如，考虑一种金属，它的正离子呈规则的三维排列，如图 3-1 所示. 自由电子是在一周期性电场中运动，其周期与点阵的周期相同. 自

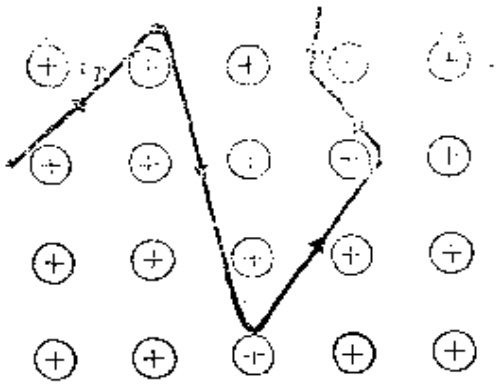


图 3-1　电子通过金属的晶体点阵的运动，v_T 是电子的热速度.

由电子在其运动过程中非常频繁地被电场散射. 对于这种电子运动的正确描述，必须利用量子力学的方法. 在这里，简单的经典描述就够了. 当无外电场存在时，电子在一切方向上运动，因而不发生净电荷输运(即电流). 然而，如果施加一外电场，则有一漂移运动叠加在电子的固有的无规运动上；因而产生电流. 我们假定电流强度必定与电场强度有关系，而且这个关系必定是这种金属的内部结构的直接结果；这种假定看来是很自然的.

我们首先从实验结果来找出这个关系的线索. 大概学生最熟悉的物理学定律之一，就是欧姆定律. 这个定律说，温度恒定的金属导体上两点之间的电势差 ΔV，与通过该导体的电流 I 的比值，是一常量. 这个常量叫做该导体上那两点之间的电阻 R. 因此，欧姆定律可以表示为

$$\frac{\Delta V}{I}=R \qquad \text{或} \qquad I=\frac{\Delta V}{R}. \tag{3.1}$$

这条定律是德国科学家欧姆(G. Ohm，1787—1854) 提出的. 许多导体在很宽的 ΔV、I 和温度的范围内，以惊人的准确度遵从这条定律. 然而，有不少物质，特别是半导体，不遵从欧姆定律. 由欧姆定律得出的 ΔV 和 I 之间的关系为一条直线，如图 3-2 所示.

由方程(3.1)可以看出，在 SI 中 R 的单位是伏/安，或 $m^2\cdot kg\cdot s^{-1}\cdot C^{-2}$. 这个单位叫做欧姆(符号为 Ω). 因此，$I$ 欧姆是这样一

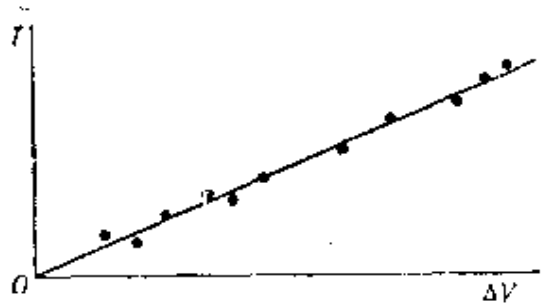


图 3-2 欧姆定律的图示



图 3-3

个导体的电阻，当 1 伏特的电势差施加在该导体两端时，通过它的电流为 1 安培.

我们考虑一段长为 l 横截面为 S 的圆柱形导体（图 3-3）. 电流可以表示为 $I=jS$，式中 j 为电流密度. 沿这导体的电场为 $\mathscr{E}=\Delta V/l$（回顾方程 1.18.）因此，方程(3.1)可以写作 $\mathscr{E}l=RjS$，或

$$j=\left(\frac{l}{RS}\right)\mathscr{E}=\sigma\mathscr{E}, \tag{3.2}$$

上式中 $\sigma=l/RS$ 为一新常数，叫做这种材料的电导率，其单位为 $\Omega^{-1}\cdot m^{-1}$ 或 $m^{-3}\cdot kg^{-1}\cdot s\cdot C^2$. 往往把 σ 与 R 之间的关系写作下列形式：

$$R=\frac{l}{\sigma S}. \tag{3.3}$$

表 3-1 中列出几种材料的电导率. 电导率的倒数叫做电阻率 ρ，即

$$\rho=\frac{1}{\sigma}.$$

电阻率的单位为 $\Omega\cdot m$.

方程(3.2)表示矢量 $\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{\mathscr{E}}$ 的大小之间的关系. 如果 $\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{\mathscr{E}}$ 的方向相同（在大多数物质中均如此），则方程(3.2)可代之以下列矢量方程：

$$\boldsymbol{j}=\sigma\boldsymbol{\mathscr{E}}, \tag{3.4}$$

上式仅是欧姆定律的另一种写法.

表 3-1 室温下的电导率

物质	$\sigma,\Omega^{-1}\cdot m^{-1}$	物质	$\sigma,\Omega^{-1}\cdot m^{-1}$
金属		半导体	
铜	5.81×10^{7}	碳	2.8×10^{4}
银	6.14×10^{7}	锗	2.2×10^{-3}
铝	3.54×10^{7}	硅	1.6×10^{-5}
铁	1.53×10^{7}	绝缘体	
钨	1.82×10^{7}	玻璃	10^{-10}至10^{-14}
合金		留西特	$<10^{-13}$
锰铜	2.27×10^{6}	云母	10^{-11}至10^{-15}
康铜	2.04×10^{6}	石英	1.33×10^{-18}
镍铬合金	1.0×10^{6}	特氟隆	$<10^{-19}$
		石腊	3.37×10^{-17}

3.3 电阻的起源

如果我们利用方程 (3.4)，并回顾例题 2.1 中电流密度的定义：$\boldsymbol{j}=-en\boldsymbol{v}_e$，式中 n 为每单位体积的电子数，$\boldsymbol{v}_e$ 为外加电场 $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ 所引起的电子的漂移速度，则漂移速度可以写作

$$\boldsymbol{v}_e=-\frac{\sigma}{en}\boldsymbol{\mathcal{E}}. \tag{3.5}$$

这个方程表明，由于外加电场的作用，金属中的传导电子达到一恒定的漂移速度. 这个结论完全不同于我们在讨论一个离子沿一抽空的加速器管运动时所达到的结论(第 1.7 节)，在后一种情况下，离子的加速度为 $\boldsymbol{a}=-(e/m)\boldsymbol{\mathcal{E}}$，由此得出速度 $\boldsymbol{v}=-(e/m)\boldsymbol{\mathcal{E}}t$；这个速度随时间而不断地增大.

然而，我们并非第一次遇到这类情况. 例如，真空中自由落体的速度 $v=gt$，就是随时间不断增大的；但如果这物体是在一种粘滞流体中下落，它的运动就变成匀速的，具有一恒定的极限速度

(见第一卷，第 7.9 节的讨论). 照此类比，我们可以说，晶体点阵的效应可以用一种"粘滞"力来表示；当传导电子的固有运动受外加电场扰动时，这种粘滞力作用在传导电子上. 这种粘滞力的精确性质取决于电子通过晶体点阵运动的动力学；这个概念将在例题 3.1 中详细论述；在这里只给出一般的定性分析.

在一完美的晶体点阵中，所有的正离子都静止在固定的、规则分布的位置上. 利用量子力学的方法能够证明，传导电子在外加电场作用下自由地通过这种点阵. 然而，任何金属都不是由完美的晶体点阵组成的. 在某些情况下，欠完美性是由于杂质取代了某些金属离子(图 3-4). 在另一些情况下，可能缺少某些离子(图

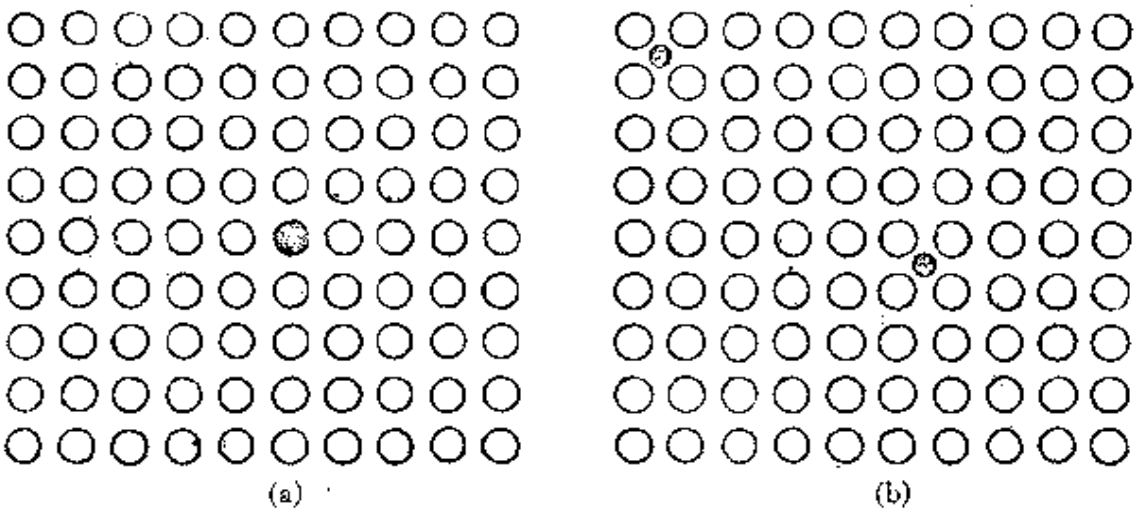


图 3-4 杂质引起的晶体欠完美性. (a) 替代式杂质，(b) 填隙式杂质.

3-5). 此外，离子由于具有热能而永远在振动. 由于离子不是同相地振动，所以离子之间的距离发生起伏. 这种起伏等效于晶体点阵的欠完美性. 这些情况的结果是电子的运动受到阻碍；电子经受许多次散射，有时甚至向后运动. 因此，电子把一些能量转移给晶体点阵，而非不断地从电场中获得能量. 经一短时间之后，就达到稳态，这时电子的平均速度变为恒定的，其值等于方程(3.5)

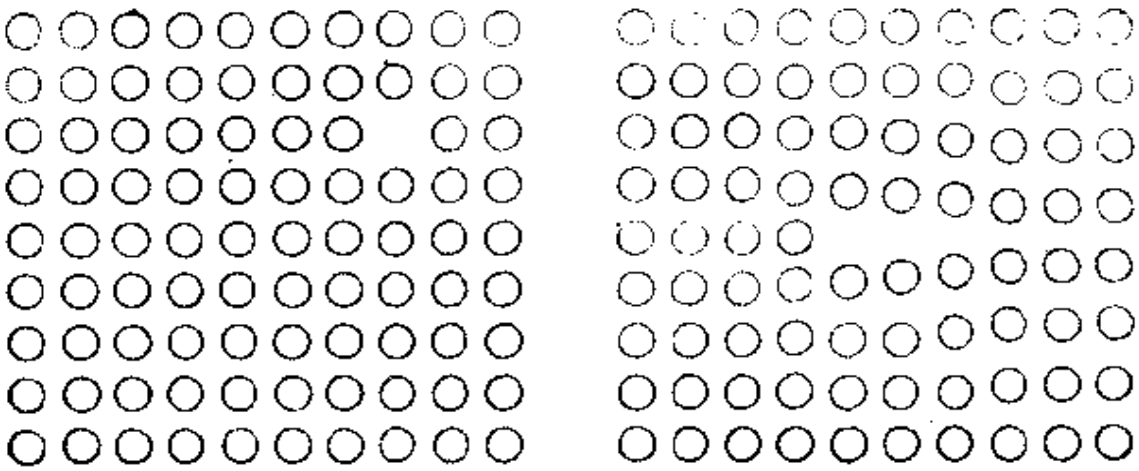


图 3-5　由于缺少原子而产生的晶体点阵的欠完美性.
(a)空位, (b)刃型位错.

给出的漂移速度.

看来可以合理地假定，杂质或点阵不规则性所引起的晶体欠完美性，对电阻率的影响与温度无关. 同样，也可以合理地假定，离子的热振动必然使电阻率随温度而增加，因为离子振动的振幅也随温度而增大. 这些假定已由实验证实；大多数物质的电阻率都随温度的升高而增加.

例题 3.1　金属中传导电子的运动.

解　晶体点阵与传导电子之间的相互作用的效应，可以唯象地用一"粘滞"力来表示. 如果这种力的形式与在流体中的运动情况下所考虑的形式相同(见第一卷, 第 7.9 节), 即为 $-kv$, 则在金属中一个电子的运动方程为

$$m_e\frac{dv}{dt}=-e\mathscr{E}-kv. \tag{3.6}$$

在上式中, 令 $dv/dt=0$, 就得到极限漂移速度 $v_d=-e\mathscr{E}/k$. 将此结果与方程(3.5)加以比较, 则得电导率 $\sigma=ne^2/k$.

如果我们引入一个叫做弛豫时间的量, 还可以把上述结果用另一种方式表达出来. 我们假定, 达到极限漂移速度之后, 突然把电场 $\mathscr{E}$ 切断. 于是电子的运动方程变为

$$m_e\frac{dv}{dt}=-kv,$$

这方程的解为 $v=v_0e^{-(k/m_e)t}$. 学生可以通过直接代入或者直接积分来验证这个结果. 由这个解可知，漂移速度，从而电流，下降到 e 分之一所需的时间为 $\tau=m_e/k$. 这就是电子运动的弛豫时间. 它和一个物体通过粘滞流体运动时的弛豫时间类似(见第一卷，例题 7.9). 因此，对于电导率我们得到下列关系式：

$$\sigma=\frac{ne^2\tau}{m_e}. \tag{3.7}$$

由于 n，e 和 m_e 都是已知的量，所以，如果 σ 已知，就能算出 τ 来；反之，如果 τ 已知，就能算出 σ 来. 如果每个原子对电流贡献一个价电子，则在大多数金属中，n 的值约为 10^{28} 个电子·m^{-3}. 利用 e 和 m_e 的值，并取 σ 约等于 10^7 $\Omega^{-1}\cdot m^{-1}$，算得弛豫时间约为 10^{-14}s.

现在必须指出，我们做过的唯一的一件事，就是设想一个唯象模型，用这个模型来求出欧姆定律所要求的结果. 但是，这导致我们引入一个新的量 τ. 为了"说明"欧姆定律和金属中的电传导，我们必须把 τ 和电子运动的动力学联系起来. 然而，如前所述，由于这种运动遵从量子力学的定律，所以方程(3.7)的进一步讨论必须推迟.

然而，关于这个模型的正确性，可以通过检验有关量的数量级来加以估计. 看来可以合理地假定，弛豫时间与一个电子相继两次同晶体点阵离子碰撞之间的时间，有相同的数量级. 如果 l 为离子的平均间距，v 是电子的平均速度，则碰撞时间可以用比值 l/v 来估计. 对于大多数固体，l 约为 5×10^{-9}m. 为了求 v，我们假定可以利用对气体分子所得到的那种关系，即 $v=\sqrt{3kT/m_e}$. 例如，在室温下，v 约等于 10^5m·s^{-1}. 于是 τ 约等于 5×10^{-14}s. 这个结果与前面利用方程(3.7)和 σ 的实验值所得的估计值符合.

3.4 焦耳效应

在一导体中维持一电流，需要耗费能量. 在一台加速器或一个电子管中加速一个离子，也必须耗费能量，但这里有一个差异. 在一台加速器中，供给的全部能量都用于加速离子. 而在一个导体中，由于电子和晶体点阵离子之间的相互作用，供给电子的能量被转移给点阵，从而增加点阵的振动能. 由此产生的材料温度的升

高，是熟知的电流的热效应，又称为焦耳效应.

能量转移给晶体点阵的速率，不难估算出来. 每单位时间对电子所作的功为 $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}_e=-e\boldsymbol{\mathscr{E}}\cdot\boldsymbol{v}_e$，因而每单位时间每单位体积所作的功（即每单位体积的功率）为 $P_{体积}=n(-e\boldsymbol{\mathscr{E}}\cdot\boldsymbol{v}_e)$. 利用方程(3.2)和(3.5)来消去 $\boldsymbol{v}_e$，则得

$$P_{单位体积}=\sigma\mathscr{E}^2=j\mathscr{E}. \tag{3.8}$$

我们再次考虑图 3-3 中的圆柱形导体，它的体积为 Sl. 维持这导体中的电流所需的功率为

$$P=(Sl)P_{单位体积}=(Sl)(j\mathscr{E})=(jS)(\mathscr{E}l).$$

然而，$jS=I$，$\mathscr{E}l=\Delta V$. 因此，维持这导体中的电流所需的功率为

$$P=I\Delta V. \tag{3.9}$$

这个方程与按更一般的方式得出的方程(1.32)等同，与传导过程的性质无关. 对于遵从欧姆定律的导体，$\Delta V=RI$，因而方程(3.9)可以写作另一种形式：

$$P=RI^2. \tag{3.10}$$

然而，许多材料并不遵从欧姆定律；因此，对于它们，方程(3.10)是不适用的，然而方程(3.9)仍然成立. 图 3-6 中示出具有电阻的导体（也叫作电阻器）的图示法.



图 3-6 电阻器的符号表示

例题 3.2 电阻器的组合.

解 类似于在例题 2.12 中讨论过的电容器组合，电阻器也能按两种方式组合：串联和并联. 在串联组合中(图 3-7a)，电阻器是这样连接起来的，使得每个电阻器中有相同的电流 I. 根据欧姆定律，各电阻器上的电势降为 $\Delta V_1=R_1I$，$\Delta V_2=R_2I$，…，$\Delta V_n=R_nI$. 因此，总电势差为

$$\Delta V=\Delta V_1+\Delta V_2+\cdots+\Delta V_n=(R_1+R_2+\cdots+R_n)I.$$

这个系统实际上能够化为一个满足关系式 $\Delta V=RI$ 的电阻器 R. 因此，

$$R=R_1+R_2+\cdots+R_n \tag{3.11}$$

给出串联电阻器的总电阻.

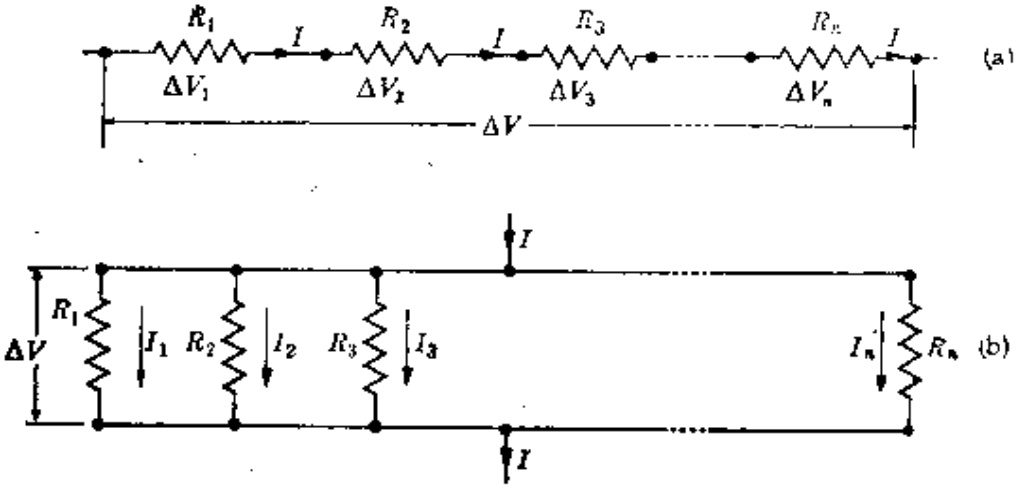


图 3-7　电阻器的(a)串联和(b)并联.

在并联组合中(图 3-7b)，电阻器是这样组合起来的，使得每个电阻器上的电势降 ΔV 都一样. 根据欧姆定律，通过各电阻器的电流分别为 $I_1=\Delta V/R_1$, $I_2=\Delta V/R_2$, …, $I_n=\Delta V/R_n$. 供给这系统的总电流为

$$I=I_1+I_2+\cdots+I_n=\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\cdots+\frac{1}{R_n}\right)\Delta V.$$

这个系统实际上能够化为一个满足关系式 $I=\Delta V/R$ 的电阻器 R. 因此，

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\cdots+\frac{1}{R_n} \tag{3.12}$$

给出电阻器的并联组合的总电阻.

3.5　导体、绝缘体和半导体

并非一切物质都是电的导体. 而且，导电的物质并非都遵从欧姆定律. 只有少数几种物质，主要是金属，是电的良导体，并遵从欧姆定律. 这是由于组成金属的原子，其电子结构包括一些满充壳层加上一个、两个或者三个价电子. 这些价电子处于最外边的满充壳层之外的能级上. 固态金属中的价电子容易被激发而与原子脱离，从而形成一种充满点阵离子之间的空间的自由电子气. 即使把一弱的电场施加在金属上，也会使这些电子运动而产生电流.

然而，在许多物质中，价电子被"冻结"在正的点阵离子之间的固定位置上. 这是因为这些价电子决定这固体中离子之间的键，

犹如电子使分子中的原子结合起来一样. 由于在这些物质中缺少自由电子，所以很难在这些物质中产生电流. 这些物质称为电介质，而在完全没有自由载流子的极端情况下，则称之为绝缘体. 如在第二章中所述，在外电场作用下，电介质变成极化的，而不产生电流. 但是，当外电场很强时，有些价电子可能受拉而离开它们原来的位置，从而产生电流；这往往导致电介质的永久性损坏. 这种过程叫做电介质击穿.

另一类材料叫做半导体. 在半导体中，比较容易激发某些束缚电子. 这是因为半导体中的激发能约为绝缘体中激发能的$\frac{1}{5}$到$\frac{1}{10}$. (使用最广的半导体是硅、锗和碲.)温度升高时，由于邻近离子之间的相互作用，某些电子会从它们的键中被释放出来.[3] 在这种情况下，当施加一电场时，就会产生电流. 半导体不遵从欧姆定律. 由于温度升高时有更多的电子变为资用的，所以半导体的电阻率随温度的升高而减小. 例如，在硅中，温度从 250K 增加到 450K，会使受激发电子的数目增加 10^6 倍，这导致电导率增加，从而电阻减少.

值得注意的是，当半导体中的一个电子从它所占有的键上移开时，这个电子将留下一个“空穴”，它的行为象一个正的电子(图3-8). 这时，来自邻近键的一个价电子能够跳入这个空穴中，而这个跳来的电子又在它原先占有的那个键中留下一个空穴. 由于这个过程能够重复许多次(尤其是当有电场存在时)，所以这个过程相当于正空穴通过这种物质而运动. 因此，半导体中的电流

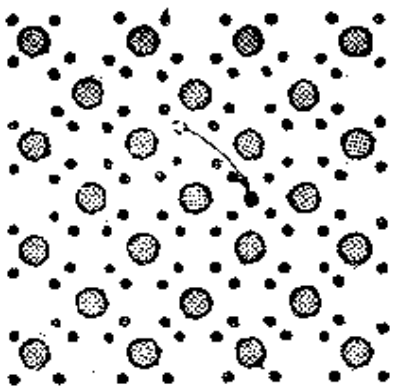


图 3-8 在半导体中，电子(●)运动留下一空穴(○).

是由自由电子和空穴两者引起的. 这种现象称为内禀传导性.

提高半导体的电导率的另一种方法，是掺入某些杂质. 这时出现两种不同的情况；根据杂质对半导体的效应的不同而分别称之为施主杂质和受主杂质. 在施主杂质的原子中，价电子的数目多于基质点阵原子的；这些额外电子只要很少一点能量就能被释放而变成传导电子. 例如，如果用磷或砷原子(它们具有 5 个价电子)取代硅或锗晶体中的几个 Si 或 Ge 原子(它们具有 4 个价电子)，则在与这种晶体结构相联系的价键中无法容纳的额外电子，就很容易被释放而通过晶体运动(图 3-9). 相反地，在受主杂质的原子中，价电子的数目少于基质原子的. 在这种情况下，产生缺少一个电子 (即具有一个电子空穴)的键. 如果把少量硼或铝原子(它们具有 3 个价电子)掺入硅或锗中，就得到这种情况. 在外电场作用下，邻近键的一个电子能移来填充这个空穴，从而又留下一个空穴. 因此，我们可以说，这个空穴就象一个正电子那样通过点阵运动(图 3-10).

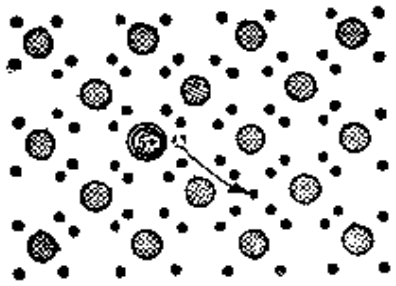


图 3-9 固有施主杂质的半导体.

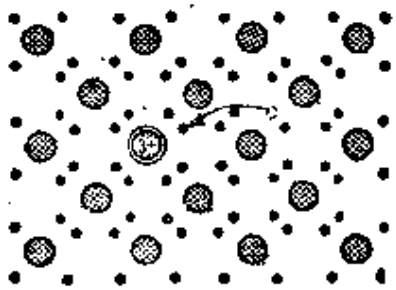


图 3-10 具有受主杂质的半导体.

具有施主杂质的半导体称为 n 型的，而具有受主杂质的半导体称为 p 型的. 在工业上广泛应用半导体制作整流器、调制器、检波器、光电管、晶体管等等. 实际上，今天的电子工业几乎全部采用半导体元件制造它的装置.

例题 3.3 关于 p-n 结的讨论.

解 半导体在现代电路中的一个重要应用是 p-n 结. 假定我们有同一种半导体(例如锗)的两个样品,一个是 p 型的,另一个是 n 型的(图 3-11a). 如果使这两个样品接触,则空穴从左朝右扩散(即流动),而电子从右朝左扩散. 由于这两种流动,在结的两侧产生一正、负电荷双层,从而在结上建立起一电势差(如图 3-11b 右方所示). 当达到平衡时,这电势差就阻止空穴和电子继续穿过结流动. 下面主要讨论空穴;电子的情况正好相反.

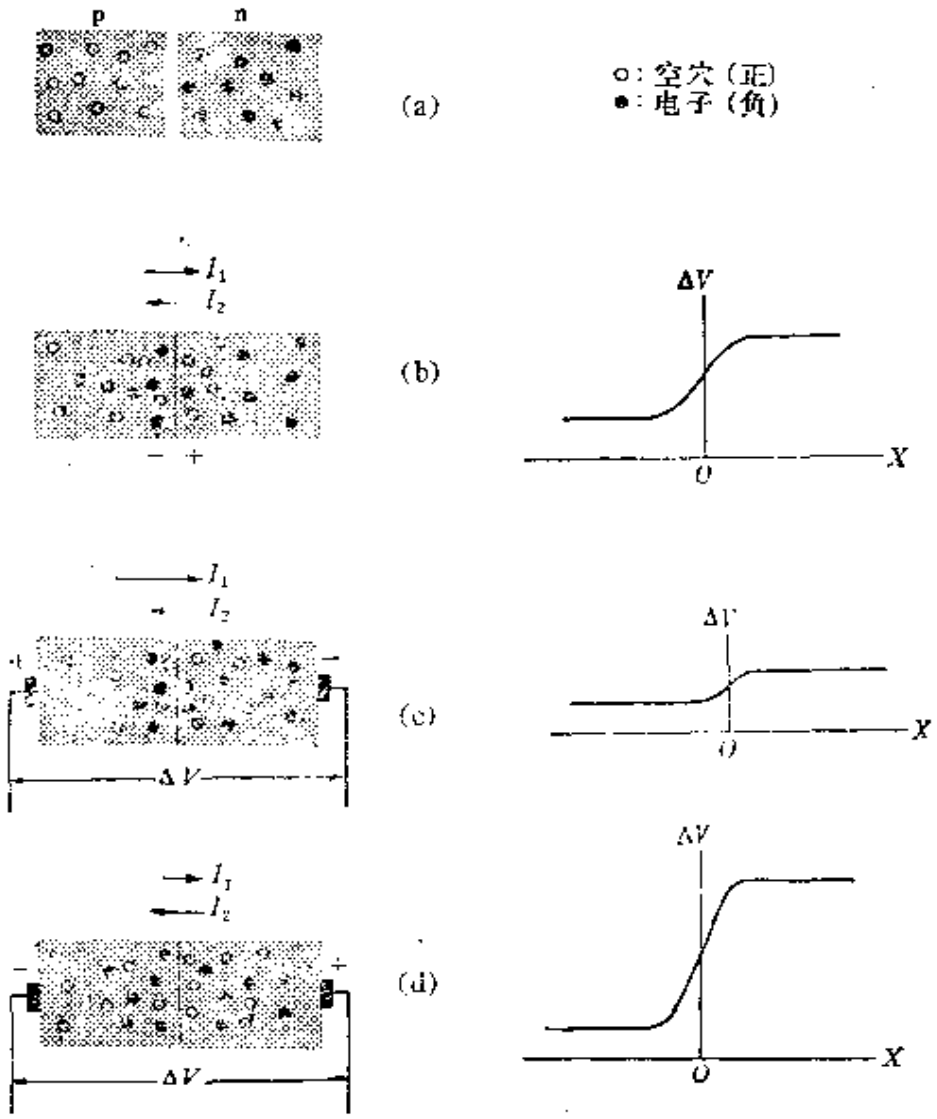


图 3-11 p-n 结.

由于空穴与电子复合,n 型半导体中的空穴趋于减少. 因此,有一个小的、连续的空穴电流 I_1 从 p 侧流向 n 侧. 与此同时,由于热激发,在 n 型半导体中产生空穴-电子对. 这些额外的空穴能够很容易地通过结进入 p 侧,而产生空穴电流 I_2. 平衡时,这两种空穴电流相等;即 $I_1=I_2$(对于电子可进

行类似的推理)，如果在这 p n 结上施加一电势差 ΔV，如图 3-11c 所示，p 侧与电势差为 ΔV 的电源的正端相连，n 侧与其负端相连，则结上的电势差的高度减小．这种电势差的减少，允许较大的电流 I_1 流向右边，而不会实际改变热激发产生的向左边流动的电流 I_2．因此，产生一通过结向右流动的净空穴电流 I_1-I_2．由于从 p 侧供给大量空穴，这个电流随 ΔV 非常迅速地增大．另一方面，如果电势差 ΔV 反向，如图 3-11(d)所示，则结上的电势差增加．这种电势差的增加，使 I_1 的值减小，而对 I_2 则基本上没有什么影响(因为从 n 侧供给的空穴受温度限制)．因此，存在一穿过结向左流动的净电流．当 ΔV 增加时，这个净电流接近恒定值 I_2．

图 3-12 中示出通过结的净电流 $I=I_1-I_2$ 随 ΔV 变化的曲线．当施加的电势差 ΔV 如图 3-11(c)所示时，就视之为正；反之，则视之为负．净电流可以相当准确地用下式表示：

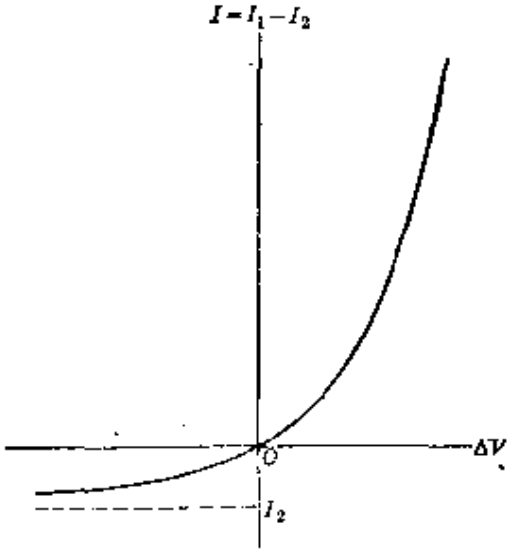


图 3-12　电流作为 p-n 结上电压的函数．当电压 ΔV 沿 p→n 的方向时，视之为正；沿相反的方向，则视之为负．

$$I=I_1-I_2=I_2(e^{\Delta V/kT}-1).$$

由此可见，一个 p-n 结起着一个整流器或检波器的作用，它有利于电流沿 p→n 的方向通过．这种功能与二极电子管和三极电子管的功能相同，不过 p-n 结完成这种功能所消耗的能量要少得多．

3.6　电　动　势

假定一个粒子在一力 F 作用下沿一路径 L 从 A 运动到 B．此

力所作的功为$W=\int_L F\cdot dl$，式中下标L表示这积分是沿路径L，而dl是路径的一个线元．当这力为保守力时（亦即当这力与势能的关系为$F=-\text{grad}\ E_p$时），这功与路径无关，从而得出$\int F\cdot dl = E_{p,A}-E_{p,B}$．这个事实的一个重要推论是，当这路径闭合时，保守力的功等于零；这是由于点B与点A重合，因而$E_{p,A}=E_{p,B}$．

这些结果可以推广到任意矢量场，例如电场或磁场．我们用V表示这矢量场．矢量场V从点A至点B沿一路径L的线积分定义为：

$$V\text{的线积分}=\int_L V\cdot dl. \tag{3.13}$$

在一般情况下，线积分与路径有关．如果计算线积分所沿的路径是闭合的，则这线积分称为这矢量场的环流，并在积分号上画一个圆圈来表示它：

$$V\text{的环流}=\oint V\cdot dl. \tag{3.14}$$

一个重要情况是场V能够表示为一个函数的梯度的情况．这个情况与保守力的情况相同；因此

> 当一矢量场能够表示为一个函数的梯度时，这个场在两个点之间的积分，与连结这两个点的路径无关，因而绕任意闭合路径的环流等于零．

学生将会看到，在表述电磁学的定律时，矢量场的线积分和环流的概念是非常重要的．现在把这两个新的定义应用于电场．

由于电场等于作用在单位电荷上的力，所以电场的线积分$\int_L \mathcal{E}\cdot dl$等于沿路径$L$移动单位电荷时所作的功．如果这路径是闭合的(图3-13)，则这线积分变成电场的环流，并且叫做施于这个闭

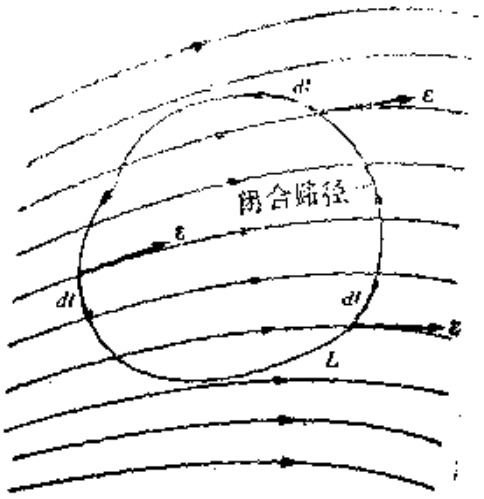


图 3-13

合路径上的电动势(emf). 用 V 代表 emf，则有

$$\text{emf}=V=\oint_L \boldsymbol{\mathscr{E}}\cdot d\boldsymbol{l}. \tag{3.15}$$

因此，施于一个闭合路径上的电动势，等于绕这路径移动单位电荷时，电场所作的功. 显然，emf 的单位是伏特.

考虑静电场这种特殊情况时，已知静电场与电势的关系是 $\boldsymbol{\mathscr{E}}=-\text{grad}V$；于是电场的线积分为

$$\int_L \boldsymbol{\mathscr{E}}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_A^B -\text{grad}V\cdot d\boldsymbol{l}=\int_B^A dV=V_A-V_B. \tag{3.16}$$

上式中 A 和 B 为路径 L 所连结的那两个点. 由此可见，一静电场在两点之间的线积分，等于这两点之间的电势差. 如果这路径是闭合的，则点 A 和 B 重合，于是方程(3.16)给出

$$V=\oint \boldsymbol{\mathscr{E}}\cdot d\boldsymbol{l}=0. \tag{3.17}$$

这个结果可用文字表达如下：

静电场绕任意闭合路径的 emf(即环流)等于零.

这个陈述表示，绕一闭合路径移动一电荷时，静电场所作的功等于零，按定义，静电场是一保守场.

如果这电场施加在一个导体上，则方程(3.16) 可以和欧姆定律结合起来；于是方程(3.1)变为

$$\Delta V=\int_L \mathscr{E}\cdot d\boldsymbol{l}=RI, \tag{3.18}$$

上式中L是沿导体的路径，R是路径L所连结的导体上两点之间的电阻.

如前所述，在导体中两点之间维持一个电流，就表示必须用一个电势差源对这系统供应能量. 现在的问题是，在一闭合导体或电路中，是否能够维持一个电流. 欧姆定律实质上描述的是导体中的能量守恒；当我们把它应用于一闭合导体时，则有

$$V=\oint_L \mathscr{E}\cdot d\boldsymbol{l}=RI. \tag{3.19}$$

这方程的左边是施加于这电路上的 emf，R是这闭合电路的总电阻.

如果把这导体放在静电场中（静电场是与时间无关的保守场），则按方程(3.17)，emf 等于零($V=0$)，于是方程(3.19)给出$I=0$. 换句话说，

静电场不能在一闭合电路中维持一电流.

原因在于，既然静电场是一保守力场，则当一个电荷描一闭合路径时，供给它的总净能量为零. 然而，在一导体内运动的电荷把它从电场得到的能量转移给晶体点阵，而这个过程是不可逆的；也就是说，点阵不会把能量再还给电子. 因此，除非对电子供应一净能量，电子不可能绕一闭合电路稳恒地运动.

因此，要在一闭合电路中维持一个电流，必须在某些地方A，A'，A''…对电路供给能量(图 3-14). 能量供应器叫做发电机，可以看作电动势的源. 因此，方程(3.19) 中的电场$\mathscr{E}$不是静电场，点A，A'，A''，…处的场是发电机所产生的局部场.

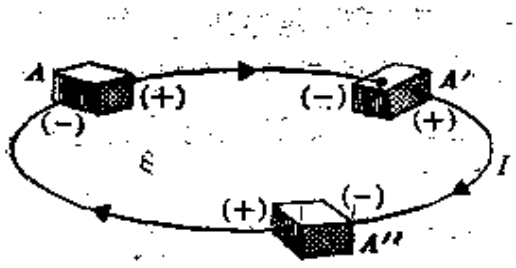


图 3-14　在一闭合电路中用发电机维持电流.

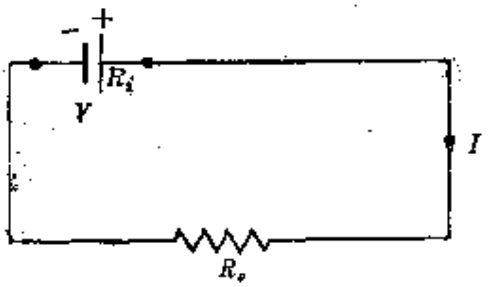


图 3-15　具有电动势的电路的符号表示法.

产生电动势的方法有许多种. 常见的一种方法是利用化学反应,例如在一干电池或蓄电池中,把化学反应中释放的内能转移给电子. 另一种重要方法是利用电磁感应现象,这将在以后讨论.

图 3-15 中示出电动势源的图示. 在此图中,在电动势源外部的电路中产生的电流的方向,是从正极(即长杠)至负极(即短杠).

当把欧姆定律应用于例如图 3-15 所示的简单电路时,必须认识到,总电阻 R 等于电动势源的内电阻 R_i 和接至发电机(或电池组)的导体的外电阻 R_e 之和,即 $R=R_i+R_e$. 于是欧姆定律变为

$$V=(R_e+R_i)I, \tag{3.20}$$

上式中 V 是施加于电路的电动势. 这个方程也可写成 $V-R_iI=R_eI$,这个方程的每一边都给出发电机(或电池组)两极之间的电势差. 注意,电池组的两个端子之间的电势差小于电动势.

例题 3.4　一个电网络中电流的计算:基尔霍夫定律.

解　一个电网络是导体和电动势的一种组合,例如图 3-16 所示就是一

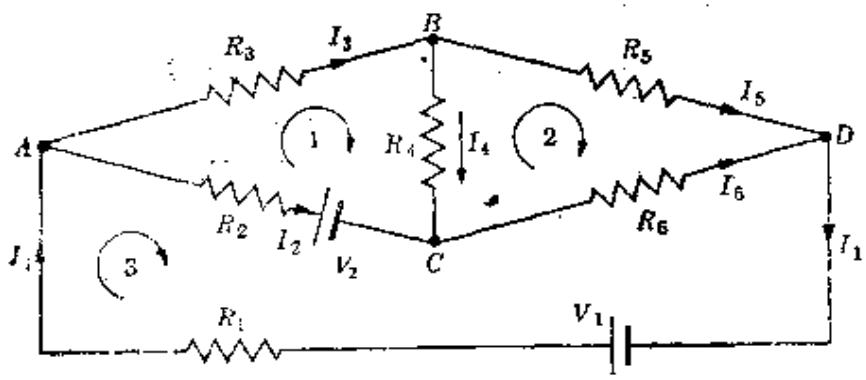


图 3-16　一个电网络.

个网络. 我们现在只考虑电动势是恒定的，而且在网络中达到稳恒状况，因而电流也是恒定的情况. 通常这种问题在于根据电动势和电阻来求出电流. 解这种问题的法则，叫做基尔霍夫定律，这些定律仅仅表达了电荷守恒和能量守恒. 基尔霍夫定律可表述如下：

(1) 在一个网络的一个结处，所有电流之和等于零.

(2) 在一个网络中，沿任一闭合路径，所有电势降之和等于零.

在写出第一条定律时，我们把离开结点的那些电流看作正的，而把流向结点的那些电流看作负的. 第一条定律表示电荷守恒，由于电荷不在结点处积累，所以在某一时间间隔内到达一个结点的电荷，必定在同一时间间隔内离开这个结点，因而电荷不会在结点处集结.

在应用第二条定律时，必须注意到下述法则. (1) 一个电阻上的电势降被看作是正的或负的，依描绘这闭合路径的方向与电流方向相同或相反而定. (2)当我们通过一个电动势时，电势降被认为是负的或正的，依我们通过的方向与电动势的作用方向（即电势增加的方向）相同或相反(即电势降低)而定. 第二条定律表示能量守恒，因为当一个电荷完成一闭合路径之后，该电荷的能量的净变化必定等于零. 在方程(3.20)中这个要求已被满足. 对于单个电路，方程(3.20)可写作 $RI-V=0$，式中 $R=R_i+R_e$.

为了说明基尔霍夫定律的实际运用，我们把它们应用于图 3-16 中的网络. 把第一条定律应用于结点 A、B 和 C，得出

$$\text{在结点 } A\text{：}\quad -I_1+I_2+I_3=0;$$
$$\text{在结点 } B\text{：}\quad -I_3+I_4+I_5=0;$$
$$\text{在结点 } C\text{：}\quad -I_2-I_4+I_6=0.$$

把第二条定律应用于路径 1、2 和 3，得出

$$\text{路径 1：}\quad -R_2I_2+R_3I_3+R_4I_4-V_2=0;$$
$$\text{路径 2：}\quad R_5I_5-R_6I_6-R_4I_4=0;$$
$$\text{路径 3：}\quad R_1I_1+R_2I_2+R_6I_6-V_1+V_2=0.$$

这六个方程足够确定这个网络中的六个电流.

求一具有 n 个结点的网络中的电流时，应遵从的一条规则，是把第一条定律只应用于$(n-1)$个结点，因为只要这条定律对于$(n-1)$个结点满足，它对于剩下的那个结点就自动地满足了. (学生应当对于图 3-16 中的网络验

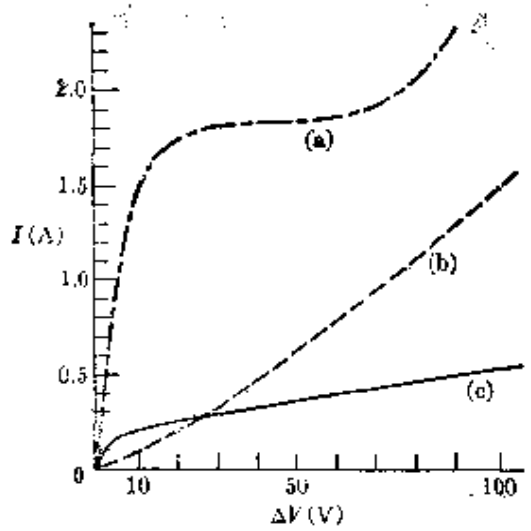
证这个论断.)第二条定律必须应用于这样多的闭合路径,以使每个导体都能至少有一次成为一个闭合路径的一部分.

3.7 非欧姆导体

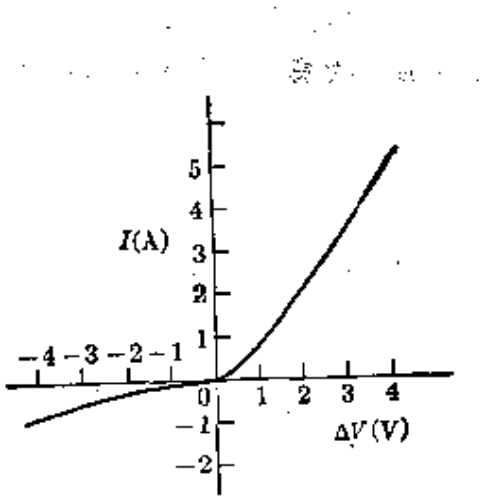
遵从欧姆定律 $\Delta V = RI$ 或 $j = \sigma \mathscr{E}$ 的导电材料,由于电压与电流成正比,而被称为欧姆导体或线性导体. 大多数固态导体(主要是金属)和许多种液体以非常好的近似遵从欧姆定律. 另一方面,气体导电则显著偏离欧姆定律,这主要因为气体中的导电不是由于自由电子的存在,而是由于电离原子或分子的产生. 使高频电磁辐射(例如 X 射线或 γ 射线)通过气体,或者使气体温度升高到几千度(K),就能产生这些离子. 如果在这种气体两端维持一个电势差,就会出现电流. 金属在非常低的温度下也偏离欧姆定律,因为当温度非常低时,传导电子的能量和点阵离子的能量非常之小. 点阵振动对电子运动的阻碍较小,因而电导率显著增大. 在某些物质中,在接近绝对零度时,电导率实际上变为无限大;这种物质叫做超导体.

有一些导电的固体,即使在室温下,也不遵从欧姆定律. 这些固体叫做非欧姆导体. 它们主要是陶瓷化合物、半导体、p-n 结、金属与其氧化物之间的边界层. 图 3-17 中示出白炽灯中使用的几种金属丝上的电压和电流之间的关系. 应注意,当电压在 30 至 60V 的范围内变化时,通过铁合金灯丝的电流几乎与电压无关;这个性质有多种重要的实际应用.

此外,有些导电系统是不对称的,因为电流不仅与所加电压的大小有关系,而且与所加电压的方向有关系. 不对称系统的一个例子是 p-n 结,它的 ΔV 与 I 之间的关系已在图 3-13 中示出. 另一个例子是一片金属铜上复盖一层氧化铜. 这系统的 ΔV 与 I 之间的关系如图 3-18 所示. 这些不对称的导电元件有许多应用,特



3-17 典型的灯丝特性曲线.
(a) 铁合金灯丝在氢气氛中;
(b) 碳灯丝; (c) 钨灯丝.



3-18 Cu-CuO 系统中的电压-电流关系.

别是在作为交流电的整流器方面.

习 题

3.1 估计每立方米的铜中约有 10^{23} 个自由电子. 试利用表 3-1 中所列铜的电导率, 估算铜中一个电子的弛豫时间.

3.2 当一根金属丝(a)长度加倍时, (b)截面加倍时, (c)半径加倍时, 其电阻如何变化?

3.3 试确定: (a)图 3-19 所示电路的总电阻, (b)每一电阻器中的电流, (c)每一电阻器上的电势差.

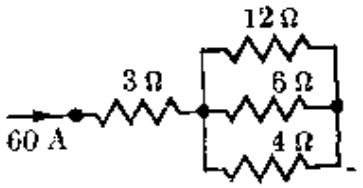


图 3-19

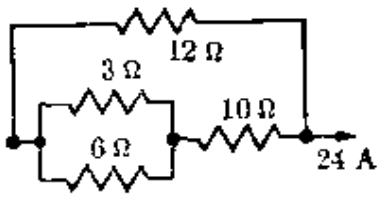


图3-20

3.4 试确定: (a)图 3-20 所示电路的总电阻, (b)每一电阻器中的电流, (c) 每一电阻器上的电势差.

3.5 试确定: (a) 图 3-21 所示电路的总电阻, (b)每一电阻器中的电流, (c) 每一电阻器上的电势差.

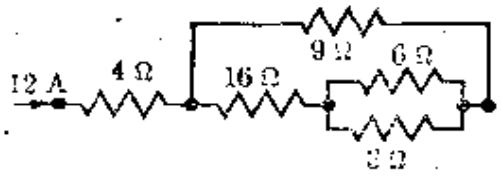


图 3-21

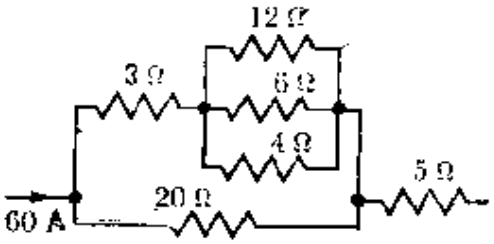


图 3-22

3.6 试确定：(a) 图 3-22 所示电路的总电阻，(b) 每一电阻器中的电流，(c) 每一电阻器上的电势差。

3.7 试确定：(a) 图 3-23 所示电路的总电阻，(b) 每一电阻器中的电流，(c) 每一电阻器上的电势差。

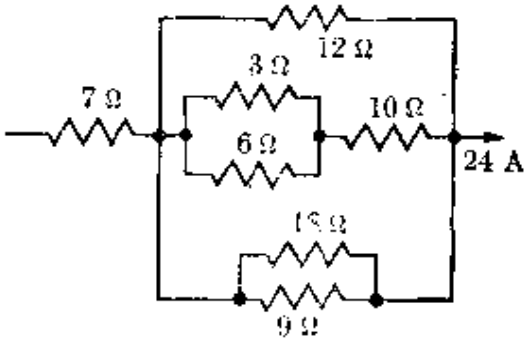


图 3-23

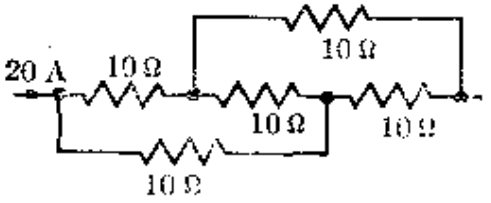


图 3-24

3.8 试确定：(a)图 3-24 所示电路的总电阻，(b)每一电阻器中的电流，(c)每一电阻器上的电势差。

3.9 (a) 计算图 3-25 所示电路的 x 和 y 之间的等效电阻，(b) 如果 8Ω 电阻器中的电流为 0.5A，试求 x 和 a 之间的电势差。

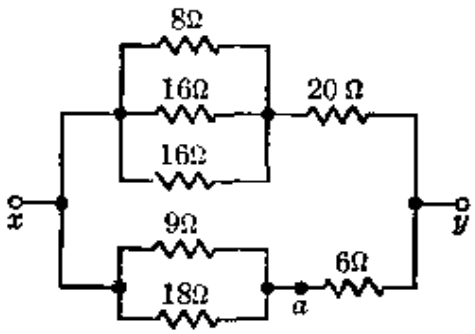


图 3-25

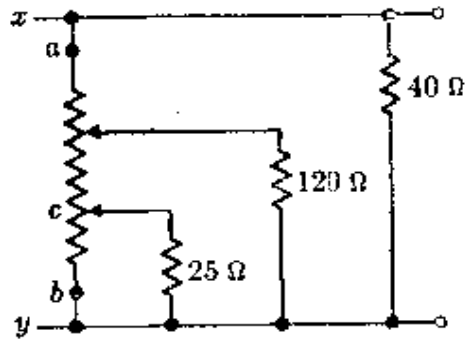


图 3-26

3.10 (a)图 3-26 中 a 和 b 之间的长电阻器的电阻为 300Ω，并在三分

之一的点有分接头. 试求 x 和 y 之间的等效电阻. (b) x 和 y 之间的电势差为 320V. 试求 b 和 c 之间的电势差.

3.11 图 3-27 所示三个电阻器的电阻均为 2 Ω, 每个电阻器能够耗散的最大功率为 18W. 试求这个电路能够耗散的最大功率.

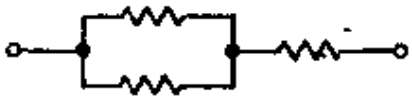


图 3-27

3.12 三个相同的电阻器串联. 当一定的电势差施加于这个组合上时, 消耗的总功率为 10W. 如果这三个电阻器并联, 并施加同样的电势差, 试求所消耗的功率.

3.13 设电阻器的组合如图 3-28 所示. 试证明, R_1 和 R_2 之间的关系必须是 $R_2=1.618R_1$, 这系统的电阻才会等于 R_2. (提示: 回顾习题 2.17.)

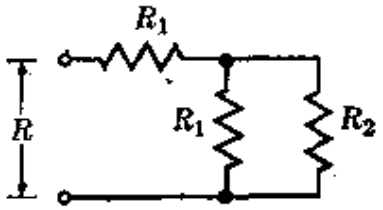


图 3-28

3.14 一台电学仪器的线圈中的最大容许电流为 2.5A. 它的电阻为 20Ω. 试问: 为了使这台仪器可以接入载有 15A 电流的电路中, 而不损坏该线圈, 必须对这台仪器做何处理? 安培计是一台加以改装的电流计, 它可以接入电路, 用来测量电流.

3.15 习题 3.14 中的仪器(电阻为 20Ω, 最大容许电流为 2.5A)应如何改装, 才能把它接入电势差为 110V 的两点之间, 而不致使其线圈损坏? 伏特计是一台改装的电流计, 它可以跨接在一电路的两点之间, 用来测量电势差.

3.16 表 3-2 中列出某种材料制成的一条金属丝中的电流及其两端之间的电势差的测量结果. (a) 画出 ΔV 对 I 的曲线. 试问: 这种材料遵从欧姆定律? (b) 根据你的曲线, 试估算当电流为 1.5A 时, 这种材料的电阻. 这个电阻被定义为比值 $\Delta V/\Delta I$, 其中 ΔV 和 ΔI 都很小. 可以在曲线上的给定点画一条切线而求出这个电阻. (c) 把你的结果与 1.0A 和 2.0A 之间的平均电阻加以比较.

3.17 图 3-29 中示出不同温度下一半导体的电势差对电流的曲线(对

表 3-2

I，安培	ΔV，伏特
0.5	4.75
1.0	5.81
2.0	7.05
4.0	8.56

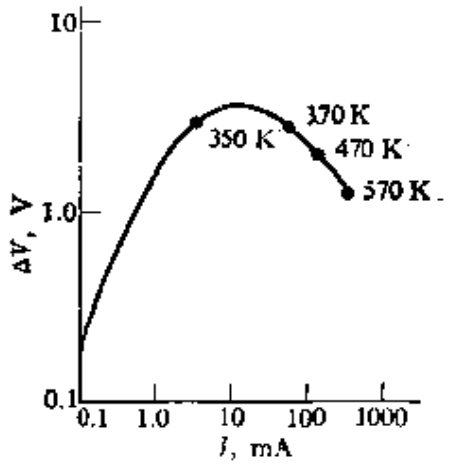


图 3-29

数标绘图). (a)估算这半导体在所标温度下的电阻. (b)画出电阻的对数对温度的曲线. (c)假定电阻的变化完全是由单位体积内载荷子数目的变化所引起的，试估算在 570K 和 370K，单位体积内载荷子数目之比.

3.18 图 3-30 中的电路叫做惠斯通电桥. 它被用于测量电阻. 试证明，当通过电流计 G 的电流为零时(因而点 D 和点 C 的电势相同)，有

$$\frac{R_1}{R_2}=\frac{R_3}{R_4}.$$

因此，如果我们知道 R_2 和比值 R_3/R_4，就能求出电阻 R_1.

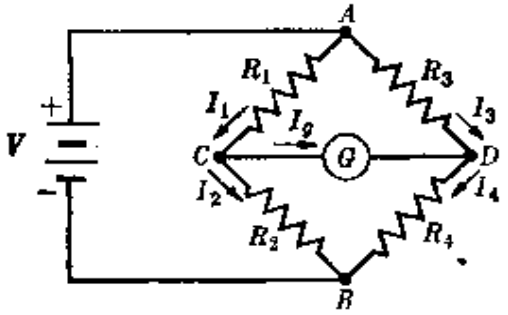


图 3-30

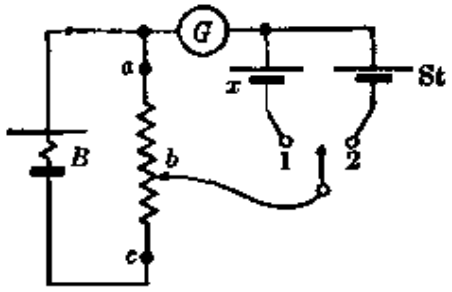


图 3-31

3.19 图 3-31 中的电位差计用于测量电池 x 的电动势 V_x. B 是一电池组，St 是一标准电池，其电动势为 V_{St}. 当开关处在 1 或 2 的位置时，移动接头 b 直至电流计的读数为零. 试证明，如果 l_1 和 l_2 是 b 到 a 的相应距离，则 $V_x=V_{St}(l_1/l_2)$.

3.20 参看图 3-31 中的电位差计. B 的电动势约为 3 V，它的内阻是未知的. St 是一电动势为 1.0183V 的标准电池. 开关处在 2 的位置上；这样，标准电池就处在电流计电路中. 移动接头 b，当 $ba=0.36ac$ 时，电流计的读

数为零. (a)求电阻器 ac 整个长度上的电势差. (b)把开关放在1的位置上,移动接头 b,当 $ba=0.47ac$ 时,电流计读数又为零. 求电池 x 的电动势.

3.21 当从一电池组的负端至正端的电流为 3 A 时,该电池组两端的电势差为 8.5V. 当从该电池组的正端至负端的电流为 2 A 时,电势差变为 11V. 试求:(a)这电池组的内电阻;(b)它的电动势.

3.22 在图 3-32 所示的电路中,确定(a)电池组中的电流,(b)电池组两端的电势差,(c)每个导体中的电流.

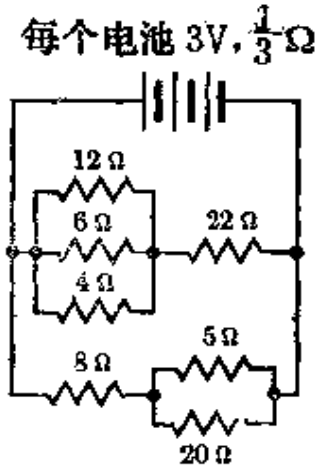


图 3-32

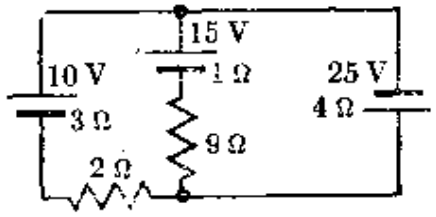


图 3-33

3.23 确定图 3-33 所示网络中每个导体中的电流.

3.24 确定图 3-34 所示网络中每个导体中的电流.

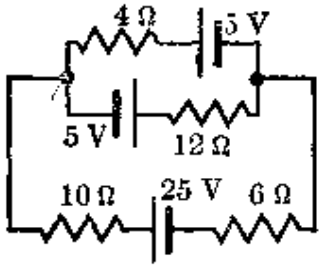


图 3-34

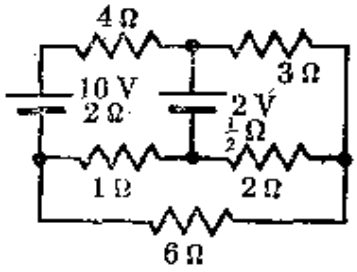


图 3-35

3.25 确定图 3-35 所示网络中每个导体中的电流.

3.26 (a) 求图 3-36 中 a、b 两点间的电势差. (b)设 a 和 b 连通,试求 12V 电池中的电流.

3.27 (a) 在图 3-37(a)中,当电键 S 启开时,试求电势差 ΔV_{ab};(b)当电键 S 闭合时,试求通过 S 的电流;(c)在图 3-37(b)中,当电键 S 启开时,求电势差 ΔV_{ab};(d)当电键 S 闭合时,求通过 S 的电流;(e)当电键 S 启开时,

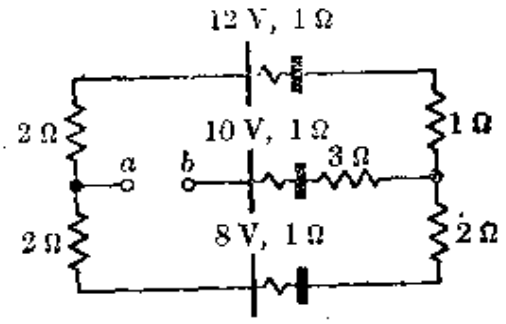


图 3-36

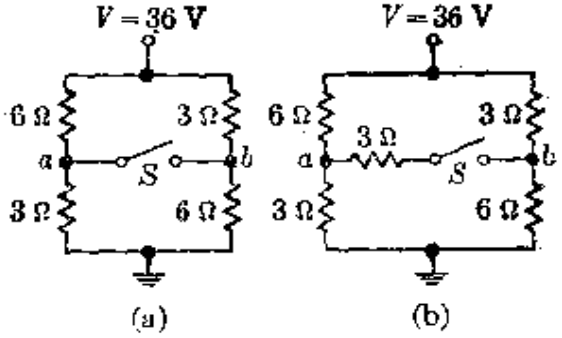


图 3-37

(f) 当电键 S 闭合时，求图 3-37(b) 所示电路的等效电阻.

较难的习题

3.28 在图 3-38 所示电路中，求电容器极板上的电荷.

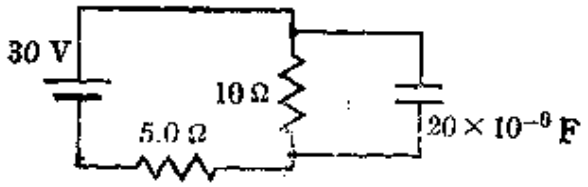


图 3-38

3.29 在图 3-39所示电路中，所有的电流和电压都达到稳态值. (a)计算 10Ω 电阻器中的电流. (b)计算电容器任一极板上的电荷. (c)计算 2.0Ω 电阻器中的功率耗散.

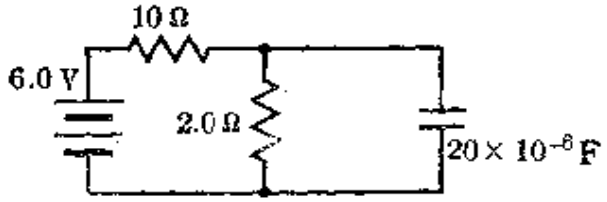


图 3-39

3.30 在图 3-40 所示电路中，内阻为 1 Ω 的 9V 电池组输出的电流为

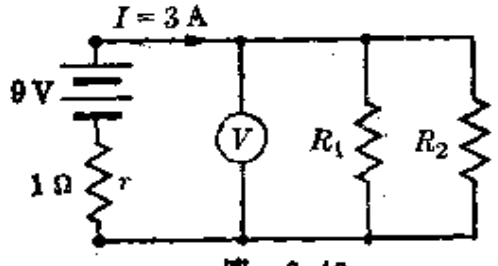
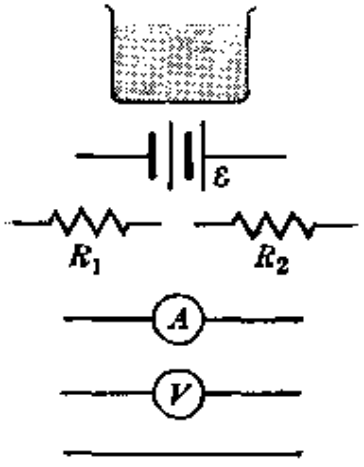


图 3-40

3A，在 R_2 中耗散的功率为 12W．(a)确定图中伏特计的读数，(b)确定 R_2 的电阻，(c)确定 R_1 的电阻．

3.31　假定你拥有图 3-41 所示的装置，(a)利用该图中的符号画出一个简图，表明应当怎样连接这些部件，才能尽可能快地把水加热．电表应如此连接，以便仅仅根据两个电表读数就能确定水被加热的速率．(b)设这电池组的电动势为 $V=50$V，通过这电池组的电流为 5 A．假定水的比热为 $4\text{J}\cdot\text{g}^{-1}\cdot{}^{\circ}\text{C}^{-1}$，汽化热为 $2200\text{J}\cdot\text{g}^{-1}$．试计算，为了使全部水都汽化掉，需要多少秒钟．



热容可忽略不计的绝缘热容器，内盛 100g 水

内阻可忽略不计的电动势为 V 的电池组

具有未知电阻的加热元件，可浸入水中

电阻可忽略的安培计

具有很大电阻的伏特计

电阻可忽略的金属丝

图　3-41

3.32　一圆柱状电阻器，其截面为 A．它的长度为 l_1 的部分，是用电阻率为 ρ 的材料制成的，另一部分的长度为 l_2，是用电阻率为 3ρ 的材料制成的．电流 I 均匀地分布在面积 A 上．试用基本常数和图 3-42 中的符号，表示出全部答案．(a)求这电阻器两部分中的电场强度 $\mathscr{E}_1$ 和 $\mathscr{E}_2$ 的表达式．(b)求这电阻器两端的电势差 V．(c)把高斯定律应用于包围两种材料界面的闭合面，求出这个界面上电荷的符号和大小．

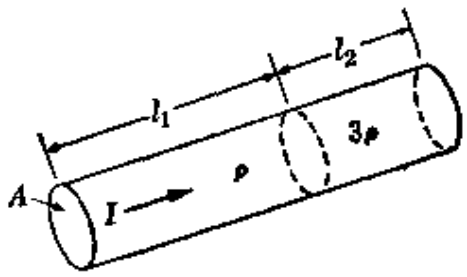


图　3-42

3.33　当一台电流计中的电流为 0.1mA 时，其指针发生满刻度(50 个

分度)偏转. 这电流计的电阻为 5 Ω. 必须怎么做, 才能把它改装成(a)一个每分度对应于 0.2A 的安培计? (b)一个每分度对应于 0.5V 的伏特计?

3.34 如图 3-43 所示, 用一伏特计和一安培计测量电阻时, 如果电表的电阻 R_V 和 R_A 被忽略, 就会造成误差. 试讨论这些误差. (a)当 R 大时, 哪一种方法误差较小? (b)当 R 小时, 哪一种方法误差较小? 注意, 在一般情况下, R_V 非常大, R_A 非常小.

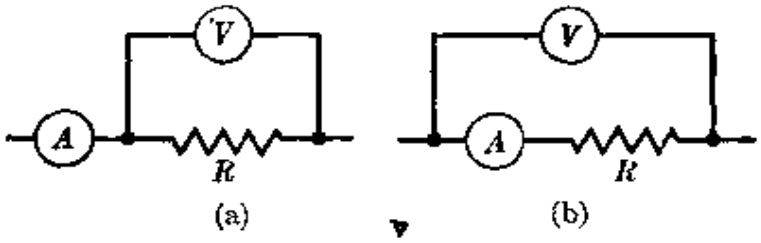


图 3-43

3.35 利用习题 3.13 的结果, 证明图 3-44 所示系统的电阻等于 1.618R_1. [提示: 注意, 如果这系统沿虚线切开, 则右边的部分仍等于原来的系统, 因为它是由无限多个电阻器组成的.]

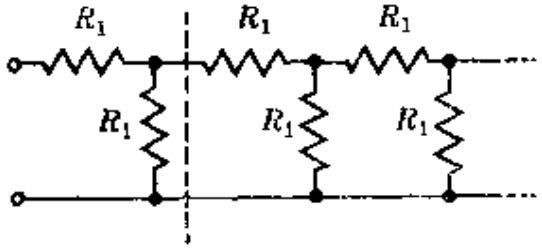


图 3-44

3.36 一个长为 L 的空圆筒形导体的内、外半径为 r_1 和 r_2. 在这导体两端施加一电势差, 因而在平行于轴的方向上有一电流 I. 试证明, 如果 σ 是导体材料的电导率, 则电阻为

$$R_{有效}=\frac{L}{\pi\sigma(r_2^2-r_1^2)}.$$

3.37 一长为 L 的空圆筒形导体的内、外半径为 r_1 和 r_2. 在这导体的内、外表面之间施加一电势差, 因而在沿径向朝外的方向上有一电流 I. 试证明, 如果 σ 是这种导体材料的电导率, 则电阻为

$$R_{有效}=\frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi\sigma L}.$$

第四章　磁相互作用

4.1 引　　论

在公元前许多世纪里，曾观察到某些铁矿石，例如天然磁石，具有吸引小铁块的性质．天然状态的铁、钴、锰，以及这些金属的许多化合物，也显示出这种性质．这种性质是和万有引力无关的，因为并非一切物体都显示出这种性质，而且这种性质看来是集中在矿石的某些部位．这种属性显然也与电相互作用无关，因为这些矿物毫不吸引软木球或者纸屑．因此，就给这种物理性质一个新的名称，即磁性①．物体上磁性集中的区域，叫做磁极．磁化的物体，叫做磁体．

地球本身就是一个巨大的磁体．例如，当我们把一根磁化棒悬挂在地球表面上任意一点（磁南、北极除外——译者注），并允许它绕竖直轴自由地转动，则这棒的取向总是以其同一端指向地理的北极．这个结果表明，地球施一力于磁化棒．

实验还表明，有两种磁极，可用＋号和－号或字母N和S表示，它们分别对应于指北极和指南极．如果两根磁化棒如图 4-1 所示放置，则这两根棒将相互吸引或者相互排斥，依同极相对或者异极相对而定．因此，由实验得出结论：

> 相同磁极之间的相互作用是排斥的，不同磁极之间的相互作用是吸引的．

① 磁性（英文为 magnetism）这个名称起源于小亚细亚的一座叫做Magnesia的古城；根据传说，这种现象最早是在这里发现的．

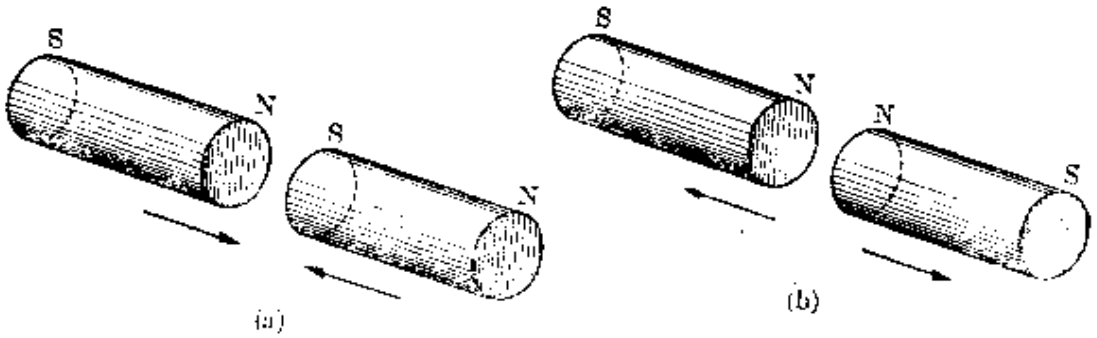


图 4-1　两根磁化棒之间的相互作用. (a) 异极相吸. (b) 同极相斥.

在物理学家清楚地查明磁性的本质之前，他们试图通过定义一个磁性质量或磁荷来测量磁极的强度，然后研究磁相互作用与磁极间距离的关系，就象最初研究万有引力时的情况. 然而，当人们试图进行这种测量时，出现了一个带根本性的困难：虽然能够分离出正、负电荷，并把它们同构成一切原子的基本粒子联系起来，但始终未能分离出磁极，或者发现只具有一种磁性(或者 N或者 S)的基本粒子. 磁化物体总是显示出相等而相反的、成对的磁极. 另一方面，发现磁极和磁性质量的概念，对于描述磁性是不必要的. 电相互作用和磁相互作用是紧密联系着的. 它们实际上仅仅是物质的一种特性——它的电荷——的两个不同的方面. 我们将会看到，磁性是运动着的电荷的一种表现. 因此，往往把电相互作用与磁相互作用一起放在电磁相互作用这个更一般的名称下讨论.

4.2　作用在运动电荷上的磁力

通过与引力场和电场的情况类比，可以把磁化物体之间的相互作用描述为磁化物体在其周围空间中产生一磁场. 当一静止电荷放在一磁场中时，观察不到特殊的力(即相互作用)作用在这电荷上. 然而，当一电荷在有磁场存在的区域中运动时，则除起因于引力相互作用和电相互作用的力之外，还观察到一个新的力作用在这电荷上.

当不同电荷在磁场中同一点按不同方式运动时，测量它们所受的力，就能够求出力、电荷及其速度之间的关系．结果是

磁场作用在一运动电荷上的力，与这电荷及其速度成正比，力的方向垂直于电荷的速度．

利用矢积的性质，这个分析还可再进一步，而把作用于在一磁场$\mathscr{B}$中以速度v运动的电荷q上的力F写作

$$F=qv\times\mathscr{B},\tag{4.1}$$

上式满足上述的实验结果．这里$\mathscr{B}$是一矢量，它的大小和方向，可以通过把在该点观察到的F的值同q和v的值加以比较，而求出来．实验发现，在一磁场中，矢量$\mathscr{B}$可能逐点改变，但对于任一给定点，对于所有的电荷和速度，$\mathscr{B}$都有相同的值．因此，$\mathscr{B}$描写磁场所特有的一种性质．与电场$\mathscr{E}$类比，我们称$\mathscr{B}$为磁场强度．（另一个惯用名称为磁感应强度．）

当一个粒子在既有电场又有磁场的区域内运动时，作用在这粒子上的总的力，等于电力$q\mathscr{E}$与磁力$qv\times\mathscr{B}$之和．即

$$F=q(\mathscr{E}+v\times\mathscr{B}).\tag{4.2}$$

这个力叫做洛伦兹力．根据矢积的性质，方程(4.1)所表示的力，不仅如前面所指出的，垂直于速度v，而且垂直于磁场$\mathscr{B}$．方程(4.1)也表示，当v平行于$\mathscr{B}$时，力F等于零．实际上观察到，在磁场中每一点，都有一个方向，沿这个方向运动时，电荷不受力作用．这个方向被定义为该点的磁场的方向．图4-2中示出，对于正、负电荷，三个矢量v、$\mathscr{B}$和F之间的关系．图中表明确定力的方向的方法(叫做右手定则)．

如果α是v和$\mathscr{B}$之间的角，则F的大小为

$$F=qv\mathscr{B}\sin\alpha.\tag{4.3}$$

当$\alpha=\pi/2$，亦即v垂直于$\mathscr{B}$时，力有最大值$F_{最大}$：

$$F_{最大}=qv\mathscr{B}.\tag{4.4}$$

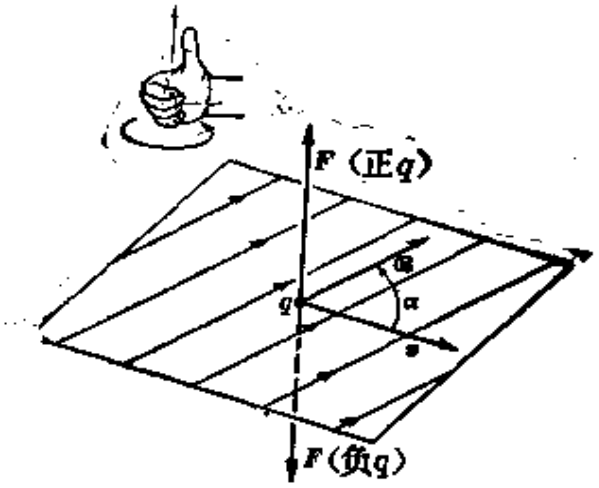


图 4-2　磁力、磁场和电荷速度之间的关系. 力F垂直于包含$\mathscr{B}$和v的平面.

如前面已指出的，当 $\alpha=0$，亦即 v 平行于$\mathscr{B}$时，力等于零.

根据方程(4.1)，磁场的单位可定义为$\mathrm{N/(C\cdot m\cdot s^{-1})}$或者 $\mathrm{kg\cdot s^{-1}\cdot C^{-1}}$. 这个单位叫做特斯拉(T)，这是为了纪念南斯拉夫出生的美国工程师尼古拉·特斯拉(1856—1943). 也就是说，$\mathrm{T=kg\cdot s^{-1}\cdot C^{-1}}$. 1 特斯拉对应于这样一个磁场，当 1 库仑电荷以 $1\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 的速度垂直于这磁场运动时，这磁场对这电荷产生 1N的力.

由于磁力 $F=qv\times\mathscr{B}$ 垂直于速度，所以与磁力相联系的功等于零；因此，磁力不会改变粒子的动能. 虽然磁力不是保守力(因为它不与一磁势能相联系)，但当一粒子在电场和磁场的联合作用下运动时，它的总能量保持恒定. (总能量等于粒子的动能加上它的各种相互作用的势能.)

例题 4.1　一速度为 $10^7\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 的宇宙线质子，沿与地球磁场垂直的方向进入地球磁场. 试估算作用于这质子上的力.

解　在赤道上，在地球表面附近的磁场强度约为$\mathscr{B}=1.3\times10^{-7}\mathrm{T}$. 质子的电荷为 $q=+e=1.6\times10^{-19}\mathrm{C}$. 因此，由方程(4.4)得出作用在质子上的力为

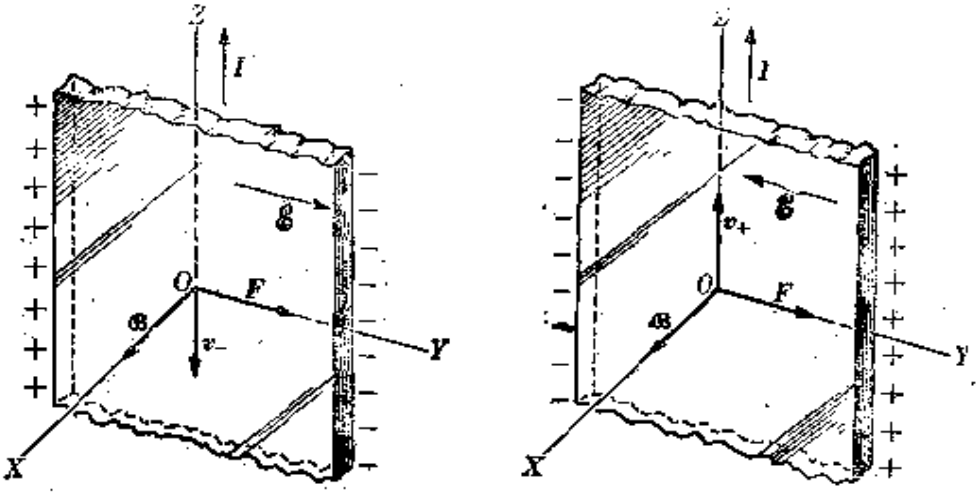
$$F=qv\mathscr{B}=2.08\times10^{-19}\mathrm{N}.$$

由于 $m=m_p=1.67\times10^{-27}\mathrm{kg}$，所以这个力所引起的加速度为$a=F/m_p=1.24\times10^{8}\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. 由此可见，这磁场所引起的质子加速度，约为重力加速度的 1

千万倍.

例题 4.2 霍耳效应. 1879年，美国物理学家霍耳(E. C. Hall, 1855—1929)发现，如果把一金属板放在一磁场中，且令板面垂直于磁场，则当一电流 I 沿这金属板通过时，在其边缘上相对的两点出现一电势差.

解 霍耳效应是方程(4.1)的一个典型的应用. 首先假定金属板中的载流子是电子，具有一负电荷 $q=-e$. 在图 4-3(a)中，取 Z 轴平行于电流 I；电子实际上是以速度 v_- 沿负 Z 的方向运动. 当磁场 $\mathscr{B}$ 垂直于板面即沿 X 轴时，电子受到的力为 $\boldsymbol{F}=(-e)\boldsymbol{v}_-\times\mathscr{B}$；矢积 $v_-\times\mathscr{B}$ 沿负 Y 轴的方向；但当



(a) 负载流子($q=-e$)　　(b) 正载流子($q=+e$)

图 4-3 霍耳效应

这矢积乘以 $-e$ 时，则矢量 $\boldsymbol{F}$ 沿正 Y 轴的方向. 因此，电子向金属板的右侧漂移，因而右侧带负电. 左侧则由于电子的正常数目不足，而带正电. 因此，产生一平行于 $+Y$ 轴的电场 $\mathscr{E}$. 当这个电场作用电子上的力 $(-e)\mathscr{E}$ (其方向朝左)，与磁场 $\mathscr{B}$ 所产生的力(其方向朝右)抵消时，就达到平衡，电荷就不再分离. 这横向电场导致在金属板的相对两边之间出现一横向电势差，左边的电势较高；这电势差的值与磁场成正比. 这种结果是正常的即"负的"霍耳效应. 大多数金属，例如金、银、铂、铜等，都呈现正常霍耳效应. 然而，某些金属，例如钴、锌、铁，以及另外一些材料，例如半导体，则呈现相反的即"正的"霍耳效应，如图 4-3(b)所示.

为了说明正霍耳效应，我们假定载流子是带正电荷的粒子，其电荷为 $q=+e$. 在这种情况下，载流子的运动方向必然与电流的方向相同，因而载流子

的速度 v_x 沿 $+Z$ 轴，如图 4-3(b) 所示。作用在运动电荷上的力为 $\boldsymbol{F}=(\quad e)\boldsymbol{v}_x\times\boldsymbol{B}$，其方向沿 $+Y$ 轴。然而，由于电荷是正的，所以金属板右边带正电荷，左边带负电荷，因而在 $-Y$ 方向上产生一横向电场。因此，这电势差与负载流子情况下产生的电势差相反，所以这结果是一正霍耳效应。

发现这两种霍耳效应的时候，物理学家感到非常困惑，因为当时普遍认为固态导体中唯一的载流子就是带负电的电子。然而，人们发现，在某些情况下，说固体中的载流子是带正电的粒子，是很方便的。在这些材料中，由于固体结构中的某些缺陷，在通常应当有电子存在的地方，却缺少电子。换句话说，存在着所谓电子空穴。当邻近一个电子，由于某种原因，移来填充一现存的空穴时，这电子显然就在它原来的位置上产生一个空穴。因此，在外电场作用下，电子空穴的运动方向，与带负电的粒子的运动方向恰好相反。电子空穴的行为与带正电的粒子的行为完全相似。因此，霍耳效应提供了一种非常有用的方法来测定一导体中载流子的符号。

4.3 电荷在磁场中的运动

我们考虑一带电粒子在一均匀磁场中的运动；所谓均匀磁场是指在空间所有的点，强度和方向都相同的磁场。为简单起见，我们研究一个粒子沿垂直于磁场的方向运动的情况（图 4-4）。由于在这情况下，力垂直于速度，所以这力的效应是改变速度的方向，

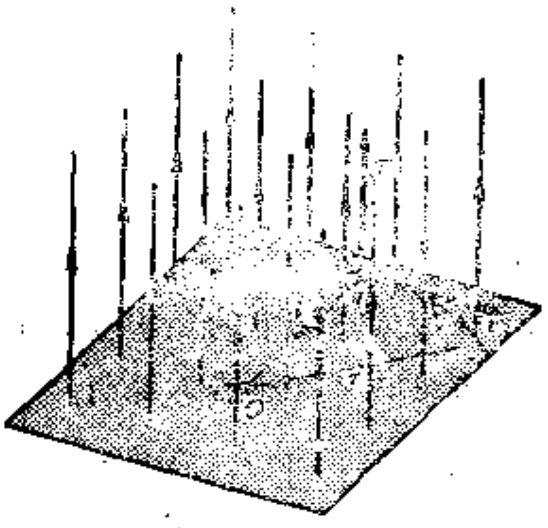


图 4-4　一电荷垂直于一均匀磁场运动时，描一圆形路径。

而不改变速度的大小. 结果得到一匀速圆周运动. 在这情况下, 加速度是向心的; 由圆周运动方程 $F=mv^2/r$ 和方程(4.4), 得出

$$\frac{mv^2}{r}=qv\mathscr{B}$$

或

$$r=\frac{mv}{q\mathscr{B}}, \tag{4.5}$$

上式给出这个粒子所描圆周的半径. 例如, 由例题 4.1 的数据可知, 如果磁场是均匀的, 这质子将描一半径为 8×10^5m 的圆. 写出 $v=\omega r$, 式中 ω 为带电粒子的角速度, 则方程(4.5)可以写作

$$\omega=\frac{q}{m}\mathscr{B}. \tag{4.6}$$

由此可见, 角速度与速度 v 无关, 而只与比值 q/m 和磁场 $\mathscr{B}$ 有关系. 式(4.6)给出 ω 的大小, 而没有给出它的方向. 然而, 圆周运动的加速度可以写成矢量形式 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}$. 于是运动方程 $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$ 变为

$$m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}=q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\mathscr{B}};$$

或者, 把上式右边的矢积反向, 两边都除以 m, 则得

$$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}=-(q/m)\boldsymbol{\mathscr{B}}\times\boldsymbol{v}.$$

上式表示

$$\boldsymbol{\omega}=-(q/m)\boldsymbol{\mathscr{B}}. \tag{4.7}$$

上式既给出 ω 的大小, 又给出它的方向①. 负号表示, 对于一正电荷, ω 的方向与 $\mathscr{B}$ 的方向相反, 对于一负电荷, ω 的方向与 $\mathscr{B}$ 的方向相同. 一带电粒子在均匀磁场中的角速度 ω 叫做回旋频率, 其理由将在例题 4.8 中讨论回旋加速器时说明.

---

① 从数学上讲, 我们应该写出 $\omega=-(q/m)\mathscr{B}+\lambda v$, 式中 λ 是一任意常数; 但是, 方程(4.6)表明, 我们必须令 $\lambda=0$.

通常用圆点(·)表示垂直于图面向上的磁场，而用叉号(×)表示垂直于图面向下的磁场．图 4-5 中示出一垂直于图面向上的均匀磁场，图(a)示出一正电荷垂直于该磁场运动时的路径，图(b)示出一负电荷垂直于该磁场运动时的路径．图(a)中，ω 的方向垂直于图面向下，图(b)中则垂直于图面向上．

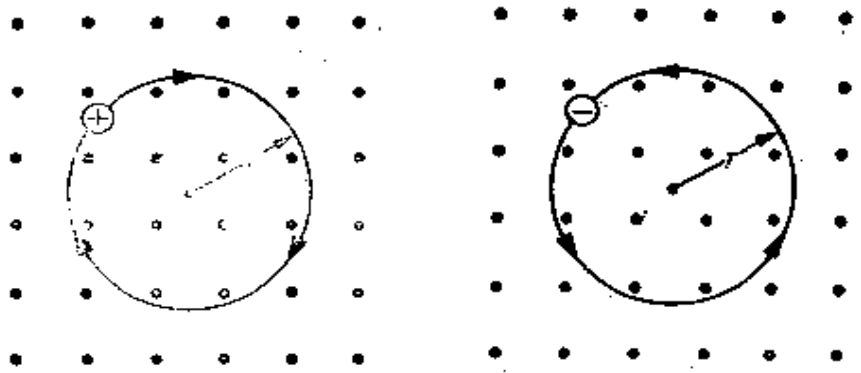


图 4-5　在一均匀磁场中，正、负电荷的圆形路径．

因此，如果一个离子在一磁场中的运动方向为已知，则可根据其路径的弯曲情况来确定这离子的电荷为正或为负．图 4-6 中示

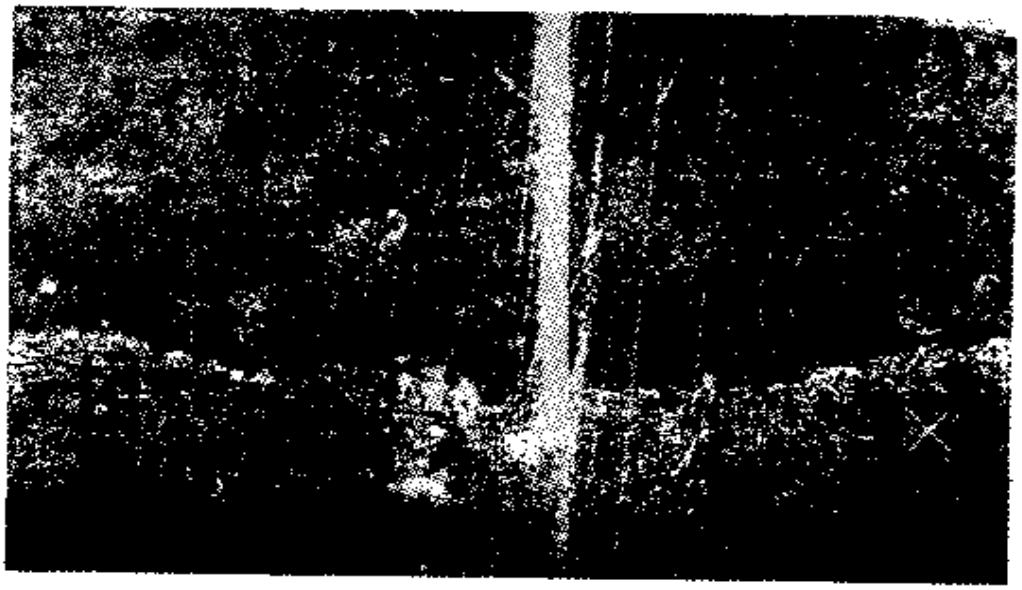


图 4-6　在一均匀磁场中，带电粒子路径的云室照片．磁场垂直于图面向下．顶端的粒子是带正电的．

出利用云室① 拍摄的几个带电粒子的路径. 这云室放在一磁场中；这磁场比地球磁场强许多倍，所以路径的半径约为云室的线度. 注意，粒子的路径沿两个相反的方向弯曲；这表示一些粒子是正的，另一些是负的. 可以观察到，有些粒子沿半径逐渐减小的螺线运动. 这种图形表示，这粒子由于同气体分子碰撞而被减速. 根据方程(4.5)，粒子速度的减小导致轨道半径的减小.

当一带电粒子的初速度不是垂直于磁场方向时，可把这速度分解为平行于和垂直于磁场的分量. 平行分量不受磁场影响，而垂直分量则不断改变其方向，但其大小保持不变. 在此情况下，这运动是一平行于磁场的匀速运动与一围绕磁场方向的圆周运动的合成运动，角速度仍由方程(4.6)给出. 对于一正离子，路径为一螺旋线，如图 4-7 所示.

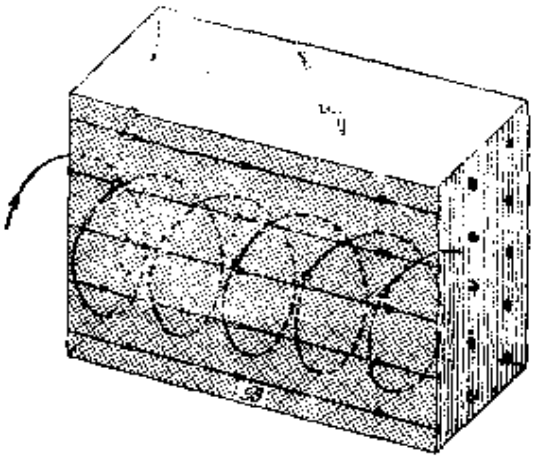


图 4-7　一正离子相对于一均匀磁场斜入射时，其路径呈螺旋线状.

由方程(4.5)得出的另一个结论是，磁场越强，带电粒子的轨道半径就越小. 因此，如果磁场不是均匀的，轨道就不是圆形的.

① 云室是一个盛有气体-蒸气混合物的装置. 通过使蒸气凝结在气体的离子上的办法，而使带电粒子的径迹成为可见的. 离子是由于带电粒子与气体分子相互作用而产生的. 通过使这混合物迅速(绝热地)膨胀而冷却的办法来获得凝结的条件. 这混合物可以是空气和水蒸气.

图 4-8 示出一方向由左朝右的磁场，其强度沿该方向增大．这样，当一带电粒子在这磁场的左边射入时，它将沿一半径不断减小的螺旋线运动．更详细的分析（此处略去）表明，为了使能量守恒，平行于磁场的速度分量将不保持恒定；当这粒子沿磁场强度增加的方向运动时，平行于磁场的速度分量将不断减小（因而螺旋线的螺距也随之减小）．如果这粒子在磁场中的路径足够长，则其速度的

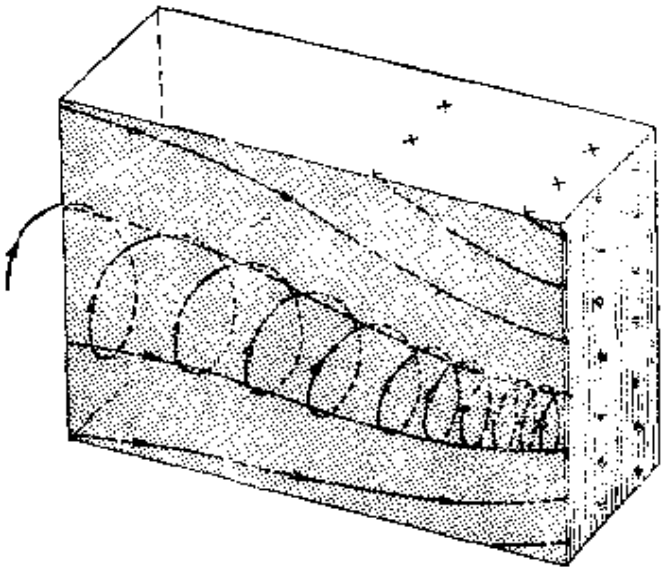


图 4-8　一正离子在一非均匀磁场中的路径．

平行分量最后将减小到零，于是这粒子将被迫向后即反平行于磁场而运动．由此可见，当一磁场的强度沿某一方向增加时，这磁场就开始起着带电粒子反射器的作用，或者如通常所说，起着磁镜的作用．这种效应被用于约束电离气体即等离子体．

另一种情况，如图 4-9 所示．在此图中，磁场垂直于图面，其强度从右向左增加．图中还画出一垂直于磁场射入的正离子的路径：这路径在左边（这里磁场较强）弯曲程度较大，在右边（这里磁场较弱）弯曲程度较小．这路径不是闭合的，这粒子垂直于磁场增加的方向穿过磁场而漂移．

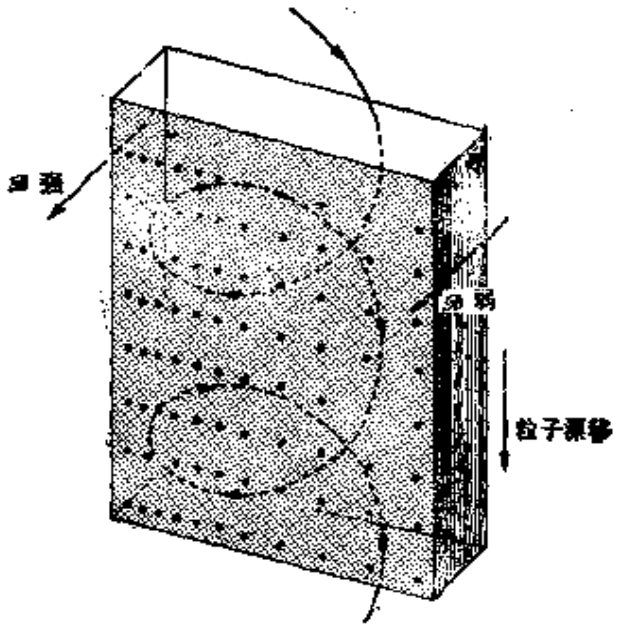


图 4-9　一离子穿过一非均匀磁场漂移的平面运动.

例题 4.3　正电子的发现.

解　一带电粒子的速度与它在磁场中的轨道半径之间的关系，导致宇宙线中正电子的发现. 正电子是一基本粒子，其质量与电子质量 m_e 相同，但有一正电荷 $+e$. 正电子是美国物理学家安德森 (C. D. Anderson, 1905—)[①] 在 1932 年发现的. 安德森获得了图 4-10 所示的云室照片. 图中的

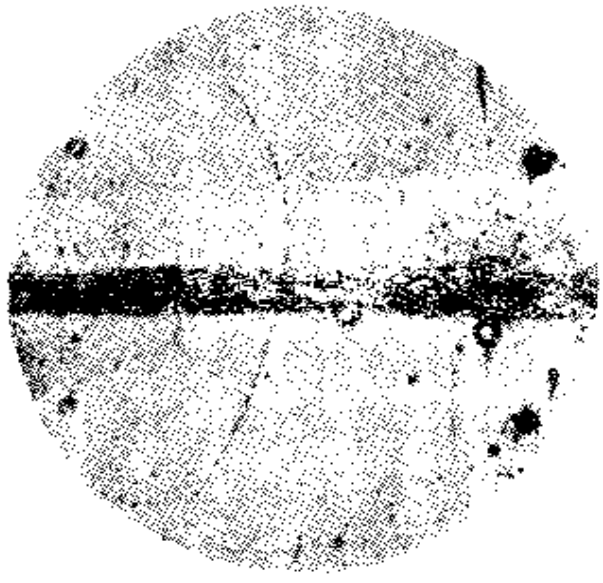


图 4-10　安德森获得的一个正电子径迹的照片，磁场垂直于图面向下. 这张照片提供了关于狄拉克先前预言的正电子存在的第一个(1932年)证据.

① 然而，在发现正电子之前几年，英国物理学家狄拉克(P. A. M. Dirac, 1902—)曾预言这种粒子的存在.

水平带是一块 0.6cm 厚的铅板，插入云室内部，这粒子通过这块铅板．这粒子径迹下部的曲率比上部的小．这表示，这粒子在铅板上方的速度(因而其能量)比在下方的速度小．因此，这粒子是向上运动的，因为它在通过铅板时必定损失能量并减速．这粒子径迹的曲率和它相对于磁场的运动方向，表明这个粒子带正电荷．这径迹看起来非常象一个正电子的径迹．方程(4.2)可以写作 $p=mv=q\mathscr{B}r$．因此，如果从照片上测得 r，并假定 $q=e$，则可算出动量 p．p 的数量级对应于一个粒子，其质量近似地等于电子的质量．更详细的分析能够算出这粒子的速度，从 $\mathscr{B}$ 算出它的质量．这质量实际上等于电子的质量．

例题 4.4 离子在磁场中运动的一个重要例子，是来自外层空间的带电粒子投射到地球上，并构成所谓宇宙线的一部．

解 图 4-11 中示出地球的磁场①．沿地球的磁轴射入的粒子，不发生任

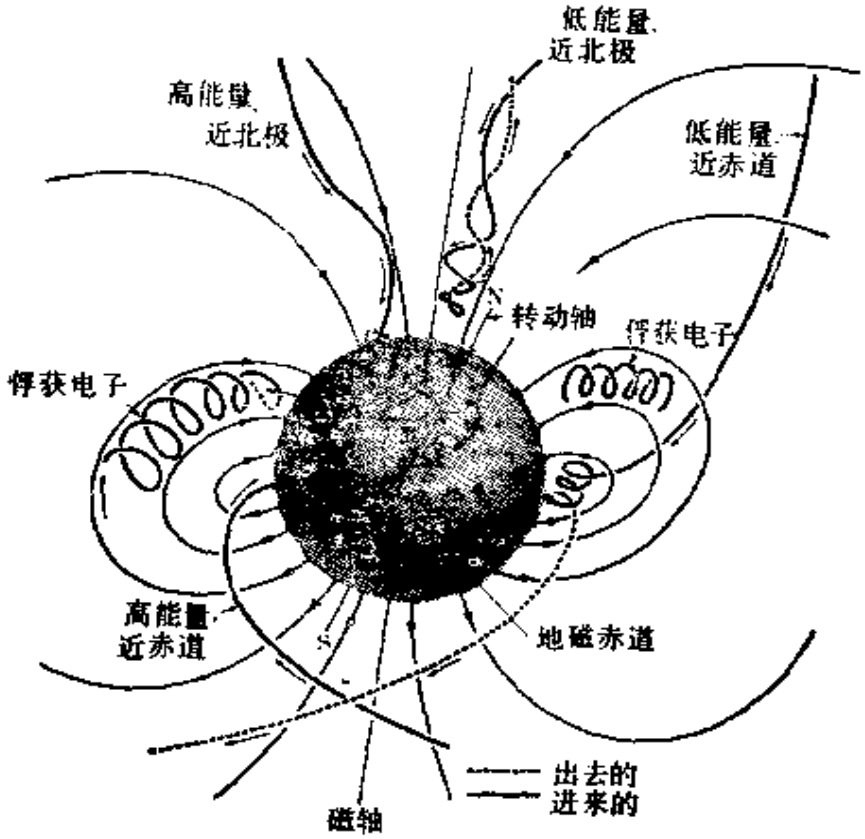


图 4-11 带电宇宙线粒子在地球磁场中的运动

① 实际上，地球周围的磁场表现出若干局部异常，并且在离开太阳的方向上显示出一总的畸变．图 4-11 中的概图忽略了这些变化．

何偏转，即使它们的能量非常小，也能到达地球．与地球磁场成一角度射入的粒子描一螺旋路径，那些速度非常小的粒子可能弯曲很厉害，以致不能到达地球表面．到达地磁赤道的那些粒子偏转最大，因为它们是在一垂直于磁场的平面中运动．换句话说，带电的宇宙粒子，为了到达地球表面所必须具有的最小能量，从地球磁轴到地磁赤道时，是不断增加的．

地球磁场所引起的另一种效应是宇宙辐射的东西不对称性．宇宙线粒子主要地是正的还是负的，并不确切知道．然而，地球磁场使符号相反的粒子朝相反的方向弯曲．如果到达地球的宇宙线中的正粒子的数目，不同于负粒子的数目，则沿天顶东的方向到达地球表面一给定地点的宇宙线的强度，应当不同于沿天顶西的方向到达的宇宙线．实验结果表明带正电的粒子占大多数．

例题 4.5 范阿伦辐射带是由于宇宙带电粒子与地球磁场相互作用而形成的．

解 在地球表面上空有一些区域通常叫做范阿伦带[根据美国物理学家范阿伦(James Van Allen, 1914—)的姓命名]．范阿伦带是由被地球磁场捕集的快速运动的带电粒子(主要是电子和质子)组成的．内辐射带从地球表面上方约 800km 处一直延伸到约 4000km 处，外辐射带从约 4000km 处一直延伸到约 60000 km 处①．这些辐射带是在 1968 年用美国探险者卫星携带的仪器发现的，并用月球探测器先锋 III 号加以研究．为了更好地说明范阿伦带中带电粒子的捕集，我们考虑，比如说，在地球表面上方许多公里处，一个原子与一宇宙线之间的碰撞所产生的一个自由电子．垂直于地球磁场的速度分量使这电子沿一弯曲路径运动．但是，越靠近地面，磁场强度越大．结果得到的运动类似于图 4-9 所示．电子由于带负电荷而向东漂移(对于正电荷则向西漂移)．另一个效应来自电子速度的平行于地球磁场的分量；这个分量产生一沿磁力线向两极之一的螺线形运动（如图 4-7 所示）．由于朝北或朝南去时磁场强度增加，所以回转变得越来越紧，与此同时，速度的平行分量减小，这已在讨论图 4-8 所示磁镜效应时有所说明．每一电子到达一

① 有充分的证据表明，内辐射带是由质子和电子组成的；它们是宇宙线相互作用在地球大气中产生的中子的衰变产物．外辐射带主要是由太阳射出的带电粒子组成的．这些粒子的数目的增加，是与太阳的活动联系着的；这些子从辐射带中移去，是极光活动和无线电传递中断的原因．

特定的北纬或南纬，在这里速度的平行分量变为零．究竟是哪个纬度，则取决于射入时的初速度．然后这电子朝相反的极后退．因此，合运动是经度的朝东变化和纬度的南北振荡．这运动不断重复，也许能持续几个星期，直至这电子由于碰撞而从范阿伦带中抛出，从而结束它的俘获状况．对于俘获质子有类似情况．

4.4 带电粒子在磁场中运动的几个例子

在本节中将说明离子在磁场中的运动的几种具体情况．

例题 4.6 质谱仪．

解 我们考虑图 4-12 所示的装置．这里 I 是一离子源(对于电子，它可能就是一受热的金属丝)；离子通过两条狭缝 S_1 和 S_2，并被施加于两狭缝之间的电势差 V 所加速．根据方程(1.25)算出离子的出射速度为

$$v^2 = 2\left(\frac{q}{m}\right)V. \tag{4 8}$$

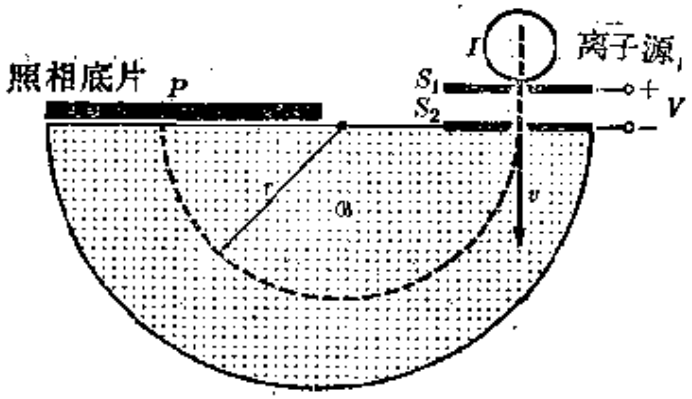


图 4-12 登普斯特质谱仪．I 是一离子源，S_1 和 S_2 是两条狭缝，起着准直离子束的作用．V 是施加在 S_1 和 S_2 之间的电压．P 是照相底片，用以记录离子的到达．

狭缝外面的区域是一均匀磁场，其方向垂直于离子的速度(图中磁场垂直于图面向上)．在此情况下，离子将沿圆轨道运动，它朝哪个方向弯曲，取决于它的电荷 q 的符号．描一半圆之后，离子落在照相底片 P 上，并留下一记号．离子的轨道半径 r 由方程(4.5)给出，由此得出离子速度

$$v = \frac{q}{m}\mathscr{B}r. \tag{4 9}$$

由方程(4.8)和(4.9)消去 v，则得

$$\frac{q}{m}=\frac{2V}{\mathscr{B}^2r^2}, \tag{4.10}$$

上式给出比值 q/m 作为三个量 V、$\mathscr{B}$ 和 r 的函数，其中每一个都不难测定. 这种方法可应用于电子、质子和任意其他带电的原子或分子. 如果能够独立地测定电荷 q，就能求出这粒子的质量. 这就是先前在第 1.5 节中提到的方法.

图 4-12 中的装置就是一台质谱仪. 它能够把具有相同电荷 q，但有不同质量 m 的离子分离开，因为每一种离子的轨道半径取决于该种离子的 q/m 值. 图 4-12 所示的质谱仪叫做登普斯特质谱仪. 根据同样的原理，还研制出几种其他类型的质谱仪. 在二十年代，科学家利用这种方法发现同一种化学元素的原子并不具有相同的质量. 同一种化学元素的具有不同质量的各种原子，叫做同位素.

也可以用图 4-12 所示的实验装置求出以不同速度运动的粒子的 q/m. 已发现，q/m 对 v 的关系，犹如 q 保持不变，而 m 按关系式

$$m=m_0/\sqrt{1-v^2/c^2}$$

随速度而改变. 因此，

电荷是一不变量，对于一切作匀速相对运动的观察者来说，电荷都一样.

例题 4.7 电子的发现.

解 在十九世纪后期，对放电现象进行了大量的实验研究. 在这些实验中，都是把两个电极放在低压气体中并在两电极上施加一大的电压，这样来产生通过低压气体的放电. 改变放电管中气体的压强时，观察到几种发光效应. 当压强保持在 100Pa 以下时，在管内就不再能观察到可见的效应，但在正对着阴极 C 的管壁上的点 O，出现一光点(图 4-13). 因此，提出如下的假定：阴极发射某种射线，它沿一直线朝点 O 运动. 因此，称这种辐射为阴极射线. 如果在放电管内安装两块平行的金属板 P 和 P'，并在 P 和 P' 上施加一电压，就会产生一方向由 P 至 P' 的电场 $\mathscr{E}$. 施加这个电场的结果是，光点从 O 移动到 O'. 也就是说，移动的方向对应于一负电荷. 这种运动表明，阴极射线就是一束带负电的粒子. 设 q 为每个粒子的电荷，v 是它的速度，则偏转 $d=OO'$ 可以利用方程 (1.9)(即 $q\mathscr{E}a/mv^2=d/L$) 计算出来. 作用在这粒子上的电场力为 $q\mathscr{E}$，其方向朝上. 如果在同一区域中施加一其方向垂直于图面向下(因而也垂直于电场)的磁场，则在电场中加速的粒子将受到一磁

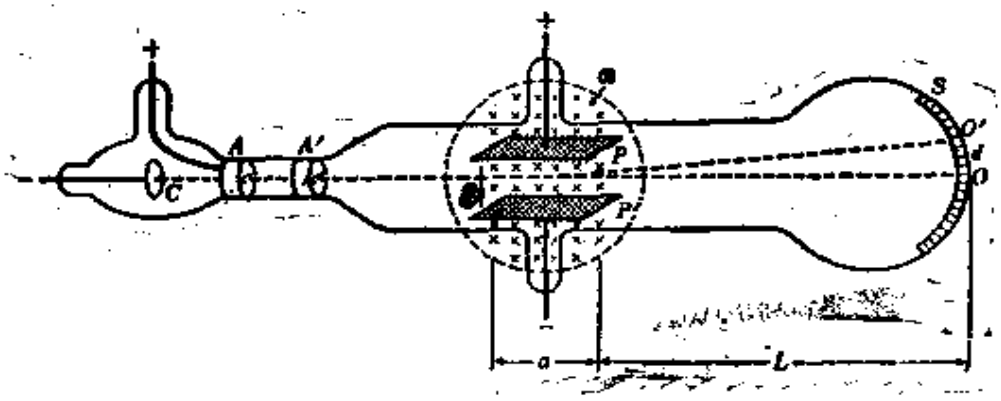


图 4-13　测定 q/m 的汤姆孙实验. C 所发射的阴极射线(即电子)被 A 和 A' 准直后,通过一施加有电场和磁场的区域,到达屏 S 上.

力. 根据方程(4.4),磁力为 $qv\mathscr{B}$,其方向朝下(因为 q 是一负电荷). 通过适当调整磁场 $\mathscr{B}$,我们能够使这磁力等于电力,因而作用在这粒子上的净力等于零;这时光点从 O' 回到 O;也就是说,阴极射线无偏转. 这时 $q\mathscr{E}=qv\mathscr{B}$,即 $v=\mathscr{E}/\mathscr{B}$. 这个方程提供一个测定带电粒子速度的方法. 把这个 v 值代入方程(1.19)中,就得到构成阴极射线的粒子的比值 q/m:

$$\frac{q}{m}=\frac{\mathscr{E}d}{\mathscr{B}^2La}.$$

这种实验是测定 q/m 的最早的可靠实验之一. 这种实验直接证实了阴极射线是由带负电的粒子组成的. 从那以后,就称这些粒子为电子.

这些实验结果于 1897年由英国物理学家汤姆孙(J. J. Thomson, 1856—1940)发表. 为了发现阴极射线的本性,汤姆孙付出了巨大的精力和时间. 现在我们知道,金属 C 中的自由电子,由于施加于 C 和 A 之间的强电场的作用而被拉出(即被蒸发),并被这电场沿着管轴方向加速.

例题 4.8　回旋加速器.

解　根据带电粒子在磁场中的路径是圆形的这一事实,人们设计了循环工作的粒子加速器. 第 1.7 节中描述过的静电加速器的一个困难是,粒子的加速依赖于总的电势差 V. 加速器中的电场为 $\mathscr{E}=V/d$,因此,如果 V 非常大,则加速管的长 d 也必须非常大,才能防止强电场的发生,从而避免在加速管材料中造成电击穿. 此外,一条非常长的加速管会造成一些工程上的困难. 然而,在一台循环加速器中,一个电荷能够由于许多次通过一较小的电势差而受到一连串的加速. 根据这一原理而运转的第一台仪器,就是回旋加速器,它是由美国物理学家劳伦斯(E. O. Lawrence, 1901—1958)设计的.

第一台实用的回旋加速器于 1932 年开始运转.

回旋加速器(图 4-14)实质上是一个圆筒形空腔，沿其一条直径分成两半 D_1 和 D_2（每一半按其形状而称为一个“D 形盒”）. 这空腔放在一平行于其轴线的均匀磁场中. 两个 D 形盒彼此之间是电绝缘的. 一离子源置于两个 D 形盒之间缝隙的中心. 在两个 D 形盒之间施加约 10^4V 的交变电压. 当离子为正时，它们将被加速而向负 D 形盒运动. 一旦处于 D 形盒内，离子就不受电场力作用（因为导体内部的电场为零），使两个 D 形盒之间的电势差以频率 $\omega/2\pi$ 振荡. 这样一来，D 形盒之间的电势差就和离子的圆周运动共振.

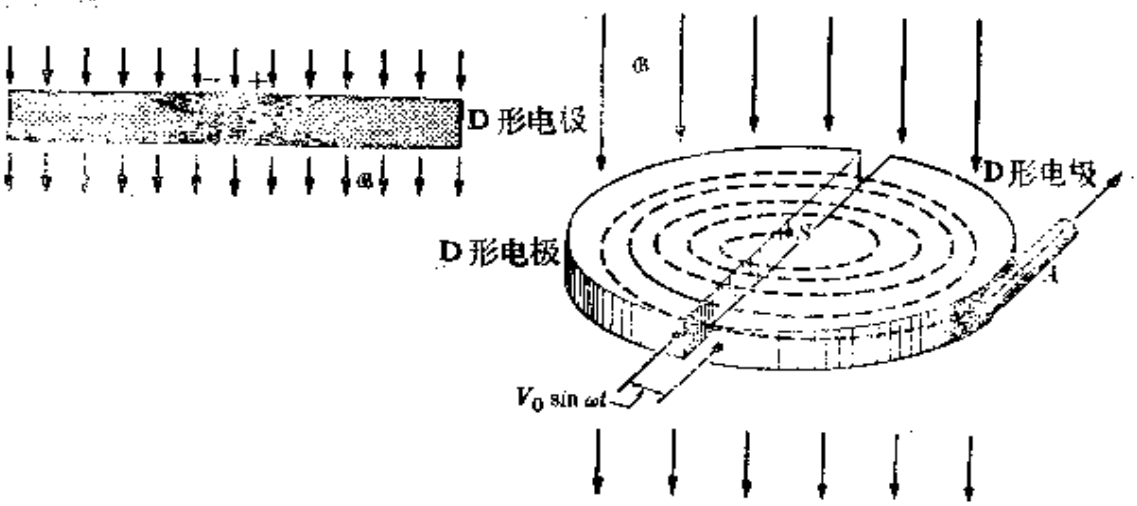


图 4-14　回旋加速器的基本部件. 一离子的路径如虚线所示.

当这个离子绕转半圈之后，D 形盒的极性反转；这个离子通过两 D 形盒之间的缝隙时，受到另一次加速. 于是下半圈具有较大的半径，但角速度保持不变. 这个过程自行重复许多次，直至半径达到一最大值 R. R 实际上等于 D 形盒的半径. 在 D 形盒的边缘处，磁场锐减，因而离子沿切线方向运动，并通过一个方便的小孔而逸出. 最大速度 $v_{最大}$ 与半径 R 之间的关系由方程(4.5)给出，即

$$R=\frac{mv_{最大}}{q\mathscr{B}},$$

或者

$$v_{最大}=\left(\frac{q}{m}\right)\mathscr{B}R.$$

于是，由 A 处射出的粒子，其动能

$$E_k = \frac{1}{2} m v_{最大}^2 = \frac{q}{2}\left(\frac{q}{m}\right)\mathscr{B}^2 R^2 \tag{4.11}$$

由这个粒子的特性、磁场强度和回旋加速器半径决定，而与加速电势差无关. 当加速电势差小时，粒子必须转许多圈，才能获得最后的能量. 而当电势差大时，只需要转几圈.

磁场强度受技术因素的限制，例如能否获得具有所需性能的材料；但是，对于一半径足够大的磁铁，粒子原则上能被加速到任何所需要的能量. 然而，磁铁越大，重量和成本也越大. 此外，对于回旋加速器中粒子的能量还有一个物理上的限制因素. 当离子的能量增加时，离子的速度增加，从而导致其质量按照相对论关系式 $m = m_0/\sqrt{1-v^2/c^2}$ 而增加当能量非常大时，这质量变化变得相当大，从而使离子的回旋频率显著改变. 因此，如果不改变电势差的频率，粒子的轨道将不再与振荡的电势差同相，因而不可能进一步加速. 因此，在一回旋加速器中，能量受相对论性质量效应的限制.

例题 4.9 密歇根大学有一台回旋加速器，其磁铁极面的直径为 2.1m，引出半径为 0.92m. 最大磁场为 $\mathscr{B} = 1.50\mathrm{T}$，加速电场的最大可达振荡频率为 $15\times10^6\mathrm{Hz}$. 试计算(a)用这台装置加速的质子和 α 粒子的能量；(b) 它们的回旋频率；(c) 如果考虑相对论性质量变化，试求在中心和边缘处回旋频率之差的百分数.

解 (a) 根据方程(4.11)，将质子和 α 粒子的相应电荷和质量代入，二者的动能都可表示为

$$E_k = 1.46\times10^{-11}\mathrm{J} = 91\mathrm{MeV}.$$

(b) α 粒子的回旋频率为 $\omega_\alpha = 7.2\times10^7\mathrm{s}^{-1}$，即相应的频率为 $\nu_\alpha = \omega_\alpha/2\pi = 11.5\times10^6\mathrm{Hz}$，这个频率在最大设计频率的范围之内. 对于质子，这个频率加倍，即为 $23\times10^6\mathrm{Hz}$. 施加于 D 形电极上的电压必须按照这个频率变化. 但是，这台加速器的最大设计频率为 $15\times10^6\mathrm{Hz}$，因此，这台机器不能把质子加速到 91MeV. 假定质子的最大频率 ν_p 等于电压的最大振荡频率 $15\times10^6\mathrm{Hz}$，则得质子的最大回旋频率 $\omega_p = 2\pi\nu_p = 9.42\times10^7\mathrm{Hz}$. 于是回旋共振的相应的磁场等于 0.984T. 因此，质子的受频率限制的动能为

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\omega^2 R^2) = 0.63\times10^{-11}\mathrm{J} = 39\mathrm{MeV}.$$

(c) 在能量 $E = m_0c^2 + E_k$ 时，这粒子的质量为

$$m = E/c^2 = m_0 + E_k/c^2;$$

上式中 E_k/c^2 就表示质量的变化. 由方程(4.6)可知，回旋频率与质量成反比. 因此，如果回旋频率 ω 和 ω_0 分别对应于同一个粒子的质量 m 和 m_0，则有 $\omega/\omega_0=m_0/m$. 即

$$\frac{\omega-\omega_0}{\omega_0}=-\frac{m-m_0}{m}=-\frac{E_k/c^2}{m_0+E_k/c^2}=-\frac{E_k}{m_0c^2+E_k}.$$

上式左边给出回旋频率变化的百分率，而右侧给出质量变化的百分率. 当能量较低时，分母中的动能项 E_k 与 m_0c^2 相比可忽略不计，因而上面的关系式可以写作:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega}=-\frac{E_k}{m_0c^2},$$

式中 $\Delta\omega=\omega-\omega_0$. 由此可见，只要粒子的动能比其静能小很多，频率的变化是非常小的. 在我们的情况下，对于 α 粒子，$\Delta\omega/\omega=-0.024=2.4\%$；对于质子，$\Delta\omega/\omega=-0.042=4.2\%$.

此例题的结果还表明，由于电子的静质量约为质子静质量的1/1840(见第 1.5 节)，所以，加速电子(而不显著偏离其回旋频率)所能达到的动能，仅为质子的大约 1/1840. 因此，不用回旋加速器来加速电子.

在实验方面，相对论质量效应能够加以补偿，其办法是，或者使磁场具有某种形状，以使在每一半径处尽管质量改变，但 ω 的值保持不变；或者，当这粒子作螺线形运动时，改变施加于 D 形电极上电压的频率(而保持磁场不变)，以使这粒子的运动和所加电压之间在每一时刻都保持共振. 前一种设计叫做同步加速器，后一种叫做同步回旋加速器. 同步加速器能够连续运用，但同步回旋加速器，由于需要调节频率，只能脉冲式地运用.

例题 4.10 带电粒子在交叉电场和磁场中的运动.

解 我们考虑这样一个情况：一均匀电场平行于一坐标系的 Y 轴，而一均匀磁场平行于 Z 轴，如图 4-15 所示. 一带电粒子在这些场的作用下的运动方程，就是洛伦兹力的方程，即

$$\boldsymbol{F}=m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=q(\boldsymbol{\mathscr{E}}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\mathscr{B}}).$$

设坐标系 $X'Y'Z'$ 相对于坐标系 XYZ 以相对速度

$$\boldsymbol{v}_0=\frac{\boldsymbol{\mathscr{E}}\times\boldsymbol{\mathscr{B}}}{\mathscr{B}^2}=v_x\frac{\boldsymbol{\mathscr{E}}}{\mathscr{B}}$$

运动. 通过从坐标系 XYZ 至坐标系 $X'Y'Z'$ 的伽利略变换，这粒子相对于 $X'Y'Z'$ 的速度可以写作 $\boldsymbol{v}'=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_0$，或 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{v}_0$，因而有 $d\boldsymbol{v}/dt=d\boldsymbol{v}'/dt$. 于

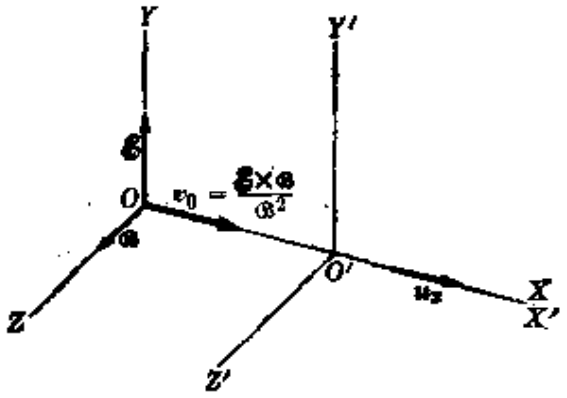


图 4-15

是，运动方程可以写作

$$m\frac{dv'}{dt}=q(\mathscr{E}+v'\times\mathscr{B}+v_0\times\mathscr{B}).$$

因为 $v_0\times\mathscr{B}=(u_x\mathscr{E}/\mathscr{B})\times u_x\mathscr{B}=-u_y\mathscr{E}=-\mathscr{E}$，所以上式右边括号内第一项与最后一项抵消. 作上述伽利略变换的理由，现在就可看清了：相对于 $X'Y'Z'$，运动方程是

$$m\frac{dv'}{dt}=qv'\times\mathscr{B}.$$

在这情况下应注意，相对于 $X'Y'Z'$ 的运动就好象没有电场存在一样. 如果这粒子开始时是在 XY 平面内运动(即 v 没有 Z 分量)，则这粒子在 $X'Y'Z'$ 坐标系中的运动将是一半径为 $r=mv'/q\mathscr{B}$ 的圆，运动的角速度为 $\omega=-q\mathscr{B}/m$. 这个圆相对于 XYZ 以速度 v_0 沿 X 轴前进. 因而得到图 4-16 中示出的轨道之一. 这图形经过一距离 $v_0P=2\pi v_0/\omega$ 重复一次. 如果 $2\pi v_0/\omega=2\pi r$，亦即如果 $r=v_0/\omega$，则粒子的轨道为一旋轮线，即轨道(1)；但如果 $2\pi v_0/\omega\lesseqgtr 2\pi r$，亦即如果 $r\gtrless v_0/\omega$，则得到轨道(2)和(3)，它们分别对应于一短辐旋

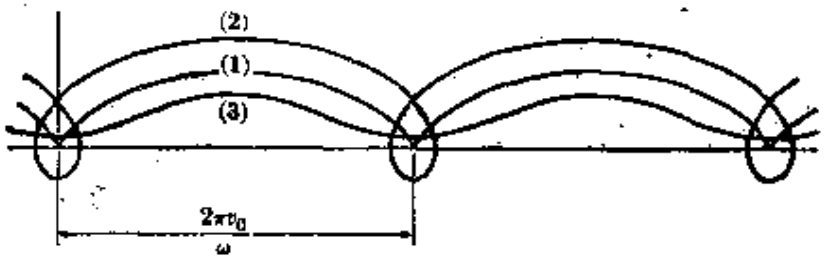


图 4-16　一个粒子相对于观察者 O 的旋轮线轨道.
(1) $r=v_0/\omega$，(2) $r>v_0/\omega$，(3) $r<v_0/\omega$.

轮线和一长辐旋轮线. 如果这带电粒子有一个平行于 Z 轴的速度分量，则图 4-16 所示的轨道将以恒定速率离开 XY 平面运动.

这个例子所揭示的一个重要方面是，利用坐标系 XYZ 的观察者既观察到电场，也观察到磁场，但利用相对于 XYZ 运动的坐标系 $X'Y'Z'$ 的观察者则观察到带电粒子仅在一磁场中运动. 这一点表示，两个观察者所测得的电场和磁场的值，与他们的相对运动有关系. 这是一个非常重要的问题，在第 4.6 节中将对这个问题进行更详细的讨论.

4.5 运动电荷的磁场(非相对论的)

迄今为止，在讨论磁场时，我们都没有提到磁场是怎样产生的. 人们曾提到过某些物质(称为磁体)在其天然状态下能产生磁场. 1819年，在了解磁性的起源方面，出现一项重大的突破. 当时丹麦物理学家奥斯特(H. C. Orsted, 1777—1851)偶然发现，当一磁罗盘放在一根长载流金属丝下方时，罗盘的取向垂直于金属丝的方向. 由于电流是由一系列运动电荷组成的，所以似乎可以合理地假定：运动电荷不仅能感受磁场，而且能产生磁场. 通过分析带电粒子的运动，已充分证实这个假设.

因此，虽然相对于一观察者为静止的电荷只产生电场，但相对于一观察者运动的电荷则不但产生电场，而且产生磁场. 由此可见，电场和磁场仅仅是物质的一种基本性质的两个方面，所以电磁场这个术语能够更恰当地描述涉及运动电荷的物理情况.

考虑一电荷 q (图 4-17) 相对于一观察者以速度 v 运动的情况. (我们假定这速度远小于光速，因而在计算中不需考虑相对论效应.)这电荷的电场是径向的，其表达式与第一章中关于静止电荷的表达式相同，即

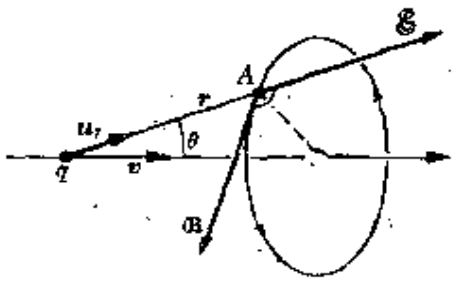


图 4-17 一个运动着的正电荷所产生的电场和磁场.

$$\mathscr{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}u_r. \tag{4.12}$$

电力线是通过这电荷的径向直线. 实验表明，运动电荷的磁场，能用圆心在这电荷的运动直线上的圆形磁力线来表示. 当电荷为正时，磁力线的方向可用右手定则确定：当右手姆指指向电荷的运动方向时，其余四指拳曲的方向就是磁力线的方向. 特别要注意，$\mathscr{B}$ 在电荷运动的方向上没有分量.

因此，在空间中一给定点，例如 A，有一沿径向的电场 $\mathscr{E}$ 和一方向既垂直于 r 又垂直于 v 的磁场 $\mathscr{B}$. 在许多点对磁场所作的测量表明，磁场的表达式为

$$\mathscr{B}=K_m\frac{q(v\times u_r)}{r^2}. \tag{4.13}$$

在 SI 单位中，常数 K_m 等于 $10^{-7}\mathrm{m\cdot kg\cdot C^{-2}}$，这将在第 5.7 节中说明. 通常把方程(4.13)写作

$$\mathscr{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q(v\times u_r)}{r^2}, \tag{4.14}$$

式中

$$\mu_0=4\pi K_m=1.3566\times10^{-6}\mathrm{m\cdot kg\cdot C^{-2}} \tag{4.15}$$

是一个新常数，叫做真空磁导率. 这磁场的大小为

$$\mathscr{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qv\sin\theta}{r^2}, \tag{4.16}$$

式中 θ 是 r 和 v 之间的角. 注意，在电荷运动的直线上磁场的量值为零，而在垂直于电荷运动的直线并通过电荷的平面上，磁场的量值最大.

把方程(4.12)和(4.14)加以比较，就可看出，在空间一给定点，一个运动电荷的电场和磁场之间的关系为

$$\mathscr{B}=\mu_0\varepsilon_0(v\times\mathscr{E})=\frac{1}{c^2}(v\times\mathscr{E}) \tag{4.17}$$

在上式中，利用了关系式

$$c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}. \tag{4.18}$$

以后将证明，这个常数是真空中的光速(或者任何电磁信号的速度)．将 μ_0 和 ε_0 的值代入，则得 $c=2.9979\times10^8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$．(在大多数计算中，通常取 $c=3.0\times10^8\mathrm{m\cdot s^{-1}}$．)

在例题 4.12 中将证明，当电荷的速度与光速相差不多时，电场的方程(4.12)和磁场的方程(4.14)必须加以修正．但是，关系式(4.17)在一切速度下都是正确的．

4.6 电磁学和相对性原理

根据相对性原理(见本书第一卷第十一章)，对于所有的惯性观察者，一切自然界的定律都必定完全相同．因此，我们现在着手找出两个作匀速相对运动的观察者所测得的电场和磁场之间的关系，以使相对性原理仍然成立．

假定两个观察者 O 和 O'(图 4-18)以速度 v 作匀速相对运动，

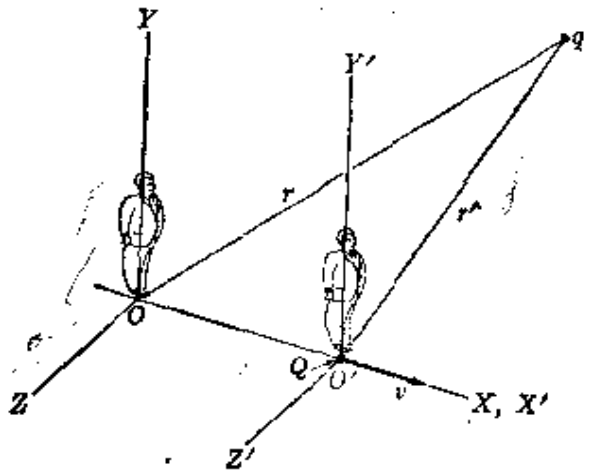


图 4-18　两个相对运动的观察者所作电磁测量结果的比较．

并且假定有两个相对于 O' 为静止的电荷 q 和 Q．这时这两个电荷以速度 v 相对于 O 运动．这两个电荷的值对于两个观察者 O

和 O' 是相同的，这已在例题 4.6 中述及. 对于观察者 O'，在 Q 和 q 之间只有电相互作用，测得的作用在 q 上的力为 $F'=q\mathscr{E}'$，式中 $\mathscr{E}'$ 是 O' 测得的，Q 在 q 处产生的电场.

另一方面，既然 O 看到电荷 Q 在运动，所以他观察到 Q 既产生电场 $\mathscr{E}$，又产生磁场 $\mathscr{B}$；而且，既然他也观察到 q 以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动，所以 O 所测得的，Q 作用在 q 上的力为 $\boldsymbol{F}=q(\mathscr{E}+\boldsymbol{v}\times\mathscr{B})$. 取公共轴 X 和 X' 平行于两个观察者的相对速度，则有 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}_x v$，$\boldsymbol{v}\times\mathscr{B}=-\boldsymbol{u}_y v\mathscr{B}_z+\boldsymbol{u}_z v\mathscr{B}_y$，因此，$\boldsymbol{F}$ 相对于坐标系 XYZ 的分量为

$$F_x=q\mathscr{E}_x,\quad F_y=q(\mathscr{E}_y-v\mathscr{B}_z),\quad F_z=q(\mathscr{E}_z+v\mathscr{B}_y). \tag{4.19}$$

$\boldsymbol{F}'$ 相对于坐标系 $X'Y'Z'$ 的分量为

$$F'_x=q\mathscr{E}'_x,\quad F'_y=q\mathscr{E}'_y,\quad F'_z=q\mathscr{E}'_z. \tag{4.20}$$

由于 q 相对于 O' 是静止的，所以根据力的洛伦兹变换，$\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{F}'$ 的分量之间的关系为

$$F'_x=F_x,\ F'_y=\frac{F_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\quad F'_z=\frac{F_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

将方程(4.19)和(4.20)中的相应分量代入上式，并消去公因子 q，则得

$$\mathscr{E}'_x=\mathscr{E}_x,\quad \mathscr{E}'_y=\frac{\mathscr{E}_y-v\mathscr{B}_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\quad \mathscr{E}'_z=\frac{\mathscr{E}_z+v\mathscr{B}_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{4.21}$$

根据狭义相对论，这些表达式把观察者 O' 所测得的电场与观察者 O 所测得的电场和磁场联系起来. 通过交换相应的场，并用 $-v$ 代替 v(因为坐标系 XYZ 相对于 $X'Y'Z'$ 以速度 $-v$ 运动)，可得出方程(4.21)的逆变换. 因此，如果观察者 O' 测得一电场 $\mathscr{E}'$ 和一磁场 $\mathscr{B}$，则 O 测得的电场由下式给出：

$$\mathscr{E}_x=\mathscr{E}'_x,\quad \mathscr{E}_y=\frac{\mathscr{E}'_y+v\mathscr{B}'_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\quad \mathscr{E}_z=\frac{\mathscr{E}'_z-v\mathscr{B}'_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{4.22}$$

设电荷 Q 不但相对于 O，而且相对于 O' 运动(而不是在 O' 处静

止)；这时O'除观察到电场$\mathscr{E}'$外，还观察到一磁场$\mathscr{B}'$．由类似的，但更复杂的计算①得出：

$$\mathscr{B}'_x=\mathscr{B}_x,\quad \mathscr{B}'_y=\frac{\mathscr{B}_y+v\mathscr{E}_z/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\quad \mathscr{B}'_z=\frac{\mathscr{B}_z-v\mathscr{E}_y/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.\tag{4.23}$$

再象对于方程(4.21)那样，通过交换相应的场，并以$-v$代替v，求出方程(4.23)的逆变换为

$$\mathscr{B}_x=\mathscr{B}'_x,\quad \mathscr{B}_y=\frac{\mathscr{B}'_y-v\mathscr{E}'_z/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\quad \mathscr{B}_z=\frac{\mathscr{B}'_z+v\mathscr{E}'_y/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.\tag{4.24}$$

方程(4.21)和(4.23)，或者它们的逆变换方程(4.22)和(4.24)，构成电磁场的洛伦兹变换．这些方程再一次证明，电场和磁场不是两个独立的实体，而是一起构成一个叫做电磁场的物理量．把电磁场分离成它的电分量和磁分量，并非一个绝对的程序；更确切地说这种分离依赖于电荷相对于观察者的运动．

例题 4.11　重新考虑例题 4.10 中讨论过的情况；利用电磁场的洛伦兹变换，把两个观察者测得的场联系起来．

解　我们记得，在例题 4.10 中，有一个沿Y轴的电场和一个沿Z轴的磁场．通过一运动学变换，把带电粒子的运动变换到沿X方向以速度$v=\mathscr{E}/\mathscr{B}$运动的坐标系$X'Y'Z'$．于是这运动被化为一个粒子仅仅在磁场作用下的运动．现在我们来作进一步的分析，并且在相对论的框架内看看由这个例子得出的推论．在XYZ坐标系中，对于电场有$\mathscr{E}_x=0,\ \mathscr{E}_y=\mathscr{E},\mathscr{E}_z=0$；对于磁场有$\mathscr{B}_x=\mathscr{B}_y=0,\mathscr{B}_z=\mathscr{B}$．因此，由方程(4.21)和(4.23)可知，在$X'Y'Z'$坐标系中观察到的场为

$$\mathscr{E}'_x=0,\quad \mathscr{E}'_y=\frac{\mathscr{E}-v\mathscr{B}}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\quad \mathscr{E}'_z=0,$$

$$\mathscr{B}'_x=0,\mathscr{B}'_y=0,\mathscr{B}'_z=\frac{\mathscr{B}-v\mathscr{E}/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

① 例如，如果读者想求出方程(4.23)中的第二和第三个方程，我们建议他利用方程(4.21)，从方程(4.22)中消去$\mathscr{E}'$和$\mathscr{E}$，然后解出$\mathscr{B}'$和$\mathscr{B}$．

令 $v=\mathscr{E}/\mathscr{B}$，则得 $\mathscr{E}'_y=0$，因而 $\mathscr{E}'=0$；而且有

$$\mathscr{B}'=\mathscr{B}'_z=\sqrt{1-v^2/c^2}\,\mathscr{B}.$$

因此，相对论预言，以速度 $v=\mathscr{E}/\mathscr{B}$ 相对于 O 运动的观察者 O'，测出的电场为零，测出的磁场小于 O 所测出的磁场，但方向相同.

4.7 运动电荷的电磁场(相对论的)

在第一章中我们看到，一个静止电荷产生一电场 $\mathscr{E}=(q/4\pi\varepsilon_0 r^2)u_r$；在第 4.5 节中已指出，一个运动电荷，除电场之外，还产生一磁场，其表达式为 $\mathscr{B}=(\mu_0/4\pi)q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}_r/r^2$. 但是，根据前一节的讨论，场 $\mathscr{E}$ 和 $\mathscr{B}$ 之间必然存在方程(4.21)和(4.23)所表示的关系. 因此，为了求出运动电荷的 $\mathscr{E}$ 和 $\mathscr{B}$ 的正确表达式，从一开始就要采用相对论性计算方法.

考虑一个相对于坐标系 $X'Y'Z'$ 为静止的电荷 q；并假定 $X'Y'Z'$ 相对于 XYZ 以速度 v 平行它们共同的 X 轴而运动. 如前面所指出的，观察者 O' 测不出任何磁场，而只能测出一个电场；因此，$\mathscr{B}'_x=\mathscr{B}'_y=\mathscr{B}'_z=0$，亦即 $\mathscr{B}'=0$. 于是由关于电场变换的方程(4.22)得出

$$\mathscr{E}_x=\mathscr{E}'_x,\quad \mathscr{E}_y=\frac{\mathscr{E}'_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\quad \mathscr{E}_z=\frac{\mathscr{E}'_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{4.25}$$

方程(4.25)表示，当观察者 O(他看到电荷是运动着的)和观察者 O'(他看到电荷是静止的)比较他们对于这个电荷的电场的测量结果时，他们在平行于运动的方向上测得的场分量相同，但在垂直于运动的方向上，O 测得的场分量较大. 类似地，如果利用方程(4.25)写出相对于 O 的电场分量，则由关于磁场变换的方程(4.24)得出

$$\mathscr{B}_x=0,\ \mathscr{B}_y=-\frac{v\mathscr{E}_z}{c^2},\qquad \mathscr{B}_z=\frac{v\mathscr{E}_y}{c^2}, \tag{4.26}$$

上式等效于 $\mathscr{B}=\boldsymbol{v}\times\mathscr{E}/c^2$. 此式与方程(4.17)等同. 如前面指出的，方程(4.17)表示一个以恒定速度 $\boldsymbol{v}$ 运动的电荷的电场和磁场

之间的关系；这个关系式对于一切速率都适用.

图 4-19 中示出 O 和 O' 的观察结果的比较. 如果电荷是在 O'，则观察者 O' 在 P'（在 $X'Y'$ 平面内）测得的电场由下式给出：

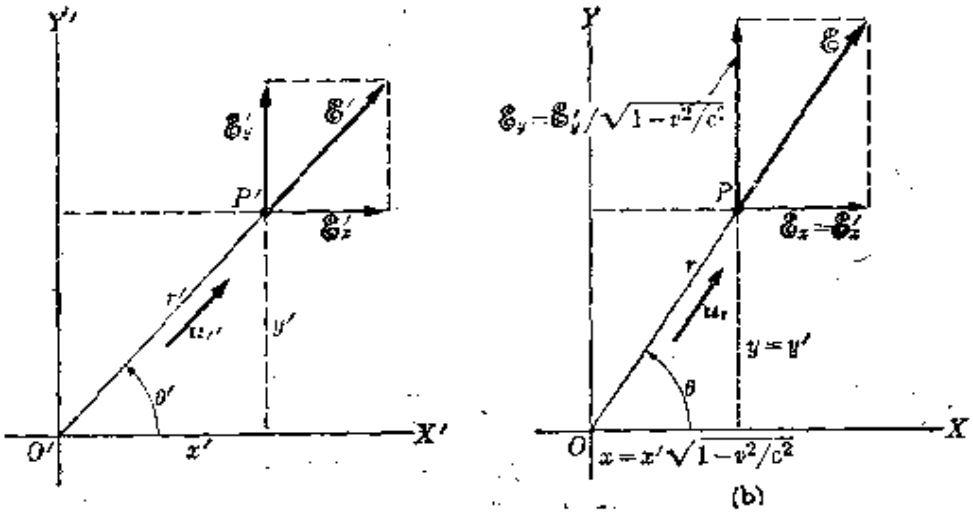


图 4-19　一个相对于 O' 静止并位于 O' 的电荷所产生的电场分量的相对论性变换.

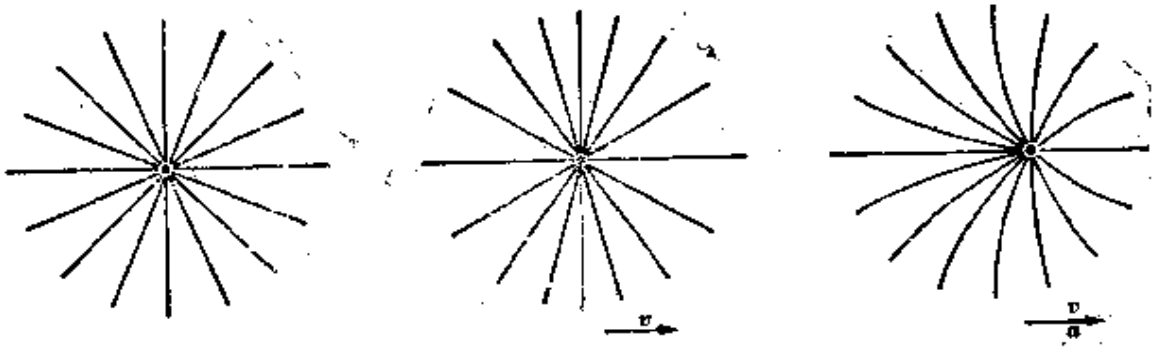
$$\mathscr{E}'=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r'^2}u_{r'}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}\boldsymbol{r}'.$$

观察者 O 观察 XY 平面内的同一点；但由于洛伦兹收缩，该点的 X 坐标看起来缩短到 $\sqrt{1-v^2/c^2}$ 倍，而 Y 坐标保持不变. 也就是说，$x=x'\sqrt{1-v^2/c^2}$；$y=y'$. 因此，OP 与 OX 所成的角 θ 不同于 $O'P'$ 与 $O'X'$ 所成的角 θ'（图 4-19）. 由方程(4.25)可知，O 在 P 测得的电场 $\mathscr{E}$，其 x 分量与 O' 测得的相同；但其 y 分量看起来大于 O' 测得的，前者等于后者的 $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ 倍. 结果是，$\mathscr{E}$ 与 X 轴所成的角 θ 和 r 与 X 轴所成的角相同. 因此，相对于观察者 O，电场也是径向的. 然而，相对于 O，电场不再是球对称的. 直接的计算(例题 4.12)表明

$$\mathscr{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{1-v^2/c^2}{[1-(v^2/c^2)\sin^2\theta]^{3/2}}u_r. \qquad (4.27)$$

式中包含 $\sin\theta$ 的因子使这电场与位矢 r 的方向有关. 因此，虽然

离电荷的距离相等，但在赤道面上($\theta=\pi/2$，垂直于电荷的运动方向)的电场大于沿电荷运动方向($\theta=0$)的电场．这个电场显著不同于静止电荷所产生的电场．静止电荷的电场是球对称的．这种情况在图 4-20(a) 和(b)中示出，图中电力线的间距表示电场的相对强度．



(a) 静止的或者速度非常低的电荷　(b) 高速运动的电荷　(c) 加速的电荷

图 4-20　静止电荷和运动电荷的电力线．

如果我们应用关系式 $\mathscr{B}=\boldsymbol{v}\times\mathscr{E}/c^2$(已证明它是普遍适用的)，并利用 $\mathscr{E}$ 的方程(4.27)，则可得出一个运动电荷的磁场为

$$\mathscr{B}=\frac{\mu_0 q}{4\pi r^2}\frac{1-v^2/c^2}{[1-(v^2/c^2)\sin^2\theta]^{3/2}}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}_r. \tag{4.28}$$

当 v 比 c 小很多时，上式化为磁场的非相对论性方程．应记住，方程(4.27)和(4.28)仅适用于作匀速运动的电荷．如果电荷被加速，则电场呈类似于图 4-20(c)所示的形状，其数学表达式更为复杂．

例题 4.12　一匀速运动电荷的电场．

解　由图 4-19(a)可以看出，$\mathscr{E}'$ 与 $O'X'$ 成一角 θ'，$\cos\theta'=x'/r'$，$\sin\theta'=y'/r'$．于是 $\mathscr{E}'$ 的分量为

$$\mathscr{E}'_x=\mathscr{E}'\cos\theta'=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x'}{r'^3},\quad \mathscr{E}'_y=\mathscr{E}'\sin\theta'=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y'}{r'^3}. \tag{4.29}$$

利用方程(4.25)和根据洛伦兹变换所得的结果 $x=x'\sqrt{1-v^2/c^2}$ 及 $y=y'$，可以把 O 所观察到的电场 $\mathscr{E}$ 的分量写作

$$\mathscr{E}_x=\mathscr{E}'_x=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{\sqrt{1-v^2/c^2}\,r'^3},$$

$$\mathscr{E}_y=\frac{\mathscr{E}'_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y}{\sqrt{1-v^2/c^2}\,r'^3}.$$

用矢量记号写出，则为

$$\mathscr{E}=\frac{qr}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{1-v^2/c^2}\,r'^3}. \tag{4.30}$$

上式表明，在 XYZ 坐标系中，电场 $\mathscr{E}$ 是沿径向的. 因为

$$r'^2=x'^2+y'^2=\frac{x^2}{1-v^2/c^2}+y^2=\frac{r^2-(v^2/c^2)y^2}{1-v^2/c^2},$$

$y^2=r^2\sin^2\theta$，所以

$$r'=\frac{r[1-(v^2/c^2)\sin^2\theta]^{1/2}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

如果利用上式消去方程(4.30)中的 r'，则电场变为

$$\mathscr{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\frac{(1-v^2/c^2)r}{[1-(v^2/c^2)\sin^2\theta]^{3/2}}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{1-v^2/c^2}{[1-(v^2/c^2)\sin^2\theta]^{3/2}}\boldsymbol{u}_r,$$

上式正是前面给出的结果.

4.8 两个运动电荷之间的相互作用

讨论磁相互作用的方法，与讨论引力相互作用和电相互作用所遵循的方法不同. 在后两种情况下，是从讨论两个粒子之间的相互作用开始，然后引入场的概念. 然而在本章中，则是首先根据作用在一个运动电荷上的力[方程(4.1)]，以操作的形式引入磁场的概念. 然后计算运动电荷所产生的磁场. 迄今为止，还没有关于两个运动电荷之间的电磁相互作用的表达式. 这种方法上的不同，其理由如下：在远小于光速的情况下，引力相互作用和电相互作用只与两个相互作用粒子之间的距离有关系；也就是说，这种相互作用是静力. 这些相互作用能够施力于静止粒子上，因而能够在稳恒的即与时间无关的条件下对这种物理情况进行讨论. 另一方面，磁相互作用与相互作用粒子的运动有关系，而与它们的相对

速度无关；也就是说，磁相互作用是一个与速度有关的力．在一个给定点，一个相对于观察者运动的电荷的磁场，不但与该电荷至观察者的距离有关系，而且与电荷速度有关系．但这距离是在变化着（因为这电荷是在运动），所以在一给定点，磁场（以及电场）是随时间而变化着的；也就是说，相对于这个观察者，运动电荷的磁场是与时间有关系的．

因此，在物理图象中出现一个新的要素，这就是相互作用的传播速度．一个可能的办法是假定粒子是超距地相互作用着，也就是说，如果电荷（图 4.21）以速度 v 运动着，则在某一时刻 t，q 在 A 点产生的电磁场，是当该电荷在时刻 t 处于位置 P 时（与 A 处的观察同时），周围空间中的物理情况的结果．换句话说，我们假定电磁相互作用的传播是瞬时的，亦即以无限大的速度传播．

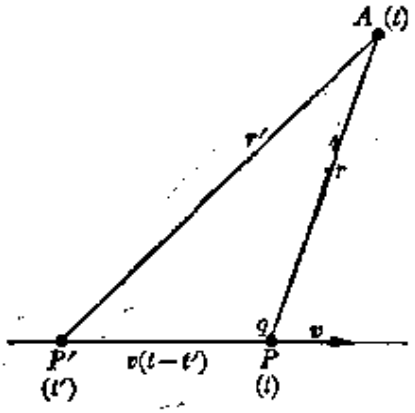


图 4-21　电磁场的有限传播速度所引起的推迟效应

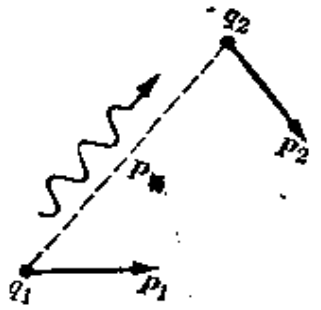


图　4-22

另一个合理的（也许是更可接受的）假定是，电磁相互作用是在相互作用粒子之间交换的某种"信号"的结果；并假定这信号以有限的速度 c 传播，因而需要一定的时间才能到达空间一特定点．如果这电荷是静止的，则这信号的有限传播速度是无关的，因为物理情况不随时间而变化．但是，对于一个运动的电荷，情况就不同了．在时刻 t，在 A 点观察到的场并不对应于这电荷在 P 点的同

时的位置，而对应于在时刻 t' 的较早的或推迟的位置 P'，这样，$t-t'$ 就是信号以速度 c 从 P' 传播到 A 所需的时间. 显然，$P'P=v(t-t')$.

在第八章中将证明，电磁相互作用确实是以有限速度 $c=1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ 传播的. 这个实验事实排除了超距作用；因此，在分析一个运动电荷所产生的电磁场时，必须采用上述第二种办法. 因为 c 的值很大，所以，如果粒子的运动速度不是非常快，则推迟效应可忽略不计. 因此，在第一章中讨论电荷的运动时，就不考虑推迟效应. 曾假定这些电荷的运动非常慢，因而 PP' 比 PA 小很多. 可以证明，一个运动电荷的电场和磁场的相对论性表达式(4.21)和(4.23)，已经包含了推迟效应. 对于两个作相对运动的质量之间的引力相互作用，应存在类似的推迟效应. 但是，迄今尚未观察到引力信号的传播速度.

我们考虑两个电荷 q_1 和 q_2 它们相对于一个惯性观察者 O 分别以速度 v_1 和 v_2 运动着. O 测得电荷 q_1 作用在电荷 q_2 上的力为 $\boldsymbol{F}_2=q_2(\mathscr{E}_1+\boldsymbol{v}_2\times\mathscr{B}_1)$，式中 $\mathscr{E}_1$ 和 $\mathscr{B}_1$ 是 q_1 在 q_2 处所产生的电场和磁场，是 O 测得的. 另一方面，O 测得电荷 q_2 作用在电荷 q_1 上的力为 $\boldsymbol{F}_1=q_1(\mathscr{E}_2+\boldsymbol{v}_1\times\mathscr{B}_2)$. 在一般情况下，$\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 这两个力具有不同的方向和大小. 因此，得出如下结论：

两个运动电荷之间的力，大小既不相等，方向也不相反.

换句话说，在有磁相互作用存在时，作用和反作用定律看来似乎是不成立的. 这个论断又意味着，对于由两个运动的带电粒子组成的系统而言，动量守恒定律、角动量守恒定律和能量守恒定律是不成立的. 如此重要的三条定律的这种表观的失效，是由于下述事实. 当把两个相互作用粒子的动量守恒定律写作 $\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2=$ 常数时，我们认为 $\boldsymbol{p}_1$ 和 $\boldsymbol{p}_2$ 是由 O 同时测得的，亦即相对于 O 是同时的. 然而，在相互作用是以有限速度传播的情况下，推迟效应要

求一个粒子在一给定时刻的动量变化率，与另一个粒子不在同一时刻而在较早时刻的动量变化率联系起来. 反之亦然. 因此，如果 $\boldsymbol{p}_1$ 和 $\boldsymbol{p}_2$ 是在同一时刻计值的，要期望 $\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2=$常数就是不合理的.

读者可能还记得，相互作用的结果可以描述为在两个粒子之间交换动量. 为了恢复动量守恒定律，就必须考虑在这两个粒子之间交换着的，而且在一给定时刻在它们之间以有限速度传播着的动量. 也就是说，必须考虑"飞行中的"动量. 对于电磁相互作用来说，这种动量是由电磁场携带的，并记作 $\boldsymbol{p}_{场}$(图 4-22). 因此，动量守恒定律要求

$$\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{p}_{场}=\text{常数}. \tag{4.31}$$

类似地，必须把一定的角动量和能量赋予电磁场，才能恢复这两个守恒定律. 在第十一章中，我们将讨论与电磁场相联系的动量、角动量和能量是怎样求出的.

例题 4.13 将两个电荷之间的磁相互作用与它们之间的电相互作用加以比较.

解 由于只要求知道数量级，所以我们将简化公式的写法. 例如，设电荷为 q 和 q'，则 q' 所产生的作用在 q 上的电力为 $q\mathscr{E}$. 根据方程(4.17)，q' 所产生的作用在 q 上的磁场的数量级为 $v'\mathscr{E}/c^2$. 根据方程(4.1)，作用在 q 上的磁力的数量级为 $qv(v'\mathscr{E}/c^2)=(vv'/c^2)q\mathscr{E}$. 因此，

$$\frac{\text{磁力}}{\text{电力}}\approx\frac{vv'}{c^2}.$$

如果电荷的速度比光速 c 小很多，则磁力比电力小很多，因而在许多情况下可忽略不计. 由此可见，在某种意义上，磁性是电磁相互作用的有限传播速度的结果. 例如，如果电荷的速度约为 $10^6\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ (相应于原子中电子的轨道速率)，则

$$\frac{\text{磁力}}{\text{电力}}\approx10^{-4}.$$

虽然磁力比电力小很多，但是在电动机和许多工程设备中却都利用磁力，其原因如下所述. 在正常情况下物质是电中性的，因此两个物体之间的净电力

为零. 例如，当两根导线并排地放置时，它们之间的净电力为零. 如果这两根导线作为一个整体而运动，则正、负电荷沿同一方向运动，所以每根导线中的电流为零，因而净磁力也为零. 这种运动不会在两根导线之间引起任何力. 但是，当一电势差施加于这两根导线上时，就会产生负电荷相对于正电荷的运动，因而在每一根导线中产生一个净电流和一个净磁场. 由于导体中自由电子的数目非常大，所以，虽然它们的速度不大，但它们的累积效应能产生强的磁场. 结果在两根导线之间产生一相当大的磁力.

虽然磁力比电力弱很多，但磁力与引力相互作用相比仍然非常强. 回顾关于四种力的相对强度的讨论，可知电相互作用比引力相互作用约强 10^{39} 倍. 因此，我们可以说：

$$\frac{\text{磁相互作用}}{\text{引力相互作用}} \approx 10^{39}\frac{vv'}{c^2}.$$

当速度与原子中轨道电子的速率差不多时，这个比值约等于 10^{31}.

习　题

4.1　速度为 $10^6 m\cdot s^{-1}$ 的电子进入一有磁场存在的区域中. (a) 如果电子沿一半径为 0.10m 的轨道运动，试求磁场的强度. (b) 求这个电子的角速度.

4.2　一个质子从静止开始加速而通过一 10^6V 的电势差，然后这质子被射入一强度为 2T 的匀强磁场中；轨道垂直于磁场. 试求(a) 质子的轨道半径，(b) 质子的角速度.

4.3　一个质子在一磁场中运动，其运动方向与磁场成 30° 角，其速度为 $10^7 m\cdot s^{-1}$. 磁场强度为 1.5T. 试计算：(a) 运动的螺旋线的半径. (b) 每转一周前进的距离，即螺旋线的螺距. (c) 在磁场中的转动频率.

4.4　一个氘核(氢的同位素，其质量非常接近于 2u)在一强度为1.5T的磁场中沿半径为 0.4m 的圆轨道运动. (a) 计算氘核的速率. (b) 确定这个氘核转半圈所需的时间. (c) 这氘核必须通过多大的电势差来加速，才能获得(a) 中算出的速度？

4.5　一个动能为 30MeV 的质子垂直于一个强度为 1.5T 的磁场而运动. 试求(a) 轨道半径，(b) 绕转周期. 注意，这质子能用经典的方法处理.

4.6　(a) 为了使一个 30GeV 的质子沿一半径为 100m 的轨道运动，需

要多大的磁场？(b) 求角速度. 注意，这种计算必须是相对论性的.

4.7 一个带一个电荷的 ^7Li 离子的质量为 1.16×10^{-26}kg. 这个离子通过一个 500V 的电势差被加速，然后进入一个强度为 0.4T 的磁场. 这离子垂直于磁场运动. 试求在这磁场中离子轨道的半径.

4.8 一个电子在 A 点 (图 4-23) 的速度 $v_0=10^7\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. (a) 为了使这电子沿一半圆形轨道从 A 运动到 B，试求磁场的大小和方向. (b) 试求电子从 A 运动到 B 所需的时间.

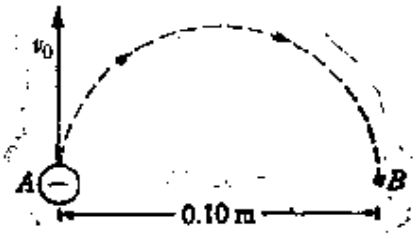


图 4-23

4.9 分离同位素 ^{235}U 和 ^{238}U 的方法之一，是根据它们在磁场中的轨道半径之差. 假定一次电离的 U 原子从一个公共源出发，并且垂直于一匀强磁场运动. 当 ^{235}U 束在一个 1.5T 磁场中的曲率半径为 0.5m 时，试求在下述两种情况下，这两个束的最大空间距离：(a) 如果这两种同位素的能量相同，(b) 如果它们的速度相同. 对于本题的目的来说，可以认为每一种同位素左上角的数目就是这种原子的质量(以 u 为单位).

4.10 一匀强磁场 $\mathscr{B}$ 沿 Y 轴方向，如图 4-24 所示. 对于图中所示的每一个方向，电荷 q 的瞬时速度都是 v，(这图形是一立方体)，试求作用于电荷 q 上的力的大小和方向.

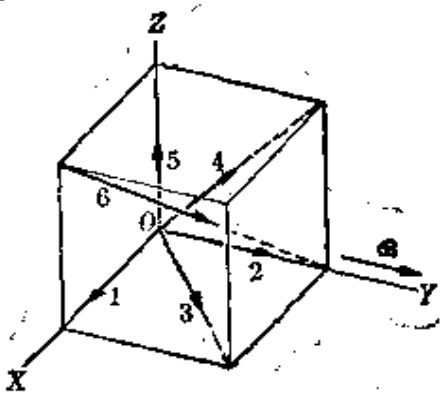


图 4-24

4.11 一个质量为 m，电荷为 q 的粒子，以速度 v_0 垂直于一匀强磁场运动. 试把这个粒子相对于其轨道中心的速度分量和坐标，表示为时间的函数.

4.12 对于一个其速度与磁场成一角 α 的粒子，重做习题 4.11.

4.13 一个粒子带有 4×10^{-9}C 的电荷. 当这个粒子以速度 $v_1=3\times10^4$

$m \cdot s^{-1}$，在 YZ 平面内 Y 轴上方与 Y 轴成 45° 角运动时，一个匀强磁场沿 X 轴作用一个力 F_1. 当这个粒子以速度 $v_2 = 2\times10^4 m \cdot s^{-1}$ 沿 X 轴运动时，它沿 Y 轴受到一个力 $F_2 = 4\times10^{-5}N$. 试求这个磁场的大小和方向. (见图 4-25.)

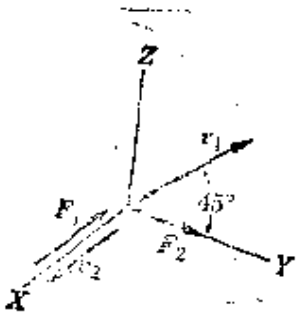


图 4-25

4.14 带电粒子被射入一个存在着交叉电场和磁场的区域，而且这两个场互相垂直. 入射粒子的速度垂直于这两个场的方向所决定的平面. 磁场强度为 0.1T. 电场是用一对带等值异号电荷的平行板产生的，两板间的距离为 0.02m. 当两板间的电势差为 300V 时，粒子无偏转. 试求粒子的速度.

4.15 (a) 一电子束在强度为 $3.4\times10^5 V \cdot m^{-1}$ 的电场和强度为 2×10^{-3} T 的磁场的同时作用之下(这两个场都垂直于电子束，而且彼此垂直)，不发生偏转，试求这电子束的速度. (b) 试用图解示出矢量 v，$\mathscr{E}$ 和 $\mathscr{B}$ 的相对取向.

4.16 一个粒子的质量为 5×10^{-4}kg，带有 2.5×10^{-8}C 的电荷. 这个粒子的水平初速度为 $6\times10^4 m \cdot s^{-1}$. 为了使这粒子沿水平方向运动，并抵消地球重力的作用，试求最小磁场的大小和方向.

4.17 在一台例如图 4-12 所示的质谱仪中，1000V 的电势差能使一次电离的 ^{24}Mg 离子沿一半径为 R 的轨道运动. (a) 如果 ^{25}Mg 离子通过同样的电势差被加速，试求 ^{25}Mg 的轨道半径. (b) 加上多大的电势差，才能使 ^{25}Mg 离子沿着具有同样半径 R 的轨道运动？(我们假定以 u 为单位时离子的质量与化学元素符号左上角的质量数相同.)

4.18 一台质谱仪的加速电压为 5keV，磁场强度为 10^{-3}T. (a) 计算离子的速度，看看是否需要利用相对论改正. (b) 求出锌的两种同位素 ^{68}Zn 和 ^{70}Zn 之间的距离. 这里所说的距离，系指 ^{68}Zn 离子和 ^{70}Zn 离子先被加速，而后绕转半圈之后，在照相乳胶板上出现的两个点之间的距离. 见图 4-12. [提示：不要求出各自的半径；而要写出一个直接求出这个距离的方程.]

4.19 在一台回旋加速器中，质子在刚要出射之前沿一半径为 0.4m 的圆周运动. 两个 D 形电极之间的交变电压的频率为 10^7Hz. 忽略相对论效应，试计算(a) 磁场，(b) 质子速度，(c) 质子能量，分别以 J 和 MeV 为单

位，(d) 设两个 D 形电极之间电压的峰值为 20KV，试求质子绕转的整圈的最小数目.

4.20 对于氘核(其质量为 2.014u)和 α 粒子(其质量为 4.003u)，重作习题 4.19.

4.21 在一加速质子的回旋加速器中，磁场强度为 1.5T. (a) 加在 D 形电极上的电压每秒钟应该反向多少次？(b) 回旋加速器的最大半径为 0.35m. 试问：质子的最大速度是多少？(c) 必须使质子通过多大的加速电压，才能使它得到最大的回旋加速器速度？

4.22 在一台回旋加速器中，恰在氘核从 D 形盒中射出之前，氘核沿一半径为 32.0cm 的圆周运动. 所加交变电压的频率为 10^7Hz. 试求：(a)磁场，(b) 氘核射出时的能量和(c)速率. 氘核的质量为 2.014u.

4.23 一支阴极射线管放在一匀强磁场 $\mathscr{B}$ 中，其磁力线平行于管轴. 设电子以速度 v 从电子枪中射出，当它们通过原点 O 时与管轴成一角 θ，因而它们的轨道为一螺旋线；试证明，(a) 电子将在时刻

$$t=2\pi m/\mathscr{B}q$$

再次与轴相切，(b) 证明切点的坐标为

$$x=2\pi mv\cos\theta/\mathscr{B}q,$$

(c) 证明，对于小 θ 值，穿过轴(或与轴相切)的点与 θ 无关.

4.24 习题 4.23 中的装置叫做磁透镜. (a) 为什么叫这个名字？(b) 通过原点时在管轴上方成 θ 角的电子的轨道，与在管轴下方成 θ 角的电子的轨道，有什么不同？

4.25 能量为 3MeV 的质子相对于一匀强磁场成一个小角度注入，这磁场的强度为 1T. 试问：这些质子将在多大距离处回到与轴的共同交点？

4.26 观察者 O' 相对于观察者 O 以速度 v 平行于共同的 X 轴而运动. 两个电荷 q_1 和 q_2 相对于 O' 是静止的，它们之间的距离为 r'，都放在 X 轴上(由 O' 测得的结果). (a) 求 O' 和 O 所记录的作用在每一电荷上的力. (b) 假定两个电荷都在 Y' 轴上，重做此题.

4.27 参看关于一个点电荷的电场的方程 (4.27)；求出一运动电荷在通过该电荷且垂直于其运动方向的平面上一点产生的电场，与它在运动方向上在相同距离处产生的电场之比. 考虑 v/c 等于下列值的情况：(a) 0，(b) 0.1，(c)0.5，(d) 0.9.

4.28 试计算一个运动电荷在通过该电荷且垂直于其运动方向的平面

上一点所产生的电场的相对论性的和非相对论性的值之比. 考虑 v/c 等于下列值的情况: (a) 0, (b) 0.1, (c) 0.5, (d) 0.9.

4.29 试计算一个运动电荷在通过该电荷且垂直于其运动方向的平面上一点所产生的磁场的相对论性的和非相对论性的值之比. 考虑 v/c 等于下列值的情况: (a) 0, (b) 0.1, (c) 0.5, (d) 0.9.

4.30 考虑沿两条直线平行路径(相距 10^{-1}m)运动的两个电子. (a)如果这两个电子以 10^6m·s^{-1} 的相同速度并排地运动, 试求一个实验室观察者所看到的它们之间的电力和磁力(假定10^6m·s^{-1}可以看作是非相对论效应). (b) 对于和电子一起运动的观察者来说, 这个力有多大? (c) 对于速度等于 2.4×10^8m·s^{-1} 的情况(这个速度是相对论性的), 重做上述问题.

较难的习题

4.31 两个动能相同、带电相等的粒子 A 和 B 进入一恒定磁场. 磁场和每个粒子的速度之间的角为 90°. 如果 A 的质量为 B 的四倍, 试求 A 的圆轨道半径与 B 的圆轨道半径之比.

4.32 一个带电粒子从静止开始加速, 通过一个电势差 V, 然后进入一个垂直于它的运动方向的匀强磁场, 并沿一半径为 R 的圆轨道运动. 如果电势差为 $V/3$, 试确定轨道的半径.

4.33 一真空室中的电子, 通过一个电势差被加速, 然后进入两个带电平行金属板之间的空间, 如图 4-26 所示. 两板之间的距离为 0.01m, 两板之间的电势差为 300V. (a) 如果电子进入两板之间的空间时它的速率为 6.0×10^6m·s^{-1}, 试问: 这电子通过多大的电势差 V_0 被加速? (b) 如果在两板之间还存在一恒定磁场, 其方向垂直于图面向下, 如图中所示, 试问: 磁场 $\mathscr{B}$ 必须等于多大, 才能使电子无偏转地在两板之间运动?

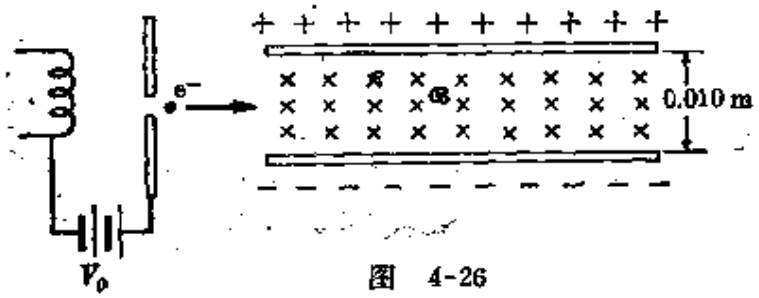


图 4-26

4.34 一些具有不同的非相对论性速率的电子, 在一个垂直于一匀强磁场 $\mathscr{B}$ 的平面内运动. 由于磁力的作用, 这些电子在半径不同的圆上运动. 试

证明，对于所有的电子，不论它们的速率如何，绕一整圈所需的时间是一样的。

4.35 在一质谱仪中，带有一个电荷的 ^{16}O 离子首先通过一电压 V 被加速到速率 v_0，然后它们进入一个具有匀强磁场 $\mathcal{B}$ 的区域。这磁场的方向垂直于图面向上，如图 4-27 所示。(a) 如果用带一个电荷的 ^{32}S 离子代替 ^{16}O 离子，那末对于同样的加速电压，它们的速率是多大？(b) 在(a)部分中，当用 ^{32}S 代替 ^{16}O 时，试确定，在这个磁场中，离子轨道的曲率半径改变多少？

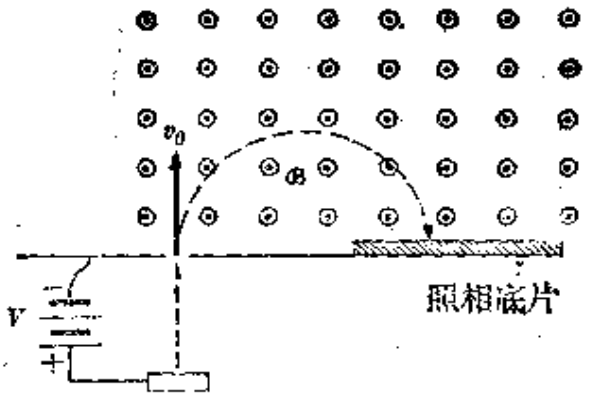


图 4-27

4.36 一个质量为 m、电荷的大小 q 为已知的离子，沿一条直线通过一匀强磁场 $\mathcal{B}$（其方向垂直于图面向上）和一匀强电场 $\mathcal{E}$（其方向在图面内朝顶部页边），如图 4-28(a)的区域 I 中的情况。这离子运动到区域 II 中，这里的磁场和区域 I 中相同，但电场为零。在区域 II 中，离子沿一圆轨道运动，如图中所示。(a) 在一张图上，如图 4-28(b)所示，标明在区域 II 的点 P_2 处作用在这离子上的力的方向。(b) 这离子带正电还是带负电？(c) 在一张图上，如图 4-28(c)所示，清楚标明，在区域 I 的点 P_1 处作用在这离子上的力。(d) 求出在点 P_1 处这离子的速率 v 的表达式（作为 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{B}$ 的函数）。

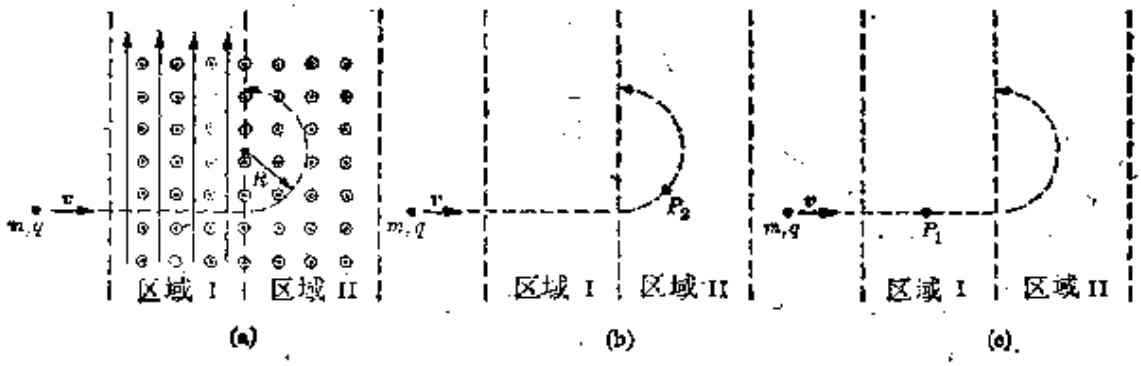


图 4-28

(e) 从牛顿定律出发，导出这离子的质量m的表达式(作为$\mathscr{B}$、s、q和R的函数).

4.37 一个电子从静止开始，通过两块无限大平行板P_1和P_2之间的电势差(其大小为V)而被加速. 然后，这个电子进入P_2右方的存在着匀强磁场$\mathscr{B}$的区域. 这个磁场的方向垂直于图面朝下(图 4-29). (a) 在一张图上清楚标明两板之间的电场. (b) 确定在板P_2处，这个电子的速率的表达式，作为V、电子的质量和电荷的函数. (c) 详细描述这个电子通过这个磁场的运动情况. (d) 如果这个磁场保持不变，那末，我们必须怎样做，才能使这个电子在P_2右方沿一条直线运动？

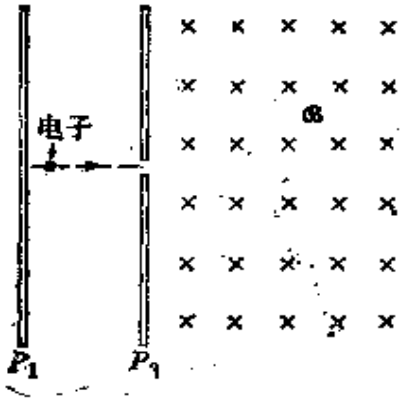


图 4-29

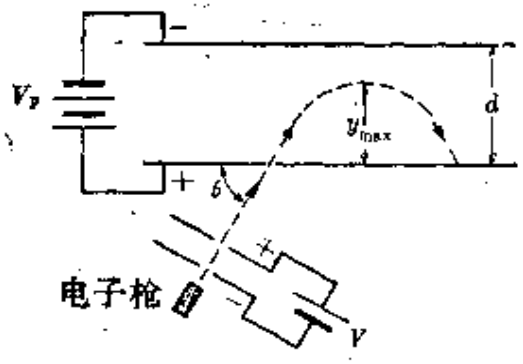


图 4-30

4.38 电子从静止开始，在两块平行板之间(其电压为V_g)被加速. 然后电子进入另外两块平行板(其间距为d，电压为V_p)之间的区域. 这些电子的射入方向与板面成θ角，如图 4-30 所示. 假定整个装置放在真空中，并假定$V_p > V_g$. 把所有的结果都表示为d、V_g、V_p、θ、e(电子电荷的大小)和m_e(电子的质量)的函数. (a) 求出电子离开电子枪的速率v_e的方程. (b) 求出电子在下板上方通过的最大距离y_m. 假定在上面的两块板之间的区域中引入一个磁场(其方向垂直于图面向下). (c) 这对于电子撞击下板的速率有什么影响？试说明之. (d) 在一张图上画出有磁场存在时，一个电子可能沿着运动的轨道. 定性地说明新轨道和旧轨道之间的差别.

4.39 在下述四种情况下，确定作用在一个质子上的力的大小和方向. 定性地描述每一种情况下质子的路径，并在按图 4-31 复制的一张图上，概略画出质子的路径. 重力忽略不计. (a) 一个初速为零的质子在一强度为10^4 $N \cdot C^{-1}$的电场中的P点释放，该电场的方向如图 4-31(a)所示. (b) 在与

(a)部分相同的电场中，质子在P点的速度$v=10^6\mathrm{m\cdot s^{-1}}$，方向朝右，如图4-31(b)所示．(c) 在一强度为$10^{-1}\mathrm{T}$、方向垂直于图面向下的磁场$\mathscr{B}$中的P点，将质子从静止释放，如图4-31(c)所示．(d) 在与(c)部分相同的磁场中，质子在P点的速度$v=10^6\mathrm{m\cdot s^{-1}}$，方向朝右，如图4-31(d)所示．

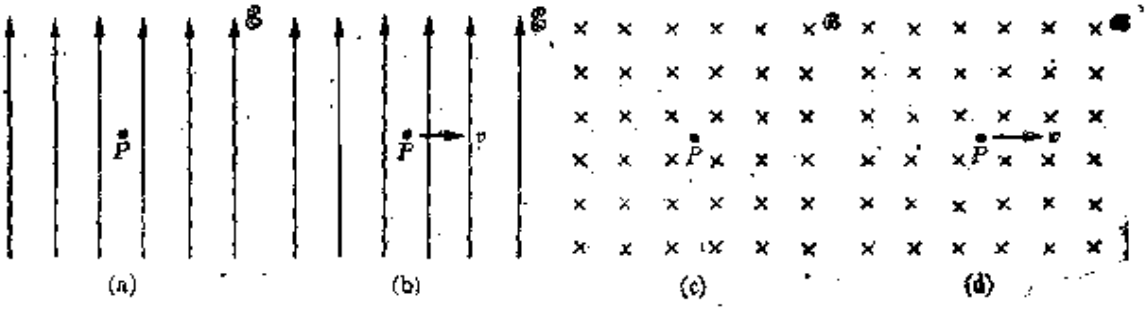


图 4-31

4.40 在一空间区域中存在一匀强磁场．为了确定这个磁场的方向，做了两个实验，所得结果如下．实验I：一个以瞬时速度v_1朝右运动的质子受到一个力F_1，其方向垂直于图面朝下，如图4-32(a)所示．实验II：一个以速度v_2垂直于图面朝上运动的质子，受到一个在图面内的力F_2，如图4-32(b)所示．(a) 标明磁场的方向，并表明你的选择能够说明两个实验中力的方向．(b) 在哪个实验中，质子沿圆形轨道运动？说明你的选择，并确定这个圆轨道的半径(用已知的力和质子速度、质子质量来表示)．(c) 定性地描述在另一个实验中质子的运动情况．

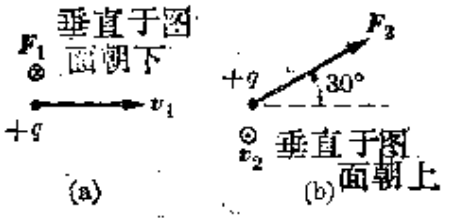


图 4-32

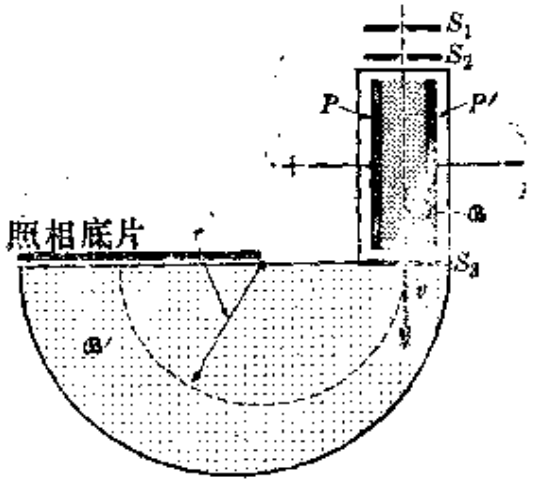


图 4-33

4.41 一个质子的动能为30GeV，垂直于一个强度为1.5T的磁场运动．(a) 确定轨道的半径和绕转周期．注意，必须用相对论方法来处理这个质子．图4-12所示的费普斯特质谱仪利用一个磁场来分离具有相同能量，但有不同质量的离子．另外一种装置叫做贝恩布里奇质谱仪(图4-33)，它

能分离具有相同速度的离子. 离子穿过狭缝后通过一个速度选择器. 后者是由带电板 P 和 P' 产生的电场和一个垂直于该电场的磁场 $\mathscr{B}$ 构成的. 那些无偏转地通过交叉场的离子，进入存在着第二个磁场 $\mathscr{B}'$ 的区域，并沿圆轨道运动. 一张照相底片 P 记录下到达的离子. (b) 证明 $q/m=s/r\mathscr{B}\mathscr{B}'$.

4.42 在一台贝恩布里奇质谱仪中，速度选择器两板之间的电场为 $1.2\times10^{5}\mathrm{V\cdot m^{-1}}$，两个磁场均为 0.6T. 一束带一个电荷的氖离子在这个磁场中沿半径为 $7.28\times10^{-2}\mathrm{m}$ 的圆轨道运动. 试求这个氖同位素的质量.

4.43 假定图 4-33 中两块板 P 和 P' 之间的电场强度为 $1.5\times10^{4}\mathrm{V\cdot m^{-1}}$，两个磁场均为 0.5T. 如果离子源中包含三种镁同位素：$^{24}\mathrm{Mg}$，$^{25}\mathrm{Mg}$ 和 $^{26}\mathrm{Mg}$，而且这些离子都是带一个电荷的，试求这三种同位素在照相底片上形成的线条之间的距离. 假定这些同位素的原子质量(以 u 为单位)等于它们的化学元素符号左上角的质量数.

4.44 在一台例如图 4-34 所示的质谱仪中，很难保证所有的粒子都垂直地到达狭缝. (a) 如果 R 是垂直到达狭缝的粒子的轨道半径，试证明，与狭缝法线成一小角 θ 射入狭缝的那些粒子，将到达照相底片上这样一点，该点至垂直于狭缝射入的粒子到达底片上的点的距离为 $\rho(\rho$ 约等 $R\theta^{2})$. (b) 要使这个距离小于 $2R$ 的 0.1%，θ 的值应该多大？(本题所描述的情况叫做磁聚焦.)

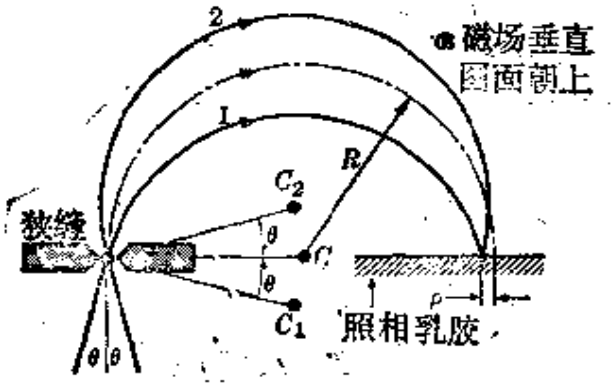


图 4-34

4.45 在图 4-35 所示的质谱仪中，离子被 S 和 A 之间的电势差所加速，然后射入一个 60° 角的扇形磁场中；离子离开这磁场之后到达一张照相底片上. (a) 证明：

$$\frac{q}{m}=\frac{32V}{\mathscr{B}^{2}D^{2}}.$$

(b) 当入射方向有一小的偏转时，讨论 C 的位置的变化.

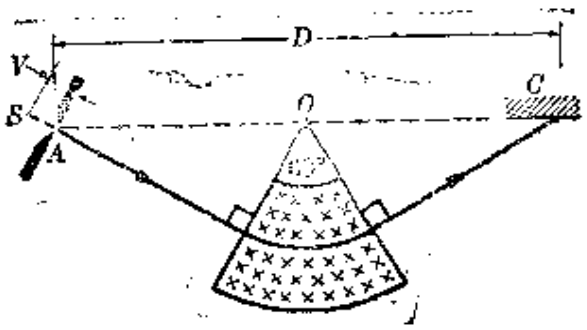


图 4-35

4.46 一个电荷为 q、速度为 v_0(方向沿 X 轴) 的粒子进入一个有磁场(方向沿 Y 轴)存在的区域中. 试证明,如果速度 v_0 足够大,因而它的方向变化可以忽略不计,而且磁力可以看作是恒定的,平行于 Z 轴,则这个粒子的路径的方程为

$$z=\left(\frac{q\mathscr{B}}{2v_0m}\right)x^2.$$

4.47 一个电荷为 q、速度为 v_0(方向沿 X 轴)的粒子,进入一个存在着具有相同方向(沿 Y 轴)的匀强电场和磁场的区域(图 4-36). 假定速度 v_0 足够大,因而它的方向变化可以忽略不计,而且磁力可以看作是恒定的,平行于 Z 轴,试证明: (a) 在时刻 t,粒子的坐标为

$$x=v_0t,\quad y=\frac{1}{2}\left(\frac{q\mathscr{E}}{m}\right)t^2,\quad z=\frac{1}{2}\left(\frac{qv_0\mathscr{B}}{m}\right)t^2.$$

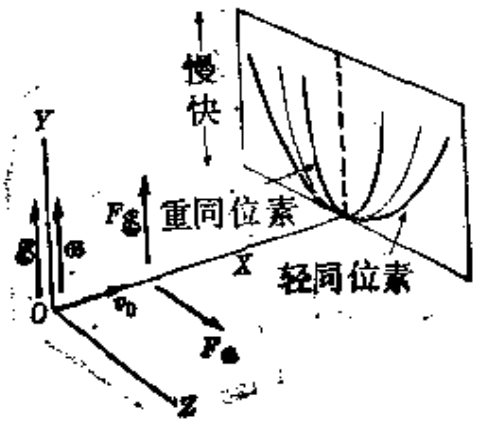


图 4-36

(b) 在这些方程中消去 t 和 v_0,则得下列关系式:

$$\frac{z^2}{y}=\frac{1}{2}\left(\frac{\mathscr{B}^2}{\mathscr{E}}\right)\left(\frac{q}{m}\right)x^2.$$

这个结果被应用于最早的质谱之一,如果在图 4-36 中,垂直于 X 轴插入一

个屏，则具有相同比值 q/m 的所有粒子，不管它们的初速度如何，都将落在一条给定的抛物线上. 因此，对于入射束中每一种同位素，都有一条抛物线.

4.48 一个电荷为 q、质量为 m 的粒子，在相距为 h 的两块平行带电板之间运动. 在这两块平行板之间施加一匀强磁场，其方向平行于板面且沿 Z 轴(图 4-37). 开始时，这个粒子在下板上静止. (a) 写出这个粒子的运动方程. (b) 证明，在至下板的距离为 y 处，

$$v_x=\left(\frac{q}{m}\right)\mathscr{E}y.$$

(c) 证明，这速度的大小由下式给出：

$$v^2=2(q/m)\mathscr{E}y.$$

(d) 根据前面的两个结果，证明

$$v_y=\left(\frac{q}{m}\right)^{\frac{1}{2}}\left[2\mathscr{E}y-\left(\frac{q}{m}\right)\mathscr{B}^2y^2\right]^{\frac{1}{2}};$$

并且证明，(e) 如果 $\mathscr{E}=\frac{1}{2}(q/m)\mathscr{B}^2h$，则这个粒子刚好不能达到上板.

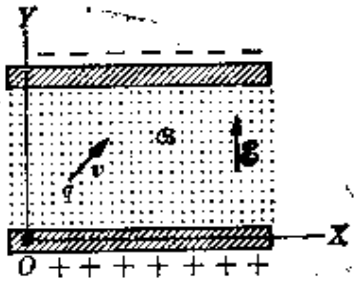


图 4-37

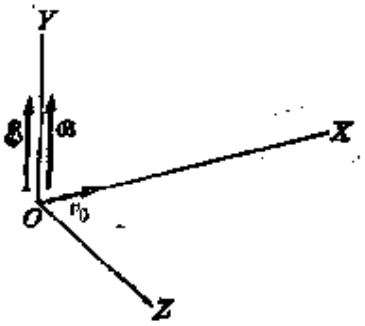


图 4-38

4.49 在一个存在着方向相同的匀强电场和磁场的区域中，沿垂直于两个场的方向射入一个电荷为 q、质量为 m、初速为 v_0 的粒子. (a) 在直角坐标系中，写出运动方程. (b) 通过直接代入运动方程中，证明在时刻 t 速度的分量为

$$v_x=v_0\cos(q\mathscr{B}/m)t,$$
$$v_y=(q\mathscr{E}/m)t,$$
$$v_z=\sin(q\mathscr{B}/m)t.$$

(c) 根据前面的结果，求出这个粒子在时刻 t 的坐标. (d) 画出路径的图. (e) 如果这个粒子的初速度平行于两个场，它的运动将是怎样的？[提示：对于给出的答案，X 轴是沿 v_0 的方向，Y 轴是沿两个场的共同方向(图 4-38).]

4.50 在一个区域中存在着互相垂直的匀强电场和磁场. 一个粒子以速度 v_0 平行于磁场射入. 在直角坐标系中，(a) 写出这个粒子的运动方程. (b) 通过直接代入，证明在时刻 t 速度的分量为

$$v_y=(\mathscr{E}/\mathscr{B})\sin(q\mathscr{B}/m)t,$$

$$v_x=-(\mathscr{E}/\mathscr{B})[1-\cos(q\mathscr{B}/m)t].$$

(c) 由前面的结果求出这个粒子在时刻 t 的坐标. (d) 画出路径的图. [提示：磁场沿 X 轴，电场沿 Y 轴.]

4.51 (a) 对于一个其初速度平行于电场的粒子，解习题 4.50. (b) 证明速度的分量是

$$v_x=0$$

$$v_y=v_0\cos(q\mathscr{B}/m)t+(\mathscr{E}/\mathscr{B})\sin(q\mathscr{B}/m)t,$$

$$v_z=-(\mathscr{E}/\mathscr{B})[1-\cos(q\mathscr{B}/m)t]-v_0\sin(q\mathscr{B}/m)t.$$

4.52 (a) 对于一个其初速度垂直于两个场的粒子，解习题 4.50. (b) 证明速度的分量为

$$v_x=0$$

$$v_y=(\mathscr{E}/\mathscr{B}+v_0)\sin(q\mathscr{B}/m)t,$$

$$v_z=-(\mathscr{E}/\mathscr{B})+(\mathscr{E}/\mathscr{B}+v_0)\cos(q\mathscr{B}/m)t.$$

(c) 证明，为了使粒子无偏转地通过这个场，必须有 $v_0=-\mathscr{E}/\mathscr{B}$. (d) 把这个结果与第 4.4 节的陈述加以比较.

4.53 (a) 参看习题 4.50，证明：当粒子的初速度有任意方向时，在时刻 t 速度的分量为

$$v_x=v_{0x},$$

$$v_y=(\mathscr{E}/\mathscr{B}+v_{0z})\sin(q\mathscr{B}/m)t+v_{0y}\cos(q\mathscr{B}/m)t,$$

$$v_z=-(\mathscr{E}/\mathscr{B})+(\mathscr{E}/\mathscr{B}+v_{0z})\cos(q\mathscr{B}/m)t-v_{0y}\sin(q\mathscr{B}/m)t.$$

(b) 通过积分求出粒子的坐标，并讨论粒子的路径. (c) 将所得结果与习题 4.51 和 4.52 的结果加以比较.

4.54 参看习题 4.49，(a) 证明，当 $(q\mathscr{B}/m)t\ll 1$ 时，这粒子的坐标可表示为

$$x=v_0t,\quad y=\left(\frac{q\mathscr{E}}{2m}\right)t^2,\quad z=\left(\frac{v_0q\mathscr{B}}{2m}\right)t^2,$$

上面的结果与习题 4.47 的结果一致.

4.55 一个能量为 30GeV 的质子，在至一个离子的距离为 10^{-7}m 处通

过. 这个质子必须用相对论的方法处理. (a) 求出当这个离子所在处的电场，等于质子在它最接近离子的距离处的电场的 50% 时，角 α 的值. (b) 估算这个离子所受冲击的时间，及其动量的变化，可以认为这主要是在(a)中求出的 α 角之内电场作用的结果. 如果通过的粒子不是质子，而是具有同样能量的电子，再做此题. (见图 4-39.)

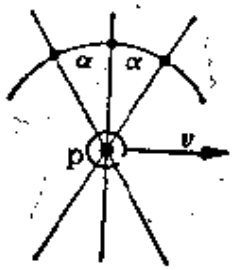


图 4-39

4.56 利用一个运动电荷的磁场的相对论性表达式(4.28)，求出一直线电流的磁场的表达式.

4.57 利用力的相对论性变换的一般规则，求出电磁场的相对论性变换，即方程(4.21)和(4.23).

4.58 利用方程(4.21)和(4.23)，证明量 $\mathscr{E}\cdot\mathscr{B}$ 和 $(\mathscr{E}^2-\mathscr{B}^2)$ 相对于洛伦兹变换是不变的.

4.59 一个电荷为 q、质量为 m 的粒子，在一个存在着电场 $\mathscr{E}$ 和磁场 $\mathscr{B}$ 的区域内运动. (a) 证明，如果这个粒子的运动是相对于一个以这个粒子的拉莫尔频率 ($\omega_L=-q\mathscr{B}/2m$，见方程 4.7) 转动的参照系，则它的运动方程变为

$$m\alpha'=q\left[\mathscr{E}+\left(\frac{m}{q}\right)\alpha_L\times(\omega_L\times r)\right].$$

(b) 估算一个电子的 ω_L 的值，并证实上式中最后一项可忽略不计. 在此近似下，这个粒子相对于转动参照系的运动方程变为 $m\alpha'=q\mathscr{E}$. 把这个结果与例题 4.10 的结果加以比较，就可看出如何消除磁场的效应. (提示：相对于转动参照系写出这个粒子的加速度和速度的表达式.)

第五章　磁场和电流

5.1 引　　论

虽然前一章的讨论对磁场作用于一个运动电荷上的力和运动电荷所产生的磁场进行了分析，但是，从历史上看，电磁学则是按照完全不同的方式发展的. 如前面所述，丹麦物理学家、哥本哈根大学教授奥斯特(HansC. Oersted,1770—1851)，在 1819 年发现电流对磁体的作用力；从而证明电流能产生磁场. 奥斯特把一根直线形导体放在一个罗盘针的正上方，而且使它平行于罗盘针. 使他大吃一惊的是，他观察到，当导体中有电流通过时，罗盘针就转向，并且处在垂直于电流的方向上. 在奥斯特 1820 年发表了他的结果之后，另外一些科学家立即开始研究磁场和电流之间的相互作用. 在早期的研究者当中，有安培(A. M. Ampere,1775—1836)和拉普拉斯(P. Laplace，1749—1827)，这两位法国科学家提出了电流之间的磁相互作用的定量理论，并且提出了迄今仍在使用的术语. 直到十九世纪末，才建立起磁场和运动电荷之间的关系，其中一部分工作是美国物理学家罗兰(R. A. Rowland,1848—1901)在 1878 年所做的实验.

5.2 作用在电流上的磁力

电流是在真空中或者通过一导电媒质运动的电荷流. 电流强度定义为单位时间内通一个导体截面的电荷. 我们考虑一个导体截面，电荷为 q 的粒子通过这个截面以速度 v 运动. 如果每单位体积中有 n 个粒子，则每单位时间通过单位面积的粒子的总数为

nv；电流密度定义为每单位时间通过单位面积的电荷，所以电流密度是下列矢量：

$$\boldsymbol{j}=nq\boldsymbol{v}. \tag{5.1}$$

如果 S 是这个导体的横截面，其方向垂直于 $\boldsymbol{j}$，则电流为下列标量：

$$I=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{S}=nqvS. \tag{5.2}$$

现在假设这导体是在一个磁场中．作用在每个电荷上的力为 $\boldsymbol{F}=q(\boldsymbol{v}\times\mathscr{B})$；由于每单位体积中有 n 个粒子，所以作用在每单位体积上的力 $\boldsymbol{f}$ 为

$$\boldsymbol{f}=nq\boldsymbol{v}\times\mathscr{B}=\boldsymbol{j}\times\mathscr{B}. \tag{5.3}$$

作用在媒质的一个小体积 dV 上的总力为 $d\boldsymbol{F}=\boldsymbol{f}dV=\boldsymbol{j}\times\mathscr{B}dV$，将此式对整个体积积分，则得作用在一个有限体积上的总力．即

$$\boldsymbol{F}=\int_{\text{体积}}\boldsymbol{j}\times\mathscr{B}\,dV. \tag{5.4}$$

现在考虑沿一细丝流动的电流．在这个情况下，体积元 dV 为 Sdl（图 5-1），因此，方程(5.4)给出

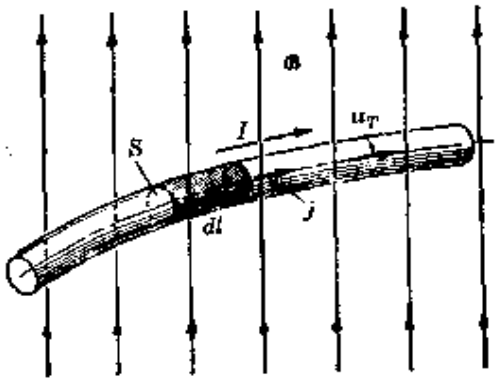


图 5-1

$$\boldsymbol{F}=\int_{\text{细丝}}\boldsymbol{j}\times\mathscr{B}Sdl.$$

现在 $\boldsymbol{j}=j\boldsymbol{u}_T$，式中 $\boldsymbol{u}_T$ 是与细丝轴线相切的单位矢量．于是得

出

$$F=\int(ju_T)\times\mathscr{B}Sdl=\int(jS)u_T\times\mathscr{B}dl. \tag{5.5}$$

然而，$jS=I$；由于电荷守恒，所以导线上一切点的电流都相同.于是，作用在一载流导线上的力的方程(5.5)变为

$$F=I\int u_T\times\mathscr{B}dl. \tag{5.6}$$

把不同形状的导体放在磁场中，并测量作用在导体上的力，能够证实上面的结果.

我们考虑一根放在匀强磁场$\mathscr{B}$中的直线形导体(图 5-2). 在这种情况下，u_T 和$\mathscr{B}$都是恒定的，因而方程(5.6)变为

$$F=Iu_T\times\mathscr{B}\int dl.$$

设 $L=\int dl$ 为这根直线形导体的长度，则有

$$F=ILu_T\times\mathscr{B}. \tag{5.7}$$

因此，这个导体受到一个垂直于其本身和磁场的力. 这就是电动机的工作原理. 如果 θ 是导体与磁场之间的角，我们就可以把力 F 的大小写作

$$F=I\mathscr{B}L\sin\theta. \tag{5.8}$$

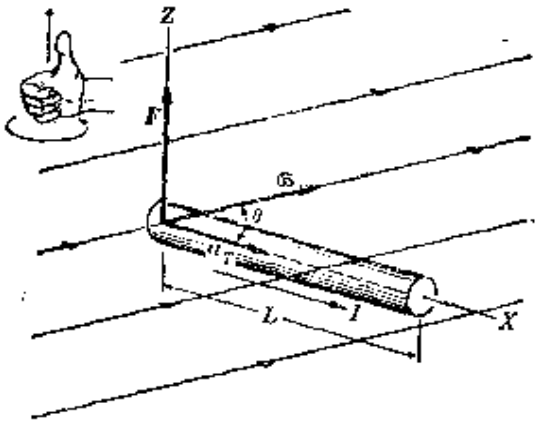


图 5-2　电流、磁场和作用于载流导体上的磁力之间的关系.
这个磁力垂直于 u_T 和$\mathscr{B}$所规定的平面.

如果导体平行于磁场($\theta=0$)，则此力为零. 当导体垂直于磁场时($\theta=\pi/2$)，此力有最大值. 此力的方向可以应用矢积的右手定则求出，如图 5-2 所示.

5.3 作用在一闭合电流上的磁转矩

磁场作用在一个闭合电流上的力的转矩，能够根据方程(5.7)或(5.8)计算出来. 为简单起见，我们首先考虑一个矩形电路中的电流. 这个电路如此放置，以使电路平面的法线 $\boldsymbol{u}_N$(它的取向可利用右手定则根据电流的方向来确定)与磁场$\mathscr{B}$成一个角 θ，而这电路的两条侧边则垂直于磁场(图 5-3). 作用在边 L' 上的力 $\boldsymbol{F}'$ 的大小相等(都等于 $I\mathscr{B}L\sin\theta$)，而方向相反. 力 $\boldsymbol{F}'$ 趋向于使电路变形，但不产生转矩. 作用在 L 边上的力(其大小为 $F=I\mathscr{B}L$)构成一个力偶，其力臂为 $L'\sin\theta$. 因此，力 $\boldsymbol{F}$ 在这电路上产生一个转矩；此转矩的大小为

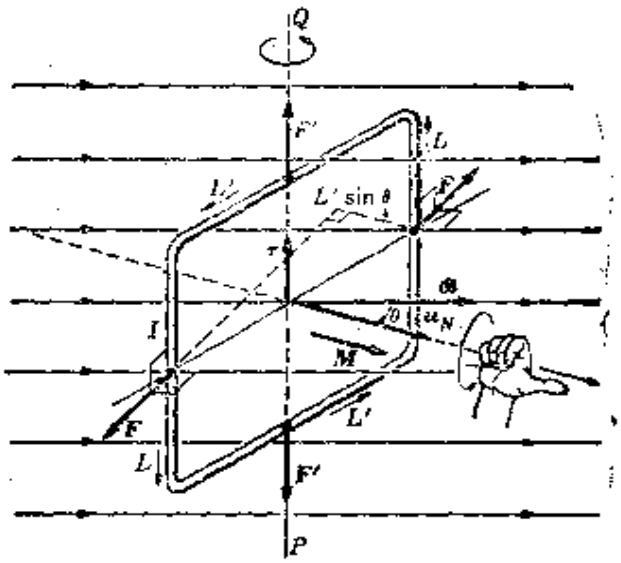


图 5-3 作用在置于一磁场中的矩形电路上的磁转矩. 当电路平面垂直于磁场时，转矩等于零.

$$\tau=(I\mathscr{B}L)(L'\sin\theta),$$

它趋向于使这回路的平面垂直于磁场. 然而，$LL'=S$，式中 S 为

这电路的面积. 因此，$\tau=(IS)\mathscr{B}\sin\theta$. 这个转矩的方向垂直于力偶的平面；也就是说，转矩的方向沿图 5-3 中的直线 PQ. 我们定义一个垂直于电路平面的矢量

$$\boldsymbol{M}=I\boldsymbol{S}\boldsymbol{u}_N, \tag{5.9}$$

因此，转矩 τ 可以写作

$$\tau=M\mathscr{B}\sin\theta, \tag{5.10}$$

或者写作矢量形式

$$\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{\mathscr{B}}. \tag{5.11}$$

在数学形式上，方程(5.11)与外电场作用在一个电偶极子上的转矩的方程(1.38)相似. 方程(5.9)所定义的量 $\boldsymbol{M}$，与方程(1.37)中的量 $\boldsymbol{p}$ 相当，叫做这个电路回路的磁偶极矩. 由方程(5.9)可以看出，$\boldsymbol{M}$的方向按照右手定则确定，如图 5-3 所示.

求一个电流在磁场中的能量时，所用的推理与在第 1.10 节中对于电偶极子推导方程(1.37)和(1.38)的关系时，所用的推理相反. 于是得出这个电流回路在磁场$\boldsymbol{\mathscr{B}}$中的能量为

$$E_{能}=-M\mathscr{B}\cos\theta=-\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{\mathscr{B}}. \tag{5.12}$$

虽然方程(5.11)和(5.12)是对于一个在匀强磁场中具有特殊取向的矩形电流推导出来的，但是更复杂的数学讨论表明，这些方程是普遍适用的. 例如，我们考虑一个面积为 S，具有任意形状的小电流回路(图 5-4). 这个电流回路的磁偶极矩 $\boldsymbol{M}$ 仍由方程(5.9)给出；当这个电流回路放在磁场中时，转矩和势能分别由方程(5.11)和(5.12)给出.

根据方程(5.12)，磁矩的单位通常表示为焦耳/特斯拉(J·T^{-1}). 用基本单位表示时，$J\cdot T^{-1}$ 就是 $m^2\cdot s^{-1}\cdot C$，这和方程(5.9)中的定义一致.

例题 5.1 测量电流的仪器：电流计.

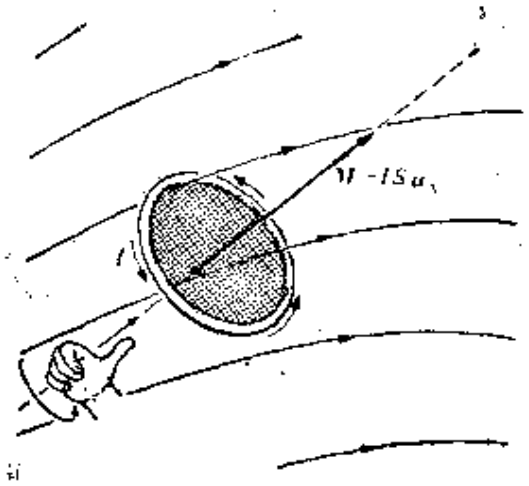


图 5-4　一个电流回路的磁偶极矩与电流方向之间的关系.

解　图 5-5 中示出电流计的一种简单设计. 被测电流通过悬挂在一个磁体的两极之间的线圈. (在某些情况下，线圈绕在一个铁圆柱体 C 上.) 磁

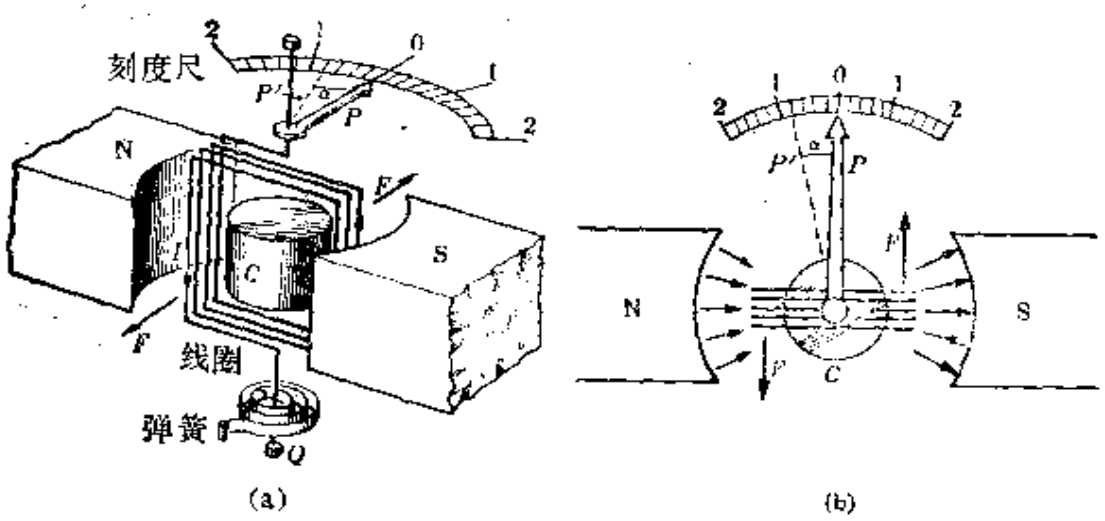


图 5-5　(a) 圈动电流计的基本部件.

(b) 图(a)中所示电流计的顶视图.

场对线圈作用一个转矩，使它转过一个角度. 在这种情况下，我们能够求出这个转角与通过矩形回路的电流之间的关系. 设 S 为线圈面积. 磁场所产生的转矩趋向于使这个线圈处于垂直于磁场的位置上，从而使弹簧 Q 扭转. 当磁转矩与弹簧所引起的弹性转矩 $k\alpha$(式中 k 为这个弹簧的弹性常数)平衡时，这个线圈转过一个角 α，处于平衡位置. 转角 α 由固定在线圈上的指针指示. 磁体的极面做成图中所示的形状，以使极面和铁圆柱 C 之间的磁场是径向的，如图 5-5(b)中的顶视图所示. 在此情况下，$\mathfrak{M}$ 总是处在电路的平面

内，因此，方程(5.10)中的角 $\theta=\pi/2$，因而 $\sin\theta=1$. 于是转矩由 $\tau=IS\mathscr{B}$ 给出，因为 $M=IS$. 平衡时，磁场所产生的转矩与弹簧扭转所产生的转矩平衡，即 $IS\mathscr{B}=k\alpha$，由此得出 $I=k\alpha/S\mathscr{B}$. 如果 k、S 和 $\mathscr{B}$ 已知，则此方程给出电流 I 作为角 α 的函数. 通常已将刻度尺校准，因而能够按照适当的单位直接读出 I 的值.

5.4 闭合电流回路产生的磁场

磁场的存在是根据磁场作用在运动电荷上的力而知道的. 此外，还在第 4.5 节中看到，运动电荷产生磁场. 英国科学家法拉第 (M. Faraday, 1791—1867) 在读了奥斯特 1820 年发表的那篇论文之后，对磁性极感兴趣. 做了一些实验之后，法拉第得出结论：电流所产生的磁力线是闭合的，环绕着电流的. 进行这种实验时，可以把一小罗盘针放在电流附近不同位置上. 这小罗盘针趋向于处在既垂直于电流的方向，又垂直于从导线至罗盘的径向方向的位置上.

经过若干年，进行了许多实验之后，求出了一个计算任意形状的闭合电流回路所产生的磁场的一般表达式，即

$$\mathscr{B}=K_m I\oint\frac{\boldsymbol{u}_T\times\boldsymbol{u}_r}{r^2}dl. \tag{5.13}$$

上式叫做安培-拉普拉斯定律. 上式中所有符号的意义在图 5-6

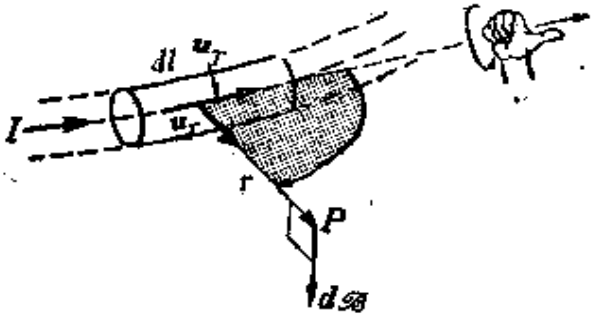


图 5-6 说明安培-拉普拉斯定律中各个符号的意义的图. 电流回路的小段 dl 对点 P 的磁场有贡献. 这个贡献垂直于 u_T 和 u_r 规定的平面.

中示出. 上式中的积分遍及整个闭合回路, 因此使用符号$\oint$, K_m是一个常数, 用SI单位时, K_m的值为$10^{-7}\mathrm{T\cdot m\cdot A^{-1}}$或$\mathrm{m\cdot kg\cdot C^{-2}}$,如在第4.5节中已指出的. 注意, 当$r$和$l$以m为单位时, 方程(5.13)中的积分的单位是$\mathrm{m^{-1}}$. 因此,

$$\mathscr{B}=10^{-7}I\oint\frac{\boldsymbol{u}_T\times\boldsymbol{u}_r}{r^2}dl. \tag{5.14}$$

在第4.5节中还提到,通常是把K_m写作$K_m=\mu_0/4\pi$, 式中μ_0是真空的磁导率. 于是安培-拉普拉斯定律的方程变为

$$\mathscr{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}I\oint\frac{\boldsymbol{u}_T\times\boldsymbol{u}_r}{r^2}dl. \tag{5.15}$$

例题5.2 运动电荷的磁场.

解 在第4.5节中曾讲过, 一个运动电荷产生一个磁场. 我们现在要证明,运动电荷的磁场的表达式是和电流的磁场的表达式一致的. 方程(5.15)所给出的电流的磁场可以写作

$$\mathscr{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}I\oint\frac{\boldsymbol{u}_T\times\boldsymbol{u}_r}{r^2}dl=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint\frac{(Idl\boldsymbol{u}_T)\times\boldsymbol{u}_r}{r^2}.$$

回顾方程(5.1)和(5.2), 以及$dV=Sdl$, $j=j\boldsymbol{u}_T=nq\boldsymbol{v}$; 于是上面积分中括号内的项可以写作

$$Idl\boldsymbol{u}_T=(jS)dl\boldsymbol{u}_T=jdV=nq\boldsymbol{v}dV.$$

因此,电流的磁场为

$$\mathscr{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint\frac{q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}_r}{r^2}ndV. \tag{5.16}$$

由于ndV是体积dV内粒子的数目,所以我们可以把上面的结果解释为, 每一个带电粒子在距离r处产生一个磁场,由下式给出

$$\mathscr{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}_r}{r^2}; \tag{5.17}$$

上式就是第4.5节中关于一个运动电荷的(非相对论性的)磁场的方程(4.14).

我们记得,方程(4.28)是运动电荷的磁场的表达式, 它对于电荷的一切速度都成立. 现在可能提出这样一个问题,即方程(4.28)是否也和闭合电流的磁场的方程(5.15)一致. 详细的计算(这里从略)表明,方程(5.15)的确仍

然成立，与组成闭合电流的电荷的速度无关。

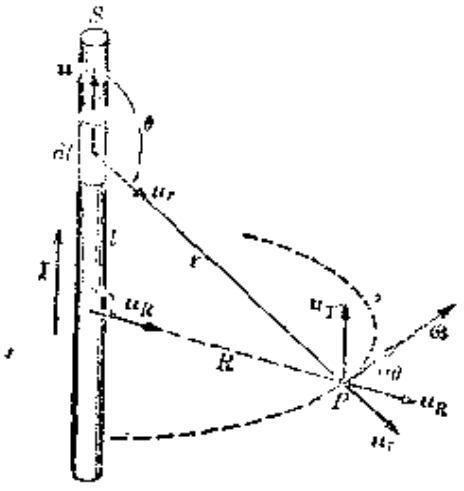


图 5-7　一直线电流在点 P 产生的磁场。

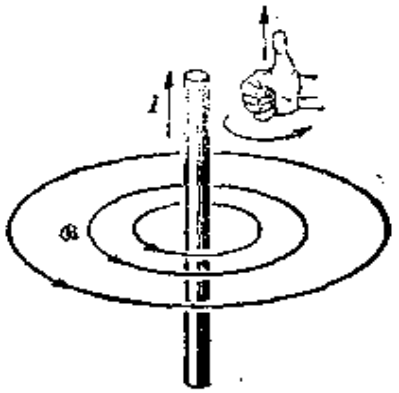


图 5-8　一直线电流周围的磁力线。

5.5　直线电流的磁场

作为安培-拉普拉斯定律的一个例子，我们考虑一根很长的细直线电流，如图 5-7 所示。对于任意一点 P 和任意一个电流元 dl，矢量 $\boldsymbol{u}_T \times \boldsymbol{u}_r$ 垂直于 P 和电流所决定的平面，因此，它的方向就是单位矢量 $\boldsymbol{u}_\theta$ 的方向。dl 在点 P 产生的磁场，与半径为 R 的圆相切。这个圆通过点 P，圆心在该电流的直线上，而且这个圆处在垂直于这直线电流的平面内。因此，在计算方程(5.15)中的积分时，该积分中的一切项的贡献具有相同的方向 $\boldsymbol{u}_\theta$。因而合磁场 $\mathscr{B}$ 也与该圆相切，所以只需求出 $\mathscr{B}$ 的量值即可。由于 $\boldsymbol{u}_T$ 和 $\boldsymbol{u}_r$ 为单位矢量，所以 $\boldsymbol{u}_T \times \boldsymbol{u}_r$ 的量值等于 $\sin\theta$。因此，对于一个直线电流，方程(5.15)变为

$$\mathscr{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\theta}{r^2} dl. \tag{5.18}$$

由图 5-7 可知，$r = R\csc\theta$，$l = R\cot(180° - \theta) = -R\cot\theta$，所以 $dl = R\csc^2\theta d\theta$。把这些结果代入方程(5.18)中，得出

$$\mathscr{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}I\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta}{R^2\csc^2\theta}(R\csc^2\theta d\theta)\quad\frac{\mu_0 I}{4\pi R}\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta,$$

上式中 $l=-\infty$ 对应于 $\theta=0$，$l=+\infty$ 对应于 $\theta=\pi$. 于是得到

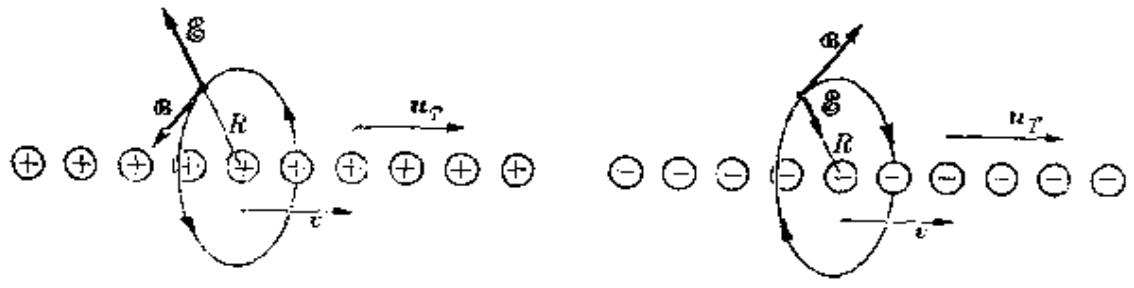
$$\mathscr{B}=\frac{\mu_0 I}{2\pi R}, \tag{5.19}$$

或者写作矢量形式，则得

$$\mathscr{B}=\frac{\mu_0 I}{2\pi R}\boldsymbol{u}_\theta. \tag{5.20}$$

一根无限长载流直导线的磁场，与距离 R 成反比，其磁力线为圆心在电流上且与该电流垂直的同心圆，如图 5-8 所示. 图中还示出确定磁场方向与电流方向之间关系的右手定则. 这个结果有时也称为毕奥-萨伐尔公式；这是为了纪念法国实验工作者毕奥(Jean Biot，1774—1862)和萨伐尔(Felix Savart，1791—1841)，他们发现了方程(5.20)所表示的关系.

在导体中的直线电流的情况下，有磁场 $\mathscr{B}$，但没有电场 $\mathscr{E}$；这是因为，在导体中，除运动着的电子之外，还有金属中的固定不动的正离子，它们产生的电场与电子的电场等值而方向相反，因而净电场等于零. 但是，当离子沿着直线加速器的轴线运动时，就会既有电场又有磁场. 这个电场对应于例题 1.5 中得出的一根无限长带电金属丝的电场的值，即 $\mathscr{E}=\lambda\boldsymbol{u}_R/2\pi\varepsilon_0 R$(图 5-9). 把这个结果



(a) q 为正　　(b) q 为负

图 5-9　沿一条直线运动的一串正(负)离子所产生的电场和磁场之间的关系

与方程(5.20)加以比较(并注意到 $\boldsymbol{u}_\phi=\boldsymbol{u}_T\times\boldsymbol{u}_R$——译者)，就得出这两个场之间的关系为

$$\mathscr{B}=\frac{\mu_0\varepsilon_0 I}{\lambda}\boldsymbol{u}_T\times\mathscr{E}. \tag{5.21}$$

例题 5.3 证明关于直线电流的磁场的方程(5.21)，与方程(4.17)即

$$\mathscr{B}=\frac{1}{c^2}v\times\mathscr{E}$$

一致.

解 直线电流所产生的磁场是沿着导线运动的所有电荷所产生的各个磁场之和. 按照方程(5.2)，如果 S 是这导线的截面，则 $I=nqSv$，式中 v 是电荷的速度. 由于 nq 是每单位体积的电荷，所以截面为 S 的单位长度导线上的电荷为 $nqS=\lambda$. 因此 $I=\lambda v$. 把这些结果代入方程(5.21)中，并注意 $v=v\boldsymbol{u}_T$，则得

$$\mathscr{B}=\frac{\mu_0\varepsilon_0(\lambda v)}{\lambda}\boldsymbol{u}_T\times\mathscr{E}=\mu_0\varepsilon_0 v\times\mathscr{E}=\frac{1}{c^2}v\times\mathscr{E},$$

上式正是方程(4.17).

例题 5.4 利用电磁场的相对论变换导出直线电流的磁场.

解 虽然直线电流的磁场的方程(5.21)是利用安培-拉普拉斯定律推导出来的，但这个结果也能够利用相对论推导出来. 我们考虑无限长的一列间距相等的电荷，它们相对于观察者 O 以速度 v 沿 X 轴运动(图 5-10). 这些

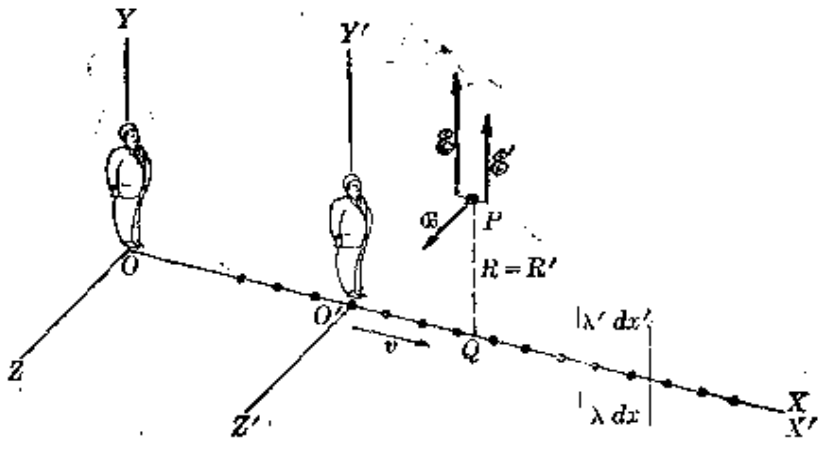


图 5-10 两个作相对运动的观察者所观察到的，一串沿 X 轴运动的电荷所产生的电磁场.

运动电荷构成一直线电流. 设 λ 为每单位长度上的电荷，则 O 所测得的电流

为 $I=\lambda v$. 现在考虑一个沿 X 轴以速度 v 运动的观察者 O'. 相对于 O'，电荷看起来是静止的；因而 O' 只测得一个电场. 然而，O 却记录下一个电场和一个磁场.

O 所测得的一小段 dx 上的电荷为 $dq=\lambda dx$. 观察者 O' 测量同一电荷. 但由于洛伦兹收缩，这个小段看来有一长度 dx'，它满足关系式 $dx=\sqrt{1-v^2/c^2}\,dx'$. 因此，O' 测得每单位长度的电荷为 λ'，λ' 满足关系式：$\lambda' dx'=\lambda dx$. 因此，

$$\lambda'=\lambda\frac{dx}{dx'}=\sqrt{1-v^2/c^2}\,\lambda.$$

O' 测得的电场是横向的，在点 P 它的值由例题 1.5 中的结果给出；即 $\mathscr{E}'=\lambda'/2\pi\varepsilon_0 R'$. 使 Y 轴平行于直线 PQ，并注意到 $R=R'$（因为它是横向的），我们可以写出

$$\mathscr{E}'_x=0,\quad \mathscr{E}'_y=\frac{\lambda'}{2\pi\varepsilon_0 R},\quad \mathscr{E}'_z=0.$$

然后，在方程(4.22)中令 $\mathscr{B}'=0$，就得出相对于 O 的电场分量为

$$\mathscr{E}_x=\mathscr{E}_z=0,\quad \mathscr{E}_y=\frac{\mathscr{E}'_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\frac{\lambda'}{2\pi\varepsilon_0 R\sqrt{1-v^2/c^2}}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}.$$

类似地，方程(4.24)给出相对于 O 的磁场分量为

$$\mathscr{B}_x=\mathscr{B}_y=0,\ \mathscr{B}_z=\frac{v\mathscr{E}'_y/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\frac{\lambda' v/c^2}{2\pi\varepsilon_0 R\sqrt{1-v^2/c^2}}=\frac{\mu_0 I}{2\pi R},$$

在上式中利用了关系式 $\varepsilon_0\mu_0=1/c^2$. 这样，不仅得到在坐标系 XYZ 中直线电荷分布的电场的正确表达式，而且得到前面从方程(5.15)出发求出的直线电流的磁场的正确表达式. 因此，我们可以确信，安培-拉普拉斯定律（式 5.15）是和相对性原理的要求一致的，因而给出与一闭合电路相联系的正确的磁场.

5.6 电流之间的力

现在我们把一无限长载流导线的磁场的方程(5.20)与作用在一个电流上的磁力的方程(5.6)结合起来，以便求出两个电流之间的磁相互作用. 为简单起见，我们考虑两个平行电流 I 和 I'（图 5-11），它们的方向相同，间距为 R. 电流 I 在电流 I' 的任意一点产

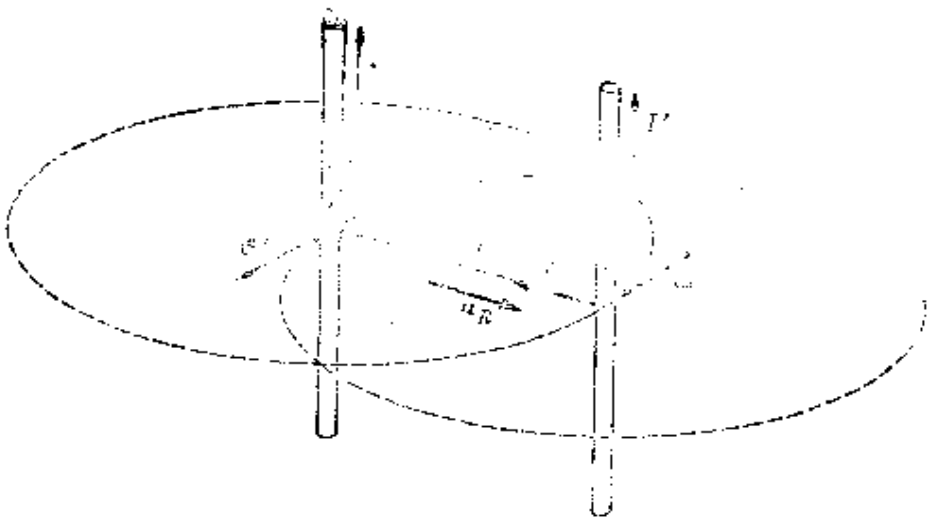


图 5-11　两直线电流之间的磁相互作用.

生的磁场$\mathscr{B}$由方程(5.20)给出，其方向如图中所示. 根据方程(5.6)，作用在 I' 上的力 F' 为

$$F' = I' \int u_T \times \mathscr{B} dl'.$$

由于 $u'_T \times \mathscr{B} = -u_R \mathscr{B}$，式中 u_R 是从 I 至 I' 的单位矢量，所以根据$\mathscr{B}$的方程(5.19)，得出作用在 I' 上的力为

$$F' = I' \int \left(-u_R \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\right) dl' = -u_R \left(\frac{\mu_0 I I'}{2\pi R}\right) \int dl' = -u_R \frac{\mu_0 I I'}{2\pi R} L'. \tag{5.22}$$

这个结果表示电流 I 吸引电流 I'. 按同理计算 I' 作用在 I 上的力，得出同样的结果，不过有正号，所以力的方向与 u_R 的方向相同，因而也表示一个吸引力. 由此可见，由于磁相互作用，两个方向相同的平行电流以相等的力彼此吸引. 学生可以证明，如果两个平行电流的方向相反，则它们相互排斥.

这个结果可以推广到具有任意形状的电流. 图 5-12(a)中的电路相互吸引，而图 5-12(b)中的电路则相互推斥. 电流(或电路)之间的相互作用，对于电动机以及其他工程应用有着巨大的实际重要性.

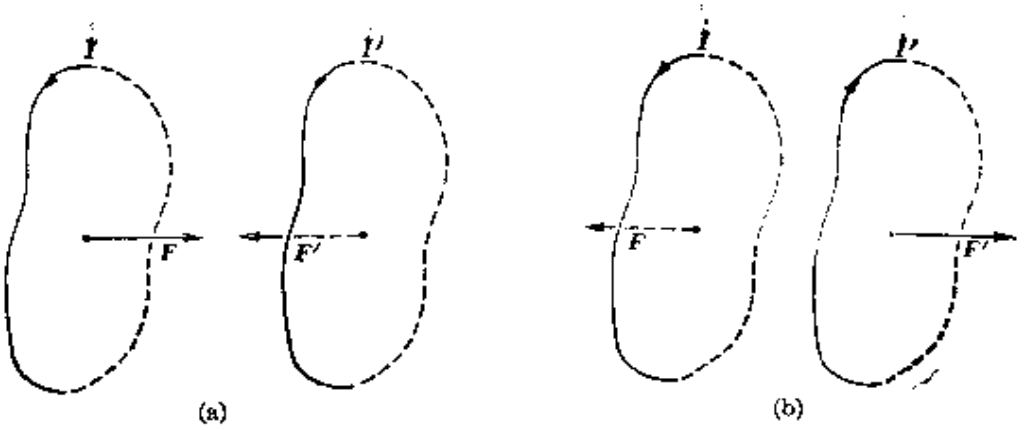


图 5-12　两个电流回路之间的吸引和推斥.

5.7　关于 SI 单位的说明

除长度、质量和时间的单位之外，要添加的第四个基本单位有两个定律可供选择：一个是两个电荷之间的静电相互作用的库仑定律，由方程(1.2)

$$F = K_e \frac{qq'}{r^2}$$

给出，另一个是两个直线电流之间的相互作用的定律，由方程(5.22)(用 K_m 代替其中的 $\mu_0/4\pi$)

$$F' = K_m \frac{2II'}{R} L'$$

给出. 虽然 K_e 和 K_m 这两个常数分别对应于电力和磁力，但是只有一个自由度，因为只引入了一个新的物理量，即电荷. 电流与电荷之间的关系为：电流＝电荷/时间. 因此，只能给其中一个常数指定任意值. 在 1960 年举行的第十一届国际计量大会上，建立了 SI 单位，采用 $K_m = 10^{-7}$，选取安培(而不是库仑)作为基本单位. 由于这种任意选择，安培定义为在相距为 1m 的两根平行导线中流动的这样一个电流，这个电流在每根导线的每米长度上产生 2×10^{-7}N 的力(图 5-13). 一旦这样定义了安培，库仑就定义为：

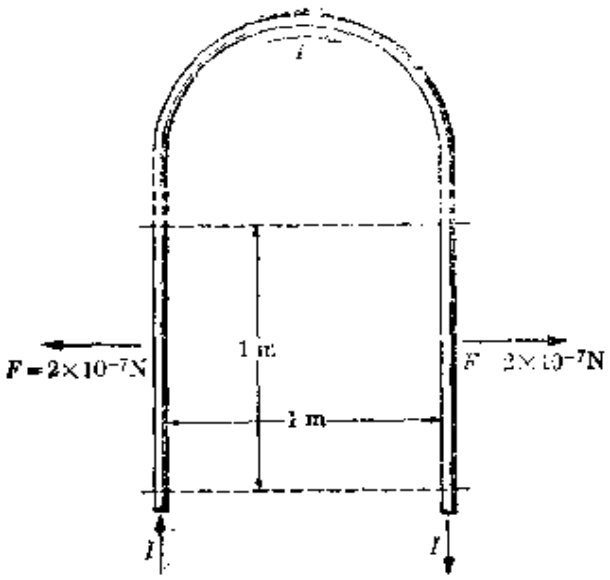


图 5-13　确定安培的实验装置.

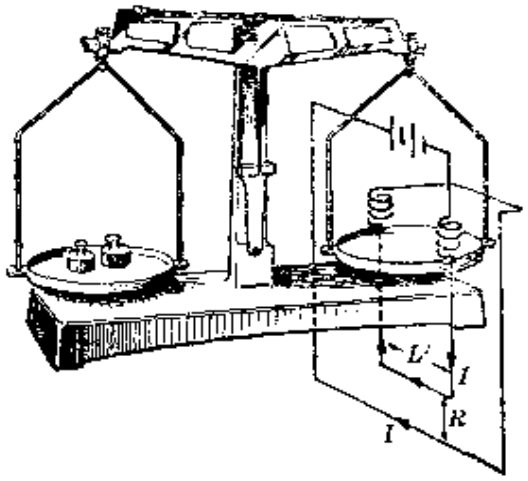


图 5-14　电流天平根据两根平行载流导线之间的磁力来测量电流.

当一根导线中的电流为 1 安培时，1 秒钟内通过这根导线的任一截面的电量.

电流天平是测量两根平行导线之间的磁力的实验装置(图 5-14). 同一个电流通过这两根导线，所以有 $F=2\times10^{-7}I^2L'/R$. 首先，当电路中无电流时，使这天平处于平衡. 当电流通过这电路时，必须在左边的盘子里放上额外的砝码，才能使天平恢复平衡. 根据 F、L' 和 R 的已知值，能够算出 I 的值. 实际上使用两个平行的圆线圈.

由于 $K_e=1/4\pi\varepsilon_0$，$K_m=\mu_0/4\pi$，所以这两个常数的比值给出

$$\frac{K_e}{K_m}=\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}=c^2,$$

上式中 $c=1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$. 这个常数是光(或者任何电磁信号)在真空中的速度，这将在第十一章中证明. 在实验上已以极大的准确度测定了常数 c 的值. 用光速来表示时，$K_e=K_mc^2=10^{-7}c^2$. 在第

1.3 节中选取 K_e 等于这个值，当时看来似乎是任意的，而现在就明白其原因了.

第十一届国际计量大会为什么建议采用安培为第四个基本单位，其原因之一，是制定一个电流标准并测定两个电流之间的力，比制定一个电荷标准并测定两个电荷之间的力要容易. 然而，从物理的观点看，电荷的概念比电流的概念更为基本. 此外，不仅从理论的观点，而且从实用的观点来看，采用库仑或者安培作为基本单位，可以看作是 SI 单位的交替表示.

5.8 圆电流回路的磁场

考虑一个半径为 a 的圆电流回路(图 5-15)，利用安培-拉普拉斯定律计算任意一点的磁场，是一个稍微复杂的数学问题；但是，计算圆电流轴上一点的磁场却是相当容易的. 首先要认识到，方程(5.15)在数学上可以解释为：这个电流在 P 点产生的合磁场 $\mathscr{B}$，等于构成这个电路的每一个小段(即长度元 dl)所产生的许多很小的贡献(亦称元贡献) $d\mathscr{B}$ 之和. 每一个元贡献为

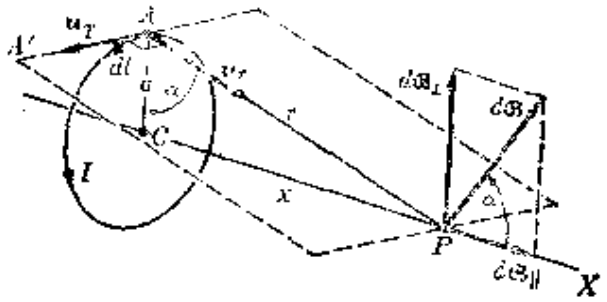


图 5-15 圆电流回路轴线上一点的磁场的计算.

$$d\mathscr{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}I\frac{\boldsymbol{u}_T\times\boldsymbol{u}_r}{r^2}dl.$$

然而，必须把这个方程与方程(5.15)联系起来考虑，而不应把它看作一个独立的表述.

在圆电流回路的情况下，图 5-15 中的矢积 $\boldsymbol{u}_T\times\boldsymbol{u}_r$ 垂直于平

面 PAA'，其量值等于 1，因为 u_r 和 u_r 这两个单位矢量是相互垂直的．因此，长度元 dl 在点 P 产生的磁场 $d\mathscr{B}$ 的量值为

$$d\mathscr{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}I\frac{dl}{r^2},$$

其方向垂直于平面 PAA'．然而，这个磁场与 X 轴斜交．如果把 $d\mathscr{B}$ 分解为平行于 X 轴的分量 $d\mathscr{B}_{/\!/}$ 和垂直于 X 轴的分量 $d\mathscr{B}_{\perp}$，就可看出，当沿着这个圆回路积分时，对于每一个 $d\mathscr{B}_{\perp}$，都有另一个反方向的 $d\mathscr{B}_{\perp}$（它是由正对着 dl 的那个长度元所产生的），因而所有的 $d\mathscr{B}_{\perp}$ 之和等于零．合磁场 $\mathscr{B}$ 等于所有的 $d\mathscr{B}_{/\!/}$ 之和，因而平行于 X 轴．由于 $\cos\alpha=a/r$，所以

$$d\mathscr{B}_{/\!/}=(d\mathscr{B})\cos\alpha=\frac{a}{r}d\mathscr{B}=\frac{\mu_0 Ia}{4\pi r^3}dl.$$

沿圆周积分时，距离 r 保持恒定．在这种情况下，由于 $\oint dl=2\pi a$，所以合磁场的量值由下式给出：

$$\mathscr{B}=\oint d\mathscr{B}_{/\!/}=\frac{\mu_0 Ia}{4\pi r^3}\oint dl=\frac{\mu_0 Ia^2}{2r^3}.$$

由于 $r=(a^2+x^2)^{1/2}$，所以圆电流回路轴线上一点的磁场为

$$\mathscr{B}=\frac{\mu_0 Ia^2}{2(a^2+x^2)^{3/2}}. \tag{5.23}$$

根据(5.9)中的定义，这个电路的磁矩为 $M=I(\pi a^2)$．于是上式可以写作

$$\mathscr{B}=\frac{\mu_0 M}{2\pi(a^2+x^2)^{3/2}}. \tag{5.24}$$

图 5-16 中示出圆电流回路产生的磁场．

当这个电流回路非常小，以致 a 与距离 x 相比可以忽略不计时，就出现一个重要情况．这时方程(5.24)化为

$$\mathscr{B}=\frac{\mu_0 M}{2\pi x^3}=\frac{\mu_0(2M)}{4\pi x^3}. \tag{5.25}$$

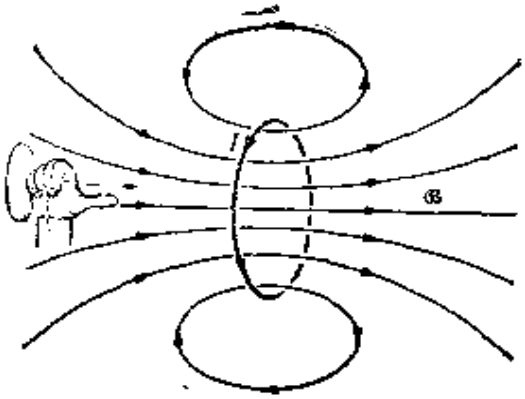


图 5-16　圆电流回路产生的磁力线.

$\theta=0$ 时，方程(1. 35)变为 $\mathscr{E}_r=(1/4\pi\varepsilon_0)\ (2p/r^3)$. 将此式与方程(5.25)相比较，可以看出，如果使 $(\mu_0/4\pi)M$ 对应于 $(p/4\pi\varepsilon_0)$，则一个小圆电流回路轴线上的磁场，与一个电偶极子轴线上的电场完全相同. 因此，称这种电路为磁偶极子. 这样，就可以把关于电偶极子的方程(1. 35)和(1. 36)应用于一个磁偶极子，从而算出轴外一点的磁场(图 5-17). 于是得出:

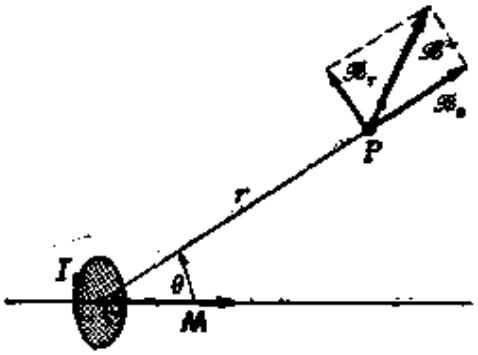


图 5-17　一个磁偶极子电流在一点 P 产生的磁场.

$$\mathscr{B}_r=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2M\cos\theta}{r^3},\quad \mathscr{B}_\theta=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{M\sin\theta}{r^3}. \tag{5.26}$$

在第一章中我们看到，电场的力线是从负电荷至正电荷，或者，在某些情况下是从无限远处来，或者到无限远处去. 然而，图 5-8 和 5-16 表明，磁场的力线是与电流环联的闭合的线. 原因在于这种磁场并非起源于磁极. 这种场不具有点源，叫做无散矢场.

例题 5.5　正切电流计.

解　正切电流计是由一个载有电流 I 的 N 匝圆线圈组成的（图 5-18），把这个电流计放在一个存在磁场 $\mathscr{B}$ 的区域中，并使线圈平面平行于 $\mathscr{B}$. 一匝线圈中的电流 I 在其中心产生的磁场为 $\mu_0 I/2a$[在方程(5.23)中令 $x=0$]. 由于这个线圈有 N 匝，所以在中心处产生的总磁场为 $\mathscr{B}_c=\mu_0 IN/2a$. 因此，线圈中心处的合磁场 $\mathscr{B}'$ 与线圈轴线成一个角 θ；角 θ 由下式确定：

$$\tan\theta=\frac{\mathscr{B}}{\mathscr{B}_c}=\frac{2a\mathscr{B}}{\mu_0 IN}.$$

放在线圈中心的一个小磁针将转向，并且停止在与轴线成 θ 角的平衡位置上. 因此，如果电流 I 已知，就可以算出外磁场 $\mathscr{B}$；反之，如果 $\mathscr{B}$ 为已知，则可算出电流 I. 通常 $\mathscr{B}$ 就是地球的磁场. 对于精密测量，这个公式还必须加以修正，以便考虑磁针的有限长度（因为作用在磁针上的磁场并不正好就是线圈中心的磁场）. “正切电流计”这个名称起因于上面公式中的三角函数.

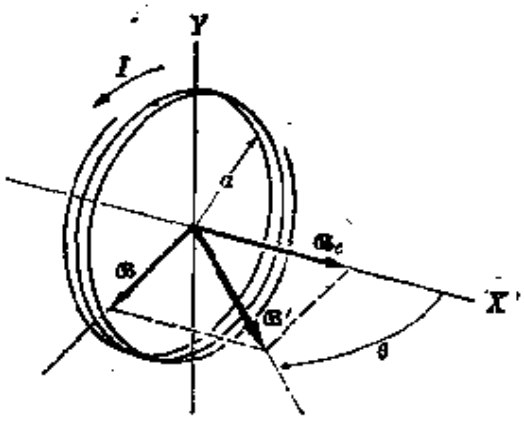


图 5-18　正切电流计.

例题 5.6　螺线管电路的磁场.

解　螺线管电路，或简称螺线管，是由若干个具有相同半径的、载有相同电流的同轴圆回路组成的（图 5-19）. 把一个螺线管的各个分圆电流的磁场

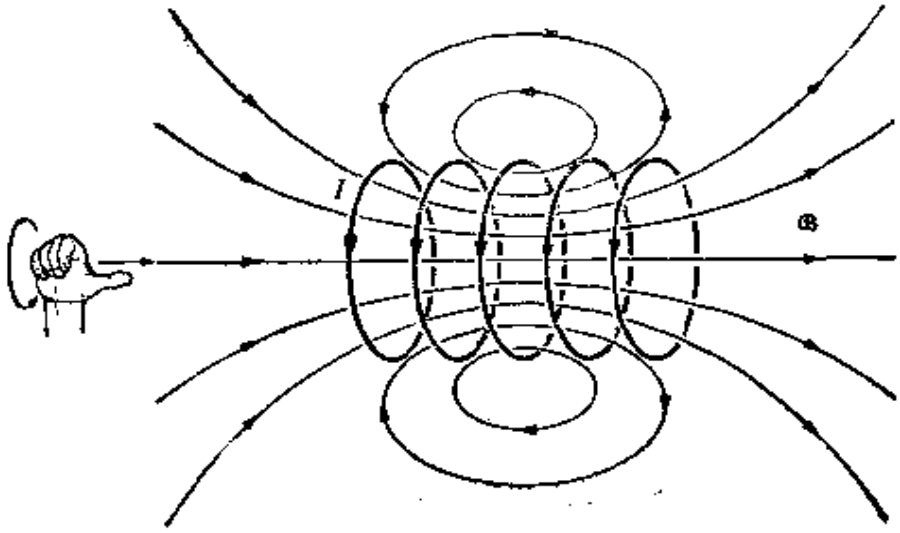


图 5-19　螺线管电路产生的磁力线.

加起来，就可求出螺线管的磁场。图中用磁力线表示这个磁场。在各回路之间的空间中，磁场有一些起伏，已在图中修匀。我们将只计算螺线管轴线上各点的磁场。

图 5-20 中示出这个螺线管的一个纵截面。设 L 为螺线管的长度，N 为回路的圈数，则每单位长度上的圈数为 N/L。因而长度为 dR 的一段螺线管上的圈数为 $(N/L)dR$。每一圈在轴上一点 P 产生的磁场可以用方程 (5.23) 算出。因而 dR 这一段螺线管产生的磁场可用下式算出：

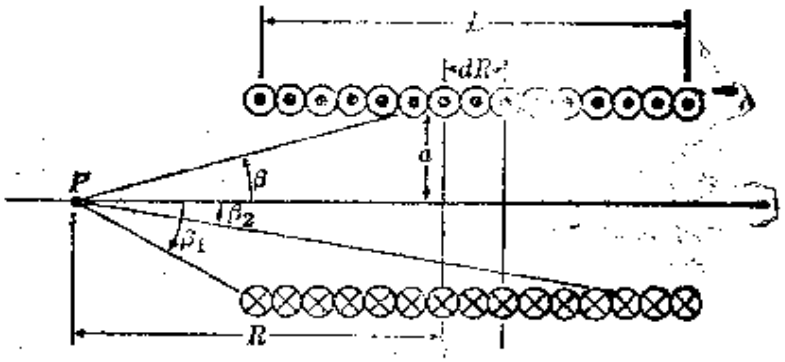


图 5-20　计算一个螺线管电路轴线上一点 P 的磁场所用的图。

$$d\mathscr{B}=\left[\frac{\mu_0 Ia^2}{2(a^2+R^2)^{3/2}}\right]\frac{N}{L}dR=\frac{\mu_0 IN}{2L}\frac{a^2dR}{(a^2+R^2)^{3/2}}. \tag{5.27}$$

由图 5-20 可以看出，$R=a\cot\beta$，$dR=-a\csc^2\beta d\beta$，$a^2+R^2=a^2\csc^2\beta$。把这些值代入方程(5.27)中，得出

$$d\mathscr{B}=\frac{\mu_0 IN}{2L}(-\sin\beta d\beta).$$

从螺线管的一端积分到另一端，就得出整个螺线管所产生的合磁场。也就是说，合磁场等于

$$\mathscr{B}=\frac{\mu_0 IN}{2L}\int_{\beta_1}^{\beta_2}-\sin\beta d\beta=\frac{\mu_0 IN}{2L}(\cos\beta_2-\cos\beta_1). \tag{5.28}$$

如果这个螺线管非常长，则在其中心一点，$\beta_1\approx\pi$，$\beta_2\approx 0$，于是得出

$$\mathscr{B}=\frac{\mu_0 IN}{L}. \tag{5.29}$$

对于螺线管一端的点，$\beta_1=\pi/2$，$\beta_2\approx 0$；或者 $\beta_1\approx\pi$，$\beta_2=\pi/2$。在每一种情况下，都得到

$$\mathscr{B}=\frac{\mu_0 IN}{2L} \tag{5.30}$$

此值等于中心处磁场值的一半。用一个长螺线管可以在其中心附近的有限区

越内产生相当均匀的磁场.

例题 5.7　磁四极子的磁场.

解　图 5-21 中的系统是由两个间距为 $2a$ 的小回路组成的，两个回路中载电流 I 相等，但沿相反的方向环流. 这样，每个回路就是一个磁偶极子；但是，由于电流沿相反的方向环流，所以其偶极矩的方向相反，因而总磁偶极矩为零. 然而，由于这两个回路之间有一个距离，所以合磁场并不等于零. 因此，这个系统构成一个磁四极子. 注意，从数学上看，这个情况与例题 1.8 非常相似.

由于磁偶极子的方程(5.26)与电偶极子的方程 (1.35) 和(1.36)之间的相似性，我们可以定义一个与磁偶极子的磁场相联系的"磁势"V_m. 在方程 (1.34)中，用 $\mu_0 M/4\pi$ 代替 $p/4\pi\varepsilon_0$，可得出 V_m 的表达式：

$$V_m=\frac{\mu_0 M\cos\theta}{4\pi r^2}=\frac{\mu_0 \boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{r}}{4\pi r^3}.$$

由于 $M_1=-M_2=M$，所以点 P 的合"磁势"为

$$V_m=\frac{\mu_0 \boldsymbol{M}_1\cdot\boldsymbol{r}}{4\pi r_1^3}+\frac{\mu_0 \boldsymbol{M}_2\cdot\boldsymbol{r}_2}{4\pi r_2^3}=\frac{\mu_0 M}{4\pi}\cdot\left(\frac{\boldsymbol{r}_1}{r_1^3}-\frac{\boldsymbol{r}_2}{r_2^3}\right).$$

由图 5-21 可知，$\boldsymbol{a}$ 可以写作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{u}_z a$，式中 $\boldsymbol{u}_z$ 是沿 Z 轴的单位矢量；于是得出 $\boldsymbol{r}_1=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{r}$；而且有

$$r_1^2=r^2+a^2-2ar\cos\theta,$$

$$r_2^2=r^2+a^2+2ar\cos\theta.$$

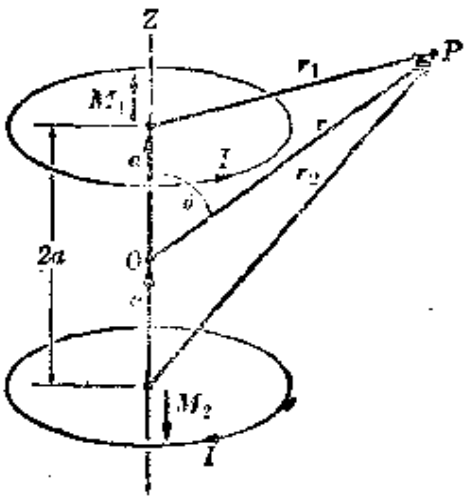


图 5-21　磁四极子.

利用二项展开式，取到 a/r 的一次项，得出

$$\frac{1}{r_1^3}=\frac{1}{r^3}\left(1-\frac{2a\cos\theta}{r}+\frac{a^2}{r^2}\right)^{-3/2}=\frac{1}{r^3}\left(1+\frac{3a\cos\theta}{r}+\cdots\right),$$

按同理得出：

$$\frac{1}{r_2^3}=\frac{1}{r^3}\left(1-\frac{3a\cos\theta}{r}+\cdots\right).$$

因此，

$$\frac{\boldsymbol{r}_1}{r_1^3}-\frac{\boldsymbol{r}_2}{r_2^3}=\frac{-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{r}}{r^3}\left(1+\frac{3a\cos\theta}{r}+\cdots\right)-\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{r}}{r^3}\left(1-\frac{3a\cos\theta}{r}+\cdots\right)$$

$$=\frac{-2\boldsymbol{a}}{r^3}+\frac{5\boldsymbol{r}a\cos\theta}{r^4}+\cdots.$$

把上式代入 V_m 的表达式中，得出

$$V_m=\frac{2\mu_0}{4\pi r^3}\left(-M\cdot a+\frac{3M\cdot ra\cos\theta}{r}\right).$$

但是，$M\cdot a=Ma$，$M\cdot r=Mr\cos\theta$，于是得出

$$V_m=\frac{\mu_0 M(2a)(3\cos^2\theta-1)}{4\pi r^3};$$

上式中的角关系和径向关系都与方程(1.46)相似，这就证实我们所处理的是一个磁四极子. 这个磁四极子的矩为 $M(2a)$. 这个磁四极子的磁场的径向分量和横向分量分别为

$$\mathscr{H}_r=-\frac{\partial V_m}{\partial r}=\frac{3\mu_0 M(2a)(3\cos^2\theta-1)}{4\pi r^4},$$

$$\mathscr{H}_\theta=-\frac{1}{r}\frac{\partial V_m}{\partial\theta}=\frac{6\mu_0 M(2a)\sin\theta\cos\theta}{4\pi r^4}.$$

学生应特别注意，计算磁场时为了数学上的方便而引入的"磁势"，并不和一磁势能相联系，而电势则是和电势能相联系的.

习　题

5.1　为了使一根水平的铝丝在赤道上"漂浮"在地球的磁场中，需要多大的电流密度（假定它是均匀的）？铝的密度是 $2.7\times10^3\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$，设地球的磁场约为 $7\times10^{-7}\mathrm{T}$，铝丝的取向是沿东西方向.

5.2　试求作用在图 5-22 所示各金属丝段上的力，设磁场 $\mathscr{H}=1.5\mathrm{T}$，平行于 OZ，$I=2\mathrm{A}$. 立方体的一个边的长度为 0.1m.

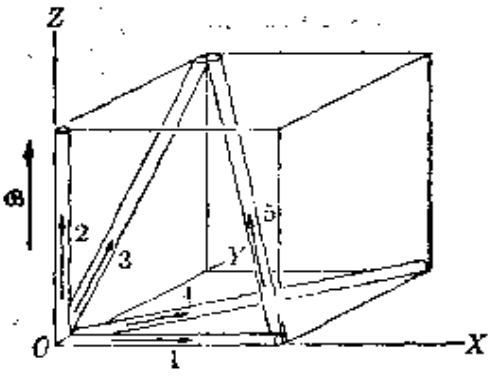


图　5-22

5.3　一个矩形金属丝回路的平面为 0.05m×0.08m，平行于一个 0.5T 的磁场. (a) 如果这回路载有 10A 电流，试求作用在这个回路上的转矩. (b)

求这个回路的磁矩. (c)在这个磁场中，用载有同样电流并具有同样的总长度的金属丝，能够获得的最大转矩是多少?

5.4 图 5-23 中的矩形回路能够以 Y 轴为枢轴而旋转，并载有 10A 电流，其方向如图中所示. 设这个回路是在平行于 X 轴的，强度为 0.2T 的匀强磁场中. 试计算，(a)作用在这个回路的每一条边上的力(以 N 为单位)；(b)为了保持这个回路处在图中所示的位置，试求所需的转矩(以N·m 为单位). 设这回路是在一个平行于 Z 轴的，强度为 0.2T 的磁场中，试计算，(c)作用在这个回路的每一条边上的力(以 N 为单位)，(d)为了保持这回路处在那个位置上所需的转矩(以 N·m 为单位). (e) 假定这个回路能够以通过回路中心且平行于 Y 轴的直线为轴而旋转，试求所需的转矩.

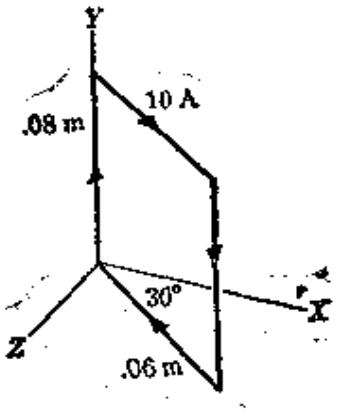


图 5-23

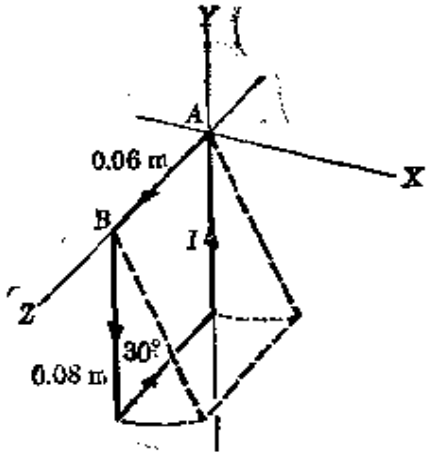


图 5-24

5.5 图 5-24 中的矩形金属丝回路每米长度的质量为0.01kg，并且能够以 AB 边作为无摩擦的轴而旋转. 金属丝中的电流为 10A，方向如图中所示. (a)为了使这个回路摆动到它的平面与 YZ 平面成 30° 角的位置，试计算平行于 Y 轴的磁场的量值和方向. (b)讨论磁场平行于 X 轴的情况.

5.6 一个线圈，面积为 0.05m×0.12m，匝数为 600，载有 10^{-6}A 电流. 当它处在强度为 0.10T 的匀强磁场中时，试求作用在它上面的最大转矩.

5.7 一个圈动电流计，其线圈匝数为 50，面积为 6×10^{-4}m^2. 线圈处于其中的径向磁场为 10^{-2}T. 游丝的扭转常数 $k=10^{-6}$N·m·度$^{-1}$. 试求：当电流为 1 mA 时线圈的角偏转的值.

5.8 一个正方形金属丝回路，每边长为 0.1m，位于 XY 平面内，如图 5-25 所示. 回路中的电流为 10A. 加上一个平行于 Z 轴的、强度 $\mathscr{B}=0.1x$T (式中 x 以米为单位)的磁场时，试计算(a)作用在这个回路上的合力，(b)相

对于点O的合转矩.

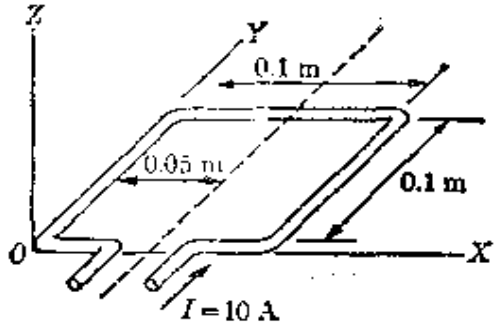


图 5-25

5.9 对于磁场沿X轴的情况，重做习题5.8.

5.10 (a)试求作用在图5-26所示半圆形导体上的力，设该导体中的电流为I，匀强磁场$\mathscr{B}$垂直于图面向上. (b) 证明这个力与P、Q两点之间的导体为一直线时作用的力相同.

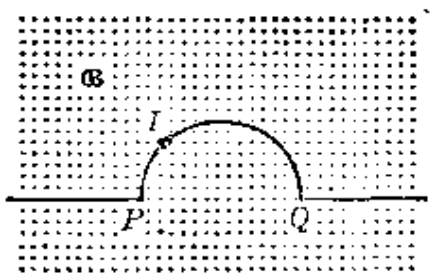


图 5-26

5.11 一个正方形线圈，每边长度为0.6m，载有0.1A恒定电流，放在一个强度为10^{-4}T的匀强磁场中. (a) 如果这个线圈的平面开始时平行于磁场，试问：是否有转矩作用在这个线圈上？(b)如果这个线圈的平面开始时垂直于磁场，再回答(a)的问题. (c)把这个转矩表示为线圈法线与磁场方向所成角的函数. (d)当这个角从0变到2π时，画出转矩变化的曲线. (e)如果这个线圈在无转矩作用的点上有一角速度，会发生什么情况？

5.12 (a)如果情况如习题(5.11b)中所述，但电流方向瞬时反转，会发生什么情况？(b)你如何改变这个问题的第一部分中提到的电流的方向？(c)这种改变电流方向的方法有什么用途？

5.13 (a)一根半径为5×10^{-3}m的无限长导线载有1 A电流，试求这根导线在5×10^{-2}m和1 m距离处产生的磁场的强度. (b) 计算在这些点的电场.

5.14 一根直长导线载有1.5A电流. 一个电子在距导线0.1m处，平行于导线且沿电流的方向，以5×10^{4} m·s^{-1}的速度运动. 试求这个电流的磁场作用在这个运动电子上的力.

5.15 一根直长导线，其方向沿Y轴，载有10A电流. 一匀强磁场$\mathscr{B}=$

10^{-4}T，其方向平行于X轴．试求在下列各点的合磁场：(a)$x=0, z=2$m；(b)$x=2$m，$z=0$；(c)$x=0, z=-0.5$m．

5.16　两根直长平行导线之间的距离为$2a$．设这两根导线载有相等但方向相反的电流．试求，在这两根导线的平面内，(a)在两根导线之间正中一点的磁场，(b)在至一根导线为a，至另一根导线为$3a$的一点的磁场．(c)对于电流相等而且方向相同的情况，再回答(a)和(b)的问题．

5.17　两根直长平行导线之间的距离为1.0m，如图5-27所示．上面那根导线载有电流$I_1=6$A，方向垂直于图面向下．(a)为了使点P的合磁场为零，试求电流I_2的量值和方向．(b)试求这时点Q处的合磁场．(c)点S处的合磁场．

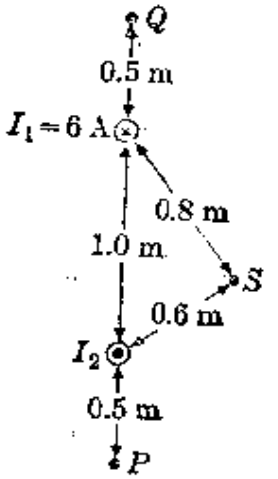


图　5-27

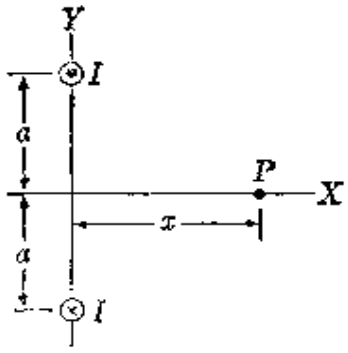


图　5-28

5.18　图5-28中示出两根垂直于XY平面的平行直长导线．两根导线中的电流均为I，但方向相反．(a)用矢量表示点P的磁场．(b)导出X轴上任意一点的$\mathscr{B}$的量值的表达式，作为该点的坐标x的函数．(c)作图示出在X轴上各点$\mathscr{B}$的量值变化的曲线．(d)x等于什么值时，$\mathscr{B}$的值最大？

5.19　对于Y轴上的点，重作习题5.18．

5.20　对于方向相同的电流，重作习题5.18．

5.21　对于方向相同的电流，重作习题5.19．

5.22　在图5-28中，设有第三根直长导线通过点P，且与另外两根导线平行．每根导线中的电流为$I=20$A．设$a=0.30$m，$x=0.4$m．在下列两种情况下，试求作用在第三根导线每单位长度上的力的量值和方向：(a)第三根导线中的电流垂直于图面向上，(b)垂直于图面向下．

5.23　一个密绕线圈的直径为0.4m，载有2.5A电流．如果线圈中心的

磁场为 2.356×10^{-4}T，试问：这个线圈有多少匝？

5.24 一根 0.3m 长的螺线管上绕着两层导线，内层 300 匝，外层250匝．两层中电流的方向相同，均为 3A．试求在这螺线管中心附近一点的磁场．

5.25 在一桌面上放着一根长水平导线 AB，如图 5-29 所示．另外一根长为 1 m 的导线 CD 位于 AB 的正上方，并能自由地沿着两根竖直的金属导轨 C 和 D 上下滑动．AB 和 CD 这两根导线通过滑动接触而连接起来，并载有 50A 电流．导线 CD 的质量为 5×10^{-3}kg·m^{-1}．设作用在 CD 上的磁力是由导线 AB 中的电流引起的，试求 CD 上升达到的平衡高度．

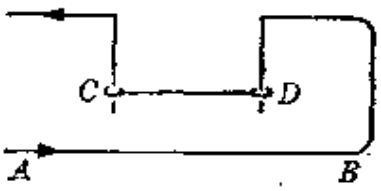


图 5-29

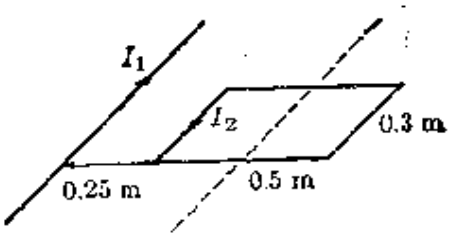


图 5-30

5.26 桌面上放着一根直长导线和一个矩形回路（图 5-30）．这个矩形回路的平行于直导线的边的长度为0.3m；垂直于直导线的边的长度为0.5m．电流 $I_1=10$A，$I_2=20$A．(a)试求作用在这个矩形回路上的力．(b)试求：以直导线为轴，和以虚线为轴，作用在这个回路上的转矩．

5.27 用 0.04m 长的绳子把两根长平行导线挂在一个公共轴上．导线的质量为 5×10^{-2}kg·m^{-1}，并载有相同的电流(但方向相反)．如果绳子与竖直线成 6° 角，试问电流有多大？

较难的习题

5.28 一个半径为 a、电流为 I 的圆形回路，其中心在 Z 轴上，回路平面垂直于 Z 轴．磁场相对于 Z 轴为对称的．回路各点的磁场与 Z 轴成一角 θ（图 5-31）．(a) 对于电流的两个可能的方向，求出作用在回路上的力的量值和方向．(b)假定这个回路很小，可以看成一个磁偶极子，并且假定磁场遵从平方反比律（$\mathscr{B}=k/r^2$）．试证明，作用在这回路上的力为

$$F=\pm M\left(\frac{d\mathscr{B}}{dr}\right),$$

式中 M 是磁偶极矩，它的方向沿 Z 轴．这个结果具有普遍性，它表明，当偶极子的取向沿场的方向时，它将沿场增加的方向移动；当偶极子的取向与场的

方向相反时，它将沿相反的方向移动.（把这个结果与第 1.1 节中关于电偶极子的类似结果加以比较.）

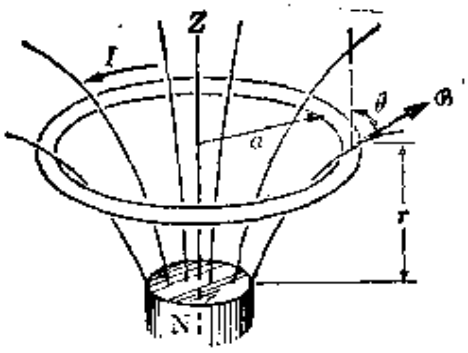


图 5-31

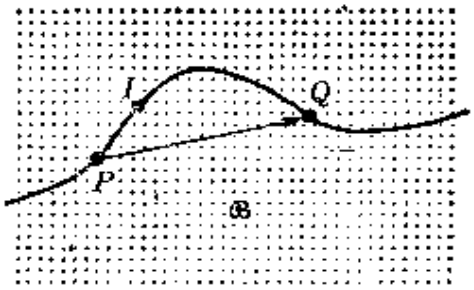


图 5-32

5.29 (a) 一根金属丝的 PQ 部分载有电流 I，放在一匀强磁场$\mathscr{B}$中，如图 5-32 所示. 试证明：作用在 PQ 上的力为 $I(\overrightarrow{PQ})\times\mathscr{B}$，因而与导体的形状无关. (b) 把这结果应用于习题 5.10. (c) 由此得出结论：作用在一个置于匀强磁场中的闭合电流上的力等于零.

5.30 证明一根有限长度的直线电流 I 在一点 P 产生的磁场为

$$\mathscr{B}=\frac{\mu_0 I}{2\pi R}(\sin\alpha_1-\sin\alpha_2),$$

式中 R 是从点 P 至这段电流的垂直距离，α_1 和 α_2 是从点 P 至这段电流两端的直线与从点 P 至电流的垂线之间的角(图 5-33).

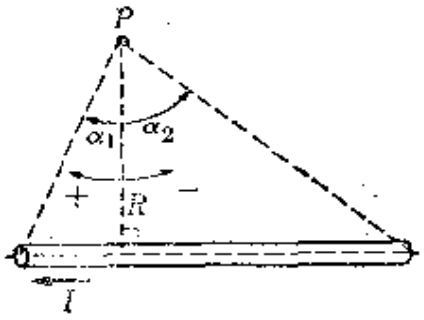


图 5-33

5.31 利用习题 5.30 的结果，求出在一个边长为 L 的正方形电路中心处的磁场.（注意角的符号.）

5.32 在一块很长的薄导体平板中，每单位宽度的电流密度为 j. 也就是说，$I_a=jw$，式中 w 是薄板的宽度(图 5-34). (a) 计算点 P 的磁场(P 至薄板中心 O 的距离为 d，如图中所示). (提示：一个直长窄条 dw 所产生的磁场

的表达式，与一根直长导线所产生的磁场的表达式相同.) (b) 如果 $d \ll w$，也就是说，如果这个窄条变成一个无限大的平面，求磁场的表达式.

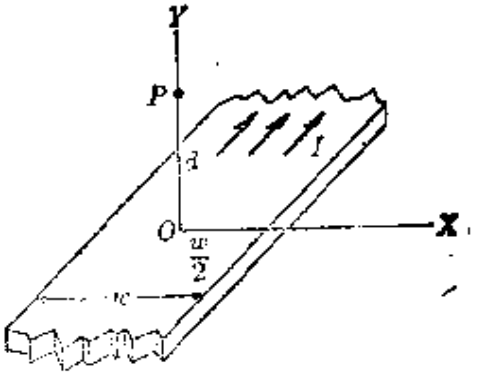


图 5-34

5.33 两个具有相同半径 a 的圆电流具有相同的强度 I，二者之间的距离为 $2b$，如图 5-35 所示. (a) 证明：轴线上一点的磁场为

$$\mathscr{B} = \frac{\mu_0 I a^2}{(a^2+b^2)^{3/2}}\left[1+\frac{3}{2}\frac{(4b^2-a^2)}{2(a^2+b^2)^2}x^2\right.$$
$$\left.+\frac{15}{8}\frac{(8b^4-12a^2b^2+a^4)}{(a^2+b^2)^4}x^4+\cdots\right],$$

上式中 x 是从两个圆电流之间的中点 O 算起的距离. (b) 证明：对于 $a=2b$，直至 x 的三次幂，中心处的磁场与 x 无关. 这个装置叫做亥姆霍兹线圈，在实验室中广泛用它来在一有限空间区域中产生一匀强磁场. (c) 假定 (b) 中的条件被满足，试求与中点的磁场相差 1% 的点的 x 值作为 a 的函数.



图 5-35

第六章 静 磁 场

6.1 引 论

在第四和第五章中我们讨论了运动电荷(即电流)所产生的磁场. 还给出了计算磁场的具体法则，例如安培-拉普拉斯定律，即方程(5.13). 在本章中，将讨论磁场的一些普遍性质. 利用这些性质，能够简化具有某些对称性的电流所产生的磁场的计算. 此外，还要描述物质的磁性，并讨论电流所产生的磁场在物质附近所受的影响. 这种分析类似于第二章中关于电场的分析.

6.2 磁场的安培定律

我们首先考虑一根载有电流 I 的无限长直导线 (图 6-1). 回顾第五章中奥斯特、安培等科学家的实验结果，我们知道，导线中的电流在其周围产生磁场$\mathscr{B}$. 点 A 的磁场垂直于 OA，由方程(5.20)给出

$$\mathscr{B}=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}u_\varphi.$$

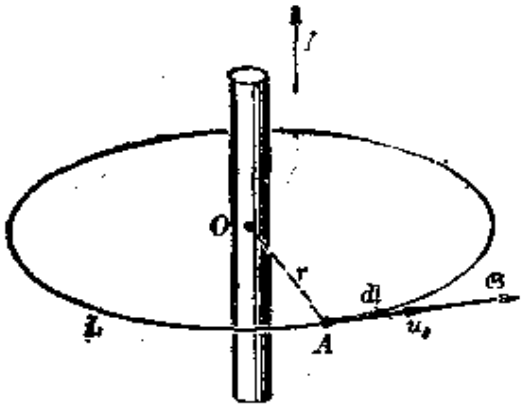


图 6-1 直线电流的磁场.

在第 2.6 节中曾给出矢量场沿一闭合路径的环流的概念. 把这个概念应用于磁场，则其环流变为

$$\Lambda_{\mathscr{B}}=\oint \mathscr{B}\cdot dl. \tag{6.1}$$

磁场绕一个中心在导线上、半径为 r 的圆形路径(其平面垂直于导线)的环流①很容易计算. 磁场$\mathscr{B}$与路径相切，所以 $\mathscr{B}\cdot d\boldsymbol{l}=\mathscr{B}dl$. 因此，磁场的环流为

$$\begin{aligned}\Lambda_{\mathscr{B}}&=\oint_L \mathscr{B}\cdot d\boldsymbol{l}=\oint_L \mathscr{B}dl\\&=\mathscr{B}\oint_L dl=\mathscr{B}L\\&=\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\right)2\pi r\\&=\mu_0 I.\end{aligned}\tag{6.2}$$

由此可见，在这个情况下，磁场的环流与电流 I 成正比，而与路径的半径无关. 因此，如果围绕电流 I 画若干个圆周 $L_1, L_2, L_3, \cdots$ (图 6-2)，则按方程 (6.2)，磁场沿所有这些圆周的环流相同，都等于 $\mu_0 I$.

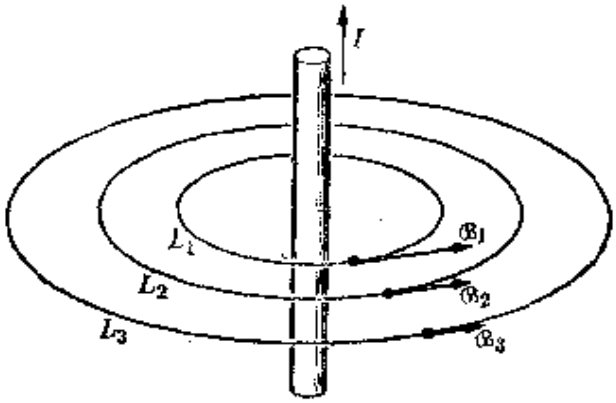


图 6-2　围绕一直线电流，沿所有同心圆形路径的磁环流相同，都等于 $\mu_0 I$.

其次，考虑一个围绕电流 I 的任意的闭合路径 L (图 6-3)，沿 L 的磁环流为

$$\Lambda_{\mathscr{B}}=\oint_L \mathscr{B}\cdot d\boldsymbol{l}$$

① 磁场的环流叫做沿该闭合回路的磁通势.

$$=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\oint_L \frac{u_\theta \cdot dl}{r}.$$

然而，$u_\theta \cdot dl$ 是 dl 在单位矢量 u_θ 的方向上的分量，因而等于 $rd\theta$. 于是上式变为

$$\Lambda_{\mathscr{B}}=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\oint_L d\theta$$

$$=\frac{\mu_0 I}{2\pi}(2\pi)=\mu_0 I,$$

因为绕一个点的总平面角等于 2π. 这个方程就是前面的方程(6.2). 因此，方程(6.2)对于围绕一直线电流的任意的闭合路径，不

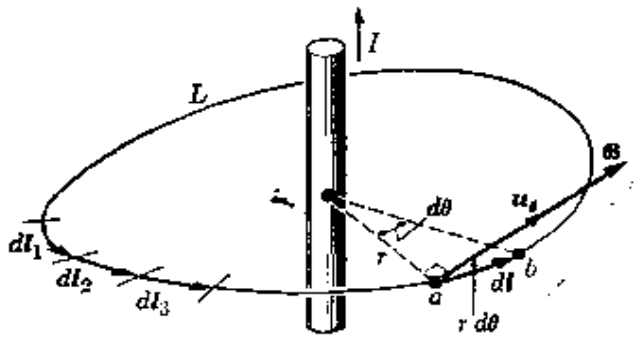


图 6-3　磁场沿一任意的闭合曲线的环流·

论电流与路径的相对位置如何，都是适用的. 更详细的分析(此处从略)表明，方程(6-2) 对于任何形状的电路回路 (不一定是直线的)都是正确的. 如果一条闭合线 L 环连着若干个电流 $I_1, I_2, I_3\cdots$ (图 6-4)，则每一个电流都对磁场沿 L 的环流有贡献. 因此，关于磁场的安培定律可陈述如下：

在一条环连着电流 $I_1, I_2, I_3, \cdots$ 的闭合路径上，磁场的环流为

$$\Lambda_{\mathscr{B}}=\oint \mathscr{B}\cdot dl=\mu_0 I \qquad (6.3)$$

式中 $I=I_1+I_2+I_3+\cdots$ 代表路径 L 所环连的总电流.

应用方程(6.3)时，我们作如下规定：当右手姆指以外的四指

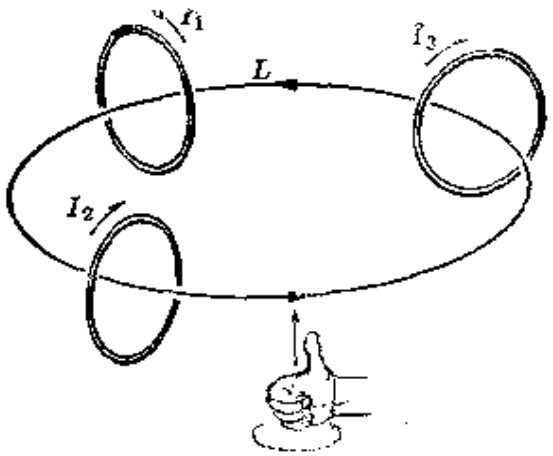


图 6-4　沿任何闭合路径的磁环流，正比于通过该闭合路径的净电流.

沿 L 的绕向时，穿过 L 内部的电流的方向，如果与姆指的指向相同，就视为正的，如果相反，就视为负的. 因此，图 6-4 中的电流 I_1 和 I_3 被视为正的，I_2 被视为负的.

由例题 2.1 可知，电流能够表示为电流密度的通量，即 $I=\int_S \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{u}_N dS$. 因此，安培定律，(即方程6.3)，可以写作

$$\Lambda_{\mathscr{B}}=\oint_L \mathscr{B}\cdot d\boldsymbol{l}$$

$$=\mu_0\int_S \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{u}_N dS, \tag{6.4}$$

上式中 S 代表以 L 为界的任意面.

磁场 $\mathscr{B}$ 的环流一般不为零这一事实表明，在电场具有电势那种意义上，磁场不具有磁势.

当我们计算具有某些几何对称性的电流分布所产生的磁场时，安培定律特别有用. 下面几个例子将表明，与用安培-拉普拉斯定律（即方程 5.13）处理同样问题所需的比较困难的计算过程相比，安培定律的效能要高得多.

例题 6.1　一无限长圆柱体中的电流所产生的磁场.

解 我们考虑沿半径为 a 的圆柱体流动的电流 I(图 6-5). 这个问题的对称性清楚地表明，磁场的力线是中心在这圆柱体轴线上的圆，一点的磁场强度$\mathscr{B}$只与从该点至圆柱体轴线的距离有关系. 因此，取一个垂直于电流方向、半径为 r 的圆周作为路径 L，则得磁环流为

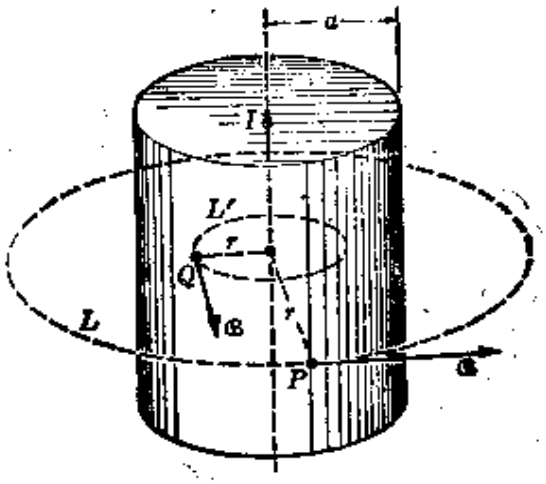


图 6-5

$$\Lambda_{\mathscr{B}}=\oint_L \mathscr{B}\,dl=\mathscr{B}\oint_L dl=\mathscr{B}L=2\pi r\mathscr{B}.$$

如果半径 r 大于电流的半径 a，则全部电流通过这个圆. 于是，应用方程 (6.3) 得出

$$2\pi r\mathscr{B}=\mu_0 I \quad 或 \quad \mathscr{B}=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\ (r>a). \tag{6.5}$$

这正是第五章中关于直长导线中电流的磁场的结果. 因此，圆柱电流外部一点的磁场，与全部电流集中在其轴线时所产生的磁场相同.

在 $r<a$ 的情况下，有两种可能性. 如果电流仅沿圆柱体表面流动(如果这个导体是一个圆柱形金属套，就是这种情况)，则通过 L' 的电流为零；因而安培定律给出 $2\pi r\mathscr{B}=0$，即 $\mathscr{B}=0$. 由此可知，当一圆柱体仅在其表面上有电流时，这个圆柱体内部各点的磁场为零，然而，如果电流均匀分布在圆柱体的整个截面上，则通过 L' 的电流为

$$I'=\frac{I}{\pi a^2}(\pi r^2)=\frac{Ir^2}{a^2}.$$

于是安培定律给出 $2\pi r\mathscr{B}=\mu_0 I'=\mu_0 Ir^2/a^2$，或者

$$\mathscr{B}=\frac{\mu_0 Ir}{2\pi a^2}\quad (r<a). \tag{6.6}$$

由此可见，如果一个圆柱体所载的电流均匀分布在它的整个截面上，则在这

圆柱体内部一点的磁场，正比于从该点至圆柱体轴线的距离.

例题 6.2 环形线圈所产生的磁场.

解 环形线圈是由一根导线均匀地绕在一个环上构成的，如图 6-6 所示. 设这线圈的匝数为 N，等距离地紧密地绕在环上，I 是其中的电流. 这个问题的对称性表明，磁场的力线是与环形线圈同心的圆周. 我们取一个处于环内部的圆周 L 作为积分的路径. 这时磁环流为 $\Lambda_{\mathscr{B}}=\mathscr{B}L$. 由于闭合路径 L 环连着环上的全部线匝，所以穿过 L 的总电流为 NI. 于是由安培定律得出 $\mathscr{B}L=\mu_0 NI$，或者

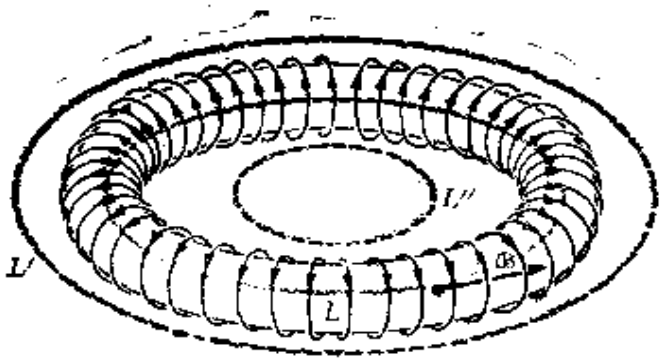


图 6-6 环形线圈

$$\mathscr{B}=\mu_0 NI/L.$$

如果环截面的半径比环的半径小很多，实际上可以认为，对于环内部的所有路径，L 都相同. 设 $n=N/L$ 为环形线圈每单位长度上的匝数. 环内部的磁场几乎是均匀的，并具有下列恒定的值：

$$\mathscr{B}=\mu_0 nI. \tag{6.7}$$

对于环外部的任何闭合路径，例如 L' 和 L''，环连的总电流等于零. 因此 $\mathscr{B}=0$. 换句话说，环形线圈的磁场完全局限在它的内部. 这个结果只适用于线匝绕得非常紧密的环形线圈.

例题 6.3 一根很长的螺线管中心处的磁场.

解 考虑一个螺线管(图 6-7)，每单位长度上的匝数为 n，每一匝中的电流为 I. 如果线匝绕得非常紧密，而且螺线管非常长，可以证明，磁场全部局限在螺线管内部，而且是近乎均匀的. 我们取图 6-7 中的矩形 $PQRS$ 作为积分的路径. 边 PS 和 QR 对磁环流的贡献为零，因为磁场与这两个边垂直. 边 RS 的贡献也为零，因为在螺线管外部磁场为零. 因此，只有边 PQ 贡献一个量 $\mathscr{B}x$，因而 $\Lambda_{\mathscr{B}}=\mathscr{B}x$. 与这个积分路径环连的总电流为 nxI，因为 nx 是在

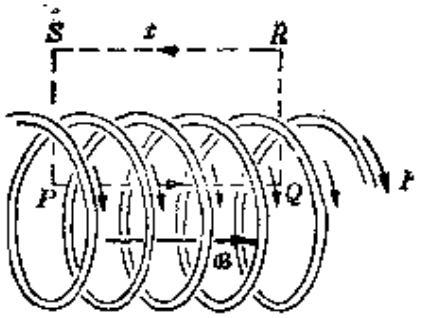


图 6-7　螺线管

长度 x 上的匝数. 于是由安培定律得出 $\mathscr{B}x=\mu_0 nxI$, 或 $\mathscr{B}=\mu_0 nI$, 这个结果与例题 5.6 中关于一个长螺线管中心处的磁场的结果是一致的.

6.3　安培定律的微分形式

由于安培定律能够应用于任何形状的闭合路径，我们现在就把它应用于 XY 平面内一个非常小的(即无限小的) 矩形路径 $PQRS$ 上; 这个闭合路径的边长为 dx 和 dy, 面积为 $dx\,dy$ (图 6-8). 沿 $PQRS$ 环流的方向如图中箭号所示. 这个环流 $\Lambda_{\mathscr{B}}$ 包括四项，每个边一项;

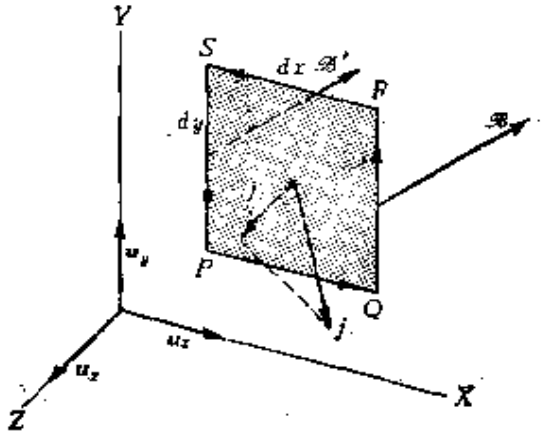


图 6-8　求安培定律的微分形式所用路径元.

即

$$\Lambda_{\mathscr{B}}=\int_{PQRS}\mathscr{B}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_{PQ}\mathscr{B}\cdot d\boldsymbol{l}+\int_{QR}\mathscr{B}\cdot d\boldsymbol{l}+$$

$$\int_{RS}\mathscr{B}\cdot d\boldsymbol{l}+\int_{SP}\mathscr{B}\cdot d\boldsymbol{l}. \tag{6.8}$$

由于路径 QR 平行于 $+Y$ 方向，所以 $d'=u_y dy$，因而

$$\int_{QR}\mathscr{B}\cdot dl=\mathscr{B}\cdot u_y dy=\mathscr{B}_y dy.$$

同理，由于边 SP 沿 $-Y$ 方向，所以 $dl=-u_y dy$，因而

$$\int_{SP}\mathscr{B}\cdot dl=-\mathscr{B}'\cdot u_y dy=-\mathscr{B}'_y dy.$$

于是得出

$$\int_{QR}\mathscr{B}\cdot dl+\int_{SP}\mathscr{B}\cdot dl=(\mathscr{B}_y-\mathscr{B}'_y)dy.$$

但是，由于 $PQ=dx$ 是计算 $\mathscr{B}_y$ 和 $\mathscr{B}'_y$ 的点之间的距离，又因为 $\mathscr{B}_y-\mathscr{B}'_y=d\mathscr{B}_y$，所以可以把 $\mathscr{B}_y-\mathscr{B}'_y$ 写作 $(\partial\mathscr{B}_y/\partial x)dx$. 因此

$$\int_{QR}\mathscr{B}\cdot dl+\int_{SP}\mathscr{B}\cdot dl=\frac{\partial\mathscr{B}_y}{\partial x}dxdy.$$

按同样的推理，方程(6.8)中另外两个积分可以写成

$$\int_{PQ}\mathscr{B}\cdot dl+\int_{RS}\mathscr{B}\cdot dl=-\frac{\partial\mathscr{B}_x}{\partial y}dxdy.$$

把这两个结果加起来，就得出在这个无限小闭合路径上的磁环流为

$$\Lambda_{\mathscr{B}}=\oint_{PQRS}\mathscr{B}\cdot dl=\left(\frac{\partial\mathscr{B}_y}{\partial x}-\frac{\partial\mathscr{B}_x}{\partial y}\right)dxdy. \tag{6.9}$$

设 dI 是通过 $PQRS$ 的电流，则这个无限小的电流与电流密度之间的关系可以写作

$$dI=j\cdot dS=j_z dS=j_z dxdy \tag{6.10}$$

上式中写出 j_z，是因为只有电流密度的 Z 分量对穿过面 $PQRS$ 的电流 dI 有贡献. 电流密度的分量 j_x 和 j_y 平行于这个面，因而不穿过它. 把方程(6.9)和(6.10)代入安培定律的方程(6.3)中，则得

$$\left(\frac{\partial\mathscr{B}_y}{\partial x}-\frac{\partial\mathscr{B}_x}{\partial y}\right)dxdy=\mu_0 dI=\mu_0 j_z dxdy.$$

消去上式中的公因子 $dxdy$，就得到关于这个小面积的安培定律的微分形式如下：

$$\frac{\partial \mathscr{B}_y}{\partial x}-\frac{\partial \mathscr{B}_x}{\partial y}=\mu_0 j_z. \tag{6.11}$$

如果把面 $PQRS$ 放在 YZ 或 ZX 平面内，则可得出类似的表达式

$$\frac{\partial \mathscr{B}_z}{\partial y}-\frac{\partial \mathscr{B}_y}{\partial z}=\mu_0 j_x, \tag{6.12}$$

$$\frac{\partial \mathscr{B}_x}{\partial z}-\frac{\partial \mathscr{B}_z}{\partial x}=\mu_0 j_y. \tag{6.13}$$

(6.11)、(6.12)和(6.13)这三个方程可以合并为一个矢量方程.注意，这三个方程的右边是电流密度矢量 j 的分量乘以 μ_0，而左边可以看作是由矢量$\mathscr{B}$得到的另一个矢量的分量（即把$\mathscr{B}$的分量的偏导数按所示方式结合起来作为另一个矢量的分量），这个矢量叫做$\mathscr{B}$的旋度. 于是这三个方程可以合并为如下的矢量方程：

$$\mathrm{curl}\mathscr{B}=\mu_0 j. \tag{6.14}$$

上式就是安培定律的微分形式. 当电流的分布为已知时，可以利用方程(6.14)求出磁场. 反之，如果磁场为已知的，则可求出电流分布. 在一个没有电流的区域中，$\mathrm{curl}\mathscr{B}=0$.

安培定律的微分形式建立起空间一点的磁场与同一点的电流密度 j 之间的局部关系，酷似高斯定律的微分形式[方程(2.5)]建立起空间中同一点的电场和电荷之间的关系. 把方程(2.5)和(6.14)加以对比，可以得出结论：电流是磁场的源.

对于静电场，与方程(6.14)相当的方程为

$$\mathrm{curl}\mathscr{E}=0, \tag{6.15}$$

因为方程(3.17)表示，静电场的环流等于零($\oint_L \mathscr{E}\cdot d\vec{l}=0$).

6.4 磁 通 量

在一磁场中，穿过任何面(不论是闭合的还是非闭合的)的磁

通量为

$$\Phi_{\mathscr{B}}=\int_S \mathscr{B}\cdot u_N dS. \tag{6.16}$$

穿过任意面的磁通量的概念是十分重要的，特别当这个面不是闭合面时. 磁通量是磁场乘以面积，所以在 SI 单位中必须用 $T\cdot m^2$ 为单位，这个单位叫做韦伯(符号为 Wb)，这是为了纪念德国物理学家韦伯(W. E. Weber, 1804—1891). 因为 $T=kg\cdot s^{-1}\cdot C^{-1}$，所以 $Wb=T\cdot m^2=m^2\cdot kg\cdot s^{-1}\cdot C^{-1}$.

由于不存在(或者至少是迄今尚未观察到)磁质量，所以磁场 $\mathscr{B}$ 的力线是闭合的，这一点已在第四章的例题中表明. 因此，

穿过一个闭合面的磁通量永远等于零.

也就是说，穿过一个闭合面向内的通量，等于向外的通量. 于是有

$$\oint_S \mathscr{B}\cdot u_N dS=0, \tag{6.17}$$

这个结果，也可以据根方程(5.13)所给出的 $\mathscr{B}$ 的一般表达式，从数学上加以证明. (这里从略). 这个结果构成磁场的高斯定律. 与关于电场的方程 (2.4) 类比，可得出磁场的高斯定律的微分形式为

$$\frac{\partial \mathscr{B}_x}{\partial x}+\frac{\partial \mathscr{B}_y}{\partial y}+\frac{\partial \mathscr{B}_z}{\partial z}=0 \quad 或 \quad \mathrm{div}\mathscr{B}=0. \tag{6.18}$$

6.5 物质的磁化

在第 5.8 节中已证明一个小圆电流构成一个磁偶极子. 我们可以假定原子中的电子绕核运动时构成小磁偶极子. 原子可能呈现净磁偶极矩，也可能不呈现净磁偶极矩，这取决于原子内电子的对称性或者电子轨道的相对取向. 大多数分子不是球对称的，因此，由于电子轨道的特殊取向，它们可能呈现一个永磁偶极矩. 例

如，双原子分子具有轴对称性，并可能具有一个平行于分子轴的磁偶极矩．虽然如此，但除铁磁材料之外，大块物质由于其分子的无规取向，并不呈现净磁矩；这种情况类似于物质的电极化的情况．但是，外磁场的存在使电子运动发生畸变，从而引起材料的净磁极化即磁化．实际上发生的情况是，磁场对所有的电子都引起一个绕局部磁场的进动或转动，这将在第 7.6 节中说明．每个电子贡献一个由方程(5.9)表示的磁偶极矩．

为简单起见，我们考虑一段圆柱形材料．这个圆柱体平行于其轴线被均匀极化（图 6-9）．因此，分子的磁偶极子的取向平行于圆柱体的轴线，因而分子的电子电流的取向则垂直于圆柱体的

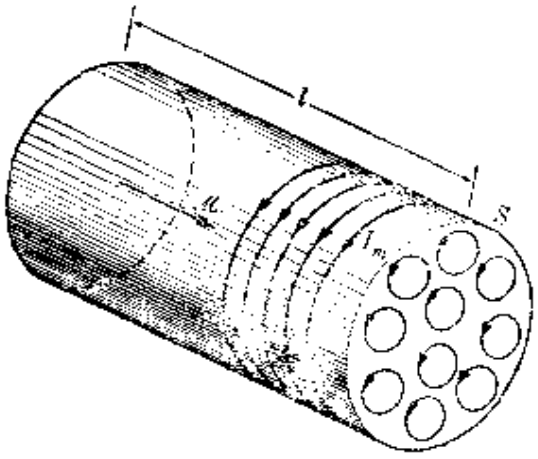


图 6-9　磁化圆柱体上的磁化表面电流．

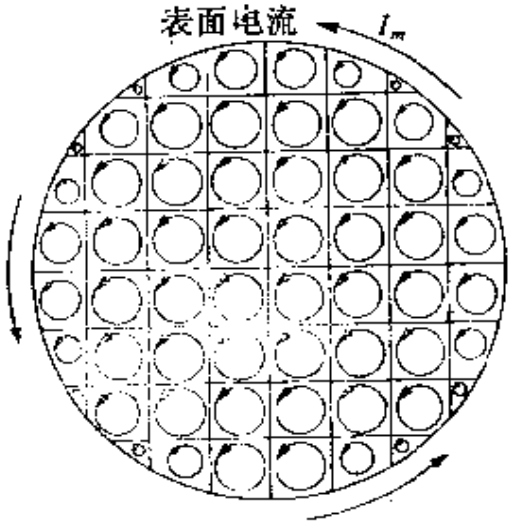


图 6-10　磁化圆柱体中的元电流．

轴线．图 6-9 和更详细的图 6-10 表明，由于邻近电流的相反的效应，内部的电流趋向于互相抵消．因而观察不到材料内部的净电流．但是磁化作用却使材料表面出现一个净电流 I_m．因而这段圆柱体的行为犹如一个螺线管．

一种材料的磁化强度矢量 $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ 被定义为该材料每单位体积的磁偶极矩．设 m 为每个原子或分子所贡献的磁偶极矩，n 是每单位体积中原子或分子的数目，则磁化强度矢量为 $\boldsymbol{\mathcal{M}}=nm$．电流元

的磁矩的单位是 $A\cdot m^2$；因此，磁化强度的单位为 $A\cdot m^2\cdot m^{-3}=A\cdot m^{-1}$ 或 $m^{-1}\cdot s^{-1}\cdot C$，相当于每单位长度上的电流.

磁化物体的表面电流与其磁化强度$\mathscr{M}$之间存在着一个非常重要的关系. 由图 6-9 可知，I_m 的方向垂直于 $\mathscr{M}$. 这圆柱体的行为象是由所有的单个偶极子叠加而形成的一个大磁偶极子. 设 S 为这个圆柱体的截面，l 为其长度，则其体积为 lS，因而它的总磁偶极矩为 $\mathscr{M}(lS)=(\mathscr{M}l)S$. 然而，$S$ 正是表面电流所形成的回路的截面. 因为磁偶极矩＝电流×面积，所以这圆柱体表面上的总磁化电流为 $\mathscr{M}l$；因此，磁化圆柱体表面上每单位长度的电流 I_m 就是 $\mathscr{M}$，即 $I_m=\mathscr{M}$. 虽然这个结果是对于一个特殊的几何形状得到的，但它具有更普遍的适用性. 因此，我们可以说：

> 在一块磁化物质表面上每单位长度的电流 I_m，等于磁化强度矢量$\mathscr{M}$的平行于该物体表面的切面的分量，其方向垂直于$\mathscr{M}$.

6.6 起 磁 场

在前一节中曾证明，一块磁化物质的表面上存某些电流(如果磁化强度不是均匀的，则在其体积中有电流). 这些磁化电流是“冻结的”，因为产生这种电流的电子是束缚于特定的原子或分子上的，因而不能通过这种物质而自由运动. 另一方面，在某些物质中，例如金属，则存在着能够通过物质而运动的电荷. 这种自由电荷所产生的电流，叫做自由电流. 在许多情况下，必须把自由电流和磁化电流明确区别开来.

我们再来考虑一个圆柱形物体，放在一个载有电流 I 的长螺线管内部(图 6-11). 电流 I 产生一个磁场，它使圆柱体磁化，并在圆柱体表面产生一个磁化表面电流，其方向与 I 的方向相同. 每单位长度的磁化表面电流等于$\mathscr{M}$. 设这个螺线管每单位长度的匝

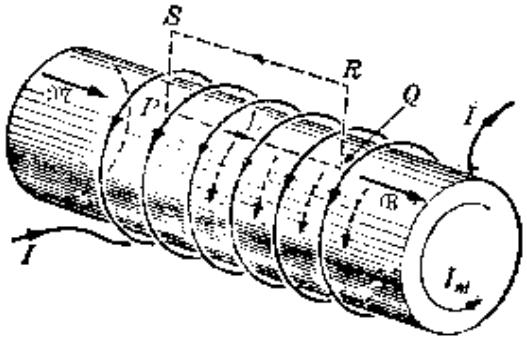


图 6-11

数为 n，则螺线管和磁化圆柱体一起构成的系统，相当于一个每单位长度载有电流 $nI+\mathscr{M}$ 的螺线管．这个有效螺线管电流产生一个平行于圆柱体轴线的合磁场$\mathscr{B}$，$\mathscr{B}$的量值由方程(6.7)［其中的 nI 代之以每单位长度的总电流$(nI+\mathscr{M})$］给出．即 $\mathscr{B}=\mu_0(nI+\mathscr{M})$，或者

$$\frac{1}{\mu_0}\mathscr{B}-\mathscr{M}=nI.$$

上式给出圆柱体表面上每单位长度的传导电流(即自由电流)，nI 作为介质中的磁场$\mathscr{B}$和介质的磁化强度$\mathscr{M}$的函数．上面这个结果表示，我们可以引入一个新的矢量场$\mathscr{H}$，叫做起磁场，它由下式定义：

$$\mathscr{H}=\frac{1}{\mu_0}\mathscr{B}-\mathscr{M}. \tag{6.19}$$

起磁场的单位是 $\mathrm{A\cdot m^{-1}}$ 或者 $\mathrm{m^{-1}\cdot s^{-1}\cdot C}$，它们分别是上式右边两项的 SI 单位．

在这个特殊例子里，$\mathscr{H}=nI$，此式表示$\mathscr{H}$与螺线管每单位长度的传导电流(即自由电流)之间的关系．如果考虑沿圆柱体表面的一段长度 $PQ=L$，则有

$$\mathscr{H}L=LnI=I_{自由}, \tag{6.20}$$

上式中 $I_{自由}=LnI$ 是长度为 L 的一段螺线管的总自由电流．计算

$\mathscr{H}$沿矩形 $PQRS$ 的环流，得出 $\Lambda_{\mathscr{H}}=\mathscr{H}L$，因为在螺线管外部$\mathscr{H}$为零($\mathscr{B}$和$\mathscr{M}$均为零)，而 QR 和 PS 对这个环流没有贡献（因为它们都垂直于磁场）. 因此，方程(6.20)可以写作 $\Lambda_{\mathscr{H}}=I_{自由}$，此式中$I_{自由}$是穿过矩形 $PQRS$ 的总自由电流. 这个结果的适用性比这个简化的证明所表示的要普遍得多. 事实上能够证明，起磁场沿一闭合路径的环流，等于通过该闭合路径的总自由电流. 也就是说，

$$\Lambda_{\mathscr{H}}=\oint_L \mathscr{H}\cdot d\boldsymbol{l}=I_{自由}, \tag{6.21}$$

上式中 $I_{自由}$ 是与闭合路径 L 环连的总自由电流，它是在介质中或者在电路中自由流动的电荷所引起的电流，而不包括物质的磁化所引起的电流. 例如，如果闭合路径 L (图 6-12)与回路 I_1 和 I_2 以及一个磁化强度为$\mathscr{M}$的物体环连，则方程(6.21) 只包括电流 I_1 和 I_2，而在关于磁场$\mathscr{B}$的安培定律即方程(6.3)中，则必须包括所有的电流；也就是说，既要包括自由运动的电荷所产生的电流 I_1 和 I_2，也要包括物体的磁化强度 $\mathscr{M}$ (它起因于束缚电子) 所产生的那些电流.

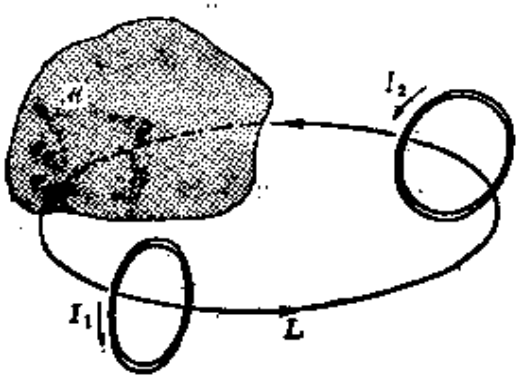


图 6-12

方程(6.19)可以写作如下的形式：

$$\mathscr{B}=\mu_0(\mathscr{H}+\mathscr{M}). \tag{6.22}$$

物体的磁化强度$\mathscr{M}$在物理上是和合磁场$\mathscr{B}$有关系的，因此，能够在$\mathscr{M}$和$\mathscr{B}$之间引入一个关系，类似于在电的情况下$\mathscr{D}$和$\mathscr{E}$之间的关系[方程(2.10)]. 但是，由于历史上的原因，通常不是这样做，而是表示出$\mathscr{M}$和$\mathscr{H}$之间的关系①，即写出

① 这个关系仅对于某些磁性材料（例如各向同性的抗磁体和普通的顺磁材料）才成立.

$$\mathscr{M}=\chi_m\mathscr{H} \tag{6.23}$$

量 χ_m 叫做这种材料的磁化率，它是一个纯数，与所选用的$\mathscr{M}$和$\mathscr{H}$的单位无关. 把方程(6.23)代入方程(6.22)中，得出

$$\mathscr{B}=\mu_0(\mathscr{H}+\chi_m\mathscr{H})=\mu_0(1+\chi_m)\mathscr{H}=\mu\mathscr{H}, \tag{6.24}$$

上式中

$$\mu=\mathscr{B}/\mathscr{H}=\mu_0(1+\chi_m) \tag{6.25}$$

叫做这种介质的磁导率，它的单位与 μ_0 的相同，即 $\mathrm{m\cdot kg\cdot C^{-2}}$. 相对磁导率被定义为

$$\mu_r=\mu/\mu_0=1+\chi_m, \tag{6.26}$$

它是一个与单位制无关的纯数.

当关系式$\mathscr{B}=\mu\mathscr{H}$成立时，方程(6.21)可以写作

$$\oint_L\frac{1}{\mu}\mathscr{B}\cdot d\boldsymbol{l}=I_{\text{自由}}.$$

如果介质是均匀的，因而 μ 是恒定的，则磁场的环流为

$$\Lambda_{\mathscr{B}}=\oint_L\mathscr{B}\cdot d\boldsymbol{l}=\mu I_{\text{自由}}. \tag{6.27}$$

这个结果与安培定律即方程(6.3)类似，不过以自由电流代替了总电流，以 μ 代替了 μ_0. 由此可见，磁化物质对磁场$\mathscr{B}$的作用是以μ代替 μ_0. 例如，埋置在一种磁化介质中的一个直线电流的磁场为

$$\mathscr{B}=\frac{\mu I}{2\pi r}, \tag{6.28}$$

而不是方程(5.19)所给出的公式.

6.7 磁化率的计算

在第 6.6 中曾指出，磁化率 χ_m 表示一种介质对于一外磁场的响应；象电极化率一样，磁化率也与介质的原子和分子的性质有

关系. 由于外磁场的作用，物质的磁化现象中出现两种效应. 一种是磁场所引起的电子运动的畸变. 另一种是在原子或分子具有永磁偶极矩的情况下出现的取向效应. 这两种效应都对 χ_m 的值有贡献，我们将分别加以讨论.

畸变效应

磁场作用一个力于运动电荷上. 因此，如果将一个外磁场施加于物质上，则在原子或分子中运动着的电子将受到外加磁场所引起的一个额外的力. 这个力使电子的运动受到一个微扰. 要精确计算这种微扰，需要使用量子力学的方法. 因此，我们将只陈述主要的结果，并在例题 6.4 中提供一个简化的说明.

磁场对于一个原子中的电子运动的效应，相当于在这个原子中感生一个附加的电流. 这个电流的方向，使得与这个电流相联系的磁偶极矩的方向与磁场方向相反. 由于这种效应与原子的取向无关，因而对于所有的原子都是一样的，所以这材料获得一个与磁场方向相反的磁化强度 $\mathscr{M}$. 这个结果与在电场情况下得到的结果相反. 这种行为叫做抗磁性，这种行为是一切材料所共有的，不过在许多材料中它被下面将要描述的顺磁效应所掩蔽. 所产生的磁化强度由下式给出：

$$\mathscr{M}=-\frac{ne^2\mu_0}{6m_e}\left(\sum_i r_i^2\right)_{\text{平均}}\mathscr{H}, \tag{6.29}$$

上式中 $\mathscr{H}$ 是这材料中的起磁场，n 是每单位体积中的原子数，r_i 是一原子中第 i 个电子至原子核的距离. 求和应遍及这个原子中的所有电子，计算平均值时必须按照量子力学的规定. 上式中其他各量具有通常的意义. 负号表示 $\mathscr{M}$ 的方向与 $\mathscr{H}$ 相反.

于是，按照方程(6.23)，得出磁化率为

$$\chi_m=-\frac{ne^2\mu_0}{6m_e}\left(\sum_i r_i^2\right)_{\text{平均}}; \tag{6.30}$$

由于 χ_m 是负的，所以相对磁导率 $\mu_r=(1+\chi_m)$ 小于 1. 如果把已知常数的值代入方程 (6.30)，并假定在固体中 n 约为 10^{28} 原子·m^{-3}，r_i 约为 10^{-10}m(这是电子轨道的数量级)，则对于固体，χ_m 的数量级 10^{-5}. 此值与表 6-1 所列的值一致。

表 6-1 室温下的磁化率

抗磁物质	χ_m	顺磁物质	χ_m
氢*	-2.1×10^{-9}	氧*	2.1×10^{-6}
氮*	-5.0×10^{-9}	镁	1.2×10^{-5}
钠	-2.4×10^{-6}	铝	2.3×10^{-5}
铜	-1.0×10^{-5}	钨	6.8×10^{-5}
铋	-1.7×10^{-5}	钛	7.1×10^{-5}
金刚石	-2.2×10^{-5}	铂	3.0×10^{-4}
汞	-3.2×10^{-5}	氯化钆($GdCl_3$)	2.8×10^{-3}

* 表示气体，压强为 100 kPa

取 向 效 应

一个原子或分子可能具有与其电子的角动量相联系的永磁偶极矩. 在这种情况下，外磁场的存在产生一个转矩，它趋向于使所有的磁偶极子都沿磁场排列，因而产生一个附加的磁化强度，叫做顺磁性. 因此，顺磁材料所获得的磁性是沿着磁场方向的. 这个效应比抗磁性强得多，因而在顺磁材料的情况下，抗磁效应一般都完全被顺磁效应所屏蔽.

气体的顺磁磁化率近似地由下列表达式给出 [这个表达式类似于有极分子所产生的电极化率的表达式(2.26)]:

$$\chi_m=\frac{nm_0^2\mu_0}{3kT}, \tag{6.31}$$

上式中 m_0 是原子或分子的永磁矩，T 是这种材料的绝对温度，k 是玻耳兹曼常数. 方程(6.31)仅当 $m_0\mathscr{B}/kT\ll1$ 时才成立. 在其他情况下，$\mathscr{M}$ 与 $\mathscr{B}$ 之间的关系就更复杂. 与电的情况下一样，当材料的温度升高时，χ_m 减小. 这种温度效应是分子运动引起的，因

为分子的运动随温度而增加，因而趋向于抵消磁场的排列效应. 原子的磁偶极矩的数量级为 $10^{-23}\mathrm{J}\cdot\mathrm{T}^{-1}$. 因此，把其他常数的值代入方程(6.31)时，则得室温(298 K)下固体的顺磁磁化率的数量级为 10^{-4}，在标准温度和压强下气体的顺磁磁化率的数量级为 10^{-7}. 这个结果与表 6-1 中所列顺磁材料的值很好地符合.

一个重要的结论是：不论是顺磁还是抗磁材料，其 χ_m 都比 1 小很多，因此，在许多情况下，$\mu_r=1+\chi_m$ 可以用 1 来代替.

其 他 效 应

第三类磁性材料叫做铁磁材料. 铁磁材料的主要特性是呈现永磁化强度，这表明原子或分子的磁偶极矩有一种在其相互作用下排列起来的自然趋势. 第 4.1 节中提到的磁石和其他天然磁体都是铁磁材料的例子. 对于这些材料，$\mathscr{M}$和$\mathscr{B}$之间不存在线性关系. 因此，铁磁性和铁电现象在总体特性方面是相似的，虽然它们的起源不同. 铁磁性是与同一个原子中两个电子的自旋 $\boldsymbol{S}_1$ 和 $\boldsymbol{S}_2$ 之间的相互作用相联系的. 这种相互作用基本上具有 $-J\boldsymbol{S}_1\cdot\boldsymbol{S}_2$ 的形式，这里 J 叫做交换积分，它取决于两个电子之间的距离. 当 J 为正时，如果 $\boldsymbol{S}_1$ 和 $\boldsymbol{S}_2$ 平行，就达到平衡，这导致在磁畴中电子自旋的平行取向，所谓磁畴是指一些微观区域(图6-13 a 和 6-14a)，它们的体积约为10^{-8}—$10^{-12}\mathrm{m}^3$，其中包含约10^{21}—10^{17}个原子. 磁畴的磁化方向取决于材料的晶体结构. 例如，对于具有立方晶体结构的铁，易磁化的方向是沿着立方体的三个轴的方向. 在一块材料中，磁畴本身可以取不同的方向；因此，净的宏观效应可能等于零或者可忽略不计. 当有外磁场存在时，那些相对于磁场处于有利取向的磁畴变大，而处于不利取向的磁畴则变小(图 6-13 b)；当外磁场的强度增大时，磁畴的磁化趋向于沿磁场的方向排列(图 6-13 c)，因而这块材料变成一个磁体. 铁磁性与温度有关系. 对于每一种铁磁材料，都有一个温度，叫做居里温度，



图 6-13　磁畴. (a)未磁化的材料，(b)畴生长所引起的磁化，(c)畴取向所引起的磁化. 箭头表示每个磁畴的磁化方向.

高于这个温度时，物质就变成顺磁的. 当热运动大到足以抵消磁场的排列力时，就出现这种现象. 在室温下为铁磁体的材料有铁、镍、钴和钆. 它们的居里温度分别为 1043 K、638 K、1348 K 和 288 K.

然而，有一些材料的 J 是负的. 在这种情况下，如果电子自旋反平行，就达到平衡；因而净磁化强度为零(图 6-14 b). 在这种情况下，称这种材料为反铁磁材料，例如，MnO，FeO，CoO 和 NiO 就是反铁磁材料.

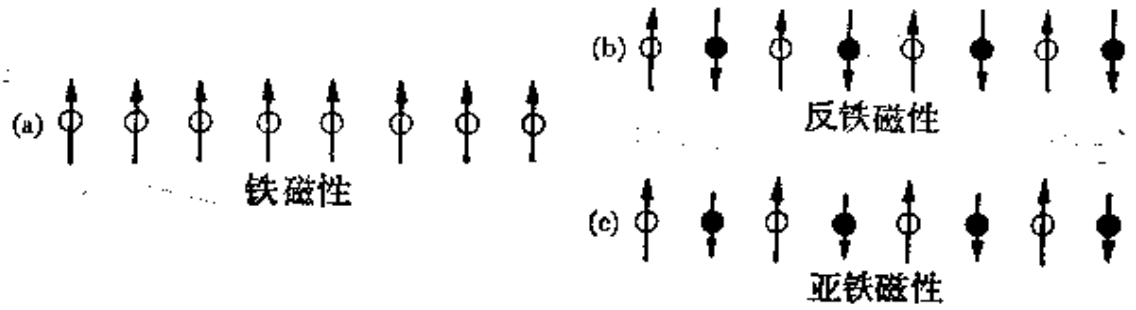


图 6-14　不同材料中磁偶极矩的取向.

另一种类型的磁化，叫做亚铁磁性. 它类似于反铁磁性；但是，由于沿一个方向取向的原子或离子的磁偶极矩，不同于沿相反方向取向的原子或离子的磁偶极矩，结果产生一个净磁化强度(图 6-14c). 这种材料叫做铁氧体，一般地可以用化学式 $MOFe_2O_3$ 来表示它们，其中 M 代表 Mn、Co、Ni、Cu、Mg、Zn、Cd等等. 注意，如果 M 是 Fe，就得到 Fe_3O_4，即磁铁矿.

例题 6.4 外磁场所引起的原子的磁偶极矩

解 我们将用一个很简单的模型来证明，外磁场在一个原子中产生一个磁偶极矩，其方向与磁场的方向相反. 考虑一个电荷为 $-e$，围绕一个原子核旋转的电子. 为简单起见，我们假定这个电子的轨道是圆形的，其半径为 ρ，并且处在 XY 平面内. 设 ω_0 为电子的角速度，$\boldsymbol{F}$ 是原子核作用在这个电子上的力. 于是这个电子的运动方程为

$$m_e\omega_0^2\rho=F. \tag{6.32}$$

如果现在沿 Z 轴方向（即垂直于轨道平面）加上一个磁场 $\mathscr{B}$，电子就受到一个附加的力 $\boldsymbol{F}'=-ev\times\mathscr{B}$. 这个力与力 $\boldsymbol{F}$ 的方向或者相同或者相反，取决于 ω_0 和 $\mathscr{B}$ 的相对取向如何，如图 6-15 所示. 由于作用在电子上的径向力

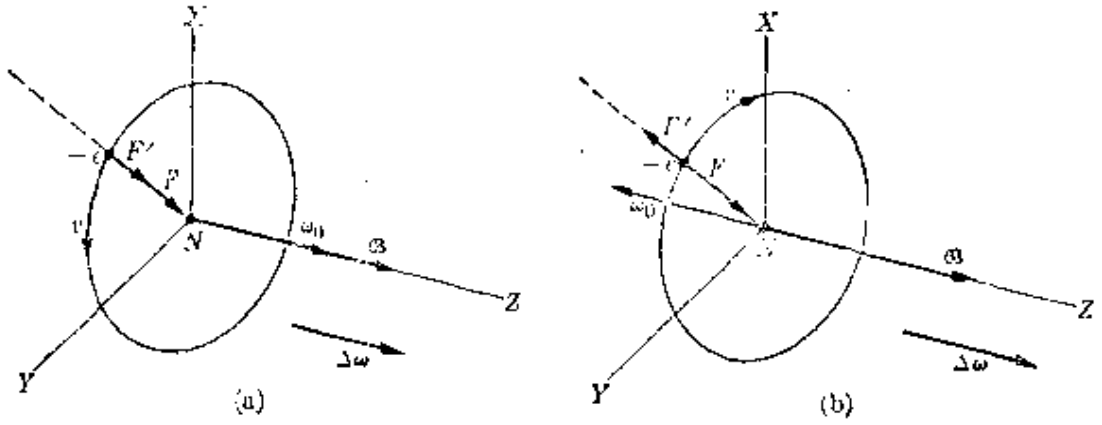


图 6-15 抗磁性的说明.

改变了，所以角频率（假定半径保持不变）也将改变而成为 ω，由 $v=\omega\rho$ 和 $\boldsymbol{F}'$ 的大小等于 $ev\mathscr{B}$ 这一事实，得出电子的运动方程为

$$m_e\omega^2\rho=F\pm e\omega\rho\mathscr{B}. \tag{6.33}$$

上式中的正号适用于图 6-15(a) 中的情况，负号适用于图(b)的情况. 把方程(6.32)代入(6.33)，则得

$$m_e(\omega^2-\omega_0^2)\rho=\pm e\omega\mathscr{B} \quad 或 \quad m_e(\omega+\omega_0)(\omega-\omega_0)=\pm e\omega\mathscr{B}.$$

如果频率变化 $\Delta\omega=\omega-\omega_0$ 为非常小，则可以用 2ω 代替 $\omega+\omega_0$，而不会有多大误差，因而得出

$$2m_e\Delta\omega=\pm e\mathscr{B} \quad 或 \quad \Delta\omega=\pm\frac{e}{2m_e}\mathscr{B}.$$

这个频率变化等于拉摩频率 Ω_L，这将在第 8.6 节中详细讨论. 正号适用于图(a)的情况，表示 ω_0 增加，因而 $\Delta\omega$ 指向右方. 负号适用于图(b)的情况，表示 ω_0 减小，因而 $\Delta\omega$ 也是指向右方. 因此，在这两种情况下，都有下列矢

量关系

$$\Delta\omega=\frac{e}{2m_e}\mathscr{B}.$$

电子运动频率的变化产生一个净电流$-e(\Delta\omega/2\pi)$；根据定义(5.9)，这又产生一个磁偶极矩

$$M=-e\left(\frac{\Delta\omega}{2\pi}\right)(\pi\rho^2)=-\frac{e^2\rho^2}{4m_e}\mathscr{B}. \tag{6.34}$$

原子磁矩的方向与磁场$\mathscr{B}$的方向相反．因而作为一个整体，这种材料将获得一个方向与外加磁场相反的磁化强度．为了得到一个比较普遍的结果而把这个计算过分简化．实际上，必须考虑电子轨道在空间中的无规分布，还必须更详细地分析作用在电子上的局部磁场$\mathscr{B}$的性质．然而，这个简化的计算基本上和方程(6.29)所表示的结果一致．

6.8 静态场定律小结

在前三章中，是把静态电场和静态磁场作为两个分立的实体来讨论的，除了电场源是电荷，磁场源是电流之外，它们之间没有任何关系．因此，导出了两组分立的方程；这些方程的积分形式和微分形式均列于表 6-2 中．如果电荷和电流为已知，由这些方程就能

表 6-2 静态电磁场的方程

定　律	积分形式	微分形式
I. 电场的高斯定律 [方程(2.3)和(2.5)]	$\oint \mathscr{E}\cdot n_N dS=\frac{q}{\varepsilon_0}$	$\mathrm{div}\mathscr{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$
II. 磁场的高斯定律 [方程(6.17)和(6.18)]	$\oint \mathscr{B}\cdot n_N dS=0$	$\mathrm{div}\mathscr{B}=0$
III. 电场的环流 (方程(3.17)和(6.15)]	$\oint \mathscr{E}\cdot dl=0$	$\mathrm{curl}\mathscr{E}=0$
IV. 磁场的环流(安培定律) [方程(6.3)和(6.14)]	$\oint \mathscr{B}\cdot dl=\mu_0 I$	$\mathrm{curl}\mathscr{B}=\mu_0 j$

够算出静态电场$\mathscr{E}$和静态磁场$\mathscr{B}$．反之，如果$\mathscr{E}$和$\mathscr{B}$为已知，就能算出电荷和电流．这样看来，静态电场和静态磁场似乎可以看

成是两个独立的场. 然而，我们知道，实际情况并非如此. 在第四章中，曾利用洛伦兹变换，推导出把两个作匀速相对运动的观察者所测得的电场和磁场联系起来的规则. 在那里我们看到 $\mathscr{E}$ 和 $\mathscr{B}$ 是密切联系着的. 因此，可以期望，在与时间有关的情况下，以前得到的一些方程需要作某些修改. 如何修改这些方程，是第八章的内容，在那里将会得出以实验证据为基础的一组新方程. 这些方程是前面方程的推广.

习　题

6.1　一根无限长直导线载有 10A 均匀的连续电流. 导线的半径为 4×10^{-2}m. (a)计算导线中心的磁场，至中心为 2×10^{-1}m 处的磁场，导线表面的磁场. (b)计算至中心为 8×10^{-2}m 和 1.5m 处的磁场. (c) 试问：哪一点的磁场强度为导体表面磁场的百分之一？

6.2　一个环形线圈，其半径为 0.5m，载有 7 A 的恒定电流. 如果这线圈的匝数为 600，试求环形线圈内部磁场的量值.

6.3　一个每米长绕 1400 匝的很长的螺线管，其线圈中载有 25A的恒定电流，试求螺线管内部的磁场.

6.4　一个内、外半径为 R_1 和 R_2 的空圆柱形导体，载有一个均匀分布于其整个截面上的电流 I(图 6-16). 利用安培定律，证明：(a)对于 $r>R_2$，$\mathscr{B}=\mu_0 I/2\pi r$；(b)对于 $R_1<r<R_2$，

$$\mathscr{B}=\frac{\mu_0 I(r^2-R_1^2)}{2\pi(R_2^2-R_1^2)r}.$$

(c)对于 $r<R_1$，$\mathscr{B}=0$.

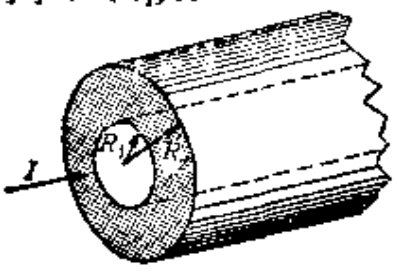


图　6-16

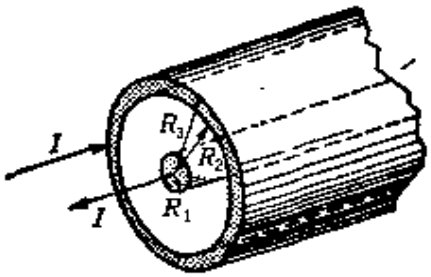


图　6-17

6.5　同轴电缆是一个内、外半径为 R_2 和 R_3 的圆筒形导体，其内部有一个同心的，半径为 R_1 的实心导体(图 6-17). 在通常情况下，电流 I 送入内部

导体，再沿外部圆筒流回来. (a) 利用安培定律，确定这导体内部及其周围各点的磁场. (b) 画出$\mathscr{B}$随 r 变化的曲线. 假定电流密度是均匀的.

6.6 要制作一个螺线管，使其内部的磁场为 0.25T，螺线管的半径为 0.1m. 导线能承载的最大电流为 7 A. (a) 每米需绕多少匝？(b) 如果螺线管长为 1 m，需要多长的导线？

6.7 证明：如果在一介质中存在着具有恒定密度的均匀电流，则这介质中的磁场为$\mathscr{B}=\frac{1}{2}\mu_0 j\times r$(提示：证明关系式 $\mathrm{curl}\mathscr{B}=\mu_0 j$ 成立.)

6.8 证明：如果空间一点的磁场是恒定的，则在该点电流密度为零. (提示：令$\mathscr{B}=u_x\mathscr{B}$，证明 $\mathrm{curl}\mathscr{B}=0$.)

6.9 某一区域中的磁场$\mathscr{B}$为 2T，其方向沿图 6-18 中的正 X 轴. (a) 求穿过图中的面 $abcd$ 的磁通量. (b) 求穿过面 $befc$ 的磁通量. (c) 求穿过面 $aefd$ 的磁通量.

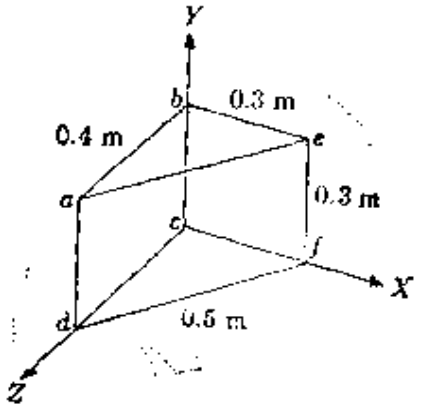


图 6-18

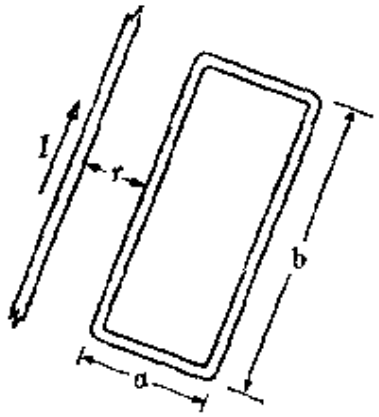


图 6-19

6.10 在图 6-19 中，当有一电流 I 通过直导线时，试求通过矩形回路的磁通量.

6.11 考虑一根载有电流 I 的无限长直导线. 这根载流导线的一部分被一个闭合的圆柱面包围(见图 6-20). 试利用方程 (5.19)，确定通过这个闭

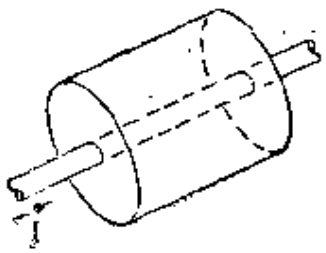


图 6-20

合面的磁通量. (提示: 要考虑三个面: 两个圆面, 一个圆柱面.)

6.12 证明: 对于一个均匀的磁场, $\mathrm{div}\mathscr{B}=0$.

6.13 证明: 对于习题 6.7 中给出的磁场, $\mathrm{div}\mathscr{B}=0$.

6.14 把方程(6.19)给出的$\mathscr{B}$的值代入方程(6.14)中, 证明

$$\mathrm{curl}\mathscr{B}=\mu_0(j_{自由}+\mathrm{curl}\mathscr{M}).$$

(这个结果表明, 介质的磁化效应, 相当于在自由电流密度上增加一个磁化电流密度 $j_{\mathscr{M}}=\mathrm{curl}\mathscr{M}$.)

较难的习题

6.15 一块无限长和无限宽板材的厚度为 d. 板内一点 P_1的坐标为$x=a$, 另一点P_2的坐标为$x=-a$, 如图 6-21所示. 对于本题的(a)和(b)部分, 把板材看成是不导电的, 但具有均匀的体电荷密度 ρ, 如图 6-21a 所示. (a)在如图 6-21b 所示的图上概略画出点 P_1 和点 P_2处的电场矢量 $\mathscr{E}$. (b)利用高斯定律和对称性, 确定点 P_1 处 $\mathscr{E}$ 的量值. 对于本题的(c)和(d)部分, 这块板材被看成是导电的, 但不带电荷, 其电流密度 j 是均匀的, 方向如图 6-21c 所示. (c) 在如图 6-21d 所示的图上, 概略画出点 P_1 和 P_2 处的磁场矢量 $\mathscr{B}$ (d)利用安培定律和对称性, 确定点 P_1 处$\mathscr{B}$的量值.

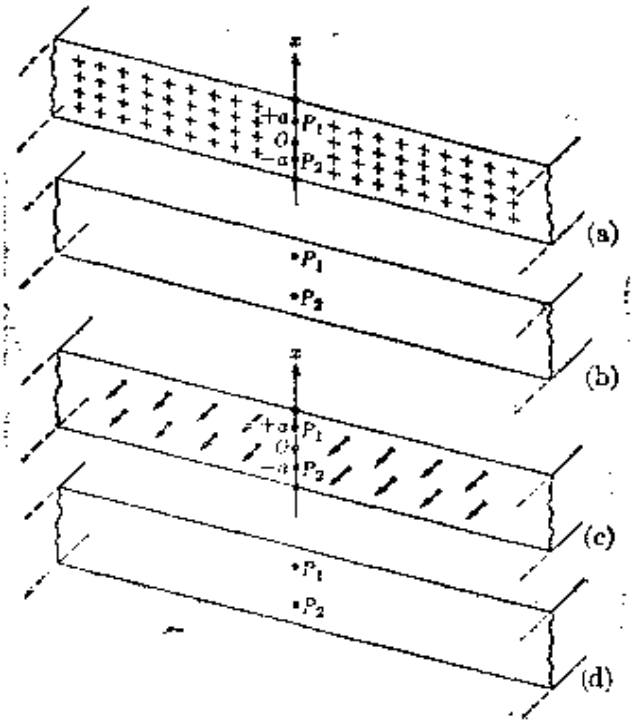


图 6-21

6.16　利用方程 (5.25) 中给出的一个磁偶极子的磁场的分量，验证：$\mathrm{curl}\mathscr{B}=0$, $\mathrm{div}\mathscr{B}=0$.

6.17　利用算符

$$\nabla=a_x\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)+a_y\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)+a_z\left(\frac{\partial}{\partial z}\right),$$

证明下列恒等式成立：

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{A}=\nabla\times\boldsymbol{A},\quad \mathrm{curl}\ \boldsymbol{A}=\nabla\times\boldsymbol{A},\quad \mathrm{grad}\ V=\nabla V,$$

上式中 V 是一标量，$\boldsymbol{A}$ 是一矢量.

6.18　利用算符 ∇，重新写出表 6-2 中列出的电磁场的微分方程.

6.19　利用习题 6.17 的结果，证明

$$\mathrm{curl\ grad}\ V=\nabla\times(\nabla V)=0,$$

$$\mathrm{div\ curl}\ \boldsymbol{A}=\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0.$$

由这两个恒等式能够得出两个重要结果：一个结果是，既然对于静电场有 $\mathscr{E}=-\mathrm{grad}V$，所以 $\mathrm{curl}\mathscr{E}=\nabla\times\mathscr{E}=0$；这个结果已由方程(6.15)表明. 另一个结果是，既然对于磁场有 $\mathrm{div}\mathscr{B}=\nabla\cdot\mathscr{B}=0$，所以存在一个矢量场 $\mathscr{A}$，它满足 $\mathscr{B}=\nabla\times\mathscr{A}$. 这个矢量场 $\mathscr{A}$ 叫做电磁场的矢势.

6.20　证明一匀强磁场 $\mathscr{B}$ 的矢势为 $\mathscr{A}=\frac{1}{2}\mathscr{B}\times r$. (提示：假定 $\mathscr{B}$ 是沿着 Z 轴，先求出 $\mathscr{A}$ 的直角分量，然后求出 $\nabla\times\mathscr{A}$.)

6.21　写出算符 $\nabla^2=\nabla\cdot\nabla$. 然后证明拉普拉斯方程 (2.7) 和泊松方程 (2.6) 可以分别写作 $\nabla^2V=0$ 和 $\nabla^2V=-\rho/\varepsilon_0$.

第七章　物质的电结构

7.1 引　　论

直到发现了电子、质子和中子，才有了关于原子和分子结构的满意的模型．一旦能够根据前面讨论过的电的和磁的相互作用，来说明电子围绕带正电的原子核的运动，对于原子和分子结构的理解就非常迅速地进展．在一级近似下，能够利用牛顿力学的方法来分析电子围绕原子核的运动．但是，要想精确地描述原子和分子中电子的运动，就必须利用量子力学的方法．在本章中，我们将根据牛顿力学来讨论原子结构的基本方面，只有当我们为了说明某些方面非用量子力学不可时，才求助于它．关于用量子力学进行的详细描述，请参看第十八章和本书第三卷．

7.2 原子和分子中的电相互作用

我们已经多次提到，物质是由带电粒子组成的．这种组成的表现之一，是经常观察到的某些材料制成的物体用布或毛皮摩擦后能够带电的现象．其他许多实验室实验都表明，一切原子的组分都是带电粒子．例如金属丝加热时会发射电子，犹如液体加热时有分子蒸发出来一样．这种现象叫做热电子发射．

与物质的电结构有关系的另一个重要现象是电解．假定在熔盐（例如 KHF_2）或者在含有酸（例如 HCl）、碱（NaOH）或盐（例如 NaCl）的溶液中，产生一个电场（图 7-1）．可以把两个带电相反的棒或板（称为电极）浸入溶液中来产生电场．电荷在电场作用下流动．某几种带电的原子朝正极即阳极移动，另外几种

则朝负极即阴极移动. 这种现象表明，被溶解物质的分子已经分离(即离解)为两种不同的带电成分，即离子. 一些离子带正电，沿电场的方向运动，另一些离子带负电，沿与电场相反的方向运动，例如，在NaCl 的情况下，Na离子朝阴极运动，因此是正离子，又称为阳离子；而 Cl 离子朝阳极运动，因此是负离子，又称为阴离子. 这种离解可以写作下列形式：

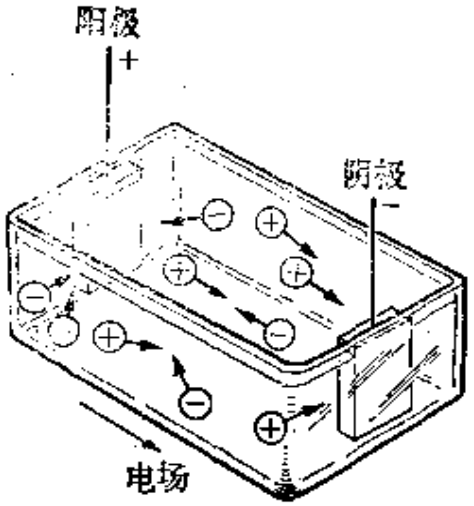


图 7-1　电解. 离子在带电电极产生的电场的作用下运动.

$$NaCl \rightarrow Na^{+} + Cl^{-}.$$

由于正常的 NaCl 分子并不显示任何明显的电荷，所以可以假定它们是由等量的正、负电荷组成的. 当 NaCl 分子离解时，正负电荷就不再抵消. 一个离子带有过剩的负电，而另一个离子则带有过剩的正电. 已经证明，一切电荷都是一个基本的单位电荷e的整数倍，因此可以假定正离子带电荷$+\nu e$，负离子带电荷$-\nu e$，这里ν是一个待以后确定的整数. 当离子到达每个电极时，它们把自己的电荷与电极上的电荷交换而变成中性的. 通常伴随着一系列化学反应(不过这和这里的讨论无关). 这些化学反应可用于确定到达每个电极的离子的性质.

经过一段时间t后，到达每个电极的每一种离子的数目为N. 于是迁移到每一个电极上的总电荷的绝对值为$Q=N\nu e$. 设m为每个分子的质量，则淀积在两个电极上的总质量为$M=Nm$. 这两个式子相除，则得

$$\frac{Q}{M}=\frac{\nu e}{m}. \tag{7.1}$$

如果 N_A 是阿伏伽德罗数(即 1 摩尔任何物质中的分子数),则 1摩尔该物质的质量为 $M_A=N_Am$. 于是方程(7.1) 可以写作如下形式:

$$\frac{Q}{M}=\frac{ve}{m}=\frac{N_Ave}{N_Am}=\frac{Fv}{M_A}. \tag{7.2}$$

式中

$$F=N_Ae \tag{7.3}$$

是一个普适常数,叫做法拉第常数. 它表示1 摩尔 $v=1$ 的离子的电荷. 法拉第常数的实验值为

$$F=9.6487\times10^4\mathrm{C\cdot mol^{-1}}. \tag{7.4}$$

由这个 F 值和以前得出的 e 值,算出阿伏伽德罗数为

$$N_A=6.0225\times10^{23}\mathrm{mol^{-1}}, \tag{7.5}$$

此值与用其他方法得到的值符合.

人们已在实验方面证实了方程(7.2),并发现 v 等于所研究的离子的化学价. v 是化学价这一点表示,当两个原子结合成一个分子时,它们交换电荷 ve,一个变成正离子,另一个变成负离子. 由此产生的两个离子之间的电相互作用,把它们保持在一起. 一个可靠的假定是,被交换的粒子是电子,因为电子比质子轻得多,更容易运动. 这种化学键联的图象,叫做离子键联,必须看作仅仅是初步的讨论,还需作进一步的修正.

在第一卷第十三章中曾指出,引力太弱,不能产生把两个原子结合成一个分子或者把分子结合起来形成一块物质所需的吸引力;并且指出,引力大约只有电力的 10^{35} 分之一. 我们现在来比较一下电力和引力的数量级. 如果距离相同,则电相互作用的强度由耦合常数 $q_1q_2/4\pi\varepsilon_0$ 决定,而引力相互作用的强度由 γm_1m_2 决定. 因此,

$$\frac{\text{电相互作用}}{\text{引力相互作用}}=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0\gamma m_1m_2}.$$

为了求出上式的数量级，令 $q_1=q_2=e$，$m_1=m_2=m_p$；于是，对于两个质子即两个氢离子，有

$$\frac{\text{电相互作用}}{\text{引力相互作用}}=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\gamma m_p^2}=1.5\times10^{36}.$$

对于一个质子和一个电子之间的相互作用($m_1=m_p$，$m_2=m_e$)，上述比值就更大：2.76×10^{40}. 因此，我们得出结论：

电相互作用具有能使原子结合起来形成分子，或者使电子和质子结合起来形成原子所需要的数量级.

现在结论是明显的：化学过程(以及一般而言宏观物质的行为)是由原子和分子之间的电相互作用所引起的. 因此，彻底了解原子和分子的电结构，对于说明化学过程，或者一般而言，对于说明在我们周围通常发生的一切现象(不论是在无生命的还是在有生命的物质中发生的)，都是十分重要的. 我们知道，物理学的目的就是要了解物质的基本组分的结构，并且根据基本组分之间的相互作用来说明宏观物质的行为.

每当有带电的物体存在时，引力一般都可忽略不计. 仅当讨论具有巨大质量而不具有净电荷或者其电荷比其质量小很多的物体时，引力才是重要的. 例如行星运动或地面附近物体的运动，就属于这种情况.

7.3 原子结构

了解原子的结构是物理学的基本问题之一. 我们现在要提出一些初步的概念和一个满意的原子模型. 原子通常是电中性的，因为宏观物质并不显示总的电力. 因此，原子必定包含等量的正电和负电，或者换句话说，包含相等数目的质子和电子. 这个数目叫做原子序数，并用 Z 表示. 因此，原子是由与质子相联系的正电荷 $+Ze$ 和来自电子的等量的负电荷所组成.

电子和质子在一个原子中的分布，可以通过实验探测该原子的内部来确定. 在散射实验中，是把一束快速带电粒子，例如氢离子即质子或氦离子即 α 粒子，投射在这个原子上，并观察所产生的相互作用. 对称性表示，可以把原子看成是球形的，其半径约为 10^{-10} m. 如在例题 2.4 中已经证明的，一个半径为 a 的带电球体(图 7-2)，如果其电荷 Q 均匀分布在它的整个体积中，则它在所有外部的点产生一个电场

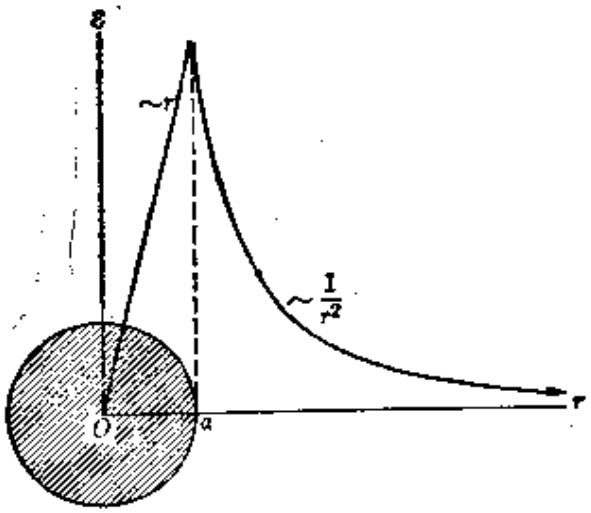


图 7-2　一个半径为 a 的带电球体的电场.

$$\mathscr{E}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, r>a \tag{7.6}$$

而在所有内部的点($r<a$)产生一个电场

$$\mathscr{E}=\frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3}, r<a \tag{7.7}$$

我们考虑一些质量为 m，电荷为 q，速度为 v_0 的粒子，它们趋近一个半径为 a 的均匀带电球体，但不穿过它. 这些粒子所经受的偏转将在例题 7.1 中计算出来，其结果为

$$\cot\frac{1}{2}\phi=\frac{4\pi\varepsilon_0 m v_0^2}{Qq}b, \tag{7.8}$$

上式中 b 为碰撞参数，定义为由碰撞中心至入射粒子的初始路径

的垂直距离(见图 7-3). 用质子和α粒子进行的散射实验表明，许多粒子发生大角度的散射，在某些事例中散射角甚至达到180°

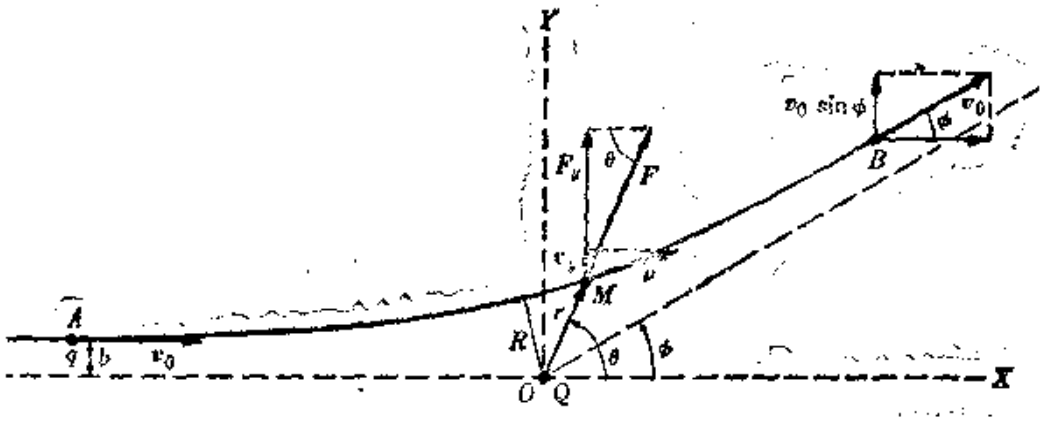


图 7-3

我们采用原子的有核模型(图 7-4)：全部质子集结在原子中心处一个很小的、叫做原子核的区域内. 因此，原子核带有电荷 $+Ze$. 电子绕着原子核运行，犹如行星绕着太阳公转. 在这个模型中，$Q=Ze$；并令轰击粒子的 $q=ve$(质子的 $v=1$，α粒子的 $v=2$)由方程(7.8)可知，碰撞参数与偏转角之间的关系为

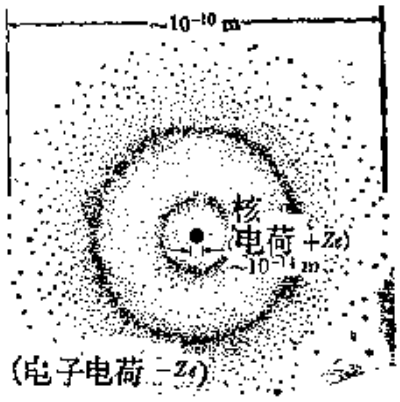


图 7-4 原子中电子的分布.

$$b=\frac{vZe^2}{4\pi\varepsilon_0 mv_0^2}\cot\frac{1}{2}\phi.$$

在这个实验装置中，是把若干粒子投射在一块非常薄的金属箔上，同时观察这些粒子的偏转(图 7-3). 由于直接瞄准一个特定的原子是不可能的，所以 b 是不能控制的. 因此，我们用统计的方法来解释实验的结果.

设薄金属箔的厚度为 t，散射材料每单位体积内的原子数为 n，如果投射到每单位箔面积上的粒子数为 N，其中有一些将在

箔中原子核附近通过(这时碰撞参数小),因而受到大角度的偏转,有一些粒子将在离原子核较远处通过(这时碰撞参数大),因而受到小角度偏转. 统计分析的结果(见例题 7.2)表明,被偏转到立体角 $d\Omega$($d\Omega$对应于相对于入射方向的散射角 ϕ 和 $\phi+d\phi$.)中的粒子的数目 dN 由下式给出:

$$\frac{dN}{d\Omega}=-\frac{Nnv^2Z^2e^4t}{4(4\pi\varepsilon_0)^2m^2v_0^4}\csc^4\frac{1}{2}\phi. \tag{7.9}$$

上式中有一负号,因为 dN 表示由于散射而从入射束中移去的粒子的数目,因而对应于 N 减小.

方程(7.9)所预言的结果是,每单位立体角中散射粒子的数目,必须按 $\csc^4\frac{1}{2}\phi$ 规律统计地分布. 对于所有角度证实这个预言,就间接证明全部正电荷都集中在原子中心附近. 1911—1913年期间,盖革(H. Geiger)和马斯登(E. Marsden)在英国物理学家卢瑟福(E. Rutherford, 1871-1937)的指导下,首次进行了一系列实验,证明了这个预言. 这些实验是原子的有核模型的基础;自那时起,就认为这个模型是正确的.

对于碰撞参数 b 的每一个值,都有一个最接近距离 R(图7-3);在这个距离处,轰击粒子离中心最近. 正碰时,亦即当 $b=0$ 时,最接近距离为最小. 这时轰击粒子被直接反射回去,从而经受 180° 偏转. 令轰击粒子的初动能即 $\frac{1}{2}mv_0^2$,等于它在被反射之前暂时停止的那一点的势能即 $vZe^2/4\pi\varepsilon_0R$,就可求出最接近距离的最小值. 于是得出:

$$R=\frac{vZe^2}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{1}{2}mv_0^2\right)}. \tag{7.10}$$

对于不同的实验条件计算这个距离(见例题 7.3),结果表明,

当能量约为 10^{-13}J(即 1 MeV)时，这个距离约为 10^{-14}m. 这个距离表示原子核半径的上限. 因此，质子被集中在一个线度约为 10^{-14} m 的区域中. 由于原子的直径约为 10^{-10} m，可以看出原子核仅仅占有原子体积的一个很小的部分.

在碰撞参数非常小和能量足够高的情况下，当入射粒子非常接近原子核时，我们观察到 $\csc^4\frac{1}{2}\phi$ 规律不成立. 这个观察结果表明，存在着其他相互作用，即核力. 根据方程(7.9)所表示的纯库仑散射来分析这种分歧，能得出关于核力的重要信息.

在所有原子中，最简单和最轻的是氢原子. 一个氢原子是由一个质子和一个绕着这个质子旋转的电子组成的. 在这种情况下，$Z=1$，氢原子的核就是一个质子. 由于电子受遵从 $1/r^2$ 规律的有心吸引力的作用，所以其轨道应该是一些椭圆，质子在椭圆的一个焦点上；其道理与行星运动的道理相同. 然而，若干特点使电子轨道不同于行星的轨道，所以电子轨道的分析需要特殊的方法；这些方法依赖于量子力学的原理.

比氢重的原子，其原子质量大于它们所包含的 Z 个质子的质量，这是由于原子核中还存在着中子. 原子核中粒子的总数叫做质量数，并且 A 表示它. 因此，一个原子中包含 Z 个电子，Z 个质子和 $(A-Z)$ 个中子. 为了使原子核保持稳定，中子显然是必不可少的. 如果质子只受它们自身之间的相互作用，它们就会由于都带正电而彼此排斥. 若干个质子一起停留在原子核中这一事实表明，除它们之间的电相互作用之外，还有另外的、非常强的相互作用(对应于所谓核力)抵消电排斥力. 中子对核力有贡献，但不增加电排斥力，因此产生一种稳定效应.

原子的化学特性是一种电效应，因而由原子序数 Z 决定. 每一种化学元素是由具有相同原子序数 Z 的原子组成的. 但是，对

于一个给定的 Z 值，质量数 A 可以有若干个不同的值. 换句话说，对于原子核中给定的质子数，可以有不同的中子数. 原子序数相同而质量数不同的原子，叫做同位素. 同位素对应于同一种化学元素. 一种化学元素的各种同位素，是用这种元素的化学符号(这个符号也表示原子序数)和它的左上角标(表示质量数)来表示. 例如，氢($Z=1$)有三种同位素：^{1}H，^{2}H(即氘)和^{3}H(即氚). 类似地，碳($Z=6$)的最重要的两种同位素是^{12}C和^{14}C. ^{12}C被用来定义原子质量单位.

例题 7.1 一个带电粒子在另一个带电粒子的库仑排斥力作用下的散射.

解 我们考虑一个带电粒子在另一个带电粒子(后者的质量比前者大很多，以致在它们相互作用的过程中可以认为后者是静止的)的排斥力作用下发生偏转(即散射)的问题. 这个问题，由于它在原子物理和核物理的多种不同情况下的应用而特别重要. 例如，一个被回旋加速器加速了的质子在靶材料的一个原子核附近通过时，这质子就在原子核的静电排斥力作用下发生偏转(即散射).

设 O 为坐标系的原点，在此坐标系中，一个电荷为 Q 的粒子可以看作是静止的. 一个电荷为 q、质量为 m 的粒子，从点 A 以速度 v_0 朝着原点射来. 点 A 至 O 的距离很大 (图 7-3). 距离 b 叫做碰撞参数，它是 v_0 所在的直线与通过点 O 平行于 v_0 的直线(在这里就是 X 轴)之间的距离. 这个运动着的粒子将沿着路径 AMB 运动；当力是排斥的而且与距离平方成反比时，路径 AMB 是双曲线的一支. 对于库仑力，

$$F=\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{qQ}{r^2}.$$

当这个粒子在点 A 时，它相对于点 O 的角动量的量值为 mv_0b. 在任意位置上，例如在点 M，相对于点 O 的角动量由 $mr^2(d\theta/dt)$ 给出. 由于库仑力是有心力，所以角动量必然保持恒定；即

$$mr^2\frac{d\theta}{dt}=mv_0b,$$

在 Y 方向上，运动方程为

$$m\frac{dv_y}{dt}=F_y=F\sin\theta=\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{qQ\sin\theta}{r^2}.$$

利用前一个方程消去 r^2，则得 Y 方向上的运动方程为

$$\frac{dv_y}{dt}=\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{qQ}{mv_0b}\sin\theta\frac{d\theta}{dt}.$$

必须把这个方程从路径的一端到另一端积分，才能求出这个粒子的总的偏转. 在点 A，$v_y=0$，因为初速度平行于 X 轴，而且 $\theta=\pi$. 在点 B，$v_y=v_0\sin\phi$，$\theta=\phi$. 注意，在点 B，速度又等于 v_0，这是因为，根据对称性，这个粒子退去时必定重新获得它在趋近时所失去的速度. 能量守恒原理也证实这个论断. 因此，

$$\int_0^{v_0\sin\phi}dv_y=\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{qQ}{mv_0b}\int_\pi^\phi\sin\theta d\theta$$

或

$$v_0\sin\phi=\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{qQ}{mv_0b}(1+\cos\phi).$$

利用三角恒等式 $\cot\frac{1}{2}\phi=(1+\cos\phi)/\sin\phi$，可把上式写作

$$\cot\frac{1}{2}\phi=(4\pi\varepsilon_0)\frac{mv_0^2}{qQ}b. \tag{7.11}$$

这个方程给出散射角 ϕ 与碰撞参数 b 的关系. 这正是方程(7.8).

注意，方程(7.11)仅对于与距离平方成反比的力才成立. 如果力与距离之间不存在这种关系，散射角将满足另一种形式的方程. 因此，散射实验对于确定粒子之间的相互作用的力律也是非常有用的.

在核物理实验室中进行散射实验时，是用回旋加速器、范德格喇夫加速器或其他类似装置来加速电子、质子或其他粒子. 然后根据观察到的散射粒子的角分布来确定粒子之间作用力的性质.

例题 7.2 对于库仑散射，推导方程(7.9).

解 设 n 为散射体每单位体积中原子的数目. 于是 nt 就是单位面积的、厚度为 t 的薄金属箔中散射原子的数目. 半径为 b、宽度为 db 的环带(其面积为 $2\pi bdb$)中原子的数目为 $nt(2\pi bdb)$，如图 7-5 所示. 设 N 为投射在金属箔单位面积上的粒子的数目，则碰撞参数在 b 和 $b+db$ 之间的粒子的数目为 $dN=N(nt)(2\pi bdb)$. 然而，把方程(7.11)给出的碰撞参数的表达式微分，则得 $db=-\frac{1}{2}(qQ/4\pi\varepsilon_0mv_0^2)\csc^2\frac{1}{2}\phi d\phi$. 把这个 db 的表达式和 $q=$

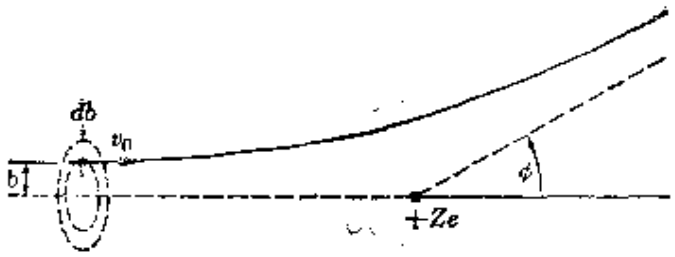


图 7-5　一个正离子在原子核的库仑推斥力作用下的偏转.

ve, Q - Ze 代入 dN 的表达式，则得

$$dN = -\frac{\pi N n v^2 Z^2 e^4 t}{(4\pi\varepsilon_0)^2 m^2 v_0^4} \cot\frac{1}{2}\phi \csc^2\frac{1}{2}\phi d\phi. \tag{7.12}$$

对于轻的靶原子，必须用入射粒子和靶原子一起构成的系统的折合质量，来代替入射粒子的质量 m.

如果以原子核为圆锥的顶点画两个锥角为 ϕ 和 $\phi+d\phi$ 的圆锥面(图7-6)，则方程 (7.12) 所表示的全部粒子都被偏转而通过这两个锥面之间的立体角. 这个立体角是用图中的阴影面积除以半径的平方来度量的. 这个阴影面积为 $(2\pi r\sin\phi)(rd\phi) = 2\pi r^2\sin\phi d\phi$. 鉴于立体角的定义是面积除以半径的平方，所以这个立体角为 $d\Omega = 2\pi\sin\phi d\phi = 4\pi\sin\frac{1}{2}\phi\cos\frac{1}{2}\phi d\phi$. 在这里利用了关系式 $\sin\phi = 2\sin\frac{1}{2}\phi\cos\frac{1}{2}\phi$. 角分布由每单位立体角中散射粒子的数目来表示. 于是有

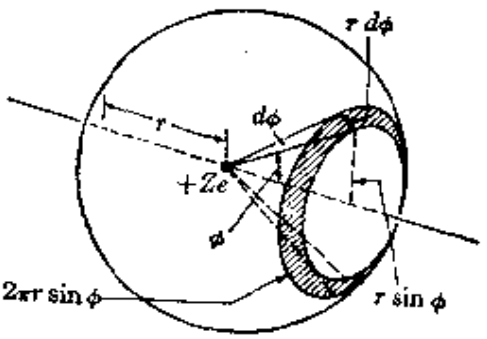


图　7-6

$$\frac{dN}{d\Omega} = \frac{N n v^2 Z^2 e^4 t}{4(4\pi\varepsilon_0)^2 m^2 v_0^4}\csc^4\frac{1}{2}\phi,$$

上式正是方程(7.9).

有时，利用截面这个概念能够更好地表达散射实验的结果. 散射过程的微分截面，定义为每单位立体角中散射粒子的相对数目，与每单位面积的散射箔中原子的总数之比；即

$$\sigma(\phi) = \frac{1}{Nnt}\left|\frac{dN}{d\Omega}\right|. \tag{7.13}$$

上式中 $|dN/d\Omega|$ 表示 $dN/d\Omega$ 的绝对值. 量 $\sigma(\phi)$ 表示一个入射粒子被偏转

而通过 ϕ 和 $\phi+d\phi$ 之间的角的几率，它的单位是 m^2，因为 n 的单位是 m^{-3}，t 的单位是 m(注意 N 的单位消掉了)，把方程(7.9)代入(7.13)，就得出库仑散射的微分截面为

$$\sigma(\phi)=\frac{v^2Z^2e^4}{4(4\pi\varepsilon_0)^2m^2v_0^4}\csc^4\frac{1}{2}\phi. \quad (7.14)$$

例题7.3　一个具有电荷 ve 的粒子，以速度 v_0 射向一个原子序数为 Z 的原子，试求它的最接近距离 R.

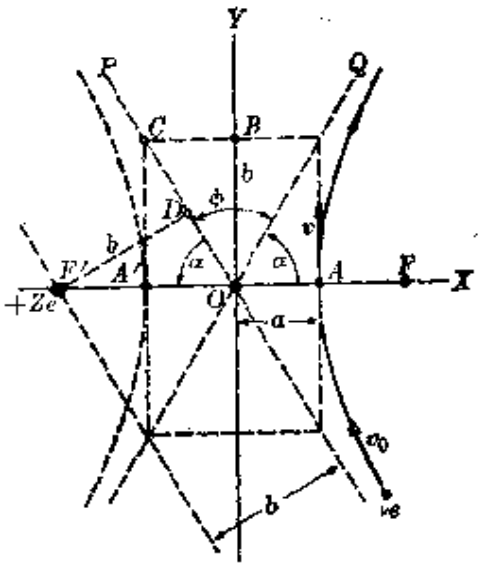


图 7-7

解　图 7-7 中示出这个问题的几何图形．根据例题 7.1，这个粒子沿着双曲线的一支运动，具有电荷 $+Ze$ 的原子核处于最远的焦点 F'．最接近距离为 $R=F'A$．设 $b=F'D$ 是碰撞参数．我们首先证明 b 等于这双曲线的竖直轴 OB．两条渐近线之间的角 $\phi=POQ$ 是这个粒子在原子核的库仑推斥力作用下偏转的角度．距离 $OA=OA'=a$ 是水平轴．由双曲线的性质可知，$OF'=OC$．因此，$\triangle OF'D\equiv\triangle OCA'$，所以 $b=F'D=CA'=OB$．由图可知，$OF'=b\csc\alpha$，$OA=a=b\cot\alpha$．因此 $R=F'A=F'O+OA=b(\csc\alpha+\cot\alpha)$；但是 $2\alpha+\phi=\pi$，所以 $\alpha=\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}\phi$．于是得出

$$R=b\left(\sec\frac{1}{2}\phi+\tan\frac{1}{2}\phi\right)=\frac{b\left(1+\csc\frac{1}{2}\phi\right)}{\cot\frac{1}{2}\phi}.$$

利用方程(7.8)，并把 $Q=Ze$ 和 $q=ve$ 代入上式，则得最接近距离为

$$R=\frac{vZe^2}{4\pi\varepsilon_0(mv_0^2)}\left(1+\csc\frac{1}{2}\phi\right). \quad (7.15)$$

上式表明，最接近距离是入射粒子的初能量即 $\frac{1}{2}mv_0^2$ 和散射角 ϕ 的函数．在正碰的情况下，粒子被弹回，因而散射角等于 π，于是有 $\csc\frac{1}{2}\phi=1$ 和

$$R=\frac{vZe^2}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{1}{2}mv_0^2\right)}.$$

例如，将 $v=1$，$Z=6$(对应于碳)，$\frac{1}{2}mv_0^2=1.6\times10^{-12}$J(即 1 MeV)代入上式，算出最接近距离 R 约等于 10^{-14} m. 这正是前面所引用的原子核线度的数量级.

例题 7.4 一个带电粒子射向一个原子核. 试利用能量守恒原理来算出最接近距离 R 作为粒子角动量的函数.

解 设原子核的电荷为 Ze，入射粒子的电荷为 ve，则入射粒子和原子核一起构成的系统的势能为

$$E_p=\frac{vZe^2}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

如果原子核的质量 M 比入射粒子的质量 m 大很多，则这系统相对于原子核的总能量为

$$E=\frac{1}{2}mv^2+\frac{vZe^2}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

但是，比如说，如果是质子射向质子($v=Z=1$)，就必须使用折合质量 $\mu=\frac{1}{2}m_p$. 当这粒子在非常远的地方时，它的能量全部是功能，并等于 $\frac{1}{2}mv_0^2$. 设 v 是入射粒子在最接近点 A (这时 $r=R$) 的速度 (图 7-7). 能量守恒要求

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{vZe^2}{4\pi\varepsilon_0 R}=\frac{1}{2}mv_0^2.$$

在最接近点 A，粒子的速度全部是横向的，因此角动量为 $L=mvR$. 由于 L 是一运动常数，所以可以利用这个关系式来消去上式中的速度 v，从而得出

$$\frac{L^2}{2mR^2}+\frac{vZe^2}{4\pi\varepsilon_0 R}=\frac{1}{2}mv_0^2. \tag{7.16}$$

上式是 $(1/R)$ 的二次方程. 解此方程可以求出 R 作为入射粒子的能量和角动量的函数. 在正碰的情况下，$L=0$，于是得出

$$R=\frac{vZe^2}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{1}{2}mv_0^2\right)}, \tag{7.17}$$

上式与在例题 7.3 中得到的结果一致. 注意，在正碰的情况下，在最接近点 $v=0$，全部动能都转变为势能.

7.4 电子能级·玻尔理论

如果原子中的一个电子能用牛顿力学的定律来描述，就能够预计一个电子围绕一个核电荷为 Ze 的原子核运动时的可能的轨道. $Z=1$ 的情况对应于氢原子; $Z=2$ 对应于一次电离的氦原子 He^+(即失去一个电子的氦原子); $Z=3$ 对应于二次电离的锂原子 Li^{++}(即失去两个电子的锂原子); 依此类推.

电子绕核运动所受的平方反比电相互作用，在动力学上是和行星绕太阳运动所受的引力相互作用完全一样. 因此，在引力情况下导出的结果(第一卷第十三章)可以直接应用于原子中电子的运动，只要在相应的表达式中用 $Ze^2/4\pi\varepsilon_0$ 代替 $\gamma mm'$ 即可. 例如，电子的轨道必然是椭圆(或圆)，原子核在椭圆的一个焦点上.

设有两个相距为 r 的电荷 q_1 和 q_2，它们的速度分别为 v_1 和 v_2. 这两个电荷的电势能为 $E_p=q_1q_2/4\pi\varepsilon_0 r$，因此，它们的总能量为

$$E=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2+\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

相对于两个粒子的质心，总能量可以写作

$$E=\frac{1}{2}\mu v^2+\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}, \tag{7.18}$$

上式中 μ 是这两个粒子所组成的系统的折合质量，v 是它们的相对速度.

在一个电子绕一个原子核运动的情况下，$q_1=-e$，$q_2=Ze$. 而且，由于原子核的质量比电子的质量大很多，所以电子-核系统的折合质量可以用电子质量 m_e 来近似表示. 只有在最轻的原子，例如氢和氦中，折合质量的效应才能探测出来. 因此，在这种近似的范围内，原子的总能量可以写作

$$E=\frac{1}{2}m_e v^2-\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}. \tag{7.19}$$

如果我们假定轨道是圆的，则电子的运动方程为 $m_e v^2/r=F$. 如果我们认为库仑力，即 $Ze^2/4\pi\varepsilon_0 r^2$，是向心力，则电子在圆轨道上的运动方程为

$$\frac{m_e v^2}{r}=\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad 或 \quad m_e v^2=\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}. \tag{7.20}$$

把上面的结果代入方程(7.19)中，总能量可写作

$$E=-\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0(2r)}=-9\times10^9\frac{Ze^2}{2r}, \tag{9.21}$$

上式中的常数用 SI 单位，E 的单位是 J，r 的单位是 m，e 的单位是 C.

以后我们还要把电子-核系统的能量的表达式(7.21)加以修正，以便考虑相对论效应和磁效应. 对于氢原子($Z=1$)，E 表示把电子和质子分开所需的能量；即氢原子的电离能. 这个电离能的实验值为 2.177×10^{-18} J 或 13.6eV，由此求出氢原子中电子轨道的半径为 $r=0.53\times10^{-10}$m. 这个量叫做玻尔半径，用 a_0 表示它. 这个半径与原子线度的估计值有相同的数量级，这又是对原子的有核模型的一个有力支持.

要研究的下一个问题是，原子中电子的能量是取任意值，还是只限于取某些值. 回答这个问题的最好办法是进行实验来激发原子，从而增加轨道电子的能量. 可以用快速电子轰击原子而使之激发. 这种快速电子通过非弹性碰撞把它们的一部分动能转移给原子中的电子. 也可以让原子吸收电磁辐射能而产生激发.

这些实验表明，电子运动的能量是量子化的；也就是说，电子的能量只能具有某些值 $E_1, E_2, E_3, \cdots E_n, \cdots$. 与这些能量对应的态，叫做定态. 具有最低的可能的能量的态，叫做基态. 确定定态

的能量，是量子力学的任务之一．由于能量(在经典意义上)决定轨道的“大小”，所以电子只能在某些空间区域中运动，概略地如图7-4中的阴影区所示．

在只有一个电子的原子的情况下，例如氢原子，或者在只有一个电子的离子的情况下，例如 He^+，Li^{++}，等等，能级 $E_n(n=1,2,3,\cdots)$ 的实验值与 n^2 成反比，即

$$E_n=\frac{\text{常数}\times Z^2}{n^2}.$$

对于 $n=1$，基态能量为 $E_1=-2.177\times10^{-18}Z^2\text{J}$．一般的量子化能量的公式是

$$E_n=-\frac{2.177\times10^{-18}}{n^2}Z^2\text{J}=-\frac{13.598}{n^2}Z^2\text{eV} \tag{7.22}$$

将方程(7.22)与(7.21)加以比较，可以看出，容许电子轨道的半径必定与 n^2 成正比；也就是说，与能量 E_n 对应的半径 $r_n=$常数$\times n^2$．

如果电子轨道的能量和半径只限于取某些值(即为量子化的)我们可能会推测其他的量也可能是量子化的．例如，我们考虑电子的角动量 $L=m_e vr$．在此情况下，利用方程(7.20)，得出

$$L^2=m_e^2v^2r^2=m_e(m_ev^2)r^2=m_e\left(\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)r; \tag{7.23}$$

由于 r 与 n^2 成正比，所以 L 必定与 n 成正比，即 $L=$常数$\times n$．角动量的这种量子化，是丹麦科学家玻尔(N. Bohr，1885-1962)于1913年首次提出的．玻尔是原子轨道量子论的创始人．因此，假定电子运动的角动量是量子化的；也就是说，假定电子运动的角动量的量值只能取某些分立的值；而且，既然角动量是矢量，它在空间中就只能取某些方向．这最后一种性质有时称为空间量子化．

玻尔把 L 和 n 之间的关系写成下列形式：

$$L=n\left(\frac{h}{2\pi}\right)=n\hbar, \tag{7.24}$$

上式中 $h=6.6256\times10^{-34}$ J·s，是一个常数，叫做普朗克常数. $\hbar=h/2\pi=1.0545\times10^{-34}$ J·s. 把方程(7.24)代入方程(7.23)中，得出电子轨道的半径为

$$r_n=\frac{n^2h^2\varepsilon_0}{\pi Ze^2m_e}=\frac{n^2a_0}{Z}, \tag{7.25}$$

式中 a_0 为玻尔半径，由下式给出：

$$a_0=\frac{h^2\varepsilon_0}{\pi e^2m_e}.$$

对于 r_n 的值，不要过分从字面上去理解，因为前面曾指出，电子运动和行星运动不一样，并不对应于完全确定的轨道. 而只能把 r_n 看作可能找到电子的区域的数量级.

把方程(7.25)代入(7.21)，就得到这种原子的容许能级为

$$E_n=-\frac{m_ee^4Z^2}{8\varepsilon_0^2h^2n^2}.$$

这个结果与 E_n 的实验值相比较，证实 h 的值等于普朗克常数的值. 这个常数，是德国物理学家普朗克(Max Planck，1858-1947)于 1901 年研究从具有恒定温度的空腔中发射的辐射(称为黑体辐射)时引入的.

例题 7.5 对于原子中一个轨道电子的能量的相对论修正.

解 前面每当讨论在平方反比力作用下的运动时，都利用牛顿力学，而忽略相对论效应. 这种方法对于几乎全部行星运动都是正确的. 但是，对于原子中的电子，在许多情况下，不考虑相对论效应是不正确的. 原子中的内层电子的运动速度非常大，以致能用实验方法测出相对论修正量. 我们现在就来估算相对论效应的数量级.

根据第一卷的方程(11.15)，原子中一个快速电子的总能量(减去它的静质量能)为

$$E=c\sqrt{m_e^2c^2+p^2}+(-eV)-m_ec^2,$$

上式中 $(-eV)$ 是这个系统的电势能. 如果动量 p 比 m_ec 小很多，则上式中的根式可展开到二阶项. 结果得到

$$E=\frac{1}{2m_e}p^2-\frac{1}{8m_e^3c^2}p^4+\cdots+(-eV)$$

$$=\left[\frac{1}{2m_e}p^2+(-eV)\right]-\frac{1}{8m_e^3c^2}p^4+\cdots.$$

上式方括号内的两项是能量的非相对论近似的表达式，对于圆轨道这就是方程(7.21)．因此，最后一项就是对电子总能量的一级相对论修正，用 ΔE_r 表示，于是

$$\Delta E_r=-\frac{1}{8m_e^3c^2}p^4=-\frac{1}{2m_ec^2}\left(\frac{p^2}{2m_e}\right)\left(\frac{p^2}{2m_e}\right).$$

上式圆括号内的两项对应于电子的非相对论动能．作为一个合理的近似，可以利用方程(7.21)作为总能量，而把第一个括号内的项写作

$$\frac{p^2}{2m_e}\simeq E-E_p=-\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0(2r)}+\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0(2r)}=-E.$$

第二项可以写作 $p^2/2m_e=\frac{1}{2}m_ev^2$．因此，

$$\Delta E_r=-\frac{1}{2m_ec^2}(-E)\left(\frac{1}{2}m_ev^2\right)=\frac{1}{4}\frac{v^2}{c^2}E. \tag{7.26}$$

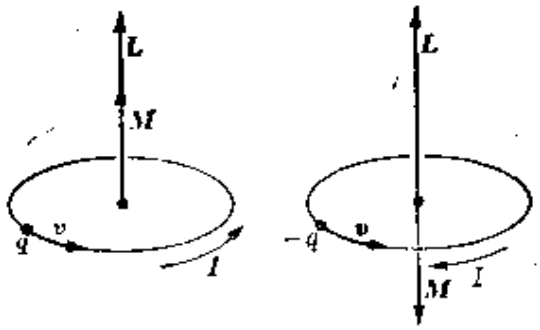
由此可见，相对论修正约等于 $(v/c)^2$ 乘以电子的能量．例如在氢原子中，v/c 约等于 10^{-2}；因此 $\Delta E_r\sim10^{-5}E$，即约等于 E 的 0.001%；这样一个量，在实验室中，利用现在通用的实验技术是不难测出的．

7.5 带电粒子的轨道运动所引起的磁偶极矩

考虑一个电荷 q 沿着一个闭合的轨道运动，就象原子中一个电子的轨道运动那样．为简单起见，设这轨道是圆的．设 $\nu=\omega/2\pi$ 是电荷运动的频率，则在这电荷路径上任意一点的电流为 $I=q\nu$．这是因为 ν 是这电荷每秒钟通过其轨道上同一点的次数，所以 $q\nu$ 就是单位时间内通过该点的总电荷．电流的方向或者与电荷速度相同，或者相反，依 q 为正或为负而定．于是，利用方程(5.9)，得出作圆轨道运动的电荷的磁偶极矩为

$$M=(q\nu)(\pi r^2)=\left(\frac{q\omega}{2\pi}\right)(\pi r^2)=\frac{1}{2}q\omega r^2. \tag{7.27}$$

根据前面给出的规则，电流的方向取决于 q 的符号，如图 7-8 所示. 设 m 是这个粒子的质量，则它的轨道角动量 L 为



q 为正　　q 为负

图 7-8　一个作轨道运动的电荷的磁偶极矩与它的角动量之间的关系

$$L=mvr=m\omega r^2. \tag{7.28}$$

将方程(7.27)和(7.28)加以比较，可得出

$$M=\frac{q}{2m}L. \tag{7.29}$$

写成矢量形式，则有

$$\boldsymbol{M}=\frac{q}{2m}\boldsymbol{L}. \tag{7.30}$$

因此，$\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{L}$ 的方向或者相同，或者相反，依电荷 q 为正或为负而定. 对于一个电子，$q=-e$，$m=m_e$，因而得出

$$\boldsymbol{M}_e=-\frac{e}{2m_e}\boldsymbol{L}. \tag{7.31}$$

对于一个质子，$q=+e$，$m=m_p$，于是得出

$$\boldsymbol{M}_p=\frac{e}{2m_p}\boldsymbol{L}. \tag{7.32}$$

如果还能够假定这个带电粒子绕一条直径转动，就象地球绕它的 NS 轴转动那样，那么，这个粒子除它的角动量之外，还将具有某种内部角动量 $\boldsymbol{S}$，称为自旋. 有一个磁偶极矩与自旋 $\boldsymbol{S}$ 联系着. 这是因为转动着的带电粒子的每一个体积元的行为都和图 7-8 中的

电荷 q 一样. 但是，自旋磁偶极矩与自旋之间的关系，不同于方程(7.30)所表示的关系. 这是因为 S 的系数(用此系数乘 S 就得到自旋磁偶极矩)取决于粒子的内部结构. 因此，把自旋所引起的磁偶极矩写作下列形式是很有用的：

$$M_s=\gamma\frac{e}{2m}S. \tag{7.33}$$

上式中的系数 γ 叫做回磁比. γ 取决于粒子的结构及其电荷的符号. 把方程(7.30)与(7.33)结合起来，就得到一个载有电荷 $\pm e$ 的，既作轨道运动又作自旋运动的粒子的总磁偶极矩为

$$M=\frac{e}{2m}(\pm L+\gamma S). \tag{7.34}$$

上式中 L 前面的正(负)号对应于一个带正(负)电的粒子. 虽然中子不具有净电荷，因而也不具有方程(7.30)所表示的轨道磁偶极矩，但是中子确实具有一个自旋磁偶极矩，其方向与自旋 S 相反. 中子的总磁偶极矩由方程(7.33)给出(而不是由方程 7.34 给出). 中子的 M_s 不为零，表示它具有某种复杂的内部结构. 同理，质子的 γ 的量值不同于电子的，就表示质子的内部结构不同于电子的.

表 7-1 中列出电子、质子和中子的 γ 的实验值.

表7-1 回 磁 比

粒　子	γ
电　子	−2.0024
质　子	5.5851
中　子	−3.8256

7. 6 一个在磁场中运动的带电粒子的转矩和能量，空间量子化

假定把一个作轨道运动的无自旋粒子放在一匀强磁场中(图7-9)，由方程(5.11)和(7.30)，得出作用在这个粒子上的转矩为

$$\boldsymbol{\tau}=\frac{q}{2m}\mathbf{L}\times\mathscr{B}=-\frac{q}{2m}\mathscr{B}\times\mathbf{L}, \tag{7.35}$$

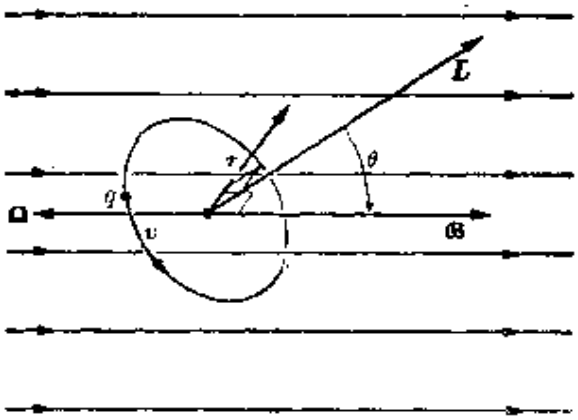


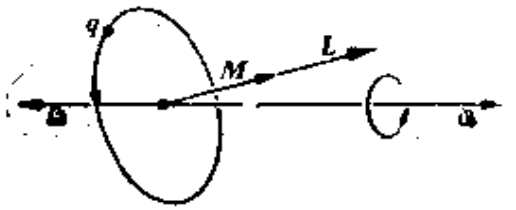
图 7-9 作用在一个运动着的带电粒子上的磁转矩 τ，垂直于这个粒子的角动量 L 和磁场$\mathscr{B}$.

其方向垂直于 L 和$\mathscr{B}$. 这个转矩趋向于按照关系式 $d\mathbf{L}/dt=\tau$ 来改变这个粒子的轨道角动量 L. 利用拉莫尔频率 $\Omega=-(q/2m)\mathscr{B}$ [这个频率等于方程(4.7)中给出的回旋频率的一半]，可以把方程(7.35)给出的转矩写作

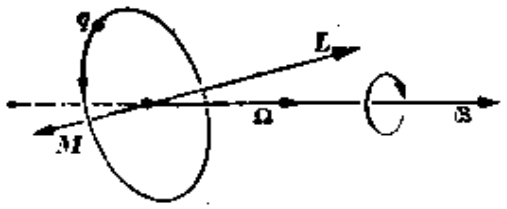
$$\boldsymbol{\tau}=\Omega\times\mathbf{L}. \tag{7.36}$$

这个方程类似于回转运动的方程，因此可以预期，带电粒子运动的平面绕磁场的方向进动. 回转仪的进动，是引力相互作用产生的转矩所引起的. 在电荷作轨道运动的情况下，进动则是磁相互作用产生的转矩所引起的. 角动量 L 绕$\mathscr{B}$进动，并引起粒子轨道的转动.

图7-10中示出一个正电荷和一个负电荷的Ω的方向和进动的



(a) q 为正



(b) q 为负

图 7-10　带电粒子的角动量绕磁场的进动.

指向.

把方程(5.12)与(7.30)结合起来，就可求出在磁场中作轨道运动的带电粒子的能量为

$$E_p = -\frac{q}{2m}\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{\mathscr{B}} = \boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{L}. \tag{7.37}$$

如果这个粒子还具有自旋，则应利用方程(7.34)所表示的磁偶极矩，于是上式变为

$$E_p = -\frac{e}{2m}(\pm\boldsymbol{L}+\gamma\boldsymbol{S})\cdot\boldsymbol{\mathscr{B}}. \tag{7.38}$$

这些结果对于理解原子或分子在外磁场中的行为，是非常重要的. 不论从实用的观点还是从理论的观点看，这都是一个重要的课题.

例如，当一个原子放在外磁场中时(取这磁场沿 Z 轴)，电子的运动就受到扰动，其能量按照方程(7.28)改变. 当 E_p 的这个理论值与实验结果加以比较时，发现轨道角动量和自旋角动量的 Z 分量是量子化的. 也就是说，L_z 和 S_z 只能取某些值，这些值可用下式表示:

$$L_z = m_l\hbar, \quad S_z = m_s\hbar. \tag{7.39}$$

根据实验和量子力学，m_l 的可能值是 0，±1，±2，±3，…，m_s 只能

取两个值，即$+\frac{1}{2}$或$-\frac{1}{2}$. m_l叫做电子的磁量子数，m_s叫做自旋量子数. 对于质子和中子，得到类似的结果. 因此，我们说电子、质子和中子都具有自旋$\frac{1}{2}$.

在第7.4节中曾讲过，角动量L也是量子化的，即$L=n\hbar$. 但是，根据更详细的分析和量子力学的方法，可以证明电子角动量的容许值为

$$L=\sqrt{l(l+1)}\hbar, \tag{7.40}$$

上式中$l=0,1,2,3,\cdots$是正整数，叫做角动量量子数. 由于L_z不能大于L，所以m_l的值不能超过l；即

$$m_l=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm(l-1),\pm l, \tag{7.41}$$

也就是说，L总共有$(2l+1)$个不同的取向. 对于$l=0$，只有$m_l=0$是可能的. 对于$l=1$，m_l的值可以是$0,\pm1$，依此类推.

在量子力学中还证明，对于能级E_n，角动量量子数的容许值为

$$l=0,1,2,\cdots,(n-1), \tag{7.42}$$

上式表示l总共有n个不同的值. $l=0,1,2,3,\cdots$的态分别用s，p，d，f，…表示. 在同一个原子中，所有具有相同能量和相同角动量的电子(即具有相同的n和l值的电子，例如一个原子中所有的3p电子)构成一个电子壳层. 每一个壳层当然包含自旋朝上和自旋朝下的电子.

对于一个给定的L值，只有某些L_z值是可能的，这表示L在空间中只能取某些方向(图7-11a). 这就是空间量子化的含意. 在自旋的情况下，由于m_s只有两个可能的值$\left(\pm\frac{1}{2}\right)$，我们断定$S$在空间中相对于$Z$轴只能取两个方向. 这些方向通常称为自旋朝上(↑)和自旋朝下(↓). 图7-11b中示出自旋矢量的容许方向.

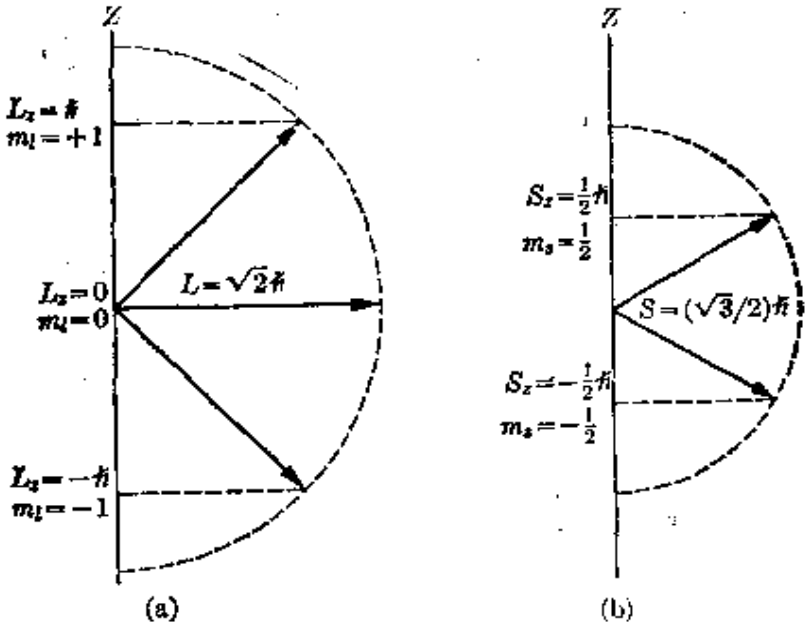


图 7-11 (a)与 $l=1$, $L=\sqrt{2}\hbar$ 对应的轨道角动量的可能的取向; (b)与 $s=\frac{1}{2}$, $S=(\sqrt{3}/2)\hbar$ 对应的自旋角动量的可能取向.

对于一个给定的 n 值, l 和 m_l 的不同组合的数目为 n^2; 如果包括 m_s 的两个可能的值, 则量子数 l, m_l 和 m_s 的不同组合的数目为 $2n^2$. 例如, 对于 $n=1,2,3,4,\cdots$, 不同的角动量态的数目为 $2,8,18,32,\cdots$. 这对于分析原子结构是相当重要的, 因为已经发现, 在一个原子的同一个能态中, 决不会有两个电子具有同一组量子数 l, m_l 和 m_s. 因此, $2n^2$ 表示能够存在于能态 E_n 中的电子的最大数目.

取磁场方向沿 Z 轴, 则有 $\mathbf{L}\cdot\mathscr{B}=L_z\mathscr{B}$, $\mathbf{S}\cdot\mathscr{B}=S_z\mathscr{B}$; 把这些结果以及方程(7.39)代入方程(7.38)中, 就得到一个电子在一磁场中的能量的可能值为

$$E_p=\frac{e\hbar}{2m_e}\mathscr{B}(m_l+2m_s), \tag{7.43}$$

在上式中用 -2 代替了电子的回磁比 γ. 这个结果表示, 当一个原子放在磁场中时, 具有给定能量 E_n 的诸能级被分裂成若干个间距

为$(e\hbar/2m_e)$的能级. 这个结果叫做塞曼效应，这是为了纪念荷兰物理学家塞曼(Peter Zeeman, 1865--1943)，他在实验方面发现了这个现象.

例题 7.6 原子内一个作轨道运动的电子与原子核之间的磁相互作用.

解 考虑一个具有电荷$-e$的电子，它以速度v绕着一个具有电荷Ze的原子核转动. 这个电子相对于原子核的路径如图 7-12 中的实曲线所示；为简单起见，我们假定这个路径是一个圆. 但是，如果相对于固定在电子上的参照系来观察这个运动，那么电子就是静止的；而原子核看起来是以速度$-v$沿着虚曲线所示的路径(也是一个圆)运动. 如果我们忽略电子的加速度(学

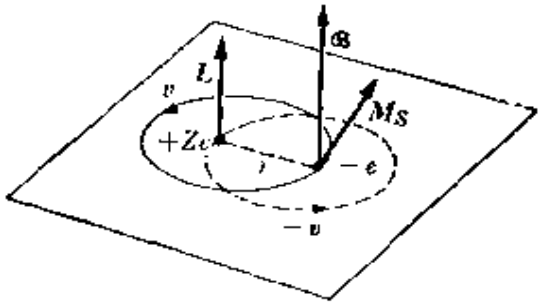


图 7-12 一个电子绕着一个带正电的原子核运动时产生的自旋-轨道相互作用.

生应能算出这个加速度，并判断这个假定的合理性)，这个新的参照系就可以看成一个惯性参照系. 这样，相对于电子而言，原子核产生一个非相对论性的电场$\mathcal{E}=(Ze/4\pi\varepsilon_0 r^2)u_r$和一个磁场$\mathcal{B}$；而$\mathcal{B}$与$\mathcal{E}$之间的关系则由方程(4.17)(用$-v$代替其中的$v$)给出. 也就是说，

$$\mathcal{B}=\frac{1}{c^2}(-v)\times\mathcal{E}=\frac{1}{c^2}\mathcal{E}\times v$$

$$=-\frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r^2}u_r\times v.$$

然而，电子相对于原子核的角动量为$L=mr\times v=mru_r\times v$. 因此，$\mathcal{B}$和$L$之间的关系为

$$\mathcal{B}=\frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0 c^2 mr^3}L.$$

由此可见，原子核的相对运动所产生的磁场，与电子的角动量成正比，而且平行于电子的角动量，如图所示.

因为$\mathcal{B}$是在电子为静止的参照系中的磁场，所以$\mathcal{B}$与电子的轨道运动之

间没有任何相互作用. 但是，电子的自旋产生一个磁偶极矩 M_S. 因此，由方程(5.12)和(7.33)可知，电子与核磁场之间的磁相互作用为

$$E_p = -M_S \cdot \mathscr{B} = -\left(\gamma \frac{e}{2m} S\right) \cdot \left(\frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0 m r^3} L\right)$$

$$= -\frac{\gamma Ze^2}{8\pi\varepsilon_0 c^2 m^2 r^3} S \cdot L.$$

这个结果的最重要的方面是，这种磁相互作用取决于电子的自旋 S 和轨道角动量 L 的取向. 因此，称这种相互作用为自旋-轨道相互作用，并用 E_{SL} 表示它. 更详细的相对论性计算表明，E_{SL} 的值等于上面得到的值的 $\frac{1}{2}$.

其次，我们将估算一下 E_{SL} 的数量级. 由表 7-1 可知，电子的 γ 约为 -2. 又从方程(7.21)可知，在零级近似下，电子在圆轨道上的能量

$$E = -Ze^2/4\pi\varepsilon_0(2r).$$

因此，如果将上面得出的 E_{SL} 乘以 $\frac{1}{2}$，加以修正，就得出自旋-轨道相互作用能为

$$E_{SL} \approx \frac{E}{c^2 m^2 r^2} S \cdot L.$$

然而，L 的量值为 mrv，S 与 L 有相同的数量级. 因此，$S \cdot L$ 约等于 $(mrv)^2$；代入上式中，则得

$$E_{SL} \approx \frac{v^2}{c^2} |E|.$$

这个结果与例题 7.5 的结果加以比较，可以看出，作轨道运动的电子的自旋-轨道相互作用能和能量的相对论性修正量，有相同的数量级. 但是，自旋-轨道相互作用的特点是，由于包含 $S \cdot L$ 因子($S \cdot L$ 的值与 S 和 L 的相对取向有关系)而表现出明显的方向效应.

对于原子中电子能级的实验数据所作的详细分析表明，S 相对于 L 只能有两个取向，或者平行，或者反平行. 这一点是和前面的讨论一致的. 因此，自旋-轨道相互作用使每一个能级分裂成相距很近的能级对（双重能级）(图 7-13).

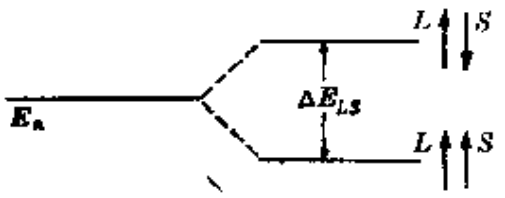


图 7-13

原子结构的细节以及它们对材料的结构和性能带来的影响，将在第三卷

中利用量子力学的方法详细讨论.

习　题

7.1　(a)计算2.0A的电流在1小时内在一电极上淀积的二价铜的质量. (b)淀积了多少个铜原子?

7.2　使一摩尔的钠淀积在电解池的阴极上. 如果淀积用了一天时间,试求通过电解池的(a)电流和(b)电荷.

7.3　在一台1 MeV的范德格喇夫加速器中产生的一个质子被射向一片金箔. 试计算(a)正碰时的最接近距离, (b)碰撞参数等于10^{-15}m时的最接近距离, (c) 碰撞参数等于10^{-14}m时的最接近距离. (d)计算每一种情况下质子的偏转.

7.4　一个动能为4 MeV的α粒子对准一个汞原子的核射来. (a)求这α粒子至核的最接近距离. (b)把这结果与核半径$\sim10^{-14}$m加以比较.

7.5　当盖革和马斯登用4 MeV的α粒子研究低原子序数的核时,他们观察到与预期的库仑散射有偏离. 假定核的半径约为10^{-14}m (这是核相互作用起作用的区域),试计算,用4 MeV的α粒子作正碰时,能够观察到与卢瑟福散射有偏离的原子序数.

7.6　在基态氢原子中,电子围绕质子在一半径为0.53×10^{-10}m的圆轨道上运动. 试计算这运动的(a)势能, (b)动能, (c)总能, (d)频率. (作为比较,氢原子发射的辐射的频率约为10^{15}Hz.)

7.7　(a)利用关于一个粒子的维里定理, 确定围绕一个电荷为$+Ze$的核旋转的一个电子(其电荷为$-e$,至核的距离为r)的能量. (b) 把所得结果应用于氢原子($r\sim0.53\times10^{-10}$m),并与习题7.6中(c) 的结果加以比较.

7.8　设氢原子的一个受激态的平均寿命约为10^{-8}s. 试计算,当一个电子处于(a)$n=2$的态, (b)$n=15$的态中时, 它需转过多少圈之后才能跃迁到$n=1$的态. (c) 试将所得数字与地球在其大约2×10^{9}年的存在时间内, 绕太阳转过的圈数加以比较.

7.9　通常把具有一个电子的原子的定态的能量写作$E_n=-RZ^2hc/n^2$, 此式中的R叫做里德伯常数. 利用第7.4节中给出的E_n的表达式,证明$R=1.0974\times10^{7}\mathrm{m}^{-1}$.

7.10　(a)计算H和He^{+}的前四个定态的能量. (b) 在每一种情况下,求出使这系统从基态上升到第一受激态所需的能量,(c)在一竖直的标尺上,

用具有适当间距的水平直线来表示这些能量. 注意，有些能量重合. (d)你能导出一个普遍规则吗？

7.11 利用习题7.6的结果，(a) 计算基态氢原子中一个电子的速度. (b)检验在例题7.5末尾所作的计算.

7.12 (a)计算一个自旋着的电子在0.5T磁场中进动的角速度. (b)设质子自旋的角动量与电子的相同，对于处在相同磁场中的质子，再计算此题. (提示：利用表7-1中给出的γ值.)

7.13 (a) 设氢原子中的电子沿一圆轨道运动（它至质子的距离为0.53×10^{-10}m). 试求这个电子的磁偶极矩. (b)如果这个电子处在10^{-8}T磁场中，试求它的进动角速度.

7.14 一个半径为R的转动圆盘上载有均匀分布于其表面的电荷q，试求这圆盘的回磁比γ.

7.15 (a)当$l=2$时，试求一个电子的角动量的量值. (b)当$l=2$时，角动量矢量相对于平行于Z轴的磁场可以取哪些角度？

7.16 (a) 磁场能使氢原子的$n=3$的能级分裂成多少个能级？(b)当磁场为4.0T时，求出这些能级之间的磁能差.

7.17 试将氢原子中$n=3$的能级的磁分裂的能量与$n=2$和$n=3$的电子能量之差加以比较. 设磁分裂是由—4 T磁场所引起的.

较难的习题

7.18 可以假定一个氢原子中的电子是以密度$\rho=Ce^{-2r/a_0}$（这里$a_0=0.53\times10^{-10}$m）“铺展”在整个空间中. (a)求出能使总电荷等于$-e$的常数C. (b)求出在一个半径为a_0的球内的总电荷，这里a_0对应于电子的轨道半径. (c)求出电场作为r的函数. (d)在多大距离处电场与$-e/4\pi\varepsilon_0r^2$相差1%？[提示：对于(a)部分，可把空间分成许多球壳，每一个球壳的体积为$4\pi r^2dr$.]

7.19 被8×10^5V电压加速后的质子投射在一片金箔上（$Z=79$). 试计算，对于ϕ在20°和180°之间，每20°的间隔内，库仑散射的微分截面. 画出$\sigma(\phi)$的极坐标图. (注意：对于$\phi=0$，方程7.14变为无限大，因为我们假定散射核是一个点电荷. 如果考虑核的有限尺寸，这个无限大就消失了.)

7.20　一个原子核内质子的平均间距约为 10^{-15} m. 试估算原子核内两个质子的电势能的数量级(分别以 J 和 MeV 为单位).

7.21　如果假定一个半径为 R 的原子核内的所有质子是均匀分布的，则其内部电势能可以用下式计算:

$$\frac{3}{5}Z(Z-1)e^2/4\pi\varepsilon_0 R$$

(参看习题 1.72). 核半径 R 又可以从 $R=1.2\times10^{-15}A^{1/3}$m 算出. 试写出核电势能的表达式作为 Z 和 A 的函数(分别以 J 和 MeV 为单位).

7.22　试利用习题 7.21 的结果，计算下列原子核的总电势能和每个质子的能量: (a)^{16}O($Z=8$)，(b)^{40}Ca($Z=20$)，(c)^{91}Zr($Z=40$)，(d)^{144}Nd($Z=60$)，(e)^{200}Hg($Z=80$)，(f)^{238}U($Z=92$). (g)根据你的结果，你对质子之间的电相互作用对核稳定性的影响得出什么结论? (h)利用你的数据，画出势能对质量数的曲线.

7.23　(a) 对于整个体积内均匀带电的一个球体，重作习题 7.14. (提示: 把这个球分割成垂直于转轴的许多圆盘.) (b)根据这个习题的结果，你对于电子的结构得出什么结论?

7.24　一个电子的 m_s 值从 $+\frac{1}{2}$ 变为 $-\frac{1}{2}$. (a)这个电子的角动量变化是多少? (b)如果这个变化是在 2T 的磁场中发生的，那么电子的能量变化是多少?

第八章　与时间有关的电磁场

8.1　引　　论

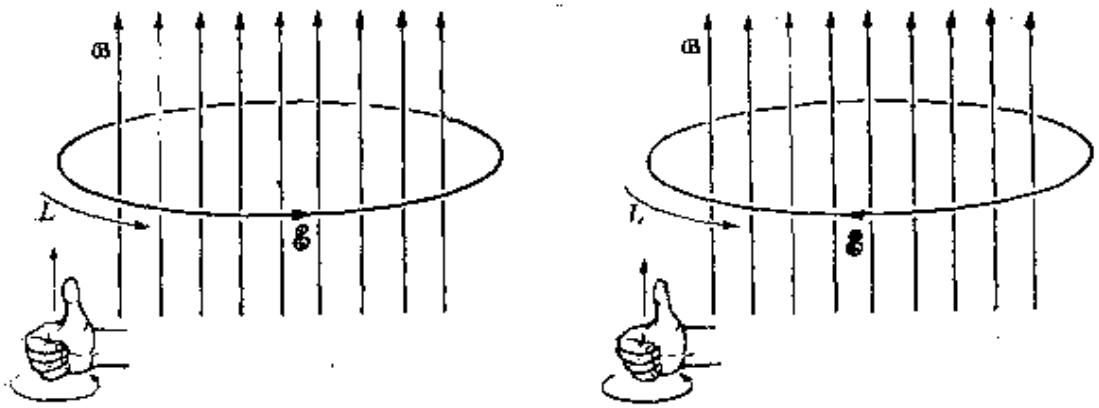
在前几章中，电场和磁场被看作是与时间无关的，换句话说，就是静态的．在本章中，我们将讨论与时间有关的场；就是说，在空间一个给定点，场可能随时间变化．在这种情况下，人们发现存在着新的关系．在第 4.6 节中，我们研究了电磁场的电的和磁的部分之间的密切关系，特别是关于相对性原理所要求的电磁场的变换性质．在本章中，我们将会看到，一个变化着的磁场要求存在一个电场；反之，一个变化着的电场要求存在一个磁场；而且这种关系是相对性原理所要求的．描述这两种情况的定律分别称为法拉第-亨利定律和安培-麦克斯韦定律．

8.2　法拉第-亨利定律

学生所熟悉的许多电磁现象之一，是电磁感应，这种现象是法拉第和亨利(Joseph Henry, 1797—1878)，在 1830 年左右独立地而且几乎是同时地发现的．电磁感应是发电机、变压器和许多其他日用设备的工作原理．假定把一个形成闭合回路的导体放在一个有磁场存在的区域中．如果通过这个闭合回路的磁通量 Φ_m 随时间变化，则在电路中可以观察到电流．电流的存在表示在这电路中存在即感生一个电动势．这个感生电动势的测量结果，表明它与磁通的时间变化率 $d\Phi_m/dt$ 有关系．例如，如果把一个磁体放在一闭合回路附近，则当这个磁体(或这个回路)如此运动，以致通过这个回路的磁通量改变时，在这回路中就出现一个电动势．这

个感生电动势的量值与这个磁体(或这个回路)运动的快慢有关系. 磁通的时间变化率越大，感生电动势就越大. 感生电动势的作用方向取决于磁场是增加还是减小.

为了更确切地说明这一点，请参看图 8-1. 在此图中，当右手姆指沿磁场$\mathscr{B}$的方向时，其余四指的指向就是曲线L的指向. 当磁通增加时(即当$d\Phi_m/dt$为正时)感生电动势V沿负指向作用；



(a)$\mathscr{B}$增加　　(b)$\mathscr{B}$减少

图 8-1　与时间有关的磁场所产生的电场；(a)$d\Phi_m/dt$为正，则V为负，(b)$d\Phi_m/dt$为负，则V为正.

当磁通减少时(即当$d\Phi_m/dt$为负时)，V沿正指向作用. 因此，感生电动势的符号总是与$d\Phi_m/dt$的符号相反. 更详细的测量表明，感生电动势(以伏特为单位)的值等于磁通的时间变化率(以 Wb·s^{-1}为单位)，即

$$V=-\frac{d\Phi_m}{dt}, \tag{8.1}$$

上式表示电磁感应的法拉第-亨利定律：

> 在一个变化着的磁场中，在任意闭合回路中感生一个电动势，这个电动势等于通过这个回路的磁通的时间变化率的负值.

方程(8.1)中的负号可以根据能量守恒来说明. 事实上，如果感生电动势与$d\Phi_m/dt$同号，则V所产生的电流的磁场，势必沿同一指

向改变 Φ_m，从而又使 V 增加，依此类推．这样一来，Φ_m 的一个小的变化，就会引起一个连续的变化；结果是，开始时用于改变 Φ_m 的少量能量，竟会引起这系统的磁能发生大的变化．

在图 8-2 中，如果把 L 包围的面积分割成无限小的面元，每一

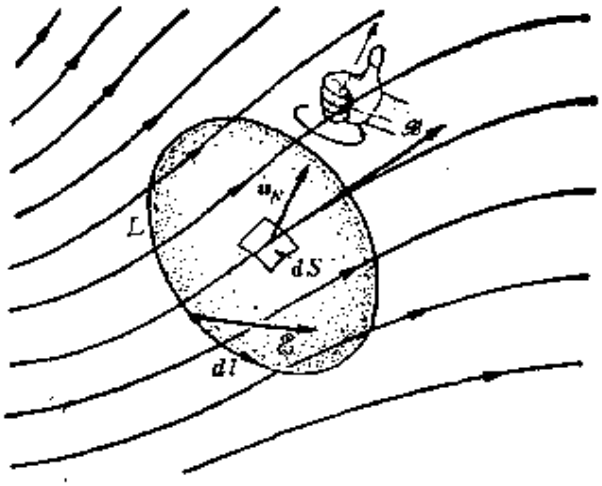


图 8-2

个面元都按右手定则取向，则由方程(6.16)可知，通过 L 的磁通为 $\Phi_m=\int_S \mathscr{B}\cdot u_N dS$．另一方面，根据方程(3.15)，$V$ 表示存在一个电场 $\mathscr{E}$，它使 $V=\oint_L \mathscr{E}\cdot dl$．于是方程(8.1)可以写作如下形式：

$$\oint_L \mathscr{E}\cdot dl=-\frac{d}{dt}\int_S \mathscr{B}\cdot u_N dS. \tag{8.2}$$

路径 L 不必与一导电体(例如一根闭合的金属丝)重合．我们考虑一个空间区域，其中存在一个随时间变化的磁场．在这种情况下，方程(8.2)相当于说：

> 一个随时间变化的磁场，表示存在着一个电场，这个电场沿任意闭合路径的环流，等于穿过这个路径所包围的面积的磁通的时间变化率的负值．

电磁感应的法拉第-亨利定律的这种表述方式，使我们能够更深入

地理解电磁感应现象的物理内容；也就是说，每当磁场随时间变化时，就必定存在电场；这两个场由方程(8.2)联系起来．在磁场变化的区域中，测量作用在静止电荷上的力，就能够确定这个电场．我们能够进行这种实验，从而证实关于方程(8.2)的解释．

例题 8.1 计算在一简单电路中感生的电动势．

解 考虑一个由N匝组成的平面回路，每匝的面积为S．此回路放在一个随时间变化的均匀的交变磁场中，回路平面垂直于这个磁场．这个磁场的方程为$\mathscr{B}=\mathscr{B}_0\sin\omega t$．通过此回路一匝的磁通为$\Phi_m=S\mathscr{B}=S\mathscr{B}_0\sin\omega t$，因而通过$N$匝的总通量为

$$\Phi_m=NS\mathscr{B}_0\sin\omega t.$$

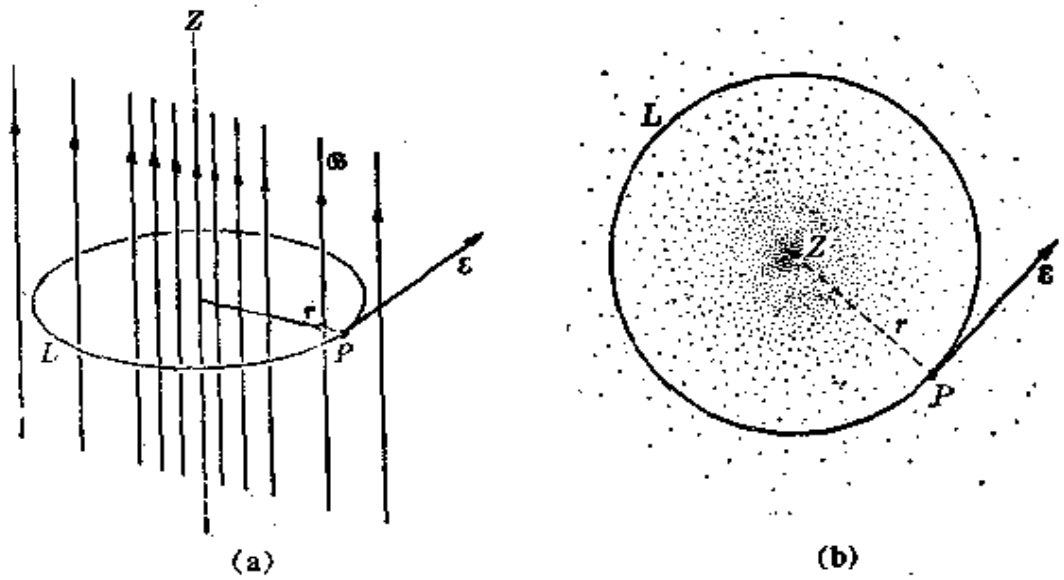
应用方程(8.1)，得出感生电动势为

$$V=-\frac{d\Phi_m}{dt}=-NS\mathscr{B}_0\omega\sin\omega t, \tag{8.3}$$

上式表示，感生电动势的振荡频率与磁场的频率相同．

例题 8.2 确定一交变轴向磁场所产生的电场$\mathscr{E}$．

解 假定在一空间区域中存在一个平行于Z轴且具有轴对称性的磁场；也就是说，每一点磁场的量值只与至Z轴的距离r有关系．磁场的量值随时间而变化．我们还假定磁场随离开Z轴的距离而减小．图 8-3(a) 示出这个磁场的侧视图，图 8-3(b)示出其截面．



(a) (b)

图 8-3 一个具有圆柱对称性的、随时间变化的磁场所产生的电场；(a)侧视图，(b)顶视图．

这个问题的对称性表示，电场 $\mathscr{E}$ 必定只与 r 有关系，而且在每一点都垂直于磁场 $\mathscr{B}$ 和半径 r. 换句话说，电场 $\mathscr{E}$ 的力线是圆心在 Z 轴上的同心圆. 选取这些同心圆之一作为方程(8.2)中积分的路径 L，则得感生电动势为

$$V=\oint_L \mathscr{E}\cdot d\boldsymbol{l}=\mathscr{E}(2\pi r).$$

因此，方程(8.1)给出

$$\mathscr{E}(2\pi r)=-\frac{d\Phi_m}{dt}. \tag{8.4}$$

在一面积为 S 的区域中的平均磁场，被定义为 $\mathscr{B}_{平均}=\Phi_m/S$ 或者 $\Phi_m=\mathscr{B}_{平均}S$. 这里 $S=\pi r^2$，所以 $\Phi_m=\mathscr{B}_{平均}(\pi r^2)$. 于是方程(8.4)给出至轴的距离为 r 处的电场为

$$\mathscr{E}=-\frac{1}{2}r\left(\frac{d\mathscr{B}_{平均}}{dt}\right). \tag{8.5}$$

如果磁场是均匀的，$\mathscr{B}_{平均}$ 就等于 $\mathscr{B}$.

8.3 电子感应加速器

例题(8.2)的结果被用于设计一种电子加速器，称为电子感应加速器. 它是由美国物理学家克斯特(D. Kerst, 1911—)于1941年发明的. 如果一个电子(或者任意一种带电粒子)被射入存在变化着的磁场的区域中，则电子将被与这种磁场相联系的、由方程(8.2)或(8.5)给出的电场 $\mathscr{E}$ 加速. 当电子速度增加时，电子的路径将在磁场 $\mathscr{B}$ 的作用下弯曲. 如果磁场是轴对称的，而且适当调节电场和磁场，则电子的轨道是一个圆，在每一圈中电子获得能量.

为了更详细地说明这个问题，我们考虑在点 P 的一个电子(图8-3). 如果设法使这个电子沿一半径为 r 的圆轨道运动，则电场将使电子的运动产生一个切向分量，这个分量可用 $dp/dt=F_T$ 计算，其中切向力 $F_T=-e\mathscr{E}$，所以

$$\frac{dp}{dt}=-e\mathscr{E}=\frac{1}{2}er\left(\frac{d\mathscr{B}_{平均}}{dt}\right). \tag{8.6}$$

为了产生圆周运动，磁场必须产生所需的向心加速度. 根据方程

(4.1)，这个向心力的量值为 $F_N = ev\mathscr{B}$. 在圆周运动中，向心力为 $mv^2/r = (mv)(v/r) = p(v/r)$，所以 $pv/r = F_N$. 把这两个方程结合起来，则得

$$pv/r = ev\mathscr{B} \quad 或 \quad p = er\mathscr{B}. \tag{8.7}$$

取上式对时间的导数，并注意到 r = 常数(因为路径是一个圆)，则得

$$\frac{dp}{dt} = er\frac{d\mathscr{B}}{dt}.$$

把上式与方程(8.6)加以比较，就可看出，电子在电场和磁场的联合作用下，沿一半径为 r 的圆轨道运动的必要条件，是在距离 r 处磁场必须满足下列条件：

$$\mathscr{B} = \frac{1}{2}\mathscr{B}_{平均}, \tag{8.8}$$

上式中 $\mathscr{B}_{平均}$ 是在路径 L 所围区域中 $\mathscr{B}$ 的平均值. 这个条件对磁场 $\mathscr{B}$ 的量值随至轴线的径向距离 r 变化的方式，提出某些要求. $\mathscr{B}$ 随 r 的精确变化决定于轨道运动的某种稳定性要求. 也就是说，如果给定所需轨道的半径，则作用在电子上的力必须是这样的：当电子的运动稍微受到扰动时(即当电子被推向轨道的一侧或另一侧时)，作用在电子上的电力和磁力趋向于把它拉回正确的轨道上来.

通常磁场是以某一角频率 ω 振荡的. 由方程(8.6)可知，仅当磁场增加时，电子才加速. 另一方面，由于电子实际上是以很小的动量射入的，所以必须在磁场为零时射入电子. 因此，只有磁场变化周期的四分之一适合于加速电子. 图 8-4 中的阴影区表示加速时间.

根据方程 (8.7)，电子获得的最大动量为 $p_{最大} = er\mathscr{B}_0$. 因此，如果电子未被加速到比其静能 m_0c^2 高很多的能量，则其最大动能

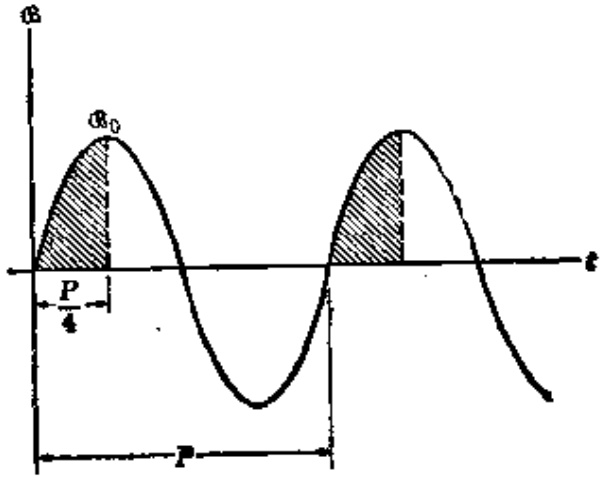


图 8-4　电子感应加速器中的加速时间.

为

$$E_{k,\text{最大}}=\frac{1}{2m_0}p^2_{\text{最大}}=\frac{e^2r^2\mathscr{B}^2_0}{2m_0}.$$

然而，当能量很大，与电子的静能不相上下，或者大于电子的静能时，就必须利用相对论性方程，结果得到

$$E_{k,\text{最大}}=c\sqrt{m_0^2c^2+e^2r^2\mathscr{B}^2_0}-m_0c^2.$$

实际的电子感应加速器是由一个放在磁场中的环形管构成的(图 8-5)．产生磁场的磁体，其极面做成这样的形状：它们产生的

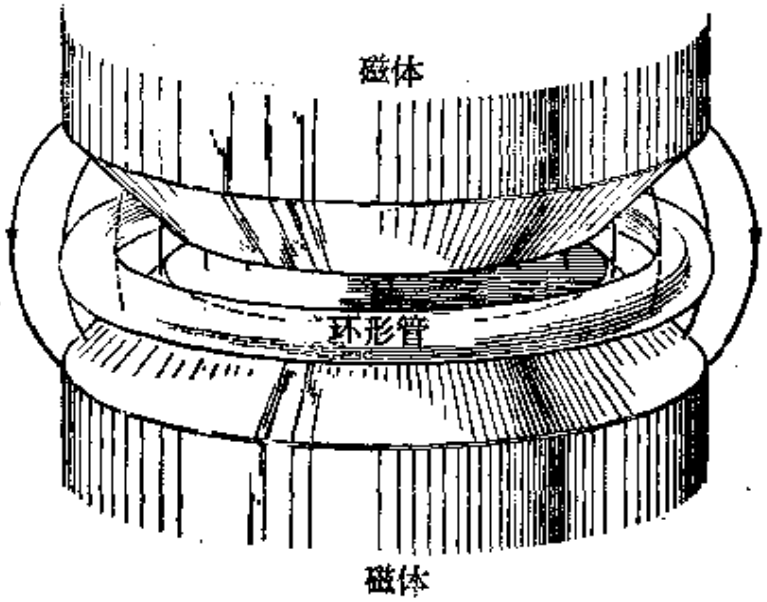


图 8-5　电子感应加速器的加速管和磁极面.

磁场$\mathscr{B}$按方程(8.8)随 r 正确地变化，并满足稳定性条件．电子在加速期开始时射入，在加速期之末稍被偏转而撞击在设于适当位置的靶上．电子的动能作为电磁辐射而放出和(或)作为靶的内能而使其加热．已建成能量高达 350MeV的电子感应加速器．电子感应加速器可用来研究某些类型的核反应和对癌症进行辐射治疗．

8.4 导体和磁场的相对运动所引起的电磁感应

方程(8.2)所表示的电磁感应定律表示，每当空间一点的磁场随时间变化时，在该点就存在一个局部电场．如方程(8.1)所示，这个定律表示，当穿过回路的磁通随时间变化时，存在一个电动势．如果磁通的变化是路径 L 的运动或变形所引起的($\mathscr{B}$不一定随时间变化)，是否会出现同样的结果，查明这一点是很重要的．我们考虑两个简单情况．

首先考虑图 8-6 所示的导体排列．在这里，导体 PQ 能够平

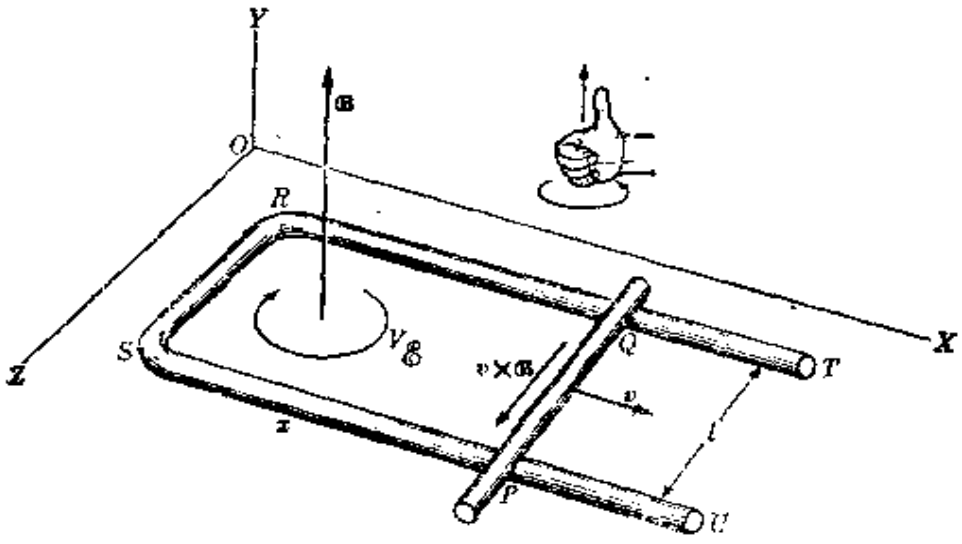


图 8-6 在一磁场中运动的一个导体中感生的电动势．

行于其自身以速度 v 运动，同时与导体 RT 和 SU 保持接触. 系统 $PQRS$ 形成一个闭合回路. 还假定有一个匀强磁场$\mathscr{B}$垂直于这个系统的平面.

当棒 PQ 运动时，根据方程(4.1)，棒内每一个电荷 q 都受一个力 $q\boldsymbol{v}\times\mathscr{B}$ 作用，其方向沿 QP. 现在也可以假定，作用在这个电荷上的同一个力是由一个"等效"电场 $\mathscr{E}_{等效}$ 所引起的，$\mathscr{E}_{等效}$ 由下式给出：

$$q\mathscr{E}_{等效}=q\boldsymbol{v}\times\mathscr{B}$$

或者

$$\mathscr{E}_{等效}=\boldsymbol{v}\times\mathscr{B}.$$

由于 $\boldsymbol{v}$ 垂直于$\mathscr{B}$，所以它们的量值之间的关系为

$$\mathscr{E}_{等效}=v\mathscr{B}. \tag{8.9}$$

设 $PQ=l$，则 P 和 Q 之间的电势差由 $\Delta V=\mathscr{E}_{等效}l=\mathscr{B}vl$ 给出. 没有力作用在 QP、RS 和 SP 上，因为它们相对于磁场是静止的. 因此，$\mathscr{E}_{等效}$沿回路 $PQRS$ 的环流(即电动势)就是 $V=\Delta V$，方向沿 $\boldsymbol{v}\times\mathscr{B}$；亦即

$$V=\mathscr{B}vl.$$

另一方面，设 $SP=x$，则 $PQRS$ 的面积为 lx；穿过 $PQRS$ 的磁通为

$$\Phi_m=\int_{PQRS}\mathscr{B}\cdot\boldsymbol{u}_N dS=\mathscr{B}lx.$$

于是，每单位时间的磁通变化为

$$\frac{d\Phi_m}{dt}=\frac{d}{dt}(\mathscr{B}lx)=\mathscr{B}l\frac{dx}{dt}.$$

因为 $dx/dt=v$，所以

$$\frac{d\Phi_m}{dt}=\mathscr{B}lv=V.$$

换句话说，这个结果就是方程(8.1). 上式中不包括负号，是因为

我们只考虑量值之间的关系. 然而，方程(8.1)在符号方面仍然成立，因为磁通 Φ_m 是增加的，V 的符号就是 $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\mathscr{B}}$ 的符号，这和图 8-1是一致的.

作为第二个例子，我们考虑一个矩形回路，它在一均强磁场 $\boldsymbol{\mathscr{B}}$ 中以角频率 ω 转动(图 8-7)，当这回路平面的法线 $\boldsymbol{u}_N$ 与磁场 $\boldsymbol{\mathscr{B}}$ 成一角 $\theta=\omega t$ 时，PQ 上所有的点都以速度 v 运动，因而"等效"电

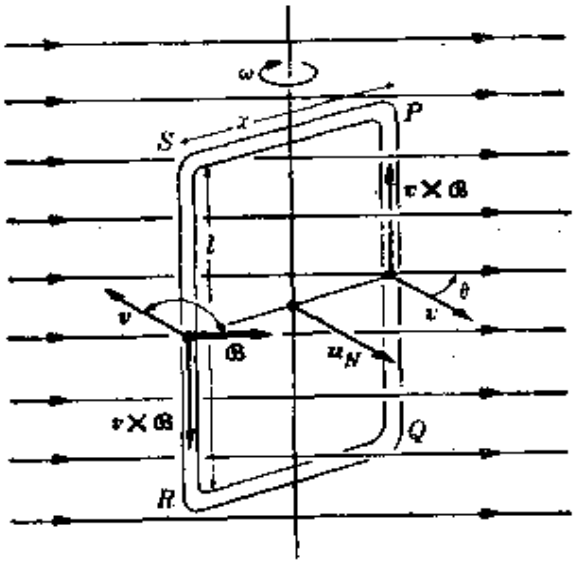


图 8-7　在磁场中转动的线圈中感生的电动势

场 $\boldsymbol{\mathscr{E}}_{有效}=\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\mathscr{B}}$ 的方向是从 Q 到 P，其量值为 $\mathscr{E}_{有效}=v\mathscr{B}\sin\theta$. 同理，对于 RS 上的所有的点，$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\mathscr{B}}$ 的方向是从 S 至 R，并且具有同样的量值. 在边 RQ 和 PS 上，$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\mathscr{B}}$ 垂直于导体；因此，在 S 和 P 之间，在 R 和 Q 之间，都不存在电势差. 设 $PQ=RS=l$，则等效电场 $\mathscr{E}_{有效}$ 绕 $PQRS$ 的环流等于

$$V=\oint_L \boldsymbol{\mathscr{E}}\cdot d\boldsymbol{l}=\mathscr{E}_{有效}(PQ+SR)=2lv\mathscr{B}\sin\theta.$$

设 $x=SP$，则 PQ 和 SR 中的电荷所描的圆轨道的半径为 $\frac{1}{2}x$；因此，$v=\omega\left(\frac{1}{2}x\right)$. 在此情况下，$S=lx$ 是回路的面积，$\theta=\omega t$. 因此，

由于回路在磁场中转动而在回路中感生的电动势为

$$V=2l\left(\frac{1}{2}\omega x\right)\mathscr{B}\sin\omega t=\omega\mathscr{B}(lx)\sin\omega t=\omega\mathscr{B}S\sin\omega t.$$

另一方面，穿过这个回路的磁通为

$$\Phi_m=\mathscr{B}\cdot u_N S=\mathscr{B}S\cos\theta=\mathscr{B}S\cos\omega t.$$

于是得到

$$-\frac{d\Phi_m}{dt}=\omega\mathscr{B}S\sin\omega t=V.$$

因此，导体运动所引起的感生电动势，也能够应用方程(8.1)或(8.2)[而不用方程(4.1)和(3.15)]来计算.

虽然这个讨论是关于特殊形状的回路的，但更详细的数学计算表明，对于任意回路，

> 电磁感应定律 $V=-d\Phi_m/dt$ 都能应用，不论磁通 Φ_m 的变化是磁场$\mathscr{B}$的变化所引起的，还是计算电动势所沿回路的运动或形变所引起的，或是两者所引起的.

第二种情况下的感生电动势，有时又称为动生电动势.

8.5 电磁感应和相对性原理

虽然方程(8.1)和(8.2)所表示的电磁感应定律，不管磁通变化的起因如何，都是成立的，但是，这两种可能性的物理情况是有深刻差异的. 当一个观察者判明穿过一个回路(它在观察者的参照系中是静止的)的磁通变化是磁场$\mathscr{B}$的变化所引起的时，他能够同时测得一个电场 $\mathscr{E}$[它与$\mathscr{B}$的关系如方程(8.2)所示]；这种电场的存在，是通过测量作用在相对于这个观察者的参照系是静止的电荷上的力而判明的. 但是，当一个观察者判明磁通的变化是这导体相对于它的参照系运动而引起的时，他观察不到电场，而是把测得的电动势归因于磁场作用在运动导体的电荷上的力 $q\boldsymbol{v}\times\mathscr{B}$.

两种不同的，表面上没有关系的情况却具有共同的描述，这是怎么回事？这并非偶合，而严格地是相对性原理的结果．这里不拟进行详细的数学分析，而是直观地分析一下这个情况．我们考虑已讨论过的、图 8-7 所示的转动回路．在磁场$\mathscr{B}$恒定而回路转动的参照系中(图 8-8a)，观察不到电场，作用在回路中电子上的力是方程(4.1)所表示的力．而当一个观察者固定在一个随着回路运动的参照系上时，他将看到一个静止的回路和方向在空间中转动的磁场$\mathscr{B}$(图 8-8b)．这时，观察者根据方程(8.2)所表示的电磁感应定律，把作用在回路中电子上的力和变化着的磁场所引起的电场$\mathscr{E}$联系起来．

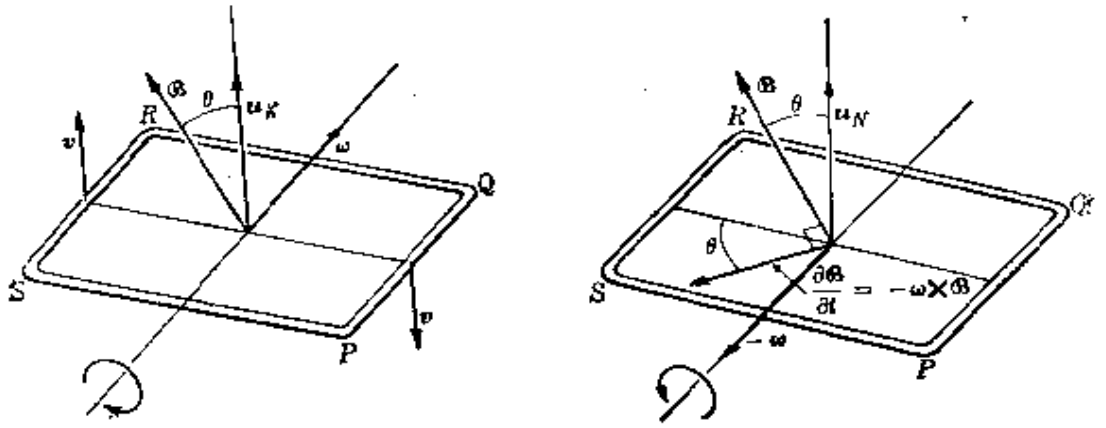


图 8-8

关于变化磁场的电磁感应定律的实验验证，不过是重新证实了相对性原理的普遍适用性．

8.6 电势和电磁感应

在第一和第二章中曾证明，一个静电场$\mathscr{E}$是和一个电势V这样联系着，即$\mathscr{E}$沿 X、Y、Z 轴的分量等于V对 x、y 和 z 的导数取负号；也就是说，$\mathscr{E}_x = -\partial V/\partial x$，等等．或者更简单地说，电场等于

电势的梯度取负号. 这个事实的一个推论是，静电场绕任意闭合回路的环流等于零. 在数学上这个性质是用方程(3.17)来表达:

$$\oint_L \mathscr{E} \cdot d\boldsymbol{l} = 0.$$

但是，如果电磁场随时间变化，我们看到，上述方程就不再成立；但方程(8.2)仍适用:

$$\oint_L \mathscr{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathscr{B} \cdot \boldsymbol{u}_N dS.$$

因此，在一随时间变化的电磁场中，电场的环流不为零，因而电场不能表示为电势的梯度取负号. 这个陈述并不表示在此情况下电势的概念完全不能应用，而仅仅表示这个概念必须在另一种形式下使用. 事实上，需要两种势. 一种叫做标势，类似于在静态情况下使用的势；另一种叫做矢势. 在本书中，没有必要使用这些势；这里提到这些势，只是为了提出，当从静态场过渡到随时间变化的场时，必须特别注意哪些静态场概念可以继续使用，哪些则必须加以修正.

8.7 法拉第-亨利定律的微分形式

方程(8.2)所表示的电磁感应定律能够应用于任意形状的路径. 我们现在把这个定律应用于一个非常小或无限小的矩形回路 $PQRS$. $PQRS$ 置于 XY 平面内，其边长为 dx 和 dy(图 8-9). 首先必须计算电场 $\mathscr{E}$ 的环流. 计算的过程与在讨论安培定律的微分形式时所遵循的过程相似. 关于细节，学生可参看第 6.3 节. 对于 XY 平面内的无限小面 $PQRS$，有

$$\oint_{PQRS} \mathscr{E} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_{PQ} \mathscr{E} \cdot d\boldsymbol{l} + \int_{QR} \mathscr{E} \cdot d\boldsymbol{l} + \int_{RS} \mathscr{E} \cdot d\boldsymbol{l} + \int_{SP} \mathscr{E} \cdot d\boldsymbol{l}.$$

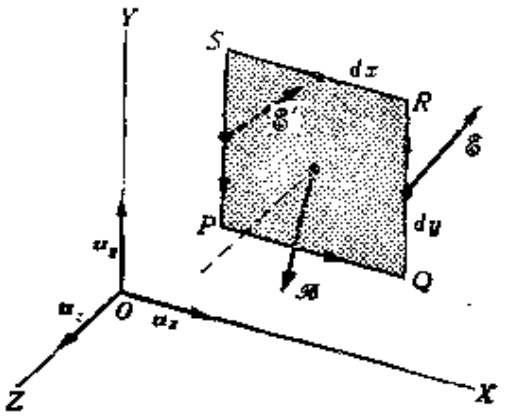


图 8-9　导出法拉第-亨利定律的微分形式时所用的元回路.

由于$\int_{QR}\boldsymbol{\mathscr{E}}\cdot d\boldsymbol{l}=\mathscr{E}_y dy$，　$\int_{SP}\boldsymbol{\mathscr{E}}\cdot d\boldsymbol{l}=-\mathscr{E}'_y dy$，所以有

$$\int_{QR}\boldsymbol{\mathscr{E}}\cdot d\boldsymbol{l}+\int_{SP}\boldsymbol{\mathscr{E}}\cdot d\boldsymbol{l}=(\mathscr{E}_y-\mathscr{E}'_y)\,dy=d\mathscr{E}_y dy=\frac{\partial\mathscr{E}_y}{\partial x}dx\,dy.$$

我们可以用$(\partial\mathscr{E}_y/\partial x)dx$代替$d\mathscr{E}$，因为$d\mathscr{E}_y$对应于具有非常小的间距$dx$，但有相同的$y$坐标和$z$坐标的两个点的$\mathscr{E}_y$之差. 同理，对于另外两个边，有

$$\int_{PQ}\boldsymbol{\mathscr{E}}\cdot d\boldsymbol{l}+\int_{RS}\boldsymbol{\mathscr{E}}\cdot d\boldsymbol{l}=-\frac{\partial\mathscr{E}_x}{\partial y}dx\,dy.$$

把这两个结果加起来，则得

$$\oint_{PQRS}\boldsymbol{\mathscr{E}}\cdot d\boldsymbol{l}=\left(\frac{\partial\mathscr{E}_y}{\partial x}-\frac{\partial\mathscr{E}_x}{\partial y}\right)dx\,dy. \tag{8.10}$$

然后计算穿过这个面的磁通. 由于面$PQRS$是在XY平面内，所以法向单位矢量$\boldsymbol{u}_N$就是$\boldsymbol{u}_z$，而且$\boldsymbol{\mathscr{B}}\cdot\boldsymbol{u}_N=\boldsymbol{\mathscr{B}}\cdot\boldsymbol{u}_z=\mathscr{B}_z$. 因此，磁通为

$$\int_{PQRS}\boldsymbol{\mathscr{B}}\cdot\boldsymbol{u}_N dS=\mathscr{B}_z dx\,dy, \tag{8.11}$$

因为$dx\,dy$是这矩形的面积. 把方程(8.10)和(8.11)代入方程(8.2)，并消去公因子$dx\,dy$，则得

$$\frac{\partial \mathscr{E}_y}{\partial x}-\frac{\partial \mathscr{E}_x}{\partial y}=-\frac{\partial \mathscr{B}_z}{\partial t}. \tag{8.12}$$

同理，把这个矩形回路放在 YZ 平面和 ZX 平面内，可得出另外两个表达式为

$$\frac{\partial \mathscr{E}_z}{\partial y}-\frac{\partial \mathscr{E}_y}{\partial z}=-\frac{\partial \mathscr{B}_x}{\partial t} \tag{8.13}$$

$$\frac{\partial \mathscr{E}_x}{\partial z}-\frac{\partial \mathscr{E}_z}{\partial x}=-\frac{\partial \mathscr{B}_y}{\partial t}. \tag{8.14}$$

(8.12)、(8.13)和(8.14)三个方程一起，构成法拉第-亨利定律的微分形式. 如在第 6.3 节中所作的那样，可以把上面这三个方程合并成一个矢量方程

$$\mathrm{curl}\mathscr{E}=-\frac{\partial \mathscr{B}}{\partial t}. \tag{8.15}$$

方程(8.15)以及与其等效的方程(8.12)、(8.13)和(8.14)，表示空间一点的磁场的时间变化率和同一点的电场之间必然存在的关系. 方程(8.15)非常明显地表明电磁场的电分量和磁分量之间的密切的内在关系.

8.8 电荷守恒原理

在第 1.2 节中我们讨论了电荷守恒这个事实. 换句话说，在宇宙中发生的一切过程中，电荷的净量必定永远保持不变. 这个论断可以用一个非常有用的定量的方式表达出来. 考虑一个闭合面 S (图 8-10)，并用 q 表示在一给定时刻面 S 内部的净电荷. 由于这个问题是动态的，而非静态的，所以有自由电荷(例如金属中

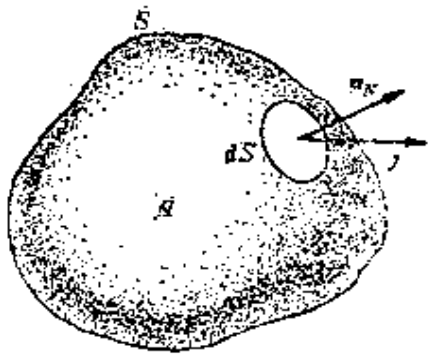


图 8-10 穿过包围电荷 q 的闭合面的电流.

的电子或等离子体中的离子)通过介质和穿过面 S 运动. 在某些时刻,出去的电荷可能多于进来的电荷;这个差别导致面 S 内部的净电荷 q 减少. 在另外一些时刻,情况可能相反,进来的电荷多于出去的电荷;结果是净电荷 q 增加. 当然,如果穿过面 S 出去的和进来的电荷通量相等,净电荷 q 就保持不变. 电荷守恒原理显然要求

$$\begin{aligned}\text{电荷的损失}&=\text{出去的电荷通量}-\text{进来的电荷通量}\\&=\text{净出去的电荷通量}\end{aligned}\tag{8.16}$$

在例题 4.1 中我们已经求出,单位时间内通过一个面 S 的净电荷通量(即电流)为 $I=\int_S \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{u}_N dS$,式中 $\boldsymbol{j}$ 是电流密度. 在现在这个情况下,面 S 是闭合的,所以

$$I=\oint_S \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{u}_N dS \tag{8.17}$$

表示单位时间内穿过这个面出来的净电荷. 另一方面,在面 S 内部,每单位时间的电荷损失等于 $-dq/dt$. 因此,用数学的术语表达时,方程(8.16)变为 $-dq/dt=I$,或

$$-\frac{dq}{dt}=\oint_S \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{u}_N dS. \tag{8.18}$$

在电荷既不产生也不湮没的假定下,上面的方程表达了电荷守恒原理. 根据方程(2.3)所表示的高斯定律,一个闭合面内部的总电荷可以用该面上的电场来表达,即

$$q=\varepsilon_0\oint_S \boldsymbol{\mathcal{E}}\cdot\boldsymbol{u}_N dS.$$

因此有

$$\frac{dq}{dt}=\varepsilon_0\frac{d}{dt}\oint_S \boldsymbol{\mathcal{E}}\cdot\boldsymbol{u}_N dS.$$

把这个结果代入方程(8.18),则得

$$\oint_S \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{u}_N dS+\varepsilon_0\frac{d}{dt}\oint_S \mathscr{E}\cdot\boldsymbol{u}_N dS=0. \tag{8.19}$$

这是包括高斯定律的电荷守恒原理的表达式，如果电场是静态的，则积分$\oint_S \mathscr{E}\cdot\boldsymbol{u}_N dS$与时间无关．因此，这个积分对时间的导数等于零，于是得出

$$\oint_S \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{u}_N dS=0 \quad \text{对于静电场.} \tag{8.20}$$

上式表示，在静电场的情况下，在空间的任何区域都不会存电荷的累积或损失，因而穿过一闭合面的净电流等于零．（这实质上就是在例题 3.4 中引入的，关于网络分析的基尔霍夫第一定律的内容．）

8.9 安培-麦克斯韦定律

方程(8.2)和(8.15)所表示的法拉第-亨利定律确立了空间同一区域中的磁场和电场之间的关系．电场和磁场之间的密切关系表示，在同一个地方，电场的时间变化率和磁场之间应当存在一个类似的关系．也就是说，既然

$$\oint_L \mathscr{E}\cdot d\boldsymbol{l}=-\frac{d}{dt}\int_S \mathscr{B}\cdot\boldsymbol{u}_N dS$$

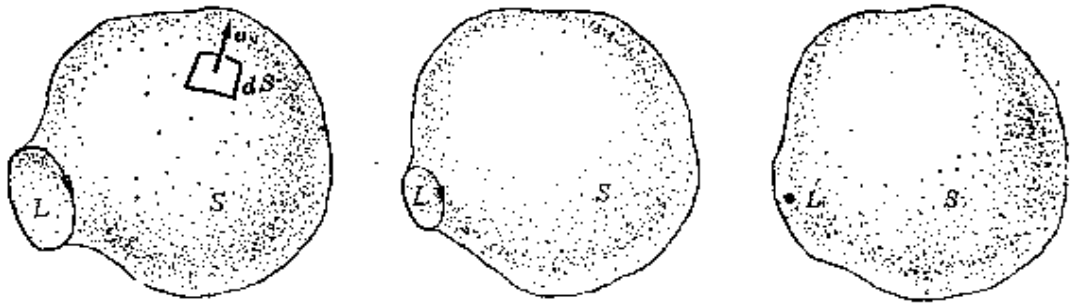
把电场的环流与磁场通量的时间变化率联系起来，可以预期，也有一个类似的表达式把磁场的环流与电场通量的时间变化率联系起来．在安培定律中，磁场的环流被表示为

$$\oint_L \mathscr{B}\cdot d\boldsymbol{l}=\mu_0\int_S \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{u}_N dS; \tag{8.21}$$

但是，这个表达式并不包含电场通量的时间变化率．这是不足为奇的，因为这个表达式是在静态条件下导出的．然而，如果要把安培

定律应用于随时间变化的场，就必须把它加以修正.

安培定律(8.21)适用于一个以围道 L 为边界的面 S. 这个面 S 是任意的，只要它以 L 为边界即可. 当围道 L 收缩时，$\oint_L \mathscr{B}\cdot dl$ 的值减小(图 8-11)；最后，当 L 收缩成一个点时，面 S 变成一个闭合面，$\oint_L \mathscr{B}\cdot dl$ 变为零. 于是，方程 (8.21) 所表示的安培定律要求



(a) (b) (c)

图 8-11 以围道 L 为边界的面. 当 L 收缩成一个点时，面就变成闭合的.

$$\oint_S j\cdot u_N dS=0.$$

只要场是静态的，这个方程就和关于电荷守恒的方程 (8.20) 一致. 但是，当场不是静态的，而是随时间变化时，方程(8.20)就不再正确. 但包括高斯定律的电荷守恒原理的表达式，即方程(8.19)，则是永远正确的. 这样就证实了我们的猜想：当讨论随时间变化的电场时，必须把安培定律加所修改. 这个修改看来是显然的. 根据方程(8.19)，方程(8.21)中的积分 $\int_S j\cdot u_N dS$ 必须用下式代替

$$\int_S j\cdot u_N dS+\varepsilon_0\frac{d}{dt}\int_S \mathscr{E}\cdot u_N dS.$$

结果得到，

$$\int_L \mathscr{B}\cdot dl = \mu_0 \int_S \boldsymbol{j}\cdot \boldsymbol{u}_N dS + \varepsilon_0\mu_0 \frac{d}{dt}\int_S \mathscr{E}\cdot \boldsymbol{u}_N dS. \tag{8.22}$$

上式中$\int_S \boldsymbol{j}\cdot \boldsymbol{u}_N dS$表示通过面 S 的电流 I. 于是方程 (8.22) 可以写作

$$\oint_L \mathscr{B}\cdot dl = \mu_0 I + \varepsilon_0\mu_0 \frac{d}{dt}\int_S \mathscr{E}\cdot \boldsymbol{u}_N dS. \tag{8.23}$$

应将这个方程与安培定律的方程(6.3)加以比较. 对于静态场，由于最后一项为零，所以方程(8.23)化为安培定律；当围道 L 缩成一个点，因而面 S 闭合时，方程(8.23)就变为方程(8.19). 由此可见，方程(8.23)满足以前讨论过的所有物理原理.

迄今为止，我只是企图在数学上使安培定律能和电荷守恒定律相容. 下一步必须用实验证明方程(8.22)是正确的，证明这个方程能够描述自然界的实际情况. 最好的证明是电磁波的存在，这个课题将在第十一章中讨论.

首先提出把安培定律按上述方式加以修改的，是物理学家麦克斯韦(James Clerk Maxwell, 1831—1879). 因此，方程(8.22)称为安培-麦克斯韦定律. 麦克斯韦之所以作这种修改，多出于数学上的一致性的要求，而不是出于实验方面的考虑. 事实上，证实麦克斯韦思想的实验是几年以后才进行的.

安培定律(方程 8.21) 把一个稳恒电流与该电流所产生的磁场联系起来. 安培-麦克斯韦定律则进了一步，它表明一个随时间变化的电场也对磁场有贡献. 例如，在没有电流的情况下，方程(8.22)变为

$$\oint \mathscr{B}\cdot dl = \varepsilon_0\mu_0 \frac{d}{dt}\int_S \mathscr{E}\cdot \boldsymbol{u}_N dS, \tag{8.24}$$

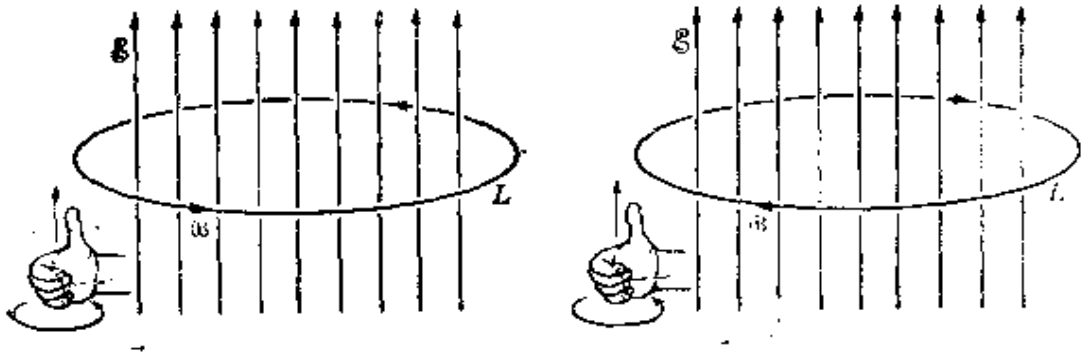
上式更清楚地表明一个随时间变化的电场和它的连属磁场之间的关系. 换句话说，

空间某一点的一个随时间变化的电场，表示在该点存在一个磁场。

磁场沿围道 L 的环流，叫做施于该围道上的磁通势，并用 $\Lambda_{\mathscr{M}}$ 表示。穿过以 L 为边界的面 S 的电通量用 Φ_e 表示。于是方程(8.24)可以写作

$$\Lambda_{\mathscr{M}}=\varepsilon_0\mu_0\frac{d\Phi_e}{dt},$$

学生应将上式与电磁感应定律的方程(8.1)加以比较，并且证明因子 $\varepsilon_0\mu_0$ 是和 SI 单位一致的。图 8-12 中示出电场和磁场的相对取向，图中的电场是均匀的、随时间变化的。如果电场增加(减少)则磁力线的取向与一个沿电场方向前进的右手螺旋的转动方向相同(相反)。学生应将这个结果与图 8-1 加以比较。



$\mathscr{E}$ 增加
$d\Phi_e/dt$ 为正
(a)

$\mathscr{E}$ 减少
$d\Phi_e/dt$ 为负
(b)

图 8-12　随时间变化的电场所产生的磁场。

方程(8.23)所表示的安培-麦克斯韦定律与方程(8.2)所表示的法拉第-亨利定律，在几个方面是不同的。首先，方程(8.23)有一项对应于电流；而在方程(8.2)中没有对应于一个磁流的项，因为在自然界中显然不存在自由的磁极。其次，在方程(8.23)中电通量的时间变化率的前面有一正号，而在方程(8.2)中磁通量的时间变化率的前面则有一负号。

虽然我们是利用电荷守恒原理作为指导而对安培定律加以修正，但是，利用相对性原理，也能导出这个修正．利用相对性原理，我们发现，如果在两个惯性参照系中，电场和磁场的关系如方程(4.21)和(4.23)所示，而且法拉第-亨利定律是正确的，则方程(8.23)也必定被满足．这个方法比较难一些，但在某种意义上，却是更为基本的．

8.10 安培-麦克斯韦定律的微分形式

由于安培-麦克斯韦定律非常相似于法拉第-亨利定律，所以8.7节中使用过的方法，可以再次用来求出安培-麦克斯韦定律的微分形式．现在，图8-9为图8-13所代替．与方程(8.10)相类比，磁场沿边长为 dx 和 dy 的矩形回路 $PQRS$ 的环流为

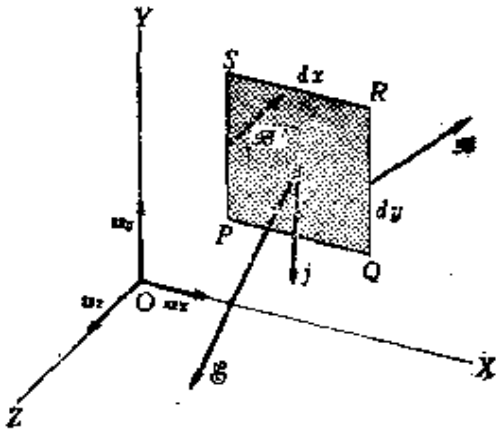


图 8-13 推导安培-麦克斯韦定律的微分形式用的元回路．

$$\oint_{PQRS} \mathscr{B}\cdot dl = \left(\frac{\partial \mathscr{B}_y}{\partial x}-\frac{\partial \mathscr{B}_x}{\partial y}\right)dxdy. \tag{8.25}$$

通过以回路 $PQRS$ 为边界的面的电流通量，已在第6.3节中求出(见方程6.10)，即为

$$\int_{PQRS} j\cdot u_N dS = j_z dxdy. \tag{8.26}$$

通过以回路 $PQRS$ 为边界的面的电场通量的表达式与方程(8.26)

类似，即为

$$\int_{PQRS}\mathscr{E}\cdot u_N dS=\mathscr{E}_z dxdy;$$

因此，

$$\frac{d}{dt}\int_{PQRS}\mathscr{E}\cdot u_N dS=\frac{\partial \mathscr{E}_z}{\partial t}dxdy. \tag{8.27}$$

把方程(8.25)、(8.26)和(8.27)代入方程(8.22)，并消去公因子 $dxdy$，则得

$$\frac{\partial \mathscr{B}_y}{\partial x}-\frac{\partial \mathscr{B}_x}{\partial y}=\mu_0 j_z+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \mathscr{E}_z}{\partial t}. \tag{8.28}$$

按同理可求出另外两个表达式为

$$\frac{\partial \mathscr{B}_z}{\partial y}-\frac{\partial \mathscr{B}_y}{\partial z}=\mu_0 j_x+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \mathscr{E}_x}{\partial t} \tag{8.29}$$

和

$$\frac{\partial \mathscr{B}_x}{\partial z}-\frac{\partial \mathscr{B}_z}{\partial x}=\mu_0 j_y+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \mathscr{E}_y}{\partial t}. \tag{8.30}$$

(8.28)、(8.29)和(8.30)三式一起构成安培-麦克斯韦定律的微分形式．和前面对于安培定律和法拉第-亨利定律所作的一样，也可以把这三个方程合并成一个矢量方程，即

$$\mathrm{curl}\mathscr{B}=\mu_0\left(j+\varepsilon_0\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial t}\right). \tag{8.31}$$

上式表示空间一点的电流与同一点的电场和磁场之间的关系．在无电流的空虚的空间中，$j=0$，方程(8.31)变为

$$\mathrm{curl}\mathscr{B}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial t}. \tag{8.32}$$

上式是与方程(8.24)相当的微分形式．方程(8.32)与法拉第-亨利定律的微分形式的方程(8.15)类似．方程(8.32)清楚地表明，空间一点的磁场与同一点的电场的时间变化率之间的关系．

8.11 麦克斯韦方程

现在，我们来总结一下关于电磁场的讨论. 电磁相互作用是组成物质的基本粒子之间的一种重要相互作用. 电磁相互作用是和每一个粒子的电荷这个特性联系着的. 为了描述电磁相互作用，我们引入了电磁场（它由电场 $\mathscr{E}$ 和磁场 $\mathscr{B}$ 这两个矢量表征）这样一个概念，以使作用在一个电荷 q 上的力由下式给出：

$$F=q(\mathscr{E}+v\times\mathscr{B}). \tag{8.33}$$

电场 $\mathscr{E}$ 和磁场 $\mathscr{B}$ 又由电荷本身的位置及其运动决定. 电磁场分离为它的电分量和磁分量，依赖于观察者和产生场的电荷的相对运动. 而且，电场 $\mathscr{E}$ 和磁场 $\mathscr{B}$ 直接由安培-麦克斯韦定律和法拉第-亨利定律相互联结起来. 所有这些关系都可以用前面分析过的四条定律来表达. 这四条定律既可写成积分形式，也可写成微分形式，如表 8-1 中所列.

表 8-1 电磁场的麦克斯韦方程

定　律	积分形式	微分形式
I. 电场的高斯定律 [(2.3)和(2.5)]	$\oint_S \mathscr{E}\cdot u_N\,dS=\frac{q}{\varepsilon_0}$	$\mathrm{div}\mathscr{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$
II. 磁场的高斯定律 [(6.17)和(6.18)]	$\oint_S \mathscr{B}\cdot u_N dS=0$	$\mathrm{div}\mathscr{B}=0$
III. 法拉第-亨利定律 [(8.2)和(8.15)]	$\oint_L \mathscr{E}\cdot dl=-\frac{d}{dt}\int_S \mathscr{B}\cdot u_N dS$	$\mathrm{curl}\mathscr{E}=-\frac{\partial\mathscr{B}}{\partial t}$
IV. 安培-麦克斯韦定律[(8.23)和(8.31)]	$\oint_L \mathscr{B}\cdot dl=\mu_0 I+\varepsilon_0\mu_0\frac{d}{dt}\int_S \mathscr{E}\cdot u_N dS$	$\mathrm{curl}\mathscr{B}=\mu_0 j+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial t}$

电磁场的全部理论被凝缩成这四条定律，叫做麦克斯韦方程. 这是因为，麦克斯韦不仅表述了第四条定律，而且还指出这四条定

律与方程(8.33)一起，构成电磁相互作用理论的基本框架. 电荷 q 和电流 I 称为电磁场的源，因为给出 q 和 I，就能根据麦克斯韦方程计算 $\mathscr{E}$ 和 $\mathscr{B}$.

注意，关于电场和磁场的高斯定律，即方程(2.3)和(6.17)，是对静态场而导出的. 但是，我们现在把这些定律包括到一个涉及随时间变化的场的理论中. 学生可能很想知道，这两条定律是否必须加以修正，就象修正安培定律使之适用于随时间变化的场那样. 回答是否定的. 已经证实，这两条定律是与实验符合的. 迄今为止，从这些定律导出的结论都是和实验结果一致的. 因此，当电场和磁场随时间变化时，两条高斯定律仍然适用.

麦克斯韦方程也构成一组相容的方程. 一方面，包含电场的面积分的方程(2.3)和(8.23)是相容的. 这种相容性是我们修正安培定律时的基本要求. 另一方面，包含磁场的面积分的方程(6.17)和(8.2)也是相容的. 例如，把方程(8.2)应用于图 8-11 中的曲面，当围道 L 缩小到该曲面闭合时，$\mathscr{E}$ 的环流变为零；因此，

$$\frac{d}{dt}\oint_S \mathscr{B}\cdot u_N dS=0 \quad \text{即} \quad \oint_S \mathscr{B}\cdot u_N dS=\text{常数};$$

如果取积分常数为零，则上式与方程(6.17)相同.

在既无电荷($q=0$)又无电流($j=0$)的自由(或空虚)空间中，麦克斯韦方程稍简单一些，其微分形式变为

$$\begin{aligned} &\mathrm{div}\mathscr{E}=0, \qquad \mathrm{div}\mathscr{B}=0 \\ &\mathrm{cur}\mathscr{E}=-\frac{\partial\mathscr{B}}{\partial t} \qquad \mathrm{curl}\mathscr{B}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial t}; \end{aligned} \tag{8.34}$$

这些方程显示出某种对称性. 学生应将麦克斯韦方程(积分形式或微分形式)与表 6-1 中列出的关于静场的方程加以比较，并注意其主要差别. 特别要注意到，法拉第-亨利定律和安培-麦克斯韦定律提供了电场和磁场之间的联系；而这种联系在静场的方程中

是不存在的.

使用麦克斯韦方程的积分形式还是微分形式，依所求解问题的性质而定. 例如，在第十一章中，我们将用它们来讨论电磁波.

要记住所有这些方程，看来似乎很难，其实不然. 首先，这些方程具有某种对称性；一旦认识到这种对称性，我们就能在自己的思想中把这些方程组织起来，并通过不断的运用而熟悉起来. 其次，理解这些方程所传送的物理信息，比详细记住它们更加重要.

麦克斯韦方程和相对性原理是相容的，因为在洛伦兹变换下，这些方程保持不变；也就是说，当坐标 x、y、z 和时间 t 按照第一卷的洛伦兹变换(6.28)变换，而电场 $\mathscr{E}$ 和磁场 $\mathscr{B}$ 按照方程(4.22)和(4.24)变换时，麦克斯韦方程的形式不变. 这个问题的数学证明属于更高级的课程，此处从略.

麦克斯韦方程所表示的电磁相互作用的综合，乃是物理学的最伟大的成就之一；这个综合把这些相互作用放在一个独特的位置上. 电磁相互作用是一切相互作用中了解得最清楚的，而且迄今为止，只有这些相互作用能够用闭合的、相容的数学形式来表达. 这是一个相当幸运的事实，因为现代文明的大部分之所以能够实现，正是由于我们理解了电磁相互作用；影响我们日常生活的大多数过程，不论是自然的过程还是起因于技术发展的过程，都离不开电磁相互作用.

然而，上面列出的麦克斯韦方程有其局限性. 当我们讨论诸如辐射天线、电路、甚至电离的原子或分子束等大的电荷集团之间的电磁相互作用时，麦克斯韦方程是非常有成效的. 然而，尽管这些方程本身仍然是正确的，但是基本粒子(尤其在高能量下)之间的电磁相互作用，必须根据量子力学定律，用一种称为量子电动力学的方法，进行多少有些不同的处理. 虽然有这些局限性，但是，由本章中给出的这种形式的麦克斯韦方程所导出的结果，对于描述

电磁相互作用来说，仍然是极好的近似．这种方法叫做经典电动力学．在本书中，讨论电磁波和物质结构时所用的方法，就是这种近似方法．

习　题

8.1　一个200匝的线圈，其半径为0.10 m，放在0.2T的匀强磁场中，线圈平面垂直于磁场．试求在下列情况下，在0.10s内，在线圈中感生的电动势：(a) 磁场强度加倍，(b) 磁场减小到零，(c) 磁场反向，(d) 线圈转过90°，(e) 线圈转过180°．作图示出每一种情况下电动势的方向．

8.2　参看习题6.10；设电流按 $I=I_0\sin\omega t$ 变化，试求在回路中感生的电动势．

8.3　设 V_1 是一个振荡的电动势，施加于端子 AB 上，试证明：由于两个线圈之间的互感作用，端子 $A'B'$ 上的电动势为 $V_2=(N_2/N_1)V_1$（见图8-14）．这就是变压器的原理．只要穿过这两个线圈的磁通相同，而且电阻可忽略不计，这个公式就是正确的．

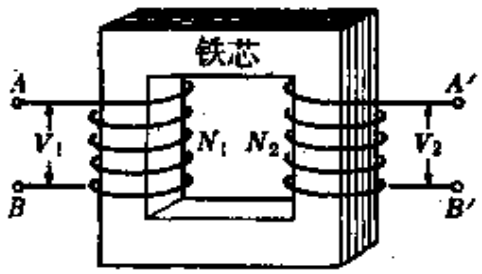


图 8-14

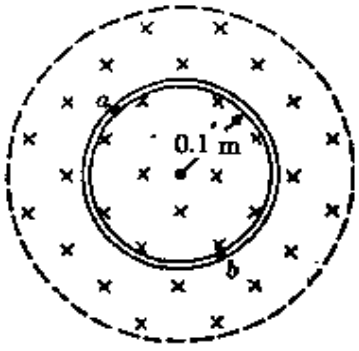


图　8-15

8.4　图8-15中虚线圆内各点的磁场等于0.5T．这磁场的方向垂直于图面向下，并以 $0.1\mathrm{T\cdot s^{-1}}$ 的速率减小．(a) 确定图8-15中虚线圆内感生电场力线的形状．(b) 试求导电圆环上任意一点的感生电场的量值和方向，并求圆环中的电动势．(c) 试求圆环中的电流，设其电阻为2 Ω．(d) 试求圆环上任意两点之间的电势差．(e) 如何使你对(c)和(d)得到的答案一致起来？(f) 如果在某一点将这个环切断，并使两个端点稍微分开，试求两个端点之间的电势差．

8.5　一个方形导线回路，其边长为 l，以恒定速度 v 横过局限在一方形

区域中的匀强磁场. 这方形区域的边长为 $2l$(见图 8-16). 画出在区间 $x=-2l$ 至 $x=+2l$ 内，回路中的感生电动势随 x 变化的图线. 令顺时针方向的电动势朝上，逆时针方向的电动势朝下.

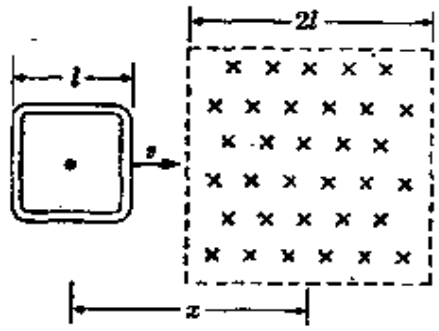


图 8-16

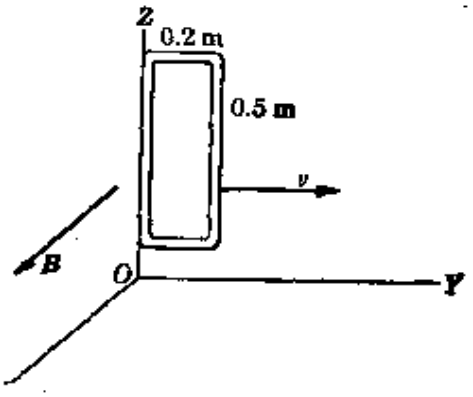


图 8-17

8.6 移动一个矩形回路，使之通过一个区域. 这个区域中的磁场由 $B_y=B_z=0$ 和 $B_x=(6-y)T$ 给出(见图 8-17). 试求在下列各种情况下，回路中的电动势作为时间的函数；当这回路处于图中所示位置时，$t=0$. (a) $v=6.5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, (b) 回路从静止开始运动，加速度为 $2\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$. (c) 设回路平行于 OZ 轴以 $6.5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 的速度作匀速运动，重作此题. (d) 当回路平行于 OZ 轴从静止开始，以 $2\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$ 的加速度作匀加速运动时，重作此题.

8.7 设习题 8.6 中的回路以 OZ 轴为枢轴，以恒定角速度 ω 转动. (a) 计算瞬时电动势作为时间的函数. (b) 试求在转第一个 90°的时间内，电动势的平均值. 设转动周期为 0.2s.

8.8 在图 8-18 中，令 $l=1.5\ \mathrm{m}$, $B=0.5\mathrm{T}$, $v=6\times10^{4}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. (a) 试求这导体两端的电势差. (b) 哪一端的电势较高？

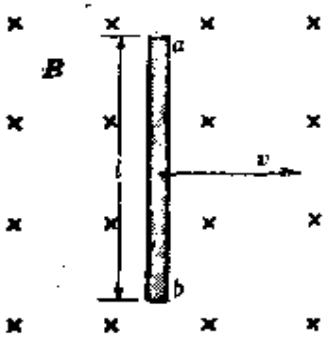


图 8-18

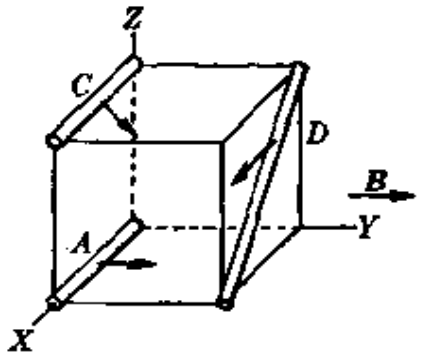


图 8-19

8.9 图 8-19 中所示立方体的边长为 1 m，放在一方向沿 Y 轴的匀强磁

场中，磁场的强度为 0.2 T．导线 A、C 和 D 沿图中所示方向移动，速度均为 0.5 m·s^{-1}．试求每一根导线两端的电势差．

8.10　设图 8-20 中的矩形回路以速度 v 离开一直线电流而运动，试利用两种方法求出感生电动势（回顾习题 6.10，并注意到 $v=dr/dt$．）

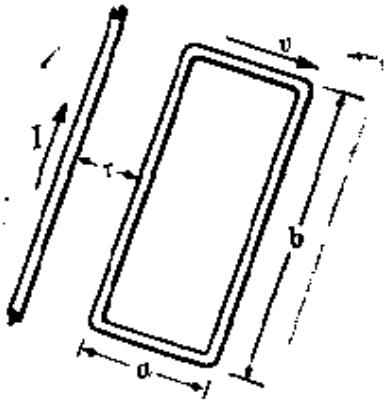


图　8-20

8.11　参看第 8.2 和 8.4 节中讨论过的情况，计算在一固定于运动导体上的参照系中的电场，并确定这导体两端的电势差．

较难的习题

8.12　一个边长为 l 的、闭合的方形导体回路，其上部处于一磁场 B 中．磁场 B 垂直于图面，其指向如图 8-21 所示．这回路的电阻为 R，重量为 mg．(a) 当这回路以速率 v 下落时，试求回路中电流的量值．利用正向电流的规定，在图上画出电流的方向．(b) 试求作用在这回路上的总磁力．(c) 试问：当 v 等于多大时，作用在这回路上的合力等于零？

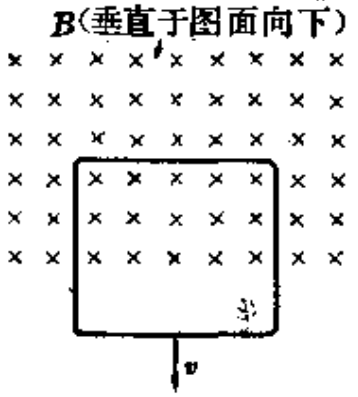


图　8-21

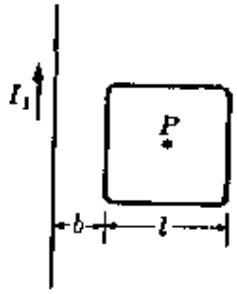


图　8-22

8.13　一根直长导线载有恒定电流 I_1，这导线与一个方形回路处在同一个平面内，如图 8-22 所示．这根导线与方形回路的一条边平行，二者之间

的距离为 b. 设这方形回路每边长为 l. (a) 证明磁感应(场) B 正比于 I_1/r, 式中 r 是至直长导线的垂直距离. (b) 求出穿过这回路的总磁通. 现在, 我们假定电流 I_1 按关系式 $I_1=kt$ (式中 k 为一常数)随时间 t 变化, 并设回路的电阻为 R. (c) 求出这回路中的感生电流. (d) 求出作用在这回路上的总磁力. 说明得出你的答案所依据的推理.

8.14 一匀强磁场 B 局限在一边长为 $2L$ 的方形区域内. 以恒定速率 v 移动一个每边长为 l 的方形导线回路穿过这个区域. 设 $t=0$ 是这回路第一次接触磁场的时刻. 回路的电阻为 R (图 8-23). (a) 画出这回路中的感生电动势 $\mathscr{E}$ 对时间 t 的曲线. 在这曲线的各个重要点上仔细标明 $\mathscr{E}$ 和 t 的值(作为 L、v 和 B 的函数.)下面关于(b)、(c)和(d)部分的答案都表示为 B、

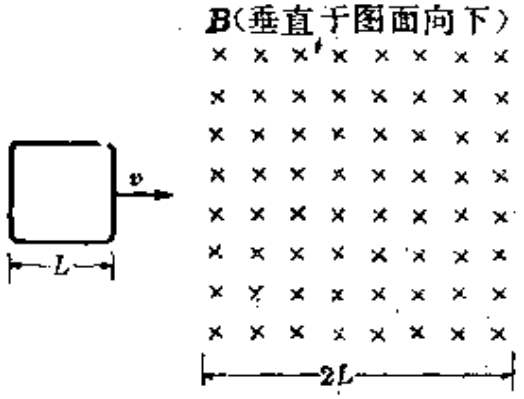


图 8-23

v、L 和 R 的函数. (b) 在时刻 $t=L/2v$, 求回路中的感生电流(忽略回路的自感.)(c) 在 $t=L/2v$, 求作用在回路每条边上的磁力的量值. 指出这些力的方向. (d) 当外力以恒定速率移动这回路而完全通过磁场时, 试求外力所作的净功.

8.15 一个导线回路紧绕在一根磁棒的中央, 如图 8-24 所示. 磁棒的截面为 $2.0\times10^{-4}\ \mathrm{m}^2$, 回路的电阻为 $0.010\ \Omega$, 磁棒内的磁场 B (假定它是均匀的)为 $1.0\times10^{-4}\ \mathrm{T}$. (a) 磁棒沿图中所示方向移动而离开这回路, 试求流过回路任一点的总电荷. (b) 概略画出, 磁棒移去时回路中电流的方向. (c) 如果磁棒沿相反的方向移去, 试问: 回路中电流的方向与(b)中电流的方向是否相同?

8.16 一个边长为 l 的方形回路, 在一匀强磁场中以频率 f 沿图 8-25 中所示方向转动. 用两个滑环把电阻器 R 与回路连接起来. 在时刻 $t=0$, 回路平面处在图面内. (a) 画出通过 R 的电流 I 随时间 t 变化的曲线; 取电流

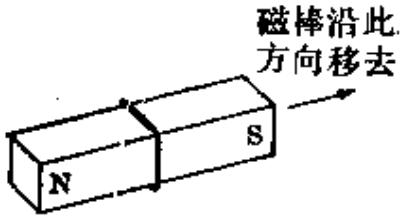


图 8-24

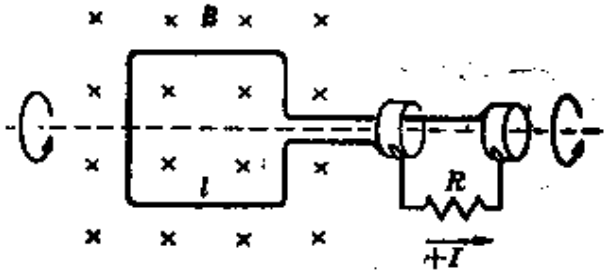


图 8-25

的正方向如图中所示. (b) 计算通过R的电流的最大值作为已知量的函数.

8.17 一位测量员试图在一条载有10^3A 稳恒定流的输电线下方使用一个罗盘. 这罗盘在输电线正下方 6 m 处. (a) 如果地磁场的水平分量为1×10^{-4}T, 输电线能否干扰罗盘读数? 给出定量的说明. (b) 如果电流是10^3A、60 Hz 的交流电, 罗盘读数会受到干扰? 试根据罗盘的性质定量说明你的答案.

8.18 在一方向竖直朝下的匀强磁场B中, 一质量为m的金属棒从静止释放, 沿一倾角为θ的轨道无摩擦地向下滑动, 如图 8-26 所示. 在与轨道接触的两点之间, 棒的电阻为R. 轨道宽为l, 其电阻可忽略不计. (a) 在一张图上标明滑动棒中电流的方向. (b) 设v为棒沿轨道向下滑动的瞬时速率, 试求棒中电流量值的表达式. (c) 确定磁场作用在棒上的力的表达式. (d) 确定滑动棒的末速的表达式.

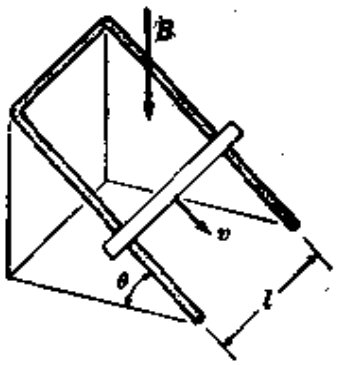


图 8-26

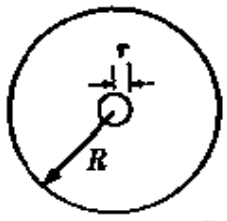


图 8-27

8.19 一个半径为r的圆形回路, 放在一个半径为R的大圆形回路的中心处. 两个回路处在同一个平面内, 且$r<R$(图 8-27). 在外回路中有一个正弦式电流$I=I_0\sin\omega t$, 式中t是时间, I_0和ω是常数. 试求内回路中感生电动势的表达式.

8.20 一根直长导线处在一矩形回路的平面内，如图 8-28 所示。回路的总电阻为 R。直长导线中的电流以恒定速率 dI/dt 增加。(a) 在一张图上标明回路中感生电流的方向，并说明你的推理。(b) 确定电流的量值，假定回路的自感可忽略不计。

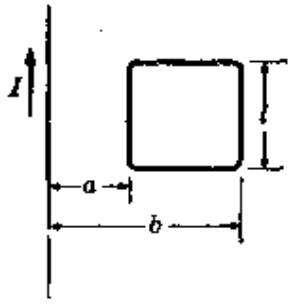


图 8-28

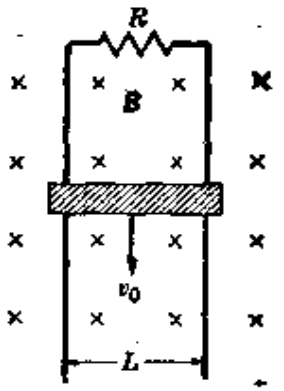


图 8-29

8.21 一根质量为 M 的导体棒，沿两根竖直的导电轨道(两轨道的间距为 L，其顶部通过一个未知电阻 R 连接起来)无摩擦地向下滑动。导体棒始终与两条轨道保持电接触。有一匀强磁场 B，其方向如图 8-29 所示。观察到这根棒以恒定的末速 v_0 下降。(a) 在一张图上画出并标明作用在这根棒上的所有的力。(b) 当这根棒以恒定速率 v_0 下降时，试确定在棒中感生的电流 I 的量值作为 B、L、g、v_0 和 M 的函数。(c) 试求在棒中感生的电压作为 B、L、g、v_0 和 M 的函数。(d) 试求电阻 R 作为 B、L、g、v_0 和 M 的函数。

8.22 一个轮子有 6 根辐条，轮子的平面垂直于一强度为 0.5T 的匀强磁场 B。这磁场垂直于图面向下，如图 8-30 所示。当开关闭合时，在轮轴与轮缘之间有 6 A 的初始电流，这轮子开始转动。辐条和轮缘的电阻可忽略不计。(a) 轮子的转动方向如何？试说明之。(b) 轮子的半径为 0.2m。计算作用在轮子上的初转矩。(c) 定性地描述轮子的角速度随时间的变化。

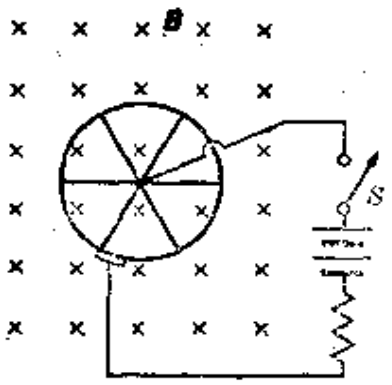


图 8-30

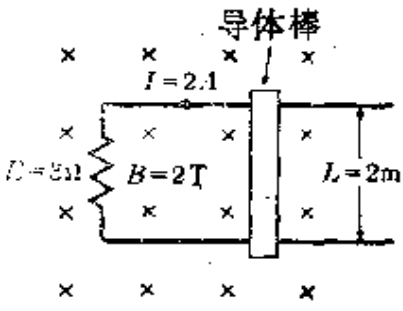


图 8-31

8.23 两根平行导电导轨的间距 $L=2$ m，其左端通过一电阻 $R=3\Omega$ 连接起来，如图 8-31 所示．一强度 $B=2$T 的均匀磁场垂直于图面向下．一根质量 $m=4$ kg 的导电棒能够无摩擦地在导轨上滑动．(a) 为了感生 2A 的逆时针方向的电流（如图中所示），这根棒必须以多大的速率沿哪个方向运动？(b) 为了保持这根棒以这个速度运动，试求必须施加于这根棒上的外力的量值和方向．(c) 确定电阻器中热量产生的速率，并确定供给这根棒的机械功率．(d) 假定外力突然从棒上撤去．试确定在棒停止之前，电阻器中耗散的能量（以 J 为单位）．

8.24 一个面积为 A、电阻为 R 的圆形导线回路，放在一匀强磁场 B 中，B 的方向垂直于图面和回路平面，如图 8-32 所示．磁场从初值 B_0 开始按照 $B(t)=B_0e^{-\alpha t}$ 随时间而逐渐减小．(a) 在一张图上画出感生电流的方向．应用电磁感应的基本关系，说明你的答案．(b) 电磁力使回路扩张还是缩小？试说明之．(c) 试求出，在磁场从 B_0 减小到零的时间内，流过回路一点的总电荷量的表达式（作为 B_0、A 和 R 的函数）．(d) 试求出，在磁场从 B_0 减小到零的时间内，回路中耗散的热量的表达式（作为 B_0、A、R 和 α 的函数）．

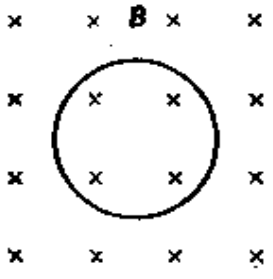


图 8-32

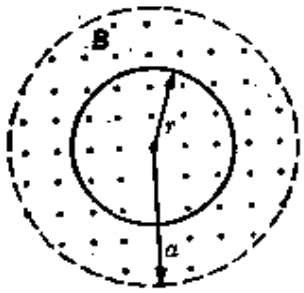


图 8-33

8.25 一匀强磁场局限在一半径为 a 的圆柱形区域内，磁场方向垂直于图面朝上，如图 8-33 所示．这磁场以恒定速率按关系式 $B=B_0+Ct$ 随时间而增加，式中 B_0 和 C 是常数，t 是时间．一个半径为 r、电阻为 R 的圆形导电回路放在这磁场中，回路平面与磁场垂直．(a) 在一张图上画出回路中感生电流的方向，并说明你的答案．(b) 求出回路中感生电流的表达式．(c) 求出在任意半径 $r<a$ 处感生电场量值的表达式．(d) 求出在任意半径 $r>a$ 处感生电场量值的表达式．

8.26 一个边长为 s、电阻为 R 的正方形导线回路，以恒定速度 v 被拉离一强度为 B 的匀强磁场．回路平面始终垂直于磁场．当回路的前缘通过磁场的边缘后（如图 8-34 所示），在回路中就有一感生电流．(a) 在一张图

上标明这个感生电流的方向. (b) 利用法拉第感应定律，求出回路中感生电动势 $\mathcal{E}$ 的表达式. (c) 求出回路中的感生电流 I. (d) 求出保持回路以恒速移动所需的功率.

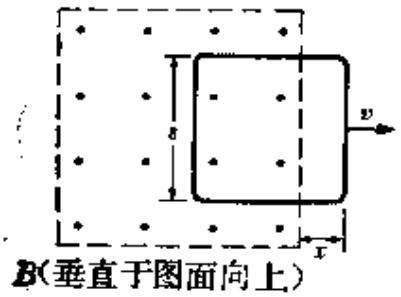


图 8-34

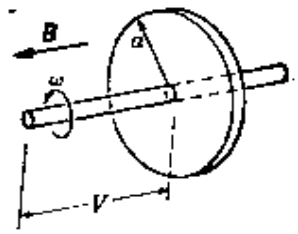


图 8-35

8.27 试证明，如果 $\mathcal{B}=C/r$，则方程(8.8)被满足. (提示：对于任意的 r 计算 $\mathcal{B}_{平均}$，把所得的值代入方程 (8.8) 中，然后对 r 求导数.)

8.28 一个质量为 m 的电荷 q，在一向心力 F 作用下，沿一半径为 ρ 的圆形轨道运动. 在某一时间间隔内，在垂直于轨道平面的方向上建立一个匀强磁场. 利用电磁感应定律，证明这个离子的速度量值的变化为 $\Delta v=-q\rho B/2m$，相应的磁矩变化为 $\Delta m=-(q^2\rho^2/4m)B$. 试与例题 6.4 比较. [提示：利用讨论电子感应加速器时导出的方程 (8.6)，求出磁场变化时的切向加速度.]

8.29 一半径为 a 的金属圆盘，在一匀强磁场 B 中以角速度 ω 绕盘轴转动；磁场平行于盘轴，如图 8-35 所示. 试证明，圆盘中心与其边缘之间的电势差等于 $\frac{1}{2}\omega a^2B$.

8.30 参看第 8.5 节中描述的情况. (a) 证明，在一回路为静止而磁场以角速度 $-\omega$ 转动的参照系中，$\partial\mathcal{B}/\partial t=-\omega\times\mathcal{B}$. (b) 将此值代入方程(8.15) 中，利用习题 6.20 的结果，证明在这个参照系中观察到的电场 $\mathcal{E}=\frac{1}{2}(\omega\times\mathcal{B})\times r$. (c) 证明，这个电场所产生的电动势，与固定于磁场上的观察者所测得的电动势相同. (提示：注意 $\frac{1}{2}r\times dl$ 是这两个矢量所确定的三角形的面积，$A\times B\cdot C=A\cdot B\times C$.)

8.31 在一个存在着匀强磁场 $\mathcal{B}$ 的区域中，磁场的量值以恒定速率增加，即 $\partial\mathcal{B}/\partial t=b$，式中 b 是一个平行于 $\mathcal{B}$ 的恒定矢量. (a) 试证明，根据方

程(8.15)，每一点的电场为$\mathscr{E}=-\frac{1}{2}b\times r$. (b) 令Z轴平行于磁场，求出$\mathscr{E}$的直角分量. (c) 画出磁场和电场的力线.

8.32 一个电荷以高速运动;一个球面以此电荷为球心，试求穿过这个球面的电通量. [提示:在高斯定律中利用方程(4.27).]

8.33 利用算符∇，写出麦克斯韦方程的微分形式(表8-1). (见习题6.17.)

8.34 证明:用微分形式表示时，连续性方程(8.18)为$\partial\rho/\partial t=-\mathrm{div}\,j$.

8.35 试证明，为了使习题8.34中写出的连续性方程，对于所有的惯性观察者，在洛伦兹变换之下是不变的，电流和电荷密度必须按下列规律变换:

$$j'_x=\frac{j_x-\rho v}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\qquad j'_y=j_y,$$

$$j'_z=j_z,\qquad \rho'=\frac{\rho-j_x v/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

写出这些表达式的非相对论性极限，并讨论它们的合理性. (提示:$j=\rho v$是电荷以速度v运动时的电流密度.)

第九章　随时间变化的电路

9.1 引　论

在第三章中讨论的电路中，外加电动势和电流都不随时间变化．在这些电路中，电流的量值和方向恒定；因此，有时称这些电路为直流电路．在这种电路中，唯一需要考虑的参量，是组成这个电路的各个元件的电阻．然而，在许多情况下，外加电动势和电流随时间而变化；因此，在这种情况下必须考虑新的效应．这些效应一般都是和电磁感应现象联系着的．在这类情况下，必须把和欧姆定律对应的简单关系式 $V=RI$（这里 V 是外加电动势，R 是电阻，I 是电流）加以修正，以考虑感应效应．

9.2 自　感　应

考虑一个载有电流 I 的电路（图 9-1）．根据安培定律，这个电流在每一点产生的磁场与 I 成正比．这电路自己的磁场所产生

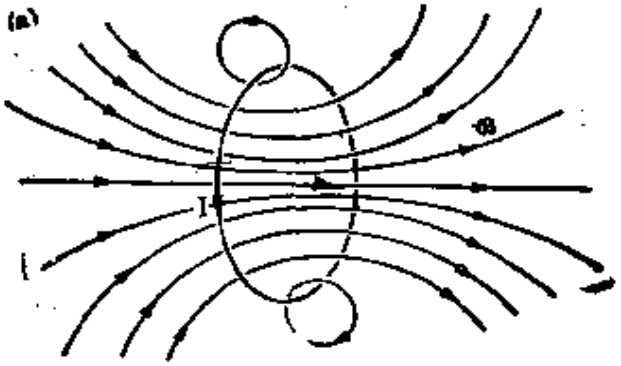


图 9-1　一电路的自磁通

的穿过这电路的磁通，叫做自磁通. 这个磁通与电流 I 成正比，可以写作

$$\Phi_m = LI. \tag{9.1}$$

系数 L 取决于导体的几何形状，叫做这电路的自感. 自感的单位是 $\mathrm{Wb \cdot A^{-1}}$，这个单位又叫做亨利(符号为 H)；这是为了纪念美国科学家亨利(J. Henry, 1797—1878).

$$1\mathrm{H} = 1\mathrm{Wb \cdot A^{-1}} = 1\mathrm{m^2 \cdot kg \cdot C^{-2}}.$$

假定一电路中的电流不是恒定的. 例如，通过改变施于这电路上的电动势，或者改变这电路的电阻，或者改变两者，都能改变这电路中的电流 (图 9-2). 当电流 I 随时间变化时，穿过这电路的磁通也改变；根据电磁感应定律，在这电路中就感生一个电动势. 电磁感应的这个特殊情况，叫做自感应. 把方程(8.1)和(9.1)结合起来，就得到自感电动势为

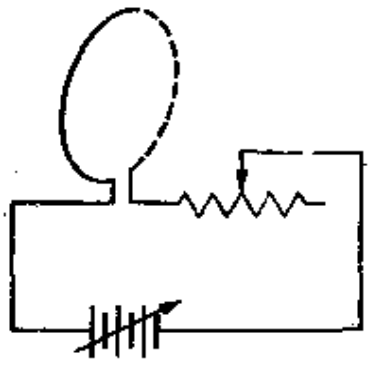
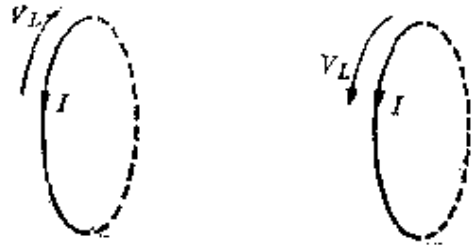


图 9-2

$$V_L = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -L\frac{dI}{dt}. \tag{9.2}$$

上式中的负号表示 V_L 反对电流的变化. 例如，如果电流增加，则 $\frac{dI}{dt}$ 为正，V_L 的作用方向与电流方向相反[图 9-3(a)]. 如果电流减少，则 $\frac{dI}{dt}$ 为负，V_L 的作用方向与电流方向相同[图 9-3(b)]. 因此，V_L 的作用方向总是反对电流的变化. 在写出方程 (9.2)时，我们曾假定这电路是刚性的；因此，在计算时间导数时，L 被看作常数. 如果电路的形状是可变的，则 L 不是常数；于是自感电动势应写作



I 增加(a)　　I 减少(b)

图 9-3　电路中自感电动势的方向.

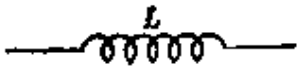


图 9-4　自感的表示方法.

$$V_L=-\frac{d}{dt}(LI), \tag{9.3}$$

在电路图中，利用图 9-4 中的记号表示一个导体有相当大的电感. 但是，要注意，一个电路的自感并不集中在一特定点，而是整个电路的性质.

例题 9.1　在一电路中建立一个电流.

解　如图 9.5 所示，接通开关，把一电动势 V 接入电路中时，电流并非立即达到与欧姆定律对应的值 V/R，而是逐渐接近于 V/R. 这个过程是对抗电流变化的自感电动势 V_L 所引起的. 在电流从零增加到最后的恒定值的过程中，存在着自感电动势. 在此情况下，电路中的总电动势为 $V+V_L=V-L(dI/dt)$. 现在欧姆定律为

$$RI=V+V_L \quad 或 \quad RI=V-L(dI/dt). \tag{9.4}$$

这个方程的一个新的特点是，它把这个电路中的电流与其时间变化率联系起来. 把方程(9.4)写作下列形式：

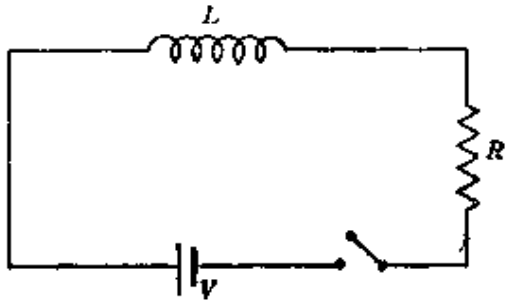


图 9-5　包含一个电阻和一个自感的电路.

$$L\left(\frac{dI}{dt}\right)=V-RI, \tag{9.5}$$

学生就可看出，当电流增大时，电流的时间变化率减小；当电流达到与欧姆定律对应的值 V/R 时，电流的时间变化率变为零. 为了表明电流随时间变化

的情况，可把方程(9.5)写作

$$L\left(\frac{dI}{dt}\right)=-R\left(I-\frac{V}{R}\right),$$

或者把变量 I 和 t 分离开来，则得

$$\frac{dI}{I-V/R}=-\frac{R}{L}dt.$$

注意，$t=0$ 时，电流也等于零 $(I=0)$；于是得到

$$\int_0^I\frac{dI}{I-V/R}=-\frac{R}{L}\int_0^t dt.$$

将上式积分后，得出

$$\ln(I-V/R)-\ln(-V/R)=-(R/L)t.$$

利用恒等式 $\ln e^x=x$，则得电路中的电流为

$$I=\frac{V}{R}(1-e^{-Rt/L}). \tag{9.6}$$

上式括号中的第二项随时间而减小，因而电流渐近地趋近于欧姆定律所给出的值 V/R(图 9-6)．如果 R/L 大，则电流很快就达到 V/R；如果 R/L 小，电流可能需经很长时间才能达到稳恒值．读者可能看出，方程(9.5)与物体通过粘滞流体运动的表达式[见第一卷第 7.9 节，$m(dv/dt)=F-K\eta v$]在数学上相似，可以看出二者之间有下列对应关系：$V\longleftrightarrow F, L\longleftrightarrow m, R\longleftrightarrow K\eta$.

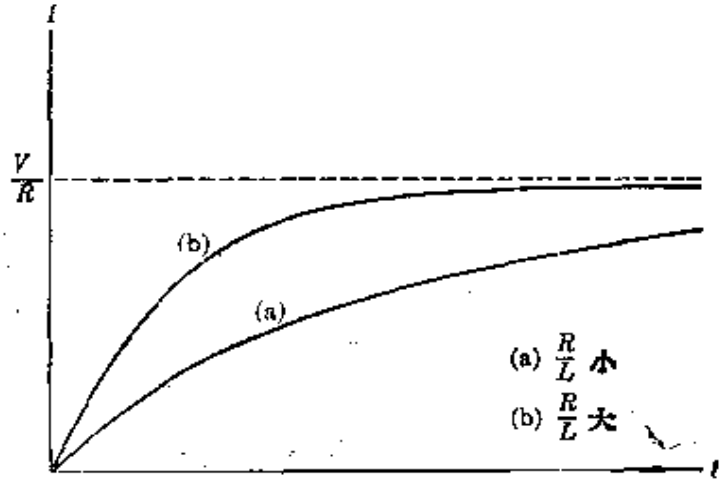


图 9-6　在一有感电路中电流增长的曲线.

例题 9.2　当图 9-7 所示电路中的开关从位置 1 扳到位置 2 时，电路中电流的衰减情况.

解　假定开关已处在位置 1 上很长时间，因而电路中的电流已达到它的极限值 V/R．现在把开关扳到位置 2 上，而实际上未使电路断开．剩下的唯

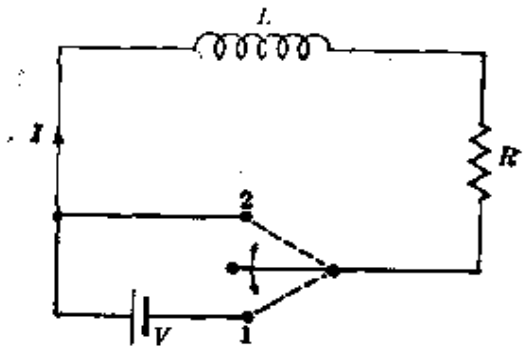


图 9-7　撤去电路中的电动势而不改变其电阻的装置.

一电动势是 $V_L=-LdI/dt$，因而对于这个电路，欧姆定律变为

$$RI=-L\frac{dI}{dt} \quad 或 \quad \frac{dI}{I}=-\frac{R}{L}dt.$$

如果把撤去电动势 V 的时刻规定为零，则初电流为 V/R.

将上式积分，得出

$$\int_{V/R}^{I}\frac{dI}{I}=-\frac{R}{L}\int_0^t dt$$

或

$$\ln I-\ln(V/R)=-(R/L)t.$$

上式又可写成

$$I=(V/R)e^{-Rt/L}. \tag{9.7}$$

由此可见，电流按指数规律衰减，如图 9-8 所示. 电阻 R 越大，或者电感 L 越

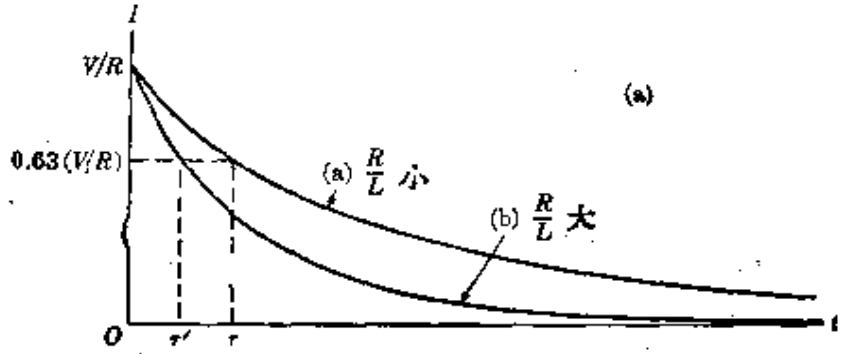


图 9-8　电动势撤去后，电路中电流的衰减.

小，电流下降就越快. 电流下降到其初值的 e 分之一（即约 63%）所需的时间为 $\tau=L/R$. 这个时间叫做张弛时间.

例题 9.3　同轴圆筒的自感.

解　设一电路由两个半径为 a 和 b 的同轴薄金属圆筒组成. 两个圆筒载有相同的电流 I，但方向相反，如图 9-9 所示. 两个圆筒之间的空间充满

磁导率为 μ 的材料.

在例题 6.1 中已经算出，这种电流排布在两个圆筒之间的区域内产生的磁场为 $\mathscr{B}=\mu I/2\pi r$，在其他地方磁场为零. 在这里，用充满两个圆筒之间的介质的磁导率 μ，代替例题 6.1 中的真空磁导率 μ_0. 为了计算自感，必须计算穿过这导体的任一截面的磁通. 考虑截面 $PQRS$，其长度为 l. 如果将这截面分割成宽为 dr 的窄条，则每一窄条的面积为 ldr. 磁场 $\mathscr{B}$ 垂直于 $PQRS$. 因此有

$$\Phi_m=\int_{PQRS}\mathscr{B}\,dS=\int_a^b\left(\frac{\mu I}{2\pi r}\right)(l\,dr)$$

$$=\frac{\mu I l}{2\pi}\int_a^b\frac{dr}{r}=\frac{\mu I l}{2\pi}\ln\frac{b}{a}.$$

因此，长为 l 的一段的自感为

$$L=\frac{\Phi_m}{I}=\frac{\mu l}{2\pi}\ln\frac{b}{a},\qquad(9.8)$$

每单位长度的自感为 $(\mu/2\pi)\ln(b/a)$.

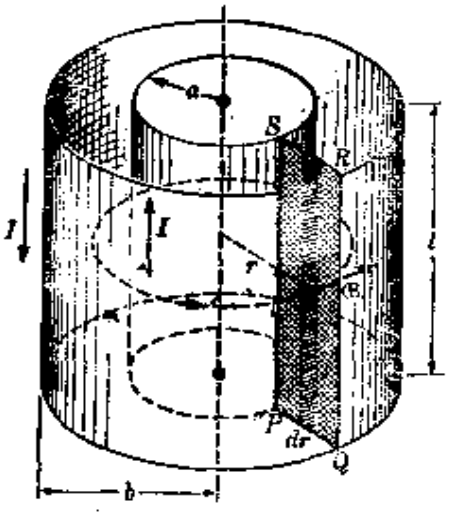


图 9-9

9.3 磁场的能量

在第 3.2 节中讲过，要在电路中维持一个电流，必须供给能量. 每单位时间所需的能量（即功率）为 VI. 现在，方程(9.4)必须写成下列形式：

$$V=RI+L\frac{dI}{dt}.$$

用 I 乘上式，则得

$$VI=RI^2+LI\frac{dI}{dt}.\qquad(9.9)$$

根据方程 (3.10)，RI^2 这一项是移动电子通过导体的晶体点阵所消耗的能量；这能量被转移给组成点阵的离子. 方程(9.9)的最后一项则被解释为，为了建立电流或在空间建立与此电流相联系的磁场，每单位时间所需的能量. 因此，磁能的增加率为

$$\frac{dE_m}{dt}=LI\frac{dI}{dt}.$$

因此，为了使电流从零增加到 I，所需的磁能为

$$E_m=\int_0^{E_m}dE_m=\int_0^I LIdI=\frac{1}{2}LI^2. \tag{9.10}$$

例如，根据方程(9.8)，在例题 9.3 的电路中，长为 l 的一段的磁能为

$$E_m=\frac{1}{2}\left(\frac{\mu l}{2\pi}\ln\frac{b}{a}\right)I^2=\frac{\mu l I^2}{4\pi}\ln\frac{b}{a}. \tag{9.11}$$

也可以利用下列表达式计算磁能 E_m

$$E_m=\frac{1}{2\mu}\int\mathscr{B}^2dv, \tag{9.12}$$

上式中的积分遍及磁场存在的整个体积，dv 是一体积元．例如，在图 9-9 所示的电路中（在图 9-10 中再次画出这个电路），磁场为 $\mathscr{B}=\mu I/2\pi r$．体积元是一个高度为 l、半径为 r、厚度为 dr 的圆筒形壳层，即 $dv=2\pi rldr$．将此式代入方程(9.12)中，并且已知磁场仅存在于 $r=a$ 至 $r=b$ 的区域中，于是得出

$$E_m=\frac{1}{2\mu}\int_a^b\left(\frac{\mu I}{2\pi r}\right)^2(2\pi lrdr)$$

$$=\frac{\mu lI^2}{4\pi}\int_a^b\frac{dr}{r}=\frac{\mu lI^2}{4\pi}\ln\frac{b}{a}.$$

表达式(9.12)可以解释为：建立电流时所耗费的能量，被存储在周围的空间中，体积 dv 中存储的能量为 $(\mathscr{B}^2/2\mu)dv$；因而磁场中每单位体积内存储的能量 E_m 的表达式为

$$E_m=\frac{1}{2\mu}\mathscr{B}^2. \tag{9.13}$$

虽然磁能密度的表达式(9.12)是利用一个具有非常特殊的对称性的电路得出的，但是，更详细的分析（此处从略）表明，这个结果是普遍成立的．在既有电场又有磁场存在的情况下，还必须考虑方

程(2.40)所表示的电能密度；因此，电磁场中每单位体积内的总能量为

$$E=\frac{1}{2}\varepsilon\mathscr{E}^2+\frac{1}{2\mu}\mathscr{B}^2. \tag{9.14}$$

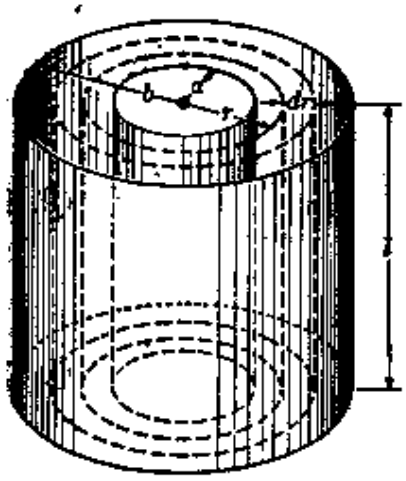


图 9-10

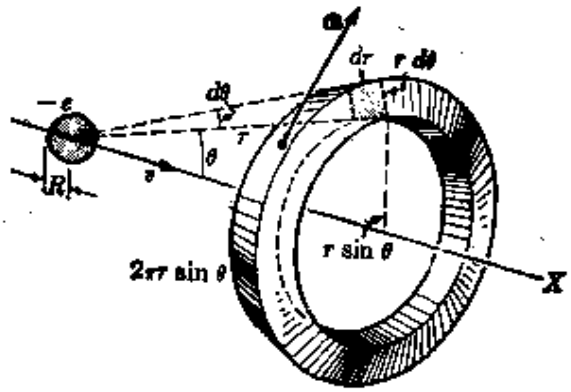


图 9-11

例题 9.4 一个低速电子的磁场的能量.

解 在第 4.5 节中已证明，一个低速电荷产生一个磁场，这个磁场的力线是垂直于电荷运动方向的圆，其量值由方程(4.6)给出：

$$\mathscr{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}q\frac{v\sin\theta}{r^2}.$$

对于一个电子，$q=-e$. 假定我们采用例题 2.15 中引入的粗略的电子模型(R是电子的"半径"). 在电荷外部，磁场的能量可用方程(9.12)求出，积分遍及电荷之外的整个空间. 我们取图 9-11 所示的环形体积元；这个环的周长为 $2\pi r\sin\theta$，其截面的边长为 dr 和 $rd\theta$，因而截面的面积为 $rdrd\theta$. 这个环的体积为

$$dv=\text{周长}\times\text{截面}=2\pi r^2\sin\theta drd\theta.$$

于是，方程(9.12)给出

$$\begin{aligned}E_m&=\frac{1}{2\mu_0}\int_R^\infty\int_0^\pi\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qv\sin\theta}{r^2}\right)^2 2\pi r^2\sin\theta drd\theta\\&=\frac{\mu_0}{16\pi}q^2v^2\int_R^\infty\frac{dr}{r^2}\int_0^\pi\sin^3\theta d\theta\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2q^2}{3R}\right)v^2.\end{aligned}$$

这个结果只给出总磁能的数量级，因为还必须加上带电粒子内部的磁场的贡献. 因此，必须知道这个粒子内部的电荷分布. E_m 的最引人注意的特点，是它依赖于 v^2，因而类似于一个质量为

$$m=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2q^2}{3R}$$

的粒子的动能. 在电子的情况下，$q=-e$，$m=m_e$，所以

$$m_e=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2e^2}{3R}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{3Re^2},$$

在上式中曾利用方程(4.18)消去 μ_0. 解上式求出 R，得

$$R=\frac{2}{3}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e c^2}\right)=\frac{2}{3}r_e,$$

上式中 r_e 是方程 (2.45) 所定义的电子半径. 我们的粗略计算所给出的结果，与例题 2.15 中的结果有相同的数量级$\left(\text{在那里 } R=\frac{3}{5}r_e\right)$，这证明了这个理论的一致性(因为只能估计数量级). 把这个结果与例题 2.15 的结果结合起来时，似乎可以合理地认为，一个带电粒子的静能是和它的电场的能量联系着的，而它的动能则对应于磁场的能量. 然而，设想和自然界中其他相互作用联系着的场，也对一个粒子的静能和动能有贡献，是合乎逻辑的. 但是，我们不完全知道这些相互作用，因而不能肯定地说情况就是这样. 事实上，例题 2.15 和这里所作的计算，就是所谓电子的自具能的确定.

9.4 电路中的自由电振荡

前面已指出，表征电通过电路流动的参量有三个，即电容 C、电阻 R 和自感 L. 我们现在来分析这三个参量按什么方式决定一个已知电动势在一个闭合电路中产生的电流. 如果图 9-12(a) 所示电路中电流 I 的方向如图中所示，则在电容器 C 的极板上出现电荷 q 和 $-q$，而且存在如下的关系：

$$I=\frac{dq}{dt}. \tag{9.15}$$

这些电荷产生一个电动势 $V_C=-q/C$. 此式中出现一个负号，是因为这个电动势的方向与电流 I 的方向相反(由于电容器倾向于

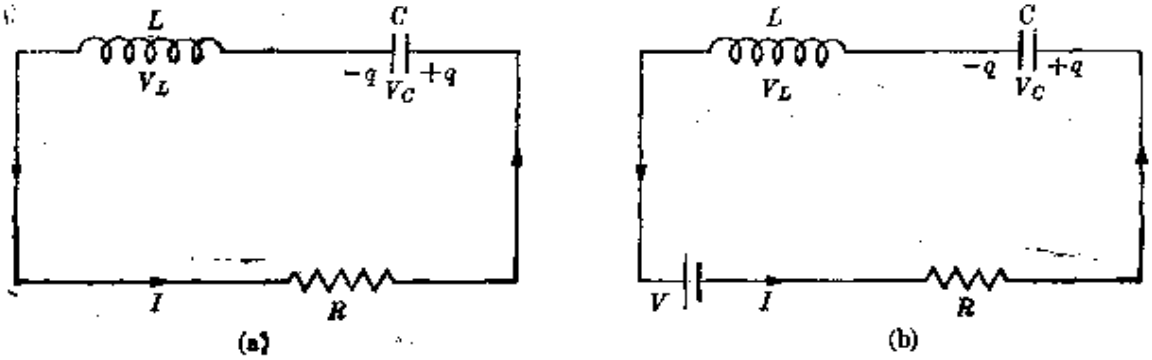


图 9-12

通过这个电路放电). 根据方程(9.2), 在电感 L 上有另外一个电动势 $V_L=-L(dI/dt)$. [此外, 可能还有某个电动势(例如 V)施加在电路上, 如图 9-12(b)所示.]

我们考虑只有两个电动势 V_L 和 V_C 存在的情况. 在此情况下, 电流起因于电容器的充电, 或者穿过电感的磁通的改变, 或者接入(然后撤去)一外电动势. 于是, 应用欧姆定律, 即方程(3.1), 得出

$$RI=V_L+V_C \quad 或 \quad RI=-L\frac{dI}{dt}-\frac{q}{C}. \tag{9.16}$$

上式对 t 求导数, 得出

$$R\frac{dI}{dt}=-L\frac{d^2I}{dt^2}-\frac{1}{C}\frac{dq}{dt}.$$

利用方程(9.15), 可把上式写作

$$L\frac{d^2I}{dt^2}+R\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}I=0. \tag{9.17}$$

这是一个微分方程, 它的解给出电流 I 作为 t 的函数. 参量 L、R 和 C 表征这个电路.

这个方程在形式上与一个质点的阻尼振动的方程[见第一卷的方程(12.45)]

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\lambda\frac{dx}{dt}+kx=0$$

完全相同，如果建立下述对应关系：$L\longleftrightarrow m$，$R\longleftrightarrow\lambda$，$(1/C)\longleftrightarrow k$。因此，在这种情况下，可以在形式上利用描述质点运动的方法。设 $R^2<4L/C$，并引入下列两个量：

$$\gamma=\frac{R}{2L},\quad \omega=\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}. \tag{9.18}$$

于是，电流 I 作为时间的函数由下式给出：

$$I=I_0e^{-\gamma t}\sin(\omega t+\alpha). \tag{9.19}$$

把 I 及其导数直接代入方程(9.17)中，就可验证这一点。图9-13(a)中示出电流对时间的曲线。这是一个振荡的即交变的电流；当 $R<\sqrt{4L/C}$ 时，电流的振幅随时间而减小。如果电阻 R 比电感

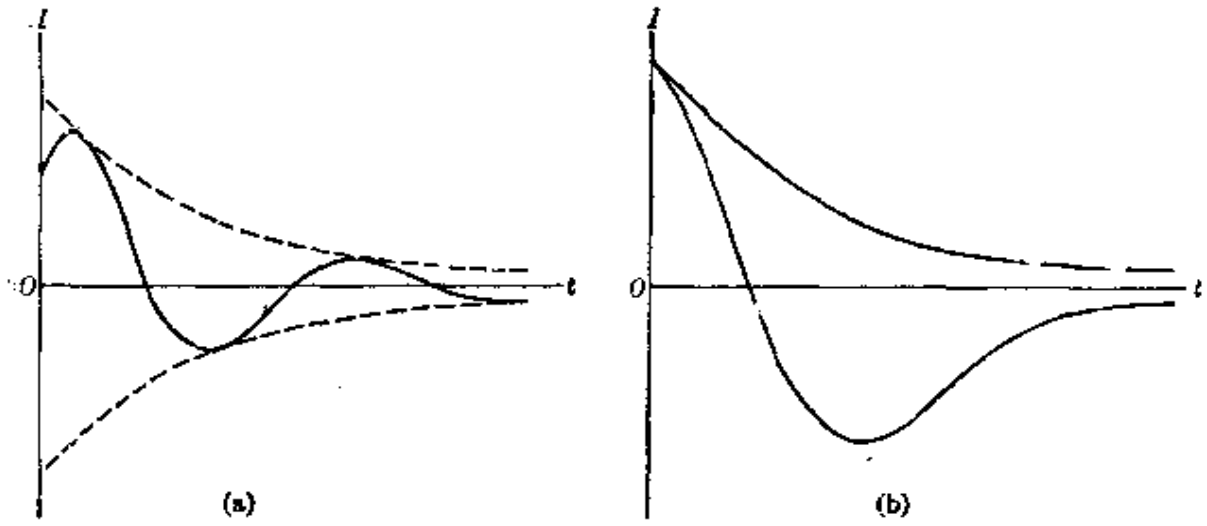


图 9-13　放电电容器的电流随时间的变化：(a) 当 $R^2<4L/C$ 时；(b) 当 $R^2>4L/C$ 时。

L 小很多，则 γ 以及 ω 的表达式中最后一项可忽略不计，结果得出 $I=I_0\sin(\omega t+\alpha)$；这电振荡是无阻尼的，其频率为

$$\omega_0=\sqrt{\frac{1}{LC}}. \tag{9.20}$$

这个频率叫做 LC 电路的特征频率，它相当于无阻尼振子的频率 $\omega_0=\sqrt{k/m}$。注意，电路中的阻尼是由于电阻 R 中的能量耗散。无外加电动势时的这种振荡，是电路的自由振荡。

如果电阻足够大，以致 $R^2/4L^2>1/LC$，或 $R^2>4L/C$，则频率 ω 变为虚数．在这种情况下，电流逐渐减小，而没有振荡，如图 9-13(b)所示．图 9-13(b)中下面的曲线是 $R^2=4L/C$ 的特殊情况；这种电路叫做临界阻尼电路．

9.5 电路中的受迫电振荡

如图 9-14 所示，当把一个交变电动势 $V=V_0\sin\omega t$ 接入图9-12 的电路中时，在电路中就产生受迫振荡．在此情况下，方程(9.16)具有如下形式：

$$RI=V_L+V_C+V_0\sin\omega t.$$

重复前面求方程(9.17)的步骤，对时间 t 求导数，则得

$$L\frac{d^2I}{dt^2}+R\frac{dI}{dt}+\frac{I}{C}=\omega V_0\cos\omega t. \qquad (9.21)$$

这个方程与一个质点的受迫振荡的方程相似[见第一卷的方程(12.50)]，但有一个重要差别：频率 ω 是方程(9.21)右方的一个因子．原因在于，由于关系式 $I=dq/dt$，电路中的电流对应于质点运动中的速度 $v=dx/dt$．可以合理地假定电流的振荡频率与外加电动势的频率相同．因此，满足方程(9.21)的电流由下式给出：

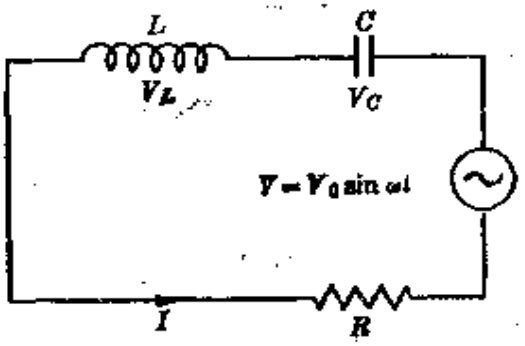


图 9-14

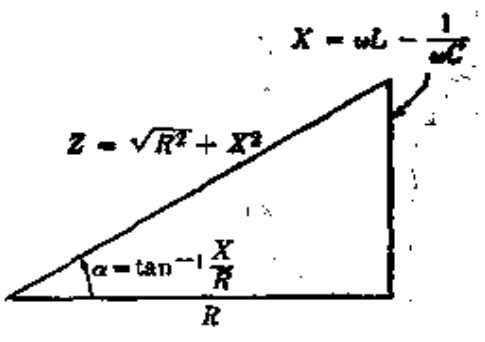


图 9-15 电阻、电抗和阻抗的量值之间的关系．

$$I=I_0\sin(\omega t-\alpha), \qquad (9.22)$$

上式中 α 是电流相对于外加电动势的周相滞后. 把方程(9.22)代入方程(9.21)中，则得电流的振幅为

$$I_0=\frac{V_0}{\sqrt{R^2+(\omega L-1/\omega C)^2}}; \tag{9.23}$$

电流与外加电动势之间的相差 α 可由下式求出:

$$\tan\alpha=\frac{\omega L-1/\omega C}{R}. \tag{9.24}$$

学生应将此式与第一卷的方程(12.53)加以比较.

表 9-1 一个阻尼振子与一个电路之间的对应

振　子	电　路
质量，m	电感，L
阻尼，λ	电阻，R
弹性常数，k	电容的倒数，$1/C$
位移，x	电荷，q
速度，$v=dx/dt$	电流，$I=dq/dt$
外力，F_0	外电动势，V_0

电路的阻抗被定义为 V_0/I_0，即

$$Z=\sqrt{R^2+(\omega L-1/\omega C)^2}. \tag{9.25}$$

电路的电抗被定义为

$$X=\omega L-1/\omega C, \tag{9.26}$$

所以

$$Z=\sqrt{R^2+X^2}, \tag{9.27}$$

而

$$\tan\alpha=\frac{X}{R}. \tag{9.28}$$

量 Z、R、X 和 α 之间的关系如图 9-15 所示. 注意，电抗和阻抗的单位都是欧姆. 例如，用基本单位表示时，ωL 这一项的单位是 $s^{-1}\cdot H=m^2\cdot kg\cdot s^{-1}\cdot C^{-2}$; 这个表达式与在第 3.2 节中得出的欧姆的表达式相同. 对于 $1/\omega C$ 这一项，学生可作同样的证明. 如果 R 和

X都用欧姆作单位，则根据定义(9.27)，Z的单位也必定是欧姆.

电动势V和电流I可以用旋转矢量来表示，如图9-16中所示. 这些矢量的垂直于参考线的分量是瞬时值V和I. 电流I滞后或超前于电动势V，依α为正或为负而定，亦即依ωL大于或小于$1/\omega C$而定. 在I对V滞后α的情况下，图9-17中示出V和I对时间的曲线.

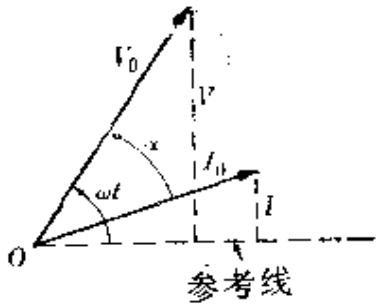


图 9-16　交流电路中电流和电动势的旋转矢量.

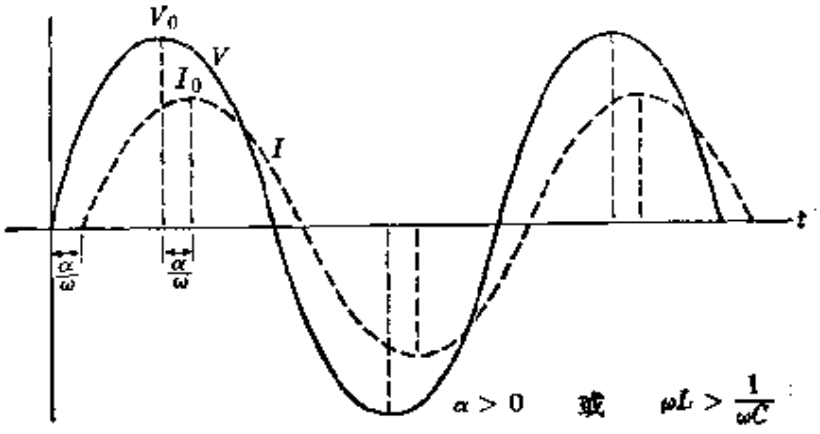


图 9-17　在交流电路中，电流和电动势随时间的变化.

维持这电流所需的功率为

$$P = VI = V_0 I_0 \sin\omega t \sin(\omega t - \alpha)$$
$$= V_0 I_0 (\sin^2\omega t \cos\alpha - \sin\omega t \cos\omega t \sin\alpha). \qquad (9.29)$$

求维持这个电流所需的平均功率时，应注意，在一周中，或者在一段长时间内，$(\sin^2\omega t)_{平均} = \frac{1}{2}$，$(\sin\omega t\cos\omega t)_{平均} = 0$. 因此，

$$P_{平均} = \frac{1}{2} V_0 I_0 \cos\alpha = \frac{1}{2} R I_0^2. \qquad (9.30)$$

当$\alpha = 0$时，$P_{平均}$有最大值，达到共振. 这时$\omega L = 1/\omega C$，对应的频

率为 $\omega=\sqrt{1/LC}$，等于方程(9.20)所表示的频率. 共振时，电流有最大振幅，而且与电动势同相；结果是平均功率最大. 这时旋转矢量 V 和 I 同相 [图 9-18(a)]；电流和电动势随时间的变化如图 9-18(b)所示.

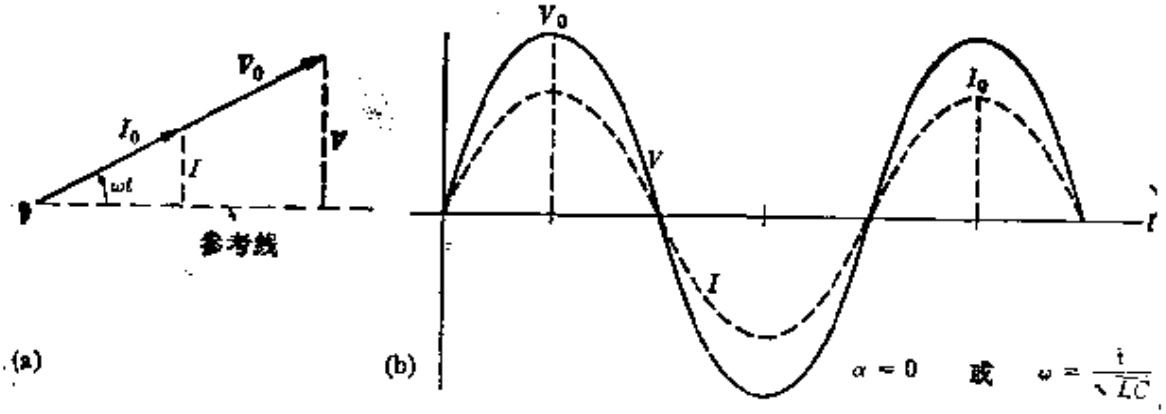


图 9-18 相差为零(即共振)时，电动势与电流之间的关系

如在一个质点的受迫振动的情况下一样，方程(9.21)的通解是方程 (9.22) 所表示的电流和方程 (9.19) 所表示的瞬态电流之和. 但是，由于电路中的电阻，与方程(9.19)对应的项很快就变为零，因而只需考虑方程(9.22). 然而，当电路中出现某种变化，例如 L、C 或 R 变化时，在短时间内确实出现瞬态项，直到电路适应于新的条件.

例题 9.5 利用旋转矢量法，讨论交流电路.

解 用旋转矢量法很容易导出第 9.5 节中叙述过的结果. 注意，这种电路的方程可写作如下的形式：

$$V_0\sin\omega t=RI-V_L-V_C=RI+L\frac{dI}{dt}+\frac{q}{C}.$$

就象 RI 是电阻 R 上的电势差一样，LdI/dt 和 q/C 分别为电感和电容上的电势差(即电压降).

如果假定 $I=I_0\sin(\omega t-\alpha)$，则电流的旋转矢量比电动势的旋转矢量滞后一个角 α (图 9-19). 现在可以认为电动势的旋转矢量是与上面方程右方三项对应的旋转矢量之和. 注意，$dI/dt=\omega I_0\cos(\omega t-\alpha)$，$q=\int I dt=$

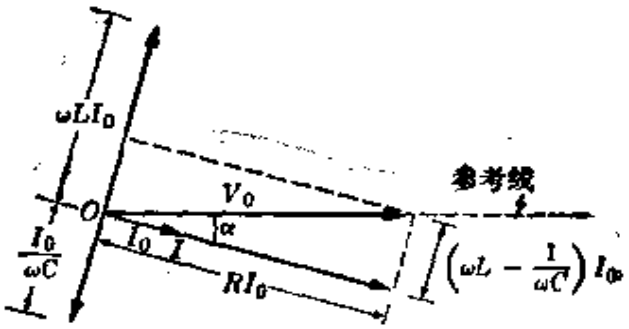


图 9-19　图 9-14 所示电路的旋转矢量图.

$-(1/\omega)I_0\cos(\omega t-\alpha)$. 因此，电阻上的电势降为：

$$RI=RI_0\sin(\omega t-\alpha)，与\ I\ 同相.$$

电感上的电势降为：

$$L\frac{dI}{dt}=\omega LI_0\cos(\omega t-\alpha)=\omega LI_0\sin\left(\omega t-\alpha+\frac{1}{2}\pi\right),$$

比 I 超前 $\frac{1}{2}\pi$.

电容器上的电势降为：

$$\frac{q}{C}=-\left(\frac{1}{\omega C}\right)I_0\sin(\omega t-\alpha)=\left(\frac{1}{\omega C}\right)I_0\sin\left(\omega t-\alpha-\frac{1}{2}\pi\right),$$

比 I 滞后 $\frac{1}{2}\pi$.

图 9-19 中示出这三个旋转矢量，图中的参考线是与 V 对应的旋转矢量. 它们的振幅分别为 RI_0、ωLI_0 和 $I_0/\omega C$. 它们的合量必定是 V_0，因为这三个电势降加起来必定等于外加电动势. 因此，

$$V_0^2=R^2I_0^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2I_0^2$$

或者

$$V_0=\sqrt{R^2+(\omega L-1/\omega C)^2}I_0.$$

解这个方程求出 I_0，所得结果就是方程(9.23). 由此图还可求出相角 α，所得结果与方程 (9.24) 一致. 在交流电路的工程分析中，广泛采用旋转矢量法.

9.6 耦合电路

考虑例如图 9-20 中的(1)和(2)这样两个电路. 当一电流 I_1

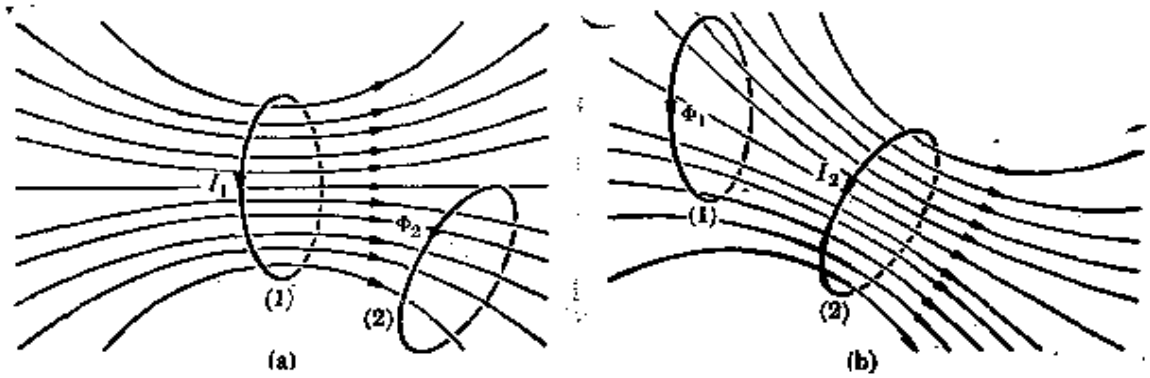


图 9-20　互感应.

在电路(1)中环流时，在整个空间中就建立起一个与 I_1 成正比的磁场；于是有一磁通 Φ_2 穿过电路(2)，Φ_2 也与 I_1 成正比，通常写作：

$$\Phi_2 = MI_1, \tag{9.31}$$

上式中 M 是一比例系数，它代表电路(1)中每单位电流所产生的穿过电路(2)的磁通. 同理，如果一个电流 I_2 在电路(2)中环流，就会产生一个磁场，这磁场的穿过电路(1)的磁通为 Φ_1，Φ_1 与 I_2 成正比. 因此，

$$\Phi_1 = MI_2. \tag{9.32}$$

注意，方程(9.32)中的系数 M 与方程(9.31)中的相同. 这个共同的因素表示，电路(2)中的单位电流所产生的穿过电路(1)的磁通，等于电路(1)中的单位电流所产生的穿过电路(2)的磁通. 这个共同系数，叫做这两个电路的互感；能够证明，两种情况下的互感相同. 换句话说，互感应是对称的. 系数 M 取决于电路的形状及其相对取向. 与自感一样，互感的单位也是亨利，因为它对应于 $\mathrm{Wb \cdot A^{-1}}$.

如果电流 I_1 是可变的，则穿过电路(2)的磁通 Φ_2 改变；于是在这电路中感生一个电动势 V_{M2}. 这个电动势由下式表示：

$$V_{M2}=-M\frac{dI_1}{dt}.$$

写出这个方程时，假定电路是刚性的，并且固定在空间中，因而M是恒定的. 同理，如果电流I_2是可变的，则在电路(1)中感生一个电动势V_{M1}，由下式表示：

$$V_{M1}=-M\frac{dI_2}{dt}. \tag{9.33}$$

因此，M被称为"互感"，因为它描写两个电路之间的相互效应或影响. 此外，如果两个电路相对于彼此运动，则M改变；在两个电流回路中又感生出电动势.

把电路(1)中的电流与这系统的参量联系起来的方程，可利用欧姆定律求出. 为此，只需把方程(9.33)所表示的电动势V_{M1}加在方程(9.16)中，即

$$RI_1=V_{L1}+V_{C1}+V_{M1},$$

式中$V_{L1}=-L_1dI_1/dt$，$V_{C1}=-q_1/C$. 因此，如果将上式对时间求导数(注意，$I_1=dq_1/dt$)，则得

$$L_1\frac{d^2I_1}{dt^2}+R_1\frac{dI_1}{dt}+\frac{1}{C_1}I_1=-M\frac{d^2I_2}{dt^2}. \tag{9.34}$$

同理，对于电路(2)，得出如下方程：

$$L_2\frac{d^2I_2}{dt^2}+R_2\frac{dI_2}{dt}+\frac{1}{C_2}I_2=-M\frac{d^2I_1}{dt^2}. \tag{9.35}$$

方程(9.34)和(9.35)形成一组两个联立微分方程，类似于第一卷中关于两个耦合振子的方程(12.32)，耦合常数为M. 我们将不考虑这方程组的通解. 但是，根据机械耦合振子的讨论，我们可以推断在两个电路之间会有能量交换. 这个过程的常见的实际应用是变压器和感应发电机. 广义的互感应的另一个应用，是在一个叫作发射机的电路中产生一个可变的电流，把信号从一个地方传递

到另一个地方.这个电路又作用在和它耦合的另一个电路(叫作接收机)上.这种方法用于电报、无线电、电视、雷达等等.

例题 9.6 求图 9-21 中所示系统的互感.

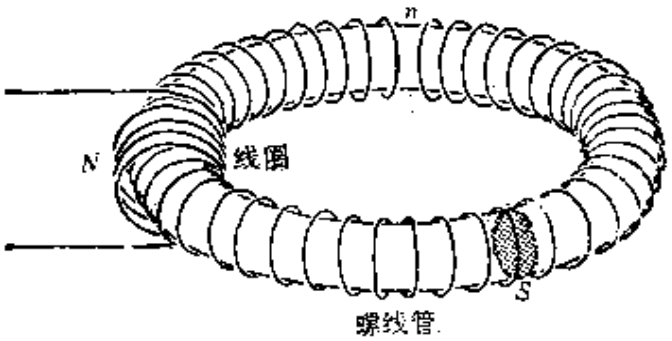


图 9-21

解 图 9-21 中的系统是一个环形螺线管,每单位长度上有 n 匝,截面积为 S;一个 N 匝的线圈环绕在这个环形螺线管的中部.首先必须算出,当线圈中有一电流时,通过螺线管的磁通量,或者反过来,当螺线管中有一电流时,算出通过线圈的磁通量.在这两种方法中,我们采用第二种,因为它比较容易.由例题 6.2 可知,在一环形螺线管中,磁场局限在螺线管的内部,其值为 $\mathscr{B}=\mu_0 nI$[见方程(6.7)].通过这螺线管的任一截面的磁通量为

$$\Phi_m=\mathscr{B}S=\mu_0 nSI,$$

式中 S 是这螺线管的截面.这个磁通量与穿过任何一匝线圈的磁通量相同,即使线圈的截面大于螺线管的截面.因此,穿过这线圈的磁通量为

$$\Phi=N\Phi_m=\mu_0 nNSI.$$

把上式与方程(9.31)比较,就可得出这系统的互感为

$$M=\mu_0 nNS,$$

可以看出,上式仅仅是两个电路的几何因素的函数.在实验室中,当需要标准互感时,广泛采用这种装置.

9.7 结 束 语

互感应的最重要和最基本的特征,是能量能够借助于电磁场而在两个电路之间交换.也就是说,电路中的电流所产生的电磁场,起着能量载体的作用,并通过空间把能量从一个电路传输到另

一个电路. 由于两个电路之间的互感应是一宏观现象，它起因于组成两个电路中的电流的运动电荷之间的元相互作用，所以，根据这个现象我们可以推断，任何两个带电粒子之间的电磁相互作用，也可以看成是通过它们的相互电磁场的能量交换.

当两个带电粒子参与一电磁相互作用时，为了包括场的能量，必须重新表述能量守恒原理. [为了考虑场的动量，我们也必须重新表述动量守恒原理，即方程(4.31)]. 因此，两个相互作用的带电粒子所组成的系统的总能量为

$$E=E_1+E_2+E_{相},\tag{9.36}$$

式中 E_1 和 E_2 是每个粒子的总能量，它们是作用在每个粒子上的任何力所引起的动能和势能之和，$E_{相}$ 是与两个粒子的电磁相互作用联系着的能量. 能够证明，在静态条件(或随时间非常缓慢地变化的条件)下，$E_{相}$ 精确地对应于这两个电荷之间的库仑相互作用所产生的势能:

$$E_p=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0r_{12}}.$$

如果这两个粒子不受其他力的作用，则在它们的运动过程中，方程(9.36)中的三项之和保持恒定.

习　题

9.1　一个电路载有 2 A 电流，穿过这电路的磁通为 0.8 Wb. 求它的自感. 如果在 0.2s 之内，这电路中的电流(a) 加倍，(b) 减小到零，(c) 反向；计算在这电路中感生的电动势.

9.2　一环形螺线管有 N 匝. 假定线圈的半径比环的半径小很多，试求其自感.

9.3　一个电容器 C 的初始电荷为 q_0，与一电阻 R 相连，如图 9-22 所示. 如果开关 S 接通，则电容器通过电阻放电. 试证: (a) 电路中的电流为

$$I=-dq/dt,$$

(b) 这电路的方程为

$$q/C=RI,$$

(c) 在时刻 t，电容器上的电荷为

$$q=q_0e^{-t/RC},$$

(d) 由于焦耳效应而在电阻中耗散的能量，等于电容器的初始能量. [提示：求(c)时，可把(a)和(b)结合起来；求(d)时，计算积分 $\int_0^\infty RI^2dt$.]

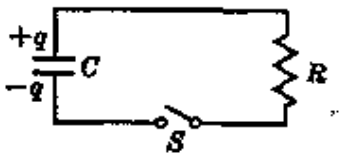


图 9-22

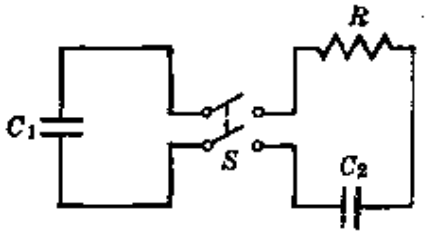


图 9-23

9.4 一个电容器 C_1 的初始电荷为 q_0. 当开关 S 接通时，如图 9-23 所示，C_1 与一电阻 R 和一个未充电的电容器 C_2 串联. (a) 证明这电路的方程为

$$\frac{q}{C_1}+\frac{(q_0-q)}{C_2}=RI.$$

(b) 求出 q 和 I 作为时间的函数.

9.5 一个电容器 C_1 的初始电荷为 q_0，与一个电阻可忽略不计的自感 L 连接，如图 9-24 所示. 如果开关 S 闭合，则这电容器通过电感放电. 试证明：(a) 电路中的电流为

$$I=-dq/dt,$$

(b) 这电路的方程为

$$q/C-L\frac{dI}{dt}=0,$$

(c) 在时刻 t，电容器上的电荷为 $q=q_0\cos\omega t$，式中 $\omega=1/\sqrt{LC}$. 因此，在这电路中产生电振荡. 这种装置被用于产生高频振荡.

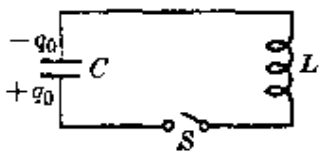


图 9-24

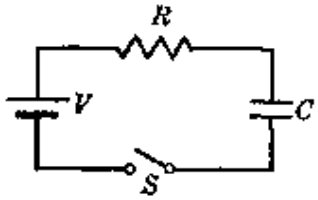


图 9-25

9.6 一个电动势为 V 的电池，其内阻可忽略不计，与一个电阻 R 和一个未充电的电容器 C 串联，如图 9-25 所示.

开关S接通后，试证明：(a) 电路中的电流为

$$I=+dq/dt,$$

式中q是电容器中积累的电荷，(b) 这电路的方程为

$$V-q/C=RI,$$

(c) 电荷(作为时间的函数)为

$$q=VC(1-e^{-t/RC}),$$

(d) 电流(作为时间的函数)为

$$I=(V/R)e^{-t/RC}.$$

画出q和I随时间变化的曲线.

9.7 一个电路由一个电阻构成，施于这电阻上的交变电动势为$V=V_0\sin\omega t$. 试证明，电流由下式表示：

$$I=(V_0/R)\sin\omega t.$$

画出电动势和电流的旋转矢量，并证明它们是同相的. 求这电路的阻抗.

9.8 一个电路由一个幅度为V_0、角频率为ω的交变电动势与一电容器C相联而组成. (a) 求电流. (b) 画出与电动势和电流对应的旋转矢量. (c) 画出电流作为ω和C的函数.

9.9 一个1 μF电容器跨接在一交流电源上，这电源的电压振幅保持在50V不变，但其频率可以改变. 当角频率为(a) $100s^{-1}$，(b) $1000s^{-1}$和(c) $10000\,s^{-1}$时，求电流的振幅. (d) 画出电流振幅对频率的对数-对数曲线.

9.10 一个电感为10H的电感器，其电阻可忽略不计，跨接在习题9.9的电源上. 当角频率为(a) $100s^{-1}$，(b) $1000s^{-1}$和(c) $10000s^{-1}$时，求电流的振幅. (d) 画出电流振幅对频率的对数-对数曲线.

9.11 一交流电源的电压振幅为50 V，其角频率为$1000\,s^{-1}$. 如果与这电源跨接的电容器的电容为(a) 0.01 μF，(b) 1.0 μF和(c) 100 μF，试求电流的振幅. (d) 画出电流振幅对电容的对数-对数曲线.

9.12 一个电阻为零的电感器跨接在习题9.11的电源上. 当这电感器的自感为(a) 0.01 H，(b) 1.0 H和(c) 100 H时，求电流的振幅. (d) 画出电流振幅对自感的对数-对数曲线.

9.13 一电路由一振幅为V_0、角频率为ω的交变电动势与一自感L联接而组成. (a)求电流. (b) 画出与外加电动势、自感上的电压降和电流对应的旋转矢量. (c) 画出电流随ω和L变化的曲线.

9.14 一个电阻与一个自感串联，然后跨接在一交变电动势$V=V_0$

$\sin\omega_f t$ 上而组成一个电路. 试证明，这个电路的阻抗为$\sqrt{R^2+(\omega L)^2}$，电流比电动势滞后的角度为 $\tan^{-1}(\omega L/R)$.

9.15 对于(a) 由一个电阻器和一个电容器组成的电路，(b) 由一个电感器和一个电容器组成的电路，重作前题.

9.16 一个螺线管每米的匝数为 10^3，其截面为 $1.2\times10^{-3}\ m^2$. 在其中部绕一个 300 匝的线圈. (a) 求它们的互感；(b) 如果螺线管中的 2A 初始电流在 0.2s 内反向，求线圈中的电动势.

9.17 线圈 A 和 B 各有 200 匝和 400 匝. A 中的 2 A 电流在 B 的每一匝中产生 1.8×10^{-4} Wb 的磁通. 计算，(a) 互感系数，(b) 当 B 中有 4 A 电流时，穿过 A 的磁通量，(c) 当 A 中的电流在 0.3 s 内从 3A 变为 1A 时，在 B 中感生的电动势.

9.18 两个线圈同轴地放置着，如图 9-26 所示. 线圈 1 与一外电动势 V 连接. 假定线圈 1 所产生的磁通只有五分之一通过线圈 2，反之亦然. 两个线圈的电阻分别为 R_1 和 R_2，匝数分别为 N_1 和 N_2. 线圈 2 与一外电阻 R 连接，如图所示. 线圈 1 所产生的总磁通由下式给出：

$$\Phi_B=(L_1/N_1)I_1,$$

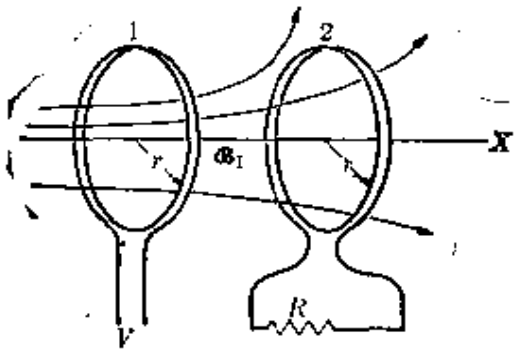


图 9-26

式中 L_1 是线圈 1 的自感. 试计算，(a) 互感系数，(b) 当 B 中有 4A 电流时，穿过 A 的磁通，(c) 当 A 中的电流在 0.3 s 内由 3A 变为 1A 时，在 B 中感生的电动势.

9.19 一个 N 匝的线圈套在一根很长的螺线管上. 螺线管的截面为 S，每单位长度上的匝数为 n (见图 9-27). 试证明，这个系统的互感等于 $\mu_0 nNS$.

9.20 在一半径为 a、匝数为 N_1 的线圈的中心，有一个非常小的线圈，其面积为 S，匝数为 N_2，如图 9-28 所示. 试证明，这个系统的互感为

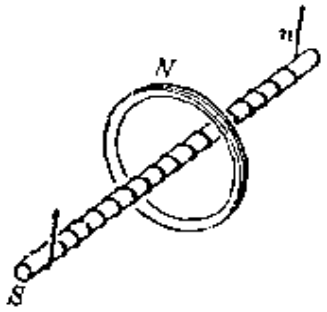


图 9-27

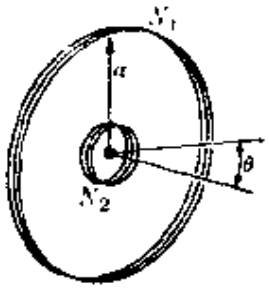


图 9-28

$(\mu_0 N_1 N_2 S\cos\theta)/2a$，式中 θ 是两个线圈的法线的夹角。

较难的习题

9.21 在图 9-29 所示装置中，左边电容器的电容为 C，并被充电到电压 V_0；右边电容器的电容为 $3C$，原来未充电。然后把开关接通。经过很长时间后，试求每个电容器上的电压（作为 V_0 的函数）。

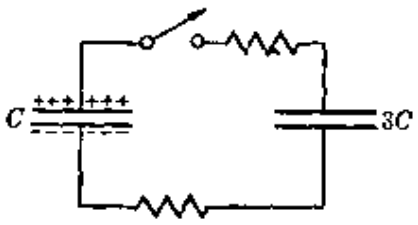


图 9-29

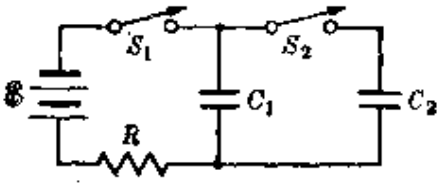


图 9-30

9.22 在图 9-30 中，$\mathcal{E}=100$ V；$C_1=12\,\mu$F；$C_2=24\,\mu$F；$R=10\,\Omega$。开始时，C_1 和 C_2 未充电，所有的开关都是开着的。(a) 首先把开关 S_1 接通。试求达到平衡时，C_1 上的电荷。(b) 然后把 S_1 启开，把 S_2 接通，试求再达到平衡时，C_1 上的电荷。(c) 对于(b)的平衡条件，确定 C_1 上的电压。(d) S_2 仍然接通，现在又把 S_1 接通。从电池流出多少附加的电荷？

9.23 如图 9-31 所示，一个电容器的极板面积为 A，极板间距为 s，在两极板之间建立起一匀强电场 $\mathcal{E}$。(a) 求两极板之间的电势差。(b) 说明每个极板上电荷的符号。然后把这个电容器通过一个电阻器接到第二个未充电的平行板电容器上，第二个电容器的极板面积也是 A，但间距为 $s/2$。(c) 在图 9-31(b)所示的图上标出每根导线中电流的方向，并说明为什么电流最后停止。(d) 电流停止后，哪个电容器上的电荷较多？说明你的推理。(e) 电流停止后，两个电容器中储存的能量少于原来储存的能量。定性地说明这“失去的”能量变成了什么。

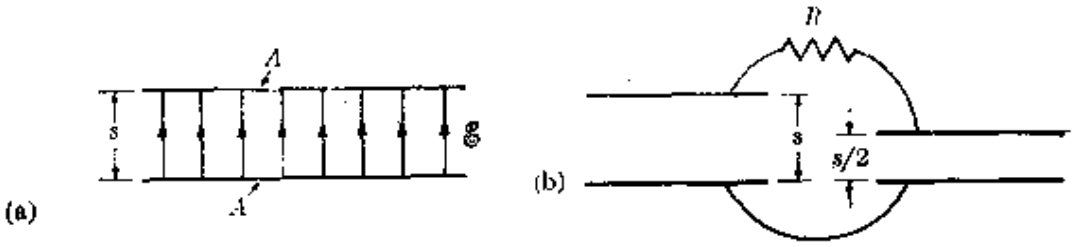


图 9-31

9.24 图 9-32 中所示电桥能够用于比较两个电感 L_1 和 L_2. 在电桥上施加一个交变电动势 V，使之达到平衡，即从 B 至 D 的电流始终为零. 试证明，$L_1/L_2=R_3/R_4$.

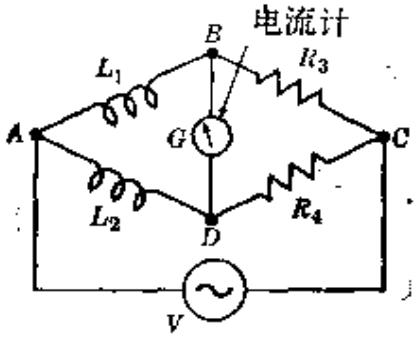


图 9-32

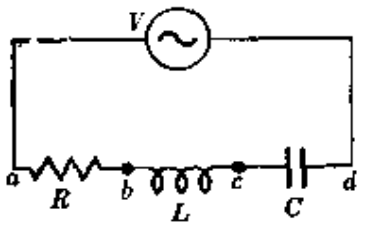


图 9-33

9.25 在习题 9.24 中忽略了电感器的电阻. 如果它们的电阻分别为 R_1 和 R_2，则如下进行. 首先施加一恒定电动势，使电桥达到平衡，即在 B 和 D 之间没有电流. 然后，如在习题 9.24 中那样使电桥达到平衡，而不改变电阻. 证明，同样的关系仍然成立.

9.26 在图 9-33 所示电路中，$V=V_0\sin\omega t$ 是一交变电动势. 求电势差 V_{ab}、V_{bc}、V_{cd}、V_{ac}、V_{bd} 的振幅和相对于电动势的相角. (提示：画出对应的旋转矢量，如图 9-19 中所示那样.)

9.27 一个交变电动势的最大值为 100V，其角频率为 $120\pi\cdot s^{-1}$，与一个 1Ω 的电阻、一个 3×10^{-3} H 的电感和一个 2×10^{-3} F 的电容器串联. 试求：(a) 电流的振幅和相角，(b) 电阻、电感和电容器上的电势差，(c) 在图上画出分别与电动势、电流和三个电势差对应的旋转矢量. (d) 验证这三个电势差矢量之和等于电动势矢量.

9.28 在一交流电路中，设 I_{rms} 和 V_{rms} 是在一周中电流和电动势的方均根值，试证明，

$$I_{rms}=I_0/\sqrt{2},$$

$$V_{rms}=\mathscr{E}_0/\sqrt{2},$$

$$P_{平均}=I_{rms}V_{rms}\cos\alpha,$$

式中 α 是电流和电动势之间的相角.

9.29 一个电路由一个最大值为 100V 的交变电动势、一个 2Ω 电阻、一个10^{-3}H 自感和一个 10^{-8}F 电容器串联组成. 对于电动势角频率的下列值: (a) 0, (b) $10s^{-1}$, (c) 10^2s^{-1}, (d) 共振, (e) 10^4s^{-1}, (f) $10^5\,s^{-1}$, 求电流的最大值. 画出电流对频率的对数的曲线.

9.30 一个电路由一个电阻和一个电感并联组成, 如图 9-34 所示. 试证明, 这个电路的合阻抗由下式给出:

$$\frac{1}{Z}=\sqrt{\frac{1}{R^2}+\frac{1}{\omega^2L^2}},$$

相角由 $\tan^{-1}(R/\omega L)$ 给出. (提示: 画出电动势的旋转矢量. 然后利用习题 9.13 和 9.14 的结果, 画出与电阻和电感中的电流对应的旋转矢量. 它们的合值就给出总电流, 由此求出阻抗和相差.)

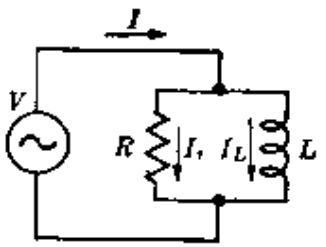


图 9-34

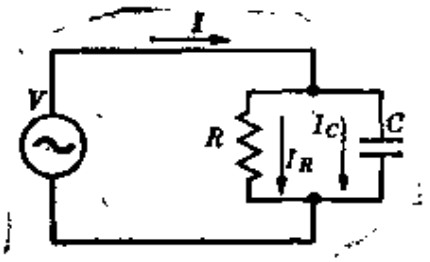


图 9-35

9.31 对于图 9-35 所示电路, 重作前题.

9.32 对于图 9-36 所示电路, 重作习题 9.30.

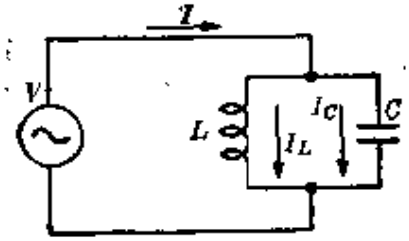


图 9-36

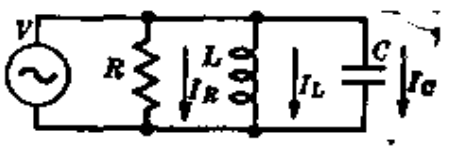


图 9-37

9.33 对于图 9-37 所示电路, 重作习题 9.30.

9.34 一个电阻为 1Ω, 自感为 10^{-3}H 的线圈, 与另一个电阻为 1Ω、自

感为 3×10^{-3}H 的线圈并联．一个振幅为 10V、角频率为 $120\pi\ s^{-1}$ 的交变电动势接到这个系统上．试计算，(a) 每个线圈中的电流，(b) 总电流．(c) 在一张图上画出电动势、每个导体中的电流和总电流的旋转矢量．(d) 验证总电流矢量等于各电流矢量之和．

9.35 一个电路由一个电感和一个电容器并联，再与一个电阻串联而组成，如图 9-38 所示．(a) 画出与 V、I_L、I_C、RI、V_L 和 V_C 对应的旋转矢量．(b) 证明这个电路的阻抗为 $Z=[R^2+\omega^2L^2/(1-\omega^2LC)^2]^{1/2}$．(c) 当 $\omega=1/\sqrt{LC}$ 时，阻抗等于多大？(在此情况下，发生所谓反共振．)(d) 概略画出电流对频率的曲线．(提示：注意通过 L 和 C 的电流的旋转矢量之和，必等于通过 R 的电流，但与电势差对应的旋转矢量必然相同．为了帮助学生，还画出旋转矢量图．)

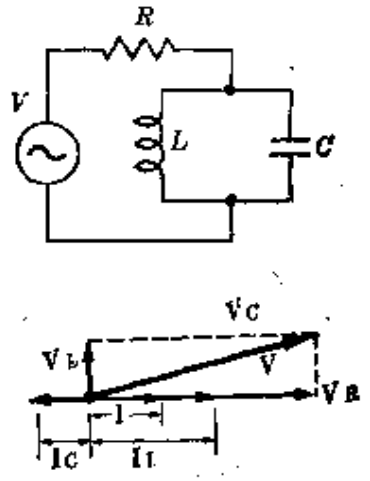


图 9-38

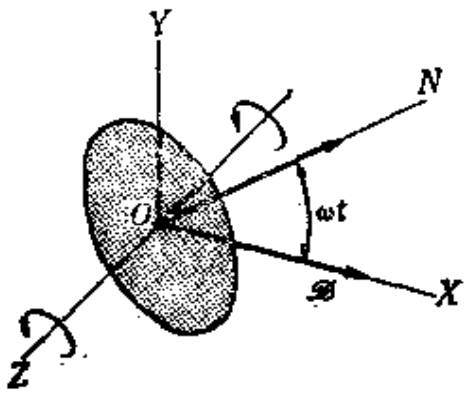


图 9-39

9.36 一个圆线圈的半径为 a，电阻为 R，自感为 L，以恒定角速度绕一条垂直于一匀强磁场的直径而转动，如图 9-39 所示．试求，(a) 在这线圈中感生的电动势和电流．(b) 这线圈在点 O 产生的磁场的 x 和 y 分量的平均值．(c) 置于点 O 的一根磁针与 X 轴所成的角．

9.37 如果 I_0 和 α 分别由方程 (9.23) 和 (9.24) 表示，则用直接代入的方法，可以验证方程 (9.22) 是方程 (9.21) 的一个解．[提示：先将 $\sin(\omega t-\alpha)$ 展开，并用从方程 (9.24) 导出的相应的值代替 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$．]

第三部分　波

在物理学的所有概念之中，有两个概念能够被所有的人直觉地理解，不论他们的文化水平如何．这两个概念就是粒子和波．对于一般的人，一个粒子是一小部分物质，这里"小"通常是根据拟人的尺度来判断的，表示比这个粒子的环境小很多．类似地，通常是根据在水面上，在一根绳子上，在一个弹簧上观察到的波来想象波．

物理学家是在更抽象和更基本的意义上使用粒子的概念，因此，能够对各种各样的物理情况进行适当的讨论．波的概念经受着类似的变化；物理学家把这个概念加以扩展，把它应用于不象水面上的波，但有相同的数学描述的许多种现象．下面几章将对这种广义的波动现象进行一般的讨论．

我们将分析几种类型的波，重点放在电磁波上．在每一种情况下，学生必须力求理解所描述的物理现象和所用的数学框架，必须避免把所有的波仅仅想象为液面上的波这种难免的倾向．波的最重要的方面是其传播速度，是当介质的物理性质改变（产生反射、折射、偏振），当各种障碍物放在波的路径上（产生衍射、散射），或者当若干个波在同一空间区域中重合（产生干涉）时，波所经受的变化．这些方面都是我们要讲的具体课题；这一部分的主要目的，是使学生能对物理现象的波动描述，即对随时间变化的场所描述的物理情况的传播，获得基本的了解．

第十章　波动：弹性波

10.1　引　　论

敲钟时，在远处能听到声音；声音通过周围的空气而传递．当一艘快艇在离岸某一距离处通过时，它所产生的尾波终于达到岸边．灯泡接通时，屋里就充满光．在第 8.11 节中曾证明，由于电场和磁场之间的物理关系，能够把电磁信号从一个地方传递到另一个地方．虽然上述各种过程的机制可能不同，但它们都有一个共同特点：它们都是在空间一点产生的物理扰动，都通过空间传播，后来在另一点产生一个效应．这些扰动中的任何一种通过介质的传播，都是波动的一个例子．

为了更一般地分析这个问题，我们考虑某种场所描述的物理性质．这种场可以是电磁场，弹簧中的形变，气体中的压强，固体中的应变，绳子的横向位移，甚至引力场．假定一个地方的条件变为与时间有关，即为动态的，因而在那个地方出现这系统的物理状态的扰动．场的含时方程（例如电磁场的麦克斯韦方程）所描述的这系统的物理性质，导致这个扰动通过空间而传播．这种扰动破坏其他地方的静态条件．

例如，我们考虑液体的自由表面．在这种情况下，场是液面的每一点相对于平衡位置的位移．在平衡即静态条件下，液体的自由表面是水平的；但是，如果把一石块投入液体，从而使液面上一点的条件受到扰动，我们都知道，这个扰动将沿着液面朝四面八方传播．为了确定传播的机制和速度，我们必须分析液面上一点的位移怎样影响这表面的其余部分．根据这个分析得出这个过程的

动力学方程．然后根据这些方程得到这种扰动在空间和时间中变化的定量信息．

在本章中，首先讨论波动的一般特性，然后讲几个具体例子．大多数例子是关于物质中的弹性波．（见图 10-1．）在大多数情况下，可以不考虑分子结构，并假定介质是连续的．只要波的空间起伏（由波长决定）远大于承载这个波动的介质的分子间距离，这个假定总是成立的．

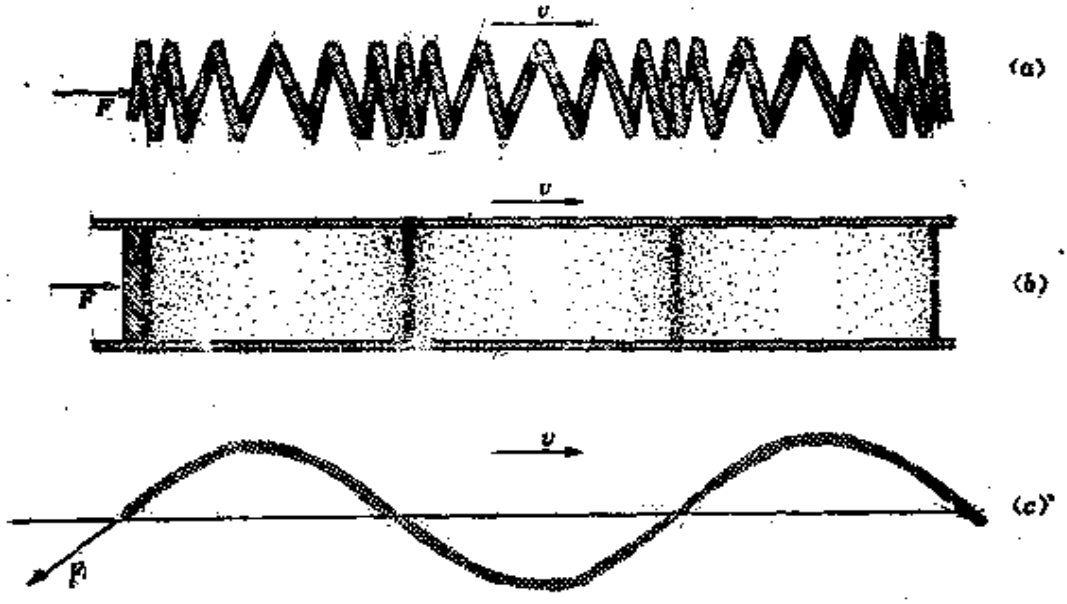


图 10-1　弹性波：（a）弹簧的，（b）气体中的，（c）绳子上的．

10.2　波动的数学描述

考虑图 10-2 中实线所表示的函数 $\xi=f(x)$．如果这曲线上每一点向右（或向左）平移一个距离 $\Delta x=a$，而无形变，则在每一个新的点，例如 x'，这函数的值，与它在 $(x'-a)$ 处［或在 $(x'+a)$ 处］的值相同．因此，$f(x-a)$ 表示无形变地向右平移一个距离 a 的曲线；同理，$f(x+a)$ 表示同一曲线向左平移一个距离 a．

现在考虑曲线 $f(x)$ 的连续位移．当这曲线在时间 Δt 内以速

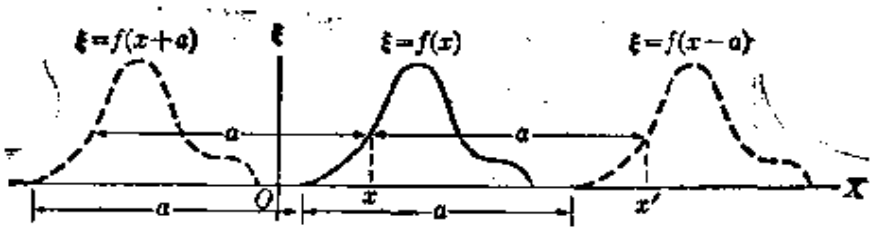
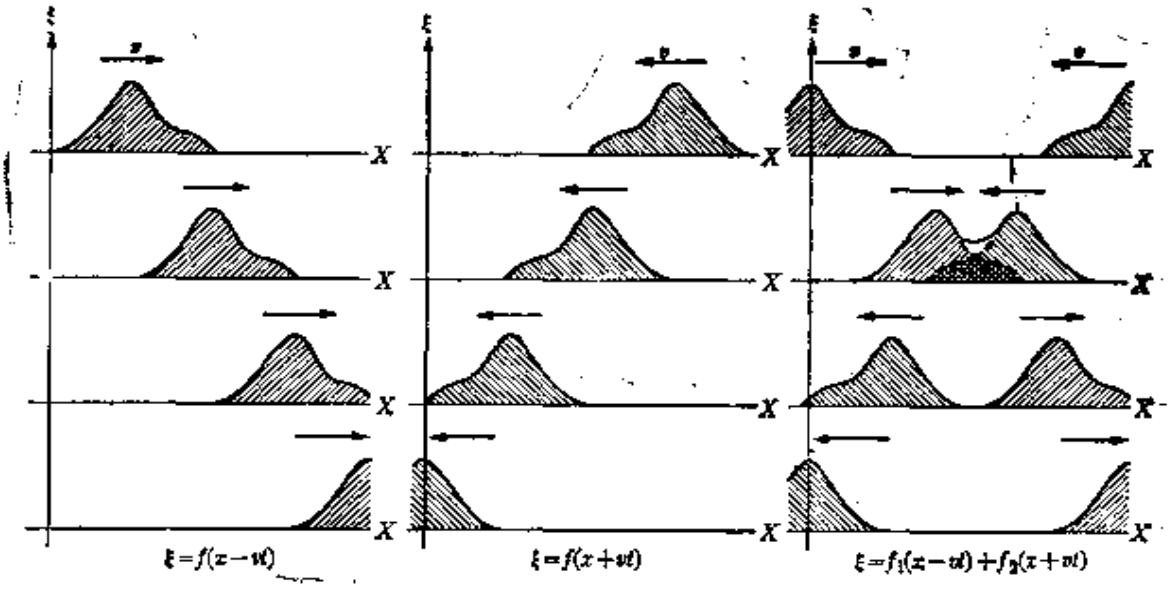


图 10-2　一个函数 $\xi(x)$的无畸变平移.

度 v 从它在 $t=0$ 时的位置移动一个距离 Δx，使得 $a=\Delta x=v\Delta t=vt$（这里 v 叫作相速度）时，就有一个“脉冲”沿 x 方向“行进”（图 10-3）. 因此，如下形式的数学表达式



(a)　　(b)　　(c)

图 10-3　一个波(a)向右和(b)向左的无畸变传播.（c)相向传播的波产生相加的结果，在这里波干涉.

$$\xi(x,t)=f(x\mp vt) \tag{10.1}$$

足以描述一个无形变地沿着正(或负) X 轴行进即“传播”的物理扰动；这种传播是波动的特点. 量 $\xi(x,t)$ 可以表示各种各样的物理量，诸如固体中的形变，气体中的压强，电场或磁场，等等.

一个特别重要的情况，是 $\xi(x,t)$ 为一正弦(或谐)函数的情况，例如

$$\xi(x,t)=\xi_0\sin k(x-vt)=\xi_0\sin[k(x-vt)+2\pi]. \tag{10.2}$$

量 k 具有特殊意义. 当 x 的值代之以 $x+2\pi/k$ 时，函数 $\xi(x,t)$ 具有相同的值；即

$$\begin{aligned}\xi\left(x+\frac{2\pi}{k},t\right)&=\xi_0\sin k\left(x+\frac{2\pi}{k}-vt\right)\\&=\xi_0\sin[k(x-vt)+2\pi]=\xi_0\sin k(x-vt)\\&=\xi(x,t).\end{aligned}$$

于是

$$\lambda=\frac{2\pi}{k} \tag{10.3}$$

为图 10-4 中曲线的“空间周期”；也就是说，这曲线每隔长度 λ 重复. 量 λ 叫作波长，量 $k=2\pi/\lambda$ 叫作波数①，它表示在距离 2π 上波长的数目. 因此，

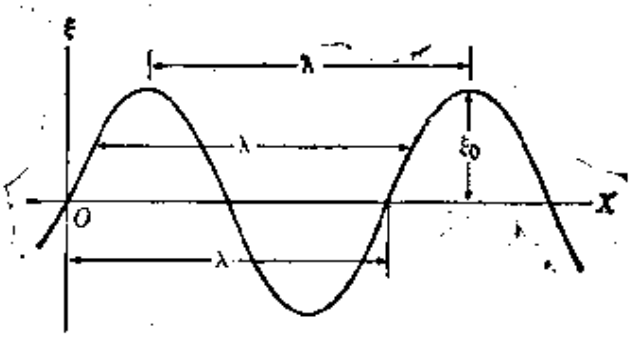


图 10-4 谐波

$$\xi(x,t)=\xi_0\sin k(x-vt)=\xi_0\sin\frac{2\pi}{\lambda}(x-vt) \tag{10.4}$$

表示一个波长为 λ 的正弦波，它以相速度 v 沿 X 轴向右传播. 方程 (10.4) 也可以写作如下形式：

$$\xi(x,t)=\xi_0\sin(kx-\omega t), \tag{10.5}$$

式中

$$\omega=kv=\frac{2\pi v}{\lambda} \tag{10.6}$$

① 有时波数这个术语表示 $1/\lambda$（或 $k/2\pi$），即单位长度上波长的数目.

叫作波的角频率. 根据第一卷的方程(12.2), $\omega=2\pi\nu$, 式中 ν 是在每一点 x, 物理扰动变化的频率; 因此

$$\lambda\nu=v, \tag{10.7}$$

上式表示波的波长、频率和相速度之间的关系. 因此, 如果每一点的振荡周期 P 由 $P=1/\nu=2\pi/\omega$ 给出, 则方程 (10.4) 可以写作如下形式

$$\xi(x,t)=\xi_0\sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}-\frac{t}{P}\right). \tag{10.8}$$

同理得出

$$\xi(x,t)=\xi_0\sin k(x+vt)=\xi_0\sin(kx+\omega t)$$

$$=\xi_0\sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}+\frac{t}{P}\right) \tag{10.9}$$

表示沿负 X 方向移动的谐波.

看一下 $\xi(x,t)$ 在不同的、相继的时间间隔上的空间分布, 是有益的. 图 10-5 中示出在时刻 t_0, $t_0+P/4$, $t_0+P/2$, $t_0+3P/4$ 和 t_0+P, 函数 $\xi(x,t)$ 的曲线. 注意, 当波本身向右传播时, 一周期后又在空间上自行重复. 这种重复的原因是, 根据方程(10.7),

$$\lambda=v/\nu=vP,$$

上式表示, 也可以把波长定义为波在一周期中前进的距离. 因此, 在正弦波动中有两种周期性: 一种是时间周期性, 由周期 P 表示; 另一种是空间周期性, 由波长 λ 表示; 二者之间的关系为 $\lambda=vP$.

学生不难验证, 一个行进的谐波的一般表达式(10.1)可以写作另一种形式:

$$\xi(x,t)=F(t\pm x/v),$$

和前面一样, 正号对应于沿 $-X$ 方向传播; 负号对应于沿 $+X$ 方向传播. 如果选取 $\xi(x,t)$ 具有这种函数形式, 则代替方程(10.5)和(10.9), 可以写出

$$\xi(x,t)=\xi_0\sin\omega(t\pm x/v)=\xi_0\sin(\omega t\pm kx). \quad (10.10)$$

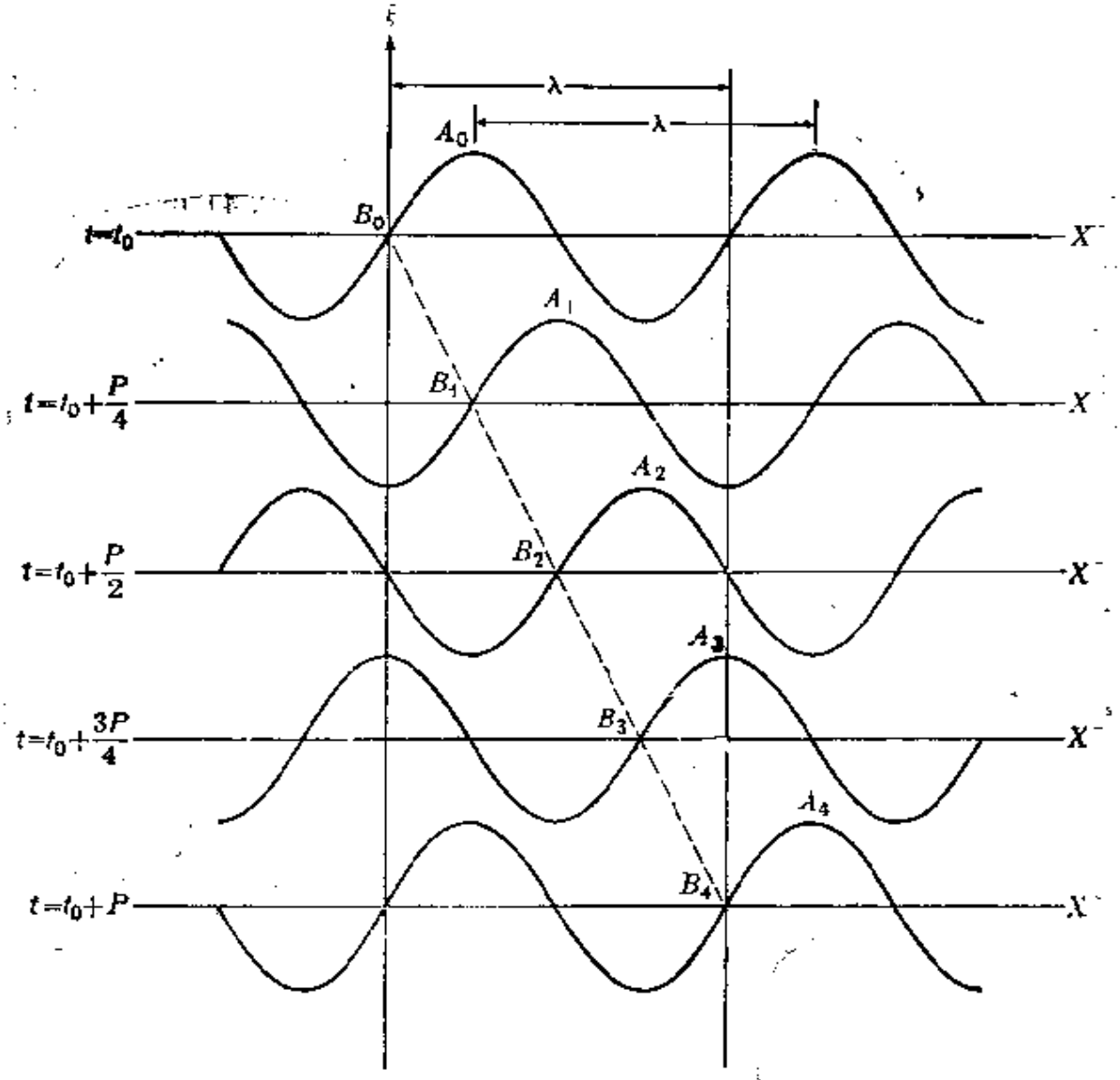


图 10-5　向右传播的谐波．在时间 P 内，波前进一个距离 λ．

例题 10.1　计算振荡频率为 440 Hz 的音叉所发声音的波长．（空气中的声速约为 340 $m\cdot s^{-1}$．）

解　方程(10.7)可重写作 $\lambda=v/\nu$，所以

$$\lambda=\frac{v}{\nu}=\frac{340\ m\cdot s^{-1}}{440\ Hz}=0.772\ m.$$

例题 10.2　求可见光谱的红光区域中光的波长．与红光对应的频率约为 5×10^{14} Hz．（在真空中光的传播速度等于 $3\times10^8\ m\cdot s^{-1}$．）

解　如在例题 10.1 中那样，应用方程(10.7)，得出

$$\lambda=\frac{v}{\nu}=\frac{3\times10^{8}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}}{5\times10^{14}\ \mathrm{Hz}}=6\times10^{-7}\ \mathrm{m}.$$

由这两个例题可以看出，可听声与可见光的波长之间的差别是很大的（6个数量级）.

10.3 波动的傅里叶分析

根据第一卷第12.14节中的傅里叶定理，任何周期运动都可以表示为频率为$\omega,2\omega,\cdots,n\omega,\cdots$或者周期为$P,P/2,\cdots,P/n,\cdots$的简谐运动的叠加. 由于简谐运动已完全了解，而且遵从简单的方程，所以利用傅里叶定理来分析任意的周期运动是很方便的.

在第10.2节中已说明简谐运动的双重周期性：空间周期性和时间周期性. 我们现在要证明，一个任意的、空间周期的波形也必定是时间周期的，一个任意的、时间周期的波形也必定是空间周期的. 因此，整个波形能够表示为简谐波的叠加.

设$\xi=f(x-vt)$是一个时间周期的波动；也就是说，在空间一个给定点，这个运动在时刻$P,2P,\cdots,nP,\cdots$有相同的值(图10-6). 换句话说，

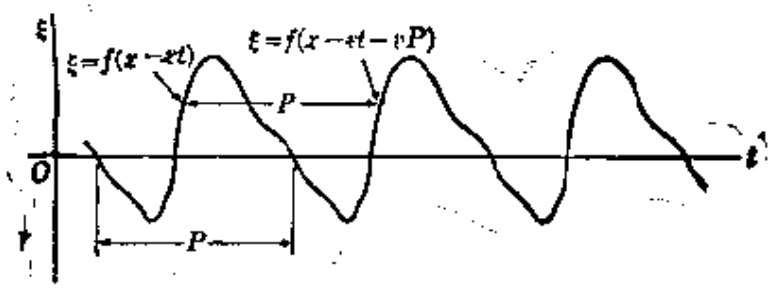


图10-6 在一固定的空间位置x处看到的一个任意的、时间周期的波形.

$$\xi=f(x-vt)=f[x-v(t\pm nP)]=f(x-vt\mp nvP). \quad (10.10)$$

然而，由于$\lambda=vP$，所以在一给定时刻t，在间距等于$vP,2vP,\cdots,nvP,\cdots$的点，位移ξ有相同的值. 因此，如果不改变t，而使x改变一个量$\lambda=vP$，则这个波在空间中重复(图10-7). 由此可见，一个时间周期的波动也是空间周期的.

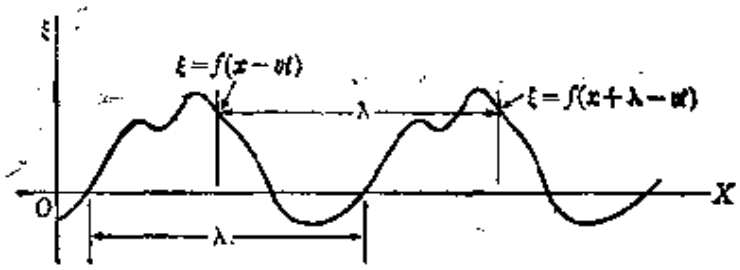


图 10-7　在一固定时刻 t 看到的一个任意的、空间周期的波形.

傅里叶定理可以写作(见第一卷第 12.14 节的讨论):

$$\xi=f(u)=a_0+a_1\cos u+a_2\cos 2u+\cdots+a_n\cos nu$$
$$+b_1\sin u+b_2\sin 2u+\cdots+b_n\sin nu, \qquad (10.11)$$

式中 $f(u)$ 是变量 u 的周期函数,其周期为 2π. 对于我们的目的来说,u 可以是 x 或者 t;其周期分别为 λ 和 P. 例如

$$\xi=f(x-vt)=a_0+a_1\cos(kx-\omega t)+a_2\cos[2(kx-\omega t)]+\cdots,$$

式中 $k=2\pi/\lambda$, $\omega=2\pi/P$. 这个表达式就是波的线性叠加的更一般的原理的另一种写法:

任何周期性波动,都能够表示成频率为 $\omega, 2\omega, \cdots, n\omega$,波长为 $\lambda, \lambda/2, \cdots, \lambda/n$ 的谐波的线性叠加.

利用正弦和余弦函数的正交性质,能够求出方程(10.11)中各谐波项的系数 a_n 和 b_n. 也就是说,对于周期为 2π 的无量纲变量 u,

$$\left.\begin{aligned} a_0&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(u)\,du,\\ a_n&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(u)\cos nu\;du,\\ b_n&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(u)\sin nu\;du. \end{aligned}\right\} \qquad (10.12)$$

傅里叶方法,不仅对于分析周期性曲线,而且对于分析非周期性曲线(例如图 10-8 中的脉冲),也是有用的. 这种情况和上面的讨论之间的主要差别在于,这种曲线必须用连续的波长谱或者连

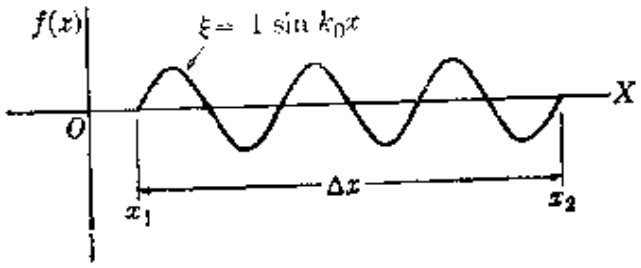


图 10-8　一个空间谐波脉冲

续的频谱来分析；而不是用一组分立的波数 k, $2k$, $3k$, …, nk, … 或者一个分立频谱 $\omega, 2\omega, 3\omega, \cdots, n\omega, \cdots$ 来分析. 与每个波长或每个频率对应的振幅由 k 或 ω 的连续函数给出，叫做这个脉冲的傅里叶变换. 对于一个特定的脉冲形状，总有一个唯一的傅里叶变换.

考虑图 10-8 中的脉冲. 让一台扬声器只振动一个很短的时间，就会产生这样一个脉冲. 如果图 10-8 中的曲线在空间中从 $-\infty$ 延伸到 $+\infty$，就不必作傅立叶分析，因为这时曲线只有一个波数 k_0. 但是，为了使这曲线在 $x<x_1$ 和 $x>x_2$ 的区域中变为零，就必须加上另外一些波数，以使在这些区域中合成傅里叶级数等于零. 因此，即使波源具有一个确定的频率，一个有限的空间脉冲也是由许多波数合成的.

例题 10.3　在时刻 $t=0$ 由函数 $f(x)$ 表示的波（如图 10-8 所示）的傅里叶分析. 在间隔 $\Delta x=x_2-x_1$ 中，这个波的表达式为

$$\xi=A\sin k_0 x,$$

在这个间隔之外，其达式为 $\xi=0$. 这种型式的波叫做一个脉冲或波包.

解　可以证明，k 的振幅函数（即这个脉冲的傅里叶变换）由下式给出：

$$F(k)=\frac{1}{2}A\Delta x\left[\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\Delta x\Delta k\right)}{\left(\frac{1}{2}\Delta x\Delta k\right)}\right],$$

式中 $\Delta x=x_2-x_1$ 是这脉冲的长度，$\Delta k=k-k_0$. 图 10-9 中示出这个振幅函数. 当 $\Delta k=0$ 即 $k=k_0$ 时，这个函数有一极大值 $\frac{1}{2}A\Delta x$；这是因为，当 $\Delta k\to 0$

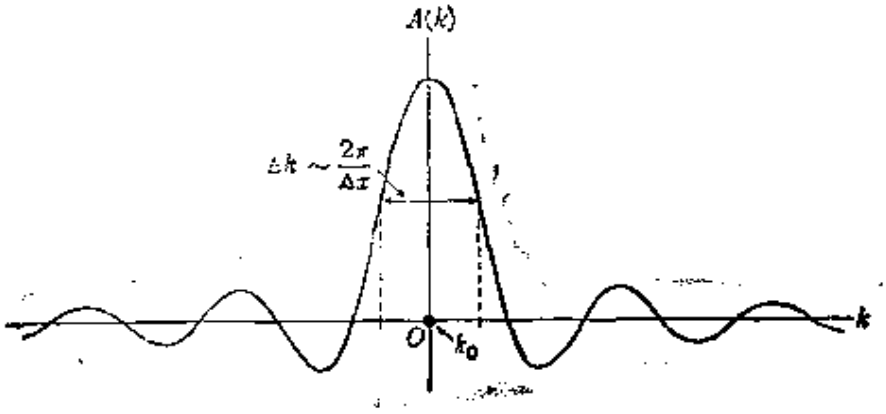


图 10-9　图 10-8 中的脉冲的傅里叶变换.

时，上式方括号中的项趋于 1. 此外，当 Δk 的绝对值增大时，方括号中的项的分子的量值永远不会大于 1；因此，$F(k)$ 按振荡的方式减小. $F(k)$ 大于中央极大值的 50% 的 k 值范围，大致对应于下列条件：

$$\left|\frac{1}{2}\Delta x\Delta k\right|<\frac{\pi}{2} \quad 或 \quad -\frac{\pi}{\Delta x}<\Delta k<\frac{\pi}{\Delta x}.$$

因此，有可观振幅的那些波数，仅仅是处于 k_0 附近的 Δk 范围内的波数；此 Δk 由下式给出：

$$\Delta x\Delta k\sim 2\pi. \tag{10.13}$$

这个方程表示，脉冲的空间长度越短，准确表示这个脉所需的波数范围就越大. 类似地，可以考虑一个时间中的单频脉冲及其傅里叶变换，并得到脉冲的时间间隔 Δt 与频率范围 $\Delta\omega$ 之间的下列关系式：

$$\Delta\omega\Delta t\sim 2\pi. \tag{10.14}$$

方程 (10.14) 表示，单频脉冲的时间间隔越短，准确表示这个脉冲所需的频率范围就越大.

10.4　波动的微分方程

第二步，我们研究一个给定的随时间变化的场在什么情况下象一个波那样无畸变地传播. 与每一个物理过程联系着的场，都受表征该过程的动力学定律的支配. 这些定律可以象在电磁场情况下那样，表示成微分方程的形式. 因此，我们可以考查一下找出一个适用于各种波动的微分方程的可能性. 于是，每当我们看到

一个特定的场，由于它的物理性质而满足这样一个方程时，就可以确信这个场以一定速度、无畸变地、通过空间传播①. 反之，如果实验表明一个场在空间中以一定速度、无畸变地传播，这个场就可以用与波动方程相容的一个方程组来描述.

我们将一再遇到描述以一定速度 v、无畸变地沿 $+X$ 或 $-X$ 方向传播的波动的方程. 这个方程就是

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}=v^2\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \tag{10.15}$$

上式叫做波动的微分方程. 方程 (10.15) 的通解具有方程(10.1)的形式:

$$\xi(x,t)=f_1(x-vt)+f_2(x+vt). \tag{10.16}$$

因此，方程(10.15)的通解能够表示为沿相反方向传播的两个波动的叠加. 当然，对于沿一个方向传播的波，只需要方程(10.15)中的两个函数之一. 然而，当 (例如) 有一个沿 $+X$ 方向的入射波和一个沿 $-X$ 方向的反射波时，就必须使用方程(10.16)表示的通解.

为了证明方程(10.16)那种形式的表达式是波动方程(10.15)的一个解，我们首先必须引入一些数学上的结果. 当有一个函数 $y=f(u)$，其中 u 又是 x 的函数[即 $u(x)$]时，我们可以写出

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

这个表达式叫做链式求导法则. 例如，如果 $y=\sin(3x^2)$，则 $y=\sin u$，$u=3x^2$，$dy/du=\cos u$，$du/dx=6x$，所以

$$dy/dx=(\cos u)(6x)=6x\cos 3x^2.$$

---

① 在第一卷第十二章中，用过这种方法，在那里曾证明振荡运动遵从一个 $d^2x/dt^2+\omega^2x=0$ 型的方程；一旦理解了与这个方程相联系的运动的物理定律，就能够利用这个方程认明几种型式的简谐运动.

现在把链式求导法则应用于 $\xi=f(x\pm vt)$. 在这种情况下，令 $u=x\pm vt$，因而 $\xi=f(u)$. 因为 u 是 x 和 t 这两个变量的函数，所以我们必须利用偏导数，在这里 $\partial u/\partial x=1$，$\partial u/\partial t=\pm v$. 由于 ξ 也是两个变量的函数，所以它的偏导数是

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=\frac{d\xi}{du}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{d\xi}{du},\quad \frac{\partial\xi}{\partial t}=\frac{d\xi}{du}\frac{\partial u}{\partial t}=\pm v\frac{d\xi}{du}.$$

取二阶导数，得到

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=\frac{d}{du}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{d^2\xi}{du^2},$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=\frac{d}{du}\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)\frac{\partial u}{\partial t}=\left(\pm v\frac{d^2\xi}{du^2}\right)(\pm v)=v^2\frac{d^2\xi}{du^2}.$$

把这两个方程结合起来，消去 $d^2\xi/du^2$，则得方程(10.15)，这就证明 $\xi=f(x\pm vt)$ 是波动方程的解，而与函数 f 的形状无关. 由于波动方程是线性的，所以通解具有方程(10.16)所示的形式.

作为一个具体的例子，我们可以证明正弦波 $\xi=\xi_0\sin k(x-vt)$ 满足波动方程(10.15). ξ 对 x 和 t 的偏导数为

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=k\xi_0\cos k(x-vt),\qquad \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=-k^2\xi_0\sin k(x-vt);$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial t}=-kv\xi_0\cos k(x-vt),\qquad \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=-k^2v^2\xi_0\sin k(x-vt).$$

由此可见，$\partial^2\xi/\partial t^2=v^2\partial^2\xi/\partial x^2$，这与方程(10.15)是一致的.

为了更好地理解波动的基本概念，现在讨论学生比较熟悉的几种波. 学生必须注意，在以下几节讨论的波中，方程(10.15)是由这种过程的动力学定律得出的，同时考虑了几种近似，例如小振幅或长波长等. 因此，与方程(10.15)有关的理论，仅在规定的近似下才适用.

10.5 固体棒中的弹性波

如果在一根固体棒的一端产生一个扰动，例如用一个锤子打击它，则这扰动沿棒传播，最后在另一端被感受到．我们说，有一个弹性波沿着这根棒传播．在本节中我们将讨论这种弹性波，并且表明它的传播速度怎样和棒的物理性质联系起来．设这根棒具有均匀截面，沿棒的轴受力作用(如图中的力F所示)．各个截面上的力F不一定相同，可以沿棒轴改变．每一截面上(如图 10-10 所示) 有一正应力$\mathscr{S}$，它被定义为在两个方向上垂直作用于这个截面单位面积上的力．于是有

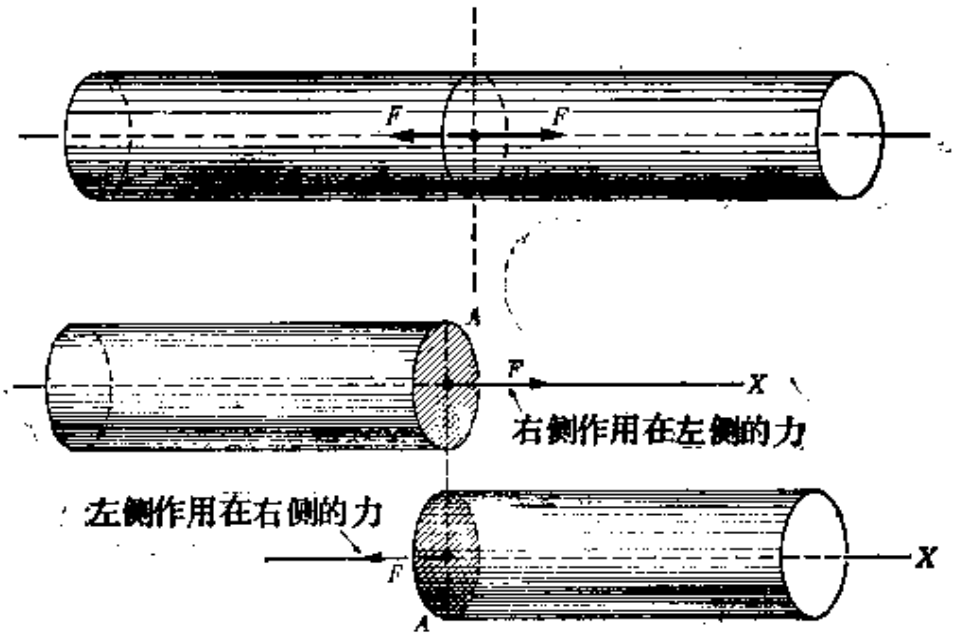


图 10-10　在受力状态下棒的任一截面上的力．

$$\mathscr{S}=\frac{F}{A}. \tag{10.17}$$

应力的单位为 $\mathrm{N\cdot m^{-2}}$，这个单位叫作帕(Pa)，是为了纪念法国科学家帕斯卡(B. Pascal, 1623—1662)．

在这种力作用下，棒的每一截面沿棒轴方向发生一个位移ξ．如果在棒的一切点上这种位移都相同，就没有形变，而仅仅是棒沿

其轴发生一个刚性位移. 我们感兴趣的是有形变的情况，因此 ξ 沿棒而改变；也就是说，ξ 是 x 的函数. 我们考虑在一根无扰动的棒中相距为 dx 的两个截面 A 和 A'(图 10-11). 当施力于棒上时，截面 A 移动一距离 ξ；截面 A' 移动一距离 ξ'. 于是，在形变状态下，A 和 A' 之间的距离为

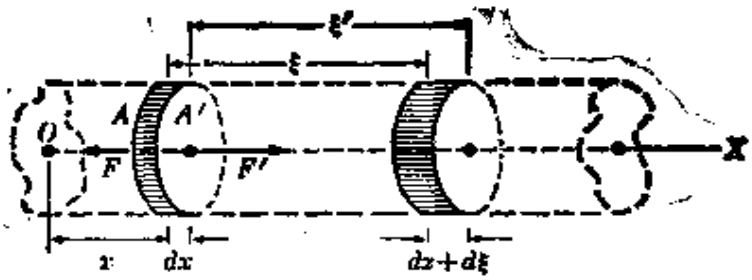


图 10-11 棒中纵波的放大了的图.

$$dx+(\xi'-\xi)=dx+d\xi,$$

式中 $d\xi=\xi'-\xi$. 因此，在那个区域中，棒的形变为 $d\xi$. 棒中的正应变 e 被定义为沿棒轴每单位长度的形变. 在这情况下，由于形变 $d\xi$ 对应于长度 dx，所以棒中的应变为 $d\xi/dx$. 更一般地，有

$$e=\frac{\partial\xi}{\partial x}. \tag{10.18}$$

如果没有形变，则 ξ 不变，因而 $e=0$. 也就是说，如果没有形变，就没有正应变. 应变是两个长度之比，因而是一个纯数，即无量纲的量.

棒的正应力 $\mathscr{P}$ 与正应变 e 之间的关系叫作胡克定律：

在材料的弹性限度之内，正应力与正应变成正比.

即

$$\mathscr{P}=Ye \tag{10.19}$$

上式中的比例常数 Y 称为杨氏弹性模量，是为了纪念英国人托玛斯·杨 (Thomas Young, 1773—1829). 这个定律是英国人胡克 (Robert Hooke, 1635—1703) 首先提出的. 只要形变小，胡克定

律是材料的弹性行为的很好的近似. 对于大的应力和形变，方程(10.19)不再适用. 这种物理情况的描述要复杂得多.

表 10-1 中列出几种材料的弹性常数. 这些常数是杨氏模量 Y、体积弹性模量 κ [其定义见后面的方程 (10.27)]、刚性模量或切变模量 G[其定义见后面的方程(10.38)].

表 10-1 弹性常数(10^{11}Pa)

材　料	Y	κ	G
铝	0.70	0.61	0.24
铜	1.25	1.31	0.46
铁	2.06	1.13	0.82
铅	0.16	0.33	0.052
镍	2.1	1.64	0.72
钢	2.0	1.13	0.80

把方程(10.17)和(10.18)代入方程(10.19)，解出 F，得到

$$F=YA\frac{\partial\xi}{\partial x}. \tag{10.20}$$

一根棒或金属丝，其一端固定在点 O(图 10-12)，另一端 B 受力 F，处于平衡状态. 在此情况下，每一截面上的力必定相同，且等于 F. 于是，把 F 作为常数，将方程(10.20)积分，就得到每一截面处的形变：

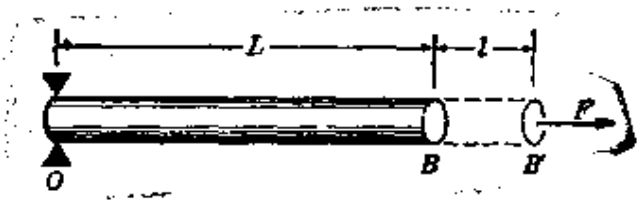


图 10-12

$$\int_0^{\xi}d\xi=\frac{F}{YA}\int_0^{x}dx \quad 或 \quad \xi=\frac{F}{YA}x.$$

令 $x=L$，就得到自由端 B 处的形变 $l=FL/YA$. 这个关系式是杨氏模量的实验测定的基础.

当这根棒不处于平衡态时，棒上各点的力不一样．结果是，厚度为 dx 的一段棒受到一个净力．例如，在图 10-11 中，厚度为 dx 的一段棒，其 A' 侧由于受棒右部拉力的作用而受到一个向右的力 F'；其 A 侧由于受棒左部拉力的作用而受到一个向左的力 F．这段棒所受到的向右的净力为 $F'-F=dF=(\partial F/\partial x)dx$．设 ρ 为棒材料的密度，则这段棒的质量为 $dm=\rho dV=\rho A dx$，式中 Adx 是这段棒的体积．这个质量的加速度为 $\partial^2\xi/\partial t^2$．于是，应用动力学关系式：力＝质量×加速度，就得出这段棒的运动方程为

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx=(\rho A dx)\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} \quad 或 \quad \frac{\partial F}{\partial x}=\rho A\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}. \tag{10.21}$$

在这个问题中有两个场：一个场是棒的每个截面的位移 ξ，这里 ξ 是位置和时间的函数；另一个场是每个截面上的力 F，这里 F 也是位置和时间的函数．这两个场由方程(10.20)和(10.21)联系起来．这两个方程描述这个问题的物理条件，称为变形棒弹性场的微分方程．这些方程在数学上相当于电磁场的麦克斯韦方程．取方程(10.20)对 x 的导数，得出

$$\frac{\partial F}{\partial x}=YA\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}.$$

把这个方程与方程(10.21)结合起来，就得出弹性场的波动方程为

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=\frac{Y}{\rho}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}. \tag{10.22}$$

这个方程与方程(10.15)相似，因此我们可以推断，形变场沿着棒传播，其相速为

$$u=\sqrt{\frac{Y}{\rho}}. \tag{10.23}$$

通过独立测定上式中的三个量，在实验上证实了这个结果．从量纲来看，方程(10.23)也是成立的．因为 Y 的单位是Pa，ρ 的单位是 $kg\cdot m^{-3}$，所以二者之比为 $(Pa)(kg\cdot m^{-3})^{-1}=(N\cdot m^{-2})(kg\cdot m^{-3})^{-1}$

$=m^2\cdot s^{-2}$，这正是速度的平方．根据关系式(10.20)，能够证明(见例题10.5)力F满足一个类似的方程：

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}=\frac{Y}{\rho}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}. \tag{10.24}$$

上式表示，力场沿棒传播的相速度与位移场相同．

方程(10.22)和(10.24)所描述的波，对应于取向沿波的传播方向(即X轴)的物理性质ξ和F．在这种波动中，场变化的方向与波的传播方向相同，这种波动叫作纵波动．

必须知道，场方程(10.20)和(10.21)蕴涵着波方程(10.22)和(10.24)，但是，反过来则不成立，因为其他场方程也可能蕴涵着一个波方程．因此，这个问题的基本场方程是(10.20)和(10.21)；波方程(10.22)和(10.24)则是场方程的结果．

例题 10.4 钢棒中纵弹性波的传播速度．

解 利用表 10-1 中给出的值和钢的密度值 $7.8\times10^3\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$，由方程(10.23)得出

$$v=\sqrt{\frac{Y}{\rho}}=\sqrt{\frac{2.0\times10^{11}\ \mathrm{Pa}}{7.8\times10^3\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}}}=5.06\times10^3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

在0°C时，实验值为 $5.10\times10^3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$．而空气中的声速约为 $340\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$．

例题 10.5 沿一根棒传播的力场 $F(x,t)$的波方程．

解 从方程(10.20)[它表示外力作为位移变化的函数]出发，可以求出F对时间的二阶导数：

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}=YA\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{\partial \xi}{\partial x}\right]=YA\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\right].$$

由方程(10.21)我们求出加速度$\partial^2\xi/\partial t^2=(1/\rho A)\partial F/\partial x$；把此式代入上面方程的右边，则得

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}=YA\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\rho A}\frac{\partial F}{\partial x}\right]=\frac{Y}{\rho}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.$$

这个表达式就是方程(10.24)；这样就证明力场和位移场都沿棒以相速度$\sqrt{Y/\rho}$传播．

例题 10.6 弹簧中的纵波．

解 假定在一紧张的弹簧中产生一扰动，而且 ξ 是这弹簧的一个截面所经受的位移，则作用在该截面上的力为 $F=K(\partial\xi/\partial x)$，式中 K 是这弹簧的弹性模量. 这个方程相当于一根棒的方程(10.20). 注意，不要把系数 K 与弹簧的弹性常数 k 混淆起来. 在求 K 与 k 的关系时，我们注意到，如果长度为 L 的弹簧缓慢地被拉伸，直到它的长度增加 l，则在处于平衡态的弹簧的一切点上，F 必然相同. 因此，$\partial\xi/\partial x=l/L$，$F=(K/L)l$. 因而 $k=K/L$ 或 $K=kL$. 现在考虑这弹簧的长为 dx 的一段. 设 σ 是这弹簧每单位长度的质量，则 σdx 是这段弹簧的质量. 根据求方程(10.21)时所用的推理，得出

$$\sigma\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=\frac{\partial F}{\partial x}=K\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\quad\text{或}\quad\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=\frac{K}{\sigma}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2},$$

上式具有波方程(10.15)的形式. 因此，纵波沿弹簧的传播速度为

$$v=\sqrt{K/\sigma}=\sqrt{kL/\sigma}\,.$$

这个结果表示，扰动在一弹簧中的传播速度，与弹簧每单位长度的质量 σ 有关系.

10.6 气柱中的压力波

气体中的弹性波起因于这气体中的压强变化. 声就是这种波的最重要的例子. 气体中的弹性波与固体中的弹性波有一个重要的区别：气体有很大的可压缩性；当在一气体中产生压强起伏时，气体的密度将经受与压强一样的起伏.

考虑在一圆筒形管子中的气体内传播的波. 设 p_0 和 ρ_0 为这气体中的平衡压强和密度. 在平衡条件下，在气体的整个体积中，p_0 和 ρ_0 是相同的；也就是说，它们都与 x 无关. 如果这气体的压强受到扰动，则一体积元，例如 Adx(图 10-13)，开始运动，因为这

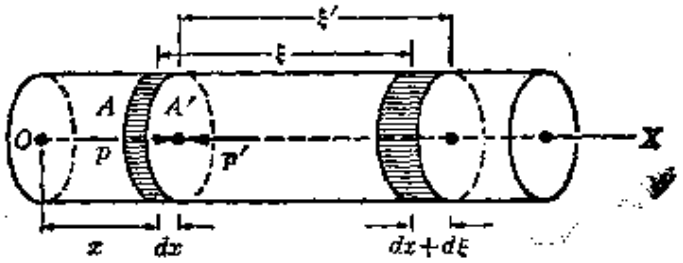


图 10-13 气柱中的压缩波.

体积元两侧的压强 p 和 p' 不同，因而产生一个净力. 结果是，截面 A 被移动一个量 ξ；截面 A' 被移动一个量 ξ'；因此，形变后这体积元的厚度为 $dx+(\xi'-\xi)=dx+d\xi$. 到此为止，一切似乎和固体棒的情况完全一样. 然而，由于体积的变化，现在还有一密度变化（由于气体具有较大的可压缩性）. 未受扰动的体积元中的质量为 $\rho_0 A dx$. 如果 ρ 是已受扰动的气体的密度，则已受扰动的体积元中的质量为 $\rho A(dx+d\xi)$. 物质守恒要求这两个质量相等；亦即

$$\rho A(dx+d\xi)=\rho_0 A dx \quad 或 \quad \rho\left(1+\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)=\rho_0,$$

因此有

$$\rho=\frac{\rho_0}{1+\partial\xi/\partial x}.$$

由于在一般情况下 $\partial\xi/\partial x$ 很小，所以 $(1+\partial\xi/\partial x)^{-1}$ 可用 $1-\partial\xi/\partial x$ 代替［利用附录中的二项展开式 (M. 28)］. 于是得到 $\rho=\rho_0(1-\partial\xi/\partial x)$，或者

$$\rho-\rho_0=-\rho_0\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right). \tag{10.25}$$

压强 p 与密度 ρ 之间的关系由物态方程 $p=f(\rho)$ 表示. 利用泰勒展开式(M. 31)，可把这个函数写作

$$p=p_0+(\rho-\rho_0)\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_{\rho=\rho_0}+\frac{1}{2}(\rho-\rho_0)^2\left(\frac{d^2p}{d\rho^2}\right)_{\rho=\rho_0}+\cdots$$

对于小的密度变化，我们只需保留前两项而得到

$$p=p_0+(\rho-\rho_0)\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_{\rho=\rho_0}. \tag{10.26}$$

体积弹性模量由下式定义：

$$\kappa=\rho_0\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_{\rho=\rho_0}. \tag{10.27}$$

$\kappa\nu$ 的单位为 Pa，与压强的单位相同. 方程(10.26)还可以写作

$$p = p_0 + \kappa\left(\frac{\rho-\rho_0}{\rho_0}\right). \tag{10.28}$$

这个表达式对应于流体的胡克定律. 利用(10.25)消去$(\rho-\rho_0)/\rho_0$, 则得

$$p = p_0 - \kappa\frac{\partial\xi}{\partial x}. \tag{10.29}$$

上式表示气体中任一点的压强与该点的形变之间的关系. [这个表达式相当于弹性棒的方程(10.20).]

其次, 我们必须确定这体积元的运动方程. 这体积元的质量为$\rho_0 A dx$, 它的加速度为$\partial^2\xi/\partial t^2$. 这体积元左方的气体以力$PA$朝右推, 右边的气体以力$p'A$朝左推. 因此, 沿$+X$方向的合力为$(p-p')A = -Adp$, 因为$dp = p'-p$. 于是运动方程为

$$-Adp = (\rho_0 A dx)\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$$

或

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_0\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}. \tag{10.30}$$

我们又有两个场: 位移场ξ和压强场p. 表达式(10.29)和(10.30)是把这两个场联系起来的方程. 现在把这两个表达式结合起来, 取方程(10.29)对x的导数, 并且记住在整个气体中p_0是恒定的, 则得

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\kappa\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}.$$

将此方程与方程(10.30)比较, 则得

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \frac{\kappa}{\rho_0}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}. \tag{10.31}$$

得到的位移波方程又一次和方程(10.15)相似. 我们得出结论: 气体中的压强扰动所引起的位移以速度

$$v=\sqrt{\frac{\kappa}{\rho_0}} \tag{10.32}$$

传播．压强也遵从象方程(10.31)那样的波方程，就象在例题10.5中求力场的波方程那样，学生可以利用方程(10.29)和方程(10.30)来证明这一点．因此，压强波方程可以写作

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=\frac{\kappa}{\rho_0}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}. \tag{10.33}$$

这个方程说明，为什么往往称气体中的弹性波为压强波．声音就是空气中的压强波．爆炸是局部压强的突然增加，它产生一冲击压强波；但在这种情况下，密度的起伏通常是很大，以致上述理论推导中所作的近似不再成立；因而得出一个更复杂的方程，以致波不是无畸变地传播．

类似地，把方程(10.25)与方程(10.31)结合起来，可以证明气体密度遵从同样形式的波方程，即

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}=\frac{\kappa}{\rho_0}\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}.$$

因此，对于气体，我们可以论及位移波、压强波和密度波．位移波类似于液体表面上波的图象(即宏观物质的运动)．压强波与密度波虽然不对应于这样一种物理图象，但它们也描述在气体中传播的物理扰动．

气体中的波动通常是一绝热过程，这表示气体的体积元不以热量的形式交换能量．在绝热条件下，$p=C\rho^{\gamma}$，式中γ是每一种气体所特有的一个量．对于大多数双原子气体，γ的值很接近于1.4．于是有$dp/d\rho=\gamma C\rho^{\gamma-1}$，$\kappa=\rho_0(dp/d\rho)_0=\gamma C\rho_0^{\gamma}=\gamma p_0$．然后省略下角标0，并代入方程(10.32)中，就可以把气体中的声速写作

$$v=\sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}. \tag{10.34}$$

与 ξ 场联系着的波也是纵波，因为位移平行于传播方向. 由于压强 p 不是矢量，所以没有方向与压强波相联系. 因此，与压强场对应的波动是标量波. 有关的方向是压强差所产生的力的方向，亦即垂直于圆筒形管子截面的方向. (与密度 ρ 对应的波也是标量波.)

在本章中迄今所讨论的一切波，都属于弹性波的范畴. 在这种波中，扰动(不论它是应变、压强，还是一个涉及许多原子的宏观位移)的传播速度决定于媒质的弹性特性.

弹性波也叫声波. 每当一弹性波通过气体、液体或固体传播而到达耳朵时，它就在耳膜中引起振动，从而产生称为声的感觉. 人的神经系统的响应构成叫做听觉的过程. 人的神经系统能对大约 16 Hz 和 20000 Hz 之间的声频响应. 在这个范围之外，人听不见声音；但是弹性波仍然称为声. (对于其他动物，这个频率范围是不同的.) 频率高于 20000 Hz 的弹性波叫作超声波. 频率低于 16 Hz 的弹性波叫作次声波.

声波通过介质传播时，使介质的原子和分子发生位移，但这种位移是一种有序的集体运动，在这种运动中，一个小体积内的所有原子基本上经受相同的位移. 在这种情况下，这种有序运动叠加在液体和气体的无规(或无序)的分子骚动上. 净结果是，当声波传播时，声的强度减小即衰减；这是因为，碰撞后波能量的一部分被介质分子带走. 这种衰减导致分子的内能增加(主要是转动的分子运动)或者平移动能增加. 液体中的粘滞性实质上是分子运动的效应，它在声衰减中也起着重要作用.

声的传播速度，在很大的频率范围(高达 10^8 Hz 以上)内几乎与频率无关. 表 10-2 中列出不同材料的声速. 但是，由于速度与密度有关系，所以传播速度对于温度和压强的变化很敏感. 以下几章中将要讨论的许多波动现象适用于声波.

表 10-2 声速 $m \cdot s^{-1}$

固体(20°C)		液体(25°C)		气体(0°C)	
花岗岩	6000	新鲜水	1493.2	空气	331.45
铁	5130	海水	1532.8	氢	1269.5
铜	3750	(含盐量3.6%)		氧	317.2
铝	5100	煤油	1315	氮	333.3
铅	1230	汞	1450	水蒸气	404.8

例题 10.7 一气体中的压强波的速度与气体温度之间的关系.

解 气体的压强和体积之间的关系为 $pV=NRT$, 式中 N 是这气体的摩尔数. 由于 $\rho=m/V$, 我们可以写出 $p/\rho=NRT/m=RT/M$, 式中 $M=m/N$ 是这气体 1 摩尔的质量(单位为 kg). 可见, p/ρ 与温度成正比; 由方程 (10.34) 得

$$v=\sqrt{\gamma p/\rho}=\sqrt{\gamma RT/M}=\alpha\sqrt{T}, \tag{10.35}$$

式中 $\alpha=\sqrt{\gamma R/M}$. 根据实验测定的结果, 当 $T=273.15K$ (即 0°C) 时, 空气中的声速为 331.45 $m \cdot s^{-1}$; 因此, 系数 $\alpha=20.055$. 所以在任何温度 T (以 K 为单位) 空气中的声速为 $v=20.055\sqrt{T}$ $m \cdot s^{-1}$. 这个结果在相当大的温度范围内与实验符合.

例题 10.8 气柱中位移波和压强波的振幅之间的关系.

解 设位移波是由 $\xi=\xi_0\sin(kx-\omega t)$ 表示的谐波. 把此式代入方程 (10.29) 中, 得到

$$p-p_0=-\kappa\frac{\partial\xi}{\partial x}=-\kappa k\xi_0\cos(kx-\omega t).$$

由此可见, 压强波在其平均值附近振荡, 振幅为 $\varpi_0=\kappa k\xi_0$; 或者利用方程 (10.32) 来消去 κ, 则得

$$\varpi_0=v^2\rho_0 k\xi_0.$$

利用方程 (10.6) 中给出的关系式, 即 $k=\omega/v$, 可得出 ϖ_0 的另一个表达式:

$$\varpi_0=v\rho_0\omega\xi_0=2\pi v\rho_0\nu\xi_0.$$

在声学计算中, 这些关系式非常有用. 例如, 在频率为 400 Hz 时, 能够听见的最弱的声音所对应的压强振幅约为 8×10^{-5}Pa. 在空气密度为 1.29kg $\cdot m^{-3}$ 和声速为 345 $m \cdot s^{-1}$ 的情况下, 对应的位移振幅为

$$\xi_0=\frac{\varpi_0}{2\pi v\rho_0\nu}=7.15\times10^{-11}\ m.$$

10.7 弦中的横波

其次，我们考虑在张力 T 作用下弦中的波．在平衡条件下，弦是直的．现在假定这弦沿侧向（即垂直于弦的长度）有一位移，这位移比弦长小很多，如图 10-14 所示．考虑长度为 dx 的一段弦 AB．这段弦离开平衡位置的位移为 ξ．在 AB 的每一段作用着一个切向力 T：B 端的力 T 是在右边拉弦而产生的，A 端的力 T 是在左边拉弦而产生的．由于弦有一曲率，这两个力的方向不是正相反的．每个力的竖向分量（即 Y 分量）为 $T_y'=T\sin\alpha'$ 和 $T_y=-T\sin\alpha$．作用在弦的 AB 段上的竖向合力为

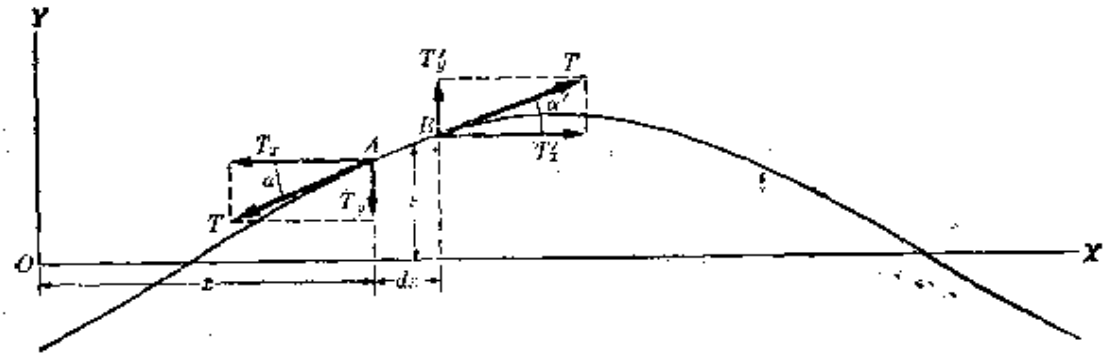


图 10-14　作用在一段有横向位移的弦上的力．

$$F_y=T(\sin\alpha'-\sin\alpha).$$

如果这弦的曲率不很大，则角 α 和 α' 很小，因而可以用正切代替正弦．因此，竖向（即横向）合力可写作

$$F_y=T(\tan\alpha'-\tan\alpha).$$

上式也可以写作

$$F_y=Td(\tan\alpha)=T\frac{\partial}{\partial x}(\tan x)dx,$$

式中取偏导数，因为 $\tan\alpha$ 不仅与位置 x，而且与时间 t 有关系．然而，$\tan\alpha$ 是弦的斜率；根据定义，这斜率等于 $\partial\xi/\partial x$．于是

$$F_y=T\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)dx=T\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}dx.$$

这个力必然等于 AB 的质量乘以它的向上的加速度 $\partial^2\xi/\partial^2 t^2$. 设 σ 是弦的线密度，即单位长度的质量，其单位为 $\mathrm{kg\cdot m^{-1}}$，则 AB 段的质量为 σdx；根据关系式力＝质量×加速度，这段弦的运动方程可以写作

$$(\sigma dx)\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=T\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}dx,$$

或

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=\frac{T}{\sigma}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}. \tag{10.36}$$

我们又得到方程(10.15)，这表明，如果振幅很小，则弦中的横向扰动沿弦以速度

$$v=\sqrt{\frac{T}{\sigma}} \tag{10.37}$$

传播. 学生应检查这个方程中单位的一致性.

这个例子在两个重要方面不同于前面的例子. 一个不同点是，只有一个场，即位移 ξ；波方程(10.36)是运动方程的直接结果. 另一个，也是更重要的一个不同点是，这种波动是横向的，即位移 ξ 垂直于传播方向(沿 X 轴). 但是，有很多位移方向垂直于 X 轴. 如果选取两个互相垂直的方向 Y 和 Z 作为参考轴，则横向位移 ξ（必须把它看作矢量）可以用它沿 X 轴和 Y 轴的分量来表示. 当扰动传播时，ξ 的方向可能逐点改变，因而弦发生扭转（图 10-15）. 然而，如果所有的位移都沿同一个方向，例如都沿 Y 轴，则这弦始终在 XY 平面内，因而这种波动是线偏振的（图 10-16）. 横波总是可以看作沿垂直方向线偏振的两个波的组合. 如果 ξ 的量值恒定，但其方向如此改变，以致这弦处在一个圆柱面上(图 10-17)，这种波就是圆偏振的. 在这种情况下，弦的每一部分绕 X 轴在一圆上运动. 横波的偏振是一个很重要的课题，将在第十四章作更详细的讨论.

注意，方程(10.36)只考虑了弦的横向运动，因为沿弦的方向实质上没有运动. 为了说明这一点，我们考虑平行于 X 轴的合力：

$$F_x=T\cos\alpha'-T\cos\alpha=T(\cos\alpha'-\cos\alpha).$$

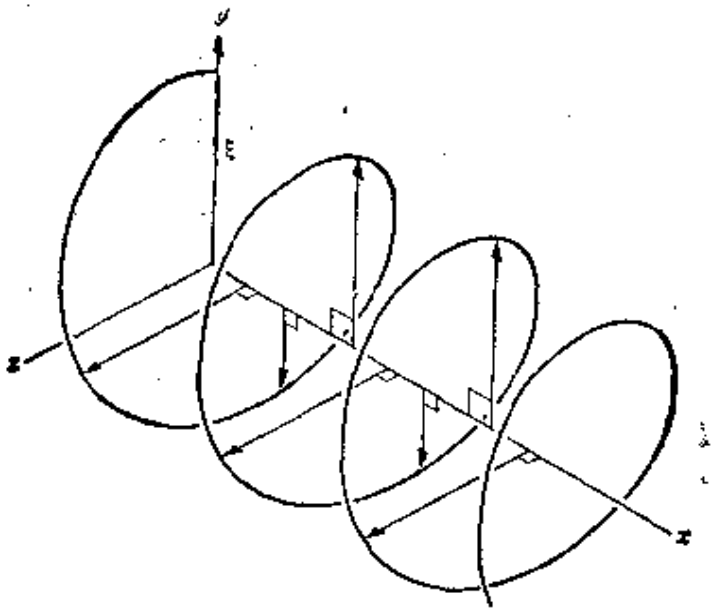


图 10-15　弦中的非偏振横波.

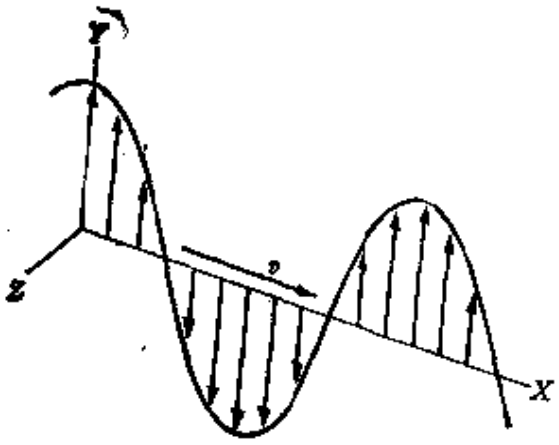


图 10-16　弦中的线偏振横波.

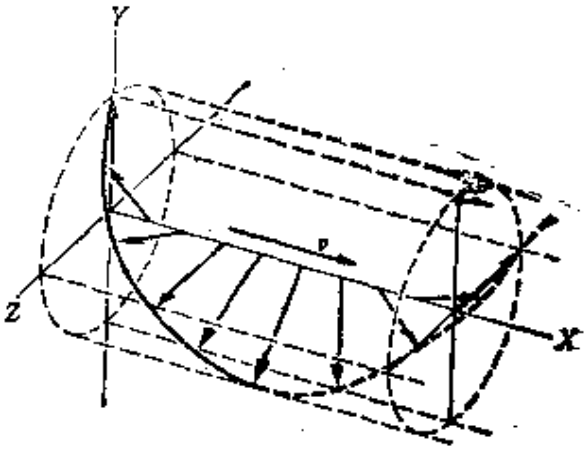


图 10-17　弦中的圆偏振横波.

如果角很小，则余弦实质上等于 1，因此，至一级近似，$\cos\alpha' \approx \cos\alpha, F_x=0$，所以没有平行于 X 轴的净力，因而在 X 方向上弦没有合运动.

例题 10.9　棒中的横弹性波，切变波.

解　在第 10.5 节中讨论了固体棒中的纵弹性波. 现在我们来分析横弹性波. 考虑一根棒，它的无畸变状态如图 10-18 中的水平虚线所示. 如果我们沿横向击棒，使其振动，则在一特定时刻，这棒取实线所示的形状. 我们可

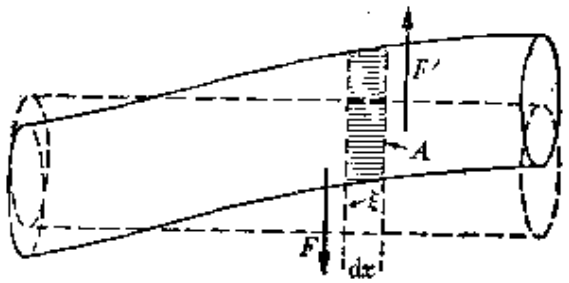


图 10-18　一夹紧棒中的横向(或切变)波.

以认为这棒的每一段都上下运动，而无水平运动. 设 ξ 为棒的一段 dx 在一特定时刻的横向位移. 这个位移也必定是位置的函数，这是因为，如果它不是位置的函数，这将对应于棒的平行位移. $\gamma=\partial\xi/\partial x$ 被定义为切应变，它表示沿棒的方向每单位长度上横向位移的变化.

由于形变，厚度为 dx 的每一段棒都受相反的力 F 和 F' 作用. 这些力与表面相切(试与图 10-11 中的情况比较)，它们是由这段棒两侧棒的其余部分所产生的. 单位面积上的切向力 $\mathscr{S}=F/A$ 被定义为切应力.

类似于胡克定律即方程(10.19)表示正应力与正应变之间的关系，在切应力与切应变之间有如下关系:

$$\mathscr{S}=G\gamma, \tag{10.38}$$

式中 G 是表征该材料的一个系数，叫作切变模量. 因此，利用 $\mathscr{S}$ 和 γ 的表达式，得到

$$F=AG\frac{\partial\xi}{\partial x}. \tag{10.39}$$

作用在图 10-18 所示一段棒上的合力为 $F'-F=dF=(\partial F/\partial x)dx$. 如果 ρ 是这种材料的密度，则这段棒的质量为 $\rho A dx$. 因此，在横向它的运动方程为

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx=(\rho A dx)\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$$

或

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\rho A\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}. \tag{10.40}$$

然而，取方程(10.39)对 x 的导数，则得

$$\frac{\partial F}{\partial x}=AG\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2};$$

把上式代入方程(10.40)中，并消去公因子 A，则得

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}=\frac{G}{\rho}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \tag{10.41}$$

我们又得到波动的微分方程(10.15)，它表明横向形变沿棒以速度

$$v=\sqrt{\frac{G}{\rho}} \tag{10.42}$$

传播. 更恰当地说，这种波应该称为切变波.

例题 10.10 棒中的横弹性波. 扭波.

解 切变波的另一个例子是扭波. 假定有一根棒，其一端固定，将一可变转矩施于其自由端. 这个转矩使棒产生扭转（图 10-19）. 如果这个转矩随时间变化，则扭转角(叫做扭转)随时间改变，结果有一扭波沿着棒传播.

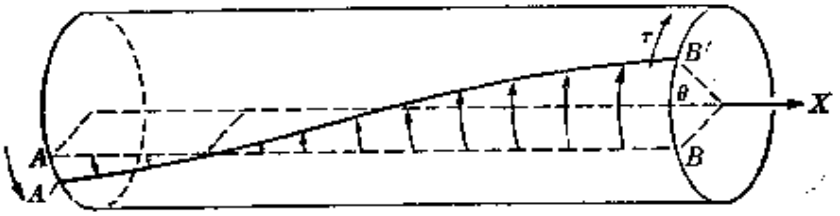


图 10-19 一夹紧棒中的扭波.

这个问题的数学分析表明，不论棒截面的形状如何，扭波的传播速度也由方程(10.42)表示. 棒中的切变波与扭波的传播速度相同，这是意料之中的，因为这两种过程实质上是棒材料中同一种内部现象所引起的. 扭波的另一个值得注意的方面是，它不对应于平行于或者垂直于棒轴的位移，而是对应于绕棒轴的转动，而不改变棒的形状. 我们举这些不同的例子来帮助学生理解各种弹性波现象；它们都有不同的内部动力学；但在这里所采用的近似之下，它们在数学上都由相同的方程[即方程(10.15)]来描述.

10.8 液体中的表面波

作为沿一个方向的波动的最后一个例子，我们考虑液体表面上的波. 这些波是人们最熟悉的. 它们是在海洋和湖泊上观察到的波，或者一石块掉入水池时观察到的波. 但是，数学方面比前面几个例子更复杂，故从略. 在本节中我们对这种波进行描述性讨论，并把简化的数学讨论留给例题 10.11 和 10.12.

液体的未受扰表面是水平的平面. 表面的一个扰动使其正下

方的所有分子产生一位移(图 10-20). 这液体的每一个体积元沿一闭合路径运动. 液体的一个体积元的水平和竖直位移的振幅一

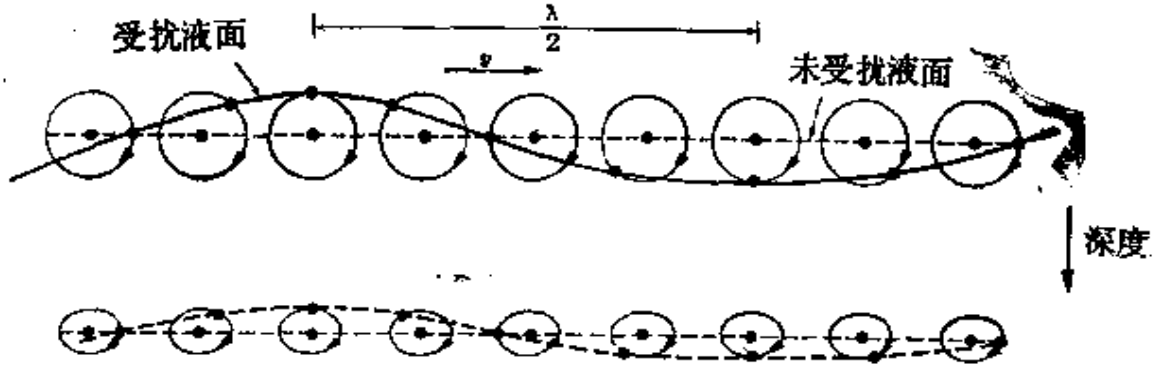


图 10-20 液体中的表面波引起的分子位移.

般随深度而改变. 当然,底部的分子几乎没有竖直位移,因为它们必定仍然靠近底部. 除大气压强所引起的力之外,在液体表面上还有某些力起作用. 一种力是液体的表面张力引起的,它对一个面元产生一向上的力,类似于弦的情况下出现的力. 另一个力是未受扰水平面上方液体的重量. 结果得到表面位移的方程,并非正好是(10.15)那种型式,而是稍复杂一些. 对于波长为 λ 的谐波,表面波的传播速度由下式给出:

$$v=\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}+\frac{2\pi\mathscr{T}}{\rho\lambda}}, \tag{10.43}$$

式中 ρ 是这种液体的密度,$\mathscr{T}$ 是表面张力,g 是重力加速度. 在方程(10.43)中,表面张力的单位为 $\mathrm{N\cdot m^{-1}}$. 只有当深度比波长 λ 大很多时,这个表达式才成立. 否则就会得出另一个表达式(见例题 10.11).

方程 (10.43) 的最值得注意的方面,是传播速度与波长有关系,这个情况是前面几个例子中所没有的. 由于频率、波长和传播速度之间存在着关系 $v=v/\lambda$,我们得出结论:传播速度是这种波的频率的函数.

如果 λ 足够大,因而方程 (10.43) 中第二项可以忽略不计,

则得

$$v=\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}. \tag{10.44}$$

这种情况下的波叫做重力波. 在这种近似下，传播速度与液体的性质无关，因为在方程(10.44)中不包含与液体有关系的因子(例如液体的密度或表面张力). 在这种情况下，传播速度与波长的平方根成正比；波长越长，传播越快. 因此，强的稳定风所引起的波的波长，大于迅疾的阵风所引起的波的波长.

当波长很小时，主要的项是方程(10.43)中的第二项，于是得出传播速度为

$$v=\sqrt{\frac{2\pi\mathscr{T}}{\rho\lambda}}. \tag{10.45}$$

这些波叫作涟波或表面张力波. 当很柔和的风在水面上吹过时，或者当一容器中的液体经受高频、小振幅的振动时，就会观察到这些波. 在这种情况下，波长越长，传播越慢.

当波动的传播速度与波长或频率有关系时，我们就说有色散. 如果由几个频率不同的谐波叠加所形成的波动，投射到一色散媒质上，这波就被畸变，因为它的每一个成分波以不同的速度传播. 色散是一种非常重要的现象，它存在于几种型式的波传播中. 特别是下一章将看到的在电磁波通过物质传播的情况下出现的色散.

例题 10.11　有限深液体中波的传播.

解　在一液体中表面波的传播速度的一般表达式为

$$v=\sqrt{\left(\frac{g\lambda}{2\pi}+\frac{2\pi\mathscr{T}}{\rho\lambda}\right)\tanh\frac{2\pi h}{\lambda}}, \tag{10.46}$$

式中 h 是这液体的深度. 当 h 比波长大很多时 (亦即 $2\pi h/\lambda$ 比 1 大很多时)，双曲正切的值非常接近于 1，因而方程(10.46)中最后一个因子可以用 1 来代替，而无大的误差. 在这种近似下，方程(10.46)变为方程(10.43).

另一方面，如果深度 h 比波长 λ 小很多，则量 $2\pi h/\lambda$ 比 1 小很多；又因

为当 x 很小时，$\tanh x \approx x$，所以方程(10.46)中最后一个因子可以用 $2\pi h/\lambda$ 代替．而且，当波长 λ 很大时，$2\pi\mathscr{S}/\rho\lambda$ 这一项可以忽略不计．于是得到

$$v=\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}\cdot\frac{2\pi h}{\lambda}}=\sqrt{gh}. \tag{10.47}$$

在这些情况下，传播速度与波长无关，仅仅是深度的函数．

例题 10.12 当波长比深度大很多，而振幅比深度小很多时，液体中的表面波．

解 考虑一深度为 h、宽度为 L 的沟道中的液体．如果用小振幅和大波长(与 h 相比较)的波使这液面受扰动，则宽度为 dx 的特定一段液体，在竖直方向和水平方向都经受一位移．由于这些位移，这一段的宽度由 dx 变为 $dx+d\xi$(图 10-21)；而它的高度由 h 变为 $h+\eta$．假定这液体是不可压缩的，则这段液体的体积必然保持不变．因此，

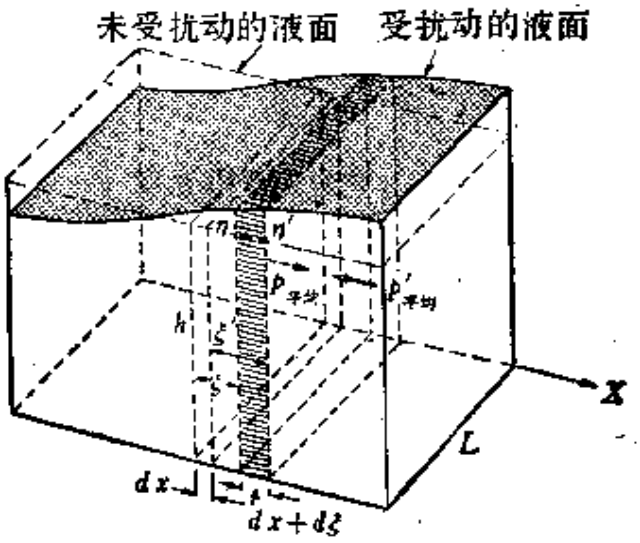


图 10-21

$$\begin{aligned} Lhdx&=L(h+\eta)\,(dx+d\xi)\\ &=L(hdx+\eta dx+hd\xi+\eta d\xi). \end{aligned}$$

因为 η 比 h 小很多，$d\xi$ 比 dx 小很多，所以最后一项 $\eta d\xi$ 可以略去．于是上式变为

$$\eta dx+hd\xi=0 \quad 即 \quad \eta=-h\frac{\partial\xi}{\partial x}. \tag{10.48}$$

方程(10.48)表示一不可压缩液体的竖直表面位移与水平位移之间的关系．

由于受扰液面不是水平的，所以这段液体两边的压强不同，如图中所示．

如果 $A=hL$ 是未受扰液体截面的面积，则向右作用在这段液体上的净力为

$$p_{平均}A-p'_{平均}A=-(p'_{平均}-p_{平均})A=-Adp_{平均}.$$

因此，这段液体的水平运动为

$$(\rho Adx)\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=-Adp_{平均} \quad 或 \quad \rho\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=-\frac{\partial p_{平均}}{\partial x}.$$

然而，由流体静压强的关系式 $p=\rho gz$ 可知，压强差为

$$dp_{平均}=\rho g(\eta'-\eta)=\rho g\frac{\partial\eta}{\partial x}dx,$$

所以 $\partial p_{平均}/\partial x=\rho g\partial\eta/\partial x$，因而前面的方程可以写作

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=-g\frac{\partial\eta}{\partial x}.$$

方程(10.48)对 x 微分，得出

$$\frac{\partial\eta}{\partial x}=-h\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}.$$

在这两个方程之间消去 $\partial\eta/\partial x$，最后得到

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=gh\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}.$$

这个表达式又是波动方程(10.15)，它对应于以速度 $v=\sqrt{gh}$ 传播的波. 这个结果与在同样条件下得到的方程(10.47)一致. 由于关系式(10.48)，表面处的竖直位移满足一个类似的方程，即

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}=gh\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}.$$

10.9 是什么在波动中传播？

是什么以波的形式在波动中传播？了解这一点是很重要的. 一般地讲，在波动中传播的是在某个地方产生的物理扰动；由于这种现象的性质，这种扰动可以传递到其他区域. 由于这种解释有些抽象，我们试图用比较具体的术语来表述它.

我们考虑前几节中讨论过的几种波. 所有这些波分别对应于该波传播时所通过媒质的原子或分子的某种运动；但是，平均而言，原子停留在它们的平衡位置上(图 10-22). 在此情况下，传播的不是物质，而是物质的运动状态. 是一种动力学情况从一个区

域传递到另一个区域. 我们习惯于用动量和能量来描述动力学情况. 因此,我们说:

在波动中被传递或被传播的是能量和动量.

例如,我们看一下沿着一根棒传播的纵弹性波的情况. 在以速度 $\partial\xi/\partial t$ 移动的某一截面处(图10-11),棒的右方以力 F 拉左方,左方以力 $-F$ 拉右方. 于是,在这个截面处,左方传给右方的功率(即每单位时间的功)为

$$\frac{\partial W}{\partial t}=(-F)\frac{\partial\xi}{\partial t}.$$

因此,当扰动从一个截面传到另一个截面时,这个功率必然被传递过去. 如果这个波从左朝右传播,就必须在棒的左端馈入能量. 如果这能量是在短时间内馈入的,就产生一个有限长的扰动,也就是一个瞬时脉冲. 如果要得到一个连续的波列,就必须在左端连续地供给能量.

为了更详细地说明这个问题,我们考虑正弦弹性波 $\xi=\xi_0\sin(kx-\omega t)$ 的情况. 取此式对 t 和 x 的导数,则得

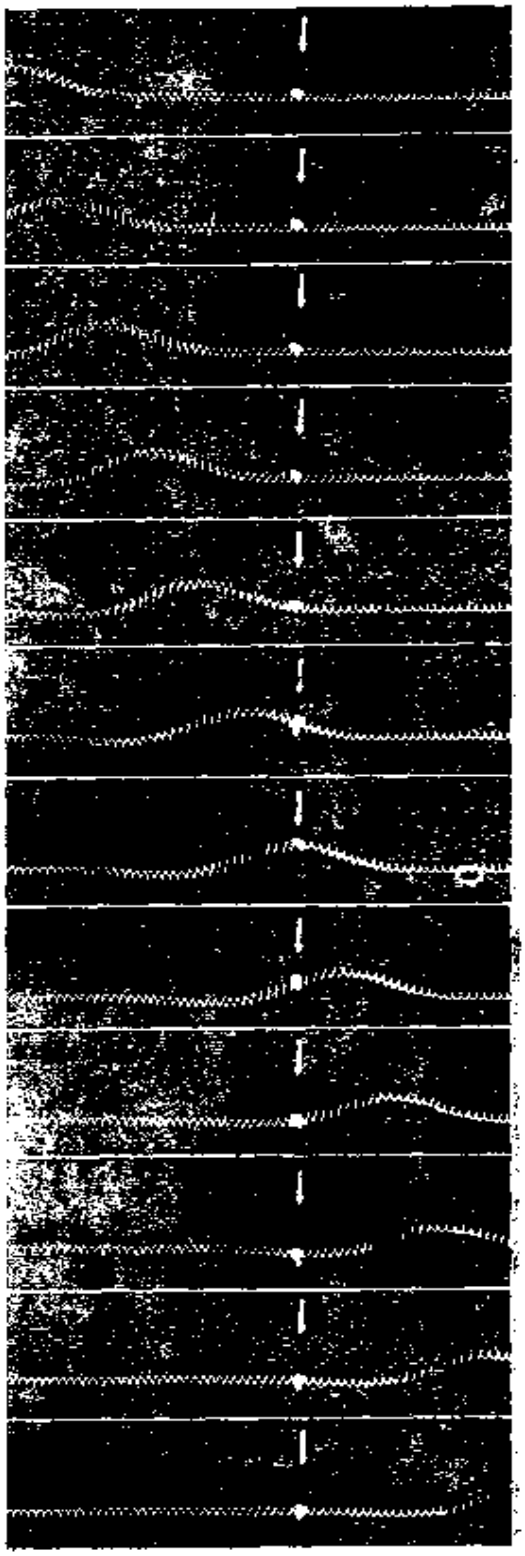


图 10-22 一个脉冲在一弹簧上传播. 当这脉冲从左朝右移动时,弹簧的各部分上下移动.

$$\frac{\partial \xi}{\partial t}=-\omega\xi_0\cos(kx-\omega t)$$

和

$$F=YA\frac{\partial \xi}{\partial x}=YAk\xi_0\cos(kx-\omega t),$$

式中 A 是棒的横截面积. 于是,利用关系式 $\omega=kv$ 和 $v=\sqrt{Y/\rho}$, 则功率为

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial t}&=-F\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)=YA\omega k\xi_0^2\cos^2(kx-\omega t)\\&=(\rho v^2)A(\omega^2/v)\xi_0^2\cos^2(kx-\omega t)\\&=vA[\rho\omega^2\xi_0^2\cos^2(kx-\omega t)].\end{aligned}$$

因子 $\cos^2(kx-\omega t)$ 的存在保证 $\partial W/\partial t$ 永远是正的, 虽然它是起伏的. 由于 $\partial W/\partial t$ 是 $(kx-\omega t)$ 的函数, 所以它也满足波动方程, 并且对应于一个能量波. 平均功率为

$$\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)_{平均}=vA\left\{\rho\omega^2\xi_0^2[\cos^2(kx-\omega t)]_{平均}\right\}.$$

然而, $[\cos^2(kx-\omega t)]_{平均}=\frac{1}{2}$, 所以

$$\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)_{平均}=vA\left(\frac{1}{2}\rho\omega^2\xi_0^2\right). \tag{10.49}$$

由第一卷的方程(12.11)可知,一个振子的总能量为 $\frac{1}{2}m\omega^2\xi_0^2$; 用密度 ρ 代替质量 m, 则可看出

$$\mathrm{E}=\frac{1}{2}\rho\omega^2\xi_0^2 \tag{10.50}$$

是每单位体积的能量, 即波动所引起的振动在棒中产生的能量密度. 把方程(10.50)代入方程(10.49)中, 得出

$$\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)_{平均}=vA\mathrm{E}. \tag{10.51}$$

由于 v 是传播速度, 所以 $v\mathrm{E}$ 是每单位时间通过单位面积的能流.

这个量乘以面积 A，就得出每单位时间通过一棒截面的能流．因此，方程（10.51）可以解释为表示波动所引起的沿棒方向的平均能流．

用 $\mathrm{W\cdot m^{-2}}$ 为单位时，每单位面积和单位时间的平均能流为

$$I=\frac{1}{A}\frac{\partial W}{\partial t}=v\mathrm{E}. \tag{10.52}$$

这个量叫作这个波的强度．由能量密度的方程(10.50)可知，强度不仅正比于振动频率的平方，而且正比于振幅的平方．（学生可以证明，类似的结果适用于气体中的压强波和弦中的横波．）

总之，我们可以说，在一切波动中，能量和动量沿着波从一个地方被传递到另一个地方．

例题 10.13 用压强波的振幅表示一气柱中波的强度．

解 由第 10.6 节末的例题 10.6 可知，压强波和位移波的振幅之间的关系为 $\varpi_0=2\pi v\rho_0\nu\xi_0$．因此，这种波的能量密度为

$$\mathrm{E}=\frac{1}{2}\rho_0\omega^2\xi_0^2=2\pi^2\rho_0\nu^2\xi_0^2=\frac{\varpi_0^2}{2v^2\rho_0};$$

根据方程(10.52)，这个波的强度为

$$I=v\mathrm{E}=\frac{\varpi_0^2}{2v\rho_0}.$$

人耳的灵敏度对于每一个频率都存在一个最小强度，即有一个听觉阈，低于它时，声音就听不见了；还存在一个最大强度，即痛阈，高于它时，声音就引起不适或痛苦．这种情况如图 10-23 中的两条曲线所示；图中也示出强度和压强的振幅．注意，也用另一个叫做分贝的单位来表示强度．声（或者任何波动）的强度级用 B 表示，其单位为分贝(db)，分贝的定义式为

$$B=10\log\frac{I}{I_0}, \tag{10.53}$$

式中 I_0 为参考强度．对于空气中的声，参考级被任意地选为 $10^{-12}\mathrm{W\cdot m^{-2}}$．例如，与例题 10.8 中给出的，在 400Hz 能听见的最弱声音的压强振幅对应的强度为 $7.2\times10^{-12}\ \mathrm{W\cdot m^{-2}}$，强度级为 8.57 db．

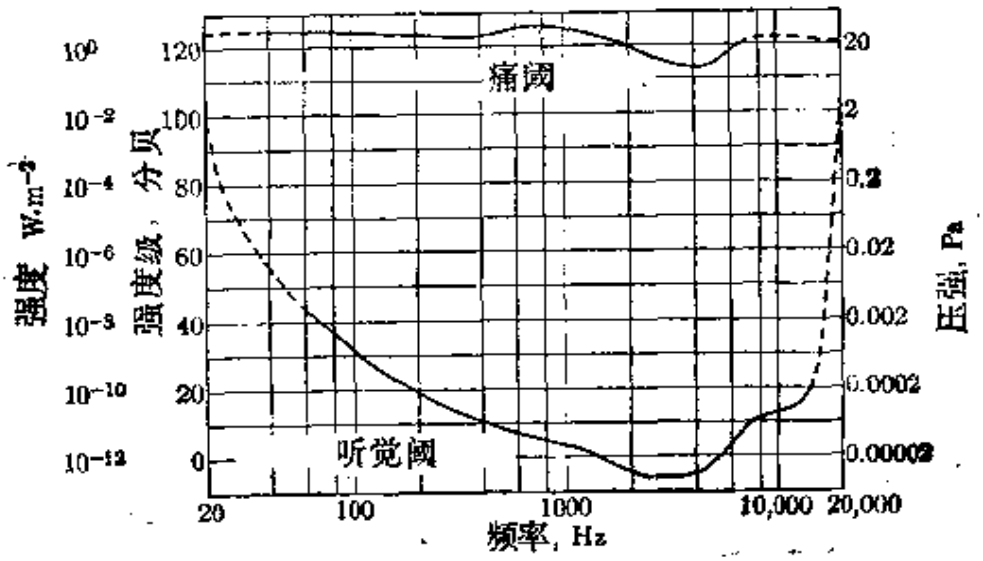


图 10-23　人耳的平均听觉范围.

10.10 群　速　度

方程(10.6)给出的角频率为 ω、波长为 $\lambda=2\pi/k$ 的谐波的速度 $v=\omega/k$，叫作相速度. 但是，这个速度不一定是波动行进的速度. 对于一个连续谐波(也叫作无限长波列)，这波只有一个波长和一个频率. 具有这种性质的波，不适于传递信号，因为信号表示从某一时刻开始到以后某一时刻终止的某种事物；也就是说，波必须具有类似图 10-24 所示那种形状. 具有这种形状的波，叫作脉冲或波包. 测量这个信号在两点之间行进的时间，就意味着测量这个脉冲行进的速度.

作为第一个考虑，我们可以说，这个速度就是相速度 $v=\omega/k$，因为在以前各节中我们一直说这是波的传播速度. 然而，这里有一个重要因素. 图 10-24 中描绘的波或脉冲不是谐波，因为它的振幅沿 X 轴不是恒定的. 因此，我们必须作这个波的傅里叶分析. 当我们这样作时，可以看出这脉冲实际上包含若干个频率和波长. 当然，如果传播速度与频率无关(也就是说，如果没有色散)，则这

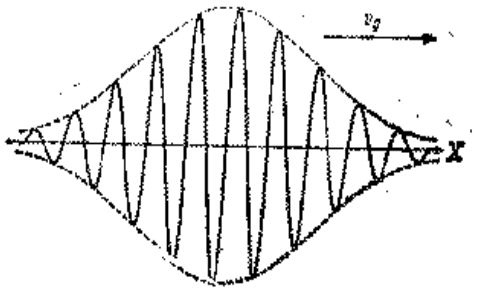


图 10-24　波脉冲或波包.

个波的所有傅里叶成分都以相同的速率传播，因此，说这个脉冲的速度与相速度相同，是正确的. 但在色散媒质中，每一个傅里叶成分有它自己的传播速度，因此，这种情况需要更仔细的分析.

为简单起见，我们假定这个波动可以分解为两个频率 ω 和 ω'. 而且这两个频率几乎相等，即 $(\omega'-\omega)$ 很小. 还假定它们的振幅相同. 于是这两个波的线性叠加给出

$$\begin{aligned}\xi &= \xi_0 \sin(kx-\omega t)+\xi_0 \sin(k'x-\omega' t)\\ &= \xi_0[\sin(kx-\omega t)+\sin(k'x-\omega' t)]\\ &= 2\xi_0 \cos\frac{1}{2}[(k'-k)x-(\omega'-\omega)t]\\ &\quad \sin\frac{1}{2}[(k'+k)x-(\omega'+\omega)t].\end{aligned}$$

由于 ω 和 ω'，以及 k 和 k'，几乎相等，所以 $\frac{1}{2}(\omega'+\omega)$ 可以用 ω 代替，$\frac{1}{2}(k'+k)$ 可以用 k 代替，因而有

$$\xi = 2\xi_0 \cos\frac{1}{2}[(k'-k)x-(\omega'-\omega)t]\sin(kx-\omega t). \quad (10.54)$$

方程 (10.54) 表示一个其振幅受调制的波动. 这个调制由下列因子表示：

$$2\xi_0 \cos\frac{1}{2}[(k'-k)x-(\omega'-\omega)t].$$

图 10-25 中示出这个调制. 调制振幅本身相当于一个传播速度为

$$v_g=\frac{\omega'-\omega}{k'-k}=\frac{d\omega}{dk} \tag{10.55}$$

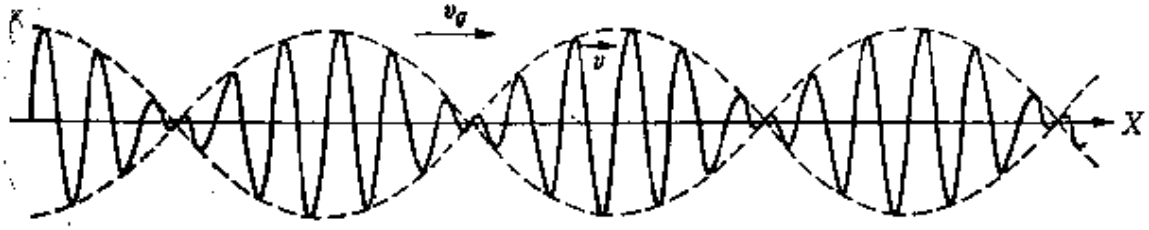


图 10-25 相速度和群速度.

的波动. v_g 叫作群速度. 这个速度就是图 10-25 中的虚线所表示的振幅波的传播速度. 还可以得出结论: 图 10-25 中脉冲的最大值以群速度 v_g 传播. 因此, 在一色散媒质中, 信号速度是群速度. 由于 $\omega=kv$, 所以方程(10.55)变为

$$v_g=v+k\frac{dv}{dk}. \tag{10.56}$$

如果相速度与波长无关, 则 $dv/dk=0$, 因而 $v_g=v$. 因此, 在非色散媒质中, 相速度和群速度之间没有差别, 正如前面所指出的; 但在色散媒质中, 群速度可以大于或者小于相速度.

虽然方程(10.56)是对于只有两个频率的情况导出的, 但它对于频率在$(\omega-\Delta\omega)$至$(\omega+\Delta\omega)$这个范围内的脉冲, 也是适用的. 然而, 这个问题实际上比这里讲的更复杂, 详尽的讨论将超出本书的范围.

例题 10.14 表面波的群速度.

解 在长波近似下考虑液体中表面波的情况. 在此情况下, 相速度由方程(10.44)给出; 由于 $k=2\pi/\lambda$, 所以 $v=\sqrt{g\lambda/2\pi}=\sqrt{g/k}$. 于是得出

$$\frac{dv}{dk}=-\frac{1}{2k}\sqrt{\frac{g}{k}}=-\frac{v}{2k};$$

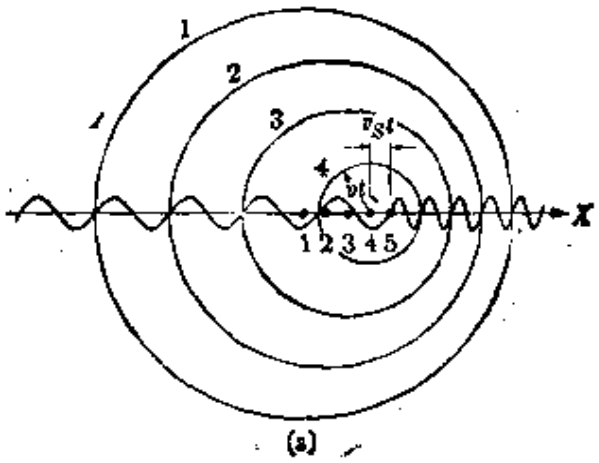
将此结果代入方程(10.56)中, 得出 $v_g=\frac{1}{2}v$, 即群速度恰好是相速度的一半. 因此, 如果在水中产生一个长波扰动, 则初始扰动将被畸变, 以致波长较长的

分量由于移动速度大于群速度（即这扰动的峰值的速度）而从这个扰动中“逃逸”.

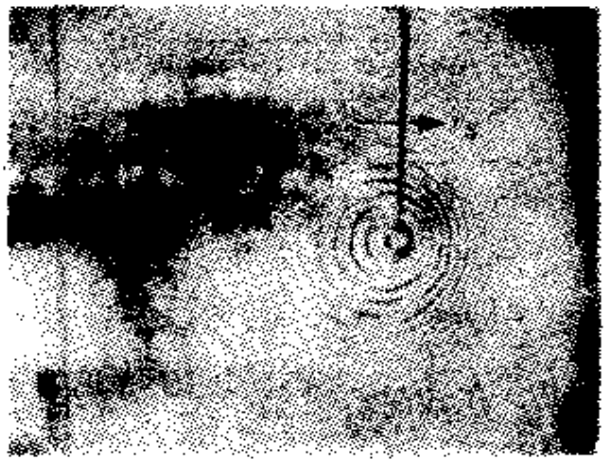
10.11 多普勒效应

当一个观察者和一个波源相对于波在其中传播的物质媒质作相对运动时，观察到的波频率不同于波源的频率. 这种现象叫作多普勒效应. 这是为了纪念德国出生的奥地利物理学家多普勒(J. C. Doppler, 1803—1853)，他首先在声波中观察到这种效应.

假定一个波源，例如一个振动着的物体，通过一静止的媒质，例如空气或水，以速度 v_S 沿正 X 方向运动（图 10-26）. 观察在几



(a)



(b)

图 10-26 一个运动波源产生的多普勒效应.
照片示出液体表面上的多普勒效应.

个位置 1，2，3，4，…上发射的波时，我们注意到，从波源在位置 1 时算起经过时间 t 后，在这些位置上发射的波占有非同心的球面 1，2，3，4，…. 在这物体向其中移动的那一方，这些波的间距较窄，而在相反的那一方，则间距较宽. 对于在任何一方的静止的观察者，这个间距分别对应于较短的和较长的有效波长，亦即对应于较大的和较小的有效频率. 然而，如果观察者同时以速度 v_0 运动，他就会观察到这些波以不同的速率到达. 例如，如果这观察者从波源右方趋近波源，则会观察到更短的波长或更高的频率，因为观察者朝这些波移动. 如果观察者离波源后退，因而离开波而去，就出现相反的情况.

我们利用下述推理来求出波源所产生的波的频率 ν 与观察者所记录的频率 ν' 之间的关系. 为简单起见，我们假定源和观察者在同一条直线上运动. 假定在 $t=0$，当源和观察者之间的距离 $AB=l$ 时(图 10-27)，源发射一个波，它在后一时刻 t 到达观察者. 在这个时间内，观察者移动一个距离 v_0t，因而这个波在时间 t 内走过的总距离为 $l+v_0t$. 如果 v 是波的传播速度，则这距离也等于 vt. 于是有

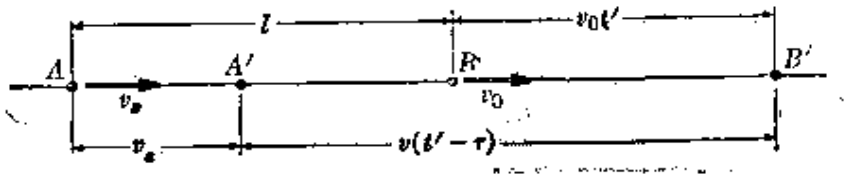


图 10-27

$$vt=l+v_0t \quad 或 \quad t=\frac{l}{v-v_0}.$$

在 $t=\tau$ 时，源在 A'. 在该时刻发射的波，将在时刻 t'(时间原点与前面相同)在点 B' 到达观察者. 从这个波在 A' 处发射的时刻，直到它被观察者接收为止，这个波所走过的总距离为 $(l-v_s\tau)+v_0t'$. 这个波的实际传播时间为 $(t'-\tau)$，传播的距离为 $v(t'$

$-\tau)$. 因此，

$$v(t'-\tau)=l-v_S\tau+v_Ot' \quad 或 \quad t'=\frac{l+(v-v_S)\tau}{v-v_O}.$$

观察者算出源在 A 和 A' 发射的两个波之间的时间间隔为

$$\tau'=t'-t=\frac{(v-v_S)\tau}{v-v_O}.$$

如果 ν 是源的频率，则在时间 τ 内，源发射的波的数目为 $\nu\tau$. 由于观察者在时间 τ' 内接收的波的数目，必须等于源所发射的波的数目，所以观察到的频率为 $\nu'=\nu\tau/\tau'$，或者

$$\nu'=\left(\frac{v-v_O}{v-v_S}\right)\nu. \tag{10.57}$$

当源和观察者沿同一条直线运动时，上式给出源的频率 ν 和观察者测得的频率 ν' 之间的关系.

当 v_O 和 v_S 都比 v 小很多时，方程(10.57)可以简化. 首先把方程(10.57)写作

$$\nu'=\left(\frac{1-v_O/v}{1-v_S/v}\right)\nu=\left(1-\frac{v_O}{v}\right)\left(1-\frac{v_S}{v}\right)^{-1}\nu.$$

利用二项展开式即方程($M.28$)，可以写出$(1-v_S/v)^{-1}\approx 1+v_S/v$，于是得出

$$\nu'=\left(1-\frac{v_O}{v}\right)\left(1+\frac{v_S}{v}\right)\nu=\left(1-\frac{v_O}{v}+\frac{v_S}{v}-\frac{v_Ov_S}{v^2}\right)\nu.$$

如果略去 v_Ov_S/v^2 这一项，则观察者测得的频率为

$$\nu'=\left(1-\frac{v_O-v_S}{v}\right)\nu=\left(1-\frac{v_{OS}}{v}\right)\nu, \tag{10.58}$$

式中 $v_{OS}=v_O-v_S$ 是观察者相对于源的速度. 由于 $\omega=2\pi\nu$，所以观察者测得的角频率可以写作

$$\omega'=\left(1-\frac{v_{OS}}{v}\right)\omega. \tag{10.59}$$

如果 v_{OS} 为正，则观察者离源后退，因而观察到的频率较小；如果

v_{OS} 为负，则源和观察者相互接近，因而观察到的频率较大.

如果 v_{OS} 不沿波传播的方向，而是与波传播方向成一个角 θ，则方程(10.59)必须用下式代替：

$$\omega' = \left(1 - \frac{v_{OS}\cos\theta}{v}\right)\omega, \tag{10.60}$$

因为 $v_{OS}\cos\theta$ 是观察者相对于源的速度在传播方向上的分量.

当源的移动速度大于声在媒质中的传播速度 v 时，就出现一特殊情况. 在此情况下，在一给定时间内，源比波阵面前进得更远；例如，如果在时间 t 内，源从 A 移动到 B (图 10-28)，则在 A 处发射的波只从 A 传播到 A' 和 A''. 与相继各个波相切的面，是一个圆锥面；这圆锥面的轴是源运动所沿的直线，其张角 α 由下式给出：

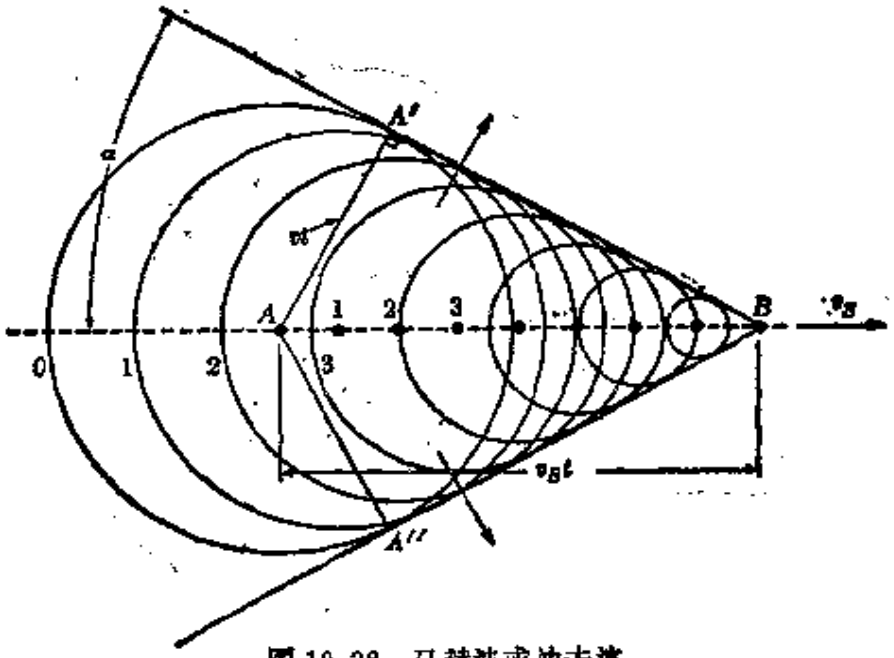


图 10-28 马赫波或冲击波.

$$\sin\alpha = \frac{v}{v_S}. \tag{10.61}$$

在这种情况下，合波动是一个锥形波，其传播方向如图 10-28 中的箭头所示. 这种波有时称为马赫波或冲击波. 当一超音速飞机在附近飞过时，我们听到的那种突然而强烈的声音，就是这种波. 当

船的速率超过水上表面波的速率时，在船的尾流中也观察到这种波(图 10-29).



(a) (b) (c)

图 10-29 马赫波(冲击波)的不同例子:(a) 接触水面运动着的振动弹簧片产生的,(b) 空气中的子弹产生的,(c) 快艇产生的.

10.12 二维和三维的波

虽然 $\xi=f(x-vt)$ 代表一个沿正 X 轴方向传播的波动，但是不一定要把这种波动理解为集中在 X 轴上. 如果 ξ 所描述的物理扰动延伸到整个空间,则在一给定时刻 t，在具有相同 x 值的一切点上,函数 $\xi=f(x-vt)$ 取相同的值. 但 $x=$ 常数代表一个垂直于 X 轴的平面(图 10-30). 因此,在三维中，$\xi=f(x-vt)$ 描述一个平行于 X 轴传播的平面波. 如果 ξ 是一位移(即一矢量场)，则当 ξ 平行于传播方向即 X 轴时(如图中标以 L 的箭头所示)，这波是纵波. 当 ξ 垂直于传播方向(亦即平行于 YZ 平面)时，这波为横波. 在这种情况下，ξ 也可以表示为沿相互垂直的方向(如图中标以 T 和 T' 的箭所示)的两个位移的叠加.

注意,在平面波中,重要的是垂直于波平面(即波阵面)的单位矢量 u 所表示的传播方向，而坐标轴的取向则多少是任意的. 因此，把平面波 $\xi=f(x-vt)$ 表示成与波相对于轴的取向无关的形式,是很方便的. 在图 10-30 中,单位矢量 u 平行于 X 轴. 如果 r

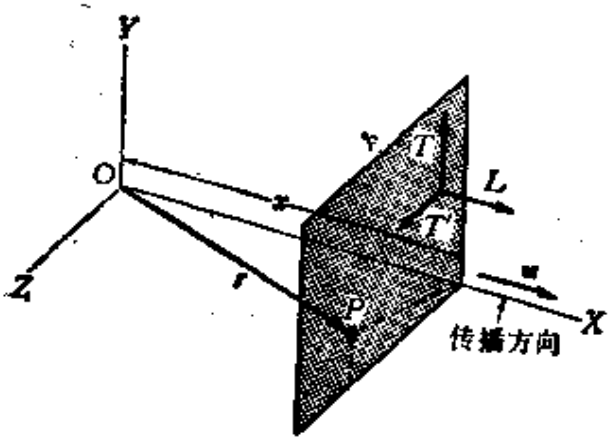


图 10-30　沿 X 轴传播的平面波.

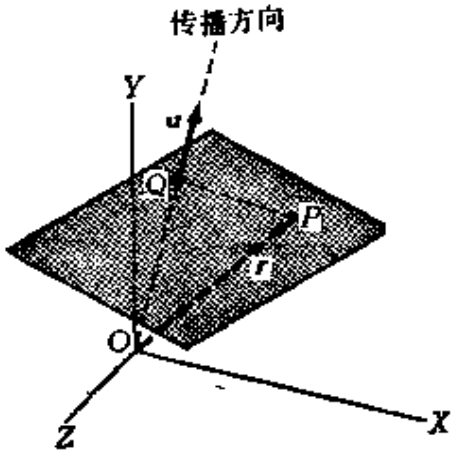


图 10-31　沿任意方向传播的平面波.

是波阵面上任意一点 P 的位矢，则 $x=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r}$，因此我们可以写出

$$\xi=f(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r}-vt). \tag{10.62}$$

如果 $\boldsymbol{u}$ 指向一任意方向(图 10-31)，则 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r}$ 仍然是从原点 O 算起的、沿传播方向的距离. 因此，方程(10.62)代表一个沿 $\boldsymbol{u}$ 的方向传播的平面波. 在沿 $\boldsymbol{u}$ 的方向传播的平面谐波的情况下，可以写出

$$\xi=\xi_0\sin k(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r}-vt).$$

定义一个矢量 $\boldsymbol{k}=k\boldsymbol{u}$ 是很方便的. 这个矢量的长度为 $k=2\pi/\lambda=\omega/v$，其方向沿传播方向. 这个矢量通常叫作传播矢量(有时叫作波矢量). 由于 $\omega=kv$，所以一个平面谐波可以表示为

$$\xi=\xi_0\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)=\xi_0\sin(k_xx+k_yy+k_zz-\omega t), \tag{10.63}$$

式中 k_x、k_y 和 k_z 是 $\boldsymbol{k}$ 的分量，满足下列关系式:

$$k_x^2+k_y^2+k_z^2=k^2=\omega^2/v^2. \tag{10.64}$$

当波在三维空间中传播时，波动方程(10.15)必须作相应的改变. 在这种情况下，它变为

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=v^2\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\right). \tag{10.65}$$

仅仅根据对称性条件，就可以预期上面这个结果. 通过直接代入，

可以证明平面谐波的表达式(10.63)满足一般的波动方程(10.65)这个验证留给学生去做. [提示:必须利用方程(10.64).]

平面波(10.62)和(10.63)虽然包含三个坐标 x, y, z, 但它们实际上是一维问题,因为传播是沿一特定方向,在垂直于传播方向的所有平面上物理情况都相同(图 10-32a). 然而,事实上存在着沿几个方向传播的波. 最重要的两种情况是柱面波和球面波. 能够证明,这些更一般的波也是三维波动方程(10.65)的解. 在柱面波的情况下,波阵面是平行于一给定直线,例如 Z 轴, 因而垂直于 XY 平面的面 (图 10-32b). 扰动沿着垂直于 Z 轴的一切方向传播. 例如,当一系列波源均匀地沿 Z 轴分布, 而且同时地振荡时,就会产生这种波.

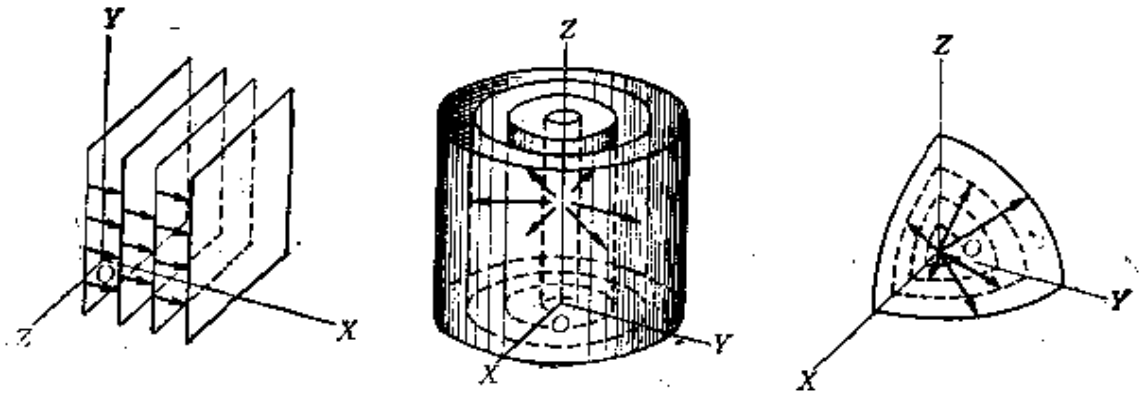


图 10-32 (a) 平面波,(b) 柱面波,(c) 球面波.

如果一个扰动在某一点发生, 并沿一切方向以相同的速度传播(亦即这媒质是各向同性的), 就形成球面波. 波阵面是一些同心的球面,球心在扰动发生的那一点(图 10-32c). 例如, 当气体中一点的压强突然变化时,就产生这样的波.

有时传播速度并非在一切方向上都相同,在这种情况下,称这种媒质为各向异性的. 例如,其中存在温度梯度的气体,在某些应变条件下的固体,或者一个大尺寸的晶体,在不同方向上可能有不同的弹性;因而不同方向上的传播速度也不同. 在这些媒质中,波

就不是球面的.

即使波是球面的，它也可能不是在一切方向上具有相同的振幅或强度，因为扰动源可能在不同方向上产生不同的效应. 例如，吹圆号的乐师在乐器的开端产生一压强波. 然而，由于管子端部的形状，听众听到的声音不是在一切方向上具有相同的强度，虽然这声音在一切方向上以相同的速度传播（图 10-33）.

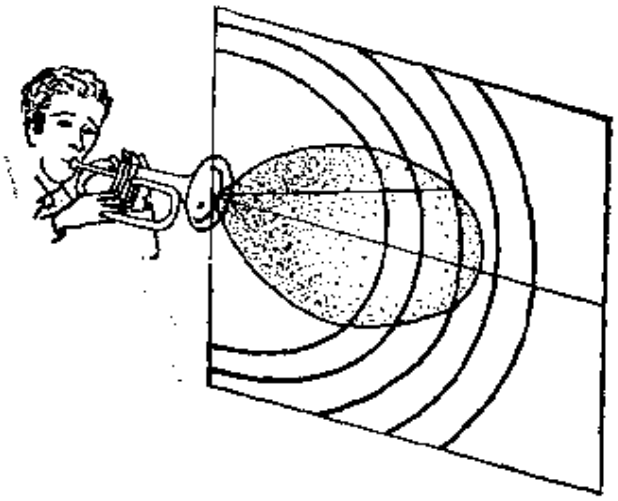


图 10-33　一圆号产生的声强的角分布.

在某些情况下，波在一表面上传播，例如在一薄膜或一液体的自由表面上传播. 如果在这表面的某一点产生一个扰动，这扰动就沿这个表面以相同的速度朝一切方向传播，结果是一系列圆波（图 10-34）. 这个二维波动只需要两个空间坐标来描写. 这种波的方程不是方程(10.65)，而是

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}=v^2\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}\right), \tag{10.66}$$

因为描写这个过程不需要 z 坐标.

例题 10.15　紧张薄膜上的弹性波.

解　考虑一个紧张薄膜. 为简单起见，假定它是矩形的（图 10-35）. 这个膜紧绷在一框架上，这框架对这个膜每单位长度作用一个力σ. 如果这个膜在某一点变形，而且在垂直方向上经受一位移，则这个形变沿着膜传播，结果产生一个二维表面波.

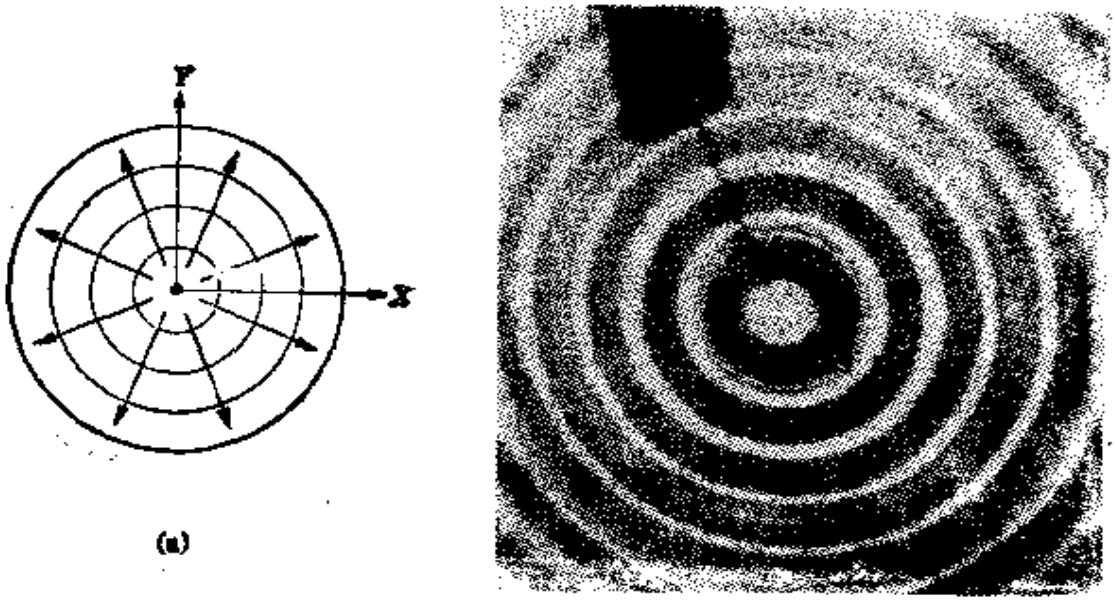


图 10-34　液面上的圆波.

为了求出这种情况下的运动方程，考虑这个膜的一个小的矩形段，其边

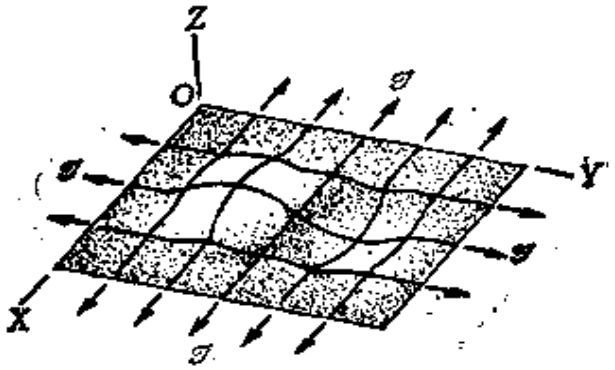


图 10-35　一紧张薄膜上的表面波.

长为 dx 和 dy (图 10-36). 在某一时刻，膜经受一向上的位移 ξ. 因这表面是曲面，位移 ξ 是坐标 x 和 y 的函数，所以作用在这段膜边缘上的力的方向不是正相反的. 为了求出作用在这段膜上的竖向合力，我们利用第 10.7 节中用过的推理(在那里讨论了弦中的横波). 根据这个推理，平行于 X 轴的边受力为 σdy，其竖向合力为

$$(\sigma\, dy)\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}dx = \sigma\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}dxdy.$$

同理，平行于 X 轴的边受力为 $\sigma\, dx$，其竖向合力为

$$(\sigma\, dx)\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}dy = \sigma\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}dxdy.$$

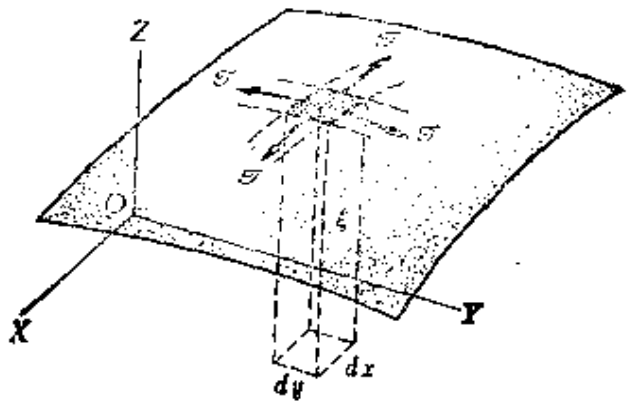


图 10-36　作用在一紧张薄膜的一个面元上的力.

因此，总竖向力为这两个力之和，即

$$F_z=\mathscr{T}\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}\right)dxdy.$$

如果σ是这个膜每单位面积的质量（即质量面密度），则这一段膜的质量为$\sigma dxdy$；由于竖向加速度为$\partial^2\xi/\partial t^2$，所以这段膜的运动方程为

$$(\sigma\,dxdy)\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=\mathscr{T}\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}\right)dxdy$$

或者

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=\frac{\mathscr{T}}{\sigma}\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}\right).$$

这个方程与方程(10.66)相似，因此我们可以断定，这扰动象一个波那样沿着膜传播，其速度为$v=\sqrt{\mathscr{T}/\sigma}$.（学生应验证$v$的这个表达式在量纲上是正确的.）

10.13　流体中的球面波

我们考虑一个点源在一均匀的、各向同性流体中产生的球面压强波. 乍一看，我们可能会说，如果r是离开原点的距离，p_0是正常压强，则这压强波可以写作$p-p_0=f(r-vt)$这种形式，因为现在r起着平面波中x的作用. 然而，这个表达式是不正确的，这个情况需要更仔细的分析.

当一球面波传播时，波面变得越来越大（与r^2成正比地增

大). 当一个波在一立体角Ω内传播时(图 10-37), 在离源的距离为 r 处, 波面的面积为 A. 在 $2r, 3r, \cdots, nr$ 处, 波面的面积为 $4A$, $9A, \cdots, n^2A$. 这个情况表示, 压强波的振幅必定随离源的距离的增加而减小, 因为它作用在一较大的面积上. 这个结果为实验所证实. 比这里讲的更详细的理论分析, 能够预计这个结果. 例如, 如果这流体是各向同性的, 而且在离源的距离为 r_0 处, 压强波在一切方向上具有相同的振幅, 则能证明, 这压强波由下式表示:

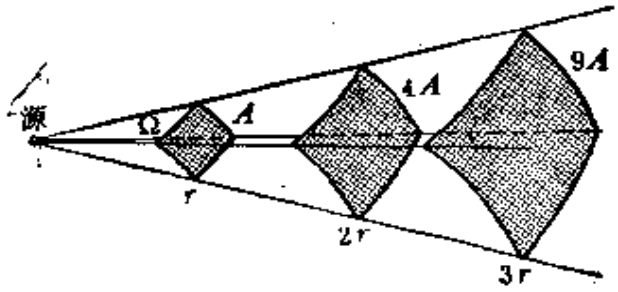


图 10-37

$$p-p_0=\frac{1}{r}f(r-vt). \tag{10.67}$$

几何因子 $1/r$ (在平面波中不出现这个因子)说明, 压强随离源的距离增加而减小. 如果振幅(或者强度)在各个方向上不同, 就会得到更复杂的表达式. 方程(10.67) 表示一个出射球面波. 一个入射球面波可以表示为

$$p-p_0=\frac{1}{r}f(r+vt).$$

传播速度的表达式与平面波的速度表达式即方程(10.32)相同; 即

$$v=\sqrt{\frac{\kappa}{\rho_0}}. \tag{10.68}$$

一个特别重要的情况, 是下式所表示的球面谐压强波:

$$p=p_0+\frac{\mathscr{P}_0}{r}\sin(kr-\omega t). \tag{10.69}$$

在离源的距离为 r 处, 压强波的振幅为 $\mathscr{P}_0/r$, 它随离源的距离增

加而减小. 与这种压强波对应的位移的表达式就更为复杂；但在离源的距离很大的地方，位移能够以很好的近似用下式表示：

$$\xi=\frac{\xi_0}{r}\cos(kr-\omega t), \tag{10.70}$$

式中

$$\xi_0=\frac{\mathscr{D}_0}{v\rho_0\omega}.$$

这个关系式与平面波的关系式相同（见例题 10.8）. 注意，位移波的振幅也随离源的距离增加而减小（与 $1/r$ 成正比）.

根据方程(10.50)，在大距离处，单位体积的能量由下式给出：

$$\mathrm{E}=\frac{1}{2}\rho_0\omega^2\xi_0^2\frac{1}{r^2}=\frac{\mathscr{D}_0^2}{2v^2\rho_0r^2},$$

因为现在这种情况下的振幅是 ξ_0/r，而不是 ξ_0. 上式表示 E 与 r^2 成反比. 如果我们利用方程(10.51)和 $A=4\pi r^2$，则单位时间内通过半径为 r 的球面流过的能量为

$$\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)_{\text{平均}}=v(4\pi r^2)\left(\frac{1}{2}\rho_0\omega^2\xi_0^2\frac{1}{r^2}\right)=2\pi v\rho_0\omega^2\xi_0^2=\frac{2\pi\mathscr{D}_0^2}{\rho_0 v}. \tag{10.71}$$

注意，因子 r^2 已从上式中消去；因此，这个结果与半径无关. 我们可以预期会有这个结果，因为能量守恒要求，平均而言，每单位时间通过任何以源为中心的球面的能量都相同，而与球半径无关. 由此可见，方程(10.69)和(10.70)中出现因子 $1/r$ 是合理的.

根据方程(10.52)，在离源的距离为 r 处，球面波的强度（即每单位时间穿过单位面积的平均能量）为

$$I=v\mathrm{E}=\frac{\mathscr{D}_0^2}{2v\rho_0r^2}=\frac{I_0}{r^2}, \tag{10.72}$$

式中

$$I_0=\frac{\mathscr{D}_0^2}{2\rho_0 v}. \tag{10.73}$$

这个结果与例题 10.13 中的结果完全相同. 于是我们得出结论：

在一球面波中，能量密度和强度都与离源的距离的平方成反比地减小.

这个结果在声学和光学中都有重要的应用. 而且，这个结果是和能量守恒一致的. 这是因为，如果流过每一球面的能量必须相同，而且球的面积与 r^2 成正比，则单位时间内流过单位面积的能量必然与 r^2 成反比.

刚才讨论过的球面波，只适用于不能维持切应力的理想流体的情况. 然而，在弹性固体中，两种波是可能的：无旋波和无散波. 在平面波的情况下，这两种波实质上对应于第 10.5 到 10.7 节中讨论过的纵波和横波. 无旋波和无散波的传播速度分别为

$$v_l=\sqrt{\frac{\kappa+\frac{4}{3}G}{\rho}},\qquad v_t=\sqrt{\frac{G}{\rho}},\tag{10.74}$$

式中 κ 是这种固体的体积弹性模量，G 是切变模量.

注意，如果 $G=0$，就只有纵波，其速度等于(10.68)的结果. 另一方面，没有任何一种稳定媒质能够有 $v_t=0$，从而只维持横波，因为这种情况要求 $\kappa=-\frac{4}{3}G=$ 一个负数. 这样的 κ 值意味着，压强的增加会导致体积的增加，而这种情况是违反经验和直觉的.

习　题

10.1 一个人在平静的湖面上摇动一条小船来产生表面波. 他观察到这条小船在 20s 内完成 12 次振动. 每一次振动产生一个波峰. 一个给定的波峰到达 12m 外的湖岸需要 6s. 试计算这些表面波的波长.

10.2 某一个波的方程为 $\xi=0.10\sin(2x-100t)$ m，式中 x 的单位是 m，t 的单位是 s. 试求：这个波的(a) 振幅，(b) 波长，(c) 频率，(d) 传播速度. (e) 画出这个波的概略图，标明其振幅和波长.

10.3 设一个波的方程为

$$\xi=0.02\sin 2\pi(0.1x-5t)\ \text{m},$$

式中x的单位是m，t的单位是s. 试求：(a) 波长，(b) 频率，(c) 周期，(d) 传播速度，(e) 振幅，(f) 传播方向. (g) 写出与这个波相同但沿相反方向传播的波的表达式.

10.4 设一个波的方程为

$$\xi=0.02\sin 2\pi(0.5x-10t)\ \text{m}$$

式中t的单位是s，x的单位是m，试画出在(a) $t=0$和(b) $t=\frac{1}{40}$ s时，在几个波长的距离上，ξ对x的曲线. 对于

$$\xi=0.02\sin 2\pi(0.5x+10t)\ \text{m},$$

在(c) $t=0$和(d) $t=\frac{1}{40}$s时，重作此题. (e) 比较所得的结果.

10.5 一个谐波

$$\xi=A\sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}-\frac{t}{P}\right)$$

向右传播. 在同一组轴上，在同一点$x=0$处，画出在时刻$t=0$，$\frac{1}{4}P$，$\frac{1}{2}P$，$\frac{3}{4}P$和P的扰动.

10.6 在$t=0$时，在同一组轴上，对于13个位置$x=0$，$\lambda/12$，$\lambda/6$，$\lambda/4$，$\lambda/3$，$5\lambda/12$，$\cdots\lambda$，画出前题的位移ξ

10.7 假定习题10.5中的波对应于一个横弹性波. 试画出在$x=\lambda/4$处，在时刻$t=0$，$\frac{1}{4}P$，$\frac{1}{2}P$，$\frac{3}{4}P$和P的 (a) 速度$\partial\xi/\partial t$和(b) 加速度$\partial^2\xi/\partial t^2$.

10.8 设一弦中波的方程为

$$\xi=0.03\sin(3x-2t)\ \text{m},$$

式中ξ和x的单位为m，t的单位为s. (a) 在$t=0$，求在$x=0$，0.1m，0.2m和0.3m处的位移. (b) 在$x=0.1$m处，求在$t=0$，0.1s和0.2s的位移. (c) 求弦的质点的振动速度的方程. (d) 求振动的最大速度. (e) 求波的传播速度.

10.9 一个源的运动可以用下式表示：

$$\xi=\frac{8}{\pi^2}A\left[\sin\omega t-\frac{1}{3^2}\sin 3\omega t+\frac{1}{5^2}\sin 5\omega t-\cdots\right].$$

用这个源产生某种波. (a) 用图解法把前三项加起来，画出近似的波形. 这

个波形的无穷级数导致一条"锯齿"曲线. (b) 写出具有同样形状,以速度 v (v 与频率无关)向右传播的行波的表达式. $\left(\text{注意},1+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^2+\cdots=\pi^2/8,\text{而且,当 }\sin\omega t=1\text{ 时},\sin 3\omega t=-1.\right)$

10.10 如果一个源的运动具有下列形式:

$$\xi=\frac{4}{\pi}A\left(\sin\omega t+\frac{1}{3}\sin 3\omega t+\frac{1}{5}\sin 5\omega t+\cdots\right),$$

试对于这个源重作习题 10.9. $\left(\text{注意},1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots=\pi/4.\right)$

10.11 考虑沿一根棒传播的纵波(第 10.5 节),并假定每一点的形变为

$$\xi=\xi_0\sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}-\frac{t}{P}\right).$$

(a) 利用关系式(10.20),求出作用在每一截面上的力的表达式. (b) 证明,ξ 波和 F 波的位相差为四分之一波长. (c) 在一给定时刻,在几个波长的距离上,画出 ξ 对 x 和 F 对 x 的曲线.

10.12 一根弹簧的正常长度为 1m,其质量为 0.2kg. 当这根弹簧受 10N 的力拉伸时,它伸长 4×10^{-2}m. 求纵波沿这弹簧传播的速度.

10.13 一根钢弹簧的正常长度为 4 m,其质量为 2kg. 当这弹簧垂直悬挂,并在其下端系一个质量为 0.1kg 的物体时,这弹簧伸长 5×10^{-2}m. 求纵波在这弹簧中的传播速度.

10.14 计算声音在 0°C的(a) 氢,(b) 氮,(c) 氧中传播的速度. 并将所得结果与实验结果比较. 对于这三种气体,都假定 $\gamma=1.40$.

10.15 试求在300K (27°C),温度改变一个单位时,空气中声速的变化.

10.16 根据例题 10.7 中给出的空气的系数 $\alpha=\sqrt{\gamma R/M}$ 的值,求出空气的有效分子质量,并与用其他方法得出的结果比较. 假定对于空气 $\gamma=1.40$.

10.17 如果一根弦中的张力(a) 加倍,(b) 减半,该弦中横波的传播速度如何变化? 欲使传播速度(c) 加倍,(d) 减半,张力应如何改变?

10.18 一根直径为 2×10^{-4}m 的钢丝所受张力为 200N. 试求横波沿这根钢丝的传播速度.

10.19 一根长为 2 m、质量为 4×10^{-3}kg 的弦保持水平. 这根弦的一端固定,另一端跨过一个滑轮,下悬一 2kg 的物体. 求这根弦中横波的速度.

10.20 一根水平弦,其一端与一个用电驱动的音叉(其振动频率为 240

Hz)相连，另一端跨过一个滑轮，下悬一个 3 kg 的物体．这根弦每单位长度的质量为 $2\times10^{-2}\mathrm{kg\cdot m^{-1}}$．(a) 求这弦中横波的速率．(b) 求波长．

10.21　一根橡皮管，其一端固定在一个固定的支架上，另一端跨过一个距固定端 5 m 的滑轮，载有一个 2kg 的负载．固定端与滑轮之间的橡皮管的质量为 0.6kg．(a) 求横波沿管子的传播速度．(b) 设一振幅为 10^{-3}m、波长为 0.3m 的谐波沿这根管子传播，求管子任一点的最大横向速度．(c) 写出波的方程．

10.22　在一根紧张弦的一端有一个振动源，其位移由方程

$$\xi=0.1\sin6t\ \mathrm{m}$$

表示，式中 ξ 的单位是 m，t 的单位是 s．弦中的张力为 4N，每单位长的质量为 $10^{-2}\mathrm{kg\cdot m^{-1}}$．(a) 求弦中的波速．(b) 求波的频率．(c) 求波长．(d) 求在离源 1 m 和 3m 处位移的方程．(e) 在 $x=3$m 处，画出 ξ 对 t 的曲线．(f) 求运动的振幅．(g) 在 $t=\pi/12$s 处，画出 ξ 对 x 的曲线．

10.23　一根长为 2m、半径为 5×10^{-4}m 的钢丝挂在天花板上．(a) 如果一个质量为 100kg 的物体挂在钢丝的自由端，求钢丝的伸长量．(b) 并且求钢丝中点的位移和向下的拉力．(c) 当物体挂上时，求钢丝上纵波和横波的速度．

10.24　对于下列波长：(a) 10^{-3}m，(b) 10^{-2}m，(c) 1m，试比较深水中表面波的速度表达式［方程(10.43)］中两项的相对大小．波长等于多大时，这两项相等？水的表面张力约为 $7\times10^{-2}\mathrm{N\cdot m^{-1}}$．

10.25　一个矩形截面的渠道，深 4 m．求波长为(a) 10^{-3}m，(b) 1m，(c) 10m，(d) 100m 的波的传播速度．在每一种情况下，都使用与有关量的数量级最符合的公式．渠道中水的表面张力为 $7\times10^{-2}\mathrm{N\cdot m^{-1}}$．

10.26　在第 10.9 节中，我们求出一根实心棒中纵波的能流．对于一根弦中的横波，重作这种计算，证明平均功率为 $v\left(\frac{1}{2}m\omega^2\xi_0^2\right)$．注意，此式括号内的量现在对应于每单位长度的能量．［提示：计算垂直于弦的力，即图(10-14)中的 $F\sin\alpha\approx F(\partial\xi/\partial x)$，作功的速率．

10.27　能够听见的最弱的声音，其压强振幅约为 2×10^{-5}Pa，而不引起痛觉的最强的声音，其压强振幅约为 28Pa．在每一种情况下，求(a) 声强(以 $\mathrm{W\cdot m^{-2}}$ 和 db 为单位)，(b) 振动的振幅，设频率为 500Hz．设空气密度为 $1.29\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$，声速为 $345\mathrm{m\cdot s^{-1}}$．

10.28 两个声波的强度级相差(i) 10db,(ii) 20db，试求(a) 它们的强度之比和(b) 它们的压强振幅之比.

10.29 (a) 当压强振幅加倍时，求声波强度的变化. (b) 压强振幅必须怎样变化，才能使强度增加到 10 倍?

10.30 有两个声波，(a) 如果其中一个声波的强度是另一声波的两倍，(b) 如果一个声波的压强振幅是另一声波的两倍，试用 db 为单位表示这两个声波的强度级之差.

10.31 有两个声波，一个在空气中，一个在水中，它们的强度相同. (a) 求水中波的压强振幅与空气中波的压强振幅之比. (b) 如果压强振幅相同，试求这两个波的强度之比.

10.32 一机车汽笛的音调为 500Hz. 如果列车以 $72\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ 的速度 (a) 向车站开来，(b) 离车站而去，试求站在车站上的一个人所听到的声音的频率.

10.33 一声源的频率为 10^3Hz，相对于空气以 $30\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 的速度运动. 假定相对于静止空气的声速为 $340\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$. 一个相对于空气为静止的观察者，看到这声源 (a) 离他而去，(b) 向他趋近. 试求在这两种情况下他所感觉到的有效波长和频率.

10.34 (a) 如果声源相对于空气为静止的，而观察者以 $30\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 的速度运动，重作习题 10.33. (b) 根据你的结果你是否能够断定，不论是声源还是观察者运动，是无关紧要的.

较难的习题

10.35 一辆火车以速度 v 运动时发出的汽笛声的频率为 f. 如果空气中的声速为 c_s，试求在火车正前方的一个观察者 O 所听到的声音的波长.

10.36 一辆很快的赛车响着喇叭通过站在路旁的一个观察者. 当车通过后，观察者听到的音调，比当车接近时他所听到的音调低八音度，亦即声音的频率下降一半. 如果声速为 $340\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$，试求车速.

10.37 求钢中切变波的速度. 与例题 10.4 中给出的纵波的结果加以比较.

10.38 (a) 证明第 10.9 节中讨论过的能量波可以写成如下形式:

$$\frac{\partial W}{\partial t}=v\left\{\rho\omega^2\xi_0^2\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2(kx-\omega t)\right]\right\}.$$

(b) 由上式求出它的平均值. (c) 证明能量波的频率是位移波的两倍，而其波长是位移波的一半. (d) 在一给定时刻，画出 $\partial W/\partial t$ 对 x 的曲线.

10.39 一个摆由一根 2m 长的钢丝和其下端的 20kg 的摆锤组成. 如果这个摆在与竖直线成 60° 角的位置上释放，试求：当摆锤在初位置上和通过最低点时，钢丝长度之差.

10.40 用一个与一钢棒一端耦合的振荡器使这钢棒传递纵波. 钢棒的直径为 4×10^{-3}m. 振幅为 10^{-4}m，频率为 10Hz. 试求 (a) 沿这棒的波的方程. (b) 棒每单位体积中的能量. (c) 每单位时间通过钢棒任一截面的平均能流. (d) 驱动振荡器所需的功率.

10.41 一根长为 L、质量为 M 的绳子，自由地挂在天花板上. (a) 证明，横波的速度 v 作为沿绳子的位置的函数是 $v=\sqrt{gx}$，式中 x 是从绳子下端算起的距离. (b) 证明，一个横波脉冲通过这根绳子所需时间为 $2\sqrt{L/g}$. 注意，这些结果都与绳子的质量无关.

10.42 一个沿 X 轴传播的横弹性波的位移 ξ 的分量为

$$\xi_y=\xi_0\sin(kx-\omega t)$$

和

$$\xi_z=\xi_0\cos(kx-\omega t).$$

试证明这个波是圆偏振的. (b) 确定在 X 轴上的一个观察者所看到的 ξ 的旋转方向. (c) 对于一个具有相反偏振的波，写出 ξ_y 和 ξ_z 的表达式.

10.43 关于一个气柱中的压强波(第 10.6 节)，我们假定压强按下式变化：

$$p-p_0=\mathscr{P}_0\sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}-\frac{t}{P}\right).$$

(a) 利用方程(10.25)和(10.29)，求出这气体中的密度波和位移波的表达式. (b) 证明，压强波与密度波同相，而位移波有一四分之一波长的位相差. (c) 在一给定时刻，在几个波长的长度上，画出这三种波的曲线(作为 x 的函数).

10.44 在 293K 和标准压强的空气中，一平面谐声波的频率为 500Hz，其位移振幅为 10^{-8}m. (a) 写出位移波的表达式. (b) 在 $t=0$s，在几个波长的长度上，画出位移波的波形. (c) 写出压强波的表达式. (d) 在 $t=0$s，在几个波长的长度上，画出压强波的波形，并将所得结果与(b)中的结果加以比较. (e) 以 db 为单位，表示这个波的强度级.

10.45 具有相同频率和振幅的两个谐波，以相同速度沿相反的方向传播. (a) 求合波动. (b) 假定合波动对应于一根弦中的横波，试在不同时刻，画出弦上各点的位移.

10.46 两个波的振幅、速度和频率均相同，但有一位相差 $\pi/4$. 这两个波在一根弦上沿相同的方向传播. 把这两个波加起来，证明所得结果是一个具有相同速度和频率的行波.

10.47 两个波的振幅和速度相同，但频率不同，分别为 1000Hz 和1010 Hz. 这两个波以 $10\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 的速度沿相同的方向传播. (a) 写出各波及其和的方程. (b) 概略画出合波的波形.

10.48 在两个垂直平面内平面偏振的两个波，沿 X 轴以相同的速度传播. 在下列三种情况下，试求合波动: (a) $A_1=2A_2$，位相相同; (b) $A_1=2A_2$，位相差 $\pi/2$; (c) $A_1=A_2$，位相差 $\pi/2$.

10.49 在讨论一根棒中的纵波时(第 10.5 节)，我们忽略了与纵应变同时发生的旁应变. 考虑这种效应时，能够证明，沿一半径为 R 的圆棒传播的纵谐波(波长为 λ)的相速度为

$$v_p=\sqrt{\frac{Y}{\rho}}(1-\pi^2\sigma^2R^2/\lambda^2),$$

式中 σ 是一系数，叫作泊松比(见习题10.53). (a) 求这种波沿棒传播的群速度，并将它表为 v_p 的函数. (b) 对于 R 远小于 λ 的情况，求出群速度的极限值. (c) 讨论 v_p 和 v_g 随 R/λ 变化的情况.

10.50 一根实心棒中的谐弯曲波的相速度为

$$v_p=\frac{v}{\sqrt{1+\lambda^2/4\pi^2K^2}},$$

式中 $v=\sqrt{Y/\rho}$ 是纵波的相速度，λ 是波长，K 是棒的截面绕通过中心且垂直于棒的纵轴的轴的回转半径. (a) 求弯曲波的群速度，并把它表示为相速度的函数. (b) 具体应用于圆截面的棒. (c) 当 $\lambda\gg2\pi K$ 时，求群速度. [注意: 弯曲波是沿一加载棒传播的波; 所谓加载棒，是指受沿棒长均匀分布的横向力(例如它本身的重量)作用的棒.]

10.51 关于多普勒效应的方程(10.58) 是在波传播时所通过的媒质保持静止这个假定下导出的. 试证明，如果媒质在连结源和观察者的直线上有一速度 v_m，则这方程变为

$$\nu'=\frac{\nu(v-v_0+v_m)}{(v-v_s+v_m)}.$$

10.52 一物体的体积应变由关系式 $\varepsilon_V = dV/V$ 定义，式中 dV 是作用在体积为 V 的物体上的力所引起的体积变化. (a) 证明

$$\varepsilon_V = -\frac{d\rho}{\rho},$$

式中 ρ 是这物体的密度. (提示：注意 $\rho V = m =$ 常数.) (b) 还要证明，方程 (10.27) 所定义的体积弹性模量能够写成另一种形式：

$$\kappa = -V\left(\frac{dp}{dV}\right).$$

式中 dV 是压强变化 dp 所引起的体积变化.

10.53 利用铁和铅的体积弹性模量的值(表 10-1)，计算当压强变化等于 10^5Pa 时，每一种材料的百分密度变化和百分体积变化.

10.54 线应变由下式定义：

$$\varepsilon_L = \frac{dL}{L},$$

式中 L 是在未形变状态中物体内任意两点之间的距离. dL 是形变引起的这两点之间距离的变化. 通过考虑一个边长为 L 的立方体，证明 $\varepsilon_V = 3\varepsilon_L$.

10.55 当一金属丝沿其长度的方向被拉伸时，其直径减小. 结果产生一个由下式定义的旁应变：

$$\varepsilon_D = \frac{dD}{D}.$$

泊松比被定义为

$$\sigma = \frac{dD}{dL}.$$

证明，如果一长方体的每个面都受一正应力 S，则每个边的净线应力为

$$\varepsilon_L = S(1-2\sigma)/Y.$$

(提示：这长方体的每一对面上的正应力，在其余各对面上引起相反的旁应变.)

10.56 (a) 利用习题 10.54 和 10.55 的结果，证明

$$Y = 3\kappa(1-2\sigma).$$

(b) 解上式求出 σ；利用表 10-1 中的值，计算某些材料的泊松比.

10.57 根据与习题 10.56 类似的推理，能够证明，

$$Y = 2G(1+\sigma).$$

(a) 在这个表达式和习题 10.56 的表达式之间消去 σ，证明：

$$Y=\frac{3\kappa G}{\left(\kappa+\frac{1}{3}G\right)}.$$

(b) 利用表 10-1 中所列某些材料的值，验证这个关于 Y 的理论表达式的适用范围.

10.58 对于某种材料，$G=1.24\times10^{10}$Pa，$Y=3.20\times10^{10}$Pa. (a) 计算这种材料的体积弹性模量和泊松比. (b) 对于石英进行同样的计算；对于石英，$Y=5.18\times10^{10}$Pa，$G=2.88\times10^{10}$Pa. (c) 讨论所得结果的物理意义.

10.59 能够证明，对于一根弹簧，例题 10.6 中引入的常数 K，由 $\pi GR^4/2a^2$ 给出，式中 R 是钢丝半径，a 是弹簧半径. (a) 一根弹簧的半径为 10^{-2} m，制作这弹簧用的钢丝的半径为 10^{-3}m，试求这弹簧的 K 的值. (b) 如果未拉伸时这弹簧的长度为 0.5m，试求当一 50N 的力施于这弹簧上时，这弹簧的伸长量.

10.60 设有一个场 ξ，它的传播方程为

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=a\frac{\partial^4\xi}{\partial x^4},$$

式中 a 是一常数. (a) 这方程是否有形状如

$$\xi=\xi_0\sin k(x\pm vt)$$

的解？如果有，求 v 的值. (b) $\xi=f(x\pm vt)$ 是不是这方程的解？(c) 根据前面的结果，你能否断定这个场无畸变地传播？

10.61 圆截面半径为 R 的一根棒，由于绕其轴施加的转矩而被扭转. 证明，如果 θ 是在横坐标轴上一点 x 的扭转角，则在该点的转矩为

$$\tau=\frac{1}{2}AGR^2\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right),$$

式中 $A=\pi R^2$ 是该截面的面积.

10.62 利用前题的结果，证明扭波沿这根棒的传播速度为

$$v=\sqrt{G/\rho}\ .$$

[提示：考虑厚度为 dx 的一段，并注意，作用在这一段上的净转矩为 $(\partial\tau/\partial x)dx$.]

10.63 能够证明，一个各向同性的球面波满足下列微分方程：

$$\frac{\partial^2(r\xi)}{\partial t^2}=v^2\frac{\partial^2(r\xi)}{\partial r^2}.$$

(a) 证明这个方程的解是

$$\xi=\left(\frac{1}{r}\right)f(r\pm vt).$$

(b) 将这结果与第 10.13 节中关于流体中的压强波的讨论加以比较.

10.64 试证明，当振幅大时，弦中横波的方程变为

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=\frac{T}{m}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\left[1-\frac{3}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2\right].$$

注意，这个方程不是线性的；当$(\partial\xi/\partial x)^2$可忽略时，这个方程化为方程 (10.36). [提示：注意 $\sin\alpha=\tan\alpha/\sqrt{1+\tan^2\alpha}=\tan\alpha-\frac{1}{2}\tan^3\alpha+\cdots$.]

第十一章 电 磁 波

11.1 引 论

在第 4.5 节中我们曾指出电磁波可以在真空中以速度

$$c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\approx 3\times 10^8\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

传播，这个速度相当于光在真空中的速度. 在第 9.6 节中讨论电磁感应现象时，我们曾指出利用随时间变化的电磁场把信号从一处传递到另一处的可能性. 在十九世纪末，德国物理学家赫兹(H. Hertz, 1857—1894)令人信服地证明电磁场在真空中以速度 c 传播①. 赫兹所发现的电磁波的性质，已在实验方面进行了非常仔细的验证. 关于电磁波的性质，例如它的产生、传播和吸收，已积累大量的资料，这些资料打开了通向现代通信领域的大门. 在赫兹完成他的实验之前，麦克斯韦对电磁场方程进行了详细的分析之后，预言了电磁波的存在. 我们关于电磁波的知识的发展，是物理学思想发展方面，理论与实验紧密联系的另一个例子.

在本章中，我们分析麦克斯韦方程(这些方程描述随时间变化的电磁场)，看看如何说明这种场以波的形式传播. 为了做到这一点，我们必须证明，电场和磁场满足方程(10.15)那种形式的方程，即 $\partial^2\xi/\partial^2 t=v^2(\partial^2\xi/\partial x^2)$. 然后讨论这些方程的简单解：平面电磁波. 最后探讨电磁辐射的发射、吸收和散射的机制.

---

① 赫兹的实验将在第 16.6 节中描述.

11.2 平面电磁波

我们将证明，电磁场的麦克斯韦方程容许相互垂直的电场$\mathscr{E}$和磁场$\mathscr{B}$作为特解. 设电场平行于Y轴. 磁场平行于Z轴，在此特殊情况下，

$$\mathscr{E}_x=0,\mathscr{E}_y=\mathscr{E},\mathscr{E}_z=0$$

$$\mathscr{B}_x=0,\mathscr{B}_y=0,\mathscr{B}_z=\mathscr{B}.$$

还假定这场是在真空中：即没有自由电荷或电流，这就表示在麦克斯韦方程中$\rho=0,j=0$.

在这些条件下，方程(8.34)变为

(a)电场的高斯定律，$\mathrm{div}\mathscr{E}=0$，

$$\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial y}=0. \tag{11.1}$$

(b)磁场的高斯定律，$\mathrm{div}\mathscr{B}=0$，

$$\frac{\partial\mathscr{B}}{\partial z}=0. \tag{11.2}$$

(c)法拉第-亨利定律，$\mathrm{curl}\mathscr{E}=-\partial\mathscr{B}/\partial t$，

$$\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial z}=0, \tag{11.3}$$

$$\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial x}=-\frac{\partial\mathscr{B}}{\partial t}. \tag{11.4}$$

(d)安培-麦克斯韦定律，$\mathrm{curl}\mathscr{B}=\varepsilon_0\mu_0(\partial\mathscr{E}/\partial t)$，

$$\frac{\partial\mathscr{B}}{\partial y}=0, \tag{11.5}$$

$$-\frac{\partial\mathscr{B}}{\partial x}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial t}. \tag{11.6}$$

方程(11.1)、(11.2)、(11.3)和(11.5)表示，$\mathscr{E}$和$\mathscr{B}$都不依赖于y或z. 因此，场$\mathscr{E}$和$\mathscr{B}$只依赖于x和t；因而，在每一时刻，在垂直于

X轴的平面上的一切点，场的值相同. 现在可以利用方程 (11.4) 和(11.6)来求出$\mathscr{E}$和$\mathscr{B}$对 x 和 t 的依赖关系. 取方程(11.4)对 x 的导数，得到

$$\frac{\partial^2 \mathscr{E}}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 \mathscr{B}}{\partial x \partial t}.$$

同理，取方程(11.6)对 t 的导数，得到

$$-\frac{\partial^2 \mathscr{B}}{\partial t \partial x} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathscr{E}}{\partial t^2}.$$

把这两个结果合并，则得

$$\frac{\partial^2 \mathscr{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 \mathscr{E}}{\partial x^2}. \tag{11.7}$$

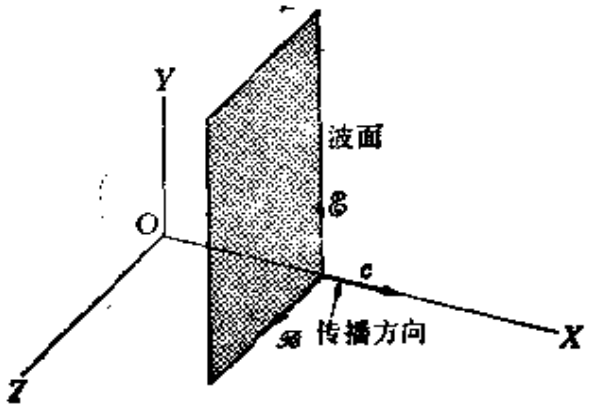


图 11-1　平面电磁波中电场和磁场相对于传播方向的取向.

这个方程与方程(10.15)相同，它表示电场$\mathscr{E}$沿X轴以速度

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \tag{11.8}$$

传播. 这个电场能够表示为

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}(x - ct). \tag{11.9}$$

取方程(11.4)对时间的导数和方程(11.6)对空间的导数，可得出

$$\frac{\partial^2 \mathscr{B}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 \mathscr{B}}{\partial x^2}. \tag{11.10}$$

可见，磁场$\mathscr{B}$也沿X轴以速度 c 传播，并可写作

$$\mathscr{B}=\mathscr{B}(x-ct). \tag{11.11}$$

我们考虑频率为$\nu=\omega/2\pi$，波长为$\lambda=2\pi/k$的谐波这一特殊情况. 在此情况下，

$$\begin{aligned}\mathscr{E}&=\mathscr{E}_0\sin k(x-ct)=\mathscr{E}_0\sin(kx-\omega t),\\ \mathscr{B}&=\mathscr{B}_0\sin k(x-ct)=\mathscr{B}_0\sin(kx-\omega t).\end{aligned} \tag{11.12}$$

在写出这些方程时，我们利用了方程(10.6)给出的关系式$\omega=kc$.

振幅$\mathscr{E}_0$和$\mathscr{B}_0$不是无关的，因为方程(11.4)和(11.6)必须同时被满足. 现在有

$$\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial x}=k\mathscr{E}_0\cos k(x-ct) \qquad 和 \qquad \frac{\partial\mathscr{B}}{\partial t}=-kc\mathscr{B}_0\cos k(x-ct),$$

把上面两个式子代入方程(11.4)，得

$$\mathscr{E}_0=c\mathscr{B}_0 \qquad 或 \qquad \mathscr{B}_0=\frac{1}{c}\mathscr{E}_0. \tag{11.13}$$

学生可以证明，不用方程(11.4)，而利用方程(11.6)，可得到同样的结果. 由于其特殊形式，方程(11.2)给出的瞬时值之间也有这种关系：

$$\mathscr{E}=c\mathscr{B} \quad 或 \quad \mathscr{B}=\frac{1}{c}\mathscr{E}. \tag{11.14}$$

对于更一般的情况，这个关系不一定成立.

由方程(11.14)可知，$\mathscr{E}$场和$\mathscr{B}$场同相，它们同时达到它们的零值和极大值. 图11-2中示出方程(11.12)所描述的电磁波. 电场在XY平面内振荡；磁场在XZ平面内振荡. 这个情况对应于一面偏振波(即线偏振波). 偏振面被定义为电场在其中振荡的平面，在此情况下即为XY平面. 由此可见，电磁波实际上是由两个耦合的波即电波和磁波组成的.

方程(11.12)不是方程(11.7)和(11.10)的仅有的平面波解. 例如，也可以使电场沿Z轴取向，在这种情况下，磁场将沿$-Y$轴. 亦即

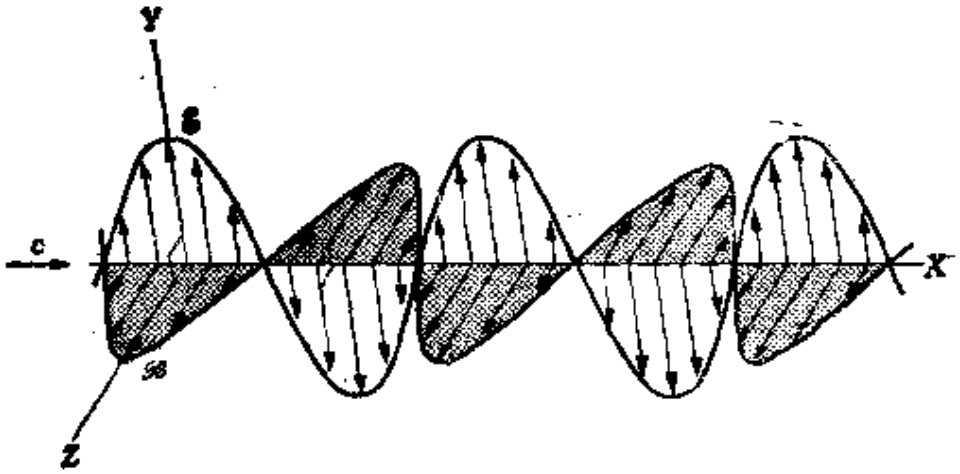


图 11-2　谐平面电磁波中的电场和磁场.

$$\mathscr{E}_z=\mathscr{E}_0\sin(kx-\omega t),\ \mathscr{B}_y=-\mathscr{B}_0\sin(kx-\omega t).$$

此外，无论是在这个波还是在方程(11.12)的波中，都能够用余弦函数代替正弦函数，甚至可以加上一个任意的恒定的位相.

在另一个平面波解中，电场与磁场的量值保持恒定，但它们绕传播方向旋转，从而形成一圆偏振波(图 11-3). 参照第一卷第十二章的讨论，把 $\mathscr{E}$ 场(或 $\mathscr{B}$ 场)的两个线偏振解（其振幅相同，并具有适当的位相差)组合起来，就可得到这个新的解.(这种组合是可能的，因为麦克斯韦方程对于 $\mathscr{E}$ 场和 $\mathscr{B}$ 场是线性的.)圆偏振可以是左旋的或者右旋的，依场的旋转方向而定. 例如，我们可以取电场(或磁场)的两个分量沿互相垂直的方向，即

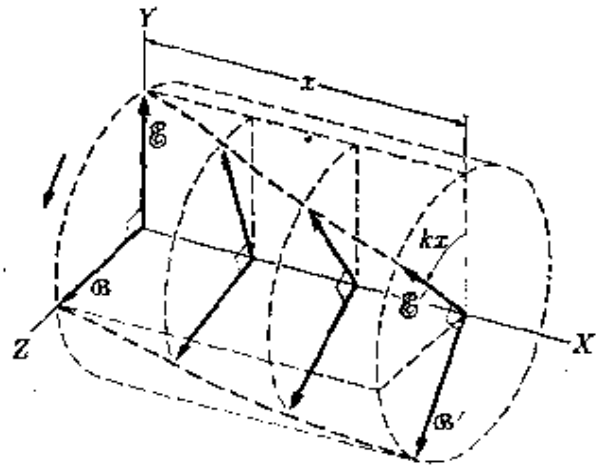


图 11-3　圆偏振电磁波. $\mathscr{E}$ 场和场绕传播方向旋转.

$$\mathscr{E}_y=\mathscr{E}_0\sin(kx-\omega t),\ \mathscr{E}_z=\pm\mathscr{E}_0\cos(kx\mp\omega t),$$

和

$$\mathscr{B}_y=\mathscr{B}_0\cos(kx-\omega t),\ \mathscr{B}_z=\mathscr{B}_0\sin(kx-\omega t).$$

这对应于每一种场的两个分量之间的相差为$\pm\pi/2$；这与第一卷第 12.9 节的结果一致；在每一时刻，磁场$\mathscr{B}$都垂直于电场$\mathscr{E}$. 如果每一种场的两个垂直分量的振幅不同，则得到**椭圆偏振**. 此外，也可能存在麦克斯韦方程的其他平面波解，这些解并不对应于任何特殊的偏振态；条件是这些解满足关系式(11.1)—(11.6). 然而，在这里我们不拟讨论这些解，因为对于大多数应用来说，基本了解平面波和圆偏振波就够了.

相对于$X\ Y\ Z$轴选取$\mathscr{E}$场和$\mathscr{B}$场之间的关系，是从方便考虑的；因此，我们所得到的麦克斯韦方程的平面波解，是完全普遍的，并且说明这些波的一个重要特点：

平面电磁波是横波，其$\mathscr{E}$场和$\mathscr{B}$场彼此垂直，而且垂直于波的传播方向.

麦克斯韦方程的这个理论预言，已为实验所证实，并且导致以后几章中将要讨论的几种现象.

除了麦克斯韦方程的平面波解之外，还有柱面和球面电磁波. 实际上，在离源很大的距离处，一个柱面波或球面波的有限部分可以看成一个平面. 事实上，在麦克斯韦方程的一切解中，电场和磁场都彼此垂直，并且垂直于传播方向(即径向)，如图 11-4 所示.

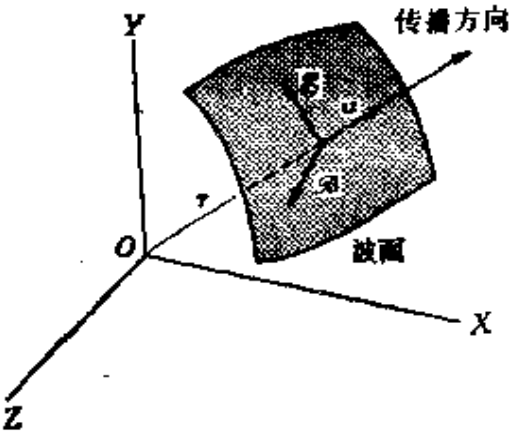


图 11-4　在离源很大距离处的球面电磁波.

11.3 电磁波的能量和动量

由方程(2.40)可知，与真空中电磁波的电场相联系的能量密度为

$$\mathrm{E}_e=\frac{1}{2}\varepsilon_0\mathscr{E}^2.$$

类似地，如果利用方程(11.14)，即 $\mathscr{B}=\mathscr{E}/c$，和方程(11.8)，即 $c=1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$，则方程(9.13)所表示的磁能密度为

$$\mathrm{E}_m=\frac{1}{2\mu_0}\mathscr{B}^2=\frac{1}{2\mu_0 c^2}\mathscr{E}^2=\frac{1}{2}\varepsilon_0\mathscr{E}^2.$$

由此可见，$\mathrm{E}_e=\mathrm{E}_m$. 也就是说，电磁波的电能密度等于磁能密度. 总能量密度为

$$\mathrm{E}=\mathrm{E}_e+\mathrm{E}_m=\varepsilon_0\mathscr{E}^2. \tag{11.15}$$

由方程(10.52)，得出电磁波的强度（即单位时间内通过单位面积的能量）为

$$I=\mathrm{E}c=c\varepsilon_0\mathscr{E}^2. \tag{11.16}$$

电磁波的平均强度 $I_{平均}=c\varepsilon_0(\mathscr{E}^2)_{平均}$. 在谐电磁波的情况下，

$$(\mathscr{E}^2)_{平均}=\mathscr{E}_0^2[\sin^2 k(x-ct)]_{平均}=\frac{1}{2}\mathscr{E}_0^2,$$

所以平均强度为

$$I_{平均}=\frac{1}{2}c\varepsilon_0\mathscr{E}_0^2. \tag{11.17}$$

对于平面电磁波来说，矢积 $\boldsymbol{\mathscr{E}}\times\boldsymbol{\mathscr{B}}$ 具有特殊的重要性，因此，我们就来计算它. $\boldsymbol{\mathscr{E}}\times\boldsymbol{\mathscr{B}}$ 的方向垂直于波阵面，因而指向波传播方向(图 11-5). 这个积的量值等于

$$|\boldsymbol{\mathscr{E}}\times\boldsymbol{\mathscr{B}}|=\mathscr{E}\mathscr{B}=\frac{1}{c}\mathscr{E}^2,$$

所以矢量 $c\boldsymbol{\mathscr{E}}\times\boldsymbol{\mathscr{B}}$ 的量值为 $\mathscr{E}^2$. 在此情况下，矢量 $c^2\varepsilon_0\boldsymbol{\mathscr{E}}\times\boldsymbol{\mathscr{B}}$ 叫

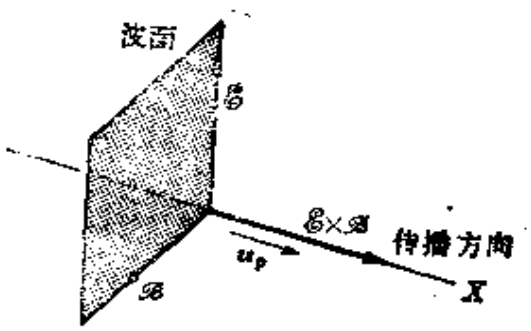


图 11-5 电磁波中能流方向的定义.

做坡印廷矢量，它的量值等于 I. 因此，计算坡印廷矢量穿过面 S 的通量，就可求出每单位时间穿过面 S 的能量. 所以，

$$\frac{dE}{dt}=\int_S c^2 e_0(\mathscr{E}\times\mathscr{H})\cdot u_N dS. \tag{11.18}$$

我们由狭义相对论知道，能量和动量是密切联系着的，它们形成一个四元矢（见第一卷第 11.7 节）. 于是我们可以预期电磁波除能量外，还带有一定的动量. 由于电磁辐射以速度 c 传播，所以利用狭义相对论所给出的能量-动量关系 $p=E/c$ [见第一卷的方程 (11.18)]，可以求出与电磁波联系着的每单位体积的动量 P. 因此，

$$\mathrm{P}=\frac{\mathrm{E}}{c}=\frac{e_0\mathscr{E}^2}{c}=e_0|\mathscr{E}\times\mathscr{H}|. \tag{11.19}$$

(学生应验证 $e_0|\mathscr{E}\times\mathscr{H}|$ 的量纲为 $\mathrm{m^{-2}\cdot kg\cdot s^{-1}}$，它对应于每单位体积的动量.)由于动量是矢量，所以 P 的方向必然与波的传播方向相同. 于是，上面这个方程可以写成矢量形式：

$$\mathbf{P}=\frac{\mathrm{E}}{c}u=e_0\mathscr{E}\times\mathscr{H},$$

式中 u 是沿传播方向的单位矢量.

如果电磁波具有动量，则它也可以有角动量. 相对于点 O，每单位体积的角动量为

$$\mathbf{L}=r\times\mathbf{P}=e_0 r\times(\mathscr{E}\times\mathscr{H}),$$

式中r是从点O至计算P那一点的矢量．这个值可以叫做辐射的"轨道"角动量，因为它和一个轨道粒子的角动量相似．此外，电磁辐射还具有内禀角动量，即自旋，它和基本粒子的自旋相似(见第7.5节)．对于圆偏振平面波，可以证明，沿传播方向的自旋分量等于$\mp E/\omega$，依偏振是顺时针方向或逆时针方向而定．对于线偏振波，由于它可以看成是沿相反方向旋转的两个圆偏振波的组合，所以沿传播方向的自旋分量的平均值等于零．总之，

电磁波不仅带有能量，而且带有动量和角动量．

这个结果是意料之中的，因为电磁场描述电荷之间的相互作用，而这种相互作用表示在电荷之间交换能量和动量．这种交换是通过电磁场来完成的，电磁场是所交换的能量和动量的载体．在第4.8节中已经提出与电磁场相联系的动量的存在．电磁辐射的能量和动量之间的关系式$p=E/c$是非常重要的．我们还有机会多次地讲到这个关系式，并将说明支持这个假定的实验证据．当一个带电粒子吸收或发射电磁辐射时，不仅这粒子的能量和动量改变，而且它的角动量也随之改变，这个结果已为实验所证实．

例题11.1 辐射压强．

解 如果电磁波带有动量，则当它们被一物体表面反射或吸收时，必定产生压强．基本原理与气体作用在容器壁上的压强的原理相同．

首先考虑几个简单情况．假定一平面电磁波垂直投射在一个完全吸收的表面上(图11-6)．每单位体积的入射动量为P；用体积cA乘P，就得到每单位时间投射在面A上的辐射的动量PcA．如果这辐射被这表面完全吸收，则这个表达式也就是面A每单位时间吸收的动量，也就是作用在A上的力．因此，这个表达式除以A，就给出辐射所产生的压强：

$$P_{\text{辐射}}=c\mathrm{P}=\mathrm{E}=\varepsilon_0\mathscr{E}^2.$$

由此可见，在正入射情况下，作用在完全吸收体上的压强，等于波的能量密度．

另一方面，如果这表面是一完全反射体，则反射后辐射的动量与入射辐射的动量大小相等，而方向相反．因此，每单位体积的动量变化为2P，因而

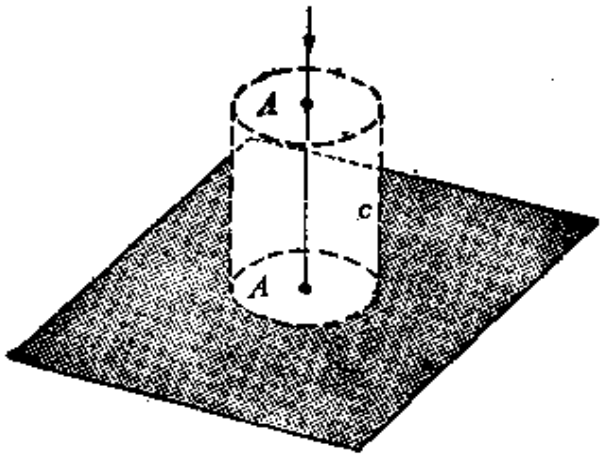


图 11-6　垂直入射时的辐射压强.

辐射压强为

$$P_{辐射}=2cP=2E=2\varepsilon_0\mathscr{E}^2.$$

这些结果可以推广到斜入射的情况 (图 11-7). 在斜入射的情况下，在一完全反射面上，每单位体积的辐射的动量变化为 $2P\cos\theta$，体积为 $cA\cos\theta$. 对应的辐射压强为

$$P_{辐射}=2cP\cos^2\theta=2E\cos^2\theta.$$

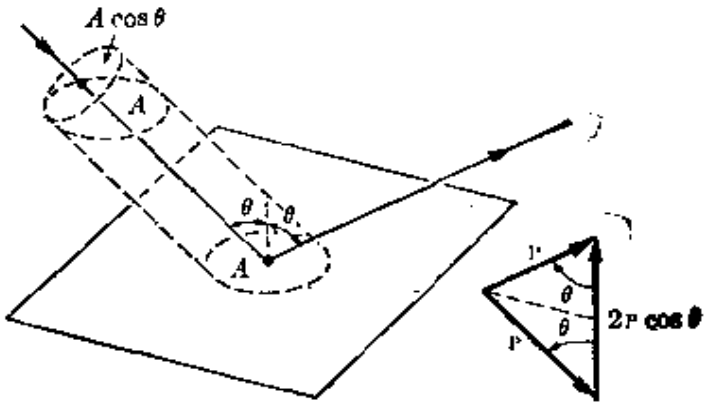


图 11-7　斜入射时的辐射压强. 右方示出动量图.

如果用分子速度 v 代替 c，并用 nmv 代替 P，则这个结果与投射在一个表面上的一束粒子所产生的压强相同. 如果这种辐射沿一切方向传播，则对一切方向积分后，得出

$$P_{辐射}=\frac{2}{3}cP=\frac{2}{3}E.$$

如果这个表面是一个完全吸收体，则垂直于这个表面的动量变化，减少到上

面确定的值的一半(因为不存在带有动量的反射波),于是得到

$$P = \frac{1}{3}E.$$

为了估算太阳辐射对地球表面的辐射压强,我们必须认为入射能量约为 $1.4\times10^{3}W\cdot m^{-2}$; 用 c 除这个能量,就得到对应的能量密度等于 $4.7\times10^{-6}J\cdot m^{-3}$. 假定地球是一个完全吸收体,并假定辐射来自一切方向,则辐射压强为 $P_{辐射}=\frac{1}{3}E=1.6\times10^{-6}Pa$. 应将这个压强与大气压强(约等于 $10^{5}Pa$) 加以比较.

11.4 振荡电偶极子的辐射

迄今为止,我们对电磁波的讨论,都没有涉及电磁波是怎样产生的;换句话说,都没有说明电磁波的源是什么. 电磁波的源显然和电磁场的源相同,即都是运动着的电荷. 如果给定一组运动着的电荷,则麦克斯韦方程(原则上)给出这些电荷产生的电磁场,因此也给出所产生的电磁波的性质. 我们不考虑作任意运动的电荷的麦克斯韦方程的通解(这是一个非常重要的理论问题,但它太复杂,不可能在本书中讨论). 我们将着重讨论特殊而重要的情况:一个振荡的电偶极子,一个振荡的磁偶极子和来自一般的加速电荷的辐射.

当电荷的运动能够用一个其电矩按规律 $\Pi=\Pi_0\sin\omega t$① 随时间变化的电偶极子来集体地描述时,就出现振荡电偶极子的情况. 例如,这种情况可以是广播电台的线性天线中的振荡电流,或者是原子内一个电子的轨道运动受扰动的情况. 当电偶极矩恒定时,所产生的唯一的场是电场,这已在第 1.9 节中说明;但当电偶极矩振荡时,电场也振荡,因而是与时间有关的. 因此,也存在一个磁场(安培-麦克斯韦定律). 之所以发生磁场,是因为一个振荡

① 在本章中,为了避免与动量和压强的符号混淆,我们用符号Π表示电偶极矩.

电偶极子相当于一个线性振荡电流，而电流总是产生磁场.

对于振荡电偶极子的情况求解麦克斯韦方程，是一个非常困难的数学问题，这里不拟论述. 但我们可以利用物理上的直观来确定它的一些主要特性. 在非常靠近电偶极子的那些点，电磁波的有限传播速度所引起的推迟效应，可以忽略不计，因为距离 r 非常小(见第 4.8 节的讨论). 这种情况下的电场与静止电偶极子所产生的电场相同，即与 r^3 成反比(见第 1.10 节的计算结果)，而磁场可忽略不计. 然而，在大距离处，波的有限传播速度引起场的改变. 对于在一切方向上振幅都相同的球面波，波方程的解已在第 10.13 节中给出. 这个解表示，在这情况下（虽然不存在球对称性，而只存在绕偶极子振荡轴的轴对称性），电磁场随距离变化的渐近行为由因子 $1/r$ 表示，而不象在小距离情况下是由因子 $1/r^3$ 表示. (这一点由麦克斯韦方程的实际解所证实.)此外，在大距离处，波阵面的一个小部分象一个平面波，电场垂直于传播方向（即径矢 r 的方向)，所以 $\mathscr{E}_r=0$.

如果我们假定 Z 轴的取向平行于振荡电偶极子，则可求出电场的量值为

$$\mathscr{E}=\frac{\Pi_0\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\sin(kr-\omega t), \qquad (11.20)$$

其取向如图 11-8 所示. 另一方面，由于振荡电偶极子对应于一个沿 Z 轴的电流，所以磁场平行于 XY 平面. 由关系式 $\mathscr{B}=\mathscr{E}/c$，得出磁场的量值为

$$\mathscr{B}=\frac{1}{c}\mathscr{E}=\frac{\Pi_0\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 cr}\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\sin(kx-\omega t), \qquad (11.21)$$

其取向如图 11-8 所示. 另外，$\mathscr{E}$ 和 $\mathscr{B}$ 相互垂直，并垂直于传播方向，注意，对于 $\theta=0$ 和 π，亦即对于 Z 轴上的点，$\mathscr{E}$ 和 $\mathscr{B}$ 都等于零. 因此，在振荡方向上，一个振荡电偶极子的电磁波的振幅等于

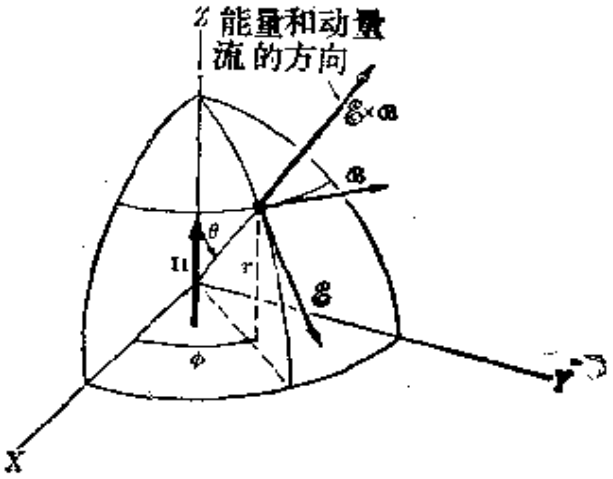


图 11-8　一个振荡电偶极子产生的电场和磁场.

零. 另一方面，对于 $\theta=\pi/2$，即对于 XY 平面上的点，$\sin\theta$ 有最大值. 因此，一个振荡电偶极子的电磁波的最大强度在这电偶极子的赤道面上. 这电磁波是线偏振的，其电场在一子午面内振荡. 图 11-9 中画出在一特定时刻，在这样一个子午面内的电力线. 每一个回线对应于一个完全振荡. 磁力线是一些平行于 XY 平面的圆，其中心在 Z 轴上.

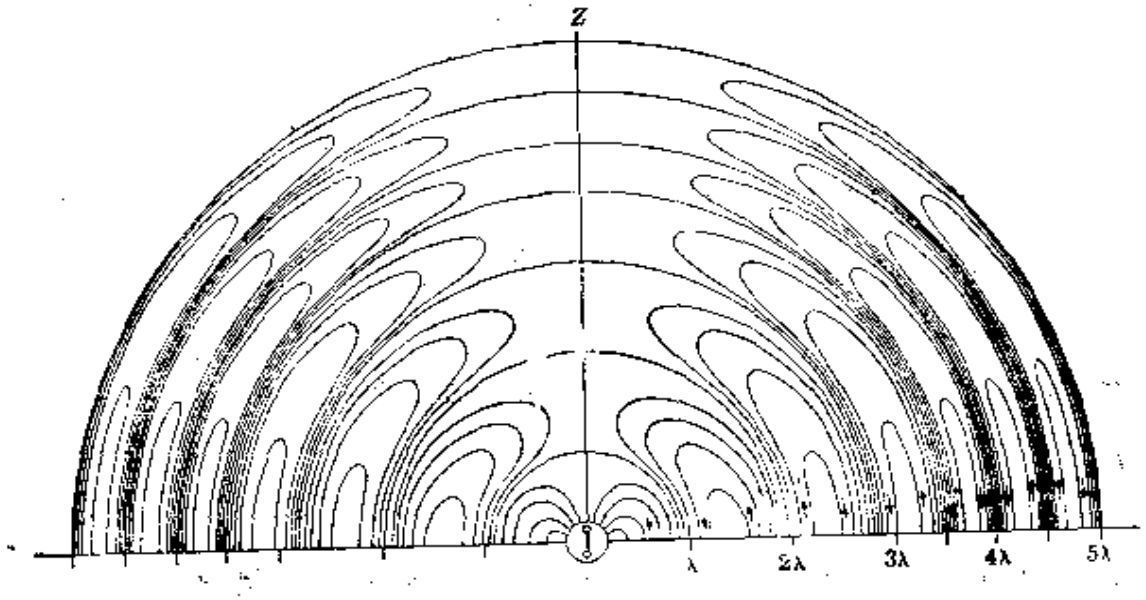


图 11-9　一个振荡电偶极子产生的电场线.

如图 11-8 所示，矢量 $\mathscr{E}\times\mathscr{B}$ 具有 r 的方向，这样，能量和动

量就沿着径向从电偶极子流出；因此，为了维持电偶极子的振荡，必须给它供应能量．利用方程(11.15)和(11.20)，我们求出在离振荡电偶极子很大距离处，波的能量密度为

$$\mathrm{E}=\varepsilon_0\mathscr{E}^2=\frac{\Pi_0^2\sin^2\theta\omega^4}{16\pi^2\varepsilon_0 r^2c^4}\sin^2(kr-\omega t).$$

由于$[\sin^2(kr-\omega t)]_{平均}=\frac{1}{2}$，所以平均能量密度为

$$\mathrm{E}_{平均}(\theta)=\frac{\Pi_0^2\omega^4}{32\pi^2c^4\varepsilon_0 r_2}\sin^2\theta. \tag{11.22}$$

这个电偶极子发出的电磁辐射的强度(即在传播方向上，每单位时间通过每单位面积的能量)为

$$I(\theta)_{平均}=c\mathrm{E}_{平均}(\theta)=\frac{\Pi_0^2\omega^4}{32\pi^2c^3\varepsilon_0 r^2}\sin^2\theta. \tag{11.23}$$

这个强度有两个重要特点．首先，它显示出与$1/r^2$成正比的关系，根据第10.13节中球面波的讨论，可以预期这个结果．此外，这个强度有一个与$\sin^2\theta$成正比的角关系．因此，电偶极子辐射的强度在赤道面上有最大值，而在振荡偶极子的轴上有零值．也就是说，一个振荡电偶极子不沿它的轴的方向辐射能量。图11-10中示出$I(\theta)$的角关系．

这个电偶极子每单位时间辐射的总能量可计算如下．由于这个能量沿径向流动，我们围绕这个偶极子画一个半径很大的球面(图11-11)．每单位时间通过小面积dS的平均能量为$I(\theta)_{平均}dS$，因此，每单位时间通过整个球面辐射的平均能量为

$$\left\langle\frac{dE}{dt}\right\rangle=\int_{球面}I(\theta)dS=\frac{\Pi_0^2\omega^4}{32\pi^2c^3\varepsilon_0 r^2}\int_{球面}[\sin^2\theta]_{平均}dS. \tag{11.24}$$

上式中积分的计算是一个数学练习，这里略去．结果是

$$\left\langle\frac{dE}{dt}\right\rangle=\frac{\Pi_0^2\omega^4}{12\pi\varepsilon_0c^3}. \tag{11.25}$$

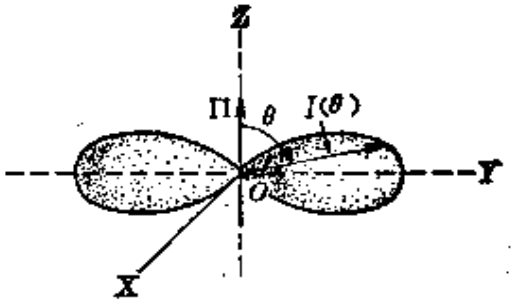


图 11-10　一个振荡电偶极子产生的电磁辐射强度的角关系.

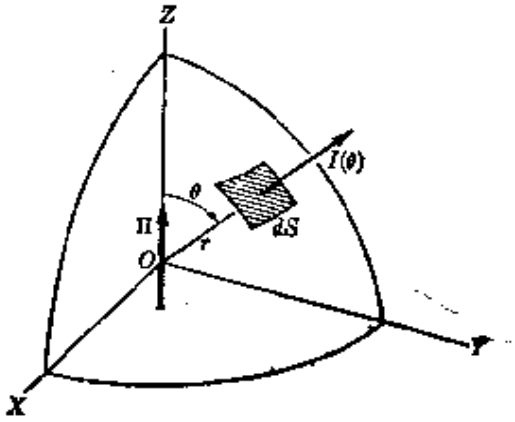


图 11-11　一个振荡电偶极子每单位时间辐射的总能量的计算.

由于电偶极矩可以写作 qz，这里 q 是振荡电荷，$z=z_0\sin\omega t$ 是这电荷沿 Z 轴的位移，所以 Π_0 可以用 qz_0 代替，这里 z_0 是振荡的振幅. 在许多情况下，振荡电荷是原子核内的一个质子，或者是原子内的一个电子，因而 q 等于基本电荷 $\pm e$. 于是方程(11.25)变为

$$\left\langle\frac{dE}{dt}\right\rangle=\frac{e^2z_0^2\omega^4}{12\pi\varepsilon_0c^3}. \tag{11.26}$$

对于原子中一个电子的情况，z_0 与原子的尺寸有相同的数量级，即约为 10^{-10}m. 再把其他常数的值代入，则对于原子的电偶极辐射，得到

$$\left\langle\frac{dE}{dt}\right\rangle\sim10^{-74}\omega^4\mathrm{W}.$$

在光波频段，ω 约为 10^{14} Hz，因此，$\langle dE/dt\rangle\sim10^{-18}$W，即约为 $10\mathrm{eV}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. 从工程的角度看，这个量是很小的，但从原子的观点看却是相当大的.

电偶极辐射是产生电磁波的最有效的方法之一，它是原子、分子和原子核发射(和吸收)电磁辐射的最重要的机制. 但是，讨论原子、分子和原子核的电偶极辐射时，必须使用量子力学的方法.

因此，这里和以后几节所阐述的结果，只给出有关量的数量级的大致估计．在量子力学的处理中要考虑的比较重要的实验结果之一是，原子不是连续地发射，而是一阵一阵地发射．必须说明的另一个实验结果是，原子(或分子、原子核)发射的辐射，是由每一种原子所特有的、完全确定的一组频率 ω_1，ω_2，ω_3，…组成的．这组频率叫作这种物质的发射光谱；这个事实已在第 2.7 节中提及．

如在讨论图 11-9 时所指出的，电偶极辐射是偏振的，它的电场总是在一子午面内．然而，人的眼睛似乎对于电磁波的偏振方向不敏感．然而，值得注意的是，某些昆虫似乎对偏振很敏感．此外，在大多数材料中，发出辐射的原子偶极子的取向是无规的，因此，在这种材料发射的总辐射中，观察不到净偏振．

例题 11.2 在电偶极子近似下，无线电台天线发射的功率．

解 一个简化的天线，就是一根长度为 z_0 的金属丝，在其中维持一个振荡电流．这电流与电荷之间的关系为 $I=dq/dt$，因而电流的振幅为 $I_0=q\omega$．因此，$\Pi_0=qz_0=I_0z_0/\omega$．把这个关系代入方程(11.25)中，得出

$$\left\langle\frac{dE}{dt}\right\rangle=\frac{I_0^2\omega^2z_0^2}{12\pi\varepsilon_0c^3}. \tag{11.27}$$

这个表达式表示用频率 ω 广播时所需的功率．根据欧姆定律应用于交流电路时的讨论(第 9.5 节)可知，维持一电流所需的平均功率为 $\frac{1}{2}RI_0^2$ [方程(9.30)]．于是，我们把方程(11.27)改写为如下形式：

$$\left\langle\frac{dE}{dt}\right\rangle=\frac{1}{2}\left(\frac{\omega^2z_0^2}{6\pi\varepsilon_0c^3}\right)I_0^2, \tag{11.28}$$

并根据类比，定义

$$R=\frac{\omega^2z_0^2}{6\pi\varepsilon_0c^3}=\frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left(\frac{z_0}{\lambda}\right)^2 \tag{11.29}$$

为天线的辐射电阻．根据辐射电阻的量纲，可以证明它的单位是欧姆．(当然，天线的总电阻等于辐射电阻与传导电阻之和．)将数值代入方程(11.29)中，得出 $R=787(z_0/\lambda)^2$ 欧姆．注意，关于线性天线的方程(11.28)和(11.29)都是利用电偶极子近似推导出来的，因此，仅当 z_0 比辐射的波长小很多时，这些方程才成立．

例如，我们考虑一个 30m 长的线性天线，它辐射频率为 5×10^6Hz 的电磁波，电流的方均根值为 20A．利用方程(11.29)和 $\omega=2\pi\nu=3.14\times10^8\text{s}^{-1}$，$z_0=30\text{m}$，得出辐射电阻 $R=1.97\Omega$．由于 $I_{方均根}=I_0/\sqrt{2}$（参看习题 9.28），所以 $I^2_{方均根}=\frac{1}{2}I_0^2$．因此，辐射的功率为

$$\left\langle\frac{dE}{dt}\right\rangle=RI^2_{方均根}\approx400\text{W}.$$

注意，在此情况下，$\lambda=c/\nu=600\text{m}$，所以 $z_0/\lambda\ll1$，因而能够利用这种近似．

11.5 振荡磁偶极子的辐射

另一种电磁波源是振荡磁偶极子．一个磁偶极子的场之间的相互关系，与一个电偶极子的相似，只不过电场和磁场的作用交换．

我们曾把一个磁偶极子定义为一个小电流回路，其磁矩为 $\mathscr{M}=IA$，式中 I 是电流，A 是回路的面积．假定这回路是在 XY 平面内，其中心在坐标系的原点（图 11-12）．如果这个电流以频率 ω 振荡，即 $I=I_0\sin\omega t$，则磁矩为 $\mathscr{M}=\mathscr{M}_0\sin\omega t$，式中 $\mathscr{M}_0=I_0A$．一个静止磁偶极子只产生一个恒定的磁场；但当磁偶极子振荡时，它在空间每一点产生的磁场也随时间变化．因此，还存在一个电

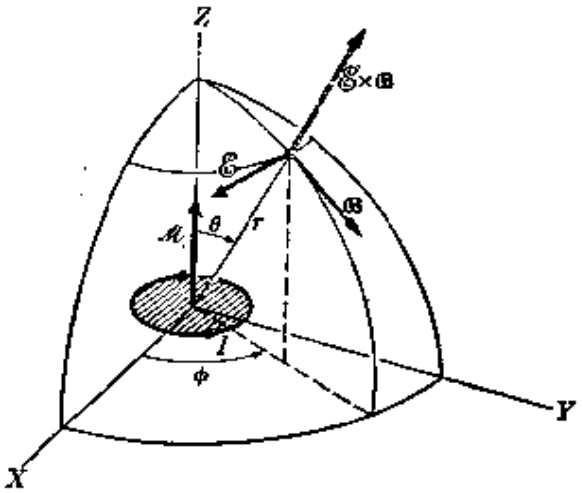


图 11-12 振荡磁偶极子产生的电场和磁场．

场，这正如我们在讨论法拉第-麦克斯韦定律时所讲的情况。

正如在振荡电偶极子的情况下那样，在这里我们不拟推导电场和磁场的精确表达式. 在靠近磁偶极子的点，电磁波的有限传播速度所引起的推迟效应，可忽略不计，因为距离 r 非常小. 这种情况下的磁场与静止磁偶极子的相似，即与 $1/r^3$ 成正比(见第 5.3 节)，而电场可忽略不计. 然而，在大距离处，波的有限传播速度引起场的显著改变. 如在振荡电偶极子的情况下那样，我们可以预期一个与 $1/r$(而不是与 $1/r^3$)成正比的渐近解. 电场与磁场都在垂直于波的传播方向的平面内振荡. 然而，在磁偶极子辐射的情况下，磁场是在一子午面内，而电场则沿横向，所以电力线是一些圆心在 Z 轴上的圆. 在这种近似下，电场和磁场分别为

$$\mathscr{E}=\frac{\mu_0 c}{4\pi}\frac{\mathscr{M}_0\sin\theta}{r}\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\sin(kr-\omega t) \qquad (11.30)$$

和

$$\mathscr{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathscr{M}_0\sin\theta}{r}\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\sin(kr-\omega t).$$

注意，关系式 $\mathscr{B}=\mathscr{E}/c$ 仍然成立. 一个振荡磁偶极子的 $\mathscr{E}$ 场和 $\mathscr{B}$ 场的相对取向如图 11-12 所示. 矢量 $\mathscr{E}\times\mathscr{B}$ 仍沿径向朝外. 这种波是平面偏振的，其磁场在子午面内振荡. 换句话说，相对于电偶极子的波而言，偏振面转过 90°.

根据与振荡电偶极子情况下相同的推理，一个振荡磁偶极子发射的辐射的平均能量密度为

$$\mathrm{E}_{\text{平均}}(\theta)=\varepsilon_0\mathscr{E}^2_{\text{平均}}=\frac{\mathscr{M}_0^2\omega^4}{32\pi^2\varepsilon_0 c^6 r^2}\sin^2\theta, \qquad (11.31)$$

式中利用了 $\mu_0=1/\varepsilon_0 c^2$. 磁偶极子发射的辐射的强度为 $I(\theta)_{\text{平均}}=c\mathrm{E}_{\text{平均}}(\theta)$，它在偶极子轴($Z$ 轴)上也等于零，而在赤道面上有最大值，这个情况与振荡电偶极子的情况相同. 振荡磁偶极子每单位时间辐射的平均能量为

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = \frac{\mathscr{M}_0^2 \omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^5}. \tag{11.32}$$

求出这个结果所用的方法，与对于电偶极子所用的方法相同.

在原子中一个电子的情况下，根据方程(7.13)，我们有 $\mathscr{M}_c = -(e/2m_e)L$，式中 L 是这个电子的轨道角动量，所以

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = \frac{(e/2m_e)^2 L^2 \omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^5}. \tag{11.33}$$

量 $e/2m_e = 8.794\times10^{10}\mathrm{C\cdot kg^{-1}}$，角动量 L 约等于 $10^{-34}\mathrm{J\cdot s^{-1}}$(见方程 7.24)，所以

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle \approx 10^{-79}\omega^4 \mathrm{W}.$$

把这个结果与电偶极子的相应结果加以比较，我们可以断定，对于原子(以及分子)而言，磁偶极辐射的强度与电偶极辐射的强度之比约为 10^{-5}. 因此，对于相同的频率，原子的磁偶极辐射与电偶极辐射相比可以忽略不计，仅当电偶极辐射不存在时，才必须考虑它. 实际上，由于 $L = mrv$，而 r_0 与 z_0 的数量级相同，我们得出：

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle_{\text{磁偶极子}} \approx \left(\frac{v}{c}\right)^2 \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle_{\text{电偶极子}};$$

因此，仅当电子速非常大时，二者才不相上下.

例题 11.3 天线的磁偶极辐射.

解 把方程(11.32)应用于一个 $\mathscr{M}_0 = I_0 A$ 的辐射着的圆形天线，就得出激励这天线所需的平均功率为

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = \frac{I_0^2 A^2 \omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^5}. \tag{11.34}$$

此式与电偶极天线辐射的方程(11.27)加以比较，得出

$$\frac{\langle dE/dt\rangle_{\text{磁偶极子}}}{\langle dE/dt\rangle_{\text{电偶极子}}} = \left(\frac{A\omega}{z_0 c}\right)^2.$$

然而，$\omega/c = k = 2\pi/\lambda$，$A$ 的数量级为 z_0^2. 因此

$$\frac{\langle dE/dt\rangle_{\text{磁偶极子}}}{\langle dE/dt\rangle_{\text{电偶极子}}} \approx \left(\frac{2\pi z_0}{\lambda}\right)^2. \tag{11.35}$$

因为对于广播天线来说，z_0 通常比 λ 小很多，我们再一次得出结论：磁偶极辐射比电偶极辐射弱得多.

对于一个原子，z_0 约等于 10^{-10}m，在光波频段 λ 约为 10^{-7}m，于是方程(11.35)中的比率约等于 10^{-6}，这和前面的估计一致. 另一方面，对于原子核，z_0 约等于 10^{-14}m，λ 约为 10^{-12}m，所以(11.35)中的比率约等于 10^{-2}.

例题 11.4 环形天线的辐射电阻.

解 考虑一个 30 米长的圆形天线，它载有一个振荡频率为 5×10^6Hz，方均根值为 20A 的电流.（这些值与例题 11.2 中所用的值相同.）我们把方程(11.34)改写为

$$\left\langle\frac{dE_1}{dt}\right\rangle=\frac{1}{2}\left(\frac{A^2\omega^4}{6\pi\varepsilon_0c^5}\right)I_0^2,$$

亦即使它具有 $\langle dE/dt\rangle=\frac{1}{2}RI_0^2$ 的形式. 于是得出环形天线的辐射电阻为

$$R=\frac{A^2\omega^4}{6\pi\varepsilon_0c^5}=\frac{8\pi^3}{3}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left(\frac{A}{\lambda^2}\right)^2=31170\left(\frac{A}{\lambda^2}\right)^2\Omega.$$

在这个情况下，半径$=30/2\pi$m，面积 $A=900/4\pi=71.6$m^2. 因此，$R=1.23\times10^{-3}\Omega$. 辐射的平均功率为

$$\left\langle\frac{dE}{dt}\right\rangle RI_{\text{方均根}}^2=0.25\text{W}.$$

应将这些结果与例题 11.2 中的结果加以比较.

11.6 高阶振荡多极子的辐射

在前两节中我们讨论了电偶极子和磁偶极子的辐射. 但在第一章和第五章中，我们讨论了与不同电荷和电流排布相联系的高阶多极子(电的和磁的). 如果这些多极子振荡，它们就产生电磁波. 这些电磁波的角分布和偏振状态，都与偶极子的波不同. 一般而言，与具有相同线度和相同频率的偶极子相比，多极子的阶越高，辐射的强度就越低. 也就是说，电偶极辐射是原子系统中最重要的辐射机制. 例如，如果 r_0 是这个系统的线度的数量级，λ 是波长，则电四极辐射与电偶极辐射之比约为$(r_0/\lambda)^2$. 对于原子，r_0

约为 10^{-10}m；对于可见光，λ 约为 10^{-7}m，所以 $(r_0/\lambda)^2$ 约等于 10^{-6}. 另一方面，对于原子核，r_0 约为 10^{-14}m，λ 约为 10^{-12}m，所以 $(r_0/\lambda)^2$ 约为 10^{-4}，因而电四极辐射相对而言比较重要. 注意，电四极辐射与磁偶极辐射有相同的量级. 虽然高阶多极辐射比偶极辐射弱得多，但是，为了说明某些原子核中的一些跃迁，必须考虑电四极甚至电八极辐射.

11.7 加速电荷的辐射

在第 11.4 节和第 11.5 节中讨论过的电磁辐射，是和两种特殊的电荷组态联系着的. 我们现在要讨论一般的辐射产生，即起因于带电体的加速度的辐射. 然而，我们首先必须了解为什么一个未加速的电荷不辐射.

考虑一个匀速运动的电荷，亦即一个以恒定速度 v 运动的电荷. 这样一个电荷的电场和磁场，已在第 4.7 节中讨论过. 电场是径向的，而磁场是横向的，它的圆形力线与运动所沿的直线同心. 图 11-13 中示出在四个对称点 P_1, P_2, P_3 和 P_4 处的电场 $\mathscr{E}$ 和磁场 $\mathscr{B}$. 在每一点还画出了矢量 $\mathscr{E}\times\mathscr{B}$. 由此图可以看出，由于对称性，$\mathscr{E}\times\mathscr{B}$ 的垂直于运动方向的分量的贡献互相抵消；$\mathscr{E}\times\mathscr{B}$ 的平行于运动方向的分量都沿朝前的方向，并且彼此相加. 因此，在电荷的运动方向上有一净能量流；从物理的观点看，这是可以理解的，因为这粒子携带着这个场(因而也携带着这个场的能量和动量). 在实验室参照系中，在运动电荷后方的点上，电磁场减小；在电荷前方的点上，电磁场增加同样的量. 沿电荷运动方向的能量转移，引起能通量.

为了查明一个匀速运动电荷是否辐射能量，我们必须计算矢量 $\mathscr{E}\times\mathscr{B}$ 穿过一个包围这个电荷的闭合面的通量. 对于一个闭合面，利用方程(11.18)得出

$$\frac{dE}{dt}=c^2\varepsilon_0\oint_S \mathscr{E}\times\mathscr{B}\cdot u_N dS.$$

我们取一个半径为 r，与这个电荷同心的球面，作为闭合面．由图 11-13 可以看出，矢量 $\mathscr{E}\times\mathscr{B}$ 在这球面的一切点上，都与这球面相切，因而处处都与垂直于这个表面的单位矢量 u_N 垂直．因此，

$$\mathscr{E}\times\mathscr{B}\cdot u_N=0,$$

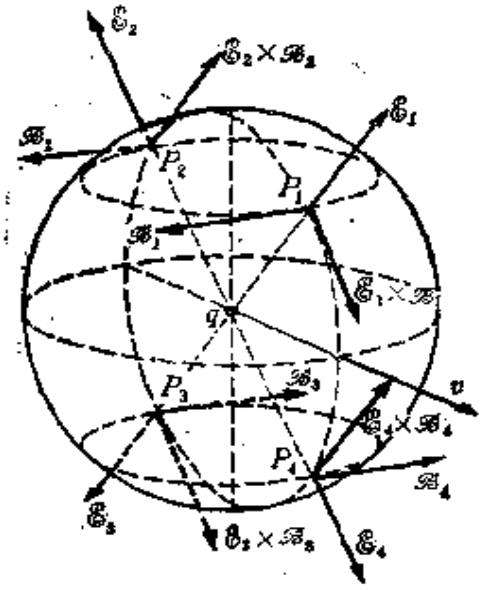


图 11-13　一个匀速运动电荷的电场和磁场．

因而穿过这球面的净能通量等于零．于是我们得出如下结论：

一个作匀速直线运动的电荷不辐射电磁能，但它携带着电磁场的能量．

由于在这个电荷的惯性参照系中，这个场是静态的，而且能量保持恒定，所以在实验室参照系中总能量也必须保持恒定．只有一个沿着电荷运动方向的稳恒能流．

对于一个作加速运动的电荷，情况就大不相同．一个加速运动电荷的电场不再是径向的，也不再具有当电荷匀速运动时存在的那种左至右对称性．由于这个场很复杂，这里不拟给出它的表达式；但它的力线的图样类似于图 11-14 所示的形状．当这电荷

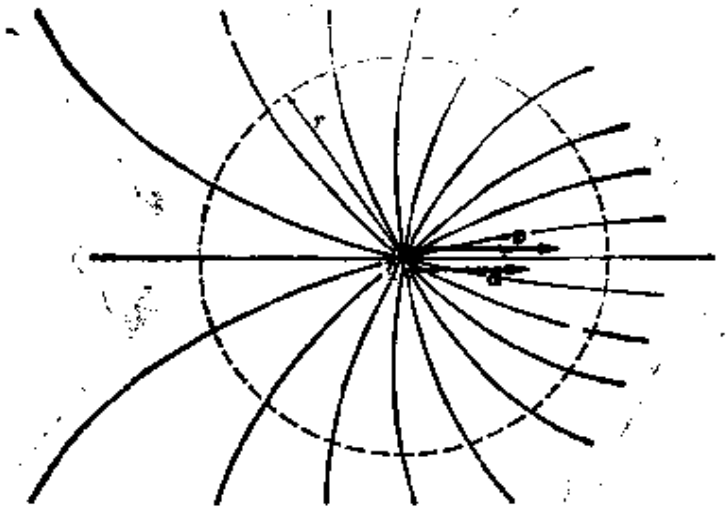


图 11-14　一加速电荷产生的电力线.

运动时，左边的场减小，而右边的场增大. 但是由于加速度，场的增大(对应于新的、更大的速度)大于先前存在的场的减小(对应于较早的、较小的速度). 因此，净的过剩能量必然被转移到整个空间来建立场. 因此，

一个加速电荷辐射电磁能.

因此，在外力作用下的带电粒子的运动方程，必须加以修改，以考虑能量的辐射. 以前没有考虑这个因素，因为在大多数实际情况下，加速度很小，速度比 c 小得多，这种辐射可忽略不计.

利用场 $\mathscr{E}$ 和 $\mathscr{B}$ 的适当值，可以证明，如果被加速电荷相对于观察者暂时静止或者缓慢运动（因而波的有限传播速度所引起的推迟效应可以忽略不计)，则通过以这个电荷为中心、半径为 r 的球面，每单位时间辐射的能量为

$$\frac{dE}{dt}=\frac{q^2a^2}{6\pi\varepsilon_0c^3}, \tag{11.36}$$

式中 a 是这个电荷的加速度. 这个结果叫做拉莫尔公式. 对于一个沿 Z 轴作简谐运动的振荡电荷，加速度为 $a=-\omega^2z$，因而对于这个振荡电荷，拉莫尔公式为

$$\frac{dE}{dt}=\frac{q^2z^2\omega^4}{6\pi\varepsilon_0c^3}.$$

为了求出辐射的平均能量，我们用$(z^2)_{平均}=\frac{1}{2}z_0^2$代替$z^2$. 把这个值代入上式，拉莫尔公式就变为方程(11.26)，这个方程给出一个振荡电偶极子辐射的能量.

由加速电荷的研究得出的一个重要结论是，为了维持一个电荷作加速运动，必须对它供给能量，以补偿由于辐射而损失的能量. 例如，当一个离子在一台直线加速器，例如一台范德格喇夫加速器中被加速时，供给这离子的一部分能量作为电磁辐射而损失. 然而，除相对论性能量的情况之外，这种损失是可以忽略不计的.

如果加速度平行于速度，则辐射能的分布与图11-10所示电偶极子的情况相似，只要粒子的速度比光速小很多. 也就是说，利用方程(11.23)，并作某些改变(用$q^2z_0^2$代替Π_0^2，用加速度a代替$z_0\omega^2$，并且注意，我们用的是瞬时值，而不是平均值，因此必须去掉因子 1/2)，可以把与速度方向成θ角的方向上的辐射强度表示为

$$I(\theta)=\frac{q^2a^2}{16\pi^2c^3\varepsilon_0r^2}\sin^2\theta. \qquad (11.37)$$

角分布$I(\theta)$相对于通过这个电荷并垂直于其运动方向的平面是对称的，如图 11-15 所示. 但在高能区域，一加速电荷辐射的能量强度的最大值在一锥面上，这锥面的取向沿这粒子的运动方向；这也在图 11-15 中示出. 当粒子的速度增大时，锥面的张角减小.

如果这个粒子减速，而不是加速，表达式(11.36)仍然成立. 辐射的能量是在每一时刻由于电荷速度的减小，电磁场所额外具有的能量. 例如，当一快速电荷，例如一个电子或质子，轰击一个靶时，就出现这种情况. 这电荷的总能量的相当大一部分作为辐射而射出，这种辐射叫做减速辐射，或者，更一般地称之为韧致辐射(图 11-16). 这个过程是物理学、医学和工业应用中使用的 X 射

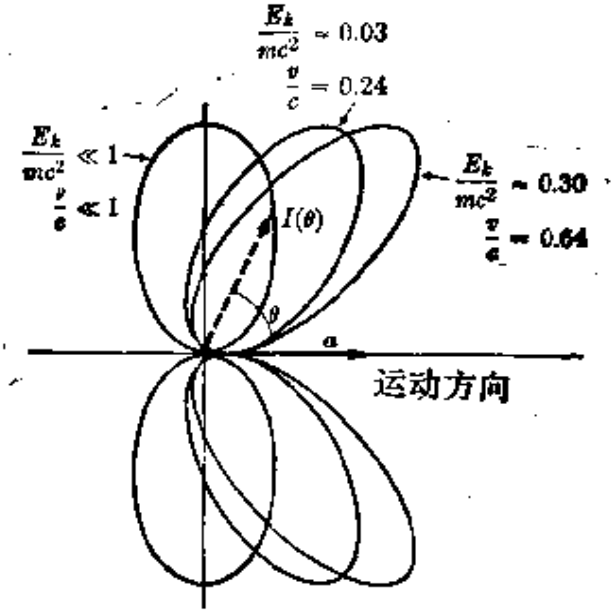


图 11-15　对于不同的 v/c 值和动能 E_k，一加速电荷发射的辐射的角分布.

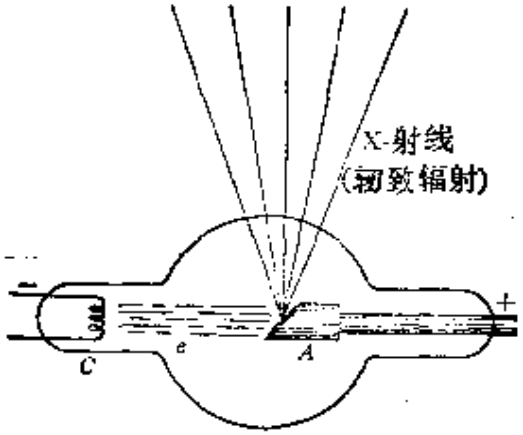


图 11-16　一个电荷轰击 X 射线管的靶 A 而被减速时所发射的辐射.
靶材料必须具有高熔点，而且必须使靶连续冷却.

线管中产生辐射的主要机制.

虽然在图 11-15 所示情况中加速度的方向与运动方向相同，但这个讨论适用于任何一种有加速度的运动. 例如，一个沿圆轨道运动的带电粒子具有向心加速度，因而发射辐射. 因此，当一个离子在一台循环加速器，例如回旋加速器、电子感应加速器或同步加速器中加速时，供给这个离子的能量的一部分将作为电磁辐射而

损失. 这个效应在循环加速器中比在直线加速器中相对地更为重要，因为在循环加速器中加速度一般较大. 我们先前关于回旋加速器和电子感应加速器的讨论中没有考虑这个事实，因为当所涉及的能量不很大和加速度小时，可以不考虑这种效应.

当粒子达到高能量时，例如在同步加速器中，在这里加速度非常大，辐射所引起的损失(叫做同步加速辐射)就变得很大. 在建造极高能量的循环加速器时，这种损失构成严重的限制. 当一个在磁场中被俘获的粒子作螺线运动时(见第 4.3 节的讨论)，这粒子也发射同步加速辐射. 由于电磁辐射主要是在垂直于加速度的方向上发射(见图 11-15)，而加速度指向螺旋线的轴并垂直于速度，所以同步加速辐射主要是在运动的方向上，在一个锥体内发射，这锥体的轴与电子的路径相切，如图 11-17 所示. 来自被地球磁场

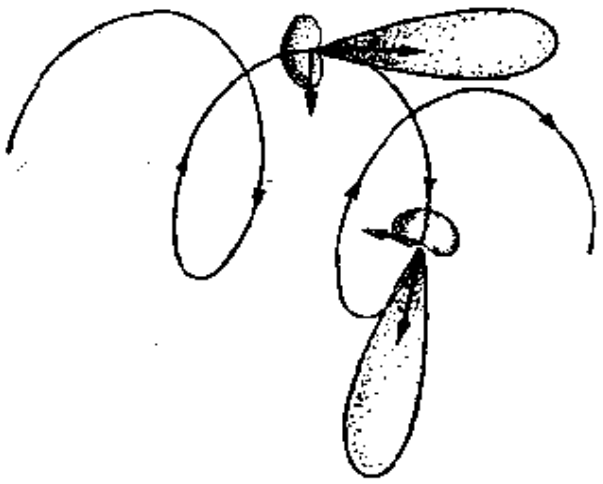


图 11-17　在一磁场中运动的粒子的同步加速辐射. 图中示出两个位置上的强度的角分布. 图中还示出速度和加速度的方向.

俘获的带电粒子的辐射，或者来自太阳黑子的辐射，或者来自某些更远的天体(例如某些星云)的辐射，表现出同样的特性. 图 11-18 中示出蟹状星云的四张照片. 接收到的辐射，其频率范围从射频延伸到远紫外，被认为是来自能量高达 10^{12}eV 的电子的同步加速

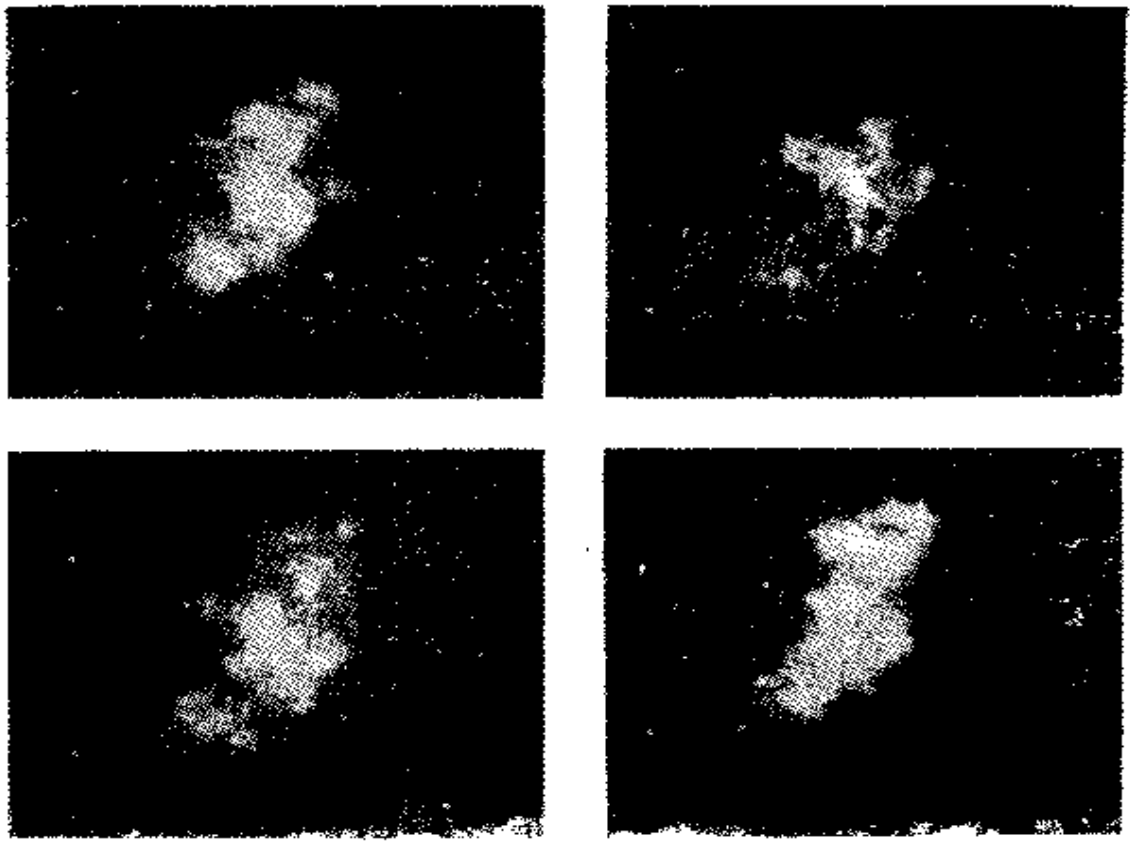


图 11-18　来自蟹状星云的同步加速辐射．每一张照片都是通过这样一个装置而拍摄的，这个装置只接受其电矢量如图中所示的辐射．这些照片不同这个事实，表明这种辐射是偏振的．

辐射，这些电子在约为 10^{-8}T 的磁场中沿圆形或螺旋形轨道运动．这种辐射表现出很强的偏振，这可以从照片的不同而看出；这些照片是通过一个起偏振滤光器拍摄的，这个滤光器只容许电场沿规定方向的辐射被拍摄．箭头表示电场的方向．

另一个重要问题与原子结构有关系．在第 7.3 节中我们曾指出，由于卢瑟福的 α 粒子散射实验，我们把原子设想为由中心的带正电的核和绕核沿闭轨道运动的带负电的电子组成的．然而，这个概念表示，电子是在作加速运动；如果应用本节所讲的概念，则一切原子将不断地辐射能量．由于这种能量损失，电子的轨道将收缩，因而一切物体的尺寸也要相应地收缩．当然，如果一切物

体完全相同，这种收缩是不可能探测出来的，因为它对被测物体和测量直尺的影响相同．然而，由于不同元素的原子不同，它们会以不同的速率收缩，因而这种效应会是显著的．但是，不论是物质的收缩，还是与这种收缩相联系的连续辐射，都没有观察到．因此，必须作出如下结论：原子中电子的运动是受我们迄今尚未考虑的另外一些原理支配的．这种行为可以根据量子力学原理来说明．

例题 11.5 对于一个加速电荷的任意速度和加速度的任意方向，计算它每单位时间辐射的能量．

解 拉莫尔公式，即方程(11.26)，仅当这粒子相对于一个观察者暂时静止时，才是严格正确的．为了求出这个粒子所辐射能量的值(这个值是一个看到这个粒子以速度 v 运动的观察者测得的)，我们只需对那个表达式中涉及的各个量作洛伦兹变换．假定这个电荷相对于一个使用参照系 $X'Y'Z'$ 的观察者 O' 是暂时静止的，方程(11.36)是

$$\frac{dE'}{dt'}=\frac{q^2a'^2}{6\pi\varepsilon_0c^3},$$

对于一个在参照系 XYZ 中看到这个粒子以速度 v 运动的观察者 O，dE'，dt' 由 dE/dt 代替，这里 dt 和 dt' 是各自的时间间隔．由于这两个时间间隔对应于 $X'Y'Z'$ 中的同一点，所以它们之间的关系为：$dt=dt'/\sqrt{1-v^2/c^2}$[见第一卷的方程(6.36)]．类似地，dE 和 dE'(它们是一个相对于 $X'Y'Z'$ 的动量为零的粒子的能量变化)之间的关系为 $dE=dE'/\sqrt{1-v^2/c^2}$[见第一卷的方程(11.24)]．(另一种推理是，记住 E/c 象 ct 那样变换，因为它们都是四元矢的第四分量．)因此，$dE/dt=dE'/dt'$．

为了变换拉莫尔公式的右方，两个观察者所测得的这个粒子的加速度之间的关系为

$$a'^2=\frac{a^2-(v\times a)^2/c^2}{(1-v^2/c^2)^3}$$

(见第一卷的习题 6.40)．因此，

$$\frac{dE}{dt}=\frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0c^3}\frac{a^2-(v\times a)^2/c^2}{(1-v^2/c^2)^3} \tag{11.38}$$

这个结果叫做李纳德公式，是在相对论问世之前，由李纳德(A. Liénard)于

1898年首先推导出来的. 能够证明, 李纳德公式已经包括电磁辐射的有限传播速度所引起的推迟效应.

如果加速度平行于速度, 则 $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a}=0$, 因而方程(11.38)化为

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_s=\frac{q^2a^2}{6\pi\varepsilon_0c^3(1-v^2/c^2)^3}. \tag{11.39}$$

必须用这个公式来估计直线加速器中的辐射损失. 另一方面, 当加速度垂直于速度时(如在圆轨道的情况下), $(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a})^2=v^2a^2$, 因而方程(11.38)化为

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_s=\frac{q^2a^2}{6\pi\varepsilon_0c^3(1-v^2/c^2)^2} \tag{11.40}$$

这个公式被用于计算同步加速辐射. 在这两种情况下, 当 v 趋近于 c 时, dE/dt 都非常迅速地增大. 当速度非常低时 ($v\ll c$), 表达式 (11.39) 和 (11.40) 都变为方程(11.36).

例题 11.6 在范德格喇夫加速器中被加速的质子辐射的能量.

解 如果 t 是质子通过加速管的长度所需的时间(假定这运动是非相对论性的), v 是质子的末速度, 则 $v=at$. 对于这样一个假定, 方程(11.36)适用. 注意, 加速度 a 是恒定的, 在时间 t 内这质子因辐射而损失的总能量[在方程(11.36)中令 $v=at$, $q=e$]为

$$E_{\text{辐射}}=\left(\frac{dE}{dt}\right)t=\frac{e^2v^2}{6\pi\varepsilon_0c^3t}.$$

然而, 如果 s 是加速管的长度, 则 $s=\frac{1}{2}at^2=\frac{1}{2}(at)t=\frac{1}{2}vt$, 由此得 $t=2s/v$. 代入上式, 则得

$$E_{\text{辐射}}=\frac{e^2v^3}{12\pi\varepsilon_0c^3s}.$$

另一方面, 这质子通过电势差 V 所获得的动能为 $E_k=\frac{1}{2}m_pv^2=eV$. 因此,

$$\frac{E_{\text{辐射}}}{E_k}=\frac{e^2v}{6\pi\varepsilon_0c^3m_ps}=\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0c^3m_ps}\left(\frac{2eV}{m_p}\right)^{1/2},$$

因为 $v=(2eV/m_p)^{1/2}$. 对于一台 2.0m 长, 电势差为 5×10^6V 的加速器, 我们求出 $E_{\text{辐射}}/E_k=1.7\times10^{-20}$. 由此可见, 对于这台加速器来说, 质子的辐射损失可以忽略不计.

例题 11.7 一个质子在一台回旋加速器中转一圈所辐射的能量.

解 这质子在一半径为 r 的圆轨道上的加速度为 $a=\omega^2r=4\pi^2\nu^2r$. 只要能量不大, 相对论效应就可忽略不计. 于是, 将 $q=e$ 代入方程(11.36)中,

则得

$$\frac{dE}{dt}=\frac{e^2(4\pi^2\nu^2r)^2}{6\pi\varepsilon_0c^3}=\frac{8\pi^3e^2\nu^4r^2}{3\varepsilon_0c^3}.$$

由于转一圈所需时间为 $1/\nu$，所以转一圈所辐射的能量为

$$E_{辐射}=\left(\frac{dE}{dt}\right)\frac{1}{\nu}=\frac{8\pi^3e^2\nu^3r^2}{3\varepsilon_0c^3}.$$

当然，这个表达式并不表示这质子辐射的总能量，因为我们还必须考虑这质子通过 D 形电极间隙而加速时所辐射的能量. 然而，简单的计算表明，相对而言，这个能量比"同步加速"辐射要小得多. 由于质子转一圈要通过 D 形电极间隙两次，所以每转一圈质子所获得的最大动能为 $E_k=2eV_{max}$，于是得出

$$\frac{E_{辐射}}{E_k}=\frac{8\pi^3e^2\nu^3r^2}{3\varepsilon_0c^3(2eV_{max})}=\frac{4\pi^3e\nu^3r^2}{3\varepsilon_0c^3V_{max}}.$$

对于一台半径为 0.92m，外加场频率为 1.5×10^7Hz，电势差峰值为 2×10^4V 的回旋加速器，求得 $E_{辐射}/E_k=4.0\times10^{-15}$. 在这种情况下，也是 $E_{辐射}$ 比 E_k 小得多；但相对而言，这里的 $E_{辐射}$ 比前面例题中直线加速器的 $E_{辐射}$ 更重要.

习　题

11.1　写出描写下列沿 X 方向传播的电磁波的 $\boldsymbol{E}$ 场和 $\boldsymbol{H}$ 场的方程：(a) 振动平面与 XY 平面成 45° 角的线偏振波，(b) 振动平面与 XY 平面成120° 角的线偏振波，(c) 右旋圆偏振波，(d) 右旋椭圆偏振波，椭圆的长轴平行于 Y 轴，且为短轴的 2 倍.

11.2　(a) 描述下列方程所表示的波的偏振状态：

(I) $\mathcal{E}_y=A\cos\omega(t-x/c)$

$\mathcal{E}_z=A\sin\omega(t-x/c)$

(II) $\mathcal{E}_y=A\cos\omega(t-x/c)$

$\mathcal{E}_z=-A\cos\omega(t-x/c)$

(III) $\mathcal{E}_y=A\cos\omega(t-x/c)$

$\mathcal{E}_z=A\cos[\omega(t-x/c)-3\pi/4]$

(IV) $\mathcal{E}_y=A\cos\omega(t-x/c)$

$\mathcal{E}_z=A\cos[\omega(t-x/c)+\pi/4]$.

(b) 写出每一种情况下磁场的方程，指出波前进时磁场怎样变化.

11.3　一真空中的平面电磁波的电场由下式表示：

$$\mathscr{E}_x=0$$

$$\mathscr{E}_y=0.5\cos[2\pi\times10^8(t-x/c)]\mathrm{N\cdot C^{-1}},$$

$$\mathscr{E}_z=0.$$

(a) 求这个场的波长、偏振状态和传播方向. (b) 写出这个波的磁场的表达式. (c) 计算平均强度即每单位面积的能通量.

11.4 对于下式所表示的波, 求习题 11.3 的(a)、(b)和(c)的解:

$$\mathscr{E}_x=0$$

$$\mathscr{E}_y=0.5\cos[4\pi\times10^7(t-x/c)]\mathrm{N\cdot C^{-1}},$$

$$\mathscr{E}_z=0.5\sin[4\pi\times10^7(t-x/c)]\mathrm{N\cdot C^{-1}}.$$

11.5 考虑下式所表示的波:

$$\mathscr{E}_x=\mathscr{E}_0\cos2\pi(t/P-x/\lambda),$$

$$\mathscr{E}_z=\mathscr{E}_0\cos2\pi(t/P-x/\lambda+1/8).$$

(a)在时刻(i) $t=0$, (ii) $t=P/4$和 在点 $x=0, x=\lambda/4, x=\lambda/2, x=\lambda$, 计算电矢量的量值和电矢量与 Y 轴所成的角. (b)对于每一种情况写出合磁场.

11.6 一个波长为 $\lambda=5.0\times10^{-7}\mathrm{m}$ 的平面正弦线偏振光波在真空中传播. 平均强度为 $0.1\mathrm{W\cdot m^{-2}}$. 传播方向在 XY 平面内, 与 X 轴成 45° 角. 电场平行于 Z 轴振荡. 试写出描写这个波的电场和磁场的方程.

11.7 一个波长为 $\lambda=5\times10^{-7}\mathrm{m}$ 的平面正弦线偏振电磁波, 在真空中沿 X 轴方向传播. 这个波每单位面积的平均强度为 $0.1\mathrm{W\cdot m^{-2}}$, 电场的振动面平行于 Y 轴. 写出描写这个波的电场和磁场的方程.

11.8 一平面电磁波的电场的振幅为 $10^{-2}\mathrm{N\cdot C^{-1}}$. 试求(a) 磁场的振幅, (b) 每单位体积波的能量. (c) 如果这个波投射到一物体上而被完全吸收, 试求辐射压强. (d) 如果这物体是一个完全反射体, 重作此题.

11.9 来自太阳的电磁辐射以 $1.4\times10^3\mathrm{W\cdot m^{-2}}$ 的速率投射到地球表面. 假定这种辐射可以看成平面波, 试求这个波中电场和磁场振幅的量值.

11.10 假定一盏效率为 80% 的100W 电灯, 把它的全部能量各向同性地辐射出来. 试计算在离这灯 2m 处, 电场和磁场的振幅.

11.11 一台收音机接收的无线电波的电场的最大振幅等于 $10^{-1}\mathrm{N\cdot C^{-1}}$. 假定这个波可以看作平面波, 试计算 (a) 磁场的振幅, (b) 这个波的平均强度, (c) 平均能量密度. (d) 假定这台收音机离广播电台的距离为 1km, 而且广播电台各向同性地辐射能量, 试求这个电台的功率.

11.12 两个谐电磁波, 具有相同的频率 ν_0 和相同的振幅 $\mathscr{E}_0$, 在真空中

分别沿X轴和Y轴方向传播. 两个波的电场都平行于Z轴. 对于这两个波叠加而形成的波, 试计算: (a) 电场$\mathscr{E}$的分量, (b) 磁场$\mathscr{B}$的分量, (c) 能量密度E, (d) 坡印廷矢量的分量.

4.13 试证明一平面谐波的坡印廷矢量的平均值为$\frac{1}{2}c\varepsilon_0\mathscr{E}_0^2$ 或 $\mathscr{E}_0\mathscr{B}_0/2\mu_0$. 与方程(11.17)比较.

11.14 试证明: 如果一个振荡电荷系各向同性地辐射电磁能, 则在距离r处坡印廷矢量的平均值为

$$\frac{1}{4\pi r^2}\left(\frac{dE}{dt}\right)_{平均}.$$

11.15 一个振荡电荷系(电荷集中在一点附近)以10^4W的速率辐射能量. 假定这能量是各向同性地辐射出去. 对于离源1m的点, 试求: (a) 坡印廷矢量的平均值, (b) 电场和磁场的振幅, (c) 能量密度和动量密度. (提示: 注意, 在离源很大的距离处, 波阵面的一个小部分可以视为平面.)

11.16 一气体光源发射波长为5×10^{-7}m的光. 假定每一个分子起着一个电荷为e、振幅为10^{-10}m的振子的作用. (a) 计算一个分子的平均能量辐射速率. (b) 如果这个光源的总能量辐射速率为1W, 试问: 有多少个分子同时发射?

11.17 对于一个原子核中的质子, 估算方程(11.25)所表示的$(dE/dt)_{平均}$的值. 假定z_0约为10^{-15}m, 对于低能γ射线ν约为5×10^{20}Hz.

11.18 一个带电粒子以速度v垂直于磁场$\mathscr{B}$运动, 试求它的能量辐射速率的表达式.

11.19 (a) 一个氢原子中电子的动能为13.6eV, 其轨道半径为5.3×10^{-11}m. 假定例题11.7的理论能够应用, 试计算每秒钟和每转一圈所辐射的能量. (b) 对于一个在1m半径的圆轨道上的50keV的电子, 重作此题. (c) 对于一个在1m半径的圆轨道上的50keV的质子, 重作此题.

较难的习题

11.20 一个广播电台的平均功率为10^5W. 假定这个功率在一个以这电台为中心的任意半球上均匀地辐射出来, 对于离源10m的一点, 求坡印廷矢量的值, 以及电场和磁场的振幅. 假定在这个距离上, 这个波是平面波.

11.21 一雷达发射机在一个立体角为10^{-2}球面度的圆锥内发射它的

能量. 在离发射机 10^3m 处, 电场的振幅为 $10\mathrm{N}\cdot\mathrm{C}^{-1}$. 试求磁场的振幅和发射机的功率.

11.22 试证明, 如果

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}_0\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t),$$

则条件 $\mathrm{div}\boldsymbol{V}=0$ 表示 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{V}_0=0$, 亦即 $\boldsymbol{k}$ 垂直于 $\boldsymbol{V}_0$. 根据方程(8.34), 这证明, 在真空中, $\mathscr{E}$ 和 $\mathscr{B}$ 都垂直于 $\boldsymbol{k}$, 因而第 11.2 节的结果是普遍有效的.

11.23 (a) 试证明, 如果 $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}_0\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)$, 则有

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{V}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{V}_0\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t),$$

而且方程(8.34)表示

$$\boldsymbol{k}\times\mathscr{B}=-\mu_0\varepsilon_0\omega\mathscr{E},$$

$$\boldsymbol{k}\times\mathscr{E}=\omega\mathscr{B}.$$

(b) 证明这两个结果是相容的. (c) 根据此题和前题的结果, 讨论矢量 $\boldsymbol{k}$, $\mathscr{E}$ 和 $\mathscr{B}$ 的相对取向. (d) 与第 11.2 节的结果比较.

11.24 利用前面的结果, 证明平面电磁波的 $\mathscr{E}$ 场和 $\mathscr{B}$ 场必定同相.

11.25 试证明, 坡印廷矢量可以写成 $\mathscr{E}\times\mathscr{H}$. 这个表达式适用于在真空中或者在物质媒质中传播的电磁波.

11.26 一个电荷以恒速运动, 试计算通过一个垂直于电荷速度并且通过该电荷的平面每单位面积的能通量. 假定这电荷具有半径 R, 并利用电场和磁场的非相对论表达式. 对所得结果进行适当讨论. (提示: 利用半径为 r, 宽度为 dr, 与此电荷同心的环作为通量的面积元.)

11.27 表达式(11.37) 给出一个加速电荷的辐射强度作为辐射方向的函数. 试将方程(11.37)对一切方向积分, 求出方程 (11.36). [提示: 用面积元 $dS=2\pi r^2\sin\theta d\theta$ 乘 $I(\theta)$, 然后从 0 到 π 积分.]

11.28 试证明, 对于一个在直线加速器内运动的粒子, 能量辐射速率为

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{辐射}}=\left(\frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 m_0^2C^3}\right)\left(\frac{dE_k}{dx}\right)^2,$$

式中 E_k 为这个粒子的动能.

11.29 试证明, 在一回加速器中, 能量的辐射速率为

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{辐射}}=\left(\frac{q^2c}{6\pi\varepsilon_0 r^2}\right)\left(\frac{v}{c}\right)^4\left(\frac{E}{m_0c^2}\right)^4.$$

第十二章　电磁辐射与物质的相互作用

12.1　引　　论

在自然界中，在原子、分子和电磁辐射之间存在着不断的能量交换．太阳是到达地球的电磁辐射的主要来源．来自太阳的电磁辐射与地球表面物体之间的相互作用，能够说明日常观察到的大多数现象，包括生命本身．

在前一章中，我们曾指出，振荡的电偶极子和磁偶极子能够产生电磁辐射，电磁场以光速 c 通过真空传播．在本章中，我们将分析物质对电磁辐射的作用和电磁辐射对物质的作用．特别是，我们将引进光子的概念作为相互作用的载体或"粒子"；必须用这种概念才能说明物质和电磁波的相互作用方式．

12.2　电磁辐射的吸收

在第十一章中概述了能够产生电磁波的最重要的辐射机制．现在我们来分析相反的过程，并且看看当电磁辐射与一个原子即一个电荷系统相互作用，从而这系统从波中吸收能量时，会发生什么情况．从电磁波中吸收能量，是一个复杂的问题，需要大量的数学计算并且要利用量子力学。但基本概念是易于理解的．当一个电磁波投射在一个原子上时，这个波的电场和磁场都与这个原子中的电子相互作用．在一级近似下，磁场的效应可忽略不计，因为磁力的数量级为 $ev\mathscr{B}_0$，利用关系式 $\mathscr{B}_0=\mathscr{E}_0/c$，可以把它写作 $(v/c)e\mathscr{E}_0$．由于 $e\mathscr{E}_0$ 是电场的力，所以，仅当 $v\approx c$ 时，这两个力才不相上下．

在一个比辐射的波长小很多的空间区域里（例如在一个原子内），电磁波的电场可以写作 $\mathscr{E}=\mathscr{E}_0\sin\omega t$，因为在电子运动所在的小区域的范围内，这个波的表达式中与 x 有关的部分实际上是不变的. 电子在电力 $-e\mathscr{E}$ 的作用下作受迫振荡. 回顾第一卷第 12.13 节的讨论，可以看出，电子吸收能量的速率（即由波的电场转移给振子的平均功率），在能量共振时有最大值. 当波的频率等于电子的固有频率时，发生能量共振. 更详细的量子力学的分析（此处从略）表明，这个频率是这个电子所属的原子（或分子）的发射光谱的频率 $\omega_1,\omega_2,\omega_3,\cdots$ 中的任何一个. 换句话说：

当电磁波的频率与一个原子或分子的发射光谱的频率之一重合时，这个原子或分子就优先吸收电磁辐射.

或者以更综合的形式表述为：一种物质的发射光谱和吸收光谱由相同的频率组成. 由于原子通常处于基态，所以，对于那些涉及基态跃迁的频率，吸收强度最大.

图 12-1(a) 中示出入射波的强度分布和一种物质吸收的能量随频率变化的情况. 图 12-1(b) 中示出透射辐射的强度分布. 注意，这两条曲线之间的对应：在有利于原子吸收的频率上，透射的

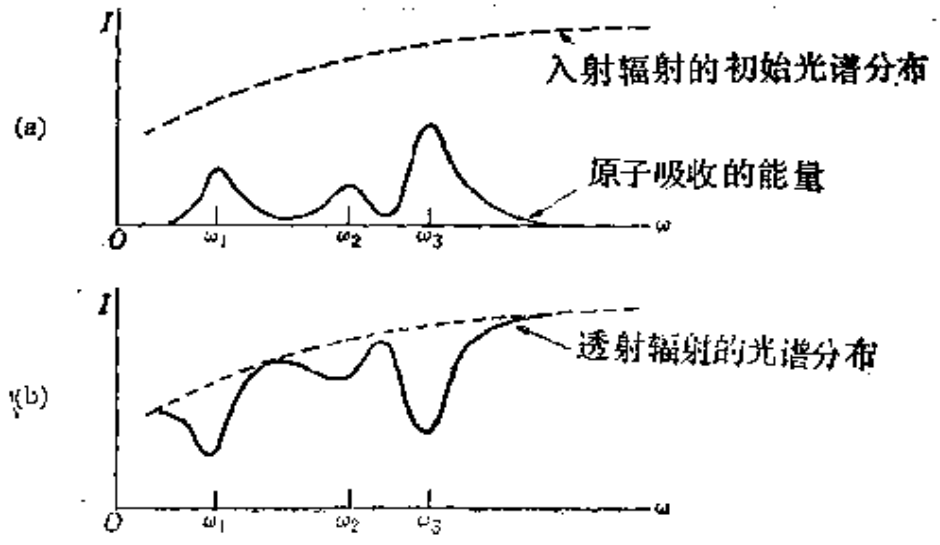


图 12-1　通过一物质时，吸收的辐射和透射的辐射的强度分布.

辐射减少.

原子(或分子)吸收能量的结果是什么？这个能量吸收引起电子运动的调整，使其对应于原子(或分子)的新的、更高的能态. 这时，我们说原子(或分子)处于受激态. 一个受激原子(或分子)又可以通过电偶极辐射，把它刚吸收的过剩能量发射出去. 这些就是本章将要讨论的过程.

12.3 束缚电子对电磁辐射的散射

当一个电磁波通过一个原子(或分子)时，这个波会扰动束缚电子的运动，可能使原子(或分子)处于一个受激态. 由于束缚电子起着受迫振荡电偶极子的作用，所以，受激原子可以通过相反的过程，无显著时延地发射频率与入射波频率相同的电磁辐射. 原子发射的能量，是这原子的束缚电子从入射波中吸收的能量. 这种过程叫做散射，所发射的辐射是散射波(图 12-2).

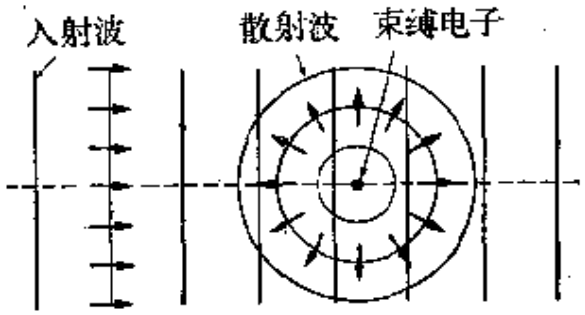


图 12-2 一个束缚电子对辐射的散射的示意图.

散射有助于减少原波即入射波的强度，因为从波中吸收的能量是沿一切方向再发射出去的，其结果是从原辐射中有效地移去能量.

在实验方面观察到，散射波的强度依赖于原波的频率和散射角. 为了计算这种依赖关系，必须确定原波电场对原子中电子运动的微扰程度. 这种分析必须用量子力学来完成.

一个重要特点是，当入射辐射的频率等于原子(或分子)的发射光谱的频率 $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \cdots$ 之一时，散射波比较强. 这个结果叫作共振荧光.① 这种物理性质是可以预期的，因为在从波中吸收的能量较多的那些频率上(如在第 12.2 节中所述，这些频率与原子的发射光谱的频率相同)，散射辐射的强度应该比较大. 然而，即使在不同于发射光谱的频率上，散射也可能是相当可观的.

散射现象的另一个重要性质是，对于其分子在紫外区有发射光谱的气体(见第 12.9 节)可见区电磁波的散射随着频率的增加而增大. 这种性质是易于理解的，因为在可见区，频率越高，这频率就越接近于分子的紫外共振频率，受迫振荡的振幅就越大，因而散射也较大. 作为一个例子，天空的明亮和蓝颜色就是由于阳光被空气分子散射；特别是天空的蓝颜色，是较高频率(即较短波长)的散射比较强的结果. 这同一种过程还能说明日出和日落时观察到的天空的鲜红颜色；这是因为日出和日落时太阳的光线通过很厚的空气层才能到达地球表面，散射过程使高频(即短波长)强烈衰减.

悬浮在空气中的小粒子(例如烟或尘)或者小水滴(例如云)也能引起散射. 载有悬浮粒子的液体，例如在一胶体中，表现出强烈的散射，叫作廷德耳效应.

如果原辐射是线偏振的，则原子振荡是沿波的电场的固定方向，而散射辐射具有电偶极辐射所特有的偏振[图 12-3(a)]. 然而，即使入射辐射不是偏振的，但散射辐射却总是部分偏振的. 例如，我们考虑投射在一个原子 S 上的非偏振波[图 12-3(b)]. 在这原子中感生的电偶极子振荡平行于波的电场，因而都在一个垂

① 在电磁波谱的可见区，通过辐射的吸收和相继的发射而在一种材料中引起的发光，当吸收与发射之间的时间延迟小于 10^{-8}s 时，叫做荧光. 如果延迟时间较长，这种现象就叫作磷光. 荧光和磷光辐射一般具有不同的频率.

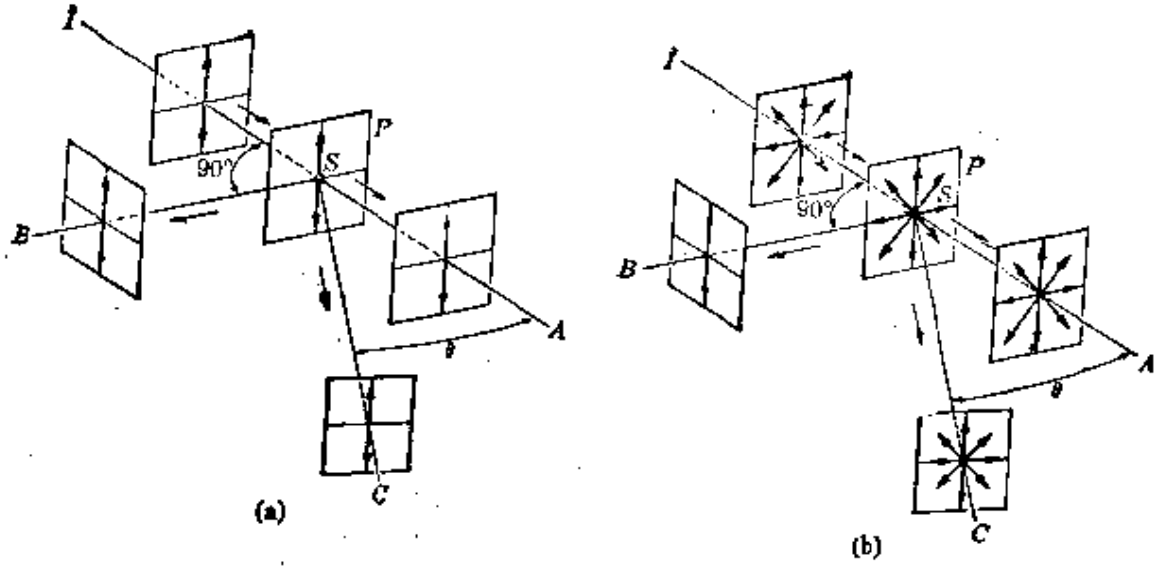


图 12-3　散射辐射的偏振．(a) 入射辐射是线偏振的，(b) 入射辐射是非偏振的．

直于入射波的传播方向 IA 的平面 P 内．在每一方向上，散射辐射的偏振依赖于偶极子的振荡方向，因此，如果入射波是非偏振的，则散射辐射的偏振并不总是固定的．然而，对于垂直于 IS 的任何方向 SB，散射辐射是线偏振的，其偏振面平行于平面 P，垂直于 IS，因为对于这些方向，偶极子总是在这样一个平面内振荡．对于其他方向，散射辐射的偏振程度依赖于散射方向与 IA 所成的角．如果入射辐射是非偏振的，则在方向 IA 上散射辐射是完全非偏振的．

12.4　自由电子对电磁波的散射 · 康普顿效应

除束缚电子或分子的散射之外，自由电子对电磁波的散射有某些特点需要讨论．如我们在前面看到的，散射是一个双重过程，通过这个过程原子中的电子迅速地从电磁波中吸收能量，并且迅速地把这能量再辐射出去，成为散射辐射．要记住，电磁波带有能量和动量；如果有若干能量从这个波中移去，也必定有相应数量的

动量 $p=E/c$ 从这个波中移去.

一个自由电子不能吸收一能量 E 并同时获得一动量 $p_e=E/c$，这是因为，对于一个电子，动能与动量之间的关系在高能量下为

$$E_k=E-m_ec^2=\sqrt{(m_ec^2)^2+(p_ec)^2}-m_ec^2,$$

在低能量下为 $E_k=p_e^2/2m_e$. 如果如能量守恒所要求的那样，我们有 $E=E_k$，则这两个表达式都不与关系式 $p=E/c$ 相容. 因此，我们断定，一个自由电子不可能吸收电磁能量而不违背动量守恒. 学生可能想知道，为什么在前一节中讨论束缚电子对电磁波的散射和吸收时，一点也没有提到这个动量问题. 这是因为，虽然在这两种情况下，动量和能量守恒都适用，但在束缚电子的情况下，所吸收的能量和动量是由电子和构成原子的其余部分的离子所共有. 总是能够按适当的比例分配能量和动量；但是，质量大很多的离子仅带有(连同若干动量)资用能量的很小部分，因而通常根本不需考虑这部分能量 (见第一卷例题 9.13). 在自由电子的情况下，由于没有其他粒子和电子共有能量和动量，因而不可能有吸收或散射.

然而，实验却告诉我们另一种情况. 当单色电磁辐射通过一个基本上只有自由电子存在的区域 (例如一金属固体就包含许多不束缚于某一原子的电子)时，我们观察到，除入射辐射之外，还有另一种辐射，其频率不同于入射辐射的频率. 这种新的辐射被解释为自由电子散射的辐射. 这种散射辐射的频率小于入射辐射的频率，相应地散射辐射的波长大于入射辐射的波长 (图 12-4). 对于每一散射方向，散射辐射的波长也不同. 这个重要的现象叫作康普顿效应，美国物理学家康普顿 (A. H. Compton, 1892—1962)在二十世纪二十年代初期最先观察并分析了这种效应.

设 λ 为入射辐射的波长，λ' 为散射辐射的波长，康普顿发现，λ' 只决定于散射的方向. 这就是说，如果 θ 为入射辐射与观察散

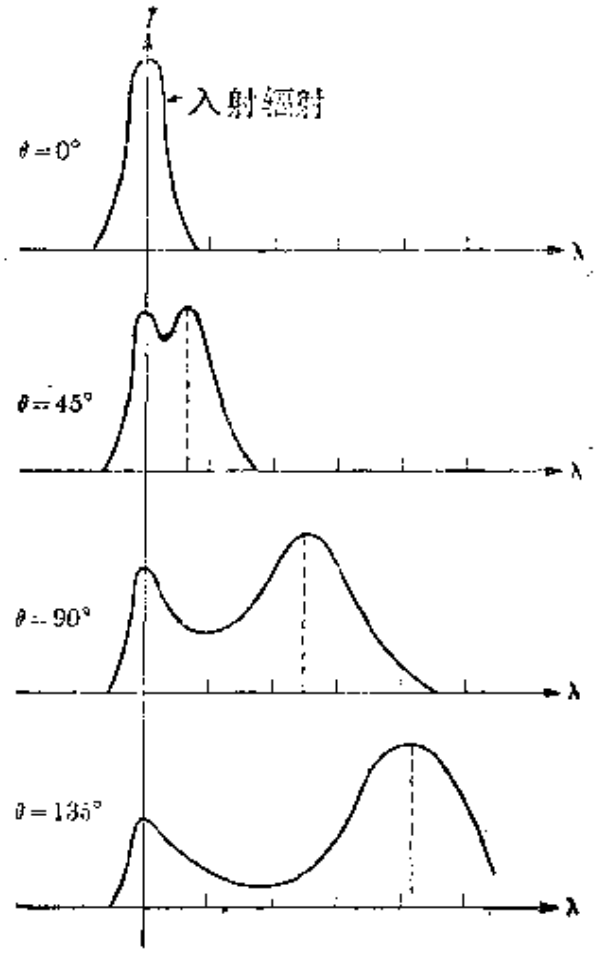


图 12-4　在不同散射角，自由电子散射的辐射的强度分布.

射辐射的方向之间的夹角(图 12-5)，则散射辐射的波长 λ' 只决定于角 θ . 实验关系式为

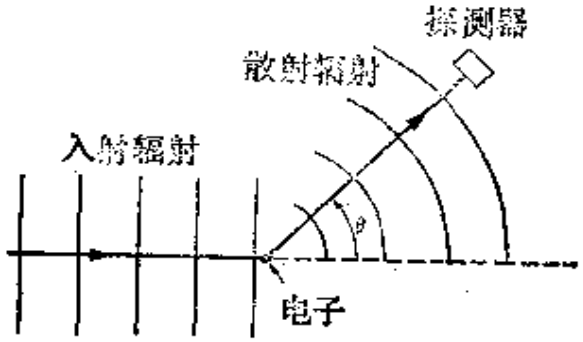


图 12-5　康普顿散射的示意图

$$\lambda' - \lambda = \lambda_0 (1 - \cos\theta) \qquad (12.1)$$

式中 λ_0 为一常数. 如果 λ 和 λ' 以 m 为单位，则 λ_0 的值为

$$\lambda_C = 2.4262 \times 10^{-12}\text{m},$$

这个常数叫做电子的康普顿波长.

由于 $\lambda = c/\nu$，式中 $\nu = \omega/2\pi$ 是这波的频率，我们可以把方程(12.1)写成下列形式：

$$\frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu} = \frac{\lambda_C}{c}(1-\cos\theta). \tag{12.2}$$

由于电子对电磁波的散射包含能量和动量的交换，所以我们可以把它想象为这个波和电子之间的"碰撞". 由于电磁波以速度 c 传播，而且它的能量-动量关系[由方程(11.19)给出]为 $E = cp$(这个关系式与一个静质量为零的粒子的相同)，所以这种散射必定类似于这样一种碰撞，在这种碰撞中有一个粒子的静质量为零并以速度 c 运动. 这种碰撞已在第一卷的例题 11.8 中讨论过. 在本节末将重述此例题，作为例题 12.1. 所得结果为

$$\frac{1}{E'} - \frac{1}{E} = \frac{1}{m_e c^2}(1-\cos\theta), \tag{12.3}$$

式中 E 和 E' 分别为静质量为零的粒子碰撞前、后的能量，m_e 是碰撞中涉及的另一个粒子的静质量，在这个情况下是电子. 方程(12.2)和(12.3)之间存在着惊人的相似性；这决不仅仅是代数上的相似性. 这两个方程都适用于最广义的碰撞过程. 而且，如前所述，电磁波的能量-动量关系式 $E = cp$ 与静质量为零的粒子[方程(12.3)适用于这种粒子]的对应关系式属于同一类型. 明显的结论是把频率 ν 与能量 E 的关系写作

$$E = h\nu, \tag{12.4}$$

式中 h 是一普适常数；h 描述电磁波的频率与在"碰撞"过程中同电磁波相联系的能量之间的比例关系. 于是方程(12.3)变为

$$\frac{1}{h\nu'} - \frac{1}{h\nu} = \frac{1}{m_e c^2}(1-\cos\theta)$$

或

$$\frac{1}{\nu'}-\frac{1}{\nu}=\frac{h}{m_e c^2}(1-\cos\theta), \tag{12.5}$$

上式在形式上与方程(12.2)完全相同. 为了得到与方程(12.1)相当的式子,我们用 c 乘方程(12.5),并利用 $\lambda=c/\nu$,结果得到

$$\lambda'-\lambda=(h/m_e c)(1-\cos\theta). \tag{12.6}$$

于是得到电子的康普顿波长 λ_C 与散射电子的质量之间的关系为

$$\lambda_C=\frac{h}{m_e c}. \tag{12.7}$$

根据 λ_C、m_e 和 c 的已知值,求得常数 h 的值为

$$h=6.6256\times10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s}(\text{或 } \mathrm{m^2\cdot kg\cdot s^{-1}});$$

h 叫做普朗克常数. 普朗克常数在物理学中起着非常重要的作用. 在历史上,这个常数是在另一种情况下出现的;在十九世纪末,德国物理学家普朗克(M. Planck, 1858—1947)为了说明黑体辐射(即与物质处于平衡态的电磁辐射)的强度而引进这个常数. 在第 7.4 节中讨论原子的玻尔理论时,我们也提到普朗克常数. 玻尔的工作是在康普顿效应发现之前进行的. 光速 c、基本电荷 e、电子质量 m_e 和普朗克常数是物理学中四个基本常数.

质子的质量与电子的不同,质子的康普顿波长(利用上面的 h 值)为

$$\lambda_{C,p}=h/m_p c=1.3214\times10^{-15}\mathrm{m}.$$

这个结果已为实验所证实,从而保证了式(12.4)这个假定的正确性. 然而,由于质子的康普顿波长为电子的 $1/10^3$,所以与电子相比,质子的康普顿效应更不显著.

例题 12.1 讨论一相对论性碰撞,在这碰撞中,入射粒子的静质量为零,靶粒子是一个在实验室参照系中静止的电子.

解 这个过程概略地如图 12-6 所示. 这些粒子,在碰撞前分别用 1 和 2 来标记,在碰撞后分别用 3 和 4 来标记. 利用第一卷的方程(11.15)和(11.18),我们得到相对于观察者 O 的动量和能量值如下:

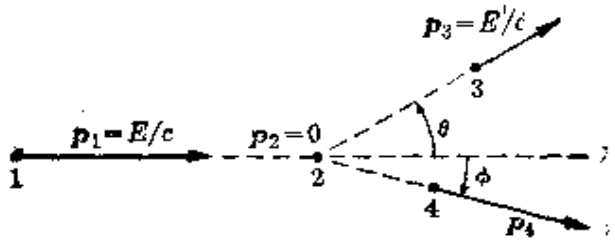


图 12-6　高能碰撞

$p_1=E/c$,　$p_2=0$,　$p_3=E'/c, p_4$,

$E_1=E$,　$E_2=m_0c^2$,　$E_3=E'$, $E_4=c\sqrt{m_0^2c^2+p_4^2}$.

根据动量守恒我们可以写出

$$p_1=p_3+p_4,$$

对于这个过程，能量守恒给出

$$E+m_0c^2=E'+c\sqrt{m_0^2c^2+p_4^2}.$$

假定我们要求出入射粒子碰撞后的能量 E'. 这时必须从上面的方程中消去 p_4. 由动量方程我们得到 $p_4=p_1-p_3$. 将此式平方，得

$$p_4^2=p_1^2+p_3^2-2p_1\cdot p_3.$$

把相应的动量值代入上式，则得

$$p_4^2=\frac{E^2}{c^2}+\frac{E'^2}{c^2}-\frac{2EE'}{c^2}\cos\theta.$$

解上面的能量方程求 p_4^2，得出

$$p_4^2=\frac{1}{c^2}(E+m_0c^2-E')^2-m_0^2c^2$$

$$=\frac{E^2}{c^2}+\frac{E'^2}{c^2}+\frac{2(E-E')m_0c^2}{c^2}-\frac{2EE'}{c^2}.$$

令 p_4^2 的两个结果相等，则得

$$\frac{2(E-E')m_0c^2}{c^2}-\frac{2EE'}{c^2}=-\frac{2EE'}{c^2}\cos\theta$$

或

$$E-E'=\frac{EE'}{m_0c^2}(1-\cos\theta).$$

用 EE' 除上式两边，得出

$$\frac{1}{E'}-\frac{1}{E}=\frac{1}{m_0c^2}(1-\cos\theta).$$

这个表达式给出 E' 作为 E 和粒子 3 的散射角 θ 的函数，注意，永远有 $E\geqslant$

E'，因而入射粒子损失能量．这是理所当然的，因为另一个原来静止的粒子于碰撞后开始运动．

于是可以作出如下结论：如果把自由电子对电磁辐射的散射，看作是这个自由电子与一个静质量为零的粒子之间的碰撞，我们就能够"说明"这个过程．

12.5 光　　子

我们必须对康普顿效应的这种"说明"进行仔细的分析，因为它可能具有深远的后果．首先重述我们的假定：

1．自由电子对电磁辐射的散射，可以看作是这个电子与一个静质量为零的粒子之间的碰撞．

2．电磁辐射起着静质量为零的粒子的作用，为简便起见，我们称它为光子．

3．光子(静质量为零的粒子)的能量和动量与电磁辐射的频率和波长之间的关系为

$$E=h\nu, p=h/\lambda. \tag{12.8}$$

上式中第二个关系式是由于 $p=E/c=h\nu/c$ 和 $\nu/c=1/\lambda$．我们可以把康普顿效应想象为图 12-7 所示的碰撞．在这碰撞中，一个频率为 ν 的光子与一个静止的电子碰撞．光子把若干能量和动量转移给电子．由于这种相互作用，散射光子具有较小的能量，从而具有较小的频率 ν'．

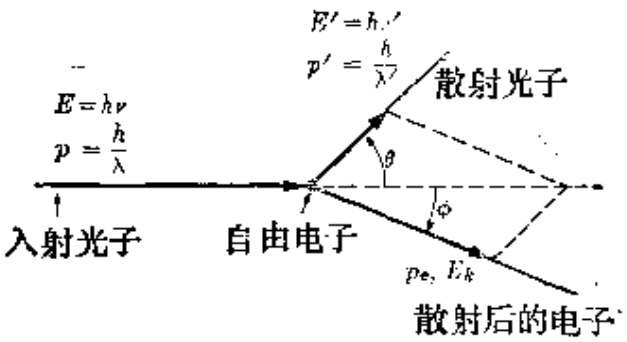


图 12-7　康普顿散射中动量和能量的关系

进一步的检验是看一下，散射后电子的动量是否等于入射光子的动量与散射光子的动量之差. 这是一个困难的实验，但已作过这种实验，而且所得结果与理论很好地符合.

我们能够赋予光子概念和定义关系式(12.8)什么物理意义？认为电磁辐射是光子流，这虽然是一个可能的、形象化的说明，但这并不是一个必要的结论. 我们可以把光子的能量 $E=h\nu$ 和动量 $p=h/\lambda$ 解释为自由电子从入射电磁波中吸收的能量和动量. 于是光子的能量 $E'=h\nu'$ 和动量 $p'=h/\lambda'$ 就是这个电子再发射到散射辐射中的能量和动量. 电子获得动能 $E_k=E-E'$，动量 $\boldsymbol{p}_e=\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'$，它们之间的关系为 $E_k=c\sqrt{m_e^2c^2+p_e^2}-m_ec^2$，这是高能动力学与能量和动量守恒所要求的. 因此，我们可以得到如下的解释：光子是一个带电粒子在单次过程中发射或吸收的电磁能量和动量的"量子". 光子的概念事实上只适用于电磁辐射与带电粒子之间的相互作用；在电磁辐射与物质(而不仅仅是与自由电子)相互作用的一切过程中，这个概念都起作用. 因此，我们给出下述原理：

> 当一电磁波与一电子(或任何其他带电粒子)相互作用时，在此过程中能够交换的能量和动量，是对应于一个光子的能量和动量.

这个原理是物理学的基本定律之一. 它适用于涉及带电粒子和电磁场的所有辐射过程. 它并非起源于我们曾经阐述或者讨论过的任何定律，而是一条完全新的原理. 应该把它和诸如能量和动量守恒这样的普适定律并列. 在本世纪头二十五年里发现的这条新原理，是物理学发展过程中的一个里程碑. 这个原理的结果导致物理学的一个分支——量子力学.

这条重要原理是理解电磁辐射在原子、分子和原子核中的发射和吸收的基础. 我们已经讲过，一个原子(或分子)只能发射或

者吸收一定频率的电磁辐射. 在第 7.4 节中我们还曾指出，原子(和分子)的能量是量子化的，只能取某些对应于所谓定态或能级的值. 这两个重要事实通过光子的概念联系起来. 假定一个处于能量为 E 的定态的原子吸收频率为 ν 的电磁辐射，并跃迁到具有较高能量的另一个定态. 这原子的能量变化是 $E'-E$. 另一方面，吸收的光子的能量为 $h\nu$. 能量守恒要求这两个量相等. 因此，

$$E'-E=h\nu, \tag{12.9}$$

这个表达式叫做玻尔公式，它是丹麦物理学家玻尔(N. Bohr, 1885—1962)于 1913 年最先提出的. 这个表达式也适用于一个原子从能量为 E' 的定态跃迁到具有较低能量 E 的另一定态时发射的光子的能量.

由于定态的能量是量子化的，只能取某些值 $E_1, E_2, E_3, \cdots$，所以玻尔公式就限制了发射或吸收的辐射频率. 因此，得到的是一个分立的频谱. 在历史上，玻尔提出定态的概念是为了说明分立频谱的存在. 在图 12-8 的示意图中示出一个系统的能量的某些可能的变化. 它们对应于一个原子的定态或能级之间的跃迁. 例如，只有一个电子的原子(H, He^+, Li^{++}, 等等)的定态的能量由下

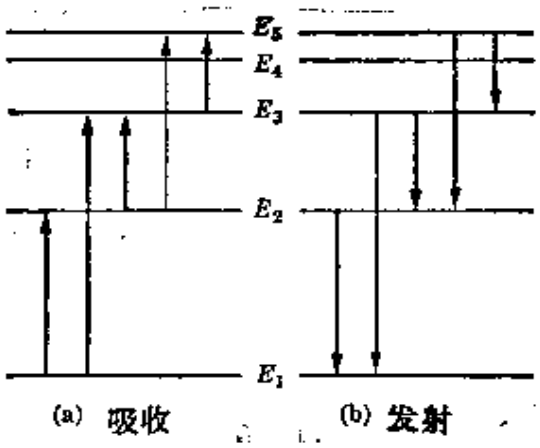


图 12-8 原子、分子和原子核中定态之间的跃迁. 能级的相对间距和可能的跃迁，取决于这个系统的性质.

式给出(见第 7.4 节):

$$E=-\frac{RZ^2hc}{n^2},$$

式中 R 是里德伯常数，用 SI 单位时 $R=1.0974\times10^7\mathrm{m}^{-1}$. 因此，在量子数为 n 和 n' $(n'>n)$的态之间跃迁时，发射或吸收的频率为

$$\nu=\frac{E'-E}{h}=RZ^2c\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n'^2}\right),$$

或者将数值代入，则得

$$\nu=3.2899\times10^{15}Z^2\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n'^2}\right)\mathrm{Hz}.$$

这个公式与这种原子的光谱的发射和吸收频率符合得很好. 这公式叫做巴耳末公式. 瑞士数学家兼物理学家巴耳末(J. Balmer, 1825—1898)在试图把氢的可见谱线分类时，确定了这个经验公式.

光子的概念，对于两个带电粒子之间的电磁相互作用，提出一个简单而形象化的表示，如图 12-9 所示. 这种相互作用对应于动量和能量的交换. 两个粒子的初动量 $\boldsymbol{p}_1$ 和 $\boldsymbol{p}_2$ 经相互作用之后变为 $\boldsymbol{p}_1'$ 和 $\boldsymbol{p}_2'$. 虽然这种相互作用并不局限在特定时刻，但为简单起见，我们仍指出它是在特定时刻，在位置 A 和 B，粒子 1 通过它的电磁场与粒子 2 相互作用，结果粒子 2 从场中吸收一定数量的能量和动量(相当于一个光子)，因而粒子 2 的运动发生相应的变化. 于是粒子 1 的运动必须调整，以符合新的场，即原来的场减去

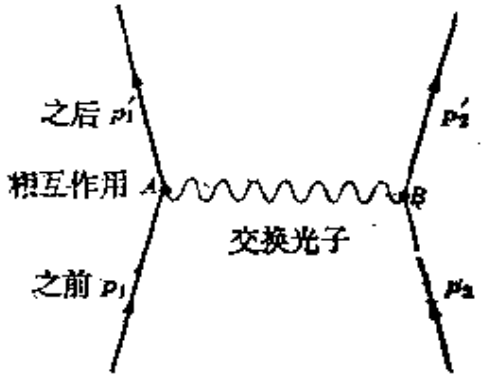


图 12-9 把电磁相互作用看作交换光子. 光子把能量和动量从一个电荷转移给另一个电荷

一个光子. 当然，相反的过程也是可能的，即粒子 1 可以从粒子 2 的场中吸收一个光子. 于是我们可以说：在粒子 1 和粒子 2 之间曾存在光子的交换. 换言之：

可以把电磁相互作用想象为相互作用的带电粒子之间交换光子的结果. 两个粒子的能量和动量都发生变化.

[诸如图 12-9 这样的图，叫做费曼图，为了纪念这种图的创始者，美国物理学家费曼(R. P. Feynman, 1918——　　). 在分析涉及各种粒子-粒子相互作用的复杂过程时，这种图非常有用.]

在任何时刻，两个带电粒子组成的系统的总动量为 $\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{p}_{场}$，式中 $\boldsymbol{p}_{场}$ 是和带电粒子的电磁场相联系的动量. 这种情况对应于第 4.8 节中描述的相互作用的图象，在那里分析了相互作用以有限速度传播时的动量守恒原理. 现在，具有能量和动量的场这个概念图象，具有更坚实的理论和实验基础.

在第 11.3 节末，我们曾指出，除能量和动量之外，电磁辐射还带有内禀角动量即自旋，并且指出，对于圆偏振波，沿传播方向的自旋为 $\mp E/\omega$. 利用关系式 $\omega=2\pi\nu$，可以看出一个光子的能量为 $E=h\omega/2\pi=\hbar\omega$，式中 $\hbar=h/2\pi$. 因此，圆偏振光子的沿传播方向的自旋等于 $\mp\hbar$.

例题 12.2　当一个光子的波长以米为单位时，试以电子伏为单位表示该光子的能量. 利用所得结果，求出X射线的波长作为施加于 X射线管上的加速电压的函数.

解　由 $E=h\nu$ 和 $\lambda\nu=c$，可以写出 $E=hc/\lambda$. 但

$$\begin{aligned}hc&=(6.6256\times10^{-34}\mathrm{J\cdot s})\,(2.9979\times10^{8}\mathrm{m\cdot s^{-1}})\\&=1.9863\times10^{-25}\mathrm{J\cdot m}.\end{aligned}$$

由于 $1\ \mathrm{eV}=1.6021\times10^{-19}\mathrm{J}$，所以 $hc=1.2398\times10^{-6}\ \mathrm{eV\cdot m}$. 因此，

$$E=1.2398\times10^{-6}/\lambda,$$

式中 E 以电子伏为单位，λ 以米为单位.

在关于图 11-6 的说明中曾指出，快速电子撞击 X 射线管的对阴极(即

阳极)时产生X射线. 一个电子的能量也可以经过几次相继的碰撞而辐射出来,产生几个光子;这能量也可以在一次碰撞中全部辐射出来. 在后一种过程中,从X射线管中出来的光子的能量最大,相应的波长最短. 换言之,设V是加速电压,则所产生的X射线的波长等于或者大于阈波长λ_0:

$$\lambda_0=\frac{1.2398\times10^{-6}}{V}\approx\frac{1.24\times10^{-6}}{V}\text{m},$$

因为在此情况下,光子的能量E等于电子的能量,而电子的能量又等于V(以伏为单位). 例如,在一电视显象管中,加速电子的电压约为18000V. 这些电子到达显象管的屏上时突然停止而发射出X射线,其道理与X射线管中相同. 在此情况下,当电子在屏上停止时产生的X射线的最短波长为$\lambda=6.9\times10^{-11}$m. 不过其强度非常小.

12.6 关于光子的另一个现象:光电效应

进一步的研究表明,光子的概念不仅适用于自由电子的散射过程,而且适用于电磁波与物质相互作用的一切过程. 说明光子概念的另一个例子是光电效应. 1887年,德国物理学家赫兹(H. Hertz, 1857—1894)观察到下述现象:当用紫外辐射照射两个带电的电极时,两个电极之间的放电强度增加. 这个观察表示,当有光存在时,能得到较多的带电粒子即电子. 一年之后,另一位德国物理学家哈耳瓦克斯(W. Hallwachs, 1859—1922)在照射某些金属(诸如锌、铷、钾、钠等)的清洁表面时,观察到电子发射. 根据这种电子的产生方法,称之为光电子. 当投射在金属表面上的辐射的强度增加时,由于有更多的能量可用于释放电子,所以电子发射也随之增加. 然而,对于每一种材料都有一个电磁辐射的最小频率ν_0. 当辐射频率小于ν_0时,不论辐射多么强,都不会产生光电子.

我们以前曾讲过,在金属中有一些电子能在整个晶格中在不同程度上自由运动. 在通常温度下,这些电子不能从金属中逃逸;这是因为,如果有一个电子逃逸,这金属的电平衡就被破坏,它变

成带正电的，从而吸引这个电子．增加电子能量的一种方法，是将金属加热．这时"蒸发出来"的电子叫做热电子．这就是电子管中存在的那种电子发射．从金属中释出电子的另一种方法，是从电磁辐射中吸收能量，随后发射光电子．

光电效应是金属和其他材料中的传导电子从电磁场中吸收能量，而从该材料中逃逸的过程．这个过程与第 12.2 节中讨论过的吸收过程不同，后一过程对应于束缚于一个原子或分子的电子的吸收．我们用 ϕ 表示一个电子从某种金属中逃逸所需的能量．在此情况下，如果这个电子吸收能量 E，则差值 $E-\phi$ 将表现为这个电子的动能．在低能即非相对论性极限下，可以写出

$$\frac{1}{2}mv^2=E-\phi. \tag{12.10}$$

如果 $E<\phi$，就不会有电子发射．根据光子概念，如果 E 是一个电子从电磁辐射中吸收的能量，ν 是辐射的频率，则按方程(12.8)，$E=h\nu$．因此，我们可以把方程(12.10)写作

$$\frac{1}{2}mv^2=h\nu-\phi. \tag{12.11}$$

爱因斯坦于 1905 年，在康普顿效应发现之前，最先提出上面这个方程，用它来说明所观察到的光电子动能和入射辐射频率之间的关系．并非所有电子从金属中逃逸都需要相同的能量 ϕ．我们称 ϕ 的最小值 ϕ_0 为这种金属的功函数．于是逃逸电子的最大动能为

$$\frac{1}{2}mv_{max}^2=h\nu-\phi_0. \tag{12.12}$$

我们能够利用图 12-10 所示的方法，测量最大动能 $\frac{1}{2}mv_{max}^2$．在板 A 和 C 之间加上一个电势差 V，能够使光电子的运动减速．在特定电压 V_0，电流计所测得的电流为零，这表示没有电子(即使是

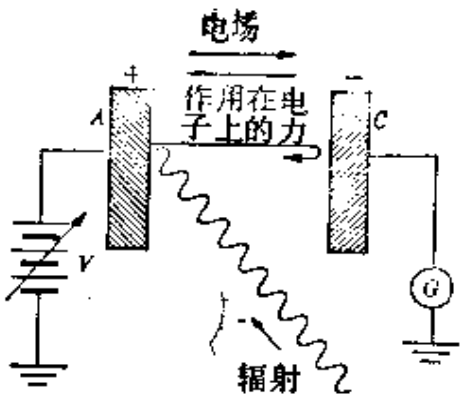


图 12-10　观察光电效应的实验装置

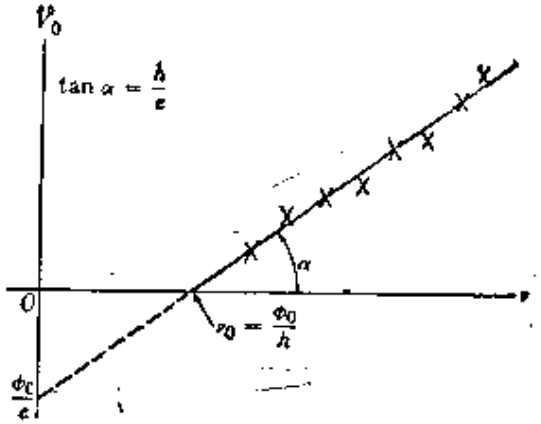


图 12-11　在光电效应中，遏止电势与辐射频率之间的关系

最快的电子)能够到达板 C. 于是，按方程(1. 28)，$\frac{1}{2}mv_{max}^2=eV_0$，因而方程(12. 12)变为

$$eV_0=h\nu-\phi_0. \tag{12.13}$$

改变照射辐射的频率 ν，可得到遏止电势 V_0 的一系列值. 作图表示 V_0 对 ν 的关系，结果是一条直线，如图 12-11 所示. 这直线的斜率为 $\tan\alpha=h/e$. 测量 α，并利用 e 的已知值，可以计算普朗克常数 h. 所得结果与根据康普顿效应得到的结果相同. 这种一致. 可以看作是对光子概念的进一步证明.

由方程(12. 12)可以看出，当辐射的频率等于 $\nu_0=\phi_0/h$ 时，电子的动能等于零. 因此，ν_0 是能够产生光电发射的最小频率，叫做阈频率. 当频率小于 ν_0 时，就完全没有电子发射.

当电磁辐射具有足够高的频率(或光子具有足够大的能量)时，能够从原子(或分子)中逐出电子，这就是所谓原子光电效应. 任何材料所吸收的大部分 X 和 γ 射线，都是这种过程引起的. 原子光电效应导致 X 射线和 γ 射线所通过的材料(包括空气)的电离，是辐射影响物质的机制之一. 一个类似的过程是光核效应，即

一个粒子(通常是质子)吸收电磁辐射后，从原子核中抛出. 这些光子的能量(和相应的频率)，与原子光电效应中涉及的光子相比，要大得多；这些光子处于高能 γ 射线的范围.

注意，在讨论光电效应时，没有提到动量. 这也是因为，吸收电磁辐射的电子，束缚于固体的晶格，或者束缚于一个原子或分子；被吸收光子的动量被电子和晶格(或原子、分子)所瓜分. 然而，由于晶格(或原子、分子)的质量要大得多，所以它的动能可忽略不计. 我们可以假定光子的全部能量都交给电子，而不会有明显的误差. 同样的分析，也适用于光核效应中的质子.

12.7 电磁波在物质中的传播：色散

迄今为止，只讨论了电磁波在真空中的传播. 实验表明，电磁波在物质中的传播速度不同于它在真空中的传播速度. 为了理解在物质和在真空中传播速度不同的原因，我们不应忘记，第 11.2 节中的讨论是以不存在电荷和电流为基础的. 然而，当电磁波通过物质传播时，即使没有自由电荷和电流，但由于物质的极化和磁化，随时间变化的电磁场却会在材料中感生一些电荷和电流. 如果这种材料是均匀的和各向同性的，则电磁波使介质极化和磁化的净效果，就是用该材料所特有的电容率 ε 和磁导率 μ 来代替 ε_0 和 μ_0. 第 11.2 节中的一切计算都保持不变，只是波的速度变为

$$v=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \tag{12.14}$$

电磁波在真空中的传播速度 c，与它在物质中的传播速度 v 的比值，叫做该物质的折射率，并用 n 表示. 描述材料对于电磁波的性质时，这个概念是很有用的. 因此，

$$n=\frac{c}{v}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\sqrt{\varepsilon\mu}=\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}}.$$

然而，$\varepsilon/\varepsilon_0=\varepsilon_r$ 是这种介质的相对电容率，μ/μ_0 是它的相对磁导率. 于是有

$$n=\frac{c}{v}=\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}. \tag{12.15}$$

通常，对于大多数能透射可见区电磁波的物质来说，μ_r 与 1 相差甚小(见表 6-1)；因此，一个满意的近似是

$$n=\sqrt{\varepsilon_r}. \tag{12.16}$$

如果能够独立地求出一种物质的折射率(这是可以做到的)，上述关系式就提供了确定该物质的相对电容率的简单实验方法. 用这种方法得到的 ε_r 值与用其他方法测得的值是一致的，这就为这个理论提供一个满意的基础. 在第 2.7 节中，我们算出了 ε_r，如方程(2.24)所示. 为了避免与折射率混淆，我们改用 N 表示单位体积内的电子数，于是得到

$$n^2=\varepsilon_r=1+\frac{Ne^2}{m_e\varepsilon_0}\left(\sum_i\frac{f_i}{\omega_i^2-\omega^2}\right), \tag{12.17}$$

式中 f_i 是具有特征频率 ω_i 的振荡的百分率. 因此，折射率对波频率(从而对波长)的关系，与图 2-21 中所示 ε_r 的情况相同，如图 12-12 所示. 在此图中，ω_1，ω_2，…是这种物质的发射光谱的特征

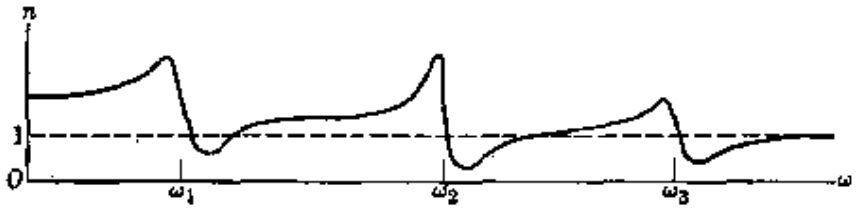


图 12-12　折射率随频率变化的曲线.

频率. 因此，电磁波在物质中的相速度 $v=c/n$ 也与辐射的频率有关系. 因而电磁波在物质中传播时发生色散. 也就是说，一个包含若干个频率的脉冲，由于它的每个成分以不同的速度传播，会发生畸变(见第十章的讨论).

根据方程(10.56)，群速度 v_g 由下式给出：

$$v_g = v - k\frac{dv}{dk}.$$

因为 $v_g = d\omega/dk$，所以有

$$\frac{dv}{dk} = \frac{dv}{d\omega}\cdot\frac{d\omega}{dk} = v_g\frac{dv}{d\omega}.$$

利用 $v = c/n$，得出

$$\frac{dv}{d\omega} = -\frac{c}{n^2}\frac{dn}{d\omega}.$$

图 12-12 中示出 n 和 ω 之间的函数关系．因此

$$v_g = v - \frac{v_g ck}{n^2}\cdot\frac{dn}{d\omega}.$$

解上式求 v_g，得出

$$v_g = \frac{v}{1+(ck/n^2)(dn/d\omega)} = \frac{c}{n+\omega(dn/d\omega)}, \qquad (12.18)$$

求上式中最后一个式子时利用了 $k = \omega/v = \omega n/c$．

当 $dn/d\omega > 0$ 时，群速度小于相速度．这种情况叫做正常色散；但如果 $dn/d\omega < 0$，则群速度大于相速度，这种情况叫做反常色散．在这种情况下，这里所定义的群速度有大于 c 的可能性，因而一个电磁脉冲似乎能够以大于 c 的速度传递．这个情况与根据洛伦兹变换和相对性原理得出的结果相矛盾．不过，布里渊(Brillouin)、索末菲(Sommerfeld)等人对电磁信号的传递所作的详细分析(这个分析在数学上是非常复杂的)表明，即使在色散介质中，也不可能以大于 c 的速度传递信号．图 12-13 中示出在一个特征频率 ω_i 附近，相速度 v、群速度 v_g 和信号速度 v_s 的变化情况．由此图可以看出，除在特征频率附近的区域，信号速度实际上与群速度重合，而且，即使在反常色散区域，信号速度也决不会大于 c．

当 $n > 1$，因而 $v < c$ 时，一个发射电磁波的带电粒子 q 在介质中的运动速度 v_q，有可能大于电磁波的速度 v．这个情况相当于

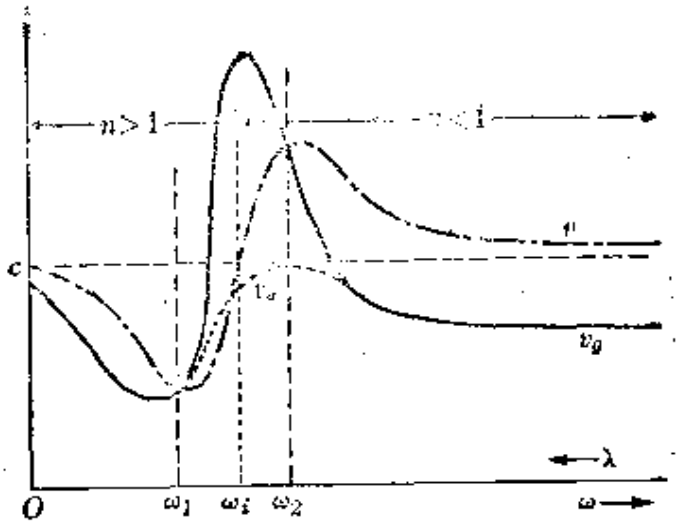


图 12-13　电磁波在一色散介质中的相速度、群速度和信号速度.
在区域 $\omega_1<\omega_i<\omega_2$ 内有反常色散

图 10-28 中描述的流体中的马赫波的情况. 在这种情况下，电磁波的波阵面是锥面，其轴沿电荷的运动方向，锥面的张角 α 由下式给出:

$$\sin\alpha=\frac{v}{v_g}.$$

上式与方程(10.61)一致. 这种波叫做切伦科夫辐射，它是苏联科学家切伦科夫 (П. А. Черенков, 1904—　　)发现的. 这波阵面的有效传播方向与带电粒子的速度有关系，因此，可以利用所测得的切伦科夫辐射的角度来确定粒子的速率. 用于这种用途的仪器，叫做切伦科夫探测器，因为它能提供关于粒子速度的直接信息.

我们曾说过，电磁波在物质中传播的相速度，看起来不同于它在真空中的传播速度；但这个差别似乎起因于物质的电容率和磁导率不同于真空的电容率和磁导率这个事实. 这种电容率和磁导率的差别，又是物质在入射电磁波作用下电极化和磁极化的结果. 因此，当电磁波投射在一块物质上时，这个波将引起原子或分子中带电粒子的振荡，于是这种振荡发射次级的或"散射的"波(见第 12.3 节). 这些散射波叠加在原来的波上而形成一合成波. 次级

波的位相一般地不同于原来波的位相，因为一个受迫振子并不总是与驱动力同相(参看第一卷第 12.13 节)．详细的分析(这里从略)表明，这种位相差对合成波有影响，它使合成波的速度看起来不同于真空中的速度．这个结果是特别令人满意的，因为从原子的观点看，一切电荷，无论是自由的还是束缚的，是等效的．因此，它们发射的电磁波必然都以速度 c 传播．这种由具有不同位相的各个波叠加而形成的波，看起来必然具有不同的传播速度．

例题 12.3 甚高频电磁辐射例如 X 射线的群速度．

解 如果在方程(12.17)中，ω 比特征频率 ω_i 大很多，我们就可以忽略 ω_i，而把方程(12.17)写成如下形式：

$$n^2=1-\frac{Ne^2}{m_e\varepsilon_0\omega^2}\sum_i f_i=1-\frac{Ne^2}{m_e\varepsilon_0\omega^2},$$

因为已在第 2.7 节中指出 $\sum_i f_i=1$．当 $x\ll1$ 时，可采用近似公式 $(1-x)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}x$．于是得到折射率为

$$n=1-\frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m_e\omega^2},$$

上式表示 $n<1$，因而 $v>c$．由上式可得出 $dn/d\omega=Ne^2/\varepsilon_0 m_e\omega^3$，并代入方程(12.18)，得

$$v_g=\frac{c}{n+\omega(dn/d\omega)}=\frac{c}{1-(Ne^2/2\varepsilon_0 m_e\omega^2)+\omega(Ne^2/\varepsilon_0 m_e\omega^3)}$$

$$=\frac{c}{1+(Ne^2/2\varepsilon_0 m_e\omega^2)},$$

由此可见，虽然 $v>c$(因为 $n<1$)，但群速度 v_g 仍小于 c．注意，对于相速度，有

$$v=\frac{c}{n}=\frac{c}{1-(Ne^2/2\varepsilon_0 m_e\omega^2)}\approx c[1+Ne^2/2\varepsilon_0 m_e\omega^2],$$

在上式中我们利用了近似关系式 $(1-x)^{-1}=1+x$；当 $x\ll1$ 时，此式成立[见附录的方程(M.28)]．于是得出 $v_g v=c^2$．

12.8 电磁波的多普勒效应

在第 10.11 节中我们讨论了由运动着的物质构成的弹性波和其他几种机械波的多普勒效应. 电磁波的多普勒效应必须单独讨论；首先，这是因为电磁波不是由运动着的物质构成的，因而在这讨论中不出现源相对于介质的速度. 其次，电磁波的传播速度 c 对于一切观察者都一样，而与他们的相对运动无关. 因此，电磁波的多普勒效应必须利用相对性原理来计算.

对于处在一个惯性参照系中的一个观察者，一个平面谐电磁波可以用一个形状如 $\sin(kx-\omega t)$ 的函数，乘上一个振幅因子来描述. 对于一个固定于另一惯性参照系中的观察者来说，坐标 x，t 必须代之以 x'，t'，它们之间的关系由洛伦兹变换给出；因此，后一个观察者将写出 $\sin(k'x'-\omega' t')$，式中 k'，ω' 不一定和对于另一个观察者的相同. 另一方面，相对性原理要求，当我们从一个惯性系过渡到另一个惯性系时，表达式 $kx-\omega t$ 必须保持不变. 因此，我们必须有

$$kx-\omega t=k'x'-\omega' t'.$$

利用反洛伦兹变换[见第一卷的方程(6.28)]的第一和第四个方程，可将上式写作

$$k\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-\omega\frac{t'+vx'/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=k'x'-\omega' t'$$

或

$$\frac{k-\omega v/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}x'-\frac{\omega-kv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}t'=k'x'-\omega' t'.$$

因此，

$$k'=\frac{k-\omega v/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\qquad \omega'=\frac{\omega-kv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{12.19}$$

由于 $\omega=ck$，上式可以写作

$$k'=k\frac{1-v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\quad \omega'=\omega\frac{1-v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{12.20}$$

对于小的速度，即 $v\ll c$，可以令上式中的分母等于 1，于是得到

$$\omega'=\omega\left(1-\frac{v}{c}\right),$$

上式与观察者相对于源沿传播直线运动时的方程(10.59)相同.[注意，方程(10.59)中的 v_{os} 现在用 v 表示，而 v 则用 c 表示.]

方程(12.20)把两个观察者 O 和 O'[当 O' 沿 X 轴相对于 O 以速度 v 运动时]所测得的频率 ω 和 ω' 联系起来. 当两个观察者的相对运动不沿传播直线时，更复杂的计算(见例题 12.4)表明，

$$\omega'=\omega\frac{1-(v/c)\cos\theta}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \tag{12.21}$$

式中 θ 是传播方向与相对运动的方向之间的角. 假定 O 相对于电磁波的源是静止的，我们看出，如果源 O 和观察者 O' 相互后退，则 O' 观察到一个较低的频率，即一个较长的波长. 这种情况在恒星的光谱中观察到，叫做红移，因为后退恒星发出的光的可见光谱朝红色(即较长的)波长移动. 这个因素使我们能够估算这些恒星后退的速度.

图 12-14 中示出在几个星云中观察到的钙线 H 和 K 的红移. 水平箭头表示移动的方向. 根据图 12-14 中给出的数据，画出了图 12-15 中的曲线. 图 12-15 表明，星云的距离越远，移动越大，因而相对速度越大. 这个结果支持宇宙膨胀理论. 近年来观察到某些星云具有这样大的红移，以致它们看起来是以光速一半那样大的速度在后退；这样高的速度引起了一些看法，认为多普勒效应可能不是红移的唯一原因. 值得注意的是，来自仙女座的光(见第一卷的图 1-6)显示出朝较短波长方面移动，即有蓝移. 这似乎表

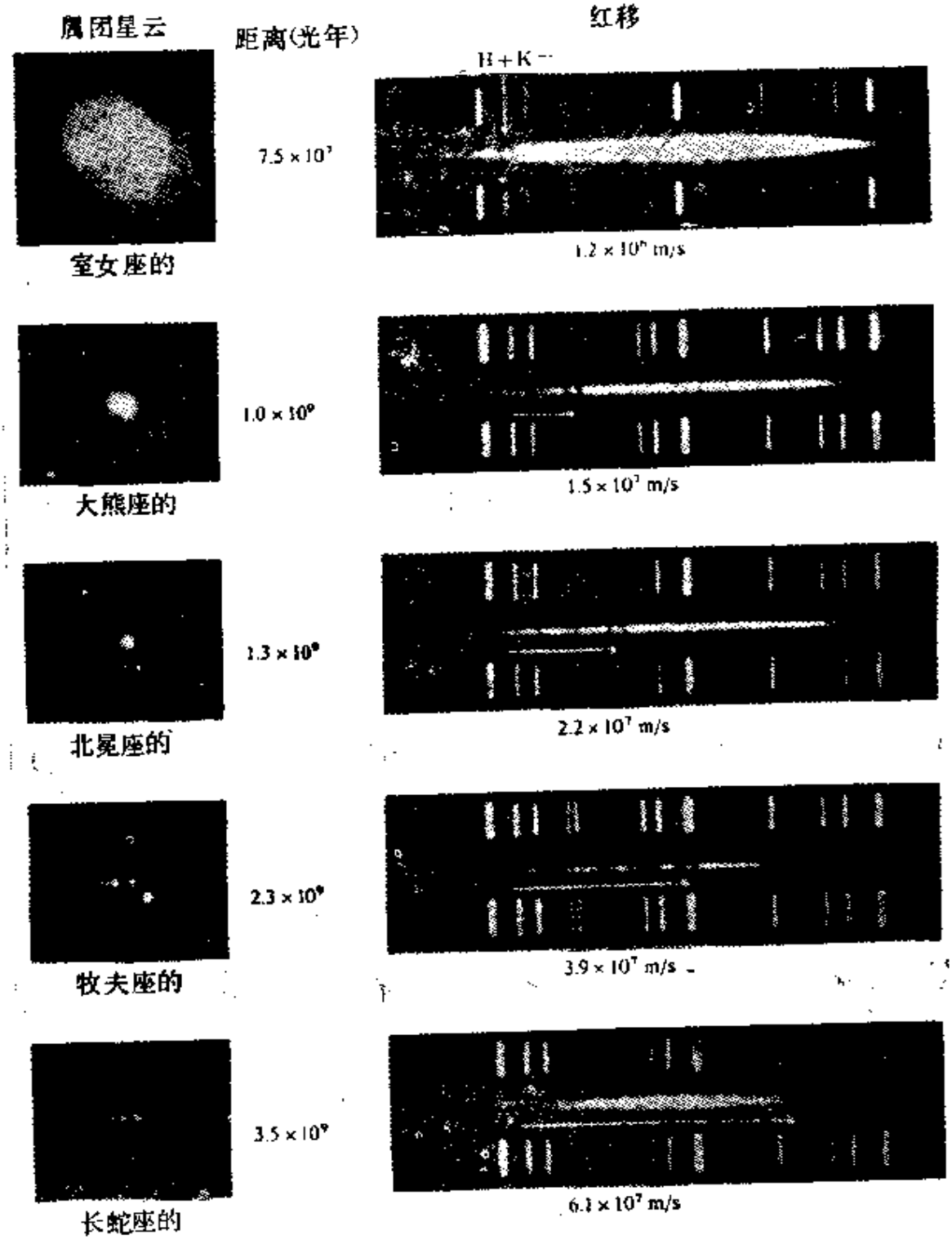


图 12-14　河外星云中的多普勒效应. 钙谱线 H 和 K 的红移(如箭头所示)随星云的距离增大而增加；这种增加表示退行速度增大

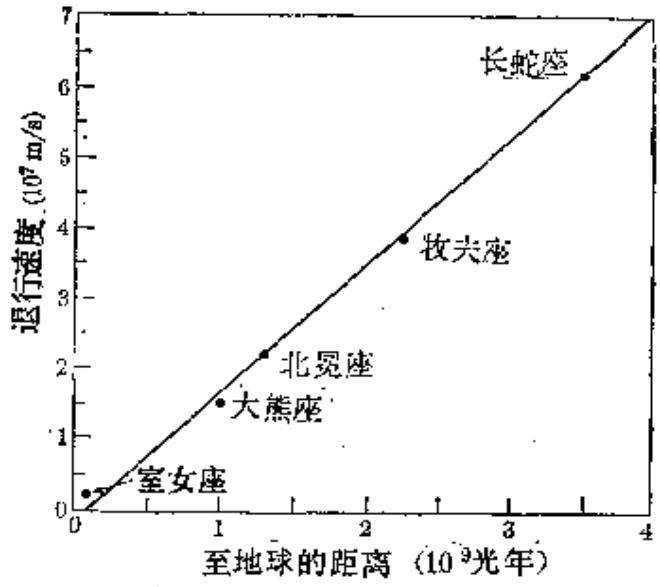


图 12-15

示，在我们的旋转星系中，太阳系现在的运动方向是朝着这个星云.

图 12-16 中示出大角星(它离太阳约 36 光年)的光谱的移动. 这两个光谱是相隔 6 个月记录的；其中一个光谱的移动是向着红色，另一个的移动是向着蓝色. 这种情况是由于地球轨道运动的方向相对于大角星反转.

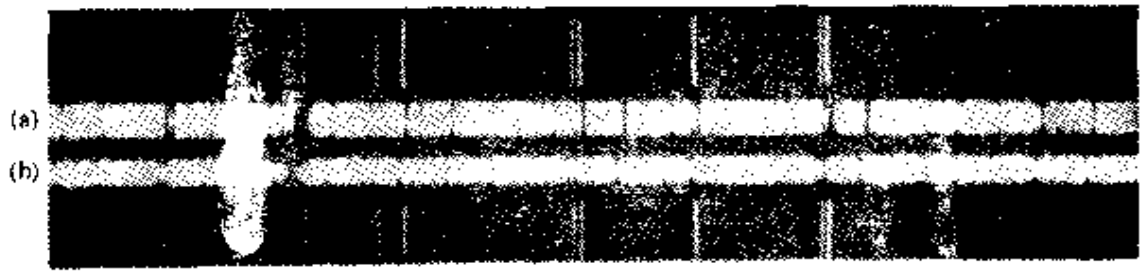


图 12-16 恒速恒星大角的光谱(λ 为 4200Å 至 4300Å)，相隔约 6 个月记录的.(a) 1939 年 7 月 1 日，测得的相对于地球的速度为 $+18 km \cdot s^{-1}$. (b)1940 年 1 月 19 日，测得的速度为 $-32 km \cdot s^{-1}$. 速度差 $50 km \cdot s^{-1}$，完全是由于地球的轨道运动速度. 把这两个光谱同两个参考光谱相比较，可以清楚地看出谱线的移动.

我们曾把相对性原理应用于电磁波的位相$(kx-\omega t)$而导出表达式(12.20). 另一方面，我们把一定的动量和能量附加在辐射上，并利用它们来阐明光子的概念. 在这种情况下，我们必须看一下我们的推理是否一致，办法是，对于一个光子检验能量和动量的洛伦兹变换，看看它们是否与方程(12.19)相容. 对于一个光子，由方程(12.8)我们有

$$E=h\nu, \quad p=\frac{h}{\lambda}. \tag{12.22}$$

应用从一个惯性参照系过渡到另一个惯性参照系时能量和动量的洛伦兹变换，得出

$$p'=\frac{p-vE/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad 和 \quad E'=\frac{E-vp}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{12.23}$$

然后把关系式$E'=h\nu', p'=h/\lambda'=h\nu'/c$和$E=h\nu, p=h/\lambda=h\nu/c$代入方程(12.23)中，并消去公因子$h$，两个方程都化为

$$\nu'=\nu\frac{1-v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{12.24}$$

上式与方程(12.20)等效. 于是我们可以断定，光子的概念确实是和相对性原理一致的. 如果假定关系式$E=cp$和$\omega=ck$同时成立，我们就会看出，只要把方程(12.19)和(12.23)加以比较，物理学家就会去寻找$E\to\omega$或ν和$p\to k$或$1/\lambda$这种型式的对应关系. 如果以此作为指导原理，那么光子的概念作为这个模型的理论要求，很可能会更早地提出来.

例题 12.4 证明多普勒效应的关系式(12.21).

解 当平面电磁波的传播方向与两个观察者O和O'的相对运动的方向成一角θ时，我们必须写出方程

$$E'=\frac{E-vp_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

来代替(12.23)的第二个方程. 然而，$p_x=p\cos\theta$. 对于一个光子，$E=cp$，因此，我们可以写出

$$E'=\frac{Evp\cos\theta}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=E\frac{1-(v/c)\cos\theta}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{12.25}$$

利用 $E=h\nu=h\omega/2\pi$，并消去公因子，最后得到

$$\omega'=\omega\frac{1-(v/c)\cos\theta}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

上式就是方程(12.21)．

例题 12.5　试求两个作相对运动的观察者所测得的一个平面电磁波的传播方向之间的关系．这种效应叫做光行差．

解　设光源相对于观察者 O 为静止，观察者 O 看到一电磁波沿着与 X 轴成 θ 角的方向传播．X 轴与两个观察者的相对运动的方向重合．于是，按照第一卷的方程(11.23)，有

$$p'_x=\frac{p_x-vE/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}};$$

但 $p_x=p\cos\theta$；同样地，对于观察者 O' 有 $p'_x=p'\cos\theta'$．因此，将 $E=cp$ 代入，则得

$$p'\cos\theta'=p\frac{\cos\theta-v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

如果我们将 $p=h/\lambda=h\omega/2\pi c$ 和 $p'=h\omega'/2\pi c$ 代入上式，并消去公因子，则得

$$\omega'\cos\theta'=\omega\frac{\cos\theta-v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

把上式与方程(12.21)结合，消去频率，则得

$$\cos\theta'=\frac{\cos\theta-v/c}{1-(v/c)\cos\theta}, \tag{12.26}$$

上式表示两个惯性观察者所测得的这平面电磁波的传播方向之间的关系．

12.9　电磁辐射谱

电磁波包括一个宽的频率或波长范围，可以按照它们的来源加以分类．这种分类并没有十分明确的界限，因为不同的源所产生的电磁波的频率范围可能重叠．

通常将电磁波分成如下七类．

1. 射频波．它们的波长从几千米直到 0.3 米．频率从几赫

直到 10^{9} 赫. 光子的能量从大约零直到 10^{-5}eV. 这种波是用电子设备(主要是振荡电路)产生的,被用于电视和无线电广播系统.

2. 微波. 微波的波长从 0.3m 到 10^{-3}m. 频率范围从 10^{9}Hz 直到 3×10^{11}Hz. 光子的能量从大约 10^{-5}eV 直到 10^{-3}eV. 这种波也是电子设备产生的,被用于雷达和其他通信系统中,也被用于分析原子和分子结构的非常精细的细节. 微波频段也称为超高频(缩写为 UHF,相对于射频而言).

3. 红外光谱. 这个区域包括的波长从10^{-3}m到 7.8×10^{-7}m. 频率范围是从 3×10^{11}Hz 到 4×10^{14}Hz. 光子的能量是从 10^{-3}eV 到大约 1.6eV. 这个波段又分成三个区域: 远红外区, 从 10^{-3}m 到 3×10^{-5}m; 中红外区,从 3×10^{-5}m 到 3×10^{-6}m; 近红外区,从 3×10^{-6}m 直到大约 7.8×10^{-7}m. 这些波是由分子和热的物体产生的,在工业、医药、天文学等等方面有许多应用.

4. 可见光谱. 这是一个窄的波段,人眼网膜对这个波段内的波长很灵敏. 这个波段的波长从 7.8×10^{-7}m 到 3.8×10^{-7}m; 频率从 4×10^{14}Hz 到 8×10^{14}Hz; 光子能量从 1.6eV 到约 3.2eV. 光的产生是原子或分子的组分(主要是电子)运动的内部调整的结果. 光在我们世界中的重要性是不用多说的.

光是如此重要,以致关于光的知识发展成为应用物理学的一个特殊分支,叫做光学. 光学研究光现象和视觉,并包括光学仪器的设计. 由于光谱的红外区和紫外区的性质与可见光谱相似,所以现在光学的范围,除可见光谱之外,还包括红外区和紫外区. 光对人眼产生的不同感觉,叫做色,色感觉与电磁波的频率或波长有关系; 一个正常人的色感觉对应于下表所列的波段:

眼睛的灵敏度也与光的波长有关系; 在波长约为 5.6×10^{-7}m 时,灵敏度最大. 由于在色和波长(或频率)之间存在这种关系,所以波长(或频率)完全确定的电磁波,又叫做单色波.

色	λ, m	ν, Hz
紫	$3.90—4.55\times10^{-7}$	$7.69—6.59\times10^{14}$
蓝	4.55—4.92	6.59—6.10
绿	4.92—5.77	6.10—5.29
黄	5.77—5.97	5.20—5.03
橙	5.97—6.22	5.03—4.82
红	6.22—7.80	4.82—3.84

视觉是由位于眼睛后部的膜(叫做网膜)上的两个元件把信号传递到脑子里的结果. 这些元件叫做锥体和杆体. 当有强光(例如白天的那种光)存在时,锥体起作用. 锥体对波的频率(或色)非常灵敏. 另一方面,杆体能够在非常暗的照明下(例如在一暗的房间里)起作用; 杆体对频率(或色)极不灵敏. 与锥体相联系的视觉,叫做亮光视觉;与杆体相联系的视觉,叫做微光视觉. 图 12-17 中示出,在这两种视觉情况下,眼睛对不同波长的灵敏度.

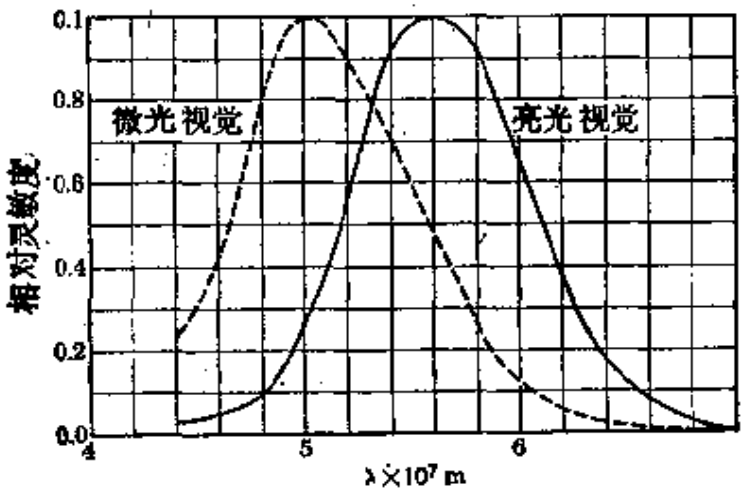


图 12-17 微光视觉和亮光视觉情况下眼睛的灵敏度.

5. 紫外线. 紫外线的波长范围从3.8×10^{-7}m到约6×10^{-10}m; 频率从 8×10^{14}Hz 到约 3×10^{17}Hz; 光子的能量从约 3eV 到 2×10^{3}eV. 这些波是在放电过程中由原子和分子产生的. 紫外线的的能量与许多化学反应中涉及的能量有相同的数量级,因此能够说明紫外线的许多化学效应. 太阳是一个非常强大的紫外辐射

源，晒黑主要是这个因素所引起的．太阳的紫外辐射也和高层大气中的原子相互作用而产生大量的离子；这样就能说明，为什么大约 80km 高度以上的高层大气是高度电离的，因而称为电离层．当某些活细胞吸收紫外辐射时，由于它们的分子的电离和离解所产生的化学反应，这些细胞可能被破坏．因此，紫外线被用于某些医疗和灭菌过程，在这种过程中，微生物，例如细菌，能被杀死．

6．X 射线．电磁波的这一部分的波长从约 10^{-9}m 延伸到约 6×10^{-12}m；频率从 3×10^{17}Hz 到 5×10^{19}Hz；光子的能量从 1.2×10^{3}eV 到约 2.4×10^{5}eV．电磁波谱的这一部分是德国物理学家伦琴(W. Roentgen, 1845—1923 年)于 1895 年在研究阴极射线时发现的．X 射线是由原子的内层电子，亦即更紧地束缚着的电子所产生的．另一种 X 射线源是第 11.7 节中提到的韧致辐射．事实上，这是在商用 X 射线管中产生 X 射线的最常用的方法．经过几千伏电压加速后的电子束，撞击在一个称为阳极的金属靶上(图 11-16)[实际上，这正是在伦琴原来的实验中产生 X 射线的方法．]由于 X 射线光子的能量较大，所以当 X 射线通过物质传播时，它对物质的原子和分子所产生的作用就较深，能使分子离解或电离．X 射线被用于医学诊断方面．这是因为，与生物组织相比，骨骼对 X 射线的吸收较大，因而能够拍摄下骨骼结构的相当清晰的“照片”．由于 X 射线能引起化学过程，所以 X 射线也能对活的组织和生物体引起严重破坏．X 射线被用于治疗癌症，因为与健康组织相比较，X 射线更容易破坏有病变的组织．必须着重指出，任何数量的 X 射线都会破坏一些好的组织；大剂量的照射会引起足够大的破坏而导致疾病或死亡．

7．γ 射线．这些电磁波起源于原子核．γ 射线谱的下部与 X 射线谱的上部重叠．γ 射线谱的波长从约 10^{-10}m 到 10^{-14}m 以下，相应的频率范围是从 3×10^{18}Hz 到 3×10^{22}Hz 以上．光子

的能量从 10^4eV 到约 10^7eV. 这些能量与核过程中涉及的能量有相同的数量级，因此，γ 射线的吸收会引起某些核变化. 许多放射性物质产生 γ 射线. 在核反应堆中存在着大量的 γ 射线. γ 射线虽然不容易被大多数物质所吸收，但是当它被活生物体吸收时，就会引起严重的效应. 操作 γ 射线时，必须采用重防护屏.

在宇宙辐射中，存在着波长甚至更短即频率更高的电磁波，因而相应的光子能量也更大. 这些电磁波在天文学研究中特别重要.

从电磁辐射谱的宽度我们很容易理解，为什么当电磁辐射通过物质时，电磁辐射谱的不同部分有不同的行为. 例如，当电磁波的光子能量与原子内的电子或分子中的原子的特征能量不相上

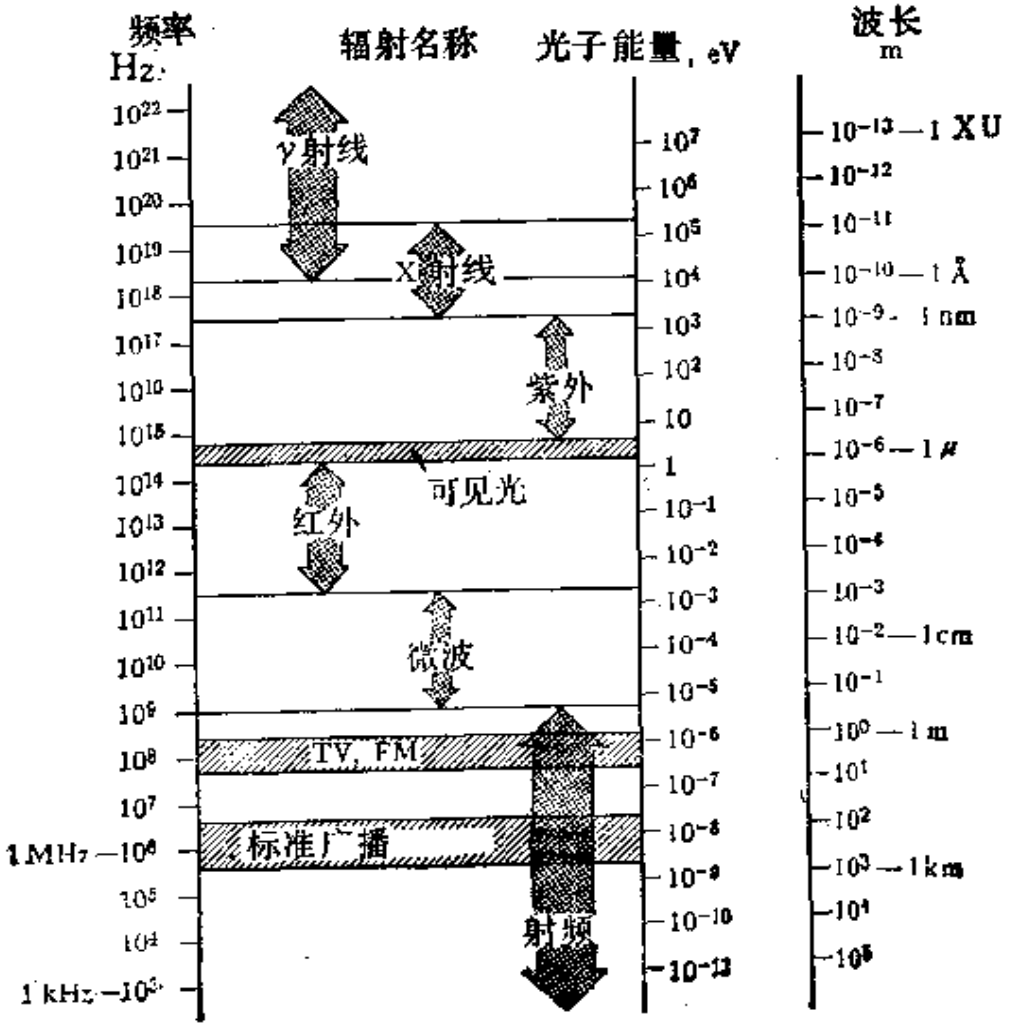


图 12-18 电磁波谱

下时，这些电磁波将与原子和分子更强烈地相互作用. 红外、可见和紫外辐射就是这种情况. 具有较长的波长，因而光子能量较小的辐射，与物质的相互作用一般较弱. 射频电磁波就是这种辐射的例子. 象 X 射线和 γ 射线这样的具有高能量即很短波长的电磁波，在物质中的吸收也非常少. 然而，当 γ 射线被吸收时，它的效应就更深，不仅会引起原子和分子的电离，而且在许多情况下还会引起核分裂.

图 12-18 中示出电磁波谱各个部分的能量、频率和波长的范围.

习　题

12.1　波长为 10^{-10}m(即 1Å)的辐射在一碳样品中经受康普顿散射. 沿和入射方向垂直的方向观察散射辐射. 试求：(a) 散射辐射的波长，(b) 反冲电子的动能和运动方向. (提示：参看习题 12.32.)

12.2　参考前题；如果电子在和入射辐射成 60° 角的方向上反冲，试求：(a) 散射辐射的波长和方向，(b) 电子的动能. (提示：见习题 12.31 和 12.32)

12.3　(a) 证明，在康仑效应中反冲电子的动能由下式给出：

$$E_k=\frac{h\nu\alpha(1-\cos\theta)}{[1+\alpha(1-\cos\theta)]},$$

式中 $\alpha=h\nu/m_0c^2$. (b) 如果 $h\nu\gg\frac{1}{2}m_0c^2$，则反冲电子的最大能量是

$$\frac{(h\nu)^2}{\left(h\nu+\frac{1}{2}m_0c^2\right)}\approx h\nu-\frac{1}{2}m_0c^2.$$

12.4　一个能量为 10^4eV 的光子与一个静止的自由电子碰撞，并被散射而偏转 60° 角. 试求：(a) 这个光子的能量、频率和波长的变化，(b) 反冲电子的动能、动量和方向.

12.5　试求下列系统所吸收的光子的频率和波长：(a) 一个原子核吸收10^8eV 的能量，(b) 一个原子吸收 1 eV，(c) 一个分子吸收10^{-2}eV.

12.6　钠原子吸收或者发射波长为 5.9×10^{-7}m 的电磁辐射. 这个波长

对应于可见光谱的黄区，试求被吸收或发射的光子的能量.

12.7 把组成CO分子的碳和氧原子分开所需的最小能量为11eV. 试求使这个分子离解所需的电磁辐射的(a)最小频率和(b)最大波长.

12.8 一个能量为10^4eV的光子被一个静止的氢原子吸收. 结果，电子被抛出的方向和入射辐射的方向相同. 如果把分离电子所需能量(约为13.6eV)忽略不计，试求电子和质子的(a)动量和(b)动能.

12.9 一个光子的动量与一个40MeV的(a)质子和(b)电子的相同，试求这个光子的能量. (注意，质子可以用非相对论性方法处理，但对于电子必须用相对论力学的方法.)

12.10 铅中一个电子的结合能为9×10^4eV. 当用某种电磁辐射照射铅时，所产生的光电子进入一个10^{-2}T的磁场，并沿一半径为0.25m的圆周运动. 试计算(a)电子的动量和能量，(b)所吸收的光子的能量. (c)能够忽略反冲铅离子的效应?

12.11 当用不同波长的光照射某种金属表面时，所测得的光电子的遏止电势如下表所列:

$\lambda(\times10^{-7}\text{m})$	V(V)
3.66	1.48
4.05	1.15
4.36	0.93
4.92	0.62
5.46	0.36
5.79	0.24

(a)以遏止电势为纵坐标，光的频率为横坐标，画出一条曲线. 由这曲线确定这种金属的(b)域频率、(c)光电功函数，(d)比值h/e.

12.12 钾的光电功函数为2.0eV. 假定波长为3.6×10^{-7}m的光投射在钾上，试求(a)光电子的遏止电势和(b)所抛出的最快的电子的动能和速度.

12.13 一个波长为4.0×10^{-7}m的均匀单色光束，投射在一功函数为2.0eV的材料上. 如果这光束的强度为$3.0\times10^{-9}\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$，试求: (a)每秒每平方米发射的电子数和(b)每秒每平方米吸收的能量.

12.14 考虑一种气体，它的分子的行为象偶极振子，其恢复常数为$k=3\times10^2\text{kg}\cdot\text{s}^{-2}$，振荡的粒子是电子. (a)计算它们的特征频率. (b)设这气

体处于标准温度和压强下，写出这种气体的折射率作为频率的函数．(c)对于 $\lambda=5\times10^{-7}$m 和 $\lambda=1.02\times10^{-7}$m，求折射率的值．

12.15　证明，在 X 射线区域内，例题 12.3 中的量 $Ne^2/me_0\omega^2$ 比 1 小很多．

12.16　考虑一种物质，它以速度 v 平行于 X 轴运动．设 $V'=c/n'$ 是光在这种物质中的速度(一个相对于这物质为静止的观察者 O' 所测得的．)试证明，一个观察者 O(这物质相对于 O 以速度 v 运动)所测得的，沿 X 轴传播的波通过这物质的速度 V 是

$$V\approx\frac{c}{n'}+v\left(1-\frac{1}{n'^2}\right).$$

(提示：利用速度的洛伦兹变换．)

12.17　证明，当光通过以速度 v 平行于 X 轴运动的介质时，多普勒效应为

$$\nu'=\nu(1-nv/c),$$

如果 $v\ll c$．

12.18　利用习题 12.17 的结果，证明

$$n'=n-\left(\frac{n\nu v}{c}\right)\frac{dn}{d\nu},$$

式中 n' 是在 ν' 处算出的，n 是在 ν 处算出的．(b)(参看习题 12.16)必须注意，n' 必须在 ν' 处计值，证明习题 12.16 的结果也可写作

$$V\approx\frac{c}{n}+v\left[1-\frac{1}{n^2}-\left(\frac{\lambda}{n}\right)\frac{dn}{d\lambda}\right].$$

(提示：注意 $\lambda\nu=c/n$，在最后一项中可以用 n 代替 n'．)

较难的习题

12.19　从一给定金属表面逐出一个光电子所需的最小能量为 4 eV．欲使从这金属表面逐出的光电子的最大动能为 3 eV，试求所需光的频率．

12.20　图 12-19 中的曲线表示从一个光电表面逐出的电子的最大动能，作为投射在这表面上的光的频率的函数．试求能逐出一个光电子的光子的最小能量．

12.21　图 12-20 中示出一个特定原子的能级图．已知，吸收一个频率为 4.8×10^{14}Hz 的光子，将引起从基态 A 至态 B 的跃迁．(a)这个原子吸收

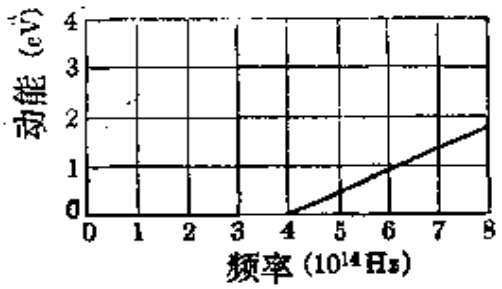


图 12-19

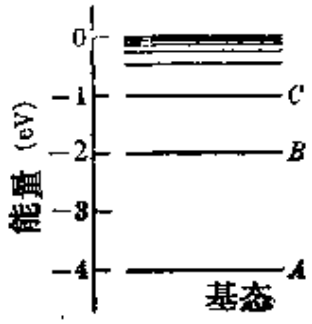


图 12-20

一个光子时，发生从态 A 到态 C 的跃迁，试求这个光子的频率．(b) 求出 (a) 部分中光子的动量．(c) 当这个原子处于基态时，要使它电离所需的最小能量是多少？

12.22 一个单色光源以 2.00W 的功率发射波长为 5600Å 的光．(a) 试证，所发射的光的每个光子的能量为 2.22eV．(b) 求出所发射的光的每个光子的动量．(c) 求出每秒钟发射的光子数．(d) 这光源放在一个半径为 R 的空球的中心，这空球的表面吸收全部的光．如果这光源在一切方向上同样地辐射光子，试求作用在这球面上的光压的表达式．

12.23 (a) 描述并说明一个实验，在这个实验中电磁辐射显示出似粒子的行为．(b) 描述并说明一个实验，在这个实验中电子显示出似波的行为．

12.24 一束平行的单色可见光，通过墙上的一个孔进入你的实验室．虽然你拥有研究这个光束的性质所需要的全部仪器，但你不能研究这个光源．试说明你如何用实验方法来确定每秒钟进入这实验室的光子数．

12.25 图 12-21 中示出某种原子的能级图的一部分．与跃迁 A 相联系的辐射的波长为 6000Å，与跃迁 B 相联系的辐射的波长为 3000Å．(a) 确定与跃迁 A 相联系的光子的能量．(b) 确定与跃迁 C 相联系的辐射的波长．(c) 定性地描述一束强的白光 (4000—8000Å) 通过这种气体元素时，所发生的情况．

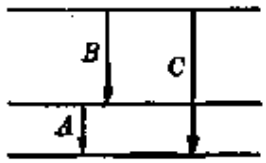


图 12-21

12.26 波长为 λ_1 的光投射在一清洁的金属表面上，它所逐出的光电子的最大动能为 KE_{max}．(a) 当入射辐射的波长越来越长时，试讨论对光电子的影响．(b) 如果这辐射的强度逐渐增加，而波长 λ_1 保持不变，试讨论对光电子的影响．(c) 指出光电实验中不能用光的波动模型满意说明的一

种实验观察.

12.27 一个质量为0.5kg的物体在一无摩擦的表面上静止. 一群(10^{20}个)光子撞击在这个物体上，全部光子都被吸收. 每个光子的能量为$100eV=1.6\times10^{-17}J$. 由于吸收了光子，这个物体的温度升高5K. (a)计算一个光子的动量. (b) 计算这个物体吸收这些光子之后的速率. (c) 如果所有的光子都被反射，那么(b)部分的答案有何变化？ (d) 计算这物体的材料的比热.

12.28 在一个光电实验中，用几种不同频率的辐射照射一金属表面，在每一频率测量射出电子的最大动能. 实验结果如下表所列：

频率 (Hz)	电子的最大动能(eV)
0.5×10^{15}	无电子射出
1.0×10^{15}	1.0
1.5×10^{15}	3.0
2.0×10^{15}	5.0

(a)根据这个光电实验的数据画出曲线. (b)确定这金属表面的阈频率. (c)确定这金属表面的功函数. (d) 当频率为2.0×10^{15}Hz的光投射在这金属表面上时，各种速率的电子从这表面上被射出. 为了使频率为2.0×10^{15}Hz的光从金属表面逐出的全部电子都停止，所需的最小遏止电势是多少？(e)研究表明，有一些从金属表面逐出的电子沿圆轨道运动. 试对这种电子行为提出合理的解释.

12.29 一个氢原子的质量为m，以速度v运动，在两个长为L、间距为a的平行壁之间来回曲折运动，如图12-22所示. (a)计算这氢原子同右壁相继两次碰撞之间的时间间隔Δt，作为a、v和θ的函数. (b)计算氢原子每次同右壁碰撞时传给右壁的动量的量值Δp，作为m、v和θ的函数. (c)计算氢原子作用在右壁上的平均力，并把作用在右壁上的压强P表示为θ、两壁之间区域的体积V和氢原子的动能E的函数.

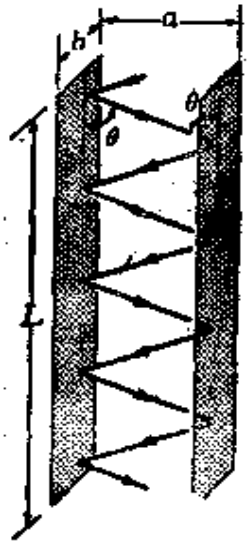


图 12-22

(d) 假定一个能量为E的光子沿这个曲折的路径运动. 试计算每一次碰撞它传给右壁的动量的量值Δp, 把由此产生的压强P表示为E、θ和V的函数.

12.30 太阳至地球的距离为1.5×10^{11}m. 地球以$1.4\text{kW}\cdot\text{m}^{-2}$的速率接受来自太阳的能量. (a) 这个能通量投射在一个面积为100m^2、深为0.1m的水池上. 假定全部能量使水加热, 试求10^3s后水池的温升. (b) 求太阳的质量转变为能量的速率(以$\text{kW}\cdot\text{s}^{-1}$为单位). 一个半径为$r$的球的表面积为$4\pi r^2$.

12.31 试证明, 如果在康普顿散射中, 一个电子的散射方向与入射光子的方向之间的夹角为ϕ, 则这个电子的动能为

$$E_k=\frac{h\nu(2\alpha\cos^2\phi)}{[(1+\alpha)^2-\alpha^2\cos^2\phi]},$$

式中$\alpha=h\nu/m_ec^2$.

12.32 证明, 在康普顿散射中, 散射光子和反冲电子的方向与入射光子方向之间的角θ和ϕ之间的关系为$\cot\phi=(1+\alpha)\tan\frac{1}{2}\theta$.

12.33 波长为10^{-5}m的电磁辐射垂直投射在一质量为10^{-1}kg的金属样品上, 一个电子沿和入射辐射相反的方向被逐出. 利用能量和动量守恒定律, 求出电子的能量和金属样品的反冲能量. 假定功函数为零. 这个结果是否证明, 我们在计算光电效应时不考虑动量守恒是正确的?

12.34 试证, 对于气体, 方程(12.17)中的第二项很小, 我们可以写出

$$n\approx1+\frac{Ne^2}{2m_e\varepsilon_0}\left(\sum_i\frac{f_i}{\omega_i^2-\omega^2}\right).$$

如果只有一个共振频率, 则上式变为

$$n\approx1+\frac{Ne^2}{2m_e\varepsilon_0(\omega_i^2-\omega^2)}.$$

12.35 在标准温度和压强下, 氢气的折射率为$n=1+1.400\times10^{-4}$(对于$\lambda=5.46\times10^{-7}$m)和$n=1+1.547\times10^{-4}$(对于$\lambda=2.54\times10^{-7}$m). 假定只有一个共振频率, 试计算这个频率和每单位体积内电子振子的数目. 将所得结果与每单位体积内的分子数目相比较. (提示: 利用习题12.34的结果.)

12.36 参考前题, 对于$\lambda=4\times10^{-7}$m, 压强$=10^5$Pa, $T=300$K, 计算氢气的折射率.

12.37　一块折射率为 n，厚度为 Δx 的玻璃板，放在一单色光源 S 和一个观察者 O 之间，如图 12-23 所示。(a) 证明，如果玻璃板的吸收可忽略不计，则这玻璃板对 O 所接收的波的作用，是增加一个相差 δ：

$$\delta=-\omega(n-1)\frac{\Delta x}{c},$$

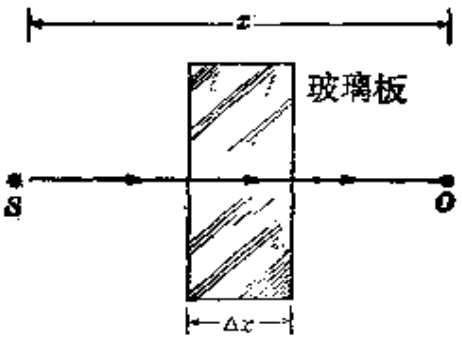


图　12-23

而不改变这个波的振幅 s_0。(b) 如果相差很小（或者由于 Δx 很小，或者由于 n 很接近于 1），试证明，在 O 处接收的波，可以看成是没有玻璃板存在时振幅为 s_0 的原来的波，与相移为 $-\pi/2$、振幅为 $s_0\omega(n-1)\Delta x/c$ 的波的叠加。（这个习题表明一种物质介质对电磁波的作用。）

第十三章　反射和折射

13.1　引　　论

第 10、11 和 12 章中讨论的各种波，其传播速度与波传播时通过的介质的某些物理性质有关系．例如，弹性波的速度与介质的弹性模量和密度有关系．电磁波的速度与波传播时通过的物质的电容率和磁导率有关系．

一个波的传播速度对介质性质的依赖关系，引起反射和折射的现象．当一个波穿过两种介质（波在这两种介质中的传播速度不同）的分界时，就发生反射和折射．反射波是一个新的波，它又回到入射波在其中传播的介质．折射波是透射到第二种介质中的波．入射波的能量在反射波和折射波之间分配．在许多情况下，反射波得到较多的能量，这就是反射镜的情况．在另外一些情况下，折射波携带大部分能量．当一横波为偏振波时，在反射和折射时偏振通常受到影响；目前我们将忽略这种效应，而在下一章中讨论偏振．

13.2　惠更斯原理

波的传播由波所对应的场的方程来描述．因此，如果知道了波源，并且考虑了介质性质的变化，则这个波从一个区域到另一区域的传播，原则上是能够描绘出来的．然而，也能计算一个波在空间一特定点的振幅，而不直接涉及源．大约在 1680 年，荷兰物理学家惠更斯（C. Huygens, 1629—1695）提出描绘波的传播的简单机制．他的作图法可以应用于物质介质中的或弹性波或机械波．

我们知道，波面或者波阵面，是具有恒定相位的面．波面是波动在介质中同时到达的那些点组成的．例如，在平面波的情况下，扰动可以用$f(u\cdot r-vt)$来表示．波面是由在一给定时刻相位$(u\cdot r-vt)$具有相同值的一切点组成的．因此，波面由如下方程表示：

$$u\cdot r-vt=\text{常数}.$$

对于一给定时刻 t，上式对应于一个垂直于单位矢量 u 的平面．同理，对于一个球面波，波面由$(r-vt)=$常数表示；对于一给定时刻，此式表示球面．

惠更斯设想出从一个波面过渡到另一个波面的方法．他假定波是组成介质的粒子的运动的结果．考虑一个波面 S（图 13-1）．

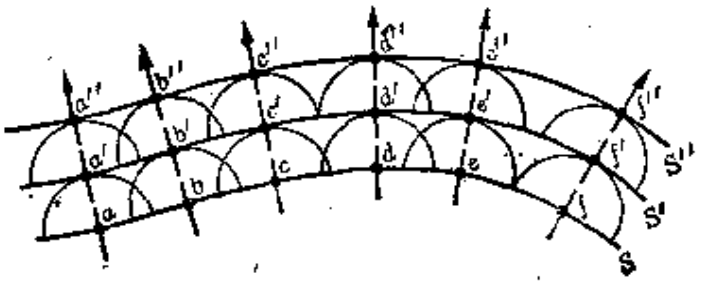


图 13-1　惠更斯关于前进波的作图法．

当波动到达这个面时，这个面上的每个粒子 $a,b,c,\cdots$都变成一个次级波源，因而每一个粒子都发射次级波（由小的半圆表示），这些次级波到达介质中的下一层粒子．于是这些粒子开始运动而形成下一个波面 S'．波面 S'与所有的次级波相切．这个过程不停地重复而导致波通过介质传播．在物体中的原子或分子的机械振动所引起的弹性波的情况下，波传播的这种图象表示法，看起来是很合理的．

然而，在象电磁波在真空中传播的情况下，这种表示方法是没有物理意义的，因为在真空中没有振动的粒子．惠更斯作图法，虽然应用于物质中的机械波时是十分合理的，但必须加以修正，因为后来认识到在自然界中还存在不同种类的其他波．这个修正是在

十九世纪末期，由德国人基尔霍夫(G. Kirchhoff，1824—1887)完成的．他用一种比较复杂的数学处理来代替惠更斯的直观作图法．基尔霍夫的计算过于复杂，不可能在这里重述．然而，他的计算的最后结果却是相当简单的，这将在以后几段中看到．

波动是受一般波动方程(10.65)控制的，即

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=v^2\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\right), \tag{13.1}$$

式中 ξ 可以是物质中原子的位移(对于弹性波)，或者是电场和磁场(对于电磁波)，等等．描述波在任一给定介质中的传播，主要在于求出这个微分方程的一个解 $\xi(r,t)$．方程(13.1) 的解取决于这个问题对 ξ 所要求的物理条件，即源的位置和性质，物理上的不连续曲面等等．数学家称这些条件为边界条件．微分方程理论表明，在特殊条件下，我们能够求出象(13.1)那样的方程的解，如果我们知道函数 $\xi(r,t)$ 在一个闭曲面 S 上的值(图 13-2)．

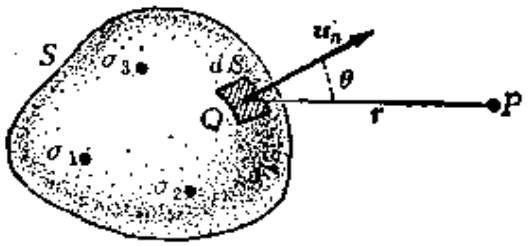


图 13-2　如果闭曲面 S 上的波为已知，就能算出点 P 的波．

更具体地讲，假定我们要计算某一点 P 的波动．如果我们知道源 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\cdots$，我们就可以把它们在 P 处的贡献加起来而得到合波动．不过，我们现在假定，只知道 ξ 在一个任意的、闭合的曲面 S 上一切点的值．在这种情况下，即使不知道源的分布，我们也能够求出点 P 的波．在数学上，这个论断可表述如下：设 $f(Q,t)$ 表示在时刻 t 曲面 S 上每一点 Q 的波．令 r 表示 Q 点附近的面元 dS 至点 P 的距离．在时刻 t，点 P 的扰动可以用如下形式

的积分表示①:

$$\xi_P(t)=\oint_S g(\theta)\frac{f(r-vt)}{r}dS, \tag{13.2}$$

上式中的积分遍及整个曲面 S. 这个积分有一个相当简单的物理解释:因子$(1/r)f(r-vt)$表示一个球面波,它是面元dS在时刻$(t-r/v)$发出的,它在时刻 t 到达点P,(r/v)是从dS到 P 的传播时间. 因子$g(\theta)$是一个方向因子,表示dS 所发射的波并非在一切方向上具有相同的振幅. 如果规定 θ 为在dS 处曲面法线与从 dS 到 P的方向之间的角(图 13-2),则 $g(\theta)$具有如下形式:

$$g(\theta)=\frac{1}{2}(1+\cos\theta).$$

于是最大振幅$(g=1)$对应于$\theta=0$,即向前的传播;最小振幅$(g=0)$对应于 $\theta=\pi$, 即向后的传播. 于是我们得出结论:如果我们假定闭曲面 S 的每一个面元dS 起着一个次级波源的作用,我们就能够求出在时刻 t 在点 P 的扰动. 适才描述的基尔霍夫的计算方法,实质上等效于惠更斯的表述,但不涉及一个机械模型.

在以后几章中,在关于波传播的许多讨论中,特别是在关于衍射和散射的讨论中, 我们将要利用基尔霍夫重新表述的惠更斯原理.

13.3 马吕斯定理

描绘波通过介质传播的另一个重要工具,是根据法国物理学家马吕斯 (E. Malus, 1775—1812)的名字命名的马吕斯定理. 参看图 13-1, 我们注意到, 可以画出一系列垂直于相继波面的直线(如带箭头的虚线所示). 这些直线叫做射线, 对应于波传播的直

① 实际的表达式更复杂一些; 但是方程(13.2)适合我们这里的目的,它能提供一个充分的近似,适用于本书中将要讨论的这类问题.

线．射线与波面之间的关系，类似于力线和等势面之间的关系．由一条给定射线连结起来的，不同波面上的那些点子，叫做对应点（见图 13-1 中的点 a, a', a'' 或者点 b, b', b''）．波沿任意一条射线从 S 传播到 S'' 所需的时间必定相同，因为 S'' 上的一切点必有相同的相位．因此，我们可以说：

两个波面的对应点之间的时间间隔，对于所有的对应点对来说，都相同．

于是我们可以得出结论：距离 $aa'', bb'', cc'', \cdots$ 必定与一给定射线上每一点波动的速度有关系．在一均匀的各向同性介质中，波的传播速度在一切点上和一切方向上都相同；对于一切对应点，两个波面之间的间距必定相同；在此情况下，射线是直线，因为对称性表明，射线没有理由弯向这一边或另一边．对于平面波和球面波，我们已看到这种情况，如图 13-3 中的(a)和(b)所示．因此，在均匀的各向同性介质中，在一般情况下，波面族必定具有一组公共法线，如图 13-3(c)所示；波面族必定沿这些法线有相等的间距．

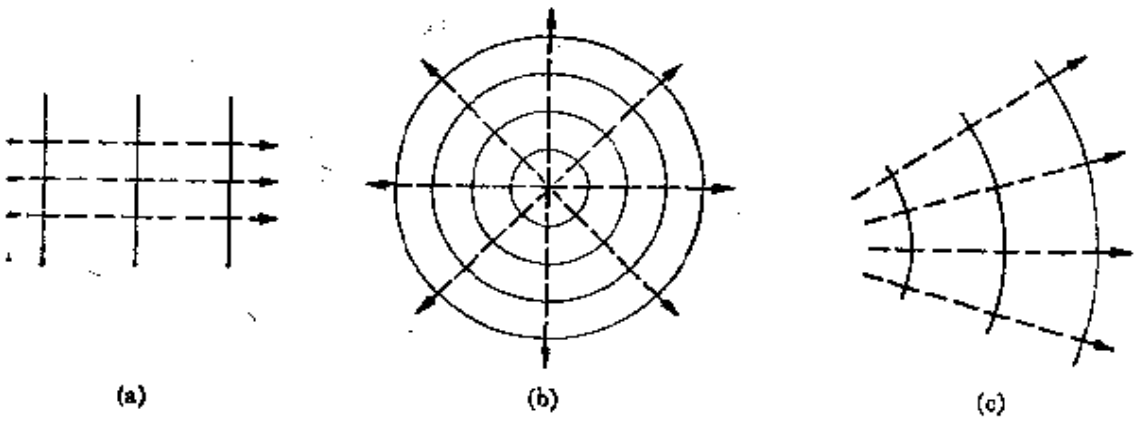


图 13-3　平面波，球面波形状的波．

现在考虑一个波通过一系列均匀的各向同性介质传播的情况．在穿过两相邻介质的分界面时，传播方向可能改变（即射线可能改变方向）．但当射线在一种给定介质中行进时，它们仍然是垂直于波面的直线．设 S（图 13-4）为在第一介质中的波面．于是可

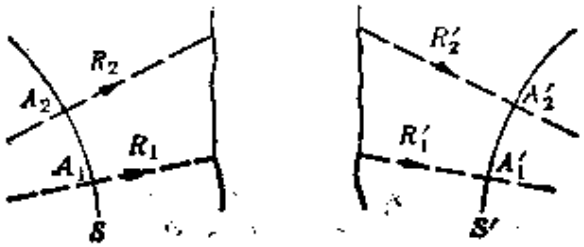


图 13-4　入射波和出射波中的对应射线.

以画出两条垂直于 S 的射线 R_1 和 R_2. 在这介质中，相继各波面必定垂直于 R_1 和 R_2. 如果这个波动通过一系列不同介质之后，我们观察到另一个波面 S'，我们会发现射线 R_1 和 R_2 已被变换为垂直于 S' 的射线 R_1' 和 R_2'. 换句话说，在波传播的全部过程中，都保持着射线与波面正交的关系. 因此，A_1 和 A_1' 是对应点，A_2 和 A_2' 也是对应点. 马吕斯定理还假定，波从波面 S 上的 A_1 传播到波面 S' 上的 A_1' 所需要的时间，必定等于从波面 S 上的 A_2 传播到波面 S' 上的 A_2' 所需的时间.

13.4　平面波的反射和折射

考虑在介质(1)中沿单位矢量 u_i 的方向传播的平面波(图 13-5). 当这波到达介质(1)和(2)的分界平面 AB 时，一个波透射到

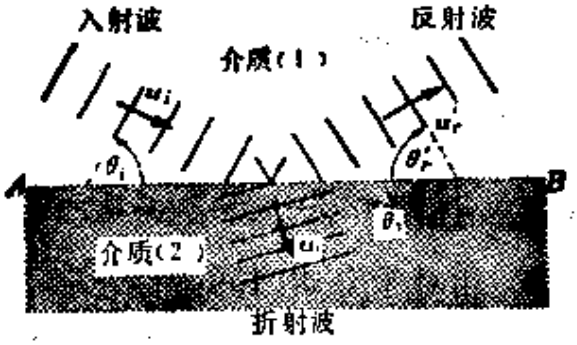
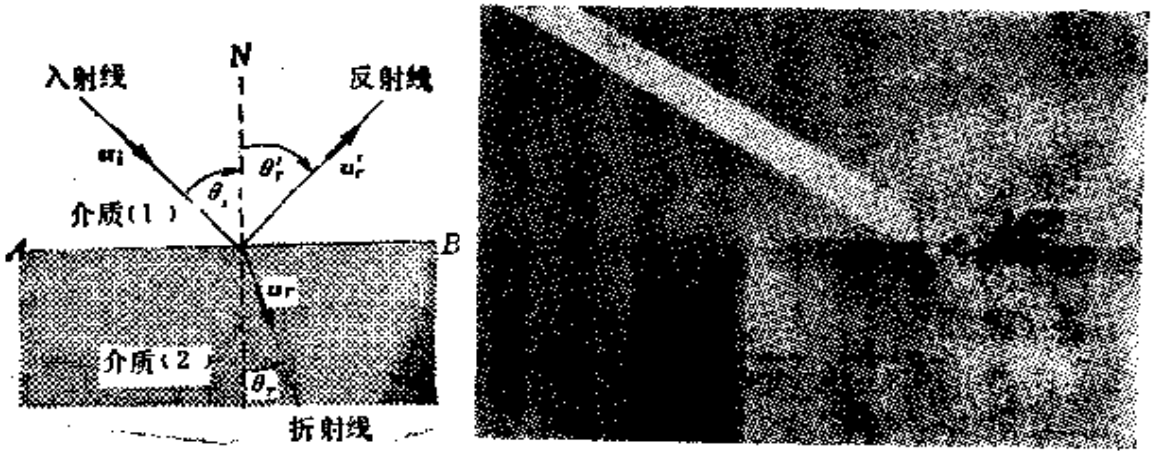


图 13-5　入射、反射和折射的平面波

介质(2)中，另一个波被反射回到介质(1)中，前者叫做折射波，后者叫做反射波. 当入射角为一斜角时，折射波沿单位矢量 u_t 的方向传播(u_t 不同于 u_i)；反射波沿单位矢量 u_r' 的方向传播，u_r' 和

u_i 相对于分界面法线是对称的. 图 13-6 中示出射线的对应情况. 角 θ_i、θ_r 和 θ'_r 分别叫做入射角、折射角和反射角. 三个矢量 u_i、u_r 和 u'_r 的方向之间的关系由下列三条实验定律确定:



(a) (b)

图 13-6 (a) 入射线、反射线和折射线. (b) 一束光在一块玻璃板上反射,并被折射到玻璃板内部.

(1) 入射、折射和反射的方向在同一个平面内,这个平面垂直于分界面,因而包含界面的法线 N.

(2) 反射角等于入射角,即

$$\theta'_r = \theta_i. \tag{13.3}$$

(3) 入射角的正弦与折射角的正弦之比是一常数. 这叫做斯涅耳定律,以荷兰数学家斯涅耳(Willebrod Snell von Royen, 1591—1626)的名字命名. 斯涅耳定律的表达式为

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r} = n_{21}. \tag{13.4}$$

常数 n_{21} 叫做介质(2) 相对于介质(1)的折射率. 这个常数的数值与波的性质和两种介质的性质有关系.

当波面和界面都不是平面时,这些定律仍然适用. 这是因为,在每一点,波面或界面的有限部分都可以看作是平面,因而在该点射线的行为符合方程(13.3)和(13.4).

这三条定律能够用实验来证明，而无多大困难．如果利用波传播的基本概念和特别是马吕斯定理，也能够从理论上证明这三条定律．例如，仅仅根据对称性考虑就能够证明第一条定律，因为入射线和法线 N 构成一个平面，没有什么先验的理由使折射线和反射线偏离这个平面．为了证明第二和第三条定律，我们考虑两条入射线 R_1 和 R_2（图 13-7）；R_1 和 R_2 是平行的，因为入射波是平

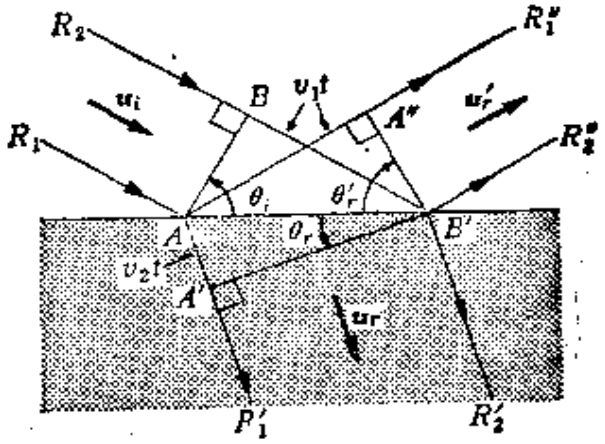


图 13-7

面波．射线 R_1 在点 A 与界面相交，射线 R_2 在点 B' 与界面相交．由于在 A 和 B' 处的几何情况相同，我们可以推断：折射线 R_1' 和 R_2'，与反射线 R_1'' 和 R_2'' 一样，也是平行的．由于 R_1 和 R_2 是任意选取的，所以折射波和反射波也是平面波，因为根据马吕斯定理，它们必须垂直于对应的一组平行射线．

现在考虑如下的波面：入射波中的 AB，折射波中的 $A'B'$，反射波中的 $A''B'$．因此，A, A' 和 B, B' 是折射波的两组对应点，A，A'' 和 B, B' 是反射波的两组对应点．如马吕斯定理所表示的那样，沿波面上对应点之间的射线通过所需的时间相同．设 t 为入射波以速度 v_1 沿射线 R_2 从 B 移动到 B' 所需的时间．在这同一时间里，折射波以速度 v_2 沿射线 R_1' 从 A 移动到 A'．而反射波以速度 v_1 沿射线 R_1'' 从 A 移动到 A''．于是有

$$BB'=v_1t,\quad AA'=v_2t,\quad AA''=v_1t;$$

由图中的几何关系可知，

$$\sin\theta_i=\frac{BB'}{AB'}=\frac{v_1t}{AB'},$$

$$\sin\theta_r=\frac{AA'}{AB'}=\frac{v_2t}{AB'},$$

$$\sin\theta_r'=\frac{AA''}{AB'}=\frac{v_1t}{AB'}.$$

比较第一和第三个关系式，可知 $\sin\theta_r'=\sin\theta_i$，即 $\theta_r'=\theta_i$. 这正是反射定律，方程(13.3). 第一个关系式除以第二个关系式，给出

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r}=\frac{v_1}{v_2}.$$

上式表示斯涅耳定律 [方程(13.4)]，因为两个传播速度的比值 v_1/v_2 是一常数. 这个方程与方程(13.4)的比较表明，两种物质的相对折射率，等于波在这两种物质中的传播速度之比，即

$$n_{21}=\frac{v_1}{v_2}. \tag{13.5}$$

对于每一种波动，选取一特定介质作为参考或标准，用 c 表示这种波在该介质中的传播速度. 任何其他介质对于这种波动的折射率被定义为

$$n=\frac{c}{v}. \tag{13.6}$$

对于电磁波，参考介质是真空，因此 $c\approx3\times10^8\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. 对于两种物质有

$$\frac{n_2}{n_1}=\frac{c}{v_2}\times\frac{v_1}{c}=\frac{v_1}{v_2}=n_{21} \tag{13.7}$$

所以两种物质的相对折射率，等于它们各自的折射率之比. 利用式(13.7)可以把斯涅耳定律 [即方程(13.4)] 写成比较对称的形式：

$$n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_r. \tag{13.8}$$

当 $v_2 \lesseqgtr v_1$ 时，$n_2 \gtreqless n_1$，$n_{21} \gtreqless 1$，结果得出 $\theta_i \gtreqless \theta_r$，如图 13-8 所示.

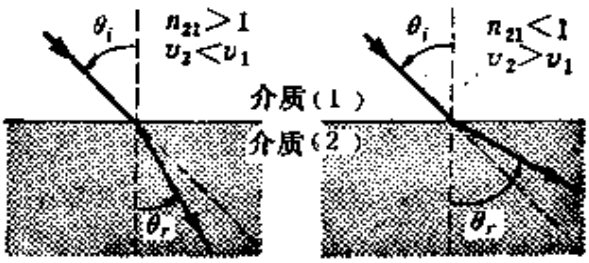


图 13-8 (a) $n_{21}>1$ 和(b)$n_{21}<1$ 的情况下的折射线.

在第二种情况下，即 $n_{21}<1$ 的情况，当

$$\sin\theta_i = n_{21} \tag{13.9}$$

时，发生一个特殊情况；这时 $\sin\theta_r=1$，亦即 $\theta_r=\pi/2$，这表示折射线平行于表面. 方程(13.9)给出的角 θ_i 叫做临界角，用 θ_c 表示. 几何学情况如图 13-9 所示. 当 $n_{21}<1$ 和 $\theta_i>\theta_c$ 即 $\sin\theta_i>n_{21}$ 时，得出 $\sin\theta_r>1$，这是不可能的. 因此，在这种情况下，没有折射线；发生全反射. 例如，当光从玻璃进入空气中时，就会发生这种情况. 严格地讲，如图 13-9 中所示，在第二种介质中有一个波沿表面传播；但这个波的振幅非常迅速地随深度的增加而减小，因而这个波局限在沿表面的非常薄的一层中.

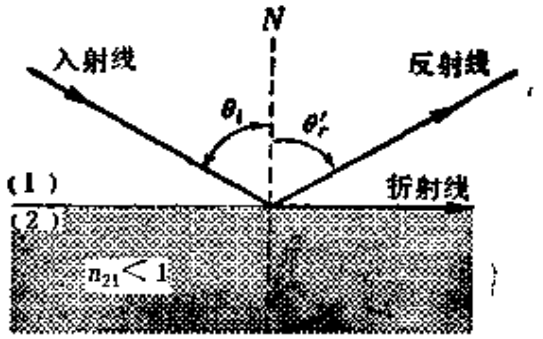


图 13-9 当 $n_{21}<1$ 和 θ_i 大于临界角 λ 时，发生全反射.

例题 13.1 一个波通过以平行平面为界面的介质时的情况.

解 我们考虑一块厚度为 a 的平行板和一条入射角为 θ_i 的射线 AB(图

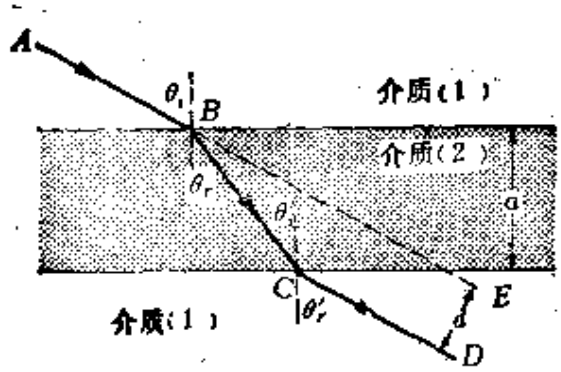
13-10)．不考虑反射线．与折射线 BC 对应的折射角为 θ_r．由关系式(13.8)，得出

$$n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_r .$$

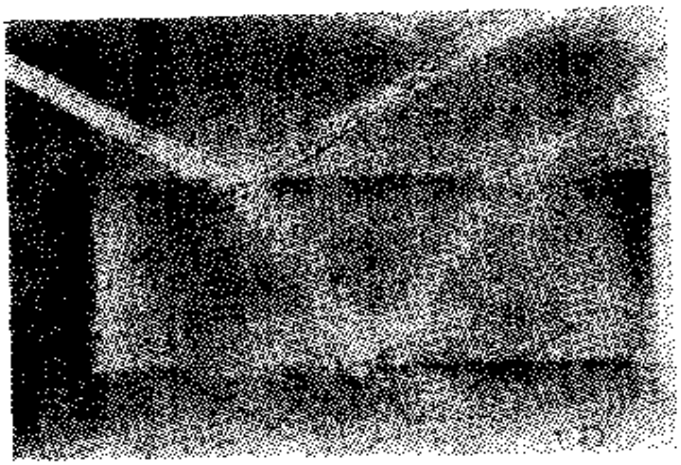
在 C 处，折射是从介质(2)进入介质(1)，由方程(13.8)得出

$$n_2 \sin\theta_i' = n_1 \sin\theta_r' .$$

由图 13-10 中的几何学关系，可知 $\theta_i' = \theta_r$．因此，把这两个关系式结合起来，就得出 $\sin\theta_i = \sin\theta_r'$，即 $\theta_i = \theta_r'$．这就表示射线 CD 平行于 AB，但有一侧向位移．学生可以自己证明，射线的侧向位移等于



(a)



(b)

图 13-10 (a) 一条射线通过一块平行板的传播．(b) 中的照片示出一束光的位移．

$$d = a\frac{\sin(\theta_i - \theta_r)}{\cos\theta_r} .$$

很容易证明，如果不是一块，而是几块不同材料的平行板，出射线也是平行于入射线．

13.5 球面波的反射和折射

现在讨论球面波在一平表面上的反射和折射. 在一点源O处产生的球面波投射在一平表面S上. 在此情况下，产生两组新的波：反射波和折射(或透射)波，如图 13-11 所示. 为了描绘反射波面和折射波面的形状，必须画出许多反射线和折射线. 对应的反射波面和折射波面垂直于这些射线. 在图 13-11 中，在B处画出一组这样的射线(假定 $n_{21}>1$). 根据反射和折射的定律(2)和(3)，我们有

$$\theta_r'=\theta_i,\quad \frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r}=n_{21}.$$

反射线BD延长到介质(2)中时，与法线AO的延长线相交于点I'. 三角形OAB和$I'AB$是直角三角形，而且O和I'处的角相等，因此$AO=AI'$. 由于B是一个任意点，我们得出结论：一切反射线都通过I'，I'和O相对于这个平表面是对称的. 这个点叫做反射所产生的点O的**象**.

因此，当球面波投射在一平表面上时，反射波是球面波，而且相对于入射波是对称的. 这种对称性是可以预期的，因为反射波向后传播的速度和入射波相同，这样就使反射波相对于反射面保持对称.

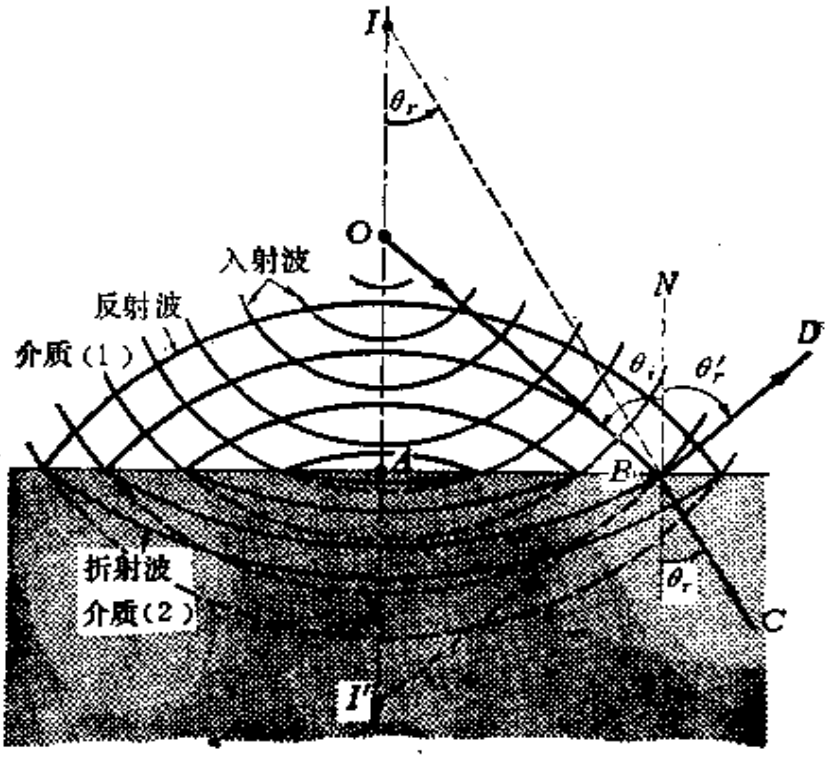
折射线BC向后延长到介质(1)中，与法线OA相交于点I，于是有 $\tan\theta_r=AB/AI$. 因为 $\tan\theta_i=AB/AO$，所以这两个正切之比为

$$\frac{\tan\theta_i}{\tan\theta_r}=\frac{AI}{AO},$$

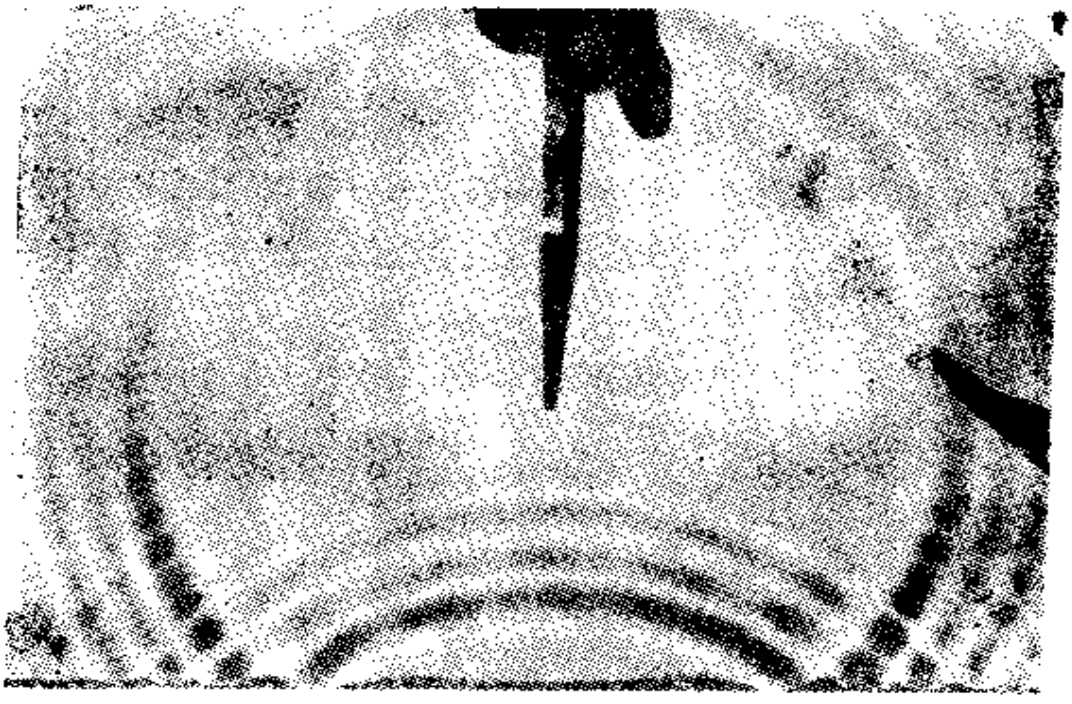
或

$$AI=AO\frac{\tan\theta_i}{\tan\theta_r}. \tag{13.10}$$

我们知道，斯涅耳折射定律要求 $\sin\theta_i/\sin\theta_r$ 是一常数，并等于



(a)



(b)

图 13-11 (a) 入射、反射和折射的球面波. (b)图中照片示出一液体中的入射和反射表面波.

n_{21}；但这时 $\tan\theta_i/\tan\theta_r$ 就不会是常数．因此，折射线并不都通过同一点．于是我们得出结论：当一球面波投射在一平表面上时，折射波不是球面波．

由于折射线不通过同一个点，所以它们不象反射线那样形成 O 的一个点象．折射线相交于法线 OA 上的若干个点，也相交于一个锥面上(叫做焦散面)，如图 13-12 所示．在光波折射的情况下，不难观察到折射线的交点．倾斜最小的射线的交点所形成的

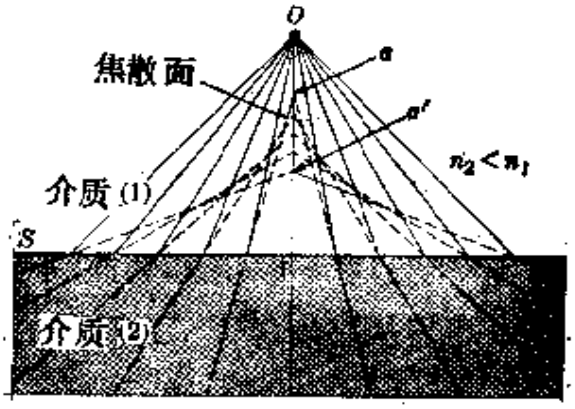


图 13-12　来自一个点光源的光线的折射．向后延长时，折射线并不相交于同一点．

点 a，很容易计算出来，因为在这种情况下，图 13-11 中的角 θ_i 和 θ_r 非常小，在方程(13.10)中可以用正弦代替正切；结果得到

$$AI \approx AO\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r} = n_{21}AO \quad (\text{对于小角度}) \tag{13.11}$$

13.6　关于反射和折射定律的进一步讨论

我们已经根据马吕斯定理，利用几何学推理建立了反射定律和折射定律．现在我们采用更为解析的形式来讨论这些定律．假定一个入射波由(10.63)那种型式的方程描述，即

$$\xi_i = \xi_{oi}\sin(\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{r} - \omega t). \tag{13.12}$$

折射波和反射波分别为

$$\xi_r = \xi_{or}\sin(\boldsymbol{k}_r\cdot\boldsymbol{r} - \omega t). \tag{13.13}$$

和
$$\xi_r' = \xi_{0r}' \sin(k_r' \cdot r - \omega t). \tag{13.14}$$
注意，在反射波和折射波中所用的 ω 与入射波中的 ω 相同，因为实验表明，反射和折射时波动的频率不变.

赋予 ξ 的物理性质(位移、压强、电场或磁场)是这样的，即不论从哪一边观察，它在两种介质分界面上的值必须相同.（在电磁波情况下，电场和磁场的分量之间的关系可能具有稍为不同的性质；但这个关系仍然是线性的，并涉及界面两边的场.）在介质(1)中，我们有入射波和反射波，它们在界面处产生的扰动为 $\xi_i + \xi_r'$；在介质(2)中，只有折射波，它在界面处产生扰动 ξ_r. 于是在界面处有
$$\xi_i + \xi_r' = \xi_r. \tag{13.15}$$
为了使上式在界面上一切点和一切时刻都能满足，方程(13.12)，(13.13)和(13.14)中的周相必须等同. 亦即对于界面上的一切点(图 13-13)都有

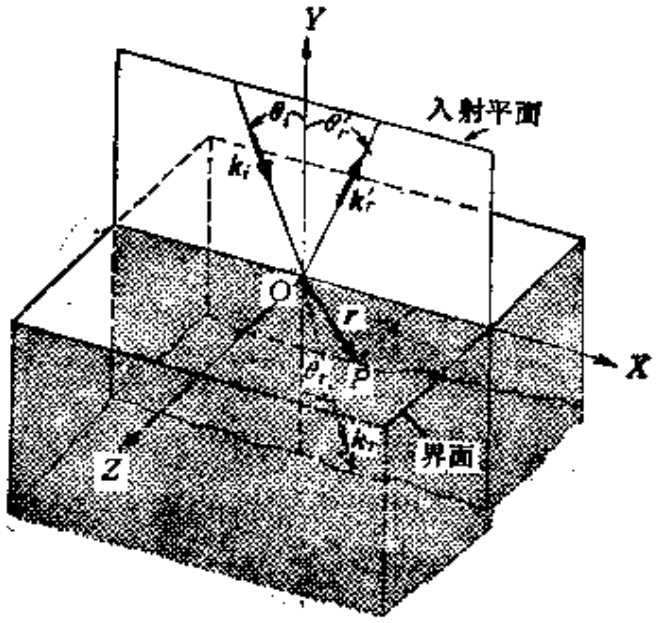


图 13-13

$$k_i \cdot r - \omega t = k_r \cdot r - \omega t = k_r' \cdot r - \omega t. \tag{13.16}$$
消去公共项，上式变为

$$\boldsymbol{k}_i \cdot \boldsymbol{r} = \boldsymbol{k}_r \cdot \boldsymbol{r} = \boldsymbol{k}'_r \cdot \boldsymbol{r}. \tag{13.17}$$

如果选取 XYZ 轴如图 13-13 所示，使分界面与 XZ 平面重合，入射方向在 XY 平面内，则 $\boldsymbol{r}$ 必定在 XZ 平面内，并由 $\boldsymbol{r} = u_x x + u_z z$ 给出。同理，$\boldsymbol{k}_i = u_x k_{ix} + u_y k_{iy}$；既然我们不能预先知道 $\boldsymbol{k}_r$ 和 $\boldsymbol{k}'_r$ 也在同一平面内，我们就必须写出 $\boldsymbol{k}_r = u_x k_{rx} + u_y k_{ry} + u_z k_{rz}$ 和 $\boldsymbol{k}'_r = u_x k'_{rx} + u_y k'_{ry} + u_z k'_{rz}$。把这些表达式代入方程 (13.17) 中，得出：

$$k_{ix}x = k_{rx}x + k_{rz}z = k'_{rx}x + k'_{rz}z.$$

这个关系式对于平面 XZ 上的一切点都必须成立，因此得出

$$k_{ix} = k_{rx} = k'_{rx} \text{ 和 } k_{rz} = k'_{rz} = 0 \tag{13.18}$$

上式中第二组方程表示矢量 $\boldsymbol{k}_r$ 和 $\boldsymbol{k}'_r$ 沿 Z 轴的分量为零，所以矢量 $\boldsymbol{k}_r$ 和 $\boldsymbol{k}'_r$ 也在 XY 平面内；因此，入射线、反射线和折射线处在同一个平面内；这就是第 13.4 节中提到的第一条定律(1)。

其次，我们由图 13-14 可以看出，$k_{ix} = k_i \sin\theta_i$，$k_{rx} = k_r \sin\theta_r$，$k'_{rx} = k'_r \sin\theta'_r$；由方程(10.6)，$k_i = k'_r = \omega/v_1$，$k_r = \omega/v_2$。把这些关系式代入(13.18)的第一组方程中，则得

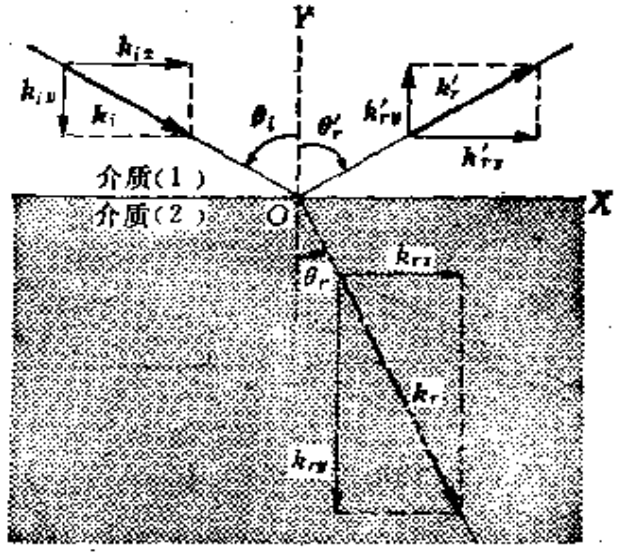


图 13-14　入射波、反射波和折射波中的传播矢量。

$$\frac{1}{v_1}\sin\theta_i=\frac{1}{v_2}\sin\theta_r=\frac{1}{v_1}\sin\theta'_r\ .$$

由上式我们立即得出 $\sin\theta_i=\sin\theta'_r$，亦即 $\theta_i=\theta'_r$；$\sin\theta_i/\sin\theta_r=v_1/v_2=n_{21}$. 这样，我们就又得到原来在第 13.4 节中阐述的关于反射和折射的两条定律.

当方程(13.16)被满足时，方程(13.15)化为

$$\xi_{0i}+\xi'_{0r}=\xi'_{0r}, \tag{13.19}$$

这是三个波的振幅之间的关系式. 如果方程(13.15)，或者它的等效方程(13.19)，是必须满足的唯一要求，那就没有足够的数据来确定反射波和折射波的振幅. 但是，由于问题的物理学性质，通常需要另一个边界条件，例如，在弹性波的情况下，穿过界面时应力或压强的连续性，或者在电磁波的情况下，电场或磁场的某些分量的连续性. 因此，必定存在涉及振幅 ξ_{0i}、ξ_{0r}和 ξ'_{0r} 的第二个关系式(即边界条件). 利用这两个边界条件，就能够确定振幅 ξ_{0r}和 ξ'_{0r} 作为 ξ_{0i} 的函数，如下面的例题所示.

例题 13.2 在两条用不同材料制成的弦的连结点处横波的反射和透射.

解 两条弦(1)和(2)在一点连接起来(图 13-15). 取连接点为坐标原点. 两条弦所受的张力 T 相同. 为数学上的方便，我们利用方程(10.10)所给出的波的另一种表达式. 有一入射波从左边来，以速度 $v_1=\omega/k_1$ 传播，具有如下形式：

$$\xi_i=\xi_{0i}\sin(\omega t-k_1x).$$

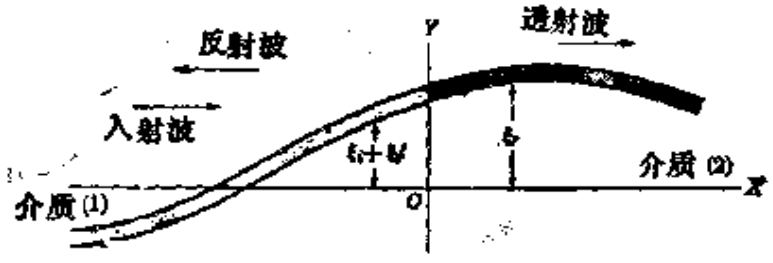


图 13-15 线密度不同的两条连接起来的弦中的横波.

在不连续点处，一个折射(即透射)波以速度 $v_2=\omega/k_2$ 沿弦(2)传播，具有如下形式：

$$\xi_r = \xi_{0r}\sin(\omega t - k_2 x).$$

还有一个反射波，它以速度 ω/k_1 沿弦(1)向后传播，具有如下形式：

$$\xi'_r = \xi'_{0r}\sin(\omega t + k_1 x).$$

注意，对于反射波和入射波都用 k_1，因为它们在同一种介质[即弦(1)]中传播．在弦(1)上任一点的竖向位移为 $\xi = \xi_i + \xi'_r$．在弦(2)上，竖向位移为 $\xi = \xi_r$．两条弦的连接点 O 对应于 $x=0$．在这一点，根据方程(13.15)，必须有 $\xi_i + \xi'_r = \xi_r$，即

$$\xi_{0i}\sin\omega t + \xi'_{0r}\sin\omega t = \xi_{0r}\sin\omega t$$

或

$$\xi_{0i} + \xi'_{0r} = \xi_{0r}. \tag{13.20}$$

这个方程与方程(13.19)相同，表示振幅之间的关系．为了求出振幅之间的第二个关系式，我们遵循第 10.7 节中的讨论，并注意到，在弦(1)中任一点，竖向力为

$$F_y = T\sin\alpha \approx T\tan\alpha = T\frac{\partial\xi}{\partial x} = T\left(\frac{\partial\xi_i}{\partial x} + \frac{\partial\xi'_r}{\partial x}\right).$$

因为 α 很小，所以 $\sin\alpha$ 实际上等于 $\tan\alpha$．然后取 ξ_i 和 ξ'_r 的导数，得出

$$F_y = Tk_1[-\xi_{0i}\cos(\omega t - k_1 x) + \xi'_{0r}\cos(\omega t + k_1 x)].$$

同理，求得在弦(2)上任一点的竖向力为

$$F_y = T\frac{\partial\xi_r}{\partial x} = -Tk_2\xi_{0r}\cos(\omega t - k_2 x).$$

在连接点处，不论对弦(1)还是对弦(2)来计算，竖向力必定相同．在上面两个 F_y 的表达式中，令 $x=0$，并令二者相等，消去公因子 $\cos\omega t$，则得

$$k_1(\xi_{0i} - \xi'_{0r}) = k_2\xi_{0r}. \tag{13.21}$$

这是三个振幅必须满足的第二个条件，这是由这种波的物理性质决定的．解方程组(13.20)和(13.21)，得出

$$\xi_{0r} = \left[\frac{2k_1}{k_1 + k_2}\right]\xi_{0i}, \qquad \xi'_{0r} = \left[\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right]\xi_{0i}, \tag{13.22}$$

上式表示折射波和反射波的振幅对入射波振幅的关系．注意，$k = \omega/v$，可将上式写作

$$\xi_{0r} = \left[\frac{2v_2}{v_1 + v_2}\right]\xi_{0i}, \qquad \xi'_{0r} = \left[\frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2}\right]\xi_{0i}. \tag{13.23}$$

在弦中横波的情况下，根据方程(10.37)，$v = \sqrt{T/\sigma}$．式中 σ 是单位长度的质量．于是我们还可以写出

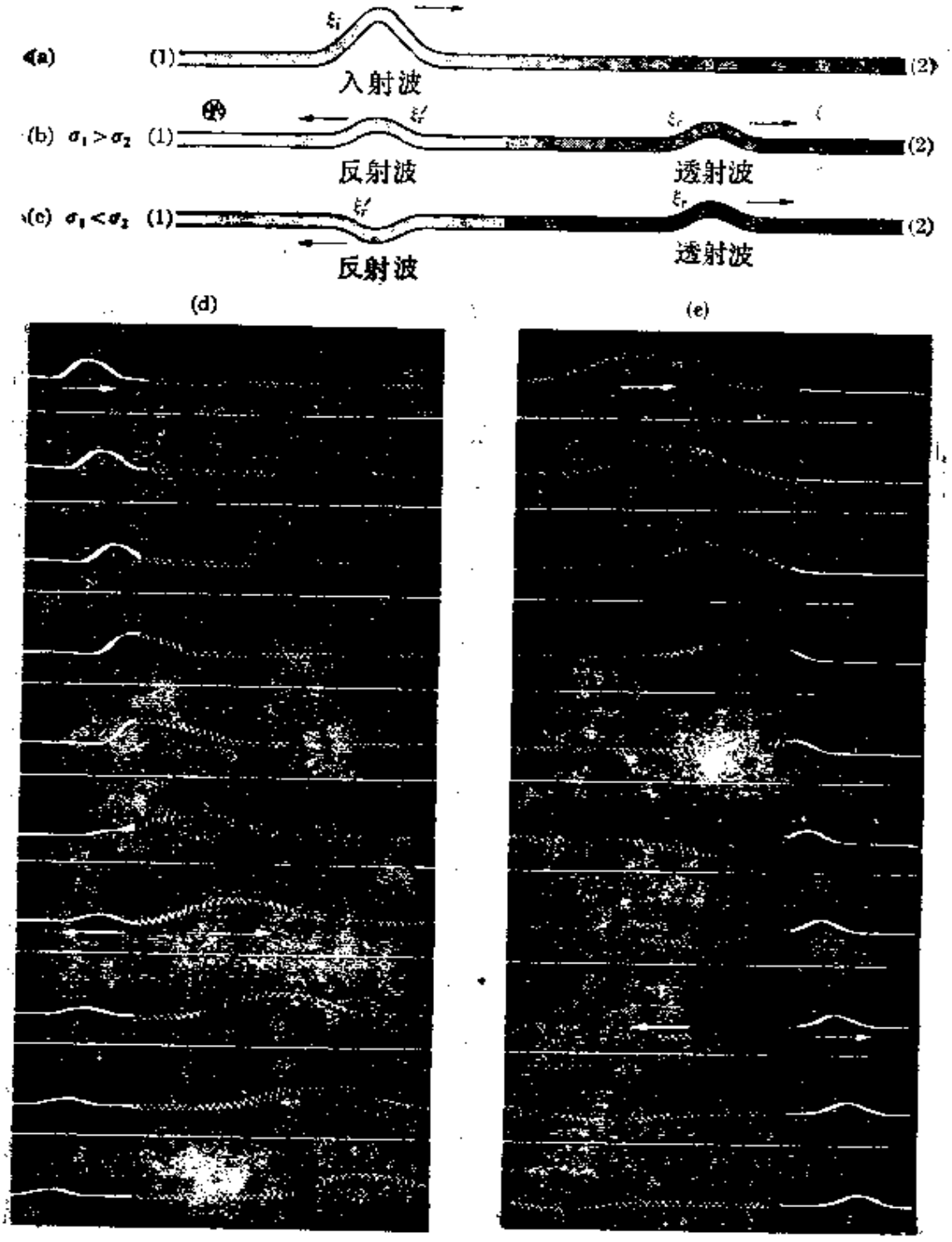


图 13-16　两条连结起来的不同线密度的弦中的入射波、反射波和透射波．在(b)和(d)中，载有入射波的弦(左边)较重；在(c)和(e)中，左边的弦较轻．

$$\xi_{0r}=\left[\frac{2\sqrt{\sigma_1}}{\sqrt{\sigma_1}+\sqrt{\sigma_2}}\right]\xi_{0i}, \qquad \xi'_{0r}=\left[\frac{\sqrt{\sigma_1}-\sqrt{\sigma_2}}{\sqrt{\sigma_1}+\sqrt{\sigma_2}}\right]\xi_{0i}. \tag{13.24}$$

比值 ξ_{0r}/ξ_{0i} 叫做透射系数，用 t 表示；比值 ξ'_{0r}/ξ_{0i} 叫做反射系数，用 r 表示，因此

$$t=\frac{2\sqrt{\sigma_1}}{\sqrt{\sigma_1}+\sqrt{\sigma_2}}, \qquad r=\frac{\sqrt{\sigma_1}-\sqrt{\sigma_2}}{\sqrt{\sigma_1}+\sqrt{\sigma_2}}. \tag{13.25}$$

注意，t 总是正的，所以 ξ_{0r} 的符号总是与 ξ_{0i} 的相同，透射波总是与入射波同相．但是 r 为正或为负，则取决于 $\sigma_1>\sigma_2$ 或者 $\sigma_1<\sigma_2$，所以反射波和入射波可以同相或者反相．在后一种情况下，反射波相对于入射波经受一个相移 π．图 13-16 中示出这两种情况．

学生可以利用弦(1)和(2)上的能流速率来检验通过连接点的能流．透射的能量正比于 t^2，反射的能量正比于 r^2．

13.7 金属表面上的反射和折射

在第 2.5 节中曾证明，导体内部的静电场为零．当电场随时间变化时，情况就不完全是这样．然而，甚至在电场随时间变化的情况下，电磁波在一导体(例如金属或电离气体)中传播时，也将大大衰减．在这里我们不拟详细阐述有关的理论，不过我们将说明控制导体内电磁波传播的方程中发生的基本变化之一．

方程(11.1)至(11.5)保持不变，但方程(11.6)必须修改，以考虑波的电场在导体内感生的电流．由方程(3.41)我们看到，电流密度为 $\boldsymbol{j}=\sigma\boldsymbol{\mathcal{E}}$，式中 σ 是金属的导电率．把这个电流包含到方程(11.6)中，经过简单的运算，得出电场所满足的方程为

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial x^2}=\varepsilon\mu\frac{\partial^2\boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t^2}+\mu\sigma\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t}, \tag{13.26}$$

而不是较简单的波动方程 (11.7)．上面方程中的新的项 $\mu\sigma\partial\boldsymbol{\mathcal{E}}/\partial t$ 是时间的一阶导数，它类似于阻尼振子方程中的阻尼项 $-\lambda dx/dt$．因此，增加的这一项表示这个波通过金属前进时受到阻尼．

因而当这个波透入导体时，它的强度迅速减小．方程(13.26)的解可以写成如下形式：

$$\mathscr{E}=\mathscr{E}_0 e^{-\alpha x}\sin(kx-\omega t), \tag{13.27}$$

式中传播速度 $v=\omega/k$ 和阻尼系数 α 是 μ、e 和 σ 之间的某种复杂的代数关系式．方程(13.27)中的指数函数表示，这个波在导电的介质中前进时受到阻尼．当频率很小因而 ω^2 可以忽略，而且材料是非常好的导体因而 $\sigma\gg e\omega$ 时，学生可以把方程(13.27)直接代入方程(13.26)中，证明

$$k=\alpha\approx\sqrt{\frac{1}{2}\mu\sigma\omega}. \tag{13.28}$$

于是传播速度为

$$v=\frac{\omega}{k}=\sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}}. \tag{13.29}$$

这个分析说明导体的两个重要特性．一个特性是导体的不透明性，这起因于电磁波在导体中被强烈吸收，因而没有透射波通过导体(除非这导体是非常薄的片)．因此，导体能够极好地屏蔽一个区域不受电磁波的影响(例如，用一金属网包围一个区域，就能起屏蔽作用)．导体的另一个特性是它们的反射率很大．这是因为入射波的能量只有很小一部分透入导体内，大部分变为反射波．这种高反射率是金属的特征．

一层电离的气体也起着导体的作用，它能够反射投射在它上面的电磁波．在无线电通信中利用这种现象围绕地球传递无线电信号．在地球表面上方 80—100 km 处的大气中有一层高度电离的气体，叫做电离层．当信号到达电离层时，就被反射而回到地面．这样，在地面上相距很远的两点 A 和 B 之间，即使信号不能沿直线传播，也能够进行无线电通信(图 13-17)．

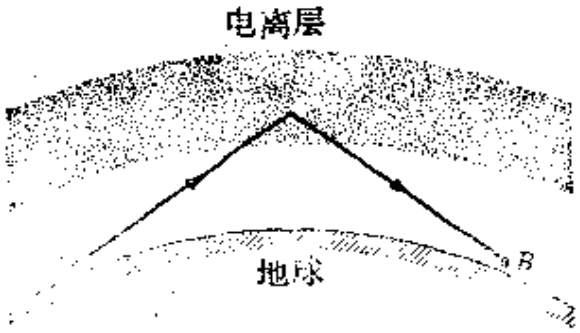


图 13-17　无线电波被电离层反射.

13.8　波在非均匀介质中的传播. 费马原理

前几节中描述的反射和折射现象，对应于从一种均匀介质到另一种均匀介质的情况. 但在许多情况下，波在其中传播的介质的性质是逐点变化的. 例如，在一炎热天，下层的空气就比上层的暖得多，因而声波或光波在其中传播时就发生连续的折射.

考虑一个波通过分层介质的传播[图 3-18 中的射线(1)]. 所谓分层介质是由若干层介质组成的，波在这些介质中的传播速度不同. 如果波在第一个面上的入射角为 θ_1，则相继的折射波满足如下条件:

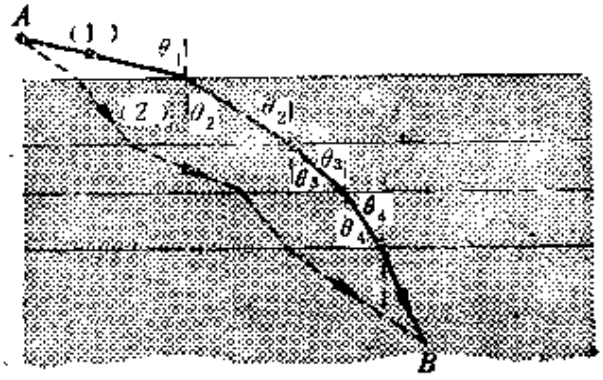


图 13-18　分层介质中射线的路径.

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$

$$n_2 \sin\theta_2 = n_3 \sin\theta_3$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

或
$$n\sin\theta=\text{常数}. \tag{13.30}$$

其次，考虑一种介质，它的折射率只与一个坐标(例如 y)有关系．这种介质可以看作一种相继各层非常薄的分层介质．在这种情况下，方程(13.30)仍然适用，我们可以写出

$$n(y)\sin\theta=C \tag{13.31}$$

式中 C 为一常数．这个表达式给出射线路径上每一点的 θ，因此，利用方程(13.31)可以描绘出射线通过非均匀介质时的路径．

法国数学家费马(Pierre de Fermat，1601—1665)提出另一种能给出非均匀介质中射线路径的颇为精巧的方法．费马原理可表述如下：

> 一条射线从一点行进到另一点时，它所选取的路径，是传播时间有极小值的路径．

在图 13-18 所示情况下，实际路径是利用方程 (13.31)计算出来的，如路线(1)所示．路线(2)表示另一条、任意的路径．这条路径不是物理上可能的路径，因为在每一个界面上斯涅耳定律都不被满足．如果我们知道路径的每一段的长度和在每一种介质中的传播速度，我们就能算出射线沿这两条路径的每一条行进所需的时间．费马原理要求通过实际的物理路径所需的时间，小于通过邻近的、任意的、非物理路径所需的时间；即 $t_1<t_2$．

应该看到，射线从任意点 A 沿一条路径到达另一任意点 B 所需的时间，是路径的函数；也就是说，$t_{AB}=f(\text{路径})$．这是一种新型的函数关系，因为函数 f 的变量不是点的坐标，而是确定联结 A 和 B 的路径的参数．t_{AB} 有极小值这个条件可以表述为：对于和物理路径对应的参数值的小的变化，有 $d(t_{AB})=0$．利用一种叫做变分法的特殊数学方法，能够求出满足 $d(t_{AB})=0$ 的路径的参数值．这样，就能确定射线的路径．我们不拟进一步阐述如何利用费马原理来描绘非均匀介质中射线的路径，而只是承认费马原

理和斯涅耳定律是相容的，如下面的例题所示.

例题 13.3 证明费马原理与斯涅耳定律是相容的.

解 在图 13-19 中，一个面 S 把折射率为 n_1 和 n_2 的两种介质分隔开. 一条射线沿路径 ABC 从 A 行进到 C. 在这情况下，由于 $v=\frac{c}{n}$，光线走过这段路所需的时间为

$$t=t_{AB}+t_{BC}=\frac{r_1}{v_1}+\frac{r_2}{v_2}=\frac{1}{c}(n_1r_1+n_2r_2).$$

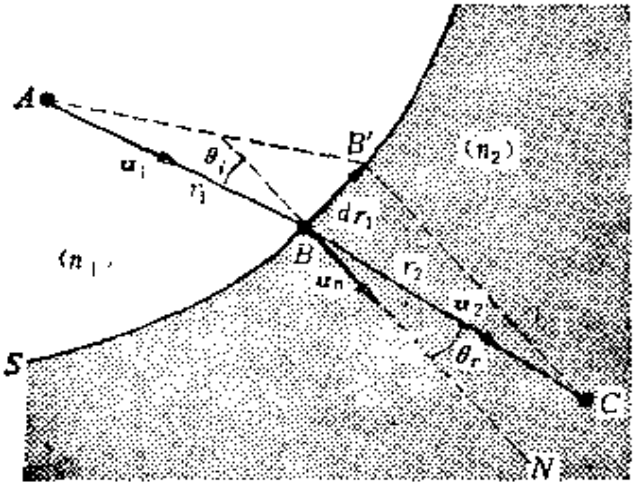


图 13-19

费马原理要求

$$d(t)=\frac{1}{c}(n_1dr_1+n_2dr_2)=0 \tag{13.32}$$

式中 $d(t)$ 是对于邻近一条路径(例如 $AB'C$)，t 的变化. 这个变化是由 r_1 和 r_2 的相应变化 dr_1 和 dr_2 所引起的. 由于 $r^2=\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}$，所有

$$rdr=\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} \quad 或 \quad d\mathbf{r}=\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)\cdot d\mathbf{r}=\mathbf{u}\cdot d\mathbf{r},$$

式中 $\mathbf{u}=\mathbf{r}/r$ 是沿 r 的方向的单位矢量. 因此，$d\mathbf{r}_1=\mathbf{u}_1\cdot d\mathbf{r}_1$，$d\mathbf{r}_2=\mathbf{u}_2\cdot d\mathbf{r}_2$；但是，由于 $\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}=$常数，所以 $d\mathbf{r}_1+d\mathbf{r}_2=0$，即 $d\mathbf{r}_2=-d\mathbf{r}_1$，因而有 $d\mathbf{r}_2=-\mathbf{u}_2\cdot d\mathbf{r}_1$. 把这些结果代入方程(13.32)中，得出

$$(n_1\mathbf{u}_1-n_2\mathbf{u}_2)\cdot d\mathbf{r}_1=0. \tag{13.33}$$

如图 13-19 所示，矢量 $d\mathbf{r}_1$ 是在 B 点与面 S 相切的平面内. 根据方程(13.33)，矢量 $(n_1\mathbf{u}_1-n_2\mathbf{u}_2)$ 垂直于 $d\mathbf{r}_1$，因而平行于面 S 在 B 点的法线 $\mathbf{u}_N$. 这个结果表示入射线、折射线和面的法线是在同一个平面内，而这正是第 13.4

节中给出的第一条定律，由于两个平行的矢量的矢积等于零．所以$(n_1\boldsymbol{u}_1-n_2\boldsymbol{u}_2)\times\boldsymbol{u}_N=0$，或

$$n_1\boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{u}_N=n_2\boldsymbol{u}_2\times\boldsymbol{u}_N. \tag{13.34}$$

上式中所有的矢量都是单位矢量，因此，方程(13.34)表示(在量值上)$n_1\sin\theta_i=n_2\sin\theta_r$，而这正是斯涅耳定律，即方程(13.4)．

例题 13.4　波在折射率可变的介质中传播时其射线的曲率半径．

解　考虑两条非常靠近的射线R和R'(图 13-20)和两个在时间上相差一个周期的波面S和S'．在这种情况下，在任何一条射线上这两个波面之间的距离都等于一个波长．由于传播速度逐点变化，所以波长也随之变化：

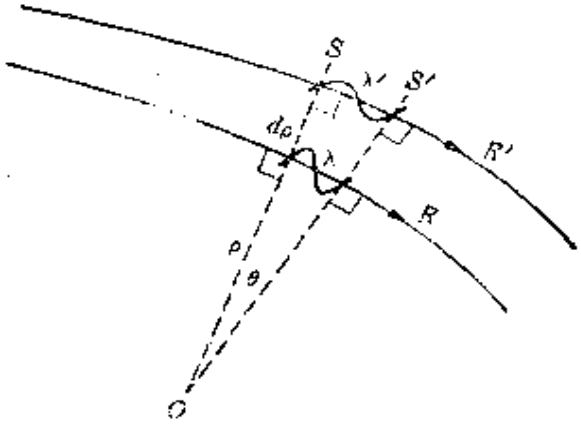


图 13-20　在非均匀介质中射线的曲率．

$$\lambda=\frac{v}{\nu}=\frac{c}{\nu n}.$$

设λ和λ'是沿对应射线的波长．于是由图 13-20 可以看出，$\rho\theta=\lambda$，$(\rho+d\rho)\theta=\lambda'$．于是得出$\theta d\rho=\lambda'-\lambda=d\lambda$；但$\theta=\lambda/\rho$，所以$(\lambda/\rho)d\rho=d\lambda$，或

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{\lambda}\frac{d\lambda}{d\rho}=\frac{d}{d\rho}(\ln\lambda)$$

$$=-\frac{d}{d\rho}(\ln n), \tag{13.35}$$

因为$\ln\lambda=\ln(c/\nu n)=\ln c-\ln\nu-\ln n$，而$c$和$\nu$是常数．方程(13.35)表示，射线是这样弯曲的，以使它的凹性是朝着折射率增加的方向．如果折射率为常数，则射线沿一直线路径行进，因为这时$\rho=\infty$．

习　　题

13.1　曾提出用下述规则来画出折射线(图 13-21)．以入射点为圆心，

画两个半径分别为 1 和 n 的圆（采用任意单位）. 将入射线延长，使之与半径为 1 的圆相交于一点. 通过该点作表面的垂线，找出这垂线与半径为 n 的圆的交点. 折射线通过这个交点. (a)证明这条规则. (b) 把这条规则应用于 $n=1.5$ 和入射角 $i=60°$ 的情况. (c) 对于 $n=0.80$ 和 $i=30°$, $60°$, 重作此题. 利用斯涅耳定律证明你的结果.

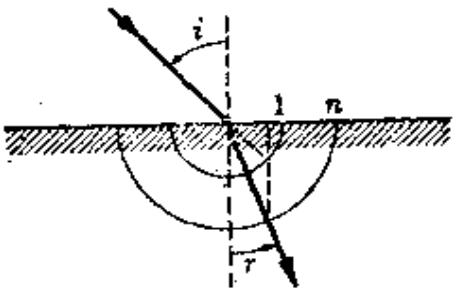


图 13-21

13.2 一块具有平行侧面的玻璃板($n=1.6$)的厚度为 8×10^{-3}m. (a) 一条光线的入射角为 45°，试求它的侧向位移. (b)利用习题 13.1 的方法，画出射线的路径.

13.3 一条光线对一块 6×10^{-2}m 厚的玻璃板($n=1.3$)的入射角为35°. 在这块玻璃板的正下方是折射率为 1.5 的另一块玻璃板. (a) 试求在这两块玻璃板之间的边界上，入射角和折射角的值. (b) 如果第二块板的厚度为 5×10^{-2}m，试求这条光线的侧向位移的值.

13.4 一条光线投射在一块玻璃($n=1.6$)上，入射角为 37°. 试问：这块玻璃的第一个侧面与其第二个面之间的最小的角 α 必须等于多大，才能发生全反射？(见图 13-22.)

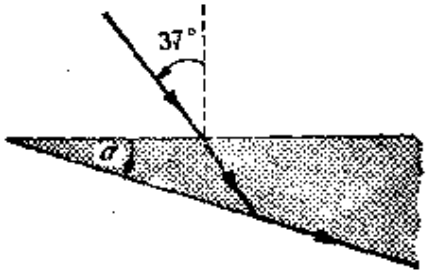


图 13-22

13.5 一根半径为 1×10^{-3}m 的铜丝，与一根半径为 8×10^{-4}m 的铜丝连接. 当波沿着这个系统从第一根铜丝向第二根传播时，求连接处的 t 和 r.

13.6 (a)对于例题 13.2 中讨论的情况，证明透射波的强度＋反射波的强度＝入射波的强度. (b)说明这个结果的物理意义.

13.7 一电磁波投射在一铜表面上，当它的振幅减小到它在铜表面上的值的 $1/e$ 时，试求它透入铜中的深度. 设频率(a)在微波区，6×10^{9}Hz，(b)可见区，6×10^{14}Hz，(c)X 射线区，3×10^{18}Hz. 假定 $\mu\approx\mu_0$.

13.8 空气的折射率为 $n=1+0.00024\rho$，式中 ρ 是空气的密度（单位为

$kg \cdot m^{-3}$). 设 θ 是一颗星的真天顶角，而 $\theta-\Delta\theta$ 是相对于一位通过大气看这颗星的观察者的视天顶角(图 13-23). (a) 写出 $\Delta\theta$ 的表达式，作为真天顶角 θ、空气密度 ρ、大气压 p 和绝对温度 T 的函数. (b) 对于 $\theta=45°$ 的一颗星，计算在海平面上的 $\Delta\theta$. 假定温度 $T=298K$.

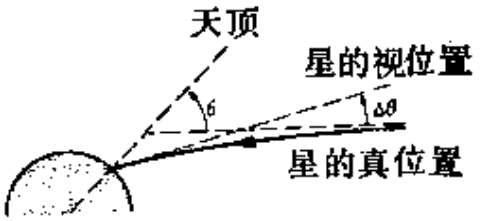


图 13-23

较难的习题

13.9 一条光线投射在一玻璃-空气界面上，如图 13-24 所示. 求反射角和折射角的正弦.

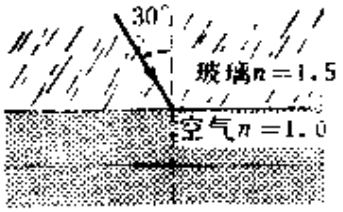


图 13-24

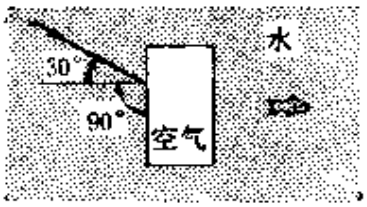


图 13-25

13.10 一个具有平行透明壁的空盒子置于水下，如图 13-25 所示. 一条光线从水中投射到盒子上. 光线方向与壁面法线成 30° 角. 设水的折射率为 1.33，试求这条光线在盒子中的方向和离开盒子后又到水中的方向(或角的三角函数).

13.11 如果一个玻璃棱镜的折射率足够大，它在空气中将全部反射垂直投射在它的底面上的光. 对于图 13-26 所示的棱镜，试求能够产生全反射的最小折射率.

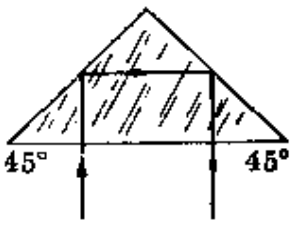


图 13-26

13.12　一条光线进入一块塑料中，并沿图 13-27(a)中所示路径行进. (a)通过考虑这条光线在一点P的行为，来确定塑料中的光速. (b) 当这条光线到达点Q时，将发生什么情况？利用如图 13-27(a)所示那样一个图来说明你的结论. (c)设这塑料块中有一个空气泡；这气泡呈平凸透镜的形状，如图 13-27(b)所示，当平行光线投射在这空气泡上时，将发生什么情况？

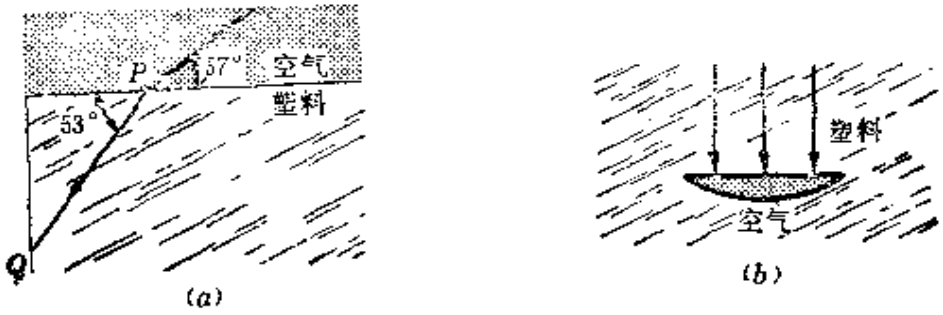


图　13-27

13.13　把半径相同的铜丝和钢丝连接起来，构成一根长弦. (a)当波沿这条弦传播时，求连接点处的 t 和 r. 设公共半径为 1×10^{-3}m. (b)假定入射波的频率为 10Hz，振幅为 2×10^{-2}m，张力为 50 N，试写出入射波、反射波和透射波的方程（铜的密度为 8.89×10^{3} kg·m^{-3}；钢的密度为 7.80×10^{3}kg·m^{-3}.）

13.14　一种非均匀的分层介质的折射率沿Y方向变化，即有 $n(y)$. 试证明，满足方程(13.31)的一条光线的路径的方程为

$$x=x_0+\int_{y_0}^{y}\frac{dy}{\sqrt{n^2(y)/C^2-1}}.$$

13.15　一条光线在一非均匀介质中的轨迹由下式表示：

$$x=A\sin(y/B).$$

试计算在 $x=A$ 和 $x=-A$ 这两个平面之间的空间内的折射率 n；假定 n 只与 x 有关系，而且在 $x=0$ 处 $n=n_0$.

13.16　某种介质的折射率由 $n=h+kx$ 表示. 一条光线通过坐标轴的原点，并在原点处与X轴成一角 ϕ_0. 试计算并画出这条光线的轨迹. 假定 $h=1, k=1, \phi_0=45°$.

第十四章　电磁波的反射和折射·偏振

14.1　引　　论

电磁波的反射和折射情况需要特别注意，因为它涉及两个场：波的电分量和磁分量．这电场和磁场都垂直于波的传播方向，但在其他方面，它们相对于传播方向的取向是任意的．因此，当我们分析电磁波的反射和折射时，需要考虑波的偏振态．如果我们把每个场看作是具有一个平行于入射面的分量和一个垂直于入射面的分量，分析就比较容易．这种描述方法使我们能够考察反射和折射对横波偏振的影响．

14.2　电磁波的反射和折射

考虑一束非偏振光，它投射在两种介质之间的平界面上．入射角为 θ_i，反射角为 θ'_r $(\theta'_r=\theta_i)$．折射角 θ_r 和入射角 θ_i 由斯涅耳定律联系起来．在一给定时刻，入射波可以分解成两个垂直的分量；一个分量的电场在入射平面内，用 $\mathscr{E}_{/\!/}$ 表示；另一个分量的电场垂直于入射平面，用 $\mathscr{E}_{\perp}$ 表示．由于 $\boldsymbol{\mathscr{E}}$ 和 $\boldsymbol{\mathscr{B}}$ 垂直，所以分量 $\mathscr{B}_{\perp}$ 与 $\mathscr{E}_{/\!/}$ 相联系，分量 $\mathscr{B}_{/\!/}$ 与 $\mathscr{E}_{\perp}$ 相联系．如在第十一章中所规定的，电磁波的偏振按惯例是由电场方向决定的；图 14-1 中示出在入射面内偏振时，$\boldsymbol{\mathscr{E}}$ 和 $\boldsymbol{\mathscr{B}}$ 的分量．图14-2中示出垂直于入射面偏振时，$\boldsymbol{\mathscr{E}}$ 和 $\boldsymbol{\mathscr{B}}$ 的分量，在每一种情况下，箭头都表示 $\boldsymbol{\mathscr{E}}$ 分量的正方向．一般的情况是这两种偏振的结合，因为，如前面所指出的，场 $\boldsymbol{\mathscr{E}}$ 和 $\boldsymbol{\mathscr{B}}$ 总是能够分解为平行的(//)和垂直的(⊥)分量．

麦克斯韦方程组提供两种介质的分界面两侧电场和磁场的平

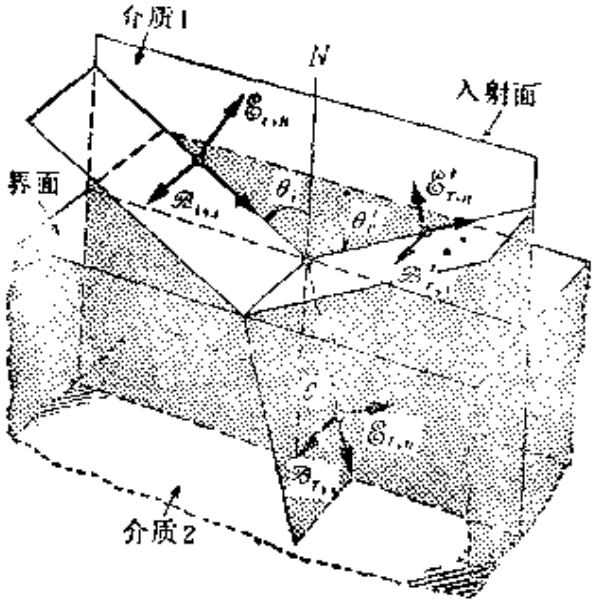


图 14-1　平行于入射面偏振时，入射波、反射波和折射波中的电场和磁场。

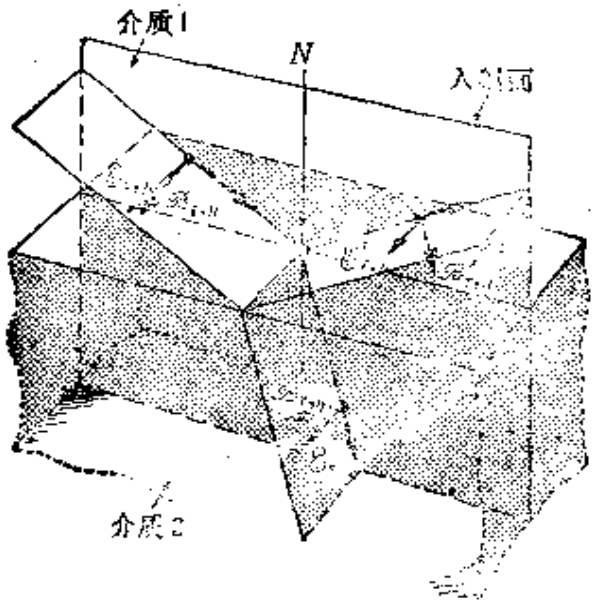


图 14-2　垂直于入射面偏振时，入射波、反射波和折射波中的电场和磁场。

行分量和垂直分量之间的某些关系。根据这些关系能够建立入射波、折射波和反射波中电场分量之间的关系。由这些关系，我们能够象在例题 13.2 中那样，计算反射和透射系数。在许多情况下，

关系式 $\mu_1=\mu_2\approx\mu_0$ 适用，于是所得结果如下：

$$\begin{aligned}
\mathrm{r}_{\parallel}&=\left(\frac{\mathscr{E}'_r}{\mathscr{E}'_i}\right)_{\parallel}=\frac{n_2\cos\theta_i-n_1\cos\theta_r}{n_1\cos\theta_r+n_2\cos\theta_i},\\
\mathrm{r}_{\perp}&=\left(\frac{\mathscr{E}'_r}{\mathscr{E}_i}\right)_{\perp}=\frac{n_1\cos\theta_i-n_2\cos\theta_r}{n_1\cos\theta_i+n_2\cos\theta_r},\\
\mathrm{t}_{\parallel}&=\left(\frac{\mathscr{E}_r}{\mathscr{E}_i}\right)_{\parallel}=\frac{2n_1\cos\theta_i}{n_1\cos\theta_r+n_2\cos\theta_i},\\
\mathrm{t}_{\perp}&=\left(\frac{\mathscr{E}_r}{\mathscr{E}_i}\right)_{\perp}=\frac{2n_1\cos\theta_i}{n_1\cos\theta_i+n_2\cos\theta_r}.
\end{aligned}\tag{14.1}$$

如果把斯涅耳定律应用于方程(14.1)的每一个方程，就可以把它们写作

$$\begin{aligned}
\mathrm{r}_{\parallel}&=\frac{\tan(\theta_i-\theta_r)}{\tan(\theta_i+\theta_r)}\\
\mathrm{r}_{\perp}&=-\frac{\sin(\theta_i-\theta_r)}{\sin(\theta_i+\theta_r)}\\
\mathrm{t}_{\parallel}&=\frac{2\cos\theta_i\sin\theta_r}{\sin(\theta_i+\theta_r)\cos(\theta_i-\theta_r)}\\
\mathrm{t}_{\perp}&=\frac{2\cos\theta_i\sin\theta_r}{\sin(\theta_i+\theta_r)}.
\end{aligned}\tag{14.2}$$

在正入射情况下，$\theta_i=0$，因而 $\theta_r=0$. 于是一般方程(14.1)化为

$$\mathrm{r}_{\parallel}=\frac{n_{21}-1}{n_{21}+1},\qquad \mathrm{r}_{\perp}=-\mathrm{r}_{\parallel},\tag{14.3}$$

$$\mathrm{t}_{\parallel}=\frac{2}{n_{21}+1},\qquad \mathrm{t}_{\perp}=\mathrm{t}_{\parallel},\tag{14.4}$$

式中 $n_{21}=n_2/n_1$.

由方程(14.3)可知，垂直入射时，反射分量之一总是经受一个周相变化 π；究竟是哪一个分量与入射波异相，取决于 n_{21} 是大于或小于 1. 折射波总是被透射，而无周相变化.

还有其他一些重要结果. 例如，由方程(14.2)的第一个方程可以看出，当 $\theta_i+\theta_r=\pi/2$，因而反射线和折射线垂直时，分母变为

无限大，因而 $r_{\parallel}=0$. 也就是说，反射波是全偏振的，其偏振面垂直于入射面. 这种情况如图 14-3 所示. 在此图中，为了清楚起见，只画出场的电分量. 因此，当反射线和折射线垂直时，反射线是全偏振的，电场垂直于入射面. 相应的入射角 θ_i 叫做起偏振角. 当 $\theta_i+\theta_r=\pi/2$ 时，$\sin\theta_r=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta_i\right)=\cos\theta_i$，于是斯涅耳定律给出起偏振角所满足的关系式:

$$\tan\theta_i=n_{21} \tag{14.5}$$

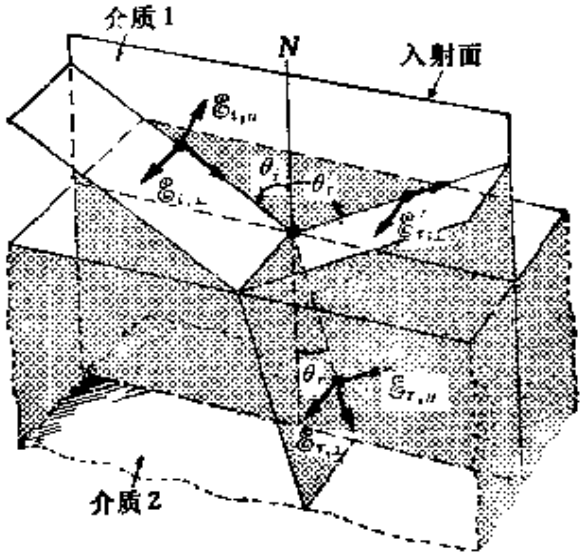


图 14-3　反射所引起的电磁波的偏振(布儒斯特定律).

因此，当入射角的正切等于相对折射率时，就发生反射波的完全线偏振. 这个结果叫做布儒斯特定律. 通常称 θ_i 为布儒斯特角. 苏格兰物理学家布儒斯特(Sir David Brewster，1781—1868)最先研究了这种现象.

由方程(14.1)和(14.2)可知，透射系数 $t_{\parallel}$ 和 $t_{\perp}$ 永远不会等于零，因此，折射波永远不会是全偏振的. 但是，如果一个电磁波通过一堆薄平行玻片透射(图 14-4)，而且入射角等于起偏振角时，则最后得到的透射波的分量 $\mathscr{E}_{r,\perp}$ 要小得多，因为每一次当从

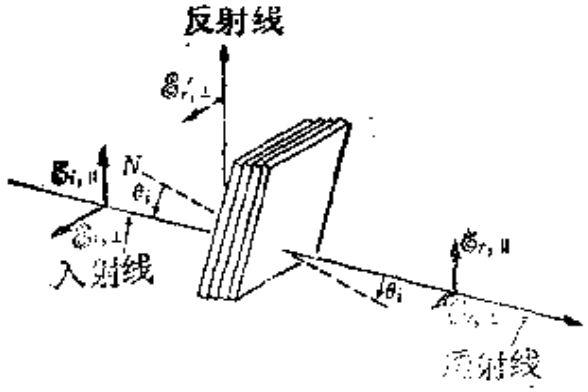


图 14-4　通过一平行玻片堆的相继折射所引起的电磁波的偏振.

一块玻片到下一块玻片被反射时，$\mathscr{E}_{r,\perp}$ 这个分量都有一部分随反射波而去. 因此，如果玻片的数目足够大，透射波差不多是完全偏振的，因而透射电场在入射面内振荡.

例题 14.1　垂直投射于一导体上的电磁波的反射.

解　当一电磁波垂直投射在真空和一导体的界面上时，电场矢量与这界面相切(即平行)(图 14-5a). 在一般情况下，入射波、反射波和折射波的振幅之间具有如下关系:

$$\mathscr{E}_{0,i}+\mathscr{E}'_{0,r}=\mathscr{E}_{0,t}; \tag{14.6}$$

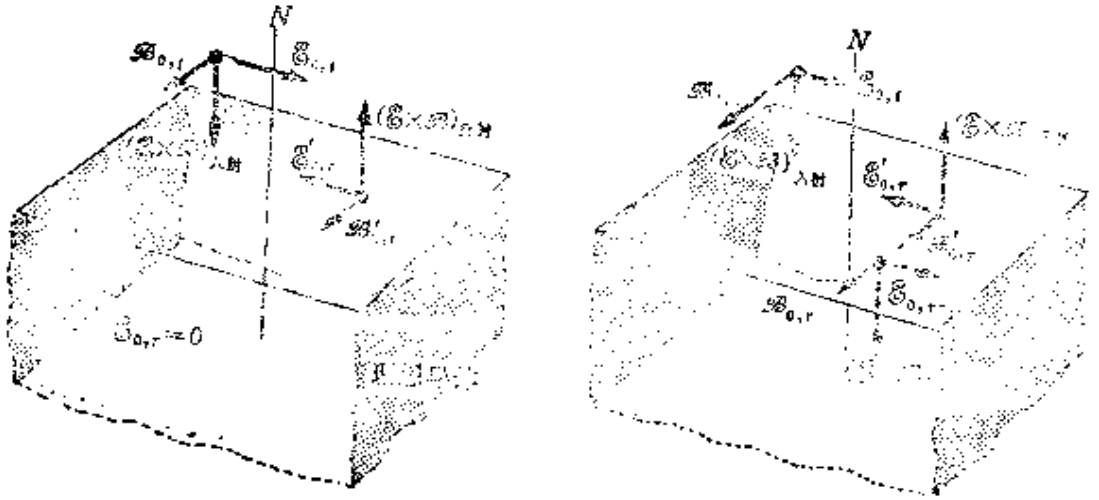


图 14-5　垂直入射时的反射和折射. (a)在一理想导体上的反射. 由于电矢量经受 180° 的周相变化，所以磁矢量没有周相变化. (b)在一电介质上的反射. 反射的磁矢量是否有周相变化，取决于反射的电矢量.

·但导体内的电场为零，因而可以写出 $\mathscr{E}'_{0,r}=-\mathscr{E}_{0,i}$；因此，

$$r=\frac{\mathscr{E}'_{0,r}}{\mathscr{E}_{0,i}}=-1. \tag{14.7}$$

由此可见，不仅整个的波被反射，而且有 π 弧度的相移.

而且，由于矢量 $\mathscr{E}\times\mathscr{B}$ 给出传播的方向，所以反射电场的上述值要求反射磁场与入射磁场同相.

例题 14.2 电磁波在真空和一电介质的分界面上的反射和折射.

解 考虑电磁波垂直投射在分界面上的情况（图 14-5b）. 假定这材料的介电常数为一实数 ε. 如在例题 14.1 中，在分界面处电矢量可以写作

$$\mathscr{E}_{0,i}+\mathscr{E}'_{0,r}=\mathscr{E}_{0,t}.$$

然而，在电介质内部电场不等于零，一个波透射到电介质中. 由方程 (11.13) 和 (12.15) 可知，

$$\mathscr{B}_{0,i}=\frac{1}{c}\mathscr{E}_{0,i}, \qquad \mathscr{B}'_{0,r}=-\frac{1}{c}\mathscr{E}'_{0,r}$$

和

$$\mathscr{B}_{0,t}=\frac{1}{v}\mathscr{E}_{0,t}=\frac{n}{c}\mathscr{E}_{0,t}.$$

由于在分界面处磁场矢量是连续的，所以有

$$\mathscr{B}_{0,i}+\mathscr{B}'_{0,r}=\mathscr{B}_{0,t};$$

将前面的结果代入上式，则得

$$\frac{1}{c}\mathscr{E}_{0,i}-\frac{1}{c}\mathscr{E}'_{0,r}=\frac{n}{c}\mathscr{E}_{0,t}. \tag{14.8}$$

注意，第二项中必须有负号，在反射波中 $\mathscr{E}\times\mathscr{B}$ 才能有正确的方向. 由方程 (14.6) 和 (14.8)，求出

$$\mathscr{E}'_{0,r}=-\left(\frac{n-1}{n+1}\right)\mathscr{E}_{0,i}, \quad \mathscr{E}_{0,t}=\left(\frac{2}{n+1}\right)\mathscr{E}_{0,i}$$

和

$$\mathscr{B}'_{0,r}=\left(\frac{n-1}{n+1}\right)\mathscr{B}_{0,i}, \quad \mathscr{B}_{0,t}=\left(\frac{2n}{n+1}\right)\mathscr{B}_{0,i}. \tag{14.9}$$

应将 (14.9) 中的第一个方程与方程 (14.1) 加以比较. 在这种情况下，我们又看到，$r=(n-1)/(n+1)$，$t=2/(n+1)$，这与方程 (14.3) 一致.

例题 14.3 对于冕牌玻璃，当入射角为 30° 时，求可见区电磁波的反射和透射系数.

解 表 14-1 中列出几种材料在可见区的折射率. 由表可知 $n_{\text{冕}}=1.52$；

表 14-1 几种物质对电磁波的折射率*

物　质	n	物　质	n
空气	1.00029	火石玻璃	1.65
乙醇(293K)	1.36	冰	1.31
二硫化碳	1.63	石英	1.52
冕牌玻璃	1.52	钠(液体)	4.22
金刚石	2.417	水(298K)	1.33

* 在光谱可见区的平均值.

设 $n_{空气}=1$，则由斯涅耳定律得到 $\sin\theta_i=1.52\sin\theta_r$. 令 $\theta_i=30°$，得出 $\theta_r=19°12'$. 应用关系式(14.1)或(14.2)，得出

$$\mathbf{r}_{/\!/}=0.164,\quad \mathbf{r}_{\perp}=-0.247,\quad \mathbf{t}_{/\!/}=0.766,\quad \mathbf{t}_{\perp}=0.753.$$

注意，反射波的垂直分量经受 π 弧度的周相变化. 冕牌玻璃的布儒斯特角对应于 $\tan\theta_i=1.52$，即 $\theta_i=56°40'$.

14.3 电磁波在各向异性介质中的传播

当一横波通过一种各向异性介质传播时，波的传播速度可能与这个波的偏振方向和传播方向都有关系. 这种双重依赖关系特别符合于电磁波(本节要讨论的仅仅是这种波)的情况. 大多数分子的极化率不是在一切方向上都相同的. 因为气体和液体中分子的取向是任意的，所以极化率对方向的这种依赖关系并不引起特殊的效应，因而介质实际上的宏观行为与各向同性材料一样. 但是，在晶态固体中，分子在某种程度上是取向的，而且它们的取向是"冻结的"；就是说，分子不能在晶体点阵内围绕它们的平衡位置自由转动. 因此，一般地讲，晶体的性质与测量这些性质所沿的方向有关系. 晶态固体，根据它们的分子结构和排布的不同，其光学行为可以或者表现为各向同性的，或者表现为各向异性的.

介质的电极化率不是在一切方向上都相同，这表示极化强度 $\mathcal{P}$ 的方向不与电场 $\mathcal{E}$ 的方向相同，因而对于晶体中的不同取向它

们的相对方向是不同的. 结果，位移矢量$\mathscr{D}=\varepsilon_0\mathscr{E}+\mathscr{P}$一般地也不平行于$\mathscr{E}$. 然而，我们发现，$\mathscr{E}$和$\mathscr{D}$至少在表征每一种材料的三个相互垂直的方向上是平行的. 这三个方向叫做主轴①. 如果使坐标轴XYZ的取向平行于三个主轴，并用ε_1、ε_2和ε_3分别表示与该材料的三个主轴对应的电容率的主值，而且把方程(2.14)推广，则对于$\mathscr{E}$的任意取向，$\mathscr{D}$的分量为

$$\mathscr{D}_x=\varepsilon_1\mathscr{E}_x,\quad \mathscr{D}_y=\varepsilon_2\mathscr{E}_y,\quad \mathscr{D}_z=\varepsilon_3\mathscr{E}_z. \tag{14.10}$$

我们也可以论及三个主折射率n_1、n_2和n_3，它们与相应的电容率之间的关系，如方程(12.16)所示.

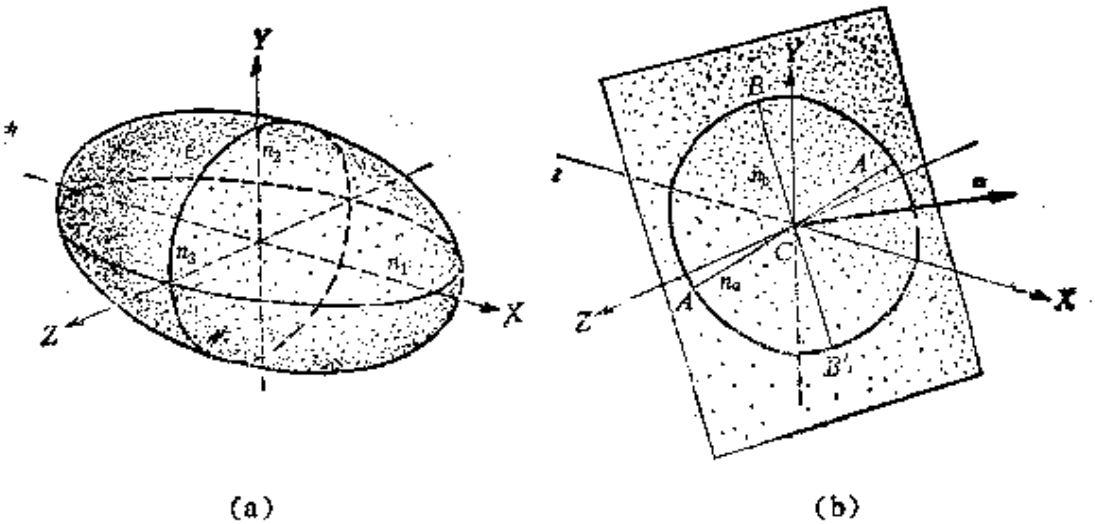
实验和理论(根据麦克斯韦方程和前面的讨论)都表明：

在各向异性介质中，对于一平面电磁波的每一个传播方向，都有两个可能的、相互垂直的偏振态，它们以不同的速度传播.

因此，不论初偏振态如何，当一电磁波透入一种各向异性材料中时，它就分解为两个波，其偏振方向相互垂直，并以不同的相速度传播. 这个情况引起双折射现象，这将在第14.5节中讨论.

如果已经知道波的传播方向，我们就能利用法国物理学家菲涅耳(A. Fresnel，1788—1827)提出的几何方法来确定其相速度和偏振态. 我们作一个椭球，使它的三个轴n_1、n_2和n_3的取向分别沿这种材料的三个主轴；这个图形叫做菲涅耳椭球[图14-6(a)]. 如果给出波的传播方向沿单位矢量u，我们就可画一个平面通过这个椭球的中心C，并垂直于u. 这个平面与椭球的交线为一椭圆，这个椭圆的两个轴AA'和BB'的方向决定对于那个传播方向波的偏振面. 这个椭圆的两个半轴CA和CB的长度给出

① 在数学上这里的情况与刚体转动中遇到的情况非常相似. 我们知道，除沿物体主轴转动的情况之外，L不与ω平行.



(a) (b)

图 14-6 (a)菲涅耳椭球.(b)椭圆 $ABA'B'$ 是一个垂直于 u 并通过 C 的平面与这个椭球的交线.

两种偏振的折射率 n_a 和 n_b，因而也给出对应的相速度.

各向同性介质的特征是，三个主折射率相等($n_1=n_2=n_3$). 在这种情况下，菲涅耳椭球是一个球，因而在一切方向上折射率相同. 因为一切交线都是圆，所以不存在特殊的偏振方向. 立方晶体和大多数非晶介质，都具有这种性质.

另一个特殊情况是两个主折射率相同，例如 $n_2=n_3$ 的情况. 与不相等的折射率 n_1 对应的方向，叫做光轴；它是这晶体的一个对称轴. 因此，这些材料被称为单轴晶体。属于这一类的有三角晶系、六角晶系和四方晶系. $n_2<n_1$ 时，这晶体叫做正晶体；$n_2>n_1$ 时，这晶体叫做负晶体. 单轴晶体的菲涅耳椭球，是一个围绕光轴的旋转椭球(图 14-7). 由旋转椭球的几何性质可知，通过中心 C 并垂直于电磁波的传播方向 u 的平面与椭球的交线，是一个椭圆. 这椭圆的一个轴总是等于 n_2，其方向既垂直于传播方向，也垂直于光轴；这椭圆的另一个轴(CE)的长度 n_e 可在 n_2 和 n_1 之间变化，它处在传播方向和光轴所决定的平面内. 在这种情况下，可以定义两个波：寻常波和非常波.

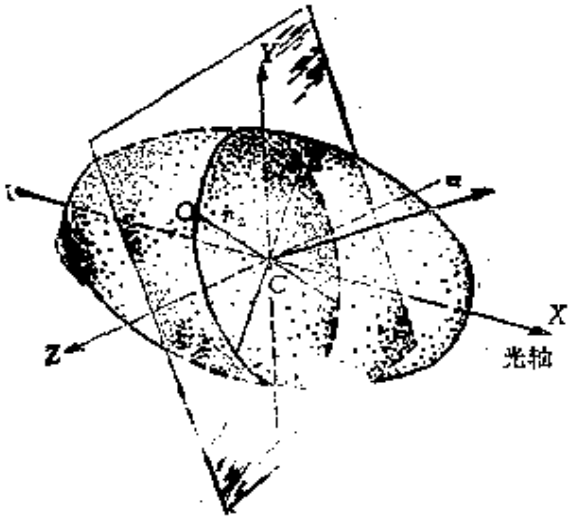
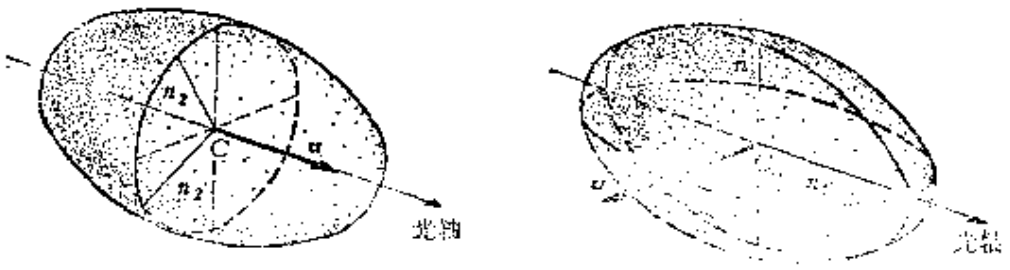


图 14-7　在一单轴晶体中，对于任意的传播方向，寻常光线和非常光线的偏振方向.

寻常波是在 CO 和 u 所决定的平面内线偏振的，因此是垂直于传播方向和光轴所决定的平面. 寻常波在一切方向上以相同的速度 $v_o = v_2 = c/n_2$ 传播. 因此，寻常波的行为与各向同性介质中波的行为相同，正是由于这个原因而称它为寻常的.

非常波在 CE 和 u 所决定的平面内[或者说在传播方向和光轴所决定的平面内]线偏振. 但是非常波的速度 v_e 与传播方向有关系，在 v_2 和 v_1 之间变化(对应的折射率在 n_2 和 n_1 之间).

当波沿光轴传播时，交线是一个半径为 n_2 的圆；两个波以相同的速度 v_2 传播. 这可以看作是光轴的另一个定义[图 14-8(a)]:



(a)　　(b)

图 14-8　在一单轴晶体中，寻常光线和非常光线的偏振方向：(a)平行于光轴传播时，(b)垂直于光轴传播时.

光轴是只有一个传播速度的方向. 当波垂直于光轴传播时，交线是半轴为 n_1 和 n_2 的椭圆，因而非常波具有速度 v_1[图 14-8(b)].

另一种有用的几何作图法，是对于每一个传播方向画出长度等于 v_o 和 v_e 的矢量；v_o 和 v_e 分别为寻常波和非常波的相速度；结果得到一个二重曲面(图 14-9)，叫做菲涅耳速度曲面. 一个曲面是半径为 $v_o=v_2$ 的球面；这个面对应于寻常波的速度. 另一个曲面是轴为 v_1 和 v_2 的旋转椭球；这个曲面对应于非常波. 这两个曲面在它们与光轴的交点处相切. 图 14-9 中示出若干个传播方向上的偏振态. 寻常光线沿子午线偏振；非常光线沿纬度方向偏振.

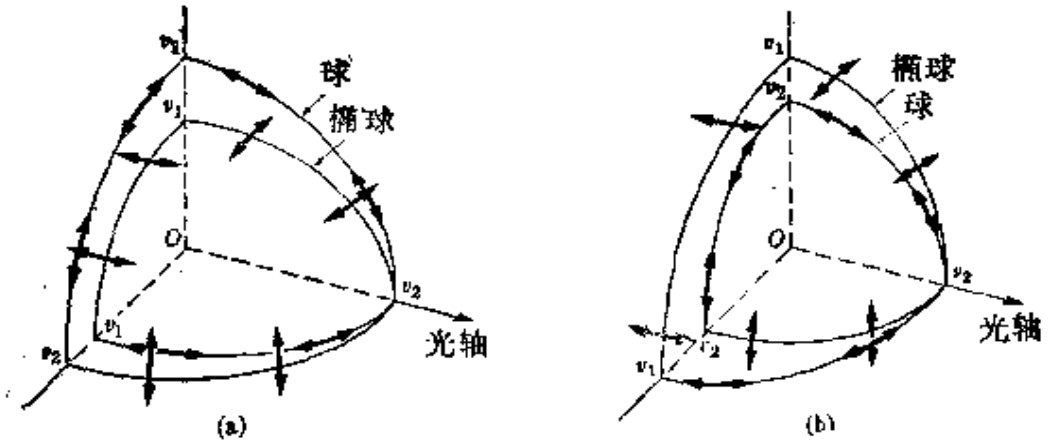


图 14-9 单轴晶体的菲涅耳速度曲面. (a)正晶体，$n_2<n_1$ (或 $v_2>v_1$). (b)负晶体，$n_2>n_1$(或 $v_2<v_1$).

在三个折射率都不同的一般情况下，能够证明，存在着两个方向，在这两个方向上，两个偏振波的传播速度相同. 这两个方向(也叫做光轴)垂直于两个平面，这两个平面与菲涅耳椭球的交线是圆. 存在着这些轴的材料，叫做双轴的，它们属于正交晶系、单斜晶系和三斜晶系. 双轴晶体的菲涅耳速度曲面比较复杂，我们不拟讨论其几何细节. 表 14-2 中列出几种单轴和双轴材料的折射率.

许多在正常情况下是各向同性的材料，当受到机械应力，或受

表 14-2 几种晶体的主折射率*

材　　料	n_1	n_2	n_3
单轴的:			
磷灰石	1.6417	1.6461	
方解石	1.4864	1.6583	
石英	1.5533	1.5442	
锆石	1.9682	1.9239	
双轴的:			
霰石	1.5301	1.6816	1.6859
石膏	1.5206	1.5227	1.5297
云母	1.5692	1.6049	1.6117
黄玉	1.6155	1.6181	1.6250

* 对于钠光，$\lambda=5.893\times10^{-7}$m.

到垂直于传播方向的强静电场或静磁场作用时，变为各向异性的，从而产生克尔电光效应和科顿-穆顿磁光效应. 在一切情况下，材料的各向异性都是由于在应力或外加场的作用下，分子的部分取向.

例题 14.4 当一线偏振电磁波投射在一单轴材料薄片上时，试讨论寻常波和非常波之间的相差和出射波的偏振态.

解 实验装置图 14-10 中所示，其中单轴晶体的切割面平行于光轴，而光轴（折射率为 n_1）垂直于入射电磁波的传播方向. Y 轴表示光轴的方向. Z 方向对应于寻常光线（折射率为 n_2）的偏振方向. 假定一个与 Y 轴成 α 角的线偏振波投射在这个薄片上. 为方便起见，我们把入射波中的电场写作 $\mathscr{E}=\mathscr{E}_0\sin(\omega t-kx)$. 于是入射波在 Y 和 Z 方向上的电场分量为

$$\mathscr{E}_y=\mathscr{E}_{0y}\sin(\omega t-kx),\quad \mathscr{E}_z=\mathscr{E}_{0z}\sin(\omega t-kx),$$

式中

$$\mathscr{E}_{0Y}=\mathscr{E}_0\cos\alpha \quad 和 \quad \mathscr{E}_{0z}=\mathscr{E}_0\sin\alpha.$$

这个线偏振波通过这个晶体传播时被分成两个波，它们的电场分别沿 Y 轴和 Z 轴. 这些成分波对应于非常波和寻常波. 由于这些波的传播速度为 $v_1=c/n_1$，和 $v_2=c/n_2$，所以对应的传播矢量为

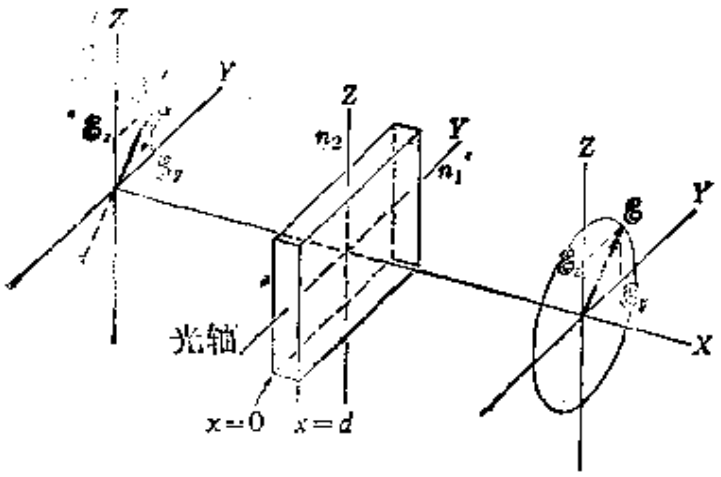


图 14-10 一电磁波通过从单轴晶体切割下的一块平行薄板后，其偏振态的变化.

$$k_1=\frac{\omega}{v_1}=\frac{\omega n_1}{c}=kn_1,\quad k_2=kn_2,$$

式中 $k=\omega/c$. 因此，当这些波通过厚度 d 之后，各自的电场由下式表示：

$$\mathcal{E}_y=\mathcal{E}_{0y}\sin(\omega t-k_1d),\quad \mathcal{E}_x=\mathcal{E}_{0x}\sin(\omega t-k_2d);$$

结果得到这两个波之间的相差为

$$\delta=(k_1-k_2)d=k(n_1-n_2)d=2\pi(n_1-n_2)d/\lambda.$$

通过这个晶体薄片之后，这两个波重新结合成一个波. 由于这个相差，透射波一般是椭圆偏振的. 如果 δ 是 $\pi/2$ 的奇倍数，也就是说，如果

$$(n_1-n_2)d=\text{奇整数}\times\frac{\lambda}{4},\tag{14.11}$$

这椭圆的轴将平行于 Y 轴和 Z 轴. 如果 δ 是 π 的整倍数，也就是说，如果

$$(n_1-n_2)d=\text{整数}\times\frac{\lambda}{2},\tag{14.12}$$

透射波将是线偏振的. 在这种情况下，如果这个整数是偶数，则透射波的偏振面和入射波的偏振面相同；但如果这个整数是奇数，则透射波将在一个相对于 XZ 平面为对称的平面内偏振. 如果初角 $\alpha=45°$，则这两个平面相互垂直.

与上述两种情况对应的薄晶片，叫做四分之一波片和半波片. 这两种晶片广泛应用于偏振光的分析.

也可以沿相反的方向进行：椭圆偏振光通过一个四分之一波片后，变成平面偏振的.

14.4 二向色性

有一些各向异性材料对寻常光和非常光的吸收比例相差很悬殊．在这种情况下，电磁波在通过足够厚的一块这种材料传播时，逐渐变为在一个平面内偏振，因为或者寻常波，或者非常波，几乎全部被吸收．这种现象叫做二向色性，如图 14-11 所示．图中 $\mathscr{E}_0$ 是沿 X 方向行进的入射波中电场的振幅．入射波在透入这种材料时，被分解为平行于 Y 轴偏振的寻常波和平行于 Z 轴偏振的非常

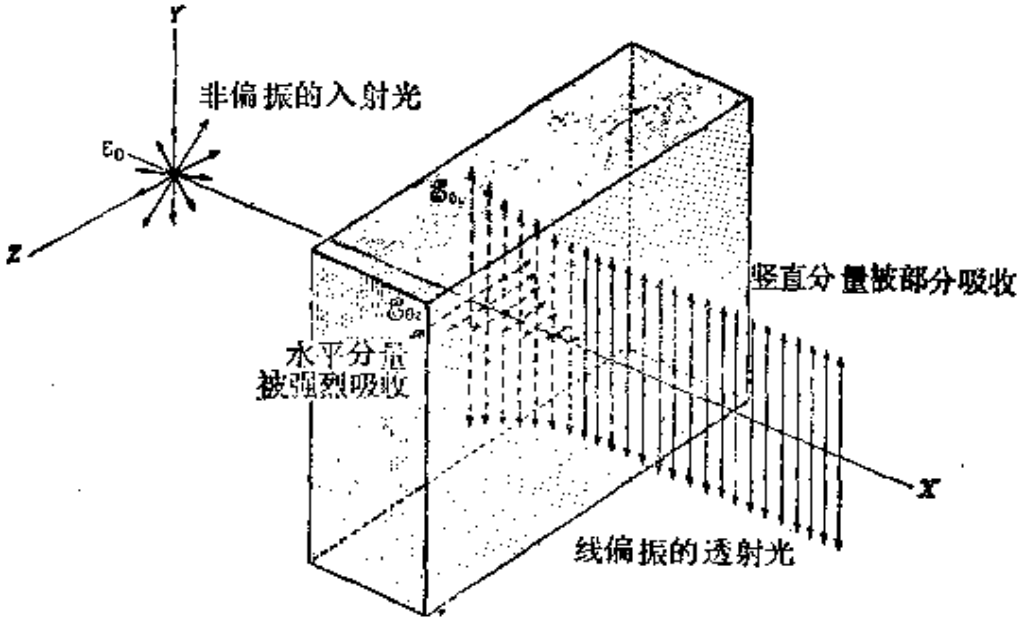


图 14-11　二向色性

波．这些波的振幅为 $\mathscr{E}_{0y}$ 和 $\mathscr{E}_{0z}$．如果对 $\mathscr{E}_{0z}$ 的吸收比对 $\mathscr{E}_{0y}$ 的大，则这些波通过一定长度后，就几乎只剩下 $\mathscr{E}_{0y}$，从而得到线偏振光．

由于二向色性是吸收系数不同的结果，并与电磁波的频率有关系，所以一种材料在某些频率上比在其他频率上更大程度地显示这种现象．因此，在某些材料中，这两种波的颜色看起来是不同的；这就是“二向色”这个名称的由来．在可见区有两种特别重要的二向色材料，一种是电气石（硼硅酸铝），它优先吸收寻常光线．另一种是碘硫酸奎宁，它的缺点是其晶体非常脆，因而很难保持适

当的大小. 然而，这种材料可以制成一种称为“人造偏振片”的形式. 这种偏振片是由许多取向相互平行的小晶体组成的. 这种排列是使碘硫酸奎宁晶体附着在由很长的分子组成的材料（例如紧张的聚乙烯醇片）上而实现的. 这样组合而得到的材料的光学性质在纵向和横向上相差悬殊. 二向色性提供一种最简单、最便宜的，产生和分析偏振光的方法.

14.5 双 折 射

现在我们来讨论，当一电磁波进入一种各向异性介质中时，其行为如何. 这里只限于讨论单轴晶体；不考虑反射波，因为反射波并不涉及实质上不同于本章前面讨论过的那些问题. 我们考虑一个非偏振波垂直投射在一平表面上的情况. 光轴在图面内(图14-12). 根据波面的定义，寻常折射波和非常折射波通过各向异性介质传播时，其波面都保持平行于界面. 为了确定寻常光线和非常光线的方向，在入射点处，对于入射光线画出菲涅耳速度曲面(见关于图 14-9 的讨论)，如图 14-12(a) 所示. 在图14-12(a)中，这些曲面是圆(对于寻常光线) 和椭圆(对于非常光线)，椭圆的半轴平行于光轴.

一组菲涅耳速度曲面的公共切线给出寻常波面，另一组速度曲面的公共切线给出非常波面. 由切点可以确定寻常光线和非常光线的方向. 因此；寻常波沿入射方向传播，垂直于图面线偏振[如图 14-12(b)中所示]. 非常波虽然也与界面平行，但却经受一侧向位移，因而非常光线的能流与传播方向成一角 β. 非常波在图面内偏振[如图 14-12(c)中的短横线所示].

当一条入射光线对应于两条折射光线时，这个结果叫做双折射；因此，各向异性材料叫做双折射材料. 当这种材料被局限在两个平行表面之间时(图 14-13)，寻常光线和非常光线出射后平行，

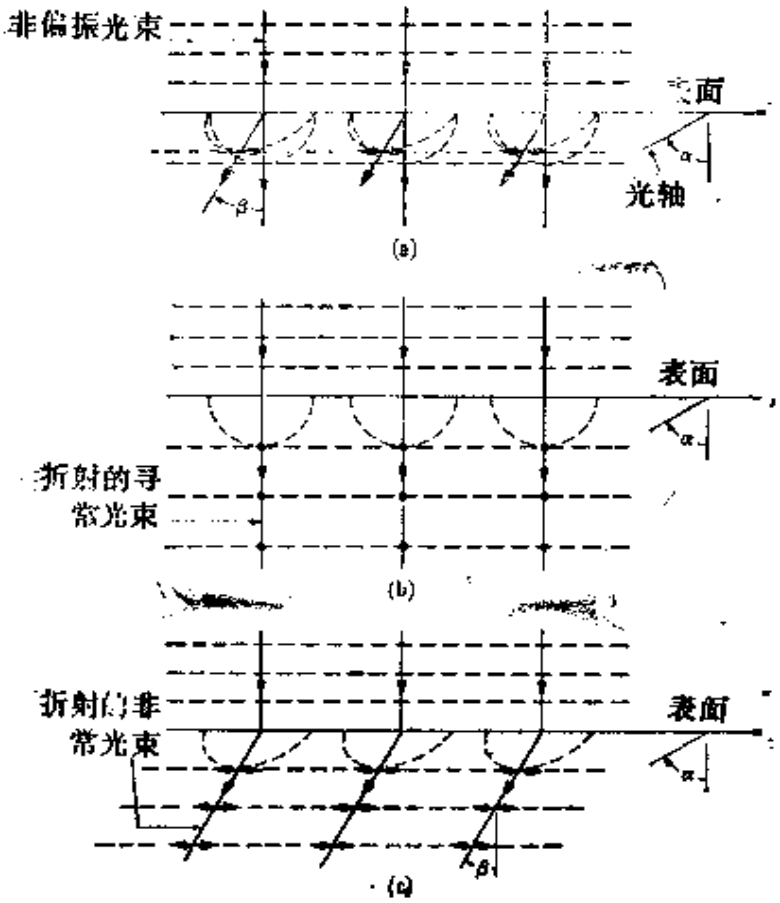


图 14-12　当光通过一双折射材料时，寻常光线与非常光线分离开来．一切光线都在图平面内，光轴也在图平面内．

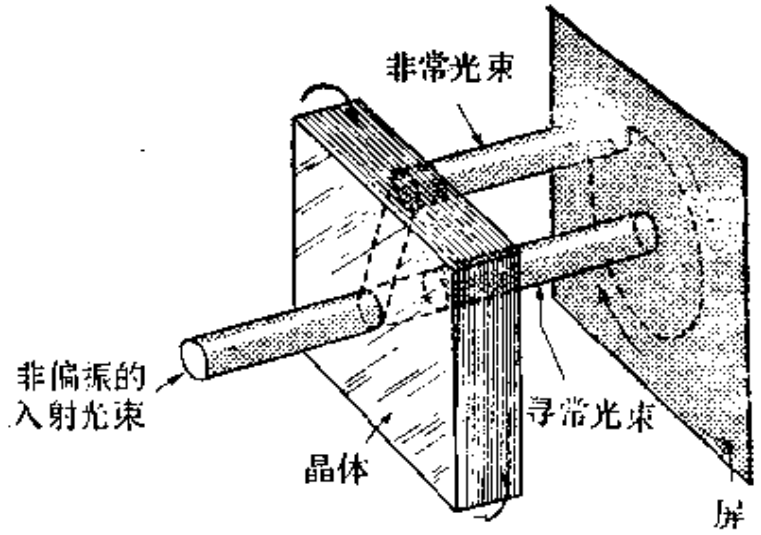


图 14-13　一双折射晶体能够使一个窄的非偏振光束分成两个光束，如果使晶体转动，则非常光束绕寻常光束转动．这两个光束是线偏振的，其偏振面相互成直角．

但分离开来，而产生双象，如图 14-14 中方解石晶体的照片所示.

斜入射时，几何情况稍复杂些，但物理结果相同. 就是说，对于一个给定的入射波，有两个不同的折射波，沿不同方向传播，其偏振面相互垂直.

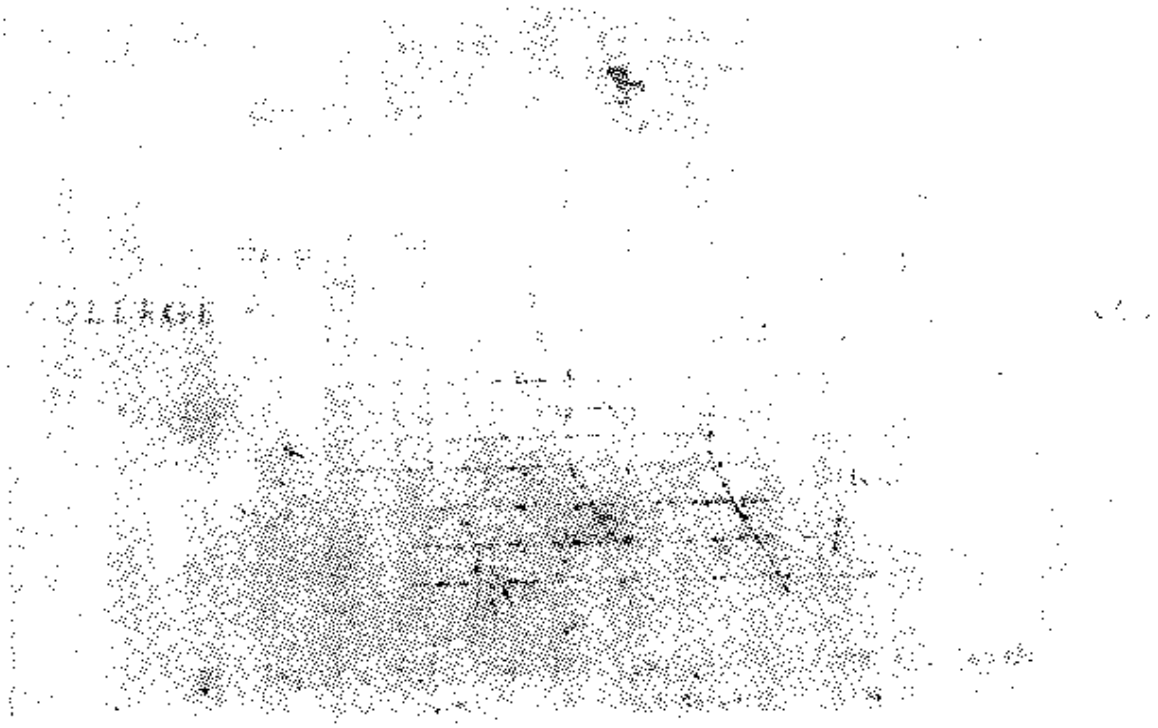


图 14-14　方解石晶体产生的双象的照片.

双折射是研究晶体结构的一个有用的工具，还有许多其他重要应用. 一个实际应用是利用一个尼科耳棱镜产生一束平面偏振光. 制作尼科耳棱镜时，切割一块方解石(它的长度为其宽度的两倍)的端面；如图 14-15(a)中虚线 ab' 和 cd' 所示. 然后沿对角线 $b'd'$ 把这块晶体切割成两半，并用加拿大树胶把它们粘结在一起. 这种树胶的折射率的值 ($n\approx1.55$) 介于方解石晶体对寻常光的折射率和非常光的折射率之间(见表14-2). 由于这个折射率值以及这种晶体的几何形状，寻常光线在分界面处被全部反射，并被偏转而离开棱镜，而非常光线则进入另一半晶体中，并在远端射出 [图 14-15(b)]. 因此，透射光是线偏振的. 在许多光学仪器，例如偏

振计中，利用尼科耳棱镜.

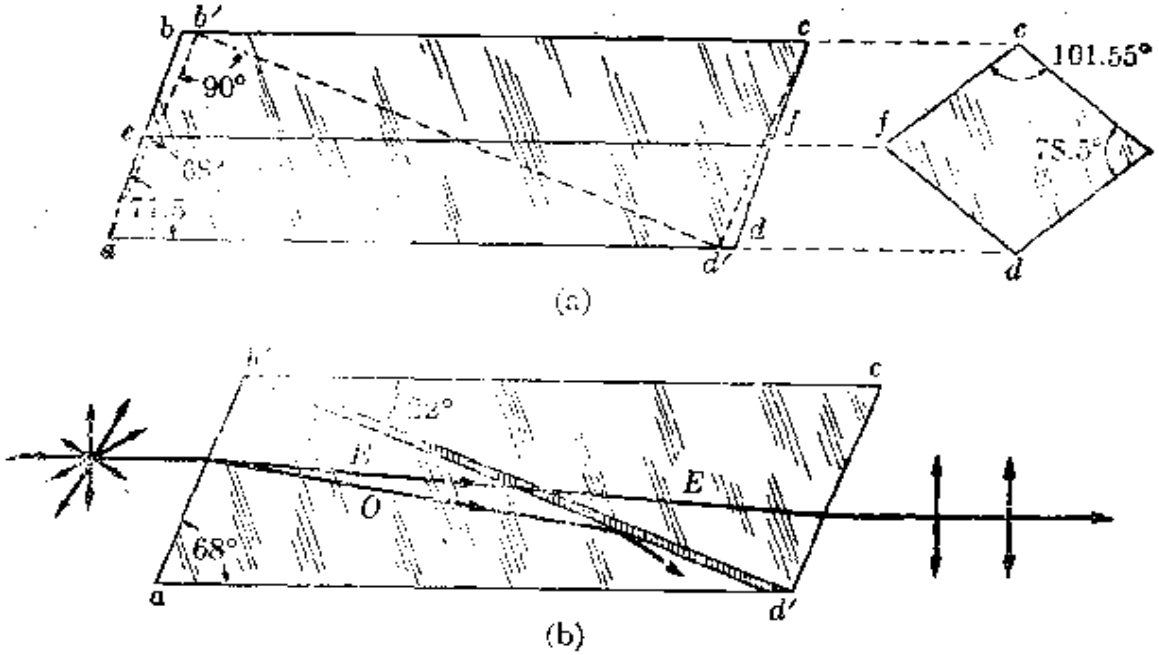


图 14-15 (a)天然方解石晶体(称为冰洲石)，(b)尼科耳棱镜.

例题 14.5 一条光线投射在一块方解石晶体上，这晶体的表面平行于光轴. 当入射面垂直于光轴，入射角为 50° 时，求寻常光线与非常光线之间的角距离.

解 按图 14-8(b)，当这个波垂直于光轴方向传播时，寻常光以速度 v_2 传播，对应的折射率为 n_2，非常光以速度 v_1 传播，对应的折射率为 n_1. 因此，利用斯涅耳定律和表 14-2 中的主折射率，得出 $\sin\theta_i/\sin\theta_o=n_2=1.6583$，$\sin\theta_i/\sin\theta_e=n_1=1.486_4$. 已知 $\theta_i=50°$，所以 $\theta_o=27°31'$，$\theta_e=31°1'$. 因

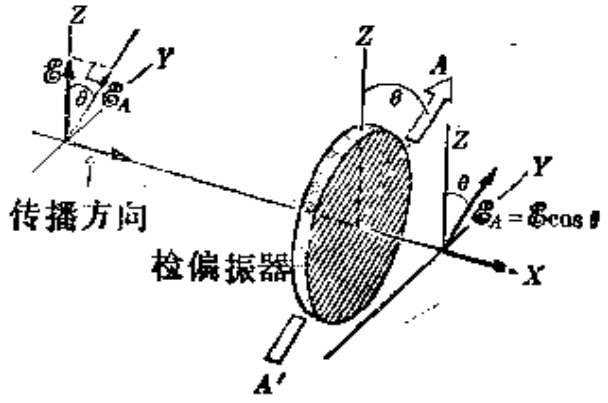


图 14-16 检偏振器的取向改变时，线偏振光的强度改变.

此，两条光线之间的角距离为 $\theta_e-\theta_o=3°30'$.

例题 14.6 当一个线偏振波通过一个转动的检偏振器时，试求透射波强度的变化.

解 检偏振器是这样一个装置，它只能透射其电场平行于轴 AA' 的波成分(图 14-16). 当检偏振器的轴 AA' 与入射线偏振波的电场成一角 θ 时，只有分量 $\mathscr{E}_A=\mathscr{E}\cos\theta$ 被透射. 由于波的强度正比于电场的平方，所以我们有如下关系:

$$I=I_0\cos^2\theta, \tag{14.13}$$

式中 I_0 是入射波的强度，I 是透射波的强度. 这个结果叫做马吕斯定律. 当 $\theta=0$ 或 π 时，透射波的强度最大；$\theta=\pi/2$ 或 $3\pi/2$ 时，透射波的强度为零. 因此，当检偏振器转动时，透射波的强度在 0 和 I_0 之间起伏. 这种起伏提供一种方法来确定一种波(例如光波)是否偏振的. 对于非偏振的或圆偏振的波，观察不到强度的变化. 对于椭圆偏振的波，透射波在一极大值和极小值之间起伏. 当检偏振器平行于偏振椭圆的长轴或短轴时，就得到这两个极值. 于是，入射波的偏振度由下式给出:

$$P=\frac{I_{\max}-I_{\min}}{I_{\max}+I_{\min}}. \tag{14.14}$$

注意，对于线偏振波，$P=1$；对于非偏振波，$P=0$.

例题 14.7 色偏振.

解 当线偏振的白光投射在与例题 14.4 中相同的薄片上，并用另一个起偏振装置进行检偏时，就会观察到有颜色的光. 这颜色与检偏振器的取向有关系. 考虑图 14-17 中的装置. 为简单起见，假定入射的白光是线偏振的，电场与薄片光轴成 45° 角. 按照例题 14.4 的结果，透射光将是线偏振的，或者为 $\mathscr{E}_1$(平行于原来的偏振矢量)，或者为 $\mathscr{E}_2$(垂直于原来的偏振矢量)，取决于波长所满足的如下关系:

$$(n_1-n_2)d=\begin{cases}\text{偶数}\times\lambda/2 & (\text{偏振 }\mathscr{E}_1),\\ \text{奇数}\times\lambda/2 & (\text{偏振 }\mathscr{E}_2).\end{cases}$$

对于所有其他波长，透射光是椭圆偏振的. 如果使这透射光通过一个检偏振器，则这个光是有颜色的，而不是白的，而且，当检偏振器的轴 AA' 转动时，这颜色变化. 之所以发生这种变化，是因为，按照例题 14.6，当检偏振器的轴平行于 $\mathscr{E}_1$ 时，对应的波长以最大的强度被透射，而对应于 $\mathscr{E}_2$ 的那些波长则被阻挡. 在相反的条件下，当检偏振器的轴平行于 $\mathscr{E}_2$ 时，则出现互补色. 因此，当检偏振器转动时，色调随之改变，互补色相隔 90°.

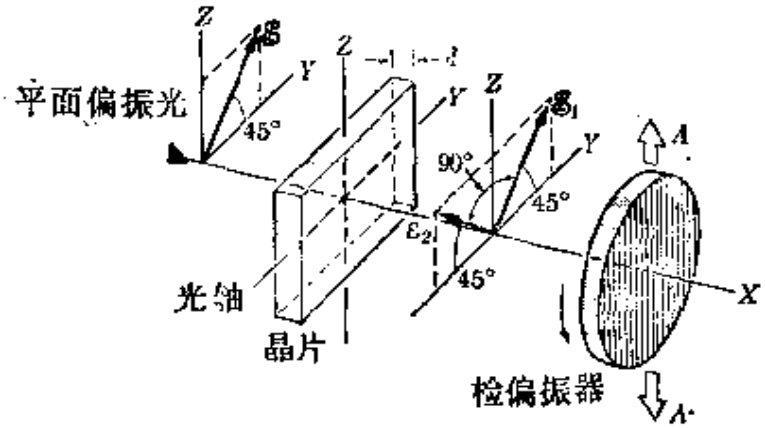


图 14-17　一晶片放在一线偏振光源和一检偏振器之间，所产生的现象叫做色偏振.

这种现象已被应用于建筑物和机械的结构部件的应力分析方面，从而出现了应用物理学的一个分支——光测弹性学. 如在第 14.3 节末所指出的，当塑性材料受到应力时，由于应变所引起的各向异性，它就变为双折射的. 因此，如果用塑料做成的一个模型所受应力与实际结构部件所受应力相同，这模型的光学行为就象一块非均匀的双折射板. 这种非均匀性是塑料中应变的非均匀分布所引起的. 当用这受应力的部件代替图 14-17 中的晶片时，就会产生象图 14-18 中那样的彩色图样. 利用特殊的方法，能够根据这种图样估算应变.

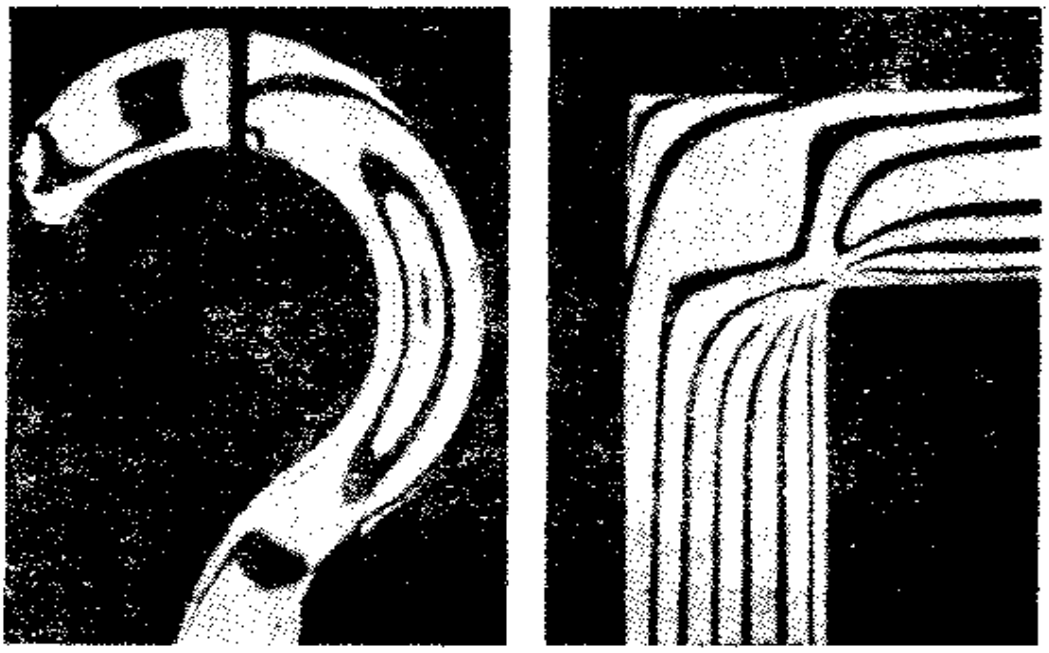


图 14-18　受外加应力作用时，一种材料中产生的双折射.

14.6 旋 光 性

当偏振电磁波通过某些材料时，其偏振面转动．偏振面的转动叫做旋光性．因此，如果一束线偏振光通过一种旋光性物质(图14-19)，则透射波也是线偏振的，但在与入射面成 θ 角的另一平面内．θ 的值正比于这个光束在这种材料中通过的长度 l，而且与材料的性质有关系．从接受透射光的观察者的观点来看，如果偏振面顺时针转动，则称这材料为右旋的，如果逆时针转动，则称之为左旋的．

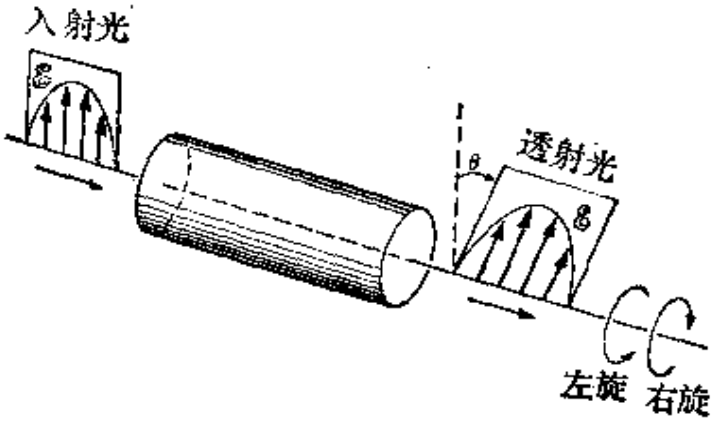


图 14-19　旋光性材料引起偏振面的转动．

某些材料仅在固态才呈现旋光性．许多无机晶体（特别是石英)和某些有机晶体(例如联苯酰）就属于这种类型．这些材料在熔解、溶解或者气化之后，就失去它们的旋光性．这种情况表明，这些材料的旋光性与晶体中原子或分子的特殊排列有关系；在液态或气态下，分子的取向是无规的，因而这种特殊排列消失．另外一些物质，例如松节油、糖、樟脑和酒石酸，在一切物理状态，甚至当它们在溶液中时，仍保持其旋光性．在这种类型的材料中，旋光性是和单个分子联系着的，而不是和分子的相对排列联系着的．

旋光性是在外部振荡电磁场的作用下，分子或晶体中电子轨

道呈现某种扭曲的结果. 在讨论物质的极化时，我们曾假定，在各向同性材料中，电子的振荡方向平行于电场(第 2.5 节) 而在各向异性材料中，电子的振荡方向与电场成一角度(第 14.3 节). 但在某些分子或晶体中，电子沿着扭曲的路径运动；为简单起见，我们假定这路径是一条螺旋线(图 14-20). 假定这个分子(或晶体) 如此取向，以致电子的螺旋线路径如图 14-20 所示；即这螺旋线的轴垂直于传播方向，并且平行于入射电磁波的电场或者磁场.

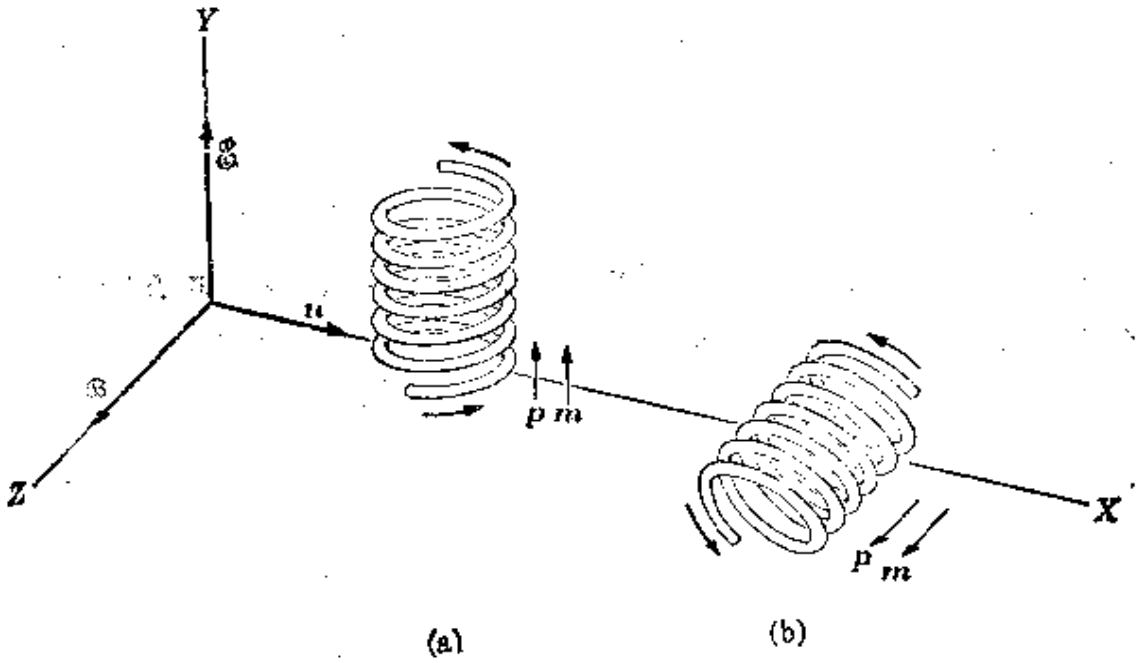


图 14-20 电磁波在一螺旋型分子中感生的电偶极矩和磁偶极矩.

首先考虑图 14-20 中的取向 (a). 电磁波的振荡电场使电子沿着螺旋线作上下的振荡运动；这个运动在平行于螺旋线轴的方向上产生一个有效的振荡电偶极矩 p. 这个情况与普通极化相似；但是，由于电子路径的扭曲，沿着螺旋线的电子电流相当于一个磁偶极子，因而这个分子获得一个有效的振荡磁偶极矩 m，它的方向也是沿着螺旋线的轴. 在取向(b) 的情况下，电磁波的振荡磁场通过这螺旋线的每一匝产生一可变的通量；根据法拉第-亨利定律，这个通量沿着这螺旋线产生一振荡的电子电流. 这个电流又

沿螺旋线轴的方向产生一振荡的磁矩m. 但是，电子的前后运动在这分子的两端产生交替的正、负电荷，因而在螺旋线轴的方向上产生一个有效的振荡电偶极矩 p. 因此，对于分子的这两种取向，都产生平行于分子轴的振荡电偶极矩 p 和振荡磁偶极矩 m. 这些电偶极子按第 12.3 节中讨论的方式辐射出散射的电磁波；在那一节里，由于假定电子的运动是沿一条直线，所以只考虑了电偶极子散射.

关于散射波的详细的数学分析(此处从略)表明，沿入射波的传播方向，散射波的场 $\mathscr{E}'$ 和 $\mathscr{B}'$ 与入射波的场同相，不过它们沿不同的方向振荡，因为一个电偶极子和一个磁偶极子的 $\mathscr{E}$ 和 $\mathscr{B}$ 场的相对取向不同(图11-8 和 11-12). 一个观察者沿着传播方向接收入射波和散射波，它们相干而产生线偏振，不过偏振面的方向与电矢量原来的平面成一个角 θ (图 14-21). 这样，就产生这个波的

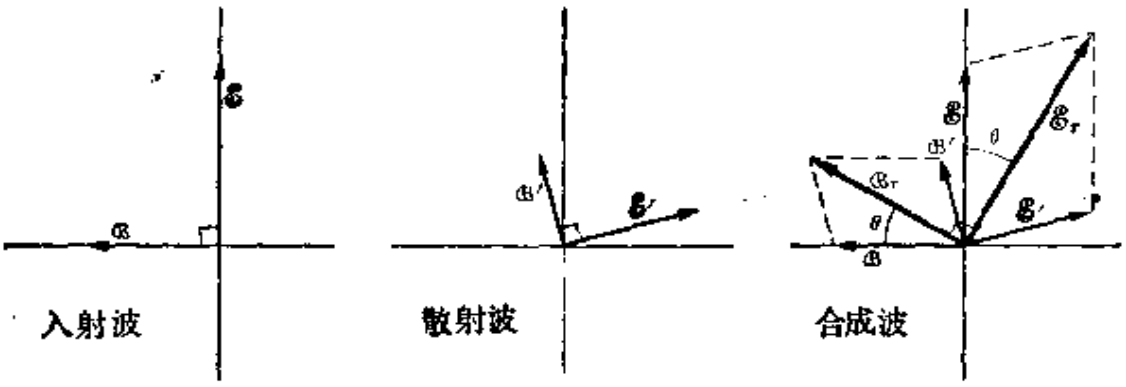


图 14-21　入射波和散射波叠加而形成的合电场和合磁场.

偏振面的转动. 对于无规取向的分子，能够证明，这种效应永远沿相同的指向，虽然它的大小与分子的取向有关系. 因此，在任何物理状态，或者在溶液中，分子的旋光性都保持着. 然而，在某些晶体中，这种效应取决于分子的排列，而不是取决于单个分子的结构；因此，当这些分子的排列被破坏时，这种效应也就消失.

学生可能会认识到，有两种螺旋线，右手的和左手的〔图

14-22)．一个螺旋线是另一个的镜象，犹如左手是右手的镜象．这种对称性叫做左右对形性．有一些分子的行为象右手螺旋线，另一些分子的行为则象左手螺旋线．在一种情况下，一种旋光性材料所引起的偏振面的转动是沿一个方向，而在另一种情况下，这种转动则沿相反的方向．这个事实说明右旋和左旋材料的存在．

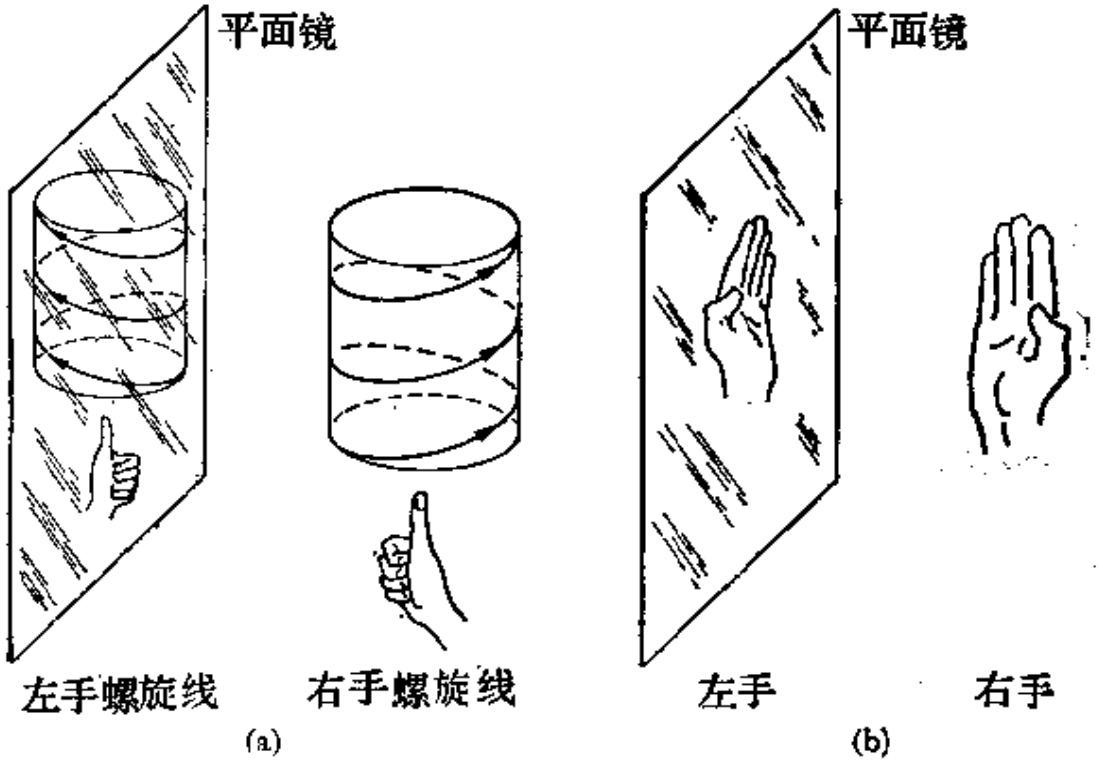


图 14-22　左右对称性．(a)右手螺旋线的镜象是左手螺旋线．
(b)右手的镜象是左手．

有一些材料包含两类镜象分子，这种性质叫做立体异构性．例如，乳酸分子($CH_3—CHOH—CO_2H$)能够存在于两种镜象形式之一，如图 14-23 所示．含有等量的同分异构体的乳酸是不旋光的，但是，如果一种比另一种多时，对于偏振光就会产生净的转动．

在石英(SiO_2)的情况下，分子都是相同的；但它们在晶体中的空间排布或者具有左手对称性，或者具有右手对称性．这可以从这两种石英晶体的外形看出来，如图14-24所示．一种是左旋的，另一种是右旋的．当这晶体熔化时，分子的排布被破坏，因而旋光性

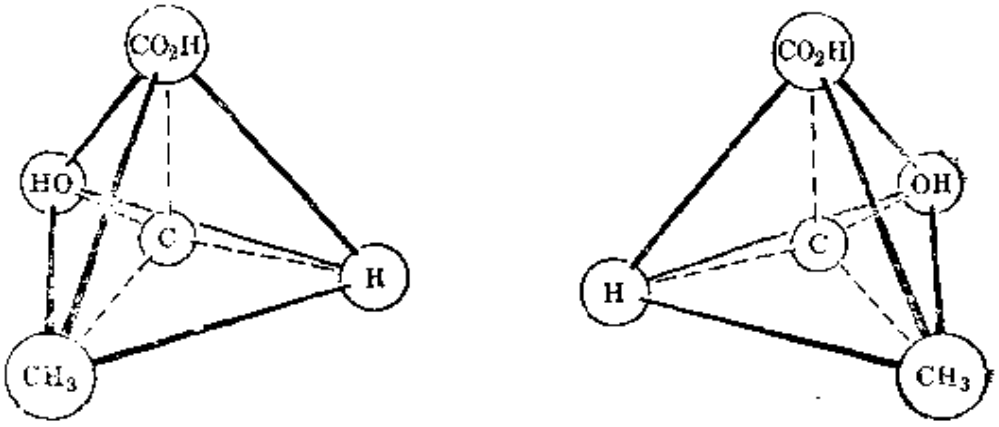


图 14-23　乳酸的镜象形式.

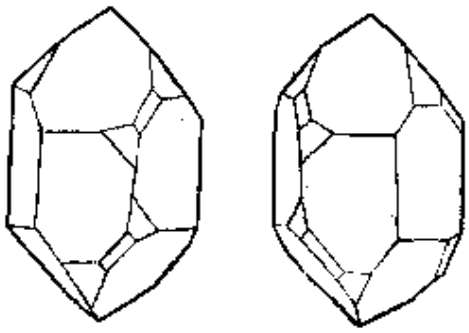


图 14-24　石英晶体的镜象形式.

消失.

如果一种材料(例如乳酸，左旋糖，右旋糖，等等) 的分子是旋光性的，则当它溶解于水中时，偏振面的旋转与浓度有关系. 这个结果被广泛用于定量测定溶液中物质的量，例如测定糖汁或尿中糖的浓度.

习　　题

14.1　一束线偏振光以 45° 入射角投射在一玻璃板上 ($n=1.5$)，试求在下列情况下的反射和折射系数：(a) 入射波的电场在入射面内，(b) 入射波的电场垂直于入射面.

14.2　一平面电磁波垂直地投射在一平界面上，这界面把折射率分别为 n_1 和 n_2 的两种介质分开. (a) 利用方程 (14.1) 或 (14.2) 证明在这情况下反射系数和折射系数分别为

$$r=\frac{(n_1-n_2)}{(n_1+n_2)} \quad 和 \quad t=\frac{2n_1}{(n_1+n_2)}.$$

注意，在这种情况下，我们不需要区别 π 和 σ 分量. (b)对于 $n_1<n_2$ 和 $n_1>n_2$ 这两种情况，画出入射波、反射波和折射波中的电场和磁场.

14.3 (a)光垂直投射在一玻璃板上($n=1.5$)，求反射和透射系数. (b)如果这光从玻璃进入空气中，重作此计算. (c)讨论每一种情况下的相位变化. (提示：利用习题 14.2 的结果.)

14.4 关于习题 14.2 中描述的情况，利用方程(11.16)，计算反射波和折射波的强度，证明二者之和等于入射波的强度. [提示：注意，在方程(11.16)中，我们必须用介质中的速度 $v=c/n$ 代替 c，$E=\varepsilon^2$，而且有 $n\approx\sqrt{\varepsilon_r}$.]

14.5 玻璃的折射率为 1.50. 当从一玻璃界面上反射的光为完全偏振时，计算入射角和折射角.

14.6 光在某种材料中的临界角为 45°. 求起偏振角.

14.7 (a)太阳在地平线上方的角应该多大，才能使从一平静湖面上反射的阳光是全偏振的？(b)求反射光中 $\mathbf{s}$ 矢量的平面.

14.8 一平面线偏振光波，在空气中以起偏振角投射在一折射率为 n 的介质上. 入射波的电矢量在入射面内；它的振荡振幅为 $\mathcal{E}_0$. 试计算：(a)入射波的强度，(b)折射波的振幅 $\mathcal{E}_0'$. (c)折射波的强度. (d)比较(a)和(c)，并说明你的结果.

14.9 (a)证明：对于电磁波，如果 $n_{21}<1$，则 $r_\perp>0$，如果 $n_{21}>1$，则 $r_\perp<0$. (b)类似地，证明：对于入射角小于(大于)起偏振角的情况，当 $n_{21}<1$ 时，r_π 为负(正)，当 $n_{21}>1$ 时，r_π 为正(负).

14.10 如果一平面波是偏振的，它的电场和入射面成一角 α_i，试证明：折射波和反射波中的电场与入射面所成的角分别为

$$\tan\alpha_t=(t_\perp/t_\pi)\tan\alpha_i$$

和

$$\tan\alpha_r'=(r_\perp/r_\pi)\tan\alpha_i.$$

14.11 在空气中($n=1$)一平面线偏振光投射在水($n=1.33$)面上. 试对于下表所列各种情况，确定折射波和反射波相对于入射波的振幅和相位：

入射角	入射面和电场平面之间的角	入射角	入射面和电场平面之间的角
(a) 20°	0°	(c) 75°	0°
(b) 30°	90°	(d) 75°	90°

14.12　从水($n=1.33$)下面发出的线偏振光波，在水与空气($n=1$)的界面上被折射．对于下表所列各种情况，试确定折射波和反射波相对于入射波的振幅和相位．

入射角	入射面和电场平面之间的角	入射角	入射面和电场平面之间的角
(a) 20°	0°	(c) 40°	0°
(b) 20°	90°	(d) 40°	90°

14.13　空气($n=1$)中的一束圆偏振光以 45° 角投射在一玻璃($n=1.52$)面上，详细描述反射光束和折射光束的偏振状态．

14.14　一起偏振器和一检偏振器如此取向，以使透射的光量有最大值．当检偏振器转过(a)30°，(b)45°，(c)60°，(d)90°，(e)120°，(f)135°，(g)150°，(h)180° 时，试求透射光的强度与它的最大值之比．

14.15　波长为 5.90×10^{-7} m(在真空中)的一束平行的线偏振光投射在一方解石晶体上，如图 14-10 所示．(a)求这晶体中的寻常光和非常光的波长．(b)求每一光线的频率．

14.16　一束平面偏振光垂直投射在一方解石晶片上（它的两个侧面平行于光轴，如图 14-10 所示），电矢量与光轴成 60° 角．试求寻常光束和非常光束的(a)振幅之比，(b)强度之比．

14.17　设光的波长为 6×10^{-7} m．为了在寻常光线和非常光线之间产生相差(a)$\pi/2$(四分之一波)，(b)π(半波)，(c)2π(全波)，试求所需的方解石晶片的厚度．

14.18　在图 14-25 中，A 和 C 是两片人造偏振片，它们的透射方向如图中所示．B 是一片双折射材料，它的光轴沿竖直方向．这三个薄片相互平行．非偏振光从左边入射．讨论在点(2)、(3)、(4)处光的偏振状态．

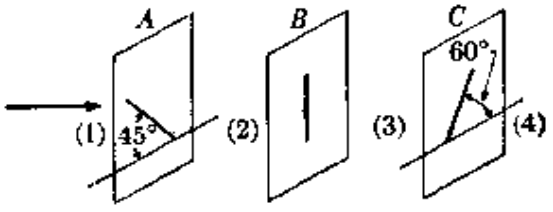


图　14-25

14.19　习题 11.5 中描述的那个波垂直地投射在一个起偏振器上．使这起偏振器在其平面内转动，直至透射强度有最大值．(a)试求这起偏振器

的透射轴的方向. (b)当透射最小时，求透射轴的方向. (c)对于在(a)和(b)中求出的两个位置，计算透射强度之比.

14.20 一束白色的线偏振光垂直投射在一石英晶片上(其厚度为0.865 mm)，这晶片的两个侧面平行于光轴，如图14-10所示. 电场平面与晶片的轴成45°角. 表14-2中列出石英对钠光的主折射率. 不考虑(n_1-n_2)随波长的变化. (a)试问：在6.0×10^{-7} m和7.0×10^{-7} m之间，哪些波长从这晶片中出射后是线偏振的？(b)哪些波长出射后是圆偏振的？(c)假定从晶体中出射的光束通过一个检偏振器，这个检偏振器的透射轴垂直于入射光的振动平面. 在透射光束中有哪些波长消失了？

14.21 由实验知道，1 m^3水中溶解1 kg糖时，线偏振电磁波的偏振面的转角为每米路径+6.65°. 一根长0.3 m的管子，内装糖溶液的浓度为1 m^3溶液中含糖150 kg. 求偏振光偏振面的转角.

14.22 一根圆柱形管子，长3 m，截面为2×10^{-4} m^2，内装糖溶液. 如果偏振面的转角为39.7°，试求含糖量. (提示：参看前题)

较难的习题

14.23 一玻璃板(折射率为n_g)上涂敷一层薄塑料膜(折射率为n_s)[图14-26]. (a)令n_a表示空气的折射率，试证明，如果$n_s=\sqrt{n_g n_a}$，则在正入射时，空气与涂层之间界面上的反射系数等于涂层与玻璃之间界面上的反射系数. (b)如果入射角为10°，$n_g=1.52$，试求这两个反射系数之比.

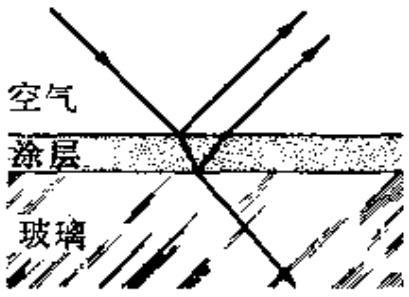


图 14-26

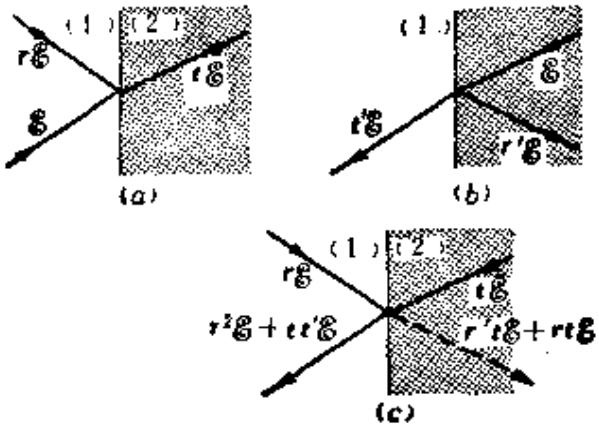


图 14-27

14.24 两种介质(1)和(2)之间的界面为平面(图14-27). 设r和t是一条光线在介质(1)中入射时的反射和透射系数，r′和t′是当光线在介质(2)

中入射时的反射和透射系数，试证明：$t't=1-r^2, r=-r'$. 这些关系式称为斯托克斯关系式. 第二个关系式表示，两个反射系数的符号相反；因此，如果一种反射没有相位变化，另一种反射就必定有一相位变化 π. [提示：假定光线 r_8 和 t_8 的方向反转，如图 14-27(c)所示，并且认识到，在这种情况下，介质(1)中的最后光线必定为 8，在介质(2)必定不存在光线.]

14.25 当入射的线偏振光的电矢量与光轴成 30° 角时，试确定一个四分之一波片透射的光的偏振状态.

14.26 一个巴俾涅补偿器(图 14-28)由两个能够相对滑动的石英劈组成. 这两个劈的光轴相互垂直. 因此，一个劈中的寻常光是另一个劈中的非常光. 试证明，对于任意一条光线，相差为

$$\delta=(2\pi/\lambda)(n_1-n_2)(l-l'),$$

式中 $l=AB, l'=BC$. 因此，如果使一个劈在另一个劈上滑动，就能够连续地改变相差.

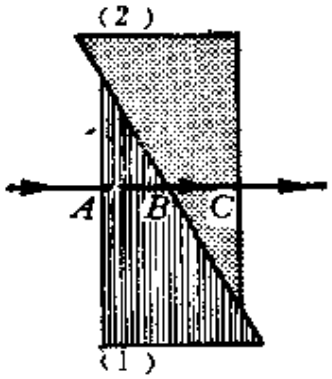


图 14-28

14.27 在一巴俾涅补偿器中，一个劈的有效宽度 l 为 2 mm. 当利用波长为 5.7×10^{-7} m 的光时，为了在两个方向上都能产生 $2\pi/3$ 的相差，求另一个劈的宽度必须有多大.

14.28 图 14-29 中示出一个渥拉斯顿棱镜. 它由两个石英棱镜粘合而

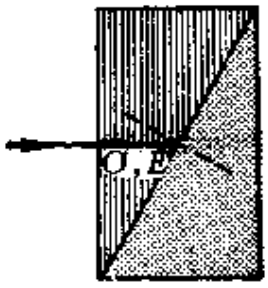


图 14-29

成. 左边棱镜的光轴垂直于图面，右边棱镜的光轴则平行于图面. 入射光垂直于表面. 产生的寻常光和非常光在左边棱镜中沿相同的路径但以不同的速率行进. 把图 14-29 复制下来，在图上画出寻常光线和非常光线进入右边的棱镜，然后又进入空气中时所经路径的弯曲情况.

14.29 一束光通过一个尼科耳棱镜 N_1 之后，又通过一个盛有散射介质的盒子. 通过另一个尼科耳棱镜 N_2 沿垂直方向观察这个盒子. 开始时，这些棱镜的取向使观察者所看到的场的亮度有最大值. (a) 使棱镜 N_2 转 90°，会产生消光？(b) 现在使棱镜 N_1 转 90°. 通过 N_2 看到的场是亮的还是暗的？(c)然后使 N_2 回到它原来的位置上. 通过 N_2 看到的场是亮的还是暗的？

第十五章　波动几何学

15.1　引　　论

在前几章中，我们讨论了波从一种介质传到另一种介质时发生的某些现象，在这两种介质中波的传播速度不同．我们不仅分析了波面发生的情况，而且引入了光线这个对于几何作图来说非常有用的概念．在本章中，我们将从几何学的观点，以光线概念作工具来描述在不连续面上发生的过程，更详细地讨论反射和折射现象．我们还将假定，这些过程仅仅是反射和折射，而且在波面上不发生其他变化(我们将把衍射和散射的讨论推迟到第十七章)．

对这个课题的这种看法，叫做*波动几何学*或*光线跟踪*．特别是对于可见和近可见波段的电磁波，这种观点构成*几何光学*，它是应用物理学的一个非常重要的分支．

只要波在其传播过程中遇到的表面不规则性和其他不连续性的尺寸比波长大很多，本章中阐述的几何学处理方法就是令人满意的．只要满足这个条件，我们的处理方法同样好地适用于光波，声波(尤其是超声)、地震波，等等．然而，除非另有说明，在我们的讨论中只考虑光波．

利用光线来说明问题的一个极好的例子，是针孔照相机(图15-1)的成象．这种照相机是一个盒子，在它的一个侧壁上有一个很小的孔．如果一个发射光波的物体 AB 放在盒子前面，则光线 Bb 和 Aa 将在对面的侧壁上形成一个象 ab．如果孔很小，只有很小一部分波面通过小孔，则对于每一个物点都有一个对应的象点，这个象就很清晰．如果孔太大，象就变得模糊，因为每一个物点对

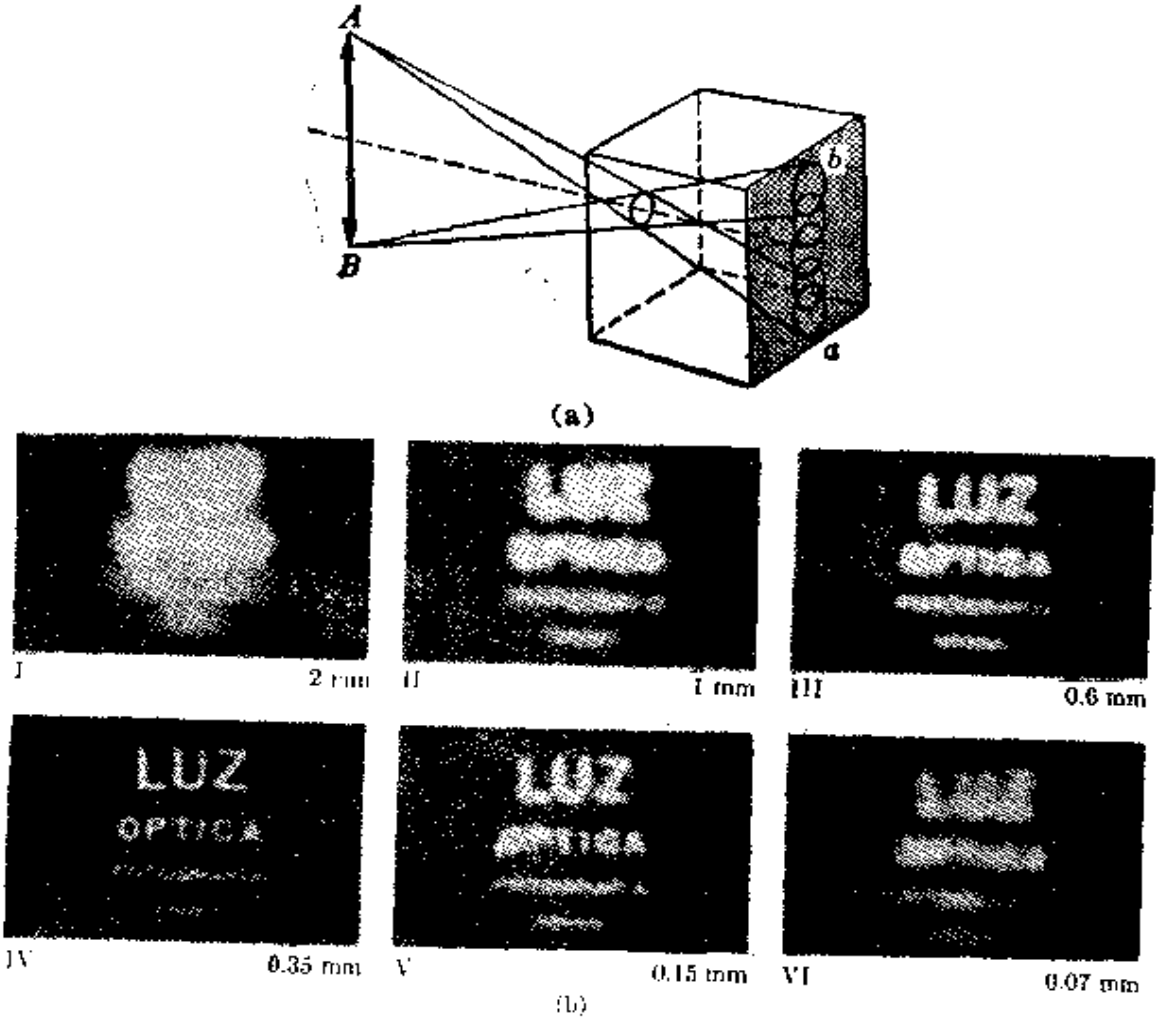


图 15-1　(a)针孔照相机的成象. 线图表示光线的路径. (b)一系列照片表明孔直径减小时象的清晰度的变化. 注意，有一最佳直径，这时象最清晰.

应于一个象斑. 此外，孔也不能太小，以致它的半径与光的波长不相上下，因为这时开始出现衍射效应，象 ab 又变得模糊了(这将在第十七章中讨论).

15.2　球面上的反射

我们首先考虑波在球面上的反射. 这就必须首先建立某些定义和符号规定. 曲率中心 C 是球面的中心(图15-2). 顶点 O 是球冠的极点. 通过 O 和 C 的直线，叫做主轴. 如果取坐标原点在点

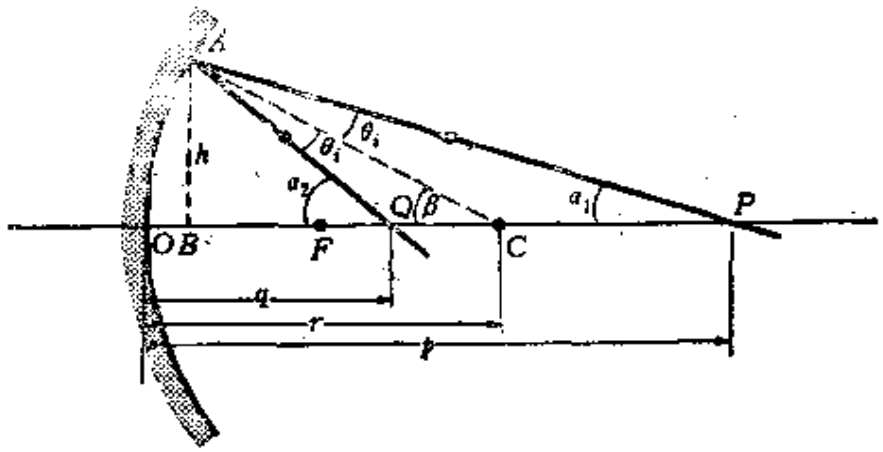


图 15-2　在一球面上反射的光线的路径.

O，则一切在O右侧测得的量是正的，一切在O左侧测得的量是负的.

假定点P是球面波的源. 光线PA被反射后成为光线AQ，由于入射角等于反射角，所以有

$$\beta=\theta_1+\alpha_1 \quad 和 \quad \alpha_2=\beta+\theta_1,$$

于是得到

$$\alpha_1+\alpha_2=2\beta. \tag{15.1}$$

假定角α_1、α_2和β都很小(即这些光线是近轴的)，因而距离OB比OQ、OC、OP都小很多，于是我们能够以很好的近似写出

$$\alpha_1\approx\tan\alpha_1=\frac{AB}{BP}\approx\frac{h}{p},$$

$$\alpha_2\approx\tan\alpha_2=\frac{AB}{BQ}\approx\frac{h}{q},$$

$$\beta\approx\tan\beta=\frac{AB}{BC}\approx\frac{h}{r},$$

把这些α_1、α_2和β的近似值代入方程(15.1)中，并消去公因子h，则得

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{2}{r}, \tag{15.2}$$

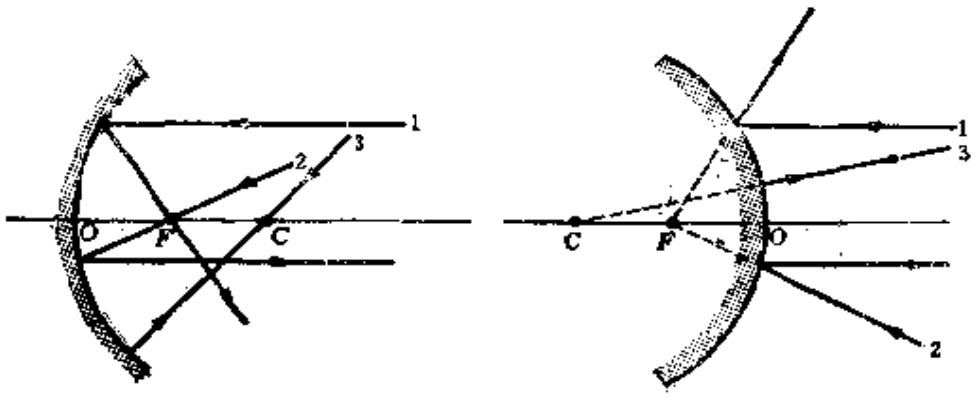
上式就是笛卡儿球面反射公式. 在方程(15.2)中，p 叫做物距，q 叫做象距，r 是球面的半径. 这个公式表示，在推导此公式所采用的近似之下，一切通过 P 点的入射线，在球面上反射之后都将通过 Q 点. 在这种情况下，我们说 Q 是物 P 的象.

入射线平行于主轴的情况相当于把物放在离反射镜非常大的距离处；在这种情况下，物距是无限大；即$p=\infty$. 于是方程(15.2)变为 $1/q=2/r$，象在点 F 处，即象至反射镜的距离为 $q=r/2$. 点 F 叫做球面镜的焦点，F 至球面镜的距离 OF 叫做焦距，用 f 表示，所以 $f=r/2$. 于是方程(15.2)可以写作

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f}. \tag{15.3}$$

因为在实验方面能够通过观察平行于主轴的光线的会聚点来确定 f，所以应用方程(15.3)时不必知道半径 r. 注意，当物放在焦点上时，$p=f$，则$q=\infty$. 也就是说，一切通过焦点 F 的入射线被反射后都平行于主轴. 虽然这个推导是对于于凹面反射镜进行的，但笛卡儿公式同样适用于凸面反射镜，只要考虑到 p、q 和 r 的符号规定就可以了. 按照我们的符号规定，凹面的 r 为正值，凸面的 r 为负值. 因此，对应的焦距分别为正的和负的.

图15-3中示出凹面镜和凸面镜的三条主光线:



(a) (b)

图 15-3 球面镜中的主光线.(a)凹面镜,(b)凸面镜.

光线 1 是一条平行光线，它反射后通过焦点，或者反射后看起来是来自焦点；

光线 2 是一条焦点光线，它反射后平行于主轴；

光线 3 是一条中心光线，它在去镜面的路径上和反射后，都通过曲率中心．这条光线垂直投射在镜面上（$\theta_i=0$）．

在图 15-4 中，用这些光线来说明球面镜的成象．物为 AB，象为 $a'b'$．在图 15-4(a)中，象是实的(因为反射光线相交)，在图 15-4(b)中，象是虚的(因为光线仅仅看起来是在反射镜后面相交．表 15-1中列出本书所用反射镜的符号规定．根据我们的规定，当物或象为实的时，它们至反射镜的距离为正的，因为象或物是在反射镜前面；当象或物为虚的时，这距离是负的，因为它是在反射镜后面．

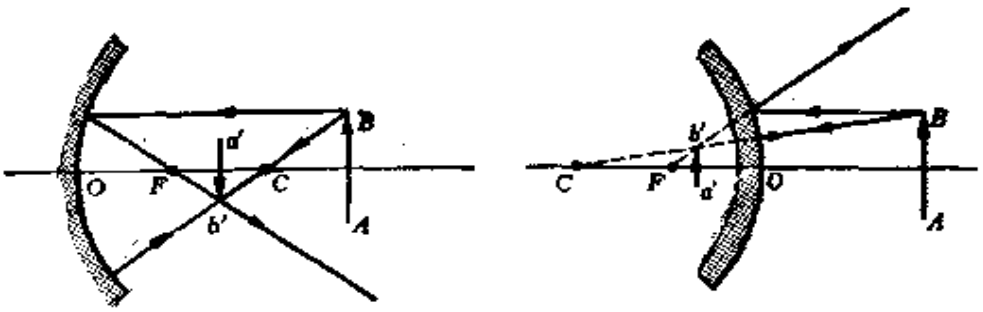


图 15-4　球面镜中象的作图法．(a)凹面镜，(b)凸面镜．

如果反射镜的孔径大，因而能接收大倾角的光线时，方程(15.3)就不再是好的近似．在这种情况下，对于一个点物，不存在一个对应的清晰的点象，而是存在着无限多个象．因此，一个扩展物体的象看起来是模糊的．图 15-5 中示出来自一点 P 的光线在反射镜上被反射的情况．可以看出，这些光线不相交于同一点，而是相交于光轴上的一个线段 QQ' 上，这种效应叫做球面象差．点 Q 对应于与光轴成很小角度的光线所成的点 P 的象，其位置由方程(15.3)决定．点 Q' 对应于与光轴成大角度的光线所成的点 P 的

表 15-1　球面镜的符号规定

	+	−
半径 r	凹面镜	凸面镜
焦距 f	会聚的	发散的
物距 p	实的	虚的
象距 q	实的	虚的

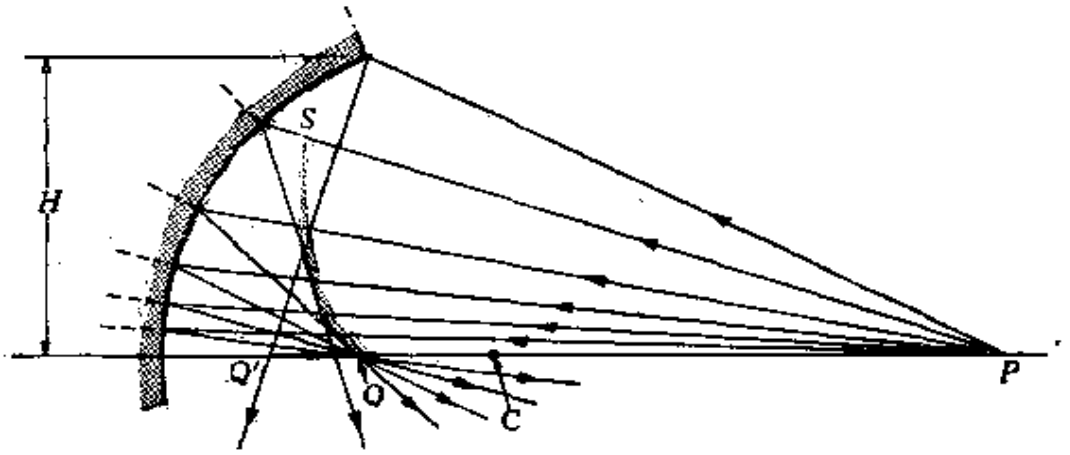


图 15-5　凹面镜的球面象差.

象. 反射线还相交于一个曲面上，这曲面的一部分如图中的粗线 QS 所示. 这个面叫做反射焦散面.

球面象差不能完全消除. 但是，通过适当设计镜面，能够对于某些位置消除球面象差，这些位置叫做去象散位置. 在球面镜中心的点物体的象恰好是一个点(也是在中心处)，它没有球面象差. 因此，球面镜中心是一个去象散位置. 通过改变曲面的形状，能够改变去象散位置. 例如，由于抛物线的性质，一个抛物面镜对于平行于主轴的光线不产生象散；这些光线都必定通过抛物面的焦点(图 15-6). 因此，抛物面镜被用于望远镜上，不仅用来接收电磁波谱可见区的光线，而且用于接收射频波段的射线，例如在射电望远镜中(图 15-7).

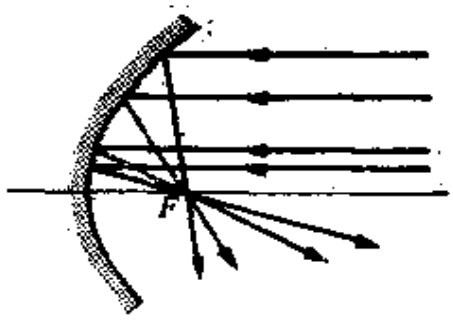


图 15-6　平行光线在一抛物面镜上反射.

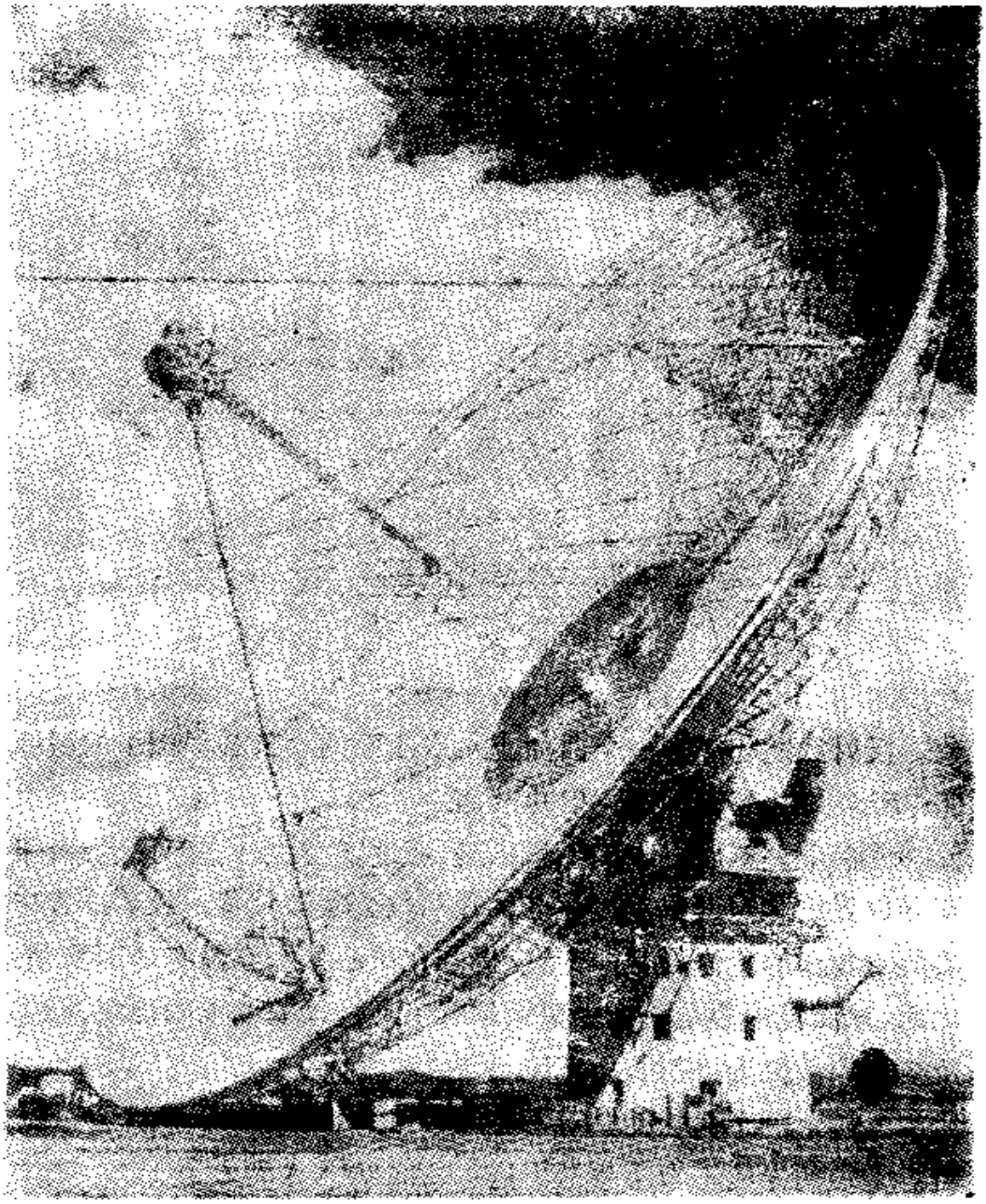


图 15-7　安装在澳大利亚新南威尔士的帕克这个地方的反射射电望远镜，反射器直径 64m，能绕竖直线转动，还能改变天顶角，而且对于可见天空的大部分都易于改变位置．这台望远镜设计得在 21cm 氢线波长处性能最佳，不过它在小到几厘米波长处仍然是灵敏的．地点选在离悉尼 340km处，是为了使电干扰最小．射电望远镜包括一个用金属丝网制成的金属反射镜．一个偶极接收天线放在反射镜的焦点处．天线接收的信号对应于沿平行于镜轴方向传播的电磁波，并被传送到实验室进行分析．

除球面象差之外，在球面上反射(或折射)所产生的象中，还有其他缺陷. 但是我们不拟讨论这些缺陷，因为它们属于光学的非常专门的分支.

例题 15.1 大孔径反射镜的成象.

解 当球面反射镜具有大孔径，因而能接收大倾角的光线时，求方程(15.2)时所采用的近似，就不再有效，因为在这种情况下，用 α 代替 $\tan\alpha$ 就不是很好的近似. 不难求出一个比方程(15.2)更精确的表达式. 当对三角形 ACP 和 AQC(图 15-8)应用正弦定律时，我们得到

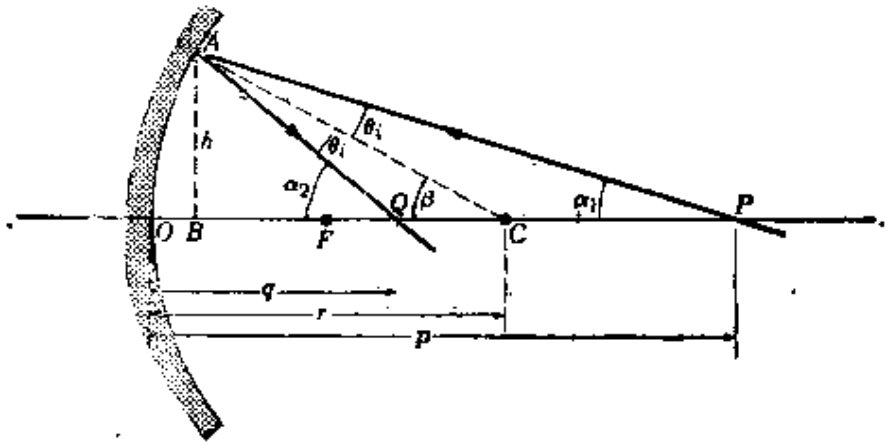


图 15-8

$$\frac{CP}{AP}=\frac{\sin\theta_1}{\sin(\pi-\beta)},\quad \frac{QC}{AQ}=\frac{\sin\theta_1}{\sin\beta}.$$

在这个情况下，由于 $\sin(\pi-\beta)=\sin\beta$，上面两个表达式可以结合为

$$\frac{CP}{AP}=\frac{QC}{AQ}\quad 或\quad \frac{p-r}{AP}=\frac{r-q}{AQ}.$$

用 pr 乘、除上式左边，用 rq 乘、除上式右边，则得

$$\left(\frac{p-r}{pr}\right)\frac{pr}{AP}=\left(\frac{r-q}{rq}\right)\frac{rq}{AQ},$$

上式可以写作

$$\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)\frac{p}{AP}=\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}\right)\frac{q}{AQ}.\tag{15.4}$$

这个关系式不涉及近似. 如果 α_1 和 α_2 非常小，则可取近似式 $p\approx AP$，$q\approx AQ$，就又得到方程(15.2). 但是，在取这种近似以前，我们还可以前进一步. 也就是说，我们将只要求 $h\ll r$. 由三角形 ACP，并利用余弦定律，得到

$$AP^2=r^2+(p-r)^2+2r(p-r)\cos\beta$$

$$=p^2-2r(p-r)(1-\cos\beta)$$

$$=p^2-4r(p-r)\sin^2\frac{1}{2}\beta$$

$$=p^2\left[1-4\frac{r^2}{p}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)\sin^2\frac{1}{2}\beta\right]$$

$$\approx p^2\left[1-\frac{h^2}{p}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)\right],$$

在写出上式最后一行时，利用了近似式 $\sin\frac{1}{2}\beta\approx\frac{1}{2}\beta\approx h/2r$. 于是得到

$$\frac{p}{AP}=\left[1-\frac{h^2}{p}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{h^2}{2p}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right), \tag{15.5}$$

在上式中利用了近似式 $(1-x)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x$. 同理，利用三角形 AQC，得到

$$\frac{q}{AQ}=1+\frac{h^2}{2q}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{q}\right). \tag{15.6}$$

然后把方程(15.5)和(15.6)代入精确方程(15.4)中，则得

$$\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)\left[1+\frac{h^2}{2p}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)\right]=\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}\right)\left[1+\frac{h^2}{2q}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{q}\right)\right].$$

上式经整理后变为

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{2}{r}+\frac{h^2}{2}\left[\frac{1}{p}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)^2+\frac{1}{q}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{q}\right)^2\right].$$

由于上式右边的第二项是一个修正项，我们可以利用方程(15.2)消去该项中的 q，结果得到

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{2}{r}+\frac{h^2}{r}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)^2. \tag{15.7}$$

距离 h 由来自点 P 的光线的倾角决定. 对于一个给定的 p 值，h 越大，q 越小. 因此，从主轴上的点 P 发出的一切光线(图 15-5) 并不相交于同一点，而是如前面所指出的，相交于一个线段 QQ' 上. 利用方程(15.2)，或者令方程(15.7)中的 $h=0$，可以求出点 Q. 在方程(15.7)中令 $h=H$ (H 是球面的底面的半径)，可以求出图 15.5 中的点 Q'.

例题 15.2 一凹面镜的半径为 0.600m. 一物放在离镜 1.000m 处. 假定镜的孔径为 20°，试求此镜产生的最近的和最远的象.

解 在此情况下，$r=+0.600$m，$p=+1.000$m. 因此，对于近轴光线，利用方程(15.2)，得出

$$\frac{1}{1.000}+\frac{1}{q}=\frac{2}{0.600} \quad \text{即} \quad q=+0.429\text{m}.$$

具有最大倾角的光线所产生的象，可以利用方程(15.7)求出. 因为 $h=r\sin\beta$, $\beta=\frac{1}{2}(20°)=10°$，所以 $h=0.0600\sin 10°=0.104\text{m}$, $h^2=0.011$. 代入方程(15.7)中，得出

$$\frac{1}{1.000}+\frac{1}{q}=\frac{2}{0.600}+\frac{0.011}{0.600}\left(\frac{1}{0.600}-\frac{1}{1.000}\right)^2.$$

由此得出 $q=+0.427\text{m}$. 由此可知，象分布在主轴上的一个小线段上，其长度约为 $0.002\text{m}=2\text{mm}$.

例题 15.3 球面镜的放大率.

解 一个光学系统的放大率 M 被定义为象的尺寸与物的尺寸之比. 即 $M=ab/AB$. 由图 15-9 可以看出，

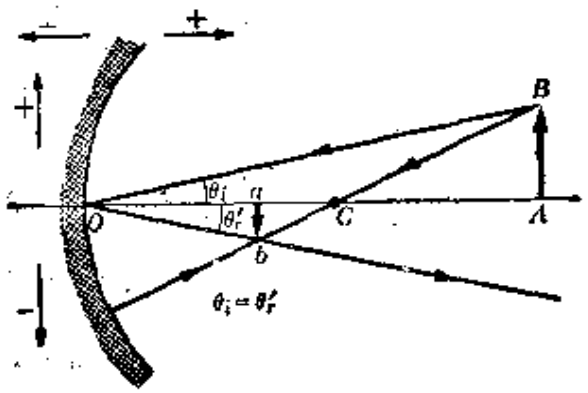


图 15-9 球面镜放大率的计算.

$$\tan\theta_i=\frac{AB}{OA}=\frac{AB}{p},$$

$$\tan\theta_r'=\frac{ab}{Oa}=\frac{ab}{q}.$$

考虑到 $\theta_i=\theta_r'$，则有

$$\frac{\tan\theta_r'}{\tan\theta_i}=1=\left(\frac{ab}{q}\right)\frac{p}{AB}$$

或

$$M=\frac{ab}{AB}=\frac{q}{p}. \tag{15.8}$$

例题 15.4 利用费马原理讨论球面上的反射.

解 为了使反射曲面前方一个点源 P（图 15-10）能够在 Q 处产生一个象，根据费马原理，曲面的形状必须满足下述条件：所有光线从 P 行进到 Q 所需时间相同。一条光线沿主轴由 P 行进到 Q 所需时间为

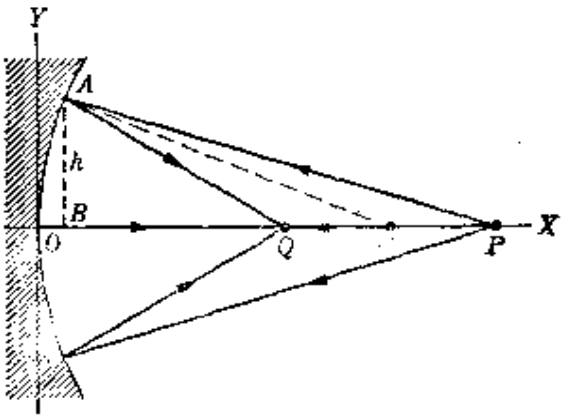


图 15-10

$$t=\frac{1}{c}(PO+OQ).$$

对于一条投射在曲面上点 A 的光线，我们有

$$t'=\frac{1}{c}(PA+AQ),$$

我们要求 $t=t'$，至少在一级近似下如此。注意，如果这曲面是平的（例如 OY），则不可能有 $t=t'$。这是因为，如果 A 在 OY 上，则永远有 $PA>PO$，$AQ>OQ$，于是得出 $t'>t$。但是，通过改变这曲面的弯曲程度，能够调节 PA 和 AQ，使得 $t=t'$ 成立。为了使这个要求对于一个球面成为可能，条件是

$$PA+AQ=PO+OQ \tag{15.9}$$

由 $\triangle ABP$，我们有

$$h^2=PA^2-BP^2=(PA-BP)(PA+BP). \tag{15.10}$$

但是，如果 A 充分接近 O，则 PA 稍大于 PO，BP 稍小于 PO。因此，作为一个好的近似，我们可以写出 $PA+BP\approx 2PO=2p$。把这个值代入方程(15.10)中，并求解 PA，则得

$$PA\approx BP+\frac{h^2}{2p}.$$

同理，由 $\triangle ABQ$，得到

$$AQ\approx BQ+\frac{h^2}{2q}.$$

把这些结果代入方程(15.9)中，我们看到，条件 $t=t'$ 相当于

$$\left(BP+\frac{h^2}{2p}\right)+\left(BQ+\frac{h^2}{2q}\right)=PO+OQ$$

或

$$\frac{h^2}{2p}+\frac{h^2}{2q}=(PO-BP)+(OQ-BQ)=2OB. \tag{5.11}$$

但是，由$\triangle ABC$，如果与 r^2 相比我们忽略 OB^2，则有 $OB=h^2/2r$. 只要 A 接近于 O(即如果光线是近轴的)，这是可以接受的. 因此，如果把这个结果代入方程(15.11)中，并消去公因子$\frac{1}{2}h^2$，就得到笛卡儿公式：

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{2}{r}.$$

更进一步，我们看一下，利用适当的曲面，是否能够做到严格地满足方程(15.9)，至少对于一对点子 P 和 Q. 我们注意到，在这种情况下，方程(15.9)等效于 $PA+AQ=$常数. 这是一个旋转椭球的方程，它的焦点在 P 和 Q 处，如图 15-11 所示. 对于这种形状的反射曲面，点 P 的象严格地在 Q 处(即对于这一对点子，没有球面象差). 对于其他的点子，则有象差，其大小与物点至所选取的两个点之一的距离有关系.

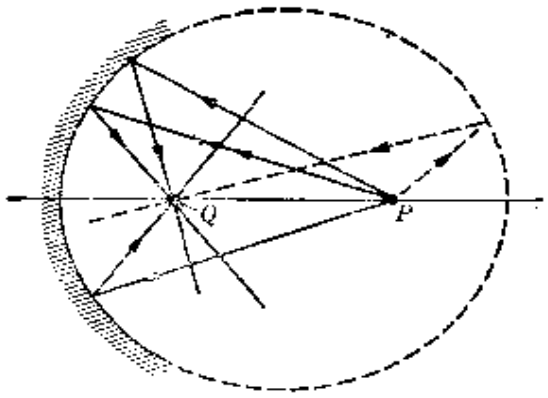


图 15-11 椭球面镜.

15.3 球面上的折射

我们现在考虑波在绝对折射率为 n_1 和 n_2 的两种介质的球面分界面上的折射 (图 15-12). 基本的几何要素与前一节中关于球面镜所定义的要素相同. 符号规定基本上和球面镜的相同.

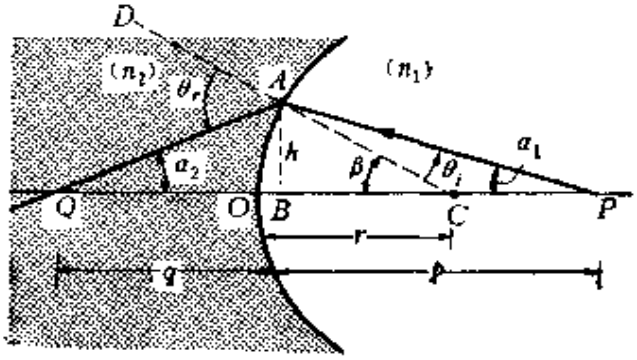


图 15-12　在一会聚球面上折射成象.

1. 如果折射面的凹面朝物方，则其半径为正的，如果凸面朝物方，则其半径为负的.

2. 如果物是实的(即物在折射面右方)，则物距 p 为正的，如果物是虚的(即物在折射面左方)，则物距是负的.

3. 如果象是实的(即象在折射面的左方)，则象距 q 是正的，如果象是虚的(即象在折射面右方) 则象距是负的.

这些符号规定汇总在表 15-2 中.

表 15-2　球面折射面的符号规定

	+	−
半径 r	凹	凸
焦距 f_o	会聚的	发散的
物距 p	实的	虚的
象距 q	实的	虚的

我们考虑一个凹折射面. 一条入射线，例如 PA，沿 AD 被折射，交主轴于 Q. 由图 15-12 可以看出，在这情况下，p、q 和 r 都是正的. 由此图还可看出，$\beta=\theta_i+\alpha_1$，$\beta=\theta_r-\alpha_2$. 由斯涅耳定律，$n_1\sin\theta_i=n_2\sin\theta_r$. 象前一节中那样，假定光线的倾角非常小. 于是，角 θ_i、θ_r、α_1、α_2 和 β 都非常小，我们可以利用 $\sin\theta_i\approx\theta_i$ 和 $\sin\theta_r\approx\theta_r$，因而斯涅耳定律变为 $n_1\theta_i=n_2\theta_r$，或

$$n_1(\beta-\alpha_1)=n_2(\beta+\alpha_2). \qquad (15.12)$$

由图 15-12，我们可作如下的近似：

$$\tan\alpha_1\approx\alpha_1\approx\frac{h}{p},\ \tan\alpha_2\approx\alpha_2\approx\frac{h}{q},\ \tan\beta\approx\beta\approx\frac{h}{r}.$$

把这些结果代入方程(15.12)中，消去公因子，则得

$$\frac{n_1}{p}+\frac{n_2}{q}=\frac{n_1-n_2}{r},\tag{15.13}$$

上式就是笛卡儿的球面折射公式. 虽然方程(15.13)是对于凹折射面导出的，但它对于凸折射面也成立，不过，对于凸折射面 r 是负的.

物焦点 F_o，也叫做球面折射面的第一焦点，是主轴上一个点物的位置，由此位置发出的光线被折射后平行于主轴. 因此，这个点的象成在无限远处，即 $q=\infty$[图 15-13(a)]. 第一焦点至球面的距离叫做物焦距，用 f_o 表示. 在方程(15.13)中，令 $p=f_o, q=\infty$，则得 $n_1/f_o=(n_1-n_2)/r$，即

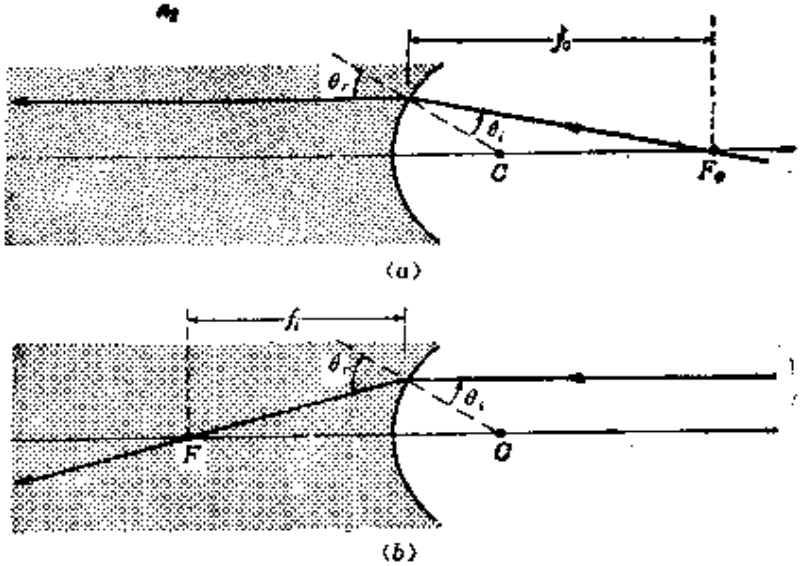


图 15-13

$$f_o=\left(\frac{n_1}{n_1-n_2}\right)r.\tag{15.14}$$

当物焦点为实的，并在球面的前方时，焦距 f_o 是正的. 这系统称为会聚的；当物焦点是虚的时，焦距 f_o 是负的，这系统称为发散的.

表 15-2 中列出本书所用的符号规定.

类似地，当入射线平行于主轴时，这情况相当于使物位于离球面非常远的距离处($p=\infty$)，折射线通过主轴上的一点 F_i，这个点叫做象焦点或第二焦点. 在这种情况下，第二焦点至球面的距离叫做象焦距，用 f_i 表示. 在方程(15.13)中，令 $p=\infty$，$q=f_i$，则得 $n_2/f_i=(n_1-n_2)/r$，或

$$f_i=\left(\frac{n_2}{n_1-n_2}\right)r. \tag{15.15}$$

当象焦点是实的，并在球面左边时，f_i 是正的(图 15-13 b). 注意，$f_o-f_i=r$，两个焦点永远处在折射面的两侧.

图 15-14 中示出，对于 $r>0$ 和 $n_1>n_2$ 的情况，一个物的象的作图. 在此图中，对于一个折射面，画出三条主光线，对于其余三种情况，即 $r>0$ 和 $n_1<n_2$，$r<0$ 和 $n_1\gtrless n_2$，学生可画出类似的图.

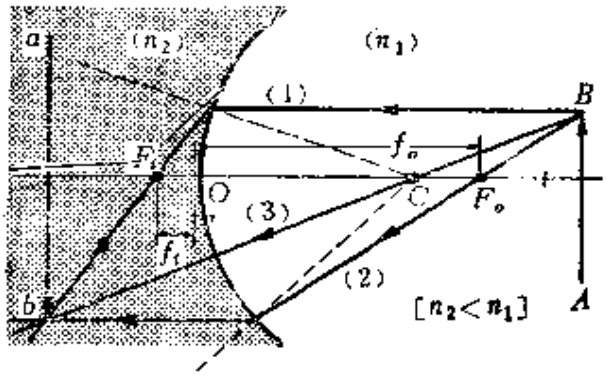


图 15-14　利用主光线画出在一会聚球面上折射所成的象.

方程(15.13)也表示，对于每一个点物，有一个唯一的点象. 这是可以接受的，只要球面的孔径小，仅容许倾角很小的光线通过，因而我们的近似是有效的. 对于大孔径的折射球面，情况类似于图 15-5 中关于球面镜的情况，并导致和前面对于球面镜讨论过的球面象差相同的现象.

例题 15.5　大孔径折射面的成象.

解　在这种情况下，所用的方法与对于反射镜所用的方法相似. 由三角

形 ACP 和 ACQ(图 15-12),根据正弦定律可以写出

$$\frac{CP}{AP}=\frac{\sin\theta_i}{\sin(\pi-\beta)}=\frac{\sin\theta_i}{\sin\beta},\quad \frac{CQ}{AQ}=\frac{\sin(\pi-\theta_r)}{\sin\beta}=\frac{\sin\theta_r}{\sin\beta}.$$

解这些方程,求出 $\sin\theta_i$ 和 $\sin\theta_r$,并将它们的值代入斯涅耳定律 $n_1\sin\theta_i=n_2\sin\theta_r$ 中,则得

$$n_1\frac{CP}{AP}=n_2\frac{CQ}{AQ}\quad 或\quad n_1\frac{p-r}{AP}=n_2\frac{q+r}{AQ}.$$

上式可以写作

$$n_1\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)\frac{p}{AP}=n_2\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{q}\right)\frac{q}{AQ},\tag{15.16}$$

应把上式与方程(15.4)加以比较. 如果 α_1 和 α_2 都很小,我们就能够作出近似 $p\approx AP$ 和 $q\approx AQ$,于是又得到方程(15.13). 但是,利用与方程(15.5)和(15.6)相当的近似(当 $h\ll r$ 时,这些近似有效),我们能够前进一步,由这些近似得出

$$\frac{p}{AP}=1+\frac{h^2}{2p}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)$$

和

$$\frac{q}{AQ}=1-\frac{h^2}{2q}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{q}\right).$$

把这两个方程代入方程(15.16)中,则得

$$n_1\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)\left[1+\frac{h^2}{2p}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)\right]=n_2\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{q}\right)\left[1-\frac{h^2}{2q}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{q}\right)\right].$$

将上式整理后得到

$$\frac{n_1}{p}+\frac{n_2}{q}=\frac{n_1-n_2}{r}+\frac{h^2}{2}\left[\frac{n_1}{p}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)^2+\frac{n^2}{q}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{q}\right)^2\right].$$

利用方程(15.13)消去最后的修正项中的 q,得到

$$\frac{n_1}{p}+\frac{n_2}{q}=\frac{n_1-n_2}{r}+\frac{h^2}{2}\left(\frac{n_1-n_2}{n_2^2}\right)\left[\frac{n_1^2}{r}-\frac{n_1(n_1+n_2)}{p}\right]\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)^2.\tag{15.17}$$

如在球面镜的情况下那样,象的位置与 h 的值有关系,亦即与入射线的斜率有关系. 因此,原来在主轴上的一个点的象,不一定是主轴上的另一个点.

例题 15.6 球面折射面的放大率.

解 这个问题与例题 15.3 相似. 考虑图 15-15(a),其中 AB 是一个物,ab 是它的(虚)象,我们有 $M=ab/AB$. 还有(图 15-15b)

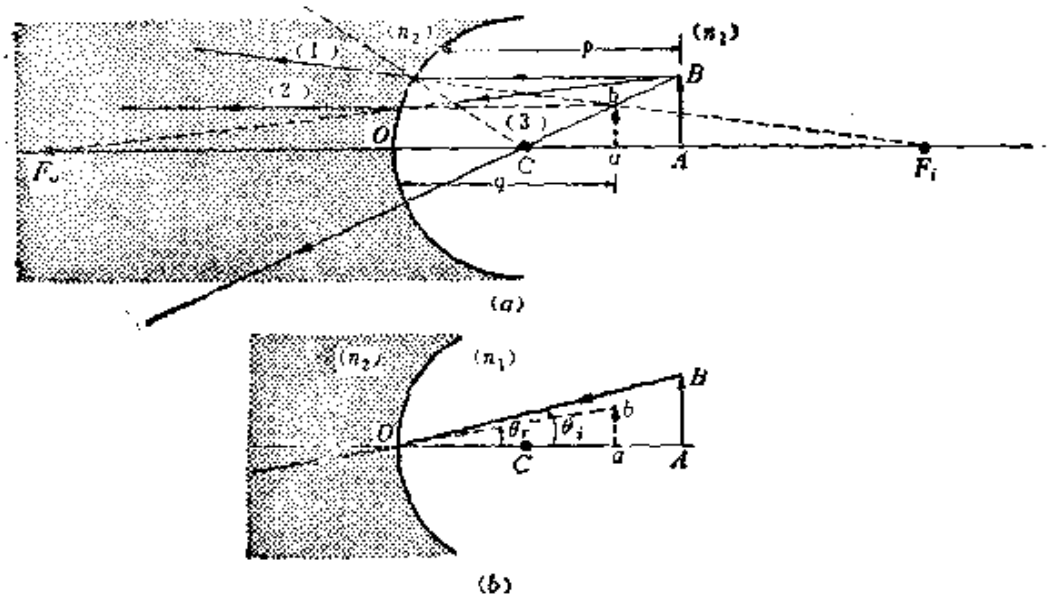


图 15-15

$$\tan\theta_i=\frac{AB}{OA}=\frac{AB}{p},\ \tan\theta_r=\frac{ab}{Oa}=\frac{ab}{q};$$

因此

$$M=\frac{ab}{AB}=\frac{q\tan\theta_r}{p\tan\theta_i}\approx\frac{q}{p}\frac{\sin\theta_r}{\sin\theta_i};$$

只要角很小，因而可以用正弦代替正切，上式中最后的近似就是有效的. 然后利用斯涅耳定律，$n_1\sin\theta_i=n_2\sin\theta_r$，得到

$$M=\frac{n_1 q}{n_2 p},\tag{15.18}$$

注意，利用这个公式时，距离 q 和 p 只取其绝对值.

例题 15.7 一个半径为 +0.50m 的凹面把一种折射率为 1.20 的介质与另一种折射率为 1.60 的介质分开. 一个物放在第一种介质中，至界面的距离为 0.80m. 试求这系统的焦距以及象的位置和放大率.

解 在这情况下，$r=+0.50$m，$n_1=1.20$，$n_2=1.60$. 因此，利用方程(15.14)和(15.15)，我们得到

$$f_o=\frac{n_1 r}{n_1-n_2}=-1.50\text{m},\ f_i=\frac{n_2 r}{n_1-n_2}=-2.00\text{m}.$$

因此，这个系统是发散的. 利用方程(15.13)，我们求得

$$\frac{1.20}{0.80}+\frac{1.60}{q}=\frac{1.20-1.60}{0.50}\quad\text{或}\quad q=-0.70\text{m}.$$

负号表示这个象是虚的，图 15-15(a)中的作图对于这个例子是近似地正确的．利用例题 15.6 中的结果，并取 p 和 q 的绝对值，则得放大率 M 为

$$M=\frac{1.20\times0.70\text{m}}{1.60\times0.80\text{m}}=0.65.$$

15.4 透　　镜

透镜是指以两个曲面(通常是球面，其中一个可以是平面)为界的透明介质．因此，入射波通过透镜时经受两次折射．为简单起见，我们假定透镜两方的介质相同，并具有折射率1(例如空气)，而透镜的折射率为 n．我们只考虑薄透镜，即厚度比曲面半径小很多的透镜．

一个透镜的主轴是由两个中心 C_1 和 C_2 决定的一条直线(图 15-16)．考虑入射线 PA．在第一个面上，入射线沿 AB 被折射．延长后，AB 通过 Q'，Q' 是第一个折射面所产生的 P 的象．物距和象距应从 O_1 或 O_2 量起；但是，如果透镜非常薄，我们可以忽略厚度 O_1O_2，一切距离都从公共中心 O 量起．利用方程(15.13)，可以求出 Q' 至 O 的距离 q'．

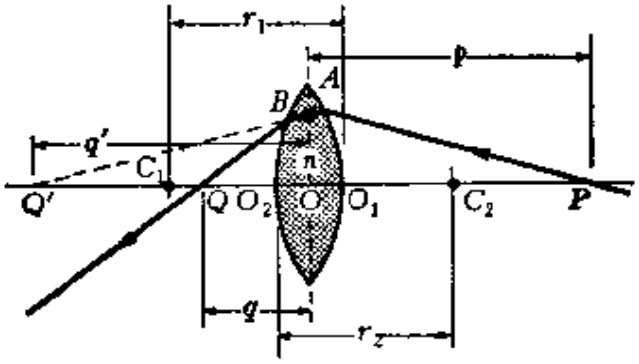


图 15-16　一条光线通过透镜的路径．

$$\frac{1}{p}+\frac{n}{q'}=\frac{1-n}{r_1}. \tag{15.19}$$

在 B 处，光线经受第二次折射而变为光线 BQ．我们说，Q 是这个透镜的两个折射面组成的系统所产生的点 P 的最后的象．关于 B

处的折射，物是第一个象 Q'，因此是一虚物，它至透镜的距离为 $-q'$；而象是 Q，它至 O 的距离为 q．再次应用方程(15.13)，并用 $-q'$ 代替 p，则得

$$\frac{n}{(-q')}+\frac{1}{q}=\frac{n-1}{r_2}. \tag{15.20}$$

注意，折射率的顺序反转，这是因为，在第二次折射时，光线是从透镜进入空气中．把方程(15.19)和(15.20)结合起来，消去 q'，得出

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=(n-1)\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right), \tag{15.21}$$

上式就是笛卡儿薄透镜公式．在写出这个方程时，对于半径 r_1 和 r_2，我们必须利用表 15-2 中的符号规定；就是说，当从光线到达透镜这一边观看时，如果曲面是凹的，半径就是正的，如果曲面是凸的，半径就是负的．

在图 15-16 中，选取点 O 与透镜的光心重合．光心是这样一个点，通过它的光线将沿平行于入射光线的方向出射．为了理解这样一个点确实存在，我们考虑图 15-17 的透镜中两个平行的半

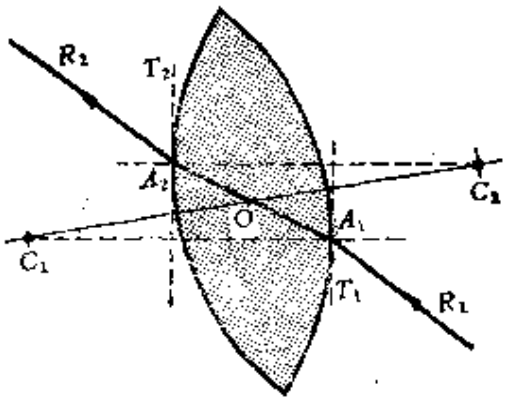


图 15-17　透镜的光心．

径 C_1A_1 和 C_2A_2．画出相应的切线 T_1 和 T_2．光线 R_1A_1 的折射光线为 A_1A_2，出射光线 A_2R_2 平行于 R_1A_1．由三角形 C_1A_1O 和 C_2A_2O 的相似性可知，点 O 的位置满足下列关系：

$$\frac{C_1O}{OC_2}=\frac{C_1A_1}{A_2C_2}=\frac{R_1}{R_2};$$

由此可见，O的位置与所选取的特定光线无关．因此，一切通过点O的入射光线，出射时都无角偏转；但是，它们有一横向位移．

和在单个折射面的情况一样，一个透镜的物焦点F_o，即第一焦点，是这样一个位置，当物在这个位置上时，光线通过透镜后平行于主轴出射($q=\infty$)．F_o至透镜的距离叫做物焦距，用f表示．在方程(15.21)中，令$p=f, q=\infty$，得到物焦距为

$$\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right), \tag{15.22}$$

上式有时叫做透镜制造者方程．把方程(15.21)与方程(15.22)结合起来，得到

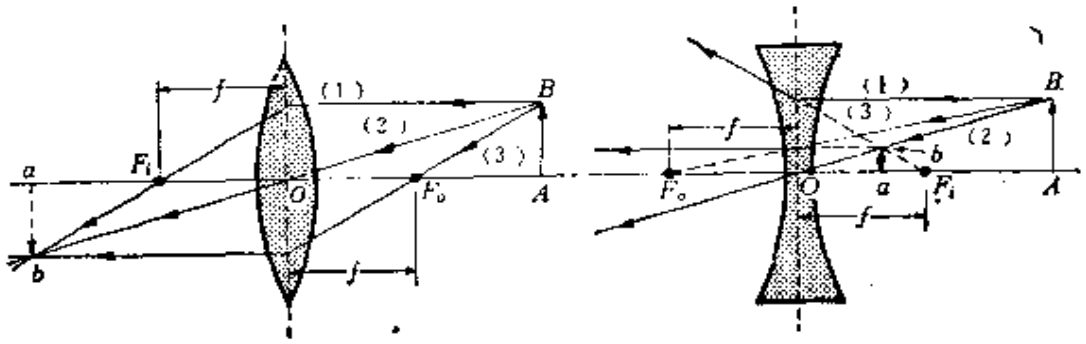
$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f}. \tag{15.23}$$

这个表达式的优点是，如果我们能用实验方法确定f，我们就可以使用一个透镜，而不必知道它的折射率或者它的半径．

对于一条平行于主轴的光线($p=\infty$)，出射线通过一点F_i($q=f$)，叫做象焦点，即第二焦点．因此，在一薄透镜中，这两个焦点对称地位于透镜的两侧．如果f为正，这透镜叫做会聚的，如果f为负，则叫做发散的．在第一种情况下，物焦点是实的，在第二种情况下，物焦点是虚的．符号规定与表15-2中关于球面折射面的规定相同．

画光路图时，我们可以用一个通过O且垂直于主轴的平面代表一个薄透镜．图15-18中分别画出一个会聚透镜和一个发散透镜的主光线．

只有在光线的倾角很小，因而球面象差可以忽略的情况下，上面阐述的理论才是正确的．在透镜有大直径的情况下，一个点的象不是一个点，而是主轴上的一个线段．特别是，平行于主轴的入



(a) (b)

图 15-18 会聚透镜(a)和发散透镜(b)的主光线.

射光线，依它们至主轴距离的不同而交主轴于不同的点. 球面象差由边部光线的焦距 f' 和近轴光线的焦距 f 之差$(f'-f)$来量度(图 15-19). 折射光线相交于一个锥面上，叫做折射焦散面.

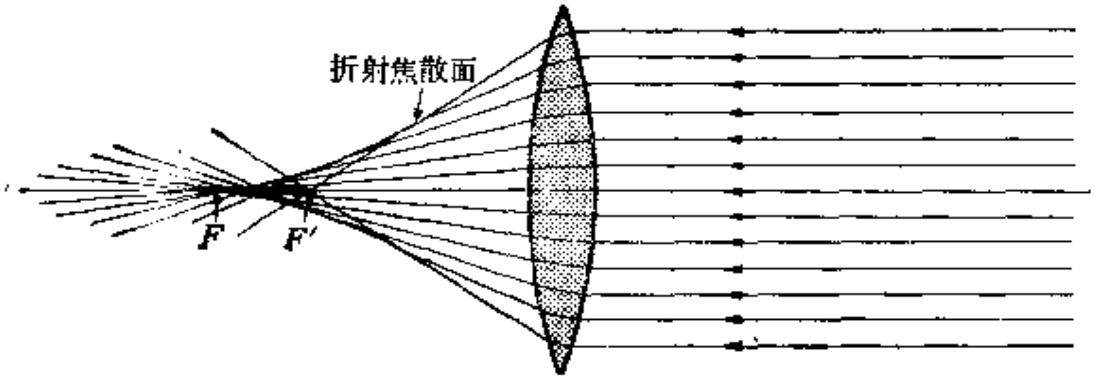


图 15-19 透镜的球面象差.

例题 15.8 透镜的放大率.

解 和前面一样，放大率被定义为 $M=ab/AB$. 由图 15-20 可知，如果 O 是透镜的光心，我们有 $\tan\alpha=AB/OA$和 $\tan\alpha=ab/Oa$. 因此，$ab/AB=Oa/OA$，即

$$M=\frac{q}{p}.$$

利用例题 15.6 中关于球面折射面的结果，我们也可以得出上面的关系式，因为由图 15-16 可知，第一个面上的折射所产生的放大率为 $M_1=q'/np$，而在第二个面上的折射所产生的放大率为 $M_2=nq/q'$. 因此，总放大率为

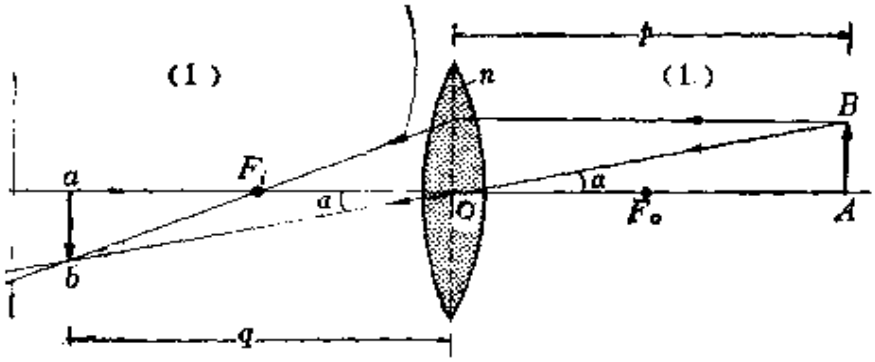


图 15-20　透镜的放大率.

$$M=M_1M_2=\frac{q'}{np}\times\frac{nq}{q'}=\frac{q}{p}.$$

例题 15.9　一个球面透镜的两个凸面的半径分别为 0.80m 和 1.20m. 它的折射率为 $n=1.50$. 试求它的焦距和在离透镜 2.00m 处一个点的象的位置.

解　由于从物(它放在右边,见图 15-16)这边看时,第一个面是凸的,第二个面是凹的,所以,按照表 15-2 中的符号规定,我们必须写出 $r_1=O_1C_1=-0.80\text{m}$, $r_2=+1.20\text{m}$. 因此,利用方程(15.22),我们有

$$\frac{1}{f}=(1.50-1)\left(\frac{1}{1.20}-\frac{1}{-0.80}\right)\quad\text{或}\quad f=+0.96\text{m}.$$

f 为正值,这表示这个透镜是会聚的. 求象的位置时,我们利用方程(15.23),并将 $p=2.00\text{m}$ 和上面求出的 $f=+0.96\text{m}$ 代入,则得

$$\frac{1}{2.00}+\frac{1}{q}=\frac{1}{0.96}\quad\text{或}\quad q=+1.85\text{m}.$$

q 的正值表示象在透镜的左方,因此是实的. 最后得出放大率为

$$M=q/p=0.92.$$

由于 $M<1$,所以象小于物.

例题 15.10　求相距为 L 的两个薄透镜组成的系统的焦点的位置.

解　图 15-21(a)中示出一薄透镜系统和一条通过点 P 的光线的路径. 第一个透镜所形成的 P 的象为 Q'. 设 p 为物至第一个透镜的距离. 于是 Q' 的位置由下式确定:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q'}=\frac{1}{f_1},$$

在此情况下,上式中的 q' 是负的,因为 Q' 是一个虚象. 对于第二个透镜来

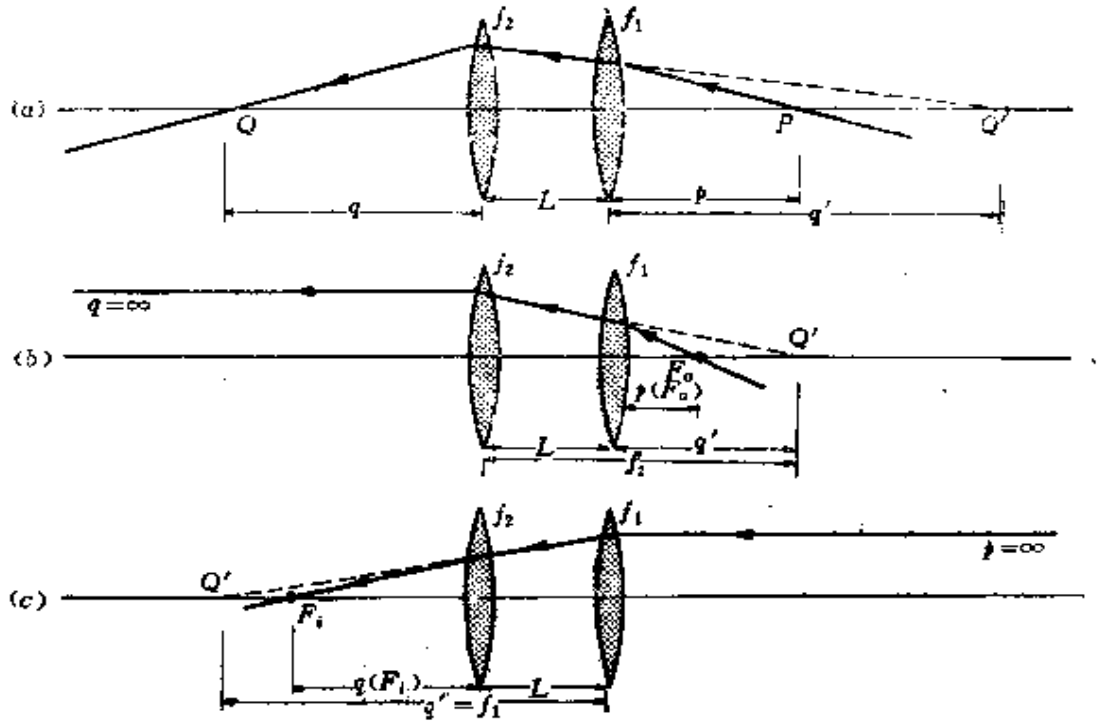


图 15-21　两个薄透镜组成的系统.

说，点 Q' 起着一个实物的作用，最后的象是在 Q 处. 因为 Q' 至第二个透镜的距离为 $L+|q'|=L-q'$（因为在此情况下 q' 是负的），所以我们有

$$\frac{1}{L-q'}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f_2},$$

式中 q 是最后的象至第二个透镜的距离. 根据上面这组方程，我们能够求出与物的任意位置对应的象的位置.

这个透镜系统的物焦点 F_o（图 15-21b）是象 Q 成在无限远处（$q=\infty$）时物的位置. 如果我们用 $p(F_o)$ 表示从 F_o 至第一透镜的距离，则由第二个关系式得出 $q'=L-f_2$，把它代入第一个关系式中，则得

$$p(F_o)=\frac{f_1(f_2-L)}{f_1+f_2-L}. \tag{15.24}$$

同理，用 $q(F_i)$ 表示象焦点 F_i 的位置[图 15-21(c)]. 对于这个位置，我们令 $p=\infty$. 于是由第一个关系式得出 $q'=f_1$（q' 有正值，因为现在 Q' 是实的）. 将 $q'=f_1$ 代入第二个关系式中，则得

$$q(F_i)=\frac{f_2(f_1-L)}{f_1+f_2-L}. \tag{15.25}$$

当两个透镜相接触，因而 L 可忽略时，出现一个重要情况. 这时，把 q' 和 q

联系起来的方程为

$$\frac{1}{(-q')}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f_2}.$$

把上式代入第一个关系式中，则得

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}.$$

上式表示，一组相互接触的透镜与一个焦距为 F 的透镜等效，F 由下式确定：

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2} \quad \text{(两个接触的透镜)} \tag{15.26}$$

在 $p(F_o)$ 的表达式中，令 $L=0$，得到同样的结果。

15.5 显 微 镜

显微镜是一个透镜系统，它能产生一个小物体的放大的虚象。最简单的显微镜是一个会聚透镜，通常称为放大镜。物 AB 放在透镜和焦点 F_o 之间(图 15-22)，因此，象是虚的，象至透镜的距离 q 等于最小明视距离 δ。对于正常人，δ 约等于 0.25m。由于 p 差不多等于 f，特别是，如果 f 很小，我们可以把放大率写作

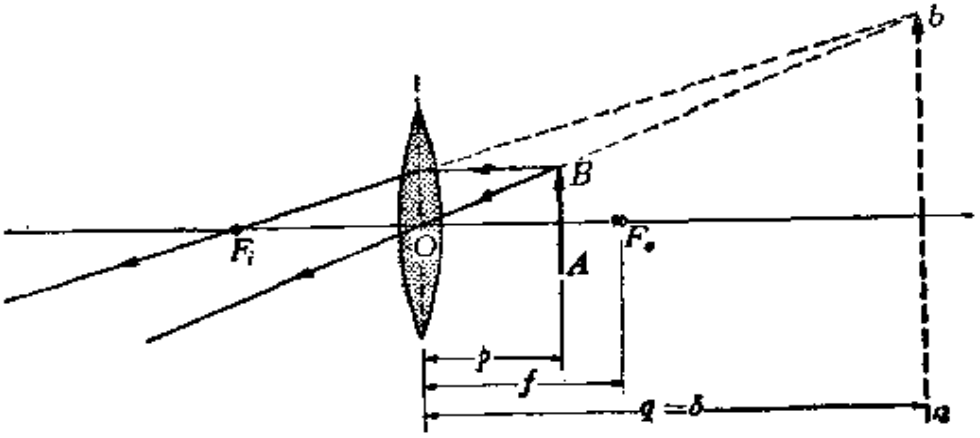


图 15-22 放大镜中光线的路径。

$$M=\frac{q}{p}\approx\frac{\delta}{f}. \tag{15.27}$$

复显微镜比较复杂(图 15-23)。它由两个会聚凸透镜组成，一个叫物镜，另一个叫目镜，二者的焦距都不大。物镜的焦距 f 比目

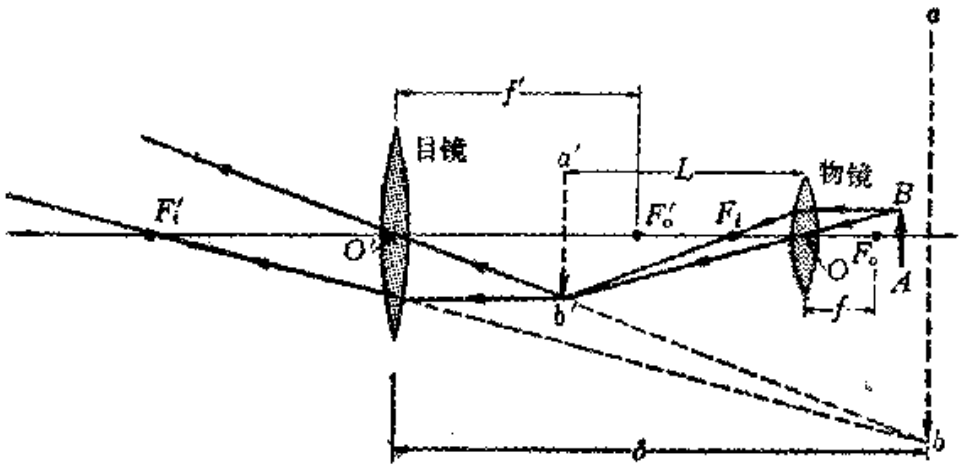


图 15-23 复显微镜中光线的路径.

镜的焦距 f' 小很多. f 和 f' 都比物镜和目镜之间的距离小很多. 物AB放在离物镜的距离稍大于 f 的地方. 物镜形成一个实象 $a'b'$. 对于目镜来说, $a'b'$ 起着物的作用. 象 $a'b'$ 至目镜的距离必须稍小于 f'. 最后的象 ab 是虚的、倒的, 比物大很多. 物 AB 如此放置, 以使象 ab 至目镜的距离等于最小明视距离 δ (约为 0.25 m). 通过调焦这个操作, 能够达到这个条件. 所谓调焦, 就是相对于物移动整个显微镜. 物镜的放大率为

$$M_O=\frac{a'b'}{AB}\approx\frac{L}{f},$$

目镜的放大率为

$$M_E=\frac{ab}{a'b'}\approx\frac{\delta}{f'}.$$

因此, 总放大率为

$$M=M_OM_E=\frac{ab}{AB}=\frac{\delta L}{ff'}. \tag{15.28}$$

在实际显微镜中, L 差不多就是物镜与目镜之间的距离.

显微镜的有用放大率受它的分辨本领的限制. 显微镜的分辨

本领是当物体中两个点的象可分辨时，这两个点之间的最小距离．这个分辨本领又决定于物镜透镜处的衍射(见第十七章)．详细的计算(此处从略)给出分辨本领为

$$R=\frac{\lambda}{2n\sin\theta},\tag{15.29}$$

式中 λ 是波长，n 是物浸入其中的介质的折射率，θ 是边部光线与显微镜轴所成的角．通常 $2n\sin\theta$ 约等于 3，所以 $R\approx\frac{1}{3}\lambda$．另一方面，对于一个约在 0.25m 处的物体，眼睛的分辨本领约为 10^{-4}m (图 15-24)．因此，最大有用放大率为

$$M\simeq\frac{10^{-4}\text{m}}{\frac{1}{3}\lambda}\approx\frac{3\times10^{-4}\text{m}}{\lambda}.$$

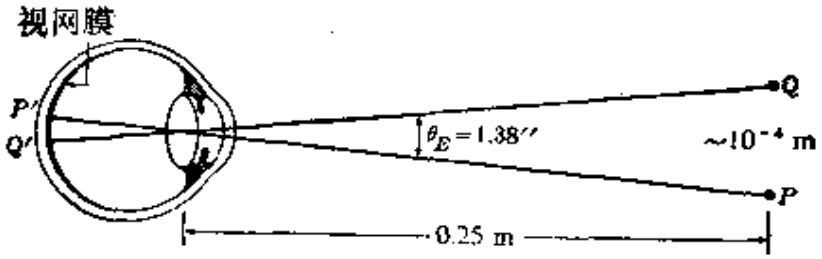


图 15-24　眼睛的分辨本领

例如，对于 $\lambda=5\times10^{-7}$m(约在可见光谱的中心)，M约为 600.

15.6　望　远　镜

另一种重要光学仪器是望远镜，用于观察很远的物体．在折射望远镜中，物镜(图 15-25) 是一个会聚透镜，它的焦距 f 很大，有时可达几米．由于物 AB 很远，所以物镜所成的象 $a'b'$ 位于它的焦点 F_o 处．我们只画出了中央光线 Bb' 和 Aa'；由于我们已知象的位置，所以画出这两条光线就够了．目镜也是一个会聚透镜，但其焦距 f' 要小得多．调节目镜的位置，使得中间象 $a'b'$ 位于 O' 和 F'_e 之间，因而最后的(虚)象 ab 成在最小明视距离处．调焦

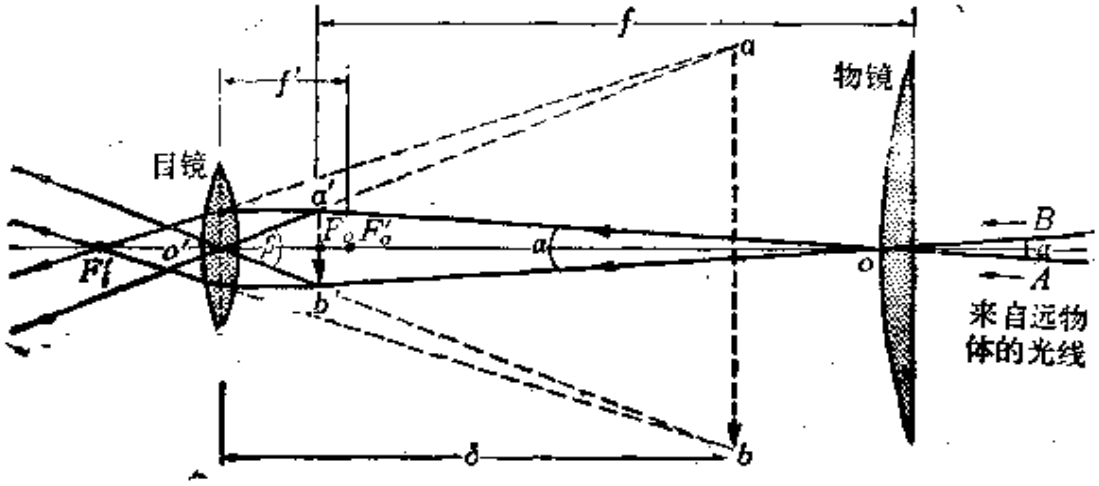


图 15-25　折射望远镜中光线的路径.

时，只移动目镜透镜即可，因为在这种情况下，移动物镜透镜是毫无用处的.

这种仪器的线放大率不是一个有用的概念，因为象通常比物小得多. 在这种情况下，我们定义角放大率；它等于使用望远镜时象在眼处所张的角 β，与不用望远镜时物在眼处所张的角 α 之比. 即

$$M=\frac{\beta}{\alpha}. \tag{15.30}$$

如图 15-25 所示，角 β 比 α 大很多，因而产生放大的感觉. 由图 15-25，考虑到 α 和 β 都很小，我们可以写出

$$\alpha\approx\tan\alpha=\frac{a'b'}{f},\ \beta\approx\tan\beta=\frac{a'b'}{f'},$$

因为从 $a'b'$ 至 O' 的距离接近于 f'. 把这些结果代入方程(15.30)中，则得

$$M=\frac{f}{f'}. \tag{15.31}$$

因此，为了获得大的放大率，物镜焦距应比目镜焦距大很多. 实际上，望远镜的长度由物镜的焦距 f 决定.

天文望远镜的放大率受物镜和观察者眼睛的分辨本领的限制. 在第十七章中将证明，一个直径为D的物镜的分辨本领(即当物体AB上两个点的象在象$a'b'$中可以分辨时，这两个点所张的最小的角)为

$$\theta \approx 1.22\frac{\lambda}{D}. \tag{15.32}$$

另一方面，眼睛的分辨本领(图 15-24)，用角度表示时，等于

$$\theta_E = \frac{10^{-4}\text{m}}{0.25\text{ m}} = 4\times 10^{-4}\text{ rad} = 1.38''.$$

因此，望远镜的最大有用放大率为

$$M = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\theta_E}{\theta} = \frac{4\times 10^{-4}D}{1.22\lambda} \approx 3.3\times 10^{-4}\,\frac{D}{\lambda}. \tag{15.33}$$

较大的放大率，或者表示α较小，这意味着象中的细节较少；或者表示β较大，这实质上并不能在最后的象ab中揭示任何新的细节，因为在中间象$a'b'$中不存在这种细节. 例如，对于$\lambda = 5\times 10^{-7}$m 的光，我们有$M \approx 660D$，式中$D$以米为单位. 因此增加物镜的直径$D$，我们能够增加放大率. 叶凯士(Yerkes)望远镜是现有折射望远镜中最大的，它的直径约 1 m，放大率约为 660，分辨本领约为 10^{-1} 角秒.

在反射望远镜中，物镜是一个凹抛物面镜. 因此，在焦点处形成一个无球面象差的象. 第二台最大的反射望远镜安装在帕洛玛山天文台. 这台望远镜的直径约为 5 m，放大率约为 3300.

15.7 棱　镜

棱镜是局限在两个夹角为A的平面之间的介质 (图 15-26). 我们假定这种介质的折射率为n，它的周围是另一种介质，例如折射率为 1 的空气. 入射光线PQ(图 15-26)经受两次折射，其出射方向相对于入射方向的偏转角为δ. 由图可知，下述关系式成立:

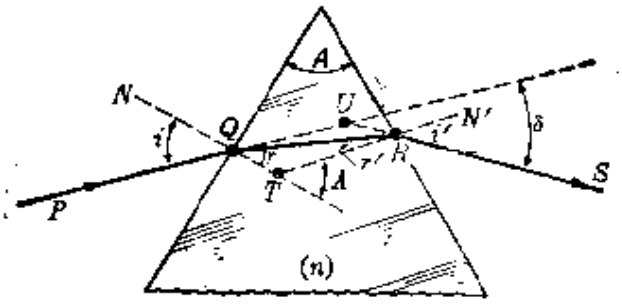


图 15-26　一条光线通过棱镜的路径.

$$\sin i = n\sin r, \tag{15.34}$$

$$\sin i' = n\sin r', \tag{15.35}$$

$$r + r' = A, \tag{15.36}$$

$$\delta = i + i' - A. \tag{15.37}$$

上面第一和第二个方程就是斯涅耳定律应用于 Q 和 R 处的折射，第三个方程可由三角形 QTR 看出，第四个方程可由三角形 QRU 看出. 由前三个方程能画出光线的路径，由最后一个方程能求出偏转角 δ.

有一条特殊的路径，它的偏转角有极小值. 令 $d\delta/di = 0$，可求出此值. 由方程(15.37)，可得

$$\frac{d\delta}{di} = 1 + \frac{di'}{di},$$

为了使 $d\delta/di = 0$，我们必须有

$$\frac{di'}{di} = -1. \tag{15.38}$$

由方程(15.34)、(15.35)和(15.36)可得

$$\cos i\,di = n\cos r\,dr,\ \cos i'\,di' = n\cos r'\,dr',\ dr = -dr'.$$

因此，

$$\frac{di'}{di} = -\frac{\cos i\cos r'}{\cos i'\cos r}. \tag{15.39}$$

由于四个角 i、r、i'和 r'都小于$\pi/2$，并满足对称条件方程(15.34)和(15.35)，所以，仅当 $i = i'$ 和 $r = r'$ 时，方程(15.38) 和(15.39)

才能同时满足. 这要求

$$i=\frac{1}{2}(\delta_{\min}+A) \text{ 和 } r=\frac{1}{2}A, \tag{15.40}$$

式中 $\delta_{\min}$ 是最小偏向角. 注意，在这种情况下，光线的路径相对于棱镜的两个面是对称的. 把方程(15.40) 代入方程 (15.34) 中，得出

$$n=\frac{\sin\frac{1}{2}(\delta_{\min}+A)}{\sin\frac{1}{2}A}. \tag{15.41}$$

通过实验求出光线在一个角 A 已知的棱镜中的最小偏向角 $\delta_{\min}$，就能够由方程(15.41)方便地确定棱镜材料的折射率.

15.8 色　　散

当一个波被折射而进入其折射率随频率或波长而改变的色散介质中时，折射角也将随频率或波长而改变. 如果入射波不是由一个频率组成的(即不是单色波)，而是由若干个频率或波长叠加而组成的，则每一个成分波长的折射角将不同. 这种现象叫做色散(在第 12.7 节中我们介绍了电磁波在物质中的色散).

我们知道，颜色是和电磁波谱中一个小波段中的波长相联系的. 因此，白光被折射而从空气中进入另一种物质（例如水或玻璃)中时，就被分解成不同的颜色. 如果一块玻璃板具有平行的平面，则出射光线是平行的，不同颜色的光又叠加在一起(图15-27)，因而观察不到色散，但象的边缘除外. 即使在象的边缘处，这种效应通常也不明显.

如果白光通过一个棱镜 (图 15-28)，则不同颜色的出射线不是平行的. 因而色散是明显的，尤其是在边缘处. 因此，在称为分光镜的仪器中，广泛采用棱镜来分析光. 图 15-29 中示出一个简

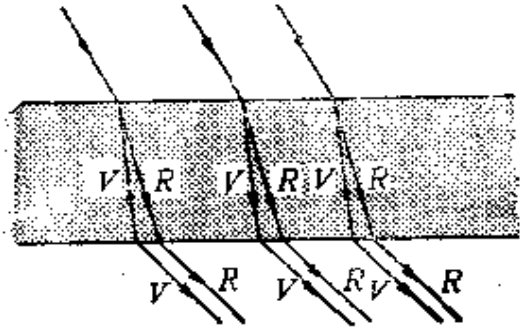


图 15-27　光通过一块具有平行表面的玻璃板时的色散.

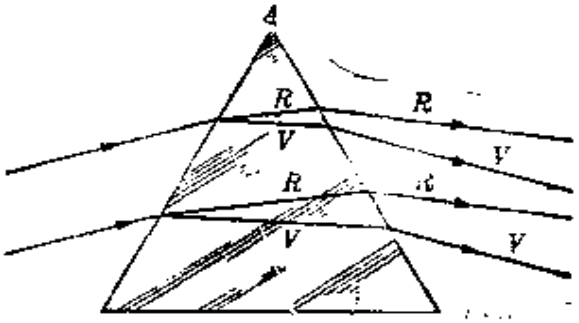


图 15-28　光通过一棱镜时的色散.

单的分光镜. 用一个狭缝来限制光源 S 发射的光. 用一个透镜 L (它至狭缝的距离等于它的焦距)把这种光变成平行光线. 被棱镜色散之后，不同颜色的光线通过另一个透镜 L'. 由于所有颜色相同(即波长相同)的光线是平行的，它们被聚焦在屏上同一点；屏

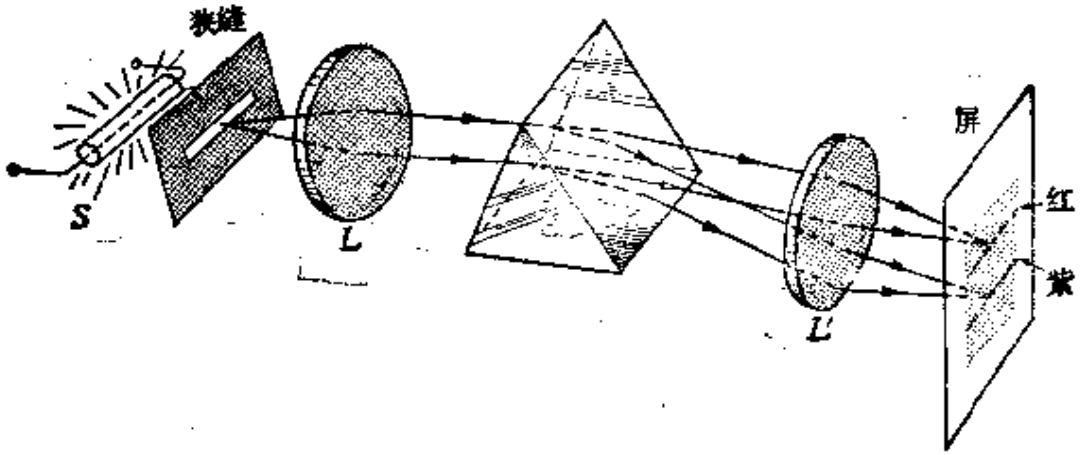


图 15-29　棱镜分光镜的原理.

至 L' 的距离等于 L' 的焦距. 但是，颜色不同(即波长不同)的光线不是平行的；因此，不同颜色的光线被聚焦在屏上不同的点. 光源 S 发射的不同颜色或波长，在屏上显示为 S 发出的光的光谱. 如果偏向角 δ 随波长 λ 迅速改变，则不同颜色在屏上有宽的间距. 对于光源的每一个波长，屏上都有一条线，它是狭缝的象. 如果光源发射整个可见光的光谱，在屏上将呈现一连续光谱.

棱镜的色散被定义为

$$D=\frac{d\delta}{d\lambda}=\frac{d\delta}{dn}\frac{dn}{d\lambda}. \tag{15.42}$$

因子 $d\delta/dn$ 主要取决于这系统的几何形状；因子 $dn/d\lambda$ 则取决于构成棱镜的材料. 把方程(15.41)微分，可以求出，当棱镜处于平均最小偏向角的位置时，

$$\frac{d\delta}{dn}=\frac{2\sin\frac{1}{2}A}{\cos\frac{1}{2}(\delta_{\min}+A)}. \tag{15.43}$$

方程(15.42)中的第二个因子 $dn/d\lambda$ 取决于波和介质的性质. 对于一般的电磁波，特别是对于光波，折射率(作为波长的函数)的一个满意的近似表达式是柯西公式:

$$n=A_0+\frac{B_0}{\lambda^2}, \tag{15.44}$$

式中 A_0 和 B_0 是每一种物质所特有的常数. 图 15-30 中示出在光

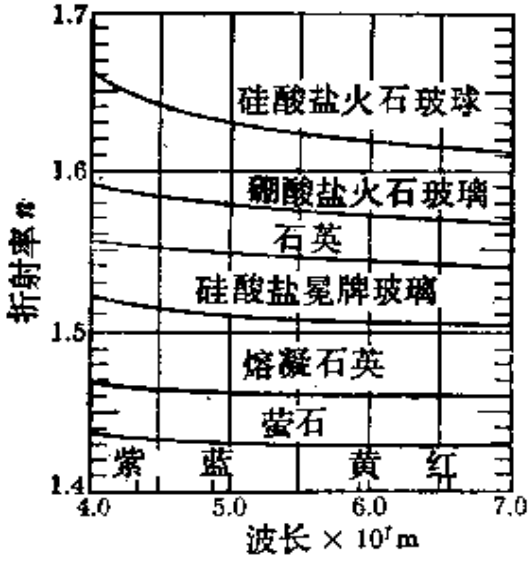


图 15-30　在可见光波段，某几种材料的折射率随波长变化的曲线.

学波段透明的几种材料的 n 随 λ 变化的曲线. 由方程 (15.44)，得出

$$\frac{dn}{d\lambda}=-\frac{2B_0}{\lambda^3}.$$

于是得出棱镜的色散为

$$D=\frac{d\delta}{d\lambda}=\frac{2\sin\frac{1}{2}A}{\cos\frac{1}{2}(\delta_{\min}+A)}\left(-\frac{2B_0}{\lambda^3}\right). \tag{15.45}$$

上式中的负号表示，波长增加时，偏向角减小，所以红光的偏向角小于紫光的.

注：柯西公式的证明.

方程(12.17)表达了折射率与电磁波的频率和物质的特征频率之间的关系. 为简单起见，我们假定只有一个原子频率 ω_0，而且 $\omega\ll\omega_0$，于是我们得到

$$n^2=1+\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m(\omega_0^2-\omega^2)};$$

利用二项展开式，我们得到

$$n=\left[1+\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m(\omega_0^2-\omega^2)}\right]^{1/2}\approx 1+\frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m(\omega_0^2-\omega^2)}$$

$$\approx 1+\frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m\omega_0^2}\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^{-1}$$

$$\approx 1+\frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m\omega_0^2}\left(1+\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right).$$

由于 $\omega=2\pi c/\lambda$，所以有

$$n=A_0+\frac{B_0}{\lambda^2},$$

式中

$$A_0=1+\frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m\omega_0^2},\qquad B_0=\frac{2\pi^2c^2Ne^2}{\varepsilon_0 m\omega_0^4}.$$

[学生应估算 A_0 和 B_0 的数量级.]

15.9 色　　差

由若干不同波长组成的光(例如白光)通过一透镜时，会发生

色散，因而这个透镜所产生的象的边缘呈现彩色．这种效应叫做色差．如果我们认识到，一个凸透镜相当于两个棱镜其底部相接，而一个凹透镜相当于两个棱镜其顶部相接，就不难理解为什么会产生这种效应．

一个透镜对于每一种颜色或波长都有一个焦点，这可以从方程(15.22)看出来，因为f决定于折射率n，而n又与波长有关系．对于折射率在可见波段随波长的增加而减小的透明材料（见图15-30），紫光的焦距比红光的短．对于这种材料，图15-31中示出一个会聚透镜和一个发散透镜的色差．

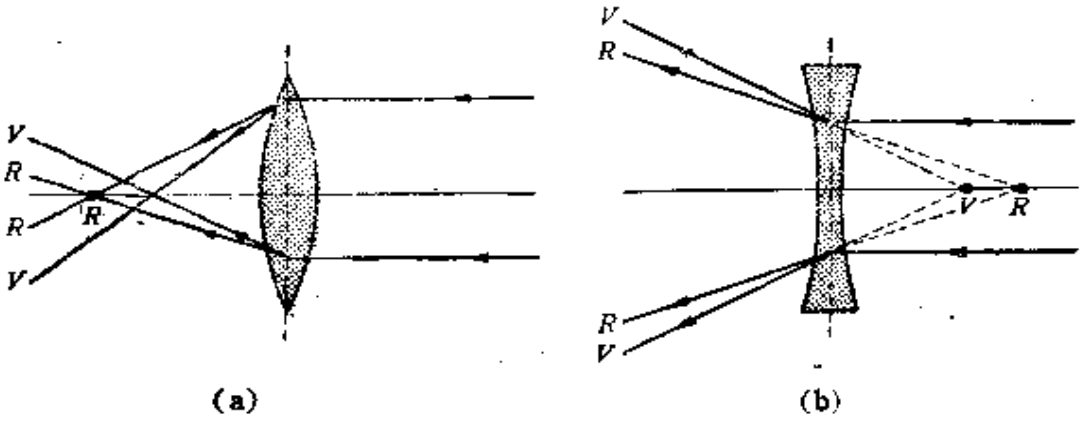


图15-31　透镜中的色差．(a)会聚透镜，(b)发散透镜．

一个透镜的纵向色差A，被定义为对应于6.563×10^{-7}m和4.862×10^{-7} m波长的两个焦距之差，即$A=f_C-f_F$．这两个波长是氢发射的，一个叫做夫琅和费C线，一个叫做夫琅和费F线．利用方程(15.22)，我们有

$$\frac{1}{f_C}=(n_C-1)\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right),\ \frac{1}{f_F}=(n_F-1)\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right);$$

因此，

$$\frac{1}{f_F}-\frac{1}{f_C}=(n_F-n_C)\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right).\qquad(15.46)$$

夫琅和费D线，其波长为5.890×10^{-7}m，大约对应于平均折射率n_D，这里

$$\frac{1}{f_D}=(n_D-1)\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right). \tag{15.47}$$

利用方程(15.47)，能够消除方程(15.46)对透镜半径的依赖关系，结果得到

$$\frac{1}{f_F}-\frac{1}{f_C}=\left(\frac{n_F-n_C}{n_D-1}\right)\frac{1}{f_D}.$$

由于 $f_Cf_F\approx f_D^2$ 是一个好的近似，所以上式左边可以写作：

$$\frac{f_C-f_F}{f_Cf_F}\approx\frac{f_C-f_F}{f_D^2}.$$

因此，透镜的纵向色差为

$$A=f_C-f_F=\left(\frac{n_F-n_C}{n_D-1}\right)f_D. \tag{15.48}$$

量

$$\omega=\frac{f_C-f_F}{f_D}=\frac{n_F-n_C}{n_D-1} \tag{15.49}$$

叫做这种材料的色散本领．表 15-3 中列出某些透明材料对夫琅和费 C、D 和 F 线的折射率．

表 15-3　折射率和色散本领

	C	D	F	色散本领，ω
波长$\times10^{7}$m	6.563	5.890	4.862	
冕牌玻璃	1.514	1.517	1.523	0.0174
火石玻璃	1.622	1.627	1.639	0.0271
乙醇	1.361	1.363	1.367	0.0165
苯	1.497	1.503	1.514	0.0338
水	1.332	1.334	1.338	0.0180

迄今为止我们所讨论的透镜色差，叫做纵向色差，因为这种色差是沿主轴度量的．还有一种横向色差．考虑透镜前方的一个物体 AB(图 15-32)．如果来自物体的光不是单色的，这个光通过透镜时将被色散．这时，不是形成一个象，而是形成一系列不同大小

的象，每一种波长(或颜色)有一个象．图中只画出与红光和紫光对应的两端的象，而且它们之间的距离被大大地放大．由于这种横向色散，象的边缘呈现彩色．横向色差可以用 C 线和 F 线的放大率之差来表示．

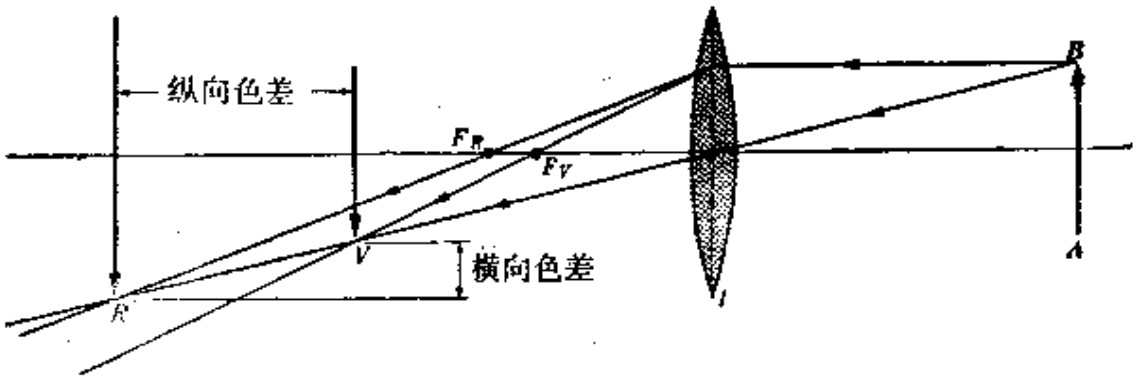


图 15-32　透镜的横向色差和纵向色差．

例题 15.11　消色差透镜的讨论．

解　把不同材料的透镜结合起来，能够减少甚至消除色差，而得到一个消色差系统．为了说明这个问题，我们假定有一个透镜系统，如图 15-33 所示，其中比如说，透镜 L 是用冕牌玻璃制成的，透镜 L' 是用火石玻璃制成的．设 f 和 f' 分别为它们的焦距，ω 和 ω' 分别为它们的色散本领．透镜 L 的色差由线段 VR 表示．但是，如果适当设计发散透镜 L'，一切波长的光线应能聚焦在 F．现在我们来说明这一点．由例题 15.10 和方程(15.26)可知，对于每一个波长有

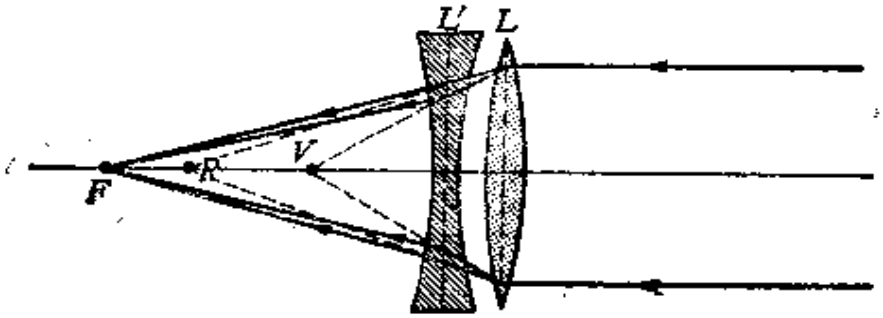


图 15-33　消色差透镜系统．

$$\frac{1}{F_C}=\frac{1}{f_C}+\frac{1}{f'_C}\quad 和\quad \frac{1}{F_F}=\frac{1}{f_F}+\frac{1}{f'_F},$$

式中 F_C 和 F_F 是组合透镜的对应焦距．因此，这两个方程相减，并记住 $F_CF_F\approx F_D^2$ 就可得出

$$\frac{1}{F_F}-\frac{1}{F_C}=\frac{F_C-F_F}{F_D^2}=\frac{f_C-f_F}{f_D^2}+\frac{f'_C-f'_F}{f'^2_D}=\frac{\omega}{f_D}+\frac{\omega'}{f'_D}.$$

如果没有纵向色差，就必须有 $F_C=F_F$，所以

$$\frac{\omega}{f_D}+\frac{\omega'}{f'_D}=0. \qquad (15.\ 7\cdot)$$

由于 ω 和 ω' 是正的，所以我们得出结论：f_D 和 f'_D 具有相反的符号. 因此，消色差透镜的一个透镜是会聚的，另一个是发散的.

例题 15.12 用两个透镜，一个是冕牌玻璃的，另一个是火石玻璃的，设计一个消色差的会聚透镜系统，其焦距为 0.350m.

解 由表 15-3 中的数据可知，冕牌玻璃的色散本领 ω 为 0.0193，火石玻璃的 ω 为 0.0271. 因此，方程(15.50)所要求的消色差条件为

$$\frac{0.0193}{f_1}+\frac{0.0271}{f_2}=0 \quad 或 \quad \frac{f_2}{f_1}=-1.402.$$

利用方程(15.26)，令其中的 $F=+0.350$m，则得第二个条件为

$$\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}=\frac{1}{0.350}.$$

解这两个方程，则得

$$f_1=+0.1007\text{m},\quad f_2=-0.1414\text{m}$$

因此，冕牌玻璃透镜是会聚的，火石玻璃透镜是发散的. 假定这个系统是平凸的，平面对应于火石玻璃透镜. 利用方程(15.22)，取 n_D 为折射率，则得两个透镜的公共面的半径为 0.089 m，冕牌玻璃透镜的另一个面的半径为 0.126m.

习　题

15.1 一凹面镜的半径为 1.00m. 设物至镜的距离等于(a) 1.40m, (b) 1.00m, (c) 0.80m, (d) 0.50m, (e) 0.30m，试求象的位置和放大率. (f) 再考虑一个至镜的距离为0.60m 的虚物体.

15.2 一凸面镜的半径为 1.00m. 设物至镜的距离为 0.60m，试求(a)象的位置和 (b) 放大率. 再考虑一个至镜的距离为(c) 0.30m 和 (d) 0.80m 的虚物.

15.3 如果一个物体放在至一球面镜的距离为 1.20 m 处，产生的象是(a)实的，位于离镜 0.80m 处，(b)虚的，位于离镜 3.20m 处，(c)虚的，位于离

镜 0.60m 处，(d) 实的，为物的二倍，(e) 虚的，为物的二倍，(f) 实的，为物的三分之一，(g) 虚的，为物的三分之一．分别求这些情况下球面镜的焦距和性质．

15.4 一个凹球面镜的半径为 1.60m．设象是 (a) 实的，为物的三倍，(b) 实的，为物的三分之一，(c) 虚的，为物的三倍，试求物的位置．

15.5 对于一个凸球面镜，再作前题．

15.6 一个凹面剃脸镜的焦距为 0.15m．设明视距离为 0.25m，试求人至镜的最佳距离，并求放大率．

15.7 一凹面镜产生一个实的倒象，象比物大三倍，象至物的距离为 0.28m．试求这凹面镜的焦距．

15.8 一物体原来至一凹面镜的距离为 0.60m，朝镜移近 0.10m 之后，物与象之间的距离变为原来的 2.5 倍．试求此镜的焦距．

15.9 (a) 如果 x_1 和 x_2 是物和它的象至一球面镜焦点的距离，试利用方程 (15.3)，证明

$$x_1x_2=f^2.$$

上式叫做牛顿方程．(b) 在这种情况下，你能断定物和它的象永远处在焦点的同一侧？(提示：注意，$x_1=FP=OP-OF$，$x_2=QF=OQ-OF$.)

15.10 一种透明物质的折射率为 1.5，受一半径为 0.60 m 的凹球面的限制．(a) 求焦距．(b) 当物至球面的距离为 (i) 2.40m，(ii) 1.60m，(iii) 0.60m 时，试求象的位置和放大率．

15.11 对于一个凸球面，再作前题．

15.12 一根折射率为 1.5 的圆柱玻璃棒的两端为两个凸球面，其曲率半径分别为 0.10m 和 0.20m (图 15-34)．两顶点之间的距离为 0.50m．一个 1mm 长的箭头位于第一个球面的前边，与圆柱的轴垂直，至顶点的距离为 0.25m．试计算：第一个球面所形成的箭头象的 (a) 位置和 (b) 长度．两个球面所形成的箭头象的 (c) 位置和 (d) 长度．说明象是实的还是虚的．

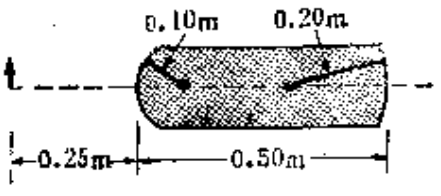


图 15-34

15.13 (a) 求前题中描述的系统的焦点．(b) 用作图法解这个问题．

15.14 一根 0.40m 长的透明棒，其一端切成平的，而另一端做成半径为 0.12m 的半球面．一个物体放在这根棒的轴上，至半球端的距离为

0.10m. 假定透明棒的折射率为 1.50. (a) 求该物体最后象的位置. (b) 求放大率.

15.15 一玻璃棒的折射率为 1.50，其两端磨制成半径为 0.05m 的凸半球面. 当物放在棒轴上离一端的距离为 0.20 m 处时，最后的实象成在离另一端 0.40m 处. 求棒长.

15.16 (a) 两个面的曲率半径的绝对值分别为 0.10m 和 0.20m. 试用它们组合成各种可能的薄透镜，并画出简图. (b) 哪些透镜是会聚的？哪些是发散的？(c) 假定每个透镜都是用折射率为 1.50 的玻璃制成的，求各透镜的焦距.

15.17 一个双凸透镜的折射率为 1.50，它的两个面的半径为 0.20m 和 0.30m. (a) 求它的焦距. 一物体放在至这透镜的距离等于 (i) 0.80m, (ii) 0.48m, (iii) 0.40m, (iv) 0.24m 和 (v) 0.20m 处. 试求 (b) 象的位置和 (c) 放大率. (d) 再考虑一个位于透镜后 0.20m 处的虚物的情况.

15.18 一个双凹透镜的折射率为 1.50，它的两个面的半径为 0.20m 和 0.30m. (a) 求它的焦距. 一物体置于离这透镜 0.20m 处，试求 (b) 象的位置和 (c) 放大率. 再考虑一个至透镜的距离为 (d) 0.40m 和 (e) 0.20m 的虚物的情况.

15.19 一个透镜将一物体的象成在一个离透镜为 0.12m 的屏上. 当这透镜朝离开物的方向移动 2×10^{-2}m 时，屏必须朝物移近 2×10^{-2} m，才能聚焦在屏上. 求这透镜的焦距.

15.20 一个物体放在离一个屏的距离为 0.18m 处. 一个透镜的焦距为 4×10^{-2} m. 这透镜放在物和屏之间的什么位置上，才能在屏上成象？当透镜在这些位置上时，求象的放大率.

15.21 一个会聚透镜的焦距等于 0.40m. 如果放大率为 (a) −0.6, (b) −1.5, (c) −1, (d) 3, (e) 0.8，求物的位置和象的性质. 负号表示象反转.

15.22 一个会聚透镜的焦距为 0.60m. 为了产生 (a) 三倍大的实象，(b) 三分之一倍大的实象，(c) 三倍大的虚象，求物的位置.

15.23 一个物体放在至透镜的距离为 1.20m 处. 为了使这透镜能够产生 (a) 实象，至透镜的距离为 0.80m，(b) 虚象，至透镜的距离为 3.20m，(c) 虚象，至透镜的距离为 0.60m，(d) 为物二倍大的实象，(e) 为物二倍大的虚象，(f) 为物三分之一倍大的实象，(g) 为物三分之一倍大的虚象，试求这透镜的焦距和性质.

15.24　对于一个薄球面透镜，证明：

$$x_1x_2=-f^2,$$

式中 x_1 是物至第一焦点的距离，x_2 是象至第二焦点的距离．［见习题 15.9.］

15.25　来自一透镜的光线会聚在点象 P 处，如图 15-35 所示．一块折射率为 1.5、厚度为 t 的玻璃板放在图中所示的位置上．为了使象成在点 P'，求 t 的值．

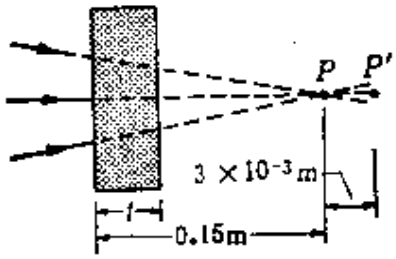


图　15-35

15.26　一个透镜系统由两个会聚透镜组成，其焦距分别为 0.3m 和 0.6m．对于透镜间距为 (a) 0.20m，(b) 0.50m，(c) 0.90m，(d) 1.20m 的情况，求这个系统的象焦点．

15.27　假定第一个透镜是发散的，再做前题．

15.28　一台光学仪器的目镜由两个相同的会聚透镜组成，其焦距均为 5×10^{-2}m；两透镜的间距为 2.5×10^{-2}m．求这个系统的焦点的位置．（从靠近物的那个透镜算起．）

15.29　一台显微镜的物镜的焦距为 4 mm．这物镜所形成的象至第二焦点的距离为 180mm．目镜的焦距为 31.25mm．(a) 求这显微镜的放大率．肉眼能够分辨两个相隔约 10^{-4}m 的两个点，(b) 试求用这台显微镜能够观察的最小间距．

15.30　月球的直径为 3.5×10^{6}m，它至地球的距离为 3.8×10^{8}m．试求用一台望远镜所形成的月球象的角直径，设这台望远镜物镜的焦距为 4.0m，目镜的焦距为 0.10m．

15.31　一棱镜的角为 60°，折射率为 1.5．(a) 一条光线的入射角为 40°，试求它的偏向角．求 (b) 最小偏向角和对应的入射角．

15.32　一棱镜的最小偏向角为 30°．棱镜角为 50°．求 (a) 它的折射率和 (b) 与最小偏向角对应的入射角．

15.33　根据表 15-3 中的数据，求出冕牌玻璃折射率的柯西公式中的系

数 A_0 和 B_0.

15.34 利用前题的结果，确定一冕牌玻璃棱镜中与夫琅和费 C 和 F 线对应的角间距. 设棱镜角为 50°，光线的入射角为 30°.

15.35 一个透镜系统由两个相接触的透镜组成. 一个透镜是平凹的，用火石玻璃制成，另一个透镜是双凸的，用冕牌玻璃制成. 公共面的半径 0.20m，冕牌玻璃透镜的另一个面的半径为0.12m. 试求(a)这系统的焦距和(b)色差.

较难的习题

15.36 一薄会聚透镜的焦距为 0.10m. 一亮物体放在至这透镜的距离为 0.15m 的地方. 求象的位置，并画出从物通过透镜的两条光线.

15.37 一个 1 cm 高的物体，放在至一焦距为 3 cm 的会聚透镜的距离为 4 cm 的地方. (a)概略画出这种情况下的主光线图. (b)利用数值计算，求出象的位置. (c)求出象的大小.

15.38 一个 1 cm 高的物体，放在一个焦距为 8 cm 的会聚透镜左方 6cm 的地方，如图 15-36 所示. (a) 计算象的位置. 它在这透镜的左方还是右方？它是实的还的虚的？ (b) 计算象的大小. 它是直立的还是倒立的？ (c) 通过作图确定象的位置. (d) 什么样的简单光学仪器利用这种物-象关系？

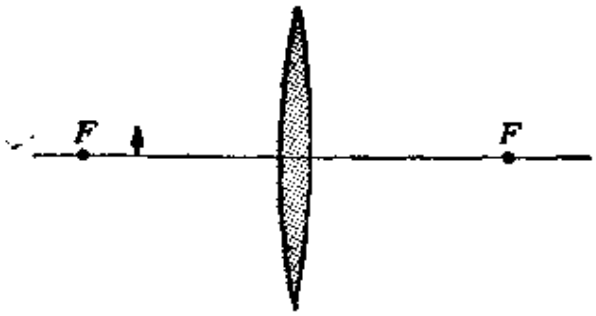


图 15-36

15.39 一个 6 cm 高的物体，放在至一焦距为 10cm 的凹面镜的距离为 30cm 的地方，如图 15-37 所示. (a)在一按比例画出的图上画出两条从点 P 开始通过焦点的光线. 由此确定象的位置. 象是实的还是虚的？象在镜的左方还是右方？ (b)计算象的位置. (c) 计算象的大小. (d) 在一张图上标明从 P 至 Q 的光线是怎样被反射的，设象差可忽略不计.

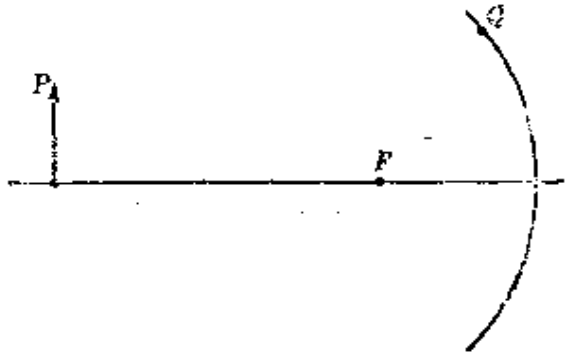


图 15-37

15.40 一物体O放在至焦距为6×10^{-2}m的会聚透镜中心的距离为0.18m的地方，如图15-38(a)所示. (a)概略画一个光线图，以确定象的位置. (b)这象是实的还是虚的？说明你的选择. (c)利用透镜方程，计算象至透镜的距离. 第二个会聚透镜的焦距也是6×10^{-2}m，放在原来透镜右方6×10^{-2}m处，如图15-38(b)所示. (d)概略画出一个光线图，以确定这种情况下最后的象的位置. 清楚标明最后的象.

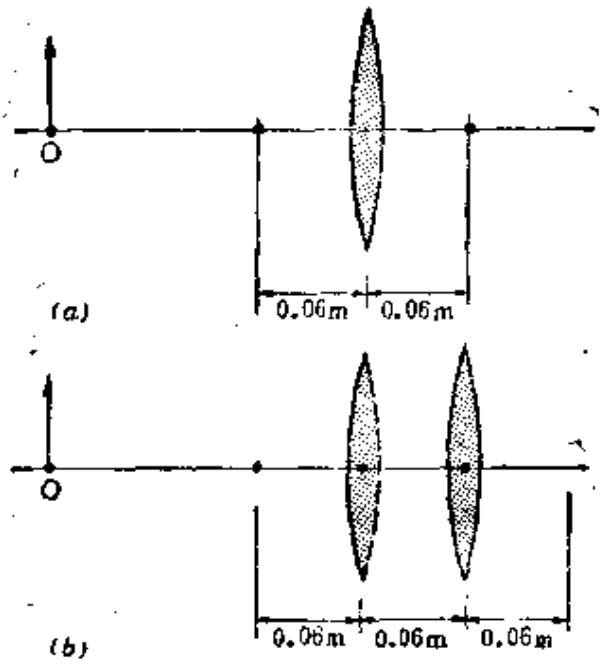


图 15-38

15.41 证明：当一平面镜转过一个角度α时，反射线转过的角度为$\beta=2\alpha$，如图15-39所示.

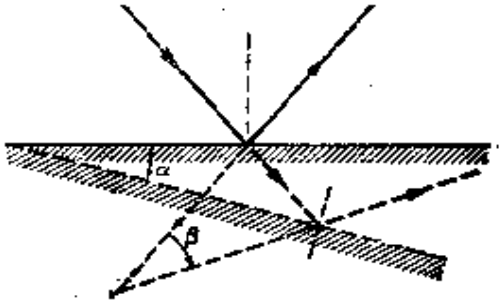


图 15-39

15.42 证明：当一平面镜平行于本身沿法线方向移动一距离 x 时，象移动一距离 $2x$.

15.43 一个球面镜的球面象差被定义为一条靠近镜轴的光线的焦距 f，与一条靠近镜边缘的光线的焦距 f' 之差. 证明：

$$f-f'\approx\frac{H^2}{2r},$$

式中 H 是球面镜底面的半径.

15.44 一凹面镜的半径为 0.10m，镜底面的半径为 0.08m. 求这凹面镜的球面象差，并与它的焦距加以比较.

15.45 一个物体以恒速 v 朝一个球面镜移动. (a) 求象的速度作为距离 p 的函数. (b)画出象的速度对 p 的曲线. (c) 对于一个球面透镜，再作此题.

15.46 (a) 证明：如果 u_1 和 u_2 是一个物体及其象至一球面镜中心的距离，则下列关系式成立：

$$\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}=-\frac{2}{r}.$$

(b)证明：在这个情况下，放大率为 $M=u_2/u_1$.

15.47 已知一球面镜的焦距为 f，放大率为 M. 证明：物距和象距分别为

$$p=\frac{f(M-1)}{M}$$

和

$$q=-f(M-1).$$

15.48 证明：平行于抛物面镜轴的所有光线(图 15-40) 反射后都通过焦点，而与它们至镜轴的距离无关.

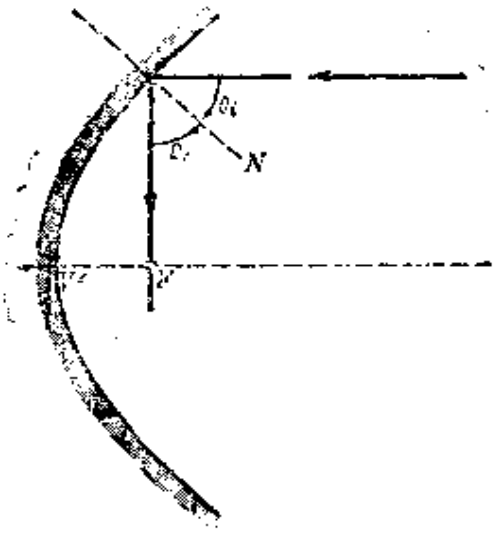


图 15-40

15.49 一玻璃球，直径 2×10^{-2}m，在离它的中心 5×10^{-3}m 处有一小空气泡．当一个人沿连结球心和小气泡的直线，从相反的两个方向观察时，求小气泡象的位置和放大率．玻璃的折射率为 1.5.

15.50 一个透明球的半径为 r，相对于空气的折射率为 n．一物体放在至球心的距离为 $4r$ 处．(a) 求这物体的最后象的位置．(b) 画出光线通过球的路径.

15.51 一根直径为 0.10m、折射率为 1.5 的玻璃棒，它的两端磨制成凸半球面，右端的半径为 5×10^{-1}m，左端的半径为 0.10m．两顶点间棒的长度为 0.60m．一个 1 mm 长的箭头，与棒轴成直角，位于第一个顶点右方 0.20m 处，构成第一个面的物．(a) 第二个面的物是什么？(b) 对第二个面的物距是多少？(c) 这个物是实的还是虚的？(d) 求第二个面所成象的位置．(e) 求最后象的高度.

15.52 一个半径为 R、折射率为 1.50 的实心玻璃球，它的一个半球面上镀银，如图 15-41 所示．一个小物体位于通过球心和半球面极点的直线上，至未镀银半球面极点的距离为 $2R$．试求经过所有的折射和反射之后，最后象的位置.

15.53 一个玻璃球的半径为 R，折射率为 n．通过离球心的距离为 x 的一点 S，垂直于 OS 作一平面，切割这个玻璃球，如图 15-42 所示．证明，如果 $x=R/n$，则所有从 S 处的一个点源进入玻璃球的光线，从这玻璃球出射的方向，都通过一个点 S'，S' 与 O 和 S 共线，且 $OS'=x'=nR$．(提示：证明，

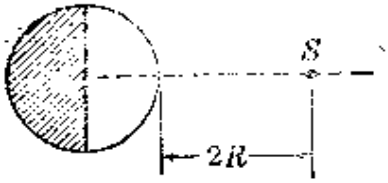


图 15-41

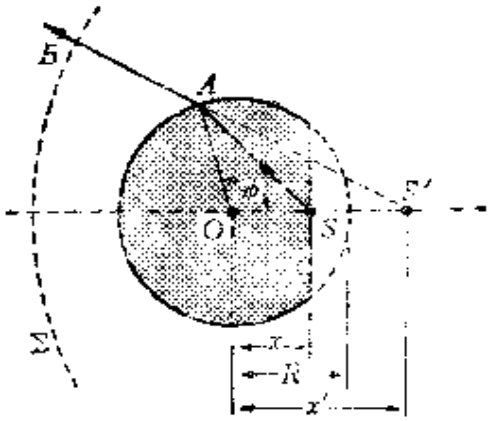


图 15-42

对于所有的 ϕ 值以及 x 和 x' 的给定值，折射光线向后延长时都通过点 S'.)

15.54 一个球形折射面把折射率为 n_1 和 n_2 的两种物质分开. 试证明：关系式 $x_1x_2=f_1f_2$ 成立，式中 x_1 是物至第一焦点的距离，x_2 是象至第二焦点的距离.

15.55 对于球面上的折射情况，证明如下关系式成立：

$$n_1y_1\sin\alpha_1=n_2y_2\sin\alpha_2,$$

式中 α_1 和 α_2 如图 15-12 中所示，y_1 和 y_2 是物及其象的大小. 因此，当若干个折射面的中心在同一条直线上时，对于一条通过这些折射面的光线，如下关系式成立：

$$ny\sin\alpha=\text{常数},$$

这个关系式叫做亥姆霍兹定律. (提示：参看图 15-12，应用正弦定律、斯涅耳定律和从图 15-15中的 $\triangle Oab$ 和 $\triangle OAB$ 的相似性得出的关系.)

15.56 一个折射率为 n_2 的薄透镜，被折射率为 n_1 和 n_3 的两种介质包围. 试证明，联结物距和象距的方程为：

$$\frac{n_1}{p}-\frac{n_3}{q}=\frac{(n_1-n_2)}{r_1}+\frac{(n_2-n_3)}{r_2}.$$

15.57 一个充满水的箱子，它的一个壁上有一个开孔，装有一个双凸透镜，其折射率为 1.5，半径为 0.30m. (a)对于一条在箱内(和箱外)平行于镜轴射向透镜的光线，求焦距. (b)一光源位于箱内，至透镜的距离为(i)0.30m，和(ii)0.45m，试求它的象的位置，水的折射率为 1.33.

15.58 一个等凸薄玻璃透镜，其折射率为 1.50，在空气中的焦距为 0.30m. 这个透镜安装(密封)在一个充满水的箱子的一个壁上的开孔中. 水的折射率为 1.33. 在和透镜相对的箱壁上装有一个平面镜，它至透镜的距离

为 0.80m. 当一物体放在箱外透镜轴上，至透镜的距离为 0.90 m 时，求透镜-水-箱所形成的象的位置.

15.59 利用表达式(15.17)来计算一球面透镜的每一个面上的折射，证明焦距由下式给出：

$$\frac{1}{f'}=(n-1)\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)+\frac{h^2}{2}\left(\frac{n-1}{n^2}\right)\left[\left(\frac{1}{r_2}+\frac{n+1}{f}\right)\left(\frac{1}{r_2}+\frac{1}{f}\right)^2-\frac{1}{r_1^3}\right],$$

式中 f 由方程(15.22)给出. (b)根据这个结果估算这个透镜的球面象差，它被定义为靠近透镜轴的光线与靠近透镜边缘的光线的焦距之差.

15.60 一个双凸透镜的折射率为 1.5. 两个面的半径相同，都等于 0.10m. 这透镜的半径为 0.08m. 求(a)焦距和(b)球面象差.

15.61 (a)对于(i)一个满足方程(15.3)的球面镜和(ii)一个满足方程(15.23)的球面透镜，分别画出 q 随 p 变化的曲线. (b)证明，在这两种情况下，都得到一等轴双曲线. (c)对于每一种情况，画出放大率随 p 变化的曲线.

15.62 (a)对于棱镜所引起的折射，证明下式成立：

$$\sin\frac{1}{2}(\delta+A)=n\sin\frac{1}{2}A\frac{\cos\frac{1}{2}(r-r')}{\cos\frac{1}{2}(i-i')}.$$

(b)证明，$\cos\frac{1}{2}(r-r')$ 永远不会小于 $\cos\frac{1}{2}(i-i')$. (c)由此推断最小偏向的条件是 $i=i'$.

15.63 证明：如果棱镜角非常小，而且入射光线近乎垂直于棱镜的一个面，则偏向角为 $\delta=(n-1)A$.

15.64 如果一条光线到达一个棱镜的第二个面的入射角大于临界角，就会发生全反射，这条光线就会被反射回去，而不能从棱镜出射. 这个原理被用于多种光学仪器中. (a)证明：如果 $n>1$，则至少有一条光线出射的条件是 $A\leqslant 2\lambda$，式中 λ 是临界角. (b)如果这条光线要在另一侧出射，试讨论入射角 i 的范围. 这个范围由图 15-43 中的角 α 给出. (c)证明这个范围由下式确定：

$$\cos\alpha=n\sin(A-\lambda).$$

(d)讨论 α 随 A 的变化情况.

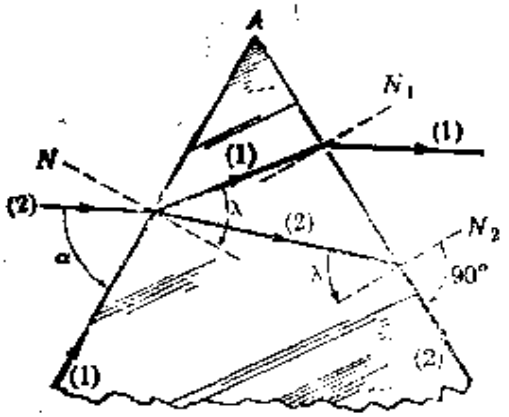


图 15-43

15.65 把前题的讨论应用于一个棱镜角为 45°、折射率为 1.5 的棱镜. (a) 求 α 的值. (b) 讨论垂直于棱镜的一个面入射的一条光线的路径. (c) 考虑棱镜角为 35° 的情况.

第十六章　干　　涉

16.1　引　　论

波动的一个重要特性是干涉现象. 当两个或者更多的波动在空间和时间中重合时，就发生干涉现象. 在第一卷中关于简谐运动叠加的理论，可以直接应用于我们现在关于谐波或单色波的问题. 发生干涉的地方，是反射波和入射波在其中重合的空间区域. 事实上，这是产生干涉的最常见的方法之一. 当波动被局限在一个有限的空间区域中时，发生另一种重要的干涉情况；例如，两端固定的弦，管道中的液体，或者金属空腔内的电磁波. 在这种情况下，干涉引起驻波.

为了应用以前导出的公式来代替方程(10.5)和(10.9)，我们将把沿$+X$方向运动的谐波写作

$$\xi=\xi_0\sin(\omega t-kx), \tag{16.1}$$

而把沿$-X$方向运动的谐波写作

$$\xi=\xi_0\sin(\omega t+kx). \tag{16.2}$$

这只涉及一个符号的改变；如第 10.2 节末的方程 (10.10)所表明的，以及在例题 13.2 中所使用的那样，只要我们前后保持一致，这种写法也是正确的.

如在前几章中所提到的，这里阐述的理论适用于任何一种波动；不过，一般而言，我们所举的例子和应用是关于电磁波的.

16.2　两个同步源产生的波的干涉

考虑两个点源S_1和S_2(图 16-1)，它们以相同的角频率ω同

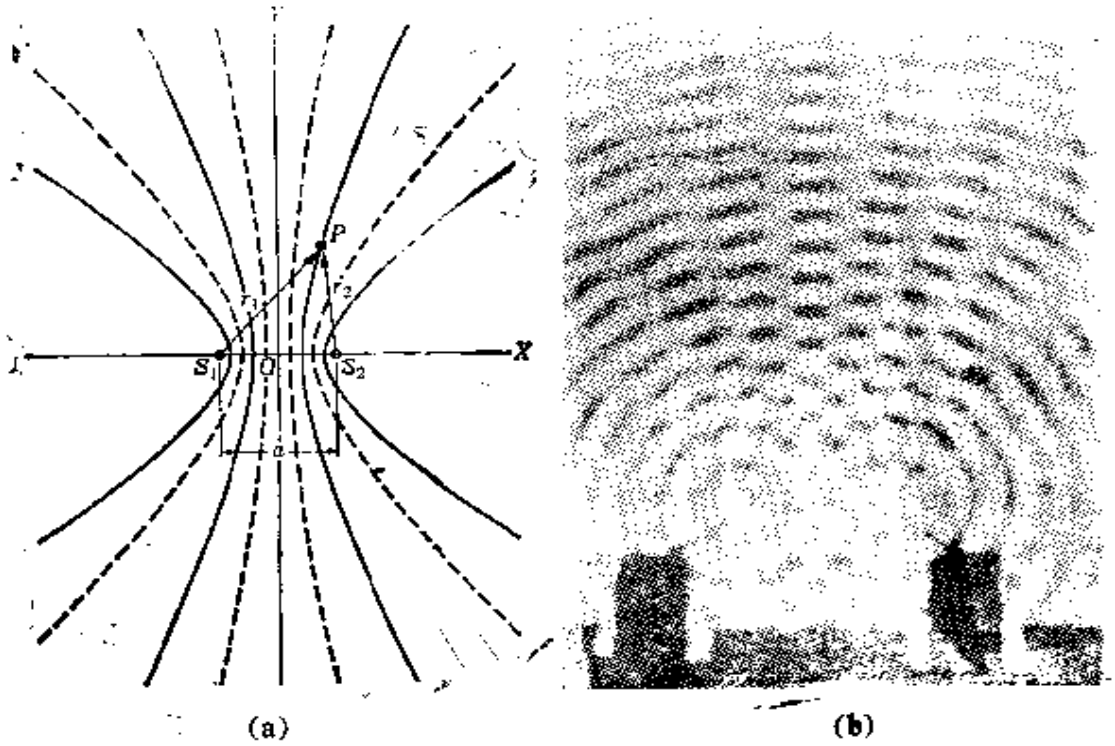


图 16-1 (a) 两个完全相同的源产生的波的干涉所引起的波节线和波腹线. (b)水面上波的实际干涉图.

相地振荡,其振幅分别为 ξ_{01} 和 ξ_{02}. 它们各自的球面波为

$$\xi_1=\xi_{01}\sin(\omega t-kr_1) \tag{16.3}$$

和

$$\xi_2=\xi_{02}\sin(\omega t-kr_2), \tag{16.4}$$

式中 r_1 和 r_2 分别为从任意一点至 S_1 和 S_2 的距离. 注意, 虽然这两个源完全相同,但是,如果 r_1 不等于 r_2,它们在点 P 产生的振幅并不相同,因为球面波的振幅按 $1/r$ 的规律减小.

假定 ξ 是一个标量, 例如一个压强扰动. 如果 ξ 对应于一个矢量,我们就假定 ξ_1 和 ξ_2 的方向相同, 因而这两个波的合成可以按标量来处理. 当我们把方程(16.3)和(16.4)同简谐运动的表达式 $\xi=A\sin(\omega t+\alpha)$ (式中 α 是初相位)相比较时,就可以看出,量 kr_1 和 kr_2 所起的作用和初相位一样. 于是,在任意点 P 这两个波动的相差为(记住 $k=2\pi/\lambda$):

$$\delta = kr_1 - kr_2 = (2\pi/\lambda)(r_1 - r_2). \tag{16.5}$$

当我们利用旋转矢量法时(见第一卷第十二章)，这两个干涉波动可以用长度分别为 ξ_{01} 和 ξ_{02} 的旋转矢量来表示；这两个矢量与 X 轴所成的角为 $\alpha_1 = kr_1$ 和 $\alpha_2 = kr_2$ (图 16-2)．合成波动的振幅 ξ_0 和相位 α 由它们的矢量和给出．因此，在点 P 产生的扰动的振幅由下式给出：

$$\xi_0 = \sqrt{\xi_{01}^2 + \xi_{02}^2 + 2\xi_{01}\xi_{02}\cos\delta} \tag{16.6}$$

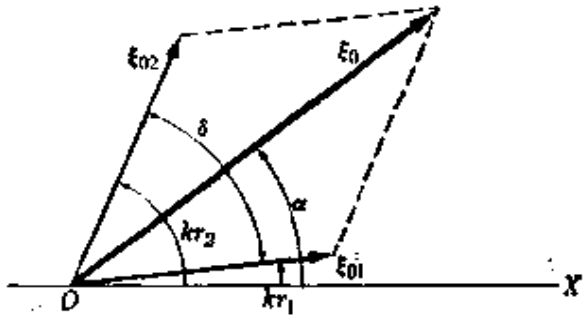


图 16-2　两个干涉波的合振幅．取 X 轴为参考线．

由方程(16.6)可知，ξ 的值处于 $(\xi_{01}+\xi_{02})$ (这时 $\cos\delta = 1$，即 $\delta = 2n\pi$)和$(\xi_{01}-\xi_{02})$[这时 $\cos\delta = -1$，即 $\delta = (2n+1)\pi$，式中 n 为一正整数或负整数]之间．在第一种情况下，我们有两个波动的最大加强，即相长干涉，在第二种情况下，我们有两个波动的最大衰减，即相消干涉．也就是说：

$$\delta = \begin{cases} 2n\pi & \text{相长干涉，} \\ (2n+1)\pi & \text{相消干涉．} \end{cases}$$

利用方程(16.5)，可以写出

$$\frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) = \begin{cases} 2n\pi & \text{相长干涉，} \\ (2n+1)\pi & \text{相消干涉．} \end{cases} \tag{16.7}$$

或者

$$r_1 - r_2 = \begin{cases} n\lambda & \text{相长干涉，} \\ (2n+1)\dfrac{\lambda}{2} & \text{相消干涉．} \end{cases} \tag{16.8}$$

但是，$r_1-r_2=$常数定义一双曲线，它的焦点为 S_1 和 S_2；由于这个问题实际上是在三维空间中，所以这个方程定义的是回转双曲面，如图 16-3 所示．因此，由方程(16.8)我们得出结论：在方程为 $r_1-r_2=\pm\lambda, \pm 2\lambda, \pm 3\lambda, \cdots$ 的双曲面上，这两个波动相长地干涉．这些面叫做波腹面．在方程为 $r_1-r_2=\pm\frac{1}{2}\lambda, \pm\frac{3}{2}\lambda, \cdots$ 的双曲面上，这两个波动相消地干涉．这些面叫做波节面．因此，总的图形是一系列交替的波腹面和波节面．这些面与通过 X 轴的平面的交线，是图 16-1 中所示的双曲线．

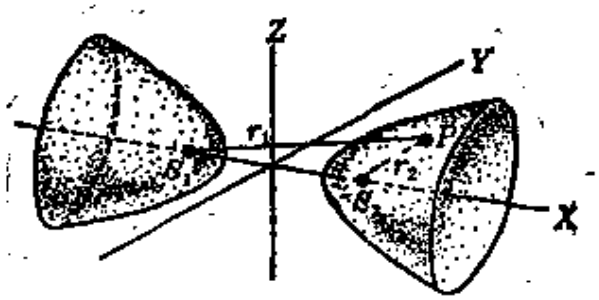


图 16-3　两个相干点光源 S_1 和 S_2 所产生的球面波的恒相差面．

上面描述的情况是这样的：在空间的每一点，合成波动具有方程(16.6)所给出的特征振幅，因此

$$\xi=\xi_0 \sin(\omega t-\alpha),$$

式中 α 是一初相角，如图 16-2 所示．因此，干涉的结果并不具有前进波的外观，而是一个定态情况，即在空间的每一点，振荡运动具有固定的振幅．这种定态情况，是由于两个源以相同的频率振荡，并保持恒定的相差，因此称之为相干的．如果这两个源的频率不同，或者，如果它们的相差随时间无规则地变化，就观察不到定态干涉，这种源称为不相干的．两个由相同原子组成的、发射相同频率的光的光源，通常的情况就是这样的．由于每个光源中包含着许多原子，它们并不同相地振荡，所以观察不到明显的干涉图．

为了克服这个困难，曾设计出几种装置．常见的一种叫做非

涅耳双棱镜，如图 16-4所示. 它是法国物理学家菲涅耳(Augustin Fresnel, 1788—1827)研制成的. 它由两个底部对接起来的棱镜组成的，每个棱镜的角 θ 都很小. 从光源 S 来的光，在两个棱镜中折射而分成两束光，看起来是从两个相干光源 S_1 和 S_2 发出的. S_1 和 S_2 是两个棱镜所产生的 S 的象. 在这种情况下，两个光束来自同一个光源，因而能够保证相干性. 这两个光束在有阴影的区域内干涉. 相差很大时，相干性破坏，因为在这种情况下，干涉光束是由这个光源在相隔相当宽的两个时刻产生的，因而微观地看，在这两个时刻光源是不同的.

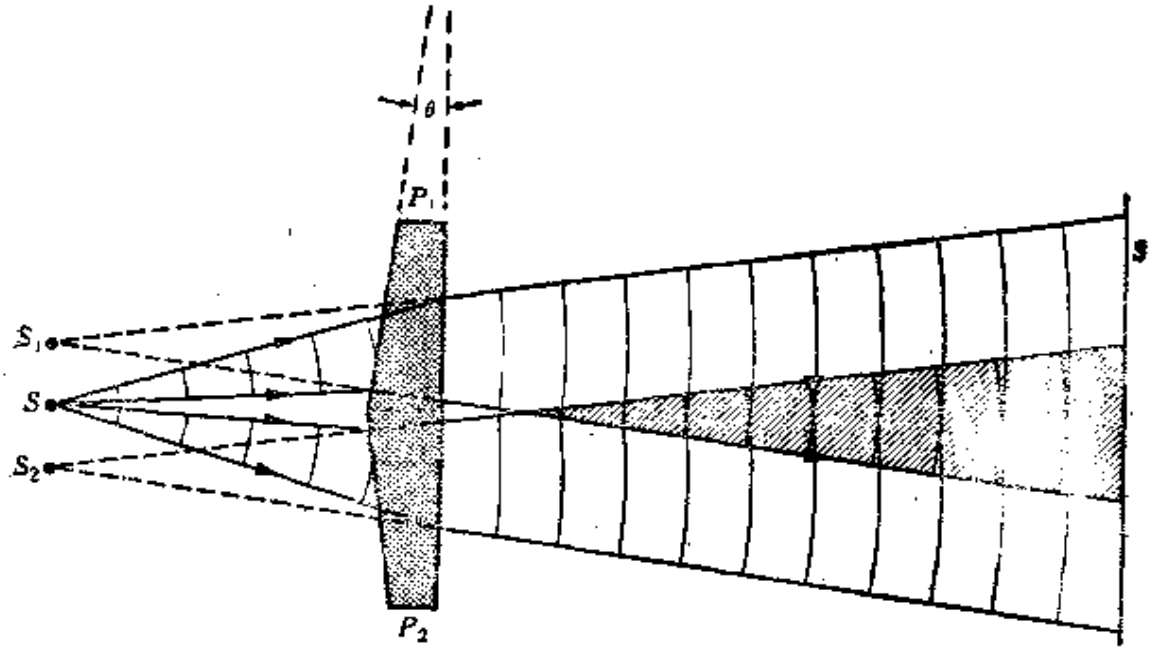


图 16-4 菲涅耳双棱镜

英国科学家杨(Thomas Young, 1773—1829)在他早期关于光干涉的实验中证明了光是一种波动现象. 他的装置更简单（图 16-5)，是由一个不透明屏上的两个小孔或狭缝 S_1 和 S_2 组成的. 光源 S 放在不透明屏 的左方. 根据惠更斯原理，S_1 和 S_2 起着次级相干光源的作用，它们产生的波在屏的右侧干涉.

在光的情况下，在平行于两个源 S_1 和 S_2 的屏上观察到干涉

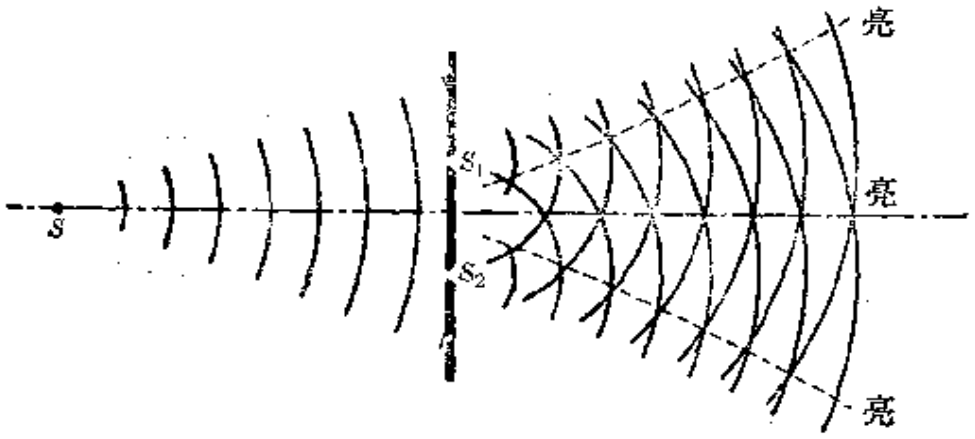
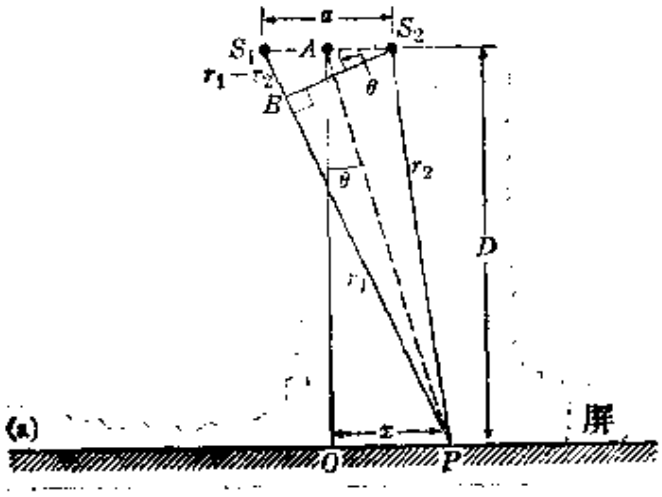


图 16-5　两个相干光源的干涉，杨氏双缝实验。

图样，如图 16-6(a)所示。在屏上出现一系列交替的亮、暗条纹。

(a)



(b)

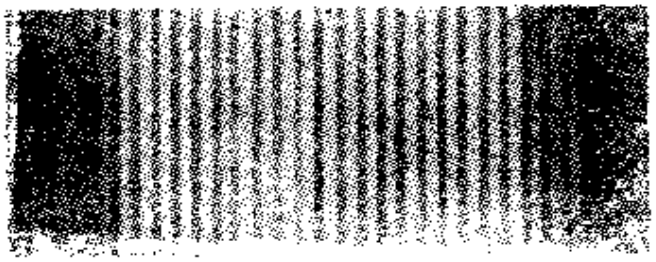


图 16-6　(a) 确定两个相干光源的干涉在屏上产生的合波动的强度用的示意图。(b) 用一个单色点光源照明的一对狭缝在屏上产生的干涉条纹的照片。注意，靠近边缘处，由于失去相干性，条纹消失。

如图 16-6(b)所示. 这些条纹是屏与双曲型波腹面和波节面的交线. 对于电磁波谱的其他波段，需用不同种类的探测器来观察干涉图.

如果光源 S_1 和 S_2 的间距 a 比距离 D 小很多，我们就可以忽略 r_1 和 r_2 之间的小差别，并假定振幅 ξ_{01} 和 ξ_{02} 几乎相等. 于是我们可以把方程(16.6)改写为

$$\xi_0 = \xi_{01}\sqrt{2(1+\cos\delta)} = 2\xi_{01}\cos\frac{1}{2}\delta.$$

在图 16-6 中，考虑到 θ 是一个小角度，因而有 $\sin\theta \approx \tan\theta = x/D$，于是有 $r_1 - r_2 = S_1B = a\sin\theta = ax/D$. 把这个结果代入方程 (16.7) 中，则得

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) = \frac{2\pi}{\lambda}a\sin\theta = \frac{2\pi ax}{D\lambda}. \tag{16.9}$$

屏上各点的合运动的强度与 ξ_0^2 成正比. 因此，

$$I = I_0\cos^2\left(\frac{1}{2}\delta\right) = I_0\cos^2\left(\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}\right) = I_0\cos^2\left(\frac{\pi ax}{D\lambda}\right), \tag{16.10}$$

式中 I_0 是对应于 $\theta = 0$ 的强度. 图 16-7 中示出这种 $\cos^2$ 型的强度分布. 最大强度的点对应于

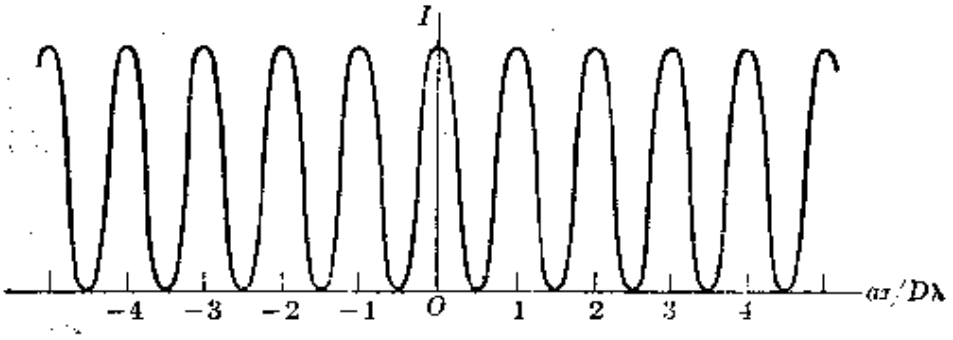


图 16-7　两个相干光源产生的干涉图中的强度分布.

$$\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda} = n\pi \quad 或 \quad \frac{\pi ax}{D\lambda} = n\pi.$$

上式可以写作

$$\sin\theta=n\frac{\lambda}{a}\quad 或\quad x=n\frac{D\lambda}{a},\tag{16.11}$$

式中 n 可以是一正的或负的整数，θ 和 x 则如图 16-6 中所示. 屏上两个相继的亮条纹的间距为 $\Delta x=(D/a)\lambda$. 因此，测量 Δx、D 和 a，就能确定波长 λ. 事实上，这个方法是测量波长的标准方法之一. 注意，如果光源发射的波长不只一个，则每一个波长独立地在屏上产生它自己的干涉图.

例题 16.1 在双缝实验中，确定相继两个亮或暗条纹的间距.

解 考虑一个类似于杨氏实验的实验，其中两个狭缝的间距为 0.8mm，用波长为 5.9×10^{-7}m 的单色光照亮狭缝，在一个距狭缝 0.50m 的屏上观察干涉图. 在这个情况下，$a=0.8\text{mm}=8\times10^{-4}\text{m}$，$D=5\times10^{-1}\text{m}$，$\lambda=5.9\times10^{-7}\text{m}$. 代入方程 (16.11) 中，则得亮条纹的位置为 $x=n(D\lambda/a)=3.7\times10^{-4}n\text{m}=0.37n\text{ mm}$. 在一般情况下，必须用一个放大镜来观察这些条纹. 相邻亮条纹的间距为 0.37mm，与暗条纹的间距相同.

例题 16.2 两个频率相同的不相干源的干涉图.

解 在这种情况下，不相干性是由于相差是可变的. 因此，代替方程 (16.3) 和 (16.4)，我们写出

$$\xi_1=\xi_{01}\sin(\omega t-kr_1-\phi)\quad 和\quad \xi_2=\xi_{02}\sin(\omega t-kr_2),$$

式中 ϕ 是一个附加的相差，它随时间无规地变化. 在这种情况下，相差为 $\delta=2\pi(r_1-r_2)/\lambda+\phi$，因而干涉图中任一点的合振幅为

$$\xi_0^2=\xi_{10}^2+\xi_{02}^2+2\xi_{01}\xi_{02}\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(r_1-r_2)+\phi\right].$$

由于 ϕ 随时间变化，所以 ξ_0 不是恒定的；因此，必须求出 $(\xi_0^2)_{平均}$. 由于 ϕ 的无规变化，我们有

$$\left\{\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(r_1-r_2)+\phi\right]\right\}_{平均}=0.$$

于是得到

$$(\xi_0^2)_{平均}=(\xi_{01}^2)_{平均}+(\xi_{02}^2)_{平均},$$

由于强度正比于振幅的平方，所以有

$$I_{平均}=I_1+I_2.$$

因此，总平均强度等于各个强度之和；因而观察不到强度随位置的起伏．由于这个原因，我们观察不到，比如说，两个电灯泡发出的光的干涉．这是因为，虽然它们发射相同频率的单色光，但是它们各自的辐射原子是无规分布的．

16.3 几个同步光源的干涉

考虑沿一直线排列的若干个同步的全同单色光源的情况，如图 16-8 所示．为了简化我们的讨论，假定在比源的间距大很多的距离上观察合波动．这样，干涉光线实际上是平行的．由此图可以看出，两条相邻光线之间的相差是恒定的，由下式给出：

$$\delta=\frac{2\pi}{\lambda}a\sin\theta, \tag{16.12}$$

式中 a 是相邻两个光源之间的距离，λ 是波长，θ 是某一组光线与源平面法线所成的角．为了求出在角 θ 所表示的方向上的合振幅，我们必须计算与各个源对应的旋转矢量的矢量和．如果所有的源

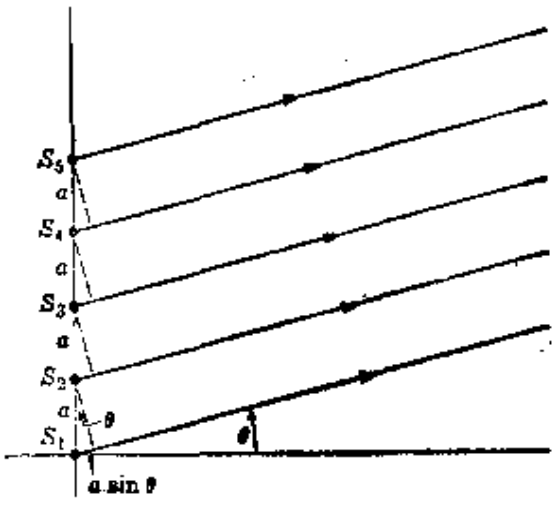


图 16-8 一直列等间距的相干光源．

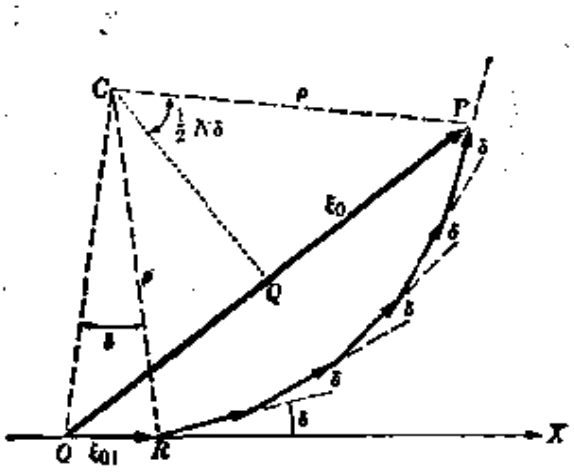


图 16-9 一直列等间距的相干光源所产生的波，在任意一点的干涉所引起的合振幅．

都相同，它们的旋转矢量将具有相同的振幅 ξ_{01}；每一个矢量相对于前一个矢量的偏转角相同，都等于 δ，如图 16-9 所示．设 N 为

光源的数目，于是我们得到一个$(N+1)$边多边形，它有一中心C和一"半径"ρ，且角$OCP=N\delta$. 直线OP表示合矢量的振幅. 由图可知，

$$\xi_0=OP=2QP=2\rho\sin\frac{1}{2}N\delta.$$

又从ΔCOR可知，

$$\xi_{01}=2\rho\sin\frac{1}{2}\delta.$$

上面两个式子相除，消去ρ，则得

$$\xi_0=\xi_{01}\frac{\sin\frac{1}{2}N\delta}{\sin\frac{1}{2}\delta}. \tag{16.13}$$

对于$N=2$，我们得到$\xi_0=2\xi_{01}\cos\frac{1}{2}\delta$；这个结果与在第16.2节中对于两个相同光源所得出的结果相同.

由于合成波的强度与ξ_0^2成正比，所以

$$I=I_0\left(\frac{\sin\frac{1}{2}N\delta}{\sin\frac{1}{2}\delta}\right)^2=I_0\left[\frac{\sin(N\pi a\sin\theta/\lambda)}{\sin(\pi a\sin\theta/\lambda)}\right]^2, \tag{16.14}$$

式中I_0与ξ_{01}^2成正比，是每个源的强度. 当$\delta=2n\pi$时，表达式(16.14)有非常显著的极大值N^2I_0，因为对于$\alpha=n\pi$(在我们这个情况下，$\alpha=\frac{1}{2}\delta$)，$\sin N\alpha/\sin\alpha=\pm N$. 也就是说，当

$$a\sin\theta=n\lambda \tag{16.15}$$

时，式中n为任意整数(包括零)，产生相长干涉. 每当方程(16.15)被满足时，都有$I=N^2I_0$. 这个结果是易于理解的，因为当$\delta=2n\pi$时，所有的源矢量ξ_{01}是平行的，如图16-10所示；因而合振

幅为 $\xi_0 = N\xi_{01}$，正如方程(16.13)所给出的. 方程(16.15) 与在同

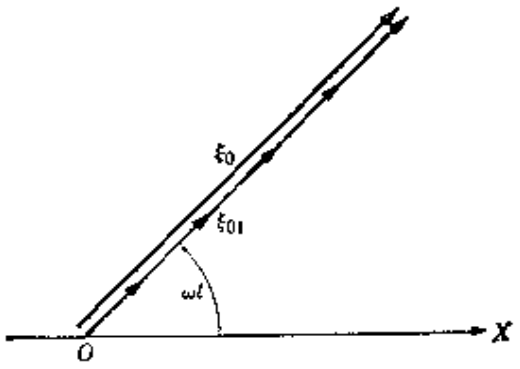


图 16-10 一直列等间距的光源在相差为零的一点的干涉所引起的合振幅.

样的假定下对于两个光源导出的方程 (16.11)，是一致的. 当 $\frac{1}{2}N\delta = n'\pi$ 时，合波的强度为零. 也就是说，当

$$a\sin\theta = n'\lambda/N \tag{16.16}$$

时，产生相消干涉；上式中 n' 是任意整数，但不包括 $0, N, 2N, \cdots$，因为这时方程(16.16)就变为方程(16.15)，即所有的光源同相. 在两个极小值之间必定有一个极大值. 因此，我们得出结论，在方程(16.5) 所给出的主极大值之间还有$(N-2)$个附加的极大值. 但是，这些附加的极大值的振幅相对而言要小得多，特别是当 N 很大时. 然而，主极大值则对应于相邻光源发出的波同相的方向.

图 16-11 中示出 $N=2、4、8$ 和很大值时，I/I_0 随 δ 变化的情况. 我们看到，当 N 增大时，这系统变成高度方向性的，因为仅在 δ 值的很窄范围内，亦即在 θ 值的很窄范围内，合波动才有显著的强度.

广播电台和接收台广泛利用这些结果来获得方向性效应. 在这种情况下，几个天线如此排列，以使发射(或接收)的辐射的强度，仅对于方程(16.15)所给出的某些方向，才有极大值. 例如，设有四个天线沿一直线排列，间距为 $a=\lambda/2$，则方程(16.15) 给出

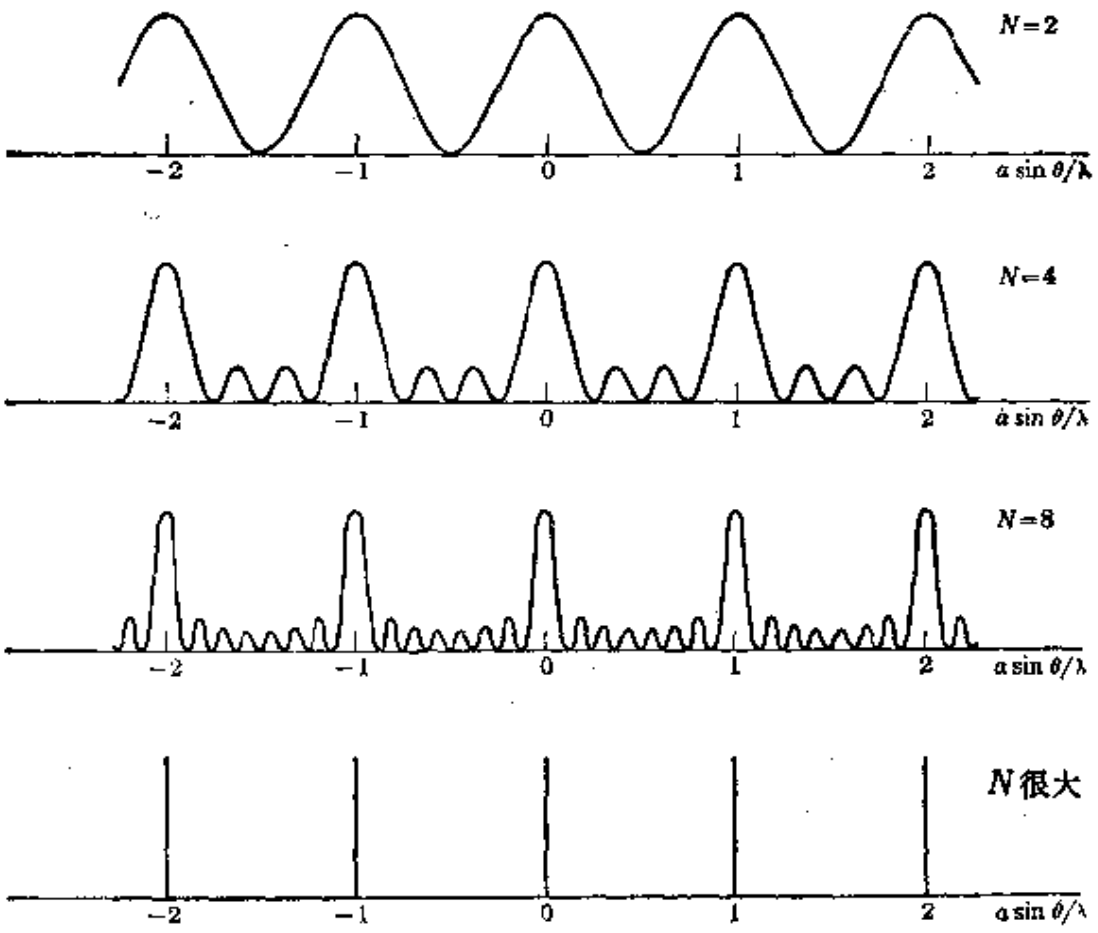


图 16-11　2、4、8 和很多个源的干涉图的强度，源的间距 a 保持不变.

$\sin\theta = 2n$. 在此情况下，对于主极大来说，只有 $n=0$ 是可能的，于是得出 $\theta=0$ 和 π. 对于波节面，方程(16.16)给出 $\sin\theta = n'/2$. 这允许 $n' = \pm 1$ 和 ± 2，或者 $\theta = \pm\pi/6$ 和 $\pm\pi/2$. 这种情况如图 16-12 中的极坐标图所示；图中画出强度对角度的曲线. 图 16-12 中的天线排列主要在垂直于连结源的直线的方向上发射或接收，因此叫做垂射天线阵. 在射电望远镜中也利用这种方向性效应. 把几个抛物面天线等距离地放置在一条直线上，并使它们的轴平行. 当间距和轴的方向给定时，接收到的无线电波的波长由方程(16.15)决定. (见习题 16.12.)

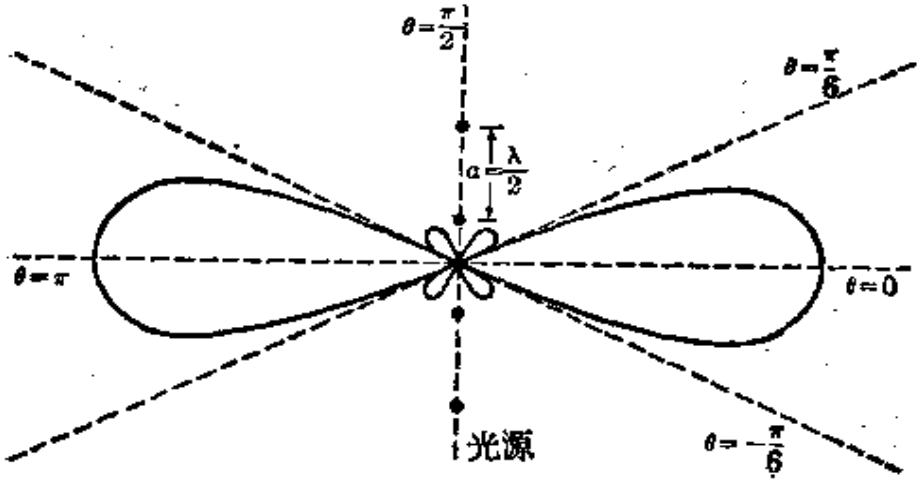


图 16-12　四个间距等于半个波长的线性相干源所产生的波的干涉图中强度的角分布.

例题 16.3　薄膜反射或透射的光的干涉.

解　前一节中的讨论能够应用于薄膜反射的或透射的光的情况. 考虑一厚度为 a 的薄膜. 平面波投射在这薄膜上,入射角为 θ_i (图 16-13). 考虑一条光线,例如 AB,它的一部分沿方向 BG 被反射,另一部分沿方向 BC 被折

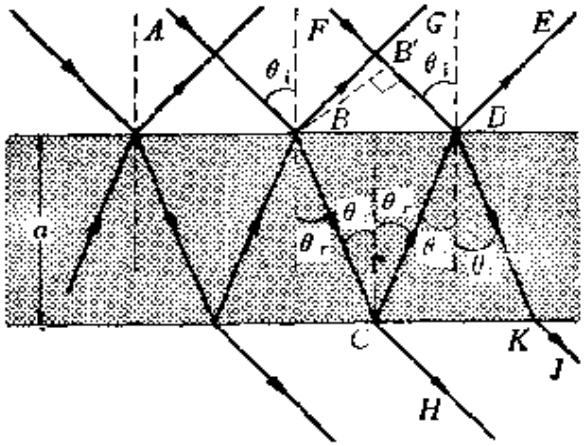


图 16-13　薄膜反射或透射的光的干涉.

射. 光线 BC 又在 C 处沿方向 CD 被部分地反射,沿方向 CH 被部分地透射. 光线 CD 又在 D 处沿方向 DK 被部分地反射(并叠加在 FD 的折射线上),沿方向 DE 被部分地透射(并叠加在 FD 的反射线上). 同理,反射线 BG 也包含来自左边几条光线的贡献. 因此,沿反射线和折射线都发生干涉现象. 这个情况类似于第 16.3 节中阐述的 N 非常大的情况,但有一个重要区别:由于每反射或折射一次都使强度减小,所以干涉光线并不具有相同的强度.

如果我们不考虑这种强度变化，则当相邻光线之间的相差 δ 满足方程 $\delta=2m\pi$（式中 m 为一整数）时，就出现反射或折射所产生的干涉极大值．为了计算反射所产生的干涉的 δ，我们考虑光线 AB 和 FD．如果我们画出波阵面 BB'，则沿 DE 的相差是由于通过路径 $B'D$ 和 BCD 所需时间不同．由图可知，$B'D=BD\sin\theta_i$，$BD=2a\tan\theta_r$．因此，

$$B'D=2a\tan\theta_r\sin\theta_i=\frac{2an\sin^2\theta_r}{\cos\theta_r},$$

式中利用了斯涅耳定律 $\sin\theta_i=n\sin\theta_r$．又有 $BCD=2BC=2a/\cos\theta_r$．于是得出时间 $t_1=B'D/c=2an\sin^2\theta_r/c\cos\theta_r$，$t_2=BCD/v=2an/c\cos\theta_r$，因为 $v=c/n$．时间之差为

$$t_2-t_1=2an\cos\theta_r/c,$$

相差为

$$\delta=\omega(t_2-t_1)=\frac{2a\omega n\cos\theta_r}{c}=\frac{4\pi an\cos\theta_r}{\lambda},$$

上式中利用了关系式 $\lambda=2\pi c/\omega$．这可能不是全部的相差，因为我们在第 14.2 节中已看到，有的时候反射时会产生一额外的相差 πrad．例如，在电磁波的情况下，当垂直于入射面偏振的光，从光速较大的介质向光速较小的介质传播时，相位改变 πrad．因此，在这种情况下，如果 $n>1$，对于光线 FD 来说，当它在 D 处被反射时，就有一相移 π．但对于光线 BC 来说，当它在 C 处被反射时，就不发生这个相移．当 $n<1$ 时，发生相反的情况．因此，在这两种情况下，都必须写出

$$\delta=\frac{4\pi an\cos\theta_r}{\lambda}+\pi;$$

将 $\delta=2m\pi$（m 为一整数）代入上式，则得

$$2an\cos\theta_r=\frac{1}{2}(2m-1)\lambda \quad \text{（反射最大，透射最小）} \tag{16.17}$$

作为反射波加强所引起的干涉的条件．通过类似的计算，学生可以证明，对于沿方向 DK 的透射波，强度最大的条件是

$$2an\cos\theta_r=m\lambda \quad \text{（透射最大，反射最小）} \tag{16.18}$$

在此情况下，不发生 πrad 的相移，因为光线经历了两次内反射．方程(16.17)也表示透射最小的条件，方程(16.18)也表示反射最小的条件．在这种情况下，值得注意的是，我们观察到的反射所引起的颜色，不同于透射所引起的颜色．

如果入射光不是单色的，则对于不同的 λ 值，方程(16.17)和(16.18)给出不同的 θ_r 值和 θ_t 值. 这些不同的值说明我们在水面上的油膜中观察到的颜色. 而且，如果这膜的厚度是可变的，则对于一个给定的波长，条件(16.17)和(16.18)不是在一切点上都被满足；单色光情况下的结果，是一系列暗带和亮带，而在白光情况下，则是一系列彩色带. 把一个平凸透镜放在一平玻璃板上，如图 16-14(a) 所示，很容易看到这种效应. 透镜和玻璃板之间的空间，是一个变厚度的空气层. 所得到的干涉图是一系列同心的彩色圆环，叫做牛顿环，如图 16.14(b)所示.

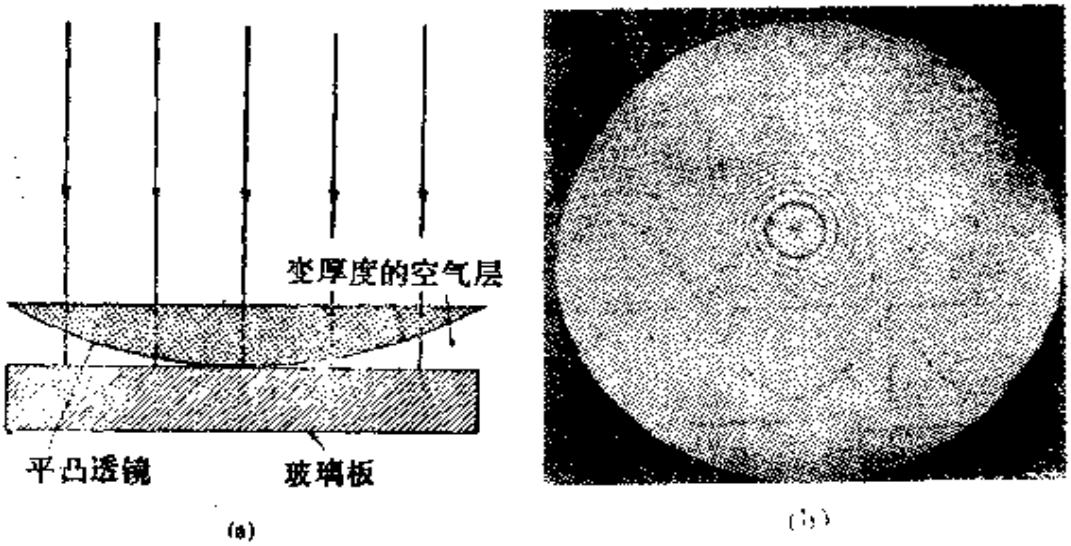


图 16-14　一个凸面和一个平面之间的空气膜中干涉所形成的牛顿环. (a)示意图，(b)环的照片.

例题 16.4　一个膜的折射率为 1.42，如果用钠光(波长为 5.9×10^{-7}m)照明时，由于(a)反射和(b)透射的光的干涉，这个膜呈现黑色，试求它的最小厚度.

解　由方程(16.17)和(16.18)可知，a 的最小值出现在 $\cos\theta_r$ 的最大值处；亦即 $\theta_r=0°$，因而 $\theta_t=0°$. 这个情况对应于正入射. 在这个情况下($m=1$)，无透射的条件是 $a=\lambda/4n$，无反射的条件是 $a=\lambda/2n$. 因此，对应的值是 $a=1.04\times10^{-7}$m 和 $a=2.08\times10^{-7}$m. 由于原子之间的距离约为 10^{-9}m，所以每一种情况下膜的最小厚度只有几百个原子层.

16.4　一维驻波

在例题 13.2 中，我们讨论了当一根弦上某一点有不连续性，

例如直径变化或材料变化时，这根弦上的透射波和反射波．现在我们考虑弦的一端固定在点 O 的情况，如图 16-15 所示．一个向左运动的入射横波，其方程为 $\xi=\xi_0\sin(\omega t+kx)$，在点 O 被反射而产生一个新的向右传播的波，其方程为 $\xi=\xi_0'\sin(\omega t-kx)$．弦

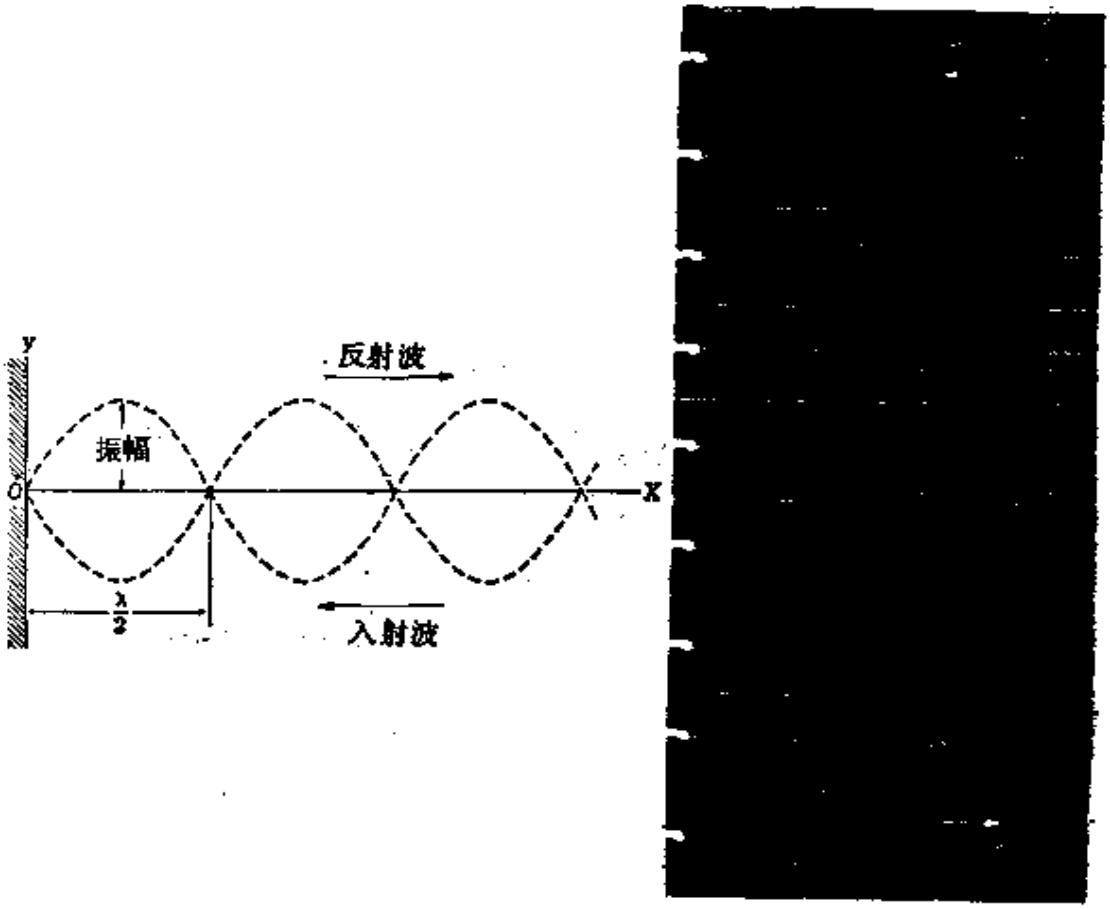


图 16-15　在一端固定的弦上反射波相位的变化

上任意一点的位移是两个波的干涉即叠加的结果．即

$$\xi=\xi_0\sin(\omega t+kx)+\xi_0'\sin(\omega t-kx). \qquad (16.19)$$

在点 O，$x=0$，所以

$$\xi_{(x=0)}=(\xi_0+\xi_0')\sin\omega t.$$

但 O 固定就表示在一切时刻 $\xi_{(x=0)}=0$．因此 $\xi_0'=-\xi_0$．换句话说，这个波在固定端反射时经受 π rad 的相位变化．我们以前曾多次遇到这种相位变化（例题 13.2 和 14.11）．这种相位变化可

在图 16-15 的一系列照片中看出，照片中示出一个入射脉冲和一个反射脉冲. 于是方程(16.19)变为

$$\xi=\xi_0[\sin(\omega t+kx)-\sin(\omega t-kx)].$$

利用三角函数关系式 $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$，我们得到

$$\xi=2\xi_0\sin kx\cos\omega t. \tag{16.20}$$

$(\omega t\pm kx)$不再出现，因而方程(16.20)不代表一个行波，而是代表一个角频率为ω的简谐运动，它的振幅逐点变化，并由下式给出：

$$A=2\xi_0\sin kx. \tag{16.21}$$

图 16-15 中的虚线就表示这个振幅. 当 $kx=n\pi$ 时，式中 n 为整数，这个振幅为零. 这个结果也可以写作

$$x=\frac{1}{2}n\lambda. \tag{16.22}$$

这些振幅为零的点叫做节点. 相邻节点之间的距离为 $\lambda/2$. 我们记得，在一根受张力T作用的，每单位长度的质量为σ的弦上，波的传播速度的表达式为(10.37)，即 $v=\sqrt{T/\sigma}$；因此，波长由下式确定：

$$\lambda=\frac{2\pi v}{\omega}=\frac{2\pi}{\omega}\sqrt{\frac{T}{\sigma}}, \tag{16.23}$$

这个波长是完全任意的，只要角频率ω也是任意的.

现在假定我们加上第二个条件：点 $x=L$(它可以是弦的另一端)也是固定的. 这个条件表示，$x=L$ 必定是一个节点，而且必须满足条件 $kL=n\pi$. 如果我们利用方程(16.22)，则有

$$L=\frac{1}{2}n\lambda \quad 或 \quad \lambda=\frac{2L}{n}=2L,\ \frac{2L}{2},\ \frac{2L}{3},\cdots \tag{16.24}$$

这第二个条件自动地限制在这根弦上传播的波的波长取方程(16.24)所给出的值. 根据方程(16.23)，振荡频率也限于取下列

值：

$$\nu_n=\frac{v}{\lambda}=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\sigma}}=\nu_1,2\nu_1,3\nu_1,\cdots \tag{16.25}$$

式中

$$\nu_1=\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\sigma}}$$

叫做基频. 因此，可能的振荡频率(称为谐波)都是基频的倍数. 我们可以说，频率和波长是量子化的，这种量子化是加于弦两端的边界条件的结果. 我们以后将会多次看到，在许多物理问题中出现这种情况.

图 16-16 中示出前三种振动模($n=1,2,3$)的振幅分布. 节点即零振幅的点由方程(16.22)决定，振幅最大的点是腹点. 相邻腹点之间的距离也是 $\lambda/2$. 当然，一个节点与一个相邻腹点之间的距离是 $\lambda/4$. 注意，在节点处 $\xi=0$，而在腹点处 $\partial\xi/\partial x=0$，因为在这里振幅最大.

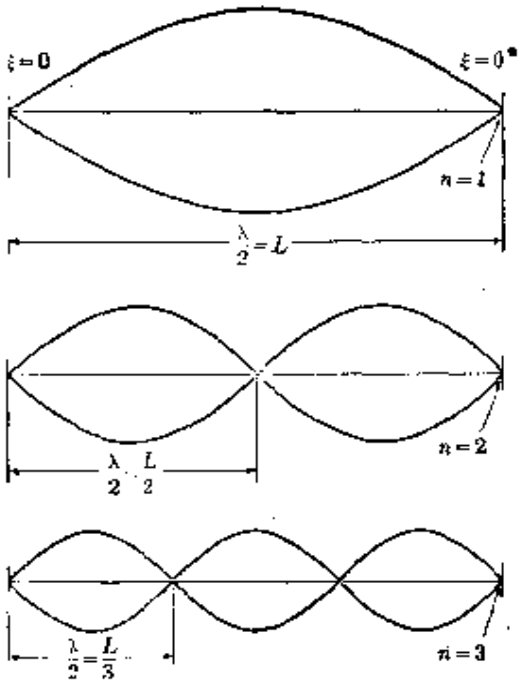


图 16-16　两端固定的弦上的横驻波.

例题 16.5 琴弦中的张力.

解 一根钢弦的直径为 1 mm，长为 0.40m. 已知它的基频为 $440\,s^{-1}$，对应于自然音阶中的乐音 A (即拉)，C 调，求弦中的张力. (假定弦的质量密度为 $\rho=7.86\times10^{3}kg\cdot m^{-3}$.) 弦单位长度的质量为 $\sigma=\pi r^{2}\rho$; 将

$$r=5\times10^{-4}m \quad 和 \quad \rho=7.86\times10^{3}kg\cdot m^{-3}$$

代入，则得 $\sigma=6.17\times10^{-3}kg\cdot m^{-1}$. 在方程(16.25)中令 $n=1$ (因为我们需要的是基音)，解出张力 T，则得 $T=4L^{2}\sigma v_1^{2}$. 将 $L=0.40m$，$v_1=440s^{-1}$和已经求出的 σ 值代入，最后得到

$$T=764.9N$$

弦乐器通常是通过调节它的弦中的张力或长度来进行调谐的.

16.5 驻波和波动方程

在第十章中我们讨论了关于波传播的波动方程; 即

$$\frac{\partial^{2}\xi}{\partial x^{2}}=\frac{1}{v^{2}}\frac{\partial^{2}\xi}{\partial t^{2}}; \tag{16.26}$$

并且证明了这个方程的通解具有如下形式:

$$\xi=f_1(x-vt)+f_2(x+vt). \tag{16.27}$$

当我们讨论只沿一个方向传播的波时，或者使用 $f_1(x-vt)$，或者使用 $f_2(x+vt)$，但不能使用两者. 然而，我们已经看到，当一个波在一点被反射时，结果得到的是沿相反方向传播的两个波，因而必须使用方程(16.27). 在一端固定的弦的情况下，在方程(16.19)中，我们就是使用两种形式; 在此情况下，我们得到合波动的方程(16.20). 方程(16.20)(即$\xi=2\xi_0\sin kx\cos\omega t$)的重要特点是变量 x 和 t 是分离的，这就导致振幅沿着弦而改变，但每一点的振幅是固定的. 时间变量与空间变量的分离，是驻波的特点. 在这种情况下，我们必须探索谐驻波的更一般表述的可能性. 我们的要求能够被如下形式的表达式所满足:

$$\xi=f(x)\sin\omega t, \tag{16.28}$$

式中 $f(x)$是在点 x 处波的振幅. 由于 ξ 必须是方程(16.26)的一个解，我们必须把上式中的 ξ 代入方程(16.26)中，以便确定对驻波振幅 $f(x)$的要求. 求 ξ 的微商，我们得到

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=\frac{d^2f}{dx^2}\sin\omega t \quad 和 \quad \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=-\omega^2 f(x)\sin\omega t.$$

把这些结果代入方程(16.26)，并消去公因子$\sin\omega t$，则得

$$\frac{d^2f}{dx^2}=-\frac{\omega^2}{v^2}f.$$

因 $k=\omega/v$，所以上式又可写作

$$\frac{d^2f}{dx^2}+k^2f=0. \tag{16.29}$$

如果方程(16.28)所表示的驻波是波动方程的一个解，那么上式就是振幅 $f(x)$ 必须满足的微分方程. 学生可以通过直接代入来证明方程(16.29)的通解为

$$f(x)=A\sin kx+B\cos kx, \tag{16.30}$$

式中 A 和 B 是任意常数. 于是方程(16.28)变为

$$\xi=(A\sin kx+B\cos kx)\sin\omega t. \tag{16.31}$$

当然，如果我们用的是$\cos\omega t$，而不是$\sin\omega t$，结果是一样的. 换句话说，时间因子的相位与我们的讨论无关.

方程(16.31)中的常数，由加于边界上的条件决定. 我们用前一节中关于两端固定的弦的问题，来说明如何确定这两个常数. 边界条件是，对于 $x=0$ 和 $x=L$，都有 $\xi=0$. 在方程(16.31)中，令 $x=0$，则得

$$\xi_{(x=0)}=B\sin\omega t=0.$$

因此 $B=0$. 于是方程(16.31)化为

$$\xi=A\sin kx\sin\omega t. \tag{16.32}$$

现在，如果我们令 $x=L$，则方程(16.32)给出

$$\xi_{(x=L)}=A\sin kL\sin\omega t=0.$$

但是，现在我们不能令 $A-0$，因为那会使得到处都有 $\xi=0$；亦即根本没有波．因此，我们的唯一选择是令 $\sin kL=0$，这就要求

$$kL=n\pi \quad 或 \quad \lambda=\frac{2L}{n}, \tag{16.33}$$

式中 n 为一整数，这个结果与方程(16.24)一致．

如果由于弦两端的物理情况不同(例如图16-17中弦的情况)，我们施加别的边界条件(而不是在两端处 $\xi=0$)，那么最后得到的解也就不同于方程(16.32)和(16.33)．

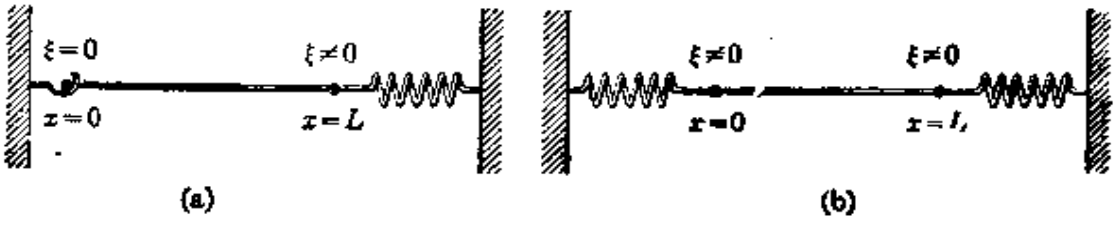


图 16-17

考察一下另外两个简单的例子，是很有教益的．这两个例子都与一根管子(例如风琴管)内部空气中的驻波有关系．首先考虑一根两端开口的管子(图 16-18)．空气从一端通过管口吹入，由于在另一端的反射而产生驻波．这个情况与前面的情况的基本差别在于，两端都是自由的，因此在两端 ξ 有极大值(因为在这里管子内外不会有压强差)；换句话说，在每一端都有一波腹．现在我们的边界条件，即在两端有波腹，是在 $x=0$ 和 $x=L$ 处 $\xi=$ 极大值，即 $\partial\xi/\partial x=0$．由方程(16.31)，我们有

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=k(A\cos kx-B\sin kx)\sin\omega t. \tag{16.34}$$

令 $x=0$，则得

$$\left.\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)_{x=0}=kA\sin\omega t=0,$$

因此 $A=0$．于是方程(16.34)变为

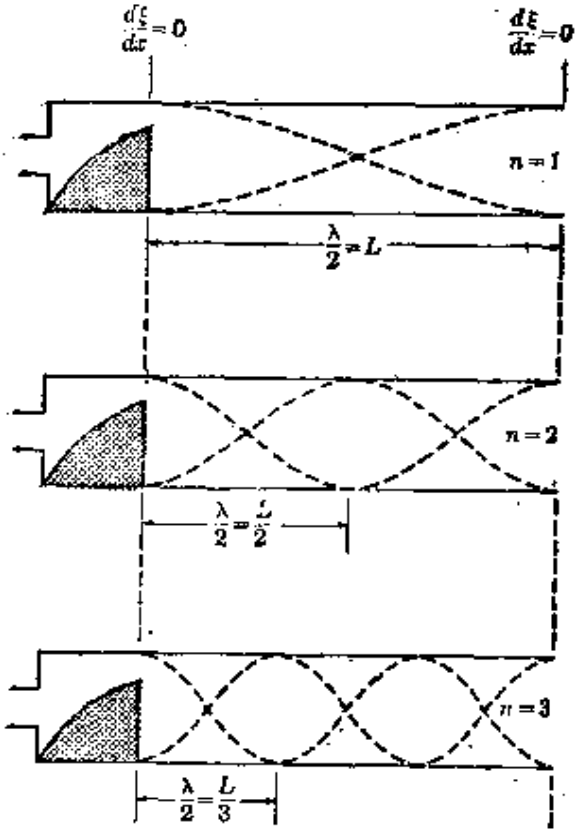


图 16-18　两端开口的空气柱中的压强驻波.

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}=-kB\sin kx\sin \omega t,$$

如果我们现在令 $x=L$，则得

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_{x=L}=-kB\sin kL\sin \omega t=0.$$

现在，正如弦中的情况那样，我们不能令 $B=0$，因为那样就根本没有波了. 所以我们唯一的选择是取 $\sin kL=0$，于是又得出

$$kL=n\pi \quad 或 \quad \lambda=\frac{2L}{n}. \tag{16.35}$$

这个方程与方程(16.33)完全一样. 驻波的频率为

$$\nu_n=\frac{v}{\lambda}=n\left(\frac{v}{2L}\right)=\nu_1,2\nu_1,3\nu_1,\cdots, \tag{16.36}$$

式中 $n=1,2,3,\cdots$；因此，容许的频率包括基音频率为 $\nu_1=v/2L$ 的

所有谐音．由方程(16.31)可以看出，在这种情况下 $A=0$，$\xi=B\cos kx\sin\omega t$．图 16-18 中的虚线示出 $n=1$，2 和 3 时的振幅分布．于是我们得出结论：两端开口的空气柱的振动与两端固定的弦的振动等效，不过波节和波腹的位置对调了．

作为第二个例子，我们考虑与管口相对的一端被封闭的管子(图 16-19)．封闭端的物理情况改变，而管口处的情况则和前面

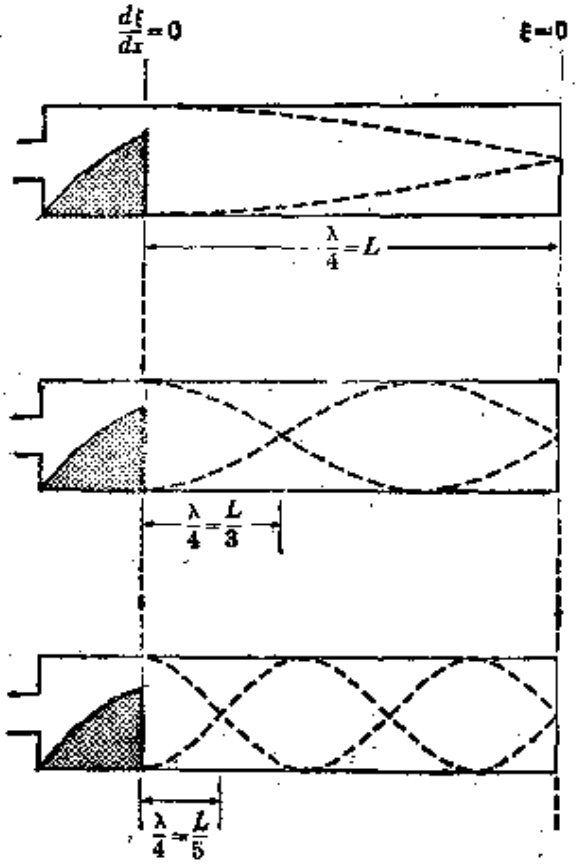


图 16-19　一端封闭的空气柱中的压强驻波．

一样．因此，在管口处我们仍然有一波腹，即在 $x=0$ 处 $\partial\xi/\partial x=0$；但在封闭端($x=L$)我们必须有一波节，即在 $x=L$ 处 $\xi=0$．和前面的例子一样，第一个条件要求 $A=0$，因而方程(16.31)变为

$$\xi=B\cos kx\sin\omega t.$$

应用闭端(即 $x=L$ 处)的边界条件，我们得到

$$\xi_{(x=L)}=B\cos kL\sin\omega t=0.$$

这个方程要求$\cos kL=0$. 亦即要求

$$kL=(2n'+1)\frac{\pi}{2} \quad 或 \quad \lambda=\frac{4L}{2n'+1}, \tag{16.37}$$

式中$n'=0,1,2,3,\cdots$,对应的频率为

$$\nu=\frac{v}{\lambda}=(2n'+1)\frac{v}{4L}=\nu_1,3\nu_1,5\nu_1,\cdots \tag{16.38}$$

这种情况下的振动模，不同于方程(16.35)和(16.36)所给出的关于两端开口的管子的振动模. 图 16-19 中示出一端封闭的情况下，$n'=0,1$ 和 2 的波节和波腹. 最重要的特点是，一端封闭的管子只能产生基频为$\nu_1=v/4L$ 的奇谐音. 长度相等时，闭管的基频是开管基频的一半.

波动方程的具有(16.31)那种型式的解，对应于一个角频率为ω的驻谐波. 然而，一般而言，初始扰动并不对应于一个特殊的频率. 为了确定所涉及的波长和频率，必须对初始扰动进行傅里叶分析. 任何以后时刻的扰动为

$$\xi=\sum_{\omega}(A\sin kx+B\cos kx)\sin\omega t, \tag{16.39}$$

式中$k=\omega/c$,系数A和B根据傅里叶分析来确定. 但是，按以前规定的意义(即驻波是其振幅与位置有关的波)来说，方程(16.39)并不代表一个驻波. 这是因为，由于那个求和符号，时间和位置变量不是完全分离的.

例题 16.6 确定悬挂在一根弹簧下端的质量的振动频率.

解 考虑一根质量为m_0,长为L,弹性常数为κ的弹簧. 这弹簧挂在一个固定点上,其自由端系有一个质量为M的球. 使这个球离开它的平衡位置，沿竖直方向移动一个距离,然后释放.

我们很可能会说,角频率为$\omega=\sqrt{\kappa/M}$,如同我们在第一卷中初次讨论简谐运动时那样(这里，为了避免与波数k混淆，我们用κ表示弹簧的弹性常数). 然而,我们将会看到，仅当弹簧的质量与球的质量M相比可以忽略时，这个频率才是正确的. 由图 16-20 我们看出,当我们挂上球M时，弹簧将伸

长，直至它所产生的作用在M上的向上的力，与M的重量平衡．如果现在使M振动，弹簧中就会产生向上和向下行进的波，结果产生驻波．M的振动频率由弹簧中产生的驻波的频率确定．我们用ξ表示这弹簧的每一段的位移，固定端即$x=0$处的边界条件是$\xi=0$．这要求在方程(16.31)中$B=0$，因而这弹簧的每一段的位移由下式表示：

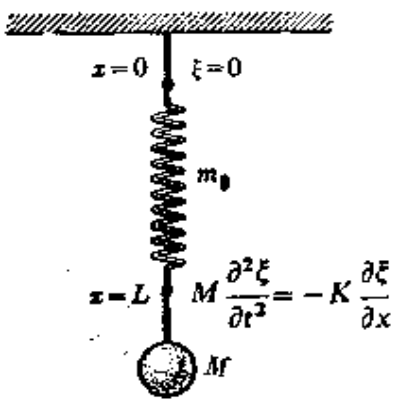


图 16-20

$$\xi=A\sin kx\sin\omega t. \tag{16.40}$$

在弹簧的自由端，M被伸长了的弹簧的力所加速，根据例题10.6，这个力等于$-K(\partial\xi/\partial x)_{x=L}$，式中$K=\kappa L$是弹簧的弹性模量，如在那个例题中所定义的．负号的出现，是因为ξ的正方向朝下，当$\partial\xi/\partial x$为正时力朝上(即为负的)．因此，M的运动方程为

$$M\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\right)_{x=L}=-K\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)_{x=L}.$$

这个方程给出弹簧自由端的边界条件．利用前面给出的ξ的表达式，可将上面的方程写作

$$-M\omega^2\sin kL=-Kk\cos kL.$$

在上式中，令$k=\omega/v$，并且记得$\sigma=m_0/L$是弹簧每单位长度的质量和$v=\sqrt{K/\sigma}$(根据例题10.6中得到的结果)，我们得到

$$\frac{\omega L}{v}\tan\frac{\omega L}{v}=\frac{KL}{Mv^2}=\frac{\sigma L}{M}=\frac{m_0}{M}. \tag{16.41}$$

这个方程可以写成$\theta\tan\theta=$常数的形式，式中$\theta=\omega L/v$．这个方程的解给出角频率ω的可能的值．这是一个超越方程，因此，不能用普通的代数方法求解．然而，如果这弹簧非常轻，因而v非常大，从而θ非常小，我们就可以利用近似展开式$\tan\theta=\theta+\frac{1}{3}\theta^3+\cdots$．于是这个方程的左边变为

$$\frac{\omega L}{v}\left[\frac{\omega L}{v}+\frac{1}{3}\left(\frac{\omega L}{v}\right)^3+\cdots\right]=\left(\frac{\omega L}{v}\right)^2\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{\omega L}{v}\right)^2+\cdots\right].$$

我们记得，$K=\kappa L$，$\sigma=m_0/L$，因此$v=\sqrt{K/\sigma}=L\sqrt{\kappa/m_0}$，于是得到$\omega L/v=\omega\sqrt{m_0/\kappa}$．将这个结果代入方程(16.41)中，则得

$$\frac{\omega^2 m_0}{\kappa}\left(1+\frac{\omega^2 m_0}{3\kappa}+\cdots\right)=\frac{m_0}{M}$$

或者

$$\omega^2\left(1+\frac{\omega^2 m_0}{3\kappa}+\cdots\right)=\frac{\kappa}{M}.$$

如果 m_0 很小，作为一级近似，我们可以忽略括号内的第二项；于是得到 $\omega^2=\kappa/M$ 或 $\omega=\sqrt{\kappa/M}$. 这正是我们原来在讨论简谐运动时所得到的值. 作为二级近似，我们把这个 ω 值代入括号中的第二项，结果得到

$$\omega^2\left(1+\frac{m_0}{3M}\right)=\frac{\kappa}{M}$$

或

$$\omega=\sqrt{\frac{\kappa}{M+\frac{1}{3}m_0}}. \tag{16.42}$$

因此，在小振动的情况下，弹簧对角频率 ω 的效应，相当于使物体的质量增加弹簧质量的三分之一. 此外，还有不是基频的整数倍的泛音.

16.6 驻电磁波

干涉和衍射现象是波动的特征，因此，物理学家总是把它们的存在作为一个过程能够解释为波动的证明. 由于这个原因，在十七世纪，当意大利科学家格里马耳第(Francesco Grimaldi, 1618—1663)在他对光的研究中观察到干涉和衍射时，就不能再忽视光的波动说了. 但是，直到十九世纪初，当杨、菲涅耳等人完成了在本章开始部分所述及的实验，并且为他们的实验提供了坚实的数学基础时，光的波动说才为人们普遍承认. 当时还不知道电磁波，认为光是一种叫做以太的，弥漫于一切物质的微妙介质中的弹性波. 直到十九世纪末，苏格兰物理学家麦克斯韦 (J. C. Maxwell, 1831—1879)才预言了电磁波的存在，而德国科学家赫兹(H. R. Hertz, 1857—1894)才利用产生驻电磁波的干涉实验，在实验方面证实了射频波段电磁波的存在. 后来又测定了电磁波

的速率，发现它等于光速．还发现电磁波的反射、折射和偏振都与光的情况相似．明显的结论是：光就是具有某些频率的电磁波．在当时，光学实际上不再是物理学的一个独立的分支，而成为电磁理论的一章．

为了说明驻电磁波的形成，我们假定一个振荡的电偶极子产生的波，垂直投射在一理想导体的平表面上（图 16-21）．取 X 轴作为传播方向，取 Y 和 Z 轴分别平行于电场和磁场，我们就得到一个其电场在 XY 平面内振荡的平面偏振波．这个入射波的电场平

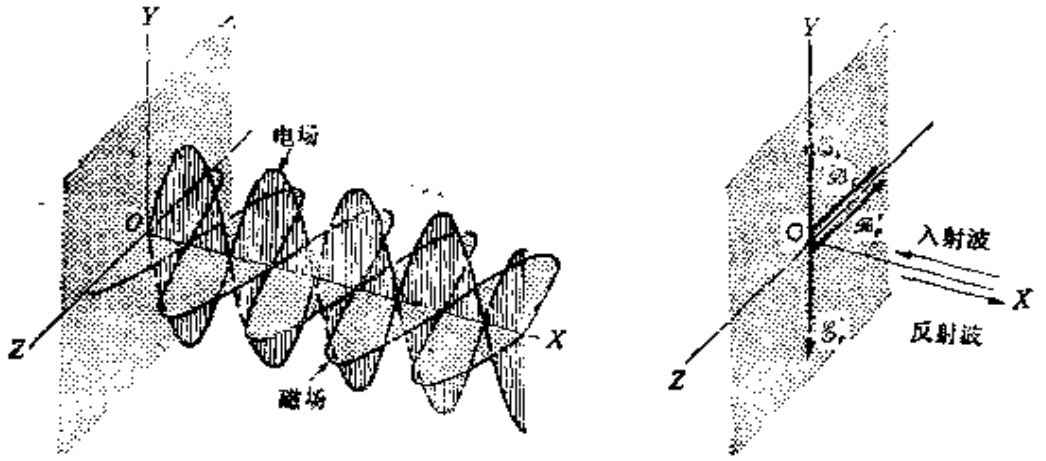


图 16-21　在一理想导体表面上反射时产生的驻电磁场．

行于这个导体的表面．但是，在一理想导体表面，电场必然垂直于导体；也就是说，电场不能具有切向分量（见第 2.5 节和例题 14.1）．为了使这个条件和入射波中电场的取向相容，唯一的办法是要求在导体表面处合电场 $\mathscr{E}$ 等于零．这个条件表示，在导体表面处反射波的电场必须和入射波的电场大小相等而方向相反；这样，在 $x=0$ 处就有 $\mathscr{E}=0$．这个条件在数学上相当于在第 16.5 节中讨论过的一端固定的弦中波的反射条件．既然在数学上是一样的，我们就可以利用一个和方程(16.20)的形式相同的方程，作为合电场：

$$\mathscr{E}=2\mathscr{E}_0\sin kx\sin\omega t.$$

磁场在 XZ 平面内振荡. 利用方程(11.4)，我们求出磁场的表达式为

$$\mathscr{B}=2\mathscr{B}_0\cos kx\cos\omega t,$$

式中$\mathscr{B}_0=\mathscr{E}_0k/\omega=\mathscr{E}_0/c$. 因此，这两个场在空间变化方面有一个相差 $\lambda/2$，在时间变化方面有一个相差 $P/2$. 由上面给出的$\mathscr{B}$的数学表达式可以看出，磁场在表面处有最大振幅. 这也可以从表面处的边界条件看出:参看图 16-21(b)，根据两个场相对于入射波的传播方向(沿$-X$轴)的相对取向可知，如果入射波的电场是沿着$+X$轴，则磁场必须沿着$-Z$轴. 为了使表面处的合电场为零，反射波的电场必定沿$-Y$轴. 既然反射波是沿$+X$轴传播，反射波的磁场就必定沿$-Z$轴. 这样一来，虽然在表面处电场是相消地干涉，但磁场却是相长地干涉.

在至表面的距离为 x 的地方，合成波的电场和磁场的振幅分别为 $2\mathscr{E}_0\sin kx$ 和 $2\mathscr{B}_0\cos kx$. 它们由图 16-21(a)中的阴影线表示. 在 $kx=n\pi$ 或 $x=n\lambda/2$ 的点处，电场为零，磁场有最大值. 在 $kx=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$ 或 $x=(2n+1)\lambda/4$ 的点处，电场有最大值，而磁场为零.

看一下赫兹在 1888 年怎样用他的简单设备证实这些理论预言，是很有教益的. 图 16-22 的左边示出赫兹振荡器. 变压器T使金属板C和C'充电. 这些金属板通过间隙G放电，这就成为一个偶极振子. 图中还示出$\mathscr{E}$场和$\mathscr{B}$场相对于传播方向的取向. 赫兹用一根短金属丝，弯成圆形，但留有一个小间隙，来观察电磁波. 这种装置叫做共振器. 这种实验中使用的共振器的直径必须远小于电磁波的波长. 当共振器的平面垂直于电磁波的磁场时(即在XY平面内)，变化着的磁场在共振器内感生一电动势;当这感生电

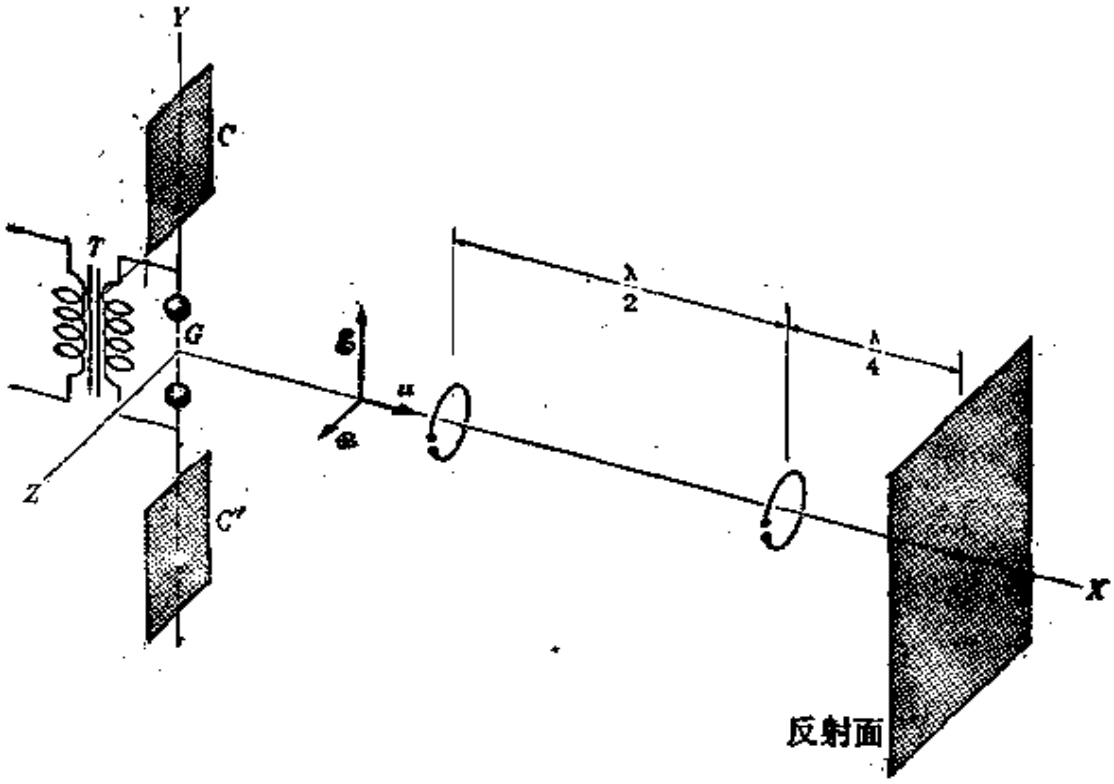


图 16-22　赫兹关于电磁波干涉的实验.

动势足够大时，在它的间隙中就会产生火花. 另一方面，如果共振器的平面平行于磁场(因而它的法线垂直于 Z 轴)，就不会感生电动势，在间隙中也就看不到火花.

为了产生驻电磁波，赫兹在 Q 处放置一个反射面(用良导体制成). 在这种情况下，当共振器放在磁场的波节处时，不论共振器的取向如何，它都不会显示出感生电动势(即没有火花). 然而，在波腹处，当共振器的取向垂直于磁场时，火花最强. 沿着直线 GQ 移动共振器时，赫兹发现了波节和波腹的位置，以及磁场的方向. 赫兹所得到的结果，符合于上述的理论分析. 通过测量两个相邻波节之间的距离，赫兹能够算出波长 λ. 由于他已经知道振荡器的频率，所以他能够利用关系式 $c=\lambda\nu$ 算出电磁波的速度. 赫兹用这种方法，获得了电磁波的传播速度的第一个实验值.

16.7 二维驻波

考虑一个矩形膜，它被紧张在一个框子上，因此膜的边缘是固定的．如果这个膜的表面受到扰动，波就沿一切方向传播，在边缘处被反射，从而产生干涉．我们假设一种特殊情况，即在这膜中只产生具有一个频率的平面波．我们还假定这些波平行于框的两个边传播，如图 16-23 所示．代替波节和波腹，我们得到波节线和波腹线，如图 16-23 中的 N 和 A 所示．在图 16-23(a) 中，这膜在左边 ($x=0$) 和右边 ($x=a$) 是固定的，而另外两边则是自由的．波沿 X 轴传播，既向左也向右传播，因此产生一系列平行于 Y 轴的波节线和波腹线．在 $x=0$ 和 $x=a$ 处，我们必定有节线．因此，驻波的条件与方程(16.33)相似，即

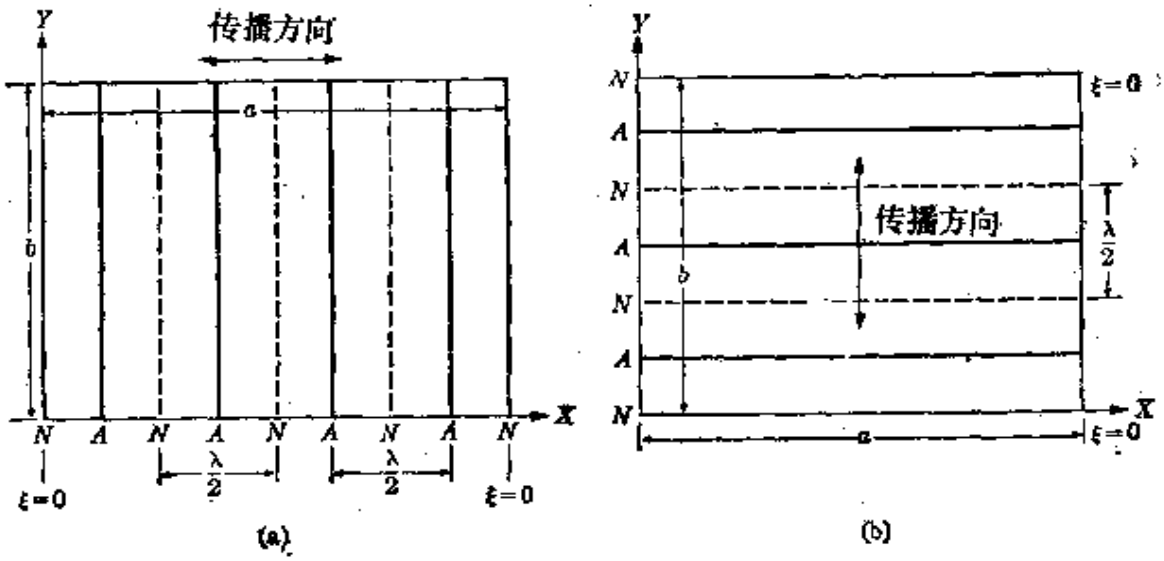


图 16-23　膜中的驻波．

$$ka=n\pi \quad 或 \quad \lambda=\frac{2a}{n}. \tag{16.43}$$

对应的频率为

$$\nu=\frac{v}{\lambda}=n\left(\frac{v}{2a}\right), \tag{16.44}$$

式中 v 是在例题 10.15 中给出的波沿膜表面的传播速度. 描述这些波的表达式与方程(16.32)相同:

$$\xi = A\sin kx\sin\omega t, \tag{16.45}$$

因为在数学上问题是一样的. 增加第二维并没有改变我们的边界条件,边界条件仍然是在 $x=0$ 和 $x=a$ 处 $\xi=0$. 对称性表明,只要膜在平行于传播方向的边上没有固定,坐标 y 就不起作用.

在图 16-32(b)中,膜在底部($y=0$)和顶部($y=b$)固定. 当波沿 Y 轴传播时,波节线和波腹线平行于 X 轴. 驻波条件与方程(16.43)相似,不过以 b 代替 a,于是得出

$$kb = n\pi \quad 或 \quad \lambda = \frac{2b}{n}, \tag{16.46}$$

对应的频率为

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = n\left(\frac{v}{2b}\right); \tag{16.47}$$

这些频率不同于方程 (16.44) 中给出的平行于 X 轴传播的波的频率. 这种驻波的方程为

$$\xi = A\sin ky\sin\omega t. \tag{16.48}$$

其次,考虑一个四边都固定的膜,平面波沿任意方向在它的表面上传播. 我们知道,二维平面波的表达式为[在方程(10.63)中,令 $z=0$]:

$$\xi = \xi_0\sin[\omega t - (k_1x + k_2y)],$$

式中按我们现在的规定,把时间因子写在前面. 量 k_1 和 k_2 是一个矢量 $\boldsymbol{k}$ 的两个分量. $\boldsymbol{k}$ 平行于波在 XY 平面内的传播方向,它的长度为 $k=2\pi/\lambda=\omega/v$. 于是有

$$k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}. \tag{16.49}$$

对于一条由分量 k_1 和 k_2 表征的初始射线 PQ(图 16-24),有一条由 k_1 和 $-k_2$ 表征的反射射线 QR. 从 R 到 S,这射线由 $-k_1$ 和 $-k_2$

表征. 从 S 往前去，这射线由 $-k_1$ 和 k_2 表征. 在这条射线的以后的反射中，不会出现 k_1 和 k_2 的新组合. 于是我们得出结论：在膜的表面上，由于波在四条边上的反射，存在着一组四个波. (这个情况不同于一维问题，在一维问题中只出现两个波.)这四个波必须这样干涉，以使在 $x=0$ 和 a，$y=0$ 和 b 处，ξ 的合值为零. 直接的代数计算(见例题 16.7)表明，k_1 和 k_2 的值满足如下条件：

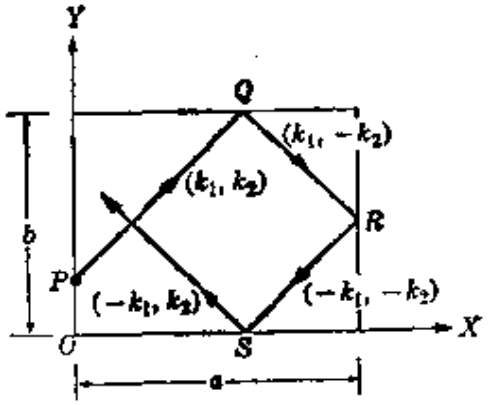


图 16-24 一个波在一矩形膜中的相继反射.

$$k_1 a = n_1 \pi \quad 或 \quad k_1 = \frac{n_1 \pi}{a}$$

和

$$k_2 b = n_2 \pi \quad 或 \quad k_2 = \frac{n_2 \pi}{b}, \tag{16.50}$$

式中 n_1 和 n_2 为整数. 把这些结果代入方程(16.49)中，则得

$$k = \pi \sqrt{\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2}}. \tag{16.51}$$

可能的波长由 $\lambda = 2\pi/k$ 给出，或

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2}}. \tag{16.52}$$

可能的频率为 $\nu = v/\lambda$，所以

$$\nu = \frac{v}{2} \sqrt{\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2}}. \tag{16.53}$$

注意，可能的频率不再是基频的整数倍，而是一个更不规则的数列.

利用方程(16.50)得到的节线的图样由 $k_1 x = n_1' \pi$ 和 $k_2 y = n_2' \pi$ 给出，式中 n_1' 和 n_2' 分别为等于或小于 n_1 和 n_2 的整数，并形成图

16-25 所示的矩形图样.

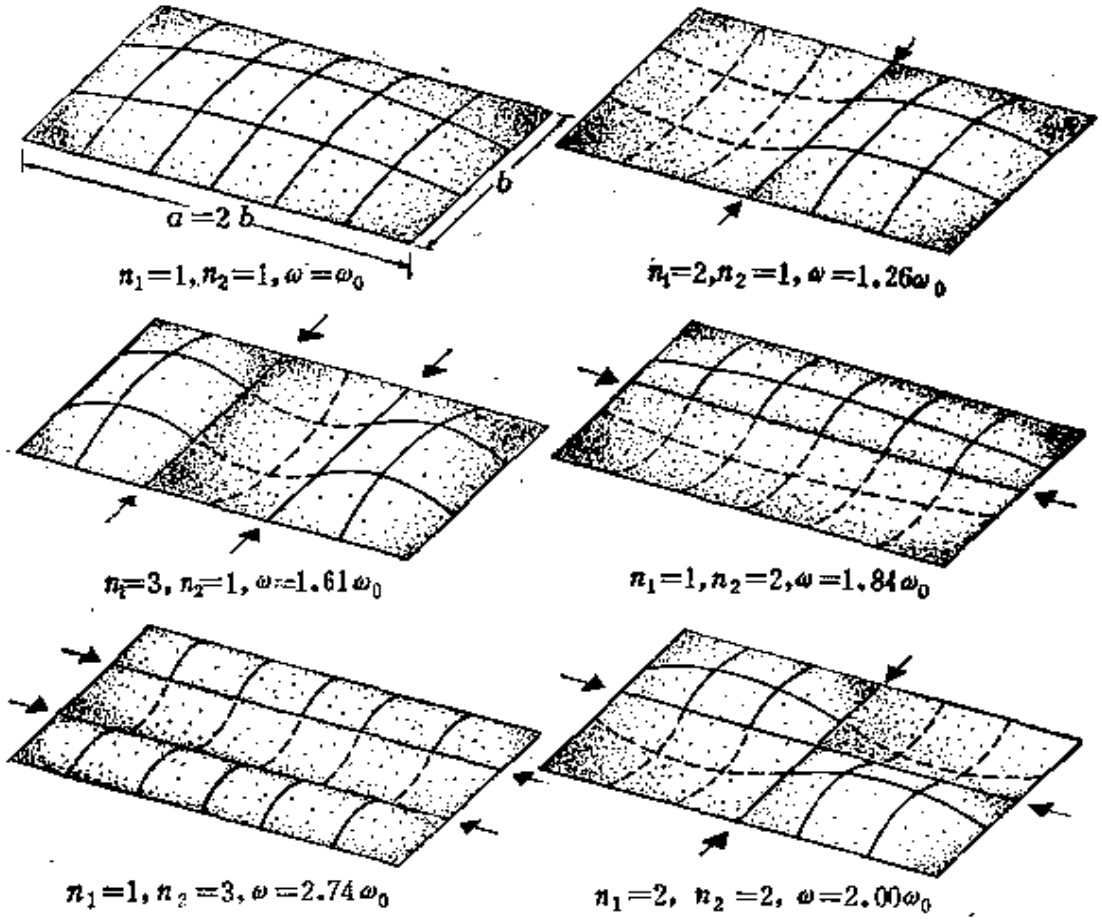


图 16-25　矩形膜的前几个振动模. 箭头指出节线. 每一个模的频率表示为基频 ω_0 的函数.

圆形膜的问题在数学上更复杂. 但是,我们再一次发现,只有某些频率是可能的. 对称性表明,现在节线是一些圆和半径. 图 16-26 中示出某些可能的振动模的节线.

例题 16.7　条件(16.50)的推导.

解　我们已经指出,在图 16-24 的膜上存在着四个波的叠加; 这四个波对应于$\pm k_1$和$\pm k_2$的四种可能的组合. 这一组四个波给出一个合 ξ:

$$\begin{aligned}\xi=&\xi_0\sin[\omega t-(k_1x+k_2y)]\\&+\xi_0'\sin[\omega t-(k_1x-k_2y)]\\&+\xi_0''\sin[\omega t-(-k_1x-k_2y)]\\&+\xi_0'''\sin[\omega t-(-k_1x+k_2y)],\end{aligned}\qquad(16.54)$$

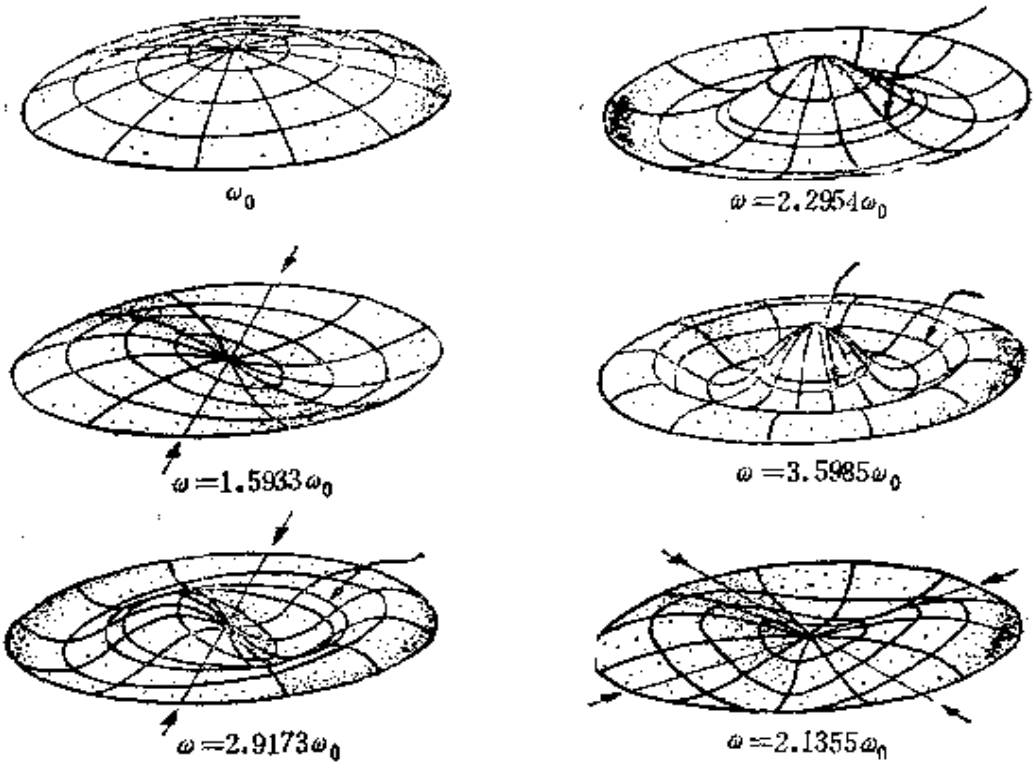


图 16-26　圆形膜的一些可能的振动模．箭头指出节线．每一个模的频率表示为基频 ω_0 的函数．

上式相当于一维驻波的方程(16.19)．现在，在 $x=0$ 的一切点，我们必须有 $\xi=0$．在方程(16.54)中，令 $x=0$，并组合相当的项，可以写出

$$\xi=(\xi_0+\xi_0'')\sin(\omega t-k_2y)+(\xi_0'+\xi_0')\sin(\omega t+k_2y)=0,$$

上式要求

$$\xi_0+\xi_0''=0,\quad \xi_0'+\xi_0'=0. \tag{16.55}$$

同理，在 $y=0$ 的一切点，我们必须有 $\xi=0$，于是由方程(16.54)得出

$$\xi=(\xi_0+\xi_0')\sin(\omega t-k_1x)+(\xi_0'+\xi_0'')\sin(\omega t+k_1x)=0,$$

上式要求

$$\xi_0+\xi_0'=0,\quad \xi_0'+\xi_0''=0. \tag{16.56}$$

把方程(16.55)和(16.56)结合起来，我们得到

$$\xi_0=-\xi_0'=\xi_0'=-\xi_0'',$$

上式给出每一次反射的适当的相位改变，这个结果与弦情况下的结果一致．因此，方程(16.54)变为

$$\begin{aligned}\xi=\xi_0\{&\sin[\omega t-(k_1x+k_2y)]-\sin[\omega t-(k_1x-k_2y)]\\&+\sin[\omega t-(-k_1x-k_2y)]-\sin[\omega t-(-k_1x+k_2y)]\}.\end{aligned}$$

利用数学附录中的方程 (M. 12)，把上面公式的每一行变换为一个乘积，则得

$$\xi=2\xi_0[-\sin k_2 y\cos(\omega t-k_1 x)+\sin k_2 y\cos(\omega t+k_1 x)]$$
$$=2\xi_0\sin k_2 y[-\cos(\omega t-k_1 x)+\cos(\omega t+k_1 x)].$$

再把上式中两个余弦函数之差变换为一个乘积，则得

$$\xi=-4\xi_0\sin k_1 x\sin k_2 y\sin\omega t; \tag{16.57}$$

上式是与方程 (16.20) 相当的二维表达式. 上式前面的负号没有特殊意义. 检验第一个边界条件时，我们令 $x=0$ 或 $y=0$，结果得到 $\xi=0$. 这正是我们所要求的.

现在我们必须检验第二组边界条件，即对于 $x=a$ 或 $y=b$，$\xi=0$. 这些条件要求，或者 $\sin k_1 a=0$，或者 $\sin k_2 b=0$；于是得出 $k_1 a=n_1\pi$ 和 $k_2 b=n_2\pi$. 这些正是条件(16.50).

16.8 三维驻波. 共振腔

考虑一个边长为 a、b 和 c 的矩形空腔，它具有理想的反射壁(图 16-27)；因此，在所有六个面上 $\xi=0$. 一个空间中的平面波由一个垂直于波平面的矢量 $\boldsymbol{k}$ 表征，$\boldsymbol{k}$ 的三个分量 k_1、k_2 和 k_3 沿着三个轴. 当在这空腔内部产生一个波时，由于这个波相继在所有的面上反射，而在腔内建立起一组八个波；这八个波来自 $\pm k_1$、$\pm k_2$ 和 $\pm k_3$ 之间的八种不同的可能的组合. 如果 $\boldsymbol{k}$ 的分量 k_1、k_2 和 k_3 具有适当的值，则这八个波的干涉或叠加就会产生驻波. 通过与方程(16.50)类比，可知这些值是

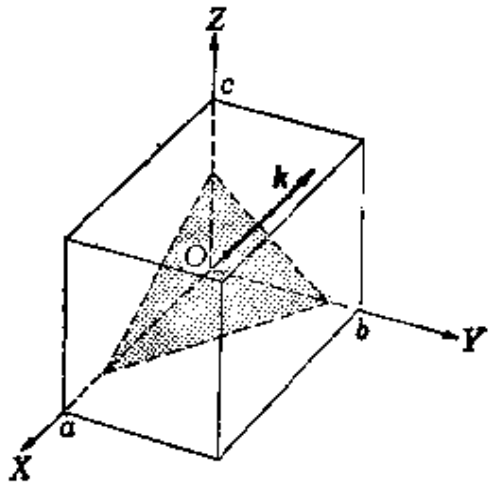


图 16-27

$$k_1 a=n_1\pi,\quad k_2 b=n_2\pi,\quad k_3 c=n_3\pi \tag{16.58}$$

或者

$$k_1=\frac{n_1\pi}{a},\quad k_2=\frac{n_2\pi}{b},\quad k_3=\frac{n_3\pi}{c},$$

式中 n_1、n_2 和 n_3 都是整数. 由于 $k=\sqrt{k_1^2+k_2^2+k_3^2}$，我们可以写出

$$k=\pi\sqrt{\frac{n_1^2}{a^2}+\frac{n_2^2}{b^2}+\frac{n_3^2}{c^2}}. \tag{16.59}$$

由于 $\nu=v/\lambda=vk/2\pi$，所以这个空腔中的驻波的可能频率为

$$\nu=\frac{v}{2}\sqrt{\frac{n_1^2}{a^2}+\frac{n_2^2}{b^2}+\frac{n_3^2}{c^2}}. \tag{16.60}$$

由此可见，象图 16-27 所示那样一个空腔将共振，腔内驻波的频率由方程(16.60)给出.

在球形或柱形空腔的情况下，数学处理更复杂，但是，我们再次看到，只有某些频率是可能的.

我们所得到的关于空腔内驻波的结果，有许多应用. 例如，在声学中利用共振腔来进行声分析. 电磁波的共振腔的腔壁是用良导电体制成的，所以腔壁是可能的最佳反射面. 这些共振腔能够维持具有确定频率的驻电磁波，这种波的衰减(即反射所引起的能量损耗)非常小. 因此，共振腔可用作储存电磁能的空间. 由于电磁波的横向特性，空腔中电磁驻波的详细理论，比我们这里的讨论稍复杂一些. 但是，诸如方程(16.60)这样一些结果，仍然一样. 这些空腔被用于测量或分析频率(其方式与声学共振腔相同)，控制振荡电路的频率，以及测定充满空腔的材料的性质.

例题 16.8 确定一个边长为 a 的立方形共振腔中频率等于或小于 ν 的不同振荡模的数目.

解 如果这空腔是立方形的，则在方程(16.60)中 $a=b=c$，因而可能的频率为

$$\nu=\left(\frac{v}{2a}\right)\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2}$$

或

$$n_1^2+n_2^2+n_3^2=4\nu^2a^2/v^2. \tag{16.61}$$

在坐标为 n_1、n_2 和 n_3 的坐标系中（图 16-28），方程(16.61)代表一个半径为 $2\nu a/v$ 的球．我们的问题就是求出能够满足下列关系式的整数 n_1、n_2 和 n_3 的一切可能的组合：

$$n_1^2+n_2^2+n_3^2\leqslant 4\nu^2a^2/v^2.$$

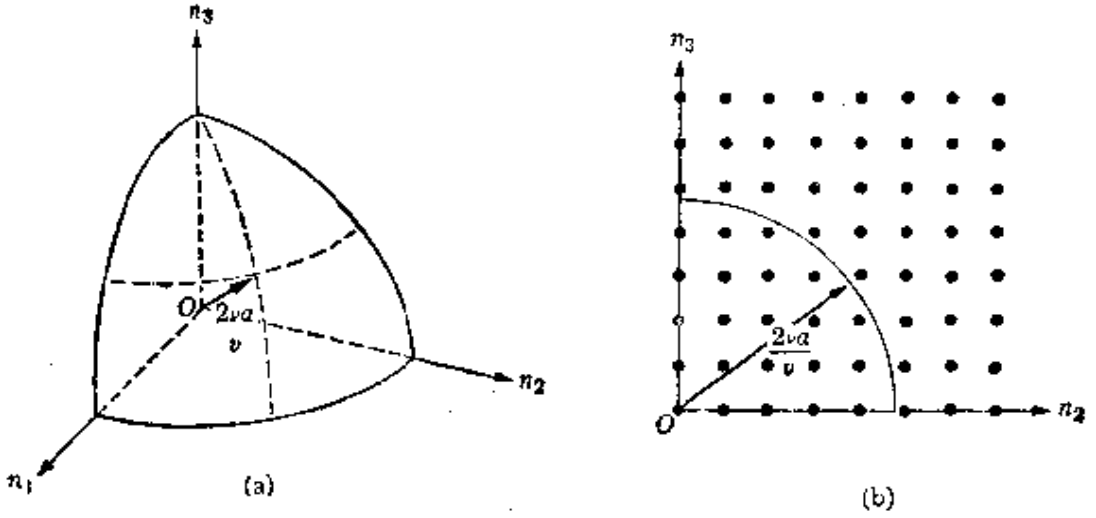


图 16-28

当半径非常大时，可能的组合数目就等于图 16-28(a) 所示球体的八分之一的体积，因为对于每一组整数 n_1、n_2 和 n_3，我们都可以联系一个单位体积的格子，如图 16-28(b) 中的圆点所示．于是频率等于或小于 ν 的振荡模的数目为

$$N_\nu=\frac{1}{8}\frac{4\pi}{3}\left(\frac{2\nu a}{v}\right)^3=\frac{4\pi\nu^3a^3}{3v^3}.$$

由于 a^3 是这空腔的体积，所以每单位体积的振荡模的数目为

$$n_{\nu,L}=\frac{4\pi\nu^3}{3v^3}. \tag{16.62}$$

上式中的下角标 L 表示这个结果仅适用于纵波．如果是横波，则对于每一个振荡模有两个不同的独立的偏振态，因而代替方程(16.62)，我们必须写出

$$n_{\nu,T}=\frac{8\pi\nu^3}{3v^3}. \tag{16.63}$$

有时，知道频率范围 $d\nu$ 内的振荡模的数目，是很方便的．这个量可以写作 $dn_\nu=g(\nu)d\nu$ 的形式．将方程(16.62)微分，我们得到

$$dn_{\nu,L}=g_L(\nu)d\nu=\frac{4\pi\nu^2}{v^3}d\nu; \tag{16.64}$$

对于横波，由方程(16.63)我们得到

$$dn_{\nu,T}=g_T(\nu)\,d\nu=\frac{8\pi\nu^2}{v^3}d\nu. \qquad (16.65$$

在某些计算中，例如在分析被陷获在一空腔中的辐射的振荡模的数目时，或者在讨论固体中的原子振荡时，上述结果是非常有用的.

16.9 波　　导

上面讨论过的空腔中只容许驻波存在. 但在某些称为波导的结构中，也有产生行波的可能性. 波导是两端开口的长空腔. 波在一端输入，在另一端接收. 我们将详细讨论一种简单的纵波波导：它由两个间距为 a 的平行平面组成(图 16-29). 如果在这个腔内产生一个波，它与两个平面所成的角由矢量 $\boldsymbol{k}$ 的两个分量 k_1 和 k_2 决定 (k_1 和 k_2 分别平行和垂直于这两个平面)，则这个波将在两个限制面上相继反射，在这两个平面之间跳跃前进. 由于这个空间在平行于两个平面的方向上是不受限制的 (不同于空腔中的

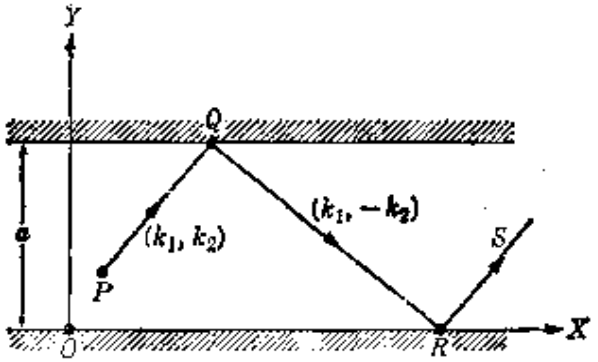


图 16-29　射线在两个平行的反射平面之间的传播.

情况)，所以这个波将继续向右前进. 我们取 X 轴平行于反射面，Y 轴垂直于反射面，因而矢量 $\boldsymbol{k}$ 在 XY 平面内. 在图 16-29 中，我们画某一条射线的路径. 在路径 PQ 上，这条射线由分量 k_1 和 k_2 表征；在从 Q 至 R 的路径上，由分量 k_1 和 $-k_2$ 表征. 从 R 至 S，又由 k_1 和 k_2 表征，依此类推. 于是我们得出结论：在两个反射面之间的空间里，存在着两组行波，分别对应于 k_1, k_2 和 $k_1, -k_2$. (要记

住，在二维驻波，例如膜上的驻波的情况下，我们有四个波，那是因为在左右两端的反射产生另外两个波.）这两个波干涉而产生一合波动. 如在例题 16.9 中将要证明的，这个合波动的表达式为：

$$\xi=-2\xi_0\sin k_2y\cos(\omega t-k_1x), \tag{16.66}$$

式中

$$k_2=\frac{n\pi}{a}, \tag{16.67}$$

这是为了满足边界条件：在 $y=a$ 处 $\xi=0$.

方程 (16.66) 与我们前面关于其他驻波得到的结果有着深刻的不同：这就是 x 坐标没有和时间分离开来，而仍以 $\cos(\omega t-k_1x)$ 的形式出现. 这一项对应于一个沿 X 轴行进的波，其相速度为

$$v_p=\frac{\omega}{k_1}=\left(\frac{k}{k_1}\right)v. \tag{16.68}$$

由于 $k_1\leqslant k$（因为 k_1 是 k 的分量），所以方程(16.68)表示：沿空腔行进的波的相速度，大于这个波在自由空间中的相速度 $v=\omega/k$. 因此，对于电磁波，相速度会大于 c. 现在，从 $k^2=k_1^2+k_2^2$ 和方程(16.67)，我们得到

$$k^2=k_1^2+\frac{n^2\pi^2}{a^2},$$

或

$$k_1=\sqrt{k^2-\frac{n^2\pi^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{\omega^2}{v^2}-\frac{n^2\pi^2}{a^2}}, \tag{16.69}$$

因为 $k=\omega/v$. 利用方程(10.55)和(16.69)，得出与方程(16.68)所给出的相速度联系着的群速度为

$$v_g=\frac{d\omega}{dk_1}=\frac{k_1}{\omega}v^2=\left(\frac{k_1}{k}\right)v. \tag{16.70}$$

由于 $k_1\leqslant k$，所以 $v_g<v$. 用方程 (16.70)乘方程 (16.68)，则得 $v_pv_g=v^2$；对于真空中的电磁波($v=c$)，$v_pv_g=c^2$. 在前面，在例题

12.3 中，对于另一种情况，我们曾得到这个结果．于是我们看到，一个电磁波的波导，即使是空的，也起着色散介质的作用，其折射率小于 1，因而相速度大于 c，但群速度小于 c．

方程(16.69)也表明波导的另一个重要性质．由于 k_1 必须是一个实数，所以，为了使一个波能够沿波导传播，必须有 $\omega^2/v^2 \geqslant n^2\pi^2/a^2$，由此得出

$$\omega \geqslant n\frac{\pi v}{a} \quad 或 \quad \nu \geqslant \frac{nv}{2a}. \tag{16.71}$$

换句话说，只有频率满足方程(16.71)的那些波才能沿着这个波导传播．每一个模由 n 的值决定；对于每一个模，有一个截止频率，它等于 $nv/2a$；低于这个频率，就不可能传播．这些波导起着滤频器的作用．

虽然波在波导内部沿 X 轴传播，但它的振幅在 Y 方向上受方程(16.66) 中的因子 $\sin k_2 y$ 横向调制．图 16-30 中示出 $n=1, 2$

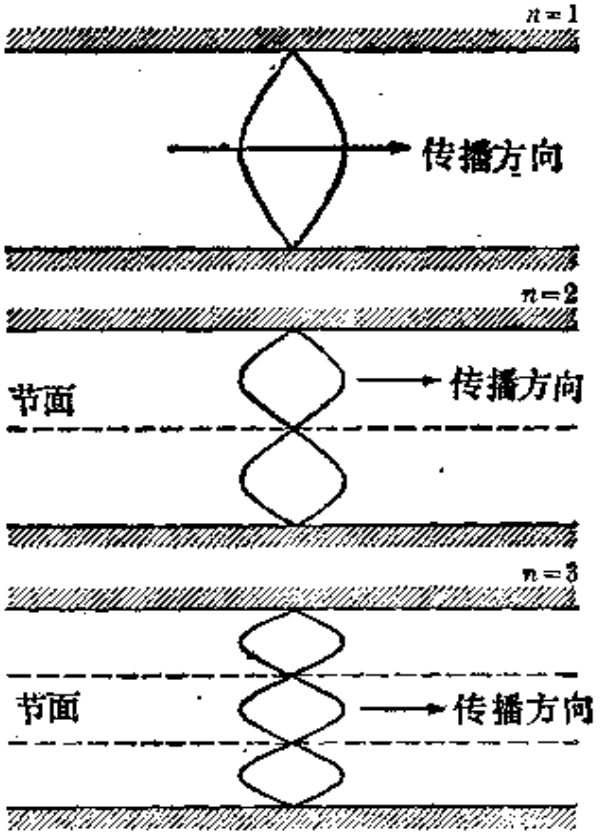


图 16-30　一个波在两个平行的反射平面之间的前三个传播模．

和 3 时，振幅的横向变化. 在实际应用中，波导的截面或者是矩形的，或者是圆形的. 就沿波导轴的相速度和截止频率来说，这两种形状给出类似的结果.

虽然我们的讨论对于任何种类的波的波导都适用，但电磁波的情况有某些特点. 由于电磁波的横向特性，对于每一个 k，有两个可能的模，取决于电场 $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ 相对于波导侧壁的相对取向. 在微波波段，广泛利用电磁波波导来传输信号. 这些波导是用极好的导体材料制成的.

值得注意的是，地球表面与地面上方约 80 km 处的电离层之间的区域，形成一个波导，它使无线电波沿着地面的曲线传播，如图 16-31 所示.

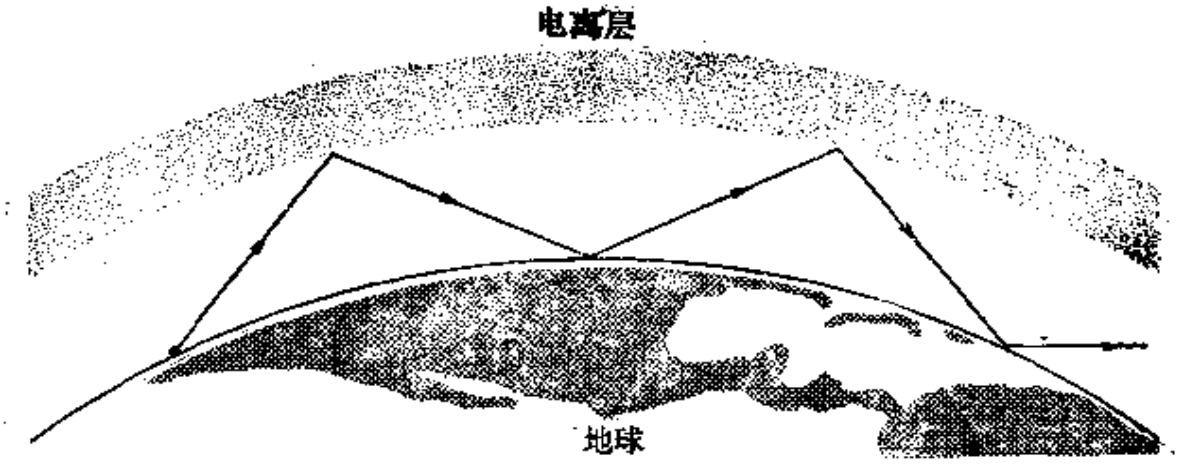


图 16-31　电离层和地球起着无线电波波导的作用.

在光学频段使用的平行平面波导的一个简单的例子，是一对平行的反射镜，例如在某些理发馆看到的. 另一种光学波导是由叫做光学纤维的透明纤维组成的，这种光学纤维的直径只有几微米. 这些纤维是用玻璃或者石英制成的，不过其他材料，例如尼龙，也在试验之中. 一条光线在纤维的一端进入之后，经过若干次反射，沿着这纤维的轴线行进，最后在另一端射出 (图 16-32). 当这种纤维排列成束时，能够把象从一点传输到另一点.

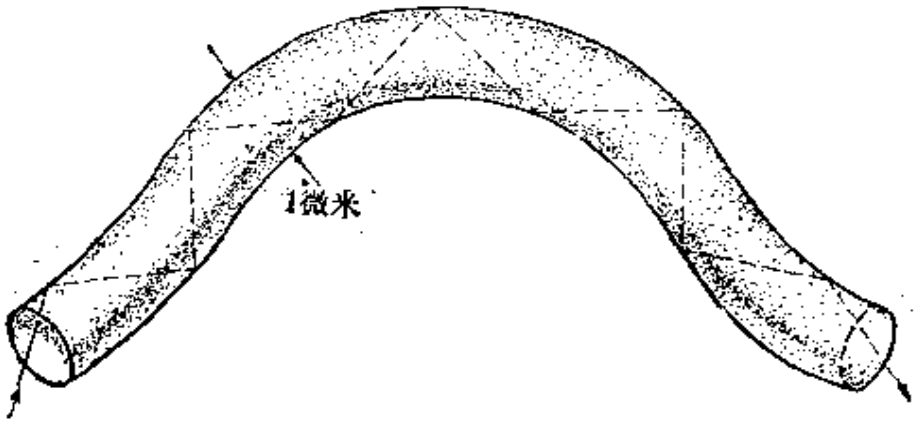


图 16-32　光学纤维起着光波导的作用.

声学波导也是很常见的. 例如建筑物供暖系统中的空气管道，就起着声学波导的作用，它们能够把炉子的噪音或者来自一个房间的声音传递到另一个房间. 内耳实质上就是一个声学波导.

例题 16.9　方程(16.66)和(16.67)的推导.

解　沿图 16-29 所示波导传播的两个波，产生一个由下列表达式表示的合成波:

$$\xi=\xi_0\sin[\omega t-(k_1x+k_2y)]+\xi_0'\sin[\omega t-(k_1x-k_2y)]. \qquad (16.72)$$

此式应与方程(16.54)加以比较. 为了确定 ξ_0'，我们加上如下条件: 在下表面上所有的点，即在 $y=0$ 处，$\xi=0$. 在方程(16.72)中，令 $y=0$，则得

$$\xi=(\xi_0+\xi_0')\sin(\omega t-k_1x)=0,$$

因此，$\xi_0+\xi_0'=0$，或者 $\xi_0'=-\xi_0$. 根据我们对以前的类似情况的经验，可以预期这个结果. 于是方程(16.72)变为

$$\xi=\xi_0\{\sin[\omega t-(k_1x+k_2y)]-\sin[\omega t-(k_1x-k_2y)]\}.$$

把上式中两个正弦函数之差化为它们的积，则得

$$\xi=-2\xi_0\sin k_2y\cos(\omega t-k_1x). \qquad (16.73)$$

令 $y=0$，就证实我们的边界条件在下表面上被满足. 在上表面处 ($y=a$) 的边界条件也是 $\xi=0$. 这要求 $\sin k_2a=0$，于是得出 $k_2a=n\pi$，或者 $k_2=n\pi/a$. 但是，对于 X 坐标，没有边界条件.

例题 16.10　平面平行波导中的电磁波.

解　波导中的电磁波，由于它们的横向特性和在波导表面上的边界条件，而具有自己的某些特点. 这些边界条件是: (1)电场垂直于导体表面，(2)

磁场与导体表面相切. 对于一个平面波导，麦克斯韦方程的满足这些边界条件的可能的解，由方程(11.12)给出，即为 $\mathscr{E}_y=\mathscr{E}_0\sin(\omega t-kx)$，$\mathscr{B}_z=\mathscr{B}_0\sin(\omega t-kx)$，其中 $\mathscr{B}_0=\mathscr{E}_0/c$. 在图 16-33 中，直线表示电场的力线，圆点和叉号表示磁场的力线. 在这种情况下，波导并不改变波的相速度，波传播的相速度还是 $c=\omega/k$，与在自由空间中传播时相同；波导仅仅限制波阵面.

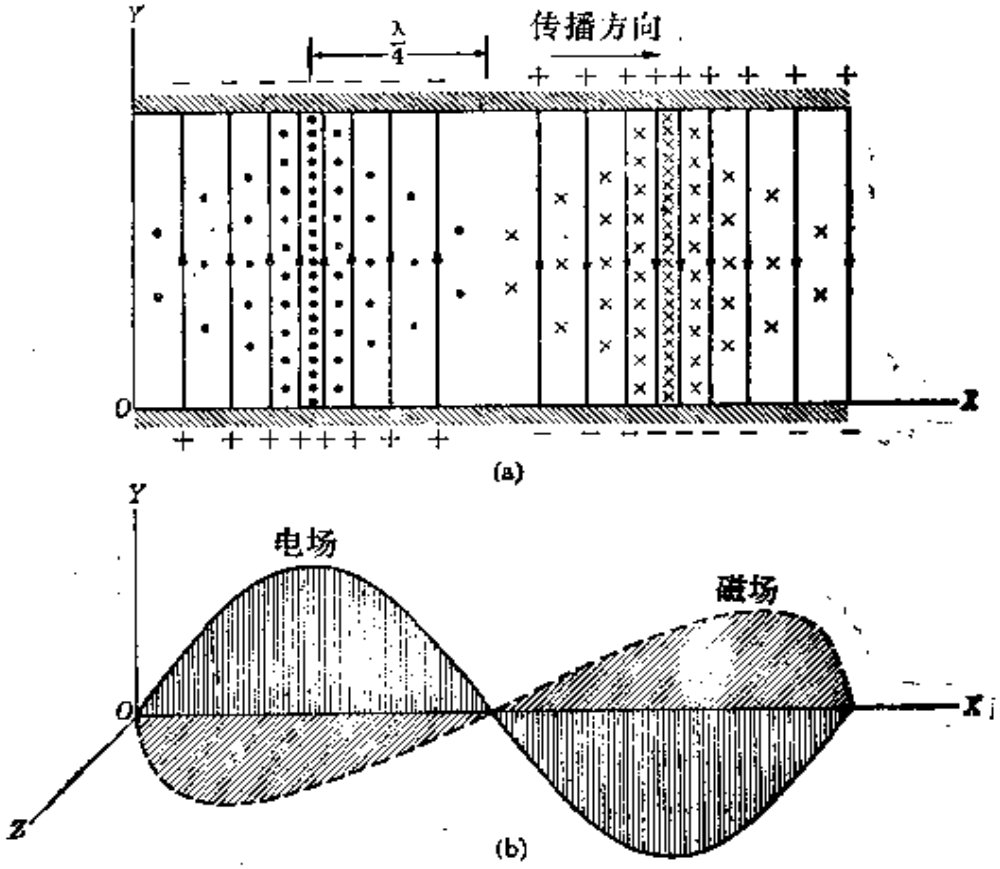


图 16-33 (a)平行于两个反射平面（这两个反射平面平行于 XZ 平面)传播的电磁波在 XY 平面内的电力线(竖直线)和磁力线(圆点和叉号). (b)在(a) 中画出的波的电场和磁场.

但是，麦克斯韦方程还有另外一些解也满足我们的边界条件. 一个可能的解是：

$$\mathscr{E}_x=\mathscr{E}_y=0,$$

$$\mathscr{E}_z=\mathscr{E}_0\sin k_2y\cos(\omega t-k_1x),$$

$$\mathscr{B}_x=-\frac{k_2}{\omega}\mathscr{E}_0\cos k_2y\sin(\omega t-k_1x), \tag{16.74}$$

$$\mathscr{B}_y = -\frac{k_1}{\omega}\mathscr{E}_0 \sin k_2 y \cos(\omega t - k_1 x),$$

$$\mathscr{B}_z = 0.$$

把这个解直接代入麦克斯韦方程中，就可证明它满足麦克斯韦方程．这个解叫做TE(横向电场)解，因为电场垂直于传播方向，而磁场则在有效传播方向上(即X轴)有一个分量．然而，电场和磁场是互相垂直的．为了满足两个导电平面上的边界条件，我们必须令 $y=0$ 和 $y=a$ 处 $\mathscr{E}_z=0$ 和 $\mathscr{B}_y=0$．第一个条件显然是满足的；第二个条件则要求 $\sin k_2 a=0$，或 $k_2 a=n\pi$，这样就得到方程(16.67)所表示的条件．图 16-34(a) 中示出最低的 TE 模($n=1$)的力线．电场的力线是平行于导电平面(即垂直于图面)的直线，因此，用圆点或叉号表示．磁场的力线是闭曲线．每个图样占据有效波长 $2\pi/k_1$ 的一半，相邻图样的相差为 π．这些图样以相速度 $v_p=\omega/k_1$ 沿波导传播．

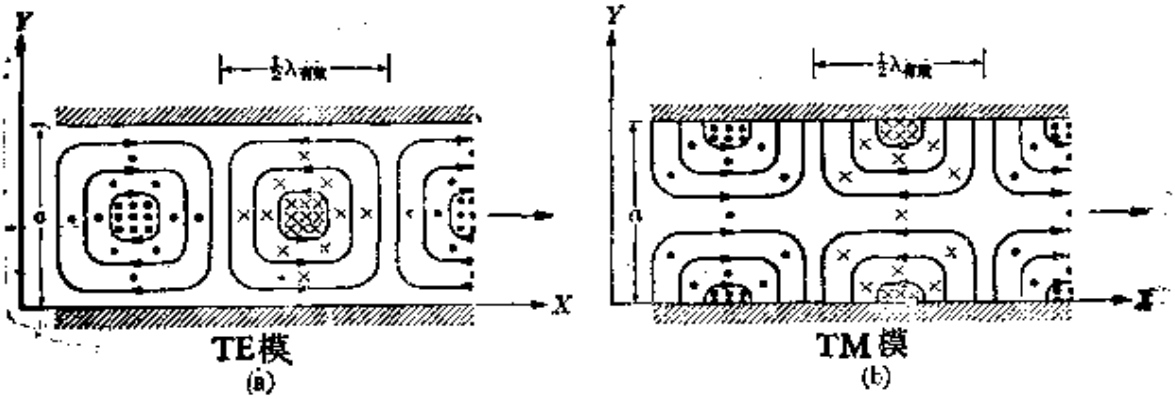


图 16-34　电磁波的波导．(a)电场垂直于图面，即 TE 模．(b)磁场垂直于图面，即 TM 模．

麦克斯韦方程的另一个可能的解是

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}_x &= -(k_2/k_1)\mathscr{E}_0 \sin k_2 y \sin(\omega t - k_1 x),\\
\mathscr{E}_y &= \mathscr{E}_0 \cos k_2 y \cos(\omega t - k_1 x),\\
\mathscr{E}_z &= 0,\\
\mathscr{B}_x &= \mathscr{B}_y = 0,\\
\mathscr{B}_z &= (\omega/k_1 c^2)\mathscr{E}_0 \cos k_2 y \cos(\omega t - k_1 x).
\end{aligned} \tag{16.75}$$

这个解也能够通过直接代入麦克斯韦方程来验证．这第二个解用 TM(横向磁场)来表示，因为磁场垂直于传播方向．然而，电场有一个分量沿着有效传播方向．这两个场保持相互垂直．为了满足导电平面处的边界条件，我们必须使在 $y=0$ 和 $y=a$ 处 $\mathscr{E}_x=0$．第一个条件自然地被满足，第二个条件再一次要求 $\sin k_2 a=0$，即 $k_2 a=n\pi$，于是又得到方程(16.67)所表示的条件．因此，

两种模具有相同的截止频率.

图 16-34(b)中示出最低的($n=1$)TM 模. 然而，现在磁场的力线是平行于导电平面(即垂直于图面)的直线，并用圆点和叉号表示；电场的力线则对应于图中所示的图样. 如在 TE 模的情况，每个图样占据有效波长 $2\pi/k_1$ 的一半，这些图样以相速度 $v_p=\omega/k_1$ 沿波导传播.

习　题

16.1　两条相距 10^{-3}m 的狭缝用波长为 6.5×10^{-7}m 的红光照明. 在一个距狭缝 1 m 的屏上观察干涉条纹. (a) 求两亮条纹之间的距离和两暗条纹之间的距离. (b) 确定第三条暗条纹和第五条亮条纹至中央条纹的距离.

16.2　利用一个菲涅耳双棱镜(图 16-4)和波长为 6.0×10^{-7}m 的光，在一个离双棱镜 0.80m 的屏上产生干涉条纹. 试求这个双棱镜所产生的两个象之间的距离，设 21 个条纹在这屏上所占的距离为 2.4×10^{-3}m.

16.3　图 16-35 所示的装置叫做洛埃镜，它能产生干涉图. 相干光源是 S_1 和它的象 S_2 (S_2 是在这玻璃板的上表面的反射所产生的象). 由此可见，干涉光线是直接来自光源的光线和从玻璃板上反射的光线. (a)如果零程差(亦即 $\delta=0$)对应的条纹是(i)亮的，(ii)暗的，你对反射所引起的相位变化的结论是什么？ (b)在实际实验中，得到的是结果(ii). 试根据第 14.2 节的讨论，说明这个结果是可以预期的.

16.4　在一洛埃镜中，狭缝 S_1 和它的虚象 S_2 位于距该镜左端 0.20m处的平面内(见图 16-35). 此镜长 0.3m，其右端放一个屏. 试计算从这一端至第一个光极大值的距离，设从 S_1 至镜平面的垂直距离为 2×10^{-3}m，$\lambda=7.2\times10^{-7}$m.

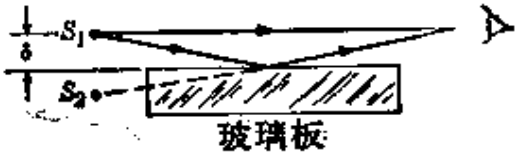


图　16-35

16.5　如图 16-36(a)所示，两个光源 S_1 和 S_2 位于一条垂直于一个屏的直线上，其间距为 a. 试讨论屏上的干涉图. 在实验上，这两个光源可以是一个光源在一薄云母片的两个面上的反射所产生的两个象 (图 16-36b). 这种装置叫做坡耳干涉仪.

16.6　两个同步的声波源发出频率为 680Hz 的等强度的声波. 声波的

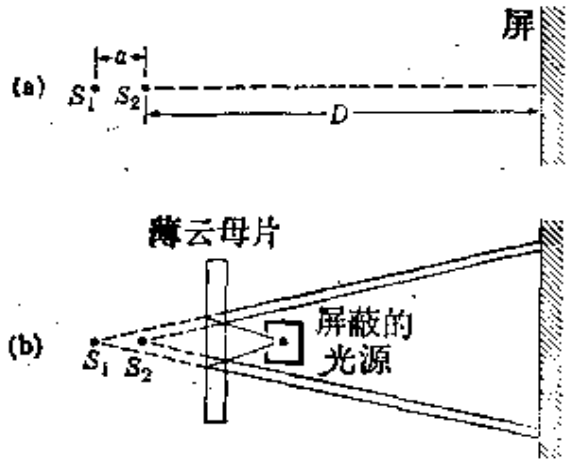


图 16-36

速度为 340m·s^{-1}. 试求在下列各种情况下强度极小值的位置: (a)在一条通过这两个源的直线上. (b)在垂直平分两个源的连线的平面上, (c)在包含这两个源的平面上. (d)在这些极小值中会有强度等于零的?

16.7 射电天文学中使用的一种干涉仪装置, 是由两个相隔一定距离的射电望远镜组成的. 这两个望远镜的天线能够指向不同的方向, 但总是保持平行. 天线接收的信号被传输到接收台, 并在这里混合(图 16-37). (a)证明: 合成信号有极大值的入射方向由方程(16.11)给出. (提示: 这个情况正好和图 16-3 所示两个源的情况相反.) (b) 画出信号强度随角 θ 变化的极坐标图.

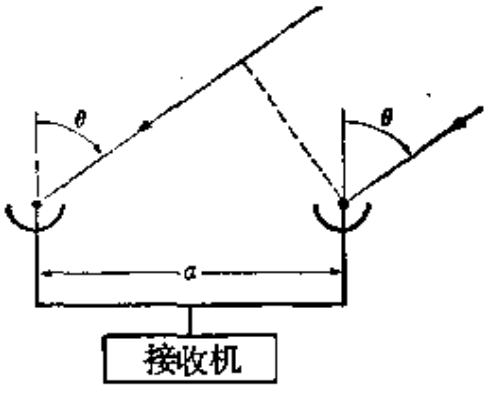


图 16-37 射电干涉仪装置.



图 16-38 安装在西弗吉尼亚州格林班克的二元射电干涉仪.

16.8 图 16-38 中示出安装在美国西弗吉尼亚州格林班克的一台射电干涉仪. 它的工作波长为 0.11 m. 两个射电望远镜之间的距离 a 可以调节

到相隔达 2.7×10^{8}m. 试求：当两个望远镜的间距最大时，中央强度极大所张的角.

16.9 假定，代替杨氏实验中的两条平行狭缝，我们有三条间距相等(均为 a)的平行狭缝. 试讨论在远处的屏上观察到的干涉图的强度分布.

16.10 在源的排列如图 16-12 所示的情况下，求次级极大相对于主极大的强度. (提示：可以证明，第一个次级极大出现在 $\theta\simeq48°$ 处.)

16.11 (a)在图 16-12 所示的情况下，要产生一个"端射"式图样，亦即主极大在 $\theta=\pm\pi/2$ 方向上的图样，试求源的间距. (b) 求次级极大的位置. (c)画出强度的角分布图.

16.12 第一台多元射电干涉仪，是克里斯琛孙 (W. N. Christiansen) 于 1951 年在澳大利亚建造的，如图 16-39 所示. 它由 32 个间距为 7 m 的天线和相应的抛物面反射镜组成. 这个系统被调谐到 0.21m 的波长. 天线接收到的信号在观察站处叠加而产生合成信号. 这个系统相当于 32 个等间距的源. 试求：(a)中央极大的角宽度. (b)相邻主极大之间的角宽度.

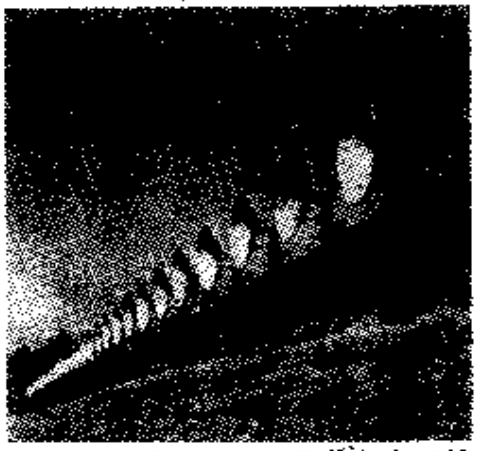


图 16-39 澳大利亚悉尼大学的栅状射电干涉仪.

16.13 两块长方形的平面玻璃叠置起来，将一薄纸片夹在这两块玻璃板的一端之间，于是形成一个非常薄的空气劈. 用钠光束 ($\lambda=5.9\times10^{-7}$m) 垂直入射照亮玻璃板. 这个劈每厘米长度上形成十条干涉纹. 求这个劈的角.

16.14 一张折射率为 1.5 的方形赛珞玢膜，具有劈形截面，其相对两边的厚度分别为 a_1 和 a_2 (图 16-40). 当用波长为 6.0×10^{-7}m 的单色光垂直入射照亮这个膜时，膜上反射所引起的干涉纹的数目为 10. 试求 a_2-a_1 的值.

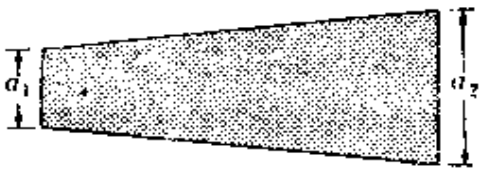


图 16-40

16.15 波长为 5.0×10^{-7}m 的光，垂直投射在一薄膜上．这薄膜的厚度为 10^{-6}m，折射率为 1.4．这光的一部分进入膜内，并在第二个面上反射回来，(a) 从入射点起到出射点止，这光波在膜内的路径上包含多少个波长？(b) 当这些波离开这个膜和进入这个膜时，它们之间的相差是多少？(c) 对于入射角为 30° 的光，重作此题．

16.16 两块长度为 5×10^{-2}m 的玻璃板，它们的一端相接触，另一端用一纸片隔开，从而形成一个空气棱镜．当用波长为 5.9×10^{-7}m 的光垂直入射照亮这个棱镜时，观察到 42 条暗纹．试求这纸片的厚度．

16.17 一平凸透镜放在一块平玻璃表面上时，就可观察到牛顿环（图 16-14）．这透镜的曲率半径为 10m．(a) 当用波长为 4.8×10^{-7}m 的光照亮，并在近垂直入射的情况下观察时，试求不同级的暗干涉环的半径．(b) 如果透镜的直径为 4×10^{-2}m，能看见多少个环？

16.18 一平凸透镜的凸面的曲率半径为 1.20m．这透镜放在一平玻璃面上，其凸面朝下，并在上方用波长为 6.5×10^{-7}m 的红光照亮．求干涉图的第三个亮环的直径．

16.19 一根铜丝，半径为 10^{-3}m，长为 1 m，两端固定，所受张力为 10^{4}N．试求：(a) 基频，前两个泛音和 (b) 相应的波长．(c) 画出每一种情况下铜丝的振动状态．(d) 对于每一个频率，写出驻波的方程．(铜的密度为 8.92×10^{3}kg·m^{-3}．)

16.20 (a) 如果把一条弦的 (i) 张力，(ii) 单位长度的质量，(iii) 半径，(iv) 长度，分别加倍，试求它的基频的变化．(b) 将 (a) 中所列各量减半，重作此题．

16.21 一根管子，长 0.60m；当这管子 (a) 两端开口，(b) 一端封闭，另一端开口时，求它的基频和第一个泛音，设空气温度为 300K．画出与 (c) 基频和 (d) 第一泛音对应的振幅沿管子的分布．

16.22 试估算，300K 时，温度每改变 1 K，空气柱基频变化的百分率．

16.23 一根振动频率为 256Hz 的弦与一个音叉共振．如果这弦的张力增加 20%，试求所产生的拍频．

16.24 一个频率为 256 Hz 的音叉放在一根管子的开口端前面，如图 16-41 所示．将容器 A 升高或降低，能够改变容器 B 中液面的高低，从而改变空气柱的长度．(a) 求与音叉共振的前三个空气柱的长度 L．(b) 在每一种情况下，作图示出振幅沿管子的分布，以及节点和腹点的位置．假定温度

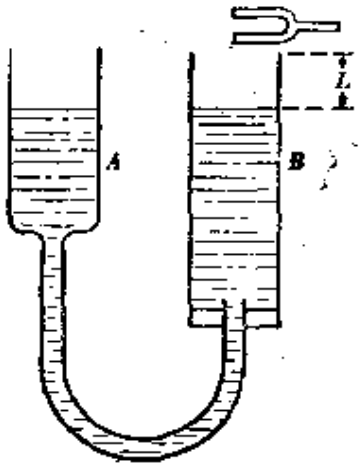


图 16-41

为 300K.

16.25 两个表面波 $A\sin k(x-vt)$ 和 $A\sin k(y-vt)$ 沿一个膜传播. (a)讨论合运动，证明这些波相当于一个调制波，它的传播方向与 X 轴成 45° 角，它的相速度等于 $\sqrt{2}v$. (b)证明波长减小到原来的 $\sqrt{2}$ 分之一. (c) 证明，在各直线

$$x-y=(2n+1)\pi/k$$

上，振幅等于零.

16.26 (a)对于一个边长为 a 的方形膜，如果 $\nu_0=v/2a$ 是基频，则相继各频率为 $\nu=\sqrt{2}\nu_0,\ 2\nu_0,\ \sqrt{5}\nu_0,\ 2\sqrt{2}\nu_0,\ 3\nu_0,\ \sqrt{10}\nu_0,\ \sqrt{13}\nu_0,\ \cdots$, (b)试确定，求基振动模和相继各振动模时，所需的 n_1 和 n_2 的不同组合的数目. 不同组合的数目给出振动模的简并度.

16.27 对于一个边长为 a 的立方空腔，再作前题.

16.28 对于陷获在一空腔中的电磁辐射，在 1.0×10^{15}Hz 和 1.2×10^{15}Hz 之间的频段内，计算每单位体积内横振动模的数目.

较难的习题

16.29 在某一钢琴弦中能够产生的最低频率的驻波，其频率为 512Hz. 这弦的长度为 0.8m. (a)求波在这弦中传播的速率. (b)概略画出其次两个可能的较高频率的驻波的图样，并确定它们的频率.

16.30 两个扬声器 S_1 和 S_2 正在发射相同频率 f 和同相的声波. 用一个传声器沿直线 PP' 移动来探测合声波. 声音的强度图如图 16-42 所示. 声

速为 340m·s^{-1}. (a)点M至传声器S_1的距离比它至S_2的距离远多少？(b)求这声波的波长和频率. (c)逐渐降低声波的频率，直到在M处观察到强度的极小值. 试求现在声波的频率.

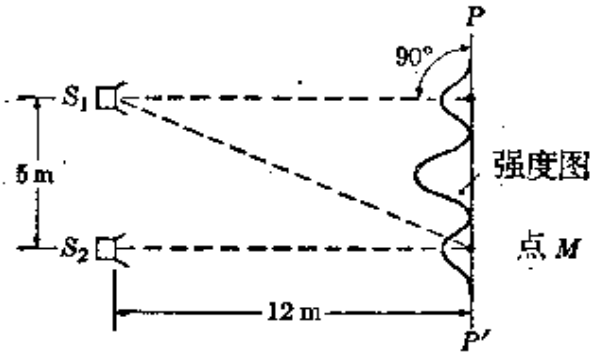


图 16-42

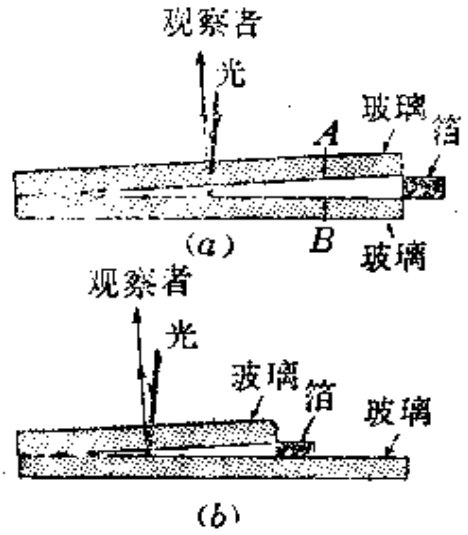


图 16-43

16.31 两块玻璃板，在一端相接触，而另一端用一块铝箔隔开，如图16-43(a)所示. 波长为6000Å的光从上方近似垂直地入射，照亮整个玻璃板的面积，并在面A和B上反射. 一个观察者在玻璃板上方从左向右移动，计数出总共有30个亮干涉带. 第30个亮带的中心与铝箔的边缘重合. (a)求铝箔的厚度. (b)两块玻璃板的接触线附近的区域是一暗带，还是亮带？试予说明. 如果上面的玻璃板折断，剩下的一段只有原来长度的 2/3，如图 16-43(b)所示. 铝箔还是原来那一块. (c)现在观察到的干涉带的数目和位置有何变化？

16.32 一块长方形的透明玻璃板，它的折射率为 1.5. 它的上表面涂敷了一层透明材料的薄膜，用以减少反射光的强度. 单色黄光垂直投射在这个膜上，如图 16-44 所示. (a)如果膜的折射率为 1.3，试求膜中的光速. (b)如果空气中黄光的频率为 5.0×10^{14}Hz，那么膜中黄光的频率是多少？(c)确定膜中黄光的波长. (d)为了使反射的黄光的强度降低到一极小值，试求膜的最小厚度. 说明你的推理.

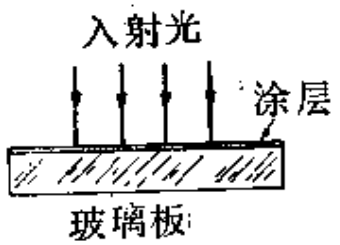


图 16-44

16.33 考虑一个 8 ft 长、两端开口的风琴管. 假定声速为 1200ft·s^{-1}. (a)确定这个管子所产生的声音的最低的两个频率. (b)如果湿度降低，对频

率的影响如何？说明你的答案的理由.

16.34 两个扬声器 S_1 和 S_2 之间的距离为 d，如图 16-45 所示. 它们同相地振动，发射出波长为 λ、振幅相等的声波. 假定 $d \ll L$. (a) 描述声强 I

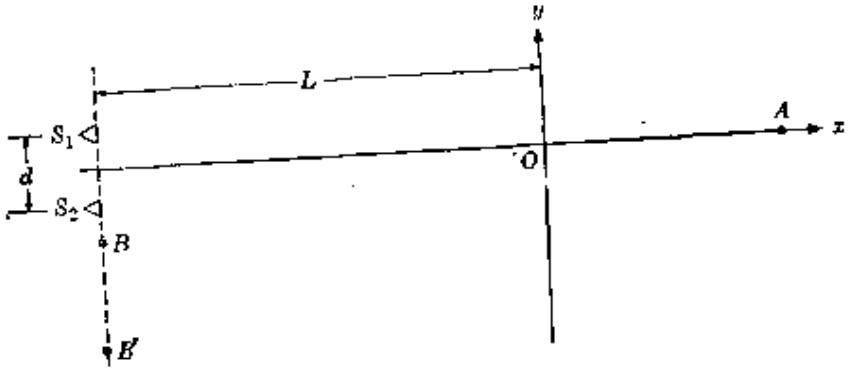


图 16-45

随线段 OA 上的位置 x 变化的情况，在一组坐标轴上概略画出这个函数的曲线. (b)假定 $\lambda \ll d$，在一组坐标轴上，概略画出声强 I 随 y 轴上的位置 y 变化的情况. (c)假定 $d = 2\text{m}$，声速为 $360\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. 试求能在直线 BB' 上产生最小声强的、最低扬声器频率.

16.35 (a)一个菲涅耳双棱镜具有很小的角 A，其折射率为 n. 试证明：如果一个光源至这个双棱镜的距离为 d，则两个象之间的距离 $a = 2(n-1)Ad$，式中 A 以 rad 为单位. (b)设一双棱镜的折射率为 1.5，它的角 $A = 2°$. 光源至双棱镜的距离为 $5\times10^{-2}\text{m}$，发射波长为 $5\times10^{-7}\text{m}$ 的绿光. 试计算所产生的干涉纹的间距. 设屏至双棱镜的距离为 1 m.

16.36 观察两条狭缝所产生的干涉图的一种方法，是用平行光线照射狭缝，在狭缝平面后边放置一个会聚透镜，而在置于透镜焦平面处的屏上观察干涉图(图 16-46). 证明：亮条纹相对于中央条纹的位置由下式给出：

$$x = n(f\lambda/a),$$

暗条纹的位置则对应于

$$x = (2n+1)(f\lambda/2a),$$

式中 n 为整数，f 为透镜的焦距，a 是狭缝的间距.

16.37 两个单色平行光束，它们之间有一小夹角 θ，投射在间距为 a 的两条狭缝上. 这两条狭缝放在一会聚透镜前方(图14-47). 由于两个光束之间的角位移，在置于透镜焦平面处的屏上观察到的两组条纹(见前一习题)不重合. (a)证明：如果 $\theta = \lambda/2a$，则一个光束的亮条纹落在另一光束的暗条

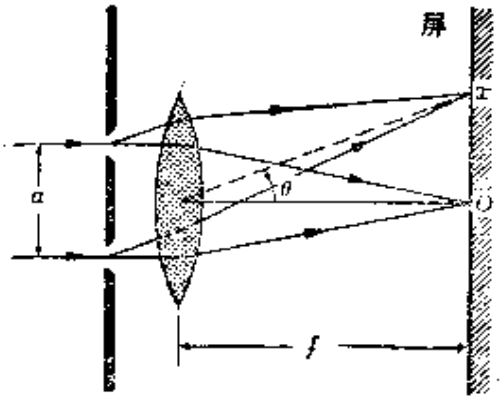


图 16-46

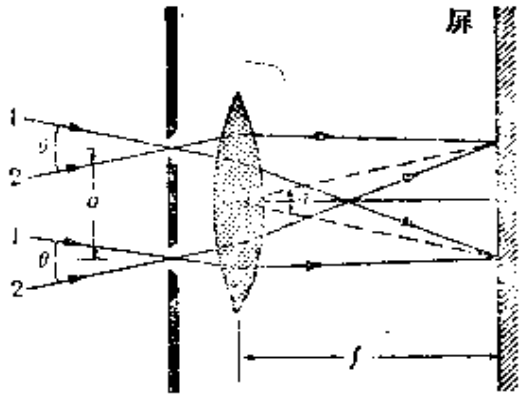


图 16-47

纹上，因而干涉图消失.（1868 年，菲索建议用这种方法测定两个远物体的角距离，即改变距离 a，直至干涉图消失. 例如，曾用这种方法测定恒星的角距离，其办法是把开有两条狭缝的屏放在一望远镜物镜的前方，并改变狭缝的间距，直到衍射图消失.）(b)试求用威耳孙山天文台的折射望远镜（它的物镜的直径为 2.54m）能够探测的最小角距离. 假定波长为5.7×10^{-7}m.

16.38 为了增加望远镜的分辨本领，迈克耳孙于 1921 年制作了一台干涉仪装置（如图 16-48 所示），其中各 M 表示放在望远镜物镜前方的四个反射镜. 由此可见，通过望远镜所观察到的，是反射镜 M_1 和 M_2 所接收的光线的干涉图. 这个装置实质上就是前一习题中描述过的菲索装置. 可以证明，当我们观察一个扩展的圆光源时，如果源所张的角与反射镜的间距之间存在如下关系：

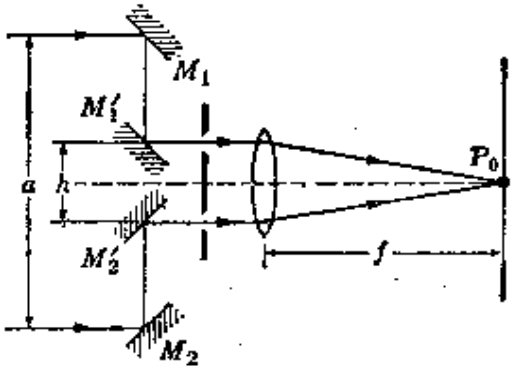


图 16-48

$$\theta=1.22\lambda/a,$$

则干涉图消失.（见第 17.3 节.）利用 $a=3.073$m 和波长 $\lambda=5.75\times10^{-7}$m，迈克耳孙发现，与恒星猎户座 α 对应的条纹消失. (a)证明，这颗恒星的角直

径为 0.047″. 用这种方法第一次测量了恒星直径。(b) 试问：要得到同样的分辨本领，望远镜的直径必须有多大？(c) 如果至这恒星的距离为 1.80×10^{16}m，求猎户座 α 的线直径. (d) 把这个值与太阳直径和地球轨道的直径加以比较.

16.39 对于(a)三个和 (b) 五个等按相间距 a 沿一直线排列的全同波源，讨论强度的角分布. 假定 $a=\lambda/2$.

16.40 考虑第 16.3 节中讨论过的 N 个源产生的波动的干涉. 证明合运动的初相位由下式给出：

$$\delta_N=\frac{1}{2}(N-1)\delta,$$

式中 δ 由方程 (16.12)给出. 注意，δ_N 是图 16-9 中的矢量 OP 与 X 轴所成的角.

16.41 利用前题的结果和矢量加法律，证明下列三角关系式：

$$\text{(a)}\quad 1+\cos\delta+\cos2\delta+\cdots+\cos(N-1)\delta=\frac{\sin\frac{1}{2}N\delta}{\sin\frac{1}{2}\delta}\cos\frac{1}{2}(N-1)\delta,$$

$$\text{(b)}\quad \sin\delta+\sin2\delta+\cdots+\sin(N-1)\delta=\frac{\sin\frac{1}{2}N\delta}{\sin\frac{1}{2}\delta}\sin\frac{1}{2}(N-1)\delta.$$

(提示：注意，在图 16-9 中，合矢量沿 X 轴和 Y 轴的分量等于各个矢量的分量之和.)

16.42 一薄膜的厚度为 2.4×10^{-6}m，其折射率为 1.4. 用波长为 6.2×10^{-7}m 的单色光照明. 当反射光有最大的(a)相长干涉和 (b) 相消干涉时，最小的入射角是多少？对于透射光，重作此题.

16.43 一块玻璃板(折射率为 n_g)上敷有一层薄膜，它的折射率为 $n_0=\sqrt{n_g}$(见习题 14.23)，它的厚度等于膜中光波长的四分之一. 试证明：正入射时，在两个表面上反射的光之间产生完全的相消干涉. 在光学仪器中，用这种方法能够有效地减少透镜和玻璃板上的反射强度. 这种薄膜叫做抗反射敷层.

16.44 证明，如果前题中薄膜的折射率比玻璃的大很多，其厚度为膜中光波长的四分之一，则对于该特定波长，反射光的强度增加.

16.45　设R为一平凸透镜的凸面的半径，则当用这个平凸透镜产生牛顿环时，亮环的半径由下式给出：

$$r^2=N\lambda R,$$

暗环的半径由下式给出：

$$r^2=(2N+1)(\lambda R/2),$$

式中N是正整数．取空气的折射率等于1．

16.46　一个T形管的一个支管用一个可移动的活塞封闭，如图16-49所示．一个音叉放在开口端A．证明：在另一端接收到最大声强时，活塞的相继位置之间的距离为$x=\lambda/2$．

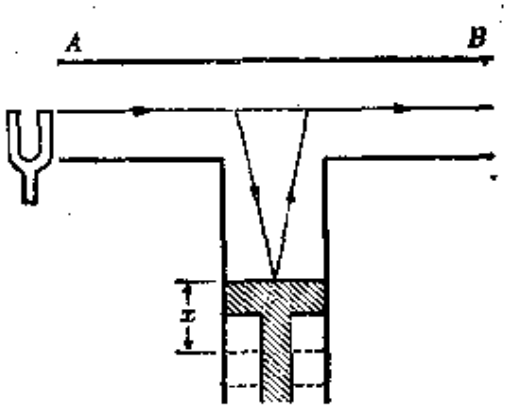


图　16-49

16.47　一个波导由一根矩形截面(边长为a和b)的长管子构成．证明合成波由下式描述：

$$\xi=4\xi_0\sin k_2y\sin k_3z\cos(\omega t-k_1x);$$

并且证明沿波导传输的频率，仅仅是那些满足关系式

$$\nu\geqslant\frac{1}{2}v\sqrt{n_1^2/a^2+n_2^2/b^2}$$

的频率，式中n_1和n_2是整数．对于$n_1=2$和$n_2=3$，讨论波导中的节面．

16.48　给出下列二维波方程：

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}=\left(\frac{1}{v^2}\right)\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}.$$

(a)试探一个形式为$\xi=f(x,y)\sin\omega t$的驻波解．(b)证明：$f(x,y)$满足下列微分方程：

$$\frac{\partial^2f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2f}{\partial y^2}+k^2f=0,$$

式中 $k=\omega/v$. (c)确定常数 k_1 和 k_2,以使

$$f(x,y)=A\sin k_1x\sin k_2y$$

是上面方程的解. (d)把所得结果与第 16.7 节的结果加以比较.

16.49 把前题的讨论推广到三维波方程的情况. 在这种情况下, 试探解为

$$f(x,y,z)=A\sin k_1x\sin k_2y\sin k_3z.$$

16.50 用图解法讨论超越方程 $x\tan x=C$ 的解,式中 C 是一常数. 你可以采取下述两种方法之一. 画出 $y=\tan x$ 和 $y=C/x$ 的曲线并决定它们的交点;或者画出 $y=x$ 和 $y=C\cot x$ 的曲线并决定它们的交点. 在任一情况下,除第一个交点外, 所有其他交点的位置都很接近于 $x=n\pi$, 式中 n 为整数. 应用你的结果讨论例题 16.6.

第十七章　衍　　射

17.1　引　　论

表征波动的另一个现象叫做衍射. 如果障碍物的尺寸与波的波长差不多，则当这个波被这障碍物畸变时，就可观察到衍射. 障碍物可以是一个屏，屏上开有一个小孔或狭缝，它容许入射波阵面的一小部分通过. 障碍物也可以是一个物体，例如一根金属丝或一个圆盘，它们阻挡波面的一小部分通过. 干涉是相互作用着的各个源的结果，而衍射则是一个有限的波同它本身的干涉.

如果一粒子流投射到开有一个小孔的屏上，则只有那些落在小孔上的粒子，才能透过并继续其运动而不受扰动（图 17-1）. 其

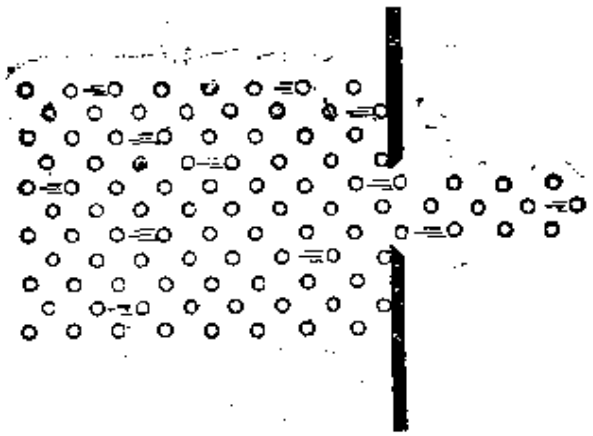


图 17-1　投射在有一小孔的屏上的粒子流的行为.

他的粒子则或者被阻止或者反跳回去. 反之，如果一个物体放在一粒子流中，这物体将阻碍那些投射在它上面的粒子，其余的粒子则继续其运动而不受扰动. 但是，根据通常的经验，特别是对于声波和水中表面波的情况，我们知道，这些波的行为并非如此，它们绕过置于它们路径上的障碍物而传播，如图 17-2 所示. 当狭缝或障

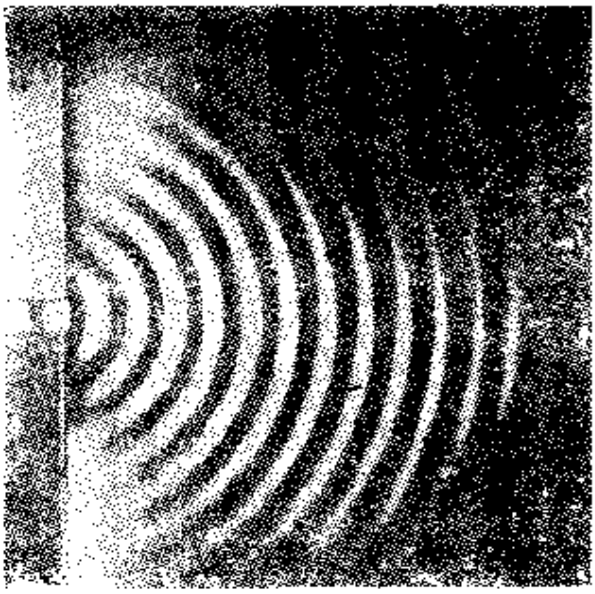


图 17-2　投射在有一小孔的屏上的波的行为.

碍物的尺寸接近这些波的波长时，这种效应就越明显. 通常我们不能用肉眼观察到光的衍射，因为放在一光束中的大多数障碍物都比光波的波长(约为 5×10^{-7} m)大很多.

在本章中，我们将讨论在两种特殊情况下，具有简单几何形状的某些开孔和屏所产生的衍射. 在夫琅和费衍射中，我们假定入射光线是平行的，我们是在足够远的距离处观察衍射图，因而我们实际上只接收到平行的衍射线. 利用一个透镜把沿相同方向衍射的光线聚焦在屏的同一位置上，也能实现这个条件. 在菲涅耳衍射中，或者是入射线来自一个点源，或者是在空间某一点观察衍射线，或者二者具备.

与衍射密切联系着的是散射. 当放在路径上的障碍物可以看作新的波源时，就发生散射. 在第十二章中描述康普顿效应时，我们讨论了单个电子对电磁波的散射. 在本章中，我们将简要地，从更一般的观点来讨论散射.

17.2 矩形孔的夫琅和费衍射

作为第一个例子，我们考虑一个矩形孔或狭缝所引起的平面波的衍射．假定这狭缝很窄而且很长，因而可以不考虑端部效应(图 17-3a)．我们还假定，入射波垂直投射在狭缝平面上．这样做，会简化数学运算，而不改变物理情况．根据惠更斯原理，当入射波投射到狭缝上时，狭缝平面上所有的点都变成次级波源，它们发出新的波，在我们这个情况下，叫做衍射波．这些衍射波的合振幅可以用方程(13.2)算出．可以在离狭缝很远的屏上观察这些衍射波．我们看到，在和入射方向成某些角度的方向上(图 17-3b)，它们的强度为零．这些角度由下式给出：

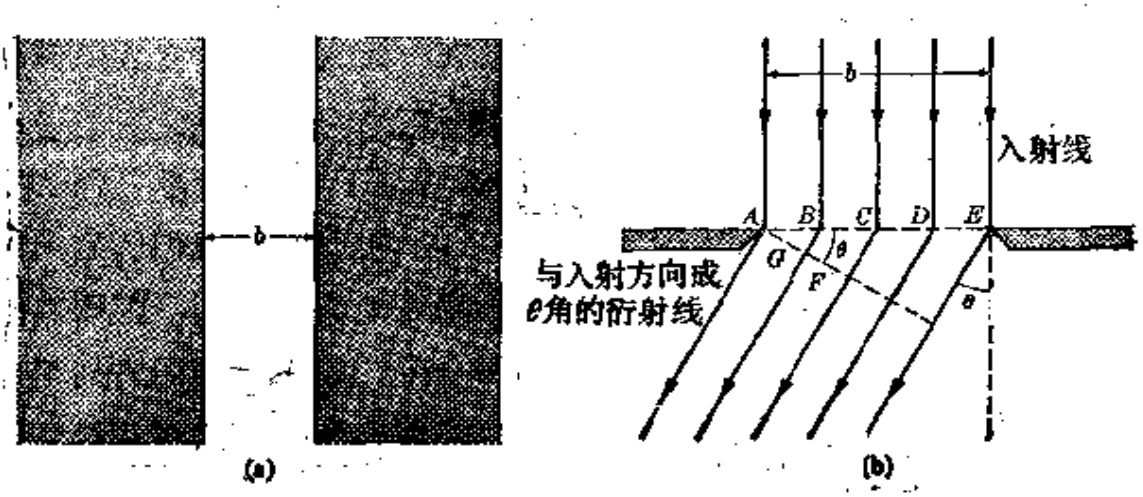


图 17-3 长狭缝的衍射

$$b\sin\theta = n\lambda \qquad n \neq 0, \tag{17.1}$$

式中 n 是一个正的或负的整数，b 是狭缝宽度，λ 是入射波的波长．$n=0$ 被排除，因为它对应于沿入射方向观察，这显然意味着照度有极大值．

由方程(17.1)，我们有

$$\sin\theta = n\lambda/b, \tag{17.2}$$

所以对于 $\sin\theta = \pm\lambda/b, \pm 2\lambda/b, \pm 3\lambda/b, \cdots$，强度为零.

为了证明方程(17.1)是正确的，我们由方程(16.8)知道，当两条光线的程差 $r_1 - r_2 =$ 奇数 $\times (\lambda/2)$时，产生相消干涉. 由图17-3(b) 可以看出，对于来自 A 和中点 C 的光线，$r_1 - r_2 = CF = \frac{1}{2} b\sin\theta = n(\lambda/2)$. 因此，当 $n = 1, 3, 5, \cdots$时，这两条光线，以及从间距为$(b/2)$的两点发出的所有其他光线对，都相消地干涉；因而在角 θ 的方向上观察到零强度. 对于 n 为偶数，我们考虑间距为 $b/4$的点 A 和 B. 这时

$$r_1 - r_2 = BG = \frac{1}{4} b\sin\theta = \left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{\lambda}{2}\right).$$

因此，当 $n/2$ 为奇整数，或 $n = 2, 6, 10, \cdots$时，这两条光线，以及从间距为 $b/4$ 的两点发出的所有其他光线对，都相消地干涉. 因而在角 θ 的方向上，观察到零强度. 能够扩展这种步骤，直到包括一切整数. 然而，对于 $\theta = 0$，来自不同点的光线没有相差；因而干涉是相长的，结果产生一个显著的极大值.

在方程(17.1)所给出的相邻两个零强度之间，有一个极大值；但这些极大值的强度逐渐减弱，这个情况不同于干涉的情况. 图17-4 中示出衍射波的强度随角 θ 变化的曲线. 注意，中央极大的

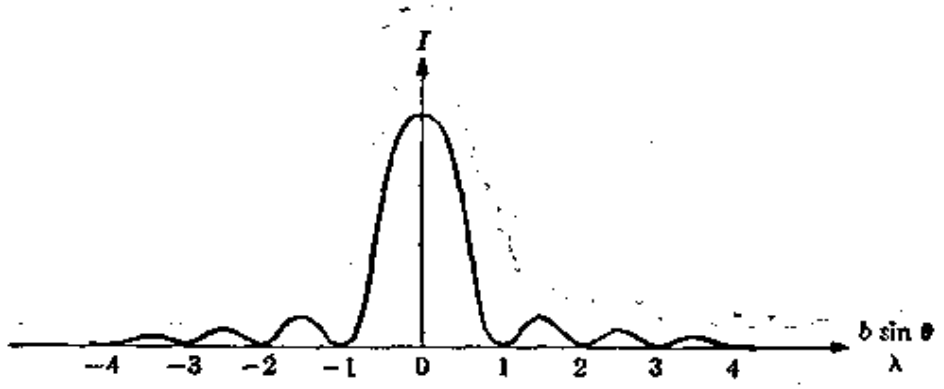


图 17-4 一条长狭缝的衍射图的强度分布.

宽度为其他极大的宽度的二倍. 图17-5 中示出一条长狭缝的实

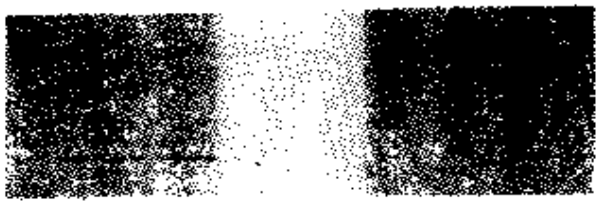


图 17-5　一条长狭缝所产生的夫琅和费衍射图

际衍射图.

计算图 17-4 中的强度分布是容易的，也是有益的. 如果我们把这条狭缝分成宽度为 dx 的非常窄的细条，如图 17-6(a)所示，就可以把每一细条看成是具有非常小的(完全相同的)振幅 $d\xi_0$ 的次级波源. 我们考虑与角 θ 对应的方向上发射的光线（图 17-6b). 这时，光线 CC' 和 AA' 之间的相差为

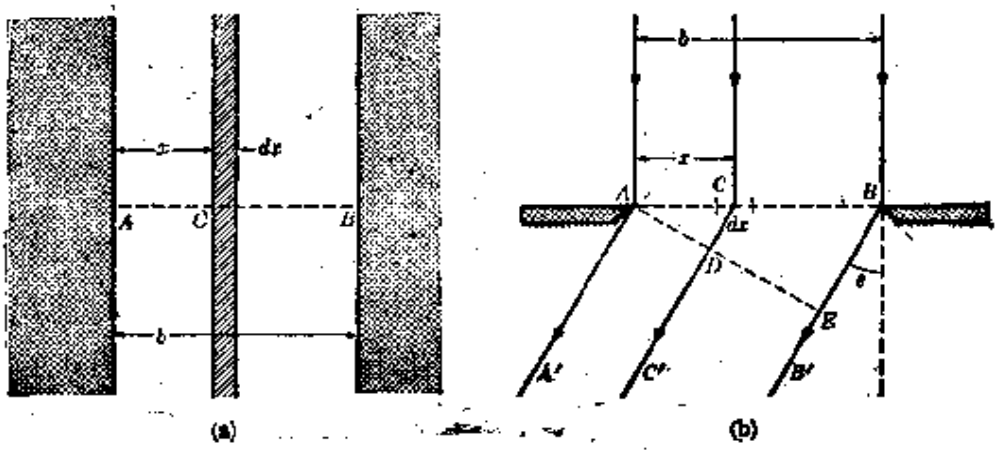


图　17-6

$$\delta=\frac{2\pi}{\lambda}CD=\frac{2\pi x\sin\theta}{\lambda};\qquad(17.3)$$

由此可见，δ 随 x 而逐渐增大. 求与角 θ 对应的方向上的振幅时，我们必须画出与 A 至 B 的所有窄条对应的波的旋转矢量.(在第16.3节中用过这种方法.)由于所有这些波都具有无限小振幅，而且相角 δ 与 x 成正比地增大，所以这些矢量都在一个圆弧 OP 上，圆心在 C 点，半径为 ρ（图 17-7). 合振幅 A 为弦 OP. 从 O 至 P 的弧

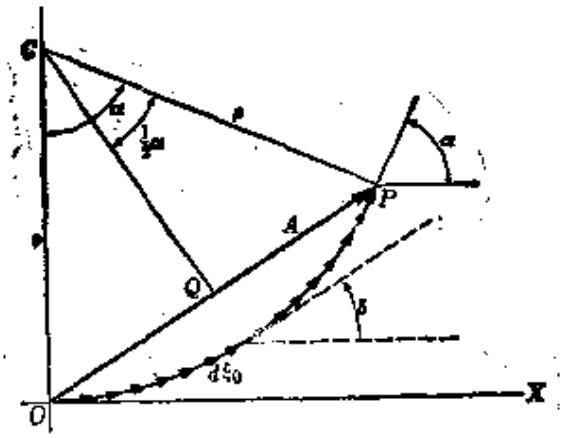


图 17-7

上任意一点的切线的倾角，正好就是方程(17.3)所给出的角 δ. 在点 P(它对应于 $x=b$)，切线的倾角为

$$\alpha=\frac{2\pi b\sin\theta}{\lambda}. \tag{17.4}$$

这个角也等于两条半径 CO 和 CP 的夹角. 因此，总振幅为

$$\begin{aligned} A&=\text{弦 } OP=2QP \\ &=2\rho\sin\frac{1}{2}\alpha=2\rho\sin\left(\frac{\pi b\sin\theta}{\lambda}\right). \end{aligned} \tag{17.5}$$

垂直于狭缝观察时(即 $\theta=0°$)，所有这些矢量平行；因此，它们的合量就是它们的长度之和，即等于从 O 至 P 的弧的长度. 用 A_0 表示垂直观察时的合振幅，则有

$$A_0=\text{弧 } OP=\rho\alpha=\rho(2\pi b\sin\theta/\lambda). \tag{17.6}$$

方程(17.5)除以方程(17.6)，则得

$$A=A_0\left[\frac{\sin(\pi b\sin\theta/\lambda)}{\pi b\sin\theta/\lambda}\right]; \tag{17.7}$$

由于强度与振幅的平方成正比，所以

$$I=I_0\left[\frac{\sin(\pi b\sin\theta/\lambda)}{\pi b\sin\theta/\lambda}\right]^2=I_0\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2, \tag{17.8}$$

式中 $u=\pi b\sin\theta/\lambda$. 于是我们证明了当 $u=n\pi$，即 $b\sin\theta=n\lambda$ 时，

强度等于零；这个结果与方程(17.1)一致．但 $n=0$ 除外，因为这时 $(\sin u/u)_{u=0}=1$．为了求强度的极大值，我们求出满足 $dI/du=0$ 的 u 值(见例题 17.1)．但是，因为这些强度极大值所对应的 u 值相继增大，所以这些极大值变得越来越小．结果得到图 17-4 所示的图样．当 $\lambda \ll b$ 时，中央极大两侧第一个零强度对应于一个角

$$\theta \approx \sin\theta = \pm\lambda/b. \tag{17.9}$$

在方程(17.1)中，令 $n=\pm 1$，就得到上式．

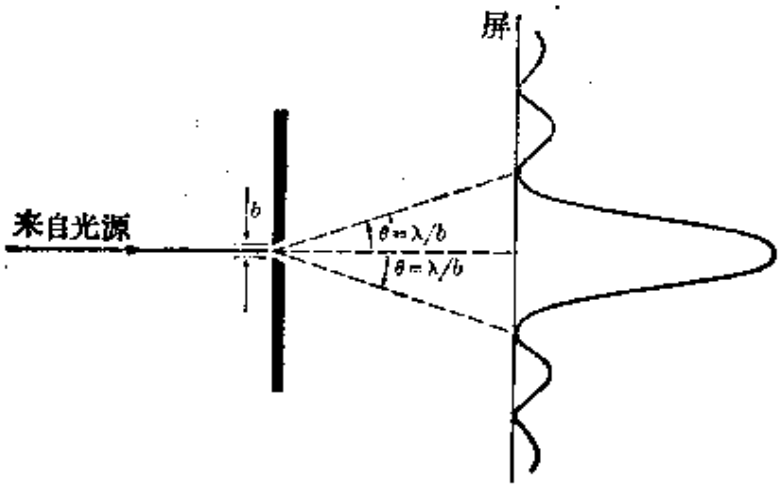


图 17-8　单缝衍射图的中央强度峰所张的角($\lambda \ll b$)．

狭缝的分辨本领，是一个有用的概念．英国物理学家瑞利(Lord Rayleigh，1842—1919)关于狭缝分辨本领的定义是：来自两个很远的点源的两组入射波，当它们各自的衍射图样刚好能被辨别时，它们所张的最小的角．当来自两个很远的源 S_1 和 S_2 的波沿夹角为 θ 的两个方向通过同一条狭缝时(图 17-9)，这两组波的衍射图重叠．当一组波的中央极大值处于另一组波的中央极大值一侧的第一个极小值上时，这两组波就开始变为可辨认的，如图 17-9 右方所示．但是，根据方程(17.9)和图 17-8，这时角 θ 必为

$$\theta = \lambda/b. \tag{17.10}$$

根据瑞利的定义，上式就表示狭缝的分辨本领．假定 S_1 和 S_2 是一个遥远物体上的两个点，则方程(17.10)表示：当通过这个狭缝

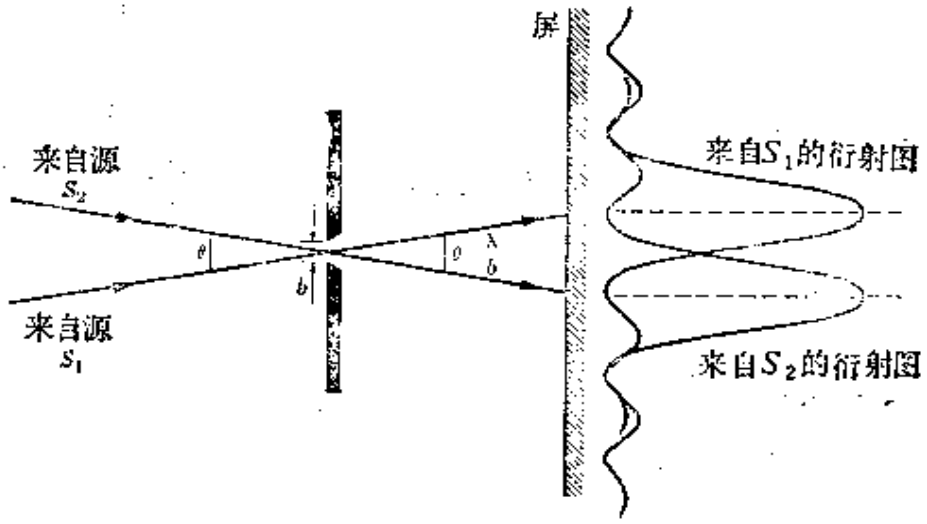


图 17-9　关于狭缝分辨本领的瑞利规则.

观察这个物体，能够认出它们是两个不同的点时，这两个点之间的最小角间距为$\theta=\lambda/b$. 如果光通过这个狭缝在一屏上形成一个象，并且，比如说，用一台显微镜来观察这个象，那么，不论显微镜的放大率多么高，在象中观察到的细节，都不可能多于狭缝的分辨本领所允许的. 在设计光学仪器时，这些问题必须加以考虑.

如果这狭缝是矩形的，其边长 a 和 b 相差不大(图 17-10)，则衍射图样是两对边所产生的图样的组合. 代替图 17-5 中的一系列的带，我们得到一系列交叉排列的矩形，如图 17-11 中的照片所示.

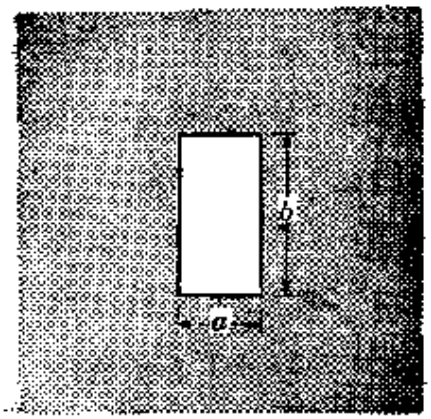


图 17-10　矩形狭缝.

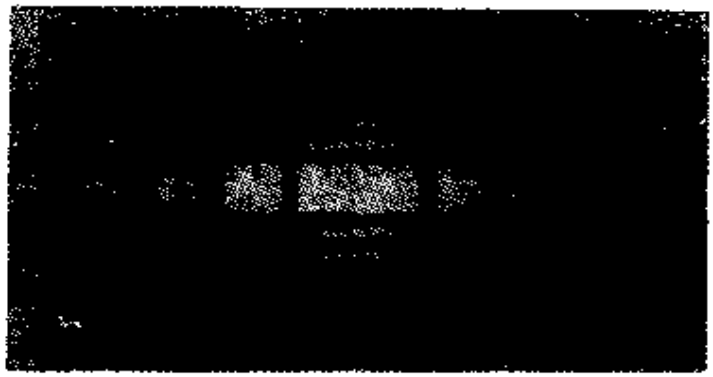


图 17-11　一个高度为宽度两倍的矩形狭缝所产生的夫琅和费衍射图.

在我们的计算中，没有考虑在第 13.2 节中讨论惠更斯原理时提到的方向性因子 $g=\frac{1}{2}(1+\cos\theta)$. 这个因子会使高级衍射极大的振幅进一步减小.

例题 17.1 估算狭缝的衍射图中相继各极大的值.

解 根据方程(17.8)，相继各极大值出现在分数 $\sin u/u$ 的各极大值处. 因此，我们必须求出

$$\frac{d}{du}\left(\frac{\sin u}{u}\right)=0 \quad 或 \quad \tan u=u.$$

这是一个超越方程，和例题 16.6 中的方程属于同一类. 求它的解的办法是，画出 $y=\tan u$ 和 $y=u$ 的曲线，求它们的交点；学生可自己验证这些交点出现在 $u\approx 4.49, 7.73, 10.9, \cdots$，对应的相对强度为 0.047, 0.017, 0.0088, …. 估算这些点时，我们曾假定 $\sin u/u$ 的极大值的位置非常接近于 $\sin u$ 的极大值，亦即当 $u=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$ 时，式中 $n=1, 2, 3, \cdots$. 实际的 u 值总是稍小于估计值. 忽略这个小的差别，我们求出极大值处 $\sin u/u$ 的值为

$$1\Big/\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right];$$

相应的强度为

$$I=\frac{I_0}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}=0.045I_0, 0.016I_0, 0.008I_0.$$

17.3 圆孔的夫琅和费衍射

圆孔产生的衍射图显示出矩形缝情况下看到的许多特点. 但是，圆孔衍射图中心有一个亮圆盘，它的周围是交替的暗环和亮环，如图 17-12 所示，而不象图 17-11 所示那样的矩形图样. 中央圆盘和相继各环的直径，并不象在方形缝情况下那样组成简单序列. 由于几何形状，这个问题的数学分析，比矩形缝的情况要复杂得多，故此处从略. 假定 R 是圆孔的半径(图 17-13)，则与第一个暗环对应的角 θ 由如下条件给出：

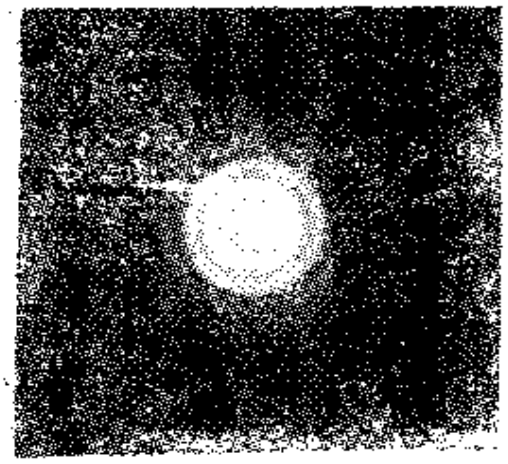


图 17-12　圆孔的夫琅和费衍射图.

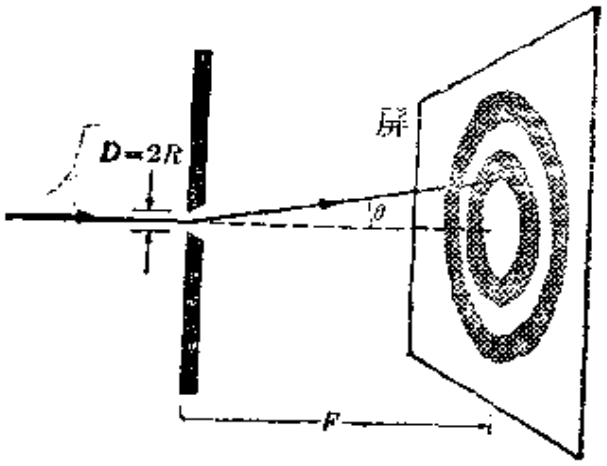


图　17-13

$$\frac{2\pi R\sin\theta}{\lambda}=3.8317 \tag{17.11}$$

或

$$\theta\approx\sin\theta=1.22\frac{\lambda}{2R}=1.22\frac{\lambda}{D}, \tag{17.12}$$

式中 $D=2R$ 是圆孔的直径，θ 的单位是 rad. 这个表达式也给出圆孔的分辨本领. 圆孔的分辨本领也是按照瑞利的定义，被规定为来自两个很远的点源的两列平面波的入射方向之间的最小的角度，在此角度下，它们各自的衍射图样刚好能被辨别. 当一个源的衍射图的亮圆盘的中心落在另一个源的衍射图的第一个暗环上时，就出现这种情况(图 17-14). 这个角间距由方程(17.12)给出，即 $\theta=1.22\lambda/D$. 在第 15.5 节中讨论望远镜的放大率时，曾用过这个表达式.

一个透镜实际上就是一个圆孔；因此，一个点的象，在第十五章中曾假定它是另外一个点，实际上它是一个衍射图. 然而，透镜的半径一般都比光的波长大很多，以致对于大多数实际情况来说，衍射效应可略去不计.

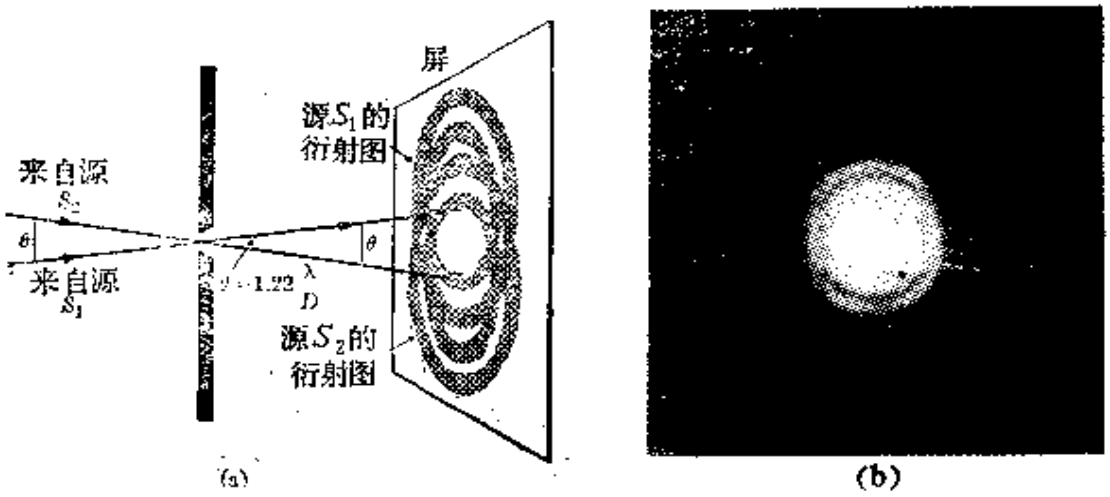


图 17-14 (a)瑞利关于圆孔分辨本领的规则.(b)示出两个很远的点源通过透镜形成的象刚可分辨.

例题 17.2 一个透镜的直径为 2×10^{-2}m，焦距为 0.40m，用波长为 5.9×10^{-7}m的平行单色光束照明.试求在焦点处的平面上观察到的衍射图中央圆盘的半径，并确定此透镜对于这个波长的分辨本领.

解 利用方程(17.12)，衍射图中央圆盘所张的角为

$$\theta=1.22\times\frac{5.9\times10^{-7}\text{m}}{2\times10^{-2}\text{m}}\Rightarrow3.60\times10^{-5}\text{rad}=7.42''.$$

这也就是这个透镜的分辨本领. 中央圆盘的半径为

$$r=f\theta=0.40\text{m}\times3.60\times10^{-5}\text{rad}=1.44\times10^{-5}\text{m},$$

由此可见，对于实际应用而言，我们可以说焦平面上的象是一个点.

17.4 两个等宽的平行狭缝的夫琅和费衍射

考虑两条具有相等的宽度 b，间距为 a 的平行狭缝(图 17-15 a). 在角 θ 的方向上，有两组衍射波，我们所观察的是这些波在屏上干涉的结果. 换句话说，现在的情况是衍射和干涉的结合.为了求出合成波的强度作为角 θ 的函数，我们必须先计算来自每一条狭缝的合振幅，然后把这两个振幅结合起来，求出最后的合振幅. 这种方法在图 17-16 中示出. 在此图中画出不同的旋转矢量. 角 α 的值由方程 (17.4)给出. 矢量 $\overrightarrow{OP_1}$ 的大小给出来自狭缝 1 的合

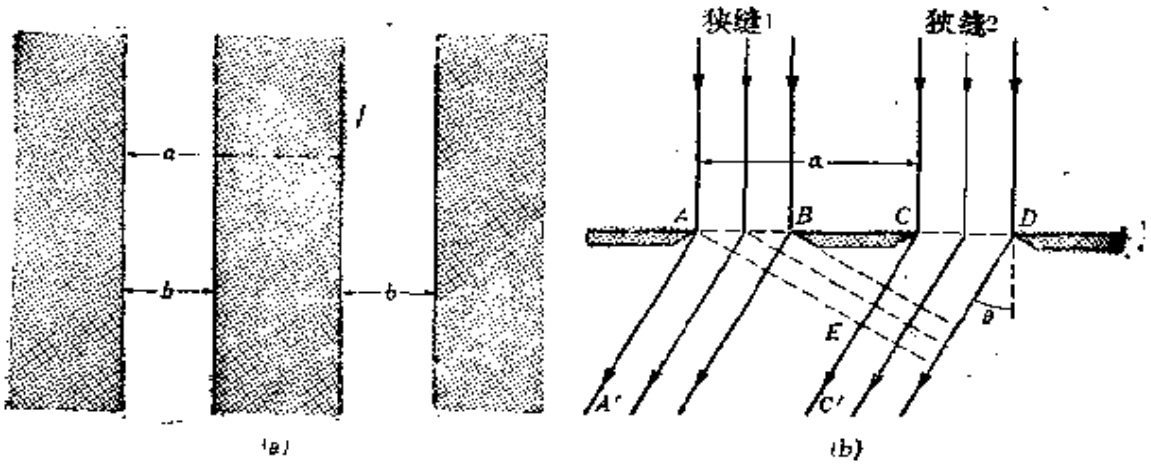


图 17-15　两条平行长狭缝的正面图和截面图.

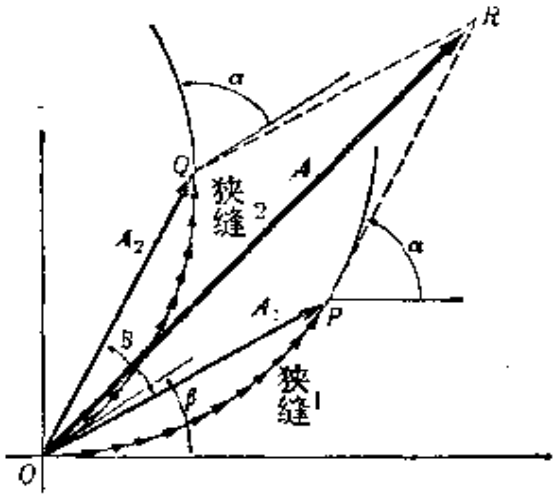


图　17-16

振幅 A_1. 这个振幅的值由方程(17.7)给出:

$$A_1=A_0\frac{\sin(\pi b\sin\theta/\lambda)}{\pi b\sin\theta/\lambda}. \tag{17.13}$$

由于两个狭缝的宽度相同，所以狭缝 2 的合振幅的值也是 A_1，不过相位不同. 由图 17-15(b)可以看出，来自狭缝 1 和 2 的相应光线，例如 AA' 和 CC'，它们之间有一恒定的相差，由下式给出:

$$\beta=\frac{2\pi}{\lambda}CE=\frac{2\pi a\sin\theta}{\lambda}. \tag{17.14}$$

因此，来自两个狭缝的相应振幅或矢量之间的角等于 β. 因而，在图 17-16 中，把狭缝 1 的直线 $OP=A_1$ 转过一个角度 β，就得到狭

缝 2 的直线 $OQ=A_2$. 于是，它们的合振幅 A 为

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\beta}.$$

令 $A_1=A_2$，并利用三角恒等式，可将上式写作

$$A=A_1\sqrt{2\ (1+\cos\beta)}=2A_1\cos\frac{1}{2}\beta\ .$$

因此，利用方程(17.13)和(17.14)，得到

$$A=2A_0\frac{\sin(\pi b\sin\theta/\lambda)}{\pi b\sin\theta/\lambda}\cos\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}.$$

于是，得到强度分布(它与振幅的平方成正比)如下：

$$I=I_0\left[\frac{\sin(\pi b\sin\theta/\lambda)}{\pi b\sin\theta/\lambda}\right]^2\cos^2\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}. \qquad (17.15)$$

将上式与单狭缝的方程(17.8)加以比较，就会看出，我们现在的公式中多出一个因子 $\cos^2[(\pi a\sin\theta)/\lambda]$. 但是，如果回顾一下两个同步源的干涉图强度分布的方程(16.10)，我们就可看出，就干涉因子而论，方程(16.10)与(17.15)重合，因为在方程(17.15)中 a 是两个狭缝的间距，而在方程(16.10)中，a 是两个源的间距. 因此，描述两个狭缝的总衍射图的方程，是两个同步源的干涉图的方程，受单狭缝衍射图的表达式调制的结果，如图 17-17 中的曲线和图 17-18 中的照片所示.

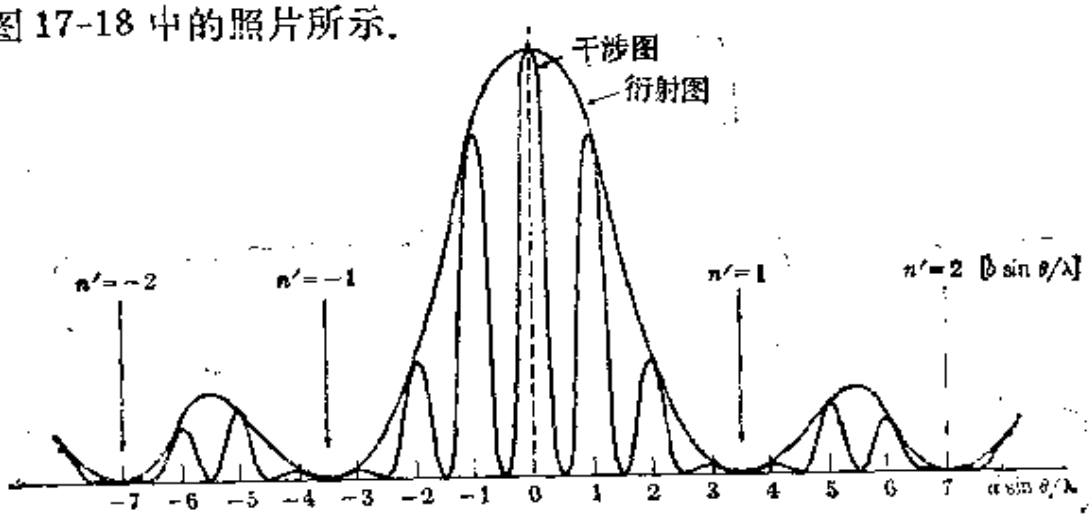


图 17-17　两个平行长狭缝($a/b=3.5$)所产生的强度分布(在垂直于入射光的平面上).

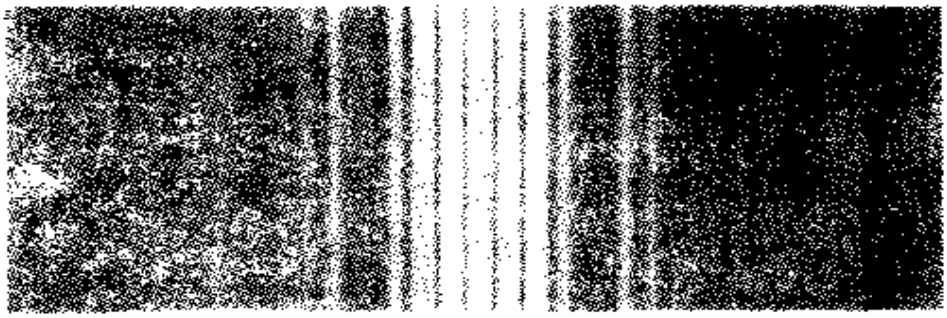
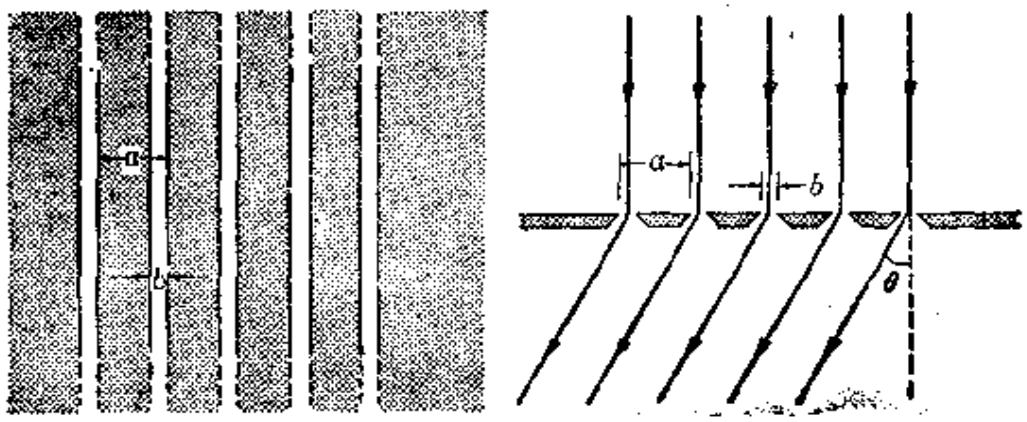


图 17-18　两个平行长狭缝所产生的夫琅和费衍射图.

注意，当$\pi a\sin\theta/\lambda=n\pi$，或$\sin\theta=n(\lambda/a)$时，干涉图中出现极大值；衍射图的零点由方程（17.2）即$\sin\theta=n'(\lambda/b)$给出. 由于$a>b$，所以衍射图的零值之间的距离，大于干涉图的极大值之间的距离. 因此，两条狭缝情况下的亮条纹比单狭缝情况下的亮条纹要窄得多，而且间距更小.

17.5　衍 射 光 栅

下一步要考虑若干条具有相同宽度b和相等间距a的平行狭缝. 设N为狭缝的数目. 由图 17-19，并与双狭缝问题类比，可以看出，在与角θ对应的方向上，我们将观察到N个同步源（每条缝是一个源）所产生的干涉图，受单狭缝衍射图的调制. 由于相邻源的间距为a，所以强度的干涉因子与方程（16.14）中给出的相同，



(a)　　(b)

图 17-19　衍射光栅的正面图和截面图.

即为

$$\left[\frac{\sin(N\pi a\sin\theta/\lambda)}{\sin(\pi a\sin\theta/\lambda)}\right]^2;$$

这个强度受衍射因子的调制. 根据方程(17.8),这个因子是

$$\left[\frac{\sin(\pi b\sin\theta/\lambda)}{\pi b\sin\theta/\lambda}\right]^2.$$

于是得到强度分布为

$$I=I_0\left[\frac{\sin(\pi b\sin\theta/\lambda)}{\pi b\sin\theta/\lambda}\right]^2\left[\frac{\sin(N\pi a\sin\theta/\lambda)}{\sin(\pi a\sin\theta/\lambda)}\right]^2. \qquad (17.16)$$

如果狭缝的数目 N 很大,这图形将包括一系列窄的亮条纹. 这些亮条纹对应于干涉图的主极大值,其方向由下式确定:

$$a\sin\theta=n\lambda \quad 或 \quad \sin\theta=n(\lambda/a), \qquad (17.17)$$

式中 $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$;不过,它们的强度受衍射图的调制. 图 7-20 中示出 8 条狭缝($N=8$)的情况. 按照 n 的值,称这些主极大为第一衍射级,第二衍射级,第三衍射级,等等.

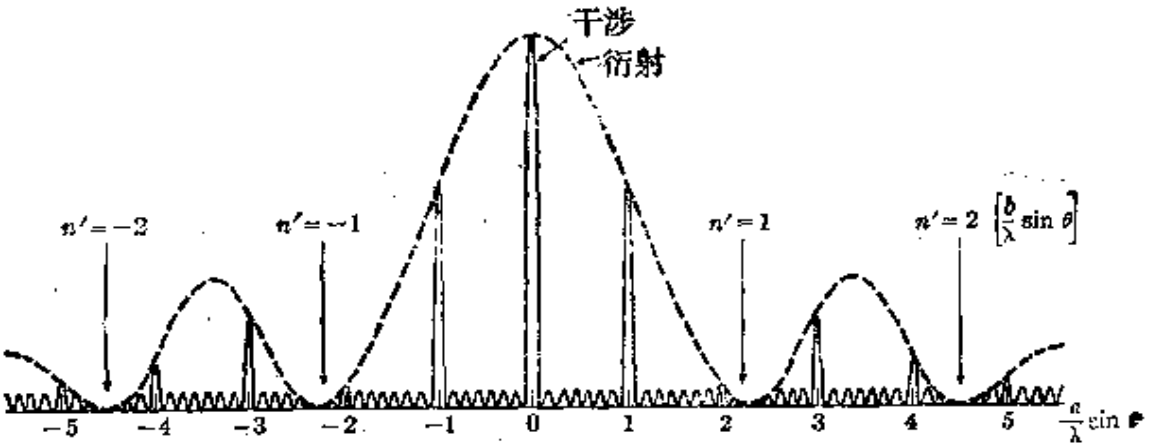


图 17-20 衍射光栅在一垂直于入射光并且平行于光栅的平面上产生的强度分布.($a/b\approx2.33$)

我们适才讨论过的那种系统,叫做透射衍射光栅. 为了分析近红外光、可见光或紫外光,透射衍射光栅每厘米包含几千条狭缝. 这是在一张透明膜上蚀刻一系列平行直线而制成的. 在这种情况下,这些直线起着狭缝之间的不透明区的作用. 衍射光栅也

能够在反射的条件下运用；这种衍射光栅是在一金属表面上蚀刻一系列平行直线，蚀刻直线之间的窄条反射光线而产生衍射图（见习题 17.36）．有时，把这金属表面做成凹形的，以改善聚焦（见习题 17.37）．

当包含若干个不同波长的光投射在一光栅上时，不同的波长在不同的角度上产生衍射极大，但零级除外（对于所有波长，零级都在一个方向上）．在一给定的级中，所有波长的极大构成一个光谱．因此，我们有第一级、第二级、第三级等等光谱．注意，对于给定的光谱级，波长越长，偏转角越大．因此，红光的偏转比紫光的大；这个效应与光在棱镜中色散的情况正相反．光栅的色散被定义为$D=d\theta/d\lambda$；也就是说，$D=$偏转角相对于波长的变化率．由方程(17.17)，我们有$\cos\theta(d\theta/d\lambda)=n/a$，因而

$$D=d\theta/d\lambda=n/a\cos\theta, \qquad (17.18)$$

上式表示，衍射级越高，色散越大．

在光谱分析方面，在电磁波谱的很宽的频段内，衍射光栅都是很重要的．与棱镜相比，衍射光栅有几个显著的优点．一个优点是，衍射光栅不依赖于光栅材料的色散性质，只决定于光栅的几何因素．图 17-21 中示出一台光栅分光仪的基本元件．

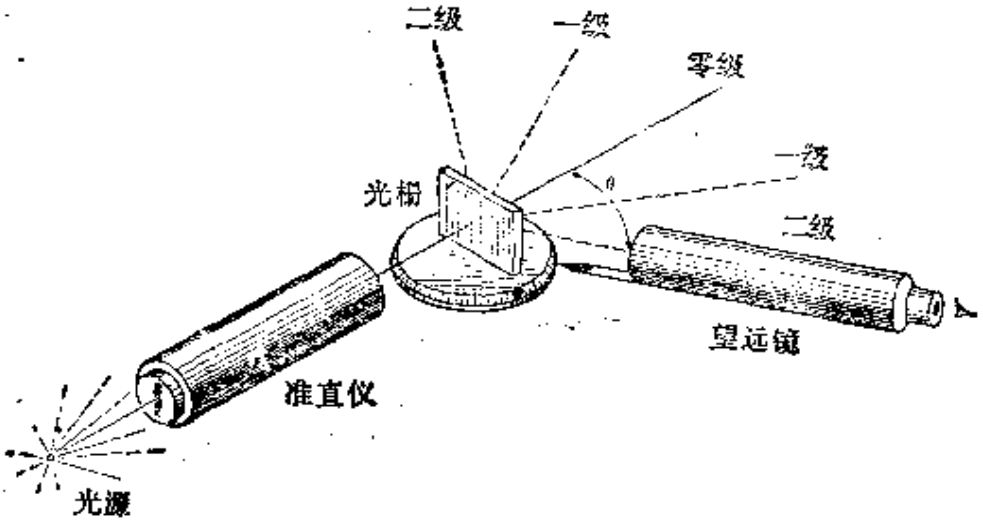


图 17-21　光栅分光仪．光源放在准直仪狭缝前面．光栅表面垂直于准直仪的轴；移动望远镜观察不同级的光谱．

例题 17.3 对于第一级和第二级衍射光谱，求整个可见光谱的角距离.

解 假定可见光的波长范围是从 3.90×10^{-7}m 至 7.70×10^{-7}m. 设这个光栅包含 20000 条线，长为 0.04m，则有 $a=4\times10^{-2}\text{m}/20000=2\times10^{-6}\text{m}$. 因此，利用方程(17.17)，对于 $n=1$ 我们有

$$\sin\theta_{红}=\frac{7.70\times10^{-7}}{2\times10^{-6}}=0.385 \quad 或 \quad \theta_{红}=22°39',$$

$$\sin\theta_{紫}=\frac{3.90\times10^{-7}}{2\times10^{-6}}=0.195 \quad 或 \quad \theta_{紫}=11°15'.$$

因此，一级光谱覆盖的角度为 11°24′. 学生可按同样方法算出二级光谱覆盖的角度为 27°24′. 能否得到完整的三级光谱？

例题 17.4 当平面单色波的入射角不为零时，求衍射光栅的主极大的位置.

解 主极大由干涉图决定，而干涉图又由相邻狭缝中对应光线之间的相差决定. 由图 17-22 可知，这个相差由下式给出：

$$\delta=\frac{2\pi}{\lambda}(AB+BC)=\frac{2\pi a(\sin i+\sin\theta)}{\lambda}, \tag{17.19}$$

式中 i 为入射角，θ 为衍射角. 为了使方程(17.19)具有普遍的适用性，必须遵从图中示出的正负号规定. 否则，就必须对于 i 和 θ 相对于法线的每一种可能取向，重新写出方程(17.19). 在这情况下，极大的条件变为

$$a(\sin i+\sin\theta)=n\lambda. \tag{17.20}$$

对于 $n=0$，我们有 $\sin\theta=-\sin i$，即 $\theta=-i$，这对应于入射光线不改变方

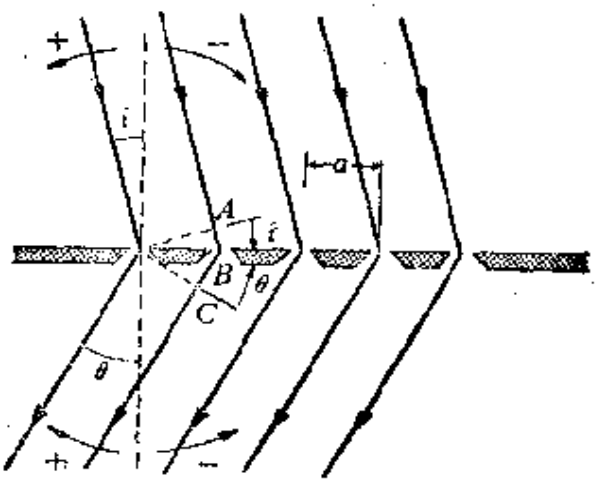


图 17-22 斜入射时的衍射光栅.

向．如果我们利用三角公式把这个关于极大的条件变换为一个乘积，则得

$$2a\sin\frac{1}{2}(i+\theta)\cos\frac{1}{2}(i-\theta)=n\lambda.$$

由此可见，n 级极大的偏向角 $D=i+\theta$ 可以从下式求出：

$$\sin\frac{1}{2}D=\frac{n\lambda}{2a}\sec\frac{1}{2}(i-\theta); \tag{17.21}$$

因此，当 $\theta=i$ 时，偏向角最小．因而，对于 n 级来说，最小偏向的入射角由下式决定：

$$\sin i=n\lambda/2a.$$

例题 17.5 衍射光栅的分辨本领．

解 当两列波长稍微不同的平面波投射在一衍射光栅上时，这两个波长的具有相同级的主极大，可能彼此相距很近，以致不可能分辨原来的光束是否单色光．为了使在一给定的级中两个波长能够被辨别(或被分辨)，其中一个波长的主极大值必须落在另一个波长的主极大值任一侧的第一个极小值处．设 $\Delta\lambda$ 是在波长 λ 处能满足上述条件的最小波长差，则光栅的分辨本领为

$$R=\frac{\lambda}{\Delta\lambda}. \tag{17.22}$$

作为一个例子，我们考虑一个波长 λ，它满足方程(17.17)．强度的极大值对应于 $\sin\theta=n\lambda/a$ 给出的角．将此式微分，则得

$$\cos\theta\Delta\theta=n\Delta\lambda/a.$$

根据方程(17.16)，n 级极大值两侧的极小值由下式给出：

$$\frac{N\pi a\sin\theta}{\lambda}=(Nn\pm1)\pi \quad 或 \quad \sin\theta=\left(\frac{Nn\pm1}{N}\right)\frac{\lambda}{a}.$$

设 θ' 和 θ'' 是这个方程所给出的与这两个极小值对应的角度，使得 $\theta'-\theta''=2\Delta\theta$，我们可写出

$$\sin\theta'-\sin\theta''=2\lambda/Na;$$

或者利用三角恒等式，将上式写作

$$\sin\frac{1}{2}(\theta'-\theta'')\cos\frac{1}{2}(\theta'+\theta'')=\lambda/Na.$$

由于 θ' 差不多等于 θ''，我们可以用 $\frac{1}{2}(\theta'-\theta'')$ 代替 $\sin\frac{1}{2}(\theta'-\theta'')$，用 $\cos\theta$ 代替 $\cos\frac{1}{2}(\theta'+\theta'')$，从而写出

$$\frac{1}{2}(\theta'-\theta'')\cos\theta=\Delta\theta\cos\theta=\lambda/Na.$$

但由前面的方程，$\cos\theta\Delta\theta=n\Delta\lambda/a$. 因此，我们最后得到

$$R=\frac{\lambda}{\Delta\lambda}=Nn. \tag{17.23}$$

这个方程表示，光栅划线总数越大，光谱级次越高，$\Delta\lambda$ 就越小，因而光栅的分辨本领越大. 另一方面，方程(17.23)表明，分辨本领与光栅划线的宽度和间距无关.

例题 17.6 钠黄双线的分辨.

解 钠的两条黄线的波长为 5.890×10^{-7}m 和 5.896×10^{-7}m. 这两条线的平均波长为 5.893×10^{-7}m，它们的间距为 $6\times1\ 0^{-10}$m. 现在我们要确定，用例题17.3中的光栅能否分辨这两条线. 根据例题 17.5 中求出的结果，这个光栅的分辨本领为 $R=Nn=2\times10^4n$. 在给定的波长，一级光谱($n=1$)中的最小波长间隔为

$$\Delta\lambda=\frac{\lambda}{R}=\frac{5.893\times10^{-7}\text{m}}{2\times10^4\times1}=2.947\times10^{-11}\text{m},$$

此值等于两条钠线的波长差的二十分之一. 因此，在用这个光栅所产生的一级光谱中，两条钠线易于分辨(即看得清楚).

17.6 菲涅耳衍射

在第17.1节中已指出，当入射波的点源，或者观察入射波的那一点(或两者)，至引起衍射的孔或障碍物的距离有限时，就发生菲涅耳衍射. 菲涅耳衍射的数学计算比夫琅和费衍射更复杂，但是物理概念仍然相同. 因此，我们将只讨论基本的方面，而且为简单起见，我们将假定波源离屏如此之远，以致入射波为平面波，并且假定这些平面波垂直于孔或障碍物.

假定我们已知某一平面波阵面 S 上的波动，而要计算点 P 处的波动(图 17-23). 按照在第 13.2 节中表述的惠更斯-基尔霍夫原理，我们可以把这个波阵面分成许多面元. 对称性表明，可以取中心在点 Q 的同心圆环作为面元；Q 是 P 在平面 S 上的投影. 于

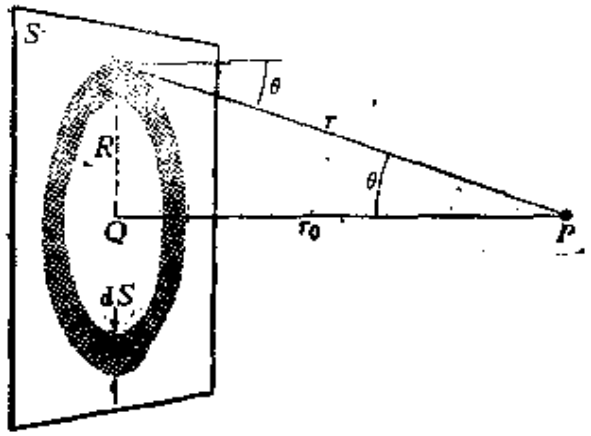


图 17-23

是，根据方程(13.2)，面积为 dS 的面元对点 P 的波动的贡献，其振幅正比于

$$\frac{dS}{r}g(\theta), \tag{17.24}$$

式中 dS 是圆环的面积．dS 产生的波在点 P 的相位是

$$\delta=\frac{2\pi r}{\lambda}. \tag{17.25}$$

把相继各圆环的旋转矢量[它们的振幅由方程(17.24)给出，它们的相位由方程（17.25）给出]加起来，就能求出平面 S 上一切点在点 P 产生的合振幅和合相位．由于 $1/r$ 因子和 $g(\theta)$ 因子，当半径 R 增大时，这些矢量的大小越来越小，结果得到的不是一个圆，而是一条螺旋线，如图 17-24 所示．

为了简化计算，假定 $\lambda\ll r_0$，P 相当靠近平面 S，而把这个面分成一些圆环，叫做菲涅耳带(图 17-25)．这些带的外缘至点 P 的距离相继差 $\lambda/2$．即 $r_1=r_0+\lambda/2$，$r_2=r_1+\lambda/2$，$r_3=r_2+\lambda/2$，等等．这样一种处理方法具有下述特性：从相邻两个带到达点 P 的对应光线具有相差 π，因而产生相消干涉；亦即

$$\delta_{n+1}-\delta_n=\frac{2\pi}{\lambda}(r_{n+1}-r_n)=\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{2}\right)=\pi.$$

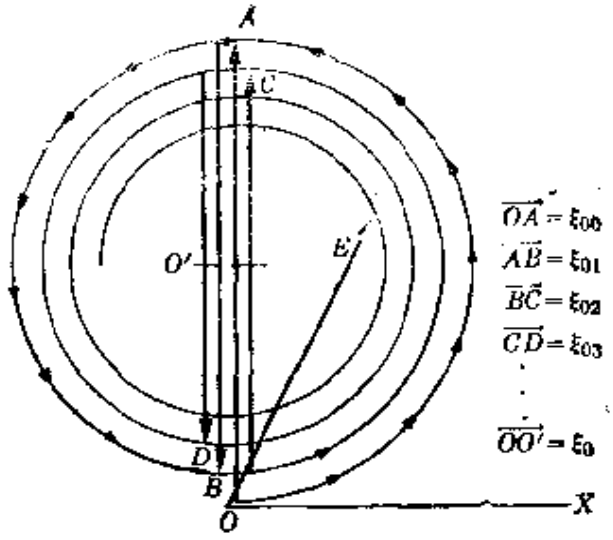


图 17-24

设 ξ_{0n} 是第 n 个带在点 P 产生的振幅[它与方程(7.24) 给出的值成正比],则在 P 点的合振幅为

$$\xi_0=\xi_{00}-\xi_{01}+\xi_{02}-\xi_{03}+\cdots. \tag{17.26}$$

我们还可以把上式写作如下形式:

$$\xi_0=\frac{1}{2}\xi_{00}+\left(\frac{1}{2}\xi_{00}-\xi_{01}+\frac{1}{2}\xi_{02}\right)+\left(\frac{1}{2}\xi_{02}-\xi_{03}+\frac{1}{2}\xi_{04}\right)+\cdots.$$

来自相邻带的振幅的大小差不多相等,不过随 n 的增加而减小;即 $\xi_{00}>\xi_{01}>\xi_{02}>\cdots$. 因此,作为一个好的近似,可以假定 $\frac{1}{2}\xi_{00}-\xi_{01}+\frac{1}{2}\xi_{02}\approx 0$, 因而一般地有 $\frac{1}{2}\xi_{0(n-1)}-\xi_{0n}+\xi_{0(n+1)}\approx 0$. 因此,对于一个无限的平面,方程(17.26)中的求和实际上化为

$$\xi_0=\frac{1}{2}\xi_{00}. \tag{17.27}$$

由此可见,点 P 的波动来自正对着点 P 的那一部分波阵面, 它的振幅等于第一个菲涅耳带的贡献的一半.

注意, 每一个菲涅耳带是由许多图 17-23 所示的圆环形面元组成的. 当用图 17-24 所示振幅矢量图来说明这里的情况时, 应

注意，对于第一个带，距离是从r_0变到$r_0+\lambda/2$，或者相位从$2\pi r_0/\lambda$变到$(2\pi r_0/\lambda)+\pi$. 这个事实表示，当我们画出来自这个带的所有次级源的所有振幅矢量时，它们的相差逐渐地从零变到 π. 这些矢量构成图17-24中从O至A的弧，因而第一个带的振幅ξ_{00}是矢量$\overrightarrow{OA}$. 对于第二个带，距离从 $r_0+\lambda/2$ 至 $r_0+\lambda$，或者相位从$(2\pi r_0/\lambda)+\pi$ 变到$(2\pi r_0/\lambda)+2\pi$，因而又产生一相差 π. 所以第二个带对应于从 A 到B的弧. 它的振幅 ξ_{01} 等于矢量 $\overrightarrow{AB}$. 重复这个步骤，直至包括全部的带. 这个螺旋线收敛于点 O'，所以合振幅是$\overrightarrow{OO'}$，而$\overrightarrow{OO'}$近似地等于$\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$，这正是方程(17.27).

由于 $r_n=r_0+\frac{1}{2}n\lambda$，所以，由图17-25可知，第 n 个带的半径为 $R_n^2=r_n^2-r_0^2=(r_0+\frac{1}{2}n\lambda)^2-r_0^2=n\lambda r_0+\frac{1}{4}n^2\lambda^2$. 如果 n 不很大，则最后一项可以忽略(因为 $\lambda\ll r_0$). 于是得到

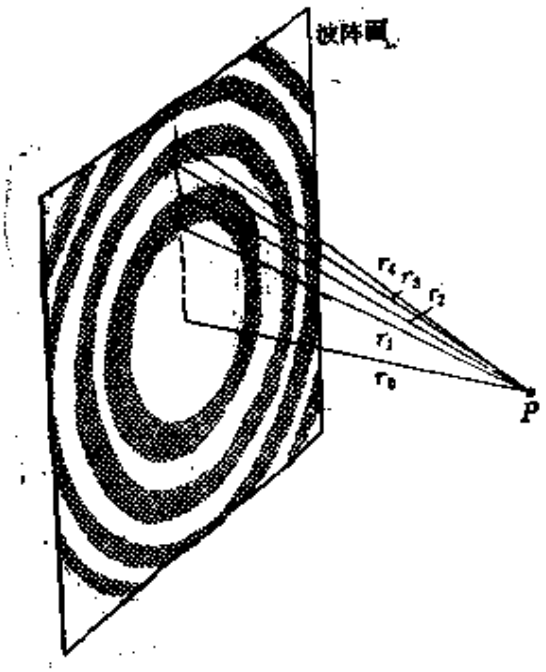


图 17-25　相继各菲涅耳带.

$$R_n^2 = n\lambda r_0. \tag{17.28}$$

这个方程表示，各个菲涅耳带的面积相同，都等于 $\pi\lambda r_0$.

当这个波阵面被一个屏所遮挡时，结果就不同于方程(17.27)，因为这时有一些带，由于被遮挡，对于点 P 的运动只有一部分贡献，或者毫无贡献. 假定一列入射波垂直投射在开有半径为 a 的圆孔的屏上. 观察点在垂直于屏且通过圆孔中心的直线上，因而菲涅耳带与圆孔同心. 当观察点的距离为 r_0，因而 $a^2=\lambda r_0$ 时，只有一个带通过圆孔，并在点 P 产生一振幅 ξ_{00}. 点 P 的振幅为对于整个波阵面所算出的值[方程(17.27)]的二倍. 结果是，点 P 的照度为屏不存在因而整个波阵面都露出时的照度的四倍！如果这圆孔更大，或者观察点更靠近屏时，因而 $a^2=2\lambda r_0$，则前两个带通过圆孔，结果得到的振幅为 $\xi_{00}-\xi_{01}$. 这个振幅几乎等于零，因而点 P 是暗的！一般地讲，只要我们的近似保持有效，我们将在衍射图中心得到最亮点或最暗点，依 n 为奇数或偶数而定. 这里 n 是相对于衍射的观察点，处于圆孔内的菲涅耳带的数目. 图 17-26 中示出几个不同的 n 值的情况.

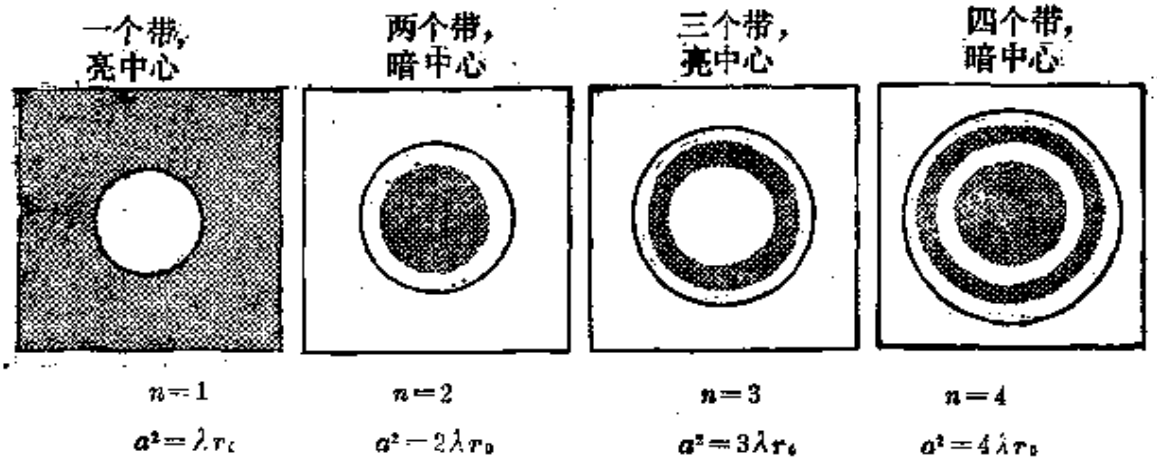


图 17-26　对于一个固定的观察点，改变圆孔大小时菲涅耳带的变化.

利用图 17-24 中的线图可以看出，当只有一个带露出时，合振幅是 $\overrightarrow{OA}=\xi_{00}$. 当两个带露出时，合振幅为 $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=$

$\xi_{00}-\xi_{01}$. 对于三个带，则有

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\xi_{00}-\xi_{01}+\xi_{02}\approx\frac{1}{2}\left(\xi_{00}+\xi_{02}\right),$$

依此类推. 在一般情况下，当露出整数个菲涅耳带＋一个带的一部分时，我们可以象在图 17-24 中那样的线图上，画出从点 O 至点 E 的矢量 $\overrightarrow{OE}$，从而求出合振幅. 点 E 对应于整数个带＋最后一个带的一部分. 在图 17-24 所示情况下，E 对应于 6 个带＋第七个带的一部分.

当圆孔的半径改变，但至观察屏的距离固定时，不同的作用带对合波动的贡献不同，产生的衍射图由一系列与 P 同心的圆环组成. 这些圆环的亮度交替变化，如图 17-27 所示. 对于一个半径

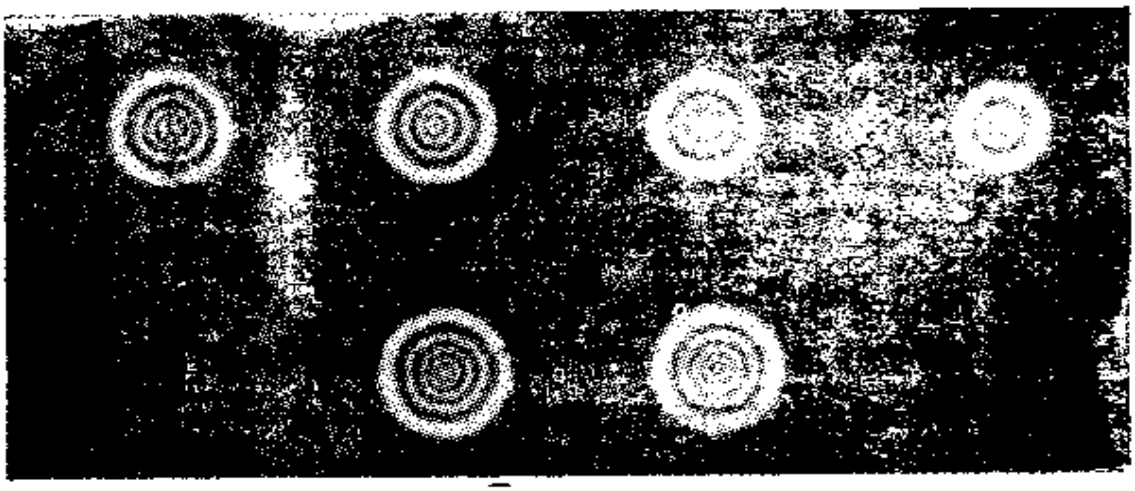


图 17-27　不同半径的圆孔的菲涅耳衍射图.

为 a，包含若干个带的圆孔，强度随至圆孔轴线的距离而变化的曲线，如图 17-28 所示.

如果不是一个圆孔，而是一个圆盘，则衍射图相似，但中心处总是亮点(图17-29). 原因在于，第一个露出的菲涅耳带总是在中心处给出正的贡献. 这和一个完全露出的平面波阵面总是产生一个亮斑的原因相同.

矩形缝的情况与圆孔的情况很相似，不过在这种情况下，菲涅

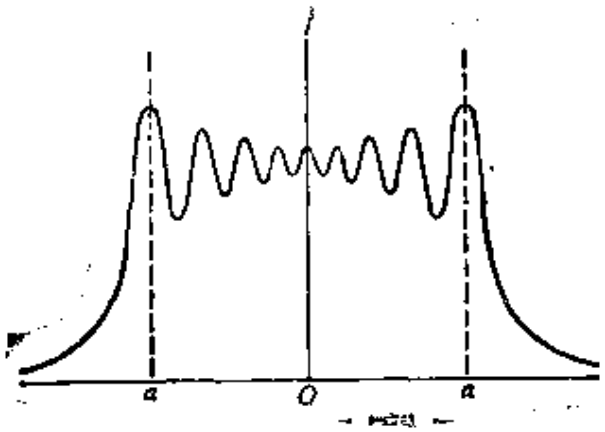


图 17-28　圆孔的菲涅耳衍射的强度分布.

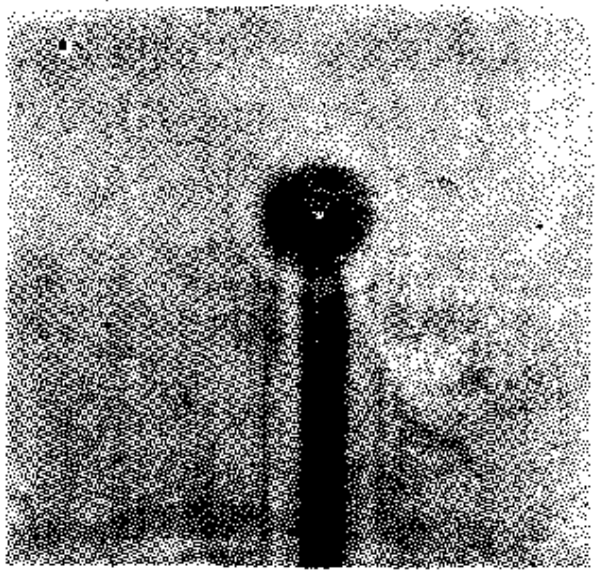


图 17-29　用一根细棒支持的小圆盘所引起的菲涅耳衍射.

耳带是平行于缝的长条，而不是圆环.

图 17-30 中示出直边衍射图的强度分布，由图可见，在几何阴影内，强度逐渐减小到零，而在几何照明区域内，在前几个波长上强度发生起伏.

例题 17.7　一个屏上有一个直径 1 mm 的小孔，用波长 5.7×10^{-7}m 的光照明. 试沿垂直线计算从屏至最远暗点的距离.

解　在这个情况下，孔的半径为 0.5mm，波长 $\lambda=5.9\times10^{-7}$m. 最远暗点是圆孔内只有两个菲涅耳带的那一点. 因此，根据方程(17.28)，令 $n=2$，用 a 代替 R_n，我们得到 $a^2=2\lambda r_0$，或 $r_0=a^2/2\lambda=0.212$m；这表示最远的暗点约在离屏 21.2cm 处. 在离屏约 0.42m 处，应该有一个很亮的点，对应于

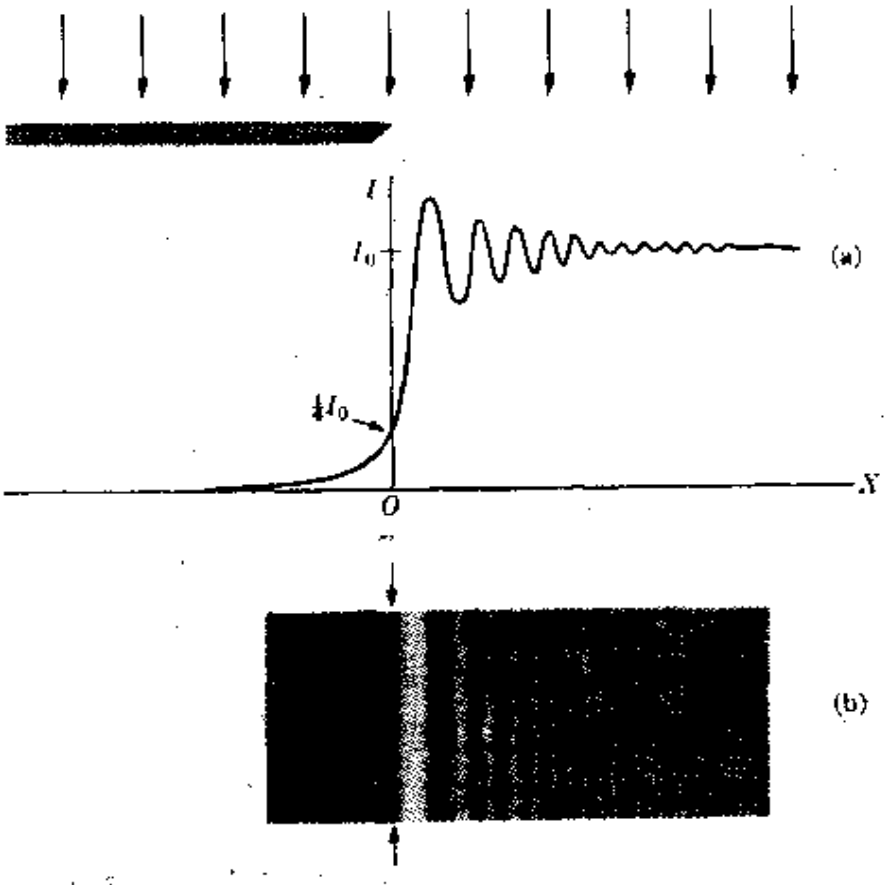


图 30 (a)直边引起的菲涅耳衍射的强度分布.(b)直边引起的菲涅耳衍射的照片.

圆孔内只有一个菲涅耳带. 一般地讲，相继的更靠近的暗点离屏的距离为 $a^2/2k\lambda$(式中 k 是一个大于 1 的整数).

17.7 散 射

迄今为止，在我们关于衍射的讨论中，都是隐含地假定，放在波的路径上的物体起着被动的作用；也就是说，我们假定它们的唯一作用是阻挡波阵面的一部分，而它们自身并不产生任何新的波. 在这样的假定下，观察到的衍射效应完全是由于入射波动被畸变.

然而，在许多情况下，实际图象并非如此. 例如，假定一个用弹性材料做成的球悬挂在空气中，并在附近产生声波(即压缩波). 当这声波绕这球通过时，首先发生前面讨论过的那种衍射. 但是，

除此之外，由于波所引起的压强起伏，弹性球还产生振荡形变．球表面的振荡又在周围空气中产生新的扰动即波．这些波叠加在原来的波上．振荡着的球所产生的这些新的波是散射波，这种过程叫做散射．

类似地，如果把一个导体球放在一列电磁波的路径上，则这波中的电场和磁场引起球上自由电荷的振荡．这些振荡电荷发射电磁辐射，从而产生新的即散射的电磁波．

在第十二章中，我们讨论了单个电子所引起的散射，这是一个原子数量级的纯动力学问题．我们现在要描述的散射则具有比较宏观的性质，因为这种散射涉及由许多原子组成(即包含许多电子)的物体．我们能够应用物体表面的某些边界条件来计算这种宏观散射的大小．这些边界条件决定散射波的性质．例如，在一个理想导电球的情况下，我们必须要求在球表面上合电场(即入射波和散射波的电场之和)的切向分量为零．

对于所有的波动现象，散射过程都是极为重要的．但是，关于散射的比较详尽的讨论所需的数学处理，超出本书的范围．

17.8 晶体对 X 射线的散射

在光频段能引起衍射的物体，对于波长比紫外线短的电磁波，例如 X 射线和 γ 射线，没有显著影响．然而，由规则排列的间距约为 10^{-10}m 的原子或分子组成的晶体点阵，提供一种产生 X 射线衍射的优良介质．由于两方面的原因，这个问题比本章前面讨论过的那些问题要复杂一些．首先，由于这种晶体是一个三维阵列，所以衍射中心分布在空间里(而不是沿一个方向)，如图 17-13 所示 NaCl 晶体的情况．(暗球和亮球分别对应于 Na^+ 和 Cl^{-1}离子)．其次，如前所述，在电磁波电场的作用下，晶体中的原子或分子变为次级辐射源．因此，这实际上是一个散射现象，而不是衍射

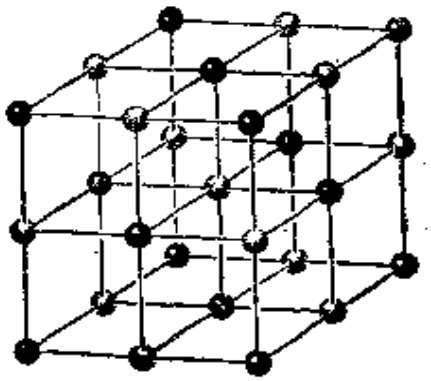


图 17-31　氯化钠晶体的简化表示，图中示出形成立方点阵的原子的规则排布.

现象.

X 射线通过晶体时，散射线的强度是每个原子或分子发射的波(沿观察方向)干涉的结果. 当这晶体是由两类以上原子组成时，每一类原子对 X 射线散射的贡献不同. 因此，为简化计算，我们假定只有一类原子，而且每个晶体元胞中只有一个原子.

考虑两个间距为 r 的原子 A 和 B (图 17-32). 设 u_i 是沿入射波传播方向的单位矢量，u_s 是沿散射波方向的一个类似的单位矢量. 对于这两个原子来说，入射波和散射波的程差为 $AD-BC$，对应的相差由下式给出：

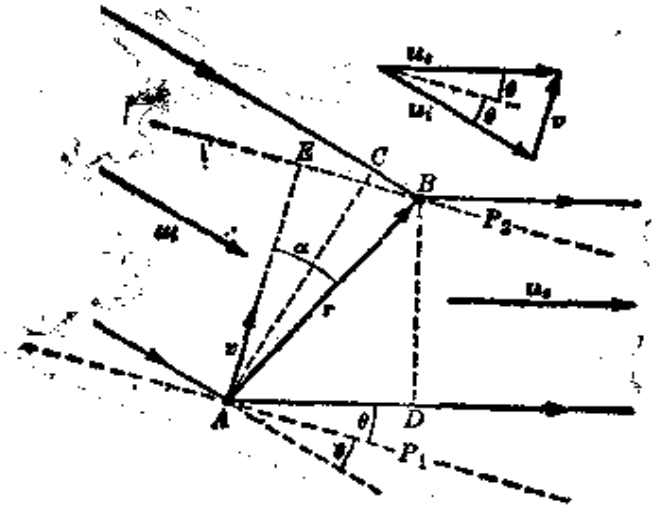


图 17-32　两个原子 A 和 B 引起的X射线散射.

$$\delta=\frac{2\pi}{\lambda}(AD-BC),$$

但 $AD=\boldsymbol{u}_s\cdot\boldsymbol{r}$, $BC=\boldsymbol{u}_i\cdot\boldsymbol{r}$. 因此,

$$\delta=\frac{2\pi}{\lambda}(\boldsymbol{u}_s-\boldsymbol{u}_i)\cdot\boldsymbol{r}=\frac{2\pi}{\lambda}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}, \tag{17.29}$$

式中 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}_s-\boldsymbol{u}_i$. 用 2θ 表示 $\boldsymbol{u}_s$ 和 $\boldsymbol{u}_i$ 之间的角，则由图17-32中右上角的插图可以看出

$$v=2\sin\theta. \tag{17.30}$$

在方向 $\boldsymbol{u}_s$ 上相长干涉的条件是 $\delta=2n\pi$；或者，根据方程(17.29)，得出相长干涉的条件为

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}=n\lambda, \tag{17.31}$$

式中 n 为一正或负的整数. 方程(17.31)是一个垂直于矢量 $\boldsymbol{v}$ 的平面的方程. 由此可见，对于给定的波长 λ 和给定的入射方向，方程(17.31) 表示一系列平行平面，每个 n 值对应于一个平面. 图17-32 中示出两个这样的平面 P_1 和 P_2. 对于所有位于这些平面上的原子，条件(17.31)都成立，因而这些原子都对方向 $\boldsymbol{u}_s$ 上的强度极大值有贡献. 在方程(17.31)中，$n=0$ 对应于通过 A 的平面，$n=\pm1$ 对应于这个平面两侧最靠近的一对平面，$n=\pm2$ 对应于再下一对平面，依此类推.

由图 17-32，并利用方程(17.30)，我们看出 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}=vr\cos\alpha=2d\sin\theta$，式中 $d=AE=r\cos\alpha$ 是平面 P_1 和 P_2 之间的距离. 于是方程(17.31)变为

$$2d\sin\theta=n\lambda. \tag{17.32}$$

上式叫做布喇格方程. 英国物理学家布喇格 (W. H. Bragg, 1862—1942) 和他的儿子 W. L. 布喇格(1890—1971)首先求出这个方程. n 的值受 $\sin\theta$ 永远小于 1 这个条件的限制. 图 17-33 中示出这个方程中涉及的几何情况.

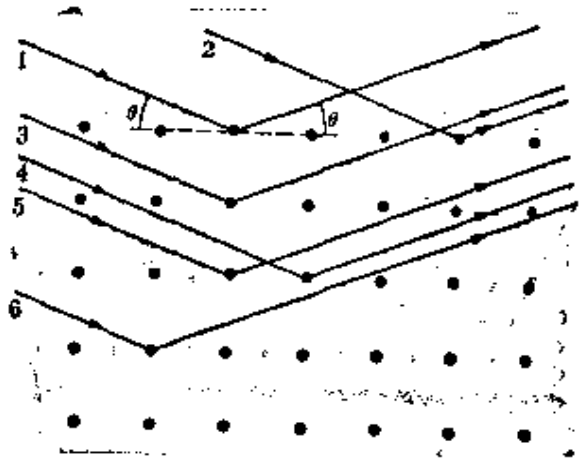


图 17-33　晶体中的平行的散射平面.

对于同一平面上的原子所散射的光线，例如 1 和 2，相差等于零($n=0$)，因而它们相长干涉. 然而，这个情况对于任何入射角都成立. 布喇格条件的重要特点是，诸如 3，4，5，…那样一些来自相继各平面的光线，也相长干涉，从而产生一个非常强的极大值. 由此可见，布喇格条件表示一种集体效应，在这效应中，某些平行平面上的一切原子所散射的光线相长干涉. 对于固定的平面（即固定的 d）和波长 λ，改变 θ 角时，会交替产生强度最大和最小的位置，它们对应于相长干涉[由方程(17.32)给出]或相消干涉. 注意，如果知道波长 λ，就能够利用方程(17.32)来确定平面间距 d；反之，如果知道平面间距 d，就能确定波长 λ.

观察 X 射线的布喇格散射的实验装置，叫做晶体分光计，其示意图如图 17-34 所示. 对于一个给定的入射方向 u_i，方程(17.31) 确定一系列可能的平行平面族. 在表征每一个平面族的方向 u_s 上，产生一散射最大值. 这个强度取决于每一个平面族中原子的数目. 图 17-35 中示出一些可能的平面族. 每一个平面对应于不同的散射中心密度和不同的间距. 如果把一个屏放在一个单晶体散射的射线的路径上(见图 17-36)，屏上就会出现一个表征这种晶体结构的规则图样. 这种花样叫做劳厄图样，以纪念德

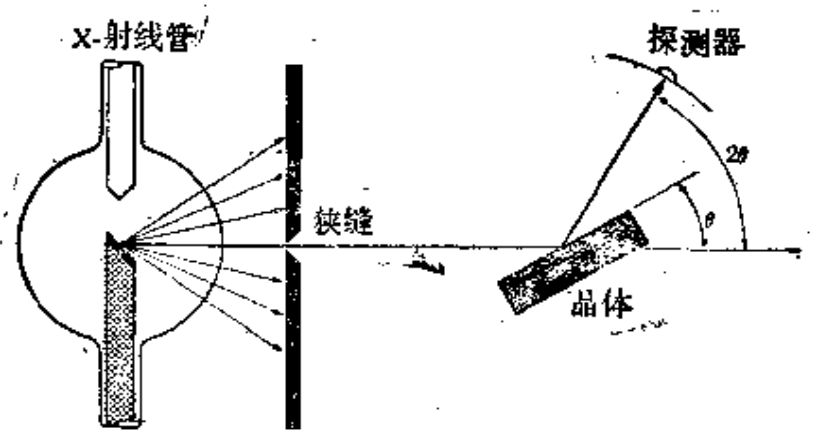


图 17-34　X 射线衍射晶体分光计. 左边的X射线管产生的X射线，通过铅板上的一条狭缝被准直之后，受晶体衍射. 用一个可移动的探测器（通常是一个电离室）来观察衍射的 X 射线.

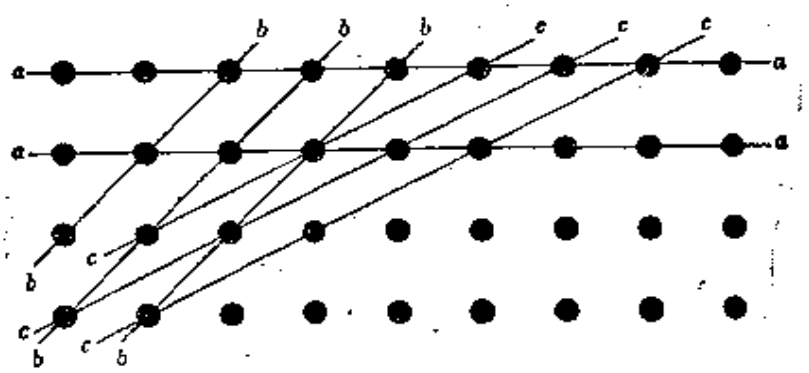


图 17-35　晶体中几种可能的平行散射平面.

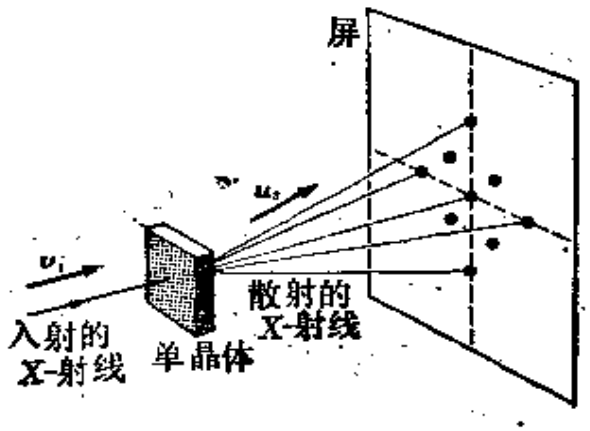


图 17-36　单晶体引起的劳厄 X 射线衍射.

国物理学家劳厄(Maxvon Laue, 1879--1960). 这个图样中的每一个点，对应于和图 17-35 中的一个平面族相联系的散射波的方向 $\boldsymbol{u}_n$. 图 17-37 中的照片示出一个这样的劳厄图样.



图 17-37 石英晶体的劳厄衍射图样. 曾设法使最无偏转的入射束的效应.

如果散射体不是单晶体，而是包含大量的无规取向的小晶体的粉末，则对应的 $\boldsymbol{u}$ 矢量分布在一个以入射方向为轴线的锥面上，如图 17-38 所示. 在照相胶片上，每一个锥面产生一个亮环，如图 17-39 所示；这就是所谓德拜-谢乐图样，以纪念荷兰物理学家德拜(P. Debye, 1884—1966)和他的学生瑞士人谢乐 (P. Scherrer, 1890—1979). 通过分析诸如图 17-37 和图 17-39 那样的衍射图样，能够确定晶体的内部结构，或者反过来，可以求出 X 射线的波长.

十九世纪末，当伦琴初次观察到 X 射线时，人们对 X 射线的

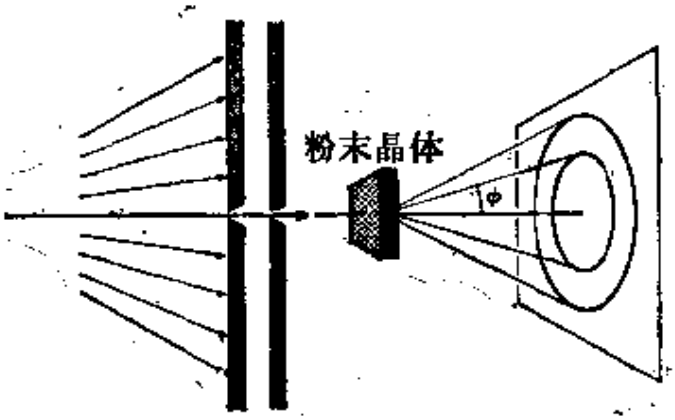


图17-38 粉末的X射线衍射.

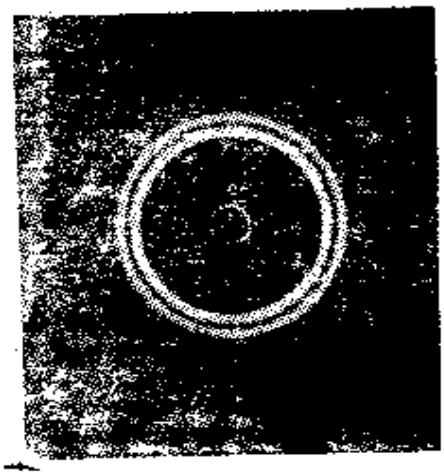


图17-39 粉末铝的X射线衍射图样.

本性有过激烈的争论. X射线究竟是波，还是粒子？为了回答这个问题，物理学家曾利用类似于光学实验中使用的那些设备，来进行X射线的干涉和散射实验. 但是，得到的结果不是否定的，就是缺乏说服力的. 当时人们倾向于摈弃X射线的波动解释. 直到劳埃、布喇格等研究了X射线通过晶体时的衍射，并获得上述结果时，才证明了X辐射的波动本性.

例题 17.8 一束X射线被一块岩盐晶体衍射. 一级谱对应的角为6°50′，平面的间距为 2.81×10^{-10}m. 试求X射线的波长和二级谱的位置.

解 利用布喇格关系式(17.32)，将 $d=2.81\times10^{-10}$m，$\theta=6°50'$ 和 $n=1$ 代入，求得

$$\lambda=2d\sin\theta=6.69\times10^{-11}\text{m}.$$

求二级谱的位置时，我们令 $n=2$，于是得出 $\sin\theta=\lambda/d=0.238$ 或 $\theta=13°46'$. 注意，最大衍射级受 $(n\lambda/2d)<1$ 这个条件的限制. 在我们这个情况下，这个条件相当于 $n<8.4$，即 $n_{最大}=8$.

习　题

17.1 一个屏上有一条宽 4×10^{-4}m 的狭缝. 这个屏覆盖在一个焦距为 0.40m 的透镜上. 一束平行的汞光(波长为 5.6×10^{-7}m) 通过这条狭缝，试求在透镜焦平面处的屏上，中央极大值与第一极小值之间的距离.

17.2　一个单狭缝的夫琅和费衍射图(在图 17-5 中放大到两倍)，形成在一照相胶片上，这胶片放在焦距为 0.60m 的透镜在焦平面上．所用光的波长为 5.9×10^{-7}m．试计算狭缝的宽度．[提示：测量照片上中央极大值两侧对应的极小值之间的距离．]

17.3　用一台望远镜来观察相距 0.30 m 的两个遥远的点源．用一个屏覆盖这望远镜的物镜，屏上有一条宽 10^{-3}m 的狭缝．试求：能够分辨这两个源的最大距离是多少？假定 $\lambda=5.0\times10^{-7}$m．

17.4　在一个焦距为 1m 的透镜的焦平面上，观察一个单狭缝的夫琅和费衍射图．狭缝的宽度为 4×10^{-4}m．入射光包含两个波长 λ_1 和 λ_2．λ_1 的第四个极小值与 λ_2 的第五个极小值出现在同一点，至中央极大值的距离为 5×10^{-3}m，试求 λ_1 和 λ_2 的值．

17.5　一个不透明的屏上有一个 5×10^{-4}m$\times10^{-3}$m 的矩形孔．一列波长为 6.0×10^{-7}m 的单色平面波垂直投射在这个屏上．(a)一个焦距为 2m 的会聚透镜直接放在矩形孔的后面，试描述在这透镜的焦平面上观察到的衍射图样．(b)计算中央极大值周围的暗线所构成的矩形的边长．

17.6　试计算用下述仪器形成的一颗恒星的象的夫琅和费衍射图中央圆盘的半径：(a)用一架透镜直径为 2.5×10^{-2}m，焦距为 7.5×10^{-2}m 的照相机；(b)用一架物镜直径为 0.15m，焦距为 1.5m 的望远镜．假定光的波长为 5.6×10^{-7}m．

17.7　一辆驶近的汽车的前灯之间的距离为 1.30m．试估算在多大距离处能用肉眼分辨两个前灯，假定眼睛的分辨率仅由衍射决定．假定光的平均波长为 5.5×10^{-7}m，眼睛瞳孔的直径为 5×10^{-3}m．将所得结果与根据第 15.5 节中给出的眼睛的分辨本领所得结果加以比较．

17.8　在图 17-40 中，两个点光源 S_1 和 S_2 相距 6×10^{-3}m，二者至透镜

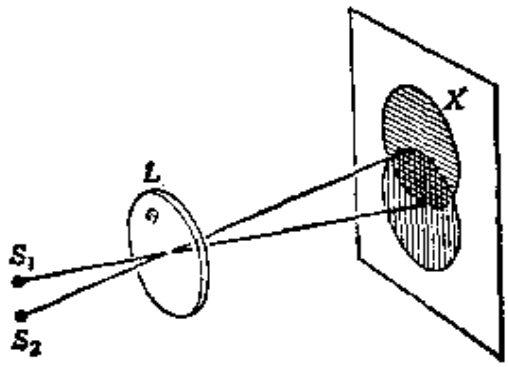


图　17-40

L的距离均为50m. 所产生的象，根据瑞利判据，刚好能够分辨. 透镜的焦距为0.20m. 试求第一个衍射圈的直径.

17.9 在一双缝的衍射图中，第三个主极大值消失，因为这个干涉极大值与第一个衍射零值重合. (a)求比值a/b. (b) 画出中央极大值两侧几个极大值范围内的强度分布. (c)画出屏上出现的条纹的浓淡点图.

17.10 两个相距1.5×10^{-3}m的针孔，放在一个亮光源的前面，通过用一个屏覆盖着的透镜进行观察. 屏上有一个直径4×10^{-3}m的圆孔. 试求能够分辨针孔的最大距离. 假定波长为5.5×10^{-7}m.

17.11 在一焦距为0.50 m的透镜的焦平面上观察双缝的夫琅和费衍射. 入射单色光的波长为5.0×10^{-7} m. 观察到毗邻零级极大值的两个极小值之间的距离为5×10^{-3}m，第四级极大值消失. 试求狭缝宽度和两狭缝中心之间的距离.

17.12 波长为6.0×10^{-7}m的平面单色波，垂直投射在每米有5×10^{5}条划线的平面透射光栅上. 试求：(a)第一级光谱，(b)第二级光谱，(c)第三级光谱的偏转角.

17.13 一平面透射光栅的划线密度为每米4×10^{5}条. 试计算在第二级光谱中原子氢的α和β线(它们的波长分别为6.56×10^{-7}m和4.10×10^{-7}m)之间的角间距. 假定光线正入射.

17.14 (a)一平面透射光栅每米有6×10^{5}条线. 在第一级光谱中偏转角为20°的光线的波长是多少？(b)这个波长在第二级光谱中偏转角是多少？假定光线正入射.

17.15 一平面光栅每米有5×10^{5}条划线. 在它的第四级光谱中能够观察到的最长的波长是多少？假定光线正入射.

17.16 假定可见光谱的波长范围是在4×10^{-7}m和7×10^{-7}m之间. 试求一个平面光栅(它每米有6×10^{5}条划线)所产生的第一级光谱和第二级光谱所张的角. 假定光线正入射.

17.17 一透射光栅，长4×10^{-2}m，每米有4×10^{5}条划线. (a)试计算，在第一级光谱中，这光栅对于5.9×10^{-7}m的波长的分辨本领. (b)这个光栅能否把钠黄双线的波长为5.890×10^{-7}m和5.896×10^{-7}m的两条线分开？对于所考虑的波长，还要计算(c)最小偏转角和(d)对应的色散.

17.18 试证明，不论光栅划线间距如何，第三级光谱的紫光总是与第二级光谱的红光重叠. 假定光线正入射.

17.19 从一个遥远的点源发出的波长为 6.0×10^{-7}m 的单色光，通过一个圆孔．在离圆孔 1 m 的屏上观察菲涅耳衍射图．如果这圆孔(a)只露出中央菲涅耳带，(b)只露出前四个菲涅耳带．试求这圆孔的直径．

17.20 用波长为 5.0×10^{-7} m 的光照亮一个圆孔．观察点位于离圆孔 0.10m 处．如果这个圆孔对应于 10 个菲涅耳带，试求它的半径．

17.21 波长为 5.0×10^{-7}m 的光，投射在一个半径为 10^{-3}m 的圆孔上．试问：观察点必须在离圆孔多大距离处，才能使这圆孔对应于(a)三个菲涅耳带，(b)四个菲涅耳带？(c)每一种情况下该点是亮点还是暗点？

17.22 波长为 5.0×10^{-7}m 的平行光波，通过一直径为 2.60×10^{-3}m的圆孔．在一个离圆孔 1 m 的屏上观察菲涅耳衍射图样．(a)衍射图的中心是亮点还是暗点？(b)为了使(a)中得到的情况反转，屏应移动的最小距离是多少？

17.23 一列波长 $\lambda=5.0\times10^{-7}$m 的平面单色光波，垂直投射在一个屏上，这屏上有一个直径 4×10^{-3}m 的圆孔．(a)确定屏的轴上强度最小和最大的点的位置．(b)最后一个最小值出现在离屏多远的地方？

17.24 一个屏上有一个半径为 4×10^{-3} m 的圆孔，用垂直入射的平面光波来照亮它．假定入射光是波长分别为 $\lambda_1=6.0\times10^{-7}$ m 和 $\lambda_2=4.0\times10^{-7}$m 的两个单色光束的混合．试确定，在垂直于圆孔且通过其中心的直线上，只观察到(a)λ_1 或(b)λ_2的那些点．

17.25 在 NaCl 晶体中，主平面的间距为 2.82×10^{-10}m．观察到一单色 X 射线束的第一级布喇格反射出现在 10° 角．(a)计算这 X 射线的波长．(b)对应于第二级光谱的角多大？

17.26 碘化钾(KI)是一立方晶体，其密度为 3.13×10^{3}kg·m^{-3}．(a)求最小晶面间距；即一个元胞的长度．(b)试确定与前两个布喇格反射对应的角．假定 X 射线的波长为 3.0×10^{-10}m．

17.27 一个 X 射线管使电子通过 10^{4} V 的电势差加速．用习题 17.25 中描述的晶体来分析所产生的 X 射线．试求这管子所产生的最短波长的第一级谱出现的角度．(提示：参看例题 12.2.)

17.28 一束波长为 5×10^{-11}m 的 X 射线，投射在由无规取向的 KCl 微晶组成的粉末上．这晶体的点阵间隔为 3.14×10^{-10}m．胶片放在离粉末靶 0.1m 处．试求间距与点阵间隔相同的晶面所产生的第一级和第二级谱的圈的半径．

较难的习题

17.29　相干光通过两个平行狭缝，投射在一个离狭缝 10 m 远的屏上．这光的波长为 6.0×10^{-7}m；每个狭缝宽为 7.5×10^{-6}m；狭缝中心线之间的距离为 1.5×10^{-4}m．(a)把一个狭缝遮住，使这光通过一个狭缝．试尽可能定量地描述屏上光的图样．(b)两个狭缝都不遮档，因而光通过两条狭缝．试尽可能定量地描述屏上光的图样．(c) 如果逐渐减小通过狭缝的光的波长，在(b)中观察到的图样将如何变化？

17.30　(a)一束单色光投射在一个宽为 w（w 约为几个波长）的狭缝上．试对在远处的屏上形成的图样，概略画出强度随位置变化的曲线．(b)对于两个狭缝的情况，重作(a)；这两条狭缝的宽度为 w，间距为 d（$d\gg w$）．试对在远处的屏上形成的图样，概略画出强度随位置变化的曲线．

17.31　一列波长为 λ 的单色平面波，以 30° 角投射在一个平的、不透明的屏上，屏上有一条宽为 a 的长狭缝，如图 17-41 所示．在屏的后边有一个会聚透镜，其主轴垂直于屏的平面．试描述在这个透镜的焦平面上观察到的衍射图样．

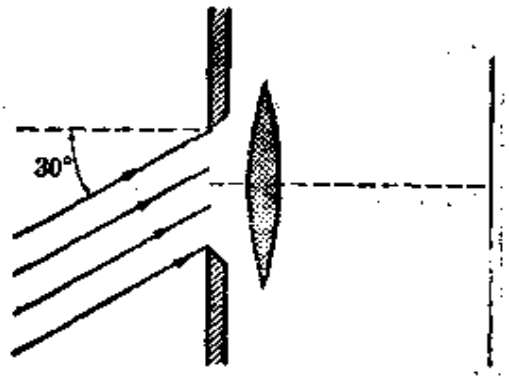


图　17-41

17.32　试讨论三个完全相同的、等间距的狭缝所产生的夫琅和费衍射的强度分布．假定光垂直地投射在狭缝上．

17.33　两个等亮度的恒星所张的角为 1 秒．假定光的波长为 5.5×10^{-7}m．(a)能够分辨这两颗星的望远镜物镜的最小直径多大？(b)这望远镜的放大率应有多大？(c)如果物镜的焦距为 1.80m，试计算所用目镜的焦距．

17.34　能够证明，在夫琅和费衍射的情况下，半径为 R 的圆孔所衍射的波的振幅与贝塞耳函数 $J_1(x)$ 成正比；其中，对于正入射，

$$x=\left(\frac{2\pi R}{\lambda}\right)\sin\theta,$$

θ 是衍射线与圆孔轴线所成的角(图 17-42). (a)证明，衍射波振幅为零的方向，对应于方程 $J_1(x)=0$ 的根. (b)查阅 $J_1(x)=0$ 的根值表，求出前三个零振幅方向的 $\sin\theta$ 的值，并验证方程(17.11). (c)用一个焦距为 f 的会聚透镜把衍射线聚焦在一个位于透镜焦平面处的屏上，并求出前三个暗环的半径. (注意，在这个问题中，可以用 θ 代替 $\sin\theta$.) (d)设 $R=10^{-4}$m，$\lambda=5.9\times10^{-7}$ m，$f=0.20$m，试求 θ 的值和环的半径.

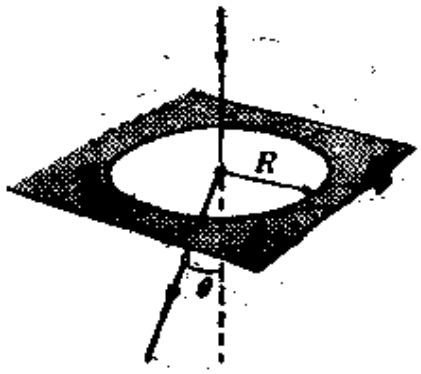


图 17-42

17.35 证明：在一个具有大量划线的光栅中，第一个主极大值两侧的第一个次级极大值的强度，约等于主极大值强度的 4%.

17.36 反射光栅是用一个金刚石尖在一个抛光的金属表面上刻划细线而制成的(图17-43). 相邻划线之间留下的抛光部分相当于透射光栅上的狭缝. 试证明主极大值由如下条件决定：

$$a(\sin i-\sin\theta)=n\lambda,$$

式中 a 是相邻划线的间距.

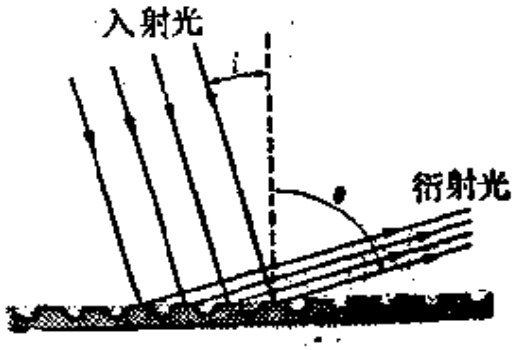


图 17-43

17.37 为了使衍射光栅能够适当地聚焦，美国物理学家罗兰 (H. A. Rowland) 制成大半径的凹面光栅. 假定图 17-44 中 C 是光栅的曲率中心，并假定虚线圆的直径等于光栅的半径. 试证明：对于放在这个圆上的任意光源 S，(a)一切光线都以相同的入射角投射在光栅上，(b)被光栅衍射有相同衍射角的一切光线，都会聚在虚线圆上的某一点 O. 因此，如果把一张照相

胶片放在O处，与这个圆相切，就能记录下与那个衍射角对应的衍射谱．这种布置叫做罗兰装置，在物理实验中，广泛应用于光谱学研究．[提示：在一条光线的入射点处光栅的法线通过C，光栅表面与虚线圆的表面偏离甚小．]

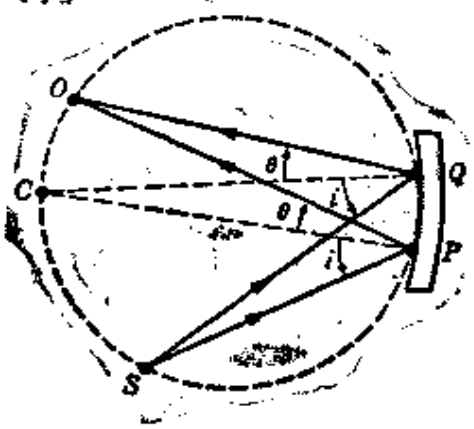


图 17-44

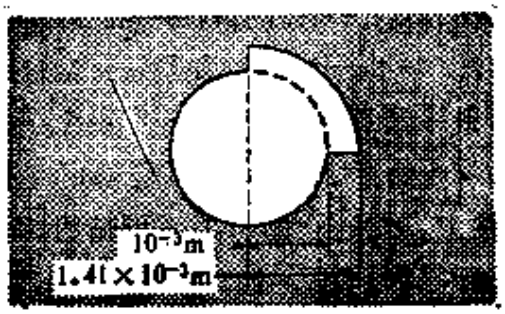


图 17-45

17.38 一列波长$\lambda=5.0\times10^{-7}$m的平面单色光波，垂直投射在一个不透明的屏上，屏上有一个孔，其形状如图 17-45 所示．内圆的半径为10^{-8}m，外圆的半径为1.41×10^{-8}m．(a)试计算在圆的轴线上，离屏 2 m 处的一点P的光扰动的振幅和强度(以屏不存在时在点P观察到的值为基准)．(b)确定这个扰动的相位(以屏不存在时在点P观察到的扰动的相位为基准)．

17.39 一个晶体点阵可以用三个基矢a_1，a_2和a_3来表征．因此，这种晶体结构，对于等于这三个基矢的整数倍的线性组合的位移来说，是周期性的(图 17-46)．(a) 证明：在两个不同元胞中占有相似位置的两个点的相对位矢，由$r=\gamma_1a_1+\gamma_2a_2+\gamma_3a_3$给出，式中$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$为正的或负的整数．(b)

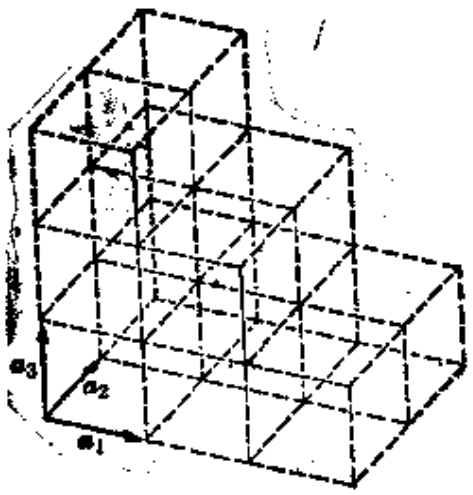


图 17-46

证明：参与 n 级 X 射线谱的原子，由满足方程 $v\cdot(\gamma_1a_1+\gamma_2a_2+\gamma_3a_3)=n\lambda$ 的整数给出，式中 v 的定义由方程(17.29)给出. (c)证明：在与 v 相联系的方向上，散射辐射的强度与 $(A_1A_2A_3)^2$ 成正比，式中

$$A_i=\sin(N_i\pi v\cdot a_i/\lambda)/(\sin\pi v\cdot a_i/\lambda)$$

N_i 是在 a_i 的方向上晶体元胞的数目. (d)根据(c)中得到的结果证明：出现主极大值的方向满足关系式 $v\cdot a_1=n_1\lambda$，$v\cdot a_2=n_2\lambda$，$v\cdot a_3=n_3\lambda$，式中 n_1，n_2，n_3 均为整数. 这些关系式叫**做劳厄方程**. (e) 利用倒易矢量 a^1，a^2，a^3(见第一卷的习题 3.34)，证明

$$v_s=v_i+(n_1a^1+n_2a^2+n_3a^3)\lambda.$$

这个方程决定如图 17-37 所示劳厄衍射花样中亮斑的位置.

第十八章　量子力学

18.1 引　论

我们观察到的周围物体的运动，可以用根据实验得到的普遍法则来描述(与物体之间的相互作用无关)．这些原理或定律是

1．动量守恒；

2．角动量守恒；

3．能量守恒．

根据这些守恒定律，发展了一种详细描述粒子运动的表述形式，称为经典力学．在经典力学中，假定(1)粒子定域在空间中，(2)我们能够观察它们，而不会显著干扰它们的运动．这些假定一般都是隐含地，而非精确地、明显地作出的．曾用经典力学的表述形式描述和分析各种物体(大至行星，小至电子)的运动．但是，当经典力学应用于物质的基本组分的运动时，它只能给出近似的结果；在某些情况下，经典力学完全不适用．

在本世纪头二十五年之末，物理学概念的一次重要革命，从根本上改变了我们描述粒子和亚原子粒子运动的方法．虽然动量守恒、角动量守恒和能量守恒这三条定律仍然成立，但现在一致认为，在经典力学的意义上，详细描述原子粒子的运动是不可能的．例如，在第七章中讨论过的能量和其他物理量的量子化这个实验事实，是经典力学中所没有的一个新颖概念．一个满意的理论必须包含关于所涉及粒子的容许能级和空间分布的计算方法的信息．这个新理论必须包括的另外一个概念，是辐射和物质通过吸收或发射光子而相互作用(第十二章)．

由于这些原因，一个新的、称为量子力学的表述形式被发展起来．目前这种形式的量子力学，乃是许多科学家的研究成果．在本世纪二十年代后期，对发展新力学作出卓越贡献的科学家当中，有德国人玻恩(M. Born, 1882—1969)，海森伯(W. Heisenberg, 1901—1976)，奥地利人薛定谔(E. Schrödinger, 1897—1961)，英国人狄拉克(P. Dirac, 1902—)和法国人德布罗意(L. de Broglie, 1892—)．量子力学的理论框架，在数学上是复杂的，但它的基本概念却是比较简单的．

18.2 粒子和场

由感觉经验可知，我们接触的和看见的物体，都具有明确的形状和大小，因而是定域在空间中的．这样，我们就倾向于认为基本粒子(即电子、质子、中子等等)也都有形状和大小，并把它们想象为具有特定半径、质量和电荷的小球．但是，这种概念化毕竟是超出我们直接感觉经验的推广．因此，在我们接受这种图象之前，必须先对它进行认真的分析．

实验表明，上述关于物质的基本成分的外推感觉图象是错误的．基本粒子的动力学行为要求我们把一个场(物质场)同每一个粒子联系起来，就象我们曾按相反的方式，把一个光子(它相当于一个粒子)同一个电磁场联系起来一样．一定的电磁场描写具有一定动量和能量的光子，在与此相同的意义上，物质场描写粒子的动力学情况．在讨论物质场与粒子的动力学物质(即动量和能量)之间的关系时，我们可以用在第十二章中对于光子求出的关系式 $E=h\nu$ 和 $p=h/\lambda$ 作为引导．量 h 是普朗克常数，等于 6.626×10^{-34}J·s．当我们把这些关系式倒转时，可以假定，与一个动量为 p、能量为 E 的粒子相联系的单色场的波长 λ 和频率 ν 由下式给出：

$$\lambda=h/p,\quad \nu=E/h. \tag{18.1}$$

这些关系式是德布罗意于 1924 年首先提出的；因此，有时称 $\lambda=h/p$ 为一个粒子的德布罗意波长. 引用波数 $k=2\pi/\lambda$ 和角频率 $\omega=2\pi\nu$，我们可以把这些关系式写成更对称的形式：

$$p=\frac{h}{2\pi}k, \qquad E=\frac{h}{2\pi}\omega;$$

或者，利用 $\hbar=h/2\pi=1.0546\times10^{-34}\text{J}\cdot\text{s}$，可将上式写作

$$p=\hbar k, \quad E=\hbar\omega. \tag{18.2}$$

如果方程(18.1)和(18.2)所表示的假定是正确的，我们就可以期望，每当一个粒子的运动被如此干扰，以致与它相联系的物质场不能自由传播时，就应当观察到物质波的干涉、衍射和散射现象，就象在弹性波和电磁波的情况下那样. 实际情况果然是这样.

在讨论显示物质场的干涉和衍射现象的实验之前，我们先求出和一个粒子相联系的德布罗意波长 λ 的值作为粒子能量的函数. 被电势 V 加速的电子获得能量 eV；因此，电子的动能为

$$p^2/2m_e=eV,$$

所以

$$p=\sqrt{2m_eeV}\,.$$

把 e、m_e 和 h 的值代入，则得被加速电子的德布罗意波长为

$$\lambda=\frac{h}{\sqrt{2m_eeV}}=\frac{1.23\times10^{-9}}{\sqrt{V}}\text{m}, \tag{18.3}$$

式中 V 的单位是伏特. 类似地，当电子的动能以电子伏特为单位时，则 $E_k=p^2/2m_e$ 或 $p=\sqrt{2m_eE_k}$；于是我们可以写出

$$\lambda=\frac{1.23\times10^{-9}}{\sqrt{E_k}}\text{m},$$

式中 E_k 的单位是电子伏特.

18.3 晶体对粒子的散射

当电子的加速电势约为 10^4V 时 (此值在电视显象管加速电

压的范围内)，方程(18.3)表明，这些电子的波长约为 10^{-11}m，与 X 射线的波长同数量级．因此，如果我们发射一束快速电子通过一块晶体，我们应该得到由物质场的散射所引起的衍射图样．和入射电子的相互作用对应的这些衍射图样，应该类似于对于具有相同波长的 X 射线所观察到的图样(见第 17.8 节中的讨论)．

1927 年，英国科学家汤姆孙(G. P. Thomson, 1892—1975)进行了一系列实验来研究电子束通过晶体材料薄膜的问题．电子通过薄膜之后，撞击在一照相底片上，如图 18-1 所示．如果电子的

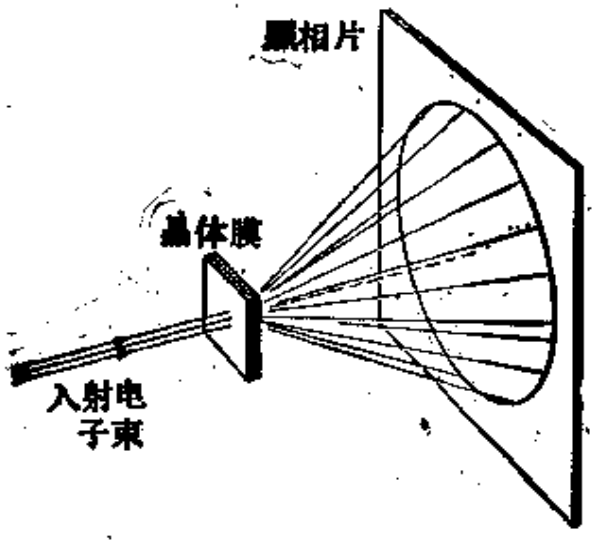


图 18-1　观察电子通过晶体材料时的散射的实验装置．

行为象宏观意义上的粒子，那就会观察到模糊的象，因为晶体原子对各个电子的散射一般是不同的．但是，得到的结果，却和多晶物质的 X 射线散射的德拜-谢乐图样(见第十七章)完全相同，如图 18-2 的照片所示．类似地，当一电子束通过一单晶时，产生劳厄斑图样(对于 X 射线也观察到这种图样)，如图 18-3 中的照片所示．如果知道晶面的间距，并应用对 X 射线衍射所导出的公式，我们就能根据这些图样的结构算出德布罗意波长 λ．可将所得到的 λ 值与根据方程(18.3)算出的值加以比较．在实验误差范围内，结果完全一致．

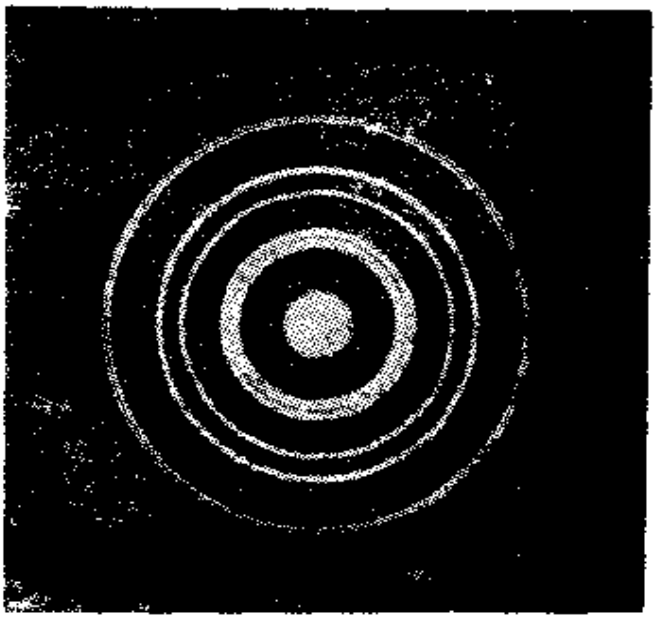


图 18-2　晶体粉末引起的电子散射.



图 18-3　碳(石墨)单晶引起的电子散射.

在美国人戴维孙(C. Davisson, 1881—1958)和革末 (L. Germer, 1896—1971) 的著名实验中(这些实验大致与汤姆孙的实验同时进行的), 使一电子束与一单晶面成一角度投射在单晶面上. 在对称位置上放置一探测器来观察散射电子, 如图 18-4 所示. 这个装置与布喇格观察 X 射线衍射的装置相似(见第 17.8 节), 戴

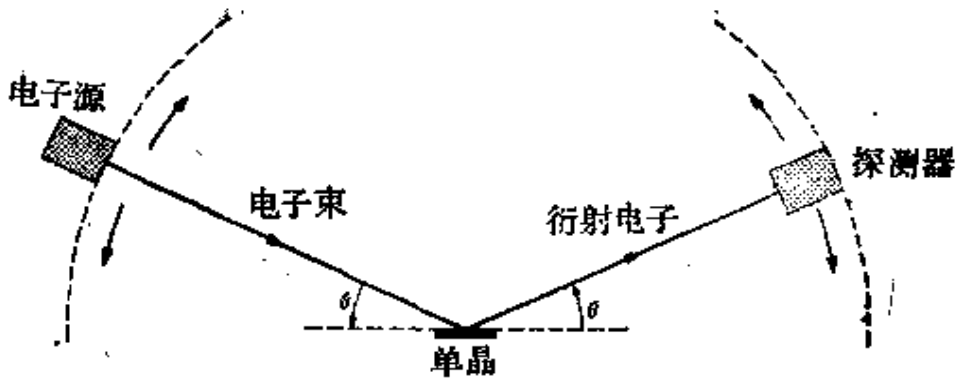


图 18-4　戴维孙和革末观察电子的布喇格散射的装置.

维孙和革末发现，每当满足对 X 射线导出的布喇格条件时，探测器记录的电子流就达到最大值. 布喇格条件由方程(17.31)表示:

$$2d\sin\theta = n\lambda, \tag{18.4}$$

式中 d 是这晶体中相邻原子层的间距，λ 由方程(18.3)给出.

在用质子和中子进行的实验中，观察到同样的布喇格散射现象. 中子散射特别有用，因为它是研究晶体结构的最有力的工具之一. 实验家们利用单能中子束来分析它们通过晶体的散射. 经通道口从核反应堆中出来的中子(图 18-5)，具有宽能谱(即中子

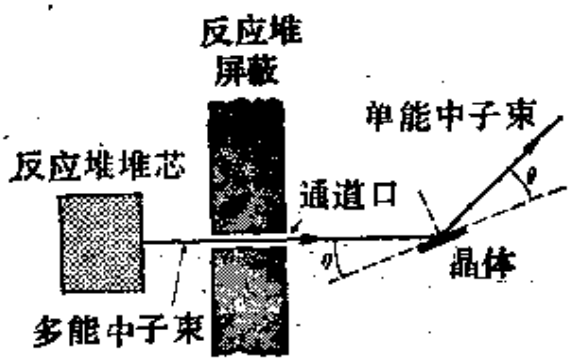


图 18-5　中子晶体谱仪.

的动量在宽范围内变化). 换句话说，这中子束不是单能的；它包含由许多种德布罗意波长组成的能谱. 当来自反应堆的中子束投射在一晶体(例如 LiF)上时，在对称方向上观察到的中子仅对应于满足布喇格条件(18.4)的波长 λ. 因此，它们有确定的动量和能量. 在这种情况下，晶体起着能量滤器或单能器的作用. 单能中

子束本身又被用于研究其他材料，或者分析涉及中子的核反应。

例题 18.1 温度为 300K 时，计算热中子的德布罗意波长。

解 热中子是指与给定温度下的物质处于热平衡状态的中子。这样，热中子的平均动能就与同样温度下理想气体分子的平均动能相同。因此，热中子的平均动能为 $E_{平均}=(3/2)kT$，式中 T 是绝对温度，k 是玻耳兹曼常数。已知温度为 300K，所以

$$E_{平均}=\frac{3}{2}kT=6.21\times10^{-21}\text{J}=3.88\times10^{-2}\text{eV}.$$

对应的动量为

$$p=\sqrt{2m_nE_{平均}}=4.56\times10^{-24}\text{m}\cdot\text{kg}\cdot\text{s}^{-1},$$

利用方程(18.1)，求出热中子的平均德布罗意波长为

$$\lambda=1.45\times10^{-10}\text{m}.$$

顺便提一下，如果注意到 NaCl 晶体的晶面间距 $d=2.82\times10^{-10}$m，可以算出，对于这种波长的中子，第一个布喇格最大值出现在角 $\theta=14.9°$。

18.4 粒子和波包

利用关系式(18.1)，我们可以用一个具有恒定振幅的谐波(如图 18-6 所示)来表示与一个自由粒子对应的场，这个自由粒子具有确定的动量 p 和能量 $E=p^2/2m$。对称性要求这种波的振幅在

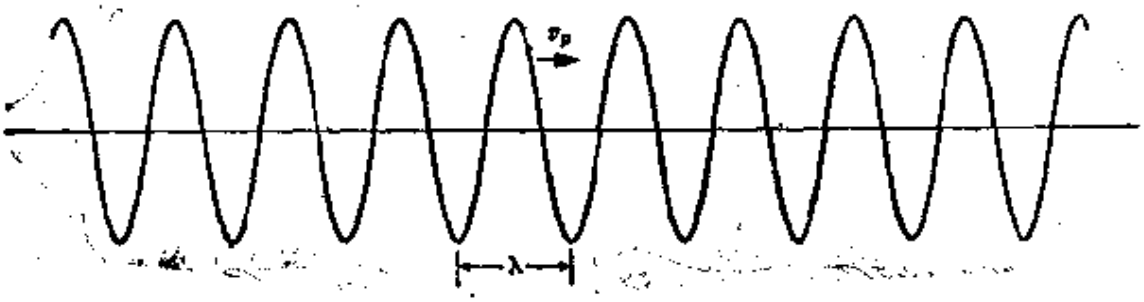


图 18-6 与一个非定域波包对应的连续波列。

整个空间中一样，这是因为没有力作用在自由粒子上，否则就会使连属的物质场在空间的某些区域中比在其他区域中发生较大的畸变。自由粒子的场的相速度是

$$v_p=\lambda\nu=\frac{h}{p}\cdot\frac{E}{h}=\frac{E}{p}=\frac{p}{2m}=\frac{1}{2}v.$$

也就是说，物质场的相速度等于粒子速度的一半. 然而，这个方程没有实验上的重要性，因为我们不能直接测量一个纯谐波的相速度. 我们只能测量波的群速度. 物质场的振幅在整个空间到处都一样这个事实表明，一个自由粒子的物质场不能给出具有确定动量的自由粒子的空间位置的信息. 换句话说，这物质场与自由粒子的位置无关；因而，用某种方法观察这种场，不会揭示自由粒子的位置.

根据物理上的直观和我们关于场和波的知识，我们知道，定域在空间某一区域 Δx 内的一个粒子，应当对应于这样一个物质场，这个场的振幅或强度在该区域之内很大，而在该区域之外则很小. 通过把不同频率不同波长的波叠加起来，能够在某个区域中建立一个场，而在该区域之外场因干涉过程而衰减. 结果得到一个波包，如图 18-7 所示. 波包的传播速度是群速度 v_g，其定义由方程(10.55)给出：

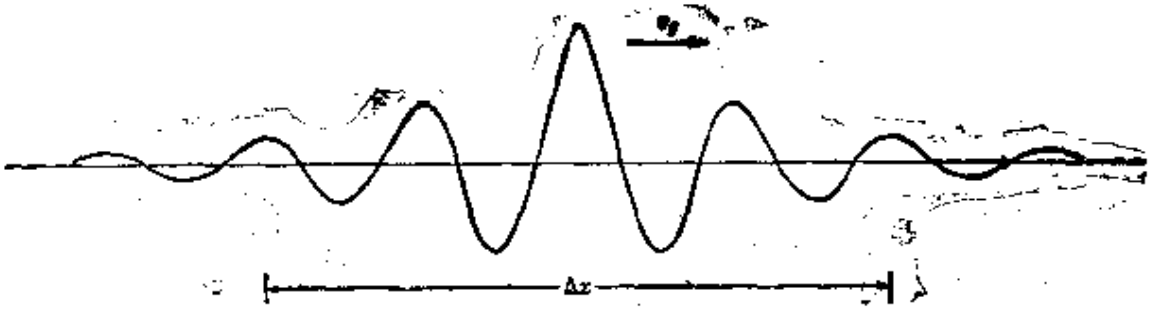


图 18-7　与定域在距离 Δx 之内的一个粒子对应的波包.

$$v_g=\frac{d\omega}{dk}.$$

利用关系式(18.2)和 $E=p^2/2m$，可以把与一个自由粒子对应的物质场的群速度改写为

$$v_g=dE/dp\cdot p/m=v.$$

这样，正如直观告诉我们的那样，物质场的群速度(即波包的传播速度)等于粒子的速度．于是我们得出结论：定域在空间某一区域中的一个粒子，是和一个场或波包相联系的，这个场或波包的振幅仅在那个区域中才是重要的．粒子的速度等于场或波包的群速度．

18.5 关于位置和动量的海森伯测不准原理

现在我们遇到一种不能用经典力学予以说明的特殊情况．为了使一个波包在空间中定域，必须把一些具有不同波长 λ（或不同波数 k）的场叠加起来．如果这个波包扩展在区域 Δx，则组成这个波包的、具有显著振幅的干涉波，其波数的值处在范围 Δk 内，根据例题 10.3 中的分析，Δx 和 Δk 之间有如下关系：

$$\Delta x \Delta k \sim 2\pi .$$

但是，根据方程(18.1)或(18.2)，不同的波长 λ 或波数 k 表示存在若干个 p 值，使得

$$\Delta p = \hbar \Delta k .$$

由于 $h = 2\pi\hbar$，所以上式变为

$$\Delta x \Delta p \sim h . \tag{18.5}$$

方程(18.5)的物理意义是：如果一个粒子处于 $x - \frac{1}{2}\Delta x$ 和 $x + \frac{1}{2}\Delta x$ 之间的区域内（即 Δx 是这个粒子的位置不确定度），则与它相联系的场可以通过把动量在 $p - \frac{1}{2}\Delta p$ 和 $p + \frac{1}{2}\Delta p$ 之间的波叠加来表示，这里 Δp 与 Δx 之间的关系由方程(18.5)表示．我们称 Δp 为该粒子的动量不确定度．方程(18.5)表示，Δx 越大，Δp 就越小；反之亦然．换句话说，要获得关于粒子的空间位置的信息，就必须牺牲关于它的动量的信息．关于粒子的位置我们知道得越准

确，我们关于它的动量的信息就越不准确；反之亦然．因此，一个具有精确动量($\Delta p=0$)的粒子是用一个具有恒定振幅的、延伸到整个空间($\Delta x\approx\infty$)的波来代表的；这样，我们关于粒子位置的信息就等于零．我们不可能同时地、精确地确定一个粒子的位置和动量，以致同时实现$\Delta x=0$和$\Delta p=0$；这样的信息不符合方程(18.5)．

方程(18.5)所表示的结果，叫做海森伯测不准原理，可陈述如下：

不可能同时地、准确地知道一个粒子的位置和动量．

这个原理表达了自然界的基本事实之一，在某种程度上可以认为它比方程(18.2)更基本，虽然在这里我们的阐述是倒转进行的．

测不准原理表明，我们永远不能以经典力学所假定的那种绝对精确度来确定一个粒子的路径．对于大的物体，诸如工程师通常所处理的物体，经典力学仍然成立，这是因为，对于一个宏观物体来说，方程(18.5)所表示的不确定度，要比该物体的x和p的测量值的实验误差小得多．然而，对于原子尺寸的粒子来说，轨道的概念是没有意义的，因为它不能精确地确定；因此，需要一种不同于经典物理学的运动图象．由于同样的原因，在量子力学中不大使用诸如速度、加速度和力这样一些概念．另一方面，能量的概念则是头等重要的，因为能量在很大程度上是和该系统的"态"相联系，而不是和它的"路径"相联系．

18.6 海森伯原理的例示

能够用几个简单的情况来说明海森伯原理．例如，假定我们要通过观察一个粒子是否通过屏上的一条狭缝(其宽度为b)来确定它的坐标x(图 18-8)．我们关于该粒子位置的知识的精确度，受狭缝宽度的限制；即$\Delta x\approx b$．但是，狭缝干扰了与这个粒子相联

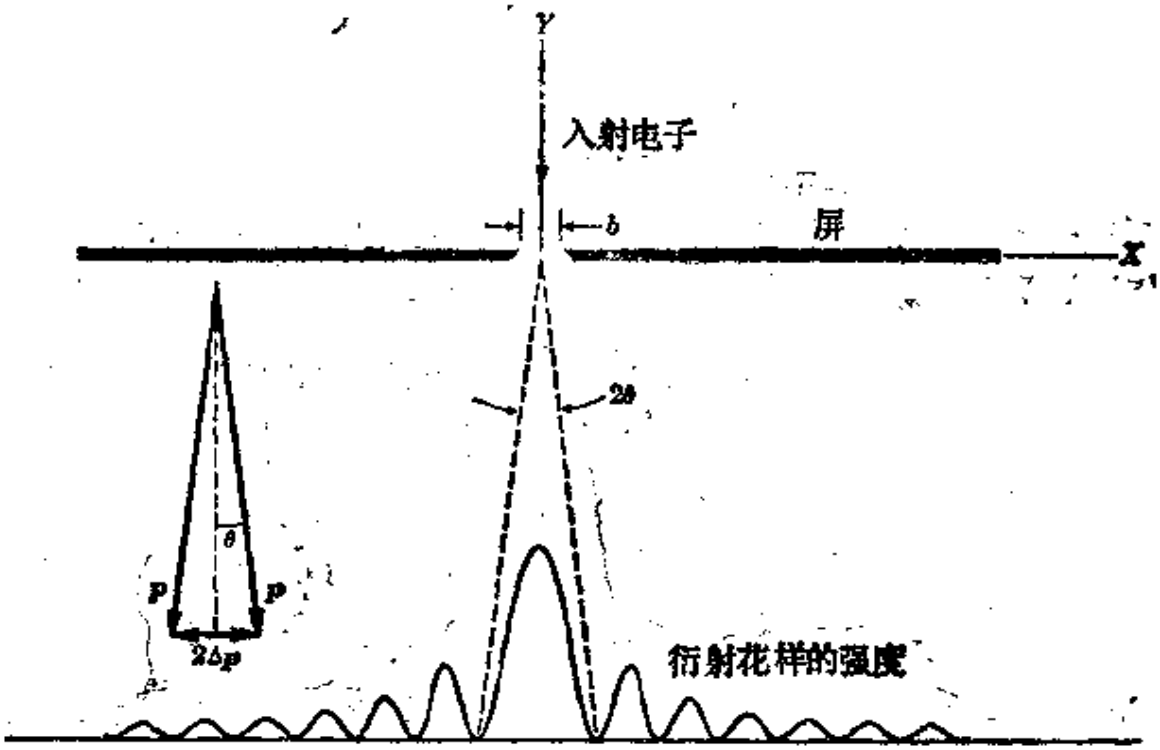


图 18-8 通过一条狭缝的粒子的位置和动量的测量.

系的场，从而引起粒子运动有一相应的变化，这可由所产生的衍射图样看出来. 该粒子的动量在平行于 X 轴的方向上的不确定度，由角 θ 决定，θ 对应于衍射图中央极大的宽度的一半，因为这粒子通过狭缝之后，在角 2θ 范围内运动的几率最大. 根据矩形狭缝所引起的衍射的理论(第 17.3 节)，角 θ 由 $\sin\theta=\lambda/b$ 给出. 于是

$$\Delta p\sim p\sin\theta=\frac{h}{\lambda}\frac{\lambda}{b}=\frac{h}{b},$$

这就是平行于 X 轴的方向上动量的不确定度. 因此，$\Delta x\Delta p\sim h$，这和方程(18.5)一致. 应当注意，为了提高我们确定该粒子的精确位置的能力，我们必须使用很窄的狭缝. 但是，一条很窄的狭缝在衍射图中产生很宽的中央极大，这表示我们关于该粒子动量的 X 分量的知识有很大的不确定度. 相反地，为了减小我们关于粒子动量的 X 分量的知识的不确定度，衍射图的中央极大必须很窄. 这个条件要求使用一条很宽的缝，而这又导致粒子的 X 坐标有很大

的不确定度.

说明海森伯原理的另一个情况，是用显微镜来确定一个电子的位置的实验(图 18-9). 为了观察电子，我们必须用具有某一波长 λ 的光来照亮它. 进入显微镜的光，是被观察电子所散射的光. 散射光子的动量为 $p_{光子}=h/\lambda$；为了能够进入物镜，这些光子必须在锥角为 α 的圆锥内运动，所以它们的动量的 X 分量的不确定度为

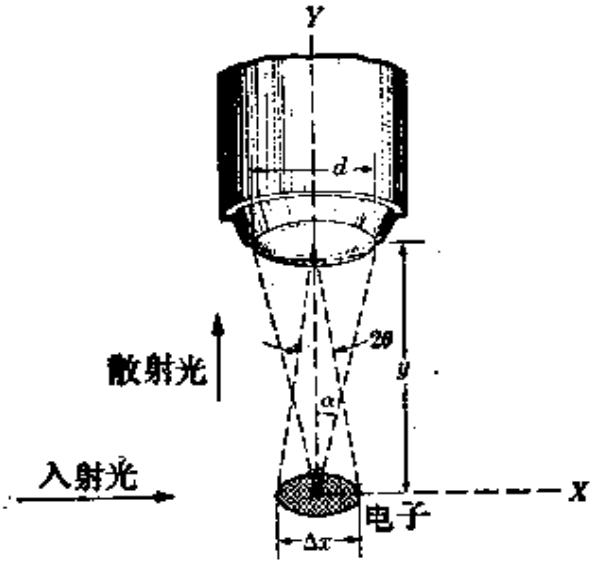


图 18-9　用显微镜测量一个粒子的位置和动量.

$$\Delta p \approx p_{光子}\sin\alpha \approx \frac{h}{\lambda}\cdot\frac{d}{2y},$$

因为 $\sin\alpha \approx d/2y$. 这也是光散射之后电子动量的 X 分量的不确定度，因为在散射过程中有若干动量在电子和光子之间进行交换. 另一方面，由于光通过显微镜物镜时发生衍射，所以不能确知电子的精确位置. 因此，电子位置的不确定度等于衍射图中央圆盘的直径. 这个直径由 $2y\sin\theta$ 给出，式中 $\sin\theta \sim \lambda/d$①. 于是有

$$\Delta x \sim 2y\sin\theta \sim \frac{2y\lambda}{d}.$$

这样就又得到 $\Delta x\Delta p \sim h$. 应注意，为了提高我们关于电子位置的

① 这里我们忽略了平面波的圆孔衍射理论中出现的因子 1.22(见第 17.3 节).

知识的准确度，必须使用波长很短的辐射，但这会引起很大的动量扰动．相反地，为了使动量扰动很小，我们必须使用波长很长的辐射，而这又会引起很大的位置不确定度．

这两个例子清楚地表明，测不准原理是测量过程的直接结果．在原子尺度上，由于测量仪器和被测物理量之间的相互作用，测量过程不可避免地要使被测系统受到不可忽视的微扰．

18.7 关于时间和能量的测不准关系

除了运动着的粒子的坐标和对应的动量之间的测不准关系 $\Delta x\Delta p\sim\hbar$ 之外，还有一个时间和能量之间的测不准关系．假定我们不仅要测量一个粒子的能量，而且要测量该粒子具有这个能量的时刻．如果 Δt 和 ΔE 分别表示这些测量值的不确定度，我们要证明，下列关系式成立：

$$\Delta t\Delta E\sim\hbar. \tag{18.6}$$

我们可以这样来理解这个关系式．如果我们要确定一个粒子通过一个给定点的时刻，我们就必须用一个具有很短持续时间 Δt 的脉冲或波包，来表示该粒子．但是，要建立这样一个脉冲，必须把具有许多不同频率的场叠加起来，这些场仅在中心频率为 ω 的频段 $\Delta\omega$ 内，才有可观的振幅，ω 与这个粒子的能量的关系由方程(18.2)给出，即 $E=\hbar\omega$．例题 10.3 中阐述的波的叠加理论要求

$$\Delta t\Delta\omega\sim 2\pi.$$

用 $\hbar$ 乘上式，并利用关系式 $E=\hbar\omega$ 和 $2\pi\hbar=h$，就得到方程(18.6)．

测不准关系式(18.6)要求我们修正关于定态的概念．我们考虑处于原子内的一个受激定态中的一个电子．一段时间之后，这个电子将发生辐射跃迁而进入能量较低的另一个定态．但是，我们无法肯定地预言该电子将在这个定态中停留多长时间之后，才发生跃迁．我们所能讨论的，充其量不过是每单位时间该电子将

跳到一较低能态的几率. 因此,这个态的寿命,即电子处于定态的平均时间,有一不确定度 Δt. 因此,不能精确地知道电子的定态的能量,它有一不确定度 ΔE, ΔE 满足关系式(18.6). 如果一个态处于 $E-\frac{1}{2}\Delta E$ 和 $E+\frac{1}{2}\Delta E$ 之间的几率最大,我们就称 ΔE 是这个态的能量宽度. 因此,受激态的寿命越短,该态的能量的不确定度就越大. 对于基态来说,它的寿命为无限大,因为一个处于基态的系统不可能跃迁到具有更低能量的定态,所以有 $\Delta t\sim\infty$. 因此得到 $\Delta E=0$,因而能够准确地测定基态的能量.

18.8 定态和物质场

我们现在能够从理论上证明在第 7.4 节中引入的定态概念是正确的.

当一个粒子处于束缚态,即被局限在一个有限的空间区域内运动时,例如原子中的电子或原子核中的质子,与它相联系的物质场也必然被局限在那个区域之内. 这个情况与具有固定端的弦上的波或者空腔中的波的情况相似. 我们知道,在这些情况下,只有某些波长是可能的,这些容许的波,叫做驻波. 因此,我们可以期望,在束缚粒子的情况下,只有对应于物质场的容许波长的那些态,才是可能的.

我们考虑一个非常简单的情况,即一个被局限在从 $x=0$ 至 $x=a$ 的区域内运动的粒子,例如一个箱子中的一个气体分子. 这个分子自由地运动着,直至它碰击在箱壁上而被弹回. 对于一块金属中的自由电子,如果我们忽略电子与正离子的相互作用,而且金属表面处的势垒高度比电子的动能大很多,则有类似情况. 电子能够自由地在金属中运动,但不能从金属中逃逸.

我们可以用图 18-10 中所示的矩形势能曲线来表示这些物理

情况．这是自然界中实际存在的势能的极度简化．这种简化了的势能图叫做势箱．在 $0<x<a$ 的区域中，由于粒子自由地运动，所以我们有

$$E_p(x)=0 \quad 对于 \quad 0<x<a. \tag{18.7}$$

在 $x=0$ 和 $x=a$ 处，势能急剧地增加到无限大．这表示，在这两个点上，有非常强的力作用在粒子上，迫使粒子反转它的运动方向．在这种情况下，不论 E 取什么值，粒子都不能处于 $x=0$ 的左边和 $x=a$ 的右边　这个情况在形式上与具有固定端的弦上驻波的对应情况完全一样．学生可能记得，为了在固定端之间的距离为 a 的弦上形成驻波，波长 λ 的值必须满足关系式：$\lambda/2=a$，$(1/2)a$，$(1/3)a,\cdots,(1/n)a$；亦即

$$\lambda=\frac{2a}{n}, \quad n=1,2,3,\cdots. \tag{18.8}$$

因此，我们可以假定，同样的关系式适用于宽度为 a 的势箱中粒子的物质场的波长．按照方程 (18.1)，这粒子的动量的可能值仅仅是

$$p=\frac{h}{\lambda}=\frac{nh}{2a}=\frac{n\pi\hbar}{a}. \tag{18.9}$$

与方程(18.9)所给出的 p 值对应的粒子能量为

$$E=\frac{p^2}{2m}=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}, \tag{18.10}$$

或者，如果 $E_1=\hbar^2\pi^2/2ma$ 是 $n=1$ 时的能量，则

$$E=E_1,4E_1,9E_1,\cdots,n^2E_1.$$

于是我们得出结论：粒子不能具有任意的能量，只能具有方程(18.10)所给出的那些值，如图 8-11 所示．即粒子的能量是量子化的．

值得注意的是，势箱中粒子的最小能量为 $E_1=\hbar^2\pi^2/2ma^2$，并不象人们所猜测的那样等于零．这个最小能量按如下方式与测不准原理联系起来．显然，这粒子的位置不确定度为 $\Delta x\sim a$．这粒

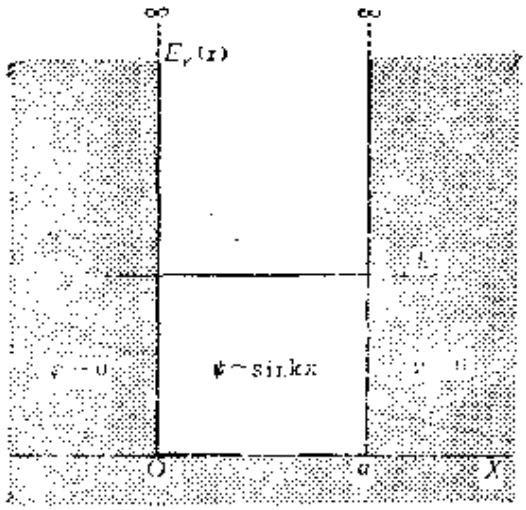


图 18-10　宽度为 a 的一维势箱.

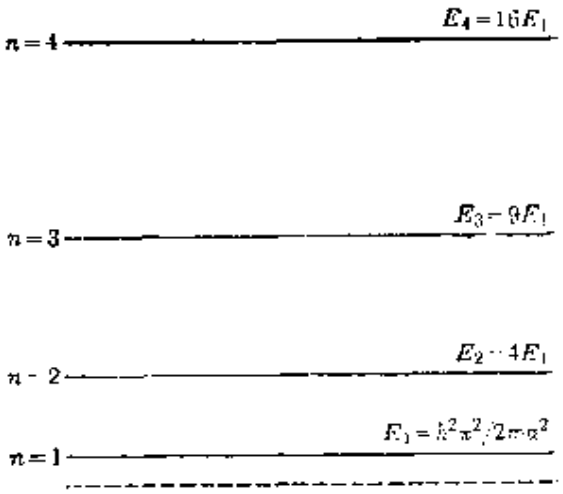


图 18-11　一维势箱的能级.

子以动量 p 来回运动；于是，动量的不确定度为 $\Delta p \sim 2p$. 测不准原理要求 $\Delta x \Delta p \sim h$. 因此，

$$a(2p) \sim h, \text{即 } p \sim \pi\hbar/a,$$

由此得出 $E=p^2/2m \sim E_1$. 有时称 E_1 为零点能. 零点能的存在，是粒子局限在有限区域中运动的所有问题的共同特点.

作为第二个例子，考虑一个类氢原子中的一个电子. 假定这个电子沿圆形轨道运动，如图 18-12 所示. 在圆轨道的情况下，电

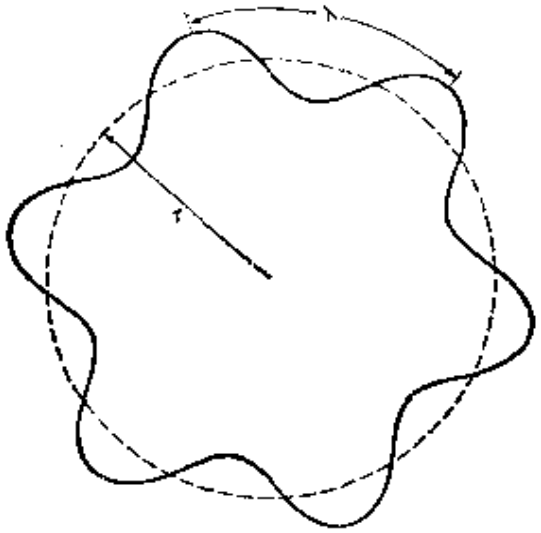


图 18-12　一个圆上的驻波.

子的动量 p 是恒定的. 为了使这轨道对应于一个定态，可以合理地认为这个轨道上必须能够保持波长为 $\lambda=h/p$ 的驻波. 由图 18-12 我们可以看出，所需的轨道长度，必须等于 λ 的整数倍；即 $2\pi r=n\lambda=nh/p$，或者

$$rp=\frac{nh}{2\pi}. \tag{18.11}$$

注意到 rp 是电子的角动量，我们看出，定态是角动量等于 $\hbar=h/2\pi$ 的整数倍的态. 由于 $p=mv$，我们也可以把方程(18.11)写作

$$L=mvr=n\hbar. \tag{18.12}$$

上式表示角动量的量子化. 在第 7.4 节中曾用方程(18.12) 来求出氢原子定态的能量. 然而，如同我们在讨论海森伯测不准原理时所指出的，不可能清晰地确定一个氢原子中电子的轨道. 不过，我们可以论及找到电子的几率较大的区域. 因此，方程(18.12)不会是严格正确的. 比较详细的分析表明，轨道角动量的容许值由下式给出：

$$L=\sqrt{l(l+1)}\,\hbar, \tag{18.13}$$

式中 $l=0,1,2,\cdots$. 在第 7.5 节中已经引入这个关系式.

18.9 波函数和几率密度

我们已经表明，我们不能按经典力学的意义讨论原子粒子的轨道. 例如，我们不能问：原子中的电子是否在椭圆轨道上绕原子核运动. 即使作用在这粒子上的力造成这样的经典轨道，这个问题也是没有意义的. 但是，如果不能论及一个电子或任何其他原子粒子的轨道，那么我们怎样描写它的运动？

回答这个问题的信息是由物质场提供的. 为了获得这种信息，可以利用我们关于驻波的知识. 我们知道，在驻波中，空间每一点的振幅是固定的. 在振幅较大的点，波的强度较大.

对于原子粒子有类似的情况. 例如，我们考虑原子中的一个电子. 这个电子决不会离开原子核太远；它基本上局限在空间的一个小区域内，此区域的线度约为 10^{-9}m. 因此，这电子的连属物质场可以用定域在这个区域内的驻波来表示，其振幅在区域内逐点变化，在此区域之外实际上等于零. 我们用 $\psi(x)$ 表示物质场的振幅. 由于历史上的原因，通常称振幅 $\psi(x)$ 为波函数；不过，这个名称易于引起误解；看来称物质场振幅更为合适.

我们知道，波动的强度与振幅的平方成正比. 因此，物质场的强度由 $|\psi(x)|^2$ 给出. 有时用一复函数表示波函数；复函数是含有 $i=\sqrt{-1}$ 的函数. 把一个复函数中的 i 都换成 $-i$，就得到它的复共轭函数. 用 ψ^* 表示函数 ψ 的复共轭函数. 于是有 $|\psi(x)|^2 \equiv \psi^*(x)\psi(x)$. 对于一个实函数，则 $\psi=\psi^*$.

其次，我们讨论可以赋予物质场的强度什么物理意义. 既然物质场描述一个粒子的运动，我们可以说，在空间中找到该粒子的几率较大的那些区域，就是 $|\psi(x)|^2$ 较大的区域.

例如，图 18-13 示出主要局限在 A 和 B 之间的区域内的粒子

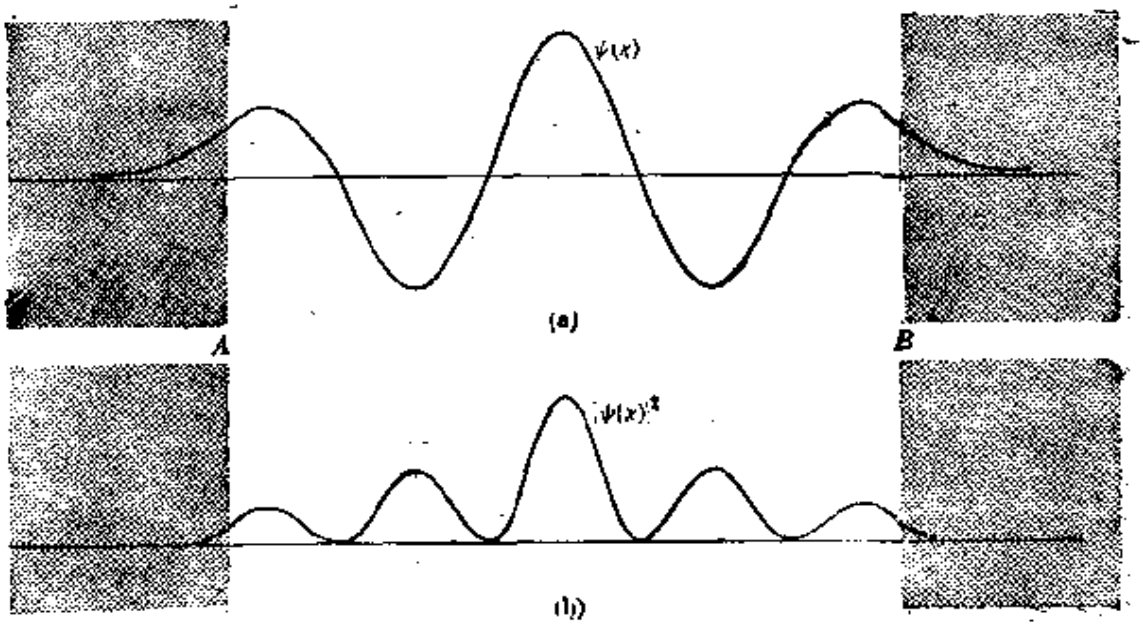


图 18-13 (a)在 A 和 B 之间运动的粒子的波函数. (b) 与(a)中的波函数对应的几率分布.

的波函数 $\psi(x)$. 注意，在区域 AB 之外， $\psi(x)$ 非常迅速地减小，而在这个区域之内波函数振荡. 物质场的强度由 $|\psi(x)|^2$ 给出，如图 18-13(b)所示.

为了更定量一些，我们说：

在点 x 附近的间隔 dx 内，找到波函数 $\psi(x)$ 所描写的粒子的几率等于 $|\psi(x)|^2dx$.

换句话说，在 x 处每单位长度上找到粒子的几率(即几率密度) 为

$$P(x)=|\psi(x)|^2. \tag{18.14}$$

为了简单起见，上面我们假定粒子只沿一个坐标轴运动. 但在一

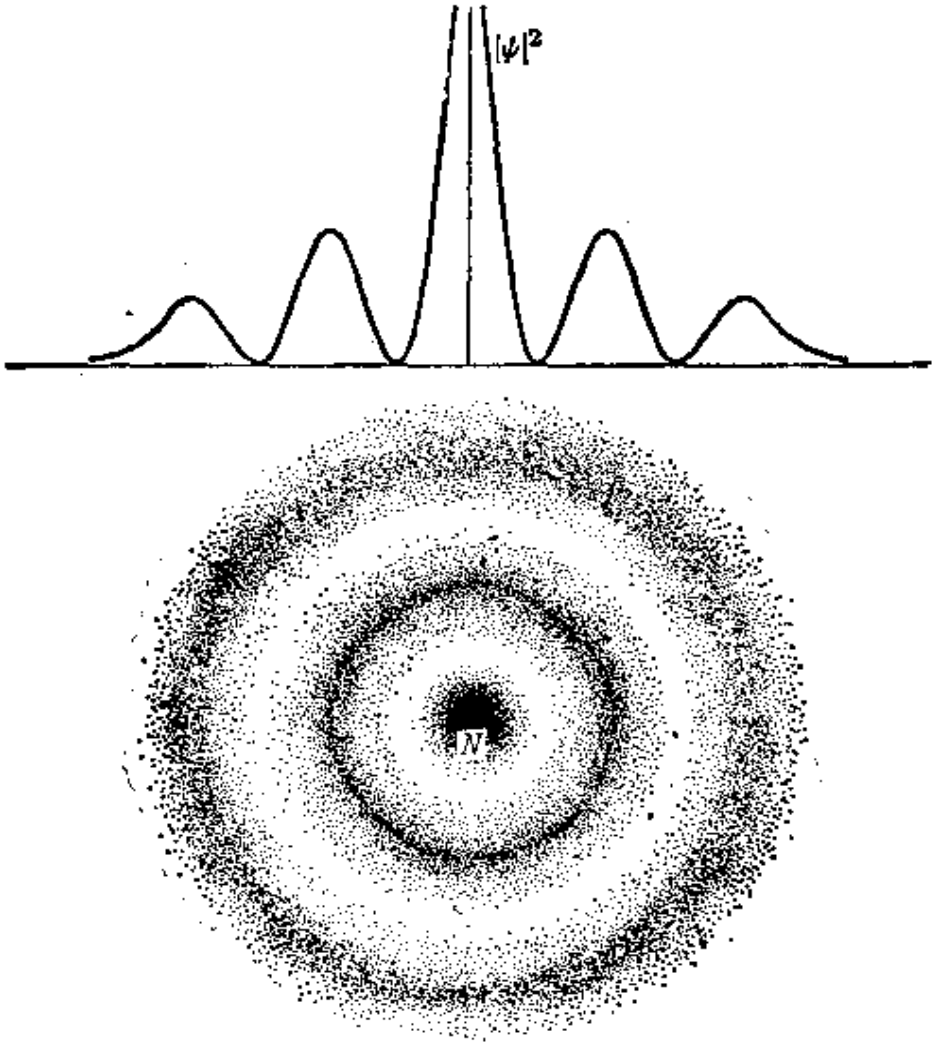


图 18-41 原子中一个电子的几率分布.

一般情况下，粒子在空间中运动，波函数(即物质场振幅)与三个坐标 x, y, z 都有关系[即 $\psi=\psi(x, y, z)$]. 在这种情况下，$|\psi(x, y, z)|^2 dx\,dy\,dz$ 就是在点 (x, y, z) 附近的体积 $dx\,dy\,dz$ 内找到该粒子的几率，而

$$P=|\psi(x, y, z)|^2 \tag{18.15}$$

则为在点 (x, y, z) 处每单位体积内找到该粒子的几率，即几率密度. 例如，我们计算原子中一个电子的波函数 $\psi(x, y, z)$，并画出 $|\psi|^2$ 的曲线，如图 18-14 所示. 图中 N 为原子核，暗黑的程度与 $|\psi|^2$ 的值成正比. 这样，越黑的区域就表示在该区域找到电子的几率越大. 关于电子在原子内的位置，我们最多只能这么说，不可能论及电子的精确轨道.

18.10 薛定谔方程

关于物质场振幅的研究，下一步我们必须找出一个法则，用这个法则能够求出每一个动力学问题的场振幅或波函数 ψ. 当然，波函数 $\psi(x)$ 必定依赖于粒子的动力学态. 这个动力学态是由作用在粒子上的力和粒子的总能量决定的. 如果作用在粒子上的力是保守力，则粒子的运动由其势能 $E_p(x)$ 决定. 因此，我们可以预期，波函数 $\psi(x)$ 必然按某种方式依赖于粒子的势能，因而依赖于粒子的总能量

$$E=p^2/2m+E_p(x). \tag{18.16}$$

事实上，求 $\psi(x)$ 的法则是用一个微分方程来表示的，这个微分方程叫做薛定谔方程，它是1926年由薛定谔提出的. 在一维情况下，这个方程是

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{d^2\psi}{dx^2}+E_p(x)=E\psi \tag{18.17}$$

式中 m 是粒子的质量. 薛定谔方程是量子力学的基本方程，犹如

牛顿方程 $F=dp/dt$ 是经典力学的基本方程，麦克斯韦方程是电磁学的基本方程. 显然，方程(18.17)的解 ψ 取决于势能 $E_p(x)$的形式.

当我们求薛定谔方程的解时，我们不仅得到波函数 $\psi(x)$，而且得到这系统的定态的能量. 通过与驻波振幅的波动方程相比较(回顾第 16.5 节)，不难理解物质场振幅的薛定谔方程. 实际上，根据方程(16.29)，沿一个方向传播的波的波动方程为

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+k^2\psi=0$$

式中 $k=2\pi/\lambda$. 由于 $p=h/\lambda$，我们可以写出 $k=2\pi p/h=p/\hbar$，代入上式，则得

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{p^2}{\hbar^2}\psi=0. \tag{18.18}$$

对于在势能为 E_p 和总能量为 E 的区域中的运动，将方程(18.16)重新整理后，得出

$$p^2=2m[E-E_p(x)];$$

于是方程(18.18)可以写作

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}[E-E_p(x)]\psi=0, \tag{18.19}$$

上式是方程(18.17)的另一种写法.

我们不拟详细证明薛定谔方程是正确的，因为这超出本书的范围. 然而，我们可以陈述一个把方程(18.16)和(18.17)联系起来的实用规则. 如果在方程(18.16)，即

$$E=\frac{p^2}{2m}+E_p(x)$$

中，我们用 $-i\hbar(d/dx)$ 代替 p，则得

$$E=\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)^2+E_p(x)=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+E_p(x).$$

用这个表达式"作用"在 $\psi(x)$上，就得到方程(18.17).

如果这运动不局限于一维，因而这粒子能够在三维空间中运动，则薛定谔方程变成

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+\frac{2m}{\hbar^2}[E-E_p(x,y,z)]\psi=0 \quad (18.20)$$

18.11 自由粒子的波函数

在自由粒子的情况下，势能为零[即 $E_p(x)\equiv 0$]，因而薛定谔方程变为

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}=E\psi,$$

上式还可以写作

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}\psi=0. \quad (18.21)$$

然而，对于一个自由粒子，$E=p^2/2m$. 根据方程(18.2)，令 $p=\hbar k$，式中 k 为波数，则得

$$E=\frac{\hbar^2k^2}{2m}.$$

于是方程(18.21)变为

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+k^2\psi=0, \quad (18.22)$$

上式与波长为 $\lambda=2\pi/k=h/p$ [这是方程(18.1)所要求的]的驻波的振幅方程完全一样. 例如，弦上的驻波或气柱中的驻波或陷获在空腔内的电磁波，它们的振幅都遵从这个方程.

记住 $i=\sqrt{-1}$ 和 $i^2=-1$，并利用直接代入法，可以看出微分方程(18.22)允许下列波函数作为它的解:

$$\psi(x)=e^{ikx} \quad 和 \quad \psi(x)=e^{-ikx}. \quad (18.23)$$

波函数 $\psi=e^{ikx}$ 代表一个沿 $+X$ 方向运动的、具有动量 $p=\hbar k$ 和

能量 $E=p^2/2m=\hbar^2k^2/2m$ 的自由粒子；而波函数 $\psi=e^{-ikx}$ 代表一个具有同样动量和能量、但沿反方向即 $-X$ 方向运动的自由粒子。

注意，方程(18.23)中每一个解都给出

$$|\psi(x)|^2=\psi^*(x)\psi(x)=e^{-ikx}e^{ikx}=1.$$

$|\psi(x)|^2=1$，即等于一常数，表示在一切点找到粒子的几率相同. 换句话说，在 $\psi=e^{\pm ikx}$ 所描述的情况下，关于粒子的位置我们一无所知. 这个结果与测不准原理一致，因为 $\psi=e^{\pm ikx}$ 所描写的粒子，其动量 $p=\hbar k$ 是精确地知道的：即 $\Delta p=0$，而这要求 $\Delta x\to\infty$.

18.12 势箱中粒子的波函数

由于这粒子在区域 $0<x<a$(图 18-10)中是自由的，我们得出势箱中粒子的薛定谔方程为

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+k^2\psi=0,\quad k^2=2mE/\hbar^2 \qquad (0<x<a) \qquad (18.24)$$

由于粒子在 $x=0$ 和 $x=a$ 之间来回运动，所以波函数为

$$\psi(x)=Ae^{ikx}+Be^{-ikx}, \qquad (18.25)$$

上式包含两个方向上的运动. 边界条件要求在 $x=0$ 和 $x=a$ 处 $\psi(x)=0$，因为粒子不可能处于箱壁之外. 于是在 $x=0$ 处的第一个边界条件给出

$$\psi(x)_{x=0}=A+B=0 \quad 或 \quad B=-A.$$

因此，我们可以把方程(18.25)改写为

$$\psi(x)=A(e^{ikx}-e^{-ikx})=2iA\sin kx=C\sin kx, \qquad (18.26)$$

式中 $C=2iA$. 在 $x=a$ 处的边界条件给出

$$\psi(x)_{x=a}=C\sin ka=0. \qquad (18.27)$$

C 不能等于零，否则就没有波函数了，所以我们的结论是

$$\sin ka=0 \quad 或 \quad ka=n\pi,$$

式中 n 为整数. 对 k 求解，得

$$k=\frac{n\pi}{a} \quad 或 \quad p=\hbar k=\frac{n\pi\hbar}{a}, \tag{18.28}$$

上式给出粒子的动量 $p=\hbar k$ 的可能值. 这个结果和我们用比较直观的方法所得到的方程(18.9)完全一样. 把方程(18.28)中得到的 k 的量子化的值代入方程(18.26)的波函数中,就得出一般的波函数

$$\psi(x)=C\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right); \tag{18.29}$$

根据方程(18.24),我们可以把量子化的能级写作

$$E_n=\frac{k^2\hbar^2}{2m}=\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}n^2. \tag{18.30}$$

图 18 15(a)中示出一势箱中的粒子的对应于 $n=1$, 2 和 3 的

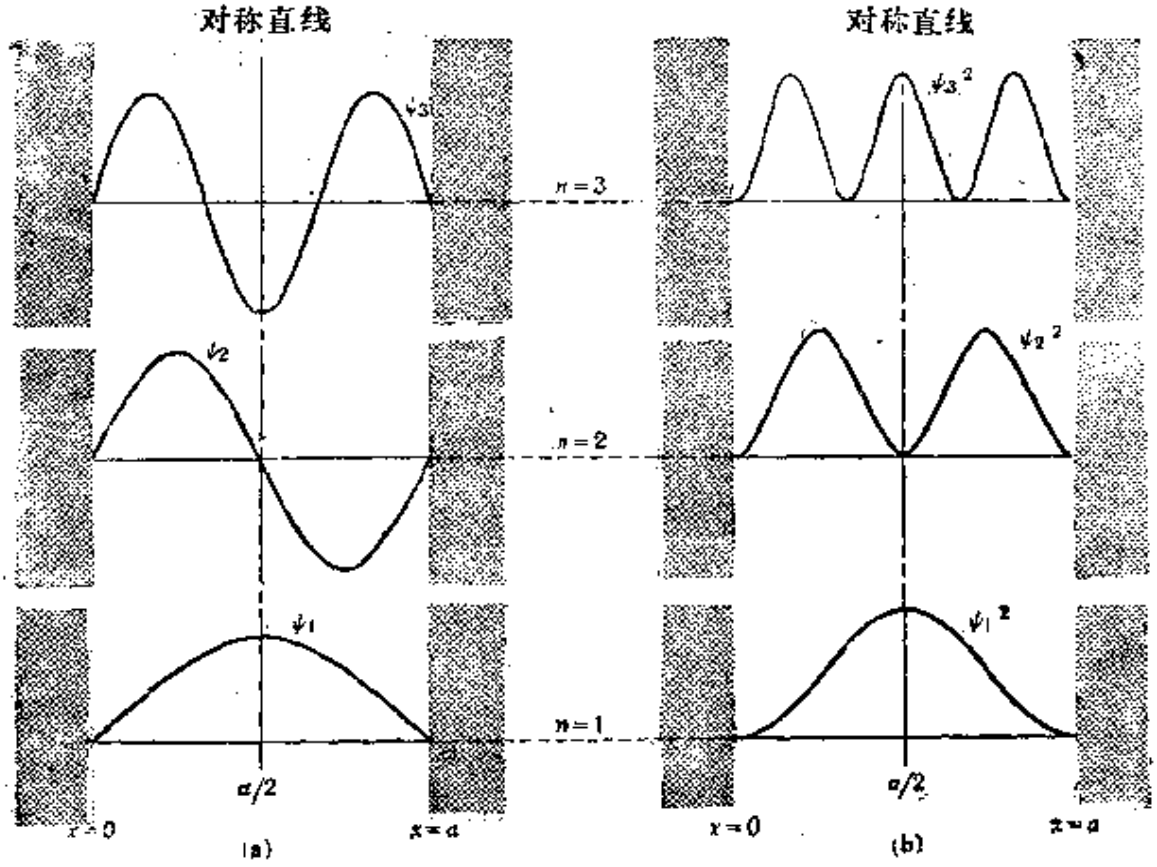


图 18-15 (a)在一势箱中的粒子的前三个波函数. (b) 对应的几率密度.

波函数；图 18-15(b)中示出对应的几率密度.

18.13 简谐振子的波函数

简谐振子是一个令人感兴趣的重要的物理系统，它的势能为

$$E_p(x)=\frac{1}{2}kx^2.$$

图 18-16 中示出简谐振子的势能曲线. 薛定谔方程为

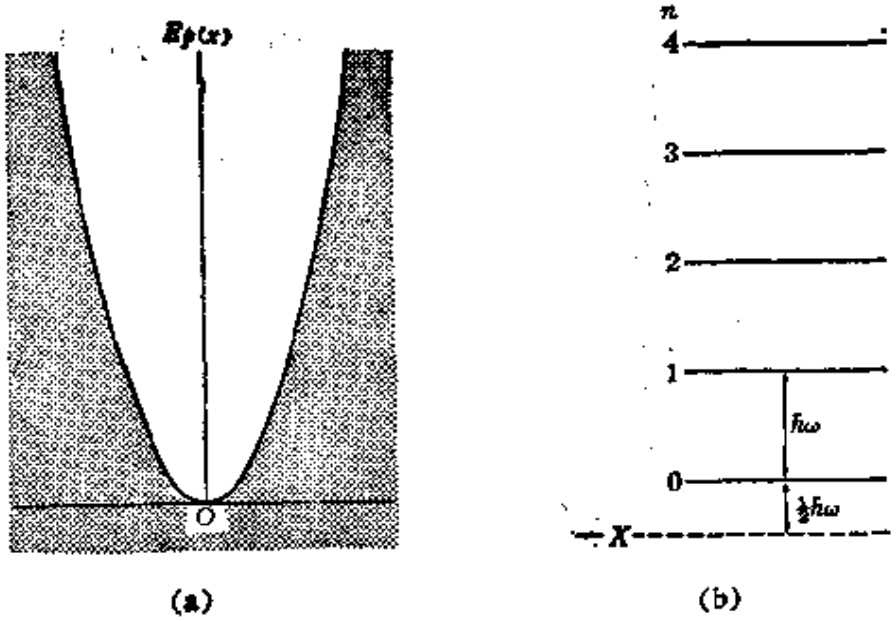


图 18-16 (a)简谐振子的势能. (b)能级.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+\frac{1}{2}kx^2\psi(x)=E\psi(x). \qquad (18.31)$$

解这个微分方程是一个过于复杂的数学问题，这里不拟讨论. 然而，可以证明，能量的可能值是

$$E_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \qquad (18.32)$$

式中 $n=0,1,2,3,\cdots$，而

$$\omega=\sqrt{k/m} \qquad (18.33)$$

是这振子的角频率.

这振子的零点能为$\frac{1}{2}\hbar\omega$，这也是测不准原理的一个结果．图18-16中示出的能级是等间距的，相邻能级的间距为$\hbar\omega$.

我们不拟导出波函数的表达式．表18-1中列出与$n=0$，1，2和3对应的波函数，图18-17中画出这些波函数的曲线．图18-18中画出对应的几率密度．

表 18-1　简谐振子的波函数($\alpha^2=m\omega/\hbar$)

n	E_n	$\psi_n(x)$
0	$(1/2)\hbar\omega$	$(\alpha/\sqrt{\pi})^{1/2}e^{-\alpha^2x^2/2}$
1	$(3/2)\hbar\omega$	$(\alpha/2\sqrt{\pi})^{1/2}2\alpha x e^{-\alpha^2x^2/2}$
2	$(5/2)\hbar\omega$	$(\alpha/8\sqrt{\pi})^{1/2}(4\alpha^2x^2-2)e^{-\alpha^2x^2/2}$
3	$(7/2)\hbar\omega$	$(\alpha/48\sqrt{\pi})^{1/2}(8\alpha^3x^3-12\alpha x)e^{-\alpha^2x^2/2}$

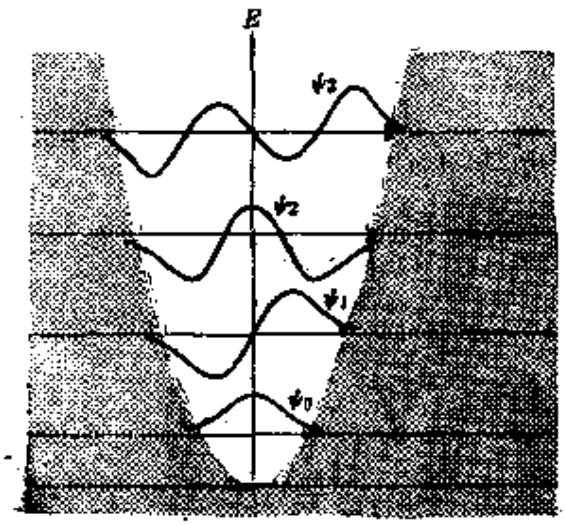


图 18-17　与谐振子前四个能级对应的波函数．

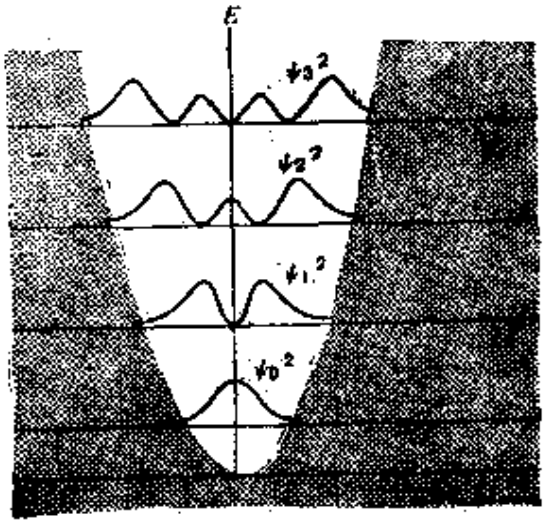


图 18-18　与谐振子前四个能级对应的几率密度．

18.14 氢 原 子

单电子原子，诸如氢(H)、一次电离的氦(He^+)、二次电离的锂(Li^{++})等等，是一切原子中最简单的，但是它们的数学处理仍然太复杂，不可能在这里详细论述. 然而，有一些特点能够加以分析，而无多大困难.

单电子原子的电子相对于原子核的势能为$E_p=-Ze^2/(4\pi\varepsilon_0 r)$，式中$Z$是原子核的原子序数，于是薛定谔方程变为

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+\frac{2m}{\hbar^2}\left(E+\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)\psi=0. \qquad (18.34)$$

势能只与电子至原子核的距离r有关系这个事实表明，方程(18.34)的某些解是球对称的；也就是说，ψ只与r有关系，即可以写作$\psi(r)$. 为了检验这个想法，我们首先必须找出对于这种情况方程(18.34)所采取的形式. 首先必须注意，由于$r^2=x^2+y^2+z^2$，所以$2r(\partial r/\partial x)=2x$，因而有

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}, \qquad (18.35)$$

对于$\partial r/\partial y$和$\partial r/\partial z$有类似的结果. 于是得出

$$\frac{\partial\psi(r)}{\partial x}=\frac{d\psi}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}\frac{d\psi}{dr} \qquad (18.36)$$

和

$$\frac{\partial^2\psi(r)}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x}{r}\frac{d\psi}{dr}\right]=\frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr}-\frac{x}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{d\psi}{dr}+\frac{x}{r}\frac{d^2\psi}{dr^2}\frac{\partial r}{\partial x}.$$

把方程(18.35)代入上式，则得

$$\frac{\partial^2\psi(r)}{\partial x^2}=\frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr}-\frac{x^2}{r^3}\frac{d\psi}{dr}+\frac{x^2}{r^2}\frac{d^2\psi}{dr^2}. \qquad (18.37)$$

再写出关于$\partial^2\psi/\partial y^2$和$\partial^2\psi/\partial z^2$的相当的式子，并将三个式子加起来，最后得到如下形式的薛定谔方程：

$$\frac{d^2\psi}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d\psi}{dr}+\frac{2m}{\hbar^2}\left(E+\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)\psi=0. \tag{18.38}$$

由于在离原子核某一距离处找到电子的几率，必定随着距离的增加而减少，我们可以假定，波函数的形式为 $f(r)e^{-ar}$，式中 a 是一个待定常数. 为简单起见，假定 $\psi(r)=e^{-ar}$. 把这个函数及其导数代入方程(18.38)中，则得

$$a^2e^{-ar}-\frac{2a}{r}e^{-ar}+\frac{2m}{\hbar^2}\left(E+\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)e^{-ar}=0.$$

上式又可写成

$$\left[a^2+\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)E\right]+\left[-2a+\left(\frac{2mZe^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}\right)\right]\frac{1}{r}=0.$$

上式中方括号内的两项必须分别等于零；因此，我们得到

$$a^2+\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)E=0 \quad 和 \quad -2a+\frac{2mZe^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}=0. \tag{18.39}$$

由式(18.39)中的第二个关系式，得出

$$a=\frac{mZe^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}; \tag{18.40}$$

把上式代入(18.39)中的第一个关系式，得出能量为

$$E=-\frac{a^2\hbar^2}{2m}=-\frac{mZ^2e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 2\hbar^2}. \tag{18.41}$$

将这个能量值与方程(7.26)相比较，可以看出，上面的结果对应于玻尔能量公式中 $n=1$. 因此，波函数 $\psi=e^{-ar}$ 对应于类氢原子的基态.

根据类似的分析，不难证明

$$\psi=e^{-ar/2}(2-ar) \tag{18.42}$$

也是方程(18.38)的一个解，对应的能量为

$$E=-\frac{mZ^2e^4}{2\hbar^2(4\pi\varepsilon_0)^2(2^2)}. \tag{18.43}$$

再将上式与方程(7.26)加以比较，可以看出，这个能量对应于玻尔

公式中 $n=2$. 这样，我们就可看出，方程(18.42)中给出的波函数对应于这个原子的受激态. 同理，可以求出 $n=3$, 4, 等等时方程(18.38)的解.

现在出现这样一个问题：薛定谔方程的解是否仅仅是那些球对称的解？回答是：球对称的解对应于零角动量($l=0$)，即 s 态，而那些具有非零角动量的态则不是球对称的. 这些态的波函数依赖于 r 与坐标轴所成的角. 例如，可以证明，存在着 $xf(r)$, $yf(r)$ 和 $zf(r)$这种形式的解，在这些态中找到粒子的几率集中在 X, Y 和 Z 轴上；这些态对应于 $l=1$，即 p 态. 最低的 p 态对应于玻尔能量公式中 $n=2$.

这样，我们可以看出，薛定谔方程不仅能说明电子运动的正确能量，而且能够提供有关电子角动量的信息. 图 18-19 中示出对于不同能级和不同角动量值的几率分布 $|\psi|^2$.

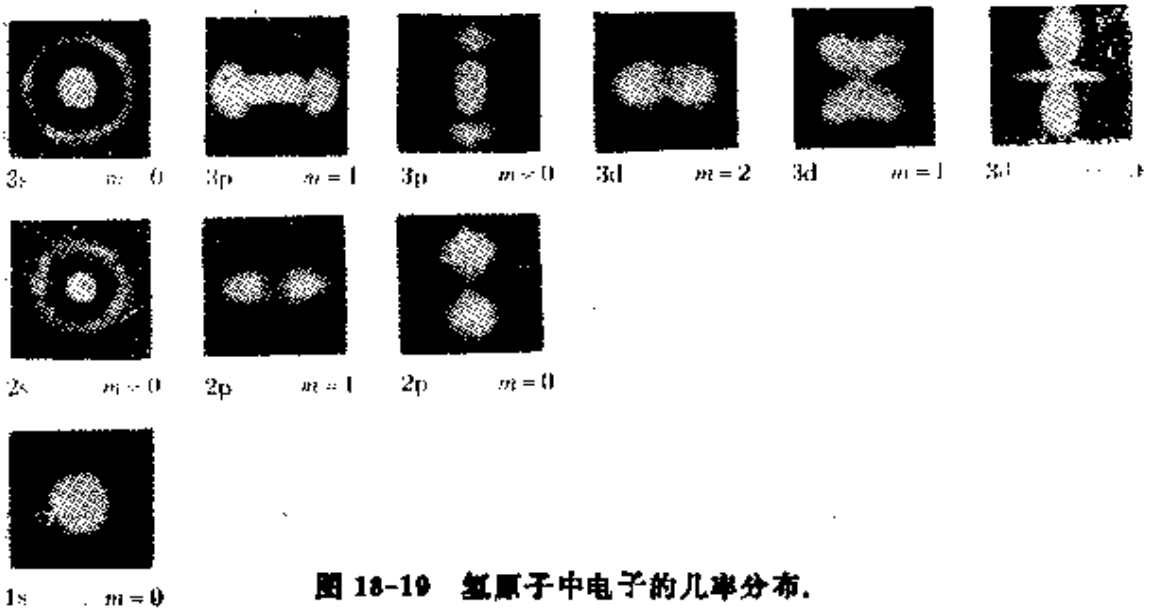


图 18-19 氢原子中电子的几率分布.

在结束关于量子力学的简单介绍时，我们可以指出，以薛定谔方程为基础的物质场的理论，能够给物质结构的讨论提供一个适当的，但并非完善的算法.

习　题

18.1　当一电子的能量为(a)1eV，(b)100eV，(c)1000eV 和(d)1MeV 时，试计算其德布罗意波长.

18.2　在镍晶体中，原子的间距约为 2.15Å，试问：习题 18.1 中给出的哪些电子将在镍晶体中产生显著的衍射？

18.3　对于习题 18.2 中的晶体，计算布喇格衍射角为 30° 的那些电子的能量.

18.4　单色 X 射线($\lambda=0.5$Å)投射在 KCl 粉末的样品上. 一张平的照相底片垂直于入射束放在距粉末 1.0 m 的地方. 设布喇格平面的间距为 3.14Å，试求第一级和第二级布喇格半径.

18.5　把核反应堆产生的窄热中子束投射在点阵间隔为 1.60Å 的晶体上，试求 2eV 的中子被强烈衍射的布喇格角.

18.6　设德布罗意波长为 10^{-8}m的一束电子通过一条宽10^{-4}m 的狭缝. 试求狭缝衍射所引起的角展度.

18.7　一个探测粒子必须总是小于（至少要小到十分之一）被研究的物体；否则这物体的位置和速度就会受到显著的扰动. 如果用(a)光子，(b)电子，(c)中子探测一直径为 10^{-14}m 的原子核，试计算粒子的最小能量.

18.8　测量一个质子在 X 方向的速度的精确度为 10^{-7}m·s^{-1}. 试求同时确定质子(a)沿 X 轴，(b)沿 Y 轴的位置能够达到的精确度极限.

18.9　对于电子的情况，重做习题 18.8.

18.10　测量电子位置的不确定度为 0.1Å. (a) 试求电子动量的不确定度. (b)设电子能量约为 1keV，试估算其能量的不确定度.

18.11　对于局限于核直径(≈10^{-14}m)范围内、能量约为2MeV 的质子，重做习题 18.10.

18.12　一个粒子在匀强电场 $\mathscr{E}$ 作用下作直线运动，因而它的势能为 $E_p=-\mathscr{E}x$. (a) 写出这个运动的薛定谔方程. (b) 对于能量 E 大于和小于零的情况，概略画出波函数的图. (c)这能量是否量子化的？

18.13　试求红宝石激光器发出的一个毫微秒 (10^{-9}s) 脉冲 ($\lambda=6.3\times10^{-7}$m)的线宽和频率展度.

18.14　当一维势箱的尺寸 (a)减小时，(b) 增大时，它对能级的影响如何？

18.15　宽为 2.0Å 的一维势箱中有一个电子．(a) 试计算它的零点能，(b)当用入射辐射，以 1% 的准确度(即 $\Delta x=0.02$Å)确定电子位置时，试利用测不准原理讨论入射辐射的影响．

18.16　(a)一个电子局限在线度为 10^{-14}m 的区域中（这是原子核线度的数量级)，试估算该电子的零点能．(b)试将此电子的零点能同电子和质子的引力势能，以及库仑势能加以比较(设电子与质子之间的距离同上)．(c)根据这种比较，讨论电子存在于核内的可能性．

18.17　一个中子局限在线度为 10^{-15}m 的原子核内，试计算它的零点能．

18.18　一个粒子由波函数

$$\psi(x)=e^{-(x-x_0)^2/4\alpha}\sin kx$$

代表，式中 α 是一常数，$\alpha\gg\lambda^2$．(a)在 $x=x-3x_0$ 至 $x=x+3x_0$ 的范围内，画出波函数 $\psi(x)$ 和几率分布 $|\psi(x)|^2$ 的曲线图．(b)试估计粒子的位置和动量的不确定度．

18.19　一个粒子在 XY 平面内，在一个边长为 a 和 b 的二维势箱中运动，试证明它的能级和波函数为

$$E=\left(\frac{\hbar^2\pi^2}{2m}\right)\left(\frac{n_1^2}{a^2}+\frac{n_2^2}{b^2}\right),$$

$$\psi=C\sin\left(\frac{n_1\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n_2\pi y}{b}\right).$$

讨论 $a=b$ 时能级的简并度．

18.20　一个粒子在一个边长为 a、b 和 c 的三维势箱中运动，试求其能级和波函数．注意，这是前题的推广．

18.21　试计算如下三种情况下的零点能和能级间隔：(a)在振动频率为 400Hz 的一维谐振子中，(b)在振动频率为 400Hz 的三维谐振子中，(c)在 CO 分子中，设两个原子的振动频率为 6.43×10^{11}Hz．

18.22　一个粒子在势能

$$E_p(x)=-E_0e^{-ax^2}$$

下运动．(a)画出 $E_p(x)$的曲线．(b)对于总能量(i)为负和(ii)为正，画出波函数的简图．(c)你是否认为有量子化的能级存在？

较难的习题

18.23　一个电子的德布罗意波长为 10^{-10}m，求它的动量.

18.24　(a)描述并解释电磁辐射显示出似粒子的行为的一个实验. (b)描述并解释电子显示出似波的行为的一个实验.

18.25　一个质量为 m 的粒子在两个间距为 L 的固体壁之间来回运动. 理论预言，这个粒子的动能的容许值由下列方程给出：

$$E_n=\frac{n^2h^2}{8mL^2},$$

式中 h 是普朗克常数，$n=1,2,3,\cdots$. (a)试求，当这系统处于它的基态($n=1$)时，它能够吸收的光的最长的波长 λ_{max}. (b)证明，对于 n 的任意值，这粒子的德布罗意波长由下式给出：

$$\lambda_n=\frac{2L}{n}.$$

(c)试描述另外一个物理系统，对于这个系统来说，(b)中给出的波长 λ_n 与距离 L 之间的关系仍然成立.

18.26　一个质量为 m 的氦原子，以速度 v 在长为 L，间距为 a 的两个平行壁之间作 Z 形运动，如图 18-20 所示. (a)计算这个氦原子与右壁相继两次碰撞之间的时间间隔 Δt 作为 a、v 和 θ 的函数. (b)计算氦原子每一次与右壁碰撞时，传给它的动量 Δp 的量值作为 m、v 和 θ 的函数. (c)计算这氦原子作用在右壁上的平均力，并把它对右壁所产生的压强 P 表示为 θ、V(两壁之间区域的体积)和 E(氦原子的动能)的函数. (d)现在假定一个能量为 E 的光子沿着这条 Z 形路径运动. 试计算每次碰撞时，这个光子传给右壁的动量 Δp 的量值，并把所产生的压强 P 表示为 E、θ 和 V 的函数.

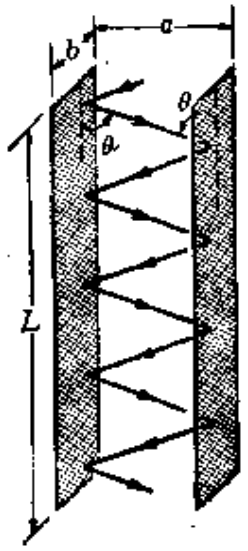


图　18-20

18.27　试证明，对于同一个粒子，德布罗意波长与康普顿波长之比等于 $\sqrt{(c/v)^2-1}$.

18.28　试证明，即使在相对论条件下，波包的群速度也等于粒子的速

度. 并再证明，在相对论速率下，物质场的相速度等于 c^2/v.

18.29 如果辐射源以速度 u 相对于观察者运动，则此观察者测得的辐射的频率发生频移 $\Delta\nu=\nu u/c$；当辐射源朝观察者运动时，u 为正，当辐射源离开观察者运动时，u 为负；当辐射源静止时，辐射的频率为 ν. 这叫做电磁多普勒频移. 由于气体中的分子作无规运动，所以各个分子的多普勒频移不同. 这就又引起一份谱线增宽，由 $\delta=2(\nu/c)\sqrt{2kT\ln 2/m}$ 给出，式中 m 为分子的质量，T 为气体的绝对温度. 试计算，在室温(300K)下，(a)汞中4.86eV的原子跃迁和(b)^{60}Ni 中 1.33MeV 的核跃迁的多普勒增宽. 讨论每一种情况下这种增宽对共振吸收的影响.

18.30 ^{191}Ir 发射的 γ 射线的平均能量为 129 keV，测得的半极大强度处的线宽为 4.6×10^{-6} eV. 试估算：(a) 发射这条线的受激态的平均寿命，(b) 要使一级多普勒频移等于测得的线宽，所需的源和观察者的相对速度.

18.31 (a)由几率密度的定义 $P=|\psi|^2$，证明

$$\int_{-\infty}^{\infty}PdV=1,$$

式中 $dV=dxdydz$. (提示：注意，这里的论证是逻辑上的，而不是数学上的.) (b)根据(a)的结果，计算简谐振子波函数中的常数的值.

18.32 谐振子的薛定谔方程的解的一般表达式为

$$\psi_n=N_nH_n(ax)e^{-a^2x^2/2},$$

式中 $N_n=\sqrt{a/\pi^{1/2}2^n n!}$ 是归一化常数，$a=\sqrt{m\omega/\hbar}$，函数 $H_n(ax)$ 叫做厄密多项式，其定义为

$$H_n(\xi)=(-1)^n e^{\xi^2}\frac{d^n}{d\xi^n}(e^{-\xi^2}).$$

试写出前四个波函数($n=0,1,2,3$)，并与表 18-1 中的表达式相比较.

附　录

数学公式

1. 三角关系式

参看图 M-1，我们能够定义下列关系式：

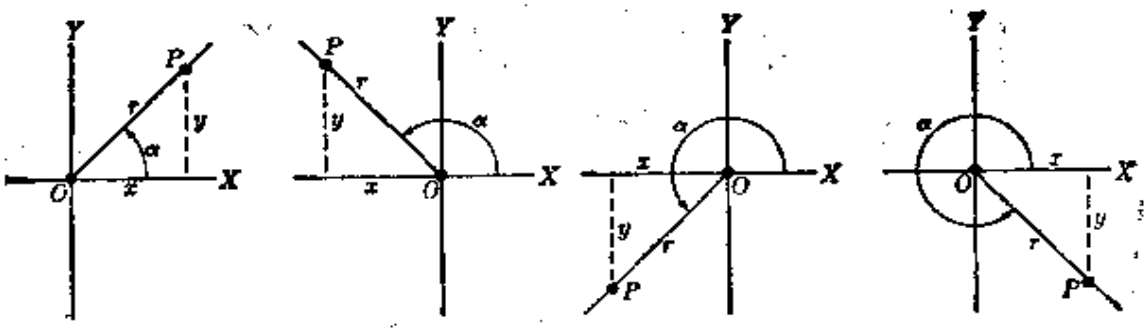


图 M-1

$$\sin\alpha=y/r,\quad \cos\alpha=x/r,\tan\alpha=y/x; \tag{M.1}$$

$$\csc\alpha=r/y,\quad \sec\alpha=r/x,\quad \cot\alpha=x/y; \tag{M.2}$$

$$\tan\alpha=\sin\alpha/\cos\alpha; \tag{M.3}$$

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\quad \sec^2\alpha-1=\tan^2\alpha; \tag{M.4}$$

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta; \tag{M.5}$$

$$\cos(\alpha\mp\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta; \tag{M.6}$$

$$\sin\alpha\pm\sin\beta=2\sin\frac{1}{2}(\alpha\pm\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha\mp\beta); \tag{M.7}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta); \tag{M.8}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta); \tag{M.9}$$

$$\sin\alpha\ \sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)];\qquad \text{(M. 10)}$$

$$\cos\alpha\ \cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)];\qquad \text{(M. 11)}$$

$$\sin\alpha\ \cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)];\qquad \text{(M. 12)}$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\ \cos\alpha,\quad \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha;\qquad \text{(M. 13)}$$

$$\sin^2\frac{1}{2}\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos\alpha),\quad \cos^2\frac{1}{2}\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos\alpha);\qquad \text{(M. 14)}$$

参看图 M-2，对于任意三角形，有下列关系：

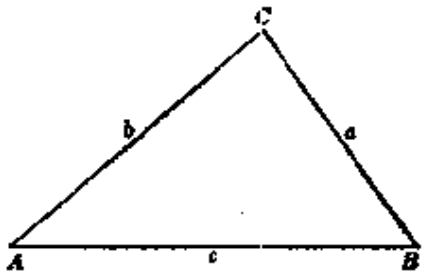


图 M-2

正弦定律：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，　　(M. 15)

余弦定律：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.　　(M. 16)

2. 对　　数

(i) e 的定义：

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2.7182818\cdots\qquad \text{(M. 17)}$$

在图 M-3 中画了指数函数 $y=e^x$ 和 $y=e^{-x}$.

(ii) 自然对数，底为 e(见图 M-4)：

$$y=\ln x,\ \text{如果}\ x=e^y.\qquad \text{(M. 18)}$$

常用对数，底为 10：

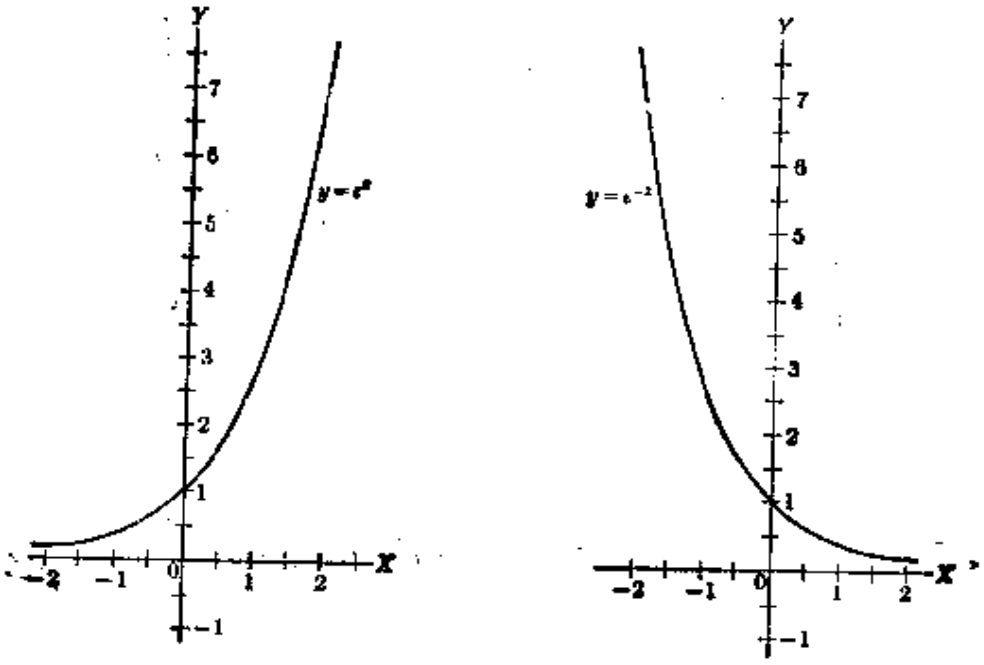


图 M-3

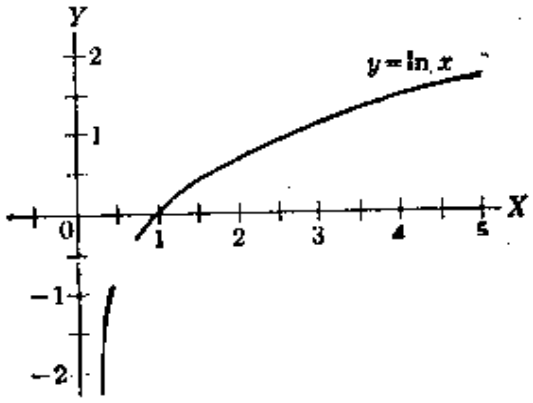


图 M-4

$$y=\log x,\ \text{如果}\ x=10^y. \tag{M.19}$$

自然对数和常用对数之间的关系为

$$\ln x=2.3031\log x,\quad \log x=0.4341\ln x. \tag{M.20}$$

3. 幂展开式

(i) 二项展开式:

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3+\cdots$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)}{p!}a^{n-p}b^p+\cdots \quad \text{(M.21)}$$

当 n 为正整数时，这个展开式有 $n+1$ 项. 在所有其他情况下，这展开式有无限多个项. $a=1, b=x$ 的情况，在本书中使用过多次. $(1+x)^n$ 的二项展开式为

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\cdots \quad \text{(M.22)}$$

(ii) 其他有用的级数展开式:

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots \quad \text{(M.23)}$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots \quad \text{(M.24)}$$

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots \quad \text{(M.25)}$$

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\cdots \quad \text{(M.26)}$$

$$\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\cdots \quad \text{(M.27)}$$

对于 $x\ll 1$，下列近似是满意的:

$$(1+x)^n\approx 1+nx, \quad \text{(M.28)}$$

$$e^x\approx 1+x,\ \ln(1+x)\approx x, \quad \text{(M.29)}$$

$$\sin x\approx x,\ \cos x\approx 1,\ \tan x\approx x. \quad \text{(M.30)}$$

注意，在方程(M.25)、(M.26)、(M.27)和(M.30)中，x 的单位必须用弧度.

(iii) 泰勒级数展开式:

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)\left(\frac{df}{dx}\right)_0+\frac{1}{2!}(x-x_0)^2\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_0$$

$$+\cdots+\frac{1}{n!}(x-x_0)^n\left(\frac{d^nf}{dx^n}\right)_0+\cdots \qquad \text{(M.31)}$$

如果 $x-x_0\ll 1$，一个有用的近似是

$$f(x)\approx f(x_0)+(x-x_0)\left(\frac{df}{dx}\right)_0. \qquad \text{(M.32)}$$

4. 复 数

采用定义 $i^2=-1$ 或 $i=\sqrt{-1}$，

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta \qquad \text{(M.33)}$$

$$\cos\theta=\frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta}), \qquad \text{(M.34)}$$

$$\sin\theta=\frac{1}{2i}(e^{i\theta}-e^{-i\theta}). \qquad \text{(M.35)}$$

5. 双曲函数

为了使下列关系式具体化，参看图 M-5.

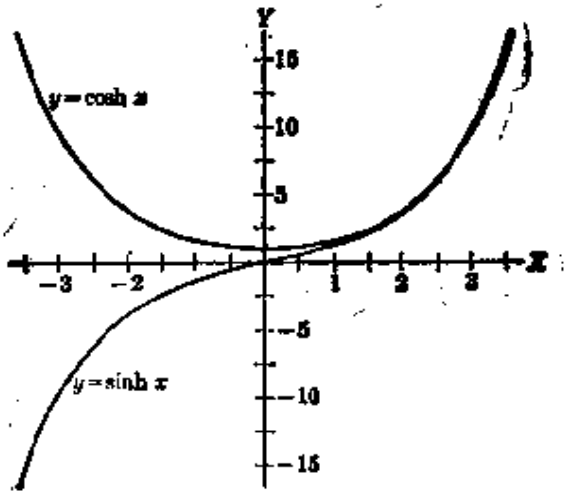


图 M-5

$$\cosh\theta=\frac{1}{2}(e^{\theta}+e^{-\theta}), \qquad \text{(M.36)}$$

$$\sinh\theta=\frac{1}{2}(e^{\theta}-e^{-\theta}), \tag{M.37}$$

$$\cosh^2\theta-\sinh^2\theta=1, \tag{M.38}$$

$$\sinh\theta=-i\sin(i\theta),\quad \cosh\theta=\cos(i\theta) \tag{M.39}$$

$$\sin\theta=-i\sinh(i\theta),\quad \cos\theta=\cosh(i\theta) \tag{M.40}$$

6. 基本的导数和积分

$f(u)$	df/dx	$\int f(u)du$
u^n	$nu^{n-1}du/dx$	$u^{n+1}/(n+1)+C\quad(n\neq-1)$
u^{-1}	$-(1/u^2)du/dx$	$\ln u+C$
$\ln u$	$(1/u)du/dx$	$u\ln u-u+C$
e^u	$e^u\ du/dx$	e^u+C
$\sin$	$\cos u\ du/dx$	$-\cos u+C$
$\cos\ u$	$-\sin u\ du/dx$	$\sin u+C$
$\tan\ u$	$\sec^2 u\ du/dx$	$-\ln\cos u+C$
$\cot\ u$	$-\csc^2 u\ du/dx$	$\ln\sin u+C$
$\arcsin\ u$	$(du/dx)/\sqrt{1-u^2}$	$u\sin^{-1}u+\sqrt{1-u^2}+C$
$\sinh u$	$\cosh u\ du/dx$	$\cosh\ u+C$
$\cosh u$	$\sinh u\ du/dx$	$\sinh\ u+C$

一个有用的积分规则叫做分部积分:

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du. \tag{M.41}$$

常常借助这个公式利用右边的积分来计算左边的积分.

7. 函数的平均值

一个函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 中的平均值被定义为

$$y_{平均}=\frac{1}{b-a}\int_a^b y\,dx. \tag{M.42}$$

类似地,y^2 的平均值被定义为

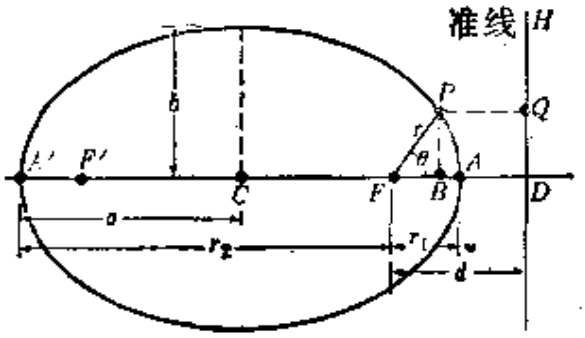
$$(y^2)_{平均}=\frac{1}{b-a}\int_a^b y^2\,dx. \tag{M.43}$$

量$\sqrt{(y^2)_{平均}}$叫做$y=f(x)$在区间(a,b)中的方均根值．它一般不同于$y_{平均}$．我们用$y_{方均根}$表示它．

8. 圆锥曲线

一族重要的平面曲线是圆锥曲线．一圆锥曲线是由一个运动点生成的，这个运动点至一固定点（叫做焦点）的距离，与它至一条直线（叫做准线）的距离之比恒定．有三类圆锥曲线，即椭圆、抛物线和双曲线，依这个比值（叫做偏心率）小于、等于或大于1而定．用ϵ表示偏心率，用F表示焦点，用HQD表示准线（图M-6），则有

$$\epsilon = PF/PQ.$$



图M-6　椭圆的几何元素

现在$PF=r$，如果令$FD=d$，则$PQ=FD-FB=d-r\cos\theta$．因此，$\epsilon=r/(d-r\cos\theta)$．或者，解出$r$，得到

$$\frac{\epsilon d}{r}=1+\epsilon\cos\theta. \qquad \text{(M.44)}$$

这就是本书中使用过的圆锥曲线方程的形式．也可以用角$(\pi-\theta)$导出这个圆锥曲线方程．这时这方程具有下列形式：

$$\frac{\epsilon d}{r}=1-\epsilon\cos\theta.$$

在椭圆的情况下，点A对应于$\theta=0$，点A'对应于$\theta=\pi$．这样，根

据极坐标方程，我们有

$$r_1=\frac{\epsilon d}{1+\epsilon},\qquad r_2=\frac{\epsilon d}{1-\epsilon}$$

由于 $r_1+r_2=2a$，所以半长轴为

$$a=\frac{1}{2}(r_1+r_2)=\frac{\epsilon d}{1-\epsilon^2}. \tag{M.45}$$

半短轴为

$$b=a\sqrt{1-\epsilon^2}, \tag{M.46}$$

椭圆的面积为

$$S=\pi ab=\pi a^2\sqrt{1-\epsilon^2}. \tag{M.47}$$

圆是椭圆的特殊情形，这时 $\epsilon=0$.

9. 立 体 角

立体角是包含在一个圆锥面（或棱锥面）内部的空间，如图M-7所示. 以球面度(代号为sr）为单位时，立体角的值由下式确定：

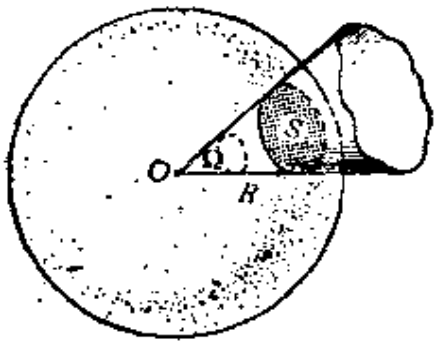


图 M-7 立体角

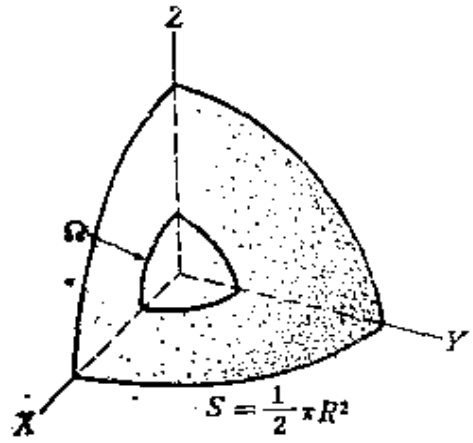


图 M-8

$$\Omega=\frac{S}{R^2}, \tag{M.48}$$

式中 S 是以顶点 O 为中心，以任意半径 R 所作的球面与这个立体角相截而形成的球冠的面积. 由于球的面积等于 $4\pi R^2$，所以围绕

一个点的整个立体角等于 4π 球面度. 三个互相垂直的坐标轴 OX、OY 和 OZ 所形成的立体角(图 M-8) 等于 $\frac{1}{8}(4\pi)=\pi/2$.

如果这立体角很小(图 M-9),则面积 S 变为 dS,它不一定是一个球冠,而可以是一个垂直于 OP 的小平面,因而

$$d\Omega=\frac{dS}{R^2}. \tag{M.49}$$

在某些情况下,dS 不与 OP 垂直,dS 的法线与 OP 成一个角 θ(图 M-10). 这时必须将 dS 投影在垂直于 OP 的平面上,从而得到 $dS'=dS\cos\theta$. 因此,

$$d\Omega=\frac{dS\cos\theta}{R^2}. \tag{M.50}$$

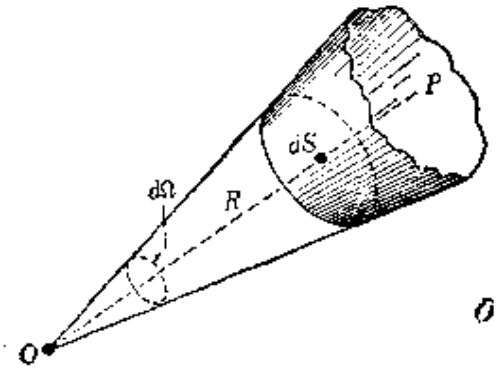


图 M-9

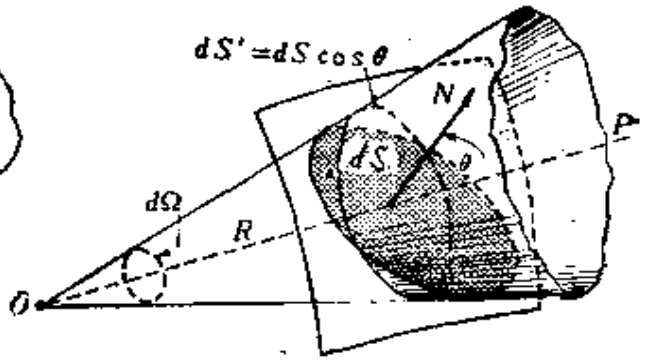


图 M-10

习 题 答 案

第 一 章

1.1 4.22×10^{-6}N; 3.41×10^{-44}N; 电推斥力比万有引力强 1.2×10^{36} 倍.

1.2 8.22×10^{-8}N; 3.62×10^{-42}N; 电吸引力比万有引力强 2.3×10^{39} 倍.

1.3 对于电子，电推斥力比万有引力强 4.17×10^{42} 倍；对于质子，则强 1.24×10^{36} 倍.

1.4 $\sin^2\theta\tan\theta=(K_e q^2)/(4mgl^2)$.

1.5 -39.2μC.

1.6 (a) 4.81×10^{-15}N; (b) 5.28×10^{15}m·s^{-2}; 约比 g 强 5.4×10^{14} 倍.

1.7 (a) 0; (b) -10^{-3}J; (c) 2.3×10^{-3}J.

1.8 (a) 1.01×10^{3}N·C^{-1}; (b) 2.67×10^{6}m·s^{-1}.

1.9 (a) 7.04×10^{-8}m; (b) 19.4°(0.34rad); (c) 4.22×10^{-2}m.

1.10 (a) 5.69×10^{-5}s; (b) 1.42×10^{-2}m; (c) 9.87×10^{-2}m; (d) 路径是一抛物线.

1.11 (a) 4.33×10^{-4}m·s^{-1}; (b) 2.74×10^{-4}m·s^{-1} 向上.

1.12 2.

1.13 (a) 1.61×10^{-6}m, 1.40×10^{-14}kg; (b) 油滴重量为油滴所受电场力的 4.3 倍.

1.14 (a) 1.88×10^{6}N·C^{-1}, 与联结两电荷的直线所成的角为 4.76°. (b) 在联结两个电荷的直线上，至 5 μC 电荷的距离为 2.414m.

1.15 951V.

1.16 (a) 3.15×10^{-2}N, 9.0×10^{-3}N, 4.05×10^{-1}N; (b) 4.50×10^{-3}J, 4.50×10^{-3}J, 5.40×10^{-3}J; (c) 7.2×10^{-3}J; (d) 答案(b)中的项之和包含每一种相互作用两次.

1.17 (a) 4.50×10^{-3}N, 9.0×10^{-3}N, 1.35×10^{-2}N; (b) 9.00×10^{-4}J, -4.50×10^{-3}J, 0J; (c) -1.80×10^{-3}J.

1.18 (a) 3.0m; (b) 0.20μC.

1.19 (a) 3.60×10^{5}N·C^{-1}; (b) 6.33×10^{16}m·s^{-2}, 沿径向朝里; (c) 0.97c.

1.20 2880V.

1.21 (a) $3.6\times10^{5}\mathrm{N\cdot C^{-1}}$, 朝着 0.2μC 电荷, 9×10^{4}V; (b) $3.75\times10^{5}\mathrm{N\cdot C^{-1}}$, 朝着 0.3μC 电荷, 9×10^{4}V; (c) $1.26\times10^{6}\mathrm{N\cdot C^{-1}}$, 离开 0.2μC 电荷, 6.43×10^{4}V; (d) $3.92\times10^{5}\mathrm{N\cdot C^{-1}}$, 与竖直线成 6.6° 角, 4.5×10^{4}V.

1.22 (a) $1.8\times10^{6}\mathrm{N\cdot C^{-1}}$, 朝着 0.3μC 电荷, -1.8×10^{4}V; (b) $1.87\times10^{6}\mathrm{N\cdot C^{-1}}$, 朝着 0.3μC 电荷, 0V; (c) $9.9\times10^{5}\mathrm{N\cdot C^{-1}}$, 离开 0.2μC 电荷, 2.57×10^{4}V; (d) $2.38\times10^{5}\mathrm{N\cdot C^{-1}}$, 在水平线下方与水平线成19.1°角, -9×10^{3}V.

1.23 -7.72×10^{-8}J; 不需要.

1.24 (b) $2K_eq/a$; (c) $\sqrt{3}\,a$; (f) $2K_eqx/(x^2+a^2)^{3/2}$.

1.25 (a) $2\sqrt{K_eqq'/am}$; (c) $\sqrt{15}a$; (d) 与(a)中相同, 其中 q' 和 m 是负电荷及其质量.

1.26 (b) 在 $y=\pm a$ 处有无限大; (c) 是.

1.27 (a) $u_x50\mathrm{N\cdot C^{-1}}$; (b) $u_x10.8\mathrm{N\cdot C^{-1}}$.

1.28 (a) 1.56N, 从质心朝外; 0.18J. (b) $0\mathrm{N\cdot C^{-1}}$, 4.67×10^{5}V; (c) 0.27J.

1.29 (a) 在三角形外部, 有 6 条径向直线, 离开质心朝外; (b) 在很大距离处, 等势面是以质心为中心的圆.

1.30 $6.455\times10^{-7}\mathrm{m\cdot s^{-1}}$(如果按经典力学计算则为 $6.57\times10^{7}\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.)

1.31 (a) 2.18×10^{-5}m; (b) 电子速度为质子速度的 42.9 倍; (c) 能量相同, 都等于 1600eV 或 2.56×10^{-16}J.

1.32 (a) 6.24×10^{15} 质子/秒; (b) 800W; $1.24\times10^{7}\mathrm{m\cdot s^{-1}}$; (d) $153\ \mathrm{cal\cdot s^{-1}}$.

1.33 (a) $3.08\times10^{7}\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $1.22\times10^{7}\mathrm{m\cdot s^{-1}}$; (b) $3.32\times10^{7}\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, 与电场方向成 21.6° 角; (c) $x=0.769$m, $y=0.610$m; (d) 5.02×10^{-18}J或 3.13keV.

1.34 (a) $1.30\times10^{7}\mathrm{m\cdot s^{-1}}$; (b) $1.63\times10^{7}\mathrm{m\cdot s^{-1}}$; (c) $9.83\times10^{6}\mathrm{m\cdot s^{-1}}$; (d) 3.47×10^{-9}s; (e) 不会达到阴极.

1.35 (a) 在一般情况下, $\boldsymbol{F}=(-p^2/4\pi\varepsilon_0r^4)[u_r(6\cos\theta\cos\theta_2-3\sin\theta\sin\theta_2)+u_\theta(2\sin\theta\cos\theta_2+\cos\theta\sin\theta_2)]$, 式中 θ_2 是第二个偶极子相对于第一个偶极子的取向的角. (b) 万有引力为 6×10^{-43}N; 偶极子-偶极子力的

最大值为 4×10^{-11}N，约比万有引力强 10^{32} 倍.

1.36 (a) $0, 3qa^2$; (b) $Q/(4\pi\varepsilon_0 z^3), -3Q(4\pi\varepsilon_0 z^4)$; (c) $-Q/4\pi\varepsilon_0 y^3, 3Q/4\pi\varepsilon_0 y^4$.

1.37 (a) 没有电偶极子; qa^2; (b) $(4q/4\pi\varepsilon_0 z)+(Q/4\pi\varepsilon_0 z^2)$, $(-4q/4\pi\varepsilon_0 z^2)+(-3Q/4\pi\varepsilon_0 z^4)$; (c) 与(b)中相同，用 y 代替 z.

第 二 章

2.1 (a) 0, 0; (b) $Ca^3, \varepsilon_0 Ca^3$.

2.2 (a) $ca^3, \varepsilon_0 ca^3, 2\varepsilon_0 cx$; (b) 0, 0, 0.

2.4 (a) 内表面: $-q$; 外表面: $+q$; (b) 电场: 球外: $K_e q/r^2$, 球内: 0, 腔内: $K_e q/r^2$; 电势: 球外: $K_e q/r$, 球内: $K_e q/R_1$, 腔内: $K_e q/r$.

2.6 小球上的电荷为 1.2×10^{-7}C，大球上的电荷为 1.8×10^{-7}C.

2.8 (a) 16.5; (b) 15.5.

2.9 (a) 1000V; (b) 2000V.

2.10 (a) 0.485m²; (b) 300μC.

2.11 1.70m².

2.13 9.58×10^{-11}F.

2.14 (a) 串联: $\frac{2}{3}$μF，并联: 6.5μF; (b) 串联: 每一个电容器上的电荷为 13.3μC，电势差为 9 V, 6.67V, 4.44V; 并联: 30μC, 40μC, 60μC，每一个电容器上的电势差均为 20V; (c) 串联: 1.33×10^{-4}J，并联: 1.30×10^{-3}J.

2.15 (a) 10μF; (b) 12μF: 480μC, 18μF: 720μC, 4μF: 320μC, 5μF: 400μC, 1μF: 80μC, 2μF: 160μC, 3μF: 240μC; (c) 12μF 和 18μF: 40V; 所有其他电容器: 80V.

2.16 C_1: 600μC, 200V; C_2: 200μC, 100V; C_3: 400μC, 100V.

2.19 (a) 380μC; (b) 7600V; (c) 1.44×10^{-3}J; (d) 1.36×10^{-3}J.

2.20 (a) 2×10^{-2}C; (b) 800V; (c) 8J; (d) 2J.

2.21 (a) 7.7×10^{-10}C 和 2.3×10^{-10}C; (b) 4.5×10^{-9}J; (c) 3.46×10^{-9}J; (d) 由于辐射和焦耳加热.

第 三 章

3.1 2.06×10^{-14}s.

3.2 (a) 电阻加倍；(b) 电阻减半；(c) 电阻减小到 1/4.

3.3 (a) 5Ω；(b) 3Ω：60A，12Ω：10A，6Ω：20A，4Ω：30A；(c) 3Ω：180V，所有其他的：120V.

3.4 (a) 6Ω；(b) 12Ω：12A，10Ω：12A，6Ω：4A，3Ω：8A；(c) 12Ω：144V，10Ω：120V，6Ω 和 3Ω：24V.

3.5 (a) 10Ω；(b) 4Ω：12A，9Ω：8A，16Ω：4A，6Ω：1.33A，3Ω：2.67A；(c) 4Ω：48V，9Ω：72V，16Ω：64V，6Ω：8V，3Ω：8V.

3.6 (a) 9Ω；(b) 5Ω：60A，20Ω：12A，3Ω：48A，12Ω：8A，6Ω：16A，4Ω：24A；(c) 5Ω：300V，20Ω：240V，3Ω：144V，12Ω：96V，6Ω：96V，4Ω：96V.

3.7 (a) 10Ω；(b) 7Ω：24A，12Ω：6A，10Ω：6A，3Ω：4A，6Ω：2A，18Ω：4A，9Ω：8A；(c) 7Ω：168V，12Ω：72V，10Ω：60V，3Ω：12V，6Ω：12V，18Ω：72V，9Ω：72V.

3.8 (a) 10Ω；(b) 中央电阻中的电流为零，所有其他电阻中的电流都是 10A。(c) 100V，0V.

3.9 (a) 8Ω；(b) 12V.

3.10 (a) 32Ω；(b) 20V.

3.11 27W.

3.12 90W.

3.14 使一个 4Ω 电阻器与仪器并联.

3.15 使一个 24Ω 电阻器与仪器串联.

3.16 (b) 1.10Ω；(c) 1.24Ω.

3.17 (a) 350K：1050Ω；370K：39Ω；470K：11.1Ω；570K：3.82Ω；(c) 0.1.

3.20 (a) 2.892V；(b) 1.33V.

3.21 (a) 0.5Ω；(b) 10V.

3.22 (a) $\frac{1}{3}$A；(b) 2.67V；(c) 22Ω：$\frac{1}{9}$A；12Ω：$\frac{1}{54}$A，6Ω：$\frac{1}{27}$A，4Ω：

$\frac{1}{18}$A, 8Ω: $\frac{2}{9}$A; 5Ω: $\frac{8}{45}$A, 20Ω: $\frac{2}{45}$A.

3.23 2Ω: 3A; 9Ω: 2A; 4Ω: 5A.

3.24 4Ω: $\frac{10}{38}$A; 12Ω: $\frac{35}{38}$A; 10Ω: $\frac{45}{38}$A.

3.25 4Ω: 1.137A; $\frac{1}{2}$Ω: 0.58A; 3Ω: 0.558A; 2Ω: 0.308A; 1Ω: 0.887A; 6Ω: 0.251A.

3.26 (a) 0.22V; (b) $\frac{13}{28}$A.

3.27 (a) −12V; (b) ∞; (c) −12V; (d) $\frac{12}{7}$A; (e) 4.5Ω; (f) 4.2 Ω.

第 四 章

4.1 (a) 5.68×10^{-5}T; (b) 10^{7}rad·s^{-1}.

4.2 (a) 7.22×10^{-2}m; (b) 9.58×10^{18}rad·s^{-1}.

4.3 (a) 3.48×10^{-2}m; (b) 3.79×10^{-1}m; (c) 2.29×10^{7}Hz.

4.4 (a) 2.89×10^{7}m·s^{-1}; (b) 4.34×10^{-8}s; (c) 8.66×10^{6}V.

4.5 (a) 0.528m; (b) 4.37×10^{-8}s.

4.6 (a) 1T; (b) 3×10^{6}rad·s^{-1}.

4.7 2.13×10^{-2}m.

4.8 (a) 5.68×10^{-4}T, 垂直于图面朝下; (b) 3.14×10^{-8}s.

4.9 (a) 6.38×10^{-8}m; (b) 1.28×10^{-2}m.

4.10 1: $\boldsymbol{u}_x(qv\mathscr{B})$; 2: 0; 3: $\boldsymbol{u}_z(qv\mathscr{B}/\sqrt{2})$; 4: $-\boldsymbol{u}_x(qv\mathscr{B}/\sqrt{2})$; 5: $-\boldsymbol{u}_x(qv\mathscr{B})$; 6: $-\boldsymbol{u}_x(qv\mathscr{B}/\sqrt{3})-\boldsymbol{u}_z(qv\mathscr{B}/\sqrt{3})$.

4.11 由于这电荷将在一垂直于 $\mathscr{B}$ 的平面内沿一半径为 R 的圆形路径运动, 所以 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}_x(v_0\cos\omega t)+\boldsymbol{u}_y(v_0\sin\omega t)$, 式中 $\omega=(q/m)$, $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{u}_x(R\sin\omega t)-\boldsymbol{u}_y(R\cos\omega t)$. [在 $t=0, x=0, y=-R$.]

4.12 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}_x(v_0\cos\alpha\cos\omega t)+\boldsymbol{u}_y(v_0\cos\alpha\sin\omega t)+\boldsymbol{u}_z(v_0\sin\alpha)$; $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{u}_x(R\sin\omega t)-\boldsymbol{u}_y(R\cos\omega t)+\boldsymbol{u}_z[v_0(\sin\alpha)t]$, 式中 $R=(m/q)(v_0\cos\alpha/\mathscr{B})$.

4.13 $\mathscr{B}=-\boldsymbol{u}_z(0.5)$T.

4.14 $1.5\times10^{5}\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

4.15 (a) $1.75\times10^{7}\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

4.16 3.27T，沿水平方向并垂直于速度.

4.17 (a) $1.02R$; (b) 960V.

4.18 (a) 经典速度，约为 $10^{5}\mathrm{m\cdot s^{-1}}$; (b) 0.245m.

4.19 (a) 0.656T; (b) $2.51\times10^{7}\mathrm{m\cdot s^{-1}}$; (c) 5.28×10^{-13}J, 3.30MeV; (d) 约82整圈.

4.20 对于氘核：(a) 1.31T; (b) $2.51\times10^{7}\mathrm{m\cdot s^{-1}}$; (c) 1.06×10^{-12}J, 6.59MeV; (d) 约165圈. 对于α粒子：(a) 1.30T; (b) $2.51\times10^{7}\mathrm{m\cdot s^{-1}}$; (c) 2.10×10^{-12}J, 13.1MeV; (d) 164圈.

4.21 (a) 每秒 4.57×10^{7} 次 (即频率为 2.29×10^{7}Hz); (b) $5.03\times10^{7}\mathrm{m\cdot s^{-1}}$; (c) 1.32×10^{7}V.

4.22 (a) 1.31T; (b) 4.22MeV; (c) $2.01\times10^{7}\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

4.24 (a) 由于离轴电子的“聚焦”; (b) 它们互为镜象.

4.25 1.57m.

4.26 (a) 对于O'：q_1固定在O'，$F_1'=-F_2'=-u_x(q_1q_2/4\pi\varepsilon_0r')$; 对于$O$: $F_1=-F_2=F_1'$; (b) 对于O'：$F_1'=-F_2'=-u_y(q_1q_2/4\pi\varepsilon_0r')$；对于$O$: $F_1=-F_2=\sqrt{1-(v^2/c^2)}F_1'$.

4.27 (a) 1; (b) 1.015; (c) 1.54; (d) 12.08.

4.28 (a) 1; (b) 1.005; (c) 1.155; (d) 2.294.

4.29 (a) 1; (b) 1.005; (c) 1.155; (d) 2.294.

4.30 (a) 2.30997433×10^{-20}N 推斥力; (b) 只有电力，等于 2.31000000×10^{-20}N 推斥力; (c) 1.386×10^{-20}N 推斥力，外部观察者测得的; 2.31×10^{-20}N，内部观察者测得的.

第 五 章

5.1 $3.78\times10^{8}\mathrm{A\cdot m^{2}}$.

5.2 1: $-u_y(0.3)$N; 2: 0N; 3: $u_x(0.3)$N; 4: $(u_x-u_y)0.3$N; 5: $(u_x+u_y)0.3$N.

5.3 (a) 6×10^{-3}N·m; (b) $0.04\mathrm{A\cdot m^{2}}$; (c) 8.07×10^{-3}N·m.

5.4 (a) 在竖直边上: 0.16N 沿Z方向; 在水平边上: 0.06N 沿Y方向; (b) $u_y(8.31\times10^{-3})$N·m; (c) 在竖直边上：0.16N 沿X方向; 在水平

边上；0.104N 沿 Y 方向；(d) $-\boldsymbol{u}_y(4.8\times10^{-5})\mathrm{N\cdot m}$；(e) 对于两种情况相同.

5.5 (a) $\boldsymbol{u}_y(1.32\times10^{-2})\mathrm{T}$；(b) $-\boldsymbol{u}_x(2.29\times10^{-2})\mathrm{T}$ 的磁场就能保持回路成任意角，甚至能使它绕 Z 轴匀速转动.

5.6 $3.6\times10^{-6}\mathrm{N\cdot m}$.

5.7 0.30°.

5.8 (a) $\boldsymbol{u}_x(10^{-2})\mathrm{N}$；(b) $-\boldsymbol{u}_z(5\times10^{-4})\mathrm{N\cdot m}$.

5.9 (a) $-\boldsymbol{u}_z(10^{-2})\mathrm{N}$；(b) $[\boldsymbol{u}_x(-5\times10^{-4})+\boldsymbol{u}_y(10^{-3})]\mathrm{N\cdot m}$.

5.10 (a) $\mathscr{B}I(2R)$，式中 R 是圆的半径.

5.11 (a) 有；(b) 无；(c) $\tau=[3.6\times10^{-6}\sin\theta]\mathrm{N\cdot m}$；(e) 线圈将继续转动，直至回复转矩改变转动的方向.

5.12 (a) 线圈将继续沿一个方向转动；(b) 利用“裂环”和“电刷”；(c) 能够用这种装置作为电动机.

5.13 (a) $4.0\times10^{-6}\mathrm{T}$，$2\times10^{-7}\mathrm{T}$；(b) $0\mathrm{N\cdot C^{-1}}$.

5.14 $2.40\times10^{-20}\mathrm{N}$，产生一垂直于运动方向的加速度，等于 $2.64\times10^{10}\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

5.15 (a) $\boldsymbol{u}_x(2\times10^{-6})\mathrm{T}$；(b) $(\boldsymbol{u}_x-\boldsymbol{u}_z)10^{-6}\mathrm{T}$；(c) $-\boldsymbol{u}_x(3\times10^{-6})\mathrm{T}$.

5.16 (a) $\mu_0I/\pi a$；(b) $\mu_0I/3\pi a$；(c) $0, 2\mu_0I/3\pi a$.

5.17 (a) 2A，垂直于图面向上；(b) $2.13\times10^{-6}\mathrm{T}$；(c) $1.64\times10^{-6}\mathrm{T}$，朝着导线，在水平面下方，与水平面成 13° 角.

5.18 (b) $\mu_0Ia/\pi(a^2+x^2)$；(d) $x=0$.

5.19 (b) $\mu_0Ia/\pi(a^2-y^2)$；(d) $y=\pm a$.

5.20 (b) $\mu_0Ix/\pi(a^2+x^2)$；(d) $x=0$

5.21 (b) $\mu_0Iy/\pi(a^2-y^2)$；(d) $y=\pm a$

5.22 (a) $1.92\times10^{-4}\mathrm{N\cdot m^{-1}}$，沿 $+Y$ 方向；(b) $1.92\times10^{-4}\mathrm{N\cdot m^{-1}}$，沿 $-Y$ 方向.

5.23 30.

5.24 6.91×10^{-3}.

5.25 $1.02\times10^{-2}\mathrm{m}$.

5.26 (a) $3.2\times10^{-6}\mathrm{N}$ 推斥力；(b) 0，0.

5.27 46.4A.

第 六 章

6.1 (a) 0, 2.5×10^{-5}T, 3×10^{-5}T; (b) 2.5×10^{-5}T, 1.33×10^{-6}T. (c) 4m 和 4×10^{-4}m.

6.2 1.7×10^{-3}T.

6.3 4.40×10^{-2}T.

6.5 (a) $r>R_3$: 0; $R_2<r<R_3$: $(\mu_0 I/2\pi r)[(R_3^2-r^2)/(R_3^2-R_2^2)]$; $R_1<r<R_2$: $(\mu_0 I/2\pi r)$; $0<r<R_1$: $(\mu_0/2\pi)[Ir/R_1^2]$.

6.6 (a) 2.84×10^3 匝/米; (b) 1.79×10^4m.

6.9 (a) 0.24Wb; (b) 0; (c) 0.24Wb.

6.10 $[\mu_0 Ib/2\pi]\ln(1+a/r)$.

6.11 0.

第 七 章

7.1 (a) 2.36×10^{-8}kg; (b) 2.24×10^{23}.

7.2 (a) 1.12A; (b) 9.65×10^4C.

7.3 (a) 1.139×10^{-13}m; (b) 1.139×10^{-13}m; (c) 1.1478×10^{-13}m; (d) 178°, 160°.

7.4 (a) 2.88×10^{-14}m; (b) 约三倍核半径那么远.

7.5 约 14

7.6 (a) -27.2eV(-4.36×10^{-18}J); (b) 13.6eV(2.18×10^{-18}J); (c) -13.6eV; (d) 6.57×10^{14}Hz.

7.7 (a) $E_{平均}=\frac{1}{2}E_{p平均}=-\frac{1}{2}K_e Ze^2/r$; (b) -13.6eV(相同的值)

7.8 (a) 8.22×10^6 圈; (b) 1.95×10^4 圈.

7.10 (a) H: -13.6eV, -3.40eV, -1.51eV, -0.85eV; He: -54.4eV, -13.6eV, -6.04eV, -3.40eV; (b) H: 10.2eV, He: 40.8eV; (d) He 的第m个偶能级与 H 的第m个能级重合.

7.11 (a) 2.19×10^6m·s^{-1}.

7.12 (a) 8.8×10^{10}rad·s^{-1}; (b) 1.34×10^8rad·s^{-1}.

7.13 (a) 9.284×10^{-24}A·m^2; (b) 8.79×10^5rad·s^{-1}.

7.14 1.

7.15 (a) 2.45Å; (b) $m_l=0:90°, m_l=\pm1:67.8°, m_l=\pm2:50.8°$.

7.16 (a) 17,如果不考虑自旋; (b) 2.20×10^{-4}eV.

7.17 $2.17\times10^{4}:1$.

第 八 章

8.1 (a) 4π; (b) 4π; (c) 8π; (d) 4π; (e) 8π.

8.2 $(\mu_0/2\pi)bI_0\omega\ln[1+a/r]\cos\omega t$.

8.4 (a) 圆(顺时针方向); (b) 5×10^{-3}N·C^{-1}顺时针方向,3.14×10^{-3}V; (c) 1.57mA; (d) 0; (e) 在一个随时间变化的场中,电势差不是一个有用的概念; (f) 3.14×10^{-3}V.

8.6 (a) 0.65V; (b) $0.2t$V; (c) 0; (d) 0.

8.7 (a) $V=6\pi\sin(10\omega t)-0.4\pi\sin(10\omega t)\cos(10\omega t)$, $I=V/R$; (b) 11.6V.

8.8 (a) 45kV; (b) a端.

8.9 A: 0V; C: 7.1×10^{-2}V; D: 0.1V.

8.10 $(\mu_0Ibav/2\pi)[(r_0+vt)(a+r_0+vt)]^{-1}$,式中 $t=0$ 时 $r_0=r$.

第 九 章

9.1 (a) 0.4H; (b) 4V; (c) 4V; (d) 8V.

9.2 μ_0nA,式中 n 是每单位长的匝数,A 是圆环的横截面.

9.4 (b) $q=(q_0/C_2-C_1)[C_2e^{(C_2-C_1)t/(C_1C_2R)}]-C_1$,
$I=(q_0/C_1R)[e^{(C_2-C_1)t/(C_1C_2R)}]$

9.7 (c) R

9.8 (a) $I=-VC\omega\cos\omega t$.

9.9 (a) 5mA; (b) 50mA; (c) 0.5A.

9.10 (a) 50mA; (b) 5mA; (c) 0.5mA.

9.11 (a) 0.5mA; (b) 50mA; (c) 5A.

9.12 (a) 5A; (b) 50mA; (c) 0.5mA.

9.13 (a) $I=(V_0/\omega L)\cos\omega t$.

9.15 (a) $[R^2+(1/\omega C)^2]^{1/2}$,电流超前的角为 $\tan^{-1}(1/\omega RC)$; (b) $[\omega L-(1/\omega C)]$,角为 $\pm(\pi/2)$.

9.16 (a) 4.52×10^{-4}H; (b) 9.04×10^{-4}V.

9.17 (a) 7.20×10^{-2},H; (b) 每一匝中为 1.44×10^{-3}Wb; (c) 0.48V.

9.18 (a) $L_1N_2I_0/5N_1t$; (b) $(L_1N_2I_0\omega/5N_1)\cos\omega t$.

第 十 章

10.1 3.33m.

10.2 (a) 0.10m; (b) 0.5m; (c) 100Hz; (d) $50\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

10.3 (a) 10m; (b) 5Hz; (c) 0.2s; (d) $50\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; (e) 0.02m; (f) $+X$ 方向; (g) $\xi=0.02\sin[2\pi(0.1x+5t)]$m.

10.4 (e) 两个波相同,但沿相反的方向运动.

10.8 (a) 0, 8.87×10^{-3}m, 1.69×10^{-2}m, 2.35×10^{-2}m; (b) 8.87×10^{-3}m, 3.00×10^{-3}m, -3.00×10^{-3}m; (c) $v=-0.06\cos(3x-2t)\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; (d) $6\times10^{-2}\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; (e) $\frac{2}{3}\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

10.9 (b) $\xi(x,t)=(8A/\pi^2)\left[\sin\theta-\left(\frac{1}{9}\right)\sin3\theta+\left(\frac{1}{25}\right)\sin5\theta-\cdots\right]$,式中$\theta=kx-\omega t$.

10.10 (b) $\xi(x,t)=(4A/\pi)\left[\sin\theta+\frac{1}{3}\sin3\theta+\frac{1}{5}\sin5\theta+\cdots\right]$,式中 $\theta=kx-\omega t$.

10.11 (a) $F=F_0\cos[2\pi(x/\lambda-t/P)]$,式中 $F_0=(2\pi\lambda A\rho\xi_0/P^2)$.

10.12 $35.4\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

10.13 $39.6\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

10.14 (a) $1255.5\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$(99%); (b) $336.8\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$(99.3%); (c) $351.1\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$(99%).

10.15 $0.58\text{m}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$.

10.16 对于80%N_2和20%O_2, 28.9u 和 28.8u.

10.17 (a) 增加到$\sqrt{2}$倍; (b) 减小到$\sqrt{2}$分之一; (c) 增加到4倍; (d) 减小到四分之一.

10.18 $903.4\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

10.19 $99\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

10.20 (a) $38.3\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; (b) 0.16m.

10.21 (a) $12.8\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; (b) $0.27\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; (c) $\xi=10^{-3}\sin(20.9x-268t)$m.

10.22 (a) $20\mathrm{m\cdot s^{-1}}$; (b) 0.95Hz; (c) 21m; (d) $\xi=0.1\sin(6t-0.3)\mathrm{m}$, $\xi=0.1\sin(6t-0.9)\mathrm{m}$; (f) 0.1m.

10.23 (a) $1.25\times10^{-2}\mathrm{m}$; (b) $6.25\times10^{-8}\mathrm{m}$, $9.8\times10^{2}\mathrm{N}$; (c) $5.06\times10^{3}\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $3.19\times10^{3}\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

10.24 (a) 3.5×10^{-3}; (b) 0.35; (c) 3.5×10^{3}; (d) $1.68\times10^{-2}\mathrm{m}$.

10.25(a) $0.24\mathrm{m\cdot s^{-1}}$; (b) $1.25\mathrm{m\cdot s^{-1}}$; (c) $3.95\mathrm{m\cdot s^{-1}}$; (d) $6.20\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

10.27 (a) $4.49\times10^{-18}\mathrm{W\cdot m^{-2}}$, −3.46db; $0.881\mathrm{W\cdot m^{-2}}$, 119db; (b) $1.43\times10^{-11}\mathrm{m}$, $2.00\times10^{-5}\mathrm{m}$.

10.28 (a) i: 10, ii: 100; (b) i: 3.16, ii: 10.

10.29 (a) 增加 6 db; (b) 3.16.

10.30 (a) 3db; (b) 6db.

10.31 (a) 57.9; (b) 2.98×10^{-4}.

10.32 (a) 532.1Hz; (b) 471.6Hz.

10.33 (a) 918.9Hz, 0.37m; (b) 1096.8Hz, 0.31m.

10.34 (a) 911.8Hz, 0.373m; 1088.2Hz, 0.312m; (b) 是的，这差别是可测量的.

第十一章

11.1 (a) $\mathscr{E}=(u_y+u_z)(\mathscr{E}_0/\sqrt{2})\sin\theta$, $\mathscr{H}=(u_y-u_z)(\mathscr{E}_0/\sqrt{2}c)\sin\theta$; (b) $\mathscr{E}=(-u_y+u_z\sqrt{3})(1/2)\mathscr{E}_0\sin\theta$, $\mathscr{H}=(-u_y\sqrt{3}-u_z)(1/2c)\mathscr{E}_0\sin\theta$; (c) $\mathscr{E}=u_y\mathscr{E}_0\cos\theta+u_z\mathscr{E}_0\sin\theta$, $\mathscr{H}=-u_y\mathscr{E}_0\sin\theta+u_z(\mathscr{E}_0/c)\cos\theta$; (d) $\mathscr{E}=u_y(2\mathscr{E}_0/\sqrt{5})\cos\theta+u_z(\mathscr{E}_0/\sqrt{5})\sin\theta$, $\mathscr{H}=-u_y(\mathscr{E}_0/\sqrt{5}c)\sin\theta+u_z(2\mathscr{E}_0/c\sqrt{5})\cos\theta$, 式中 $\theta=kx-\omega t$.

11.2 (a) I: 右旋圆偏振, II: 线偏振, 与 XY 面成 −45° 角, III: 右旋椭圆偏振, −45° 角, IV: 左旋椭圆偏振, +45° 角; (b) 在每一种情况下, $\mathscr{H}_y=-\mathscr{E}_x/c$ 和 $\mathscr{H}_x=\mathscr{E}_y/c$.

11.3 (a) 3m, 线偏振, 沿 $+X$ 方向; (b) $\mathscr{H}=u_z(-0.5/c)\cos[2\pi\times10^{8}(t-x/c)]\mathrm{T}$; (c) $3.3\times10^{-4}\mathrm{W\cdot m^{-2}}$.

11.4 (a) 15m, 右旋圆偏振, 沿 $+X$ 轴方向; (b) $\mathscr{H}=u_y(-0.5/c)\sin[4\pi\times10^{7}(t-x/c)]+u_z(0.5/c)\cos[4\pi\times10^{7}(t-x/c)]$; (c) $6.6\times10^{-4}\mathrm{W\cdot m^{-2}}$.

11.5 (a) (i): $0.5\sqrt{6}\,\mathscr{E}_0$, 35.3°; $0.5\sqrt{6}\,\mathscr{E}_0$, 90°; $0.5\sqrt{6}\,\mathscr{E}_0$, 215.3°; $0.5\sqrt{2}\,\mathscr{E}_0$, 270°; $0.5\sqrt{6}\,\mathscr{E}_0$, 35.3°; (ii): $0.5\sqrt{2}\,\mathscr{E}_0$, 270°; $0.5\sqrt{6}\,\mathscr{E}_0$, 35.3°; $0.5\sqrt{2}\,\mathscr{E}_0$, 90°; $0.5\sqrt{6}\,\mathscr{E}_0$, 215.3°; $0.5\sqrt{2}\,\mathscr{E}_0$, 270°; (b) 在每一种情况下，$\mathscr{B}=\mathscr{E}/c$，角度比已知角大 180°.

11.6 $\mathscr{E}=u_z(\sqrt{24\pi})\cos\theta\,\mathrm{N\cdot C^{-1}}$, $\mathscr{B}=(u_x-u_y)(\sqrt{24\pi}\,c)\cos\theta\,\mathrm{T}$，式中 $\theta=\omega t-k_x x-k_y y=2\pi\times10^6(6\times10^8 t-\sqrt{2}\,x-\sqrt{2}\,y)$.

11.7 $\mathscr{E}=u_y(\sqrt{24\pi})\cos\theta\,\mathrm{N\cdot C^{-1}}$, $\mathscr{B}=u_z(\sqrt{24\pi}/c)\cos\theta$ T，式中 $\theta=4\pi\times10^6(3\times10^8 t-x)$.

11.8 (a) 3.33×10^{-11}T; (b) $8.85\times10^{-10}\,\mathrm{J\cdot m^{-3}}$; (c) $8.85\times10^{-10}\,\mathrm{N\cdot m^{-2}}$; (d) $1.77\times10^{-15}\,\mathrm{N\cdot m^{-2}}$.

11.9 $1050\,\mathrm{N\cdot C^{-1}}$, 3.52×10^{-6}T.

11.10 $69.28\,\mathrm{N\cdot C^{-1}}$, 2.31×10^{-7}T.

11.11 (a) 3.33×10^{-10}T; (b) $1.33\times10^{-8}\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}$; (c) $4.4\times10^{-14}\,\mathrm{J\cdot m^{-3}}$; (d) 167W.

11.12 (a) $\mathscr{E}_z=\mathscr{E}_0[\cos(\omega t-kx)+\cos(\omega t-ky)]$;

(b) $\mathscr{B}=-u_y(\mathscr{E}_0/c)\cos(\omega t-kx)+u_x(\mathscr{E}_0/c)\cos(\omega t-ky)$; (c) $\varepsilon_0\mathscr{E}_0^2$;

(d) X 分量 $=c^2\varepsilon_0\mathscr{E}\mathscr{B}_y$, Y 分量 $=c^2\varepsilon_0\mathscr{E}\mathscr{B}_x$.

11.15 (a) $795.8\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}$; (b) $1.55\times10^3\,\mathrm{N\cdot C^{-1}}$, 5.16×10^{-6}T; (c) $2.65\times10^{-6}\,\mathrm{J\cdot m^{-3}}$, $8.83\times10^{-15}\,\mathrm{kg\cdot m^{-2}\cdot s^{-1}}$.

11.16 (a) 5.76×10^{-12}W; (b) 1.74×10^{11} 分子 (2.8×10^{-13}mol).

11.17 280W.

11.18 $(dE/dt)=[q^4v^2\mathscr{B}^2/6\pi\varepsilon_0c^3m^2(1-v^2-c^2)^2]$.

11.19 (a) 4.6×10^{-8}W ($2.9\times10^{11}\,\mathrm{eV\cdot s^{-1}}$), 4.4×10^{-5}eV/转; (b) $1.1\times10^{-2}\,\mathrm{eV\cdot s^{-1}}$, 5.2×10^{-10}eV/转; (c) $1.2\times10^{-7}\,\mathrm{eV\cdot s^{-1}}$, 2.4×10^{-13}eV/转.

第十二章

12.1 1.0243×10^{-10}m; (b) 4.72×10^{-17}J，与入射方向成 44.3° 角.

12.2 (a) 1.012×10^{-10}m, 58.8°; (b) 2.297×10^{-17}J 或 143.4eV.

12.4 (a) −96.9eV, 2.34×10^{16}Hz, 1.214×10^{-12}m; (b) 96.9eV, $5.32\times10^{-24}\,\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}$, 59.5°.

12.5 (a) 2.418×10^{17}Hz, 1.24×10^{-9}m; (b) 2.418×10^{14}Hz, 1.24×10^{-6}m; (c) 2.418×10^{12}Hz, 1.24×10^{-4}m.

12.6 3.37×10^{-19}J 或 2.1eV.

12.7 (a) 2.66×10^{15}Hz; (b) 1.13×10^{-7}m 或 1130Å.

12.8 (a) 电子: 5.40×10^{-23}kg·m·s^{-1}, 质子: -4.86×10^{-23}kg·m·s^{-1}; (b) 电子: 1.60×10^{-19}J=9.98keV, 质子: 7.07×10^{-19}J=4.41eV.

12.9 (a) 273.6MeV; (b) 40MeV.

12.10 (a) 4.01×10^{-22}kg·m·s^{-1}(=0.75MeV/c), 0.908MeV; (b) 0.998 MeV; (c) 能.

12.11 (b) 4.6×10^{14}Hz; (c) 1.89eV; (d) 6.59×10^{-34}J·s.

12.12 (a) 1.45V; (b) 1.45eV(=2.32×10^{-19}J), 7.13×10^{5}m·s^{-1}.

12.13 (a) 6.04×10^{9}电子·s^{-1}·m^{-2}; (b) 3×10^{-9}J·s^{-1}·m^{-2} 或 1.21×10^{10}eV·s^{-1}·m^{-2}.

12.14 (a) 2.89×10^{15}Hz; (b) $n^2=1+4.85\times10^{25}(\Sigma f_i/[(2.89\times10^{15})^2-\nu^2])$; (c) 1.000003, 0.99992.

第十三章

13.2 (a) 2.87×10^{-2}m.

13.3 (a) 26.2°, 22.5°; (b) 2.20×10^{-2}m.

13.4 16.6°.

13.5 1.11, 0.11.

13.6 (b) 无能量损失.

13.7 (a) 8.52×10^{-7}m; (b) 2.70×10^{-9}m; (c) 3.81×10^{-11}m.

13.8 (a) $\Delta\theta=[2.4\times10^{-4}\rho_0(pT_0/p_0T)\tan\theta]$rad, 式中 ρ_0、p_0 和 T_0 是在标准温度和压强下的大气密度、压强和温度; (b) 58.7″ 弧.

第十四章

14.1 (a) 9.20×10^{-2}, 0.728; (b) −0.3033, 0.697.

14.3 (a) −0.2, 0.8; (b) 0.2, 1.2; (c) 在第一种情况下对于反射波有一相位变化 π.

14.5 56.3°, 33.7°.

14.6 35.3°.

14.7 (a) 36.9°; (b) 垂直于入射面.

14.8 (a) $\frac{1}{2}c\varepsilon_0\mathscr{E}_0^2$; (b) $\mathscr{E}_0/n$; (c) $\frac{1}{2}v\varepsilon\mathscr{E}_0^2$; (d) 答案(a)和(c)一样，因为没有能量被反射.

14.11 (a) 0.848, −0.128; (b) 0.845, −0.155; (c) 0.502, −0.333; (d) 0.441, −0.559; 在(a)和(c)中只有平行分量，在(b)和(d)中只有垂直分量.

14.12 (a) 1.177, −0.115; (b) 1.168, 0.168; (c) 1.399, 0.052; (d) 1.325, 0.325.

14.13 反射光束是椭圆偏振的，其旋向与入射光束相反；垂直分量=0.311，平行分量=0.097；折射光束是椭圆偏振的，其旋向与入射光束相同；垂直分量=0.689，平行分量=0.722.

14.14 (a) 0.75; (b) 0.50; (c) 0.25; (d) 0; (e) 0.25; (f) 0.50; (g) 0.75; (h) 1.

14.15 (a) 3.969×10^{-7}m, 3.558×10^{-7}m; (b) 5.085×10^{14}Hz.

14.16 (a) 1.620; (b) 2.35.

14.17 (a) 奇整数 $\times 8.726\times10^{-7}$m; (b) 整数 $\times 1.745\times10^{-6}$m; (c) 整数 $\times 3.49\times10^{-6}$m.

14.18 (2) 线偏振，45° 角；(3) 椭圆偏振，轴取向与片厚度有关系. (4) 线偏振，60° 角.

14.19 (a) 相对于Y轴成 45° 角，逆时针方向；(b) 垂直于(a) 中的答案；(c) 583:1.

14.20 (a) 6.05×10^{-7}m, 6.30×10^{-7}m, 6.56×10^{-7}m, 6.84×10^{-7}m; (b) 6.17×10^{-7}m, 6.42×10^{-7}m, 6.70×10^{-7}m, 7.00×10^{-7}m; (c) 6.05×10^{-7}m, 6.56×10^{-7}m.

14.21 299°.

14.22 1.19×10^{-8}kg.

第十五章

15.1 (a) 0.78m, 0.56; (b) 1.0m, 1.0; (c) 1.33m, 1.67; (d) ∞, ∞; (e) −0.75m, 2.5(直立的)；(f) 0.27, 0.45(直立的).

15.2 (a) −0.27m; (b) 0.45(直立的); (c) 0.75m, 0.25(直立的); (d) −1.33m, 1.66(倒立的).

15.3 (a) 0.48m; (b) 1.92m; (c) −1.20m; (d) 0.80m; (e) 2.40m; (f) 0.30m; (g) −0.60m[负号表示凹镜].

15.4 (a) 1.07m; (b) 3.2m; (c) 0.53m.

15.5 (a) −1.07m; (b) −3.2m; (c) −0.53m.

15.6 0.08m, 2.1.

15.7 0.07m.

15.8 0.375m 或 0.40m.

15.10 (a) $f_o=-1.2$m, $f_i=-1.8$m; (b) i: −1.2m, 0.33(直立的); ii: −1.03m, 0.43(直立的); iii: −0.6m, 0.67(直立的).

15.11 (a) $f_o=1.2$m, $f_i=1.8$m; (b) i: 3.6m, 1.0(直立的); ii: 7.2m, 3.0(倒立的); iii: −1.8m, 2.0(直立的).

15.12 (a) 在第一个面另一边 1.5m, 实的; (b) 4.0mm; (c) 在棒外0.25 m, 实的; (d) 1.5mm.

15.13 (a) $f_o=0.05$m(在图中, 在 10cm 表面左边 5 cm 处) $f_i=-0.2$m [即在 20cm 表面的曲率中心处]. 注意, 当光从右朝左通过这个系统时, 焦点在同样的位置上; 但是, 现在 f_i 在 f_o 处, 反之亦然.

15.14 −0.438m(即在棒外, 在半球侧约 3.8cm 处)(b) 1.71 (直立的).

15.15 0.367m.

15.16 (c) ±0.133m, ±0.40m.

15.17 (a) 0.24m; i: (b) 0.343m, (c) 0.43; ii: 0.48m, (c) 1; iii: (b) 0.60m, (c) 1.5; iv: (b) ∞; v: (b) −1.2m, (c) 6; (d) 0.10m, 0.5.

15.18 (a) −0.24m; (b) −0.11m; (c) 0.545; (d) −0.60m, 1.5; (e) 1.20m, 6.

15.19 0.0545m

15.20 (a) 离屏为 0.12m 和 0.06m; (b) 2 和 0.5.

15.21 (a) 1.07m; (b) 0.67m; (c) 0.80m; (d) 0.27m; (e) −0.10m. 除(d)之外, 都是实的.

15.22 (a) 0.80m; (b) 2.4m; (c) 0.40m.

15.23 (a) 0.48m; (b) 1.92m; (c) −1.2m; (d) 0.80m; (e) 2.4m;

(f) 0.3m; (g) −0.60m.

15.25 4.5×10^{-3}m.

15.26 (a) $F_o=0.17$m, $F_i=0.09$m; (b) $F_o=0.08$m, $F_i=-0.30$m; (c) $F_o=F_i=\infty$; (d) $F_o=0.60$m, $F_i=1.8$m. 所有距离都从0.6m透镜算起.

15.27 (a) $F_o=-1.2$m, $F_i=-3.0$m; (b) $F_o=0.15$m, $F_i=2.4$m; (c) $F_o=-0.15$m, $F_i=1.2$m; (d) $F_o=-2.0$m, $F_i=1.0$m. 所有距离都从0.6m透镜算起.

5.28 $F_o=1.67\times10^{-2}$m, $F_i=4.17\times10^{-2}$m(至第一个透镜)

15.29 (a) 360; (b) 2.8×10^{-7}m.

15.30 0.37rad 或 21°.

15.31 (a) 38.5°; (b) 37.2°; (c) 48.6°.

15.32 (a) 1.52; (b) 40°.

15.33 用最小二乘方拟合: $A_0=1.51322$, $B_0=2.155\times10^{-16}$.

15.34 0.304°(0.739°,如果利用表15-3中的n值).

15.35 (a) $F_p=0.266$m; (b) 3.33×10^{-3}m.

第十六章

16.1 (a) 6.5×10^{-4}m; (b) 1.6×10^{-3}m, 3.3×10^{-3}m.

16.2 4.2×10^{-3}m.

16.3 (a) i:无相位变化, ii: πrad 的相位变化; (b) 从较密的媒质上反射时"总是"如此.

16.4 4.5×10^{-5}m.

16.5 将出现亮环和暗环.

16.6 (a) 在两个源之间的直线的中点和两侧每隔0.25m处; (b) 无; (c) 对于原点在两个源之间的中点且X轴包含两个源的坐标系,强度极小的点为由 $r_1-r_2=(2n+1)/4$ 给出的双曲线,式中 $r_1^2=\left(x+\frac{3}{8}\right)^2+y^2$, $r_2^2=\left(x-\frac{3}{8}\right)^2+y^2$; (d) 强度永远不会等于零,因为两个源至所考虑的点的距离总是不同的.

16.8 4.07×10^{-5}rad.

16.9 主极大值的角由 $\sin^{-1}(n\lambda/a)$给出，式中 n 是任意整数，包括零，强度为 $9I_0$；零值的角由 $\sin^{-1}(n'\lambda/3a)$给出，式中 n' 是任意整数，不包括0，3，6，9，…；强度为 I_0 的较小的极大值的角由 $\sin^{-1}([2n''+1]\lambda/2a)$ 给出，式中 n'' 是任意整数.

16.10 $1.18\,I_0$.

16.11 (a) λ；(b) 极大值在 $0°(16I_0)$，$21.5°(1.18I_0)$，$39.4°(1.18I_0)$，$90°(16I_0)$，在每一象限中有类似情况.

16.12 (a) 0.11°或 1.9×10^{-3}rad；(b) 1.72°.

16.13 2.95×10^{-4}rad.

16.14 1.6×10^{-6}m.

16.15 (a) 5.6 个波长；(b) 约 35rad；(c) 6 个波长或约 38rad.

16.16 1.18×10^{-5}m.

16.17 (a) $\rho_n=2.19\times10^{-3}\sqrt{N}$m，式中 N 是任意正整数；(b) 83个环.

16.18 1.4×10^{-3}m

16.19 (a) 298.7Hz，597Hz；(b) 2m，1m，0.67m；
(d) $\xi=\xi_0\sin(k_nx)\cos(\omega_nt)$，式中 $k_n=2\pi/\lambda_n$，$\omega_n=2\pi\nu_n$.

16.20 (a) i：增加到$\sqrt{2}$倍，ii：减小到$\sqrt{2}$分之一，iii：减小一半，iv：减小一半；(b) i：减小到$\sqrt{2}$分之一，ii：增加到$\sqrt{2}$倍，iii：增加到 2 倍，iv：增加到 2 倍.

16.21 (a) 289.5Hz，578.9Hz；(b) 144.7Hz，434.2Hz：

16.22 0.17%.

16.23 24.4Hz.

16.24 (a) 0.339m，1.02m，1.70m.

16.26 (b) ν_0：二重(1，0)；ν_1：单重(1，1)；ν_2：二重(0，2)；ν_3：二重(1，2)；ν_4：单重(2，2)；ν_5：二重(0，3)；ν_6：二重(1，3)；ν_7：二重(2，3).

16.27 (a) $\nu=(v/2a)\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2}$；(b) ν_0：三重(1，0，0)；$\nu_1=\sqrt{2}\,\nu_0$：三重(1，1，0)；$\nu_2=\sqrt{3}\,\nu_0$：单重(1，1，1)；$\nu_3=2\nu_0$：三重(2，0，0)；$\nu_4=\sqrt{5}\,\nu_0$：三重(2，1，0)；等等.

16.28 2.25×10^{30}模/体积.

第十七章

17.1 5.6×10^{-4}m.

17.2 6.75×10^{-6}m.

17.3 600m.

17.4 5×10^{-7}m, 4×10^{-7}m.

17.5 (a) 衍射图样由矩形组成，类似于图17-11所示情况. (b) 2.4×10^{-3}m $\times1.2\times10^{-3}$m.

17.6 (a) 2.05×10^{-3}m; (b) 6.83×10^{-6}m.

17.7 9.7km(197km)

17.8 4.8×10^{-5}m.

17.9 (a) 3.

17.10 8.9m.

17.11 $a=5\times10^{-5}$m, $b=1.25\times10^{-5}$m.

17.12 (a) 17.5°; (b) 36.9°; (c) 64.2°.

17.13 12.5°

7.14 (a) 5.70×10^{-7}m; (b) 43.2°.

17.15 5.00×10^{-7}m.

17.16 第一级：13.9°至24.8°；第二级：28.7°至57.1°.

17.17 (a) 16,000; (b) 是，它们相距0.84′(见例题17.6); (c) 13.7°; (d) 4.1×10^{5}m^{-1}.

17.19 (a) 7.75×10^{-4}m; (b) 1.55×10^{-3}m.

117.20 7.07×10^{-4}m.

17.21 (a) 6.67×10^{-5}m; (b) 5.0×10^{-5}m; (c) 对于3个带是亮点，对于4个带是暗点.

17.22 (a) 亮的; (b) 朝圆孔移动0.25m.

17.23 (a) 最小强度：$8/n$ m，式中$n=2,4,6,\cdots$；最小强度：$8/n$ m，式中$n=1,3,5,\cdots$; (b) 4m.

17.24 (a) 在$20/n$ m处(式中$n=1,2,3,\cdots$)，只观察到λ_1; (b) 在$40/3n'$ m处只观察到λ_2，式中$n'=1,2,3,\cdots$，但$n'=2n/3$除外(例如，$n=6$, $n'=4$，或3.33m).

17.25(a) 9.79×10^{-11}m; (b) 20.3°.

17.26 (a) 6.98×10^{-10}m; (b) 12.4°; 26.4°.

17.27 1.25°.

17.28 7.96×10^{-3}m 和 1.59×10^{-2}m.

第十八章

18.1 (a) 1.23×10^{-9}m; (b) 1.23×10^{-10}m; (c) 3.89×10^{-11}m;
(d) 如果这个电子的总能量为 1MeV，这个题目就要按相对论的方法来作，答案为 8.7×10^{-13}m.

18.2 100eV 电子的衍射角为 16.6°，1keV 电子的衍射角为 5.2°.

18.3 32.7eV.

18.4 7.99×10^{-2}m 和 0.161m.

18.5 3.6°.

18.6 11.5°.

18.7 (a) 1.24GeV; (b) 1.24GeV; (c) 616MeV.

18.8 (a) 3.9m; (b) 完全精确.

18.9 (a) 7.3×10^{3}m; (b) 完全精确.

18.10 (a) 6.6×10^{-23}kg·m·s^{-1}; (b) 7.7keV.

18.11 (a) 6.6×10^{-20}kg·m·s^{-1}; (b) 8.1MeV.

18.12 (a) $[-\hbar^2/2m]d^2\psi/dx^2-(gx)\psi=E\psi$; (c) 不是.

18.13 10^{9}Hz.

18.14 (a) 能级进一步分开; (b) 能级变得更靠近了.

18.15 (a) 9.36eV; (b) 电子的能量会被升高到需要进行相对论性处理，给出 0.4MeV.

18.16 (a) 5.36×10^{-10}J≈3760MeV; (b) 引力能$=10^{-34}$eV，而库仑能＝0.14MeV; (c) 在原子核内不会有电子存在.

18.17 204MeV.

18.20 $E=[\hbar^2\pi^2/2m][n_1^2/a^2+n_2^2/b^2+n_3^2/c^2]$,
$\psi=C\sin(n_1\pi x/a)\sin(n_2\pi y/b)\sin(n_3\pi z/c)$.

18.21 (a) 1.325×10^{-31}J, 2.65×10^{-31}J; (b) 3.98×10^{-31}J, 2.65×10^{-31}J; (c) 2.01×10^{-22}J, 4.02×10^{-22}J.

18.22 (c) 是的.

索　引

(按汉语拼音字母顺序排列)

A

安培　André M. (Ampère, 1775—1836)　27,167
安培-拉普拉斯定律　Ampère-Laplace law　173
安培-麦克斯韦定律　Ampère-Maxwell law　249,265,269
安培-麦克斯韦定律的微分形式　Ampère-Maxwell law in differential form　269
安培定律的微分形式　Ampère's law in differential form　201
安培(A)　ampere　27,95
安培计　ammeter　116
安德孙，Carl D. (Anderson, 1905—　)　132
阿伏伽德罗数　Avogadro's constant　222
凹面镜　concave mirror　505
奥斯特，H. C. (Oersted, 1777—1851)　142
爱因斯坦，A. (Einstein, 1879—1955)
X射线　X-ray　435
X射线散射　X-ray scattering　630
α粒子　alpha particle　224

B

波包　wave packet　319
波长　wavelength　314
波动的微分方程　differential equation of wave motion　320
波导　wave guide　586
波腹面　ventral (or antinodal) surface　552
波节面　nodal surface　552

波函数 wave function 661
波的强度 intensity of wave 345
波阵面 wave front(or wave surface) 353,445
波数 wave number 314
玻尔，N. (Bohr,1885—1962) 235
玻尔半径 Bohr radius 234
玻恩，M. (Born,1882—1969) 645
变分法 calculus of variations 466
变压器 transformer 300
巴俾涅补偿器 Babinet compensator 500
贝恩布里奇质谱仪 Bainbridge's mass spectrometer 161
不相干源 incoherent source 552
薄透镜 thin lens 520
边界条件 boundary conditions 446
毕奥，J. (Biot,1774—1862) 176
毕奥-萨伐尔公式 Biot-Savart formula 176
标势 scalar potential 261
布儒斯特，Sir David (Brewster,1781—1868) 475
布儒斯特定律 Brewster's law 475
布喇格，W. H. (Bragg,1862—1942) 632
布喇格，W. L. (Bragg,1890—1971) 632
布喇格散射 Bragg scattering 649
半导体 semiconductor 103
半波片 half-wave plate 484
表面张力波 capillary wave 340
表面波 surface wave 338
表面张力 surface tension 339

C

磁场 magnetic field 123
磁场强度 magnetic field strength 124
磁场的安培定律 Ampère's law for the magnetic field 195

磁场的环流 circulation of the magnetic field
磁场的能量 energy of magnetic field 288
磁畴 magnetic domain 212,213
磁感应强度 magnetic induction 124
磁化率 magnetic susceptibility 209
磁镜 magnetic mirror 131
磁极 magnetic pole 122
磁化 magnetization 204
磁聚焦 magnetic focusing 162
磁量子数 magnetic quantum number 242
磁力 magnetic force 123
磁偶极矩 magnetic dipole moment 171
磁偶极辐射 magnetic dipole radiation 389
磁四极子 magnetic quadrupole 187
磁体 magnet 122
磁通量 magnetic flux 203
磁通势 magnetomotive force 196
磁透镜 magnetic lens 157
磁性 magnetism 122
场线 field lines 11
超声波 ultrasonic wave 332
超高频(UHF) ultrahigh frequency 433
超导体 superconductor 113
次声波 infrasonic wave 332
冲击压强波 blast pressure wave 331
冲击波 shock wave 352
传播矢量 propagation vector 354
垂射天线阵 broadside array 560

D

德拜,P. (Debye, 1884—1966) 635
德拜-谢乐图样 Debye-Scherrer pattern 635

德布罗意波长 de Broglie wavelength 616
德布罗意，Prince Louis(de Broglie, 1892—) 645
笛卡儿公式(薄透镜的) Descartes' formula (fora thin lens) 529
笛卡儿公式(在球面上折射时) Descartes' formula(for refraction at a spherical surface) 515
笛卡儿公式(在球面上反射时) Descartes' formula(for reflection at a spherical surface) 505
狄拉克，P. A. M. (Dirac, 1902—) 645
多普勒增宽 Doppler broadening 676
多普勒效应 Doppler effect 349
多普勒，C. J. (Doppler, 1803—1853) 349
登普斯特质谱仪 Dempster's mass spectrometer 135
戴维孙，C. (Davisson, 1881—1958) 648
导体 conductor 67
定态 stationary state 234
动态极化率 dynamic polarizability 74
动生电动势 motional emf 259
等势面 equipotential surface 22
单色波 monochromatic wave 433
单轴晶体 uniaxial crystal 480
单电子原子 one-electron atom 670
第一焦点 first focal point 515
第二焦点 second focal point 516
电磁场 electromagnetic field 142, 146
电磁感应 electromagnetic induction 249
电磁感应定律 law of electromagnetic induction 259
电磁感应和相对性原理 electromagnetic induction and the principle of relativity 259
电磁相互作用 electromagnetic interaction 271
电磁波 electromagnetic wave 377
电磁波谱 electromagnetic spectrum 432
电磁波的强度 intensity of electromagnetic wave 377

电磁多普勒频移 electromagnetic Doppler shift 676
电磁辐射的吸收 absorption of electromagnetic radiation 404
电导率 electrical conductivity 95
电解 electrolysis 220
电势 electric potential 18
电势差 electric potential difference 19
电动势 electromotive force (emf) 107,109
电路 electric circuit 95,110
电阻率 resistivity 97
电离层 ionosphere 435
电网络 electric network 111
电极化率 electric susceptibility 66
电容 capacitance 79
电容器 capacitor 80
电容率 permittivity 71
电荷 electric charge 5
电荷守恒原理 principle of conservation of charge 263
电介质 dielectrics 65,104
电介质击穿 dielectric breakdown 104
电流 electric current 27
电流计 galvanometer 171
电流方向 direction of an electric current 27
电流强度 intensity of an electric current 27
电流密度 current density 54
电流天平 current balance 181
电场强度 intensity of electric field 9
电场的环流 circulation of the electric field 215
电偶极子 electric dipole 28
电偶极矩 electric dipole moment 29
电偶极子的相互作用能 interaction energy of electric dipoles 34
电偶极辐射 electric dipole radiation 385
电四极子 electric quadrupole 36

电四极矩 electric quadrupole moment 36
电位移 electric displacement 69
电位差计 potentiometer 117
电子伏 electron volt (eV) 26
电子壳层 electron shell 242
电子空穴 electron hole 127
电子的电荷 charge of an electron 18
电子的半径 radius of an electron 85
电子的质量 mass of an electron 18
电子的康普顿波长 Compton wavelength for electrons 411
电子感应加速器 betatron 253

E

二向色性 dichroism 185
n型半导体 n-type semiconductor 105

F

范阿伦辐射带 Van Allen radiation belts 134
范阿伦，J. (Van Allen, 1914—) 134
范德格喇夫加速器 Van de Graaff accelerator 26,399
分贝 decibel 345
分辨本领 resolving power 526
分光镜 spectroscope 531
放大镜 magnifying glass 525
腹点 antinode 566
法拉第-亨利定律 Faraday-Henry law 249
法拉第-亨利定律的微分形式 Faraday-Henry law in differential form 261
法拉第常数 Faraday constant 222
法拉 farad(F) 79
法拉第，M. (Faraday, 1791—1867) 173,349
傅里叶定理 Fourier's theorem 317

傅里叶分析 Fourier analysis 317
夫琅和费衍射 Fraunhofer diffraction 605
菲涅耳，A.(Fresnel, 1788—1827) 479
菲涅耳衍射 Fresnel diffraction 605, 622
菲涅耳双棱镜 Fresnel biprism 553
菲涅耳椭球 Fresnel ellipsoid 480
菲涅耳速度面 Fresnel velocity surface 482
菲涅耳带 Fresnel zone 623
非欧姆导体 nonohmic conductor 113
非常波 extraordinary wave 481
辐射电阻 radiation resistance 386
辐射压强 radiation pressure 379
费曼，R. P. (Feynman, 1918—) 418
费曼图 Feynman diagrams 418
费马原理 Fermat's principle 465, 466
费马，Pierre de (Fermat, 1601—1665) 466
发电机 electric generator 110
发散透镜 divergent lens 521
发散系统 divergent system 515
发射光谱 emission spectrum 386
伏特，Alessandro (Volta, 1748—1827) 19
伏特(V) volt 19
伏特计 voltmeter 116
复显微镜 compound microscope 525
反射 reflection 444
反射光栅 reflection grating 641
反射望远镜 reflecting telescope 529
反射焦散面 reflection caustic 507
反射系数 coefficient of reflection 463
反常色散 anomalous dispersion 424
反共振 antiresonance 309
反铁磁性 antiferromagnetism 213

G

光电子 photoelectron 419
光核效应 photonuclear effect 421
光电效应 photoelectric effect 419
光谱 spectrum 532
光栅的色散 dispersion of a grating 619
光速 velocity of light 371
光栅分光仪 grating spectroscope 619
光测弹性学 photoelasticity 491
光行差 aberration 432
光学纤维 optical fiber 589
光子 photon 414
各向同性介质 isotropic medium 355
各向异性介质 anisotropic medium 355
感生电动势 induced emf 249
感生电偶极矩 induced electric dipole moment 65
感抗 reactance 295
感应发电机 induction generator 300
高斯，K. F. (Gauss, 1777—1855) 56
高斯定律 Gauss's law 56
高斯定律(电场的) Gauss's law for the electric field 215
高斯定律(磁场的) Gauss's law for the magnetic field 204, 215
高斯定律的微分形式 Gauss's law in differential form 60, 62
γ 射线 γ-rays 435
轨道磁偶极矩 orbital magnetic dipole moment 239
功函数 work function 420
共振 resonance 296
共振器 resonator 576
共振荧光 resonant fluorescence 407
杆体 rods 434
干涉 interference 549

格里马耳第，Francessco(Grimaldi, 1618—1663) 574
革末，L. (Germer, 1896—1971) 648

H

横波 transverse wave 331
横波的折射 refration of transverse waves 460
横波的反射 reflection of transverse waves 460
横向电场(TE)解 transverse electric solution 592
横向磁场(TM)解 transverse magnetic solution 592
横向色差 transverse chromatic aberration 536
回磁比 gyromagnetic ratio 239
回旋加速器 cyclotron 137
回旋频率 cyclotron frequency 128
霍耳，E. C. (Hall, 1855—1929) 126
霍耳效应 Hall effect 126
互感 mutual induction 299
惠更斯，C. (Huygens, 1629—1695) 444
惠更斯作图法 Huygens's construction 445
惠更斯原理 Huygens's principle 444
惠斯通电桥 Wheatstone bridge 117
虎克，R. (Hooke, 1635—1703) 324
虎克定律 Hooke's law 324
会聚系统 convergent system 515
会聚透镜 convergent lens 521
核力 nuclear force 227
核相互作用 nuclear interaction 1
亨利，J. (Henry, 1797—1878) 249
亨利(H) henry 284
亥姆霍兹线圈 Helmholtz coils 194
黑体辐射 black-body radiation 236
环形线圈 toroidal coil 200

环形螺线管 toroidal solenoid 301
环流 circulation 108
红移 red shift 428
红外光谱 infrared spectrum 433
海森伯, W. (Heisenberg, 1901—1976) 645
海森伯测不准原理 Heisenberg's uncertainty principle 652
化学价 chemical valence 222
哈耳瓦克斯, W. (Hallwachs, 1859—1922) 419
赫兹, H. (Hertz, 1857—1894) 371

J

基本粒子 fundamental particle 18
基本电荷 elementary charge 17
基尔霍夫, G. (Kirchhoff, 1824—1887) 446
基尔霍夫定律 Kirchhoff's laws 111
基频 fundamental frequency 566
基态 ground state 234
角动量 angular momentum 660
角动量量子数 angular momentum quantum number 242
角放大率 angular magnification 528
极化率 polarizability 72
经典电动力学 classical electrodynamics 274
介电常数 dielectric constant 71
介电强度 dielectric strength 87
焦点 focus 505
焦距 focal length 505
焦耳效应 Joule effect 101
居里温度 Curie temperature 212
节点 node 565
几率密度 probability density 633
几何光学 geometrical optics 502
交换积分 exchange integral 212

检偏振器 analyzer 490
减速辐射(韧致辐射) deceleration radiation 394
晶系 crystal system 480
晶体分光计 crystal spectrometer 633
晶体点阵 crystal lattice 99
静电学 electrostatics 6
静电计 electrometer 94
静电加速器 electrostatic accelerator 25
静态极化率 static polarizability 73
静质量能 rest mass energy 27
近轴光线 paraxial rays 504
近红外光谱 near infrared spectrum 433
简谐振子的波函数 wave function of simple harmonic oscillator 668
绝缘体 insulator 104
截止频率 cutoff frequency 588
截面 cross section 230

K

克尔电光效应 Kerr electro-optic effect 483
克斯特, D. (Kerst, 1911—) 253
考克饶夫特-瓦耳顿加速器 Cockroft-Walton accelerator 25
抗磁性 diamagnetism 210
抗反射敷层 antireflection coating 601
柯西公式 Cauchy's formula 533
空间量子化 space quantization 235
可见光谱 visible spectrum 433
库仑, C. A. (de Coulomb, 1736—1806) 6
库仑定律 Coulomb's law 6
库仑(C) coulomb 8
库仑散射 Coulomb scattering 229
科顿-穆顿磁光效应 Cotton-Mouton magneto-optic effect 483
康普顿, A. H. (Compton, 1892—1962) 409

康普顿效应 Compton effect 409
开文迪士扭秤 Cavendish torsion balance 7

L

里德伯常数 Rydberg constant 246
零点能 zero-point energy 659
劳厄，Max von (Laue, 1879—1960) 635
劳厄方程 Laue equations 643
劳厄图样 Laue pattern 633
劳伦斯，E. O. (Lawrence, 1901—1958) 137
磷光 phosphorescence 407
亮光视觉 photopic vision 434
棱镜 prism 529
棱镜的色散 dispersion of a prism 533
临界阻尼电路 critically damped circuit 294
临界角 critical angle 453
洛伦兹力 Lorentz force 124
洛伦兹变换 Lorentz transformation 146
洛埃镜 Lloyd's mirror 593
李纳德公式 Liénard's formula 398
罗兰，H. A. (Rowland, 1848—1901) 641
罗兰装置 Rowland's mounting 642
拉普拉斯，P. (Laplace, 1749—1827) 167
拉普拉斯方程 Laplace's equation 62
拉莫尔频率 Larmor frequency 240
拉莫尔公式 Larmor's formula 393
伦琴，W (Rötgen, 1845—1923) 435
卢瑟福，E. (Rutherford, 1871—1937) 226
朗之万公式 Langevin's formula 76
立体异构性 stereoisomerism 495
立方晶体 cubic crystal 480
连续光谱 continuous spectrum 532

螺线管 solenoid 185
力线 lines of force 11
量子力学 quantum mechanics 644
量子电动力学 quantum electrodynamics 273
粒子通量 flux of particles 53
离子 ion 5
离子键联 ionic binding 222

M

脉冲的傅里叶变换 Fourier transform of a pulse 319
马赫波 Mach wave 352
马斯顿，E. (Marsden, 1889—1970) 226
目镜 eyepiece 525
麦克斯韦，J. C. (Maxwell, 1831—1879) 267
麦克斯韦方程 Maxwell's equations 271
密立根油滴实验 Millikan oil-drop experiment 16
密立根，R. A. (Millikan, 1869—1953) 16
马吕斯，E. (Malus, 1775—1812) 447
马吕斯定理 Malus's theorem 447
马吕斯定律 Malus's law 490

N

扭波 torsional wave 338
内禀传导性 intrinsic conductivity 105
牛顿环 Newton's ring 563
牛顿方程 Newton's equation 539
尼科耳棱镜 Nicol prism 488
能级 energy level 416
能量量子化 quantization of energy 644
能量波 energy wave 344
能量滤器 energy filter 649
能量分析器 energy analyzer 15

O

耦合电路 coupled circuit 298
欧姆，G. (Ohm, 1787—1854) 96
欧姆(Ω) ohm 96
欧姆定律 Ohm's law 96

P

碰撞参数 impact parameter 224
坡耳干涉仪 Pohl's interferometer 593
坡印廷矢量 Poynting vector 378
普朗克，Max (Planck, 1858—1947) 236
普朗克常数 Planck's constant 236,412
平面波 plane wave 353
p-n 结 *p*-n junction 105,106
p 型半导体 p-type semiconductor 105
帕(Pa) pascal 323
帕斯卡，B. (Pascal, 1623—1662) 323
泊松方程 Poisson's equation 62
抛物面镜 parabolic mirror 507
旁应变 lateral strain 368
偏振片 polaroid 486
偏振面 plane of polarization 374
偏振计 polarimeter 488

Q

起磁场 magnetizing field 206,207
起偏振角 polarizing angle 475
全反射 total reflection 453
切变波 shear wave 336,337
切变模量 shear modulus 337
切应变 shear strain 337

切应力 shear stress 337
切伦科夫，P. (Cerenkov, 1904—　) 425
切伦科夫辐射 Cerenkov radiation 425
切伦科夫探测量 Cerenkov detector 425
球面波 spherical wave 355
球面镜 spherical mirror 505,506
球面波的折射 refraction of spherical waves 455
球面波的反射 reflection of spherical waves 455
球面象差 spherical aberration 506,522
群速度 group velocity 346
强相互作用 strong interaction 1
去象散位置 anastigmatic position 507

R

瑞利，J. (Rayleigh, 1842—1919) 610
瑞利规则 Rayleigh's rule 611
热电子发射 thermionic emission 220
热中子 thermal neutrons 650
弱相互作用 weak interaction 1
韧致辐射 bremsstrahlung 394

S

色 colors 433
色差 chromatic aberration 534
色散本领 dispersive power 536
色散媒质 dispersive medium 340
色散 dispersion 340
色偏振 chromatic polarization 490
示波器 oscilloscope 15
顺磁性 paramagnetism 211
顺磁磁化率 paramagnetic susceptibility 211
射电望远镜 radiotelescope 507,508

射电干涉仪 radio interferometer 593
萨伐尔，F. (Savart, 1791—1841) 176
四分之一波片 quarter-wave plate 484
塞曼，P. (Zeeman, 1865—1943) 244
塞曼效应 Zeeman effect 244
双缝实验 double-slit experiment 554
双折射 double refraction 486
双轴晶系 biaxial crystal system 482
射频波 radiofrequency wave 432
散射 scattering 224,228,406,605,629
受迫电振荡 forced electrical oscillation 294
受主 acceptors 105
施主 donors 105
声 sound 332
声强级 intensity level of sound 345
声速 velocity of sound 333
声波 acoustic wave 332
声学波导 acoustical wave guide 590
斯托克斯关系式 Stokes' relations 500
斯涅耳，Willebrod (Snell von Royen, 1591—1626) 450
斯涅耳定律 Snell's law 450
矢量场的通量 flux of a vector field 52
矢势 vector potential 219
弛豫时间 relaxation time 100,287
随时间变化的电路 time-dependent circuit 283
实物 real object 514
实象 real image 506,514

T

铁磁性 ferromagnetism 212
铁电体 ferroelectrics 77
铁氧体 ferrite 213

同步回旋加速器 sychrocyclotron 140
同步加速器 synchrotron 140
同步加速辐射 synchrotron radiation 396
同位素 isotope 228
廷德耳效应 Tyndall effect 407
透镜 lens 519
透镜的主轴 principal axis of a lens 519
透镜的放大率 magnification of a lens 522
透镜的球面象差 spherical aberration of a lens 522
汤姆孙，G. P. (Thomson, 1892—1975) 647
汤姆孙，J. J. (Thomson, 1856—1940) 137
透射衍射光栅 transmission diffraction grating 618
听觉 hearing 332
听觉阈 threshold of hearing 345
调焦 focusing 526
体积应变 volume strain 368
体积弹性模量 bulk modulus of elasticity 329
凸面镜 convex mirror 505,506
特斯拉，N. (Tesla, 1856—1943) 125
特斯拉(T) tesla 125
弹性波 elastic wave 323
弹性常数 elastic constant 325
痛阈 threshold of feeling 345
椭圆偏振 elliptic polarization 376
天文望远镜 astronomical telescope 529

W

韦伯，W. E. (Weber, 1804—1891) 204
韦伯(Wb) weber 204
微波 microwaves 433
微分截面 differential cross section 231
微光视觉 scotopic vision 434

物镜 objective 525
物焦点 object focus 515
物距 object distance 505
物焦距 object focal length 515
物质场 matter field 645
物质场振幅 matter-field amplitude 661
渥拉斯顿棱镜 Wollaston prism 500
网膜 retina 434
弯曲波 flexual wave 367
无散波 solenoidal wave 361
无旋波 irrotational wave 361

X

谐波 harmonic wave 314
寻常波 ordinary wave 481
薛定谔，E. (Schrödinger, 1897—1961) 645
薛定谔波动方程 Schrödinger wave equation 663
狭缝的分辨本领 resolving power of a slit 610
旋光性 optical activity 492
相干源 coherent source 552
相消干涉 destructive interference 551
相长干涉 constructive interference 551
相速度 phase velocity 313,346,650
相对电容率 relative permittivity 71
信号速度 signal velocity 424
象焦点 image focus 516
象焦距 image focal length 516
象距 image distance 505
谢乐，P. (Scherrer, 1890—1979) 635
消色差系统 achromatic system 537
消色差透镜 achromat 537
虚象 virtual image 506,514

虚物 virtual object 511
线性电四极子 linear electric quadrupole 38
线应变 linear strain 368
线偏振横波 linearly polarized transverse wave 336
显微镜 microscope 525
旋转矢量图 rotation vector diagram 298

Y

杨，Thomas(Young, 1773—1829) 324
杨氏弹性模量 Young's modulus of elasticity 324
永电偶极矩 permanent electric dipole moment 65
阴极 cathode 221
阴极射线 cathode rays 136
阴离子 anion 221
荧光 fluorescence 407
远红外光谱 far infrared spectrum 433
眼睛的分辨本领 resolving power of the eye 527
有极分子 polar molecule 31
阳离子 cations 221
凹面镜 concave mirror
阈频率 threshold frequency 421
圆波 circular wave 356
圆偏振横波 circularly polarized transverse wave 335,336
匀强电场 uniform electric field 11
压强波 pressure wave 331
压缩波 compressional wave 328
云室 cloud chamber 130
衍射 diffraction 604
衍射光栅 diffraction grating 617
衍射光栅的分辨本领 resolving power of a diffraction grating 621
亚铁磁性 ferrimagnetism 213
右旋的 dextrorotatory 492

右手定则 right hand rule 124
宇宙线 cosmic rays 133
原子光电效应 atomic photoelectric effect 421
原子的有核模型 nuclear model of the atom 225
原子序数 atomic number 223
与速度有关的力 velocity-dependent force 151

Z

驻波 standing wave 549,578
驻电磁波 standing electromagnetic wave 574
正常色散 normal dispersion 424
振荡电偶极子 oscillating electric dipole 381
振荡磁偶极子 oscillating magnetic dipole 387
振子强度 oscillator strength 73
正电子 positron 132
正应变 normal strain 324
正应力 normal stress 323
针孔照相机 pinhole camera 502
真空磁导率 magnetic permeability of vacuum 143
真空电容率 permittivity of vacuum 8
整流器 rectifier 107
重力波 gravity wave 340
纵波动 longitudinal wave motion 327
纵向色差 longitudinal chromatic aberration 536
阻抗 impedance 295
直流电路 direct current circuit 283
折射 refraction 444
折射率 index of refraction 422,450
折射望远镜 refracting telescope 527
折射焦散面 refraction caustic 522
自由电荷 free charge 263
自由电振荡 free electrical oscillation 291

自旋-轨道相互作用 spin-orbit interaction 244,245
自旋磁偶极矩 spin magnetic dipole moment 239
自旋量子数 spin quantum number 242
自感 self-inductance 284
自感应 self-induction 283,284
自感电动势 self-induced emf 284
自磁通 self-flux 284
自其能 self energy 291
柱面波 cylindrical wave 355
正切电流计 tangent galvanometer 185
锥体 cones 434
锥形波 conical wave 352
周相滞后 phase lag 295
最小偏向 minimum deviation 531
左旋的 levorotatory 492
左右对形性 enantiomorphism 495
主轴 principal axis 503
主光线 principal rays 505
质谱仪 mass spectrometer 135
质子 proton 18
紫外线 ultraviolet rays 434
中子 neutron 18,227
中子质量 mass of neutron 18