物理学中的对称性

SYMMETRY IN PHYSICS

孙宗扬 著

中国科学技术大学出版社

责任编辑：张泰永 肖向兵
封面设计：桑国磊

定价：28.00元

ISBN 978-7-312-02250-0

9 787312 022500 >

上架建议：物理类

物理学中的对称性

Symmetry in Physics

孙宗扬　著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书以普通物理为背景，详细阐述了对称性是如何引进到物理学中的，使读者清楚地了解到物理学中的对称性和通常的形状对称性之间的紧密联系以及各自的特点.本书为普通的直观上的对称性到现代的理论物理中的对称性之间建立了有效的沟通渠道，帮助希望了解物理学和对称性的读者找到入门的途径，扫除某些思考上的障碍，以普通物理为基点，来审视对称性问题.本书适用于物理学专业的师生以及对物理学感兴趣的其他各专业师生，并可供相关专业的科研人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

物理学中的对称性/孙宗扬著. —合肥：中国科学技术大学出版社，2009.4

ISBN 978-7-312-02250-0

Ⅰ.物… Ⅱ.孙… Ⅲ.数学物理方法-群表示 Ⅳ.O411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 048128 号

中国科学技术大学出版社出版发行

安徽省合肥市金寨路 96 号，230026

http://press.ustc.edu.cn

安徽江淮印务有限责任公司印刷

全国新华书店经销

开本：710 mm×1 000 mm 1/16 印张：15 插页：1 字数：270 千

2009 年 4 月第 1 版 2009 年 4 月第 1 次印刷

印数：1—3 000 册

定价：28.00 元

前　言

作者于1999—2000年在中国科学技术大学开设了“物理学和对称性”选修课，由于在这一段时间内资料的积累及认识的加深，感到有必要系统地来解释对称性及其在物理学中的作用等问题. 对称性被普遍地认为是物理中最基本的原理或称第一原理. 它在直观上很容易理解：两个形状相同的方块有对称性，一个圆球其各个方向之间具有对称性. 但这种对称性在物理学中的表现就没有这样直观，物理学中的对称性实际上是指在表面看来彼此不相干的现象中隐藏同一个规律. 当然读者更感兴趣的是从这些现象中寻找规律的见识、能力及潜质，即如何培育出“去粗存精，去伪存真，由此及彼，由表及里”的功力. 本书注意到了这一点，并从历史资料中寻找出恰当的事例供读者参考. 在有些物理事例中，我们对具体的作用规律几乎一无所知，但仅仅根据对称性的认识或者甚至是对称性的设想就能够得到非常重要的性质. 处理对称性的数学工具是群论.

从表面上看，物理或日常事物都是涉及对称性的，但其间的表现形式大相径庭. 一名没有受过专业训练的工作者，很难懂得其中的内在联系，而专家在介绍对称性时，先从简单的直观的对称性，例如建筑的对称性入手，作一番简介之后就进入他们本人的专业领域，他们的标准叙述方式是“这显然是一种对称性……”. 实际效果是：专家看着显然，对于一般的读者看来并不显然，因此这样的讲述方法至少对于入门者来说门槛过高，或者不怎么合适. 本书也遵循着从通常具体的对称性出发逐渐过渡到物理学中的对称性的认识路线，具体的对称性中有形式上的对称性、性质上的对称性以及规律上的对称性，而规律上的对称性更易于过渡到物理上的对称性，本书对这些

细致的分析和过渡过程作了较大篇幅的分析，希望有利于读者掌握对称性在物理中的应用，从而加深理解.

本书在构思阶段曾得到已故的阮图南教授的鼓励，他指出了群论在物理中的重要性，作者曾在他的指导下进行过物理学各门类的搜集和甄别的工作，锻炼了处理对称性问题的能力，谨以此书寄托对阮先生的缅怀.

作者长期在物理教学及科研领域工作. 1978 年重建物理教研室以来，教研室的同仁为物理教学和研究工作投入大量的时间和精力，得到很多有价值的见解和结果. 作者在这样的氛围中受到熏陶及激励，提高了处理物理问题的能力. 对于他们的开创性工作，作者深表敬重及感谢.

这本书陆陆续续写了多年，承中国科学技术大学出版社的支持得以列入计划，在此表示感谢. 天文与应用物理系（即原物理教研室或稍后一些的基础物理中心）和近代物理系各位有关老师对此事也多有关注，作者感谢他们的支持.

本书尽力探讨对称性在物理中的作用，提法有不当之处，希望关心此类工作的人士指正.

孙宗扬

2008. 10

目　　录

前言 …… i

引论 …… 1

1. 几何对称性 …… 2

2. 中国古代的对称观念 …… 4

3. 物理学中的对称性 …… 5

4. 对称性和数学上的准备 …… 7

5. 群论与物理学中的对称性 …… 8

习题 …… 11

第 1 章　地上和天上的力——重力和引力 …… 12

1.1　重力 …… 12

1.1.1　重力加速度 …… 13

1.1.2　运动轨迹上的粒子速度和加速度 …… 16

1.1.3　运动轨道是平面轨道时的性质 …… 17

1.2　月亮的运动 …… 19

1.2.1　月亮绕地球的公转周期 T_m …… 19

1.2.2　匀速圆周运动的向心加速度 …… 21

1.2.3　胡克的引力反平方规律 …… 23

1.2.4　月球运动和苹果落地运动的同一性 …… 24

1.3　太阳系中行星运动规律 …… 28

1.3.1　太阳与地球的质量比 …… 28

1.3.2　万有引力常量 G 的测定 …… 29

1.3.3 点源万有引力作用下的守恒定律 …… 30
1.3.4 简化的行星轨道运动方程 …… 31
1.4 开普勒定律 …… 31
1.4.1 轨道运动方程求解 …… 31
1.4.2 开普勒第三定律 …… 32
1.4.3 注记 …… 33
1.5 力学运动的对称性和守恒定律 …… 34
1.5.1 质点在有位力场中运动 …… 35
1.5.2 力学系统平移与能量-动量守恒 …… 35
1.5.3 对称性观念的重要结果 …… 37
1.5.4 动量矩守恒 …… 39
1.5.5 讨论 …… 41
习题 …… 42
第 2 章 熵的性质和粒子的不可区分性——宏观与微观 …… 51
2.1 温度 …… 53
2.1.1 系统 …… 53
2.1.2 热平衡态 …… 54
2.1.3 热力学第零定律 …… 54
2.1.4 温度的性质和量化 …… 55
2.1.5 温度计原则、温度函数和温度计实例 …… 55
2.2 热量 …… 59
2.2.1 热量的概念 …… 59
2.2.2 焦耳实验 …… 60
2.2.3 理想气体绝热过程 …… 61
2.2.4 焦耳-汤姆逊效应 …… 62
2.2.5 卡诺循环中的热量 …… 64
2.3 热力学第二定律 …… 65
2.3.1 状态函数 …… 66
2.3.2 开尔文(Kelvin)形式的热力学第二定律及其推论 …… 67
2.3.3 理想气体系统中的熵 …… 68
2.4 分子动理论 …… 69

2.4.1　在重力场中的气体密度分布 …… 69
2.4.2　几率密度 …… 70
2.4.3　麦克斯韦速率分布率的导出 …… 71
2.5　熵的统计表达式和粒子系统的状态分布规律 …… 73
2.5.1　熵表达式中的微观参数 …… 73
2.5.2　熵的统计解释 …… 74
2.6　粒子状态的玻色分布 …… 76
2.6.1　吉布斯佯谬 …… 77
2.6.2　如何解决佯谬 …… 77
2.6.3　玻色-爱因斯坦统计 …… 78
2.6.4　玻色分布和对称性 …… 79
习题 …… 80
第3章　从牛顿时空观念过渡到狭义相对论时空观念
——空间和时间的对称性 …… 86
3.1　将时间与空间生成四维时-空 …… 87
3.1.1　光速中心说 …… 87
3.1.2　迈克尔逊-莫雷实验 …… 88
3.1.3　四维时空 …… 91
3.2　洛伦兹变换 …… 92
3.2.1　不变量 …… 92
3.2.2　伽利略变换及其推广 …… 94
3.2.3　洛伦兹变换及其推论 …… 95
3.3　洛伦兹变换的特点和处理方式 …… 97
3.3.1　原时 …… 97
3.3.2　空间旋转的 SO(3)群 …… 99
3.3.3　时空“旋转”的 SO(3,1)群(洛伦兹群) …… 101
3.4　洛伦兹变换下的对称性的探讨 …… 103
3.4.1　动量与力的变换规律 …… 104
3.4.2　能量作为四矢量的第零分量 …… 105
3.4.3　纵向质量和横向质量 …… 107
3.4.4　碰撞问题 …… 109

3.5 平面波中各参量的变换规律 …… 111
3.5.1 角频率 ω 与圆波矢 k …… 111
3.5.2 什么是同时性事件 …… 111
3.5.3 在不同惯性系下角频率 ω 的变换规律 …… 112
3.6 光子的能量 …… 113
3.6.1 光子的速度 …… 113
3.6.2 $E = h\nu$ …… 114
3.6.3 光电效应 …… 114
习题 …… 116
第4章 电、磁现象在形式上的类似——静电和静磁现象的对称性质 …… 121
4.1 电荷 …… 122
4.1.1 摩擦起电 …… 122
4.1.2 电的本性及测量 …… 123
4.1.3 最小电量单位 e …… 124
4.2 库仑定律 …… 125
4.2.1 静止电荷之间的相互作用力 …… 125
4.2.2 点电荷间的作用力 …… 126
4.2.3 电场强度 $\boldsymbol{E}$ …… 126
4.2.4 微分高斯定理 …… 128
4.2.5 静止电荷所产生的电场及电势 …… 129
4.2.6 电偶极子的电场强度及电势 …… 131
4.3 电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ …… 132
4.3.1 电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 的概念 …… 132
4.3.2 边界条件 …… 134
4.3.3 真空中电位移矢量 $\boldsymbol{D}$,它是物理量 …… 134
4.3.4 $\boldsymbol{D}$(电位移矢量)在一般情况下并不是物理量 …… 135
4.3.5 $\boldsymbol{D}$ 不是物理量的一个实例 …… 136
4.4 磁荷的库仑定律 …… 138
4.4.1 磁荷的库仑定律形式 …… 139
4.4.2 磁场 …… 140

4.4.3　磁感应强度矢量(磁通密度)$\boldsymbol{B}$ …… 140
4.4.4　边界条件 …… 140
4.5　磁偶极子场强 …… 141
4.5.1　对磁荷系统 …… 141
4.5.2　展开关系 …… 141
4.5.3　磁偶极子及其成场关系 …… 142
4.5.4　对磁荷(q_m，$-q_m$)的实际替代者 …… 143
4.6　用电流圈替代磁偶极子所导出的推论 …… 145
4.6.1　力矩 …… 145
4.6.2　磁偶极子 $\boldsymbol{p}_m$ 在磁场中所受到的力矩 …… 146
4.6.3　电流线圈 $\boldsymbol{IS}$ 在均匀磁场 $\boldsymbol{H}$ 中所受到的力矩 $\boldsymbol{M}$ …… 146
习题 …… 148
第5章　电学和磁学的内在对称性 …… 162
5.1　磁场 $\boldsymbol{H}$ 的性质 …… 163
5.1.1　磁场 $\boldsymbol{H}$ 的环路定理 …… 164
5.1.2　短粗柱形壳电流在轴线上的磁场强度 …… 165
5.1.3　一般情况下的磁场环路定理 …… 168
5.2　无穷长直导线所产生的磁场 …… 170
5.2.1　在计算直线电流所产生的磁场时场源用磁偶极子替代 … 170
5.2.2　两根导线之间的作用力 …… 171
5.2.3　电流的单位 …… 171
5.3　在介质中的磁场 …… 172
5.3.1　磁介质 …… 172
5.3.2　用代替法研究磁介质 …… 173
5.3.3　边界条件 …… 174
5.3.4　关于物理场和辅助场的进一步探讨 …… 176
5.3.5　静电学中的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 的问题 …… 179
5.4　毕奥-萨伐尔定律的导出 …… 181
5.4.1　电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 在其延长线方向的磁场 …… 181
5.4.2　弯折电流的上半段与下半段的关系 …… 183
5.4.3　弯折电流在其角平分线反向延长线上一点 A 的磁场 …… 183

5.4.4 毕奥-萨伐尔定律 …… 184
5.4.5 附录 …… 185
5.5 电磁波问题 …… 187
5.5.1 电磁基本定律的微分形式 …… 187
5.5.2 无源电磁场 …… 188
5.5.3 电磁波的传播 …… 189
5.6 光线在运动介质中的传播速度 …… 190
5.6.1 在以电荷、电流为场源电磁场系统的性质 …… 191
5.6.2 在以磁荷、磁流为场源的电磁场系统的性质 …… 194
5.6.3 慢速运动介质的电磁性能方程 …… 196
5.6.4 光在低速运动介质中的传播速率(费涅尔公式) …… 198
5.7 电磁学中国际单位制和实用单位制之间的转换 …… 201
5.7.1 库仑定律 …… 201
5.7.2 电场强度 E 和电位移 D …… 203
5.7.3 磁学量及一般电磁学公式的转换关系 …… 205
5.7.4 结论 …… 207
习题 …… 207
后记 …… 217
1. 为什么关注万有引力 …… 220
2. 物理学与处理工具,一个在常规对称性之外的问题 …… 222
3. 坚持对称性还是坚持状态的计数规则 …… 224
4. 狭义相对论和电磁现象 …… 226
5. 现代物理中探索对称性的主要工具——群论 …… 226
6. 从门捷列夫的周期表到盖尔曼的强子分类 …… 228
7. 物理学和对称性 …… 231

引　　论

人类社会文明是逐渐积累起来的，从结绳纪事开始，人类就在逐渐积累着经验.随着文字的出现，能够长期保存的资料逐渐增多，从这里我们可以探知一些文明的演化过程.人是自然界的产物，他们与自然界融为一体，互相协调，老子《道德经》中说："人法地，地法天，天法道，道法自然."这说明了人与自然界之间的关系.凡是自然界中发生的，在人们心目就会感到是美.所谓"美"，大概就是符合人们的生存、发展的愿望；反过来，如果我们对某些人工创造的事物产生了美感，那么这件事物的出现就是符合实际发展规律的.这种说法不是逻辑上的推论，而是经验上告诉我们这些结论的正确性."美"在20世纪的物理学进展中起了关键性的作用.那么什么是"美"呢？

"美"的表现有多种形式，在物理学中的"美"主要体现在"对称性"上.在20世纪以前，"对称性"还只停留在对自然现象的欣赏及其模仿上.如模仿生物的左、右对称，建造出左、右对称的建筑：民房，四合院，宫殿；模仿雪花的六角形形状，在商朝（约公元前16世纪—约公元前1066年）就出现了不少六角形的青铜古器.这些或许就是对称这一观念的起源及对称留给人们的美感.这些只是一种推测，至于对称观念的确切起源，到现在为止还没考证出来.

20世纪开始，对称性从本质上进入到物理学，它渗透在每一个物理学分支的发展之中.但是近现代物理学中的对称性，形式上与直觉的对称性相距甚远，本书中将指明它们之间的内在联系.

对称性好像是一个自明的概念，当提及对称性时，每一个人都觉得懂得

一点，但真正追问起如何确切解释对称时，又感觉到不知道从何处说起.什么是对称性？我们怎样界定所涉及的范围？在所讨论的对象中，存在有对称性是指直觉的还是内在的？这都是基本问题.试举几个简单的例子：一个立方形的石块有没有对称性？两个半径相同的钢球有没有对称性？那么两个半径不同的钢球呢？它们之间有没有对称性？这些对称性是从外观上就可以说出一番道理的.但对于某些看起来不那么直观的对象，例如地上的现象和天上的现象，它们之间有没有对称性？对于这样的问题，大家从直觉上恐怕是有很多话要说的，但真的要着手接触这样一个问题时，又感到无处下手！“此情可待成追忆，只是当时已惘然”根本原因是“对称性”虽然是挂在嘴边的口头禅，但其真正的含义却不十分清楚，各人有各人的理解.

在数学特别是几何学的研究中，对称规律明显而且重要.例如一线段处于不同地点构成事件组，在不同的事件中，线段的位置不同，但线段的长度相等(具有对称性).在一定地点的线段经过移动及旋转可以处于另一个地点，用数学的语言说，这两个事件以变换的方式联系起来，因此这里的对称性就是探讨变换的不变量问题.

对物理学的探讨表明，“它迫使我们去分析几何学对描写客观世界的作用.”①这样就可以把物理学的对称性转化为几何学中的对称性来进行研究，这是本书的重点之一.

1. 几何对称性

本书的首要任务是要指明我们想讲的对称性是什么，以及对称性对理解自然规律所起的作用.比较初等的对称性，自然从对物体的直观感觉中来，所谓两个物体的对称性也就是它们之间在大小、形状和排列上有一一对应关系；而一个物体之内的对称性，是指它的局部之间的对称性(或共同性).

物体的对称性，更可以严格一些谈论的是几何图形的对称性，我们说两

---

① 爱因斯坦，英费尔德.《物理学的进化》.周肇威译，上海科学技术出版社，1962 年，P157

个图形是对称的，一般是指这两个图形可以重合.参见图 1，两个三角形 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 是对称的，是指这两个图形可以重合.对于平面图形，两个图形重合不会有物理上的障碍，即无论它们是从几何的意义上还是从实物平板的意义上(指这个实物平板的厚度可以不计)，它们都是能够重合的.但对于图 2 的两个锥体 $S\text{-}ABC$ 和 $T\text{-}DEF$ 有对称性，是指它们作为几何图形是重合的.对于对称性还可以附加一些条件.参见图 3，锥体 $S\text{-}ABC$ 和 $S'\text{-}A'B'C'$ 有镜对称性，这种镜对称是指将其中一个物体例如 $S\text{-}ABC$ 取它在镜子中的像 $S''\text{-}A''B''C''$ 则它与 $S'\text{-}A'B'C'$ 重合，镜对称的实物比较常见，如左手和右手就呈现出镜对称.还有一种常见的对称性是螺旋对称，参见图 4，螺距为 T 的圆柱形螺旋线有旋转(或螺旋)对称性，其特点是将它沿轴线提升一个距离 t 及旋转一个角度 α 后的新螺旋线与原螺旋线重合.从这里我们可以明白“对称性”一词中包含诸多内容，在不同的场合下具有不同的含义.我们再举个例子，两个半径 $r_1 \neq r_2$ 的球，它们之间有什么对称性?这两个球当然不会重合，但我们可以发现，无论是半径为 r_1 的球或者是半径为 r_2 的球，它们在围绕各自的球心转动时，其形状各自保持不变.这个性质就是它们的对称性：r_1 球有转动不变性质，r_2 球也有转动不变性质，这里的对称性是指它们共同具有转动不变性质.

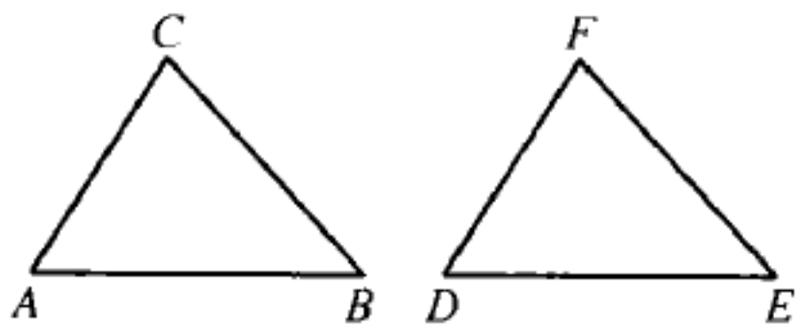


图 1

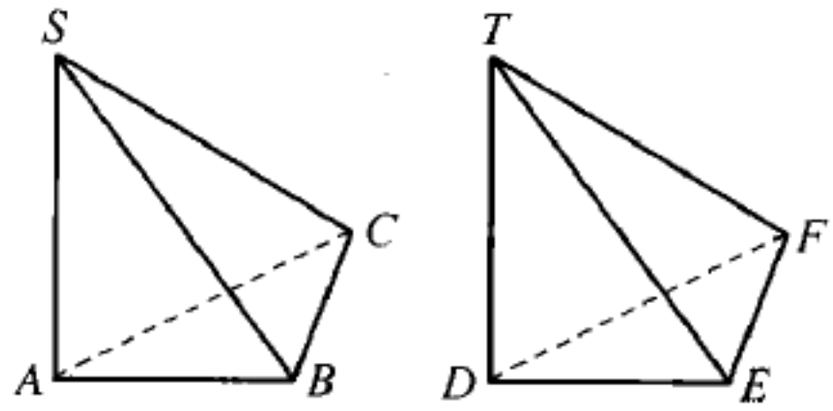


图 2

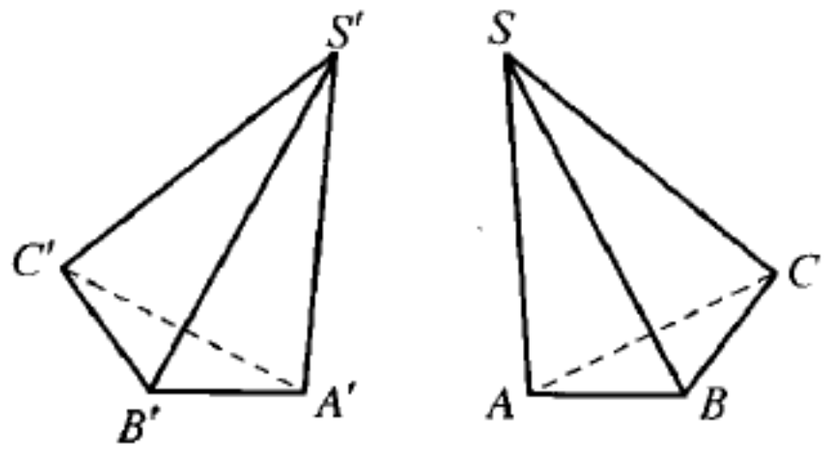


图 3

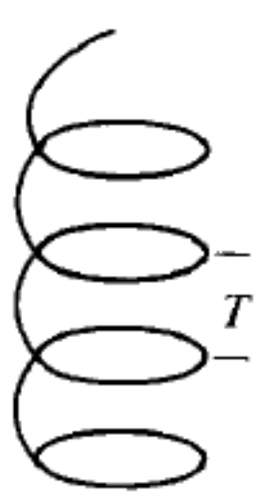


图 4

以上明确指出：从最直接的重合到某种共同的性质，都概括地称之为对称性.

2. 中国古代的对称观念

与世界上同时的文明社会一样，中国古代对称性是指几何上的对称性或形式上的对称性.在建筑上，北京故宫自景山到前门是一条中轴线，也就是一条对称轴，附近建筑相对该轴对称配置.封建时代的豪宅有五进、七进、九进的，它们也都有中轴线.

诗词是中国传统文化，将诗词与对称性相结合就出现回文诗，这类诗顺念倒念都可成诗，即具有顺逆对称性，下面是描述江边山色的回文诗，原载宋朝桑世昌编的《回文类聚》中.

潮随暗浪雪山倾，远浦渔舟钓月明.桥对寺门松径小，
槛当泉眼石波清.迢迢绿树江天晓，霭霭红霞海日晴.
遥望四边云接水，碧峰千点数鸥轻.

将上面诗句倒着念，是

轻鸥数点千峰碧，水接云边四望遥.晴日海霞红霭霭，
晓天江树绿迢迢.清波石眼泉当槛，小径松门寺对桥.
明月钓舟渔浦远，倾山雪浪暗随潮.

念起来也成诗，并且两首诗的意境相同.

时间和空间是比较深刻的概念，也是人们关心的对象.那么，时间和空间有没有对称？下面苏轼的词涉及这个问题.

山下兰芽短浸溪，松间沙路净无泥.潇潇暮雨子规啼.
谁道人生无再少，门前流水尚能西.休将白发唱黄鸡.

这里苏轼将时间与空间作了对比，既然空间可以任意取向，那么时间为什么不能任意取向甚至倒流呢？这就是包含在这首词中的含意，或者说作者是探讨时-空的先驱.但是需要说明的是，本词虽然留给人们以美感及遐思，但对时-空本性的认识没有实质性的贡献.时-空对称性的研究是物理学的层次，也是本书所要着重讨论的，对于物理学对称性的研究需要坚实的公理体系及严密的、易于操作的数学工具以及关键性的实验验证，这在中国传统中都是弱项.

3. 物理学中的对称性

考虑事物之间的相互联系，这些相互联系之处就是它们的共同点，从而有了对称性.对于粗看起来毫不相干的风马牛，它们之间也有共同点，因为它们都是物质和物质所呈现的运动形态，因此也有对称性.

但是，风马牛之间的对称性是太宽泛的对称性，没有多少实用价值，不会引起过多的兴趣；即使对于上面所讲述的几何图形上的对称性也不会引起特别的兴趣，因为几何上的对称性一看便知，不必花太多的精力.要在物理问题上能够利用直觉的几何对称性，必须将物理问题几何化，这就是20世纪初期开始一直延续到现在的趋势.

在物理上有效的对称性，不那么宽泛，也不那么直观，是在看来不同的对象中找出其中的共同性质(对称性).例如时间与空间应当是不同的对象，但我们从后面可以看到，它们之间有一些共同的性质，也就是说它们之间有对称性.时间和空间是物理学中首先要关注的对象，并且它们之间的差异是如此的明显，而我们竟然在它们之间找到对称性(共同性)这不能不是一件令人关注的事情.如果掌握了两个对象间的对称性，我们可以从一个对象的性质而推知另一对象的性质，两种表面上看似彼此无关的性质，如果对它们之间的对称性加以考察，我们可能发现其中的遗漏及缺陷，从而比较全面地掌握有关对象的性质.在对称性尚未在物理中受到重视的时代，特别是19世纪末20世纪初，我们陆续发现了在物理学中若干重大的佯谬，并且作了修正.当对称性逐渐受到物理学界的重视而上升为“对称性是物理学中的第一原理”这样的高度之后，我们返回去检查所发生的事件，发现原来是忽略了有关领域的对称性联系.这样的成果不能算是原创性的，某种程度上是“马后炮式”或“事后诸葛亮”式的，但是这些事实说明了物理学中的对称性是无处不在的，是连接各种值得关注现象的关键.关于这一类对称性的回溯使我们了解到对称性的普遍性，建立起把对称性的研究推向各种尚未掌握的现象的信心.而这一部分的讨论在现有的文献资料中的深入讨论还比较少，或者还不很集中，往往在讨论对称性的资料中简单地提及几何图像的对称性之后就转到作者感兴趣的近、现代题目中去，远对尚未十分熟悉对称性

的读者不利，往往有见到“丈二和尚”之感，就是对有些作者而言，由于对对称性的内涵不够明晰，可能自己也会一定程度上莫知所云.本书用了相当大篇幅来分析介绍这一类现象，以对称性作为出发点，统一处理各种相关现象，使得“对称性是物理学中的第一原理”的认识有些可供实际参照的事例.

在20世纪初，爱因斯坦(A. Einstein)在讨论时空问题时才有了物理学特有的对称性，而在20世纪前的晶体点群理论中，人们所着重讨论的是几何对称性，即数学上的对称性.爱因斯坦因其理论的新奇和成就的巨大，而为当时人们所瞩目，但他关于对称性的思考往往未能引起注意，实际上在1905年关于狭义相对论的著名论文中，他就提到：“大家知道，麦克斯韦(Maxwell)电动力学应用到运动物体上，就要引起一些不对称……”.任何时候，物理学都需要相当深度的数学，如果当时缺乏相应的数学工具，那么物理学家就创造相应的数学，如牛顿在讨论万有引力时同时提出了流数法(微积分、数学分析).伽利略(Galileo，1564—1642)说过：“自然界的大书是由数学写成的.”他又说，“如果没有理解它的语言，就不能够读懂宇宙这本伟大的书，它的语言就是数学.”

电磁学的奠基人法拉第本人连初等数学都不能熟练运算，他的数学能力又怎样呢？请看理论物理学家麦克斯韦的评价.1873年，在法拉第去世8年以后，麦克斯韦写道：①

> 法拉第采用自己的“力线”的思想描述电磁感应现象，他使用这种方法表明他是事实上的、高超的数学家.将来的数学家们可以从他那里得到启发，得到有价值的、富有想像力的方法.

法拉第因其数学思想的深邃引导麦克斯韦走上了处理电磁现象的道路，建立了正确的电磁场理论，令人印象深刻.1936年，爱因斯坦写道：

> 法拉第和麦克斯韦的电磁场理论摆脱这种令人不能满意的(超距作用)情况.这大概是牛顿时代以来物理学基础所经历的最深刻的变化.

---

① J. C. Maxwell, Scientific Papers, Vol. 2 No. 61 (Cambridge University Press, 1890). 转引自杨振宁演讲集 P431，南开大学出版社.

4. 对称性和数学上的准备

伽利略强调了各种物理特性和相应的数学分支之间的紧密联系.与物理对称性相关联的数学分支主要是群论,它的一些较为详细的性质在下一段介绍.20 世纪初,爱因斯坦实际上是用洛仑兹(Lorentz)群,又称为 SO(3,1)群,得出了震古烁今的质量-能量关系式 $E = mc^2$,人们受到这个成果震撼而未曾注意及其中的群论特点.用群处理的物理问题最富有对称性特色.本段只一般地讨论数学和对称性问题之间的关系,我们强调指出,物理问题只有写成一定的数学形式,才能进一步讨论.狄拉克(P. Dirac,1902—1984)说过:"只有数学才能帮助我们思考."

我们讲到了数学在物理学中的重大作用,但数学不是物理学,数学的对称性也不会完全等同于物理学的对称性.物理学最重要的是概念的形成和它的突破,本质上需要经验的积累及升华,只有在经验积累到一定程度才会有新的成果涌现,这就是历史在某个关键时期所提供的机遇.

在电磁感应(或电磁对称性)的研究过程中,1802 年丹麦奥斯特发现了载流导线附近的磁场,表明发现电磁感应规律的历史机遇已经出现,随后法拉第经过 10 年的实验终于将磁棒插入与指示仪表相连接的螺线管中,看到指示仪表指针的跳动,从而发现了电磁感应.

为了物理的需要,我们将由浅入深介绍一定的数学内容.我们假定读者学过相当于大学低年级理工科的数学分析.实际上对于数学分析,我们只需要其中的微分学部分,而关于积分学或微分方程的求解可以从微分学中导出,"微分为本,积分是副产品"①我们只要求懂得微分学,而一个函数的积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$,是指这样的函数 $F(x)$,它有导数 $\dfrac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = f(x)$;同样,对于微分方程,这是有关未知函数的一种关系,其中包含该函数的微商(或称为导数),我们只需找出(看出或凑出)一个函数,使其满足这个方程.在讲述对称性的过程中,我们由浅入深,逐步介绍所需要的数学知识,使读者能够比较清晰地了解对称性在物理学的作用及一些常规的处理方法,使得正在上学

① 林群:《直来直去的微积分》,中国科大报,2007 年 4 月 25 日,第 2 版

的理工科学生能够把所学到的知识按照对称性的方式梳理归纳，以得到系统的了解；而对于一些希望了解对称性的读者，使他们能够循序渐进，尽可能懂得所遇到的问题.

我们所用的数学除了前面提及的数学分析之外，还有线性代数，这是高中已经用过的数学的直接推广.我们将经常用到矩阵、向量系统.所谓向量就是指一组有顺序的数字；矩阵是指由一个向量到另一个向量的变换，它们之间有一定的运算规则，我们在正文中用到它们的时候将会提及.

对称性在今天已经成为研究物理问题的向导，在它的指引下取得了惊人的成果.关于这些成果的取得，有不少科学普及的书籍已作了介绍①，指出了它所运行的理性框架.本书的目的有所不同，我们主要是要在普通物理框架内，揭示出它们蕴含的对称性，使大家会具体操作，从而找出对称性.现代物理学的处理方式与它们如出一辙，从而降低认识现代物理的门槛及难度.这一中间环节似乎被人忽略，未见有书籍介绍它们.我们作这种介绍的原因在于，我们希望读者不仅大致了解物理学的框架，并且在一些并不是很简单的实例中能够具体操作，以加深理解.“感觉到了的东西不能立刻理解它，只有理解了的东西才更深刻地感觉它.”②

5. 群论与物理学中的对称性

20 世纪以来，由于爱因斯坦等人的工作，使得对称性逐步渗入物理，“对称性是物理学中的第一原理”就是那时以来逐步形成的.尽管是这样的历史情况，对称性在 20 世纪上半叶仍旧未能引起足够的重视，处理对称性的重要工具——群论，尚未纳入纯粹物理学家，甚至是纯粹的理论物理学家的日常思考范围，因弱电统一理论而得诺贝尔物理奖的萨拉姆(A. Salam，1926—1996)学生时代接触群论时，他心目中的一个直接的反应是，学这样的理论有没有必要.1960 年代盖尔曼在处理粒子分类时应用群论预言了新粒子 Ω^-，并且得到了实验的证实，这样的结果振聋发聩，萨拉姆也被触动而潜心钻研群论，并且向他人介绍他的经验和教训.

---

① 《可畏的对称》，徐一鸿著，张礼译，清华大学出版社，2006 年

② 《实践论》，毛泽东选集第一卷(竖排本)人民出版社 1951 年，P275

R. 费曼是这样阐述对称性的："一个事情是对称的，如果可以做某些操作，在做完这些操作之后，它看起来与做之前一模一样."①这是关于对称性的一种阐述方式. 如果把一件事情当作一个系统，在这个系统上的操作是称作群(以 G 记之)中的一个元素，如果在操作 $\hat{F}\in G$(∈念作"属于"，$\hat{F}\in G$ 表示 $\hat{F}$ 是 G 中的一个元素)下系统不变，那么该系统就是群 G 各元素作用下的不变系统或简称 G -不变系统，而不变系统中的各物理参量称为 G -不变参量，它们在 G(中各元素)作用下不变. 从这种情况看来，研究系统的对称性，就是研究该系统在群 G 作用下的不变量问题.

本书的目的是想在普通物理的基础上对 20 世纪蓬勃发展起来的物理学的对称性有所了解，并且掌握一定程度的数学处理方法. 我们将结合着论题的需要，以初等的方法介绍群论的有关性质及内容.

韦尔(H. Weyl，1885—1955)用了很大的力量向物理学工作者推介群论，并且声言群论在处理对称性问题中的有效性. 我们在这里想举出一个简化的例子，使初学者初步体会群论在处理问题中的作用，参见图 5，一个半径为 R 的球壳 S，其球心为 O，设 $\hat{F}_1$ 是围绕着球心 O 的旋转，而 $\hat{F}_2$ 也是围绕 O 的旋转，两个相继的旋转 $\hat{F}_1$，$\hat{F}_2$ 其作用的结果也是一个旋转 $\hat{F}$，其关系记作

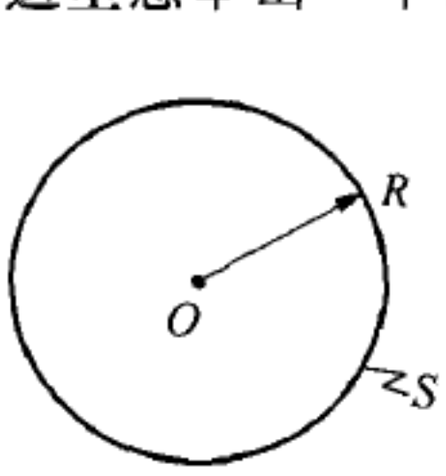


图 5

$$\hat{F}=\hat{F}_2\cdot\hat{F}_1 \tag{1}$$

这里各操作元素 $\hat{F}_i$，$i=1,2,\cdots$ 以(1)式所定义的乘法"·"生成了群 G，它们符合下面四个条件：

(1) 若 $\hat{F}_1,\hat{F}_2\in G$，则 $\hat{F}\equiv\hat{F}_2\cdot\hat{F}_1\in G$；

(2) 单位元 $\hat{F}_0\in G$，$\hat{F}_0$ 是指将球面保持原状的操作，并且 $\forall\,\hat{F}\in G$ 有 $\hat{F}_0\hat{F}=\hat{F}$；这里 $\forall$ 是指"对于一切"之意；

(3) $\forall\,\hat{F}$，存在它的逆元素 $\hat{F}^{-1}$ 使得 $\hat{F}^{-1}\hat{F}=\hat{F}_0$；

(4) 结合律 $(\hat{F}_1\hat{F}_2)\hat{F}_3=\hat{F}_1(\hat{F}_2\hat{F}_3)$，因此三个元素相乘可不加括弧区分其先后相乘顺序，可径直记为 $\hat{F}\cdot\hat{F}_2\cdot\hat{F}_3$ 或 $\hat{F}_1\hat{F}_2\hat{F}_3$，在后一种记法中，

① 《伟大的物理学家》，当代世界出版社，2007 年 8 月，P380

我们将乘法符号也略去不写了.

在上述的例子中我们有关系 $\hat{F}_1 \cdot \hat{F}_2 = \hat{F}_2 \cdot \hat{F}_1$,这种群由于它的相乘顺序可以交换,特别称之为交换群,或称为阿贝尔(Abel)群,以纪念对群论作出重要贡献的挪威年轻数学家阿贝尔.一般说来,如果至少有两个元素 $\hat{A}, \hat{B} \in G$,但是它们按不同顺序相乘的结果不同,这种群就称为是非交换群

$$\hat{A} \cdot \hat{B} \neq \hat{B} \cdot \hat{A} \tag{2}$$

这种群就称为非交换群或非阿贝尔群.在物理学中经常会遇见非阿贝尔群,在遇到它们时再加以分析讨论.

20 世纪以来,韦尔在量子力学的研究中引进了群的概念.他写过经典名作《经典群》及《群论和量子力学》,在空间、时间、物质、能量、力、几何、拓扑等方面都作了深入的研究.这里前五个课题都是物理学的重大问题,后两个课题在传统上是属于数学领域,但由于韦尔的工作,它们与物理课题也紧密地联系到了一起.现代物理观念上都有相应的几何学或拓扑学的内容,因此几何学中关于空间物体形状的对称性转化为相应的物理内容的对称性.

由于波粒二象性的确立,量子力学得以逐步成长壮大而成为物理学的主流.它使得复数和复函数从本质上进入到物理中,而不仅仅只是作为一个方便的计算工具.量子力学出现之后,狄拉克将它与狭义相对论结合起来从而自然地说明了自旋机制;杨振宁改造了韦尔的标度变换,将其中的实指数换成了纯虚指数,提出了规范变换,为弱电统一奠定了基础.这两个理论都是以量子力学原理为基础的,它们的成功也就是量子力学的成功.

对称性的逻辑发展出现在超对称、对偶关系、弦论各领域中,这些是探索性的课题,所得的结论还需要进一步推敲.

物理学的原理是简单的,作为物理学的基本原理——对称性,当然也是简单的.爱因斯坦说:“物理学的原理是优秀的中学生也能了解的.”这里只是原理上简单,以这些原理作为出发点来探讨具体问题往往非常复杂,要深入研究物理学必须具有清醒的认识,爱因斯坦的话也可以从另一个角度去理解:对于物理不能只满足于对一般原理在字面上的理解,需要多花力气作有关方面的探索从而有所专长,否则只能是中学生的水平,尽管是优秀的也罢.

愿本书对读者在具体了解对称性方面能够有所帮助.

习　题

1. 一架螺旋形扶梯装在半径为 R 的柱体上,螺距为 T,右旋,一只蚂蚁从地面出发沿这个扶梯爬过了 n 圈,问这个蚂蚁现在离地面的高度 h,如果 n 不是整数,那么你所求出的公式是否仍旧正确?(答:$h = nT$,n 不是整数仍旧正确.)

2. 参照第 1 题,如果认为蚂蚁爬过了 2π(弧度)是指它爬过了一圈,那么爬过 α 弧度相应的圈数 $n = ?\left(\text{答 } n = \frac{\alpha}{2\pi}\right)$

3. 圆柱形螺旋线,柱半径为 R,螺距为 T,右旋.如果将它围绕圆柱轴线旋转 α 角(以弧度计)之后再向上提升距离 t,则与原螺旋线重合.问 t 与 α 之间的关系是什么?又螺旋线与当地水平面的夹角 $\theta_0 = ?\left(\text{答 } t = \frac{\alpha T}{2\pi}, \tan\theta_0 = \frac{T}{2\pi R} \rightarrow t = \alpha R\tan\theta_0\right)$

第 1 章　地上和天上的力——重力和引力

1.1 重　　力

现代形式的物理学一般认为从牛顿(I. Newton 1642—1727)开始，牛顿的成就当然也与他的前人有关，哥白尼的日心说和开普勒行星绕日运动三定律为天体运动提供了一个可供探讨的天体模型.伽利略(G. Galileo,1564—1642)提供了动力学思想.牛顿在这样的基础上，写出了《自然哲学的数学原理》(1687 年出版)为近代物理学奠定了基础.

伽利略是一位全面的物理学家.他用实验来验证物理理论，并且自己动手制造仪器(如望远镜)，在理论方面他注意到匀速行走的航船，其内部的物理规律与地面上的一样，实际上已经提出了惯性系的概念，并且指出了航船与地面一样是良好计算系统的条件是航船要相对于地面做匀速运动.

注意到伽利略时代还没有微积分，因此速度的概念不是一个容易掌握的概念，匀速运动是指在相同的时间内移过相同的距离，写成公式就是

$$s = v_0 t \tag{1.1.1}$$

距离与时间之比就是速度，$v_0 = s/t$，速度的概念还容易理解，匀速运动的速度理解为距离 s 与时间 t 之比，变速运动的讨论可利用匀速运动的已有结果，任何变速运动在短时间 Δt 内(或者等效地，在短距离 Δs 上)可以认

为是匀速运动，仿照匀速运动的讨论，自然有速度

$$v \sim \frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{1.1.2}$$

1.1.1　重力加速度

我们已经讨论了非匀速运动物体的速度，这是一个与地点有关的局部速度，在 $\Delta t \to 0$ 条件下(1.1.2)两边相等.如果使用微积分的符号可改记为

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{1.1.3}$$

对于变速运动，其距离和时间的关系是一种函数关系，当然最简单的关系是线性关系，$s = v_0 t$，也就匀速运动(变速运动的特例)无论从经验上或是从数学上易于想到最简单的变速(非匀速)运动是距离与时间的平方成比例的运动，

$$s = \frac{1}{2} a_0 t^2 \tag{1.1.4}$$

这里比例系数$\frac{1}{2}a_0$是常数，其中特别分离出来一个因子$\frac{1}{2}$是为了今后讨论的方便.(1.1.4)式的运动是有实际背景的，伽利略曾声称，一个物体从斜面上从静止开始下滑，下滑的距离 s 与下滑时间的平方 t^2 成正比，为此他描述了仪器——斜面，并且讨论了其中的细节，如斜面挖槽及槽内粘上羊皮纸之类，似乎他确实做了这个实验.后人曾按照他的描述做了实验，发现物体在斜槽内下滑的距离接近满足 $s \sim t^2$，但在斜槽内部粘上羊皮纸之后，其效果比未粘的差，因此后人怀疑伽利略并未作斜面实验，而是他觉得物体在斜面上滑下，其距离 s 应当与 t^2 正比，为了增强他的结论 $s \sim t^2$ 的感染力，他编造了一个实验过程①.

不管伽利略是否真的作过斜面实验，斜面运动或自由落体运动其距离的确与所经过的时间平方成正比的规律却是正确的，即使原来不过是个猜测，现在变成了一个正确的结果，它保存在物理文献中，成为大家共同拥有

① 郭奕玲、沈慧君，《物理学史》，第 15 页，清华大学出版社，1997 年.

的知识财富.

对于(1.1.4)所代表的运动,我们有速度

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = a_0 t \tag{1.1.5}$$

因此该质点运动的速度随时间线性变化,我们知道匀速运动的距离随时间线性变化,其速度为常数.现在运动的速度随时间线性变化,因此速度的速度,称为加速度,记为 a,是常数.参见(1.1.5),有加速度

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a_0 \tag{1.1.6}$$

因此斜面运动或自由落体运动是加速度为常数的运动,或者称为匀加速运动.自由落体的加速度称为重力加速度,记为 g.在北纬 45°的海平面上,$g = 9.806\,2$ 米/秒^2.

在上面的讨论中,可以看到,如果物体沿着直线轨道运动,那么可用一个数字 s 表示它的位置,这是物体所在点与线上某个指定点(称为原点,通常以 O 标记)之间的代数距离,所谓代数距离是指直线轨道不仅指定了参考点 O,还以箭头的方式指定了方向(图 1.1).我们将这个直线轨道命名为 X 或 x 轴,而物体 A 的位置以 $OA = s$ 记之,称为物体 A 在 X 轴上的坐标.如果从 O 到 A 的指向与 X 轴的箭头一致,则 s 为正值,如相反,s 为负值.一般说来 $s = s(t)$,是时间 t 的函数,它表示物体 A 在不同时刻所处的位置,而速度 v 是 s 的一阶导数,$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$;加速度 a 是 s 的二阶导数 $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$.

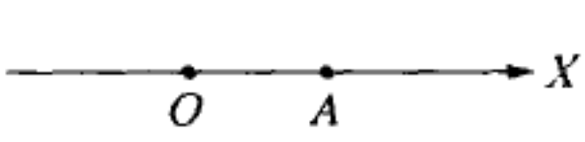


图 1.1

一般说来,物体 A 在三维空间内运动(图 1.2),A 点的位置需要在一定坐标系统中才能确定.在图 1.2 中,我们选定了一个坐标架,其原点是 O,从 O 点出发,延伸出三条互相正交的坐标轴 X, Y, Z,这个坐标架是右手坐标架,即若将右手大拇指指向 Z 轴的正向,其余四指的指向是从 X 轴转向 Y 轴(图 1.3).现在物体 A 分别向 X, Y, Z 轴投射,各轴上的投影点的坐标分别是 x, y, z,则 A 点与 (x, y, z) 有一一对应关系:

$$A \sim (x, y, z)$$

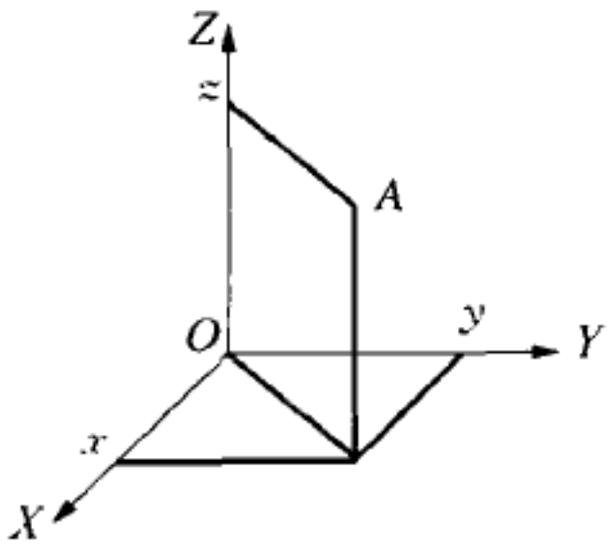


图 1.2

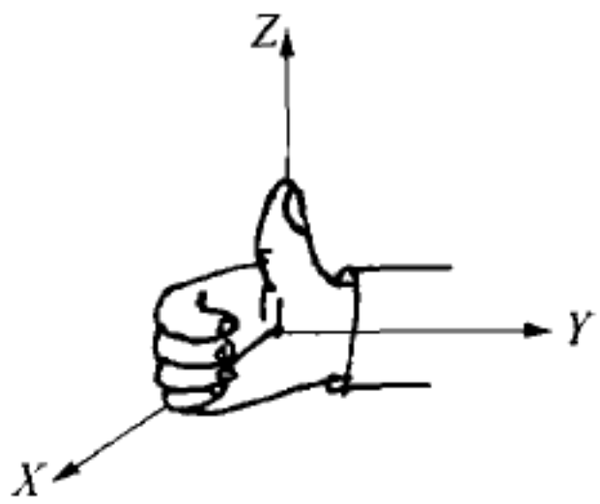


图 1.3

而 A 点的速度相当于各投影点的速度$(v_x,\ v_y,\ v_z)$，A 点的速度

$$(v_x,\ v_y,\ v_z) = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x,\ y,\ z) \qquad (1.1.7)$$

这里最后一式的 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x,\ y,\ z)$ 表示分别向括弧内的$(x,\ y,\ z)$作对 t 的求导运算 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$.上面我们以质点在直线上的一维运动为基础，推广到质点在三维空间中的运动，这种运动包含一维运动作为特例，实际上，我们只需要建立起对应关系

$$\boldsymbol{s} \sim (s,0,0)$$

那么按照三维运动的处理结果与一维的结果相同.

一般我们把 A 在各轴上的投影点的坐标$(x,\ y,\ z)$称作是 A 点的坐标，而数字序列$(x,\ y,\ z)$称为矢量，以一个字母记之，

$$\boldsymbol{r} = (x,\ y,\ z)$$

代表一个矢量的字母(本处是 $\boldsymbol{r}$)为了不致与代表普通数字(常数或变数)的字母相混淆，用黑体表示.注意(1.1.7)，将等式的左方也记成矢量

$$\boldsymbol{v} = (v_x,\ v_y,\ v_z)$$

则从(1.1.7)，我们可以记

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \qquad (1.1.8)$$

如果记 $\boldsymbol{e}_x = (1,0,0)$，$\boldsymbol{e}_y = (0,1,0)$，$\boldsymbol{e}_z = (0,0,1)$，它们代表各轴与轴的指向相同的单位矢量，则我们还可以记

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z \tag{1.1.9}$$

这里数字与矢量相乘，例如 $x\boldsymbol{e}_x$，是指数字 x 与矢量 $\boldsymbol{e}_x$ 的各个分量相乘，两个矢量相加结果也是一个矢量，其分量是参与相加的矢量的对应分量之和. 在(1.1.9)中 $\boldsymbol{r}$ 的分量例如 x 可记为 $x = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{e}_x$，右方是两个矢量 $\boldsymbol{r}$ 及 $\boldsymbol{e}_x$ 的点乘. 一般说两个矢量 $\boldsymbol{A} = (A_1, A_2, A_3)$ 和 $\boldsymbol{B} = (B_1, B_2, B_3)$ 是指 $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \sum_{i=1}^{3} A_i B_i$. 参见本章末第 2 题. 在三维空间中，重力 $\boldsymbol{F}$ 也是矢量，即

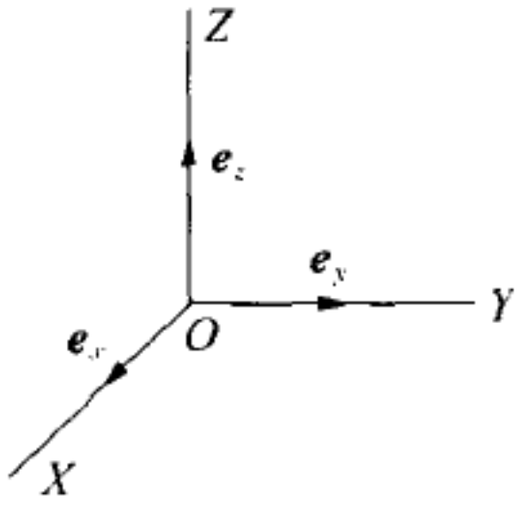


图 1.4

$$\boldsymbol{F} = mg(-\boldsymbol{e}_z) \tag{1.1.10}$$

这里 $\boldsymbol{e}_z$ 为当地地面指向空中的 Z 轴上的单位矢量(参见图 1.4)，而 m 为质点的质量，g 是重力加速度.

1.1.2 运动轨迹上的粒子速度和加速度

在地面附近下落的物体，它的一般运动轨迹可以写成

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}_0 t + \frac{1}{2} g(-\boldsymbol{e}_z) t^2 \tag{1.1.11}$$

其中 $\boldsymbol{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ 是物体的初始位置，这个落体在轨道的速度

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}_0 - gt\boldsymbol{e}_z \tag{1.1.12}$$

而加速度

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -g\boldsymbol{e}_z \tag{1.1.13}$$

如果选择恰当的坐标系(参见图 1.4)使得初始速度 $\boldsymbol{v}_0 = v_{30}\boldsymbol{e}_z + v_{10}\boldsymbol{e}_x$，则从(1.1.11)，写成分量形式有 $x = x_0 + v_{10}t$，$y = y_0$，$z = z_0 + v_{30}t - \frac{1}{2}gt^2$，这个运动轨道处于 $y = y_0$ 的平面上，其中 x 和 z 有关系

$$z - z_0 - \frac{v_{30}^2}{2g} = \frac{-1}{2} g\left(t - \frac{v_{30}}{g}\right)^2 = -\frac{1}{2} g\left(\frac{x - x_0}{v_{10}} - \frac{v_{30}}{g}\right)^2 \tag{1.1.14}$$

因此物体的运动轨迹是在 $y = y_0$ 平面上的抛物线.

1.1.3　运动轨道是平面轨道时的性质

由(1.1.11),我们有关系

$$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{v}_0 t + \frac{1}{2} g(-\boldsymbol{e}_z) t^2$$

参见图 1.5,这个轨道存在于由 $\boldsymbol{e}_z$ 及 $\boldsymbol{v}_0$ 确定的平面 Π 上,Π 过 $\boldsymbol{r}_0$ 的端点,而位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 的端点相对于 $\boldsymbol{r}_0$ 的端点所形成矢量 $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$ 始终位于平面 Π 上.

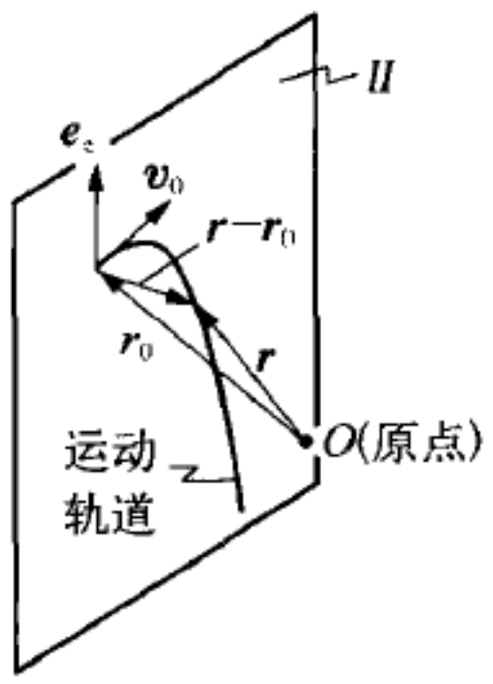


图 1.5

现在我们要讨论平面 Π 的法线,作为准备,先介绍矢量的另一种乘法——叉乘:两个矢量按照一定顺序叉乘,例如 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 叉乘记为 $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$,这里"×"是叉乘记号,其结果另一个矢量 $\boldsymbol{C}$,记为 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$. 下面是几个特别的矢量的叉乘结果

$$\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_z,\ \boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_x,\ \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_y$$

叉乘的结果是反对称的,即 $\boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_x = -\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_y = -\boldsymbol{e}_z$ 等等;还有 $\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_z = 0$,矢量叉乘还有线性特性,这是指如果矢量 $\boldsymbol{A} = A_1 \boldsymbol{e}_x + A_2 \boldsymbol{e}_y + A_3 \boldsymbol{e}_z$,$\boldsymbol{B} = B_1 \boldsymbol{e}_x + B_2 \boldsymbol{e}_y + B_3 \boldsymbol{e}_z$,则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \equiv \boldsymbol{C} &\equiv C_1 \boldsymbol{e}_x + C_2 \boldsymbol{e}_y + C_3 \boldsymbol{e}_z = A_1 B_1 \boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_x + A_1 B_2 \boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_y + \cdots \\ &= (A_2 B_3 - A_3 B_2)\boldsymbol{e}_x + (A_3 B_1 - A_1 B_3)\boldsymbol{e}_y + (A_1 B_2 - A_2 B_1)\boldsymbol{e}_z\end{aligned}$$

即 $C_1 = A_2 B_3 - A_3 B_2 = \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}$, $C_2 = \begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}$, $C_3 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$

上述右端的符号称为行列式,是一个数字,它等于位于主对角线上两个数字的乘积减去次对角线上两个数字的乘积,例如

$$C_2 = \begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix} = A_3 B_1 - A_1 B_3$$

矢量积 $\boldsymbol{C}$ 还可以记为

$$\boldsymbol{C} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \tag{1.1.15}$$

此式右方是形式上的三阶行列式,其组成中有沿主对角线的三个量的乘积以及其他的两项,它们分别由沿与主对角线平行的三个量乘积生成,如果延长线上出现空位,则将与这个空位同一行的,位置在此空位前三位的量填入;除了此3项之外,还有沿次对角线及与次对角线平行的两项,这3项前面需要加一负号,这即是说从(1.1.15)可以得到

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{e}_x A_2 B_3 + \boldsymbol{e}_y A_3 B_1 + \boldsymbol{e}_z A_1 B_2 - \boldsymbol{e}_x A_3 B_2 - \boldsymbol{e}_y A_1 B_3 - \boldsymbol{e}_z A_2 B_1 \tag{1.1.16}$$

矢量 $\boldsymbol{C}$ 与 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 垂直,实际上,根据点乘的定义,$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 垂直等价于 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}=0$,参见本章末第2题,由计算有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C} &= (A_1\boldsymbol{e}_x + A_2\boldsymbol{e}_y + A_3\boldsymbol{e}_z)\cdot \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \\ &= A_1A_2A_3 + A_2A_3A_1 + A_3A_1A_2 - A_1A_3A_2 - A_2A_1A_3 - A_3A_2A_1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

同理可以证明 $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}=0$.现在证明 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 组成右手系,要证实这一点只需要利用公式 $\boldsymbol{D}\times(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{F}) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E})$(参见本章末第4题),现在有

$$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{B} \tag{1.1.17}$$

这里右方第1项与 $\boldsymbol{A}$ 方向一致的量,说明了 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 的确构成右手系.

现在讨论物体在重力作用下的运动轨道.由(1.1.11)我们有

$$\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{v}_0 t + \frac{1}{2}g(-\boldsymbol{e}_z)t^2 \tag{1.1.18}$$

参见图1.5,$\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{r}_0$ 显然位于由 $\boldsymbol{v}_0$ 及 $\boldsymbol{e}_z$ 确定的平面 Π 上,相应的法线可记为

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{v}_0 \tag{1.1.19}$$

可以得到 $\boldsymbol{N}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=0$，这表明(1.1.10)轨道在一个平面内，该平面包含 $\boldsymbol{r}_0$ 点，而法线为 $\boldsymbol{N}$.

1.2 月亮的运动

上一节讨论了落体问题，一个有效长度比起地球半径小很多的平抛物体，如果它的初始速度在每秒 300 米(亚音速)之内，则其轨道不断地弯向地面，最后落到地面上. 如果平抛物体的初始速度越大或者离地面的距离越高，那么它的落点与原始位置的投影点的距离就越远，如果远到比地球半径还大，那么它就不会再落到地面上而成为围绕地球运动的天体. 据说牛顿按照这种观点把月球认为是一个平抛物体. 当物体运动的尺度 $L \ll R_e$($R_e = 6.37\times10^6$ 米，地球半径)时，可把地球表面看作无穷大的平面. 在地面上的自由落体规律，是从小范围内运动物体规律总结出来的. 这个规律所得出运动轨道是抛物线的结论是某种近似的结论. 现在的问题是一个平抛物体，或者是在小范围内运动的物体，例如传说中砸到牛顿头上的苹果，它们与月亮绕地(天上的)运动有共同性质吗？即两者之间有对称性吗？在回答这个问题之前，先讨论月球在天上的运动，再指出它与苹果落地运动之间的对称性.

1.2.1 月亮绕地球的公转周期 T_m

研究月球绕地球转动需要知道月球绕地球一圈的时间，即公转周期 T_m. 注意月亮的公转周期 T_m，并不是农历上的一个月，我们知道农历中的一个月相当于相继看见圆月所需的时间，即第一个农历十五到下一个农历十五的平均时间 T，我们知道两个“十五”，即两个“月半”有时是 30 天，有时是 29 天，平均时间为 $T = 29.5$ 天，即农历的一个平均月. 现在分析 T_m 与 T 有差异的理由，参见图 1.6，设开始时太阳、地球、月球三者成一直线，月球位于 A 处，与太阳分处于地球的两侧；当月球绕地球公转一圈(耗时 T_m)

之后仍回到地球的右侧，考虑到地球绕太阳公转的关系，这时在太阳参照系中看到月球位于 A_1 点，但 A_1 点并非处于圆月状态，因为这时月、地、日三者并未在同一条直线上，要使 A_1 进入圆月状态，还需要时间 $\Delta T_1 = T_m \frac{\theta_1}{2\pi}$，这里 θ_1 是地球在 T_m 时间内围绕太阳在公转轨道（这个轨道可认为是圆形轨道）上转过的角度，注意到地球围绕太阳公转一周需要时间 T_e = 1 年 = 365.25 天，注意一周相当于 2π 弧度，由此得到确定 θ_1 的关系式

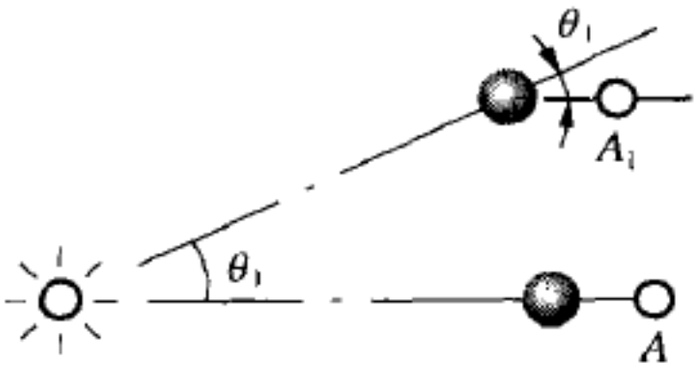


图 1.6

$$\frac{\theta_1}{2\pi} = \frac{T_m}{T_e} \tag{1.2.1}$$

这样，在第一次圆月之后，经过月亮绕地球一周的时间 T_m，再考虑到地球已经沿公转轨道旋转了 θ_1 角，而月球需要在它的轨道旋转 θ_1 角才可看到新的圆月，这一过程需要时间 $\Delta T_1 = T_m \frac{\theta_1}{2\pi} = T_m \frac{T_m}{T_e}$，因此看来 $T_m + \Delta T_1$ 就是相继看到圆月的时间，实际上这种说法是欠准确的，因为上面的分析中，我们假定地球在公转轨道上旋进 θ_1 之后就停留在那个位置不动，静待月球用 ΔT_1 时间旋进 θ_1 角（在月球绕地球轨道上）以达到新的一轮圆月位置，这个假设是不正确的，在这段时间内，地球要转进 θ_2 角，θ_2 角的关系可仿照(1.2.1)式的分析而为 $\frac{\theta_2}{2\pi} = \frac{\Delta T_1}{T_e} = \left(\frac{T_m}{T_e}\right)^2$，而若假定地球转进这个 θ_2 角之后即停下来，这时月球需要用时间 $\Delta T_2 = T_m \frac{\theta_2}{2\pi} = T_m \cdot \left(\frac{T_m}{T_e}\right)^2$ 以到达新的圆月位置. 当然这种说法仍然欠准确，我们还漏掉考虑第三段时间 ΔT_3……把一切可能性都考虑到之后，我们得到两个圆月间隔的平均值

$$\begin{aligned} T &= T_m + \Delta T_1 + \Delta T_2 + \cdots + \Delta T_n + \cdots \\ &= T_m \left[1 + \frac{T_m}{T_e} + \left(\frac{T_m}{T_e}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{T_m}{T_e}\right)^n + \cdots\right] \\ &= \frac{T_e T_m}{T_e - T_m} \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

或者

$$T_m = \frac{T_e T}{T_e + T} = 27.3\text{ 天} \tag{1.2.3}$$

1.2.2　匀速圆周运动的向心加速度

月球绕地球的轨道运动可以当作是圆形轨道运动，月地距离，即月球的轨道半径 $r_0 = 3.84\times10^8$ 米，而作圆形轨道运动的物体有向心加速度 a，它与切向速度 v_0 及半径 r_0 的关系早就由惠更斯(C. Huygens，1629—1695)作了简单的推导.参见图 1.7，从右端的 A 点出发，一个以速率 v_0 做圆周运动的物体，经过 Δt 时间之后，沿切线方向走了 $v_0\Delta t$ 距离到达 A' 点，由于圆形轨道运动，有向心加速度 a，在 Δt 时间内附加了距离 $A'B = \frac{1}{2}a(\Delta t)^2$，它与 AA' 垂直，由于物体的运动是圆周运动，所以最终 B 点落到圆周上，参见图 1.7.现在沿 B 点作 AA' 的平行线，与半径 OA 相交于 C 点，并且向下延长与圆周相交于 B' 点，而 D 点是 A 点的对径点.注意 $BC = CB' = v\Delta t$ 以及 $CA = BA' = \frac{1}{2}a(\Delta t)^2$，并且注意到圆内交叉弦(直径也是一种弦)的比，我们有 $DC \cdot CA = BC \cdot CB'$，注意 $DC = 2r_0 - \frac{1}{2}a(\Delta t)^2 \simeq 2r_0$，得到 $2r_0 \cdot \frac{1}{2}a(\Delta t)^2 = (v_0\Delta t)^2$，从这里有

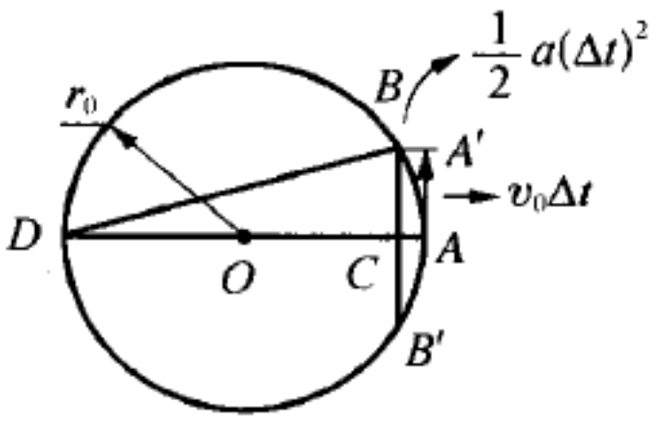


图 1.7

$$a = \frac{v_0^2}{r_0} \tag{1.2.4}$$

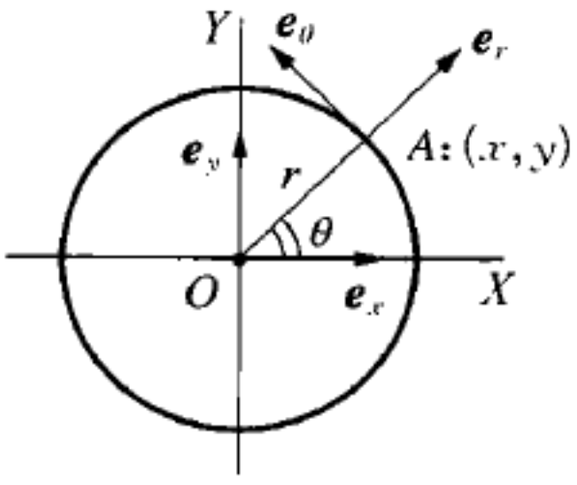


图 1.8

(1.2.4)的推出只使用了平面几何中的技巧，但它却来自惠更斯，从当时情况看来是不同凡响的.自此之后，我们对匀速圆周运动的处理方式又有了重大的改进，处理起来更为容易.现介绍如下：参见图 1.8，在平面选择直角坐标系 (X, Y) 原点为 O，平面上一点 A 的坐标是 (x, y) 另外它还可以取极坐标 (r, θ)，如图所示，这

里 $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ 是 A 点与原点的距离，θ 满足关系

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} \tag{1.2.5}$$

是矢径 OA 与 X 轴的夹角. 现在沿矢径 OA 的延长方向作单位矢量 e_r，及沿夹角 θ 的增加方向从 A 点作单位矢量 e_θ，参照图 2，有关系

$$\left.\begin{aligned} e_r &= \cos\theta e_x + \sin\theta e_y \\ e_\theta &= -\sin\theta e_x + \cos\theta e_y \end{aligned}\right\} \tag{1.2.6}$$

这里 e_x 和 e_y 是分别在 X 轴和 Y 轴上的单位矢量，是常值矢量，从(3)式可以看到

$$\left.\begin{aligned} \frac{de_r}{d\theta} &= -\sin\theta e_x + \cos\theta e_y = e_\theta, \\ \frac{de_\theta}{d\theta} &= -\cos\theta e_x - \sin\theta e_y = -e_r \end{aligned}\right\} \tag{1.2.7}$$

一般地说，任何一个量是 r 和 θ 的函数，(1.2.7)式在求导过程中暗含着我们将 r 视为常数. 为了强调这一点，我们将 $\frac{d}{d\theta}$ 改为 $\frac{\partial}{\partial\theta}$，后者明确告诉我们：在对 θ 求导时，r 应当看作是常数；而 $\frac{\partial}{\partial r}$ 是指对 r 求导而 θ 视作是常数，这样，我们有

$$\frac{\partial e_r}{\partial r} = 0,\ \frac{\partial e_\theta}{\partial r} = 0;\ \frac{\partial e_r}{\partial\theta} = e_\theta,\ \frac{\partial e_\theta}{\partial\theta} = -e_r \tag{1.2.8}$$

这里前两式表示 e_r 及 e_θ 与 r 无关，而后两式即(1.2.7)，现在用 $\frac{\partial}{\partial\theta}$ 无非是特别指出了所涉及的量是多变数的，而求导只涉及其中的一个变量 θ，其余变量(本处只有 r 一个)则保持为常数而已.

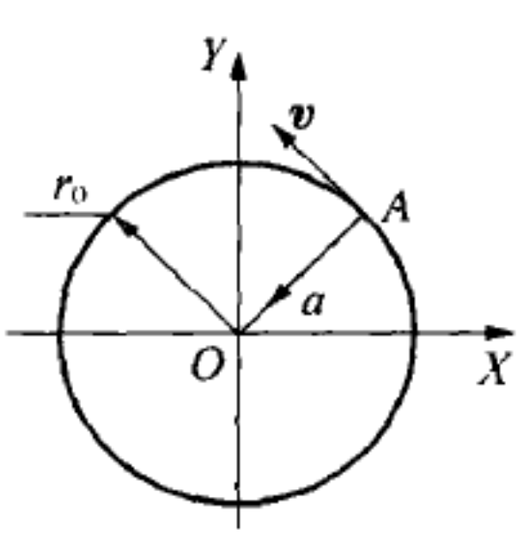


图 1.9

我们讨论匀速圆周运动，参见图 1.9，半径为 r_0 的圆周运动，其中心为坐标原点 O，而物体 A 的速度 $v = v_0 e_\theta$，v_0 = 常数，按照定义可得到加速度

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = v_0 \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\theta}{\mathrm{d}t} = v_0 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial \theta}$$

$$= v_0 \frac{v_0}{r_0}(-\boldsymbol{e}_r) = -\frac{{v_0}^2}{r_0}\boldsymbol{e}_r \qquad (1.2.9)$$

从(1.2.9)，仍旧得到加速度大小 $a = \frac{v_0^2}{r_0}$，方向是 $-\boldsymbol{e}_r$ 方向，即从轨道所在点指向中心 O，与惠更斯的结论相同，但处理方法要简单而且明确，我们只需某些基本规则，就能导得所要的结果，而这些规则说到底就是单变量函数的求导. 今后我们将遵循着同样的思路来处理所遇到的问题.

1.2.3　胡克的引力反平方规律

胡克(R. Hooke 1635—1702)，英国人，比牛顿大七、八岁. 在 1687 年牛顿的《自然哲学的数学原理》出版之前，英国科学家即对引力产生了巨大的兴趣. 1661 年，英国皇家学会成立一个委员会专门研究重力问题，陆续参与者有胡克，哈雷(E. Halley，1656—1742)，雷恩(C. Wren，1632—1723)等人. 1674 年，胡克关于引力问题提出下列见解：每个天体都有倾向于中心的吸引力，它不仅吸引自身，并且还吸引在作用范围内的天体，它们之间的吸引是相互的；其次，天体如果没有受到其他天体影响，将保持直线运动不变；最后，受到吸引力的物体，越靠近中心，其吸引力也就越大.

上述的见解已经接近于万有引力的论述了. 不仅如此，在 1679～1680 年之交，胡克在与牛顿通信中明确指出重力与距离的二次方成反比.

月球绕地球的运动可以当作是圆形轨道运动，月地距离，即运动轨道半径，$r_0 = 3.84 \times 10^8$ 米，作圆形轨道运动的月球需要外界提供向心力 $m\omega^2 r_0$ 以维持现有的状态不变，这里 m 是月球的质量，$\omega = \frac{2\pi}{T}$ 是月球绕地球的角速度. 而向心力只能由地球对月球的吸引力来维持，这个吸引力也叫做万有引力，因为各个物体之间都有相互吸引力存在，由于质点的万有引力的各向同性，因此它只是距离 r 的函数，为了满足开普勒(J. Kepler，1571—1630)第三定律，必须认为万有引力与引力源的距离的平方成反比

$$F \propto r^{-2} \tag{1.2.10}$$

或者万有引力

$$F = \frac{A}{r^2} \tag{1.2.11}$$

这里 A 是与距离 r 无关的常数，由运动方程

$$F = m\omega^2 r$$

得到

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{A}{4\pi^2 m} = \text{常数} \tag{1.2.12}$$

这就是在圆形轨道运动下的开普勒第三定律.关系式(1.2.11)是 Hooke 首先指出的引力反平方规律.

(1.2.11)中的 $A = Gmm_e$，这里 m 是月球的质量，m_e 是地球的质量，G 是个普适常数，与参与作用的物体质量及它们之间的距离都无关，称为万有引力常数.现在从(1.2.7)得到

$$Gm_e = \frac{4\pi^2 r_0^3}{T^2} \tag{1.2.13}$$

这里 $r_0 = 3.84 \times 10^8$ 米是月地之间的距离，$T = 27.3$ 天是月亮绕地球的公转周期，将这些数据代入(1.2.8)得到

$$Gm_e = 4.01 \times 10^{14} \text{ 米}^3/\text{秒}^2 \tag{1.2.14}$$

1.2.4 月球运动和苹果落地运动的同一性

在地球上的局部地区，万有引力就是当地重力，这个看法是否正确，要看能不能得出正确的重力加速度 g 值，按照 g 的定义应当有

$$g = \frac{Gm_e}{r_e^2} \tag{1.2.15}$$

公式(1.2.15)的确切含义是一个质量为 m_e 的质点位于原点，在距离这个质点为 r_e 的地点有加速度 g，但我们要注意，对于月球绕地球运动，由于月

地距离为 3.84×10^8 米比起地球的半径要大很多，这时将地球看成是质点还可以接受.但是对于重力加速度而言，物体就在地表上，这时将地球看成一个质量集中于球心一点的质点合适吗？近代根据牛顿的遗稿编成的《朴次茅斯文稿》可以看到，牛顿在 1666 年就发现从万有引力理论中得出的重力加速度理论值与实测值很相近.牛顿由于当时还不能确定球外附近某点的万有引力怎样计算，牛顿推迟了他的结果的发表时间.直到 1684 年，哈雷来向牛顿询问行星运动问题时，这时牛顿已经掌握了由他发明的积分法，证明球状物体的引力可以看作质量全部集中于球心上的质点来处理.

下面用现在常见的积分法来处理这一问题，我们首先指出一个定理：对于一个半径为 R 的均匀球壳，它对球壳外一点（为了方便，此点可认为位于 z 轴）上的物体的吸引力相当将球面质量都集中在球心而产生的吸引力；而对球壳内一点物体的吸引力是零.

从这个定理可得出下面的结论：均匀球体或者分层均球外一个质点的吸引力相当于把球体的质量全部集中于球心所产生的吸引力.

显然，若每一层球壳对壳外质点的吸引力相当于将球壳质量全部集中于球心所产生的吸引力，那么把球体划分成若干层球壳，计算吸引力时，可以把每一层球壳的吸引力都等效为质量集中于球心的吸引力，自然球体的吸引力就相当于将它的全部质量集中于球心的吸引力.

现在分两步证明这一定理：

1. 均匀圆环在过圆心垂直于圆环所在平面的轴线上所生成的万有引力 $\boldsymbol{F}$.参见图 1.10.半径为 r 的圆环，将其所在的平面选作 xy 平面，原点 O 选在圆心，z 轴是圆环的轴线.现有一个质量为 m 的质点 p 位于 z 轴，距点 O 的距离为 l，设圆环的线密度为 ρ，整个圆环的质量为 $M = \rho \cdot 2\pi r$，环上一点 A 附近，圆心角为 $\Delta\theta$ 的圆弧单元的质量为 $\Delta M = \rho r \Delta\theta$，$\theta$ 为 OA 与 x 轴的夹角.ΔM 对于质点 p 的万有引力为

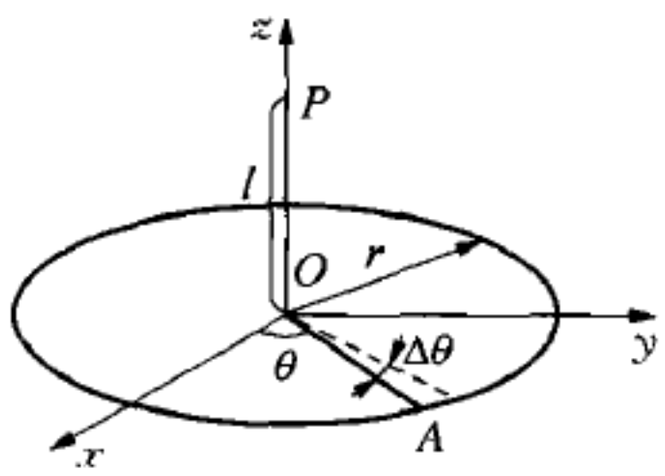


图 1.10

$$\Delta \boldsymbol{F} = \frac{-Gm\Delta M}{R^3}\boldsymbol{R} = \frac{Gm\rho r\Delta\theta}{(r^2 + l^2)^{3/2}} \cdot (r\cos\theta \boldsymbol{e}_x + r\sin\theta \boldsymbol{e}_y - l\boldsymbol{e}_z)$$

这里 $\boldsymbol{R} = r\cos\theta \boldsymbol{e}_x + r\sin\theta \boldsymbol{e}_y - l\boldsymbol{e}_z$ 是由 A 点指向 P 点的矢量，$R = |\boldsymbol{R}| = (r^2 + l^2)^{1/2}$ 是 $\boldsymbol{R}$ 的大小.

由于圆环上各单元的万有引力沿 x 方向(或沿 y 方向)的分量互相抵消,因此圆环对质点 P 的万有引力 $\boldsymbol{F} = \sum \Delta \boldsymbol{F}$ 可以记为

$$\boldsymbol{F} = \frac{-Gm\rho r}{(r^2 + l^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} l\boldsymbol{e}_z \cdot \mathrm{d}\theta = -\frac{GmMl}{(r^2 + l^2)^{3/2}} \boldsymbol{e}_z \tag{1.2.16}$$

2. 均匀球壳对壳外或壳内质点的万有引力.参见图 1.11.设球壳的半径为 R,选择球心 O 作为原点,由于球壳是各向同性的,所以不妨认为受吸引的质点 P 就位于 z 轴上.图中我们只画出了 yz 平面的剖面图.半径为 R 的球壳在 yz 剖面上是半径为 R 的圆周,整个球壳对质量为 m 的质点 P 的万有引力可以是一系列圆环的万有引力的几何和.所提及的圆环是由一系列平行于坐标面 Oxy 的平面切割球壳而成的,如图上的圆环 C 是由与 Oxy 平面分别相距为 z 及 $z + \Delta z$ 的两个面切割出的一条圆形窄带,图中 θ 是 z 轴与点 O 到环 C 上一点连线的夹角,r 是窄环带 C 的半径,$r = R\sin\theta$.设球壳的面质量密度为 ρ',球壳的质量为 $M = 4\pi R^2 \rho'$,

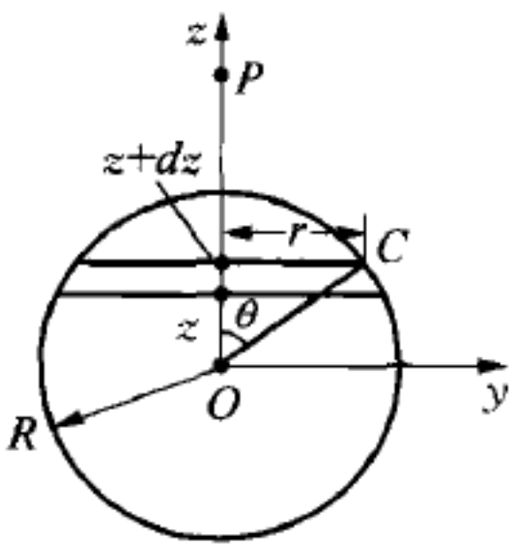


图 1.11

而圆环 C 的质量为

$$\Delta M = \rho' \cdot 2\pi r \frac{\Delta z}{\sin\theta} = \rho' 2\pi R \Delta z \tag{1.2.17}$$

圆环 C 所在的平面到点 P 的距离为

$$l_1 = l - z \tag{1.2.18}$$

$l = OP$ 是点 P 到球心的距离.利用式(1.2.16),注意到 $r^2 + l_1^2 = r^2 + z^2 + l^2 - 2lz$,可以计算出圆环 C 对点 P 的万有引力为

$$\Delta \boldsymbol{F} = -\frac{Gm\Delta M(l - z)}{(R^2 + l^2 - 2lz)^{3/2}} \boldsymbol{e}_z \tag{1.2.19}$$

而整个球壳对质点 P 的万有引力为 $\boldsymbol{F} = \sum \Delta \boldsymbol{F}$,或者写成积分形式

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{e}_z Gm \cdot 2\pi R\rho' \int_{-R}^{R} \frac{(l - z)\mathrm{d}z}{(R^2 + l^2 - 2lz)^{3/2}} \tag{1.2.20}$$

引进积分变量替换

$$u = \frac{1}{2R}\left(l + \frac{R^2}{l} - 2z\right) \tag{1.2.21}$$

这是个线性变换，而式(1.2.20)现在化为

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{e}_z \cdot 2\pi\rho' \cdot Gm\int_{\frac{l}{2R}+\frac{R}{2l}-1}^{\frac{l}{2R}+\frac{R}{2l}+1} \frac{\mathrm{d}u(l/2R - R/2l + u)}{\left(\frac{2l}{R}u\right)^{3/2}}$$

$$= -\boldsymbol{e}_z 2\pi\rho' GmI \tag{1.2.22}$$

上式右端的 I 的定义是

$$I \equiv \int_{\frac{l}{2R}+\frac{R}{2l}-1}^{\frac{l}{2R}+\frac{R}{2l}+1} \frac{\mathrm{d}u\left(\frac{l}{2R} - \frac{R}{2l} + u\right)}{\left(\frac{2lu}{R}\right)^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(R - \frac{R^3}{l^2}\right)\int_{\frac{l}{2R}+\frac{R}{2l}-1}^{\frac{l}{2R}+\frac{R}{2l}+1} \frac{\mathrm{d}u}{2(2Rl)^{1/2}u^{3/2}} + \frac{R}{2l^2}\int_{\frac{l}{2R}+\frac{R}{2l}-1}^{\frac{l}{2R}+\frac{R}{2l}+1}\left(\frac{Rl}{2}\right)^{1/2}\frac{\mathrm{d}u}{u^{1/2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(R - \frac{R^3}{l^2}\right)\left[(l^2 + R^2 - 2lR)^{-1/2} - \frac{1}{l+R}\right]$$

$$+ \frac{R}{2l^2}[l + R - (l^2 + R^2 - 2lR)^{1/2}] \tag{1.2.23}$$

如果 $l > R$，即点 p 在球壳之外，则从式(1.2.23)可以解出

$$I = \frac{R}{2}\left(1 - \frac{R^2}{l^2}\right)\left(\frac{1}{l-R} - \frac{1}{l+R}\right) + \frac{R}{2l^2}[l + R - (l - R)] = \frac{2R^2}{l^2} \tag{1.2.24}$$

将式(1.2.24)代入式(1.2.22)即得

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{e}_z 2\pi\rho' Gm \cdot \frac{2R^2}{l^2} = -\boldsymbol{e}_z \frac{GMm}{l^2} \tag{1.2.25}$$

式(1.2.25)表示球壳对球外一质点的万有引力，相当于将球壳上所有质量集中于球心对质点所产生的万有引力.

现在讨论 $l < R$ 的情况，即质点位于球壳内部的情况.注意 I 的表达式(1.2.23)右方有关平方根都代表一个正量，因此现在有

$$I = \frac{1}{2}R\left(1 - \frac{R^2}{l^2}\right)\left[\frac{1}{R-l} - \frac{1}{R+l}\right] + \frac{R}{2l^2}[(l + R) - (R - l)] = 0$$

这表明当质点 P 位于球壳内部时，球壳对它的万有引力 $F = 0$.

这样，我们计算地球表面上的重力加速度时，可以用(1.2.15)，即可以认为地球的质量 m_e 完全集中在球心上，而用质点质量的万有引力公式导出地表上物体所受的力以及相应的重力加速度 g. 将(1.2.14)的 Gm_e 值，及地球半径 $r_e = 6.4 \times 10^6$ 米代入，求得 $g = 9.8$ 米 / 秒^2 . 从上述的简化考虑，可以看到我们能够用万有引力将月球和苹果的运动纳入统一的框架中去，而重力也被赋予了万有引力形式. 但到目前为止，还只是初步验证了天上运动和地上运动方案的初步可行性，要证明这个方案是完善的，还需要能够导出行星运动的椭圆轨道及椭圆轨道下的开普勒定律. 为了做到这些事情，需要用到微积分运算，下面将讨论它们.

1.3 太阳系中行星运动规律

1.3.1 太阳与地球的质量比

设 m_s 为太阳质量，m_e 为地球质量，现在利用已有数据来计算比值 m_s/m_e，注意到(1.2.8)及地球绕太阳的数据，应用圆形轨道的开普勒第三定律，可以得到

$$Gm_s = \frac{4\pi^2 R^3}{T_e^2} \tag{1.3.1}$$

这里 $R = 1.5 \times 10^{11}$ 米，是日地之间的平均距离，$T_e = 365.25$ 天是地球的公转周期，代入这些数据，可以算出

$$Gm_s = 1.34 \times 10^{20} \text{ 米}^3 / \text{秒}^2$$

注意到(1.2.9)的 Gm_e 值，可以算出比值

$$m_s/m_e = 3.34 \times 10^5 \tag{1.3.2}$$

现在认为的数据是 $m_s = 2 \times 10^{30}$ 千克，$m_e = 6 \times 10^{24}$ 千克，其比值与

(1.3.2)一致.

1.3.2　万有引力常量 G 的测定

万有引力常量 G 最先由卡文迪许(H. Cavendish，1731—1810)在1798年予以测定.因为知道万有引力常量 G 之后,就可以根据万有引力定律算出地球的质量,所以卡文迪许称这个实验为称量地球的实验.实验装置示意图见图 1.12,即有两个质量为 m 的小球用一根轻杆连接,用一根细线通过轻杆中心将整个系统水平悬挂起来,在每个质量为 m 的小球附近放置一个质量为 M 的大球.设未放置大球时系统处于平衡状态,这时在仪器中按固定路径入射的光线射到与细线连接在一起的小镜 S 上后,将沿原路返回.将两个质量均为 M 的大球各自靠近两个质量为 m 的小球后,形成如图 1.12 所示的形状.现在,小球受到大球的吸引(即万有引力)将会扭转.由于细线有弹性,系统扭转到一定的角度 θ 之后就停下来.如果两端的 M 和 m 的作用力均为 F,轻杆长为 l,则有

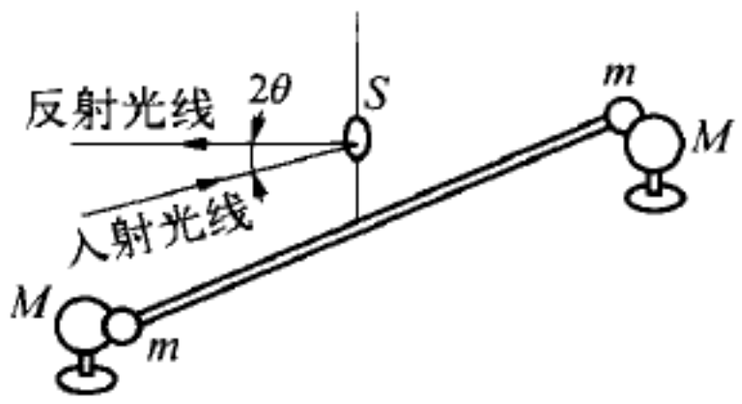


图 1.12　卡文迪许实验

$$F = D\theta/l \qquad (1.3.3)$$

D 是常数,称为细线的扭转常数,它可用其他方法测出并且预先加以标定;θ 是入射光线和反射光线之间夹角的一半.这样,式(1.3.3)右方各量均可定出,从而确定出 F 的大小.

M 和 m 之间的万有引力仿照 1.2.3 的(1.2.11)的讨论,有关系

$$F = G\frac{Mm}{r^2} \qquad (1.3.4)$$

此式中 M，m 是确定的,r 也可以确定,F 前已得到,将所得的值代入式(1.3.4),就可确定出万有引力常量 G,注意式中的 r 是指同一端的 m 和 M 两球球心之间的距离.根据这种方法,卡文迪许测得的 G 值为

$$G = 6.754 \times 10^{-11}\ \text{米}^3/(\text{千克} \cdot \text{秒}^2)$$

现代所使用的数值是

$$G = 6.672\,6 \times 10^{-11} \text{ 米}^3/(\text{千克} \cdot \text{秒}^2) \tag{1.3.5}$$

而由已知的 Gm_e 数值可定出地球的质量 m_e，其大小已在第一段末列出.

1.3.3 点源万有引力作用下的守恒定律

守恒定律是力学系统各种对称性的推论，也可以反过来说，从系统的守恒定律可以推知系统的某些对称性，我们将在 1.5 节较为详尽地分析这些情况，初步体验对称性的威力和重要性.本处只是给出机械能守恒和动量矩守恒的两个简单实例，使读者初步体会力学量及力学量的守恒.

行星在太阳参照系中运动，以太阳作为坐标原点，可以写出运动方程

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{Gmm_s}{r^3}\boldsymbol{r} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{Gm_s}{r^3}\boldsymbol{r} \tag{1.3.6}$$

这里 $\boldsymbol{r}$ 是质量为 m 的行星的位置矢量，m_s 是太阳的质量.记速度 $\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$，有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} &= \boldsymbol{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\left(-\frac{Gm_s}{r^3}\boldsymbol{r}\right) = -\frac{Gm_s}{r^3}\cdot\frac{\mathrm{d}r^2}{2\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{Gm_s}{r}\right) \Rightarrow \frac{1}{2}v^2 - \frac{Gm_s}{r} = E\end{aligned} \tag{1.3.7}$$

这里 $\frac{1}{2}v^2$ 是单位质量物体的动能，$\frac{Gm_s}{r}$ 是单位质量物体的位能，E 为常数，它代表单位质量的总机械能.(1.3.7)表示运动物体的总机械能守恒.仍然从(1.3.6)出发，有

$$\boldsymbol{r}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}) = 0 \rightarrow \boldsymbol{H} \equiv \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v} = \text{常矢量} \tag{1.3.8}$$

$\boldsymbol{H}$ 是单位质量物体的动量矩，它是常矢量，从(1.3.8)还可以看到位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{H}$ 垂直，因此行星的运动轨道是平面轨道，这个平面过原点，法线方向由 $\boldsymbol{H}$ 确定.

1.3.4　简化的行星轨道运动方程

由于对指定行星而方，运动轨道是平面轨道，因此针对这个特点，可将运动方程简化.

选择轨道平面的法线为 z 轴，则有

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{e}_z,\ H = \text{常数} \tag{1.3.9}$$

$H = |\boldsymbol{H}|$ 是单位质量的动量矩的大小. 现在行星在 XY 平面内运动，选择极坐标$(r,\ \theta)$，它与直角坐标 $x,\ y$ 的关系是

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta \tag{1.3.10}$$

而 $H = r^2\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$，速度平方 $v^2 = \left(\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(r\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2$，从(1.3.7)～(1.3.9)得到

$$\frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\theta}^2) - \frac{Gm_s}{r} = E,\ H = r^2\,\dot{\theta} \tag{1.3.11}$$

这里 $\dot{r} \equiv \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$，$\dot{\theta} \equiv \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$，方程组(1.3.11)是讨论行星轨道运动的出发点.

1.4　开普勒定律

1.4.1　轨道运动方程求解

从关系(1.3.9)出发，由其中的第 2 式得到 $\mathrm{d}t = \dfrac{r^2}{H}\mathrm{d}\theta$，将这个关系代到第 1 式中去，以消去 $\mathrm{d}t$，得到

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{H\mathrm{d}r}{r^2\mathrm{d}\theta}\right)^2 + \frac{H^2}{r^2}\right] - \frac{Gm_s}{r} = E \tag{1.4.1}$$

引进新的变数

$$u = \frac{1}{r} \tag{1.4.2}$$

从(1.4.1)得到

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + u^2 - \frac{2Gm_s u}{H^2} = \frac{2E}{H^2}$$

或者

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + \left(u - \frac{Gm_s}{H^2}\right)^2 = \frac{G^2 m_s^2 + 2EH^2}{H^4} \tag{1.4.3}$$

方程(1.4.3)的解是

$$u - \frac{Gm_s}{H^2} = \frac{Gm_s}{H^2}\left(1 + \frac{2EH^2}{G^2 m_s^2}\right)^{1/2} \cos(\theta + \theta_0) \tag{1.4.4}$$

这里 θ_0 是待定常数,与初始条件有关.将 u 仍换成 r,从(1.4.4)得到

$$r = \frac{b}{1 + e\cos(\theta + \theta_0)} \tag{1.4.5}$$

这里长度参数 b 及偏心率 e 与轨道动力学参数有关,

$$b = \frac{H^2}{Gm_s},\ e = \left(1 + \frac{2EH^2}{G^2 m_s^2}\right)^{1/2} \tag{1.4.6}$$

由于做封闭轨道运动的 $E<0$,于是 $e<1$,即轨道是椭圆轨道.

现在,我们已经从理论上证明了开普勒第一定律:“行星做椭圆轨道运动,太阳位于椭圆的一个焦点上”;以及开普勒第二定律:“行星的面积速度$\left(\text{即}\frac{H}{2}\right)$为常数”;开普勒第三定律在下一段讨论.

1.4.2 开普勒第三定律

由轨道方程(1.4.5)可求近日点长度 $r_m = \frac{b}{1+e}$,远日点长度 $r_M = \frac{b}{1-e}$,而椭圆轨道半长轴 r_L 为

$$r_L = \frac{1}{2}(r_m + r_M) = \frac{b}{1 - e^2} \tag{1.4.7}$$

现在计算行星轨道运动的周期 T.

从解析几何的知识知道,偏心率为 e 的椭圆,其半短轴 r_S 与半长轴 r_L 有关系

$$r_S = \sqrt{1 - e^2} \cdot r_L = \frac{b}{\sqrt{1 - e^2}} \tag{1.4.8}$$

而椭圆的面积为 $\pi r_L r_S = T \cdot \frac{H}{2}$,这样可以求得

$$\frac{r_L^3}{T^2} = \frac{r_L^3}{(2\pi r_L r_S / H)^2} = \frac{H^2}{4\pi^2 b} = \frac{Gm_e}{4\pi^2} = \text{常数} \tag{1.4.9}$$

(1.4.9)即开普勒第三定律.

1.4.3　注记

牛顿的理论确定了物体在引力作用下运动的统一性,无论是地上的物体还是天上的物体都服从同一个物理规律,我们在地上和天上的外表看来很不相同的表现形式中,找出了它们的内在的同一性,也就是对称性.以对称性研究作为指导,我们剥去了重力定律的貌似不同的外表而还给它具有万有引力内涵的本来面目.透过外表来研究本质,这就对称性方法的威力.

牛顿的《自然哲学的数学原理》出版于 1687 年,出版之后,英国方面仍长期采用笛卡儿(R. Descartes, 1596—1650)的教本来教物理,原因是认笛卡儿的书"物理概念清楚",而牛顿的万有引力仅是一种复杂的数学方法,所以 16 世后期到 17 世纪,笛卡儿是物理学家,牛顿是数学家,任剑桥卢卡逊数学讲座教授;等到观察事实积累得足够多,证实笛卡儿的"物理概念"不够准确,笛卡儿名实相符地归到数学界,正名为数学家;而牛顿成为物理界的主要代表人物时,这已经是海王星发现之后的事了.

1781 年,英国赫歇尔(F. W. Hershel, 1738—1822)发现了天王星,而它的轨道与当时轨道摄动理论所给出的不一致.如果牛顿理论是正确的,那

么应当还有一颗行星在干扰天王星的轨道.根据这个想法,英国的亚当斯(J. Adams)计算出这个未知行星的轨道,并把他的结果送交格林威治天文台,这是1845年的事,结果送上去之后被搁置了9个多月,寻找时也不够认真,未能把新行星辨认出来.比亚当斯动手稍晚,法国的勒维叶(J. Leverrier)也计算出了新行星位置,并把计算结果告知了柏林天文台的伽勒(J. Galle),伽勒很快于1846年9月18日复信告知发现了这个新行星.新行星被命名为海王星.到了这个时候,牛顿的理论才被普遍接受,牛顿被确认为最杰出的物理学家.

牛顿对科学的贡献是大家所公认的,由于牛顿的工作,科学才从神学中独立出来,把一般看来非常神秘的天体现象变成了可以预知的规律性的东西,从此神学在天体领域内无法施展其伎俩.有人做诗歌颂牛顿说:"牛顿之前,一片黑暗;牛顿之后,一片光明."这虽然包含着诗人的夸张,但在天体运动领域,这样也并非全无根据.牛顿提出了万有引力理论,建立了微积分理论,在数学和物理方面的成就都很大.但牛顿的为人不能算十分完美,特别是在晚年,在学术垄断和争夺发现优先权方面做得过分了些,所以霍金说他不是一个讨人喜欢的人物.牛顿虽然有这些缺陷,并不能遮掩他在物理和数学上的巨大成就.

1.5 力学运动的对称性和守恒定律

对称性的概念源于直观,20世纪以来的物理学吸收了这个概念,加以变通和发展,成为物理学中有机的成分,物理资料再结合对称性的思考可以在过去看来毫无联系的地方找到联系,一些过去迷惑不解的问题得到理解,直至豁然开朗.本节介绍的对称性和守恒定律会留下这样的感觉.

为了简单我们仅限于质点的力学运动,分析这种运动下对称性的有关结论.更复杂的运动形态,如质点系的热运动,在以后适当的地方介绍.对称性和守恒定律是物理学中的主要课题,20世纪以来在这方面的探索得到了

显著的成就.

1.5.1　质点在有位力场中运动

为了确切描述质点在外界运动,我们需要选择坐标系,在不同的问题中一般会选择不同的坐标系.例如在地球表面附近,重力作用下的运动,一般我们会选取直角坐标系,z 轴由地面竖直指向空中;而在单个质点的万有引力作用下,一般我们选取球坐标,原点选在力源上.如果一个物体所受到的力只与它的位置有关,则这种力称为几何力,它的一些细节可参看习题.我们在前面所分析过的地表重力 $mg(-\boldsymbol{e}_z)$,质点在各个地点所受到的作用都是 $mg(-\boldsymbol{e}_z)$,满足只与地点有关的条件,即只要到达一个地点,它就受到一个确定的力,因此重力是几何力;另外质点 M 所产生的力也是几何力,它对质点 m 的作用力是

$\boldsymbol{F}=-\dfrac{GMm}{r^2}\boldsymbol{e}_r=-\dfrac{GMm}{r^3}\boldsymbol{r}$,这里 $\boldsymbol{r}=r\boldsymbol{e}_r$,是由力源 M 指向所讨论质点 m 的位置矢量(参见图 1.13).几何力还分有位力及无位力,所谓有位力是指有个函数 $V(x,\ y,\ z,\ t)$存在,使得力 $\boldsymbol{F}$ 与 V 之间有关系



图 1.13

$$\boldsymbol{F}=-\left(\boldsymbol{e}_x\frac{\partial V}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial V}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial V}{\partial z}\right)=-\nabla\ \mathbf{V}\qquad(1.5.1)$$

这里 $\nabla=\boldsymbol{e}_x\dfrac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\dfrac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\dfrac{\partial}{\partial z}$,称为梯度或梯度算子.我们仅限于讨论有位力,上面的重力和万有引力都是有位力,有位力又称为无旋力,理由可参见第 6 题.对于重力,可选函数 mgz,而对于万有引力可选函数 $-GMm/r$,需要指出有些几何力并非有位力,例如在本章习题第 10 题中指出的 $\boldsymbol{H}$,此外摩擦力因为与物体的运动方向有关,即与运动状态有关,因此不是几何力.

1.5.2　力学系统平移与能量-动量守恒

① 力学系统时间平移对称性和能量守恒

这里所讨论的力学系统,专指质点在有位力场或无旋力场中的运动,前

面已提及，对于有位力 $\boldsymbol{F}$ 有相应的位势函数 $V = V(x, y, z, t)$，使得 $\boldsymbol{F} = -\nabla V$；无旋力是 $\boldsymbol{F}$ 围绕空间封闭曲线的曲线积分为零，$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$，无旋力和有位力在性质上是等效的.现在设系统有时间平移对称性，即这个系统在不同的时间看起来有相同的物理规律，这相当于质点在一般的有位力场中所受到的作用力与时间无关，即位势 V 与时间无关：

$$V = V(x, y, z) \tag{1.5.2}$$

由这个关系可以推导出质点的总机械能

$$E = T + V \tag{1.5.2}$$

守恒，即 E 不随时间改变.实际上，我们知道动能 $T = \frac{1}{2}mv^2$，而

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T + V) = m\left(v_x \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} + v_y \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} + v_z \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\right) \\ &\quad + \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \\ &= v_x F_x + v_y F_y + v_z F_z + (-F_x v_x - F_y v_y - F_z v_z) = 0\end{aligned} \tag{1.5.3}$$

结论：如势函数具有时间平移对称性，则质点的机械能守恒：

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0 \rightarrow E = \text{常数} \tag{1.5.4}$$

这就建立了势函数时间平移对称性和物体能量守恒之间的重要关系.

② *力学系统距离平移对称性和动量守恒*

按照现在对于对称性的理解，我们讨论平移任意一段距离之后形状仍旧不变的图形，见图 1.14.这种类型的图形称为具有平移不变性或平移对称性的图形.一段笔直的铁道具有近似的平移对称性，如果它延伸到无穷远处，就具备了精确的平移对称性.若函数 $u = f(x)$ 具有沿 x 方向的平移对称性，它必然与 x 无关，实际上将它的图形沿 x 方向平移 l 之后，新图形由关系 $u = f(x - l)$ 描述，按要求它必须与 $u = f(x)$ 的相同，因此，$f(x - l) = f(x) =$ 常数.对于一个多元函数 $W = f(x, y, z, t)$，如果它有 x 方向的对称

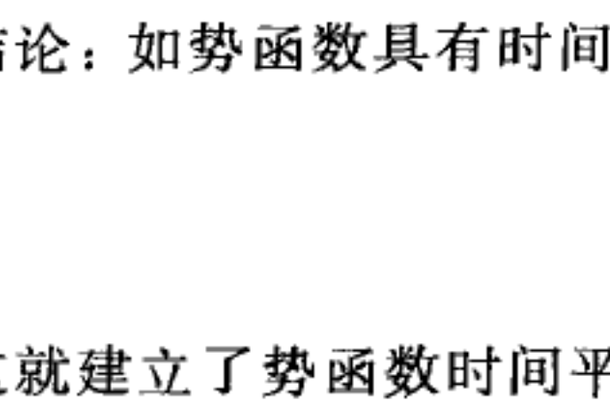


图 1.14

性，那么该函数必然与 x 无关，即

$$W = f(x, y, z, t) = f(x_0, y, z, t) \equiv f_1(y, z, t)$$

这里 x_0 是 x 的一个任意指定值. 有了这些准备后，我们就可以讨论势函数的各种对称性了.

设势函数 V 与某个坐标无关，例如与坐标 x 无关，$V = V(y, z, t)$，即势函数具有沿 x 方向平移的对称性，质点动量的 x 方向分量守恒. 这个结论的证明较为简单

$$\frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \Rightarrow p_x = \text{常数} \tag{1.5.5}$$

下面是两个简单的例子：

1）重力场的势函数 $V = mgz$，与 t，x，y 无关. 因此，在重力场中运动的质点的机械能以及 x 方向和 y 方向的动量分量守恒.

2）设火车沿 y 方向加速，其加速度为 $a = \xi t$，ξ 是个常数. 如将火车车厢看作是惯性系，在其中质量为 m 的质点会受到重力 $\boldsymbol{f}_1 = -mge_z$ 及惯性力 $\boldsymbol{f}_2 = -m\xi te_y$ 的联合作用，即物体在有势力场

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2 = -m(\xi te_y + ge_z) \tag{1.5.6}$$

作用下运动，相应的势函数为

$$V = -m(\xi ty + gz) = V(y, z, t) \tag{1.5.7}$$

因此，在车厢中运动的质点沿 x 方向的动量是守恒的.

1.5.3　对称性观念的重要结果

上面得到的势函数的空间-时间对称性与质点运动的动量-能量守恒之间的关系可以统一写成

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = 0 \rightarrow p_i = \text{常数}, \ i = 1,2,3,4 \tag{1.5.8}$$

这里 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x, y, z, ct)$；

$$(p_1, p_2, p_3, p_4) = \left(p_x, p_y, p_z, \frac{E}{c}\right), c \text{ 为光速} \tag{1.5.9}$$

这些关系在第3章讨论相对论时仍然有用.由于式(1.5.8),如果质点在定常有势力场中运动,其能量守恒.或者,考虑到下面的等价关系

$$\text{力学规律的时间无关性}\sim\text{势函数的时间平移对称性}\sim\text{质点在定常有势力场中运动} \tag{1.5.10}$$

因此能量守恒是力学规律的时间无关性的直接推论.进一步我们相信物理规律是不随时间改变的,牛顿时代以前的物理规律与现代的并无不同,例如当年伽利略在比萨斜塔抛下一个物体的运动规律与我们现在从比萨斜塔抛下一个物体的运动规律是一样的……所以能量守恒定律是必然成立的.这表明

$$\text{物理规律的时间无关性}\longrightarrow\text{运动过程中能量守恒} \tag{1.5.11}$$

其中能量包含机械能、热能、电能、核能等一切可能形式的能量在内.另外,我们深信物理规律与地点无关,其推论是运动过程中动量守恒.

$$\text{物理规律的地点无关性}\longrightarrow\text{运动过程中动量守恒} \tag{1.5.12}$$

总之,能量守恒是物理规律不随时间改变的结果,动量守恒是物理规律不随地点改变的结果.这两条结论是近代物理学总结了大量事实和经验之后发现的基本规律,它们是现代物理的基石之一.

从这里看到物理学中最重要的定律:能量守恒和动量守恒,它们只是物理系统的时间平移对称性和空间平移对称性的推论.为了确切了解上述结论的意义,我们进一步阐述能量守恒这一部分,这里时间平移对称性是一个系统,我们在不同时间去观察它,得到了一系列观察印象,如果这些观察印象它们有对称性——有共同的物理规律——那么推论就是能量守恒.这种看法是物理学在20世纪所取得的重大成就.

在上面的讨论中我们仅涉及有位力,这只是几何力中的一部分.电磁学中以直线稳恒电流为场源的磁场虽然是几何力,但它却不符合有位力条件,如果设想一个磁荷绕这条直线电流运动时,会生成一个电源从而吸收走电流中的能量,因为这牵涉到机械能和电磁能间的转换,因此一个质点在这样的力场中运动可以不断地增加机械能,而外界力场也可以仍保持原状而不改变.

不属于几何力的外力场统称非几何力,最常见的是摩擦力.物体因摩擦

力而消耗的机械能转化成了热能(分子无序运动的能量).关于热能与机械能的转换,始于卡诺(S. Carnot, 1796—1832),完成于迈尔(J. Mayer, 1814—1878)、焦耳(J. Joule, 1818—1889)及亥姆霍兹(H. Helmholtz, 1821—1894),这里也牵涉到各种能量之间的转换.关于热能与机械能之间的关系,将在第 2 章有所涉及.我们知道,若把所有形式的能量包括进来,过程前后的总能量不变.这一条物理学中的根本定律可以纳入对称性为统一出发点的考虑之中.在第 2 章中要讨论有机械能和热能同时存在的热系统,具体分析它们能量守恒形式及特点,以加深和丰富对能量守恒定律的认识.

可以说,20 世纪以来物理学家终于理解了物理理论中的可变换性质以及其中的不变性质,都是一种对称性,对它们的思考方式是与几何学中考虑两个图形全同或相似的思考方式共通的,这就是物理学的几何化.这一点一经突破,眼界顿时开阔.过去从未留心到的关系,现在看来是这样的明显,并且是这样的重要.本小节的讨论就是一个很好的例子.但要注意这里只是回溯式的,只是能说对称性能加深我们对已有事实的理解,在后面我们将谈到对称性作为出发点在发现新物理规律中的作用.

1.5.4　动量矩守恒

力学系统的动量矩守恒与系统的旋转对称性有关,由于我们仅限于讨论有位力的情况,因此与势函数的旋转对称性有关.

势函数 V 是坐标和时间的函数,如果采用非直角坐标,例如将质点的直角坐标(x, y, z)前两个分量改为极坐标,参照(1.3.10)式,将 XY 平面内的极坐标记为(ρ, φ),有

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi$$

使用经这样变换后柱坐标的三个参量(ρ, φ, z),则 V 可记为

$$V = V(\rho, \varphi, z, t) \tag{1.5.13}$$

如果 $V = V(\rho, z, t)$与角度 φ 无关,则动量矩 $\boldsymbol{J}$ 的 z 分量,即动量 p 对 z 轴的矩守恒.

记 $J_3 = \boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{J}$ 为 $\boldsymbol{J}$ 的 z 轴分量,则

$$\frac{\mathrm{d}J_3}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{J}) = \boldsymbol{e}_z \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{e}_z \cdot (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F})$$

$$= \boldsymbol{F} \cdot (\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{r}) \tag{1.5.14}$$

这里 $\boldsymbol{F} = -\frac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{e}_x - \frac{\partial V}{\partial y}\boldsymbol{e}_y - \frac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{e}_z$ 是由势函数 $V = V(\rho, z, t)$ 确定的力，代入上式有(注意 $\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_y - y\boldsymbol{e}_x$)

$$\frac{\mathrm{d}J_3}{\mathrm{d}t} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{e}_z\right) \cdot (x\boldsymbol{e}_y - y\boldsymbol{e}_x)$$

$$= -\left(\frac{\partial V}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial V}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{e}_z\right) \cdot (x\boldsymbol{e}_y - y\boldsymbol{e}_x)$$

$$= -\frac{\partial V}{\partial \rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial \rho}{\partial y}\boldsymbol{e}_y\right) \cdot (x\boldsymbol{e}_y - y\boldsymbol{e}_x)$$

$$= -\frac{\partial V}{\partial \rho} \cdot \frac{1}{\rho}(x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y) \cdot (x\boldsymbol{e}_y - y\boldsymbol{e}_x)$$

$$= 0 \rightarrow J_3 = \text{常量} \tag{1.5.15}$$

此式即是所要证明的结论.

在万有引力或库仑静电作用力场中，作用力是有心力并且满足平方反比规律，其势函数 $V = V(r)$ 只是距离 $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ 的函数.参见(1.5.13)，选择柱坐标(ρ、φ、z)，这里 z 轴的方向是可以任意选择的，而中心力场的势函数(以中心为原点)

$$V = V(\sqrt{\rho^2 + z^2}) = V(\rho, z) \tag{1.5.16}$$

与 φ 无关，所以在中心力场中质点运动的动量矩 z 分量 J_3 是守恒的.进一步讲，由于 z 轴的选择并没有特殊的要求，任何过力心的轴都可以充当 z 轴，因此动量矩在任意轴上的分量都是守恒的.这表明动量矩 $\boldsymbol{J}$ 也是守恒的.这点在讨论行星绕日运动时已经应用过了.

注意动量矩守恒性质与势函数是否包含时间没有关系.设我们有位于原点电荷 Q 产生的静电场，这里设 $Q = \eta t$，η 是常数，电荷量 Q 随时间 t 增加而线性增加，如有点电荷 q 在这个非定常的有势场中运动，则势函数为

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\eta t q}{r} = V(r, t) \tag{1.5.17}$$

在这个力场中仍然有动量矩守恒的规律.

1.5.5　讨论

在本章的末尾,读者在阅读完本章的内容之后,可能关于对称性及我们要叙述的侧重点有了初步概念.本书企图为认识当前对称性发展状况以及相应使用的数学工具作一个逐步深入的介绍.它有别于科普书,如霍金(S. Hawking, 1942—)的《时间简史》,读后留给人们的印象是"好书! 好书!",但除此而外,可能不会留下某些具体印象;它也有别于专门化的著作,如各种拓扑学、场论之类的专著及教材,本书提供一个适中的介绍,从中可以看出脉络.本书既不是一幅山水画,在画面上看看山清水秀,但并非实际现状;但它也不是详细的考察,如同徐霞客的专业探游——"只在此山中,云深不知处",要求参与者付出全部精力,目标是要掌握各种细节,但可能"只见树木,不见森林",丢失了对整体的感觉.本书与前两者都有区别,它的作用相当于一张导游地图,或是航测实录,对想要访问的地点提供一个全面的概念,既不是只引发读者的实地勘察愿望的山水画,也不是躬行考察,而是提供一个入门的真实向导.

物理学中的对称性是从不自觉到自觉的过程,物理学中的对称性就是事物或现象之间的共同性,或者是从不同角度观察同一个事物,或者是使用不同理论描述同一事物时所具有的共同性.这些不同的观察或理论之间应当有些共同的性质,这就是对称性.本节提供了发现这些性质的实例,类似的方式在今后还会遇到.这实际上我们先有物理现象共同性的概念,然后发现几何图形的对称性能够给我们的共同性提供有力的支撑,乃是先有看法,后找支撑,后来支撑果然找到了,于是形成一种共同的事业.我们的这种作法与伽利略研究物理的方法乃是一脉相承的.

伽利略除了重视在物理中应用之外,还提倡用实验①以证实或支持物理理论的奠基人,注意是"证实"或"支持",并不是"引导出".完善的物理理论不可能从具体的实验引导出,伽利略经常编造出他自己从未做过的实验,从前面提及的斜面实验之外,他为了解释地球高速运动的物理规律与静止

---

① 《物理学发展史上的里程碑》,宋玉亭等编,江苏人民出版社,1990 年,第 47 页.

情况下没有区别，虚构了萨维阿蒂(Salviati)大船，萨维阿蒂是伽利略的书《至大体系对话录》中的虚构人物，他相信哥白尼学说.伽利略详细描述这条大船中的细节；装备，舱中的几个人，会飞的苍蝇，滴水的瓶子等，然后他断定当大船在做匀速直线运动时，这一切情况都与这条大船相对地面静止的情况并无不同.好像他真的坐过这条大船，实际上是他的文艺创作.他对他的方法很自信，觉得这种方法在未来岁月起到重大作用.爱因斯坦在建立相对论过程中受到过伽利略的这种“理想实验”方法的强烈影响.

本书的主要读者假定受过大学低年级数、理教育，但又不是专门从事物理理论的工作者，为他们介绍物理理论的专业知识，希望能循着本书的思路了解如何得出哪些物理学中的著名结论的.

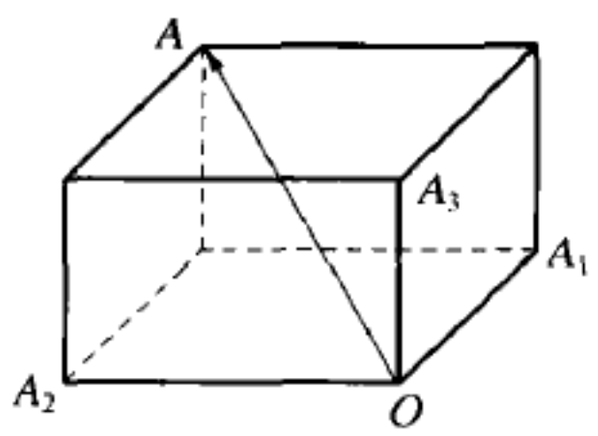
习　题

1. 已知矢量 $\boldsymbol{A} = A_1\boldsymbol{e}_x + A_2\boldsymbol{e}_y + A_3\boldsymbol{e}_z$，证明矢量 $\boldsymbol{A}$ 的长度 $A \equiv |\boldsymbol{A}| = (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)^{1/2}$.(提示：画出坐标架，再考虑矢量 $\boldsymbol{A}$ 末端在坐标轴上的投影，然后根据几何关系推算.)

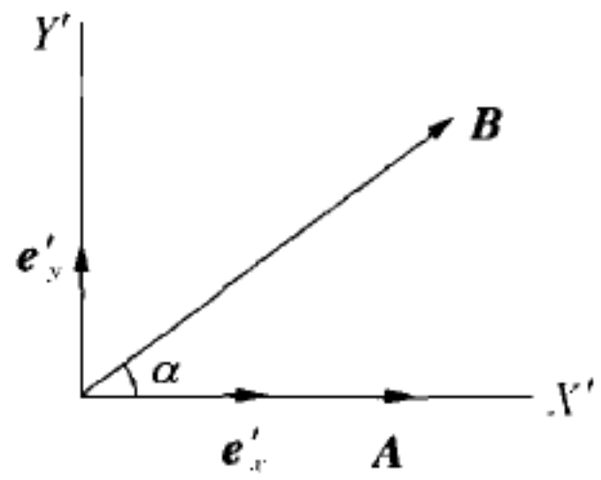
解：参见所附之图，图上的长方体以原点 O 作为一个顶点，A 是与 O 相对的顶点，记 $\vec{OA} = \boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}$ 是此长方体的体对角线，相应各棱长度为 A_1，A_2，A_3，因此有

$$|\boldsymbol{A}| = (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)^{1/2}$$

证毕.



(第 1 题图)



(第 2 题图)

2. 已知矢量 $\boldsymbol{A} = A_1\boldsymbol{e}_x + A_2\boldsymbol{e}_y + A_3\boldsymbol{e}_z$，$\boldsymbol{B} = B_1\boldsymbol{e}_x + B_2\boldsymbol{e}_y + B_3\boldsymbol{e}_z$，其点乘是指 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$ 证明 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = AB\cos\alpha$，这里 α 是 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 两矢量之间的夹角.

解：选择另一个坐标系，见第 2 题图，有

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= A\boldsymbol{e}'_x \\ \boldsymbol{B} &= B\cos\alpha\boldsymbol{e}'_x + B\sin\alpha\boldsymbol{e}'_y \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

由(1)式可推出

$$\boldsymbol{e}'_x = \frac{1}{A}(A_1\boldsymbol{e}_x + A_2\boldsymbol{e}_y + A_3\boldsymbol{e}_z)$$

$$\boldsymbol{e}'_y = \frac{\boldsymbol{B}}{B}\csc\alpha - \cot\alpha\boldsymbol{e}'_x = \boldsymbol{e}_x\left(-\frac{A_1}{A}\cot\alpha + \frac{B_1}{B}\csc\alpha\right)$$

$$+\boldsymbol{e}_y\left(-\frac{A_2}{A}\cot\alpha + \frac{B_2}{B}\csc\alpha\right)+\boldsymbol{e}_z\left(-\frac{A_3}{A}\cot\alpha + \frac{B_3}{B}\csc\alpha\right) \tag{2}$$

由(2)知

$$1 = |\boldsymbol{e}'_y|^2 = \cot^2\alpha + \csc^2\alpha - \frac{2\cot\alpha\csc\alpha}{AB}(A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3)$$

$$= 1 + 2\cot^2\alpha - \frac{2\cot\alpha\csc\alpha}{AB}(A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3)$$

$$\rightarrow\cot\alpha = \frac{\csc\alpha}{AB}(A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3)$$

$A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 = AB\cos\alpha \equiv \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$，证毕.

3. 已知 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$，证明 $C \equiv |\boldsymbol{C}| = AB\sin\alpha$，$\alpha$ 是 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 两矢量之间的夹角.

解：$C = [(A_2B_3 - A_3B_2)^2 + (A_3B_1 - A_1B_3)^2 + (A_1B_2 - A_2B_1)^2]^{1/2}$

$$= \left\{(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)(B_1^2 + B_2^2 + B_3^2)\left[1 - \frac{(A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3)^2}{A^2B^2}\right]\right\}^{1/2}$$

$$= \{A^2B^2(1 - \cos^2\alpha)\}^{1/2} = AB\sin\alpha$$

4. 证明 $\boldsymbol{D}\times(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{F}) = (\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{F})\boldsymbol{E} - (\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{F}$

解：记 $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{D}\times\boldsymbol{G} = \boldsymbol{D}\times(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{F})$，由于 $\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{H} = 0$，及 $\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{E} = \boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{F} = 0$，因此 $\boldsymbol{H},\boldsymbol{E},\boldsymbol{F}$ 都与 $\boldsymbol{G}$ 垂直，它们都处在以 $\boldsymbol{G}$ 法线的平面上，可记

$$\boldsymbol{H} = a\boldsymbol{E} + b\boldsymbol{F} = \boldsymbol{D}\times(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{F}) \tag{1}$$

由(1)知道

$$a(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D})+b(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{D})=[\boldsymbol{D}\times(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{F})]\cdot\boldsymbol{D}=0$$

$\rightarrow a=k(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{D}),b=-k(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}),k$ 是待定参数，代进(1)

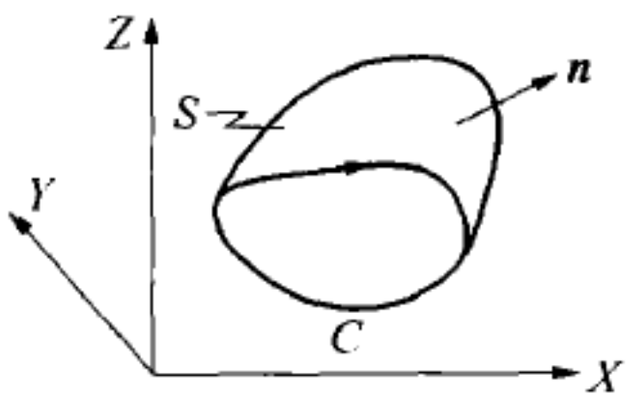
我们有

$$k(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{D})\boldsymbol{E}-k(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D})\boldsymbol{F}=\boldsymbol{D}\times(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{F}) \tag{2}$$

由于(2)左右两方都是 $E_iF_jG_k$ 构成的齐次函数，所以 k 是与各参与矢量无关的常数，现在选择 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{F}=\boldsymbol{e}_y$ 来确定系数 k，现在(2)式左方 $=-k\boldsymbol{e}_y$；而(2)式右方 $=\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_z=-\boldsymbol{e}_y\rightarrow k=1$，最后我们有

$\boldsymbol{D}\times(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{F})=(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{F})\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{F}$　证毕.

5. 证明斯托克斯(Stokes)定理：已知有矢量 $\boldsymbol{A}$ 及空间曲面 S，其边界线为 C，见图，C 有一定走向，而 S 曲面上法线 $\boldsymbol{n}$ 的指向由 C 走向的右手螺旋规则确定，则有关系(斯托克斯定理)



(第5题图)

$$\oint_C\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\iint_S\nabla\times\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1}$$

这里 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$ 是曲面上的局域面积单元.

解：先讨论特殊情况，参见下页图1，积分曲面 S_3 在 XY 平面上，积分单元 $\mathrm{d}S_3=\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，而 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}_3=\boldsymbol{e}_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，若记矢量

$$\boldsymbol{A}=A_1\boldsymbol{e}_x+A_2\boldsymbol{e}_y+A_3\boldsymbol{e}_z \tag{2}$$

现在有

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_1 & A_2 & A_3\end{vmatrix}=\boldsymbol{e}_x\left(\frac{\partial A_3}{\partial y}-\frac{\partial A_2}{\partial z}\right)+\boldsymbol{e}_y\left(\frac{\partial A_1}{\partial z}-\frac{\partial A_3}{\partial x}\right)$$
$$+\boldsymbol{e}_z\left(\frac{\partial A_2}{\partial x}-\frac{\partial A_1}{\partial y}\right) \tag{3}$$

而(1)式在目前的情况下可写为，注意 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}\equiv\mathrm{d}\boldsymbol{l}_3=\boldsymbol{e}_x\mathrm{d}x+\boldsymbol{e}_y\mathrm{d}y$

$$\oint_{C_3}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}_3=\oint_{C_3}A_1\mathrm{d}x+A_2\mathrm{d}y=\iint_{S_3}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x}-\frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{4}$$

注意现在矢量 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(x,y,z)$ 是平面 $z=z_0\equiv0$ 上取值的，记

$$P(x, y) = A_1(x, y, z_0),\ Q(x, y) = A_2(x, y, z_0)$$

则(4)式现在可以改写为

$$\oint_{C_3} P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y = \iint_{S_3}\left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad (5)$$

我们注意

$$\iint_{S_3}\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int \mathrm{d}y Q(x, y)\Big|_{x_{左}(y)}^{x_{右}(y)}$$

$$= \int [Q(x_{右}(y), y) - Q(x_{左}(y), y)]\mathrm{d}y \quad (6)$$

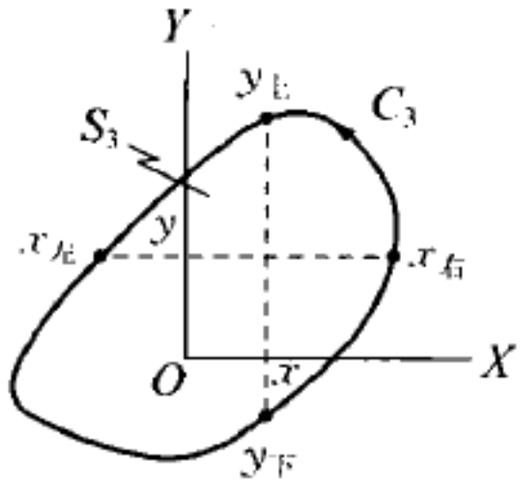


图 1

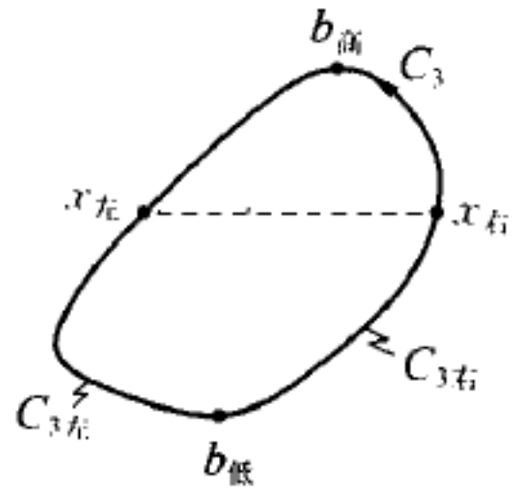


图 2

这里 $x_{右}(y)$及 $x_{左}(y)$均在曲线 C_3 上，参见上图 2 所示. 我们只讨论 C_3 是简单的凸曲线情况，这时可以在曲线 C_3 上找出一个最高点 $b_{高}$，还可以找出一个最低点 $b_{低}$，这两点将闭曲线 C_3 划分为两段，$C_{3右}$：$b_{低}\to x_{右}\to b_{高}$；$C_{3左}$：$b_{高}\to x_{左}\to b_{低}$，这样从(6)式得到 $\iint_{S_3}\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{b_{低}\to x_{右}\to b_{高}} Q(x_{右}(y), y)\mathrm{d}y$

$$-\int_{b_{低}\to x_{左}\to b_{高}} Q(x_{左}(y), y)\mathrm{d}y = \int_{C_{3右}} Q(x, y)\mathrm{d}y + \int_{C_{3左}} Q(x, y)\mathrm{d}y$$

$$= \oint_{C_3} Q(x, y)\mathrm{d}y \quad (7)$$

现在讨论(5)式中另一个项，参见下页图 3，将 C_3 的最右端点 $a_{右}$ 及最左端点 $a_{左}$ 标出，而将 C_3 有向闭曲线划分为两段 $C_{3上}$：$a_{右}\to y_{上}\to a_{左}$；$C_{3下}$：$a_{左}$ $y_{下}\to a_{右}$，与(6)～(7)的推导类似，我们有

$$-\iint_{S_3}\frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\int \mathrm{d}x P(x, y)\Big|_{y_{下}(x)}^{y_{上}(x)}$$

$$= -\int [P(x, y_{上}(x)) - P(x, y_{下}(x))]\mathrm{d}x \quad (6')$$

这里 $y_{上}(x)$，$y_{下}(x)$均在曲线 C_3 上，参见下图 3 所示.仿照(7)式的推导，

$$-\iint_{S_3} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\int_{a_{左}\to y_{上}\to a_{右}} P(x, y_{上}(x))\mathrm{d}x + \int_{a_{左}\to y_{下}\to a_{右}} P(x, y_{下}(x))\mathrm{d}x$$

$$= \int_{C_{3上}} P(x, y)\mathrm{d}x + \int_{C_{3下}} P(x, y)\mathrm{d}x = \oint_{C_3} P(x, y)\mathrm{d}x \quad (7')$$

综合(7)及(7′)我们有(5)式，(5)式的正确性证毕.

作了这些准备之后，现在来证明(1)式.

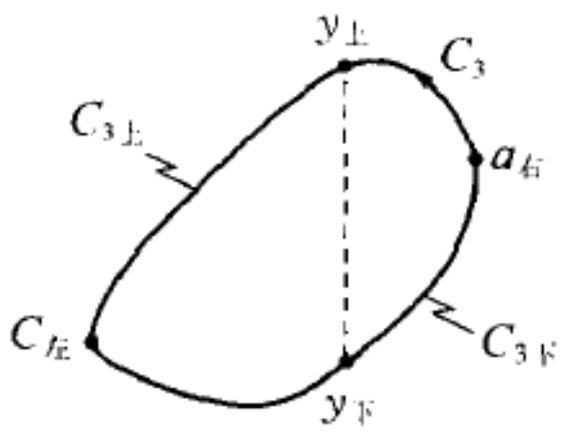


图 3

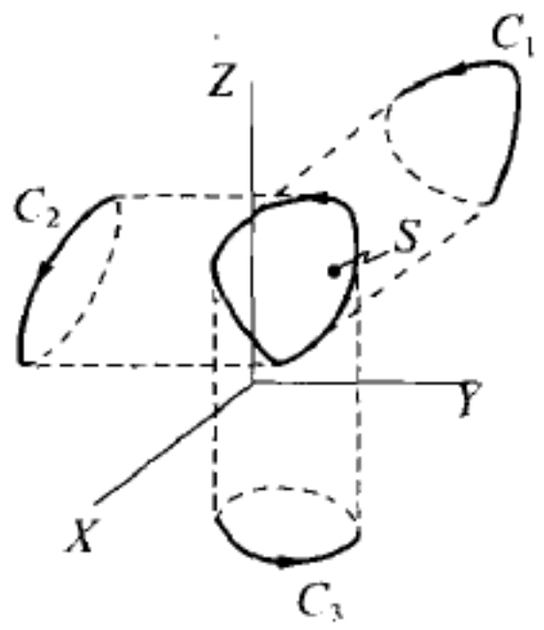


图 4

参见上图 4，我们选择积分曲面 S，它在平面 YZ，ZX，XY 的投影都是单值的，即 S 面上的不同点在各个平面上都投向不同的点.这一般只要选 S 面足够小就能做到这一点，如果在这样的 S 面上证实了公式(1)，那么把一般的曲面分割成若干符合上述条件的曲面，从而可以证明(1)在一般曲面 S 上也成立.

现在来证明(1)式，曲面 S 如上图 4 所示，我们有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\boldsymbol{e}_z + \mathrm{d}y\mathrm{d}z\boldsymbol{e}_x + \mathrm{d}z\mathrm{d}x\boldsymbol{e}_y \quad (8)$$

而(1)式的右方为

$$\iint_S (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_S \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$+ \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x \quad (9)$$

现在研究(9)式右方第一项

$$\iint_S \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_S \left[\frac{\partial A_2(x, y, z)}{\partial x} - \frac{\partial A_1(x, y, z)}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{S_3} \left[\frac{\partial A_2(x, y, z)}{\partial x} - \frac{\partial A_1(x, y, z)}{\partial y} \right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad (10)$$

注意若取定 S 面上各点的前两个坐标 x，y，则第三个坐标 z 由曲面方程确定，$z = z(x, y)$，引进函数 $P(x, y)$和 $Q(x, y)$满足如下关系

$$P(x, y) = A_1(x, y, z(x, y)),\ Q(x, y) = A_2(x, y, z(x, y)) \quad (11)$$

我们有

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial A_1}{\partial y} + \frac{\partial A_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial A_2}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} \quad (12)$$

考虑到(12)式，从(10)式可得

$$\begin{aligned} \iint_S \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_{S_3} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_S \frac{\partial A_2}{\partial z} \mathrm{d}y\mathrm{d}z - \iint_S \frac{\partial A_1}{\partial z} \mathrm{d}z\mathrm{d}x \\ &= \oint_{C_3} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + \iint_S \frac{\partial A_2}{\partial z} \mathrm{d}y\mathrm{d}z - \iint_S \frac{\partial A_1}{\partial z} \mathrm{d}z\mathrm{d}x \end{aligned} \quad (13)$$

这里，我们应用了如下关系：当 S_3 为平面时

$$\iint_{S_3} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_{C_3} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \oint_C A_1\mathrm{d}x + A_2\mathrm{d}y \quad (14)$$

(13) 还可以改记为

$$\iint_S \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_C A_1\mathrm{d}x + A_2\mathrm{d}y + \iint_S \frac{\partial A_2}{\partial z} \mathrm{d}y\mathrm{d}z - \iint_S \frac{\partial A_1}{\partial z} \mathrm{d}z\mathrm{d}x \quad (15)$$

以及(x, y, z)及(A_1, A_2, A_3)各自的轮换关系，有

$$\begin{aligned} &\iint_S \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) \mathrm{d}y\mathrm{d}z = \oint_C A_2\mathrm{d}y + A_3\mathrm{d}z + \iint_S \frac{\partial A_3}{\partial x} \mathrm{d}z\mathrm{d}x - \iint_S \frac{\partial A_2}{\partial x} \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \\ &\iint_S \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) \mathrm{d}z\mathrm{d}x = \oint_C A_3\mathrm{d}z + A_1\mathrm{d}x + \iint_S \frac{\partial A_1}{\partial y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_S \frac{\partial A_3}{\partial y} \mathrm{d}y\mathrm{d}z \end{aligned} \quad (16)$$

将(15)及(16)共 3 个等式在左方和右方分别相加起来有

$$\iint_S (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 2\oint_C \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} - \iint_S (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \rightarrow$$

$$\iint_S (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_C \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{17}$$

斯托克斯定理证毕.

6. 无旋力和有位力是等价的,试证明之.

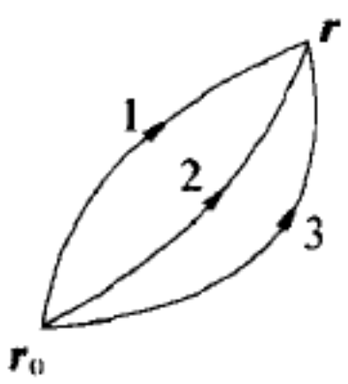


图 1

解:必要性,已知 $\boldsymbol{F}$ 是无旋力,$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$,参见左图 1,可以定义从 $\boldsymbol{r}_0$ 到 $\boldsymbol{r}$ 的积分 $\int_{r_0}^{r} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 而无需顾及具体的路线,这是因为根据假设

$$\int_{r_0 \rightarrow 1 \rightarrow r} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{r_0 \rightarrow 2 \rightarrow r} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \Leftrightarrow \int_{r_0 \rightarrow 1 \rightarrow r} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} - \int_{r_0 \rightarrow 2 \rightarrow r} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$$

这里 C 是 $\boldsymbol{r}_0 \rightarrow 1 \rightarrow \boldsymbol{r} \rightarrow 2 \rightarrow \boldsymbol{r}_0$ 的闭曲线,定义位势函数

$$V(x, y, z, t) = -\int_{r_0}^{r} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1}$$

我们有 $V(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, t) - V(x, y, z, t)$

$$= \Delta x \frac{\partial V}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial V}{\partial y} + \Delta z \frac{\partial V}{\partial z} = -(\boldsymbol{F} \cdot \Delta \boldsymbol{r})$$

$$= -(F_1 \Delta x + F_2 \Delta y + F_3 \Delta z) \rightarrow F_1 = -\frac{\partial V}{\partial x}, F_2 = -\frac{\partial V}{\partial y}, F_3 = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

即 $\boldsymbol{F} = -\nabla V$,因此 $\boldsymbol{F}$ 是有位力;

充分性,已知 $\boldsymbol{F}$ 是有位力,$\boldsymbol{F} = -\nabla V$,$V$ 是系位势函数,而利用斯托克斯定理,我们有

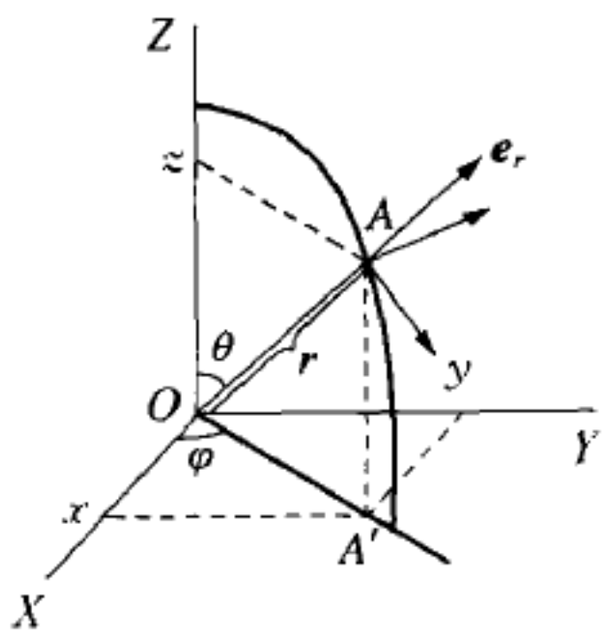
$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \iint_S \nabla \times \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\iint (\nabla \times \nabla V) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$= -\iint \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \partial V/\partial x & \partial V/\partial y & \partial V/\partial z \end{vmatrix} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

因此 $\boldsymbol{F}$ 是无旋力.定理证毕.

7. 参见第 7 题图,三维空间,O 点是坐标原点,$OXYZ$ 是右旋直角坐标系,空间一点 A:(x, y, z) 若选球坐标系则以 (r, θ, φ) 标记,这里,$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ 是 A 点与坐标原点 O 的距离;θ 是矢径 OA 与 Z 轴的夹角;φ 是 A 在 XY 平面上的投影点 A' 与 O 点的连线 OA' 与 X 轴的夹角,θ, φ 又称为球

面角，θ 称为纬线角，φ 称为经线角. 现在 e_r 是延矢径 OA 延长方向上的单位矢量，在 OA 延长线上各点，θ，φ 保持为常数；e_θ 是 r，φ 保持不变，沿 θ 的增加方向上的单位矢量；e_φ 是 r，θ 保持不变，沿 φ 的增加方向上的单位矢量，求出 e_r，e_θ，e_φ 与 X、Y、Z 轴上的单位矢量 e_x，e_y，e_z 之间的关系，并且验证 $e_r \times e_\theta = e_\varphi$；此外求出 e_r，e_θ，e_φ 对 r，θ，φ 的偏导数.



（第 7 题图）

答：$e_r = \sin\theta\cos\varphi e_x + \sin\theta\sin\varphi e_y + \cos\theta e_z$

$e_\theta = \cos\theta\cos\varphi e_x + \cos\theta\sin\varphi e_y - \sin\theta e_z$

$e_\varphi = -\sin\varphi e_x + \cos\varphi e_y$

$\dfrac{\partial e_r}{\partial r} = \dfrac{\partial e_\theta}{\partial r} = \dfrac{\partial e_\varphi}{\partial r} = 0$；$\dfrac{\partial e_r}{\partial\theta} = e_\theta$，$\dfrac{\partial e_\theta}{\partial\theta} = -e_r$，$\dfrac{\partial e_\varphi}{\partial\theta} = 0$；

$\dfrac{\partial e_r}{\partial\varphi} = \sin\theta e_\varphi$，$\dfrac{\partial e_\theta}{\partial\varphi} = \cos\theta e_\varphi$，$\dfrac{\partial e_\varphi}{\partial\varphi} = -\sin\theta e_r - \cos\theta e_\theta$

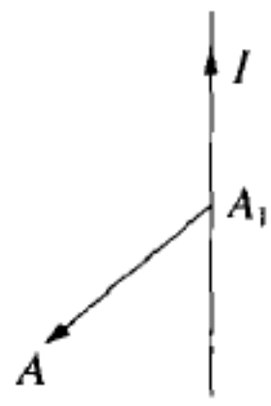
8. 已知重力的位势函数 $V = mgz$，写出重力 $\boldsymbol{F}$ = ?

解：$\boldsymbol{F} = -\left(e_x\dfrac{\partial}{\partial x} + e_y\dfrac{\partial}{\partial y} + e_z\dfrac{\partial}{\partial z}\right)mgz = -mge_z$

9. 已知位势函数 V 满足关系 $-\nabla V = \boldsymbol{F}$，这里 $\boldsymbol{F} = -\dfrac{GMm}{r^2}e_r$ 是万有引力，写出 V 的一个具体形式并验证之.

解：$V = -\dfrac{GMm}{r}$；验证：① 用直角坐标系 $\boldsymbol{F} = -\left(e_x\dfrac{\partial}{\partial x} + e_y\dfrac{\partial}{\partial y} + e_z\dfrac{\partial}{\partial z}\right)\left(-\dfrac{GMm}{r}\right) = GMm\left(\dfrac{-1}{r^2}\right)\cdot\left(e_x\dfrac{x}{r} + e_y\dfrac{y}{r} + e_z\dfrac{z}{r}\right) = -\dfrac{GMm}{r^2}e_r$，正确；用球坐标系 $\boldsymbol{F} = -\left(e_r\dfrac{\partial}{\partial r} + e_\theta\dfrac{\partial}{r\partial\theta} + e_\varphi\dfrac{\partial}{r\sin\theta\partial\varphi}\right)\left(-\dfrac{GMm}{r}\right) = -e_r\dfrac{GMm}{r^2}$，也正确，证毕.

10. 恒定直线电流磁场 $\boldsymbol{H}$ 对电流线圈或磁偶极子，或者概念上存在的磁单极有作用力，因此 $\boldsymbol{H}$ 也可以解释为是一种力，这种力 $\boldsymbol{H} = Ie_z \times \dfrac{\boldsymbol{D}}{2\pi D^2}$ 是几何力，这里 $\boldsymbol{D}$ 是所研究点 A 到直线电流 I 上的垂足 A_1 指向 A 点的矢量，$\boldsymbol{D} = \overrightarrow{A_1A}$，因此 $\boldsymbol{H}$ 是几何力但并非有位力，试解释之！



（第 10 题图）

解：设 C 是以 I 为轴线的圆周则有 $\oint_C \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = I \neq 0$，因此不

是有位力.

11. 试说明摩擦力不是几何力.

解：摩擦力与物体运动方向有关，而不是只取决于物体所在的位置所以不是几何力.

第 2 章　熵的性质和粒子的不可区分性——宏观与微观

随着潘本(D. Papin，1647—1714)发明的第一部活塞式蒸汽机在 1690 年问世，后来瓦特(J. Watt，1736—1819)把蒸汽机用于工业生产，对热学的宏观了解和对热的测量都有了显著的进展.随着数据的积累及物理学发展到一定程度，出现了原子论.原子论的要点是物质是由很多小单元组成的，这些小单元称为分子或原子，物体的性质是分子或原子的性质确定的.既然宏观的物质性质及微观的分子性质都可以用来确定同一系统的性质，因此宏观规律和微观规律之间有对称性，由于宏观规律易于直观探讨及实验研究，根据对称性，我们从已掌握的宏观规律中导出若干微观规律，有些规律(微观)是出人意外的，本章将讨论这方面的结果.

在第 1 章的讨论中，我们发现当把对称性作为考虑事物的出发点时，我们不仅讨论有对称性的事物的本身，还讨论这些互相对称的事物的性质，这些性质不是一些微不足道的显然性质，而是使人瞠目结舌的重大发现，只要大家回忆一下第 1 章我们讲及具有时间平移不变性的系统，其中蕴含了能量守恒定律，物理世界的规律不随时间改变当然是我们的出发点，早在 100 多年前恩格斯就表达了物理规律不随时间改变的见解：

“……物质在它的一切变化中永远是同一的，它的任何一个属性都永远不会丧失……”①

---

① 恩格斯，《自然辩证法》，人民出版社，1971 年版，第 21 页

这个见解反映了一个基础性的重大事实.另外能量守恒定律在19世纪末被认为是非常重要的事件,恩格斯把它和细胞的发现及达尔文进化论视作是19世纪自然科学具有决定意义的三大发现,自然界中的一切现象通过能量守恒及转化联系起来了.恩格斯在"反杜林论"①中说

"……当运动(所谓能)的量从动能(所谓机械力)转化为电、热、位能等等,以及发生相反的转化时,它仍旧是不变的……对自然的认识都综合于对这个过程的认识中."从这里我们看到这又是一个基础性的重大事实,通过对称性的研究发现这两个基础事实竟然是有关联的,"能量守恒"这种对称性是另一种对称性——"自然规律不随时间改变"的内在性质或一个属性.

为了理解一种对称性是另一种对称性的一个属性的问题,试举一例解释这两者的关系:图2.1中若干人站成一行,每个人可以选择朝前或朝后站两种可能性,并且每人右手拿着一个气球,其中有一种地点无关的朝向(指该行中各人的朝向相同).图2.1(a)和(b)所示的都是与地点无关的朝向,具有气球间隔相等的对称性.这与物理规律不随时间改变就有能量守恒属性这一情况类似.如果我们把气球间隔相等,当作是能量守恒的一种表述,则各个举气球的人就代表不同时刻的物理世界.这样,图2.1(a)和(b)代表物理规律不随时间改变的真实世界,而(c)所代表的世界不遵从能量守恒,应予排除.

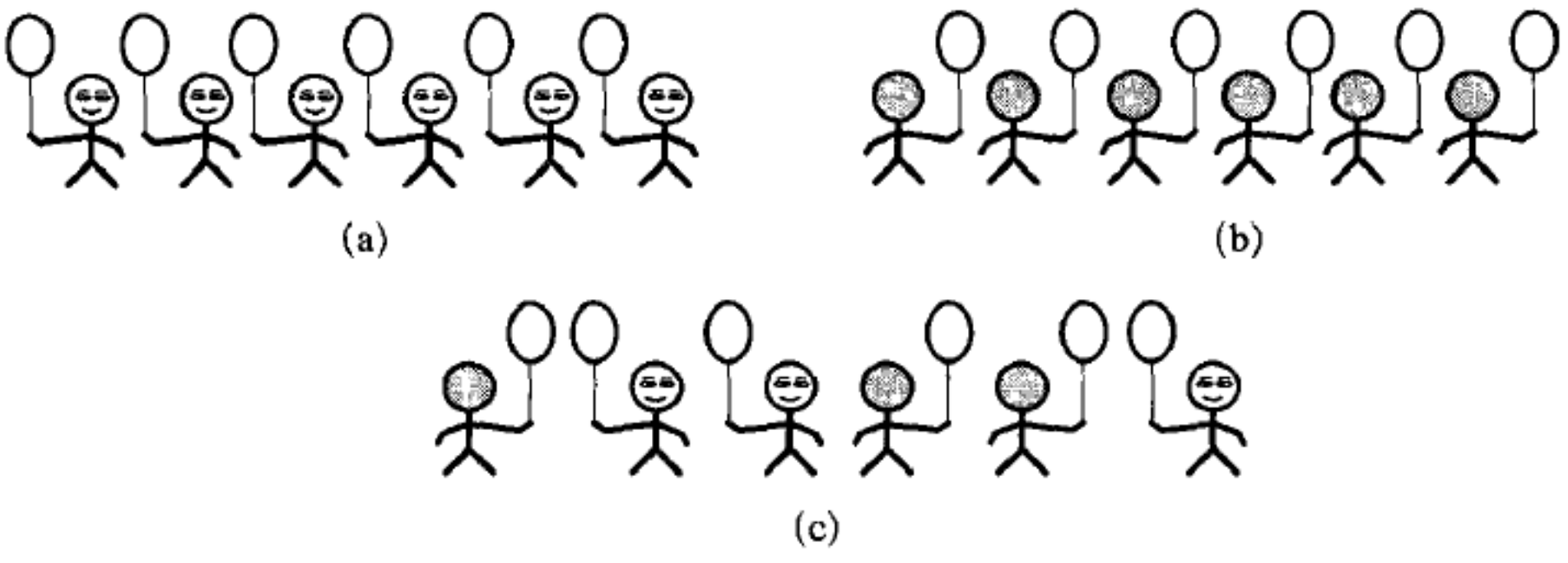


图2.1 对称性及其衍生性质的图解

(a) 朝前;(b) 朝后;(c) 朝前或朝后任意选择

① 转引自《物理学发展史上的里程碑》,马文蔚等主编,江苏科学技术出版社,1992年1月,第85页.

从物理系统的时间平移不变性从而察知有能量守恒定律，从这里我们体会到了理论思维，特别是对称性思维的威力.本章将将对称性思维应用到热学中，我们可以看到从宏观世界的规律再加上对称性的理论思索，就能够得到微观世界的规律，这个规律不是把宏观世界缩微化的结果，而是微观世界暴露出与宏观世界不同的规律，但是它们之间有联系，或者说宏观理论制约了微观理论的选择范围.从这里可以体会到对称性思维的有效和重要.从历史上讲，这些理论之间的联系得到的比较早，后来有了对称性概念之后，我们才理解了所做过的探索的理由，尽管是事后总结的，但还是使我们体会到“感觉到的我们还未必理解它，而理解了的却能更深刻地感觉到它.”

2.1　温　　度

温度的主观感觉是冷热的程度，但这不是定义，而只是一种描述或同语反复.为了对温度这一概念作精确的定义，还需要从其他概念开始谈起.

2.1.1　系统

按照一定条件聚合在一起的物质称为系统，在某些系统中有温度的概念.

孤立系统：一个系统不与外介相接触则称它为孤立系统.一个孤立系统经过长时间演化之后所处的最终状态称为热平衡系统，它是不随时间演变，或者处于平衡状态的孤立系统.对于热平衡系统的任何部分都是热平衡系统，这就是说将这一部分分离出去并且孤立起来，则这一部分的状态不随时间改变.描述热平衡系统状态的参量称为系统参量.若系统具有 n 个独立的参量，就称这个系统为 n 参量系统.例如由一定质量的单一气体组成的系统是二参量系统，其中两个独立参量可以选作压力 p 和体积 V；而由一

定质量的 N_2 和 O_2 组成的系统除了考虑它的压力 p 和体积 V 之外，还需要考虑它们的 mol 数比值，因此这是个三参量系统.

2.1.2 热平衡态

热平衡系统的状态称为热平衡态，可用若干参量描述这个状态.例如对于装在圆筒里的气体可用压力 p，体积 V，底面直径 d 等来描述.如果将两个热平衡态互相接触在一起而组成一个孤立系统，则这两个状态可能保持原样不变，也可能有变化.如果这两个状态(分别称为状态 1 和状态 2)保持原样不变，则称态 1 和态 2 互相处于热平衡.从实验知道，由同种气体同样质量的两个系统，若它们的状态参量分别为 p_1，V_1，d_1 及 p_2，V_2，d_2，但从实验中知道，只要 $p_1 = p_2$，$V_1 = V_2$ 两系统就处于热平衡而与它们的底面直径 d_1，d_2 的大小无关，d_1，d_2 等不影响热平衡的参量称为非本质参量，剩下的就是确定热平衡的本质参量.对于稀薄气体来说，本质参量只有 p，V 两个，而 n 参量系统是指具有 n 个本质参量的系统.

2.1.3 热力学第零定律

从实验中发现，如果系统 1 和系统 2 分别和系统 3 的同一状态处于热平衡，则系统 1 和系统 2 也互为热平衡，这时将系统 1 和系统 2 靠紧在一起，这两个系统都保持靠紧前的状态不变(参见图 2.2 及图2.3).这种现象总结为：

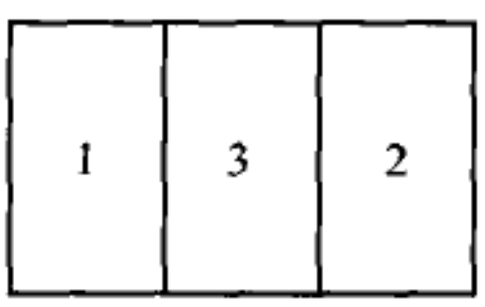


图 2.2 系统 1 和系统 2 分别和系统 3 的同一状态热平衡

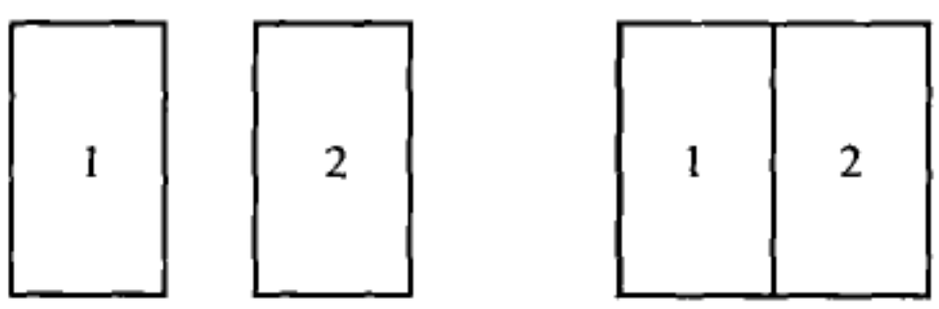


图 2.3 系统 1 及系统 2 的平衡

热力学第零定律：各自与一个指定状态热平衡的两个系统，彼此也热平衡.

2.1.4　温度的性质和量化

互相处于热平衡状态的系统称为有相同的温度.由于热力学第零定律，这种定义是自洽的.以图 2.2 为例，设状态 3 具有温度 T，因此分别与它热平衡的状态 1 及状态 2 也具有温度 T，这样定义的结果是状态 1 和状态 2 必须互为热平衡，这正是热力学第零定律所保证的内容.上面所叙述的正是温度的根本性质：

互相热平衡的两个系统具有相同的温度.

温度的大小：上面只是定义了温度相等的概念，如果两个系统尚未互为热平衡，它们的温度就不会相等，为了确定温度的大小，我们最好选定一个系统作为标准，例如选择理想气体系统，对于这个系统，本质的状态参数只有两个：压力 p 和体积 V，如果指定 V 不变，则系统的温度不同，其压力 p 也就有所不同，因此就可以用压力 p 的大小来标记温度 T 的大小，或者说压力就是温度.或者，我们也可以指定压力参数不变，这时温度 T 可用系统的体积 V 来标记，因此体积就是温度.

2.1.5　温度计原则、温度函数和温度计实例

在热力学第零定律的讨论之中，我们给出了温度的最主要特征.但还有一个性质有待廓清.为了清楚起见，我们以二参数系统为例，设有完全性质相同二参数系统，读者可以想象成是以压强 p 及体积 V 为参数的理想气体系统，它们在一起互相热平衡，那么这两个系统的各种参数是否一定要相等？具体一些，我们设所涉及的系统都是理想气体系统，系统 1 的参数为 p_1，V_1；系统 2 为 p_2，V_2，现在我们当然知道，如果 $p_1 = p_2$，$V_1 = V_2$，这两个系统互为热平衡；但是，如果这两个系统互为热平衡，它们的各种参数是不是就要分别相等呢？这个问题粗看起来十分初等，但实际上是关键问题，针对着这个问题，我们特别指出“温度计原则”.

温度计原则是标记一个系统温度的准则，大家在不自觉情况下去利用它.“我们可以选择适当的系统作为标准，用它作为温度计……而温度计的温度（引用者按：指温度计所指示出的温度）则可以通过它的某一状态参量

标志出来."①这段话其实就是讲温度计原则.仍然以二参量系统为例,热平衡时第一个系统的参量为(x_1, y_1),另外有一个同种性质的系统,它的第二个参量预先调定为 y_0,而 y_1 与 y_0 相差不远,或者说 y_1 处于 y_0 的邻区(邻近区域),这时该系统可以调出另一个参数 x_1'而(x_1', y_0)与(x_1, y_1)系统热平衡,这就是"温度计原则".从这个原则,相应于以状态参数(x, y)我们可以确定相应的热平衡态的温度函数:设有某种均匀物质系统,在一定范围内可由参数(x, y)确定其热平衡态(以后为叙述方便就称这个态为(x, y)态),证明在系统的某个(x_0, y_0)态附近可定义温度函数

$$T = f(x, y) \tag{2.1.1}$$

这里需要解释的是:在一定范围内可确定(x, y)态.这句蕴含着下列性质:设(x_0, y_0)态属于这个范围,如果 x 是热状态敏感参数,则对于(x_0, y_0)态附近的(x_1, y_1)态,必然可以找一个(x_1', y_0)态与(x_1, y_1)态热平衡.

所谓温度函数 T 是指这样的函数:如果状态(x_1, y_1)与(x_2, y_2)互相热平衡,则它们的温度函数值相等,$T_1 = T_2$;如果相互之间不热平衡,则 $T_1 \neq T_2$.温度函数可以不止一个,但它们之间有单值对应关系.现在记(x, y)的可取值范围为 D,$(x_0, y_0) \in D$ 是其中的一个状态,$(x_1, y_1) \in D$,并且(x_1, y_1)态在(x_0, y_0)态附近.现在我们根据温度计原则知道参数(x, y)中至少有一个敏感参数,不失普遍性可设 x 是敏感参数;另外,还知道可适当选择敏感参数 x 的值 x_1'使得(x_1', y_0)态与(x_1, y_1)态热平衡:

$$(x'_1, y_0) \approx (x_1, y_1)$$

这里"≈"代表相互热平衡.若 $x'_1 \neq x'_2$,则(x_1', y_0)态不与(x_2', y_0)态热平衡.

现在构造一个函数,设 $(x, y) \in D$,则根据温度计原则,存在一个态 $(x', y_0) \in D$,它与(x, y)态热平衡,因此在 x'和(x, y)之间建立了一个函数关系

$$x' = f(x, y)$$

这里的 $f(x, y)$就是温度函数.实际上,若(x_1, y_1)态与(x_2, y_2)态相互热平衡,并且(x_1, y_1)及(x_2, y_2)均在 D 内位于(x_0, y_0)态附近,因此

---

① 李椿《热学》高等教育出版社,1993 年,第 11 页

若记

$$x'_1 = f(x_1, y_1), \ x'_2 = f(x_2, y_2)$$

则有(x'_1, y_0)态与(x_1, y_1)态相互热平衡，而(x'_2, y_0)态与(x_2, y_2)态相互热平衡.由于热力学第零定律(x_2, y_2)与(x'_1, y_0)热平衡(因为它们分别与(x_1, y_1)热平衡)；继之我们有(x'_1, y_0)与(x'_2, y_0)热平衡(因为通过分析知道它们分别与(x_2, y_2)热平衡).由于 x 是敏感参数，于是有 $x'_1 = x'_2$，

$$f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) \tag{2.1.2}$$

(x_1, y_1)与(x_2, y_2)热平衡(2.1.2)说明函数 $f(x, y)$符合温度函数的第一个条件：如果(x_1, y_1)与(x_2, y_2)热平衡，则 $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$.

如果(x_1, y_1)不与(x_2, y_2)热平衡，则与(x_1, y_1)热平衡的(x'_1, y_0)及与(x_2, y_2)热平衡的(x'_2, y_0)之间也不会热平衡，因为如果不是这样，(x'_1, y_0)和(x'_2, y_0)之间热平衡，则由热力学第零定律导出(x_1, y_1)与(x_2, y_2)热平衡，与原假设不符，所以(x'_1, y_0)与(x'_2, y_0)不热平衡，自然有 $x'_1 \neq x'_2$，

$$f(x_1, y_1) \neq f(x_2, y_2) \tag{2.1.3}$$

(2.1.3)式表明函数 $f(x, y)$符合温度函数的第二个条件.于是 $x' = f(x, y)$ 是温度函数.

到这里，我们已经讨论了温度函数，所谓温度函数是指热平衡态各参数的单值函数，当该热平衡态互为热平衡时，函数值相同，不相互热平衡时，函数值不相等.两个同种类型热系统互相热平衡，并不需要系统中各参数对应相等，而只需它们温度函数相等.

这种处理方式早已被大家习惯性地使用着.注意状态参量必须是敏感参量(即本质参量)，用一个可变的敏感参数(其他参数保持为恒定值)的变化去因应各种热状态，我们坚信对于一个给出的热系统而言靠改变温度计系统中单个敏感参量可以得到与其热平衡的系统.用一个参数去因应由多个参数综合确定的某个系统的热状态，这是能够建立温度理论的主要前提之一.它是由长期温度测量实践中总结出来的原则.

用一个敏感参数因应不同的热状态.这个原则适用于一切符合条件的领域,到现在为止还没有发现与“温度计原则”相抵触的情况.

用某些参数描述热平衡系统,有物理意义在参数值范围往往受到一定的限制.以 1 mol 理想气体系统来说,在压强 $p=1$ atm 左右的条件下,它的体积不能太小,因为我们说的是理想气体,用的是实际气体如氮气、氧气之类,体积太小了,它们就不能看成是理想气体.热学中的理论或概念是靠实验结果支撑的,既然在敏感参数 V 很小时不再有理想气体,因此在这种条件下讲述理想气体所给出的低温就没有意义,实际上由理想气体概念所引导出来的低温不能低于几个 K(液氦的液化温度).

既然理想气体作为一种理想的模型出现在理论之中,人们自然会对这相当程度上是反映现实的理论作详尽的探讨,包括对其中不能反映现实的部分进行探讨,其中之一就是如果真有纯粹的理想气体,那么在一定的压强之下就会有体积 $V=0$ 的状态,如果把温度计原则也延伸到这个范围中来:适当调整 V 值能与任何状态热平衡,由于理想气体温度计所给出的温度 $T\propto V$(比例系数为正),因此 $T\geqslant 0$,而其他热状态的温度也 $\geqslant 0$,但是这个结论是立足于与实验相距很远的理想气体体积 V 可能趋于零的基础上的,因此上面的推论不能看作是正确的理论,热平衡系统的温度用理想气体绝对温标测量总是 $\geqslant 0$,是其他理论思考的结果,特别是分子动理论解释气体模型的结果.

下面讨论直接参与热平衡的温度计,它们本身作为一个系统参加与被测试物体的热平衡,然后由这个温度计的一些显著特征(一个独立变化的单参量,这时系统的其他参量不变或保持与这个单参量的函数相依关系)而得知被测物体的温度.例如:

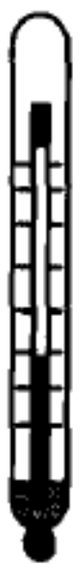


图 2.4 水银温度计

(a) 水银温度计,它是用封闭在玻璃柱中的水银柱高度来指示温度的,温度不同,水银柱的高度也不同,见图 2.4;

(b) 热敏温度计,这是一个热敏电阻,对于不同的温度,它的电阻值有显著的变化;

(c) 定压温度计,这是封闭在一个容器内的气体,但保持压力不变,不同的温度相应于气体的不同体积;

(d) 定容温度计,这是封闭在固定容器内的气体容器壁开一小孔与压

力表相连，不同的温度相应于不同的压力.

上述的温度计具有一个显著的特点，就是该温度计与待测物体比较起来要显著地小，使得温度计与物体的被测态热平衡时，被测态平衡前后并没有显著的变化.另外，温度计的大小是相对于待测物体而言的，并不是温度计在绝对意义上的很小，例如测量地表的温度可以把一水池水作为温度计使用，但测量与人体同等大小的物体的温度时一水池水就不能当作温度计使用，因为它相对于所测物体来说实在是太大了.

2.2 热　　量

2.2.1　热量的概念

从分子动理论知道，气体的温度是由分子的平均能量ϵ确定的，因此温度是大量分子集合体才能具有的特征或概念.从这些基本概念可以得出，如果一个高温物体和一个低温物体封闭成一个孤立系统（例如两个封闭在盒子里的理想气体放在一起），在经过相当长的时间以后，这两个物体将最终具有相同的温度.由于在孤立系统中没有外介的能量流入，因此能量必然从高温物体流向低温物体.这样断言的理由是：由于互相接触的两个物体最终温度必然相等，但分子动理论告诉我们随着温度的升高，系统中分子的平均动能ϵ也增大，最后的平均温度只能比原始的高温低，比低温高，这就是说能量是由高温物体移向低温物体的.在这种形式的能量传递中并无可见的机械能转移现象，参与能量传递的各物体之间并无明显的位置移动，能量的转移是通过传出能量的物体和接受能量的物体的温度变化而体现的，按照这种方式传递的能量称为热量.一个物体向另一个物体传递热量体现在体积不变的条件下传能物体（以理想气体系统为例）的温度的下降，更确切一些说是体现在内能的下降.内能是物体中除去了机械能、电磁能等一切有序能之后的能量.

2.2.2 焦耳实验

焦耳实验见图 2.5,容器 A,B 以细管连通,浸在水介质中.气体封闭在 A 容器中,用一个活门 C 将 A 容器和 B 容器隔开.当活门 C 打开之后,气体自容器 A 冲入容器 B,A 容器的气体不断减少,B 容器的气体不断增多,最后处于平衡状态.在这个过程中外界不对它作功,说明系统在过程中并未接受机械能,而容器浸没在水介质中,水介质在活门打开前后其温度也未见变化,说明气体并未与外介交换热量.因为在过程中气体并未与外介变换机械能或热量,所以气体的内能没有变化,但在实验过程中体积变化了,而温度未曾发生变化,说明气体的内能 U 只与温度 T 有关而与体积 V 无关

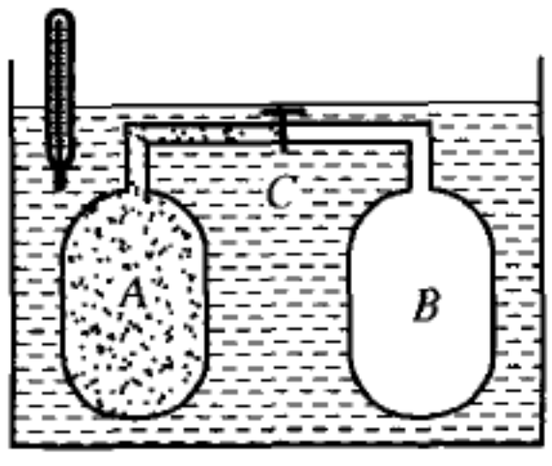


图 2.5

$$U = U(T) \tag{2.2.1}$$

焦耳实验不是一个精确的实验,从这个实验只能大致说明内能仅与温度有关.从分子运动论角度看来,气体中各个分子之间没有相互作用,这时内能只与各个分子的平均能量 $\epsilon = \frac{\tilde{r}}{2}kT$ 有关,$\tilde{r}$ 称为分子的等效自由度.由于单个分子的平均能量与体积无关,所以内能唯一取决于 T.如果分子之间有相互作用,例如有互相吸引的趋向,则分子所占有的平均体积大的时候位能 φ 也变大,作为定性考虑,认为 φ 只是体积 V 的函数,

$$\varphi = \varphi(V),\ \varphi(V_1) > \varphi(V_2),\ (V_1 > V_2) \tag{2.2.2}$$

而气体的内能是各分子的平均动能和分子之间相互作用能之和

$$U = N \cdot \frac{\tilde{r}}{2}kT + \varphi(V) \tag{2.2.3}$$

这里 N 是气体中的分子数.从(3)式可以看到,如果分子之间有相互作用,则内能还与体积有关.目前我们认为气体分子之间没有相互作用,即假定焦耳实验是精确的,这时气体内能只与温度有关.我们还可进一步认为内能与

温度呈现线性关系，对于 1 mol 气体

$$U = C_V T + U_0 \tag{2.2.4}$$

这里 C_V 和 U_0 都是常量 C_V 称为定容摩尔热容量. 关系(2.2.4)在一定温度范围内是正确的.

2.2.3　理想气体绝热过程

现在我们研究理想气体的绝热压缩过程，在这个过程中必须要考虑到内能的变化因素. 参见图 2.6 当有 1 mol理想气体封闭在不与外介交换热量的容器内，初始参数是 p，V，T，如果在体积 $V \to V + \Delta V$ 变化过程中外介没有热量交换，这时的能量守恒关系是

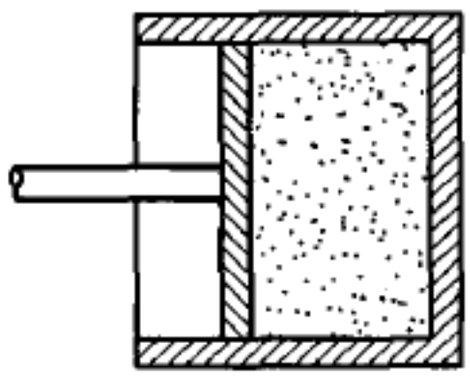


图 2.6

$$-p\Delta V = \Delta U = C_V \Delta T \Rightarrow \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T} = -\frac{C_V}{p} \tag{2.2.5}$$

这里 C_V 是定容比热，考虑到理想气体状态方程 $pV = RT$，由(2.2.5)可以得到 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T} = -\frac{C_V V}{RT}$，即

$$\frac{\mathrm{d}T}{T} + \frac{R}{C_V} \cdot \frac{\mathrm{d}V}{V} = 0 \quad \Rightarrow \quad TV^{R/C_V} = \text{常数} \tag{2.2.6}$$

再应用一次状态方程就得到绝热过程中的 p，V 之间的关系 pV^γ = 常数，

$$\gamma \equiv \frac{C_V + R}{C_V} \tag{2.2.7}$$

称为绝热指数，它与分子的等效自由度 $\tilde{r}$ 有关

$$\gamma = \frac{\tilde{r} + 2}{\tilde{r}} \tag{2.2.8}$$

如果 1 mol 理想气体在保持压力不变的情况下，使气体从 $T \to T + \Delta T$，外界需要供给的热量 ΔQ 有关系

$$\Delta Q = C_V \Delta T + p\Delta V = C_V \Delta T + \Delta(pV) = (C_V + R)\Delta T \equiv C_p \Delta T,$$

$$C_p = C_V + R$$

这里 C_p 称为定压摩尔热容量，这样可以将绝热指数 γ 写成

$$\gamma = C_p / C_V \tag{2.2.9}$$

上面的讨论中我们引进了热量的概念.热量也是一种能量，系统内能的变化是外介对系统作功.传热或者联合作用的结果.设内能变化 $\mathrm{d}U$ 过程中外介传递了 $đQ$ 的热量，$đA$ 的功，则有

$$\mathrm{d}U = đQ + đA$$

(9)式表明包含热量(或热能)在内，整个系统的能量是守恒的，这就是

热力学第一定律　系统内能的增加等于外介所加的热能及做功的总和.

从热力学第一定律可以知道，系统向外介作功必须降低内能或吸收热量(消耗燃料).不消耗任何燃料，也不向外介吸收热量，系统的状态也不改变，却能向外介做功的机器称为第一类永动机.因此第一定律还有一种说法：

“第一类永动机是不能实现的.”

历史上对于热量有另外的单位，称为卡，它是 1 克纯水在 1 大气压下由 14.5℃到 15.5℃时所吸收的热量，1 卡大约为 4.186 焦耳，现在规定 1 卡 = 4.186 8 焦耳(精确值)，作为一个备而不用的热量单位.

2.2.4　焦耳-汤姆逊效应

上一段我们讨论了理想气体，其中一个最显著的特点是它的内能只与温度有关.作出这样的结论的根据是不算很精确的焦耳实验(参见 2.2.2)；焦耳-汤姆逊实验原则上可以检验气体内能是否与其他参数有关，而实验装置本身现在已经成为制冷装置的一部分.

现在我们介绍焦耳-汤姆逊效应，先从焓的概念讲起.当气体系统的体积不变时，外界传入的热量完全转变为内能，

$$\mathrm{d}U = (đQ)_V \tag{2.2.10}$$

右方的下标 V 表示是定容过程；但如果压力不变，则吸收的热量除了使内能增加之外还向外界作功

$$(đQ)_p = \mathrm{d}U - (\mathrm{d}A)_p = \mathrm{d}(U + pV) = \mathrm{d}H, H \equiv U + pV \tag{2.2.11}$$

这里下标 p 表示定压过程，函数 H 称为焓，也是系统的态函数，(2.2.11)式告诉我们在定压过程所吸收的热量$(\mathrm{d}Q)_p$ 等于系统的热焓的增加，一般把焓表达成温度 T 和压力 p 的函数.

由于定压过程中系统所吸收的热量大于它的内能增量，所多余部分的热量实际已变成“功”向外界输出了.但是我们仍可以设想这些多余的热质贮存在分子之间而使体积膨胀，当放热的时候，这些多余的热量(实质上是由机械能转变而来的热量)也释放出来，从而得到了比纯粹内能降低而供出的热量更多一些(参见图 2.7)，这种说法正是历史上存在过的热质说的一种形象说法.



(a) 多余的热量(焓)吸收在介质中而体积膨胀　　(b) 假想为吸收在分子之间的热量象榨油似的榨了出来

图 2.7　关于焓的形象理解

焓不变过程(绝热节流过程)　参见图 2.8，当气体通过多孔塞(一团棉花之类)之后，其压力 p 要降低，从左方的 p_1 降为右方的 p_2($p_1 > p_2$)相应的 V，T 都可能有变化.由于气体流过多孔塞时并未与外介交换热量，所以过塞前后气体内能的变化是外介做功的结果，现在有内能

$$\Delta U \equiv U_2 - U_1 = p_1 V_1 - p_2 V_2 \tag{2.2.12}$$

从这里可以知道，通过多孔塞前后，气体的焓不变，

$$H \equiv U + pV = \text{不变} \tag{2.2.13}$$

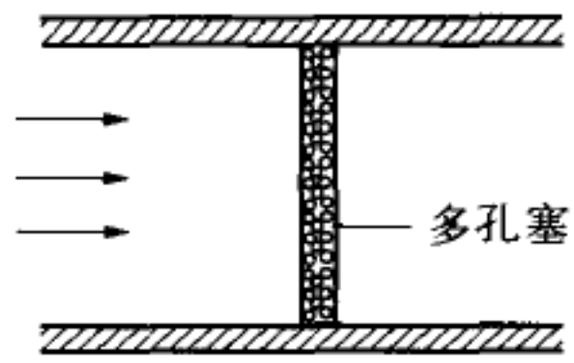


图 2.8

而 $\left(\dfrac{\partial T}{\partial p}\right)_H \equiv \alpha$ 称为焦耳-汤姆逊(Joule-Thomson)系数.对于理想气体 $\alpha = 0$，$\alpha \neq 0$ 的气体称为具有焦耳-汤姆逊效应的气体.如果 $\alpha > 0$，这时气体通过多孔塞后压力降低，温度也降低，这种效应称为正效应；$\alpha < 0$

的情况下，气体通过多孔塞之后压力降低，但温度升高，这种效应称为负效应.

2.2.5 卡诺循环中的热量

我们具体讨论一个理想气体模型，看它在卡诺循环下与外界热量交换关系.设卡诺(S. Carnot，1796—1832)循环如图 2.9 所示，这里热机的工作介质由 μ mol 理想气体担当，热机中由 4 个过程构成一个循环：1→2 等温过程，这时系统处于高温 T_1 状态；2→3 是绝热过程 L_1，在这个过程中有 $TV^{\gamma-1} = a_1 =$ 常数，这里 $\gamma = \dfrac{C_p}{C_V}$ 是理想气体的绝热指数，它与构成理想气体系统的分子的自由度 $\tilde{r}$ 有关：

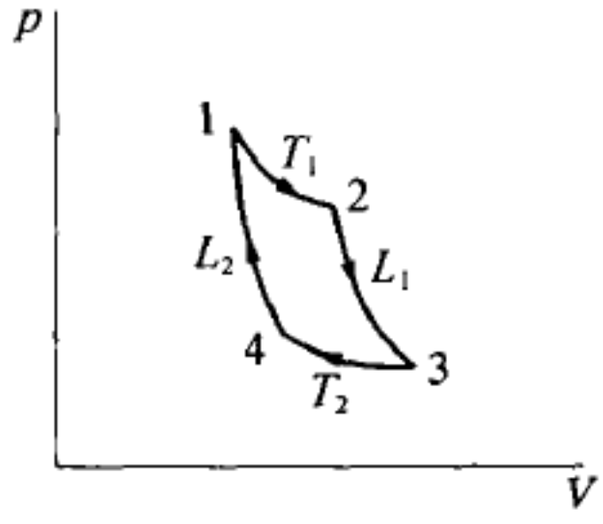


图 2.9

$$\gamma = \frac{\tilde{r} + 2}{\tilde{r}} \tag{2.2.14}$$

2～3 也是等温过程，T_2 是低温热源的温度；4→1 又是一个绝热过程 L_2：$TV^{\gamma-1} = a_2 =$ 常数.现在讨论高温等温过程：由热力学第一定律：

$$\mathrm{d}Q_1 = p\mathrm{d}V$$

所吸收的热量

$$Q_1 = \int_{V_1}^{V_2} p\mathrm{d}V = \mu RT\int_{V_1}^{V_2} \frac{\mathrm{d}V}{V} = \mu RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

同理，可以导出在低温热库 T_2 下放出的热量

$$Q_2' = \mu RT_2 \quad \ln \frac{V_3}{V_4}$$

而这两个热量之比为

$$\frac{Q_1}{Q_2'} = \frac{T_1}{T_2} \cdot \frac{\ln(V_2/V_1)}{\ln(V_3/V_4)} = \frac{T_1}{T_2} \tag{2.2.15}$$

这是因为根据绝热过程 L_1 及 L_2 有

$$\frac{V_2^{\gamma-1}}{V_3^{\gamma-1}} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{V_1^{\gamma-1}}{V_4^{\gamma-1}} \rightarrow \frac{V_2}{V_3} = \frac{V_1}{V_4} \rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4} \qquad (2.2.16)$$

由(5)式有 $\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2'}{T_2}$，如果记 $Q_2 = -Q_2'$ 是

所吸收的热量，则有

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0 \qquad (2.2.17)$$

2.3　热力学第二定律

在上一节，我们讲到了热量是一种能量，它与机械能(动能和势能)、化学能(本质上是一种电磁能)、电磁能等一样.由于物理规律不随时间改变，或者说物理系统具有时间平移对称性，确切地说，不同时刻观察到的物理系统，它们的运动规律是相同的，从而系统的能量就守恒，在第一章在只有机械能的情况下论证了能量的守恒，但我们可以相信物理规律不随时间变化的推论是系统的能量守恒，即一个系统的能量的增减是因为它吸收了外界的能量或者对外界释放能量的结果，这种能量当然是各种形式的能量都在内.不满足能量守恒条件的情况不会发生，这在热学中归结为热力学第一定律.这样，我们自然会问满足热力学第一定律的过程是否一定会发生！因为这牵涉到世俗的利益，例如让烤炉与冰箱放在一起，让烤炉从冰箱里攫取能量，从而使烤箱的温度越来越高，而冰箱的温度越来越低，这岂不是各得其所？可以预料，这种想尽管很好，但是不能实现！这是热力学第二定律所不允许的第二类永动机的情况.在热力学第二定律的讨论过程中，发现了一个很重要的概念：熵，它是联系宏观系统和微观系统的桥梁，在深化对自然界的认识中起过关键的作用.在现代熵的作用更是无与伦比，我们只需知道“负熵”即是“讯息”这一点就够了！

2.3.1 状态函数

我们还没有讨论熵的具体性质，但至有一点需要预先明确：熵是状态函数，准确地说对于一个热平衡态有一个准确的熵值 S，熵比较难以理解，为了理解状态函数的概念不致多生枝节，我们先考虑一个概念上易于理解的状态函数：内能 U. 对于比较简单的理想气体状态，我们可记

$$U = U(p, V)$$

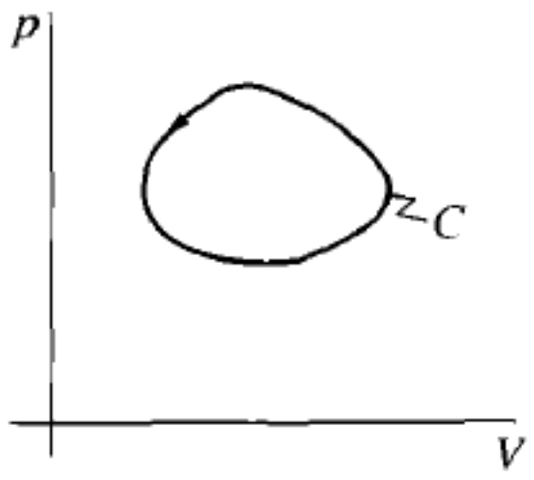


图 2.10

是状态函数，即它在 pV 平面内(图 2.10)，照闭曲线 C 循环一圈后所得的 U 增量为零：

$$\Delta U = \oint_C \mathrm{d}U(p, V) = 0 \qquad (2.3.1)$$

但有些很熟悉的量沿闭曲线一周的增量不为零，例如绕闭曲线一周系统所吸收的热量就不为零，我们在前面看到，在卡诺循环这一闭曲线运行过程中，所吸收的热量 $Q_1 + Q_2 > 0$，因此热量不是状态函数，而在向外所作机械功也不为零，因此也不是状态函数. 一个一阶无穷小量

$$g_1 \mathrm{d}p + g_2 \mathrm{d}V$$

如果是状态函数的增量(即全微分)，那么必然有

$$\oint_C g_1 \mathrm{d}p + g_2 \mathrm{d}V = \iint_S \left(\frac{\partial g_2}{\partial p} - \frac{\partial g_1}{\partial_V}\right) \mathrm{d}p\mathrm{d}V = 0$$

这时有

$$\frac{\partial g_1}{\partial V} = \frac{\partial g_2}{\partial p} \qquad (2.3.2)$$

这时可定义函数

$$B(p, V) = \int_{(p_0, V_0)}^{(p, V)} g_1 \mathrm{d}p + g_2 \mathrm{d}V \qquad (2.3.3)$$

这里积分中的始点是任意的基准点 (p_0, V_0)，终点是决定函数值的状态参数 (p, V)，积分路线任意，所得的函数是唯一确定的. 在(2.3.3)看到，由函

数 $B(p,V)$生成的全微分 $\mathrm{d}B = g_1\mathrm{d}p + g_2\mathrm{d}V$，由此可以得到

$$g_1 = \frac{\partial B}{\partial p}, \qquad g_2 = \frac{\partial B}{\partial V}$$

因此(2.3.2)是自动满足的.受到这样的处理过程的启发，我们发现系统的态函数也可以由每个单元过程中该函数增量而确定.根据这个观念，我们自然想到系统所吸收的热量，设系统在单元过程中所吸收的热为 $\mathrm{d}Q$，而循环过程中所吸收的总热量 $\oint \mathrm{d}Q = Q \neq 0$，这个结论是正确的，我们在上一节讨论卡诺循环时已经得到佐证.这个结论说明了一个系统所吸收的总热量不会是状态函数，因为系统循环一周之后所吸收的净热量不为零!

因此产生了一个问题，既然所吸收的热量不构成状态函数，可参见(2.2.15)，理想气体系统在作卡诺循环一周，所吸收的净热量 $Q = Q_1 + Q_2 = Q_1\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) > 0$，但注意有公式(2.2.17)，将它写成环路积分形式就是

$$\oint \frac{đQ}{T} = 0 \tag{2.3.4}$$

这样 $\frac{đQ}{T}$ 是系统某个状态函数的增量，记这个增量为 $\mathrm{d}S$，则有

$$\mathrm{d}S = \frac{đQ}{T} \tag{2.3.5}$$

我们称 $\mathrm{d}S$ 为系统的熵的增量

2.3.2　开尔文(Kelvin)形式的热力学第二定律及其推论

热力学第二定律(开尔文形式)：不可能从单一热源吸热，使之变成有用功而不产生其他影响.

根据上述说法，本节开头所说的热量从低温热源(冰箱)到高温热源(烤炉)的自发转移就不可自发实现.因为如果可以实现，设自发转移到高温热源的热量为 $Q_{上}$，而我们可以在高低温热源之间建立卡诺热机，该热机循环作用的后果是从高温热源中取得热量 $Q_{上}$，将其转变为机械功 W 及放给低温热库的热量 $Q'_{下}$，

$$Q_{上} = W + Q'_{下}, 0 < W, Q'_{下} < Q_{上} \tag{2.3.6}$$

这个过程结束之后，我们清点一下能量家底，现在高温热源的热能净增值为0，即烤炉的状态没有变化；冰箱净输出的热能 $\Delta Q = Q_{上} - Q'_{下} = W > 0$. 现在总的情况是低温热源输出了热量 ΔQ，它全部转变成了机械功 W. 这样的情况与热力学第二定律相抵触，因此这个过程不能成立.

根据热力学第二定律，可以推出系统的若干性质，我们知道在可逆的元过程中，系统若吸收了热量 dQ，它与系统的熵增量 dS 有关系：$\frac{đQ}{T} = dS$，如果封闭回路积分，有

$$\oint_C \frac{đQ}{T} = \oint_C dS = 0 \tag{2.3.7}$$

关系(2.3.8)称为克劳修斯(R. Clausius，1822—1888)等式，根据热力学第二定律，如果一个系统由传热从一个状态过渡到另一个状态，参见图2.11(a)，$\frac{đQ}{T}$即是系统的熵增量，但是每逢加热而达到的新状态，也可以用机械功的方式来达到，图2.11(b)的搅拌器就是代替(a)中的加热源的，通过这个类似于焦耳测热功当量的器械，我们一样能够得到系统所要求的终态，但这时外界并没有输进热量，而两个状态之间熵增量依然是 dS，因此我们一般地有 $\frac{đQ}{T} \leqslant dS$，或者

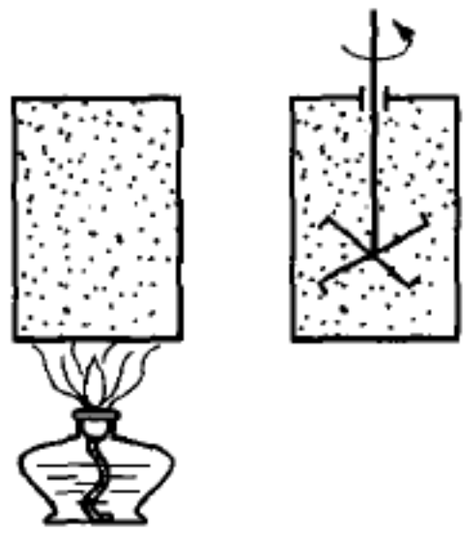


图 2.11

$$\oint_C \frac{đQ}{T} < 0 \tag{2.3.8}$$

这个关系称为克劳修斯不等式，它适用于能够发生的但不可逆的过程. 而 $\oint_C \frac{đQ}{T} > 0$，是不可逆过程的反向过程，它从来不曾在自然界发生过，称为不可能过程.

2.3.3 理想气体系统中的熵

设有 μ mol 理想气体，求出在(p，V)状态相对于(p_0，V_0)状态的熵增

量 ΔS(参见图 2.12). 如图,我们构造一个中间态(p_1, V_1),这里(p_0, V_0)→(p_1, V_1)是等温过程:

$$p_0 V_0 = p_1 V_1 \tag{2.3.9}$$

而从(p_1, V_1)→(p, V)是绝热过程

$$p_1 V_1^{\gamma} = pV^{\gamma} \tag{2.3.10}$$

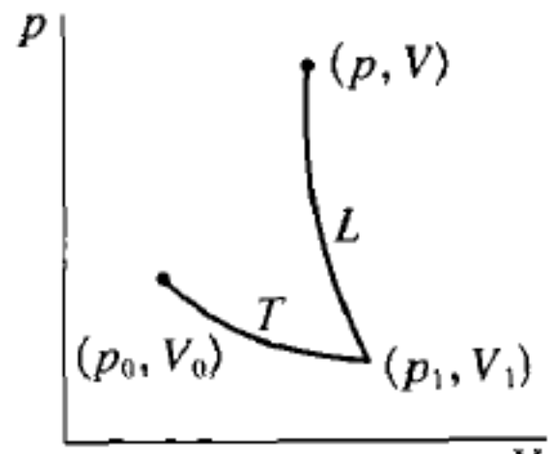


图 2.12

而 ΔS 即是(p_0, V_0)→(p_1, V_1)状态下的熵增量,因为(p_1, V_1)→(p, V)的熵增量为 0,

$$\Delta S = \frac{1}{T}\Delta Q = \frac{1}{T}\int_{V_0}^{V_1} p\mathrm{d}V = \mu R\int_{V_0}^{V_1}\frac{\mathrm{d}V}{V} = \mu R\ln\frac{V_1}{V_0}$$

$$= C_V\ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right)^{\gamma-1} = C_V\ln\frac{P_1 V_1^{\gamma}}{P_0 V_0^{\gamma}} = C_V\ln\frac{PV^{\gamma}}{P_0 V_0^{\gamma}} \tag{2.3.11}$$

2.4 分子动理论

上面我们从宏观角度分析了热现象,而气体的分子模型经过数百年的研究到了玻尔兹曼(L. Boltzmann, 1844—1906)有了坚实的基础,因此也可以用分子模型的观念去研究宏观系统的热性质,我们发现这两者形式上是一致的,但它们之间有内在的不一致性,经过分析,我们终于发现了症结所在,加深了对熵这一概念的理解.

2.4.1 在重力场中的气体密度分布

地面附近的气体因受重力场作用密度随高度增加而减小.参见图2.13,高度方向取作 Z 轴,讨论一个高为 Δz,底面为 ΔA 的单元,研究它的平衡条件,有

$$p\Delta A = (p + \Delta p)\Delta A + \Delta A\Delta z\rho g \tag{2.4.1}$$

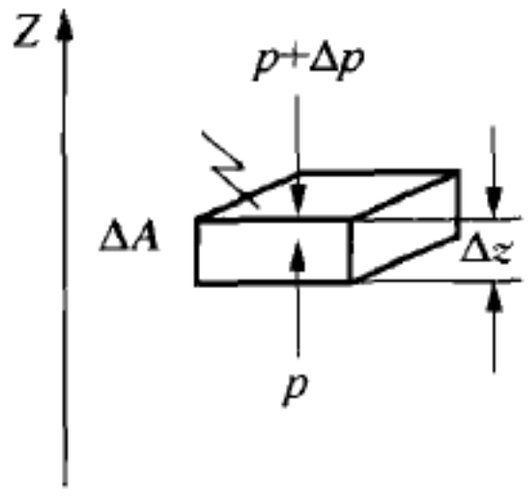


图 2.13

这里 p 是压力，ρ 是所研究的气体密度，g 是重力加速度.如设气体的分子数密度为 n，设 1 mol 气体的体积为 V，则

$$n = \frac{N_0}{V} \tag{2.4.2}$$

$N_0 = 6.023 \times 10^{23}/\text{mol}$ 是阿伏伽德罗（A. Avogadro，1776—1856）数，有

$$\rho = mn \tag{2.4.3}$$

这里 m 是单个分子质量.注意气体状态方程 $pV = RT$，有

$$p = \frac{N_0}{V}\frac{R}{N_0}T = nkT \tag{2.4.4}$$

这里 T 是温度，以开（°K）为单位，$R = 8.31$ 焦耳/（开 · mol）是理想气体常数，

$$k = \frac{R}{N_0} = 1.380\,658 \times 10^{-23} \text{ 焦耳 / 开} \tag{2.4.5}$$

称为波尔兹曼（Boltzmann）常数.现在从方程（2.4.1）得到

$$\Delta nkT + \Delta znmg \Rightarrow \frac{\Delta n}{n} + \frac{mg}{kT}\Delta z = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}z} + \frac{mgn}{kT} = 0$$

由所得的微分方程可求出解

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right) \tag{2.4.6}$$

n_0 是地面上（$z = 0$）的分子数密度.

2.4.2 几率密度

从（2.4.6）看到，分子数密度随高度递减，从单个分子的角度看来，是指它到达较高地方的机会较少，即几率较小，将一个分子到 $z \to z + \Delta z$ 的几率记为 $pr(z)\Delta z$，它应该与 Δz 范围内的分子数成正比：

$$p_r(z)\Delta z \propto \Delta A \Delta z n \tag{2.4.7}$$

本处截面 ΔA 是常量，因此有

$$p_r(z) \propto n \propto \exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right) \tag{2.4.8}$$

$p_r(z)$称为几率密度.由于一个分子总是会在某处出现的，这表示有

$$\int_0^\infty \mathrm{d}z p_r(z) = 1 \tag{2.4.9}$$

由条件(2.4.9)，从(2.4.8)可以定出

$$p_r(z) = \frac{mg}{kT}\exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right) \tag{2.4.10}$$

注意到 mgz 是分子的位能，记 $E = mgz$ 是一种机械能从(2.4.8)得到

$$p_r(z) \propto \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) \tag{2.4.11}$$

2.4.3　麦克斯韦速率分布率的导出

公式(2.4.11)是有启发性的公式，它的形成过程表示，以对称性作为指导原则(即既然宏观或微观规律都可以用来描述同一现象，它们应当具有内在的对应关系(对称性))，我们能够从宏观规律找出对应的微观规律.我们相信所找到的微观规律是正确的.

议论了认识规律之后，现在将公式(2.4.11)用到讨论分子按速率分布的讨论中去.一个分子的速度 $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ 不是固定的，那得到在某种速度附近的范围内的几率是多少呢？应用(2.4.11)可得几率密度

$$p_r(\boldsymbol{v}) \propto \exp\left(-\frac{E}{kT}\right), E = \frac{1}{2}mv^2, \tag{2.4.12}$$

写出(2.4.12)的理由是：对于处于一个高度不太大的立方匣子中的分子来说，它们的势能 mgz 相同，参照(2.4.10)，它对几率的贡献是附加一个常数因子，这个因子可直接吸收到归一化因子中去，在目前情况下可以不考虑.目前直接影响分子的分布情况是动能 $\frac{1}{2}mv^2$，这就是(2.4.12)中取 $E = \frac{1}{2}mv^2$ 的理由.考虑到(2.4.12)中 $p_r(\boldsymbol{v})$的归一化条件

$$\iiint_v \mathrm{d}^3 \boldsymbol{v} pr(\boldsymbol{v}) = 1, \ v: \text{整个速度空间} \tag{2.4.13}$$

以及积分

$$\iiint_v \mathrm{d}^3 \boldsymbol{v} \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}v_1 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}v_2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}v_3 \exp\left[-\frac{m(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)}{2kT}\right]$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}v_1 \exp\left(-\frac{mv_1^2}{2kT}\right)\right]^3$$

$$= \left[\left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)\mathrm{d}x\right]^3 = A \tag{2.4.14}$$

为了算出数值 A，需要计算出积分 $I \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)\mathrm{d}x$ 可参见图 2.14，图上画出被积函数曲线 $x \sim \exp(-x^2)$，I 就是曲线下的面积，而图中高为 1 底线为 $2\sqrt{3}$的等腰三角形（画垂直断面线部分）几乎与整个曲线下的面积相同，因此根据这个估计，有

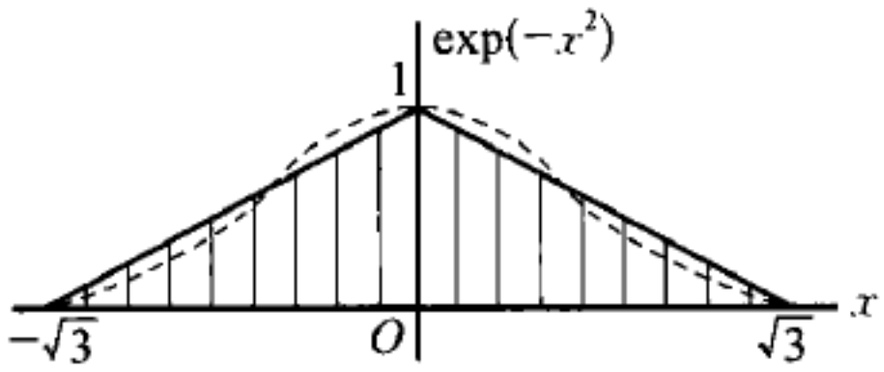


图 2.14

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)\mathrm{d}x \simeq \sqrt{3} \tag{2.4.15}$$

但这个积分可以精确算出如下：

$$I = 2\int_0^{\infty} \exp(-x^2)\mathrm{d}x = 2\left[\int_0^{\infty} \mathrm{d}x \int_0^{\infty} \mathrm{d}y \exp(-x^2 - y^2)\right]$$

$$= 2\left[\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \int_0^{\infty} r\mathrm{d}r \exp(-r^2)\right]^{1/2} = \sqrt{\pi} \simeq \sqrt{3} \tag{2.4.16}$$

将关系(2.4.16)代入(2.4.14)求得

$$A = \left(\frac{2\pi kT}{m}\right)^{3/2} \tag{2.4.17}$$

而由几率归一化条件(3.1.13)得到

$$p_r(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{A}\exp\left(-\frac{E}{kT}\right) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \tag{2.4.18}$$

而分子按速率分布密度为

$$p_r(v) = 4\pi v^2 pr(\boldsymbol{v}) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\left(\frac{m}{kT}\right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \quad (2.4.19)$$

满足归一化条件

$$\int_0^\infty \mathrm{d}v p_r(v) = 1 \quad (2.4.20)$$

曾经设计许多分子束实验来验证分布律(2.4.19),在 20 世纪 30 年代有若干个精密的实验验证了分布律在相当程度上是正确的,这说明可以在分子模型的基础上来处理气体问题,也就是可在微观观点的基础上处理气体问题.我们已经知道可以从宏观观点处理气体问题,这自然要问这两种观点的内在联系(即对称性)是什么? 它们之间互相给对方提出了哪些限制条件,下一节我们将涉及这一领域.

2.5　熵的统计表达式和粒子系统的状态分布规律

2.5.1　熵表达式中的微观参数

参见(2.3.11),我们求得系统从 $(p_0 V_0) \to (p, V)$ 的熵增量表达式,将 ΔS 改记为 S 但记住我们系统的熵是从$(p_0 V_0)$系统开始计算的,现在我们有

$$S = \frac{\mu R}{\gamma - 1}\ln \frac{pV^\gamma}{p_0 {V_0}^\gamma} \quad (2.5.1)$$

这里 μ 是系统中分子的 mol 数,γ 是绝热指数,它与分子的运动自由度 $\tilde{r}$ 有关系

$$\gamma = \frac{\tilde{r} + 2}{\tilde{r}} \leftrightarrow \frac{1}{\gamma - 1} = \frac{\tilde{r}}{2} \quad (2.5.2)$$

有

$$S = \frac{\tilde{r}}{2}\mu R \ln \frac{pV^\gamma}{p_0 V_0^\gamma} \quad (2.5.3)$$

熵是表达过程演化方向的函数.例如将两个温度不等的系统靠近之后,将它们与外界隔离孤立起来,则由热力学第二定律知道,总系统中的热量将不断地由高温部分传向低温部分,最后达到总体平衡为止,如果用熵来描述这个过程,是指总系统演化的走向里,它的熵将不断增加.

讨论单原子粒子理想气体,这时 $\tilde{r} = 3$,而 $\gamma = 5/3$,将(2.5.3)记为

$$S = S_1 + \frac{3}{2}Nk\ln(NkT \cdot V^{2/3}) \tag{2.5.4}$$

这里 S 是与(T, V)无关的数字,原则上可以自由选择,现在选

$$S_1 \equiv -\frac{3}{2}Nk\ln(p_0 {V_0}^{5/3}) = \frac{3}{2}Nk\left(1 + \ln\frac{m}{2\pi\hbar^2 N}\right) - Nk(\ln N - 1) \tag{2.5.5}$$

这里 $\hbar = \frac{h}{2\pi}$,h 是普朗克(M. Planck, 1858－1947)常数,

$$h = 6.625 \times 10^{-34} \text{ 焦耳} \cdot \text{秒} \tag{2.5.6}$$

将在(2.5.5)选定的 S_1 值代进(2.5.4),我们有

$$\begin{aligned} S &= k\left(\frac{3}{2}N\ln T + N\ln V\right) + S_1 + \frac{3}{2}Nk\ln(Nk) \\ &= k\left(\frac{3}{2}N\ln T + N\ln V\right) + \frac{3}{2}Nk\left[1 + \ln\frac{mk}{2\pi\hbar^2}\right] - Nk(\ln N - 1) \\ &= k\left[\frac{5}{2}N + N\ln\left(\frac{V}{N}\left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}\right)\right] \end{aligned} \tag{2.5.7}$$

这是从宏观热学推得的结果,这里 $Nk = \mu R$ 实际上是宏观物理量,并且熵 S 符合对粒子数 N 的可加关系,因此这是合适的熵表达式.

2.5.2 熵的统计解释

从熵的表达式(2.5.7)出发,对它进行统计解释.设所讨论的气体系统有能级 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots$各能级的状态数(简并度)为 $\omega_1, \omega_2, \cdots$假设在各能级上分布的粒子数为 $a_1, a_2, \cdots$按照等几率原理,目下指定分布的状态数为

$$\Omega_{M.B.} = \frac{N!}{\prod_l a_l!}\prod_l \omega_l^{a_l} \tag{2.5.8}$$

$\Omega_{M.B.}$ 称为在古典统计下的状态数，上述分布还要满足条件

$$\sum_l a_l = N,\ \sum_l a_l \varepsilon_l = U \tag{2.5.9}$$

可实现的$\{a_l\}$系列，要靠求函数

$$F \equiv \ln\Omega_{M.B.} + \alpha N + \beta U \tag{2.5.10}$$

的极值而定.利用 a_l 一般很大的近似关系

$$\ln(a!) = \sum_{i=1}^{a_l} \ln i \simeq \int_0^{a_l} \ln x \mathrm{d}x = a_l(\ln a_l - 1) \tag{2.5.11}$$

及 $\partial F/\partial a_l = 0$，求得

$$a_l = \omega_l e^{-\alpha-\beta\omega_l} \tag{2.5.12}$$

在(2.5.10)中 α 和 β 是常数，由约束条件(2.5.9)确定.

对于理想气体，为了方便，设体积 V 是边长为 L 的立方体，

$$V = L^3 \tag{2.5.13}$$

而在方匣子 L^3 中的粒子，其动量是

$$p_n = \frac{2\pi\hbar}{L} n \tag{2.5.14}$$

p_n 是单态，其简并度 $\omega_n = 1$，动量为 p_n 的粒子有能量

$$E_n = \frac{1}{2m} p_n{}^2 \tag{2.5.15}$$

若干个 n 不同但 E_n 均等于 E_l 的状态组成简并态，其简并度 ω_l 是符合条件 $E_n = E_l$ 的 n 的数目.如果记 a_n 是在状态 n 中的占据数，参照(2.5.12)有

$$a_n = \omega_n e^{-\alpha-\beta\varepsilon_n} = e^{-\alpha-\beta\varepsilon_n} \tag{2.5.16}$$

现在利用约束条件(2.5.9)有

$$N = \sum_l \omega_l e^{-\alpha-\beta\varepsilon_l} = \sum_n e^{-\alpha-\beta\varepsilon_n}$$

将上式连续化后成为一个积分，得到

$$N = e^{-\alpha}\iiint \mathrm{d}n_1\mathrm{d}n_2\mathrm{d}n_3\exp\left[-\frac{B}{2m}\left(\frac{2\pi\hbar}{L}\right)^2 n^2\right] = e^{-\alpha}\left[\frac{\beta(2\pi\hbar)^2}{2\pi mL^2}\right]^{-3/2} \tag{2.5.17}$$

而内能
$$U \equiv \frac{3N}{2}kT = \sum_l \varepsilon_l \omega_l e^{-\alpha-\beta\varepsilon_l} = -\frac{\partial}{\partial\beta}\sum_l \omega_l e^{-\alpha-\beta\varepsilon_l}$$

$$= -\frac{\partial N}{\partial\beta} = \frac{3N}{2\beta} \Rightarrow \beta = (kT)^{-1} \tag{2.5.18}$$

而从(2.5.17)求出

$$e^{\alpha} = \frac{V}{N}\left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \tag{2.5.19}$$

注意从(2.5.8)及考虑到其后的结果,记

$$\widetilde{S} \equiv k\ln\Omega_{M.B.} = k\left(N\ln N + \sum_l a_l \ln\frac{\omega_l}{a_l}\right) = k(N\ln N + N\alpha + U\beta)$$

$$= k\left(N\ln N + N\ln\left[\frac{V}{N}\left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}\right] + \frac{3}{2}N\right)$$

$$= k\left(\frac{3}{2}N + N\ln\left[V\left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}\right]\right) \tag{2.5.20}$$

考虑到(2.5.7),我们有

$$\widetilde{S} = k\ln\Omega_{M.B.} = S + kN(\ln N - 1) \tag{2.5.21}$$

按照熵的几率解释,$\widetilde{S} = k\ln\Omega_{M.B.}$ 就是熵,因为状态数本质上就是出现几率的倒数(扣除一个比例常数).但$\widetilde{S}$与(2.5.7)的用热学方式得出的熵 S 不一样.

2.6 粒子状态的玻色分布

在第 2.5 节我们用宏观的热力学方法及微观的分子动理论方法(或者是说用统计物理的方法)得出了不同的熵的表达式,参见(2.5.7)及

(2.5.20),最终微观统计力学的结论是熵$\tilde{S} = k\ln \Omega_{M.B.}$.这里$\Omega_{M.B.}$是在经典意义下的系统可能呈现出来的状态数,这种观念从定性上看去也是正确的:在指定条件下状态数大的系统容易实现,这表明系统的演化过程是熵增加过程.但是这里熵表达式(2.5.20)不符合可加性条件,从而发现了微观粒子组态的一个重要性质,将微观与宏观(热力学观念)比较,我们发现了统计力学观念的一些疏漏之外.

2.6.1　吉布斯佯谬

有了熵的统计解释之后,我们考虑图 2.15 所示的系统,设有两个体积都是 V,粒子数都是 N 的两个单元互相热平衡,中间用隔板隔开(这个隔板可以是并不存在的假想隔板),这时利用(2.5.21)可求得总的系统的熵

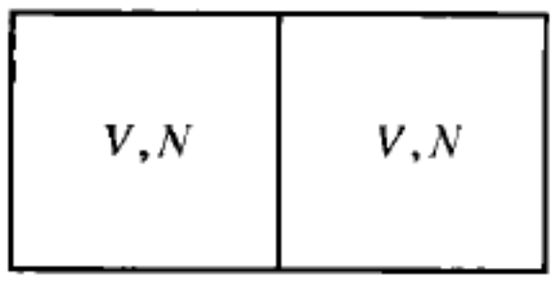


图 2.15

$$\tilde{S}_1 = 2k\left(\frac{3}{2}N + N\ln N + N\ln\left[\frac{V}{N}\left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}\right]\right) \tag{2.6.1}$$

但上面的复合系统又可以看成体积为 $2V$,粒子数为 $2N$ 的系统,按照这种方式算出的熵是

$$\tilde{S}_2 = k\left(\frac{3}{2}2N + 2N\ln(2N) + 2N\ln\left[\frac{V}{N}\left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}\right]\right) \tag{2.6.2}$$

这两种方式算出的同一系统的熵$\tilde{S}_1$, $\tilde{S}_2$ 并不相等,实际上

$$\tilde{S}_2 - \tilde{S}_1 = 2Nk\ln 2 \neq 0 \tag{2.6.3}$$

同一个状态应用统计方法竟然算出两个不同的熵函数来,这就是吉布斯佯谬,有了吉布斯佯谬,使人怀疑统计方法的正确性.

2.6.2　如何解决佯谬

从(2.5.21)看到

$$\tilde{S} = k\ln \Omega_{M.B.} = k\left(\frac{3}{2}N + N\ln N + N\ln\left[\frac{V}{N}\left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}\right]\right) \tag{2.6.4}$$

其中影响$\widetilde{S}$与N的线性关系的是因为有了一项$kN\ln N$,应当寻出一个适当的理由将它抹去,如果找不出看似合理的理由就将它硬抹去.20世纪初吉布斯(J. Gibbs, 1839—1903)就是硬将它抹去的,而其中理由则是后来揣想出来的.注意到$\ln N! = N(\ln N - 1)$,则将(2.6.4)与$kN\ln N$相减得到与(2.5.7)的热学熵相同的结果:

$$k\ln \Omega_{B.E.} \equiv k\ln \frac{\Omega_{M.B.}}{N!} = k\left(\frac{5}{2}N + N\ln\left[\frac{V}{N}\left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}\right]\right)$$

现在认定

$$k\ln \Omega_{B.E.} \tag{2.6.5}$$

为系统的熵(这是Gibbs重新定义的,但他未讲任何理由),它就是(2.5.21)右端所示的S,实际上

$$\begin{aligned} k\ln \Omega_{B.E.} &= k\ln \Omega_{M.B.} - k\ln N! \\ &= S + kN(\ln N - 1) - kN(\ln N - 1) = S \end{aligned}$$

$\Omega_{B.E.}$称为玻色-爱因斯坦(Bose-Einstein)状态数,它与古典分布状态数或麦克斯韦-玻尔兹曼(Maxwell-Boltzmann)分布状态数$\Omega_{M.B.}$的关系将在下面研究.

2.6.3 玻色-爱因斯坦统计

为了说明(2.6.5)所示的关系式是熵,我们必须指出引进额外因子$(N!)^{-1}$的理由.此理由在于微观粒子的全同性,这种粒子又称为玻色粒子,全同性是指各个粒子之间是完全不可区分的(能够区分开的粒子称为古典粒子),因此计算它们状态数的方式与古典系统有所不同.对玻色系统的讨论也像古典系统一样,仍然可以指出能级ε_l,简并度ω_l及在这个能级上的a_l个粒子.先讨论第l个能级ε_l上的情况,a_l个粒子分布在ε_l个简并态之中,讨论这种情况下的分布数,为了具体起见,设$\omega_l = 5$, $a_l = 10$,其中的一个分布示意参见图2.16,其中用方框$\boxed{1}$,$\boxed{2}$,…表示状态,用○表示粒子,图2.16表示1上有2个粒子,2上有1个粒子,3上没有粒子,4上有3个粒子,5上有4个粒子.在讨论分布时,不妨固定一个态,例如态1,在最左端,而其余的状态加粒子的总数是$\omega_l + a_l - 1$,将它们按不同顺序排列,共有$(\omega_l + a_l - 1)!$

种可能性，但其中有相同的组态. 在排列组态中把 a_l 个粒子的不同排列也当成了考虑因素，但这种排列不会产生新的玻色组态，因此排列数中要扣除因子 $a_l!$ 另外简并能级已经指定，不能进行交换，因此还需要扣除另一个因子 $(\omega_l - 1)!$ 这样得到可能的玻色组态的分布数是 $\dfrac{(\omega_l + a_l - 1)!}{a_l!(\omega_l - 1)!}$，而微观状态数为



图 2.16　玻色粒子分布示意

$$\Omega_{B.E.} = \prod_l \frac{(\omega_l + a_l - 1)!}{a_l!(\omega_l - 1)!} \tag{2.6.6}$$

现在在非简并条件，$\dfrac{a_l}{\omega_l} \ll 1$，下讨论

$$\Omega_{B.E.} = \prod_l \frac{(\omega_l + a_l - 1)!}{a_l!(\omega_l - 1)!} = \prod_l \frac{(\omega_l + a_l - 1)(\omega_l + a_l - 2)\cdots\omega_l}{a_l!}$$

$$\approx \prod_l \frac{\omega_l^{a_l}}{a_l!} = \frac{1}{N!}\Omega_{M.B.} \tag{2.6.7}$$

上述关系是对相当多的分布类 $\{a_l\}$ 都正确的，因此对应着古典的最大状态数 $\Omega_{M.B.}$ 的 $\{a_l\}$，也是决定最大的 $\Omega_{B.E.}$ 的 $\{a_l\}$，从古典系统换到玻色系统时，其最可几分布不改变.

讨论到这里，我们可以明白，从统计力学观念看来，我们把粒子系统看作是古典系统，而是要将它看作是玻色系统，如果把系统中的粒子看作小球的话，那么这两个系统的一个最根本的差异是：在古典系统中每个小球是可以区别的，而玻色系统中小球是不可区别的，小球可以区别的古典观念是人所熟知的，但古典观念上的可区分性是建立在对象有一定大小的前提上的，当对象缩小到分子尺度大小时，可区分性消失，代之而起的是粒子间的全同性，即这些粒子彼此间是不可区分的. 我们之所以得到这样的结论，是我们坚持宏观理论和微观理论之间有对称性的结果，或者说无论从宏观角度或微观角度观察同一个热学系统应当有相同的结论.

2.6.4　玻色分布和对称性

至此，我们引进玻色分布之后，已经较好地解决了熵佯谬问题. 现在较

少粒子的情况下讨论玻色分布与古典分布的特点.设粒子数 $N=2$,有两个能级 ϵ_1,ϵ_2,简并度 $\omega_1=\omega_2=1$,问(a_1, a_2)的可能分布数,分古典情况及玻色情况讨论.

注意 N 个粒子分布在 $\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n$ 能级中的古典状态总数为 n^N,故目下情况总状态为 $2^2=4$,它按(a_1, a_2)分配的分布数分别为(2, 0)为1,(1, 1)为2,(0, 2)为1;对于玻色情况,状态分配数各为:(2, 0)为1,(1, 1)也为1,(0, 2)为1总状态数为3,这些特征将古典和玻色情况明显地区别开.

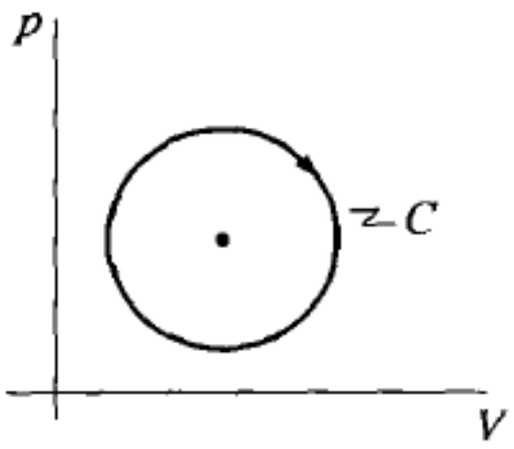
在微观现象还不能直接观察的年代,对微观的理解还只能靠宏观规律的外推.可分两种途径推广:① 宏观球与微观球除了大小的区别之外,其他性质,特别占据数,不变,这种外推引导到古典统计;② 利用对称性外推,按照上面讨论这引导到玻色分布,而超流等现象的处理,证明玻色分布符合实际情况,因为获得了这样的成果,增强用对称性指导物理研究的信心.

习　题

1. 已知在单元过程中系统所吸收的热量为 dQ,那么在一个循环过程中所吸收的总热量 $Q=\oint_C \mathrm{d}Q \neq 0$,这合理吗?

答:合理,因为 dQ 只表示闭曲线元线段中的一阶小量,并非状态函数(Q 并不是状态函数)的微分.

2. 已知在单元过程中系统对外界所做的功 $\mathrm{d}W=p\mathrm{d}V$,如果它在封闭曲线 C:$\left(\frac{p}{p_0}-1.5\right)^2+\left(\frac{V}{V_0}-1.5\right)^2=1$,顺时针循环求出系统对外界所做的功



第 2 题图

$W=?$

解:
$$W=\oint_C p\mathrm{d}V \tag{1}$$

令 $\frac{V}{V_0}-1.5=\cos\theta$,有 $\frac{p}{p_0}-1.5=\sin\theta$ 而机械功

$$W=\int_0^{-2\pi} p_0(1.5+\sin\theta)(-V_0\sin\theta)\mathrm{d}\theta=\pi p_0 V_0$$

3. 分子速度分布函数或速率分布函数都是概率密度,其中有一个重要因

子 $\exp\left(-\frac{E}{kT}\right)$，这里 E 是分子的机械能. 今有标准状态下的氧气装在边长为 0.1 m 的立方空腔内，这时计算一个氧分子的概率密度时，将它的指数因子 $e^{-\frac{E}{kT}}$ 中的 E 认为只是动能 $E = E_k = \frac{1}{2}mv^2$，将其中另一个成分 $E_p = mgz$（势能）略去. 问这样处理会引进多少相对误差？

解：题中的处理方式相当把因子 $\exp\left(-\frac{E_p}{kT}\right) = \exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right)$ 当作 1 处理，由于本处 $0 \leqslant z \leqslant \Delta l$ 而

$$\frac{mg\Delta l}{kT} = \frac{\mu g\Delta l}{RT} = \frac{32 \times 10^{-3}\ \text{kg/mol} \times 9.8\ \text{m/s}^2 \times 0.1\ \text{m}}{8.31\ \text{J/(mol} \cdot \text{K)} \times 273\ \text{K}} = 1.38 \times 10^{-5} \tag{1}$$

因此用 1 代替 $\exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right)$ 所引进的分布函数的相对误差为

$$\left|1 - \exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right)\right| \leqslant \left|1 - \exp\left(-\frac{mg\Delta l}{kT}\right)\right| = 1.38 \times 10^{-5} \tag{2}$$

即这样处理所引进的相对误差在 10 万分之一左右.

4. 分子速度分量 $v_x > 2v_p$ 的概率 p =？

解：最概然速率 $v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$. 而由分子的麦克斯韦速度分布函数 $f(v)$ 得到概率

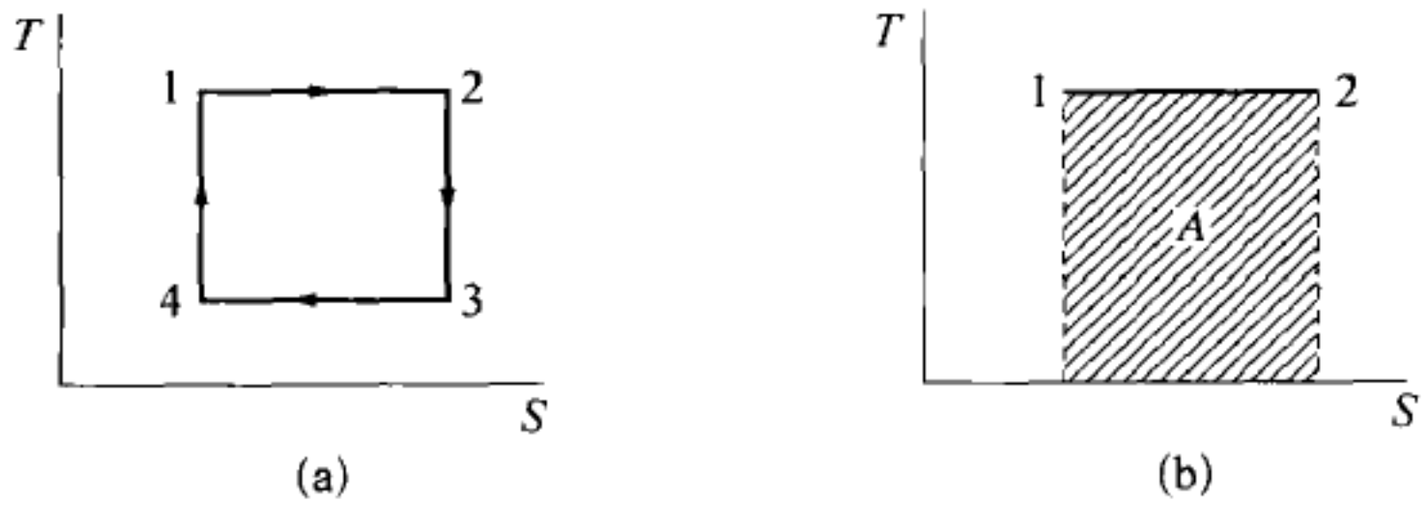
$$\begin{aligned} p(v_x > 2v_p) &= \int_{2v_p}^{\infty} \mathrm{d}v_x \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}v_y \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}v_z f(v_x, v_y, v_z) \\ &= \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_{2v_p}^{\infty} \mathrm{d}v_x \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}v_y \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}v_z e^{-\frac{m\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right)}{2kT}} \\ &= \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \int_{2v_p}^{\infty} \mathrm{d}v_x e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_2^{\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}(1 - \mathrm{erf}(2)) = 0.002\,4 \end{aligned}$$

这里我们利用了误差函数 $\mathrm{erf}(2) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^2 e^{-y^2} \mathrm{d}y = 0.995\,3$，一般的误差函数 $\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} \mathrm{d}y$，其值见下表，$\mathrm{erf}(\infty) = 1$.

误差函数的简表

x	$\mathrm{erf}(x)$	x	$\mathrm{erf}(x)$	x	$\mathrm{erf}(x)$
0.0	0	1.0	0.842 7	2.0	0.995 3
0.2	0.222 7	1.2	0.910 3	2.2	0.998 1
0.4	0.428 4	1.4	0.952 3	2.4	0.999 3
0.6	0.603 9	1.6	0.976 3	2.6	0.999 8
0.8	0.742 1	1.8	0.989 1	2.8	0.999 9

5. 如果不用压强 p 和体积 V 而改用温度 T 和熵 S 来描述气体的状态. 问 (a) 卡诺循环在 $T-S$ 图的形状怎样? (b) $T-S$ 图下的面积表示什么物理意义?



第 5 题图

解: (a) 参见第 5 题图(a), 图中是卡诺循环过程. 这里 12 过程是等温过程;23 过程是等熵过程(绝热过程);34 也是等温过程, 但由熵比较大的“3”态过渡到熵比较小的“4”态, 因此是外力做功, 而系统向外界放热的过程;4→1 仍是绝热过程, 系统受外力压缩回复到起始状态“1”;

(b) 参见第 5 题图(b), 图中 12 是在 TS 图上的一段曲线, 曲线下的面积 A 用阴影线标记出来. 由图可以看出

$$A = \int_{S_1}^{S_2} T\mathrm{d}S = Q \tag{1}$$

Q 是 12 过程中所吸收的热量(可逆过程). 对于不可逆过程, 系统所吸收的热量 $Q' \leqslant A$. 根据热力学第二定律, 系统不能吸收比 A 还大的热量.

6. 试证明任意可逆循环的效率不可能大于工作在它所经历的最高热源温度和最低热源温度之间的可逆卡诺循环的效率.

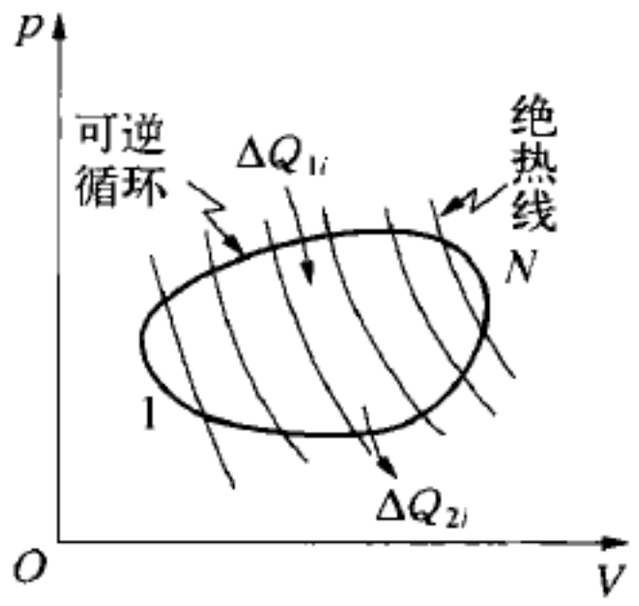
证: 对于一个可逆循环, 可用若干绝热线将可逆循环所包含的面积划分为

若干部分，参见第 6 题图，其中每一部分都可以看成卡诺可逆循环，现在研究从左到右算起第 i 条绝热线与第 $i+1$ 条绝热线所夹区域各种能量之间的关系. 由于指出的局部循环可以当作是卡诺循环，所吸收的热量 ΔQ_{1i} 与放出的热量 ΔQ_{2i} 之间成立关系

$$\frac{\Delta Q_{1i}}{\Delta Q_{2i}} = \frac{T_{1i}}{T_{2i}} \tag{1}$$

这里 T_{1i} 是该局部循环中高温热库的温度，而 T_{2i} 是低温热源的温度. 记 T_M 为该循环中的最高温度，T_m 为最低温度，自然有关系

$$T_{1i} \leqslant T_M,\ T_{2i} \geqslant T_m \tag{2}$$



第 6 题图

而该局部循环所给出的机械功 ΔW_i 与所吸收的热量 ΔQ_{1i} 的比值是

$$\frac{\Delta W_i}{\Delta Q_{1i}} = \frac{\Delta Q_{1i} - \Delta Q_{2i}}{\Delta Q_{1i}} = 1 - \frac{T_{2i}}{T_{1i}} \leqslant 1 - \frac{T_m}{T_M} \tag{3}$$

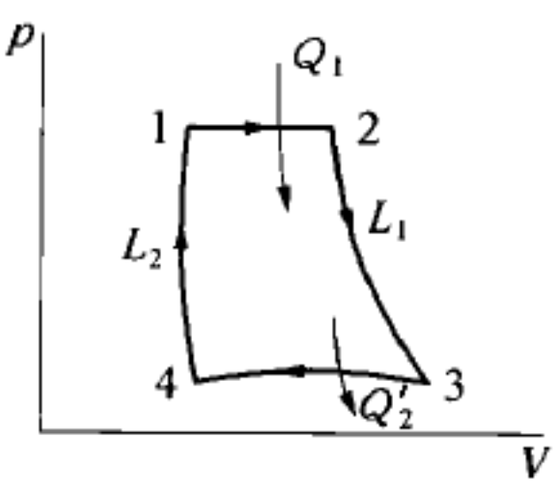
由于所指出的可逆循环的效率

$$\eta' = \frac{\sum_{i=1}^{N-1} \Delta W_i}{\sum_{i=1}^{N-1} \Delta Q_{1i}} = \frac{\sum_{i=1}^{N-1} \left(1 - \frac{T_{2i}}{T_{1i}}\right) \Delta Q_{1i}}{\sum_{i=1}^{N-1} \Delta Q_{1i}} \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{N-1} \left(1 - \frac{T_m}{T_M}\right) \Delta Q_{1i}}{\sum_{i=1}^{N-1} \Delta Q_{1i}}$$

$$= 1 - \frac{T_m}{T_M} \equiv \eta,\ \eta' \leqslant \eta \tag{4}$$

这里 N 是划分可逆循环所包含的面积的绝热线的条数，参见第 6 题图，而 $\eta \equiv 1 - \frac{T_m}{T_M}$ 正是工作在最高热源温度 T_M 和最低热源温度 T_m 间热机的效率. 证毕.

7. 已知图示的由四个过程组成的循环过程 1→2 是定压膨胀过程，此时系统从外界吸热 Q_1；2→3 是绝热过程 L_1；3→4 是定压压缩过程，系统向外界放热 Q_2'；4→1 是绝热过程 L_2. 求出这过程中的效率 η 并且证明 $\eta < \eta'$，这里 η' 是该过程中的最高温度 T_M 为高温热库，最低温度为低温热库的卡诺循环的效率.



第 7 题图

解：系统吸热 $Q_1 = C_p(T_2 - T_1)$，而放热 $Q_2' = C_p(T_3 - T_4)$ 效率

$$\eta = 1 - \frac{Q_2'}{Q_1} = 1 - \frac{T_3 - T_4}{T_2 - T_1} \tag{1}$$

注意两个定压过程 $p_1 = p_2$，$p_3 = p_4$，以及绝热过程 L_1，L_2，

$$\frac{T_2}{T_3} = \left(\frac{p_2}{p_3}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}} = \left(\frac{p_1}{p_4}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}} = \frac{T_1}{T_4} = \frac{T_2 - T_1}{T_3 - T_4} \tag{2}$$

从(2)式可以得到

$$\eta = 1 - \frac{T_3}{T_2} \tag{3}$$

又在这个循环中，最高温度 $T_M = T_2$，最低温度 $T_m = T_4$，相应的卡诺循环的效率

$$\eta' = 1 - \frac{T_m}{T_M} = 1 - \frac{T_4}{T_2} > 1 - \frac{T_3}{T_2} = \eta \tag{4}$$

证毕.

8. 现有 $T_H = 900\ \mathrm{K}$，$T_L = 300\ \mathrm{K}$ 两个大热源.(a) 100 cal 的热量从 T_H 热源传入 T_L 热源，整个系统的熵变化多少？(b) 一个可逆热机工作于 T_H 及 T_L 两热源之间，若从 T_H 热源吸取了 100 cal 的热量，问对外做了多少功？其熵变化了多少？

解：(a) 热量 $Q = 100\ \mathrm{cal} = 418\ \mathrm{J}$，而整个系统的熵增量

$$\Delta S = -\frac{Q}{T_H} + \frac{Q}{T_L} = -\frac{418\ \mathrm{J}}{900\ \mathrm{K}} + \frac{418\ \mathrm{J}}{300\ \mathrm{K}} = 0.93\ \mathrm{J/K}$$

(b) 对外所做的功

$$W = \frac{T_H - T_L}{T_H} Q = 279\ \mathrm{J} \tag{1}$$

传给低温热源的热量

$$Q' = Q - W = 418\ \mathrm{J} - 279\ \mathrm{J} = 139\ \mathrm{J} \tag{2}$$

这时系统的熵坛量

$$\Delta S = -\frac{Q}{T_H} + \frac{Q'}{T_L} = -\frac{418}{900} + \frac{139}{300} = 0$$

9. 已知原子系统有三个能级 $\epsilon_1 = 0$，$\epsilon_2 = \epsilon$，$\epsilon_3 = 2\epsilon$，能量参数 $\epsilon > 0$. 今系统有 3 个粒子，求出这三个粒子系统的总能量和熵之间的关系.

解：① 总能量 $E = 0$，这时三个粒子都位于 $\epsilon_1 = 0$ 能级，状态数 $N = 1$，即三个粒子都处于 $\epsilon_1 = 0$ 能级熵 $S = k\ln N = 0$；

② $E = \epsilon$，两个粒子处于 $\epsilon_1 = 0$ 能级，一个粒子处于 $\epsilon_2 = \epsilon$ 能级 $N = 1$，熵 $S = k\ln N = 0$；

③ $E = 2\epsilon$，两个粒子位于 $\epsilon_1 = 0$，一个粒子位于 $\epsilon_3 = 2\epsilon$ 态，还有一个粒子位于 $\epsilon_1 = 0$ 态两个粒子处于 $\epsilon_2 = \epsilon$ 能级，$N = 2$，熵 $S = k\ln N = k\ln 2$；

④ $E = 3\epsilon$，一个粒子处于 $\epsilon_1 = 0$，一个粒子处于 $\epsilon_2 = \epsilon$，还有一个粒子处于 $\epsilon_3 = 2\epsilon$ 的组态；另外三个粒子均处于 $\epsilon_2 = \epsilon$ 的组态，$N = 2$，熵 $S = k\ln 2$；

⑤ $E = 4\epsilon$，一个粒子在 $\epsilon_1 = 0$ 能级两个粒子处于 $\epsilon_3 = 2\epsilon$ 的组态还有两个粒子处于 $\epsilon_2 = \epsilon$ 而一个粒子处于 $\epsilon_3 = 2\epsilon$ 的组态，组态数 $N = 2$，熵 $S = k\ln 2$；

⑥ $E = 5\epsilon$，只有 1 个粒子处于 $\epsilon_2 = \epsilon$，二个粒子处于 $\epsilon_3 = 2\epsilon$ 的组态，$N = 1, S = 0$；

⑦ $E = 6\epsilon$，只有三个粒子都处于 $\epsilon_3 = 2\epsilon$ 的一种组态，$N = 1, S = 0$.

参考资料

1. 孙宗扬，郑久仁，热物理习题精解(上)，2004 年 8 月，科学出版社.

2. 包科达，2001，热物理学基础，北京：高等教育出版社.

第3章　从牛顿时空观念过渡到狭义相对论时空观念

——空间和时间的对称性

我们生活在三维空间之中，描述它需要用三维坐标，一般是三维直角右手坐标(参见1.1节的讨论)，空间的一个点可用三个参数(x, y, z)表示，但对于一个质点A来说，除了说明它处于(x, y, z)位置之外，还要问A是在什么时刻位于该处，即还需要一个参数t作为确定时刻之用.这样，详尽地描述A的状态需要4个参数(x, y, z, t)，即应当将它看作四维空间的一个点，本处前三个参数描述地点，与空间有关，后一个参数t代表时刻，所涉及的是时间，为了强调这一点，我们把所涉及的四维空间称为四维时-空，或四维空-时，注意其中的短波折号“-”，有些情况下，略去“-”号称为“四维空时”注意此处的“空时”仍旧是指“空(间)及时(间)”，而不是“有空闲的时候”.质点在空间的位置(x, y, z)，可以有多种选择方式，它与在原点O上所给定的直角右手坐标架有关，但是它与原点O的距离$R = OA = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$是不变的，这就是质点$A$相对于坐标架$(e_x, e_y, e_z)$所呈现出来的对称性(或者说是共同性)，那么对于空-时坐标(x, y, z, t)，其中又包含有何种对称性呢？这就是本章要讨论的内容，看来是从三维到四维的简单推广，结合了对时间-空间的物理性质的思考，我们得到新的深刻的认识，从而由牛顿时-空的认识过渡到近代的相对论时-空的认识.

3.1　将时间与空间生成四维时-空

3.1.1　光速中心说

19 世纪末，迈克尔逊利用干涉仪（又称迈克尔逊干涉仪，参见图 3.1）测量光的传播速度.在麦克斯韦确定了电磁波的传播速度 c 之后，按照古典理论，电磁波应当在某个介质（这个介质称为以太）中传播.在经典的波传播理论中，只有在静止介质（即波源和接收器都相对于介质静止）波的传播速度才是各向同性的，在这种情况下各个方向上的传播速度都是 c，如果在运动介质（光源或接收器相对其运动的介质）波的传播速度各向异性，这时在不同方向上有不同的传播速度.这样就有可能找到一个绝对惯性系，在这个系统中，光的传播速度在各个方向都相同（各向同性），而相对于它运动的惯性系光速各向异性.迈克尔逊-莫雷（Michelson - Morley）实验正是要试图完成这个任务，企图找出一个光的传播各向异性的惯性系.

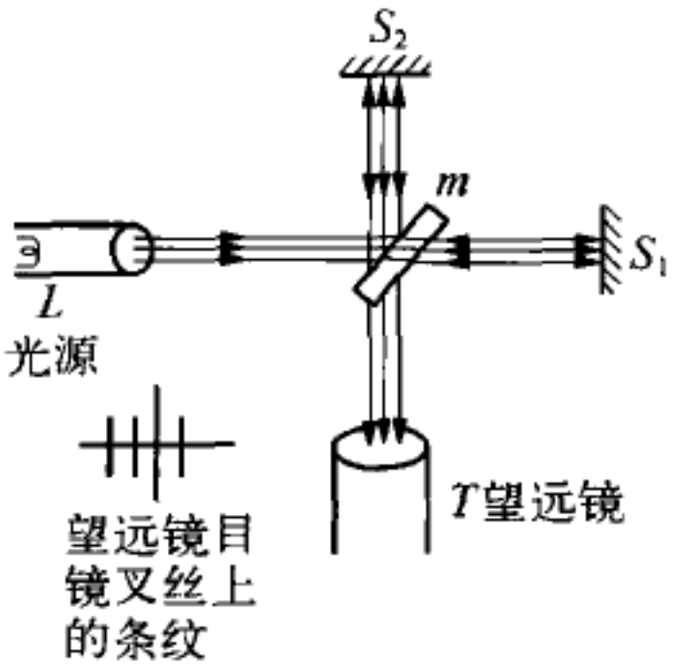


图 3.1　迈克尔逊干涉仪

按照当时的概念，各向异性系是相对各向同性系而言，当然要问：各向同性系在什么地方？各向同性系是以太在其中静止的系统，可以设想它静止在太阳参考系中，如果是，那么地球系是各向异性系；如果太阳参考系不是，例如说以太静止在银河中心参考系中，那么地球系还是各向异性系，因此在地球上比较光在不同方向上的传播速度，应当能检查出它们的差异.实验的结论是：没有见到实验应当呈现出来的差异.如果还坚持以太的观点，这个实验结果应当是表示以太应当在地球系中静止，但这显然不合理，因为地球系不是一个很好的惯性系；如果以太静止在太阳参照系（或其他更合理的参考系）中，那么这个实验（即迈克尔逊-莫雷实验）所在的地球穿过空间

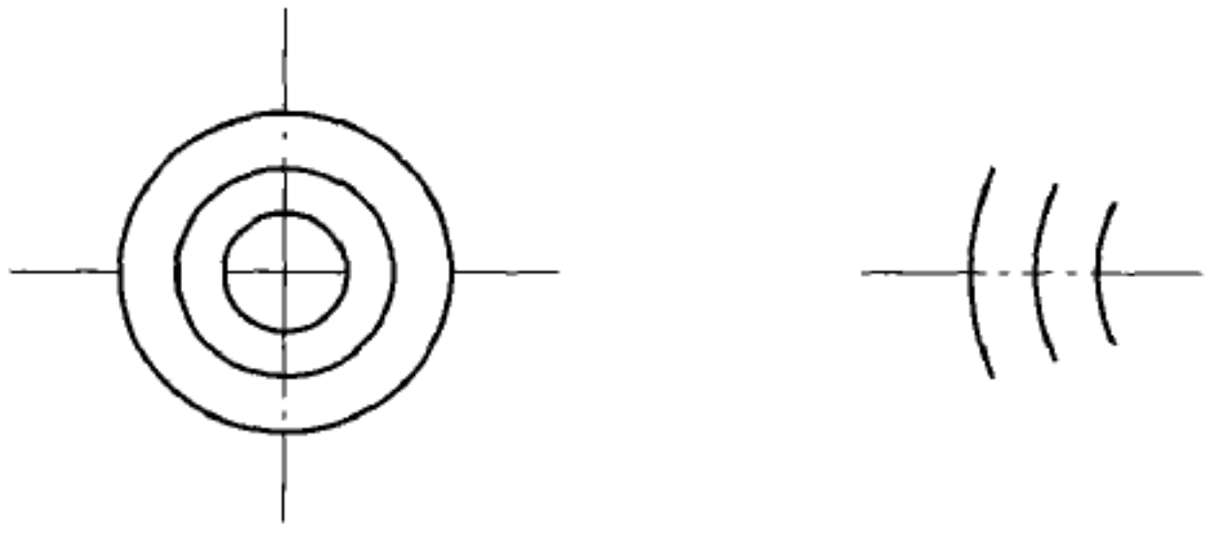
时,其中的以太被带动而粘在地球上一起运动,这又给以太介质模型赋予了过分复杂的图像.以太图像既然变得如此诡异,不如索性放弃了它,进而认为在任何惯性系中,光的传播都是各向同性的,在这样的论断下,伽利略的速度相加原理已被破坏,因此这个论断付出的代价也很大,但是比较各方面的实验结果,我们宁愿采用这个论断.

为了解释上述实验结果,洛伦兹(Lorentz)提出了一个经验公式,后来爱因斯坦独立导出这个公式并且将它作为时-空理论中一块基石.在洛伦兹的公式中包含着光速在不同惯性系下数值不变的内容.爱因斯坦提出光的传播速度在不同的惯性系,在同一个惯性系的不同方向都是同一个数值,记以 c,这个学说称为光速中心说.

3.1.2 迈克尔逊-莫雷实验

在 1887 年,迈克尔逊和莫雷企图用实验证实地球在以太背景穿行的学说,实验的否定结果催生了新的时-空理论——狭义相对论,在相对论中,时间和空间有对称性,即它们之间有类似的性质并且可以互相转换,揭开了 20 世纪新物理的序幕,所以迈克尔逊-莫雷实验在历史上非常著名.

实验使用的干涉仪如图 3.1 所示,图的左方是平行光管由它射出的光的方向集中在光管轴线附近,其衍射效果相当于平行光透过小孔的成像,在接收面上出现环状衍射花纹(图 3.2(a))如果仅看局部,可以当作是若干条近似平行的条纹(图 3.2(b)).现在从光管 L 出来的光射向半透明反射镜 m 上,反射镜镜面法线与入射光线成 45°角,当光线到达 m,有一半光被镜面反射而到在图中上部的反射镜 s_2,它被反射返回到 m,有一半透过 m 到图



(a)　　(b)

图 3.2

下部的望远镜聚焦于无穷远处(即目镜的叉丝上,参见图 3.1 左下方的附图);另一半光透过镜面 m 射到反射镜 s_1 上,经 s_1 反射后沿原路返回,抵达 m 后,返回的光的一半经 m 反射落入望远镜 T 中聚焦.现在反射镜 s_1, s_2 与 m 镜的距离 l_1, l_2 相等,

$$l_1 = l_2 = l \tag{3.1.1}$$

而仪器又设置在静止以太中,则上述分光过程对最终出现在望远镜目镜叉丝上的花纹没有影响,因为在这两束光中光程差未曾改变.但如果放在移动的以太中,则这两束光的光程差改变经干涉后使明暗条纹位置发生移动,这些移动距离能在实验中被观察到.

现在计算移动以太的效应,设以太风从图 3.1 中的左方刮到右方,速度为 v,则在从 m 到 s_1 往返一次所需要的时间为

$$t_1 = \frac{l}{c+v} + \frac{l}{c-v} = \frac{2lc}{c^2 - v^2} \tag{3.1.2}$$

而在垂直方向上由 m 到 s_2 往返一次所需的时间 $t_2 = \dfrac{2l}{u}$,这里 u 是光波在仪器空间的传播速度.为了计算出 u 值可参看图 3.3 所示的直角三角形,这里 $ms_2 = l$ 代表从 m 镜到 s_2 镜的距离而光波从 m 传到 s_2 所需的时间是 $t = \dfrac{t_2}{2} = \dfrac{l}{u}$,当光波传到 s_2 时,在初始时刻位于 s_2' 点的以太单元也传到了 s_2,由于以太风的速度是 v,因此有关系 $s_2's_2 = vt$.但从以太静止的参照系看来,在 t 时间内光波从 m 传到 s_2' 点,在静止以太中光波的传播速度是 c,因此有 $ct = ms_2' = (\overline{ms_2}^2 + \overline{s_2's_2}^2)^{1/2} = (u^2 + v^2)^{1/2} t$,于是得到

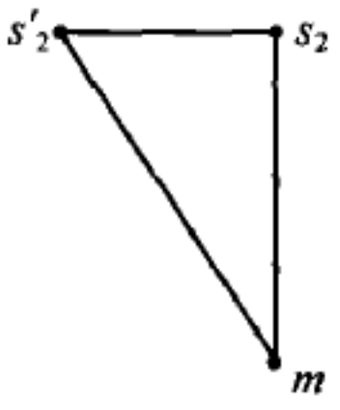


图 3.3

$$u^2 = c^2 - v^2 \tag{3.1.3}$$

求得

$$t_2 = \frac{2l}{(c^2 - v^2)^{1/2}} \tag{3.1.4}$$

由 m 镜劈开两半光束它们之间有光程差

$$\Delta l = c(t_1 - t_2) \simeq l\frac{v^2}{c^2} \tag{3.1.5}$$

这里认为 $\beta \equiv \frac{v}{c} \ll 1$，最后一式是小量展开保留主要阶的结果，实际上可选 $v = 30\ \mathrm{km/s}$ 是地球的公转速度，$\beta = 10^{-4}$.现在讨论因(3.1.5)的光程差引起的干涉条纹的移动，我们可以想象成 m 的分光作用相当于一束光照射到双狭缝而分成两束(参见图 3.4)，当由 s_1'及 s_2'狭缝出发的光如果初位相相同，则接收屏上正对两狭缝间的中线处由于光程相同而互相加强，出现一条亮线，然后是向两方扩展的亮暗相间的条纹.但如果两狭缝光束的初位相有差异，则原来的亮线之处因为附加的光程差可能变暗，而暗条纹相应变亮，于是屏幕上的条纹横移过一段距离，其移过的距离与初位相差或者等效地光程差有关.

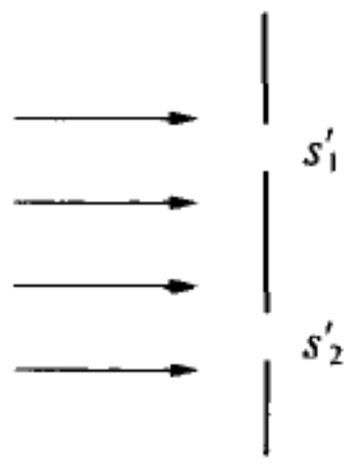


图 3.4 双狭缝

上面讨论的是双狭缝干涉，其原理可照搬过来讨论在干涉仪中的干涉，附加光程差为 $2\Delta l$ 的两束光比起原始两束参照光移动过的条纹个数为 $\Delta n = \frac{2\Delta l}{\lambda}$，$\lambda$ 是光波的波长.这个结论既可按照双狭缝的类比来了解；也可以按照下述方式理解：当干涉处于以太静止系中时，由两束光沿轴线方向的相位相同，所以出现一个亮点，而与轴线有偏离的两束光因有附加的光程差而有所抵消，所以在亮点周围出现一个暗圈，然后是一个亮圈……其图形可参见图 3.2(a).现在如果两束光有$\frac{\lambda}{2}$光程差(对沿轴光线而言)，则亮点变暗，周围暗线变亮，相当于移过 $\Delta n = \frac{1}{2}$ 个条纹，其他情况可以类似地讨论.

现在讨论干涉仪情况，设先将图 3.1 所示的干涉仪沿过 m 镜垂直于纸面的轴转过 90°，这时的光程差为 $-\Delta l \approx -l\frac{v^2}{c^2}$ (参见(3.1.5))，然后恢复原状有光程差 Δl，恢复原状后的光束相对于原光束附加了 $2\Delta l$ 光程差，因此移动过的条纹数

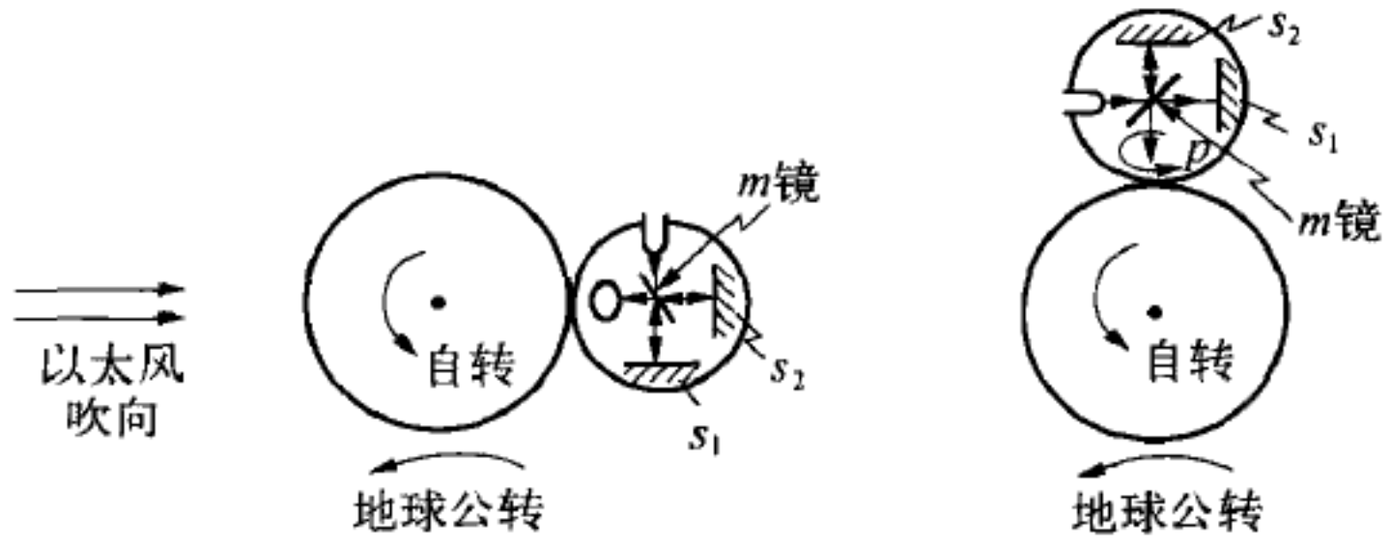
$$\Delta n = \frac{2\Delta l}{\lambda} = \frac{2lv^2}{\lambda c^2} \tag{3.1.6}$$

现在将具体数据代进去，设用的是可见光，$\lambda = 5\times10^{-7}$ 米，l 经过光路设计

后可达 10 米，$v/c = 10^{-4}$ 见前，这样有

$$\Delta n = 0.4$$

即干涉条纹可变动 0.4 个. 当将仪器按前述的中心轴转过 90°时，干涉条纹可变动 0.4 个，这样显著的变化，应当能够观察到，实际上没有看到条纹的变动，这只能说我们立论的根据是错误的.



(a) 以太风从m镜吹向 s_2　　(b) 半天(6个小时)后 以太风从m镜吹向 s_1

图 3.5

在讨论实验时，讲及将仪器转动 90°的操作，实际上这个操作是自动完成的. 参见图 3.5，由于地球自转的关系，在图(a)所示的位置上以太风从 m 吹向 s_2；过了 6 个小时以后，仪器处于图(b)所示情况，以太风从 m 吹向 s_1.

3.1.3　四维时空

我们已经熟悉三维空间，其中矢量可以记为 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$，有三个分量；如果将时间 t 也纳入，则有 4 个参数 $(x, y, z, t) = (\boldsymbol{r}, t)$，为了方便，我们通常将 t 换成一个有长度量纲的参量 ict，记 $L = (\boldsymbol{r}, ict) = (x, y, z, ict)$，这里第四个分量是 ict，i 是虚数单元，$i = \sqrt{-1}$，c 是光速 ct 具有长度的量纲，L 称为是四维时空矢量或称为事件. 形式上有了四维时-空矢量之后，我们还要讨论它的对称性，它与由某种线性变换对象之间的共同性是什么？即变换的不变量是什么？原有的经典物理的知识能原封不动地保留下来吗？如果不能，还可以保留多少？引入光速不变原理之后，需要对经典物理做哪些修改？对时-空矢量的变换关系有些什么新结果？这些问题将在本章其余各节讨论.

3.2 洛伦兹变换

3.2.1 不变量

设有一个质点 A 落在(x, y, z)上,如果在原点 O 选择另一组直角右手坐标架$(\boldsymbol{e}'_x, \boldsymbol{e}'_y, \boldsymbol{e}'_z)$,则标记 A 质点所在处为参数(x', y', z'),一般说来$(x, y, z) \neq (x', y', z')$,这就是说,这些标记方式,或者说 A 所在处相对于坐标架$(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z)$的表达方式,与坐标架的选择有关.现在出现了一系列三参数序列(x, y, z),(x', y', z'),…它们都可描述 A 质点所在位置,这些三参数序列我们称作是(三维空间中的)矢量.这样我们有了一系列矢量,那么它们之间的共同性也就是它们之间的对称性是什么?第一个共同性看来是显然的,我们有

$$\sum_{i=1}^{3} x_i \boldsymbol{e}_i = \sum_{i=1}^{3} x'_i \boldsymbol{e}'_i \tag{3.2.1}$$

这里为了书写起来方便,我们已经改用记号$(x_1, x_2, x_3) \equiv (x, y, z)$;$(x'_1, x'_2, x'_3) = (x', y', z')$;$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = (\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z)$;$(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3) = (\boldsymbol{e}'_x, \boldsymbol{e}'_y, \boldsymbol{e}'_z)$,我们同时使用这两组符号,视所使用的场合而定.另外一个对称性比较简单:这组三个坐标的平方和的平方根是个不变量

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2} = (x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3)^{1/2} = l \tag{3.2.2}$$

这里 l 代表 A 质点所在处与原点的距离,l 也称作是旋转不变性的不变量或简称为旋转不变量,它代表因为坐标架的旋转,空间点的坐标会有所不同,但是它与原点的距离不会改变.这是由旋转对称性导致的不变性,反之,我们从$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2} = l$ 的不变性,从而推知旋转对称性,即不论坐标架如何旋转,它不会改变 l 的大小,从这里我们可以看到对称性和不变量(或守恒量)互为包容①,这是物理学中处理对称性的常见方式,即往往处理

① 《伟大的物理学家》,当代世界出版社,2007 年 9 月,P393.

对称性问题中的不变量.

现在讨论四维时空,其中的一个事件 $L=(x,\ y,\ z,\ ict)$的“长度”为(仍以 L 记之,但含义不同)

$$L=(x^2+y^2+z^2-c^2t^2)^{1/2} \tag{3.2.3}$$

在这里有四个平方项,关于空间的三个平方项即 x^2,y^2 及 z^2 前面都选“+”号,第四个平方项 c^2t^2 前面选的是负号,其理由似可以做如下方式的申述,如果将时间 t 当作第四维,则它必须有长度的量纲,而 ct 正好有长度量纲.如果在(3.2.3)选定 $z=z_0$,$t=t_0$ 固定不变,但坐标架可在 XY 平面内旋转,参见图 3.6,事件 A 在($\boldsymbol{e}_x$,$\boldsymbol{e}_y$)坐标系中坐标为(x,y)在($\boldsymbol{e}'_x$,$\boldsymbol{e}'_y$)坐标系中坐标为(x',y'),于是从图 3.6 中读出关系

$$\left.\begin{aligned} x'&=x\cos\theta+y\sin\theta\\ y'&=-x\sin\theta+y\cos\theta\end{aligned}\right\} \tag{3.2.4}$$

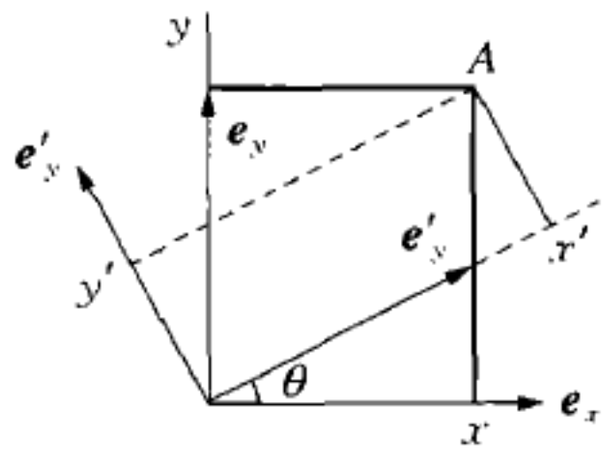


图 3.6

上述关系式中有不变量

$$(x^2+y^2)^{1/2}=(x'^2+y'^2)^{1/2} \tag{3.2.5}$$

现在讨论事件 L 所蜕化出来的另一个事件B,这里 $y=y_0$,$z=z_0$ 不变 x,t 可变,我们可把它想像成一个无质量质点(光子)沿 x 轴以光速运动,$x=ct$ 是一个事件,而对于一个沿着 x 轴以速度v 运动着的惯性系s'而言,这一事件现在可用 x'及 t'标记,x'及 t'与 x 及t 的具体关系尚不清楚(可参考本章第 9 题),这是本章以后各节中要探讨的内容,但根据爱因斯坦的光速学说,我们可以知道 $x'=ct'$,这样,我们有等式

$$(x^2-c^2t^2)^{1/2}=(x'^2-c^2t'^2)^{1/2}=0 \tag{3.2.6}$$

这里坐标 x 及时刻 t 以光速粒子相连系,它是以常速 u 相联系的事件(x,t)中的一个特例,但即便仅仅考虑这个特例,我们也知道$(x^2+c^2t^2)^{1/2}\neq(x'^2+c^2t'^2)^{1/2}$,因此把不变长度 L 选作(3.2.3)的形式是合理的,至少是不会引起明显的抵触. $L^2>0$,$=0$,<0 分别称为类空的,类光的,类时的.把时间以 $-c^2t^2$ 形式与 x^2,y^2,z^2 并列在不变长度 L (3.2.3)的根号之下,这就说明了一定程度下的对称性.这说明 c^2t^2 与 x^2 等不完全一样,当然我们着重探讨的还是时间和空间的对称性,即它们的

共同点方面.

3.2.2 伽利略变换及其推广

在上一段给出四维的长度 L,参见(3.2.3),如果限定讨论 $y=z=0$ 的情况,则有

$$L^2 = x^2 - c^2 t^2 \tag{3.2.7}$$

这是空间平方项和时间平方项的组合,我们希望它在四维空间旋转中呈现出某些不变性质.我们回忆起在 XY 平面内点距离长度平方

$$l^2 = x^2 + y^2 \tag{3.2.8}$$

将 XY 平面内的坐标架整个旋转 θ 角,对于新坐标架,端点的坐标为(x', y'),参见图 3.6,它们之间的关系见(3.2.4),而(3.2.5)表达了长度不变的性质,这个性质就是在(x, y)和(x',y')之间的对称性,所谓具有对称性,是指所研究的事物之间有相同之点,本处是不同的坐标表达了同样的长度,这是对日常生活中提炼出来的对称性观念的推广.

现在探讨时-空(x, t)2 平面的"旋转",参照纯空间 2 - 平面的旋转情况,"旋转"后的事件(x', t')与"旋转"前的(x, t)应当有线性相依关系:

$$x' = a_{11} x + a_{12} t,\ t' = a_{21} x + a_{22} t \tag{3.2.9}$$

我们曾在经典力学见过类似的关系,它就是伽利略变换

$$\tilde{x}' = x - vt,\ \tilde{t}' = t \tag{3.2.10}$$

这个关系是指一个物体在 s 惯性系中运动,其事件为(x, t),若 s'系是以速度沿 x 轴正向运动的惯性系,这时按照经典力学(牛顿力学)观点,s'系中反映该事件的参数是($\tilde{x}'$, $\tilde{t}'$),在相对论观念下的空-时参数是(x', t').时空"旋转",也像纯空间旋转一样,旋转后的参数是旋转前参数的线性组合.因此,所谓的时空旋转即由 s 转到 s'系,那么它的转换关系是否就是伽利略变换(3.2.10)? 从对称角度看来这不太合适,因为新的 $\tilde{x}$ 含有 t 的成分,但新的 $\tilde{t}$ 并不包含 x 的成分,这样的形式脱离对称性太远,该予以修正,其方案为

$$\tilde{x} = x - vt,\ \tilde{t} = t - \frac{vx}{c^2} \tag{3.2.11}$$

(3.2.11)与(3.2.10)相比是 $\tilde{t}$ 中包含了 vx 项$\left(\text{系数}\frac{1}{c^2}\text{是用来平衡量纲的常数}\right)$,这与 $\tilde{x}$ 中包含 vt 项具有对称性.(3.2.11)应当看作是考虑到对称性之后的推广了的伽利略变换.注意用(3.2.11)取代(3.2.10)从原则上讲是非常关键的一步,但在日常经验范围内,所增的一项$\frac{vx}{c^2}$对所测量的时间影响很小,试举一个具体的例子,对于地球上的机械运动速度一般不会超过 $v\sim300$ 米/秒,即不会超过声音在空气中传播的速度;而在地球上长度 $x\sim3\,000$ km之下,才可当作直线距离处理,物体以速度 v 传播 x 距离需要时间 $T = \frac{x}{v}\sim10^4$ 秒,而相应的考虑了对称性,见(3.2.11),之后,比起伽利略变换(3.2.10)来,时间上要相差 $\Delta T = \frac{vx}{c^2}\sim 10^{-8}$ 秒,这是一个极小的时间差异,其相对误差 $\epsilon = \frac{\Delta T}{T}\sim 10^{-12}$,是现在精密时间测量在理论上能够达到的精度上限.

3.2.3　洛伦兹变换及其推论

我们从(3.2.11)开始,看推广以后的伽利略变换能否保证 L^2 不变,参见(3.2.7)自然有

$$\tilde{L}^2 = \tilde{x}^2 - c^2\tilde{t}^2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(x^2 - c^2t^2) = (1 - \beta^2)L^2,\ \beta \equiv \frac{v}{c} \tag{3.2.12}$$

所以在变换(3.2.11)作用下 L^2 不是不变量,但如果作适当更改

$$x' = \frac{\tilde{x}}{(1-\beta^2)^{1/2}} = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}},\ t' = \frac{\tilde{t}}{(1-\beta^2)^{1/2}} = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{3.2.13}$$

则 L^2 就是不变量，

$$L'^2 \equiv x'^2 - c^2 t'^2 = \frac{1}{1-\beta^2}(\tilde{x}^2 - c^2 \tilde{t}^2) = L^2 \qquad (3.2.14)$$

变换(3.2.13)：

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (3.2.15)$$

实际上已先由洛伦兹以经验公式的形式给出，用来解释迈克尔逊-莫雷的结果，爱因斯坦赋予它空间和时间有内在联系的物理意义，(3.2.15)称为洛伦兹变换.由洛伦兹变换(3.2.15)出发，可以导出高速运动的物体的一些特别的性质，在古典力学中没有类似的性质：

① 物体沿运动方向上的洛伦兹缩短：设一根棍子沿 x 轴放置，静止在 s 系中，端点的坐标分别为 x_1 及 $x_2(x_2 > x_1)$，则此棍子的长度为

$$l = x_2 - x_1 \qquad (3.2.16)$$

从运动系 s' 看来棍子沿 x 轴反向运动，两个端点对应的事件分别是 (x'_1, t'_1) 及 (x'_2, t'_2) 在运动系 s' 中测定棍子的长度 $l' = x'_2 - x'_1$ 时必须附加同时性条件：$t'_2 - t'_1 = 0$，即同时测定两个端点的位置，这种条件下的位置差才是棍子的长度.利用条件

$$t'_2 - t'_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left[(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)\right] = 0$$

$$\rightarrow t_2 - t_1 = \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1) \qquad (3.2.17)$$

而 $$l' = x'_2 - x'_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}[(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)] = \sqrt{1-\beta^2}\, l \qquad (3.2.18)$$

上式表示，物体运动起来沿运动方向的长度 l' 比起静止时的长度 l 要短一些，$l'/l = \sqrt{1-\beta^2}$，这就是洛伦兹缩短的内容，在低速时 $l'/l \sim 1$，即与通常的理解一致；在 $\beta \simeq 1$，物体的运动速度接近光速，这时 $l'/l \simeq 0$，一个球形静止物体在高速运动时沿运动方向将被压扁；

② 运动物体的时间延长，设有物体静止在 s 系中，它的坐标 $x_1 = x_2$；而在 s' 系中对应的两个事件是 $L'_1 = (x'_1, t'_1)$，$L'_2 = (x'_2, t'_2)$ 时间差

$$t'_2 - t'_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left[(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)\right] = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{3.2.19}$$

(3.2.19)表示 $t'_2 - t'_1 > t_2 - t_1$，即运动起来之后，时间要变长，这也是经典力学中不会具有的.

3.3　洛伦兹变换的特点和处理方式

3.3.1　原时

与(3.2.14)指出的 Lorentz 不变量 $L^2 = x^2 - c^2 t^2$ 相对照，在 4 维情况下有

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$$

是 Lorentz 不变量，或者更一般些，始端可以不是时空原点，而是(x_0, y_0, z_0, ict_0)点，可以直接验证

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - c^2(t - t_0)^2$$

在 Lorentz 变换下是不变量.在事件 $L = (x, y, z, ict)$ 和 $L_0 = (x_0, y_0, z_0, ict_0)$ 相当靠近时，其微分的不变量形式与上式相似

$$\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 - c^2\mathrm{d}t^2 \tag{3.3.1}$$

它也是不变量.记

$$\mathrm{d}\tau^2 \equiv -\frac{1}{c^2}(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 - c^2\mathrm{d}t^2)$$

$$= \mathrm{d}t^2 - \frac{1}{c^2}(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2) \tag{3.3.2}$$

$\mathrm{d}\tau$ 称为原时(增量),由于(3.3.1)是不变量,因此 $\mathrm{d}\tau^2$ 及 $\mathrm{d}\tau$ 都是不变量.现在讨论 $\mathrm{d}\tau$ 的物理意义.设质点在 s 系中运动,而在相对于它做匀速运动的 s'系中静止,则有不变性关系

$$\mathrm{d}t^2 - \frac{1}{c^2}(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2) = \mathrm{d}t'^2 - \frac{1}{c^2}(\mathrm{d}x'^2 + \mathrm{d}y'^2 + \mathrm{d}z'^2) = \mathrm{d}t'^2 \tag{3.3.3}$$

这是因为质点在 s'系中静止,$\mathrm{d}x' = \mathrm{d}y' = \mathrm{d}z' = 0$,从(3.3.2)及(3.3.3)看到

$$\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t' \tag{3.3.4}$$

因此原时 $\mathrm{d}\tau$ 就是粒子在静止系统中的时间,或者说是与粒子固连在一起的空间中所测量出的时间.由(3.3.2)看到,原时

$$\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t\left(1 - \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{c\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{c\mathrm{d}t}\right)^{1/2} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}\mathrm{d}t,$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = (\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2)^{1/2} \tag{3.3.5}$$

或者 s 系中的时间

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}\tau}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{3.3.6}$$

这里 $\beta = v/c$,v 是粒子在 s 系中的速度.

从上面的讨论可以知道一个做匀速直线运动的粒子,如果在其速度为 v 的系统中,相应指定一个时间单元 $\mathrm{d}t$,则该粒子静止的系统中,对应的时间单元是 $\mathrm{d}\tau = \sqrt{1-\beta^2}\mathrm{d}t$,$\mathrm{d}\tau$ 是原时,是固定在质点上的时钟所测得的时间间隔.一个物体在不同的惯性系中呈现为不同的速度,该物体的相邻事件的时间间隔 $\mathrm{d}t$ 在不同的坐标系中呈现为不同的数值,设在惯性系 s_1 中物体的速度为 v_1,时间间隔为 $\mathrm{d}t_1$;s_2 系中各个值为 v_2 及 $\mathrm{d}t_2$,则有

$$\frac{\mathrm{d}t_1}{\mathrm{d}t_2} = \left(\frac{c^2 - v_2^2}{c^2 - v_1^2}\right)^{1/2} \tag{3.3.7}$$

从(3.3.7)可以看到,同一个时间间隔,在不同的惯性系中呈现出不同的数值,这就是时间间隔的对称性,但它们都归结为同一个原时间隔 $\mathrm{d}\tau$,这就是

在它们中间呈现的不变性.

我们注意到,当选定一个惯性系(例如地面系)s,在 s 系上可选择一组坐标架 $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$,它们由单位长度矢量 $\boldsymbol{e}_i$, $i = 1,2,3$,生成满足正交右手关系,所谓正交是指

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = 0,\ i \neq j \tag{3.3.8}$$

所谓右手是指

$$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1,\quad \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2 \tag{3.3.9}$$

如果 $(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3,)$ 是 s 系上另一组正交单位矢量组成的右手标架系统,则自然地有

$$(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{3.3.10}$$

这里右方 1×3 阵(1 行 3 列)和 3×3 矩阵相乘,相乘结果是一个 1×3 阵,即由 1 行 3 列形成的一张表格,其第一个位值是右方 1×3 阵的唯一的一行与随后的矩阵中第一列各对应元素相乘之后相加的结果;第二个位值的生成规则与第一个位值的类似,只需将随后矩阵中第二列去取代第一列即可……这样,从(3.3.10)就有

$$(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3) = \left(\sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{e}_i a_{i1}, \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{e}_i a_{i2}, \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{e}_i a_{i3}\right) \tag{3.3.11}$$

根据正交右手单位系统的性质,(3.3.10)右端的矩阵

$$A \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \{a_{ij}\} \tag{3.3.12}$$

具有一些特别的性质,我们在下一节作一些略为深入的讨论.

由于纯空间旋转并不影响时间的计量,所以我们讨论时间单元(时间间隔)$\mathrm{d}t$ 的计量时,不妨把物体想象为是沿 x 轴作速度为 v 的运动,这样可以减少思考的对象而取得有效的结论,例如关于原时 $\mathrm{d}\tau$ 的结论.

3.3.2　空间旋转的 SO(3)群

上一节(3.3.12)所指出的矩阵 $A = \{a_{ij}\}$ 具有一定的性质,为了说明

这一问题，我们先定义两个矩阵相乘的规则，设有矩阵 $A = \{a_{ij}\}$ 与 $B = \{b_{ij}\}$ 相乘，其结果矩阵 $C = \{c_{ij}\}$

$$A \cdot B = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{Bmatrix} = C = \begin{Bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{Bmatrix} \tag{3.3.13}$$

这里的乘法规则是

$$c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj} \tag{3.3.14}$$

这个规则与(3.3.11)所定义的相同，其实按照(3.3.11)，我们有

$$(a_{k1}\ a_{k2}\ a_{k3}) \begin{Bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{Bmatrix} = (c_{k1}\ c_{k2}\ c_{k3}) \tag{3.3.15}$$

$$k = 1,2,3$$

将 $k=1,2,3$ 各行都考虑到并且按 k 的顺序逐行补充成一个矩阵就得到(3.3.13)和(3.3.14)所指出的结果.

现在讨论(3.3.10)所指出的变换矩阵 $A = \{a_{ij}\}$，由于正交单位矢量右手坐标架的性质，我们可确定出

$$\sum_{k=1}^{3} a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij} \tag{3.3.16}$$

可参见本章第 1 题及第 2 题. 由于性质(3.3.16)，我们有

$$AA^T = I = \{\delta_{ij}\} \tag{3.3.17}$$

这里 $A^T = \{a_{ij}^T\}$ 与 $A = \{a_{ij}\}$ 的关系是 $a_{ij}^T = a_{ji}$，A^T 称为是 A 的转置矩阵. 另外我们还可以确定出矩阵 A 的行列式(参见本章第 7 题)

$$\det A = 1 \tag{3.3.18}$$

符合条件(3.3.17)和(3.3.18)的矩阵 A 称为 SO(3)矩阵，所有符合条件的 SO(3)矩阵所组成的集合，并且以矩阵乘法建立起关系 $A \cdot B = C$，这个集合称为 SO(3)群. 如果有某些元素集合 R 它们在 SO(3)群元 A 作用下仍旧在集合 R 中，则称 R 中所有元素具有 SO(3)对称性，或旋转对称性. 例如 R

是指半径为 1 的单位球面，则该球面上各点具有旋转(或 SO(3))对称性. 如果集合中某些元素的性质在 SO(3)群元作用下不变，则该性质称为是 SO(3)不变的. 例如上述单位长度半径的球面上任意一点的离球心的距离是 SO(3)不变的.

3.3.3　时空“旋转”的 SO(3,1)群(洛伦兹群)

时空“旋转”见(3.2.15)，令 $x_0 = ct$，$x_1 = x$，及补上保持不变的 x_2，x_3，我们有

$$x'_0 = \frac{x_0 - \beta x_1}{\sqrt{1-\beta^2}},\ x'_1 = \frac{x_1 - \beta x_0}{\sqrt{1-\beta^2}},\ x'_2 = x_2,\ x'_3 = x_3 \quad (3.3.19)$$

将这组变换写成矩阵与列矢量相乘形式：

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{1-\beta^2} & -\beta/\sqrt{1-\beta^2} & 0 & 0 \\ -\beta/\sqrt{1-\beta^2} & 1/\sqrt{1-\beta^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (3.3.20)$$

这里右端的矩阵与列矢量相乘规则前面实际上已经指出，是矩阵中第 k 行($k = 0,1,2,3$)中各个位值与列矩阵对应位值相乘之后再总加的结果，而其中的矩阵是如下 4 × 4 (4 行 4 列)矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (3.3.21)$$

的一个具体形式，由于不变形式(3.3.1)，我们得出

$$\sum_{\sigma,\tau=0}^{3} \eta_{\sigma\tau} a_{\sigma\alpha} a_{\tau\beta} = \eta_{\alpha\beta},\ \alpha,\beta = 0,\cdots,3 \quad (3.3.22)$$

这里由 $\eta_{\sigma\tau}$构成的矩阵 $\eta = \{\eta_{\sigma\tau}\} = \mathrm{diag}\{-1, 1, 1, 1\}$，这里 diag{−1，1，

$1,1\} \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 是个对角矩阵，非对角元的位值 $\eta_{\sigma\tau}, \sigma \neq \tau$，为零，对角元上的位值依次写在 diag 之后的花括弧{}之中，这个数学符号来自于英语单词 diagonal(对角的)的前四个字母，(3.3.22)还可记为

$$-a_{0i}a_{0j} + \sum_{k=1}^{3} a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij},\ i,j = 1,2,3;$$

$$-a_{00}a_{0j} + \sum_{k=1}^{3} a_{k0}a_{kj} = 0, j = 1,2,3;$$

$$a_{00}^2 + \sum_{k=0}^{3} a_{k0}^2 = 1 \tag{3.3.23}$$

这里的第一式与(3.3.16)关系密切.满足(3.3.23)条件的 4×4 矩阵(3.3.21)称为洛伦兹(H. Lorentz 1853 - 1928)矩阵，全部洛伦兹矩阵按照矩阵的乘法生成洛伦兹群，洛伦兹矩阵 A 由条件(3.3.22)(与条件(3.3.23)等价)可以写出关系

$$A^T\eta A = \eta \sim \eta A^T \eta A = I \tag{3.3.24}$$

这里 $I = \{\delta_{ij}\} = \mathrm{diag}(1,1,1,1)$ 是 4×4 单位矩阵，因此对于洛伦兹矩阵 A 有 $A^{-1} = \eta A^T \eta$.如果(3.3.21)中的 A 中的位值 $a_{01} = a_{02} = a_{03} = 0$，由于洛伦兹矩阵的条件，自然有 $a_{10} = a_{20} = a_{30} = 0$，而 $a_{00} = 1$，另一选项 $a_{00} = -1$ 根据时间不可以倒向的条件，舍去不用，这时 A 反映的时空变换是

$$x'_0 = x_0, \qquad \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{3.3.25}$$

这正是空间坐标变换，矩阵 $\{a_{ij}\}$ 是 SO(3)群中的元素，从这里可以看到，3×3 矩阵 $\{a_{ij}\}$ 以如下的方式嵌入 4×4 矩阵之中：

$$\{a_{\alpha\beta}\} = \mathrm{diag}\{1,\{a_{ij}\}\} \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{3.3.26}$$

这里 4×4 矩阵的构造是在对角线位置上划分为两块，在(0,0)位上只是一个数字 1，而遮盖住(1，1)，(2，2)，(3，3)位置的是 3×3 矩阵，其他各处都为 0，这种形式的矩阵称为分块对角矩阵记作 diag{1，$\{a_{ij}\}$}，从这里可以看到 3×3 矩阵 $\{a_{ij}\}$ 可以按照(3.3.26)的构造方式而成为 4×4 矩阵 $\{a_{\alpha\beta}\}$，后者是洛伦兹矩阵，因此按照(3.3.26)方式，我们说空间旋转也是一种洛伦兹变换；为了区别，惯性系之间的事件参数转换关系称为时空的洛伦兹变换，而上面单纯旋转而生成的洛伦兹矩阵称为纯空间的洛伦兹变换，在牛顿力学条件下，只有在空间变换群 SO(3)作用下的对称性，即所研究的对象在 SO(3)群元作用下仍旧变成本集合的一个对象另外时间 t 是与空间诸量无关的另一组独立对象，在适当选择各个惯性系的原点的时间起始值，有下列的时间变换：

$$t \to t' = t \tag{3.3.27}$$

这种保持原状的变换称为恒同变换，以 1 记之. 在牛顿力学中所要研究的是 1⊗SO(3)的对称性问题，这里⊗表示两个群的直乘，其含义在目下就是由⊗联系起来的各个因子，分别独立地作用到有关对象中去. 1⊗SO(3)可以看作是洛伦兹群 SO(3，1)的子群，因此在研究对称性中前者所涉及的对象范围要窄一些. 当我们涉及时空的洛伦兹变换时，扩大了所涉及的对象，得到了更广泛的对称性，这个对称性称为 SO(3，1)(即洛伦兹群)对称性，注意它的确立是因为由迈克尔逊-莫雷实验而发现了新的物理事实. 随着所发现的事实的积累，当时已有的对称性会进一步深化.

3.4　洛伦兹变换下的对称性的探讨

通过上一节的讨论，我们逐渐明确了物理中对称性所要考虑的对象，它与一般意义下的对称性有什么联系，它自身有什么特点. 现在以 SO(3，1)所涉及的对象集合为例，这时所讨论的是事件，对象集合所涉及

的事件是可以由 SO(3，1)群元作用在某一个事件而生成的，同时由群元对这个事件的作用仍然生成在集合内的元素(事件)，这个特点具有作为对称集合的特征，我们只需要注意到下述描述即够：对称性集合是某些对象的集合，这些对象之间具有某些关系，这些关系就称为对称性.这是关于对称性的描述，在用到本处有了新的特点.我们讨论的是某些群管束下的对称性集合，因此关于这些对象的共同性质，最合适的候选者是群管束下的不变量，但群管束下按照固定规律变换的量也可以解释为具有共同性质的候选者，它没有不变量那么直观，但把具有固定规律变换的协变量视作是共同性质似乎也言之成理，这就是物理对称对象的共同性质.下面我们讨论在 SO(3，1)管束下的对称集合的共同性质，不变量原时 $d\tau$ 已经讨论过，我们要讨论的按 SO(3，1)群矢量变换的共同性质，特别是构成 SO(3，1)矢量的动量和能量的性质.

3.4.1 动量与力的变换规律

一个事件的四个分量(ct，x，y，z)或者简记为(t，x，y，z)，称为四矢量，即是有四个分量的矢量，这个矢量的变换特点是对于后三个分量(空间分量)，当空间的坐标架按照一定方式旋转时，则后三个分量与普通空间矢量一样变换它的分量，第零分量(时间分量)保持不变.而在空-时 2 平面的坐标架旋转是指在原来的 s 系指定新惯性 s' 的移动方向，这个方向通过空间旋转总可以认为它就是 x 轴，这时四矢量具有形式(ct，x，0，0)，它在坐标架转换(即从 s 系转换到 s' 系)时，其坐标应当由洛伦兹变换(3.2.13)确定.按照这种规定，事件坐标(ct，x，y，z)构成四-矢量；而($c\mathrm{d}t$，$\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y$，$\mathrm{d}z$)也是四矢量，将这个四矢量除以原时 $\mathrm{d}\tau$，所得的结果

$$\left(c\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau},\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau},\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau},\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau}\right) \tag{3.4.1}$$

也是四矢量，因为 $\mathrm{d}\tau$ 是不变量，其性质与普通数字一样，设质点的静止质量为 m_0，研究四矢量

$$\left(m_0 c\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau},\ m_0\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau},\ m_0\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau},\ m_0\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau}\right) \tag{3.4.2}$$

后面三个分量可合并写成　$m_0 \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\tau} = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = m\boldsymbol{v}$

这里

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{3.4.3}$$

称为质点的动质量，它具有质量的量纲，其具体意义见后面所述，现在只知道在低速时 $m \simeq m_0$ 即是质点的古典质量，因此 $m\boldsymbol{v}$ 在低速时即是古典动量，记

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} \tag{3.4.4}$$

称 $\boldsymbol{p}$ 为动量. 在相对论中保留动量定律，有

$$\boldsymbol{f} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} \tag{3.4.5}$$

这里 $\boldsymbol{f}$ 即代表作用在质点上的力，现在如果 s' 系沿 s 系的 x 轴正向以速度 u 运动，则 $\boldsymbol{f}$ 的 x 轴分量 f_1 的变换规律为

$$f_1' = \frac{\mathrm{d}p_1'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}p_1 - \dfrac{u}{c}\mathrm{d}p_0}{\mathrm{d}t - \dfrac{u}{c^2}\mathrm{d}x} = \frac{f_1 - \dfrac{u}{c}\dfrac{\mathrm{d}p_0}{\mathrm{d}t}}{1 - \dfrac{uv_1}{c^2}} \tag{3.4.6}$$

这里 v_1 是质点在 s 系中的运动速度 $\boldsymbol{v}$ 的 x 分量，$p_0 = \dfrac{m_0 c}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

3.4.2　能量作为四矢量的第零分量

对于动量四-矢量(p_0，$\boldsymbol{p}$)有关系

$$p_0^2 - \boldsymbol{p}^2 = m_0^2 c^2 \left[\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} \right)^2 - \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{c\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{c\mathrm{d}t} \right] = m_0^2 c^2 \tag{3.4.7}$$

由(3.4.7)可以求出

$$\frac{\mathrm{d}p_0}{\mathrm{d}t} = \frac{\boldsymbol{p}}{p_0} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{f}}{c} \rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(cp_0) = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{f}$$

由于 $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{f}$ 是外界输入的功率，因此

$$cp_0 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = mc^2 \tag{3.4.8}$$

应当是系统的能量，这个由爱因斯坦得到的结果是迄今为止最重要的物理结果，如果 $\beta = \frac{v}{c} \ll 1$，则系统的能量可按 v^2 展开

$$E = mc^2 = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \cdots \tag{3.4.9}$$

这里右方第一项 $m_0 c^2$ 为系统的静能，第二项 $\frac{1}{2}mv^2$ 为系统的动能……

现在探讨这个结果得以现身的外界条件，我们从前面的讨论中看到，一个质点 A 位于空间某处静止不动，这是最平常不过的物理情况，在牛顿力学的语境中，此事件的空间坐标集合构成 SO(3)矢量集合，其中的对称性是① 各矢量之间按某个或某些 SO(3)群元变换；② 该矢量的大小在 SO(3)群元作用下不变，这是严格意义或习惯意义上的对称性. 这里附带提一句，性质①是物理情况下的常见对称性，但从直接观念上接受①尚有个熟悉过程. 在牛顿力学语境下，物体 A 的一个状况因为过分常见而被忽略了，这就是物体 A 状况的一个重要参数是时刻 t 及时间间隔 $\mathrm{d}t$，时间 t 是会变化的，即使 A 静止在某处，附着在上面的时间仍然会变化，但是在经典物理观念下这些变化是简单的，选定了共同的时间原点之后，即使在不同的惯性系下去观察，它仍旧不会改变. 当情况进一步复杂化时，例如我们把空间坐标架的转动也考虑进来，但这仍不影响时间的不变性质，而空间转动在 SO(3)管束之下，它是另一种类型的对称性，这两者互不相扰，如果把两者人为地放在一起讨论，那也只是它们在 $1 \otimes$SO(3)的管束之下仍然是各管各的，当然不会有新的性质出现. 但到 19～20 世纪之交，情况有了不同，人们认识到 $1 \otimes$SO(3)只是在某些受限制范围内的对称性；考虑到全部惯性系转换及空间转动，应当是 SO(3，1)对称性，我们把 $1 \otimes$SO(3)对称性，即伽利略变换(3.2.10)，应用到惯性系之间的转换问题上是错误的，尽管在低速 $v \ll c$ 范围内还有相当大的精度，我们的结论是从时-空间隔来说，

$1\otimes SO(3)$可看作是 $SO(3,1)$在低速范围内的近似对称性.从美学角度讲,$SO(3,1)$是比 $1\otimes SO(3)$优越得多的对称性,而不变时间长度 dt 也转变为不变的原时 $d\tau = \left[dt^2 - \frac{1}{c^2}|dr|^2\right]^{1/2}$,由于看问题角度的变化,使得我们发现了重大的物理规律,这也进一步见证了对称性思考在物理中的重大作用.

3.4.3　纵向质量和横向质量

从(3.4.9)我们得到 $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$,$m_0$ 是物体的静止质量,m 称为是物体的动质量 $\beta = \frac{v}{c}$,v 是物体的速度,动质量 m 与物体的能量 E 有关系 $m = E/c^2$.

如果我们形式上应用牛顿第二运动定律 $\boldsymbol{f} = \tilde{m}\boldsymbol{a}$,如果力 $\boldsymbol{f}$ 及物体的加速度 $\boldsymbol{a}$ 可以直接测定,则它们之间的比例系数 $\tilde{m}$ 可以根据测得的数据确定出来,$\tilde{m}$ 具有质量的量纲.对于同一个物体,在不同情况下 $\tilde{m}$ 值有所不同,现在就来讨论这一问题.

我们所选取的物体是电子,因为在 19～20 世纪之交,J.J.汤姆逊已经发现了电子,并且我们只能对于电子那样小的物体,才有可能把它加速到有光速数量级的速度,$v\sim c$.现在设电子沿 z 轴作直线运动,速度 $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e}_z$.而电子的动量

$$\boldsymbol{p} = \frac{m_0\boldsymbol{v}}{\left[1-\frac{v^2}{c^2}\right]^{1/2}} \tag{3.4.10}$$

记 $\boldsymbol{e}_z$ 方向上的加速度 $\boldsymbol{a}_{11}$,

$$m_{11}\boldsymbol{a}_{11} = \boldsymbol{f} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} \tag{3.4.11}$$

电子所受的外力原则上可由外加电场的大小确定出来,

$$\boldsymbol{f} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = m_0\left[\frac{\boldsymbol{a}_{11}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \boldsymbol{v}\cdot\frac{v/c^2\cdot\boldsymbol{a}_{11}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\right]$$

$$= m_0 a_{11} \left[\frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} + \frac{v^2/c^2}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\right] \equiv m_{11} a_{11} \quad (3.4.12)$$

我们得到纵向质量

$$\tilde{m} \equiv m_{11} = \frac{m_0}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} = \frac{m}{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad (3.4.13)$$

这里 m_0 是电子的静质量，$m = \dfrac{m_0}{\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}$ 是电子的动质量.

对于横向受力状况，参见图 3.7，在垂直于纸面向上的均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 的作用下，电子以均匀速率 v 在纸面上作匀速圆周运动垂直方向受力 $f = m_\perp a_\perp$，这时 $\tilde{m} \equiv m_\perp$，而

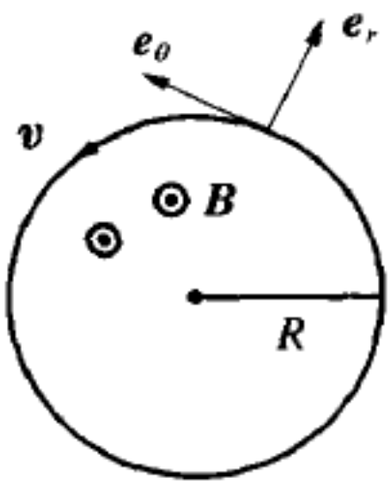


图 3.7

$$f = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{m_0 v}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} e_\theta\right] = \frac{m_0 v}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \frac{\mathrm{d}e_\theta}{\mathrm{d}\theta} \cdot \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

$$= \frac{m_0 v^2}{R\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}(-e_r) = \frac{m_0}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} a_\perp$$

$$= m_\perp a_\perp \quad (3.4.14)$$

这里 e_θ 是图 3.7 中的逆时针运动轨道上各点沿运动方向上的切向单位矢量，e_r 是在指定点上沿圆心向该点指向上的单位矢量，有关系 $\dfrac{\mathrm{d}e_r}{\mathrm{d}\theta} = e_\theta$，$\dfrac{\mathrm{d}e_\theta}{\mathrm{d}\theta} = -e_r$，$\theta$ 是这个圆形运动轨道上所转过的角度.(3.4.14)右端 $a_\perp = -e_r \dfrac{v^2}{R}$ 是电子的向心加速度，而纵向质量

$$\tilde{m} \equiv m_\perp = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m \quad (3.4.15)$$

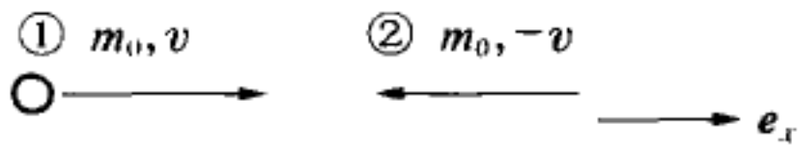
当 v 与 c 同数量级，例如 $v = \dfrac{\sqrt{3}}{2}c \simeq 0.866c$，即 $1 - \dfrac{v^2}{c^2} = \dfrac{1}{4}$，这时 $m_\perp = 2m_0 \quad m_{11} = 8m$. 即纵向质量 m_{11} 与横向质量 $m_\perp$ 明显地有区别，这在 20 世

纪初在汤姆逊(J.J. Thomson，1856—1940)发现电子之后不久即得到证实.

3.4.4　碰撞问题

碰撞前后的情况要满足动量守恒和能量守恒，但在相对论中有动质量和静质量之分，考虑问题时必须作慎重处理.

现举一个简单的例子，参见图 3.8，有两个静止质量为 m_0 的粒子，在 s 系的 X 轴上，以速度 v 对撞，参见图 3.8(a). 在碰撞后两个粒子结合在一起成为一个复合粒子，问这个复合粒子的静止质量 M = ? 按：参见图 3.8(b)，似乎粒子静止下来，每个粒子的静止质量为 m_0，因此系统的质量为 $M_0 = 2m_0$，但这个分析是不正确的，因为作上述考虑的是非弹性碰撞，碰撞的结果是动量守恒，实际上撞前总动量 $p = \dfrac{m_0 v}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} + \dfrac{m_0(-v)}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = 0$；撞后左方的粒子①损失了它的速度 v，而右方的粒子②损失了它的速度 $-v$，所以粒子既然停了下来，每个粒子的静止质量又是 m_0，似乎有上述 $M_0 = 2m_0$ 的结论，但是这样做的结论概念上颇有些问题，其症结在于没有仔细区别牛顿力学与相对论之间的差异. 我们以图 3.8 中所示的左方粒子①为例，正确的并且不引发误解的说法，是粒子①在完全非弹性正碰撞中损失了它的全部动量 $p_①$(在保持所讨论的两粒子系统总动量守恒的前提下)，而粒子②在碰撞前的全部动量 $p_② = -p_①$，动量在原则上是矢量，但在仅限 1 维的情况下可用代数量代替. 本处，参见图 3.8，粒子①的动量 $\boldsymbol{p}_①$ 与 $\boldsymbol{e}_x$ 指向一致，



(a) 碰撞前

(b) 碰撞后

图 3.8

$$\boldsymbol{p}_① = p_① \boldsymbol{e}_x,\ p_① > 0 \tag{3.4.16}$$

但

$$\boldsymbol{p}_② = p_② \boldsymbol{e}_x = -\boldsymbol{p}_① = -p_① \boldsymbol{e}_x,$$

$$p_② = -p_① < 0 \tag{3.4.17}$$

从这里看到，可根据 $p_①$，$p_②$ 的代数性质来确定相应矢量的取向. 现在碰撞时，两个粒子的动量都消失了，那么还有什么东西剩下？从牛顿力学考虑，那

当是剩下静止粒子，每个质量都是 m_0；但是从相对论的观念看来，动量 $p_①$ 是动质量 m 与速度 v 相乘，在非弹性碰撞中，速度消失了，停下来的是动质量，这与非弹性碰撞的概念一致，对于非弹性碰撞，无非动能转化为其他形式的能量，但总能量并不改变，相当这里的动质量不改变. 电子-正电子对撞的湮没过程中，在尚未转化成光子对的中间体上，可以想象成是此种情况，这个中间体是静止的，其质量 M_0 是电子和正电子的动质量之和，

$$M_0 = \frac{2m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{3.4.18}$$

这里 m_0 是物体的静止质量，本处电子和正电子可以当作有相同 m_0 的物体来处理. 为了证实此种考虑的正确性，计算 s' 系（相对于原来的质心系 s 以速度 u 沿 x 轴运动）中碰撞前后的动量，并且证明守恒定律成立.

碰撞后在 s' 系中的动量为

$$\frac{M_0(-u)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = -\frac{2m_0 u}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\cdot\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \tag{3.4.19}$$

这里 $-u$ 是复合粒子在 s' 系中的速度，其动质量是 $\frac{M_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$，而在 s' 系中碰撞前动量需要求出各个粒子的速度，以粒子①为例，这时在 s' 中的速度为

$$v_1 = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}x-u\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t-\frac{u}{c^2}\mathrm{d}x} = \frac{v-u}{1-\frac{uv}{c^2}} \tag{3.4.20}$$

同理，可求出粒子②在 s' 系中的速度

$$v_2 = \frac{-v-u}{1+\frac{uv}{c^2}} \tag{3.4.21}$$

而碰撞前的动量为

$$\frac{m_0 v_1}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}}+\frac{m_0 v_2}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}} = -\frac{2m_0 u}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\cdot\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \tag{3.4.22}$$

右方正是(3.4.19)的撞后的动量，这表明系统动量守恒，在(3.4.22)的计算过程中利用了速度相加公式(3.4.20)和(3.4.21).

3.5　平面波中各参量的变换规律

3.5.1　角频率 ω 与圆波矢 k

沿 x 方向传播的平面波一般可以记成

$$A\cos(kx - \omega t + \phi_0) \tag{3.5.1}$$

这里 ϕ_0 称为初位相，一般可适当地选择 X 轴原点或时间起始点而使 $\phi_0 = 0$，剩下的部分记以

$$\phi = kx - \omega t \tag{3.5.2}$$

称为相位，在(2.4.2)中初相为 $\phi_0 = 0$；另外 $\omega = 2\pi\nu$ 是平面波的角频率，ν 是频率，$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}$ 是周期；$k = 2\pi q$ 是圆波数，q 是波数，$\lambda = \frac{1}{q} = \frac{2\pi}{k}$ 是波长. 而 $\frac{\omega}{k} = c$ 是波的传播速度，对于光波来说，c 是光速. 在相对论时空中，光速具有特殊的重要性，是物理学的基石，选定

$$c = 299\,792\,458 \text{ 米 / 秒} \tag{3.5.3}$$

是个精确常数，其余物理量，要参照 c 确定，如根据铯原子钟，确定了时间单位："秒"之后，长度单位："米"定义为光在$(299\,792\,458)^{-1}$秒内走过的距离.

3.5.2　什么是同时性事件

设平面波在 s 系中传播，设事件 $L_1(x_1, t_1)$；$L_2 = (x_2, t_2)$ 相应的相位分别为

$$\phi_1 = kx_1 - \omega t_1, \phi_2 = kx_2 - \omega t_2 \tag{3.5.4}$$

如果有条件 $\phi_2 - \phi_1 = 2\pi$, $t_2 - t_1 = 0$, 则有

$$x_2 - x_1 = \lambda \tag{3.5.5}$$

这就是说,如果在地点 x_1 及 x_2 同时($t_2 = t_1$)测量相位,如测得的相位 ϕ_1, ϕ_2 有关系 $\phi_2 - \phi_1 = 2\pi$, 则 $x_2 - x_1$ 就是波长.

现在在 s'系中观察这两个事件, $L_1' = (x_1', t_1')$, $L_2' = (x_2', t_2')$, 它是 s 系中事件 L_1 及 L_2 在 s' 系中的反映,自然有 $x_1' = \dfrac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ 等等, v 是 s'系在 s 系中沿 x 轴移动的速度. 当然是该事件发生时所观察到的力学量子相位在 s'系中也不会改变,即在 L_1'观察到的相位 $\phi'_1 = \phi_1$,同理 $\phi'_2 = \phi_2$. 现在计算 s'中该平面波的波长,由于目前两个事件的时间差 $t_2' - t_1' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\left[t_2 - t_1 - \dfrac{(x_2 - x_1)v}{c^2}\right] = -\dfrac{v\lambda}{c\sqrt{c^2 - v^2}} < 0$,因此在 s'系中的事件 L_1'及 L_2'不是同时性事件,所以 $x'_2 - x'_1 \neq \lambda'$, λ'是在 s'系中测出的波长.

3.5.3 在不同惯性系下角频率 ω 的变换规律

继续上一段的讨论,在事件 L_2'中,在 t_2'时刻在 x_2'点上测到了相位 $\phi_2' = \phi_1' + 2\pi$, 由于平面波是按光速在 x 轴(即 x'轴)正向传播的,因此事件 $L_3' = (x_3', t_3') \equiv (x_2' + c\Delta t', t_2' + \Delta t')$ 上的相位 $\phi_3' = \phi_2'$, 若选定 $t_3' = t_1'$ 则可以按定义求出波长

$$\lambda' = x_3' - x_1' \tag{3.5.6}$$

由于 $\Delta t' = t_1' - t_2' = \dfrac{v\lambda}{c\sqrt{c^2 - v^2}}$,从(3.5.6)得到

$$\lambda' = c\Delta t + x_2' - x_1' = \frac{v\lambda}{\sqrt{c^2 - v^2}} + \frac{c\lambda}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

$$= \lambda\sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}, \quad \beta \equiv \frac{v}{c} \tag{3.5.7}$$

因此有频率

$$\nu' = \nu\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \tag{3.5.8}$$

或角频率

$$\omega' = \omega\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \tag{3.5.9}$$

我们看到 ν 与 ω 有同样的变换关系，并且有 $\nu \propto \omega$. 一般说来，如果力学量 A 也有(3.5.8)和(3.5.9)的变换关系：

$$A' = A\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \tag{3.5.10}$$

则有

$$A \propto \nu \tag{3.5.11}$$

3.6　光子的能量

3.6.1　光子的速度

光子的静止质量 $m_0 = 0$，所以它的速度必须为光速 c，以保证有不为零的动质量 m，根据(3.4.9)光子的能量

$$E = mc^2 \tag{3.6.1}$$

而光子的动量 p 有关系

$$p = mc \tag{3.6.2}$$

对于沿 x 轴传播的光子而言，有

$$p_x = p,\ p_y = p_z = 0 \tag{3.6.3}$$

而在 s' 系中，相应的能量及动量是

$$E' = \frac{E - vp}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad p' = \frac{p - vE/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{3.6.4}$$

其余 $p'_y = p'_z = 0$，而 $\beta = v/c$，v 是 s' 系沿 s 系移动的速度(沿 x 轴正向).

3.6.2 $E = h\nu$

沿 x 轴运动的光子，其能量和动量的变换关系见(3.6.4)，由(3.6.1)及(3.6.2)，得到关系

$$E = cp \tag{3.6.5}$$

将(3.6.5)代入(3.6.4)有

$$E' = E\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}, \; p' = p\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \tag{3.6.6}$$

从这里看有 $E \propto p$，因为它们有相同的变换规律.实际上 $E = cp$，即它们确实成正比关系，将(3.6.6)与(3.5.8)相比较，E 和 ν 有同样的变换关系，按照结论(3.5.11)有

$$E \propto \nu \tag{3.6.7}$$

或者

$$E = h\nu \tag{3.6.8}$$

这里常数

$$h = 6.626\,075\,5(40) \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot S} \tag{3.6.9}$$

称为普朗克(M. Planck，1858—1947)常数.

3.6.3 光电效应

公式(3.6.8)称为普朗克公式，是普朗克首先提出的，随后爱因斯坦作了进一步讨论并赋予了它鲜明的物理意义，他认为 $h\nu$ 是一个光子的能量，频率越大或波长越短的光子，其能量就越大，他把这一研究成果用到光电效

应中去得到了前所未有的成功，从而催生了量子力学，量子力学的主要奠基人如玻尔(N. Bohr)等并不讳言他们是因为受爱因斯坦的影响而走上发展量子力学道路的，承认爱因斯坦是他们科研道路上的领路者.但爱因斯坦因量子力学的非决定性因果关系而拒绝承认它，并且与玻尔等发生了长期的争论，这对完善量子力学的认识系统很有好处.从现在看来，从量子力学原理出发引导出了自旋 1/2 粒子的方程和规范场的概念，量子力学认识外界的能力应当予以肯定.

频率为 ν 的光波中，包含着能量为 $h\nu$ 的光子，光波的能量是由能量为 $h\nu$ 的光子一份一份地组成的，这就是量子化的观念.把这个观念用到光电效应上，就可以知道光与金属表面作用的结果是击出表层中的电子(图 3.9(a))，当电子吸收了光子之后增加了能量，这样它就有可能克服表面所形成位垒而逃逸到金属之外，所吸收光子的能量除了一部分消耗于克服位垒，即所谓的脱出功 E，参见图 3.9(b)，剩下的部分是电子的动能 $\frac{1}{2}mv^2$，有

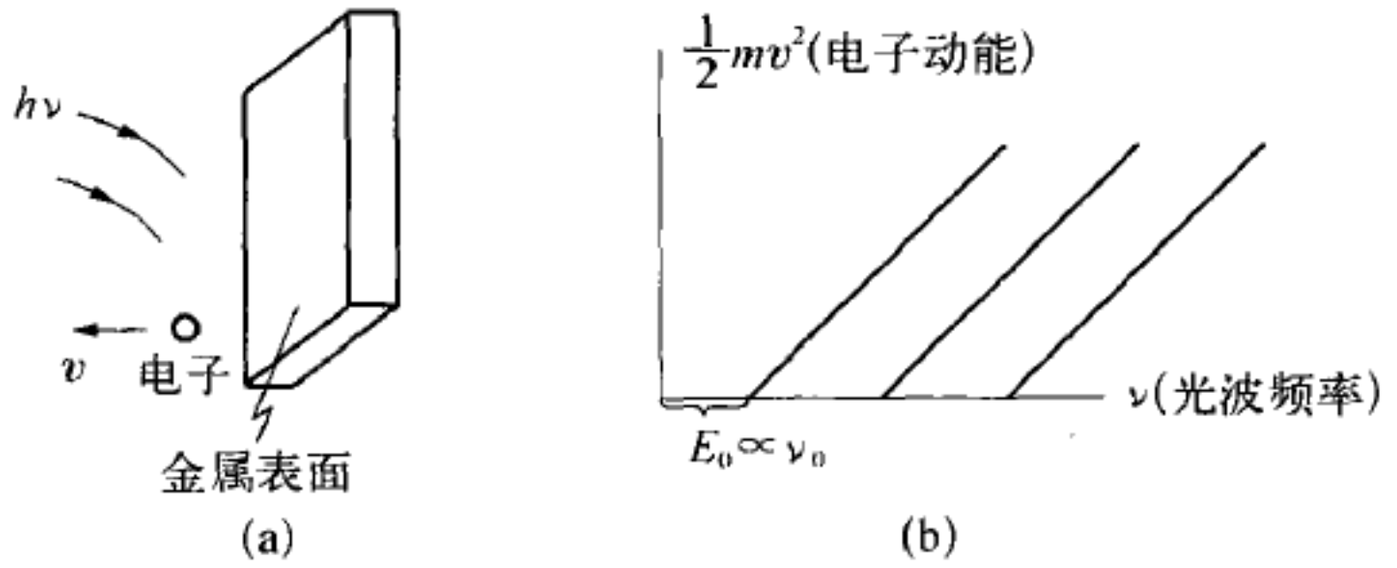


图 3.9　光电效应

$$h\nu = E_0 + \frac{1}{2}mv^2 \tag{3.6.10}$$

这里 E_0 是电子的脱出功与不同的金属表面有关，而 $\frac{1}{2}mv^2$ 与 ν 成线性关系，其斜率即是 h，普朗克常数，与金属表面性质无关.因此如果以入射光的频率作为横标，脱出的电子动能 $\frac{1}{2}mv^2$(由于电子的速度 v 较小，动能可采用非相对论公式)为纵标，实验结果是一条直线，此直线与横轴的交点 ν_0 代表脱出功 $E_0 = h\nu_0$.金属不同直线不同，但它们互相平行(图3.8(b))，其斜率就是 h，光电效应的实验结果与上述理论完全一致，它提供了确定 h 的

一个独立的方法.

习　　题

1. 已知两组数列(x_1, x_2, x_3)及(x_1', x_2', x_3')描述三维空间的同一个点，满足关系 $x_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j$, $i = 1,2,3$. 证明：$\sum_{i=1}^{3} a_{ij} \cdot a_{ik} = \delta_{jk}$, $j,k = 1,2,3$, $a_{13} = a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}$, $a_{23} = a_{31}a_{12} - a_{11}a_{32}$, $a_{33} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$，或者 $a_{i3} = \sum_{j,k=1}^{3} a_{j1}a_{k2}\epsilon_{ijk}$, $i = 1,2,3$，这里 ϵ_{ijk} 称为三阶全反称张量，它具有如下性质：① $\epsilon_{ijk} = 0$ 如果下标中有两个指标是相同的；② 交换两个下标则其值变号，例如 $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik}$；③ $\epsilon_{123} = 1$.

解：本处记右手正交标架矢量为 $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ 及$(\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3')$，我们有关系

$$x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 = x_1'\boldsymbol{e}_1' + x_2'\boldsymbol{e}_2' + x_3'\boldsymbol{e}_3' \tag{1}$$

代进 x_i'与 x_j 等的关系，我们有

$$\sum_{i=1}^{3} x_i\boldsymbol{e}_i = \sum_{j=1}^{3} x_j'\boldsymbol{e}_j' = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} a_{jk}x_k\boldsymbol{e}_j' \rightarrow \boldsymbol{e}_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ji}\boldsymbol{e}_j' \tag{2}$$

由

$$\delta_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \sum_{k=1}^{3} a_{ki}\boldsymbol{e}_k' \cdot \sum_{h=1}^{3} a_{hj}\boldsymbol{e}_h'$$

$$= \sum_{k=1}^{3}\sum_{h=1}^{3} a_{ki}a_{hj}\delta_{kh} = \sum_{k=1}^{3} a_{ki}a_{kj}, \quad i,j = 1,2,3 \tag{3}$$

第一部分证毕；

第二部分，由于　　$\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2$

$$\sum_{j=1}^{3} a_{j3}\boldsymbol{e}_j' = \left(\sum_{i=1}^{3} a_{i1}\boldsymbol{e}_i'\right) \times \left(\sum_{k=1}^{3} a_{k2}\boldsymbol{e}_k'\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{i1}a_{k2}\epsilon_{ikj}\boldsymbol{e}_j' \tag{4}$$

对比上式中 $\boldsymbol{e}_j'$各项前的系数，我们有

$$a_{j3} = \sum_{ik} a_{i1}a_{k2}\epsilon_{ikj} = \sum_{ik} a_{i1}a_{k2}\epsilon_{jik} \tag{5}$$

这里我们利用了性质 $\epsilon_{ikj} = \epsilon_{jik}$，证毕.

2. 参见第 1 题，证明 $\sum_{i=1}^{3} a_{ji}a_{ki} = \delta_{jk}$, $j,k = 1,2,3$.

解：参见第 1 题，我们有 $e_i = \sum_{j=1}^{3} e'_j a_{ji} \rightarrow a_{ji} = e'_j \cdot e_i$ 而

$$\sum_{i=1}^{3} a_{ji} a_{ki} = \sum_{i=1}^{3} (e'_j \cdot e_i)(e'_k \cdot e_i) = \sum_{i=1}^{3} e'_k \cdot [e_i (e'_j \cdot e_i)]$$
$$= e'_k \cdot e'_j = \delta_{jk} \text{ 证毕.}$$

3. 在第 1 题和第 2 题中，两个坐标架之间的变换系数 $\{a_{ij}\}$ 可构成如下的一张表：

$$A \equiv \{a_{ij}\} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{1}$$

这种表现形式称为矩阵. a_{ij} 称为是矩阵的位值(entry)，矩阵 A 和 $B = \{b_{ij}\}$ 相乘是指 $A \cdot B = C = \{c_{ij}\}$，这里 $c_{ij} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} b_{kj}$ 如果记矩阵 $C' = \{C'_{ij}\} = BA$，则一般地说 $C' \neq C$，试证明之.

解：以 c_{12} 及 c'_{12} 为例，我们有 $c_{12} = a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} + a_{13} b_{32}$，$c'_{12} = b_{11} a_{12} + b_{12} a_{22} + b_{13} a_{32}$，如果 $a_{11} = b_{12} = 1$，其余 a_{ij} 及 b_{kl} 均为零，则有 $c_{12} = 1$，$c'_{12} = 0$，因此得到一个 $C' \neq C$ 的实例. 证毕.

4. 证明三个矩阵 A、B、C 有关系 $(A \cdot B)C = A(B \cdot C)$.(按：由于这个性质，乘积 ABC 中可以不必在某两个相邻矩阵间加括弧以区分相乘的先后顺序.)

解：记 $D = (A \cdot B) \cdot C$，则 D 的位值

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{3} (AB)_{ik} C_{kj} = \sum_{k=1}^{3} \sum_{h=1}^{3} a_{ih} b_{hk} c_{kj} \tag{1}$$

而记 $D' = A \cdot (BC)$，则 D' 的位值

$$d'_{ij} = \sum_{h=1}^{3} a_{ih} \cdot (BC)_{hj} = \sum_{h=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} a_{ih} b_{hk} c_{kj} \tag{2}$$

比较(1)及(2)，我们有 $d_{ij} = d'_{ij}$，$D = D'$，证毕.

5. $I = \{\delta_{ij}\}$ 称为单位矩阵，对于给定的矩阵 A，如果存在着另一个一矩阵 B，使得 $A \cdot B = I$，则称 A 是有逆矩阵，B 是 A 矩阵的逆矩阵，记作 $B = A^{-1}$，证明 $(A^{-1})^{-1} = A$，并且有 $A^{-1}A = I$.

解：按照定义，$AA^{-1} = I \rightarrow (AA^{-1})(A^{-1})^{-1} = I(A^{-1})^{-1}$

而 $A^{-1}A = A^{-1}AI = A^{-1}AA^{-1}(A^{-1})^{-1} = A^{-1}I(A^{-1})^{-1} = A^{-1}(A^{-1})^{-1} = I$

按照定义　$A^{-1}(A^{-1})^{-1} = I = A^{-1}A \rightarrow (A^{-1})^{-1} = A$. 证毕.

6. 矩阵 $A = (a_{ij})$ 见第 1 题和第 2 题所示，$A^T = (a_{ij}^T)$ 这里 $a_{ij}^T = a_{ji}$，证明 $A^{-1} = A^T$.

解：直接计算验证　$AA^T = I \rightarrow A^T = A^{-1}$ 证毕.

7. 一般的 3×3 矩阵 $A = \{a_{ij}\}$（并无第 1 题或第 2 题所加的限制），矩阵 A 的行列式记作 $\det A$，其定义为

$$\det A = \sum_{i_1, i_2, i_3 = 1}^{3} \varepsilon_{i_1 i_2 i_3} q_{1 i_1} a_{2 i_2} a_{3 i_3}$$

计算证明

$$\det A = a_{11}\det A_{11} - a_{12}\det A_{12} + a_{13}\det A_{13}$$

这里 $A_{1k}(k = 1,2,3)$ 是矩阵 A 去掉 a_{1k} 所在的行和列之后生成的子矩阵（2×2 矩阵）.

解：$a_{11}\det A_{11} - a_{12}\det A_{12} + a_{13}\det A_{13}$

$$= a_{11}\sum_{i_2,\, i_3 = 2}^{3} \varepsilon_{i_2 - 1,\, i_3 - 1} \cdot a_{i_2 2} a_{i_3 3} - a_{12}\sum_{i_1,\, i_3 = 2}^{3} \varepsilon_{i_1 - 1,\, i_3 - 1} a_{i_1 1} a_{i_3 3}$$

$$+ a_{13} \cdot \sum_{i_1,\, i_2 = 1}^{3} \varepsilon_{i_1 - 1,\, i_2 - 1} a_{i_1 1} a_{i_2 2}$$

$$= a_{11}\sum_{i_2,\, i_3 = 1}^{3} \varepsilon_{1 i_2 i_3} a_{i_2 2} a_{i_3 3} - a_{12}\sum_{i_1,\, i_3 = 1}^{3} \varepsilon_{1 i_1 i_3} a_{i_1 1} a_{i_3 3} + a_{13}\sum_{i_1,\, i_2 = 1}^{3} \varepsilon_{1 i_1 i_2} a_{i_1 1} a_{i_2 2}$$

$$= a_{21}\sum_{i_2,\, i_3 = 1}^{3} \varepsilon_{2 i_2,\, i_3} a_{i_2 2} a_{i_3 3} - a_{22}\sum_{i_1,\, i_3 = 1}^{3} \varepsilon_{2 i_1 i_3} a_{i_1 1} a_{i_3 3} + a_{23}\sum_{i_1,\, i_2 = 1}^{3} \varepsilon_{2 i_1 i_2} a_{i_1 1} a_{i_2 2}$$

$$= a_{31}\sum_{i_2,\, i_3 = 1}^{3} \varepsilon_{3 i_2 i_3} a_{i_2 2} a_{i_3 3} - a_{32}\sum_{i_1,\, i_3 = 1}^{3} \varepsilon_{3 i_1 i_3} a_{i_1 1} a_{i_3 3} + a_{33}\sum_{i_1,\, i_2 = 1}^{3} \varepsilon_{3 i_1 i_2} a_{i_1 1} a_{i_2 2}$$

$$= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3}\left[\sum_{i_2,\, i_3 = 2}^{3} \varepsilon_{k i_2 i_3} a_{k1} a_{i_2 2} a_{i_3 3} + \sum_{i_1,\, i_3 = 1}^{3} \varepsilon_{i_1 k i_3} a_{i_1 1} a_{k2} a_{i_3 3} + \sum_{i_1,\, i_2 = 1}^{3} \varepsilon_{i_1 i_2 k} a_{i_1 1} a_{i_2 2} a_{k3}\right]$$

$$= \sum_{i_1, i_2, i_3 = 1}^{3} \varepsilon_{i_1 i_2 i_3} a_{i_1 1} a_{i_2 2} a_{i_3 3} \tag{1}$$

注意等式(1)右方，(i_1, i_2, i_3) 乃是(1,2,3)的一个置换，可改记 $a_{i_1 1} a_{i_2 2} a_{i_3 3}$

$= a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$，这里 j_1, j_2, j_3 由置换条件

$$\begin{pmatrix} i_1, & i_2, & i_3 \\ 1, & 2, & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ j_1, & j_2, & j_3 \end{pmatrix} \tag{2}$$

(1)两端都是置换群群元，表示在同一列中的元素由上一行的换成下一行的操作，如左端 i_1 及 1 在同一列，指将 i_1 换成 1，…；右端 $1, j_1$ 在同一列，指将 1 换成 j，…，对于置换群的元素有关系

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ i_1, & i_2, & i_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1, & i_2, & i_3 \\ 1, & 2, & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ j_1, & j_2, & j_3 \end{pmatrix}^{-1}$$

这里右上角的指数“-1”是指所涉及的群元的逆元素，例如 $\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ j_1, & j_2, & j_3 \end{pmatrix}^{-1}$ 是 $\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ j_1, & j_2, & j_3 \end{pmatrix}$ 的逆元素. 由(2)知道群元 $\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ i_1, & i_2, & i_3 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ j_1, & j_2, & j_3 \end{pmatrix}$ 互逆，因此有 $\varepsilon_{i_1 i_2 i_3} = \varepsilon_{j_1 j_2 j_3}$. (3)

考虑到这些结果，从(1)式可以导出

$$\begin{aligned} a_{11}\det A_{11} - a_{12}\det A_{12} + a_{13}\det A_{13} &= \sum_{i_1, i_2, i_3 = 1}^{3} \varepsilon_{i_1 i_2 i_3} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \\ &= \sum_{j_1, j_2, j_3 = 1}^{3} \varepsilon_{j_1 j_2 j_3} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} = \det A \end{aligned} \tag{4}$$

这里第二个等式中有顺序(i_1, i_2, i_3)和(j_1, j_2, j_3)并存，注意后者由前者唯一确定，参见(2)式. 证毕.

8. 已知 $n \times n$ 矩阵 $A = \{a_{ij}\}$，其行列式定义为 $\det A = \sum_{i_1, \cdots, i_n = 1}^{n} \varepsilon_{i_1 \cdots i_n} a_{1i_1} \cdots a_{ni_n}$，则有

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{1+i} a_{1i} \det A_{1i} \tag{1}$$

这里 A_{1i} 是 A 矩阵去掉位值 a_{1i} 所在的行和列之后生成的 $(n-1) \times (n-1)$ 子矩阵.

解：可模仿第 7 题的证明.

9. 一个无质量质点(光子)沿 z 轴以光速 $u = c$ 运动，当光子位于原点时

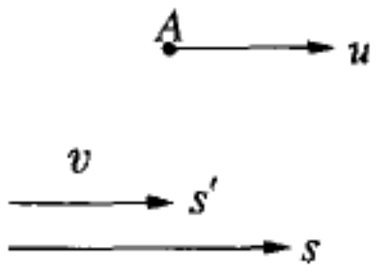
将时间标定为 0，现在运动系 s' 观察这个光子的运动，证明它的运动速度 $u' = c$.

解：
$$z' = \frac{z - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},\quad t' = \frac{t - \frac{vz}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\frac{z'}{t'} = \frac{z - vt}{t - \frac{vz}{c^2}} = \frac{c - v}{1 - \frac{v}{c}} = c，\text{证毕}.$$

10. 已知 s' 系沿地面系 s 的 x 轴做匀速直线运动（见第 10 题图）质点 A 在 s' 系中沿 x' 轴作速度 u 的运动，问

A 相对 s 系的速度 w =？



第 10 题图

解：
$$u = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} \tag{1}$$

而
$$w = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x' + v\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t' + \frac{v}{c^2}\mathrm{d}x'} = \frac{v + u}{1 + \frac{vu}{c^2}} \tag{2}$$

解毕.

11. 已知 $A \cdot B = C$，则 $\det A \cdot \det B = \det C$.

解：
$$\det C = \sum_{i_1 \cdots i_n} \varepsilon_{i_1 \cdots i_n} C_{1i_1} \cdots C_{ni_n} = \sum_{\substack{i_1 \cdots i_n \\ j_1 \cdots j_n}} \varepsilon_{i_1 \cdots i_n} \cdot a_{1j_1} b_{j_1 i_1} \cdots a_{nj_n} b_{j_n i_n}$$

$$= \sum_{j_1 \cdots j_n} a_{1j_1} \cdots a_{nj_n} \cdot \sum_{i_1 \cdots i_n} \varepsilon_{i_1 \cdots i_n} b_{j_1 i_1} \cdots b_{j_n i_n}$$

$$= \sum_{j_1 \cdots j_n} a_{1j_1} \cdots a_{nj_n} \cdot \varepsilon_{j_1 \cdots j_n} \det B = \det A \det B$$

参考资料

1. 改变世界的物理学，倪光炯、王炎森等编著，复旦大学出版社，1998 年.
2. 物理学发展史上的里程碑，主编马文蔚等，江苏科学技术出版社，1992 年.
3. 物理学的进化，爱因斯坦、英费尔德著，上海科学技术出版社，1962 年.
4. 力学（普通物理学教程之一），孙宗扬、汪克林，高等教育出版社，1995 年.
5. 现代物理理论中的群论，孙宗扬，中国科学技术大学，2000 年 5 月（讲义）.

第 4 章　电、磁现象在形式上的类似

——静电和静磁现象的对称性质

在第 3 章，我们讨论了事件中的时间和空间的性质，发现它们之间有着深刻的联系，从而纠正了从牛顿时-空观中得来的局限于低速现象中的近似认识. 在物理学中，有关的对称性认识总是涉及某些群，或者说指定的群刻画了它所涉及的物理现象的特点. 按照这样的理解，上一章的内容可以说是描述事件的时-空参数是以洛伦兹群 SO(3,1)刻画的；而若用 1⊗SO(3)～SO(3)刻画只在局限于考虑低速现象时才在一定精度下正确.

SO(3,1)群中十分重要的洛伦兹变换在 1904 年由洛伦兹写出，在 1905 年爱因斯坦重新发现了洛伦兹变换，因为在那一年，爱因斯坦还只知晓洛伦兹在 1895 年之前的工作！因为洛伦兹变换的发现，才使得在高速现象(两个惯性系互作高速平移)①中有了正确的空-时对应关系. 在 1905 年，爱因斯坦和厄加莱(H. Poincare，1854—1912)独立(几乎同时)地指出洛伦兹变换的群特性，并且得出了速度相加公式. 我们已经知道，对称现象总是与群的性质有关，但是如果物理对象是熟悉的概念，如时间、空间之类，从直接的观察上就能够掌握重要的性质，这时再加上物理工作者不熟悉的群论，会给人以画蛇添足之感，因为加上群论也不会增加太多的物理知识，那么花很多的劲去钻研群论意义何在？有关这个问题现在普遍的共识是：在早期，群论在物理中的作用似乎不那么重要，不懂得群论还可以用其他方式补救；但

---

① 亚拉伯罕·派斯著，爱因斯坦传，商务印书馆，2004 年，第 31 页及第 173 页.

自从盖尔曼(M. Gell - Mann,1928—)研究强子的夸克结构并且在 1964 年发现 Ω^- 粒子以来,人们发现群论开始在物理事实的探索中起到关键的作用,说得更清楚一些,盖尔曼所探讨的粒子分类,如果不以群论为基础,很难找出其中的错综复杂的关系.自 1960 年代之后,群论不再是可有可无的研究物理的辅助工具,而是一种不可或缺的出发点.自此以后,大家对先前的物理学家探讨理论中的群论结构,或者说是以群论为出发点来探讨物理理论,例如像爱因斯坦与厄加莱(物理学家,但他主业应该是数学家)研究洛伦兹变换的群论结构,不再投以疑惑的眼光,而是实在佩服他们的超前意识.

本章及下一章是研究电现象及磁现象,探讨它们之间的对称性,我们知道电磁现象是相对论思考的出发点,自然含有洛伦兹群,但电与磁之间还有不少形式上的以及一些内在的对称性,我们将作一些比较深入的探讨,我们会发现,考虑到对称性,很多问题变得简单清晰起来了.

4.1 电　　荷

关于电、磁现象的探讨一般从电学开始,因为电学现象可作精确的处理,而磁学的讨论可以立足于电学的基础之上.因此,尽管人们对电学和磁学的认识同样是历史悠久,而从应用角度上看,磁学可能更早一些,如指南针、磁罗盘等,我们仍旧把磁学放到电学之后叙述.

4.1.1　摩擦起电

电学精确研究起源于对静电现象的认识.人们很早就知道一些物体经过摩擦以后能够吸引微小物体的现象.在西汉末年的《春秋纬·考異邮》中记载了玳瑁经过摩擦以后吸收轻微物体的现象.东汉王充在《论衡:乱龙篇》中也记载了顿牟(即玳瑁)吸芥现象.在西方,公元前 7 世纪,希腊哲学家泰利斯(Thales)描述了毛织物摩擦过的琥珀能吸引某些轻微物体的现象.但在这时尚未有系统的研究,仅是停留在一星半点的描述上.

到了 1600 年，英国医生吉尔伯特(W. Gilbert，1544—1603)作了进一步的研究，他发现玻璃以及其他许多物体与丝绸摩擦以后也可以吸引轻小的物体.处在这种状态下的物体称为带电体，或者按照字面来讲称它为琥珀化的物体，因为按照希腊文“$\eta\lambda\varepsilon\kappa\tau\rho o\nu$”(英文记为 electron)的意思是琥珀.

吉尔伯特在实验过程中制作了第一只验电器，这是一根围绕其固定中心转动的金属细棒，当摩擦过的琥珀接近验电器时，细棒向琥珀转动靠拢.

到了 18 世纪，1729 年英国的格雷(S. Gray，1670—1736)研究琥珀的电效应对其他物体的传递时，发现有可传递效应的物体(称为导体，例如金属制成的物体)以及不能传递效应的物体(称为绝缘体，例如玻璃、琥珀等).1733 年法国的杜费(C. F. duFay，1698—1739)发现用绝缘体隔开金属也能摩擦起电.他发现电只有两种，丝绸摩擦过的玻璃上有正电(玻璃的)，毛皮摩擦过琥珀上有负电(树脂的).

1733 年杜费在巴黎的一家学报上发表了如下的描述：“存在着两种实质上不同的带电形式，其中一种我称为玻璃型的，另一种称为树脂型的.第一种电在玻璃、宝石、毛发和其他物体上出现，而另一种电表现在琥珀、生漆、丝绸等物体上.”

到了 1757 年，瑞典的维尔克(J. K. Wilke，1732—1796)证明两种物体通过摩擦能带上两种电荷，排出了一个物质系列：玻璃、棉、木材、假漆、金属(用绝缘体隔开的金属也能摩擦起电)、硫磺等，每一种物质被后一种物质摩擦就带上正电，而被前一种物质摩擦就带上负电.

4.1.2　电的本性及测量

在 1746 年，马森布罗克(P. Musschenbroek，1692—1761)发明收集电荷的莱顿瓶，这是电容器的雏形.莱顿瓶的装置原始形式只是盛水的玻璃瓶，中有一条铜线引出，它与带电体或起电机相连.有了莱顿瓶，富兰克林(B. Franklin，1706—1790)在 1747～1755 年做了大量的实验，其中 1752 年 6 月做了著名的“费城实验”，他用风筝把天电引到莱顿瓶中，并进行研究，在同年 10 月他在一封信中写道：

> 由此(按：由风筝引来的天电)得来的电火可使酒精燃烧，并可用来进行别的有关电的实验；而这些实验平常是靠摩擦小球或小管来做

的.这样就证明了这种电的性质和天空的闪电是同样的.

富兰克林首先提出电的单流质说,创造了正电和负电的术语,在任一封闭体系中电流质的总量是不变的,它只能被重新分配而不能被创造"电不因摩擦玻璃管而产生,而只是从摩擦者转移到玻璃管,摩擦者失去的电与玻璃管获得的电严格相同."

物体经过摩擦以后有了可吸引轻小物体的性质就说它带了电,或者说有了电荷,带电的物体称为带电体,使物体带电的方法称为起电.经过摩擦后使物体带电的方法称为摩擦起电.

将摩擦过的玻璃棒或琥珀棒悬挂起来,而用另一根经过摩擦的带电棒靠近,可以观察到带有同种电荷的两棒互相排斥,异种电荷的互相吸引.

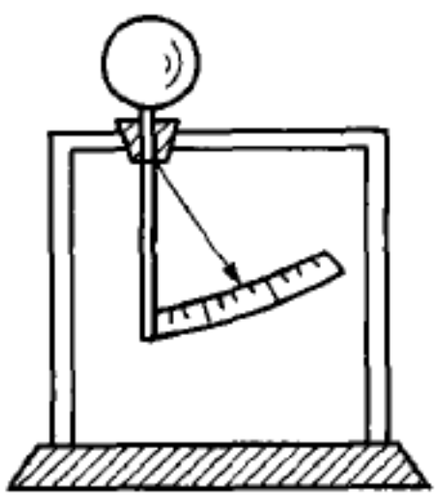


图 4.1 静电计

定量测量电荷电量的简单仪器是静电计,见图4.1,仪器的外壳是玻璃容器,在其上表面有一绝缘塞子,塞子当中有一个圆孔,一金属杆从中穿过,杆上端有一个金属小球,稍下一些按有一支可以偏转的金属指针,它的偏转角度可在下附的弧形标尺上读出.经过标定之后可以根据指针偏转角而得出静电计上的电量.

4.1.3 最小电量单位 e

在 1833 - 1834 年,法拉第(M. Faraday,1791—1867)在进行电解现象研究时发现:要分离中 1 摩尔质量的物质必须提供一定的电量,它等于某个固定电量的整数倍,记这个电量为 Q_0,并且规定一个电量单位库仑,使得

$$Q_0 = 96\,496 \text{ 库仑} \tag{4.1.1}$$

在 1 摩尔质量的物质中有 N_0 个分子,这里 $N_0 = 6.022\,097\,8 \times 10^{23}$/摩尔,称为阿伏伽德罗(A. Avogadro,1776—1856)常数,分离出 1 摩尔物质所需的电量 Q 满足关系:

$$Q = nQ_0,\ n: \text{整数} \tag{4.1.2}$$

根据化学中的电解质理论,每个离子带有一定的电荷 q,它与这个元素的化合价成正比,当化合价 $n = 1$ 时,离子所带的电荷 $q = ne = e$. e 就是最小电

荷单位，它的大小可按定义求出而为

$$e = \frac{Q_0}{N_0} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ 库仑}$$

现代精确测量结果为

$$e = 1.602\,189\,2(46) \times 10^{-19} \text{ 库仑} \tag{4.1.3}$$

亥姆霍茨(H. Helmholtz，1821—1894)从法拉第的实验结果中首次作出了电荷的不连续性(量子性)的结论. 这里需要注意，虽然电量是以 e 为单元一份一份地变化的，但是由于 e 的数量很小，所以在实际考虑电磁学问题时可以认为电量连续变化.

4.2　库仑定律

4.2.1　静止电荷之间的相互作用力

1759 年前后，爱皮努斯(F. Aepinus，1724—1802)发现当电荷之间距离缩短时，两者之间的吸引力或排斥力就会增加，但是他没有继续研究“两个电荷之间力随它们之间距离而变化”的规律.

1766 年，普利斯特利(J. Priestley，1733—1804)从一系列实验中证明，当中空的金属容器带电时，除了靠近开口的地方而外，金属容器的内表面没有任何电荷，在内部也没有任何电力. 当时，已经知道在均匀球壳内部任何质点都不受万有引力作用，参见 1.2.4，这是万有引力大小随距离平方成反比的反平方规律的推论. 因此，普利斯特利提出了一个猜测：“我们可否认为电的吸引力遵从与万有引力相同的规律，即反平方类似的规律呢?”但他没有作进一步的研究. 1769 年，罗宾森(J. Robison，1739—1805)用实验研究了两个电荷之间的作用力与距离 r 之间的关系，他得到同种电荷的斥力 $\sim r^{-2.06}$，异种电荷的吸引力 $\sim r^{-n}(n < 2)$，由此他推测正确的关系应当是引力或斥力都 $\sim r^{-2}$. 这是近代电磁理论研究的开始. 在 1785 年，库仑(C.

A. Coulomb, 1736—1806)制作一台扭秤，现称为库仑扭秤，精确地测定了电荷之间的作用力.其具体的数量关系见 4.2.2.

4.2.2 点电荷间的作用力

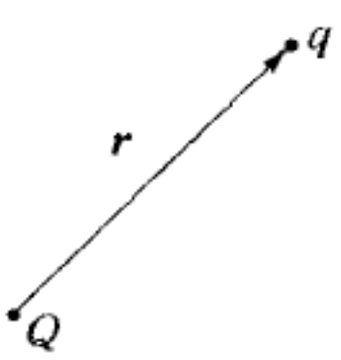


图 4.2

设有点电荷 Q(单位为库仑 = 安培 · 秒)位于原点，另有一个点电荷 q，相对 Q 的位移为 $\boldsymbol{r}$，则 q 受到 Q 的作用力为

$$\boldsymbol{F} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^3}\boldsymbol{r} \tag{4.2.1}$$

这里

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \times (2.997\,924\,58)^2} \times 10^{-9} \text{ 法/米}$$

$$\simeq 8.854\,187\,817 \times 10^{-12} \text{ 法/米} \tag{4.2.2}$$

在通常所作的精确度不很高的计算中，可取

$$\epsilon_0 \simeq 8.85 \times 10^{-12} \text{ 法/米} \tag{4.2.3}$$

(4.2.1)即是库仑定律.

4.2.3 电场强度 $\boldsymbol{E}$

如果在第一段中将 Q 看作是产生场的源(场源)，而 q 是感受所在位置场强的试探电荷，则单位电荷在 $\boldsymbol{r}$ 点所受到力即该点的场强 $\boldsymbol{E}$，

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{F}/q = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3}\boldsymbol{r} \tag{4.2.4}$$

这是只有一个源电荷 Q 所产生的电场强度 $\boldsymbol{E}$.如果将 $\boldsymbol{E}$ 理解为某种流量密度，即单位面积上的流量，则流过 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 面的流量为

$$\mathrm{d}\Phi_E = \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{4.2.5}$$

流量是流体力学的语言，例如河水 10 吨/秒等，现在将它移用到电学中来，再命名为流量容易混淆，称为流通量也不十分合适，故命名为通量，本处的

通量密度是 $\boldsymbol{E}$，故称为 $\boldsymbol{E}$ -通量，或电场通量，简称为电通量，在不会引起误解的地方，也可以只称为是通量. $\boldsymbol{E}$ -通量的大小也可用通过 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的线条数的多少来描述，这些线条称为电力线，线上各点的切线与当地电场 $\boldsymbol{E}$ 方向一致而通过 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的条数与 $\mathrm{d}\Phi_E$ 成正比.

现在讨论穿过封闭曲面 S 的电力线数目，参见图 4.3，这里电场由位于原点的点电荷 Q 生成，其中封闭曲面 S_1 不包含电荷 Q，从图 4.3 可以看到穿进 S_1 的电力线数目等于穿出去的电力线数目，因此穿过 S_1 的电力线数目为零，也即电通量 Φ_E 为

$$\Phi_E = \oiint_{S_1} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \tag{4.2.6}$$

(4.2.6)也可用另一种方式推出，即按照数学中的高斯定理：

$$\oiint_{S_1} \boldsymbol{E}\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_{v_1} \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\, \nabla \cdot \boldsymbol{E} \tag{4.2.7}$$

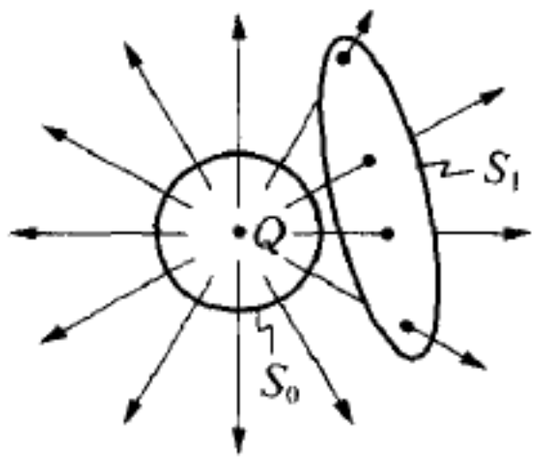


图 4.3

因为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} \propto \nabla \cdot \left\{\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right\} = \frac{\nabla \cdot \boldsymbol{r}}{r^3} + \nabla\left(\frac{1}{r^3}\right) \cdot \boldsymbol{r} = 0$$

于是(4.2.7)的右方为零，由此推出(4.2.6)成立.

现在讨论球心在 Q 所在点的球面 S_0 上的电通量(参见图 4.3)，按照定义有 $\mathrm{d}\boldsymbol{S} = r^2\mathrm{d}\Omega \cdot \dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$，这里 $\boldsymbol{r}$ 是从 Q 到球面上一点的位置矢量，r 为半径，$\mathrm{d}\Omega$ 为立体角元，

$$\Phi_{\boldsymbol{E}} = \iint_{S_0} \mathrm{d}\Omega \boldsymbol{r}\boldsymbol{r} \cdot \frac{Q}{4\pi \in_0} \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{4.2.8}$$

这里 Q/ε_0 是电通量. 对于任意形状的封闭曲面 S，如果它包围 Q 电荷，则可以围绕 Q 作一个球面 S_0，其半径很小，现 S 面上通量 = S_0 上通量 + S 联合 S_0(方向朝里)上的通量，由于后一部分：S 和方向朝里的 S_0 联合生成一个封闭曲面 $\widetilde{S}$，它包含的空间中没有电荷，因此 $\widetilde{S}$ 上的通量为 0，这样最终得到

$$\Phi_{\boldsymbol{E}} = \oiint_{S} \mathrm{d}\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{E} = \begin{cases} Q/\varepsilon_0 & (Q \text{ 在 } S \text{ 之中}) \\ 0 & (Q \text{ 在 } S \text{ 之外}) \end{cases} \tag{4.2.9}$$

这里通量 Φ_E 正比于电力线数，其间只差了一个比例系数，因此不妨将 Φ_E 就当作是电力线数.用电力线数的面密度来刻画当地电场强度的强弱，这是在描述事实方面的一个新的发明，它对电磁场性质的研究起了有力的推动作用.与此类似，把对称性从日常经验中引进到物理学的研究领域，这也是智力上的一种自由发明.爱因斯坦说①:“我们现在知道，科学不能仅在经验中成长起来，我们需要自由的发明，只于这些发明是否有用，只能通过与经验对比而后验地验证.这个事实可能被我们的前辈们忽略了，对他们来说，理论的创立似乎是从经验的归纳中产生出来的，而不由概念自由构造所带来的影响.”这段话反映了一位物理学家的切身体验，我们从物理学史可以看到，当物理学从其领域之外借得某些成功的概念时，这些概念往往是非同凡响的，它反映了自然界深层的秘密.下面，我们回到电磁学讨论的主线上来，继续研究高斯定理，高斯定理分数学的和物理的两种，两者的内容实际上是一样的，但物理上的高斯定理中所涉及的量有一定的物理内容，下面有关高斯定理的讨论，如未特别指明，都是指物理的高斯定理.

4.2.4 微分高斯定理

由多个源电荷 $\{Q_i\}, i = 1, 2, \cdots, n$ 生成的场强是

$$\boldsymbol{E} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i|^3}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i) \tag{4.2.10}$$

这里 $\boldsymbol{r}_i$ 是电荷 Q_i 所在点的位置矢量，$\boldsymbol{r}$ 是所研究的地点(场点)的位置矢量.由于叠加原理在任何闭曲面 S 上的电通量

$$\Phi_E = \sum_{i=1}^{n} \Phi_{Ei} \tag{4.2.11}$$

考虑到(4.2.9)有

$$\Phi_E = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i\text{在}S\text{内}} Q_i \tag{4.2.12}$$

---

① A. Einstein, in Emanuel Libman Anniversary Volumes, Vol 1, p363 International, New York, 1932. 转引自：亚拉伯罕·派斯，爱因斯坦传(上)，商务印书馆，2003，p20.

这里 i 在 S 内表示 Q_i 在 S 的内部.如果电荷连续分布,则可用电荷密度 $\rho = \rho(\boldsymbol{r})$ 描述,而体积元 $\mathrm{d}v = \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}$ 中含有的电荷

$$\mathrm{d}Q = \rho \mathrm{d}v = \rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}^3\boldsymbol{r} \tag{4.2.13}$$

可以看成一个点电荷,这样可以将电荷连续分布区分成若干小区域,每个小区域按照(4.2.13)用一个点电荷代替,这样可用点电荷组去代替连续分布电荷,应用高斯定理(4.2.7)和(4.2.12)有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{E}} &= \oiint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{E} = \iiint_v \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\,\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i\text{在}S\text{内}}\mathrm{d}Q_i \\ &= \frac{1}{E_0}\iiint_v \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\rho(\boldsymbol{r})\end{aligned} \tag{4.2.14}$$

由于(4.2.14)对于任何微小的体积 v 都适用,因此有

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \rho(\boldsymbol{r})/\varepsilon_0 \tag{4.2.15}$$

(4.2.15)称为微分高斯定理.注意在推导(4.2.14)中,我们利用了关系式

$$\iiint_v \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\,\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i\text{在}S\text{内}}\mathrm{d}Q_i \tag{4.2.16}$$

这是因为若将体积 v 划分为若干小体积 ∇v_i,每个体积内所包含的电荷为 $\mathrm{d}Q_i$,则若记 ΔS_i 为 Δv_i 的表面,我们有

$$\iiint_v \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\,\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \sum_{i\text{在}S\text{内}}\iiint_{\nabla v_i}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\,\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \sum_{i\text{在}S\text{内}}\oiint_{\Delta S_i}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i\text{在}S\text{内}}\mathrm{d}Q_i \tag{4.2.17}$$

因此(4.2.16)成立,相应地(4.2.14)成立,微分高斯定律(4.2.15)也成立.

4.2.5　静止电荷所产生的电场及电势

我们注意静止电荷所产生的电场是有电势电场,或者说是有势电场,势就是电势,那么什么是电势呢?为了解释这个概念,先讨论一个一个简单的情况,仍然参见图 4.2,电荷 Q 位于原点,在距离 r 处的点(即试探电荷 q 所在点)记为 A,参见图 4.4,这一点的电势记为

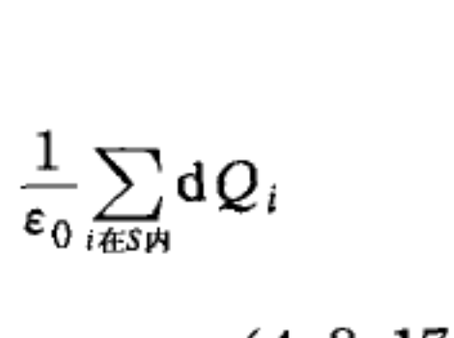


图 4.4

$\varphi(\boldsymbol{r})$,它具有下面的形式

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \mid \boldsymbol{r} \mid} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}, \ r = \mid \boldsymbol{r} \mid \tag{4.2.18}$$

其物理意义可比较 1.3 -(1.3.7)中的单位质量的位能 $-\frac{Gm_s}{r}$ 而得出,如果上式的万有引力常数 $G \to \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$,太阳质量 $m_s \to Q$, $r \to r$,而"-"号去掉,因为万有引力是吸引力,而本处同号电荷之间的作用力是推斥力,这样就有

$$\frac{-Gm_s}{r} \longrightarrow \varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \tag{4.2.19}$$

仿照万有引力中对 $\frac{-Gm_s}{r}$ 的解释,我们可把 $\varphi(\boldsymbol{r})$ 解释为单位点电荷在 Q 所生成的电场中的势能,即电势.如果电荷 Q_1 不在原点,而在 $\boldsymbol{r}_1$ 点,这时的电势是

$$\varphi_1(\boldsymbol{r}) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 \mid \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1 \mid} \tag{4.2.20}$$

而电势与电场强度的关系是

$$\boldsymbol{E}_1 = -\nabla \varphi_1(\boldsymbol{r}) \tag{4.2.21}$$

具体实例可参见第 1 题.由于静电场 $\boldsymbol{E}$ 是由各个点电源所产生的电场 $\boldsymbol{E}_i$ 叠加而成,$\boldsymbol{E} = \sum_i \boldsymbol{E}_i$,仿照(4.2.21)的讨论,我们有

$$\boldsymbol{E} = \sum_i \boldsymbol{E}_i = -\sum_i \nabla \varphi_i(\boldsymbol{r}) = -\nabla \varphi(\boldsymbol{r}),$$

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \sum_i \varphi_i(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{Q_i}{\mid \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i \mid} \tag{4.2.22}$$

电场 $\boldsymbol{E}$ 在封闭曲线 C 上的环路积分

$$I_E = \oint_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{4.2.23}$$

称作是 $\boldsymbol{E}$(在 C 上的)环量,由于 $\boldsymbol{E}$ 的性质,我们有

$$I_E = \oint_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\oint_C \nabla \varphi(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\oint_C \mathrm{d}\varphi(\boldsymbol{r}) = 0 \quad (4.2.24)$$

对于一个场量，例如 $\boldsymbol{E}$，它对应的环量 I 为零，则称为是物理量. 本处 $I_E = 0$，因此场强 $\boldsymbol{E}$ 是物理量；如果 $I \neq 0$，则称为是辅助量，实际的含义是指该场量不满足环量为零的条件.

4.2.6　电偶极子的电场强度及电势

本段讨论一个特殊的电荷系统，由电荷 $-q$ 及 $q(q>0)$ 组成电荷系统，q 相对于 $-q$ 的位置矢量是 $\boldsymbol{l}$，$\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{l}$ 称为是该系统的电偶极矩，如果该系统 $q \to \infty$，而距离矢量 $\boldsymbol{l}$ 的长度趋于零，但保持 $\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{l}$ 不变，则称为电偶极子. 一个电偶极子 $\boldsymbol{p}$ 的场强见图 4.5. 在空间一点 A 上的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 应当由电荷系统 $\{q, -q\}$ 确定 $(q>0)$，这里电荷 q 及 $-q$ 可放置在 z 轴上，坐标分别为 $\frac{l}{2}$ 及 $-\frac{l}{2}$. 对于这个电荷系统可以定义电偶极矩 $\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{l} = ql\boldsymbol{e}_z$，这里，$\boldsymbol{e}_z$ 是 z 轴上的单位矢量，这里我们已经选择了坐标系统，原点 O 选在电偶极子的中点而 $\boldsymbol{l}$ 的指向与 $\boldsymbol{e}_z$ 或 z 轴的指向相同，电偶极矩

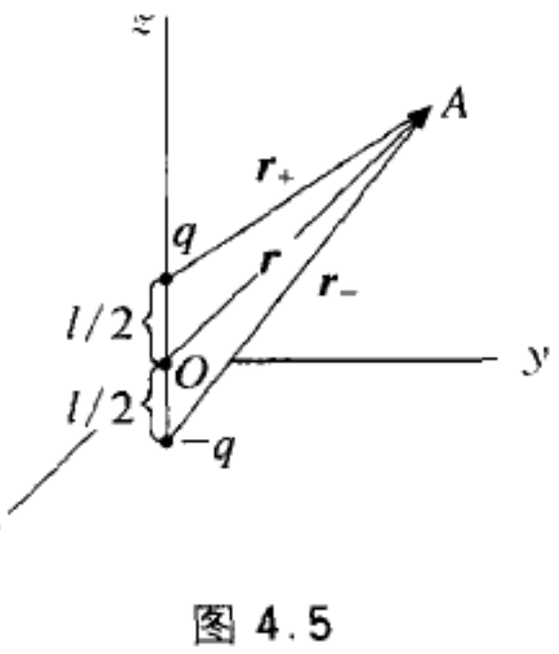


图 4.5

$$\boldsymbol{p} = \lim_{\substack{q\to\infty \\ l\to 0}} q\boldsymbol{l} = \text{不变矢量} \quad (4.2.25)$$

参见图 4.5，记原点 O 到场点 A 的矢径为 $\boldsymbol{r}$，电荷 q 所在点到 A 点的矢径为 $\boldsymbol{r}_+$，电荷 $-q$ 的为 $\boldsymbol{r}_-$，由电荷系统 $\{q, -q\}$ 确定的电场强度为

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{q}{r_+^3}\boldsymbol{r}_+ + \frac{(-q)}{r_-^3}\boldsymbol{r}_-\right\} \quad (4.2.26)$$

注意到

$$\boldsymbol{r}_\pm = \mp\frac{\boldsymbol{l}}{2}\boldsymbol{e}_z + \boldsymbol{r},\ r_\pm = \left(r^2 + \frac{l^2}{4} \mp l\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}_z\right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.2.27)$$

代入(4.2.26)，保留 $\frac{l}{r}$ 小量展开中的 $\frac{l}{r}$ 有关的一次项，将 $\left(\frac{l}{r}\right)^2$ 及以上的高

阶小量略去，最后让 $l\to 0$ 取极限就得到

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{q}{r^3}\left(-\frac{\boldsymbol{l}}{2}\boldsymbol{e}_z\right)-\frac{q}{r^3}\left(\frac{\boldsymbol{l}}{2}\boldsymbol{e}_z\right)+\frac{q}{r^3}\cdot\frac{3\boldsymbol{l}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}_z}{2r^2}\boldsymbol{r}-\frac{q}{r^3}\left(\frac{-3\boldsymbol{l}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{k}}{r^2}\right)\boldsymbol{r}\right\}$$

$$=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{-\frac{\boldsymbol{p}}{r^3}+\frac{3}{r^3}\cdot\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}}{r^2}\right\}$$

这里最后一个等式是取 $l\to 0, q\to\infty$ 但保持乘积 $\boldsymbol{p}=q\boldsymbol{l}$ 不变的极限结果，

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{1}{r^3}\left\{-\boldsymbol{p}+\frac{3(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p})\boldsymbol{r}}{r^2}\right\}\tag{4.2.28}$$

电偶极子 $\boldsymbol{p}$ 的电势 $\varphi(\boldsymbol{r})$ 有关系

$$\varphi(\boldsymbol{r})=\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}\tag{4.2.29}$$

实际上，我们有，参见本章第 4 题，

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi(\boldsymbol{r})\tag{4.2.30}$$

4.3 电位移矢量 $\boldsymbol{D}$

4.3.1 电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 的概念

当研究介质时，每个单元因为外电场 $\boldsymbol{E}$ 的作用，发生极化现象，参见图 4.6，图中画出了边长为 Δl 的立方单元，$\boldsymbol{E}$ 的方向与其中的一条棱平行，而 $\boldsymbol{E}$ 所指向的上底感应出电荷 $\Delta q=\sigma\Delta l^2$，这里 σ 是面电荷密度；相应地下底感应出电荷是 $-q=-\sigma\Delta l^2$，将上底和下底的感应电荷用点电荷代替，它们之间的距离是 Δl，参见图 4.6 之右方所示，这个电荷系统称为电偶极子，其大小称为电偶极矩 $\Delta\boldsymbol{p}$.

$$\Delta\boldsymbol{p}=\Delta q\cdot\Delta\boldsymbol{l}\tag{4.3.1}$$

$\Delta \boldsymbol{l}$ 的方向是由负电荷指向正电荷.单位体积的电偶极矩称为电极化强度矢量 $\boldsymbol{P}$:

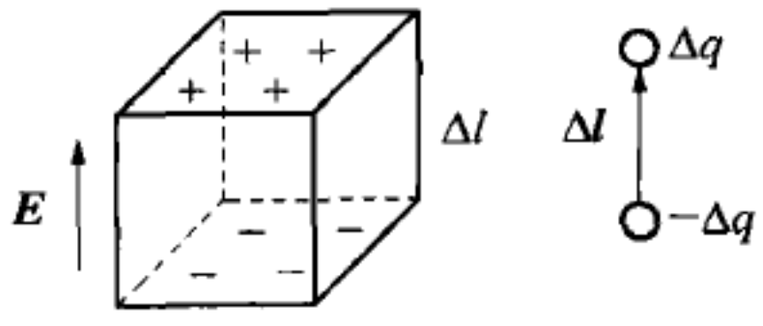


图 4.6

$$\boldsymbol{P} = \frac{\Delta \boldsymbol{p}}{\Delta l^3} \sim P = \sigma \qquad (4.3.2)$$

有物理规律

$$\boldsymbol{P} = \chi \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \qquad (4.3.3)$$

χ 称为介质的电极化系数.因介质极化而移出 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 面的极化电荷(或称束缚电荷) $\mathrm{d}q' = \mathrm{d}\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{P}$,由于介质在无电场时是电中性的,所以留在封闭曲面 S 内的电荷为

$$Q' = -\oiint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{P} \qquad (4.3.4)$$

定义电位移矢量 $\boldsymbol{D}$(这是辅助量)

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \varepsilon \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \qquad (4.3.5)$$

这里

$$\varepsilon = 1 + \chi \qquad (4.3.6)$$

称为介质的介电常数.现在讨论 $\boldsymbol{D}$ 通量

$$\Phi_{\boldsymbol{D}} = \oiint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{D} = \oiint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S} \cdot (\varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}) = Q - Q' \qquad (4.3.7)$$

这里 $Q = Q_0 + Q'$ 是 S 内的电量,它包括外界给定的电量 Q_0(又称为自由电量或自由电荷)和因介质极化而留在 S 内的极化电荷 Q'.由(4.3.7)有

$$\oiint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{D} = Q_0 \qquad (4.3.8)$$

相应于(4.2.15)有

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_0 \qquad (4.3.9)$$

这里 ρ_0 是自由电荷密度.在介质内部,(4.3.9)可改写为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \varepsilon \rho \qquad (4.3.10)$$

比较(4.3.9)和(4.3.10)有

$$\rho_0 = \varepsilon\rho = \varepsilon(\rho_0 + \rho') \to \rho' = -\frac{\chi}{\varepsilon}\rho_0 \tag{4.3.11}$$

即在介质内部，感应电荷密度 ρ' 与自由电荷密度 ρ_0 的符号相反.

4.3.2 边界条件

在两个介质的分界面上只有感应电荷，而从(4.3.8)得到 $\oiint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{D}=0$，这里 S 是以分界面为中层的扁圆柱表面，从这里可以推出

$$D_{1n} = D_{2n} \tag{4.3.12}$$

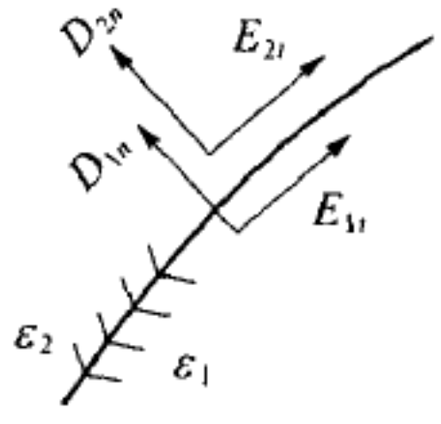


图 4.7

这里 D_{1n} 和 D_{2n} 是介质 1 和介质 2 的电位移矢量的沿分界面法线方向的分量(图 4.7).

同理，根据 $\boldsymbol{E}$ 是有位场，$\oint_C \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$，选封闭围道 C 为紧靠分界面但分居界面两侧的长方形框子，可以推出

$$\boldsymbol{E}_{1t} = \boldsymbol{E}_{2t} \tag{4.3.13}$$

这里下标 t 代表沿分界面内的分量，即切向分量，关系(4.3.12)和(4.3.13)是静电场在两个介质分界面上的边界条件.

4.3.3 真空中电位移矢量 $\boldsymbol{D}$，它是物理量

真空中电位移矢量 $\boldsymbol{D}$，与电场强度有关系

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E} \tag{4.3.14}$$

在封闭曲线 C 上的 $\boldsymbol{D}$ 环量 I_D，可仿照(4.2.23)及(4.2.24)写出，我们有

$$I_D = \oint_C \boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \varepsilon_0\oint_C \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0 \tag{4.3.15}$$

因此 D 是物理量，这时若 $\boldsymbol{E} = \sum_i \boldsymbol{E}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{Q_i(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|^3}$ 是分别位于 $\boldsymbol{r}_i$ 的点电荷 Q_i 联合生成的，$i=1,2,\cdots$，那么 $\boldsymbol{D}$ 也是由电荷组 $\{Q_i\}$ 联合

生成，

$$\boldsymbol{D} = \sum_i \boldsymbol{D}_i = \frac{1}{4\pi}\sum_i \frac{Q_i(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|^3} \tag{4.3.16}$$

(4.3.16)是 $\boldsymbol{D}$ 成为物理量的充分条件，因若(4.3.16)成立，则必然有环量 $I_D=0$，我们不妨称条件(4.3.16)为 $\boldsymbol{D}$ 的加强物理量条件.但 $\boldsymbol{D}$ 在介质存在时是否为物理量，其加强物理量条件是否成立，我们将在 4.3.4 讨论.

4.3.4　$\boldsymbol{D}$(电位移矢量)在一般情况下并不是物理量

上面已经讨论过，在有介质存在时，特别是在成团的若干均匀介质存在时，这种情况下的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 原则上依然可以算出在计算过程中将电荷分为两类：① 外界给定的电荷 $\{Q_i\}$，$i=1,2,\cdots$，这样电荷我们称之为自由电荷；② 因为空间有介质，而在各种介质的表面上有感应出来的电荷，这种电荷我们称作感应电荷，原则上可以用一组点电荷 $\{Q'_{i'}\}$，$i'=1,2,\cdots$，去逼近它，而电场强度可用关系式

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{\sum_i \frac{Q_i(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|^3} + \sum_{i'} \frac{Q'_{i'}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'_{i'})}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'_{i'}|^3}\right\} \tag{4.3.17}$$

此式依然是由点电荷的成场规律(库仑定律)加上叠加原理所得出的，只是在本处我们区分了自由电荷和感应电荷，$\boldsymbol{r}_i$ 是自由电荷 Q_i 所在处的位置矢量，而 $\boldsymbol{r}'_{i'}$ 是感应电荷 $Q'_{i'}$ 所在处的位置矢量.(4.3.17)满足加强物理量条件自然仍然满足环量 $I_E=0$ 的物理量条件.

现在讨论电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 是否仍然有关系 $\boldsymbol{D}=\epsilon_0\boldsymbol{E}$，如果没有，那么会不会有 $\boldsymbol{D}=\epsilon_0\boldsymbol{E}_0$ 这里 $\boldsymbol{E}_0$ 是自由电荷生成的场强：

$$\boldsymbol{E}_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{Q_i(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|^3} \tag{4.3.18}$$

如果上述两种情况都不能成立，那么找到一个更一般的 $\boldsymbol{E}_1$ 而使得 $\boldsymbol{D}=\epsilon_0\boldsymbol{E}_1$ 呢？这里

$$\boldsymbol{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{\sum_i \frac{Q_i(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|^3} + \sum_{i'} \frac{Q'_{i'}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'_{i'})}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'_{i'}|^3} + \sum_{i''} \frac{Q''_{i''}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}''_{i''})}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}''_{i''}|^3}\right.$$

(4.3.19)

与(4.3.17)相比,(4.3.19)中多了一组电荷$\{Q''_{i''}\}$,它们是新的补偿电荷,$\boldsymbol{r}''_{i''}$是补偿电荷 $Q''_{i''}$所在处的位置矢量.$\boldsymbol{E}_1$ 包含 $\boldsymbol{E}_0$ 作为特例,因为只要选择补偿电荷$\{Q''_{i''}\}$使得

$$\sum_{i'} \frac{Q'_{i'}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'_{i'})}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'_{i'}|^3} + \sum_{i''} \frac{Q''_{i''}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}''_{i''})}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}''_{i''}|^3} = 0 \tag{4.3.20}$$

这时(4.3.19)的 $\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{E}_0$,如果 $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}_1$,那么 $\boldsymbol{D}$ 就是物理量,这个想法尽管很有吸引力,并且看来也似乎可行,但是不幸这种想法是错误的.在下一段我们将用一个具体的例子,说明 $\boldsymbol{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \boldsymbol{E}$,这里相对介电常数 ε 在不同的介质所在处有不同的数值,不是物理量,因此不存在任何形式的 $\boldsymbol{E}_1$,使得

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}_1(?) \tag{4.3.21}$$

因为(4.3.21)是加强物理量条件,如果(4.3.21)成立,$\boldsymbol{D}$ 必然是物理量.在4.3.5节(即下一节)我们将指出在一些情况下,$\boldsymbol{D}$ 不是物理量,这时(4.3.21)不可能成立.

4.3.5 $\boldsymbol{D}$ 不是物理量的一个实例

参见图 4.8,一个半径为 R,相对介电常数为 ε 的均匀介质球,放在一个均匀电场 $\boldsymbol{E}_0 = E_0 \boldsymbol{e}_x$ 之中,原点 O 在介质球的球心,这时介质球均匀极化,其极化强度矢量 $\boldsymbol{P} = \chi\varepsilon_0 \boldsymbol{E}_{内}$. 这里 $\boldsymbol{E}_{内}$ 是介质球内部的电场,$\chi = \varepsilon - 1$ 是电极化率.因为 $\boldsymbol{P}$ 的关系,在球内引起的附加电场 $\boldsymbol{E}_{退}$(称为退极化场),参见本章第 6 题,有

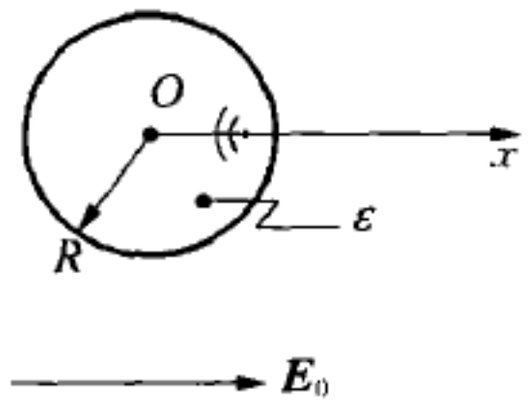


图 4.8

$$\boldsymbol{E}_{退} = -\frac{\boldsymbol{P}}{3\varepsilon_0} \tag{4.3.22}$$

注意到 $\boldsymbol{E}_{内} = \boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}_{退} \rightarrow \frac{\boldsymbol{P}}{\chi\varepsilon_0} = \boldsymbol{E}_0 - \frac{\boldsymbol{P}}{3\varepsilon_0} \rightarrow$

$$\boldsymbol{P} = \varepsilon_0 \cdot \frac{3\chi}{3+\chi}\boldsymbol{E}_0 = 3\varepsilon_0 \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\boldsymbol{E}_0$$

$$\boldsymbol{E}_{退} = -\frac{\boldsymbol{P}}{3\varepsilon_0} = -\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}, \boldsymbol{E}_0, \boldsymbol{E}_{内} = \boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}_{退} = \frac{3}{\varepsilon+2}\boldsymbol{E}_0 \tag{4.3.22}$$

外部电场是原有电场 E_0 及电偶极子 $\boldsymbol{p}=\frac{4}{3}\pi R^3\boldsymbol{P}$ 所生成的场强 $\boldsymbol{E}'$ 之和：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_{外}&=\boldsymbol{E}_0+\boldsymbol{E}'=\boldsymbol{E}_0+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(-\boldsymbol{p}+\frac{3\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^2}\boldsymbol{r}\right)\\&=\boldsymbol{E}_0+\frac{R^3(\varepsilon-1)\varepsilon_0}{3\varepsilon_0 r^3}\left(-\boldsymbol{E}_{内}+3\frac{\boldsymbol{E}_{内}\cdot\boldsymbol{r}}{r^2}\boldsymbol{r}\right)\\&=\boldsymbol{E}_0+\left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\right)\frac{R^3}{r^3}\left(-\boldsymbol{E}_0+\frac{3\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{r}}{r^2}\boldsymbol{r}\right)\end{aligned}\tag{4.3.23}$$

可以直接验证，沿分界面的法向有 $D_{外n}=D_{内n}$；而沿切向有 $E_{内t}=E_{外t}$，参见本章第 7 题. 因此我们得到一个真实的电场分布 $\boldsymbol{E}$ 和电位移矢量 $\boldsymbol{D}$，下面验证 $\boldsymbol{D}$ 的环量 $I_D\neq0$，从而证实在本处 $\boldsymbol{D}$ 不是物理量. 参见图 4.9，这是与图 4.8 一样的介质球放在均匀外电场 $\boldsymbol{E}_0=E_0\boldsymbol{e}_x$ 中，原点 O 在球心的坐标架为了看起来清晰已移至图的左上角，而用波折线指出它应该所处的地方. 现在沿 x 轴从 $-L\to L$（$L\to\infty$）到达 A 点，然沿 z 轴的负方向移到与 x 轴很远处 B 点，然后从 B 点与 x 轴指向相反的方向移至 B' 点，使得 $B'A'$ 的方向与 z 轴相同. 这样，我们构造了一个封闭曲线 $C\sim A'ABB'A'$，相应的环量 I_E 有关系

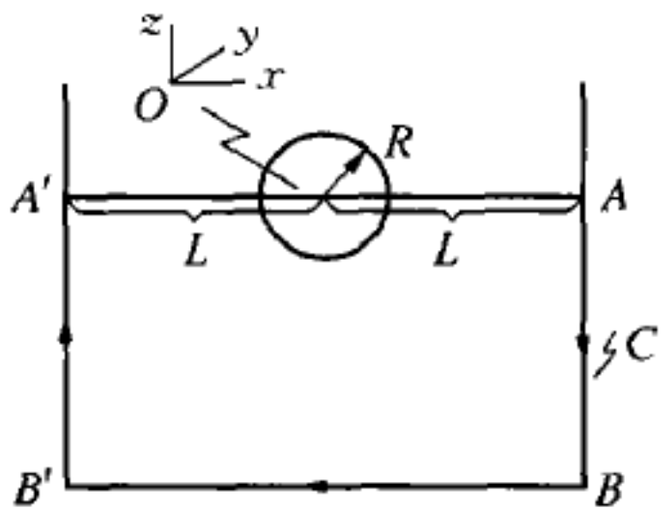


图 4.9

$$\begin{aligned}I_E&=\oint_C\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}\\&\simeq\int_{-L}^{-R}\left[\boldsymbol{E}_0+\frac{(\varepsilon-1)(-\boldsymbol{E}_0+3\boldsymbol{E}_0)R^3}{(\varepsilon+2)(-x)^3}\right]\mathrm{d}x\\&\quad+\int_R^L\left[\boldsymbol{E}_0+\frac{(\varepsilon-1)(-\boldsymbol{E}_0+3\boldsymbol{E}_0)R^3}{(\varepsilon+2)x^3}\right]\mathrm{d}x\\&\quad+\int_{-R}^{R}\frac{3}{\varepsilon+2}E_0\mathrm{d}x+\int_L^{-L}E_0\mathrm{d}x\\&=(-R+L)E_0+\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}E_0R^3\left[\frac{1}{R^2}-\frac{1}{L^2}\right]+(L-R)E_0\\&\quad+\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}E_0R^3\left(\frac{1}{R^2}-\frac{1}{L_2}\right)+\frac{6E_0R}{\varepsilon+2}-2LE_0\\&=-\frac{2(\varepsilon-1)}{\varepsilon+2}\cdot\frac{E_0R^3}{L^2}\to0\ (\text{当 }L\to\infty)\end{aligned}\tag{4.3.24}$$

而 I_E 也可以记为 $I_E = I'_E + I''_E$，这里 $I'_E = \dfrac{6ER}{\epsilon + 2}$ 是 $\boldsymbol{E}$ 在介质球内一段的积分，$I''_E = -I'_E$，是 $\boldsymbol{E}$ 在真空中一段路径的积分. 我们现在计算 $\boldsymbol{D}$ 的环量 I_D，仿照在 I_E 中的计算也将其划分为介质球内和介质球外在真空中的

$$\begin{aligned} I_D &= I'_D + I''_D = \epsilon\epsilon_0 I'_E + \epsilon_0 I''_E = (\epsilon - 1)\epsilon_0 I'_E \\ &= \frac{6(\epsilon - 1)\epsilon_0 E_0 R}{\epsilon + 2} \neq 0 \end{aligned} \tag{4.3.25}$$

由这里可以看到 $\boldsymbol{D}$ 不符合 $I_D = 0$ 的物理量条件，当然更不符合 $\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E}_1$ 的加强物理量条件，$\boldsymbol{D} = \epsilon\epsilon_0 \boldsymbol{E}$ 只是一个辅助量或者严格地说是在预设场源仅是电荷(稍后一些我们指出还有不是电荷的静电场场源)的情况下，电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 不是物理量，而 $\boldsymbol{E}$ 是纯电荷源下的物理量，本处 $\boldsymbol{D}$ 仅是辅助量，这表明想寻找一组电荷将其合成 $\boldsymbol{E}_1$，然后期待空间各处都有 $\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E}_1$，这样的想法无法实现.

4.4 磁荷的库仑定律

本章前面三节(4.1～4.3)只是叙述了静电学的有关知识和基本规律，本章的任务是揭示磁现象和电现象之间在形式上的相似性(对称性)，首先遇到的是如何确定静磁学中的基本规律的问题.

在通常的电磁学或电动力学课程中，磁学的基本出发点是毕奥-萨伐尔(Biot－Savart)定律，这是关于电流源的成场定律，它与电学中的基本出发点库仑定律形式上很不相同. 从磁学和电学的对称性出发，磁学的基本定律应当是磁荷的库仑定律.

磁荷的库仑定律只能停留在理论上或者想象中，无法直接实验验证，因为迄今为止，我们不仅无法找到像电荷那样的大批磁荷以用验证它们之间作用力大小随距离平方反比的作用规律(简称反平方规律)，并且实际上是我们尚未找到任何一个磁荷. 磁荷作用的反平方规律是参照着电荷的库仑

定律形式上搬过来的，可以把磁棒的一端当作磁荷来作检验，但这个检验没有直接的物理意义，因为我们用的不是真正的磁荷，而是我们认为可以代替磁荷的等效物质单元，并且精度也太差. 我们采用磁荷的库仑定律作为出发点的理由是：由它出发能够导出所有能够实验精密验证的磁学定律，因此可知间接推知它是正确的，并且还能参照着电学的结果写出相关的磁学结果，充分地显示了它们之间的对称性.

4.4.1　磁荷的库仑定律形式

设有点磁荷 Q_m 位于原点，另一点磁荷 q_m 位于 $\boldsymbol{r}$ 处，见图 4.10，则 q_m 所受的力为

$$\boldsymbol{F} = \frac{q_m Q_m}{4\pi\mu_0 r^3}\boldsymbol{r} \tag{4.4.1}$$

这里

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ 亨/米} \tag{4.4.2}$$

称为真空导磁系数，磁荷 Q_m 或 q_m 的单位待选定，使得公式符合测量结果，因为公式(4.4.1)没有比例系数可以调节，能调节的只有磁荷的单位. 现在磁荷的单位选作

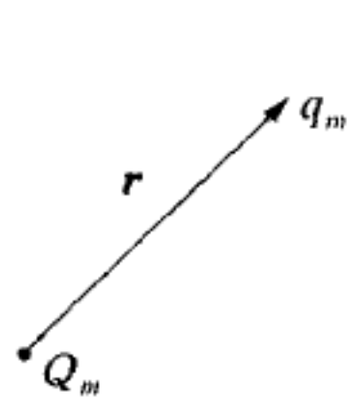


图 4.10

$$[Q_m] = [q_m] = \text{韦泊} \tag{4.4.3}$$

韦泊的确切意义将在后面阐述，现在只是一般地了解它代表一定数量的磁荷.

公式(4.4.1)与电学的(4.2.1)形式上完全一致，但最本质的区别是磁荷到现在为止还不是物理实在，说是磁荷实际上想象的还是电荷；当然我们可以把磁针的端点当然可以想象成是磁荷，但它不是真的磁荷而只是某种代替物，正像我们要讨论的是镜中之花，而能够拿出来的只是镜前之花.(4.4.1)的正确性是因为从它能够推出精密的、物理上可以检验的理论.

这样，(4.2.1)和(4.4.1)的对称性，即静电和静磁的对称性是实在规律和虚拟规律的对称性，或者是实物和它的镜像的对称性，我们相信实在和虚拟的对称性，是因为虚拟的(4.4.1)的推论是正确的物理结果. 反过来说，由

于得到了正确的物理结果，我们相信此处所说实物和它的镜像的对称性的确存在.

4.4.2 磁场

与静电情况类似，磁场 $\boldsymbol{H}$ 定义为单位磁荷 q_m 所受到的作用力

$$\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{F}}{q_m} = \frac{Q_m}{4\pi\mu_0 r^3}\boldsymbol{r} \tag{4.4.4}$$

如果场源是磁荷组 $\{Q_{mi}\}$，$i = 1, \cdots, n$，它们所在的位置是 $\{\boldsymbol{r}_i\}$，则所产生的磁场为

$$\boldsymbol{H} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{H}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_{mi}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_r)}{4\pi\mu_0 \mid \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i \mid^3} \tag{4.4.5}$$

由磁荷生成的磁场 $\boldsymbol{H}$ 具有无旋性，实际上，

$$\oint_C \boldsymbol{H}\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{1}{4\pi\mu_0}\sum_{i=1}^{n} Q_{mi}\oint_C \left(-\mathrm{d}\frac{1}{\mid \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i \mid}\right) = 0$$

4.4.3 磁感应强度矢量(磁通密度)$\boldsymbol{B}$

对应于静电情况，在磁介质有磁极化强度矢量 $\boldsymbol{P}_m$，有关系

$$\boldsymbol{P}_m = \chi_m \mu_0 \boldsymbol{H} \tag{4.4.6}$$

这里 χ_m 称为磁极化系数.磁通密度 $\boldsymbol{B}$ 定义为

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} + \boldsymbol{P}_m \tag{4.4.7}$$

或者 $\boldsymbol{B} = \mu\mu_0 \boldsymbol{H}$，$\mu$ 是介质导磁系数，

$$\mu = 1 + \chi_m \tag{4.4.8}$$

4.4.4 边界条件

从上的讨论知道，在我们的安排中，静磁性质与静电性质有严格的对

应关系，换句话说，看来是在讨论磁学，实际上还是在讨论电学，只是将其中电学的名词换成磁学的名词而已.为了加深印象，我们讨论在两个磁介质的分界面两侧的磁场的边界条件.讨论时仍可用图 4.7(参见 4.3.2)，只要将图中的电介质当成是磁介质，ϵ 当成是 μ 即可，注意磁场和电场的对应关系：

$$H \leftrightarrow E, \qquad B \leftrightarrow D \tag{4.4.9}$$

因此电学的边界条件(4.3.12)与(4.3.13)在目前磁学的情况下就是

$$B_{1n} = B_{2n}, \; H_{1t} = H_{2t} \tag{4.4.10}$$

4.5　磁偶极子场强

4.5.1　对磁荷系统

这里专门用“对磁荷”来指磁荷量相等，符号相反的两个磁荷所组成的系统.图 4.11 所示的是“对磁荷”系统，其中 $-q_m$ 位于原点，q_m 位于 l 处，而磁荷系统所产生的场强为

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_+ + \boldsymbol{H}_- \tag{4.5.1}$$

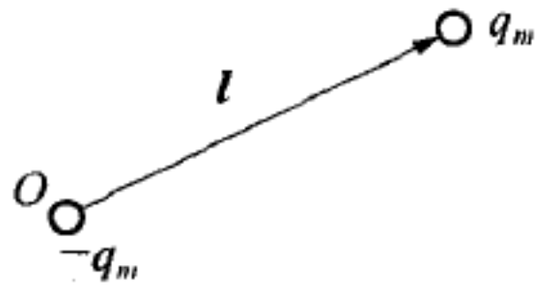


图 4.11

这里 $\boldsymbol{H}_+$ 是磁荷 q_m($q_m>0$)所产生的磁场强度，$\boldsymbol{H}_-$ 是磁荷 $-q_m$ 所产生的磁场：

$$\boldsymbol{H}_+ = \frac{q_m(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{l})}{4\pi\mu_0 \mid \boldsymbol{r}-\boldsymbol{l} \mid^3}, \; \boldsymbol{H}_- = \frac{(-q_m)\boldsymbol{r}}{4\pi\mu_0 r^3} \tag{4.5.2}$$

4.5.2　展开关系

如果讨论离磁荷组遥远处场强，即在场点和源点的距离 r 比起两磁荷之间的距离 l 大很多的情况下，$r \gg l$，讨论对磁荷的场，这时可只保留

(4.5.2)中的磁场 $\boldsymbol{H}_+$ 的与$\frac{l}{r}$有关的一阶项.注意到

$$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{l}| = [(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{l})\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{l})]^{\frac{1}{2}} \simeq (r^2 - 2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{l})^{\frac{1}{2}}$$

$$\simeq r\left(1-\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{l}}{r^2}\right) \tag{4.5.3}$$

一般地

$$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{l}|^a \simeq r\left(1-\frac{a\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{l}}{r^2}\right),\ a>0$$

这样,准确到 l/r 的 1 阶,对磁荷(q_m, $-q_m$)的磁场强度(4.5.1),

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_+ + \boldsymbol{H}_- \simeq \frac{q_m}{4\pi\mu_0 r^3}\left[-\boldsymbol{l}+\frac{\boldsymbol{r}}{1-\dfrac{3\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{l}}{r^2}}-\boldsymbol{r}\right]$$

$$\simeq \frac{1}{4\pi\mu_0 r^3}\left(-q_m\boldsymbol{l}+3\frac{q_m\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{r}}{r^2}\boldsymbol{r}\right) \tag{4.5.4}$$

4.5.3 磁偶极子及其成场关系

当对磁荷(q_m, $-q_m$)中的 $q_m\to\infty$,而其间的距离 $l\to 0$ 但保持乘积 $p_m = q_m l$ 不变,

$$\boldsymbol{p}_m = \lim_{\substack{q_m\to\infty \\ l\to 0}} q_m\boldsymbol{l} \tag{4.5.5}$$

称为系统的磁偶极矩,而系统称为是电偶极子,它所产生的场强 $\boldsymbol{H}$ 由(4.5.4)将其中的 $q_m\boldsymbol{l}$ 换成 $\boldsymbol{p}_m$ 而得

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{4\pi\mu_0 r^3}\left(-\boldsymbol{p}_m+\frac{3\boldsymbol{p}_m\cdot\boldsymbol{r}}{r^2}\boldsymbol{r}\right) \tag{4.5.6}$$

由于 $l\to 0$,(4.5.6)是等式,因为与$\frac{l}{r}$小量有关的高阶项在 $l\to 0$ 的极限情况下为零.

到现在为止,磁场理论是刻意模仿电场理论建立起来的.对于这个理论的可信性,还需要进一步分析.

4.5.4　对磁荷(q_m，$-q_m$)的实际替代者

我们已经强调过，磁荷至今尚未发现，因此对磁荷及相关问题的研究实际上是虚拟研究，所有磁学规律都是由电学规律翻译过来的，这种研究可以看成是磁学的对应研究，即先研究对应的电学现象，然后对应或翻译到磁学中来.下面进行磁学的代替研究，即找到能产生相应磁学现象的代替者，然后对代替者进行研究，所得结论无须翻译，是直接的磁学结果.以磁偶极子 $\boldsymbol{p}_m$ 为例，当然最好是对它进行直接研究，但这无法进行，因为到现在为止磁荷都还没有发现，也不能保证它将来一定会发现，既然磁荷都只是一种设想，磁偶极子 $\boldsymbol{p}_m$ 更不会是现实，直接对 $\boldsymbol{p}_m$ 进行研究乃不可能；其次是进行对应研究，根据对称性原则，根据“对称性必然是正确的”这样的信心，可以研究它的对应者电偶极子 $\boldsymbol{p}$，然后把 $\boldsymbol{p}$ 的规律翻译成对应的 $\boldsymbol{p}_m$ 的规律，这是前面已经做过的事，今后还会继续做.这样得到的并非直接结果，要多一道翻译.但注意“对称性必然是正确的”仅是一种信心，虽然它的可信度要比“协和式超音速民航机是不会出事的”要大，当然比“服了××壮骨粉之后腰不疼了”的广告词更经得起检验，但无论如何它不是一条数学或物理的定律，以对称性为指导原则导出的结果要经过其他方式的检验以证实结果的正确性.本书的主要目的是搜集已有的重大的物理等方面的成果，以证实“对称性”的指导原则的真实、正确与有效，指出“对称性是指导物理研究的第一原理”确有充足理由；再其次，或第三，我们将要进行的是对 $\boldsymbol{p}_m$ 进行代替研究，即找出可以代替 $\boldsymbol{p}_m$ 的对象，使得所得的结果不必经过翻译即是 $\boldsymbol{p}_m$ 的结果.

为了进行代替研究，让我们回顾一下历史，磁荷在 17 世纪以前被认为是真实的，磁针端点即是磁荷，而磁针由若干小磁针(磁偶极子或磁针单元)定向排列而成.18 世纪安培学说出来之后，否认了磁荷的存在，也否认了磁针是由磁荷构成的学说.安培认为每个物质单元内部都有一个闭合电流 I(参见图 4.12 左方)沿电流转动的正向，n 方向，就是这个电流的磁效应的方向，它的效应也就是通常所说的磁效应，当这些分子电流沿同一方向排列时，物体就出现了磁性.这个学说称为安培分子电流假说.

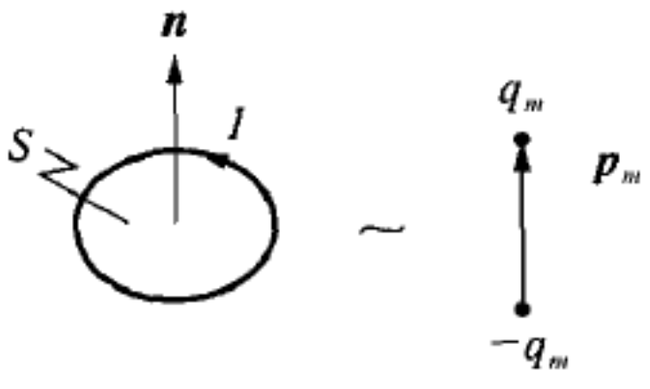


图 4.12

现在看来，安培分子电流假说是关于磁针的代替的学说，就是指出磁针的各种结果完全可以用适当的分子电流或闭路电流的结果去代替. 如果闭路电流的结果已知，那么所得的结果就是磁针的结果. 如果我们坚持认为对称性原则是正确的，那么从电偶极子 $\boldsymbol{p}$ 的结果可翻译得出磁偶极子 $\boldsymbol{p}_m$ 的结果，而从 $\boldsymbol{p}_m$ 的结果和安培学说，我们应当推得有关圈电流和电流单元的结果，并且应当与已知的正确结果相同. 如果一切如愿，那么我们所用过的原则都是正确的，“安培分子电流假说”是正确的，“对称性是第一原理”也是正确的. 因为除去所用的各种原理都正确之外，不会得到对如此纷繁现象的正确而和谐的解释.

现在定量研究闭路线圈和磁偶极子的定量替代关系. 先从线性性质着手，参见图 4.12，我们知道对于遥远地点的磁场 H，它显然正比于 I：$H \propto I$，另外参见图 4.13，两个叠在一起的电流各为 I，面积各为 S 的方框，它所产生的磁场 H_2 显然是单个方框所产生的磁场 H_1 的两倍，$H_2 = 2H_1$（左上图）；但它相当于电流为 $2I$，面积为 S 的方框（左下图），这又一次说明了 $H \propto I$，注意我们讨论的是离场源遥远地点的场强 H_2，因此两个方框错开一定距离不会影响 H_2 的大小和方向（右上图）；但这时两个方框相靠处的电流 I 由于流向相反而抵消，因此这两个方框合并成一个电流为 I，面积为 $2S$ 的长方框（右下图），从这里看来磁场源电流增加一倍或者是面积增加一倍，其后果都是磁场增加一倍，即 $H \propto S$（当 I 不变）；当闭路线圈的电流 I 和面积 S 都可以变化时，它与某指定点（遥远处）的磁场 r 有关系

$$H \propto IS \qquad (4.5.7)$$

由于 $H \propto p_m$，因此可得

$$p_m = \mu_0 IS \qquad (4.5.8)$$

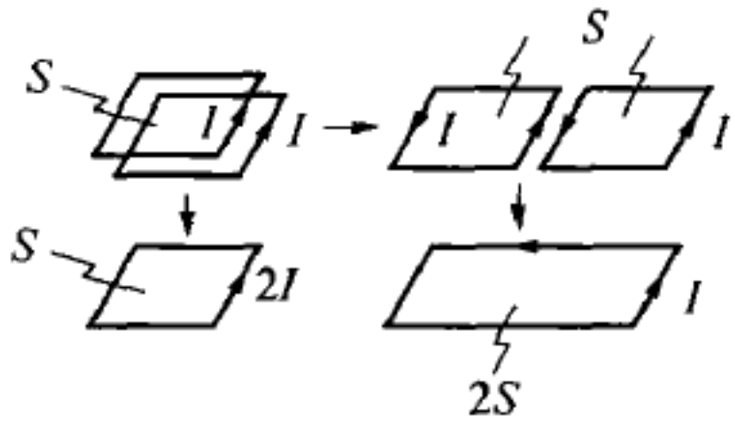


图 4.13

这里 μ_0 是业经给定的真空导磁系数，因此必须调节电流 I 的单位，使得等式(5.3.12)成立，单位电流的大小在后面阐述，现在暂时只称之为“电流单位”. 如果考虑到磁偶极矩 p_m 的方向，则可记

$$\boldsymbol{p}_m = p_m \boldsymbol{n} = \mu_0 I S \boldsymbol{n} \tag{4.5.9}$$

这里 $\boldsymbol{n}$ 是电流线圈平面上法线的单位矢量，其方向与电流流向成右手关系.

4.6　用电流圈替代磁偶极子所导出的推论

本节的目的是根据对称性，从电偶极子 $\boldsymbol{p}$ 的规律翻译出磁偶极子 $\boldsymbol{p}_m$ 的规律；而从 $\boldsymbol{p}_m$ 的规律直接得到电流线圈的规律. 后者的规律早已得到，我们这样做的目的是验证用对称性原理处理电磁问题的正确和有效性.

4.6.1　力矩

从伽利略形成加速度概念，牛顿明确了力的性质以来，我们明白了一个静止物体上所有的作用力必须互相抵消的道理，即为了平衡一个作用力必须提供一个大小与原作用力相等的力，但如果物体有一个支点，那么就有可能用小力来平衡大力，应用这个规律，人们制造了很多省力的工具如克丝钳，取水用的桔槔或辘轳等，阿基米德说只要给他一个支点就能撬起地球，这也是指的在支点参与下，小力能与大力平衡. 注意在有支点的情况，使物体平衡的外力其大小不一定相等，但它们所对应的力矩必须相等，力矩是指力臂(从支点到力的作用点的距离)与力的乘积. 在三维空间中力矩 $\boldsymbol{M}$ 也是矢量，它与相应的力 $\boldsymbol{F}$ 有关系

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \tag{4.6.1}$$

这里 $\boldsymbol{r}$ 是从支点到 $\boldsymbol{F}$ 的作用点的力臂矢量. 在力矩平衡讨论中，参照点可以是任意的指定点，这时由指定点到作用点的 $\boldsymbol{r}$ 不再有力臂的意义，但依然用(4.6.1)来定义力矩，而物体的力矩平衡中必须计入支点对物体的作用力所

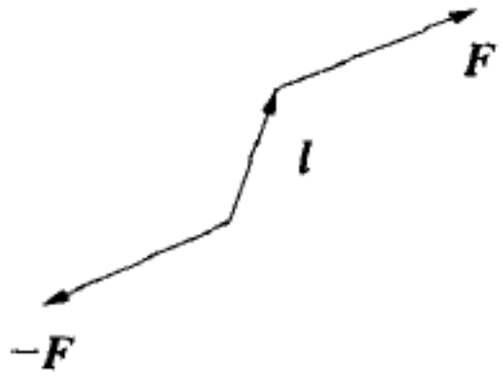


图 4.14

产生的力矩.对于一对大小相等、方向相反但不在一条作用线上的力(称为力偶,参见图 4.14)来说,这一对力的力矩和,$\boldsymbol{M}_0$,与所选的参考点无关,

$$\boldsymbol{M}_0 = \boldsymbol{l} \times \boldsymbol{F} \tag{4.6.2}$$

$\boldsymbol{l}$ 是从 $-\boldsymbol{F}$ 到 $\boldsymbol{F}$ 的有向距离,$\boldsymbol{M}_0$ 称为力偶矩.

4.6.2 磁偶极子 $\boldsymbol{p}_m$ 在磁场中所受到的力矩

参见图 4.15,磁偶极子

$$\boldsymbol{p}_m = q_m \boldsymbol{l} \tag{4.6.3}$$

各个端点所受的力分别为 $q_m\boldsymbol{H}$ 及 $-q_m\boldsymbol{H}$,这是力偶,因此磁偶极子所受的力矩为

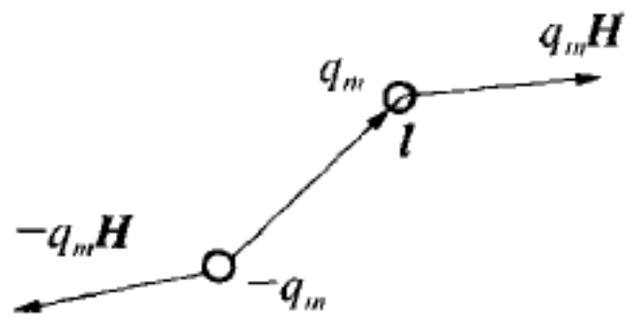


图 4.15

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{l} \times q_m\boldsymbol{H} = \boldsymbol{p}_m \times \boldsymbol{H} \tag{4.6.4}$$

4.6.3 电流线圈 $I\boldsymbol{S}$ 在均匀磁场 $\boldsymbol{H}$ 中所受到的力矩 $\boldsymbol{M}$

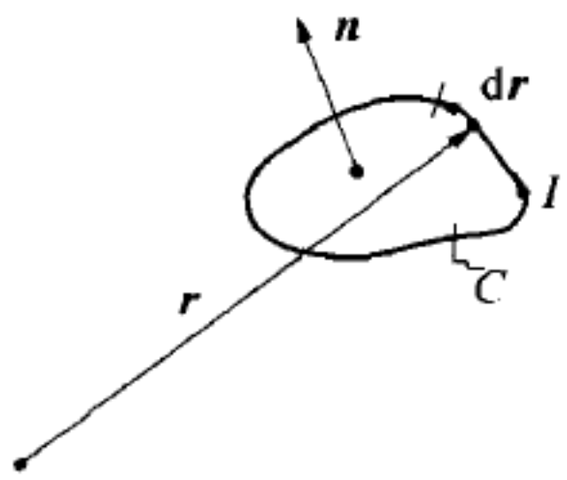


图 4.16

按照安培分子电流假说,电流线圈与磁偶极子可以互相代替,自然电流线圈所受到的力矩可以比照着(4.6.4)及考虑到(4.5.9)得出

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{p}_m \times \boldsymbol{H} = \mu_0 I\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{H} \tag{4.6.5}$$

这里 $\boldsymbol{S} = S\boldsymbol{n}$,$\boldsymbol{n}$ 的线圈所在的平面法线上单位矢量,其方向由电流流动方向按右手规则确定(参见图 4.16).我们注意到线圈的面积 $\boldsymbol{S}$ 为(参见第 8 题)

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}\oint_C \boldsymbol{r} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{4.6.6}$$

这里 C 是电流所在的曲线,$\boldsymbol{r}$ 是曲线 C 上一点的位置矢量,将关系(4.6.6)

代入(4.6.5),得到

$$\boldsymbol{M} = \frac{1}{2}\mu_0 I\oint_C (\boldsymbol{r} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{H} \tag{4.6.7}$$

利用矢量代数中的公式:

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = -(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \times \boldsymbol{a} - (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} \tag{4.6.8}$$

可将(4.6.7)改写为

$$\boldsymbol{M} = \frac{1}{2}\mu_0 I\left[\oint_C \mathrm{d}\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{r}) + \oint_C \boldsymbol{r} \times (\mathrm{d}\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{H})\right. \tag{4.6.9}$$

注意到

$$\oint_C \mathrm{d}\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{r}) = \oint_C \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}z \\ H_2 z - H_3 y & H_3 x - H_1 z & H_1 y - H_2 x \end{vmatrix}$$

$$= \oint_C \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ x & y & z \\ \mathrm{d}yH_3 - \mathrm{d}zH_2 & \mathrm{d}zH_1 - \mathrm{d}xH_3 & \mathrm{d}xH_2 - \mathrm{d}yH_1 \end{vmatrix}$$

$$= \oint_C \boldsymbol{r} \times (\mathrm{d}\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{H}) \tag{4.6.10}$$

在(4.6.10)的推导过程中,我们使用了等式$\oint_C \mathrm{d}xx = \frac{1}{2}\oint_C \mathrm{d}(x^2) = 0$,以及$-\oint_C \mathrm{d}xz = \oint_C (x\mathrm{d}z - \mathrm{d}(xz)) = \oint_C x\mathrm{d}z$之类.由于等式(4.6.10),在(4.6.9)式右方方括弧中两项是相等的;将它们合并为 1 项,出现的因子 z 与前面的因子$\frac{1}{2}$相消,有

$$\boldsymbol{M} = \mu_0 I\oint \boldsymbol{r} \times (\mathrm{d}\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{H}) \tag{4.6.11}$$

线圈 C 受到力矩 $\boldsymbol{M}$ 的原因是每个电流单元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 受有作用力 $\mathrm{d}\boldsymbol{f}$,

$$\boldsymbol{M} = \oint_C \boldsymbol{r} \times \mathrm{d}\boldsymbol{f} \tag{4.6.12}$$

对比(4.6.12)和(4.6.11),有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{f} = \mu_0 I \mathrm{d}\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{H} \tag{4.6.13}$$

通常在真空中记 $\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}$，$\boldsymbol{B}$ 称为磁通密度 (4.6.13)可改记为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{f} = I \mathrm{d}\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{B} \tag{4.6.14}$$

参见图 4.17，讨论长度为 l 的导线，内流有电流 I，则在图中所示的磁场作用下，有力

$$\boldsymbol{f} = I\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B} \tag{4.6.15}$$

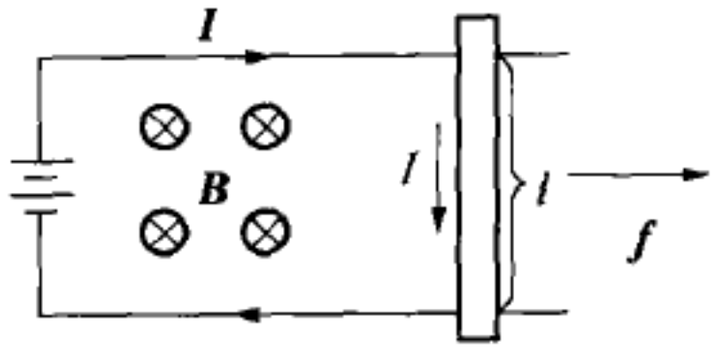


图 4.17

这正是常见的载流导线在硫场 $\boldsymbol{B}$ 中的受力公式，在电磁学中，它是作为实验结果而引进作为基本出发点的.

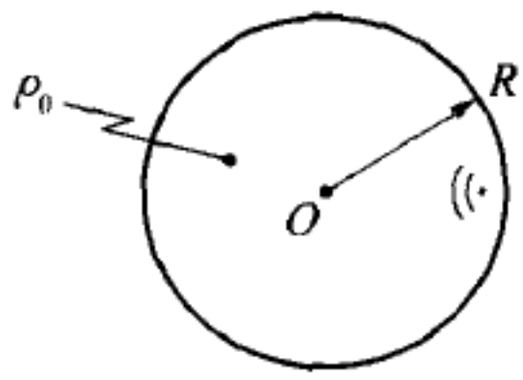
习　题

1. 已知位于 $\boldsymbol{r}_0$ 点的点电荷 Q 的电势 $\varphi(\boldsymbol{r}) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \mid \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 \mid}$，证明 $-\nabla\varphi(\boldsymbol{r})$ 即是电场强度 $\boldsymbol{E}$.

解：
$$\begin{aligned} -\nabla\varphi(\boldsymbol{r}) &= \left(\boldsymbol{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\right) \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \mid \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 \mid} \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\mid \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 \mid^2} \cdot \frac{1}{\mid \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 \mid} \Big[(x - x_0)\boldsymbol{e}_x \\ &\quad + (y - y_0)\boldsymbol{e}_y + (z - z_0)\boldsymbol{e}_z \Big] \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0}{\mid \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 \mid^3} = \boldsymbol{E} \end{aligned}$$

证毕.

2. 已知半径为 R 的球体，体中电荷均匀分布，体电荷密度 ρ_0 = 常数，求出球体内外的电场强度大小 E = ?



(第 2 题图)

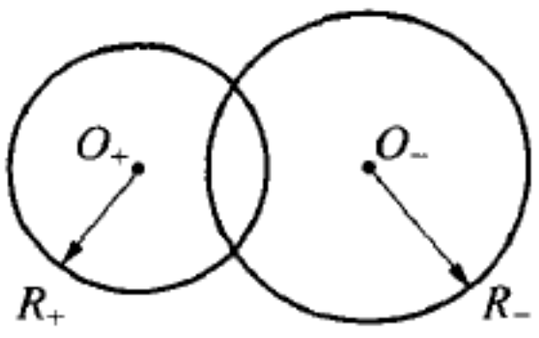
解：参见题图，如果所讨论的点在球体之处，$r > R$，则该点的电场强度大小 E 与球体所有的电荷 $Q_0 = \rho_0 \cdot \dfrac{4\pi}{3} R^3$ 集中于球心所产生的电场强度相同，这时可求出

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0 r^2} \quad (r > R) \tag{1}$$

如果 $r<R$，即球内之点上的场强，我们利用高斯定律可以算出

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \rho_0 \frac{4\pi}{3} r^3 = \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0} \quad (r < R) \tag{2}$$

3. 已知有带正电荷球体，电荷体密度 $\rho_+ = \rho_0 =$ 常数>0，球心位于 O_+，半径为 R_+；还有一个带负电荷球体，$\rho_- = -\rho_0 =$ 常数<0，球心位于 O_-，半径为 R_-，记 $\boldsymbol{L} = \overrightarrow{O_+ O_-}$ 是两球心之间的距离矢量，$|R_+ - R_-| < L < R_+ + R_-$（见图）求出两球交叠处空间各点的电场强度 $\boldsymbol{E}$ =？



（第 3 题图）

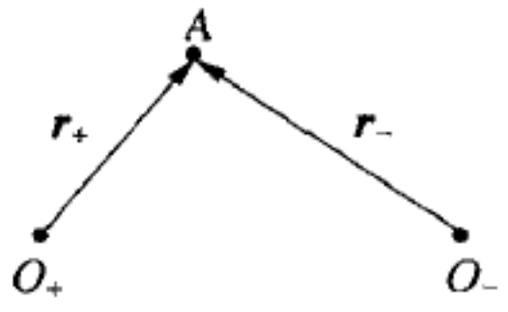


图 1

解：在两球重叠处选择 A 点，参见图 1，令 $\boldsymbol{r}_+ = \overrightarrow{O_+ A}$，$\boldsymbol{r}_- = \overrightarrow{O_- A}$，有 $r_+ < R_+$，$r_- < R_-$，$r_+ + r_- > L$，参见 4.2 题关于均匀带电球在球内的场强解，以及叠加原理有

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_+}{3\epsilon_0}\boldsymbol{r}_+ + \frac{\rho_-}{3\epsilon_0}\boldsymbol{r}_- = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0}(\boldsymbol{r}_+ - \boldsymbol{r}_-)$$

$$= \frac{\rho_0}{3\epsilon_0}\overrightarrow{O_+ O_-} = \frac{\rho_0 \boldsymbol{L}}{3\epsilon_0}$$

4. 证明 $\varphi(\boldsymbol{r}) = \dfrac{\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)}{4\pi\epsilon_0 |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3}$ 是电偶极子 $\boldsymbol{p}$ 的电势，此电偶极子位于 $\boldsymbol{r}_0$ 处.

解：$-\nabla \dfrac{\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)}{4\pi\epsilon_0 |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3} = \dfrac{-1}{4\pi\epsilon_0}\left[\dfrac{\nabla(\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0))}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3} + \boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot \nabla\dfrac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3}\right] = \dfrac{-1}{4\pi\epsilon_0}\left[\dfrac{\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3} + \boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\dfrac{-3}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^4}\cdot\dfrac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}\right]$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3}\left[-\boldsymbol{p} + \frac{3\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^2}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\right]$$

此式正是电偶极子 $\boldsymbol{p}$ 的场强，证毕.

5. 已知相对电极化率为 $\epsilon = 1 + \chi$ 的介质中有一个半径为 R 的球，在它的上面有自由电荷 Q_0，问比这个球半径为 $R + \delta$ 的同心球上（$\delta \ll R$）的总电荷是多少？

解：总电荷 $Q = Q_0 + Q'$，Q' 是感应电荷，利用(4.3.11)，我们有 $Q' = -\frac{\chi}{\epsilon}Q_0$，于是

$$Q = Q_0 - \frac{\chi}{\epsilon}Q_0 = \frac{Q_0}{\epsilon}$$

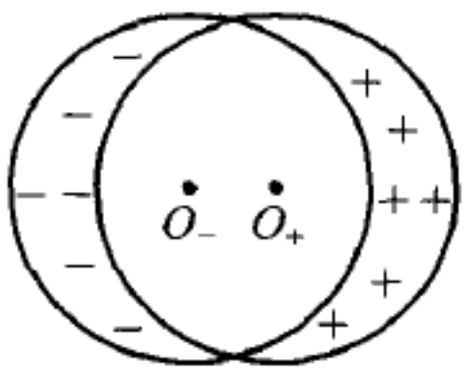
6. 已知介质球均匀极化，极化强度矢量为 $\boldsymbol{P}$，证明这时感应电荷在球内所产生的电场（称为退极化场）$\boldsymbol{E}_{退} = -\frac{\boldsymbol{P}}{3\epsilon_0}$.

解：参见题 4.3，从题 4.6 图，我们看到，在重叠区内的电场即退极化场

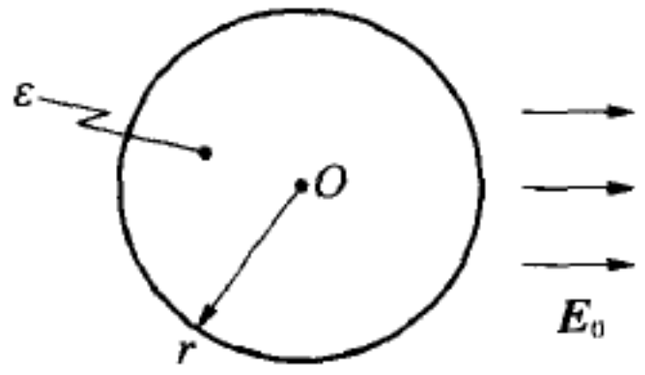
$$\boldsymbol{E}_{退} = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\overrightarrow{O_- O_+} \tag{1}$$

这里电荷密度 $\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$，$Q$ 是球上的电荷，而极化强度矢量 $\boldsymbol{P} = \frac{Q \cdot \overrightarrow{O_- O_+}}{\frac{4}{3}\pi R^3}$

$= -\rho\overrightarrow{O_- O_+}$，代入(1)即有 $\boldsymbol{E}_{退} = -\frac{\boldsymbol{P}}{3\epsilon_0}$，证毕.



（第 6 题图）



（第 7 题图）

7. 已知半径为 r 的介质球（相对介电常数为 ϵ）放在均匀外电场 $\boldsymbol{E}_0$ 之中，其内部电场为均为电场：

$$\boldsymbol{E}_{内} = \frac{3}{\epsilon + 2}\boldsymbol{E}_0 \tag{1}$$

外部电场与相对于介质球心 O 的矢径 $\boldsymbol{R}$（$R > r$）有关，

$$\boldsymbol{E}_{外} = \boldsymbol{E}_{外}(\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{E}_0 + \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \cdot \frac{r^3}{R^3}\left(-\boldsymbol{E}_0 + \frac{3(\boldsymbol{E}_0 \cdot \boldsymbol{R})}{R^2}\boldsymbol{R}\right) \tag{2}$$

试证明在介质球表面上有(t 表示切向，n：法向)

$$E_{内t} = E_{外t},\ D_{内n} = D_{外n} \tag{3}$$

解：验证边界条件，t 及 n 分别为切向单位矢量及法向单位矢量，

$$E_{内t} = E_{外t} \tag{4}$$

此边界条件可改为(互为等价)

$$E_{内t}(t \times n) = E_{外t}(t \times n) \rightarrow (E_{内t}t + E_{内n}n) \times n$$
$$= (E_{外t}t + E_{外n}n) \times n$$

即　$E_{内} \times n = E_{外} \times n$，它与(4)等价

现在　$$E_{内} \times n = \frac{3}{\varepsilon + 2}E_0 \times n = \frac{3}{\varepsilon + 2}E_0 \times \frac{r}{r}$$

$$\left(\text{在球面法向单位矢量 } n = \frac{r}{r}\right)$$

而 $E_{外} \times n = \left(E_0 + \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}(-E_0)\right) \times \frac{r}{r} = \frac{3}{\varepsilon + 2}E_0 \times \frac{r}{r} = E_{内} \times n \rightarrow$

$E_{外t} = E_{内t}$，(4)式正确，第一个边界条件证毕；

第二个边界条件：　$$D_{外n} = D_{内n} \tag{5}$$

$$D_{内n} = \varepsilon\varepsilon_0 E_{内} \cdot \frac{r}{r} = \frac{3\varepsilon\varepsilon_0}{\varepsilon + 2}E_0 \cdot \frac{r}{r}$$

$$D_{外n} = \varepsilon_0 E_{外} \cdot \frac{r}{r} = \varepsilon_0\left\{E_0 \cdot \frac{r}{r} + \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}\left[-E_0 \cdot \frac{r}{r} + \frac{3(E_0 \cdot r)}{r}\right]\right.$$

$$= \varepsilon_0 E_0 \cdot \frac{r}{r}\left\{1 + \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}[-1 + 3]\right\} = \frac{3\varepsilon\varepsilon_0}{\varepsilon + 2}E_0 \cdot \frac{r}{r}$$

$$= D_{内n}$$

(5) 成立，第二个边界条件成立，全部证毕.

8. 已知有金属制旋转椭球，其表面方程是

$$\frac{x^2}{R_1^2} + \frac{y^2}{R_2^2} + \frac{z^2}{R_3^2} = 1,\ R_1 > R_2 = R_3$$

表面上有电荷 Q，试求出椭球上的电荷分布，并且论证在球紧靠表面处的电场

强度 E 的方向与表面垂直.

解：我们先讨论 $R_1 = R_2 = R_3 = R$ 球形的简单情况，然后推广到椭球情况，并作相关讨论.

① 作为导引，先讨论的是半径为 R 的导体球上有电荷 Q 的情况，按照电场分布的唯一性定理，考虑到导体内部不能有电流(即导体内部的电场强度为零)，因此电荷 Q 均匀分布在导体表面上表面电荷密度

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2} \tag{1}$$

在本章第二节中已经计算验证过，这样分布的电荷密度在导体球内部所产生的场强为零.

为了讨论其他形状的导体表面上的电荷分布，先仔细分析一下球形导体表面各单元电荷对导体内某点 p 的场强贡献. 设导体球的球心为原点，p 点的坐标为 (x_0, y_0, z_0)，

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 < R^2, R \text{ 是导体球半径} \tag{2}$$

现在过 p 点画一条任意的直线，设此直线与球面相交于 A_1 及 A_2 两点(图 1). 对于过 p 点的对顶锥面，其立体角元分别以 $d\Omega_1$，$d\Omega_2$ 记之，则有

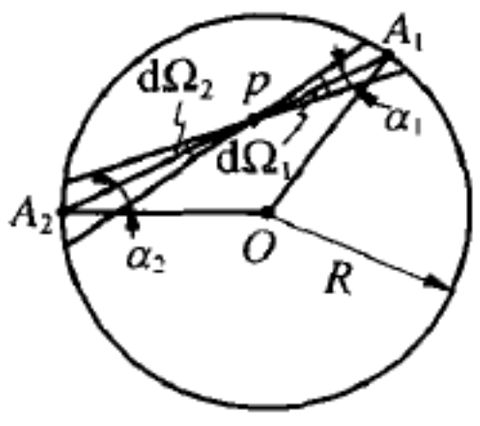


图 1

$$d\Omega_1 = d\Omega_2 = d\Omega \tag{3}$$

设上述的对顶角锥在球面上所截的面积分别为 dS_1 及 dS_2，则由几何关系，有

$$dS_1 = pA_1^2 d\Omega_1 / \cos\alpha_1, \quad dS_2 = pA_2^2 d\Omega_2 / \cos\alpha_2 \tag{4}$$

这里 $\alpha_1(\alpha_2)$ 是 $dS_1(dS_2)$ 表面法线 $OA_1(OA_2)$ 与 $pA_1(pA_2)$ 之间的夹角. 由图 1，OA_1A_2 是等腰三角形，其两个底角

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha \tag{5}$$

在 dS_1 及 dS_2 上分别有电荷 σdS_1 及 σdS_2，它们在 p 点所产生的场强分别为

$$dE_i = \sigma dS_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0 pA_i^2} = \sigma(pA_i)^2 \cdot \frac{d\Omega}{\cos\alpha_i} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0 (pA^i)^2}$$

$$= \frac{\sigma d\Omega}{4\pi\epsilon_0 \cos\alpha}, (i = 1,2) \Rightarrow dE_1 = dE_2 \tag{6}$$

注意到 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_1$ 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_2$ 方向相反，因此有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E}_1 + \mathrm{d}\boldsymbol{E}_2 = 0 \tag{7}$$

由于 A_1A_2 是过 p 点的任意直线，因此由对顶角锥在球面上所截的面积单元 $\mathrm{d}S_1$ 及 $\mathrm{d}S_2$ 上的电荷对 p 点所产生的场强互相抵消.

② 椭球情况　现在研究电荷 Q 在旋转椭球形导体表面上的分布.参见图 2 先讨论半径为 R_3 的圆球面，在这个球面上的电荷面密度为

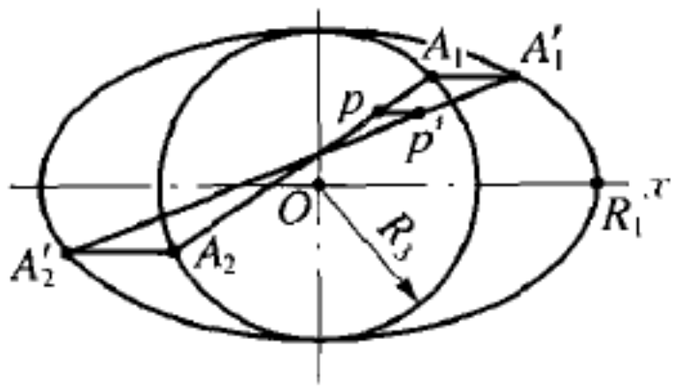


图 2

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R_3^2} \tag{8}$$

导体球中任何一点 p 的场强为零，如前所述，设过 p 点的一条直线与球面相交于 A_1，A_2 两点，而过 p 点的对顶角锥包含 A_1，A_2 在内，截球面得出两个小单元 $\mathrm{d}S_1$ 及 $\mathrm{d}S_2$，其上的电荷分别为 $\mathrm{d}q_1 = \sigma\mathrm{d}S_1$，$\mathrm{d}q_2 = \sigma\mathrm{d}S_2$，我们知道 $\mathrm{d}q_1$ 及 $\mathrm{d}q_2$ 在 p 点的电场贡献互相抵消.现在将这种情况与旋转椭球的情况联系起来.设在变形时球面上电荷不再移动，或形象地说电荷 Q 均匀地分布在球形绝缘薄膜上，将这个球壳沿 x 方向均匀拉长从 R_3 拉长至 R_1，参见图 2，这时 $A_1 \to A_1'$，$p \to p'$，而 $A_2 \to A_2'$.现在需要求出 $\mathrm{d}S_1$ 及 $\mathrm{d}S_2$ 在变形过程中的变化.设 $\mathrm{d}S_1$ 及 $\mathrm{d}S_2$ 在变形过程中变为 $\mathrm{d}S_1'$ 及 $\mathrm{d}S_2'$，参见图 3，A_1 点在 $\mathrm{d}S_1$ 上，而 A_1'点在 $\mathrm{d}S_1'$上.如图 3，设 B_1 点是球壳上靠近 A_1 的另一点，它在椭球面上的对应点为 B_1'，由于目前的变化是沿 x 方向按比例 $\dfrac{R_1}{R_3}$ 拉长的结果，因此有

$$\frac{\mathrm{d}S_1'}{\mathrm{d}S_1} = \frac{\mathrm{d}l_1'}{\mathrm{d}l_1} \tag{9}$$

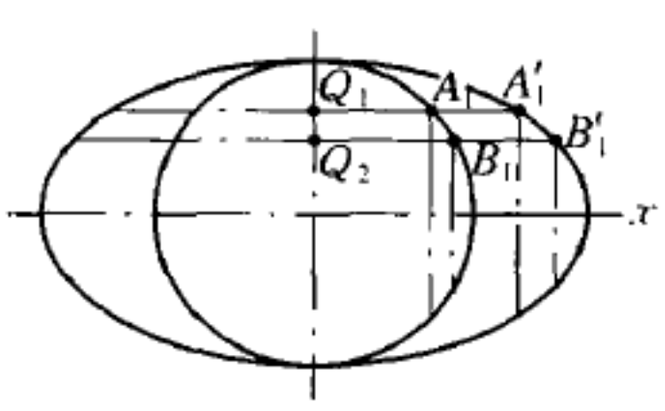


图 3

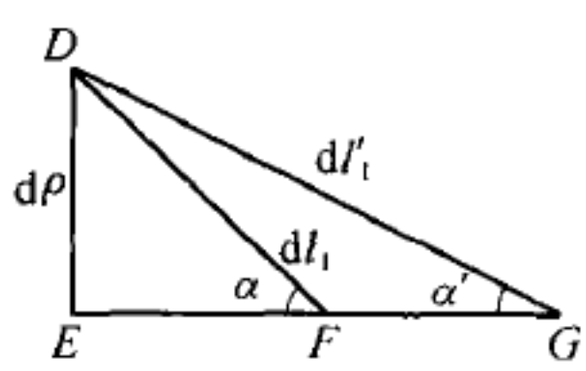


图 4

这里 $\mathrm{d}l_1 \equiv A_1B_1$，$\mathrm{d}l_1' \equiv A_1'B_1'$.现在计算 $\dfrac{\mathrm{d}l_1'}{\mathrm{d}l_1}$，参见图 4，其中 $\triangle DEG$ 是直角

三角形，$\angle E$ 是直角，而斜边 $\mathrm{d}l_1' = DG$，$DE = \mathrm{d}\rho = (\mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2)^{\frac{1}{2}}$ 是图 3 中 Q_1Q_2 的长度，取 $DF = \mathrm{d}l_1$，则由于这些参量均是与旋转椭球有关的，因此 $\dfrac{EF}{EG} = \dfrac{R_3}{R_1}$，现 $EF = \sqrt{\mathrm{d}l_1^2 - \mathrm{d}\rho^2}$，$EG = \sqrt{\mathrm{d}l_1'^2 - \mathrm{d}\rho^2}$，而 $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{DE}{EF} = \dfrac{\mathrm{d}\rho}{\sqrt{\mathrm{d}l_1^2 - \mathrm{d}\rho^2}}$，而 $\mathrm{tg}\,\alpha' = \dfrac{DE}{EG} = \dfrac{R_3}{R_1}\mathrm{tg}\,\alpha$，由图 4，有

$$\frac{\mathrm{d}l'}{\mathrm{d}l} = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha(1 + \mathrm{tg}^2\alpha')^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{tg}\,\alpha'(1 + \mathrm{tg}^2\alpha)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{1}{R_3^2}\left[R_1^2(y^2 + z^2) + R_3^2x^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{10}$$

由此就定出了椭球上的电荷分布．注意图 2，在半径为 R_3 的球形表面上 $\mathrm{d}S_1$ 和 $\mathrm{d}S_2$ 上的电荷在 p 点产生的电场互相抵消，当圆球膨胀成椭球但电荷不在表面上移动的条件下，$\mathrm{d}S_1'$ 及 $\mathrm{d}S_2'$ 上的电荷仍然为 $\mathrm{d}q_1$ 及 $\mathrm{d}q_2$，它们在 p' 点产生的电场互相抵消，这是因为 $A_1'p'/A_2'p' = A_1p/A_2p$ 的关系，由于 p 点是任意取的，因此 p' 点也是任意的，所假定的电荷分布使得椭球内任意一点的电场强度均为零，所以所得的分布是真实的电荷在旋转椭球表面上的分布，这个电荷密度为

$$\sigma' = \frac{\mathrm{d}q_1'}{\mathrm{d}S_1'} = \frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}S_1}\cdot\frac{\mathrm{d}l_1}{\mathrm{d}l_1'} = \frac{\sigma}{R_1\left[\dfrac{y^2 + z^2}{R_3^4} + \dfrac{x^2}{R_1^2R_3^2}\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{\sigma}{R_1\left(\dfrac{y'^2 + z'^2}{R_3^4} + \dfrac{x'^2}{R_1^4}\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{11}$$

这里 (x', y', z') 是椭球表面上与球面上 (x, y, z) 点相对应的点，

$$x' = \frac{R_1x}{R_3},\ y' = y,\ z' = z \tag{12}$$

将表达式 $\sigma = \dfrac{Q}{4\pi R_3^2}$ 代入(11)，我们求得了旋转椭球表面的电荷密度为

$$\sigma' = \frac{Q}{4\pi R_1R_3^2}\cdot\frac{1}{\left(\dfrac{x^2}{R_1^4} + \dfrac{y^2 + z^2}{R_3^4}\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{13}$$

这里我们已经将旋转椭球表面上坐标 (x', y', z') 改记为 (x, y, z)，而椭球表

面的方程式是$\frac{x^2}{R_1^2}+\frac{y^2+z^2}{R_3^2}=1$. 当 $R_1 \ll R_3$ 时椭球变成了圆面，圆面中心密度 σ_0 与边缘密度 σ_L 之比为 $\frac{\sigma_0}{\rho_L}=\frac{R_1}{R_3}\ll 1$；如果 $R_1 \gg R_3$，则是细长的针，这时 $\frac{\sigma_0}{\sigma_L}\gg 1$，即针就两端的电荷密度比腰上的电荷密度要大很多.

如果是三个主轴均不相等的椭球形导体，其表面方程为

$$\frac{x^2}{R_1^2}+\frac{y^2}{R_2^2}+\frac{z^2}{R_3^2}=1 \tag{14}$$

而表面的电荷密度可仿照上面讨论得出，其结果是

$$\sigma(x,\ y,\ z)=\frac{Q}{4\pi R_1 R_2 R_3}\cdot\left(\frac{x^2}{R_1^4}+\frac{y^2}{R_2^4}+\frac{z^2}{R_3^4}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{15}$$

③ 由于仅有电荷作为电场场源的情况下，电荷 $\boldsymbol{E}$ 的环量为零，因沿着金属椭球表面球内电荷的切向分量 $E_{内t}$ 与椭球紧处部的 E_t 相等：$E_{内t}=E_t$，但是我们已知 $E_{内t}=0$，因此 $\boldsymbol{E}$ 没有切向分量，即与表面垂直.

9. 已知长旋转椭球，其表面方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1$ 椭球上面带有电荷 Q，其表面的电荷密度 σ_e，$\sigma_e=\frac{Q}{4\pi b^2}\cos\alpha$，$\alpha$ 是所在点与椭球截面两个焦点分别连线夹角的一半，请证明之.

解：见下图，在 $z=0$ 平面上，椭球的截面是椭圆，其边界满足方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{1}$$

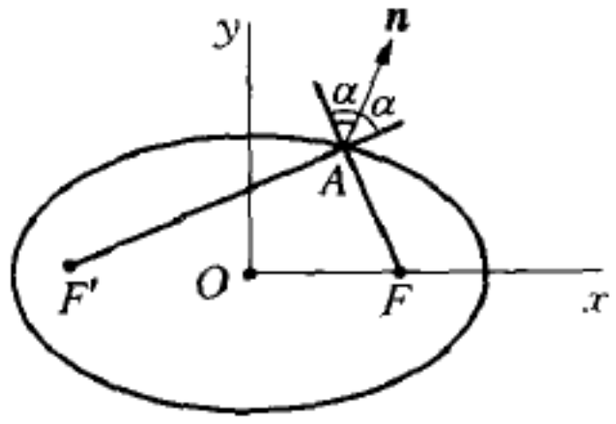


图 1

在 A：$(x,\ y)$上的切向方向$(\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}y)$所满足的方程，为(1)式求微分所得

$$\frac{x}{a^2}\mathrm{d}x+\frac{y}{b^2}\mathrm{d}y=0 \tag{2}$$

而法向方向由与切向$(\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}y)$正交的性质而被确定为是$(\mathrm{d}y,\ -\mathrm{d}x)$. 现在讨论法向单位矢量 $\boldsymbol{n}$，为了明确，我们选定 A 点在第一象限内(图 1)，则 $\boldsymbol{n}$ 的两个分量都为正，$\boldsymbol{n}\propto(\mathrm{d}y,\ -\mathrm{d}x)$，因此不妨认定$\mathrm{d}y>0$，$-\mathrm{d}x>0$，而

$$\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}=-\mathrm{d}x\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}=\mathrm{d}y\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2+1} \tag{3}$$

考虑这些限制，有 $\boldsymbol{n}$ 与 $(\mathrm{d}y, -\mathrm{d}x)$ 同方向，

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}}(\mathrm{d}y, -\mathrm{d}x) = \left(\frac{-\mathrm{d}y/\mathrm{d}x}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}}, \quad \frac{-\mathrm{d}x/\mathrm{d}y}{\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2 + 1}}\right)$$

$$= \left(\frac{\frac{x}{y}\cdot\frac{b^2}{a^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{b^2 x}{a^2 y}\right)^2}}, \quad \frac{\frac{y}{x}\cdot\frac{a^2}{b^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{a^2 y}{b^2 x}\right)^2}}\right) \tag{4}$$

而从焦点 F 连到 A 点的矢径 $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{FA}$，由此可确定 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 的夹角 α，$\cos\alpha = \boldsymbol{r}^\circ \cdot \boldsymbol{n}$，这里 $\boldsymbol{r}^\circ = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$，是矢径上的单位矢量，我们可以定出

$$\boldsymbol{r} = (x - \sqrt{a^2 - b^2}, \ y)\frac{1}{\left[y^2 + x^2 + a^2 - b^2 - 2x\sqrt{a^2 - b^2}\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{5}$$

以及

$$\cos\alpha = \boldsymbol{r}^\circ \cdot \boldsymbol{n} = \frac{x - \sqrt{a^2 - b^2} + \frac{y^2}{x}\cdot\frac{a^2}{b^2}}{\left[(y^2 + x^2 + a^2 - b^2 - 2x\sqrt{a^2 - b^2})\left(1 + \left(\frac{a^2 y}{b^2 x}\right)^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{-\sqrt{a^2 - b^2} + \frac{a^2}{x}}{\left\{\left[y^2 + (x - \sqrt{a^2 - b^2})^2\right]\left(1 + \left(\frac{a^2 y}{b^2 x}\right)^2\right)\right\}^{\frac{1}{2}}} \tag{6}$$

在这个推导中，我们注意到分子上根据椭圆方程有

$$x + \frac{y^2}{x}\cdot\frac{a^2}{b^2} = \frac{a^2}{x} \tag{7}$$

结果(6)在椭圆上端点即 $(0, b)$ 点有关系

$$\cos\alpha = \frac{a^2 b^2}{\left[(b^2 + a^2 - b^2)(a^2 b)^2\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{b}{a}$$

与几何直觉一致.

由(6)，有

$$\cos^{-2}\alpha = \left[-\sqrt{a^2 - b^2} + \frac{a^2}{x}\right]^{-2}\left[y^2 + (x - \sqrt{a^2 - b^2})^2\right]\left(1 + \left(\frac{a^2 y}{b^2 x}\right)^2\right)$$

$$= x^2 \frac{y^2 + (x - \sqrt{a^2 - b^2})^2}{\left[- x\sqrt{a^2 - b^2} + a^2\right]^2}\left(1 + \left(\frac{a^2 y}{b^2 x}\right)^2\right)$$

$$= \frac{y^2 + (x - \sqrt{a^2 - b^2})^2}{(- x\sqrt{a^2 - b^2} + a^2)^2} \cdot \left(x^2 + \frac{a^4 y^2}{b^4}\right) = a^2\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)$$

即

$$\cos\alpha = \frac{1}{a\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}} \tag{8}$$

而根据 4.8 题之(13)有(改写成本题所用的符号)

$$\sigma_e = \frac{Q}{4\pi a b^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{Q}{4\pi b^2}\cos\alpha \tag{9}$$

所以 σ_e 已求出. 另外,按照前面同样的讨论,可知另一个焦点 F' 与 A 的连线 $\overrightarrow{F'A}$ 与 n 的夹角也是 α,因此 α 是 $\angle F'AF$ 的一半,证毕.

10. 参见第 9 题,设无穷远处电势为零,则椭球表面电势 $U = \frac{Qp}{8\pi\varepsilon_0 b^2 e}\ln\left(\frac{1+e}{1-e}\right)$,这里 e 及 p 是椭圆参数,以椭圆焦点为中心有方程 $r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$, $p = \frac{b^2}{a}$,偏心率 $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$,试证明之.

解:参见第 9 题中所提及的各种参量和所得到的结果. 本处将椭圆方程形式. 参见图 1,以椭圆焦点 F 为中心椭圆方程

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta} \tag{1}$$

这里参数

$$p = \frac{b^2}{a} \tag{2}$$

e 为偏心率

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \tag{3}$$

参见图 2,在以 θ 和 $\theta + \mathrm{d}\theta$ 标记的椭球表面面积 $\mathrm{d}S$ 有关系

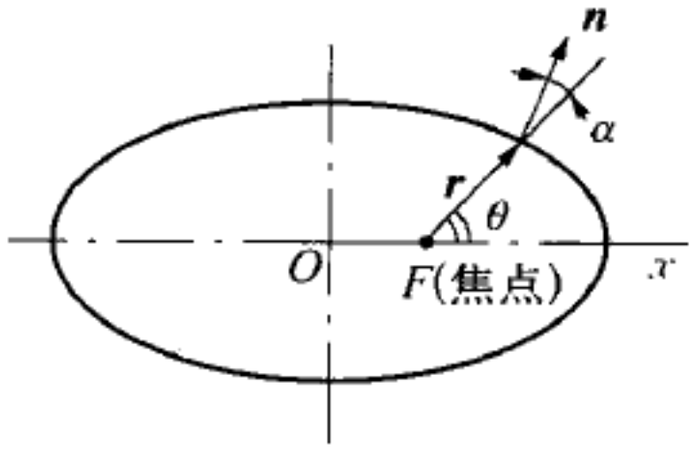


图 1

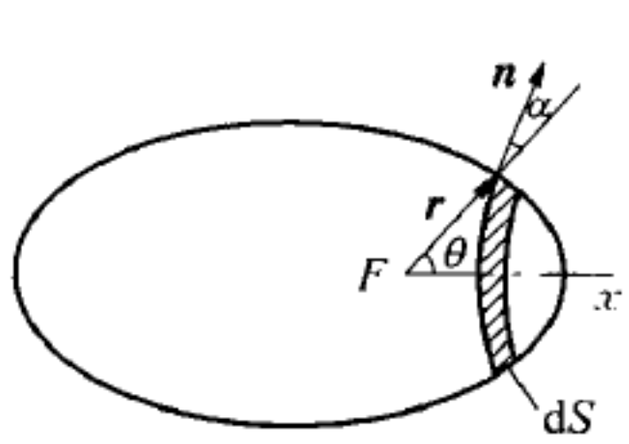


图 2

$$dS = 2\pi r\sin\theta \cdot \frac{r\,d\theta}{\cos\alpha} \tag{4}$$

而 dS 所带的电量

$$dQ = \sigma_e dS \tag{5}$$

而电荷面密度已在第 9 题给出：

$$\sigma_e = \frac{Q}{4\pi b^2}\cos\alpha \tag{6}$$

而带电椭球电势 U 相当于对 F 点的电势，因为整个椭球是个等势体：

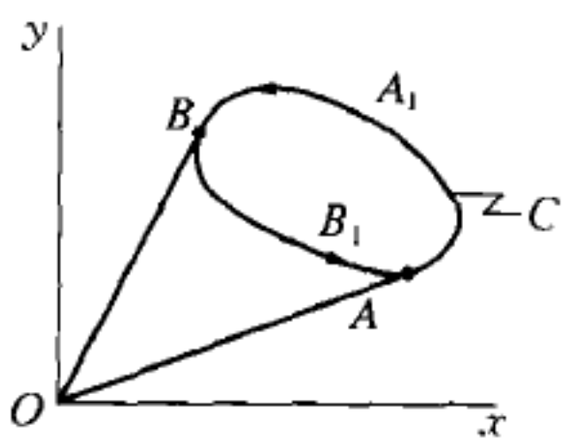
$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dQ}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\sigma_e dS}{r} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi}\frac{Q\cos\alpha}{4\pi b^2}\cdot 2\pi r\sin\theta\,\frac{r\,d\theta}{r\cos\alpha} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi}\frac{Q}{2b^2}\sin\theta\cdot\frac{p}{1+e\cos\theta} \\ &= \frac{Qp}{8\pi\varepsilon_0 b^2}\left[\frac{-1}{e}\ln(1+e\cos\theta)\right]\Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{Qp}{8\pi\varepsilon_0 b^2}\cdot\frac{1}{e}\ln\frac{1+e}{1-e} = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 a}\cdot\frac{1}{e}\ln\frac{1+e}{1-e} \end{aligned} \tag{1}$$

椭圆过渡到圆周时，$p = b = R_0$，$e \to 0$，$\frac{1}{e}\ln\frac{1+e}{1-e} \to 2$ (2)

$$U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_0}$$

与通常情况一致.

11. 如图，已知平面 xy 上有封闭的曲线 C，逆时针走向，证明 $S = \boldsymbol{e}_z \cdot \oint_C \frac{1}{2}\boldsymbol{r}\times d\boldsymbol{r}$ 是曲线 C 所包围的面积.



（第 11 题图）

解：$dS = \boldsymbol{e}_z \cdot \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}\times d\boldsymbol{r})$ 是 $d\boldsymbol{r}$ 对原点 O 所张的三角形的面积. 如图，从 O 点向曲线 C 作切线得 A 和 B 两个切点，可记

$$\boldsymbol{e}_z \cdot \oint_C \frac{1}{2}\boldsymbol{r}\times d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}_z \cdot \int_{AA_1B}\frac{1}{2}\boldsymbol{r}\times d\boldsymbol{r} - \boldsymbol{e}_z\int_{AB_1B}\frac{1}{2}\boldsymbol{r}\times d\boldsymbol{r} = S_1 - S_2$$

这里 S_1 是曲线 AA_1B 对原点 O 所张的面积，S_2 是 AB_1B 对 O 点所张的面积，而 $S_1 - S_2 = S$ 是曲线 C 所围的面积，证毕.

12. 已知某圆周的圆心在（x_0，y_0，z_0）处，半径为 R，圆面的法线单位矢量为 $\boldsymbol{n}$. 写出圆周的单参数方程，并且算出 $\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}\oint_C \boldsymbol{r} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} = ?$

解：

$$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}_0 \equiv \begin{pmatrix} x - X_0 \\ y - Y_0 \\ z - Z_0 \end{pmatrix}, \quad \text{记 } \hat{N} \equiv \begin{pmatrix} \dfrac{n_2}{(n_1^2 + n_2^2)^{\frac{1}{2}}} & \dfrac{-n_1}{(n_1^2 + n_2^2)^{\frac{1}{2}}} & 0 \\ \dfrac{n_3 n_1}{(n_1^2 + n_2^2)^{\frac{1}{2}}} & \dfrac{n_3 n_2}{(n_1^2 + n_2^2)^{\frac{1}{2}}} & -\sqrt{n_1^2 + n_2^2} \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix}$$

有 $\hat{N}\hat{N}^T = 1$ 及 $\hat{N}\boldsymbol{n} = \hat{N}\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

于是有

$$\begin{pmatrix} R\cos\phi \\ R\sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} = \hat{N}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}_0) \tag{1}$$

实际上，(1)式右方 $\hat{N}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}_0)$ 也是一个矢量，其第三个分量为

$$n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0) = 0 \tag{2}$$

正是表示圆周上一点(x, y, z)位于平面 P 上，此平面 P 过$\boldsymbol{R}_0 = (x_0, y_0, z_0)$点，以 $\boldsymbol{n}$ 为法线；又矢量 $\hat{N}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}_0)$的第一个分量的平方与第二个分量的平方相加的结果是

$$\frac{1}{n_1^2 + n_2^2}[n_2(x - x_0) - n_1(y - y_0)]^2 +$$

$$\frac{1}{n_1^2 + n_2^2}[n_3 n_1(x - x_0) + n_3 n_2(y - y_0) - (n_1^2 + n_2^2) \cdot (z - z_0)]^2 = R^2 \tag{2}$$

所以(1)左方的标记是合理的，由于 $\hat{N}^{-1} = N^T$，由(1)式解出

$$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}_0 = \hat{N}^{-1}\begin{pmatrix} R\cos\phi \\ R\sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} = \hat{N}^T\begin{pmatrix} R\cos\phi \\ R\sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

即 $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}_0$

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{n_2}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} & \dfrac{n_3 n_1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} & n_1 \\ \dfrac{-n_1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} & \dfrac{n_3 n_2}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} & n_2 \\ 0 & -\sqrt{n_1^2 + n_2^2} & n_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R\cos\phi \\ R\sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{R}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}}\begin{pmatrix} n_2\cos\phi + n_3 n_1\sin\phi \\ -n_1\cos\phi + n_3 n_2\sin\phi \\ -(n_1^2 + n_2^2)\sin\phi \end{pmatrix} \tag{3}$$

相应地

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{R\,\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1 - n_3^2}}\begin{pmatrix} -n_2\sin\phi + n_3 n_1\cos\phi \\ n_1\sin\phi + n_3 n_2\cos\phi \\ -(n_1^2 + n_2^2)\cos\phi \end{pmatrix}$$

而

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}_0) = \frac{R^2\,\mathrm{d}\phi}{1 - n_3^2}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} -(n_1\sin\phi + n_3 n_2\cos\phi)(n_1^2 + n_2^2)\sin\phi + (n_1^2 + n_2^2)\cos\phi(-n_1\cos\phi + n_3 n_2\sin\phi) \\ -(n_1^2 + n_2^2)\cos\phi(n_2\cos\phi + n_3 n_1\sin\phi) + (-n_2\sin\phi + n_3 n_1\cos\phi)(n_1^2 + n_2^2)\sin\phi \\ (-n_2\sin\phi + n_3 n_1\cos\phi)(-n_1\cos\phi + n_3 n_2\sin\phi) - (n_1\sin\phi + n_3 n_2\cos\phi)(n_2\cos\phi + n_3 n_1\sin\phi) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{R^2\,\mathrm{d}\phi}{1 - n_3^2}\begin{pmatrix} -(1 - n_3^2)n_1 \\ -(1 - n_3^2)n_2 \\ -n_3(n_1^2 + n_2^2) \end{pmatrix} \rightarrow \boldsymbol{S} = \frac{1}{2}\oint_C \boldsymbol{r} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{1}{2}\oint_C \mathrm{d}\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}_0) = \pi R^2 \boldsymbol{n} \tag{4}$$

参考资料

1. 赵凯华，陈熙谋编. 电磁学，高等教育出版社，1989 年.

2. 越树智，宋汉阁主编. 科学的突破. 科学出版社，1998 年.

3. 胡友秋，程福臻，刘之景编. 电磁学，高等教育出版社，1994 年.

4. 孙宗扬编. 电磁学(讲义)，1991 年.

5. (美)哈立德，瑞斯尼克，沃克著. 张三慧，李椿等译. 物理学基础，机械工业出版社，2005 年.

第 5 章　电学和磁学的内在对称性

在上一章我们讨论了电学和磁学在形式上的对称性，当然要首先讨论的是电学方面的规律，因为这方面的规律是人们长期所关注的，并且是有条件取得精确结果的. 与之相对照，磁学方面不存在与电学中电荷相对应的“荷”的场源，有磁场但没有场源这是令人费解的现象. 谢谢工作十分努力的安培(A. M. Ampére 1775—1836)，给出了很有启发性的解释，上一章已经谈到，所谓磁场，是指磁荷在该场中受到作用力，特别磁偶极子在该场中受到力矩，磁荷没有被发现，当然磁偶极子也未能在实际中找到，但安培先生明确地指出了代替物，这就是安培分子电流假说，磁场对磁偶极子(磁针)的作用，其实可以在对封闭电流线圈的作用上表达了出来. 安培在电磁学基本测量方面下了很大气力，作了一些基础性的工作，但相对法拉第而言，他没有遇到象发现电磁感应定律那样的机遇，错过了有最重大发现的机会. 与之相比，欧洲文艺复兴之后，彪炳物理史册的人物大都出自英国，试看牛顿、法拉第、麦克斯韦、狄拉克(P. Dirac, 1902—1984)的关键性成就，给人以高山仰止之感. 法国人安培未曾有过这种量级的发现及成就，但是他的分子电流假说，也是一个睿智的见解，他提出的原意是为在磁学中必须要引进磁荷(磁偶极子、磁针)这一从未发现过的对象解套，把所有磁学上的测量结果归结为：以电流为场源产生磁场，而又以电流为感受者(测试者)感知磁场(标定磁场). 从安培及他以后的百余年的物理学工作者看来：电荷产生电场，而电流产生磁场，从这种观点出发，我们得到了一系列数据和规律. 但是近百年以来，随着对称性规律在物理学中的作用日显其重要性，而根据安培电流假设而建立的理论显得日渐别扭，人们于是探讨其中到底在什么地方出

了偏差①.经过探索,我们逐渐明白了:出现了一些不自然的地方是因为我们没有找到恰当的对称性(不自然之处将在以后解释),在有自然对称性的理论中,我们需要保留磁荷的观念,而安培分子电流假说的作用却在于指出磁学中的两种源:磁荷及电流,它们之间有某种关联.根据这种关联,我们可以完全模仿着电学结果来整理磁学结果.在现代,我们以这种方式来理解分子电流假说,这也是本章讨论的根据.这可能并非"众里寻他千百度,蓦然回首,那人却在灯火阑珊处"似的终于解决了全部问题,但至少有"山重水复疑无路,柳暗花明又一村"似的有所发现.上一章已经讨论了安培分子电流假说在测量磁场中的作用,本章将讨论它在形成磁场中的作用.

5.1　磁场 H 的性质

我们从电荷和磁荷的形式对应关系转入到电流线圈和磁偶极子的替代关系,从与磁荷有关的规律推出与电流有关的规律,这已经进入了电磁内在对称性的研究,本节先从研究磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 的特性开始,然后过渡到对称性的内在关系的研究.从磁学和电学的形式对称性看来,比照着电场场源是电荷的情况,磁场场源应当是磁荷,从这个角度看来,磁场 $\boldsymbol{H}$ 自然是有位场,或者说存在着磁势 $\varphi_M(\boldsymbol{r})$有关系

$$\boldsymbol{H} = -\nabla \varphi_M(\boldsymbol{r}) \tag{5.1.1}$$

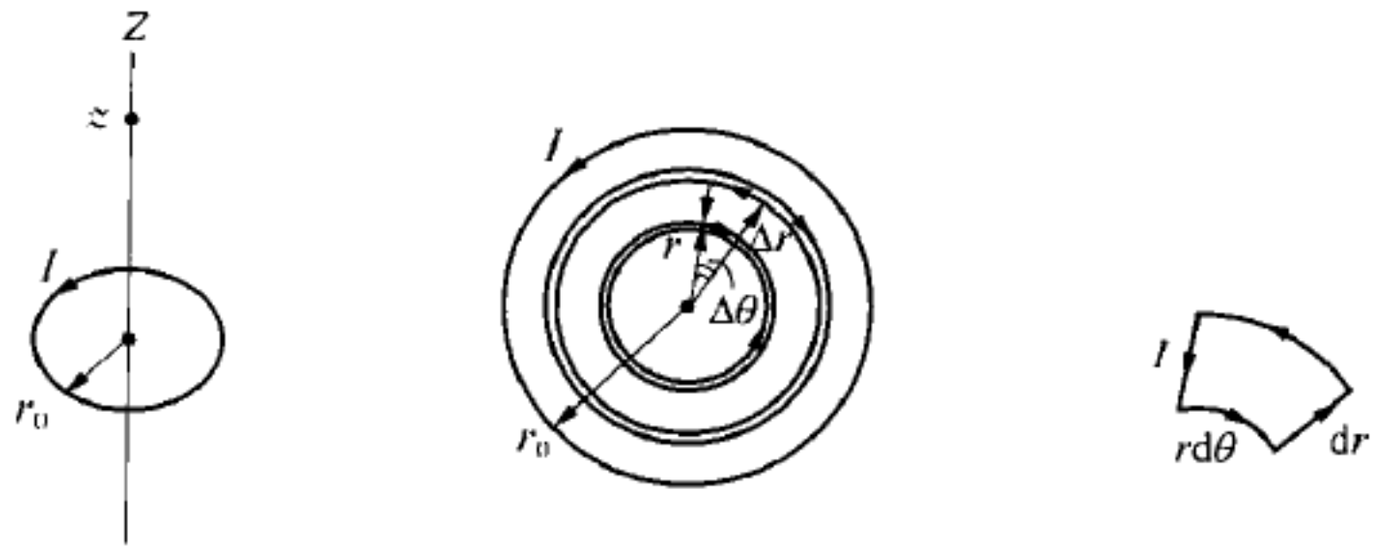
可以与(4.2.22)的电学情况相比较,这里下标 M 表示我们所涉及的是磁学(Magnetism).如果(5.1.1)式成立,它当然是无旋场,或者仿照电学的情况,是物理场,但在引进新的场源(电流)情况会有所改变,我们将着重讨论这一情况.

---

① 运动物体概论(讲义),屠善澄,1962 年,中国科学技术大学.

5.1.1 磁场 $\boldsymbol{H}$ 的环路定理

如图 5.1(a)所示，半径为 r_0 的圆周有电流 I，这时在圆周内部加上若干同心圆及从原点发出的射线将圆周内部分割成若干小网络(图 5.1(b))；图 5.1(c)所示的是其中的一个单元，每个单元对应于一个磁偶极子



(a)　(b) 半径为r_0的圈电流I(放大)　(c) 单元(放大)

图 5.1

$$\Delta \boldsymbol{p}_m = \mu_0 I r \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta \boldsymbol{e}_z \tag{5.1.2}$$

这里 $\Delta s = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$ 是半径为 r_0 的一个小单元，这些小单元合在一起总的成场效果与上述半径为 r_0 的圆周电流 I 相当. 设小单元的位置由极坐标(r, θ)确定，则圆周电流 I 在 z 点的磁场 $\boldsymbol{H}$ 为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}(z) = \int_0^{r_0} r\mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \frac{1}{4\pi\mu_0} \Bigg\{ & \frac{-\mu_0 I \boldsymbol{e}_z}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \\ & + \frac{3\mu_0 I z}{(z^2 + r^2)^{\frac{5}{2}}} (z\boldsymbol{e}_z - r\cos\theta \boldsymbol{e}_x - r\sin\theta \boldsymbol{e}_y) \Bigg\} \\ = & -\frac{I r_0^2}{2(z^2 + r_0^2)^{3/2}} \cdot \boldsymbol{e}_z \end{aligned} \tag{5.1.3}$$

从(5.1.3)可求出 $\boldsymbol{H}$ 沿 z 轴的积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{e}_z \mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I r_0^2 \mathrm{d}z}{2(z^2 + r_0^2)^{3/2}} = I \tag{5.1.4}$$

(5.1.4)表示，对于可以当作是封闭曲线 C 的 z 轴而言，我们有

$\oint_C \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{e}_z \mathrm{d}z = I \neq 0$，因此它不是以磁荷作为场源的物理场(仿照电学中的相应说法).下面我们分析这种颇为出人意料的结果的成因.在本段的讨论中，我们之所以能够得到(5.1.3)的 $\boldsymbol{H}(z)$表达式，前提条件是将圆圈电流 I 用了一系列磁偶极子去代替，这里场源的相互代替仅限于半径为 r_0 的圈电流所包含的圆面附近，除去这一区域，轴线上的场强$\boldsymbol{H}(z)$可以精确算出，而圆面附近区域，由于电流作为磁场场源的成场连续性，计算场强的(5.1.3)式可以认为仍然适用，但是这里已经利用了取连续性的间接数学运算，其原因在于我们利用磁偶极子概念时，其中已经应用了取极限的间接数学运算.为了尽量减少物理意义不那么明确的间接数学运算，下一段我们用有一定高度的短粗圆柱形线圈去代替本段的圆形线圈，这里可用对磁荷代替磁偶极子，避免了一个容易出计算差错的取极限过程.

5.1.2　短粗柱形壳电流在轴线上的磁场强度

参见图 5.2，有一高度为 Δ，半径为 r_0 短粗圆柱壳(螺线管)，其轴线中心选为原点 O，坐标架的选择方式在图的左上方给出，侧面流有电流，电流线密度(单位长度匝数)为

$$\eta = \frac{I}{\Delta} \tag{5.1.5}$$

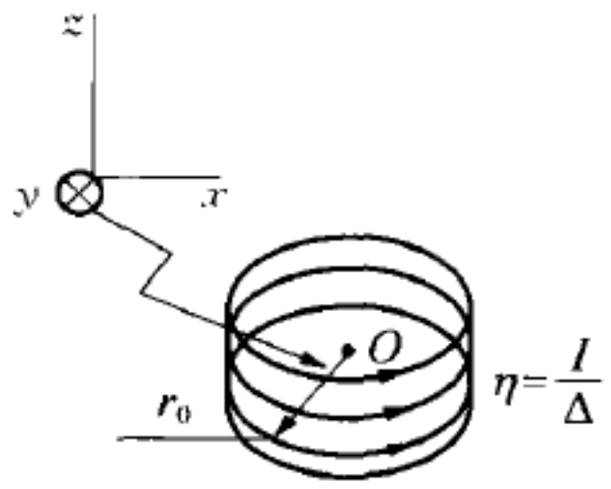


图 5.2

I 是在沿侧面流过的总的电流大小.参见(5.1.3)，轴线上 z 一点的磁场强度 $\boldsymbol{H}(z) = H(z)\boldsymbol{e}_z$ 按下式计算

$$\begin{aligned} H = H(z) &= \frac{1}{2} r_0^2 \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \eta \mathrm{d}z' \cdot \frac{1}{[r_0^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \\ &= \frac{1}{2} r_0^2 \eta \int_{-\frac{\Delta}{2}-z}^{\frac{\Delta}{2}-z} \mathrm{d}z'' \frac{1}{(r_0^2 + z'')^{3/2}} = \frac{1}{2}\eta \int_{-(\frac{\Delta}{2}+z)/r_0}^{(\frac{\Delta}{2}-z)/r_0} \frac{\mathrm{d}z'''}{(1 + z'''^2)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{2}\eta \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \frac{\sec^2\alpha \mathrm{d}\alpha}{(1 + \sec^2\alpha)^{3/2}} = \frac{1}{2}\eta(\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2) \end{aligned}$$

$$= \frac{I}{2\Delta}\left[-\frac{\frac{\Delta}{2}-z}{\left[\left(\frac{\Delta}{2}-z\right)^2+r_0^2\right]^{1/2}}+\frac{\frac{\Delta}{2}+z}{\left[\left(\frac{\Delta}{2}+z\right)^2+r_0^2\right]^{1/2}}\right] \tag{5.1.6}$$

这里角度参数 α_1，α_2 满足关系

$$\tan\alpha_1 = \left(\frac{\Delta}{2}-z\right)\Big/ r_0,\ \tan\alpha_2 = -\left(\frac{\Delta}{2}+z\right)\Big/ r_0 \tag{5.1.7}$$

当 $\Delta \to 0$，$H(z)$

$$\to \frac{I}{2\Delta}\left[\frac{\left(\frac{\Delta}{2}-z\right)}{(r_0^2+z^2-z\Delta)^{1/2}}+\frac{\frac{\Delta}{2}+z}{(r_0^2+z^2+z\Delta)^{1/2}}\right]$$

$$= \frac{I}{2\Delta}\left[\left(\frac{\Delta}{2}-z\right)\left(1+\frac{1}{2}\frac{z\Delta}{r_0^2+z^2}\right)+\left(\frac{\Delta}{2}+z\right)\left(1-\frac{1}{2}\frac{z\Delta}{r_0^2+z^2}\right)\right]\Big/(r_0^2+z^2)^{1/2}$$

$$= \frac{I}{2}\left[1-\frac{z^2}{r_0^2+z^2}\right]\Big/(r_0^2+z^2)^{1/2} = \frac{I}{2}\frac{r_0^2}{(r_0^2+z^2)^{3/2}}$$

与(5.1.3)一致，但是从(5.1.6)出发便于与等效磁荷(或等效对磁荷)的计算方式相比较，从而找出它们之间相同点及相异点.现在用磁荷系统去代替图 5.2 的电流系统，这时相当于上表面有均匀的磁荷分布，其面密度

$$\sigma_m = \mu_0\eta = \mu_0\frac{I}{\Delta} \tag{5.1.8}$$

而下表面的磁荷密度为 $-\sigma_m$. 为了计算这个系统在轴上各点所产生磁场，我们可以利用有势场的性质，算出图 5.3 所示的磁荷系统：一个半径为 r_0 的圆盘，上有密度为 σ_m 的均匀分布磁荷，放在 xy 平面上，其中心是原点 O，则在轴线上一点的磁场强度 $\boldsymbol{H}_{\text{辅}} = H_{\text{辅}}(z)\boldsymbol{e}_z$ 有关系(参见习题 5.1)

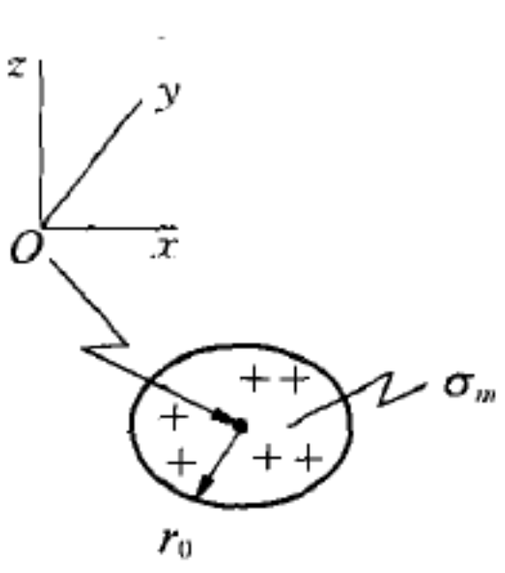


图 5.3

$$H_{\text{辅}} = \frac{\sigma_m}{2\mu_0}\left[\frac{z}{|z|}-\frac{z}{(r_0^2+z^2)^{1/2}}\right] \tag{5.1.9}$$

利用这个公式并且参考图 5.2，注意到感应磁荷

密度 σ_m 的圆面位于 $z=\frac{\Delta}{2}$ 处，感应 $-\sigma_m$ 的在 $z=-\frac{\Delta}{2}$ 处，于是利用(5.1.9)，磁荷系统在轴上产生的磁场为：在下面的有关 $z>\frac{\Delta}{2}$ 及 $z<-\frac{\Delta}{2}$ 区段中，我们将它们写在一起，但 $z>\frac{\Delta}{2}$ 取 ± 1 处的 $+$ 号；$z<\frac{-\Delta}{2}$ 取 ± 1 处的 $-$ 号，

$$H=H(z)=\frac{\sigma_m}{2\mu_0}\left[\pm 1-\frac{z-\frac{\Delta}{2}}{\left[r_0^2+\left(z-\frac{\Delta}{2}\right)^2\right]^{1/2}}-\left(\pm 1-\frac{z+\frac{\Delta}{2}}{\left[r_0^2+\left(z+\frac{\Delta}{2}\right)^2\right]^{1/2}}\right)\right]$$

$$=\frac{\sigma_m}{2\mu_0}\left[\frac{\frac{\Delta}{2}-z}{\left[r_0^2+\left(\frac{\Delta}{2}-z\right)^2\right]^{1/2}}+\frac{\frac{\Delta}{2}+z}{\left[r_0^2+\left(\frac{\Delta}{2}+z\right)^2\right]^{1/2}}\right] \tag{5.1.10}$$

这个结果与(5.1.6)一致.现在计算在 $-\frac{\Delta}{2}<z<\frac{\Delta}{2}$ 时的磁场强度 $H'(z)$，这里用 H' 是因为这个结果与电流情况下的磁场 H 有所不同，我们注意在本处有 $z-\frac{\Delta}{2}<0$ 及 $z+\frac{\Delta}{2}>0$，仿照(5.1.10)的讨论，我们可以写出

$$H'(z)=\frac{\sigma_m}{2\mu_0}\left[-1-\frac{z-\frac{\Delta}{2}}{\left[r_0^2+\left(z-\frac{\Delta}{2}\right)^2\right]^{1/2}}-\left(1-\frac{z+\frac{\Delta}{2}}{\left[r_0^2+\left(z+\frac{\Delta}{2}\right)^2\right]^{1/2}}\right)\right]$$

$$=-\frac{\sigma_m}{\mu_0}+H(z) \tag{5.1.11}$$

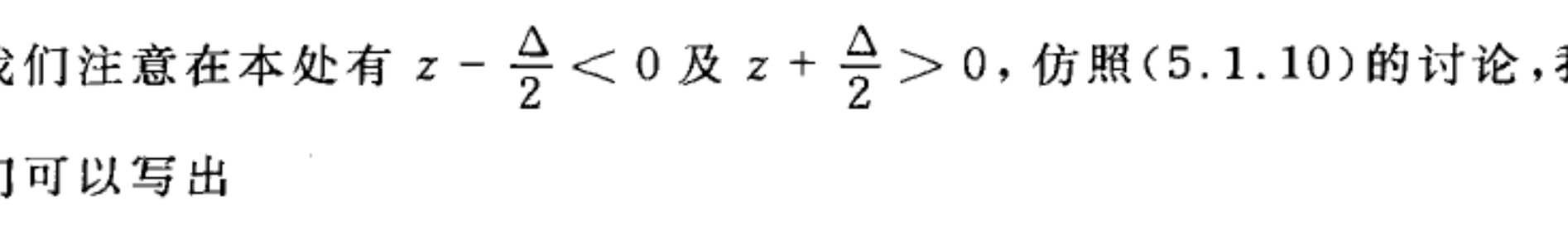


图 5.4

这里 $H(z)$ 的表达式与(5.1.10)的右端所示的相同.现在我们解释关系(5.1.11)，参见图 5.4，我们计算螺线管内的磁场(见(a))，我们需要(b)所

示的磁荷系统，也就是说对于所示的内部区域的磁场来说，这两个系统所产生的磁场都是 $H(z)$，注意图(b)中间空缺的部分上没有磁荷．而(c)图是我们正在讨论的磁荷系统，其中的磁场为 $H'(z)$，将图(b)的磁荷系统与图(c)磁荷结构系统相减，就形成了图(d)所示的磁荷结构系统，这是两片互相平行的板，两板距离为 Δ，上板磁荷密度为 $-\sigma_m$，下板为 σ_m，板间的磁场 $H_d = H(z) - H'(z)$．但从平板电容器板间的电场强度公式，可以推出 $H_d = \frac{\sigma_m}{\mu_0}$，因此我们有 $H(z) - H'(z) = 0$，$|z| \geqslant \frac{\Delta}{2}$

$$H(z) - H'(z) = \frac{\sigma_m}{\mu_0} \quad \left(|z| < \frac{\Delta}{2}\right) \tag{5.1.12}$$

此式与(5.1.11)关系相同．我们注意到 $\int_{-\infty}^{\infty} H(z)\mathrm{d}z = I$ 不为零，不符合无旋，或有位，条件，但

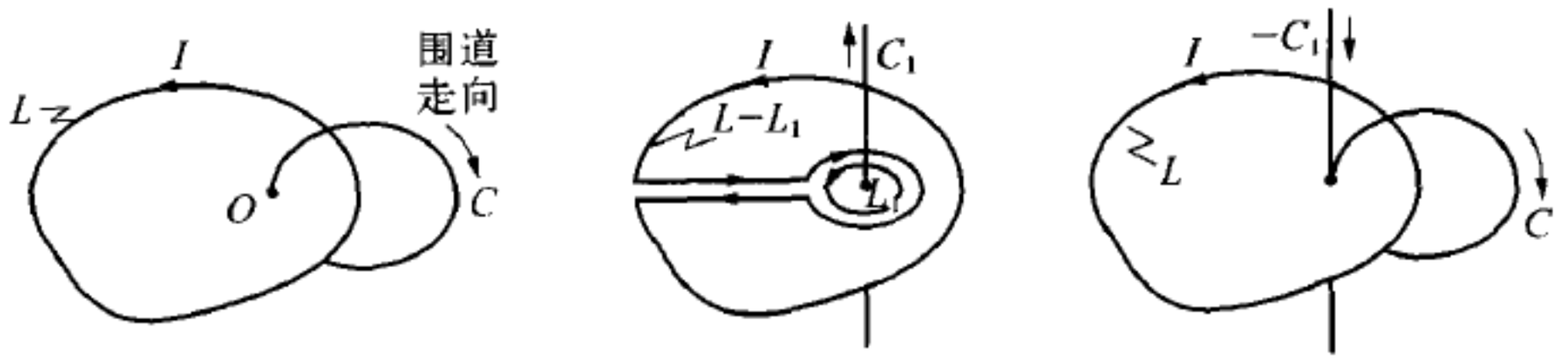
$$\int_{-\infty}^{\infty} H'(z)\mathrm{d}z = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \left(-\frac{\sigma_m}{\mu_0}\right)\mathrm{d}z + \int_{-\infty}^{\infty} H(z)\mathrm{d}z = -\frac{\sigma_m \Delta}{\mu_0} + I = 0 \tag{5.1.13}$$

这表明由磁荷场源产生的有位磁场 $H'(z)$，在它转换成电流源的 $H(z)$ 时，因为上下端面所夹的区域中磁场并不相同，所以磁场不再是有位场了．那么它还是不是物理场呢？这个问题比较复杂，下面将作进一步的分析．

5.1.3 一般情况下的磁场环路定理

现在考虑围道 C 与电流线圈 L 相套的情况，参见图 5.5(a)，将围道 C 与线圈 L 所在平面的交点记为 O，选为坐标原点；现在暂不考虑一般围道 C，而代之以考虑过 O 点与 L 所在平面垂直的无穷长直线 C_1(图 5.5(b))，求在 C_1 直线上的 $\boldsymbol{H}$ 积分．在计算时，选 C_1 直线为 Z 轴，其上的单位矢量为 e_z．在 C_1 上各点磁场 $\boldsymbol{H}$ 由流过 L 导线的电流 I 所产生，但也可以它由下面三部分电流所产生：① L，电流 I；② L_1，半径为 r_0 的圆形线圈，圆心为 O，在 L 平面上，电流 I，逆时针；③ L_1，电流 I，顺时针，这种情况记为 $-L_1$．由于② L_1 及③ $-L_1$ 电流互相抵消，所以加上它们对磁场不产生影

响，记



(a)　(b)　(c)

图 5.5

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_1 + \boldsymbol{H}_2 \tag{5.1.14}$$

$\boldsymbol{H}_1$ 是 L_1 所产生的磁场，$\boldsymbol{H}_2$ 是 $L - L_1$ 所产生的磁场①；$\boldsymbol{H}_1$ 在 C_1 上的积分由(5.1.4)有 $\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{H}_1 \cdot \boldsymbol{e}_z \mathrm{d}z = I$；而 C_1 在 $L - L_1$ 外部，由 $L - L_1$ 闭路线圈，(包括两条重叠在一起的电流之和为零的两条割线，参见图 5.5(b)中两条略为分开的平行线段)产生的 $\boldsymbol{H}_2$ 等于可代替的磁偶极子组所产生的磁场，因此 $\boldsymbol{H}_2$ 是有位场，$\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{H}_2 \cdot \boldsymbol{e}_z \mathrm{d}z = 0$，这样有

$$\oint_{C_1} \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = I \tag{5.5.15}$$

现在讨论围道 C 上的环量 $\oint_C \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$，参见图 5.5(c)相对于围道 $-C_1 + C$ 而言，线圈 L 在其外部，因此有

$$0 = \oint_{-C_1+C} \boldsymbol{H}\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\oint_{C_1} \boldsymbol{H}\mathrm{d}\boldsymbol{r} + \oint_C \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \Rightarrow$$

$$\oint_C \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \oint_{C_1} \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = I \tag{5.1.16}$$

如果不止一条电流而有若干条电流，利用场源产生磁场的叠加原理，可推出

$$\oint_C \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \sum_j I_j \tag{5.1.17}$$

这里 I_j 穿过以 C 为边界的曲面，以 C 的走向为准按右手方向穿过的 I_j 为

---

① $L-L_1$ 所产生的磁场是指由线圈 L 及 $-L_1$ 所产生的磁场的叠加；线圈 $-L_1$ 与 L_1 的关系是两者形状相同但电流流向相反.

正,反之为负.

安培全电流定理:环量$\oint_C \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$等于穿过以$C$为边界的曲面$S$上电流的代数和.

5.2 无穷长直导线所产生的磁场

5.2.1 在计算直线电流所产生的磁场时场源用磁偶极子替代

参见图5.6,设有电流为I的无穷长直导线,放置在y轴上,x轴指向右方,现在求位于x轴上与原点相距l一点A上的磁场$\boldsymbol{H}$.

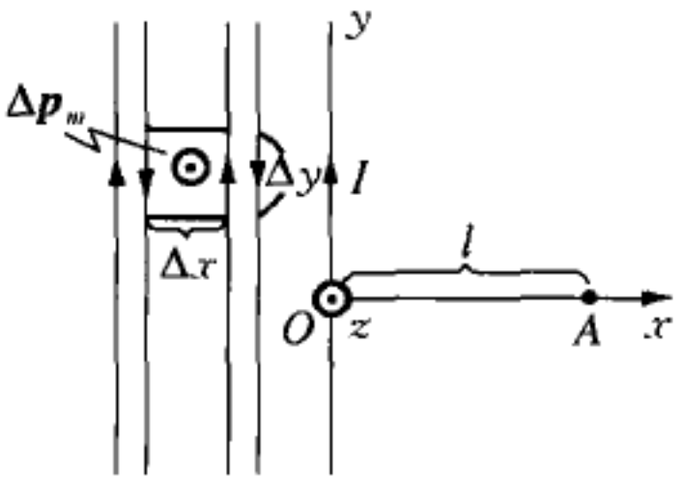


图5.6

到现在为止,我们还不懂得电流$\boldsymbol{I}$的成场规律,但我们懂得,每一个电流闭路线圈可用磁偶极子代替,为了计算出A点的$\boldsymbol{H}$,在y轴的左侧安下若干与y轴平行的直线,每条直线都由两条靠在一起的导线组成,一条线的电流沿y轴的正向,另一条为反向,所以对外场并不产生影响.我们选择一条向上流动的导线和它的相邻左侧向下流动的导线,这两条导线组成一条带子,带子中一个小方格可用磁偶极子

$$\Delta \boldsymbol{p}_m = \mu_0 \boldsymbol{I}\Delta x\Delta y\boldsymbol{e}_z \tag{5.2.1}$$

这里$\boldsymbol{e}_z$是z轴的单位矢量,由右手螺旋规则确定.利用磁偶极子成场公式,$\Delta \boldsymbol{p}_m$在A点产生的磁场为

$$\Delta \boldsymbol{H} = \frac{1}{4\pi\mu_0 r^3}(-\Delta \boldsymbol{p}_m) = \frac{-\boldsymbol{I}\Delta x\Delta y\boldsymbol{e}_z}{4\pi\left[(l-x)^2+y^2\right]^{3/2}} \tag{5.2.2}$$

而所有位于y轴左方的磁偶极子在A点的总的成场效应也就是沿y轴流动的直线电流I在A点的效应.

因此

$$\boldsymbol{H} = \sum \Delta \boldsymbol{H} = \frac{-\boldsymbol{e}_z}{4\pi} \int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y \frac{\boldsymbol{I}}{[(l-x)^2 + y^2]^{3/2}} = -\frac{\boldsymbol{I}}{2\pi l} \boldsymbol{e}_z \tag{5.2.3}$$

5.2.2　两根导线之间的作用力

参见图 5.7，考虑两条互相平行的两条无穷长直导线，它们之间距离为 d，各条导线内流过的电流都是 I，流向一致. 按照第一段的讨论，左侧直线电流在右侧电流处的磁场为 $H = \frac{I}{2\pi \mathrm{d}}$ 而其上长度为 Δl 的线段在磁场 H 中所受的力 ΔF 由(4.6.13)可知

$$\Delta F = \mu_0 I \Delta l \cdot \frac{I}{2\pi \mathrm{d}} \tag{5.2.4}$$

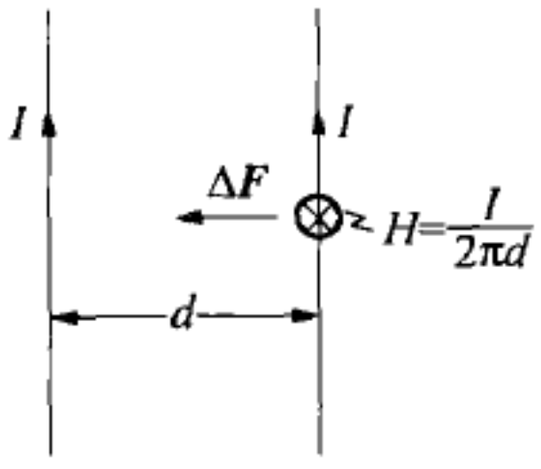


图 5.7

5.2.3　电流的单位

在(5.2.4)中，如果令 $\Delta l = \mathrm{d} = 1$ 米，$I = 1$ 电流单位，则作用力

$$\Delta \boldsymbol{F} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} = 2 \times 10^{-7} \text{ 牛顿} \tag{5.2.5}$$

符合这种性质的电流单位叫做安培. 国际计量委员会在正式文件中称：①

—安培电流定义为

“一恒定电流(按即指一安培电流)，若保持在处于真空中相距 1 米的两无穷长、而圆截面可忽略的平行直导线内，则在此两导线之间产生的力在每米长度上等于 2×10^{-7} 牛顿.”

这个定义为我国所采用，收录到中华人民共和国标准《国际单位制及其应用(The international system of units and its application)》中去. 此标准经国家标准总局批准，1982 年 5 月 3 日发布，1983 年 7 月 1 日实施.

---

① 赵凯华，陈熙谋. 电磁学(上册)，高等教育出版社，1992 年，第 388 页.

5.3 在介质中的磁场

5.3.1 磁介质

我们曾经讨论过电介质，参见 4.3.1，按照对应原则，可仿照图 4.6 画出磁介质单元及其在磁场 $\boldsymbol{H}$ 作用下的极化规律. 参见图 5.8，一个边长为 Δl 的立方体单元，在沿棱的磁场 $\boldsymbol{H}$ 作用下上底感应出磁荷 $q_m = \sigma_m \Delta l^2$，$\sigma_m$ 是磁荷面密度，下底感应出的磁荷为 $-q_m$，这个立方单元极化的结果是出现了一个感应磁偶极子 $\Delta \boldsymbol{p}_m = \Delta q_m \cdot \Delta \boldsymbol{l}$，磁极化强度矢量 $\Delta \boldsymbol{P}_m = \Delta \boldsymbol{p}_m / \Delta l^3 = \sigma_m \Delta \boldsymbol{l} / \Delta l = \sigma_m \boldsymbol{e}_z$，这里我们选定 $\boldsymbol{H} = H\boldsymbol{e}_z$. 与对电介质的讨论相同，因介质极化而移出 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 面极化磁荷 $\mathrm{d}q'_m = \mathrm{d}\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{P}_m$，而因极化而留在封闭曲面 S 内的磁荷为

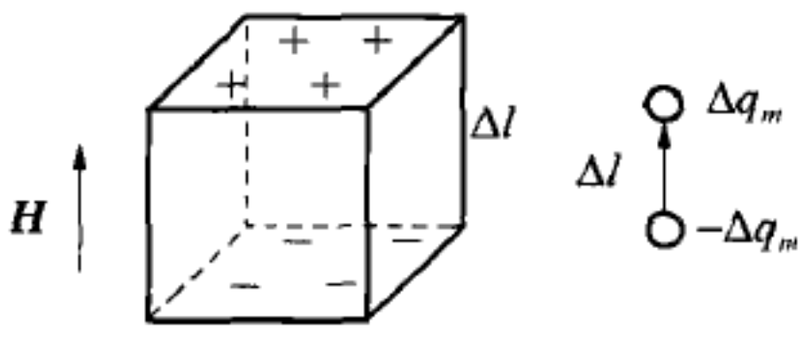


图 5.8

$$Q'_m = -\oiint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{P}_m \tag{5.3.1}$$

仿照电介质的理论，有关系

$$\boldsymbol{P}_m = \chi_m \mu_0 \boldsymbol{H} \tag{5.3.2}$$

定义磁感应强度（或磁通密度）$\boldsymbol{B}$，这是个辅助量

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} + \boldsymbol{P}_m = \mu \mu_0 \boldsymbol{H} \tag{5.3.3}$$

这里介质的导磁系数 μ 与介质的磁极化系数 χ_m 有关，

$$\mu = 1 + \chi_m \tag{5.3.4}$$

而磁场通量

$$\Phi_{\boldsymbol{H}} = \oiint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0}(Q_{m0} + Q'_m) \tag{5.3.5}$$

与总磁荷 $Q = Q_{m0} + Q'_m$ 有关，这里 Q_{m0} 是外界设定磁荷（自由磁荷），而

Q'_m 是感应磁荷.但 $\boldsymbol{B}$ 通量(或磁通)

$$\Phi \equiv \Phi_{\boldsymbol{B}} = \iint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{B} = Q_{m0} \tag{5.3.6}$$

只与自由磁荷有关,如果没有 Q_{m0},则 $\iint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{B} = 0$,这就是 $\boldsymbol{B}$ 的连续性性质.

5.3.2　用代替法研究磁介质

参见图 5.9,应用安培代替原则(分子电流假说),磁偶极子应当用闭路电流代替,因此图 5.8 所示的立方单元的极化相当于在侧面上出现了感应电流,设沿 $\boldsymbol{H} = H\boldsymbol{e}_z$ 方向单位长度上的电流为 η,η 的方向是右手螺旋方向 $\boldsymbol{\eta} = \eta \boldsymbol{e}_z$,由替代关系 $\mu_0 \eta \Delta l \cdot \Delta l^2 = P_m \Delta l^3$,

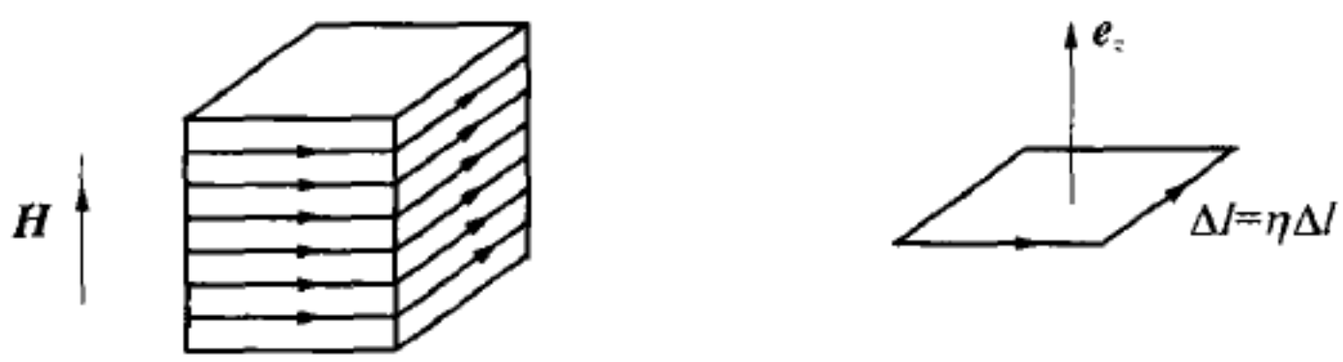


图 5.9

$$\mu_0 \eta = P_m = \sigma_m \tag{5.3.7}$$

而在 $\Delta \boldsymbol{r}$ 能够链住的电流,即环绕 $\Delta \boldsymbol{r}$ 的闭线圈上流动的电流,$\Delta I = \Delta \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\eta} = \Delta \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{P}_m / \mu_0$.而

$$\oint_C \mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\eta} = I' \tag{5.3.8}$$

这里 I' 是因感应而穿过以 C 为边界的曲面 S 的电流的代数和.由(5.3.3)

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} + \boldsymbol{P}_m \tag{5.3.9}$$

注意物理场 $\boldsymbol{H}$ 是由外界设定电流及因感应而产生的磁荷联合产生的,由于磁荷产生部分的磁场 $\boldsymbol{H}_2$ 是有位场,因此有 $\oint_C \boldsymbol{H}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$,而由设定电流所产生的磁场 $\boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}_2$,根据安培全电流定律有

$$\oint_C \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \oint_C \boldsymbol{H}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = I_0 \tag{5.3.10}$$

这里 I_0 是穿过以 C 为边界的曲面 S 的外界设定电流的代数和，I_0 简称为自由电流.由(5.3.7)～(5.3.9)有

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mu_0 \oint_C (\boldsymbol{H} + \boldsymbol{\eta}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mu_0 (I_0 + I') = \mu_0 I \tag{5.3.11}$$

这里 I 是采用安培分子电流假说之后的全部电流，$I = I_0 + I'$ 包括自由电流 I_0 及感应电流 I'.从(5.3.11)看到 $\boldsymbol{B}$ 环量与全部电流有关；而从(5.3.10)$\boldsymbol{H}$ 环量只与自由电流 I_0 有关.从这个角度看来，$\boldsymbol{B}$ 更像是物理量，而 $\boldsymbol{H}$ 是在计算环量时显得比较方便的辅助量.总结上面的讨论，我们得到结论：

如果认为在磁介质中感应出来的是电流，则 $\boldsymbol{B}$ 是物理量，$\boldsymbol{H}$ 是辅助量；

如果认为在磁介质中感应出来的是磁荷，则 $\boldsymbol{H}$ 是物理量，$\boldsymbol{B}$ 是辅助量.

本处我们确定物理量或辅助量的准则来自积分定理，物理量的积分关系中包含自由场源和感应场源，而辅助场中只有自由场源.但物理场或辅助场与场源的关系是：物理场原则上应当由场源生成，即物理场应当各个元场源按照已知的成场规则所产生的场强叠加起来，而辅助场则不具备这一性质，这样的说法更与通常的理解相符，本节的剩下的篇幅将在这一角度阐释问题.

5.3.3 边界条件

在有多个均匀介质存在的空间中，在两个介质的分界面上则在其两方的场量有一定的关系，这个关系我们称为是边界条件.如果认为磁性介质中感应出来的是磁荷，则在这种介质条件下的处理方式与静电学中的没有原则区别，对应着静电学中的边界条件(4.3.12)和(4.3.13)，我们已经指出静磁学下的边界条件(见(4.4.10)式)：

$$B_{1n} = B_{2n}, \quad H_{1t} = H_{2t} \tag{5.3.12}$$

如果我们现在采用感应电流观念，这时边界条件(5.3.12)仍旧没有变化，这不是一目了然的，我们将论证这一结论.参见图 5.10，对于物理量 $\boldsymbol{B}$ 来说，

本处所涉及的场源只是自由电流和感应电流，对于这两种场源成立

$$\oiint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \rightarrow B_{1n} = B_{2n} \tag{5.3.13}$$

这个结果与(5.3.12)一致.注意在图 5.10 所取的封闭曲面 S 是短粗柱面，它的两个端面分别处于不同的磁介质之中，并且紧贴分界面.现在参见图 5.11，选取扁长环路 C，其两个长边分处不同的介质，但与界面平行，辅助场 $\boldsymbol{H}$ 沿封闭曲线 C 的环量只与它框中的自由电流有关，而与感应电流 $I_{感}$ 无关，因此有

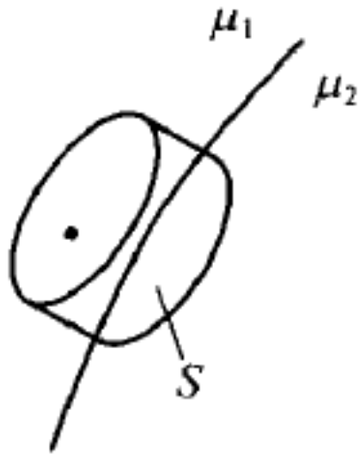


图 5.10

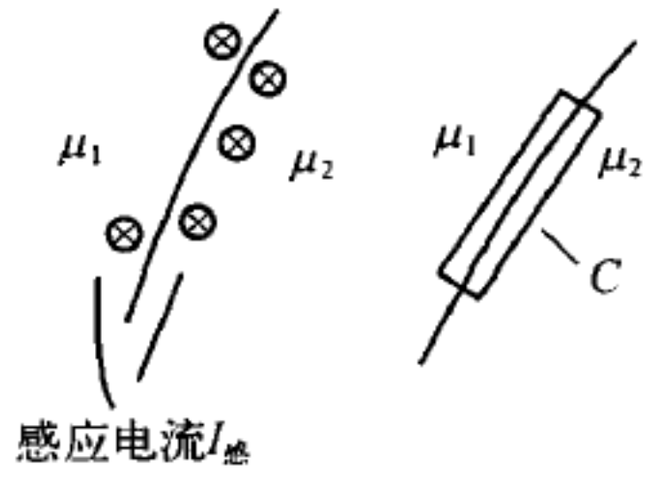


图 5.11

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0 \rightarrow \boldsymbol{H}_{1t} = \boldsymbol{H}_{2t} \tag{5.3.14}$$

这个结果也与(5.3.12)一致.至此，我们得到结论，无论对介质中感应物作感应磁荷或作感应电流的处理，其边界条件不会改变，都用(5.3.12)，即(4.4.10)，表示.下面我们讨论这两种不同的感应物对介质内部的场强测量值的影响.

先设介质中感应出来的是磁荷，其中的磁场是 $\boldsymbol{H}$，磁感应是 $\boldsymbol{B} = \mu_0(1+\chi_m)\boldsymbol{H}$，现在 $\boldsymbol{H}$ 的方向上开一个细长槽，参见图 5.12(a)，这时空腔测得的场强是 $\boldsymbol{H}_{测}$，而原来的 $\boldsymbol{H}$ 由 $\boldsymbol{H}_{测}$ 及细长磁棒在其中点所产生的磁场 $\boldsymbol{H}_{附} \approx 0$ 叠加而成，$\boldsymbol{H}_{测}$ + $\boldsymbol{H}_{附} = \boldsymbol{H}$，或者 $\boldsymbol{H}_{测} \approx \boldsymbol{H}$；而对于情况(b)，沿 $\boldsymbol{H}$ 方向挖出一个短粗柱腔，腔中测出的场强是 $\boldsymbol{H}'_{测}$，而挖出短粗柱形介质对其中心贡献场强 $\boldsymbol{H}'_{附} = -\chi_m \boldsymbol{H}$，有关系 $\boldsymbol{H}'_{测} + \boldsymbol{H}'_{附} = \boldsymbol{H}$，或者

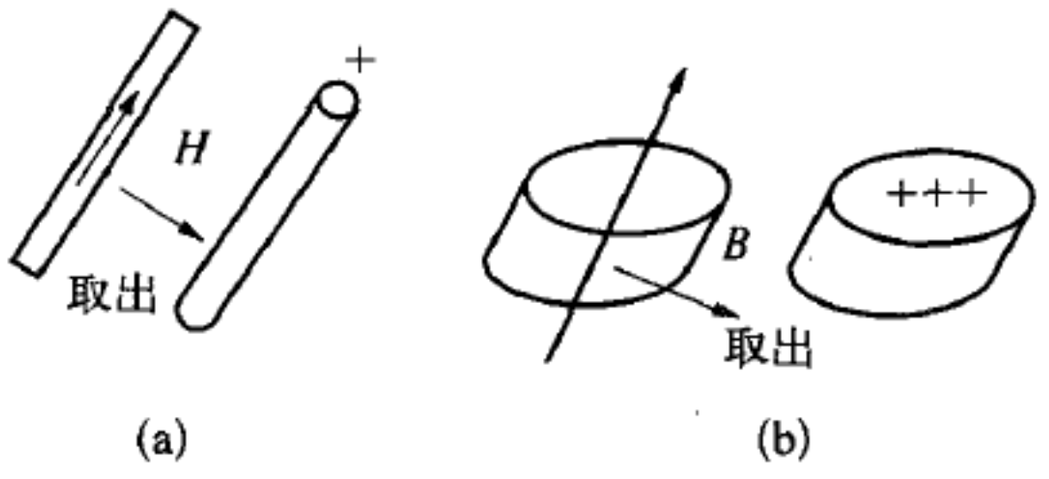


图 5.12

$$H'_{测} - \chi_m H = H \to H_{测} = (1 + \chi_m)H = \frac{1}{\mu_0}B \qquad (5.3.15)$$

现在讨论认为磁介质中感应出来的是电流情况，这时物理量是 B，或者，为了保证与 H 有相同的量纲而便于讨论，是 $B/\mu_0 = (1 + \chi_m)H$，我们先讨论沿 B 方向挖出一个细长管的情况，参见图 5.13，这时挖出细长柱的电流流动状况象螺线管，侧面上单位长度的安匝数 $\chi_m nI = \chi_m H$，而

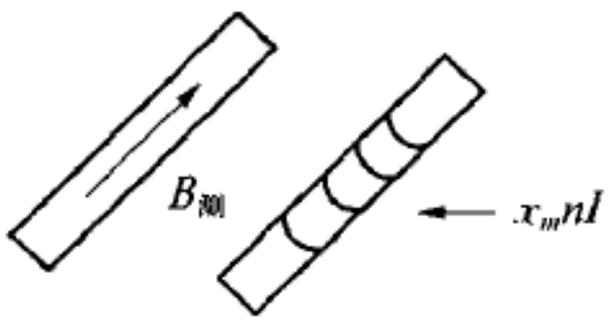


图 5.13

$$B_{测}/\mu_0 + \chi_m nI = B/\mu_0$$

$$B_{测} = B - \chi_m \mu_0 nI = \mu_0 H \qquad (5.3.16)$$

由此可以得到，所测出的场强是 H 与感应磁荷观念下所得的结果相同；而如果所挖的是沿 B 方向的短粗空腔，则所挖出的圆饼状的介质对中心的附加磁感应≈0，因此 $B'_{测} \approx B$，测量到的仍旧是 B，与感应磁荷观念下的情况相同. 据此，可以得到一个有趣的结论，拿到一块磁介质，把它放在磁场，那它将被磁化，或者说是受到感应. 感应出来的是什么？有人说是磁荷，因为这样处理起来可充分参照电介质极化的情况，这两者之间应当有对称性；有人说是感应电流，例如安培等人，因为电流在现实情况中可以找到. 对于这两种极化观念孰对孰错，靠前面设计的挖槽探测的实验是无法区分的，因为这两种理论所给出的结果相同. 但从理论上，这两种介质出发点不一样，处理方式也不一样，何者是物理量的认知也不一样，我们将在下一段讨论.

5.3.4 关于物理场和辅助场的进一步探讨

参见图 5.14 一个半径为 R 的磁介质球，相对磁极化率为 $\mu = 1 + \chi_m$，放在均匀的外磁场 $\boldsymbol{H}_0 = H_0 \boldsymbol{e}_x$ 中，我们看到这个图与 4.3 节的图 4.8 非常相像，只不过后者是在讨论电学中的问题，如果认为介质球内出现的是极化磁荷，则这个问题可以完全模仿图 4.8 所示的相应电学问题的方式解决，参照(4.3.22)和(4.3.23)，我们可以写出球内的磁场 $\boldsymbol{H}_{内}$ 和球外的磁场 $\boldsymbol{H}_{外}$ 分别为

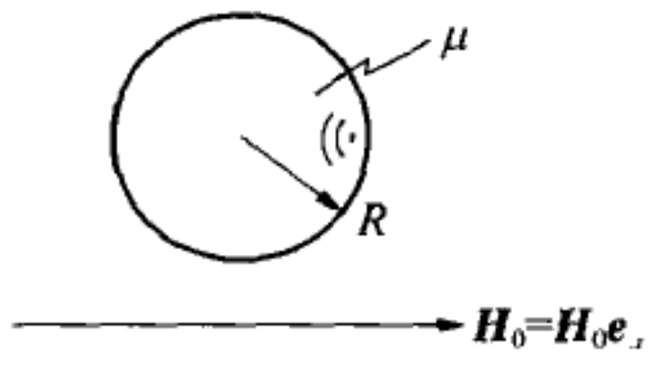


图 5.14

$$\boldsymbol{H}_{内} = \frac{3}{2+\mu}\boldsymbol{H}_0$$

$$\boldsymbol{H}_{外} = \boldsymbol{H}_0 + \frac{\mu-1}{\mu+2}\frac{R^3}{r^3}\left[-\boldsymbol{H}_0 + \frac{3(\boldsymbol{H}_0 \cdot \boldsymbol{r})}{r^2}\boldsymbol{r}\right] \tag{5.3.17}$$

同样可以模仿电学中的方法讨论边界条件(参见第 4 章的第 7 题)有

$$H_{内t} = H_{外t},\ B_{内n} = B_{外n} \tag{5.3.18}$$

注意到对于磁介质,可以认为其中感应出的是电流,这时我们讨论球内和球外的场强,$\boldsymbol{H}'_{内}$ 和 $\boldsymbol{H}'_{外}$,应该如何计算? 因为目前的场源,除了给定的 $\boldsymbol{H}_0$ 之外,是球表面感应出来的电流,参见图 5.15,沿水平的 x 轴上单位长度上的电流密度为 η,η 与按照感应磁荷方式确定磁极化强度 $\boldsymbol{P}_m$ 间有关系

$$\eta = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{P}_m = \chi_m \boldsymbol{H}_{内} \tag{5.3.19}$$

根据这里的场源系统,当计算球外的磁场时,感应电流的成场作用,可以用一个均匀极化球代替,其极化强度 $\boldsymbol{P}_m = P_m \boldsymbol{e}_x = \sigma_m \boldsymbol{e}_x$,参见图5.16,这样,这里的场源与图 5.14 所示的没有不同,因此有

$$\boldsymbol{H}'_{外} = \boldsymbol{H}_{外} \tag{5.3.20}$$

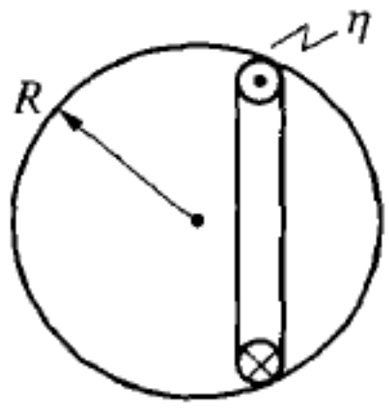


图 5.15

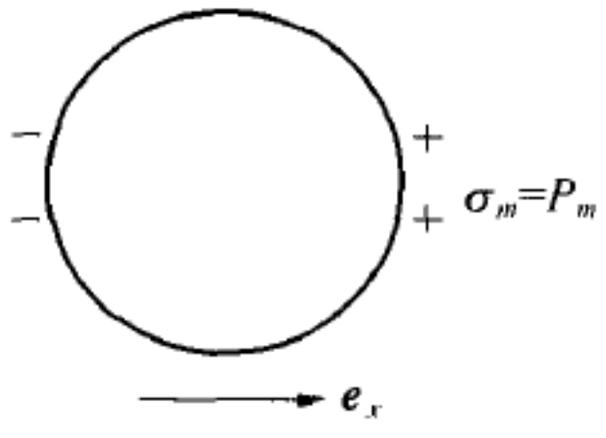


图 5.16

但对于球内磁场 $\boldsymbol{H}'_{内}$ 不能利用上述的场源等价方法,因为上述等价场源方法涉及球的内部,而我们要计算正是球内的磁场,这在等效计算中不能允许.为了计算球内磁场,我们要用与 η 产生同样效果的球外磁偶极子等效场源,参见图 5.17 所示的磁性场源系统,它用磁极化强度矢量 $\boldsymbol{P}'_m = -\boldsymbol{e}_x\sigma_m$ 表征,而出现的等效磁荷不仅出现在球腔内壁上,并且还可能出现在其他地方.图上的 $\boldsymbol{P}'_m$ 在整个球腔外部都存在.我们截取由平行板 $A_{左}$ 及 $A_{右}$ 隔开

的区段，这里 $A_{左}$ 平面在球腔之左，离球腔很远，以 x 轴为表面法线在 $A_{左}$ 之左的空间生成等效磁荷系统是在两个平板上出现了磁荷，在紧靠 $A_{左}$ 的面上是面密度为 $-\sigma_m$ 的磁荷，而位于 $x=-\infty$ 的面上有 $+\sigma_m$ 的磁荷，这两组磁荷对球腔内的磁场没有贡献. 同理 $A_{右}$ 平面在球腔之右，离球腔很远，与 $A_{左}$ 平行，而 $A_{右}$ 之右的等效磁荷系统对球腔内的磁场没有贡献. 因此 $A_{左}$ 及 $A_{右}$ 所夹的区段内的等效磁荷系统对球腔内磁场的贡献即相当于全部空间磁荷系统的贡献. 参见图 5.17，这里的磁荷系统分为球内壁的磁荷，它们贡献场强 $\boldsymbol{H}''=-\dfrac{\sigma_m}{3\mu_0}\boldsymbol{e}_x$，而两个相当远的平板 $A_{左}$ 及 $A_{右}$ 上的等效磁荷贡献磁场 $\boldsymbol{H}'''=\dfrac{\sigma_m}{\mu_0}\boldsymbol{e}_x$，于是

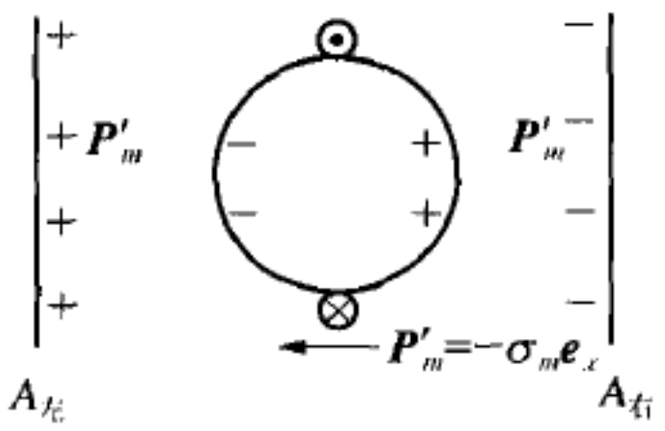


图 5.17

$$\boldsymbol{H}'_{内}=\boldsymbol{H}_0+\boldsymbol{H}''+\boldsymbol{H}'''=\left(H_0-\frac{\sigma_m}{3\mu_0}+\frac{\sigma_m}{\mu_0}\right)\boldsymbol{e}_x$$

$$=\left(\frac{2+\mu}{3}-\frac{\chi_m}{3}+\chi_m\right)H_{内}\,\boldsymbol{e}_x$$

$$=\mu\boldsymbol{H}_{内}=\frac{\boldsymbol{B}_{内}}{\mu_0} \tag{5.3.21}$$

因此在认为介质中感应出是电流的情况，根据场源用等效法算出的球内场强是 $\dfrac{\boldsymbol{B}_{内}}{\mu_0}$，球外是 $\dfrac{\boldsymbol{B}_{外}}{\mu_0}$，即磁感应矢量量 $\boldsymbol{B}$ 目下是根据场源直接计算出来的，因此 $\boldsymbol{B}$ 是物理量，或者说在场源是电流的条件下 $\boldsymbol{B}$ 是物理量，这时满足通过封闭曲面 S 的磁通量 Φ_B 为零的条件：

$$\Phi_B|_S\equiv\oiint_S\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0 \tag{5.3.22}$$

现在通量为零的条件也就是物理量条件.

下面我们给出本处的 $\boldsymbol{H}$ 不符合物理量条件. 仍然从图 5.15 着手，其中场源是球表面感应出来的电流，还有外界已经给定的磁场 $\boldsymbol{H}_0$ 参见图 5.18，我们在这个场源系统给出一个封闭曲面 $S=S'\cup S''$，这里 S' 是过介质球球心 O 并且与 $\boldsymbol{e}_x$ 垂直的平面与介质球相截而得的一个圆板，S'' 是

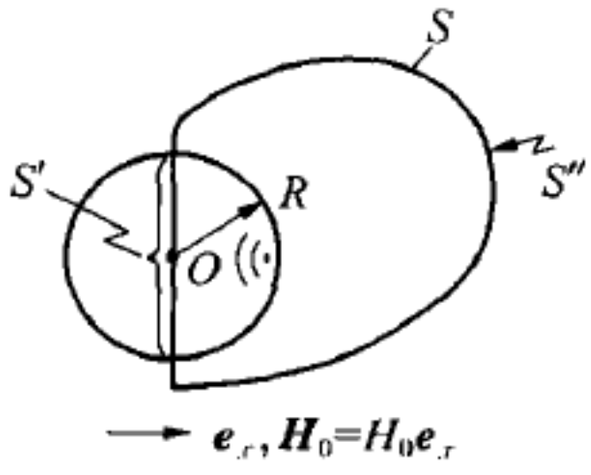


图 5.18

S 中扣除S'之后的剩余部分，由于 $\Phi_B|_S = \Phi_B|_{S'} + \Phi_B|_{S''} = 0$，有

$$-\Phi_B|_{S''} = \Phi_B|_{S'} = -\pi R^2 \cdot \frac{3\mu\mu_0}{2+\mu}H_0 \tag{5.3.23}$$

但对于 H 通量，

$$\Phi_H|_S = \Phi_H|_{S'} + \Phi_H|_{S''} = \frac{1}{\mu\mu_0}\Phi_B|_{S'} + \frac{1}{\mu_0}\Phi_B|_{S''}$$

$$= \frac{1-\mu}{\mu\mu_0}\Phi_B|_{S'} = \frac{\mu-1}{\mu+2}\cdot 3\pi R^2 H_0 \neq 0 \tag{5.3.24}$$

$\boldsymbol{H}$ 不符合闭曲面上通量为零的条件，因此 $\boldsymbol{H}$ 不是物理量，是辅助量.

5.3.5　静电学中的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 的问题

我们在 5.3.2 之末曾经指出磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 和磁感应 $\boldsymbol{B}$ 什么情况下是物理量，什么情况是辅助量的问题. 这个问题与我们涉及什么场源有关. 对于任何一种场源，$\boldsymbol{H}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 必然是一个为物理量，另一个为辅助量，但不会有 $\boldsymbol{H}$，$\boldsymbol{B}$ 同时为物理量或同时为辅助量的情况出现. 物理量由元场源的成场规律生成的元场叠加而成，满足某种守恒律，而辅助量做不到这一点；关于物理量还有另一种关系式，它与守恒律对偶，物理量的积分关系式较为麻烦：要计及自由场源和感应场源，而辅助场的较为简单只涉及自由场源而与感应场源无关. 我们先以磁场为例来作一说明. 对于纯磁荷源，即自由场源是磁荷，感应场源也是磁荷，这时物理量是 $\boldsymbol{H}$，而 $\boldsymbol{B}$ 是辅助量，物理条件是环量 $I_H = \oint_C \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$，而 $I_B = \oint_C \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \neq 0$，与守恒律相对应是高斯定律，对于封闭于曲面 S 的 H 通量

$$\Phi_H|_S \equiv \oiint_S \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\mu_0}\sum_j (q_{mj} + q'_{mj}) \tag{5.3.25}$$

这里 q'_{mj} 是感应磁荷，而关于 $\boldsymbol{B}$ 的通量

$$\Phi_B|_S = \sum_j q_{mj} \tag{5.3.26}$$

只与自由磁荷 q_{mj} 有关. 下面我们我们讨论纯电流源，这时 $\boldsymbol{B}$ 是物理量，符

合物理量条件 $\Phi_B\mid_S=\oiint_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$，而辅助量 $\boldsymbol{H}$ 则不符合物理量条件 $\Phi_H\mid_S=\oiint_S \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$，因为一般情况下 $\oiint_S \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}\neq 0$；而与通量为 0 的对偶条件是环量 $\oint_C \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mu_0\sum_j (I_j+I_j')$，这里 I_j 是给定电流，I_j'是感应电流，但辅助量 $\boldsymbol{H}$ 的环量有 $\oint_C \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\sum_j I_j$，只与自由电流有关.我们发现，在上面的两种情况曲线积分和通量是互为对偶的，其中一个是表征物理量的守恒律，另一个是对偶者，对于辅助量有比较简单的形式.这种说法是现代物理理论的雏形，在超弦或引力理论中，守恒律相当于皮安启(Bianchi)等式，而对偶者产生运动方程.

现在讨论电学，对照着第二段关于磁学的描述，我们有：

如果认为电介质中感应的是电荷，$\boldsymbol{E}$ 是物理量，$\boldsymbol{D}$ 是辅助量；如果认为电介质中感应的是磁流，$\boldsymbol{D}$ 是物理量，$\boldsymbol{E}$ 是辅助量.磁流 I_m(单位时间流过的磁荷)与电偶极子 $\boldsymbol{p}$ 之间的关系可参见图 5.19，这里磁流 I_m 与电偶极子 $\boldsymbol{p}$ 是左手螺旋关系，这个关系是由实验结果确定，即从实验结果分析看来，磁学规律与电学规律呈镜式反射关系.



图 5.19

在这两种电场场源里，也像磁学情况一样，当场源是电荷时，电场强度 $\boldsymbol{E}$ 是物理量，其构成物理量的要件是满足环量 $I_E=\oint_C \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$，这在前面已经指出过，而电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 在很多情况下不满足其环量为 0 的条件，即 $\oint_C \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}\equiv I_D\neq 0$，所以不是物理量.虽然 $\boldsymbol{D}$ 不是物理量，但引进它作为辅助量是与守恒关系(无旋关系或有位关系 $\oint_C \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$)对偶的高斯定律中，物理量 $\boldsymbol{E}$ 之通量 $\Phi_E\mid_S=\oiint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{1}{\epsilon_0}\sum_j (q_j+q_j')$，此式右方不仅涉及作为场源的外界给定电荷(自由电荷)有关，还与极化(感应)电荷有关；但关于辅助量 $\boldsymbol{D}$ 的高斯定律就要简洁得多，$\oiint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\sum_j q_j$，只与自由电荷 q_j 有关，而与感应电荷 q_j'无关.而当场源是磁流时，$\boldsymbol{D}$ 是物理量，此刻构成

物理量的要件是其通量 $\Phi_D\mid_S=\oiint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$，而 $\boldsymbol{E}$ 的通量 $\Phi_E\mid_S=\oiint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}\neq 0$，不满足物理量条件，参见第 5 题，从题中的论证可以看到，它与推导磁学中的(5.3.24)的思路相似.$\boldsymbol{E}$ 在本处虽然不是物理量，但它有资格作为一个辅助量，因为对偶于 $\Phi_D=0$ 的守恒律我们有环量关系 $\oint_C \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\varepsilon_0\sum_i (j_{mi}+j'_{mi})$，这里 j_{mi} 是磁流 j_m，附标 i 代表有关磁流 j_m 的顺序编号(流水号)，j_{mi} 是外界给定的磁流(自由磁流)，它是个代数量，当磁流 j_{mi} 的流向与 C 所包围的曲面正向一致时，取负值，相反时取正值，它正好与电流在形成磁场的作用成镜式对照关系.j'_{mi} 是感应磁流，而关于辅助量 $\boldsymbol{E}$ 的环量 $\oint_C \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\sum_i j_{mi}$ 与感应磁流无关.这样我们解决了电磁学中分别认定电场强度 $\boldsymbol{E}$ 及磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 是物理量，但 $\boldsymbol{E}$ 在磁学中的呈对称性的对应者却是磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 的问题.不少学者曾对 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 之间的对称关系作出了质疑.①

5.4　毕奥-萨伐尔定律的导出

5.4.1　电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 在其延长线方向的磁场

参见图 5.20，由于几何对称性的关系，$I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 在其延长线上某一点 A 的磁场 $\mathrm{d}\boldsymbol{H}$ 只能是沿着延长线走向，其走向可能有两个：与 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 一致或与 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 相反，现在我们暂且假设它与 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 一致，则如图 5.20 所示，当点 A 沿 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 延长线方向移动时该点上的 $\mathrm{d}\boldsymbol{H}$ 应当是同一方向(大小可能不同).若有图 5.21，如果所产生的磁场倒向的话，在某一点 A' 上场强为 0，不符合地点渐远 ΔH 幅度渐减的性质.

---

① 屠善澄，运动物体概论(讲义)，中国科学技术大学，北京，1962 年.



图 5.20

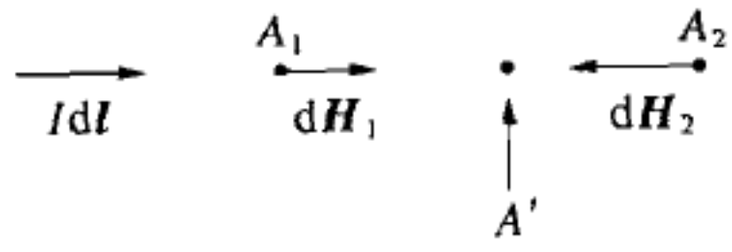


图 5.21 点 A 沿 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 延长线方向(右向)移动所占的各个位置分别以 A_1, A', A_2 等标记

现在讨论电流元在场点 A 右侧的情况:

参见图 5.22,为了对图 5.20 或图 5.21 有所比较,将图 5.22 沿与 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 垂直的轴反转过来,如图 5.23 所示.现在图 5.23 的 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1$ 处补充一个电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2$,使得



图 5.22



图 5.23

$$I\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1 + I\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2 = 0 \tag{5.4.1}$$

如图 5.24(a)所示,而 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2$ 所产生的磁场 $\mathrm{d}\boldsymbol{H}'_2$ 按上面的原始认定与 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2$ 的指向相同,参见图 5.24(b).由于 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1$ 及 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2$ 联合在 A 点所产生的磁场是零,所以 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1$ 所产生的磁场 $\mathrm{d}\boldsymbol{H}'_1$ 根据叠加原理应当满足关系 $\mathrm{d}\boldsymbol{H}'_1 + \mathrm{d}\boldsymbol{H}'_2 = 0$,即 $\mathrm{d}'\boldsymbol{H}'_1 = -\mathrm{d}\boldsymbol{H}'_2$,$I\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1$ 和 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2$ 联合产生的场强见图 5.2(a),它们各自产生的 $\mathrm{d}\boldsymbol{H}'_1$ 及 $\mathrm{d}\boldsymbol{H}'_2$,大小相等,方向相反,叠加起来的结果为零;图 5.25(b)是 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1$ 单独产生的场强 $\mathrm{d}\boldsymbol{H}'_1$ 图(c)是图(b)相对于一个与 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1$ 垂直的轴反转(即旋转 180°)的结果,将本处的图 5.25(c)与图 5.22 比较,我们看到这两个图讲的是同样一个问题,但图 5.22 中提出的问题,即在 A 点的磁场方向问题在图 5.25(c)已获解决,即当 A 点在 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1$ 左方时,其上的 $\mathrm{d}\boldsymbol{H}'_1$ 仍与 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1$ 走向一致.现在讨论无穷长直线电流在线上一点 A 所产生的磁场,参见图 5.26,由于上面的原始认定及相关讨论,直线上任何一段 $I\mathrm{d}l_i$ 在 A 点所产生磁场 $\mathrm{d}\boldsymbol{H}_i$ 都与 I 的流向相同,因此各个电流元的影响互相加强,不能彼此抵消.A 点磁场 $\boldsymbol{H}$ 由各 $\mathrm{d}\boldsymbol{H}_i$ 叠加而成,$\mathrm{d}H_i > 0$,则 $H > 0$,但在前面的讨论中知道,在偏离 I 所在直线的一点的磁场在与 I 直线垂直的平面内,而没有与 I 线平行方向的分量,因此有结论在沿直线电流流动方向上的磁场 $H = 0$,或等效地认为任何的 $\mathrm{d}H_i$ 都等于零,$\mathrm{d}H_i = 0$.

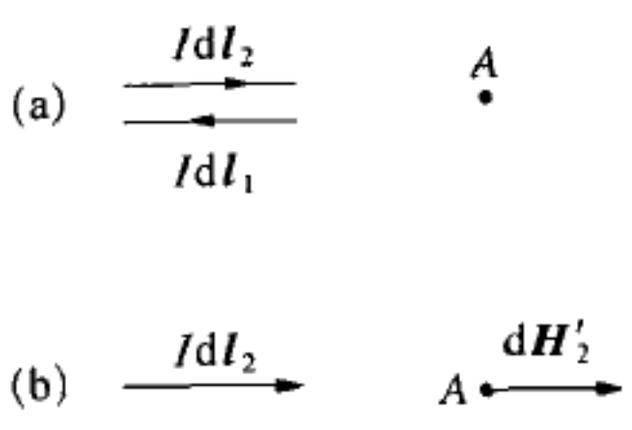


图 5.24

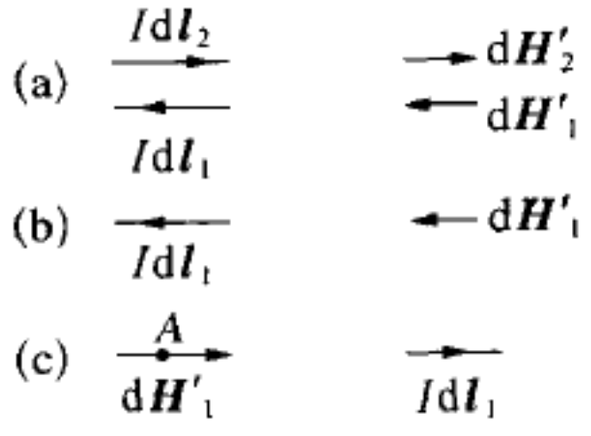


图 5.25

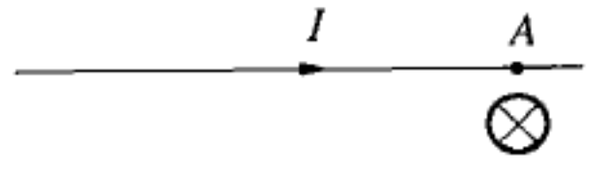


图 5.26

5.4.2　弯折电流的上半段与下半段的关系

参见图 5.27，设有弯折电流 I 在 A_1OA_2 流动，顶角为 2α，A 点位于 2α 的角平分线的反向延长线上，$OA=r$，求 A 点的磁场 $\boldsymbol{H}$. 由于弯折电流 A_1OA_2 可用若干位于左侧的磁偶极子代替，就像在上一节讨论无穷长直线电流的磁场一样，因此知道在 A 点的磁场是相对于纸面垂直向下的，在图中以⊗标记. 为了讨论 A 点的磁场，引进两条辅助电流：OA_3 及 A_4O，这两条辅助电流是靠在一起的，所以联合之后的效应为零，而对于 A 点来说，由于 A_4OA 或 A_3OA 均在同一直线上，因 A_4O 电流（同理 OA_3 电流）在 A 点产生的磁场为零. 现在折线电流 A_1OA_3 在 A 点产生的磁场可用一组磁偶极子作为场源代替之，因此 A_1OA_3 电流产生的磁场仍是与纸面垂直的，由于 OA_3 上电流的效果为零，故 A_1O 电流所产生的磁场即是 A_1OA_3 的磁场，因此 A_1O 电流的磁场与纸面垂直，同样的讨论可知 OA_2 电流所产生的磁场也与纸面垂直. 确定了这种情况之后，再将弯折电流以 OA 为轴旋转 180°，这时 OA_1 转到 OA_2 位置，但磁场也反了方向，成为与纸面垂直向上的磁场，因此有

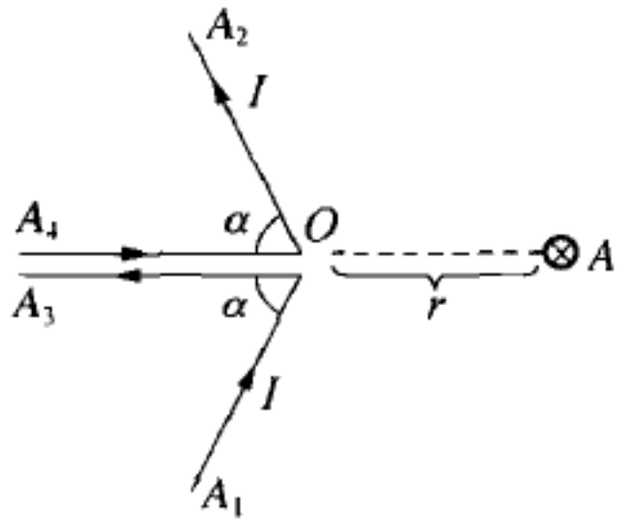


图 5.27

$$A_1O\text{ 产生的磁场}=OA_2\text{ 产生的磁场}=\frac{\boldsymbol{H}}{2}\tag{5.4.2}$$

5.4.3　弯折电流在其角平分线反向延长线上一点 A 的磁场

参见图 5.27，计算弯折电流 A_1OA_2 在 A 点的磁场 $\boldsymbol{H}$. 引进坐标系，参

见图 5.28,仿照上一节的计算磁场方法,有

$$\boldsymbol{H} = \frac{I}{4\pi}\int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}x \int_{x\mathrm{tg}\alpha}^{-x\mathrm{tg}\alpha} \mathrm{d}y \cdot \frac{1}{[(r-x)^2 + y^2]^{3/2}}(-\boldsymbol{e}_z) = \frac{I}{2\pi r}G(\alpha)(-\boldsymbol{e}_z) \tag{5.4.3}$$

这里

$$G(\alpha) = r\int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}x \int_{x\mathrm{tg}\alpha}^{-x\mathrm{tg}\alpha} \mathrm{d}y \frac{1}{2[(r-x)^2 + y^2]^{3/2}} \tag{5.4.4}$$

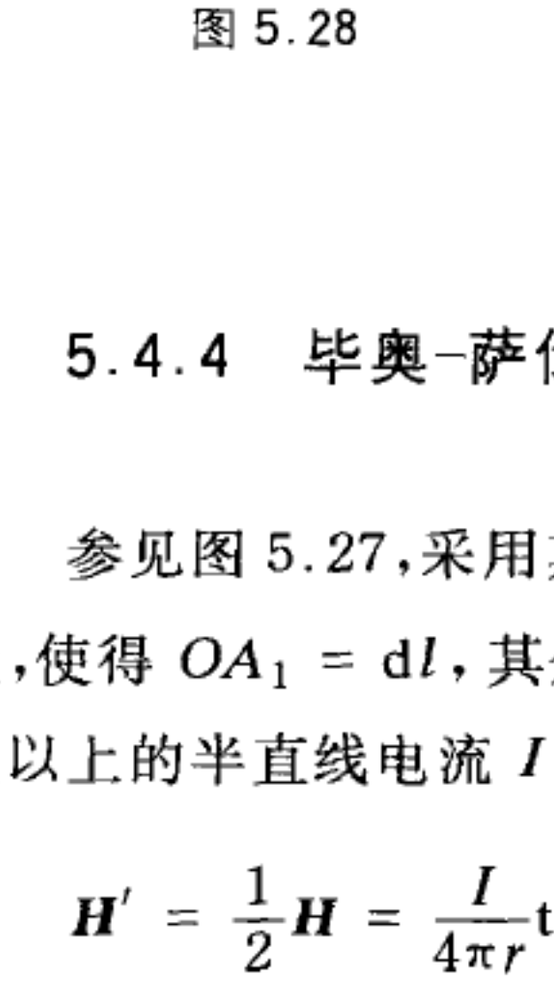


图 5.28

可以算出(参见 5.4.5：附录)

$$G(\alpha) = \tan\frac{\alpha}{2} \tag{5.4.5}$$

因此有

$$\boldsymbol{H} = \frac{I}{2\pi r}\tan\frac{\alpha}{2}(-\boldsymbol{e}_z) \tag{5.4.6}$$

5.4.4 毕奥-萨伐尔定律

参见图 5.27,采用其中所选的坐标系,截取其上半截并选定 A_1 的位置,使得 $OA_1 = \mathrm{d}l$,其余有关的几何参数可参见图 5.29.由(5.4.2)知道 O 点以上的半直线电流 I 所产生的磁场

$$\boldsymbol{H}' = \frac{1}{2}\boldsymbol{H} = \frac{I}{4\pi r}\tan\frac{\alpha}{2}(-\boldsymbol{e}_z) \tag{5.4.7}$$

而 A_1 以上的产生的磁场为

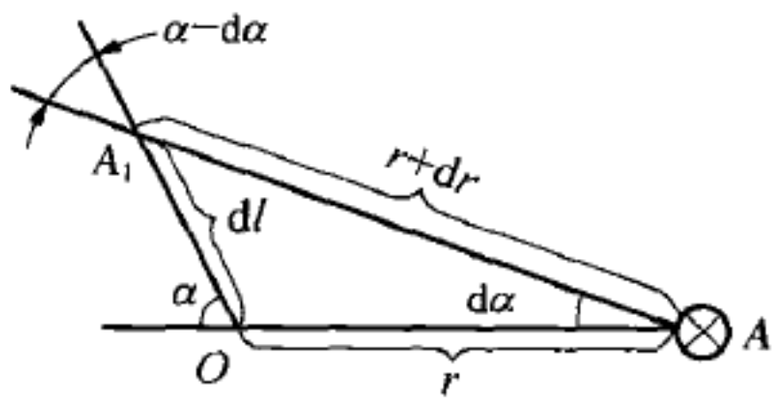


图 5.29

$$\boldsymbol{H}'' = \frac{I}{4\pi(r+\mathrm{d}r)}\tan\frac{\alpha-\mathrm{d}\alpha}{2}(-\boldsymbol{e}_z) \tag{5.4.8}$$

而 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 所产生的磁场

$$\mathrm{d}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}' - \boldsymbol{H}'' = \frac{I}{4\pi r}\frac{\mathrm{d}l}{r}\sin\alpha(-\boldsymbol{e}_z) = \frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{4\pi}\times\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{5.4.9}$$

其推导过程可参见附录.(5.4.9)即毕奥-萨伐尔定律,在一般电磁学教材中,它是作为实验定律引入的,并且看作是磁学的基础,在这里的讨论中看到它是作为磁的库仑定律及安培的代替法的推论出现的.类似地有电的毕-萨定律, $\mathrm{d}\boldsymbol{E} = -\frac{I_m \mathrm{d}\boldsymbol{l}}{4\pi} \times \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$, 与(5.4.9)成镜对称关系,这里 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ 是电场, I_m 是磁流.

5.4.5　附录

① 计算(5.4.4)的 $G(\alpha)$,首先更换积分变量,将 x 换成 $-x_1$,从(5.4.4)得到

$$\begin{aligned} G(\alpha) &= r\int_0^{\infty} \mathrm{d}x_1 \int_{-x_1\tan\alpha}^{x_1\tan\alpha} \frac{\mathrm{d}y}{2[(r+x_1)^2+y^2]^{3/2}} \\ &= r\int_0^{\infty} \mathrm{d}x_1 \int_0^{x_1\tan\alpha} \frac{\mathrm{d}y}{[(r+x_1)^2+y^2]^{3/2}} \end{aligned} \tag{5.4.10}$$

显然有

$$G\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \tag{5.4.11}$$

将(5.4.10)两方对 α 求导

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}G(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = G'(\alpha) &= r\int_0^{\infty} \mathrm{d}x_1 x_1 \sec^2\alpha \cdot \frac{1}{[(r+x_1)^2 + x_1^2\tan^2\alpha]^{3/2}} \\ &= \int_0^{\infty} \mathrm{d}x_2 x_2 \sec^2\alpha \frac{1}{[(1+x_2)^2 + x_2^2\tan^2\alpha]^{3/2}} \\ &= \int_0^{\infty} \cos\alpha \mathrm{d}x_2 \frac{x_2}{\sin^3\alpha\cos^3\alpha\left[\left(\frac{x_2+\cos^2\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha}\right)^2+1\right]^{3/2}} \end{aligned} \tag{5.4.12}$$

引进 $x_3 = \frac{x_2}{\cos\alpha\sin\alpha}$, 更改(5.4.12)的积分变量,有

$$\begin{aligned} G'(\alpha) &= \frac{1}{\sin\alpha}\int_0^{\infty} \mathrm{d}x_3 \frac{x_3}{[(x_3+\cot\alpha)^2+1]^{3/2}} \\ &= \frac{1}{\sin\alpha}\int_{\cot\alpha}^{\infty} \mathrm{d}x_4 (x_4-\cot\alpha) \frac{1}{(x_4^2+1)^{3/2}} \end{aligned} \tag{5.4.13}$$

更换积分变量令 $x_4 = \tan\theta$，有

$$G'(\alpha) = \frac{1}{\sin\alpha}\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta\cos\theta(\tan\theta - \cot\alpha) = \frac{1}{2}\sec^2\frac{\alpha}{2} \tag{5.4.14}$$

由(5.4.14)及端点条件(5.4.11)定出

$$G(\alpha) = \tan\frac{\alpha}{2} \tag{5.4.15}$$

此式即(5.4.5)，证毕.

② 参见(5.4.9)，要求证明

$$\boldsymbol{H}' - \boldsymbol{H}'' = \frac{I}{4\pi r}\frac{\mathrm{d}l}{r}\sin\alpha(-\boldsymbol{e}_z) \tag{5.4.16}$$

参见图 5.29，在三角形 OAA_1 中，使用正弦定律

$$\mathrm{d}\alpha = \frac{\mathrm{d}l\sin\alpha}{r} \tag{5.4.17}$$

使用折线 A_1OA 向 A_1A 的投影关系，

$$\mathrm{d}r = \mathrm{d}l\cos\alpha \tag{5.4.18}$$

而将(5.4.8)展开到 $\mathrm{d}l$ 的一阶有

$$\boldsymbol{H}'' = \frac{I}{4\pi r}\left(\tan\frac{\alpha}{2} - \frac{\mathrm{d}r}{r}\tan\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\sec^2\frac{\alpha}{2}\mathrm{d}\alpha\right)(-\boldsymbol{e}_z) \tag{5.4.19}$$

于是 $\boldsymbol{H}' - \boldsymbol{H}'' = \frac{I}{4\pi r}\boldsymbol{F}$，这里因子

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} &= \frac{\mathrm{d}r}{r}\tan\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\sec^2\frac{\alpha}{2}\mathrm{d}\alpha \\ &= \frac{\mathrm{d}l}{r}\left(\cos\alpha\tan\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\sec^2\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\right)(-\boldsymbol{e}_z) \\ &= \frac{\mathrm{d}l}{r}\sin\alpha(-\boldsymbol{e}_z)\end{aligned} \tag{5.4.20}$$

由此得到

$$\boldsymbol{H}' - \boldsymbol{H}'' = \frac{I}{4\pi r}\frac{\mathrm{d}l}{r}\sin\alpha(-\boldsymbol{e}_z) \tag{5.4.21}$$

此式即(5.4.16)，证毕.

5.5　电磁波问题

5.5.1　电磁基本定律的微分形式

讨论电荷密度 $\rho = 0$，电流密度矢量 $\boldsymbol{j} = 0$ 的无外源情况，对于电场 $\boldsymbol{E}$ 由(4.2.15)有

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \tag{5.5.1}$$

同样的考虑有

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{5.5.2}$$

由(5.1.17)得到

$$\oint_C \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_S \nabla \times \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

这里 S 是以 C 为边界的曲面，由于 C 及 S 可以任意小，从上式得到

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = 0 \tag{5.5.3}$$

还有一个定律是法拉第电磁感应定律，其来源就是法拉第用磁棒塞进与指示电表相连的螺线管时，电表的指针跳动了一下这个著名的实验. 这个实验表明，在闭路线圈 C 中所产生的电势 $\varphi = \oint_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 与通过线圈内的磁通 $\Phi_{\boldsymbol{B}} = \iint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的变化率有关. 而所产生的电势倾向于产生电流而补偿磁通的变化，写成公式就是

$$\oint_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

这里 S 是以 C 为边界的曲面. 应用斯托克斯定律得到

$$\iint_S \nabla \times \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

或者

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{5.5.4}$$

(5.5.4)是微分形式的法拉第电磁感应定律.(5.5.1)～(5.5.4)是电磁学在无源时的基本定律.

5.5.2 无源电磁场

从基本定律(5.5.1)～(5.5.4)出发,我们看到可以有常值电场 $\boldsymbol{E}$,或常值磁场 $\boldsymbol{B}$ 存在,这在电容器或螺线管中我们已经注意到这种情况.那么无源空间中有没有随时间变化的电磁场呢? 为了讨论问题简单起见,先讨论这时在空间有没有平面波? 设

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \cos(kx - \omega t) \tag{5.5.5}$$

是沿 x 方向传播的平面波,其中

$$\boldsymbol{E}_0 = E_{0x}\boldsymbol{e}_x + E_{0y}\boldsymbol{e}_y + E_{0z}\boldsymbol{e}_z \tag{5.5.6}$$

是常值波幅矢量,将(5.5.5)代入(5.5.1),得到 $E_{0x} = 0$,于是 $\boldsymbol{E}$ 与 x 方向垂直,我们不妨将 $\boldsymbol{E}$ 的方向指定为 y 的方向,

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}_y E_0 \cos(kx - \omega t) \tag{5.5.7}$$

同理,由(5.5.2)可知 $\boldsymbol{H}$ 也与 $\boldsymbol{e}_x$ 垂直,而由(5.5.4),$\boldsymbol{H}$ 必须沿 $\boldsymbol{e}_z$ 方向

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{e}_z H_0 \cos(kx - \omega t) \tag{5.5.8}$$

但由(5.5.4)有 $kE_0 = \mu_0 H_0 \omega$ 或者

$$\frac{H_0}{E_0} = \frac{k}{\mu_0 \omega} \neq 0 \tag{5.5.9}$$

而从(5.5.3)可以推出 $H_0 = 0$,因此参考到(5.5.9)有

$$H_0 = E_0 = 0 \tag{5.5.10}$$

即场源为零的空间中,不存在上面所讨论的电磁波.

5.5.3　电磁波的传播

上一段讨论无源空间有没有电磁波的问题，我们的回答是没有由(5.5.7)或(5.5.8)所指定的这种形式的电磁波，那么没有这种平面电磁波，有没有其他形式的电磁波？这样就把问题提成开放式的了，因为要穷尽一切形式的电磁波并且一一否定它们这是不能办到的事.这个问题要圆满解决，关键是要找到一种电磁波.

为了找到一种电磁波，研究者并没有停留在原始方程组(5.5.1)～(5.5.4)上做文章，麦克斯韦注意到(5.5.3)，其对应的积分定律是 $\oint_C \boldsymbol{H}\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \sum I_j = \iint_S \boldsymbol{j}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$，有些问题，因为上述积分关系对任意的围道 C 均应成立，那么如图 5.30 所示的情况，设围道 C 所包围的 S 位于电容器的中空区域之中，由于电容器在充电到达稳态的过程中线路中瞬时可以有一定大小的电流 I，而 C 上的 $\boldsymbol{H}$ 环量 $\oint_C \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} \neq 0$，但是按照 $\oint_C \boldsymbol{H}\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \iint_S \boldsymbol{j}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 算出 $\oint_C \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$，因为 S 上确实没有电流穿过.为了解决这个疑难，麦克斯韦注意到在暂态过程中 $\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$（$\boldsymbol{D}$ 为电位移矢量）相当于电流密度 $\boldsymbol{j}$，因此有

$$\oint_C \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \iint_S \left(\boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{5.5.11}$$

在无外界电流密度 $\boldsymbol{j} = 0$ 时，取微分关系式可以得到

$$\nabla\times\boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{5.5.12}$$

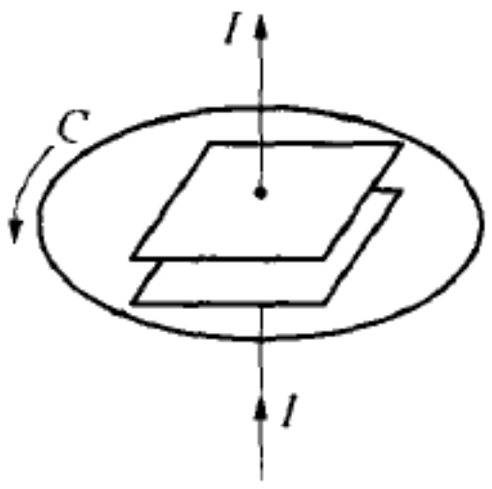


图 5.30

它与(5.5.4)，$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\nabla\times\boldsymbol{E}$，比较起来有明显的镜式对称性，所谓镜式对称性是电与磁之间有如下的对应关系

$$\boldsymbol{E}\leftrightarrow\boldsymbol{H},\ \boldsymbol{D}\leftrightarrow\boldsymbol{B},\quad \frac{\partial}{\partial t}\leftrightarrow\frac{\partial}{\partial t},\quad \nabla\times\leftrightarrow-\nabla\times \tag{5.5.13}$$

这里 $\nabla x\leftrightarrow -\nabla x$ 是指在取电磁对称性时需要更换坐标架，从右手坐标架更

换成左手坐标架.自然我们应该选取与(5.5.4)有明显电-磁对称性(5.5.12)去取代(5.5.3).(5.5.3)在原始的安培全电流定理中为 $\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}$,$\boldsymbol{j}$ 是电流密度矢量,麦克斯韦从考察电流的物理效应出发,引进了 $\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$,他称它为位移电流密度,这是他在建立电磁理论所迈出的关键的一步,同时也揭开了电-磁规律之间的内在对称性.镜式对称内容在前面我们还提到过一些,例如毕-萨定律 $\mathrm{d}\boldsymbol{H} = \frac{1}{4\pi} I \mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$,其镜式对称的是电的毕-萨定律 $\mathrm{d}\boldsymbol{E} = \frac{-1}{4\pi} I_m \mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$.

现在将试探解(5.5.7)及(5.5.8)代入(5.5.12)得到条件

$$\frac{E_0}{H_0} = \frac{k}{\varepsilon_0 \omega} \neq 0 \tag{5.5.14}$$

将(5.5.9)与(5.5.14)相乘,$1 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}\left(\frac{k}{\omega}\right)^2$,即平面波的传播速度

$$\frac{\omega}{k} = \frac{1}{(\varepsilon_0 \mu_0)^{1/2}} = c = 299\,792\,458 \text{ 米 / 秒} \tag{5.5.15}$$

可参见(3.5.3),正是这样一个结果使得麦克斯韦认为光也是一种电磁波.波长为米的数量级的微波经赫兹(H. R. Hertz,1857—1894)在 1888 年实验证实的确有干涉、形成驻波等特性,并且其传播速度确实是 c,经此检验之后,麦克斯韦的电磁波理论被人们所普遍接受而成为物理学的基础理论.麦克斯韦理论完成了电磁与光的统一,是物理学史的重大统一之一,是物理学发展的重要阶段.

5.6 光线在运动介质中的传播速度

上一节讨论了电磁波在真空中的传播速度是 $\frac{1}{(\varepsilon_0 \mu_0)^{1/2}} = c$,即它等

于光线在真空中的速度，因此麦克斯韦认定光线是电磁波.对于光线在介质中的传播，如果介质相对于观察者静止，仿照前一节的推导，其传播速度是 $\frac{1}{(\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0)^{1/2}}=\frac{c}{(\varepsilon\mu)^{1/2}}$，这里 $\varepsilon\varepsilon_0$ 是介质的介电常数，$\mu\mu_0$ 是它的磁导率.但如果介质相对于观察者运动，则光线在其中的传播速度还有其他修正成分，与介质的运动状况有关，所得出的光线传播速度公式称为费涅尔(A.J. Fresnel，1788—1827)公式，这是他在 1818 年根据以太的一些特殊假定推导出来的，但是他的基本出发点有些问题，这里用麦克斯韦的电磁理论重作推导，从推导中读者可以直接感知电-磁互换时的镜式对称关系.

5.6.1　在以电荷、电流为场源电磁场系统的性质

这种系统中，可以写下麦克斯韦方程

$$\left.\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{E}&=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t},\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0;\\ \nabla\times\boldsymbol{H}&=\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}+\boldsymbol{j}_e,\ \nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho_e\end{aligned}\right\}\tag{5.6.1}$$

现在从物理场 $\boldsymbol{E}$ 及 $\boldsymbol{B}$ 开始讨论，由麦克斯韦方程 $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\rightarrow\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$ 而 $\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$ 得到 $\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}=-\nabla\varphi$，这里 $\boldsymbol{A}$ 是矢量势，φ 是标量势.

洛伦兹变换

$$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\beta_2}},\ t'=\frac{t-vx/c^2}{\sqrt{1-\beta_2}}$$

或者

$$\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\\x_4'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\tag{5.6.2}$$

(5.6.2)中 $(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv (x, y, z, ict)$, $\beta = v/c$, $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

(5.6.2)还可以用矢量-矩阵的形式简洁地记成

$$x' = Lx \tag{5.6.3}$$

这里 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ict \end{pmatrix}$ 是列矢量, $L = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$ 是相对于地面系 S 的 x 轴以速度 $\boldsymbol{v} = vi$ 运动的 S' 系的 Lorentz 变换矩阵. 记

$$\partial \equiv \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \\ \partial_4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \\ \partial/\partial(ict) \end{pmatrix}$$

可以直接验证

$$\partial' = L\partial \tag{5.6.4}$$

记

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ i\phi/c \end{pmatrix} \tag{5.6.5}$$

$$\partial A^T = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \\ \partial_4 \end{pmatrix} (A_1, A_2, A_3, A_4) = \begin{pmatrix} \partial_1 A_1 & \partial_1 A_2 & \partial_1 A_3 & \partial_1 A_4 \\ \partial_2 A_1 & \partial_2 A_2 & \partial_2 A_3 & \partial_2 A_4 \\ \partial_3 A_1 & \partial_3 A_2 & \partial_3 A_3 & \partial_3 A_4 \\ \partial_4 A_1 & \partial_4 A_2 & \partial_4 A_3 & \partial_4 A_4 \end{pmatrix} \tag{5.6.6}$$

A 是四-矢量, 自然有

$$A' = LA \tag{5.6.7}$$

记 $U \equiv \partial A^{\mathrm{T}}$, 有变换关系 $U' = LUL^{\mathrm{T}}$ (注意 $L^{\mathrm{T}} = L^{-1}$) 及 $L^{\dagger} = L$, 而 $(U^{\mathrm{T}})' \equiv U'^{\mathrm{T}} = (LUL^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = LU^{\mathrm{T}}L^{-1}$, 于是, 若规定

$$\widetilde{E} \equiv U - U^T = \begin{pmatrix} 0 & \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 & \partial_1 A_3 - \partial_3 A_1 & \partial_1 A_4 - \partial_4 A_1 \\ \partial_2 A_1 - \partial_1 A_2 & 0 & \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2 & \partial_2 A_4 - \partial_4 A_2 \\ \partial_3 A_1 - \partial_1 A_3 & \partial_3 A_2 - \partial_2 A_3 & 0 & \partial_3 A_4 - \partial_4 A_3 \\ \partial_4 A_1 - \partial_1 A_4 & \partial_4 A_2 - \partial_2 A_4 & \partial_4 A_3 - \partial_3 A_4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0, & B_3, & -B_2, & -\frac{i}{c}E_1 \\ -B_3, & 0, & B_1, & -\frac{i}{c}E_2 \\ B_2, & -B_1, & 0, & -\frac{i}{c}E_3 \\ \frac{i}{c}E_1, & \frac{i}{c}E_2, & \frac{i}{c}E_3, & 0 \end{pmatrix} \tag{5.6.8}$$

$$\widetilde{E}' = (U - U^{\mathrm{T}})' = L(U - U^{\mathrm{T}})L^{-1} = L\widetilde{E}L^{\mathrm{T}}$$

于是

$$\widetilde{E}' = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -\frac{iE_1}{c} \\ -B_3 & 0 & B_1 & -\frac{iE_2}{c} \\ B_2 & -B_1 & 0 & -\frac{iE_3}{c} \\ \frac{iE_1}{c} & \frac{iE_2}{c} & \frac{iE_3}{c} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \gamma\left(B_3 - \frac{\beta E_2}{c}\right) & -\gamma\left(B_2 + \frac{\beta E_3}{c}\right) & -\frac{iE_1}{c} \\ \gamma\left(-B_3 + \frac{\beta E_2}{c}\right) & 0 & B_1 & +i\beta\gamma\left(B_3 - \frac{E_2}{v}\right) \\ \gamma\left(B_2 + \frac{\beta E_3}{c}\right) & -B_1 & 0 & -i\beta\gamma\left(B_2 + \frac{E_3}{v}\right) \\ \frac{iE_1}{c} & -i\beta\gamma\left(B_3 - \frac{E_2}{v}\right) & i\beta\gamma\left(B_2 + \frac{E_3}{v}\right) & 0 \end{pmatrix} \tag{5.6.9}$$

这表示　　$E_1' = E_1$，$E_2' = \gamma(E_2 - vB_3)$，$E_3' = \gamma(E_3 + vB_2)$

$$\rightarrow \boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + (\gamma - 1)\left(\boldsymbol{E} - \frac{\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v}}{v^2}\boldsymbol{v}\right) + \gamma \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B},$$

又 $$B_1' = B_1,\ B_2' = \gamma\left(B_2 + \frac{\beta E_3}{c}\right),\ B_3' = \gamma\left(B_3 - \frac{\beta E_2}{c}\right)$$

$$\rightarrow \boldsymbol{B}' = \boldsymbol{B} + (\gamma - 1)\left(\boldsymbol{B} - \frac{\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{v}}{v^2}\boldsymbol{v}\right) - \frac{\gamma}{c^2}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}$$

如果定义 $\boldsymbol{E}_\perp \equiv \boldsymbol{E} - \frac{\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v}}{v^2}\boldsymbol{v}$，则 $\boldsymbol{E}_\perp\cdot\boldsymbol{v} = 0$，这表示 $\boldsymbol{E}_\perp$ 与速度矢量 $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e}_x$ 垂直，又令 $\boldsymbol{E}_{/\!/} = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}_\perp = \frac{\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v}}{v^2}\boldsymbol{v}$ 是与 $\boldsymbol{v}$ 方向一致的电场成分.同理可定义 $\boldsymbol{B}_\perp$ 及 $\boldsymbol{B}_{/\!/}$，现在有

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{E}' &= \boldsymbol{E}_{/\!/} + \gamma\boldsymbol{E}_\perp + \gamma\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B}' &= \boldsymbol{B}_{/\!/} + \gamma\boldsymbol{B}_\perp - \frac{\gamma}{c^2}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}\end{aligned}\right\} \tag{5.6.10}$$

5.6.2 在以磁荷、磁流为场源的电磁场系统的性质

仿照(5.6.1)式，我们有麦克斯韦方程

$$\nabla\times\boldsymbol{H} = \frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t},\ \nabla\cdot\boldsymbol{D} = 0; \tag{5.6.11}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} - \boldsymbol{j}_m,\ \nabla\cdot\boldsymbol{B} = \rho_m$$

这里 ρ_m 是磁荷密度，$\boldsymbol{j}_m$ 是磁流强度矢量.

考虑电学量转化为磁学量的镜式对称性（注意 $\nabla\times\boldsymbol{H} = \frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$ 与 $j_m = 0$ 时 $\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$ 相对照），我们应该记

$$\boldsymbol{D} = -\nabla\times\boldsymbol{A}^{\vee} \tag{5.6.12}$$

这里 $\boldsymbol{A}^{\vee}$ 的性质与第一段引入的矢量势类似，我们不妨称之为第二种矢量势，或在不引起混淆的情况下仍旧称作是矢量势.(5.6.12)可与前面的 $\boldsymbol{B}=$

$\nabla \times \boldsymbol{A}$ 相对照，因为我们现在的情况与第一段的情况有镜式对称性，即原来情况中有关“×（叉乘）”的项在改成镜对称后都需要加一个“－”号. 将(5.6.12)代进 $\nabla \times \boldsymbol{H} = \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ 有 $\nabla \times \left(\boldsymbol{H} + \dfrac{\partial \boldsymbol{A}^{\vee}}{\partial t}\right) = 0$，因此可引进第二种标量势 $\varphi^{\vee}$，使得 $\boldsymbol{H} + \dfrac{\partial \boldsymbol{A}^{\vee}}{\partial t} = -\nabla \varphi^{\vee}$ 或者

$$\boldsymbol{H} = -\nabla \varphi^{\vee} - \frac{\partial \boldsymbol{A}^{\vee}}{\partial t} \tag{5.6.13}$$

这种形式适合描述在仅有磁荷、磁流等磁性场源下的电磁场性质，可与第一段的 φ 相对照. 对于与时间无关的稳定场，从(5.6.13)得到 $\boldsymbol{H} = -\nabla \varphi^{\vee}$.

洛伦兹变换与前面相同，有 $x' = Lx$，$A^{\vee\prime} = LA^{\vee}$，这里 $A^{\vee} \equiv \begin{pmatrix} A_1^{\vee} \\ A_2^{\vee} \\ A_3^{\vee} \\ \dfrac{i\varphi^{\vee}}{c} \end{pmatrix}$ 是四维(第二种)电磁势矢量，还有 $\partial' = L\partial$. 记

$$U^{\vee} = \begin{pmatrix} -\partial_1 \\ -\partial_2 \\ -\partial_3 \\ \partial_4 \end{pmatrix} \left(A_1^{\vee}, A_2^{\vee}, A_3^{\vee}, -\frac{i\varphi^{\vee}}{c}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} -\partial_1 A_1^{\vee} & -\partial_1 A_2^{\vee} & -\partial_1 A_3^{\vee} & \partial_1 \varphi^{\vee} \dfrac{i}{c} \\ -\partial_2 A_1^{\vee} & -\partial_2 A_2^{\vee} & -\partial_2 A_3^{\vee} & \partial_2 \varphi^{\vee} \dfrac{i}{c} \\ -\partial_3 A_1^{\vee} & -\partial_3 A_2^{\vee} & -\partial_3 A_3^{\vee} & \partial_3 \varphi^{\vee} \dfrac{i}{c} \\ \partial_4 A_1^{\vee} & \partial_4 A_2^{\vee} & \partial_4 A_3^{\vee} & -\partial_4 \varphi^{\vee} \dfrac{i}{c} \end{pmatrix} \tag{5.6.14}$$

$$\widetilde{E}^{\vee} = U^{\vee} - U^{\vee T}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & -\partial_1 A_2^V + \partial_2 A_1^V & -\partial_1 A_3^V + \partial_3 A_1^V & \partial_1 A_4^V - \partial_4 A_1^V \\ -\partial_2 A_1^V + \partial_1 A_2^V & 0 & -\partial_2 A_3^V + \partial_3 A_2^V & \partial_2 A_4^V - \partial_4 A_2^V \\ -\partial_3 A_1^V + \partial_1 A_3^V & -\partial_3 A_2^V + \partial_2 A_3^V & 0 & \partial_3 A_4^V - \partial_4 A_3^V \\ \partial_4 A_1^V - \partial_1 A_4^V & \partial_4 A_2^V - \partial_2 A_4^V & \partial_4 A_3^V & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} D & D_3 & -D_2 & -iH_1/c \\ -D_3 & 0 & D_1 & -iH_2/c \\ D_2 & -D_1 & 0 & -iH_3/c \\ \frac{i}{c}H_1 & \frac{i}{c}H_2 & \frac{i}{c}H_3 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.6.15}$$

这张表的形式与(5.6.8)式的 $\widetilde{E}$ 完全相同，但需注意到对应关系 $\boldsymbol{E} \sim \boldsymbol{H}$，$\boldsymbol{B} \sim \boldsymbol{D}$，按照定义有(考虑到 U^V 的结构特点)

$U^{V'} = L^T U^V L$，即 $\widetilde{E}^{V'} = L^T \widetilde{E}^V L$，而 $L^T(v) = L(-v)$，于是利用前面的结果即有(参见(5.6.10))

$$\boldsymbol{H}' = \boldsymbol{H} + (\gamma - 1)\left(\boldsymbol{H} - \frac{\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{v}}{v^2}\boldsymbol{v}\right) - \gamma \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{D}$$

$$\boldsymbol{D}' = \boldsymbol{D} + (\gamma - 1)\left(\boldsymbol{D} - \frac{\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{v}}{v^2}\boldsymbol{v}\right) + \frac{\gamma}{c^2}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H}$$

或者

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{H}' &= \boldsymbol{H}_{/\!/} + \gamma \boldsymbol{H}_{\perp} - \gamma \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{D}' &= \boldsymbol{D}_{/\!/} + \gamma \boldsymbol{D}_{\perp} + \frac{\gamma}{c^2}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H} \end{aligned}\right\} \tag{5.6.16}$$

5.6.3 慢速运动介质的电磁性能方程

注意在 $\beta = \frac{v}{c} \ll 1$ 条件下，由(5.6.10)及(5.6.16)，忽略 β^2 级的二阶小量，即令 $\gamma = 1$，我们有

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B},\ \boldsymbol{B}' = \boldsymbol{B} - \frac{\boldsymbol{v}}{c^2} \times \boldsymbol{E};$$

$$\boldsymbol{H}' = \boldsymbol{H} - \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{D}' = \boldsymbol{D} + \frac{\boldsymbol{v}}{c^2} \times \boldsymbol{H} \tag{5.6.17}$$

这里我们同时利用(5.6.10)和(5.6.16)给出的两组方程,因为无外源的电磁场既可以看作是无磁性场源的电磁场,也可以看作是无电性场源的电磁场.将上面的变换结果应用到运动介质中去,设以 ε,μ 为参量的运动介质(光学中常见的是 $\mu=1$ 的纯电性介质),它以速度 $\boldsymbol{v}=v\boldsymbol{e}_x$ 沿地面系流动,因此从静止于地面的观察者看来所有的场量 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{B}$ 均是在运动介质中得到的,所以可以予见到它们不会是简单的 $\boldsymbol{D}=\varepsilon\varepsilon_0\boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{H}'=\dfrac{1}{\mu\mu_0}\boldsymbol{B}$ 的关系,但在 S' 系中,由于是在静止介质中观察的,因此有

$$\boldsymbol{D}'=\varepsilon\varepsilon_0\boldsymbol{E}',\ \boldsymbol{H}'=\frac{\boldsymbol{B}'}{\mu\mu_0} \tag{5.6.18}$$

我们注意由(5.6.9)有 $\boldsymbol{E}'=\boldsymbol{E}+(\gamma-1)\left(\boldsymbol{E}-\dfrac{\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v}}{v^2}\boldsymbol{v}\right)+\gamma\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$,根据电-磁现象的对称性,有 $\boldsymbol{H}'=\boldsymbol{H}+(\gamma-1)\left(\boldsymbol{H}-\dfrac{\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{v}}{v^2}\boldsymbol{v}\right)-\gamma\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{D}$,略去 β^2 级的二阶小量,即是令 $\gamma\approx1$,因此有 $\boldsymbol{H}'\approx\boldsymbol{H}-\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{D}$,或者

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}\approx\boldsymbol{H}'+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{D}&=\frac{\boldsymbol{B}'}{\mu\mu_0}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{D}\\&=\frac{1}{\mu\mu_0}\left(\boldsymbol{B}-\frac{1}{c^2}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}\right)+\boldsymbol{v}\times\varepsilon\varepsilon_0\boldsymbol{E}\\&=\frac{\boldsymbol{B}}{\mu\mu_0}+\varepsilon_0\left(\varepsilon-\frac{1}{\mu}\right)\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}\end{aligned} \tag{5.6.19}$$

由于近似到 β 的零阶有 $\boldsymbol{H}\approx\dfrac{\boldsymbol{B}}{\mu\mu_0}$,而近似等式 $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}\approx\boldsymbol{v}\times\dfrac{\boldsymbol{B}}{\mu_0\mu}$ 中保留了 β 的一阶,略去的是 β^2 阶的二阶小量,因此,略去 β^2 阶的小量有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}=\boldsymbol{D}'-\frac{1}{c^2}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}&\approx\varepsilon\varepsilon_0\boldsymbol{E}'-\frac{1}{c^2}\boldsymbol{v}\times\frac{\boldsymbol{B}}{\mu\mu_0}\\&=\varepsilon\varepsilon_0(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})-\frac{1}{c^2}\boldsymbol{v}\times\frac{\boldsymbol{B}}{\mu\mu_0}\\&=\varepsilon\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\varepsilon_0\left(\varepsilon-\frac{1}{\mu}\right)\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\end{aligned} \tag{5.6.20}$$

在 $\mu=1$ 的 ε 介质(纯粹电介质)中,由(5.6.19)及(5.6.20),一般地有

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{D} &= \varepsilon\varepsilon_0\boldsymbol{E} + \varepsilon_0\left(\varepsilon - \frac{1}{\mu}\right)\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{H} &= \frac{\boldsymbol{B}}{\mu\mu_0} + \varepsilon_0\left(\varepsilon - \frac{1}{\mu}\right)\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E} \end{aligned}\right\} \tag{5.6.21}$$

现在讨论光在运动介质中的传播问题，对于地面系 S 中的观察者来说，介质以 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_x$ 恒速运动(我们可以设想菲佐测量光在河流传播的状况)，光的传播方向为 $\boldsymbol{h}$，由麦克斯韦方程之一

$$\nabla\times\boldsymbol{H} = \frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$$

用电磁波传送的稳态振荡解，$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0\, e^{-i(\omega t-\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{x})}$，可得

$$\boldsymbol{h}\times\boldsymbol{H}_0 = -\,\omega\boldsymbol{D}_0$$

以后将下标“0”略去不写，上式即为

$$\boldsymbol{h}\times\boldsymbol{H} = -\,\omega\boldsymbol{D} \tag{5.6.22}$$

今后 $\boldsymbol{H}$ 及 $\boldsymbol{D}$ 都是与时-空坐标无关的常值矢量，因此我们有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{h}\times\boldsymbol{H} &= \boldsymbol{h}\times\left[\frac{\boldsymbol{B}}{\mu\mu_0} + \varepsilon_0\left(\varepsilon - \frac{1}{\mu}\right)\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}\right] = -\,\omega\boldsymbol{D} \\ &= -\,\omega\left[\varepsilon\varepsilon_0\boldsymbol{E} + \varepsilon_0\left(\varepsilon - \frac{1}{\mu}\right)\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\right] \end{aligned} \tag{5.6.23}$$

5.6.4 光在低速运动介质中的传播速率(费涅尔公式)

本段以 $\boldsymbol{k}$ 表示光的传播矢量，即将上一节中的 $\boldsymbol{h}$ 改成 $\boldsymbol{k}$，现在(5.6.23)成为($\boldsymbol{h}$ 已改写为 $\boldsymbol{k}$)：

$$\boldsymbol{k}\times\left[\frac{\boldsymbol{B}}{\mu\mu_0} + \varepsilon_0\left(\varepsilon - \frac{1}{\mu}\right)\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}\right] = -\,\omega\left[\varepsilon\varepsilon_0\boldsymbol{E} + \varepsilon_0\left(\varepsilon - \frac{1}{\mu}\right)\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\right]$$

考虑到

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{\omega}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}$$

代入上式有

$$\boldsymbol{k}\times\left[\frac{1}{\mu\mu_0\omega}(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E})+\varepsilon_0\left(\varepsilon-\frac{1}{\mu}\right)\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}\right]$$

$$=-\omega\left[\varepsilon\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\varepsilon_0\left(\varepsilon-\frac{1}{\mu}\right)\boldsymbol{v}\times\frac{1}{\omega}(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E})\right]$$

将有关三个矢量的相继叉乘展开,就得到

$$\frac{1}{\mu\mu_0\omega}[\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E})-\boldsymbol{E}k^2]+\varepsilon_0\left(\varepsilon-\frac{1}{\mu}\right)[\boldsymbol{v}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E})-\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v})]$$

$$=-\omega\varepsilon\varepsilon_0\boldsymbol{E}-\varepsilon_0\left(\varepsilon-\frac{1}{\mu}\right)[\boldsymbol{k}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v})-\boldsymbol{E}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k})]$$

讨论 $\mu=1$ 的纯光学介质,并且用关系 $\varepsilon_0=\frac{1}{\mu_0 c^2}$ 消去 ε_0,从上式可推得

$$\frac{\omega}{\mu_0}\left\{\boldsymbol{E}\left[\frac{k^2}{\omega^2}+\frac{2(\varepsilon-1)}{c^2\omega}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v})-\frac{\varepsilon}{c^2}\right]\right.$$

$$\left.-(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E})\left[\frac{\boldsymbol{k}}{\omega^2}+\frac{(\varepsilon-1)}{c^2\omega}\boldsymbol{v}\right]-(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v})\frac{1}{c^2\omega}(\varepsilon-1)\boldsymbol{k}\right\}=0$$

(5.6.24)

选择坐标系,使得 $\boldsymbol{k}=(0,0,k)$,$\boldsymbol{E}=(E_x,E_y,E_z)$,并且记

$$G\equiv\frac{k^2}{\omega^2}-\frac{\varepsilon}{c^2}+\frac{2(\varepsilon-1)}{c^2\omega}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v} \tag{5.6.25}$$

由(5.6.24)式可写出

$$G\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E})\left[\frac{\boldsymbol{k}}{\omega^2}+\frac{(\varepsilon-1)}{c^2\omega}\boldsymbol{v}\right]-(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v})\cdot\frac{(\varepsilon-1)}{c^2\omega}\boldsymbol{k}=0$$

(5.6.26)

将(5.6.26)写成分量形式,x 分量和 y 分量的关系分别是

$$GE_x-kE_z\frac{\varepsilon-1}{c^2\omega}v_x=0,\quad GE_y-kE_z\frac{\varepsilon-1}{c^2\omega}v_y=0 \tag{5.6.27}$$

而计算第三个分量时,把 G 用具体表达式(5.6.25)代入,并且合并同类项有,

$$-\frac{\varepsilon}{c^2}E_z-(E_xv_x+E_yv_y)\frac{\varepsilon-1}{c_2\omega}k=0 \tag{5.6.28}$$

将(5.6.27)和(5.6.28)合并整理成齐次线性方程组形式:

$$\left.\begin{aligned} GE_x \qquad\qquad - kv_x \frac{\varepsilon - 1}{c^2\omega}E_z &= 0 \\ GE_y \qquad - kv_y \frac{\varepsilon - 1}{c^2\omega}E_z &= 0 \\ kv_x \frac{\varepsilon - 1}{c^2\omega}E_x + kv_y \frac{\varepsilon - 1}{c^2\omega}E_y + \frac{\varepsilon}{c^2}E_y &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{5.6.29}$$

上面的齐次线性方程如果有 $\boldsymbol{E} \neq 0$ 的解，则其系数行列式为零：

$$0 = \begin{vmatrix} G & 0 & -kv_x \dfrac{\varepsilon - 1}{\omega} \\ 0 & G & -kv_y \dfrac{\varepsilon - 1}{\omega} \\ kv_x \dfrac{\varepsilon - 1}{c^2\omega} & kv_y \dfrac{\varepsilon - 1}{c^2\omega} & \varepsilon \end{vmatrix}$$

$$= \varepsilon G^2 + \frac{k^2}{c^2}(v_x^2 + v_y^2)\left(\frac{\varepsilon - 1}{\omega}\right)^2 G$$

$$\rightarrow G = -\frac{k^2}{\varepsilon c^2}(v_x^2 + v_y^2)\left(\frac{\varepsilon - 1}{\omega}\right)^2 \sim 0(\text{略去 } v^2 \text{ 项})$$

即

$$G \equiv \frac{k^2}{\omega^2} - \frac{\varepsilon}{c^2} + \frac{2(\varepsilon - 1)}{c^2\omega}kv_z = 0 \tag{5.6.30}$$

记 $U_p = \dfrac{\omega}{k}$ 是光在介质中传播速度，注意到 $U_p^2 \cdot \dfrac{c^2}{\varepsilon}$ 乘上式得到

$$\left.\begin{aligned} &\frac{c^2}{\varepsilon} - U_p^2 + U_p \frac{2(\varepsilon - 1)}{\varepsilon}v_z = 0 \\ &U_p = \frac{1}{2}\left[\frac{2(\varepsilon - 1)}{\varepsilon}v_z + \sqrt{\left(\frac{2(\varepsilon - 1)}{\varepsilon}\right)^2 v_z^2 + \frac{4c^2}{\varepsilon}}\right] \end{aligned}\right\} \tag{5.6.31}$$

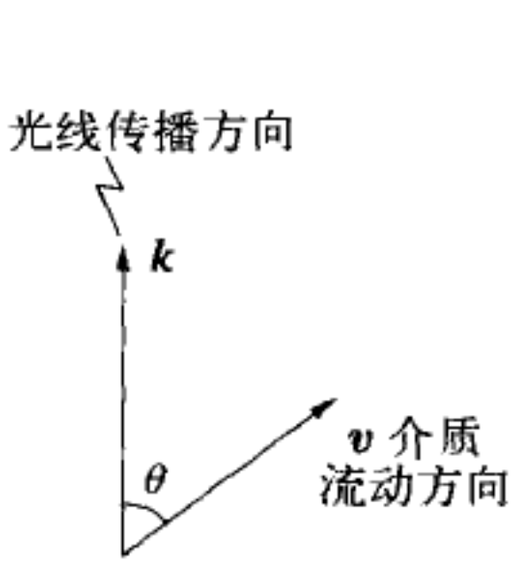


图 5.31

这里 $v_z = v\cos\theta$，而 θ 是介质的流动方向（即 $\boldsymbol{v}$ 的方向）与光的传播方向 $\boldsymbol{k}$ 之间的夹角，参见图 5.31.

考虑到 $v_z^2 \ll c^2$，将(5.6.31)式右方根号下的 v_z^2 项略

$$U_p = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}v_z + \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)v\cos\theta \tag{5.6.32}$$

这里 $n=\sqrt{\epsilon}$ 是介质的光线折射率，而右方末一项是介质运动速度对 U_p 的修正，(5.6.32)称为费涅尔公式.

5.7　电磁学中国际单位制和实用单位制之间的转换

由于历史的原因，电磁学中用过的单位制很多，并且它们之间的关系也成为学习和应用电磁学的重点和难点.本节分析两种普遍使用的单位制，国际单位制和实用单位制之间的转换关系.在分析过程中我们会看到，电-磁之间的对称性质会给我们提供许多方便.

现在电磁学中常用的单位制是国际单位制，在我们的教科书和各种试题都采用国际单位制，但有相当一部分专著，特别是英美等国的专著①仍然使用另一种单位制——我们称之为实用单位制，这里将分析这两种单位制之间的关系，并且给出简单的、易于记忆的转换关系.

5.7.1　库仑定律

由于国际单位制在科技书籍中占有主导地位，如果不加以特别声明，书籍中所使用的单位制都是国际单位制.本文中以 q 代表常用的，即国际单位制中的，电荷，q^2 是电荷的平方，ϵ_0 是真空介电常数等；如果涉及实用单位制，则在相应的量之上加“～”以示区别，如以 $\tilde{q}$ 代表在实用单位制下与 q 相应的电荷，而 $\tilde{q}^2$ 是相应于 q^2 的电荷平方等.

在国际单位制下，两个电荷同为 q 的带电质点在相距 r 的条件下，彼此之间的作用力由库仑定律算出：

$$F=\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \tag{5.7.1}$$

① 天体物理概念，(美)马丁·哈威特著，科学出版社，1981 年，第 249 页.

注意本处只研讨单位制之间的转换问题，只讨论(5.7.1)式所示的最简单形式的库仑定律，其余较复杂的情况如两个电荷 q_1，q_2 不相等的情况，或者矢量形式的库仑定律均不在本文讨论之列. 从单位制转换方面看来，(5.7.1)的库仑定律是如下物理公式：

$$A = kBC \tag{5.7.2}$$

的一个特例.(5.7.2)是指：在我们确认为讨论出发点的单位制中，量 A 与量 B 和 C 的乘积成正比，而 k 是比例系数，一般 k 是有量纲的. 如果换到另外一种单位制，相应的量以在原符号上加“～”以示区别，有

$$\widetilde{A} = \widetilde{k}\widetilde{B}\widetilde{C} \tag{5.7.3}$$

这里 $\widetilde{A} = \xi_A A$，A 是原来单位制的量值，$\widetilde{A}$ 是在新单位制下呈现出来的量值关系，一般来说 ξ_A 是个有量纲的量值①. 同理可记 $\widetilde{B} = \xi_B B$，$\widetilde{C} = \xi_C C$，而 k 是在新单位制下的比例系数. 由(5.7.3)式：$\xi_A A = \widetilde{k} \cdot \xi_B B \cdot \xi_C C$，这时应该为(5.7.2)式：$A = \widetilde{k}\dfrac{\xi_B \xi_C}{\xi_A} BC = kBC$，从而确定出

$$\widetilde{k} = \frac{k\xi_A}{\xi_B \xi_C} \tag{5.7.4}$$

现在将这个一般性的讨论应用到库仑定律(5.7.1)中去，从国际单位制转换到实用单位制，这里有 3 个量：F，q^2，r^{-2}，比例常量 $k = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}$，还有 $\xi_A \equiv \xi_F = 1$，即 $\widetilde{F} = F$，同样，$\xi_B \equiv \xi_{r^{-2}} = 1$，而选取 $\xi_C \equiv \xi_{q^2} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}$，这是带量纲的转换系数，根据(5.7.4)，可求出在实用单位制下的比例常量

$$\widetilde{k} = \frac{k}{\xi_{q^2}} = 1 \tag{5.7.5}$$

而库仑定律为(实用单位制中的标准形式)

$$F = \frac{\widetilde{q}^2}{r^2} \tag{5.7.6}$$

---

① 如果 A 代表长度，原始单位制是 kg · m · s(千克 · 米 · 秒) 制，新单位制是 g · cm · s(克 · 厘米 · 秒) 制，则 $\xi_A = 100\,\dfrac{\text{cm}}{\text{m}}$.

这里已经注意到 $\widetilde{F}=F$，$\widetilde{r}^2=r^2$ 以及 $\widetilde{q}^2=\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}q^2=9\times10^9\,\dfrac{米}{法}q^2$ ①. 现在若 $q^2=1$（库仑）^{2} 的电荷量平方，而在实用单位制中有

$$\widetilde{q}^2=9\times10^9\,\frac{米\cdot 库^2}{法}=9\times10^9[电量单位]^2=9\times10^9[Q]^2 \tag{5.7.7}$$

这里为了书写方便，用[Q]代表[电量单位]，[Q]≡[电量单位]. 由(5.7.7)可以得到

$$[Q]^2=\frac{米}{法}\cdot 库^2,\quad \frac{米}{法}=\left(\frac{[Q]}{库}\right)^2 \tag{5.7.8}$$

当 $q=1$ 库时，由(5.7.7)式可以看到 $\widetilde{q}=3\times10^{9/2}$[静电单位]$=3\times10^{9/2}$[$Q$]②参照(5.7.5)，如果形式上记 $\widetilde{k}=\dfrac{1}{4\pi\,\widetilde{\epsilon}_0}$，有

$$\widetilde{\epsilon}_0=\frac{1}{4\pi} \tag{5.7.9}$$

从(5.7.1)出发，记 $\epsilon_0=\dfrac{q^2}{4\pi Fr^2}$，并且把它看作是复合物理量，则在实用单位制下有 $\widetilde{\epsilon}_0=\dfrac{\widetilde{q}^2}{4\pi Fr^2}=\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\epsilon_0=\dfrac{1}{4\pi}$，与(5.7.9)的结果一致.

5.7.2　电场强度 E 和电位移 D

电场强度 E 由下列关系定义：电荷 q 在电场强度为 E 的地点，所受到的力 F 有关系 $F=qE$，在实用单位制中所受的力也是 $F=\widetilde{q}\widetilde{E}=qE$，由这

---

① 本处最右端的系数 9 实际上是指 $(2.997\,924\,58)^2\approx9$，此数字与光速平方的大小有关. 为了避免混淆，除了特别的声明的以外，物理量的单位一律用中文写出.

② 在绝对静电单位制中，1 库 $=3\times10^9$[绝对静电单位]≡3×10^9[q]，这里用[q]代表[绝对静电单位]，将国际单位制转化为绝对静电单位制时，库仑定律(5.7.1)相应各量的转换系数是 $\xi_F=\dfrac{10^5\ 达因}{牛顿}$，$\xi_{r^{-2}}=\dfrac{(厘米)^{-2}}{10^4\ 米^{-2}}$，而 $\xi_{q^2}=\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\dfrac{\xi_F}{\xi_{r-2}}=9\times10^{18}\,\dfrac{米}{法}\cdot\dfrac{达因}{牛顿}\cdot\dfrac{(厘米)^2}{米^2}=9\times10^{18}[q]^2/库^2$，从这里可得出 1 库 $\sim(\xi_{q^2})^{1/2}\cdot1$ 库 $=3\times10^9[q]\equiv3\times10^9$[绝对静电单位].

里得到

$$\widetilde{E} = \sqrt{4\pi\epsilon_0}E \tag{5.7.10}$$

在国际单位制中 E 的量纲是伏/米，而在实用单位制中相应的 $\widetilde{E}$ 的量纲是

$[\widetilde{E}] = \left(\frac{法}{米}\right)^{1/2}, \frac{伏}{米} = [场强单位]$

在电学中引进电位移 D 主要是为了讨论介质的性质，在国际单位制中，在相对介电常数为 ϵ 的介质中

$$D = \epsilon_0 \epsilon E \tag{5.7.11}$$

这是(5.7.2)的一个实例，这里 ϵ_0 的作用相当于(5.7.2)所指出的比例系数-k；而在实用单位制中 $\widetilde{D} = \epsilon\widetilde{E}$ ，即调整 $\boldsymbol{D}$ 的量纲，使得比例系数 $\widetilde{k} = 1$. 由(5.7.4)式有 $\xi_A = \frac{\widetilde{k}}{k}\xi_B\xi_C$，应用到本处有 $\xi_D = \frac{1}{\epsilon_0}\xi_\epsilon\xi_E = \frac{1}{\epsilon_0}\cdot 1\cdot\sqrt{4\pi\epsilon_0} = \sqrt{\frac{4\pi}{\epsilon_0}}$，或

$$\widetilde{D} = \sqrt{\frac{4\pi}{\epsilon_0}}D \tag{5.7.12}$$

在国际单位制中，面积为 S，距离为 l，其中塞有 ϵ 介质的平板电容器的电容为

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{S\cdot D}{lE} = \epsilon\epsilon_0\frac{S}{l} \tag{5.7.13}$$

在实用单位制中，电容 $\widetilde{C}$ 仍然是板上电荷 $\widetilde{Q}$ 与两板间电压之比

$$\widetilde{C} = \frac{\widetilde{Q}}{\widetilde{V}} = \frac{Q}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}\cdot\frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}V} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{\epsilon\epsilon_0 S}{l} = \frac{\epsilon S}{4\pi l} \tag{5.7.14}$$

或直接从(13)导出

$$\widetilde{C} = \epsilon\,\widetilde{\epsilon}_0\frac{S}{l} = \frac{\epsilon S}{4\pi l}$$

这个结果与(5.7.14)相同.

静电场能量密度，在真空中用国际单位制写出是

$$w_e = \frac{\epsilon_0}{2}E^2 = \frac{1}{2\epsilon_0}D^2 = \frac{1}{2}ED \tag{5.7.15}$$

或者在实用单位制中有 $w_e = \frac{\epsilon_0}{8\pi\epsilon_0} 4\pi\epsilon_0 E^2 = \frac{1}{8\pi}\widetilde{E}^2$，从电位移 D 考虑，由(5.7.15)可得

$$w_e = \frac{1}{8\pi} \cdot \frac{4\pi}{\epsilon_0} D^2 = \frac{1}{8\pi}\widetilde{D}^2 = \frac{1}{8\pi}\widetilde{E}\,\widetilde{D} \tag{5.7.16}$$

此式右端正是在实用单位制中的计算公式.

5.7.3　磁学量及一般电磁学公式的转换关系

根据磁学量和电学量之间的对称性，在电学公式中按照下述关系

$$E \sim H,\ D \sim B,\ \epsilon_0 \sim \mu_0,\ \cdots \tag{5.7.17}$$

将电学量换成相应的磁学量，我们就能把电学公式换成相应的磁学公式，这里 H 是磁场强度，B 是磁感应强度，μ_0 是真空导磁系数……

现在，我们可以根据 5.7.2 节中的讨论，导出各种磁学量在两种单位制之间的关系：

$$\widetilde{H}^2 = 4\pi\mu_0 H^2 \tag{5.7.18}$$

磁场能量密度

$$w_m = \frac{\mu_0}{2} H^2 = \frac{1}{8\pi}\widetilde{H}^2 \tag{5.7.19}$$

同样，由电学关系及考虑到对称性得到磁学关系

$$B = \mu_0 H,\ \widetilde{B} = \widetilde{H},\ \widetilde{B} = \sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}} B \tag{5.7.20}$$

对于有电学量和磁学量同时出现的公式中，亦可以用上述原则处理，例如，速度为 $\boldsymbol{v}$ 的点电荷 q 在电磁场中所受到的洛仑兹力是(国际单位制)

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \tag{5.7.21}$$

而在实用单位制中

$$\boldsymbol{F} = \sqrt{4\pi\epsilon_0}\,\widetilde{q}\left(\frac{\widetilde{\boldsymbol{E}}}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} + \boldsymbol{v} \times \sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}}\widetilde{\boldsymbol{B}}\right) = \widetilde{q}\left(\widetilde{\boldsymbol{E}} + \frac{1}{c}\boldsymbol{v} \times \widetilde{\boldsymbol{B}}\right) \tag{5.7.22}$$

这里 $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ 是光速，(5.7.22)右端所示的正是在实用单位制下洛仑兹力的表达式.

再以一些麦克斯韦方程为例，在真空中(国际单位制)

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho/\varepsilon_0 \tag{5.7.23}$$

这里 ρ 是电荷密度，在实用单位制中，$\nabla \cdot \widetilde{\boldsymbol{E}} = \widetilde{\rho}/\widetilde{\varepsilon}_0 = 4\pi\widetilde{\rho}$；电磁感应定律 $-\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \nabla \times \boldsymbol{E}$，而在实用单位制中，

$$-\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{B}}}{c\partial t} = \nabla \times \widetilde{\boldsymbol{E}} \tag{5.7.24}$$

而全电流定律 $\nabla \times \boldsymbol{H} = \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{j}$，这里 $\boldsymbol{j}$ 是电流密度矢量，将此式转换到实用单位制系统有 $\nabla \times (\widetilde{\boldsymbol{H}}/\sqrt{4\pi\mu_0}) = \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{4\pi}}\widetilde{\boldsymbol{D}}\right) + \sqrt{4\pi\varepsilon_0}\,\widetilde{\boldsymbol{j}}$，即

$$\nabla \times \widetilde{\boldsymbol{H}} = \frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{D}}}{c\partial t} + \frac{4\pi}{c}\widetilde{\boldsymbol{j}} \tag{5.7.25}$$

对于由李纳-维谢尔理论算出的电场是①

$$\boldsymbol{E} = \frac{\mu_0}{4\pi R_0}(\ddot{\boldsymbol{p}} \times \boldsymbol{n}) \times \boldsymbol{n} \tag{5.7.26}$$

而在实用单位制中，有②

$$\widetilde{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{c^2 R_0}(\ddot{\widetilde{\boldsymbol{p}}} \times \boldsymbol{n}) \times \boldsymbol{n} \tag{5.7.27}$$

现在按照这里给出的单位制变换理论，从(5.7.27)导出(5.7.26). 由(5.7.27)

$$\sqrt{4\pi\varepsilon_0}\boldsymbol{E} = \frac{1}{c^2 R_0}\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}}\ddot{\boldsymbol{p}} \times \boldsymbol{n}\right) \times \boldsymbol{n} \rightarrow \boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R_0 c^2}(\ddot{\boldsymbol{p}} \times \boldsymbol{n}) \times \boldsymbol{n}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi R_0}(\ddot{\boldsymbol{p}} \times \boldsymbol{n}) \times \boldsymbol{n}$$

---

① 孙宗扬，电磁学(讲义)，1991 年，中国科学技术大学，第 142 页.

② (美) 马丁·哈威特著，天体物理概念，科学出版社，1981 年，第 249 页.

这就是(5.7.26),证毕.

5.7.4　结论

由 $\widetilde{q}=\dfrac{q}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}$ 出发及考虑电磁之间的对称性,我们有关系

$$\widetilde{E}=\sqrt{4\pi\epsilon_0}E,\ \widetilde{D}=\sqrt{\frac{4\pi}{\epsilon_0}}D;$$

$$\widetilde{H}=\sqrt{4\pi\mu_0}H,\ \widetilde{B}=\sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}}B \tag{5.7.28}$$

从(5.7.28)出发,就可以将两类单位制下的同种公式互相转换,并且过程相当简单,见上面所举的例子,另外,(5.7.28)并不难记.

习　　题

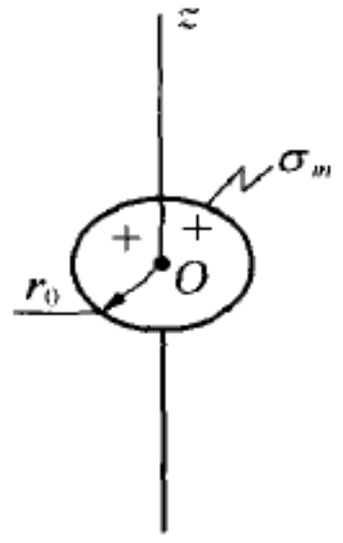
1. 如图,已知半径为 r_0 的圆盘放在 xy 平面上,上面假定带有均匀磁荷,其磁荷面密度为 σ_m,z 轴是圆面的对称轴,求出沿 z 轴的磁势 $\varphi_m(z)$及沿 z 轴的磁场 $H(z)=?$

解:① 磁势 $\varphi_m(z)=\dfrac{1}{4\pi\mu_0}\displaystyle\int_0^{r_0}\frac{\sigma_m 2\pi r\,\mathrm{d}r}{(r^2+z^2)^{1/2}}$

$$=\frac{\sigma_m|z|}{2\mu_0}\int_0^{r_0/|z|}\frac{u\,\mathrm{d}u}{(1+u^2)^{1/2}}$$

$$=\frac{\sigma_m|z|}{2\mu_0}(1+u^2)^{1/2}\Big|_0^{r_0/|z|}$$

$$=\frac{\sigma_m}{2\mu_0}\left[(z^2+r_0^2)^{1/2}-|z|\right] \tag{1}$$



(第 1 题图)

② 注意磁势是$(x,\ y,\ z)$的函数 $\varphi_m(x,\ y,\ z)$,而 $\varphi_m(z)=\varphi_m(0,\ 0,\ z)$,并且在本处有

$$\frac{\partial}{\partial x}\varphi_m(x,\ y,\ z)\Big|_{x=y=0}=\frac{\partial}{\partial y}\varphi_m(x,\ y,\ z)\Big|_{x=y=0}=0 \tag{2}$$

考虑到(2)式,我们有

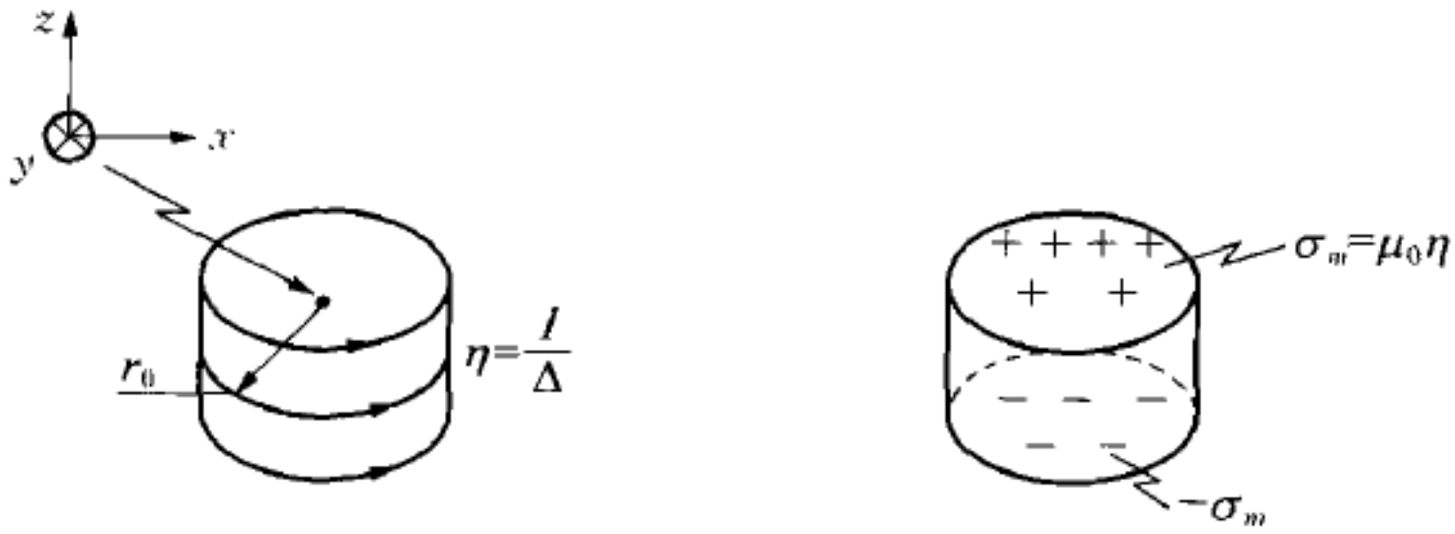
$$H(z)=\boldsymbol{e}_z\cdot(-\nabla\varphi_m(x,\ y,\ z)\Big|_{x=y=0})=-\frac{\partial\varphi_m(z)}{\partial z}$$

$$= \frac{\sigma_m}{2\mu_0}\left(\pm 1 - \frac{z}{(z^2 + r_0^2)^{1/2}}\right), \pm 1 = \frac{z}{|z|}, \tag{3}$$

或者记

$$H(z) = \frac{\sigma_m z}{2\mu_0}\left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{(z^2 + r_0^2)^{1/2}}\right) \tag{4}$$

2. 如图(a)半径为 r_0 的柱形线圈，侧面流过电流，其线密度为 $\eta = \frac{I}{\Delta}$，Δ 是圆柱高度，求出在轴线上的磁场强 $H(z) = ?$ 又图(b)是图(a)的磁场源(电流场源)的等效源系统，其上表面有密度为 $\sigma_m = \mu_0\eta$ 的磁荷，下表面的磁荷密度为 $-\sigma_m$，利用磁势法计算出轴线上的磁场 $H'(z) = ?$ 证明：① 在内部，即 $|z| < \frac{\Delta}{2}$ 区段有 $H(z) - H'(z) = \eta$；而② 在外部，即 $|z| > \frac{\Delta}{2}$ 区段有 $H(z) - H'(z) = 0$.



(第 2 题图)

解 ① 参见(5.1.6)式，我们有

$$H(z) = \frac{\eta}{2}\left\{\frac{\frac{\Delta}{2} - z}{\left[\left(\frac{\Delta}{2} - z\right)^2 + r_0^2\right]} + \frac{\frac{\Delta}{2} + z}{\left[\left(\frac{\Delta}{2} + z\right)^2 + r_0^2\right]^{1/2}}\right\} \tag{1}$$

参见第 1 题，我们有磁势

$$\varphi_m(z) = \frac{\sigma_m}{2\mu_0}\left\{\left[\left(z - \frac{\Delta}{2}\right)^2 + r_0^2\right]^{1/2} + \left(z - \frac{\Delta}{2}\right) - \left[\left(z + \frac{\Delta}{2}\right)^2 + r_0^2\right]^{1/2} + z + \frac{\Delta}{2}\right\}$$

$$= \frac{\sigma_m}{2\mu_0}\left\{2z + \left[\left(z - \frac{\Delta}{2}\right)^2 + r_0^2\right]^{1/2} - \left[\left(z + \frac{\Delta}{2}\right)^2 + r_0^2\right]^{1/2}\right\}, |z| < \frac{\Delta}{2} \tag{2}$$

而

$$H'(z) = -\frac{\partial}{\partial z}\varphi_m(z) = \frac{-\sigma_m}{\mu_0} + \frac{\sigma_m}{2\mu_0}\left\{\frac{-\left(z-\frac{\Delta}{2}\right)}{\left[\left(z-\frac{\Delta}{2}\right)^2 + r_0^2\right]^{1/2}} + \frac{z+\frac{\Delta}{2}}{\left[\left(z+\frac{\Delta}{2}\right)^2 + r_0^2\right]^{1/2}}\right\}$$

$$= -\frac{\sigma_m}{\mu_0} + H(z),\ |z| < \frac{\Delta}{2} \tag{3}$$

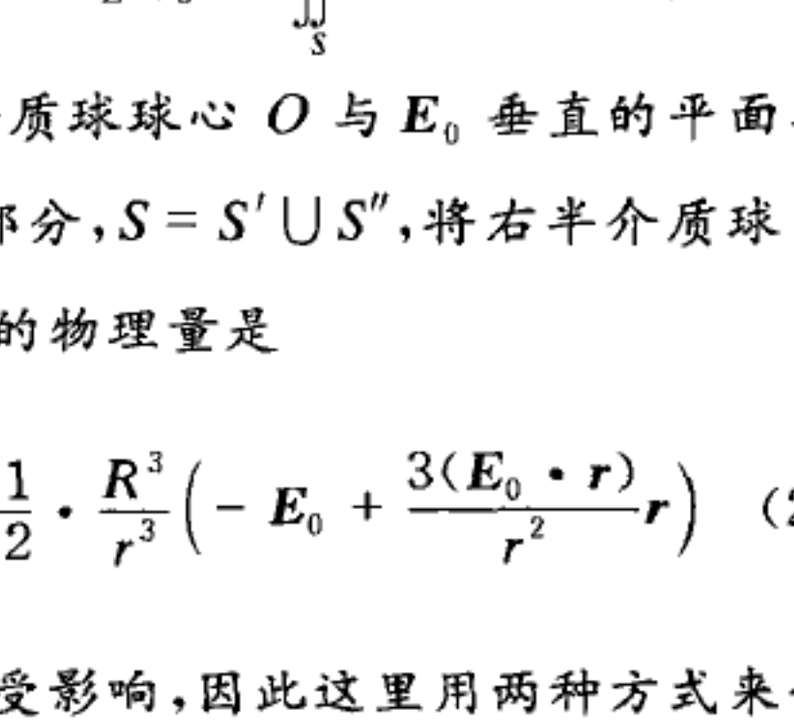
当 $|z| < \frac{\Delta}{2}$　　$H(z) - H'(z) = \frac{\sigma_m}{\mu_0} = \eta$ (4)

② 而在 $|z| > \frac{\Delta}{2}$ 时有 $H(z) = H'(z)$，因此有

$$H(z) - H'(z) = 0 \tag{5}$$

证毕.

3. 在均匀外电场 $\boldsymbol{E}_0 = E_0 \boldsymbol{e}_x$，放入一个半径为 R，相对介电常数为 ε 介质球，参见所附之图，证明在场源是磁流条件下，电场强度 $\boldsymbol{E}$ 不符合物理量条件.



（第 3 题图）

解：在场源是流（本处是磁流）条件下物理量 $\boldsymbol{A}$ 要满足在任意封闭曲面 S 上通量为零的条件：

$$\varphi_A|_S \equiv \oiint_S \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \tag{1}$$

现在要证明 $\boldsymbol{E}$ 不是物理量只要找出在某个 S 下 $\varphi_E|_S \equiv \oiint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \neq 0$ 即可. 现在选取 $S = S' \cup S''$，参见题图，这里 S' 是过介质球球心 O 与 $\boldsymbol{E}_0$ 垂直的平面与介质球相截的部分，S'' 是封闭曲面 S 的其余部分，$S = S' \cup S''$，将右半介质球包含在内. 由于我们已经知道，目前球内和球外的物理量是

$$\boldsymbol{D}_{内} = \frac{3\varepsilon}{2+\varepsilon}\varepsilon_0 \boldsymbol{E}_0,\ \boldsymbol{D}_{外} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}_0 + \varepsilon_0 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}\cdot \frac{R^3}{r^3}\left(-\boldsymbol{E}_0 + \frac{3(\boldsymbol{E}_0 \cdot \boldsymbol{r})}{r^2}\boldsymbol{r}\right) \tag{2}$$

无论认为场源是电荷或磁流，(2)的结果都不受影响，因此这里用两种方式来论证 $\boldsymbol{E}$ 不满足磁流源下的物理量条件.

① 设电介质球上感应出电荷，(2)的定量关系仍然正确，边界条件

$$D_{外n} = D_{内n} = \frac{3\varepsilon}{2+\varepsilon}\varepsilon_0 \boldsymbol{E}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{3}$$

边界上感应出的电荷密度

$$\sigma_e = \varepsilon_0(E_{外n} - E_{内n}) = D_{外n} - \frac{D_{内n}}{\varepsilon} = \frac{3(\varepsilon-1)}{\varepsilon+2}\varepsilon_0 \boldsymbol{E}_0\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{4}$$

而右半球的感应电荷

$$q' = \int_0^{\pi/2}\sigma_e 2\pi R\sin\theta\cdot R\mathrm{d}\theta = \frac{3(\varepsilon-1)\varepsilon_0}{\varepsilon+2}2\pi R^2 E_0\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{3(\varepsilon-1)}{\varepsilon+2}\pi R^2\varepsilon_0 E_0 \tag{5}$$

而

$$\oiint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{E} = \frac{q'}{\varepsilon_0} = \frac{3(\varepsilon-1)}{\varepsilon+2}\pi R^2 E_0 \neq 0 \tag{6}$$

这说明 $\boldsymbol{E}$ 不符合磁流源下的物理量条件；

② 设介质球上感应出的磁流，$\boldsymbol{D}$ 符合物理量条件 $\oiint_S \boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$ 即

$$\iint_{S''}\boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\iint_{S'}\boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{3\varepsilon}{2+\varepsilon}\varepsilon_0 E_0\pi R^2 \tag{7}$$

而

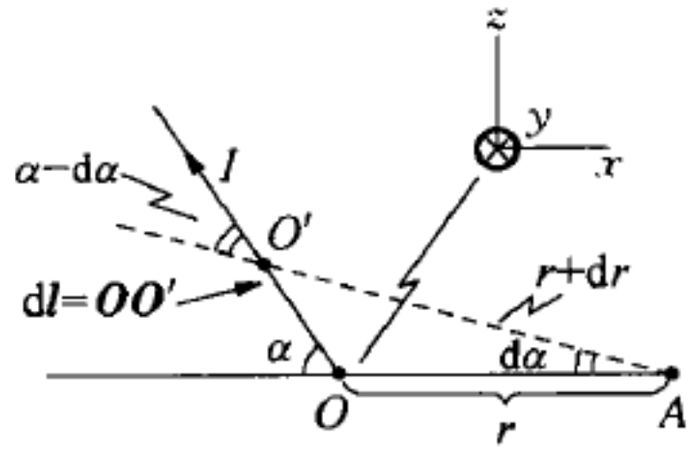
$$\oiint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{E} = \iint_{S'}\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{E} + \iint_{S''}\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\iint_{S'}\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{D} + \frac{1}{\varepsilon_0}\iint_{S''}\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{D}$$

$$= \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon\varepsilon_0}\iint_{S''}\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{D} = \frac{3(\varepsilon-1)}{\varepsilon+2}\pi R^2 E_0 \neq 0 \tag{8}$$

这个结果与(6)式相同，结论也与①相同.

4. 已知从 O 点（原点）出发的半直线电流 I 在 A 点产生的磁场 $\boldsymbol{H}' = \frac{I}{4\pi r}\cdot\tan(\alpha/2)\boldsymbol{e}_y$，这里 OA 在 x 轴上，$OA = r$，α 是电流 I 和 OA 反向延长线的夹角. O' 是电流线上与 O 邻近的一点，记 $\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \overrightarrow{OO'}$，证明电流单元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 所产生的磁场为 $\mathrm{d}\boldsymbol{H} = \frac{1}{4\pi}\cdot I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$，这里 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{OA}$，所得的 $\mathrm{d}\boldsymbol{H}$ 表达式称为毕奥-萨伐尔定律（注：毕奥，J. Biot，1774—1862；萨伐尔，F. Savart，1791—1842）.

解：见图，$O'A = r + \mathrm{d}r$，电流 I 与 $O'A$ 的反向延长线的夹角是 $\alpha - \mathrm{d}\alpha$，而从 O' 开始向左上方向延伸半直线电流在 A 产生的磁场是



（第 4 题图）

$$\boldsymbol{H}'' = \frac{I}{4\pi(r + \mathrm{d}r)}\tan\frac{\alpha - \mathrm{d}\alpha}{2}\boldsymbol{e}_y \tag{1}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}' - \boldsymbol{H}'' = \frac{I}{4\pi}\boldsymbol{e}_y\left[\frac{1}{r}\tan\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{r + \mathrm{d}r}\tan\frac{\alpha - \mathrm{d}\alpha}{2}\right]$$

$$= \frac{I}{4\pi r}\boldsymbol{e}_y\left[\frac{\mathrm{d}r}{r}\tan\frac{\alpha}{2} + \frac{\mathrm{d}\alpha}{2}\sec^2\frac{\alpha}{2}\right] \tag{2}$$

参见图上所示，利用 $\Delta O'OA$ 的正弦定理

$$\frac{\mathrm{d}l}{\sin\mathrm{d}\alpha} = \frac{r + \mathrm{d}r}{\sin\alpha} \rightarrow \mathrm{d}\alpha = \frac{\sin\alpha}{r}\mathrm{d}l \tag{3}$$

而
$$\frac{r + \mathrm{d}r}{\sin\alpha} = \frac{r}{\sin(\alpha - \mathrm{d}\alpha)} = \frac{\mathrm{d}r}{\sin\alpha - \sin(\alpha - \mathrm{d}\alpha)} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\alpha\cos\alpha} \rightarrow$$

$$\mathrm{d}r = r\cot\alpha\mathrm{d}\alpha = \cos\alpha\mathrm{d}l \tag{4}$$

注意 $\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mathrm{d}l(-\cos\alpha\boldsymbol{e}_x + \sin\alpha\boldsymbol{e}_z)$，并且利用(3)，(4)所给出的关系，由(2)式可得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{H} = \frac{I}{4\pi r}\boldsymbol{e}_y\left[\cot\alpha\tan\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\sec^2\frac{\alpha}{2}\right]\mathrm{d}\alpha = \frac{I\mathrm{d}\alpha}{4\pi r}\boldsymbol{e}_y$$

$$= \frac{I\sin\alpha}{4\pi r^2}\mathrm{d}l\boldsymbol{e}_y = \frac{1}{4\pi}\mathrm{d}l(-\cos\alpha\boldsymbol{e}_x + \sin\alpha\boldsymbol{e}_z) \times \frac{\boldsymbol{e}_x}{r^2}$$

$$= \frac{1}{4\pi}I\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{5}$$

此即毕奥-萨伐尔定律.证毕.

5. 如果矢量函数 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(x, y, z)$，满足无旋条件：$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$ 可以找到一个数值函数 $\varphi = \varphi(x, y, z)$ 使得 $\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi$(有位条件).

解：将 $\boldsymbol{E}$ 对一个封闭曲线 C 积分，并且使用斯托克斯定理，我们有

$$\oint_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \iint_S (\nabla \times \boldsymbol{E}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \tag{1}$$

这样，表明积分 $\int_{A_0}^{A} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 只与开始点 $A_0 = (x_0, y_0, z_0)$ 及终止点 $A =$

(x, y, z) 有关而与具体积分路径无关. 选定 A_0 点,定义函数

$$\varphi(x, y, z) = -\int_{A_0}^{A} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{2}$$

这就是我们所要求的. 实际上,令 $A' = (x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y, z + \mathrm{d}z)$, 我们有

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\varphi &= \varphi(x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y, z + \mathrm{d}z) - \varphi(x, y, z) \\ &= -\int_{A_0}^{A'} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_{A_0}^{A} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_{A}^{A'} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \\ &= -(E_x \mathrm{d}x + E_y \mathrm{d}y + E_z \mathrm{d}z) \end{aligned} \tag{3}$$

这表明 $$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x},\ E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y},\ E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z},\ \text{即}$$

$$\boldsymbol{E} = -\nabla \varphi \tag{4}$$

证毕.

6. 若已知矢量 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$, 则可以找到矢量 $\boldsymbol{A}$, 使得 $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ 试证明之.

解: 设 $\boldsymbol{A}$ 是所要的矢量,则另一个矢量

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla \alpha \tag{1}$$

仍然保持关系 $$\nabla \times \boldsymbol{A}' = \nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \tag{2}$$

因此不妨选择 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ 0 \end{pmatrix}$, 这时可写出

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A_1 & A_2 & 0 \end{vmatrix} = \boldsymbol{e}_x\left(-\frac{\partial A_2}{\partial z}\right) + \boldsymbol{e}_y \frac{\partial A_1}{\partial z} + \boldsymbol{e}_z\left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)$$

$$= \boldsymbol{e}_x B_1 + \boldsymbol{e}_y B_2 + \boldsymbol{e}_z B_3 \tag{3}$$

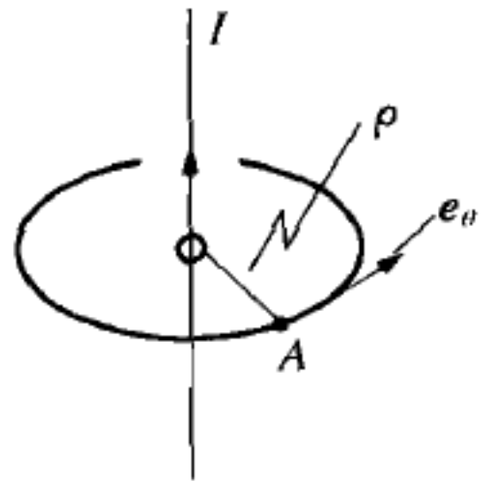
即有方程组 $$-\frac{\partial A_2}{\partial z} = B_1,\ \frac{\partial A_1}{\partial z} = B_2,\ \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} = B_3 \tag{4}$$

由(4)式可解出

$$A_2 = -\int_{z_0}^{z} B_1(x, y, z_1)\mathrm{d}z_1,\ A_1 = \int_{z_0}^{z} B_2(x, y, z_1)\mathrm{d}z_1 \tag{5}$$

这里下标 z_0 是个固定的，例如 $z_0 = -\infty$，而 $B_3(x, y, z_0) = 0$，在电磁学中出现的 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(r)$，在 $r \to \infty$ 时总是认为是 0，(5)式即是所求的 $\boldsymbol{A}$，其中 $A_3 = 0$，因为可以直接验证 $\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = -\frac{\partial A_2}{\partial z} = B_1$，$\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} = \frac{\partial A_1}{\partial z} = B_2$，还有 $\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} = -\int^z \left(\frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y}\right) \mathrm{d}z_1 = \int^z \frac{\partial B_3(x, y, z_1)}{\partial z_1} \mathrm{d}z_1 = B_3$. 证毕.

7. 已知 $\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\boldsymbol{e}_\theta$，指出一个电磁矢势解 $\boldsymbol{A}$ =？这里直线电流 I 沿 z 轴流动，ρ 是所在点 A 与 I 的距离，参见所附之图，选柱坐标，$\boldsymbol{e}_\theta$ 是角度方向的单位矢量，并且在直角坐标架下来验证.



（第 7 题图）

解　$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_\rho \left(\frac{\partial}{\rho\partial\theta} A_z - \frac{\partial}{\partial z} A_\theta\right) +$$

$$\boldsymbol{e}_\theta \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right) + \boldsymbol{e}_z \left(\frac{\partial}{\partial \rho} A_\theta - \frac{\partial}{\rho\partial\theta} A_\rho\right) = \boldsymbol{B} \tag{1}$$

因此可认为

$$A_z = A(\rho),\ \boldsymbol{A} = A(\rho)\boldsymbol{e}_z \tag{2}$$

即

$$-\frac{\partial A(\rho)}{\partial \rho} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \to A(\rho) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \rho$$

$$\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{e}_z \cdot \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln(x^2 + y^2) \tag{3}$$

在直角坐标系下，我们有

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & 0 & -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln(x^2 + y^2) \end{vmatrix}$$

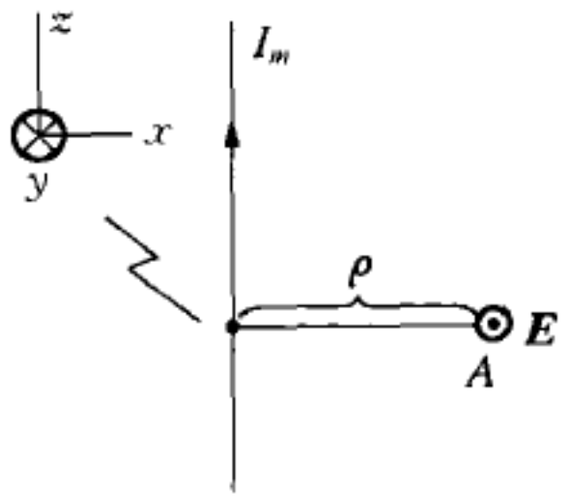
$$= \boldsymbol{e}_x \left(-\frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{y}{x^2 + y^2}\right) + \boldsymbol{e}_y \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{x}{x^2 + y^2}\right)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \boldsymbol{e}_\theta$$

证毕.

8. 已知直线磁流 I_m，求出距此直线磁流为 P 处的电场强度 $\boldsymbol{E}$ =？

解　由电的毕奥-萨伐尔定理



（第 8 题图）

$$d\boldsymbol{E} = -\frac{1}{4\pi} I_m d\boldsymbol{l} \times \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{1}$$

有 $$\boldsymbol{E} = \frac{-1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} I_m \boldsymbol{e}_z dz \times \left(\frac{-z\boldsymbol{e}_z + \rho \boldsymbol{e}_x}{(z^2+\rho^2)^{3/2}}\right)$$

$$= \frac{-\boldsymbol{e}_y}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{\rho I_m}{(z^2+\rho^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{I_m}{2\pi\rho}(-\boldsymbol{e}_y) \tag{2}$$

这个解答有围绕着 z 轴（即 I_m 所在处）的旋转对称性，因此一般可写成

$$\boldsymbol{E} = -\frac{I_m}{2\pi\rho^2}\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{\rho} \tag{3}$$

这里 $\boldsymbol{\rho}$ 是从线 I_m 到场强 $\boldsymbol{E}$ 所在点的距离矢量.

9. 写出在真空中有电荷、电流及磁荷、磁流的麦克斯韦方程组.

解： $$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0},\ \nabla \cdot \boldsymbol{H} = \frac{\rho_m}{\mu_0};\ \nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0\left(\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{j}\right),$$

$$\nabla \times \boldsymbol{D} = -\varepsilon_0\left(\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \boldsymbol{j}_m\right) \tag{1}$$

这里 ρ 是电荷密度，ρ_m 是磁荷密度，$\boldsymbol{j}$ 是电流强度矢量，$\boldsymbol{j}_m$ 是磁流强度矢量.

10. 已知只有电性场源的条件下我们有矢量势 $\boldsymbol{A}$ 及标量势 φ，有 $\nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ 以及 $-\nabla\varphi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = \boldsymbol{E}$，$\alpha$ 是任意函数. 证明在规范变换：$\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla\alpha$，$\varphi \to \varphi' = \varphi - \frac{\partial \alpha}{\partial t}$ 之下，电磁场不变.

解 $$\boldsymbol{B}' = \nabla \times \boldsymbol{A}' = \nabla \times (\boldsymbol{A} + \nabla\alpha) = \nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B};$$

$$\boldsymbol{E}' = -\nabla\varphi' - \frac{\partial \boldsymbol{A}'}{\partial t} = -\nabla\left(\varphi - \frac{\partial \alpha}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{A} + \nabla\alpha)$$

$$= -\nabla\varphi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = \boldsymbol{E}$$

11. 在只有电性场源的条件下，洛伦兹不变量 $L = \nabla \cdot \boldsymbol{A} + \frac{\partial \varphi}{c^2 \partial t}$ 在适当的规变换下可以为 0，这时的电磁场系统称为满足洛伦兹约束条件的系统，试证明存在满足约束条件 $L = 0$ 的系统.

解：参见第 10 题，设 $(\boldsymbol{A}, \varphi)$ 四电磁势业经给定，经规变换后有 $(\boldsymbol{A}, \varphi) \to$

$(\boldsymbol{A}', \varphi') = \left(\boldsymbol{A} + \nabla \alpha, \varphi - \dfrac{\partial \alpha}{\partial t}\right)$，$\alpha$ 满足洛伦不变量 $L' = 0$ 的条件

$$L' \equiv \nabla \boldsymbol{A}' + \frac{\partial \varphi'}{c^2 \partial t} = \nabla \boldsymbol{A} + \frac{\partial \varphi}{c^2 \partial t} + \nabla^2 \alpha - \frac{\partial^2 \alpha}{c^2 \partial t^2} = 0 \tag{1}$$

记

$$F(x, y, z, t) = \nabla \cdot \boldsymbol{A} + \frac{\partial \varphi}{c^2 \partial t} \tag{2}$$

这是已知函数，而(1)式是 α 的非齐次达朗贝尔方程：

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} - \nabla^2 \alpha = F(x, y, z, t) \tag{3}$$

这个方程有解. 证毕.

12. 已知电性场源系统，在真空中，其四矢势（$\boldsymbol{A}$，φ）满足洛伦兹规范条件，导出（$\boldsymbol{A}$，φ）所满足的方程并作以解释.

解：由电性场源所确定的麦克斯韦方程是

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{j}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1}$$

由(1)中第三个方程可记 $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}$ 称为矢量势，将这个结果代入第四式有

$$\nabla \times \left(\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) = 0 \tag{2}$$

这表明可引入一个标量函数 φ，使得 $\boldsymbol{E} + \dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi$，即

$$\boldsymbol{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{3}$$

根据 11 题的结果，可以认为四矢势（$\boldsymbol{A}$，φ）满足洛伦兹约束条件：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \frac{\partial \varphi}{c^2 \partial t} = 0 \tag{4}$$

将(3)的结果代入(1)第一个方程，我们有

$$-\nabla \cdot \left(\nabla \varphi + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) = -\nabla^2 \varphi + \frac{\partial^2 \varphi}{c^2 \partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \frac{\partial \varphi}{c^2 \partial t}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{5}$$

应用洛伦兹条件，得到关于 φ 的非齐次达朗贝尔方程，场源是 $\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$，与电荷密度 ρ

成正比.现在将(1)式中的第二式改写为

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \mu_0 \boldsymbol{j}$$

则
$$\mu_0 \boldsymbol{j} = \nabla \times \boldsymbol{B} - \frac{\partial \boldsymbol{E}}{c^2 \partial t} = \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) + \frac{\partial}{c^2 \partial t}\left(\nabla \varphi + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right)$$

$$= -\nabla^2 \boldsymbol{A} + \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{A}) + \frac{\partial}{c^2 \partial t}\left(\nabla \varphi + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{c^2 \partial t^2} - \nabla^2 \boldsymbol{A} + \nabla \left(\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \frac{\partial \varphi}{c^2 \partial t}\right) = \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{c^2 \partial t^2} - \nabla^2 \boldsymbol{A} \qquad (6)$$

这是关于 $\boldsymbol{A}$ 的非齐次达朗贝尔方程,场源为 $\mu_0 \boldsymbol{j}$,与电流密度矢量 $\boldsymbol{j}$ 成正比.

参考资料

1. 物理学(电磁学),复旦大学,上海师范大学物理学编,上海科学技术出版社,1979 年.

2. 电介质物理学(第二版),殷之文主编,科学出版社,2003 年.

3. 电磁通论(上)、(下),麦克斯韦著,戈革译,武汉出版社,1994 年.

4. 电磁场与波(修订版),黎滨洪、金荣洪、张佩玉编著,上海交大出版社,2002 年.

后　　记

我们在引论中已经提及对称性与人类文化的关系，以对称性为指导原则的思考方式是人类的非物质遗产，它是文化的一个成分，并且是重要的成分.这里“重要”二字是指“重大而必要”：对称性的观念会必然出现，它是与人类生存、发展相伴而生的.因此它与其他文化有区别，如京剧青春版昆曲，中国有，外国不一定有；又如文化遗产中的格萨尔王、十二木卡姆、荷马史诗、莎士比亚戏剧这些艺术精品各具有局部的、地域的特点，代表了某一特定领域人群的见解.与这些相比，对称性是人类的共同见解，是人们对于总体的一种看法，与上述各种文化相比，它针对的是所有的自然现象和人工现象.对称性作为文化的一部分，是面对事物的一种感悟，这些感悟逐步积累起来形成了对称性概念.要积累对自然界的感悟，首先是要有记录介质，非物质成果必须要保存在物质之中，就像软件必须保存在存储器中一样.结绳记事中的“结”恐怕是最早的记录介质，然后是书籍取代了“结”的作用.美索不达米亚的苏美尔人留下的泥版书是书籍的雏形，但学者们说对称性的起源无可查考，这很像电影镜头“淡入”的过程，蓦然回首，对称性的概念就已经屹立在那里了.对称性受到广泛关注是 20 世纪以来的事，尤其是将对称性应用到物理研究取得很多杰出成就之后的事.学者指出①现在将“对称”当作英文 Symmetry 的译文，在韦氏字典中，Symmetry 的意思是“均衡比例”，或者是“由这种均衡比例产生的形状美”，这也是汉语“对称”的含义.“对称”概念很早就蕴含在人们的思考之中，但那时尚未明确这种思考就是

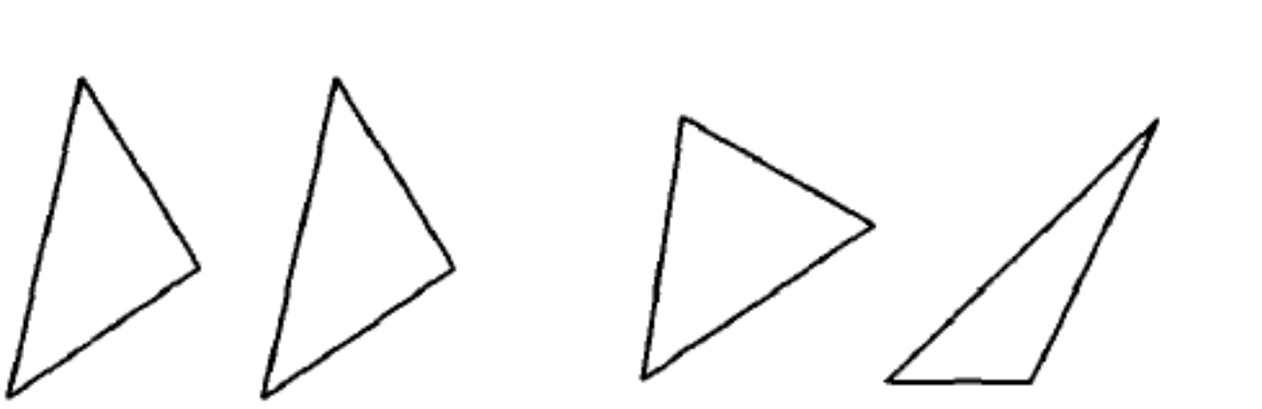
---

① 李政道文录，柳怀祖编，浙江文艺出版社，1999 年 5 月，P14.

关于对称性的思考，直到对称性的概念明确之后，我们才知道关于对称性的思考已经经历了很多时间很多世代了.在公元前，我们就知道“知己知彼，百战不殆”，“知己知彼”就是比较自身和他人的对称性，“百战不殆”就是期待能在生存发展中获得有利地位.

对称性的概念看来是源于对几何直观现象的考虑，但随着对称性内涵的发掘和外延的扩大，“对称性”也就不断地更改了它的外貌，于是对于未经训练的人很难把某些形式的对称性与原始的对称性联系起来.本书的目的是填补这一间隙，使得读者能够了解到对称性的各种形式和各种日益扩大的应用.

对称性或者两个对象的对称性，最直观的理解是“重合”，在引论中已经指出：两个平面三角形如果能够重合，则它们是对称的；当然，如果不重合就不是对称的.图 1(a)中的两个三角形是对称的，(b)中的是不对称的.对于平面图形而言，重合与否可以当作是判别对称性的标准.但是对于立体图形来说，重合这个定义很难从直觉上讲清楚.例如两个半径一样的球体，直觉上看，我们觉得它们是对称的，但是如何“重合”这个概念去解释这个对称性呢？把一个球体放进另一个球体中去？这在几何上是可以接受的概念，但在物理上或直觉上是难以理解的，因为物理上反复强调，所谓固体就它的不可进入性质.当然我们还可以从另一种方式去理解它们的对称性.如图 2 所示，可以做一个球腔使得球 1 放进腔中是紧密契合的，现在将球 1 取下，将球 2 放入腔中也是紧密契合的，这就是对称性或重合的一个可操作性定义.或者将这个球腔看作是翻砂用的砂模，球 1 和球 2 都用金属液体灌进铁水之后而凝成的铁球，即通常所说由同一个模子倒(铸)出来的，或者用抽象一些的思考方法，参见图 3，如果两个物体是对称的，是指其中两个对应截面 A_1 及 A_2 是可以重合的，这两个截面当然是抽象的，并非真的把两个物体锯开，只是在想像中把它们锯开，然后“取出”截面，这里需要发挥一定的



(a) 对称的三角形　　(b) 不对称的三角形

图 1

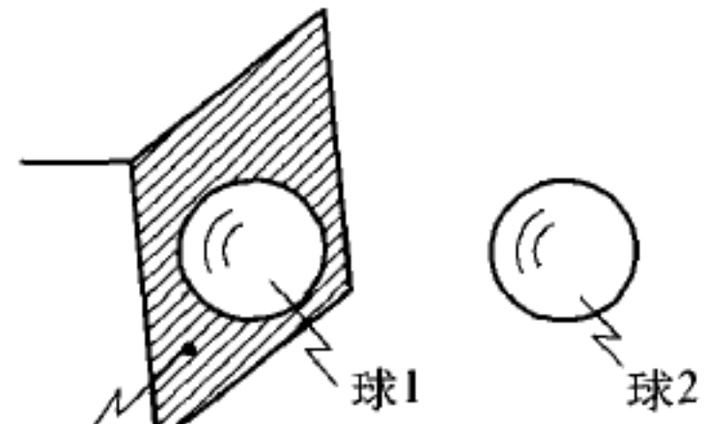


图 2

想像能力.有了这种判定对称性的方式,那么镜式对称也就容易确定了.参见图 4,物体 A 和 B 称为是有镜式对称的,是指其中一个例如 B 物体,它在镜子中形成一个镜像 B',而 B' 与 A 可以重合,从这里看到镜式对称仍旧基于重合的观念.镜式对称实例很多,例如人的左右手就是镜对称的.镜对称实例在建筑上也很多,引论中已讲到:宫殿式建筑对中轴线是镜对称的,但实际上还有一些小的不对称,例如殿堂的右侧是钟楼,而左侧是鼓楼,一侧挂着一个大钟,另一侧则放着一面大鼓;在过去年代,寺庙在各地是常见的建筑,历史上也颇多遗存,"南朝四百八十寺",可见当时风气.在比较大的寺庙中,一进门就可以看到有四个大汉,这就是俗称的四大金刚,他们分立在门厅两边,面对面相向而立,一边两个排成一排,这种配置是镜对称方式,但细看两边塑像又有些区别.右侧是风、调两位,一个大汉拿着一把宝剑(青锋、锋与"风"谐音)另一个大汉抱着一个琵琶(琵琶需要调音,即"调");左侧是雨、顺两位,一个大汉拿着一把雨伞,另一个拿着一个青龙(即蛇,蛇身滑溜代表"顺"之意).这表明对称中又有微小的不对称,或称为有破缺,研究对称中的破缺,也是对称理论研究中的重要课题,一般说来,对称体现了共性,处于同一系统中的各局部都有大致相同的性质,而破缺体现了个性,凸显各部分的特性,对称与破缺是实际系统的特性.我们看到许多古代的雕像,因为左脸和右脸塑得过分对称,望去没有人间烟火气,实际的人的左脸、右脸多少总有些区别,有的人区别还相当地大.

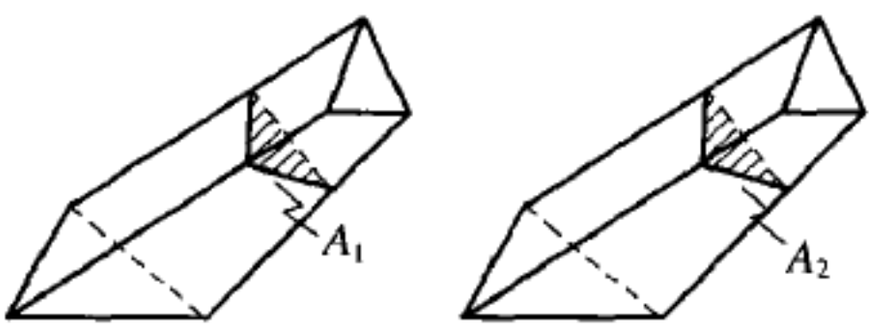


图 3



图 4

上面我们重提了引论中的几何对称性,在这个层次上的对称性无非是重合的观念,在下面的进一步探讨过程中,我们发现对称不光是几何物体之间的重合,而是某些深层的,或是抽象的,对应关系,我们也可以把这种关系称为重合关系,这不是几何形状上的具体的重合关系,而是更抽象一些的某些数据之间的重合关系.为了解释清楚这一点,我们在引论中曾讨论过两个半径不同的球体的对称性,两个半径不同,$R_1 > R_2$ 的两个球体,当然不会

有体积上的重合，但它们的面积 S 与半径平方之间的比值却相同，即

$$\frac{S_1}{R_1^2} = \frac{S_2}{R_2^2} = 4\pi \tag{1}$$

所以本处的重合是表面积 S 和半径平方 R^2 的比值相重，这是一种性质上的相重，它脱离了几何上的直观，在物理中所谓对称性都是指性质上的相重，从相重的意义上，它与几何物体的重合一样，都有某些参数上相等的约束在内，因此本质上没有区别，但前者脱离了直观，进入了抽象思考的领域.这是原始对称性的外延，即借重“几何重合”的原始概念，拓广到某些数据的相等或某些关系的相重.但就是对于几何形状完全相同的彼此半径相等的金属球来说，依旧还可以分出铜球、钢球、塑料球等由不同物质所制造出来的球，从材料上说钢球与钢球有对称性，但钢球与塑料球没有对称性，这是又一种性质的对称性，是从几何对称性之外发掘出来的新对称性，这是对称性的深化，或者不妨说是对称性内涵的拓展，这也是物理学中要着重探讨的对称性.同是材料上的不同(不对称)，铜球与钢球之间的区别远小于，例如，钢球与塑料球的区别，同是不对称，但有程度上的差别，铜球与钢球有近似的对称性，从日常生活上看，这也是值得关注的.另外我们在引论中还提到诗词现象的顺读、倒读的对称性，可见得对称性现象无处不在.

1. 为什么关注万有引力

本书讨论物理中的对称性，这一般不是几何直观上的对称性，而是较为抽象的对称性.第 1 章我们以牛顿力学为例探讨了物体受力规律的对称性，并且指出要考虑的重点.一个物体在地面上受地球的吸引力，它也在远离地面的高空受到地球的吸引力，在地面或在高空，这是两个不同的条件，因此虽然同是一个物体在受地球的吸引，但一在地面、一在高空，具有不同的条件，形成不同的系统，既然有了两个不同的系统，自然有它们之间的对称或不对称问题.它们是对称的吗？即有共同性吗？当然！一切事物都有共同性，即都有对称性，至少它们都是描述自然规律这一方面具有对称性，对于这种过分宽泛的，无所不在的对称性我们不感兴趣，因为这是众所周知的事实，不会在哲学上的总体常识之外再添加任何一点新的认识.比较具体一些

的认识是它们有对称性，它们都反映了同一个力的施与者地球对所指定物体的作用，这一判断有了物理特性，有别于哲学的整体论断，但仍嫌不够精确.由这种论断出发，只能得到议论物理，即议论议论而已，没有定量的推论可供参照，按照物理标准，这是不够格的判断，因为从它不能推断出定量的结果.现在从另一个方面提出问题，它们是不对称的吗？答案仍旧是“当然”！它们描述不同的情况，当然有区别，即不具有共同性，或者至少不具备完全的共同性，在地面附近的物体最终落到地面；而高空运动的物体可能围绕地球运动而不落到地面，这就是它们之间的不对称性.上面所说的一个物体在地面的系统和它在高空的系统，我们作出两个互相背反的结论，即它们当然是有对称性的；又说它们当然是不具对称性的.这两个结论都是正确的，各适应于不同的范围，并且都是显然的常识，几乎无需花精力研究.因此这种对称性和非对称性都不是我们所关注的；那么我们关注什么呢？我们关心的是其中的尽可能多的对称性，其中一个有意义的课题是我们要问：无论在地上或天上，它们服从同一个规律吗？我们知道质量为 m 的物体在地面上所受的地球作用力是

$$F_1 = mg \tag{2}$$

$g=9.8$ 米/秒^2 是重力加速度；而 m 物体在高空受到地球的作用(吸引)力是

$$F_2 = G\frac{mm_e}{r^2} \tag{3}$$

这里 G 是万有引力常数，$G = 6.754\times10^{-11}\ m^3\cdot kg^{-1}\cdot s^2$（参见第1章的(1.3.5)式），$m_e$ 是地球的质量，r 是地球中心到物体 m 的距离，关系(3)与(2)在形式上有显著的不同，据此我们的问题是作有对称性还是没有对称性的结论？从直觉上看，公式(2)及(3)既然不同，就应该作这两种情况没有对称性的结论，或者说地上的规律和天上的规律没有同一性而是分别有不同的规律.但是，经过长期探讨，发现(2)及(3)正好反映了地上和天上的同一性或对称性，它是同一个规律即万有引力定律的在不同条件下的形式，物体因万有引力作用在地面即受力 mg(式中 r_e 是地球的半径)：

$$G\frac{m_em}{r_e^2} = mg \tag{4}$$

这样，无论地上或天上，物体 m 所接受的力具有同样形式，地面的重力 mg 实际上还是万有引力，这就是我们关注万有引力的原因，它体现了受力对称性中的核心内容.(4)式表明了地上规律和天上规律的同一性.从这里看到，对称性的研究主要集中于模糊地带，即尚未分辨出对称性或非对称性的地带，在明显是对称的领域中找出非对称因素或者在显然在非对称处找到对称事实，这是尤为感兴趣的地方，因为如果在这些方面取得结果，那就会增加我们对自然界的认识，在“知己知彼”层面上又深入了一层，这是人类对知识的永恒追求.

关于地上和天上的规律的同一性的找得，其实是 300 年前牛顿时代的事，我们把它写成第一章是想揭示人们在探索对称性中的曲折过程.当时，这个事实的发现并不是为了验证对称性，只是在各个有关领域中关于自然规律的探索，而是事后我们发现这是关于对称性讨论中的兴奋点.牛顿万有引力的发现已经接受了无数的赞美之词，它作物理学起始点也无愧于这些赞美.

2. 物理学与处理工具，一个在常规对称性之外的问题

从牛顿开始，在处理实际出现的或实验室提出的问题时用上了数学分析.数学分析特别是其中的微积分与牛顿有关，牛顿是它的创始者之一，但是微积分是否被人们认可却是另外一个问题.在牛顿晚年时出现了欧拉(L. Euler，1707—1783)他钻研和改进了牛顿的微积分，使之成为自然科学工作者手中方便的工具，欧拉数学成就是多方面的，他在数学方面提出了偶数必为两个素数之和的 1 + 1 问题；又有欧拉的七座桥问题，这是现代计算机基础图论的启蒙之作；欧拉之后不久，法拉第(M. Faraday，1791—1867)从根本上改进牛顿的概念，否定了万有引力相互作用中的超距作用，引进了场的概念，物体是通过分布在其周围的场将作用传递到另一个物体上的，法拉第的思想感染了麦克斯韦，从而导致了系统的电磁理论，为现代科技的发展奠定了基础；在电磁理论的启示下，出生于法拉第之后不久的爱因斯坦(A. Einstein，1879—1955)统一了空间-时间而将它们纳入了空-时系统，作为这种有效性的明证是它的一个推论，物体的质量 m 乘上光速平方 c^2 即是该物体的能量，$E = mc^2$，这是迄今为止一个最优秀的定量规律，爱因

斯坦还有其他成就，使得他是20世纪以来最杰出的物理学家，空间-时间统一基础上建立起来的理论，狭义相对论，在狭义相对论中，粒子的模型只能是几何点.这样，从法拉第到爱因斯坦，从场是物质到点粒子模型，我们得到一个意想不到的困难.由于电场中存在有能量，在半径为 z 的球形电荷 e 外部从距离 $r=z$ 到 r 为无穷大处的能量是

$$E(z)=\int_z^\infty \frac{\varepsilon_0 e^2}{(4\pi\varepsilon_0 r^2)^2}4\pi r^2 \mathrm{d}r=\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 z} \tag{5}$$

如果是点粒子，$z=0$，那么能量将为∞，如果是有限能量，则 z 是有限大小的正数.如果这时能量就是电子的静能，$E(z)=m_e c^2$，则由(5)式可以确定出电子的半径为

$$z=\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 m_e c^2} \tag{6}$$

这里 z 就是所谓的电子经典半径.在这样解答中认为电子是有有限半径的球体，它与狭义相对论并不相容，所以电子的自能(如果在静止状态就称作静能)只能是无穷大了，这个结果至今困惑着物理学家.海森伯在晚年觉得把粒子集中于一点考虑是否合适，因为一个粒子对其周围是有影响的.狄拉克尽管他有大胆的负能电子海，这里出现另一种类型的无穷大，但他反对施温格(J. Schwinger，1918—1994)等人引进的重正化的方法.重正化方法简单地说就是人为地消除∞的方法，依赖实验结果，把理论出现的相应无穷大换成实验中给出的有限结果，这里自然出现了一个问题，从数学上看∞-∞是不定式，不能确定其大小关系，就是说从∞中减去另一个∞不可能看出有限的结果，或者不能唯一定义有限结果.将无穷大直接换成实验给出的有限参量是一种折中的方法，因为从理论上看来似乎缺少一种寻找从无穷大中所蕴含的有限参量的方法.目前大家倾向于认为半纯函数方法是一个比较合理的从无穷大值中提取有限确定值的方法，下面我们就讲一讲这个方法，并且讨论它在消除理论中∞所起的作用.我们知道极点在 $z=0$ 的半纯函数 $f(z)$ 可展成罗朗级数

$$f(z)=\sum_{i=-m}^{\infty} a_i z^i \tag{7}$$

这里 $m>0$，在 $z=0$ 时 $f(z)=\infty$，但是如果将 z 的负幂次，即

$$\frac{a_{-m}}{z^m}+\frac{a_{-m+1}}{z^{m-1}}+\cdots+\frac{a_{-1}}{z} \tag{8}$$

部分都略去，而剩下的 $\sum_{i=0}^{\infty}a_i z^i$，在 $z=0$ 时为有限的数字 a_0，所以在半纯函数极点所在处可以确定出唯一的有限大小.现在利用半纯函数的概念去确定电子的自能，从(5)式我们看到 $E(z)$是 $z=0$ 处的半纯函数，那么 $z=0$ 的有限值是多少呢，从上面的讨论看来是 0，这样的结果与实验结果不一致，看来需要舍弃，现在如果把电荷 e 更动为 $e\cdot\exp(kz)$，

$$e = e\cdot\exp(kz)\big|_{z=0} \tag{9}$$

看看会出现什么新的情况，这里 k 为一个常数，其量纲$[k]=$米$^{-1}$.经过这样更动之后，(5)式就成为

$$E(z)=\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 z}\exp(2kz) \tag{10}$$

按照上述消除无穷大方式有 $E(z=0)\to\frac{ke^2}{4\pi\varepsilon_0}$，这是一个有限的数可与实验结果协调.到目前为止为半纯函数在消除无穷大的作用还未成为定论，只有少数人有类似的看法①.保留场论中的观念但引用半纯函数来将理论中的无穷大量换成一个确定的量，这样就能成为比较自洽并且对未知事实有比较大的预测能力的理论，这种期待能否成为事实尚需证实，但是它是一种可能的选项.上面讨论的处理过程与重正化群方程有关，这也是一种对称性，但是本书中并未处理这种对称性，因为它还不够成熟.

3. 坚持对称性还是坚持状态的计数规则

在第二章我们从宏观观点和微观观点来处理气体系统，既然出现了两种模型，自然在这两个模型里出现了对称性问题，一个显然的对称之处是它们都处理同一个气体系统，显然的不对称之处是它们所用的方法不同.对称性研究的要点仍然是我们可以获取多少新的对称性知识.古人说庐山："横看成岭侧成峰"，那么岭及峰都是庐山的一个表现，既然它们都是在表现庐

① 超弦史话，李淼，北京大学出版社，2005 年 10 月.

山，它们之间的共性就值得探索.我们探索物理上的对称性也正在遵循这一思路.当从宏观方面探讨气体系统时，我们遇到了系统所接受的热量不是状态函数的问题，那么什么样的量才既与热量关系密切而又是状态函数呢?能够提出这样的问题的原因是因为19世纪末期数学已经进展到了一定的程度，积分因子技巧已经十分熟练.由于$đQ$是个微增量过程，但它不是状态函数的微分，因此(至少是在两参数系统中)必然有一个积分因子 f，使得 $fđQ$ 成为状态函数的微分.我们在第2章中已经指出这个积分因子是 $f=\frac{1}{T}$，T 是系统的温度，这时系统状态函数称之为熵，以 s 记之，有

$$\mathrm{d}s=\frac{1}{T}đQ \tag{11}$$

19世纪末，经过玻尔兹曼等人的努力，分子动理论达到相当完善的程度，玻尔兹曼对物理学非常热衷，但有一定的盲目性.由于一些宏观量，如压强和温度等，都可以用分子的微观参量表达出来，我们有了计算熵 s 的微观公式，后来发现这个计算公式并不合适，特别是违背了熵 s 的可叠加原理.为了解决这一困难，吉布斯在分子组态的计数上作了改进，从而得出无内在矛盾的熵 s 的表达式.吉布斯所作的改进是指将同种类同情况的，例如同处一个能级并且其他状态参数也相同的情况，n 个粒子，其状态数从 $n!$ 改变为1，即我们只重组合而略去排列，或者说所有粒子都是不可区分的.有了这样的出发点，我们就能导出恰当的熵的表达式.这个过程也可以这样理解：如果坚持对称性的观念，那么就必须承认上面 n 个微观粒子是不可区分的，与有一定大小的 n 个宏观粒子有明显的性质上的差别，因为对于宏观粒子来说，它们一定是可以区分的，如果完全一样时也可以加上标记使它们不一样；但对于微观粒子来说，n 个同种粒子是严格不可区分的，这是我们从对称性探讨得到的新知识，而这些粒子也获得全同粒子的专有称谓.全同粒子的性质在陆续出现的新物理现象中得到了进一步的认证.这说明我们坚持宏观和微观的关于熵的看法的对称性(同一性)而修改了粒子组的组态计算方法，引进了关于微观粒子的全同性的观念，这些做法都是正确的.颇值得注意的地方是：在引进微观小球(粒子)组的与宏观小球组相对照的非常不同的计算组态的方法是从对称性的考虑得出的，而不是某些专门分析原子或分子系统微观特征中看到的.从这个事实中我们也可以体会到“对

称性是物理学中第一原理”的正确性以及这个论断的威力.

4. 狭义相对论和电磁现象

20 世纪初,因为电磁波现象的实验研究而催生出狭义相对论,而相对论的出现又促进了对电磁现象的进一步研究.在这一段,我们把关系密切狭义相对论和电磁现象放在一起作一概述.

第 3 章是讲相对论的,着重分析时间和空间的对称性,所遵照的讨论路线还是寻找这些对象所存在的尽可能多的对称性,在 19 世纪之前,对于时间和空间关于只知道它们之间的独立性,因此找到任何一点对称性都是值得庆幸的,我们模仿着二维空间中的转动,将它移植到二维时空中的“旋转”,从而说明了在相对论探讨中的潜台词,原来它们也是属于“对称性”探讨中的一个领域,不过所探讨的对象换成了时间和空间.

第 4 章和第 5 章都是探讨电磁现象对称性的,静电学的基础定律自然是库仑定律,两个点电荷 q_1 及 q_2 在相距 r 之处彼此受到的作用力大小是

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \tag{12}$$

这里 ϵ_0 是常数.在静磁学中,通常认为基础定律是毕奥-萨伐尔定律,但在我们这里选定为磁荷的库仑定律,两个点磁荷 q_{m1},q_{m2}在相距 r 处彼此受到的作用力是

$$F = \frac{q_{m1} q_{m2}}{4\pi\mu_0 r^2} \tag{13}$$

这里 μ_0 是常数,$\mu_0 = (\epsilon_0 c^2)^{-1}$,$c$ 是光速.我们看到(13)式与(12)式在形式上非常相近,选它们两个作为电学和磁学的基础定律就充分地说明了电学和磁学的对称性,这种对称性是在原始概念上的,即它们中的各个定律具有完全相近的表达式结构,这在正文中已经详细叙述了有关结论,我们对它们之间的对称性也加深了认识.

5. 现代物理中探索对称性的主要工具——群论

有了这些在普通物理领域关于对称的认识及熟悉一些常见的处理技巧

之后，我们大概会从对于对称性就是重合的直觉的但是初等的认识，进入了探讨数据重合的对称性领域也就是现代的对称性领域.研究这方面的对称性问题需要用群论.

群论是什么，请看看李政道先生引述费密的话①：群论不过是定义和术语的堆积.这是大科学家费密的看法，实际操作起来恐怕还需要花一定时间.李先生又说："尽管他(指费密)这么说了，一些对运用置换群改变次序不熟练的学生…还是遇到了一些困难."这里所说的置换群 S_n 是在 n 个文字之间作置换的操作所构成的群.关于置换群的讨论是从伽罗华(1811—1832)开始的，与多项式的解根问题有关.在中学时就知道二次多项式

$$f_2(x) = x^2 + a_1 x + a_0 \tag{14}$$

有两个根 x_1, x_2，$f_2(x_i) = 0, i = 1,2$，而且根与系数有关系：

$$x_1 + x_2 = -a_1, x_1 x_2 = a_0 \tag{15}$$

所以这个方程在置换群 s_2 的置换操作下，即将两个根 x_1 和 x_2 互换的操作作用下，系数是不变的.就是因为这个原因将 2 次代数方程与二级置换群 s_2 联系起来；经过一个直接的推广，可将 n 次代数方程与 n 级置换群 s_n 联系起来.这样有限的根式求解就成为 s_n 群能否化成一系列正规子群 G_i，$i = 0, 1, \cdots$，的分解联系起来.如果能够做到 $G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \cdots$，其中 G_{i+1} 是 G_i 的正规子群，而商群 $A_i \equiv G_i/G_{i+1}$ 是阿贝尔群，多项式就能用有限个根式求解，如果做不到这一点，系统就不能用有限个根式求解.这样，这个连问题都难以叙述清楚的多项式根式求解问题就解决了.这给后来的研究者也提供了启发，原来把问题更换成群论的问题时能有这么多的方便之处.这也为用群论处理其他问题建立了榜样.多项式解根的问题提成了群论的问题这样的做法一般称之为建模，即建立模型之意.目前是为数学问题建模，当然也可以对物理问题建模，其实在前面我们已对物理问题做了建模的工作，如时-空对称问题与洛伦兹群之间的关系，但是对于这些用群论建模的问题中，群论并非一定是不可欠缺的工具，我们通常所用的方式已够，群论特征不是那么明显.本段开始所提的 S_n 群和 $f_n(x)$ 多项式解根问题中群论特征十分明显，但这不是物理问题的群论建模，而是数学问题的群

① 李政道文录，柳怀祖编，浙江文艺出版社，1995 年 5 月，pp3～4.

论建模，无论如何，这是用群论解答得十分干净利落的问题，作为其他的，包括物理在内的问题建模导引颇为合适.

对于希望了解群论的读者来说，最好从 SU_2 群切入，因为 SU_2 群与可以用常规处理的 SO_3 群关系密切，它也能够与典型的群论相容，历史上曾把核子 n，p 归结为 SU_2 群同位旋二重态，充分显示了群论与物理问题的聚密关系.

与 SU_2 群相近的是 SU_3 群，它与含奇异夸克的奇异粒子的处理有关，给出因为群论才会知道的同一表示中各有关粒子质量之间的关系，从而作出了准确的预断，导致了 Ω^- 粒子的发现，其质量大小与预断的一致，从而使物理界懂得了群论的重要性，由群论知道重子也处于“周期表”中，不过这个周期表并不是门捷列夫的周期表，它并没有直观简单的规律.在下一节作一些扼要的讨论.

6. 从门捷列夫的周期表到盖尔曼的强子分类

在 1860 年代，所有化学元素差不多全找齐了，除了惰性气体一族当时并未发现之外，还缺现在称之为镓(类铝)、钪(类硼)、锗(类硅)的三个元素，其他的已全部找到.门捷列夫(D. E. Mendeleev，1834—1907，俄国人)经过努力找到了元素性质随原子量增大而周期变化的对称规律(有少数几个例外).虽然这个对称规律耸人听闻并且极有成就，但从数学上看来却比较简单.下面我们就解释为什么门捷列夫周期律是一种对称性，而盖尔曼利用 SU_3 群性质作出的强子分类规则与这个周期律对比为什么比较贴切，同时我们介绍有关科学家的一些事迹.

到了门捷列夫时代，即 1860 年代，对元素的认识已经积累得足够多，达到了一定的认识高度.在 1865 年，英国人牛兰兹(A. R. Newlands，1837—1898)，把当时知道的 62 种元素按原子量大小排列顺序发现从任意一个元素算起每到第八个元素其性质就和第一个元素性质相近，称为八音律，这个表前两个周期与现代周期表的第二、三周期几乎相同，但以后的排列得比较混乱.牛兰兹后来转入制糖工艺的研究，未再从事周期方面的工作，原因是他受到嘲笑和打击，不敢再坚持下去了.

门捷列夫在元素性质和原子量之间的关系的研究坚持了很多年.早在

1857 年门捷列夫大学毕业后在彼得堡大学担任化学课讲课工作，他发现那时的化学课还是一片混乱，连元素、原子也没有一个明确的概念.1860 年门捷列夫出席了卡尔斯卢厄化学家代表大会，在这个会上确定把元素的当量改用真正的原子量，从而为门捷列夫当时的研究提供了明确的方向.门捷列夫对前人的工作进行了整理，对于一些有疑问的原子量值，他根据其化学性质并利用原子量等概念作了一些校正.到了 1869 年他把当时已知的 63 个元素基本上按照原子量为顺序排成了周期表.当时的周期表未列惰性气体，还有三个空缺，它们被门捷列夫称为类铝、类硼和类硅，后来这三个空缺中的元素陆续被发现了，还颇具戏剧性.1875 年，门捷列夫确定周期律之后 6 年，法国人布瓦特朗发现镓元素，测定比重是 4.7(克/厘米^3)，此事公布之后他收到门捷列夫的来信，指出镓即是他所预言的类铝，比重应当在 5.9～6.0 之间，这使得布瓦特朗重新提纯了镓并且再测它的比重，重测的结果是 5.94，处于门捷列夫预言范围之内.之后在 1879 年，瑞典人纳尔逊发现了钪(类硼)；1895 年德国人温克勒发现了锗(类硅)，同一年，周期律写进了教科书中.1895～1898 年瑞利和拉姆齐发现一族惰性元素，门捷列夫周期表其实是指出寻找元素原子的对称性的一种新的思路和准则.对于原子的几何形状来说，把它们都看成是实心圆球大概毫无问题，这种几何外形上相似性或对称性十分明显，一般人都能够想象得到，但不会提供新的知识.门捷列夫的工作其实是揭开了深一层的对称性即它们的化学性质间的对称性，这样就发掘出了一个新的课题.当然这个课题并不是门捷列夫首先提出的，前人已经接触了这个课题.门捷列夫在校正原子量方面下了一番工夫，为这个对称性确立了坚实的基础，敲定了所寻找的对称性.当时的结论是：深层的对称性可以找到，但要有一套指导原则，这就是按照原子量不断增加的顺序，去按图索骥，去寻找性质相近的元素原子.

门捷列夫周期律有些许例外，有些元素在周期表上的顺序并不随着原子量增高而靠后，一般说来顺序越在后面的原子量越大，但有个别的元素其顺序较靠后，但原子量反而比前面的小，如钾的原子量为 39.099 在周期表上名列第 19，它的前面是氩，名列第 18，但原子量为 39.94，这个困扰出现在瑞利和拉姆齐工作之后，门捷列夫列原始周期表时尚未出现.在这里引出两个不同的概念——原子量和原子序，这两者联系密切但略有不同，门捷列夫的周期律更准确一些说是元素的性质随原子序增加而呈周期性变化，是原

子序而不是原子量，这一结论由于莫斯莱(H. Moseley 1887—1915)的工作而得到肯定.莫斯莱把原子序 Z 与元素的 K 特征的 X 射线的频率 υ_K 联系了起来，自 $Z=20$ 的钙到 $Z=30$ 的锌，他发现有关系

$$\upsilon_K = R'(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2})(Z-1)^2 \tag{16}$$

这里 R' 是黎德堡常数；而从 $Z=40$ 的锆到 $Z=79$ 的金，得到巴尔麦系中以 L 为标记的特征 X 射线以特征方程是频率 υ_L 有关系

$$\upsilon_L = R'(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2})(Z-7.4)^2 \tag{17}$$

所以原子序是有物理含义的，它并不是单纯的周期表图上的流水号，经过包括 J. J. 汤姆逊、卢瑟福、莫斯莱等人的深入探索，现在我们明白了所谓原子序就是原子核中带正电的质子的个数，也就是原子核的电荷数，原子核中除了有质子之外还有中子，因此原子量大致就是核子的数目，即核中质子加上中子的总数目，这个总数大致在 $2Z$ 左右有一定数目的差异，有相同的 Z 但有不同的原子量的属于同一种元素，它们之间的关系称为同位素关系，因此出现了有 Z 增加了，但原子量反而减小的反常现象.随着对元素和核结构研究的进展，元素对称性方面的课题逐渐从化学领域退出而进入物理学领域，原来是化学领域的元素蜕变和核裂变成为物理学中的典型课题——弱相互作用和强相互作用，从而建立了物理学中的全新领域.为这个转变作出重大贡献的物理学家——卢瑟福因其建立原子的行星模型而获得诺贝尔化学奖，卢瑟福不无感慨地自我调侃道："想不到我还成了化学家!"卢瑟福在现代物理学中地位十分崇高，他不仅带头开辟了原子物理新领域，他建立的原子行星式模型为人们所熟悉，它长期以来作为现代科学的象征出现在街头巷尾、机关、学校以及各种书籍、刊物上.他还奖掖后进，给像玻尔、狄拉克等优秀人才以大力扶持.玻尔是量子理论的创始人，而狄拉克是 20 世纪中至关重要的物理学家.狄拉克因对电子自旋的解释(狄拉克方程)而闻名遐迩，但曾考虑拒绝接受诺贝尔物理奖，他觉得得奖会带上引人注目的光环而耗费了从事物理研究的时间.这时卢瑟福告诫狄拉克：如果不接受诺贝尔奖，那将更为引起媒体的注意，从而惹来更多的麻烦.因此狄拉克放弃了拒奖的打算.还有，卢瑟福的女婿劳尔夫·福勒(R. Fowder，1889—1944)也

从事物理工作，是杰出的理论物理学家.福勒培养出狄拉克，还为中国培养了杰出的物理人才，王竹溪、张宗燧都是福勒的学生.总之，20 世纪的杰出物理学家大多受过卢瑟福的直接或间接的影响.

承继着卢瑟福工作的是大大小小的加速器的建成，由此出现了很多强子，强子之多及性质的奇特比起当年的原子的多样性不遑多让，实际上是更为复杂和更为奇特，因此自然就提出了对强子的分类问题，对此盖尔曼跨出了有希望的一步，他在描述强子对称性时采用了 SU_3 群论这个工具，他对强子作了恰当的分类，这是 20 世纪的新的周期表性质的工作.

7. 物理学和对称性

至此我们叙述了对称性的由来、概念的形成和扩展以及向物理学渗透的进程.对称性进入了物理学，物理学也给对称性以新的面貌.形成了物理学的新模式，这是物理学中特有的模式，它充分地吸收了数学、化学的有关结果，锻造出物理学中一道独特的风景线：对称性是物理学中的第一原理.海纳百川，有容乃大，物理学以其能够容纳各种学科的能力而成为探索未知世界的中心学科，各种现象如同潺潺小溪汇进到各学科的滔滔江河，最后形成了物理学的茫茫大洋.其边也无际，其论也深刻，但是仍旧是一个不断发展并且与人类命运休戚相关的学科.

近代对称性在事实的探究和理论的深化方面又有新的进展，但它们的科研特征更强，争论更多，确定性更少，要叙述它们，已经是下一个故事(The next story)的领域中了.