物理学的方向

〔英〕P. A. M. 狄拉克 著

张宜宗　郭应焕 译

藏书 773080 东北师范大学

科学出版社

1981

内 容 简 介

本书收集了著名物理学家 P. A. M. 狄拉克访问澳大利亚、新西兰等国的几次学术报告. 在这些报告中，作者以他独特的见解，精辟地论述了量子力学的基本结构，它的发展、应用以及目前存在的问题，磁单极子理论与实验中的问题，引力常数变化理论，宇宙模型及其实验检验等. 这些报告深入浅出，论点明确，很有启发性，对我们了解狄拉克的见解和当前物理学理论问题很有参考价值.

本书可供大专院校师生及科研工作者参考.

P. A. M. Dirac

Directions in Physics

John Wiley, 1978

物 理 学 的 方 向

[英] P. A. M. 狄拉克 著

张宜宗 郭应焕 译

*

科 学 出 版 社 出 版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1981 年 5 月第 一 版 开本：787×1092 1/32

1981 年 5 月第一次印刷 印张： 3 1/8

印数：0001—14,000 字数：66,000

统一书号：13031·1542

本社书号：2114·13—3

定价： 0.45 元

中 译 本 前 言

1975年，英国著名物理学家狄拉克应邀访问了澳大利亚、新西兰等国，曾多次作有关量子力学及理论物理发展方向的报告. 澳大利亚新南威尔士大学教师 J. R. 谢潘斯基，根据这些报告的录音加以整理，编辑成本书，全书共包括五个演讲：

1.“量子力学的发展”是狄拉克 1975 年 8 月 25 日在澳大利亚悉尼新南威尔大学的演讲.

2.“量子电动力学”是他 1975 年 9 月 15 日在新西兰克赖斯特彻奇坎特伯雷大学的演讲.

3.“磁单极子”是他 1975 年 9 月 12 日在新西兰坎特伯雷大学的演讲.

4.“正能量相对论理论波动方程”是他 1975 年 8 月 26 日在澳大利亚悉尼新南威尔士大学的演讲.

5.“宇宙学和引力常数”是他 1975 年 8 月 27 日在澳大利亚新南威尔士大学的演讲.

狄拉克是量子力学的创造人之一，诺贝尔奖金获得者，对近代物理学的发展有卓越贡献. 他在物理学上不断地有创见. 例如，他预言了正电子的存在，不久就由实验证实. 他提出的关于磁单极子、引力常数变化等学说，至今仍是当前物理学的重要研究课题的一部分. 本书对这些问题作了精辟的阐述，对我们了解狄拉克对这些问题的见解有重要参考价值.

本书按 1978 年英文版译出，中译本略去了介绍人的开场白，其内容在“原书前言”和“原编者的话”中都已反映.

本书译稿曾经李庆澜同志协助校订，谨此致谢. 译文不当之处，希望读者批评指正.

原 书 前 言

物理学界的伟大人物被邀请到僻远国家进行访问，实在是非常难得的. 因此，在迈阿密的一次会议期间，H. 霍拉(Hora) 教授和 J. L. 休斯 (Hughes) 博士得以临时安排还健在的现代量子理论的创始人之一访问澳大利亚和新西兰，并且发表杰出的演讲，这是一件值得注意的事情. 在访问期间，狄克拉教授在新西兰的克赖斯特彻奇和澳大利亚的悉尼、阿德莱德和堪培拉发表了多次演讲，本书就是根据这些演讲整理而成的.

和我同时代的一些人，得已有幸认识卢瑟福、玻尔、海森堡、泡利、查德威克、薛定谔、爱因斯坦以及其他一些大科学家，聆听他们谈论自己的最新研究成果. 但在那时，我们这些人并没有充分认识到，我们正处在一个对于物理世界的认识发生重大变革的时期. P. A. M. 狄拉克在这个革命中作出了卓越贡献. 但是，当他在卡文迪什作关于带正电荷的电子的反粒子演讲时，我们当时都对这个反粒子不具有质子的质量感到失望；然而，不久他的新思想就被正电子的发现所证实. 当时，我们都对狄拉克的非凡洞察力深为佩服.

在物理学中会不会再次出现那样的集中发现时期，是难以预料的. 这些演讲的重要意义是：从当时新概念提出者本人那里了解新概念产生的情况及其结果. 此外，象引力常数可能随时间而变化或磁单极子存在这些问题，仍然属于推测，但正是由于这些都还是推测，更促使人们对它们进行更深入的研究.

我们对休斯博士安排狄拉克教授的这次访问，并且不辞劳苦地筹妥经费使之得以实现，表示深切的感谢. 我们还感谢为这次访问给予慷慨资助的澳大利亚和新西兰的一些团体和个人，其中特别是新南威尔士大学、阿德莱德大学、弗林德斯大学、坎特伯雷大学和澳大利亚国立大学. 我们对澳大利亚物理研究院和昆特朗分公司（Quentron Pty. Ltd.）的支持也表示谢意.

新南威尔士大学理论物理系教师 J. R. 谢潘斯基（Shepanski）不辞辛苦地根据录音带整理和编辑了这些演讲，然后送交狄拉克教授进一步审订，并经他同意出版.

马克·奥立凡特（Mark Oliphant）

原书编者的话

论述现代物理学的巨大成就和存在的问题，很难想出有比狄拉克教授更有资格和更为合适的人了．这位发展量子力学的前驱者，在物理学这个领域和其它前沿领域，至今仍在积极地从事研究工作．此外，在用浅显易懂的语言表达复杂的问题方面，他也具有非凡的才能．所以许多人，不仅包括科学家、工程师或教师，而且也包括受过教育的外行，都能从他的阐述中得到宝贵的启发．

狄拉克教授在他访问澳大利亚和新西兰期间，作了多次专题演讲，有些相同的题目曾在不同的场所重复报告，因此，本书在选材上曾经是相当困难的．

例如，这里我们决定选用他在悉尼所作的关于“量子力学的发展”的演讲，而没有选在阿德莱德的演讲（后者已有记录本，并附有 C. A. 赫斯特（Hurst）教授的评述，其副本可从阿德莱德大学数学物理系得到）．在悉尼演讲开始之前，H. J. 哥尔斯密德（Goldsmid）教授作了简短的介绍，他以澳大利亚物理研究院名义欢迎狄拉克教授（这篇介绍，中译本已删去）．在狄拉克教授访问期间，正值悉尼三所大学放暑假，即使这样，仍有五百多位听众出席，听那次演讲，这说明狄拉克教授受到的欢迎是多么热烈．

关于“量子电动力学”和“磁单极子”的演讲，选自新西兰克赖斯特彻奇坎特伯雷大学的磁带录音．磁单极子的概念是狄拉克教授的另一个卓越的见解．由于在他访问期间，表明这种磁单极子可能存在的一些实验正引起全世界的广泛兴

趣,所以这个演讲题目是非常合时的.

关于“正能量相对论波动方程”的演讲,某特点是专业性较强,或许对内行的人更为合适. 这个论题当时在新南威尔士大学理论物理系进行过专门的讨论.

最后一讲是关于“宇宙学和引力常数”的演讲,我们决定编入演讲后热烈讨论的一些摘要.

全体与会听众对狄拉克教授以他独特的见解论述物理学的方向表示深切感谢. 我们希望他的这种见解也能介绍给这本书的读者.

目　　录

中译本前言 …… ii

原书前言 …… iii

原书编者的话 …… v

1. 量子力学的发展 …… 1

2. 量子电动力学 …… 21

3. 磁单极子 …… 39

4. 正能量相对论波动方程 …… 55

5. 宇宙学和引力常数 …… 71

1. 量子力学的发展

我非常高兴地到悉尼来，并且能有机会向你们作报告．我想谈一谈关于量子力学的发展．虽然这些发展在我之前实际上已经开始，但我亲身经历了许多这些发展．量子力学是在牛顿经典力学的基础上发展起来的．牛顿建立了他的力学定律，从此这些定律就支配了整个的力学理论；并且我们发现，在用爱因斯坦的相对论作某些必要的修正后，这些定律与许多大尺度的观测结果仍符合得很好．只要把这些定律用于宏观物体，就能得出正确的结果．但当人们把这些定律用于微观物体，例如原子世界时，这些定律就完全失效了．

我们称之为经典力学的牛顿力学是我们的出发点．利用麦克斯韦理论，我们可以把这个经典力学运用于描述电荷(带电粒子)的运动．但我们将看到，我们所得到的结果并不适用于原子．

已经建立起来的原子模型是：原子有一个带正电的核心，一个或几个电子围绕着这个核心不停地运动．根据牛顿力学和麦克斯韦电磁学（当把它们应用于电子的电荷时），这些电子由于辐射要逐渐地损失能量，最后要坍缩到原子核中去，因此原子决不会是稳定的，而通常我们知道原子是稳定的，这就产生了矛盾，当然这个矛盾最初曾使人们非常困惑不安．

玻尔首先得出对这个矛盾的解决办法．他提出，我们必须假定原子可能有某些稳定的状态．在这些稳定态，它不发出辐射．这意味着把经典力学应用于带电粒子时必须假定与牛顿力学标准方程有一个偏差，即不得不忽略与辐射发射有

关的那些力. 但这些力是很小的，它们在一级近似中无关紧要. 重要的力是电荷之间的库仑力. 按照玻尔的假设，我们必须对一个原子中电子所遵守的运动方程作出这种近似，并且还必须假定原子只能在叫做稳定态的某些态中存在. 这些态是用与经典力学完全不同类型的一些条件确定的. 这一组新的条件叫量子条件，其中包括普朗克常数(用 h 表示)，这是普朗克在他的黑体辐射定律中发现的一个常数.

玻尔建立了这样的原子模型理论，在这个理论中，原子以稳定态形式存在，并且服从量子条件. 按照玻尔理论，一个原子能够从一个稳定态跃迁到另一个稳定态，在跃迁过程中，原子要发射(或吸收)辐射，以保持能量守恒. 这个被发射或吸收的辐射是具有一定频率(与能量有关)的单个量子.

这些概念和牛顿力学告诉我们的概念完全不同；满足特定条件的稳定态的概念是非常新的概念. 在解释氢原子光谱和只有一个电子起重要作用的其它简单原子的光谱时，人们发现玻尔的这些思想一直是非常成功的，这种巨大的成功使我们不得不接受玻尔理论.

我记得在我第一次听到玻尔理论时，我感到非常惊奇，因为以前在整个原子世界笼罩着一种神秘的气氛. 当我在布里斯托尔上学的时候，我没有听到过任何有关玻尔这个理论的内容，只是我在剑桥大学当研究生的时候，我才得知这个理论. 当时这个理论打开了我的眼界，使我看到了一个新的世界，一个非常奇妙的世界. 令人惊奇的是我们加上一定的条件后就能把牛顿定律用于描述原子中的电子运动. 这些条件是：首先我们必须忽略作用在电子上的与发射辐射有关的力；其次我们必须引进量子条件. 我仍然清楚地记得玻尔的这个理论当时给予我多么强烈的印象. 我认为在量子力学的发展过程中，玻尔引进的这些概念是迈出最伟大的一步. 事实上，

最出人意料之外的和最使人惊奇的是这种概念从根本上违背牛顿定律，但它居然获得了成功的结果.

后来人们对玻尔的理论进行了深入的研究，发现它的成功非常有限. 从根本上说，在处理只有一个电子起重要作用的原子体系时，这个理论是成功的，但对于含有两个或两个以上的电子，如氦原子或别的更复杂的原子体系时，人们就不知道怎样用量子条件来确定它的稳定态. 曾经作出过一些人为的假设，进行过各种各样的计算，但都未获得成功. 在我研究原子理论的时候，就是这种状况. 在那些日子里，我所面临的问题，就是每个人都在进行研究的问题，即“怎样才能够发展玻尔轨道的思想，以适用于那些更复杂的原子?”

1925 年海森堡取得了巨大的进展. 他采取了一个非常大胆的步骤，提出这样的思想：物理理论应当集中在与观测量有密切关系的那些量上. 既然，我们观测的一些量与玻尔轨道的关系只是非常间接的，所以海森堡认为玻尔轨道并不十分重要. 所观测的量，或者与观测量有密切关系的量，全都是与两个玻尔轨道有关，而不是只和一个玻尔轨道有关；这里特别重要的是两个轨道而不是一个轨道. 现在要问：这样会产生什么结果呢?

假定我们考虑具有某种性质的、与两个轨道相联系的量的全体，并且要把这些量写出来. 要写出一组量，其中每个量都和两个元素有关，通常的方法是用下面的形式：

$$\begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times & \cdot & \cdot & \cdot \\ \times & \times & \times & \times & \cdot & \cdot & \cdot \\ \times & \times & \times & \times & \cdot & \cdot & \cdot \\ \times & \times & \times & \times & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

这种形式就是用行和列把一组量排列起来，人们把行与其中

的一个态联系起来，把列与另一个态联系起来．数学家把象这样的量的集合称为矩阵．

因此，海森堡认为人们应当研究这样的一组量，并且应当把这组量的整个集合看成对应于牛顿理论的一个动力学变量．当然，这些动力学变量就是粒子的坐标，或者速度，或者动量．根据海森堡的看法，每个这样的量都应当用一个矩阵代替．导致海森堡这样考虑的基本思想是人们应当根据可观测量来建立理论，并且这些可观测量就是这些矩阵的元素，每个元素都与两个轨道相联系．

在作矩阵计算时，人们能够将矩阵相加和相乘，并且能用矩阵构成一个代数．但是这样就得到一个新的、有用的重要性质，即如果把两个矩阵 a，b 相乘，得到的积 ab 与 b 乘 a 得到的积 ba 一般并不相等．矩阵乘法有确定的运算规则，这些规则使得 ab 与 ba 的结果不相等，人们不能迴避这种规则．如果我们把动力学变量看作矩阵，这就意味着动力学变量应当满足一个代数，在这个代数中，ab 不等于 ba，这样的代数叫做非对易代数．

当海森堡最初注意到他的矩阵不满足乘法交换律时，对此他感到非常不安，他觉得也许就在这一点上他的整个理论要全归失败(自古以来，物理学家用的动力学变量总是遵守通常的代数乘法规则，即 a 乘 b 等于 b 乘 a，很难想像有不具备这种性质的动力学变量)，海森堡对此感到不安是很自然的．但这却是他的理论的基本点，而且后来证明是最为重要的一个关键．实际上，海森堡新力学的一个最重要之点就是，动力学变量服从一个代数，它不遵守乘法交换律．

从海森堡的最初思想出发，人们就能在这方面取得相当迅速的进展．当时我正好是一个研究生，我十分庆幸自己生逢其时，使我有可能也加入这个行列．

你们知道，我们所面临的问题就是要改变牛顿方程，使它适合于 ab 不等于 ba 的一个代数. 乍看起来，这似乎相当困难，但是利用哈密顿一百年前做的一些工作，就使这个问题的解决变得容易多了. 哈密顿研究了牛顿方程，他找到了表示这些方程的另一种方法. 由于拉格朗日和哈密顿找到另一种表示方法，所以才有表示这些方程的一种普遍方法，这些方程叫做方程的哈密顿形式. 哈密顿在建立方程的这种形式时，只是受了数学美观条件的影响，他也许会说："用这种方法表示的方程是非常美妙的，不过并没有真正的必要这样做，如果你愿意的话，你可以继续用原来牛顿给出的那种形式的方程。"

但是看来哈密顿对什么东西是重要的有一种卓越的见解，我认为这是一个数学家曾经有过的最杰出的见解之一. 他所发现的表示力学方程的这种形式，其重要性在一百年以后，也就是在他逝世以后很久，才为人们所认识.

方程的哈密顿形式的重要性在于很容易把它推广以引进非交换性. 人们能够用某种括号表达式写出哈密顿方程，这种括号表达式称为泊松括号，通常把它写为

$$[a,\ b],$$

(这里我不写出这个括号表达式的定义，我只是要说明：这个括号出现在哈密顿形式的方程中，并具有十分重要的意义.) 结果证明这个括号表达式，即泊松括号，相当于（或非常类似于）a 乘 b 减去 b 乘 a，再除以 -1 的平方根与一个确定的普适常数 $\hbar$ 的乘积，即相当于

$$\frac{ab-ba}{\sqrt{-1}\,\hbar}, \tag{1}$$

式中的 $\hbar$ 等于普朗克常数 h 除以 2π. 用对易子 $ab-ba$ 代替哈密顿方程中的泊松括号，按照这个公式，能够立即把一切

经典力学方程(将它们变为哈密顿形式后)变成服从非交换乘法的新型方程，这样我们便能把它们应用于量子力学的海森堡形式.

于是这便成为一种有趣的游戏,利用普遍的公式

$$[a,\ b] \to \frac{ab - ba}{\sqrt{-1}\,\hbar}, \tag{2}$$

就能把以前牛顿理论中动力学体系的各种模型变换成海森堡的新力学模型.

我们说这是一种游戏，一种大家都能玩的非常有趣的游戏，这样形容是不错的. 那时，每当人们解决了一个小问题，就能对此写出一篇论文. 在那些日子里，任何一个第二流的物理学家去做第一流的工作,都是非常容易的. 但从那以后，一直没有出现过那样令人愉快的时期. 现在第一流的物理学家做第二流的工作都非常困难. 但在另一方面，我们却有可能比较容易地从牛顿力学的哈密顿形式过渡到海森堡的新力学形式,从而形成了属于新量子力学的方程.

这样,我们虽然有了包含那些非对易量的方程,但在起初我们对这些方程没有一个普遍的解释，这真是物理理论中少见的情况.（在任何物理理论中，人们在建立方程以前，一般都知道他的方程含意是什么,但在这里，就不是那种情况，我们已经有了方程,但还不知道如何运用它们.）

起初人们根据一些简单的例子进行推测，以后才逐渐地对方程作出解释. 人们能够把相应于总能量的对角矩阵解释为其对角元素表示量子理论中各个态的能量. 此后人们才逐步地去研究更普遍的解释方法.

我可以这么说，任何一个动力学变量都有一个普遍的运动方程. 根据哈密顿的观点，任何动力学变量 u 都随时间依下式变化:

$$\frac{du}{dt} = [u, H], \tag{3}$$

式中H是哈密顿理论中的总能量. 我们看到它对应于下面的量子力学方程:

$$\frac{du}{dt} = \frac{uH - Hu}{ih}. \tag{4}$$

这样我们就得到了,在海森堡的新力学中,对于一个动力学变量就有一个普遍的运动方程.

我们必然要面临对这些新方程作出普遍解释的问题. 薛定谔的一些工作对这个问题的解决起了很大的作用. 薛定谔和海森堡当时都在独立地进行研究,薛定谔建立了自己的理论,即另一种形式的量子力学. 乍看起来,这种量子力学似乎与海森堡的理论完全不同. 薛定谔理论比海森堡理论发表得稍晚一些. 但在几个月以后,就证明了他们两人的理论实际上是完全等价的,虽然他们两人的出发点看起来是很不相同.

薛定谔理论是以德布罗意的一些工作为基础而建立起来的. 德布罗意指出了怎样才能把波和粒子二者联系起来,他提出了一个波函数,这个波函数通常表示为

$$\psi.$$

单个粒子的ψ应是粒子的三个坐标 x_1, x_2, x_3 以及时间 t 的函数,也就是

$$\psi(x_1, x_2, x_3; t).$$

德布罗意建立了一个用ψ描述的波所遵守的方程. 这个波动方程表明:如果有一些平面波在确定的方向上传播,并且具有确定的频率,那么这些波便对应于一个具有确定动量和能量的粒子. 这个对应是相对论性的对应,并且是数学上的一个精确的对应. 德布罗意根据数学的美观性提出了波和粒子之

间联系的思想，但他的理论只能应用于不受任何力作用的自由粒子. 薛定谔推广了这个理论，使它能够用于在电磁场中运动受电力和磁力作用的电子.

在薛定谔的理论中，人们可以把算符（$-ih$ 乘上对 x_r 的偏导数)作用在 ψ 上,即

$$-ih\frac{\partial}{\partial x_r}=p_r, \tag{5}$$

r 的值取 1，2 和 3，并且每个这样的算符对应于一个动量算符. 如果人们研究这样的算符，同时也研究 x_r，那么就是在研究与海森堡理论中的非对易量相类似的非对易量. 在这个基础上，人们就能建立含有算符作用于其上的波函数的薛定谔理论与海森堡理论之间的联系.

在海森堡理论中,原来并没有出现波函数 ψ，通过薛定谔的工作，才把它引进了量子力学. 后来人们发现波函数 ψ 对应于一个态，也许就是玻尔理论中的一个稳定态. 由于算符把一个波函数变为另一个波函数,算符就与两个态相联系了，这样,薛定谔理论与海森堡理论之间的等价性便建立起来.

在新力学的方程建立之后两、三年,才出现解释这个新力学的普遍方法，这个方法包括取这个波函数并构成它的模方

$$|\psi|^2,$$

而且认为 $|\psi|^2$ 是某个确定时刻粒子出现在给定位置上的几率.

在这里我引进了几率这个词，这意味着量子力学的普遍解释与几率有关. 这个普遍解释能使我们计算出某一确定事件出现的几率. 在这里的例子中，就是电子在某一时刻处于某一确定点上的几率. 按照牛顿力学（即经典力学)，我们恰好是不计算几率，而是精确地计算事件出现的时间和地点. 新力学(即量子力学)不具备牛顿力学的这种确定性. 这种缺

乏确定性的情况是理解新力学的一大障碍，因为它很难令人接受.

当然，对原子所做的实验结果确与几率有关. 根据新力学，我们能计算出这些几率，并能把实验结果与计算结果进行比较. 我们发现计算和观测结果二者互相符合. 由此看来，几率是人们真正需要的东西，不过人们对只给出几率的理论仍然并不感到满意，这便引起了一场很大的争论.

以爱因斯坦为首的一些物理学家认为：从根本上说，物理学应当是决定论的，而不应当只给出几率.然而玻尔接受了几率的解释，并且他能够使这种几率解释同他的哲学一致起来，这就引起了玻尔学派和爱因斯坦学派之间的一场大争论. 这场争论一直贯串到爱因斯坦的一生. 他们两人都是非常杰出的物理学家，问题是："他们之中谁是正确的?"

根据公认的标准原子理论概念，似乎玻尔是正确的. 以薛定谔波函数为基础的几率解释是人们能够作出的最好的解释.人们为改进这种解释作了许多的努力，力求获得比仅仅是一些几率更多的信息，但所有这些努力都以失败告终. 根据现在的量子力学理论，玻尔所拥护的几率解释是正确的. 不过爱因斯坦仍然是有道理的. 他相信，正如他所说："上帝不是玩骰子的". 他认为物理学从根本上应当具有决定论的特征.

我认为也许结果最终会证明爱因斯坦是正确的，因为不应认为量子力学的现在形式是最后的形式. 关于现在的量子力学，存在一些很大的困难，这些困难我在后面还要讲，它是到现在为止人们能够给出的最好的理论，然而不应当认为它能永远地存在下去. 我认为很可能在将来的某个时间，我们会得到一个改进了的量子力学，使其回到决定论，从而证明爱因斯坦的观点是正确的. 但是这种重新返回到决定论，只有

以放弃某些基本思想为代价才能办到，而这些基本思想我们现在认为是没有问题的.如果我们要重新引入决定论的观点，我们就应当以某种方式付出代价，这种方式是什么，现在还无法推测.

支配着新力学的基本方程及其解释的思想就是这些. 现在我想来讨论一个特殊问题，这个问题与我密切有关，即如何使这些方程和爱因斯坦的力学理论相一致的问题. 我在开头时讲过，只有对运动不太快的，即速度不大，比光速要小得多的粒子，牛顿方程才成立. 一当粒子的运动非常快，就必须过渡到一个新的力学，即爱因斯坦的狭义相对论力学. 但这个新力学仍然属于牛顿理论的范畴，并且能把它的方程化为哈密顿形式. 然而又出现一些特殊的问题，在解决这些问题时，最终要导致反物质的概念. 我想来讨论一下这个发展过程的主要特点.

我必须写出一些方程. 如果考虑一个粒子的能量，根据牛顿理论，有下面的公式：

$$E = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2m} p^2,$$

式中 p 是粒子的动量. 根据爱因斯坦理论，当 v 很大，即接近光速时，我们必须用

$$E = c\sqrt{m^2c^2 + p^2} \tag{6}$$

来代替上面的公式. 看起来爱因斯坦的这个公式与牛顿公式大不相同. 首先，差别来自这样的事实：如果粒子是静止的，根据牛顿公式，它的能量为零，但根据爱因斯坦公式，它的能量不为零，而是等于 mc^2.

爱因斯坦理论赋予粒子一个额外的能量，这个能量与粒子的速度无关，它叫做静止能量，这种能量被认为禁锢在粒子的内部. 当动量 p 的值很小时，爱因斯坦公式是

$$E = mc^2 + \frac{1}{2m}p^2 + \cdots,$$

后面还有许多包含 p 的高次幂的项. 因此在粒子运动不很快的情况下,除额外能量,与牛顿理论相符合*.

爱因斯坦能量公式和牛顿公式之间还有另一个差别，即在能量表达式 (6) 中有一个平方根. 从数学上知道，在平方根前面可以取正号或者负号. 所以根据爱因斯坦公式，这个

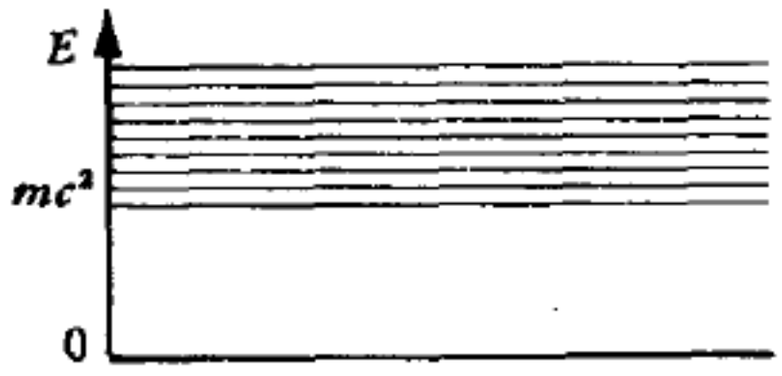

图 1　根据爱因斯坦公式得到的正能级

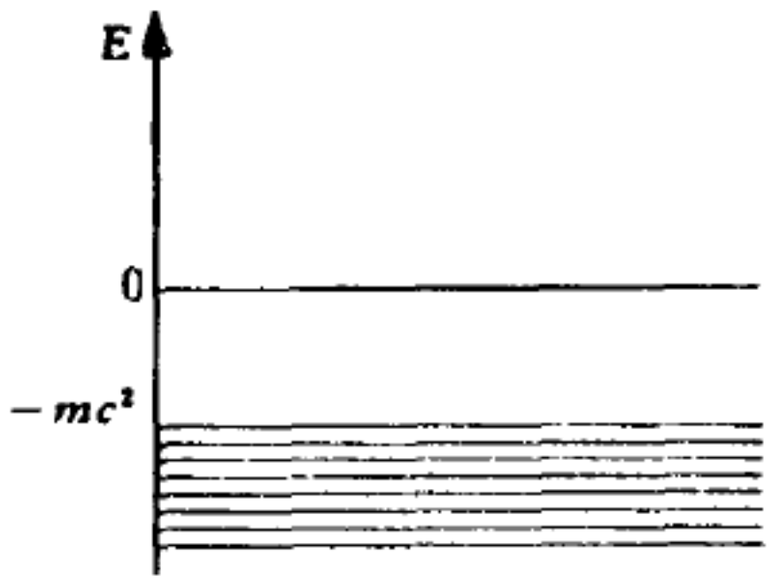

图 2　负能级

能量既可以是正的，也可以是负的. 通常人们把能量画成表示各种能级的水平线. 根据爱因斯坦公式 (6)，能级可以是 mc^2，或者是大于 mc^2 直到无穷的那些水平线. 我们在图 1 中表示了这样一组能级. 另外一组能级从 $-mc^2$ 开始一直到负无穷大，大家在图 2 中可以看到.根据爱因斯坦公式,所允许的正负能级如图 3 所示.

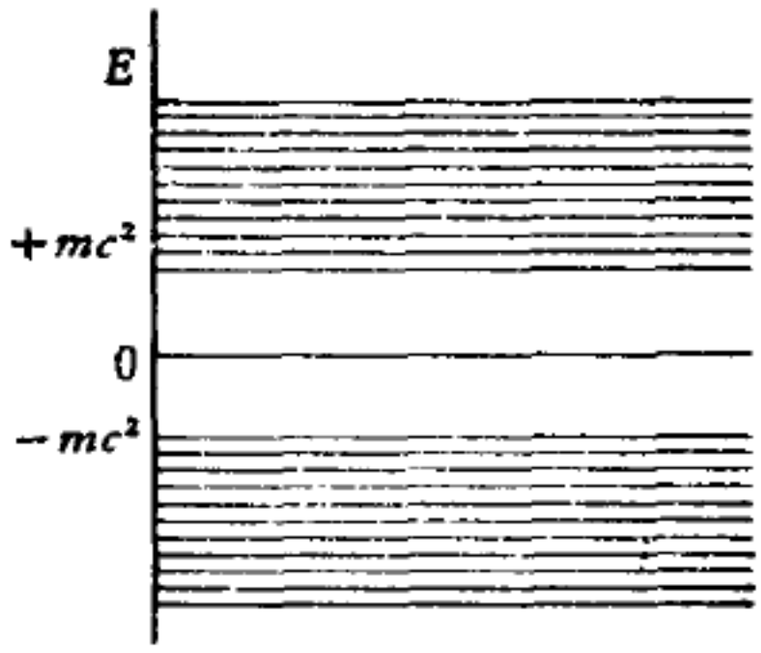

图 3　爱因斯坦公式所允许的全部能级

实际上，人们总是只看到粒子的正能量，所以爱因斯坦

* 牛顿力学只考虑 $E = mc^2 + \frac{1}{2m}p^2 + \cdots$ 中的第二项 $\frac{1}{2m}p^2$. ——译者注

公式(6)允许有负能量，而它实际上是观测不到的. 开始人们并未担心这件事，只是说："我们不要管这些负能量，完全用正能量好了。"这样做是允许的，因为如果我们从一个正能态的粒子出发，能量总是保持正值，并且理论中的这些负能量一点也不起作用.

大家知道，在没有外场时，我们可以用公式(6)描述一个粒子.我们也能把这个公式推广到在电磁场中的带电粒子，例如一个电子，而情况并没有多大变化. 我们能够在更普遍的条件下计算出能级. 我们有洛伦兹方程，即经典方程，这些方程告诉我们，当电磁场作用在粒子上时，根据爱因斯坦力学，粒子将如何运动. 人们用洛伦兹的这些方程来对一个正能量的电子进行计算.

人们也可把这些方程应用于一个负能量的电子. 据我所知，还没有人作过这种计算.在那时人们对负能量一点也不感兴趣. 如果人们从负能态出发，应用洛伦兹方程，对电子如何运动进行计算与考查，就会发现：电子总是保持在负能态上，并且它的运动就好象一个有正能量和正电荷（通常电子带有一个负电荷)的粒子运动一样. 这样，对这些负能态，看来好象把电子的能量和电荷都反了一个符号. 这就是根据经典力学加上大速度时所需要的爱因斯坦理论修正所得到的结果.

当我们转向量子力学时，情况就不同了. 这是因为在量子力学中，动力学变量能从一个值跳到另一个值，并且如果从正能量出发，就不一定保持为正能量，粒子能从一个正能态跳到一个负能态. 只要我们研究的是经典理论，我们就可以根本不管负能态；而在量子理论中，就不能这样做.

虽然这些负能态以一种非常基本的方式出现，但它并未引起人们太多的担忧，因为人们忙于解决更深奥的问题：理解和解释新力学的基本概念；那时这些问题在物理学家中占

支配地位.

然而人们仍须正视建立相对论量子力学的问题. 如果从德布罗意或薛定谔的波动观点出发来研究量子力学，我们有一个波函数 ψ，并能建立一个相对论波动方程:

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}+\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi=0, \quad (7)$$

根据德布罗意的观点，ψ 所满足的这个方程对应于一个自由粒子. 当有电场或磁场存在时，有一个推广的方程可以表明波函数如何随时间变化，这个方程比较复杂，我就不写了. 我只想说一下，这个方程是将方程 (7) 加上一些包含场量的附加项得到的.

现在人们有了单个粒子的波动方程以及存在电场或磁场时单个电子的波动方程，并且能够对波函数作出相对论的解释. 但这个相对论解释与我们对一般的薛定谔理论的解释并不一致，其原因在于方程 (7) 中有对时间的二阶偏导数 $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ 而在一般的薛定谔理论中，则有下面方程:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=H\psi, \quad (8)$$

这个方程对 $\frac{\partial}{\partial t}$ 是线性的.

结果我们发现: 根据方程 (8)，由 $|\psi|^2$ 给出的几率总是正的，这正是物理上所需要的. 而用方程 (7) 建立的几率表达式有相对论的形式，但几率并不总是正的.

因此要使量子力学与相对论相一致，存在着真正的困难. 那时这个困难使我非常伤脑筋，但它似乎并没有给其他的物理学家带来什么烦恼，其原因我不很清楚.

我想，根据海森堡运动方程（方程 4）和对应的薛定谔方程（方程 8）建立的表述形式，它的美观及其效能给我非常强

烈的印象，以致使我感到人们必须保持这种形式，而过渡到一个以 $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ 来代替 $\frac{\partial}{\partial t}$ 的不同类型的方程是不合适的. 我特别记得 1927 年在索尔瓦伊会议上的一件事情，在一次演讲的空隙时间，玻尔走到我面前并问我："你现在在研究什么？"我对他说我正在研究力求找到一个满意的相对论电子理论的问题，当时玻尔回答说，这个问题已经被克莱因解决了［克莱因得出了方程(7)*］. 我试图对玻尔解释，我对克莱因的解决不满意，并想向他说明理由. 但没能那样做，因为演讲刚好开始，把我们的讨论打断了. 但是这件事却使我看清了这样的事实：对于一个理论，其中涉及根本背离量子力学的某些基本定律，而许多物理学家对它十分满意，并且他们并未认识到有坚持这些基本定律的必要性，这和我的看法完全不同.

这个问题使我苦恼了几个月，最后终于得到了解决，我发现了另一个波动方程：

$$\left\{i\hbar\left(\frac{\partial}{c\partial t}+\alpha_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\alpha_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\alpha_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right)+\alpha_m mc\right\}\psi=0, \tag{9}$$

现在我们得到的是含有 4 个分量的波函数 ψ，而不是象方程 (8) 中的只有一个分量的波函数 ψ，式中的 α_l 是作用在 4 个分量上的矩阵. 可以证明：这个方程是一个相对论方程，并且它有一阶偏导数 $\frac{\partial}{\partial t}$，而不是二阶偏导数 $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$，因此这个方程和量子理论的基本定律相一致. 我曾建议把这个方程作为电子的运动方程.

我对这个方程进行了计算，得到电子的自旋为 $\frac{1}{2}$ 量子和

---

* 方程 (7) 称为克莱因-高登方程. ——译者注

一个磁矩，这个自旋和磁矩与观测结果相符合。这个结果确实使人大为震惊，因为这意味着：一个粒子的相对论量子理论问题的最简单的解涉及有自旋的粒子。以前我总是认为，最简单的解只涉及无自旋的粒子，而当人们已对无自旋的粒子求出了这个解后，才不得不引进自旋；而这里却证明最简单的解就包含有自旋。

这个方程很好地解释了理论的许多特点，但是负能问题仍然没有解决。新的理论仍然允许负能量和正能量一齐存在，由于其它问题解决了，所以这个负能困难就成为一个主要问题了。

如果人们利用电子的另一性质，解决负能问题原来是可能的。电子具有这样一种性质，即在同一个态上不能有两个电子。当我们对波函数加上合适的对称性条件时，这个性质就是量子力学定律的一个结果。这个性质是由泡利首先提出来作为解释元素周期表中原子结构的一个方法的。如果在任一态中，不能有一个以上的电子，则在一个原子中就会出现各种电子壳层，一个壳层填满了，再加入的任何电子必须填在外面的壳层中，这样就由一个壳层过渡到另一个壳层，用这个方法，我们建立了化学元素周期表。

如果用量子力学，我们就不能排除从正能态到负能态的跃迁，这意味着我们不能把负能态从我们的理论中排除出去。既然这样，我们就必须找到一个解释它们的物理学方法。利用一个新的真空概念，人们能够得到一个合理的解释。从前人们把真空看成是一个完全空的空间区域，一个没有任何东西的空间区域。现在我们必须采用一个新的概念。我们可以说，真空是一个具有最低可能能量的空间区域，要得到最低的能量，我们必须填满全部的负能态。填入负能态的电子越多，总能量就越低，因为每增加一个负能态的电子都意味着总能量

的减少. 因此,我们必须建立新的真空概念,其中所有的负能态都被电子占据,而所有的正能态都未被占据.

我们能够用两种方法得到非真空态: 一个方法是把一个电子填到正能态上; 另一个方法是在负能态的分布中产生一个空穴. 现在我们着重来看空穴. 如果存在一个电磁场,人们就能考查空穴将如何运动的问题. 粗略地说,空穴的运动方式和填到那个空穴上的电子的运动方式一样,这和把经过量子修正后的经典洛伦兹方程用于负能粒子得到的结果是一致的. 如同我前面所讲的那样,根据经典洛伦兹方程,这个负能粒子的运动就象具有正能量和正电荷的粒子运动一样,因此这些空穴的运动也象具有正能量和正电荷的粒子的运动一样,而不是象通常的带有负电荷的电子运动. 空穴表现为具有正电荷的一种新粒子.

这些新粒子的质量是什么? 当我首先想到这个问题时,由于对称性使我想到它的质量应当和电子的质量相同,但我未敢贸然地提出这个看法,因为我那时认为,如果这个新粒子(和电子的质量相同,电荷相反)存在,一定已被实验工作者发现. 那时大家知道的粒子只有带负电荷的电子和带正电荷的质子,以及其它已经确认有复合结构的原子核. 所以我提出了这样的看法: 空穴对应于带正电荷的质子. 至于为什么空穴的质量和质子的质量会有那么大的差别,我把它作为一个未解决的问题留下来.

当然,这确实是我的很大错误,这正是我缺乏勇气的表现. 我本来首先应该说,空穴应和原来的电子具有相同的质量. 在我的论文发表之后不久,别人就把它指出来了. 我记得韦耳(Weyl)第一个作出非常明确的说明,他说: 数学的对称性要求这些空穴应当是具有和电子质量相同的粒子(韦耳是一个数学家,他只对数学的对称性感兴趣,并没有为物理

学家从未观测到这种粒子而烦恼). 看来这是一个正确的看法. 这些新粒子现在叫做正电子，它们和电子的质量相同而电荷相反. 然而又产生这样的问题："为什么实验工作者从未观测到它们呢?" 我认为对这个问题只有一个回答，就是他们那时的成见不赞成新的粒子.

当时认为在自然界中只存在两种基本的粒子：电子和质子. 由于只有两种电荷：一种正电荷和一种负电荷，所以只需要两种粒子. 只要人们对负电荷有一种粒子，对正电荷也有一种粒子…，就足够了. 我们不需要任何别的粒子，这就是当时普遍流行的思想.

实验工作者所以从来没有观测到正电子，是因为他们对自己得到的证据视若无睹. 大家知道，人们能用威尔逊云雾室观测带电粒子的径迹，如果还存在一个磁场，径迹就会发生弯曲. 现在如果有一个带正电的粒子沿着某个方向运动，这就好象一个带负电的粒子沿着相反的方向运动一样，两者的径迹应当是相同的. 人们可以认为所观测到的全部径迹都是电子的，都对应于带负电的电子，而且全都沿着按负电荷应有的方向运动. 然而有些实验工作者已经注意到：当有一个放射源时，他们常常观测到粒子向源运动. 事实上，根据上述解释，甚至还发表过一两张粒子向源运动的径迹照片，但从没有人费力去作统计. 如果他们真的作了统计，就会注意到向源运动的粒子数目是很多的，以致不可能作这种解释. 在那些日子里，情况就是这样，人们非常不愿意提出一个新粒子.

现在情况就完全不同了. 不论在理论上或实验上，人们凭很少的证据就提出新粒子. 那时为了确定正电子却需要花几年的时间. 关于正电子的存在问题，布莱凯特 (Blackett) 提出过一些相当令人信服的证据，并且在剑桥他把这件事告诉了我，可是他对发表这样一个革命性的发现非常犹疑不决，他

希望再证实他的实验，由于这一延误，这个发现被安德森抢先发表了．当时安德森仅有这样一张穿过一块铅板的径迹照片（如图 4 所示）．从图上可看出径迹在板的一边比另一边弯曲得厉害，既然粒子在穿过铅板时，必定要损失能量，而不可能获得能量，因此这就非常清楚地确定了粒子的运动方向，而这个方向正好对应于具有正电荷的粒子．

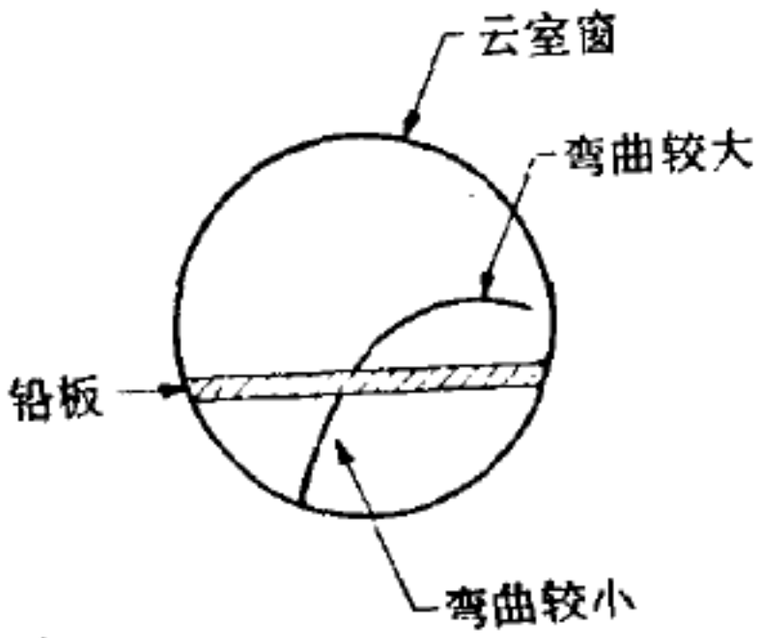

图 4　安德森观测正电子在云室内穿过铅板的实验示意图

这个发现证明了电子具有和它对应的反粒子，即正电子的存在．反粒子的概念在原子理论中实际上是十分普遍的概念．对于在任一态中不能有多于一个粒子的那些粒子（叫做费米子），除正能态之外，还有负能态．在真空中，所有负能态全被占满，而在实际中则差不多全部被占满．负能态中任意一个空穴对应于一个反粒子，现在把这个概念用于质子，就有反质子；把它用于中子，就有反中子．现在人们已经观测到这些粒子．

有了反物质的概念，我们就必须改变我们对基本粒子（或叫基础粒子）的看法．这些粒子能从一些其它形式的能量中产生出来，例如从电磁波的能量中产生出来．我们可以用电磁波扰动真空，把一个负能电子拉到正能态上，这样就产生出一个电子和一个正电子．电子和正电子是同时产生的．当然，电荷是守恒的，能量必须从外源得到．对其它费米子也有类似的情况．

如果我们能够产生出粒子，则什么是物质的基本成分的问题不再有明确的意义．以前人们可以说尽可能地把物质分解为小块，就能得到物质的最终组成部分．但如果人们能用

原子的相互作用来产生粒子，就不能对基本粒子下一个确切的定义了. 随着现代物理学的发展,发现了大量的粒子,不仅仅是两种粒子——电子和质子，现在我们发现的粒子已经有二百多种，它们当中许多都是很不稳定的，其中一些极不稳定,另一些比较不稳定.

如果人们问这些新粒子中哪些是基本粒子，对这个问题确实不能作出明确的回答. 也许倾向于认为比较稳定的粒子是基本粒子,比较不稳定的粒子不是基本粒子,但这多少是人为地划分. 例如质子和中子,它们在许多方面是非常相似的，但质子是稳定的，而中子是不稳定的. 若把它们中的一个看成是基本粒子,另一个不是基本粒子,就不合理. 因此哪些粒子是基本粒子是一个尚未解决的问题，这也是物理学家当前所关心的问题.

上面我已经讲了量子力学发展的问题，并且特别讨论了这个理论与高速运动所必须的爱因斯坦力学相结合的问题，这个结合导致产生反物质的概念. 然而这个工作并没有解决量子理论的问题,还有许多遗留的问题,这些遗留的问题集中在建立带电粒子和电磁场相互作用的精确理论的问题上.

你们可以把带电粒子的电荷看成集中在一个点上，对这个点模型进行研究. 如果你用这样的模型，你就会发现点电荷的能量是无穷大的. 这是试图建立粒子相互作用精确理论时出现的典型困难.

假如我们不把量子理论推广得太远，即不把它用于能量非常高的粒子,也不把它用于非常小的距离,那么现在的量子理论是很好的. 当我们试图把它推广到高能粒子和很小距离时,我们得到的方程就没有合理的解,相互作用总是导致无穷大的出现，这个问题使物理学家困惑了 40 年，没有取得任何实质性的进展.

正是由于这些困难，我认为量子力学的基础还没有正确地建立起来. 在当前这个基础上所进行的研究，在应用方面已经做了极其大量的工作，在这方面，人们能够找出抛弃无穷大的一些规则，然而即使根据这些规则得出的结果与观测相符合，但毕竟是人为的规则. 因此关于现在的量子力学基础是正确的说法，我是不能接受的.

我觉得当前关于这些无穷大的情况和人们研究有 $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ 的波动方程时的情况非常相似. 我认为人们太乐于接受一个有基本缺陷的理论了. 只有在对这些理论作出象从方程 (7) 过渡到方程 (9) 那样的根本改变时，才能取得真正的进展.

2. 量子电动力学

今天我想谈一下关于量子力学的某些发展．上一次我讲了量子力学的基本结构．这个基本结构涉及一些动力学变量，它们是非对易的量．因此，我们必须给出它们之间的对易关系，才能使其意义明确．当我们有了这些明确的动力学变量以后，我们还需要一个哈密顿量，即物理学中表示总能量的一个量，这个量是这些动力学变量的一个函数．

在我们有了哈密顿量（这里我用H表示）之后，就能着手建立海森堡运动方程．于是对任意一个动力学变量u，我们有

$$ih\frac{du}{dt}=uH-Hu, \tag{1}$$

这是海森堡表象的运动方程．另外，也可用薛定谔表象的运动方程，在这个表象中我们研究的是波函数ψ，它满足波动方程

$$ih\frac{d\psi}{dt}=H\psi, \tag{2}$$

H是和(1)式中相同的哈密顿量，不过，在这里是把它解释为作用在波函数ψ上的一个算符．

现在我要把这个方程应用于包含许多全同粒子的动力学体系．这个体系的波函数将包含每一个全同粒子的动力学变量．我们首先考虑波函数在粒子之间对称的可能性．由于粒子之间互相不可分辨，而体系的哈密顿量表示这些粒子的总能量，所以体系的哈密顿量H在粒子之间必须是对称的．因

此，从(2)式得到：如果ψ是对称的，则$\frac{d\psi}{dt}$也一定是对称的．这就要求：如果ψ开始是对称的，则它始终保持为对称的．

当上述这种情况发生时，就表现为自然界的一条规律，在自然界中对这些粒子只出现对称波函数．

对于一定种类的粒子，我们确实有这样一条自然定律，这类粒子叫做

玻　色　子

玻色子服从的统计与经典统计不同，这种统计是在爱因斯坦帮助下由玻色首先提出的．

人们发现光子（即光量子）必须满足这种玻色-爱因斯坦统计，因为用这种统计可以导出黑体辐射的普朗克定律，因此我们断定光子事实上是玻色子．

波函数ψ是不同粒子的动力学变量的函数：

$$\psi(q^a, q^b, q^c\cdots), \tag{3}$$

式中q^a是第一个粒子的动力学变量，q^b是第二个粒子的动力学变量……，等等．这里单个字母q表示描述那个粒子的一个态所需要的全部可对易变量．通过指定所有这些q的值，就可以在波函数(3)的值域中确定一个点．

当波函数对称时，只需要指定(3)式中出现的那些q值就足够了，而无需说明这些q的顺序．假如波函数不是对称的，就不能这样做，因为这时我们必须区分哪个粒子在哪个态上．但是当ψ对称时，就不再需要这种区分；只要说明哪些态被粒子占据以及每个态中有多少个玻色子就足够了．

用这种方法，我们有可能把ψ变换成一些新的变量的函数，

$$\psi(n^1, n^2, n^3\cdots), \tag{4}$$

式中 n^1 是这些 q 中等于第一个值（比如说“q^1”）的数目，n^2 是 q 中等于第二个值（“q^2”）的数目……等等. 这样我们就能用这些 n 作为新的动力学变量. 用这些新的动力学变量 n，就可得到新的描述方式. 每个 n 表示在一个确定态中的玻色子数. 每个 n 都是一个动力学变量，它具有本征值 0，1，2，3…… 等等，它们只有正整数本征值. 这些 n 是互相对易的：如果我们指定了一个态中的玻色子数，这并不影响我们再指定另一些态中的玻色子数.

现在我们研究一个动力学变量 n，它的本征值是正整数 0，1，2，3…… 等等. 我们立即可看出 n 与谐振子能量之间存在着一种联系. 实际上，一个谐振子有一组能级，这组能级的值构成一个算术级数. 我们可以这样选取数值系数，使得相邻两个能级之间的差等于 1. 一个谐振子还具有 $\frac{1}{2}$ 量子的零点能. 我们把零点能扣除，这样便只剩下能级 0，1，2，3……等等，这精确地对应于一个 n 的本征值. 这就意味着我们可以用一个谐振子来描述每个变量 n.

描述一个谐振子的最方便的方法是用

福 克 表 象

在这里我只讲一下这个表象的基本思想.

现在我们来研究一个谐振子，这个问题和我们前面讲的玻色子问题不同. 振子的能量(它的哈密顿量)H 等于

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2) - \frac{1}{2}, \tag{5}$$

这里我们已减去了零点能，并且通过取 $\hbar = 1$，$m = 1$，$\omega = 1$ 作了简化，因此去掉了所有那些不必要的数值系数. 我们把

这个振子的基态波函数叫做 ψ_0，ψ_0 可写成

$$\psi_0 = e^{-\frac{q^2}{2}}. \tag{6}$$

ψ_0 表示振子的正常态，即未激发态。

现在引进变量

$$\eta \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(p + iq), \tag{7}$$

这是一个复变量，而 p 和 q 是实变量。η 的复共轭是

$$\bar{\eta} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(p - iq). \tag{8}$$

应用标准的量子化条件：

$$qp - pq = i \ , \tag{9}$$

($\hbar = 1$)，可从 (7) 式和 (8) 式算出量 $\bar{\eta}\eta - \eta\bar{\eta}$。于是我们得到

$$\begin{aligned}\bar{\eta}\eta - \eta\bar{\eta} &= \frac{1}{2}(p - iq)(p + iq) - \frac{1}{2}(p + iq)(p - iq) \\ &= \frac{1}{2}(-2i)(qp - pq) \\ &= 1.\end{aligned} \tag{10}$$

实际上，这意味着 $\bar{\eta}$ 与 η 的微分算符 $\frac{\partial}{\partial\eta}$ 是等价的 $\left[\text{因为}\left(\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\eta f - \eta\left(\frac{\partial}{\partial\eta}\right)f = f\right]$，因此

$$\bar{\eta} \equiv \frac{\partial}{\partial\eta}. \tag{11}$$

福克表象就是用 η 和 $\bar{\eta}$ 来描述的。

现在我们取 ψ_0 [从 (6) 式]，并且把 $\bar{\eta}$ [利用 (8) 式] 作用在 ψ_0 上，由于

$$p = -i\frac{\partial}{\partial q},$$

我们得到

$$\bar{\eta}\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(p - iq)\psi_0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-i\frac{\partial}{\partial q} - iq\right)\psi_0$$

$$= \frac{-i}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial q} + q\right)\psi_0$$

$$= \frac{-i}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial q} + q\psi_0\right) = 0. \qquad (12)$$

所以 $\bar{\eta}$ 作用于 ψ_0 得到的结果为零.

下面我们考虑可以表示成变量 $\bar{\eta}$ 和 η 的幂级数的某个函数 f. 我们利用对易关系 (10) 把全部 $\bar{\eta}$ 因子移到右边，再把这个函数作用在 ψ_0 上，考虑到 (12) 式的结果，这样便只剩下 η 的某个函数 g 作用在 ψ_0 上:

$$f(\eta, \bar{\eta})\psi_0 = g(\eta)\psi_0, \qquad (13)$$

由此得出，剩下的独立波函数只有

$$\psi_0, \eta\psi_0, \eta^2\psi_0, \eta^3\psi_0\cdots \qquad (14)$$

等等.

另外我们发现能量 H [在 (5) 式中]就等于:

$$H = \eta\bar{\eta}. \qquad (15)$$

[事实上: $\eta\bar{\eta} = \frac{1}{2}(p + iq)(p - iq) = \frac{1}{2}(p^2 + q^2) + \frac{i}{2}(qp - pq) = \frac{1}{2}(p^2 + q^2) - \frac{1}{2} = H$]. 如果现在把这个 H 作用在态 $\eta^r\psi_0$ 上，利用对易关系 (10)，我们得到

$$H\eta^r\psi_0 = (\eta\bar{\eta})\eta^r\psi_0 = \eta(1 + \eta\bar{\eta})\eta^{r-1}\psi_0$$

$$= \eta^r\psi_0 + \eta^2(1 + \eta\bar{\eta})\eta^{r-2}\psi_0$$

$$= \cdots = r\eta^r\psi_0 + \eta^{r+1}\bar{\eta}\psi_0,$$

于是根据 (12) 式，我们便有

$$H\eta^r\phi_0 = r\eta^r\phi_0. \tag{16}$$

这一结果表明态 $\eta^r\phi_0$ 是振子的一个稳定态，将 $\frac{1}{2}$ 单位的零点能除外，这个态的能量正好是 r 个单位. 如果你愿意，你可以说[见(14)式] ϕ_0 是未激发态，$\eta\phi_0$ 是第一激发态，$\eta^2\phi_0$ 是第二激发态，…… $\eta^r\phi_0$ 是第 r 个激发态，等等. 这样你便得到用一个非常简单的方法来表示振子的所有不同的激发态.

福克的这个表象对我们正在讨论的玻色子非常有用. 现在我们对每个玻色子态引进一个振子. 请注意：不是对每个玻色子引进一个振子，否则将是很大的错误. 在一个玻色子态中，允许有 n 个玻色子，我们把这个态和处于第 n 个激发态的振子相对应(对应于那个玻色子的态). 用这种方式，便能把玻色子集合的任一个态与振子的一个激发态联系起来. 在任一玻色子态中，玻色子的数目等于所对应的振子激发态的能级.

这是一个非常值得注意的事实，这一事实构成光的波动说和微粒说互相一致的基础. 如果我们从微粒观点来考察光，我们便看到光子是玻色子，并且必须根据玻色子的普遍理论来处理它们；如果我们以波动观点来考察光，便看到波的各个福里叶分量都是谐振子，并且可用福克方法来处理它们. 现在我们了解这两种处理方法之间有一定的联系：一个玻色子集合和一个振子集合正是同一物理实体的两种不同的数学描述. 电磁场既可以看作是一个光子集合，又可以看作是一系列的电磁波.

在福克方法中出现的变量 η 和 $\bar{\eta}$ 具有简单的物理意义：算符 η 使激发能级增加一个量子，而 $\bar{\eta}$ 使激发能级减少一个量子. 这样我们便能理解方程(12) $\bar{\eta}\phi_0 = 0$ 的含意了. 因为如果我们取未激发态（即 ϕ_0），并想把激发能级减少一个量

子，结果得到零，这在物理上是显而易见的.

现在我们用那些使电磁场一个分量的激发能级增加或减少一个量子的算符来建立电磁场的数学描述. 这些算符 η，$\bar{\eta}$ 也可以描述为一个玻色子的发射和吸收算符，η 是发射算符，它使激发能级增加一个量子，$\bar{\eta}$ 是吸收(湮灭)算符，它使激发能级减少一个量子：

$$\text{算符}\begin{cases}\eta \rightarrow \text{发射}, \\ \bar{\eta} \rightarrow \text{吸收(湮灭)}.\end{cases} \tag{17}$$

对每个玻色子态，我们有一对变量 η^a 和 $\bar{\eta}^a$，它们之间的对易关系是什么？这种对易关系如下：

(i) 对于不同的玻色子态的变量互相对易：

$$\text{发射算符全部对易：}\ \eta^a\eta^b - \eta^b\eta^a = 0, \tag{18}$$

$$\text{吸收算符全部对易：}\ \bar{\eta}^a\eta^b - \bar{\eta}^b\bar{\eta}^a = 0. \tag{19}$$

(ii) 当 a 和 b 不相同时，$\bar{\eta}^a\eta^b - \eta^b\bar{\eta}^a = 0$；当 a 和 b 相同时，$\bar{\eta}^a\eta^b - \eta^b\bar{\eta}^a = 1$. 所以我们可写为

$$\bar{\eta}^a\eta^b - \eta^b\bar{\eta}^a = \delta^{ab}, \tag{20}$$

式中 δ^{ab} 是克罗内克 δ 符号. 当我们处理电磁场或玻色子的任一集合时，为了用量子力学来描述这个体系，我们需要引进满足上述对易关系的那些变量 η 和 $\bar{\eta}$.

上面我一直都在讲关于玻色子的集合. 人们还可以有另一种全同粒子的集合，这种粒子集合的总波函数在粒子之间是反对称的(而不是对称的). 这时 (2) 式中的波函数 ψ 就取这种反对称波函数，并且，如果 ψ 开始是反对称的，则它始终保持为反对称的. 这样我们就得到另一种可能性，来描述另一种粒子，这种粒子叫做

费　米　子

它们有一个特性，即在同一态中不能有两个这种粒子，因为，

如果ψ是反对称的[参看公式(3)],我们就不能使其中的两个q相同,不然的话,ψ就变为零. 两个费米子不能处于同一态的性质(称为泡利不相容原理)适用于电子,也适用于自然界中某些其它类型的基本粒子.

现在我们能进一步发展费米子的理论. 这个理论与前面的玻色子理论相似, 但在理论中出现的费米子变量不能以任何方式与谐振子相联系. 然而即使在费米子的情况下, 我们也能引人费米子的发射算符η和吸收算符$\bar{\eta}$, 正如以上对一个玻色子引人发射算符η和吸收算符$\bar{\eta}$一样.

我没有时间详细阐述费米子理论; 我只能讲一下它的结果. 我们同样有一对独立的算符η和$\bar{\eta}$与一个费米子态相联系. 但这些算符η和$\bar{\eta}$所满足的对易关系与玻色子算符的不同,即

$$\eta^a\eta^b + \eta^b\eta^a = 0\,, \tag{21}$$

$$\bar{\eta}^a\bar{\eta}^b + \bar{\eta}^b\bar{\eta}^a = 0\,, \tag{22}$$

和

$$\bar{\eta}^a\eta^b + \eta^b\bar{\eta}^a = \delta^{ab}. \tag{23}$$

这里除用"+"号代替前面玻色子的"−"号外, 这些关系式分别与(18),(19)和(20)有相同的形式.

我认为这是一个非常值得注意的数学结果, 但我们还不知道它包含着哪些更深刻的真实意义, 因为这在物理上是两种完全不同的情况. 在方程(18)—(20)中, 我们所研究的那种粒子, 其任意多个都可以处于任何同一态中, 而在方程(21)—(23)中所研究的粒子, 它们中任意两个却不能处于同一态中. 这在物理上是十分不同, 但两种情形的代数方程却非常相似.

现在我们取方程(21), 并令$b = a$, 这时我们得到

$$(\eta^a)^2 = 0, \text{(不对指标 } a \text{ 求和)} \tag{24}$$

这仅仅意味着我们不能把两个费米子发射到同一态中. 如果我们试图把两个费米子发射到同一态中去，得到的波函数就等于零. 在玻色子的情况下，没有任何与方程(24)对应的东西［因为如果在（18）式中令 $b = a$，则只得到恒等式 $(\eta^a)^2 = (\eta^a)^2$］.

在两种情况下（玻色子情况和费米子情况），在一个态中的粒子数可用下面的算符表示：

$$n^a = \eta^a\bar{\eta}^a \quad \text{（不对指标 } a \text{ 求和）.} \tag{25}$$

在玻色子情况下［其中算符 η^a 和 $\bar{\eta}^a$ 满足条件（18)—(20)］，这个算符具有本征值 0，1，2，3，… 等等. 在费米子情况下［其中算符 η^a 和 $\bar{\eta}^a$ 满足条件(21)—(23)］，算符 n^a 的本征值只有 0 和 1. 因此在任一态中只有两种可能性：当这个态未被占据时，费米子的数目为 0；当这个态被占据时，费米子的数目为 1，这时这个态是满的，所以其它的(相同的)费米子不能跳到这个态中.

在任何量子场论中，所使用的基本动力学变量就是这些. 然而人们应当作一个技术上的推广. 大家知道，我在前面一直假定：不同的态(不论对费米子还是对玻色子)全部是分立的，这在实际上并不成立. 通常人们把不同的态取为粒子的动量本征态，因此表示态的指标 a 要用粒子动量的三个分量来代替. 如果粒子具有自旋，还需加上自旋值. 这样做之后，我们在方程式(20)和(23)中所用的克罗内克 δ^{ab} 符号必须用下式代替：

$$\delta(p_1' - p_1'')\delta(p_2' - p_2'')\delta(p_3' - p_3'') \tag{26}$$

(没有自旋时)，式中 (p_1', p_2', p_3') 和 (p_1'', p_2'', p_3'') 表示两个态的动量. 这只是技术上的推广，当由分立量子态过渡到连续范围内的量子态时，我们总要这样做. 以上回答了我们问题的第一部分，即在描述量子场论时决定采用什么动力学变量.

下一个问题是求出哈密顿量 H. 哈密顿量是体系的总能量. 必须恰当地选择哈密顿量以便能正确地得出体系的运动方程. 这里我想用纯辐射场为例来说明如何选取哈密顿量.

设有一电磁场,并且假定不存在电荷,这样我们便只有光子场. 这时我们可以把电场和磁场作为动力学变量. 我们必须在一个特定时刻,取分布在整个空间的动力学变量. 因此我们在确定时刻 t,取三维空间任一点 (x_1, x_2, x_3) 上的电场矢量 $\mathscr{E}$ (作为例子)

$$\mathscr{E}_r(x_1, x_2, x_3; t), \quad r = 1, 2, 3. \tag{27}$$

同样我们取磁场矢量 $\mathscr{H}$:

$$\mathscr{H}_r(x_1, x_2, x_3; t), \quad r = 1, 2, 3. \tag{28}$$

这两个矢量是描述纯辐射电磁场所需的动力学变量.

你们应当注意: 我们已经在很大程度上违背了四维对称性,而四维对称性是在相对论理论中所希望有的,但当我们转向哈密顿形式时, 必须放弃四维对称性,这是不可避免的,我们恰好不能挽救这点, 因为全部动力学变量都是取在一个确定的时刻.

哈密顿量等于总能量, 我们把它看作和经典理论中电磁场的总能量相同:

$$H = \frac{1}{8\pi}\int [\mathscr{E}^2(x_1, x_2, x_3) + \mathscr{H}^2(x_1, x_2, x_3)]dx_1dx_2dx_3. \tag{29}$$

变量 $\mathscr{E}$ 和 $\mathscr{H}$ 的运动方程是什么? 根据麦克斯韦理论,我们知道它们的运动方程是:

$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial t} = \nabla \times \mathscr{H}, \tag{30}$$

和

$$\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial t} = -\nabla \times \mathscr{E}, \tag{31}$$

此外还有方程

$$\nabla \cdot \mathscr{E} = 0, \tag{32}$$

$$\nabla \cdot \mathscr{H} = 0. \tag{33}$$

这两个方程表示对这些变量必须加上的限制条件.

方程(30)和(31)告诉我们 $\mathscr{E}$ 和 $\mathscr{H}$ 如何随时间而变化. 它们应当对应于量子理论中的海森堡运动方程,因此在量子理论中,我们要求:

$$i\hbar\nabla \times \mathscr{H} = \mathscr{E}H - H\mathscr{E}, \tag{34}$$

和

$$i\hbar\nabla \times \mathscr{E} = H\mathscr{H} - \mathscr{H}H. \tag{35}$$

我们能从这些海森堡运动方程推断出量 $\mathscr{E}$ 和 $\mathscr{H}$ 之间的对易关系. 当我们取(29)式所表示的哈密顿量H时,必须能从 $\mathscr{E}$ 和 $\mathscr{H}$ 之间的那些对易关系得出方程(34)和(35),这个问题十分明确,我们能容易地计算出来.

结果是在整个空间中 $\mathscr{E}$ 的各个分量之间全部互相对易,同样在整个空间中 $\mathscr{H}$ 的各个分量也全部互相对易. 如果两个场点,$\mathscr{E}$ 场点和 $\mathscr{H}$ 场点,靠得非常近,则 $\mathscr{E}$ 的一个分量和与其垂直的 $\mathscr{H}$ 的一个分量是非对易的,这时我们在对易子中要引进 δ 函数的导数. 一个典型的关系式是:

$$[\mathscr{E}_1(x_1', x_2', x_3'), \mathscr{H}_2(x_1'', x_2'', x_3'')] -$$

$$= \delta(x_1' - x_1'')\delta(x_2' - x_2'')\frac{\partial}{\partial x_3'}\delta(x_3' - x_3'').$$

在任何情况下,一个 $\mathscr{E}_r$ 和一个 $\mathscr{H}_s$ 的对易子只是一个数.

这里,我们也能够引人变量 η 和 $\bar{\eta}$,来表示一个光子的发射和吸收. 用这种方法,我们便得到一个满意的纯辐射电磁场的量子理论.

对于电子集合我们也可以这样做,而且我们还可以引人电子和电磁场之间的相互作用. 为此,我们首先写出表示电

子能量的哈密顿量，加上只表示电磁场能量的哈密顿量，然后再引入相互作用项，并把该项加到哈密顿量上，以便得出正确的运动方程式．结果对于与电磁场相互作用的电子加上和它对应的正电子的集合，我们就能十分确定地得到表示这个动力学体系总能量的哈密顿量．

因此，这个哈密顿量由只表示粒子能量的项加上表示相互作用能量的项组成：

$$H_{总} = H_{粒子} + H_{相互作用}. \tag{36}$$

通常用微扰方法来处理这样一个哈密顿量．这时人们把哈密顿量的相互作用部分看作是引起跃迁的部分，在这个跃迁中，一些粒子被发射和另一些粒子被吸收．

对于每个这样的跃迁，动量是守恒的，但能量不守恒．对能量和动量之间的这个差别，你也许会感到奇怪．出现这个差别的原因，仅仅是由于我们这里讲的是关于在某一时刻的能量，(36) 式中的哈密顿量 H 只适用于某一时刻的情况，而且它还包括一个对整个三维空间的积分．既然，每当我们只讲某一时刻，能量就不能完全确定．所以在发生跃迁时，能量不一定守恒．

这里我还想指出这个理论的进一步的发展，因为这个发展是非常简明和令人满意的．首先我们得到的哈密顿量实际上不是用我们讨论过的电磁场矢量变量 $\mathscr{E}$，和 $\mathscr{H}$，表示的，而是用四维矢势分量 $A_\mu(\mu = 0, 1, 2, 3)$ 表示的．(29) 式的哈密顿量表示一个纯辐射场的能量，这个场只具有横向电磁波．只要我们仅仅讨论横波，我们就不能引入粒子之间的库仑相互作用．为了引进这个相互作用，我们必须引入纵向电磁波，并把它们包括在矢势 A_μ 中．

纵波可以用一种数学变换消去，因为纵波和实验的联系不是那么直接的，我们希望把它们消去．而消去纵波的结果，

对于电子的发射和吸收就要用一些新的变量来代替原来的π、和η算符. 这些新变量有十分简明的物理意义. 每个新变量η表示一个电子与围绕它的库仑场一起发射，而不是只发射一个裸电子;同样,每个η表示一个电子和它的库仑场一起湮灭. 这样我们就得到理论上的一个新见解：电子始终有伴随着围绕它的库仑场;每当发射一个电子时,便同时发射围绕它的库仑场，这好像给电子穿上一种衣服. 同样，每当吸收一个电子,也同时吸收围绕它的库仑场.

当然这种见解在物理上是十分合理的，但它却意味着与相对论原理有相当大的偏离. 因为如果你有一个运动着的电子,则围绕它的库仑场就不是球对称的,但是现在必须随同电子一起发射的,却是球对称的库仑场!

当我们作消去纵向电磁波的变换时，在哈密顿量中出现新的一项，这个新的项恰好就是所有带电粒子之间相互作用的库仑能:

$$\sum_{(1,2)} \frac{e_1 e_2}{r_{12}}, \tag{37}$$

式中对所研究体系的态中存在的全部粒子对求和. 当我们进行消去纵波的变换时,便自然地出现这一项.

这部分量子电动力学确实是十分令人满意的. 由于时间不多，在这里我只能对你们作一个简要的概述. 人们还能够对细节加以补充，并且使每件事情看来都很正确. 然而当我们进一步考虑求解方程时,便又遇到了麻烦.

如果我们想要得出方程的解,就要从解薛定谔方程(2)

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi \tag{38}$$

入手.通常的求解方法是微扰法,其中把所有的相互作用项都作为微扰项处理.

人们试图从某个确定的初态出发，用微扰法来求方程的解. 这样得出第一级修正结果完全无问题，但当人们试图计算第二级修正时，就导致一些结果为无穷大的积分. 不管人们选择什么样的初态，在求解过程中，总会出现这些无穷大积分.

这种情况实在使人非常烦恼. 我认为正确的结论应是薛定谔方程(38)没有解. 总之，尽管人们把这个方程研究了几十年，但没有人能求出一个解. 我认为答案就是这个方程恰恰没有解.

假设我们取一个非常简单的情形：我们从一个没有电子，没有正电子，也没有光子的态出发，即从完全不存在粒子的态出发. 这时如果应用微扰法，我们就会发现：从没有粒子的态出发，却会使粒子产生. 这是因为在方程(38)中，哈密顿量含有一些项，与同时产生一个电子，一个正电子和一个光子相对应. 这三个粒子是一起产生的，这时动量守恒，能量不守恒. 结果是初态不能继续保持为没有粒子的态. 在一级近似中(第一级微扰)就有粒子产生出来，然后当人们取第二级近似时，就得出无穷大. 因此，即使从这个非常简单的情形出发，仍然得不到(38)式的一个解.

人们或许会说，在没有粒子的地方，就是真空. 但这里情况不是这样. 因为真空应当是一个定态. 真空一定是存在大量粒子的一个态，这个态相当于薛定谔方程的某个定态解. 但是这个薛定谔方程没有已知的解，甚至没有一个能代表真空的解.

人们也许会说，这是一种非常不幸的情况，根本不能用这个理论解决任何问题. 然而实际情形并非如此悲观，因为从实验观点看，我们不想做关于真空的计算. 对真空没有实验可做，实验工作者不能给我们任何数据来和真空的计算进行

比较. 实验工作者只关心非真空的情况.

我们可以通过取真空态的波函数 ψ (比如说 $\psi^{真空}$), 然后把一个电子的发射算符 $\eta^{(e)}$ 作用在这个真空态波函数上:

$$\eta^{(e)}\psi^{真空}, \tag{39}$$

用这个方法来脱离真空. 我们不知道(正如刚才指出的) $\psi^{真空}$ 是什么, 但我们可以把海森堡运动方程应用于这个电子发射算符 $\eta^{(e)}$, 这样我们就知道了 (39) 式表示的这个东西如何随时间而变化.

在这些条件下无穷大的困难并不十分严重. 纵然如此, 当我们试图解海森堡运动方程时, 在第二级近似中, 我们还是得到一个无穷大, 可以把这个无穷大解释为电子的一个额外的自能. 自能恰好也是无穷大, 这就导致 (质量) 重整化概念:

重 整 化

我们可以这样说, 最初引入方程中的电子质量和观测质量并不相同. 当我们引入电子与电磁场的相互作用时, 这个相互作用便使质量发生改变, 致使电子质量与运动方程中原来的质量参数不同.

假如质量的改变是很小的, 或者即使并不小, 但只要是有限值, 上述观点就是一个相当合理的物理见解. 然而当质量的改变是无穷大时, 就很难赋予它什么意义; 实际上, 人们从试图解方程得到的无穷大和人们将质量重整化得到的无穷大恰好具有相同的性质.

我想能把这一点讲得略微明确一点, 即指出这个无穷大的形式为

$$\int_0^\infty dv. \tag{40}$$

式中 ν 是考虑到哈密顿量中导致产生电子-正电子对和光子的微扰项时，被发射的光子的频率. 由于光子频率可以达到无穷大，所以积分 (40) 就变为无穷大. 对于有一个库仑场围绕着的点电子来说，这个无穷大与在经典洛伦兹理论中一个电子的无穷大静质量之间，人们可以找到一个类比. 库仑场具有能量，当认为电子的电荷集中于一点时，人们对库仑场能量进行积分，就得出一个无穷大，这个无穷大和(40)式基本上有相同的性质.

当人们考虑完整的电子理论，即包含电子和正电子——正电子表现为负能电子海中的空穴——的电子理论时，上述情形要稍作修改，这时得到另一种类型的无穷大，(40)式的积分要用与

$$\int_0^\infty \frac{d\nu}{\nu} \tag{41}$$

成正比的一个量来代替，当 ν 很大时，它给出一个对数型无穷大：

$$\sim (\log \nu)_{\nu\to\infty}. \tag{42}$$

这意味着完整的电子理论使无穷大不太严重.

这个结果在物理上可以这样理解：电荷的存在要引起它周围的真空产生极化，这是因为电荷倾向于在它周围产生电子对；而极化对原来电子的库仑场又有某种程度的补偿，正是这个（部分地）补偿，使得(41)式的无穷大没有积分(40)式的无穷大那样严重，但它毕竟还是一个无穷大.

尽管有这些困难，人们还是继续沿着这些方向进行广泛地计算. 人们已算过一个外电场或外磁场对发射算符 $\eta^{(e)}$ 所联系的电子能量的影响. 已经发现，不论电场或磁场，都要使电子能量(当然必须去掉无穷大项)产生一个小的修正. 对于氢原子能级，这个小的修正可解释为兰姆移动；而对于磁场中

的一个电子来说，可解释为电子的一个额外磁矩，即反常磁矩. 这些计算给出的结果和观测结果完全符合.

因此，许多物理学家对此状况非常满意. 他们说，“量子电动力学是一个好的理论，我们再也不必为它操心了.”我必须说，我对这种状况很不满意，因为这个所谓“好的理论”毕竟还包含略去了一些无穷大，这些无穷大是在它的方程中出现的，而且是以一种武断的方式略去的，这在数学上恰恰是不合理的. 合理的数学可以略去原来是微小的量，不能因为这个无穷大量是你所不想要的而把它略去!

人们用一个截断技巧便能把兰姆移动和电子反常磁矩的计算纳入合理的形式. 这个截断技巧把积分中的积分上限不取为无穷大，而取为某个有限值. 因此在电子和电磁场的相互作用中，把超过某一极限频率（ν_{max}）的部分截去，让这个截止频率与某个能量(比如说取约 10^9 电子伏) 相对应，是合理的.

由于在 (42) 式中出现对数函数，用截断技巧得出的相应表达式

$$\int^{\nu_{max}} \frac{d\nu}{\nu} \sim \log \nu_{max}$$

并没有给出明显不同的结果. 当人们用这种截断技巧计算到第一级精度时，仍有效地得出相同的兰姆移动和相同的反常磁矩. 于是就得出一个理论，其中不出现无穷大，这在数学上就是合理的理论了.

当然，一个不幸的结果是破坏了理论的相对论不变性. 因为只要你做截断，比如说 ν 必须不大于某个确定值；你就是引进了一个非相对论条件，就破坏了理论的相对论不变性. 因此，人们以破坏理论的相对论不变性为代价，才把量子电动力学变为一个数学上合理的理论. 不过我认为这比起违反标准

数学规则而略去无穷大的量来，只是一个较小的不幸.

我不同意当前许多物理学家的所谓“好的理论”的观点，我不能接受违反标准数学规则的作法. 当然，从这个研究中得出的合适的推论是：基本方程是不正确的. 对于这些方程必须进行某种巨大的改革，使得在理论中根本不出现无穷大，从而使我们能够合理地按照通常的规则求出方程的解，而不受到这些困难的干扰.这一要求需要某些真正巨大的变革，一般的改变是不够的，这正是因为在目前的理论中海森堡运动方程非常令人满意. 我认为，所需要的变革之大，正象从玻尔轨道理论转变到量子力学所经历的那样.

3. 磁 单 极 子

我想向你们谈一下关于量子理论的一个应用，即对磁单极子问题的应用．我首先要讲一下导致人们去考虑磁单极子的理论思想，然后介绍最近声称发现磁单极子的实验．

我们从薛定谔波函数的概念着手，对磁单极子的讨论不需要作相对论的处理；可以只用三维空间的观点来讨论它．假定（对某种粒子）有一个波函数，比如说 ψ，它是三个坐标 x_1，x_2，x_3 的函数，并且也可以随时间变化：

$$\psi(x_1, x_2, x_3; t). \tag{1}$$

大家知道波函数的通常解释是：如果这个波函数是归一化的，它的模方 $|\psi|^2$ 就表示粒子在任一特定位置上出现的几率．

这个 ψ 通常是复数，因此我们能用一个相因子来乘它．相因子是形式为 $e^{i\gamma}$ 的一个数，其中 γ 是实数，所以 $e^{i\gamma}$ 是模为 1 的数．因此，如果我们用 $e^{i\gamma}$ 乘 ψ，我们便得到另一个波函数 Ψ：

$$\Psi \equiv e^{i\gamma}\psi, \tag{2}$$

Ψ 的模方等于 ψ 的模方：

$$|\Psi|^2 = |\psi|^2. \tag{3}$$

所以 Ψ 所对应的几率分布和由 ψ 确定的几率分布相同．

但是在 (2) 式中的 γ 不一定是一个数，它可以是位置的函数，甚至还可能是时间的函数．因此我们把 γ 取为 x_1，x_2，x_3 以及 t 的函数．这时我们仍然有新的 Ψ，它和 ψ 有相同的几率分布．于是我们有

$$\Psi(x_1, x_2, x_3; t) = e^{i\gamma(x_1, x_2, x_3; t)}\psi(x_1, x_2, x_3; t). \tag{4}$$

然而这个新的Ψ和原来的ψ不满足同一个波动方程，因为如果我们计算$\partial\Psi/\partial x_r$（对应于$iP_r$），$r$取1，2，3，我们便得到：

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x_r} = e^{ir}\left(\frac{\partial}{\partial x_r} + iK_r\right)\psi. \tag{5}$$

式中K_r是位置的一个函数：

$$K_r \equiv \frac{\partial\gamma}{\partial x_r}. \tag{6}$$

如果ψ满足某个含有$\frac{\partial}{\partial x_r}$的波动方程，则函数$\Psi$将满足对应的波动方程，其中以算符$\partial/\partial x_r + iK_r$代替偏导数$\partial/\partial x_r$.

现在让我们进一步讨论这个问题．假设γ是数学家通常所说的不可积函数．我们设想γ在空间任一点没有一个确定值，但当我们从一点移到相邻点时，它在数值上将有一个确定的变化．我们可以连续移动这个点，并且绕一个闭合迴路移动．随着点的这种移动，γ将连续地变化．在移动结束(回到迴路的起始点）时，作为所有这些变化的结果，γ的值将和起始值不同．因此当绕闭合迴路一周时，γ的值可以改变．由于这个原因，γ在空间每一点没有一个固定值．

现在我们把这样一个(不可积的)γ引入表达式(4)的相因子中，结果仍然得到一个含有(5)式中出现的那类算符的方程．但是式中的K_r是指γ在一点移向相邻的另一点时的变化，并且这个变化将不再能表示成一个标量的梯度［这就是说，表达式(6)不再适用］．我们必须把K_r看作更普遍的东西，使得取$K_r dx_r$绕闭合迴路积分时，其结果不一定为零，也就是

$$\oint K_r dx_r \text{ 不一定等于 } 0. \tag{7}$$

如果我们这样做，我们就能得到一个物理理论；这个理论比起

我们以前的理论来，无疑具有更加普遍的意义.

但实质上这并不是什么新东西，因为它和在电磁场中一个电子所满足的方程非常相似. 如果我们有一个不存在任何场的电子理论(它可以是经典的哈密顿理论，或是量子理论)，那么通过取无场时的动量变量 P_γ，并用 $P_\gamma + \frac{e}{c} A_\gamma$ 代替 P_γ，即

$$P_\gamma \to P_\gamma + \frac{e}{c} A_\gamma, \tag{8}$$

我们就可以引进一个场. 式中 A_γ 表示这种场的势. 这时，如果波函数 ψ 满足一个不存在任何场的特定的波动方程，则在由势 A_γ 确定的场中，Ψ 将满足相应的波动方程，在这个方程中，P_γ 已用 $P_\gamma + \frac{e}{c} A_\gamma$ 代替. 由于

$$P_\gamma = -ih \frac{\partial}{\partial x_\gamma}, \tag{9}$$

所以 $\partial/\partial x_\gamma$ 也已按照下式代换了:

$$\frac{\partial}{\partial x_\gamma} \to \frac{\partial}{\partial x_\gamma} + \frac{ie}{\hbar c} A_\gamma. \tag{10}$$

在波动方程中的这个变化，相当于引入电磁势 A_γ 所引起的变化. 我们看到这和上面不可积相因子所引起的变化

$$\frac{\partial}{\partial x_\gamma} \to \frac{\partial}{\partial x_\gamma} + iK_\gamma \tag{11}$$

具有相同的特征. 事实上，如果

$$K_\gamma = \frac{e}{\hbar c} A_\gamma, \tag{12}$$

这些变化就是相同的.

这就意味着引入不可积相因子和引入电磁势一样，势与相因子的不可积性由方程(12)相联系，这就赋予电磁势一个

新的形象. 到此为止还没有给出任何新的物理理论，而只是对有势作用在电子上的薛定谔方程作了一种新的数学描述.

我们现在来讨论位相的总变化. 这就是说，当我们绕闭合迴路一周时，γ 的总变化为

$$(\Delta\gamma)_{\text{迴路}} = \oint_{\text{迴路}} K_\gamma dx_\gamma. \tag{13}$$

如果使 K_γ 等于 $\frac{e}{\hbar c} A_\gamma$ [根据 (12) 式]，则有

$$(\Delta\gamma)_{\text{迴路}} = \frac{e}{\hbar c} \oint_{\text{迴路}} A_\gamma dx_\gamma.$$

我们可以应用斯托克斯定理，这个定理能把任一绕闭合迴路的积分表示成以该闭合迴路为周界的一个面积分. 由此我们得到

$$(\Delta\gamma)_{\text{迴路}} = \frac{e}{\hbar c} \iint_{\text{迴路围的曲面}} \nabla \times \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S}. \tag{14}$$

因此我们有

$$(\Delta\gamma)_{\text{迴路}} = \frac{e}{\hbar c} \iint_{\text{迴路围的曲面}} \mathscr{H} \cdot d\boldsymbol{S}. \tag{15}$$

式中 $\mathscr{H}$ 是磁场. 于是当绕闭合迴路一周时，γ 的总变化等于数值因子 $\frac{e}{\hbar c}$ 乘以穿过迴路的磁通量.

现在我们要引入一个新的因子. 我们必须考虑，γ 纯粹作为波函数的一个类相因子 (phase-like factor)，它不确定到这样的程度，我们能给它加上 2π 的整数倍. 事实上，在 (2) 式中我们用 $\gamma + 2\pi$ 代替 γ，完全不影响这个方程. 如果我们取刚才推导出来的方程 (15)，就会看到方程的左边确实是不确定到这样的程度，我们能够给它加上 2π 的任意整数倍. 所以，(15) 式按其现有形式不可能是完备的和确定的方程；它的左边不确定，而右边完全确定. 因此在利用不可积相因

子来解释电磁势的这种描述中，我们必须把方程（15）推广为下面的形式：

$$(\Delta\gamma)_{\text{回路}} + 2n\pi = \frac{e}{\hbar c} \iint_{\text{回路围的曲面}} \mathscr{H} \cdot d\boldsymbol{S}, \qquad (16)$$

n 是正整数或负整数．这样一来，如果我们取任一闭合迴路，当绕该迴路一周时，γ 的变化量加上 2π 的一个未知的整数倍就等于 $\frac{e}{\hbar c}$ 乘以穿过该迴路的磁通量。

请你们注意，我在这里讨论的只是一个特定的波函数，其实所有的波函数都必须有同样的不可积相因子． 只有这样，才能保持波函数之间的叠加关系．由于人们能把两个波函数相加得出另一个波函数，所以如果我们用相因子 $e^{i\gamma}$ 乘其中一个波函数，为了不破坏叠加原理，就必须用同样的相因子乘所有的波函数。

现在我们再来看方程（16），同时考虑连续性条件．首先我们取一个很小的迴路，当我们绕它一周时，γ 的变化也应当很小．因为 γ 逐点变化很小，所以绕小迴路一周时，γ 的变化不会很大．类似地，在通常的物理条件下，穿过小迴路的磁通量也一定很小． 因为方程中的 n 必须是一个整数，如果 $(\Delta\gamma)_{\text{回路}}$ 和 $\iint \mathscr{H} \cdot d\boldsymbol{S}$ 都很小，那么 n 必须为 0．所以连续性条件通常能告诉我们 n 必须是 0。

然而还存在一个例外的情况．我上面说过绕小迴路一周时，γ 的变化一定很小，但是在一定的条件下，情况就不是这样。如果 ψ 是零，则 γ 完全是不确定的，如果 ψ 接近于零，则 ψ 的一个很小的变化就可以对应于 γ 的十分显著的变化。可以举二维的例子来说明这一点．设

$$\psi = x_1 + ix_2, \qquad (17)$$

这里当 x_1 和 x_2 都为 0 时，ψ 等于 0，在这个点的邻域，ψ 完全

是连续的。现在当我们绕包围原点 $x_1 = x_2 = 0$ 的小迴路一周时，ψ 的位相改变 2π。

所以我们必须考虑 ψ 为 0 的区域。 如果 $\psi = 0$，则它包括两个条件。 沿着一条线通常满足这两个条件，我们把这条线叫做节线。在 $\psi = 0$ 的地方，可以有几条节线。 如果我们取绕一条节线的小迴路，当绕这个小迴路一周时，γ 的变化不一定很小。 尽管 ψ 有很好的连续性，γ 的变化可以是 2π 或 2π 的任意整数倍，这点可以从上面（17）式给出 ψ 的例子中看到。因此，我们可以推断：除包围一条节线的迴路以外，当绕小迴路一周时，方程 (16) 中的 n 等于 0。

如果我们现在考虑一些大迴路，并把上面的公式应用于一个大迴路，我们看到，穿过一个大迴路的磁通量乘以 $\frac{e}{\hbar c}$ 就等于绕这个大迴路一周时 γ 的变化加上形式为 $2n\pi$ 的项，后者是穿过大迴路的每条节线的贡献。这个大迴路围成某个曲面，穿过这个曲面的每条节线都有一项 $2n\pi$ 的贡献。

下面我们把 (16) 式应用于一个闭曲面。 一个闭曲面完全没有边界线。如果把(16)式应用于一个闭曲面，因为闭曲面的边界线本身已缩为零，所以在绕闭曲面的边界一周时，γ 的变化是零。于是我们得出结论：$\frac{e}{\hbar c}$ 乘上穿过（闭）曲面的磁通量等于每个形式为 $2n\pi$ 的项之和。对于穿过闭曲面的每条节线，都有这样的一项贡献。 如果我们有一条从无穷远处来的节线，穿进闭曲面里去，然后又穿出来，那么这条节线要有两次贡献，这两次贡献正好互相抵消。 只有当一条或多条节线终止在闭曲面内部时，我们才能得到总和不为 0 的结果。

由此导致我们考虑下面的情况：假设有一些波函数，它们含有一条节线，并且这条节线只有一个端点。 这时节线的

端点便是场的某种奇点(这里我们不需要详细讨论它)。如果我们取包围这奇点的一个闭曲面,则用 $\frac{e}{\hbar c}$ 乘以穿过这个闭曲面的总磁通量就等于 $2n\pi$, 即

$$\frac{e}{\hbar c}\oiint \mathscr{H}\cdot dS = 2n\pi \ . \tag{18}$$

如果穿过一个闭曲面的磁通量不为 0, 这就意味着在该闭曲面里面有某个磁单极存在。若我们把这个磁单极的强度称为 μ, 我们就得到

$$\oiint \mathscr{H}\cdot dS = 4\pi\mu, \tag{19}$$

这和静电学中的高斯定理相类似,可以看作磁学中的高斯定理。这个定理可叙述为: 穿过包围磁单极的任一闭曲面的磁通量等于被包围的磁单极强度 μ 的 4π 倍。(18)式表示穿过包围节线端点的闭曲面的磁通量。如果把(19)式与(18)式比较,我们就得到磁单极强度的表达式:

$$\mu = \frac{\hbar c}{2e}n. \tag{20}$$

如果在量子理论中有磁单极出现,则从量子力学的考虑中能够十分确定地得出这个表达式,而且这是不可避免的。把这一点叙述得理论化一些,可以这样说: 为了使电子在磁单极场中按照薛定谔方程运动,磁单极必须具有表达式(20)给出的强度。否则这些方程就是不相容的,这是薛定谔表述所要求的。

我们可以应用实验的结果

$$\frac{\hbar c}{e^2}\approx 137. \tag{21}$$

这样从(20)就可得出

$$\mu = \frac{137}{2} en \,. \tag{22}$$

如果取 n 的最小非零值，即 n 等于 1，就可得到磁单极的最小强度

$$\mu_{最小} = \frac{137}{2} e, \tag{23}$$

这个值比电子的电荷值大得多．因此最小的磁单极子也是非常大的．

这个理论仅仅说明：这样的磁单极子能够和薛定谔方程一致地存在，然而还不能说这些磁单极子一定存在，到底它们存在与否，只能由实验来决定．

有一个支持这些磁单极子存在的论据，即这些磁单极子能够对电荷为什么总是量子化的事实提供一种解释．在自然界中，观测到的所有粒子携带的电荷都是 e（电子的电荷）的正整数倍或负整数倍．为什么会是这样呢？为什么不能有某些粒子所带的电荷是另外的数值呢？

除用这个磁单极理论外，对这个事实至今还没有理论上的解释． 如果某个地方即使只存在一个磁单极子，则为了使一个带电粒子能和它相互作用（这里指的是：对这个带电粒子和这个磁单极子的相互作用能建立一个一致的波动方程），粒子的电荷和磁单极子强度就必须有 (20) 式所给出的关系．因此，如果某处存在一个磁单极子，自然界所有的带电粒子的电荷就必须是量子化的． 这应当是一件令人满意的事情，因为由此可解释自然界的一个特征，而且对于这个特征至今还不知道有别的解释． 然而要证明磁单极子一定存在，这种论据还不是充分的．

现在我们来讨论磁单极子怎样在实验上显示出来．我们假定有某个粒子携带着一个磁单极子，那么这个磁单极子一

定是非常稳定的，因为磁单极强度是守恒的，它正象电荷守恒一样。麦克斯韦方程组对于电场和磁场是对称的，并且方程组要求电荷守恒，同样也要求磁单极强度守恒。携带磁单极子的这个粒子本身也许是不稳定的，如果它衰变，则一定有某个衰变产物带着磁单极子。磁单极子本身是相当持久的东西，它不会消失。只要存在一个磁单极子，使它消失的唯一方法，就是必须存在另一个大小相等符号相反的磁单极子，并且使两者互相发生作用。这时，它们会互相湮没，以不同形式放出能量。但是一个磁单极子本身完全是稳定的，只有两个符号相反的磁单极子才能互相湮没。

如果你用某些高能加速器来产生磁单极子，它们就会同时成对地产生出来，一个是正的，另一个是负的。人们曾经用高能加速器探索磁单极子，但没有发现任何磁单极子。当然这并非是磁单极子不存在的一个证据，因为很可能是：磁单极子的静止能量太大，以致用现有的高能加速器还不能产生出一对磁单极子。可以预料它们的静止能量是相当大的，因为它们的强度是很大的，实际上比电子的电荷大得多。因此，在现有的高能加速器上还没有探测到磁单极子，也就不足为奇了。

人们曾希望在宇宙线中探测到磁单极子。因为来自外部空间的宇宙线所具有的能量，比目前实验室中能够产生的能量，不知要大多少倍。很可能在宇宙线中存在着磁单极子，所以人们一直在那里寻找，已经寻找了好几十年，直到最近才有人宣称已发现了磁单极子。

人们也许会问："磁单极子怎样在实验上显示出来呢？"假如我们知道了一个磁单极子高速穿过物质时会产生什么样的电离特征，就将会有助于我们作出判断。让我们比较一下磁单极子和带电粒子的电离径迹。在图 1 中，我们看到有一

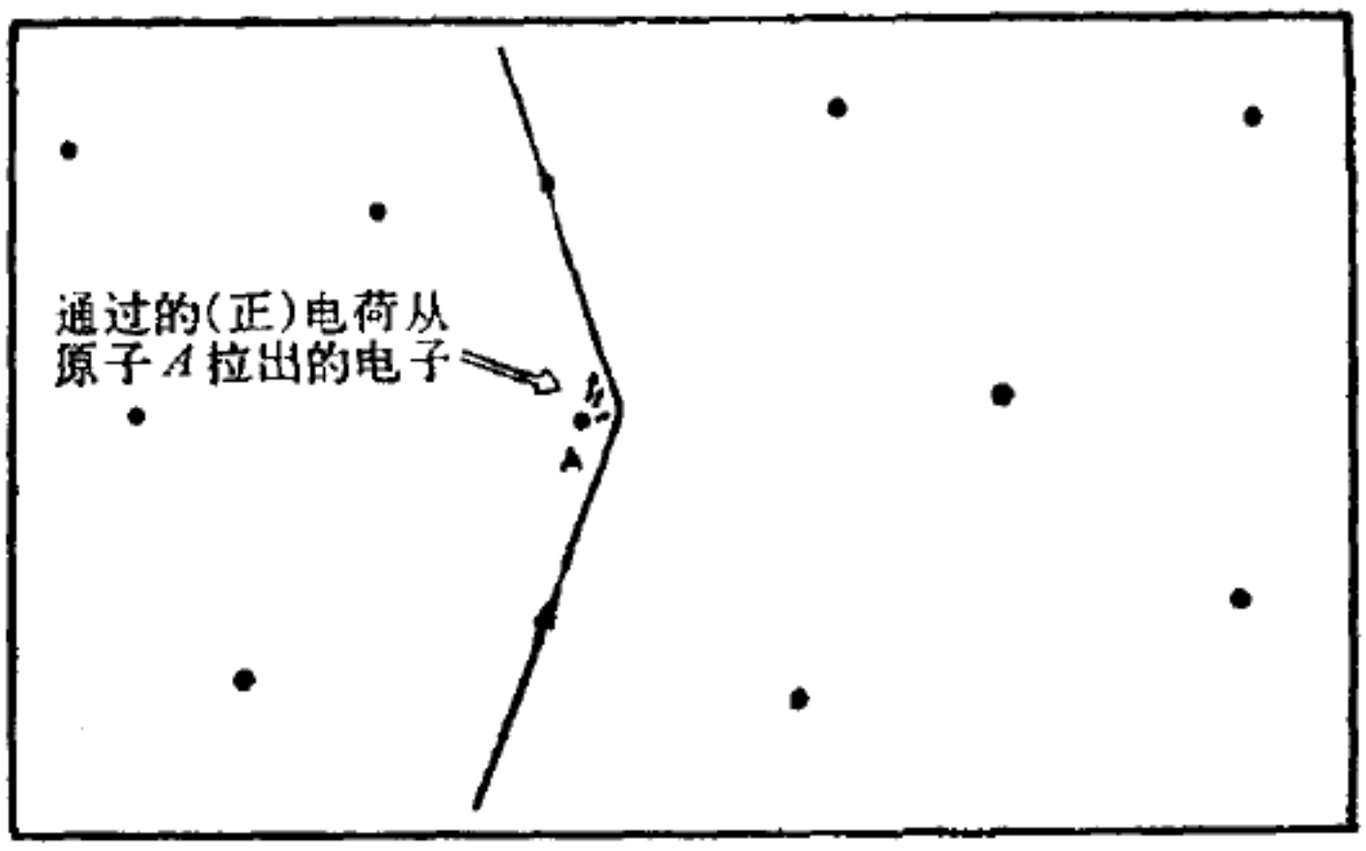

图 1　通过物质的带电粒子(这里表示带正电粒子的情形)沿着它的路径产生的电离径迹

个运动着的带电粒子，它的周围有某种介质。我们来观察某个典型的原子 A。原子 A 中的电子由于受到这个带电粒子的扰动，其中的一些电子可以从原子中被拉出去，从而产生电离。拉出电子的电力与运动粒子所带的电荷成正比：

$$F \propto Ze, \tag{24}$$

而力作用的时间与该粒子的速度成反比：

$$t \propto v^{-1}. \tag{25}$$

因此当带电粒子穿过时，给予其中一个电子的冲量便与粒子的电荷成正比，而与粒子的速度成反比：

$$\text{冲量} = Ft \propto Zev^{-1}. \tag{26}$$

这就是说，粒子运动得越快，冲量就越小。对于以接近光速运动的粒子，冲量趋近于和 Ze/c 成正比。随着粒子损失能量和朝着径迹末端运动，由于速度逐渐变小，电离就逐渐增加。因此我们得到的电离径迹越往带电粒子路程的末端就越粗。

现在要问：如果把带电粒子换成磁单极子，情形会怎样呢？众所周知，运动电荷产生的磁场和电荷运动的速度成正比。与此对应的是：磁单极子产生的电场与磁单极子运动的

速度成正比．因此一个运动着的磁单极子产生的电力与磁单极子速度成正比：

$$F \propto \mu v. \tag{27}$$

于是磁单极子给予一个电子（即图 1 中介质的一个典型原子 A 里的一个电子）的冲量等于力乘以时间．所以这个冲量几乎与速度无关：

$$\text{冲量} \propto \mu, \tag{28}$$

（仅仅正比于磁单极子强度）．因此一个运动着的磁单极子产生的电离径迹相当稳定，不会出现向着路程末端逐渐变粗的现象．这是区分磁单极子和普通带电粒子的一种方法．

普赖斯（Price）等人在他们最近的实验中所采用的就是这个方法．这个实验使他们相信发现了磁单极子．实验是这样做的：把一些记录仪器用气球送上天空，并把它们保持在靠近大气顶部的地方一些日子，然后把仪器降落下来，并对记录进行分析．这些仪器主要由一叠聚碳酸酯薄片

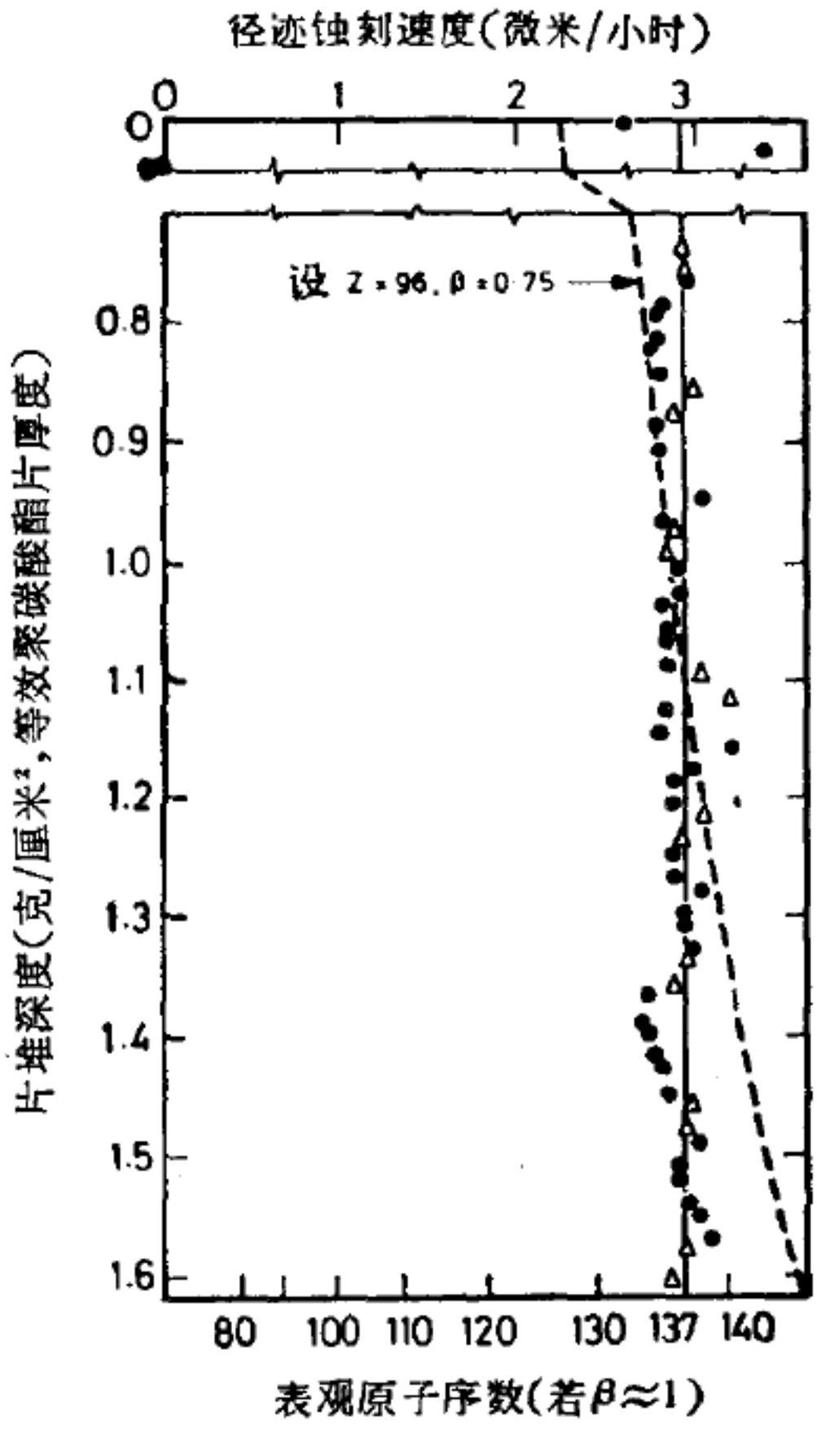

图 2　普赖斯等人得到的实验结果．这个结果是他们宣称发现了一个磁单极子（详见正文）的依据

组成．聚碳酸酯片是一种透明材料．把这种薄片一片挨一片叠放成一组．穿过这些薄片的任何电离粒子都会以一定方式损伤这些薄片，根据这些薄片的蚀刻就能估计它的损伤的程度．把薄片全部蚀刻，并查看蚀刻痕迹，从而了解电离的程度．图2表示他们所得到的结果．图的顶部有一个缝隙，这个缝隙在第一块聚碳酸酯片和其余聚碳酸酯片之间．缝隙中有其它一些仪器：一个契伦科夫探测器以及一块普通的乳胶板．根据这块乳胶板的观测结果，他们能够推断粒子在向下运动（仅根据δ射线），契伦科夫探测器能得出关于粒子速度的信息．图2表明缝隙是在最上面的一块聚碳酸酯片和其余32块薄片组成的整堆薄片之间．图中的点［圆圈(实)］和三角形(空)表示薄片中的电离量．圆圈和三角形的差别仅在于把片子浸在蚀刻酸中的时间不同．这些“点”（用圆圈和三角形标出）近似地沿着一条竖直线，这表明电离量相当接近一个常数．

如果是用一个带电粒子而不是一个磁单极子来产生这种电离，则随着粒子向下运动，曲线（通过实验点）应当向右偏转，因为随着粒子向径迹末端运动电离会逐渐增加．虚线是我们用电荷为$96e$和速度为3/4光速的带电粒子计算的结果．你们看，这条倾斜的曲线与实验数据完全不符合．另一方面，竖直线与实验数据符合得很好，虽然还有许多偏差，但这是实验误差．这个图是普赖斯和他的合作者宣称他们的仪器捕获了一个磁单极子的依据．

我们在悉尼同物理学家们讨论了这个工作．那里有人说，在蚀刻过程中也许会产生某种饱和现象，这可能是误差的一个来源．如果电离使薄片产生很严重的损伤，由于某种饱和效应，蚀刻痕迹的大小不会有相应的增加．这种意见可能是正确的，但是我不知道它正确到何种程度．这毕竟只是发表

的一个初步报告(图2取自这个报告)，当然对这个意见应当进行很仔细的考虑，看看蚀刻痕迹的大小是否确实与粒子产生的电离量相对应。

悉尼的乔治教授非常关心的打电话给伯克利（Berkeley）的阿尔瓦雷兹（Alvarez，他是完成这个工作的实验室的负责人），问他对这个实验有什么看法。阿尔瓦雷兹对于普赖斯等人所作的解释很不同意。他说，这可能是产生电离（对应于蚀刻）的一个带电粒子向下运动到某一深度，它在那里打到某个原子核上并发生衰变，由于衰变，粒子带着减少了的电荷继续运动。

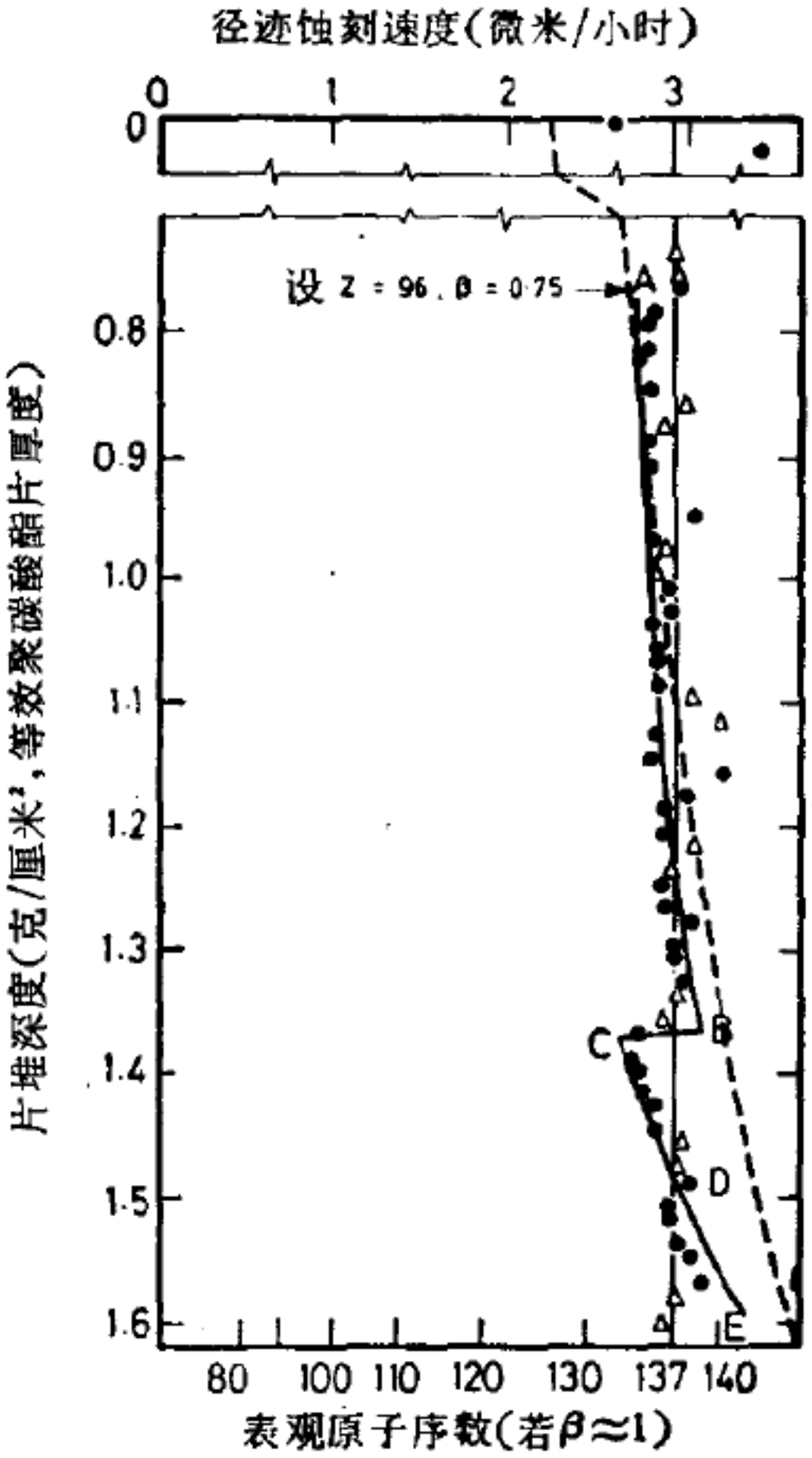

图3 利用分段方法对普赖斯等人的实验数据（图2）作出的一种可能的解释（详见正文）。这个特殊的解释用实线表示。结果取自 E. P. 乔治的计算

根据这次同阿尔瓦雷兹的电话谈话，悉尼的物理学家们构画出图3。其中他们假定有一个 $Z=96$ 的带电粒子开始（比如说从 A 点）运动，继续前进直到 B 点。在 B 点它打到一个原子核上并发生衰变，结果使它带的电荷减少了(在 C 点)，然后它

从C点沿着曲线CD继续向下运动．也许这个新粒子本身是不稳定的，或者它在D点又碰到另一个粒子，在这里又发生一次衰变，又失去一些电荷． 这样便能提供不同于磁单极子解释的另一种解释．

这个问题仍然没有得到解决． 总之，如果阿尔瓦雷兹的解释是正确的，则整个图形非常接近于竖直线就是一种巧合．这似乎是自然界有意在捉弄我们．我不知道真正的答案是什么，我们不得不等待实验物理学家们去更详细地研究这些结果，从而得出某种结论．

在悉尼，霍拉教授打电话给霍尔施塔特（Hofstadter），问他有什么看法． 霍尔施塔特相当含糊地说："我认为到底是普赖斯正确，还是阿尔瓦雷兹正确，这是半斤对八两．"我想这或许也就是我的看法．我们不得不暂时让它留作一个悬而未决的问题．

不过，有一类观测结果在一定程度上证明不应当用磁单极子来解释这些结果． 因为如果磁单极子来自宇宙线，那么可以推断，在过去可能有许多磁单极子通过大气层下来，并停留在某个地方，在这些地方我们应当能发现它们． 磁单极子本身完全是稳定的．如果说磁单极子总数(在一个区域内)相当少，则一个磁单极子碰到另一个符号相反的磁单极子的机会就更少，所以它们互相湮灭的机会也很少． 如果这些磁单极子来自宇宙线，我们可以期望会有许多磁单极子分布在我们周围． 人们在许多地方寻找过它们，几乎是在所能想到的一切地方，至今仍没有发现． 磁单极子很可能趋向于地磁场两极，由于这个原因，人们还曾在高纬度地带寻找过，结果还是没有发现过任何一个磁单极子．

也许磁单极子穿进了地球，以使它更靠近地球磁场的两极． 可能是因为它们钻进地球表面太深．所以就一直没有发

现它们．我们并不真正知道磁单极子穿入固态物质的能力如何．我想还没有人估算过这个问题．没有对磁单极子性质作更多的了解，这种估算也就相当困难．此外，普赖斯和他的同事们认为，他们发现的磁单极子质量约为200个质子质量，或更大一些．当然，如果是这样的话，就可以解释用高能加速器没有观测到磁单极子的原因：这是由于这些加速器还没有达到足够的能量（在目前）来产生具有这样质量的一对粒子，在碰撞过程的静止能量参考系中，产生这样一对粒子需要极其巨大的能量．

我想我的讲话应当到此结束．我把磁单极子是否存在作为一个问题留给你们去思考，我希望实验工作者将能提出一些更加确定的东西（普赖斯等人已允诺写另一篇论文，这篇论文发表在8月25日的《物理评论通讯》上）．

磁单极子实验证明的现状

（1976年12月）

除非一个磁单极子遇到另一个符号相反的磁单极子，否则一个磁单极子是不能消失的，我们能确信这一点象确信电荷守恒一样．这个论点是根据麦克斯韦方程组的普遍性质得出的．

如果磁单极子由外部空间落到地球上，它们一定会留在某些地方．虽然对它们作了广泛的寻找，但结果却是否定的，也可能是它们钻进地下太深．但由于铁磁物质很容易捕获它们，因此我们可以期望在接近地面的地方会发现它们．

因为这个否定的证据有相当的分量，所以大多数物理学家不相信宇宙线中会有磁单极子，他们对普赖斯和他的同事们的发现寻求某些另外的解释．但这是不容易的．阿尔瓦雷

兹对一个铂原子核在通过聚碳酸酯片的途中发生分裂的原始解释，被第一块薄片以下的一些薄片的蚀刻结果所否定。

似乎没有一个已知的粒子与观测结果相符合。如果这是一个带电的原子核，它一定是一个超重核，超出了所有已知核的范围。另外也可能，它是一个反物质的原子核。

当只有一个事例时，要决定一个粒子的存在是非常困难的。人们殷切期望将来的实验能发现更多的事例。

4. 正能量相对论波动方程

今天，我想给你们讲相对论量子力学的一个重要的发展，也就是一个新的相对论波动方程的发展．然后还要讲一下关于这个方程的一些基本特点，并对方程解的性质作些讨论．新方程是一个相对论波动方程，它描述的是静止质量不为零的一些粒子．人们将会发现，新方程在形式上与描写自旋角动量为 $\frac{1}{2}$ 的粒子的相对论波动方程相类似．然而这种类似只是表面上的，由新方程描写的那些粒子（如果它们存在的话）和原来方程所描写的自旋为 $\frac{1}{2}$ 的粒子（如电子，质子等等）有着很不相同的特点．

让我们简要地回忆一下原来方程的形式．为了简单起见，对于非零静质量的粒子，比如说质量为 m 的粒子，我们将选取这样的单位，其中

$$\hbar = m = c = 1, \tag{1}$$

这里 $\hbar$ 和 c 是普郎克常数和光速．用这种单位，原来相对论波动方程的形式变为：

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x_0} + \alpha_r \frac{\partial}{\partial x_r} + i\alpha_m\right\} \psi = 0, \tag{2}$$

方程中用了通常的求和规则．因指标 r 可取 1，2，3，$\alpha_r \frac{\partial}{\partial x_r}$ 表示求和：$\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$．符号 x_0, x_1, x_2, x_3 分别表示粒子的四维时空坐标 t, x, y, z．系数 $\alpha_r (r = 1, 2, 3)$ 和 α_m 都是一些 4 × 4 矩阵，这些矩阵必须选择得使它们全部

互相反对易，并且使每个矩阵的平方等于 (4×4) 单位矩阵。这意味着对 $r, s = 1, 2, 3$，我们有

$$[\alpha_r, \alpha_s]_+ = \alpha_r\alpha_s + \alpha_s\alpha_r = 0, \quad (r \neq s) \tag{3}$$

$$(\alpha_1)^2 = (\alpha_2)^2 = (\alpha_3)^2 = (\alpha_m)^2 = 1, \tag{4}$$

和

$$[\alpha_r, \alpha_m]_+ = 0. \tag{5}$$

(2) 式中的量 ψ 是一个 4 行单列矩阵，它的每个元素都是坐标 x_0，x_1，x_2 和 x_3 的某个函数。这个 ψ 的作用和通常薛定谔方程中的单分量波函数的作用相似。用规定的相对论量子化条件，方程 (2) 对描写自旋为 $\frac{1}{2}$ 的粒子(如电子)非常成功。

为了发展新方程，我们假定新方程所描写的粒子不是无结构的，即不象方程 (2) 所描述的自旋为 1/2 的粒子的情况，而是它有一个确定的动力学结构，也就是说，粒子具有一些内部自由度。[附带地说一下，狄拉克教授在他著名的《量子力学原理》一书中讲到：就方程 (2) 来说，α_r 和 α_m 矩阵描写某些新的、属于某种内部运动的自由度。他说，这些矩阵引进粒子的自旋，因为这些矩阵与坐标 x_0，x_r 无关，所以它们一定与动量和坐标对易。]

这些新自由度应当同某些动力学变量 (p_1, q_1)，(p_2, q_2) 相联系，(p_1, q_1) 和 (p_2, q_2) 可看作对应于两个独立的线性谐振子。因此在这些动力学变量之间有下列对易关系：

$$\left.\begin{aligned} q_1q_2 - q_2q_1 \equiv [q_1, q_2]_- = [p_1, p_2]_- = 0, \\ [q_1, p_1]_- = [q_2, p_2]_- = i, \\ [q_1, p_2]_- = [q_2, p_1]_- = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

如果引入定义

$$q_3 \equiv p_1, \quad q_4 \equiv p_2, \tag{7}$$

并且构造一个 4×4 矩阵 β，就可以把这些关系用下列特别

方便的形式写出来：

$$q_aq_b - q_bq_a \equiv [q_a, q_b]_- = i\beta_{ab}, \tag{8}$$

式中

$$a, b = 1, 2, 3, 4. \tag{9}$$

根据关系式 (7) 和定义 (8)，β 矩阵应当具有下面的形式：

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

β 矩阵显然是反对称的，并且它的平方等于负单位矩阵：

$$\beta_{ab} = -\beta_{ba}, \quad (\beta)^2 = -I. \tag{11}$$

在上面我们要求，新自由度应当与两个独立谐振子的动力学变量相联系，这个要求可以更正式更精确地表示出来。与粒子相对应的波函数 ψ 除了是粒子坐标 x_0，x_1，x_2 和 x_3 的函数外，还必须与两个独立的(也就是说可对易的)变量 q_a 有关，这里 $a = 1, 2, 3$ 和 4. 可对易的 q_a 的这种对是：

$$(q_1, q_2), (q_3, q_4), (q_1, q_4) \text{ 或 } (q_2, q_3).$$

我们选择其中的一对，比如说 (q_1, q_2)，并且要求波函数具有下列函数关系：

$$\psi = \psi(x_0, x_1, x_2, x_3; q_1, q_2). \tag{12}$$

我们可用 q_a 和波函数 ψ 构造一个 4 行单列矩阵：

$$q\psi \equiv \begin{pmatrix} q_1\psi \\ q_2\psi \\ q_3\psi \\ q_4\psi \end{pmatrix}, \tag{13}$$

式中符号 q 表示矩阵

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

而且如果我们采用与推导方程(2)时基本上相同的论证方法，就可把新方程表示为

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x_0} + \alpha_r \frac{\partial}{\partial x_r} + \beta\right\} q\psi = 0, \tag{15}$$

式中系数 $\alpha_r(r = 1, 2, 3)$ 也是 4×4 矩阵，把它们选择成互相反对易的，并且也和 β 反对易：

$$\left.\begin{aligned} [\alpha_r, \alpha_s]_+ &= 0, \ r \neq s, \\ [\alpha_r, \beta]_+ &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

这里我们用了符号 $[a, b]_+ = ab + ba$. 我们还要求每个 α_r 的平方等于单位矩阵：

$$(\alpha_1)^2 = (\alpha_2)^2 = (\alpha_3)^2 = 1. \tag{17}$$

新方程(15)中的矩阵 β 和方程(10)中的 β 相同. 这样我们就得出这些矩阵和新自由度之间的密切联系[见方程(8)].

新方程(15)同原方程式[方程(2)]在数学形式上显然非常相似，其差别全都来自新方程与新的自由度的联系，这使得 $q\psi$ 与方程(2)中的 ψ 很不相同. 此外，β 也同确定这些自由度的变量之间的对易关系直接联系起来.

我们现在对矩阵 α 加上进一步的限制条件，这在以后将是有用的. 我们假定这些矩阵是实对称矩阵（因此也是厄密矩阵）. 当然除了(16)和(17)的条件之外，还有许多种方法能使这些条件得到满足. 这里我们取下列的一组 α_r 为例：

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

如果我们现在把这一组 α, 代入方程 (15), 并且注意到

$$\alpha_1 q = \begin{pmatrix} -q_3 \\ q_4 \\ -q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 q = \begin{pmatrix} q_4 \\ q_3 \\ q_2 \\ q_1 \end{pmatrix},$$

$$\alpha_3 q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ -q_3 \\ -q_4 \end{pmatrix}, \quad \beta q = \begin{pmatrix} q_3 \\ q_4 \\ -q_1 \\ -q_2 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

我们就可得出下列四个联立方程:

$$\begin{aligned} &\{(\partial^0 + \partial^3)q_1 - \partial^1 q_3 + \partial^2 q_4 + q_3\}\psi = 0, \ \text{(a)} \\ &\{(\partial^0 + \partial^3)q_2 + \partial^1 q_4 + \partial^2 q_3 + q_4\}\psi = 0, \ \text{(b)} \\ &\{(\partial^0 - \partial^3)q_3 - \partial^1 q_1 + \partial^2 q_2 - q_1\}\psi = 0, \ \text{(c)} \\ &\{(\partial^0 - \partial^3)q_4 + \partial^1 q_2 + \partial^2 q_1 - q_2\}\psi = 0, \ \text{(d)} \end{aligned} \tag{20}$$

这里我们使用了缩写符号:

$$\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3. \tag{21}$$

在我们对两个谐振子所采用的表象中，我们把 $q_1\psi$ 和 $q_2\psi$ 解释为分别用数 q_1 和 q_2 乘以 ψ，而把 $q_3\psi$ 和 $q_4\psi$ 解释为

$$q_3\psi = -i\frac{\partial}{\partial q_1}\psi, \quad q_4\psi = -i\frac{\partial}{\partial q_2}\psi.$$

象我们从方程组(20)所看到的那样，方程(15)实际上是四个方程组，所有四个方程所谈到的是同一个波函数 ψ. 因此，有四个线性方程只有一个未知函数，这便发生方程式相容的问题. 首先，这四个方程并不是完全独立的. 如果我们按下列办法求和：用 q_2 乘(20a)，加上 $-q_1$ 乘(20b)，加上 $-q_4$ 乘(20c)，再加上 q_3 乘(20d)；就能立即看出这一点. 对这个结果利用对易关系(8)，由于 q_a 与坐标 x_μ 无关，便得出左边的和等于0，结果简单地得到一个恒等式 $0=0$. 因此在方程组(20)中，只能有三个方程是互相独立的. 现在重要的是要检验这三个方程的内在相容性.

让我们把方程组(20)表示为

$$P_a\psi = 0, \quad a = 1, 2, 3, 4. \tag{22}$$

式中 P_a 是一个4行单列矩阵

$$P \equiv (\partial^0 + \alpha_r\partial^r + \beta)q \tag{23}$$

的矩阵元

$$P_a = (\partial^0 + \alpha_r\partial^r + \beta)_{ab}q_b, \quad a = 1, 2, 3, 4. \tag{24}$$

于是相容性条件就可以简单地表示为

$$[P_a, P_b]_-\psi = 0, \quad a, b = 1, 2, 3, 4. \tag{25}$$

如果 $P_a\psi = 0$ 和 $P_b\psi = 0$ 同时成立，即如果同一个 ψ 满足(20)中的全部方程，则 $[P_a, P_b]_-\psi = 0$ 一定满足. 然而我们有

$$\begin{aligned}
[P_a, P_b]_- &= [(\partial^0 + \alpha_r\partial^r + \beta)_{ac}q_c, (\partial^0 + \alpha_s\partial^s + \beta)_{bd}q_d]_- \\
&= (\partial^0 + \alpha_r\partial^r + \beta)_{ac}(\partial^0 + \alpha_s\partial^s + \beta)_{bd}[q_c, q_d]_- \\
&= (\partial^0 + \alpha_r\partial^r + \beta)_{ac}(\partial^0 + \alpha_s\partial^s + \beta)_{bd}i\beta_{cd} \\
&= i(\partial^0 + \alpha_r\partial^r + \beta)_{ac}\beta_{cd}(\partial^0 + \alpha_s\partial^s - \beta)_{db} \\
&= i\{(\partial^0 + \alpha_r\partial^r + \beta)\beta(\partial^0 + \alpha_s\partial^s - \beta)\}_{ab}
\end{aligned}$$

$$= i\{(\partial^0 + \alpha_r\partial^r + \beta)(\partial^0 - \alpha_r\partial^r - \beta)\beta\}_{ab}$$
$$= i\{(\partial^0\partial^0 - \partial^r\partial^r + 1)\beta\}_{ab},$$

其中我们利用了关系式 (8), α_r 的对称性, β 的反对称性以及关系式 (16), (17) 和 (11). 由此得出相容性条件 (25) 等价于

$$(\partial_\mu\partial^\mu + 1)\psi = 0, \tag{26}$$

或者说, 等价于静止质量为 1 的粒子的波函数 ψ 所应满足的德布罗意 (De Broglie) 方程. 算符

$$\partial_\mu\partial^\mu = g_{\mu\nu}\partial^\mu\partial^\nu \tag{27}$$

就是通常所说的达朗贝尔算符. 因此,为了使方程组 (20) 的四个微分方程彼此相容, 波函数 ψ 必须满足德布罗意方程 (26) 以及这些方程本身.

当然要求新波动方程在相对论上也是正确的, 这意味着它必须具有洛伦兹不变性. 值得指出, 事实上可以把方程 (15) 用相对论协变形式重新写出来. 为此我们引人新的矩阵:

$$\gamma_\mu = \beta\alpha_\mu, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \tag{28}$$

式中

$$\alpha_0 \equiv 1. \tag{29}$$

现在用 β 左乘 (15) 式,并利用 (28) 和 (29), 我们得到

$$(\gamma_\mu\partial^\mu - 1)q\psi = 0, \tag{30}$$

式中 γ_μ 满足反对易关系

$$[\gamma_\mu, \gamma_\nu]_+ = -2g_{\mu\nu}. \tag{31}$$

虽然 (30) 和 (31) 看来好象是相对论协变的, 但还不能说它们就是明显的相对论协变形式,这是因为 γ_0 (是反对称的)和 γ_r (是对称的) 之间具有不同的对称性质[因为 $(\gamma_0)_{ba} = \beta_{ba} = -\beta_{ab} = -(\gamma_0)_{ab}$, 而 $(\gamma_r)_{ba} = (\beta\alpha_r)_{ba} = \beta_{bc}(\alpha_r)_{ca} = -\beta_{cb}(\alpha_r)_{ac} = -(\alpha_r\beta)_{ab} = (\beta\alpha_r)_{ab} = (\gamma_r)_{ab}$]. 因此在 γ_μ 集合中,时间性分

量 γ_0 与空间性分量 γ_r 是有区别的.

因此，为了解决(15)式的洛伦兹不变性问题，我们需要使用更系统的方法. 好在检验洛伦兹不变性方法已为大家所熟知；首先把无穷小洛伦兹变换应用于方程(15)，然后再逐步地按照类似于证明方程(2)的洛伦兹不变性的方法做下去. 为此，我只概括地给出下述的主要步骤而不讨论其细节了.所需的无穷小洛伦兹变换是，把坐标 $x_\mu(\mu=0,1,2,3)$变换成某些新坐标:

$$x_\mu^* = x_\mu + a_\mu^\nu x_\nu, \tag{32}$$

式中实数量

$$a_{\mu\nu} \equiv g_{\mu k} a_\nu^k \tag{33}$$

是无穷小量,并且是反对称的:

$$a_{\mu\nu} = -a_{\nu\mu}. \tag{34}$$

相应地我们有

$$\partial^{\mu *} = \partial^\mu + a_\nu^\mu \partial^\nu = \partial^\mu - a_\nu^\mu \partial^\nu, \tag{35}$$

并且当取到一级无穷小量时，有

$$\partial^\mu = \partial^{\mu *} + a_\nu^\mu \partial^{\nu *}. \tag{36}$$

现在把(15)式重新写为更简洁的形式:

$$(\alpha_\mu \partial^\mu + \beta) q\psi = 0, \tag{37}$$

再把(36)式代入(37)式,重新整理后得到

$$\{(\alpha_\mu + a_\mu^\nu \alpha_\nu)\partial^{\mu *} + \beta\} q\psi = 0. \tag{38}$$

为方便起见,我们引入一个对称矩阵

$$N \equiv \frac{1}{4} a^{\mu\nu} \alpha_\mu \beta \alpha_\nu. \tag{39}$$

容易证明,(38)式可重新整理成

$$(\alpha_\mu \partial^\mu + \beta) q^* \psi = 0, \tag{40}$$

式中我们引进了量

$$q^* \equiv (1 - \beta N) q. \tag{41}$$

并且因为 q^* 矩阵满足对易关系

$$[q_a^*, q_b^*]_- = i\beta_{ab}, \tag{42}$$

所以它们正好起着 q 矩阵的作用. 由此得出，变换(32)和(41)保持方程(37)[或(15)]的形式不变. 因此，这个形式对任意有限的正洛伦兹变换也是不变的.

值得指出，q 到 q^* 的变换(41)可以重新表示为无穷小么正变换的形式. 事实上，当取到一级小量时，我们有

$$q^* = \left(1 - \frac{1}{4} a^{\mu\nu}\beta\alpha_\mu\beta\alpha_\nu\right)q$$

$$= \left(1 - \frac{i}{2} W\right) q \left(1 + \frac{i}{2} W\right). \tag{43}$$

式中量 W 是

$$W \equiv \frac{1}{4} a^{\mu\nu} q^{\sim} a_\mu \beta a_\nu q. \tag{44}$$

这里我们引进了表示单列矩阵的符号:

$$q^{\sim} \equiv (q_1, q_2, q_3, q_4). \tag{45}$$

这个矩阵是单行矩阵 q 的转置矩阵. 方程(43)的右边表示一个无穷小么正变换的结果，W 是这个无穷小变换的厄密算符.

现在我们得到这个新波动方程的一个重要特性，即它本身只允许有正能量解. 为了看出这一点，我们用粒子的能量-动量本征态重新把方程(20)写出来. 我们暂时把粒子的能量-动量算符表示为

$$p^\mu \equiv i\partial^\mu,$$

将算符 p^μ 的本征值(取为实数)用符号 p^μ 表示，于是有

$$i\partial^\mu\psi = p^\mu\psi. \tag{46}$$

在方程(20)中，利用关系式(46)，我们得到:

$$\{(p_0 - p_3)q_1 + (i + p_1)q_3 - p_2q_4\}\psi = 0, \tag{a}$$

$$\{(p_0 - p_3)q_2 - p_2q_3 + (i - p_1)q_4\}\psi = 0, \tag{b}$$

$$\{(p_0+p_3)q_3-(i-p_1)q_1-p_2q_2\}\psi=0\,,\quad\text{(c)}$$
$$\{(p_0+p_3)q_4-p_2q_1-(i+p_1)q_2\}\psi=0\,,\quad\text{(d)}\qquad(47)$$

式中我们利用了关系式:

$$p^0=p_0,\quad p^r=-p_r,\quad(r=1,2,3)\qquad(48)$$

[应当注意，这里所用的符号 p_1，p_2，p_3 指的是粒子的动量分量. 在前面的方程 (6) 和 (7) 及有关的文字说明中，对两个谐振子的动量变量用了相同的符号: p_1 对应于第一个谐振子,后来用符号 q_3 代替; p_2 对应于第二个谐振子,后来用符号 q_4 代替,一定不要把它们混淆起来.]

现在通过适当的洛伦兹变换，我们可以采用粒子动量为零的参考系,这样

$$p_1=p_2=p_3=0.\qquad(49)$$

在这个参考系中,方程组 (47) 变为

$$\begin{aligned}&(p_0q_1+iq_3)\psi=0,\quad\text{(a)}\\&(p_0q_2+iq_4)\psi=0,\quad\text{(b)}\\&(p_0q_3-iq_1)\psi=0,\quad\text{(c)}\\&(p_0q_4-iq_2)\psi=0.\quad\text{(d)}\end{aligned}\qquad(50)$$

以量 p^μ 和 p_μ 表示的德布罗意方程 (26) 一般地取如下形式:

$$(p_\mu p^\mu-1)\psi=0.\qquad(51)$$

因此在粒子动量为 0 的特殊参考系中,我们有

$$(p_0)^2=1.\qquad(52)$$

这个等式意味着,对于静止质量为 1 的粒子,粒子的能量 p_0只能取 $+1$ 或 -1 值. 这样方程组 (50) 就简化为

$$\begin{aligned}&(\pm q_1+iq_3)\psi=0,\quad\text{(a)}\\&(\pm q_2+iq_4)\psi=0,\quad\text{(b)}\\&(\pm q_3-iq_1)\psi=0,\quad\text{(c)}\\&(\pm q_4-iq_2)\psi=0\quad\text{(d)}\end{aligned}\qquad(53)$$

(式中上面的“ + ”号对应于 $p_0 = +1$，下面的“ − ”号对应于 $p_0 = -1$). 现在很清楚，在方程组 (53) 中，方程 (a) 和 (c) 是等价的,同样方程 (b) 和 (d) 也是等价的. 因此，由于这种等价关系(在 q_1 和 q_2 为对角形式的 q 表象中)，

$$q_3 \equiv -i\frac{\partial}{\partial q_1}, \quad q_4 \equiv -i\frac{\partial}{\partial q_2}, \tag{54}$$

于是,波动方程组就简化成两个微分方程:

$$\left(q_1 \pm \frac{\partial}{\partial q_1}\right)\psi = 0, \tag{55}$$

和

$$\left(q_2 \pm \frac{\partial}{\partial q_2}\right)\psi = 0, \tag{56}$$

其中，上面的“ + ”号表示 $p_0 = +1$，下面的“ − ”号表示 $p_0 = -1$. 这些方程很容易积分. 积分后得出:

$$\psi \sim e^{-(q_1^2+q_2^2)/2}, \quad \text{对 } p_0 = +1, \tag{57}$$

和

$$\psi \sim e^{+(q_1^2+q_2^2)/2}, \quad \text{对 } p_0 = -1. \tag{58}$$

解 (58) 在物理上显然是不合理的，因为当 q_1 和 q_2 的值很大时，这个解是发散的，因此它不能归一化. 只有解 (57) 是容许的，因此只允许 $p_0 = +1$ 的能量本征值. 由于解 (58) 是不可能的,所以负能本征值就自然地被排除了.

除了刚才讨论的特殊参考系之外，在一般参考系中，也有这样的结果,即只有正能量的解给出物理上容许的波函数. [狄拉克教授 1971 年发表在《皇家学会会报》上的论文中指出,在一般情况下,将方程 (40) 积分后得到:

$$\psi \sim \exp\left\{-\left[\frac{q_1^2 + q_2^2 + ip_1(q_1^2 - q_2^2) - 2ip_2q_1q_2}{2(p_0 + p_3)}\right]\right\} e^{-ip^\mu x_\mu}.$$

这再一次证明，要得到物理上可接受的解，能量 p_0 必须为正

值.]

新波动方程所描述的粒子只允许有正能量值，这一事实本身是非常值得注意的. 但这并不完全是一个新的结果；马约兰纳（Majorana）在 1932 年已经提出过一个只允许有正能解的洛伦兹不变性波动方程. 那个方程具有这样的形式：

$$(q^{\sim}\alpha_\mu q\partial^\mu + 2i)\psi = 0. \tag{59}$$

方程本身是洛伦兹不变的. 现在如果用 q 的线性函数乘方程(37)，则我们得到的方程一般地具有下列形式：

$$\{q^{\sim}\lambda\alpha_\mu q\partial^\mu + q^{\sim}\lambda\beta q\}\psi = 0, \tag{60}$$

式中 λ 是 4×4 矩阵，因此 $q^{\sim}\lambda$ 是 q 的一个线性函数.可以证明总共有 15 个独立的 λ 矩阵，它们分别给出不同的结果. 因此共有 15 个 (60) 式类型的不同的方程，它们都是 q 的二次式. 其中对应于 $\lambda = 1$ 的方程与马约兰纳方程(59)完全相同.

因此，这就促使我们把注意力集中到研究马约兰纳方程和它的解上. 马约兰纳本人已经详细地研究了这个方程，并且他能够证明，这个方程能得出具有无穷多个质量值的整个质量谱. 初看起来，这好象很有前途. 但当人们求出马约兰纳粒子的自旋时，人们发现：粒子自旋的增加却伴随着它的质量的减小. 结果较重的马约兰纳粒子的自旋小于较轻粒子的自旋. 这当然同实验事实完全相反. 这个情况使物理学家们放弃了马约兰纳方程.

因此，我们必须坚持粒子具有固定的质量，从而保留德布罗意方程 (26) 的形式，这便相当于保持方程 (60) 的整个集合（总共有 15 个方程）. 虽然其中的一个有马约兰纳方程 (59) 的形式，但当它和其它 14 个方程联合在一起时，就不再会使所研究的粒子有上述令人失望的性质.

现在我们来看粒子自旋的问题. 由于剩下的时间不多

了，我只是概括地讲一下．对于用波动方程描写的粒子，求出粒子自旋的一般方法是把一个无穷小转动(绕原点)作用在波函数上，这个转动包括一个带有自旋算符的项，并且要求变换后的波函数所满足的方程同未变换的波函数所满足的方程相同．因此，我们把 (37) 中的 ψ 变换为"被转动过的"波函数：

$$\left(1+\frac{1}{2}a^{\rho\sigma}M_{\rho\sigma}\right)\psi, \tag{61}$$

式中算符 $M_{\rho\sigma}$ 的形式是

$$M_{\rho\sigma}=x_\rho\partial_\sigma-x_\sigma\partial_\rho-iS_{\rho\sigma}, \tag{62}$$

$S_{\rho\sigma}$ 表示作用在 q 上的自旋算符．根据 (61) 式应满足方程 (37) 的要求，如果 $S_{\rho\sigma}$ 是反对称的，人们最后得到等式：

$$S_{\rho\sigma}=-\frac{1}{4}q^{\sim}\alpha_\rho\beta\alpha_\sigma q+\frac{i}{2}g_{\rho\sigma}. \tag{63}$$

如 α 选用 (18) 式，则我们有

$$\begin{aligned}
S_{01}&=\frac{1}{4}(q_1^2-q_2^2-q_3^2+q_4^2),\\
S_{02}&=\frac{1}{2}(q_3q_4-q_1q_2),\\
S_{03}&=\frac{1}{2}(q_1q_3+q_4q_2),\\
S_{12}&=\frac{1}{2}(q_2q_3-q_1q_4),\\
S_{23}&=\frac{1}{2}(q_1q_2+q_3q_4),\\
S_{31}&=\frac{1}{4}(q_1^2-q_2^2+q_3^2-q_4^2).
\end{aligned} \tag{64}$$

于是从方程组 (64) 的最后三个方程，可得到

$$S_{12}^2+S_{23}^2+S_{31}^2=\frac{1}{16}(q_1^2+q_2^2+q_3^2+q_4^2)^2-\frac{1}{4}. \tag{65}$$

根据量子力学,自旋值 S 定义为

$$S(S+1)=S_{12}^2+S_{23}^2+S_{31}^2. \tag{66}$$

因此对于用方程(37)所描写的粒子，自旋值 S 由(65)式的结果给出下列表达式:

$$S=\frac{1}{4}(q_1^2+q_2^2+q_3^2+q_4^2)-\frac{1}{2}. \tag{67}$$

象一个谐振子的能量本征值一样，$\frac{1}{2}(q_1^2+q_3^2)$ 的本征值具有 $n+\frac{1}{2}$ 的形式,同样 $\frac{1}{2}(q_2^2+q_4^2)$ 的本征值也具有 $n'+\frac{1}{2}$ 的形式. 其中 n 和 n' 是正整数或零. 因此 S 的本征值有下面的形式:

$$\frac{1}{2}(n+n'). \tag{68}$$

已经证明满足(37)式的波函数必须是 q 的一个偶函数，$n+n'$ 总是一个偶数或零. 因此自旋值也一定是一个整数或零,所以由波动方程(37)描写的粒子是具有整数自旋的粒子(由此可以推测出它是一个玻色子，服从玻色—爱因斯坦统计).

顺便指出,初看起来,这里似乎有一个难点,与自旋有关. 自旋 S 看上去象是依赖于粒子的动量的. 然而可以证明这是一个假象. 因为把角动量分解为轨道角动量和自旋角动量的方法不是一个相对论的方法. 我们可以重新定义粒子的自旋,以消除自旋依赖于动量的假象.

现在让我们简要地考察一下用上述理论所描写的粒子的物理图象，特别是粒子所经受的内部运动的型式是什么这样一类问题. 当我们采用海森堡表象时,这类问题最容易回答. 这是由于海森堡表象给出的信息类型最接近于运动的经典描

述. 因此为了达到任一量子理论与经典理论类比的目的，用海森堡表象最为合适.

用描述自旋 $\frac{1}{2}$ 粒子的原始方程 (2) 的理论，海森堡运动方程要导致电子的“抖动”（Zitterbewegung）概念. 当把粒子的坐标 x_r 表示为形式

$$x_r = y_r + \xi_r, \tag{69}$$

并把 y_r 分解为

$$y_r = b_r + p_r/p_0 t \tag{70}$$

时，这个概念就可清楚地显示出来. y_r 描写经典运动部分；b_r 与时间无关；ξ_r 部分描述小的高频振荡. 在这个理论中，因为坐标 x_r 能以两种不同的方式变化，即它们能随

(i) 时间，

(ii) 规范变换

而变化，所以存在几种可能的运动.

对于一个动量为零的粒子，已发现在规范变换下的运动相当于点 x_r 在一个球壳上的不规则运动，这个运动没有物理意义，物理上重要的东西是球壳本身. 人们已发现球壳的半径矢量是 $-S_{r0} = +S_{0r}$ [见方程 (64) 中的定义]，还发现半径矢量随时间而振荡. 因此我们得到一个脉动球壳的概念.

那么新方程的前景怎样呢？在现阶段，这个方程存在着一些十分严重的困难，这些困难阻碍着这个理论的任何进一步的发展. 这些困难显然与一件不可能做到的事有关，即不可能用任何已知的方法去处理由方程 (37) 所描述的粒子的电磁相互作用，其理由是：当人们试图用 $P_\mu + eA_\mu$ 代替波动方程中的四维动量 P_μ

$$P_\mu \to P_\mu + eA_\mu \tag{71}$$

来引入电磁场(由场的四维矢势 A_μ 确定)时，人们发现，变换

后的波动方程组（47）一般不是内在相容的．对某个函数 S 来说，只有当四维矢势具有下列形式

$$A_\mu = \partial_\mu S \tag{72}$$

时，才能使方程组有内在相容性． 但这仅仅相当于电磁场张量的全部分量

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{73}$$

等于 0，因此不存在物理上可观测的场． 这表明如果粒子具有电荷，或具有任何其它的电磁特性，则对于这种粒子，就没有相容的理论．

参 考 文 献

P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* (London) A322, 435 (1971).

P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* (London) A328, 1 (1972).

5. 宇宙学和引力常数

支持引力常数变化的论据来自对自然常数的研究. 自然界向我们提供了各式各样的常数: 光的速度,电子电荷,电子质量以及和这些相类似的量. 这些自然常数大多数是有量纲的,也就是说,其数值取决于你所采用的单位. 我们用公制单位时得到的常数值和用英制单位时得到的值不一样, 所以这样的数值没有任何普遍的意义.但是根据一些自然常数,我们能够构造某些无量纲的量,某些在所有单位制中都相同的量. 今天,我们只讨论这些无量纲的量.

在这些无量纲的常数当中, 有一个著名的精细结构常数的倒数:

$$\frac{\hbar c}{e^2}. \tag{1}$$

这个常数是原子理论中的一个基本常数, 其值约为 137. 另一个无量纲的常数是质子质量与电子质量之比,也就是

$$\frac{m_p}{m_e}. \tag{2}$$

这个常数的值约等于 1840. 虽然在目前对这些数还没有满意的解释, 但是物理学家们相信, 对它们终究会找到一个解释, 那时人们就能够从基本的数学方程计算出它们. 人们可能期望这些数是由一些 4π 和类似于 4π 的其它简单的数所构成的.

现在我想要你们注意另一个无量纲的自然常数, 它是这样产生的: 考虑氢原子,即一个电子和一个质子组成的体系,

它们之间的静电力与它们之间的距离的平方成反比，它们之间的引力也是如此。现在我们能够取静电力与引力的比值，这个值与距离无关，并且是无量纲的。用这种方法我们得出一个数：

$$\frac{e^2}{Gm_em_p}, \tag{3}$$

式中 e 是电子（或质子）的电荷，G 是引力常数，m_e 和 m_p 是电子和质子的质量。

现在如果我们算出它的值，我们得到一个极大的数，它约等于

$$2 \times 10^{39}.$$

同其它的无量纲自然常数一样，对这个数应当作出某种解释。我们怎样才能希望有办法建立一个理论来解释这样一个大数呢？我们不能从 4π 以及数学上提供的其它简单的数用任何合理的方法得出这样的数。把这个大数同宇宙年龄联系起来，或许是解释这个大数的唯一途径。

当我现在讲到宇宙的年龄时，我指的是按普遍公认的宇宙大爆炸模型。根据这个模型，宇宙是这样开始的：全部物质都集中在一个非常小的区域里，甚至是集中在一个数学点上，在开始时有一个可怕的巨大爆炸，许多物质块以各种各样的速度向外抛射，速度越快，物质块就运动得越远。这就给出我们现在看到的状况，也就是，所有物体都在离开我们后退，较远的物体比较近的物体后退得快，退行的速度与离开我们的距离成正比。

甚至我们还可以采用勒梅特（Lemaitre）提出的模型。按照这个模型，宇宙从一个原子开始，这个原子具有非常大的质量，即具有整个宇宙的质量。这个独一无二的大原子具有极强的放射性，它立刻衰变成各种碎块，这些碎块继续衰变，继

续不断地衰变下去。现在我们看到的放射性正是那个大原子的原始放射性残余。这是一幅非常美妙的图画，但是对于我正要向你们讲的论据来说，这不是主要的。

用这种方法，就有了一个宇宙年龄，这个年龄叫做纪元(epoch)。人们能够利用哈勃（Hubble）常数来了解这个年龄是多大。哈勃常数把天空中遥远物体的退行速度和它们之间的距离联系了起来。哈勃发现，退行速度与距离成正比。他那时只能对距离较近的天体准确地检验这个关系。但这个关系与观测符合得非常好，以致现在都假定，对于更遥远的天体这个关系也成立。根据退行速度与距离的比，人们能够确定全部物质集中在最初那个极小体积内的时刻到现在经历的时间有多长，从而得出宇宙的年龄，或纪元。由于测量极远天体的距离有一定不确定性，这样估算的宇宙年龄也有很大的不确定性。美国加利福尼亚大学实验室的阿贝尔（Abell）给出的最新数值大约是：

$$t = 18 \times 10^9 \text{ 年}.$$

这个数包含一个相当人为的时间单位——一年。我们可以用原子理论表示的时间单位来代替它。我们取光穿过一个经典电子所需的时间作为时间单位：

$$\frac{e^2}{m_e c^3}.$$

如果用这个单位表示 t，我们就得到一个大约为 7×10^{39} 的数：

$$t = 7 \times 10^{39} \frac{e^2}{m_e c^3}.$$

这个数和我们在前面得到的大数 2×10^{39} 粗略相同。

你们可以说：“这是一种非常惊人的巧合。”但我不认为

这是一种巧合；我认为这样两个大数会如此接近，在自然界一定有某种基本的原因，我们目前不知道这个原因，也不能去猜测它．但当我们有了关于原子论和宇宙学的更多的资料时，就会解释它．

我们假定这两个数之间有一种联系，这种联系将由一个未来的理论所提供．数 $t = 7 \times 10^{39}$ 不是常数，它随着时间的推移不断变大．因此，假如这两个数是互相联系的，那么数 $\frac{e^2}{Gm_em_p} = 2 \times 10^{39}$ 也必须随着时间的推移不断变大，并且必须保持它和 t 的比例不变．

如果我们采用一种单位制（我们可以把它叫做“原子单位”），使电子电荷 e、电子质量 m_e 以及质子质量 m_p 按这种单位制保持不变，我们就可非常方便地描述上面的结果．这样，由于 e^2/Gm_em_p 随时间变化，G 本身也一定随时间变化．采用上述单位时我们有

$$\frac{e^2}{Gm_em_p} \propto t, \tag{4}$$

因此，当用原子单位时，G 一定与时间成反比：

$$G \propto t^{-1}. \tag{5}$$

以后我将不断地引用这里得出的 G 正比于 t^{-1} 的结果．在引用时，我们总是把它理解为：“在原子单位中，G 正比于 t^{-1}”．G 是一个有量纲的量，它随时间的变化取决于选用什么单位．要得到 $G \propto t^{-1}$ 定律，必须用原子单位．

这里，我们有一条普遍原理：自然界中出现的没有量纲的非常大的数是彼此相关的．我把这个原理叫做

大 数 假 设

按照这个假设，自然界出现的所有无量纲的大数都是彼此相

关的.就象 $s = 7 \times 10^{39}$ 和 e^2/Gm_pm_p 一样.

下面我们必须考虑另一个很大的无量纲的数，这就是以质子质量为单位表示的宇宙总质量. 如果你愿意的话，你也可以把它叫做宇宙中质子和中子的总数. 当然也有可能宇宙是无限的，从而这个总质量是无限大的. 在这种情况下，我们就无法谈论宇宙总质量. 然而我们还可以用另一个数来代替它. 我们只需考虑宇宙中离我们足够近的那一部分，例如其退行速度小于光速一半的那一部分. 这时，我们所考虑的只是无限大宇宙中一个有一定大小的部分，这部分退行的速度小于光速的一半. 那么，我们要问：宇宙中这部分的总质量有多大呢？这一定也是一个很大的数，并且当宇宙为无限大时，它能代替宇宙的总质量，给出一个确定的数.

利用我们所能观测到的天体质量，并且考虑到观测不到的物质而作适当加成，我们就可以估计宇宙这一部分的总质量. 我们还不太清楚由于考虑到观测不到的物质质量要作多大的加成，也许观测不到的物质相当多，这些物质以星系际的气体、黑洞或其它类似的形式出现. 然而，暗物质的总量比可见物质的总量不会大得很多，也还是可能的. 如果作了这种假设，就会发现以质子质量为单位的宇宙总质量是

$$\frac{\text{总质量}}{\text{质子质量}} = 10^{78}, \tag{6}$$

其中，由于考虑到不可见的物质而加了一个适当的因子. 由此，我们得到一个数，粗略地说，这个数是 s（用原子单位）的平方.

现在根据大数假设，所有这些无量纲的大数应当彼此相关，因此我们应当期望

$$\frac{\text{总质量}}{\text{质子质量}} = 10^{78} \propto t^2. \tag{7}$$

再利用同样的论证，我们就会想到： 宇宙中质子的总数与 t^2 成正比增加. 因此宇宙中一定在创造着物质，而且是继续不断地创造着物质.

已经有许多采用物质连续创造的宇宙学理论，其中之一由霍伊尔（Hoyle）等人作了很大的发展. 我在这里提出的物质连续创造的理论与霍伊尔等人的理论完全不同. 他们的物质连续创造的理论是作为与大爆炸理论相竞争而提出来的，目前他的这个理论已经得不到支持了.

我在这里所讲的连续创造与霍伊尔的连续创造有着本质上的不同. 霍伊尔提出了一个宇宙稳定态理论，即以连续创造的物质去补偿由于膨胀而运动到可见范围以外的物质. 根据这个稳定态理论，他得到的 G 是个常数. 而在我们的理论中，G 是随时间变化的. 这就是一个本质上的差别.

我提出一个理论，在这个理论中物质连续创造而且 G 随时间变化. 物质连续创造和 G 变化的假定两者都是从大数假设得来的.

必须把物质连续创造看作与已知的物理过程完全无关. 按照通常的物理过程，也就是我们在实验室里研究的物理过程，物质是守恒的. 但在这里，物质正好是不守恒的. 如果你愿意的话，你可以把它叫做一种新的放射性过程，在这个过程中，物质是不守恒的，并且在这个过程中，要在以前并不存在粒子的地方创造出粒子来. 这个效应是非常小的，因为只有我们等待非常长的时间间隔，长到和宇宙年龄可以相比时，才会有可以观测出的粒子数创造出来.

如果新物质不断被创造出来，就会引起这样的问题："物质是在哪里创造的？"人们可以作两个合理假设：其一，假设新物质是在整个空间连续创造的. 在这种情况下，新物质大多数是在星系际空间创造的，我把这种假设叫

相 加 创 造

其二，假设新物质是在靠近原有物质的地方创造的。 新创造的物质和原有的物质具有相同的原子性质，这就意味着所有的原子正在按比例增加。我把这种假设叫做

倍 增 创 造

创造新物质有以上这样两种可能性，我还不知道该选择哪一种。 应当继续采用这两种可能性，并对它们的结果进行检验。

现在如果我们想要发展 G 变化的这种理论，我们就一定会碰到应当如何改变力学方程的问题。我们有爱因斯坦的引力理论，这个理论极其完善；它得到了很多成果，我们应当保留这些成果。 但是根据爱因斯坦理论，G 必须是个常数：在爱因斯坦理论中 G 没有变化的可能。 事实上，如果采用自然单位，就会得出 G 等于 1.

我们怎样才能够做到既允许 G 变化，又能保留爱因斯坦理论的成果呢？我认为，只有一个方法能做到这一点。 即我们假设，爱因斯坦方程是完善的，正确的方程，但适用于这些方程中的物理量所采用的单位是与原子单位不一样的.

我们必须考虑距离和时间，它们在爱因斯坦理论中用两个相邻点之间的间隔

$$ds$$

来表示。我们必须考虑 ds 的两种表示： 有一种表示 ds 是使爱因斯坦方程成立的；另一种表示 ds 应当用原子单位来度量。 我们把适合爱因斯坦方程的 ds 表示写为

$$ds_E,$$

而把用原子单位度量的 ds 表示写成

ds_A。

我们假定，在这两种单位制中光速都等于 1。这样当我们由 ds_B 变换到 ds_A 时，时间间隔与空间间隔能以相同的比例改变。

近来很多人一直在研究 G 变化的引力理论，但是他们全都倾向于采用一种简单的理论。按照这个理论，惯性质量和引力质量不同，G 是联系两种质量的系数，因而只要引力质量和惯性质量比值有变化，就可以容易地得出 G 的变化。这个理论确实是非常简单的理论。因为它和爱因斯坦理论完全相反，所以是很不令人满意的理论。根据爱因斯坦理论，引力质量和惯性质量必须相同。如果你采用这种简单理论，你就会失去爱因斯坦理论的成果；就会失去解释水星近日点移动的可能性。我之所以要向你们谈到这个简单的理论，是因为在阅读文献时，你们会发现，有一些论文是用这种简单理论进行计算而写成的。我认为这样的计算是完全不能接受的，因为它们涉及到要抛弃爱因斯坦理论的成果。

相反，我这里采用 ds 两种度量的理论。人们可以把它叫做

米尔恩（Milne）假设

米尔恩第一个提出可能有两种时间标度的思想，并且他讨论了这两种时间标度之间的关系。两种时间标度的思想在物理学中是很重要的。他在战前写过有关这方面内容的书。米尔恩的工作和我在这里对大数的论证是各自独立的。他对两种时间标度作了各种哲学上的论证，对此我并不非常信服。但他提出的时间可以有两种标度的基本思想，在物理学中是很重要的。下面我来介绍这个思想，我的目的是要在虽然 G 有变化的情况下仍然保持爱因斯坦理论的成果。

现在对这两个 ds（ds_B 和 ds_A），我们将首先求出它们之

间的关系. 让我们举一个简单的例子，比如说地球绕太阳在一个圆形(作为一个近似)轨道上运动，这时利用牛顿理论，我们有方程

$$GM = v^2 r,$$

式中 M 是太阳质量，v 和 r 是地球的轨道速度和轨道半径. 这个基本的牛顿理论对目前的计算是足够准确的，不管采用哪种单位，这个方程一定成立.

我将要使用下列术语

$$ds_E \to \text{“力学”单位},$$

也就是我们必须考虑使爱因斯坦方程成立的单位. 另一方面，对 ds_A 使用

$$ds_A \to \text{“原子”单位},$$

即由原子钟或晶体点阵间距提供的单位.

不管用力学单位和原子单位，方程 $GM = v^2 r$ 都必须成立. 在力学单位中，我们有通常的力学概念. G, M, v 和 r 每一个都是常数. 地球以一个不变速度在一个半径为常数的轨道上稳定地运动.

用原子单位时情况怎样呢？在原子单位中我们有

$$G \propto t^{-1},$$

对相加创造来说，太阳的质量（用原子单位，即用质子的质量来量度）应当是一个常数：

$$M \propto 1 \text{ (相加创造)}.$$

对倍增创造来说，同样用原子单位，我们有

$$M \propto t^2 \text{ (倍增创造)},$$

这是因为每一小块物质都是按 t^2 定律成比例增加的.

因此，在原子单位中，M 随时间变化的方式取决于我们对新物质创造方式所作的假设.

v 是怎样呢？v 是无量纲的量，我们能把它表示为光速

的某个分数，不管我们用力学单位还是原子单位，v 都必须相同：在这两种单位中，v 是光速的同一个分数，因此 v 不变化：

$$v \propto 1.$$

比较方程 $GM = v^2 r$ 的两边，我们看到

$$r \propto t^{-1} \quad \text{（相加创造）}$$

和

$$r \propto t \quad \text{（倍增创造）}.$$

因此我们看到：在原子单位中，如果用相加创造假设，地球轨道半径就逐渐变小，也就是地球逐渐靠近太阳. 同样的讨论一般地也适用于太阳系的一切距离. 根据这个模型，我们就应把太阳系想象为正在收缩. 这个现象应当是一个宇宙学效应，它将被叠加到由已知物理原因产生的任何其它效应上. 同样地，如果我们用倍增创造假设，地球就背离太阳运动，并且太阳系中的一切距离都在增大，这也是一个宇宙学效应，也是与任何已知的物理过程无关的.

我们这里得到了一些效应，希望能够把它们测量出来，以便检验这个理论是否正确. 我们必须用原子时间进行精确地观测. 我应当强调指出：重要的是用原子时间来进行这些观测，因为上面的这些公式只适用于用原子单位量度的量.

首先，我们可以考虑对月球进行观测，以便检验这个理论的正确性. 过去二十年来，人们一直用原子时间观测月球的运动. 最近还用原子单位对月球的距离进行了精确地测量. 登月宇航员在月球上放置了一些激光反射器，人们向这些反射器发射激光，并对由反射器反射回来的光进行观测；同时用原子钟来测量光到达月球再反射回来所需的时间，用这个方法算出以原子单位表示的月球距离.

如果我们把这个理论应用于月球绕地球的运动. 这个理

论要求，如果用相加创造，月球应当接近地球，不难算出其速度约为

2 厘米/年。

如果用倍增创造，月球应当以同一速度背离地球运动。因此，我们必须把月球距离测量到上述那样的精确度，才能检验这个理论。近来人们一直在对月球距离进行高精度测量。我得到的最新资料是：大约在一年以前，他们测量月球距离的精度已达到 6 厘米，并且测量精度还在不断提高。看来对理论的检验只是等待一些时间和进行进一步观测的问题。

这样就有人以为我们已有了检验这个理论的确切方法，然而问题并非如此简单。月球的运动受潮汐影响很大，而且潮汐效应比我们所测量的那些效应要大得多。就我所知，还不能以足够的精确度计算潮汐效应。去年，我同喷气推进实验室的吉姆·威廉斯（Jim Williams）讨论过，他对于以足够的精确度计算潮汐效应以便能够检验这个理论的可能性表示相当悲观。我不知道人们将能把计算精度提高到什么程度，但这不是毫无希望的事情。我希望能同这里测量月球距离的人讨论一下，以便了解他们对这件事的看法。

现在我来讲检验这个理论的另一个方法。这种方法所涉及的不是月球距离，而是月球在天空的角运动。我们用符号

$$n$$

来表示月球在天空的角速度，由此我们可以求出（相对）角加速度：

$$\frac{\dot{n}}{n}.$$

人们可以通过观测月掩星的时间，对月球在天空中的角运动作非常精确的观测。二十年来，人们一直在用原子钟观测

这些掩星. 起初,凭目视进行观测,而最近的观测则完全是自动化的. 于是从对月球运动的这些观测中,有可能算出 $\dot{n}/n$.

有些人一直在研究这个问题. 就我所知,对这个问题研究得最多的要算范福兰登 (Van Flandern),他在华盛顿的海军研究天文台工作.

问题在于对月球角加速度的观测,既要用原子时间,求出

$$\left(\frac{\dot{n}}{n}\right)_{\text{原子时}},$$

又要用天文学家使用的标准时间,即所谓星历表时间. 星历表时间是由地球绕太阳的运动或其它行星绕太阳的运动所标度的时间,它不一定和原子时间相同. 如果想要达到更高的精确度,就只有利用牛顿运动方程或爱因斯坦方程来建立星历表时间单位.

我们取上述两个时间单位表示的 $\dot{n}/n$ 之差:

$$\left(\frac{\dot{n}}{n}\right)_{\text{原子}} - \left(\frac{\dot{n}}{n}\right)_{\text{星历}} = \left(\frac{\dot{n}}{n}\right)_{\text{差}}.$$

范福兰登观测了这个量,他给出的结果是:

$$\left(\frac{\dot{n}}{n}\right)_{\text{差}} = (-16 \pm 10) \times 10^{-11}/\text{年}.$$

范福兰登很早就用上述的简单引力理论进行了计算. 我上面已对你们谈过这个理论,它把惯性质量和引力质量看作两个独立的东西来处理. 按照这个简单理论有

$$\frac{\dot{G}}{G} = \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{n}}{n}\right)_{\text{差}}. \tag{8}$$

根据范福兰登的数据,给出.

$$\frac{\dot{G}}{G} = (-8 \pm 5) \times 10^{-11}/\text{年}. \tag{9}$$

范福兰登对这个结果相当高兴. 因为根据 $G \propto t^{-1}$ 的理论有

$$\frac{\dot{G}}{G} = -\frac{1}{t},$$

它大约等于：

$$-6 \times 10^{-11}/\text{年},$$

这相当于最近我们估算的纪元

$$t = 18 \times 10^9 \text{ 年}$$

的倒数.

但根据我的观点，这不是十分令人满意的，因为这个结果利用了那个简单理论.

如果我们不用那个简单理论而用建立在米尔恩假设基础上的理论，对于相加创造我们得到

$$\frac{\dot{G}}{G} = -\left(\frac{\dot{n}}{n}\right)_{\text{宇宙}} \quad \text{（相加创造）},$$

对于倍增创造我们得到

$$\dot{G}/G = +(\dot{n}/n)_{\text{宇宙}} \quad \text{（倍增创造）}.$$

根据范福兰登的数据，这些值为：

$$\frac{\dot{G}}{G} = (16 \pm 10) \times 10^{-11}/\text{年} \quad \text{（相加创造）},$$

和

$$\frac{\dot{G}}{G} = (-16 \pm 10) \times 10^{-11}/\text{年} \quad \text{（倍增创造）}.$$

从公式 $\dot{G}/G = -1/t$ 立即可以得出：我们希望 $\dot{G}/G$ 是负的. 所以我们看到：范福兰登的观测支持倍增创造的思想. 观测值是 -16 而不是 -6，这稍微大了一点.

范福兰登一直不断地反复核对他的计算，并且对他的结果进行一些修正. 我已得知他的最新结果比他原来的 8［在 $(-8 \pm 5) \times 10^{-11}$/年中的 8］要小得多，这些结果正越来越接

近于理论所要求的值.

也许我应当说明一下这些计算的巨大复杂性. 我们必须对月球的运动进行非常精确的计算，而月球的运动是非常复杂的. 月球只是太阳系的一员，它不断受到其他所有行星的扰动. 也许你们倾向于认为：其它行星离得那么远，不会有多少的影响. 然而当人们更仔细地考查问题时，就会发现：以前曾假定可以忽略的效应却是根本不能忽略的，我们必须考虑这个效应，它的确会影响结果. 人们不断地研究其它行星对月球运动的影响，其结果是范福兰登也不断地改变他的计算结果.

我认为人们必须等待稍长一些时间，才能看到这个工作得出的最后结果. 总之你们看到，现代技术水平已经达到可以检验这个理论的正确性了. 但现在还不能说这些结果真正证实了这个理论，这样说还有点为时过早. 然而人们可以希望在几年内将明确地证实或否定这个理论.

当然我们这里也还要考虑潮汐效应，但在计算月球相对角加速度的情况中，潮汐效应就可以消去了，因为用原子时间和用星历表时间观测中潮汐效应都一样.

人们也可以不对月球而对其它行星进行观测. 如果不对月球进行观测，就可避免由潮汐效应产生的影响. 人们可以用雷达对其它行星的距离进行非常精确地观测. I. I. 夏皮罗(Shapiro) 正在研究这个问题. 他用的方法是把雷达波发送到一个行星上，然后观测反射波. 当然这些反射波是极其微弱的. 但是在波多黎各的阿莱西堡设有一个大的雷达发射机和反射望远镜，用于这个工作，它是足够灵敏的. 为了大大提高它的精确度，最近改装了在阿莱西堡的那个雷达接收机(我估计用了六百万美元). 在近几个月来，已用它观测金星. 我还不知道他们观测的结果. 现在金星恰好离地球非常近，他们

希望能对金星作非常精确的观测，以至如果那里有干涸的河床的话，也能看到。这些观测将能使我们获得非常精确的金星距离。如果以后人们再继续观测几年，就可以确定这些距离是否在按照这个理论的预言发生变化。对其它行星也可进行类似的观测。

我认为夏皮罗的观测也许比范福兰登的观测更有希望，因为在观测行星时，我们确实避开了由潮汐带来的困难。对这个问题夏皮罗已研究了好几年，但他对于发表尚未完全确立的结论相当犹豫。我曾间接地听说，他的观测倾向于支持相加创造的假设，因此就和范福兰登的结果相矛盾。但是我认为，要看到夏皮罗在阿莱西堡使用的这个改进装置取得新的观测结果，我们还得等待一、两年。那时我们对这个理论将会得到一次新的检验。

这样，为检验引力常数变化的理论，现在可以有三种天文学方法，这些方法分别涉及月球的距离，月球的运动和行星的距离。我认为我们会在几年内得到一个确切的答案。

如果这个理论得到证明并被承认，这将意味着我们的宇宙学观念要发生一个大的改变。现在宇宙学家们倾向于支持这样的宇宙模型：宇宙现阶段正在膨胀，但是膨胀正在变慢，最后会停止下来，接着转变为收缩。

按照我在这里提出的观点，这种宇宙模型是不允许的，因为它会导致一个不变的大数，即宇宙的最大尺度，一个不随纪元变化的大数。当然，宇宙的最大尺度也就和纪元没有任何联系。这样我们得到的这个大数就和大数假设相矛盾。

按照我的看法，宇宙不可能有最大尺度，它必须永远地继续膨胀下去，并且G也将相应地永远越来越弱。

现在我就讲到这里，以便能留下一些时间来回答一两个简单的问题。

问：[J. C. 凯利（Kelly）教授]

先生，在您的方程中，总质量/质子质量 $= 10^{11}$，您把质子质量选为不变的常数而使宇宙总质量变化，您为什么不让质子质量也变化？

答：

你可以说质子质量是变化的，但这没有任何意义。你必须取一个无量纲的量，才能问它变化不变化。当我讲宇宙质量变化时，就要理解为用原子单位表示的宇宙质量，正如我讲 G 变化时就指的是用原子单位表示的 G 一样。如果某个量是有量纲的，你就不能讨论它是否变化。

问：

原子时间是包含普朗克常数的那个时间吗？

答：

是的。原子时间应当是可以测量的时间，例如用铯钟或其它的原子钟。

问：

是吗？这和你在演讲开始时写出的单位不是有些不同吗？

答：

你是指 $c^3/m_e c^3$ 吧？不！应当用 137 或者某些这样的因子把它们联系起来。它们不是相互独立的，不是的！

问：

先生，当 G 变得越来越小时，引力强度与电力强度的比也越来越小吗？

答：

是越来越小！是这样！

问：

引力也越来越弱吗？

答：

是的！这就是我们对于现在引力非常弱的解释，引力已经经过那样长的不断减弱的时间了！

问：

先生，您详细地讨论了大数。对一些较小的数，如 137 等等，它们也可以随时间变化吗？有没有什么证据支持这样的假设呢？

答：

对于一些较小的数，它们可能随时间按对数变化。但有一个观测证据表明，数 137 不随时间按对数变化。关于数 $m_p/m_e=1840$ 还没有证据，了解这个数是否真是一个常数，还是随时间按对数变化都是十分有意义的。这是能用现代技术测量的东西。测量它的方法是比较两种原子钟，其中一个钟的时间用电子振动来刻度，而另一个钟的时间用某个原子的振动来刻度。例如一个用电子振动来刻度时间的铯钟，和一个用某个原子核振动刻度时间的铵（或甲烷）钟。

有人告诉我，用这些原子钟测量时间的精确度能够达到 10^{-13}。

如果量 m_p/m_e 随时间按对数变化，当用两种原子钟测量时，所测时间的比也是按对数变化的；这个变化要比 G 的变化小 100 倍，大约为 10^{-12}/年。

如果测量时间的精确度能达到 10^{-13}，那么就能测出 10^{-12} 的差别。因此以必要的精度比较这两种钟的问题只是一个提高技术的问题。实际上用一年左右的时间就能作出这种比较。

我希望人们做这个实验，因为在我看来，决定数 m_p/m_e 是否真是一个常数是非常重要的问题。这个数是一个难以理解的数，还没有人对它作过任何解释，做这种实验将是一个开端。

问：

我认为，在今年 4 月澳大利亚广播公司新闻处的一篇评论中，对阿莱西堡反射望远镜是否具有合适的性能以便能在今年下半年提高到观测金星所要求的灵敏度，存在着很大的怀疑。

答：

甚至在最近，我仍然确信它会成功的，并且正在得到很好的结果。

问:

您始终强调这些效应存在于通常的物理定律之外. 那么对创造出来的这种新物质有没有作过量子化假设呢? 或者它会不会是一种不同形态的物质呢?

答:

这种新物质必须是量子化的，因为我们没有看到任何其它形态的物质出现. 这种新物质和普通物质应该是没有区别的.

问:

计算宇宙年龄是建立在大爆炸理论假设的基础上的. 我认为，既然把连续创造也加到这个理论中去，我不知道大爆炸理论事实上是否还需要. 因为在我看来似乎是: 当人们有一个原始大爆炸又加上连续创造，不管是相加创造还是倍增创造，结果便出现矛盾.

答:

我看不到有任何的矛盾. 总之得有大爆炸，因为存在各种涡旋星云，这些星云互相以与它们之间的距离成正比的速度退行. 如果把时间反推回去，并且推到过去足够遥远的时间，这些星云全都会彼此非常靠近，那就是宇宙起源的时间.

问: [Wollongong 大学 P. 菲希尔（Fisher）教授]

在这些过程中，人们要求物质不守恒，这不是也意味着线动量……不守恒吗?

答:

正是这样! 但是对有量纲的量，守恒问题就没有多大意义. 如果一个量有量纲，它变化与否取决于所使用的单位，因此它是否守恒也取决于所使用的单位. 你可以说: “用力学单位，这些量是守恒的，用原子单位，它们是不守恒的.”

问:

有一个厄阜（Eötvös）型实验，例如近年迪克（Dicke）所做的实验，对您的结论有影响吗?

答:

有! 也许有可能用地面上的实验来测量 G，但这就需要把精

确度大大提高．我认为他们测量 G 的精度现在只能达到 10^{-4}．大大提高精确度是有希望的．

问： [悉尼大学的 H. 墨多奇 (Murdoch) 教授]

回推到 $t = 0$，值得做吗？如果 G 是唯一随时间变化的量，容易证明这样的回推会使 G 趋于无限大，引力这么大，那么是什么力能引起大爆炸呢？

答：

因为其它物理量可能发生变化，例如 m_p/m_e 可能变化，所以这就不能回推到过去太远．原子核相互作用中包含的常数可以变化．关于这方面我们实在一无所知．当你试图回推到过去太远时，情况就变得很不确定．

问： (悉尼大学 H. 墨多奇教授)

这似乎表明许多东西都必须变化，不然就不会发生大爆炸．

答：

也许是许多东西在变化．总之我们还没有宇宙怎样起源的理论，这只是一种推测．

问：

我正想问；爱丁顿 (Eddington) 对解释宇宙学常数所作的努力是否仍然有效？

答：

我不这样看！他对数 137 提出了某些论证，然而 137 这个数仍然是非常神秘的．他也对宇宙中的粒子总数 2^{256} 作了一些论证，我认为他的论证和现在的理论完全相反，因为按照现在的理论，这个数完全不应当是一个常数，所以它不能恰好等于 2^{256}！

问： (悉尼大学 H. 墨多奇教授)

您的理论要求宇宙中的粒子总数随时间而增加．在标准宇宙学理论中，随着膨胀变慢，可观测到的粒子总数也随时间而增加，这是从麦克维特 (McVittie) 研究视界理论得出的结论．这种增加对您理论中所要求的物质总量会有重要的影响吗？

答：

我认为不会有重要的影响，因为我的理论和膨胀变慢的理论

是不一致的。

问：

我想知道，如果把相加创造和倍增创造适当地结合起来，……给出你所希望的答案吗？

答：

是这样！但是我认为这是毫无道理的。我想任何人不会相信相加创造和倍增创造两者的结合。

问：

产生新物质的源泉是什么？是额外的能量，还是别的什么东西？

答：

不！可以看作是一种放射性。这种新物质是通过某种新的放射过程从真空中产生出来的。这些过程与已知的任何过程完全无[redacted]关，并且，这种过程出现得太少，以致于在通常实验室的实验中，[redacted]观测不到。