朗道-栗弗席兹《理论物理学教程第二卷·场论》勘误说明

朗道集结号　2019年2月26日

说明：此勘误针对朗道-栗弗席兹《场论》2018年3月第5次印刷版本的勘误。v5指的是针对第5次印刷版发布的勘误。此前《场论》在第2次印刷前对第一次印刷版本发布过一次勘误v1，附在勘误v5后面。《场论》的第3、4次印刷未进行过勘误，所以并没有v2、v3、v4版本，敬请知悉。

特别鸣谢发来勘误的广大读者

欢迎读者补充勘误，让译本精益求精。联系小编：微博、微信：朗道集结号（微信号：ldjjhwx），读者qq群：331964842，加群请注明：“朗道集结号”或“读者”，小编即群主。



沿一闭合超曲面的积分可以变换到沿包含在它里面的四维体积的积分，办法是用算符

$$\mathrm{d}S_i \to \mathrm{d}\Omega \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{6.14}$$

代替积分元 $\mathrm{d}S_i$. 例如，对于矢量 A^i 的积分，我们有：

$$\oint A^i \mathrm{d}S_i = \int \frac{\partial A^i}{\partial x^i} \mathrm{d}\Omega. \tag{6.15}$$

这个公式是高斯定理的推广.

沿一个二维曲面的积分可以变换为“包含”它的超曲面的积分，办法是用算符

$$\mathrm{d}f^*_{ik} \to \mathrm{d}S_i \frac{\partial}{\partial x^k} - \mathrm{d}S_k \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{6.16}$$

代替积分元 $\mathrm{d}f^*_{ik}$. 例如，对于反对称张量 A^{ik} 的积分，我们有：

$$\frac{1}{2}\oint A^{ik}\mathrm{d}f^*_{ik} = \frac{1}{2}\int \left(\mathrm{d}S_i \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^k} - \mathrm{d}S_k \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^i}\right) = \int \mathrm{d}S_i \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^k}. \tag{6.17}$$

沿一条四维闭合曲线的积分可以通过代换：

$$\mathrm{d}x^i \to \mathrm{d}f^{ki} \frac{\partial}{\partial x^k}. \tag{6.18}$$

变换为“包含”它的曲面的积分. 因此，对于一个矢量的积分，我们有：

$$\oint A_i \mathrm{d}x^i = \int \mathrm{d}f^{ki} \frac{\partial A_i}{\partial x^k} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}f^{ki}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\right), \tag{6.19}$$

这是斯托克斯定理的推广.

习　题

1. 求一个对称四维张量 A^{ik} 的分量在洛伦兹变换 (6.1) 下的变换法则.

解：将该张量的分量看做两个四维矢量分量的乘积，我们得到：

$$A^{00} = \frac{1}{1-\dfrac{V^2}{c^2}}\left(A'^{00} + 2\frac{V}{c}A'^{01} + \frac{V^2}{c^2}A'^{11}\right),$$

对于 $t=0$ 令 $v=0$，我们得到 $\text{const}=0$，所以

$$v=\frac{wt}{\sqrt{1+\dfrac{w^2t^2}{c^2}}}$$

再积分一次并对 $t=0$ 令 $x=0$，我们得到：

$$x=\frac{c^2}{w}\left(\sqrt{1+\frac{w^2t^2}{c^2}}-1\right).$$

对于 $wt\ll c$，这些公式过渡到经典表达式 $v=wt$，$x=wt^2/2$. 对于 $wt\to\infty$，速度趋于恒定值 c.

一个匀加速粒子的固有时由如下积分给出

$$\int_0^t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\mathrm{d}t=\frac{c}{w}\operatorname{arsinh}\frac{wt}{c}.$$

当 $t\to\infty$ 时，按照规律 $\dfrac{c}{w}\ln\dfrac{2wt}{c}$，它比 t 增加慢得多.

在第二项中，我们应当取它在积分限上的值. 坐标的积分限是在无穷远处，在无穷远处的场为零. 在时间的积分限上，就是在给定的初时刻与末时刻，势的变分为零，因为按照最小作用量原理的意思，势在这两个时刻是给定的. 因此，(30.1) 式中的第二项为零，从而我们得到

$$\int \left(\frac{1}{c}j^i + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k}\right)\delta A_i \mathrm{d}\Omega = 0.$$

因为按照最小作用量原理，变分 δA_i 是任意的，所以 δA_i 的系数应当等于零：

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c}j^i. \tag{30.2}$$

现在我们把这四个方程 ($i = 0, 1, 2, 3$) 写为三维形式. 第一个方程 ($i = 1$) 是

$$\frac{1}{c}\frac{\partial F^{10}}{\partial t} + \frac{\partial F^{11}}{\partial x} + \frac{\partial F^{12}}{\partial y} + \frac{\partial F^{13}}{\partial z} = -\frac{4\pi}{c}j^1.$$

将 F^{ik} 的分量值代入，我们得到

$$\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} - \frac{\partial H_z}{\partial y} + \frac{\partial H_y}{\partial z} = -\frac{4\pi}{c}j_x.$$

这个方程连同 $i = 2, 3$ 的两个方程可以写成一个矢量方程：

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}. \tag{30.3}$$

最后，第四个方程 ($i = 0$) 是

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = 4\pi\rho. \tag{30.4}$$

方程 (30.3) 及 (30.4) 是用矢量形式写成的第二对麦克斯韦方程[①]. 和第一对麦克斯韦方程一起，它们完全确定了电磁场. 它们是电磁场理论，或如通常所说，是**电动力学**的基本方程.

现在我们来将这些方程写成积分形式. 在某一个体积上积分 (30.4)，应用高斯定理

$$\int \mathrm{div}\,\boldsymbol{E}\mathrm{d}V = \oint \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{f},$$

我们得到

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{f} = 4\pi\int \rho\mathrm{d}V. \tag{30.5}$$

因此，电场通过一个封闭曲面的通量等于 4π 乘曲面所包围的体积内的总电荷.

① 适用于真空中电磁场内的一个点电荷的麦克斯韦方程组的形式是由 H.A. 洛伦兹给出的.

在一个非封闭曲面上积分（30.3）并应用斯托克斯定理

$$\int \operatorname{rot} \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{f} = \oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l},$$

我们得到

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{f} + \frac{4\pi}{c}\int \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{f}. \tag{30.6}$$

我们称

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{30.7}$$

这个量为**位移电流**. 从（30.6）的如下形式：

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \frac{4\pi}{c}\int \left(\boldsymbol{j} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{f}, \tag{30.8}$$

我们知道，磁场绕着任何回路的环流等于穿过此回路所包围之曲面的真实电流与位移电流之和乘 $4\pi/c$.

从麦克斯韦方程组，我们可以得到已经知道的连续性方程（29.3）. 取（30.3）式两边的散度，我们得到

$$\operatorname{div}\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div} \boldsymbol{E} + \frac{4\pi}{c}\operatorname{div} \boldsymbol{j}.$$

但是按照（30.4）式，$\operatorname{div}\operatorname{rot} \boldsymbol{H} \equiv 0$，而 $\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 4\pi\rho$. 因此我们又重新得到了方程（29.3）. 在四维形式中，从（30.2）式我们可得到

$$\frac{\partial^2 F^{ik}}{\partial x^i \partial x^k} = -\frac{4\pi}{c}\frac{\partial j^i}{\partial x^i}.$$

但是由于算符 $\partial^2/\partial x^i \partial x^k$ 对于指标 i 和 k 的对称性，它作用于反对称张量 F^{ik} 时将得到恒为零的结果，于是我们得到四维形式的连续性方程（29.4）.

§31　能量密度和能流

我们用 $\boldsymbol{E}$ 乘（30.3）式的两边，用 $\boldsymbol{H}$ 乘（26.1）式的两边，再将所得的方程相加，可得

$$\frac{1}{c}\boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{1}{c}H \cdot \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E} - (\boldsymbol{H} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{E} - \boldsymbol{E} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{H}).$$

应用众所周知的矢量分析公式

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{b},$$

我们改写这个方程如下：

$$\frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}(E^2 + H^2) = -\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E} - \operatorname{div}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}),$$

（求和遍及所有电荷）；式中，$\boldsymbol{R}_0-\boldsymbol{r}_a$ 是从电荷 e_a 到我们正在求势那一点的径矢.

我们必须对大的 $\boldsymbol{R}_0(\boldsymbol{R}_0\gg\boldsymbol{r}_a)$ 来研究这个表达式. 为此，我们将它展开为 $\boldsymbol{r}_a/R_0$ 的幂级数，利用公式

$$f(\boldsymbol{R}_0-\boldsymbol{r})=f(\boldsymbol{R}_0)-\boldsymbol{r}\cdot\operatorname{grad}f(\boldsymbol{R}_0)$$

（梯度符号 grad 是对矢量 $\boldsymbol{R}_0$ 的端点坐标进行微分）. 准确到一级项，

$$\varphi=\frac{\sum e_a}{R_0}-\sum e_a\boldsymbol{r}_a\cdot\operatorname{grad}\frac{1}{R_0}. \tag{40.2}$$

我们称

$$\boldsymbol{d}=\sum e_a\boldsymbol{r}_a \tag{40.3}$$

为电荷体系的**偶极矩**，应该注意，如果所有的电荷之和为零，即 $\sum e_a=0$，那么，偶极矩就与坐标原点的选择无关，因为同一个电荷在两个不同的坐标系中的径矢 $\boldsymbol{r}_a$ 及 $\boldsymbol{r}'_a$ 有下面的关系：

$$\boldsymbol{r}'_a=\boldsymbol{r}_a+\boldsymbol{a},$$

式中，$\boldsymbol{a}$ 是一个常矢量. 因此，如果 $\sum e_a=0$，偶极矩在两个坐标系中是相等的：

$$\boldsymbol{d}'=\sum e_a\boldsymbol{r}'_a=\sum e_a\boldsymbol{r}_a+\boldsymbol{a}\sum e_a=\boldsymbol{d}.$$

如果我们用 $e_a^+,\boldsymbol{r}_a^+$ 和 $-e_a^-,\boldsymbol{r}_a^-$ 代表这个体系的正电荷和负电荷以及它们的径矢，那么，我们可以将偶极矩写成

$$\boldsymbol{d}=\sum e_a^+\boldsymbol{r}_a^+-\sum e_a^-\boldsymbol{r}_a^-=\boldsymbol{R}^+\sum e_a^+-\boldsymbol{R}^-\sum e_a^-, \tag{40.4}$$

式中，

$$\boldsymbol{R}^+=\frac{\sum e_a^+\boldsymbol{r}_a^+}{\sum e_a^+},\quad \boldsymbol{R}^-=\frac{\sum e_a^-\boldsymbol{r}_a^-}{\sum e_a^-} \tag{40.5}$$

是正电荷及负电荷的“电荷中心”的径矢. 如果 $\sum e_a^+=\sum e_a^-=e$，那么，

$$\boldsymbol{d}=e\boldsymbol{R}_{+-}, \tag{40.6}$$

式中，$\boldsymbol{R}_{+-}=\boldsymbol{R}^+-\boldsymbol{R}^-$ 是从正电荷中心到负电荷中心的径矢. 就特殊情形言之，如果只有两个电荷，那么，$\boldsymbol{R}_{+-}$ 就是这两个电荷间的径矢.

如果 $\sum e_a=0$，那么，这个体系在远距离处的场的势是：

$$\phi=-\boldsymbol{d}\cdot\nabla\frac{1}{R_0}=\frac{\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{R}_0}{R_0^3}. \tag{40.7}$$

有显著的变化. 根据 (58.1) 式，我们现在可以说这样的波的“非单色性” $\Delta\omega$ 不能小于 $1/\Delta t$（大一些当然是可以的）：

$$\Delta\omega \gtrsim \frac{1}{\Delta t}. \tag{58.3}$$

同样，如果 Δx，Δy，Δz 是波在空间延展的数量级，那么，对于在波的分解中的波矢分量值的分布，我们得到

$$\Delta k_x \gtrsim \frac{1}{\Delta x}, \quad \Delta k_y \gtrsim \frac{1}{\Delta y}, \quad \Delta k_z \gtrsim \frac{1}{\Delta z}. \tag{58.4}$$

从这些公式可以断定，如果光束有有限的宽度，那么，在这样的光束中，光的传播方向不可能严格不变. 取光束中光的（平均）方向作为 x 轴，我们得到

$$\theta_y \gtrsim \frac{1}{k\Delta y} \sim \frac{\lambda}{\Delta y}, \tag{58.5}$$

式中，θ_y 是光束在 xy 平面内对其平均方向偏差的数量级，λ 是波长.

另一方面，公式 (58.5) 回答了光学成像清晰度的极限问题. 按照几何光学，一束光束的所有光线都应相交在一点，而在实际上，所得的像并不是一个几何点，而是形成一个斑点. 按照 (58.5) 式，我们得到这个斑点的宽度 Δ

$$\Delta \sim \frac{1}{k\theta} \sim \frac{\lambda}{\theta}, \tag{58.6}$$

其中，θ 是光束的张角. 这些公式不但可以应用到像上，而且也可以应用到物上. 就是说，我们可以断定，在观察从一个发光点出射的光束时，不可能区别这个点与一个大小为 λ/θ 的物体. 相应地，公式 (58.6) 决定显微镜的**分辨能力**的极限. Δ 的最小值是 λ（在 $\theta \sim 1$ 时达到），这与如下事实完全符合，即几何光学的极限是由光波的波长决定的.

习　　题

求一个与光阑相距 l 的平行光束所产生的光束的最小宽度的数量级.

解：设在光阑上的孔径为 d，从 (58.5) 得到光束的偏转角（“衍射角”）为 λ/d，从而得到光束宽度的数量级为 $d + (\lambda/d)l$. 这个量的最小值 $\sim \sqrt{\lambda l}$.

根号延长，l在根号里面

§59　衍射

几何光学定律只有在波长可以看做无限小的理想情况下才是严格正确的. 这个条件满足得愈不好，与几何光学的偏差就愈大. 由这种差异所导致的现象被称为**衍射现象**.

利用 $\dot{x}_n = -\mathrm{i}\omega_0 n x_n, \dot{y}_n = -\mathrm{i}\omega_0 n y_n$，计算速度的傅里叶分量，这比求坐标的傅里叶分量更便利些. 我们有

$$x_n = \frac{\dot{x}_n}{-\mathrm{i}\omega_0 n} = \frac{\mathrm{i}}{\omega_0 nT}\int_0^T \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 nt}\dot{x}\mathrm{d}t.$$

但是 $\dot{x}\mathrm{d}t = \mathrm{d}x = -a\sin\xi\mathrm{d}\xi$；因此，将对 $\mathrm{d}t$ 的积分变为对 $\mathrm{d}\xi$ 的积分，我们就有

$$x_n = -\frac{\mathrm{i}a}{2\pi n}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n(\xi-\varepsilon\sin\xi)}\sin\xi\mathrm{d}\xi.$$

同样，我们可求得

$$y_n = \frac{\mathrm{i}a\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2\pi n}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n(\xi-\varepsilon\sin\xi)}\cos\xi\mathrm{d}\xi = \frac{\mathrm{i}a\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2\pi n\varepsilon}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n(\xi-\varepsilon\sin\xi)}\mathrm{d}\xi$$

（在从第一个积分变到第二个积分时，我们在被积函数中写了 $\cos\xi \equiv \left(\cos\xi - \frac{1}{\varepsilon}\right) + \frac{1}{\varepsilon}$；这时，出现了 $\cos\xi - \frac{1}{\varepsilon}$ 的积分，而它恒等于零）. 最后利用贝塞尔函数的理论，我们有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n\xi - x\sin\xi)}\mathrm{d}\xi = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\xi - x\sin\xi)\mathrm{d}\xi = \mathrm{J}_n(x), \tag{70.6}$$

式中，$\mathrm{J}_n(x)$ 是整数 n 阶的贝塞尔函数. 结果得到所求的傅里叶分量的如下表达式：

$$x_n = \frac{a}{n}\mathrm{J}'_n(n\varepsilon), \quad y_n = \frac{\mathrm{i}a\sqrt{1-\varepsilon^2}}{n\varepsilon}\mathrm{J}_n(n\varepsilon) \tag{70.7}$$

（贝塞尔函数上面的一撇表示对函数自变量微分）.

辐射的单色分量强度的表达式可以通过将 x_n 和 y_n 代入如下公式中得到：

$$I_n = \frac{4\omega_0^4 n^4}{3c^3}\mu^2\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2(|x_n|^2 + |y_n|^2)$$

（参见（67.11））. 利用粒子的特征量来表示 a 和 ω_0，最后我们得到：

$$I_n = \frac{64n^2\mathscr{E}^4}{3c^3\alpha^2}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2\left[\mathrm{J}'^2_n(n\varepsilon) + \frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon^2}\mathrm{J}^2_n(n\varepsilon)\right]. \tag{70.8}$$

作为特例，下面我们写出在轨道接近抛物线的运动中（ε 接近 1）非常高次谐波（n 很大）强度的渐近公式. 为此目的，我们用公式

$$\mathrm{J}_n(n\varepsilon) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2}{n}\right)^{1/3}\Phi\left[\left(\frac{n}{2}\right)^{2/3}(1-\varepsilon^2)\right], \tag{70.9}$$
$$n \gg 1, \quad 1-\varepsilon \ll 1,$$

多. 但是在电荷体系的偶极矩为零，以至偶极辐射不发生的情形下，它们就很重要了.

将 (66.2)，即

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{cR_0}\int \boldsymbol{j}_{t'+\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{c}}\,\mathrm{d}V,$$

中的被积函数展开为 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}/c$ 的幂级数，准确到一阶项，我们得到

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{cR_0}\int \boldsymbol{j}_{t'}\,\mathrm{d}V+\frac{1}{c^2R_0}\frac{\partial}{\partial t'}\int(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{j}_{t'}\,\mathrm{d}V.$$

将 $\boldsymbol{j}=\rho\boldsymbol{v}$ 代入，并改变到点电荷模型，我们得到：

$$\boldsymbol{A}=\frac{\sum e\boldsymbol{v}}{cR_0}+\frac{1}{c^2R_0}\frac{\partial}{\partial t}\sum e\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}). \tag{71.1}$$

(从现在起，我们像在 §67 一样，在所有量中略去指标 t').

在右边的第二个求和中，我们可以写

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n})&=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{r}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r})+\frac{1}{2}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r})-\frac{1}{2}\boldsymbol{r}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})\\&=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{r}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r})+\frac{1}{2}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{n}.\end{aligned}$$

于是，我们求得 $\boldsymbol{A}$ 的表达式

$$\boldsymbol{A}=\frac{\dot{\boldsymbol{d}}}{cR_0}+\frac{1}{2c^2R_0}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum e\boldsymbol{r}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r})+\frac{1}{cR_0}(\dot{\mathfrak{m}}\times\boldsymbol{n}), \tag{71.2}$$

式中，$\boldsymbol{d}$ 是这个体系的偶极矩，而 $\mathfrak{m}=\frac{1}{2c}\sum e\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}$ 则是体系的磁矩. 为了作更进一步的变换，我们注意到，将与 $\boldsymbol{n}$ 成比例的任意矢量加到 $\boldsymbol{A}$ 上并不改变场，因为按照公式 (66.3)，$\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 并不因此而改变. 根据这个道理，我们可以将 (71.2) 换为

$$\boldsymbol{A}=\frac{\dot{\boldsymbol{d}}}{cR_0}+\frac{1}{6c^2R_0}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum e[3\boldsymbol{r}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r})-\boldsymbol{n}r^2]+\frac{1}{cR_0}\dot{\mathfrak{m}}\times\boldsymbol{n}.$$

但是，在求和号后面的表达式正是矢量 $\boldsymbol{n}$ 和四极矩张量 $D_{\alpha\beta}=\sum e(3x_\alpha x_\beta-\delta_{\alpha\beta}r^2)$ 的积 $n_\beta D_{\alpha\beta}$ (参见 §41). 引入矢量 $\boldsymbol{D}$，其分量为 $D_\alpha=D_{\alpha\beta}n_\beta$，我们便得到矢势的最终表达式：

$$\boldsymbol{A}=\frac{\dot{\boldsymbol{d}}}{cR_0}+\frac{1}{6c^2R_0}\ddot{\boldsymbol{D}}+\frac{1}{cR_0}\dot{\mathfrak{m}}\times\boldsymbol{n}. \tag{71.3}$$

知道了 $\boldsymbol{A}$，利用一般公式 (66.3)，我们现在就可以确定辐射场 $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{E}$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}&=\frac{1}{c^2R_0}\left\{\ddot{\boldsymbol{d}}\times\boldsymbol{n}+\frac{1}{6c}\dddot{\boldsymbol{D}}\times\boldsymbol{n}+(\ddot{\mathfrak{m}}\times\boldsymbol{n})\times\boldsymbol{n}\right\},\\\boldsymbol{E}&=\frac{1}{c^2R_0}\left\{(\ddot{\boldsymbol{d}}\times\boldsymbol{n})\times\boldsymbol{n}+\frac{1}{6c}(\dddot{\boldsymbol{D}}\times\boldsymbol{n})\times\boldsymbol{n}+\boldsymbol{n}\times\ddot{\mathfrak{m}}\right\}.\end{aligned} \tag{71.4}$$

在接下来的一系列应用中，引入三维矢量 $\boldsymbol{g}$ 会带来一定的方便. 矢量 $\boldsymbol{g}$ 的协变分量由下式确定：

$$g_\alpha = -\frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}. \tag{84.11}$$

将 $\boldsymbol{g}$ 看做带有度规 (84.7) 的空间中的矢量，我们必须将它的逆变分量定义为 $g^\alpha = \gamma^{\alpha\beta} g_\beta$. 基于 (84.9) 和 (84.8) 的第二个等式容易看出，

$$g^\alpha = \gamma^{\alpha\beta} g_\beta = -g^{0\alpha}. \tag{84.12}$$

从 (84.8) 的第三个等式同样可以得到公式

$$g^{00} = \frac{1}{g_{00}} - g_\alpha g^\alpha. \tag{84.13}$$

现在我们再来讨论广义相对论中“同时”概念的定义，换句话说，我们讨论处于空间不同点的钟能否同步的问题，也就是这些钟的对时问题.

显然，这样的同步应该通过两点之间光信号的交换来实现. 我们再来考察两个无限接近的点 A 和 B 之间光信号的传播过程，如图 18 中所示. 位于 B 点的时钟记录了信号由 B 点出发时刻的读数和信号返回 B 点时刻的读数，我们必须认为这两个读数的中间值与信号到达 A 点的时刻 x^0 是同时的，该时刻为

$$x^0 + \Delta x^0 = x^0 + \frac{1}{2}(\mathrm{d}x^{0(2)} + \mathrm{d}x^{0(1)}).$$

将 (84.5) 代入上式，找到发生在两个无限接近的点的两个同时事件的“时间”x^0 值的差，具有下列形式，

$$\Delta x^0 = -\frac{g_{0\alpha}\mathrm{d}x^\alpha}{g_{00}} \equiv g_\alpha \mathrm{d}x^\alpha. \tag{84.14}$$

这个关系使我们能够在空间的任何无限小的体积内来校准钟. 从 A 点继续作类似的校准，我们可以沿任何（非闭合的）曲线校准不同的钟，也就是说我们能够确定事件的同时性①.

然而，一般来说，沿着某条闭合路径来校准时间是无法做到的. 事实上，沿着闭合路径行进，又回到原来出发的那一点，我们会得到一个不等于零的 Δx^0 值. 要在整个空间中统一地同步时间尤其是不可能的，只有在 $g_{0\alpha}$ 各量都为零的参考系中才是例外②.

① 给等式 (84.14) 乘以 g_{00} 并且将两个项移到等式的一边，可以将同步条件表示为 $\mathrm{d}x_0 = g_{0i}\mathrm{d}x^i = 0$：两个无限接近的同时发生的事件之间的“协变微分” $\mathrm{d}x_0$ 应该等于零.

② 这里还应该补充一种情况，就是当 $g_{0\alpha}$ 可以通过时间坐标的简单变换化为零，并且这种变换不能触及用于确定空间坐标的物体系统的选取.

（通过将 $g_{il}g^{lk}=\delta_l^k$ 微分而得到）. 最后我们指出，g^{ik} 的导数也可以用 Γ_{kl}^i 各量来表示，从恒等式 $g^{ik}{}_{;l}=0$ 直接得出

$$\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}=-\Gamma_{ml}^i g^{mk}-\Gamma_{ml}^k g^{im}. \tag{86.8}$$

将矢量的散度概念推广到曲线坐标中，并利用已经求出的公式，我们可以用便利的形式写出散度 $A_{;i}^i$ 的表达式. 利用（86.5）式，我们有，

$$A_{;i}^i=\frac{\partial A^i}{\partial x^i}+\Gamma_{li}^i A^l=\frac{\partial A^i}{\partial x^i}+A^l\frac{\partial \ln\sqrt{-g}}{\partial x^l},$$

或者，最终得到，

$$A_{;i}^i=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}A^i)}{\partial x^i}. \tag{86.9}$$

对于反对称张量 A^{ik} 的导数，我们可以推出类似的表达式. 从（85.12），我们有

$$A_{;k}^{ik}=\frac{\partial A^{ik}}{\partial x^k}+\Gamma_{mk}^i A^{mk}+\Gamma_{mk}^k A^{im}.$$

但是既然 $A^{mk}=-A^{km}$，所以

$$\Gamma_{mk}^i A^{mk}=-\Gamma_{km}^i A^{km}=0.$$

将 Γ_{mk}^k 用（86.5）式替换，结果我们得到

$$A_{;k}^{ik}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}A^{ik})}{\partial x^k}. \tag{86.10}$$

现在假设 A_{ik} 是对称张量；我们来计算它的混合分量 $A_{i;k}^k$ 的表达式. 我们有

$$A_{i;k}^k=\frac{\partial A_i^k}{\partial x^k}+\Gamma_{lk}^k A_i^l-\Gamma_{ik}^l A_l^k=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(A_i^k\sqrt{-g})}{\partial x^k}-\Gamma_{ki}^l A_l^k.$$

其中的最后一项等于

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\right)A^{kl}.$$

由于张量 A^{kl} 的对称性，括号内有两项互相抵消，于是留下

$$A_{i;k}^k=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}A_i^k)}{\partial x^k}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}A^{kl}. \tag{86.11}$$

在笛卡儿坐标中，$\dfrac{\partial A_i}{\partial x^k}-\dfrac{\partial A_k}{\partial x^i}$ 是一个反对称张量. 在曲线坐标中，这个

方程是 $\mathrm{d}u^i/\mathrm{d}s=0$ 或 $\mathrm{d}u^i=0$，此处的 $u^i=\mathrm{d}x^i/\mathrm{d}s$ 是四维速度. 显然，在曲线坐标中，这个方程可以推广为方程

$$\mathrm{D}u^i=0. \tag{87.2}$$

从矢量的协变微分的表达式（85.6）我们可得

$$\mathrm{d}u^i+\Gamma^i_{kl}u^k\mathrm{d}x^l=0.$$

用 $\mathrm{d}s$ 除这个方程，我们求得

$$\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}s^2}+\Gamma^i_{kl}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}s}=0. \tag{87.3}$$

这就是要求的运动方程. 我们看出，一个粒子在引力场中的运动取决于 Γ^i_{kl} 各量. 导数 $\mathrm{d}^2x^i/\mathrm{d}s^2$ 是粒子的四维加速度. 因此，我们可以称 $-m\Gamma^i_{kl}u^ku^l$ 这个量为“四维力”，这个力作用在位于引力场内的粒子上. 这时，张量 g_{ik} 起引力场的“势”的作用——它的导数决定场的“强度” Γ^i_{kl}①.

在 §85 中曾经展示，通过选择相应的坐标系，总是可以将任意指定的时空点上的所有 Γ^i_{kl} 归零. 现在我们可以看到，选择这样的局部惯性参考系意味着在指定的无限小的时空单元内消除引力场，而这种可能性就是相对论引力场论中等效原理的表达②.

引力场中粒子的四维动量还像以前那样定义：

$$p^i=mcu^i, \tag{87.4}$$

它的平方是

$$p_ip^i=m^2c^2. \tag{87.5}$$

用 $-\partial S/\partial x^i$ 代替 p_i，我们便得到粒子在引力场中的哈密顿–雅可比方程：

$$g^{ik}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^k}-m^2c^2=0. \tag{87.6}$$

① 同时我们给出通过四维加速度的协变分量表示的运动方程的形式. 从条件 $\mathrm{D}u_i=0$ 得出

$$\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}s}-\Gamma_{k,il}u^ku^l=0.$$

将（86.2）中的 $\Gamma_{k,il}$ 代入上式，两项相消，于是得到

$$\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}s}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}u^ku^l=0. \tag{87.3a}$$

② 在 §85 最后一个脚注中也提到选取“沿给定的世界线的惯性”参考系的可能性. 特殊情况下，如果这条线是时间坐标线（沿着它 $x^1,x^2,x^3=\mathrm{const}$），那么在给定的空间体积元内，引力场在任何时候都将被消除.

($m=\frac{4\pi}{3}abc\mu$ 是物体的总质量)；对第一项作分部积分，最后得到：

$$U=-\frac{3km^2}{10}\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}s}{R_s}. \tag{99.14}$$

出现在 (99.11)—(99.14) 式中的所有积分，都可以用第一类和第二类椭圆积分来表示. 对于旋转椭球体，这些积分可以用初等函数来表示. 就特例言之，旋转扁椭球 ($a=b>c$) 的引力能是

$$U=-\frac{3km^2}{5\sqrt{a^2-c^2}}\arccos\frac{c}{a}, \tag{99.15}$$

而对于旋转长椭球 ($a>b=c$) 有：

$$U=-\frac{3km^2}{5\sqrt{a^2-c^2}}\operatorname{arch}\frac{a}{c}. \tag{99.16}$$

对于球 ($a=c$)，两个公式都给出值 $U=-3km^2/5a$，这个结果当然也可由初等方法得到①.

习 题

求作整体旋转、且引力质量分布均匀的流体的平衡形状.

解：平衡条件是，物体表面上引力势与离心力势之和为常量：

$$\varphi-\frac{\Omega^2}{2}(x^2+y^2)=\text{const}$$

(Ω 是角速度；旋转轴是 z 轴). 满足要求的形状是旋转扁椭球. 为求得它的参数，将 (99.13) 代入平衡条件，并用方程 (99.10) 消去 z^2；这就给出：

$$(x^2+y^2)\left[\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}s}{(a^2+s)^2\sqrt{c^2+s}}-\frac{\Omega^2}{2\pi\mu ka^2c}-\frac{c^2}{a^2}\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}s}{(a^2+s)(c^2+s)^{3/2}}\right]=$$
$$=\text{const},$$

由此得出，方括号内的表达式必须为零. 进行积分，结果得到方程

$$\frac{(a^2+2c^2)}{(a^2-c^2)^{3/2}}\arccos\frac{c}{a}-\frac{3c^2}{a^2-c^2}=\frac{\Omega^2}{2\pi k\mu}=\frac{25}{6}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3}\frac{M^2\mu^{1/3}}{m^{10/3}k}\left(\frac{c}{a}\right)^{4/3}$$

($M=\frac{2}{5}ma^2\Omega$ 是物体绕 z 轴的角动量)，该方程对于给定的 M 或 Ω 决定了

① 半径为 a 的均匀球内部场的势为

$$\varphi=-2\pi k\mu\left(a^2-\frac{r^2}{3}\right).$$

其中 $\Box$ 表示达朗贝尔算符：

$$\Box = -g^{lm(0)}\frac{\partial^2}{\partial x^l \partial x^m} = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

条件（107.5）仍旧不能唯一地确定参考系的选取：如果某些 h_{ik} 满足这些条件，那么（107.4）式的 h'_{ik} 也将满足它们，只要 ξ^i 是下面方程的解：

$$\Box \xi^i = 0. \tag{107.7}$$

令表达式（107.6）等于零，这样我们求得如下形式的真空中的引力场方程：

$$\Box h_i^k = 0. \tag{107.8}$$

这就是普通的波动方程. 因此，引力场也同电磁场一样，以光速在真空中传播.

我们来研究一个平面引力波. 在这样的波内，场仅沿着空间的一个方向变化；我们选择坐标轴 $x^1 = x$ 作为这个方向. 方程（107.8）这时变为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) h_i^k = 0, \tag{107.9}$$

它的解是 $t \pm x/c$ 的任意函数（见 §47）.

假设波向着 x 轴的正方向传播. 由此，所有的 h_i^k 都是 $t - x/c$ 的函数. 辅助条件（107.5）在这种情形下给出 $\dot{\psi}_i^1 - \dot{\psi}_i^0 = 0$，此处符号上的一点表示对 t 微分. 这个等式可以简单地通过去掉微分符号就能积出，积分常数可以设为零，因为我们所感兴趣的只是场的可变部分（正如电磁波的情形一样）. 因此，ψ_i^k 的各分量之间有关系式

$$\psi_1^1 = \psi_1^0, \quad \psi_2^1 = \psi_2^0, \quad \psi_3^1 = \psi_3^0, \quad \psi_0^1 = \psi_0^0. \tag{107.10}$$

正如上文已经指出的，条件（107.5）也还不能唯一地决定参考系；我们可以给坐标施加 $x'^i = x^i + \xi^i(t - x/c)$ 形式的变换；这些变换可以用来使四个量 $\psi_1^0, \psi_2^0, \psi_3^0, \psi_2^2 + \psi_3^3$ 化为零；从等式（107.10）可以推断，这时分量 $\psi_1^1, \psi_2^1, \psi_3^1, \psi_0^1$ 也化为零. 至于余下的量 $\psi_2^3, \psi_2^2 - \psi_3^3$，无论怎样选择参考系也不能化为零，因为从（107.4）可以看出，在带 $\xi_i = \xi_i(t - x/c)$ 的变换下，这些分量一般不改变. 我们注意到 $\psi \equiv \psi_i^i$ 这时也为零，所以 $\psi_i^k = h_i^k$.

因此，平面引力波由 $h_{23}, h_{22} = -h_{33}$ 两个量所决定. 换句话说，引力波是横波，波的偏振为 yz 平面内的二阶对称张量所决定，这个张量的对角线的分量之和 $h_{22} + h_{33}$ 为零. 选取 h_{23} 和 $(h_{22} - h_{33})/2$ 这两个量的其中之一不为

朗道-栗弗席兹《理论物理学教程第二卷·场论》1版1次勘误

朗道集结号

说明：后面所附勘误已在第2次印刷时进行过改正。

特别鸣谢发来勘误的广大读者

欢迎读者补充勘误，让译本精益求精。联系小编：微博、微信：朗道集结号（微信号：ldjjhwx），读者qq群：331964842，加群请注明：“朗道集结号”或“读者”，小编即群主。



利用四维波矢量，这些等式可以写成张量形式如

$$T^{ik} = \frac{Wc^2}{\omega^2} k^i k^k, \tag{48.15}$$

最后，利用四维波矢量的变换法则，我们能够容易地处理所谓**多普勒效应**——相对于观察者运动的源发出的波频率 ω，与同一个源在其静止系（K_0）中的“真”频率 ω_0 相比所发生的改变.

设 V 是源的速度，即 K_0 系相对于 K 系的速度. 按照四维矢量变换的一般公式，我们有：

$$k^{(0)0} = \frac{k^0 - \dfrac{V}{c}k^1}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}$$

（K 系相对于 K_0 系的速度是 $-V$）. 代入 $k^0 = \omega/c, k^1 = k\cos\alpha = \dfrac{\omega}{c}\cos\alpha$ 式中 α 是波的发射方向与源的运动方向之间的夹角（在 K 系中），用 ω_0 表示 ω，我们得到：

$$\omega = \omega_0 \frac{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}{1 - \dfrac{V}{c}\cos\alpha}. \tag{48.16}$$

这就是要求的公式. 对于 $V \ll c$，并且如果角 α 不太接近于 $\pi/2$，它给出：

$$\omega \approx \omega_0 \left(1 + \frac{V}{c}\cos\alpha\right). \tag{48.17}$$

对于 $\alpha = \pi/2$ 我们有：

$$\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \approx \omega_0\left(1 - \frac{V^2}{2c^2}\right); \tag{48.18}$$

在这种情形下，频率的相对改变正比于 V/c 的平方.

习　　题

1. 利用复振幅 $\boldsymbol{E}_0$ 求偏振椭圆轴的方向和大小.

解：问题在于求矢量 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}_1 + \mathrm{i}\boldsymbol{b}_2$，其平方是实数. 我们从 (48.7) 得到：

$$\boldsymbol{E}_0 \cdot \boldsymbol{E}_0^* = b_1^2 + b_2^2, \quad \boldsymbol{E}_0 \times \boldsymbol{E}_0^* = -2\mathrm{i}\boldsymbol{b}_1 \times \boldsymbol{b}_2, \tag{1}$$

或

$$b_1^2 + b_2^2 = A^2 + B^2, \quad b_1 b_2 = AB\sin\delta,$$

$v'_x = v'\cos\theta'$, $v'_y = v'\sin\theta'$ (v, v' 为速度在 K 及 K' 内的绝对值；θ, θ' 为速度与 x 轴及 x' 轴所夹之角). 用 (5.1) 式, 我们就得到

$$\tan\theta = \frac{v'\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}\sin\theta'}{v'\cos\theta' + V}. \tag{5.4}$$

这个公式决定了速度的方向从一个参考系变换到另一个参考系时的改变.

让我们来详尽地研究这个公式的一个重要特例, 即光由一个参考系变换到另一个参考系时的偏差, 即所谓**光行差现象**. 在这种情形下 $v = v' = c$, 因而 (5.4) 式化为

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}{\dfrac{V}{c} + \cos\theta'}\sin\theta'. \tag{5.5}$$

由同一变换公式 (5.1), 用相似的方法, 很容易得到

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}{1+\dfrac{V}{c}\cos\theta'}\sin\theta', \quad \cos\theta = \frac{\cos\theta' + \dfrac{V}{c}}{1+\dfrac{V}{c}\cos\theta'}. \tag{5.6}$$

如果 $V \ll c$, 由 (5.6) 式我们可以得到精确到数量级为 V/c 项的公式如下:

$$\sin\theta - \sin\theta' = -\frac{V}{c}\sin\theta'\cos\theta'.$$

若引入 $\Delta\theta = \theta' - \theta$ (光行差角), 我们就得到同级的近似公式

$$\Delta\theta = \frac{V}{c}\sin\theta', \tag{5.7}$$

这就是著名的光行差的基本公式.

§6 四维矢量

一个事件的坐标 (ct, x, y, z) 可以看成四维空间中一个四维径向矢量的分量. 我们将把它的分量记为 x^i, 这里指标 i 取值 $0, 1, 2, 3$, 而且

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z.$$

该径向四维矢量“长度”的平方由下式给出

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2.$$

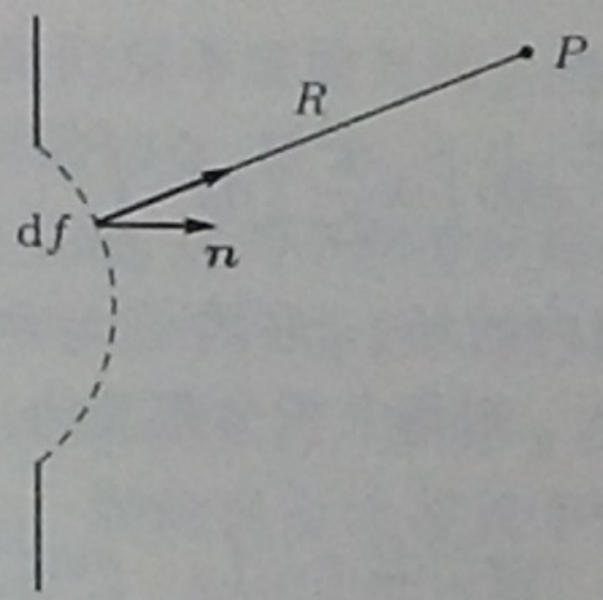


图 9

外，在 P 点的场又与面积 $\mathrm{d}f$ 在与方向 n 垂直的平面上的投影 $\mathrm{d}f_n$ 成正比，方向 n 是光从光源到 $\mathrm{d}f$ 的方向. 这是从以下的事实得来的，即不管面元 $\mathrm{d}f$ 的形状如何，只要投影面 $\mathrm{d}f_n$ 保持不变，相同的光线将经过面元 $\mathrm{d}f$；因此面元 $\mathrm{d}f$ 对 P 点的场的影响将是一样的.

由引可见，小块 $\mathrm{d}f$ 在 P 点所产生的场与 $u\mathrm{d}f_n$ 成正比. 此外，我们还必须考虑到波从 $\mathrm{d}f$ 传播到 P 点的过程中的相位与振幅的变化. 这种变化的规律是由公式 (54.3) 来决定的. 因此必须以 $(1/R)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}$ 乘 $u\mathrm{d}f_n$（此处的 R 是从 $\mathrm{d}f$ 到 P 的距离，而 k 则是光的波矢的绝对值），于是我们得到所求的场等于

$$au\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}\mathrm{d}f_n,$$

其中 a 仍是一个未知常数. P 点的场是所有面元 $\mathrm{d}f$ 在该点所产生的场的叠加的结果，因此它等于

$$u_P = a\int\frac{u\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}\mathrm{d}f_n, \tag{59.1}$$

此处的积分遍及以屏孔边缘为界的曲面. 在我们所考虑的近似中，这个积分当然不能与这个曲面的形状有关. 公式 (59.1) 显然不仅可以应用到屏上有孔的衍射，而且也可以应用到光在其周围可以自由传播的屏的衍射. 在这种情形下，(59.1) 式内的积分面应该伸延到屏的各个边线.

为了决定常数 a，我们考虑一个沿 x 轴传播的平面波；波面与 yz 平面平行. 设 u 为场在 yz 平面内的值. 那么，P 点（我们选择这一点在 x 轴上）的场等于 $u_P = u\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$. 另一方面，$P$ 点的场也可以由公式 (59.1) 来决定，选取（例如）yz 平面为积分面. 同时，因为衍射角很小，在 yz 平面内的点中，只有那些靠近原点的点在积分中才重要，即重要的是 $y, z \ll x$ 的点（x 是 P 点的坐标）. 因此，

$$R = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \approx x + \frac{y^2+z^2}{2x}$$

波面的曲率中心是在我们所考虑的光线上的 $x=R_1$ 和 $x=R_2$ 两点；这两点就是光线与焦散面相切的切点. 设 $R_2<R_1$. 当 $x<R_2$ 时，两个积分号内的指数式中的 i 的系数都是正数，这两个积分的每一个都正比于 (1+i). 因此，在未与焦散面第一次相切的这部分光线上，我们有 $u_P\sim \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$. 当 $R_2<x<R_1$ 时，在两个切点之间的这部分光线上，沿着 y 的积分正比于 (1+i)，但沿着 z 的积分则正比于 $1-\mathrm{i}$，因此两者之积就不包含 i. 于是在这里我们有 $u_P\sim -\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\pi/2)}$，就是说，当光线经过第一个焦散面附近时，光线的相位发生了 $-\pi/2$ 的额外变化. 最后，当 $x>R_1$ 时，我们有 $u_P\sim -\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\pi)}$，就是说当光线经过第二个焦散面附近时，相位又发生了一次 $-\pi/2$ 的变化.

习　　题

求光线与焦散面相切的切点附近的光强度分布.

解：为了解决这个问题，我们利用公式 (59.2)，其中的积分面可以用任意的一个波面，但这个波面离开光线同焦散面的切点要足够远. 在图 10 中，ab 是这个波面的一段，而 $a'b'$ 是焦散面的一段；$a'b'$ 是曲线 ab 的渐屈线. 我们所要研究的是光线 QO 与焦散面的切点 O 附近的光强度分布；假设光线 QO 段的长度 D 足够大. 我们用 x 代表从 O 点沿着焦散面的法线的距离，并认为在法线上的点的 x 值向着曲率中心的方向为正.

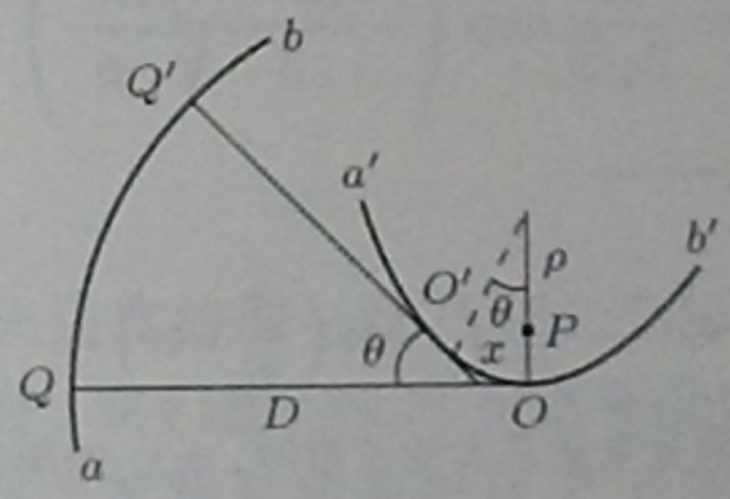


图 10

(59.2) 式中的被积函数是距离 R 的函数，R 是从波面上任意一点 Q' 到 P 点的距离. 按照熟知的渐屈线的性质，弧 OO' 的长与线段 $Q'O'$ 的长之和 ($Q'O'$ 切于 O' 点) 等于线段 QO 之长 (QO 切于 O 点). 对于互相邻近的点 O 与 O'，我们有 $OO'=\theta\rho$ (ρ 是焦散面在 O 点的曲率半径). 因此 $Q'O'=D-\theta\rho$. 距离 $Q'O$ (沿直线) 近似地等于 (假设 θ 角很小)：

$$Q'O\approx Q'O'+\rho\sin\theta=D-\theta\rho+\rho\sin\theta\approx D-\frac{\rho\theta^3}{6}.$$

最后，距离 $R=Q'P$ 是 $R\approx Q'O-x\sin\theta\approx Q'O-x\theta$，即

$$R\approx D-x\theta-\frac{1}{6}\rho\theta^3.$$

将 $e^{-i\omega t}$ 消去，并引用波矢的绝对值 $k=\omega/c$，我们得到：

$$\varphi_\omega = \int \rho_\omega \frac{e^{ikR}}{R} dV. \tag{64.1}$$

同样，对于 A_ω，我们得到

$$\boldsymbol{A}_\omega = \int \boldsymbol{j}_\omega \frac{e^{ikR}}{cR} dV. \tag{64.2}$$

我们指出，公式 (64.1) 是更广泛形式的泊松方程

$$\Delta\varphi_\omega + k^2\varphi_\omega = -4\pi\rho_\omega \tag{64.3}$$

的解 (该方程是从 (62.4) 对于 ρ 和 φ 与时间的关系为 $e^{-i\omega t}$ 的情形得来的).

如果我们所研究的是傅里叶积分的展开式，那么，电荷密度的傅里叶分量是

$$\rho_\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho e^{i\omega t} dt.$$

将上式代入 (64.1)，我们得到

$$\varphi_\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \int \frac{\rho}{R} e^{i(\omega t+kR)} dV dt. \tag{64.4}$$

我们还必须从电荷密度的连续分布过渡到正在考虑其运动的点电荷. 因此，若只有一个点电荷，令

$$\rho = e\delta[\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0(t)],$$

式中 $\boldsymbol{r}_0(t)$ 是电荷的径矢，它是时间的已知函数. 将此式代入 (64.4) 再对空间积分 (这样积分归结为用 $\boldsymbol{r}_0(t)$ 代替 $\boldsymbol{r}$)，我们得到

$$\varphi_\omega = e\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{R(t)} e^{i\omega[t+R(t)/c]} dt, \tag{64.5}$$

这里 $R(t)$ 是从电荷到观察点的距离. 同样，对于矢势，我们得到

$$\boldsymbol{A}_\omega = \frac{e}{c}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\boldsymbol{v}(t)}{R(t)} e^{i\omega[t+R(t)/c]} dt, \tag{64.6}$$

式中 $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}_0(t)$ 是电荷的速度.

对于电荷密度和电流密度的谱分解含一系列离散频率的情形，也可以写出类似 (64.5)，(64.6) 的公式. 因此，对于点电荷的周期运动 (周期 $T = 2\pi/\omega_0$)，

如果粒子流密度等于 1（即在单位时间内通过粒子束截面的单位面积有一个粒子），那么，粒子流中“**碰撞参量**”在 ρ 和 $\rho+\mathrm{d}\rho$ 之间的粒子数等于 $2\pi\rho\mathrm{d}\rho$（即以 ρ 和 $\rho+\mathrm{d}\rho$ 为半径的两个圆之间的环的面积）. 因此所要求的总辐射就可以用 $2\pi\rho\mathrm{d}\rho$ 乘一个粒子（具有碰撞参量 ρ）的总辐射 $\Delta\mathscr{E}$，再对 $\mathrm{d}\rho$ 从 0 到 ∞ 积分求得. 如此求得的量将有能量乘面积的量纲. 我们称它为**有效辐射**（同散射的有效截面相似），并以 $\varkappa$ 代表之[①]：

$$\varkappa=\int_0^\infty \Delta\mathscr{E}\cdot 2\pi\rho\mathrm{d}\rho. \tag{68.1}$$

用完全类似的方法，我们可以定义在一定立体角元 $\mathrm{d}o$ 内，和在一定的频率间隔 $\mathrm{d}\omega$ 内的有效辐射等等[②].

现在我们来推导粒子束被中心对称场散射时，产生的辐射角分布的一般公式，这里我们假设辐射是偶极辐射.

被散射粒子束中的单个粒子（在每一时刻）的辐射强度由（67.7）式决定，在这个式子内的 $\boldsymbol{d}$ 是粒子对于散射中心的偶极矩[③]. 首先，我们将此式对矢量 $\ddot{\boldsymbol{d}}$ 在与粒子束方向相垂直的平面内的所有方向求平均值. 因为 $(\ddot{\boldsymbol{d}}\times\boldsymbol{n})^2=\ddot{\boldsymbol{d}}^2-(\boldsymbol{n}\cdot\ddot{\boldsymbol{d}})^2$，那么，求平均值运算仅仅影响到 $(\boldsymbol{n}\times\ddot{\boldsymbol{d}})^2$. 因为散射的场是中心对称的，而入射粒子束是平行的，所以散射（以及辐射）具有对通过中心的轴的轴对称性. 我们选定这个轴作为 x 轴. 从对称性的考虑可以看出一次项 $\ddot{d}_y,\ddot{d}_z$ 在求平均值时给出零，又因 $\ddot{d}_x$ 不受求平均运算的影响，

$$\overline{\ddot{d}_x\ddot{d}_y}=\overline{\ddot{d}_x\ddot{d}_z}=0.$$

$\ddot{d}_y^2$ 和 $\ddot{d}_z^2$ 的平均值彼此相等，所以

$$\overline{\ddot{d}_y^2}=\overline{\ddot{d}_z^2}=\frac{1}{2}(\ddot{\boldsymbol{d}}^2-\ddot{d}_x^2).$$

注意到这些，我们就不难求得

$$\overline{(\ddot{\boldsymbol{d}}\times\boldsymbol{n})^2}=\frac{1}{2}(\ddot{\boldsymbol{d}}^2+\ddot{d}_x^2)+\frac{1}{2}(\ddot{\boldsymbol{d}}^2-3\ddot{d}_x^2)\cos^2\theta,$$

式中，θ 是辐射方向 $\boldsymbol{n}$ 与 x 轴的夹角.

将强度对时间和对所有碰撞参量积分，我们就得到确定有效辐射作为辐射方向函数的最终公式

$$\mathrm{d}\varkappa_{\boldsymbol{n}}=\frac{\mathrm{d}o}{4\pi c^3}\left(A+B\frac{3\cos^2\theta-1}{2}\right), \tag{68.2}$$

---

① $\varkappa$ 与辐射体系能量之比称为辐射能量损失截面.

② 如果被积分的式子与粒子的偶极矩在粒子流横截面上投影的定向角有关，那么，首先我们必须在这个平面上对于所有方向求平均值，只有这样做以后才能乘以 $2\pi\rho\mathrm{d}\rho$ 然后再积分.

③ 实际上，通常我们所说的是指两个粒子——散射的粒子和被散射粒子——相对它们的公共的惯性中心的偶极矩.

式中，指标 1 和 2 分别属于两个粒子，而 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2$ 则是两粒子之间的径矢.

$$\mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$$

是约化质量.

我们从两个按照库仑定律互相吸引着的粒子在作椭圆运动时所产生的辐射开始. 从力学我们知道（参看本教程第一卷 §15），这种运动可以用一质量为 μ 的粒子在椭圆上的运动来说明，椭圆的极坐标方程是

$$1+\varepsilon\cos\varphi=\frac{a(1-\varepsilon^2)}{r}, \tag{70.2}$$

此处的半长轴 a 和离心率 ε 是

$$a=\frac{\alpha}{2|\mathscr{E}|}, \quad \varepsilon=\sqrt{1-\frac{2|\mathscr{E}|M^2}{\mu\alpha^2}}. \tag{70.3}$$

式中，$\mathscr{E}$ 是粒子的总能量（略去他们的静能!），运动在有限范围内时，总能量为负. $M=\mu r^2\dot{\varphi}$ 是角动量，而 α 是库仑定律中的常数：

$$\alpha=|e_1e_2|.$$

坐标与时间的关系可以用参数方程表示如下：

$$r=a(1-\varepsilon\cos\xi), \quad t=\sqrt{\frac{\mu a^3}{\alpha}}(\xi-\varepsilon\sin\xi). \tag{70.4}$$

当参数 ξ 从 0 变到 2π 时，粒子在椭圆上走一周；运动的周期是

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\mu a^3}{\alpha}}.$$

现在我们来求偶极矩的傅里叶分量. 因为运动是周期性的，所以这即是求傅里叶级数的展开式. 既然偶极矩与径矢 $\boldsymbol{r}$ 成正比，那么这个问题就可化为求坐标 $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$ 的傅里叶分量. x 和 y 与时间的关系由如下参数方程决定

$$x=a(\cos\xi-\varepsilon), \quad y=a\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin\xi, \quad \omega_0t=\xi-\varepsilon\sin\xi, \tag{70.5}$$

这里，我们引入了频率

$$\omega_0=\frac{2\pi}{T}=\sqrt{\frac{\alpha}{\mu a^3}}=\frac{(2|\mathscr{E}|)^{3/2}}{\alpha\mu^{1/2}}.$$

四极辐射势的谱分量是：

$$A_\alpha^{(\omega)}=\frac{\mathrm{i}k}{6}D_{\alpha\beta}^{(\omega)}\frac{\partial}{\partial X_\beta}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR_0}}{R_0},\quad \varphi^{(\omega)}=\frac{1}{6}D_{\alpha\beta}^{(\omega)}\frac{\partial^2}{\partial X_\alpha\partial X_\beta}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR_0}}{R_0}.$$

由于它们的复杂性，我们将不给出场的表达式.

2. 求电荷体系通过电磁波的偶极辐射损失角动量的速率.

解：按照 (32.9)，电磁场角动量流密度由四维张量 $x^iT^{kl}-x^kT^{il}$ 的空间分量给出. 变到三维符号，我们引入分量为 $e_{\alpha\beta\gamma}M^{\beta\gamma}/2$ 的三维角动量矢量；流密度由如下三维张量给出

$$-\frac{1}{2}e_{\alpha\beta\gamma}(x_\beta\sigma_{\gamma\delta}-x_\gamma\sigma_{\beta\delta})=-e_{\alpha\beta\gamma}x_\beta\sigma_{\gamma\delta},$$

式中 $\sigma_{\alpha\beta}\equiv -T^{\alpha\beta}$ 是三维电磁场应力张量（按照常用的三维符号，我们将所有指标写成下标）. 体系在单位时间内的总角动量损失，等于穿过半径 R_0 球面的辐射场的角动量流：

黑斜体

$$\frac{\mathrm{d}M_\alpha}{\mathrm{d}t}=\oint e_{\alpha\beta\gamma}x_\beta\sigma_{\gamma\delta}n_\delta\mathrm{d}f,$$

式中 $\mathrm{d}f=R_0^2\mathrm{d}o$，$\boldsymbol{n}$ 是 R_0 方向的单位矢量. 从 (33.3) 用张量 $\sigma_{\alpha\beta}$，我们得到：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}t}=\frac{R_0^3}{4\pi}\int\{(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E})(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E})+(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H})(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{H})\}\mathrm{d}o. \tag{1}$$

将这个式子应用于体系远距离处的辐射场，不过，绝不能只保留到 $\sim 1/R_0$ 的项；在这个近似下 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{H}=0$，以至被积式为零. 这些项（由 (67.5) 和 (67.6) 给出）只有对于计算因子 $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}$ 才是足够的；纵场分量 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{H}$ 来自 $\sim 1/R_0^2$ 的项（其结果是，(1) 中的被积式变为 $\sim 1/R_0^3$，而距离 R_0 自然就不出现在答案中了）. 在偶极近似中 $\lambda\gg a$，我们必须将含有附加因子 $\sim\lambda/R_0$ 或 $\sim a/R_0$ 的项（相对于 (67.5) 和 (67.6)）进行区分；只保留前者就够了. 这些项可以从 (72.3) 和 (72.5) 获得；精确到 $1/R_0$ 二阶的计算给出[①]：

$$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{2}{cR_0^2}\boldsymbol{n}\cdot\dot{\boldsymbol{d}},\quad \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{n}=0. \tag{2}$$

将 (2) 和 (67.6) 代入 (1)，我们得到：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{2\pi c^3}\int(\boldsymbol{n}\cdot\ddot{\boldsymbol{d}})(\boldsymbol{n}\cdot\dot{\boldsymbol{d}})\mathrm{d}o.$$

最后将被积式写成 $e_{\alpha\beta\gamma}n_\beta\ddot{d}_\gamma n_\delta\dot{d}_\delta$ 的形式，并对 $\boldsymbol{n}$ 的方向作平均，我们得到：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}t}=-\frac{2}{3c^3}\dot{\boldsymbol{d}}\cdot\ddot{\boldsymbol{d}}, \tag{3}$$

① 仅当包含 a/R_0 的较高阶项时，才会得到非零的 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{H}$ 值.

用 $\Delta\theta$ 除之，我们得到：

$$\frac{\alpha}{\Delta\theta} \sim \frac{eFa}{mc^2}. \tag{77.1}$$

我们要注意这个事实，即这个比值与粒子的速度无关，而完全为外场本身所决定.

我们先假设

$$eFa \gg mc^2, \tag{77.2}$$

就是说，粒子的总偏转角比 $\Delta\theta$ 大很多. 这时，我们就可以说，在一指定方向的辐射主要在与运动方向几乎平行的那一部分轨道上发生（这一部分轨道与运动方向所成之角在间隔 $\Delta\theta$ 内），而这一部分轨道的弧长比 a 小很多. 场 F 在这段弧内可以认为是不变的，又因为曲线的一小段可以当做圆弧，所以我们可以引用在 §74 中所求出的关于匀速圆周运动时的辐射（以 F 代 H）的结果. 就特例言之，我们可以说，辐射的主要部分集中在频率范围

$$\omega \sim \frac{eF}{mc\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)} \tag{77.3}$$

内（参见（74.16）式）.

在相反的极限情形下，

$$eFa \ll mc^2, \tag{77.4}$$

粒子的总偏转角比 $\Delta\theta$ 小很多. 在这种情形下，所有的辐射主要指向运动方向附近的狭窄的角范围 $\Delta\theta$，而辐射从整个轨道到达某一给定点.

为了求辐射的谱分解，在这种情形下从场在波区的李纳-维谢尔公式（73.8）开始是便利的，我们来计算傅里叶分量

$$\boldsymbol{E}_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{E} e^{i\omega t} \mathrm{d}t.$$

（73.8）式右边的表达式是推迟时间 t' 的函数，由条件 $t' = t - R(t')/c$ 决定在离一个几乎以恒定速度 $\boldsymbol{v}$ 运动的粒子远距离处，我们有：

$$t' \cong t - \frac{R_0}{c} + \frac{1}{c}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}(t') \cong t - \frac{R_0}{c} + \frac{1}{c}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}t'$$

（此处的 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t') \approx \boldsymbol{v}t'$ 是粒子的径矢），或者

$$t = t'\left(1 - \frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}}{c}\right) + \frac{R_0}{c}.$$

因此，从对于 $\mathrm{d}t$ 的积分很容易变为对于 $\mathrm{d}t'$ 的积分，只需注意

$$\mathrm{d}t = \left(1 - \frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}}{c}\right)\mathrm{d}t',$$

而这样一来条件 (77.2) 自动得到满足：

$$aeF \sim \frac{m^3c^6}{e^3F}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \gg mc^2,$$

因为场 F 无论如何必须满足条件 (76.5)：

$$\frac{F}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \ll \frac{m^2c^4}{e^3},$$

否则我们甚至不能应用普通电动力学.

习　题

1. 求满足条件 (77.2) 的总辐射强度（沿一切方向）的谱分布.

解：从轨道的每个弧元上发出的辐射由公式 (74.13) 来决定，公式中应当以在给定点的横向力 F 代替 H，此外，还应当从不连续的频谱变到连续的频谱. 这种过渡可以这样形式地来完成，即乘以 $\mathrm{d}n$，并作以下的替换：

$$I_n\mathrm{d}n = I_n\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\omega}\mathrm{d}\omega = I_n\frac{\mathrm{d}\omega}{\omega_0}.$$

然后，再将强度对全部时间积分，我们便得到总辐射如下形式的谱分布：

$$\mathrm{d}\mathscr{E}_\omega = -\mathrm{d}\omega\frac{2e^2\omega(1-v^2/c^2)}{c\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\Phi'(u)}{u}+\frac{1}{2}\int_u^\infty\Phi(u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}t,$$

式中，$\Phi(u)$ 是艾里函数，而其独立变量是

$$u = \left[\frac{mc\omega}{eF}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\right]^{2/3}.$$

被积函数是积分变量 t 的隐函数，两者的关系是通过 u 而联系着的 (F 以及 v 沿着粒子的轨道变化，对于一给定的运动，这个变化可以认为与时间有关).

2. 求满足条件 (77.4) 的总辐射能量（沿一切方向）的谱分布.

解：注意到与运动方向成小角 θ 的辐射起着主要的作用，我们可写出

$$\omega' = \omega\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right) \approx \omega\left(1-\frac{v}{c}+\frac{\theta^2}{2}\right) \approx \frac{\omega}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}+\theta^2\right).$$

用对 $\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\omega'/\omega$ 的积分替换 (77.6) 中对角 $\mathrm{d}o = \sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \approx \theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$ 的积分. 在写出 (77.6) 中矢量的三重积时必须记住，在极端相对论情形下，加速度的纵向分量同横向分量相比很小（比值为 $1-v^2/c^2$），而且在本例中我们可以足够精确地认为 $\boldsymbol{w}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 相互垂直. 结果，我们求得总辐射谱分解的如下公式：

$$\mathrm{d}\mathscr{E}_\omega = \frac{e^2\omega\mathrm{d}\omega}{2\pi c^3}\int_{\frac{\omega}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}^{\infty}\frac{|\boldsymbol{w}_{\omega'}|^2}{\omega'^2}\left[1-\frac{\omega}{\omega'}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)+\frac{\omega^2}{2\omega'^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2\right]\mathrm{d}\omega'.$$

其中 v 为粒子的普通三维速度. 因此,

$$u^1=\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}x}{c\mathrm{d}t\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}=\frac{v_x}{c\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}},$$

我们用同样的方法来求 u^2, u^3, u^4, 结果我们得到:

$$u^i=\left(\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}},\frac{\boldsymbol{v}}{c\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\right). \tag{7.2}$$

应该注意, 四维速度是一个无量纲量.

四维速度的分量并不彼此独立. 注意到, $\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x^i=\mathrm{d}s^2$, 我们有

$$u^iu_i=1. \tag{7.3}$$

所以, 就几何意义言之, 我们可以说, u^i 是与粒子世界线相切的一个四维单位矢量.

与四维速度的定义类似, 二阶导数

$$w^i=\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}s^2}=\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s}$$

可以称为四维加速度. 微分 (7.3), 我们求得

$$u_iw^i=0, \tag{7.4}$$

即四维速度矢量和四维加速度矢量是相互正交的.

习　　题

确定相对论的匀加速运动, 即在固有参考系中 (每个时刻) 加速度 w 保持不变的直线运动.

解: 在粒子速度 $v=0$ 的参考系中, 四维加速度的分量 $w^i=(0,w/c^2,0,0)$ (这里 w 是普通三维加速度, 指向沿 x 轴). 相对论不变的匀加速条件必须表达为四维标量 (在固有参考系中与 w^2 一致) 的常数性:

$$w^iw_i=\mathrm{const}\equiv-\frac{w^2}{c^4}.$$

在与之参照来观察运动的这个“固定”系中, 写出 w^iw_i 的表达式, 得到方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{v}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}=w,\quad \text{或}\quad \frac{v}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}=wt+\mathrm{const}.$$

习　　题

1. 对于黑洞的场中的粒子，求其圆轨道的半径（S. A. Kaplan，1949）.

解：对于在史瓦西场中运动的粒子，依赖关系 $r=r(t)$ 由（101.4）给出，或者以微分形式：

$$\frac{1}{1-r_{\mathrm{g}}/r}\frac{\mathrm{d}r}{c\mathrm{d}t}=\frac{1}{\mathscr{E}_0}[\mathscr{E}_0^2-U^2(r)]^{1/2}, \tag{1}$$

式中

$$U(r)=mc^2\left[\left(1-\frac{r_{\mathrm{g}}}{r}\right)\left(1+\frac{M^2}{m^2c^2r^2}\right)\right]^{1/2}$$

（m 是粒子的质量，$r_{\mathrm{g}}=2km'/c$ 是质量为 m' 的中心天体的引力半径）. $U(r)$ 在下述意义上起着“有效势能”的作用，条件 $\mathscr{E}_0\geqslant U(r)$ 决定运动的容许范围（类似于非相对性理论）. 图 21 显示了 $U(r)$ 对于粒子角动量 M 的各种值的曲线.

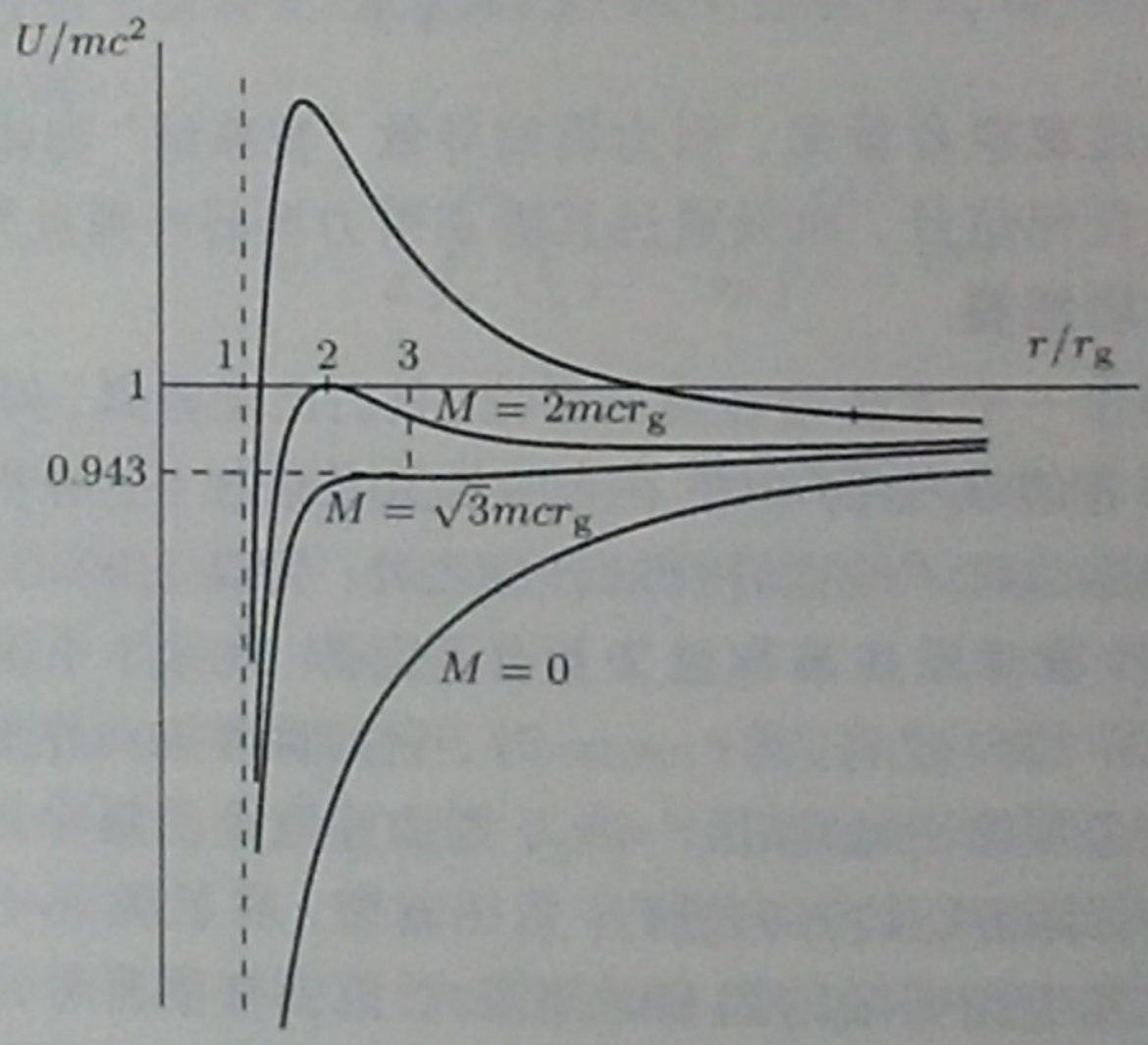


图 21

轨道的曲率半径及 $\mathscr{E}_0$ 和 M 的相应值由函数 $U(r)$ 的极值决定，极小值相应于稳定轨道，极大值相应于不稳定轨道. 同时解方程 $U(r)=\mathscr{E}_0, U'(r)=0$ 给出：

$$\frac{r}{r_{\mathrm{g}}}=\frac{M^2}{m^2c^2r_{\mathrm{g}}^2}\left[1\pm\sqrt{1-\frac{3m^2c^2r_{\mathrm{g}}^2}{M^2}}\right],\quad \mathscr{E}_0=Mc\sqrt{\frac{2}{rr_{\mathrm{g}}}\left(1-\frac{r_{\mathrm{g}}}{r}\right)},$$

这里，按照一般的规则

$$C_a{}^b = \eta_{ac}C^{cb}, \quad C_{ab} = \eta_{ac}\eta_{bd}C^{cd}.$$

同时指出，在均匀空间中三维张量 $P_{\alpha\beta}$ 的比安基恒等式具有如下形式

$$P_b^c C^b{}_{ca} + P_a^c C^b{}_{cb} = 0. \tag{116.25}$$

四维里奇张量[①]的三维标架分量的最终表达式如下：

$$R_0^0 = -\frac{1}{2}\varkappa_{(a)}^{(a)} - \frac{1}{4}\varkappa_{(a)}^{(b)}\varkappa_{(b)}^{(a)},$$

$$R_{(a)}^0 = -\frac{1}{2}\varkappa_{(b)}^{(c)}(C^b{}_{ca} - \delta_a^b C^d{}_{dc}), \tag{116.26}$$

$$R_{(a)}^{(b)} = -\frac{1}{2\sqrt{\eta}}(\sqrt{\eta}\varkappa_{(a)}^{(b)} - P_{(a)}^{(b)}$$

我们强调，这样一来，在建构爱因斯坦方程时，没有必要使用标架矢量作为坐标函数那样的显式表达式.

§117 平直各向异性模型

各向同性模型对描述宇宙后期演化是适用的，但不能据此预期，它也适用于描述宇宙靠近时间奇点时的早期演化. 这个问题将在 §119 中详细讨论，而在本节和下一节将对爱因斯坦方程的一些解进行初步研究，这些解同样具有时间奇点，但原则上属于不同的类型（有别于弗里德曼奇异性）.

我们将寻找这样的解，其中度规张量的所有分量在适当选取的参考系下仅仅是一个变量——时间 $x^0 = t$ 的函数[②]. 这样的问题已经在 §109 中研究过，但是，那里只研究了当行列式 $|g_{\alpha\beta}| = 0$ 时的情况. 现在我们将认为这个行列式不为零. 就像在 §109 中讲解的那样，在这种情况下可以不失一般性地令所有的 $g_{0\alpha} = 0$. 通过对变量 t 做 $\sqrt{g_{00}}\mathrm{d}t \to \mathrm{d}t$ 的变换，可以使 g_{00} 等于 1，于是我们得到同步参考系，在其中

$$g_{00} = 1, \quad g_{0\alpha} = 0, \quad g_{\alpha\beta} = -\gamma_{\alpha\beta}(t). \tag{117.1}$$

现在我们可以利用形式为 (97.11)—(97.13) 的爱因斯坦方程. 由于量 $\gamma_{\alpha\beta}$，以及随之三维张量 $\varkappa_{\alpha\beta} = \dot{\gamma}_{\alpha\beta}$ 的分量不依赖于坐标 x^α，于是 $R_{0\alpha} \equiv 0$. 按照同样的原因 $P_{\alpha\beta} \equiv 0$，结果真空中的引力场方程可化为下列方程组：

$$\dot{\varkappa}_\alpha^\alpha + \frac{1}{2}\varkappa_\alpha^\beta \varkappa_\beta^\alpha = 0, \tag{117.2}$$

① 包含在 R_α^0 中的协变导数 $\varkappa_{\alpha;\gamma}^\beta$ 可利用 §98 最后一个脚注中列出的公式进行换算.
② 在 §117，§118 节中为了简化公式的书写我们设定 $c = 1$.

其中，$\mathscr{E}_0$ 是 $t=0$ 时的能量.

按照（9.8）式，粒子的速度 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{p}c^2/\mathscr{E}_{\text{kin}}$. 因而，对于速度 $v_x=\dot{x}$，我们有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{p_xc^2}{\mathscr{E}_{\text{kin}}}=\frac{c^2eEt}{\sqrt{\mathscr{E}_0^2+(ceEt)^2}}.$$

经过积分，我们求得

$$x=\frac{1}{eE}\sqrt{\mathscr{E}_0^2+(ceEt)^2} \tag{20.3}$$

（其中我们已经令积分常数等于零）①.

为了求得 y，我们有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{p_yc^2}{\mathscr{E}_{\text{kin}}}=\frac{p_0c^2}{\sqrt{\mathscr{E}_0^2+(ceEt)^2}},$$

从而

$$y=\frac{p_0c}{eE}\operatorname{arsinh}\frac{ceEt}{\mathscr{E}_0}. \tag{20.4}$$

利用（20.4）式通过 y 来表示 t，并将它代入（20.3），我们得到轨道方程如下：

$$x=\frac{\mathscr{E}_0}{eE}\cosh\frac{eEy}{p_0c}. \tag{20.5}$$

由此可见，在均匀电场中一个电荷沿着悬链线运动.

假如粒子的速度 $v\ll c$，那么，我们可以使 $p_0=mv_0,\mathscr{E}_0=mc^2$，并将（20.5）式展开为 $1/c$ 的幂级数. 略去高阶项，我们得到

$$x=\frac{eE}{2mv_0^2}y^2+\text{const},$$

就是说，电荷沿着抛物线运动，这是我们在经典力学中熟知的结果.

§21 在恒定均匀磁场中的运动

我们现在来研究电荷 e 在恒定均匀磁场 $\boldsymbol{H}$ 中的运动. 我们选择磁场的方向为 z 轴的方向. 我们将动量（（9.8）式）

$$\boldsymbol{p}=\frac{\mathscr{E}\boldsymbol{v}}{c^2}$$

（式中 $\mathscr{E}$ 是粒子的能量，它在磁场中是恒定的）代入运动方程

$$\dot{\boldsymbol{p}}=\frac{e}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H},$$

① 这个结果（对于 $p_0=0$）同具有恒定“固有加速度” $w_0=eE/m$ 的相对论运动问题的解一致（见 §7 的习题）. 对于目前的情形，加速度的恒定性与速度 $\boldsymbol{V}$ 沿着场的方向时，洛伦兹变换不改变电场这一事实有关（见 §24）.