朗道-栗弗席兹《理论物理学教程第三卷·量子力学》勘误说明

朗道集结号　2016年7月26日

说明：此勘误针对朗道-栗弗席兹《量子力学》2015年5月第4次印刷的勘误。v4.1指的是第4次印刷第1次发布的勘误。

特别鸣谢读者@霄河夜曾鸣

欢迎读者补充勘误，让译本精益求精。联系小编：微博、微信：朗道集结号（微信号：ldjjhwx），读者qq群：373454863，加群请注明：“朗道集结号”或“读者”，小编即群主。



或

$$\sum_m (f_{nm} - f\delta_{nm}) c_m = 0,$$

式中，当 $m \neq n$ 时 $\delta_{nm} = 0$，$m = n$ 时 $\delta_{nm} = 1$.

于是，我们得到了一组齐次的线性代数方程组（以 c_m 为未知数）. 大家都知道，这样一组方程式，只有当它们的系数所组成的行列式等于零时，才可能有不等于零的解，因此上式有解的条件为

$$\det(f_{nm} - f\delta_{mn}) = 0. \tag{11.15}$$

这个式子（以 f 为未知数）的根就是物理量 f 的各种可能值. 当 f 等于这些可能值中的任意一个时，满足（11.14）式的一套 c_m 值就确定了对应于该可能值的本征函数.

如果在物理量 f 的矩阵元定义（11.5）式中，令 ψ_n 为 f 的本征函数，则按方程式 $\hat{f}\psi_n = f_n\psi_n$ 可得

$$f_{nm} = \int \psi_n^* \hat{f} \psi_m \mathrm{d}q = f_m \int \psi_n^* \psi \mathrm{d}q.$$

根据 ψ_m 函数组的正交归一化条件，当 $m \neq n$ 时得出 $f_{nm} = 0$，$n = m$ 时则有 $f_{mm} = f_m$. 因此只有对角矩阵元才不等于零，并且分别等于量 f 的相应本征值. 只有对角矩阵元不等于零的矩阵称为**对角**矩阵. 特别是在 ψ_n 函数为定态波函数的常用表象中，能量矩阵就成为一个对角矩阵（同样，凡是在定态中具有定值的其它物理量的矩阵也是对角矩阵）. 一般讲来，用算符 $\hat{g}$ 的本征函数来定义的 f 矩阵，称为物理量 f 在 g 表象中的矩阵. 此后如无特殊声明，当我们讲到一个物理量的矩阵时，就是指该物理量在常用表象中的矩阵，这个表象中的能量矩阵是一个对角矩阵. 前面讲过的矩阵元的时间关系式，都是仅仅针对这个常用表象而言的①.

借助于算符的矩阵表示，我们可以证明 §4 中提到过的一个定理：如果有两个算符相互对易，它们就具有一整套共同的本征函数组. 假定 $\hat{f}$ 和 $\hat{g}$ 是这样的两个算符，根据 $\hat{f}\hat{g} = \hat{g}\hat{f}$ 和（11.12）式的矩阵乘法规则，可得

$$\sum_k f_{mk} g_{kn} = \sum_k g_{mk} f_{kn}.$$

如果取算符 $\hat{f}$ 的一套本征函数 ψ_n 来计算诸矩阵元，则 $m \neq k$ 时 $f_{mk} = 0$，故上式可化成 $f_{mm} g_{mn} = g_{mn} f_{nn}$，或

$$g_{mn}(f_m - f_n) = 0.$$

如果 f 的所有本征值 f_n 都不一样，那么，只要 $m \neq n$ 就有 $f_m - f_n \neq 0$，从而有 $g_{mn} = 0$. 由此可见 g_{mn} 的矩阵也是对角的，这就是说，函数组 ψ_n 也是物理量 g 的本征函

① 根据能量矩阵的对角性，很容易看出（11.8）式就是算符公式（9.2）的矩阵表示.

于同一类的. 至于那些可以相互变换的对称轴或对称平面,则称为**等价**的.

以上所讲的两个旋转如果是绕同一轴的,还需作某些补充说明,设 C_n^k($k=1,2,\cdots,n-1$)是绕某一 n 阶对称轴的各个旋转元,C_n^k 的逆元 $C_n^{-k}=C_n^{n-k}$ 等于绕同一方向转过$(n-k)(2\pi/n)$角,也等于逆向转过 $2k\pi/n$ 角. 如果该群中存在一个绕其垂直轴旋转 π 角的变换(这个变换能使 n 阶轴反向),那么根据上段所讲的一般规则,C_n^k 和 C_n^{-k} 将属于同类. 对垂直于该轴的平面所作的一次反射 σ_h 也能使该轴(n 阶轴)反向,但是必须注意,这样的反射还能改变旋转的方向. 因此 σ_h 的存在并不能使 C_n^k 和 C_n^{-k} 共轭. 另一方面,对通过该轴的平面所作的一次反射 σ_v 并不能改变该轴的方向但能改变旋转的方向,因此有 $C_n^{-k}=\sigma_v C_n^k \sigma_v$. 如果有这样的对称面存在,$C_n^k$ 和 C_n^{-k} 就属于同类. 如果转轴和转角相同但旋转方向不同的两个元是共轭的,该转轴就称为**双向轴**.

点群的分类还常用到下列规则. 设 $\boldsymbol{G}$ 是不含反演 I 的群,$\boldsymbol{C}_i$ 是由 I 和 E 两个元组成的群. 则直积 $\boldsymbol{G}\otimes\boldsymbol{C}_i$ 是一个群,它含有两倍于 $\boldsymbol{G}$ 的元,其中的一半元等于 $\boldsymbol{G}$ 群的元,另一半元是由后者乘以 I 后得到的. 由于 I 和点群的任意其它变换都对易,显然群 $\boldsymbol{G}\otimes\boldsymbol{C}_i$ 具有两倍于 $\boldsymbol{G}$ 的类:$\boldsymbol{G}$ 群中的每一个类 A 对应于群 $\boldsymbol{G}\otimes\boldsymbol{C}_i$ 中 A 和 AI 两个类. 特别是,反演 I 总是自成一类.

现在可以历数所有可能的各种点群. 我们来构造这些点群,先从最简单的开始然后逐步加入新的对称元. 我们用黑斜体的拉丁字母附上适当的下标代表这些点群.

Ⅰ. 群 $\boldsymbol{C}_n$

这是最简单的对称型式,它只有一个 n 阶对称轴. $\boldsymbol{C}_n$ 群就是绕 n 阶轴旋转的群. 这个群显然是一个循环群. 它的 n 个元各自形成一类. $\boldsymbol{C}_1$ 群只含恒等变换 E,相当于不存在任何对称性的情形.

Ⅱ. 群 $\boldsymbol{S}_{2n}$

$\boldsymbol{S}_{2n}$ 群是绕一个 $2n$(偶数)阶旋转-反射轴的旋转反射群. 它含有 $2n$ 个元并且显然是一个循环群. 特别是 $\boldsymbol{S}_2$ 群,它只含 E 和 I 两个元素,这个群又记作 $\boldsymbol{C}_i$. 要指出的是,如果群的阶数取 $2n=4p+2$ 的形式,元中就含有反演,因为 $(S_{4p+2})^{2p+1}=c_2\sigma_h=I$. 这样的群可以写成直积形式:$\boldsymbol{S}_{4p+2}=\boldsymbol{C}_{2p+1}\otimes\boldsymbol{C}_i$,也记作 $\boldsymbol{C}_{2p+1,i}$.

Ⅲ. 群 $\boldsymbol{C}_{nh}$

这种群是由一个 n 阶对称轴加进一个垂直于它的对称平面后得到的. $\boldsymbol{C}_{nh}$ 群含有 $2n$ 个元:其中有 $\boldsymbol{C}_n$ 群的 n 个旋转以及 n 个旋转-反射变换 $C_n^k\sigma_h$,$k=1,2,\cdots,n$(其中包括反射 $C_n^n\sigma_h=\sigma_h$). 这个群的所有元是对易的,即它是一个阿贝尔群,它的类数等于元数. 如果 n 为偶数($n=2p$),这个群含有一个对称中心(因为

加法则相一致.

从数学上讲来,这就是把旋转群两个不可约表示($2j_1+1$ 维和 $2j_2+1$ 维)的直积 $D^{(j)}\times D^{(j_2)}$ 分解为不可约成分,于是角动量的相加法则可写成

$$D^{(j_1)}\times D^{(j_2)}=D^{(j_1+j_2)}+D^{(j_1+j_2-1)}+\cdots+D^{(|j_1-j_2|)}.$$

为了完全解决角动量相加问题,我们还须研究怎样由两个组成粒子的波函数构造具有给定总角动量值的系统波函数问题.

我们先从简单情形开始,亦即两个角动量相加后所得的总角动量等于零的情形.此时显然有 $j_1=j_2$ 以及角动量分量 $m_1=-m_2$. 令 ψ_{jm} 为一个粒子的归一化状态波函数(呈非旋量形式);它具有角动量 j 和分量 m. 所求的系统波函数 ψ_0,等于 m 值相反的两个粒子波函数的乘积之和:

$$\psi_0=\frac{1}{\sqrt{2j+1}}\sum_{m=-j}^{j}(-1)^{j-m}\psi^{(1)}_{jm}\psi^{(2)}_{j,-m},\tag{106.2}$$

j 等于 j_1 和 j_2 的公共值. 求和式前的因子来自归一化. 求和式中的各个系数必须具有相同的绝对值,因为所有的角动量分量值 m 应该是等概率的.(106.2)式中的符号序次很易用波函数的旋量形式求出. 采用旋量记号,(106.2)中的求和式为下列标量(系统总角动量为零)

$$\psi^{(1)\lambda\mu\cdots}\psi^{(2)}_{\lambda\mu\cdots},\tag{106.3}$$

它是由两个 $2j$ 秩旋量所组成. 根据上式,我们可从(57.3)式直接求出(106.2)式中各项的符号.

但应注意,一般讲来我们只能确定求和式(106.2)中各项的相对符号,至于整个求和式的符号则可能与角动量的"相加次序"有关. 实际上,如果把 $\psi^{(1)}$ 中所有的旋量指标全部下降(有 $j+m$ 个指标为 1,$j-m$ 个指标为 2)并把 $\psi^{(2)}$ 中的指标全部上升,(106.3)的标量就要乘以 $(-1)^{2j}$,当 j 为半整数时就要变一符号.

其次,我们来考虑总角动量为零的一个系统,由角动量为 j_1,j_2,j_3 分量为 m_1,m_2,m_3 的三个粒子所组成. 总角动量等于零的条件是 $m_1+m_2+m_3=0$,并且 j_1,j_2,j_3 中任意一个的值可以从其它两个值的矢量相加法则中得到,也就是说,j_1,j_2,j_3 在几何上应该是一个封闭三角形的三条边. 换句话说,每一个值介于其它两值的和与差之间:

$$|j_1-j_2|\leqslant j_3\leqslant j_1+j_2,\text{等等}$$

代数和 $j_1+j_2+j_3$ 显然是一个整数.

所考虑系统的波函数为下列求和式:

$$\psi_0=\sum_{m_1,m_2,m_3}\begin{pmatrix}j_1 & j_2 & j_3\\ m_1 & m_2 & m_3\end{pmatrix}\psi^{(1)}_{j_1m_1}\psi^{(2)}_{j_2m_2}\psi^{(3)}_{j_3m_3},\tag{106.4}$$

每个 m_i 的取值是从 $-j_i$ 到 j_i. 这个公式中的系数称为**维格纳**(Wigner)**3j-符号**. 按

朗道能级. 对于电子，$\mu/s = -|e|\hbar/mc$，(112.7)变成

$$E = \left(n + \frac{1}{2} + \sigma\right)\hbar\omega_H + \frac{1}{2m}p_z^2. \tag{112.8}$$

与能级(112.7)式相对应的本征函数$\chi(y)$由(23.12)式给出，适当改变记号后得到

$$\chi_n(y) = \frac{1}{\pi^{1/4}a_H^{1/2}\sqrt{2^n n!}}\exp\left[-\frac{(y-y_0)^2}{2a_H^2}\right]\mathrm{H}_n\left(\frac{y-y_0}{a_H}\right), \tag{112.9}$$

其中 $a_H = \sqrt{\hbar/m\omega_H}$.

经典力学中，粒子在垂直于场 $\boldsymbol{H}$ 的平面(xy 平面)中作圆周运动(圆心固定). 量子力学中守恒的 y_0 相当于经典的圆心坐标. $x_0 = cp_y/eH + x$ 也是一个守恒量，很易看出其算符与哈密顿算符(112.2)对易. x_0 相当于圆心的经典坐标 x①. 可是 $\hat{x}_0$ 和 $\hat{y}_0$ 算符不对易，换句话说，坐标 x_0 和 y_0 不能同时取定值.

由于(112.7)式中不含 p_x，后者原先假定它可取连续值，能级是连续简并的. 如果 xy 平面内的运动局限在一个很大的但是有限的面积 $S = L_xL_y$ 内，简并度就成为有限的. Δp_x 区间内 p_x 的可能值(现在是离散的)的数目为$(L_x/2\pi\hbar)\Delta p_x$. 当轨道中心在 S 内时所有这些 p_x 值都是允许的(与很大的 L_y 值相比，我们略去了轨道半径). 从条件 $0 < y_0 < L_y$ 得 $\Delta p_x = eHL_y/c$. 因而态数(n, p_z 给定)为 $eHS/(2\pi\hbar c)$. 如果运动区域在 z 方向也是有限的(尺度为 L_z)，在 Δp_z 区间内 p_z 的可能值的数目为$(L_z/2\pi\hbar)\Delta p_z$，此区间内的态数为

$$\frac{eHS}{2\pi\hbar c}\frac{L_z}{2\pi\hbar}\Delta p_z = \frac{eHV\Delta p_z}{4\pi^2\hbar^2 c}. \tag{112.10}$$

对于电子，还有一个附加简并：(112.8)式中 $n, \sigma = \frac{1}{2}$ 和 $n+1, \sigma = -\frac{1}{2}$ 的能级相同.

习　题

1. 求均匀磁场中的电子状态波函数，该态中电子沿磁场方向的动量和角动量具有定值.

解：取 z 轴沿场的方向，在柱坐标 ρ, φ, z 中，矢势的分量为 $A_\varphi = \frac{1}{2}H\rho, A_z = A_\rho$

---

① 在圆半径为 cmv_t/eH(v_t 是速度在 xy 面上的投影，见《场论》，§21)的经典运动中，我们有

$$y_0 = -cp_x/eH = -cmv_x/eH + y.$$

由此可知，y_0 是圆心的 y 坐标. 另一坐标为

$$x_0 = cmv_y/eH + x = cp_y/eH + x.$$

中的方括号并用 $\hat{H}_0$ 代表没有磁场时的原子哈密顿量，我们得

$$\hat{H}=\hat{H}_0+\frac{|e|}{mc}\sum_a \boldsymbol{A}_a\cdot\hat{\boldsymbol{p}}_a+\frac{e^2}{2mc^2}\sum_a \boldsymbol{A}_a^2+\frac{|e|\hbar}{mc}\boldsymbol{H}\cdot\hat{\boldsymbol{S}},$$

把(111.7)的 $\boldsymbol{A}$ 代入，得

$$\hat{H}=\hat{H}_0+\frac{|e|}{mc}\boldsymbol{H}\cdot\sum_a \boldsymbol{r}_a\times\hat{\boldsymbol{p}}_a+\frac{e^2}{8mc^2}\sum_a(\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{r}_a)^2+\frac{|e|\hbar}{mc}\boldsymbol{H}\cdot\hat{\boldsymbol{S}}.$$

但 $\boldsymbol{r}_a\times\hat{\boldsymbol{p}}_a$ 就是电子的轨道角动量算符，对所有电子求和后给出了原子的总轨道角动量算符 $\hbar\hat{\boldsymbol{L}}$. 故

$$\hat{H}=\hat{H}_0+\mu_B(\hat{\boldsymbol{L}}+2\hat{\boldsymbol{S}})\cdot\boldsymbol{H}+\frac{e^2}{8mc^2}\sum_a(\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{r}_a)^2,\tag{113.2}$$

μ_B 是玻尔磁子. 算符

$$\hat{\mu}_{原子}=-\mu_B(\hat{\boldsymbol{L}}+2\hat{\boldsymbol{S}})\tag{113.3}$$

可以看作原子的“内禀”磁矩算符，它在没有磁场时也为原子所具有.

外磁场分裂了原子的能级并且解除了对总角动量方向的简并性(**塞曼效应**). 我们来求原子能级的分裂值，该能级的 J, L 和 S 等量子数具有定值(亦即假定能级属于 LS 耦合情形，见 §72).

我们将假定磁场很弱，以致 $\mu_B H$ 比原子的能级间距包括精细结构间距在内要小得多. 此时(113.2)中的第二和第三项可看作微扰，未微扰能级就是多重项的各个成分. 一级近似中可以略去第三项，因与第二项的线性项相比它是场的二次项.

在这种近似下，能量分裂值 ΔE 是由微扰项对总角动量沿磁场方向分量具有定值的那些(未微扰)态求平均值得到的. 取磁场方向为 z 轴，我们有

$$\Delta E=\mu_B H(\overline{L}_z+2\hat{S}_z)=\mu_B H(\overline{J}_z+\overline{S}_z).\tag{113.4}$$

平均值 $\overline{J}_z$ 正好等于所给本征值 $J_z=M_J$. 平均值 $\overline{S}_z$ 可用分步平均法(参考 §72)求出. 作法如下.

算符 $\hat{\boldsymbol{S}}$ 先对 S, L 和 J 值固定但 M_J 值不固定的原子态求平均. 平均以后的算符 $\overline{\hat{\boldsymbol{S}}}$ 一定和标志自由原子的唯一守恒“矢量”$\hat{\boldsymbol{J}}$“平行”. 因此可写成

$$\overline{\boldsymbol{S}}=\text{常数}\times\boldsymbol{J},$$

这个式子是纯约定的，因为 $\boldsymbol{J}$ 的三个分量不能同时有定值，它的 z 分量可直接写成

$$\overline{S}_z=\text{常数}\times J_z=\text{常数}\times M_J.$$

前式两边乘以 $\boldsymbol{J}$ 后得方程

$$\overline{\boldsymbol{S}}\cdot\boldsymbol{J}=\text{常数}\times\boldsymbol{J}^2=\text{常数}\times J(J+1).$$

以原子核的偶极矩为例，$\boldsymbol{f}_p$ 为 $e\boldsymbol{r}$ 而 $\boldsymbol{f}_n=0$. (116.5)中的第一项为

$$\frac{1}{2}e\sum \boldsymbol{r}=\frac{e}{2m}\sum m\boldsymbol{r}.$$

因而和质心的径矢成正比，适当选取原点后可使它等于零. 可见核偶极矩可化成同位旋矢量的 ζ 分量.

§117 核力

作用于核子之间的核力的主要特征是力程很短：在数量级为 10^{-13} cm 的距离处指数式地衰减.

在非相对论极限下我们可以这样说，核力与核子的速度无关并且有势；核内的核子速度大约是光速的 1/4(见后). 两核子的相互作用势能 U 不但和距离 r 有关而且相当强烈地和它们的自旋有关①. U 和 r 的确切关系当然只能由核力理论去确立，至于它和自旋的关系则可根据自旋算符的性质经过简单考虑后得出.

可供我们支配的与相互作用能量 U 有关的矢量一起只有三个，即两核子间的单位径矢量 $\boldsymbol{n}$，以及两个核子的自旋 $\boldsymbol{s}_1$ 和 $\boldsymbol{s}_2$. 根据自旋$\frac{1}{2}$算符的一般性质，它的任意函数可以化成线性函数(§55). 再考虑到乘积 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{s}$ 不是真标量而是赝标量(因为 $\boldsymbol{n}$ 是极矢量而 $\boldsymbol{s}$ 是轴矢量). 于是很明显，从 $\boldsymbol{n},\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2$ 三个矢量出发只能构造出两个与自旋呈线性关系的独立标量，即 $(\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2)$ 和 $(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{s}_1)(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{s}_2)$②.

从而，两核子的相互作用算符计及对自旋的关系后，可以写成三个独立项之和：

$$\hat{U}_{\text{普通}}=U_1(r)+U_2(r)(\hat{\boldsymbol{s}}_1\cdot\hat{\boldsymbol{s}}_2)+ +U_3(r)[3(\hat{\boldsymbol{s}}_1\cdot\boldsymbol{n})(\hat{\boldsymbol{s}}_2\cdot\boldsymbol{n})-\hat{\boldsymbol{s}}_1\cdot\hat{\boldsymbol{s}}_2], \tag{117.1}$$

其中两项与自旋有关，一项无关. 第三项被写成这样的形式，是使它对 $\boldsymbol{n}$ 的各个方向平均后等于零. 这一项所描述的力通常称为**张量力**.

(117.1)中的下标“普通”表明这个算符不影响核子的电荷态. 实际上还存在着作用后使质子变成中子以及中子变成质子的相互作用. 这种“交换”作用的算符与(117.1)不同之处在于还含有(116.4)的粒子对换算符：

$$\hat{U}_{\text{交换}}=\{U_4(r)+U_5(r)(\hat{\boldsymbol{s}}_1\cdot\hat{\boldsymbol{s}}_2)+ +U_6(r)[3(\hat{\boldsymbol{s}}_1\cdot\boldsymbol{n})(\hat{\boldsymbol{s}}_2\cdot\boldsymbol{n})-\hat{\boldsymbol{s}}_1\cdot\hat{\boldsymbol{s}}_2]\}\hat{P}. \tag{117.2}$$

总的相互作用算符为

---

① 从这一点讲来，粒子作用和电子作用有很大的不同，后者的自旋－自旋作用是纯相对论性的而且(在原子中)很小.

② 这里假定了核力是空间反演不变的，亦即不能含有赝标量. 迄今为止没有实验否定这个假设.

$$2\pi i F(-\boldsymbol{n}')\frac{e^{-ikr}}{r}-2\pi i F(\boldsymbol{n}')\frac{e^{ikr}}{r}+\frac{e^{ikr}}{r}\int f(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}')F(\boldsymbol{n})\,do.$$

约去公共因子 $2\pi i/k$，上式可写成简洁的算符形式

$$\frac{e^{-ikr}}{r}F(-\boldsymbol{n}')-\frac{e^{ikr}}{r}\hat{S}F(\boldsymbol{n}'), \tag{125.3}$$

式中

$$\hat{S}=1+2ik\hat{f}, \tag{125.4}$$

$\hat{f}$ 是由下式定义的积分算符：

$$\hat{f}F(\boldsymbol{n}')=\frac{1}{4\pi}\int f(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}')F(\boldsymbol{n})\,do. \tag{125.5}$$

$\hat{S}$**算符**称为**散射算符**（或**散射矩阵**）或者简称为 S **矩阵**，它是由海森伯首先引入的（1943）.

（125.3）中的第一项代表射向力心的波，第二项代表离开力心的波. 弹性散射中，粒子数守恒可表为入射波和出射波的流密度相等. 换句话说，这两个波的归一化应该相同. 为此，散射算符必须是幺正的（§12），也就是说，必须有

$$\hat{S}\hat{S}^{+}=1, \tag{125.6}$$

或者把（125.4）式代入上式并互乘

$$\hat{f}-\hat{f}^{+}=2ik\hat{f}\hat{f}^{+}. \tag{125.7}$$

最后，利用定义（125.5），我们可以把散射的**幺正条件**写成以下形式：

$$f(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}')-f^{*}(\boldsymbol{n}',\boldsymbol{n})=\frac{ik}{2\pi}\int f(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}'')f^{*}(\boldsymbol{n}',\boldsymbol{n}'')\,do'' \tag{125.8}$$

$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}'$ 时上式右边的积分正是散射总截面 $\sigma=\int|f(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}'')|^{2}do''$. 上式左边的差值此时可以化成振幅 $f(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n})$ 的虚部. 这样，我们就得到了弹性散射总截面和零角度散射振幅虚部之间的普遍关系式：

$$\operatorname{Im}f(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n})=\frac{k}{4\pi}\sigma, \tag{125.9}$$

此式称为散射的**光学定理**.

散射振幅的另一个普遍性质，可以根据时间反演对称性的要求导出. 在量子力学中，这种对称性表述为：如函数 ψ 描述任一可能态，那么它的复共轭函数 ψ^{*} 也对应于某一可能态（§18）. 因此（125.3）式的复共轭波函数

$$\frac{e^{ikr}}{r}F^{*}(-\boldsymbol{n}')-\frac{e^{-ikr}}{r}\hat{S}^{*}F^{*}(\boldsymbol{n}')$$

也描述某种可能的散射过程. 我们通过令 $-\hat{S}^{*}F^{*}(\boldsymbol{n}')=\Phi(-\boldsymbol{n}')$ 定义一个新的任意函数. 利用算符 $\hat{S}$ 的幺正性就得

以上所讲的虽然都是针对角动量 $l=0$ 的散射，但在实际上以上所讲的一切结论对角动量不等于零的任一分波振幅都是成立的. 推导中的唯一区别是，χ 渐近式中的 $e^{\pm ikr}$ 因子现在要改成自由运动(33.16)式的精确径向波函数①.

$l\neq 0$ 时，(128.9)和(128.11)式要作某些改变. (128.7)式现在改成

$$\chi_l = rR_l = \text{常数} \times \left\{ \exp\left[i\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l \right) \right] - \exp\left[-i\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l \right) \right] \right\}, \tag{128.15}$$

对分波振幅 f_l 可得[按(123.15)式定义]

$$f_l = \frac{\hbar}{2\sqrt{-2mE}} \left[(-1)^l \frac{A}{B} + 1 \right]. \tag{128.16}$$

在角动量为 l 的 $E=E_0$ 能级附近，散射振幅中的首项由下式给出：

$$f \approx (2l+1) f_l P_l(\cos\theta) = (-1)^{l+1} \frac{\hbar^2 A_0^2}{2m} \frac{1}{E+|E_0|} (2l+1) P_l(\cos\theta), \tag{128.17}$$

用以代替(128.11)式.

§129 色散关系

上节中我们研究了具有给定 l 值的分波散射振幅的解析性质，我们看到，这些性质由于有可能出现“多余”奇点以及无穷远处的非正则性而被复杂化了. 总振幅作为具有给定散射角值的能量的函数，显然具有类似的性质. 可是，零角度的散射振幅构成一个例外，我们现在要指出，它的解析性质是比较简单的.

写出进行散射的粒子波函数的薛定谔方程：

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = \frac{2mU}{\hbar^2}\psi, \tag{129.1}$$

我们把它形式地看作右边不等于零的一个波动方程，亦即看作电动力学中熟知的推迟势方程.

这个方程的描述在远离中心的 R_0 处沿 $\boldsymbol{k}'$ 方向“辐射”的解，具有以下形式(见《场论》§66)：

$$\psi_{\text{散射}} = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikR_0}}{R_0} \int \frac{2mU}{\hbar^2} \psi e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} dV. \tag{129.2}$$

这个表式在目前情形下代表散射粒子的波函数，e^{ikR_0}/R_0 的系数给出散射振幅 $f(\theta, E)$. 特别是，如令 $\boldsymbol{k}'=\boldsymbol{k}$($\boldsymbol{k}$ 是入射粒子的波矢量)，即得零角度散射振幅：

---

① 这些函数的极限表式(33.17)只当 $E>0$ 时才能应用；在 E 平面的其余部分，χ 函数中的两项具有不同的数量级，引用这种极限表式后，对 χ 函数所引起的误差一般要大于薛定谔方程中略去 U 所引起的误差.

$$R_l = c_1(-1)^l \frac{(2l+1)!!}{k^{2l+1}} r^l \left(\frac{\mathrm{d}}{r\mathrm{d}r}\right)^l \frac{\sin kr}{r} + \\ + c_2(-1)^l \frac{r^l}{(2l-1)!!} \left(\frac{\mathrm{d}}{r\mathrm{d}r}\right)^l \frac{\cos kr}{r}, \tag{132.5}$$

式中的常数已经这样选定，使得 $kr \ll 1$ 时这个解变成(132.3)式，这就保证了 $kr \ll 1$ 范围内之解(132.3)和 $kr \sim 1$ 范围内之解(132.5)的“衔接”.

最后，当 $kr \gg 1$ 时，解(132.5)呈以下渐近形式(§33)：

$$R_l \approx \frac{c_1(2l+1)!!}{rk^{l+1}} \sin\left(kr - \frac{\pi l}{2}\right) + \frac{c_2 k^l}{(2l-1)!!\ r} \cos\left(kr - \frac{\pi l}{2}\right).$$

上式中两项之和可以表成以下形式：

$$R_l \approx \text{常数} \times \frac{1}{r} \sin\left(kr - \frac{\pi l}{2} + \delta_l\right). \tag{132.6}$$

相位 δ_l 由下式确定：

$$\tan \delta_l \approx \delta_l = \frac{c_2}{c_1(2l-1)!!\ \ (2l+1)!!} k^{2l+1} \tag{132.7}$$

(由于 k 很小，所有的相位 δ_l 都很小).

根据(123.15)式，分波散射振幅为

$$f_l = \frac{1}{2\mathrm{i}k}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\delta_l} - 1) \approx \frac{\delta_l}{k}.$$

由此得出结论，在低能极限情形下有

$$f_l \sim k^{2l}. \tag{132.8}$$

由此可见，所有 $l \neq 0$ 的分波振幅都小于 $l = 0$ 的散射振幅(称为 **s 波散射**). 把它们略去后，总振幅为

$$f(\theta) \approx f_0 = \frac{\delta_0}{k} = \frac{c_2}{c_1} = -\alpha, \tag{132.9}$$

因而 $\mathrm{d}\sigma = \alpha^2 \mathrm{d}o$，而总截面

$$\sigma = 4\pi\alpha^2. \tag{132.10}$$

上式表明，低速时的散射是各向同性的，而且截面和粒子的能量无关①. 常数 α 称为**散射长度**，其值可正可负.

以上的讨论中我们默认了场 $U(r)$ 在远距离处($r \gg a$)衰减得足够快，使得以上所作的忽略是合理的. 这个场究竟要衰减得多快，这是很容易弄清的. 当 r

① 电子被原子散射时，与 $1/k$ 相比较的作用半径 a(条件 $ka \ll 1$)可用原子半径作代表，对复杂原子，a 值可达几个玻尔半径(几个 $\hbar^2/me^2$). 由于这个半径很大，只有当电子能量差不多等于几分之一电子伏特时(满足 $ka \ll 1$)，有效截面才是一个常数. 当电子能量超过这个数值时，截面对能量就有显著的依赖关系(这个现象称为**冉部尔(Ramsauer)效应**).