$e^{i\pi}+1=0$

Panorama of Mathematics

数学概览



惠更斯与巴罗，牛顿与胡克

数学分析与突变理论的起步，从渐伸线到准晶体

— B. И. 阿诺尔德 著

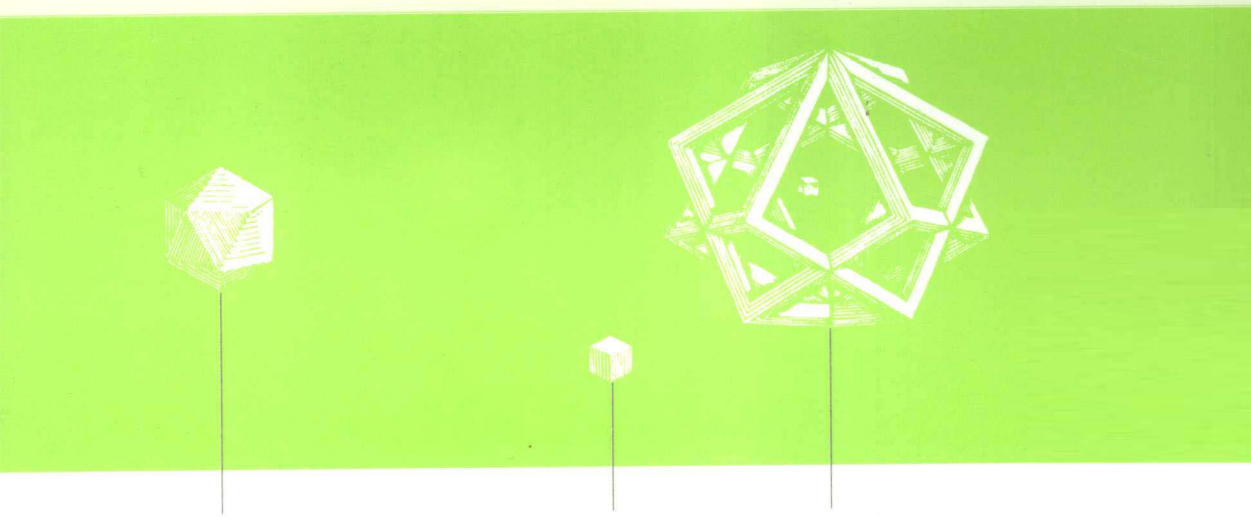
— 李培廉 译

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

本书是由作者于1986年在莫斯科数学会为大学生开设的数学系列讲座的开幕式上所作报告扩充而成。作者在书中用现代的数学观点阐述了在惠更斯、巴罗、牛顿、莱布尼茨以及胡克等人的著作中所呈现出来的微积分与理论物理的形成历史，讲述了17世纪80年代的著作中与20世纪80年代的著作中数学思想的对比和关系——包括波前的奇点，考克斯特反射群（包括二十面体群）与现代变分学及准晶体对称性的关系等。

书中还用现代的复变茹科夫斯基函数讨论了行星轨道椭圆性的牛顿定律，并由此得到了一个新的对偶定律，建立了在不同中心力场中的运动之间的关系，让我们知道了万有引力定律和胡克定律之间的相互对偶关系。书的最后一章介绍了牛顿有关阿贝尔积分超越性的、令人吃惊的现代拓扑学的证明。所有这些精彩内容在一般的书中都是不易见到的。

书末的49条附注包含了大量有价值的信息，是本书的一个有机组成部分，这是值得提请读者注意的。



ISBN 978-7-04-036759-1

9 787040 367591 >

■ 学科类别：数学／数学文化

academic.hep.com.cn

定价 35.00 元

Panorama of Mathema

数 学 概

HUIGENGSI YU BALUO
NIUDUN YU HUKE

惠更斯与巴罗，牛顿与胡克

数学分析与突变理论的起步，从渐伸线到准晶体

B. И. 阿诺尔德 著

李培廉 译

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

© Арнольд В. И., 2010.

图书在版编目(CIP)数据

惠更斯与巴罗，牛顿与胡克：数学分析与突变理论的起步，从渐伸线到准晶体 /（俄罗斯）阿诺尔德著；李培廉译. -- 北京：高等教育出版社，2013.3
（数学概览）
ISBN 978-7-04-036759-1

Ⅰ.①惠… Ⅱ.①阿… ②李… Ⅲ.①数学分析②突变理论 Ⅳ.①O17②O192

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 014122 号

策划编辑 李 鹏　　责任编辑 李 鹏　　封面设计 王凌波　　版式设计 马敬茹
责任校对 刘娟娟　　责任印制 朱学忠

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印　　刷 高教社（天津）印务有限公司
开　　本 787mm × 1092mm　1/16
印　　张 11
字　　数 99 千字
插　　页 2
购书热线 010 - 58581118

咨询电话 400 - 810 - 0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
　　http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
　　http://www.landraco.com.cn

版　　次 2013 年 3 月第 1 版
印　　次 2013 年 3 月第 1 次印刷
定　　价 35.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物 料 号 36759 - 00

《数学概览》编委会

主编： 严加安　　季理真

编委： 丁　玖　　李文林

曲安京　　王善平

徐　佩　　姚一隽

《数学概览》序言

当你使用卫星定位系统 (GPS) 引导汽车在城市中行驶, 或对医院的计算机层析成像深信不疑时, 你是否意识到其中用到什么数学? 当你兴致勃勃地在网上购物时, 你是否意识到是数学保证了网上交易的安全性? 数学从来就没有像现在这样与我们日常生活有如此密切的联系. 的确, 数学无处不在, 但什么是数学, 一个貌似简单的问题, 却不易回答. 伽利略说: "数学是上帝用来描述宇宙的语言." 伽利略的话并没有解释什么是数学, 但他告诉我们, 解释自然界纷繁复杂的现象就要依赖数学. 因此, 数学是人类文化的重要组成部分, 对数学本身以及对数学在人类文明发展中的角色的理解, 是我们每一个人应该接受的基本教育.

到 19 世纪中叶, 数学已经发展成为一门高深的理论. 如今数学更是一门大学科, 每门子学科又包括很多分支. 例如,

现代几何学就包括解析几何、微分几何、代数几何、射影几何、仿射几何、算术几何、谱几何、非交换几何、双曲几何、辛几何、复几何等众多分支. 老的学科融入新学科, 新理论用来解决老问题. 例如, 经典的费马大定理就是利用现代伽罗瓦表示论和自守形式得以攻破; 拓扑学领域中著名的庞加莱猜想就是用微分几何和硬分析得以证明. 不同学科越来越相互交融, 2010 年国际数学家大会 4 个菲尔兹奖获得者的工作就是明证.

现代数学及其未来是那么神秘, 吸引我们不断地探索. 借用希尔伯特的一句话: "有谁不想揭开数学未来的面纱, 探索新世纪里我们这门科学发展的前景和奥秘呢? 我们下一代的主要数学思潮将追求什么样的特殊目标? 在广阔而丰富的数学思想领域, 新世纪将会带来什么样的新方法和新成就?" 中国有句古话: 老马识途. 为了探索这个复杂而又迷人的神秘数学世界, 我们需要数学大师们的经典论著来指点迷津. 想象一下, 如果有机会倾听像希尔伯特或克莱因这些大师们的报告是多么激动人心的事情. 这样的机会当然不多, 但是我们可以通过阅读数学大师们的高端科普读物来提升自己的数学素养.

作为本丛书的前几卷, 我们精心挑选了一些数学大师写的经典著作. 例如, 希尔伯特的《直观几何》成书于他正给数学建立现代公理化系统的时期; 克莱因的《数学讲座》是他在 19 世纪末访问美国芝加哥世界博览会时在西北大学所做

的系列通俗报告基础上整理而成的, 他的报告与当时的数学前沿密切相关, 对美国数学的发展起了巨大的作用; 李特尔伍德的《数学随笔集》收集了他对数学的精辟见解; 拉普拉斯不仅对天体力学有很大的贡献, 而且还是分析概率论的奠基人, 他的《概率哲学随笔》讲述了他对概率论的哲学思考. 这些著作历久弥新, 写作风格堪称一流. 我们希望这些著作能够传递这样一个重要观点, 良好的表述和沟通在数学上如同在人文学科中一样重要.

数学是一个整体, 数学的各个领域从来就是不可分割的, 我们要以整体的眼光看待数学的各个分支, 这样我们才能更好地理解数学的起源、发展和未来. 除了大师们的经典的数学著作之外, 我们还将有计划地选择在数学重要领域有影响的现代数学专著翻译出版, 希望本译丛能够尽可能覆盖数学的各个领域. 我们选书的唯一标准就是: 该书必须是对一些重要的理论或问题进行深入浅出的讨论, 具有历史价值, 有趣且易懂, 它们应当能够激发读者学习更多的数学.

作为人类文化一部分的数学, 它不仅具有科学性, 并且也具有艺术性. 罗素说: "数学, 如果正确地看, 不但拥有真理, 而且也具有至高无上的美." 数学家维纳认为"数学是一门精美的艺术". 数学的美主要在于它的抽象性、简洁性、对称性和雅致性, 数学的美还表现在它内部的和谐和统一. 数学美应该而且能够被我们理解和欣赏. 最基本的数学美是和谐美、对称美和简洁美, 它应该可以而且能够被我们理解和欣赏. 怎么

来培养数学的美感? 阅读数学大师们的经典论著和现代数学精品是一个有效途径. 我们希望这套数学概览译丛能够成为在我们学习和欣赏数学的旅途中的良师益友.

严加安、季理真

2012 年秋于北京

译者前言

—— 致读者

牛顿这个名字, 除了不识字的人外, 几乎无人不知无人不晓. 他是有史以来最伟大的科学家之一, 甚至还有不少人认为, 他就是迄今为止世界上最伟大的科学家. 据说他是爱因斯坦最心仪的人, 在他的书桌上总是放着牛顿的半身像. 为牛顿树碑立传用不着说明理由. 因此就有了各式各样的牛顿传记问世, 有各种不同的层次, 写牛顿的各个不同的侧面, 品种之多何啻汗牛充栋. 但是能在一本篇幅不大的小册子里, 把牛顿的多彩人生、多面性格、丰富深远而又极为超前的创见, 精练而又精彩地、并且深入浅出地呈现在读者面前, 本书为译者所仅见.

本书作者弗拉基米尔·依戈列维奇·阿诺尔德 (Владимир

Игоревич Арнольд (1937 — 2010) 在我国数学界并不陌生, 他有多部著作已译成中文, 都享有很高的声誉. 但是对一般的数学爱好者, 甚至是一些物理学工作者来说, 可能就不太熟悉他了. 作为俄罗斯当代最负国际盛誉的数学家之一, 他在数学的多个领域内, 特别是在动力系统、微分方程和奇点理论等方面做出了重要贡献. 由于这些方面的工作, 他获得了 2001 年的 Wolf 奖, 这个奖项的地位与 Fields 奖相当. 后者与前者相比, 最大的特点是, 它只授予年龄在 40 岁以下的青年数学家, 而前者则更着重于终身成就. 获奖者都是久负盛名的数学大师, 例如, 著名华人数学家陈省身和丘成桐就分别是这个奖项的 1984 年和 2010 年的得主. 所以有人把它比之于数学中的 Nobel 奖. 阿诺尔德还因共同创建了 "KAM (Колмогоров–Арнольд–Moser) 定理", 与柯尔莫戈洛夫 (Колмогоров) 一起获得了列宁奖. 顺便提一下, 这三个人先后都是 Wolf 奖的获得者.

阿诺尔德还是一个循循善诱, 热心于传播现代数学知识的教育家. 他的数学著作, 风格清新活泼, 深入浅出, 引人入胜, 在数学界获得了很高的评价, 一经出版常常很快就被译成英、法、日等多种文字. 他的多种著作的中译本也深受我国数学工作者的激赏. 他在普及现代数学知识方面的著作则更是不可多得的佳品, 无论数学修养高还是低的读者, 都能从中获得教益, 享受到不同的阅读乐趣. 其作品被誉为数学普及著作的典范.

每一个有初中以上文化程度的读者都知道牛顿的三大运动定律和牛顿的万有引力定律, 文化程度更高一些的读者可能还会知道牛顿在数学方面的建树: 牛顿二项式定理和微积分的创始. 至于牛顿最重要的代表作《自然哲学的数学原理》这本书知道的人相对就较少了. 关于牛顿的故事, 苹果树下的灵感几乎是人们津津乐道的. 到了大学学习微积分的时候, 学生会听到有关牛顿和莱布尼茨的各自门徒为争夺微积分的发明权而争论不休的故事. 我们这一代在民国年代上过小学的人, 在小学的课本中读到过他把手表当成鸡蛋放到水中去煮, 反映了他在工作上思想高度集中的故事, 还读到过他在工作时忘记了享用仆人给他送来的午餐, 真正是做到了废寝忘食的程度 (我们现在在语文课本中已经有六十多年看不到类似这样的故事了, 近年来老民国的国文课本在大陆重新出版, 颇受青睐, 良有以也). 我们大多数人心目中的牛顿就是一个这样的人. 但是牛顿所处的时代是一个怎样的群星闪耀的时代, 牛顿在这样的历史环境中是如何成长的, 牛顿的老师是谁, 他对牛顿有过什么影响, 而牛顿又从那些大师们学习、汲取了些什么, 他的创造又是怎样产生和发展的, 如果一个好学深思的人想了解这一切, 而又没有足够的时间去读大部头的牛顿传记的话, 那么阿诺尔德的这本书是值得推荐的.

阿诺尔德在本书中多方位、多视角地追述了牛顿时代那些伟大的科学家们的著作中所呈现出来的数学分析和理论物理的萌芽的产生和发展以及在他们的争论和争夺中的成长和壮大, 其中的逸闻趣事也是精彩纷呈, 在这些逸闻趣事中既展

现了人性的光辉, 也暴露出了人性的弱点. 我们从中得到的感悟更在科学知识之外.

尤其难能可贵的是, 作者在本书中道前人所未道, 深刻地揭示了这些大师们的深邃的思想, 指出了他们的有些观念甚至超前了他们那个时代好几百年, 只是到了现代才得到了人们的认识和进一步的发展. 作者在书中追踪了这些思想和观念在现代数学和物理中的产生、发展和突破. 例如作者指出了惠更斯 (Huygens) 的工作与今天的辛几何、变分法、奇点理论、突变理论以及最优控制等有密切的联系. 又如, 作者还谈到了由洛必达 (L'Hospital) 所撰写的历史上第一本微积分的书中, 作为对具有一个拐点的平面曲线的渐近线的研究结果, 实质上是写到了 H_3 —— 二十面体对称群的不规则轨道生成的流形的一个表示.

书中还包含了许多饶有趣味的内容, 例如, 惠更斯的渐屈线和渐伸线与波前奇点、二十面体与渐屈线、二十面体与准晶体、关于行星轨道为椭圆的定理在今天的推广, 天体力学中的混沌运动的理论, 还有有关小行星的分布和行星环的结构问题, 小行星与地球碰撞的可能性, 阿贝尔积分的超越性, 等等, 其中也有些结果是本书作者的研究成果, 例如用压缩流体的流动模型给出了均匀球体的引力等价于质量集中于球心的球体所产生的引力这个结论的现代化证明, 介绍了极为有价值的牛顿多边形方法, 如此等等, 不胜枚举.

十分有趣的是, 作者在本书中还给我们描绘了一个灵光四射的胡克 (Hooke): 他一生拥有 500 多项发明, 著名的玻意

耳 (Boyle) 定律实际上是胡克发现的, 他是光的波动学说的最早提出者之一, 以牛顿命名的牛顿环实际上胡克在牛顿之前就观察到了. 他兴趣十分广博, 实验能力高超. 他还是提出细胞概念的第一人. 他有着对真理的天才直觉能力, 在牛顿发表万有引力定律以前他就预见到行星轨道为椭圆是由于引力的平方反比定律导致的, 只是他未能用数学来论证这一点, 为此他还专门给牛顿写信提出自己的想法, 建议二人来共同研究, 但没有得到牛顿的响应. 他曾经十分正确地指出了牛顿对假想物体在地球内部的运动的错误. 我们甚至可以这样设想, 如果他有更高一些的数学修养和天赋, 历史会给我们第二个牛顿. 从这个故事里我们再一次见证了数学的价值和意义. 他有好几百项的独创和发现, 几乎都被冠上了别人的名字, 只有弹性体的应力与应变之间的关系采用了胡克的名字, 这就是众所周知的胡克定律, 想到这些, 不禁为之唏嘘不已. 一个一流天才在精英们中间只落得做个 "二等公民", 只要是在专制政体的环境中, 只要有学阀伴生, 只要人的独立精神和思想自由受到压抑, 这种情况就绝非仅有, 也不会绝迹. 感谢阿诺尔德在这本小册子里着力给我们介绍了这个应该得到更多尊敬和公正评价的历史人物, 能够让更多的普通读者了解到这些. 我们也为阿诺尔德写史的春秋笔法深表敬意.

所有这些在一般的书中都不大容易见到, 所以读来都令人耳目一新. 总之, 这是一本让你读了一遍还想再读一遍的

书, 是一本让你爱不释手的书.

我最早是从舍弟李培信先生那里知道这本书的, 他认为很值得译出介绍给我国的数学爱好者, 那已经是二十多年前的事了. 当时它的英译本刚出来不久, 国内还不易看到. 所以我就在工作之余根据俄文本将它译成了中文, 但是在那样的年代很难找到愿意接受它的出版社. 不久后就听说, 倒是在人口只有大陆几十分之一的台湾出版了它的中译本, 猜想大约是从英译本转译的 (我至今没能见到). 2005 年在中国科学院数学所访问期间我见到了此书的英译本, 发现译文很忠实于原文 (只是缺失了第一章的最后一段和附录 2 中的两段: 即在原书的第 83 页的开始两段), 并且增加了几幅精彩的照片, 所以又对照英译本作了校勘和补充. 英译本中在引用牛顿等人的原著时与俄文本略有不同, 大概是由于俄译的缘故, 所以翻译时在这些地方一律遵从英译本 (相信在这些地方英译本是引用了原著). 2010 年重读本书及其译文, 又重新校对了一遍, 因为我相信这本书会有被人 (应该说被某个出版社) 认识的一天. 感谢高等教育出版社自然科学学术著作分社的王丽萍先生和李鹏先生对本书的重视, 他们毅然决定将它纳入《数学概览》丛书出版. 这本书终于得到了有眼光的出版人的鉴赏, 有机会送到读者手上了. 现在期待的就是在读者中找到它的知音了.

本书是由作者于 1986 年在莫斯科数学会为大学生开设的数学系列讲座的开幕式上所作报告扩充而成, 初版收入到

莫斯科科学 (Наука) 出版社的《大学生现代数学丛书》中. 作者在报告之后曾分别发表了《数学科学三百年》(载《自然 (Природа)》, 1987, No. 8, 5 – 15) 以及《开普勒第二定律和阿贝尔积分的拓扑学》(载《量子 (Квант)》, 1987, No. 12, 17 – 21). 在本书前言注释中作者还指出, 可将此二文作为本书的补充读物. 所以特地请中国科学院数学所的余建明教授觅得并复印寄来. 原拟作为本书附录一并译出. 但在阅读之后感到与本书内容重复太多, 决定放弃, 改选了阿诺尔德和塞尔 (Serre) 谈准晶体和二十面体对称性的两篇短文与读者分享, 它们曾分别收入克莱因的《二十面体与五次方程求解讲义 (Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom Fünften Grade)》一书俄译本的附录中. 相信有些读者会对它们感兴趣, 它们对读者欣赏本书也会有一定的帮助.*

最后译者感谢辽宁科技大学和其科研处的领导以及理学院何希勤教授对译者工作的关心和大力支持. 同时, 在结束这件工作的时候不禁再次想到了为我治疗眼疾的大夫, 是他们保住了我的视力, 使我得以从事我心爱的工作, 他们是鞍山中医院的王洪刚主任和北京大学第三医院眼科中心的郝燕生主任, 想到他们就会心生感激之情. 只要做点工作就会深

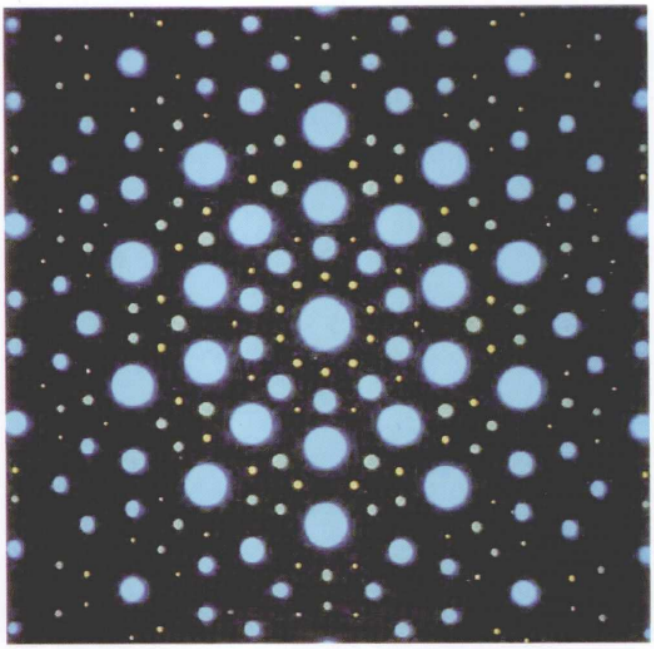
*塞尔的文章原先是从其俄译本转译的, 后来高等教育出版社的王丽萍先生和李鹏先生从塞尔先生本人处获得了本篇文章的中文版的授权, 并寄来英文原文, 故在最后审校时重新按原文翻译, 使译文得到较多改善, 译者对王、李两位编辑表示衷心感谢!

深感到离不开、也会得到好心人的帮助, 这时你就会感到这个世界的美好. 工作和读书一样, 让人快乐, 享受美好. 译者也希望能分享到读者在阅读本书时所感受到的愉悦. 同时也希望能得到读者对译文的批评指正, 译者的 E-mail 地址是: liplian@yahoo.com.cn.

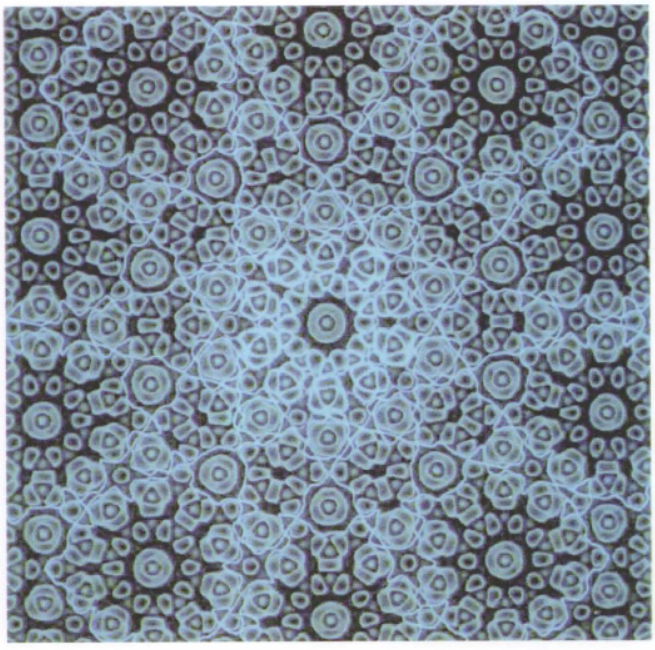
李培廉

2012 年 5 月于

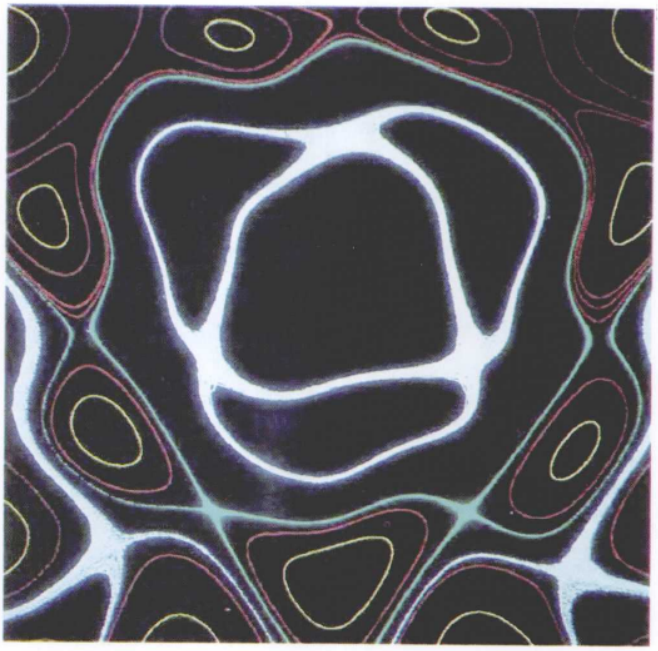
鞍山辽宁科技大学



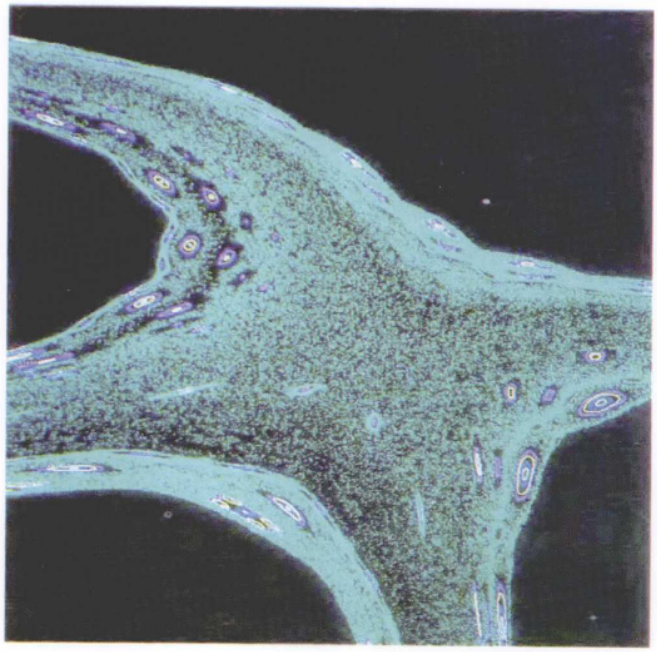
照片 1



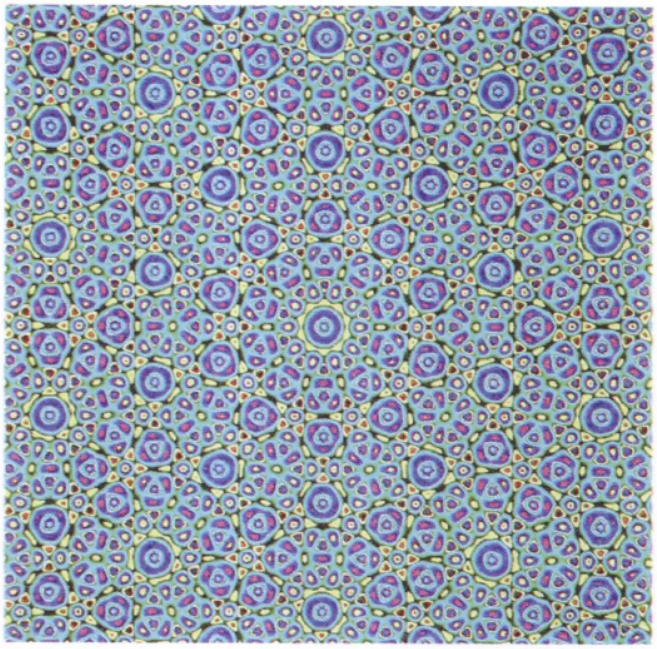
照片 2a



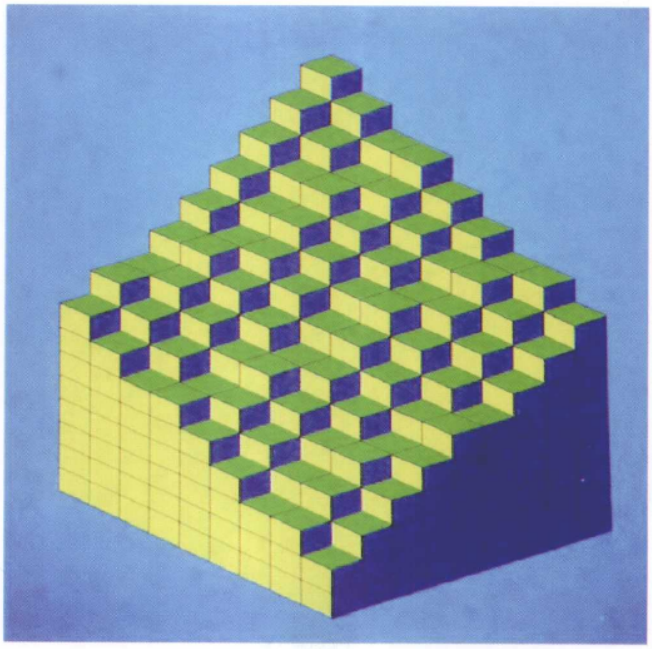
照片 2b



照片 2c



照片 3



照片 4

目录

《数学概览》序言

译者前言

惠更斯与巴罗, 牛顿与胡克 1

第一章 万有引力定律. 5

§1. 牛顿与胡克. 5

§2. 落地问题 11

§3. 平方反比定律 17

§4. 《原理 (*Principia*)》. 20

§5. 球的引力 22

§6. 牛顿证明了轨道是椭圆的吗? 26

第二章 数学分析 31

§7. 当作幂级数理论的分析. 31

§8. 牛顿多边形 32
§9. 巴罗 35
§10. 泰勒级数 39
§11. 莱布尼茨 41
§12. 关于分析发明权的争论 47

第三章 从渐伸线到准晶体 51
§13. 惠更斯的渐伸线 51
§14. 惠更斯的波前 55
§15. 渐伸线与二十面体 56
§16. 二十面体与准晶体 61

第四章 天体力学 67
§17. 《原理》后的牛顿 67
§18. 牛顿的自然哲学 69
§19. 天体力学的胜利 70
§20. 关于稳定性的拉普拉斯定理 72
§21. 月球会掉到地球上来吗? 73
§22. 三体问题 74
§23. 提丢斯 – 波德定律和小行星 76
§24. 间隙与共振 79

第五章 开普勒第二定律和阿贝尔积分的拓扑学 85
§25. 关于积分的超越性的牛顿定理 85
§26. 局部代数性和全局代数性 89

§27. 关于局部非代数性的牛顿定理. 91
§28. 光滑代数曲线的解析性 93
§29. 局部代数可积卵形线的代数性. 94
§30. 具有奇点的代数不可积曲线 95
§31. 牛顿证明和现代数学 97

附录 1　轨道椭圆性的证明 99

附录 2　牛顿的《原理》中的引理 XXVIII 107

附录 3　关于准晶体对称性的注记. 113

附录 4　塞尔给格雷教授的回信 127

附注 137

惠更斯与巴罗，牛顿与胡克*

到 1987 年牛顿 (Newton) 的《自然哲学的数学原理》一书发表就满 300 年了 —— 这是一本奠定了整个理论物理基础的书. 确切地说, 理论物理就是从这本书开始的. 几乎在

*本书是由作者于 1986 年在莫斯科数学会为大学生开设的数学系列讲座的开幕式上所作报告扩充而成. 作者感谢 А. Ю. 外因特洛布 (Вайнтроб), 他把自己对这次报告所作的记录供作者使用, 也要感谢 В. Л. 金兹堡 (Гинзбург), А. П. 尤什凯维奇 (Юшкевич) 和 Г. К. 米海依洛夫 (Михайлов) 提出的有益的意见. 下述二文的材料可作为本报告的补充:《数学科学三百年》(载《自然 (Природа)》, 1987, No. 8, 5 – 15) 和《开普勒 (Kepler) 第二定律和阿贝尔 (Abel) 积分的拓扑学》(载《量子 (Квант)》, 1987, No. 12, 17 – 21).

[作者感谢纽约大学的盛情款待, 他在那里读到了 James Arthur 论时间及其神秘性的 1988 年系列报告, 其部分内容已结合到本书中了, 他还要感谢 John H. Lowenstein, 他为这个报告所制作的计算机图片也部分为本书采用了. (这一段为英译本中所附加的. —— 译者注)]

同时, 数学分析也开始起步了. 第一部有关分析的著作发表于 1684 年, 但它不是牛顿写的, 因为他没有发表过他在这一领域内的发现, 而是莱布尼茨 (Leibniz) 写的.

要谈《自然哲学的数学原理》这本书的内容, 我们就应该研究, 这本书是怎样写成的, 它是由什么引起的, 它解决了哪些问题, 分析是在什么时候创始、而又是为了什么创始的, 它为什么叫做分析, 它的基本思想来自何方, 例如, 为什么在分析中我们要讲函数, 等等.

所有这些问题都与 17 世纪末的牛顿时代有关, 那时有一大批数学明星在工作. 他们的成就完全被数学随后的发展所掩盖, 所以那个时代辉煌的发现在我们今天遥遥望去, 其辉煌的程度就显得比它们实际的要小. 在这些数学家中, 在牛顿和莱布尼茨之前最著名的有笛卡儿 (Descartes)、帕斯卡 (Pascal) 和费马 (Fermat), 在他们稍后工作的则有约翰·伯努利 (Johann Bernoulli), 除了他们之外, 我们还必须提到巴罗 (Barrow), 他是牛顿的老师和紧接其前的先行者, 还有惠更斯 (Huygens), 他解决了一些与牛顿和莱布尼茨要解决的一样的问题, 可是却常常还稍稍超越一些, 而且不用任何分析.

惠更斯的数学发现有过奇特的命运. 其中许多进入到分析中不是在他生前而是在很久以后, 并且主要是通过其他一些数学家的工作 (例如哈密顿 (Hamilton) 在一百多年以后的工作). 现在这些结果以辛几何、变分法、最优控制、奇点理论、突变理论等多种形式深入到科学的许多领域. 其中有一些直到现在我们才知道. 例如, 不久前才弄清楚 (见本内甘

(Bennequin) 在布尔巴基 (Bourbaki) 讲习班上的报告 (1)[①]), 在由洛必达 (L'Hospital) 所撰写, 以约翰·伯努利的讲义为基础的第一本分析教科书中包含了 (由对二十面体的对称面反射所生成的) 考克斯特 (Coxeter) 群 H_3 的不规则轨道所构成的流形的一个表示. 但是在该书中这个表示不是与二十面体的对称群相联系, 而是作为对具有一个拐点的平面曲线的渐伸线的研究结果, 这与惠更斯的研究结果非常接近 (甚至有可能这就是他的研究成果, 尽管首先发表这个结果的看来是洛必达). 在新近出的一些论及二十面体与渐伸线和渐屈线的奇点之间关系的著作中, 有些插图应该说是用现代数学也还费了不小的力气, 甚至还借助了计算机才得到的, 看来在那个时代都已经知道了.

我们还会回来谈渐伸线, 但是现在我要来谈牛顿的这本《自然哲学的数学原理》(下文简称《原理》) 的历史和这本书的主要内容. 实质上这本书是为了解决一个单一的问题而写的. 自然, 尽管在它里面也包括了所谓的牛顿三大定律以及大量别的材料, 可是实际上它是在不到一年的时间内写成的, 目的就是为了提供这个单一问题的解, 它就是, 在与到吸引中心的距离平方成反比的力场中的运动问题.

本书第一部分谈的是历史 —— 这个问题从何而来, 为什么牛顿要着手研究它, 以及确切地说, 他在这方面证明了什么. 这是牛顿和胡克的历史.

[①]以这种方式引用的文献见本书末的附注.

第一章

万有引力定律

---

§1. 牛顿与胡克

牛顿的名字以及他既在数学上、又在物理上所作的巨大贡献都是众所周知的. 他生于 1642 年, 即在伽利略逝世的那一年, 而去世于 1727 年. 牛顿在引力理论领域内的工作多亏伏尔泰 (Voltaire) 才在欧洲大陆广为人知, 后者在牛顿的晚年时访问了英国, 大力传播那给了他深刻印象的万有引力理论. 伏尔泰也是把那个有名的苹果告诉全世界的人, 这个故事是牛顿的外甥女凯瑟琳 · 巴顿 (Catherine Barton) 告诉他的 (2).

罗伯特 · 胡克 (Robert Hooke) 是比牛顿年长一点的同代人 —— 可名气要小得多. 他生于 1635 年, 而去世于 1703 年. 胡克是一个并不富有的人, 以做玻意耳 (Boyle) 的助手, 简单点说, 就是做实验员, 来开始他的职业生涯 (今天玻意耳还是靠着胡克所发现的所谓玻意耳 – 马略特 (Boyle – Mariotte) 定律而为大众所周知 (3)). 他随后到刚成立不久的皇家学会 (即英国科学院) 工作, 任博物馆的馆监. 馆监的职责很不轻松. 按照合同他必须在每次会议上 (除了在夏季假期外, 会议每周一次) 演示三到四个证明新的自然规律的实验.

胡克在这个馆监的位置上一待就是四十年, 在这么多年中他一直做到尽心尽责. 自然, 在合同中并没有这样的条款, 即所有他演示的定律必须是他自己所想出来的. 他可以读书, 与别的科学家通信, 并对他们的发现感兴趣. 他只被要求检验他们的说法是不是对, 使皇家学会的成员信服其中某些定律的确立是可靠的. 为此他必须用实验来证明该定律, 并且用适当的实验来演示. 这就是胡克的公务工作.

按照职责胡克要关注他人在自然科学上的全部发现, 但是他自己也必须做出发现来. 在快到生命结束的时候, 他算了一下他所做出的发现达 500 项. 应该说, 胡克这么大量的发现构成了现代科学的基础. 其中很多或多或少与其他学者的发现是平行的, 因此许多我们今天所知道的、胡克发现过的定律, 却归到了别人的名下. 结果只有弹性定律 (力与伸长成正比) 是用了胡克的名字, 他的其余发现都用了别人的名字. 例如, 胡克发现了植物的细胞结构. 他改进了显微镜, 并且第一

个观察到植物是由细胞组成的. 他在显微镜下细心观察各种物体, 把所观察到的一切都画下来. 显然, 一旦他在显微镜中看到了新东西, 他马上就作出了新发现. 他自己还刻图片, 甚至在此基础上出版了《显微镜制图 (Micrography)》这本书, 使稍后的列文虎克 (Leeuwenhoek) 作出了他那著名的生物学发现.

在那个年代作出基本的发现不是什么难事, 而且确实大量的发现出现在那个时代. 例如, 惠更斯改进了望远镜, 观察土星时发现了它的光环, 而胡克则发现了木星上的红斑. 当时有发现不是什么不得了的事, 和现在不一样, 它们既不被注册, 也不赋予专利, 它们完全是日常发生的事情. (这种事情不仅在自然科学中有, 那时数学发现也好像从一只富饶之角[①]源源不断地涌现出来 (4).)

但是胡克总是没有足够的时间来仔细考虑他的任何发现, 并将其详尽展开, 因为在下一周他必须演示新的定律. 所以在胡克的全部成就中, 他的发现就显得有点不完善, 而且有时他仓促做出一些他无法准确地和用严格的数学来证明的结论.

在胡克自以为是自己的发现中, 有一个是有关光的波动本性的发现. (这是说光是由波组成的, 大约在同时惠更斯也作出了这样的判断.) 胡克是以对薄膜 (例如, 肥皂泡) 颜色的研究作为他的结论的基础的. 他认为光在肥皂膜中的干涉证

[①]根据希腊神话故事, 主神宙斯所使用的山羊角, 从其中流出的乳汁源源不断, 被称为富饶之角. ——译者注

明了它的波动本性. 在这方面胡克与牛顿发生了第一次冲突.

牛顿也研究光的问题. 他把白光分解成构成彩虹的成分, 确定了太阳光谱的颜色, 奠定了现代光谱学 —— 在相当大的程度上这是一门波的科学. 然而牛顿坚持另一种理论, 认为光是由运动粒子构成的. 声音 —— 这是波, 所以声音能够绕过障碍物 (即使声源隐藏在山背后它也能被听到, 所以从本质上讲, 山算不上是声音的障碍物), 而光却不能绕过障碍物, 我们无法看到山的后面 —— 怎么还能说它是波呢?

的确, 应该讲, 尽管牛顿认为光是粒子, 但他还是第一个测定光的波长的人. 他是这样做的: 在平面镜上放置一块半凸透镜并将光从上方照射到它的上面 (图 1), 则在一点相遇的不同光线的光程长度将会不同, 并且根据其差值是等于波长的整数倍或非整数倍, 各光线将相互加强或削弱. 因此从上向下看平面镜, 就可以看到由亮度相同的点连成的环 (这些环叫牛顿环, 尽管胡克发现过这些环). 重要的一点是, 在透镜与平面镜之间的楔形空间的厚度与该处到两镜面接触点的距离的平方成正比. 由于这一点, 这些牛顿环的半径就与波长和透镜的曲率半径之积的平方根成正比. 由于这一点, 这些环的半径不像波长那样小, 而环是可以观察到的. 测量这些环, 就可以求出光的波长, 牛顿也就是这样做的. 可是如果他不相信光的波动本性, 那他还计算波长又是怎么回事呢? 缘由在于牛顿的光的理论的特殊性. 他认为光在空间运行不是匀速的, 而是在运动中会经受周期性的冲击 (阵发 (fits) —— 有点类似现代的粒子内部自由度的概念). 于是他就测量了在这种两次相

继的冲击时粒子所在位置之间的距离.

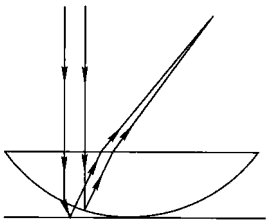


图 1 牛顿环的形成

这样一来在牛顿与胡克之间就产生了分歧. 要不是存在加剧这种分歧的情况, 也许他们可以避免产生矛盾的. 牛顿住在剑桥, 而胡克则住在伦敦, 他们之间的通信绝大部分是通过皇家学会的秘书奥尔登伯格 (Oldenburg) 来传递的. 不论从哪方面来讲奥尔登伯格这个人的品质都不太好, 他非常热衷于引起人们之间的冲突. 由于这个原因, 还因为他们在光的本性上观点不同, 牛顿与胡克之间的关系完全恶化了. 可是过了一段时间奥尔登伯格去世了 (在将来谈到分析时我们还会回来再谈他), 并且胡克给牛顿写了一封有意和解的信, 就是从这封胡克写于 1679 年 11 月 24 日的信开启了万有引力定律的历史 (5).

在这封给牛顿的和解信中胡克的意图是建议两人共同工作. 胡克承认牛顿的著名的成就, 并建议通过共同讨论及用实验来检验所有可能的思想和理论. 特别地, 胡克向牛顿提议, 抛弃旧的不和, 要牛顿对他提出过的一些假说发表一下自己的看法, 并答应不会对批评抱怨, 共同着手来研究大自然. 就

是在这封信中胡克向牛顿通报了最近的有关物理和数学的新闻. 其中有一条是来自欧洲大陆有关行星运动的最新理论的新闻. 按照这个理论, 在宇宙中有旋风在不断地狂吹, 牵引并支撑着行星并由此迫使它们绕着太阳转. 另一个理论是胡克关于引力的假说. 在这封信中对此他没有详谈, 而只是询问牛顿对这个假说有什么想法. 胡克还有一个假说 —— 这就是关于弹性体振动的定律. 就在这同一封信中胡克还通报了法国探险家皮卡 (Picard) 对子午圆的弧长 (因而也就对地球的半径) 所作的最新测量.

牛顿很快 —— 在四天内就回了信. 这封值得注意的信写于 1679 年的 11 月 28 日, 在信的一开始牛顿就坦承他已经放弃了哲学, 早就从事别的事情了. 看来是年龄不饶人 (牛顿已经 37 岁了, 一般来说在这个年龄再从事数学还要外加哲学就变得困难了). "我从来没有听说过 —— 牛顿这样写道 —— 有关您把行星在天空中运动组合起来的假说, 尽管无疑这在哲学界是众所周知的 …… 我对哲学的热情已经消退, 我也不再想这方面的事了, 就好像一个商人不会去关心别人的买卖, 农民不会去关心学习."

"哲学" 一词在那个时候大体上是指全部严密的科学. 物理学那时叫做自然哲学. 而牛顿在信中所讲到的别的事情, 总的说来, 是指他对炼金术的迷恋. (看来他没有把它算到哲学里面, 尽管这门科学的目的是在于寻找哲人石.) 牛顿有一个大的化学 (或者, 如果你愿意的话, 叫炼金术的) 实验室, 在他 20 — 30 岁的年龄时他高度集中地工作于数学与物理的领域,

而且也的确做了非常多, 现在他要主要来从事炼金了. 他收集了大量从中世纪就已保存了的炼金配方, 并且打算按照其中的指示来提取金子. 他花在这上面的力气远比他花在数学与物理的创造性工作上的多得多, 可他什么有用的结果也没有弄出来. 的确, 牛顿自己有时并不服气. 据说在他的笔记本中 (他会详细记录他的实验, 记下他把什么与什么混合, 所得的结果又是什么, 为了在偶然得到金子的情况下他能重复这个过程) 有这样的记载, 在其中他详细描述所作的操作后, 这样来讨论他的结果: "臭得可怕, 看来我接近达到目的了."

§2. 落地问题

我们再回来谈牛顿的信. 他接着写道, 尽管他决定在这种受人尊敬的年龄不去和更年轻的聪明人竞争, 他可以提出一个问题, 在他看来值得一个像胡克这样的实验高手一试. 这个问题就是检验哥白尼 (Copernicus) 的学说. 哥白尼是这样断定的, 地球绕太阳转动, 此外, 又绕自身的轴转动. 牛顿建议用实验检验第二个断言. 事实上, 根据伽利略 (Galileo Galilei) 的不变性原理, 匀速直线运动自身是发现不到的, 但旋转运动原则上还是能够被观察到的. 因此, 牛顿说, 要想说服那些不相信哥白尼理论的人 (例如, 天主教会还要等到 1837 年才承认), 就有必要用实验来验证它. 显然, 牛顿是第一个提出用实验来证明地球转动这个问题的人. 除此之外, 牛顿在向胡克提出这个问题的时候, 还在原则上指出了有可能做到这一点的

方法.

牛顿的建议如下. 如果地球自转, 则从很高的地方自由落下的物体就会偏离垂线. 因此只要测出下落重球偏离了垂直方向 (可借助测锤来确立), 就足以发现地球的自转.

事实上, 牛顿在信中这样来论述, 设想我们从北极来看地球, 而且能看到赤道和那里的一座山, 或更好些是一座塔, 从它的上面自由放下一个球, 起始时球对塔是静止的 (图 2). 假设哥白尼是对的, 并且地球是从西向东转动. 牛顿接下来道, 一个笨人肯定会这样想, 因为当球下降时在它下面的地球向东转了, 那么球就会落在比原先要落到的地方更西边一点.

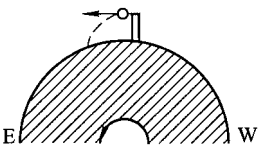


图 2 在非转动空间中的轨迹

这个意见, 常常被提出来作为反对哥白尼理论的根据, 是完全不对的. 错误在于, 球在被抛出的瞬时, 它相对于 "不动的" 参照系有一个指向东方的不为零的初始速度. 此外, 球在地球表面之上, 因此这个速度还大于地球表面上的点的速度. 可是球在下落期间它在水平方向上的速度是不会改变的, 这就使得它向东走过的距离大于地球表面上在它的正下方的点所走过的距离. 这样一来, 应该落在这个点的更东面一点, 而不是更西面.

如果不是在赤道上, 而是在我们所处的纬度上释放球, 那

么效应会小一点, 但是, 牛顿说, 无论如何它还是能够被观察到的. 自然, 这个效应非常小, 所以牛顿出点子这样来做. 在落点的下面必须严格地从测锤沿从北到南的方向绷一根细金属线并且用尽可能重的球来当落体, 把它们挂在线上, 再将线烧断来令球落下, 以免它受到不必要的晃动. 那么, 如果进行了足够多次球的释放, 再计算球在落下碰到金属线后有多少次落到了东边, 又有多少次落到了西边, 比较这两个数就可以确定是否观察到了偏向东面的效应.

在他给胡克的这封值得注意的信中, 牛顿还提到了一个问题. 他写道, 他很有兴趣想知道, 当这个球落到地球表面之后, 如果地球有个矿井, 球落入之后会怎样运动 (就是设球能自由地贯通地球运动而不会遇到阻力). 牛顿认为, 这时候球会描绘一条螺旋线, 为了直观起见他还在信中画出了这条螺旋线 (图 3).

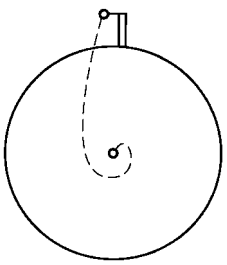


图 3 根据牛顿落球在地球内部的轨迹

胡克在皇家学会 1679 年 12 月 4 日的例会上宣读了牛顿的信. 它引起了热烈的讨论, 许多科学家都参与进来了. 大家都起来热烈地辩论, 牛顿所描述的这个现象是否真能观察

得到, 以及球应偏到哪一边. 例如, 皇家天文学家弗拉姆斯蒂德 (Flamsteed) 出来讲, 在学会的记录中就记载了这么一条, 说这个效应炮兵早就知道了. 根据弗拉姆斯蒂德的看法, 就是说, 当倾角为 87° 时, 球形炮弹就会掉回炮口 (看来就是这个原因甚至今天还限制高射武器向上提升其轴线的角度不得超过 87°). 这在弗拉姆斯蒂德看来, 就是证明了地球的自转, 否则危险的角度就应是 90°. 换句话说, 弗拉姆斯蒂德提出了一个与牛顿稍稍不同的建议. 弗拉姆斯蒂德建议, 不是去向下释放球体, 而是竖直向上发射炮弹, 再来看看它们会不会落到原处.

胡克在下一次 12 月 11 日的会议上出来讲话, 对牛顿的论点提出了几点批评, 对此牛顿一点点批评也不接受, 在 12 月 13 日回了一封长信, 信中包含了对问题的冗长的讨论, 明明白白地显示出牛顿在那时还不知道球的轨迹实际上应该是怎样的①.

首先, 胡克提出了以下的批评.② 必须考虑到竖直的方向 —— 即指向地球中心的方向 —— 在球的运动过程中会改变, 所以引力在轨迹的不同点上指向也各不同, 这就导致向东

①该信除了别的错误外, 还有一幅描绘球在其势与到中心的距离成正比的力场中的运动的图像, 也不对: 其近主焦点 (pericentre) 与远主焦点 (apocentre) 之间的夹角是 120° (它应该在 $\pi/2$ 与 $\pi/\sqrt{3}$ 之间), 而且轨道显然也是不对称的.—— 英译本注

②该句在英译本中改为 “首先, 牛顿的理论是非常不完整的.” —— 译者注

运动的球就会受到影响, 使它反回来向西偏. 于是, 尽管球会落到垂点的偏东处, 结果的偏离量将小于牛顿的预测.

如果我们用现代的知识武装起来, 对此准确地作全部计算, 则我们将看到, 真正的效应只是牛顿所应得到的偏转的2/3(6). 这样一来, 由于离地心距离的不同所导致的向东的偏移与由于重力方向的不同所导致的向西的偏移是同一个数量级, 所以牛顿的定性分析总的来说就不对. 要知道有两个这种效应 —— 一个偏东, 一个偏西 —— 如果它们关系稍有不同, 那定性的景象就会是另一个样子.

第二, 胡克正确地注意到, 在北半球下落的球体不仅会偏向东, 而且也会偏向南. 此外, 他还 (以难以理解的理由) 断言, 在我们这个纬度上向南的偏移甚至大于向东的偏移.

最后, 胡克的第三点批评是关于球在地球内部运动轨迹的. 他说, 牛顿画的螺旋线引起了他的怀疑. 按他的意见, 在地球内部所发生的近似于悬挂摆的振动, 而如果球在地球内部不受阻力而能自由运动的话, 那么它的轨迹应该是封闭的, 像是一个椭圆 (图 4), 而只有考虑空气的阻力后才可能得到

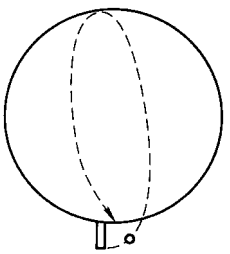


图 4　根据胡克落球在地球内部的轨迹

螺旋线. 但就是在这种情况下所得的螺旋线与牛顿所得的也完全不一样 —— 不是画一圈, 而是转了很多圈之后慢慢转紧起来 (图 5).

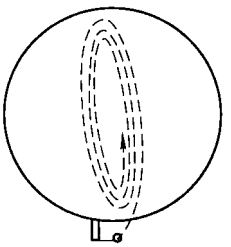


图 5 根据胡克在考虑有空气阻力时落球的轨迹

事实上, 如果借助我们现代的方法来求解这个问题, 则我们会看到, 在地球内部起作用的已不是万有引力定律, 而是胡克定律 —— 牵引力与到地球中心的距离成正比. 因此在地球内部的轨迹就会和弹性振动 (或是和摆锤的运动) 相像, 即为一椭圆.

胡克批评牛顿不仅限于从理论上作论证, 而且还决定做实验来检验. 他在 12 月 18 日向学会报告了他的结果. 他的实验组织得和牛顿提出的有点不一样, 他不是让球落在金属线上, 而是让它落在放置于一层水面下的、上了蜡的木板上, 这层水就可以减弱落下时的冲击力[①]. 在板上刻有由细线组成的网格, 其中心在悬点的正下方, 以便由球落下痕迹不仅能

[①]这一句在英译本中改写如下: "他的实验组织得有点不一样, 和牛顿建议让球落在置于一层水下的 '钢丝' 上不同, 他让球落在 '一个填满了烟斗泥的盒子' 里, 这样肯定会减弱冲击力." —— 译者注

判定落球是偏东还是偏西, 还能判定是否有偏北或偏南. 球开始在开阔的空间落下[①], 然后在一座高 9 米的教堂中来落球, 落球时确保门窗紧闭, 以保证球不受到穿堂风的有害干扰. 如果一切该考虑的都考虑到了, 湍流也考虑到了, 那么以这么小的高度显然什么效应也观察不到 (理论偏转量为 0.3 mm).

可是胡克是个技术高超的实验家. 到那时为止这个实验什么也没得到, 可胡克却 " 获得了" 它. 胡克告知皇家学会, 在每三次试验中有一次偏东—南至少有一英寸的四分之一. 看来他完全没有掌握统计分析, 而且试验的次数也不够多. 此外, 他很可能没有在相应的重要性的水平上来检验所得的偏转就认为现象已经确立了, 尽管什么证明都还谈不上. 在 1680 年初胡克又重复了他的实验, 又再次 "成功". 他把他的结果在一封于 1 月 6 日发出的信中告诉了牛顿.

§3. 平方反比定律

除了谈论了实验外, 胡克的这封信还包含这样一些重要的话: "根据开普勒 (Kepler) 所提出的关于速度与距离之间关系的假设, 我的推测是, 引力总是二重比例于到中心距离的倒数.[②]哈雷 (Halley) 先生从圣 · 海伦娜 (St. Helena) 回来时告

[①]这是英译本中补充的. —— 译者注

[②]这句话在英译本中改为: "我的推测是, 引力总是二重反比于到中心距离, 而其还由于速度与引力的平方根成正比, 从而就如开普勒所提出的与距离成反比 ……" —— 译者注

诉我, 他的在山顶上的钟摆比在山脚下的走得慢, 他对此感到很奇怪, 而且想不出什么理由来. 我立即告诉他, 他已经帮我解决了一个我长期以来想解答的疑问, 而这就是要弄清楚, 引力是否真的随离地心的距离的增大而递减 …… 至于我提到的在地球体内的降落, 我并不认为这时直指地心的引力也是这样的 (反比于距离的平方), 恰恰相反, 我更倾向于设想, 物体越接近地心, 受到引力的强迫就会越小, 可能有点像作用于摆上的重力, 或者有点像在一个凹球面上运动的物体, 这时随着物体越来越接近于最低点, 力越来越小 …… (离开天体) 非常远的物体所受到的引力就可以按照先前的比例关系 (平方反比) 来计算, 好像是从该中心点发出的." ①

看来这个平方反比定律就是他在第一封信中征求牛顿意见的那个胡克引力理论, 按照胡克的意见, 它是无论在研究地球外的落体, 还是在研究地球内的落体时都应考虑的. 当然, 胡克写道, 在内部规律会是另一个样, 因为被物体穿过后的那一层会从各个方向吸引它. 所以, 看来在地球内的运动规律类似于在弹性振动中所发现的规律. 胡克还进一步写道, 在研究这些力的规律的同时他还试图确定物体运动所沿轨道的形式. 而他得到的结论是, 在地球的内部时大致与摆的振动一样, 在地球的外部, 这时候只有一个引力中心, 物体沿着一条他称之为偏心类椭线的曲线运动.

---

①胡克信中这一段内容和英译本中的略有不同, 可能英译本引用了胡克的原信, 经过俄文的转译而发生了措辞上的差异. 从上面那一句的对比可以看出这种差异的程度. —— 译者注

很可能事情是这样的: 胡克, 他没有必需的数学工具, 无法准确地求解由平方反比定律所得出的运动方程, 而为了求出轨道, 他用了数字的、图解的或模拟计算机器 (有点类似他所提到的凹曲面) 的方法来求积这些方程. 人们知道胡克有这种机器: 他用在曲面上滑动的重物所受到的摩擦力来模拟引力的方法, 研究了在各种不同类型的牵引力的规律作用下的运动特性. (我们要指出, 所有这些是发生在牛顿写出他的书、表述力学的普遍规律前的六年. 用我们今天的观念来看, 那时还没有力学. 可是, 就是在这种前力学时代, 胡克找到了在平方反比定律下的运动方程的近似解, 惠更斯也表述了能量守恒定律. 自然, 惠更斯并不是以最一般的形式给出它的, 但是以他的表述 (7) 这个定律还是可以用在我们这个情况下, 并使我们能理解, 为什么一块石头在地球内部运动的轨道, 在无空气阻力的情况下必定是闭合的.) 在对运动方程进行积分之后, 胡克画出轨道, 看到它们与椭圆类似. 类椭线一词就是由此而来. 科学诚实不允许他把它们称为椭圆, 因为他证明不了它们是椭圆. 胡克建议牛顿去做这件事, 他说他不怀疑, 牛顿用他那高超的方法肯定对付得了这个问题, 而且他也深信, 开普勒第一定律 (它断定行星沿椭圆运动) 也能从平方反比定律推出来.

在把有这些内容的信发出给牛顿之后, 胡克就转向后续的发现, 因为他没有进行详细的数学处理的时间. 可是牛顿却保持沉默, 再也没有给胡克写过一个字 (除了只有一次他为一

个意大利的医生想要与皇家学会合作给胡克写过一封信, 利用这个机会顺便向他表示了感谢, 感谢他把落体实验的结果告知), 对给他写信的事只字未提 (尽管他保留了这封信), 对胡克向他建议的有关引力的问题, 什么也没有说.

可是牛顿研究了这个问题, 探讨了运动的定律, 证明的确能得到椭圆轨道, 并且证明, 反过来可以由开普勒有关椭圆的定律推出平方反比定律①. 为了将这些纳入一个适当的形式并以易接受的方式来表述, 他必须用像质量、力、加速度这样一些普遍的概念来表述基本原理. 著名的 "牛顿三定律" 就是这样出来的, 对此牛顿并没有自封首创者的意思 (第一定律, 即伽利略惯性定律, 是早就为人们所知的, 而其他两个定律不会比胡克弹性定律和惠更斯的向心力公式发现得更晚). 但是谈到万有引力定律牛顿就做得不那么无懈可击了.

§4. 《原理 (*Principia*)》

在天文学家哈雷 (1656 — 1742) 的倡议下, 牛顿写了一篇标题为 "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica (自然哲学的数学原理)" 的文章, 详细地叙述了他的结果, 并在 1686 年 4 月 28 日将其提交给了皇家学会. 原稿中一次也没有提到胡克. 哈雷和他们两人都是朋友, 他不喜欢这样, 并说服牛顿加进对胡克的引证. 牛顿不得不接受劝说, 但用了一种很奇怪的方式来做. 就平方反比定律对应于开普勒第三定律

①在后面第 99 — 106 页的附录 1 给出了证明.

这一点, 他是这样写的, "正如雷恩 (Wren)、胡克和哈雷各自独立所确定的". 当然, 雷恩和哈雷也不是什么随随便便的人. 雷恩是建筑师, 是皇家学会的创始人之一, 他和胡克一起共同致力于伦敦 1666 年的大火后的重建工作 —— 曾积极地参与过物体运动问题的讨论. 哈雷随后预言了以他的名字命名的彗星的回归, 极力促使牛顿来写这本书, 他在圣 · 海伦娜岛上用钟所作的实验可以看成是证实了引力定律. 这样, 牛顿把胡克摆在他们之间, 不仅贬低了他的作用, 而且也将在很快即将发生的优先权之争中, 使他失去了朋友的支持.

在这里来谈几句有关我们这几位英雄的物质地位是适当的. 胡克贫穷, 靠皇家学会付给他的工资为生. 此外他还利用他在力学上的广泛知识参与了伦敦大火后的庞大的修复工程, 赚取一些外快. 这笔建筑工程的外快终于使他为自己创造了一点财富. 牛顿在剑桥的讲席有可观的收入 (一年 200 英镑), 而且他继承了一座农场, 那有名的苹果树就生长在那里, 他把它租出所得租金也有差不多相同的收入. 尽管牛顿已是个相当富有的人了, 他也还是不愿为出版这本书掏腰包, 所以把《原理》这本书交给了皇家学会, 后者准备承担出版这本书的费用. 但是学会也没钱, 所以书稿一直留在那儿, 直到哈雷 (一个富有的肥皂制造商的儿子) 出来用自己的钱来出版. 哈雷自行承担了出版该书的一切事务, 甚至自己来校对. 牛顿在这个时期在通信中把它称为 "您的书" ·····

牛顿在这封给哈雷的信中, 就答复要求引证胡克一事, 写了值得注意的一段话, 它透露了牛顿对在数学家与物理学家

之间差别的看法. 牛顿把自己看成是个数学家, 而把胡克看成是个物理学家. 下面是他描绘在处理自然科学时数学家与物理学家的不同之处.

"数学家们, 他们发现一切, 建树一切, 证明一切, 他们还必须满足于做枯燥的计算员和勤杂工的角色. 而另一个人呢, 他们什么也不能证明, 只是声称有权拥有一切, 把一切还在空中的东西捞到手, 把不管是前人的、还是后人的荣誉都据为己有 …… 而 …… 现在我还必须承认, 我一切都是从他那里得来的, 而我自己只不过是像个苦力似的, 为这个伟大的人物的发明做了些计算、例证和写作而已."

应该说, 牛顿在做出《原理》一书中的所有发现时并没有用分析, 尽管这时候他已经掌握了它. 所有的证明他都要求采用多多少少与分析等价的、直接的初等几何的方法来论证 (而不是将分析的计算翻译成几何的语言) —— 这对他来说更简单.

§5. 球的引力

作为牛顿论证的例子, 我们来探讨, 他是如何证明在地球内部的一块石头不会受到外层的作用, 即*在均匀球面的内部的引力场为零*. 从前这一事实在 (俄罗斯) 高中都会学到, 可是现在已从教学计划中删除了, 所以这个值得注意的证明可能已不是大家都知道的了.

考察由一无穷薄的球层包围的球内一点 P (图 6), 以 P

为顶点作一小的立体角, 我们来证明, 由这个立体角在此球层中所切割出的两块无穷小的体积, 对置于 P 点物体的作用力互相平衡. (时下教分析已不怎么讲无穷小量了, 因此现代的学生已不能完全掌握这种语言了, 可是今天仍然有必要掌握它.) 这两个体积是无穷小的棱柱体 (它们的母线自然是轻微发散的, 但这个发散的量可以忽略, 因为误差会是高阶无穷小), 其体积可按公式 $V = lS$ 来计算, 其中 l 为侧边长, 而 S 为截面的面积. 但我们这个棱柱边长等于一对同心圆在一条直线所切割出来的长度, 而截面积正比于到 P 的距离的平方. 这样一来, 这两个体积对在 P 点的物体的引力大小相等、方向相反. 其他的引力也完全与此相同地相互平衡, 所以全部力的合力为零.

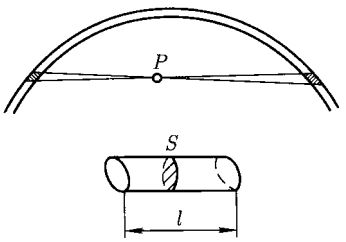


图 6　根据牛顿球层的引力

这个牛顿论证的范例表明了, 如何可以解决势论中的问题而不用分析, 不用知道调和函数的理论, 也不用知道拉普拉斯 (Laplace) 方程的基本解, 或单层和双层势. 类似的论证在分析出现前, 经常出现在那个时期的论文中, 原来十分有力. 下面这例问题, 是像巴罗、牛顿和惠更斯这样一些人在几分钟

内就能解决的 (8), 在我看来, 当今的数学家还不能很快就解出来[①]: 计算

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\tan x-\tan\sin x}{\arcsin\arctan x-\arctan\arcsin x}.$$

牛顿还证明了, 一个均匀的球体 (或一球层) 对球外区域内各点的引力就好像它的质量都集中在球心上一样. 牛顿的证明是初等的, 但不容易 (正如同去计算相应的积分不容易一样). 下面给出现代证明 (源于拉普拉斯), 遗憾的是它已超出了俄罗斯高中理科课程的范围 (而且, 这也不奇怪, 它也超出莫斯科大学力学数学系的课程设置).

考察一充满整个空间的不可压缩流体的速度场, 它球对称地沿从位于坐标原点处的源头发出的半径方向分布. 这样一种流动的速度是与到源头的距离的平方成反比的.

的确是这样, 由于不可压缩性, 在单位时间内从以源头为球心的每一个球面流过的流体的流量都一样 (和源头所产生的一样多). 由于流动的球对称性, 这一流量等于球面的面积与流过此球面的流速的乘积. 可是球面面积正比于半径的平方. 这就是说, 为使流量与半径无关, 速度的大小必须与到源头距离的平方成反比.

这样一来, 不可压缩流体球对称流动中速度随着到中心距离的增大而减小的规律与引力减小的规律是一样的. (由此可见, 在 n 维空间中的引力场的自然类比是怎样的: 引力必

[①]我所知道的唯一例外是法尔廷斯 (G. Faltings), 他算出了这个式子的结果. —— 英译本注

定与距离的 $n-1$ 次幂成反比.)

我们已经证明了, 一个质点的引力场具有以下值得注意的不可压缩性的性质: 如果把它看成是一个流的速度场, 则对任一不含产生引力的质点的有限区域, 通过其边界的流量将为零: 流进多少, 就有多少流出.

结果, 在任意质量分布的情况下, 由这些质量所产生的引力场在这些质量之外也具有这个一样的不可压缩性的性质. 的确, 在速度场叠加时, 它们通过任意曲面的流量也相加. 所以在一不可压缩流体的两个流的速度场相加时, 又得到一个不可压缩流体的速度场: 如果每一个分场通过任一区域边界的流量为零, 则合成场的流量也为零. 于是, *几个质量所产生的总引力场具有不可压缩性的性质* (在引力质量之外的区域内).

特别地, 我们来研究均匀球体 (或球层) 的引力场. 在外部区域, 这个场与不可压缩流体的速度场一致 (正如刚刚所证明的). 它是球对称的. 但是唯一的一个不可压缩流体的球对称速度场是与到中心的距离平方成反比的. 换言之, 球 (或球层) 对球外一点的引力就好像某个质量放在中心产生的一样. 至于这个质量与球的质量一样这一点, 可以从比较通过一包含该球的球面的流量看出.

球层对球内的点引力为零的定理也可用这个论证来推出[①].

[①] **问题**. 试计算函数 $1/r$ 在球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ 上的平均值以及函数 $\ln 1/r$ 在圆周 $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ 上的平均值.

[牛顿这两个 (关于球层对其内外点的引力的) 定理还可以推广到两个位似椭面之间的质量所产生的引力 (此时可取比所研究的椭面都要小的共焦椭球作中心). 甚至椭面可以换为任意阶的代数曲面 (9). 重要的只有一点, 即曲面必须是双曲的 (从某点发出的每一条直线与曲面相交的次数和曲面方程的阶数相等).]

§6. 牛顿证明了轨道是椭圆的吗?

在结束对万有引力定律的讲述之际, 我们必须讲几句有关最近几年在物理期刊中围绕它所展开的讨论. 在过去这种讨论就不大可能, 可是现在情况有了变化, 这是因为现代数学的精神已经深入到许多物理学家的心中, 给他们带来了, 正如我们马上就会看到, 一些束缚. 他们开始怀疑这样一些问题, 这些问题早些时候是不会有人去认真谈论的. 许多物理学家都参加进来了 (有关于此的报道可参阅不久前出版的文集《国外物理》(10)), 争论的题目是这样来表述的: 牛顿是不是证明了, 开普勒第一定律可以从万有引力定律推出?

实际上, 问题是这样的. 对于在引力作用下运动的物体的轨道, 牛顿定律给出如下的微分方程

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{k\vec{r}}{r^3}.$$

牛顿不是按照所有科学的规则去解这个方程, 而是在他的书中给出了这个方程的许多解, 并验证了, 对任意给定的初始条

件都可在其中找到一个满足该条件的解. 换言之, 对在空间中任意给定的一个点和一向量, 在牛顿所找到的轨道集合中总可以找到一条, 它在开始时通过该点, 并以该向量为速度. 而且, 如物体在开始时的速度不太大, 则所得轨道为椭圆. 但是能够体会数学微妙的物理学家就要问, 谁说过不存在任何别的物体的运动轨道, 它也满足相同的初始条件, 遵守万有引力定律, 但却完全不同? 数学家知道, 不存在这种轨道在数学叫唯一性定理. 于是, 为了能从万有引力定律推出, 物体只能以这种方式, 而不能以别的方式运动, 牛顿不仅要得出微分方程的许多解, 还要证明它的唯一性定理. 他证明过吗? 没有. 可是, 要想将这个定律用于描述实际情况, 在没有证明唯一性以前, 一般来说是不可能的. 是谁第一个做到了这一点? 是约翰·伯努利. 就是说, 是他, 而不是牛顿, 从万有引力定律导出了开普勒定律, 所有的荣誉应该属于他. 这就是参加讨论的物理学家们所说的, 他们只是重复了多年前数学家们所说过的 (例如, 1941 年在温特纳 (A. Wintner) 的书中).

实际上整个争论是以一个误解为基础的. 现代数学家们的确将微分方程的存在定理与唯一性定理区分开来, 甚至给出这样的方程的例子, 它满足存在定理, 却不满足唯一性定理 (11). 这样的话各种各样的麻烦都有可能发生, 而如果牛顿方程有这种麻烦的话, 那它实际上就什么结果也推导不出来. 错误观点是由于将所研究的函数类作了不适当的推广产生的. 事实是, 函数、向量场、微分方程这些概念在现代数学中的意义和在经典中的相比已经不一样了. 谈到函数, 我们可能是指

相当不干净的对象 —— 某种只能微分一次或者甚至一次也不能微分的, 而我们还必须考虑能包含它的函数类, 等等. 可是在牛顿的时代函数这个词仅指非常好的东西. 有时它们就是多项式, 有时是有理函数, 但是不管如何它们在其定义域中都是解析的并能展成泰勒 (Taylor) 级数. 在这种情况下唯一性定理不成问题, 在那个时代根本没人考虑.

可是实际上, 就是从更严格的尺度来讲, 在牛顿那里一切都是证明了的. 因为我们有下面这个定理.

设有下述微分方程

$$\dot{x} = v(t, x)$$

并设对任意给定的初始条件 a, 存在着满足 $x(0, a) = a$ 的解 $x(t, a)$, 而且它光滑地 (无穷次可微地) 依赖于 a, 则对此方程唯一性定理成立.

这个定理很容易证明. 由存在光滑地依赖于初始数据的解可推知, 存在一个将原始的方向场拉直的 (局域) 微分同胚, 把它变成一个标准形式的水平方向的场 (我们的解就给出了这个微分同胚: $(t, a) \mapsto (t, x(t, a))$). 对被拉直的场唯一性定理显然成立, 因为其方程的形式为 $\dot{a} = 0$.

这样一来, 由解的存在性, 一般地说, 不能推出解的唯一性, 但是如果所得出的解光滑地依赖于初始条件, 那就一切都没问题了.

现在我们来看, 牛顿做了些什么. 他对每一个初始条件都求出了一个解, 并对它进行了描述, 从这个描述立即就可以看

出, 所得的解光滑地依赖于初始条件. 于是唯一性无可置疑, 从而牛顿正确地证明了开普勒第一定律.

自然, 有人可能反驳说, 牛顿并不知道这个定理. 的确, 牛顿并没有用我们刚刚用过的形式表述过它. 可是实质上他肯定知道它, 正如在摄动论的许多其他方面中的应用一样 —— 牛顿的数学分析在相当大的程度上也就是一个深入地发展了的摄动理论.

牛顿注意到, 自然规律要用他所发明的微分方程来表示. 他研究了一些个别的、而有时是很重要的微分方程, 而且甚至早就求解了它们, 可把它们转化为独立的和非常强大的数学工具的人也正是这个牛顿.

第二章

数学分析

---

§7. 当作幂级数理论的分析

牛顿发现了求解任意方程的方法, 而且不单是微分方程, 还有, 例如, 代数方程. 他把这个发现看成是自己最重要的成就, 并在一封于 1676 年 10 月 24 日给莱布尼茨的信中作了整理, 在这封信中他写到了分析 (这封信是经奥尔登伯格转交的, 从而以 "给奥尔登伯格的第二封信" (epistola posterior) 之名载入史册).

分析 —— 这是个相当难于定义的概念. 牛顿把分析理解为用无穷级数来研究方程. 换言之, 牛顿的基本发现就在

于, 一切都必须分解为无穷级数①. 因此当他要解一个方程时, 不管它是微分方程, 还是, 比如说, 由某个未知函数所确定的关系 (现在已知这是隐函数定理的形式之一), 牛顿按以下的方法来做. 将所有的函数都展成幂级数, 再将这些级数互相代入, 令等式两边相同幂次的系数相等, 就可将未知函数 (级数) 的系数逐个求出. 只要我们不担心所得级数的收敛性, 用这种方法求得微分方程的解的存在性与唯一性的定理立即就可以随同解光滑依赖于初始条件的定理一起得到证明. 至于收敛性, 由于这些级数收敛得如此快, 以至于即使牛顿没有严格证明收敛性, 他也不怀疑. 他掌握了收敛的概念, 而且就几个实例明显地计算了级数到很多项 (就是在给莱布尼茨的这同一封信中牛顿写到, 在这一计算中算到了多少项, 他都 "简直羞于启齿"). 他指出, 他的级数像几何级数一样收敛, 所以其收敛性是毋庸置疑的. 和他的老师巴罗一样, 他认识到可以为分析建立基础, 但是完全有理由认为在它上面逗留没有什么用 (巴罗这样写道, "可以用反证法②的论证来推广, 但为什么要这样做呢?").

§8. 牛顿多边形

除了在解微分方程时用了将解展成幂级数的方法外, 牛

①这一 (关于幂级数) 的研究与代数学的关系就如同十进位小数与算术的关系 (12).

②严格讲, 是 "由矛盾".

顿还用了分数幂, 这是在求由方程 $f(x,y)=0$ 所给出的代数函数的展开时必须采用的. 例如, 我们需要求解下述代数方程

$$ax^2+by^3+cxy^2+dx^7=0.$$

那么, 牛顿说, 必须作以下变换 (如今类似的变换叫做傅里叶 (Fourier) 变换, 但是在当时的情况下还得叫牛顿变换). 我们不再把多项式看成是变量 x 和 y 的函数, 而是把它看成是平面上整数格点上的函数. 这个函数在坐标点 (m,n) 上所取的值等于多项式中 x^my^n 的项的系数. 现在我们把那些对应于其系数不为零的单项式的格点标记出来, 并取其凸闭包. 我们由此得到牛顿多边形 (图 7). 结果发现, 对应于这个多边形内部格点的单项式对这个级数的牛顿多边形的形状没有影响, 我们可以暂时把它们忘掉, 我们只需考虑这个多边形的边. 例如, 在图 7 中的 AB 边对应于含两项的方程 $ax^2+by^3=0$. 暂时忘掉其他一切来解这个方程, 我们求得 y 作为 x 的函数为 $y=kx^{2/3}$. 这个函数是我们的方程的解在原点附近的一个好的近似. 如果我们还想求得其余的近似, 则必须将 y 写成 $y=kx^{2/3}+z$ 并将它代入原始方程. 在代入之后又得到一个代数方程, 但这次是 z 的方程, 我们要用完全相同的方法来处理. 将这个过程进行迭代, 我们就得到一个分数幂的级数 (现在它被叫做皮瑟 (Puiseux) 级数), 它给出方程在原点附近的解 $y(x)$. 这个办法总是管用的. 如果我们是从这个多边形的另一边开始这个过程, 我们就会得到另一个级数, 它对应于这个代数函数的另一个分支. 图 7 中的 BD 边对应于在无穷远

处的渐近性质.

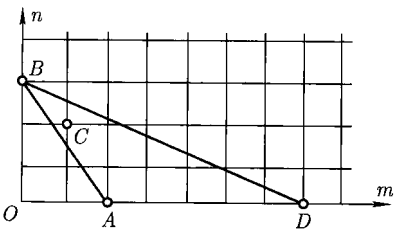


图 7 牛顿多边形

在此我从牛顿的工作中取了这么不大的一小片断来讲, 对它牛顿感到非常自豪, 它也放在了那封 1676 年给奥尔登伯格的信中, 我来讲它或多或少是由于, 很遗憾, 在大学生的基础课中没有讲到它, 尽管它在局域分析中是一个干活的基本的工具, 而且也非常漂亮. 在现代数学中, 在环形圆纹曲面流形的几何中会用到牛顿多边形 (和多面体), 这是在 1973 年左右兴起的①, 而在物理学, 也在力学中 —— 在相似性、量纲以及标度理论中, 都有用.

我们已经提到, 那封给奥尔登伯格的信原本是给莱布尼茨的. 但莱布尼茨生活在德国, 而牛顿在英国, 在那个时代和外国学者通信不安全. 牛顿没有把信送给莱布尼茨, 而是把它交给了皇家学会的秘书奥尔登伯格, 所以这封信是经过官方的途径走的. 奥尔登伯格把这封信交给了莱布尼茨. 牛顿的谨

①A. G. Khovanskii, The geometry of formulas, Soviet Scientific Reviews C., Mathematical Physics Reviews, Vol. 4, Harwood, New York, 1984, 67–90.

慎不是多余的. 这个善于交际的奥尔登伯格为了和外国人联系在办公大楼里花上了好几个月.

§9. 巴罗

现在我们来谈分析的起步, 先来谈一下巴罗. 牛顿的老师艾萨克 · 巴罗 (Isaac Barrow) 生于 1630 年, 去世于 1677 年 (13). 和胆小怕事又腼腆害羞的牛顿不同, 牛顿甚至在被选为剑桥在国会的代表时, 一句话也没讲过 (不错, 牛顿毕竟有一次在国会的会议上出来发过言, 但是是很短的发言: 他提议关窗), 巴罗年轻时是一个非常狂放不羁的人. 他的父亲 —— 一个伦敦的亚麻布商人 —— 确信, 由于他儿子性格狂放, 不能经商, 所以把他送去学习.

巴罗学了各种不同门类的学科, 但是最吸引他的是神学. 用他自己的话来说, 确定他未来道路的思路是这样的: "为了做一个好的神学家, 必须通晓年代学 ……"

年代学是一门非常重要的科学这个思想在那个时代是人人皆知, 牛顿也不例外. 而且就在当今还有些数学家, 尽管不是在英国, 而是在莫斯科, 可能是追随巴罗和牛顿, 对年代学问题有着强烈的兴趣 (14). 牛顿曾非常认真地从事过古埃及的年代学的研究. 其中出现过以下的问题. 到当时为止已经积累了太多的历史证据与圣经上所说的创世纪年代完全不符. 按照圣经, 人的存在, 从诺亚方舟到基督诞生, 历经 2348 年, 但有很多法老和朝代, 不能全放入这一段时期. 牛顿特地写了

文章, 提出了走出这一困境的办法. 他发现在圣经中法老的名字以字母 S 打头 (Sheshonk 或 Shishak), 而提到的另一个法老赫罗多图斯 (Herodotus), 叫着另一个名字, 但也是用 S 打头 (Sesostris, 现在叫做 Senurset). 就是在这里牛顿提出看法, 认为应该把这两个法老看成是同一个法老, 由此相应地改写了古埃及的编年史 (将它一下缩短了 2000 年 —— 完全符合现代数学家的精神). 不过看来在这个时期研究这个问题的更为科学的方法正在成熟. 例如, 巴罗提议利用有关日食的证据. 因此他这样说道: "要想做一个好的神学家就必须懂年代学, 而这又要求通晓天文学."

熟识天文学的要求接着又把巴罗引导到几何学. 这与两个原因有关. 第一, 必须会把望远镜指向星体, 第二, 必须会造望远镜, 即, 会磨制它所用的镜片. 牛顿最初的生涯也是与天文学连在一起的. 他造出了第一台反射望远镜 (15).

巴罗从发现他那著名的透镜公式 $\frac{1}{f}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}$ 开始他的科学生涯, 现在这个公式已进入了我们中学的课程 (没有提巴罗的名字). 为了推导出这个公式, 必须要会作透镜的切线, 会求无限靠近两根法线的交点, 并分析由此而得的焦点. 巴罗就这样研究起了几何.

可是应该说, 巴罗的生活非常艰难, 残存的封建势力仍然非常强, 革命在发生, 改朝换代在进行, 人们因宗教信仰而受迫害 (在那时, 这在即使是很文明的国度里都认为是可以忍受的). 巴罗的宗教思想与当时在英国占统治地位的宗教思想不一致. 因此他必须离开到别处去, 于是他启程去圣地, 同时就

地检验所有这一切. 但是在航程中他的船遭到了海盗的袭击, 尽管巴罗, 旅客中唯一手上有剑的人, 参与了在甲板上的战斗并且战胜了海盗, 仍未到达航行的目的地. 巴罗安全地回到了英国, 这时候这里朝代变了, 宗教形势也变了. 因此他有可能取得由亨利 · 卢卡 (Henry Lucas) 所设立的数学讲席, 卢卡曾给剑桥的三一学院留了一笔钱. 这时候正在研究几何的巴罗开始在那里讲授数学. 当时牛顿是二年级的学生, 看来是听了这些课程的. 巴罗讲课的讲义后来出版了, 而且莱布尼茨在 1673 年买过一本他的书. 不错, 莱布尼茨后来说过, 他很少遇到过某个人或一本书他没有去用过, 但是他把巴罗的书束之高阁, 从来没有读过.

巴罗的讲义究竟有些什么呢? 布尔巴基用带有点鄙视的口吻写道, 在他的这本书里, 100 页的文本中差不多有 180 幅图 (16). (关于布尔巴基的书可以说, 在里面的 1000 页书中找不着一幅图, 而这二者究竟谁更糟糕也还不好说.) 按布尔巴基的意见, 也就是由于存在这些大量的图, 没人会看出这本书里包含了些什么, 因为它的全部内容都在图里面了. 在这本书中没有引进新的术语和概念, 在里面既没有函数, 也没有导数. 它基本上是用来发展一个独一无二的原理, 从它可以推出许许多多的结论来. 这个原理就是, 在有关切线的问题与有关面积的问题之间存在着对偶性①.

①从牛顿留下的文稿中可以看出, 他在 1665 年或 1666 年就已经知道这个对偶性了, 可能是独立于巴罗的.

这个对偶性使我们在已经解决了某个有关切线的问题时(我们知道如何去画某一曲线的切线, 或者计算其次切距, 法距, 等等), 就能解决对应的面积问题, 其答案就是该曲线. 在对偶问题中, 要求的是另一条曲线下的面积, 后者可用几何的方法从第一条求出. 这样看来, 这本书实际上是讲牛顿 – 莱布尼茨公式的, 而巴罗是不可能已经知道有这样的公式的, 因为巴罗的工作出现在它们第一次发表的 20 年之前. 巴罗还从这个原理导出过一些有时要走很远才能得到的结果. 如果细心考察, 我们就会发现这种结果基本上有两类. 一类是在定积分中作变量变换的公式, 另一类是积分微分方程的分离变量的方法. 而且在讲义的最后, 在谈到积分中变量变换的定理时他补充说道, 遗憾的是他发现这个事实太晚了, 如果他更早地发现了的话, 讲义中前面很多地方都可以简化. 可是由于巴罗还有很多别的事情要做, 他没有在文本中作这些修改.

巴罗的书的确很难读 (17), 难怪布尔巴基要说, 不仔细研究这 180 幅图, 就什么也读不懂. 可是牛顿听过巴罗的讲课, 所以他都懂, 并且完全理解了书的内容. 在很多情况下他甚至简化和改进了它的叙述, 对此, 巴罗是一个非常细心的人, 他在适当的引证中把这些都告诉了读者. 但是牛顿所作的这些辅助工作完全没有涉及主要的地方 —— 牛顿 – 莱布尼茨公式和解方程的分离变量法. 这是巴罗本人的贡献, 牛顿从未自称这些是他发现的. 巴罗, 注意到这个有才华的学生, 在他 27 岁的年纪上就在改进望远镜上、在光学上和在几何上作出了有深远意义的发现, 考虑到他自己年事已高, 不适宜再占着

这个位子了 (他已 39 岁), 决定转搞意识形态方面的工作, 所以把这个职位移交给了牛顿. 因此他遇到了大麻烦. 事情是这样的, 巴罗是高位的神职人员, 仅仅是因为这样他才能常任教席. 在那个遥远的时代, 不向神父宣誓是不可能取得教席职位的. 牛顿不愿意宣誓 (尽管许诺他任系主任). 于是牛顿在剑桥的任职不得超过 7 年. 但是巴罗是一个很有影响的人, 而且在离开剑桥后在伦敦成了宫廷牧师. 因此他有了可能从国王那里为牛顿争取到了作为一个例外的特许. 这样一来牛顿就拥有了他在剑桥的职位, 并在那里完成了非常富有成果的研究活动.

§10. 泰勒级数

积分在阿基米德那里就遇到过, 而微分又在帕斯卡和费马那里遇到过, 而这二者之间的关系巴罗也知道了. 那么牛顿在分析中究竟干了些啥? 他在数学上的基本发现在哪? 牛顿发明了泰勒级数这个分析的基本工具.

当然, 这里可能会有某种令人感到困惑之处, 这与下述事实有关: 泰勒是牛顿的学生, 而他的相应的文章又是发表在 1715 年. 甚至可以说, 在牛顿的工作里根本没有泰勒级数. 这不错, 但只说对了一半. 实际的情况是这样的. 首先, 牛顿求出了一些初等函数 —— 正弦函数, 指数函数, 对数函数, 等等 —— 的泰勒级数展开, 从而证实了所有在分析中遇到的函数都可展开为幂级数. 他写出这些级数 —— 其中之一也叫

做牛顿二项公式 (这个公式中的指数当然不必是自然数)——并且经常使用它们. 牛顿正确地认为, 在分析中作计算, 不必重复地去微分, 而是利用展开成幂级数的方法. (例如, 他宁愿用泰勒公式来更快地计算导数, 而不是用导数来作函数的展开 —— 遗憾的是, 这个观点在分析的教学中被莱布尼茨的无穷小这个笨拙的工具给排挤掉了.) 牛顿计算有限差分时导出过一个类似于泰勒级数的公式 —— 牛顿公式, 而且, 最后他还得出一个一般形式的泰勒公式, 唯一不同的是, 在那些本来应该是阶乘的地方是一些没有明显地写出来的系数.

牛顿可能讲过在那里应该有什么样的系数[①](要知道在有限差分的公式中他把那些阶乘摆进去了), 可是他认为没有必要这样做. 这可能有他的心理上的原因. 事情是这样, 在牛顿看来, 量不是抽象的数, 而是有某种物理的本质. 可是在泰勒公式中所有的量 h^n 的量纲是各不相同的, 而要这一切能顺理成章, 每一项前的系数就应该有相应的量纲. 但在不同的单位制中系数的值也就不一样. 在那个时代还没有统一的单位制. 测量的单位国与国不同, 甚至从一个郡到另一个郡也不同. 所以人们在定律的表述中宁愿不表出有量纲的系数, 而仅仅说成正比, 例如, 举例来说, 在胡克定律中: "伸长与力成正比". 如果泰勒公式也写成这种无量纲的形式, 则阶乘就会消失, 而我们就会得到, 函数的增量就将正比于 n 阶导数和自变量的 n 次方. 这之后比例系数就可以根据所采用的单位求出来.

[①]在保存下来的牛顿文稿中, 这个级数是被完整地写下来过的 (感谢阿 · 依 · 尤什凯维奇 (А. П. Юшкевичу) 告诉我此事.

在计算有限差分的牛顿公式中, 阶乘系数明显地写出来了, 这是因为在这种情况下度量单位由所选格点的步长固定下来了. 莱布尼茨用以表示高阶导数的笨拙记号, 由于它能自动把量纲考虑进来, 所以在任意单位制下公式看起来都一样, 在这里就比较适用.

牛顿没有发表过他在分析领域内的发现. 他只是告诉了莱布尼茨, 说他能够 "在半刻钟内比较任意图形的面积". 我不知道, 今天大学一年级的学生掌握分析能不能达到这个水平.

§11. 莱布尼茨

当谈起分析的历史的时候, 就不能不谈到牛顿和莱布尼茨这一对对手. 牛顿对优先权的问题极为认真. 他很早就表述过这样的原则: 每个人必定会有一天要作出选择 —— 要么什么也不发表, 要么耗费毕生的精力去为自己的优先地位而斗争. 对于自己, 看来牛顿也在这方面作了决定, 既选择了这样, 又选择了那样. 他, 第一, 什么也没有发表, 而第二, 又不断地为自己的优先地位而斗争.

谈到分析的发明, 那么第一个发表的是莱布尼茨, 他说他是独立于巴罗和牛顿创造自己的微分学和积分学的. 然而就此引起的争论激烈到如此的程度, 以至于产生了这样的意见, 与其引起这么大的争议, 还不如不争这个优先权.

戈特弗里德 · 威廉 · 莱布尼茨 (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646—1716) 是美因茨 (Mainz) 地区选帝 (能参与选举皇

帝的) 侯爵 (Kurfürst)[①]的一名外交官, 在非常困难的情况下于 1672 年被他派往巴黎. 当时法国在路易十四的统治下已经是一个统一的、极权的国家, 在军事方面非常强大, 而德国却是四分五裂, 无论如何也抵挡不了路易十四的强大的军事实力, 他的骑兵部队能够在一天之内踏遍全德国. 德国人非常害怕这一点, 希望能找到某种出路. 莱布尼茨以他天赋的外交才能, 设计出了一个从法国侵略的威胁中挽救德国的方法, 并被派往巴黎去实施这个计划. 莱布尼茨的方法是这样的: 他想把征服埃及的计划悄悄塞给路易十四. 莱布尼茨制定了一个相应的计划, 而且真就提交给了法国政府. 法国政府实施了侵略埃及的计划, 但不是马上, 而是在拿破仑统治之下的时候, 但这个思想要追溯到莱布尼茨.

尽管路易十四没有实施莱布尼茨的计划, 但是他这趟巴黎之行也没有白去. 莱布尼茨在那里结识了惠更斯. 惠更斯是荷兰科学家, 但在 1666 年被请到法国做科学院的第一主席. 后来, 在南特敕令废止后, 在法国宗教信仰的迫害又死灰复燃了, 他决定返回荷兰.

莱布尼茨从惠更斯那里得知了有许多有趣的数学工作. 莱布尼茨早年曾对数学有过兴趣, 因为他总是对任何一般的事物

[①]和平运动的斗士和自由主义的统治者, 他甚至在他所统治的公国内废除烧死巫婆的法令.

都有兴趣, 而且老是有各种各样的普遍性的思想①.

例如他认为应该把所有的宗教都统一起来, 如果不能把所有的宗教, 那就把所有的基督教, 如果东正教不同意, 那就至少把天主教和新教统一起来, 如果这还做不到, 那就把所有的新教统一起来也好. 的确, 尽管他费尽心血, 就是这一点他也没有做到.

和这个完全一样, 莱布尼茨认为必须找出所谓的特征②来. 这是某种普遍性的东西, 它可以将科学中的所有的东西都统一起来, 并且包含了所有问题的所有答案. 他还发明了可以立即解决所有问题的全能的通用方法③. 例如, 他紧随帕斯卡之后制造了计算用的机器. (与帕斯卡的算术计算器不同, 莱布尼茨的算术计算器还能够计算平方根.) 这个算术计算器并没有

①此外, 在彼得一世的指示下筹建的我们的科学院 (指彼得堡科学院 —— 译者注), 其思想和规划都是莱布尼茨的, 此外还有 —— 也是根据彼得一世的指示 —— 规划改建俄罗斯的法律系统, 意在将这个国家转变为法制的国家 —— 这是一个仍有待于完成的目标.

②巴尔辛 (А. Н. Паршин) 给我解释, 莱布尼茨的这个 "特征" 实质上与 "哥德尔 (Gödel) 编号" 是一致的, 利用它后者证明了, 所有足够完善的理论都是不完全的, 从而否定了将数学形式化的莱布尼茨 – 希尔伯特纲领.

③莱布尼茨在给洛必达的信中这样写道: "一项好的遗产好过最漂亮的几何问题, 因为它能发挥通用方法的作用, 能使我们解决许多问题." (18)

借口普适性的思想并不能证明莱布尼茨的这句笑话的正确: 类似侮慢的话在巴罗和甚至牛顿的口中是不可想象的.

保存下来, 但是证据还是流传下来了: 莱布尼茨访问过伦敦, 他在那里向英国的学者演示过他的机器 (胡克立即改进了它的结构).

因此莱布尼茨非常喜欢数学, 他希望能把它的所有方法都统一起来, 于是惠更斯劝他去研究帕斯卡. 莱布尼茨从帕斯卡的继承人那里弄到了他的一些信和笔记 (后来又丢失了), 发现其中有一张图, 上面画着有名的微分三角形 (图 8).

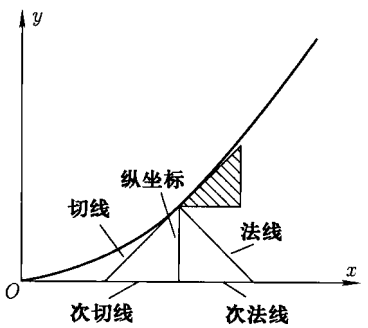


图 8 无穷小帕斯卡三角形和各种不同的函数

在那个时候, 笛卡儿、费马、帕斯卡都会对多项式进行微分, 也知道如何作各阶抛物线的切线, 而基本的无穷小三角形已经在帕斯卡的工作中出现了. 在其他一些几何学家 —— 惠更斯与巴罗 —— 的工作中, 也已经出现了与一给定曲线相联系的许多对象. 例如, 在图 8 上有这样一些量: 横坐标, 纵坐标, 切距 (切线从它与横坐标轴的交点到切点的线段), 切线的斜率, 曲边形的面积, 次切距, 法距和次法距, 等等. 通常所有这些对象都是分别加以研究的. 例如, 巴罗是借助在一个新的平面上画出的一条新的曲线来导出次法线与次切线之间的关

系的. 莱布尼茨, 以其个人对普适性偏好, 决定用统一的方式来处理所有这些量. 为此他引进了一个统一的单词用来表述与一给定曲线相联系到的任意量并能履行与此曲线相关的某种功能 —— 单词功能, 也就是函数 (*function*). 在图 8 中出现所有量都是函数的例子, 例如, 横坐标, 纵坐标, 次法线, 次切线, 等等.

这样一来, 按照莱布尼茨就有很多函数与一曲线相联系. 牛顿用了另一个术语 —— 流数 —— 它表示一个流动的量, 一个变动的量, 因而与运动相联系. 在帕斯卡的研究和本人独特论述的基础上, 莱布尼茨很快就发展出一套形式化的分析, 其形式就是我们今天所知道的样子. 也就是这样一种形式, 特别适宜于那些根本不懂它的人们去教它①. 莱布尼茨曾经写道: "那些拥有辅助优势的笨脑袋瓜子 …… 也能胜过最好的, 正如一个小孩用直尺画出来的直线就比最伟大的大师用手画出来要好." (《莱布尼茨的德语著作》, 第 I 卷, 377–381 页 (Guhrauer, Leibniz's deutsche Schriften, Bd.I, S. 377–381)) 莱布尼茨很快就建立了运算无穷小的形式法则, 其意义不清楚.

莱布尼茨的方法是这样的. 他认为, 全部的数学, 和全部的科学一样, 是存在于我们的内心世界中, 如果仔细倾听在我们心智深处所进行的过程, 单靠哲学这一门就可以把所有的

①这句话在英译本中改成: "这就是, 写成这样一种形式, 特别适宜于不懂它的人去教那些根本不会去弄懂它的人." —— 译者注

东西都想出来. 他靠这种方法发现了各种各样的规律, 而且有时还很成功. 例如, 他发现了 $d(x+y)=dx+dy$, 这个卓越的发现立即促使他思考有关乘积的微分应该是怎样的. 按照他的普适性的思想, 他很快就得出了微分应该是环同态的结论, 即应该有公式 $d(xy)=dxdy$. 但是经过一段时间以后他证实了这会导致某些令人不愉快的结果, 并且找到了正确的公式 $d(xy)=xdy+ydx$, 现在这个公式就叫做莱布尼茨法则. 在有归纳思想的数学家中不会有任何人 —— 巴罗不会, 牛顿也不会, 他们因此在马克思主义文献中被称为是一个有经验的驴—— 在任何时候脑袋里冒出像莱布尼茨原来那样的假设, 因为他们从一个简单的图形就完全清楚地看出, 乘积的微分应该等于什么 (图 9). 显然, 一个矩形面积的增量由三部分组成: 两条无穷细的矩形的面积 xdy 和 ydx 和一个更高阶的无穷小的面积 $dxdy$, 它可以忽略不计. 眼前有着这样一幅几何图像, 怎样也不会假设想求的增量会等于这个可以忽略的量. 可是对于经验哲学家莱布尼茨来说, 这种代数式的思想是很典型的.①

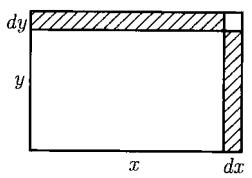


图 9 莱布尼茨公式

①莱布尼茨在 1686 年就已经认为, 曲线的曲率圆与曲线的相交不会超过四个共同点.

§12. 关于分析发明权的争论

在 1684 年莱布尼茨发表他的无穷小计算之后, 在牛顿和莱布尼茨之间爆发了一场丑陋的争论, 应该对这场争论也讲几句.

大约有 10 年的时间, 一切都很平静和祥和, 可是这之后牛顿和莱布尼茨的学生就开始为在这两位学者中谁是第一个想出分析的争论了起来.

牛顿是在 (用幂级数来) "研究" (曲线) 的意义下来使用分析这个术语的. 牛顿对笛卡儿的解析几何有很高的评价, 他把分析看成是解析几何的发展.

对中学教学大纲和教材的编写者来说可能会感兴趣的是, 牛顿不是像当时那样 (现在还仍然是那样) 从欧几里得, 而是从笛卡儿, 来学会几何的基础的 —— 可能也正是因为这样, 他才发明了分析.

后来巴罗在一次考试中发现他的学生对欧几里得不熟悉, 对他提出了忠告, 于是牛顿就仔细地研究了欧几里得, 并且掌握这些古人的技巧达到了很高的造诣, 可是起初他并不喜欢欧几里得, 因为他认为去证明那些是如此明显的事情是毫无意义的.

牛顿的分析就是用幂级数来研究运动, 也就是我们今天所说的函数和映射. 而在莱布尼茨那里, 如我们已经看到的, 分析乃是关于微分环的形式化的代数研究.

下面是这场争论的一些细节, 它清楚地表明, 千万不要卷

入类似这样的争论中去, 因为像牛顿、莱布尼茨和约翰 · 伯努利这样一些卓越的人物和伟大的数学家在这里都露出了有点儿可怕的样子.

例如, 在这个历史的插曲中出现过匿名信. 这封信莱布尼茨以未署名的方式把它发表在《学者杂志 (Journal des Savants)》上, 它是莱布尼茨的学生约翰 · 伯努利写的. 他在信中为莱布尼茨辩护而攻击牛顿. 但一年之后牛顿和他的学生们在答复此信时, 称它为伯努利的信. 伯努利, 眼看着没能保住自己的匿名, 责怪莱布尼茨这样就使他跟牛顿闹翻了, 而后者还刚刚把他介绍给皇家学会, 而且还答应了将来会选举他的儿子. 伯努利在给莱布尼茨的信中这样写道: "我感到惊讶, 牛顿怎么会知道是我写这封信的, 因为没有别人知道, 除了您, 信是写给您的, 还有就是我, 信是我写的." 但过一阵子这个谜就解开了. 在信的某处偶尔冒出了一句 " meam formulam", 即, 参照 "我的公式". 由于这个公式是出自约翰 · 伯努利, 牛顿就很容易地认出了信的作者.

莱布尼茨给韦尔斯 (Wales) 王子 (他在未来将成为国王) 的妻子卡罗琳 (Caroline) 王妃写了一封信, 在信中他警告她 "别让那个反宗教的牛顿扰乱她的朴实的德国信仰". 在当时 (那大约是在 1715 年) 这对牛顿可是一个危险的控告, 他那时正拥有高阶的官职 —— 造币厂的厂长. 一个国家的官员被控犯有反宗教的罪名将付出高昂的代价. 对牛顿来说幸运的是, 在该案例中还没有出现这种情况 (19).

牛顿在这个事件中做得也不怎么样. 他召集了一个委员会, 它的任务是查明这个优先权的问题, 并作出最后裁决. 牛顿那时已经是皇家学会的主席了①, 所以, 为了使委员会的组成不偏不倚, 委员会里面, 用他的话来说, 包括了来自不同国家的许多学者.

委员会研究了优先权的争论的问题, 并发表了问题结论的报告. 这个国际性的公正、权威的委员会的报告用下面这样一段话来开头: "没有人能为自己做真正的证人. 他有可能成为一个不公正的法官, 而且可能把全民的法律丢在自己的脚下踩碎, 而且在自己的案件中允许任何人作合法的证人." 接下来就是为牛顿辩护和指责莱布尼茨毫无根据地争夺牛顿没有发表过的结果的优先权.

后来, 在牛顿去世之后, 从他留下的文件中弄清楚了, 牛顿曾指导了这个报告的起草, 而且动情地指责一个不公正的法官这一段话就是牛顿本人所写的, 而所谓的非英国的 "许多科学家" 只不过有两个, 其中数学家还只有一个.

这个可悲的故事就不讲了, 从这件事, 我们大家都要对有

①只是在胡克去世后的 1703 年牛顿才同意接受皇家学会的主席这个位子. 而他在这个位子上所做的第一件事就是销毁已故胡克的所有仪器, 以及他写的文章和肖像. 以至现在在皇家学会, 所有会员的肖像都有, 就是没有胡克的. 胡克是皇家学会的会员、学会的秘书和博物馆的馆长, 他的肖像连一张也没保留. 在我们最近出版的一本关于胡克的小册子的封面上有一张他的肖像, 但这张像不是真的肖像, 而是根据对胡克的文字描述用现代的刑侦图像手段绘制的.

关优先权以及其他围绕科学外围的一些事情的争论的科学价值, 得出应有的结论来[①], 下面我要来讲一点有关导致创建分析的那些几何方面的研究工作.

[①]有关传记科学的情况请参阅: ВАСХНИЛ 会议报告速记, Москва: ОГИЗ, Сельхозгиз, 1948. В. Гинзбург, Заметки по поводу, Наука и жизнь, 1988, No. 6, 114–119.

第三章

从渐伸线到准晶体

---

§13. 惠更斯的渐伸线

对牛顿来说, 为了研究在力学与几何中出现的曲线, 分析是不可或缺的基础. 我们已经看到了曲线出现的一些方式. 其他的方式是由惠更斯发现的, 他研究了分析、光学和力学中的一系列问题. 例如, 在莱布尼茨发表他最早的一些著作的 11 年前, 在 "牛顿定律" 出现的 13 年前, 惠更斯就发表了他对圆周运动的向心力的计算 (即, 对一个向量函数作两次微分, 并应用 "牛顿第二定律").

惠更斯是用初等几何作图来求解所有问题的, 但是他取

得了重要的结果.

惠更斯的重大成就之一就是对由他所引进的渐伸线的研究. 在许多老的分析教科书中, 从洛必达的第一本教科书一直大约到古尔萨 (Goursat) 的高等数学分析, 都有渐伸线, 可是在现代的教程中对它们有避而不谈的趋势.

设给定一曲线. 它的*渐伸线*就是一根拉紧了贴卷在该曲线上的绳子, 在拉紧的状态下退卷时绳子的端点的轨迹 (图 10). 渐伸线有一个值得注意的性质就是, 它在点 P 处有一个尖点, 而且, 如果我们试图在这个点的邻域内用泰勒级数来描述它, 我们就会确信它在这个地方是不光滑的, 尽管它看起来似乎是如此 (而且, 除此之外, 它还处处有切线). 不光滑性是由于渐伸线上任一点 X 处的曲率半径等于绳的卷开段 YX 的长度, 而随着点 X 向 P 靠近, 这一段的长度也就越来越短, 从而 P 点的曲率结果就会是无穷大, 因此该点就成为了奇点. 原来渐伸线在这点的奇异性类型为 $3/2$, 就是说, 在 P 点的一个邻域内, 它与半三次抛物线 $y = x^{3/2}$ 微分同胚. 为什么在图

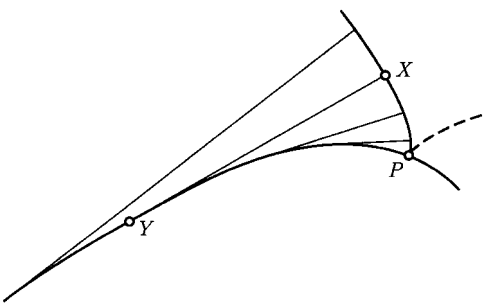


图 10 用一根拉紧了的绳子生成渐伸线

中渐伸线要画成有两个分支呢? 第一, 把半三次抛物线的方程写成 $y^2 = x^3$ 的形式, 就可看出它还有第二个分支, 第二, 如果我们用现代几何的观点来观察这个图, 也可以理解这一点.

假设我们这条曲线为凸曲线, 并设 s 为沿曲线的自然参数 (即曲线的长度), $\vec{r}(s)$ 为曲线上对应于参数值为 s 的点 Y 的向径, 而 t 则为绳的自由段的长度. 那么, 由绳从曲线上退卷至 Y 点时所得到的渐伸线上的 X 的向径就等于 $\vec{r}(s) + \overrightarrow{YX} = \vec{r}(s) + t\vec{r}'(s)$[①], 这是因为 s 是沿曲线的长度. 用这种方式我们就得到了从坐标为 (s,t) 的平面到我们这条曲线所在的平面的一个映射 F. 容易看出, 这个映射是光滑的, 但它不是微分同胚. 只要对映射 F 作不太复杂的分析就表明, 它的像点只是平面上的一部分, 位于曲线的一侧, 此时所有不属于曲线的像点都恰好有两个逆像点 (见图 11), 而曲线上点则只有一个逆像点. 因此映射 F 可以这样来构造, 把它当成是沿我们这条曲线折叠起来的曲面在平面上的投影 (图 12). 这样一种映射叫做折叠映射.

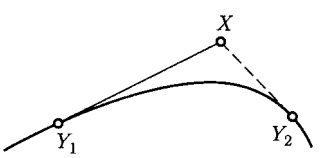


图 11 点 X 的两个逆像的作图

现在可以看出, 渐伸线是从何引起的. 它是在我们固定绳子的长度, 即固定和式 $s+t$ 时得出的. 方程 $s+t=a$ 在 (s,t)

[①]这里 $\vec{r}'(s)$ 为 $\overrightarrow{YX}$ 方向上的单位向量. —— 译者注

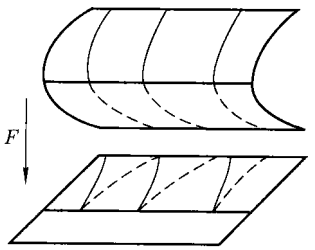


图 12 通过折叠生成渐伸线

平面上确定出一族平行直线, 它们在折叠曲面上就变成了一族光滑的曲线, 经投影后就得下面的曲线族. 每一条渐伸线对应于绳长的某一个值 a, 因此完全落在这些曲线之中的某一条的上面. 可是这种曲线的每一条都有两条分支. 一条分支对应于曲面上半部上的曲线, 而另一条则对应于其下半部. 所以在渐伸线的图上也画有第二条分支, 它正是对应于下半部的那条分支. 这两条分支是一条曲线的两个部分, 而第二部分是第一部分的解析延拓, 对应于参数 t 取负值 (物理上这意味着绳子现在要从曲线的另一侧松卷; 图 13).

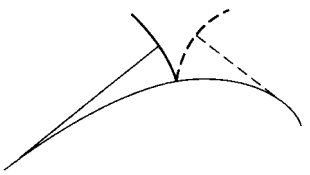


图 13 通过绳松卷生成两支渐伸线

渐伸线上有值得注意的奇点是惠更斯发现的. 在创造等时摆的过程中他很好地利用了这个特殊的点. 如果令从绳上吊下的摆被限制在两块侧板之间振动, 而侧板边沿则作成旋

轮线的形状 (图 14), 那么摆将沿着侧板边沿曲线的一条渐伸线 (它本身也是一条旋轮线) 运动, 而且它的一切振动 (即不仅是小幅振动, 而且大幅振动也是) 都有一个相同的周期.

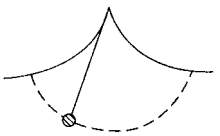


图 14 惠更斯的等时摆

§14. 惠更斯的波前

渐伸线还与在惠更斯作的另一项研究, 即波前理论, 中所遇到的一个对象有关. 惠更斯在研究从某一波源发出的波的传播时发现, 在这里也可能产生奇点.

例如, 设波源的形状为一椭圆, 并设波以单位速度向内传播. 根据惠更斯原理, 经过时间 t 后的波前将会是一半径为 t, 圆心在该椭圆上的圆周族的包络线, 在 t 较小时它将是一条等距离的椭圆. 如果 t 不断增大, 则在某一时刻在包络线上就会出现奇点 (图 15). 它们也会是半三次方的. 奇点对惠更斯在研究波与射线的对应时是非常重要的, 对我们今天的研究它也非常重要, 这包括: 变分法, 最优化, 哈密顿力学 …… 因此在他于 17 世纪 50 年代所完成的工作中, 无论是关于波动的, 还是关于摆动的, 都包含许多相似的、用来研究那里出现的各种奇点的图形.

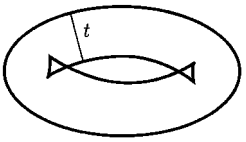


图 15 波前的奇点

考察平面上由某一曲线所包围的一个区域, 再设曲线上有一点是扰动源 (图 16). 那么, 由扰动在某一确定时刻绕过该曲线所围成的障碍物后所达到的点连成的波前将会是在障碍物边界邻域内该曲线的渐伸线. 于是我们有, 包围某一区域的曲线的渐伸线可以看成是一有边界的流形上的惠更斯波前. 这种波前, 虽然乍一看来令人吃惊, 在曲线点上奇异类型为 3/2 (因而, 在经解析延拓后它也有一个第二分支).

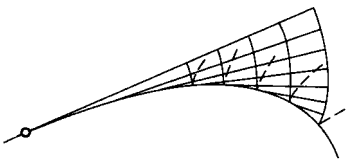


图 16 作为波前的渐伸线

§15. 渐伸线与二十面体

向前进一步发展这些研究就导向研究三维空间中的奇点或在平面上的奇点, 但是是在更复杂的情况下. 由此而得到的曲线和曲面原来也是非常著名的. 其中许多在惠更斯的时代或稍后一些就被研究过. 例如, 有名的焦散曲线就是由在惠更

斯之后不久的奇恩豪森 (Tschirnhausen) 引进的, 而与它们相联系着的波前和渐伸线的性质则在由洛必达所撰写、以伯努利的讲义为基础的第一本分析的教程中讲到了.

该书特别地研究了下面的情况. 设在平面上给出了一条处于一般位置的曲线. 在这种曲线上可能有一拐点, 但只是最简单形式的 (相应函数的三阶导数不为零, 因为对一条处于一般位置的曲线的相应函数, 其二阶和三阶导数不可能同时为零). 我们要来阐明, 这种曲线的渐伸线族是什么样的. 就我所了解的, 对于那个时代的数学家 —— 巴罗、牛顿、莱布尼茨、伯努利以及甚至对他的学生洛必达 —— 这个问题都不在话下. 当然, 这对他们来说是有一定的难度, 但远没有像对现代数学家的难度那么大. 我想, 学习分析的现代大学生们的大多数, 甚至他们中最优秀的, 未必能作出三次抛物线 $y = x^3$ 的一条渐伸线. 这个问题的解非常值得注意 (图 17). 和前面讲的一样, 在这条曲线本身上渐伸线所具有的奇点类型为 3/2, 而在通过拐点处的切线上, 奇点的类型则为 5/2. 如果改变绳

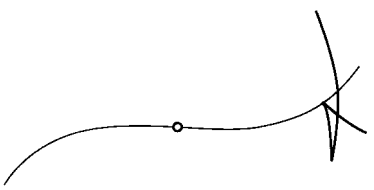


图 17 三次抛物线的渐伸线

的长度, 我们就得到一族曲线, 它们的奇点填满两条曲线 —— 三次抛物线本身和通过拐点的切线 (图 18). 本内甘 (1) 在洛

必达的教科书《分析基础》中发现了这张图.

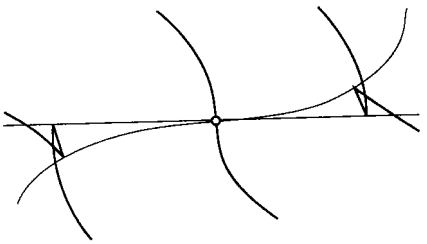


图 18 靠近曲线拐点处的渐伸线族

尽管在老的书中就有了这张图, 但是促使我们能发现它的唯一原因却是因为现代数学家们在研究另一个问题时也画出了这张图, 当然, 这也是与渐伸线有关的 (虽然表面上似乎无关)①. 在现代数学中人们发现, 在这里遇到的奇点与由反射所生成的群有关. 具体地说, 我们这张图与群 H_3 有关. 这个群是二十面体的对称群, 由对这个多面体的十五个对称面的反射所生成 (21).

正多面体的出现常常是不期而遇.

开普勒就在研究行星运动时, 除了提出了今天大家都知道的三大定律之外, 还提出了一个神秘的第四定律, 它断言, 轨道的长半轴可以用正多面体来计算. 从那以后多面体在其他一些情况下也同样地出人意料地出现, 不过在那些情况中它们更与事物的本质相联系.

在二十面体的情况中我们可以考察所谓判别簇 (*discrim-*

①"当然, 这也是与渐伸线有关的" 这句话在英译本中改写为: "它似乎与渐伸线没有什么关系". —— 译者注

inant). 下面讲它是怎样得到的. 将空间 $\mathbf{R}^3$ 复化成复三维空间 $\mathbf{C}^3$, 群 H_3 也在其中作用. $\mathbf{C}^3$ 对这个群的商空间仍与空间 $\mathbf{C}^3$ 同构 (这立即可以从与有关对称多项式的一个基本定理的类比得出, 顺便说一下, 它也已经从我们的代数课程中消失了). 这样一来, 这里有三个基本不变量, 这个群的所有不变多项式都可以用多项式来表达 (22). 另一方面, 在原来的 $\mathbf{C}^3$ 中存在着进行反射操作的镜子 (数目为 15). 一个不在任何镜面上的点所具有的像的个数等于群的阶数, 即 120. 对于镜面上的点, 像的个数要少一些. 商空间中的点 —— 该群在原来的空间中的轨道 —— 如果构成该轨道的点不在镜面上, 就叫做*正规的*. 其他轨道以及商空间中对应于它们的点则称为非正规的. 所有非正规轨道的集合 —— 即镜面在求商结构的映射下的像 —— 是商空间中的一个子簇. 这个子簇与实点集合的交是某个有奇点的簇, 它就叫做群 H_3 的判别簇.

对任何其他由反射生成的群可以完全相同地来构造某种具有奇点的簇.

下面是一个例子, 在这个例子中所有这一切都可以看得很清楚. 考察在平面上三条相互以 120° 相交的直线 (图 19).

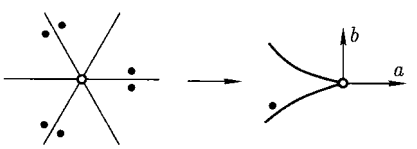


图 19 一个反射群及其镜面、轨迹和判别簇的例子

由对这几条直线的反射所生成的群包含六个元素, 而正规

轨道由六个点组成. 所有这些可以这样来设想. 令我们的平面为三维空间中其坐标 z_1, z_2, z_3 满足方程 $z_1+z_2+z_3=0$ 的点所组成. 在这个三维空间中作用着一个由三个元素组成的置换群, 这三个元素就是坐标的对换. 这个群可以由对镜面 $z_i=z_j$ 的反射所生成, 它们在我们平面上的迹就是原来那三条直线. 因此在平面上的轨道简单地就是其和为零的三个数的各种排列组成的三数组. 正规的轨道是这样的三数组, 它们的三个数各不相同. 我们怎么来将这些无序的、其和为零的三数组 (它们还是复数, 因为我们已经假设作了复化) 用自然的方法进行参数化呢? 这个方法是众所周知的, 因为任何一组无序的三个数可以唯一地确定为一个三次方程 $z^3+\lambda_1 z^2+\lambda_2 z+\lambda_3=0$ 的根. 但是我们这三个数的和为零, 故有 $\lambda_1=0$, 从而这个由反射生成的群的轨道空间可以由形如 $z^3+az+b=0$ 的三次方程来唯一地参数化. 这就是说, 商空间不过就是以 (a,b) 为坐标的平面. 这个平面上的每一个点对应于一个三次多项式, 而每一个多项式又有它的三个根与之对应, 这三个根中可能有相等的. 如多项式有重根, 则与之对应的轨道就是非正规的. 这样一来, 这个群在空间 $\mathbf{C}^2$ 中的判别簇的方程就可以通过令系数为 a,b 的三次多项式的判别式为零来得到. 于是, 在当下的情况中即为曲线 $4a^3+27b^2=0$, 也就是一条半三次抛物线. 这个由反射生成的群就是与惠更斯所遇到的全部半三次奇点相对应的群.

对其他由反射生成的群的判别簇也有类似构造. 这样, 对于由对二十面体的对称面的反射生成的群, 我们将得到三维

空间中的某一曲面. 我们可以证明一个有关这个曲面的定理: 它与洛必达所画过的一个曲面 (图 18) 微分同胚. 如果说渐伸线的奇点在曲线具有凸性的点上其奇点类型为 3/2, 那么在拐点处相应的奇点则构造成二十面体群的非正规轨道空间.

为了从三次抛物线的渐伸线族得出三维空间中的曲面, 必须将这些渐伸线放到 $\mathbf{R}^3$ 中的不同的水平面上, 即将对应于参数值为 a 的渐伸线提升一个高度 a. 因此图 18 可以诠释为曲面的一个像, 而上述定理就是说, *这个曲面与二十面体的对称群 H_3 微分同胚*.

§16. 二十面体与准晶体

由反射生成的群的理论与晶体学有联系. 这就是, 某些这种群保持晶体点阵不变. 例如, 上面讲到的由对平面上三条直线的反射生成的群保持六角点阵不变 (图 20). 所有的晶体群

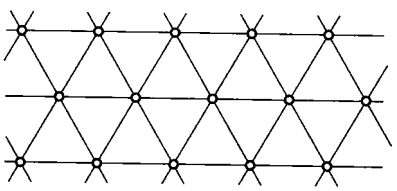


图 20 六角晶体的点阵

都已有了分类, 而且它们都被作了很好的研究. 它们对应于单李代数 (因而也就对应于单李群). 但是二十面体群不在此分类之列, 因为它不能保持三维空间中的任何点阵不变. 完全一样, 五边形群也不在这个分类之中. 这反映了这样的事实, 在

晶体中不会遇到正五边形, 在装饰画中也没有能填满平面的、具有五阶对称的图案.

可是最近几年来从事晶体的 X 射线结构分析的实验物理学家开始在 X 射线照相中发现了数量相当多的五边形 (23). 换言之, 看来发现了有五边形对称的物质. 它们被称为准晶体, 因为数学定理断定它们不可能是真正的晶体.

这一切能说明什么呢? 原来在我们刚讲过的理论 —— 即与渐伸线相关的奇点的理论 —— 中存在一种结构, 它也会导致准晶体.

为了直观起见, 我们不讨论二十面体群, 而来考察更简单一些的五边形对称群. 众所周知, 这个群不可能用能保持平面上某个点阵不变的对称群来实现. 虽然如此, 我们来考察五维空间, 和在上面研究过的例子一样, 在这个空间中作用着一个坐标置换的群, 包含 120 个元素. 这个群显然保持五维空间中的整数点的点阵不变. (在由反射生成的群的理论中叫做 A_4 群.)

将这个五边形群嵌入到这个置换群中, 于是它也作用于五维空间, 但这个表示是可约的. 实际上, 平面的一个将五边形变到自身的旋转以 1 的五次方根为其本征值. 这五个根自身也分布在一个正五边形的顶点上, 将复共轭的根结成一对, 我们就能做到将空间 $\mathbf{R}^5$ 分解成三个不变子空间的和 —— 一个对应于根 1 的一维空间, 还有两个二维空间. 那个一维空间 —— 它就是对角线 —— 就是其五个坐标都互等的向量构成的子空间. 在这个对角线的正交补空间中, 和前面一样, 作

用着五边形群, 而且也和前面一样, 有一个在这个群作用下不变的点阵. 但在二维不变子空间中没有这种点阵. 正如不太复杂的计算所表明的, 这两个二维的不变子空间的任何一个, 其向量在 $\mathbf{R}^4$ 的坐标点阵中的坐标值是无理数, 就是说, 它们除了原点外不包含任何其他的整点 (这可由黄金分割为无理数推出).

现在设在包围空间中有一个函数, 它具有与点阵相同的对称性 (即周期函数, 也就是, 在按点阵向量的移动下不变, 也在所有将点阵变到自身的运动和反射下保持不变). 将这个函数限制到上述不变的二维子空间时, 它就不再是周期函数, 而是殆周期函数了. 这个殆周期函数保留了五边形对称的剩余对称. 我们可以用以下的方式来求它们 (24).

将以上所得平面上的殆周期函数展成傅里叶型的级数, $f(x) = \sum f_k e^{i(k,x)}$. 波矢 k (傅里叶谐波分量的 "编号") 构成对偶空间中的一个向量的集合. 这个集合叫做殆周期函数的谱. 在这个谱中保存了原来定义在包围空间 (四维或五维的空间) 中的周期函数的五边形对称的痕迹.

那么就让我们先来研究原来的周期函数的谱. 一般来说, 这个谱是一种普通的点阵, 对偶于包围空间中那个原来的点阵.

对任一空间的二维子空间都有对偶空间中的一个二维商空间与之对应. 它由对在所研究的二维子空间中等于零的线性形式构成的空间取商空间而得到.

换言之, 对所研究的二维空间的波矢空间, 可以从一个更大的、包围空间的波矢空间向它的余维为二的子空间的自然

投影来得到.

定义在包围空间中的周期函数的谐波点阵就位于这个包围空间的大波矢空间中. 殆周期函数的谱就可由这个多维点阵通过上面描述过的向对偶空间进行自然投影 (即与平面到包围空间的嵌入相对偶的投影) 来得到.

考虑到二维平面相对于包围空间的周期点阵的位置是 "无理的", 多维谐波点阵在波矢平面上的投影就会是一个处处稠密的集合. 这样一来, 由限制到平面而得到的殆周期函数的谱, 一般来说, 也将是在波矢平面上的一个处处稠密的集合. 乍一看来很难从它获取到有关对称性的什么样的信息.

现在我们把注意力转向傅里叶级数的系数. 对在包围空间中原来的周期函数 (我们设它是光滑的), 它的傅里叶系数随波矢远离原点而很快地减小. 因此不太小的傅里叶系数个数有限, 对应的波数的编号不大.

这样一来, 殆周期函数限制到平面后其量值可观的谐波也只有有限几个. 对应的谱点形成一个有限集合. 它是多维点阵在原点附近地区那有限的一团云在平面上的投影. 这个投影保留了多维点阵的五边形对称的痕迹, 其形状一眼看去很像五边形 (尽管不是完全的正五边形) (图 21 和本书最后所附的照片 1).

对二十面体对称群的表示也有类似的展开 (25).

正是这一展开说明了在二十面体与惠更斯渐伸线之间的联系, 这样它的发现可看成是由惠更斯所开创的研究的完成.

另一方面, 在晶体的 X 射线分析中我们所观察到的实质

上是一个具有晶体点阵对称性的函数的谱 (更准确地说, 是这个三维谱在平面上的投影). 这些谱的点在 X 射线照片上看起来像一些光斑, 对应的谐波振幅越大, 光斑就越亮. 由此看来, 我们实际观察到的不是全部的谱, 而只是对应于其谐波编号不太大的那一部分谐波的谱. 而下面就是在分析某些物质的这种照片时看到过的近似正五边形的有规则的结构 (图 21). (23)

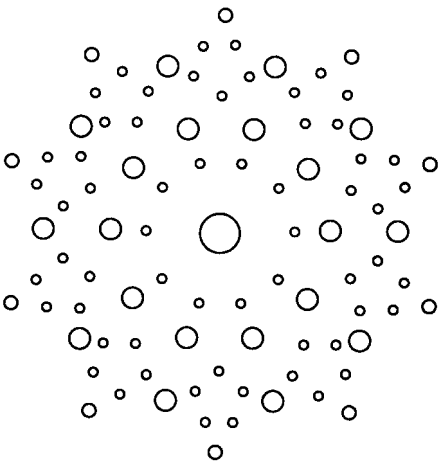


图 21 准晶体的谱 (照片 1, 2a, 2b, 2c, 3, 4 在本书最后)

为了阐明二十面体与渐伸线间的联系而构建的理论也立即说明了如何可以获得这种谱. 所研究的三维空间的函数必须是非周期性的, 而应是殆周期的. 就是说, 它应该从一个具有二十面体对称性的六个变量的周期函数出发, 将它限制到 "无理的" 三维空间来得到. 在此我们不想在三个附加的 "量子" 数的物理意义上多费口舌, 只是指出, 物理学家们为

了阐释所观察到的准晶体而提出的理论, 在概念上与上述构造接近, 而后者却是研究渐伸线的奇点和惠更斯波前的副产品—— 这又是统一性的一个令人吃惊的例子, 它使牛顿和他的同代人感到震惊, 以至于把它解释为上帝存在的证明.

第四章

天体力学

§17. 《原理》后的牛顿

无论是宇宙体系的发现, 还是理论物理的创立, 或是天体力学的构建, 都不在剑桥大学和皇家学会的年度计划之内, 也不在它们直到 1700 年的远景规划之内. 牛顿是在哈雷的迫切请求下用 18 个月的时间写完他的 700 页的《原理》一书的. 可是, 由于该书没有列入计划, 哈雷不得不自己掏腰包来出版它.

牛顿这时候是三一学院的教授. 他有三个学生. 他讲授的课程有: 算术、地理、光学及其他科学. 课程只在秋季开出 (一

年十讲), 每讲维持半小时. 有时出席的听众一个也没有 (牛顿的讲课出名地难懂), 这时他就回家.

牛顿把他的大部分时间和精力都放到了炼金术和神学上. 他的主要发现都是在他的学生时代, 在他 23 岁和 24 岁时作出的. 在完成《原理》(这时候他 44 岁) 之后牛顿就不再积极地从事科学工作了①.

1696 年牛顿被任命为伦敦造币厂的监理并且后来又当了厂长, 在由他从前的一个学生蒙塔古 · 哈利法克斯 (Nontague Halifax) 勋爵 (英格兰银行的创始人, 在国王不在时领导国家) 所推动的经济改革中发挥重要的作用.

从内战开始到 1688 年的 "光荣革命" 结束时为止前后持续了几十年之久的革命性的动乱把国家的经济带到了十分困难的境地: 几十年的贪污腐化和其他负面现象迫切要求经济改革, 在此过程中必须令旧的声誉不佳、也得不到外国政府承认的货币尽快退出流通.

牛顿在没有增加任何新机器的情况下, 在一个短时间内令铸币的数量翻了八倍. 他还在同时建立了侦查审判制度, 结果在 1697 年的一年内通过审讯程序有将近 20 个伪币制造者被处决.

1703 年牛顿被推举为皇家学会的主席 (见第 49 页), 在这个位子上一直做到 1727 年他去世为止.

①А. Д. Сахаров (沙哈罗夫) 把这归因于时代的不景气.

§18. 牛顿的自然哲学

在《原理》一书所包含的最重要的物理原理中我们必须提到: 1) 空间和时间的相对性的思想 ("在自然界中没有物体静止不动…… 也不存在匀速运动"), 2) 存在惯性坐标系的假设, 3) 决定性原理: 世界上全部质点在初始时刻的位置和速度决定了它们全部的过去和未来.

那个曾经似乎是混沌的宇宙在《原理》之后就像一架调整得很好的钟. 基本原理规整而又简单, 我们所观察到的运动的一切复杂性都可以从它们导出, 这一点被牛顿 (26) 看成是上帝存在的证明: "这个由太阳、行星和彗星组成的最美妙的系统, 它的运行只能是听从着一个强大而又有智慧的存在的指挥和主宰. 这个存在统治着一切, 不是作为这个世界的一个人, 而是君临其上的主; 而且由于他的主宰应该把他叫做主上帝 (παυτοκρατορ)". 理论物理一直留在牛顿所创造的天堂里有 200 多年之久, 直到量子力学和广义相对论出来才打破了这个幻觉.

在此我们不可能把在《原理》一书所陈述的, 哪怕是主要的具体成就都列举出来. 我只能回顾一下: 极限理论的构建 (它与现代理论只有记号之差), 阿贝尔 (Abel) 积分的超越性的拓扑学证明 (引理 XXVIII), 以极大的超声速在稀薄介质中运动时所受阻力的计算 (这只有在宇航时代才能找到它的应用), 对一个长和宽均给定的物体阻力最小的变分问题的研究 (这个问题的解有一个内在的奇点, 牛顿是意识到了这一点

的, 但 20 世纪他的出版者显然不知道这一点而把这个图给抹平了 (27)), 以及太阳对月球运动的摄动的计算.

§19. 天体力学的胜利

天体力学在牛顿之后的发展就是万有引力定律的一长串胜利的过程: 看似对它的各种各样的偏离, 随着时间的推移发现它们都可以用摄动的计算不准确来解释. (一个值得注意的例外是水星近日点的进动. 观测值为每世纪 599″, 但摄动计算的结果为 557″. 差值 42″ 是广义相对论的效应. 新的物理理论常常是从对最后几位小数的修正开始的!)

引力理论的第一次胜利是对哈雷彗星回归的预言. 哈雷并没有真正发现那颗以他的名字命名的彗星, 但注意到了 1456, 1531, 1607 和 1682 这几年的彗星轨道的相似性, 大胆地预言, 彗星会在 76 年后, 即 1758 年返回. 可是由于受到木星和土星的摄动, 彗星要晚到 (根据克莱罗 (Clairaut) 的计算要晚 618 天), 只在 1759 年的 3 月才通过近日点, 几乎与克莱罗所预言一样.

另有一个现象, 它引起对引力定律的普适性和准确性的怀疑, 这就是持续观测到木星在缓慢地加速, 而土星则在缓慢地减速 (开普勒, 1625 年; 哈雷, 1695 年). 如果这个过程已经持续了几百万年, 那太阳系就会完全改变: 木星就会离太阳更近了, 而土星就会远离太阳了.

行星的总质量大约为太阳质量的千分之一, 所以行星彼

此之间的相互摄动在一年内累积起来得到的一个量, 其数量级为它们所运行轨道的千分之一. 如果这些摄动累积超过几千年, 行星就可能掉入太阳或发生相互的碰撞. 地球也有可能脱离太阳而冻结起来.

为什么这没有发生呢? 原因在于, 行星所受到的摄动在不同时间实际上方向是不同的, 因而有一种振荡的性质.

这种摄动在数学上是用与 $\cos\omega t$ 和 $\sin\omega t$ 成正比的项之和来表示的 —— 它们是周期性的, 不会产生危险的摄动. 能累积起来的摄动项形式上会随时间增长, 它们或者与 t 成正比, 或者说是振幅不断增长的振动 $t\cos(\omega t+\theta)$ (图 22). 与时间成正比的项叫做长期项, 因为, 例如, 摄动 at, 即使在系数 a 很小 (比如说千分之一的数量级) 时, 经过几个世纪之后也会变得很大.

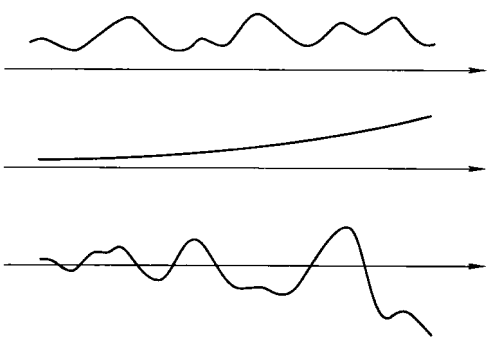


图 22 周期摄动、长期摄动和混合摄动

这样一来就产生了长期摄动的这个问题: 考虑到宇宙时间的巨大 (数以几十亿年计), 即使非常小的长期摄动也会根本改变太阳系, 以及, 特别是, 地球的历史.

§20. 关于稳定性的拉普拉斯定理

问题在于, 是否真的存在长期摄动, 还是这只是个伪论题 —— 不成功的数学推导的产物? (例如, 考虑一按规律 $x = \cos \omega t$ 振动的摆, 设我们对频率 ω 稍作扰动, 使它变成 $\omega + a$, 这里 a 非常小. 那么这个扰动 (即摄动) 按 a 的幂展开, 它对 a 的一级近似简化为表达式 $x = \cos(\omega + a)t = \cos \omega t - at \sin \omega t$, 其中就含有一个带着 at 的危险 "混合" 项. 可是摆的真正的振幅并不是随时间增长, 而仍然为有界.)

拉格朗日 (1776 年) 与拉普拉斯 (1784 年) 对行星摄动的分析最终得到了 "关于太阳系的稳定性的拉普拉斯定理" (28): 几乎在同一平面上沿偏心率不大的、互不相交的椭圆轨道, 并向同一方向运动的行星之间的相互摄动, 只会导致轨道的偏心率和倾角做围绕零点附近的振动, 而它们离开太阳的距离则在其初始值附近振动. 换言之, 开普勒椭圆轨道的长轴没有长期摄动.

拉普拉斯并没有在严格的意义上证明他的 "定理", 因为他把摄动展成级数, 只证明了在级数的头几项中没有长期项.

此后对级数所有各项都证明了没有长期项和混合项. 但是没有长期项这一事实并不能推出开普勒椭圆轨道的长轴的长度会永久停留在它的初始值的附近, 因为这些级数本身是发散的 (它们有些项很大). 级数的头几项在有限的时间段内给出很好的近似, 但无法判断轨道在宇宙时间跨度上的行为.

至于谈到木星与土星之间的相互摄动, 拉普拉斯在 1784

年证明了, 它们只会导致轨道偏心率的一个长周期的、但不会是长期的改变, 其周期约为 900 年. 摄动经 450 年的积累也只能使木星和土星移动不超过一度.

轨道几乎在同一平面这一点非常重要; 如果月球的轨道转过 90°, 那么在太阳摄动的影响下, 月球轨道的偏心率就会开始如此快速增大, 以致月球在 4 年之内就会掉到地球上 (29).

§21. 月球会掉到地球上来吗?

月球的运动多年来一直是一个非常复杂的问题, 因为月球离我们很近, 极微小的位移量都能观测到, 因而在展开式中必须考虑高阶小量的项. 哈雷在 1693 年在将阿拉伯人和古代有关日食的观测资料与现代的观测结果相比较时就已经注意到, 月球旋转的周期, 因而也就是它的轨道, 似乎在减小 ("长期加速" 达每世纪 10″).

1770 年巴黎科学院悬赏研究, 引力理论是否能解释这个现象, 月球轨道的减小是否会导致月球掉到地球上. 欧拉在应征的论文中认为 "已无可置疑地明白可靠地证明了, 月球运动的长期摄动不等式不可能是由引力引起的". 他用介质的阻力来解释月球的加速, 这阻力将最终导致灾难性的后果①.

①欧拉的理论看来不能用于月球, 但能用于火卫 (Phobos), 火星的卫星, 它受到大气的制动而被加速. 它将在一亿年内掉到火星上去, 但是更可能发生的结果是, 在这之前它就被起潮力撕得粉碎而变成了一个环.

但是 1787 年拉普拉斯找到了这个解释: 地球在行星摄动的影响下其轨道的偏心率会有长周期的振动. 这种小振动的周期数量级为几万年, 所以看起来好像是长期的.

地球轨道偏心率的振动是导致冰河时期来到的主要因素之一 (由于这种振动, 列宁格勒[①] 夏季的有效纬度在几万年之内会在泰米尔 (Taimir) 半岛的纬度与基辅的纬度之间振动 —— 米兰柯维奇 (Миланкович), 1939).

至于谈到月球, 拉普拉斯的解释只说对了一半: 在考虑了地球轨道偏心率的改变之后, 月球表观的长期加速还有一部分 (每世纪 5″) 看来是由于潮汐作用引起的摩擦力产生的 (根据某种估计, 白令海差不多给出了这一效应的一半). 在潮汐引起的摩擦力的影响下月球总是远离地球, 而地球的转动则变慢. 在以数十亿年计的时间内白日的时间将延长一倍 (由于大气层与海洋在角动量上的重新分配而引起的白日延长的季节性的振动比由潮汐引起的摩擦力所导致白日的年延长大 100 倍). 是地球转动的减慢导致了月球的表观加速 (30).

§22. 三体问题

两个点在相互的万有引力作用下的运动问题已为牛顿所解决, 可是对至少有三个相互吸引的质点在一般的初始条件下的运动问题 (即三体问题, 它在《原理》一书中就已经提出来了) 的精确的解析解不仅没有求得, 而且在某种意义上不

[①]现改回原名圣彼得堡. —— 译者注

可能求得 (31).

虽然如此, 欧拉还是求得了几个特殊情况下的解, 在其中所有三个物体的相对位置保持恒定 —— 在所有时间内各物体或者位于一等边三角形的顶点 (拉格朗日 (33)), 或者位于一条直线上.

这种解原先似乎纯粹是数学玩意儿, 直到 (在 1906 年和以后) 在木星的轨道上发现了 "希腊星组" 和 "特洛伊星组"—— 两组小行星群, 它们和太阳与木星一起共同组成两个等边三角形 (特洛伊组的运动落后于木星, 而希腊组则超前于它; 图 23), 这才改变这个看法.

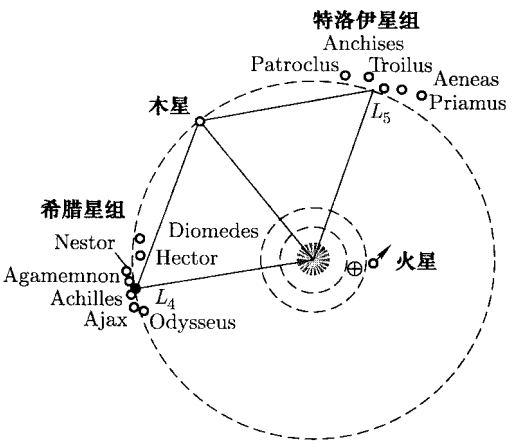


图 23 "希腊星组 (Greeks)" 和 "特洛伊星组 (Trojans)"

对应于三角形的那个三体问题的解是稳定的, 至少在线性近似中是这样, 而三体都在一根直线上的解显然是不稳定的, 所以直到最近之前都被认为实际上是无用的.

然而, 在航天时代情况就发生了变化. 位于地球与太阳之

间, 对应于欧拉解的 "天平动点" 处的空间站就是位于观测太阳的最佳位置. 这个位置是不稳定的, 像一个处于 "脚朝天" 的摆. 空间站离开天平点小小的随机偏离就会随时间增大. 但是由于天平点对应于精确解, 小扰动随时间增大的速率也小. 于是用于不断修正轨道以迫使空间站时时都紧靠天平动点所耗费的能量也就小 (认可的偏离越小, 它也就越小). 要恰到好处地选择修正, 就要考虑其他天体的摄动的影响, 但不会改变最终的结论 (34).

这样一来, 18 世纪所发现的精确解现在用到了空间航行的实际中来了.

§23. 提丢斯 – 波德定律和小行星

在牛顿的时代太阳系终止于土星. 天王星是赫谢尔 (Herschel) 于 1781 年 3 月 13 日偶然发现的 ("他没有传统的包袱, 这种传统在专家学者的培养中处处限制他们的职责的范围和许可研究活动领域, 所以他能选择别人没踩过的路" —— 潘那科克 (Pannekoek), 《天文学史》).

海王星是于 1846 年 11 月 "在笔尖上" 发现的 (在由亚当斯 (Adams) 和勒威耶 (Le Verrier) 计算天王星的摄动时所预言的位置上), 它的发现是万有引力定律的一个新胜利.

其实, 预言的轨道与真实轨道还是有很大的不同 (真实轨道离太阳的平均距离为 30 个天文单位, 而预言的轨道为 38, 而且真实的偏心率也大大小于预言的偏心率).

有些研究者认为, 在所预言的地方发现了海王星是一个幸运的意外: 当时所观测到的天王星的摄动只有在亚当斯和勒威耶采用的轨道半径遵守 "波德定律" (由提丢斯所发现) 这个错误设定的基础上才能得到所预言的海王星的位置.

提丢斯 (Titius) 的经验定律, 由波德 (Bode) 于 1772 年公布, 给出各轨道的大小如下: 4 (水星), $4+3$ (金星), $4+3\times 2$ (地球), $4+3\times 4$ (火星), $4+3\times 8(?)$, $4+3\times 16$ (木星), $4+3\times 32$ (土星), $4+3\times 64$ (天王星). 因为在火星与木星之间没有任何已知的行星, 数 28 就得扬弃. 人们就开始找寻这颗缺失的行星.

在 1801 年 1 月 1 日发现了小行星谷神星 (Ceres) (其直径约为 1000 km)[①]之后, 紧接着又发现了智神星 (Pallas) (600 km)、维斯太星 (Vesta) 和朱诺星 (Juno). 所有这些小行星的轨道都是在火星与木星的轨道之间发现的. 如今天文学家定期跟踪 2500 多个类似这样的天体的运动, 现在这种天体叫做小行星, 它们的直径在几百公里到几百米之间. 尺度大

[①]由于谷神星的轨道是一条偏心率很大的扁长椭圆, 只能在很短的时间里观察到, 所以观测到的数据很少. 如何再次找到它就成了那时天文学家十分关心的一个问题. 当时还是一个青年的高斯 (Gauss) 运用他自己所创始的最小二乘法, 在不多的几组观测数据上算出了谷神星的轨道, 后来果真在他所指示的位置上重新找到了谷神星, 高斯由此声名鹊起, 这件工作也就成了他一生中最负盛名的成就之一. (读者可参阅 F. 克莱因. 数学在 19 世纪的发展. 第一卷. 齐民友, 译. 北京: 高等教育出版社, 2010, 第一章.) —— 译者注

小在 d 以上的小行星的数目看来与 d 的平方成反比. 据推测, 直径超过 1 公里的小行星的个数至少有 100 万.

某些小行星的轨道穿过靠近地球轨道的地方. 另一些小行星在运行中靠近木星或火星时产生偏离, 它们的轨道会发生很大的改变, 也可能靠近地球.

根据现代的数据, 地球与直径超过半公里的小行星发生碰撞的时间间隔其数量级为几十万年 (35).

由这种碰撞所产生的坑洞其大小的数量级达几十公里 (在卡卢伽 (Калуга) 就有一个这样的大坑), 有时达几百公里 (在西伯利亚北部珀匹芥河出口处附近). 特别大的小行星可能击穿地壳 (惠珀儿 (Whipple) 提出冰岛就是这样形成的).

与直径达 20 公里的小行星爱罗斯发生碰撞 (对撞的速度为 14 公里/秒) 的概率, 根据现代的估计, 在 4 亿年中将接近 1/5, 碰撞产生的大坑的直径达 250 公里.

与大的小行星发生碰撞的后果和核战争的后果相似: 大气层实际上减小不了小行星的速度, 它的动能在与地球碰撞的瞬间就释放出来.

特别强大的碰撞可能会有生态环境的影响, 导致在个别大陆, 甚至整个行星上物种的灭绝. 这样看来, 与小行星的碰撞的后果也不过和人类活动的后果相当, 并没有毁灭整个地

球的危险.①

§24. 间隙与共振

大多数小行星围绕太阳旋转的周期都包含在火星与木星的周期之间的区间内, 但在其中的分布极不规则. 1886 年柯克伍德 (Kirkwood) 发现了 "间隙" (图 24)—— 在周期轴上存在没有小行星周期的区间. 间隙对应于共振 (周期的公度性): 有一个间隙接近木星周期的一半, 另一个接近其 2/3, 还有对应于共振 2/5, 3/5 等的间隙, 共振的阶数越高, 间隙就越小.②

在土星的环中有类似于间隙的缝隙. 环 A 与环 B 之间最大的缝隙是凯西尼 (Cassini) 于 17 世纪发现的. 在由旅行者 2 号 (36) 所拍摄的土星 B 环的照片 (图 25) 中其精细结构清晰可见: 宽为 30000 公里的环由一系列的薄环组成, 这些薄环

①在 1994 年有一颗直径约 20 公里的小行星以每秒 60 公里的速度与木星碰撞, 所释放的能量据估计相当于 500 亿颗丢在广岛的原子弹. 大约在 6500 万年前一颗直径约 10 — 15 公里的天外来客砸在墨西哥地区, 释放出了相当于 10 亿颗广岛原子弹的能量, 据信这就是恐龙灭绝的原因. 根据最新的研究, 1950DA 小行星将在约 800 年之后 (准确地说, 在 2880 年的 3 月) 将以每秒 17.2 公里的速度撞入太平洋, 产生 120 米高的海啸. 不过我们相信, 800 年后人类也许有办法, 只要稍稍改变该颗行星的轨道, 就可避免地球遭此劫难. —— 译者注

②这里给出的数据可能有误, 根据图 24, 这三个数字似依次应为 1/3, 2/5, 3/7. —— 译者注

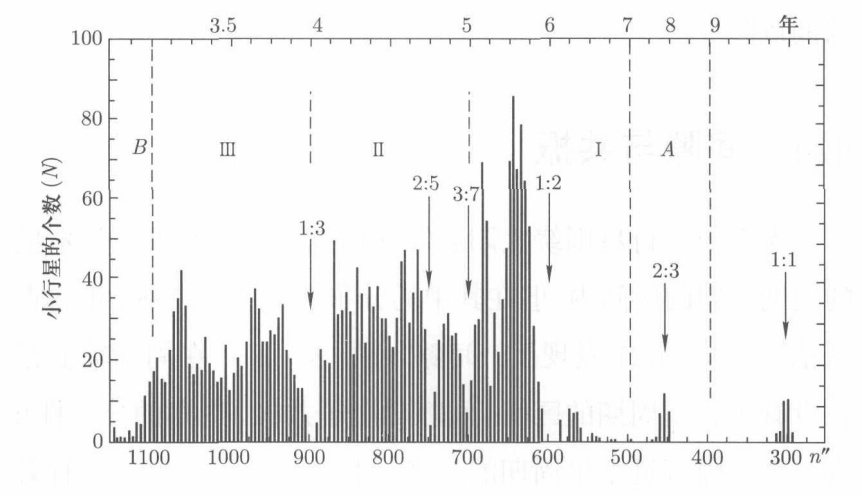


图 24　柯克伍德间隙

由宽缝隔开, 每一条细环又由更窄的缝隔成更细的环, 这样下来, 最终把环分隔成其宽度看来与其厚度差不多, 其数量级为 1 公里.

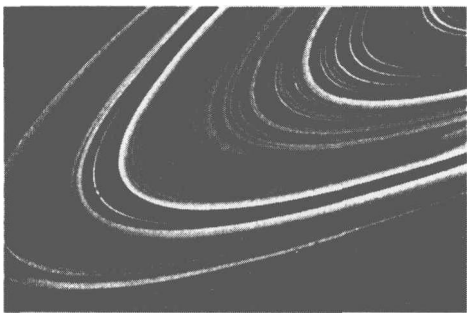


图 25　土星 B 环 (约有 6000 公里, 即约为 B 环宽度的四分之一的部分)

土星环中的缝隙相当于对它的卫星的共振. 几年前在从飞机上观测被天王星所遮蔽的星体时无意中发现了它的环. 对它们的共振结构的研究使得苏联天文学家哥利卡维 (N. N.

Gor'kavyi) 和弗里德曼 (A. M. Fridman) 预言了天王星[①]的一整系列的卫星. 六个月后, 当旅行者 2 号于 1986 年 1 月 24 日飞近天王星时, 在预测的位置上发现了全部这些卫星 —— 牛顿引力理论的又一个胜利.

在欧拉、拉格朗日和拉普拉斯的手中, 牛顿的数学方法得到了巨大的发展, 在勒威耶时代之前就已经得到了理论与观测的出色的一致. 但就其概念而言, 所有这些复杂的计算仍然只是牛顿所创始的摄动理论的翻版而已.

从惠更斯和牛顿的光辉发现到黎曼 (Riemann) 和庞加莱 (Poincaré) 的数学几何化的这 200 年的时间段内, 似乎是数

[①]美国天文学家洛厄尔 (Lowell) 个人出资建造了一座天文台, 重新观测了天王星, 发现海王星的存在并不足以完全解释天王星运动轨道的偏差, 他进而大胆地假设还有一颗比海王星更远的行星存在. 但是由于影响太小, 在观测的误差范围之内, 这时单纯用摄动论那一套方法来找新行星就很困难了. 这时就要采用类似于李特尔伍德 (Littlewood) 的方法, 先假设轨道的参数, 计算它的位置, 然后对准这一区域观测拍照, 过几天再在同一区域观测拍照. 比较所观测到的天体的位置, 因为恒星是不会改变位置的, 如果发现位置有变化, 则这个天体就很可能是一颗行星, 再排除是小行星和彗星的可能, 就可认为它就是要找寻的行星. 从 1894 年起到他 1916 年离世洛厄尔一直在做这样的工作. 在他去世后, 洛厄尔天文台继续他未竟的事业, 终于在 1930 年的 3 月 13 日由天文学家汤博 (C. Tombaugh) 宣布发现了这颗期待已久的新的行星, 并取名为冥王星. 冥王星是在理论计算与实际观测相结合的基础上发现的, 实际观测持续了 36 年之久, 所以李特尔伍德说 "这完全是侥幸". 但是, 我们都知道, 幸运只光顾那些勤于思考, 坚持信念, 忘我工作的人. —— 译者注

学的一片沙漠, 充满的只是计算.

庞加莱, 这位拓扑学和动力系统现代理论的奠基人, 用新的方式提出问题. 他不是去寻求表达天体的位置随时间而改变的公式, 而是提出有关轨道的定性的行为的问题: 行星是否会互相靠近, 它们是否会掉入太阳, 或者是否会离它而去, 等等. 对这些涉及无限长的时间跨度的问题, 拉普拉斯的 "定理" 给不了答案, 因为他的级数, 庞加莱已确定了是发散的.

庞加莱 (38) 以其 "天体力学的新方法" 和 "位置分析" (拓扑学) 开创了一门新的、定性的数学, 关于它对天体力学的应用我们在这里只能简单地讲几句.

原来一个三体或多体的系统, 根据其初始条件, 其运动有时是有规则的, 有时是混沌的. 有规则的运动的一个例子就是行星沿开普勒椭圆的运动, 这个椭圆在无限的时间过程中, 慢慢地稍稍改变其偏心率, 并在摄动的作用下慢慢转动, 总是保持在一平面内, 而这一平面则围绕着一不变的位置稍稍地摆动, 正如拉普拉斯的近似定理所预言的那样.

混沌运动的一个例子则是靠近柯克伍德间隙的一个小行星的运动 (J. Wisdom, A. I. Neishtadt, J. L. Tennyson, J. R. Cary, D. F. Escande (39)) —— 与木星的共振作用导致偏心率作 "随机的" —— 一会儿变大、一会儿又变小的混沌变化. 偏心率相继的 "跳变" 之间弱相关. 根据概率论的法则, 作混沌式变化的偏心率会变大, 那么小行星就可能, 譬如, 落到火星上去. 有人提出, 就是这种把小行星 "抛出" 柯克伍德间隙的机制在几亿年的时间过程中形成了这些间隙 (Wisdom (39)).

哈雷彗星的轨道变动是混沌式的 (V. V. Vyacheslavov, B. V. Chirikov (40)). 根据 Wisdom, 1989 (口头告知), 冥王星的运动也是混沌的.

导致有规则的运动与混沌运动的初始条件 (图 26) 像有理数与无理数一样交替分布 (其差别在于, 有规则的行为和混沌的行为出现的概率都是正值, 而随机地选一个数得到有理数的概率为零). 这样一来, 即使一行星或小行星的运动是有规则的, 初始状态的一个任意小的扰动就足以使它变成混沌的. 然而, 幸运的是, 这种混沌扰动发展速率极其微小, 所以在初始态的扰动充分小的情况下, 混沌要呈现出来所需的时间比太阳系存在的时间都要长 (N. N. Nekhoroshev (41)). 因而在接下来的几十亿年内, 太阳系的主要部分不大可能会有重大的变化, 而由牛顿所描绘的 "时钟机构" 仍然会很好地工作.

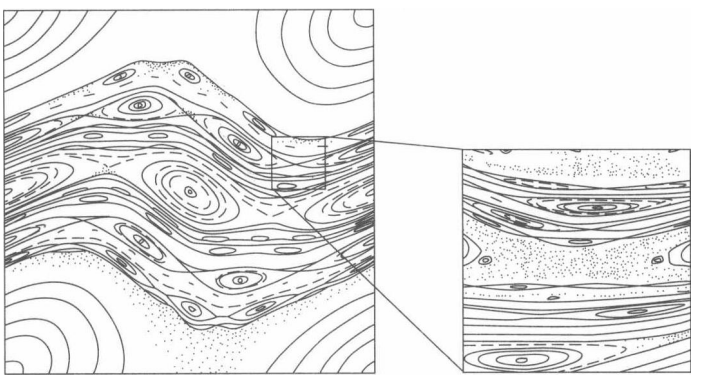


图 26 规则轨道与混沌轨道

第五章

开普勒第二定律和阿贝尔积分的拓扑学

---

§25. 关于积分的超越性的牛顿定理

在《原理》一书中有纯粹讲数学的两页, 它的内容是对阿贝尔积分的超越性这个出色的定理给出了一个惊人的现代拓扑学的证明 (42).

牛顿这个定理潜藏在天体力学的研究之中, 几乎没有引起数学家们的注意. 这可能是由于牛顿的拓扑学的论证超过他那个时代达 200 年. 牛顿的证明实质上是以对某种等价于

代数曲线的黎曼面的研究为基础的, 所以它既不能为他的同时代人所理解, 又不能为 20 世纪那些靠集合论和单实变函数论培养起来、害怕多值函数的数学家们所理解. 此外, 牛顿还讲得非常简短, 对那些在他看来是显然的、但是是在很久以后才进入到数学的日常实践中的事实也未作解释. 再者, 在证明完定理之后, 他又在最后讲了他所知道的对它的一个反例.

平面上的一条曲线, 如果满足一个方程 $P(x,y)=0$, 这里 P 为一非零多项式, 则这条曲线就叫做代数曲线. 例如, 圆 $x^2+y^2=1$ 就是一条代数曲线. 其他代数曲线的例子有椭圆、双曲线和 (非伯努利) 双纽线 $y^2=x^2-x^4$ (图 27). 正弦曲线不是代数曲线 (为什么不是?).

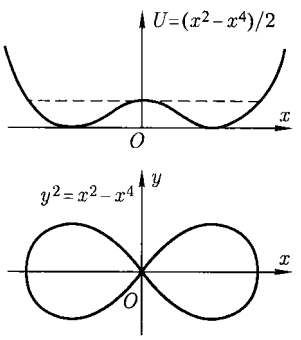


图 27 (非伯努利) 双纽线 —— 代数曲线 $y^2=x^2-x^4$—— 在两个对称势阱力场中运动粒子的相平面上的等能线

一个函数, 如果它的曲线是代数曲线, 就叫做代数函数. 例如, $y=\pm\sqrt{1-x^2}$ 就是一个双值代数函数.

我们来研究一代数卵形线 (一条封闭的凸代数曲线).

定义 一条卵形线, 如果它的任一弓形的面积可以代数地表出, 就说它是*代数可积的*.

换言之, 由直线 $ax + by = c$ 所切割出的弓形的面积 S (图 28) 应为直线的代数函数, 即, 它必须满足一代数方程 $P(S; a, b, c) = 0$, 这里 P 是一非零多项式.

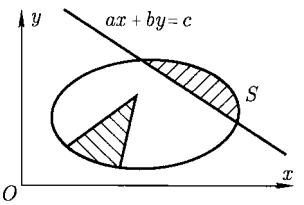


图 28 面积 S 作为 (a, b, c) 的函数是非代数的

注 如一卵形曲线代数可积, 则它的一个由顶点位于卵形曲线之内的角所切割出的扇形面积就是形成该角的两条直线的代数函数. 这是因为它与弓形面积之差是一个三角形的面积, 而三角形的面积是代数函数 (详见下面 §29). 牛顿给自己提出了去求所有代数可积卵形线的任务.

下面就是他的结果:

定理 *任一代数可积的卵形曲线必有奇点: 所有光滑的卵形曲线都是代数不可积的.*

例 椭圆是代数不可积的. 由此可推知, 确定行星在开普勒椭圆上位置随时间而变化的函数所用到的开普勒方程 (根据开普勒第二定律, 行星矢径所扫过的面积与时间成正比) 是超越的, 不能用代数函数来求解.

就是这个例子把牛顿引到了他的一般性的定理. 这个定理之所以令人惊讶, 就是因为, 乍一看来, 在代数可积性与奇点之间看不出有任何联系.

注 开普勒方程用现代的记号写出来形式为 $x-e\sin x=t$. 这个方程在数学史中起过重要的作用. 从牛顿的时代起解 x 就写成偏心率 e 的幂级数的形式来求. 这个级数在 $|\ e\ |\leqslant 0.662743\cdots$ 时收敛.

研究这个神秘常数的来源导致柯西 (Cauchy) 创始了复分析.

像贝塞尔 (Bessel) 函数、傅里叶级数、向量场拓扑指数和复变函数论中的 "辐角原理" 这样一些数学的基本概念和结果都是在研究开普勒方程时第一次出现的.

牛顿定理的证明 在卵形曲线内选一点 O 并转动从该点发出的一条射线. 如这个卵形线是代数可积的, 则由此卵形线上的一点的矢径所扫过的面积 (图 29) 必定是射线对 x 轴的倾角的正切 t 的代数函数.

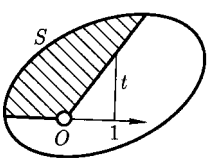


图 29

令射线绕卵形线一圈又一圈地转动. 每转一圈, 所扫过的面积就增加一个卵形线所包围的面积值. 从而扫过面积作为 t

的多值函数对射线的同一位置有无穷多个值.

可是代数函数不可能有无穷多个值, 因为非零多项式的根的个数不超过它的阶数.

由此看来, 扫过面积不是代数函数, 因而卵形线就不是代数可积的.

牛顿还指出, 这种论证还证明卵形线的弧长也不是代数的.

§26. 局部代数性和全局代数性

那么, 代数可积的卵形线就不存在了吗? 不, 牛顿就已经知道有弓形面积可以用代数式表示的卵形线, 并且在《原理》一书中讨论他的定理时提到过它们.

最简单的例子是图 30 所示的卵形线, $y^2 = x^2 - x^3$. 令 t 表示割线倾角的正切, $y = tx$. 则有 $t^2 = 1 - x$, 从而得到卵形

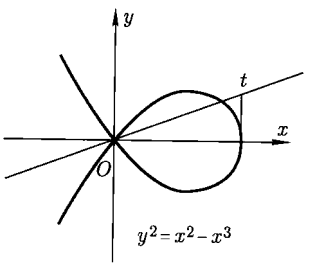


图 30 有一个奇点 (结点) 的局部代数可积卵形线

线的参数表示

$$x = 1 - t^2, \quad y = t - t^3.$$

由此表达式可见, 面积的积分 $\int ydx$ 为 t 的一个多项式. 因此由任一直线从这条卵形线割出的面积就可以代数地来计算.

尽管这样作出的卵形线不是光滑的, 牛顿的论证可以用到它上面. 它表明, 由矢径所扫过的面积总体上不能用一个单一的代数函数来表示. 实际上, 每当 $x(t), y(t)$ 经过卵形线的奇点 (结点) 时, 表示扫过面积的代数函数就跳跃式地被一个新的代数函数所代替.

上面的例子表明, 一个函数, 尽管整体上不是代数的, 但在局部上可以是代数的 (图 31). 在这个意义上我们在图 30 上的卵形线可以说是局部代数可积的.

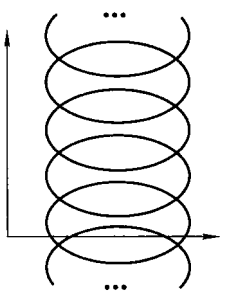


图 31 一个局部代数函数 (但不是代数函数) 的图形

就实用而言, 局部代数可积性几乎和真正的、全局代数可积性一样有用. 所以牛顿自然会提出这样的问题: 一光滑代数卵形线是否有可能是局部代数可积的? 也就是说, 由直线 $ax + by = c$ 切割出的弓形面积 S 在任一点的邻域内能否是 (a, b, c) 的代数函数?

为了 (用图 30 中方法) 作出处处有切线的局部代数可积卵形线, 只要能选到一对适当的多项式就足够了. 例如, 多项式 $x=(t^2-1)^2$, $y=t^3-t$ 给出图 32 中的卵形线, 它甚至有连续的曲率 (为什么?). 于是我们就得到了一条看起来是完全光滑的卵形线, 它局部代数可积 (牛顿在这里将全局代数可积性排除在讨论之外).

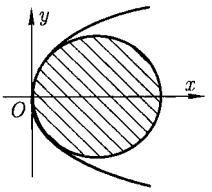


图 32 有连续变化曲率的局部代数可积卵形线

问题 作一具有一个奇点的 (局部) 代数可积卵形线, 它在奇点的一个邻域内, 是一个具有 1989 阶连续导数的函数的图形 (而在其余各点则是无穷次可微函数的图形).

§27. 关于局部非代数性的牛顿定理

这样一来, 局部代数可积卵形线可以有任意足够大的有限光滑性 (它处处都可用有任意高阶导数的函数来给出). 但是在我们所有的例子中, 卵形线上都有奇点, 其上有某阶导数间断.

牛顿认为只有那种在它们的每一点的邻域内能展成收敛[①]

[①]对不可积性的证明来说级数的收敛不是最重要的, 在级数为渐近的情况下, 证明一样有效.

幂级数

$$y = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$$

(这里坐标原点即选在所研究的点) 的曲线才是真正的光滑曲线. 这种曲线现在叫做*解析曲线*.

注 牛顿熟知不同的有限光滑度的曲线行为上的差别, 并在《原理》一书中作了讨论, 而且将所有代数函数和初等函数展成快速收敛的幂级数是他的主要成就之一.

从 §25 的定理牛顿导出了一个更加强有力的推断.

定理 *任一解析卵形线都是代数不可积的, 甚至是局部代数不可积的.*

解析卵形线的局部代数不可积性的证明 如一卵形线不是全局代数可积的, 但是是局部代数可积的, 则从某点一侧所扫过的面积由某一代数函数来表示, 而从另一侧扫过的面积则要由另一个代数函数来表示. 可是对于解析卵形线来说, 扫过面积解析地依赖于射线的方向. 所以上述两个代数函数在解析卵形线上的该点的邻域内展成同一个收敛幂级数. 这就是说, 这两个代数函数在该点邻域内是一致的. 可这样它们就应处处一致 (这可由一非恒等于零的多项式其根的个数不可能超过其阶数这一点推出). 于是有, 如果存在局部代数可积的解析卵形线, 则它一定是全局代数可积的. 而由于这是不可能的 (§25), 一解析卵形线不是代数可积的, 甚至也不是局部代数可积的.

§28. 光滑代数曲线的解析性

如果一曲线局部上是一个可以微分任意多次的函数的图像, 就说它是无限光滑的.

定理 *无限光滑的代数曲线是解析曲线.*

牛顿知道这个事实, 因为牛顿会把代数曲线的任一 "分支" 方程在它的任一点的邻域内写成快速收敛的级数

$$y = a_1 x^{1/n} + a_2 x^{2/n} + a_3 x^{3/n} + \cdots$$

(其中坐标原点置于所研究的点上).

[牛顿是这样来表述关于这个级数的收敛定理的: "这个结果对充分小的 x 展开得越远, 它就越逼近 y 的真实值, 所以它与 y 的精确值之间的差别最终可成为小于任何给定的量." (43)

这个级数是用牛顿多边形作出的, 见 §8.]

级数中具有分数指数的各项只有有限个导数. 如果级数中至少有一项这种带分数指数的项, 则由此级数所定义的曲线在所讨论的点的一个邻域内不可能是无限光滑的.

因此对一条无限光滑的代数曲线, 在它的展开式中只含具有整指数的项, 而这就意味着曲线是解析的.

推论 *所有无限光滑的代数卵形线都不是代数可积的, 甚至也不是局部代数可积的.*

这样一来, 一条无限光滑的闭凸曲线如果是代数的, 它甚

至不可能是局部代数可积的. 那么, 是否应该在非代数可积的卵形线中去找局部代数可积的曲线呢?

§29. 局部代数可积卵形线的代数性

一条光滑的非代数的卵形线不是代数可积的. 这可以从我们上面所证明结论推出, 因为还有下述定理.

定理 *任一局部代数可积的卵形线都是代数曲线.*

牛顿把它当成显然的事实来用. 看来, 他是这样来论证的:

引理 *任一直线的代数簇的包络线是代数曲线.*

换言之, 如果一曲线的切线集合满足一代数方程, 则该曲线自身就是一代数曲线.

引理的证明 考察两条相邻的切线, 它们对 x 轴的倾角的正切为 t 与 $t+h$ (图 33). 它们的交点在固定 h 而改变 t 时, 将描绘出一条代数曲线 (在图 33 中由虚线表示).

这条曲线的次数 (即给出该曲线的多项式的次数) 不超过一个与 h 无关的常数. (这一点可由以下事实推得: 两个代数方程相容性的条件可以用它们的系数构成的一个多项式等于零来表达—— 这个事实牛顿也都在《原理》一书的那两页中谈论到了, 在那里他还同时说明了, 两条次数分别为 m 与 n 的代数曲线相交不会超过 mn 个点).

在令 h 趋于零时相邻切线的交点就会趋于原曲线. 原曲线, 作为次数有界的代数曲线的极限, 也是代数曲线.

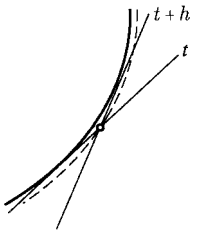


图 33 任一直线的代数簇的包络线是代数曲线

定理的证明 卵形线的切线从卵形线切割出的弓形面积为零. 因此一局部代数可积的卵形线的所有切线 $ax + by = c$ 满足代数方程 $P(0; a, b, c) = 0$ (见 §25). 根据引理卵形线就是代数曲线, 定理由此得证.

§30. 具有奇点的代数不可积曲线

这样一来, 无穷光滑的卵形线都是代数不可积的 (甚至是局部代数不可积的). 此外, 牛顿的论证还证明了, 无穷光滑、非凸且不自相交的闭曲线以及甚至许多有奇点的曲线, 都是局部代数不可积的.

所有那些其奇点都是尖点的曲线都是局部代数不可积的, 特别是, 由方程 $y^2 = x^3 - x^4$ 或 $y^2 = (1 - x^2)^3$ 给出的曲线 (图 34), 或其奇点类型为 $y = x^{p/q}$ 的曲线, 这里 q 为奇数, 等等.

牛顿注意到, 为了保证局部代数不可积性, 只要 "曲线伸到无穷远的共轭分支" 不再靠近闭曲线的点就足够了. 看来, 他指的是类似于图 30 和图 32 中的例子, 其中有这种 "共轭分支".

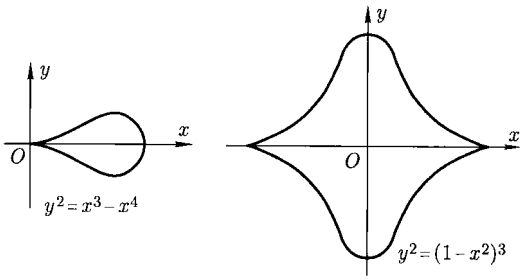


图 34 带有尖点的局部代数不可积曲线

实际上把 "伸到无穷远" 这样的话放到那里是错误的, 应该一定要求不存在任何自相交. 对一条满足方程 $P(x,y)=0$ 的闭曲线不自相交的充分条件是这样的: 多项式 P, 在其中心位于曲线上任一点的圆周上, 刚好有两个零点, 假如这个圆周的半径充分小的话 (不存在自相交的更学术性一些的条件是这样的: 卵形线是它的正规化的实连通分量之一的一个一一对应的映像).

用牛顿的方法可以证明

定理 *所有在上述意义下不自相交的代数曲线都是代数不可积的 (甚至是局部代数不可积的).*

反之, 自相交的闭曲线完全可能是局部代数可积的 (牛顿在写下 "伸到无穷远" 时, 不知道为什么忽略了这一可能性). 这种例子有 (非伯努利) 双纽线 $y^2=x^2-x^4$ (图 27): 积分

$$\int ydx=\int x\sqrt{1-x^2}dx=-(\sqrt{1-x^2})^3/3$$

是代数函数.①

不过就是对自相交的曲线, 代数可积的也不多见.

由牛顿的论证可见, 一条封闭的自相交局部代数可积曲线所包围的总面积 (把面积的符号考虑进去) 等于零. 例如, 双纽线是代数可积的, 仅仅是因为双纽线的两个圈对总面积的贡献相抵. 如果这样来改变双纽线, 使得它的两个圈的面积不相等, 它就会失去其局部代数可积性.

§31. 牛顿证明和现代数学

牛顿定理可以推广到偶数维空间的超曲面上 (瓦西里耶夫 (B. A. Васильев), 1988). 在奇数空间事情要复杂一些. 例如, 在三维空间的情况下球截形的面积代数地依赖于切割出它的平面 (阿基米德定理). 在奇数维空间中除了椭球体外, 我不知道是不是还有别的代数可积的形体, 不过, 瓦西里耶夫指出了, 如果它们也存在的话, 那也只能是一种很特殊的形状. 这个问题与奇点理论、积分几何和断层分析之间明显的联系

①这个例子是惠更斯在 1691 年给莱布尼茨的一封信中提出的. 也可参阅《艾萨克·牛顿爵士的〈原理〉中的解析观点》(H. Brougham and E. J. Routh, Analytical view of Sir Isaac Newton's *Principia*, London, 1855). 莱布尼茨在回信中提出了一个弓形面积的超越性问题, 这个弓形面积是由方程系数为代数数的直线来切割一条由其系数为有理数的方程所给出的代数曲线而得出的 (例如数 π 的超越性和代数数的对数的超越性). 莱布尼茨问题包含了希尔伯特第七问题, 而且, 看来至今仍未解决.

也许有助于解决它.

牛顿的证明是以今天称为解析延拓和单值性的概念为基础的. 它们是黎曼曲面理论和拓扑学、代数几何以及微分方程理论等一系列现代数学分支的基础, 这些分支首先是与庞加莱的名字联系在一起的, 分析在这里面与其说是与代数, 还不如说是与几何结合到了一起.

被人遗忘的 (44) 卵形线代数不可积性的牛顿证明是在数学新时代中第一个 "不可能性的证明"—— 是后来用根式求解代数方程的不可解性 (阿贝尔) 和用初等函数或积分解微分方程的不可解性 (刘维尔 (Liouville)) 等证明的原型, 牛顿将它与欧几里得的 "几何学原理" 中平方根的无理性的证明相提并论, 也就不无道理了. 我们今天将牛顿的原始文本与他的后继者的评注相比较, 就不能不为牛顿的原始的表述比那些评述者将他的几何思想译成莱布尼茨微积分的形式语言, 更现代化、更易懂和在思想上更丰富而感到惊讶了.

附录 1　轨道椭圆性的证明

证明是建立在下述两个定理的基础之上的.

考察复数平面上中心在 O 点的一个椭圆.

定理 1　在将复数平方时这种椭圆就会变成其焦点之一位于点 O 的一个椭圆.

为了证明这个定理最好用茹科夫斯基 (Жуковскйи) 椭圆, 它的构作过程如下 (图 35).

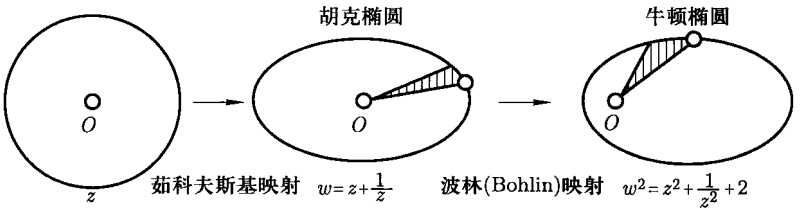


图 35　胡克和牛顿的椭圆

引理 1 当点 z 描绘一圆 $|z| = r > 1$ 时, 点 $w = z + 1/z$ 则描绘一中心位于 O 点的椭圆.

引理 1 的证明 令 $z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi$, 则 $w = a\cos\varphi + ib\sin\varphi$, 其中 $a = r + r^{-1}, b = r - r^{-1}$, 这正是我们所要求的: 茹科夫斯基椭圆的半轴分别等于 a 和 b.

引理 2 茹科夫斯基椭圆的焦点位于点 ± 2.

引理 2 的证明 $c^2 = a^2 - b^2 = 4$.

引理 3 当将复数平方时, 上述茹科夫斯基椭圆将变成了一个平移了一个量为 2 的茹科夫斯基椭圆.

引理 3 的证明 $w^2 = z^2 + 1/z^2 + 2$.

定理 1 的证明 茹科夫斯基椭圆的平方以原点 O 作为其焦点之一, 这是因为在平移 2 下焦点 -2 将移到 O 点. 而任一中心在 O 点的椭圆均可由一适当的茹科夫斯基椭圆通过伸缩和转动得到. 因此它的平方会有一个焦点在 O 点.

推论 1 任一有一焦点在 O 点的椭圆都是一个 (唯一的) 中心在 O 点的椭圆的平方.

推论 1 的证明 在茹科夫斯基椭圆中有半轴比为任意值的椭圆.

证明在引力场中的轨道为椭圆的要点 —— 将在引力场中的运动归结为遵循胡克定律的运动再加以平方 —— 包含在下述波林定理中 (45).

定理 2　设复平面上的点 w 按照胡克定律 $\ddot{w} = -w$ 运动. 我们将 w 平方并在点 $Z = w^2$ 的轨道引进这样一个新的时间 τ, 使得面积定理仍然成立. 则 $Z(\tau)$ 满足引力定律下的运动方程

$$\frac{d^2Z}{d\tau^2} = -\frac{cZ}{|Z|^3}.$$

定理 2 的证明　由面积定律有 $\dfrac{|w|^2 d\varphi}{dt} = \text{const}$, $\dfrac{2|Z|^2 d\varphi}{d\tau} = \text{const}$. 我们选 $\dfrac{d\tau}{dt} = \dfrac{|Z|^2}{|w|^2}$, 则 $\dfrac{d}{d\tau} = \dfrac{w^{-1}\bar{w}^{-1}d}{dt}$, 因而有

$$\begin{aligned}\frac{d^2Z}{d\tau^2} &= \frac{1}{w\bar{w}}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{w\bar{w}}\frac{dw^2}{dt}\right) = \frac{2}{w\bar{w}}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\bar{w}}\frac{dw}{dt}\right)\\ &= -\frac{2}{w\bar{w}}\left(\frac{1}{\bar{w}^2}\frac{dw}{dt}\frac{d\bar{w}}{dt} + \frac{w}{\bar{w}}\right)\\ &= -2w^{-1}\bar{w}^{-3}(|\dot{w}|^2 + |w|^2) = -4Ew^{-1}\bar{w}^{-3}\end{aligned}$$

(根据能量守恒定律, 沿轨道有 $|\dot{w}|^2 + |w|^2 = 2E$). 定理由此得证; $c = 4E$.

在遵守通常的引力定律的有心力场中, 总能量为负的运动轨道的椭圆形可由定理 1 和 2 及推论 1 推出. 的确如此, 定理 2 表明胡克椭圆的平方是在引力场中运动的轨道, 而定理 1 表明这个平方本身又是焦点在引力中心的椭圆, 最后, 由推论 1 可见, 这些合适的胡克椭圆的平方可给出引力定律方程在事先给定的任意的、在初始时刻总能量为负的初始条件下的解. 因为由此而得到的解光滑地依赖于初始条件, 不会有其他满足相同初始条件的解.

注 如果将结果稍加推广, 那么在波林定理的证明中那有点儿神秘的计算可能就会变得更好理解一些.

定理 3 *复平面上的点 w 在一有心力场中运动, 在力与到中心的距离的 a 次幂成正比时的轨道, 在变换 $Z = w^{\alpha}$ 下, 将变成在力与到中心距离的 A 次幂成正比的中心力场中运动的轨迹, 这里 A 由下式确定:*

$$(a+3)(A+3) = 4, \quad \alpha = \frac{a+3}{2}.$$

这样一来, 对每一种引力的幂次定律都有一唯一的、与之对偶的定律 (图 36). 例如, 对胡克定律 ($a = 1$), 引力定律 ($A = -2$) 与之对偶, 反之亦然. 联系对偶定律的公式可以从牛顿给出的一个关于几乎是圆周的轨道的近心点间的夹角的

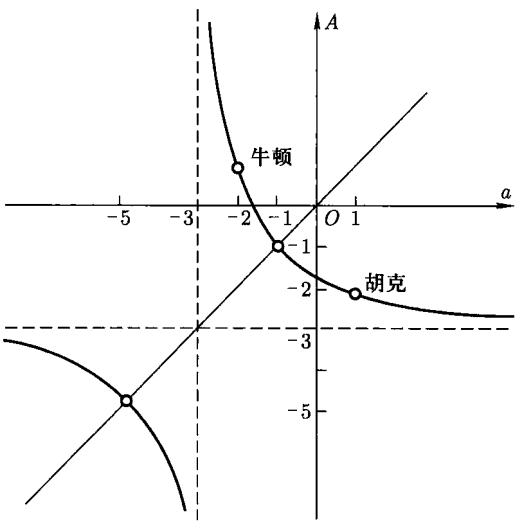


图 36 引力的对偶定律

表达式导出 (46). 自对偶定律对应于 $a=-1$ 和 $a=-5$. 这两个情况在《原理》一书中也特别地提出来了.

定理 3 的证明　重复定理 2 中的计算即可:

$$\frac{d^2w}{dt^2}=-w|w|^{a-1},\quad \frac{d\tau}{dt}=|w|^{a+1},$$
$$\frac{d^2Z}{d\tau^2}=-CZ|Z|^{A-1},\quad C=2E\alpha(\alpha-1),$$
$$2E=|\dot{w}|^2+\frac{2|w|^{a+1}}{a+1}.$$

推论 2　*在力与到中心距离的五次方成反比的有心力场中, 运动轨迹在合适的反演下将被转动.*

牛顿在《原理》中就已经研究了在力与到中心距离的五次方成反比的力场中的运动: 他证明了在轨道中有通过引力中心的圆周轨道 (47).

推论 3　*在通常的引力场中运动的全部轨道在取平方根之后均变为复平面中在线性有心力场 $Z''=-CZ$ 中运动的轨道.*

定理 4　*在通常的引力场中运动的所有轨道都是有一个焦点在引力中心的圆锥曲线.*

定理 4 的证明　推论 3 可从定理 3 中令 $a=-2,\alpha=1/2$ 来得到. 所以 E 和 $C=2E\alpha(\alpha-1)$ 的符号相反. 在线性力场中运动的轨道在 $C>0$ 时为中心对称的椭圆, 在 $C<0$ 时为双曲线, 而在 $C=0$ 时为直线. 平方椭圆就得到开普勒椭圆 (根据定理 1).

中心在原点 O 处的双曲线平方后就变成焦点在 O 处的半支双曲线. 为了证实这一点只要考察茹科夫斯基双曲线即可: 当 z 描述一条穿过原点 O 的直线时, $w=z+1/z$ 就会画出一条这样的双曲线. 茹科夫斯基双曲线与茹科夫斯基椭圆共焦. 当将 w 平方时, -2 处的焦点就挪到了坐标原点 (和椭圆时的情况一样).

此外, 第二分支消失了, 因为 z^2 已经不是在直线上, 而只是在射线上变动了.

情形 $C=0$ 可通过极限过程得到. 其实它比已研究过的情形更简单些: 直线 $\{t+i\}$ 在平方后变成双曲线 $\{t^2-1+2it\}$. 它的焦点在原点 O, 准线为直线 $\{is-2\}$. 这是因为

$$(t^2-1)^2+4t^2=(t^2+1)^2.$$

定理 5 *在力与到中心的距离的 a 次方成正比的任意力场中运动时, 某些轨道是直线在下述变换下的像:*

$$w=Z^\beta,\quad \beta=\frac{1}{\alpha}=\frac{2}{a+3}.$$

例 在万有引力定律的场中, $\beta=2$, 这种轨道就是抛物线. 在力与到中心的距离的五次方成反比的场中, $\beta=-1$, 它们就是过力心的圆周.

证明 如在定理 3 的证明的计算中令 $E=0$, 则 $\dfrac{d^2Z}{d\tau^2}=0$, 即 Z 的轨道是直线.

[以下附注为英译本的补充.]

附注　设 $w(z)$ 为一任意共形映射, 则它会把在势为 $U(z) = |dw/dz|^2$ 的力场中运动的轨迹转换成在对偶势 $V(w) = -|dz/dw|^2$ 的力场中运动的轨迹.

定理 3 的对偶定理对应于 $w = z^\alpha$.

证明　对偶关系将莫佩蒂 (Maupertuis) – 雅可比 (Jacobi) 度量中的 E 与 U 对换:

$$\sqrt{2(E-U(z))}|dz| = \sqrt{E}\sqrt{2(E'-V(w))}|dw|, \quad EE' = -1.$$

定理 3 的对偶定理也适用于量子力学 (论量子力学中的保形变换 (R. Faure, Sur les transformations conformes en mécanique ondulatoire, Comptes rendus Ac. des Sci. Paris, 1953)). 量子对偶定理可从二次形式一个显然的恒等式

$$\int (\nabla_z \Psi)^2 + (a+bU(z))\Psi^2 d^2z = \int (\nabla_w \Psi)^2 + (b-aV(w))\Psi^2 d^2w$$

推出.

自然, 不一定非得用欧氏度量 $|dz|$, 对任意的黎曼动能度量, 甚至对芬斯勒 (Finsler) 度量, 类似的结果也成立.

例　一些最简单的保形映射生成如下的对偶势函数对:

映射	U	V
$w = 1/z$	$\pm\|z\|^{-4}$	$\mp\|w\|^{-4}$
$w = e^z$	$\pm e^{2\mathrm{Re}z}$	$\mp\|w\|^{-2}$
$w = \sin z$	$\pm\|\cos^2 z\|$	$\mp 1/\|\sqrt{1\mp w^2}\|$
$w = \tan z$	$\pm\|\sec^2 z\|$	$\mp 1/\|1\pm w^2\|$

因此对应于 $a = -5$ 这一牛顿情形的变换就是默比乌斯 (Möbius) 变换, 它是在高维空间中唯一的共形变换. 我们还看到, 在 $a = -3$ 时的情形中, 其对偶的 $A = \infty$, 相当于 "$z^0 \sim \ln z$" 和 "$r^{-\infty} \sim e^{2x}$", 其中 $\sim$ 表示通常意义下的 "正比于".

附录 2　牛顿的《原理》中的引理 XXVIII

"不存在这样的卵形曲线, 它由任一直线所切割出的面积都能普遍地用项数和次数均为任意有限值的方程来求得.

设给出在卵形线内的任一点, 一直线以它作为极点, 绕着它不断地作匀速的转动, 同时在该直线上有一可动点沿离开极点的方向而动, 不断向前运动的速度与直线在卵形线内的那一段长度的平方成正比. 该点在此运动中将描绘出一条转了无限多圈的螺旋线. 如果由上述直线切割出的那部分的卵形面积能够由一有限方程求出, 那么, 从该点到极点的距离, 它与该面积成正比, 就可由同一方程求出, 于是, 螺旋线上的所有点也就可用一有限方程求得; 这样一来, 一个在给定位置的直线与螺旋线的交点也同样可由有限方程求得. 但是, 每

一无限制地延伸的直线与螺旋线相交于无限多个点; 而用以求得两曲线任一交点的方程, 同时以其根的个数来提供出它们交点的个数, 因而其阶次升至与交点的个数相等. 因为两圆相互交于两点, 其中一个交点只能用一个二阶方程求得, 而用它也可以求得另一个交点. 又因为两个圆锥曲线可能有四个交点, 一般地说, 其中任一个只能用一个四阶的方程求出, 用这个方程就把它们一起都求出来了. 因为如果这些交点是分几次一个又一个地求得的, 由于所有的规律和条件都一样, 每一个交点的计算就会一样, 因而结果也会总是一样的方程, 那么立即把所有那些交点都包含在自身之内, 并且毫无区别地把它们全表示出来. 因此我们有, 圆锥曲线与一条三阶曲线的交点, 因为它们总共可能有六个, 可用一个六阶的方程一起算出; 而两条三阶曲线的交点, 因为它们总共可能有九个, 可用一个九阶的方程一起算出. 如果情况不是必然这样, 我们就可以将所有的立体的问题简化为平面的问题, 而维数比立体更高的那些问题就简化为立体的问题 (48). 但是我在这里所讲的曲线是指其幂次不可约的曲线. 因为如果定义曲线的方程可约化到更低的幂次, 则曲线就不会是一条单一的曲线, 而会是由两条或更多条曲线组成, 它们的交点就可能要分几次用不同的计算得出. 这样一来直线与圆锥曲线的两个交点总是要用二阶的方程算出; 直线与不可约的三次曲线的三个交点要用三阶方程算出; 直线与不可约四次曲线的四个交点要用四阶方程算出, 就这样一直可推广至无穷. 至于谈到直线与螺

旋线的无数个交点, 由于螺旋线是一条简单曲线, 已不能再约化为多条曲线, 要求方程的阶数和根的个数都为无限, 以便将这些交点一起表示出来. 因为所有的定律和计算都是一样的. 这是因为如果我们从极点向相交直线作一垂线, 且该垂线随相交直线一道绕极点旋转, 那么, 螺旋线上的交点会 [随旋转] 依次一个变成下一个; 在转过第一圈后, 第一个或最近的一个会变成第二个; 在第二圈之后, 变成第三个; 依此类推; 在此旋转过程中方程不会变, 但确定相交直线位置的那些量会改变. 由于那些量在每转过一圈之后会变回到它们的初始值, 方程将变回到开始的形式①; 从而一个同样的方程就可表示出所有的交点, 因而也就有无穷多个根, 以便能把所有这些交点都表示出来. 这样一来, 直线与螺旋线的交点不能一般地用任何有限方程求出; 从而由直线任意切割一卵形所得的面积也不能用这种方程一般地表出.

根据相同的论据, 如果螺旋线的极点与画出螺旋线的动点之间的距离取为与卵形线上被扫过的周长成正比, 就可证明周长也不能用任何一个有限方程来一般地表出. 但我在这里说的卵形线是指那种不与其伸展到无穷远的共轭图形相切的卵形线.

推论　因此椭圆上由从焦点到运动物体的矢径所扫过的面积不能用一个有限的 [代数] 方程给出的时间来算出, 因

①这里讲的方程是指直线的方程, 而前面讲不会改变的方程是指螺旋线的方程. —— 译者注

而也就不能由几何上有理的 [代数] 曲线 [与椭圆之交] 的描绘来确定. 所谓几何上有理的 [代数] 曲线, 我是指那样一些曲线, 它们的点可以用由 [代数] 方程所定义的长度来确定; 即用复杂的 [和复合的] 长度比. 其他一些曲线 (如螺旋线、割圆曲线和摆线), 我把它们称为几何上无理的 (超越的). [类似于] 当长度 [之间的关系] 是整数比整数时就是算术上有理的, 不是时, 就是算术上无理的 (按《几何原本》第十卷的说法). 因此我以下述方式, 借助于时间按一条几何上无理的曲线变化的方法, 来将一椭圆的面积按与时间成正比的方式进行切割 ……"①

关于不存在伸向无穷远的分支的这一短语, 牛顿只在 1713 年的第二版才加进去. 看来牛顿还不知道莱布尼茨和惠更斯在批判《原理》的 1687 年的文本时所作的评论.

惠更斯在 1691 年给莱布尼茨的信中写道: "我认为不能把这个命题归之于牛顿, 因为他从未用过他所称的卵形线的其他性质, 只用到了它是一条在旋转了一圈后会闭合的闭曲线, 甚至没有把正方形和三角形排除在外" (49).

莱布尼茨在 1691 年 4 月 10/20 日给惠更斯的信中这样写道: "牛顿在坚守卵形线的不可积性时可能这样来回答说, 这

①以上根据英译本所摘牛顿原著译出. 由于在牛顿时代一些用语和现在不同, 所以有些地方不易看懂, 原书在这一段的俄译中, 为了便于今人的阅读理解, 稍作了变动. 我们也将其一并译出, 放在方括号 [ ] 中, 以示区别. 以下所引用惠更斯与莱布尼茨间的通信同此. —— 译者注

种 [由两条抛物线的弧所组成的] 卵形线不是真正的卵形线, 并不是由描绘它的一条曲线组成, 看来这正是他的论证所要求的, 因为将两条抛物线之一延伸并不会变成另一条抛物线. 但是你的倒 8 字形的曲线是真正可描绘的, 而且可以用上他的论证, 尽管它不完全像一条卵形线, 因而根据他的论证, 它就不可能以一般的形式来求积 [有代数的弓形面积]. 为了弄清在他的论证中的毛病最好还是来研究他的论证. 对于圆和椭圆, 它们的一般可积性之不可能已经得到了充分的证明, 但是我还没有看到有关整个圆或它的任一确定部分的不可积性的任何证明" (49).

惠更斯在前一信中就已讨论了倒 8 字形的曲线, 即 (非伯努利) 双纽线 $y^2 = x^2 - x^4$. 这样看来, 在牛顿的书的初版和修订本两个版本中的错误, 早在牛顿修改的多年前惠更斯就已经提出来了.

关于曲线的不可约性的短语也只是在第二版才加入的.[①] 不能理解的是, 为什么牛顿又要求与三次曲线的相交为与三条直线相交, 四次的则与四条, 等等. 在引进上述不可约的概念之前这一点可以作另一种解释: 直线与三次曲线的相交, 和与三条直线相交一样, 其交点可用三阶方程来求, 与四次曲线的相交, 和与四条直线相交一样, 其交点可用四阶方程来求, 等等.

在这种情况下这一点可以看成是贝祖 (Bézout) 定理非常

[①] 从这里开始到下一段结束, 英译本中缺失, 看来不像是原作者有意删去的. —— 译者注

简单的拓扑学证明的纲要: 在计数两曲线的交点时, 可以将曲线用若干条直线来代替, 直线的条数等于曲线的次数 (由于对处于一般位置的给定阶次的曲线相交复点的个数与曲线的特定的选择无关, 把它看成是接近完全分解为直线的曲线就足够了; 对于算交点的个数来说, 就可把它看成是完全分界了的曲线, 即交点个数等于阶数的乘积).

关于贝祖定理的证明, 牛顿引用的无非是将三次无理性约化到二次无理性, 如此等等 —— 也可以这样说, 他引用的是预解式问题或代数函数的希尔伯特第十三问题的不可解性 (和贝祖定理不同的是, 这些结论在一般情况下至今仍未得到证明). 此外, 牛顿需要部分贝祖定理也是显然的.

不能理解的是, 牛顿为什么要对动直线作垂线: 对证明来讲, 只限于通过中心点的直线就足够了, 从它就可以开始读数. 看来牛顿是为了想把面积看成直线的函数, 对所有的直线有定义 (尽管有意见认为, 他避免用多个变量的函数, 在这里他立即就以拉东 (Radon) 变换的精神引进了积分几何, 或断层分析, 一个在由直线构成的流形上的函数).

在超越函数与超越数之间的联系, 莱布尼茨在上述给惠更斯的信中从侧面提到过, 比乍一看要深奥得多 (见希尔伯特第七问题). 在现代, 莱布尼茨猜测这样来解读: 沿一条系数为有理数 (代数数) 的代数曲线的阿贝尔积分, 积分的上下限为有理数 (代数数) 时, 一般地说是一超越数. 和希尔伯特猜测不同, 希尔伯特猜测已被盖尔丰德 (Gelfond) 证明了, 而这个莱布尼茨的猜测似乎至今仍未得到证明.

附录 3　关于准晶体对称性的注记*

B. И. 阿诺尔德

“…… 我希望, 您能从阿诺尔德 ……
那里获得更多的信息 ……”
——《塞尔 (Serre) 给格雷 (Gray) 教授的回信》
编者 [B. И. 阿诺尔德] 注: 二十面体群不是晶体群 (例

*本文原载: Physica D — Nonlinear Phenomena, 1988, 后被作为附录收入克莱因的《二十面体与五次方程求解讲义 (Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom Fünften Grade)》一书俄译本 (Москва, Наука, 1989, 291–300). 这里就是按这篇俄文文本翻译的. —— 译者注

如, 见考克斯特 (H. S. M. Coxeter), 莫泽 (W. O. J. Moser), 《离散群的生成元和决定关系》, 俄译本, 科学 (Наука) 出版社, 1980). 但是在 1984 年晶体学实验家成功地获得了一种人造合金, 具有准晶体结构和二十面体对称性 ([9], [10]). 这引起了一时的轰动, 注定会引起在以准晶体对称为基础进行研究和阐述的兴趣的热潮. (例如, 著名的物理学家和数学家彭罗斯 (R. Penrose) 取得了若干紧致壁纸样品的专利.)

下述由 В. И. 阿诺尔德发表在《非线性现象 (Physica D — Nonlinear Phenomena)》(1988) 中的论文讲述了准晶体对称在数学中的另一层意义.

除了在实验晶体学中会遇到准晶对称性外, 在一些与其他完全不同的物理问题有关的数学理论中 —— 在几何光学光线系统的奇点理论中, 在动力系统遍历理论中的辛那依 (Синай) 马尔科夫分割的构造中, 在平面迭代映射的数字实验中, 在哈密顿准周期函数等值线拓扑学的统计研究中 —— 也都会遇到. 我将在本文中阐述在那些第一眼看去相距甚远的领域之间的若干联系.

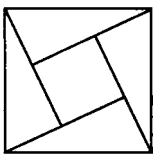
§1. 彭罗斯分割与彭罗斯覆盖

我们来研究环面 $T^n = R^n/\mathbf{Z}^n$ 和在 R^n 中不含异于 0 的整点的 "无理" 子空间 R^k.

定义 所谓彭罗斯分割是指, 以平行于给定的无理的子空

间为基础将环面分割成有限个棱柱体 (看来彭罗斯并没有研究过这种分割).

例　环面 T^2 分成 3 个直角三角形的彭罗斯分割如下图所示.



注　这种分成直角三角形的分割, 其方向平行于在环面的映射下的压缩和膨胀中的不变流形, 在安诺索夫 (Аносов) 微分同胚遍历理论中的辛那依马尔科夫分割的构造中, 扮演了一个重要的角色 [1].

考察仿射 k 维子空间上平行于给定无理子空间 R^k 的彭罗斯分割的迹 (为了简单起见, 我们可以假设这个子空间处于一般位置, 即, 它不含三棱柱的任何一个顶点). 迹是由棱柱的底面通过平移所得到的多面体.

定义　*k 维空间的彭罗斯准周期覆盖*[①]是指它由上述彭罗斯分割所诱导出的分成多面体的分割.

例　考察将三维空间分成具有整数顶点、大小相同的立方体. 这些立方体与所给定的无理平面 R^2 的相交, 生成无穷多个多面体, 由三类无穷多个正方形面组成的两片曲面为边界, 这三类正方形面是由具有一般性顶点的立方体通过平行

[①]这是彭罗斯研究的特殊情况.

位移所得到的.

将此曲面中的一个沿一条经过此顶点并指向立方体内部的直线, 投影到平面 R^2 上. 多面体的投影就形成了平面上一个由平行四边形组成的拟 (准) 周期覆盖[①](由三个平行四边形的平行移动得出).

定理 1 *投影生成在平面上的彭罗斯覆盖.*

证明 考察三维空间中由这样一些点 x 组成的集合, 使得平行于给定无理平面 R^2、且含这种点 x 的仿射平面 P 能被多边形曲面的一个固定面 F 沿给定方向 l 的投影所覆盖. 我们来证明这个集合是一个棱柱体, 其底面平行于 P.

我们注意到, 条件 "F 是那些与 P 相交的立方体的并集中的一个面" 只是加在 P 上的一个条件, 而不是加在 x 上的条件. 它确定了平行于 P 的两个平面之间的一个夹层. 如果点 x 是处于这个夹层之中的平面上的点, 则它将被界面 F 沿方向 l 的投影所覆盖的充要的条件是, 它属于那些与 l 平行且与 F 相交的棱柱体的并集. 从而 x 就进入 F 与 l 之积, 并位于两平行平面之间的夹层. 这种点形成一个棱柱体, 其底面平行于 P.

每一个点 x 都会被某一界面 F 在 P 上的投影所覆盖. 这样一来我们就把 P 分割成上面所确定的棱柱体. 这种分割是周期性的, 从而也就确定了三维环面的一个彭罗斯分割. 这个

[①]字头 квази-(quasi-) 在数学文献中习惯译成 "拟", 而在物理文献中则习惯译成 "准". —— 译者注

P 上的分割的迹, 是用平行四边形对平面的拟周期覆盖 —— 多边形曲面在界面上的投影.

于是, 这些平行四边形就形成了彭罗斯覆盖.

定理 2　*存在由角度为 60° 和 120° 的全等菱形形成的平面拟周期彭罗斯覆盖, 它无法由图灵 (Turing) 机算得.*

证明　将多面体的界面沿立方体的对角线的方向投影. 我们将得到三种类型的平行四边形对平面的覆盖. 这些平行四边形是由满足下述方程的三个向量 u, v, w 所生成:

$$u + v + w = 0.$$

在平面的仿射变换下这些平行四边形可以同时转变为角度为 60° 和 120° 的菱形. 结果我们就得到了所要求的用菱形的覆盖.

从无理平面出发可以依次将菱形覆盖重构出来. 因此在所构造出的覆盖中不同的覆盖数量是不可数的. 而另一方面图灵机的所有程序的集合是可数的. 因此我们所构造出的拟周期彭罗斯覆盖大多数都无法用任何图灵机作出.

用来证明定理 1 的论证也可以用于更一般的情形. 考察 n 维空间中的无理子空间 R^k. 与 R^k 相交的立方体组成一个多面体. 考察它的 k 维界面. 它们在 R^k 中沿某一 $(n-k)$ 维的方向的投影确定了 R^k 的一个多面体覆盖, 这些多面体是由平行四边形切割所得出的.

定理 3　*这样作出的覆盖是彭罗斯覆盖.*

证明　与在前面定理 1 的证明中一样, 多面体 (也就是说,

它的界面) 是由仿射平面 P 来决定的. 给定集合 S 的那些 k 维界面属于立方体并集的界面, 它们与 P 相交的充要条件是, P 在属于某个多面体 $a(P,S)$ 的点处与正交于 P 的 $(n-k)$ 维空间相交. 来自 P 的点 x 能为某个属于 S 的边界的投影所覆盖的充要条件是, 要求 x 属于 l 与某个 k 维多面体 $b(l,S)$ 的乘积. 包含 x 的彭罗斯分割的棱柱体就是乘积 $a\times b$.

这个证明也可以应用到更复杂的、用于决定无理空间 P 的覆盖的算法上去. 这个证明的基础就在于, 加在 x 上的条件可分为两个条件, 其中第一个只是加在 P 上的, 而第二个只是加在点 x 沿方向 l 的投影之上的. 所有具有这种性质的算法都决定在 P 上的拟周期彭罗斯覆盖.

例 考察五维空间及其由基向量 $e_1,\cdots,e_5$ 所生成的整数点阵. 基向量的循环置换确定一个作用于 R^5 上的五阶群. 这个表示可分解为三个实的不可约表示的直和 (与这个分解相对应, 这三个群的特征标分别为 $(\exp(\pm 2\pi i/5),\exp(\pm 4\pi i/5),1)$.

第一个表示的二维平面是无理平面 (不含非零整点). 定理 3 中的构造决定了在这个平面上的彭罗斯覆盖. 这个覆盖在循环置换群下是不变的. 这样我们就构造出了在二维平面上具有五阶对称的拟周期彭罗斯覆盖. 用类似的构造方法可以作出三维空间具有二十面体对称的拟周期彭罗斯覆盖, 我们将在下面 (§3 中) 来讲述.

§2. 彭罗斯函数

定义　n 维环面上的*彭罗斯函数*[①]是指在彭罗斯分割的每一棱柱体上为常数的函数.

*拟周期彭罗斯函数*是指将定义在 n 维环面上的彭罗斯函数限制到覆盖 n 维空间环面的无理子空间 R^k 上取所得的函数.

定理 4　*每一拟周期函数都可以用有相同周期的、拟周期彭罗斯函数任意精确地逼近.*

实际上, 拟周期函数的定义就是将 T^n 上的函数限制到 R^k 上. 在 T^n 上很容易构造任意小的彭罗斯分割. 因此用彭罗斯函数以任意精度 (一致地) 逼近在 T^n 上的任意 (连续) 函数. 这个限制到 R^k 上的函数就是我们所要求的拟周期彭罗斯函数.

这个简单的定理说明了, 为什么许多拟周期函数所决定的图形是如此类似于彭罗斯覆盖 (由函数的等值线或临界点所构成的图形, 或者由某种其他的对函数做局部计算加工所得的结果).

如果开始用有某种群对称性的函数, 则在相应算法的作用下所得到的图形也将具有这个对称性. 用这种对称性的彭罗斯函数来逼近函数, 我们由此获得了对称彭罗斯覆盖的新的来源.

[①]看来彭罗斯本人并没有研究过这种函数.

例 扎斯拉夫斯基 (Заславский)、萨格捷也夫 (Сагдеев) 等人 ([2], [3]) 在他们研究粒子与电磁波的共振相互作用时考察了这样的哈密顿函数: $H = \sum \cos \alpha_k, 0 \leqslant k < q$, 其中 α_k 是平面上的线性函数, 它等于与正 q 角形第 q 个顶点的向径的标量积.

在 $q = 2, 3, 4, 6$ 时, 函数 H 是周期函数, 在 q 取其他值时, 则为拟周期函数. 它们显然对转过角度为 $2\pi/q$ 的倍数的转动是对称的.

函数 H 的临界点形成一个网, 非常类似于有同样的对称性的彭罗斯覆盖的顶点构成的网.

实际上 H 还是另一个模型的近似 —— "随机网" 模型的近似, 它也生成彭罗斯覆盖.

为了得到 "随机网", 我们来考察平面到自身的映射 $T = AB$, 其中 A 为转过角度为 $2\pi p/q$ 的转动, $B(x, y) = (x, y + \varepsilon \sin 2\pi x)$. 数值计算实验表明, 在接近初始条件, 而且 ε 又很小的情况下, 起始点在映射 T 的逐次作用下的像的序列会填满由线的细小的邻域构成的 "蜘蛛网", 这些网具有 q 阶对称性, 并且看上去好像是彭罗斯覆盖.

为了解释这个实验我们来考察映射 T^q. 它 ε-接近于恒等变换, 而且它还保持面积不变. 因此它在误差为 ε^2 阶的精度上可以算是哈密顿系统相流变换. 哈密顿函数很容易算出来, 并且看来就是上述函数 H.

标准的哈密顿系统摄动理论 [4] 预言, 在距离为 ε 的级

别上, 在函数 H 的大多数封闭等值线中有准确地相对于 T^q 不变的封闭曲线. 各个个别的破坏就会把它们变成随机网, 于是, 随机网就很接近函数 H 的临界等值线的连接组织. 正如在上面解释过的, 由临界点和临界线所形成的图形很自然会使我们想起彭罗斯覆盖. 容易将上面的话表述成数学定理并加以证明, 以便给它以严格的意义. 但这只能以不同的方式来作. 作为例子我们来研究函数 H 的局域极大. 显然, $H \leqslant q$. 取 $\varepsilon > 0$, 并在 $H \leqslant q - \varepsilon$ 的地方选择那些局域极大点. ε 越小, 由局域极大点所形成的图形就越大, (在经过适当的压缩之后) 很像由具有 q 阶对称的彭罗斯覆盖的顶点所形成的图形.

就我所知, 拟周期函数 (甚至像 H 这样的简单函数) 的随机拓扑研究得还很不够. 例如, 考察函数 H 在半径为 R 的球内的某个 "粗放的" 特征 f (比如说局域极大点的个数, $H = c$ 的等值线集合的分量, 或者 $H = c$ 的集合的欧拉特征). 对于 k 个变量的拟周期函数 H, 我们来考察下述极限

$$\lim_{R\to\infty} \frac{f(R,c)}{R^k} = \bar{f}(c).$$

应该存在 "遍历" 定理, 断定极限 $\bar{f}$ 存在, 除去仅有的几个临界值外, 它还应该是 c 的好函数. $\bar{f}$ 在临界值处的奇点应该按起始的 n 个变量的周期函数 H 以及根据无理 k 维子空间相对于 n 维空间的整数点阵的分布来进行计算.

对于初始周期函数为三角多项式的情形, 以函数的牛顿多面体和以组成多项式的单项式的项数来对等值流形的拓扑

复杂度的评估, 正如在 [5], [6] 中所作的, 必定为中等程度.

不久前侯赛因 – 扎德 (С. М. Гусейн-Заде) 向这个方向迈出了第一步.

§3. 准晶体对称与奇点理论

具有二十面对称性的三个变量的拟周期函数是在 1982 年研究光线系统的奇点时发现的, 几乎在同时它也在晶体学中发现了.

光线系统理论的数学问题初看起来与晶体学相距十万八千里. 我们来考察平面上由一条有简单拐点 (像半三次抛物线所具有的那种) 的光滑曲线所包围的区域.

这种拐点具有一般位置, 即, 在边界曲线的微小挪动下不会消失.

我们来考察这个区域中的一个固定点与区域中所有其余点之间的距离, 研究在该区域内部连接固定点与属于该区域的任意有限点的最短路径. 这个距离函数, 作为有限处的点的函数是连续的, 但不一定是光滑的.

距离函数的典型奇点之一就是它在边界拐点处的奇点. 原来这个奇点与二十面体有关, 对它的研究导致数学家发现了具有二十面体对称性的拟周期函数.

距离函数与二十面体的联系是希切尔巴克 (О. П. Щербак) [7] 于 1982 年发现的. 希切尔巴克定理的历史 (及其最初的表述) 见论文 “光线族的奇点” (В. И. Арнольд, Ос-

обенности семейств лучей, УМН, 1983, Т. 38, No. 2, 77 – 147)[①] 的第 78 – 79 页. 二十面体对称群可由 R^3 中的二十面体在 (平面对称的) 十五面镜中的反射产生. 因此这个群在复空间 $\mathbf{C}^3$ 上的作用轨道又再度形成一个复空间 $\mathbf{C}^3$ (在其中的坐标是二十面体对称群的基本不变量). 非正则轨道 (那些由比其他轨道更少的点所组成的) 在轨道空间形成一个曲面. 这个非正则轨道曲面叫做*判别曲面*.

判别曲面 —— 它就是在因子分解映射下的镜像, 相当于包含其轨道的原始空间的点. 这个曲面有很复杂的奇点.

在某个问题中某种反射群的存在常常是靠判别曲面来发现的. 判别曲面的奇点通常在与问题有关的分叉集合的奇点中很容易为人们所共知.

在我们的情况下分叉集合就是距离函数的图形. 希切尔巴克定理断言, 这个图形在局部上 (在边界区域上位于一般位置时拐点的邻域内) 与二十面体对称群的判别曲面微分同胚. 在文献 [13] 的第 76 页上有对这个图形的描绘 (图 70), 但是它的非显式的形式在罗比达尔的分析学中早就有了 (见 [14] 的第 262 页上的图 37).

希切尔巴克定理的证明有赖于二十面体对称群 H_3 与所谓反射晶体群 (或外尔 (Weyl) 群) D_6 (与单李代数 $D_6 \approx O(6)$

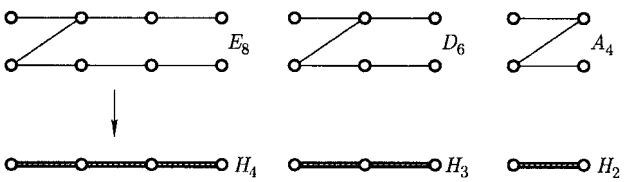
[①]《塞尔给格雷教授的回信》(见本书附录 4) 对作者写本文起了很大的作用. 这可见于法文专著: V. Arnold, A. Varchenko, S. Gousein-Zade, Singularités des applications differentiables, 2-e partie: Monodromie et comportement, Мир, 1986.

以及与 $x^2y+y^5+z^2$ 的简单奇点相关的群) 之间的联系.

外尔群 D_6 是由六维欧氏空间中的反射生成, 它保持某种晶体点阵 (由 6 个独立向量的整数系数的线性组合形成的集合) 不变. 希切尔巴克在证明自己的定理时将这个六维空间实际地分解成两个相互正交的三维空间, 它们相对于二十面体对称群 H_3 的不可约表示不变.

这两个三维空间相对于整数点阵 D_6 是无理的. 将适当的 D_6-周期函数限制到这个无理子空间, 就得出具有二十面体对称性的三个变量的拟周期函数.

关于这些三维空间的进一步的细节可参阅瓦尔千科 (Варченко) 和齐姆托夫 (Чмутов) 的文章 [8], 在该文中对所有的反射群 (包括在四维空间中的正 600 面体的对称群 H_4, 它与 E_8 的关系就正如 H_3 之于 D_6, 也正如 H_2 之于 A_4) 得到了相似结构. 这些关系可以用下面的图形来表示:



在奇点理论中每一反射群联系着自身独有的特殊函数. 由希切尔巴克 – 瓦尔千科 – 齐姆托夫理论可以推知, 与二十面体对称群相联系着的三维空间特殊函数就是有 6 个变量的周期函数在无理空间上的限制. 这样一来, 这种函数是拟周期的, 决定了三维空间中的准晶体的结构, 并生成其具有二十面体对称性的拟周期彭罗斯覆盖.

自然, 奇点理论的专家并不知道有论文 [9], 直到 1985 年的 5 月我都没有发现论文 [10] 以及这两个理论之间的联系.

近来关于二十面体的希切尔巴克定理及其在其他考克斯特群上的推广 [12] 受到了季汶塔耳 (А. Б. Гивенталь) 的注意. 他指出, 奇点理论中的一个问题, 其结果与所有考克斯特群列表完全一致, 可以由欧氏空间中的反射生成 (有限和不可约的, 晶体的或否). 就是说, 季汶塔耳 [11] 研究了有奇点的拉格朗日流形, 平面曲线的可微直积, 以及余切丛空间的拉格朗日流形联系着哈密顿 – 雅可比方程的多值奇异解 (拉格朗日流形作为光学系统时沿光线的路径长度的图形). 季汶塔耳证明了, 哈密顿 – 雅可比方程解的奇点是简单奇点 (没有模) 的充要的条件是, 它的图形与有限不可约考克斯特群的判别曲面微分同胚.

参考文献

1. Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория.— М.: Наука, 1980.— С. 187.
2. Заславский Г. М., Захаров М. Ю., Сагдеев Р. З., Усиков Д. А., Черников А. А. // Письма в ЖЭТФ.— 1987.— № 7.— С. 349—353.
3. Черников А. А., Сагдеев Р. З., Усиков Д. А., Захаров М. Ю., Заслаский Г. М. // Nature.— 1987.— V. 325, N 6113.— P. 559—563.
4. Арнольд В. И. // УМН.— 1963.— Т. 18, № 6.— С. 96—196.
5. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гивенталь А. Б., Хованский А. Г. // Math. Phys. Rev., Sov. Sci. Rev. C.— 1984.— V. 4.— P. 67—92.
6. Хованский А. Г. // C. r. Acad. Sci. Paris.— 1981.— V. 292.— P. 937—940.

7. Щербак О. П. Особенности семейства эвольвент в окрестности точки перегиба кривой и группа H_3, порожденная отражениями // Функцион. анализ и его прил.— 1984.— Т. 18, № 3.— С. 1—13.
8. Варченко А. Н., Чмутов С. В. Конечные неприводимые группы, порожденные отражениями, суть группы монодромии подходящих особенностей // Функцион. анализ и его прил.— 1984.— Т. 18, № 3.— С. 1—13.
9. Schechtman D., Bleck I., Gratias D., Cahn J. W. // Phys. Rev. Lett.— 1984.— V. 83.— P. 1953.
10. Schechtman D., Gratias D., Cahn J. W. // C. r. Acad. Sci. Paris.— 1985.— V. 300, N 18.— P. 909—914.
11. Гивенталь А. Б. Особые лагранжевы многообразия и их лагранжевы отображения.— М.; 1986.—(Деп. ВИНИТИ от 5 июня 1986 г., № 4130-В.).
12. Щербак О. П. // УМН.— 1988.— Т. 43.
13. Арнольд В. И. Теория катастроф.— 2-е изд.— М.: Изд-во МГУ, 1983.
14. Динамические системы.— 5: Теория катастроф // Итоги науки и техники: Совр. пробл. мат. фунд. направл.— 1986.— С. 219—277.

文献 13 有中译本: 阿诺尔德. 突变理论. 陈军, 译. 北京: 商务印书馆, 1992.

附录 4　塞尔给格雷教授的回信*

谈二十面体群的扩张

J.-P. 塞尔

普林斯顿, 1978 年 3 月 17 — 25 日

亲爱的格雷先生:

拖了这么久才来回答您关于克莱因 (Klein) 论二十面体

---

*本篇文章选自"J.-P. Serre, Extensions icosaédriques, Œuvres — Collected Papers, vol. III, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1985, 550–554", 最早发表于"Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux 1979/80, no° 19". 感谢 J.-P. Serre 先生授权将此文章翻译成中文作为本书的附录使用, 并建议增补了 3 篇重要的参考文献 (参看文章的脚注).

的专著的问题, 我请求您的原谅. 几个星期来不时地翻阅它, 我还是没有什么可写的.

首先, 我找不到有关这方面任何现代的论述, 我怀疑这是否可能找得到. 最接近我们时代的书是迪克森 (Dickson) 的《现代代数理论 (Modern Algebraic Theories)》(1930). 此外, 还可以参阅威曼 (Wiman) 的《线性置换的有限群 (Endliche Gruppen linearen Substitutionen)》(Enzykl. Math. Wiss. I B3f), 韦伯 (H. Weber) 的《代数 II (Algebra II)》以及特别还有弗里克 (R. Fricke) 的《代数教程第 II 卷 (Lehrbuch der Algebra, Bd. II)》(1926), 对我来说它们比克莱因的书更好理解一些. 我希望您能从阿诺尔德、弗里德 (Fried)、布里斯科恩 (Brieskorn) 和希策布鲁赫 (Hirzebruch) 他们那里获得更多的信息: 他们能告诉您有关 $\mathfrak{A}_5$ 中的关系, 特别是有关 E_8 根系和曲面 $x^2+y^3+z^5=0$ 方面的内容 (见, 例如, 不久前 Naruki 发表在 Invent. Math. 和 Math. Ann. 上的文章).

现在我来就克莱因书中的论题谈几点意见.

1. 域的定义

令 $G=\mathfrak{A}_5$ 为二十面体群. 实际上, 克莱因证明了, G 正则地作用于 0 亏格曲线 X 并且商结构 X/G 的亏格也是 0. 这当中他并没有给出域的严格定义 —— 在此没有这个必要, 因为他利用了含有完全无害的无理性的准确公式. 虽然如此, 这却引起了更仔细地关注这个问题的兴趣.

首先我们指出, 每一条 (G 作用于其上的) 曲线可以对应于一个 5 的平方根, 如果 X 和 G 中的元素只是定义在某个

基域 k 上, 那么它就必定属于这个基域 k (在这种情况下我就说 X 是 "k 上的 G-曲线"). 实际上, 在将基域扩张到它的代数封闭域时作用 G 给出嵌入 $G \to \mathbf{PGL}_2$, 而且如果 $c \in G$ 是一个选定的 5 阶元素, 那么就有一个矩阵 A 与之对应 (确定 c 到只差一个数量因子), 其特征值 λ 和 μ 是这样, 使得 λ/μ 为 1 的五次方原根. 令 $x = 1 + 2\left(\dfrac{\lambda}{\mu} + \dfrac{\mu}{\lambda}\right)$, 我们就得到 $x^2 = 5$, 并且 x 与 c 内在地相联系 (即, 它与表示矩阵的选择无关, 也与扩张域的选择无关).

这样一来, 如果想要给出 k 上的 G-曲线, 我们就必须要求 k 含有 5 的平方根. 我们就这样做, 并选定其中这样一个根; 将其记为 $\sqrt{5}$. 我们将只限于那些正好对应于这个选定平方根的 G-曲线. 那么就可以证明, *的确存在这样的 k 上的 G-曲线, 而且在准确到同构变换下是唯一的* (就是说, 如果 X 和 X' 为两条这样的曲线, 则存在一个唯一的同构变换 $f : X \to X'$, 使得对所有的 $g \in G$ 有 $f \circ g = g \circ f$). 唯一性的断言很容易证明, 特别是近来得到了与之等价的结论, 即, G 在 $\mathbf{PGL}_2$ 中的中心化子归结为 $\{1\}$. 关于存在性的证明则可通过标准的代数几何方法 —— "松弛 (descent)" 法来得到. 但是也可以用更明显的方法, 见下面.

如果我们有一个 k 上的 G-曲线 X, 则自然会有两个问题.

a) X 是否与射影直线 $\mathbf{P}_1$ 同构? 即, X 是否具有 k-有理点, 或者与之等价地, G 是否能嵌入 $\mathbf{PGL}_2(k)$?

b) 商曲线 X/G 是否与 $\mathbf{P}_1$ 同构? (我们提醒大家, 0 亏格

曲线并不一定与基域上的 $\mathbf{P}_1$ 同构! 存在着为四元代数的 "障碍 (obstruction)".)

对 b) 的回答 —— "是", 而这也是很简单的: 在 X/G 上有 3 个正则点, 覆盖 $X \to X/G$ 在该处有 3 个分支, 其阶分别为 2, 3, 5, 而由于其唯一性, 在 k 上为有理的, 但是具有有理点的 0 亏格曲线与 $\mathbf{P}_1$ 同构, 这正是我们所要求的. (还可以要求这样来规范 X/G 与 $\mathbf{P}_1$ 之间的同构, 使得那 3 个正则点分别对应于点 0, 1 和 ∞ —— 克莱因就是这样做的.)

对 a) 的解答更有意思: X 并不一定与 $\mathbf{P}_1$ 同构. 此外, 对应于 X 的四元代数是标准四元代数 $H_k = k \otimes H$, 它是由元素 i, j 所生成的, i, j 之间具有关系 $ij = -ji, i^2 = -1$, 以及 $j^2 = -1$. 因此 X 与 $\mathbf{P}_1$ 同构当且仅当 H_k"可分裂" (即与矩阵代数 $\mathbf{M}_2(k)$ 同构, 或者与之等价地, 当且仅当 -1 是在 k 中的两个平方和.)

为了证明这一点, 可以, 例如, 准确描述 $G = \mathfrak{A}_5$ 到 H_k 的射影群, 即到 H_k^*/k^* (如果用伽罗瓦 (Galois) 的语言来讲, 这个群就是 $\mathbf{PGL}_2$ 的 "扭转形式") 中的嵌入. 我确信这一点可以利用考克斯特的显式公式做到①, 我手头没有这份材料,

①H. S. M. Coxeter, The binary polyhedral groups, and other generalizations of the quaternion group, Duke Math. J. 7 (1940), 367 – 379.

但是最近威格纳 (M.-F. Vignéras) 在 *Crelle* 中的一篇文章[①] 中复述了它. 另一个方法是利用把群 G 表示成三维空间中的考克斯特群. 这个方法是运算在 $\mathbf{Q}(\sqrt{5})$ 之上, 并给出 G 到 $\mathbf{SO}_3(f)$ 的嵌入, 其中 f 为在 $\mathbf{Q}(\sqrt{5})$ 上的 3 个变量的二次形式. 此外还要验证, 与 f 相联系着的四元域实际上就是 H_k. 这两个方法也都同时给出了 G-曲线的明显的构造. 总之:

如果我们需要某种 k 上的 G-曲线 X, 则只需 $\sqrt{5} \in k$; 如果此外我们还要求有 $X \simeq \mathbf{P}_1$, 则必须有, -1 为 k 中的两个元素的平方之和.

我们要指出, 将二次无理式 $\sqrt{5}$ 与 $\sqrt{-d}$ (这里 $d > 0$ 为任意) 与 k 相结合, 这两个条件就均可得到满足. 因此从 "方程求解" 的角度来看它们是无碍的.

关于这个计算还要指出一点. 如果我们感兴趣的不是 $\mathfrak{A}_5$, 而是 $G = \mathfrak{A}_4$ 或 $\mathfrak{S}_4$, 那么情况类似, 而且更简单: 条件 $\sqrt{5} \in k$ 用不着了, G-曲线必定存在, 且唯一, 以及它与 $\mathbf{P}_1$ 同构的充要的条件是四元代数 H_k 自行分裂.

(在上面, 自然地, 我假设了 k 的特征等于 0. 如果您对 Char $k = p \neq 0$ 感兴趣, 那么这里就会有两种情况: 一种是, 如果 $p \neq 2$, 则对 $G = \mathfrak{A}_4, \mathfrak{S}_4$, 以及在 $\sqrt{5} \in k$ 时对 $G = \mathfrak{A}_5$, 有 G-曲线 X 存在; 如果 $p = 2$, 则对 $G = \mathfrak{A}_4$, 以及在 $\sqrt[3]{1} \in k$ 时对 $G = \mathfrak{A}_5$, 有它存在; 而在 $p = 2$ 时对 $G = \mathfrak{S}_4$ 则它不

[①] M.-F. Vignéras, Simplification pour les ordres des corps de quaternions totalement définis, J. reine angew. Math. 286–287 (1976), 257–277 (see Th.5).

存在. 在所有这些情况下, 当曲线存在时, 它们就会 k-同构于 $\mathbf{P}_1$, 因为有限域的布劳尔 (Brauer) 群是零阶的.)

我们还要提出以下值得注意的地方: 假设我们定义了在 $\mathbf{Q}(\sqrt{5})$ 上的曲线, 并令 K 为其函数的域. $G = \mathfrak{A}_5$ 在 X 上的作用生成 G 在 K 上的作用, 在此作用下常数域 $\mathbf{Q}(\sqrt{5})$ 保持不变. 这个作用可以这样来扩张成 K 上的作用 $\mathfrak{S}_5$, 使得 $\mathfrak{S}_5 - \mathfrak{A}_5$ 中的元通过置换 $\sqrt{5} \mapsto -\sqrt{5}$ 作用于 $\mathbf{Q}(\sqrt{5})$ 之上 ("半代数作用"). 换言之, 把 X 看成是 $\mathbf{Q}$ 上的曲线 ($\mathbf{Q}$ 不可约, 但可分解为 $\mathbf{Q}(\sqrt{5})$ 上的两个部分), 我们就得到在 X 上的作用. 我之所以要谈这个作用有两个原因:

a) 从模形式的观点来看它是自然产生的 (见下);

b) 这种作用有一个最简单的模型如下: 取在射影空间中由下述方程所给定的二次曲面

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_5 = 0, \quad x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_5^2 = 0 \qquad (*)$$

在 Y 上 $\mathfrak{S}_5$ 的一个自然作用 (坐标的置换). 现在我们用字母 X 来表示 Y 上的 "直线的集合". 众所周知, 在 X 上的曲线有自然的 (导出) 结构, 它在判别式的二次方根的域 (在此即为 $\mathbf{Q}(\sqrt{5})$) 上分解为两个部分, 每一个部分均为 0 亏格. $\mathfrak{S}_5$ 在 Y 上的作用决定了 $\mathfrak{S}_5$ 在 X 上的作用, 它在当下的情况之下也就是 "我们的" 曲线 X.

(类似于具有作用 $\mathfrak{S}_4$ 的 0 亏格曲线可以看成是圆锥曲线 $x_1 + x_2 + \cdots + x_4 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_4^2 = 0$.)

2. 五次方程的解

我们首先假设 $\sqrt{5}$ 属于 k, 并和在上面一样, 令 X 以及 $X\backslash G \simeq \mathbf{P}_1$. 如果 z 为 X/G 的 k-点, 那么, 一般来说, 它在 X 上的逆像不会是在 k 上的有理点. 更准确一点讲, 对于 $x \in X$ 的提升, 点 $z \in X/G$ 是域 k 的伽罗瓦扩张, 其伽罗瓦群是 G 中的一个子群 (在特殊情况下它也可能是群 G 本身). 可能有人会问: 能否用这种方法得到具有群 $G = \mathfrak{A}_5$ 的域 k 的全部伽罗瓦扩张? 如果是这样, 那么 G-覆盖 $X \to X/G$ 就会类似于二次覆盖 $x \mapsto x^2(\mathbf{P}_1 \to \mathbf{P}_1)$, 它给出了全部二次扩张.

实际上埃尔米特 (Hermite) 和克莱因正好也回答了这个问题. 他们的结果 —— 正如您将看到的 —— "几乎" 就是能够得到.

我们重新来把这个问题变换得更几何一些. 用 k'/k 来表示伽罗瓦群 G 的扩张 (它与五次方程相关联, 这个五次方程的判别式为完全平方). 我们可以利用自然的同态 $\mathrm{Gal}(k'/k) \simeq G \to \mathrm{Aut}(X)$ 来决定在 X 上的作用 $\mathrm{Gal}(k'/k)$. 借助 "松弛" 法 (见, 例如, 外尔发表在 Amer. J. Math. 上的关于常数域的松弛法的论文 (大约在 1955 年), 或者参阅我的书《伽罗瓦上同调 (Cohomologie galoisienne)》), 我们可以得到扭转曲线 $X_{k'}$, 并且易见有:

可从覆盖 $X \to X/G$ 得到 k'/k 的充要的条件是, $X_{k'}$ 在 k 上有有理点.

因为 $X_{k'}$ 亏格为 0, 上述条件意味着, 与 $X_{k'}$ 联系着的四元代数 $H_{k'}$ 在 k 上分裂. 这个条件不能总得到满足 (可以构

造出反例). 但是这个条件可以通过域 k 适当的二次扩张来得到满足, 可是实际上要用多个这样的扩张. 在克莱因这本书的最后几节所谈到的 "连带无理性" 出现的原因, 也就正在于此 (这是外尔告诉我的). 可是因为埃尔米特、克莱因以及其他一些人认为二次扩张是可以接受的, 所以您就会理解, 为什么我说, 对上面所提出的那个问题的答案 —— "几乎" 能够得到!

为了赋予所有这些更加具体的形式, 必须对扭转曲线 $X_{k'}$ 以及相应的四元代数 $H_{k'}$ 作出更为简单的描述. 在此有两种途径 —— 一种是应用上同调, 另一种是用二次形式.

I) 大家知道, 上同调群 $H^2(G, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ 是第二类循环群, 它含有一个唯一的非平凡元 ξ, 对应于 G 的中心扩张, 其结果给出阶为 120 的 "二元二十面体群". 既然 $G \simeq \mathrm{Gal}(k'/k)$, 我们就会得到元素 $\xi_{k'} \in H^2(\mathrm{Gal}(k'/k), k'^*) \subset \mathrm{Br}(k)$. 可以验证 (除非有错 $\cdots\cdots$ (sauf erreur$\cdots$)), $H_{k'}$ 的类等于 $(-1,-1)+\xi_{k'}$, 其中 $(-1,-1)$ 是标准四元代数的类.

II) 设所给 k'/k 为五次 k_1/k 的闭伽罗瓦扩张. 将 k_1 看成 k 上的五维向量空间, 并转向射影二次曲面 $Y_{k'}$, 它由下述方程给出

$$\mathrm{Tr}(z) = 0, \quad \mathrm{Tr}(z^2) = 0 \quad (\text{其中 } z \in k_1).$$

这个二次曲面是由伽罗瓦扭转二次曲面 $(*)$ 得出的, 因而它的 "线汇曲线" 也就是扭转曲线 $X_{k'}$. 由这一点, 以及由二次曲面 (和相应的二次形式) 的初等几何 (和相应的代数) 我就可以得出:

IIa) $H_{k'}$ 的类是 $(-1,-1)$ 与二次形式 $\mathrm{Tr}(z^2)$ 的 (给定在 k_1 中其元素的迹为 0 的子空间上的) 维特 (Witt) 不变量[①] 之和. 换言之, $H_{k'}$ 是唯一的、其范数形式正比于这个四元二次形式的四元代数.

IIb) *$X_{k'}$ 具有有理点的充要的条件是, $Y_{k'}$ 也有一个, 即, 当且仅当在 k_1 中存在具有 $\mathrm{Tr}(z)=\mathrm{Tr}(z^2)=0$ 的非零元 z.*

用较为具体一点的话来说, 这意味着, 在任何时候, 只要 k' 能够由形如 $X^5+aX^2+bX+c=0$ 的 —— 即不含 X^4 和 X^3 这种项的 —— 五次方程的根生成, 那么我们就必定会得到对我们开始所提出的问题的 "肯定" 回答. 这与埃尔米特和克莱因所得到的结果是一致的.

代替原先令 $G=\mathfrak{A}_5$ 以及 $\sqrt{5}\in k$ 的设定, 我可以假设有 $\sqrt{5}\notin k$, $G=\mathfrak{S}_5$ 并且 k'/k 中的二次子域为 $k(\sqrt{5})$. 结果和在 IIb) 中所得到的一样.

3. 与模形式的联系

这里可以说联系不多. 如果我们考察其系数在 $\mathbf{Q}(\sqrt[5]{1})$ 中的 5 级模形式 K_5, 那么现在大家都知道 (见志村五郎 (Shimura) 的或德利涅 (Deligne) 与拉波波特 (Rapoport) 的书, 或者看兰 (Lang) 的《椭圆函数》) 在 K_5 上它是 "半线性" 作用群 $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}/5\mathbf{Z})/\{\pm 1\}$, 它的不变量域为一级模形式的域 $\mathbf{Q}(j)$. 此外 K_5 的亏格等于 0. 现在来考察在 K_5 中的、在

[①] J.-P. Serre, L'invariant de la forme $\mathrm{Tr}(x^2)$, Comm. Math. Helv. 59 (1984), 651–676 (= C.P. III, no. 131).

(二阶) 群 $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}/5\mathbf{Z})/\{\pm 1\}$ 的中心作用下不动的子域, 并将它记为 K_5'. 这个域对应于其常数域为 $\mathbf{Q}(\sqrt{5})$ 的 0 亏格曲线, 在其上作用着群 $G = \mathbf{PGL}_2(\mathbf{Z}/5\mathbf{Z})$. 因为这个群与 $\mathfrak{S}_5$ 同构, 我们在此又重新得出了第 1 点中的情况.

从这个观点来看, 第 2 点中所提到的问题就归结为下述问题. 假设 $\sqrt{5} \in k$ (或者相反设 $\sqrt{5} \notin k$), 并令 k'/k 为群 $\mathfrak{A}_5$ 的 (或者在相反的情况下为群 $\mathfrak{S}_5$ 及二次子域 $k(\sqrt{5})$ 的) 伽罗瓦扩张. 是否存在这样的 $j \in k$, 使得 k' 由六条椭圆曲线 $j_1, j_2, \cdots, j_6$ 组成的 j- 不变量所生成, 这些曲线是由具有 5 阶等角变换下的 j 不变量 (即, 由 "五阶变换方程" $T_5(X, j) = 0$ 的解) 来得到的? 答案仍然是和在第 2 点中的一样: 当且仅当四元代数 $H_{k'}$ 可分裂时答案才是 "肯定的".

至于 "主曲面 (Hauptfläche)" Y: $\sum x_i = 0, \sum x_i^2 = 0$ 的模解释, 那么可参阅弗里克的书, 第 124, 139 等几页.

我不得不在这里打住. 我知道我在上面所讲的那些有关我们的论题的某些方面, 只能算是一些粗略的看法. 克莱因的书 (还有弗里克的书) 所包含的内容要详细得多! 这也包括不变量, 也包括超几何函数, 还有一切的一切 —— 大量丰富的漂亮公式! 您是否打算从这里再写点什么东西呢? 如果是的话, 请给我一份您的复印本.

您的 J. -P. 塞尔

附注

(1) D. Bennequin, 神秘的焦散曲线 (Caustique mystique) (d'après Arnol'd et al., Séminaire Bourbaki, 1984/85, Astérisque 133 – 134 (1986), 19 – 56.

(2) 爱好恶搞的伏尔泰写道, 牛顿的职业生涯靠的 "不是无穷小计算和万有引力, 而是他那漂亮的外甥女".

牛顿可爱的外甥女凯瑟琳 · 巴顿, 牛顿生命的最后 20 年就是住在她家里, 不仅以其美貌, 而且也以其才智过人而闻名于世. 牛顿的传记作者们告诉我们, 她有很长一段时间是牛顿的学生蒙塔古 · 哈利法克斯 (Montague Halifax) 伯爵家的管家, 哈利法克斯是一个诗人、颇有声望的国务活动家、摄政委员会的成员、财政部长和英国银行的创办人. 在他于 1715 年去世后, 凯瑟琳 · 巴顿从他那里继承了相当可观的财产. 牛顿是因哈利法克斯伯爵而获得造币厂厂长这个职位的. 参见

T. L. More, Isaac Newton. A biography, Charles Scribner and Sons, New York – London, 1934.

(3) 这个定律也叫做玻意耳定律. 的确, 玻意耳于 1660 年首次在他的书中发表了它, 但是是把胡克作为定律的作者来引用的, 他甚至没有以共同的作者自居. 参见 I. B. Cohen, Newton, Hooke and "Boyle's law" discovered by Power and Towneley, Nature 204 (1964), 618 – 621.

(4) 可是, 在 1781 年拉格朗日 (Lagrange) 就已经在给达朗贝尔 (d'Alembert) 的信中这样来谈现代数学: "…… 我还想, 矿藏已挖得太深了, 如果找不到新的含矿的矿脉, 迟早必得放弃. 而今物理和化学所显示出的宝藏更是令人赞叹而且易于开发, 因此, 似乎每个人都已经完全转到这个方向上来了, 而在科学院中几何学的位置总有一天会像今天大学里阿拉伯语的讲席那样."

(5) 牛顿后来在 1694 年写道, 他在 1665 或 1666 年就已经发现了万有引力定律. 更后一些牛顿把他从平方反比定律得出轨道为椭圆的日期推到 "1676 或 1677 年". 可是, 无论是在 1679 年与胡克的通信中, 还是在更早, 牛顿都没有提起过他在这个领域内的发现: 他没有发表过它们, 也从未谈起过它们. 牛顿对这一点的解释是, 由于他所采用的地球半径的值不对, 导致他所算得的石头与月亮的加速度不能以足够的精度与平方反比定律吻合. 胡克关于引力是轨道椭圆性的原因的报告, 他是在 1666 年首次向皇家学会宣读的, 并作为 1670 年库特勒 (Kutler) 演讲的一部分发表于 1674 年.

(6) 不难看出对在赤道上高为 h 处的下落, 牛顿的论证会得出偏离的量为 $\omega\sqrt{2h^3/g}$ (g 为重力加速度, ω 为地球的角速度). 考虑科里奥利 (Coriolis) 力后的计算结果为上述偏离值的三分之二, 例如, 见教科书: В. И. Арнольд, Обыкновенные дифференциальные уравнения, Наука, Москва, 1984.①

(7) 惠更斯研究了相碰后又散开来的一组球的系统, 这些球或者用线相连, 或者用杆相连, 或者在槽内滚动, 证明了, 如果令系统独自存在, 并无初速地释放这些球, 则系统的重心不可能升高过它开始的位置.

(8) 如解析函数 f 和 g 的图形不相重合, 而且它们都在原点与直线 $y = x$ 相切 (图 37), 则比值 $|AB|/|BC|$ 和 $|BC|/|ED|$, 在 A 趋向原点时会趋于 1. 因此所求比值 $|AB|/|D'E'|$ 的极限等于 1.

(9) 参阅 R. Courant and D. Hilbert, Methods of mathematical physics, Vol. 2, Interscience, New York, 1962: Ch.6, §7.5. (中译本: R. 柯朗, D. 希尔伯特. 数学物理方法. 卷 Ⅱ. 熊振翔, 杨应辰, 译. 北京: 科学出版社, 1977.) 又见 V. I. Arnol'd, On the Newtonian attraction of concentrations of dust particles, Uspekhi Mat. Nauk 37: 4 (1982), 125; V.

①该书有中译本, 是从其第一版的英译本 (1973 年版) 转译的, 经查没有这个内容, 可能有误. 英译本所引用的文献改为: V. I. Arnol'd, Mathematical methods of classical mechanics, Springer-Verlag, New York, 1989: p.131. (中译本: 阿诺尔德. 经典力学的数学方法. 齐民友, 译. 北京: 高等教育出版社, 1992: 第 133 页, 例 1.) —— 译者注

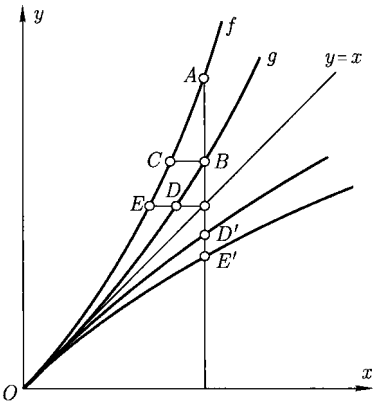


图 37 极限 |AB|/|D′E′| 的计算

I. Arnol'd, On the Newtonian potential of hyperbolic shells, Trudy Tbiliss. Univ. 232 – 233 (1982), 23 – 28; A. B. Givental', The polynomial property of electrostatic potentials, Uspekhi Mat. Nauk 39:5 (1984), 253 – 254; V. I. Arnol'd, Magnetic analogues of the Newton and Ivory theorems, Uspekhi Mat. Nauk 38:5 (1983), 145 – 146; A. D. Vainshtein and B. Z. Shapiro, Multidimensional analogues of the Newton and Ivory theorems, Functional Anal. Appl. 19(1985), 17 – 20.

n 维欧氏空间中的二阶共焦曲面族定义为欧氏二阶曲面束 $(A-\lambda Ex,x)=1$ (λ 为参数) 的对偶曲面族. 在 $n=2$ 时, 共焦 "曲面" 即为有公共焦点的椭圆和双曲线.

(10) R. Weinstock, Dismantling a centuries-old myth: Newton's *Principia* and inverse-square orbits, Amer. J. Phys. 50 (1982), 610 – 617.

(11) 例如, 方程 $\dot{x}=x^{2/3}$ 具有相同初始条件 $x(0)=0$ 的

解有两个: $x = 0$ 和 $x = t^3/27$.

(12) I. Newton, Methodus fluxionum, *Principia*, Liber II, Lemma 2, p.243.

(13) 巴罗去世前对他的朋友说: "终于我知道了很多几何问题和天文问题的解. 啊, 上帝, 一个多么了不起的几何学家!"

(14) А. Т. Фоменко, Глобальная хронологическая карта, Химия и жизнь, 1983, no. 9, 85 – 92.

(15) 斯威夫特 (Swift) 写道: "我有些敌人在我耳旁孜孜不倦地散布对牛顿的流言蜚语, 说一个牛顿, 是个仪器手艺人 …… 可能将来会借口和我争夺名誉."

(16) 关于无穷小演算, 参见 N. Bourbaki, Éléments d' histoire des mathématiques, Hermann, Paris, 1960, 178 – 220.

(17) 一般来说现代的数学家们很难为他们的前辈们所读懂, 在他们写下 "别佳 (Петя) 洗他的双手" 的地方, 却要说成 "存在这样一个 $t_1 < 0$, 使得在自然变换 $t \mapsto$ Петя(t) 下, 点 t_1 的像 Петя(t_1) 属于脏手集合, 又在半开区间 $(t_1, 0]$ 中存在这样一个 t_2, 使得点 t_2 在这个映射下的像属于刚刚在讨论点 t_1 时所讲过的那个脏手集合的余集."

(18) Oeuvres mathématiques de Leibniz, part I, vol.2, A. Franck, Paris, 1853, p. 255.

(19) 牛顿并不反宗教, 而最多是个隐蔽的阿里乌斯教义[①]的信奉者 —— 一个反对三位一体教义的异教徒. 按照他的传记作者的说法, 他认为, 上帝除了基督以外, 还有别的儿子, 他通过他们把他的真理告诉人们, 而且, 看来, 牛顿由于生于 12 月 25 日, 真的认为自己就是这些先知之一. 牛顿就对天启和丹尼耳 (Daniel) 预言提出过自己的一个解释, 特别地他还预言过在 2000 年罗马天主教教皇的倒台.

(20) A. N. Bogolyubov, Robert Hooke [in Russian], Nauka, Moscow, 1984. 在该书的第 55 页上的克拉尼 (Chladni) 图形是由沙在一水平振动平板的本征函数的零点附近聚集而形成的 (胡克早在克拉尼的 100 多年以前就发现了它), 叫做利萨如 (Lissajou) 图形 (这些在胡克的著作中, 看来最终还是没能发现).

(21) O. V. Lyashko, Classification of critical points of functions on a manifold with a singular boundary, Functional. Anal. Appl. 17 (1983), 187 – 193; O. P Shcherbak, Singularities of a family of evolvents in a neighbourhood of a point of inflection of a curve, and the group H_3 generated by reflections, Functional Anal. Appl. 17 (1983), 301 – 303; O.P Shcherbak, Wave fronts and reflection groups, Russian Math. Surveys 43: 3 (1988), 149 – 194; A. B. Givental', Sin-

[①]阿里乌斯 (Arius), 亚历山大神学家, 他提出的教义认为, 耶稣不是神, 只是比凡人要高超得多而已. —— 译者注

gular Lagrangian manifolds and their Lagrangian mappings, Itogi Nauki i Tekhniki, Sovremennye Problemy Matematiki, Noveishie Dostizheniya 33 (1988), 55 – 112 (translated in J. Soviet Math.).

(22) 不变量的阶数等于 2, 6 和 10; 阶数为 2 的不变量为到原点距离的平方, 而阶数为 6 和 10 的不变量则可由二十面体的 12 个顶点和 20 块面得到 (作为在顶点和面中心等于 ± 1 的线性函数的积).

(23) 见, 例如, D. Schechtman, D. Gratias and J. W. Cahn, Microscopic evidence for quasi-periodicity in a solid with long-range icosahedral order, C. R. Acad. Sci. Paris 300 (1985), 909 – 914; M. Senechal and J. Taylor, Quasicrystals: The view from Les Houches, Mathem. Intelligencer 12:2 (1990), 54 – 64.

(24) 观察五边形对称的另一种方法如下: 考察在包围空间中由顶点位于整数格点处的方块构成的 "阶梯", 它与我们所研究的无理地放置的子空间相交. 这个梯子在这个子空间上的投影把它划分成有限种类型的多面体的重复排列, 但这个排列不是周期性的 —— 所谓彭罗斯铺垫花样 (Penrose tiling). 图 38 画出了平面的一个类似这样的铺垫花样, 明显地看出有五边形对称的迹象.

顺便提一下, 梯子是用各种各样的菱形来铺垫平面的, 这些菱形无法用算法来计算 (即不可能用有限程序通过计算机把它们构造出来).

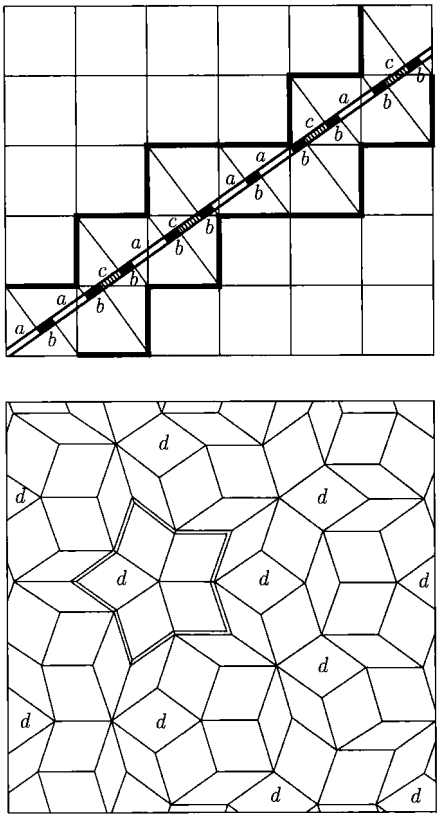


图 38　一维彭罗斯铺垫花样和二维准晶体的构造

实际上, 三维空间中一个与一无理地放置着的平面相交的阶梯是一个具有三个方向的正方形面的无限多面体, 它分别在上下形成两个包围着曲面的多面体 —— 盖子. 我们将上面那个盖子沿立方体对角线的方向投影到原来无理地放置的平面上. 立方体的三块相邻的面投影成三个平行四边形, 它们仿射地等价于三个大小相等的菱形, 在它们的公共顶点处的夹角为 120° (图 39).

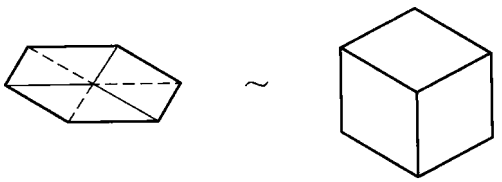


图 39　一个不可计算的彭罗斯铺垫花样构造的例子

上盖的全部面都投影成这种平行四边形, 相当于上述三个平行四边形的平行移动, 把整个平面覆盖了一个遍. 用一个仿射变换把所有这些平行四边形都变成菱形.

原始平面的方向由所得出的铺垫花样来决定. 但是方向是一个连续统, 而程序的集合是可数集. 因而所得出的铺垫花样中会有一些 (甚至几乎是它们中的全部) 是不可计算的.

上述彭罗斯铺垫是拟周期的. 拟周期彭罗斯铺垫花样是将环体分割成许多棱柱体而得到的, 这些棱柱体的底平行于那个无理地放置、割出拟周期铺垫花样的子空间.

二维环体 (环面) 的这样的一个分割, 如图 40 所示 (类似的分割在遍历理论也会遇到, 它们是作为所谓马尔可夫 (Markov) 分割由西纳依 (Ya. G. Sinai)、阿德勒 (Adler) 和外斯 (Weiss) 等人所引进的).

上面 (用 "阶梯") 所构造的彭罗斯铺垫花样也可用将环体分割成具有平行底面的棱柱体的方法来得到. 所以用棱柱体来构造的方法可以看成是用阶梯来构造的方法的推广.

拟周期彭罗斯铺垫花样 —— 这就是将无理地放置的子空间分割成一特定的、只有有限个值的拟周期函数的等值集

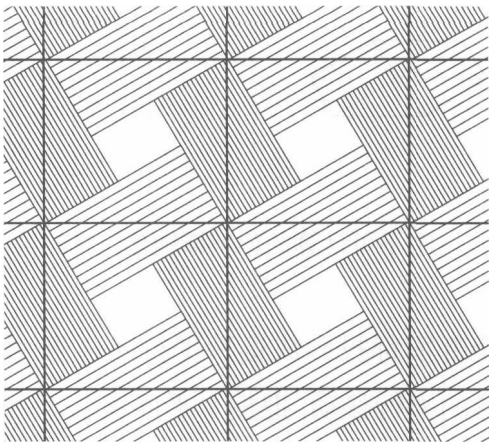


图 40　由环面的马尔科夫分割构造拟周期彭罗斯铺垫花样

所得的结果. 将定义在环体上、只有有限个值而且在底面与子空间平行的棱柱体上为常数的函数, 限制到无理放置的子空间上, 就得到这个特定的拟周期函数. 我们把这个函数叫做彭罗斯函数. 任意维数的环体上的任一连续函数, 都可以用在其底面平行于给定方向的 (任意维的) 棱柱体上为常数的、只具有有限个值的函数来任意逼近. 因此任一拟周期函数都可以用有相同周期的拟周期彭罗斯函数 (由与原始函数一样的无理子空间所交出) 来任意逼近.

由此显然可见, 当我们研究一拟周期函数时所看到的图案 (它的等值线, 奇点网, 等等) 必定会使我们想起彭罗斯铺垫花样. 如果原始函数有任何的对称性, 则逼近于它的彭罗斯铺垫花样 (按某种算法所构造出的) 会有同一种对称性.

于是我们又多得到一种生成准晶体结构的方法: 只要先从一个具有所必需的对称性的拟周期函数出发, 再用某种自

然的算法把它转换成铺垫花样.

下面就是一个用这种方法的例子, 这是由扎斯拉夫斯基 (Г. М. Заславский)、扎哈罗夫 (М. Ю. Захаров)、沙格介耶夫 (Р. З. Сагдеев)、乌西可夫 (Д. А. Усиков) 和切尔尼可夫 (А. А. Черников) 等人在分析位于外磁场中的等离子体中的粒子间的共振相互作用时发现的 (A stochastic web and diffusion of particles in a magnetic field, Soviet Physics JETP 64 (1986), 294 – 303; The generation of ordered structures with an axis of symmetry from Hamiltonian dynamics, JETP Letters 44 (1986), 451 – 456).

考察由公式 $T = AB$ 给出的一个由平面到自身的变换, 其中 A 为转过角度 $2\pi p/q$ 的一个转动, $B(x, y) = (x, y + \varepsilon \sin x)$. 用计算机的实验表明, 适当选择初始点, 则在多次重复进行变换 T 的作用下, 这个点的像将填满一细线构成的网络 (对小的 ε), 一个具有 q 阶对称的 "随机网", 它从远处看去类似于彭罗斯铺垫花样 (图 41, $q = 7$, 和照片 2a, 2b, 2c).

解释如下. 在 $\varepsilon = 0$ 时映射 T^q 保持平面上的点在原地不动. 因此对小 ε 每个点在 T^q 的作用下会移动一个数量级为 ε 的小距离. 另一方面, 映射 A 和 B, 因而也有 T, 保持面积不变. 于是, 映射 T^q 在准确到量级为 ε^2 的小量上可算是相流 (phase flow) 经过时间 ε 后的变换, 而这个相流是由某个哈密顿函数 H 用下式来给出的:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}.$$

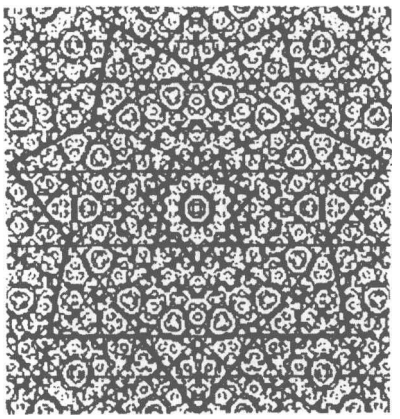


图 41　随机网

计算表明, 哈密顿函数 $H(x, y)$ 有以下的形式

$$H = \cos\alpha_1 + \cdots + \cos\alpha_q,$$

其中 α_k 为平面上的线性函数, 等于点 (x, y) 的矢径与中心在原点的正 q 边形的第 k 个顶点的矢径的标量积. 这个函数 H 是拟周期的, 且有 q 阶对称性. (H 是由给定在 q 维环体上的余弦函数之和, 在将一个二维平面以 q 阶循环群的不可约表示的无理空间的形式嵌入 q 维环体的嵌入 α 的作用下切割出来的.)

哈密顿函数 H 是哈密顿方程组的首次积分. 因此在重复作用映射 T^q 时, 平面上的点会保留在 H 函数等于在初始点处所取的值的那根等值线上 (至少在相对于 ε 的摄动理论的一级近似上是如此).

这样一来, 所观察到的随机网接近拟周期函数 H 的等值线, 它显然具有 q 阶对称性. 这也就解释了这个网为何类似

于具有 q 阶对称性的、准晶体的彭罗斯铺垫花样 (见照片 3).

直接研究 H 函数的等值线也能得出平面上同样的准晶体结构, 重复作用变换 T 就会生成随机网.

(25) A. N. Varchenko and S. V. Chmutov, Finite irreducible groups generated by reflections are the monodromy groups of appropriate singularities, Functional Anal. Appl. 18 (1984), 171 – 183.

(26) *Principia*, Book III, p. 504 in Motte's translation, published by Daniel Adee, New York, 1846.

(27) *Principia*, Book II (On the motion of bodies). An exhortation (Collected works of Academician A. N. Krylov, vol. VII, I. Newton, The mathematical origin of natural philosophy [in Russian], Akad. Nauk SSSR, Moscow – Leningrad, 1936, 428 – 430). 又见 V. M. Tikhomirov, Stories of maxima and minima [in Russian], Nauka, Moscow, 1986, 65 – 78.

(28) 见, 例如, P. S. Laplace, Traité de mécanique celeste (天体力学论), I–V, Paris, 1799 — 1827, Book IV, Ch II.

(29) M. L. Lidov, On the approximate analysis of the evolution of orbits of artificial satellites, in: Problems of motion of artificial celestial bodies [in Russian], Akad. Nauk SSSR, Moscow, 1963, 119 – 134.

(30) 见: Tides and resonances in the Solar System [in Russian], Mir, Moscow, 1975 (translations of: G. J. F. Mac-

donald, Tidal friction, Rev. Geophys. 2 (1964), 467 – 541; P. Goldreich and S. Soter, Q in the Solar System, Icarus 5 (1966), 375 – 389; P. Goldreich, History of the lunar orbit, Rev. Geophys. 4 (1966), 411 – 439; L.V. Morrison, The secular accelerations of the Moon's orbital motion and the Earth's rotation, The Moon 5 (1972), 253 – 264).

(31) 见, 例如, V. V. Kozlov, Integrability and non-integrability in Hamiltonian mechanics, Russian Math. Surveys 38: 1 (1983), 1 – 76.

(32) Nova Comm. Petropol. 11 (1767), 144 – 151; 又见: A. Wintner, The analytical foundations of celestial mechanics, Princeton University Press, 1941.

(33) J.-L. Lagrange, Oeuvres 6 (1772), 272 – 292.

(34) P. E. El'yasberg and T. A. Timokhova, Control of a spacecraft's motion in the vicinity of a collinear libration centre in the restricted elliptical three body problem, Cosmic Res. 24 (1986), 391 – 404.

(35) A. N. Simonenko, Asteroids [in Russian], Nauka, Moscow, 1985.

(36) 见: J. Darius, Beyond vision, Oxford University Press, 1984 一书末的照片.

(37) N. N. Gor'kavyi and A. M. Fridman, On the resonance nature of the rings of Uranus determined by its undis-

covered satellites, Letters in the Astronomical Journal 11 (1985), 717 – 720.

(38) H. Poincaré, Oeuvres, vols. I – XI, Gauthier-Villars, Paris, 1928 — 1956; Collected works, vols. I – III, Nauka, Moscow, 1971 — 1974 (with modern comments in Russian).

(39) A. I. Neishtadt, Change in adiabatic invariant at a separatrix, Soviet J. Plasma Phys. 12 (1986), 568 – 573.

J. L. Tennyson, J. R. Cary and D. F. Escande, Change of the adiabatic constant due to separatrix crossing, Phys. Rev Lett. 56 (1986), 2117 – 2120.

J. Wisdom, A perturbative treatment of motion near the 3/1 commensurability, Icarus 63 (1985), 272 – 289.

(40) V. V. Vyacheslavov and B. V. Chirikov, The chaotic dynamics of Halley's comet, Preprint 86 – 184, Inst. of Nuclear Physics, Novosibirsk, 1986.

(41) N. N. Nekhoroshev, An exponential estimate of the time of stability of nearly-integrable Hamiltonian systems, Trudy Sem. Petrovsk., 1979, no. 5, 5 – 50.

(42) *Principia* 中的引理 XXVIII (见本书附录 2).

(43) 见论文: De analysi per aequationes infinitas (On analysis by equations unlimited in the number of their terms), The mathematical papers of Isaac Newton, vol. II, Cambridge University Press, 1968, 206 – 273.

(44) 维哥茨基 (M. Vygodskii) 在措伊藤的《16 与 17 世纪数学史》(H. G. Zeuthen, Geschichte der Mathematik im XVI und XVII Jahrhundert, Teubner, Leipzig, 1903) 一书的俄译本 (莫斯科, 1933) 的第 394 页上一条附注中对牛顿的证明作了难以令人信服的批评.

H. W. Turnbull 在《牛顿的数学发现》(The mathematical discoveries of Newton, Blackie and Son, London – Glasgow, 1945) 的第 68 页上指出, 牛顿的论证 "明显地表示了有这样一种思想的迹象, 这种思想后来在伽罗瓦与李二者的群理论中得到了完整的表达". 这句话是尤希克维奇 (А. П. Юшкевич) 向我提起的, 意思不清楚: 这里有什么李群?

在措伊藤的书中还谈到了葛列格里 (Gregory) 的工作, 他在牛顿之前就证明了三角函数是超越的.

(45) K. Bohlin, Bull. Astr. 28 (1911), 144.

(46) *Principia*, 命题 X.

(47) *Principia*, 命题 Ⅶ.

(48) 牛顿的论述不明确, 但是他是知道 "贝祖定理" 的, 即他知道, 次数分别为 m 与 n 的两条曲线相交最多不会超过 mn 个点. 他对这个定理的证明可能是这样的. 如方程 $f(x,y)=0, g(x,y)=0$ ($\deg f = m, \deg g = n$) 对给定的 y 能解出 x, 则对次数分别为 $n-1$ 与 $m-1$ 的多项式 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 的 $m+n$ 个线性齐次方程组有非零解. 那么就有方程组系数的一个多项式, 叫做结式 (现在我们把它叫做方程组的

行列式), 会等于零. 直接计算表明, 含 y 的结式的次数等于 mn (试证之!). 如果结式不恒等于零, 则它的根的个数不会超过 mn. 牛顿是明显地讨论过结式的.

于是, 交点的集合在投影到 y 轴上, 因而也就是投影到任一直线上时, 点的个数不会超过 mn 个, 所以它最多只包含 mn 个点. 同时, 牛顿还利用了下述极为明显的事实, 即一代数曲线与一直线的交点只有有限个 (以及螺旋线为不可约这一事实).

(49) Oeuvres mathématiques de Leibniz, part I, vol.2, A. Franck, Paris, 1853, 90 – 93.