朗道《力学》解读2016年4月第2次印刷勘误说明V2.1

朗道集结号　2017年10月17日发布

说明：V2.1指在第2次印刷版本的基础上第一次发布勘误，2016年曾发布过勘误V1.0（附后），是指在第1次印刷基础上发布的勘误。
本号将以此类推V2.2，V3.1，……，欢迎广大读者补充勘误。

详情请咨询微博、微信：朗道集结号（微信号：ldjjhwx），读者qq群：373454863，加群请注明：“朗道集结号”或“读者”，小编即群主。



令 $\sinh y=\xi$, 则得

$$\int_0^{\operatorname{arccosh}\left(\sqrt{-U_0/E}\right)}\frac{\cosh y\mathrm{d}y}{\sqrt{E(1+\sinh^2 y)+U_0}}$$
$$=\int_0^{\operatorname{arcsinh}\left(\sqrt{-U_0/E-1}\right)}\frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{E\xi^2+E+U_0}}.$$

考虑到 $-U_0<E<0$, 上述积分中的被积函数形式为 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\mathrm{d}\arcsin\dfrac{x}{a}$, 即

$$\int_0^{\operatorname{arcsinh}\left(\sqrt{-U_0/E-1}\right)}\frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{E\xi^2+E+U_0}}$$
$$=\int_0^{\operatorname{arcsinh}\left(\sqrt{-U_0/E-1}\right)}\frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{|E|}\sqrt{(U_0-|E|)/|E|-\xi^2}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{|E|}}\arcsin\frac{\xi}{\sqrt{(U_0-|E|)/|E|}}\Bigg|_0^{\operatorname{arcsinh}\left(\sqrt{-U_0/E-1}\right)}$$
$$=\frac{\pi}{2\sqrt{|E|}}.$$

将此结果代回前面的表示式可得

$$T=\frac{\pi}{\alpha}\sqrt{\frac{2m}{|E|}}.$$

说明: 文献中常将该问题中的势函数称为修正的 Pöschl-Teller 势, 该势函数相关的量子力学中薛定谔方程的求解可参考有关文献①.

c. 令 $U(x)=U_0\tan^2\alpha x=E$, 可以解得转折点为

$$x=\pm\frac{\arctan\left(\sqrt{\dfrac{E}{U_0}}\right)}{\alpha},$$

所以

$$T=\sqrt{2m}\int_{-\frac{1}{\alpha}\arctan\sqrt{\frac{E}{U_0}}}^{\frac{1}{\alpha}\arctan\sqrt{\frac{E}{U_0}}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E-U_0\tan^2\alpha x}}$$

① 例如, Л. Д.朗道, Е. М. 栗弗席兹. 量子力学 (非相对论理论) (第六版). 严肃译, 喀兴林校. 北京: 高等教育出版社, 2008: §23, 习题 5, pp67-68; 或者 S. Flügge, Practical Quantum Mechanics, Springer-Verlag, 1974, 北京: 科学出版社, 2009, Problem 39, pp94-100.

由对正则势函数的约定, $x(0)=0$. 再令 $\alpha=\widetilde{U}$, 则由上式可得相应于式 (12.2) 而确定的正则势函数满足关系

$$x(\widetilde{U})=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2}{m}}\int_0^{\widetilde{U}}\frac{R(E)\mathrm{d}E}{\sqrt{\widetilde{U}-E}}. \tag{12.6}$$

同样, 式 (12.3) 可以改写为

$$T(E)=\sqrt{\frac{m}{2}}\int_0^{U_0}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E-\widetilde{U}(x)}}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\widetilde{U}(x)}\mathrm{d}\widetilde{U}(x). \tag{12.7}$$

如果 $T(E)$ 是合适的解析函数, 可以将 $T(E)$ 解析延拓到 $E<U_0$ 的区域,

$$\begin{aligned}T(E)&=\sqrt{\frac{m}{2}}\left[\int_0^{E}+\int_E^{U_0}\right]\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E-\widetilde{U}(x)}}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\widetilde{U}(x)}\mathrm{d}\widetilde{U}(x)\\&=R(E)-\mathrm{i}I(E),\end{aligned} \tag{12.8}$$

其中

$$I(E)=\sqrt{\frac{m}{2}}\int_E^{U_0}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\widetilde{U}(x)-E}}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\widetilde{U}(x)}\mathrm{d}\widetilde{U}(x). \tag{12.9}$$

于是, 在区间 $0<E<U_0$ 中有

$$R(E)=\mathrm{Re}[T(E)], \tag{12.10}$$

即 $R(E)$ 为 $T(E)$ 的实部, 故此可以利用 $T(E)$ 构造正则势函数.

例题 设 $R(E)=aE^n$, 其中 a,n 均为常数, 求 $\widetilde{U}$.

解: 按照方程 (12.6), 有

$$\begin{aligned}x(\widetilde{U})&=\frac{a}{\pi}\sqrt{\frac{2}{m}}\int_0^{\widetilde{U}}\frac{E^n\,\mathrm{d}E}{\sqrt{\widetilde{U}-E}}\\&=\frac{a}{\pi}\sqrt{\frac{2}{m}}\widetilde{U}^{n+1/2}\int_0^1\frac{u^n}{\sqrt{1-u}}\mathrm{d}u=\frac{a}{\pi}\sqrt{\frac{2}{m}}\widetilde{U}^{n+1/2}B\left(n+1,\frac{1}{2}\right),\end{aligned}$$

其中第二个等号作了变量代换 $u=E/\widetilde{U}$.如果 n 是非负整数, 则有

$$B\left(n+1,\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma(n+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+1+\frac{1}{2}\right)}=\frac{n!\sqrt{\pi}}{(2n+1)!\sqrt{\pi}/(2^{2n+1}n!)}=\frac{(n!)^2 2^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

运动的体积元, 因此系统处于 $\mathrm{d}\Gamma_0$ 和 $\mathrm{d}\Gamma$ 中的概率是相同的, 即

$$\rho(q_0,p_0,t_0)\mathrm{d}\Gamma_0=\rho(q,p,t)\mathrm{d}\Gamma.$$

但是按照刘维尔定理 (o46.6), $\mathrm{d}\Gamma_0=\mathrm{d}\Gamma$, 故有

$$\rho(q_0,p_0,t_0)=\rho(q,p,t),$$

即

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\{\rho,H\}=0. \tag{46.2}$$

这也称为刘维尔定理.

上述形式的刘维尔定理往往又以另一种方式出现. 考虑系统的大量的复制品. 原则上, 复制品的数目应大于系统可能具有的总状态数. 这些复制品应具有与原系统相同的结构和性质, 但是它们之间相互独立并具有不同的初始条件 (这些初始条件均应属于原系统的所有可能的初始条件之列). 具有如上这些特点的复制系统的集合称为系综, 在特定时刻它们的状态对应于相空间中的一些点, 此时 $\rho(q_0,p_0,t_0)\mathrm{d}\Gamma_0$ 在差一个常数因子 (系综中总的系统数的倒数) 下表示在 t_0 时刻体元 $\mathrm{d}\Gamma_0$ 中的系统数. 这种形式的处理方法在平衡统计物理中是非常重要的, 它等同于将系统的时间演化行为转化为用在某一时刻系综中处于某一态的系统数, 进而归结为概率密度来描述. 由此, 确定平衡系统的性质归结为确定概率密度 $\rho(q,p,t)$ (统计物理学中通常称为分布函数), 它满足方程 (46.2), 这是系综理论的重要基础.

2. Poincare 积分不变量 (46.1)

这里, 我们对 Poincare 积分不变量 (46.1) 进行证明. 先考虑 J_1 的不变性的证明. 设正则变换是由母函数 $\Phi(q,P,t)$ 产生的, 即有

$$\sum_i p_i\delta q_i+\sum_i Q_i\delta P_i=\delta\Phi(q,P,t),$$

因此有变换关系为

$$p_i=\frac{\partial\Phi}{\partial q_i},\quad Q_i=\frac{\partial\Phi}{\partial P_i}. \tag{o45.8}$$

对于二维流形上的点, 可以用两个参数唯一地指定其位置. 设这两个参数为 u,v, 同时假设 p_i,q_i 为 u,v 的函数, 则有

$$J_1=\iint\sum_i\mathrm{d}q_i\mathrm{d}p_i=\iint\sum_i\begin{vmatrix}\dfrac{\partial q_i}{\partial u} & \dfrac{\partial p_i}{\partial u}\\ \dfrac{\partial q_i}{\partial v} & \dfrac{\partial p_i}{\partial v}\end{vmatrix}\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\iint\sum_i\frac{\partial(q_i,p_i)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

说明：若您手里的书是第2次印刷版本勘误看到此即可。如果您是第1次印刷版本，请继续将勘误看完。

以下是2016年发布的勘误V1.0，是指在第1次印刷基础上发布的勘误，再加上前面的V2.1为对第1次印刷版的完整勘误。

本号将以此类推V2.2，V3.1，……，欢迎广大读者补充勘误。

详情请咨询微博、微信：朗道集结号（微信号：ldjjhwx），读者qq群：373454863，加群请注明：“朗道集结号”或“读者”，小编即群主。



第一章

运动方程

本章所讨论的系统是仅受到理想完整约束且所有主动力均为有势力(或保守力)的系统. 在这种情况下, 可以从哈密顿原理[①](或最小作用量原理)导出系统的运动微分方程, 即拉格朗日方程[②].

哈密顿原理表示的是, 对实际运动作用量 $S=\int L\mathrm{d}t$ 取极值. 对于理想完整保守系统, 作用量 S 中的拉格朗日函数 L 是系统的特性函数, 即由它原则上可以完全确定系统的运动情况. 对自由粒子系统, L 的表示形式可以利用时间空间的性质 (即时间是均匀的, 空间是均匀和各向同性的) 得到, 然后再推广到有相互作用的问题. 有非保守力和非完整约束的系统相关的动力学方程等在第六章最后一节 (即 §38) 中讨论.

倒数第2

§1 广义坐标

§1.1 内容提要

对于力学系统, 设有 N 个质点, 通常用径矢 $\boldsymbol{r}_a(a=1,2,\cdots,N)$ 指定其中各个质点的位置, 即系统的位形, 这总计有 $3N$ 个坐标. 但是实际系统会受到各种约束的限制, $3N$ 个坐标并不都是独立的.

能唯一地确定系统位置 (即位形) 所需独立变量的数目称为系统的自由度 (设为 s), 相应的变量称为广义坐标, 记为 $q_1,q_2,\cdots,q_s$, 其导数 $\dot{q}_i(i=1,2,\cdots,s)$ 和 $\ddot{q}_i(i=1,2,\cdots,s)$ 分别称为广义速度和广义加速度. 广义坐标不一定是笛卡儿坐标. 广义坐标与笛卡儿坐标之间的关系称为坐标变换关

① William Rowan Hamilton, 1805—1865, 爱尔兰数学家、物理学家及天文学家.
② Joseph-Louis Lagrange, 1736—1813, 法国籍意大利裔数学家和天文学家.

引入固有时 $\mathrm{d}\tau$, 它是洛伦兹不变量,

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\tau &= \frac{1}{c}\sqrt{(c\,\mathrm{d}t)^2-(\mathrm{d}x)^2-(\mathrm{d}y)^2-(\mathrm{d}z)^2}\\ &= \mathrm{d}t\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]}\\ &= \mathrm{d}t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{1}{\gamma_v}\mathrm{d}t,\end{aligned} \tag{3.5}$$

其中

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\quad v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\quad v_z=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t},\quad \gamma_v=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}},$$

$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$ 是质点相对于 K 系的速度. 注意, 这里的 γ_v 与洛伦兹变换中的 γ 含义不同, 不是两个有相对运动的参考系之间的变换因子, 而是相对于特定参考系 K 以速度 v 运动时的一个变换因子. 四维速度定义为

$$u=(u_x,u_y,u_z,u_t)=\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau},\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau},\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau},\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\tau}\right)=\gamma(v_x,v_y,v_z,v_t), \tag{3.6}$$

其中 $w=\mathrm{i}ct$, $v_t=\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=\mathrm{i}c$. 四维速度具有与式 (3.2) 相同形式的变换关系. 相应地, 速度变换关系为

$$\begin{aligned}v_x'&=\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}=\frac{v_x-V}{1-\dfrac{Vv_x}{c^2}},\\ v_y'&=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'}=\frac{v_y\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}{1-\dfrac{Vv_x}{c^2}},\\ v_z'&=\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'}=\frac{v_z\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}{1-\dfrac{Vv_x}{c^2}}.\end{aligned} \tag{3.7}$$

也即所谓的速度合成定理.

为了求出第二个质点的动能, 我们用角 φ_1 和 φ_2 表示第二个质点的笛卡儿坐标 x_2, y_2, 也即有坐标变换关系为

$$x_2 = l_1 \sin\varphi_1 + l_2 \sin\varphi_2, \quad y_2 = l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2.$$

相应地有

$$\dot{x}_2 = l_1\dot{\varphi}_1 \cos\varphi_1 + l_2\dot{\varphi}_2 \cos\varphi_2, \quad \dot{y}_2 = -l_1\dot{\varphi}_1 \sin\varphi_1 - l_2\dot{\varphi}_2 \sin\varphi_2.$$

于是, 动能和势能分别为

$$T_2 = \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{1}{2}m_2\left[l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\right],$$

$$U_2 = -m_2 g y_2 = -m_2 g(l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2).$$

系统的动能

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left[l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\right].$$

系统的势能

$$U = U_1 + U_2 = -(m_1 + m_2)gl_1\cos\varphi_1 - m_2gl_2\cos\varphi_2.$$

由 $L = T - U$, 最后得系统的拉格朗日函数为

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left[l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\right] + (m_1 + m_2)gl_1\cos\varphi_1 + m_2gl_2\cos\varphi_2.$$

对 φ_1, 有

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} = (m_1 + m_2)l_1^2\dot{\varphi}_1 + m_2l_1l_2\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2),$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = -m_2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\sin(\varphi_1 - \varphi_2) - (m_1 + m_2)gl_1\sin\varphi_1.$$

代入 φ_1 相应的拉格朗日方程 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial \varphi_1} = 0$, 可得

$$(m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\varphi}_1 + m_2l_1l_2\ddot{\varphi}_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + m_2l_1l_2\dot{\varphi}_2^2\sin(\varphi_1 - \varphi_2) + (m_1 + m_2)gl_1\sin\varphi_1 =$$

对 φ_2, 则有

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} = m_2l_2^2\dot{\varphi}_2 + m_2l_1l_2\dot{\varphi}_1\cos(\varphi_1 - \varphi_2),$$

§17 质点弹性碰撞

§17.1 内容提要

如果两个质点碰撞不改变它们的内部状态, 则称为弹性碰撞.

设质量为 m_1 和 m_2 的两个质点, 分别以速度 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 运动并发生碰撞, 则碰撞后各质点的速度分别为 相对于实验室参考系

$$\boldsymbol{v}_1' = \frac{m_2}{m_1+m_2} v\boldsymbol{n}_0 + \frac{m_1\boldsymbol{v}_1+m_2\boldsymbol{v}_2}{m_1+m_2}, \quad \boldsymbol{v}_2' = -\frac{m_1}{m_1+m_2} v\boldsymbol{n}_0 + \frac{m_1\boldsymbol{v}_1+m_2\boldsymbol{v}_2}{m_1+m_2}, \tag{o17.2}$$

其中 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{n}_0$ 为碰撞后质点 m_1 的速度方向的单位矢量.

特例: (i) $\boldsymbol{v}_2=0$, 即 m_2 碰撞前是静止的. 设 θ_1 和 θ_2 分别是碰撞后两质点偏离 $\boldsymbol{v}_1$ 的方向的角度, 而 χ 为 $\boldsymbol{n}_0$ 与 $\boldsymbol{v}_1$ 之间的夹角, 也即第一个质点在质心参考系中的偏转角, 则有下列关系

$$\tan\theta_1 = \frac{m_2\sin\chi}{m_1+m_2\cos\chi}, \quad \theta_2 = \frac{\pi-\chi}{2}. \tag{o17.4}$$

用 χ 表示的碰撞后两个质点的速度的大小分别为

$$v_1' = \frac{\sqrt{m_1^2+m_2^2+2m_1m_2\cos\chi}}{m_1+m_2}v, \quad v_2' = \frac{2m_1v}{m_1+m_2}\sin\frac{\chi}{2}. \tag{o17.5}$$

(a) 当 $m_1<m_2$ 时, θ_1 可任意取值; (b) 如果 $m_1>m_2$, 则偏转角不能超过某个最大值 $\theta_{1\,\max}$,

$$\sin\theta_{1\,\max} = \frac{m_2}{m_1}. \tag{o17.8}$$

(c) 如果 $m_1=m_2$, 式 (o17.4) 和 (o17.5) 分别变为

$$\theta_1 = \frac{\chi}{2}, \quad \theta_2 = \frac{\pi-\chi}{2}, \tag{o17.9}$$

以及

$$v_1' = v\cos\frac{\chi}{2}, \quad v_2' = v\sin\frac{\chi}{2}.$$

(ii) $\boldsymbol{v}_2=0$ 且碰撞后两质点沿一直线同向或反向运动, 即 时有

$$\boldsymbol{v}_1' = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{v}_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\boldsymbol{v}.$$

§17.3 习题解答

习题 运动质点 m_1 和静止质点 m_2 发生碰撞，试用实验室参考系中的偏角表示两个质点碰撞后速度.

解: 由图 o16, 在三角形 AOC 中据余弦定理有

$$|OC|^2 = |AO|^2 + {p_1'}^2 - 2|AO|p_1' \cos\theta_1. \tag{1}$$

因为质点 m_2 静止, 即 $\boldsymbol{v}_2 = 0$, 则有 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1$, 即 $v = v_1$. 另外, 前面的讨论表明

$$|OC| = mv = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v, \quad p_1' = m_1 v_1',$$

$$\overrightarrow{AO} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2) = \frac{m}{m_2}\boldsymbol{p}_1 = \frac{m m_1}{m_2}\boldsymbol{v}_1.$$

将这些关系代入到式 (1), 有

$$\frac{m_1^2 m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} v^2 = \frac{m^2}{m_2^2} m_1^2 v^2 + m_1^2 {v_1'}^2 - \frac{2m}{m_2} m_1^2 v v_1' \cos\theta_1,$$

即

$${v_1'}^2 - 2\frac{m}{m_2} v v_1' \cos\theta_1 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v^2 = 0,$$

也即

$$\left(\frac{v_1'}{v}\right)^2 - 2\frac{m}{m_2}\frac{v_1'}{v}\cos\theta_1 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = 0.$$

解此方程, 得

$$\frac{v_1'}{v} = \frac{1}{2}\left(\frac{2m}{m_2}\cos\theta_1 \pm \sqrt{\frac{4m^2}{m_2^2}\cos^2\theta_1 - \frac{4(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}}\right),$$

即

$$\frac{v_1'}{v} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\cos\theta_1 \pm \frac{1}{m_1 + m_2}\sqrt{m_2^2 - m_1^2 \sin^2\theta_1}. \tag{2}$$

这是碰后质点 m_1 相对于质心的速度用实验室参考系中的偏转角 θ_1 表示的形式.

当 $m_1 > m_2$ 时, 由图 o16(b) 可见, 同一 θ_1 可以有两个 v_1' 与其对应, 即式 (2) 中根号前的两个符号均可. 该情况下的特例是 $\theta_1 = 0$ 时, 有 $\chi = 0$ (即 $v_1' = v$) 或 $\chi = \pi$ (即 $v_1' = (m_1 - m_2)v/(m_1 + m_2)$).

当 $m_2 > m_1$ 时, 由图 o16(a) 可见 θ_1 与 v_1' 之间有一一对应关系, 式 (2) 中根号前只能取正号. 或者, 由 $m_2 > m_1$ 可知 $m_2^2 - m_1^2 \sin^2\theta_1 > m_1^2 \cos^2\theta_1$.

但是, $v_1' > 0$, 则也可以由此看出该情况下式 (2) 中根号前只能取正号. 当 $\theta_1 = 0$ 时, 有 $\chi = 0$, 即 $v_1' = v$. 取正号与特例的结果是自洽的.

由 (o17.5) 并利用 (o17.4) 第二式, 有

$$v_2' = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} \sin\frac{\chi}{2} = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_2\right) = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} \cos\theta_2. \tag{3}$$

这是碰后质点 m_2 相对于质心的速度用实验室参考系中的偏转角 θ_2 表示的形式.

实验室参考系

§18 质点散射

§18.1 内容提要

质点在中心场中运动时, 其运动方向发生变化, 称为散射. 可以用质点在中心附近产生的偏转角 χ (也称为散射角) 描述, 其表示式为

$$\chi = |\pi - 2\varphi_0|, \tag{o18.1}$$

其中 φ_0 是质点轨道的近心点到力心连线与质点初始速度方向 (或散射后的速度方向) 之间的夹角

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{(M/r^2)\mathrm{d}r}{\sqrt{2m[E - U(r)] - M^2/r^2}} = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{(\rho/r^2)\mathrm{d}r}{\sqrt{1 - \rho^2/r^2 - 2U/(mv_\infty^2)}}, \tag{o18.2, o18.4}$$

这里 $r_{\min}$ 是近心点到力心的距离, v_∞ 是质点在无穷远处的初始速度, ρ 为瞄准距离 (也称为碰撞参数).

对于有相同速度 v_∞ 的多个全同质点束的散射, 通常用有效散射截面 (或称微分散射截面) $\mathrm{d}\sigma$ 这个参量描述散射过程, 它定义为单位时间内偏转角在 χ 和 $\chi + \mathrm{d}\chi$ 之间的散射质点数 $\mathrm{d}N$ 与单位时间内通过质点束横截面单位面积的质点数 n (也称为入射强度) 之比

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{\mathrm{d}N}{n}. \tag{o18.5}$$

假定 χ 与 ρ 之间有一一对应的关系, 且力场中心固定, 有效散射截面 $\mathrm{d}\sigma$ 与偏转角 χ 的关系为

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{\rho(\chi)}{\sin\chi} \left|\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\chi}\right| \mathrm{d}o, \tag{o18.8}$$

其中 $\mathrm{d}o$ 是对顶角分别为 χ 和 $\chi + \mathrm{d}\chi$ 的两圆锥体之间的立体角元 $\mathrm{d}o = 2\pi \sin\chi \mathrm{d}\chi$.

由式 (5) 可以看出, 当 $\rho = a$ 时, 散射角 χ 达到最大值 $\chi_{\max}$. 通过几何关系或者式 (5) 可得

$$\cos\left(\frac{\chi_{\max}}{2}\right) = \frac{1}{n}. \tag{7}$$

注意到 $\mathrm{d}o = 2\pi \sin\chi \,\mathrm{d}\chi$, 对式 (6) 从 $\chi = 0$ 到 $\chi_{\max}$ 积分可得总有效截面

$$\sigma_T = \int_0^{\chi_{\max}} \frac{n^2a^2}{4\cos\dfrac{\chi}{2}} \frac{\left(n - \cos\dfrac{\chi}{2}\right)\left(n\cos\dfrac{\chi}{2} - 1\right)}{\left(1 + n^2 - 2n\cos\dfrac{\chi}{2}\right)^2} 2\pi\sin\chi\,\mathrm{d}\chi$$

$$= \pi n^2a^2 \int_0^{\chi_{\max}} \frac{\left(n - \cos\dfrac{\chi}{2}\right)\left(n\cos\dfrac{\chi}{2} - 1\right)\sin\dfrac{\chi}{2}}{\left(1 + n^2 - 2n\cos\dfrac{\chi}{2}\right)^2} \mathrm{d}\chi.$$

令 $x = \cos\dfrac{\chi}{2}$ 并注意到式 (7), 上式可改写为

$$\sigma_T = -2\pi n^2a^2 \int_1^{1/n} \frac{(n-x)(nx-1)}{(1+n^2-2nx)^2}\mathrm{d}x. \tag{8}$$

再令 $\xi = 1 + n^2 - 2nx$, 则有

$$\int_1^{1/n} \frac{(n-x)(nx-1)}{(1+n^2-2nx)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2(2n)^2}\int_{(n-1)^2}^{n^2-1}\left[1 - \frac{(n^2-1)^2}{\xi^2}\right]\mathrm{d}\xi = -\frac{1}{2n^2}.$$

将上式代入式 (8), 可得

$$\sigma_T = -2\pi n^2a^2\left(-\frac{1}{2n^2}\right) = \pi a^2.$$

这是势能不为零区域的最大散射截面, 也是半径为 a 的球在垂直于质点入射方向上的最大横截面的面积.

§20 小角度散射

§20.1 内容提要

瞄准距离 ρ 很大时, 场 U 很弱, 则偏转角很小, 这样的散射称为小角度散射. 直接在实验室参考系中进行分析, 在作适当的近似后, 可得散射角为

$$\theta_1 = -\frac{2\rho}{m_1v_\infty^2}\int_\rho^\infty \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2-\rho^2}}, \tag{o20.3}$$

其中 $r = \sqrt{x^2+\rho^2}$, x 是沿被散射质点初始运动方向的坐标. 这里是在实验室参考系中用矢量力学的方法求散射角的, 用质心参考系推导公式 (o20.3) 的过程见本节习题 1.

是正定的矩阵;(ii) 系数矩阵是实矩阵, 即 $\boldsymbol{U}^* = \boldsymbol{U}$; 而同时 (iii) 系数矩阵是对称的, 即 $\boldsymbol{U}^T = \boldsymbol{U}$. (ii) 和 (iii) 表示矩阵 $\boldsymbol{U}$ 是 Hermite[①] 矩阵.

2. 简正坐标与本征问题

如果将 (o23.6) 的系数看成矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素, 即

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_s \end{bmatrix},$$

而动能的系数矩阵 (称为惯性系数矩阵) 记为

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{s1} & \cdots & m_{ss} \end{bmatrix}. \tag{23.3}$$

与 $\boldsymbol{U}$ 一样, $\boldsymbol{M}$ 也是实的, 对称的, 正定的矩阵. 利用这些矩阵, 方程 (o23.7) 可以表示为下列矩阵形式

$$\boldsymbol{U}\,\boldsymbol{A} = \omega^2 \boldsymbol{M}\,\boldsymbol{A}, \tag{23.4}$$

即

$$\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{U}\,\boldsymbol{A} = \omega^2 \boldsymbol{A}. \tag{23.4'}$$

于是, 求解 (o23.7) 等同于解 (23.4′). 但是方程 (23.4′) 是本征值为 ω^2, 本征矢量为 $\boldsymbol{A}$ 的本征方程.

记本征频率 ω_α 相应的本征矢量为 $\boldsymbol{A}_\alpha$, 即

$$\boldsymbol{A}_\alpha = \begin{pmatrix} A_{1\alpha} \\ A_{2\alpha} \\ \vdots \\ A_{s\alpha} \end{pmatrix},$$

则可以证明本征矢量具有性质

$$\boldsymbol{A}_\alpha^T \boldsymbol{M}\,\boldsymbol{A}_\beta = m_\alpha \delta_{\alpha\beta}, \tag{23.5}$$

即不同本征频率相应的本征矢量是相互正交的. 利用这样的性质, 可以证明如果广义坐标 x_k 与坐标 Θ_α 之间通过关系 $x_k = \sum_\alpha A_{k\alpha}\Theta_\alpha$ 相联系, 则坐

① Charles Hermite, 1822—1901, 法国数学

设方程 (28.10) 的特解为

$$x^{(2)} = A + B\cos(2\omega t) + C\sin(2\omega t), \tag{28.11}$$

其中 A, B, C 为待定常数. 将上式代入 (28.10), 可得

$$\omega_0^2 A + (-4\omega^2 + \omega_0^2)B\cos(2\omega t) + (-4\omega^2 + \omega_0^2)C\sin(2\omega t) = -\frac{1}{2}\alpha a^2 - \frac{1}{2}\alpha a^2\cos(2\omega t).$$

上式中等号两边各对应项应相等, 有

$$\omega_0^2 A = -\frac{1}{2}\alpha a^2, \quad (-4\omega^2 + \omega_0^2)B = -\frac{1}{2}\alpha a^2, \quad (-4\omega^2 + \omega_0^2)C = 0.$$

由此解得

$$A = -\frac{1}{2\omega_0^2}\alpha a^2, \quad B = \frac{\alpha a^2}{2(4\omega^2 - \omega_0^2)} \approx \frac{\alpha a^2}{6\omega_0^2}, \quad C = 0.$$

将这些系数代回方程 (28.11), 可得

$$x^{(2)} = -\frac{\alpha a^2}{2\omega_0^2} + \frac{\alpha a^2}{6\omega_0^2}\cos(2\omega t). \tag{o28.12}$$

4. 方程 (o28.9) 到三级近似的解

在方程 (o28.11) 中代入 $x = x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)}$, $\omega = \omega_0 + \omega^{(2)}$, 得到

$$\ddot{x}^{(2)} + \ddot{x}^{(3)} + \omega_0^2(x^{(2)} + x^{(3)}) = -\alpha\left(x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)}\right)^2 - \beta\left(x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)}\right)^3 + \left(\omega^2 - \omega_0^2\right)x^{(1)}.$$

上式等号右端保留到 3 阶小量项, 得

$$\ddot{x}^{(2)} + \ddot{x}^{(3)} + \omega_0^2(x^{(2)} + x^{(3)}) = -\alpha\left(x^{(1)2} + 2x^{(1)}x^{(2)}\right) - \beta x^{(1)3} + 2\omega_0\omega^{(2)}x^{(1)}.$$

上加两点

将方程 (28.9), 即 $\ddot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} = -\alpha x^{(1)2}$ (这里注意到 $\omega^{(1)} = 0$) 代入上式, 可得

$$\ddot{x}^{(3)} + \omega_0^2 x^{(3)} = -2\alpha x^{(1)}x^{(2)} - \beta x^{(1)3} + 2\omega_0\omega^{(2)}x^{(1)}. \tag{28.12}$$

再将式 (o28.10) 和 (o28.12) 代入上式, 得

$$\begin{aligned}
\ddot{x}^{(3)} + \omega_0^2 x^{(3)} &= -2\alpha a\cos\omega t\left[\frac{\alpha a^2}{2\omega_0^2} + \frac{\alpha a^2}{6\omega_0^2}\cos(2\omega t)\right] - \beta a^3\cos^3\omega t + 2\omega_0\omega^{(2)}a\cos\omega t \\
&= \left(\frac{\alpha^2 a^3}{\omega_0^2} + 2\omega_0\omega^{(2)}a\right)\cos\omega t - \frac{\alpha^2 a^3}{6\omega_0^2}\left[\cos(3\omega t) + \cos\omega t\right] - \\
&\quad \frac{1}{4}\beta a^3\left[\cos(3\omega t) + 3\cos\omega t\right] \\
&= -a^3\left(\frac{\alpha^2}{6\omega_0^2} + \frac{\beta}{4}\right)\cos(3\omega t) + a\left(2\omega_0\omega^{(2)} + \frac{5\alpha^2 a^2}{6\omega_0^2} - \frac{3\beta a^2}{4}\right)\cos\omega t,
\end{aligned} \tag{28.13}$$

其中用了 3 倍角公式

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta,$$

以及积化和差公式.

在无共振项的条件下, 方程 (28.13) 右边 $\cos\omega t$ 项前的系数应该等于零,

即

$$a\left(2\omega_0\omega^{(2)} + \frac{5\alpha^2a^2}{6\omega_0^2} - \frac{3\beta a^2}{4}\right) = 0.$$

由此解得对频率 ω_0 的修正为

$$\omega^{(2)} = \left(\frac{3\beta}{8\omega_0} - \frac{5\alpha^2}{12\omega_0^3}\right)a^2. \tag{o28.13}$$

相应地, 方程 (28.13) 变为

$$\ddot{x}^{(3)} + \omega_0^2 x^{(3)} = -a^3\left(\frac{\beta}{4} + \frac{\alpha^2}{6\omega_0^2}\right)\cos(3\omega t). \tag{28.14}$$

这是非齐次的二阶常微分方程, 也只要求其特解. 设方程 (28.14) 的特解形式为

$$x^{(3)} = A\cos(3\omega t). \tag{28.15}$$

将其代入方程 (28.14), 可得

$$(9\omega^2 - \omega_0^2)A = a^3\left(\frac{\beta}{4} + \frac{\alpha^2}{6\omega_0^2}\right).$$

于是, 有

$$A = \frac{a^3}{2(9\omega^2 - \omega_0^2)}\left(\frac{\beta}{2} + \frac{\alpha^2}{3\omega_0^2}\right) \approx \frac{a^3}{16\omega_0^2}\left(\frac{\alpha^2}{3\omega_0^2} + \frac{\beta}{2}\right).$$

将上式代回式 (28.15) 即得式 (o28.14).

说明: 实际上, 在文献中对于方程 (o28.9) 的所谓 LP 方法是按下列方式进行的. 令

$$\tau = \omega t,$$

则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} = \omega\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}, \quad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} = \omega^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2},$$

相应地方程 (o28.9) 可以改写为

$$\omega^2 x'' + \omega_0^2 x = -\alpha x^2 - \beta x^3, \tag{28.16}$$

这常称之为欧拉运动学方程.

对于对称陀螺 $I_1 = I_2 \neq I_3$, 其相对于质心的转动动能用欧拉角可表示为

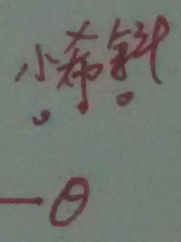
$$T_{\rm rot} = \frac{I_1}{2}(\dot\varphi^2 \sin^2\theta + \dot\theta^2) + \frac{I_3}{2}(\dot\varphi\cos\theta + \dot\psi)^2. \tag{o35.2}$$

§35.2 内容补充

1. 欧拉角

因为有限转动相应的所谓角位移不是矢量, 从刚体的一个特定位形出发通过转动所能到达的终态位形将是与转动的次序密切相关的, 即相同大小的转动角度但不同的转动次序将给出不同的终态位形, 故此欧拉角的定义实际上是有次序的. 《力学》中采用的次序是 (参见图 o47): (i) 先绕 OZ 轴转动 φ;(ii) 再绕节线 ON 转动 θ; (iii) 最后绕 x_3 轴转动 ψ. 所有的转动均以逆时针方向为正方向.

要注意的是, 这样定义的欧拉角有一定的奇异性. 当 $\theta = 0$ 时, 仅有 $\varphi+\psi$ 是唯一定义的, 而 φ 和 ψ 本身并不具有唯一确定性. 同样, 当 $\theta = \pi$ 时, 仅有 $\varphi-\psi$ 是可唯一定义的.



欧拉角还有其它形式的定义, 在力学教材或著作中, 大多采用这里给出的定义. 另外, 还可以用其它形式的参数描述刚体的取向, 可参见有关著作①.

2. 动能与欧拉角

利用方程 (o35.1) 以及 (o32.8), 刚体的转动动能在用欧拉角表示时为

$$\begin{aligned} T_{\rm rot} &= \frac{1}{2}I_1\Omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\Omega_2^2 + \frac{1}{2}I_3\Omega_3^2 \\ &= \frac{1}{2}I_1\left(\dot\varphi\sin\theta\sin\psi + \dot\theta\cos\psi\right)^2 + \frac{1}{2}I_2\left(\dot\varphi\sin\theta\cos\psi - \dot\theta\sin\psi\right)^2 + \\ &\quad \frac{1}{2}I_3\left(\dot\varphi\cos\theta + \dot\psi\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}(I_1-I_2)\left(\dot\varphi\sin\theta\sin\psi+\dot\theta\cos\psi\right)^2 + \frac{1}{2}I_2\left(\dot\varphi^2\sin^2\theta+\dot\theta^2\right) + \frac{1}{2}I_3\left(\dot\varphi\cos\theta+\dot\psi\right)^2. \end{aligned} \tag{35.1}$$

当刚体是对称陀螺时, $I_1 = I_2 \neq I_3$, 上式即退化为式 (o35.2).

需要说明的是, 方程 (o32.8), (o35.2) 以及上面的式 (35.1) 是刚体相对质心的转动动能的表示式. 但是, 它们实际上也适用于有一个固定点即作定

① 例如,H. Goldstein, C. Poole, J. Safko, Classical Mechanics, 3rd ed, Addison Wesley, 2002.

其中利用了 $\boldsymbol{M}$ 与 M_1, M_2, M_3 的关系. $\boldsymbol{M}$ 在垂直于陀螺的对称轴方向的投影的大小即为 $\sqrt{M_1^2+M_2^2}$.

也可以从有效势能的角度进行讨论. 当重力势能远小于转动动能时, 由习题 1 的式 (6) 可知, 此时有效势能可以表示为

$$U_{\text{eff}}(\theta) \approx \frac{(M_Z - M_3\cos\theta)^2}{2I_1'\sin^2\theta}.$$

这个非负函数在满足 $M_Z - M_3\cos\theta_0 = 0$ 的位置 θ_0 有极小值 0. 该 θ_0 对应于陀螺的稳定平衡位置. 如果角 θ 对 θ_0 有小的偏离, 则 θ 将在 θ_0 附近作微振动 (即章动). 将有效势能在 θ_0 附近作 Taylor 展开并仅保留到 $\theta-\theta_0=\xi$ 的二阶小量, 因为

$$M_Z - M_3\cos\theta = M_Z - M_3\cos(\theta_0+\xi) \approx M_Z - M_3(\cos\theta_0 - \xi\sin\theta_0) = M_3\xi\sin\theta_0,$$

则分母中 $\sin^2\theta$ 只要保留到零阶项即可. 用 $\sin^2\theta_0$ 代替 $\sin^2\theta$, 于是有

$$U_{\text{eff}}(\theta) \approx \frac{(M_Z - M_3\cos\theta)^2}{2I_1'\sin^2\theta} \approx \frac{(M_3\xi\sin\theta_0)^2}{2I_1'\sin^2\theta_0} = \frac{M_3^2}{2I_1'}\xi^2.$$

上式代入习题 1 的式 (6′), 有

$$E' = \frac{I_1'}{2}\dot{\xi}^2 + \frac{M_3^2}{2I_1'}\xi^2.$$

对上式求时间的微分可得

$$I_1'\ddot{\xi} + \frac{M_3^2}{I_1'}\xi = 0.$$

这是振动频率为 $\omega = \sqrt{M_3/I_1'}$ 的小振动, 即章动的频率. 这与前面的式 (1) 有一点小的差别. 但是在快陀螺情形下, M_3 是远大于 M_1, M_2 的, 因此作近似 $M \approx M_3$ 引起的误差不大.

习题 4 [补充] 将人造地球卫星视为刚体, 在其质心作轨道运动 (这是在固定轨道平面内的运动) 时, 它还有相对于质心的运动, 这种相对运动就是卫星的姿态运动. 试建立描述这种姿态运动的动力学方程.

解: 为讨论方便起见, 将地球视为均匀球体. 人造卫星在地球引力的作用下其质心沿椭圆轨道运动. 设 R 为卫星质心与地球中心的距离, 质心的轨道方程为 (参见方程 (o15.5))

$$R = \frac{p}{1+e\cos\phi}, \tag{1}$$

由此, 有

$$\{g,\{h,f\}\}+\{h,\{f,g\}\}=\sum_k\left(-\frac{\partial}{\partial q_k}\{g,h\}\frac{\partial f}{\partial p_k}+\frac{\partial}{\partial p_k}\{g,h\}\frac{\partial f}{\partial q_k}\right)$$
$$=\{\{g,h\},f\}=-\{f,\{g,h\}\},$$

即 (o42.14) 的后两项的和等于第一项的负值, 因此 (o42.14) 成立.

注意, 从代数结构的角度来看, 泊松括号是定义所谓 Lie① 代数的一种基本运算, 而不同函数之间的泊松括号给出的关系以及雅可比恒等式是 Lie 代数的基本定义关系. 例如, 习题 2 中的角动量各分量满足的关系可以统一写为

$$\{M_i,M_j\}=-\sum_k\varepsilon_{ijk}M_k,$$

在这种情况下雅可比恒等式是自动满足的. 这些关系定义了所谓的 Lie 代数 $su(2)$. 代数结构对于研究系统的性质是非常重要的②.

3. 泊松定理与可积性

泊松定理表明, 有可能通过已有的运动积分构造新的运动积分. 更多的运动积分有助于解析地描述系统的运动情况.

对于有 s 个自由度的力学系统, 如果可以找到 s 个相互独立的运动积分 $\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_s$, 且满足

$$[\phi_i,\phi_j]=0,\quad (i,j=1,2,\cdots,s).$$

这样的系统称为可积系统, 此时称 $\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_s$ 是相互对合的. 这个结论是由刘维尔首先证明的, 故也称为刘维尔定理, 相应地上述可积性称为刘维尔可积性③. 系统可积时, 其哈密顿函数属于运动积分之一或者可用它们表示出来, 而系统的运动方程可以通过积分的方法求解.

例如, 对于对称重刚体的定点运动, 有三个自由度, 而 §35 习题 1 的讨论表明该系统有三个运动积分, 它们确是相互独立的, 因此这是刘维尔可积系统. 事实上, 我们通过积分求出了重刚体定点运动的情况.

---

① Sophus Lie, 1842—1899, 挪威数学家.

② 经典力学中这方面的讨论可以参见有关著作, 例如 E. J. Saletan, A. H. Cromer. Theoretical Mechanics. John Wiley & Sons Inc, 1971; 中译本: 理论力学. 卢邦正, 姜存志译. 北京: 高等教育出版社, 1989.

③ 刘维尔定理的证明可参见有关文献, 例如, V. I. Arnold, Mathematical Method of Classical Mechanics, 2nd ed., Springer-Verlag, 1989; 中译本: 经典力学的数学方法, 第二版, 北京

变换关系为

$$q_i = -\frac{\partial G}{\partial p_i}, \quad P_i = -\frac{\partial G}{\partial Q_i}, \quad H' = H + \frac{\partial G}{\partial t}. \tag{45.4}$$

母函数 $\Psi(p, P, t)$ 可以由 Φ 作勒让德变换得到, 即

$$\Psi = \Phi - \sum_i q_i p_i, \tag{45.5}$$

相应的微分式为

$$\mathrm{d}\Psi = -\sum_i q_i \mathrm{d}p_i + \sum_i Q_i \mathrm{d}P_i + (H' - H)\mathrm{d}t. \tag{45.6}$$

变换关系为

$$q_i = -\frac{\partial \Psi}{\partial p_i}, \quad Q_i = \frac{\partial \Psi}{\partial P_i}, \quad H' = H + \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \tag{45.7}$$

注意, Ψ 也可由 F 作变换得到,

$$\Psi = F + \sum_i Q_i P_i - \sum_i q_i p_i. \tag{45.8}$$

注意, 出现在微分关系 (o45.6), (45.1), (45.3) 和 (45.6) 右边微分符号 d 后面的变量, 即 $(q_i, Q_i), (q_i, P_i), (p_i, Q_i), (p_i, P_i)$ 在热力学中称之为自然变量. 由这些微分关系导出的变换关系在力学中就是所要求的正则变换, 而在热力学中则可以导出热力学变量 (如压强, 体积) 与热力学函数 (即这里的母函数) 之间的关系以及麦克斯韦关系①. 但是从确定系统状态的角度看, 也可以选取其它独立变量组合, 例如 (q_i, p_i), (Q_i, P_i), 这样也可以得到一些有用的关系. 在热力学中这一点是非常重要的, 例如由此可建立热力学函数与可测量量之间的关系.

2. 无穷小正则变换与运动积分

无穷小正则变换是指, 在该变换下正则变量变换前后的差别是无穷小量. 选取母函数 $\Phi(q, P)$, 由 (o45.8) 可知形式为 $\sum_i q_i P_i$ 的母函数产生的变换是恒等变换, 即有 $Q_i = q_i$, $P_i = p_i$. 为考虑无穷小变换, 设

$$\Phi = \sum_{i=1}^{s} q_i P_i + \varepsilon\phi(q, P), \tag{45.9}$$

式中 ε 是某个无限小参数. 由 (o45.8) 可知, 上述母函数给出变换公式

$$\begin{cases} p_i = \dfrac{\partial \Phi}{\partial q_i} = P_i + \varepsilon \dfrac{\partial \phi}{\partial q_i}, \\ Q_i = \dfrac{\partial \Phi}{\partial P_i} = q_i + \varepsilon \dfrac{\partial \phi}{\partial P_i}, \end{cases} \quad (i = 1, 2, \cdots, s),$$

① 可参见热力学统计物理教材的相关部分, 例如, 朗道, 栗弗席兹. 统计物理 I (第五版). 束仁贵, 束莼译. 高等教育出版社, 2011.

$$\frac{\xi^2+\eta^2-2}{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}=\frac{\sigma^2(\xi^2+\eta^2)-2\sigma^2}{\sigma^2(\xi^2-1)(1-\eta^2)}=\frac{\rho^2+z^2-\sigma^2}{\rho^2}=\frac{r^2-\sigma^2}{\rho^2},\tag{4}$$

其中 $r=\sqrt{\rho^2+z^2}$ 为球坐标系中的径向坐标. 式 (3) 最后一个等号中的 θ_1, θ_2 是如图 o55 所示的角度. 据图 o55, 由余弦定理有

$$r_1^2=r_2^2+(2\sigma)^2-4r_2\sigma\cos\theta_2,\quad r_2^2=r_1^2+(2\sigma)^2-4r_1\sigma\cos\theta_1,$$

则有

$$\cos\theta_1=\frac{r_1^2+4\sigma^2-r_2^2}{4\sigma r_1},\quad \cos\theta_2=\frac{r_2^2+4\sigma^2-r_1^2}{4\sigma r_2}.$$

将 (2)、(3)、(4) 各式代入 (8.3) 式可得

$$\beta=(\sigma^2-z^2)p_\rho^2-\rho^2p_z^2+(\sigma^2-r^2)\frac{p_\varphi^2}{\rho^2}+2z\rho p_zp_\rho+2m\sigma(\alpha_1\cos\theta_1+\alpha_2\cos\theta_2).$$

该 β 的表示式可以改写为

$$\beta=\sigma^2\left(p_\rho^2+\frac{p_\varphi^2}{\rho^2}\right)-M^2+2m\sigma(\alpha_1\cos\theta_1+\alpha_2\cos\theta_2),$$

其中

$$M^2=(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})^2=p_\rho^2z^2+p_z^2\rho^2+\frac{r^2p_\varphi^2}{\rho^2}-2z\rho p_zp_\rho$$

是质点相对于两个场中心连线中点 (这里即是坐标原点) 的角动量的平方.

注意到在柱坐标系中, 有

$$\boldsymbol{r}=\rho\boldsymbol{\rho}^0+z\boldsymbol{e}_z,\quad \boldsymbol{p}=m(\dot\rho\boldsymbol{\rho}^0+\rho\dot\varphi\boldsymbol{\varphi}^0+\dot z\boldsymbol{e}_z)=p_\rho\boldsymbol{\rho}^0+\frac{p_\varphi}{\rho}\boldsymbol{\varphi}^0+p_z\boldsymbol{e}_z,$$

其中 $\boldsymbol{\rho}^0$, $\boldsymbol{\varphi}^0$, $\boldsymbol{e}_z$ 分别是柱坐标系中各坐标轴方向的单位矢量, 于是

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}=-\frac{z}{\rho}p_\varphi\boldsymbol{\rho}^0+(zp_\rho-\rho p_z)\boldsymbol{\varphi}^0+p_\varphi\boldsymbol{e}_z.$$

由此有

$$\begin{aligned}M^2&=\left(-\frac{z}{\rho}p_\varphi\right)^2+(zp_\rho-\rho p_z)^2+p_\varphi^2\\&=p_\rho^2z^2+p_z^2\rho^2+\frac{(\rho^2+z^2)p_\varphi^2}{\rho^2}-2z\rho p_zp_\rho\\&=p_\rho^2z^2+p_z^2\rho^2+\frac{r^2p_\varphi^2}{\rho^2}-2z\rho p_zp_\rho\end{aligned}$$

§52.2 内容补充

1. 角变量的变化 (o52.8)

对于可分离变量的多自由度系统, 由式 (o52.5) 可知

$$\Delta w_i = \Delta\left(\frac{\partial S_0(q,I)}{\partial I_i}\right) = \Delta\left(\sum_k \frac{\partial S_k(q_k,I)}{\partial I_i}\right)$$
$$= \sum_k \frac{\partial\left(\Delta S_k(q_k,I)\right)}{\partial I_i} = \sum_k \frac{\partial(2\pi I_k)}{\partial I_i} = 2\pi,$$

其中利用了式 (o52.3) 以及 $\partial I_k/\partial I_i = \delta_{ki}$. 这个结果表明角变量 $w_i(q,I)$ 是坐标的多值函数.

2. 简并条件 (o52.12)

当 $E = E(n_2I_1 + n_1I_2)$ 时, 显然有

$$\frac{\partial E}{\partial I_1} = \frac{\partial E(n_2I_1+n_1I_2)}{\partial(n_2I_1+n_1I_2)}\frac{\partial(n_2I_1+n_1I_2)}{\partial I_1} = n_2\frac{\partial E(n_2I_1+n_1I_2)}{\partial(n_2I_1+n_1I_2)},$$

$$\frac{\partial E}{\partial I_2} = \frac{\partial E(n_2I_1+n_1I_2)}{\partial(n_2I_1+n_1I_2)}\frac{\partial(n_2I_1+n_1I_2)}{\partial I_2} = n_1\frac{\partial E(n_2I_1+n_1I_2)}{\partial(n_2I_1+n_1I_2)}.$$

由此, (o52.12) 成立, 也即有 $n_1\omega_1 = n_2\omega_2$. 因为 n_1, n_2 是整数, 则 (o52.12) 表示两个频率是可公度的. 对于具有这样特点的两个自由度的系统, 相空间中的轨道是封闭的, 即运动是周期的. 一个典型的问题是二维简谐振子, 其轨道是所谓的 Lissajous[①] 图形. 如果两个相互垂直方向的分运动的频率是可公度的, 则 Lissajous 图形是封闭的.

3. 可分离性、对称性与简并的关系[②]

在经典力学中, 简并性是按下列方式定义的. 对于有 s 个自由度的多周期有界系统, 设基频分别为 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_s$, 其中 $\omega_i = \partial H/\partial I_i$. 如果这些频率是无公度的, 即频率之比不是有理分数, 则称该系统是非简并的. 如果在频率之间存在 f 个下列形式的关系

$$\sum_{i=1}^{s} l_i^{(k)}\omega_i = 0, \quad (k = 1, 2, \cdots, f) \tag{52.1}$$

其中 $l_i^{(k)}$ 为整数, 则称系统是 f 重简并的. 当 $f = s-1$ 时, 称系统是完全简并的, 此时所有频率之比是有理分数, 系统的运动是单周期的.

① Jules Antoine Lissajous, 1822—1880, 法国数学家.
② 前面脚注中 P. Stehle, M. Y. Han 的文章.