狄拉克量子力学演讲集

P. A. M. 狄拉克 著

北京信息工程学院
图书

科学出版社

狄拉克量子力学演讲集

P. A. M. 狄拉克 著

袁卡佳　刘耀阳 译

刘耀阳 校

科 学 出 版 社

1986

内 容 简 介

本书为狄拉克在纽约耶塞瓦大学就量子力学的几个基本问题所作的四次演讲，内容包括哈密顿方法、量子化问题、曲面上的量子化和平面上的量子化。作者对他本人在五十年代中发展起来的约束体系动力学作了系统而简明的阐述，思路清晰，叙述严谨，是关于约束问题的经典著作。

本书可供理论物理专业师生、研究生以及科研人员参考。

Paul A. M. Dirac
LECTURES ON QUANTUM MECHANICS
Yeshiva University, New York, 1964

狄拉克量子力学演讲集

P. A. M. 狄拉克 著
袁卡佳　刘耀阳 译
刘耀阳 校

责任编辑　周　奇

科学出版社出版
北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1986年4月第一版　开本：787×1092　1/32
1986年4月第一次印刷　印张：2 1/8
印数：0001—3,300　字数：45,000

统一书号：13031·3139
本社书号：4987·13—3

定价：0.55元

出 版 前 言

1964 年狄拉克在纽约耶塞瓦大学就量子力学和量子场论中的基本问题，对研究生作了一系列演讲，本书就是其中的量子力学部份.它由下列四讲构成：一，哈密顿方法；二，量子化问题；三，曲面上的量子化；四，平面上的量子化．作者对他五十年代发展起来的约束体系量子化方法作了系统而简明的阐述，基本上概括了作者在这方面所做的工作．与原始文献相比，本书的特点是思路清晰，叙述简洁，无论对物理思想或数学结构的论述，都反映出作者独特的观点和风格.

约束体系在经典力学中并非罕见，但进行量子化却十分困难，直到五十年末，才由狄拉克等应用推广的哈密顿方法予以解决，可以说这是量子力学在二十年代创立以来的又一重大发展．六十年代末，应用这一方法解决了杨-米尔斯规范场的量子化这一著名难题，此后约束动力学问题就日益受到理论物理学界的普遍重视，并用它来研究各种复杂问题．实际上，描述自然界基本相互作用的电磁场、杨-米尔斯场、引力场、超对称、超引力、超弦理论，都是具有奇异拉氏量的约束体系，也就是说，所有的规范理论都必须涉及约束问题．所以，近十多年来，无论在基本粒子理论，或引力场量子化理论的探索方面，约束问题都占据了重要位置，并成为所有规范理论的基本问题，而与此有关的各种课题也形成了十分活跃的研究方向．本书被认为是约束体系量子化问题的经典著作.为此，现译成中文出版，以供我国理论物理高年级学生、研究生、教师、科研人员参考．译文不当之处，请读者批评指正.

目　录

第一讲　哈密顿方法……（1）
第二讲　量子化问题……（18）
第三讲　曲面上的量子化……（32）
第四讲　平面上的量子化……（48）

第一讲 哈密顿方法

我很高兴到耶赛瓦(Yeshiva)来,并有这个机会对你们谈一谈我过去持续工作了多年所获得的一些数学方法. 首先,我想简述一下建立这些方法的总目的.

在原子理论中,我们必须处理各种场,其中有一些是大家极为熟知的,如电磁场和引力场; 可是近年来,我们还注意到有若干别的场,根据德布罗意和薛定谔的一般观念,每个粒子都与波相联系,而这些波就可以看作是某种场. 于是在原子物理中,我们的一般问题就是建立一个关于彼此相互作用的各种场的理论. 我们需要一个遵从量子力学原理的理论,然而要得到这样的理论却是相当困难的事情.

如果回到相应的经典力学,我们就可以得到一个简单得多的理论,这也就是当普朗克常数 h 趋于零时量子力学应取的形式. 从经典力学意义上非常容易看出我们在做什么,因此我在这些演讲中要谈的将主要是经典力学.

现在你们也许会认为,我这样做其实不够好,因为经典力学对自然界的描述不够好. 自然界是用量子力学描述的. 既然如此,为什么我们还要对经典力学如此费心呢? 我说过,量子场论是相当困难的;而且迄今为止,人们也只能对相当简单的几种场和它们之间的简单相互作用建立起量子场论. 很可能这些简单的场以及它们之间的简单相互作用并不足以描述自然界. 关于量子场论我们所获得的成功是极其有限的. 人们不断陷入困境,于是人们就想扩大自己的基础,从而有可能考虑更一般的场. 例如,我们打算研究麦克斯韦方程并不精

确成立的可能性. 当我们进人到距离产生场的电荷非常近的区域时,或许就必须修改麦克斯韦场论,以便将其变为非线性电动力学. 目前,在我们对于原子理论的基本观念、基本作用力以及场的基本特征还不了解的情况下, 这只是值得考虑推广的一个实例.

为了能够从处理更一般的场这一问题着手, 我们必须考察经典理论. 如果我们能够将经典理论纳人哈密顿形式, 那么也就总能够用一定的标准规则得到量子理论的一级近似. 我的演讲要涉及的将主要是如何把一个普遍的经典理论纳人哈密顿形式的问题. 一旦做到了这一点, 我们就确定无疑地踏上了最终获得精确量子理论的道路, 至少我们已经有一个一级近似.

当然, 这一工作只应看作是整个一项工作的开端. 这一工作最终的结局应该是建立一个精确的量子理论, 而这将牵涉到一些相当严重的困难, 也就是曾经困扰人们多年的根本性困难. 有些人对于从哈密顿经典力学过渡到量子力学时出现的困难印象很深, 以致于他们认为, 也许从哈密顿经典理论出发的整个方法都是不可取的. 特别是,最近几年来,人们一直试图建立得到量子场论的另外一些方法,沿着这些路线, 他们已经获得了很可观的进展. 他们得到了一系列必须满足的条件, 虽然这些方法极有助于说明许多实验结果, 我仍然感到它们不会导致问题的最终解决. 我觉得在这些方法中失去了什么东西, 而这只能通过哈密顿量或哈密顿量概念的某种推广才能得到. 因此, 我持这样的观点: 哈密顿量对于量子理论才真正是十分重要的.

事实上,不用哈密顿方法,甚至连量子理论中一些最简单的问题都不能求解,例如, 得不到氢原子的巴耳末公式, 而这却正好是量子力学的起源. 因此, 哈密顿量以一种极其基本

的方式发挥作用，并且在我看来从哈密顿量出发进行工作确实是极为本质的. 所以，我想对你们谈一谈我们能够将哈密顿方法发展到何种程度.

我想用一种基本方式开始讨论，并将作用量原理作为我的出发点. 也就是说，我假设存在着这样一个依赖于运动的作用量积分，当改变运动，同时加上作用量积分的稳定性条件时，就可得到运动方程. 从作用量原理出发的方法有一个最大优点，就是我们可以很容易地使得理论满足相对性原理. 我们之所以要求原子理论必须与相对论一致，是因为一般说来我们讨论的是高速运动的粒子.

如果我们想要引进引力场，那就必须使理论满足广义相对性原理，这意味着涉及的是弯曲时空. 因为与原子过程中存在着的其他作用力相比较，引力极其微弱，所以在原子物理中引力场不是很重要的，为了实用目的，我们可以将它忽略不计. 近些年来，人们已对在量子场论中引入引力场的问题作了某种程度的探讨，但是，我认为这些工作的主要目的，是指望引进引力场之后或许将有助于消除某些困难. 就我们目前所看到的而言，这个希望没有实现，并且引进引力场似乎不仅没有消除困难，反而增加了困难. 因此目前尚没有充分的理由将引力场引入原子理论. 然而，我将要描述的却是强有力的数学方法，无论我们是否引进引力场，这些方法都是有效的.

我们从作用量积分出发，将它记为

$$I = \int L dt, \tag{1-1}$$

它由一个时间积分表示，其中被积函数 L 是拉格朗日量. 这样，有一个作用量原理，就相应地有一个拉格朗日量. 我们需要考虑怎样从拉格朗日量过渡到哈密顿量. 一旦有了哈密顿量，我们就朝着得到量子理论的方向迈出了第一步.

你们也许想知道，我们是否能将哈密顿量作为出发点，从而简化从作用量积分开始得到拉格朗日量，然后再将拉格朗日量过渡到哈密顿量的程序．对这种简化试图提出异议的根据，是很难把一个理论是相对论性理论的条件用哈密顿量形式表达出来，而用作用量积分的形式却很容易做到这一点，只须要求作用量积分是不变量即可．我们可以很容易地构造出无数个不变作用量积分的例子．它们将自动地导致与相对论一致的运动方程，并且从作用量积分得到的一切结果，也将与相对论一致．

一旦有了哈密顿量，我们就能应用一种标准方法给出量子理论的一级近似，而且要是幸运的话，或许还能进而得到一个精确的量子理论．你们也许还想知道，是否我们能在某种程度上简化这一程序．难道我们不能直接从拉格朗日量得到量子理论而完全不涉及哈密顿量吗？的确，对于一些简单例子，我们是可以做到这一点的．对于物理学中所用到的一些简单场，其拉格朗日量是速度的二次型，类似于非相对论性质点动力学中出现的拉格朗日量．对于这些其拉格朗日量是速度二次型的例子，人们已经找到了一些方法可以直接从拉格朗日量得到量子理论．虽然如此，拉格朗日量是速度的二次型这一限制还是显得过于苛刻了，我决定取消这个限制，处理可以作为速度的相当一般的函数的拉格朗日量．为了找到一个普遍形式，使之能够用于例如前面提及的非线性电动力学的情形，我认为不能用任何方法简化这个程序，即从作用量积分出发得到拉格朗日量，然后从拉格朗日量过渡到哈密顿量，再由哈密顿量过渡到量子理论．我在这些演讲中要讨论的正是这个程序．

为了开始时能以简单方式表达问题起见，我想从只包含有限自由度的动力学理论着手，正如大家在质点动力学中所

熟悉的那样. 将有限自由度过渡到场论中所需的无限自由度,仅仅只是一件形式上的事情.

我们从一个具有有限自由度的体系开始，将其动力学坐标记为 q. 普遍情况是 q_n, $n=1,\cdots,N$, 其中 N 是自由度数目. 还有速度 $dq_n/dt=\dot{q}_n$. 拉格朗日量 $L=L(q,\dot{q})$ 是坐标和速度的函数.

此刻，大家或许会因为这一表述形式中时间变量所起的显要作用而有点困扰. 在我们引进拉格朗日量时，时间变量 t 就已经出现,后来它再次出现于速度中,并且从拉格朗日量过渡到哈密顿量的整个进程都包含着一个特殊的时间变量. 因此,从相对论观点看来，我们正是选出了一个特殊的观察者,使我们的整个表述形式都参照这个观察者的时间. 当然，对于一个相对论者来说,这是不太令人满意的,他希望平权地对待所有观察者.可是,这却是我们现在的表述形式所具有的一个特征；假如我们要保持拉格朗日量是坐标和速度的任意函数这一普遍性，那么我看不出怎样才能避免这一点. 尽管由于理论中出现了一个占主导地位的特别时间，使得方程形式不再是明显相对论性的,但是,我们仍然可以确信理论的内容是相对论性的.

现在，我们尽可能紧密地遵循用广义坐标观点处理动力学时所学到的一些观念,建立这个拉格朗日动力学,然后过渡到哈密顿动力学. 对作用量积分进行变分，我们得到拉格朗日运动方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}\right)=\frac{\partial L}{\partial q_n}. \tag{1-2}$$

为了过渡到哈密顿表述,我们引进动量 p_n, 定义为

$$p_n=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}. \tag{1-3}$$

在通常的动力学理论中，我们假设动量是速度的独立函数，但是这一假设对于我们将要应用的情形限制太苛刻了. 我们需要允许这些动量可能不是速度的独立函数. 在这种情形下，存在着将动量联系起来的某些形如 $\phi(q, p) = 0$ 的关系.

可能有许多个彼此独立的这种关系，如果确是如此，我们就可用指标 $m = 1, \cdots, M$ 来加以区分，于是我们有

$$\phi_m(q, p) = 0. \tag{1-4}$$

q 和 p 是哈密顿理论的动力学变量. 它们由关系 (1-4) 联系起来，这种关系称为哈密顿形式的初级约束. 这个术语系柏格曼所创，我认为非常合适.

现在我们考虑 $p_n\dot{q}_n - L$ 这个量. (无论何处出现重复指标，都假定是对指标的所有取值求和.)我们对坐标 q 和速度 $\dot{q}$ 作变分，这些变分将导致动量 p 变分的出现. 由 (1-3) 得知，这些变分的结果为

$$\begin{aligned}
&\delta(p_n\dot{q}_n - L) \\
&= \delta\dot{p}_n\dot{q}_n + p_n\delta\dot{q}_n - \left(\frac{\partial L}{\partial q_n}\right)\delta q_n - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}\right)\delta\dot{q}_n \\
&= \delta\dot{p}_n\dot{q}_n - \left(\frac{\partial L}{\partial q_n}\right)\delta q_n.
\end{aligned} \tag{1-5}$$

现在你们看到，$p_n\dot{q}_n - L$ 的变分中只包含 q 和 p 的变分，而不包含速度的变分. 这意味着 $p_n\dot{q}_n - L$ 可以用 q 和 p 表出，而与速度无关. $p_n\dot{q}_n - L$ 用 q 和 p 表出后就称为哈密顿量 H.

然而，这样定义的哈密顿量并不是唯一确定的，因为我们可以对它加上等于零的 ϕ 的任意线性组合. 这样，我们可以得到另一个哈密顿量

$$H^* = H + c_m\phi_m, \tag{1-6}$$

其中系数 c_m 可以是 q 和 p 的任意函数. H^* 和 H 几乎完全一

样，我们的理论不能区分 H 和 H^*。 总之，哈密顿量不是唯一确定的。

由 (1-5)，我们看到

$$\delta H = \dot{q}_n \delta p_n - \left(\frac{\partial L}{\partial q_n}\right)\delta q_n .$$

这个方程对于 q 和 p 满足约束条件(1-4)的任意变分都成立。由于受到(1-4)的限制，q 和 p 不能独立地进行变分。但是对于 q 和 p 的任意变分，只要它们维持这些条件，上述方程总是成立。由变分学中应用于具有这种约束的变分方程的一般方法*，我们导出

$$\dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial p_n} + u_m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_n} \tag{1-7}$$

和

$$-\frac{\partial L}{\partial q_n} = \frac{\partial H}{\partial q_n} + u_m \frac{\partial \phi_m}{\partial q_n} .$$

或者借助于 (1-2) 和 (1-3)，上式可写为

$$\dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q_n} - u_m \frac{\partial \phi_m}{\partial q_n}, \tag{1-8}$$

其中 u_m 是未知系数。我们由此得到了哈密顿运动方程，它们描述变量 q 和 p 如何随着时间而变化，但是这些方程含有未知系数 u_m。

为使我们能够简洁地写下这些方程，引进泊松括号形式常常是很方便的。泊松括号以如下方式构成：若我们有两个 q 和 p 的函数 $f(q, p)$ 及 $g(q, p)$，则它们的泊松括号 $[f, g]$ 定义为

$$[f, g] = \frac{\partial f}{\partial q_n}\frac{\partial g}{\partial p_n} - \frac{\partial f}{\partial p_n}\frac{\partial g}{\partial q_n} . \tag{1-9}$$

---

* 此处系指拉格朗日不定乘子法。——译者注

由上述定义可导出泊松括号的一些性质，即 $[f, g]$ 对于 f 和 g 是反对称的：

$$[f, g] = -[g, f], \tag{1-10}$$

对两个元素中任一个都是线性的：

$$[f_1 + f_2, g] = [f_1, g] + [f_2, g], \text{ 等等}, \tag{1-11}$$

并且存在乘法律：

$$[f_1 f_2, g] = f_1[f_2, g] + [f_1, g] f_2; \tag{1-12}$$

最后，三个量之间的雅可毕恒等式为

$$[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0. \tag{1-13}$$

借助于泊松括号，可以重写运动方程. 对于 q 和 p 的任意函数 g，我们有

$$\dot{g} = \frac{\partial g}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial g}{\partial p_n} \dot{p}_n. \tag{1-14}$$

如果将 $\dot{q}_n$ 和 $\dot{p}_n$ 用由 (1-7) 和 (1-8) 给出的表达式代进去，我们就会发现 (1-14) 正好是

$$\dot{g} = [g, H] + u_m[g, \phi_m]. \tag{1-15}$$

这样运动方程已完全用泊松括号形式简洁地写出来了.

如果把泊松括号的概念作一些推广，我们就能够把这些方程写成更为简洁的形式. 我们前面定义泊松括号时，泊松括号只对可以用 q 和 p 表出的量 f 和 g 才有意义. 某些更一般的量，例如不能用 q 和 p 表出的广义速度，与别的量之间就没有泊松括号. 让我们来推广泊松括号的意义，并假定对任意两个量，都存在相应的泊松括号，并且满足法则 (1-10)，(1-11)，(1-12) 和 (1-13). 不过，当涉及的量不是 q 和 p 的函数时，除了具有这些性质外，其泊松括号的形式是不定的.

于是，我们可以将 (1-15) 写为

$$\dot{g} = [g, H + u_m \phi_m]. \tag{1-16}$$

在此我们看到系数 u 出现于泊松括号的一个元素中. 系数

u_m 不是 q 和 p 的函数，因而我们不能用定义(1-9)来确定(1-16)中的泊松括号. 然而，我们可以着手用(1-10)，(1-11)，(1-12)和(1-13)这几条法则来计算这个泊松括号. 利用加法律(1-11)，我们有

$$[g, H + u_m\phi_m] = [g, H] + [g, u_m\phi_m], \quad (1\text{-}17)$$

再用乘法律(1-12)，有

$$[g, u_m\phi_m] = [g, u_m]\phi_m + u_m[g, \phi_m]. \quad (1\text{-}18)$$

(1-18)中最后一个括号是有定义的，因为 g 和 ϕ_m 都是 q 和 p 的函数. 泊松括号 $[g, u_m]$ 设有定义，但是它与等于零的 ϕ_m 相乘. 因此(1-18)右端第一项为零. 结果是

$$[g, H + u_m\phi_m] = [g, H] + u_m[g, \phi_m], \quad (1\text{-}19)$$

这表明(1-16)与(1-15)一致.

使用泊松括号表述时必须注意，我们有约束(1-4)，但是只有在算出泊松括号之后才能用这些约束，否则，就会得到一个错误结果. 因此作为一个规则，我们规定必须算出了所有的泊松括号，才能用约束方程. 为了记住这个规则，我将约束(1-4)中通常的等号(=)方程改成不同的等号(≈)方程. 因此(1-4)变成

$$\phi_m(q, p) \approx 0. \quad (1\text{-}20)$$

我称这种方程为弱方程，以与通常方程或者说强方程相区别.

我们只有在算出了所有感兴趣的泊松括号后才能利用(1-20). 遵守这个规则，泊松括号(1-19)完全确定，并且采用所谓总哈密顿量 H_T，我们有可能将运动方程(1-16)写成非常简洁形式：

$$\dot{g} \approx [g, H_T], \quad (1\text{-}21)$$

其中总哈密顿量为

$$H_T = H + u_m\phi_m. \quad (1\text{-}22)$$

现在，我们来考察这些运动方程的结果. 首先，将出现一

些自洽性条件. 我们有一些量 ϕ，它们在整个时间过程中都必须为零. 我们可以应用运动方程(1-21)或者(1-15)，其中 g 就取成 ϕ 中的一个.我们知道,由于自洽性，$\dot{g}$ 必须为零，这样就会得出一些自洽性条件. 我们来看一看这些条件的结构. 在 (1-15) 中取 $g = \phi_m$，并命 $\dot{g} = 0$，有

$$[\phi_m, H] + u_{m'}[\phi_m, \phi_{m'}] \approx 0. \tag{1-23}$$

这里我们得到了一系列自洽性条件，对于每个 m 值都有一个相应的条件. 我们必须考察这些条件，以便弄清它们将导致什么. 很可能它们会直接导致一种不自洽性. 它们也许会导致 $1=0$ 这样的不自洽性. 假如这种情况发生,就意味着我们原来的拉格朗日量会使得拉格朗日运动方程不自洽. 可以很容易地构造一个只有一个自由度的例子. 如果取 $L = q$，则拉格朗日运动方程 (1-2) 立即给出 $1 = 0$. 于是,大家看到，我们并不能完全任意地选取拉格朗日量. 我们必须对拉格朗日量加上条件,使得拉格朗日方程不含任何不自洽性. 在这一限制下,方程 (1-23) 可以分成三种情况.

在一种情况中,方程可化成 $0 = 0$，换言之,借助于初级约束,等式恒成立.

在另一种情况中,方程可化成一个与 u 无关的方程,它只包含 q 和 p. 这种方程一定与初级约束无关，否则就回到了第一种情况. 因此,这种方程的形式为

$$\chi(q, p) = 0. \tag{1-24}$$

最后,(1-23)中的某个方程不能化成上述两种情况,这就给出了 u 必须满足的条件.

第一种情况我们无须再费心. 第二种情况中每一个方程都意味着哈密顿变量间还有另外的约束，通过这种方式产生的约束称为次级约束. 次级约束与初级约束的差别在于：初级约束仅仅是定义动量的方程(1-3)的推论,而为了要得到次

级约束，我们还必须利用拉格朗日运动方程。

如果我们的理论中有一个次级约束出现，那么我们还会得到另一个自洽性条件，因为我们可以根据方程(1-15)算出 $\dot{\chi}$，并要求 $\dot{\chi} \approx 0$。于是，我们得到另一个方程

$$[\chi, H] + u_m[\chi, \phi_m] \approx 0, \qquad (1\text{-}25)$$

这一方程必须和(1-23)一样同等对待。我们还需再弄清它属于三种方程中的哪一种。如果它属于第二种，那么我们就必须进一步继续进行我们用过的步骤，因为我们又有了更深一层的次级约束。这样继续下去，直到我们穷尽了所有的自洽性条件，最终结果将是得到一系列形如(1-24)的次级约束，以及一系列系数 u 满足的形如(1-23)的条件。

对于许多问题，我们将把次级约束和初级约束同等对待。比较方便的是用下述记号：

$$\phi_k(q, p) \approx 0, \quad k = M + 1, \cdots, M + K, \qquad (1\text{-}26)$$

其中 K 是次级约束的总数。我们应该用与初级约束同样的方式将次级约束写成弱方程，因为次级约束也是求出了泊松括号后我们才能使用的方程。于是，全部约束可以一并写成

$$\phi_j(q, p) \approx 0, \quad j = 1, \cdots, M + K \equiv J. \qquad (1\text{-}27)$$

现在我们来考察余下的第三种方程。我们必须弄清它们究竟对系数 u 加上了什么样的条件。这些方程是

$$[\phi_j, H] + u_m[\phi_j, \phi_m] \approx 0, \qquad (1\text{-}28)$$

其中 m 从 1 到 M 求和，而 j 取从 1 到 J 的任何一个值。如果这些方程不能化成约束方程，那么我们就得到含有系数 u 所满足的条件的方程。

我们从下述观点来讨论这些方程。假定 u 是未知的，而且在(1-28)中我们有一系列关于未知量 u 的非齐次线性方程，其系数是 q 和 p 的函数。我们来求这些方程的一个解，求得的解 u 是 q 和 p 的函数，即

$$u_m = U_m(q, p). \tag{1-29}$$

这样的解一定存在，不然就意味着拉格朗日运动方程是不自洽的，而我们已经排除了这种情形.

这样的解不是唯一的. 若已有一个解，我们可以加上与(1-28)对应的齐次方程

$$V_m[\phi_j, \phi_m] = 0 \tag{1-30}$$

的任意一个解 $V_m(q, p)$，从而给出非齐次方程(1-28)的另一个解. 我们需要(1-28)的最一般解，这意味着我们必须考虑(1-30)的所有独立解，这些解记为 $V_{am}(q, p)$，$a = 1, \cdots, A$. 于是，借助于任意系数 v_a，(1-28)的一般解为

$$u_m = U_m + v_a V_{am}. \tag{1-31}$$

我们将 u 的这些表达式代入理论的总哈密顿量 (1-22)，这就给出如下的总哈密顿量:

$$H_T = H + U_m\phi_m + v_a V_{am}\phi_m. \tag{1-32}$$

我们可将上式写为

$$H_T = H' + v_a\phi_a, \tag{1-33}$$

其中

$$H' = H + U_m\phi_m, \tag{1-33}'$$

及

$$\phi_a = V_{am}\phi_m. \tag{1-34}$$

运动方程仍然是(1-21)，总哈密顿量为(1-33).

进行上述分析的结果是，我们已经满足了理论的所有自洽性要求，但是仍然还有任意系数 v. 系数 v 的数目通常小于系数 u 的数目. u 不是任意的，它必须满足自洽性条件，而 v 却是任意系数. 我们可以将 v 取作时间的任意函数，同时满足我们动力学理论的所有要求.

上述结果显示了广义哈密顿表述与我们在基础动力学中所熟悉的哈密顿表述之间的一个不同之处. 在运动方程具有

给定初始条件的一般解中，出现了时间的任意函数．这些时间的任意函数必然意味着我们使用了一个带有任意性特征的数学框架，例如，按某些任意方式选取的坐标系，或者电动力学中的规范．由于有这种数学框架的任意性，未来时刻的动力学变量并不完全决定于初始时刻的动力学变量，这一点通过一般解中出现的任意函数而显示出来．

我们需要采用一些术语，以使我们能够辨别这一表述形式中出现的各个量之间的关系．我发现以下的术语是很有用的．我定义作为 q 和 p 的函数的任意动力学变量 R 为第一类的，如果 R 与所有 ϕ 的泊松括号都等于零，

$$[R, \phi_j] \approx 0, \quad j = 1, \cdots, J. \tag{1-35}$$

这些条件只要弱成立就足够了．其他不满足这些条件的 R 就是第二类的．若 R 属于第一类，则 $[R, \phi_j]$ 必须强等于 ϕ 的某个线性函数，因为在目前理论中，弱等于零的任何量一定是强等于 ϕ 的某个线性函数．根据定义，ϕ 是唯一的弱为零的独立量．于是，我们有强方程

$$[R, \phi_j] = r_{jj'}\phi_{j'}. \tag{1-36}$$

在继续讨论之前，我想先证明一个定理．

定理　两个第一类量的泊松括号也是第一类的．

证明　设 R, S 是第一类的，则根据(1-36)，我们有

$$[S, \phi_j] = s_{jj'}\phi_{j'}. \tag{1-36}'$$

我们来构成 $[[R, S], \phi_j]$．可以用雅可毕恒等式(1-13)求出这个泊松括号：

$$\begin{aligned}
[[R, S], \phi_j] &= [[R, \phi_j], S] - [[S, \phi_j], R] \\
&= [r_{jj'}\phi_{j'}, S] - [s_{jj'}\phi_{j'}, R] \\
&= r_{jj'}[\phi_{j'}, S] + [r_{jj'}, S]\phi_{j'} \\
&\quad - s_{jj'}[\phi_{j'}, R] - [s_{jj'}, R]\phi_{j'} \\
&\approx 0
\end{aligned}$$

其中用到了 (1-36), (1-36)′, 乘法律 (1-12) 和 (1-20). 整个括号弱等于零,于是就证明了 $[R, S]$ 是第一类的.

我们一共有四种不同的约束. 我们可以将约束分成第一类的和第二类的, 这种区分与初级约束和次级约束的区分无关.

我希望你们会注意到, (1-33)′ 给出的 H' 和 (1-34) 给出的 ϕ_a 都是第一类的. 写下 ϕ_a 与 ϕ_j 的泊松括号,利用(1-34); 我们得到的结果是 $V_{am}[\phi_m, \phi_j]$ 再加上一些弱等于零的项. 按照定义 V_{am} 满足(1-30),故 ϕ_a 是第一类的. 类似地,用 U_m 代替 u_m, 则 (1-28) 表明 H' 是第一类的. 因此,(1-33) 证明总哈密顿量由第一类哈密顿量 H' 和一些第一类约束 ϕ 给出.

ϕ 的任意线性组合当然是另一个约束, 而且若取的是初级约束的线性组合, 就会得到另一个初级约束. 因此, 每个 ϕ_a 都是初级约束, 并且是第一类的. 于是, 最后的情况是: 我们已经将总哈密顿量表示成第一类哈密顿量与第一类初级约束的线性组合之和.

运动方程一般解中出现的时间任意函数, 其独立函数的数目等于指标 a 取值的数目. 这也等于独立的第一类初级约束的数目,因为在求和式 (1-33) 中包括了所有独立的第一类初级约束.

这就是要告诉你们的总情形. 在导出所有这些结果时, 我们所做的仅仅是从拉格朗日运动方程出发, 过渡到哈密顿方程,然后再求出自洽性条件.

从实用观点看来, 我们可以从作用量积分的一般变换性质, 得知什么样的时间任意函数会出现于运动方程的一般解中. 每个这样的时间函数一定对应着某一个第一类初级约束. 于是,无须进行全部泊松括号的详细计算,我们就能说出将有哪些第一类初级约束存在. 在理论的实际应用中, 采用

这个方法，显然可以省去大量劳动.

我想稍深入一点展示该理论的一个细节. 我们试图从物理上来理解这样一种情形，即从给定的初始变量出发，会得到含有任意函数的运动方程的一个解. 我们所需的初始变量是 q 和 p，并不要求系数 v 有给定的初始值. 这些初始条件描述了某种物理状态，物理学家们称之为体系的初始物理状态. 物理状态仅仅由 q 和 p 而不是由系数 v 决定.

初始状态应该决定以后各时刻的状态. 可是以后各时刻的 q 和 p，并不唯一地决定于初始状态，因为出现了任意函数 v. 这意味着虽然一组 q，p 唯一地确定了一个状态，但是状态并没有唯一地确定一组 q，p. 这必定是有 q，p 的多种选择对应着同一个状态. 于是，我们的问题是寻求对应于同一个特殊物理状态的所有各组 q，p.

某一时刻可以从同一初始状态演变而得到的所有那些 q 和 p，一定对应着该时刻的同一个物理态. 我们在 $t=0$ 时刻取定 q 和 p 的特殊初始值，然后考虑经过一小段时间间隔 δt 之后的 q 和 p. 对于一个其初始值为 g_0 的一般动力学变量 g，在时刻 δt 其值为

$$\begin{aligned} g(\delta t) &= g_0 + \dot{g}\delta t \\ &= g_0 + [g, H_T]\delta t \\ &= g_0 + \delta t\{[g, H'] + v_a[g, \phi_a]\}. \end{aligned} \tag{1-37}$$

系数 v 是完全任意的，可随便选取. 假设这些系数取不同的值 v'，则将给出一个不同的 $g(\delta t)$，二者之差为

$$\Delta g(\delta t) = \delta t(v_a - v'_a)[g, \phi_a]. \tag{1-38}$$

我们可将上式写为

$$\Delta g(\delta t) = \varepsilon_a[g, \phi_a], \tag{1-39}$$

其中

$$\varepsilon_a = \delta t(v_a - v'_a) \tag{1-40}$$

是个任意小量，其所以小是由于有系数 $\delta\iota$，又所以是任意的，是由于 v 和 v' 均是任意的. 这就是说，可以按照规则 (1-39) 改变哈密顿变量，新的哈密顿变量所描述的是同一个状态. 哈密顿变量的这一改变，在于应用了生成函数为 $\varepsilon_a\phi_a$ 的无穷小切变换*. 我们得到的结论是，原先作为第一类初级约束出现于理论中的 ϕ_a 具有下述意义：它们是无穷小切变换的生成函数，将导致 q 和 p 的改变，而这种改变并不影响物理状态.

然而，问题并非到此为止. 我们可以沿着这一方向进一步走下去. 假设我们相继作两个这样的切变换，首先作一个生成函数为 $\varepsilon_a\phi_a$ 的切变换，然后再作第二个生成函数为 $\gamma_{a'}\phi_{a'}$ 的切变换，这里 γ 是新的小系数. 最后得到

$$g' = g_0 + \varepsilon_a[g, \phi_a] + \gamma_{a'}[g + \varepsilon_a[g, \phi_a], \phi_{a'}]. \quad (1\text{-}41)$$

(我保留了含有乘积 $\varepsilon\gamma$ 的二阶项，但是略去了含有 ε^2 或 γ^2 的二阶项. 我这样做是合理的，也是足够的，这是由于我只需写出为得到要求的结果所必需的东西.) 如果将次序反过来，再作这两个变换，最后得到

$$g'' = g_0 + \gamma_{a'}[g, \phi_{a'}] + \varepsilon_a[g + \gamma_{a'}[g, \phi_{a'}], \phi_a]. \quad (1\text{-}42)$$

我们将以上二式相减，二者之差为

$$\Delta g = \varepsilon_a\gamma_{a'}\{[[g, \phi_a], \phi_{a'}] - [[g, \phi_{a'}], \phi_a]\}. \quad (1\text{-}43)$$

利用雅可毕恒等式 (1-13)，上式化成

$$\Delta g = \varepsilon_a\gamma_{a'}[g, [\phi_a, \phi_{a'}]]. \quad (1\text{-}44)$$

这个 Δg 一定也对应于一个 q 和 p 的改变，这些改变不引起物理态的任何变化，因为这是由两个分别不引起物理态任何变化的过程组成的. 由此可见，我们可以用

$$[\phi_a, \phi_{a'}] \quad (1\text{-}45)$$

---

* 此处系指通常所称的“正则变换”. ——译者注

作为无穷小切变换的生成函数，而且这种变换也不会引起物理态的变化。

ϕ_a是第一类的，它们的泊松括号弱等于零，因此它强等于ϕ的某个线性函数. 根据我前面证明的定理，即两个第一类量的泊松括号是第一类的，可知ϕ的这个线性函数一定是第一类的. 于是我们看到，按这个方式得到的、不对应于物理态改变的那些变换，是生成函数为第一类约束的变换. 这些变换较之我们前面已有的变换更为一般，原因是前面变换中的生成函数只限于第一类初级约束，而我们现在得到的可以是第一类次级约束. 这个计算结果表明我们可以用第一类次级约束作为无穷小切变换的生成函数，这种变换导致q和p发生改变而不影响物理态.

为了完备起见，我们还应该再做一些进一步的工作，证明第一类哈密顿量H'与第一类ϕ的泊松括号$[H', \phi]$仍然是第一类约束的线性函数. 也还可以证明$[H', \phi]$是不改变物理态的无穷小切变换的一个可能生成元.

最终结果是：不改变物理态的那些动力学变量的变换是无穷小切变换，其生成函数是一个初级第一类约束，或是一个次级第一类约束. 相当多的第一类次级约束出现于(1-45)或者$[H', \phi_a]$中. 我猜想很可能全部第一类次级约束都应该包括在那些不改变物理态的变换中，但我尚未能证明这一点. 我也尚未发现任何这样的例子，其中存在着影响物理态的第一类次级约束.

第二讲　量子化问题

我们已经得到一个观念，即存在着某些 p 和 q 的改变并不对应于物理态的改变，并且这种改变能以第一类次级约束作为生成元．这启发我们应该推广运动方程，以便允许动力学变量 g 随时间的变化不仅有 (1-21) 给出的变化，而且也包括所有不改变物理态的变化．因此我们应该考虑一个更一般的运动方程：

$$\dot{g} = [g, H_E], \tag{2-1}$$

其中 H_E 是广义哈密顿量．H_E 由前面提到的总哈密顿量 H_T 和具有任意系数的所有那些不改变物理态的生成元之和构成：

$$H_E = H_T + v'_{a'}\phi_{a'}. \tag{2-2}$$

没有包括在 H_T 中的生成元 $\phi_{a'}$ 必定是第一类次级约束．哈密顿量中这些附加项的存在，会给出 g 的新改变；但是这些改变没有相应的物理态的改变，因此肯定应将这种附加项包括进来，尽管我们不能直接从拉格朗日量得到 g 的这些改变。

以上就是一般的哈密顿理论．我在建立这个理论时，只限于自由度数有限的情形，但是我们可以很容易地将它推广到自由度数无限的情形．我们用以标记自由度的指标是 $n = 1, \cdots, N$；可以很容易地将 N 取为无穷大．我们还可以进一步把自由度数推广到连续无穷大的情形．就是说，可以将我们的坐标和动量写成 q_x 和 p_x，其中 x 是可在某一连续区域内取任何值的指标．如果使用连续的 x，那么我们就必须将前面结果中所有对 n 的求和变成积分．以前的结果全都可以

直接用这样一个变通办法而承接下来.

只有一个方程我们必须稍作不同的考虑，该方程定义了动量

$$p_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}. \tag{1-3}$$

如果 n 在一个连续区域上取值，我们必须将这里的偏微分理解成一个偏泛函微分过程，这可用如下方式精确地表示：在拉格朗日量中给速度一个改变量 $\delta\dot{q}_x$，然后写下

$$\delta L = \int p_x \delta \dot{q}_x. \tag{2-3}$$

出现于 δL 的被积函数中的 $\delta\dot{q}_x$ 前的系数，便定义为动量 p_x.

给出了以上一般的抽象理论后，我想若能再用一个简单例子加以说明，肯定是会有益的. 我将以麦克斯韦电磁场为例子，电磁场由势 A_μ 描述. 现在动力学坐标由一个确定时刻的所有空间点上的势构成. 就是说，动力学坐标由 $A_{\mu x}$ 构成，其中指标 x 代表在确定时刻 x^0 三维空间中一点的三个坐标 x^1, x^2, x^3（不是我们通常在相对论中习惯的四维坐标 x）. 然后以动力学坐标的时间导数作为动力学速度，我将用逗号后面紧跟一个指标 0 来表示它.

按照下面的一般规则，任何跟在逗号后面的指标都表示偏导数：

$$\xi_{,\mu} = \frac{\partial \xi}{\partial x^\mu}. \tag{2-4}$$

我们讨论的是狭义相对论，因此可以根据狭义相对论的规则升降这些指标：如果升降指标 1，2，3，则改变符号，但是升降指标 0 时不改变符号.

如果采用海维塞德（Heaviside）单位，则麦克斯韦电动力学的拉格朗日量是

$$L = -\frac{1}{4}\int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}d^3x, \tag{2-5}$$

其中 d^3x 表示 $dx^1dx^2dx^3$，积分在三维空间上进行．场量 $F_{\mu\nu}$ 与势 A_μ 的关系是

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}, \tag{2-6}$$

这里的 L 是拉格朗日量，因为其时间积分是麦克斯韦场的作用量积分．

现在我们从这个拉格朗日量出发，应用我们的形式规则过渡到哈密顿量．首先，我们必须引进动量．我们通过改变拉格朗日量中的速度来实现这一点．若改变速度，则有

$$\begin{aligned}\delta L &= -\frac{1}{2}\int F^{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu}d^3x \\ &= \int F^{\mu 0}\delta A_{\mu,0}d^3x.\end{aligned} \tag{2-7}$$

现在动量 B^μ 定义为

$$\delta L = \int B^\mu \delta A_{\mu,0}d^3x, \tag{2-8}$$

而且这些动量将满足基本的泊松括号关系

$$[A_{\mu x}, B^\nu_{x'}] = g^\nu_\mu \delta^3(x - x'); \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3. \tag{2-9}$$

这个式子中的 A 取在三维空间中的 x 点上，而 B 取在三维空间中的 x' 点．g^ν_μ 正好是克罗内克 (Kronecker) δ-函数．$\delta^3(x-x')$ 是 $x-x'$ 的三维 δ-函数．

比较 δL 的两个表达式 (2-7) 和 (2-8)，得出

$$B^\mu = F^{\mu 0}. \tag{2-10}$$

现在 $F^{\mu\nu}$ 是反对称的，

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}. \tag{2-11}$$

所以，如果我们命 $\mu = 0$，则在(2-10)中得到零．因此 B^0_x 等于零．这是个初级约束，我将它写成弱方程

$$B^0_x \approx 0, \tag{2-12}$$

其他三个动量 $B^r(r=1,2,3)$ 正好等于电场分量.

我应该提醒你们注意，(2-12) 并非只是一个初级约束，而是三重无穷多个初级约束；因为存在着代表三维空间中某个点的指标 x，而 x 的每个值都将给出一个不同的初级约束.

我们现在引进哈密顿量. 按通常方式将其定义为

$$\begin{aligned} H &= \int B^{\mu}A_{\mu,0}d^3x - L \\ &= \int\left(F^{r0}A_{r,0} + \frac{1}{4}F^{rs}F_{rs} + \frac{1}{2}F^{r0}F_{r0}\right)d^3x \\ &= \int\left(\frac{1}{4}F^{rs}F_{rs} - \frac{1}{2}F^{r0}F_{r0} + F^{r0}A_{0,r}\right)d^3x \\ &= \int\left(\frac{1}{4}F^{rs}F_{rs} - \frac{1}{2}B^rB^r - A_0B^r{}_{,r}\right)d^3x. \end{aligned} \tag{2-13}$$

在得到 (2-13) 的最后形式时，我们已作过一次分部积分. 这里我们得到了一个不含任何速度的哈密顿量表达式，它只含有动力学坐标和动量. 自然，F_{rs} 中含有势的偏微商，但是它只含有对 x^1, x^2, x^3 的偏微商. 这不会导致任何速度. 这些偏导数是动力学坐标的函数.

我们现在可以用初级约束(2-12)求出自洽性条件. 由于必须对所有时间保持约束关系，$[B^0, H]$ 必须为零. 由此导致方程

$$B^r{}_{,r} \approx 0. \tag{2-14}$$

这又是一个约束，因为其中没有出现速度. 这就是麦克斯韦理论中出现的一个次级约束. 如果我们再进一步考察自洽性条件，就必须求出

$$[B^r{}_{,r}, H] = 0. \tag{2-15}$$

我们发现上式化成 $0=0$ 的形式. 它不会再给出任何新东

西，而是自动得到满足．于是我们就得到问题中的全部约束．(2-12) 给出初级约束，而 (2-14) 给出次级约束．

我们现在希望看一看这些约束究竟是第一类的，还是第二类的，很容易看出它们都是第一类的．B_0 是动量，它们彼此之间的泊松括号全为零．$B^r{}_{,r}$ 和 B_0 彼此之间的泊松括号也为零，而且 $B^r{}_{,rx}$ 和 $B^r{}_{,rx'}$ 彼此之间的泊松括号也为零．因此所有这些量都是第一类约束．在麦克斯韦电动力学中不出现第二类约束．

表达式 (2-13) 给出的 H 是第一类的，所以可将这个 H 取作 (1-33) 中的 H'．现在我们看到，总哈密顿量是

$$H_T = \int\left(\frac{1}{4}F^{rs}F_{rs} + \frac{1}{2}B_rB_r\right)d^3x$$

$$-\int A_0B^r{}_{,r}\,d^3x + \int v_xB^0d^3x. \qquad (2\text{-}16)$$

v_x 对于三维空间中的每一点都是任意系数．我们只在第一类初级约束上加上了任意系数，根据得到总哈密顿量的规则，我们必须如此．

借助于总哈密顿量，我们有如下标准形式的运动方程：

$$\dot{g} \approx [g, H_T]. \qquad (1\text{-}21)$$

此处的 g 可以是三维空间某一点 x 处的任意场量，也可以是三维空间不同点处场量的函数．例如，它可以是三维空间的一个积分．g 可以是整个三维空间中 q 和 p 的绝对一般的函数．

取 $g = A_0$ 是许可的，于是我们得到

$$A_{0,0} = v_x, \qquad (2\text{-}17)$$

这是因为除了出现于 (2-16) 最后一项中的 B_0 之外，A_0 与其他项的泊松括号都为零的缘故．这就给出了出现于总哈密顿量中的任意系数 v_x 的意义：它就是 A_0 的时间导数．

为了得到物理上许可的最一般的运动，现在应该过渡到广义哈密顿量. 为此我们需加上具有任意系数 u_x 的第一类次级约束，由此给出广义哈密顿量：

$$H_E = H_T + \int u_x B'_{,r}\, d^3x. \tag{2-18}$$

哈密顿量中引进这个附加项后就包括了更一般的运动. 它给出了 q 和 p 的属于规范变换性质的更多改变. 引进了 q 和 p 的这种附加的改变，就会导致对应于相同物理态的一组新的 q, p.

这就是按照我们的规则而得到的结果，即麦克斯韦理论的哈密顿形式. 至此就可以看出存在某种可能的简化. 这种简化之所以存在，是因为变量 A_0，B_0 没有任何物理重要性. 我们来看看关于 A_0 和 B_0，运动方程能告诉我们些什么. $B_0 = 0$ 在任何时候均成立. 这是我们不感兴趣的. A_0 的时间导数是任意的，这也是不感兴趣的. 因而对变量 A_0 和 B_0 根本没有兴趣. 我们可以从理论中将它们消去，从而得到自由度较少的简化哈密顿形式，并且仍然保留着所有物理上有兴趣的自由度.

为了消去变量 A_0 和 B_0，我们从哈密顿量中把 $v_x B^0$ 项消去. 该项唯一的效应是允许 A_0 任意变化. H_T 中的 $-A_0 B'_{,r}$ 项可以同 H_E 中的 $u_x B'_{,r}$ 项合并. 系数 u_x 永远是任意的，合并后相当于把 u_x 用 $u'_x = u_x - A_0$ 代替，后者同样是任意的. 这样我们就得到一个新哈密顿量

$$H = \int\left(\frac{1}{4} F^{rs}F_{rs} + \frac{1}{2} B_r B_r\right) d^3x + \int u'_x B'_{,r}\, d^3x. \tag{2-19}$$

这个哈密顿量足以给出物理上感兴趣的所有变量满足的运动方程，其中变量 A_0，B_0 不再出现. 这就是麦克斯韦理论形式上最简单的哈密顿量.

这个哈密顿量与通常人们在量子电动力学中所用的不完全相同. 通常的哈密顿量基于最初由费米建立的一个理论. 费米理论中对势有如下限制:

$$A^{\mu}{}_{,\mu} = 0. \tag{2-20}$$

这种限制可以变成对规范的限制. 我们这里给出的哈密顿理论并不包含这种限制,它允许取完全一般的规范. 因此,它是一种与费米形式略为不同的形式. 当我们进行最一般的规范改变时,用这种形式可以使麦克斯韦理论的变换威力得到充分发挥. 麦克斯韦理论给我们提供了一个关于初级约束和次级约束一般观念的具体实例.

现在我想回到一般理论,并考虑哈密顿理论的量子化问题. 在讨论量子化问题时,我们首先讨论没有第二类约束而全部约束均属第一类的情形. 我们将动力学坐标 q 和动量 p 变成算符,它们满足与经典理论的泊松括号关系相应的对易关系. 这是很简单的,然后再建立薛定谔方程

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H'\psi, \tag{2-21}$$

ψ 是 q 和 p 作用于其上的波函数,H' 是我们理论中的第一类哈密顿量.

我们还要附上一些辅助条件,即

$$\phi_j\psi = 0. \tag{2-22}$$

因此每个约束都引出一个加在波函数上的辅助条件. (注意现在的约束都是第一类的.)

现在我们要做的第一件事是考察 ψ 满足的这些方程彼此是否自洽. 我们取两个辅助条件,并考察它们是否自洽. 我们取 (2-22) 以及

$$\phi_{j'}\psi = 0. \tag{2-22}'$$

若 (2-22) 乘以 $\phi_{j'}$,得

$$\phi_{j'}\phi_j\psi = 0. \tag{2-23}$$

若 (2-22)′ 乘以 ϕ_j，得

$$\phi_j\phi_{j'}\psi = 0. \tag{2-23}'$$

两个方程相减，得

$$[\phi_j, \phi_{j'}]\psi = 0. \tag{2-24}$$

为满足自洽性，这个加在 ψ 上的新条件是必要的．现在我们不希望有新的条件加在 ψ 上，而希望所有加在 ψ 上的条件都已包括在 (2-22) 中．这就是说，我们希望 (2-24) 是 (2-22) 的结论，这意味着要求

$$[\phi_j, \phi_{j'}] = c_{jj'j''}\phi_{j''}. \tag{2-25}$$

若(2-25)成立，则 (2-24) 是 (2-22) 的结论，而不是加在波函数上的新条件．

我们已知在经典理论中 ϕ 全都是第一类的，这意味着在经典理论中任何两个 ϕ 的泊松括号都是 ϕ 的线性组合．当我们过渡到量子理论时，对易子必须满足类似的方程，但是系数 c 未必全都位于左边．我们要求这些系数全部位于左边，因为 c 一般来说是坐标和动量的函数，并且在量子理论中与 ϕ 不对易．只有假定 c 全部位于左边，(2-24)才能由 (2-22) 导出．

我们在量子理论中建立 ϕ 这个量时，可能存在某种任意性．相应的经典表达式中也许会包含量子理论中不可对易的量，因而我们必须确定量子理论中各因子的次序．我们设法这样安排因子次序，以使(2-25)成立，而且所有系数都位于左边．如果我们能够做到这点，则各辅助条件彼此是自洽的．如果我们做不到，那就很不幸，我们不能建立一个精确的量子理论．但无论如何，我们已有一个量子理论的一级近似，因为若精确到普朗克常数 $\hbar$ 一级，而略去 $\hbar^2$ 级的量，则我们的方程是完全正确的．

我刚才已经讨论了辅助条件彼此自洽的要求．还应该检查一下辅助条件是否与薛定谔方程自洽，但讨论是类似的．如果我们从满足辅助条件 (2-24) 的 ψ 出发，并令其按薛定谔方程随时间变化，那么经过一段时间后，ψ 仍将满足辅助条件吗？如果答案是肯是的，那就要求

$$[\phi_i, H]\psi = 0, \tag{2-26}$$

这表明 $[\phi_i, H]$ 必须是 ϕ 的某个线性函数：

$$[\phi_i, H] = b_{ij}\phi_j, \tag{2-27}$$

这样就不会出现新的辅助条件．我们又一次得到一个在经典理论中已知是正确的方程．ϕ_i 和 H 都是第一类的，因此它们的泊松括号弱等于零．从而在经典理论中这些泊松括号强等于 ϕ 的某个线性函数．我们再设法适当安排因子次序，使得在相应的量子方程中，所有系数均位于左边．这是得到精确的量子理论所必需的，能否做到这点，一般来说要看运气．

现在我们来研究怎样将存在第二类约束的哈密顿理论量子化．首先通过一个简单例子来考虑这个问题．作为最简单例子，我们取

$$q_1 \approx 0, \quad p_1 \approx 0. \tag{2-28}$$

如果在理论中有这样两个约束出现，那么它们的泊松括号不为零，所以是第二类的．在向量子理论过渡时我们应该怎样处理呢？我们不能象在第一类约束的情形做过的那样，将(2-28)作为辅助条件加到波函数上．如果我们试图命 $q_1\psi = 0$，$p_1\psi = 0$，那么由于 $(q_1p_1 - p_1q_1)\psi = i\hbar\psi = 0$，我们会立即导致矛盾．所以，我们不能那样做，而必须采取别的方案．

在这个简单例子中，这个方案会导致什么，是十分清楚的．变量 q_1 和 p_1 都限于等于零，因而不感兴趣．于是第一个自由度无关紧要．我们可以消去第一个自由度，只处理其他剩下来的自由度．这意味着应该重新定义泊松括号．在经典理论

中我们不得不采用泊松括号的如下定义：

$$[\xi, \eta] = \frac{\partial \xi}{\partial q_n}\frac{\partial \eta}{\partial p_n} - \frac{\partial \xi}{\partial p_n}\frac{\partial \eta}{\partial q_n},$$

对 $n = 2, \cdots, N$ 求和. (2-29)

因为它考虑到了所有物理上感兴趣的变量，所以也就足够了. 于是可以取 q_1 和 p_1 恒等于零. 这里没有任何矛盾，只用 $n = 2, \cdots, N$ 这些自由度，我们就可以过渡到量子理论.

在这一简单情形中，为建立一个量子理论，我们应该怎么做，已很显然. 现在我们来设法进行推广. 假设我们有 $p_1 \approx 0$, $q_1 \approx f(q_r, p_r)$, $r = 2, \cdots, N$, 其中 f 是其他所有 q 和 p 的任意函数. 如果在哈密顿量和所有别的约束中将 q_1 用 $f(q_r, p_r)$ 代替，我们就可以消去第一个自由度. 我们也可以忽略第一个自由度，而仅同其他自由度打交道，并以这些自由度为基础过渡到量子理论. 而且我们也还必须同(2-29)这种类型的，只涉及到其他自由度的泊松括号打交道.

以上就是我们将含有第二类约束的理论进行量子化时所用的观念. 第二类约束的存在意味着有一些自由度在物理上是无关紧要的. 我们必须除去这些自由度，而只对其余的那些物理上有重要意义的自由度建立新的泊松括号. 然后，借助于新泊松括号过渡到量子理论. 我想讨论一个实现这一切的一般步骤.

现在回到经典理论. 我们有一系列约束 $\phi_j \approx 0$，其中有些是第一类的，有些是第二类的. 我们可以用这些约束的独立线性组合取代它们，这些线性组合的作用同原来的约束一模一样. 我们设法调整线性组合，使尽可能多的约束归入第一类. 另外有一些不能通过取线性组合归入第一类的，则留作第二类约束. 我将那些留在第二类中的约束称为 χ_s, $s = 1, \cdots, S$. S 是其线性组合不是第一类的第二类约束数

目.

用这些留下的第二类约束算出它们彼此之间的所有泊松括号，再将这些泊松括号排列成一个行列式△：

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & [\chi_1,\chi_2] & [\chi_1,\chi_3]\cdots & [\chi_1,\chi_s] \\ [\chi_2,\chi_1] & 0 & [\chi_2,\chi_3]\cdots & [\chi_2,\chi_s] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [\chi_s,\chi_1] & [\chi_s,\chi_2] & [\chi_s,\chi_3]\cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

我现在来证明一个定理.

定理 行列式△不等于零，甚至也不弱等于零.

证明 假设该行列式等于零，我来证明这将导致一个矛盾.

如果该行列式为零，则其秩 $T<S$. 现在我们构造一个行列式 A：

$$A=\begin{vmatrix} \chi_1 & 0 & [\chi_1,\chi_2] & \cdots & [\chi_1,\chi_T] \\ \chi_2 & [\chi_2,\chi_1] & 0 & \cdots & [\chi_2,\chi_T] \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \chi_{T+1} & [\chi_{T+1},\chi_1] & [\chi_{T+1},\chi_2] & \cdots & [\chi_{T+1},\chi_T] \end{vmatrix},$$

A 有 $T+1$ 行和 $T+1$ 列. $T+1$ 要么等于 S，要么小于 S. 如果我们按第一列元素将 A 展开，其结果是第一列的每个元素都与△的一个子行列式相乘. 现在我们不希望所有这些子行列式都为零，可是，很可能它们的确全都为零. 如果是这样，我们就更换 χ 在行列式中所处的位置. 由于△是 T 秩的，所以总存在某种方式，借此可以选取出现在 A 中的 χ，使得上述子行列式不全为零. 我们就以这种方式选取 χ，这样 A 的展开式中第一列元素的系数便不全为零.

现在我来证明 A 与任何 ϕ 的泊松括号都等于零. 构造 ϕ 与一个行列式的泊松括号，其结果等于以 ϕ 同该行列式每一列构成的泊松括号作为相应列而其余列不变所得到的全部行

列式之和. 因此

$$[\phi, A] = \begin{vmatrix} [\phi, \chi_1] & 0 & \cdots \\ [\phi, \chi_2] & [\chi_2, \chi_1] & \cdots \\ \vdots & \vdots & \\ [\phi, \chi_{T+1}] & [\chi_{T+1}, \chi_1] & \cdots \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \chi_1 & 0 & \cdots \\ \chi_2 & [\phi, [\chi_2, \chi_1]] & \cdots \\ \vdots & \vdots & \\ \chi_{T+1} & [\phi, [\chi_{T+1}, \chi_1]] & \cdots \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \chi_1 & 0 & [\phi, [\chi_1, \chi_2]] & \cdots \\ \chi_2 & [\chi_2, \chi_1] & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \chi_{T+1} & [\chi_{T+1}, \chi_1] & [\phi, [\chi_{T+1}, \chi_2]] & \cdots \end{vmatrix} + \cdots.$$

初看起来这很复杂，但是我们很容易就可以看出，这些行列式中每个都等于零. 首先，等号右边的第一个行列式等于零：若ϕ是第一类约束，则第一列为零；若ϕ是第二类约束，则ϕ就是某个χ，我们得到行列式Δ的 $T+1$ 行和$T+1$列子行列式. 可是已假设 Δ 的秩为 T，所以它的任何 $T+1$ 行和 $T+1$ 列子行列式都等于零. 其次，由于其第一列弱等于零，等号右边的第二个行列式也弱等于零. 类似地，其余的行列式都弱等于零. 最后结果是整个右边弱等于零. 因此A与每个ϕ的泊松括号都弱等于零.

我们也可以按其第一列元素展开 A，从而将A表成χ的一个线性组合. 这样，上述结果表明χ的一个确定的线性组合与所有ϕ的泊松括号为零. 这意味着χ的这个线性组合是第一类的，从而与我们已经尽可能多地将约束归入第一类的假设相矛盾. 这就完成了定理的证明.

在此顺便指出，我们注意到剩下不能归入第一类约束的那些χ一定有偶数个，因为行列式Δ是反对称的. 任何具有

奇数行、列的反对称行列式必定为零．现在Δ不为零，因而其行数和列数是偶数．

由于行列式Δ不为零，所以我们可以引进其行列式为Δ的矩阵之逆 $c_{ss'}$．矩阵 $c_{ss'}$ 由下式定义：

$$c_{ss'}[\chi_{s'}, \chi_{s''}] = \delta_{ss''}. \tag{2-30}$$

根据这些结果，就可以定义新泊松括号：任意两个量 ξ，η 的新泊松括号定义为

$$[\xi, \eta]^* = [\xi, \eta] - [\xi, \chi_s]c_{ss'}[\chi_{s'}, \eta]. \tag{2-31}$$

容易检验按这种方式定义的新泊松括号具有通常泊松括号的性质：$[\xi, \eta]^*$ 对于 ξ 和 η 是反对称的，对于 ξ 和 η 是线性的，满足乘法律 $[\xi_1\xi_2, \eta]^* = \xi_1[\xi_2, \eta]^* + [\xi_1, \eta]^*\xi_2$，并且满足雅可毕恒等式 $[[\xi, \eta]^*, \zeta]^* + [[\eta, \zeta]^*, \xi]^* + [[\zeta, \xi]^*, \eta]^* = 0$．我不知道有什么简洁方法可证明新泊松括号所满足的雅可毕恒等式．如果我们按照定义代人，并进行复杂的计算，就会发现所有项都抵消了，结果等式左边变成零．我猜想应该有某种简洁的证明方法，可是我还没有发现．[直接方法我已在 "*Canadian Journal of Mathematics*", **2**, 147(1950) 中给出．这个问题柏格曼曾在 "*Physical Review*", **98**, 531(1955) 中研究过．]

现在我们来考察这些新泊松括号究竟有什么用处．首先，我希望你们注意到运动方程对于新泊松括号也象对于原来的泊松括号一样有效：

$$\begin{aligned}[g, H_T]^* &= [g, H_T] - [g, \chi_s]c_{ss'}[\chi_{s'}, H_T] \\ &\approx [g, H_T],\end{aligned}$$

因为 H_T 是第一类的，所以 $[\chi_{s'}, H_T]$ 项全都弱等于零．所以我们可以写下

$$\dot{g} \approx [g, H_T]^*.$$

如果我取一个 q 和 p 的任意函数 ξ，然后构造 ξ 与某个

χ（譬如说 $\chi_{s''}$）的新泊松括号，则有

$$[\xi, \chi_{s''}]^* = [\xi, \chi_{s''}] - [\xi, \chi_s] c_{ss'} [\chi_{s'}, \chi_{s''}]$$

$$= [\xi, \chi_{s''}] - [\xi, \chi_s] \delta_{ss''} = 0. \quad \text{由(2-30)}$$

因此，我们可以在求出新泊松括号之前就令 χ 等于零．这意味着方程

$$\chi_s = 0 \qquad (2\text{-}32)$$

可以看作是强方程．

我们通过引进新泊松括号的方式修改了我们的经典理论这就奠定了过渡到量子理论的基础．我们把对易关系与新泊松括号关系相对应，并且将强方程 (2-32) 取作量子理论中的算符方程，就过渡到量子理论．其余的弱方程(它们都是第一类约束)仍是加在波函数上的辅助条件，这样就化到前述的只有第一类约束的情形．因此，我们再次获得了普遍经典哈密顿理论的量子化方法．当然，为使自洽条件*中的系数都位于左边，我们还要碰运气．

以上给出了一般的量子化方法．你们注意到，当我们向量子理论过渡时，初级约束和次级约束之间的区分无关紧要，这种区分不带根本性，它在很大程度上取决于我们原先取为出发点的拉格朗日量．一旦我们已经过渡到哈密顿形式，就确实可以忘掉初级约束和次级约束之间的区别．第一类约束和第二类约束之间的区分却是非常重要的，我们必须尽可能地将约束归入第一类，并且引进新泊松括号，后者使我们可以将剩下的第二类约束当作强方程处理．

---

* 原书作者曾不加区分地两处使用过**自洽性条件** (consistency condition) 这一术语，分别表示 (1-25) 和 (2-25)、(2-27)．前者是任何约束都必须满足的，后者却只是第一类约束才满足．此处系指后一种意义．——译者注

第三讲　曲面上的量子化

在前面两讲中，我们从经典作用量原理出发，并将作用量积分取成洛仑兹不变量，由这个作用量得出拉格朗日量，接着我们将拉格朗日量过渡到哈密顿量，最后再按照一定规则得到了量子理论．结果是从作用量原理描述的经典场论开始，最终得到了量子场论．现在大家也许会以为我们的工作完成了，其实还有一个重要问题有待考虑：按上述方式得到的量子场论究竟是不是相对论性理论？为了便于讨论起见，我们只限于狭义相对论．于是必须考虑我们的量子理论是否与狭义相对论协调一致．

我们从一个作用量原理出发，并要求作用量是洛仑兹不变量．这就足以保证经典理论是相对论性的．从洛仑兹不变的作用量原理导出的拉格朗日运动方程一定是相对论性方程．但是，当我们将这些运动方程写成哈密顿形式时，明显的四维对称性确实要遭到破坏．哈密顿运动方程可写成如下形式：

$$\dot{g} \approx [g, H_T], \tag{1-21}$$

其中黑点表示 dg/dt，并参照一个绝对时间，因此哈密顿运动方程不是明显相对论性的，但是我们知道其内容一定是相对论性的，因为这些方程是从相对论性的假设中导出的．

然而，当过渡到量子理论时，我们却作了新的假设．经典理论中 H_T 的表达式并不能唯一地确定相应的量子哈密顿量．我们必须决定量子理论中出现的不可对易因子的次序问题．如何选择这种次序有一定任意性，因此我们要作新的假

设．这些新假设也许会破坏理论的相对论不变性，所以由这种方法得到的量子场论未必一定与相对论协调．我们现在必须考虑的问题是：怎样才能保证我们的量子理论是相对论性理论．

为此我们必须回到第一性原理．只考虑相对于某一特殊观察者的时间变量已经不够，我们还必须考虑彼此处于相对运动状态的不同观察者．我们要建立一个量子理论，它可以平等地适用于这些观察者中的任何一个，也就是说，适用于任意时间轴．为了得到这样一个包含所有不同时间轴的理论，我们应该首先得到相应的经典理论，然后再用标准规则将这个经典理论过渡到量子理论．

我想回到我们发展哈密顿方法开始时的情况，并考虑一个特例．我们先取一个拉格朗日量 L，它是动力学坐标 q 和速度 $\dot{q}$ 的函数，引进动量，然后再引进哈密顿量．我们考虑一特殊情形，其中 L 是 $\dot{q}$ 的一阶齐次函数．欧拉定理告诉我们

$$\dot{q}_n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = L, \tag{3-1}$$

这正好表明 $p_n\dot{q}_n - L = 0$．因此在这一特殊情形中，我们得到一个等于零的哈密顿量．

在这一情形中，我们必然会得到初级约束．因为 p 是速度的零阶齐次函数，所以 p 只能是速度比的函数．p 的数目等于自由度数目 N，而速度比的数目为 $N-1$．$N-1$ 个速度比的 N 个函数不可能是独立的，至少有一个 p 和 q 的函数等于零，因此至少肯定存在一个初级约束，也许初级约束还会不止一个．我们还可以看到，如果有零哈密顿量的运动，则至少必定有一个初级的第一类约束．

我们已得到总哈密顿量的表达式(1-33)：

$$H_T = H' + v_a\phi_a.$$

H' 必须是第一类哈密顿量，因为 0 肯定是第一类的量，所以可取 $H' = 0$。现在总哈密顿量完全由具有任意系数的第一类初级约束构成：

$$H_T = v_a \phi_a, \tag{3-2}$$

这表明如果我们想要有任何运动存在，至少必须存在一个初级第一类约束.

我们的运动方程现在变成

$$\dot{g} \approx v_a [g, \phi_a].$$

可以看出，所有的 $\dot{g}$ 都可乘上一个因子，其原因在于系数 v 是任意的，可以对它乘上一个因子。如果把所有的 dg/dt 都乘上一个因子，就意味着我们采用了不同的时间标度。这样我们就得到了具有任意时间标度的哈密顿运动方程。引进另一个时间变量 τ 取代 t，用 τ 给出的运动方程为

$$\frac{dg}{d\tau} \approx v'_a [g, \phi_a]. \tag{3-3}$$

这样我们现在就得到了一个运动方程的哈密顿体系，其中没有绝对时间变量。任何随着 t 单调增加的变量都可以作为时间，并且运动方程的形式不变。因此，H' 等于零并且每个哈密顿量都弱等于零的哈密顿理论的特征，就是没有绝对时间.

我们也可以从作用量原理的观点来看这个问题。如果 I 是作用量积分，则因为 L 是 dq/dt 的一阶齐次函数，故

$$I = \int L(q, \dot{q}) dt = \int L\left(q, \frac{dq}{d\tau}\right) d\tau . \tag{3-4}$$

于是用 τ 表达的作用量积分形式和用 t 表达的一模一样。这表明由作用量原理导出的运动方程在从 t 到 τ 的变换之下是不变的。运动方程不涉及任何绝对时间.

因此我们就有了一个哈密顿理论的特殊形式，但是事实

上这个形式并不真是如此特殊，因为从任意哈密顿量出发，总是允许将时间变量当成一个超坐标 (extra coordinate)，而把理论纳入到哈密顿量弱等于零的形式. 这样做的一般规则如下：我们把 t 当作另一个动力学坐标 q_0，从而建立一个新拉格朗日量

$$L^* = \frac{dq_0}{d\tau} L\left(q, \frac{dq/d\tau}{dq_0/d\tau}\right)$$

$$= L^*\left(q_k, \frac{dq_k}{d\tau}\right), \ k = 0, 1, 2, \cdots, N, \quad (3\text{-}5)$$

L^* 比原来的 L 多了一个自由度. L^* 不等于 L，可是

$$\int L^* d\tau = \int L\, dt.$$

因此，作用量不论相对于 L^* 和 τ，还是相对于 L 和 t 都是一样的. 这样，对于任意的动力学体系，我们都可将时间当作一个超坐标 q_0 处理，然后过渡到新拉格朗日量 L^*，后者包含一个超自由度，并且是速度的一阶齐次函数. L^* 给出的哈密顿量是弱等于零的.

哈密顿形式中哈密顿量弱等于零的这种特殊情形，正是一个相对论性理论所必需的，因为在一个相对论性理论中，我们不希望有一个充当特别角色的特殊时间，我们希望各种时间 τ 都是平权的. 我们来仔细考察怎样应用这个观点.

我们来考虑相对于不同观察者来说特定时刻的物理态. 现在画出如图 1 所示的时空图，某一确定时刻的物理态对应三维平坦类空面 S_1 上的物理条件，S_1 与时间轴垂直. 不同时刻的物理态对应不同类空面 $S_2, S_3, \cdots\cdots$ 上的物理条件. 现在引进与不同观察者对应的另外的时间轴，相对于这些另外的时间轴，物理态将对应于象 S_1' 这样的另外的平坦类空面上的物理条件. 我们希望有一个哈密顿理论，使我们能够从例

如说态 S_1 过渡到态 S_1'. 从类空面 S_1 上给定的初始条件出发，应用运动方程，我们一定能过渡到类空面 S_1' 上的物理条件. 因此物理态的运动必定存在四个自由度，一个自由度对应于该类空面平行于其自身的运动，而余下的三个自由度对应于该平面取向的一般改变. 这意味着运动方程的解存在四个任意函数. 于是我们需要发展一个(至少)具有四个第一类初级约束的哈密顿理论.

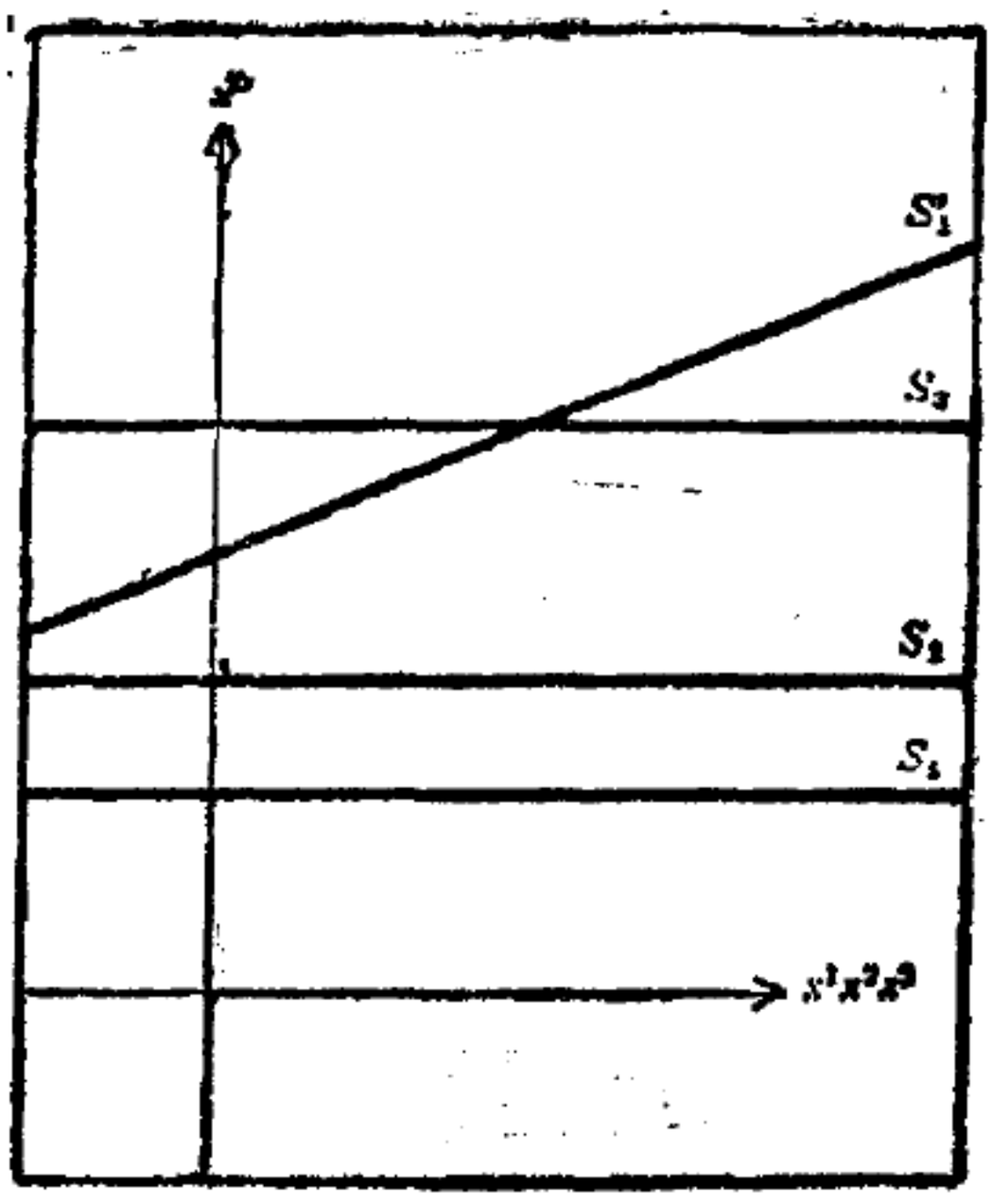

图 1

如果运动还存在其他类型的自由度，例如，电动力学中的规范变换，那么就会出现其他的第一类初级约束. 为了将问题简化，我略去出现其他第一类初级约束的可能性，而只考虑由相对论要求所产生的第一类初级约束.

我们可以在这些具有四个自由度的能够运动的类空平面上建立我们的理论，但是我想先考虑一个更一般的理论，其中我们认为物理态定义在如图 2 所示的任意弯曲类空面 S 上. 这是一个四维时空中的三维曲面，面上各处都是类空的，也就

是说，该曲面的法线必须位于光锥之内．我们可以建立一个哈密顿理论，它告诉我们从一个类空曲面到邻近的另一个类空曲面时物理条件是如何变化的．

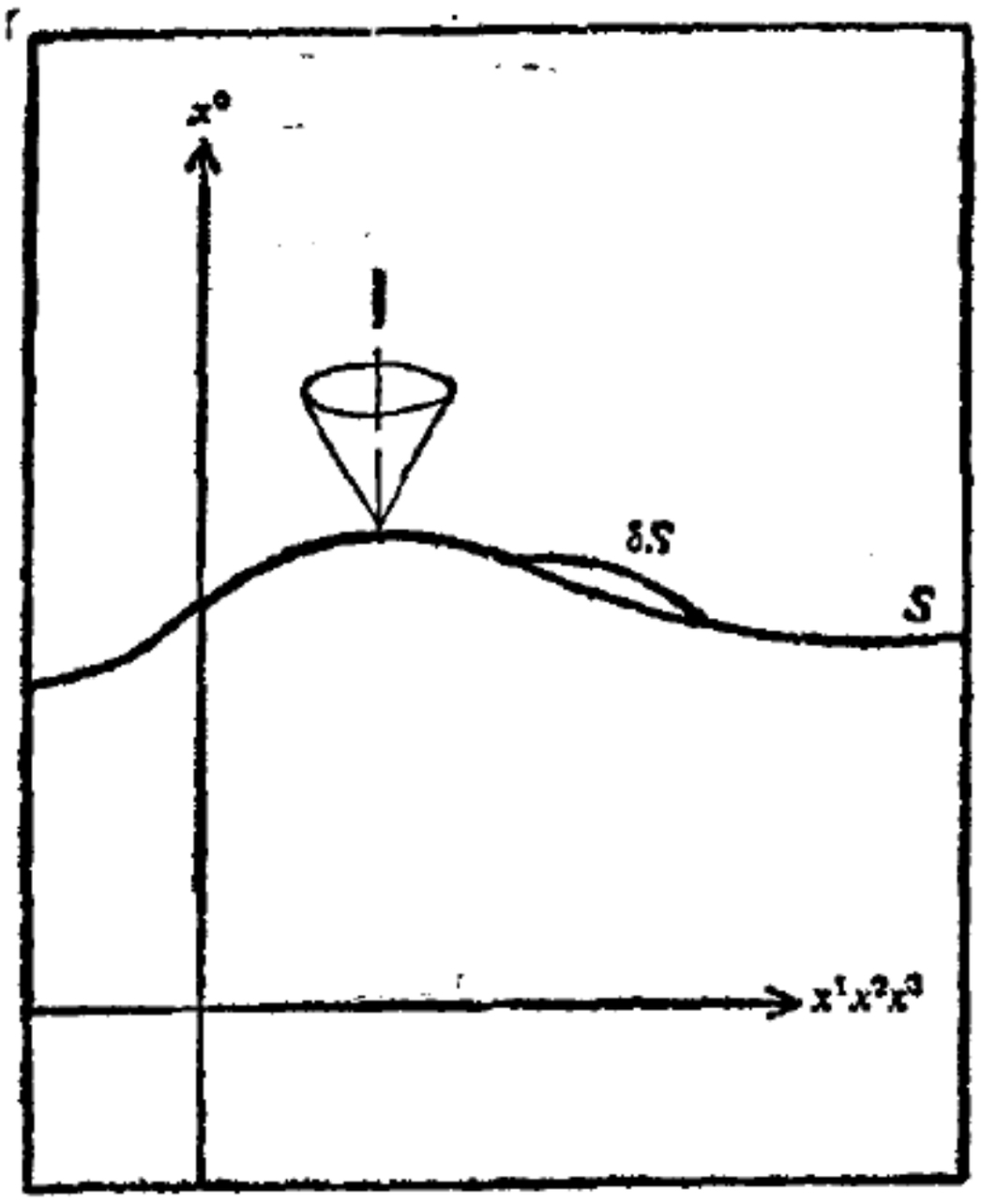

图 2

引进曲面意味着引进了从狭义相对论观点看来是不必要的某种东西．如果我们引进广义相对论和引力场，那么采用曲面是必不可少的，可是对于狭义相对论，曲面并不是必不可少的．然而，即使是只讨论狭义相对论范围内的理论，我也愿意现在就引进曲面，因为我发现参照曲面较之参照平面更容易阐释基本思想．其原因在于我们用曲面时可以作类空面的局部变形，如图 2 中的 δS，进而讨论对于这些曲面局部变形的运动方程．

一种做法就是将作用量积分应用到象 S 那样的一组曲面上，计算作用量在两个邻近曲面之间的总量，再用表示这两个曲面之间距离的参数 $\delta\tau$ 除之，将得到的量取作我们的拉格朗日量，最后再用标准方法将拉格朗日量过渡到哈密顿量．这

样的拉格朗日量必定是以 τ 为时间参量的速度的一阶齐次函数，参量 τ 表征了从一个类空曲面到邻近类空曲面的过渡，这样的拉格朗日量将给出哈密顿量弱等于零的哈密顿理论.

然而，我不想自始至终详细地用作用量原理研究所有的问题. 我想把事情简化，只讨论所得到的最终哈密顿理论的形式. 我们知道必须存在这样的自由度，它使得类空曲面可作任意运动，只要始终保持其类空性质. 根据这一点，我们就可以得到大量有关这种哈密顿理论形式的信息. 这种类空面的运动自由度一定对应于哈密顿量的第一类初级约束. 对每一种曲面的基本运动，都存在一个第一类初级约束. 我将从这个观点来发展我们的理论.

首先必须引进适当的动力学变量. 我们用三个曲线坐标 $(x^1, x^2, x^3) = (x^r)$ 来描述类空曲面 S 上的一个点. 为了定下类空曲面在时空中的位置，我们引进另外一组坐标 $y_A (A = 0, 1, 2, 3)$，在狭义相对论中，这组坐标可以取成正交直线坐标. (我用大写指标表示 y 坐标系，而用象 r 这样的小写指标表示 x 坐标系.) x^r 的四个函数 y_A 在时空中指定曲面 S，也确定了它的参数化，即坐标系 x^1, x^2, x^3.

我们可以用这些 y_A 作为动力学坐标 q. 如果我们构成

$$y_{A,r} = \frac{\partial y_A}{\partial x^r}, \quad (r = 1, 2, 3) \tag{3-6}$$

则它们是动力学坐标 q 的函数. 若 τ 是随曲面而变化的参数，则

$$\dot{y}_A = \frac{\partial y_A}{\partial \tau} \tag{3-7}$$

是速度 $\dot{q}$. 因此，y_A 是描述曲面所需的动力学坐标，而 $\dot{y}_A$ 是速度.

我们需要引进这些动力学坐标的共轭动量 w_A. 动量和

坐标之间满足泊松括号关系：

$$[y_{Ax}, w_{Bx'}] = g_{AB}\delta^3(x - x'). \tag{3-8}$$

为了描述问题中出现的物理场，我们还需要其他变量. 如果讨论标量场 V，则 $V(x)$ 在各点 x^1，x^2，x^3 的值将为我们提供新的动力学坐标 q. $V_{,r}$ 是 q 的函数. $\partial V/\partial t$ 是速度. V 在任何方向的导数都可以用 $\partial V/\partial t$ 和 $V_{,r}$ 表出，因而可以用动力学坐标和速度表出. 拉格朗日量含有 V 的一般方向导数，因此它是动力学坐标和速度的函数. 对每个 V，我们需要有一个和它共轭的动量 U，二者满足泊松括号条件：

$$[V(x), U(x')] = \delta^3(x - x'). \tag{3-9}$$

我们就是这样处理标量场的. 对于矢量场、张量场或者旋量场，也有类似方法，只不过需要引进附加指标. 我不需要对此再作讨论.

现在我们来看一看哈密顿量的形式. 哈密顿量必须是 (3-2) 型第一类初级约束的某个线性函数. 首先我来讨论第一类初级约束是什么样的. 一定存在着允许曲面作任意变形的第一类初级约束. 为使 y 能变化，这些约束中一定含有 y 的共轭变量 w，此外，还将含有其他场量. 我们可以将它们表达为如下形式：

$$w_A + K_A \approx 0, \tag{3-10}$$

其中 K_A 是哈密顿变量 q 和 p 的函数，但不含 w.

现在我们可以断言，哈密顿量一定是所有量(3-10)的任意线性函数：

$$H_T = \int c^A(w_A + K_A)d^3x, \tag{3-11}$$

这里是对曲面上点的三个 x 坐标求积分. c 是三个 x 和时间的任意函数.

一般的运动方程当然是 $\dot{g} \approx [g, H_T]$. 将这个运动方程

应用于 g 等于某个 y 时的情形，就可以了解到系数 c^A 的意义。在某一特殊点 x^1, x^2, x^3，若 $g = y_A$，则得

$$\dot{y}_A = \left[y_A, \int c'^\Gamma (w'_\Gamma + K'_\Gamma) d^3x' \right]$$

$$= \int c'^\Gamma [y_A, w'_\Gamma + K'_\Gamma] d^3x', \qquad (3\text{-}12)$$

这里 c^Γ、w_Γ 及 K_Γ 上的一撇表示这些量取在点 $x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}$ 的值。因为 K'_Γ 与 w 无关，y_A 与 K'_Γ 的泊松括号为零，于是我们只需要计算 y_A 与 $w'_\Gamma = w_\Gamma(x')$ 的泊松括号。计算结果给出 δ 函数，所以

$$\dot{y}_A = c_A. \qquad (3\text{-}13)$$

结果系数 c_A 就是速度变量，它告诉我们曲面怎样随着参量 τ 变化。任意选取 c_A，我们可以令曲面随 τ 任意改变。

这就告诉我们，在弯曲类空面上表达态的场论的哈密顿量会是什么形式。

把出现在哈密顿量中的矢量分解成曲面的法向分量和切向分量，我们可以对哈密顿量进行较为深入的分析。对任一个矢量 ξ_A，我们可以得到其法向分量为

$$\xi_\perp = \xi_A l^A,$$

其中 l^A 是单位法向矢量，还可以得到切向分量(对 x 坐标系)为

$$\xi_r = \xi_A y^A_{,r}.$$

l 由 $y^A_{,r}$ 决定，因而是动力学坐标的函数。任何矢量都可以按这种方式分解成垂直于曲面的部分和相切于曲面的部分。我们有如下标量积法则：

$$\xi_A \eta^A = \xi_\perp \eta_\perp + \gamma^{rs} \xi_r \eta_s, \qquad (3\text{-}14)$$

其中 $\gamma_{rs} dx^r dx^s$ 是曲面相对 x 坐标系的度规。γ^{rs} 是 γ_{rs} 的逆矩阵 $(r, s = 1, 2, 3)$。

我们可以利用标量积法则(3-14)将总哈密顿量按照 w 和 K 的切向分量和法向分量表示为

$$H_T = \int \dot{y}^\Lambda (w_\Lambda + K_\Lambda) d^3x$$

$$= \int (\dot{y}_\perp (w_\perp + K_\perp) + \gamma^{rs} \dot{y}_r (w_s + K_s)) d^3x, \quad (3\text{-}15)$$

其中 $\dot{y}_\perp = {}_\perp{}^\Lambda l_\Lambda$, $\dot{y}_r = \dot{y}^\Lambda y_{\Lambda,r}$.

我们需要（3-15）中法向项和切向项之间的泊松括号关系. 我们先写下 w 不同分量间的泊松括号关系，相对于外部坐标 y，我们当然有

$$[w_\Lambda, w'_\Gamma] = 0. \quad (3\text{-}16)$$

可是，如果我们将 w 分解成法向分量和切向分量，它们彼此间的泊松括号就不再为零. 这些泊松括号通过简单讨论可以很容易求出. 我不想深入讨论这个问题的细节. 我只是指出，有关细节可以在我的一篇文章中找到 (*Canadian Journal of Mathematics*, **3**, 1 (1951)). 结果如下

$$[w_r, w'_s] = w_s \delta_{,r}(x - x') + w'_r \delta_{,s}(x - x'), \quad (3\text{-}17)$$

$$[w_\perp, w'_r] = w'_\perp \delta_{,r}(x - x'), \quad (3\text{-}18)$$

$$[w_\perp, w'_\perp] = -2w^r \delta_{,r}(x - x') - w^r_{,r} \delta(x - x'), \quad (3\text{-}19)$$

我们知道

$$[w_\mu + K_\mu, w'_\nu + K'_\nu] \approx 0, \text{ 对 } \mu, \nu = r, s \text{ 或} \perp. \quad (3\text{-}20)$$

由此可以推导出

$$[w_r + K_r, w'_s + K'_s]$$

$$= (w_s + K_s)\delta_{,r}(x - x') + (w'_r + K'_r)\delta_{,s}(x - x'), \quad (3\text{-}21)$$

$$[w_\perp + K_\perp, w'_r + K'_r]$$

$$= (w'_\perp + K'_\perp)\delta_{,r}(x - x'), \quad (3\text{-}22)$$

$$[w_\perp + K_\perp, w'_\perp + K'_\perp]$$

$$= -2(w^r + K^r)\delta_{,r}(x - x') - (w^r + K^r)_{,r}\delta(x - x'). \qquad (3\text{-}23)$$

这些结果可以直接由 w 的法向分量和切向分量的定义求出，但是如下讨论更为简单。由于 $w_r + K_r$, $w_\perp + K_\perp$ 都是第一类的，其泊松括号弱等于零。因此，$[w_r + K_r, w'_s + K'_s]$，$[w_\perp + K_\perp, w'_r + K'_r]$ 和 $[w_\perp + K_\perp, w'_\perp + K'_\perp]$ 一定全部弱等于零。我们现在来推导它们强等于什么。(3-21)，(3-22)和(3-23)各式的右边一定是一个弱等于零的量，因而由具有一定系数的 $w_r + K_r$ 和 $w_\perp + K_\perp$ 构成，并且通过算出右边含有 w 的项，就可以求出这些系数。根据 (3-17)、(3-18) 和 (3-19)，含有 w 的项只可能出现在 w 与 w 的泊松括号中。泊松括号 $[w, K']$ 不会给出含有 w 的项，因为这是动量 w 与坐标及除 w 以外别的动量的某些函数的泊松括号，不会给出 w。类似地，K 与 K 的泊松括号也不会含有 w。因此出现于(3-21)右边的 w 项就只能是出现于(3-17)右边的那些项。为使总的表达式是弱等于零的，我们必须在 (3-21) 右边补上另外一些项。在此应该补上什么项是很明显的，结果是 $(w_s + K_s)\delta_{,r}(x - x') + (w'_r + K'_r)\delta_{,s}(x - x')$。我们也可同样得到 (3-22) 和 (3-23) 的右边。

下一个要提到的是哈密顿量 (3-15) 中的 $w_t + K_t$ 项，它对应着这样一种运动，即曲面的坐标系改变了，但是曲面没有运动。这相当于曲面上的每点都相切于曲面运动。

让我们取 $\dot{y}_\perp = 0$，这意味着我们不考虑曲面垂直于其自身的运动，而只改变曲面的坐标，于是我们有如下运动方程：

$$\dot{g} = \int r^{rs}\dot{y}_r[g, w_s + K_s]d^3x. \qquad (3\text{-}24)$$

这必定是这样一种性质的运动方程，它告诉我们当曲面的坐

标系变化而曲面本身没有运动时 g 如何变化。 g 的这种变化一定是平庸的，从动力学变量 g 的几何性质就能够导出这种变化。如果 g 是个标量，那么我们就知道，当坐标系 x^1, x^2, x^3 发生变化时它将如何变化。 如果 g 是矢量或者张量的分量，那么 g 的变化要稍复杂一些，可是仍然可以求出；如果 g 是个旋量情况也类似。无论什么情形，g 的这种变化都是平庸的，这意味着仅从几何考虑，就可以把 K_r 确定下来。

我想给出一两个这方面的例子。对于标量场 V 及其共轭动量 U，K_r 中存在如下一项：

$$V_{,r}U. \tag{3-25}$$

对于矢量场，例如三矢量 A_s 及其共轭动量 B^s，K_r 中存在如下一项：

$$A_{s,r}B^s - (A_rB^s)_{,s}. \tag{3-26}$$

对于张量也类似，旋量情况更复杂一些。(3-26)中第一项是来自因坐标系的改变而产生的 A_s 的平移变化，而第二项是来自因坐标系变化而引起的 A_s 的转动变化。在标量情形，(3-25)中不出现这样的转动项。

将问题中出现的各种场的贡献加起来，就得到总的 K_r，结果表明仅从几何考虑，我们就能求出 K 的切向分量。这样我们就看到 K 的切向分量并没有真正的物理重要性，它只与数学技巧有关。物理上真正有重要意义的量是(3-15)中 K 的法向分量。K 的法向分量加上 w 的法向分量给出同曲面垂直于自身的运动相联系的第一类约束。这才是动力学上最重要的。

在曲面上建立哈密顿场论的问题牵涉到要求出满足泊松括号关系 (3-21)，(3-22) 和 (3-23) 的 K 的表达式。 如上所述，K 的切向分量可以从几何考虑求出，而一旦求出这些切向分量，自然就会发现它们满足第一个泊松括号关系 (3-21)。

第二个泊松括号关系(3-22)对 $K_\perp$ 是线性的，只要 $K_\perp$ 是标量密度，泊松括号关系(3-22)就能满足. 这个泊松括号关系如实地告诉我们，在坐标系 x^1, x^2, x^3 变化时，只要 $K_\perp$ 作适当变化，这个泊松括号关系就会满足. 比较难于满足的是第三个关系，它对 $K_\perp$ 是二次的. 这样，在弯曲类空面上建立哈密顿场论的问题，就化成寻求 K 的法向分量的问题，该分量是个标量密度，并要满足泊松括号关系(3-23).

寻求 K 的这种法向分量的方法之一是以洛仑兹不变的作用量原理作为出发点的. 应用作用量原理，我们可以得到 K 的所有分量. 这样做时所得到的切向分量未必与用(3-25)和(3-26)这样的项构成的完全一样，因为二者可相差一个切变换. 但是，我们可以通过在作用量中加上一全微分项的办法，消去这个切变换，这样做并不影响运动方程. 通过这样改变一下作用量原理，我们可以把由作用量原理给出的 K 的切向部分调整到与用简单几何考虑得到的完全相同. 这样，我们就能采用从作用量原理过渡到哈密顿量的一般方法求出 K 的法向分量. 如果作用量原理是相对论性的，那么按这种方式得到的 K 的法向分量一定满足条件(3-23).

我们现在讨论向量子理论的过渡. 量子化涉及到将 w 以及 K 中的变量变成算符. 现在必须谨慎地定义 w 的切向分量和法向分量，我选择如下方式来下定义

$$w_r = y_{\Lambda,r} w^\Lambda, \tag{3-27}$$

变量 w 置于右边.（在量子理论中，你们知道，将 w 置于右边还是左边，其结果是不同的.）类似地有

$$w_\perp = l_\Lambda w^\Lambda. \tag{3-28}$$

这样，这些量就定义好了.

现在，在量子理论中我们有弱方程 $w_r + K_r \approx 0$ 和 $w_\perp + K_\perp \approx 0$，相应于(2-22)，它们提供了加在波函数上的

辅助条件：

$$(w_r + K_r)\phi = 0, \tag{3-29}$$

$$(w_\perp + K_\perp)\phi = 0. \tag{3-30}$$

我们要求这些辅助条件是自洽的. 根据(2-25)，我们必须进行调整以便使对易关系(3-21)，(3-22)和(3-23)中右边的系数都位于约束之前(即每项左边).

对切向分量的情形(3-21)，如果把 K_r 中因子的次序选得使动量总是位于右边，那么上述条件满足. 现在，存在于(3-21)中的量对于动量是线性的，而且动量位于右边. 任何两个这样的量之间的对易子给出的结果对于动量也是线性的，而且动量也位于右边. 因此，我们总可以使动量在右边，使因子按要求的次序出现.

现在我们考虑 $K_\perp$ 的问题，这一问题不能很简单地处理. $K_\perp$ 中通常含有不可对易因子的乘积，我们必须调整它们的次序，以使(3-22)和(3-23)满足，并且这两式右边每项中的系数都位于约束之前. 方程(3-22)处理起来仍然相当简单. 如果我们把 $K_\perp$ 取成标量密度，则所需的一切就都有了，因为出现在方程右边的 $w_\perp + K_\perp$ 不带任何与它不可对易的系数；这里唯一的系数是 δ 函数，它是一个普通数.

但是关系式(3-23)却很麻烦. 为建立量子理论，在此需要将其右边更明显地写出

$$[w_\perp + K_\perp, w'_\perp + K'_\perp] = -2\gamma^{rs}(w_r + K_r)\delta_{,s}(x - x') - (\gamma^{rs}(w_r + K_r))_{,s}\delta(x - x'). \tag{3-31}$$

我已经将系数 γ^{rs} 写在左边，而这正是量子理论所要求的.

在一般曲面上建立量子场论的问题，牵涉到寻求这样的 $K_\perp$，使泊松括号关系(3-31)成立，并且系数 γ^{rs} 出现在左边. 如果(3-31)确实满足，那么辅助条件(3-30)彼此是自洽的，而且我们已知(3-29)彼此自洽，以及(3-30)和(3-29)自洽.

上面我们已经系统地阐述了相对论性量子理论所必须满足的条件．我们并不是总能满足这些条件，而是需要碰点运气的．有一个重要的一般原则告诉我们，一旦得到一个满足这些条件和某些其他条件的 $K_\perp$，我们就能很容易地构造满足这些条件的其他 $K_\perp$．我们假设存在这样一个解，其中 $K^\perp$ 只含有不带微商的动量和可以含带微商的动力学坐标．对若干简单场，它们的 $K_\perp$ 确实满足泊松括号关系 (3-22) 和 (3-23)，而且也确实具有上述简单性质． 于是，我们可以在 $K_\perp$ 上加一个不带微商的坐标 q 的任意函数． 就是说，取一个新的 $K_\perp$ 为

$$K_\perp^* = K_\perp + \phi(q).$$

我们看到 $K_\perp$ 加上 ϕ 后对 (3-31) 右边的唯一影响是引进 δ 函数的一个倍数．由于多出的项来源于 $\phi(q)$ 与不带微商的动量之间的泊松括号，所以我们不能得出 δ 函数的微商项．于是 $K_\perp$ 加上 ϕ 这一项对泊松括号 (3-31) 右边的唯一影响是加上 δ 函数的一个倍数． 但是因为 (3-31) 左边对 x 和 x' 显然是反对称的，所以 (3-31) 右边对 x 和 x' 必定是反对称的． 为了不改变反对称性，就不允许我们正好在 (3-31) 右边加上 δ 函数的一个倍数． 因此，如果原来的 $K_\perp$ 满足泊松括号关系 (3-31)，则新的 $K_\perp^*$ 也将满足．

为了完成这个证明，还有另一个因素必须加以考虑． ϕ 中可以包含 $\Gamma = \sqrt{-\det \gamma_{rs}}$*．我们发现 $[\omega_\perp, \Gamma']$ 只含有不带微商的 $\delta(x - x')$ (只要算出这一括号)，因而我们可以将 Γ 引入 ϕ 中而不影响上述讨论．事实上，为了保证 (3-22) 成立，我们必须引进 Γ，因为 (3-22) 的成立要求 $K_\perp^*$ 和 $K_\perp$ 是标量密度． 为使 ϕ 是标量密度，我们必须引进适当幂次的 Γ．

---

* 原书符号不统一，误为 $\sqrt{-\det g_{rs}}$．——译者注

以上就是实际上在引进场之间的相互作用而又不破坏理论的相对论性质时常用的方法。对于许多简单场，这些条件得到满足。因此很幸运，我们可以引进各种简单场之间的相互作用，同时保持相对论性量子理论的各个条件。

对有些例子却很不幸，我们不能把 $K_\perp$ 中的因子调整到使(3-31)成立，并且系数位于约束之前，这样我们就不知道如何将状态定义在曲面上的理论量子化。但是，用曲面上的状态建立量子理论的企图，远远高于我们实际的需要。为了得到与狭义相对论相一致的理论，只要将状态定义在平面上就足够了，它所涉及的关于 $K_\perp$ 的条件，并没有我在此所表述的那样苛刻。很可能，即使我这里所描述的那些条件不满足，这些不太苛刻的条件也可以满足。

玻恩-英费尔德的电动力学提供了一个这方面的例子，它是基于一个不同的作用量积分修改麦克斯韦电动力学的，这个作用量积分在弱场情况下与麦克斯韦作用量一致，但是在强场情况下不同于麦克斯韦作用量。玻恩-英费尔德的电动力学导致了一个含平方根的经典 $K_\perp$，这种性质似乎不可能满足在曲面上建立相对论性量子理论所要求的条件。然而，在平面上建立相对论性量子理论似乎是可能的，因为相对地说平面上的条件要容易满足一些。

第四讲　平面上的量子化

我们已经使用了时空中一般类空曲面上的状态．下面我来总结一下为满足由这些状态表述的量子场论的相对论性条件所得到的结果．　为了描述这些曲面，对曲面上的每一点 $x^r=(x^1, x^2, x^3)$，我们引进四个坐标变量 y^A．　x 形成了曲面上的曲线坐标系．我们将这些 y 当作动力学坐标．相应的共轭动量为 $w_A(x)$，它们也是 x 的函数．然后我们得到一系列出现在哈密顿形式中的第一类初级约束

$$w_A+K_A\approx 0. \tag{3-10}$$

K独立于 w，但可以是其他哈密顿变量的函数．K中将含有问题中出现的物理场．我们来分析这些约束，将它们分解成与曲面相切的分量和与曲面垂直的分量．切向分量为

$$w_r+K_r\approx 0, \tag{4-1}$$

法向分量为

$$w_\perp+K_\perp\approx 0. \tag{4-2}$$

经过这种分析，我们发现只从几何考虑，就可以求出 K_r．K_r 应该看作是平庸量，它们与这样一种变换相联系，其中曲面的坐标改变了，但是曲面本身没有运动．第一类约束(4-2)与曲面垂直于自身的运动相联系，因而是物理上重要的量．

为了自洽，必须满足确定的泊松括号关系(3-21)，(3-22)和(3-23)，其中有的泊松括号关系只含有 K_r，而且当 K_r 按照几何要求取定时，这些关系自动满足．有的关系对 $K_\perp$ 是线性的，只要我们把 $K_\perp$ 取成标量密度，它们也自动满足．最后剩下的自洽条件对 $K_\perp$ 是二次的，这些条件很重要，我们不能

通过平常的讨论就断定它们是满足的。

在经典理论中，如果我们从洛仑兹不变的作用量原理出发，按照从作用量原理过渡到哈密顿量的标准规则算出 $K_\perp$，那么这些重要的自洽条件能够满足。于是建立一个相对论性量子理论的问题，就化成以某种方式适当选择出现在量子的 $K_\perp$ 中的不可对易因子，使量子自洽条件得以满足的问题。这意味着在空间 x^1, x^2, x^3 中，两点的两个量(4-2)的对易子必须是约束的线性组合，其系数出现在左边。这些量子自洽条件通常很难满足。对于某些简单的例子，这些条件证明是可以满足的，但是对于更复杂的例子，要满足这些条件似乎不可能。由此导致的结论是，对于很一般的场，我们不能用定义在一般曲面上的状态建立量子理论。

我应该说明量 K 具有简单的物理意义。K_r 可以解释成动量密度，$K_\perp$ 可以解释成能量密度。因此，用哈密顿变量表示出的动量密度，只从问题的几何性质就可以很容易地求出来，而为了满足相对论要求，则必须适当选取重要的能量密度(满足确定的对易关系)。

如果我们不能用一般曲面上的状态建立量子理论，仍然有可能只用定义在平面上的状态来建立量子理论。

简单地加些使得前面的曲面变成平面的条件，我们就得到相应的经典理论。条件如下：曲面由 $y_A(x)$ 表征；为了使该曲面变成平面，我们要求这些函数的形式为

$$y_A(x) = a_A + b_{Ar}x^r, \tag{4-3}$$

其中 a 和 b 与 x 无关。这样类空曲面就变成类空平面，并且 x^r 变成直线坐标系。目前我们并不要求 x^r 坐标系是正交的：我将在后面再引进这一条件，因此我们使用的是一般的斜直线坐标轴 x^r。

现在用量 a_A, b_{Ar} 来确定我们的平面，而且这些量也是确

定平面所需的动力学变量．现在的动力学变量较之以前少了许多．事实上，这里只有 $4+12=16$ 个变量．我们用这 16 个动力学坐标取代以前的 $y_A(x)$ 来确定类空面，$y_A(x)$ 意味着 $4\cdot\infty^3$ 个动力学坐标。

当我们以这种方式对类空面作了限制时，这种限制可以看作是在我们的哈密顿形式中引进了一系列约束，即将 $4\cdot\infty^3$ 个 y 坐标用 16 个坐标表出。这些约束应当是第二类的。它们的存在意味着将类空面的有效自由度数目从 $4\cdot\infty^3$ 减少到 16，这是多么巨大的简化!

在第二讲中，我曾经给出了处理第二类约束的普遍方法．有效自由度的减少导致泊松括号的一个新定义．在目前情况下，我们不需要用这个普遍方法，现在的条件如此简单，以致我们可以采用更直接的方法。事实上，当我们减少了类空面的有效自由度后，就可以直接求出理论中留下的有效动量．

由于我们的动力学坐标受到了这些限制，当然速度就受到如下方程的制约：

$$\dot{y}_A = d_A + \dot{b}_{Ar}x^r, \tag{4-4}$$

这里字母上的点表示对某个参量 τ 的微商．当 τ 变化时，该平面也变化，作平行于自身的运动，并改变其取向，因此类空平面作四重自由度的运动，这种运动由参数 τ 的函数 a_A，b_{Ar} 来描述。

现在总哈密顿量为

$$\begin{aligned} H_T &= \int \dot{y}^A(w_A + K_A)d^3x \\ &= \dot{a}^A\int (w_A + K_A)d^3x + \dot{b}^A_r\int x^r(w_A + K_A)d^3x. \end{aligned} \tag{4-5}$$

（我已经将 $\dot{a}^A$，$\dot{b}^A$ 这些量提到积分号外，因为它们与变量 x 无

关.)(4-5)中变量w只以组合 $\int w_A d^3x$ 和 $\int x^r w_A d^3x$ 的形式出现. 这里有16个这种组合,这些组合是与描述类空平面所需的16个变量a, b共轭的新动量.

我们可以再将 H_T 用这些量的法向分量和切向分量表示为

$$H_T = \dot{a}^A l_A \int (w_\perp + K_\perp) d^3x + \dot{a}^A b_{Ar} \int (w^r + K^r) d^3x$$
$$+ \dot{b}^A_r l_A \int x^r (w_\perp + K_\perp) d^3x + \dot{b}_{Ar} b^A_s \int x^r (w^s + K^s) d^3x. \tag{4-6}$$

我们现在引进 x^r 坐标系的正交条件,这意味着

$$b_{Ar} b^A_s = \gamma_{rs} = -\delta_{rs}. \tag{4-7}$$

(4-7) 对 τ 求微商,得

$$\dot{b}_{Ar} b^A_s + \dot{b}_{As} b^A_r = 0. \tag{4-8}$$

(我已经很自由地升降了A指标,因为A坐标系就是狭义相对论所用的坐标系.)这个方程告诉我们 $\dot{b}_{Ar} b^A_s$ 对于 r 和 s 是反对称的. 于是(4-6)中最后一项等于

$$\frac{1}{2} \dot{b}_{Ar} b^A_s \int \{x^r (w^s + K^s) - x^s (w^r + K^r)\} d^3x.$$

现在你们看到,和以往的情况不同,这里的 H_T 中不出现那么许多w的线性组合. 仅存的w的线性组合有如下几种:

$$P_\perp \equiv \int w_\perp d^3x, \tag{4-9}$$

$$P_r \equiv \int w_r d^3x, \tag{4-10}$$

$$M_{r\perp} \equiv \int x^r w_\perp d^3x, \tag{4-11}$$

$$M_{rs} \equiv \int (x_r w_s - x_s w_r) d^3x. \tag{4-12}$$

(我们现在可以自由地升降指标 r，因为它们涉及的是直线正交坐标.)当类空面只限于取平面时，采用直线正交坐标，这些量就是为确定平面所需变量的共轭动量.

全体动量 (4-9)，(4-10)，(4-11) 和(4-12)可以写成 P_μ 和 $M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}$，其中指标 μ 和 ν 取 4 个值，0 相应于法向分量，而 1，2，3 相应于三个 x. 小写指标 μ,ν 对应于 x 坐标系，以区别与 y 坐标系相对应的大写指标 A.

这样动量就减少到 10 个，与这 10 个动量相关联，我们有 10 个第一类初级约束，它们可以写为

$$P_\mu + p_\mu \approx 0, \tag{4-13}$$

$$M_{\mu\nu} + m_{\mu\nu} \approx 0, \tag{4-14}$$

其中

$$\boldsymbol{p}_\perp \equiv \int K_\perp d^3x, \tag{4-15}$$

$$p_r \equiv \int K_r d^3x, \tag{4-16}$$

$$m_{r\perp} \equiv \int x_r K_\perp d^3x, \tag{4-17}$$

$$m_{rs} \equiv \int (x_r K_s - x_s K_r) d^3x. \tag{4-18}$$

我们现在有 10 个与平面的运动相关的第一类初级约束. 在第三讲中我说过，为了允许平面作一般运动需要 4 个第一类初级约束. 我们现在看到 4 个并不够. 我们必须把 4 增加到 10，因为类空平面垂直于自身和改变其取向的 4 个基本运动不构成群；为了让这些基本运动构成群，必须将 4 扩充为 10，群中多加的 6 个生成元*对应着类空平面的平移和转动，这些运动只影响类空平面上的坐标系，而平面作为一个整体

---

* 原文此处为群元素 (members of the group)，现已根据文意明确地改成现行术语. ——译者注

却不受影响。这样我们就得到一个包含 10 个第一类初级约束的哈密顿理论。

现在我们应该讨论自洽条件，也就是所有第一类约束必须满足的泊松括号关系。我们首先讨论动量 P_μ, $M_{\mu\nu}$ 之间的泊松括号关系。由 w 表出这些动量的关系式是 (4-9) 到 (4-12)，而且我们已知 w 之间的泊松括号关系 (3-17)，(3-18)和 (3-19)，于是我们就可以算出 P 和 M 之间的泊松括号关系。其实要确定 P 和 M 之间的泊松括号关系，并不需要这样详细计算。只要认识到这些变量正好对应于四维平坦时空中的平移算符和转动算符，那么它们之间的泊松括号关系就必然对应于平移算符和转动算符之间的对易关系。无论通过哪一种方式，我们都能得到如下的泊松括号关系：

$$[P_\mu, P_\nu] = 0, \tag{4-19}$$

它表示不同的平移可对易；以及

$$[P_\mu, M_{\rho\sigma}] = g_{\mu\rho}P_\sigma - g_{\mu\sigma}P_\rho, \tag{4-20}$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = -g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} + g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} + g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} - g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho}. \tag{4-21}$$

现在来考虑方程 (4-13) 和 (4-14) 都是第一类约束的要求。它们中任何两个的泊松括号必须弱等于零，因而必须是它们自己的一个线性组合。于是我们得到下列泊松括号关系：

$$[P_\mu + p_\mu, P_\nu + p_\nu] = 0, \tag{4-22}$$

$$[P_\mu + p_\mu, M_{\rho\sigma} + m_{\rho\sigma}] = g_{\mu\rho}(P_\sigma + p_\sigma) - g_{\mu\sigma}(P_\rho + p_\rho), \tag{4-23}$$

$$[M_{\mu\nu} + m_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma} + m_{\rho\sigma}] = -g_{\mu\rho}(M_{\nu\sigma} + m_{\nu\sigma}) + g_{\nu\rho}(M_{\mu\sigma} + m_{\rho\sigma}) + g_{\nu\sigma}(M_{\nu\rho} + m_{\nu\rho}) - g_{\nu\sigma}(M_{\mu\rho} + m_{\mu\rho}). \tag{4-24}$$

得到这些关系的理由是，对每种情形，方程右边都必须是一些

弱等于零的项，此外我们还知道右边含有动量 P，M 的项，因为这些项只能来自动量与动量之间的泊松括号，所以已由(4-19)，(4-20) 和 (4-21) 给出。（对于曲面的情形 (3-21)，(3-22) 和 (3-23)，我已经使用过相同的论点，因此这里没有必要细述。例如，考察 (4-23) 是如何来的。它所含 P 的项与 (4-20)中的完全一样，这些项来自于 P 和 M 的泊松括号。其余的项补充进去是为了使得总表达式弱等于零。)(4-22)，(4-23) 和 (4-24) 即是自洽性的要求。

按如下方式我们可以作进一步简化，但这种简化在曲线坐标的情形却行不通：我们假设只对 x 坐标系来取定基本场量，它们是类空平面上指定点 x 处的场量，我们这样选取是为了使场量与 y 坐标系无关。这样，量 $K_\perp$，K_τ 就与 y 坐标系无关，这又意味着它们与变量 P，M 的泊松括号为零。因此每个变量 p，m 与每个变量 P，M 之间的泊松括号都为零。

这个条件是描述物理场的动力学变量自然选取的必然结果。采用曲面时就不能作这样的简化，因为度规 γ_{rs} 会进入到 $K_\perp$，K_τ 中去。结果是我们不能把这些量表示成为与 y 坐标系完全无关的形式，其原因在于 y 坐标要进入到变量 γ_{rs} 中。可是，对于平面，我们就可以作这种简化，结果方程 (4-22)，(4-23) 和 (4-24) 简化成

$$[p_\mu, p_\nu] = 0, \tag{4-25}$$

$$[p_\mu, m_{\rho\sigma}] = g_{\mu\rho}p_\sigma - g_{\mu\sigma}p_\rho, \tag{4-26}$$

$$\begin{aligned}[m_{\mu\nu}, m_{\rho\sigma}] = &- g_{\mu\rho}m_{\nu\sigma} + g_{\nu\rho}m_{\mu\sigma} \\ &+ g_{\mu\sigma}m_{\nu\rho} - g_{\nu\sigma}m_{\mu\rho}.\end{aligned} \tag{4-27}$$

P 和 M 已经从这些方程中消失，因此自洽条件现在只含有场变量，而不含有为描述平面所引进的变量。事实上，这些条件只表明 p，m 必须满足对应于平坦时空中平移算符和转动算符的泊松括号关系。建立相对论性量子场论的问题，现

在变成寻求满足泊松括号关系 (4-25),(4-26) 和 (4-27) 的量 p, m 的问题.

记住这些量是由 $K_\perp$ 和 K_r, 即能量密度和动量密度定义的. 动量密度的表达式与曲线坐标的情形完全一样, 仅由几何考虑, 就可以确定它. 我们的问题现在化成寻求使得 p 和 m 的泊松括号关系 (4-25),(4-26) 和 (4-27) 满足的能量密度 $K_\perp$.

如果我们从洛仑兹不变的作用量积分出发, 并按照标准的哈密顿方法导出 $K_\perp$, 那么在经典理论中 $K_\perp$ 将自动满足这些要求. 于是得到一个相对论性量子理论的问题, 现在就化成适当选取出现在 $K_\perp$ 中的因子次序, 从而使量子理论中方程 (4-25),(4-26) 和 (4-27) 也满足的问题; 这里泊松括号变成对易子, p 和 m 中含有不可对易量.

我们来考察 (4-25),(4-26) 和 (4-27), 并将 p 和 m 用由 K 表示的值代进去. 于是可以看到其中有些条件与 $K_\perp$ 无关, 当我们按照几何要求正确选取 K_r 时, 这些条件就自动满足. 有些条件对 $K_\perp$ 是线性的, 只要将 $K_\perp$ 取成 x 空间中的任意三维标量密度, 这些条件也满足. 因此要满足对 $K_\perp$ 是线性的那些条件是没有问题的. 难于满足的条件是对 $K_\perp$ 为二次的那些条件, 这些条件如下:

$$\left[\int x_r K_\perp d^3x,\ \int K'_\perp d^3x'\right] = \int K_r d^3x. \tag{4-28}$$

(这个方程来自(4-26), 并取 $\mu = \perp$, $\rho = r$ 和 $\sigma = \perp$.)

$$\left[\int x_r K_\perp d^3x,\ \int x'_s K'_\perp d^3x'\right]$$

$$= -\int (x_r K_s - x_s K_r) d^3x. \tag{4-29}$$

(这个方程来自(4-27), 并取 $\nu = \perp$ 和 $\sigma = \perp$.)于是得到一个相对论性量子场论的问题, 现在就变成了寻求在考虑到因

子的不可对易性时仍然满足条件 (4-28) 和 (4-29) 的能量密度 $K_\perp$ 的问题.

我们可以把这些条件再稍微分析一下. 空间某一点的 $K_\perp$ 和另一点的 $K'_\perp$ 之间的泊松括号等于 δ 函数及其微商项之和:

$$[K_\perp, K'_\perp] = a\delta + 2b_r\delta_{,r} + c_{rt}\delta_{,rt} + \cdots. \qquad (4\text{-}30)$$

(这里的 δ 函数是第一点坐标 x 和第二点坐标 x' 的三维 δ 函数.)式中 $a = a(x)$, $b = b(x)$, $c = c(x)$, ……. 这些系数中也可以含 x', 但是通过改变级数前面各项系数的办法, 可将这些系数全部用只含 x 的系数取代. 这里出现的不对称性只不过是方程书写方式的不对称性, 而不是 x 和 x' 之间根本的不对称性.

(4-30)是联系两点的能量密度的一般关系. 对于许多例子, 包括所有较常见的场, δ 函数高于二阶的微商项并不出现. 我们进一步来考察这种情形.

假设二阶以上的微商项不出现. 这意味着级数(4-30)截止于第三项. 在这种特殊情形中, 利用泊松括号 (4-30) 对 x 和 x' 反对称的条件, 我们可以得到相当多的有关系数 a, b, c 的信息. 在 (4-30) 中交换 x 和 x', 我们得到

$$\begin{aligned}
[K'_\perp, K_\perp] &= a'\delta - 2b'_r\delta_{,r} + c'_{rt}\delta_{,rt} \\
&= a'\delta - 2(b'_r\delta)_{,r} + (c'_{rt}\delta)_{,rt} \\
&\qquad\qquad (\text{因 } \partial b_r(x')/\partial x' = 0, \text{ 等等.}) \\
&= a\delta - 2(b_r\delta)_{,r} + (c_{rt}\delta)_{,rt} \\
&= (a - 2b_{r,r} + c_{rt,rt})\delta \\
&\quad + (-2b_r + 2c_{rt,s})\delta_{,r} + c_{rt}\delta_{,rt}. \qquad (4\text{-}31)
\end{aligned}$$

表达式 (4-31) 必须恒等于负的 (4-30). 为使 $\delta_{,rt}$ 的系数一致, 必须有

$$c_{rt} = 0, \qquad (4\text{-}32)$$

这也使 $\delta_{,\mu}$ 的系数一致了。最后，为使 δ 的系数一致，必须有

$$a = b_{r,r}, \tag{4-33}$$

这样就给出方程

$$[K_\perp, K'_\perp] = 2b_r\delta_{,r} + b_{r,r}\delta, \tag{4-34}$$

现在把这个结果代入 (4-28) 和 (4-29)，它们变成

$$\int K_r d^3x = \iint x_r(2b_s\delta_{,s} + b_{s,s}\delta)d^3xd^3x'$$

$$= \int x_r b_{s,s} d^3x$$

$$= \int b_r d^3x.$$

(注意到 $x_{r,s} = \partial x_r/\partial x^s = -\delta_{,s}$.) (4-35)

$$-\int (x_r K_s - x_s K_r)d^3x = \iint x_r x'_s(2b_t\delta_{,t} + b_{t,\,t}\delta)d^3xd^3x'$$

$$= \int (-2x_r b_s + x_r x_s b_{t,\,t})d^3x$$

$$= \int (-x_r b_s + x_s b_r)d^3x. \tag{4-36}$$

这就是自洽条件化简后的结果，可以看出，若取 $b_r = K_r$，则这些条件是满足的。$b_r = K_r$ 不是最一般的解，更普遍地我们有

$$b_r = K_r + \theta_{rs,s}, \tag{4-37}$$

其中 θ_{rs} 是满足如下条件的任意量：

$$\int (\theta_{rs} - \theta_{sr})d^3x = 0. \tag{4-38}$$

因此 θ 可以有任意的对称部分，但其反对称部分一定是一个散度。

上面给出了相对论性量子场论所满足的一般要求。我们必须求出满足泊松括号关系 (4-34) 的能量密度 $K_\perp$，其中 b_r 与动量密度 K_r 的关系由 (4-37) 给出。如果我们从洛仑兹不

变的作用量求出能量密度，那么在经典理论中这个条件肯定满足，但在量子理论中这个条件却可能不满足，因为因子次序或许是不对的。只有当能量密度中因子次序可以取得使(4-34)和(4-37)精确成立时，我们才能得到一个相对论性量子理论。这里得到的相对论性量子理论所满足的条件，远没有讨论一般曲面上的状态时得到的那么苛刻。

我想用玻恩-英费尔德的电动力学作为例子来说明以上的讨论。玻恩-英费尔德电动力学与麦克斯韦电动力学在弱场情形下是一致的，但在强场情形下则不相同。（现在电磁场量用的是以电子电荷和电子经典半径定义的绝对单位，所以我们可以说强场和弱场。）玻恩-英费尔德电动力学的一般方程由以下作用量导出：

$$I = \int \sqrt{-\det\left(g_{\mu\nu} + F_{\mu\nu}\right)}\, d^4x. \qquad (4\text{-}39)$$

在现阶段我们可以用曲线坐标，$g_{\mu\nu}$ 是这些曲线坐标的度规，$F_{\mu\nu}$ 是绝对单位下的电磁场量。

用一般程序可以从这个作用量积分过渡到哈密顿量。在所得到的哈密顿量中，除了有描述类空面的变量外，还有动力学坐标 A_r，$r = 1, 2, 3$。A_0 如同麦克斯韦场的情形一样，是无关紧要的变量。A_r 的共轭动量 D^r 是电感应强度的分量，并且满足泊松括号关系

$$[A_r, D^{r'}] = g^{r}_{r'}\delta(x - x'). \qquad (4\text{-}40)$$

结果是在哈密顿量中，A 仅以其旋度形式出现，即通过如下场量出现

$$B^r = \frac{1}{2}\varepsilon^{rst}F_{st} = \varepsilon^{rst}A_{t,s}. \qquad (4\text{-}41)$$

ε^{rst} 对指标是全反对称的，且当 $(rst) = (1, 2, 3)$ 时，$\varepsilon^{rst} = 1$。B 与 D 之间的对易关系为

$$[B^r, D^{rt}] = \varepsilon^{rst}\delta_{,t}(x - x'). \tag{4-42}$$

现在动量密度为

$$K_r = F_{rs}D^s, \tag{4-43}$$

这正好同麦克斯韦理论中的一样．它符合动量密度只依赖于几何性质的一般原理，就是说，只与我们所用场的几何性质有关，而与作用量原理无关．

现在的能量密度为

$$K_\perp = \{\Gamma^2 - \gamma_{rs}(D^rD^s + B^rB^s) - \gamma^{rs}F_{rt}F_{su}D^tD^u\}^{1/2}, \tag{4-44}$$

其中 γ_{rs} 是三维类空面的度规，而

$$-\Gamma^2 = \det\gamma_{rs}. \tag{4-45}$$

如果用曲面，就要求 $K_\perp$ 满足泊松括号关系(3-31)，这在经典理论中一定如此，因为 $K_\perp$ 是从洛仑兹不变的作用量积分导出的．但是在量子理论中，我们却不能使它满足所要求的对易关系．$K_\perp$ 的表达式中出现了平方根，这使问题变得很难处理．要得到系数 γ^{rs} 位于左边的正确对易关系似乎是无望的．因此，似乎不可能建立起状态定义在一般曲面上的玻恩-英费尔德量子电动力学．

现在我们转到平面情形．为此，我们需要求出泊松括号关系(4-34)．我们知道，在经典理论中这个条件是满足的．因此在经典意义上，我们必须有如下泊松括号关系：

$$[K_\perp, K'_\perp] = 2K_r\delta_{,r} + K_{r,r}\delta. \tag{4-46}$$

无须仔细计算，就能看出上式在量子理论中也一定成立，因为 K_r 完全是由量 D^s 和 B^t 构成的．在量子理论中，所要计算的量中 D 和 B 总以某种确定次序出现，可是当我们取同一点的值时，则所有 D 和 B 都彼此可对易，从(4-42)我们可以看出这一点．如果取 $x = x'$，则得

$$[B^r, D^s] = \varepsilon^{rst}\delta_{,t}(0) = 0 \tag{4-47}$$

(β函数在零点为零时的导数取为零)。因此，我们不必再为出现在 K_0 中的 D 和 B 的不可对易性而担心。我们一定会得到经典表达式，因而自洽条件也是满足的。

于是对于玻恩-英费尔德电动力学，平面上量子理论的自洽条件是满足的，但曲面上的自洽条件却不满足。物理上这意味着我们能够为玻恩-英费尔德电动力学的量子理论建立起与狭义相对论协调的基本方程，但是，如果我们想让这个量子理论与广义相对论协调，就会遇到困难。

这样就完成了关于相对论性量子理论的自洽性要求的讨论。可是，即使满足了这些自洽性要求，我们也还没有消除所有困难。在我们面前仍然存在着一些十分令人望而生畏的困难。如果我们只讨论包含有限多个自由度的体系，那么就消除了一切困难，而问题就简单地变成求解 ψ 的微分方程。但是，在场论情形下，我们有无穷多个自由度，这种无限性也许会导致困难。通常它确实会导致困难。

我们必须求解方程，其中未知量波函数 ψ 包含无穷多个变量。人们求解这类方程时通常是采用微扰方法，把波函数展开成某个小参量的级数，然后逐步求解。但是人们常常会陷入困境：一定阶段之后方程会导致发散积分。

关于这个问题，人们已做了大量工作。他们已发现了处理这些发散积分的方法，这些方法尽管不能从数学上证明，但对于物理学家来说，似乎还是可以接受的；他们也已建立了重正化技术，这种技术可以使我们在某些场论情形下对出现的无穷大不予理睬。

因此，甚至就是当形式上自洽性要求已经满足时，我们也还有困难，我们不知道怎样才能得到满足辅助条件的波动方程解。如果我们能得到这样的解，那么仍然有进一步的问题，就是为这些解引进标量积，也就是说，将这些解看作是希耳伯

特空间的矢量。因此，必须引进这些标量积。我们才能用量子力学是物理解释的标准规则来对我们的波函数给出物理解释。对于那些满足辅助条件的波函数，我们需要引进标量积，但是对于那些不满足辅助条件的一般波函数，我们却不必为其标量积担心，也许根本无法对这些一般波函数定义标量积，但这一点也没有关系。量子力学的物理解释只要求对所有满足辅助条件的波函数存在标量积就行了。

你们已经看到，要得到量子力学的哈密顿理论，存在着难以克服的困难。如果只限于经典力学，那么方法似乎已非常完备，而且我们能够确切知道其结果是什么；但是一涉及到量子力学，我们实际上只是处于问题的开始。即使辅助条件形式上都是自洽的，求解时仍然会有困难，而且为所得到的解引进标量积时也还可能会有困难。

这些困难是相当严重的，以致使一些物理学家对整个哈密顿方法产生怀疑。许多物理学家现在正致力于试图建立一个不依赖于任何哈密顿量的量子场论。他们的一般方法是引进一些物理上重要的量，然后再引进一些可接受的一般原理，以便对这些量加上条件；他们希望最终能够得到许多加在这些重要物理量上的条件足以计算出这些量。他们距离达到终点还差得很远，而我自己的信念是认为不可能完全免除哈密顿方法。从经典的观点看来，哈密顿方法主宰着力学。也许我们从经典力学过渡到量子力学的方法还不正确。即使如此，我仍然认为，在任何将来的量子理论中，一定有某种东西与哈密顿理论对应，尽管其形式与目前的不一样。

我就已发展的哈密顿方法作了论述。这是一个相当普遍和十分有力的方法，适用于许多问题。它可以适用于场中出现奇异性(点或面)的问题。在发展哈密顿理论的过程中，中心思想是寻求包含某些参量 q 的作用量 I，使得当我们改变

052062

q 时，δI 对于 δq 是线性的。为了能够应用这些演讲中所阐明的处理方法，δI 对于 δq 线性这一点是必不可少的。

当我们遇到奇异性时，线性化方法是采用曲线坐标，而不是改变确定奇异点或奇异面位置的方程。例如，如果我们讨论由方程$f(x) = 0$给定的奇异面，那么应该有一个变分原理，其中 $f(x)$ 是不变化的。如果我们允许 $f(x)$ 变化，如果将 $f(x)$ 本身作为某个 q 来处理，那么 δI 对于 δq 就不会是线性的。但是我们可以保持 $f(x)$ 对于某个曲线坐标系 x 来说固定，这样，我们就可以通过改变曲线坐标系的办法来改变曲面而不改变函数 f。因此，我这里所讨论的一般方法，应用于经典理论是非常令人满意的。在进行量子化时就会遇到我上面讨论过的许多困难。