朗道-栗弗席兹《理论物理学教程第一卷·力学》勘误说明

朗道集结号　2016年5月27日

说明：朗道-栗弗席兹《力学》自2007年首次出版以来，每次印刷都会进行一些勘误，但从2015年2月第5次印刷版开始，因方正排版系统升级导致无法在下一次印刷时进行勘误（也就是说2015年2月第5次印刷版和目前的2016年1月第6次印刷版都和2013年8月第4次印刷版相同），所以，小编特在此发布基于2013年8月第4次印刷版本基础上的勘误。

特别鸣谢南京大学物理学院鞠国兴教授对朗道集结号的支持！

欢迎读者补充勘误，让译本精益求精。联系小编：微博、微信：朗道集结号（微信号：ldjjhwx），读者qq群：373454863，加群请注明：“朗道集结号”或“读者”，小编即群主。



用 $q(t)+\delta q(t)$ 代替 $q(t)$ 使 S 产生的增量为

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q+\delta q,\dot{q}+\delta\dot{q},t)\mathrm{d}t-\int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)\mathrm{d}t.$$

这个差中的被积函数按 δq 和 $\delta\dot{q}$ 的幂展开式是从一阶项开始的. S 取最小值[①]的必要条件是这些项之和等于零. 这个和称为积分的一阶变分(或者简称为变分). 于是,最小作用量原理可以写成

$$\delta S=\delta\int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)\mathrm{d}t=0, \tag{2.4}$$

或者变分后的形式:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\delta\dot{q}\right)\mathrm{d}t=0.$$

注意到 $\delta\dot{q}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q$,将第二项分部积分得:

$$\delta S=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\delta q\Big|_{t_1}^{t_2}+\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\right)\delta q\mathrm{d}t=0. \tag{2.5}$$

根据(2.3)上式中第一项等于零. 剩下的积分在 δq 任意取值时都应该等于零. 这只有在被积函数恒等于零的情况下才有可能. 于是我们得到方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}-\frac{\partial L}{\partial q}=0.$$

对于有 s 个自由度的系统,在最小作用量原理中有 s 个不同的函数 $q_i(t)$ 应该独立地变分. 显然我们可以得到 s 个方程:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0\quad(i=1,2,\cdots,s). \tag{2.6}$$

这就是我们要推导的运动微分方程,在力学中称为拉格朗日方程[②]. 如果给定力学系统的拉格朗日函数已知,则方程(2.6)建立了加速度、速度和坐标之间的联系,它们是系统的运动方程.

从数学的观点看,方程(2.6)是包含 s 个未知函数 $q_i(t)$ 的 s 个二阶微分方程组. 这个方程组的通解包含 $2s$ 个任意常数. 为了确定这些常数,从而完全确定力学系统的运动,必须知道描述系统在某给定时刻状态的初始条件,例如所有坐标和速度的初值.

动的角动量 $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{P}$ 构成.

虽然只有封闭系统的角动量(对任意坐标原点)三个分量都守恒,但是在一定限制下,这个守恒定律对于在外场中运动的系统也成立.从上面推导可以看出,角动量在外场的对称轴上投影总是守恒的,因为绕该轴转动时系统力学性质不变.当然,这时角动量计算是相对于位于该轴上的任意点(坐标原点)的.

最重要的情况是中心对称外场,即势能仅仅依赖于到空间中某个特定点(中心)的距离.显然,在这种场内运动时,系统角动量在任意过中心的轴上投影都守恒.就是说,系统相对场中心的角动量 $\boldsymbol{M}$ 守恒.

另一个例子是,在沿着 z 轴的均匀场中角动量投影 M_z 守恒,并且坐标原点可以任意选取.

应该指出,角动量在任意轴(我们就取为 z 轴)上的投影,都可以由对拉格朗日函数的微分求得:

$$M_z=\sum_a\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_a},\tag{9.7}$$

其中坐标 φ 是绕 z 轴的转角.根据前面给出的角动量守恒定律的证明过程,这个结论是显然的,也可以直接计算来验证.利用柱坐标 r,φ,z 代入 $x_a=r_a\cos\varphi_a$, $y_a=r_a\sin\varphi_a$,有:

$$M_z=\sum_a m_a(x_a\dot{y}_a-y_a\dot{x}_a)=\sum_a m_a r_a^2\dot{\varphi}_a.\tag{9.8}$$

另一方面,用这些坐标表示时,拉格朗日函数可以写成

$$L=\frac{1}{2}\sum_a m_a(\dot{r}_a^2+r_a^2\dot{\varphi}_a^2+\dot{z}_a^2)-U.$$

将它代入(9.7)即可得(9.8).

习　题

习题 1　用柱坐标 r,φ,z 表示质点角动量的笛卡儿坐标分量以及角动量的大小.

答案:

$$M_x=m\sin\varphi(r\dot{z}-z\dot{r})-mrz\,\dot{\varphi}\cos\varphi,$$

$$M_y=m\cos\varphi(z\dot{r}-r\dot{z})-mrz\,\dot{\varphi}\sin\varphi,$$

$$M_z=mr^2\,\dot{\varphi},$$

$$M^2=m^2r^2\,\dot{\varphi}^2(r^2+z^2)+m^2(r\dot{z}-z\dot{r})^2.$$

习题 2　用球坐标 r,θ,φ 表示质点角动量的笛卡儿坐标分量以及角动量的大小.

答案:

这种情况下，系统除了固有势能$(1/2)kx^2$以外，还有与外力场作用相关的势能$U_e(x,t)$. 将这个附加势能展开为小量x的幂级数，得

$$U_e(x,t)\approx U_e(0,t)+x\left.\frac{\partial U_e}{\partial x}\right|_{x=0}.$$

第一项只是时间的函数，可以从拉格朗日函数中略去(作为另一个时间的函数对时间的全导数). 第二项中$-\partial U_e/\partial x$是外力，作用于处在平衡位置的系统上，是时间的给定函数，用$F(t)$表示. 于是势能中出现了$-xF(t)$项，所以系统的拉格朗日函数为

$$L=\frac{m\dot{x}^2}{2}-\frac{kx^2}{2}+xF(t). \tag{22.1}$$

相应的运动方程为

$$m\ddot{x}+kx=F(t),$$

或者

$$\ddot{x}+\omega^2x=\frac{1}{m}F(t), \tag{22.2}$$

这里我们再次引入了自由振动频率ω.

众所周知，非齐次常系数线性微分方程的通解为两项之和：$x=x_0+x_1$，其中x_0是齐次方程的通解，x_1是非齐次方程的特解. 在现在的情况下，x_0就是§21研究的自由振动.

我们来看一种特别有意义的情况，强迫力是频率为γ的简单时间周期函数，即

$$F(t)=f\cos(\gamma t+\beta). \tag{22.3}$$

我们寻找方程(22.2)形式为$x_1=b\cos(\gamma t+\beta)$的特解，它具有与强迫力同样的周期因子. 代入方程可得：$b=f/[m(\omega^2-\gamma^2)]$，加上齐次方程的解，有下列形式的通解

$$x=a\cos(\omega t+\alpha)+\frac{f}{m(\omega^2-\gamma^2)}\cos(\gamma t+\beta). \tag{22.4}$$

任意积分常数a和α由初始条件确定.

于是，在周期性强迫力作用下，系统的运动是两个振动的合成，两个振动的频率分别为系统的固有频率ω和强迫力的频率γ.

解(22.4)不适用于所谓的共振情况，即强迫力的频率γ与固有频率ω相等的情况. 为了求这种情况下方程的通解，将(22.4)改写成如下形式，

$$x=a\cos(\omega t+\alpha)+\frac{f}{m(\omega^2-\gamma^2)}[\cos(\gamma t+\beta)-\cos(\omega t+\beta)].$$

其中常数a现在有不同的值. 当$\gamma\to\omega$时，第二项变为0/0的不确定形式. 按照洛必达法则消除不确定性可得

$$x=a\cos(\omega t+\alpha)+\frac{f}{2m\omega}t\sin(\omega t+\beta). \tag{22.5}$$

$$\omega^4-\omega^2\left[k_1\left(\frac{1}{m_A}+\frac{1}{m_B}\right)+k_1'\left(\frac{1}{m_B}+\frac{1}{m_C}\right)\right]+\frac{\mu k_1 k_1'}{m_A m_B m_C}=0.$$

§25　阻尼振动

到现在为止，我们都是假设物体的运动发生在真空中或者周围介质对运动的影响可以忽略.实际上，物体在介质中运动时，介质会产生阻力使运动有减慢的趋势.这时运动物体的能量不断转化为热能而最终耗散完.

在这种情况下运动过程已不再是纯力学过程，需要考虑介质自身的运动，以及物体和介质的内部热状态.特别是，一般情况下不能认为，运动物体的加速度仅仅是给定时刻的坐标和速度的函数，即不存在这种力学意义上的运动方程了.因此，在介质中物体的运动问题已经不是力学问题.

然而，存在一些情况，在介质中的运动可以近似地用力学运动方程描述，这需要在方程中引入某些附加项.如果振动频率小于在介质内耗散过程的频率，则属于这种情况.当满足这样的条件时，可以认为在物体上作用了仅依赖于速度的摩擦力(对于给定的均匀介质).

此外，如果速度足够小，可以将摩擦力按速度的幂次展开.因为在静止物体上没有任何摩擦力作用，所以零次项为零.不为零的第一项与速度成正比.于是，作用在广义坐标为 x 的一维微振动系统的广义摩擦力 f_{fr} 可以写成

$$f_{\mathrm{fr}}=-\alpha\dot{x},$$

其中 α 为正的系数，负号表示力的方向与速度方向相反.将这个力加到运动方程(见(21.4))的右端，可得

$$m\ddot{x}=-kx-\alpha\dot{x}. \tag{25.1}$$

除以 m 并引入记号

$$\frac{k}{m}=\omega_0^2,\quad \frac{\alpha}{m}=2\lambda. \tag{25.2}$$

ω_0 是没有摩擦力时系统自由振动的频率.λ 称为阻尼系数①，或阻尼衰减率.

于是，我们有方程

$$\ddot{x}+2\lambda\dot{x}+\omega_0^2 x=0. \tag{25.3}$$

根据求解常系数线性微分方程的一般方法，假设 $x=\mathrm{e}^{rt}$ 可得关于 r 的特征方程

$$r^2+2\lambda r+\omega_0^2=0.$$

方程(25.3)的通解为：

$$x=c_1\mathrm{e}^{r_1 t}+c_2\mathrm{e}^{r_2 t},\quad r_{1,2}=-\lambda\pm\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}.$$

① 无量纲乘积 λT(其中 $T=2\pi/\omega$ 是周期)称为对数阻尼衰减率.

如果刚体具有某种对称性，确定惯量主轴就容易得多.显然，质心位置和惯量主轴的方向应该具有与刚体相同的对称性.

例如，如果刚体有对称面，则质心应该在该平面内.两个惯量主轴也应该位于该平面内，而第 3 个主轴垂直该平面.对于这种情况，最明显的例子是平面质点系.这种情况下 3 个主转动惯量之间存在简单的关系.如果以系统所在平面为 x_1x_2 平面，则由于对所有质点 $x_3=0$，故

$$I_1=\sum mx_2^2,\quad I_2=\sum mx_1^2,\quad I_3=\sum m(x_1^2+x_2^2),$$

因此

$$I_3=I_1+I_2. \tag{32.10}$$

如果刚体有某阶的对称轴，则质心应该位于该轴上.惯量主轴之一与此轴重合，另外两个则与之垂直.如果对称轴的阶数大于 2，则刚体为对称陀螺.事实上，垂直于对称轴的任一主轴可以绕该对称轴旋转一个不等于 180° 的角度，即这组垂直轴的选取不是唯一的，而这只有当刚体是对称陀螺时才能如此.

位于一条直线上的质点系是一个特殊情况.如果选择这个直线为 x_3 轴，则对于所有质点 $x_1=x_2=0$，因此两个主转动惯量相等，第 3 个为零：

$$I_1=I_2=\sum mx_3^2,\quad I_3=0. \tag{32.11}$$

这种系统称为转子.区别于其它刚体的特性是，转子仅有两个(不是 3 个)转动自由度，相应于绕 x_1 和 x_2 的转动，显然，论及直线绕自身的转动是没有意义的.

最后，再做一个关于惯量张量计算的说明.虽然我们是在原点为质心的坐标系中定义这个张量的(只有在这个定义下基本公式(32.3)才成立)，但是对于这个张量的计算，有时可能更为方便的是先计算相对另一个坐标原点 O' 定义的类似张量

$$I'_{ik}=\sum m(x'^2_l\delta_{ik}-x'_ix'_k).$$

如果距离 OO' 由矢量 $\boldsymbol{a}$ 表示，则 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{a}$，$x_i=x'_i+a_i$，考虑到按照 O 点的定义，$\sum m\boldsymbol{r}=0$，我们得

$$I'_{ik}=I_{ik}+\mu(a^2\delta_{ik}-a_ia_k). \tag{32.12}$$

按这个公式，知道 I'_{ik} 就很容易计算出 I_{ik}.

习　题

习题 1　将分子看作质点之间距离不变的系统，在下列情况下，试求分子的主转动惯量.

a) 分子由位于一条直线上的原子构成.

答案：

$$I_1=I_2=\frac{1}{\mu}\sum_{a\neq b}m_am_bl_{ab}^2,\qquad I_3=0,$$

$$\varphi = \Omega_0 t - \psi$$

(略去了任意积分常数).

如果直接观察陀螺3个惯性主轴方向的变化(沿着这些轴的单位矢量为 n_1, n_2, n_3),可以获得陀螺运动性质的更清晰的理解.矢量 n_1 和 n_2 在平面 XY 内以频率 Ω_0 匀速转动,同时以频率 ω 沿着横向作微振动,这些振动由这两个单位矢量的 Z 方向分量确定,对这些分量有

$$n_{1Z} \approx \frac{M_1}{M} = a\sqrt{\frac{I_3}{I_2} - 1}\cos\omega t,$$

$$n_{2Z} \approx \frac{M_2}{M} = a\sqrt{\frac{I_3}{I_1} - 1}\sin\omega t.$$

在相同的精度下,对于矢量 n_3 有

$$n_{3X} \approx \theta\sin\varphi, \quad n_{3Y} \approx -\theta\cos\varphi, \quad n_{3Z} \approx 1$$

(n_3 的方向相对 X, Y, Z 轴的极角和方位角等于 θ 和 $\varphi - \pi/2$,参见第§35的脚注).进而有(利用公式(37.13)):

$$n_{3X} = \theta\sin(\Omega_0 t - \psi) = \theta\sin\Omega_0 t\cos\psi - \theta\cos\Omega_0 t\sin\psi$$

$$= \frac{M_2}{M}\sin\Omega_0 t - \frac{M_1}{M}\cos\Omega_0 t$$

或者最后得

$$= a\sqrt{\frac{I_3}{I_1} - 1}\sin\Omega_0 t\sin\omega t - a\sqrt{\frac{I_3}{I_2} - 1}\cos\Omega_0 t\cos\omega t,$$

$$n_{3X} = -\frac{a}{2}\left(\sqrt{\frac{I_3}{I_1} - 1} + \sqrt{\frac{I_3}{I_2} - 1}\right)\cos[(\Omega_0 + \omega)t] +$$

类似地,

$$\frac{a}{2}\left(\sqrt{\frac{I_3}{I_1} - 1} - \sqrt{\frac{I_3}{I_2} - 1}\right)\cos[(\Omega_0 + \omega)t] +$$

$$E=\frac{mv^2}{2}-\frac{m}{2}(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})^2+U. \tag{39.11}$$

应该注意，能量中没有速度的线性项. 参考系的转动导致能量中出现仅依赖于质点坐标且正比于速度平方的附加项. 这个附加势能 $-(m/2)(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})^2$ 称为离心势能.

质点相对匀速转动参考系的速度 $\boldsymbol{v}$ 与相对惯性参考系 K_0 的速度 $\boldsymbol{v}_0$ 的关系为

$$\boldsymbol{v}_0=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}. \tag{39.12}$$

所以质点在参考系 K 中的动量 $\boldsymbol{p}$（参见(39.10)）等于质点在惯性参考系 K_0 中的动量 $\boldsymbol{p}_0=m\boldsymbol{v}_0$. 同时相应的角动量 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{M}_0=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}_0$ 也相等. 但质点在参考系 K 和 K_0 中的能量不同. 由(39.12)求出 $\boldsymbol{v}$ 代入(39.11)，可得

$$E=\frac{mv_0^2}{2}-m\boldsymbol{v}_0\cdot(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})+U=\frac{mv_0^2}{2}+U-m(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}_0)\cdot\boldsymbol{\Omega}.$$

前两项是质点在惯性参考系 K_0 中的能量 E_0. 在最后一项中代入角动量，可得

$$E=E_0-\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{\Omega}. \tag{39.13}$$

这个公式确定了转换到匀速转动参考系时的能量的变换规律. 虽然推导是对一个质点的情况进行的，但是可以直接推广到任意质点系，并得到相同的公式(39.13).

习　题

习题 1　试求地球自转（转动角速度很小）引起自由落体对竖直方向的偏移.

解：在重力场中 $U=-m\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{r}$，其中 $\boldsymbol{g}$ 是重力加速度，在公式(39.9)中忽略包含 $\boldsymbol{\Omega}$ 的平方的离心力，可得运动方程

$$\dot{\boldsymbol{v}}=2\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{g}. \tag{1}$$

可用逐阶近似法求解这个方程. 为此假设 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$，其中 $\boldsymbol{v}_1$ 是方程 $\dot{\boldsymbol{v}}_1=\boldsymbol{g}$ 的解，即 $\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{g}t+\boldsymbol{v}_0$（$\boldsymbol{v}_0$ 是初始速度）. 将 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$ 代入(1)并仅将 $\boldsymbol{v}_1$ 留在右端，可得 $\boldsymbol{v}_2$ 的方程

$$\dot{\boldsymbol{v}}_2=2\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{\Omega}=2t(\boldsymbol{g}\times\boldsymbol{\Omega})+2\boldsymbol{v}_0\times\boldsymbol{\Omega}.$$

积分得

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{h}+\boldsymbol{v}_0t+\frac{\boldsymbol{g}t^2}{2}+\frac{t^3}{3}(\boldsymbol{g}\times\boldsymbol{\Omega})+t^2(\boldsymbol{v}_0\times\boldsymbol{\Omega}), \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{h}$ 是质点的初始位置矢量.

取 z 轴竖直向上，x 轴沿着经线

$$x=0,\quad y=-\frac{t^3}{3}g\Omega\cos\lambda.$$

代入下落时间 $t\approx\sqrt{2h/g}$，最后得

$$x=0,\quad y=-\frac{1}{3}\left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2}g\Omega\cos\lambda$$

y 值为负表示向东偏移.

习题 2　试求以初始速度 v_0 从地球表面向上抛出的质点的轨迹对平面的偏移.

解：设初始速度 v_0 位于 xz 平面内，初始高度为 $h=0$. 由方程(2)(习题 1)可得侧向偏移为

$$y=-\frac{t^3}{3}g\Omega_x+t^2(\Omega_x v_{0z}-\Omega_z v_{0x}),$$

或者，代入飞行时间 $t\approx 2v_{0z}/g$ 有

$$y=\frac{4v_{0z}^2}{g^2}\left(\frac{1}{3}v_{0z}\Omega_x-v_{0x}\Omega_z\right).$$

习题 3　试确定地球转动对单摆微振动的影响(傅科摆问题).

解：忽略摆的竖直方向位移这个二阶小量，可以认为运动在水平的 xy 平面内. 略去包含 Ω^2 的项，写出运动方程为

$$\ddot{x}+\omega^2 x=2\Omega_z\dot{y},\quad \ddot{y}+\omega^2 y=-2\Omega_z\dot{x},$$

其中 ω 为不考虑地球转动时摆的振动频率. 将第二个方程乘以 i 加上第一个方程，可得关于复变量 $\xi=x+\mathrm{i}y$ 的单一方程

$$\ddot{\xi}+2\mathrm{i}\Omega_z\dot{\xi}+\omega^2\xi=0.$$

当 $\Omega_z\ll\omega$ 时这个方程的解有如下形式：

$$\xi=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega_z t}(A_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}+A_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t})$$

或者

$$x+\mathrm{i}y=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega_z t}(x_0+\mathrm{i}y_0),$$

其中函数 $x_0(t)$，$y_0(t)$ 给出不考虑地球转动时单摆的轨迹. 因此，地球转动的影响是使轨迹绕竖直方向以角速度 Ω_z 转动.

由此可得拉格朗日函数和哈密顿函数对参数 λ 的偏导数之间的关系

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)_{p,q} = -\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right)_{\dot{q},q}, \tag{40.6}$$

导数的下标表示，在对 H 求 λ 的偏导时 p,q 是不变的，对 L 求 λ 的偏导时 $q,\dot{q}$ 是不变的.

这个结果可以表示为另一种形式. 设拉格朗日函数的形式为 $L = L_0 + L'$，其中 L' 是对函数 L_0 很小的修正. 哈密顿函数 $H = H_0 + H'$ 的相应附加项与 L' 的关系为

$$(H')_{p,q} = -(L')_{\dot{q},q}. \tag{40.7}$$

应该注意到，在从(40.1)到(40.3)的变换中，我们没有写出带 $\mathrm{d}t$ 的项，即没有考虑拉格朗日函数可能显含时间的情况. 这是因为在那里时间仅仅是一个参数，不参与所做的变换. 类似于公式(40.6)，拉格朗日函数和哈密顿函数对时间的偏导数之间的关系为

$$\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_{p,q} = -\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)_{\dot{q},q}. \tag{40.8}$$

习　题

习题 1　试求在笛卡儿坐标、柱坐标和球坐标下一个质点的哈密顿函数.

答案：在笛卡儿坐标 x,y,z 下

$$H=\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)+U(x,y,z).$$

在柱坐标 r,φ,z 下

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\varphi^2}{r^2}+p_z^2\right)+U(r,\varphi,z).$$

在球坐标 r,θ,φ 下

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}+\frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right)+U(r,\theta,\varphi).$$

习题 2　试求质点在匀速转动参考系中的哈密顿函数.

解：用(39.10)的动量 $\boldsymbol{p}$ 表示能量(39.11)中的速度 $\boldsymbol{v}$，有

$$H=\frac{p^2}{2m}-\boldsymbol{\Omega}\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})+U.$$

习题 3　设有一个由

于是用哈密顿－雅可比方法求解力学系统的运动问题按如下步骤进行.根据哈密顿函数写出哈密顿－雅可比方程,并求该方程的全积分(47.2).将它对常数 α 求偏导数并使之等于新的常数 β,可得 s 个代数方程

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i}=\beta_i. \tag{47.4}$$

求解这些代数方程得到 q 作为时间和 $2s$ 个任意常数的函数.然后由方程 $p_i=\partial S/\partial q_i$ 可以求得动量对时间的依赖关系.

如果哈密顿－雅可比方程有非全积分,它依赖于少于 s 个任意常数,则尽管不能由它求出运动方程的通积分,但是可以用来简化求通积分的过程.例如,如果已知包含一个任意常数 α 的函数 S,则关系

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha}=\text{const}$$

给出一个关于 $q_1,\cdots,q_s$ 和 t 的方程.

如果函数 H 不显含时间,即如果系统是保守的,哈密顿－雅可比方程有更简单的形式.这时作用量对时间的依赖关系归结为加上 $-Et$:

$$S=S_0(q)-Et \tag{47.5}$$

(参见§44),代入(47.1)可得简约作用量 $S_0(q)$ 的如下形式的哈密顿－雅可比方程

$$H\left(q_1,\cdots,q_s;\frac{\partial S_0}{\partial q_1},\cdots,\frac{\partial S_0}{\partial q_s}\right)=E. \tag{47.6}$$

§48 分离变量

在一些重要的情况下,哈密顿－雅可比方程的全积分可以通过分离变量的方法求得,该方法的实质如下.

假设某一个坐标,例如用 q_1 表示,与相应的导数 $\partial S/\partial q_1$,在哈密顿－雅可比方程中仅以某种组合 $\varphi(q_1,\partial S/\partial q_1)$ 的方式出现,该组合中不包含其它坐标,时间及其导数,即方程的形式为

$$\Phi\left\{q_i,t,\frac{\partial S}{\partial q_i},\frac{\partial S}{\partial t},\varphi\left(q_1,\frac{\partial S}{\partial q_1}\right)\right\}=0, \tag{48.1}$$

其中 q_i 表示除了 q_1 之外的所有坐标.

我们寻找以下和形式的解:

$$S=S'(q_i,t)+S_1(q_1). \tag{48.2}$$

将这个表达式代入(48.1),可得

$$\Phi\left\{q_i,t,\frac{\partial S'}{\partial q_i},\frac{\partial S'}{\partial t},\varphi\left(q_1,\frac{\partial S_1}{\partial q_1}\right)\right\}=0. \tag{48.3}$$

假设解(48.2)已经得到,那么代入(48.3)后应该使该方程成为恒等式,而这个恒等式(特别是)对于坐标 q_1 的任意值都成立.在 q_1 改变时只有函数 φ 发生变化,所以(48.3)是恒等式要求 φ 是常数.于是,方程(48.3)分成两个方程:

$$\varphi\left(q_1, \frac{\partial S_1}{\partial q_1}\right) = \alpha_1, \tag{48.4}$$

$$\Phi\left\{q_i, t, \frac{\partial S'}{\partial q_i}, \frac{\partial S'}{\partial t}, \alpha_1\right\} = 0, \tag{48.5}$$

其中 α_1 是任意常数.上面第一个是常微分方程,由此方程通过简单的积分可以求出函数 $S_1(q_1)$.还剩下偏微分方程(48.5),但是它的独立变量数目减少了.

如果用这样的方法可以相继地分离所有 s 个坐标和时间,则求哈密顿-雅可比方程的全积分就约化为求积分了.对于保守系统实际上只需要分离方程(47.6)中的 s 个变量(坐标),在完全分离的情况下,方程的全积分写成

$$S = \sum_k S_k(q_k; \alpha_1, \cdots, \alpha_s) - E(\alpha_1, \cdots, \alpha_s)t, \tag{48.6}$$

其中每个 S_k 都只是一个坐标的函数,而能量 E 是任意常数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 的函数,可以通过将 $S_0 = \sum S_k$ 代入方程(47.6)求得.

一个特殊情况是循环变量的分离.循环坐标 q_1 不显含于哈密顿函数,所以也不显含于哈密顿-雅可比方程中.此时函数 $\varphi(q_1, \partial S/\partial q_1)$ 约化为 $\partial S/\partial q_1$,由方程(48.4)可求得 $S_1 = \alpha_1 q_1$,因此

$$S = S'(q_i, t) + \alpha_1 q_1. \tag{48.7}$$

常数 α_1 正是相应于循环坐标的常值动量 $p_1 = \partial S/\partial q_1$.对于一个保守系统而言,$-Et$ 这一项中出现时间 t 相应于对"循环变量" t 的分离.

由此可见,在哈密顿-雅可比方程中分离变量的方法,包括了所有以前研究过的基于循环坐标简化运动方程积分的情况.现在还可以补充一些坐标为非循环坐标,但仍可能分离变量的情况.这一切都表明,哈密顿-雅可比方法是求运动方程通积分的最有力的方法.

为了在哈密顿-雅可比方程中分离变量,适当选择坐标非常关键.我们来看几个在不同坐标下分离变量的例子,它们与质点在各种外场中运动的问题相关,可能具有物理意义.

1. 球坐标.用坐标 (r, θ, φ) 写出的哈密顿函数

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2\theta}\right) + U(r, \theta, \varphi),$$

如果

物理意义，因此，我们取下列形式的场

$$U=a(r)+\frac{b(\theta)}{r^2}. \tag{48.8}$$

在这种情况下对于函数 S_0 的哈密顿－雅可比方程为

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_0}{\partial r}\right)^2+a(r)+\frac{1}{2mr^2}\left[\left(\frac{\partial S_0}{\partial \theta}\right)^2+2mb(\theta)\right]+\frac{1}{2mr^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial S_0}{\partial \varphi}\right)^2=E.$$

考虑到 φ 是循环坐标，求以下形式的解

$$S_0=p_\varphi\varphi+S_1(r)+S_2(\theta),$$

对于函数 $S_1(r)$ 和 $S_2(\theta)$ 有方程

$$\left(\frac{\mathrm{d}S_2}{\mathrm{d}\theta}\right)^2+2mb(\theta)+\frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}=\beta,$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}S_1}{\mathrm{d}r}\right)^2+a(r)+\frac{\beta}{2mr^2}=E.$$

积分可得

$$S=-Et+p_\varphi\varphi+\int\sqrt{\beta-2mb(\theta)-\frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}}\mathrm{d}\theta+\int\sqrt{2m[E-a(r)]-\frac{\beta}{r^2}}\mathrm{d}r. \tag{48.9}$$

p_φ,β,E 是任意积分常数，将上式对这 3 个任意常数求导并使之等于新常数，即可给出运动方程的通解.

2. 抛物线坐标

从柱坐标(用 ρ,φ,z 表示)到抛物线坐标 ξ,η,φ 的变换公式为

$$z=\frac{1}{2}(\xi-\eta),\quad \rho=\sqrt{\xi\eta}. \tag{48.10}$$

坐标 ξ 和 η 取值范围是从零到 ∞，容易证实，ξ 和 η 为常数的曲面是两族旋转抛物面(以 z 轴为对称轴). 引入球坐标中的半径

$$r=\sqrt{z^2+\rho^2}=\frac{1}{2}(\xi+\eta), \tag{48.11}$$

关系式(48.10)也可以写成另外一种形式

$$\xi=r+z,\quad \eta=r-z. \tag{48.12}$$

下面我们用坐标 ξ,η,φ 写出质点的拉格朗日函数. 将(48.10)对时间求导并代入用柱坐标表示的拉格朗日函数

$$L=\frac{m}{2}(\dot\rho^2+\rho^2\dot\varphi^2+\dot z^2)-U(\rho,\varphi,z)$$

得

$$\omega_1 n_1 - \omega_2 n_2 \tag{52.14}$$

尽管不是单值的，但是多值性仅归结为增加 2π 的任意整数倍．所以只要取这些量的三角函数就可以得到新的单值运动积分．

在场 $U=-\alpha/r$ 中的运动（见本节习题）就是简并运动的例子．正是存在简并导致系统出现新的为此场所特有的单值运动积分(15.17)，而系统的两个（因为运动是二维平面运动）通常的单值运动积分，即角动量 M 和能量 E，是任何有心力场中的运动都有的．

我们也应该注意到，出现附加单值积分反过来使简并运动具有一个特性：简并运动允许不只是在一种确定的坐标选择下，而是在多种不同的坐标选择下可以完全分离变量①．事实上，用可以分离变量的坐标表示的 I_i 是单值运动积分．但是存在运动简并时，单值运动积分数大于 s，所以所需 I_i 的选择不是唯一的．

仍以开普勒运动为例，它在球坐标和抛物线坐标下都可以分离变量．

在§49已经证明，在一维有限运动中作用变量是浸渐不变量．对于多自由度系统这个结论也正确．直接推广§51开始介绍的方法就可以在一般情况下给予证明．

对于含可变参数 $\lambda(t)$ 的多维系统，用正则变量 I, w 写出的运动方程，给出类似于(50.10)的每个作用变量 I_i 的变化率表达式

$$\dot{I}_i = -\frac{\partial \Lambda}{\partial w_i}\dot{\lambda}, \tag{52.15}$$

其中，与前面一样，$\Lambda=(\partial S_0/\partial\lambda)_I$．对这个方程的平均化应该在这样的时间间隔内进行，它比系统的基本周期长，但比参数 $\lambda(t)$ 变化的时间短．这时 $\dot{\lambda}$ 可以移到平均符号之外，因而变为对导数 $\partial\Lambda/\partial w_i$ 求平均，这如同 λ 是常数时发生的运动，是条件周期运动．这样 Λ 就是角变量 w_i 的单值周期函数，$\partial\Lambda/\partial w_i$ 的平均值等于零．

最后我们对多自由度(s)封闭系统有限运动在一般情况下的性质作几点简短的讨论，这时不假设哈密顿－雅可比方程可以分离变量．

数目等于自由度的运动积分 I_i 的单值性是可分离变量系统的基本性质．然而，在系统不能分离变量的一般情况下，单值运动积分只包括那些反映空间、时间的均匀性和各向同性的不变的量，即单值运动积分就是能量守恒、动量守恒和角动量守恒．

系统的相轨道通过相空间中由单值运动积分的给定常数值所确定的区域．对于可分离变量的系统，s 个单值运动积分确定了相空间中的 s 维流形（超曲面）．在足够长的时间内，系统的相轨道无限稠密地覆盖这个超曲面．

① 这时我们不考虑形如 $q_1'=q_1'(q_2), q_2'=q_2'(q_1)$ 的简单变换．