高等学校教材

电路分析基础（第4版）

上册

李瀚荪

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

ISBN 7-04-018470-2



9 787040 184709 >

定价 20.90 元

TN7
6=4
:1

● 高等学校教材

电路分析基础（第4版）

上册

李瀚荪

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容提要

《电路分析基础》是一套深受读者好评的教材。在第3版出版十余年后，作者对此书进行了修订。除内容有所调整外，还将原来上、中、下三册的结构改为上、下两册。

《电路分析基础》第4版上册分为两篇：总论和电阻电路的分析、动态电路的时域分析。具体内容有：集总参数电路中电压、电流的约束关系、网孔分析和节点分析、叠加方法与网络函数、分解方法及单口网络、电容元件与电感元件、一阶电路、二阶电路。

本书可供普通高等学校电子信息、通信工程、电子科学等专业作为教材使用，也可供有关工程技术人员参考。

图书在版编目 (CIP) 数据

电路分析基础. 上册 / 李瀚荪. —4 版. —北京：
高等教育出版社，2006. 5
ISBN 7 - 04 - 018470 - 2

Ⅰ. 电… Ⅱ. 李… Ⅲ. 电路分析 - 高等学校 - 教材 Ⅳ. TM133

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 027416 号

策划编辑 刘激扬 **责任编辑** 曲文利 **封面设计** 张 志 **责任绘图** 朱 静
版式设计 胡志萍 **责任校对** 王 雨 **责任印制** 宋克学

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010 - 58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800 - 810 - 0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010 - 58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	天津新华二印刷有限公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	1978 年 7 月第 1 版
			2006 年 5 月第 4 版
印　　张	18	**印　　次**	2006 年 5 月第 1 次印刷
字　　数	330 000	**定　　价**	20. 90 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有　侵权必究

物料号　18470 - 00

振叶寻根　观澜索源

—第4版序言—

2004年夏高等教育出版社策划编辑刘激扬女士告诉我,《简明电路分析基础》(以下简称为《简明》)于2002年8月出版后,仍有一些学校在使用《电路分析基础》(第3版)(以下简称为《第3版》,类似地以下还将使用《第1版》、《第2版》和《第4版》的简称)。出版目录上,两者并存。随后,我查了一下,从2002年8月至2004年8月,两年间两者均印刷三次,其中《第3版》上、中、下册,共印刷了30万册,表明市场对该版仍有需求。刘女士又告诉我,《第3版》印刷纸型已不堪重负,难以继续使用,与其重制,不如根据一些学校的需要,撰写《第4版》。我很赞同,于是便写成了本书。

早在2002年8月《简明》出版之际,在浙西天目山庄的教材研讨会上,我曾向高等教育出版社楼史进编审提交了《简明》普及版的撰写设想。当时是考虑到各类学校和不同的有关专业,对"电路分析基础"课程事实上存在着不同的要求,写成不同层次的两种版本,尽可能地满足需要,便于选用。《第4版》基本上就是按照当时对普及版的思路撰写的。因此,《第4版》就是《简明》普及版。

(一)

作为《简明》普及版,《第4版》理所当然地是以《简明》序言中提出的"述而求作,理枝循干"作为编写主旨的。与时俱进,《第4版》的基本结构确实比《第3版》更形凸现,这从目录上和附录B的"复习大纲"便可看出。与《第3版》相比,内容有所删减,内容的处理上有所简化。删去了原第三、五、九、十、十五等五章,这些章中需要保留的一些内容,以适当方式并入《第4版》的有关章节中,例如非线性电阻电路并入第四章;正弦交流的基本概念并入第六章;冲激响应并入第六章;原双口网络一章中的互易定理并入第二章等。其归属处理大致与《简明》相同,但要求略低。根据《简明》普及版撰写设想,教材力求突出物理概念,避免过多使用数学知识;多用例题说明问题,避免使用冗长的叙述或证明。例如,一阶电路(第六章)完全改写,仅需

微积分的基本知识即可学习;正弦稳态的平均功率、无功功率从物理概念引出而把数学推导作为习题供选做等。在附录方面,删去“磁路”部分,拉氏变换经改写后提升为第十二章。附录改为学习辅导性质的内容,分为“复习、检查题”和“复习大纲”两部分。复习大纲虽主要供课程学完后复习之用,也可供学习过程中,不时翻阅,知道自己现在“身在何处”,“前途如何”。在编写中仍遵循《简明》序言中提出的“五要”,并注意避免“择焉而不精,语焉而不详”,该说清楚处,决不吝惜笔墨。习题经过重新选定,大部分与《第3版》相同,但改为按节编排,便于与正文配合。全书分上、下两册出版。

与本教材配套使用的有下列两种资料:

(1) 全国普通高等学校电路试题库　　国家“九五”重点科技攻关项目——计算机辅助教学软件开发与应用(96—750)项目的重点子专题。主编:李瀚荪,副主编:吴锡龙、江慰德、周树棠。由北京理工大学、西安交通大学、上海大学、天津大学、华中科技大学及北京交通大学、北京邮电大学、哈尔滨工业大学、重庆大学、西安电子科技大学等多所大学的教师联合研制。含4 815题。可自动组卷。1999年通过教育部主持的鉴定。2000年4月由高等教育出版社出版发行。

(2)《电路分析基础》(第4版)教学指导书　　李瀚荪　吴锡龙

将由高等教育出版社于2006年秋季出版。

本书仍请北京书法家协会主席宣祥鎏学长题名,谨表谢意。

本书仍请吴锡龙教授在百忙中拨冗审稿,提出不少意见,谨表谢意。

李京川工程师参与了本书的编写工作。

(二)

《第4版》仍以“述而求作,理枝循干”为编写主旨,努力突出基本结构。但在本序言的其余部分,也许算是主要部分,除了这一枝、干关系,还想谈谈其他一些与教材有关的问题。为此,我仍借用《文心雕龙·序志》中“振叶以寻根,观澜而索源”的提法,作为序言的标题,以表明想就课程茂盛的“枝叶”,壮阔的“波澜”,谈点“寻根、索源”的体会,以利读者对本书的了解,并供志同道合者的评论和切磋。

作为一门理论性较强、内容丰富的技术基础课程的教材,《简明》序言中着重介绍了“基本结构”的概念,并以“理枝循干”作为编写思路。但是,从根本上讲,教材都是由若干知识点组成的,正如房屋由砖石筑成一样。知识点的罗列不能称其为教材,正如一堆砖石不能成其为房屋。我认为像电路分析

这类教材中的每个知识点应为三“维”所系。“维”的古义为系物的大绳。此处所谓三“维”是指课程的体系、基本结构和基本要求。教材整体并非各知识点的简单总和,还应具备整体自己的性质。三维体现了教材的整体性质。“基本结构”只是其中的一维,但是“隐性”的,易为人所忽视,需要去挖掘,需要加以强调。认识它并善于利用,属教学方法问题,故突出为教材的编写主旨。基本要求确定课程的“三基”,因时因地而异,已由专家制定、教育部颁布,在教材中属执行问题,毋需再加探讨。而在体系方面,不论作者自觉或不自觉,任何一本教材都存在一个体系,否则,编写时从何下笔?至少也会列出一个章节名称及其次序吧!其实,体系属教材的科学性问题,十分重要。对此,虽见仁见智,但应“各推所长,崇其所善”,形成教材特色。《简明》一书的体系起源于《第1版》,已成定局。不同于基本结构有一个逐步认识过程,故在其序言中未涉及体系问题。

“寻根、索源”就是想补充谈谈体系问题和对基本结构的认识过程。此外,和教材密切相关的讲课问题及其使用问题也想一并谈谈。

(三)

在教材的体系上我一直主张根据事物变化的内因和外因关系,按形成电路响应、电路现象的内因,采用划分为电阻电路和动态电路两大部分的体系。如同教材的基本结构一样,体系也必须凸现、明确。内因是变化的根据,外因是变化的条件。就电路来说,内因只有电阻电路和动态电路之分,非此即彼;作为外因的电路激励,却是多种多样、名目繁多的,如直流激励、正弦交流激励、脉冲激励、非正弦周期性激励等。但不论外因为何,凡电阻电路,其响应、激励关系是由代数方程(或超越方程)来描述的,而动态电路的这一关系则是由微分方程来描述的。这些方程可以是线性的或非线性的;时不变的或时变的。电路分析的基本问题:给定电路的结构、元件的特性或参数(内因)以及各独立电源的电压或电流(外因),求出电路中所有的或某些指定的支路电压、电流(响应)。两种电路的分析方法是不同的。响应是分析的结果而不是分析的出发点。以响应为“非正弦周期性电流”的电路为例,如果以响应作为分析问题的出发点,则这电路可以是非正弦周期性激励的线性电阻电路,可以是正弦交流激励的非线性电阻电路,可以是多个不同频率(频率成有理数倍数)的正弦交流激励的线性动态电路,可以是非正弦周期性激励的线性动态电路,等等。情况不同,分析方法亦异。以响应为名,只谈一种情况,不及其余,就掌握电路分析方法而言,不能不认为是欠妥的。其他按响应

分类的电路,如传统教材中的直流(电流)电路、正弦交流(电流)电路、瞬态(响应)电路等都有类似的不明确性。随着现代电路功能的增多,这种分类多有不便。何不根据外因、内因的不同组合,以内因为主体,把电路分为直流电阻电路、直流动态电路……?明确内因、外因,就能采用相应的方法求得响应。例如正弦交流激励的含理想变压器和其他电阻元件的电路,属交流电阻电路问题,采用电阻电路分析方法即可,不必想到相量法。囿于传统习惯,或许对诸如"直流动态电路"等称谓感到不适。其实,如同大家已认同的"直流电流"、"直流电压"、"直流磁通"等一样,此处的流字已失去原有电流的含义,直流(DC)只是"恒定"的代用词,这里所称的直流动态电路只是恒定激励作用下的动态电路。查阅美国《McGraw - Hill Encyclopedia of Science and Techonology》(5th Edition,1982)一书的 DC Circuit Theory 条目中对 DC Circuit 所下的定义,其译文为"直流(DC)电压源或电流源,例如发电机和蓄电池连同传输线、电阻、电感、电容以及如同电动机的功率转换器的任何组合称为直流(DC)电路"。又如改革开放之初,引入国内的蔡少棠所著《非线性电路引论》(人民教育出版社,1980)第五章亦有类似的定义,采用了直流(DC)电阻电路、直流(DC)动态电路之类的称谓。这种分类较适合当今功能繁多电路的分析问题的需要。

1978年出版的《第1版》即采用了"三鼎足"、即"电阻电路分析"、"动态电路的时域分析"和"正弦稳态电路分析"的体系,改变了"交流电路"一家独尊的局面以适应技术发展的需要。以后一直按此体系历经《第2版》、《第3版》,至《简明》发展为含"总论及电阻电路分析"、"动态电路时域分析"、"相量分析和 s 域分析"等三大篇的体系,始终未脱离我对课程体系的基本观点。《第4版》内容上虽有变动,但体系依旧。第一篇篇名增添"总论"两字,并在内容上相呼应,乃是为了突出基本结构之需。下面就转入基本结构这一话题。

(四)

有关基本结构的概念及其重要性已在《简明》序言中作过交代,此处只简述我对教材基本结构的认识过程以及如何用于教材的撰写。

1954年春我初次登上讲台讲授电工原理,采用的教材是苏联卡兰塔诺夫的《电工学底理论基础》中译本。初次讲课,使用这本教材,绝不是件轻松的事。教材有一定的学术水平,但过于简练,有骨无肉。学时数高达二三百(含电磁场),跨三个学期,属"巨无霸"课程。以后教学计划中各门课程的学

时配额日趋紧张,学时数难以自主决定。当时有人提出“少而精”“重点突出”等旨在提高教学质量、教学效益的观点,我极为赞同。但是,具体到一门课程如何贯彻这些观点?是否在教学大纲中圈点出若干必需的或最低限度的知识点就能体现出少而精?其余部分又该如何处理?少而精应体现在(教学的)“结果”上还是体现在(教学的)“过程”中?“少”的底线是多少?“精”字又该如何理解?一直困惑着我。“文革”后期,我偶得一本美国布鲁纳所著《教育过程》的中译本。我通宵达旦把这本60页的小册子一气读完。书中的四个专题对我都有启发,特别是有关“基本结构”的部分,触动尤深。我仿佛找到了一把解决少而精问题的钥匙。我的体会是:少而精应体现在几条线索、即基本结构上,这便是“少”的底线,“精”的所在。由此可形成辐射,完成知识的迁移。但是,这几条线索何在?如何把基本结构鲜明地呈现出来?

在撰写《第1版》时,我只理解到“两类约束”(当时称为两种形式的约束)是条主要线索,应该加以突出。这和我的一个印象深刻的回忆有关。“文革”前讲到过渡过程时,学生对列写电路微分方程感到困难,对一个像电阻、电容并联后再与另一电阻串联的电路,更是感到无从下手。究其原因,主要为:在“直流电路”中学习KVL时,定律表示为$\sum E=\sum RI$的形式,且缺乏对这一定律在教材整体中所起作用的叙述。KVL的陈述方式由$\sum E=\sum RI \rightarrow \sum U=0 \rightarrow \sum u=0$,体现了对课程整体认识的进步。在《第1版》中,两类约束这条主线贯穿全书。但是,独木难支大厦,其他的线索又在何处?

两类约束都是用电压、电流来描述的,只有在集总假设下才能得出这些关系。考虑到电压、电流为电路基本变量的地位,且由此推衍出功率、能量等变量,这些变量均为电路分析的对象,因而集总假设与两类约束相比,应属更高层次。那么,在基本结构中两类约束的“下家”是谁?

在写《第2版》时,我把简化电路分析的方法作为探索方向。认为独立变量的运用、等效概念的运用和电路定理的运用是居于“下家”的三条辅助线索。把独立变量的运用作为一条线索,是想把网孔、节点、回路、割集等分析方法乃至状态变量分析都归到这条线上。电路定理包含叠加原理、戴维南定理等,确也可简化分析。《第2版》的目录上反映出当时的思路,但全书找不到基本结构一词,考虑不成熟,不敢认定。书出后不久,我就感到处理上的不妥。电路定理作为一条线索,大而无当,缺乏力度。况且,其中的戴维南定理与等效电路这一线索形成“交集”。我觉得应该突出叠加,使之成为一条线索,而等效这一线索需要重组。

不久,我就面临《第3版》的撰写工作。这时我已明确了“分解(分而解

之)”这一方法,觉得它可以用来代替等效这一线索。等效原是和分割相关的,单口(乃至多口)网络都是由一个电路整体中分割出来的。在最简单的情况下,其余部分也许只是一个激励源,也许只是一个单口元件。而单口网络如同单口元件,其电压、电流关系是由它本身确定的,与外接电路无关,因而得以分割出来谈论它的等效电路等问题。分解方法的提出,使得单口电阻网络、单口含源电阻网络的等效电路问题以及置换定理等都可纳入这条线索。《第3版》鲜明地提出了这条线索,且从电阻电路贯通到动态电路。同样,我也只字未谈基本结构。重组等效线索虽已较好地得到解决,但突出“叠加”这一线索并未很好解决。在该书中叠加原理初次登场时仍屈居一节的地位。

《第3版》出版后,受均匀传输线理论中原参数与副参数提法的启发,我觉得需要进一步重新区分主线索和辅助线索。主线索——两类约束是用元件参数 R、L、C 直接表征的,据此,独立变量的运用仍属主线索,其辅助线索地位应予取消。辅助线索则是用类似于像戴维南等效参数(u_{OC}和R_o)之类的“副参数”来表征的,而副参数需用元件参数来表示,属“下家”的地位。据此,叠加方法可以和网络函数同时“出场”,从而有条件在初次亮相时便单独成一章以显示其重要地位。顺这思路,可以找出第三条辅助线索——变换域方法,在本门课中它包含了相量分析法和拉普拉斯变换法。阻抗 $Z(j\omega)$、$Z(s)$等可视为在变换域中元件的原参数,取代 R、L、C 等而充当主角。相量模型、s 域模型取代了时域模型,相应地,在变换域中也有类似于戴维南等效参数[$\dot{U}_{oc}$、Z_o,$U_{oc}(s)$、$Z_o(s)$]之类的副参数。

这样,就形成了对课程基本结构的初步认识。在《简明》序言中明确指出:课程的基本结构可归结为一个假设、两类约束、三大基本方法(叠加、分解和变换域)。它们之间的关系是“一生二、二生三”。作为《简明》普及版,本书理所当然地继承这一观点。

上述有关基本结构的论述,只是针对“电路分析基础”这门课程的,且是从教学方法的角度来考虑的。如同法国布尔巴基学派(les Bourbaki)对数学这门学科确定了它的母结构是代数结构、序结构和拓扑结构一样(皮亚杰《结构主义》第二章,商务印书馆1996年中译本第二章),我想作为一门学科,电路理论也是有它的母结构的。

在我对基本结构的探索过程中,除了受益于布鲁纳的著作外,还从一些美国电路教材中得到许多启发。从《简明》每章后的参考书目可见一斑。本书未罗列这些书目。这些书的作者,有的相识、相交、有的从未谋面,有的已故世,在此谨向他们表示谢意。基本结构说虽源自美国,但在美国电路教材

中尚未见到这一提法。

现在,有些教师对电路分析这门课程的学时数感到不能适应。何不在“少而精”方面、在讲课方式方面再作些研究?我想可能会有帮助的。下面就转入讲课和教材的使用这一话题。

(五)

讲课问题与教材使用问题密切相关。

讲课在学校的教学过程中只是一个环节,是重要一环,并非主要一环。自学(包括做题)才是主要一环。在校学习,能聆听大师或有成就、有心得的老师讲课,其影响决不可低估,可能会是终生难忘的。但归根到底,要得到知识,还得依靠自己的努力,用现代一些学者的话来说,要靠自己“建构”(《教育中的建构主义》,华东师范大学出版社2002年中译本)。古今中外,自学成才者不胜枚举,如华罗庚、法拉第等。即以我们这些学校出身的教师来说,所得知识大部分是毕业后自学所得。由此说明,自学能力的培养是何等重要,便于自学的教材和相关资料是何等重要。像“电路分析基础”这类课程也是要靠耐心、细心、研读教材、资料,并加以思考、勤于做题、看些参考书才能逐步掌握的。所以,我一直主张“教材宜细(致)不宜粗(略)”。“细”教材阐述透彻,便于自学,利于解惑。但“细”教材若不突出基本结构,也许会使人感到茫无头绪,阅读困难。

教师在教学过程中是应起主导作用的,讲课体现了这一作用。但是,作为教学主体的学生,不是一个空的容器,从而知识可以像物品一样地由教师传递给学生。用语言或文字符号、图形等形式传递给学生的只是包装好的信息而已。倘若通过语言形式传递的信息过密、过细,则由于其瞬间存在,稍纵即逝,恐怕连传递也是未能到位的,这类讲课能产生什么效果?其实,大学生已是一个成年人,不能忽视他们内在的逻辑能力,这种能力往往能使人从不充分的反应中找出答案。因此,我一直主张“讲授宜粗不宜细”。粗略绝非粗糙。简约之中见精华,也是要经过精心策划的。教师一、两句顶用的话,真知灼见,往往是学生一时不易体会到的。“粗”讲也需突出基本结构,否则会使人感到不得要领,听课困难。

一个要“细”,一个要“粗”,各具特色,作用不同。因此,教材决不能充当讲稿,照本宣科。我曾在《简明》序言中,借用《老子》第十一章中所说的“有之以为利,无之以为用”来说明教材在教学过程中的作用。“有”给人以便利,“无”发挥了它的作用。真正有用的所在,还是在于“无”。除非是一本针

对性极强的培训资料、讲义，针对全国开设这门课的众多学校和教师，一本教材只能是一个片面的、有限的事物，只是一个有待加工利用的对象，只有在人们根据实践的需要，摆脱这种片面性和有限性，处于“无”的境界，才能得到面对现实的使用价值。“有无相生”。我在该序言中还提到教师对待教材应采取“不取亦取，虽师勿师”的态度。这句话出自袁枚《续诗品·尚识》。《老子》很易找到，而袁枚的这本书却未必易于见到。全文录之如下：“学如弓拏，才如箭镞。识以领之，方能中鹄。善学邯郸，莫失故步；善求仙方，不为药误。我有禅灯，独照独知。不取亦取，虽师勿师。”对教师来说，学、才、识，缺一不可。讲课的首要问题是如何使用教材。这里，见识就很重要。教材只是教学的主要参考书，只能大致地规定教学范围。教师要善于按照基本要求，根据教学环境，利用教材主要论点，写出自己的讲稿。讲稿中宜多使用自己独创的或借用的、简单而易于说明问题的例题，以阐述某种方法、某一定理或重要概念、(本书的某些练习题，习题或思考题也许在这方面有利用价值)，不追求过分的完整性和严密性(这些应由教材解决)。在某些情况下，要特别注意所讲例题与所点习题之间的配合，使学生对课堂讲授的要点能有一次再认识的机会。讲课要能“入人意中，出人头地”，方能使人感到听课有收获，愿意听下去。要不拘一格，讲出特色。我有幸听过不少名师、大师的课，他们讲课方式差异极大，我同样感到收获很大，有些内容至今记忆犹新。关键在于学、才、识！

对学生来说，大学教材毕竟不是中学课本，不能沿用中学时代的学习方法。以“知识就是力量”一言流传后世的 Francis Bacon(1561—1626)，曾在一篇名为“Of Studies”的随笔中告诫我们：“书有可浅尝者，有可吞食者，少数则须咀嚼消化”(录自王佐良译文)。“吾生也有涯，而知也无涯”，博览群书，不能不区别对待。对于一本教材的内容也要能区别对待，但须咀嚼消化者可能会多些。在大学里应培养起这种善于读书的能力。起初，你可根据老师的讲课，启发和指导阅读教材，逐渐地，你的这种自学能力就会进一步提高，能自行处理。这是你在大学学习期间的重要收获之一。不要见到一本稍厚的教材，就不知所措，心里害怕。那种过分依赖教师，只能阅读“笔记式”教材的学习方式是不利于培养出创新人才的。何不自己记下老师讲课的笔记，自己研读教材。基本原理是不会过时的，只能在此基础上有所发展，重点有所转移。要珍惜自己在大学期间所作努力的记录，他日也许就是一份有参考意义的备忘录，至少也会给你带来一些值得留恋的回忆吧！

我记得“文革”前，高校曾推行过一种“以自学为主”的教学方式。教师先只作简单的“启发”，自学后，教师再针对问题进行讲解。虽然有待改进之

处甚多,但我认为方向是正确的。我努力想写出一本便于自学教材的动机也来源于此。何不再研究一下,看有何可取之处?

(六)

感谢读者耐心地读完这篇冗长的序言。

欣逢盛世,取乐桑榆。闲里生忙,情系著书。炉火灰深,温热犹存。天光云影,雪泥爪痕。淡泊从容,为而不争。

欢迎提出宝贵意见,请由高等教育出版社转交或发至电子信箱 dianlu819@ sohu. com 或 jerry9283@ vip. sohu. com。

李瀚荪

北京美丽园

2005 年 8 月 19 日

锲而舍之，朽木不折；
锲而不舍，金石可镂。
《荀子·劝学》

目　录

上　册

第一篇　总论和电阻电路的分析 …… 1

第一章　集总参数电路中电压、电流的约束关系 …… 3

§1－1　电路及集总电路模型 …… 3

§1－2　电路变量　电流、电压及功率 …… 6

§1－3　基尔霍夫定律 …… 12

§1－4　电阻元件 …… 20

§1－5　电压源 …… 25

§1－6　电流源 …… 31

§1－7　受控源 …… 34

§1－8　分压公式和分流公式 …… 39

§1－9　两类约束　KCL、KVL 方程的独立性 …… 44

§1－10　支路分析 …… 48

习题 …… 51

第二章　网孔分析和节点分析 …… 62

§2－1　网孔分析 …… 62

§2－2　互易定理 …… 69

§2－3　节点分析 …… 72

§2－4　含运算放大器的电阻电路 …… 78

§2－5　电路的对偶性 …… 84

习题 …… 85

第三章　叠加方法与网络函数 …… 90

§3－1　线性电路的比例性　网络函数 …… 90

§3－2　叠加原理 …… 95

§3-3 叠加方法与功率计算 …… 101
§3-4 数模转换器的基本原理 …… 104
习题 …… 107
第四章 分解方法及单口网络 …… 112
§4-1 分解的基本步骤 …… 112
§4-2 单口网络的电压电流关系 …… 114
§4-3 单口网络的置换——置换定理 …… 117
§4-4 单口网络的等效电路 …… 122
§4-5 一些简单的等效规律和公式 …… 127
§4-6 戴维南定理 …… 135
§4-7 诺顿定理 …… 144
§4-8 最大功率传递定理 …… 145
§4-9 T形网络和∏形网络的等效变换 …… 147
习题 …… 151
第二篇 动态电路的时域分析 …… 159
第五章 电容元件与电感元件 …… 161
§5-1 电容元件 …… 162
§5-2 电容的 VCR …… 163
§5-3 电容电压的连续性质和记忆性质 …… 168
§5-4 电容的储能 …… 172
§5-5 电感元件 …… 173
§5-6 电感的 VCR …… 175
§5-7 电容与电感的对偶性 状态变量 …… 177
习题 …… 179
第六章 一阶电路 …… 183
§6-1 分解方法在动态电路分析中的运用 …… 184
§6-2 零状态响应 …… 185
§6-3 阶跃响应 冲激响应 …… 197
§6-4 零输入响应 …… 203
§6-5 线性动态电路的叠加原理 …… 210
§6-6 三要素法 …… 214
§6-7 瞬态和稳态 …… 222
§6-8 正弦激励的过渡过程和稳态 …… 227
习题 …… 233

第七章　二阶电路 …… 244
§7－1　*LC* 电路中的正弦振荡 …… 244
§7－2　*RLC* 串联电路的零输入响应 …… 246
§7－3　*RLC* 串联电路的全响应 …… 256
§7－4　*GCL* 并联电路的分析 …… 259
习题 …… 261

部分习题答案(上册) …… 264

第一篇

总论和电阻电路的分析

“不论我们选教什么学科，务必使学生理解该学科的基本结构。这是在运用知识方面的最低要求，它有助于解决学生在课堂外所遇到的问题和事件，或者在日后训练中所遇到的问题。经典的迁移问题的中心，与其说是单纯掌握事实和技巧，不如说是教授和学习结构”。

——布鲁纳《教育过程》第 8 页

上海人民出版社(1973 年译本)

第一章

集总参数电路中电压、电流的约束关系

由电阻、电容、电感等集总参数元件组成的电路称为集总电路。本书讨论集总电路的分析。只含电阻元件和电源元件的电路称为电阻电路，是集总电路的一类，另一大类是动态电路。本书第一篇讨论电阻电路的分析，分为四章，另两篇则讨论动态电路的分析。

在这一章中，我们将阐明集总电路中各电压、电流应服从的基本规律，即它们之间的约束关系，这是分析两大类型集总电路的基本依据。在阐述这些基础内容的同时，讨论电阻电路的基本分析方法。

§1-1 电路及集总电路模型

电在现代日常生活、工农业生产、科研和国防等许多方面都有十分广泛的应用。从技术领域来看，电的应用可分为能量和信息两大领域，它们都利用了电能几乎可以瞬时地传送到远处的这一性质。电力系统涉及大规模电能的产生、传输和转换（为其他形式的能量），构成现代工业生产、家庭生活电气化等方面的基础。这里，能量是主要的着眼点。电能也可以以极其微小而被精确控制的形式传送，具有携带信息的能力，如日常的电话通信，计算机间信息的交流等。电又是控制其他形式能量最有效的手段。这里，信息是主要的着眼点。电用作信息处理和交换的媒介已成为当代社会的显著特征。

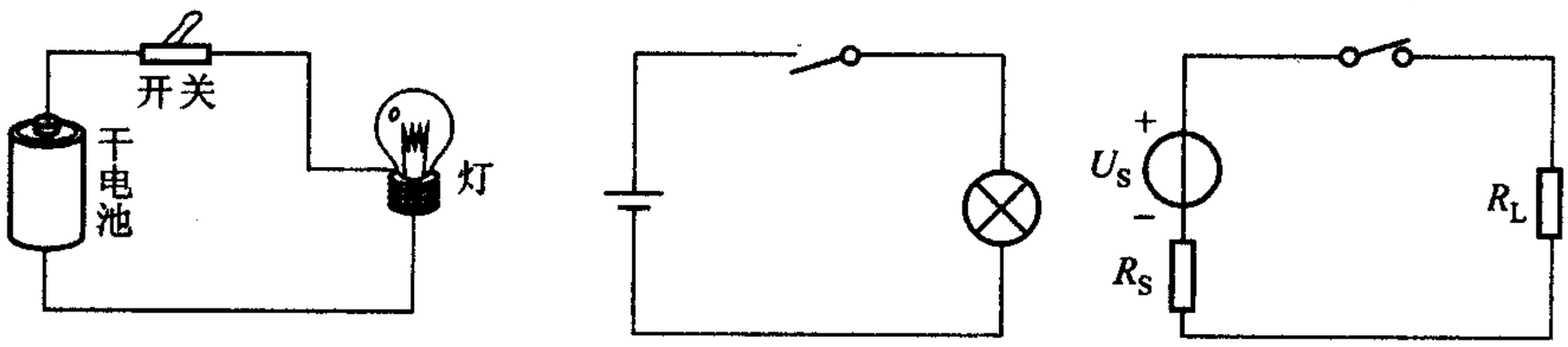
大至长距离的电力输电线，小至芯片上的集成电路，电路多种多样，功能各不相同，但它们是受共同的基本规律支配的。正是在这种共同规律的基础上，形成“电路理论”这一学科。“电路分析”属“电路理论”学科。通过这门课的学习，使学生掌握电路的基本分析方法和一些基本性质，为学习电类专业和进一步学习电路理论打下基础。

各种实际电路都是由电阻器、电容器、线圈、电源等部件（component）和晶体管等器件（device）相互连接组成的。现代微电子技术已可将若干部、器件不可分离地制作在一起，电气上互连，成为一个整体，即集成电路（integration circuit，IC）。日常生活中使用的手电筒电路就是一个最简单的电路，它是由干电池、灯、开关、手电筒壳（充当连接导体）组成的，如图 1-1(a) 所示。各种部、器件

可以用图形符号表示，表 1－1 列举了一些我国国家标准中的电气图形符号。采用这些符号可绘出表明各部、器件相互连接关系的电气图(electric diagram)。手电筒电路的电气图如图 1－1(b)所示。

表 1－1　部分电气图用图形符号

名称	符号	名称	符号	名称	符号
导　线		传声器		可变电阻器	
连接的导线		扬声器		电容器	
接　地		二极管		电感器、绕组	
接机壳		稳压二极管		变压器	
开　关		隧道二极管		铁心变压器	
熔断器		晶体管		直流发电机	G
灯		电　池		直流电动机	M
电压表	V	电阻器			



(a) 实际电路　　(b) 电气图　　(c) 电路模型(电路图)

图 1－1　手电筒电路

人们设计制作某种部、器件是要利用它的某种物理性质，例如，制作一个电阻器是要利用它对电流呈现阻力的性质，然而，当电流通过时还会产生磁场，因而兼有电感的性质。其他部、器件也有类似的或更复杂的情况，这为分析电路带来困难。因此，必须在一定条件下，忽略它的次要性质，用一个足以表征其主要性能的模型(model)来表示。

当实际电路的尺寸远小于使用时其最高工作频率所对应的波长时，可以用几种“集总参数元件”(lumped parameter element)来构成实际部、器件的模型。

每一种集总参数元件(以后简称为元件)只反映一种基本电磁现象,且可由数学方法加以定义。例如,电阻元件只涉及消耗电能的现象;电容元件只涉及与电场有关的现象,电感元件只涉及与磁场有关的现象,电场、磁场被认为只集中在相应元件的内部。此外,还有电压源、电流源等多种元件。各种元件也可用图形符号表示。在一定的条件下,有些部、器件的模型较简单,只需涉及一种元件,而有些部、器件的模型则要由几种元件构成。图 1-1(a)所示电路中,灯的电感是极其微小的,可以用一个电阻元件 R_L 作为它的模型,而干电池的模型则由电压源元件 U_S 和电阻元件 R_S(反映电池的内阻)串联组成,如图 1-1(c)所示,图中用到电阻元件、电压源和理想开关[①]的元件图形符号。其他元件的图形符号将陆续介绍。

由集总参数元件组成的电路,称为实际电路的集总电路模型或径称之为集总电路。电路理论分析的对象是电路模型而不是实际电路,电路图是用元件图形符号表示的电路模型。如何用集总参数元件构成某一部件或器件模型的问题则不是本书所要讨论的主要问题。

采用集总电路模型意味着不考虑电路中电场与磁场的相互作用,不能考虑电磁波的传播现象,认为电能的传送是瞬间完成的。当电路的尺寸大于最高频率所对应的波长或两者属于同一数量级时,便不能作为集总电路处理,应作为分布(distributed)参数电路处理。例如,对无线电调频接收机来说,若所接收的信号频率为 100 MHz,则对应的波长 $\lambda = c/f = 3$ m(传播速度以光速计,即 $c = 3 \times 10^8$ m/s),连接接收天线与接收机之间的传输线即便只有 1 m 长,也不能作为集总电路来处理。又如,我国电力用电的频率为 50 Hz,对应的波长为 6×10^6 m,对以此为工作频率的用电设备来说,其尺寸远小于这一波长,可以按集总电路处理,而对远距离输电线来说,就必须考虑到电场、磁场沿线分布的现象,不能按集总电路来处理。

集总假设为本书的基本假设。以后所述的电路基本定律、定理等均是在这一假设的前提下才能成立的。

本书只讨论集总电路的分析。集总电路分为两大类,即电阻性(resistive)电路和动态(dynamic)电路。前者只含电阻元件和电源元件,又可简称为电阻电路。本书的第一篇讨论电阻电路的分析,讨论寓于阐述集总电路普遍适用的基本方法之中,因此,这部分内容带有全书总论的性质。

---

① 请注意图 1-1(b)和(c)中所用开关图形符号的差别。理想开关在闭合时电阻为零、断开时电阻为无限大,且开、闭动作是在瞬间完成的。图 1-1(b)中开关图形只是实际开关的符号而已,并不具有理想性质。

§1-2　电路变量　电流、电压及功率

电路分析使我们能够得出给定电路的电性能。电路的电性能通常可以用一组表示为时间函数的变量来描述，电路分析的任务在于解得这些变量。这些变量中最常用到的便是电流、电压和功率。

电子和质子都是带电的粒子，电子带负电荷，质子带正电荷。所带电荷的多少称为电荷量，在国际单位制(SI)中，电荷量的单位是库仑(其符号为 C)，6.24×10^{18}个电子所具有的电荷量等于1C。用符号 q 或 Q 表示电荷量。带电粒子有秩序的移动便形成电流。

每单位时间内通过导体横截面的电荷量定义为电流，用以衡量电流的大小，用符号 i 表示，即

$$i(t)=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \tag{1-1}$$

习惯上把正电荷运动的方向规定为电流的方向。

如果电流的大小和方向不随时间变化，则这种电流称为恒定电流，简称直流(direct current，简写为 dc 或 DC，可用符号 I 表示)，否则称为时变电流(time varying)电流。若时变电流的大小和方向都随时间作周期性(periodic)变化，则称为交变(alternating)电流，简称交流(简写为 ac 或 AC)。

在国际单位制中，电流的单位是安培(中文代号为安，其符号为 A)。安培是国际单位制的基本单位之一。

上面已经提到正电荷运动的方向规定为电流的方向，但在实际问题中，电流的真实方向往往难以在电路图中标出。例如，当电路中的电流为交流时，就不可能用一个固定的箭头来表示真实方向。即使电流为直流，在求解较复杂电路时，也往往难以事先判断电流的真实方向。为了解决这样的困难，引入参考方向(reference direction)这一概念。参考方向可以任意选定，在电路图中用箭头表示。人们规定：如果电流的真实方向与参考方向一致，电流为正值；如果两者相反，电流为负值。这样就可利用电流的正、负值结合着参考方向来表明电流的真实方向，例如，-1 A 表示正电荷以每秒 1 C/s 的速率逆着参考方向箭头移动。在分析电路时，可先任意假设电流的参考方向，并以此为准进行分析、计算，从最后答案的正、负值来确定电流的真实方向。显然，在未标示参考方向的情况下，电流的正、负是毫无意义的。

今后，电路图中所标的电流方向箭头都是参考方向箭头，不一定就表示电流的真实方向。电流的参考方向又称为电流的正方向。

在集总电路中，传播是瞬间完成的，流过元件的电流可以是时间 t 的函数，

却谈不上是空间位置 x 的函数，因此，在任一时刻从任一元件一端流入的电流一定即为从它另一端流出的电流，流经元件的电流是一个可确定的量，可以用电流表测读。本书用方框泛指集总参数元件，如图1－2所示，a、b 是它的两个端钮（terminal）。方框也用来表示一个看成整体的多个元件组合，a、b 表示外界对该整体的“可接通（accessible）”处。注意图中为强调流入的电流与流出的电流系同一电流，在 a、b 端均标示同一字母 i，以后一般不必如此。

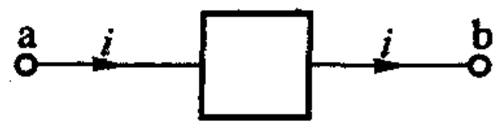


图 1－2　集总元件及其端钮

电荷在电路中流动，就必然有能量的交换发生。电荷在电路的某些部分（例如电源处）获得能量而在另外一些部分（如电阻元件处）失去能量。电荷在电源处获得的能量是由电源的化学能、机械能或其他形式的能量转换而来的。电荷在电路某些部分所失去的能量，或转换为热能（电阻元件处），或转换为化学能（如在被充电的电池处），或储存在磁场中（电感元件处）等。失去的能量是由电路中的电源提供的。因此，在电路中存在着能量的流动，电源可以提供能量，有能量流出；电阻等元件吸收能量，有能量流入。

为便于研究问题，在分析电路时引用“电压”这一物理量。电压有时也称为“电位差”，用符号 u 表示。电路中 a、b 两点间的电压表明了单位正电荷由 a 点转移到 b 点时所获得或失去的能量，即

$$u(t)=\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}q} \tag{1-2}$$

其中 $\mathrm{d}q$ 为由 a 点转移到 b 点的电荷量，单位为库仑（C）；$\mathrm{d}w$ 为转移过程中，电荷 $\mathrm{d}q$ 所获得或失去的能量，单位为焦耳（J）。电压的单位为伏特（V）。这些单位都是国际单位制单位。

如果正电荷由 a 转移到 b 获得能量，则 a 点为低电位，即负极，b 点为高电位，即正极。如果正电荷由 a 转移到 b 失去能量，则 a 点为高电位，即正极，b 点为低电位，即负极。正电荷在电路中转移时电能的得或失表现为电位的升高或降落，即电压升或电压降。

如果电压的大小和极性都不随时间而变动，这样的电压就称为恒定电压或直流电压[①]，可用符号 U 表示。如果电压的大小和极性都随时间变化，则称为时变电压，若变化为周期性的，则称为交流电压。

如同需要为电流规定参考方向一样，也需要为电压规定参考极性。电流的

① 直流一词译自英文 direct current，在现代的用法中，直流（dc）一词用来泛指任何恒定的电量，如直流电流、直流电压、直流磁通等，此处直流的“流”字已失去原来的“电流”含义。交流一词也有类似的含义。

参考方向用箭头表示，电压的参考极性则在元件或电路的两端用“+”、“-”符号来表示。“+”号表示高电位端，“-”号表示低电位端，如图 1-3 所示。根据公认的规定，当电压为正值时，该电压的真实极性与参考极性相同，也就是 a 点电位高于 b 点电位；当电压为负值时，该电压的真实极性与所标的极性相反，也就是 b 点电位高于 a 点电位。在未标示电压参考极性的情况下，电压的正、负是毫无意义的。电压的参考极性也称为电压的参考方向或正方向。

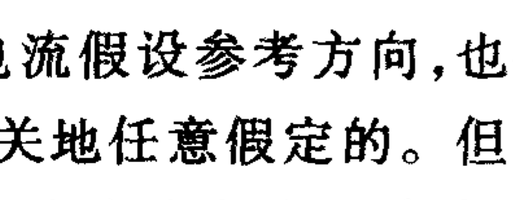


图 1-3　电压参考极性的表示方式

与在电路图中为电流标示参考方向一样，在电路图中，对元件所标的电压参考极性也可以任意选定，不一定代表电压的真实极性，它们配合着电压的正值或负值，表明电压的真实极性。

在集总电路中，元件间能量的流动是瞬间完成的，在任一时刻，任一元件的端电压是一个可确定的量，可以用电压表测读。

综上所述，在分析电路时，既要为通过元件的电流假设参考方向，也要为元件两端的电压假设参考极性，彼此原是可以独立无关地任意假定的。但为了方便起见，常采用关联的(associated)参考方向：电流参考方向与电压参考“+”极到“-”极的方向一致，即电流与电压降参考方向一致，如图 1-4(a)所示。这样，在电路图上就只需标出电流的参考方向、电压的参考极性中的任何一种，如图 1-4(b)、(c)所示。

在本书中以后还常遇到“信号”(signal)一词，这是指一个用来携带信息的电流或电压，例如音频信号电压。供电网提供的电压、电流则不能看成是信号，因为这电压、电流是用来提供电能，进行能量变换的。

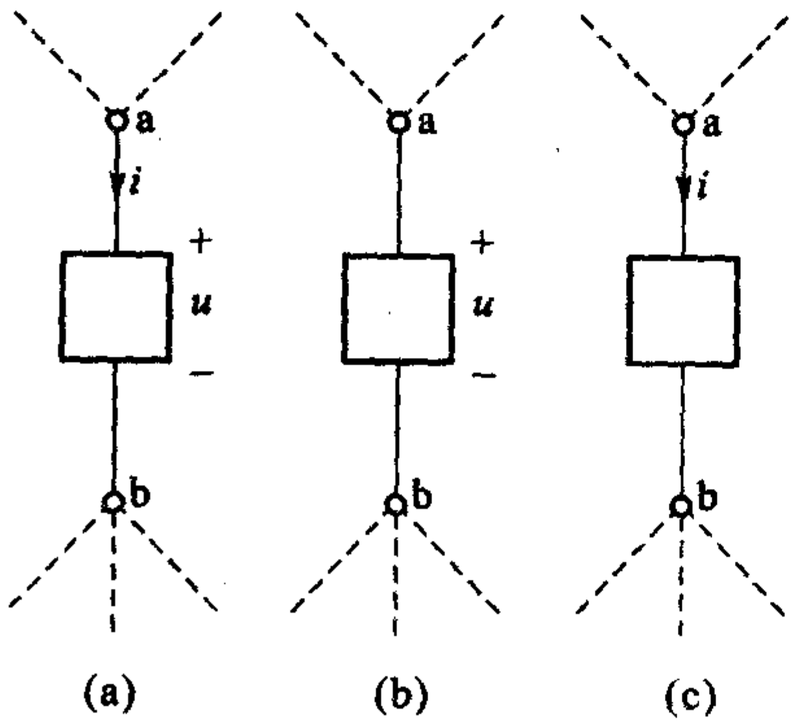


图 1-4　关联的参考方向

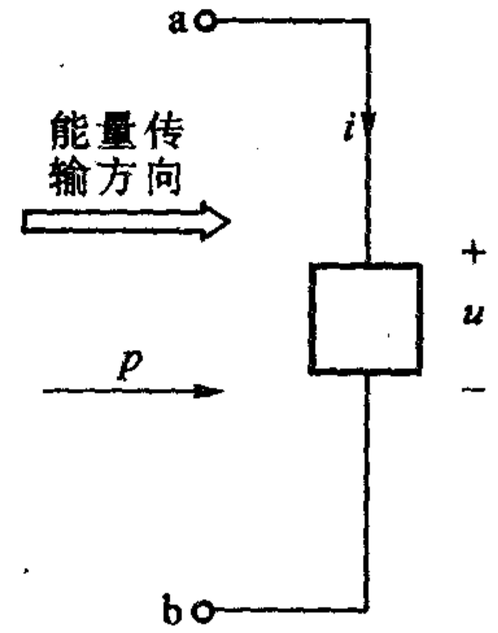


图 1-5　功率的参考方向

今后，在任何时刻 t 的电流和电压用 $i(t)$ 和 $u(t)$ 表示，为简便计，有时也写为 i 和 u。

电路中存在着能量的流动，已如前述。现在来讨论电路中的某一段所吸收或提供能量的速率即功率的计算。功率用符号 p 表示。用图 1－5 所示方框来表示该段电路，它可能只是一个电阻元件或是一个电源，也可能是若干元件的组合，如前所述。采用关联的电压、电流参考方向如图 1－5 所示，并设在 dt 时间内由 a 点转移到 b 点的正电量为 dq，且由 a 到 b 为电压降，其值为 u，则根据(1－2)式可知在转移过程中 dq 失去的能量

$$dw = udq$$

电荷失去能量意味着这段电路吸收能量，亦即能量由电路的其他部分传送到这一部分。能量传输或能量流动的方向如图 1－5 中空心箭头方向所示。吸收能量的速率，由功率 p 表示为

$$p(t) = \frac{dw}{dt} = u\frac{dq}{dt}$$

因

$$i(t) = \frac{dq}{dt}$$

故得

$$p(t) = u(t)i(t) \tag{1-3}$$

人们把能量传输(流动)的方向定为功率的方向①。如同把电流、电压作为代数量处理一样，也可为功率假设参考方向，当功率的实际方向与参考方向一致时，功率为正，否则，功率为负。根据规定，功率的参考方向用箭头表示，或是进入、或是离开所研究的电路部分，其指向可任意假定。从(1－3)式的推导过程可知：如果所研究的电路部分，电流、电压的参考方向系关联的，且功率的参考方向系进入该电路部分的，三者之间的关系如图 1－5 所示，则运用(1－3)式计算该电路部分的功率时，若算得的功率为正，表示功率的实际方向与参考方向一致，亦即该电路部分吸收能量，p 值即为吸收能量的速率，工程上常简称为吸收的功率；若算得的功率为负，表示功率的实际方向与参考方向相反，亦即该电路部分提供能量，p 值为产生能量的速率，简称为提供的功率。

显然，u、i、p 三者的参考方向中若改变其中任何一个使与图 1－5 中所示者相反，并改用

$$p(t) = -u(t)i(t) \tag{1-4}$$

---

① 《中华人民共和国标准有关电路和磁路的基本规定》(GB 8445—1987)2.8、3.5.1，北京：中国标准出版社，1989 年。

计算功率，则结果为正，仍表示吸收功率；结果为负，仍表示提供功率①。

在国际单位制中，电压的单位为伏（V），电流的单位为安（A），则功率的单位为瓦特，简称瓦（W）。

在图 1－5 所示的参考方向下，在 t_0 到 t 的时刻内该部分电路吸收的能量为

$$w(t_0,t)=\int_{t_0}^{t}p(\xi)\,\mathrm{d}\xi=\int_{t_0}^{t}u(\xi)i(\xi)\,\mathrm{d}\xi \tag{1-5}$$

在国际单位制中，能量的单位为焦耳，简称焦（J）。

例 1－1　图 1－3 中，若 50×10^{-6}C 的正电荷由 a 移动至 b，且电压降为 6 V，问电荷是失去能量，还是获得能量？该能量是多少？

解　正电荷由 a 至 b 电位降落，失去能量，由（1－2）式可知失去的能量为

$$\begin{aligned}w&=qu\\&=(50\times10^{-6}\text{C})(6\text{ V})=300\times10^{-6}\text{ J}\end{aligned}$$

电荷失去能量。它可能转化为热能、磁场能量等，视具体情况而定。前者如电阻元件，后者如电感元件。此时，称该元件吸收能量。吸收又称接受，包含消耗（如电阻元件）和储存（如电感元件）两种情况。

例 1－2　（1）在图 1－6（a）及（b）中，若电流均为 2A，且均由 a 流向 b，已知 $u_1=1$ V，$u_2=-1$ V，求该两元件吸收或提供的功率；

（2）在图 1－6（b）中，若元件提供的功率为 4W，求电流。

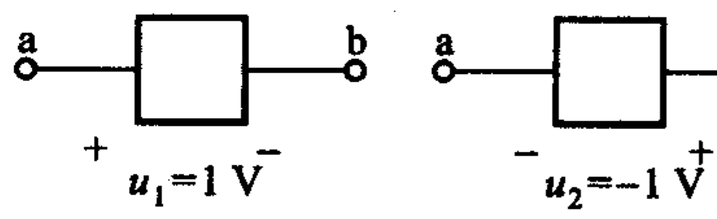


图 1－6　例 1－2

解　（1）设电流 i 的参考方向由 a 指向 b，则

$$i=2\text{A}$$

对图（a）所示元件来说，电压、电流系关联参考方向，故

$$p=u_1i=(1\text{ V})(2\text{ A})=2\text{W}$$

即吸收功率 2 W。

对图（b）所示元件来说，电压、电流为非关联参考方向，故由（1－4）式

$$p=-u_2i=-(-1\text{ V})(2\text{ A})=2\text{W}$$

吸收功率为 2 W。

（2）设电流 i 的参考方向由 a 指向 b，由（1－4）式可得

$$p=-u_2i=-4\text{W}$$

---

① 有些教材规定在使用（1－3）式计算电源或含有电源的电路部分提供的功率时，u、i 采用非关联参考方向，此时功率正、负的含义正好与本书所述者相反。这属于本书讨论中同时改变 i（或 u）和 p 的参考方向而仍应使用（1－3）式的情况。

因给定提供的功率为 4 W，在(1-4)式中应记为 -4 W。因此

$$i = -\frac{p}{u_2} = -\frac{-4\ \text{W}}{u_2} = \frac{4\ \text{W}}{-1\ \text{V}} = -4\ \text{A}$$

负号表明电流的实际方向系由 b 指向 a。

一般在计算功率时，毋需标出功率参考方向，直接运用正文中着重号所标出的结论即可应用，如本例所示。◀①

从根本上说，电荷与能量是描述电现象的基本变量或原始变量，为便于描述电路，从电荷和能量引入了电路变量——电流、电压和功率，它们都易于测得。由于功率可由电压、电流算得，因此，电路分析问题往往侧重在求解电流和电压。在求解电路问题时，必须先假定所求量的参考方向。

最后，谈一下 SI 单位的倍数单位。前文已介绍了一些物理量的 SI 单位，如安、伏、秒等，但在实际应用中有时感到这些单位太大或太小，使用不便。于是便在这些单位前加上表 1-2 所示词头，用以表示这些单位被一个以 10 为底的正次幂或负次幂相乘后所得的 SI 单位的倍数单位，例如：

$$1\ \text{mA(毫安)} = 1 \times 10^{-3}\ \text{A(安)}$$

$$5\ \mu\text{s(微秒)} = 5 \times 10^{-6}\ \text{s(秒)}$$

$$2\ \text{kW(千瓦)} = 2 \times 10^{3}\ \text{W(瓦)}$$

显然，写成 1 mA 要比写作 1×10^{-3} A 方便。例 1-1 的答案可写为 300 μJ。这些词头是经常使用的，必须记住。

表 1-2　部分 SI 词头

因　数	词头名称		符　号
	原文(法)	中　文	
10^{9}	giga	吉	G
10^{6}	mega	兆	M
10^{3}	kilo	千	k
10^{-3}	milli	毫	m
10^{-6}	micro	微	μ
10^{-9}	nano	纳	n
10^{-12}	pico	皮	p

① 在本书中符号◀表示解答、证明、注意事项或其他结尾不甚明显的叙述的结束。

思考题

1-1　试结合例 1-1,运用参考方向的概念为使用(1-2)式建立符号规则。

练习题

1-1　试计算图 1-7 所示各元件吸收或提供的功率,其电压、电流为:

图(a):$u=-2$ V,$i=1$ A;　　图(b):$u=-3$ V,$i=2$ A

图(c):$u=2$ V,$i=-3$ A;　　图(d):$u=10$ V,$i=5e^{-2t}$ mA

图(e):$u=10$ V,$i=2\sin t$ mA

(提供 2 W;吸收 6 W;吸收 6 W;提供 $50e^{-2t}$ mW;$20\sin t$ mW,$p>0$ 吸收、$p<0$ 提供)

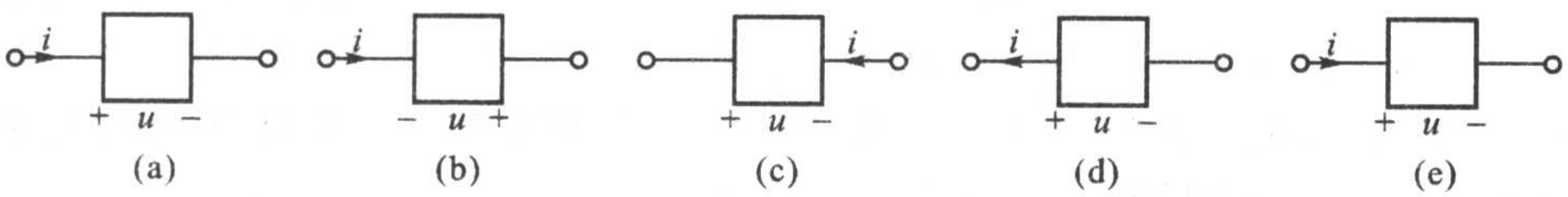


图 1-7　练习题 1-1

§1-3　基尔霍夫定律

在集总电路中,任何时刻流经元件的电流以及元件的端电压都是明确的(well-defined)物理量。集总电路由各种元件通过理想导体连接而成,若将每一个二端元件视为一条支路(branch),这样,流经元件的电流和元件的端电压便分别称之为支路电流和支路电压,它们是集总电路中分析和研究的对象。集总电路的基本规律也将用支路电流和支路电压来表述。

为了表达电路的基本规律,先介绍几个名词。支路的一般含义已如上所述。支路的连接点称为节点(或结点)(node)。在图1-8所示电路中共有 5 条支路,3 个节点。显然,节点是两条或两条以上支路的连接点。初学者往往把图中的 a 点与 b 点看成是两个节点,这是不对的,因为 a 点与 b 点是用理想导体相连的,从电的角度来看,它们是相同的端点,可以合并成一点。电路图可以改画,只要保证各元件间的连接关系不变即可。为方便起见,在分析电路时,也可把支路看成是一个具有两个端钮而由多个元件串联而成的组合。例如,把图中的元件 4 和 5 作为一条支路,这样,连接点 3 就不算作节点。在用手算解决电路问题时,常如此处理。电路中的任一闭合路径称为回路(loop),例如,图中元件 1、2,元件 1、4、5,元件 1、3 均构成回路,该电路有 6 个回路。在回路内部不另含有支路的回路称为网孔(mesh),例如,图中元件 1、2,元件 2、3 均构成网孔,该电路有 3

个网孔。一般把含元件较多的电路称为电网络(network),在不致引起误解时简称为网络。实际上,电路与电网络这两个名词并无明确的区别,一般可以混用。

所谓电路的基本规律,包含两方面的内容。一是电路作为一个整体来看,应服从什么规律,另一个是电路的各个组成部分,各有什么表现?也就是其特性如何?这两方面都是不可少的。因为,电路是由元件组成的,整个电路表现如何,既要看这些元件是怎样连接而构成一个整体的,又要看每个元件各具有什么特性。本节先说明电路整体的基本规律,即基尔霍夫(Kirchhoff,1824—1887)定律。

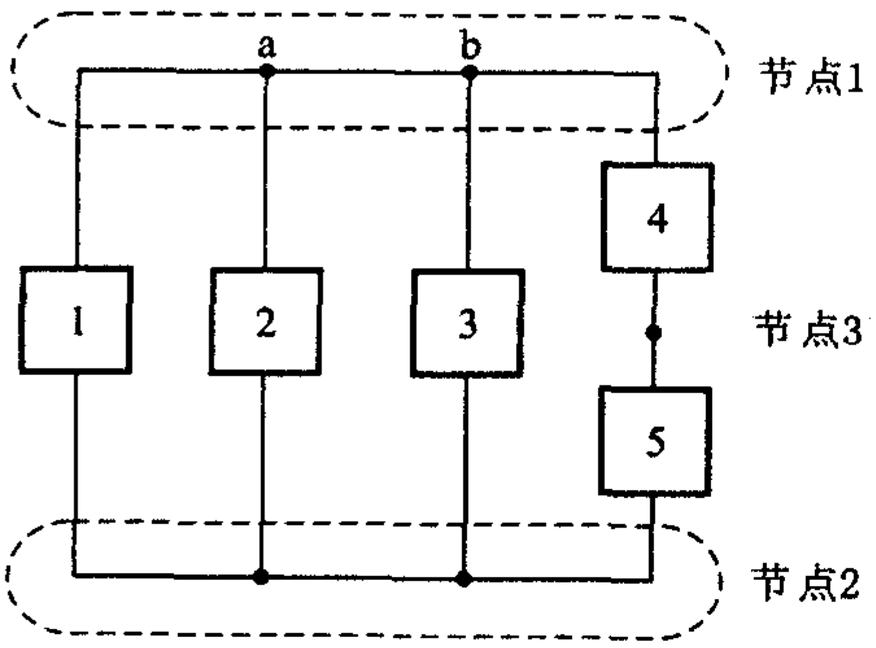


图 1-8　具有三个节点的电路

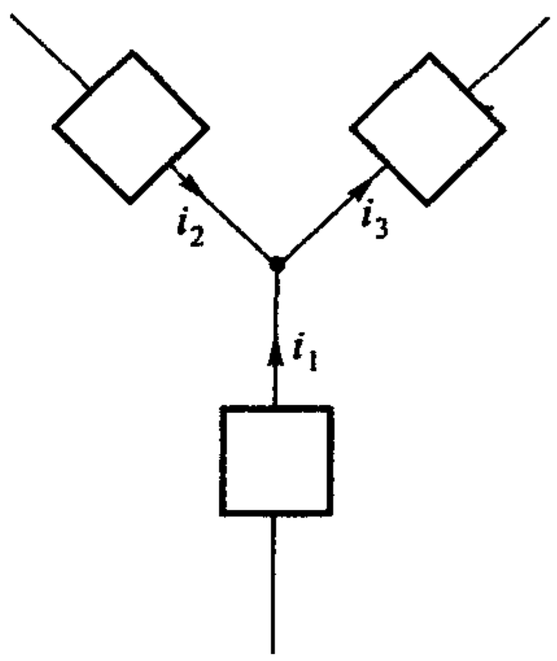


图 1-9　电路中的一个节点

电荷守恒和能量守恒是自然界的基本法则,把它们运用到集总电路就得到基尔霍夫的两个定律。

电荷守恒的意思是:电荷既不能创造也不能消灭。由此可得基尔霍夫电流定律(Kirchhoff's current law),该定律简写为 KCL。图 1-9 所示为集总电路中的一个节点,与该节点相接各支路的电流分别为 i_1、i_2 和 i_3,参考方向如图中所示。流进该节点的电流的代数和为 $i_1 + i_2 - i_3$,故知流进该节点电荷的速率可表示为

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = i_1 + i_2 - i_3$$

式中 q 为节点处的电荷。但是,节点只是理想导体的汇合点,不可能积累电荷,电荷既不能创造,也不能消灭,因而,节点处$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$必须为零,即

$$i_1 + i_2 - i_3 = 0$$

这就是说:流进节点所有电流的代数和为零。流进节点的电流为正,流出节点的电流为负。如以 -1 乘上式两端可得

$$-i_1 - i_2 + i_3 = 0$$

亦即:流出节点所有电流的代数和为零。流出节点的电流为正,流进节点的电流为负。以上两种说法是等效的。

不论节点处有多少条支路,都可得到同样的结论。

综上所述,KCL 可表述为:

对于任一集总电路中的任一节点,在任一时刻,流出(或流进)该节点的所有支路电流的代数和为零。其数学表示式为

$$\sum_{k=1}^{K} i_k(t) = 0 \tag{1-6}$$

式中 $i_k(t)$ 为流出(或流进)该节点的第 k 条支路的电流,K 为该节点处的支路数。

在以上的讨论中,对各支路的元件并无要求,这就是说,不论电路中的元件如何,只要是集总电路,KCL 就总是成立的。

把 KCL 运用到节点时,根据各支路电流的参考方向,以流进为准或是以流出为准来列写支路电流的关系式,两种标准可任选一种。

KCL 表达了电路中支路电流间的约束(constraint)关系。以图 1-10 所示电路为例,在节点 1 处运用 KCL 可得

$$i_1 + i_3 - i_2 = 0$$

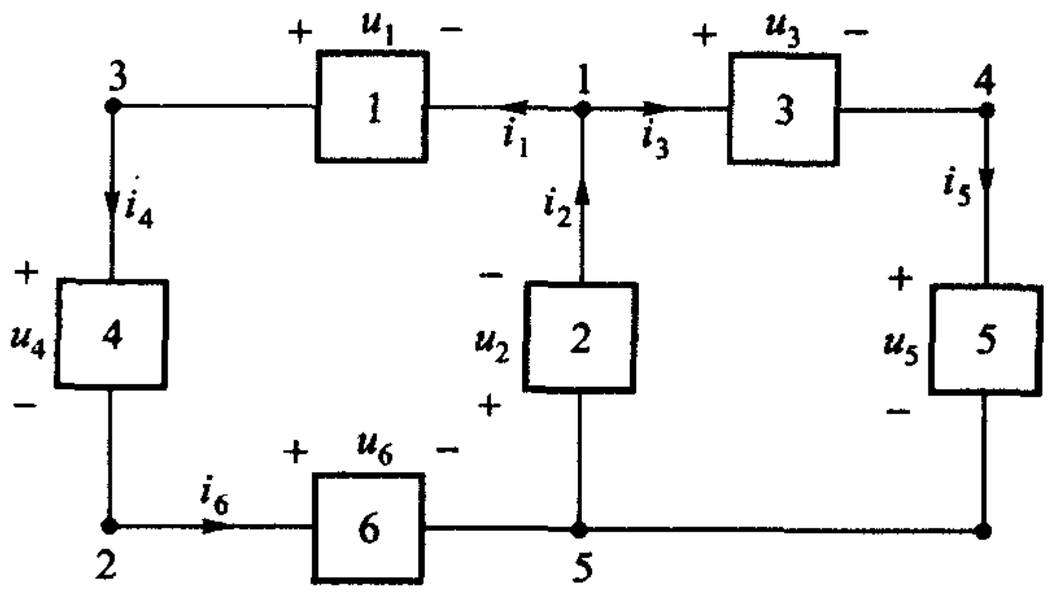


图 1-10　i_1、i_2、i_3 线性相关

即

$$i_3 = i_2 - i_1 \tag{1-7}$$

由(1-7)式可知:若已知 i_2 及 i_1 的数值,i_3 的数值立即随之而定,不能自由选取任何其他的数值。也就是说,(1-7)式为这三个电流施加了一个约束关系,这是一个线性关系,称这三个电流线性相关(linearly dependent)。

一组电流当且仅当满足一个 KCL 方程时,它们才是线性相关的,汇集于一个节点的支路电流的集合,即属一例。下例说明 KCL 的一个应用。

例 1-3　在图 1-11 所示某复杂电路中的一个节点处,已知 $i_1 = 5$ A,$i_2 = 2$ A,$i_3 = -3$ A,试求流过元件 A 的电流 i_4。

解　i_1、i_2、i_3 和 i_4 是汇集于该节点的所有支路电流,满足 KCL,线性相关,已

知其中任何三个电流，即可确定另一电流。为此，必须先正确列出节点的 KCL 方程。

在列写 KCL 方程时，应先标出所有电流的参考方向。已知电流的参考方向常是给定的，未知电流的参考方向则可任意假定。在写方程时，即以这些参考方向为准。设 i_4 的参考方向如图1－11中所示，由 KCL 可得

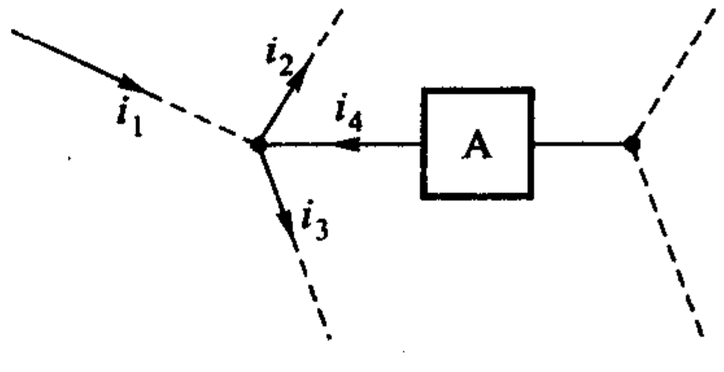


图 1－11　例 1－3

$$-i_1 + i_2 + i_3 - i_4 = 0 \qquad (1-8)$$

即

$$i_4 = -i_1 + i_2 + i_3$$

以已知数据代入得

$$i_4 = -(5\ \text{A}) + (2\ \text{A}) + (-3\ \text{A}) \qquad (1-9)$$

得

$$i_4 = -6\ \text{A}$$

负号表示 i_4 的实际方向与参考方向相反。

通过这个例题可看到，在运用 KCL 时常需和两套符号打交道。其一是方程中各项前的正、负符号，其正、负取决于电流参考方向对节点的相对关系，如以流出为正、流入为负，则如(1－8)式所示。另一是电流本身数值的正、负号，如(1－9)式中各括弧内所示，两者不要混淆。

如以流入为正、流出为负来列 KCL，仍可求得 $i_4 = -6$ A，结果完全一样。

思考题

1－2　图 1－12 中所示虚线为电路中包围若干元件的封闭面，与外界有三条支路相连，其支路电流为 i_1、i_2 和 i_3，如图中所示，它们是线性相关的吗？其约束关系如何？

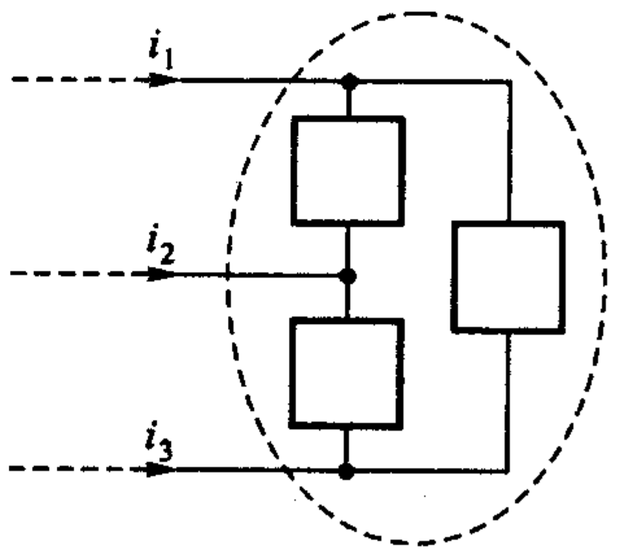


图 1－12　电路中的一个封闭面

基尔霍夫定律有两条，上面讲的是基尔霍夫电流定律，它表明了电路中各支路电流之间必须遵守的规律，这一规律体现在电路中的各个节点上。另外一条是基尔霍夫电压定律（Kirchhoff's voltage law），简写为 KVL，它表明电路中各支路电压之间必须遵守的规律，这一规律体现在电路的各个回路中。

在 §1－2 中已指出电路中各元件间有能量交换发生。电路必须遵守能量守恒法则。若在某段时间内电路中某些元件得到的能量有所增加，则其他一些元件的能量必须有所减少，保持能量的“收支”平衡。这一情况对电路中的支路

电压间的关系有着重大的影响。试仍以图 1－10 所示电路为例来加以说明。若在某段时间内元件 1 所得到的能量为 w_1，其他各元件所得到的能量也可用类似的符号表示，则由能量守恒法则可知

$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 + w_6 = 0 \tag{1-10}$$

对上式微分，可得

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 0 \tag{1-11}$$

式中 $p_1 = \dfrac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}t}, \cdots$。上式表明在每一瞬间电路中所有元件获得功率的总和为零。

如以电压、电流来表示各元件的功率，则得

$$\begin{aligned} p_1 &= -u_1 i_1 \\ p_2 &= u_2 i_2 \\ p_3 &= u_3 i_3 \\ p_4 &= u_4 i_4 = u_4 i_1 \\ p_5 &= u_5 i_5 = u_5 i_3 \\ p_6 &= u_6 i_6 = u_6 i_1 \end{aligned}$$

于是(1－11)式可改写为

$$-u_1 i_1 + u_4 i_1 + u_6 i_1 + u_2 i_2 + u_3 i_3 + u_5 i_3 = 0 \tag{1-12}$$

但由 KCL 可得

$$i_2 = i_1 + i_3 \tag{1-13}$$

以(1－13)式代入(1－12)式可得

$$(-u_1 + u_4 + u_6 + u_2) i_1 + (u_2 + u_3 + u_5) i_3 = 0 \tag{1-14}$$

i_1 和 i_3 不满足 KCL，它们是线性无关的，因而若(1－14)式成立，则式中 i_1、i_3 前的系数必为零，即

$$-u_1 + u_4 + u_6 + u_2 = 0 \tag{1-15a}$$

$$u_2 + u_3 + u_5 = 0 \tag{1-15b}$$

如以(1－15b)式代入(1－15a)式，可得

$$-u_1 + u_4 + u_6 - u_5 - u_3 = 0 \tag{1-15c}$$

从电路图可见：元件 1、4、6、2 形成一个回路；元件 2、3、5 形成一个回路；元件 1、4、6、5、3 也形成一个回路。因此，上列三个式子分别表明了沿这三个回路各支路电压降的代数和为零[(1－15a)式是沿逆时针方向计算电压降的，(1－15c)式也如此，(1－15b)式则是沿顺时针方向计算电压降的]。它们都是 KVL 的例子。

对于任何一个集总电路都可仿照以上步骤得出同样结论。因此，KVL 可表述为：

对于任一集总电路中的任一回路，在任一时刻，沿着该回路的所有支路电压

降的代数和为零。其数学表达式为

$$\sum_{k=1}^{K} u_k(t) = 0 \tag{1-16}$$

式中 $u_k(t)$ 为该回路中的第 k 条支路电压，K 为该回路中的支路数。

在以上的讨论中，对各支路的元件并无要求，这就是说，不论电路中的元件如何，只要是集总电路，KVL 总是成立的。

KVL 为回路中的支路电压施加了一个约束关系，这是一个线性关系（线性相关）。例 1-4 将说明 KVL 的一个应用。

KCL 是电荷守恒法则运用于集总电路的结果；KVL 是能量守恒法则和电荷守恒法则运用于集总电路的结果。前者反映电路中各支路电流间的约束关系；后者反映电路中各支路电压间的约束关系。

KCL 及 KVL 分别表明支路电流之间以及支路电压之间的约束关系。由于这些约束关系与构成电路的元件性质无关，因此，在研究这些约束关系时可以直接用一线段来代替电路中的每一个元件，这线段称为支路，线段的端点称为节点，这样得到的几何结构图称为“图形”或称为“图”（graph），用 G 表示。更准确地说，图是一组节点和一组支路的集合，支路只在节点处相交。如果对图中的每一支路规定一个方向，则所得的图就称为定向图（directed graph）（也称有向图）。图 1-10 所示电路的定向图如图 1-13 所示，图中箭头表示关联的参考方向。图可理解为电路的“骨架”。

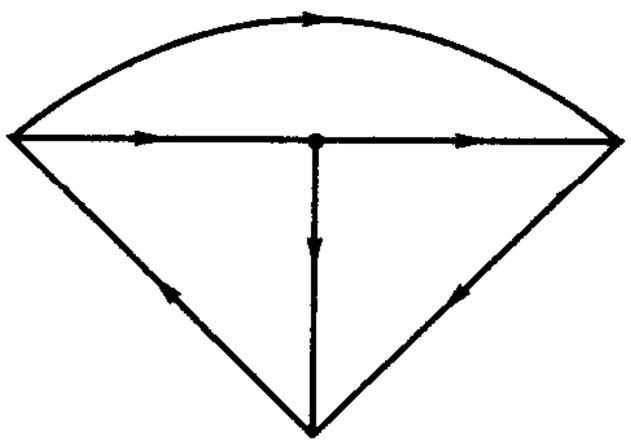


图 1-13　图 1-10 电路的定向图 G

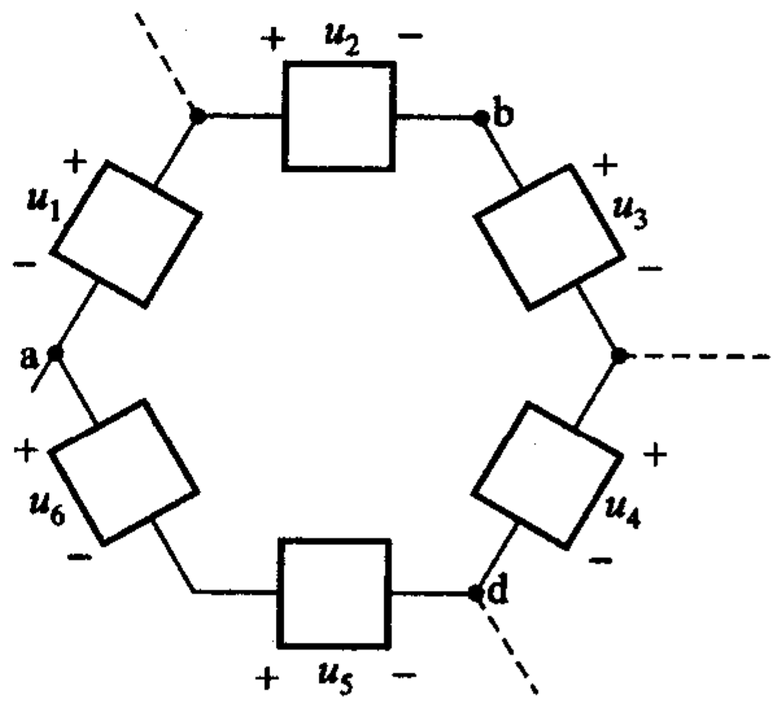


图 1-14　例 1-4

例 1-4　图 1-14 表示一复杂电路中的一个回路。已知各元件的电压：$u_1 = u_6 = 2\ \text{V}$，$u_2 = u_3 = 3\ \text{V}$，$u_4 = -7\ \text{V}$，试求 u_5。

解　根据 KVL，这 6 个支路电压线性相关，给定任何 5 个电压即可求得另一电压。为此，应先列出 KVL 方程。

设 u_5 的参考极性如图中所示。从 a 点出发，顺时针方向绕行一周，由(1－16)式可得

$$-u_1+u_2+u_3+u_4-u_5-u_6=0 \tag{1-17}$$

式中：凡参考极性所表示的电压降方向与绕行方向一致者取正号，如 u_2、u_3、u_4，否则取负号，如 u_1、u_5、u_6。

将已知数据代入(1－17)式得

$$-(2\ \mathrm{V})+(3\ \mathrm{V})+(3\ \mathrm{V})+(-7\ \mathrm{V})-u_5-(2\ \mathrm{V})=0 \tag{1-18}$$

解得

$$u_5=-5\ \mathrm{V}$$

u_5 为负值说明 u_5 的实际极性与图中所假设的极性相反。

从本题可以看到，在运用 KVL 时也需和两套符号打交道。方程中各项前的符号，其正、负取决于各元件电压降的参考方向与所选的绕行方向是否一致，一致取正号，反之取负号，如(1－17)式中所示。在以数值代入时，每项电压本身还有符号，取决于电压降的实际方向与参考方向是否一致，如(1－18)式各括弧内所示。

例 1－5　试求图 1－14 所示电路中 a、b 两点间的电压。

解　求解这类问题时，常采用双下标记法，如 u_{ab}、u_{ad} 等，双下标字母即表示计算电压时所涉及的两点，其前后次序则表示计算电压降时所遵循的方向。例如，双下标 ab 表示由 a 点到 b 点计算电压降，亦即 a 点为电压参考“＋”极处，b 点为电压参考“－”极处，采用双下标记法，就可不必在 a、b 点分别标以“＋”号及“－”号，避免符号间混淆不清①。

双下标的前后次序是任意选定的，但一经选定，即应以此为准去求两点之间路径上全部电压降的代数和。本题中

$$\begin{aligned} u_{ab}&=-u_1+u_2\\ &=-(2\ \mathrm{V})+(3\ \mathrm{V})=1\ \mathrm{V}\end{aligned}$$

计算时，凡参考极性所表示的电压降方向与选定的由 a 到 b 的计算电压降的方向一致者取正号，如 u_2，否则取负号，如 u_1。至于括弧内的正、负号则表明电压本身数值的正、负，来源于各元件电压降的实际方向与参考方向是否一致。这些符号问题与上例列写 KVL 方程时所讲的完全相同，不同处在于：上例是为一个闭合路径写电压降的代数和，其结果必为零；本例是为一段电路写电压降的代数和，结果根据具体情况而定。

根据 KVL 可知，任何两点间的电压与计算时所选择的路径无关。例如，由

---

① 本书对支路电压也常用这种双下标记法。对支路电压也可用编号记法，如第 1 条支路的电压可记为 u_1，采用这种记法，应标示参考极性，如图 1－14 中所示。

KVL 方程(1 -17)式可得

$$-u_1 + u_2 = -u_3 - u_4 + u_5 + u_6$$

u_{ab}也可循元件 3、4、5、6 的路径进行计算,其结果亦为 1 V,即

$$\begin{aligned} u_{ab} &= -u_3 - u_4 + u_5 + u_6 \\ &= [-(3) - (-7) + (-5) + (2)]\ \text{V} = 1\ \text{V} \end{aligned}$$

思考题

1 -3　判断下列说法是否正确:

(1) 在节点处各支路电流的方向不能均设为流向节点,否则将只有流入节点的电流而无流出节点的电流(结合思考题 1 -2)。

(2) 利用节点 KCL 方程求解某一支路电流时,若改变接在同一节点所有其他已知支路电流的参考方向,将使求得的结果有符号的差别。

(3) 从物理意义上来说,KCL 应对电流的实际方向说才是正确的,但对电流的参考方向来说也必然是正确的。

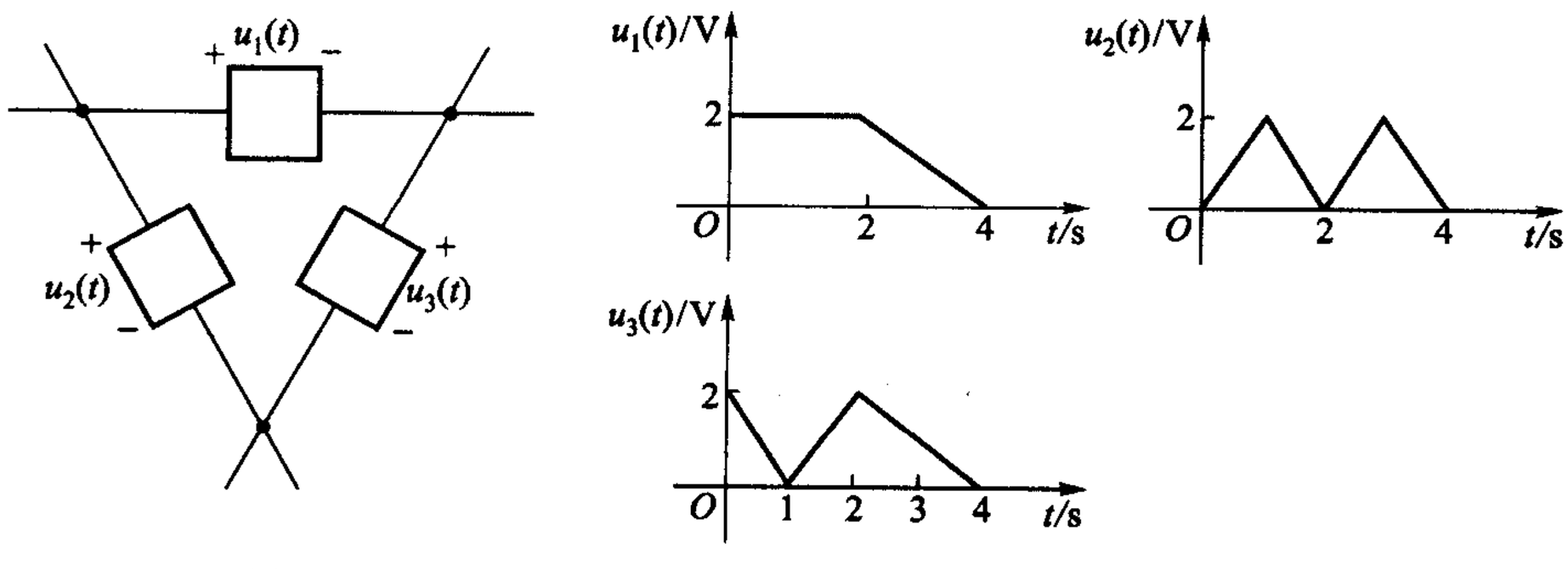
1 -4　接续例 1 -4,试分别在下列各情况下,重新求解 u_5:

(1) 另设 u_5 的参考极性;

(2) 沿逆时针方向列写 KVL 方程;

(3) 改变所有已知电压的参考极性。

1 -5　图 1 -15(a)所示电路中,$u_1(t)$、$u_2(t)$、$u_3(t)$的波形是否可能如图 1 -15(b)所示?为什么?



(a)　　(b)

图 1 -15　思考题 1 -5

练习题

1 -2　电路如图 1 -16 所示,已知的电流已标示于图,试求 i_1、i_2、i_3、i_4 和 i_5。

(-6 A,4 A,2 A,2 A,-2 A)

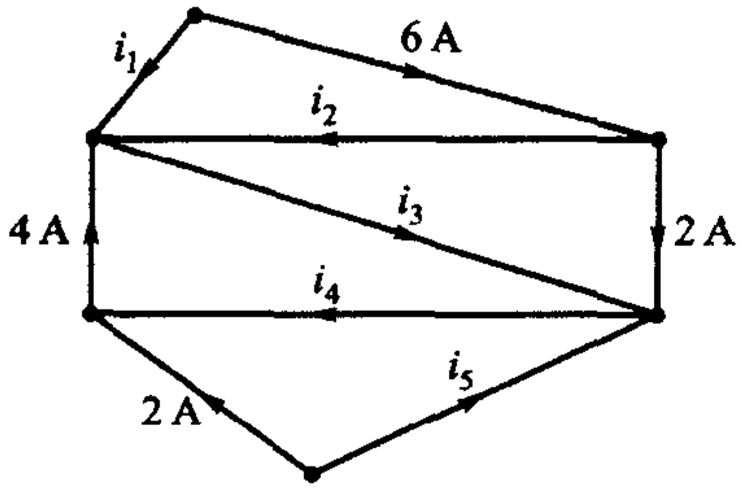


图 1－16　练习题 1－2

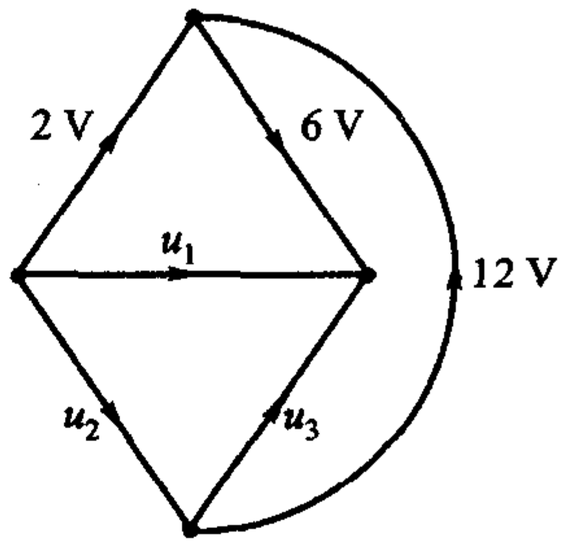


图 1－17　练习题 1－3

1－3　电路如图 1－17 所示，试求 u_1、u_2、u_3。

(8 V，－10 V，18 V)

§1－4　电阻元件

§1－3 讨论了电路中各支路电流之间以及各支路电压之间分别应遵循的规律。电路是由元件连接组成的，而各种元件都有精确的定义，由此可确定每一元件电压与电流之间关系，电压电流关系简写为 VCR(voltage current relation)。元件的 VCR 连同基尔霍夫定律构成了集总电路分析的基础。本节讨论电阻元件。

电阻元件(resistor)是从实际电阻器抽象出来的模型，只反映电阻器对电流呈现阻力的性能，可由欧姆(Ohm，1787—1854)定律定义，即

$$R = u(t)/i(t)$$

由此得

$$u(t) = Ri(t) \tag{1-19}$$

式中 u 为电阻元件两端的电压，单位为伏(V)；i 为流过电阻元件的电流，单位为安(A)；R 为电阻，单位为欧(Ω)。R 为常数，故 u 与 i 成正比。所以，由欧姆定律定义的电阻元件，称为线性(linear)电阻元件。u、i 可以是时间 t 的函数，也可以是常量(直流)。

欧姆定律体现了电阻器对电流呈现阻力的本质。对电流既有阻力，电流要流过，就必然要消耗能量，因此，沿电流流动方向就必然会出现电压降，欧姆定律表明这一电压降的大小，其值为电流与电阻的乘积。由于电流与电压降的真实方向总是一致的，所以，只有在关联参考方向的前提下(图 1－18)才可运用(1－19)式。如为非关联参考方向，则应改用

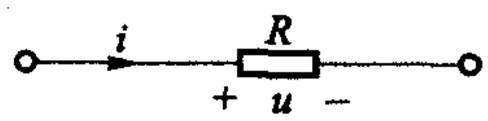


图 1－18　线性电阻的符号

$$u(t) = -Ri(t) \tag{1-20}$$

线性电阻元件的符号如图 1－18 所示，这一符号与表 1－1 中实际电阻器的电气

图形符号一样，但含义不同。前者只是代替实物的图形符号而已，并不表示具有理想的性质。

如果把电阻元件的电压取为纵坐标（或横坐标），电流取为横坐标（或纵坐标），可绘出 $i-u$ 平面（或 $u-i$ 平面）上的曲线，称为电阻元件的伏安特性曲线。显然，线性电阻元件的伏安特性曲线是一条经过坐标原点的直线，如图 1-19 所示，电阻值可由直线的斜率来确定。电阻元件凡不是线性的就称为非线性的。

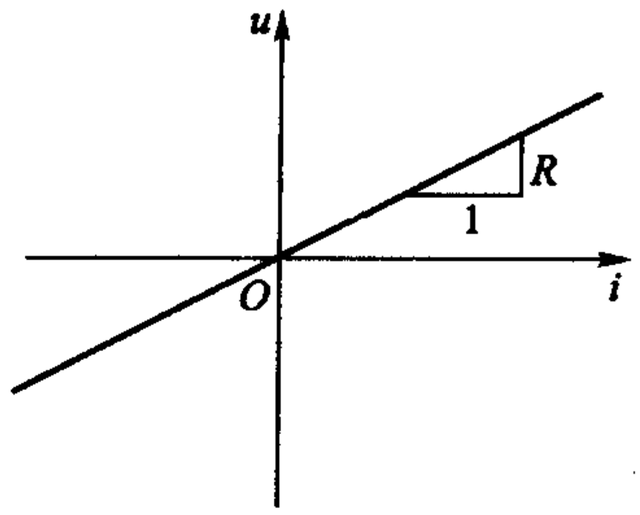


图 1-19　线性电阻元件的伏安特性曲线

电压与电流是电路的变量，从欧姆定律（1-19）式可知，线性电阻元件可以用其电阻 R 来表征它的特性，因此，R 是一种“电路参数”。电阻元件也可以另一个参数——电导（conductance）来表征，电导用符号 G 表示，其定义为

$$G=\frac{1}{R} \tag{1-21}$$

在国际单位制中电导的单位是西门子，简称西（符号为 S）。用电导表征线性电阻元件时，欧姆定律为

$$u(t)=\frac{1}{G}i(t)$$

即

$$i(t)=Gu(t) \tag{1-22}$$

习惯上常把一个电阻元件称为电阻。

不论是从（1-19）式或是从图 1-19 所示的伏安特性曲线都可看到：在任一时刻，线性电阻的电压（或电流）是由同一时刻的电流（或电压）决定的。这就是说，线性电阻的电压（或电流）不能“记忆”电流（或电压）在“历史”上起过的作用。显然，这种无记忆（memoryless）的性质不只为线性电阻所具有。任何一个二端元件只要它的 $u(t)$ 与 $i(t)$ 之间存在着代数关系，不论这一关系是线性的还是非线性的，都具有这种性质。在这样的认识基础上，电阻元件的一般定义应为：

任何一个二端元件，如果在任一时刻的电压 $u(t)$ 和电流 $i(t)$ 之间存在代数关系

$$f(u,i)=0 \tag{1-23}$$

亦即这一关系可以由 $u-i$ 平面（或 $i-u$ 平面）上一条曲线所决定，不论电压或电流的波形如何[①]，则此二端元件称为电阻元件。对线性电阻来说，由（1-19）

① u 与 i 的关系由一条曲线所决定，即已蕴含着与波形无关的意思在内。此处为突出这一常易忽视的条件，特别加以申明。其他元件也可以在 $u-i$ 平面上绘出曲线来，但这曲线不是唯一的，取决于波形。在讨论动态元件时还将讨论这一问题。

式或(1－22)式可得

$$f(u,i)=u-Ri=0 \tag{1-24}$$

或

$$f(u,i)=i-Gu=0 \tag{1-25}$$

凡电阻元件均是无记忆的,正是由于这一特征,连同具有记忆特征的动态元件,形成了两大类型的集总电路。

电阻可以是线性的(linear)或非线性的(nonlinear),时不变的(time－invariant)或时变的(time－varying)。线性及非线性的含义已在上文交代过。特性曲线不随时间而变化的,称为时不变的(或称为定常的),否则称为时变的。图1－19表示线性时不变电阻的特性曲线,图1－20、图1－21和图1－22则分别表示线性时变电阻、非线性时不变电阻和非线性时变电阻的特性曲线。通常,特性曲线都是在关联的参考方向下测得或绘制的。

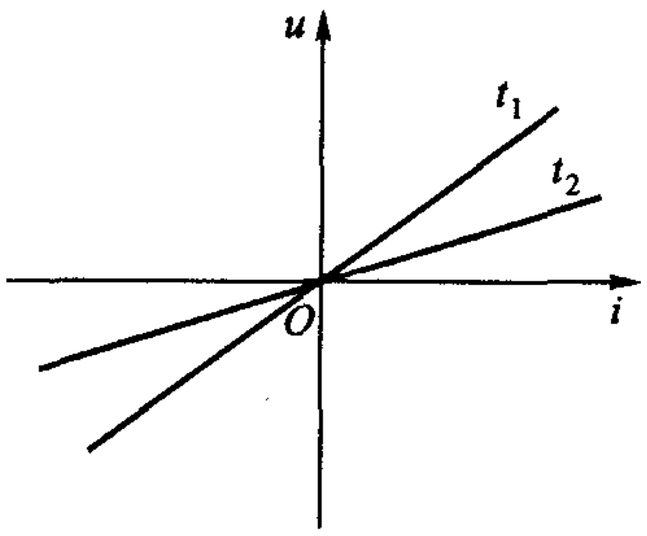


图1－20　线性时变电阻的特性曲线

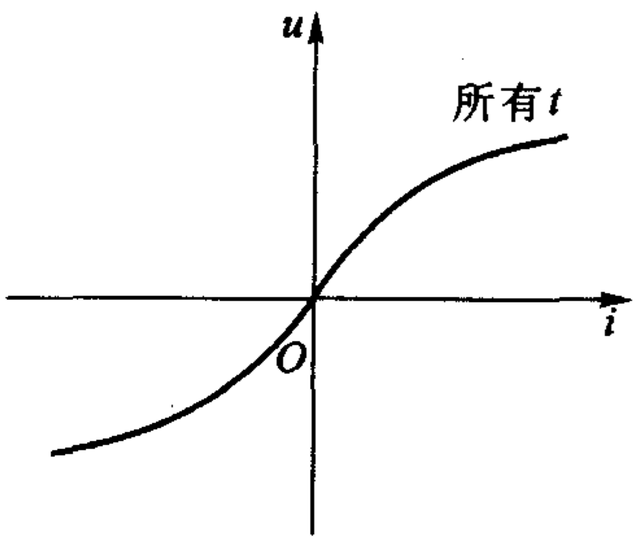


图1－21　非线性时不变电阻的特性曲线

在电子设备中常用的线绕电阻、金属膜电阻、碳膜电阻等,在温度恒定并且电压、电流限制在一定范围内的条件下可以用线性电阻作为它们的模型。传统上,常把“电阻元件”一词理解为实际电阻器。由于在电路理论中,“电阻元件”一词有着如上所述的一般定义,这样便可在一定条件下,把一些电子、电气器件用电阻元件来表征。任何一个二端器件或装置,只要从端钮上看,能满足电阻元件的定义都可看成是电阻元件,不论其内部结构和物理过程如何,例如二极管。

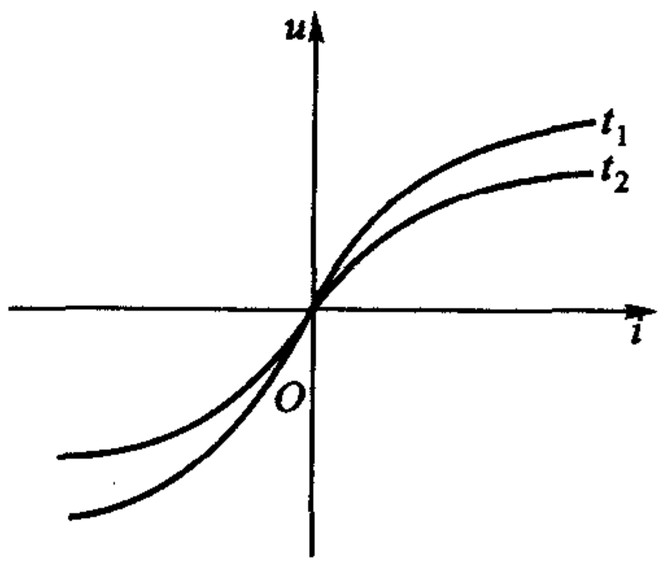


图1－22　非线性时变电阻的特性曲线

晶体二极管(图1－23)可以用如图1－24所示的伏安特性曲线来表征,因而它是一个非线性电阻。显然,非线性电阻的电阻值随着电压或电流的大小甚

至方向而改变，不是常数。它的特性要由整条伏安特性曲线来表征，不能笼统地说它是多少欧的电阻。如果把图 1－24 和图 1－19 所示的特性曲线做一比较，就会发现它们不仅有着线性和非线性的不同，并且对坐标原点来说还有着对称和不对称的差别。对原点对称，说明元件对不同方向的电流或不同极性的电压其表现是一样的，这种性质为所有线性电阻所具备，称为双向性(bilateral)。因此，在使用线性电阻时，它的两个端钮是没有任何区别的。对原点不对称，说明元件对不同方向的电流或不同极性的电压其表现是不同的，这种非双向性为大多数非线性电阻所具备。因此，在使用像二极管这样的器件时，必须认清它的两个端钮——正极和负极。正向偏置时电流由正极向负极流，电阻较小(见图 1－24 正向特性)；反向偏置时，电流由负极向正极流，电阻很大(见图 1－24 反向特性)。在理想情况下，表现出单向性(unilateral)。本书用涂黑的二极管符号表示理想二极管。

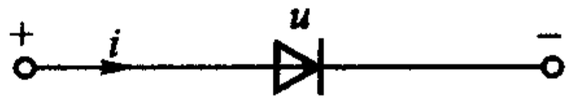


图 1－23　二极管电气图形符号

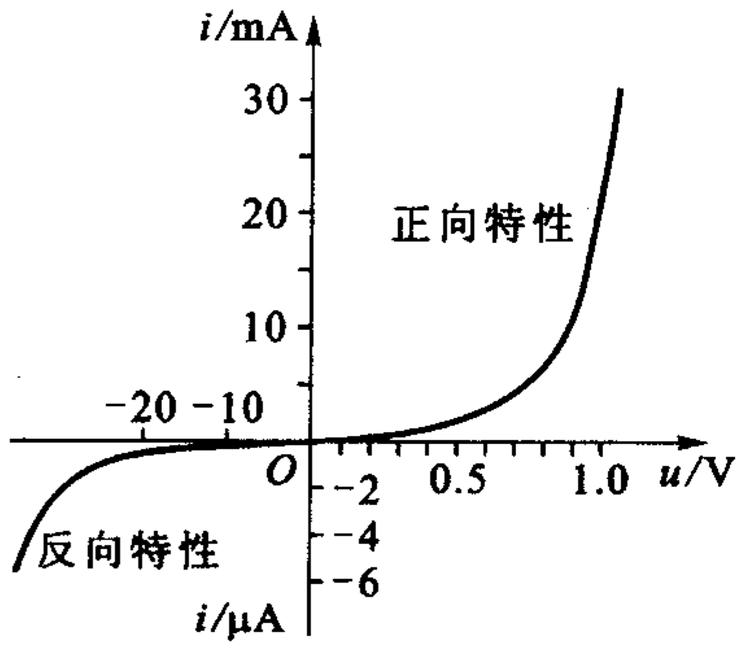


图 1－24　二极管的伏安特性曲线

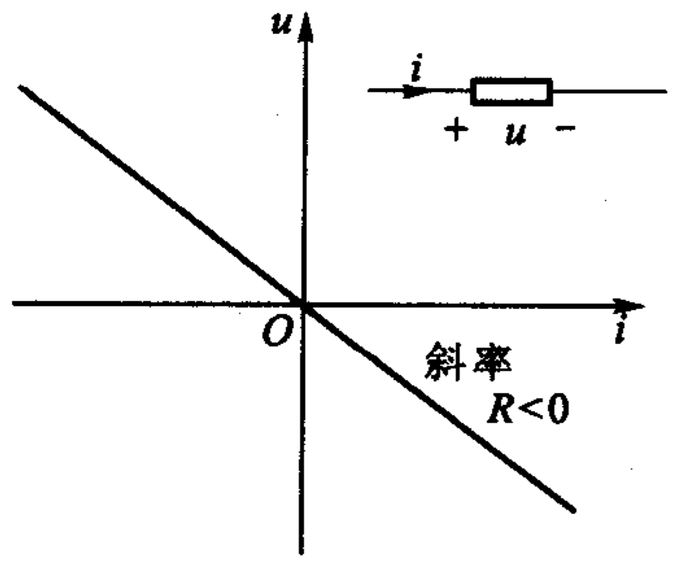


图 1－25　线性负电阻元件的特性曲线

最后讨论电阻元件的功率问题。在电压和电流的关联参考方向下，由(1－3)式并结合(1－19)、(1－21)式可得

$$p(t)=Ri^2(t)=\frac{i^2(t)}{G} \tag{1-26}$$

或

$$p(t)=\frac{u^2(t)}{R}=u^2(t)G \tag{1-27}$$

式中 $i(t)$ 是流过电阻 R 的电流，$u(t)$ 是电阻 R 两端的电压。若 $R\geqslant 0$，则 $p(t)\geqslant 0$，由(1－26)式及(1－27)式算得的结果即为该电阻消耗的功率。因此，若 $R\geqslant 0$，电阻元件是一种耗能元件。通常遇到的电阻大都属于此种情况。

根据电阻元件的一般定义，在 $u-i$ 平面(或 $i-u$ 平面)上用一条斜率为负的特性曲线来表征的元件也属电阻元件。这种元件称为负电阻元件或负电阻，如图 1－25 所示。由于 $R<0$，由(1－26)式算得的功率为负值，说明该元件是提

供功率的，对外电路提供能量。利用电子电路可实现负电阻，某些电子器件也表现出负电阻特性。它们向外提供的能量来自电子电路或器件工作时所需的电源。诚如本节开始时所述，电阻元件原是作为一种耗能元件提出的，但是，满足电阻元件一般定义的某些元件，也可向外提供能量，从而使电阻元件有正、负之分。这意味着电路元件还可按照所谓的“无源性”(passivity)来加以分类。如果元件在所有$t \geqslant -\infty$及所有$i(t)$、$u(t)$的可能组合，当且仅当其吸收的能量$w(t)$满足

$$w(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\xi) i(\xi) \mathrm{d}\xi \geqslant 0 \tag{1-28}$$

则此元件称为无源(passive)元件，亦即无源元件从不向外电路提供能量。如果二端元件不是无源的，则此元件称为有源(active)元件。正电阻元件属无源元件，吸收的能量转化为热能而散失。负电阻元件则属有源元件。请读者在开始阅读本书时就注意到在电路理论中，“有源”是一个专门术语，具有上述的定义，并非通常意义下“含有电源”的简称。有源是一个涉及电路性能的概念；含源是一个涉及电路结构的概念。

通常，电阻一词系指具有正实常数R的线性正电阻而言。

例 1-6　有一个 100 Ω、1 W 的碳膜电阻使用于直流电路，问在使用时电流、电压不得超过多大的数值？

解　电流流过电阻必然消耗电能而发热，这使人们能够利用电来加热、发光，制成电灯、电烙铁、电炉等电阻器。但在电子电路中使用的电阻器以及电动机、变压器(它们都要用导线来制作，具有一定的电阻)等，本来不是为发热而设置的，但都因有电阻存在，不可避免地要发热，这是一种无谓的电能损失。如果在使用时，电流过大，温度过高，设备还会被烧坏。为了保证正常工作，制造工厂在电器的铭牌上都要标出它们的电压、电流或功率的限额，称为额定值，作为使用时的根据。电子电路中常用的线绕电阻与碳膜电阻不仅要标明电阻值还要标明额定功率，如 500 Ω、5 W，10 kΩ、1 W，等等。

市售的碳膜、金属膜电阻通常分为$\frac{1}{8}$ W、$\frac{1}{4}$ W、$\frac{1}{2}$ W、1 W 及 2 W。功率损耗较大时可选用线绕电阻。

本题解答如下：

$$|I| = \sqrt{\frac{P}{R}} = \sqrt{\frac{1}{100}}\ \mathrm{A} = \frac{1}{10}\ \mathrm{A} = 100\ \mathrm{mA}$$

$$|U| = R|I| = 100 \times 100 \times 10^{-3}\ \mathrm{V} = 10\ \mathrm{V}$$

故在使用时电流不得超过 100 mA，电压不得超过 10 V。

思考题

1-6　$R=0$ 时伏安特性曲线是怎样的？（该曲线称为“短路特性”。）$R=\infty$ 时又如何？（该曲线称为“开路特性”。）

练习题

1-4　求图 1-26(a)、(b)、(c)、(d)的 u_{ab} 以及图(e)的 u_{ab}、u_{bc}、u_{ac}。

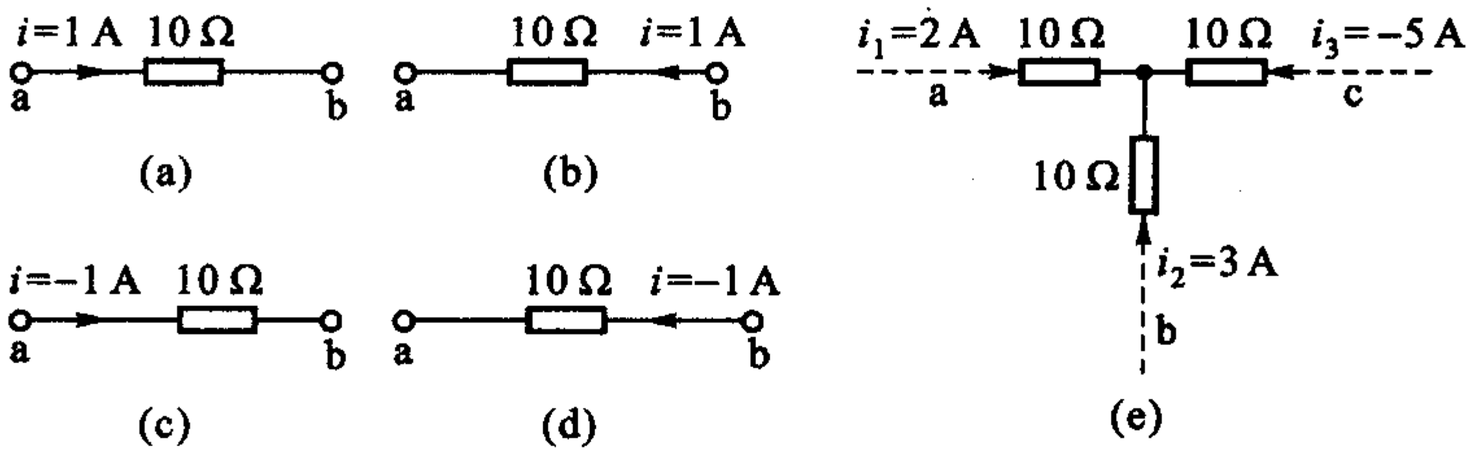


图 1-26　练习题 1-4

1-5　一个 40 kΩ、10 W 的电阻，使用时至多能允许多大电流流过？

（15.8 mA）

1-6　图 1-27 所示电路中，已知 $u_{be}=-2$ V，$u_{cd}=4$ V，$u_{de}=-9$ V，$u_{ef}=6$ V，$u_{af}=10$ V。求 u_{ab}、u_{bc}、u_{ca}、i_1、i_2、i_3。

（3 A、−1 A、−2 A）

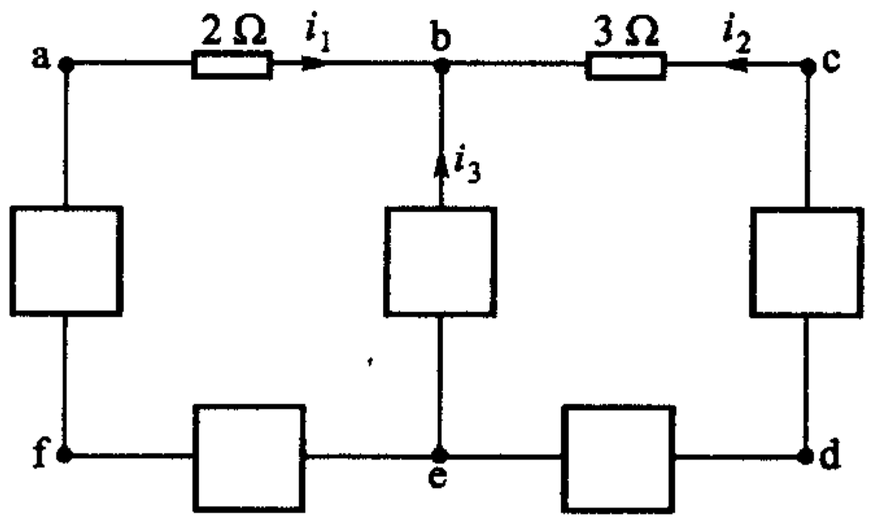


图 1-27　练习题 1-6

§1-5　电　压　源

在含电阻的电路中有电流流动时，就会不断地消耗能量，这就要求电路中必须要有能量来源——电源不断提供能量。没有电源，在一个纯电阻电路中是不可能存在电流和电压的。

理想电压源(以后简称电压源)是从实际电源抽象出来的一种模型。

电池是大家很熟悉的一种电源。电池内部的化学反应给予每库仑正电荷以一定值的能量,这是由化学反应的性质确定的。这一定值的能量就等于电池的电动势。因此,在理想的情况下,如电池本身没有能量损耗,则每库仑的正电荷由电池的负极转移到正极时,就能获得这一定值能量的全部,也就是说,电池的端电压 U_S 是定值,其值恰等于电池的电动势。由此,可以定义一种理想元件,在其两端总能保持一定的电压而不论流过的电流为多少,这种元件称为(理想)电压源。

电压源具有两个基本性质:(1) 它的端电压是定值 U_S 或是一定的时间函数 $u_S(t)$,与流过的电流无关。当电流为零时,其两端仍有电压 U_S 或 $u_S(t)$。(2) 电压源的电压是由它本身确定的,至于流过它的电流则是任意的。这就是说,流过它的电流不是由它本身能确定的,而是由与之相连接的外电路来决定的。电流可以在不同的方向流过电压源,因而电压源既可以对外电路提供能量,也可以从外电路接受能量,视电流的方向而定。电压源不符合(1-28)式的要求,因而是一种有源元件。

在 $u-i$ 平面上,电压源在时刻 t_1 的伏安特性曲线是一条平行于 i 轴且纵坐标为 $u_S(t_1)$ 的直线,如图 1-28 所示。特性曲线表明了电压源端电压与电流大小无关。

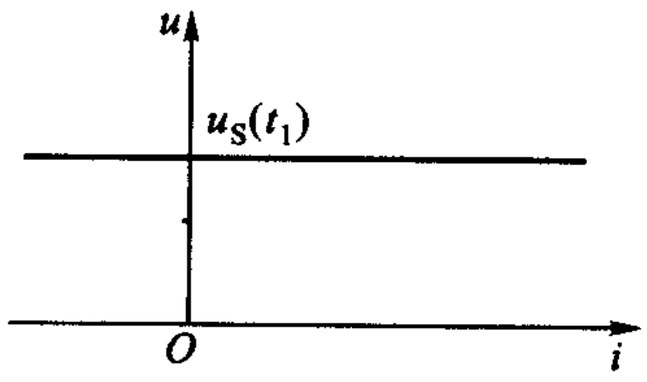
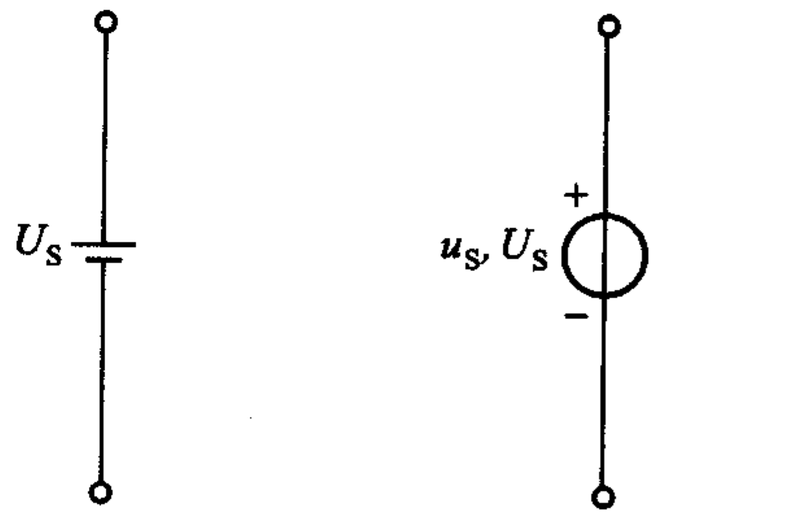


图 1-28　电压源在时刻 t_1 的伏安特性曲线



(a) 直流电压源的符号　(b) 一般电压源的符号

图 1-29　电压源的符号

电压源的符号如图 1-29 所示。图(a)所示符号常用来表示直流电压源、特别是表示电池的模型,长线段代表高电位端,即正极,短线段代表低电位端,即负极,U_S 为电压源的端电压①。这就是说,从电源的正极到负极有一电压降 U_S;

① 我国国家标准仅对理想电压源、理想电流源、理想回转器等三种理想电路元件规定了图形符号,混列于电气图形符号之中(GB 4728.2—1998,16.1),本书及其他一些教材所用的理想直流电压源(理想电池)符号,与国家标准中实际电池的电气图形符号(GB 4728.6—2000,15)相同,但两者含义不同。电气图形符号仅仅是代替实物的符号,并不具有模型的特征,例如,电池的图形符号可表示含有内电阻的电池,而模型符号则否。

或从电源的负极到正极有一电压升 U_S。图(b)表示电压源的一般符号，当然也可用来表示直流电压源，此时 $u_S(t) = U_S$。正、负号表示参考极性，对已知的直流电压源，常使参考极性与已知极性一致。

电压源实际上是不存在的，但是，通常的电池、发电机等实际电源在一定电流范围内可近似地看成是一个电压源。也可用电压源与电阻元件来构成实际电源的模型，后文将讨论这个问题(§4-5)。此外，电压源也可用电子电路来实现，如晶体管稳压电源。

如果电路中所含电源都是直流电源，则称该电路为直流电路。由于电阻元件是无记忆的，因而即便作用在电阻电路的电源电压是随时间变化的，但就每一时刻而言都相当于一个直流电路。因此，电阻电路具有一套自己的分析方法，不因作用的电源方式而异。内因是根据，外因只是条件。电阻电路并非直流电路的同义词。电阻电路中的电流，并非只是恒定电流(直流电流)。

许多器件都可以用线性时不变电阻作为模型，因此本书在电阻电路分析中，以线性时不变情况为主。且从电路的计算机辅助分析来看，线性时不变电阻电路的直流分析已成为其他类型电路分析的基础。例如，在使用计算机求解非线性电阻电路、含电容或电感电路(属动态电路大类)时，都可以通过对一个直流线性时不变电阻电路[①]进行一系列重复的计算得到解答。

以上几节分析的电路都用方框来泛指元件。从本节起将分析具体的线性时不变电阻电路。

例 1-7　单回路电路如图 1-30 所示，已知 $u_{S1} = 12\ \text{V}$、$u_{S2} = 6\ \text{V}$、$R_1 = 0.2\ \Omega$，$R_2 = 0.1\ \Omega$，$R_3 = 1.4\ \Omega$，$R_4 = 2.3\ \Omega$。求电流 i 及电压 u_{ab}[②]。

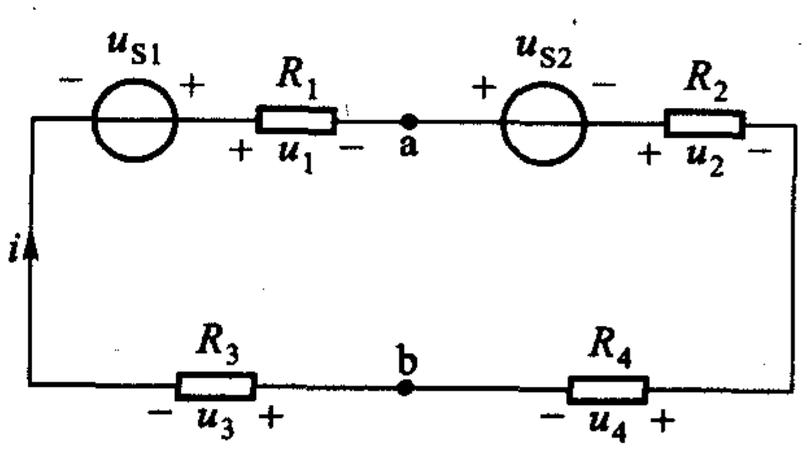


图 1-30　例 1-7

解　基尔霍夫定律和元件的电压电流关系是解电路问题的基本依据。

设电流参考方向如图中所示，相应地标出各电阻上电压的参考极性。从 a 点出发按顺时针方向绕行一周，可得

$$u_{S2} + u_2 + u_4 + u_3 - u_{S1} + u_1 = 0\ (\text{KVL})$$

又由欧姆定律得电阻元件的电压电流关系为

---

① 这种电路称为“伴侣网络”(companion network)。非线性电阻电路的牛顿-拉夫森(Newton-Raphson)算法、一阶微分方程式的后向欧拉(backward Euler)积分算法，都属此类。

② 本书中小写字母代表变量。$u_{S1} = 12\ \text{V}$ 的意思是 u_{S1} 一般是随时间变化的，在本题中为一常数，其值为 12 V。本题所研究的，可能是随时间变化的电压源作用于给定电阻电路某一时刻的情况。在本书中，除了明确的直流电阻电路外，所有电阻电路的电压、电流一般均用小写字母表示。

$$\begin{aligned} u_1 &= R_1 i \\ u_2 &= R_2 i \\ u_3 &= R_3 i \\ u_4 &= R_4 i \end{aligned} \qquad \text{(VCR)}$$

以 VCR 代入 KVL 方程,得

$$u_{S2} + R_2 i + R_4 i + R_3 i - u_{S1} + R_1 i = 0$$

即

$$i(R_1 + R_2 + R_3 + R_4) = u_{S1} - u_{S2}$$

故

$$i = \frac{u_{S1} - u_{S2}}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}$$

代入数据得

$$i = \frac{(12 - 6)\ \text{V}}{(0.2 + 0.1 + 1.4 + 2.3)\ \Omega} = \frac{6}{4}\ \text{A} = 1.5\ \text{A}$$

电流为正值说明电流的实际方向与参考方向一致。

再求 u_{ab}:根据图中所标极性,循着右边路径计算可得

$$\begin{aligned} u_{ab} &= u_{S2} + u_2 + u_4 \\ &= u_{S2} + R_2 i + R_4 i \\ &= [6 + 1.5(0.1 + 2.3)]\ \text{V} = 9.6\ \text{V} \end{aligned}$$

u_{ab}为正值,表明由 a 点到 b 点确为电压降。

如果循着左边路径计算,可得

$$\begin{aligned} u_{ab} &= -u_1 + u_{S1} - u_3 \\ &= -R_1 i + u_{S1} - R_3 i \\ &= [12 - 1.5(0.2 + 1.4)]\ \text{V} = 9.6\ \text{V} \end{aligned}$$

由此可见,沿两条路径计算的结果是一样的。

例 1-8　一段含源支路 ab 如图 1-31 所示,已知 $u_{S1} = 6$ V,$u_{S2} = 14$ V,$u_{ab} = 5$ V,$R_1 = 2\ \Omega$,$R_2 = 3\ \Omega$,设电流参考方向如图中所示,求 i。

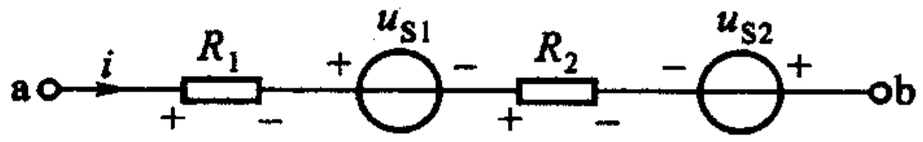


图 1-31　例 1-8

解　已知一段含源支路两端的电压降及各电压源、电阻的数值,要求解支路中的电流——这种类型的问题是今后经常遇到的。可从列出 u_{ab}的表示式着手,为此可根据所设电流参考方向先标出各电阻上电压降的极性,至于电压源,其正、负极性一般都是给定的,不必再标。从 a 点到 b 点的电压降 u_{ab}应等于由 a 点到 b 点路径上全部电压降的代数和。根据各电压的正、负极性,不难得到

$$u_{ab} = R_1 i + u_{S1} + R_2 i - u_{S2}$$

由此可得

$$i=\frac{u_{ab}-u_{S1}+u_{S2}}{R_1+R_2}$$

即

$$i=\frac{(5-6+14)\ \mathrm{V}}{(2+3)\ \Omega}=\frac{13}{5}\ \mathrm{A}=2.6\ \mathrm{A}$$

例 1－9　求图 1－32 所示直流电阻电路中的 U_2、I_2、R_2、R_1 及 U_S。

解　运用基尔霍夫定律和欧姆定律即能解决问题。对所有的电阻电路，运用这两个定律问题都能得到解决。

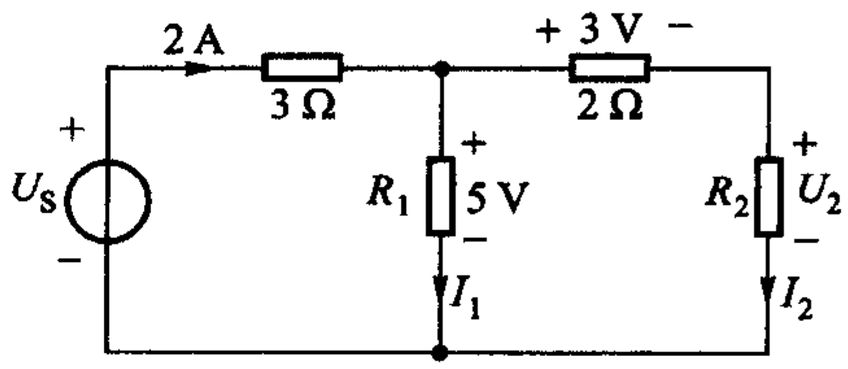


图 1－32　例 1－9

I_2 为流过 2 Ω 电阻的电流，由欧姆定律可得

$$I_2=\frac{3\ \mathrm{V}}{2\ \Omega}=1.5\ \mathrm{A}$$

R_1、R_2 和 2 Ω 电阻共同组成一个回路，由 KVL 可得

$$U_2-5\ \mathrm{V}+3\ \mathrm{V}=0$$

即

$$U_2=2\ \mathrm{V}$$

又由欧姆定律可得

$$R_2=\frac{U_2}{I_2}=\frac{2\ \mathrm{V}}{1.5\ \mathrm{A}}=\frac{2}{1.5}\ \Omega=1.33\ \Omega$$

由 KCL 可得

$$2\ \mathrm{A}-I_1-I_2=0$$

即

$$2\ \mathrm{A}-I_1-1.5\ \mathrm{A}=0$$

得

$$I_1=0.5\ \mathrm{A}$$

由欧姆定律可得

$$R_1=\frac{5}{0.5}\ \Omega=10\ \Omega$$

最后，运用 KVL 于电源和 R_1、3 Ω 电阻组成的回路，得

$$(3\times2)\ \mathrm{V}+5\ \mathrm{V}-U_S=0$$

得

$$U_S=11\ \mathrm{V}$$

练习题

1－7　求图 1－33 所示各段电路的 U_{ab}。（答案与所标电流有关吗？）

(10 V;10 V;10 V; -10 V)

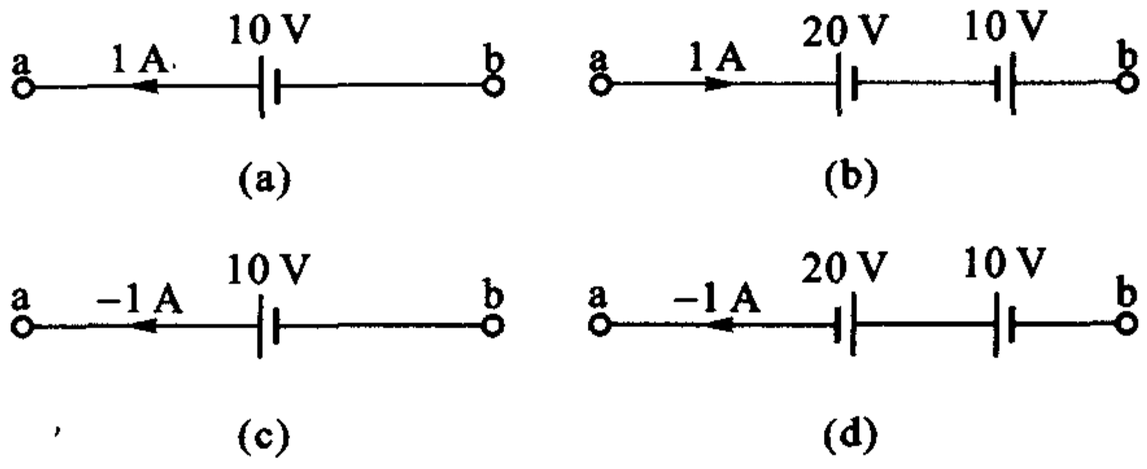


图 1 - 33　练习题 1 - 7

1 - 8　求图 1 - 34 所示各段电路的 u_{ab}或 i,并计算各段电路功率。已知,在图(a)中,i = 2 A、R = 2 Ω、u_S = 4 V;图(b)中 i = 1 A、R = 4 Ω、u_{S1} = 2 V、u_{S2} = - 6 V;图(c)中,u_{ab} = 10 V、R = 5 Ω、u_S = - 2 V。

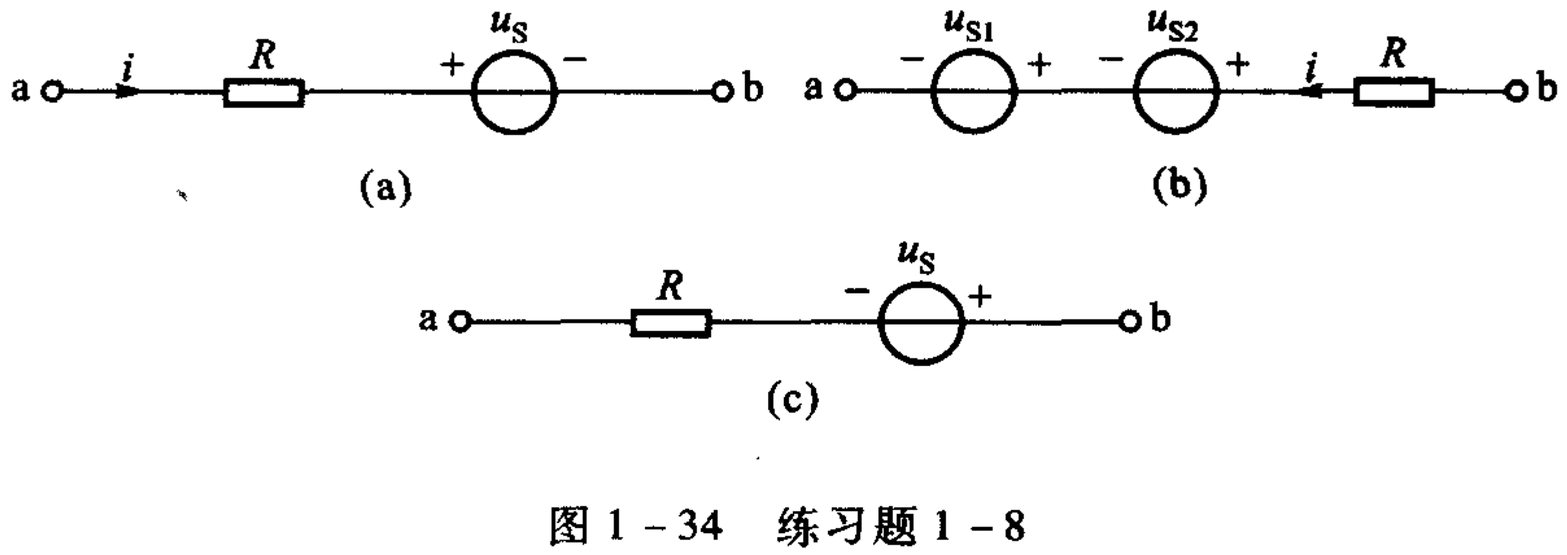


图 1 - 34　练习题 1 - 8

1 - 9　若图 1 - 34(a)、(b)中电流为零,u_{ab}各为多少?若电流方向改变,大小不变,u_{ab}又各为多少?

1 - 10　直流电阻电路如图 1 - 35 所示,求:(1) 电流;(2) U_{ab}及 U_{cd}。

(0.4 A;10 V,0)

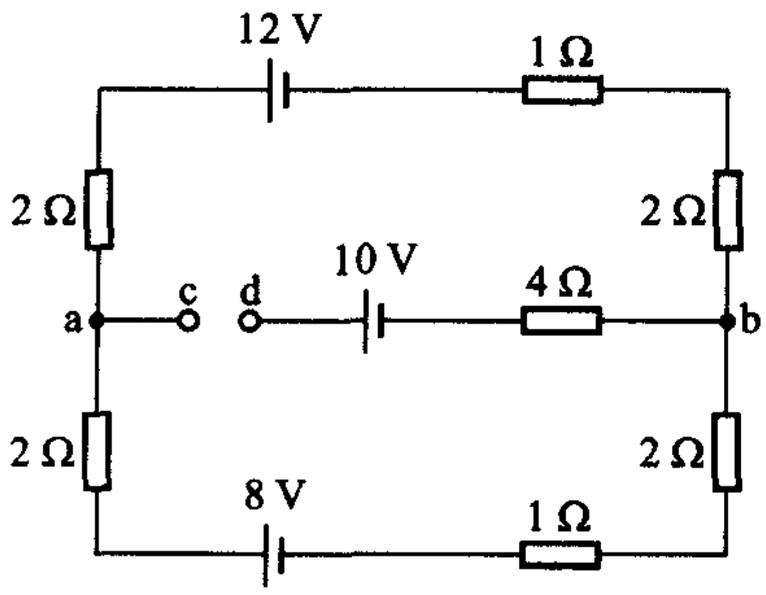


图 1 - 35　练习题 1 - 10

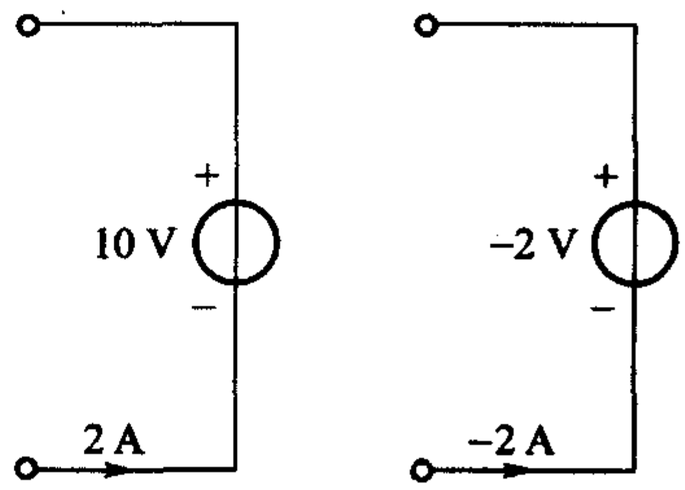


图 1 - 36　练习题 1 - 11

1 - 11　求图 1 - 36 所示两电压源的吸收功率。

(- 20 W, - 4 W)

§1-6　电　流　源

理想电流源(以后简称电流源)是从实际电源抽象出来的另一种模型。

人们对电压源较易理解并熟悉,对电流源则感到生疏。电压源是一种能产生电压的装置,而电流源则是一种能产生电流的装置。在一定条件下,光电池在一定照度的光线照射时就被激发产生一定值的电流,这电流与照度成正比。由此,可定义一种理想元件,从其端钮上总能向外提供一定的电流而不论其两端的电压为多少,这种元件称为电流源。

因此,电流源有两个基本性质:(1) 它发出的电流是定值 I_S,或是一定的时间函数 $i_S(t)$,与两端的电压无关。当电压为零时,它发出的电流仍为 I_S 或 $i_S(t)$。(2) 电流源的电流是由它本身确定的,至于它两端的电压则是任意的。这就是说,它两端的电压不是由它本身所能确定的,而是由与之相连接的外电路来决定的。其两端电压可以有不同的极性,因而电流源既可以对外电路提供能量,也可以从外电路接受能量,视电压的极性而定。因此,电流源是一种有源元件。

在 $u-i$ 平面上,电流源在时刻 t_1 的伏安特性曲线是一条平行于 u 轴且纵坐标为 $i_S(t_1)$ 的直线,如图 1-37 所示。特性曲线表明了电流源电流与端电压大小无关。

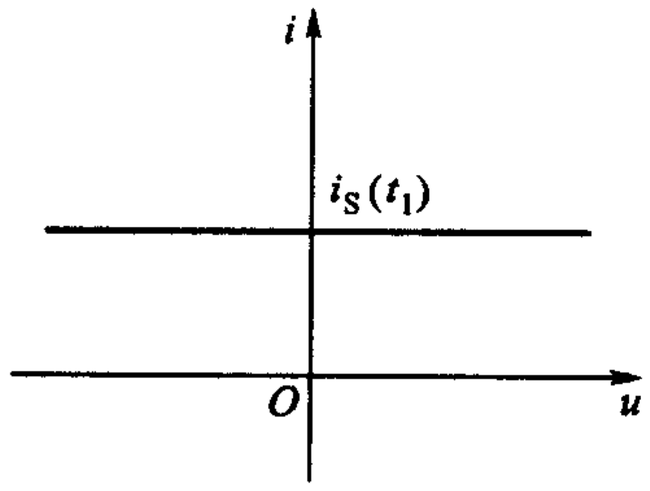


图 1-37　电流源在时刻 t_1 的伏安特性曲线

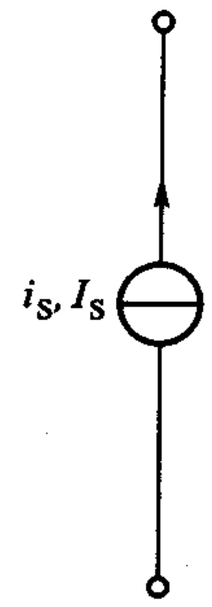


图 1-38　电流源的符号

电流源的符号如图 1-38 所示,在表示直流电流源时,$i_S(t) = I_S$。箭头表示电流的参考方向,对已知的直流电流源,常使参考方向与真实方向一致。

在电子电路中,信号一词常代表带有信息的电压或电流,信号源可以是电压源,也可以是电流源①。

---

① 产生电流信号时,如光电二极管(用于血液分析仪,烟雾报警器等)、核和 X 射线的辐射检测器(用于 CT 扫描仪等)、电离室等。

电流源实际上是不存在的,但是,光电池等实际电源在一定的电压范围内可近似地看成是一个电流源。也可用电流源与电阻元件构成实际电源的模型,后文将讨论这个问题(§4 -5)。此外,电流源也可用电子电路来实现。

例 1 -10　计算图 1 -39 所示电路中 3 Ω 电阻的电压以及电流源的端电压及功率。

解　由电流源的基本性质可知:与电流源串联的元件,其电流即为电流源的电流。故知,流过 3 Ω 电阻的电流为 1 A,其电压为 3 V,极性如图所示。

电流源的端电压由与之相连接的外电路决定。设端电压极性如图中所示,则根据 3 Ω 电阻以及电压源的电压和极性,可得其端电压为(3 ×1 +2) V =5 V。

电流源功率(非关联参考方向)

$$p = -(5 \times 1)\ \mathrm{W} = -5\ \mathrm{W}$$

由此可知,电流源提供功率 5 W。

请注意:2 V 电压源的存在对电流的大小虽无影响,但对电流源的电压、功率均有影响。所以,不能说电压源在电路中没有作用。

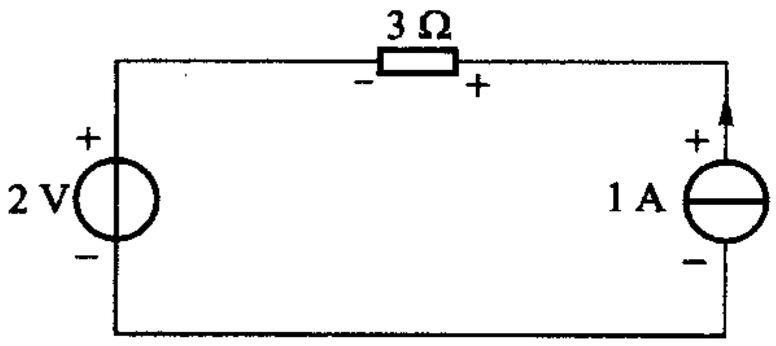


图 1 -39　例 1 -10

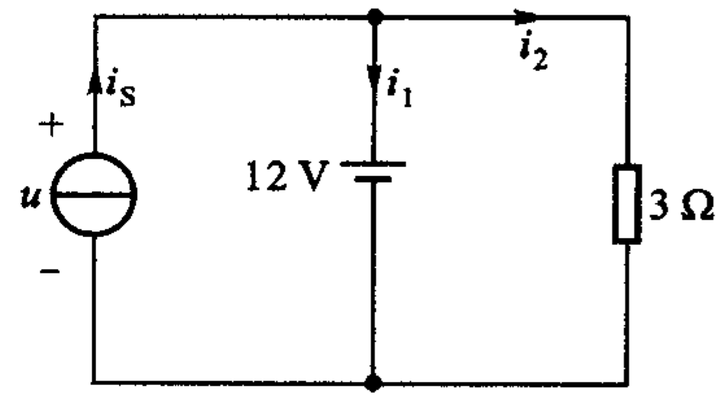


图 1 -40　例 1 -11

例 1 -11　计算图 1 -40 所示电路,当 i_S 分别为 5 A、4 A 和 3 A 时的电流 i_1、i_2 及电流源的端电压 u。

解　根据电压源的性质,在图 1 -40 中不论并联的电流源电流是多少,3 Ω 电阻的电流 i_2 均为

$$i_2 = \frac{12}{3}\ \mathrm{A} = 4\ \mathrm{A}$$

电流源电压均为 12 V。

由 KCL 可计算 i_S 为 3 A、4 A、5 A 时的电压源电流 i_1 分别为

$$i_S - i_2 = (3 - 4)\ \mathrm{A} = -1\ \mathrm{A}$$

$$i_S - i_2 = (4 - 4)\ \mathrm{A} = 0$$

$$i_S - i_2 = (5 - 4)\ \mathrm{A} = 1\ \mathrm{A}$$

例 1 -12　电路如图 1 -41 所示,求各电流、电压。

解　由 KCL

$$i_2 = (2+3)\ \text{A} = 5\ \text{A}$$

$\frac{1}{3}\ \Omega$ 电阻的电压，可由欧姆定律算得为

$$u_2 = \left(5 \times \frac{1}{3}\right)\ \text{V} = \frac{5}{3}\ \text{V}$$

同理得

$$i_3 = (3-1)\ \text{A} = 2\ \text{A},\quad u_3 = 2 \times \frac{1}{2}\ \text{V} = 1\ \text{V}$$

$$i_1 = 2\ \text{A} + i_3 = 4\ \text{A}\ \text{或}\ i_1 = (5-1)\ \text{A} = 4\ \text{A}$$

$$u_1 = (4 \times 1)\ \text{V} = 4\ \text{V}$$

各电流源的电压必须根据外电路来确定，如1 A电流源的电压

$$u_4 = u_3 + u_1 = (1+4)\ \text{V} = 5\ \text{V}$$

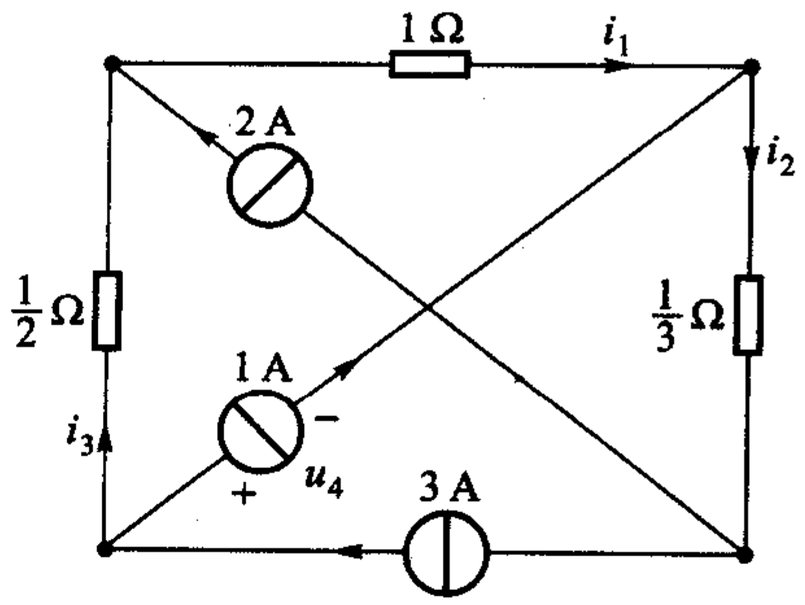


图 1－41　例 1－12

思考题

1－7　图 1－42 所示方框内为一电源元件，当 $R = 1\ \Omega$ 时，$u_{ab} = 7$ V。（1）若电源元件为电流源，问当 $R = 2\ \Omega$ 及 $R = 1/2\ \Omega$ 时，u_{ab} 各为多少？（2）若为电压源，问当 $R = 2\ \Omega$ 及 $R = 1/2\ \Omega$ 时，u_{ab} 又各为多少？

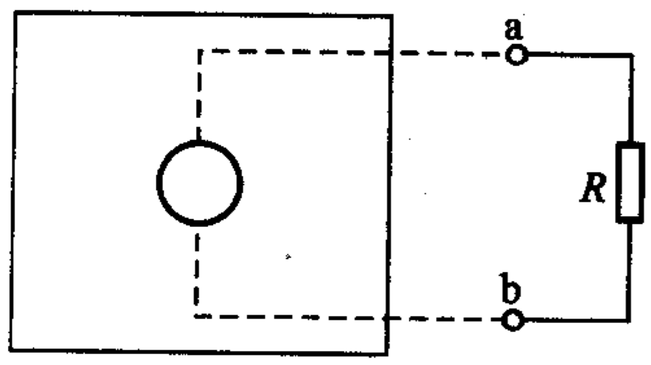


图 1－42　思考题 1－7

1－8　试回答图 1－43 所示各电路中的 u 及 i 为多少？

1－9　在图 1－44 所示两电路中，问 u 允许取何值？（－10 V，任意）

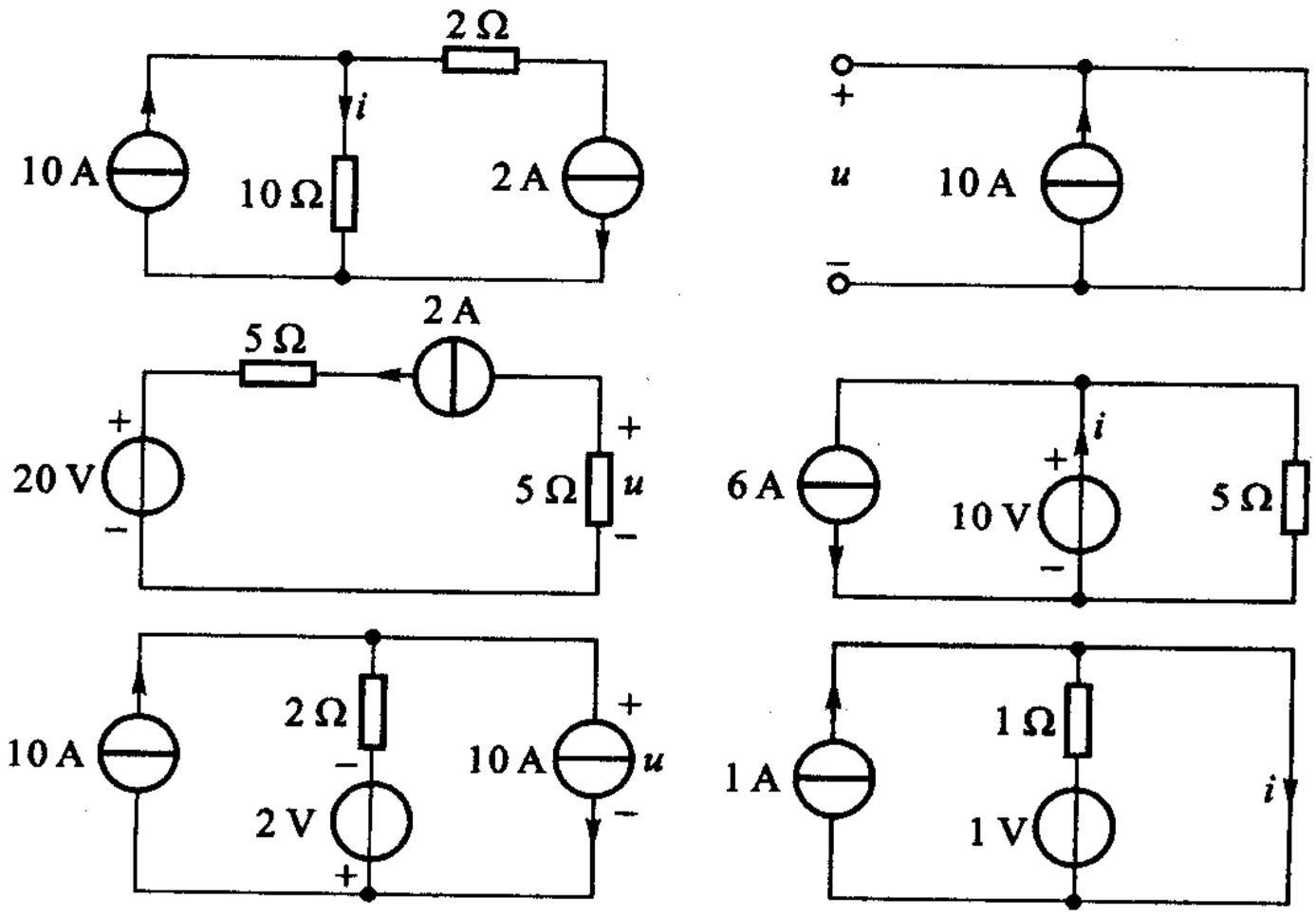


图 1－43　思考题 1－8

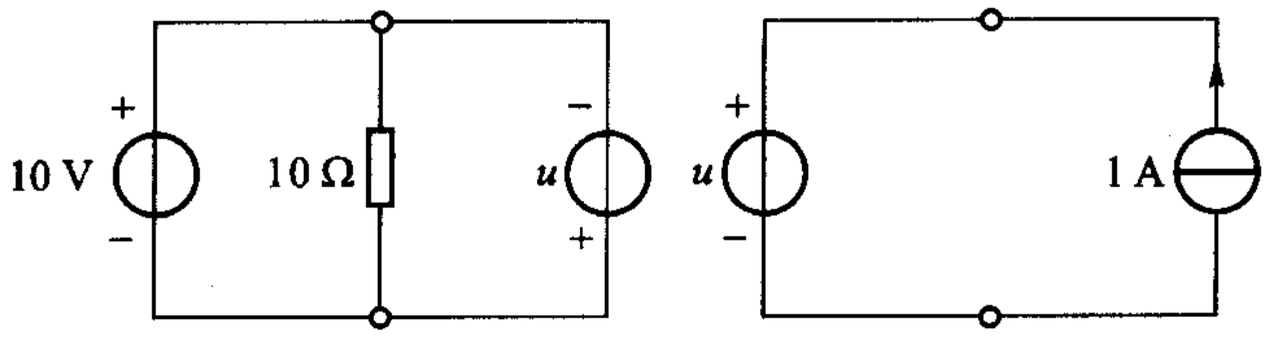


图 1－44　思考题 1－9

1－10　在图 1－45 所示两电路中，问 i 允许取何值？

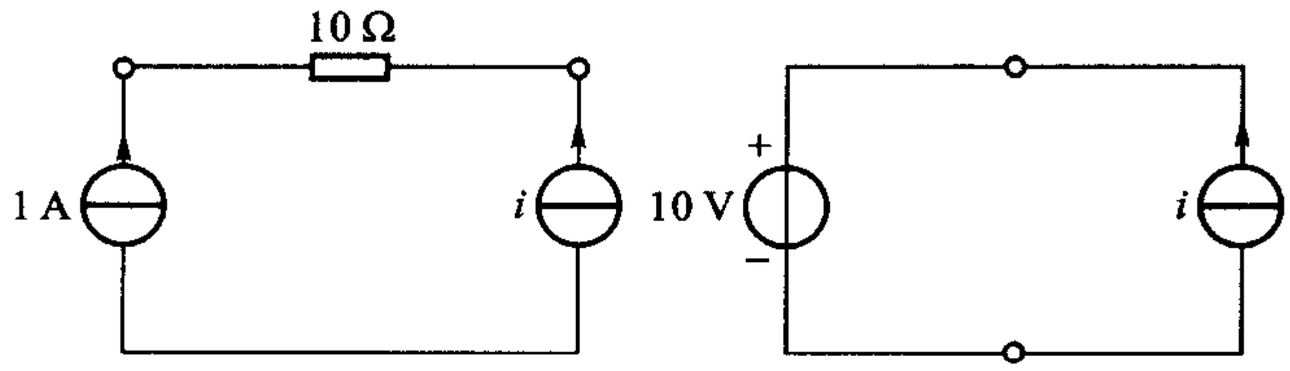


图 1－45　思考题 1－10

练习题

1－12　计算图 1－46 所示电路中电压源的电流 i 及电流源的端电压 u。

（1/3 A，2 V）

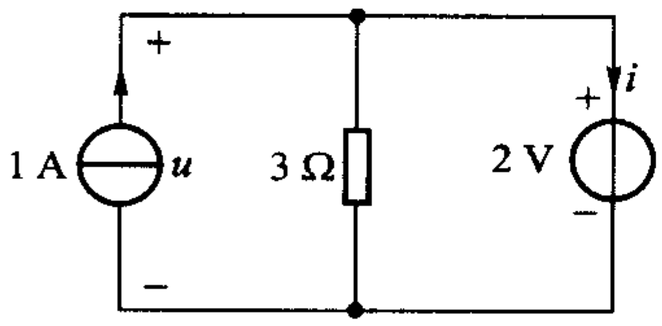


图 1－46　练习题 1－12

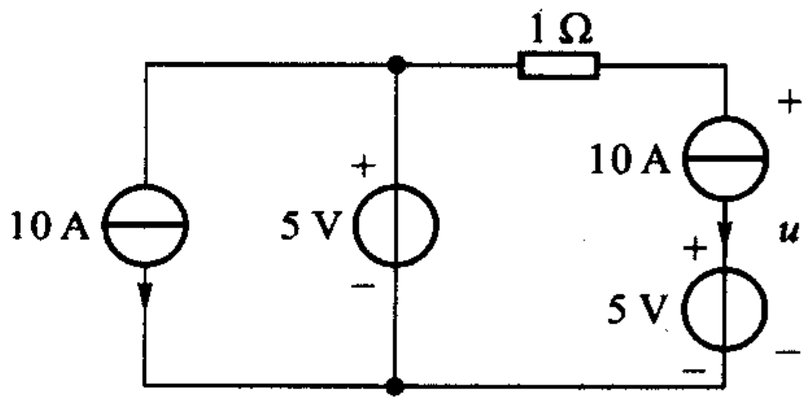


图 1－47　练习题 1－13

1－13　求图 1－47 所示电路中的 u。

（－5 V）

§1－7　受　控　源

以上所述各种电路元件均属二端元件或称为单口元件，它们对外只有两个端钮。本节将介绍一种双口元件——受控源（controlled source）。

受控源是由电子器件抽象而来的一种模型。一些电子器件，如晶体管、真空

管等均具有输入端的电压(电流)能控制输出端的电压或电流的特点。随着电子器件的发展,人们提出了受控源元件。受控源是一种双口元件,它含有两条支路,其一为控制支路,这条支路或为开路或为短路,另一为受控支路,这条支路或用一个受控"电压源"表明该支路的电压受控制的性质或用一个受控"电流源"表明该支路的电流受控制的性质。这两种"电源"本非严格意义上的电源,只是一种借用。电源代表外界对电路施加的影响或约束,如信号源,而受控源只是表明电路内部电子器件中所发生物理现象的一种模型,用以表明电子器件的"互参数"或电压、电流"转移"(transfer)关系的一种方式而已。

受控源用菱形符号表示。根据控制支路是开路还是短路和受控支路是电压源还是电流源,受控源可分为四种,如图 1 - 48 所示。按图(a)至图(d)顺序表示:(电)压控(制)电压源(voltaeg - controlled voltage source, VCVS),(电)流控(制)电压源(CCVS),(电)压控(制)电流源(VCCS)和(电)流控(制)电流源(CCCS)。受控源元件是以其受控支路内"电源"的特点来命名、分类的。

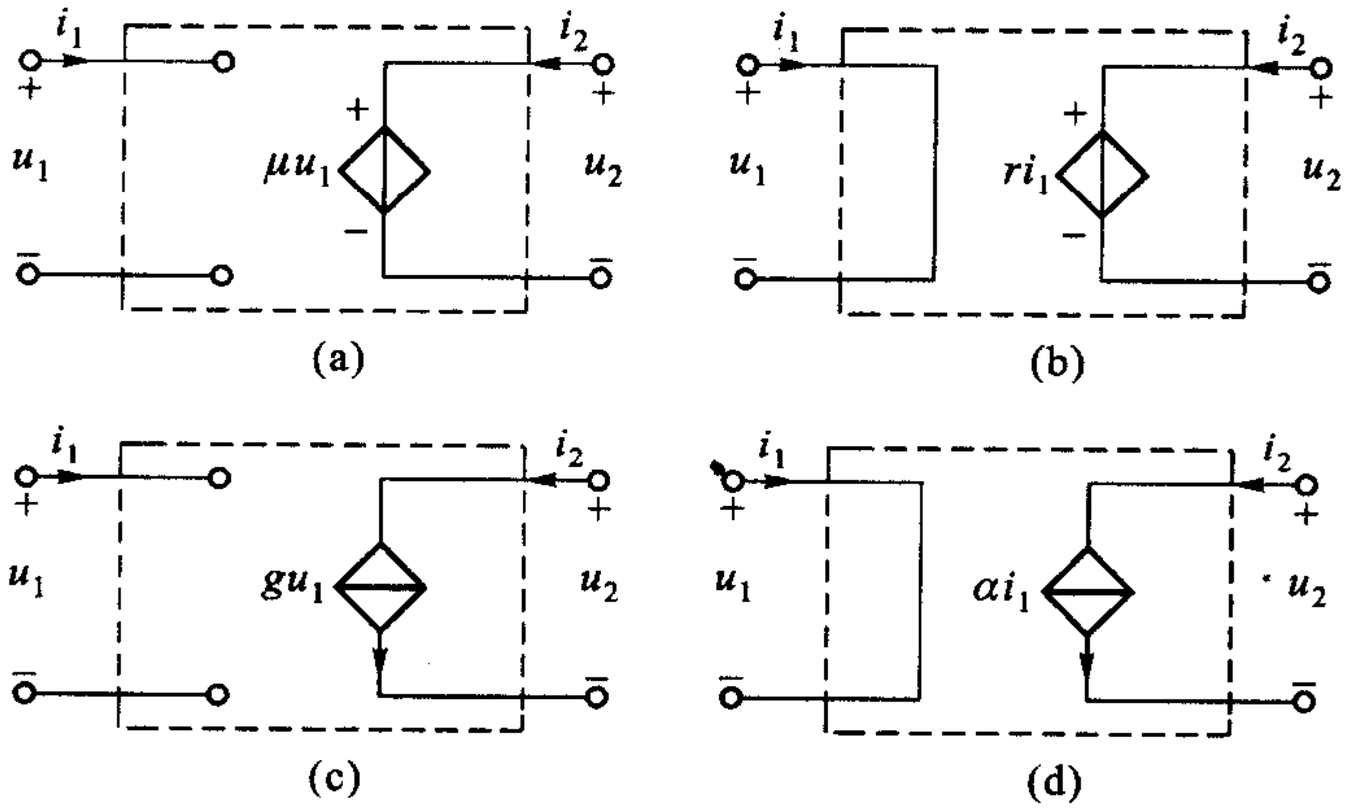


图 1 - 48　四种受控源

受控源是一种双口电阻元件。与单口电阻元件不同[参见(1 - 23)式],双口电阻元件由如下两个代数方程定义:

$$f_1(u_1, u_2, i_1, i_2) = 0 \tag{1-29}$$

$$f_2(u_1, u_2, i_1, i_2) = 0 \tag{1-30}$$

亦即,作为双口电阻元件,每一种线性受控源是由两个方程来表征的,以 VCVS 为例,它们是

$$f_1(u_1, u_2, i_1, i_2) = i_1 = 0 \tag{1-31}$$

$$f_2(u_1, u_2, i_1, i_2) = u_2 - \mu u_1 = 0 \text{ 或 } u_2 = \mu u_1 \tag{1-32}$$

f_1 与 u_1、u_2、i_2 无关,f_2 与 i_1、i_2 无关。类似地,对其他三种受控源来说:

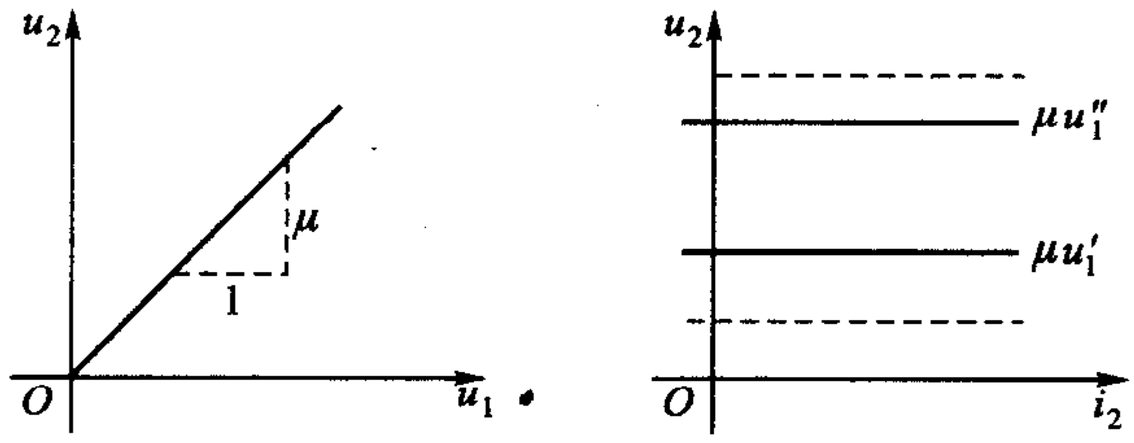
CCVS：　　$u_1=0, u_2-ri_1=0$ 或 $u_2=ri_1$　　(1-33)

VCCS：　　$i_1=0, i_2-gu_1=0$ 或 $i_2=gu_1$　　(1-34)

CCCS：　　$u_1=0, i_2-\alpha i_1=0$ 或 $i_2=\alpha i_1$　　(1-35)

各式中 μ 称为转移电压比、r 称为转移电阻、g 称为转移电导、α 称为转移电流比，均为相应受控源的参数。若线性受控源的参数又不随时间而变，则该受控源就是一种线性、时不变、双口电阻元件，更全面地说，还应增添“有源”两字（见例1-13）。显然，受控源还是单向性的。

仍以 VCVS 为例，(1-32)式所反映的 u_2 与 u_1 的约束关系若表示为曲线，当如图 1-49(a)所示时，它是一条通过原点、斜率为 μ 的直线。由于控制电压 u_1 和受控电压 u_2 不在同一端口，这是一种转移的约束关系，可径称为转移特性。至于输出特性 u_2-i_2，它们是一族对应于不同控制电压 u_1 且并行于 i_2 轴的直线，如图 1-49(b)所示。其余三种受控源的转移特性和输出特性请读者自行绘出①。



(a) VCVS 的转移特性　　(b) VCVS 的输出特性

图 1-49　VCVS 的转移特性及输出特性

通常所称的电阻电路，包含受控源在内。

从表面上看，图 1-49(b)所示 VCVS 的输出特性与电压源的输出特性有类似之处，即输出电压与流过电流无关，但它们却有本质的区别。电压源的电压是独立存在的，不论它接入还是不接入电路，电压总是存在的。（考虑你买来的一节干电池！考虑一下为什么严禁用手去触摸室内的电源插座！）受控源的电压却不同，它的输出电压是由其所处电路中某处的电压（流）按一定的关系“转移”过来的！单独存在时并无电压！（考虑一只放在桌上的晶体管，你完全可以去触摸它！）

---

① 在以后学习电子电路课程时，转移特性、输出特性、输入特性是常见到的。作为电子器件模型的核心元件——受控源，其前两种特性如此处所述。至于输入特性，作为一种理想元件，在流控时输入电阻为零，压控时输入电阻为无穷大。即本节开始时提到的另一支路（即输入电路）为短路或开路。

为便于教学和便于叙述，教材中常把受控源与（独立）电源相提并论。它们本质不同，原本不该如此处理的。受控源名称使用已久，使用时又容易与所谓的“电源性”相联系，需多加注意！

采用关联参考方向，受控源吸收的功率为

$$p(t) = u_1(t)i_1(t) + u_2(t)i_2(t)$$

由（1－31）式至（1－35）式可知，控制支路不是开路（$i_1 = 0$）便是短路（$u_1 = 0$），所以，对所有四种受控源，其功率为

$$p(t) = u_2(t)i_2(t) \tag{1-36}$$

亦即可由受控支路来计算受控源的功率。

例 1－13　VCVS 连接于信号电压源 u_S 与负载电阻 R_L 之间，如图 1－50 所示，R_S 为信号电压源的内阻。试求负载电压（输出电压）u_O 与信号电压（输入电压）u_S 的关系，并求受控源的功率。

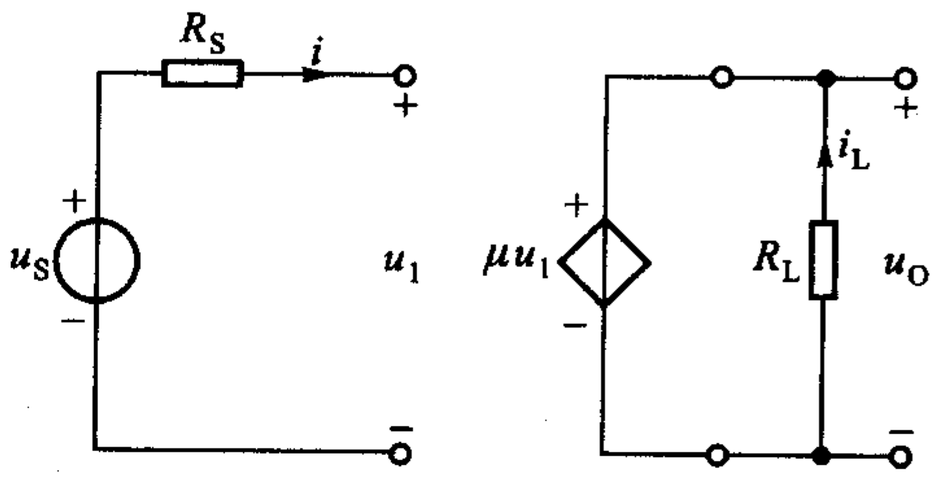


图 1－50　例 1－13

解　求解含受控源的电路时，仍需根据两类约束列出所需方程。为方便计，在列写方程时可暂先把受控源看作独立源。由 KVL 可得

$$\mu u_1 - u_O = 0$$

由于 $i = 0$，故得

$$u_1 = u_S$$

代入上式后，得

$$u_O = \mu u_S$$

此即为输出电压与输入电压的关系，两者成正比。若 $\mu > 1$，则 $u_O > u_S$，此时受控源起着线性放大器的作用。

考虑到受控支路电压和电流的参考方向，由（1－36）式可求得受控源的功率

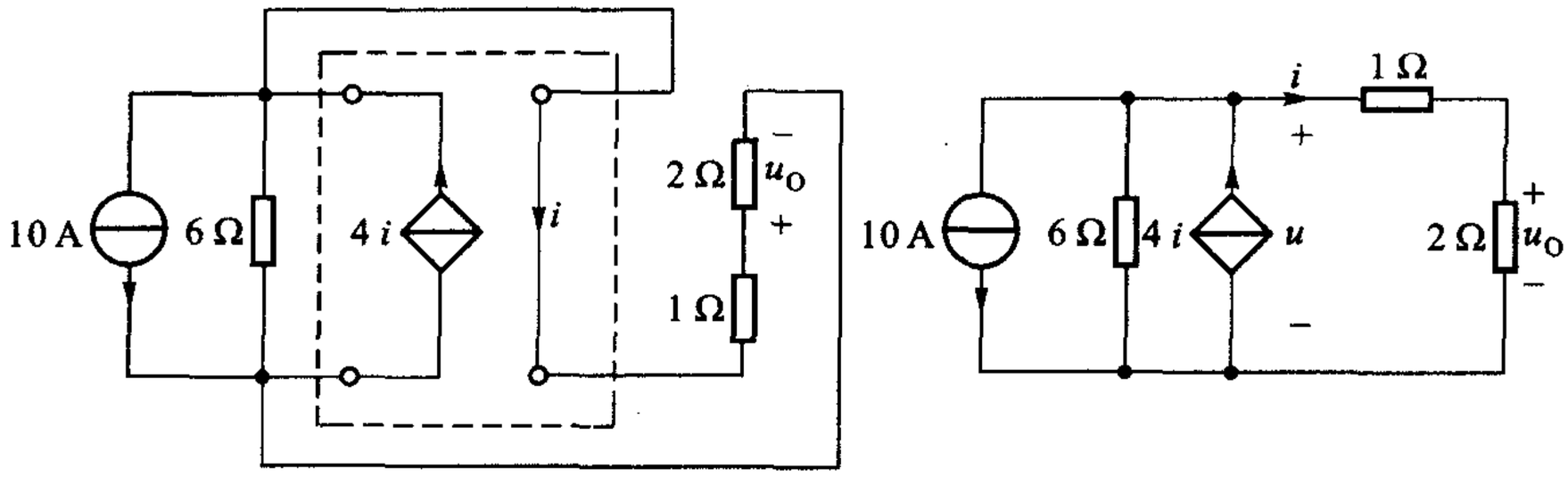
$$p = \mu u_1 i_L = \mu u_1 (-\mu u_1 / R_L) = -(\mu u_1)^2 / R_L$$

其值恒为负，亦即受控源向外提供功率。不难算出，负载 R_L 消耗的功率就是由受控源提供的。（由 1－28）式可知，受控源是一种有源元件。受控源往往是某一器件在一定外加电源工作条件下的模型，一般在模型中并不表明该电源，但受控源向其外电路提供的功率来自该电源。

例 1－14　含 CCCS 电路如图 1－51（a）所示，试求电压 u_O 和流经受控源的电流。

解　图 1－51（a）所示为凸显受控源的控制和受控支路的电路图，分析时常

用图 1－51(b)所示简化图,注意正确标出控制量即可。今后一律采用简化图,受控源也仅指受控支路而言。



(a)　　(b)

图 1－51　例 1－14

含受控源电路仍需满足两类约束。在列写 KVL、KCL 方程时,有两点要牢记在心:其一,在列写方程时要把受控源暂时看作独立源,以便顺利列出。本题为求解 u,需列写 KCL 方程,列写时把受控源看作是电流为 $4i$ 的电流源,可得①

$$\frac{u}{6}+\frac{u}{1+2}-(4i)+10=0$$

其二,列出方程后,必须找出控制量(本题为 i)与求解量(本题为 u)的关系,以之代入写出的方程才能求得答案。本题所需的这一关系是

$$i=\frac{u}{3}$$

于是

$$\frac{u}{6}+\frac{u}{3}-4\left(\frac{u}{3}\right)+10=0$$

解得

$$u=12\ \text{V}$$

$$i=\frac{12}{3}\ \text{A}=4\ \text{A}$$

故得

$$u_O=(2\ \Omega)i=8\ \text{V}$$

流经受控源的电流为

$$4i=16\ \text{A}$$

---

① 为简化计,列方程时未标示式中所涉及物理量的单位,所列方程可理解为根据有关定律、方法列出的、已采用合理单位的数值方程,用以求解所需的未知量。除非有特殊需要,以后一般均仿此。

练习题

1－14　求图 1－52 所示受控源提供的功率，已知 $u=10$ V。

（16×10^{-2} W）

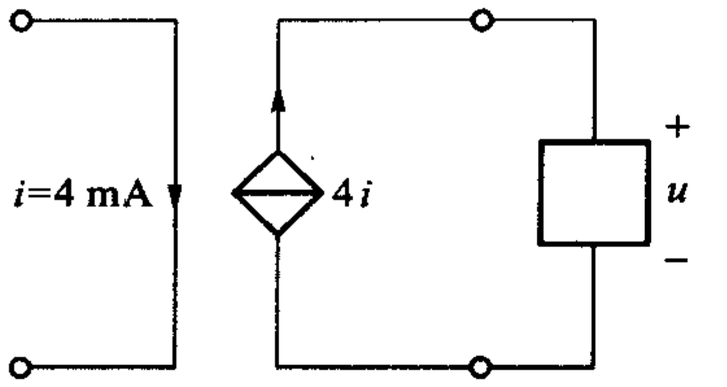


图 1－52　练习题 1－14

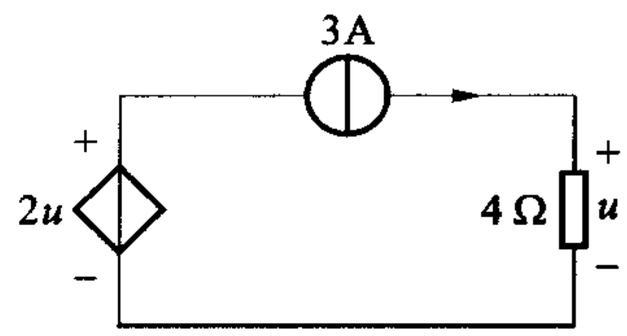


图 1－53　练习题 1－15

1－15　电路如图 1－53 所示，求各元件的功率。

（36 W，－72 W，36 W）

1－16　图 1－54 所示电路中，已知 $i_1=2$ A，$r=0.5$ Ω，求 i_S。

（7 A）

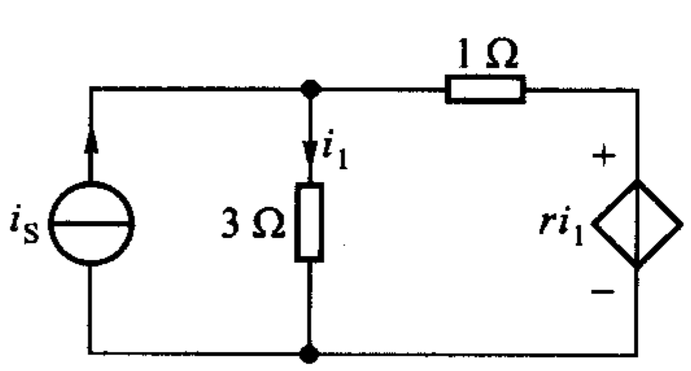


图 1－54　练习题 1－16

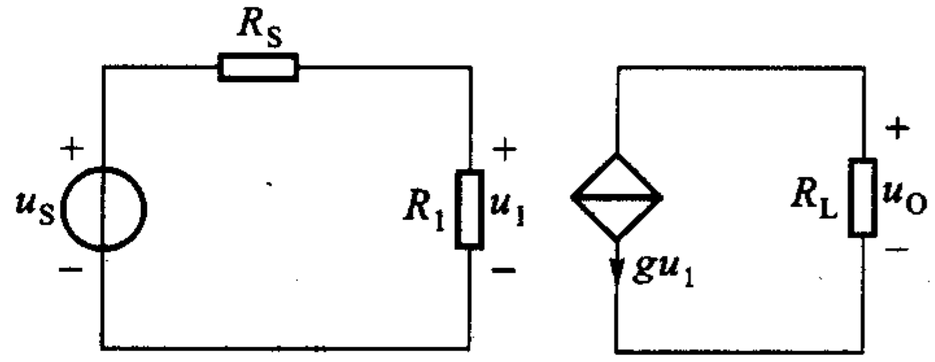


图 1－55　练习题 1－17

1－17　求图 1－55 所示电路的 u_0/u_S。

$$\left(-\frac{gR_1R_L}{R_1+R_S}\right)$$

§1－8　分压公式和并联电路的分流公式

在电路分析中，串联电路的分压公式和并联电路的分流公式是两个很有用的公式。

在电子电路中常需多种不同数值及极性的直流工作电压，对信号电压的大小也常需加以控制（如录音机、电视机的音量控制），运用分压电路可解决这类问题，并可用分压公式来进行计算。

在图 1－56 所示电路中，两个串联电阻的总电压为 u，流过同一电流 i，显然，每个电阻的电压只是总电压的一部分。串联电阻电路具备对总电压的分压

作用,作这一用途时又常称为分压电路。分压关系可推导如下。

由 KVL 及欧姆定律得

$$\begin{aligned} u &= u_1 + u_2 \\ &= R_1 i + R_2 i \end{aligned}$$

因而

$$i = \frac{u}{R_1 + R_2}$$

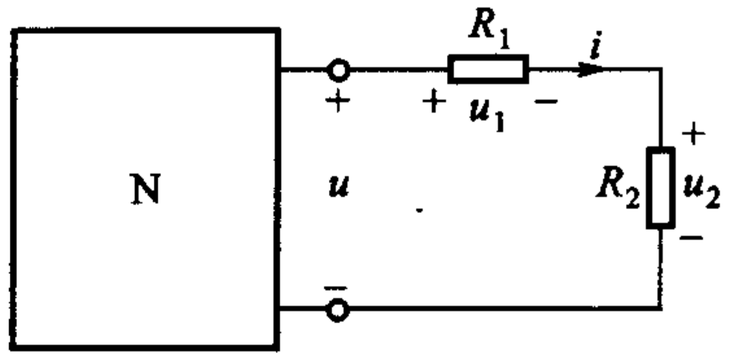


图 1－56　分压电路

由此可知

$$u_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} u$$

$$u_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u$$

以上两式表明:串联电阻中的任一电阻的电压等于总电压乘以该电阻对总电阻的比值。显然,电阻值大的分配到的电压也高。这两式便是两电阻串联电路的分压公式。

若有 n 个电阻串联,不难得出第 k 个电阻的电压为

$$u_k = \frac{R_k}{\sum_{k=1}^{n} R_k} u \tag{1-37}$$

这是分压公式的一般形式,式中的分母即为串联电路的总(等效)电阻

在电子电路中常把金属机壳作为导体,而把一些应连接在一起的元件一端分别就近与机壳相连,例如图 1－57(a)中电源的负极与 R_1 的一端本应相连,在实际设备中可分别与机壳相连而毋需再另用导线,图中“⊥”系接机壳的图形符号(见表 1－1)。机壳往往也称为“地”(ground),虽然它并不与大地相连接。在对电子电路进行电压测量时,为方便计,常把电压表的“－”端接机壳,而以“＋”端依次接触电路中各个节点,测得各节点与机壳间的电压(仪表反向偏转记为负值)。因此,机壳又称为电路的参考节点,各节点至参考节点间的电压降则定

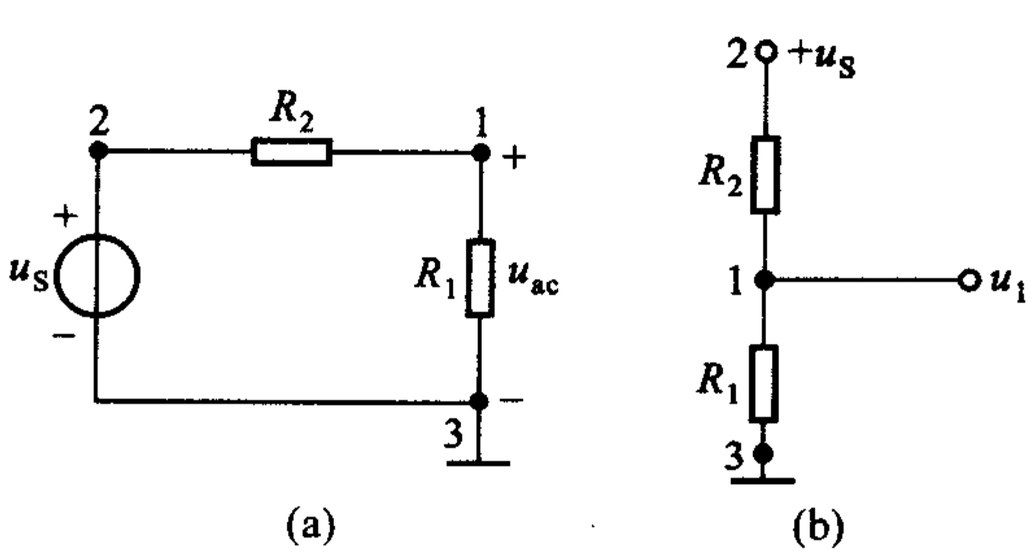


图 1－57　电子电路中分压电路的习惯表示形式

义为该点的节点电压(node voltage)。例如图 1－57(a)中,节点 1 的节点电压实际上即为节点 1 至参考点 3 的电压降 u_{13},可记为 u_{N1},下标中的"N"意为节点。在不致引起混淆时,节点 1 的节点电压可径称为 1 点的电压(或电位),相应地可记为 u_1[①],略去字母 N。显然,参考节点的电压 $u_3 = u_{33} = 0$,故参考节点又称为"零点"或"零电位点"。对节点电压,通常毋需标示参考极性,参考点被认为是节点电压的"－"端。

根据上述特点,电子电路有一种简化的习惯画法,即:电源不用图形符号表示而改为只标出其极性及电压值。这样:图 1－57(a)可改画为图 1－57(b),2 端标出 $+u_S$,意为电压源的正极接在 2 端,其电压值为 u_S,电源的另一极(负极)则接在参考点 3 处,不再标示。

分压电路也可用一个具有滑动接触端的三端电阻器来组成,如图 1－58 所示。这种可变电阻器又称为"电位器"(potentiometer)。电压 u 施加于电阻 R 的两端,即 2、3 端间,随着 1 端的滑动,在 1、3 端间可得到从零至 u 连续可变而极性不变的电压。

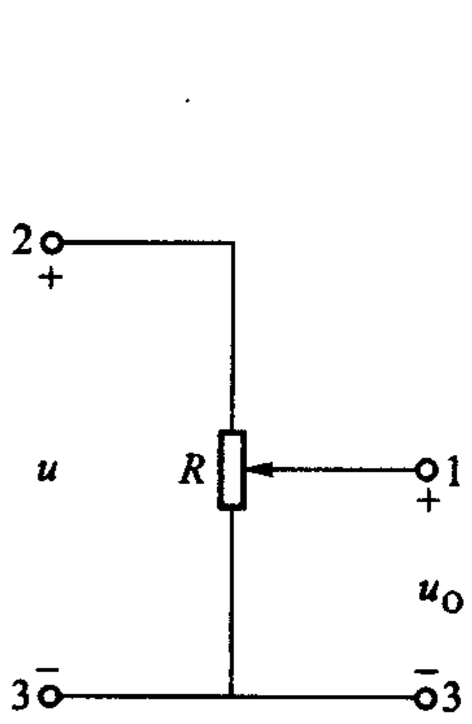


图 1－58　电位器

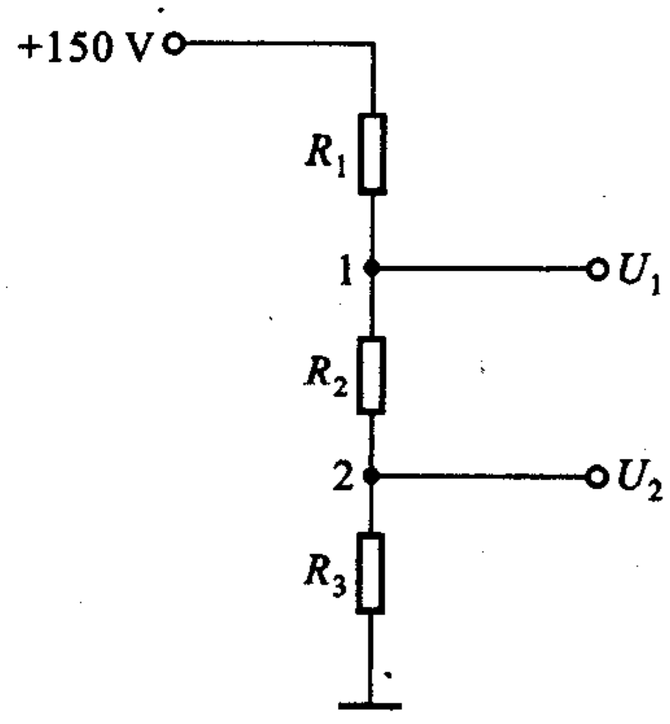


图 1－59　例 1－15

例 1－15　空载直流分压电路如图 1－59 所示,$R_1 = R_2 = R_3 = 100\ \Omega$,求节点电压 U_1 及 U_2。

解　注意 U_1、U_2 均系指自节点 1、2 分别至参考点的电压,U_1 并非是 R_2 两端的电压而是 $R_2 + R_3$ 两端的电压! R_2 两端的电压应记为 U_{12}。因此

$$U_1 = 150\left(\frac{R_2 + R_3}{R_1 + R_2 + R_3}\right)\ \text{V} = 150\left(\frac{200}{200 + 100}\right)\ \text{V} = 100\ \text{V}$$

---

① 此处的下标系指节点的标号;支路电压编号记法中的下标系指支路的标号。在本书中,如同时讨论到节点电压和支路电压时,将采取对节点电压在下标中添加字母"N"的记法,或对支路电压用双下标的记法(见第 18 页脚注及 §2－2)。

$$U_2 = 150\left(\frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3}\right)\ \text{V} = 150\left(\frac{100}{200 + 100}\right)\ \text{V} = 50\ \text{V}$$

在如图 1－59 所示的电子电路习惯表示形式的命题中常省去“节点电压”字样。

例 1－16　图 1－60(a)所示电路为双电源直流分压电路，试说明 U_1 可在 +15 V至 －15 V 间连续变化。电位器电阻为 R，α 表示 1、3 间的电阻在电位器总电阻 R 中所占比例的数值，$0 \leqslant \alpha \leqslant 1$。

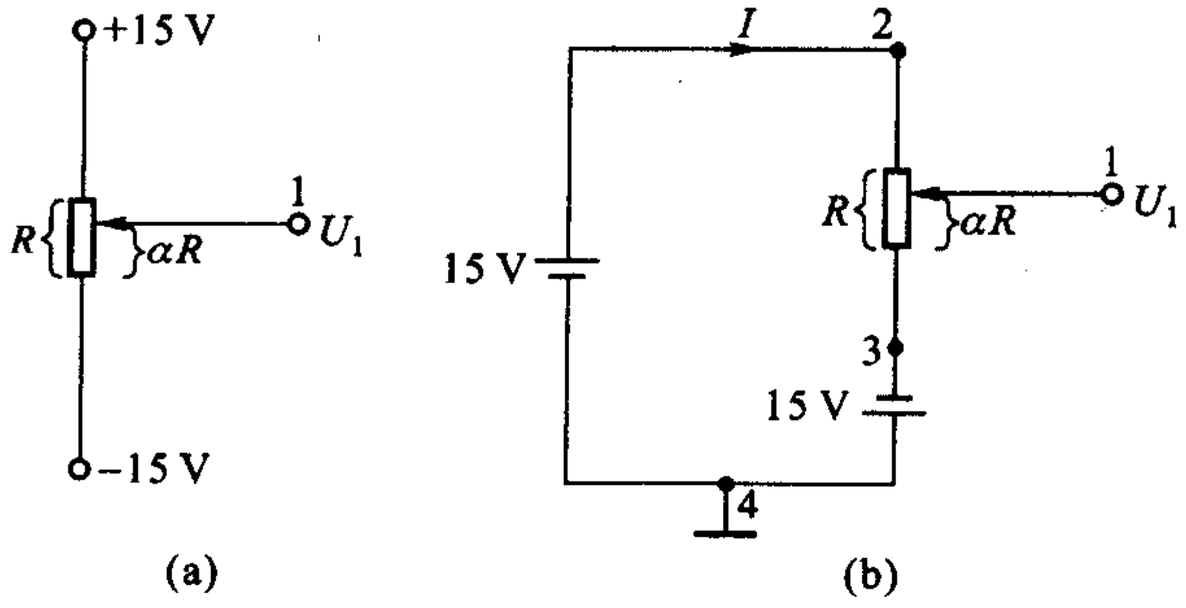


图 1－60　例 1－16

解　初学者往往对图 1－60(a)所示形式的电路不习惯，不妨把它改画成图 1－60(b)，其中 4 为电源公共端的标号，是电路的参考点。由该图可知：

当滑动端 1 移至 b 时，$\alpha = 1$，$U_1 = 15$ V。

当滑动端 1 移至 c 时，$\alpha = 0$，$U_1 = -15$ V。

当滑动端 1 在其他位置时，U_1 可计算如下：

设电流 I 的参考方向如图中所示，由 KVL 及欧姆定律可得

$$RI - 15\ \text{V} - 15\ \text{V} = 0$$

$$I = \frac{30\ \text{V}}{R}$$

故得

$$U_1 = U_{14} = \alpha RI - 15\ \text{V} = (30\alpha - 15)\ \text{V}$$

此为沿 134 路径算得的结果，如沿 124 路径计算，可得同样的结果，即

$$U_1 = U_{14} = -(1 - \alpha)RI + 15\ \text{V} = (30\alpha - 15)\ \text{V}$$

当滑动端移动时，α 随之而变，U_1 亦随之而变。$\alpha = 1$，$U_1 = 15$ V；$\alpha = 0.5$，$U_1 = 0$；$\alpha = 0$，$U_1 = -15$ V。U_1 在 +15 V 与 －15 V 间连续可变。

◀

串联电阻电路可起分压作用；并联电阻电路则可起分流作用。在图 1－61 所示电路中，两个并联电阻的总电流为 i，两端的电压同为 u，显然，每个电阻的电流只是总电流的一部分，并联电阻电路具备对总电流的分流作用，作这一用途

时常又称为分流电路。分流关系可推导如下。

用电导表示电阻元件，则由 KCL 及欧姆定律可得

$$i = i_1 + i_2 = G_1 u + G_2 u = (G_1 + G_2) u$$

因而

$$u = \frac{i}{G_1 + G_2}$$

由此可知

$$i_1 = \frac{G_1}{G_1 + G_2} i \qquad (1-38a)$$

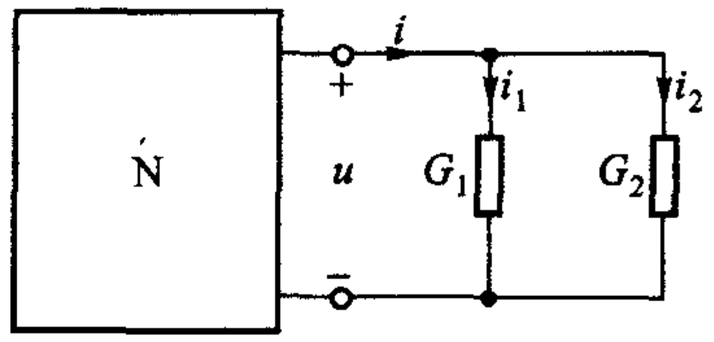


图 1-61　分流电路

$$i_2 = \frac{G_2}{G_1 + G_2} i \qquad (1-38b)$$

以上两式表明：并联电导中的任一电导的电流等于总电流乘以该电导对总电导的比值。显然，电导值大的分配到的电流也大。(1-38)式便是两电导并联电路的分流公式。

若有 n 个电导并联，不难得出第 k 个电导的电流为

$$i_k = \frac{G_k}{\sum_{k=1}^{n} G_k} i \qquad (1-39)$$

这就是分流公式的一般形式，式中分母即为并联电路的总(等效)电导。

思考题

1-11　R_1 与 R_2 并联，若总电流为 i，则用 i 和 R_1、R_2 表示的分流公式是怎样的？若与分压公式作比较，你将得出什么规律？

1-12　图 1-62 所示电路中，U_1 应为 −1 V，如果测得电压 U_1 为 20 V，电路出现了什么故障？如果测得的 U_1 为 6 V，又是什么故障？

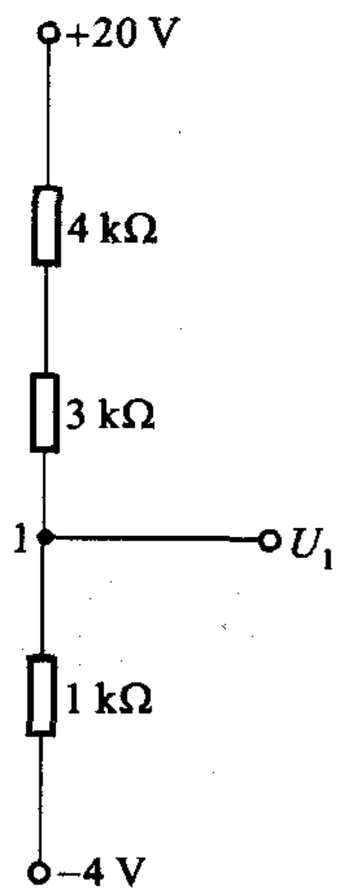


图 1-62　思考题 1-12

练习题

1-18　求图 1-63 所示各电路中的 u_X 和 i_X。

(−5 V、−5/3 A，3 V、1 A，1 V、1 A，50 V、20 mA，32 V、20/3 A，2 V、1 A)

1-19　计算图 1-64 所示各电路中 U_1、U_2 和 U_3。

(6 V，2 V，0；4 V，0，−2 V；160 V，205 V，0)

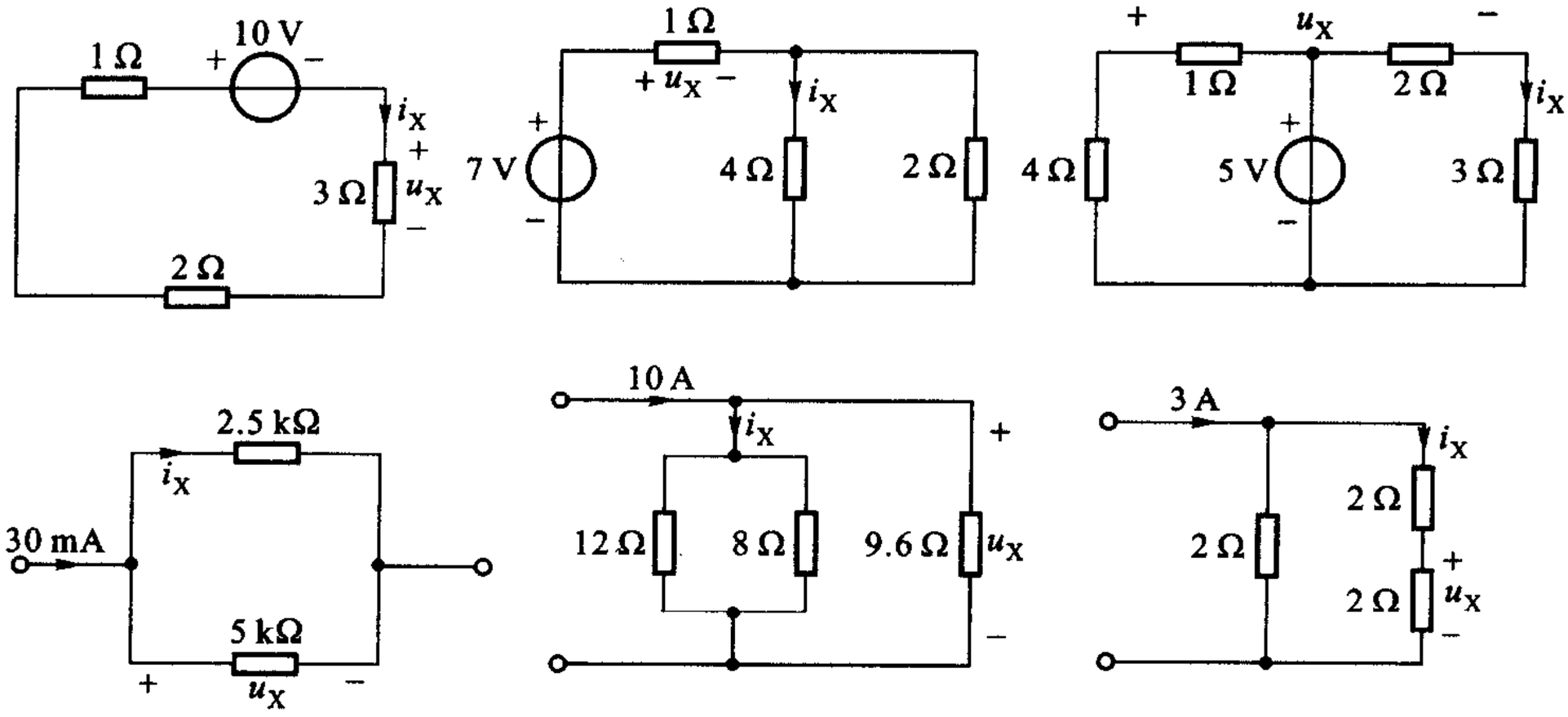


图 1－63　练习题 1－18

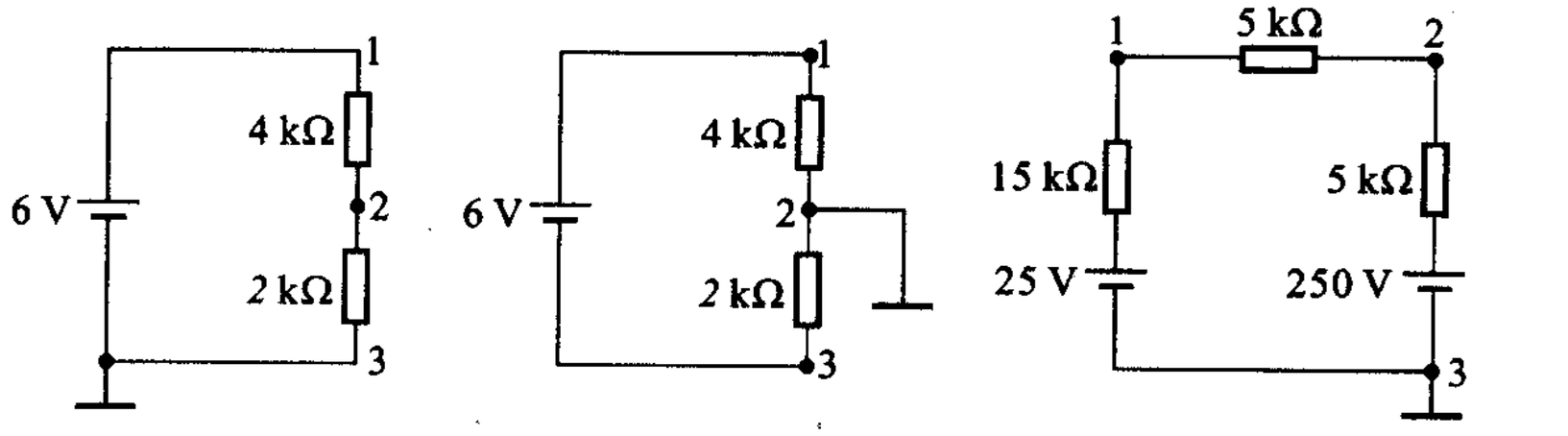


图 1－64　练习题 1－19

§1－9　两类约束　KCL、KVL 方程的独立性

前面几节讨论了 KCL、KVL 以及电阻元件、电源元件、受控源元件的 VCR，并运用它们计算了一些较简单的电阻电路。以后还将讨论其他一些元件的 VCR。必须指出：

KCL、KVL 和元件的 VCR 是对电路中各电压变量、电流变量施加的全部约束。不论是当前讨论的电阻电路还是以后讨论的动态电路都是如此，是处理集总电路问题的基本依据。

当元件相互连接组成具有一定几何结构形式的电路后，电路中出现了节点和回路，其各部分的电压、电流将为两类约束所支配。其一，来自元件的相互连接方式。与一个节点相连接的各支路，其电流必须受到 KCL 的约束；与一个回路相联系的各支路，其电压必须受到 KVL 的约束。例如，一个节点处只有两条支路相汇集，那么，由于这一连接方式，一条支路的电流将被迫与另一条支路的

电流相等，别无选择。又如，一个回路只由两条支路组成，那么，由于这一连接方式，一条支路的电压将被迫与另一条支路的电压相等，别无选择。这种只取决于互连形式的约束，称为拓扑约束(topological constraints)。另一类约束，来自元件的性质。每种元件的电压、电流形成一个约束，例如，一个线性时不变电阻将迫使其两端的电压 u 和流过的电流 i 服从 $u=Ri$ 的约束关系，别无选择。这种只取决于元件性质的约束，称为元件约束(element constraints)。一切集总电路中的电压、电流无不为这两类约束所支配。下文即将论证，根据这两类约束关系，可以列出联系电路中所有电压变量、电流变量的足够的独立方程组。具体说，对一个具有 b 条支路的电路，可以列出联系 b 个支路电流变量和 b 个支路电压变量所需的 $2b$ 个独立方程式。

下面以图 1－65 所示电路为例来说明。该电路有 4 个节点，5 条支路，计有 5 个支路电压变量、5 个支路电流变量，已在图中标出。

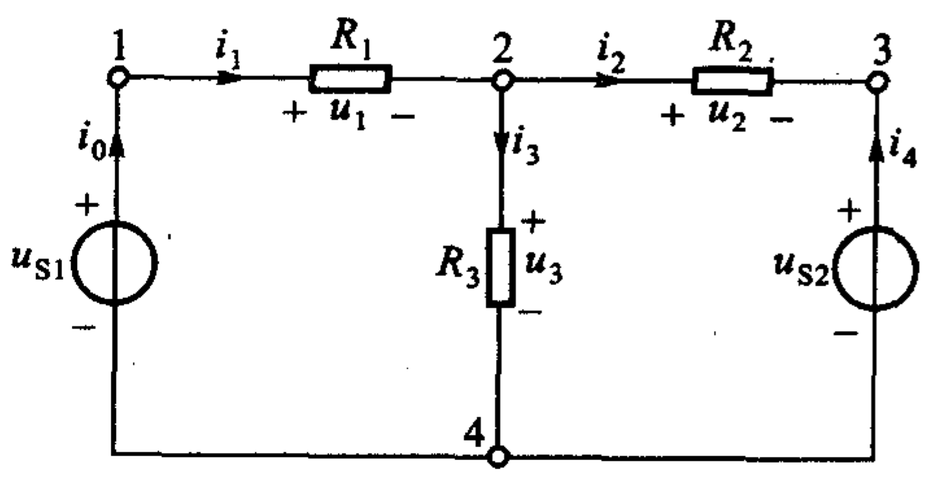


图 1－65　电阻电路一例

依次对节点 1、2、3、4 运用 KCL 可得

$$\left.\begin{aligned} i_0 - i_1 &= 0 \\ i_1 - i_2 - i_3 &= 0 \\ i_2 + i_4 &= 0 \\ -i_0 + i_3 - i_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{1-40}$$

这 4 个方程式中只有 3 个是独立的，例如第 4 个式子可由前三式相加、减得出。其他各式也有类似情况。因此，只需列出其中的任意 3 个式子。

运用 KVL 可得

$$\left.\begin{aligned} u_1 + u_3 - u_{S1} &= 0 \\ -u_3 + u_2 + u_{S2} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{1-41}$$

这里只列出了根据两个网孔所得的方程，式中 u_1、u_2、u_3 分别为 R_1、R_2、R_3 的电压。实际上，还可再列出一个 KVL 方程，即由外回路得

$$u_1 + u_2 + u_{S2} - u_{S1} = 0$$

显然这一方程也可由(1－41)两式相加获得，因而不是独立的。

由 5 条支路所得的 VCR 为

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= R_1 i_1 \\ u_2 &= R_2 i_2 \\ u_3 &= R_3 i_3 \\ u_{S1} &= \text{给定的输入(与 } i_0 \text{ 大小无关)} \\ u_{S2} &= \text{给定的输入(与 } i_4 \text{ 大小无关)} \end{aligned}\right\} \tag{1-42}$$

这5个式子是独立的，其中任何一个式子不能由其他式子推导出来。

以上总共得到了联系10个电压、电流变量的10个独立方程式。由于两电压源支路的电压是给定的，而电流是未知的，因此，该电路中的未知量实为8个，而在上述VCR中除去最后两式后，连同由KCL、KVL所得的5个方程式，共为8个方程式，由此可解出电路中每一个未知电压和电流。

在一般情况下，如果电路有 b 条支路，则有 $2b$ 个电压、电流变量，需用 $2b$ 个联立方程来反映它们的全部约束关系，显然；由 b 条支路的VCR可得到 b 个方程。其余的 b 个独立方程，则恰好可以由KCL及KVL提供。其论证如下：

（1）设电路的节点数为 n，则独立的KCL方程为（$n-1$）个，且为任意的（$n-1$）个。

论证：

每一支路接在两个节点之间，因而每一支路电流对一个节点为流出（设为 $+i_j$），则对另一个节点为流入（$-i_j$）。因此，如为所有的节点写KCL方程，每一支路电流将出现两次，一次为正，一次为负。

所有 n 个节点的KCL方程之和为

$$\sum_{k=1}^{n}(\sum i)_k=\sum_{j=1}^{b}[(+i_j)+(-i_j)]\equiv 0$$

这一结果表明，对电路的每一个节点写出KCL方程，则所得的 n 个方程是非独立的（线性相关）。例如（1-40）式所示的4个KCL方程相加，其结果恒等于零，因为每一支路电流出现两次，一次为正，一次为负。

但是，从这 n 个方程中，去掉任意一个，余下的（$n-1$）个方程一定是互相独立的。因为去掉一个节点方程，则这方程中的支路电流在其他节点方程中就只可能出现一次，因而如把其余的（$n-1$）个节点方程相加，这些支路电流就不可能与其他支路电流相消，相加的结果不可能恒为零，因而这（$n-1$）个方程是互相独立的。

（2）给定一平面电路（planar circuit）：

（a）该电路有[$b-(n-1)$]个网孔；

（b）[$b-(n-1)$]个网孔的KVL方程是独立的。

在论证之前，先说明什么是平面电路。可以画在一个平面上而不使任何两条支路交叉的电路为平面电路，例如图1-65所示电路。图1-66（a）所示则为非平面电路。但应注意有时电路图中支路交叉是由于所采用的作图法造成的，对这样的平面电路采用另一种作图法便可消除图中支路交叉的情况。如图1-66（b）所示电路，这里支路交叉的情况是可以通过改变作图消除掉的，因而实际上仍是平面电路。以前所说网孔的概念应只适用于平面电路。

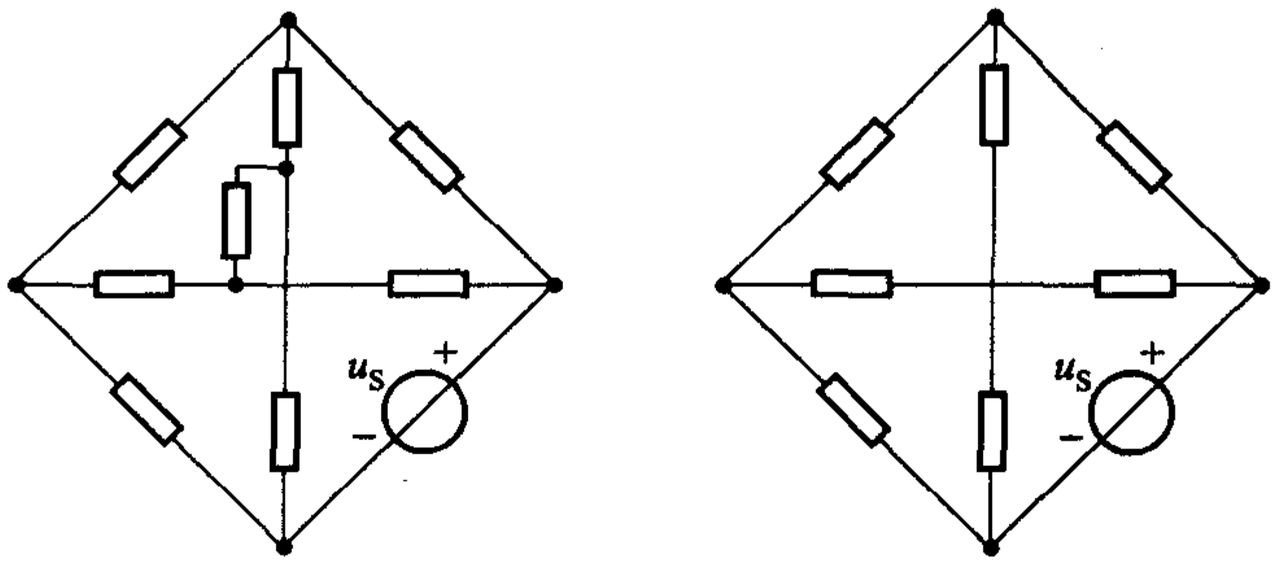


图 1－66　平面电路与非平面电路

论证：

平面电路网孔数 $m = b - (n-1)$，可以用数学归纳法证明。当 $m = 1$ 时，由图 1－67(a)可知，这一关系式无疑是正确的。下一步再证明：若对一个具有 m 个网孔的电路，该式正确，则当电路改为 $(m+1)$ 个网孔时，该式仍然正确，如图 1－67(b)所示。可以在现存的节点之间加上一条支路使网孔数增加 1 个；也可加上 k 条串联支路，这些支路经过 $(k-1)$ 个节点与原来的电路相连，也能使网孔增加 1 个。如令新电路的网孔数为 m'，支路数为 b'，节点数为 n'，则显然有

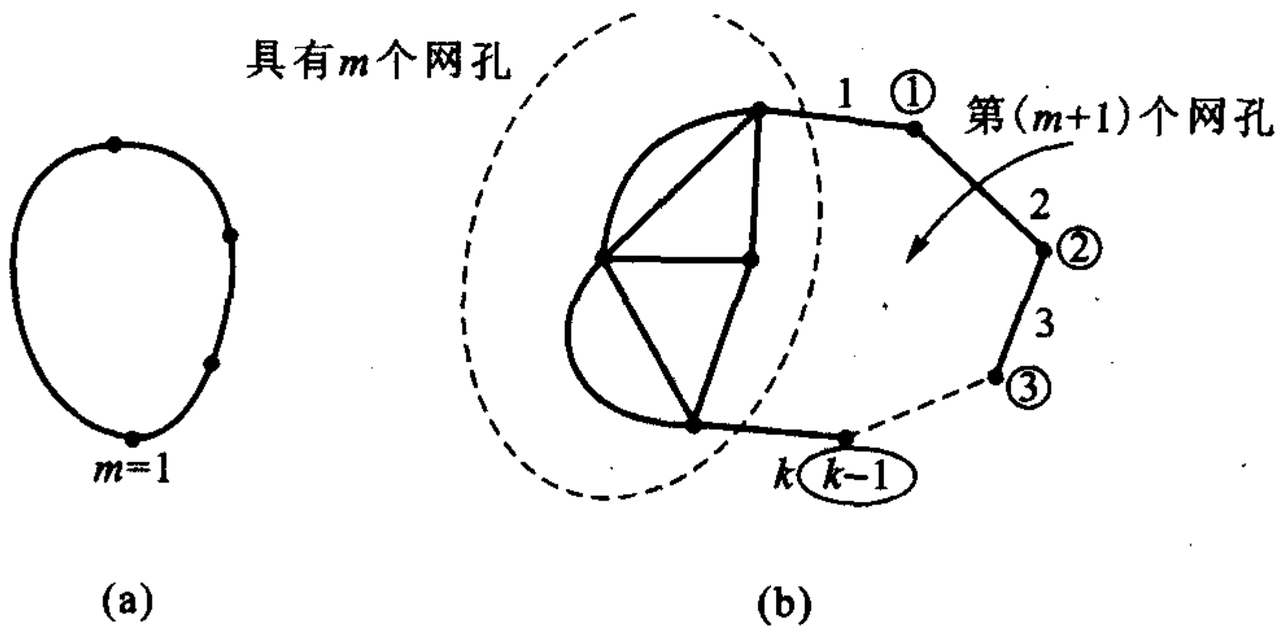


图 1－67　平面电路网孔公式证明用图

$$m' = m + 1, b' = b + k, n' = n + (k-1)$$

由于 $m = b - (n-1)$，因而

$$m' = m + 1 = b - (n-1) + 1$$

$$= b' - k - n' + k + 1 = b' - n' + 1 = b' - (n'-1)$$

可知网孔数的公式依然正确。

对 $[b - (n-1)]$ 个网孔所列的 KVL 方程是独立的，其论证与 KCL 方程独立

性问题的论证相类似。在平面电路中，每一支路或为两网孔所共有，或只属于电路的边界。如把边界也看成是一个包围外部“空间”的网孔，称为外沿网孔，则所有支路都将为两个网孔所共有（如把这个平面电路绘在一个乒乓球上，可以很容易看到这点）。

设电路的网孔数为 m，则包括外沿网孔在内的 $(m+1)$ 个网孔的 KVL 方程之和为

$$\sum_{k=1}^{m+1}(\sum u)_k=\sum_{j=1}^{b}[(+u_j)+(-u_j)]\equiv 0$$

其和恒等于零，这是因为在列网孔的 KVL 方程时绕行都一致（图 1－68），每一支路电压出现两次，一次为正，一次为负，互相抵消之故。因此，$(m+1)$ 个 KVL 网孔方程是非独立的。

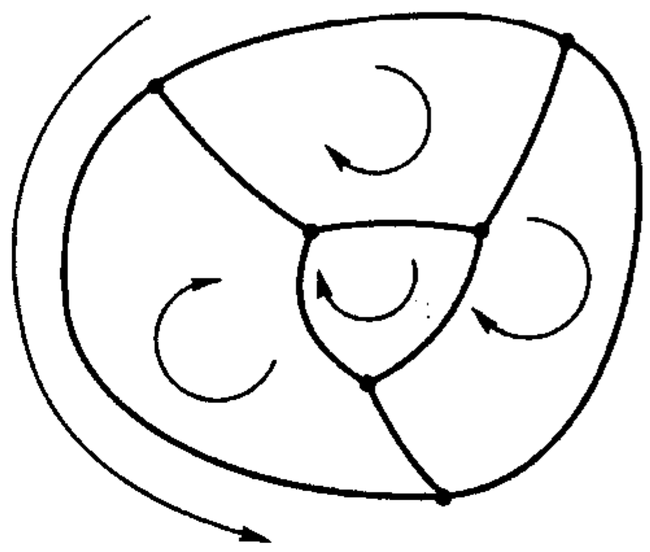


图 1－68　网孔及外沿网孔

但是，去掉一个网孔方程（可去掉外沿网孔的方程），其余 m 个网孔方程是独立的，其理由与论证 KCL 独立方程时相类似。因此，$m=[b-(n-1)]$ 个 KVL 网孔方程是独立的。

（3）综上所述，由KCL及KVL可以得到的独立方程总数是 b 个。因为

$$n-1+m=n-1+b-(n-1)=b$$

证毕。

必须指出：把 KVL 运用到每一网孔，从而得到独立的 KVL 方程，这只是一种方法而已，而且这一方法只能用于平面电路，还有可以获得 KVL 独立方程的其他方法，但不论用什么方法，独立的 KVL 方程的数目总是 $[b-(n-1)]$ 个①。

能提供独立的 KCL 方程的节点，称为独立节点；能提供独立的 KVL 方程的回路称为独立回路。

§1－10　支路分析

本书讨论电路分析问题。电路分析的典型问题是：给定电路的结构、元件的特性以及各独立电源的电压或电流（激励），求出电路中所有的支路电压和支路电流，或某些指定的支路电压、支路电流（响应）。

对含有 b 条支路的电路，列出如上节所述的 $2b$ 个联立方程从而解出 $2b$ 个

① 参见《简明电路分析基础》§2－5。

支路电压、电流或所需的电压、电流，称为 $2b$ 分析或 $2b$ 法。从解题角度来看，若在 b 条支路中，独立电压源支路及独立电流源支路的总数为 b_S，则在 $2b$ 分析中

$$\text{未知电压、电流数} = 2b - b_S$$

因为，电源给定，则对电压（流）源支路来说，支路电压（流）便是已知量。这样，所需的方程数也为 $(2b - b_S)$ 个，由 KCL 及 KVL 可列出其中的 b 个，由非电源支路的 VCR 可列出其中的 $(b - b_S)$ 个。

$2b$ 分析往往涉及求解大量联立方程式的问题，因此需要寻求减少联立方程式的电路分析方法。但是，从概念上说，$2b$ 分析是很重要的，它是所有其他电路分析方法的基础。在计算机辅助电路分析中，这一分析具有易于形成方程式的优点，因而受到重视①。

与 $2b$ 分析不同，$1b$ 分析并不企图同时解得支路电压和支路电流，而是先去解得支路电流（或支路电压），再去求解支路电压（或支路电流），涉及的联立方程数等于支路数 b，故称为 $1b$ 分析或 $1b$ 法。

仍以图 1－65 所示电路为例，由（1－42）式可知，各电阻支路的电流与电压是与相应支路的 VCR 相联系的。一旦求得各电阻支路电流，各电阻支路电压立即可由相应支路的 VCR 求得；反之，一旦求得各电阻支路电压，各电阻支路电流也可由相应支路的 VCR 立即求得。这里都不存在求解联立方程的问题。因此，电路分析不妨分为两步进行，即：先设法求得各电阻支路电流（或支路电压）以及电压源的电流和电流源的电压，然后再利用电阻支路的 VCR 求得电阻支路电压（或支路电流）。对图 1－65 所示电路，如以电阻支路电流（或支路电压）和电压源支路电流为未知量，所需联立方程式为 $b = 5$ 个，少于 $2b$ 法中的 $2b - b_S = 8$ 个联立方程式。

对图 1－65 所示电路以电阻支路以及电压源支路的电流 i_1、i_2、i_3、i_4、i_0 为未知量，其联立方程可列写如下：

仍按任意三个节点写出三个 KCL 方程，例如

$$\left.\begin{aligned} i_0 - i_1 &= 0 \\ i_1 - i_2 - i_3 &= 0 \\ i_2 + i_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{1-43}$$

以（1－42）式的 VCR 代入（1－41）式得

$$\left.\begin{aligned} R_1 i_1 + R_3 i_3 - u_{S1} &= 0 \\ -R_3 i_3 + R_2 i_2 + u_{S2} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{1-44}$$

由上列的 5 个方程即可解出所需的未知电流，进而求出所需电压。（1－

① 如计算机辅助分析中的表格分析（tableau analysis）即是由 $2b$ 分析发展而来的。

44)式所示的两个方程常可根据 KVL 结合电阻元件及电源元件的 VCR 直接列出。在 1 b 分析中,这种以支路电流为变量,建立联立方程组求解电路的方法常称为支路电流法。若电路中含有给定的电流源,则在 KVL 方程中将出现相应的未知电压项,在求解支路电流时将一并求出。这样,若电路具有 b 条支路,则支路电流法的联立方程数为 b 个。

类似地,也可以支路电压为变量,建立联立方程组来求解电路,在 1b 分析中,这种方法常称为支路电压法。把支路的 VCR 代入 KCL 后可以得到以支路电压为变量的方程,把它们和 KVL 方程联立,即可求得所需的未知电压,进而求出所需的电流。若电路中含有给定的电压源,则在 KCL 方程中将出现相应的未知电流项,在求解支路电压时将一并求出。这样,若电路具有 b 条支路,则支路电压法的联立方程数为 b 个。

仍以图 1 -65 所示电路为例,以电阻支路电压以及电压源支路的电流 u_1、u_2、u_3、i_4、i_0 为未知量,以(1 -42)式的 VCR 代入(1 -40)式的三个独立 KCL 方程得

$$\left.\begin{aligned} i_0 - \frac{u_1}{R_1} &= 0 \\ \frac{u_1}{R_1} - \frac{u_2}{R_2} - \frac{u_3}{R_3} &= 0 \\ \frac{u_2}{R_2} + i_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{1-45}$$

两个 KVL 方程则仍如(1 -41)式所示。解此 5 个联立方程,即可求得所需的电压及电压源电流,进而求出所需的电流。

2b 分析和 1b 分析均立足于支路,可合称为支路分析(branch analysis)。

思考题

1 -13　图 1 -69 所示电路中有几个网孔?指出哪些元件是串联的或并联的?若节点①与②相连接,再回答上述问题。

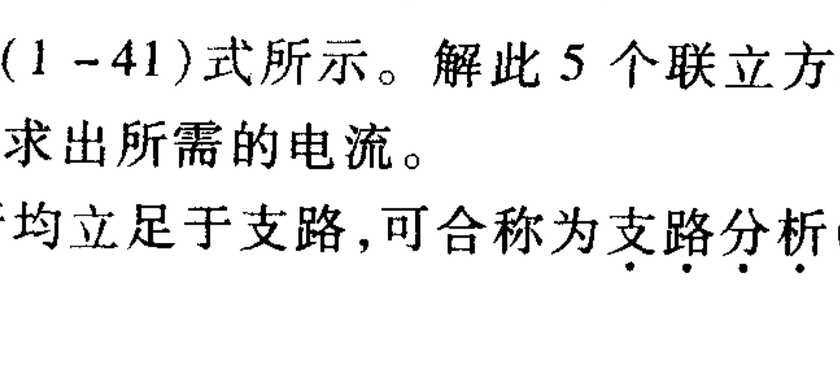


图 1 -69　思考题 1 -13

1－14　图 1－70 所示电路有几个节点？哪些元件是串联的或并联的？

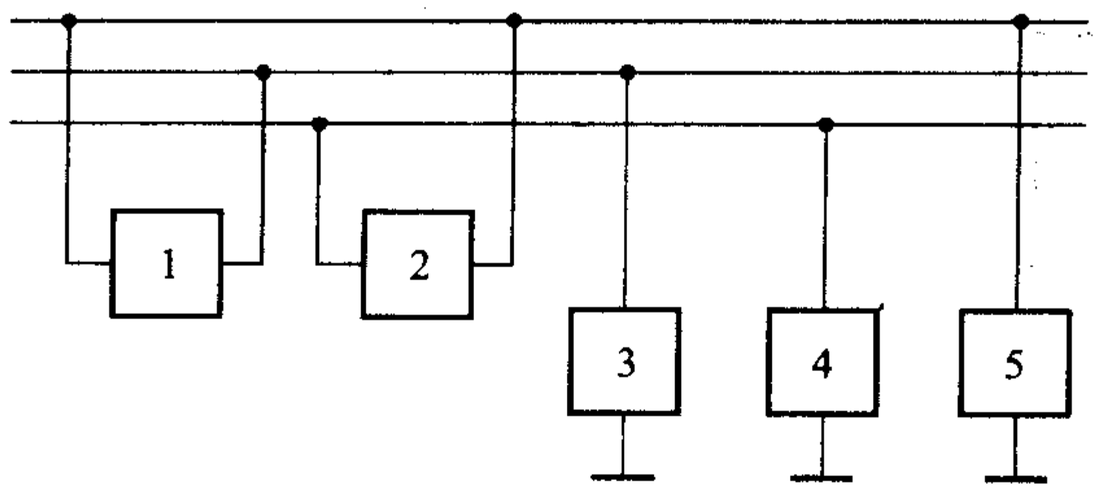


图 1－70　思考题 1－14

练习题

1－20　图 1－71 所示为直流电阻电路，各支路电流参考方向如图所示，支路电压的参考方向与电流的参考方向设为一致（关联参考方向），试列出：（1）2*b* 法的联立方程组；（2）支路电流法的联立方程组。

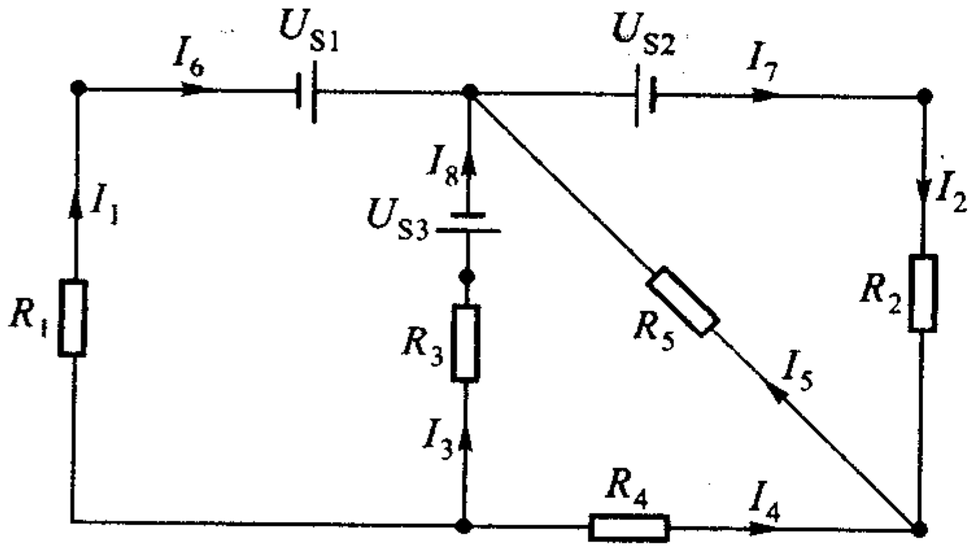


图 1－71　练习题 1－20

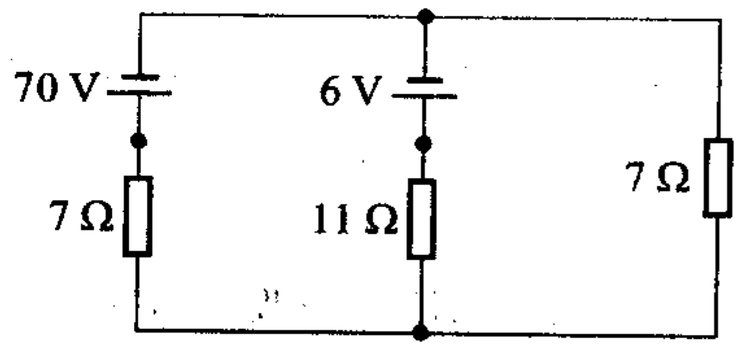


图 1－72　练习题 1－21

1－21　用支路电流法求解图 1－72 所示电路的各支路电流。

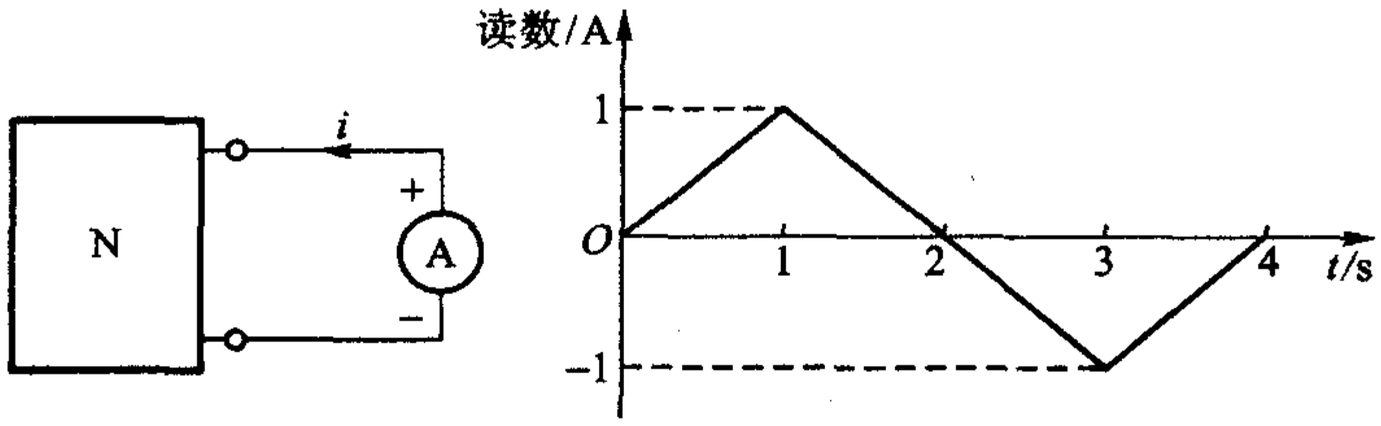
（6 A、4 A、2 A）

习题

§1－2　电路变量　电流、电压及功率

1－1　接在图题 1－1 所示电路中电流表 A 的读数随时间变化的情况如图中所示。试确定 $t=1$ s、2 s 及 3 s 时的电流 i。

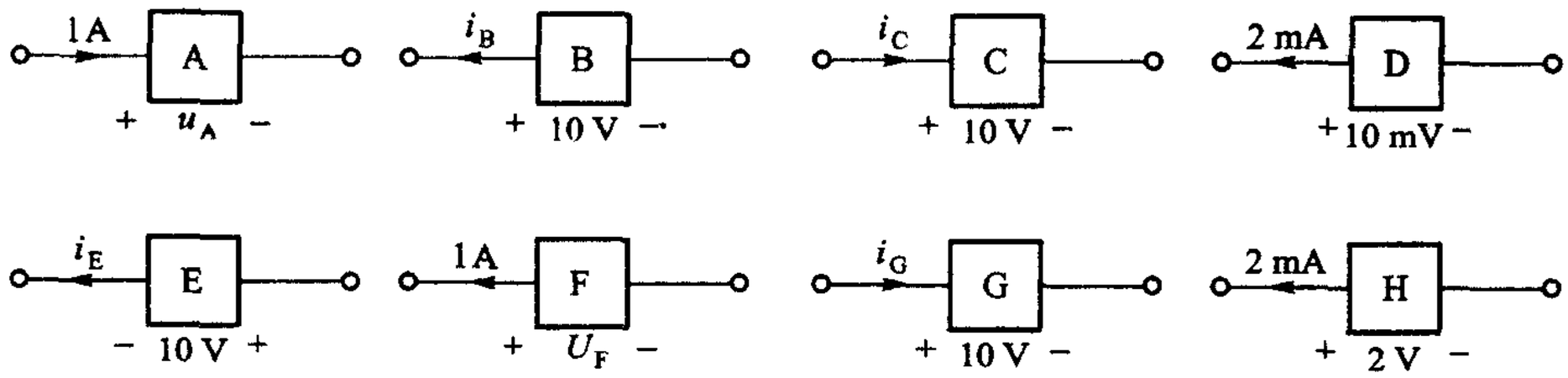
1－2　设在图 1－2 所示元件中，正电荷以 5 C/s 的速率由 a 流向 b。（1）如电流的参考



图题 1－1

方向假定为由 a 至 b,求电流。(2) 如电流的参考方向假定为由 b 至 a,求电流。(3) 如流动的电荷为负电荷,(1)、(2)答案有何改变?

1－3　各元件的情况如图题 1－2 所示。



图题 1－2

(1) 若元件 A 吸收功率 10 W,求 u_A;

(2) 若元件 B 吸收功率 10 W,求 i_B;

(3) 若元件 C 吸收功率 －10 W,求 i_C;

(4) 试求元件 D 吸收的功率;

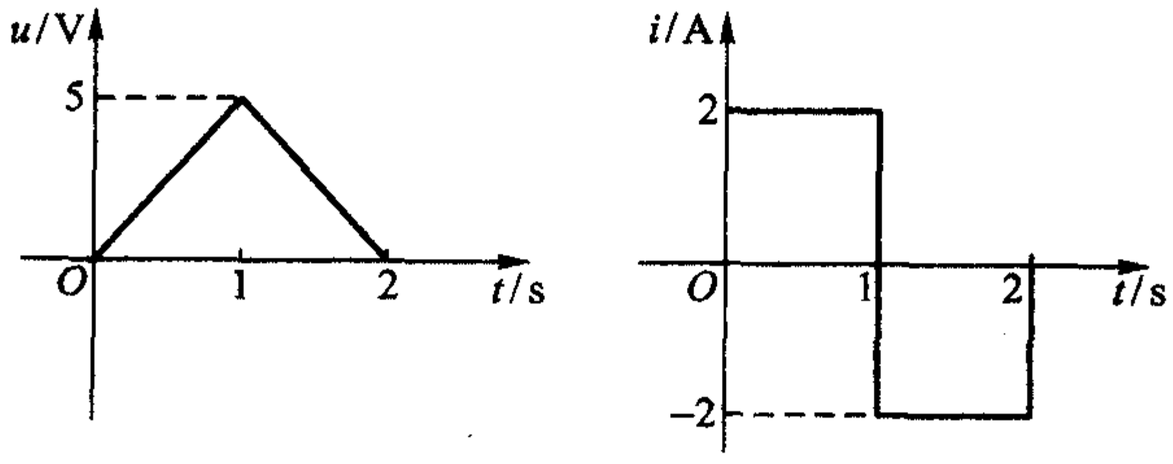
(5) 若元件 E 提供的功率为 10 W,求 i_E;

(6) 若元件 F 提供的功率为 －10 W,求 u_F;

(7) 若元件 G 提供的功率为 10 mW,求 i_G;

(8) 试求元件 H 提供的功率。

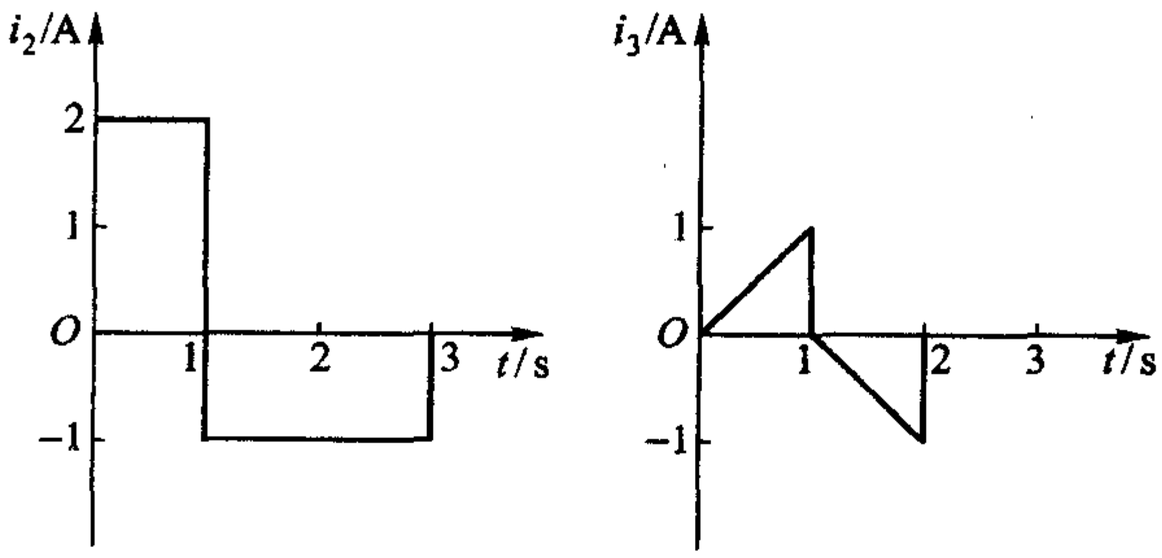
1－4　某元件电压 u 和电流 i 的波形如图题 1－3 所示,u 和 i 为关联参考方向,试绘出该元件吸收功率 $p(t)$ 的波形,并计算该元件从 $t=0$ 至 $t=2$ s 期间所吸收的能量。



图题 1－3

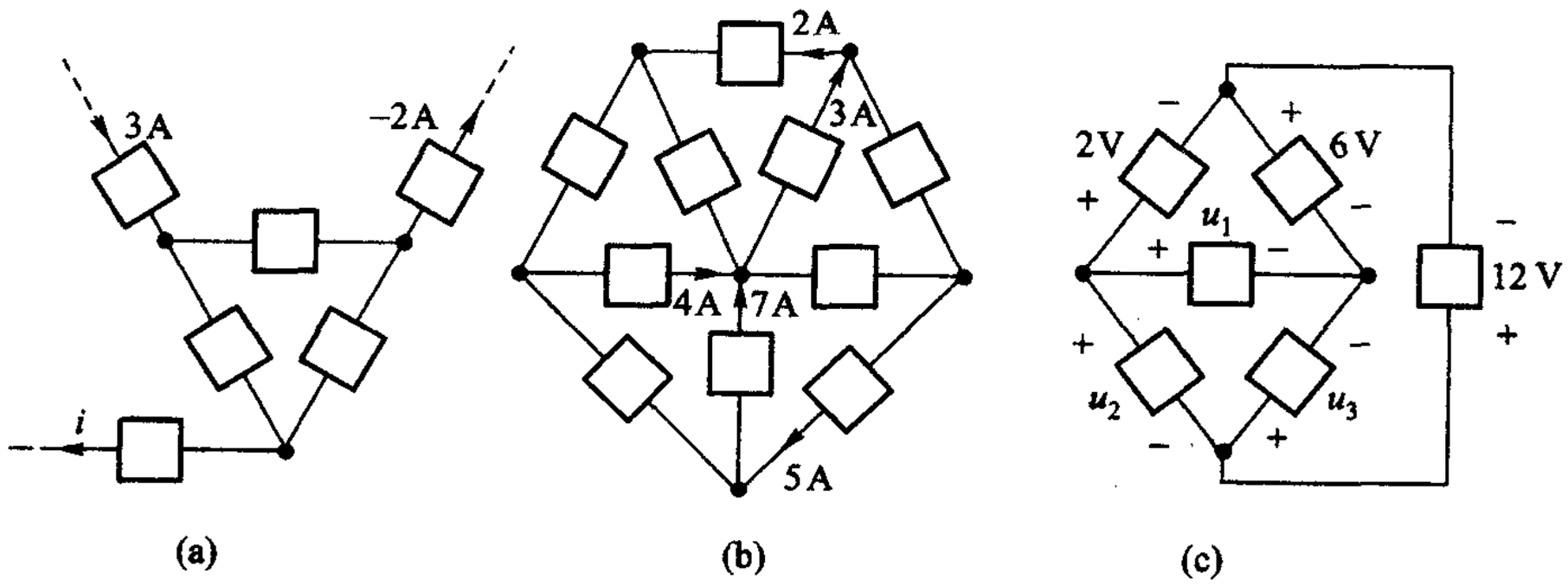
§1-3　基尔霍夫定律

1-5　对图 1-9 所示节点，已知 $i_2(t)$ 和 $i_3(t)$ 的波形图如图题 1-4 所示，求 $i_1(t)$ 的波形图。



图题 1-4

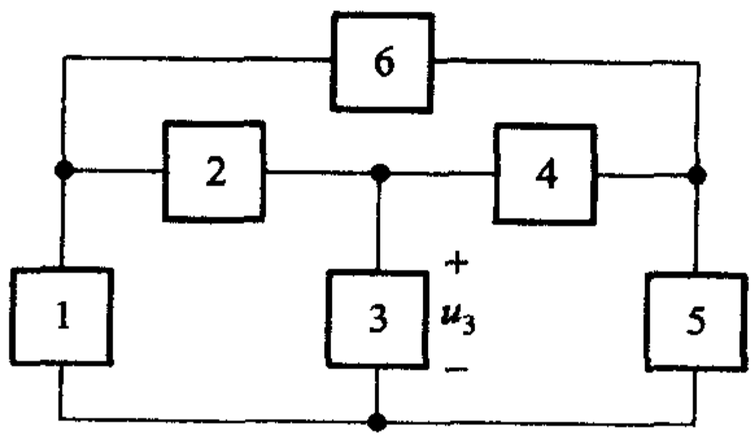
1-6　电路如图题 1-5 所示，试求：(1) 图(a)中的 i；(2) 图(b)中各未知电流；(3) 图(c)中的 u_1、u_2 和 u_3。



图题 1-5

1-7　图题 1-6 电路中电压 u_3 的参考极性已选定，若该电路的两个 KVL 方程为

$$u_1 - u_2 - u_3 = 0$$



图题 1-6

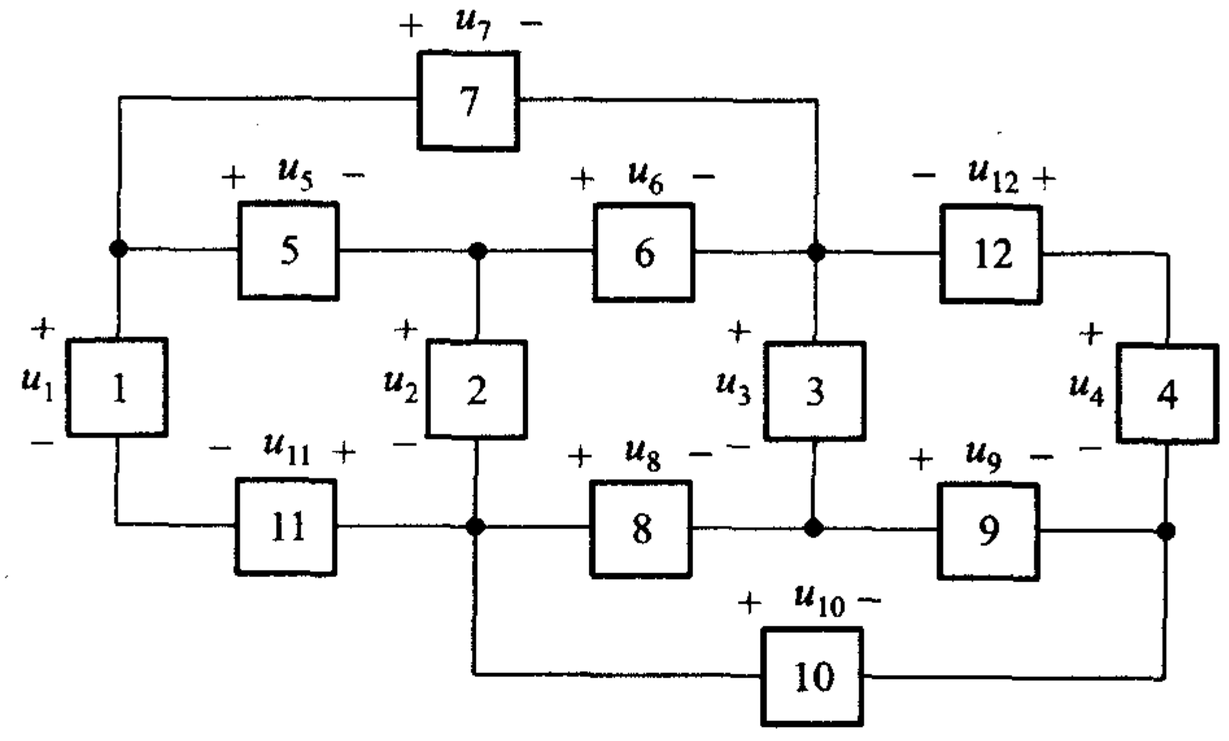
$$-u_2-u_3+u_5-u_6=0$$

(1) 试确定 u_1、u_2、u_5 及 u_6 的参考极性;

(2) 能否再进一步确定 u_4 的参考极性?

(3) 若给定 $u_2=10\ \text{V}$,$u_3=5\ \text{V}$,$u_6=-4\ \text{V}$,试确定其余各电压。

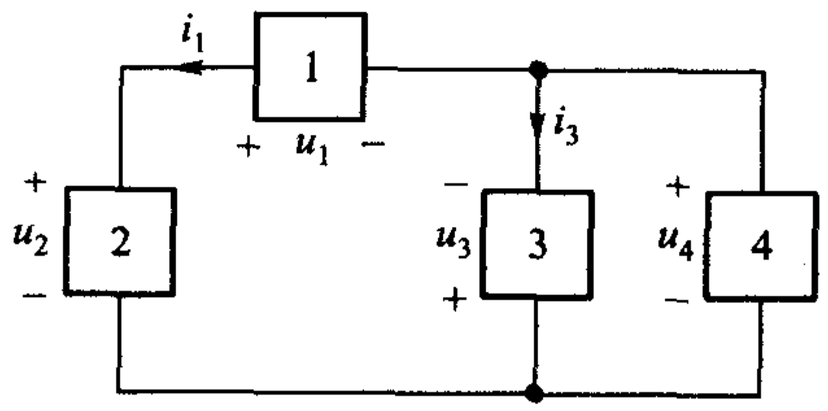
1-8 电路如图题 1-7 所示,已知 $u_1=10\ \text{V}$、$u_2=5\ \text{V}$,$u_4=-3\ \text{V}$,$u_6=2\ \text{V}$,$u_7=-3\ \text{V}$ 及 $u_{12}=8\ \text{V}$。能否确定所有其他各个电压? 如能,试确定它们。如不能,试指出尚需知道哪些电压才能确定所有电压。本电路需要给定几个电压才能确定其余电压?



图题 1-7

1-9 电路如图题 1-7 所示,采用关联的参考方向,且已知下列各支路电流:$i_1=2\ \text{A}$,$i_4=5\ \text{A}$,$i_7=-5\ \text{A}$ 以及 $i_{10}=-3\ \text{A}$。其他各支路电流是否都能确定? 试尽可能多地确定各未知电流。如需确定所有电流,尚需知道哪些电流。本电路需要给定几个电流才能确定其余电流?

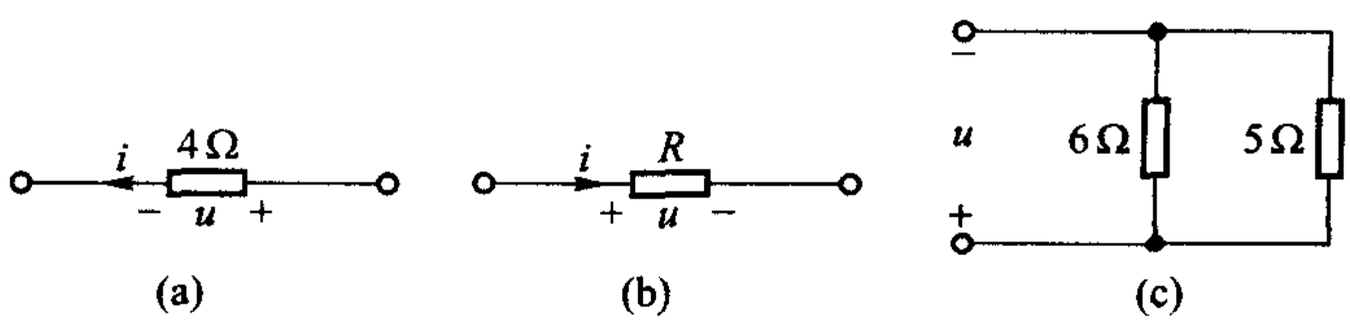
1-10 电路如图题 1-8 所示,已知 $i_1=2\ \text{A}$,$i_3=-3\ \text{A}$,$u_1=10\ \text{V}$,$u_4=-5\ \text{V}$,试计算各元件吸收的功率。



图题 1-8

§1-4 电阻元件

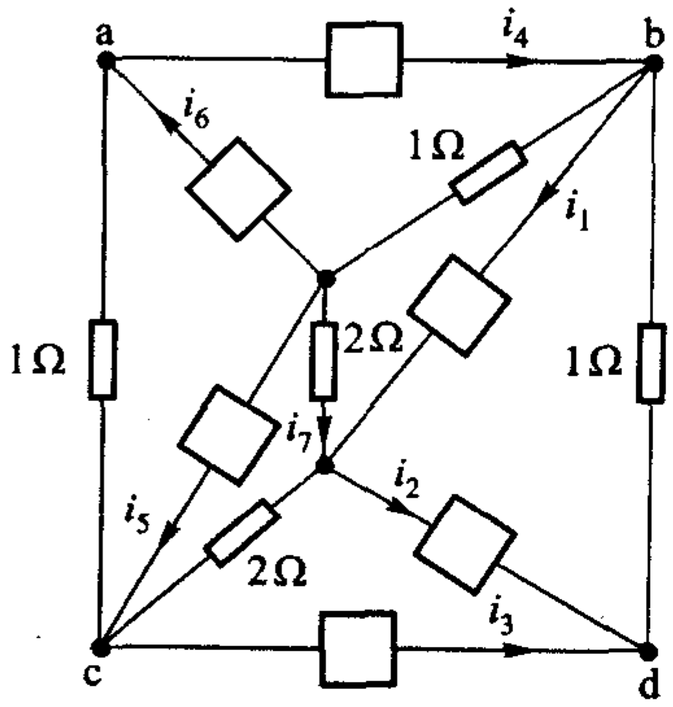
1-11 电路如图题 1-9 所示。(1) 图(a)中已知 $u=7\cos(2t)\ \text{V}$,求 i;(2) 图(b)中已知 $u=(5+4\text{e}^{-6t})\ \text{V}$,$i=(15+12\text{e}^{-6t})\ \text{A}$,求 R;(3) 图(c)中已知 $u=3\cos(2t)\ \text{V}$,求 5 Ω 电阻的功率;(4) 图(a)中已知电压 u 的波形如图 1-15 中的 u_3,求 i 的波形。



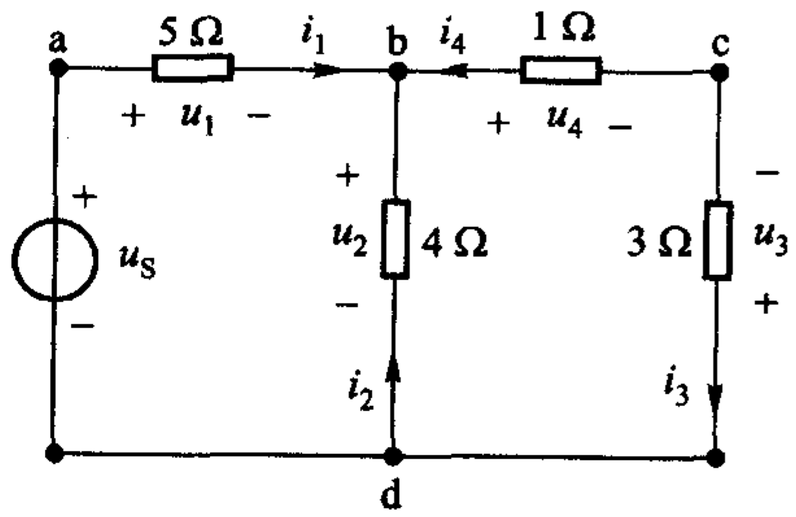
(a)　(b)　(c)

图题 1－9

1－12　电路如图题 1－10 所示。已知 $i_1=3$ A、$i_2=-2$ A、$i_3=4$ A、$i_4=6$ A、$i_5=-7$ A、$i_6=5$ A。求其余各支路电流以及 u_{ba}、u_{dc}。如果少给一个电流条件，例如 i_6，本题是否能解？如果少给 i_6，但给定 $i_7=7$ A，本题是否能解？如给定 $i_{bd}=7$ A 呢？



图题 1－10

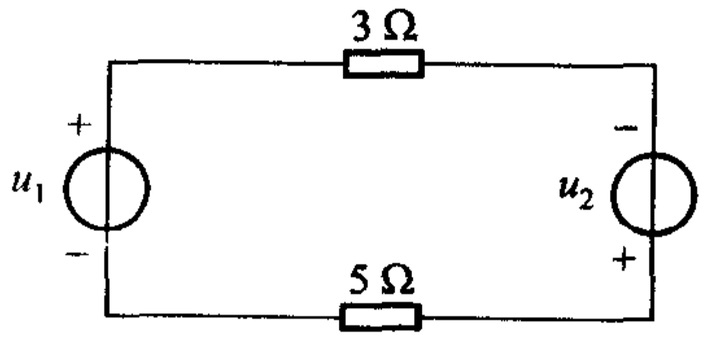


图题 1－11

1－13　电路如图题 1－11 所示，(1) 已知 $i_1=4$ A，求 u_1；(2) 已知 $i_2=-2$ A，求 u_2；(3) 已知 $i_3=2$ A，求 u_3；(4) 已知 $i_4=-2$ A，求 u_4。

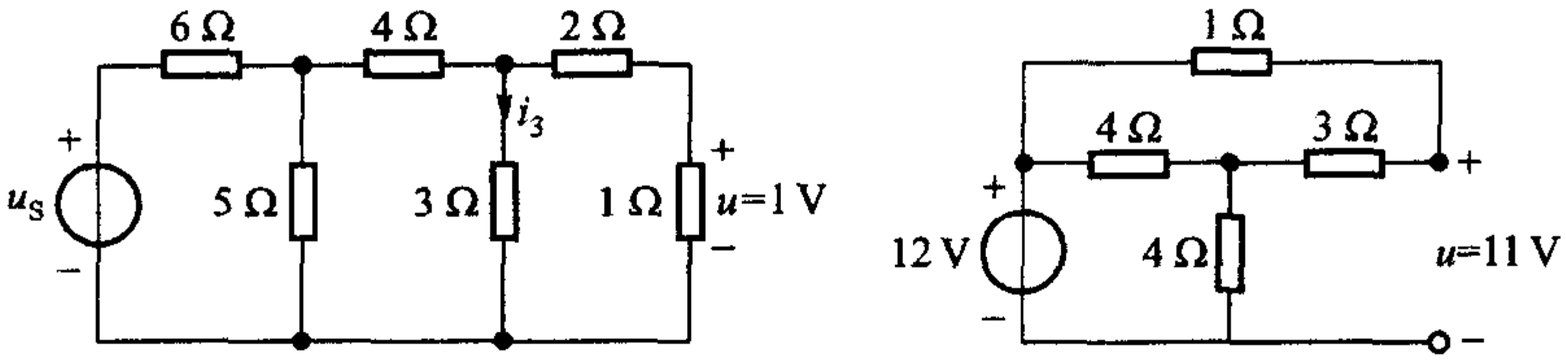
§1－5　电压源

1－14　电路如图题 1－12 所示，若 $u_1=10$ V，$u_2=-5$ V，试求电压源的功率。



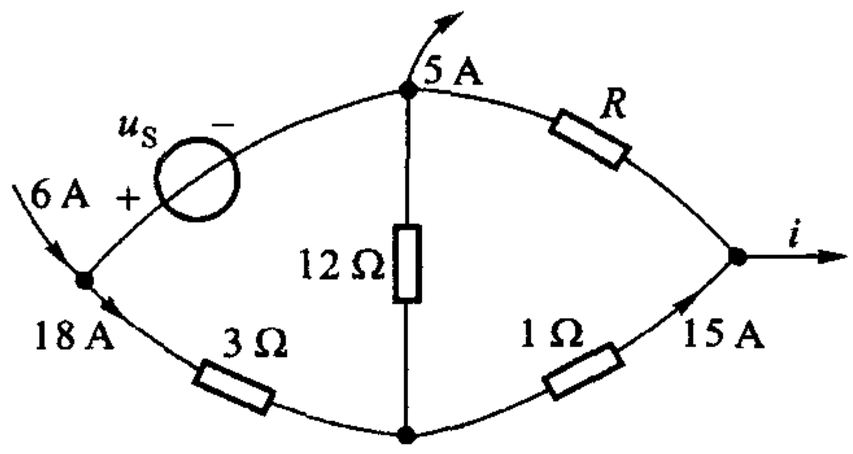
图题 1－12

1－15　求图题 1－13 所示电路所有各支路的电压和电流。并利用功率平衡关系来校核答案是否正确。



图题 1 – 13

1 – 16　求图题 1 – 14 所示电路中的 u_S 和 i。



图题 1 – 14

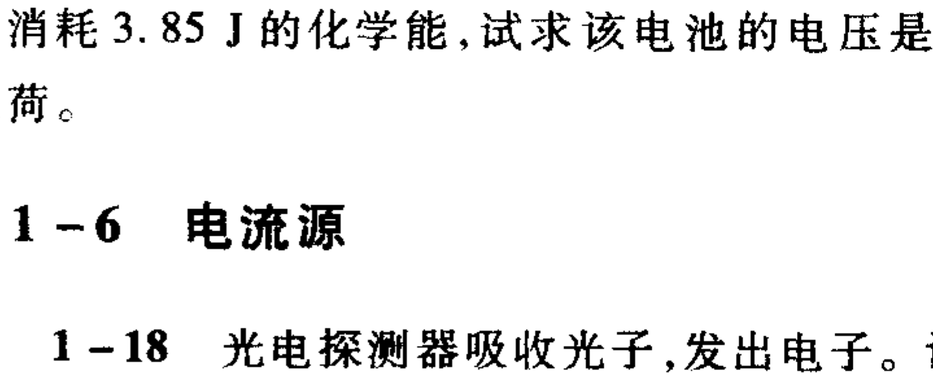
1 – 17　1 号碳锌干电池中，化学作用使 15.6×10^{18} 个电子由碳棒转移到锌壳。若在转移中消耗 3.85 J 的化学能，试求该电池的电压是多少？已知每一电子带有 1.60×10^{-19} C 的电荷。

§1 – 6　电流源

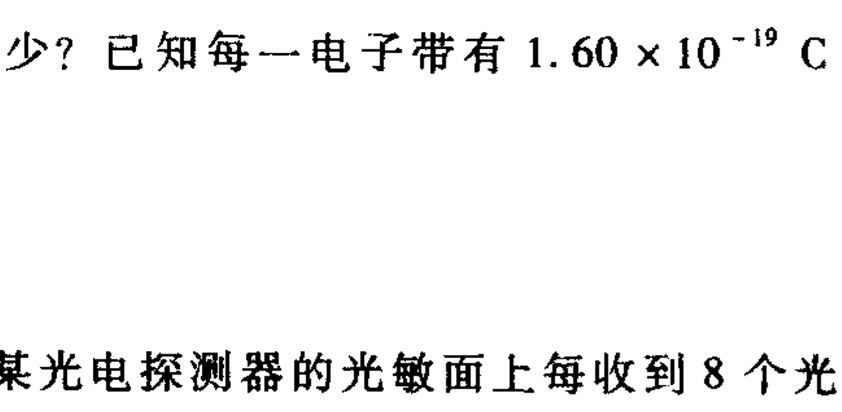
1 – 18　光电探测器吸收光子，发出电子。设某光电探测器的光敏面上每收到 8 个光子即发射出一个电子。若以每秒 4×10^{11} 个光子射到光敏面，试计算产生的电流。

1 – 19　对某汽车蓄电池充电要用恒定的电流 3 A 充电 4 h 可达 12 V，求(1) 充电消耗的电能；(2) 若电费为 0.48 元/(kW · h)，充电电费是多少？

1 – 20　电路如图题 1 – 15 所示，试求电流源电压 u 和电压源电流 i；u_X 和 i_X。



图题 1 – 15

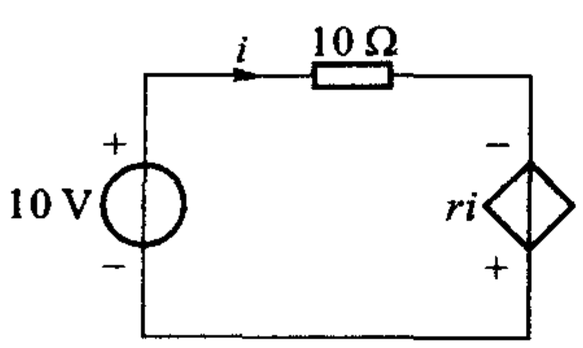


图题 1 – 16

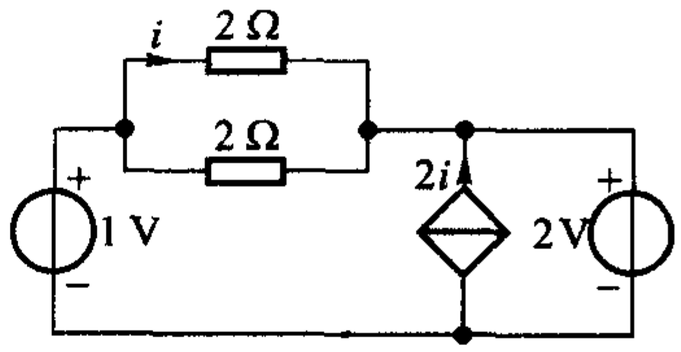
1－21　电路如图题 1－16 所示，(1) 求 －5 V 电压源提供的功率；(2) 如果要使 －5 V 电压源提供的功率为零，4 A 电流源应改变为多大电流？

§1－7　受控源

1－22　电路如图题 1－17 所示，其中受控源参数 $r=5\ \Omega$。试求各元件吸收的功率。



图题 1－17

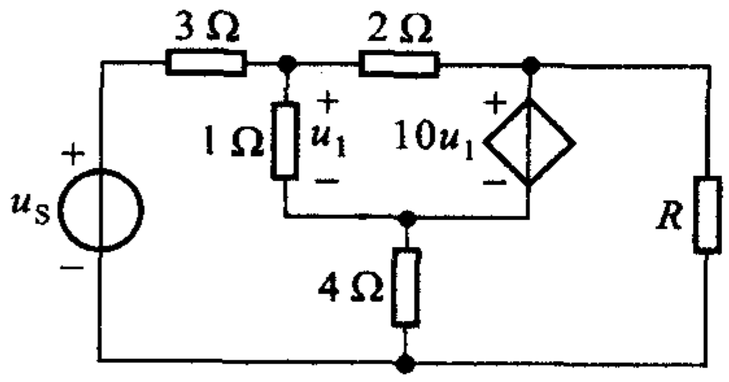


图题 1－18

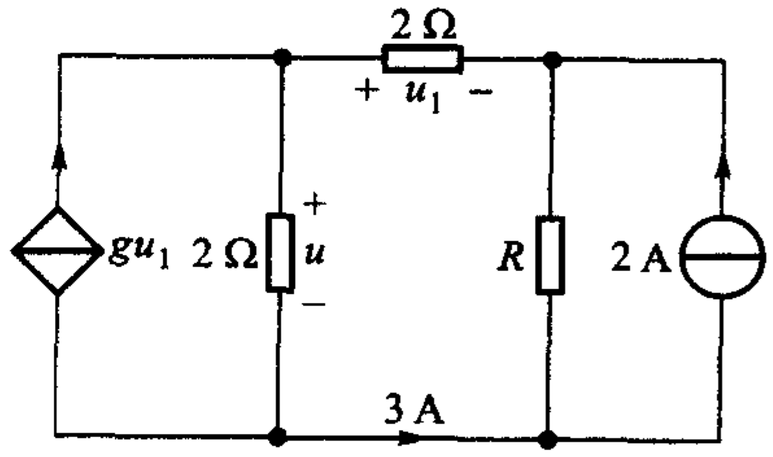
1－23　在图题 1－18 所示电路中，试求受控源提供的电流以及每一元件吸收的功率。核对功率平衡关系。

1－24　电路如图题 1－19 所示，若 $u_S=-19.5$ V，$u_1=1$ V，试求 R。

1－25　电路如图题 1－20 所示，其中 $g=2$ S。求 u 和 R。



图题 1－19



图题 1－20

§1－8　分压公式和分流公式

1－26　计算图题 1－21 所示各电路的 u_a（试根据不同路径求解，以便校核结果）。

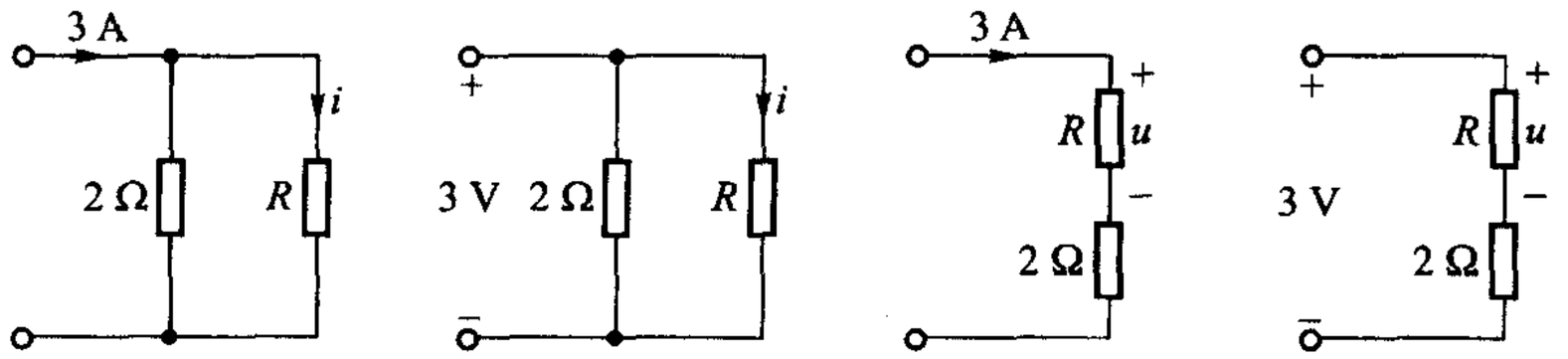
图题 1－21

1－27　(1) 图题 1－22(a)所示电路中，要使 $i=\frac{2}{3}$ A，$R=$？

(2) 图题 1－22(b)所示电路中，要使 $i=\frac{2}{3}$ A，$R=$？

(3) 图题 1-22(c)所示电路中,要使 $u=\frac{2}{3}$ V,$R=?$

(4) 图题 1-22(d)所示电路中,要使 $u=\frac{2}{3}$ V,$R=?$



(a)　　(b)　　(c)　　(d)

图题 1-22

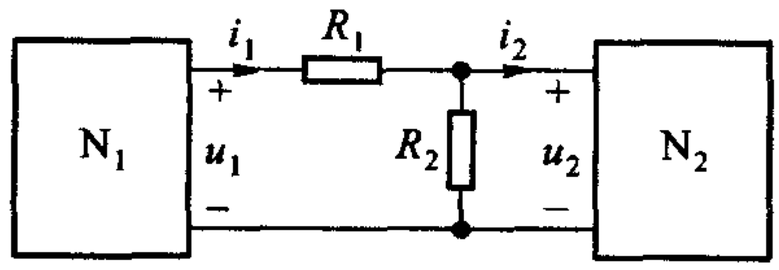
1-28　电路如图题 1-23 所示。

(1) 当 N_1,N_2 为任意网络时,问 u_2 与 u_1 的关系以及 i_2 及 i_1 的关系如何?

(2) 在 $i_2=0$ 的情况下,u_2 与 u_1 关系如何?

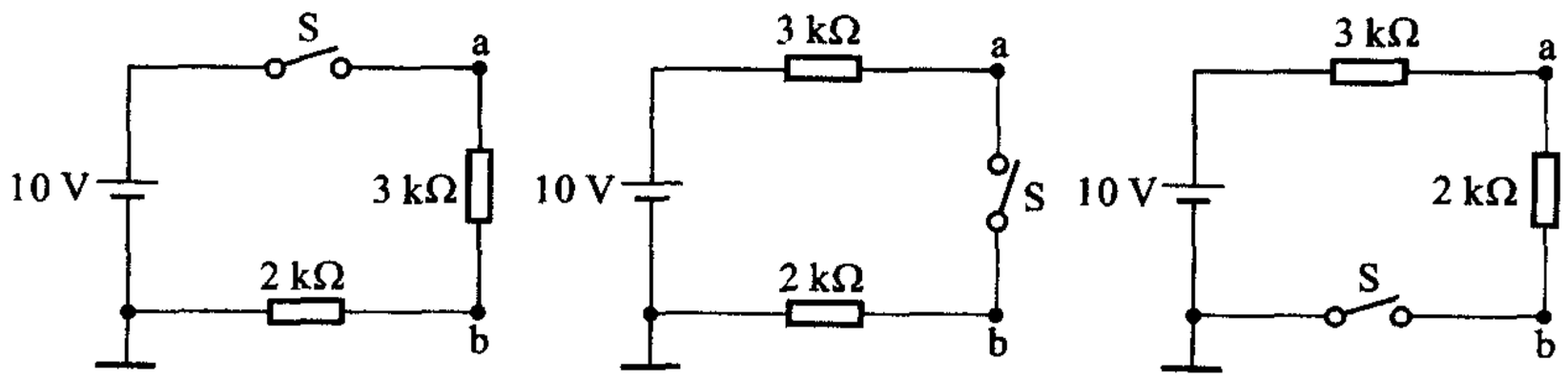
(3) 在 $i_1=0$ 的情况下,u_2 与 u_1 关系如何?

(4) 在 $u_2=0$ 和 $u_1=0$ 时,i_2 与 i_1 的关系分别如何?



图题 1-23

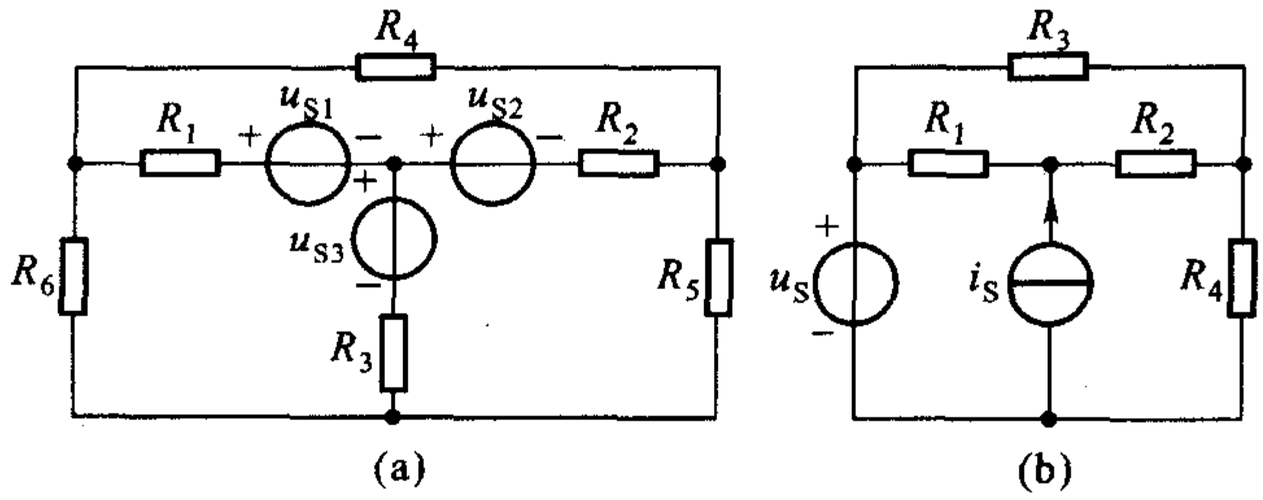
1-29　计算图题 1-24 所示各直流电路,S 打开及闭合时的 U_a、U_b 及 U_{ab}。



图题 1-24

§1-9　两类约束　KCL、KVL 方程的独立性

1-30　试对图题 1-25 所示的两电路,写出:KCL 独立方程、KVL 独立方程、支路的 VCR。



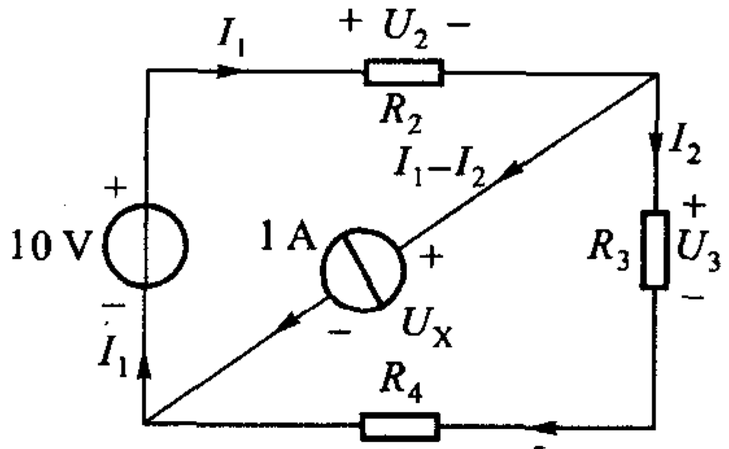
图题 1－25

1－31　图题 1－26 所示直流电路中，求解 6 个未知量 U_2、U_3、U_4、U_X、I_1、I_2 所需的 6 个方程为

$$U_2 - R_2 I_1 = 0 \qquad U_4 + R_4 I_2 = 0$$

$$U_3 - R_3 I_2 = 0 \qquad U_2 + U_X = 10$$

（　　）　（　　）

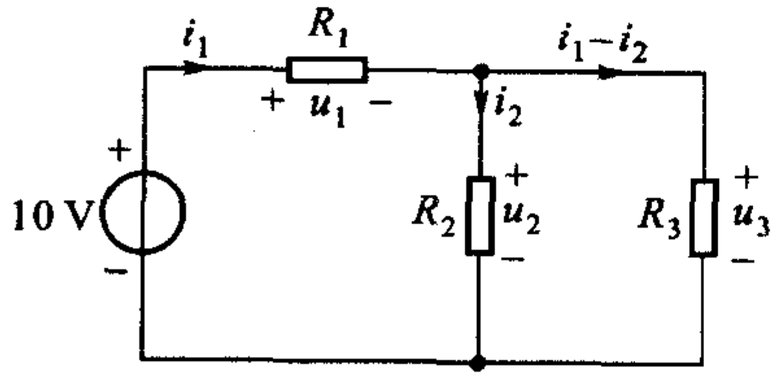


图题 1－26

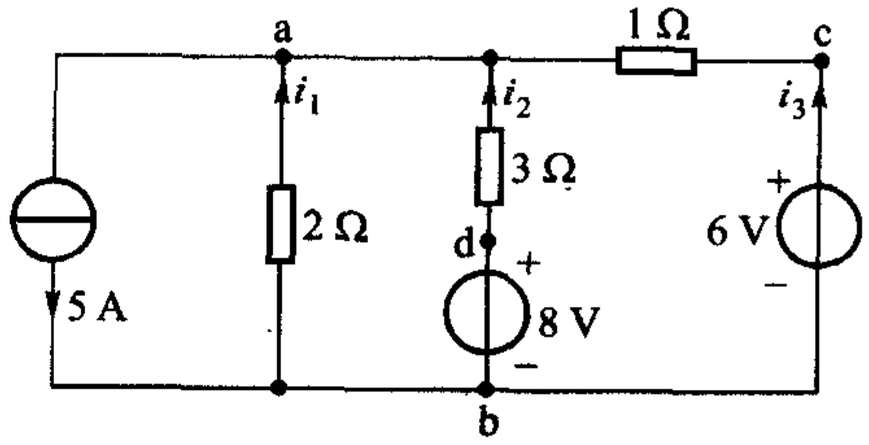
§1－10　支路分析

1－32　图题 1－27 所示电路中，所求未知量已选定为 u_1、u_2、i_1 和 i_2，如图中所示。试列出所需的 4 个联立方程，并解出 i_1。

1－33　试用支路电流法求解图题 1－28 支路电流 i_1、i_2 和 i_3。



图题 1－27



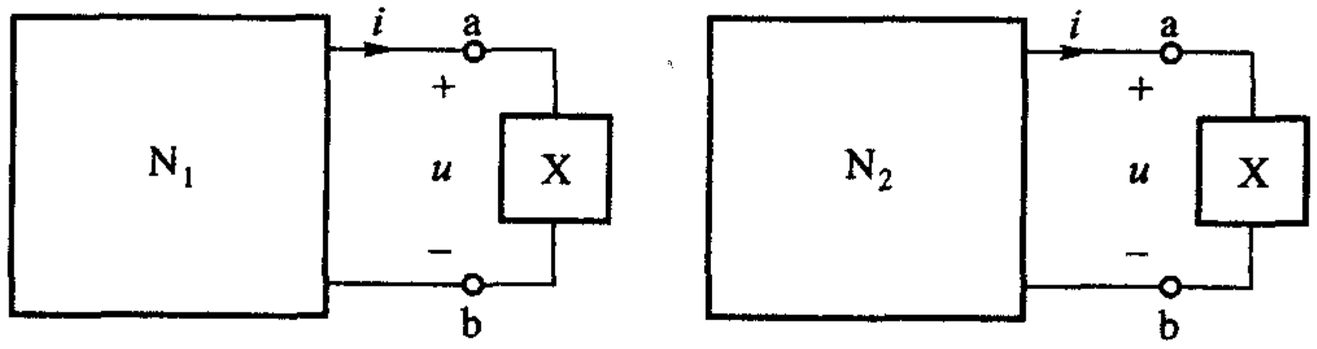
图题 1－28

综合

1－34　今有四种元件 A、B、C、D。为测定其“身份”，依次放置在两个含有电源的不同网络 N_1、N_2 两端，如图题 1－29 所示，图中以 X 表明四种元件中的任一个，测得数据如下：

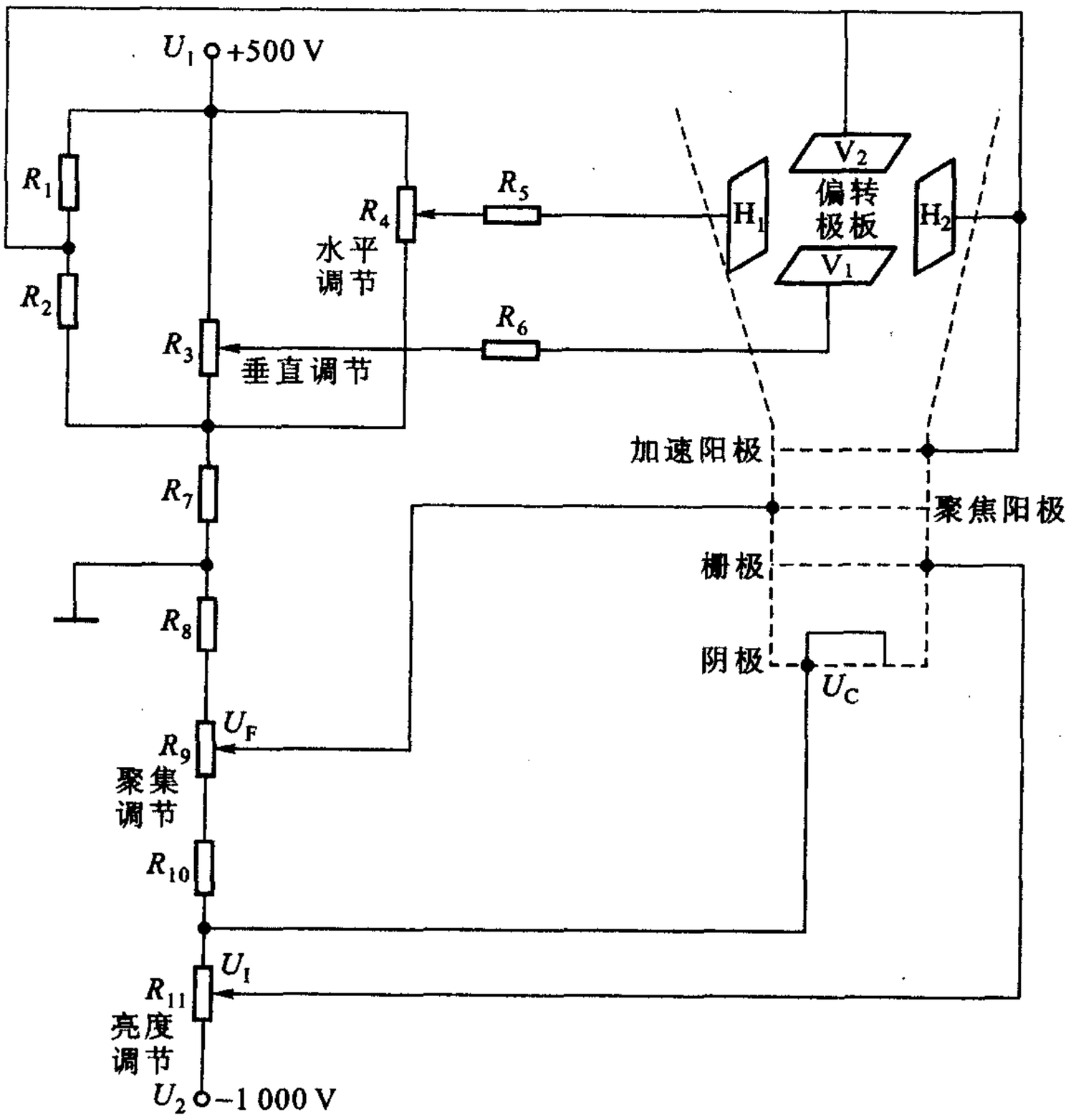
元件	与 N_1 相接		与 N_2 相接	
	u/V	i/mA	u/V	i/mA
A	5	1	-2.5	-0.5
B	5	5	5	-10
C	10	0	10	-15
D	12.5	-2.5	-2.5	-2.5

试确定它们各为什么元件？（本题表明，元件的特性与外电路无关。）



图题 1-29

1-35　图题 1-30 所示为某阴极射线示波管各电极所需直流电压的供电图。各电阻值为



图题 1-30

$R_1 = 27\ \text{k}\Omega$　　$R_5 = 2.2\ \text{M}\Omega$　　$R_9 = 250\ \text{k}\Omega$

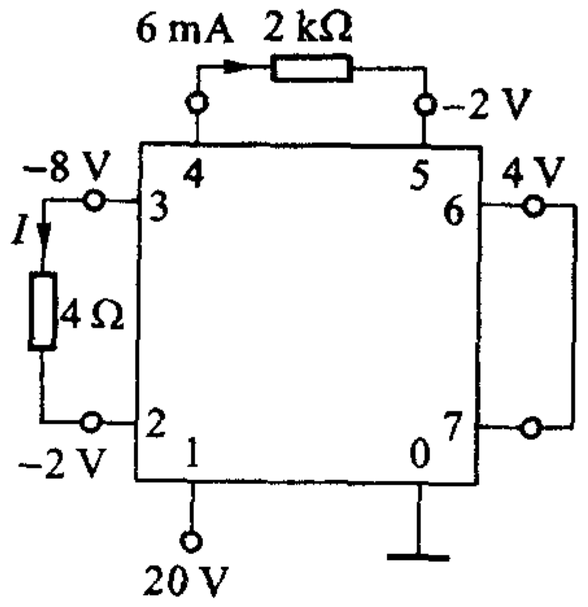
$R_2 = 27\ \text{k}\Omega$　　$R_6 = 2.2\ \text{M}\Omega$　　$R_{10} = 100\ \text{k}\Omega$

$R_3 = 250\ \text{k}\Omega$　　$R_7 = 22\ \text{k}\Omega$　　$R_{11} = 50\ \text{k}\Omega$

$R_4 = 250\ \text{k}\Omega$　　$R_8 = 270\ \text{k}\Omega$

试求：(1) 垂直偏转极板 V_1 及 V_2 间和水平偏转极板 H_1 及 H_2 间电压的可调范围；(2) 阴极电压 U_C；(3) 亮度调节电压 U_1 及聚焦调节电压 U_F 的可调范围；(4) 加速阳极对阴极的电压。

1－36　图题 1－31 所示为一带有 8 个端钮的集成电路。试求 U_0、U_4、U_7、U_{10}、U_{23}、U_{30}、U_{67}、U_{56}以及电流 I。



图题 1－31

第二章

网孔分析和节点分析

在第一章§1-10中已指出:求解电路中的各个支路电流及电压可分两步进行,这样可使所需联立方程的数目由$2b$个减少为b个。在用支路电流法时,设法先求得全部的支路电流,然后再根据支路的VCR求得各支路电压。在求解电流时需要求解b个联立方程。运用支路电压法,情况相似,也需求解b个联立方程。能否使所需的联立方程再进一步减少呢?这便是本章要说明的问题。

电路中的b个支路电流是受KCL约束的,因而由个数少于b的某一组电流即能确定每一个电流[①]。由此可见,在分两步求解电路时,可以先选取适当的一组电流而不是全部支路电流作为第一步求解对象。在求得这组电流后就可以很容易地确定每一个电流和电压。同理,也可先选取适当的一组电压,求得答案后再去确定每一个电压和电流[②]。显然,这样做,可以达到减少联立方程数的目的。立足于网孔的电路分析和立足于节点的电路分析,体现了这一思路。前者称为网孔分析(法),又称网孔电流法,后者称为节点分析(法),又称节点电压法,它们都是电路分析中常用的方法。其中节点分析应用更为广泛,且便于编写计算机程序,应予更多关注。互易定理是作为网孔分析的应用例子而出现在本章中的,这对于省去双口网络部分而又需要介绍该定理的本书,也许是一个较好的处理方式。另外,作为节点分析的应用例子,本章亦稍涉及简单含运算放大器电路的分析。最后,本章将介绍电路的对偶性。

本章应视作§1-9和§1-10的继续。不论是网孔分析还是节点分析,其最终目的还是解出所需的支路电压、电流。

§2-1 网孔分析

网孔分析是以网孔电流(mesh current)作为第一步求解的对象,故又称为网

---

① 建议复习习题1-9题及1-12题,在后一题中,由给定的6个电流,可确定全部的11个支路电流,无需求解联立方程。如给定各支路的VCR,则全部的11个支路电压也可确定。注意:给定任意的6个电流并不一定能确定每一电流。

② 建议复习习题1-8题。

孔电流法。所谓网孔电流是一种沿着网孔边界流动的假想电流，如图 2－1 中以虚线表示的 i_{M1}，i_{M2}、i_{M3}。一个平面电路共有[$b-(n-1)$]个网孔，因而也有同数的网孔电流。

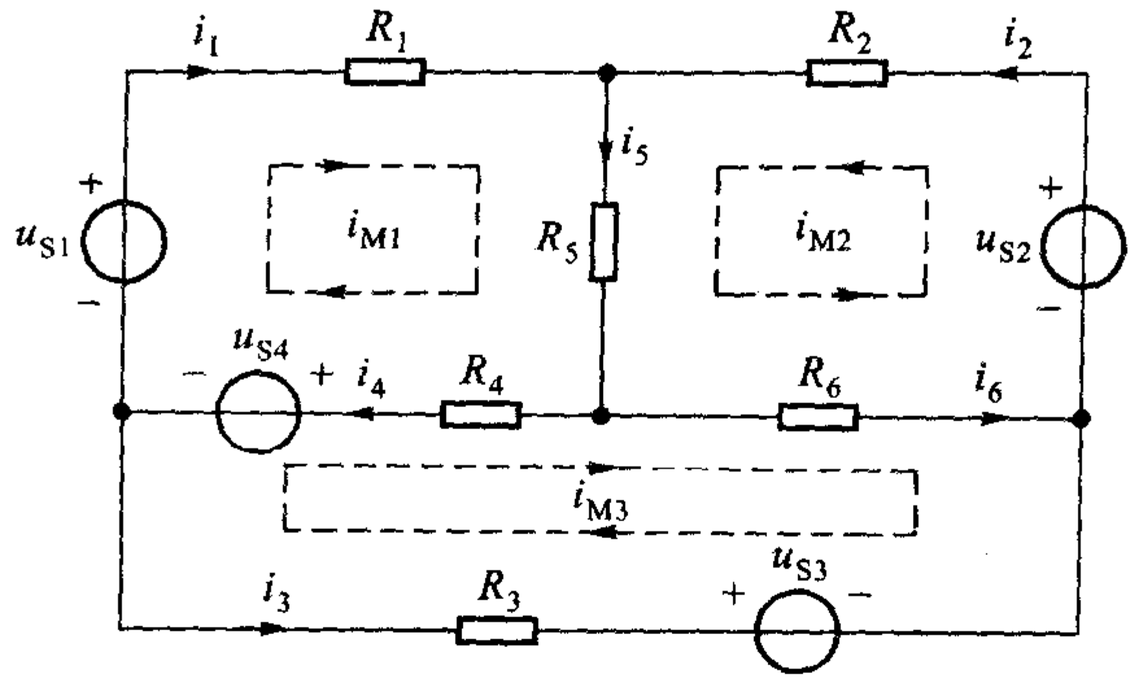


图 2－1　网孔电流

不难看出，各网孔电流不能用 KCL 相联系。因为：每一网孔电流沿着网孔流动，当它流经某节点时，从该节点流入，又从该节点流出，在为该节点所列的、以网孔电流表示的 KCL 方程中彼此抵消。因此，网孔电流不能用 KCL 相联系，求解网孔电流所需的方程组只能来自 KVL 和支路的 VCR。

在选定网孔电流后，可为每一个网孔列写一个 KVL 方程，方程中的支路电压可以通过欧姆定律用网孔电流来表示。这样就可得到一组以网孔电流为变量的方程组，它们必然与待解变量数目相同而且是独立的，由此可解得各网孔电流。通常，在列方程时还把网孔电流的参考方向作为列方程时的回路绕行方向。以网孔电流为变量的方程组称为网孔方程。根据以上所述，对图 2－1 所示电路，可得

$$\left.\begin{aligned} &R_1 i_{M1} + R_5 i_{M1} + R_5 i_{M2} + R_4 i_{M1} - R_4 i_{M3} + u_{S4} - u_{S1} = 0 \\ &R_2 i_{M2} + R_5 i_{M2} + R_5 i_{M1} + R_6 i_{M2} + R_6 i_{M3} - u_{S2} = 0 \\ &R_3 i_{M3} + R_4 i_{M3} - R_4 i_{M1} + R_6 i_{M3} + R_6 i_{M2} - u_{S4} - u_{S3} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2-1}$$

经过整理可得

$$\left.\begin{aligned} &(R_1 + R_4 + R_5) i_{M1} + R_5 i_{M2} - R_4 i_{M3} = u_{S1} - u_{S4} \\ &R_5 i_{M1} + (R_2 + R_5 + R_6) i_{M2} + R_6 i_{M3} = u_{S2} \\ &-R_4 i_{M1} + R_6 i_{M2} + (R_3 + R_4 + R_6) i_{M3} = u_{S3} + u_{S4} \end{aligned}\right\} \tag{2-2}$$

已知各电压源电压及电阻，就可解出网孔电流，各支路电流即可进一步算出。这样，6 个未知的支路电流都能求出，但只需解三个联立方程。

简便之处还不仅在于所需的联立方程较少，而且还在于对如图 2－1 所示这

类只含独立电源及电阻的电路建立网孔方程是很容易的，根据观察即能列出。为此，可以把(2-2)式概括为如下的形式：

$$\left.\begin{aligned} R_{11}i_{M1} + R_{12}i_{M2} + R_{13}i_{M3} &= u_{S11} \\ R_{21}i_{M1} + R_{22}i_{M2} + R_{23}i_{M3} &= u_{S22} \\ R_{31}i_{M1} + R_{32}i_{M2} + R_{33}i_{M3} &= u_{S33} \end{aligned}\right\} \tag{2-3}$$

式中：R_{11}、R_{22}、R_{33}分别称为网孔1、网孔2和网孔3的自电阻(self resistance)，它们分别是各自网孔内所有电阻的总和，例如$R_{11} = R_1 + R_4 + R_5$。

R_{12}称为网孔1与网孔2的互电阻(mutual resistance)，它是该两网孔的公有电阻，即$R_{12} = R_5$。

R_{13}称为网孔1与网孔3的互电阻，它是该两网孔的公有电阻的负值，即$R_{13} = -R_4$。出现负号是因为网孔电流i_{M1}和i_{M3}以相反的方向流过公有电阻R_4。

R_{23}、R_{21}、R_{31}、R_{32}分别为其下标数字所示网孔间的互电阻，分别为有关两网孔公有电阻的正值或负值。正、负值要视有关的网孔电流流过公有电阻时其相互的方向的关系如何而定，同向为正，异向为负。另外，$R_{12} = R_{21}$、$R_{23} = R_{32}$、$R_{13} = R_{31}$。

u_{S11}、u_{S22}、u_{S33}分别为网孔1、网孔2、网孔3中各电压源电压升的代数和，例如$u_{S11} = u_{S1} - u_{S4}$。

(2-3)式为三网孔电路的网孔方程的普遍形式，很便于记忆。具体电路虽各不相同，但其区别只是各个自电阻、互电阻和u_{S11}等的具体内容不同。根据观察即可迅速写出方程。不难理解，具有m个网孔的电路，网孔方程的形式应为

$$\left.\begin{aligned} R_{11}i_{M1} + R_{12}i_{M2} + \cdots + R_{1m}i_{Mm} &= u_{S11} \\ R_{21}i_{M1} + R_{22}i_{M2} + \cdots + R_{2m}i_{Mm} &= u_{S22} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ R_{m1}i_{M1} + R_{m2}i_{M2} + \cdots + R_{mm}i_{Mm} &= u_{Smm} \end{aligned}\right\} \tag{2-4}$$

如果各网孔电流的参考方向一律设为顺时针方向，或一律设为逆时针方向，则各互电阻均为有关网孔公有电阻总和的负值。(2-4)式所示网孔方程普遍形式可用来研究线性电路的一般性质，例如下节所示的互易定理。

上述立足于网孔的分析只适用于平面电路。

例2-1　用网孔分析求解图2-2所示电路的各支路电流。已知$R_1 = 5\ \Omega$，$R_2 = 10\ \Omega$、$R_3 = 20\ \Omega$。

解　该电路有两个网孔，首先在每一个网孔内假设一个网孔电流，如图2-2(a)所示的i_{M1}和i_{M2}。它们的参考方向是任意假定的，现假定它们都是顺时针方向。

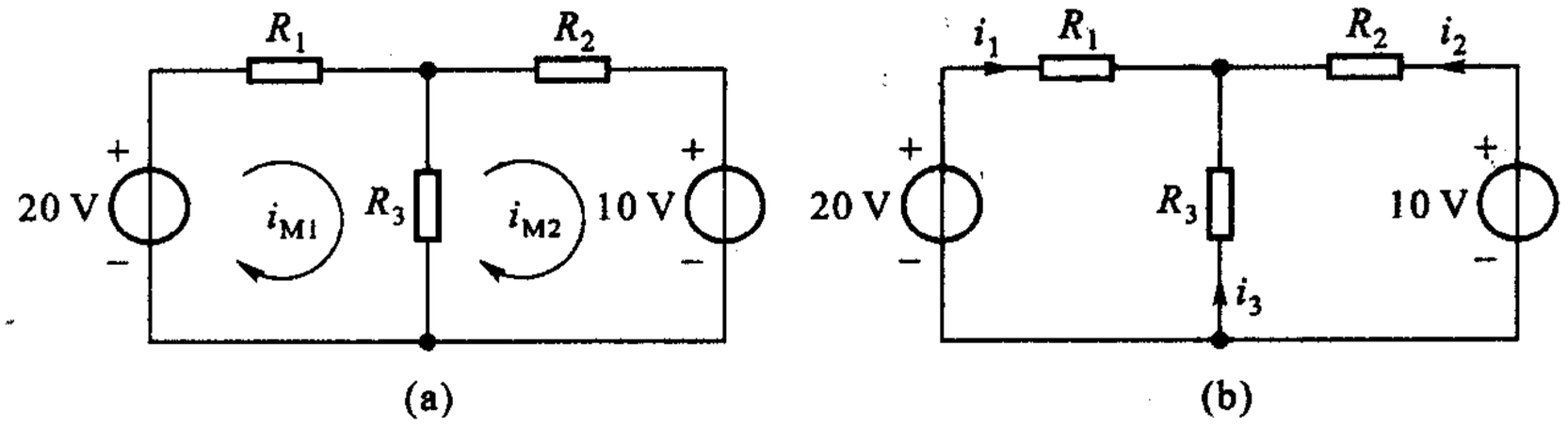


图 2－2　例 2－1

第一网孔的自电阻：$R_{11} = R_1 + R_3 = 25\ \Omega$

第一和第二网孔的互电阻：$R_{12} = R_{21} = -R_3 = -20\ \Omega$

第二网孔的自电阻：$R_{22} = R_3 + R_2 = 30\ \Omega$

注意：$R_{12} = R_{21}$且为负值，这是因为两网孔电流以不同的方向流过公共电阻 $R_3 = 20\ \Omega$ 的缘故。

又

$$u_{S11} = 20\ \text{V}$$

$$u_{S22} = -10\ \text{V}$$

注意：u_{S11}、u_{S22}分别表示在第一及第二网孔内沿绕行方向（即网孔电流方向）电压源电压升的代数和。今沿 i_{M1}的方向，电压源电压 20 V 系由负极到正极，确为电压升，故 u_{S11}为 +20 V。沿 i_{M2}的方向，电压源电压 10 V 系由正极到负极，为电压降，故 u_{S22}为 −10 V。得网孔方程

$$25i_{M1} - 20i_{M2} = 20$$

$$-20i_{M1} + 30i_{M2} = -10$$

用克莱姆法则[①]解 i_{M1}及 i_{M2}，得

$$i_{M1} = \frac{\begin{vmatrix} 20 & -20 \\ -10 & 30 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 25 & -20 \\ -20 & 30 \end{vmatrix}}\text{A} = \frac{20 \times 30 - (-10) \times (-20)}{25 \times 30 - (-20) \times (-20)}\text{A}$$

$$= \frac{20 \times 30 - 10 \times 20}{25 \times 30 - 20 \times 20}\text{A} = \frac{40}{35}\text{A} = 1.143\text{A}$$

$$i_{M2} = \frac{\begin{vmatrix} 25 & 20 \\ -20 & -10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 25 & -20 \\ -20 & 30 \end{vmatrix}}\text{A} = \frac{-25 \times 10 - (-20) \times (20)}{25 \times 30 - (-20) \times (-20)}\text{A}$$

① 克莱姆法则常用来求解两或三网孔电路问题，求解复杂电路可借助于计算机。方程系数的行列式又称特征行列式。

$$=\frac{-25\times10+20\times20}{25\times30-20\times20}\text{A}=\frac{15}{35}\text{A}=\frac{3}{7}\text{A}=0.429\text{A}$$

设各支路电流 i_1、i_2、i_3 如图 2-2(b)所示，显然可得

$$i_1=i_{M1}$$

$$i_2=-i_{M2}$$

$$i_3=i_{M2}-i_{M1}$$

各支路电流均可以用网孔电流来表示。以求得的网孔电流值代入，得

$$i_1=1.143\ \text{A},i_2=-0.429\ \text{A},i_3=-0.714\ \text{A}$$

用网孔分析法时，不能用 KCL 来校核，因为各支路电流就是从各网孔电流相加减后求得的，它们自动满足 KCL。应该用 KVL 来校核。

例 2-2　电路如图 2-3(a)所示，试求流经 30 Ω 电阻的电流 i。

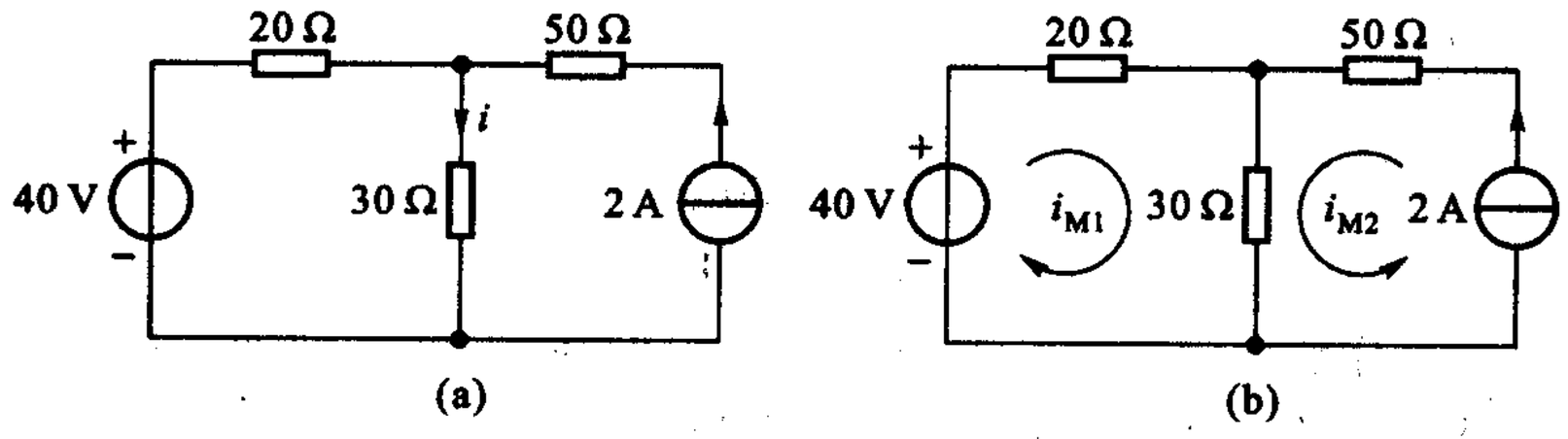


图 2-3　例 2-2

解　本题电路含有电流源。在含电流源的支路中，其支路电流即为电流源的电流值，因此，流经 50 Ω 电阻的电流等于 2 A，是已知的。

如用网孔分析法解本题，仍然可以先在每一网孔中设一网孔电流，如图 2-3(b)所示。但由于 i_{M2} 是唯一流过包含电流源支路的网孔电流，且所选方向与电流源电流方向一致，故 $i_{M2}=2$ A。亦即网孔电流 i_{M2} 不必再去求解，其值是已知的。

网孔 1 的方程为

$$50i_{M1}+30i_{M2}=40$$

注意：虽然不必列写网孔 2 的方程，但在网孔 1 的方程中仍需考虑 i_{M2} 对网孔 1 的影响。以 $i_{M2}=2$ A 代入上式，得

$$50i_{M1}+60=40$$

故

$$i_{M1}=\frac{40-60}{50}\text{A}=\frac{-20}{50}\text{A}=-0.4\ \text{A}$$

得

$$i=i_{M1}+i_{M2}=(-0.4+2)\ \text{A}=1.6\ \text{A}$$

例 2-3　电路如图 2-4 所示，试列网孔方程。

解　网孔方程为

$$\begin{aligned} 3i_{M1} - i_{M2} - 2i_{M3} + u &= 7 \\ -i_{M1} + 6i_{M2} - 3i_{M3} &= 0 \\ -i_{M1} - 3i_{M2} + 6i_{M3} - u &= 0 \\ i_{M1} - i_{M3} &= 7 \end{aligned}$$

注意：电流源两端有电压，假设为 u。网孔方程实质上是KVL方程，在列方程时应把电流源电压考虑在内。初学者常易疏忽这点。由于 u 也是未知量，故尚需增列 $i_{M1} - i_{M3} = 7$ 这一方程，使之能解出 4 个未知量：i_{M1}、i_{M2}、i_{M3} 和 u。

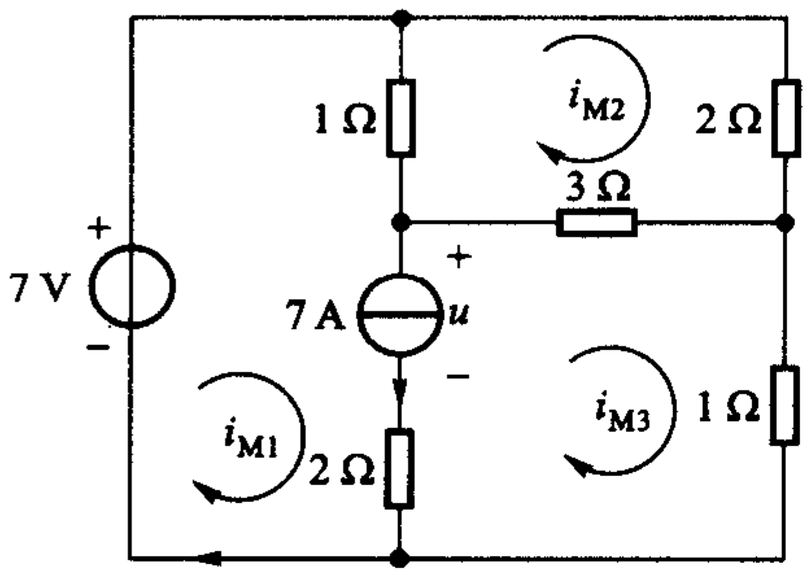


图 2-4　例 2-3

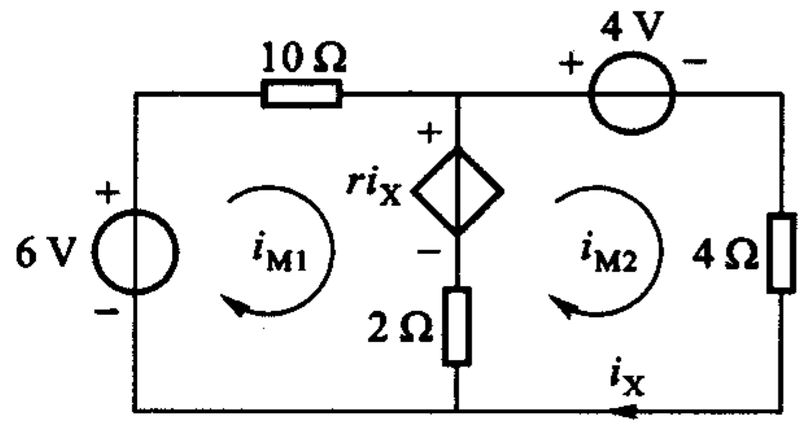


图 2-5　例 2-4

例 2-4　用网孔分析求图 2-5 所示含受控源电路中的 i_X（图中 $r = 8\ \Omega$）。

解　暂先把受控源当作独立源，按照正文中所概括的规则写出“初步的”网孔方程，再把受控源的控制量用网孔电流表示，就可得到如(2-4)式所示网孔方程

$$\begin{aligned} 12i_{M1} - 2i_{M2} &= 6 - 8i_X \\ -2i_{M1} + 6i_{M2} &= -4 + 8i_X \end{aligned}$$

由于

$$i_X = i_{M2}$$

故得

$$\begin{aligned} 12i_{M1} + 6i_{M2} &= 6 \\ -2i_{M1} - 2i_{M2} &= -4 \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} i_{M2} &= 3\ \text{A} \\ i_X &= 3\ \text{A} \end{aligned}$$

如电路中含受控电流源则可仿照例 2-2、例 2-3 列出方程后，再设法把控制量用网孔电流表示（参见习题 2-5、2-7）。

◀

为简便计，在不致引起误解情况下，常省略网孔电流下标 M。

例 2－5　含正弦电源的电阻电路如图 2－6 所示，试用网孔分析求解电压 u。

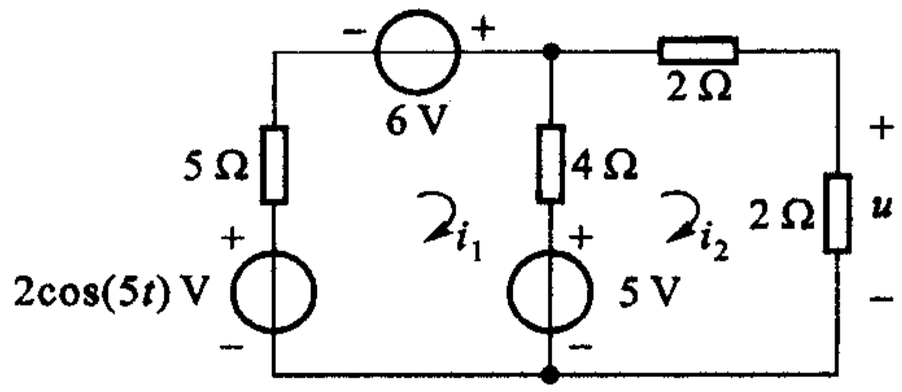


图 2－6　例 2－5

解　设网孔电流如图 2－6 所示[①]，可得网孔方程

$$9i_1 - 4i_2 = 6 + 2\cos(5t) - 5$$

$$-4i_1 + 8i_2 = 5$$

故得

$$i_2 = \frac{\begin{vmatrix} 9 & 2\cos(5t) + 1 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 9 & -4 \\ -4 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{45 + 8\cos(5t) + 4}{72 - 16}$$

$$= [0.14\cos(5t) + 0.875]\ \text{A}$$

$$u = (2\Omega)\, i_2 = [0.28\cos(5t) + 1.75]\ \text{V}$$

思考题

2－1　对含受控源的电路，如使其网孔方程的右端仍保持为各有关网孔中独立电压源电压升的代数和，那么，(2－4)式中的互电阻 R_{12} 和 R_{21} 等还能相等吗？（参见例 2－4。）

练习题

2－1　电路如图 2－7 所示，试用网孔分析法求流过 5 Ω 电阻的电流。　　(2A)

2－2　直流电路如图 2－8 所示，已知 $R_1 = 3\ \Omega$、$R_2 = 1\ \Omega$、$R_3 = 2\ \Omega$，若要求网孔电流 $I_1 = 2\ \text{A}$，$I_2 = -3\ \text{A}$，试问电压源电压 U_1、U_2 应为多少？　　(11 V、－11 V)

2－3　直流电路如图 2－8 所示，已知 $U_1 = 5\ \text{V}$，$U_2 = 10\ \text{V}$，$R_3 = 2\ \Omega$。若要求 $I_1 = 1\ \text{A}$，$I_2 = 2\ \text{A}$，试求 R_1 和 R_2。　　(11 Ω，6Ω)

---

① 图 2－6 所示正弦交流电源表示式中的 2cos (5t)，5t 表示随时间 t 变化的角度，2 为振幅。类似于物理学中有关简谐振动的表示式。

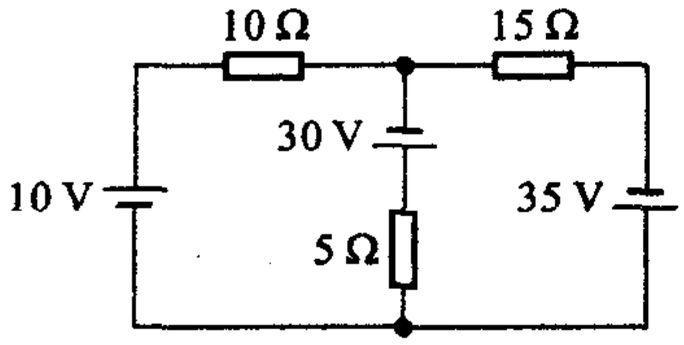


图 2－7　练习题 2－1

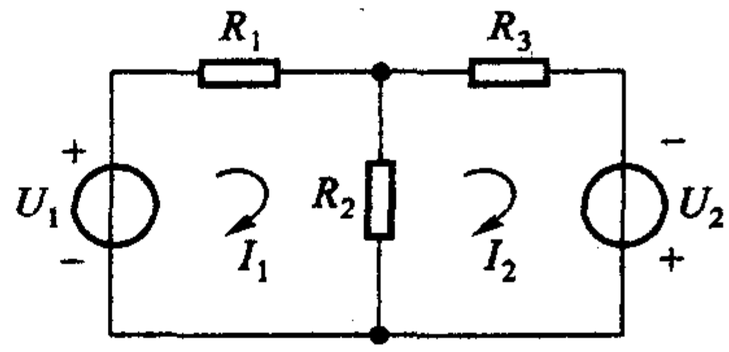
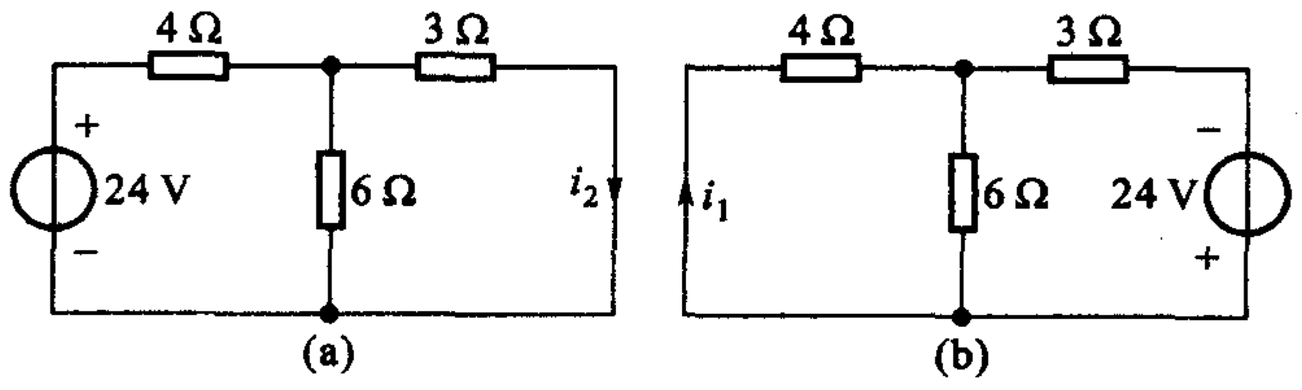


图 2－8　练习题 2－2

§2－2　互易定理

网孔分析源自两类约束，可用来论证集总电路的定理。

互易定理表明线性电路“因果互易”的性质。先看图 2－9 所示的例子。在图 2－9(a)所示只含一个电压源的线性电阻电路中，设电压源电压为 24 V，3 Ω 电阻支路的电流为 i_2，则该电流可求得如下：



(a)　　(b)

图 2－9　互易性一例：图(a)中的 i_2 = 图(b)中的 i_1

先求得流经 24 V 电压源的电流为

$$\frac{24\ \text{V}}{\left(4+\dfrac{6\times 3}{6+3}\right)\Omega}=\frac{24}{4+2}\ \text{A}=4\ \text{A}$$

式中 $\dfrac{6\times 3}{6+3}$ 为 6 Ω 与 3 Ω 的并联电阻值。再由分流关系可得

$$i_2=4\left(\frac{6}{6+3}\right)\ \text{A}=\frac{8}{3}\ \text{A}$$

若把 24 V 电压源移至 3 Ω 电阻支路中，原处以短路线代替，并令该支路的电流为 i_1，如图 2－9(b)所示。注意电压源搬移后的极性和电流 i_1 的方向。i_1 可求得为

$$i_1=\left(\frac{24}{3+\dfrac{6\times 4}{6+4}}\right)\left(\frac{6}{6+4}\right)\ \text{A}=\left(\frac{24\times 5}{3\times 5+12}\right)\left(\frac{3}{10}\right)\ \text{A}$$

$$= \frac{8}{3}\ \text{A}$$

从中得出了 $i_1 = i_2$ 的结论。若设想在图 2-9(a)所示的 3 Ω 电阻支路中插入一只电流表,则上述结论可形象地表示为:图 2-9(a)所示电路中电压源与电流表交换位置,电流表读数不变。这是电路互易性的一种表现形式。

下面来进行一般的论证。图 2-9 所示电路可概括为图 2-10 所示的一般情况。我们的任务是要证明图 2-10(a)中的电流 i_2 等于图 2-10(b)中的电流 i_1'。

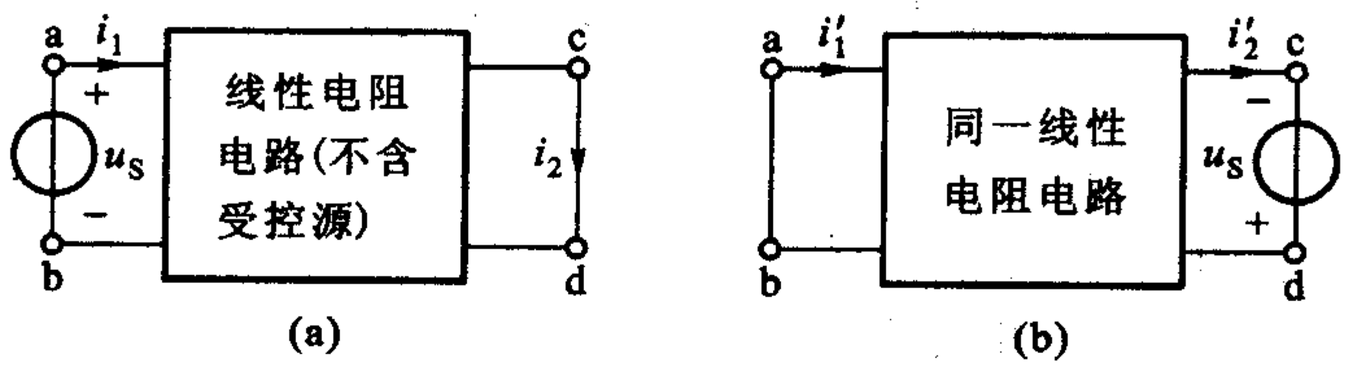


图 2-10　互易定理证明用图

不失一般性,我们可以假定图 2-10 所示电路含有四个网孔,支路 ab 属网孔 1、支路 cd 属网孔 2,其余两网孔则在方框内。对图 2-10(a),可得网孔方程

$$\begin{aligned}
R_{11}i_1 + R_{12}i_2 + R_{13}i_3 + R_{14}i_4 &= u_S \\
R_{21}i_1 + R_{22}i_2 + R_{23}i_3 + R_{24}i_4 &= 0 \\
R_{31}i_1 + R_{32}i_2 + R_{33}i_3 + R_{34}i_4 &= 0 \\
R_{41}i_1 + R_{42}i_2 + R_{43}i_3 + R_{44}i_4 &= 0
\end{aligned}$$

由克莱姆法则可得

$$i_2 = \frac{\begin{vmatrix} R_{11} & u_S & R_{13} & R_{14} \\ R_{21} & 0 & R_{23} & R_{24} \\ R_{31} & 0 & R_{33} & R_{34} \\ R_{41} & 0 & R_{43} & R_{44} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-u_S \times \begin{vmatrix} R_{21} & R_{23} & R_{24} \\ R_{31} & R_{33} & R_{34} \\ R_{41} & R_{43} & R_{44} \end{vmatrix}}{\Delta} \tag{2-5}$$

式中 Δ 为网孔方程系数 R_{11}、R_{12}、…、R_{44} 组成的行列式。

对图 2-10(b),可得网孔方程

$$\begin{aligned}
R_{11}i_1' + R_{12}i_2' + R_{13}i_3' + R_{14}i_4' &= 0 \\
R_{21}i_1' + R_{22}i_2' + R_{23}i_3' + R_{24}i_4' &= u_S \\
R_{31}i_1' + R_{32}i_2' + R_{33}i_3' + R_{34}i_4' &= 0 \\
R_{41}i_1' + R_{42}i_2' + R_{43}i_3' + R_{44}i_4' &= 0
\end{aligned}$$

由克莱姆法则可得

$$i_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & R_{12} & R_{13} & R_{14} \\ u_S & R_{22} & R_{23} & R_{24} \\ 0 & R_{32} & R_{33} & R_{34} \\ 0 & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-u_S \times \begin{vmatrix} R_{12} & R_{13} & R_{14} \\ R_{32} & R_{33} & R_{34} \\ R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{vmatrix}}{\Delta} \tag{2-6}$$

由于图 2-10(b)与图 2-10(a)的方框内是指同一电路,(2-6)式与(2-5)式中的分母,即方程系数的行列式是相同的,均以 Δ 表示。如把(2-5)式分子行列式的行与列互换,成为它的转置行列式,即

$$\begin{vmatrix} R_{21} & R_{31} & R_{41} \\ R_{23} & R_{33} & R_{43} \\ R_{24} & R_{34} & R_{44} \end{vmatrix}$$

则由线性代数可知行列式与它的转置行列式是相等的。因此,(2-5)式分子行列式可由上列转置行列式代替。再把该转置行列式与(2-6)式分子行列式比较,可以发现:若互电阻 $R_{12}=R_{21}$、$R_{13}=R_{31}$、$R_{14}=R_{41}$、…,就可得到 $i_2=i_1'$ 的结果。而当电路中无受控源时,互电阻 $R_{12}=R_{21}$、…是成立的(思考题 2-1)。于是,可以得到如下所述的互易(reciprocity)定理:

在只含一个电压源,不含受控源的线性电阻电路中,若在支路 x 中的电压源 u_x,在支路 y 中产生的电流为 i_y,则当电压源由支路 x 移至支路 y 时将在支路 x 中产生电流 i_y。即:电压源与(理想)电流表互换位置,电流表读数不变。

互易定理表明了线性电路的一个重要性质——互易性。此处所述只是该性质表现的一种形式①。

例 2-6　(1) 电路如图 2-11(a)所示,试求电流 i_1,$R=100\ \text{k}\Omega$;

(2) 由互易定理可知 i_1 可由图 2-11(b)所示电路求得,试求解。

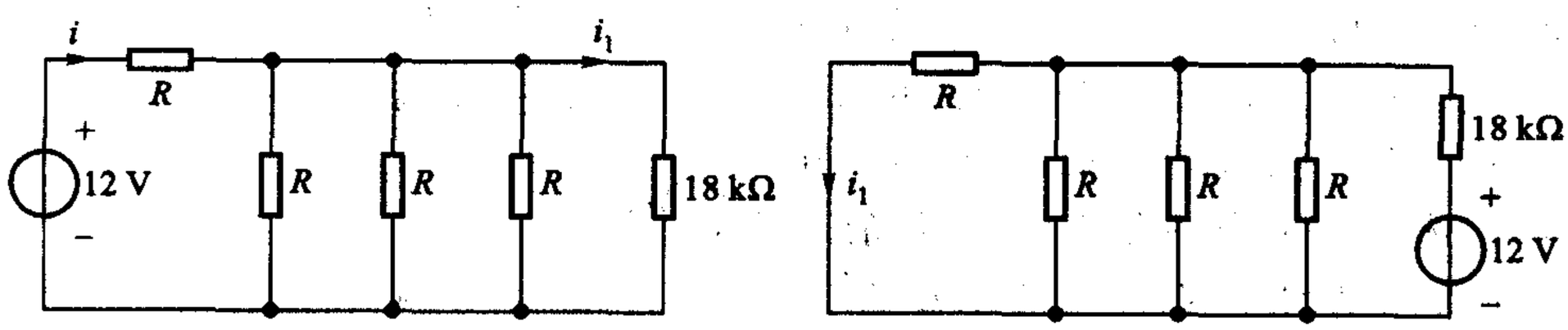


图 2-11　例 2-6

解　图 2-11(a)

① 参见习题 2-10。

$$i = \frac{12}{100 + \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \frac{1}{18}\right)^{-1}} \times 10^3 \text{ A}$$

$$= \frac{12}{111.69} \text{ mA}$$

18 kΩ 两端电压为

$$12 \text{ V} - \frac{12}{111.69} \times 100 \text{ V} = 1.256 \text{ V}$$

故得

$$i_1 = \frac{1.256 \text{ V}}{18 \times 10^3 \ \Omega} = 69.8 \ \mu\text{A}$$

图 2－11(b)

$$\frac{R}{4} = 25 \text{ k}\Omega$$

$$i_1 = \frac{1}{4} \frac{12}{(18 + 25) \times 10^3} \text{ A}$$

$$= 69.8 \ \mu\text{A}$$

本书由于涉及内容的限制，互易定理的重要性难以充分体现。本例仅表明，有时利用互易定理可简化电路问题的运算。

§2－3　节点分析

节点分析是以节点电压作为第一步求解的对象，故又称为节点电压法。节点电压的概念已在 §1－8 中谈到过。在电路中任选一个节点为参考点，其余的每一节点到参考点的电压降，就称为这个节点的节点电压。显然，一个具有 n 个节点的电路有 $(n-1)$ 个节点电压。以图 2－12 所示电路来说，它有四个节点，若选节点 4 为参考节点，则其余三个节点分别对参考节点的电压即为 u_{N1}、u_{N2} 和 u_{N3}。

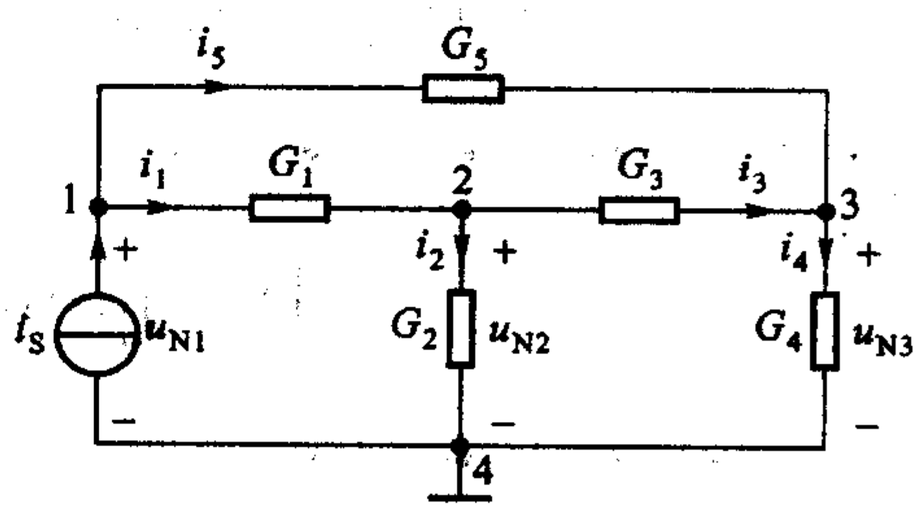


图 2－12　节点分析法用图

各节点电压不能用 KVL 相联系。因为沿任一回路的各支路电压，如以节点电压表示，其代数和恒等于零。例如，沿 $G_5G_3G_1$ 回路的支路电压 u_{13}、u_{32} 和 u_{21}，如以节点电压表示其代数和，则得 $u_{N1} - u_{N3} + u_{N3} - u_{N2} + u_{N2} - u_{N1} \equiv 0$，即 u_{N1}、u_{N2}、u_{N3} 可为任何数值，而上式恒为零。因此，节点电压不能用 KVL 相联系，求解节点电压所需的方程组只能来自 KCL

及支路 VCR。在选定参考节点后，可为每一个独立节点列写一个 KCL 方程，方程中的支路电流可以通过欧姆定律用节点电压表示。这样便得到一组以节点电压为变量的方程组，它们必然与变量数目相同且是独立的，由此可解得各节点电压。通常，各节点电压一律假定为电压降。以节点电压为变量的方程组称为节点方程。对图 2－12 所示电路，根据以上所述，可得节点方程如下所述：

在节点 1、2、3 运用 KCL 得

$$\left.\begin{aligned} i_1 + i_5 - i_S &= 0 \\ -i_1 + i_2 + i_3 &= 0 \\ -i_3 + i_4 - i_5 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{2-7}$$

由欧姆定律可得

$$\left.\begin{aligned} G_1(u_{N1} - u_{N2}) &= i_1 \\ G_2 u_{N2} &= i_2 \\ G_3(u_{N2} - u_{N3}) &= i_3 \\ G_4 u_{N3} &= i_4 \\ G_5(u_{N1} - u_{N3}) &= i_5 \end{aligned}\right\} \tag{2-8}$$

这些式子都是根据图中所设各节点电压的极性及电流的方向得出的。

以(2－8)式代入(2－7)式，并进行整理，可得

$$\left.\begin{aligned} (G_1 + G_5)u_{N1} - G_1 u_{N2} - G_5 u_{N3} &= i_S \\ -G_1 u_{N1} + (G_1 + G_2 + G_3)u_{N2} - G_3 u_{N3} &= 0 \\ -G_5 u_{N1} - G_3 u_{N2} + (G_3 + G_4 + G_5)u_{N3} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{2-9}$$

这就是以节点电压 u_{N1}、u_{N2}、u_{N3}为变量的 3 个方程。它们来源于(2－7)式，而该式是独立方程组，因而这组方程也是独立的。解这三个方程求得节点电压后，便可算出电路中所有的支路电压。如果需要，还可进一步求出所有的支路电流，这些计算都不涉及解联立方程的问题。

对于只含独立电源和电阻的电路，建立像(2－9)式这样的一组节点方程是很容易的，根据观察即能列出。为此，可以把(2－9)式概括为如下的形式：

$$\left.\begin{aligned} G_{11}u_{N1} + G_{12}u_{N2} + G_{13}u_{N3} &= i_{S11} \\ G_{21}u_{N1} + G_{22}u_{N2} + G_{23}u_{N3} &= i_{S22} \\ G_{31}u_{N1} + G_{32}u_{N2} + G_{33}u_{N3} &= i_{S33} \end{aligned}\right\} \tag{2-10}$$

式中：G_{11}、G_{22}、G_{33}分别称为节点 1、节点 2、节点 3 的自电导(self conductance)，它们分别是各节点上所有电导的总和，例如 $G_{11} = G_1 + G_5$。

G_{12}称为节点 1 和节点 2 的互电导(mutual conductance)，它是该两节点间的公有电导的负值，即 $G_{12} = -G_1$。出现负号是由于 u_{N1}及 u_{N2}都假定为电压降的

缘故。

G_{13}、G_{21}、G_{23}、G_{31}、G_{32}分别为其下标数字所示节点间的互电导，分别为有关两节点间公有电导的负值。出现负号是由所有节点电压都一律假定为电压降的缘故。另外，$G_{12}=G_{21}$，$G_{23}=G_{32}$，$G_{13}=G_{31}$。

i_{S11}、i_{S22}、i_{S33}分别为电流源输送给节点1、2、3的电流的代数和，例如$i_{S11}=i_S$。

(2-10)式是节点方程的普遍形式，适用于具有三个独立节点电路，很好记忆。具体电路不同，只是各个自电导、互电导和i_{S11}等的具体内容不同。根据观察可以迅速写出方程。对具有$(n-1)$个独立节点的电路，节点方程的形式应为

$$\left.\begin{aligned}
&G_{11}u_{N1}+G_{12}u_{N2}+\cdots+G_{1(n-1)}u_{N(n-1)}=i_{S11}\\
&G_{21}u_{N1}+G_{22}u_{N2}+\cdots+G_{2(n-1)}u_{N(n-1)}=i_{S22}\\
&\qquad\cdots\cdots\\
&G_{(n-1)1}u_{N1}+G_{(n-2)2}u_{N2}+\cdots+G_{(n-1)(n-1)}u_{N(n-1)}=i_{S(n-1)(n-1)}
\end{aligned}\right\}\tag{2-11}$$

由于各节点电压都一律假定为电压降，因而各互电导都是负值。(2-11)式所示的节点方程普遍形式可用来研究线性电路的一般性质。

上述立足于节点的分析，对平面和非平面电路都适用。

一般来说，如果电路的独立节点数少于网孔数，本法和网孔电流法相比，联立方程数就少些，较易求解。但是有些其他因素也是应该考虑的，如网络中电源的种类。如果已知的电源是电流源，则节点分析更为方便，方程往往由观察即可直接写出。如果电源为电压源，则网孔分析较方便。还应注意，网孔分析只适用于平面网络，节点分析则无此限制。

例2-7　电路如图2-13所示，试用节点分析求解节点电压u_{N1}和u_{N2}，并求支路电流i_1、i_2和i_3。

解　节点方程为

$$\left(\frac{1}{2\ \Omega}+\frac{1}{12\ \Omega}\right)u_{N1}-\left(\frac{1}{12\ \Omega}\right)u_{N2}=4\ \text{A}$$

$$-\left(\frac{1}{12\ \Omega}\right)u_{N1}+\left(\frac{1}{12\ \Omega}+\frac{1}{6\ \Omega}\right)u_{N2}=-2\ \text{A}$$

由此可得

$$\frac{7}{12}u_{N1}-\frac{1}{12}u_{N2}=4$$

$$-\frac{1}{12}u_{N1}+\frac{3}{12}u_{N2}=-2$$

即

$$7u_{N1}-u_{N2}=48$$

$$-u_{N1}+3u_{N2}=-24$$

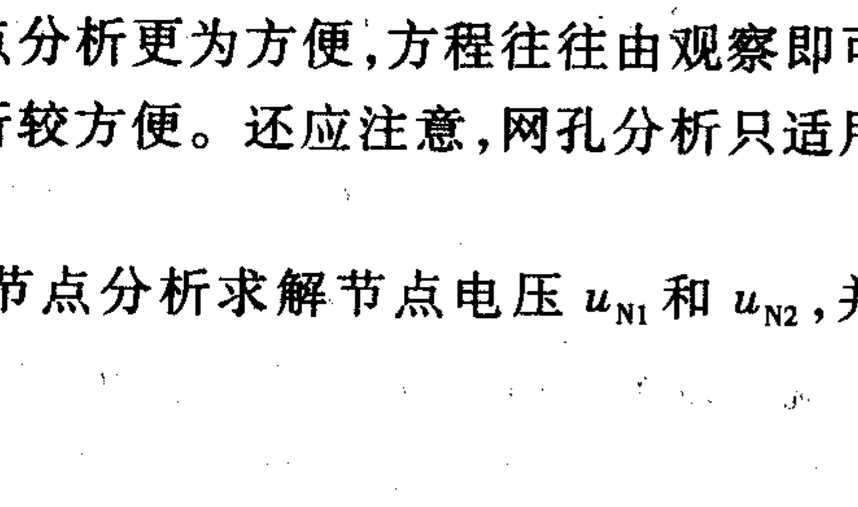


图2-13　例2-7

解得

$$u_{N1}=\frac{\begin{vmatrix}48 & -1\\ -24 & 3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}7 & -1\\ -1 & 3\end{vmatrix}}\text{ V}=\frac{120}{20}\text{ V}=6\text{ V}$$

$$u_{N2}=\frac{\begin{vmatrix}7 & 48\\ -1 & -24\end{vmatrix}}{20}\text{ V}=\frac{-120}{20}\text{ V}=-6\text{ V}$$

支路电流为

$$i_1=\frac{u_{N1}}{2\ \Omega}=\frac{6\text{ V}}{2\ \Omega}=3\text{ A}$$

$$i_2=\frac{u_{N2}}{6\ \Omega}=\frac{-6\text{ V}}{6\ \Omega}=-1\text{ A}$$

$$i_3=\frac{u_{N1}-u_{N2}}{12\ \Omega}=\frac{6\text{ V}-(-6\text{ V})}{12\ \Omega}=\frac{12\text{ V}}{12\ \Omega}=1\text{ A}$$

例 2－8　试列出图 2－14 所示电路的节点方程。

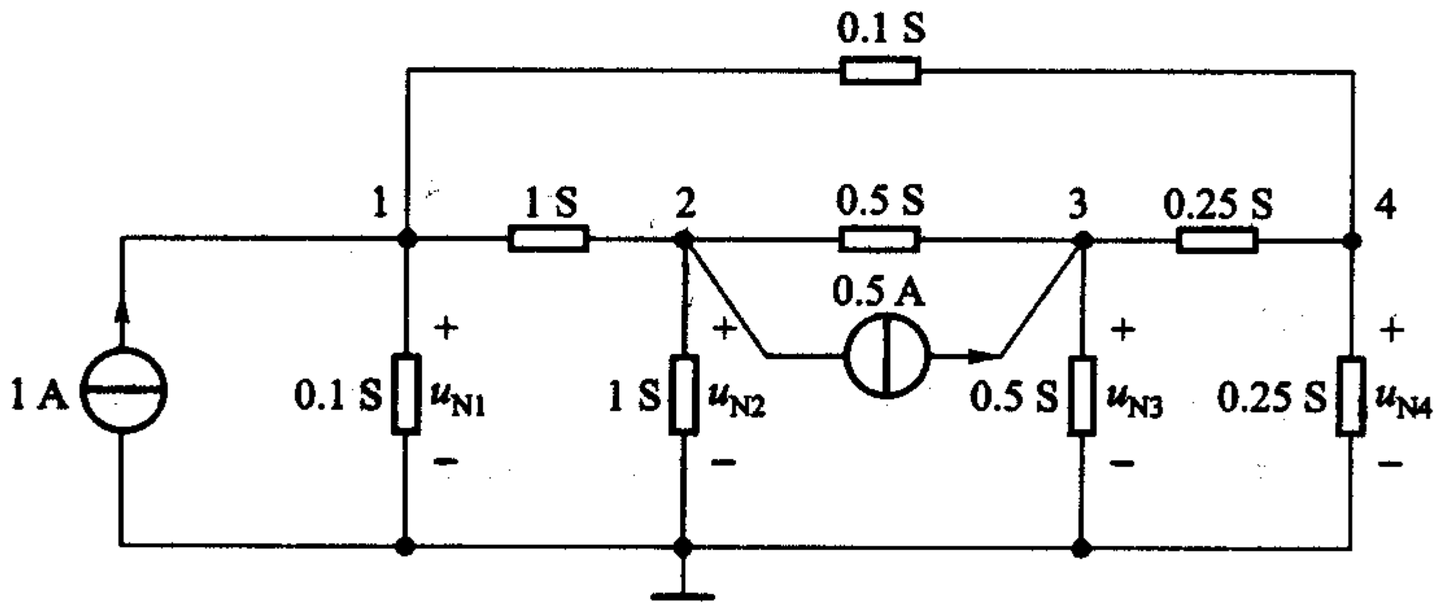


图 2－14　例 2－8

解　该电路共有 5 个节点，选其中的一个作为参考节点，标以接地的符号。设其余 4 个节点的电压分别为 u_{N1}、u_{N2}、u_{N3}、u_{N4}，如图 2－14 所示。

直接汇集于节点 1 的电导总和为 $G_{11}=(0.1+1+0.1)\text{ S}=1.2\text{ S}$；$G_{12}=-1\text{ S}$；$G_{13}=0$；$G_{14}=-0.1\text{ S}$。注意，因为节点 1、3 间无直接的公有电导，故 $G_{13}=0$。又电流源电流是流入节点 1 的，故 $i_{S11}=+1\text{ A}$。对节点 1 可得

$$1.2u_{N1}-u_{N2}-0.1u_{N4}=1$$

同理，对节点 2、3、4 可得

$$-u_{N1}+2.5u_{N2}-0.5u_{N3}=-0.5$$

$$-0.5u_{N2}+1.25u_{N3}-0.25u_{N4}=0.5$$

$$-0.1u_{N1}-0.25u_{N3}+0.6u_{N4}=0$$

例 2-9　试用节点分析法求图 2-15 电路的各电流。

解　本题电路共有三个独立节点,且节点 2、3 分别与参考节点间接的都是已知的电压源,故节点电压 u_{N2}和 u_{N3}是已知的,其值分别为 21 V 和 42 V。仅需对节点 1 列写节点方程

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\right)u_{N1}-\frac{1}{4}u_{N2}-\frac{1}{12}u_{N3}=0$$

以 u_{N2}和 u_{N3}值代入,得

$$\frac{7}{12}u_{N1}-\frac{21}{4}-\frac{42}{12}=0$$

解得

$$u_{N1}=15\ \text{V}$$

3 个电阻支路的电流 i_1、i_2、i_3 分别如图中所示,求得

$$i_1=\frac{u_{N1}}{4\ \Omega}=\frac{15}{4}\ \text{A}=3.75\ \text{A}$$

$$i_2=\frac{21\ \text{V}-u_{N1}}{4\ \Omega}=1.5\ \text{A}$$

$$i_3=\frac{42\ \text{V}-u_{N1}}{12\ \Omega}=\frac{27}{12}\ \text{A}=2.25\ \text{A}$$

其中 i_2、i_3 分别为流过 21 V 电压源和 42 V 电压源的电流。

校核:在节点 1 用 KCL($\sum I=0$)校核答案是否正确。可以看出 $\sum i=i_2+i_3-i_1=(1.5+2.25-3.75)\ \text{A}=0$,说明答案是正确的。

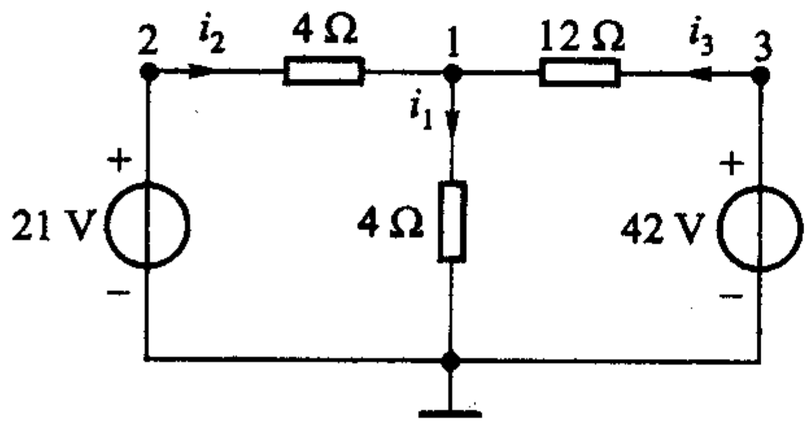


图 2-15　例 2-9

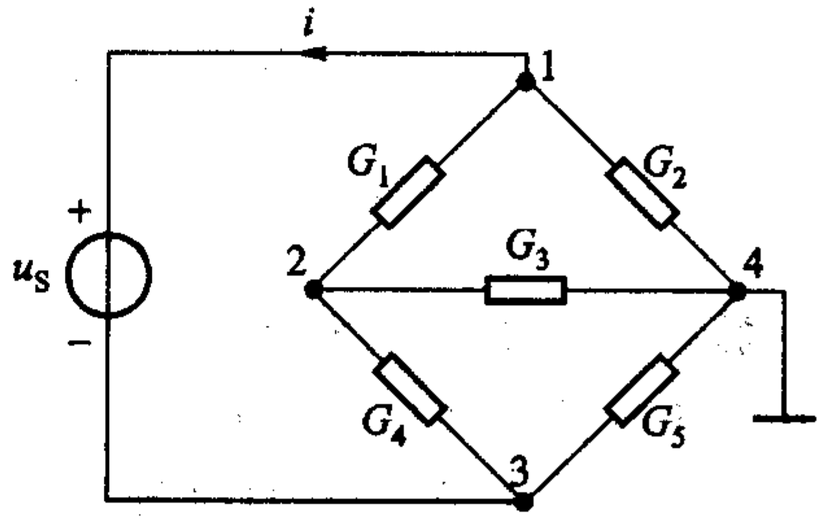


图 2-16　例 2-10

例 2-10　电路如图 2-16 所示,试列出节点方程。

解　在应用节点分析法时,有时遇到电路中有两个电压源而且它们的一端并不接到一个共同节点的情况,因此,不可能使两个电源都同时接地。采用上例的方法,必然会有一个电源要跨接在两个节点间。为了说明如何处理这类问题,

此处有意选节点 4 为参考点，使之出现电压源跨接于节点间的情况。

在这种情况下，三个节点电压均属未知，故必须对这三个节点都列方程，得

$$\begin{aligned}(G_1+G_2)u_{N1}-G_1u_{N2}&=-i\\-G_1u_{N1}+(G_1+G_3+G_4)u_{N2}-G_4u_{N3}&=0\\-G_4u_{N2}+(G_4+G_5)u_{N3}&=i\end{aligned}$$

其中 i 为电压源支路的电流，注意不要忽略。因为节点方程实质上就是 KCL 方程，所有与该节点有关的电流都必须计算在内。在一般情况下 i_{S11}、i_{S22}、i_{S33} 可理解为流入节点的所有已知的电流源电流以及未知的电压源电流的代数和。

i 是未知量，求解出 4 个未知量 u_{N1}、u_{N2}、u_{N3} 和 i 必须再增添一个方程式，这就是

$$u_{N1}-u_{N3}=u_S$$

读者试以此例与例 2－3 相比较，看有何相似之处？

例 2－11　试为图 2－17 所示含受控电流源电路列写节点方程。

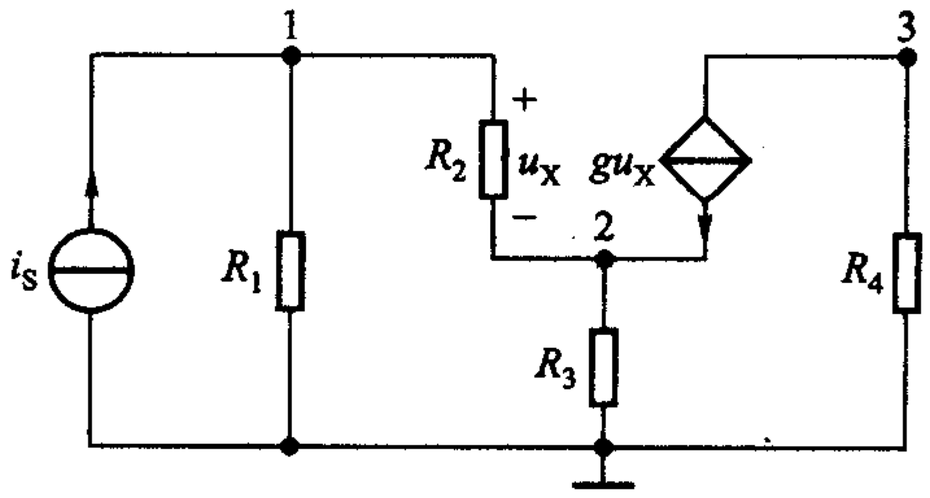


图 2－17　例 2－11

解　在把受控电流源暂时看作独立电流源列出方程后，再设法把受控源的控制量用节点电压表示，代回原方程。

节点 1　$(G_1+G_2)u_{N1}-G_2u_{N2}=i_S$

节点 2　$-G_2u_{N1}+(G_2+G_3)u_{N2}=gu_X$

节点 3　$G_4u_{N3}=-gu_X$

受控源的控制量 u_X 与节点电压的关系式为

$$u_X=u_{N1}-u_{N2}$$

以之代入节点方程后可得

$$\begin{aligned}(G_1+G_2)u_{N1}-G_2u_{N2}&=i_S\\-(G_2+g)u_{N1}+(G_2+G_3+g)u_{N2}&=0\\gu_{N1}-gu_{N2}+G_4u_{N3}&=0\end{aligned}$$

◀

为简便计，在不致引起误解的情况下，节点电压常省略下标 N。

思考题

2-2　对含受控源的电路，如果其节点方程组的右端，仍保持为流入各有关节点的独立电流源电流代数和，那么，(2-11)式中互电导 G_{12} 和 G_{21} 等还能相等吗？（参见例 2-11。）

2-3　对如图 2-18 所示电路，下列节点方程是否正确？如不正确，应如何改正？

$$(G_1 + G_2 + G_3)u_{N1} - G_1 u_S = i_S$$

$$G_3 u_{N2} - G_3 u_{N1} = i_S$$

$$G_1 u_{N3} - G_1 u_{N1} = 0$$

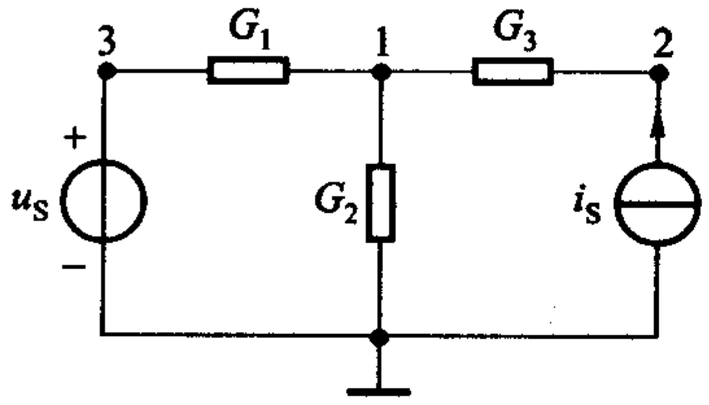


图 2-18　思考题 2-3

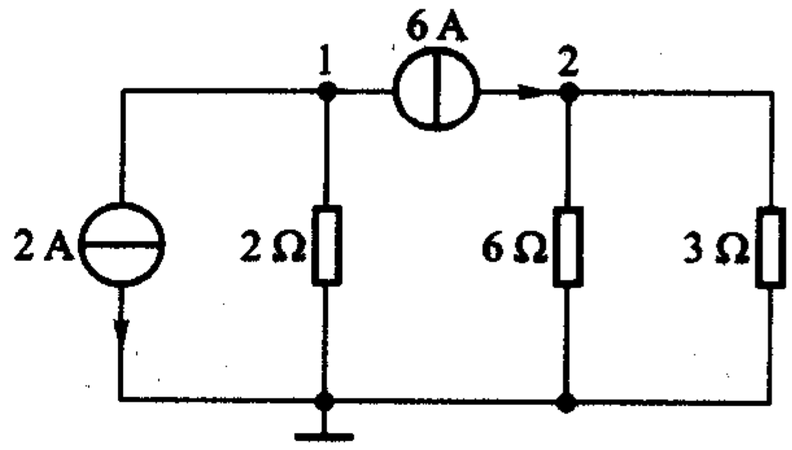


图 2-19　思考题 2-4

2-4　列出图 2-19 所示电路的节点方程。各支路电流是多少？

(8 A,2 A,4 A)

练习题

2-4　用节点分析求图 2-20 所示电路中各支路电流。

(1.8 A,2.2 A,0.8 A)

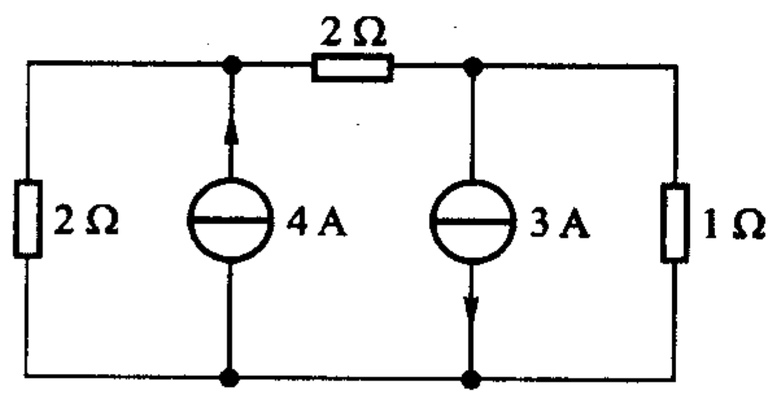


图 2-20　练习题 2-4

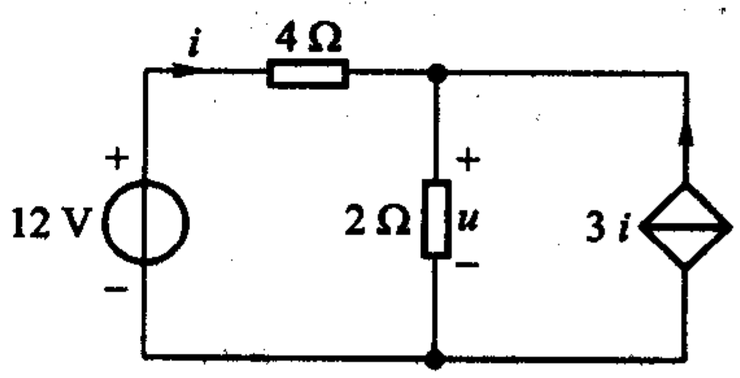


图 2-21　练习题 2-5

2-5　用节点分析求图 2-21 所示电路中的 u 和 i。

(8 V,1 A)

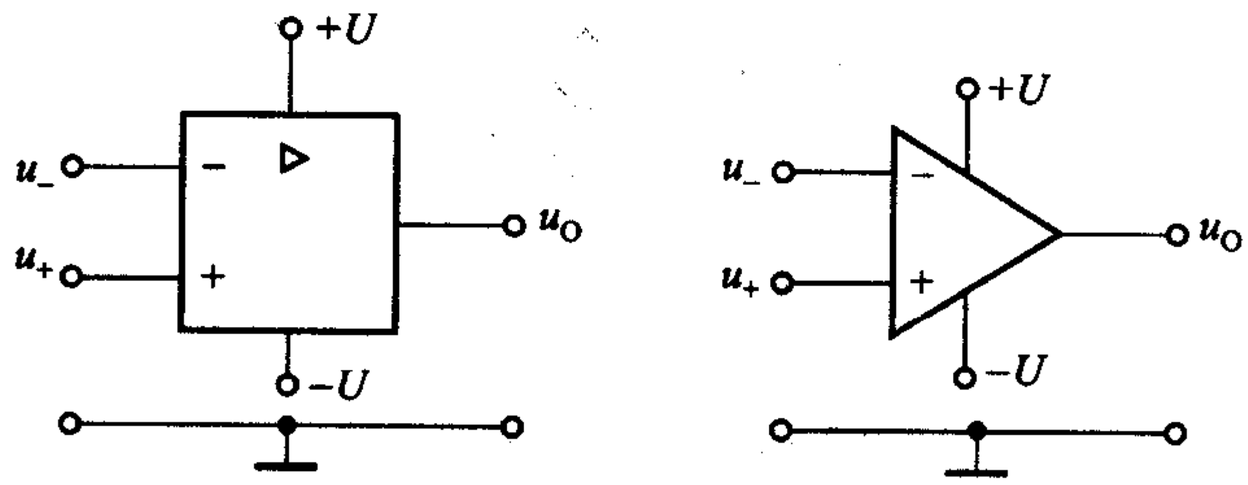
§2-4　含运算放大器的电阻电路

运算放大器(operational amplifier)简称运放(op-amp)是用集成电路(IC)技

术制作的一种多端器件。它包含一小片硅片，在其上制作了许多相连接的晶体管、电阻、二极管等，封装后成为一个对外具有多个端钮的电路器件。早期，运放用来完成对信号的加法、积分、微分等运算，故称运算放大器①，现在，它的应用远远超出这一范围，成为现代电子技术中应用广泛的一种器件。

运放的内部结构虽然复杂，但其端钮上的 VCR 却是简单的。本书适当介绍如何利用电路模型来分析运放电路。

图 2－22 所示为运放的图形符号，这里只表示出 5 个主要的端钮。标注 $+U$和 $-U$ 字样的两个端钮是供接直流工作电源的。标注“＋”号的输入端，称为同相输入端（或称非倒向端），标注“－”号的输入端，则称为反相输入端（或称倒向端），另一个端钮则为输出端。必须注意：这里的“＋”、“－”号并非是指电压的参考极性，只是一种用以区分两种不同性质输入端的标志。当输入电压 u_+ 施加在“＋”端与公共端（即接地端）之间且其实际方向自“＋”端指向公共端时，输出电压则从输出端指向公共端，亦即两者的实际方向相同，都指向公共端。当输入电压 u_- 施加在“－”端与公共端之间且其实际方向自“－”端指向公共端时，输出电压则从公共端指向输出端，亦即两者的实际方向正好相反。运放是一种单向器件，亦即，它的输出电压受差分输入电压的控制，但输入电压却不受输出电压的影响。运放的具有指向性质的三角形模型符号正是为了反映这一特点的。



(a) 电气图用图形符号　　(b) 模型符号

图 2－22　运放的图形符号

运放的输出－输入特性即转移特性如图 2－23 所示。若运放工作于线性区，图 2－24 所示即为其电路模型。由于我们只对运放的输出对输入的关系感兴趣，在模型中不必考虑运放内部工作所需的直流电源。模型中 R_i 为运放的输

① 运算放大器一词始见于 1947 年赖格西尼（J. R. Ragazzini）等人的一篇论文中，该文报告了第二次世界大战期间为美国防研究委员会所从事的运用高增益直流放大器来完成数学运算（模拟计算机）的研制工作。20 世纪 60 年代中期，IC 运放进入市场。由于 IC 制作过程的缘故，它们都是差分放大器，随着技术的发展，成本大幅下降，用途日益广泛，运放成为当今电技术领域重要的有源器件。

入电阻；R_o 为输出电阻。受控源则表明运放的电压放大作用，A 为运放的电压放大倍数（电压增益），u_+ 和 u_- 分别为施加同相输入端和反相输入端的输入电压。当 u_+ 与 u_- 同时作用时，受控源的电压为

$$A(u_+ - u_-) = Au_d \qquad (2-12)$$

$u_d = u_+ - u_-$ 称为差分输入电压。如果把反相端与公共端连接在一起，而把输入电压施加在同相端与公共端之间，则受控源的电压为 Au_+；如果把同相端与公共端连接在一起，而把输入电压施加在反相端与公共端之间，则受控源的电压为 $-Au_-$，负号表明反相（倒向）的作用。当 R_o 可以忽略不计时，上述受控源的电压即为运放的输出电压。

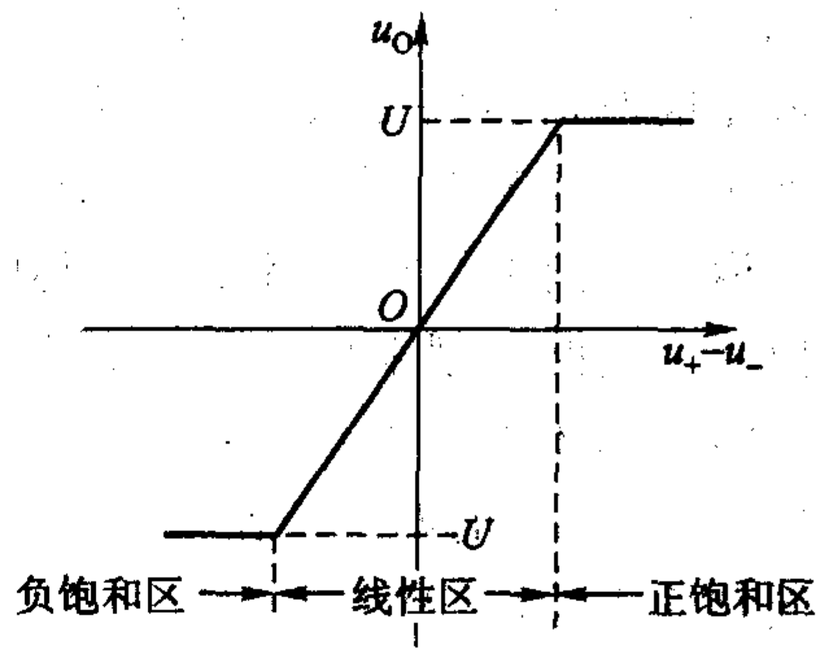


图 2-23　运放转移特性

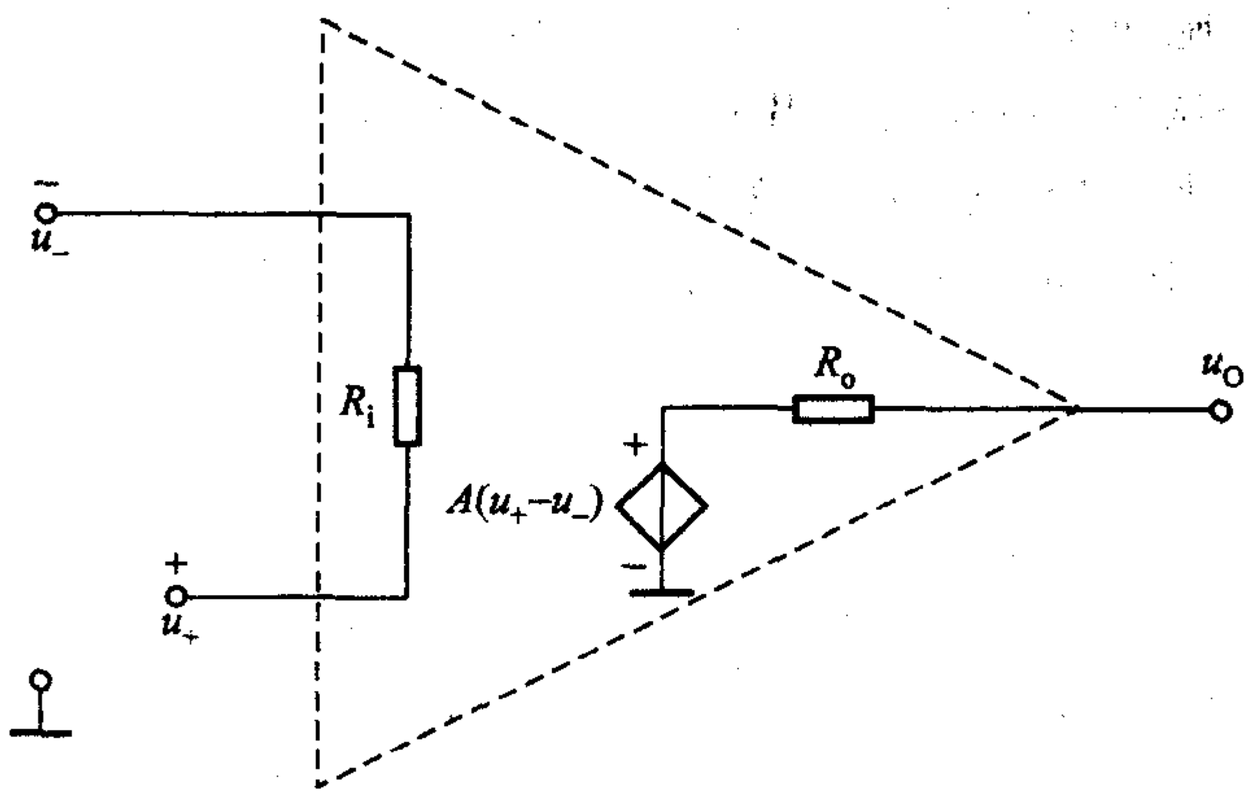


图 2-24　线性运放的模型

对实际运放来说，模型中的三个参数的典型数据约如表 2-1 所示。

表 2-1　实际运放参数

参数	名称	典型数值	理想值
A	放大倍数	$10^5 \sim 10^7$	∞
R_i	输入电阻	$10^6 \sim 10^{13}\ \Omega$	∞
R_o	输出电阻	$10 \sim 100\ \Omega$	0

符合理想值条件的运放称为理想运放。对理想运放来说，由于 A 为无限大，且输出电压 u_o 为有限值，因此，由（2-12）式可知，此时 $u_d = u_+ - u_- = 0$，

亦即

$$u_+ = u_- \tag{2-13}$$

如果不是差分输入，而是把反相端（或同相端）接地，则由于 $u_- = 0$（或 $u_+ = 0$），因而 $u_+ = 0$（或 $u_- = 0$），不论是反相端还是同相端接地，$u_+ = u_- = 0$。又由于输入电阻为无限大，因此，不论是同相端还是反相端，输入电流为零，以 i_+ 和 i_- 分别表示这两个输入端的电流，则

$$i_+ = i_- = 0 \tag{2-14}$$

理想运放的图形符号仍如图 2－22(b)所示，但常加注“∞”字样。一般不必绘出直流电源端钮。

按理想运放分析时，毋需用图 2－24 所示电路模型，仅运用(2－13)式和(2－14)式这两个特点即可。

节点分析特别适用于含运放的电路。在理想运放的情况下，请注意以下的规则：

(1) 在运放的输出端应假设一个节点电压，但不必为该节点列写节点方程。(求输出电流是很困难的!)

(2) 在列写节点方程时，注意运用(2－13)式及(2－14)式以减少未知量的数目。

例 2－12　比例器　图 2－25 所示为反相放大器，试求其输出 u_O 与输入 u_S 的关系。

解　如图 2－25 所示，该电路有三个独立节点 1、2、3。对节点 1 毋需列写节点方程，因该节点与电压源相接，节点电压 u_1 即为 u_S；对节点 3 也不必列写节点方程，该节点电压 u_3 即为输出电压 u_O。节点 2 的方程为

$$(G_1 + G_2)u_2 - G_1 u_1 - G_2 u_3 = 0$$

运用(2－13)式，即 $u_+ = u_-$，可知反相端相当于接地（常称“虚地”，virtual ground），故得

$$u_2 = 0$$

由此可得

$$u_3 = -\frac{R_2}{R_1}u_1$$

即

$$u_O = -\frac{R_2}{R_1}u_S$$

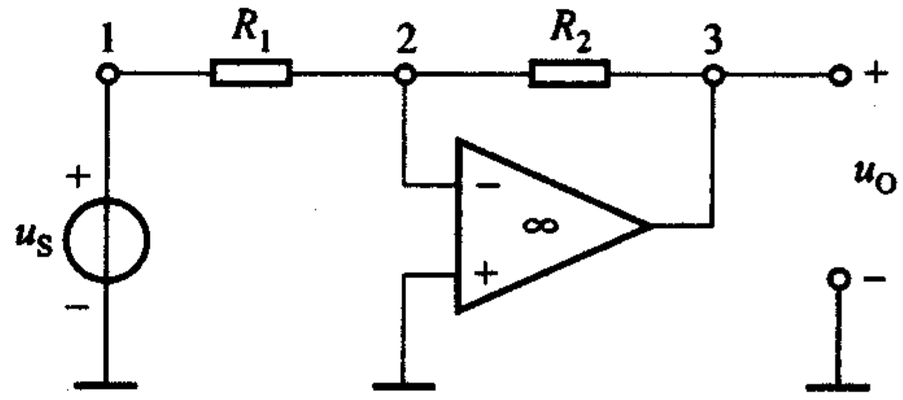


图 2－25　例 2－12

在列写节点方程时，已用到运放输入电流为零这一特点。u_O 与 u_S 成比例，故称为比例器。

例 2－13　图 2－26 所示运放电路，输入端无一接地，试求输出电压 u_O 与

输入电压 u_S 的关系。

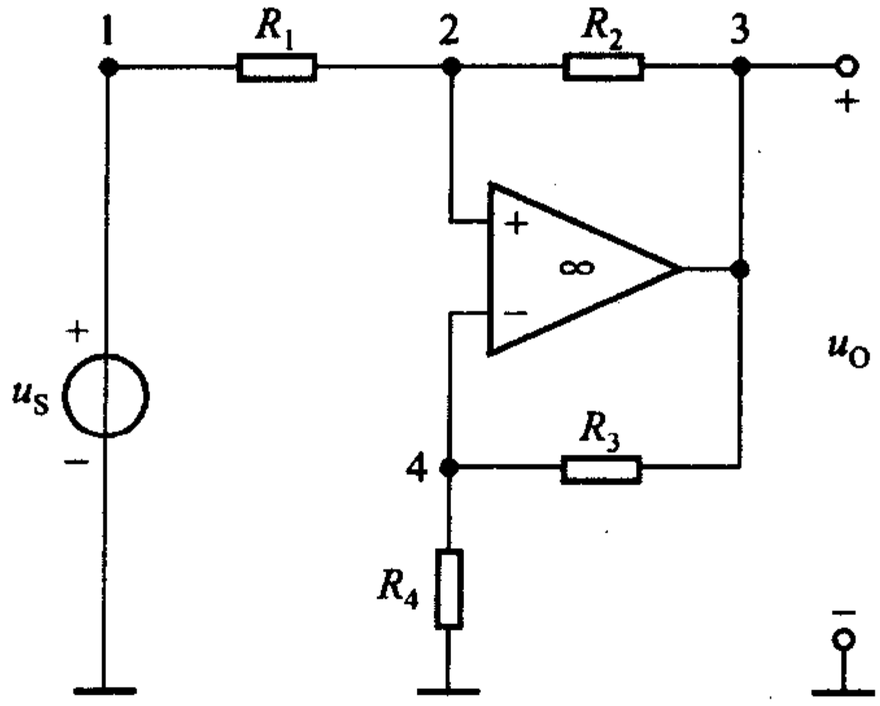


图 2－26　例 2－13

解　该电路共有 4 个独立节点，节点 2、4 的节点方程分别为

$$(G_1 + G_2)u_2 - G_1u_1 - G_2u_3 = 0$$

$$(G_3 + G_4)u_4 - G_3u_3 = 0$$

在列写方程时，用到了运放输入电流为零的特点，否则，在上列方程中尚需增添输入电流项。根据(2－13)式可知

$$u_2 = u_4$$

又

$$u_1 = u_S$$

故得

$$(G_1 + G_2)u_2 - G_2u_3 = G_1u_S$$

$$(G_3 + G_4)u_2 - G_3u_3 = 0$$

可解得

$$u_O = u_3 = \frac{G_1G_4 + G_1G_3}{G_1G_3 - G_2G_4}u_S$$

$$= \frac{R_2R_3 + R_2R_4}{R_2R_4 - R_1R_3}u_S$$

例 2－14　电压跟随器　试求图 2－27 所示电路 u_2 与 u_1 的关系。

解　由于运放的输入端电压为零，因此，由 KVL 可知

$$u_1 - u_2 = 0$$

即

$$u_2 = u_1$$

亦即输出电压与输入电压完全相同，故称电压跟随器(voltage follower)。又

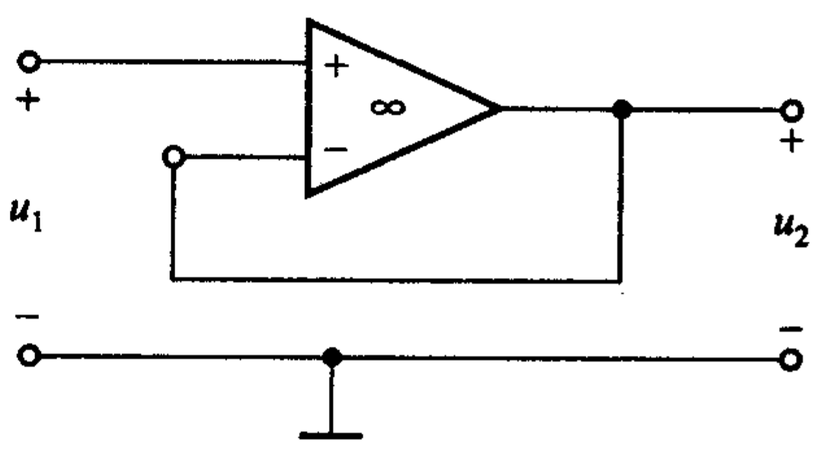


图 2－27　例 2－14

由于运放的输入电流为零，当它插入两电路之间，可起隔离作用，而不影响信号电压的传递。例如，在图 2－28(a)所示分压器电路中，输出电压 u_O 与输入电压 u_S 的比例关系为

$$u_O = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u_S$$

但是，当输出端接上负载 R_L 后(以虚线表示)，其比例关系将变为

$$u_O = \frac{R_2 // R_L}{R_1 + R_2 // R_L}$$

符号“//”表示对并联电阻求等效值。这便是所谓“负载效应”，负载影响了原定关系(参见下章习题 3－3)。如果在负载 R_L 与分压器之间接入一电压跟随器，则由于它的输入电流为零，它的接入并不影响到原分压器的分压关系，R_L 被隔离，但原定的输出电压仍出现在 R_L 两端，如图 2－28(b)所示。

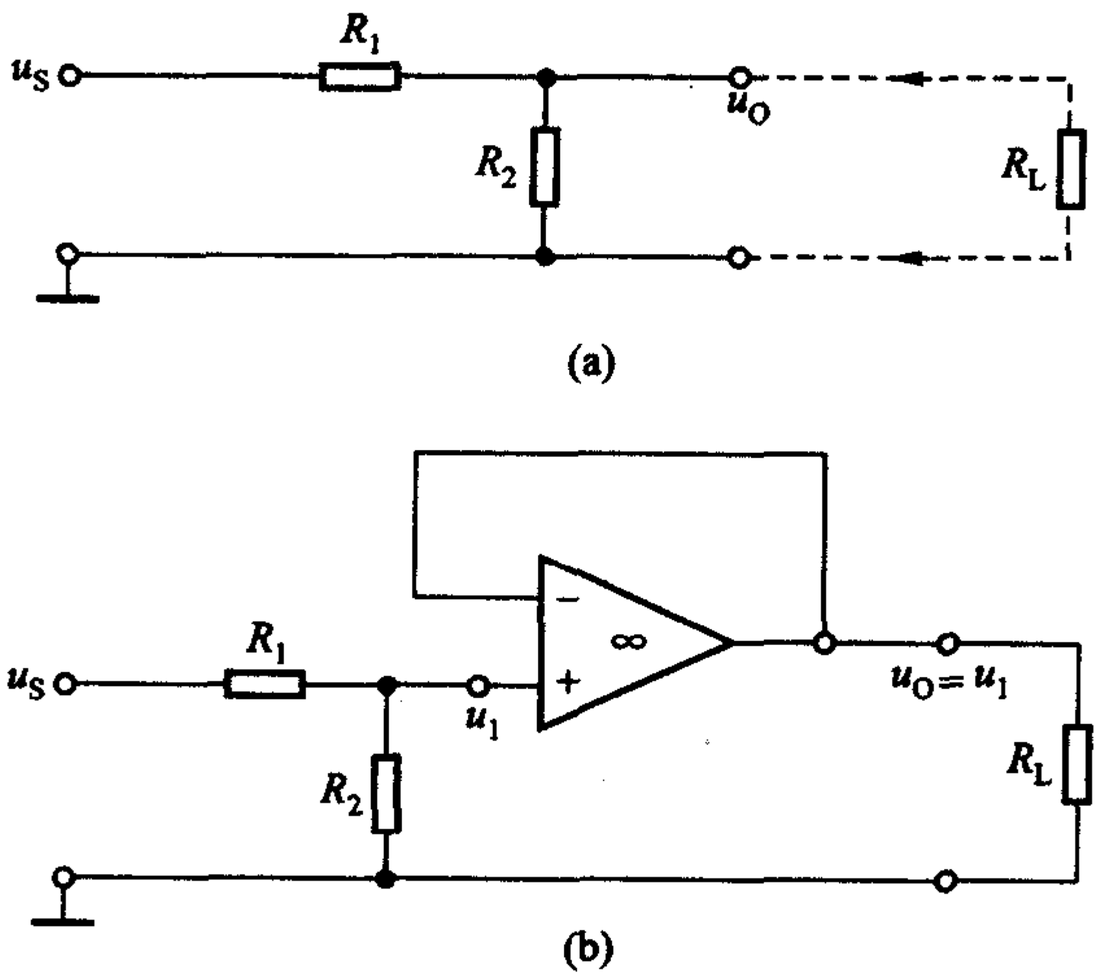


图 2－28　例 2－14

习题

2－6　含运放电路如图 2－29 所示，试求电流 i。　　(8.4 mA)

2－7　图 2－30 所示为加法运算电路，试证明

$$u_O = -\left(\frac{R_3}{R_1} u_{S1} + \frac{R_3}{R_2} u_{S2}\right)$$

2－8　图 2－31 所示为减法运算电路，试证明

$$u_O = \frac{R_2}{R_1}(u_{S1} - u_{S2})$$

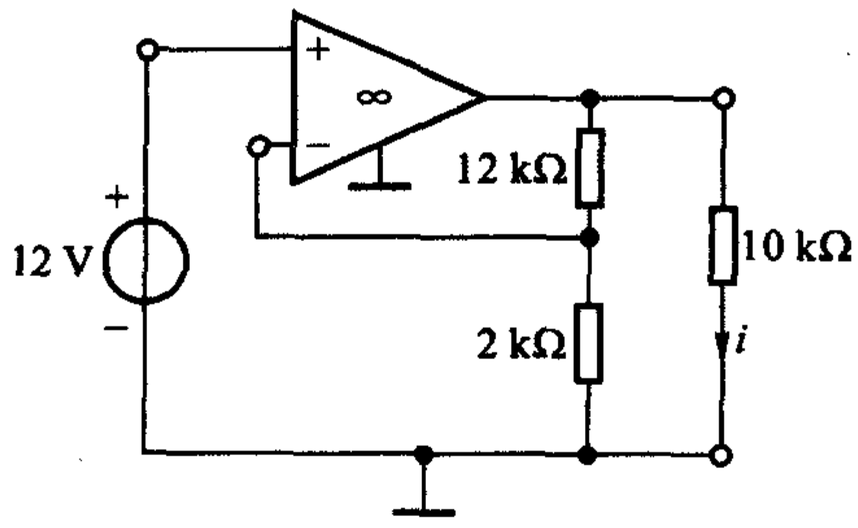


图 2－29　练习题 2－6

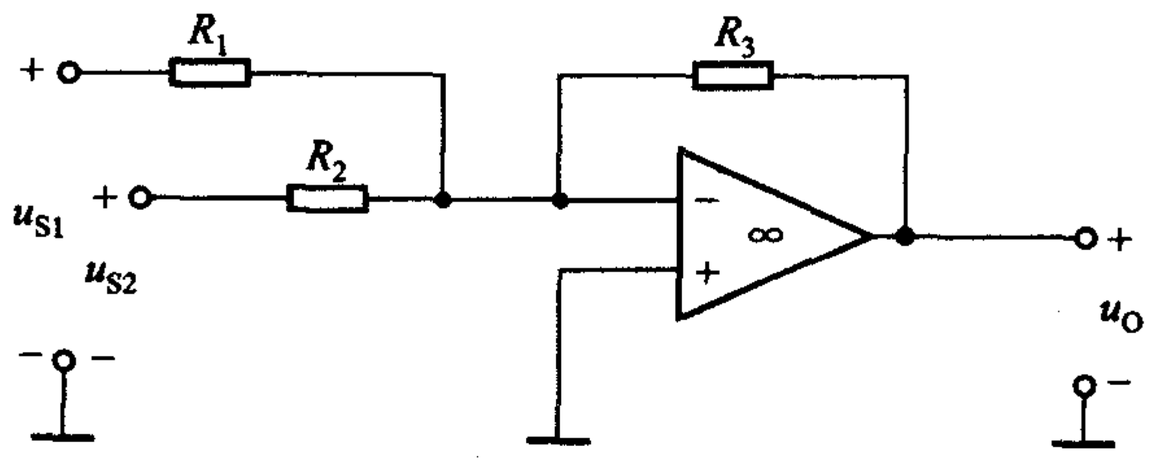


图 2－30　练习题 2－7

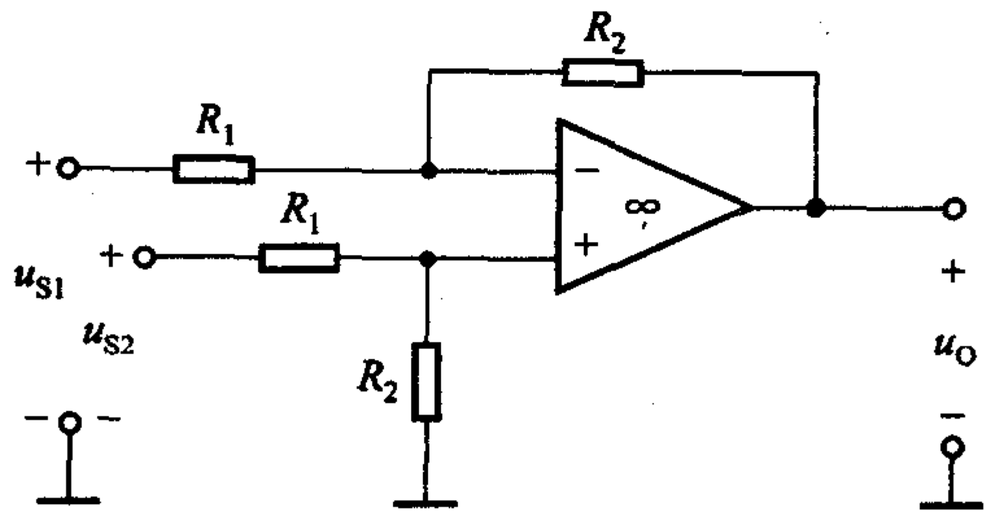


图 2－31　练习题 2－8

§2－5　电路的对偶性

若将网孔方程(2－3)式和节点方程(2－10)式加以比较，就会发现：把(2－3)式中的网孔电流换以节点电压；电阻换以电导；电压源换以电流源就可得到节点方程(2－10)式。反之，通过类似的对应量之间变换，也可由后者得到前者，即由一种方程可得出另一种方程。又如串联电阻电路的等效电阻公式、分压公式(1－37)式和并联电导电路的等效电导公式、分流公式(1－39)式间也存

着这种对关系式作适当的更换，就可得出另一相对应关系式的情况。以上所述只是电路对偶性(duality)的两个例子，认识到这种对偶性有助于读者掌握电路的规律，由此及彼，学一知二。表 2-2 列举了一些电路的对偶量，以供参考使用。

表 2-2　电路的一些对偶量

电压	电流	网孔电流	节点电压
电阻	电导	电压源	电流源
短路	开路	电荷	磁链
KCL	KVL	电感	电容
串联	并联		

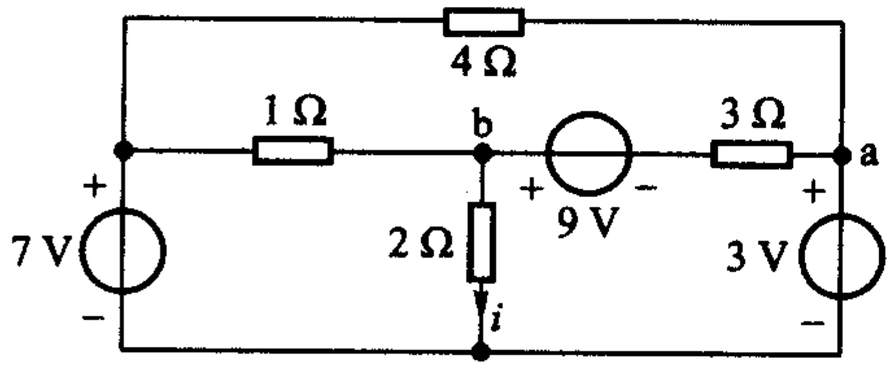


习题

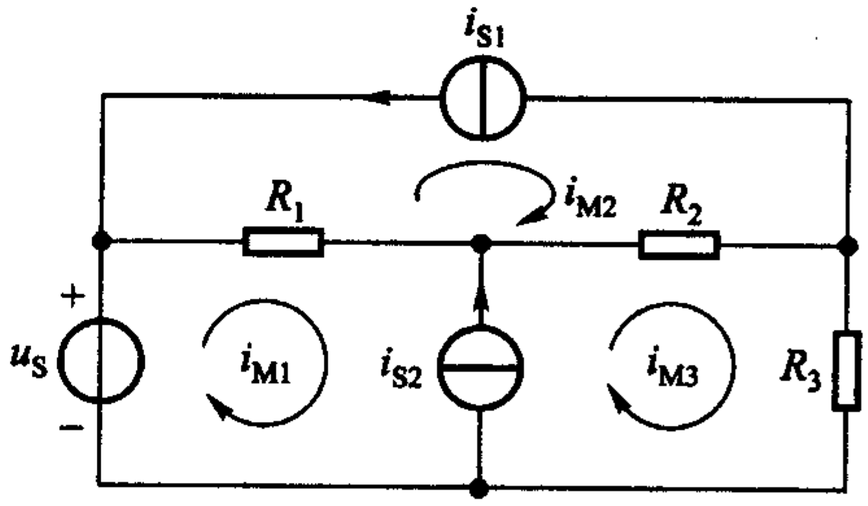
§2-1　网孔分析

2-1　试用网孔电流法求图题 2-1 所示电路中电流 i 和电压 u_{ab}。

2-2　图题 2-2 所示电路中若 $R_1=1\ \Omega$、$R_2=3\ \Omega$、$R_3=4\ \Omega$、$i_{S1}=0$、$i_{S2}=8\ \text{A}$、$u_S=24\ \text{V}$，试求各网孔电流。



图题 2-1



图题 2-2

2-3　对图题 2-2 所示电路，若改变为 $i_{S1}=2\ \text{A}$，$u_S=0$，其他数据均与上题相同，求各网孔电流。

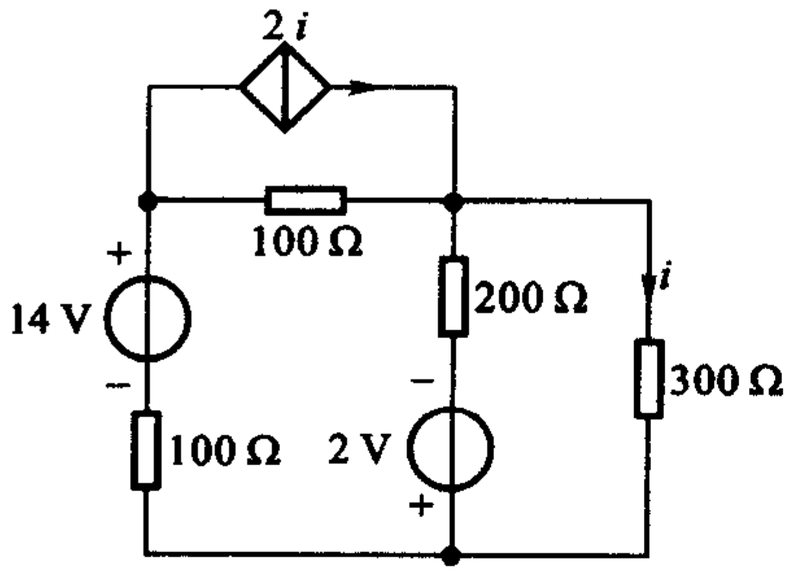
2-4　在一个三网孔的电路中，若网孔电流 i_1 可由网孔方程解得为

$$i_1=\frac{\begin{vmatrix}-1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 3\end{vmatrix}}$$

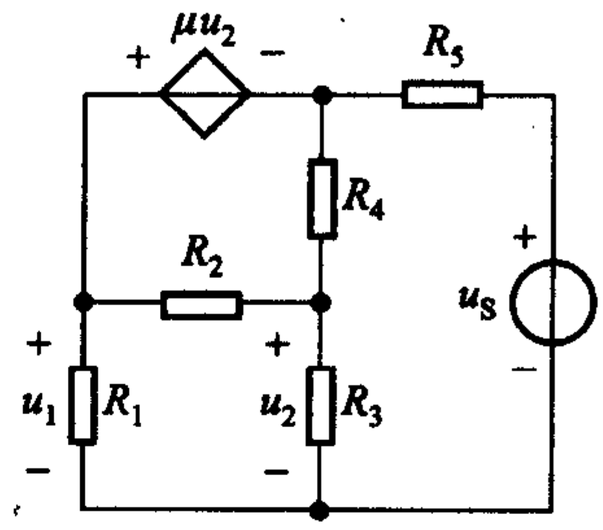
求该电路的一种可能的形式。

2-5　电路如图题2-3所示，用网孔分析求 i_A，并求受控源提供的功率。

2-6　电路如图题2-4所示，用网孔分析求 u_1。已知：$u_S=5$ V，$R_1=R_2=R_4=R_5=1\ \Omega$，$R_3=2\ \Omega$，$\mu=2$。



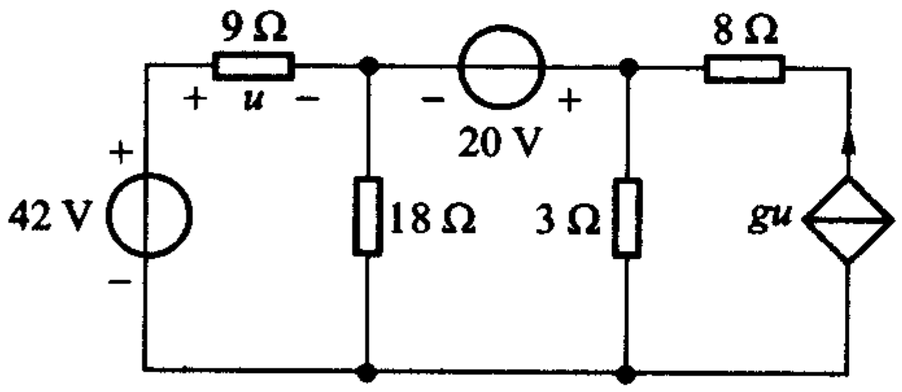
图题2-3



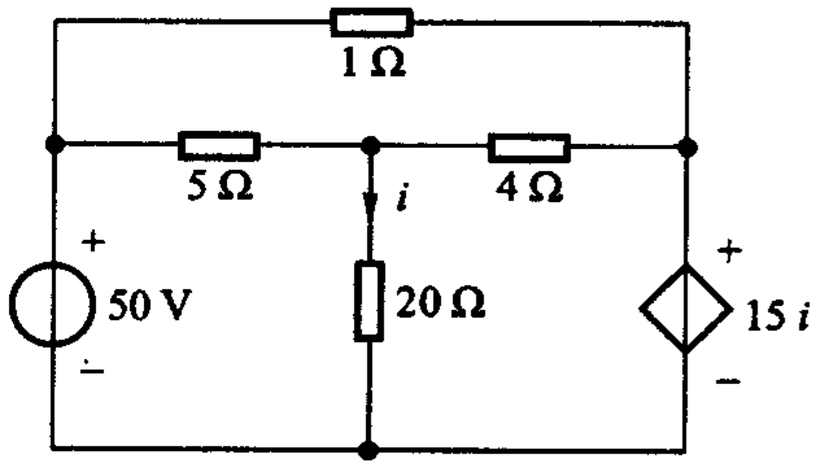
图题2-4

2-7　电路如图题2-5所示，其中 $g=0.1$ S，用网孔分析求流过8 Ω电阻的电流。

2-8　含CCVS电路如图题2-6所示，试求受控源功率。



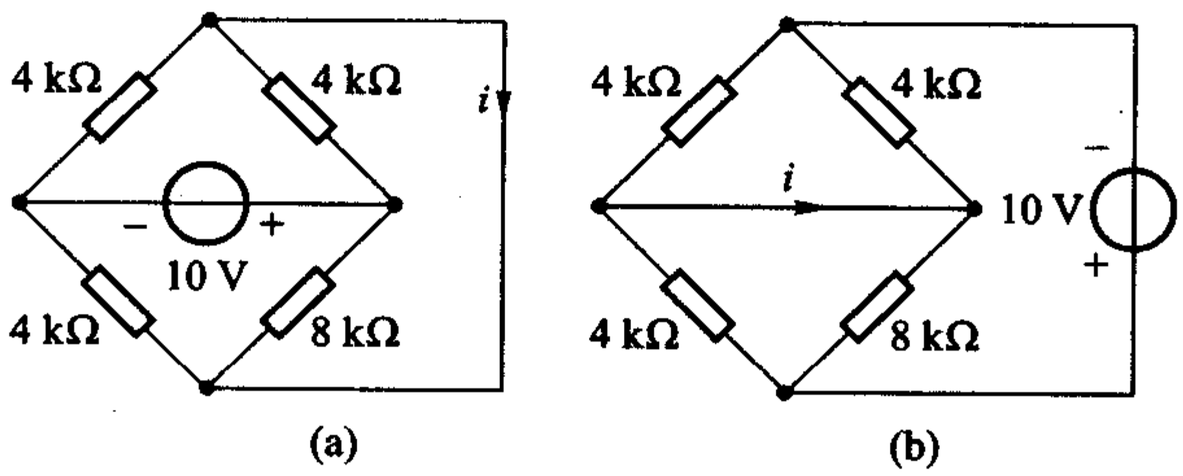
图题2-5



图题2-6

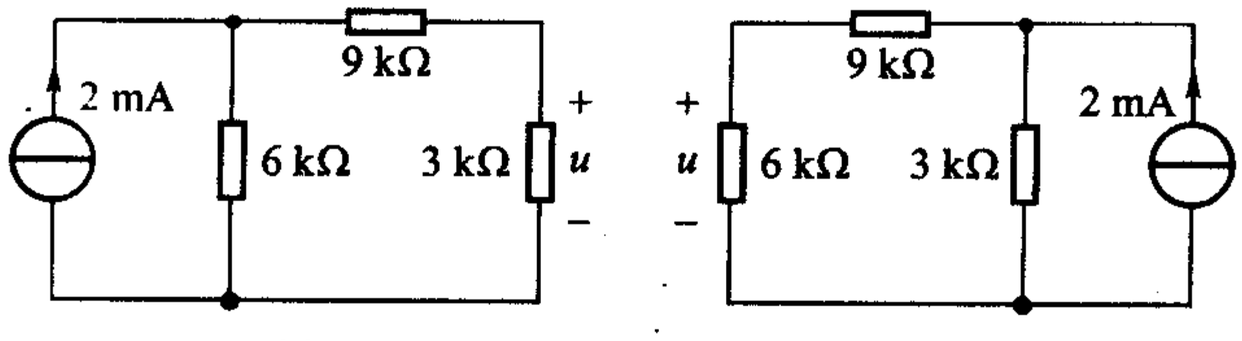
§2-2　互易定理

2-9　根据互易定理图题2-7(a)、(b)两图中的电流 i 应该相等，试加以验证。



图题2-7

2－10　互易的第二种形式，可由图题 2－8 来说明，试分别计算两图中的电压 u，它们应该是相等的。即两图中的电流源与电压表可交换位置而电压表读数不变。

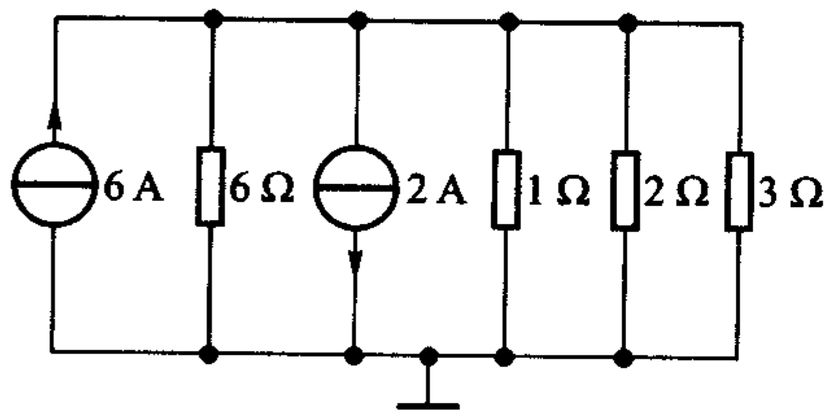


图题 2－8

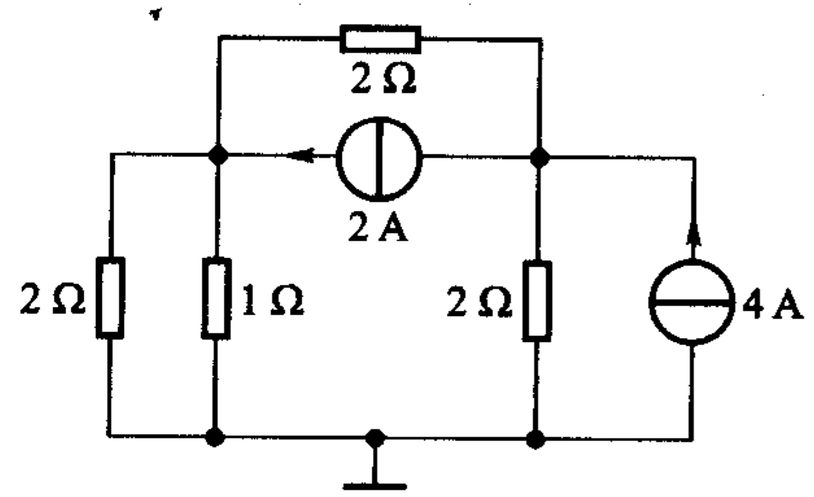
§2－3　节点分析

2－11　电路如图题 2－9 所示，试用节点分析求各支路电流。

2－12　电路如图题 2－10 所示，试用节点分析求各支路电流。



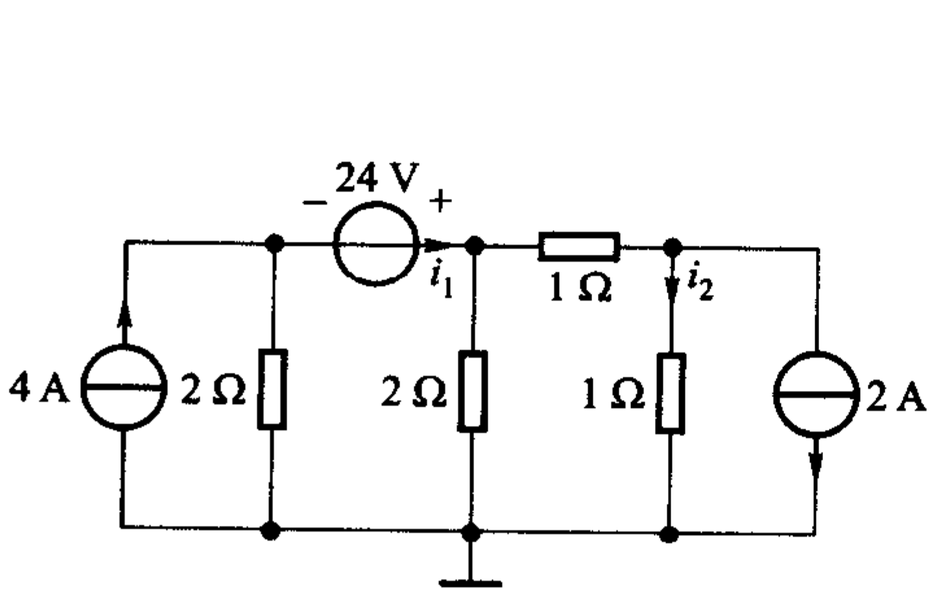
图题 2－9



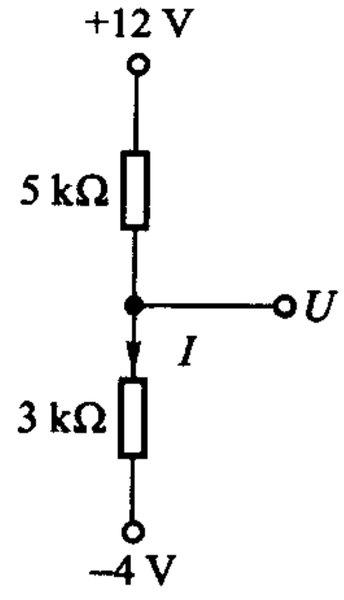
图题 2－10

2－13　电路如图题 2－11 所示，试用节点分析求 i_1、i_2。

2－14　直流电路如图题 2－12 所示，试求 U，I。



图题 2－11



图题 2－12

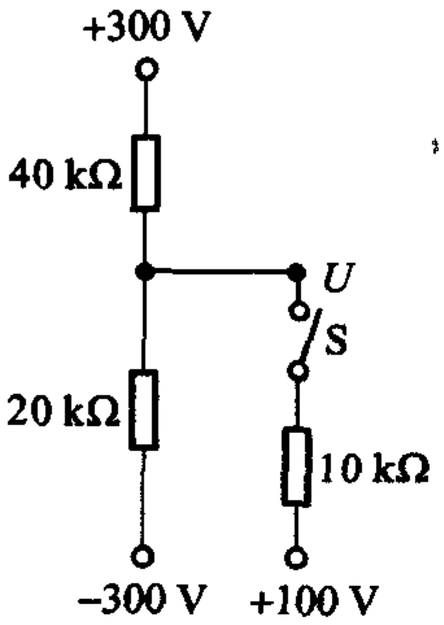
2－15　若节点方程为

$$1.6u_1 - 0.5u_2 - u_3 = 1$$
$$-0.5u_1 + 1.6u_2 - 0.1u_3 = 0$$
$$-u_1 - 0.1u_2 + 3.1u_3 = 0$$

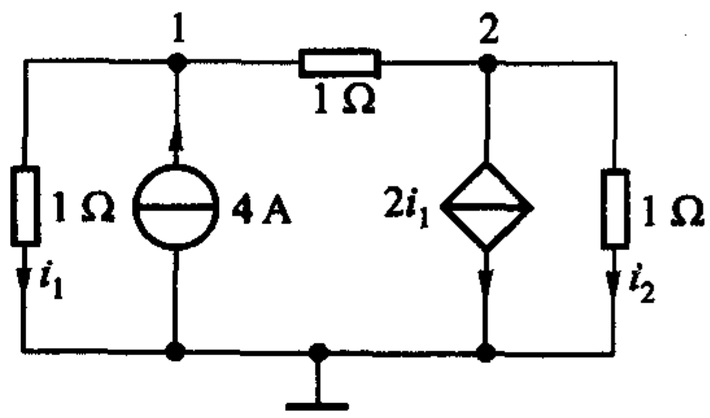
试绘出最简单的电路。

2-16　电路如图题 2-13 所示。试求开关 S 打开及闭合时电压 U 的变化。(即两种情况时，U 各为多少?)

2-17　电路如图题 2-14 所示，试用节点分析求 i_1、i_2。



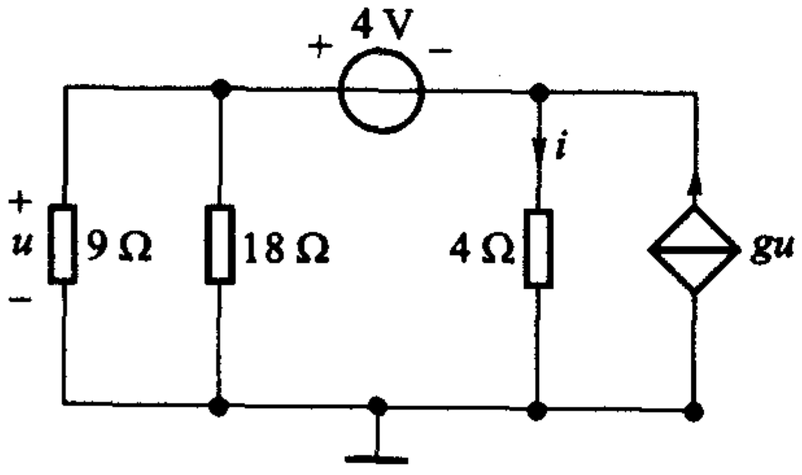
图题 2-13



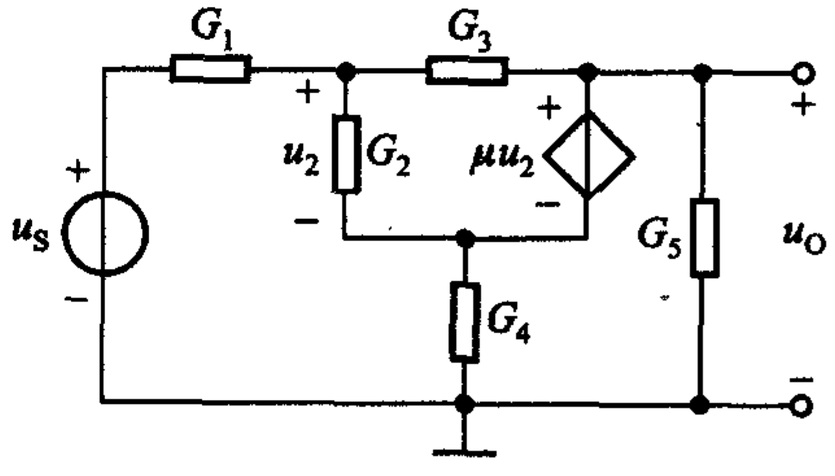
图题 2-14

2-18　电路如图题 2-15 所示，其中 $g = \frac{1}{3}$ S。试求电压 u 和电流 i。

2-19　试列出为求解图题 2-16 所示电路中 u_o 所需的节点方程。



图题 2-15



图题 2-16

§2-4　含运算放大器的电阻电路

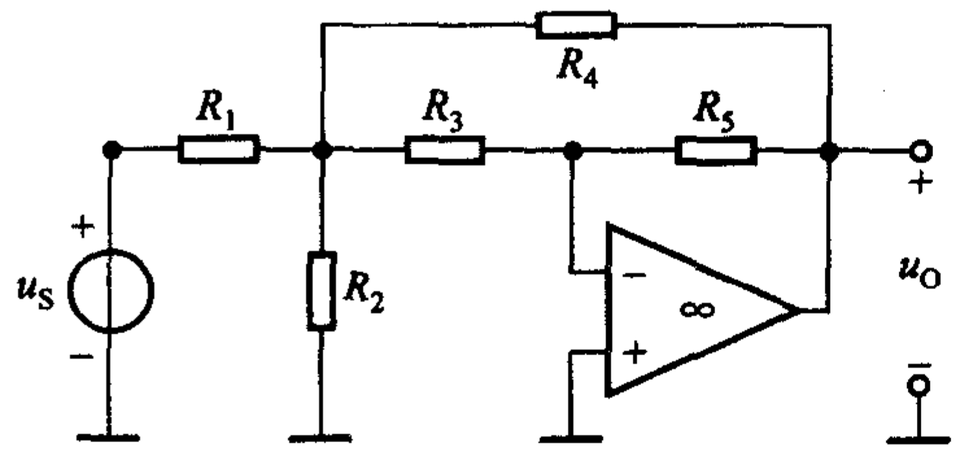
2-20　图题 2-17 所示运放电路，$R_1 = R_2$、$R_4 = R_5$，试表明

$$u_O = -\frac{R}{R_1}u_S$$

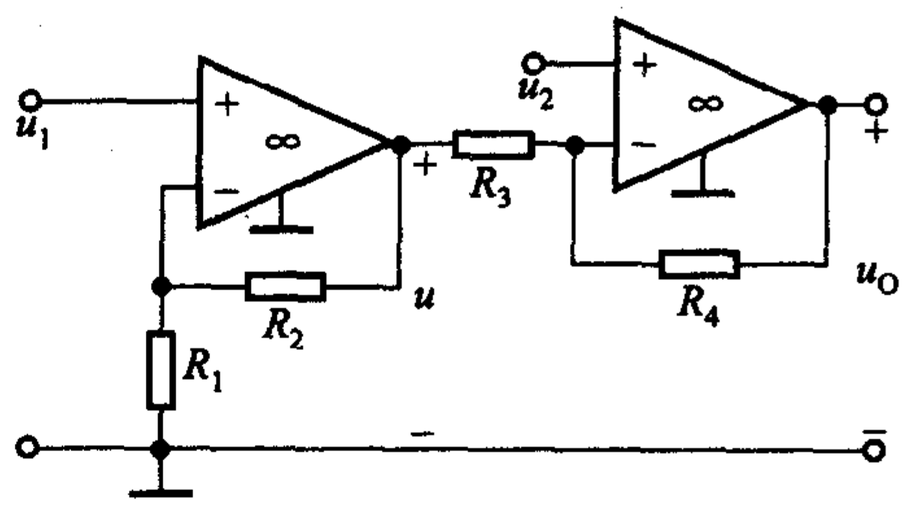
式中

$$\frac{1}{R} = \frac{2R_3}{R_1R_4} + \frac{2}{R_4} + \frac{R_3}{R_4^2}$$

2－21　图题 2－18 所示运放电路，试证明 $u_O=\left(1+\dfrac{R_4}{R_3}\right)u_2-\dfrac{R_4}{R_3}\left(1+\dfrac{R_2}{R_1}\right)u_1$。



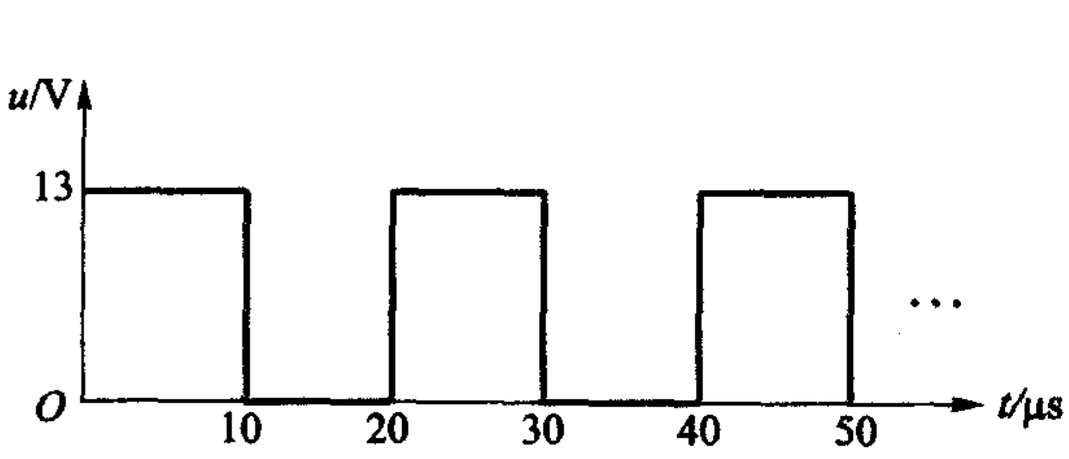
图题 2－17

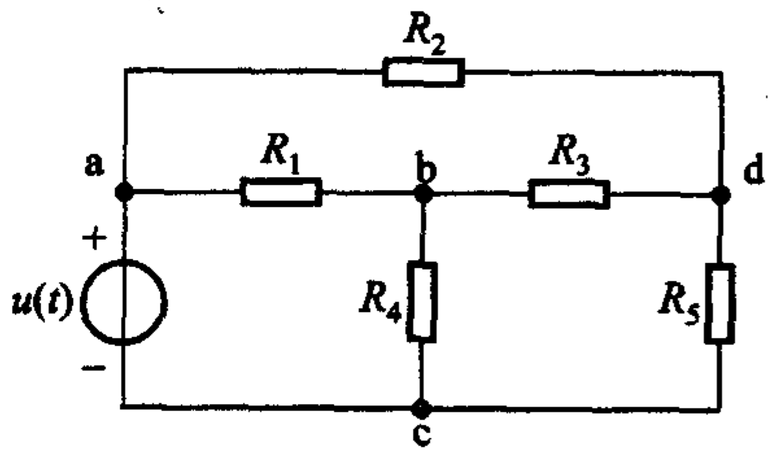


图题 2－18

综合

2－22　若作用于图题 2－19 所示电阻电路的电压源 $u(t)$ 的波形为如图中所示的周期性方波，试求流过 R_5 的电流 $i(t)$。已知 $R_1=R_2=R_3=R_4=1\ \Omega$，$R_5=2\ \Omega$。





图题 2－19

2－23　若节点方程为

$$5u_1-4u_2=-3$$
$$-4u_1+17u_2-8u_4-i_6=3$$
$$17u_3-10u_4+i_6=0$$
$$-8u_2-10u_3+27u_4=-12$$
$$u_2-u_3=6$$

试绘出最简单的电路。

第三章

叠加方法与网络函数

两类约束是解决集总电路问题的基本依据。通过前两章的学习，我们已掌握了处理任何集总电路的原则和思路，且对线性电阻电路都能加以分析、计算。到达这一步是至关重要的，但还必须辅之以其他有关概念方能充实电路分析所需的基础知识。例如，对一个含有多个信号源的电阻电路，尽管我们已会运用节点分析或网孔分析求得任一支路的输出电压(流)，但尚未探讨过每一信号源对输出究竟有多大影响的问题。

在两类约束概念的基础上，本书将再引入三个重要概念，即：叠加概念、分解概念和变换(域)概念，由此形成相应的三大基本方法。一个假设(集总假设)、两类约束和三大基本概念构成了本书的基本结构。明确基本结构，对启动每章的学习，完成知识的迁移与扩展，归纳学习内容起着重要的作用。

本章和下章分别讨论叠加方法和分解方法。变换方法在本书第三篇讨论。上面提出的尚未探讨过的问题属本章讨论范围。网络函数和叠加方法是密切相关的，在本章一并讨论。作为应用叠加方法的一个例子，本章最后一节将说明“数模转换器”的基本原理。

§3-1 线性电路的比例性 网络函数

由线性元件及独立电源组成的电路为线性电路。独立电源是电路的输入，对电路起着激励(excitation)的作用。电压源的电压、电流源的电流与所有其他元件的电压、电流相比，扮演着完全不同的角色，后者只是激励引起的响应(response)。在线性电路中，响应与激励之间存在着线性关系。例如，图3-1所示为一单激励(输入)的线性电路，若以R_2的电流i_2为响应(输出)，则不难得到

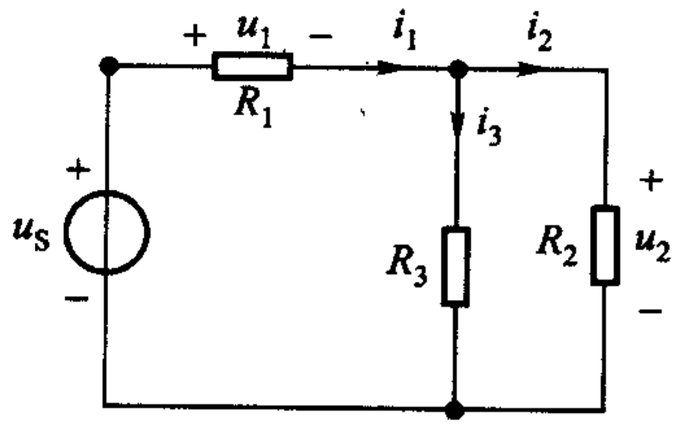


图3-1 单输入的线性电路

$$i_2 = \frac{R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}u_S \qquad (3-1)$$

由于R_1、R_2、R_3为常数，这是一个线性关系，可表示为

$$i_2 = Ku_S \qquad (3-2)$$

显然，若 u_S 增大 m 倍，i_2 也随之增大 m 倍。这样的性质称为“齐次性”(homogeneity)或“比例性”(proportionality)，它是“线性”(linearity)的一个表现。该电路中的其他任何一个电压或电流对激励 u_S 也都存在类似的线性关系。

对单一激励的线性、时不变电路，指定的响应对激励之比定义为网络函数，记为 H，即

$$H = \frac{\text{响应}}{\text{激励}} \tag{3-3}$$

激励可以是电压源电压或电流源电流，响应可以是任一支路的电压或电流。对电阻电路，H 为一实数。例如，对单个电阻 R，若以外施电流作为激励，其两端出现的电压作为响应，则 $H = R$(单位为 Ω)为一实数。(3-2)式中的常数 K 为响应 i_2 对激励 u_S 的网络函数，单位为 S。(3-2)式也可写为 $i_2 = Hu_S$。

若响应与激励在同一端口，则属策动点(driving point)函数；若响应与激励不在同一端口，则属转移(transfer)函数。由于响应和激励都可以是电压或电流，因而策动点函数和转移函数又可具体地分为表 3-1 所示的 6 种情况，分别具有表中所列的 6 种名称，必要时可使用表中所示相应的细分专用符号。

表 3-1　线性电阻电路网络函数 H 的分类

	响应	激励	名称及专用符号
策动点函数	电流	电压	策动点电导 G_i
	电压	电流	策动点电阻 R_i
转移函数	电流	电压	转移电导 G_T
	电压	电流	转移电阻 R_T
	电流	电流	转移电流比 H_i
	电压	电压	转移电压比 H_u

由表 3-1 可知，(3-2)式为图 3-1 所示电路输出为电流 i_2 时的转移电导。在输入 u_S 作用下的其他几个网络函数为

输出为电流 i_3 时的转移电导

$$\frac{i_3}{u_S} = \frac{R_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1} \tag{3-4}$$

输出为电流 i_1 时的策动点电导

$$\frac{i_1}{u_S} = \frac{R_2 + R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1} \tag{3-5}$$

输出为电压 u_2 时的转移电压比

$$\frac{u_2}{u_S}=\frac{R_3R_2}{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1} \tag{3-6}$$

输出为电压 u_1 时的转移电压比

$$\frac{u_1}{u_S}=\frac{(R_2+R_3)R_1}{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1} \tag{3-7}$$

上列各网络函数在明确何者为响应量后是不难运用第一章 §1-8 所述求得的。不论哪一个公式都表明，若各电阻为常数时，上列各网络函数均为与激励无关的常数，为一实数。

事实上，对任何线性电阻电路，网络函数都是实数，响应与激励的关系可用图 3-2 所示的方框图来表示。实数 H 与组成电路的元件（电阻、受控源）的参数和连接方式有关。由于策动点电阻和电导互为倒数，因此，在计算策动点函数时可任意选用电压或电流作为激励。但在计算转移函数时，必须明确激励量和响应量，不可搞错。在明确上述前提后，便可运用前两章所学方法求得所需的网络函数。



图 3-2　表征响应与激励关系的方框图（线性电阻电路）

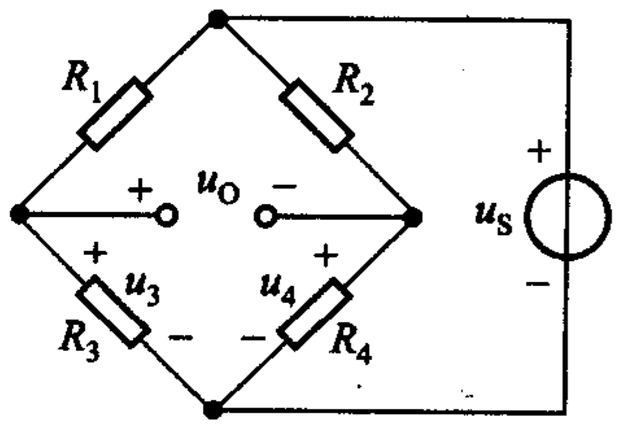


图 3-3　例 3-1

例 3-1　电桥电路如图 3-3 所示，若输出电压为 u_O 试求转移电压比 u_O/u_S。

解

$$u_O=u_3-u_4$$

由分压关系可得

$$u_3=\frac{R_3}{R_1+R_3}u_S$$

$$u_4=\frac{R_4}{R_2+R_4}u_S$$

故得

$$u_O=\left(\frac{R_3}{R_1+R_3}-\frac{R_4}{R_2+R_4}\right)u_S$$

$$\frac{u_O}{u_S}=\frac{R_2R_3-R_1R_4}{(R_1+R_3)(R_2+R_4)}=H$$

当 $R_2R_3=R_1R_4$ 时，$H=0$。此时虽有输入，而无输出，称为平衡电桥。

当 $R_2R_3>R_1R_4$ 时 $H>0$；当 $R_2R_3<R_1R_4$ 时 $H<0$。但不论哪种情况，$|H|$ 均小于 1，亦即输出电压不能大于输入电压[①]。

例 3-2　试求图 3-4 所示梯形网络输出电压 u_O 对输入电压 u_S 的函数关系。

解　由于已知 u_O 与 u_S 的关系可表示为 $u_O=Hu_S$，本题的任务在于求出常数 H，又由于上述关系对任何一对 u_O、u_S 值均成立，可以任选一 u_O 值，求得相应的 u_S 值，即可解决问题。

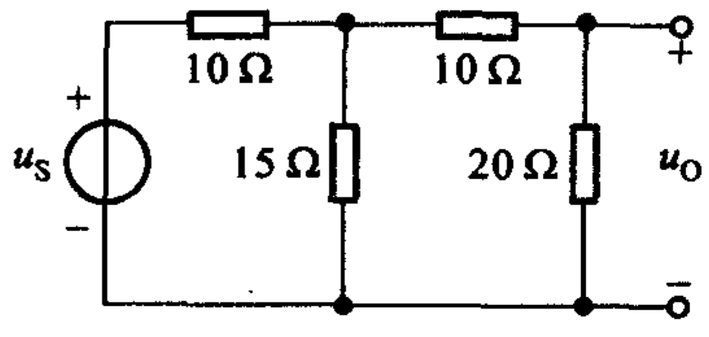


图 3-4　例 3-2

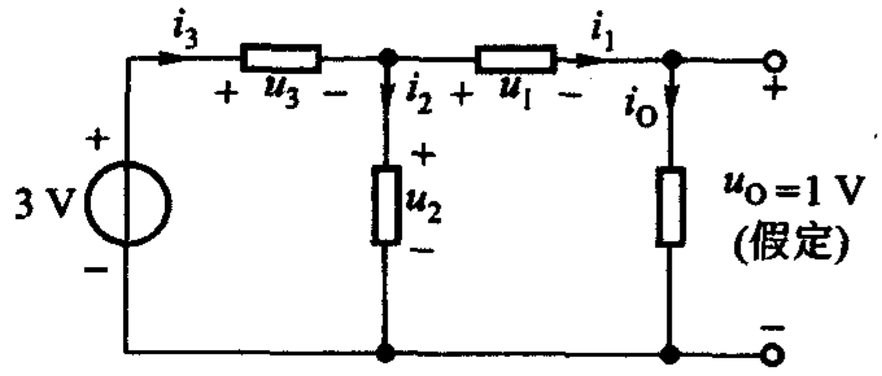


图 3-5　图 3-4 电路，当 $u_O=1$ V 时，电压、电流分配情况（参看正文）

为此，设 $u_O=1$ V（见图 3-5），运用欧姆定律，KCL、KVL 依次可求得下列各式：

$$i_O=\frac{1}{20}\ \text{A}=i_1$$

$$u_2=u_1+u_O=(10\ \Omega)i_1+u_O=\left(\frac{1}{2}+1\right)\ \text{V}=\frac{3}{2}\ \text{V}$$

$$i_2=\frac{u_2}{15\ \Omega}=\frac{1}{10}\ \text{A}$$

$$i_3=i_2+i_1=\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{10}\right)\ \text{A}=\frac{3}{20}\ \text{A}$$

$$u_S=u_3+u_2=(10\ \Omega)i_3+\frac{3}{2}\ \text{V}=\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\right)\ \text{V}=3\ \text{V}$$

由此可见，当 $u_O=1$ V 时，$u_S=3$ V，故知

$$H=\frac{1}{3}$$

① 当线性正电阻电路不含受控源时，这是一个一般规律。

亦即,所求函数,即转移电压比为

$$\frac{u_o}{u_s}=\frac{1}{3}$$

以上所述,为我们提供了一个解决梯形网络问题的较简便的方法,譬如在图3-4所示电路中,要求在$u_s=279.5$ V作用时的输出电压u_o,虽然可以运用前两章所学的各种方法(如网孔电流法)求解,但计算可能很繁琐。(特别是在梯形网络的节数很多时,图3-4电路仅两节!)如果先设$u_o=1$ V,据此求出u_s,从而得出比例常数H后,就可很容易地解决问题。以本例来说

$$u_o=Hu_s=\frac{1}{3}(279.5)\text{V}=93.17\text{ V}$$

◀

如同图3-2所示,网络函数H可认为是表征给定电路由输入端至某一指定输出端之间电路"整体"性质的一个参数,用以代替原来所需众多的元件参数。随着电路集成化的发展,我们关心的往往不是单个元件的参数如何,而是它的整体表现如何。

思考题

3-1　试在第一、二章中各找出一例用以表明只含电阻元件时转移电压比总小于1,含有受控源或运放时转移电压比则可能大于1。

3-2　图3-6所示两电路,若电源电压u_s增加一倍电流i也将随之增加一倍,是否正确?

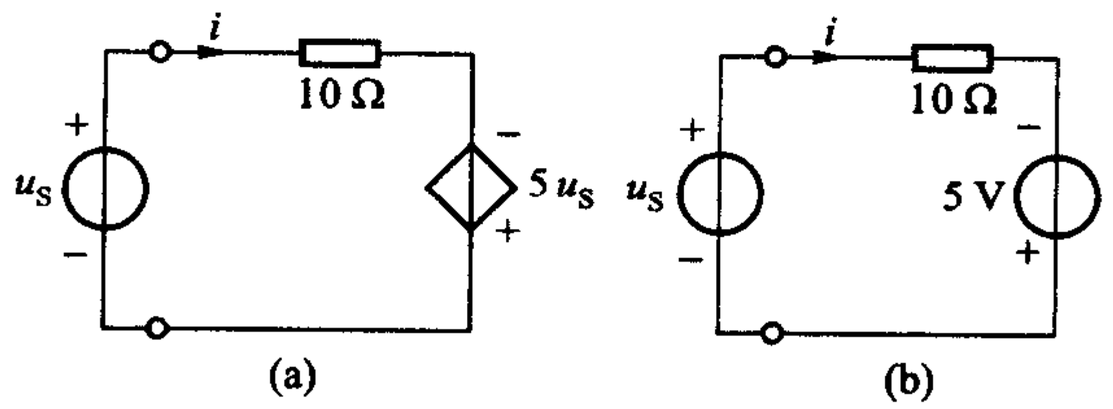


图3-6　思考题3-2

练习题

3-1　试求图3-6(a)所示电路的策动点电导。　　(0.6 S)

3-2　若图3-1所示电路的激励改为电流源i_s,试求:策动点电阻,转移电流比$\frac{i_2}{i_s}$,转移电阻$\frac{u_2}{i_s}$和转移电阻$\frac{u_1}{i_s}$。

$$\left(\frac{R_2+R_3}{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1},\frac{R_3}{R_2+R_3},\frac{R_2R_3}{R_2+R_3},R_1\right)$$

§3-2 叠加原理

在含多个激励的线性电路中，响应与激励关系又将如何？试以图3-7所示双激励的线性电路为例来探讨这一问题。若以电流 i_2 为响应，由两类约束可求得 i_2 与 u_S、i_S 的关系如下：

节点1　　$i_1 - i_3 = 0$　　(3-8)

节点2　　$-i_1 + i_2 = i_S$　　(3-9)

左网孔　　$R_1 i_1 + u_2 = u_S$　　(3-10)

右网孔　　$R_2 i_2 - u_2 = 0$　　(3-11)

列写时，激励 u_S 和 i_S 都写在方程的右端，式中 u_2 为电流源的电压。

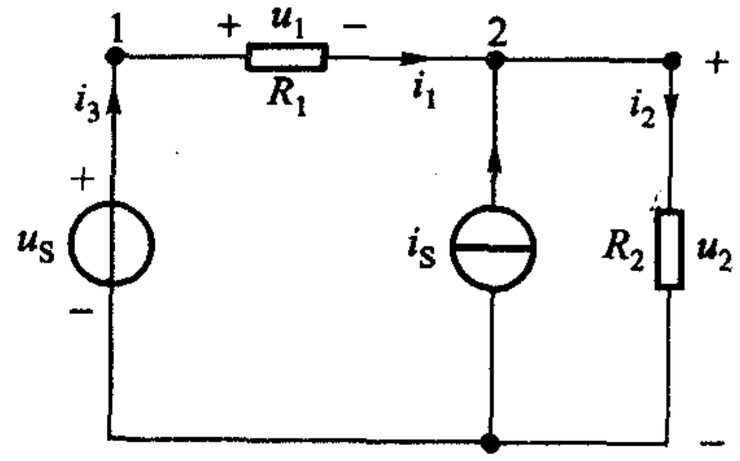


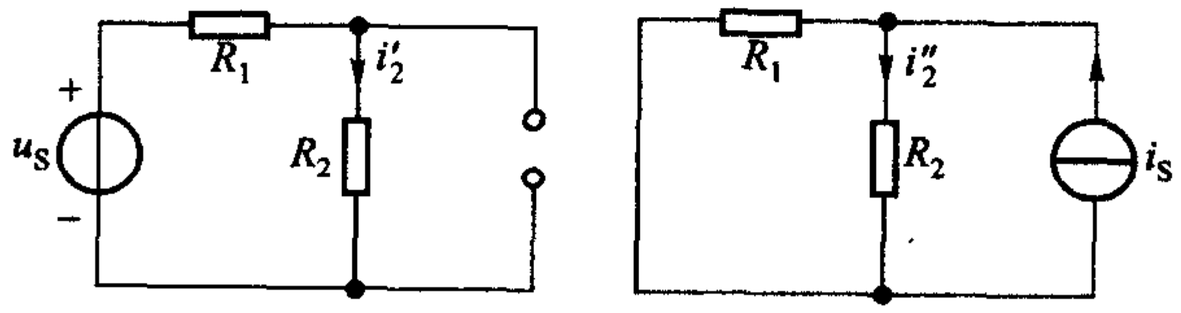
图3-7　双输入的线性电路

把(3-10)和(3-11)两式相加以消去 u_2，再以 R_1 与(3-9)式相乘，消去 i_1 后，可得

$$i_2 = \frac{1}{R_1 + R_2} u_S + \frac{R_1}{R_1 + R_2} i_S \qquad (3-12)$$

这便是响应 i_2 与两个激励 u_S、i_S 的关系式。可以看到：i_2 由两项组成，而每一项又只与某一个激励成比例。不难算出，式中的第一项就是该电路在 $i_S = 0$，亦即 u_S 单独作用时在 R_2 中产生的电流[图3-8(a)]，这一项是比例于激励 u_S 的，比例常数即响应 i_2 对激励 u_S 的转移电导；第二项就是该电路在 $u_S = 0$，亦即 i_S 单独作用时在 R_2 中产生的电流[图3-8(b)]，其比例常数即响应 i_2 对激励 i_S 的转移电流比，因此，(3-12)式也可用网络函数表示为

$$i_2 = H_1 u_S + H_2 i_S \qquad (3-13)$$



(a) u_S 单独作用时的电路图　(b) i_S 单独作用时的电路图

图3-8　u_S、i_S 单独作用时的电路图

式中 H_1、H_2 分别为响应 i_2 对激励 u_S、i_S 的网络函数。不论是(3-12)式还是(3-13)式都表明：由两个激励产生的响应为每一激励单独作用时产生的响应之和。这是“线性”在多于一个独立源时的表现，称为“叠加性”(superposition)。该电路中的其他任何一个电流或电压对激励 u_S 和 i_S 也都存在类似的线性关系。

因为对一般线性电路，根据两类约束也都可以列出类似于(3－8)至(3－11)式联系所有电压、电流的线性方程组，在用消去法求任一电压、电流变量时，也无非是运用以常数与方程相乘和方程间的加、减运算，这两种运算都不会破坏各电压、电流原有的线性关系。①

线性电路的叠加性常以原理的形式来表达。

由线性电阻、线性受控源及独立源组成的电路中，每一元件的电流或电压可以看成是每一个独立源单独作用于电路时，在该元件上产生的电流或电压的代数和，这就是叠加原理。当某一独立源单独作用时，其他独立源应为零值，即独立电压源用短路代替；独立电流源用开路代替。这就是说，在线性电路中，任一电流变量或电压变量，作为电路的响应 $y(t)$，与电路各个激励 $x_m(t)$ 的关系可表示为

$$y(t) = \sum_{M} H_m x_m(t) \tag{3-14}$$

式中 $x_m(t)$ 表示电路中的电压源电压或电流源电流，设独立电源的总数为 M 个，H_m 为相应的网络函数。

叠加性是线性电路的根本属性。叠加方法作为电路分析的一大基本方法，可使复杂激励问题简化为单一激励问题(例如，多个独立源作用下的电路，如例3－3、3－4)；结合网络函数，可简化响应与激励的关系(如图3－6所示)等。叠加方法将贯通全书，读者将会逐步理解其在理论、概念上的指导作用。

思考题

3－3　试利用网孔电流方程组(2－4)式证明叠加原理。如电路中含有受控源，证明过程中将如何处理？

3－4　试利用节点电压方程组(2－9)式证明叠加原理。如电路中含有受控源，证明过程中将如何处理？

3－5　试回答本章前言中提出的问题。

例3－3　利用叠加原理求解图3－9电路中的电压 u_O。

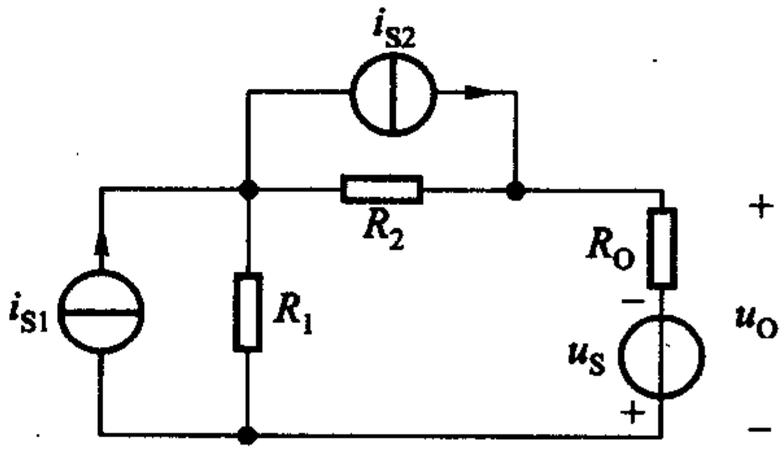


图3－9　例3－3

解　绘出每一独立源单独作用时的电路图如图3－10(a)、(b)、(c)三图所示。

由图(a)，运用分流公式求出流经 R_O 的电流后，可求得

① 与互易定理相同，叠加原理也可以用网孔分析或节点分析加以证明。

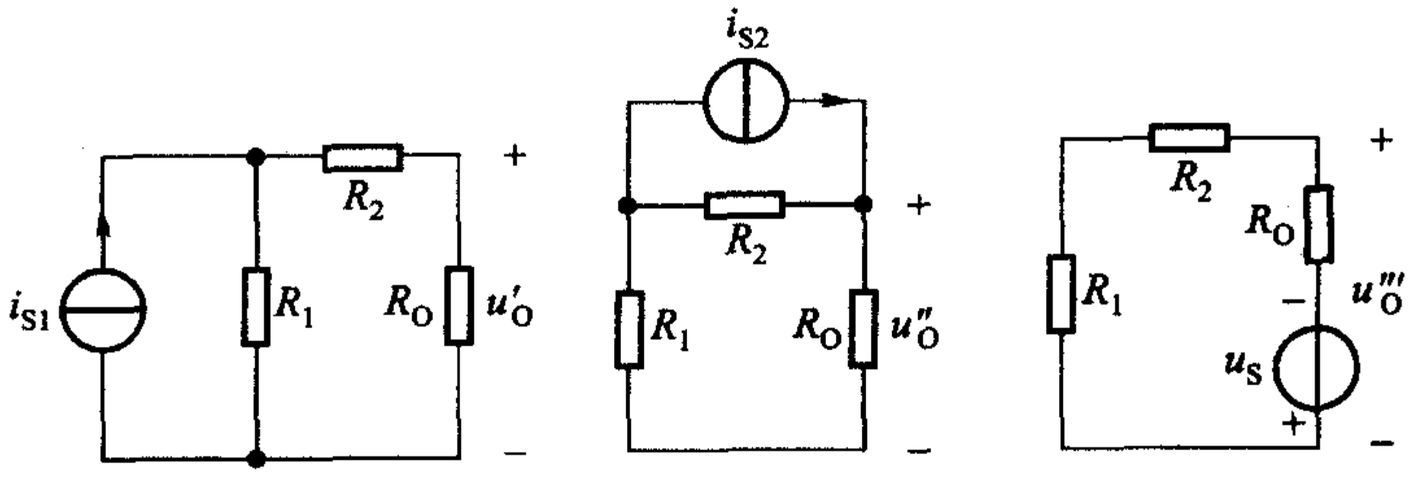


图 3－10　运用叠加原理求解电路

$$u'_O = i_{S1}\left(\frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_O}\right)R_O$$

由图(b)，运用分流公式后，可求得

$$u''_O = i_{S2}\left(\frac{R_2}{R_1 + R_2 + R_O}\right)R_O$$

由图(c)，运用分压公式可得

$$u'''_O = -u_S\left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2 + R_O}\right)$$

或

$$u'''_O = u_S\left(\frac{R_O}{R_1 + R_2 + R_O}\right) - u_S$$

由叠加原理，可得

$$\begin{aligned} u_O &= u'_O + u''_O + u'''_O \\ &= \frac{i_{S1}R_OR_1 + i_{S2}R_OR_2 - u_S(R_1 + R_2)}{R_O + R_1 + R_2} \end{aligned}$$

本题也可用网孔电流法或节点电压法求解，但需求解联立方程。

例 3－4　电路如图 3－11 所示，其中 $r = 2\ \Omega$，用叠加原理求 i_X。

解　对含受控源电路运用叠加原理时必须注意：叠加原理中说的只是独立电源的单独作用，受控源的电压或电流不是电路的输入，不能单独作用。在运用该原理时，受控源应和电阻一样，始终保留在电路内。

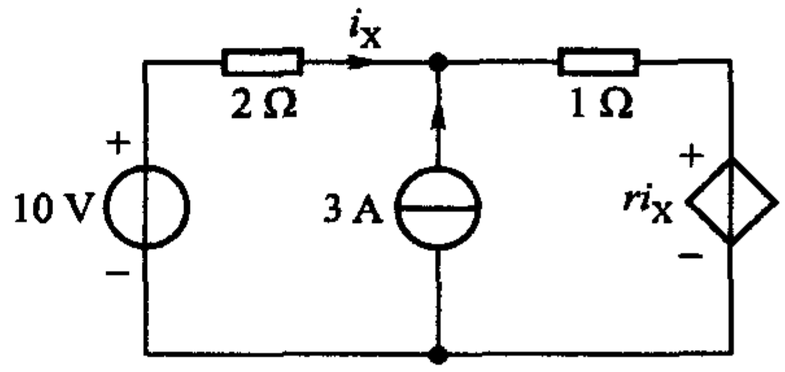


图 3－11　例 3－4

10 V 电压源单独作用，如图 3－12(a)所示，注意此时受控源的电压为 $2i'_X$。由此可得以支路电流表示的 KVL 方程

$$-10 + 3i'_X + 2i'_X = 0$$

解得　　$i'_X = 2\ A$

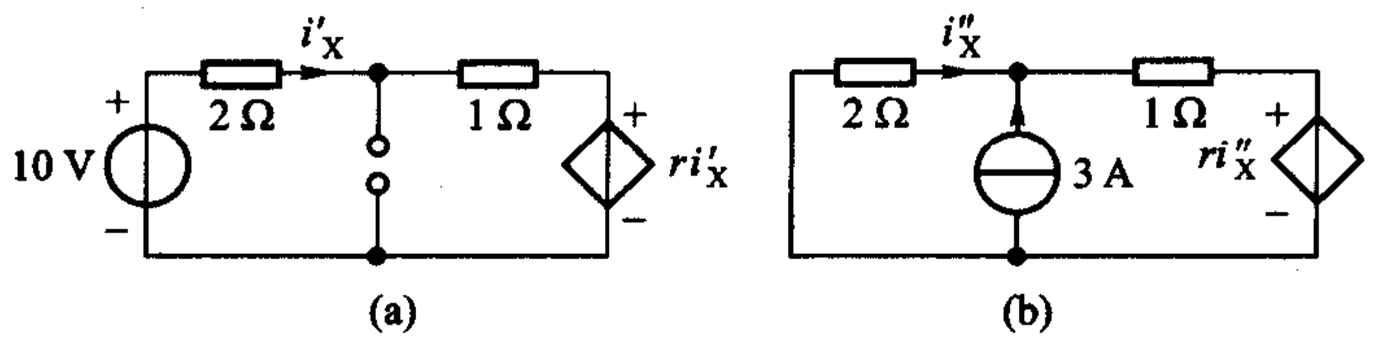


图 3－12　电源的分别作用

3A 电流源单独作用，如图 3－12(b)所示，注意此时受控源的电压为 $2i''_X$，电流为 i''。由两类约束关系求解 i''_X 如下：

$$i'' - i''_X = 3 \qquad \text{(KCL)}$$

$$2i''_X + i'' + 2i''_X = 0 \qquad \text{(KVL 及 VCR)}$$

解得　　$i''_X = -0.6\ A$

电源同时作用

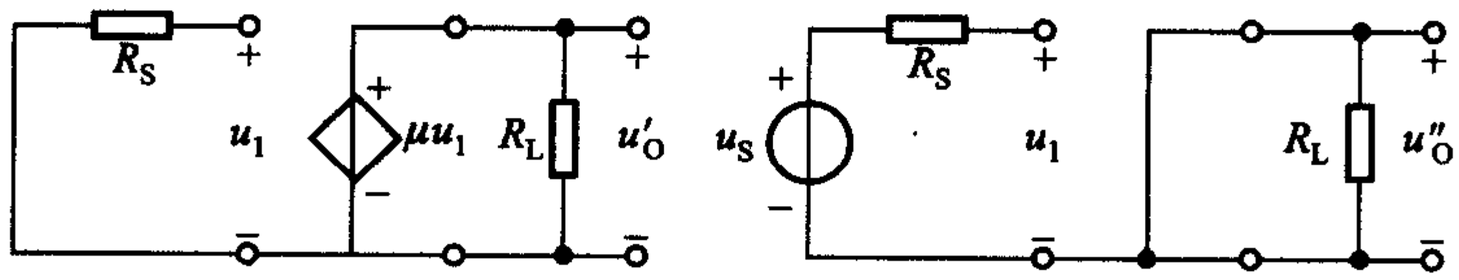
$$i_X = i'_X + i''_X = (2 - 0.6)\ A = 1.4\ A$$

例 3－5　为了强调受控源不得像独立源一样“参与”叠加，试以例 1－13 所示含受控源电路为例来加以说明。

解　该电路包含一个独立电压源和一个受控电压源。今若误认为受控源也可以像独立电压源一样“参与”叠加，则在求 u_0 时，当分为两步。先令电压源短路，电路仅由受控源作用，如图 3－13(a)所示，由于 $u_1 = 0$，$\mu u_1 = 0$，故知

$$u'_0 = 0$$

再令受控电压源短路，电路仅由电压源作用，如图 3－13(b)所示，显然



(a) 电压源短路时的电路　　(b) 受控电压源短路时的电路

图 3－13　例 3－5

$$u''_0 = 0$$

因此，所得结果当为

$$u_0 = u'_0 + u''_0 = 0$$

显然，这一结果是错误的。运用叠加原理时，电源单独作用是指独立电源的单独作用，受控源不能单独作用，应始终保留在电路内！

正确答案见例 1 – 13。

例 3 – 6　在图 3 – 14 所示电路中，N 的内部结构不知，但只含线性电阻，在激励 u_S 和 i_S 作用下，其测试数据为：当 $u_S = 1$ V，$i_S = 1$ A 时，$u = 0$；当 $u_S = 10$ V，$i_S = 0$ 时，$u = 1$ V。若 $i_S = 10$ A，$u_S = 0$ 时，u 为多少？

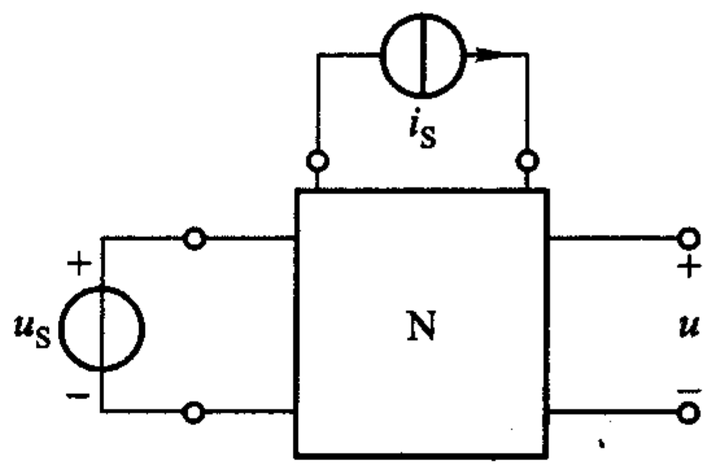


图 3 – 14　例 3 – 6

解　由(3 – 14)式可得

$$u = H_1 u_S + H_2 i_S$$

此式在任何 u_S 和 i_S 时均成立，故由两测试结果可得

$$H_1 + H_2 = 0$$

$$10H_1 = 1$$

联立解得

$$H_1 = \frac{1}{10}, H_2 = -\frac{1}{10}\ \Omega$$

故知

$$u = \frac{1}{10}u_S - \frac{1}{10}i_S$$

当 $u_S = 0$，$i_S = 10$ A 时

$$u = \left(\frac{1}{10} \times 0 - \frac{1}{10} \times 10\right)\ \text{V} = -1\ \text{V}$$

◀

由例 3 – 6 可知：叠加原理简化了电路激励与响应的关系。例中的 N 可能是一个含有众多电阻元件、结构复杂的电路，但只需用两个参数 H_1 和 H_2 即能描述指定的响应与激励间的关系，且每一激励对响应的作用也可一目了然。当 N 的结构与参数明朗时，H_1 和 H_2 既可仍由实验方法确定，也可通过计算求得(参看例 3 – 1)。只要电路的结构和参数不变动，不论由实验还是由计算所得的网络函数就始终有效，在研究激励与响应的关系时就不必再考虑电路的各元件参数和结构。采用叠加方法研究线性电路响应与激励关系比起直接运用网孔分析或节点分析来说就方便得多了。

例 3 – 7　图 3 – 15 所示线性电阻电路中，已知当 $u_1(t) = 30\ t$、$u_2(t) = 0$ 时，$i_1(t) = 5t$，$i_2(t) = -2t$。试求当 $u_1(t) = 30t + 60$ 及 $u_2(t) = 60t + 15$ 时，$i_1(t)$ 是多少？N_r 表示互易网络，即不含独立源和受控源的线性电阻网络。

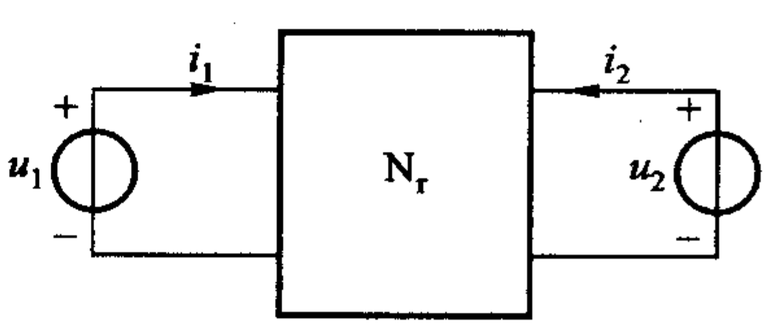


图 3 – 15　例 3 – 7

解　把求解过程列表，见表 3 – 2。

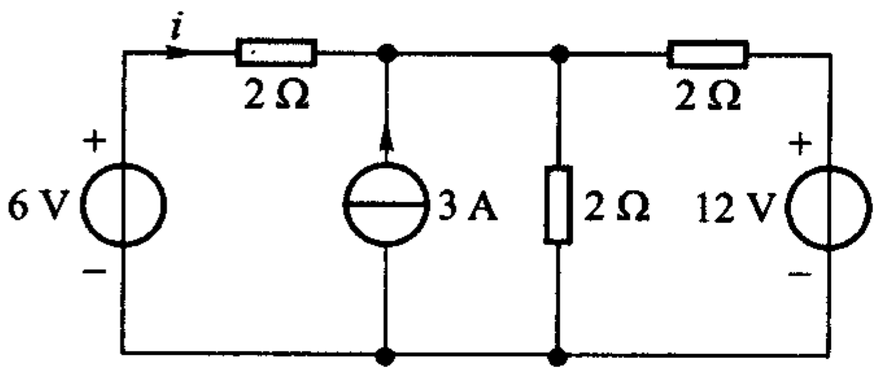
表 3－2　例 3－7 求解过程

理　　由	$u_1(t)$	$u_2(t)$	$i_1(t)$	$i_2(t)$
已　　知	$30t$	0	$5t$	$-2t$
互易定理	0	$30t$	$-2t$	不能确定
叠加原理	0	$60t+15$	$-4t-1$	不能确定
叠加原理	$30t+60$	0	$5t+10$	$-2t-4$
叠加原理	$30t+60$	$60t+15$	$t+9$（答案）	不能确定

练习题

3－3　试用叠加原理求解图 3－16 所示电路中电流 i。

（－1 A）



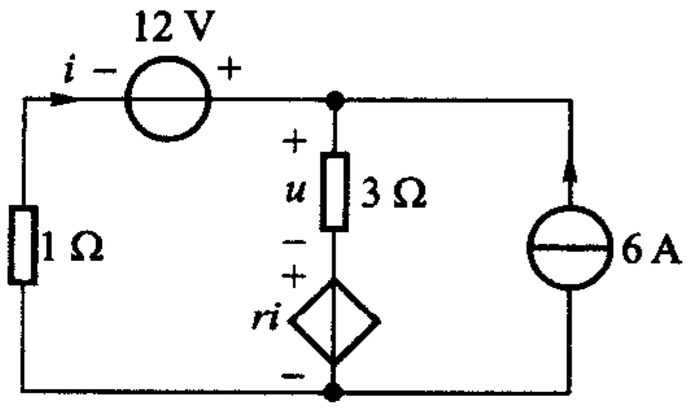


图 3－16　练习题 3－3　　图 3－17　练习题 3－4

3－4　含受控源电路如图 3－17 所示，其中 $r=2\ \Omega$ 试用叠加原理求 u。

（15 V）

3－5　图 3－18 所示线性电阻网络的输入为 u_1、u_2 和 u_3，输出为 u_O，测试数据如下表所示，单位为 V。试求该网络输出与输入的关系。

测试	u_1	u_2	u_3	u_O
1	0	0	5	1
2	0	5	5	4
3	5	5	5	6

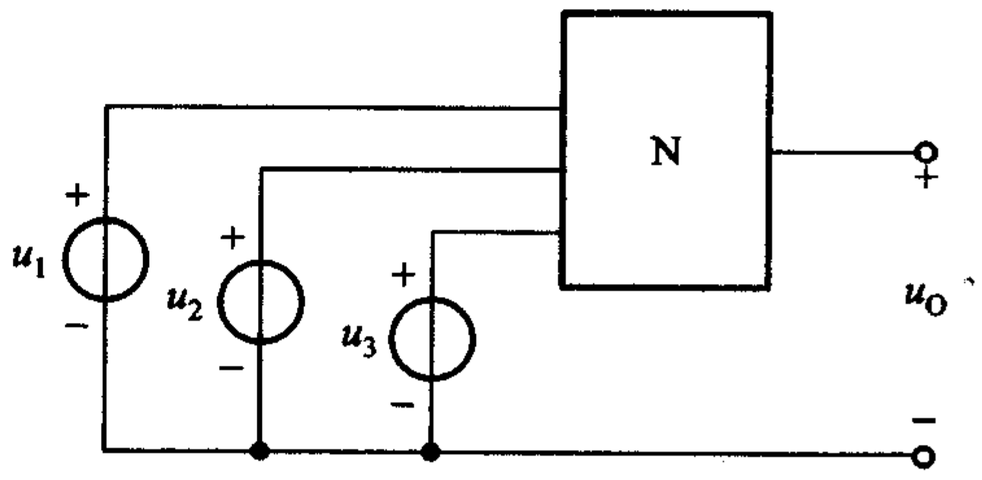


图 3－18　练习题 3－5

若 u_1 为 10 V，u_2 为 2.5 V，u_3 为 5 V 时，输出电压 u_O 为多少？

$$[u_O=\frac{1}{5}(2u_1+3u_2+u_3)、6.5\ \text{V}]$$

3－6　试用叠加原理求解第二章练习题 2－7 和 2－8。

§3-3　叠加方法与功率计算

叠加方法是本书所述的电路分析三大基本方法之一，功率则是电路分析中除电压、电流外的一个重要对象，本节通过几个例子来阐明叠加方法在功率计算中应注意的问题。

例 3-8　设在图 3-7 所示电路中，$u_S = 36\ \text{V}$、$i_S = 9\ \text{A}$、$R_1 = 12\ \Omega$、$R_2 = 6\ \Omega$，试用叠加方法求解 R_2 的电流 i_2 和功率 p_2。

解　当 36 V 电压源单独作用时，参考图 3-8(a)，可求得

$$i_2' = \frac{u_S}{R_1 + R_2} = \frac{36\ \text{V}}{12\ \Omega + 6\ \Omega} = 2\ \text{A}$$

当 9 A 电流源单独作用时，参考图 3-8(b)，可求得

$$i_2'' = \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2}\right) i_S = \left(\frac{12\ \Omega}{12\ \Omega + 6\ \Omega}\right) 9\ \text{A} = 6\ \text{A}$$

因此，流经 R_2 的电流

$$i_2 = i_2' + i_2'' = 2\ \text{A} + 6\ \text{A} = 8\ \text{A}$$

故得 R_2 的功率

$$p_2 = R_2 i_2^2 = (6\ \Omega)(8\ \text{A})^2 = 384\ \text{W}$$

如果分别求出每一电源单独作用时 R_2 的功率，则可得

$$p_2' = (6\ \Omega)(2\ \text{A})^2 = 24\ \text{W}$$

$$p_2'' = (6\ \Omega)(6\ \text{A})^2 = 216\ \text{W}$$

$$p_2' + p_2'' = 240\ \text{W} \neq 384\ \text{W}$$

原因很简单：尽管由叠加原理可得

$$2\ \text{A} + 6\ \text{A} = 8\ \text{A}$$

但

$$(2\ \text{A})^2 + (6\ \text{A})^2 \neq (8\ \text{A})^2$$

从本例可以看到：电阻的功率不能由叠加原理直接求得，因为功率与电流（压）的二次方有关，不是线性关系。一般来说，功率不服从叠加原理，只有在一些特殊情况下，才能例外。我们可以用叠加方法求得电流、电压后再去计算功率。

例 3-9　接续上例，试求两电源对该电路提供的总功率。并试由每一电源单独作用时对电路提供的功率的代数和求解。

解　（1）参看图 3-7 并由上例的计算结果可得

$$i_1 = i_2 - 9\ \text{A} = 8\ \text{A} - 9\ \text{A} = -1\ \text{A}$$

故得电压源功率

$$-u_S i_1 = -(36\ \text{V})(-1\ \text{A}) = 36\ \text{W}$$

电压源消耗功率 36 W，即对电路提供功率 −36 W。

又电流源端电压为

$$u_2 = R_2 i_2 = (60\ \Omega)(8\ \text{A}) = 48\ \text{V}$$

故得电流源功率

$$-i_S u_2 = -(9\ \text{A})(48\ \text{V}) = -432\ \text{W}$$

电流源提供功率 432 W。

以上功率计算，由于电压、电流为非关联方向，故功率计算公式前带负号，参看式(1 −4)。

两电源对电路提供的总功率为

$$432\ \text{W} - 36\ \text{W} = 396\ \text{W}$$

(2) 从另一角度来计算。电压源单独作用时，由图 3 −8(a)可知

$$i_1' = i_2'' = 2\ \text{A}$$

电压源功率

$$-u_S i_1' = -(36\ \text{V})(2\ \text{A}) = -72\ \text{W}$$

对电路提供功率 72 W。

电流源单独作用时，由图 3 −8(b)可知电流源功率

$$\begin{aligned} -u_2'' i_S &= -(R_2 i_2'') i_S = -(6\ \Omega)(6\ \text{A})(9\ \text{A}) \\ &= -324\ \text{W} \end{aligned}$$

对电路提供功率 324 W。

两电源对电路提供的总功率为

$$72\ \text{W} + 324\ \text{W} = 396\ \text{W}$$

和(1)中所得结果一致。

由此可见：电源对电路提供的总功率等于电压源单独作用时对电路提供的功率和电流源单独作用时对电路提供功率的总和。这对不含受控源的线性电阻电路是一个普遍规律，且可延伸为电压源组(即多个电压源)和电流源组各自提供功率的叠加[①]。

例 3 −10　含受控源电路如图 3 −19 所示，试求两电源向电路提供的总功率。已知受控源控制系数 $r = 2\ \Omega$。

解　用叠加方法求解 u、i 的电路如图 3 −20 所示。

由图 3 −20(a)可得

$$(3\ \Omega)i' + (2\ \Omega)i' + (1\ \Omega)i' = 12\ \text{V}$$

---

① 证明可参考《简明电路分析基础》§3 −3。

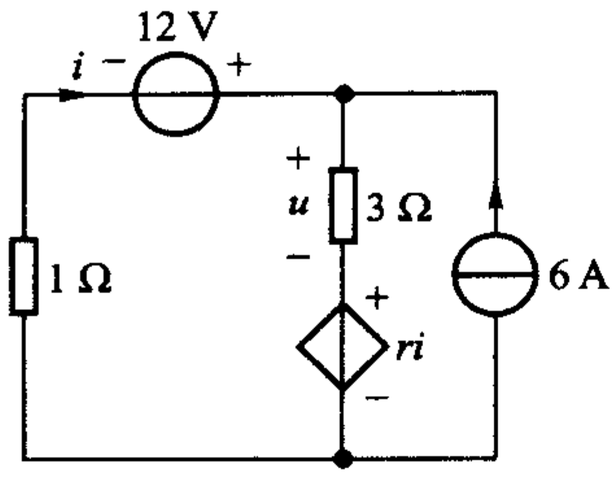


图 3－19　例 3－10

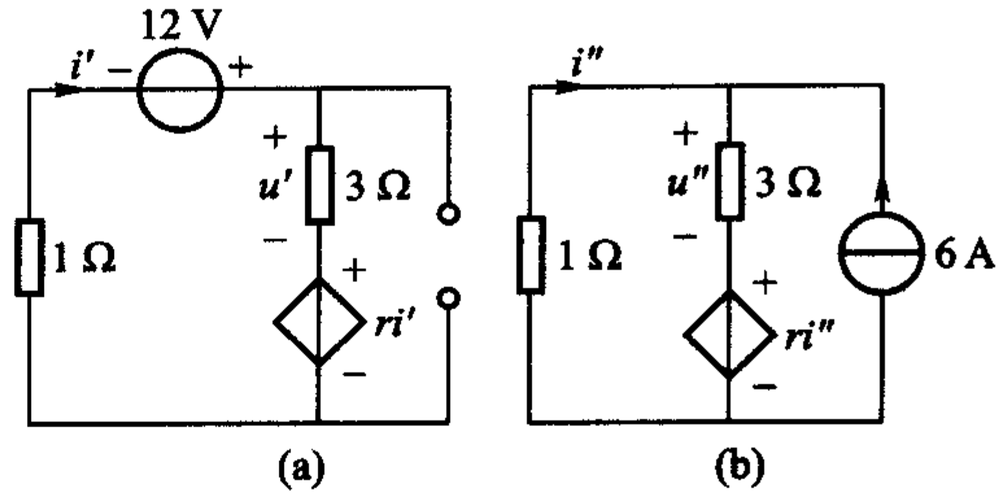


图 3－20　叠加方法求解例 3－10

解得　　$i' = 2\ \text{A}$

$$u' = (3\ \Omega)(2\ \text{A}) = 6\ \text{V}$$

由图 3－20(b)可得网孔方程

$$(3\ \Omega + 1\ \Omega)i'' + (2\ \Omega)i'' + (3\ \Omega)(6\ \text{A}) = 0$$

解得　　$i'' = -3\ \text{A}$

$$u'' = (3\ \Omega)(-3\ \text{A} + 6\ \text{A}) = 9\ \text{V}$$

故得　　$i = i' + i'' = -1\ \text{A}$

电压源功率　　$p_{\text{V}} = -(12\ \text{V})i = 12\ \text{W}$

电压源消耗功率 12 W，亦即提供功率 －12 W。

电流源两端电压

$$u = u' + u'' + (2\ \Omega)i = [15 + 2(-1)]\ \text{V}$$

$$= 13\ \text{V}$$

电流源功率　　$p_{\text{I}} = -13 \times 6\ \text{W} = -78\ \text{W}$

电流源提供功率 78 W。

故得两电源向电路提供的总功率

$$p = (78 - 12)\ \text{W} = 66\ \text{W}$$

如果叠加原理直接求电源提供的功率，则由图 3－20(a)可得电压源单独作用时

$$p' = -(12\ \text{V})i' = -12 \times 2\ \text{W} = -24\ \text{W}$$

电流源单独作用时

$$p'' = -6[u'' + 2i''] = -6[9 + 2(-3)]\ \text{W} = -18\ \text{W}$$

由 p'和 p''算得的两电源向电路提供的总功率为(24 + 18) W = 42 W 与实际不符。本例验证了例 3－9 最后所述的规律。

练习题

3－7　试表明图 3－21 所示电路中，无论是电阻的功率或电源对电路提供的功率，叠加

均不成立。

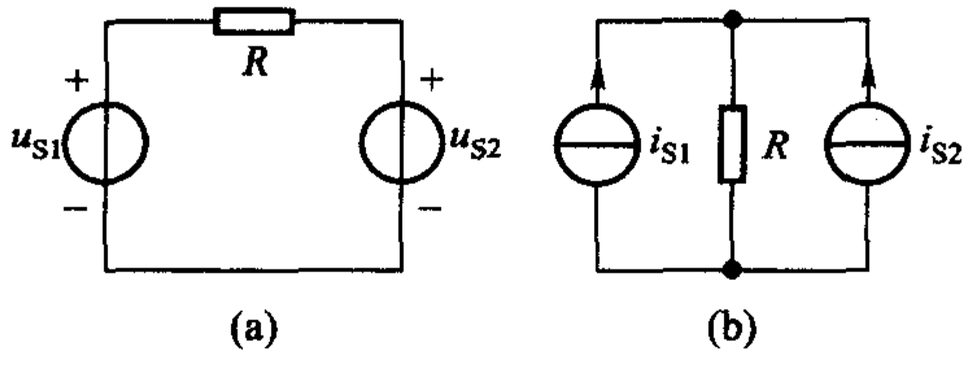


图 3 - 21　练习题 3 - 7

3 - 8　在图 3 - 19 所示电路中，取消受控源代之以短路线，试求 3 Ω 电阻消耗的功率。能否用叠加原理直接计算？

(60.75 W，27 W + 6.75 W ≠ 60.75 W)

3 - 9　接续上题，试表明两电源对电路提供的总功率可由功率的叠加原理求得。

(63 W，36 W + 27 W = 63 W)

§3 - 4　数模转换器的基本原理

作为叠加方法的一个应用例子，本节说明“数模转换器(digital-analog converter，DAC)”的基本工作原理。

我们已进入数字时代。在数字世界里只有 **0**、**1** 两种数码组成的数字信号。一个 **0** 或一个 **1** 通常称 1 比特(bit)，这个名词是 1946 年由普林斯顿大学统计学家约翰·图基把二进制(binary)和数字(digit)这两个词合起来而创造出的。在数字电路中，对于 **0** 和 **1**，可以用电位的低和高，也可以用脉冲信号的有和无来表示。你的 CD、VCD、DVD 记录的是数字信号，但人耳、人眼只能感受模拟信号(连续变化的量)，因此需要把数字信号转换为模拟量，这种转换称为“数模转换”(DAC，即 digital-analog conversion)。电阻电路可用来完成这一任务，这种电路又称 DAC 解码网络。

二进制中只有 **0** 和 **1** 两个数码，逢二进一，即 **1 + 1 = 10**，也就是说，在二进制中用 **10**(数字量)这个代码来表示 2(模拟量)。设一个 4 位的二进制数码为 $b_3b_2b_1b_0$(数字量)，则其对应的十进制数值(模拟量)为

$$b_3 \times 2^3 + b_2 \times 2^2 + b_1 \times 2^1 + b_0 \times 2^0$$

表 3 - 3 列举了二进制数码及其对应的十进制数值。

表 3 - 3　二进制、十进制之间的关系对照表

二进制	十进制	二进制	十进制
0000	0	**0010**	2
0001	1	**0011**	3

续表

二进制	十进制	二进制	十进制
0100	4	**1000**	8
0101	5	**1001**	9
0110	6	**1010**	10
0111	7		

图 3－22 所示为一种 DAC 解码网络，输入二进制数码，从其输出电压 U_o 即可获得对应的十进制数值。该网络常称为 $R-2R$ 梯形解码网络。图示网络输入的二进制数最多可为 3 位数，图中开关 2^0、2^1、2^2 分别与输入的第 1、2、3 位相对应。当二进制数某位为 **1** 时，对应的开关就接在电压 U_S 上；当二进制数某位为 **0** 时，对应的开关就接地。图中开关位置表明输入为 **110**。从输出电压 U_o 就可得知输入二进制的代码。

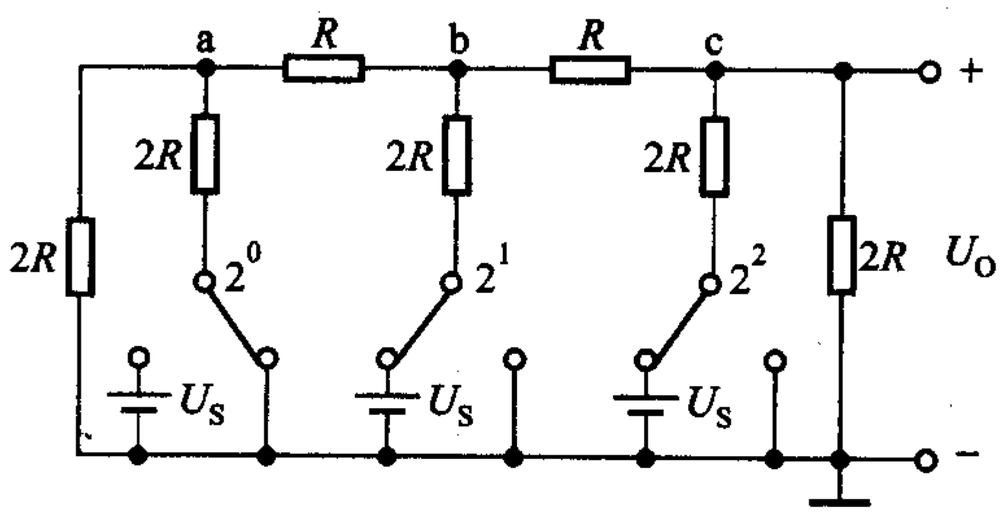


图 3－22　3 比特 $R-2R$ 梯形解码网络

其工作原理可用叠加原理来说明。先设只有开关 2^2 接 U_S，其他开关接地，其电路如图 3－23(a)所示，可简化如图 3－23(b)所示，显然可得

$$U'_o = U_S \cdot \frac{R}{2R+R} = \frac{U_S}{3}$$

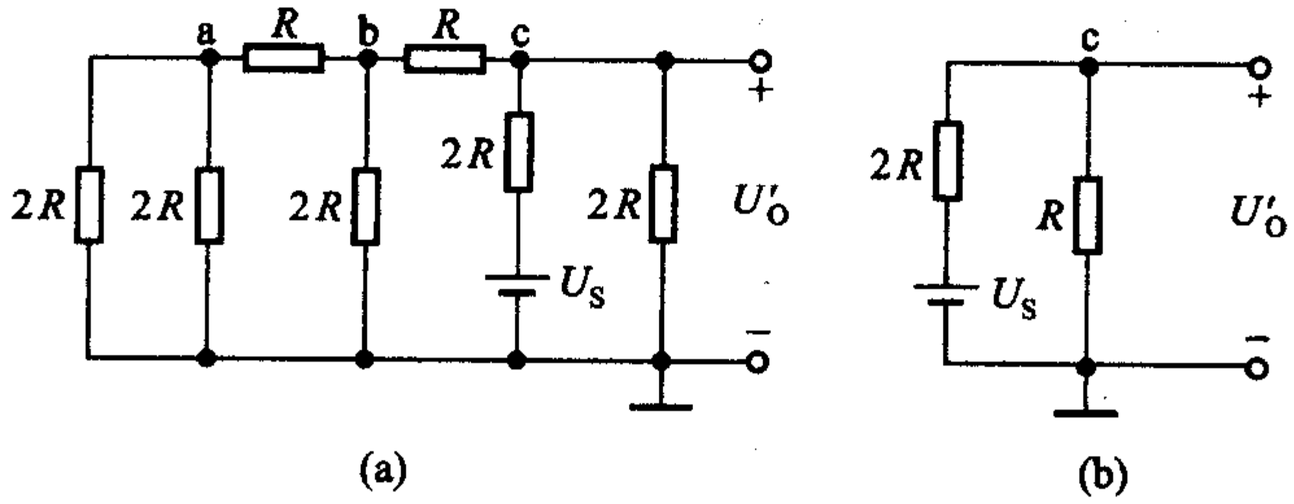


图 3－23　开关 2^2 接 U_S，其他开关接地时的电路

当只有开关 2^1 接 U_S，其他开关均接地时，其电路如图 3－24(a)所示，可简化为图 3－24(b)。显然可得

$$U_0'' = \frac{U_S}{3} \cdot \frac{R}{R+R} = \frac{U_S}{3} \cdot \frac{1}{2}$$

其中$\frac{U_S}{3}$系图 3－24(b)中 b 点与地之间的电压。

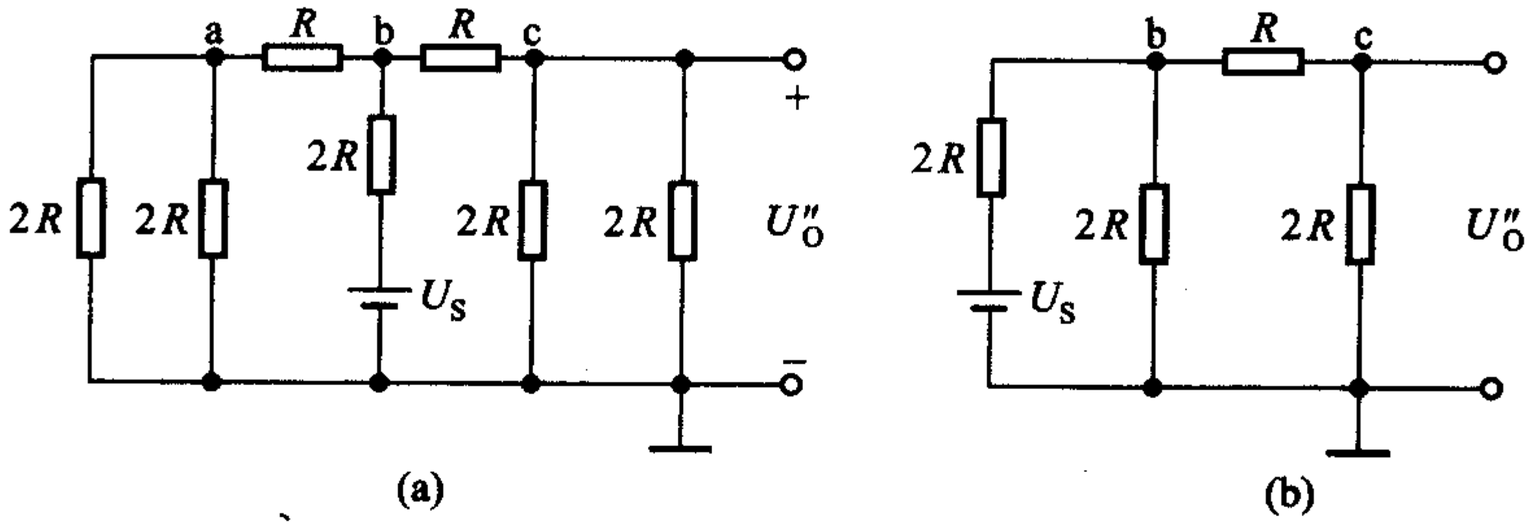


图 3－24　开关 2^1 接 U_S，其他开关接地时的电路

当只有开关 2^0 接 U_S，其他开关均接地时，其电路如图 3－25(a)所示，可简化如图 3－25(b)所示。可得

$$U_0''' = \frac{U_S}{3} \cdot \frac{R}{R+R} \cdot \frac{R}{R+R} = \frac{U_S}{3} \cdot \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

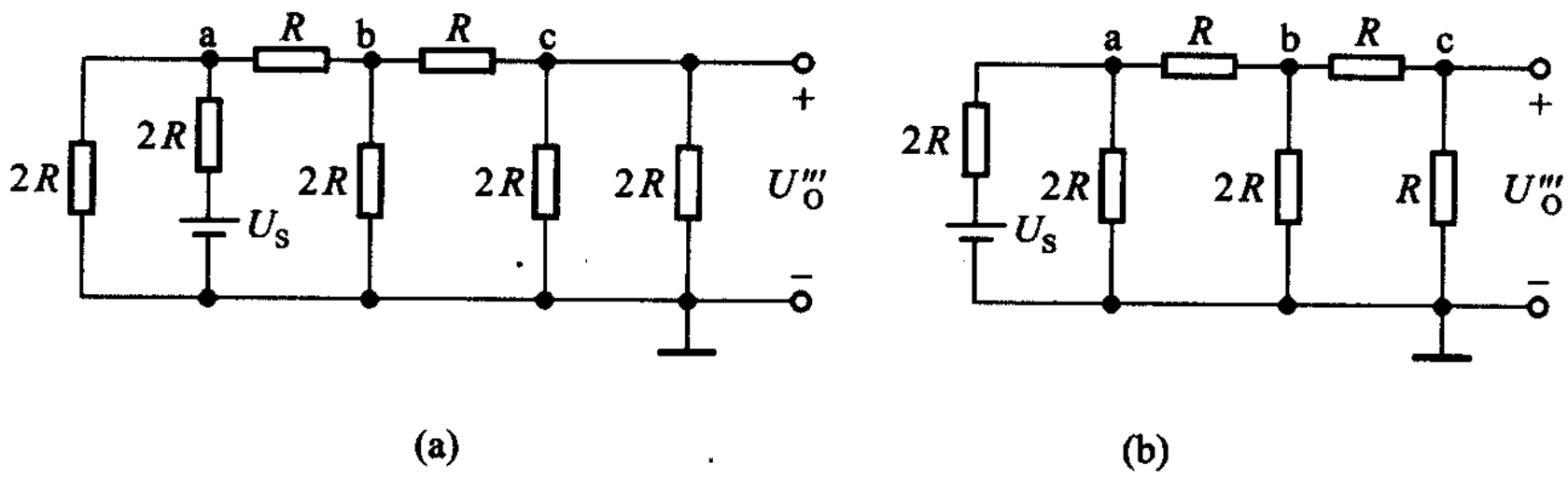


图 3－25　开关 2^0 接 U_S，其他开关接地时的电路

其中$\frac{U_S}{3}$系图 3－25(b)中 a 点与地之间的电压，$\frac{U_S}{3} \cdot \frac{R}{R+R}$系 b 点与地之间的电压。

因此，如果三个开关均接 U_S，即输入为 **111** 时，可得

$$\begin{aligned} U_0 &= U_0' + U_0'' + U_0''' \\ &= \frac{1}{3}U_S + \frac{1}{3}U_S \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3}U_S \cdot \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \end{aligned}$$

若 $U_S = 12$ V，则此时

$$U_o = (4 + 2 + 1)\ \text{V} = 7\ \text{V}$$

此即为对应于二进制代码 **111** 的数值。

若输入为 **110** 则

$$U_o = U'_o + U''_o + U'''_o = \frac{1}{3}U_S + \frac{1}{3}U_S \cdot \frac{1}{2} + 0$$

$$= \left(\frac{1}{3} \times 12 + \frac{1}{3} \times 12 \times \frac{1}{2}\right)\ \text{V} = (4 + 2)\ \text{V} = 6\ \text{V}$$

此即为对应于二进制代码 **110** 的数值。

读者可以用其他 3 位的二进制代码来验证。电路中的开关是电子开关，分别由代码中各位数码信号控制。

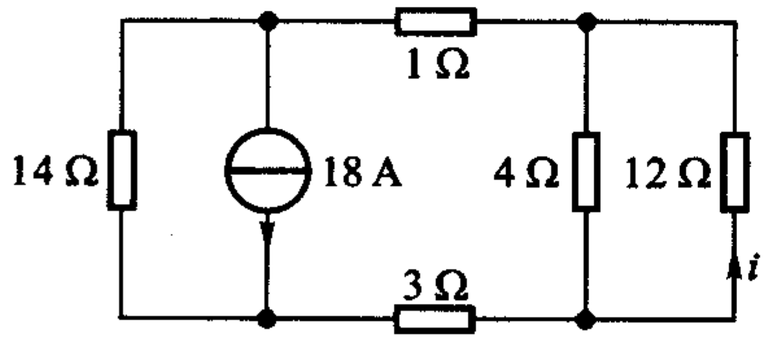
这种解码网络的优点是电阻只有 R 和 $2R$ 两种，精度易保证，缺点是电阻数量较多。



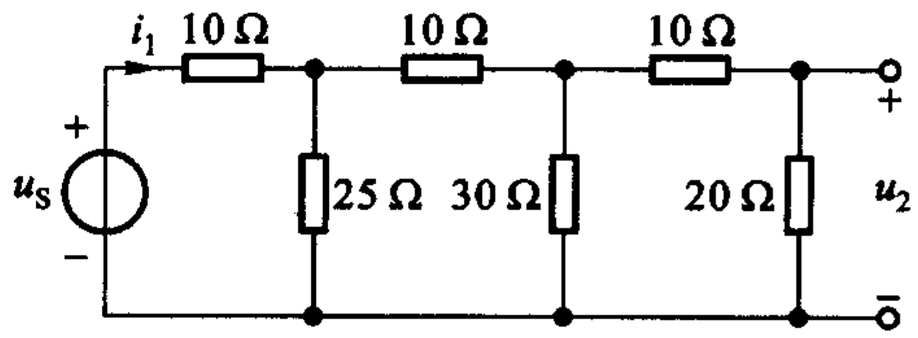
习题

§3－1　线性电路的比例性　网络函数

3－1　求解图题 3－1 所示电路中的电流 i。试利用线性电路的比例性求当电流源电流改为 6.12 A，方向相反时的电流 i。



图题 3－1



图题 3－2

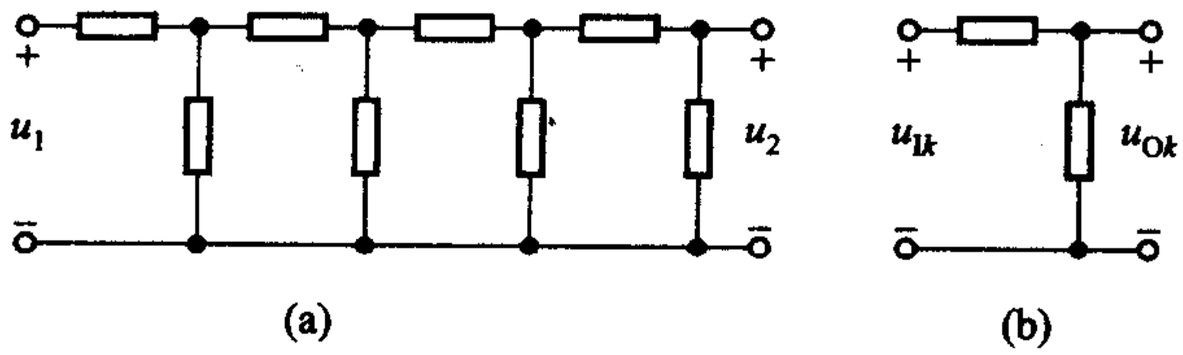
3－2　电路如图题 3－2 所示，(1) 若 $u_2 = 10$ V，求 i_1 及 u_S；(2) 若 $u_S = 10$ V，求 u_2。

3－3　(1) 求图题 3－3(a)所示网络的转移电压比 u_2/u_1，设所有电阻均为 1 Ω。

(2) 某同学认为图 3－3(a)所示网络可看成是 4 节如图 3－3(b)所示网络“级联”而成（即在接法上使得第 1 节的输出为第 2 节的输入，第 2 节的输出为第 3 节的输入……），若以 u_{Ik}，u_{Ok} 分别表示第 k 节网络的输入和输出，则

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_{O4}}{u_{I1}} = \left(\frac{u_{O4}}{u_{I4}}\right)\left(\frac{u_{O3}}{u_{I3}}\right)\left(\frac{u_{O2}}{u_{I2}}\right)\left(\frac{u_{O1}}{u_{I1}}\right)$$

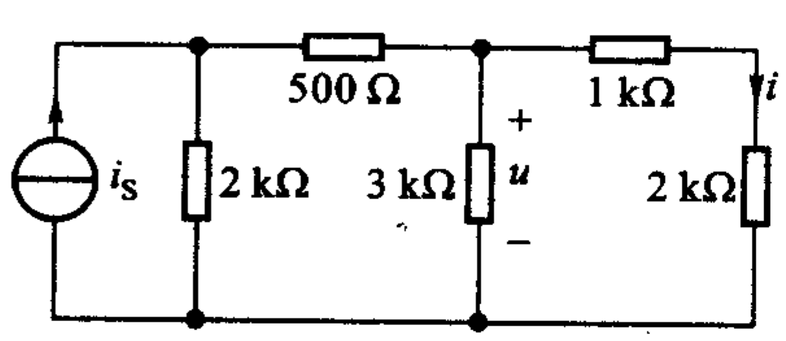
这是因为：$u_{I4}=u_{O3}$；$u_{I3}=u_{O2}$；$u_{I3}=u_{O1}$。因此，只需求出任一节的转移电压比（例如 u_{O1}/u_{I1}），连乘 4 次，即可得到 u_2/u_1。试按这一观点求得 u_2/u_1，并和(1)中结果相比较？如有差别，原因何在？（参看上章例 2－14。）



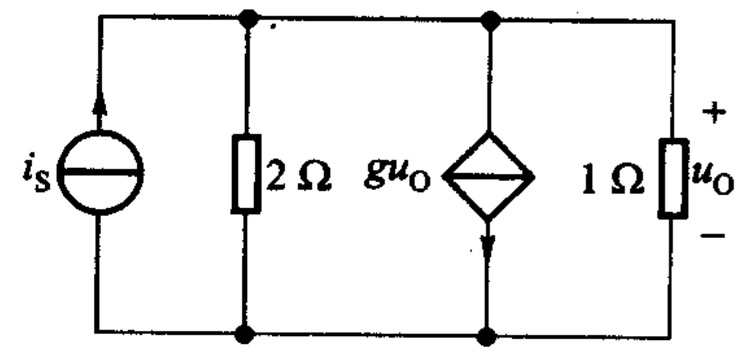
(a)　　(b)

图题 3－3

3－4　电路如图题 3－4 所示，试求转移电流比 i/i_S，转移电阻 u/i_S；若 $i_S=0.6$ mA，试求 i 和 u_o。



图题 3－4

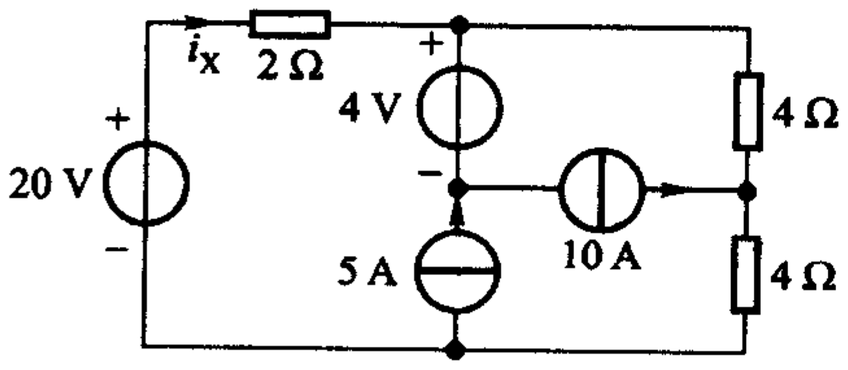


图题 3－5

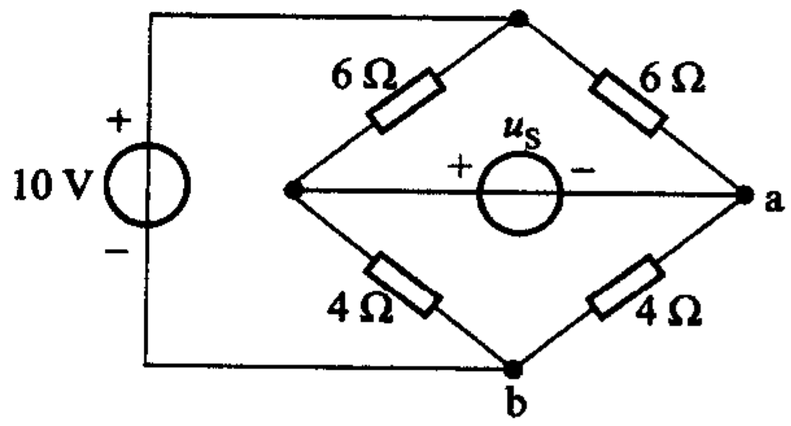
3－5　电路如图题 3－5 所示，试求转移电阻 u_0/i_S。已知 $g=2$ S。

§3－2　叠加原理

3－6　电路如图题 3－6 所示，用叠加原理求 i_X。



图题 3－6

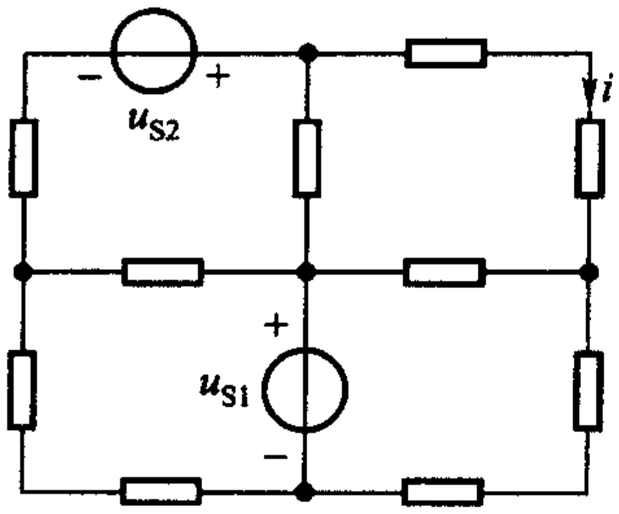


图题 3－7

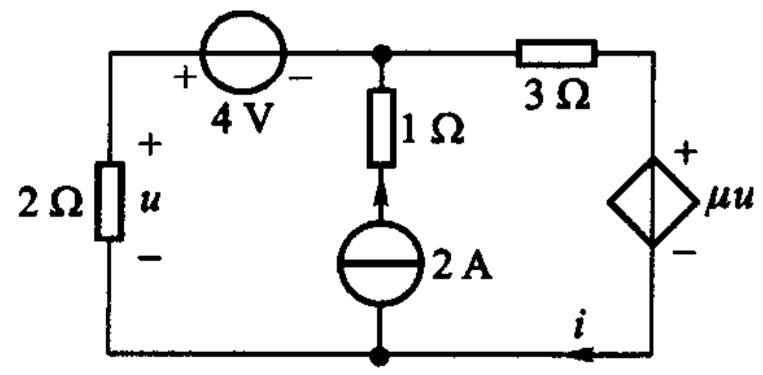
3－7　电路如图题 3－7 所示，欲使 $u_{ab}=0$，u_S 应为多少？

3－8　电路如图题 3－8 所示，试填写下表：

u_{S1}	u_{S2}	i	u_{S1}	u_{S2}	i
60 V	0	14 A	0	25 V	2 A
45 V	0	(　)	100 V	100 V	(　)
(　)	0	−8 A	(　)	75 V	0



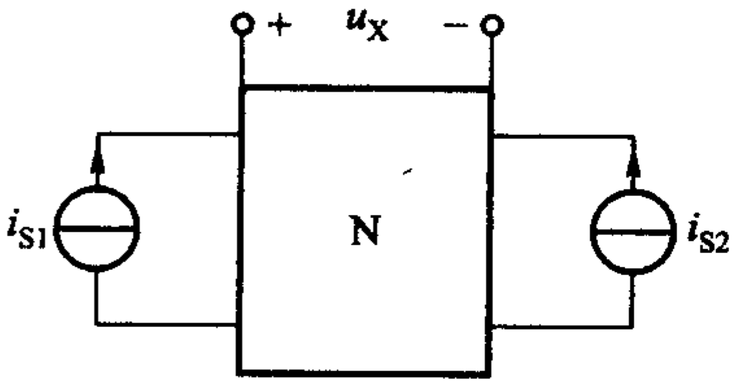
图题 3－8



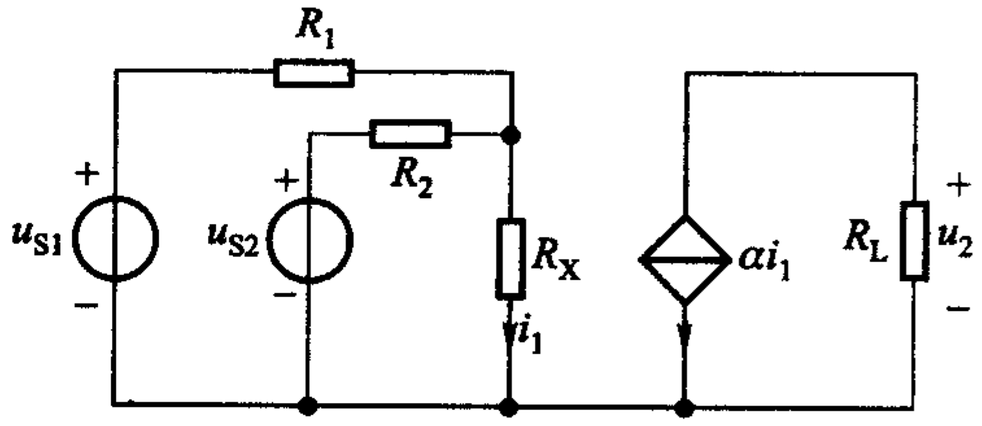
图题 3－9

3－9　电路如图题 3－9 所示，用叠加原理求 i，已知 $\mu=5$。

3－10　（1）图题 3－10 所示线性网络 N 只含电阻。若 $i_{S1}=8$ A、$i_{S2}=12$ A、u_X 为 80 V；若 $i_{S1}=-8$ A、$i_{S2}=4$ A、u_X 为 0。求：当 $i_{S1}=i_{S2}=20$ A 时，u_X 是多少？（2）若所示网络 N 含有一个电源，当 $i_{S1}=i_{S2}=0$ 时，$u_X=-40$ V；所有（1）中的数据仍有效。求：当 $i_{S1}=i_{S2}=20$ A 时，u_X 是多少？



图题 3－10

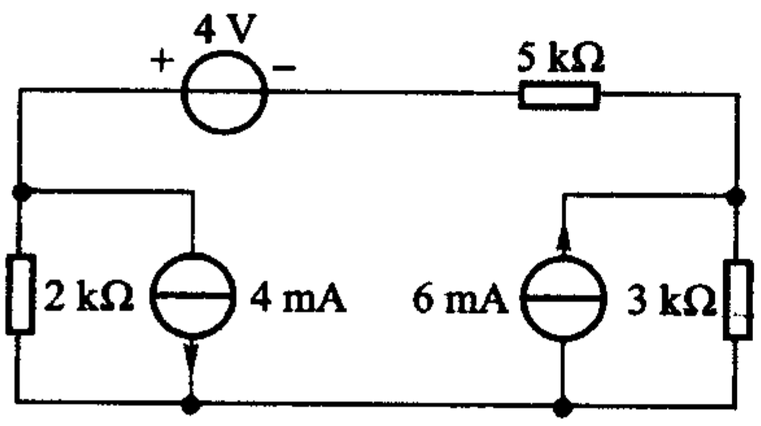


图题 3－11

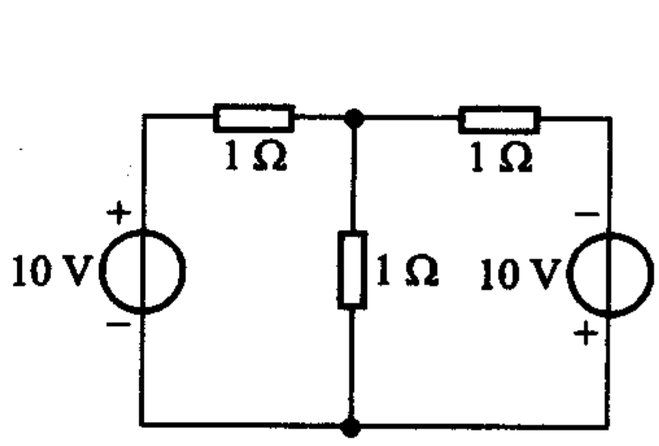
3－11　求图题 3－11 所示“信号相加电路”的输出－输入关系。

§3－3　叠加方法与功率计算

3－12　试用叠加方法求图题 3－12 所示电路中 3 kΩ 电阻的功率。



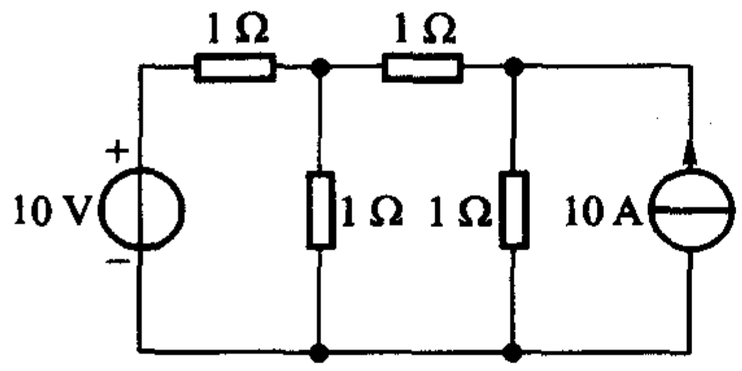
图题 3－12



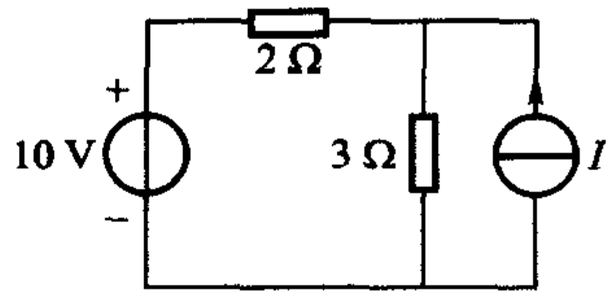
图题 3－13

3－13　试由图题 3－13 说明两电压源对电路提供的总功率不能用叠加方法求得。

3－14　试由图题 3－14 说明电压源和电流源对电路提供的总功率可以用叠加方法求得。



图题 3 – 14



图题 3 – 15

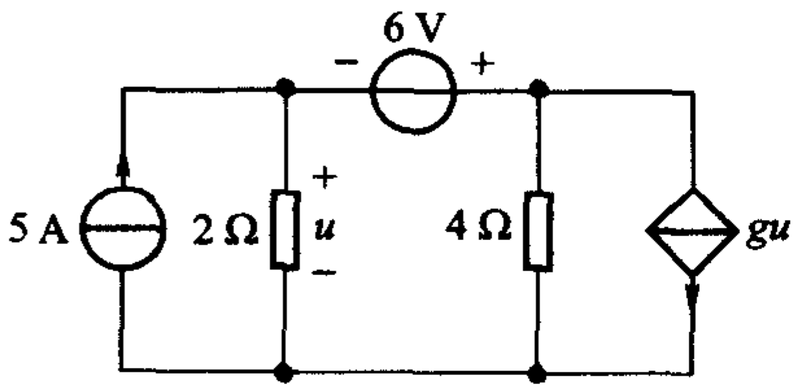
3 – 15　图题 3 – 15 所示为直流电阻电路。

（1）若电流源对电路提供的功率为零，求电流 I。

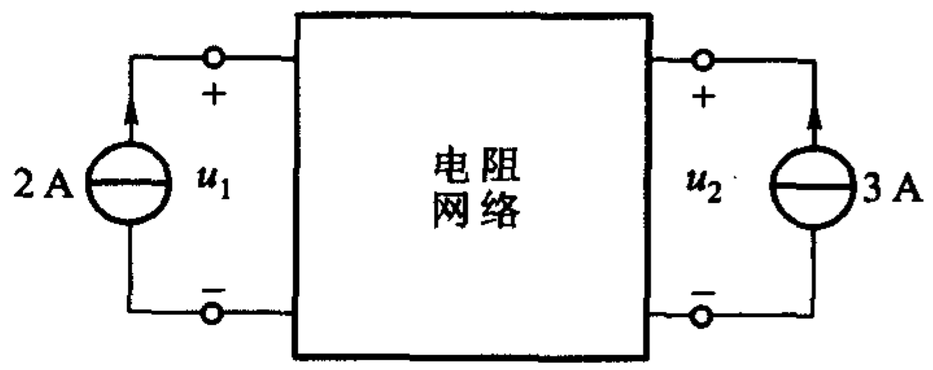
（2）若电压源对电路提供的功率为零，求电流 I。

（3）若电流源对电路提供的功率与电压源对电路提供的功率相等，求电流 I。

3 – 16　电路如图题 3 – 16 所示，其中 $g=\frac{1}{2}$S。（1）试用叠加方法求电压 u；（2）求电压源、电流源和受控源对电路提供的功率。



图题 3 – 16

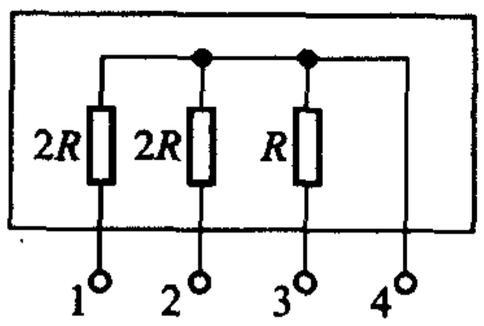


图题 3 – 17

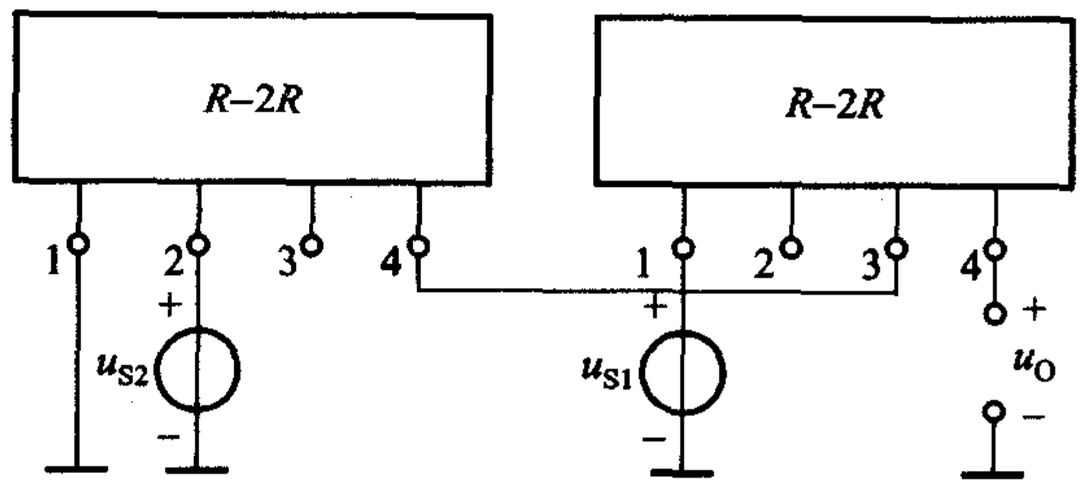
3 – 17　图题 3 – 17 所示电路中，当 3 A 电流源不作用时，2 A 电流源向电路提供 28 W 功率，且 u_2 为 8 V；当 2 A 电流源不作用时，3 A 电流源提供 54 W，u_1 为 12 V，问两电源同时作用时，向电路提供的总功率是多少？

综合

3 – 18　$R-2R$ 电阻阵列组件（array package）如图题 3 – 18（a）所示，对外有 4 个端钮。若用两个组件接成如图 3 – 18（b）所示电路，试求 u_O 与 u_{S1}、u_{S2} 的关系。若以电流源 i_{S2} 代替



(a)

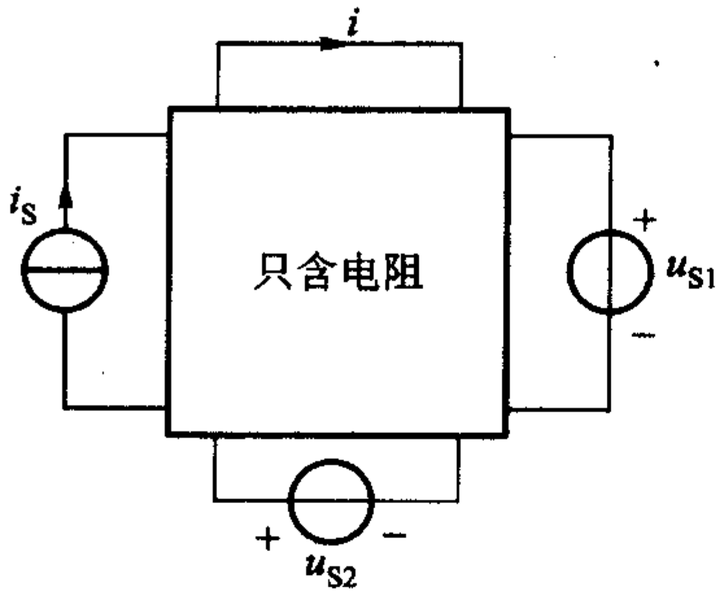


(b)

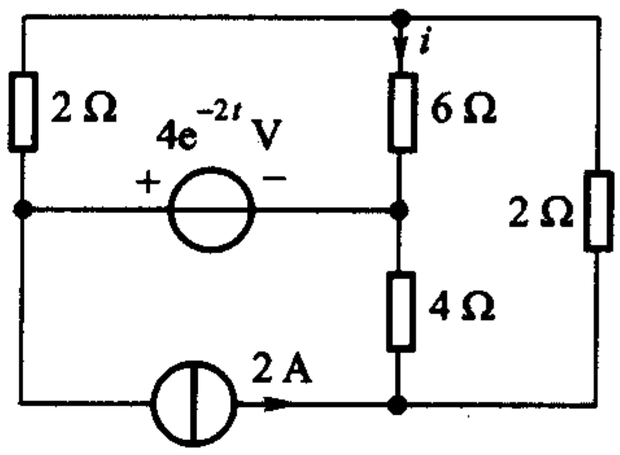
图题 3 – 18

电压源u_{S2}(电流流向“2”)试求 u_0 与 u_{S1}、i_{S2}的关系。

3-19　在图题 3-19 中,当只有电源 i_S 和 u_{S2}作用时,$i=20$ A;当只有电源 i_S 和 u_{S1}作用时,$i=-5$ A;当三个电源都作用时,$i=12$ A。(1) 分别求出只有 i_S 或 u_{S1}或 u_{S2}作用时的电流 i;(2) 求当 i_S 和 u_{S1}均增加一倍而 u_{S2}极性相反时的电流 i。已知 $i_S=1$ A,$u_{S1}=1$ V,$u_{S2}=1$ V。



图题 3-19



图题 3-20

3-20　试求图题 3-20 所示电路中电流 i。

第四章

分解方法及单口网络

上章提出了求解电路的叠加方法，本章将提出另一基本方法——分解（partition）方法。叠加方法可使多个激励或复杂激励电路的求解问题化为简单激励电路的求解问题；分解方法则可使结构复杂电路的求解问题化为结构较简单电路的求解问题。但叠加方法只适用于线性电路，而分解方法也能用于非线性电路。

对复杂网络运用节点或网孔分析时，特别是只对其中某一支路的电压、电流或其中某些局部的电压、电流感兴趣时，我们可能仍嫌联立方程太多。解决这一问题的一种办法便是把这个“大”网络分解为若干个“小”网络，即若干个子网络（subnetwork），对这些子网络逐一求解从而得出所需结果。最简单的情况便是把原网络看成是由两个通过两根导线相连的子网络 N_1 和 N_2 所组成的，如图4－1所示。像 N_1、N_2 这种由元件相连接组成、对外只有两个端钮的网络整体称为二端网络或单口网络[①]，有时径称为单口（one-port）。本章以这一最简单情况下电路的分解方法为线索，讨论单口网络的电压电流关系、等效、置换以及功率传递等内容，重点是戴维南定理。最后一节则从求单口网络等效电路的角度上介绍 T－Π 变换。

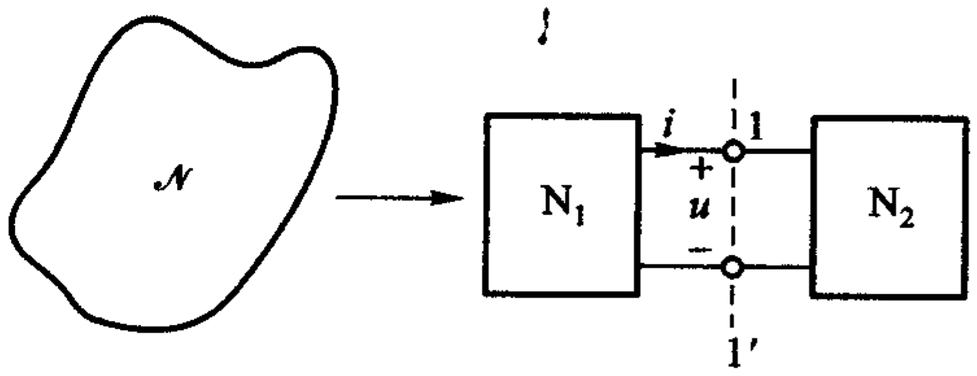


图 4－1　大网络$\mathcal{N}$看成由两个单口网络组成

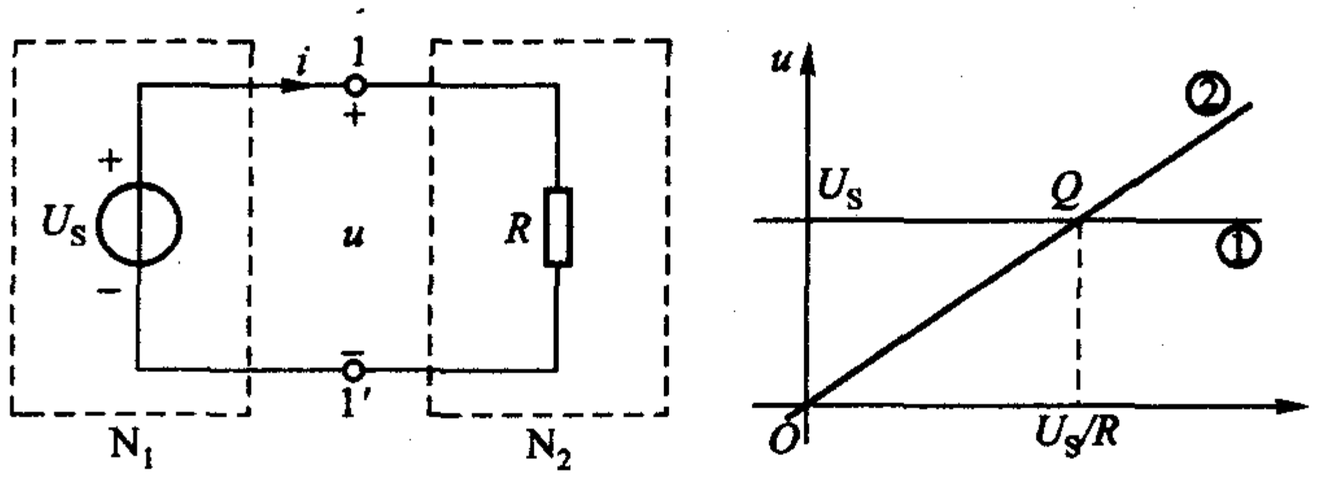
§4－1　分解的基本步骤

首先考虑一个极其简单而又似乎与本节标题无关的电路问题。设有由一个电压源和一个电阻组成的电路，如图 4－2（a）所示，试求端钮 11′处的电压 u 和电流 i。可解答如下：

由元件的 VCR 得

---

① 有些教材称为一端口网络。本书把 port 简译为“口”，相应地便有单口网络、双口网络、多口网络等译名。



(a) 电压源及电阻的串联电路看成两个单口 N_1 和 N_2 相连的电路　　(b) 伏安特性曲线相交法求解图(a)电路

图 4－2　电路分解示例

$$u = U_S \tag{4-1}$$

$$u = Ri \tag{4-2}$$

考虑到电压 u 和电流 i 既是电压源元件两端的电压和流过的电流，又是电阻元件两端的电压和流过的电流，因此，u 和 i 应同时满足(4－1)和(4－2)两式，联立后解得

$$u = U_S \tag{4-3}$$

$$i = U_S/R \tag{4-4}$$

也可在绘出这两元件的伏安特性曲线后，用曲线相交法求得解答，如图 4－2(b)所示。图中曲线①和②分别为电压源和电阻的伏安特性曲线，由交点 Q 可得如(4－3)、(4－4)两式所示的解答。

从这个例子不难得到启发：如果在端钮 11′处相连接的是两个内部结构复杂或是内部情况不明的单口网络，也可按此思路求得这两个网络的端口电压 u 和端口电流 i，所不同者，需要的是这两个单口网络的 VCR 而不是元件的 VCR。

一个元件的电压电流关系是由这个元件本身所确定的，与外接的电路无关，例如，电阻元件的 VCR 总是 $u = Ri$(在 u、i 为关联参考方向的前提下)，这一关系不会因外接电路不同而有所不同。同样，一个单口网络的 VCR 也是由这个单口网络本身所确定的，与外接电路无关，只要这个单口网络除了通过它的两个端钮与外界相连接外，别无其他联系。

因此，如果对一个网络$\mathcal{N}$采用如图 4－1 所示的分解处理时，首先应把单口网络 N_1 和 N_2 从原网络中分离出来以便分别求得它们的 VCR，然后再设法求得它们相连时的端口电压 u 和端口电流 i。

读者即将从 §4－3 了解到：求得端口电压 u 和端口电流 i 后就可以在求解 N_1(N_2)内部电压、电流时非常简便地考虑到 N_2(N_1)实际存在的影响。

综上所述，分解的基本步骤为：

（1）把给定网络划分为两个单口网络 N_1 和 N_2；

（2）分别求出 N_1 和 N_2 的 VCR（计算或测量）；

（3）联立两者的 VCR 或由它们伏安特性曲线的交点，求得 N_1 和 N_2 的端口电压、电流；

（4）分别求解 N_1 和 N_2 内部各支路电压、电流。

从全面求解网络的角度来看，何处划分是随意的，视方便而定，因此求解端口电压 u 和端口电流 i 只是一种手段，它们是一组辅助变量，据此可设法用较少的联立方程求得全部结果。但是，在许多工程实际问题中，电路往往应看成由两个既定的单口网络组成，且这两个单口相连处的端口电压、电流往往是最主要的甚至是唯一的分析对象。例如，当 N_2 是 N_1 的负载，而我们只对负载所得到的电压、电流、功率感兴趣时；或当 N_2（N_1）内部情况不明（黑箱）或是一个不可分割的整体（如某种器件的模型），而我们只需了解它的外部性能时；或 N_1 是电阻网络而 N_2 是电容（电感），或 N_1 是线性网络而 N_2 是非线性网络，性质不同网络相连处的电压、电流易于首先求解时等等。这时，划分就不是随意的。在本章和第六章中将遇到运用分解方法求解非线性电路和动态电路的问题。

§4－2 讨论单口网络的 VCR，即解决步骤（2）的实施问题，图 4－2 则提供了解决步骤（3）的方法和思路，§4－3 讨论步骤（4）的实施问题。

§4－2　单口网络的电压电流关系

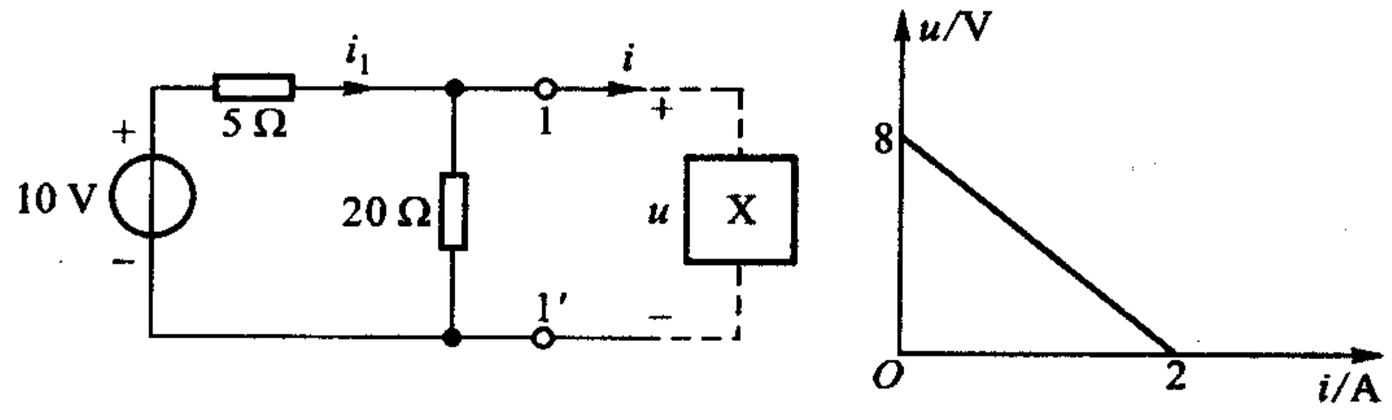
单口网络的定义已见于本章前言中。如果在单口网络中不含有任何能通过电或非电的方式与网络之外的某些变量相耦合的元件，例如，不包含控制变量在该网络之外的受控源、与网络之外的绕组有磁场耦合关系的变压器绕组、与外界光源有耦合关系的光敏电阻等，则这单口网络称为明确的。本书只讨论明确的单口网络，以后将省略“明确的”这一限定词。

单口可以用下列的几种方式之一来描述：（1）具体的电路模型；（2）端口电压与电流的约束关系，表示为方程或曲线的形式；（3）等效电路。其中以（2）最具表征意义，相当于元件的约束关系，当单口内部情况不明时，可以用实验方法测得。等效电路也是常用的，这将在 §4－4、§4－5、§4－6 三节中讨论。本节讨论单口网络 VCR 的求解方法。

例 4－1　试求图 4－3（a）实线所示含电压源和电阻的单口网络的 VCR 及伏安特性曲线。

解　单口网络的 VCR 是由它本身性质决定的，与外接电路无关。因此，可以在任何外接电路 X（虚线所示）的情况下来求它的 VCR。为此，要列出整个电路的方程，但毋需列写元件 X 的 VCR，然后消去除 u 和 i 以外的所有变量即可。

不论 X 是什么，对图 4-3(a)所示电路，可以写出



(a)　　(b)

图 4-3　例 4-1

$$10 = 5i_1 + u$$

和

$$u = 20(i_1 - i)$$

消去 i_1 可得

$$u = 8 - 4i$$

此即为在所设 u、i 参考方向下的 VCR。

如果设想 X 是一个电流源 i_S(设方向向下)，且设其两端电压为 u(设正极在上)，则由节点法可以更方便地求得结果。该电路共有两个节点电压，其一即为电流源两端的电压 u，亦即单口网络的端口电压，另一为已知电压源的电压，其值为 10 V，故得节点电压方程

$$\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{20}\right)u-\left(\frac{1}{5}\right)10=-i_S$$

又电流源电流 i_S 即为端口电流 i，得

$$\frac{1}{4}u-2=-i$$

即

$$u = 8 - 4i$$

此法可归结为：(在单口网络两端)外施电流源 i 求(单口网络两端)电压 u 的方法。

也可用“外施电压源求电流”的方法来解决求 VCR 的问题。为此，可设想 X 为电压源，此电压源的电压显然即为单口网络的端口电压 u，所求的电流显然即为单口网络的端口电流 i。如用节点分析，则方程当为

$$\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{20}\right)u+i-\left(\frac{1}{5}\right)10=0$$

即

$$u = 8 - 4i$$

三种方法求得的 VCR 完全一致。

单口网络的 VCR 与外接电路无关，因此，完全可以在最简单的外接电路情况下，求得它的 VCR。外施电流源求电压法和外施电压源求电流法是常用的方法，也是用实验方法确定 VCR 的依据。这是求单口网络 VCR 的基本方法。

在如图 4－3(b)中所示的以 u 为纵坐标，i 为横坐标的平面上，用截距法可绘出如图中所示的直线，此即为对应于 $u=8-4i$ 的伏安特性曲线。u 轴截距为 8 V，i 轴截距为 2 A。

例 4－2　求图 4－4 所示含电源、电阻和受控源的单口网络的 VCR。

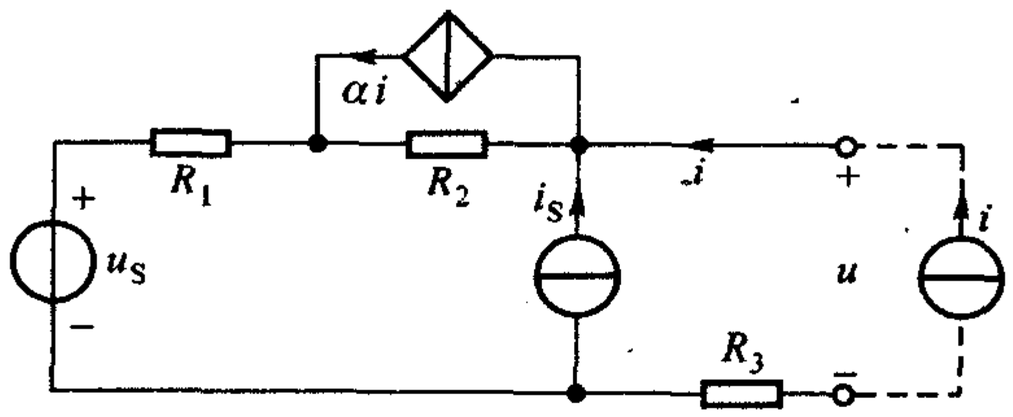


图 4－4　例 4－2

解　设想在电路两端施加电流源 i，由观察即可写出

$$\begin{aligned} u &= (i+i_S-\alpha i)R_2+(i+i_S)R_1+u_S+iR_3 \\ &= [u_S+(R_1+R_2)i_S]+[R_1+R_3+(1-\alpha)R_2]i \end{aligned} \qquad (4-5)$$

此即为所求 VCR。由本例和上例可见含独立电源单口网络的 VCR 总可以表示为 $u=A+Bi$ 的形式，以后将得到证明(§4－6)。

例 4－3　求图 4－5 所示只含电阻的单口网络的 VCR。

解　外施电压源 u，如图中虚线部分所示。由网孔分析得方程

$$\begin{aligned} 3i_1-i_2-i_3 &= u \\ -i_1+3i_2-i_3 &= 0 \\ -i_1-i_2+4i_3 &= 0 \end{aligned}$$

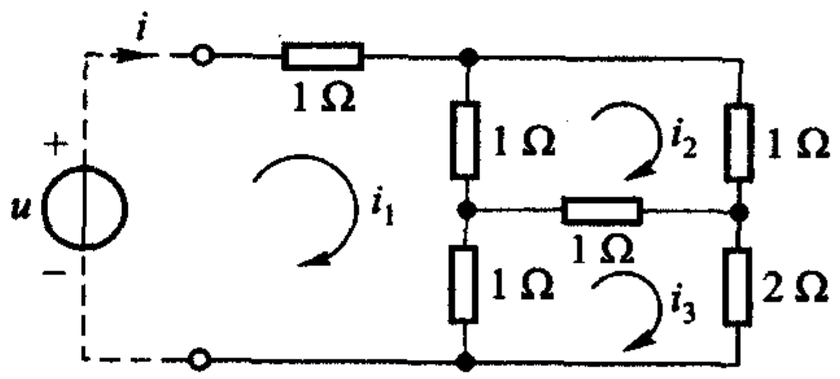


图 4－5　例 4－3

求解 i_1 得

$$i_1=\frac{11}{24}u$$

而 i_1 即 i，故得

$$i=\frac{11}{24}u$$

或

$$u=\frac{24}{11}i$$

此即为所求的 VCR。纯电阻单口网络的 VCR 总可表示为 $u=Bi$ 的形式，B 即为单口网络的策动点电阻(表 3－1)或称等效电阻。

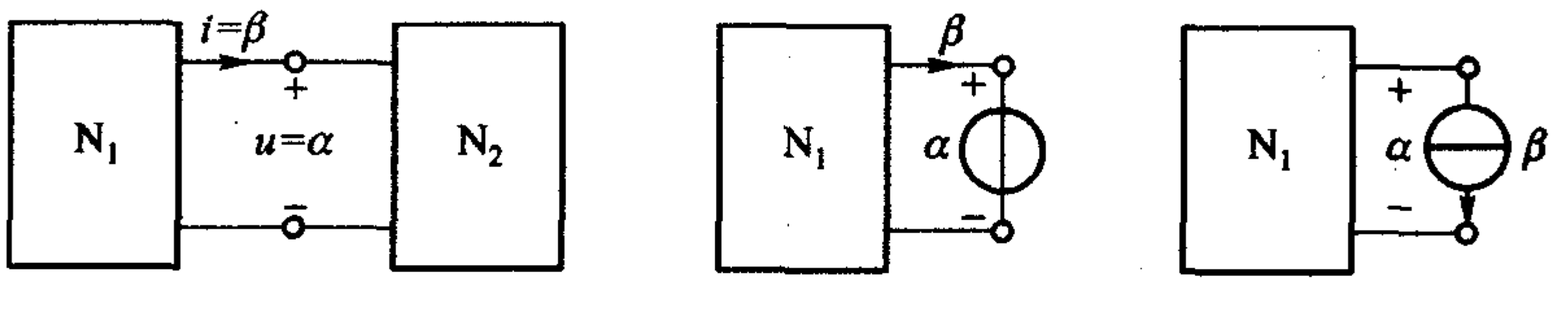
练习题

4-1　求解例4-3，改为外施电流源，并进行节点分析。

§4-3　单口网络的置换——置换定理

本节讨论§4-1中指出的步骤(4)的实施问题。为此，先介绍与此密切相关的置换定理(substitution theorem)①。该定理可表述为：

若网络N由两个单口网络N_1和N_2连接组成[图4-6(a)]，且已知端口电压和电流值分别为α和β，则N_2(或N_1)可以用一个电压为α的电压源[图4-6(b)]或用一个电流为β的电流源[图4-6(c)]置换，不影响N_1(或N_2)内各支路电压、电流原有数值。



(a) 原网络　　(b) N_2为电压源所置换，注意极性　　(c) N_2为电流源所置换，注意方向

图4-6　置换定理

在最简单的情况下，N_1(或N_2)为一支路，支路电压和电流值分别为α和β，也可按照上述定理进行置换。

下面通过一个具体的例子来表明此定理的正确性。

图4-7(a)所示电路中的各电压、电流已在第二章例2-9中求得，它们是：$u_1=15$ V、$i_1=3.75$ A、$i_2=1.5$ A、$i_3=2.25$ A。现为表明置换定理的正确性，把电流为i_1的支路换以电流源，其电流值为3.75 A，如图4-7(b)所示。可以通过具体计算，表明这样的置换对电路中的各电压、电流并无影响。为此，根据图4-7(b)所示电路，列出节点方程

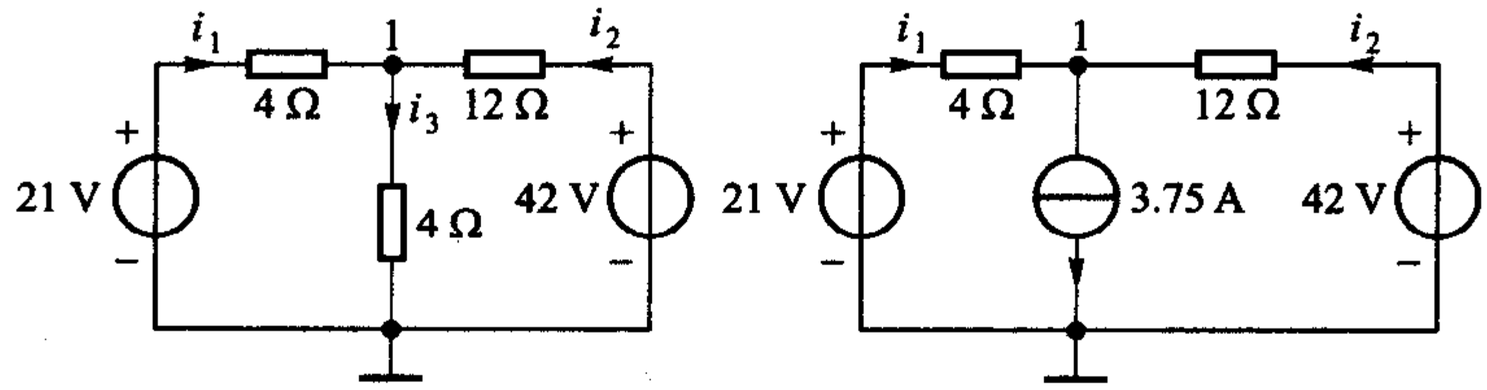
$$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\right)u_1-\left(\frac{1}{4}\right)21-\left(\frac{1}{12}\right)42=-3.75$$

解得

$$u_1=15\ \text{V}$$

---

①　也有译为“替代定理”的。本书把“置换”作为专门术语而把替代、替换、代替等较为口语化的词作为一般用语，请不要混淆。



(a) 原来的网络　　(b) 置换后的网络

图 4－7　置换定理的例子

故

$$i_2=\frac{21-15}{4}\text{A}=1.5\ \text{A},\quad i_3=\frac{42-15}{12}\text{A}=2.25\ \text{A}$$

由此可知各电压、电流并未发生变化。这就是说电流为 i_k 的支路可以用一个电流值为 i_k 的电流源去置换，对网络不会发生影响。

例 4－4　电路如图 4－8(a)所示，其中 N_1 由 10 V 电压源和 4 Ω 电阻串联组成，试问 N_1 能否用结构更为简单的电路代替而保持 N_2 的电压、电流不变？

解　本题十分简单，主要说明置换的实质，用以代替严格的证明①。

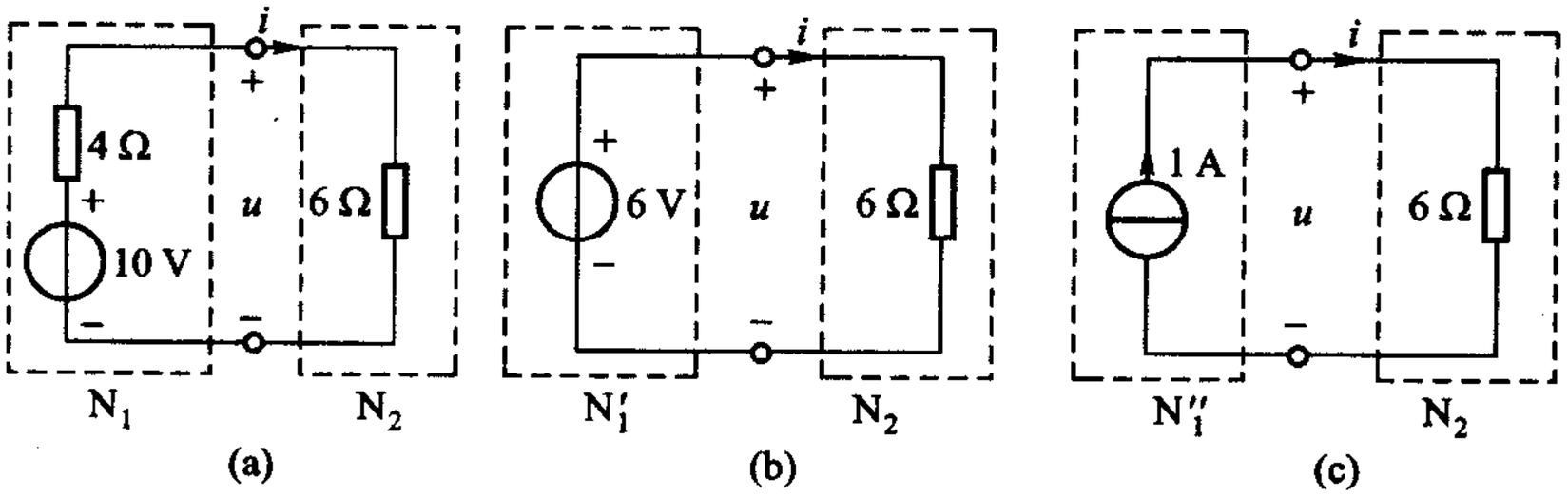


图 4－8　例 4－4

解得 N_1 和 N_2 相连处，有

$$u=6\ \text{V}\quad i=1\ \text{A}$$

故 N_1 可用 6 V 电压源或 1 A 电流源置换，分别如图 4－8(b)中 N_1'、图 4－8(c)中 N_1''所示。亦即对 N_2 来说，外接 N_1 或一个 6 V 电压源或一个 1 A 电流源并无差别。道理何在？我们可以用图 4－9 所示伏安特性曲线来说明。N_1 的 VCR 为

$$u=10-4i$$

其特性曲线如图 4－9 中标注①的直线。N_2 的 VCR 为

$$u=6i$$

---

① 证明见《简明电路分析基础》§4－3。

其特性曲线如图 4 -9 中标注②的直线。这两曲线相交于 Q 点。Q 点称为工作点，其坐标为(6 V，1 A)。因此，如果 N_1 代之以其特性曲线如③或④所示的 6 V 电压源、1 A 电流源，对 N_2 来说，其工作点并未变化，感不到有何“异样”。

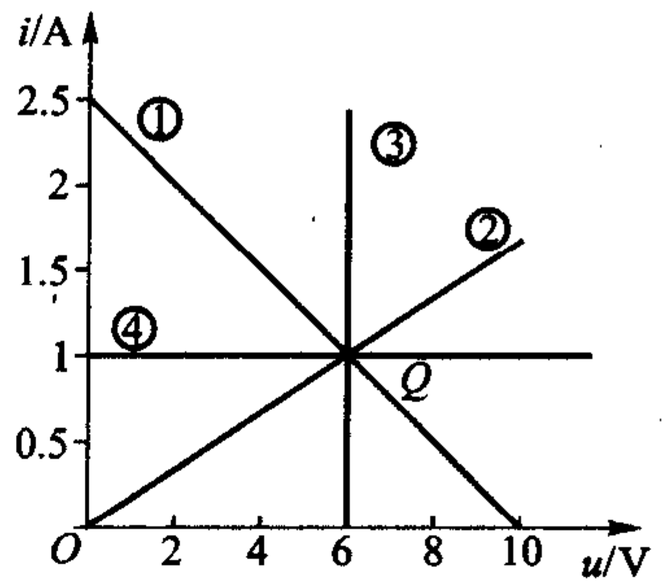


图 4 -9　例 4 -4 伏安特性曲线组

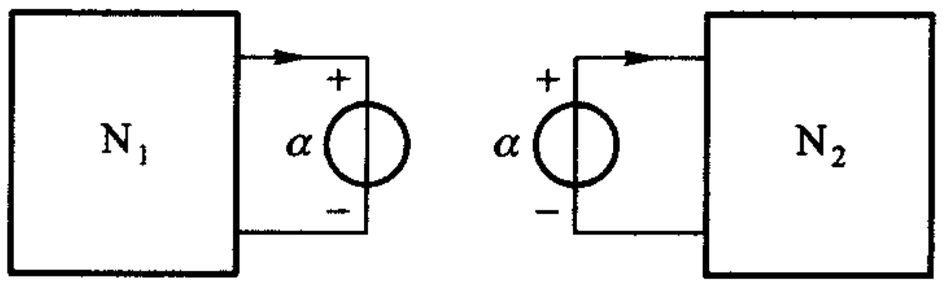
事实上，过 Q(6 V、1 A)还可作许多斜率不同的直线，它们都可以代替 N_1 而不致使 N_2 感到“异样”。例如，VCR 为 $u = 8 + 2i$ 的直线(它代表 8 V 电压源与 2 Ω 电阻的串联电路)也可通过 Q 点。也可代替 N_1，但一般来说，这种代替并无价值，因为我们总是希望用结构更简单的电路去代替原来的电路。用一个电压源或一个电流源去代替原来(较复杂)的单口网络，如同本节开始所述的置换定理才有意义。有时我们也可用一个电阻元件去进行置换，条件是置换后整个电路中还应存在电源。

因此，置换是一种基于工作点相同的“等效”替换。

如果图 4 -8(a)所示电路中，N_2 换以其他电路，譬如 1 Ω 的电阻，由于工作点发生变化，上述的 N_1' 或 N_1'' 不能再用以置换 N_1，需另行找出其他电压源或电流源。

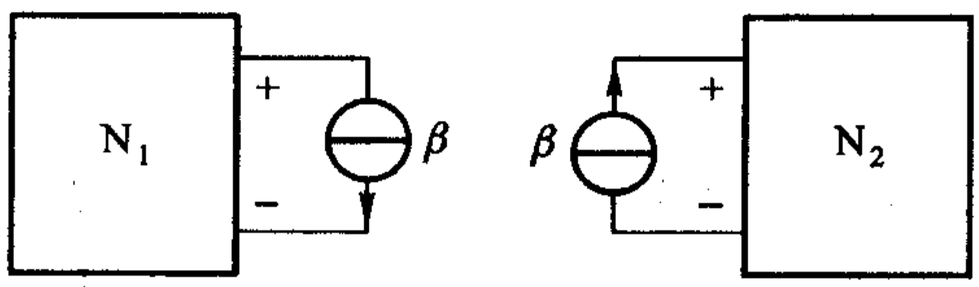
◀

置换定理为我们提供了实施步骤(4)的有力工具。在步骤(3)中求得 N_1 和 N_2 的端口电压和端口电流后，即可把原电路分为如图 4 -10 或图 4 -11 中所示的两个子网络，进而求出 N_1 及 N_2 所有支路电压和电流。



(a) 用电压为端口电压值 α 的电压源置换 N_2　　(b) 用电压为端口电压值 α 的电压源置换 N_1

图 4 -10　置换定理应用之一



(a) 用电流为端口电流值 β 的电流源置换 N_2　　(b) 用电流为端口电流值 β 的电流源置换 N_1

图 4 -11　置换定理应用之二

例 4－5　电路如图 4－12 所示，试用分解方法求 i_1 和 u_2。

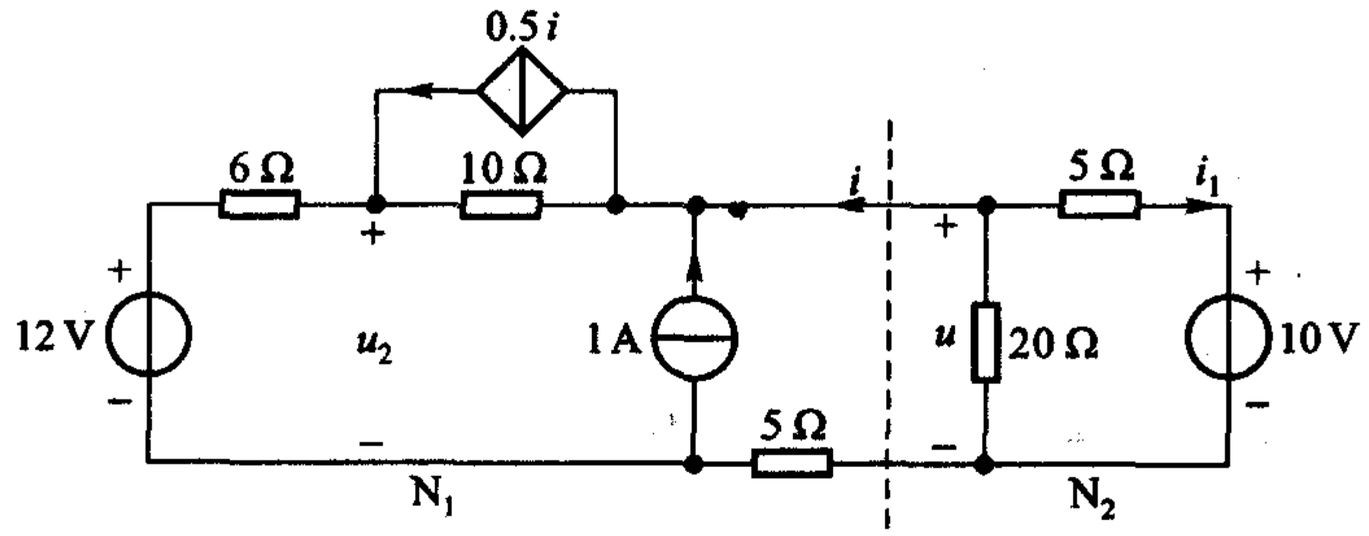


图 4－12　例 4－5

解　（1）自图 4－12 中虚线处把电路分为两个单口网络 N_1 和 N_2，端口电压 u 和电流 i 的参考方向如图中所示。

（2）求 N_1 和 N_2 的 VCR：分离出 N_1，注意到 N_1 与例 4－2 所示单口网络完全相同，可利用该例结果，得 N_1 的 VCR 为

$$u = [12 + (6 + 10) \times 1] + [6 + 5 + (1 - 0.5)10]i = 28 + 16i$$

分离出 N_2，N_2 即例 4－1 中的单口网络，其 VCR 为

$$u = 8 - 4i$$

（3）联立两者的 VCR，求解 u，i。

由　　$8 - 4i = 28 + 16i$

得　　$i = -1\ \text{A}$

代入任一 VCR，得　　$u = 12\ \text{V}$

（4）以 12 V 电压源置换 N_1，可得

$$u = 5i_1 + 10$$

$$i_1 = \frac{12 - 10}{5}\ \text{A} = 0.4\ \text{A}$$

以 −1 A 电流源置换 N_2，可得　　$u_2 = 12\ \text{V}$

例 4－6　图 4－13(a)所示，为含非线性电阻的电路，已知非线性电阻的伏安特性曲线如图 4－13(b)所示，试求非线性电阻两端的电压 u 和流过的电流 i。

一般非线性电阻的符号如图 4－13(a)中所示。

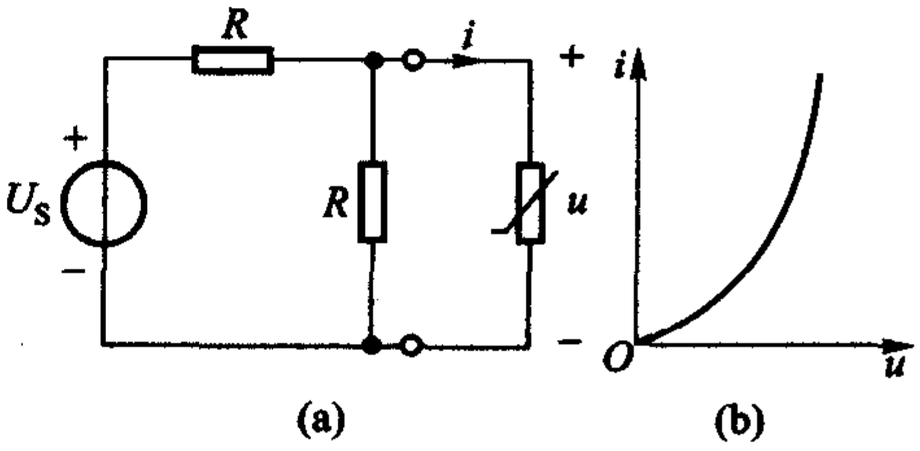


图 4－13　例 4－6

解　运用分解方法，将电路的线性部分与非线性部分划分为两个单口网络。参考例 4－1，可求得线性单口的 VCR 为

$$2u = U_S - Ri \qquad (4-6)$$

非线性单口仅含一非线性电阻，其 VCR 已给定，表示为曲线形式如图 4－13(b)所示。

本题需用曲线相交法求解。为此，在表明非线性电阻 VCR 的同一 $u-i$ 平面上，作出线性部分的伏安特性曲线，这是一条直线，u 轴截距为 $\frac{U_S}{2}$，i 轴截距为 $\frac{U_S}{R}$，如图 4－14 所示。两曲线的交点便是所求解答。

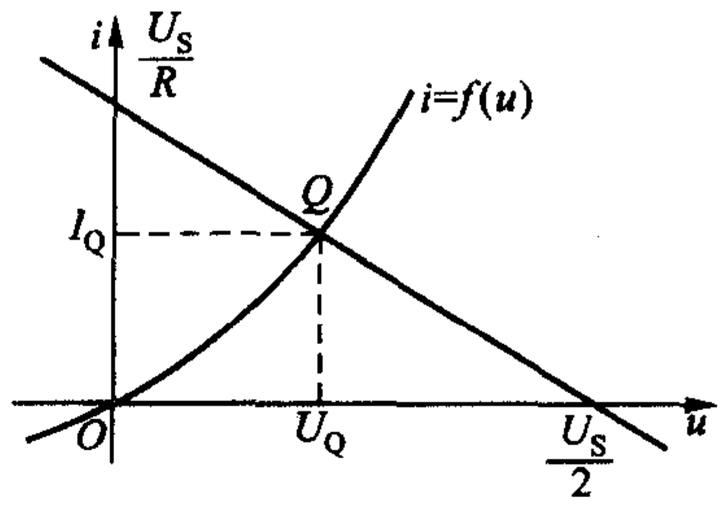


图 4－14　工作点的确定

在本例中，解答点 $Q(U_Q、I_Q)$ 通常称为非线性元件的“工作点”。图中的直线称为负载线，因为从非线性元件的角度来看，线性部分是它的负载。

求得端口电压 $u=U_Q$ 和电流 $i=I_Q$ 后，就可用置换定理求得线性单口网络内部的电压、电流。

以上所述的方法常特称为“负载线法”，为电子电路分析所常用。

思考题

4－1　在图 4－15 所示电路中，若已知 $u=3$ V、$i=1$ A，能否用电阻 R 置换？电阻值应如何计算？求解 i_1 时，有电压源 u，电流源 i 和上述的电阻 R 三种置换方式，哪一种最为简便？若图中 5 Ω 改变为 7.5 Ω，是否会影响三种置换元件的参数值？

4－2　如果在图 4－8(a)中 N_1 不变，N_2 换以 1 Ω 的电阻，试求可用以置换 N_1 的电压源或电流源，并绘出类似于图 4－9 的伏安特性曲线组。

练习题

4－2　电路如图 4－15，已知 N 的 VCR 为 $u=i+2$，试用置换定理求解 i_1。（提示：用外施电压源求左边网络 VCR，得 $u+3i=6$。）　$\left(\frac{3}{5}\text{A}\right)$

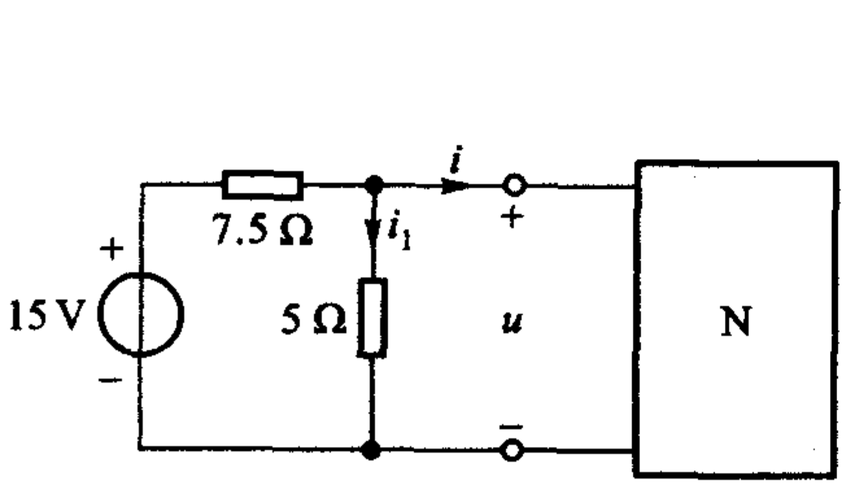


图 4－15　练习题 4－2

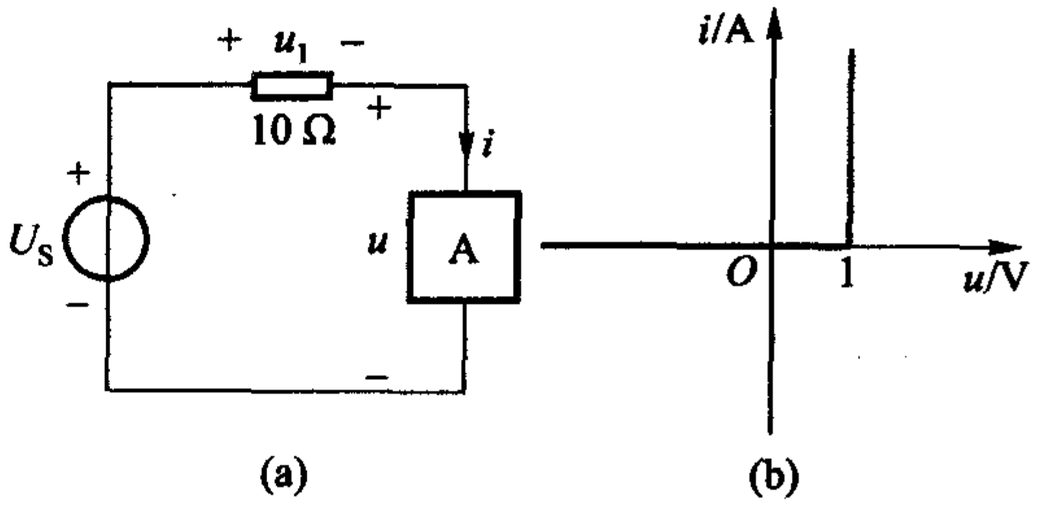


图 4－16　练习题 4－3

4-3　假定图 4-16(a)所示电路中,器件 A 的伏安特性曲线如图 4-16(b)所示,试求在下列三种情况下 10 Ω 电阻的电压:

(1) $U_S = 2$ V 时;

(2) $U_S = 1/2$ V 时;

(3) $U_S = -2$ V 时。

4-4　试由曲线相交法求例 4-5 中的 u 和 i。

§4-4　单口网络的等效电路

在 §4-2 中已指出一个单口网络也可用它的等效电路来表征。这样,分解的步骤(2)也可改为求 N_1 和 N_2 的等效电路。

在此先说明等效(equivalence)的定义。

如果一个单口网络 N 和另一个单口网络 N′的电压、电流关系完全相同,亦即它们在 $u-i$ 平面上的伏安特性曲线完全重叠,则这两单口网络便是等效的。尽管这两个网络可以具有完全不同的结构,但对任一外电路 M 来说,它们却具有完全相同的影响,没有丝毫差别。①

可以用早已熟知的等效串联电阻公式的推导过程为例来理解上述的等效定义。设有两个单口网络 N 和 N′如图 4-17 所示,N 由 4 个电阻 R_1、R_2、R_3、R_4 串联组成,N′只含一个电阻 R。对 N 来说,由 KVL 可得它的 VCR 为

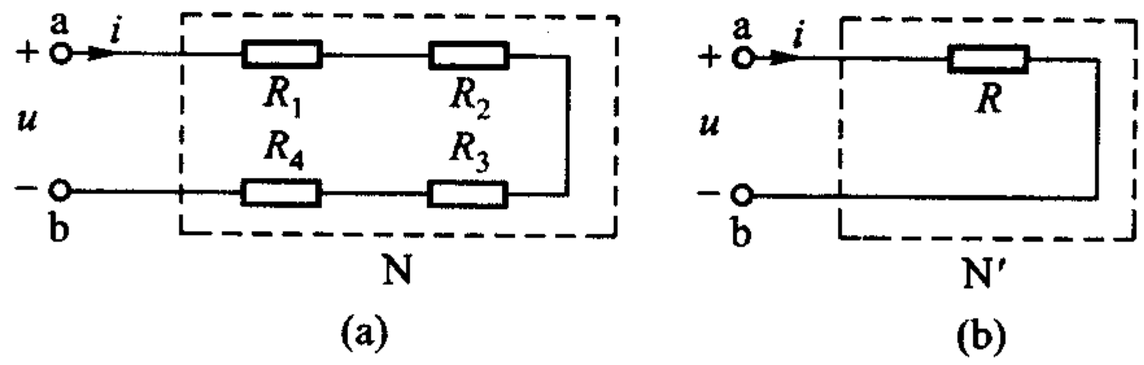


图 4-17　串联等效电阻

$$\begin{aligned} u &= R_1 i + R_2 i + R_3 i + R_4 i \\ &= (R_1 + R_2 + R_3 + R_4) i \end{aligned} \tag{4-7}$$

对 N′来说,VCR 为

$$u = Ri \tag{4-8}$$

---

① 请注意:模型和等效电路是两个完全不同的概念,不能混用。

如果

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 \tag{4-9}$$

则 N 和 N′的 VCR 完全相同，因而 N 和 N′便是等效的。(4-9)式称为该两网络的等效条件，这便是大家熟知的等效串联电阻公式。

在等效的定义中，必须注意到 VCR 应完全相同这一要求。如果两个单口网络 N 和 N′分别接到相同的某一外电路时，它们的端口电压相等，端口电流相等，只能说它们对这一外电路来说是等效的，也就是说，N 和 N′只是一种对该外电路而言所作的相互置换而已。一般，这并不能保证它们在外接另一个电路时也能如此。等效是指对任意的外电路等效，而不是指对某一特定的外电路等效。这就是说，要求在外接任何电路时，都要具有相同的端电压和相同的端电流，这就要求 N 和 N′的 VCR 完全相同，亦即在 $u-i$ 平面上两者的伏安特性曲线必须完全重叠。

我们熟知的等效并联电阻公式

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n} \tag{4-10}$$

或

$$G = G_1 + G_2 + \cdots + G_n \tag{4-11}$$

也可根据上述的等效定义导出，式中 R 和 G 分别为等效电阻和等效电导，R_n 和 G_n 分别为第 n 个并联电阻和并联电导。在只有两个电阻 R_1 和 R_2 并联的特殊情况下，等效电阻 R 为

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \tag{4-12}$$

运用等效的概念，可以把一个结构复杂的单口网络用一个结构简单的单口网络去替换，从而简化了电路的计算。

根据定义，求某一单口网络的等效电路，实质上是求该单口网络 VCR 的问题，仍需用到 §4-2 所述的基本方法。

例 4-7　求例 4-1 所示单口网络的最简单的等效电路。

解　由例 4-1 已知该单口网络的 VCR 为

$$u = 8 - 4i$$

图 4-18(a)所示电路也具有同样的 VCR，其电路由两个元件组成，是可能具有的最简单形式，这就是所求等效电路。

如把 VCR 改写为

$$i = 2 - \frac{1}{4}u$$

则显然可见图 4-18(b)所示电流源与电阻并联的电路也具有同样的 VCR，也是

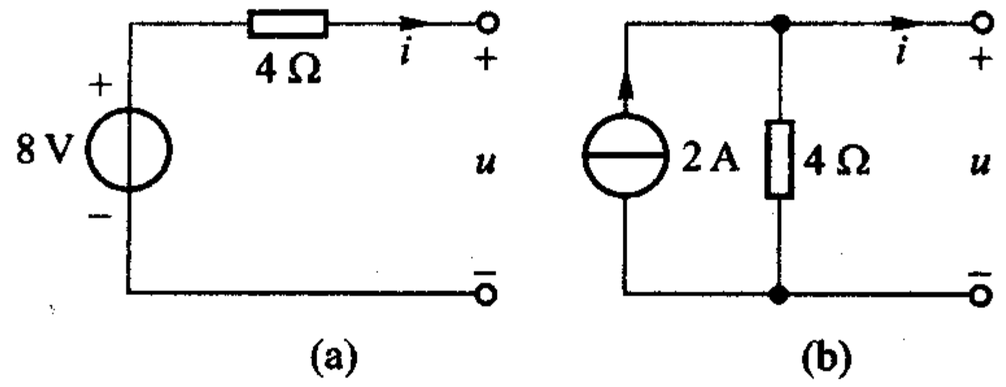


图 4－18　例 4－7

本题的解答。

例 4－8　电路如图 4－19(a)所示，试求 N_2 的电压 u 和电流 i。若 N_1 用 N_1' 代替如图 4－19(b)所示，试求 u 和 i。若图 4－19(a)和图 4－19(b)中的 6Ω 电阻，均换以任何其他相同阻值的电阻，试重复上述要求。

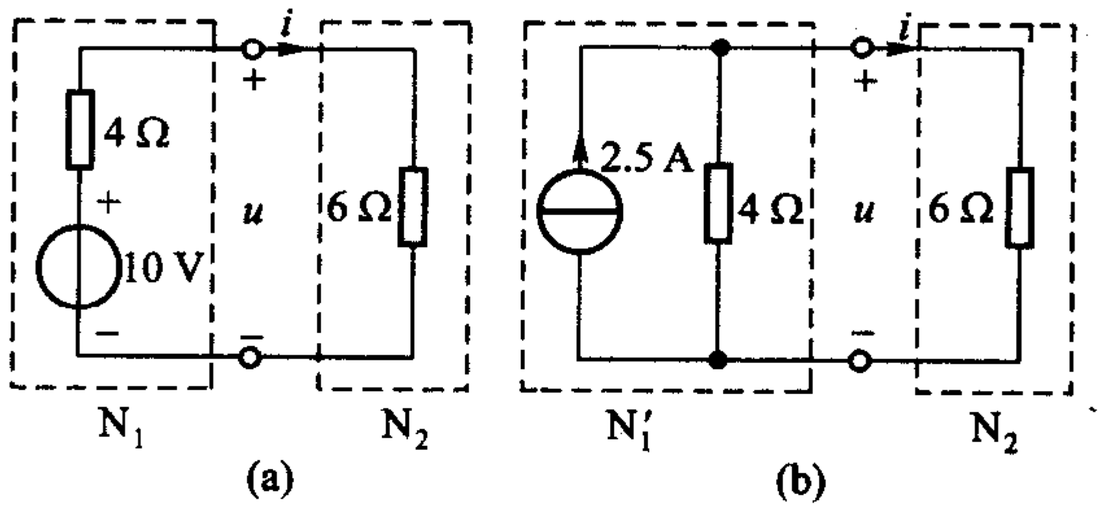


图 4－19　例 4－8

解　本题十分简单，主要说明等效与置换的差别。

对图 4－19(a)利用分压关系可求得

$$u = (10\ \text{V})\left(\frac{6}{6+4}\right) = 6\ \text{V}$$

$$i = \frac{6\ \text{V}}{6\ \Omega} = 1\ \text{A}$$

对图 4－19(b)利用分流关系可求得

$$i = (2.5\ \text{A})\left(\frac{4}{6+4}\right) = 1\ \text{A}$$

$$u = (1\ \text{A})(6\ \Omega) = 6\ \text{V}$$

所以，对 6 Ω 电阻来说，外接 N_1 或 N_1' 没有区别。

若图 4－19(a)、(b)中，6 Ω 电阻均换以 1 Ω 电阻，则由图(a)和图(b)均可算得

$$u = 2\ \text{V}$$

$$i = 2\ \text{A}$$

对任意阻值的电阻，外接 N_1 或 N_1' 都没有区别。这是因为 N_1 和 N_1' 的 VCR 相同，属等效电路，彼此替换，任何外电路都不会感到“异样”。

在分离出 N_1 和 N_1' 后，不论是用外施电压源法或是外施电流源法不难找到它们的 VCR。对 N_1，可外施电流源后，求得

$$u = 10 - 4i$$

对 N_1'，可外施电压源后，求得

$$i = 2.5 - \frac{u}{4}$$

或经移项等处理后，也可表示为

$$u = 10 - 4i$$

可见 N_1 和 N_1' 的 VCR 完全相同。

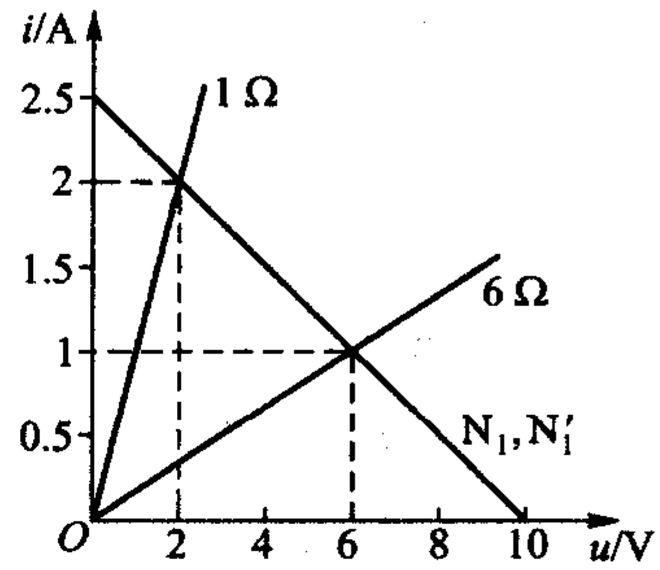


图 4－20　例 4－8 伏安特性曲线组

用伏安特性曲线来说明等效的原理，十分清楚。由于 N_1 和 N_1' 的 VCR 相同，因此，它们的特性曲线是完全重叠的，如图 4－20 中所示。因此，任何外接电路，它们的特性曲线总是和 N_1 和 N_1' 的特性曲线相交于同一点，如图 4－20 中 6 Ω、1 Ω 情况所示。设想外接电路是特性曲线如图 4－13(b)所示的非线性元件，情况也是如此。

因此，正如本节开始所述，等效是建立在相同 VCR 基础上的，而置换则是建立在相同工作点基础上的。后者是一种更受限制的“等效”，一般称之为置换。

例 4－9　试化简图 4－21(a)所示单口网络。

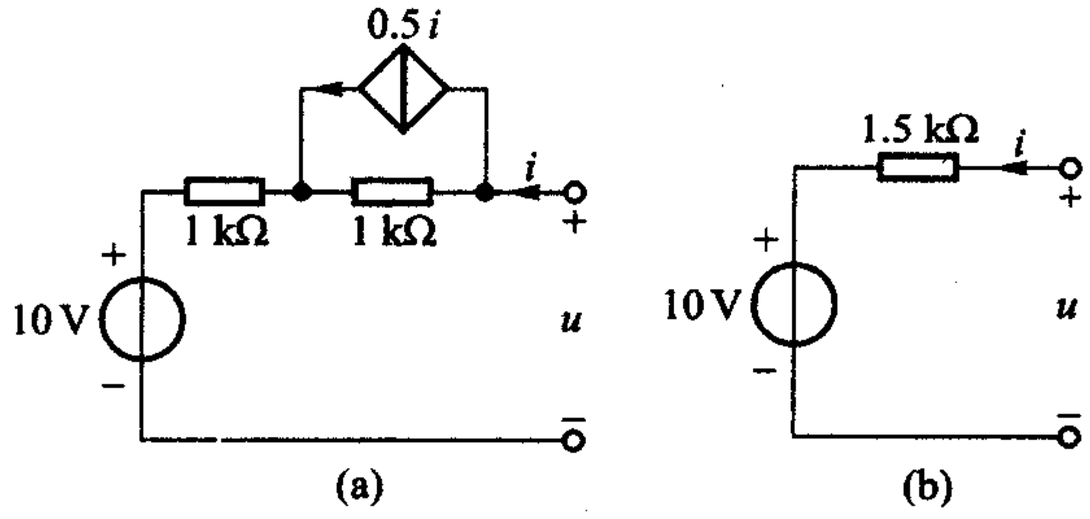


图 4－21　例 4－9

解　化简问题也就是要寻求一个形式最简单的等效电路问题，也可以从求单口网络的 VCR 下手。

设想在单口网络两端外接电流源，其电流为 i，则可求得其端口电压

$$u = 1000(i - 0.5i) + 1000i + 10$$
$$= 1500i + 10$$

图 4－21(b)所示电路具有同样的 VCR，故为其等效电路，且又无法再行化简，即

为所求结果。(还有其他解答吗?)

含受控源、电阻及独立源的单口网络与含电阻及独立源的单口网络一样,可等效为电压源 - 串联电阻组合或电流源 - 并联电阻组合,在 §4 - 6、§4 - 7 中将讨论这一问题。

例 4 - 10　含受控电压源的单口网络如图 4 - 22 所示,该受控源的电压受端口电压 u 的控制,系 VCVS。试求单口网络的输入电阻 R_i。

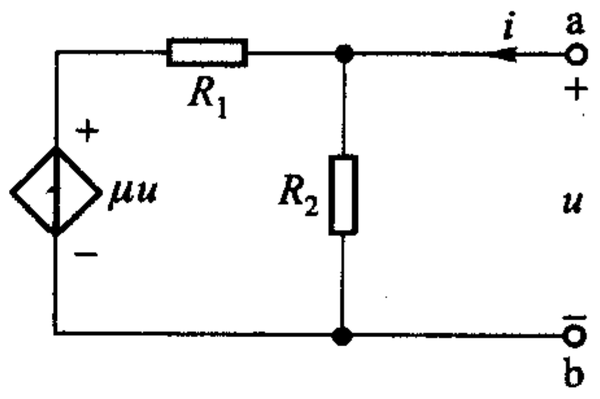


图 4 - 22　例 4 - 10

解　只含电阻及受控源或只含电阻的单口网络,其端口电压与端口电流的比值称为输入电阻。可以用求该端口的 VCR 的办法,得到输入电阻 R_i。输入电阻与 §3 - 1 提出的策动点电阻在数值上是相等的,着眼点不同。

设想外施电压为 u,则由 KCL 及欧姆定律可得

$$\begin{aligned} i &= \frac{u}{R_2} + \frac{u - \mu u}{R_1} \\ &= (G_2 + G_1 - \mu G_1)\, u \\ &= [(1-\mu) G_1 + G_2]\, u \end{aligned} \tag{4-13}$$

此即单口网络的 VCR。输入电阻应具有同样的 VCR,即

$$i = Gu$$

而 G 应符合下列条件

$$G = [(1-\mu) G_1 + G_2] \tag{4-14}$$

由此可得输入电阻应为

$$R_i = \frac{1}{G} = \frac{1}{(1-\mu) G_1 + G_2} \tag{4-15}$$

通常可由(4 - 13)式直接得出

$$R_i = \frac{u}{i} = \frac{1}{(1-\mu) G_1 + G_2}$$

其中

$$G_1 = \frac{1}{R_1}, \quad G_2 = \frac{1}{R_2}$$

由此可见,一个含受控源及电阻的有源单口网络和一个只含电阻的单口网络一样,可以等效为一个电阻。这是一般规律,是可以证明的。在含受控源时,等效电阻可能为负值。

注意当 $\mu = 0$ 时,VCVS 相当于短路,原电路即成为一般的 R_1 与 R_2 并联电路,而在(4 - 15)式中,如令 $\mu = 0$,其结果即为等效并联电阻公式。由此可校核(4 - 15)式是否正确。

思考题

4－3　试举一例表明：若 N 和 N′对某一外电路是等效的，并不能保证对其他任一外电路也等效。除非它们的 VCR 完全相同。

4－4　等效与置换有何异同？

你是否注意到例 4－5 中，用来替换 N_1 的 12 V 电压源是怎样来的？12 V 的数值与 N_1 的外接电路 N_2 是否有关？

练习题

4－5　试根据等效的定义推导(4－11)式和(4－12)式。

4－6　求图 4－23 所示各单口网络的输入电阻 R_i。

$\left(\frac{1}{1+\mu};\frac{1}{1+\mu};\frac{8}{6-\mu}\right)$

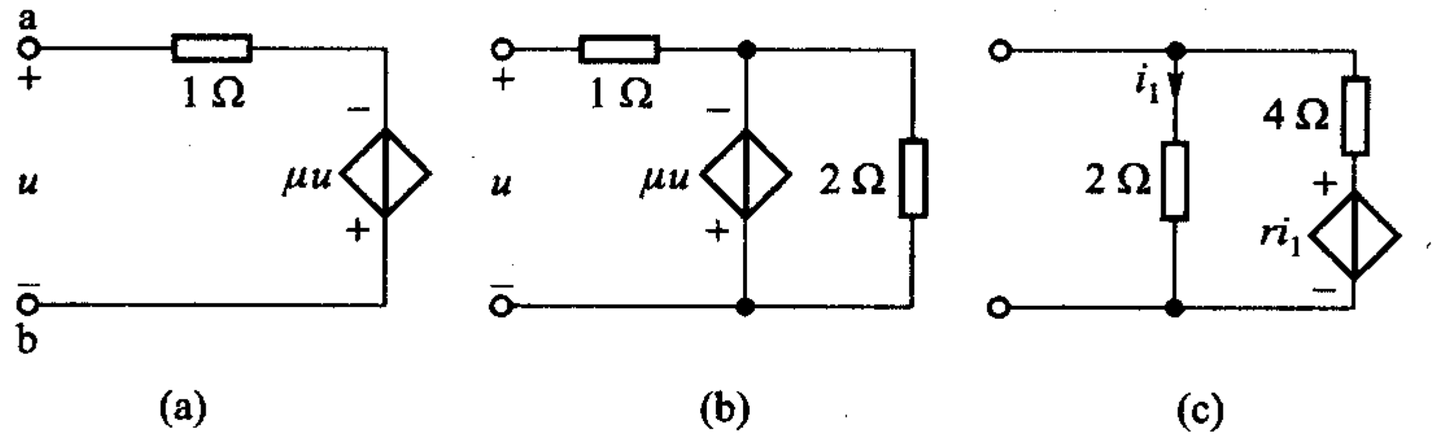


图 4－23　练习题 4－6

4－7　利用 N_1 和 N_2 的等效电路求解例 4－5 中 u 和 i。

§4－5　一些简单的等效规律和公式

利用求出 VCR 的方法来解决单口网络的等效电路问题自然是最根本的途径，因为它是直接由等效电路的定义得出的。但在某些情况下，可以直接使用由此得出的一些结论和公式，而不必每次都从外施电源求 VCR 着手，这样往往能更迅速地解决问题。求串联电阻的等效电阻公式，便是大家早已熟悉的例子。

为此研究一些简单的单口网络，它们是由电压源、电流源和电阻等三种元件中每次取两个元件串联或并联组成的，共计 12 种情况。至于含受控源的单口，即便结构简单，一般也需用外施电源求 VCR 的方法来处理，并无公式可以直接套用。

(1) 两电压源串联

设一单口网络由两电压源串联组成，如图 4－24(a)所示，在任何外接电路下，都可得到

$$u = u_{S1} + u_{S2} \quad \text{对所有电流 } i \tag{4-16}$$

这一 VCR 可与图 4-24(b)所示单个电压源的 VCR 完全一致，只要该电压源的电压

$$u_S = u_{S1} + u_{S2} \tag{4-17}$$

因此，今后在遇到图 4-24(a)所示电路时，可直接运用(4-17)式求得其等效电路如图 4-24(b)所示。

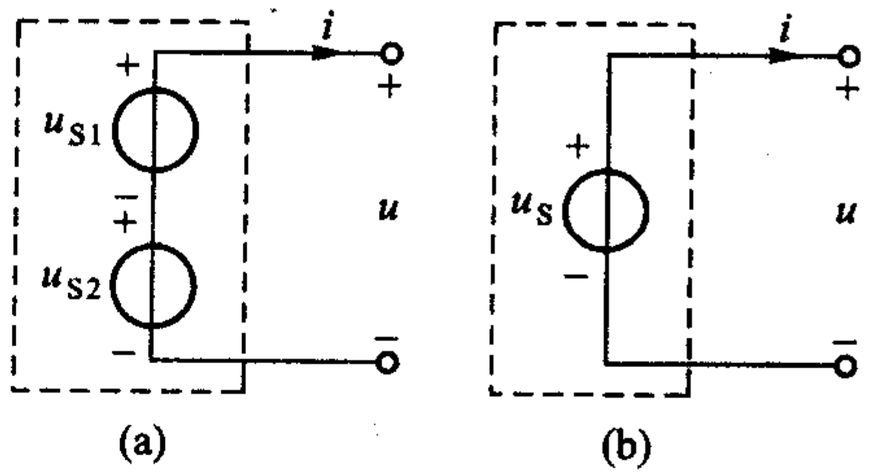


图 4-24　两电压源的串联及其等效电路

(4-17)式不难推广到几个电压源各种不同极性相串联的情况。

(2) 两电压源并联

电压源的并联一般都将违背 KVL，因而是不可能的，只有如图 4-25(a)所示相同电压源作极性一致的并联才是允许的，此时其等效电路即为其中任一电压源，如图 4-25(b)所示。

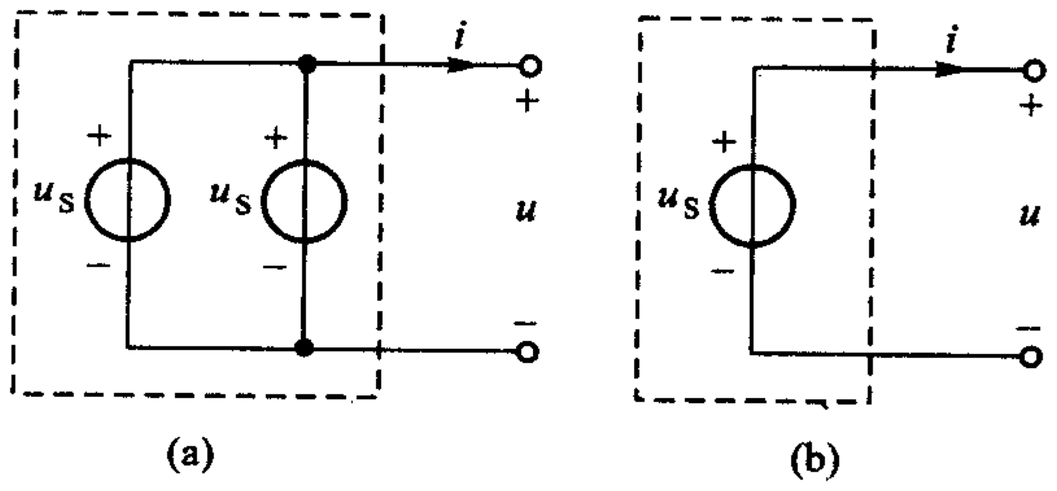


图 4-25　两相同电压源的并联及其等效电路

(3) 两电流源的并联

两电流源 i_{S1} 和 i_{S2} 按如图 4-26(a)所示并联，其等效电路为一个电流源，其值为

$$i_S = i_{S1} + i_{S2} \quad \text{对所有电压 } u \tag{4-18}$$

论证与(1)相似。

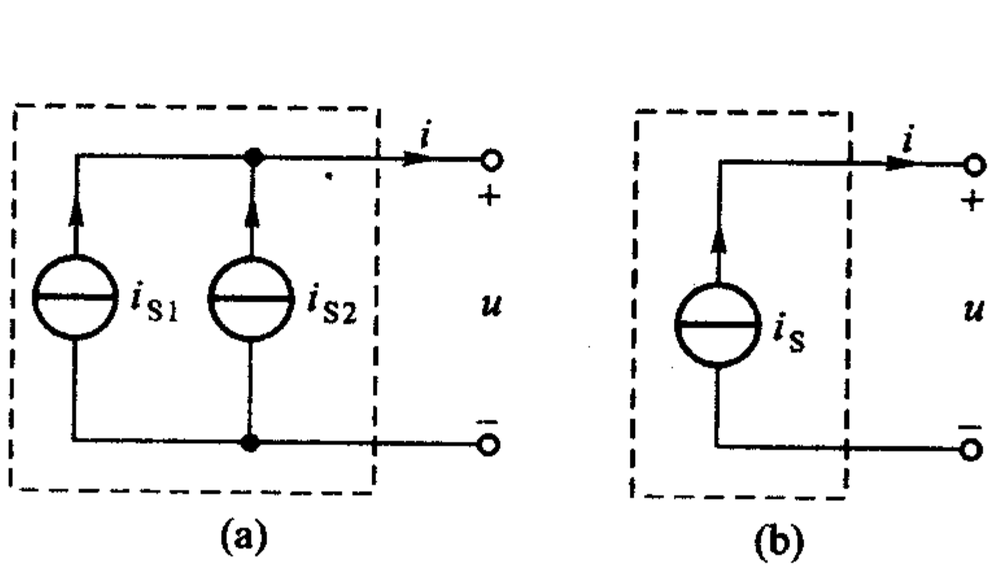


图 4-26　两电流源的并联及其等效电路

（4）两电流源的串联

电流源的串联一般都将违背 KCL，只有在电流源的电流都相等且方向一致时，串联才是允许的，此时其等效电路即为其中任一电流源，如图 4－27 所示。

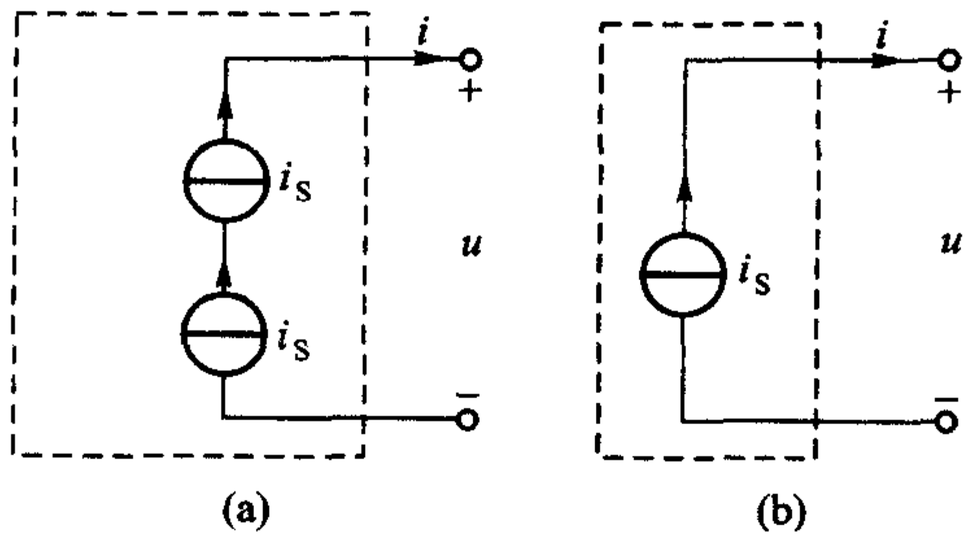


图 4－27　两相同电流源的串联及其等效电路

（5）两电阻的串联

两电阻 R_1 和 R_2 串联，其等效电路为

$$R = R_1 + R_2 \tag{4-19}$$

的电阻。这是大家早已熟知的结果。

（6）两电阻的并联

两电阻 R_1 和 R_2 并联，其等效电路为

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \tag{4-20}$$

的电阻。这是大家早已熟知的结果。

（7）电压源与电流源的并联

（8）电压源与电阻的并联

这两种情况可归结为图 4－28(a)所示电路，其中 N′可为电流源或电阻。这一单口网络的 VCR 是

$$u = u_S \quad \text{对所有的电流 } i \tag{4-21}$$

这是因为 N′的存在与否并不能影响端口电压的大小，端口电压总等于电压源的电压。N′的存在虽然会使电压源的电流有所改变，但由于电压源的电流可为任意值，因此端口电流也仍为任意值。

因此，图 4－28(a)所示单口网络的等效电路当如图 4－28(b)所示，亦即等效电路就是电压源本身！从端口等效的观点，N′称为多余(redundant)元件。N′不一定只是一个电流源或是一个电阻。与电压源并联的单口网络，从等效的观点来看，都是多余的，例如(2)中所述的与电压源并联的另一个相同电压的电压源即属此种情况。

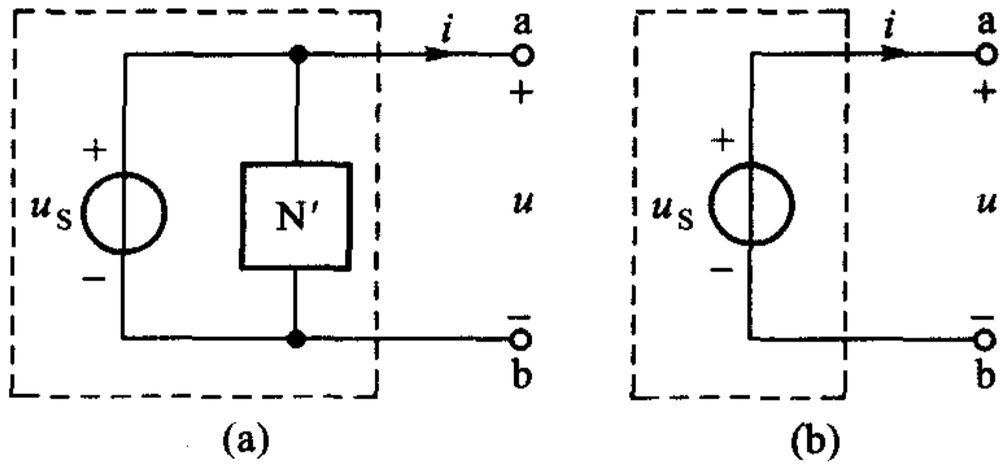


图 4－28　电压源与多余元件并联时的等效电路

（9）电流源与电压源的串联

（10）电流源与电阻的串联

这两种情况可归结为图 4－29(a)所示电路。根据(7)、(8)情况讨论中类似的理由，与电流源串联的元件或单口网络，从端口等效观点来看，是多余的。图 4－29(a)所示单口网络的等效电路就是电流源本身，如图 4－29(b)所示。

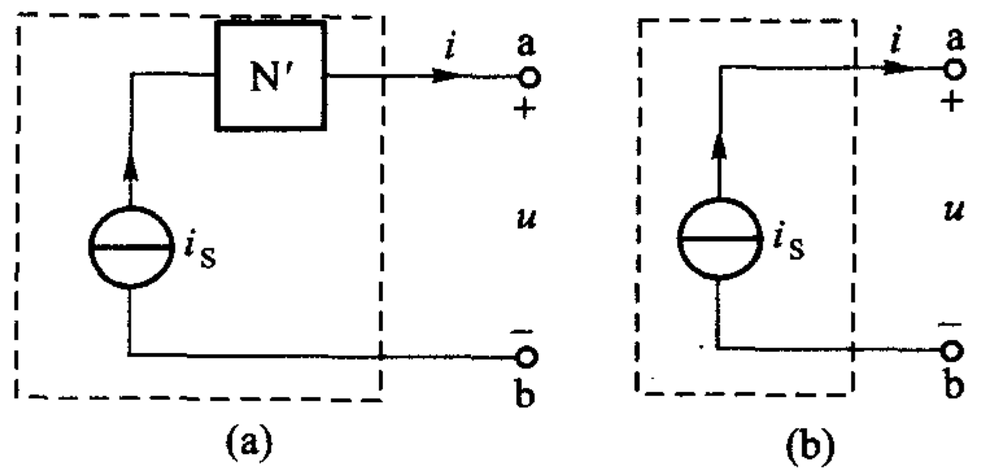


图 4－29　电流源与多余元件串联时的等效电路

（11）电压源与电阻的串联

（12）电流源与电阻的并联

这两种情况也可合并讨论。以上已讨论过的十种情况，其等效电路都只含一个元件，也就是说，以上所述的电路都可以进行化简，用一个元件来代替原来电路而 VCR 不变。目前所述的这两种含两元件的电路却都是无法再行化简的。但它们却具有另一特点，这就是：满足一定的条件，它们可以互为等效电路，亦即它们可以互相替换而保持 VCR 不变。

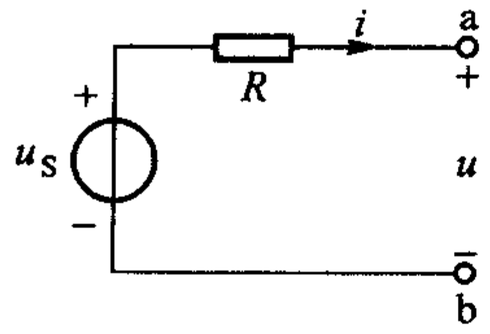
为说明这一点，先分别写出这两种情况电路的 VCR。由图 4－30(a)可知电压源串联电阻电路的 VCR 为

$$u = u_S - Ri \tag{4-22}$$

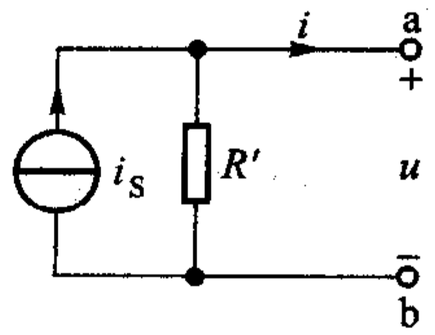
由图 4－30(b)可知电流源并联电阻电路的 VCR 为

$$i = i_S - (u/R') \tag{4-23}$$

为便于和(4－22)式比较，(4－23)式可改写为



(a) 电压源串联电阻电路



(b) 电流源并联电阻电路

图 4－30　电压源、电流源串联电阻电路

$$u = R'i_S - R'i \tag{4-24}$$

比较(4－22)、(4－24)两式，显然，如果满足如下两个条件：

$$R = R' \tag{4-25}$$

$$u_S = R'i_S \text{或} \ i_S = u_S/R' \tag{4-26}$$

两个 VCR 式完全相同，亦即这两电路是等效的。

在电路分析中，图 4－30 所示等效变换是很有用的，必须很好掌握。请注意互换时电压源电压的极性与电流源电流的方向的关系。还请注意，两电路中 R 是一样的，但连接方式不同。

图 4－30 所示两电路可用作实际电源的模型，当实际电源的内阻不能忽略因而不能只用电压源或电流源作为模型时便可采用，此时图中的 R 表示电源的内阻。采用哪一种模型都是可以的，它们各自从不同的角度反映实际电源对外的表现。采用图 4－30(a)所示的模型，电源是用参数 u_S 和 R 来表征的，是从对外提供的电压来反映电源的表现的；采用图 4－30(b)所示模型，电源是用参数 i_S 和 R 来表征的，是从对外提供的电流来反映电源的表现的。确实，当满足等效条件(4－25)、(4－26)式时，图 4－30 所示两电路的 VCR 曲线将是如图 4－31 中实线表示的同一直线(实际上是两条 VCR 曲线的重叠)，这条曲线近似地反映了实际电源向外电路供电时因存在内阻而引起的电源端电压或端电流的减少。从电压角度看，由于内阻的压降(图中用虚线段 a 表示)，电源的端电压将为 u' 而不是 u_S，$u' < u_S$；从电流角度看，由于内阻的分流(图中用虚线段 b 表示)，电源的端电流将为 i' 而不是 i_S，$i' < i_S$。采用哪一种模型，实际上是想用(4－22)式还是用(4－23)式表征电源的问题。模型并不反映电源的内部结构，两种不同形式的电路模型只是为了正确反映(4－22)式或(4－23)式所需。

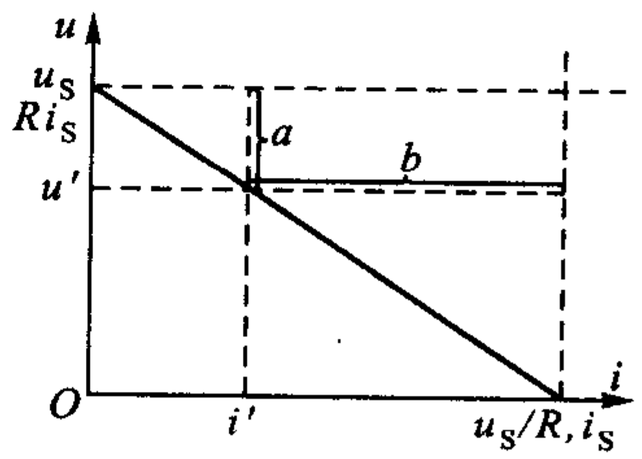


图 4－31　满足(4－25)、(4－26)两式时，图 4－30 所示两电路的伏安特性曲线

例 4－11　重新求解例 4－5，必须利用 N_1 和 N_2 的等效电路求解端口处的电压、电流。

解　求 N_1 的等效电路，因含受控源无公式可供直接使用，仍需用外施电源法求得其 VCR 后得出（参看例 4－2 和例 4－5）。由

$$u = 28 + 16i$$

可知在所示规定 u 和 i 的参考方向下，其等效电路应如图 4－32 所示。

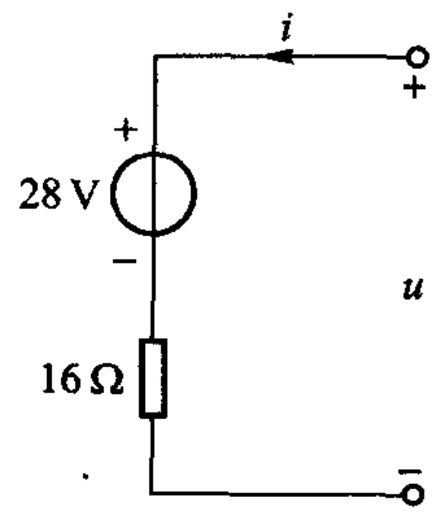


图 4－32　例 4－5 N_1 的等效电路

至于 N_2 的等效电路则可利用本节有关公式逐步化简后求得，其过程如图 4－33 所示。

由图 4－34 所示等效电路可求得

$$i = \frac{8 - 28}{16 + 4}\ \text{A} = -1\ \text{A}$$

$$u = 28\ \text{V} + (16\ \Omega)i = 12\ \text{V}$$

与例 4－5 中求得的结果一致。

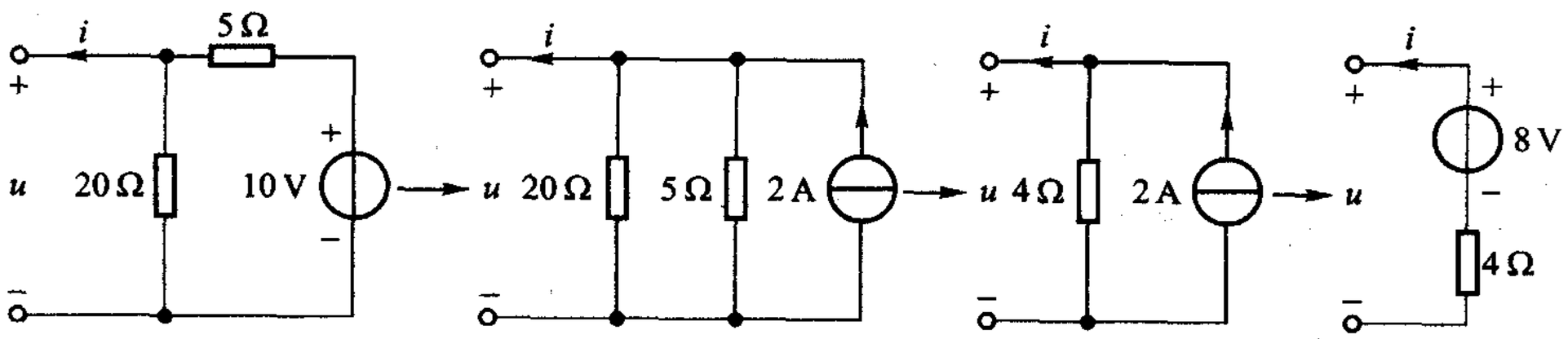


图 4－33　例 4－5 N_2 的等效电路

下一步骤为利用置换定理求解 i_1 和 u_2，从略。

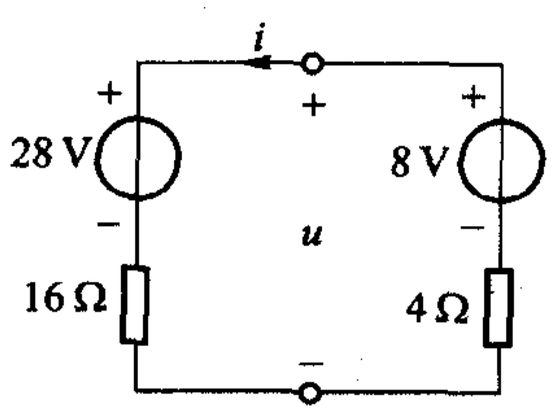


图 4－34　利用等效电路求端口的 u 和 i

例 4－12　试列写图 4－35(a)所示电路的节点分析方程。

解　该电路有三个独立节点 1、2、3。如果运用图 4－30 所示等效变换，把电压源串联电阻组合变换为等效的电流源并联电阻组合，如图 4－35(b)所示，则电路就只有一个独立节点。设节点电压为 u_{N1}，则节点电压方程为

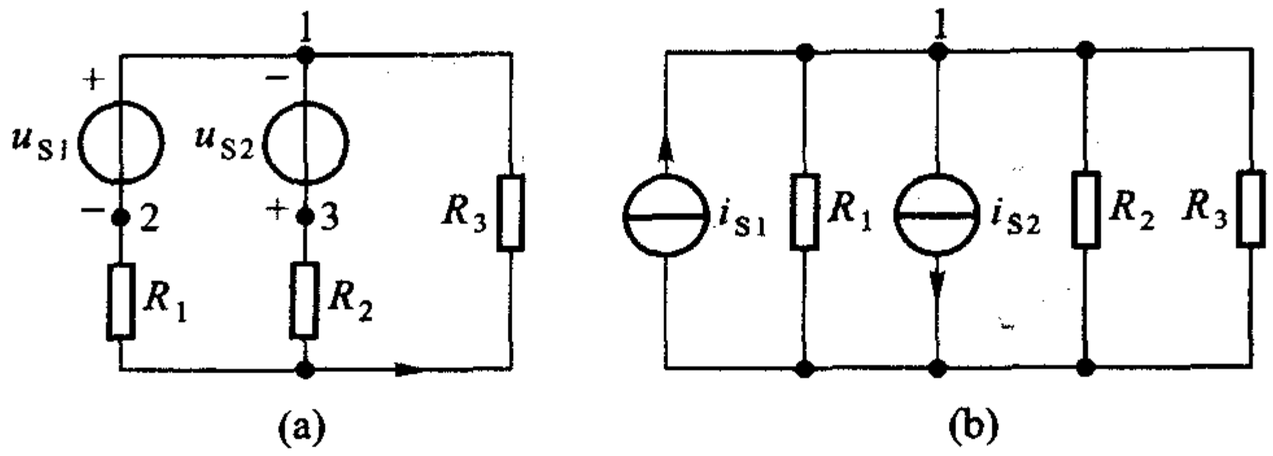


图 4－35　例 4－12

$$\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)u_{N1}=i_{S1}-i_{S2}$$

其物理意义十分明显，即等号前三项代表通过电阻 R_1、R_2、R_3 自节点 1 流出的电流，等号后两项代表电流源送入节点 1 电流的代数和。

在列写电路的节点电压方程式时，常对电压源串联电阻支路作这样的等效变换处理，以便列写方程。

◀

具有串联电阻的电压源常称为“有伴电压源”，具有并联电阻的电流源常称为“有伴电流源”。有伴电压源和有伴电流源才能进行等效互换。

思考题

4－5　(1) 图 4－36 所示两电路是否等效？

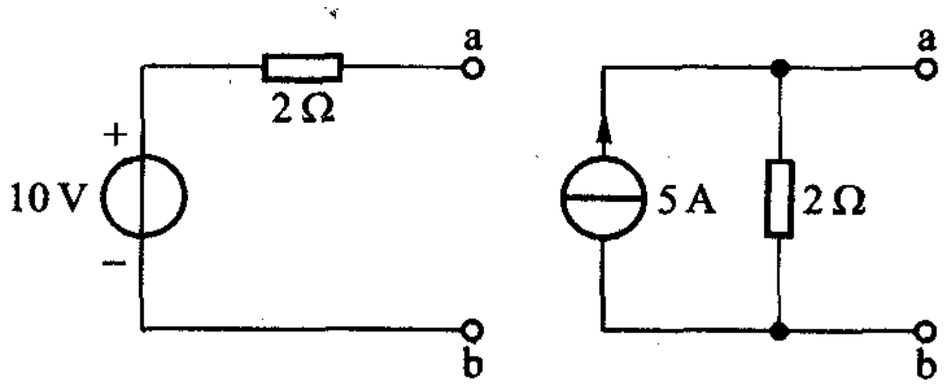


图 4－36　思考题 4－5

(2) 两电路都接上 8 Ω 电阻，电压源和电流源是否都提供一样大的功率？

(3) 如果两电路都接 10 V 电压源（+ 极在 a 端），电路中 2 Ω 电阻是否都接受同样的功率？

练习题

4－8　求图 4－37 所示各单口网络的等效电阻 R_{ab}，其中图 4－37(b) 应分别在 S 打开和闭合时求解。

(5 Ω；30 Ω；30 Ω)

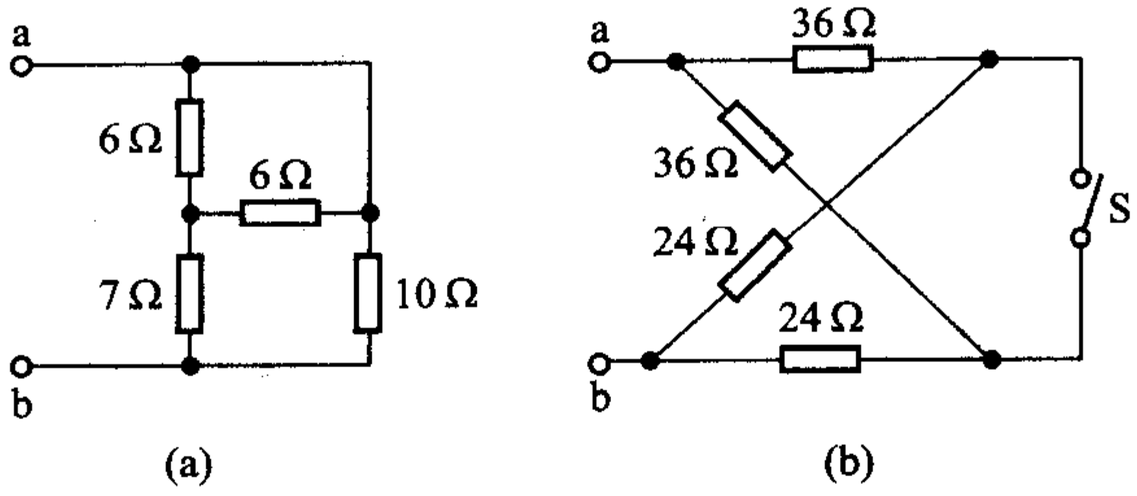


图 4－37　练习题 4－8

4－9　化简图 4－38 所示各电路。

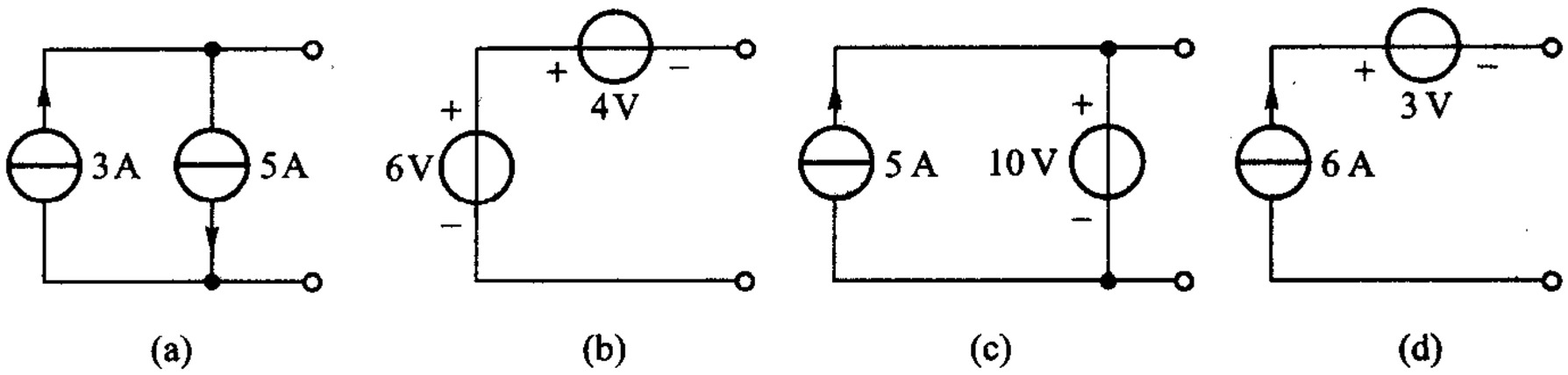


图 4－38　练习题 4－9

4－10　把图 4－39 所示各电路化为等效的含有电流源及电阻的电路。

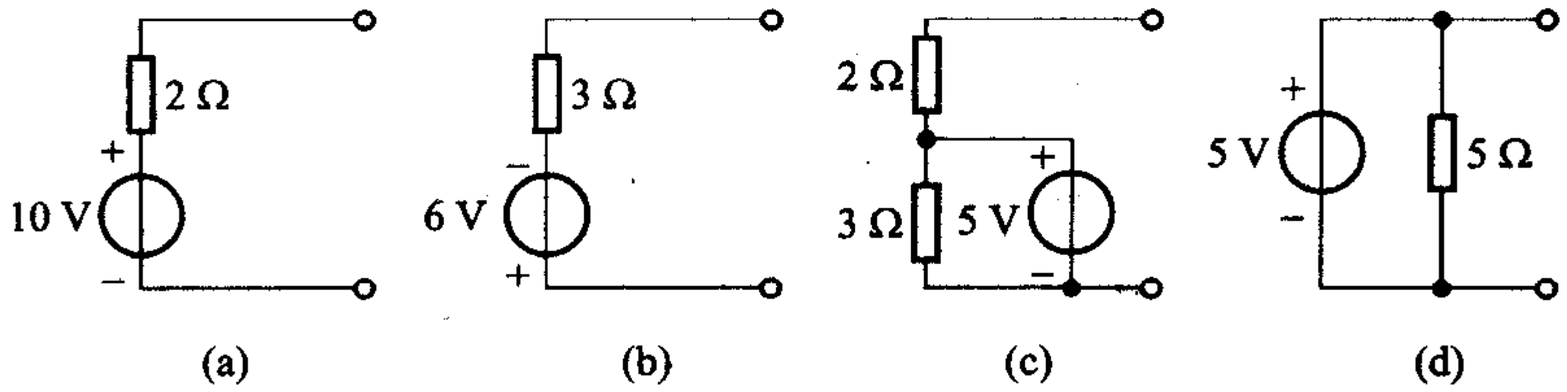


图 4－39　练习题 4－10

4－11　把图 4－40 所示各电路化为等效的含有电压源及电阻的电路。

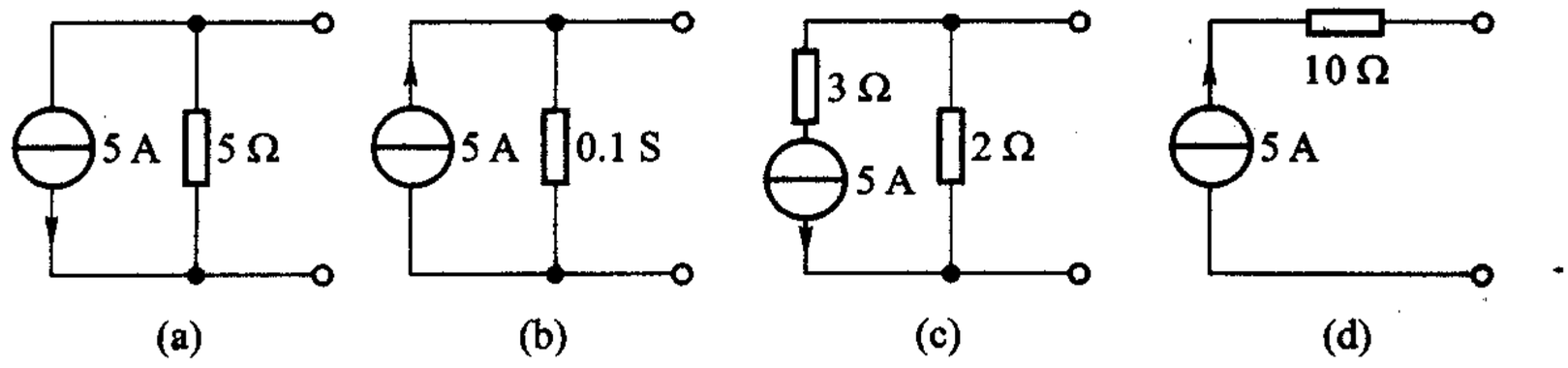


图 4－40　练习题 4－11

4－12　图 4－41 所示电路：(1) 试求单口网络 N_2 的等效电阻；(2) 求出当 N_2 与 N_1 相连时的端口电压 u_2；(3) 试用置换定理求电压 u_0。

(2 Ω、6 V、1 V)

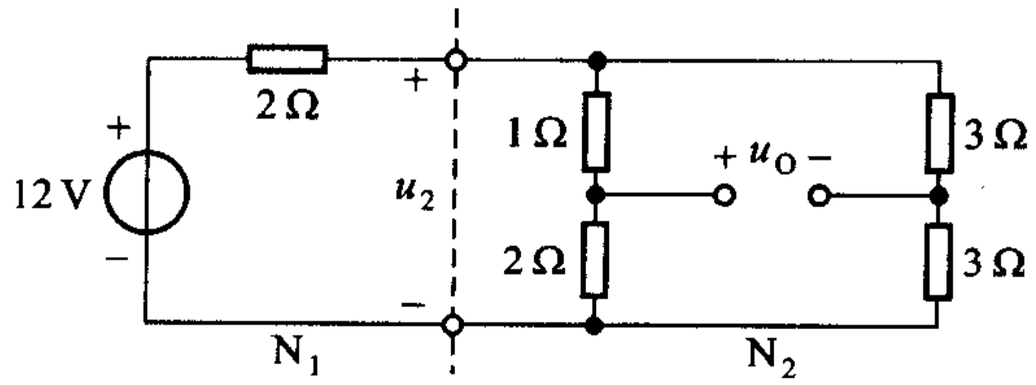


图 4－41　练习题 4－12

§4－6　戴维南定理

本节继续讨论单口网络的等效电路。

在 §4－4 中曾讨论过求单口网络的等效电路问题，并指出：这一问题实质上是求单口网络 VCR 的问题。例 4－1 结合具体电路，阐述了求 VCR 的基本方法并在 §4－4 各例求等效电路时得到了应用。至于 §4－5 中提出的一些公式和规律，虽然在求等效电路时使人感到直接、简便，但只能在某些特殊场合使用（例如电阻串、并联时）。

戴维南定理和诺顿定理提供了求含源线性单口网络等效电路及 VCR 的另一方法，对等效电路及 VCR 能提出普遍适用的形式。这是以后经常用到的重要定理，是本章的学习重点。本节先讨论戴维南定理。

戴维南(Thevenin，1857—1926)定理：

含电源和线性电阻、受控源的单口网络(今后简称为含源线性单口网络)，不论其结构如何复杂，就其端口来说，可等效为一个电压源串联电阻支路[图 4－42(a)]。电压源的电压等于该网络 N 的开路电压 u_{OC}[图 4－42(b)]；串联电阻 R_o 等于该网络中所有独立源为零值时所得网络 N_0 的等效电阻 R_{ab}[图 4－42(c)]。这就是说：若含源线性单口网络的端口电压 u 和电流 i 为非关联参考方向，则其 VCR 可表示为

$$u = u_{OC} - R_o i \tag{4-27}$$

这一电压源串联电阻支路称为戴维南等效电路，其中串联电阻称为戴维南等效电阻，在电子电路中有时也称为“输出电阻”，记为 R_o。

戴维南定理是一个有关电路结构的定理，注意勿把其中的“含源”与表征电路性能的“有源”两字混用。

根据含源线性单口网络的端口电压、电流约束关系(4－27)式可知：网络的

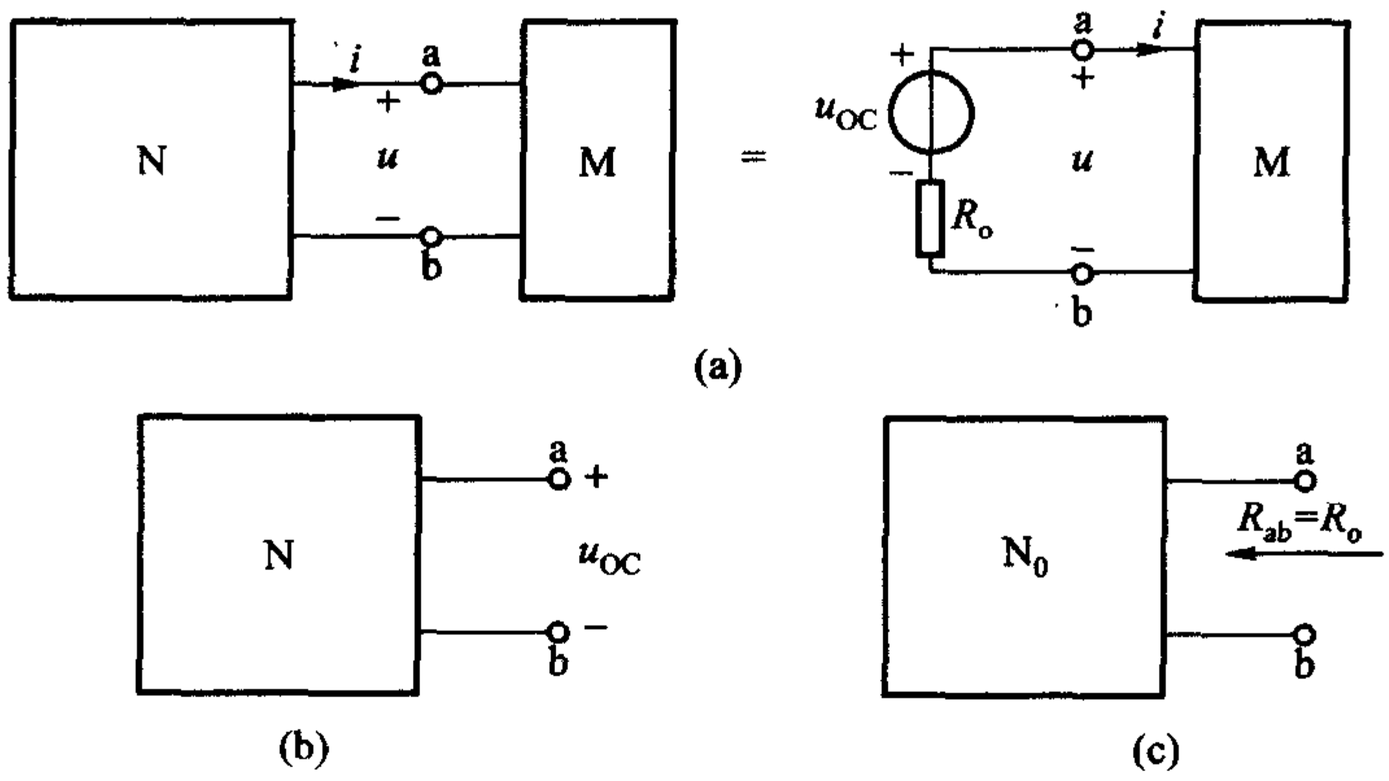


图 4－42　戴维南定理

N—含源线性单口网络；N_0—N 中所有独立源为零值时所得的网络；

M—任意的外电路

开路电压和戴维南等效电阻是表征单口网络特性的两个参数。

先举一例来说明这个定理的含义。

例 4－13　求图 4－43 所示电阻电路中 12 Ω 电阻的电流 i。

解　根据戴维南定理，电路中除 12 Ω 电阻以外，其他部分（虚线框）所构成的含源单口网络可以化简为一个电压源 u_{OC} 与电阻 R_o 相串联的等效支路。

为求得 u_{OC}，应使该单口网络处于断开状态，如图 4－44(a)所示，u_{OC} 即为该电路中 ab 两点间的电压。设该电路中的电流为 i'，由 KVL 可得

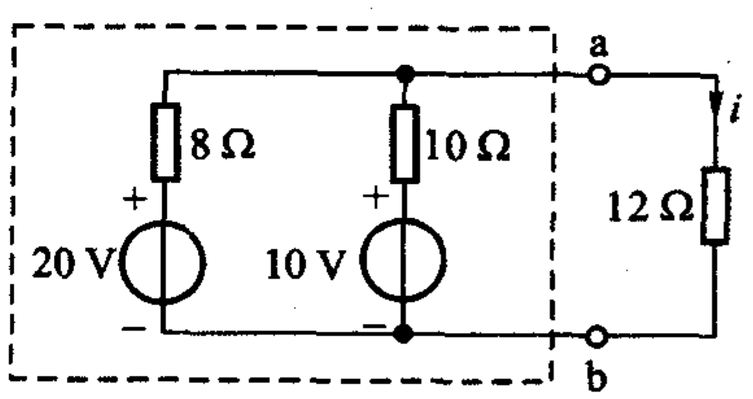


图 4－43　例 4－13

$$(8+10)i'-20+10=0$$

解得

$$i'=0.556\ \text{A}$$

故得

$$u_{OC}=(10\ \Omega)i'+10\ \text{V}=(5.56+10)\ \text{V}=15.56\ \text{V}$$

或

$$u_{OC}=-(8\ \Omega)i'+20\ \text{V}=(-4.45+20)\ \text{V}=15.55\ \text{V}$$

为求得 R_o，应把图 4－44(a)所示含源单口网络中的两个独立电压源用短路代替，得电路如图 4－44(b)所示。显然，电路 ab 两端的等效电阻为

$$R_{ab}=\frac{10\times 8}{10+8}\ \Omega=4.45\ \Omega$$

故得

$$R_o=4.45\ \Omega$$

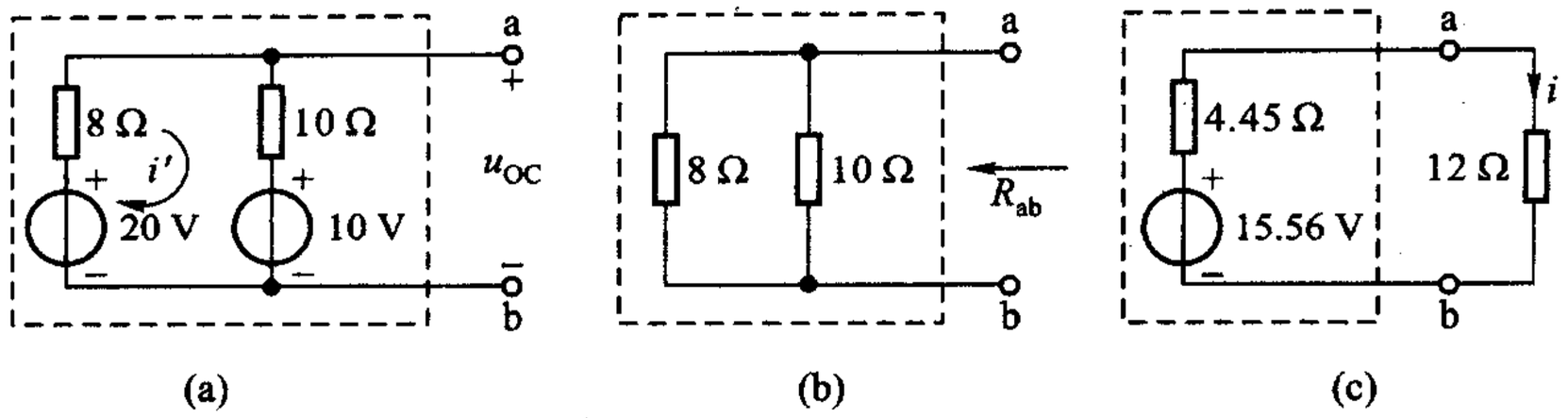


图 4－44　例 4－13 的求解步骤

这样就求得了用来代替图 4－43 中虚线框所示单口网络的等效电路，得单回路电路如图 4－44(c)所示。根据该电路可以很方便地求得电流 i。由 KVL 得

$$(12+4.45)i-15.56=0$$

所以

$$i=\frac{15.56}{12+4.45}\ \text{A}=0.946\ \text{A}$$

本题属图 4－1 所示分解中 N_2 仅含一个 12 Ω 电阻的情况，端口电流即流过 12 Ω 电阻的电流，此电阻称为含源单口网络的负载。

如果 12 Ω 电阻改换为其他电阻，只要用新电阻值代替上式中的 12 Ω，就可以很方便地求得新的电流值。

求解本题时，如用网孔分析，需列两个联立方程，再解出 i。用节点分析，要先求 u_{ab}，再算出 i。不论用哪种方法，当 12 Ω 电阻改换为其他电阻时，都需重新列出方程，重新求解。因此，在只需求出电路中某一支路电流时，常用本定理，该支路电阻如有变动，仍能很方便地算出新的电流值。

读者可以用 §4－5 的方法校核本题答案。

读者试用本定理求解例 4－1，注意区别。初学者常易把例4－1所示方法和本定理相混淆。

下面证明这个定理。

这个定理是叠加原理的结果。设一线性单口网络 N 与外电路 M 相连，如图 4－45(a)所示，M 可以是纯电阻，也可以含有电源；可以是线性的也可以是非线性的；也可以是电容、电感。由于单口网络的 VCR 与外接电路无关，可以设想在外接一个电流源 i 的情况下去求网络两端的电压 u，从而得出它的 VCR。为此，用电流源 i 施加于 N 两端，得电路如图 4－45(b)所示。由叠加原理可知

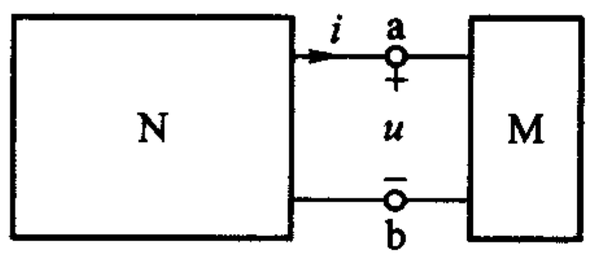
u =(由网络 N 中所有独立源产生的电压)+(由电流源 i 产生的电压)

上面这个式子的第一项是电流源 $i=0$ 时，也就是电流源用开路代替时，网络 N 的端电压，即其开路电压 u_{OC}；第二项则是网络 N 中所有独立源为零值，电流源 i

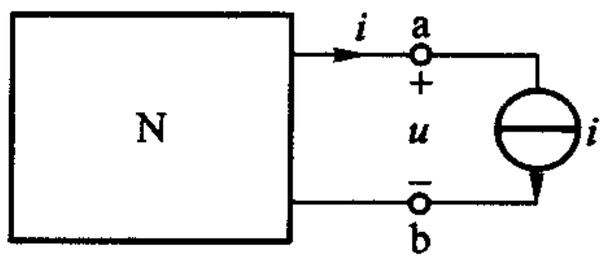
作用时，网络的端电压，可表示为 $R_{ab}i$，R_{ab} 是独立源为零值时网络的等效电阻，如图 4－45(c)所示。因此，上式可写为

$$u = u_{OC} - R_{ab}i \tag{4-28}$$

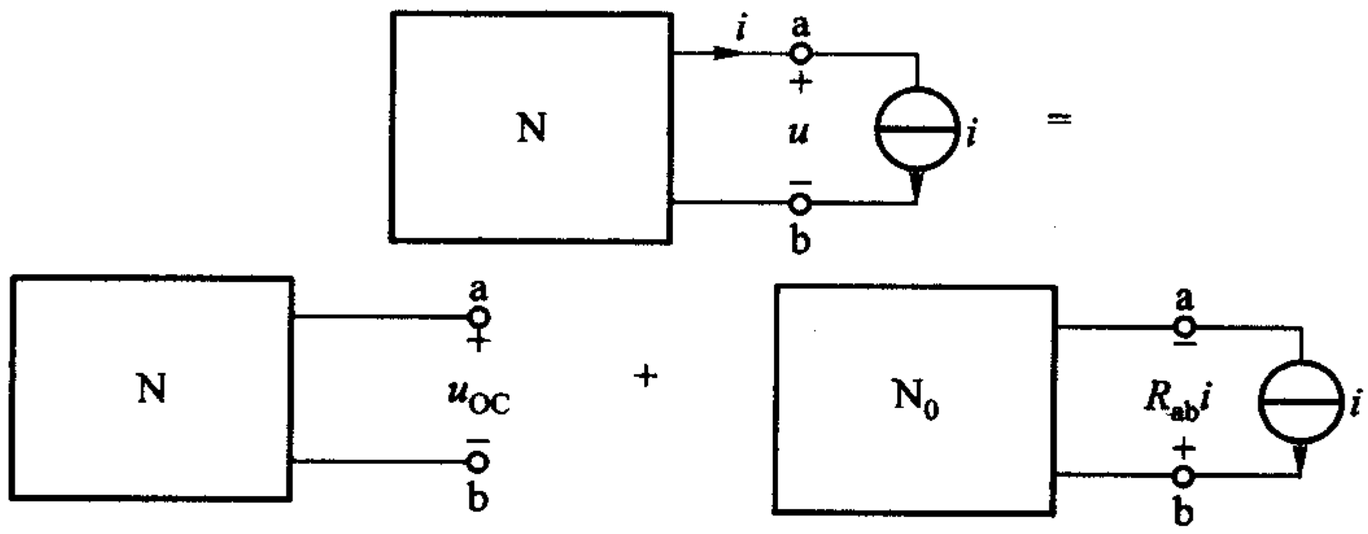
这个式子就是含源线性单口网络 N 在图 4－45(a)所示参考方向下 VCR 的一般形式。这个式子和一个由电源对外供电时端电压 u 的表示式完全一样。这就说明：就网络 N 的两个端钮 a、b 来看，含源单口网络可等效为一个电压源串联电阻支路，其电压源电压为 u_{OC}，其串联电阻为 R_{ab}，如图 4－45(d)所示。以上证明了戴维南定理。



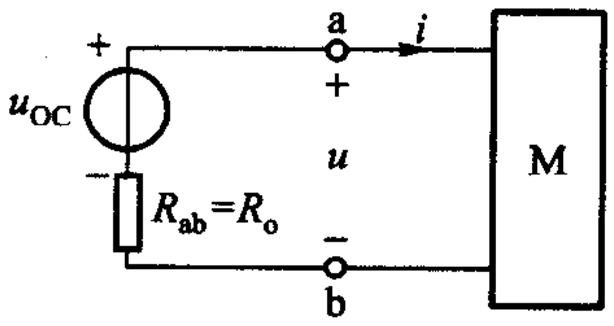
(a) N与M相连



(b) N与电流源相连



(c) 根据叠加定理 $u=u_{OC}-R_{ab}i$



(d) 含源线性单口网络 N 可等效为电压源串联电阻支路

图 4－45　戴维南定理的证明

例 4－14　试说明：若含源单口网络的开路电压为 u_{OC}，短路电流为 i_{SC}，则戴维南等效电阻

$$R_o = \frac{u_{OC}}{i_{SC}}$$

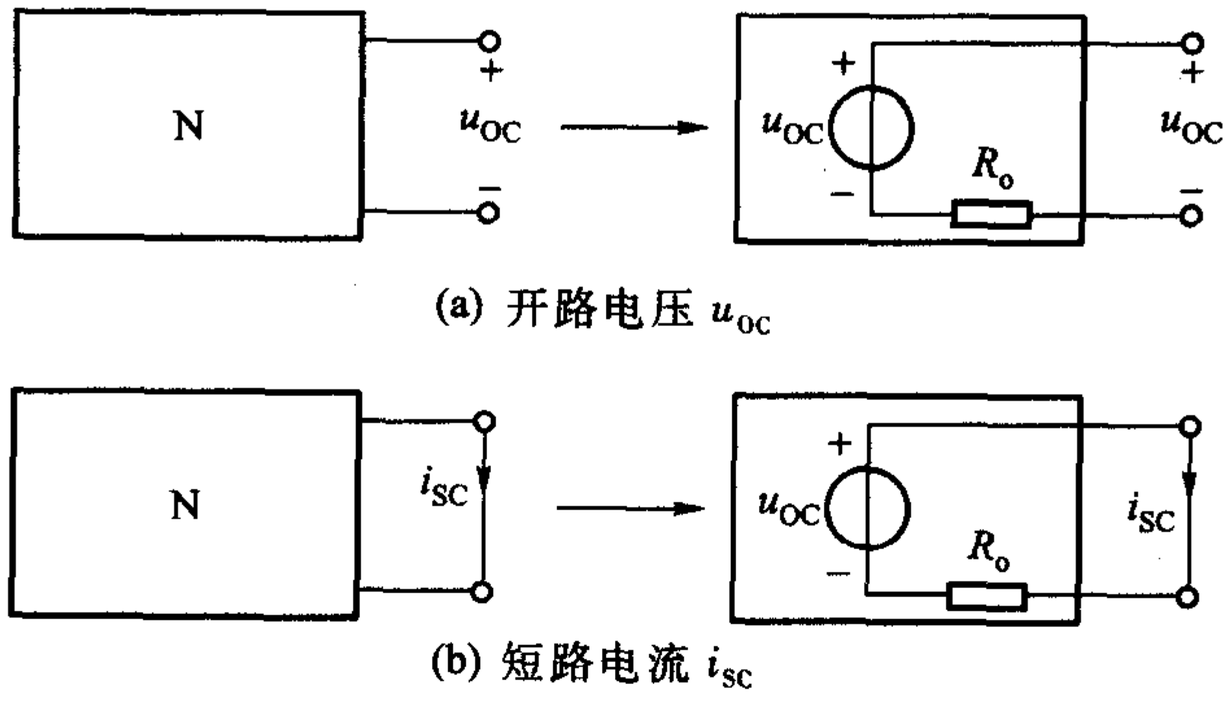
解　已知一个含源单口网络可等效为一个电压源 u_{OC} 与电阻 R_o 的串联电路，如图 4－46(a)所示。因此，原网络的短路电流 i_{SC} 应等于这个等效电路的短路电流，而这等效电路的短路电流显然为 u_{OC}/R_o，故得

$$i_{SC}=\frac{u_{OC}}{R_o}$$

如图 4 -46(b)所示。由上式可得

$$R_o=\frac{u_{OC}}{i_{SC}} \tag{4-29}$$

◀



(a) 开路电压 u_{OC}

(b) 短路电流 i_{SC}

图 4 -46　用来决定戴维南等效电路的两个数据

由此可见,只要得到含源线性单口网络的两个数据——开路电压 u_{OC} 和短路电流 i_{SC},该网络的两个副参数——开路电压 u_{OC} 和戴维南等效电阻 R_o 即能确定,戴维南等效电路、VCR 也就随之而定。这个结论十分重要,因为有时并不知道一个含源单口网络内部的具体情况,无法像例 4 -13 那样通过计算来求出等效电路,也无法像例 4 -1 那样求出 VCR。但是,根据以上所述,只要能接触到它的两个端钮,就可以用一个电压表来测得它的开路电压 u_{OC},用一个电流表来测得它的短路电流 i_{SC}[①],从这两个数据就可求出戴维南等效电路和 VCR。

即使知道网络的内部情况,也可以利用(4 -29)式来确定等效电路的电阻 R_o。这就需要在算得开路电压 u_{OC} 后,再去计算短路电流 i_{SC}。在求含受控源网络的戴维南等效电路和 VCR 时常用这样的方法。

例 4 -15　求图 4 -47 所示含源单口网络的 VCR。

解　用戴维南定理求解本题。由该定理可知,在图示 u,i 参考方向下,该网络的 VCR 可表示为

$$u=u_{OC}-R_o i$$

求得 u_{OC} 及 R_o 即可解决问题。

---

① 测量短路电流应审慎。一个电压源决不允许短路。

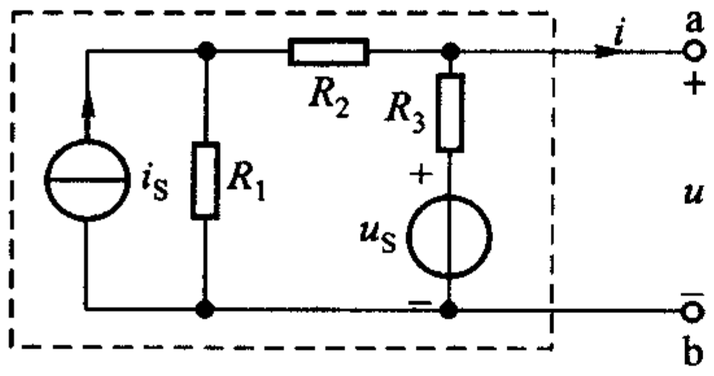


图 4－47　例 4－15

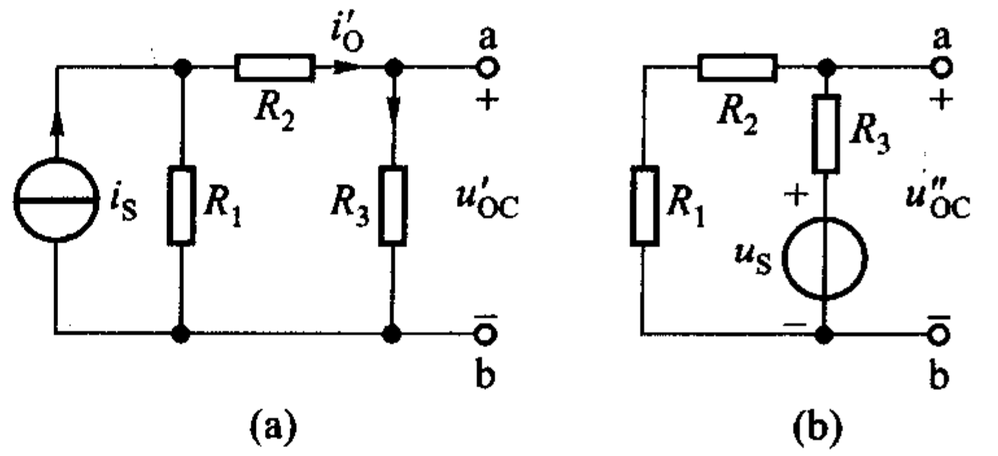


图 4－48　运用叠加原理求 u_{OC}

图 4－47 所示电路原来即系开路，从该图求出 ab 间的电压，即为 u_{OC}。

用叠加原理求 u_{OC}，在分别求出电源 i_S和 u_S单独作用时在 ab 端出现的电压 u'_{OC}和 u''_{OC}（图 4－48）后，就可求得

$$u_{OC} = u'_{OC} + u''_{OC}$$

从图 4－48(a)可得

$$i'_O = i_S \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$u'_{OC} = R_3 i'_O = i_S \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

从图 4－48(b)可得

$$u''_{OC} = u_S \frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$$

故得

$$u_{OC} = u'_{OC} + u''_{OC} = \frac{R_1 R_3 i_S + (R_1 + R_2) u_S}{R_1 + R_2 + R_3}$$

求 R_o：

使原电路中各电源均为零值，即电流源 i_S用开路代替，电压源 u_S用短路代替，得图 4－49。显然

$$R_{ab} = \frac{(R_1 + R_2) R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = R_o$$

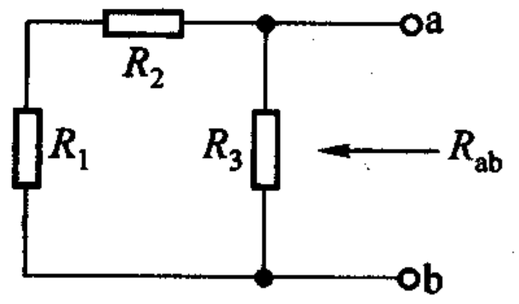


图 4－49　求 R_o

以 u_{OC}及 R_o代入

$$u = u_{OC} - R_o i$$

即为所求的 VCR。

◀

下面再着重谈一下应用戴维南定理分析含受控源的单口网络时应该注意之处。

戴维南定理是由叠加原理推导出来的。众所周知，叠加原理运用于含线性受控源电路时，所谓电源单独作用指的是独立源的单独作用，受控源是不能单独存在的。当某个独立源单独作用时，所有其他的独立源均视为零值，但所有的受控源仍需保留，换句话说，受控源和电阻应该是同样对待的。

可以回顾一下，在应用叠加原理推证戴维南定理的过程时，电源都是指独立源而言的。在图 4－42(c)所示单口网络 N_0 中“所有独立源为零值”，而所有受控源仍需保留。因此在运用戴维南定理分析含受控源电路，在求等效电阻 R_0 时，必须计及受控源的作用，特别要注意不能像处理独立源那样把受控源也用短路或开路代替，否则将导致错误的结果。正因为如此，此时遇到的单口网络 N_0，其中包含着受控源，一般要用 §4－2 求等效电阻的一般方法或运用(4－29)式来解决。

另外，还应注意：我们谈论的单口网络是“明确的”的单口网络(见 §4－2)，单口网络 N 中不能含有控制量在外电路部分的受控源，但控制量可以是 N 的端口电压或电流。由于单口网络要与外电路(另一单口网络)相连，如果外电路中含有控制量在该单口网络中的受控源，则在把单口网络化简为戴维南等效电路后，受控量所在的支路已被消除，在计算外电路的电流、电压时，无法考虑这一受控源的作用，因此，外电路不能含有控制量在 N 之中的受控源，但控制量可以是端口电压或电流。

例 4－16　求图 4－50 所示电路的戴维南等效电路。

解　在例 4－9(图 4－21)中曾求过该电路的 VCR，并得出它的等效电路。现在运用戴维南定理来求等效电路。

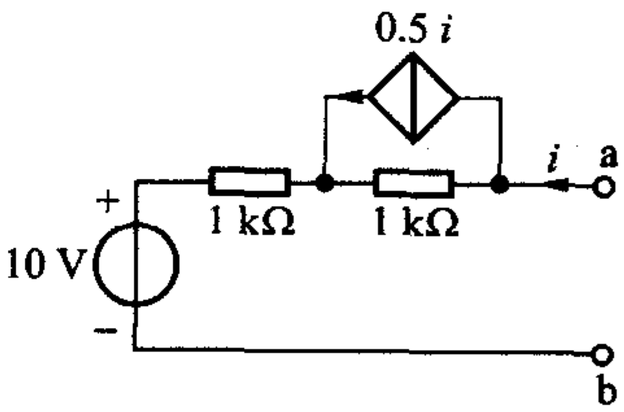


图 4－50　例 4－16

这电路中包含电流控制电流源(CCCS)，其电流为 $0.5i$。请注意，图中 i 的方向必须标出，因为，作为受控源，电流 $0.5i$ 所示的方向取决于控制量 i 的方向，没有 i 的方向，也就谈不上 CCCS 电流的方向。

先求开路电压 u_{OC}，可利用原电路图。此时 i 既为零，CCCS 的电流 $0.5i$ 也为零，相当于开路。各电阻上也无电压，故得

$$u_{OC} = u_{ab} = 10\ \text{V}$$

再把原电路 ab 端短路，如图 4－51(a)所示。注意，一切电源均保留。(为什么?)设短路电流 i_{SC} 的方向如图中所示，则 CCCS 电流为 $0.5i_{SC}$，且其方向应与图 4－52 中所示方向相反。(为什么?)经过电源等效变换得图 4－51(b)(图中 $r = 500\ \Omega$)，由此可得

$$-10 + 2\,000i_{SC} - 500i_{SC} = 0$$

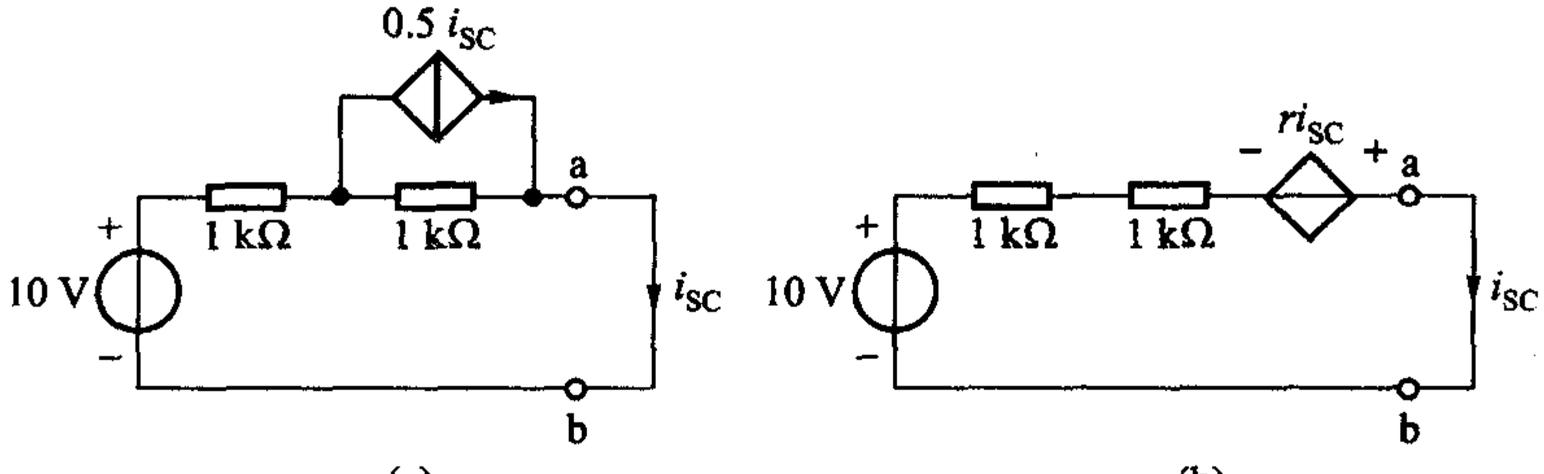


图 4－51　求 i_{SC}

即

$$1\ 500 i_{SC} = 10$$

故

$$i_{SC} = \frac{1}{150}\ \text{A}$$

根据(4－29)式,得

$$R_o = \frac{u_{OC}}{i_{SC}} = 1\ 500\ \Omega$$

求得 u_{OC}及 R_o后,即可得出戴维南等效电路。

请自行绘出该单口网络的伏安特性曲线。

思考题

4－6　运用外施电源法和开路电压、短路电流法求戴维南等效电阻时,对原网络内部电源的处理是否相同？为什么？

4－7　在图 4－52 所示电路中,如果要求 3 Ω 支路的电流 i_3,则该电路在何处分解为宜？

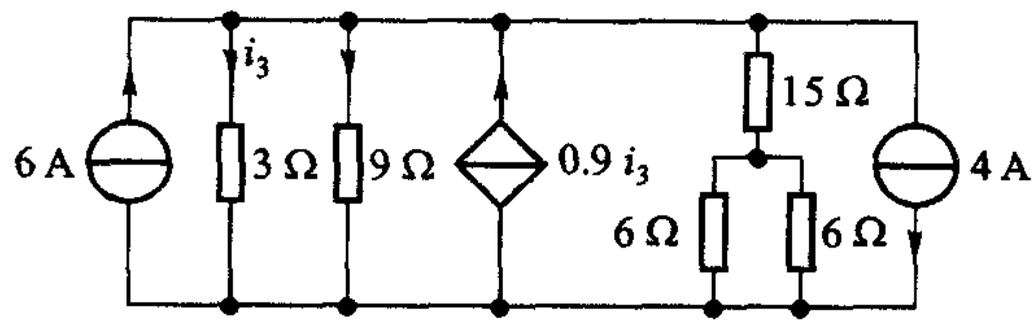


图 4－52　思考题 4－7

练习题

4－13　试用戴维南定理求解例 4－1。

4－14　试导出图 4－53 所示含源单口网络的戴维南等效电路各如其右侧所示。

4－15　试用戴维南定理求图 4－54 所示电路的电流 i。

($u_{OC} = 24$ V, $R_o = 6\ \Omega$, $i = 3$ A; $u_{OC} = 8$ V, $i_{SC} = 4$ mA, $i = 1.33$ mA)

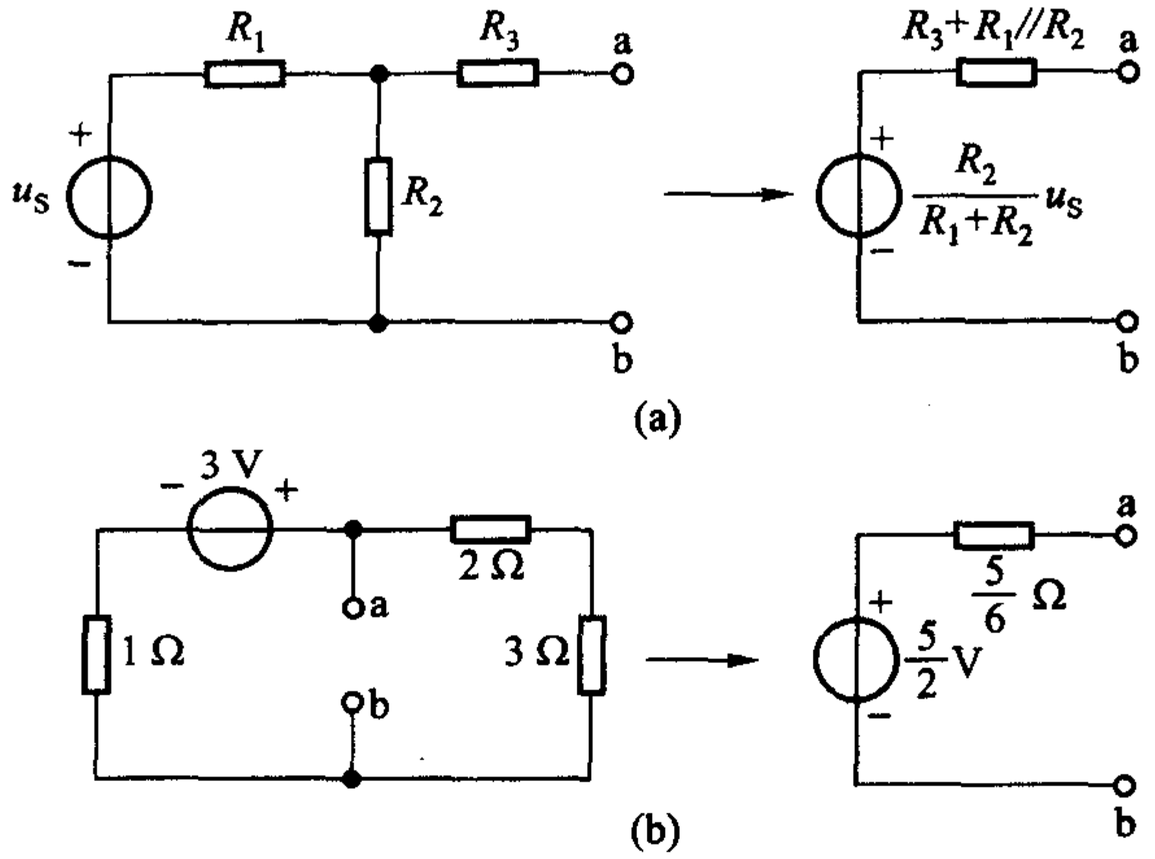


图 4－53　练习题 4－14

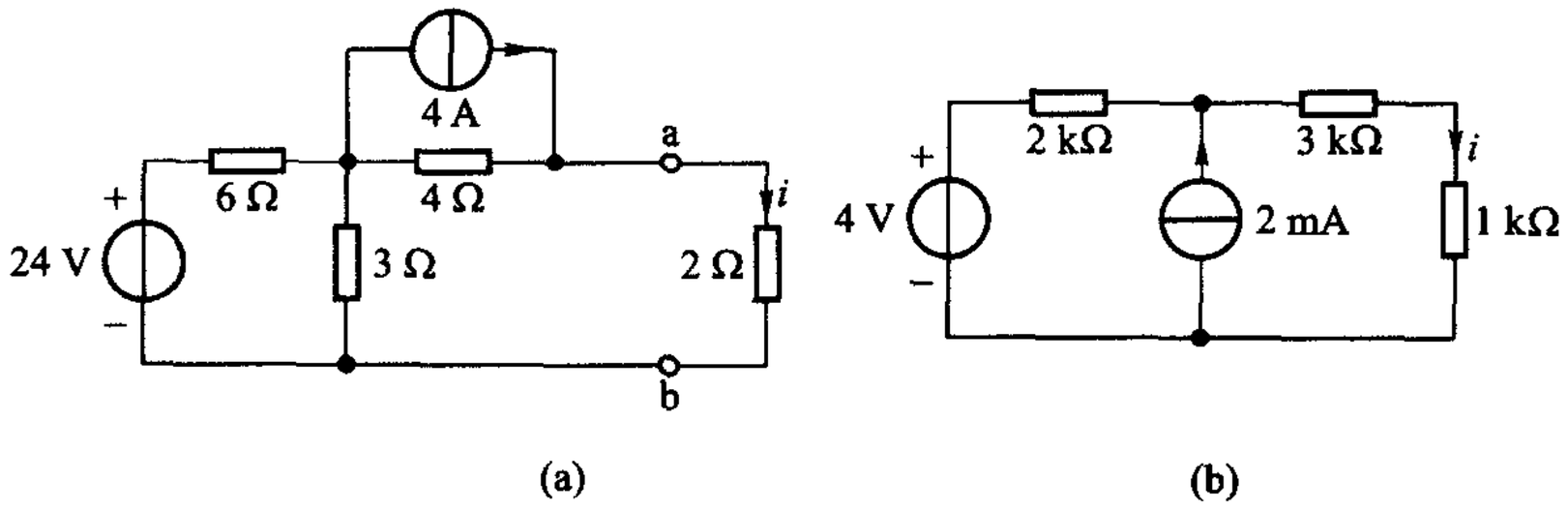


图 4－54　练习题 4－15

4－16　测得一个含源单口网络的开路电压 $u_{OC}=8$ V，短路电流 $i_{SC}=0.5$ A。试计算外接电阻为 24 Ω 时的电流及电压。

(0.2 A，4.8 V)

4－17　(1) 某含源单口网络的开路电压为 10 V，如接以 10 Ω 的电阻，则电压为 7 V，试求出此网络的戴维南等效电路。

(10 V，4.3 Ω)

(2) 若含源单口网络的开路电压为 u_{OC}，接上负载 R_L 后，其电压为 u_1，试证明该网络的戴维南等效电阻为

$$R_o=\left(\frac{u_{OC}}{u_1}-1\right)R_L \tag{4-30}$$

在电子电路中常根据上式用实验法测定其输出电阻，这样可避免短路实验。

§4-7　诺顿定理

含源线性单口网络 N,就其端口来看,可以等效为一个电流源并联电阻组合[图 4-55(a)]。电流源的电流等于该网络 N 的短路电流 i_{SC};并联电导 G_o 等于该网络中所有独立源为零值时所得网络 N_0 的等效电导 G_{ab}[图 4-55(b)]。这就是诺顿(Norton,1898—1983)定理。这一电流源并联电导组合称为诺顿等效电路。

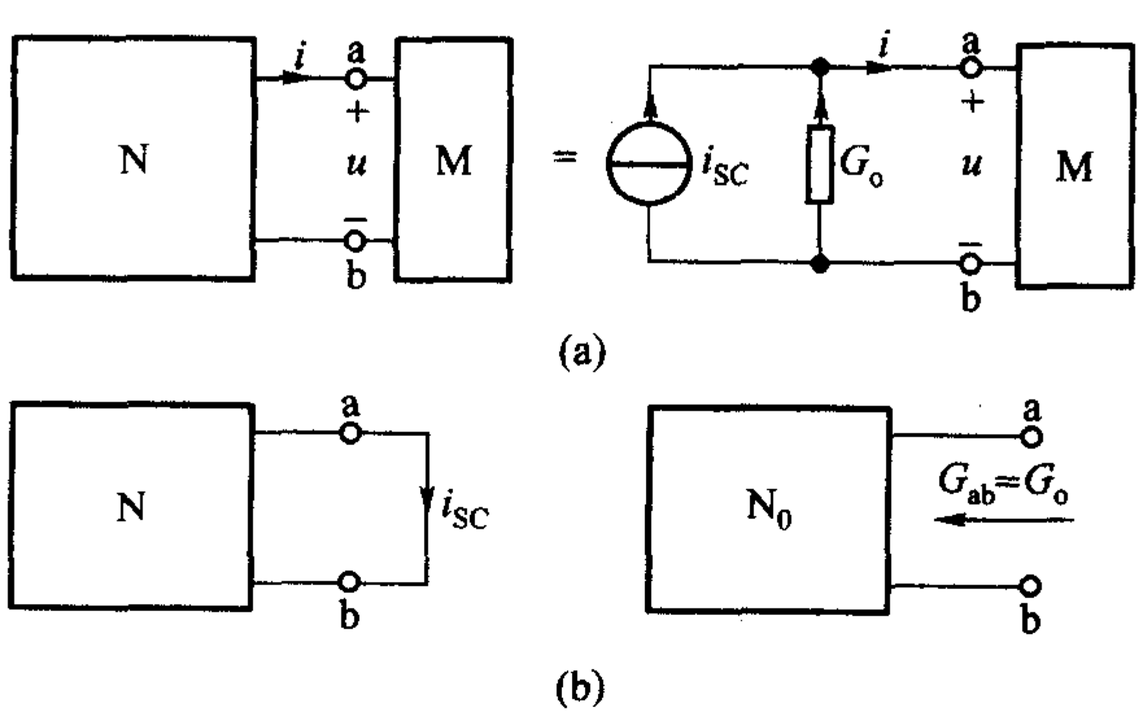


图 4-55　诺顿定理

根据诺顿定理,含源线性单口网络的 VCR 在图 4-55(a)所示的电压、电流参考方向下可表示为

$$i = i_{SC} - G_o u \tag{4-31}$$

式中的 G_o 可称为诺顿等效电导,为戴维南等效电阻的倒数,即 $G_o = \dfrac{1}{R_o}$。

例 4-17　用诺顿定理求图 4-56 所示电路中流过 4 Ω 电阻的电流 i。

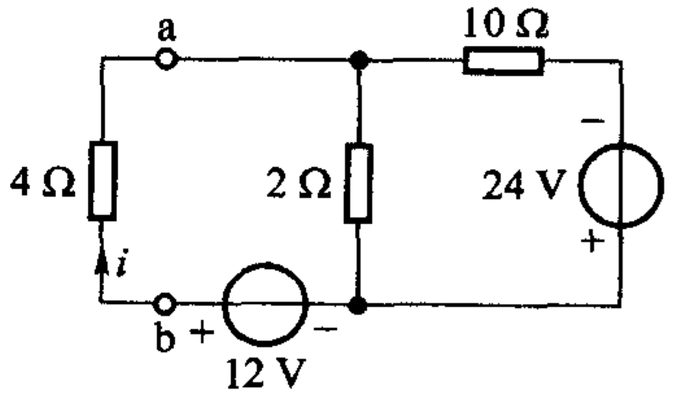


图 4-56　例 4-17

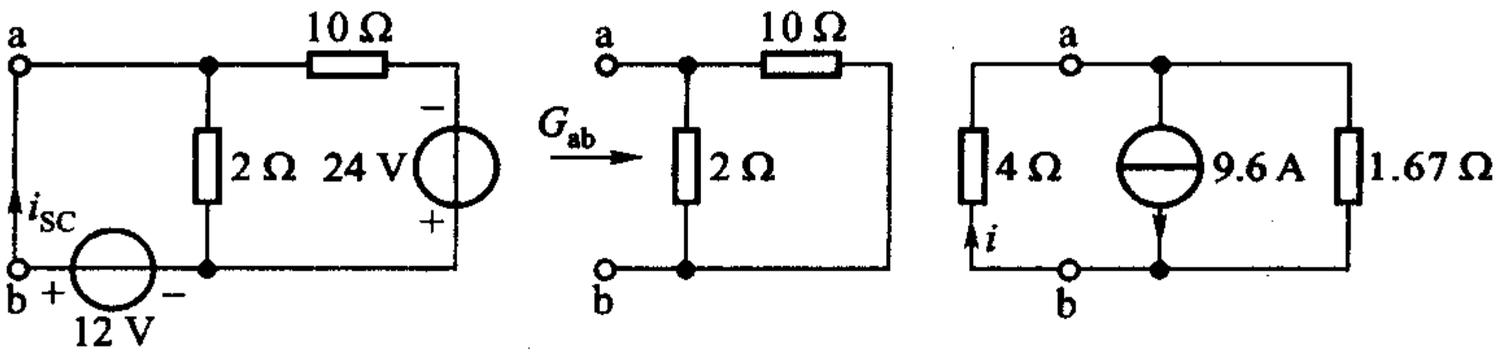
解　把原电路除 4 Ω 电阻以外的部分化简为诺顿等效电路。为此先应把拟化简的单口网络短路,如图 4-57(a)所示,求短路电流 i_{SC}。根据叠加原理,可得

$$i_{SC} = \left(\frac{24}{10} + \frac{12}{\dfrac{10 \times 2}{10 + 2}} \right) \text{A} = (2.4 + 7.2)\ \text{A} = 9.6\ \text{A}$$

再把拟化简的单口网络中的电压源用短路代替,得图 4-57(b),可得

$$G_o = G_{ab} = \frac{6}{10}\ \text{S}$$

$$R_o = 1.67\ \Omega = \frac{1}{G_o}$$



(a) 求 i_{SC}　　(b) 求 G_o　　(c) 求 i

图 4－57　运用诺顿定理的三个步骤

求得诺顿等效电路后，再把 4 Ω 电阻接上，得图 4－57(c)，由此可得

$$i = \left(9.6 \times \frac{1.67}{4 + 1.67}\right)\ \text{A} = 2.83\ \text{A}$$

练习题

4－18　试仿照图 4－45 证明诺顿定理。

4－19　试求图 4－53 所示含源单口网络的诺顿等效电路。

4－20　试求图 4－54 所示电路的电流 i(用诺顿定理求解)。

§4－8　最大功率传递定理

给定一含源线性单口网络 N_1，接在它两端的负载电阻不同，从单口网络传递给负载的功率也不同。在什么条件下，负载能得到的功率为最大呢？含源线性单口网络可以用戴维南或诺顿等效电路代替，如图 4－58 所示，设负载电阻为 R_L，则当 R_L 很大时，流过 R_L 的电流很小，因而 R_L 得到的功率 i^2R_L 很小。如果 R_L 很小，功率同样也是很小的。在 $R_L = 0$ 与 $R_L = \infty$ 之间将有一个电阻值可使负载所得功率为最大。要解决这一 R_L 值究竟是多大的问题，可先写出 R_L 为任意值时的功率：

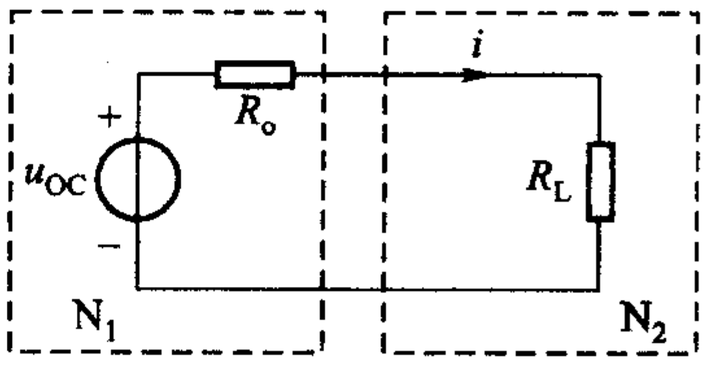


图 4－58　求传递给负载的功率

$$p = i^2R_L = \left(\frac{u_{OC}}{R_o + R_L}\right)^2 R_L = f(R_L) \qquad (4-32)$$

要使 p 为最大，应使 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}R_\mathrm{L}=0$，由此可解得 p 为最大时的 R_L 值。

即

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}R_\mathrm{L}}=u_\mathrm{OC}^2\left[\frac{(R_\mathrm{o}+R_\mathrm{L})^2-2(R_\mathrm{o}+R_\mathrm{L})R_\mathrm{L}}{(R_\mathrm{o}+R_\mathrm{L})^4}\right]$$

$$=\frac{u_\mathrm{OC}^2(R_\mathrm{o}-R_\mathrm{L})}{(R_\mathrm{o}+R_\mathrm{L})^3}=0 \tag{4-33}$$

由此可得

$$R_\mathrm{L}=R_\mathrm{o} \tag{4-34}$$

由于

$$\left|\frac{\mathrm{d}^2p}{\mathrm{d}R_\mathrm{L}^2}\right|_{R_\mathrm{L}=R_\mathrm{o}}=-\frac{u_\mathrm{OC}^2}{8R_\mathrm{o}^3}<0$$

所以，(4-34)式即为使 p 为最大的条件。因此，由含源线性单口网络传递给可变负载 R_L 的功率为最大的条件是：负载 R_L 应与戴维南（或诺顿）等效电阻相等。此即最大功率传递定理。满足 $R_\mathrm{L}=R_\mathrm{o}$ 时，称为最大功率匹配（match），此时负载得到的最大功率为

$$p_\mathrm{max}=\frac{u_\mathrm{OC}^2}{4R_\mathrm{o}} \tag{4-35}$$

如用诺顿等效电路，则

$$p_\mathrm{max}=\frac{i_\mathrm{SC}^2}{4G_\mathrm{o}} \tag{4-36}$$

注意最大功率传递定理是在 R_L 可变的情况下得出的。如果 R_o 可变而 R_L 固定，则应使 R_o 尽量减小，才能使 R_L 获得的功率增大。当 $R_\mathrm{o}=0$ 时，R_L 获得最大功率。这是一个毋需特别加以论证的结论。

另一常易产生的错误概念是：由线性单口网络获得最大功率时，其功率传递效率应为 50%，因为 R_o 与 R_L 消耗的功率相等。如果负载功率来自一个具有内阻为 R_o 的电压源，那么，负载得到最大功率时，效率确实为 50%。但是，单口网络和它的等效电路，就其内部功率而言是不等效的，由等效电阻 R_o 算得的功率一般并不等于网络内部消耗的功率，因此，实际上当负载得到最大功率时，其功率传递效率未必是 50%。

例 4-18　如图 4-59 所示电路：(1) 求 R_L 获得最大功率时的 R_L；(2) 计算此时 R_L 得到的功率；(3) 当 R_L 获得最大功率时，求 360 V 电源产生的功率传递给 R_L 的百分数。

解　(1) 先求 $\mathrm{N_1}$ 的戴维南等效电路：

$$u_\mathrm{OC}=360\times\frac{150}{180}\ \mathrm{V}=300\ \mathrm{V}$$

$$R_o = \frac{150 \times 30}{180}\ \Omega = 25\ \Omega$$

因此，当 $R_L = R_o = 25\ \Omega$ 时，R_L 获得最大功率。

（2）R_L 获得的最大功率为

$$p_{max} = \left(\frac{300}{50}\right)^2 (25)\ \text{W} = 900\ \text{W}$$

或套用(4－35)式也可求得此结果。

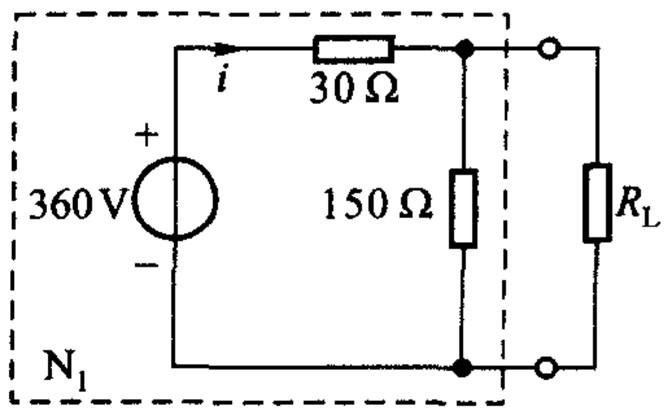


图 4－59　例 4－18

（3）当 $R_L = 25\ \Omega$ 时，其两端电压为

$$300 \times \frac{25}{25 + 25}\ \text{V} = 150\ \text{V}$$

流过 360 V 电源的电流

$$i = \frac{360 - 150}{30}\ \text{A} = 7\ \text{A}$$

360 V 电源的功率为

$$p_S = -(360)(7)\ \text{W} = -2\ 520\ \text{W}$$

负号表示提供功率。负载所得功率的百分数为

$$\frac{p_{max}}{p_S} = \frac{900}{2\ 520} \times 100\ \% = 35.71\%$$

思考题

4－8　电路如图 4－60 所示：(1) 要使 R_L 获得最大功率，开关应放在哪一位置？

(2) 试计算在(1)中所选的开关位置时，R_L 获得的功率。

(3) 试计算在其他两个开关位置时 R_L 得到的功率，以检验(1)中回答是否正确。

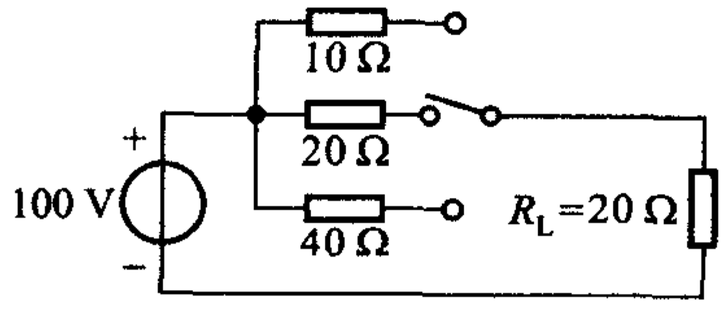


图 4－60　思考题 4－8

§4－9　T 形网络和 Π 形网络的等效变换

在求单口电阻网络的等效电阻时，有时，单口内的电阻连接方式虽不属串、并联，但运用本节介绍的 T－Π 变换后却仍可能利用串、并联等效电阻公式，使运算简化。

先讨论两个三端网络等效的问题。设两个三端网络 N 和 N′如图 4－61 所示。根据 KVL，给定任意两对端钮间的电压，其余一对端钮间的电压便可确定，例如，给定 u_{13} 和 u_{23}，则由 $u_{12}=u_{13}-u_{23}$，u_{12} 便可确定。根据 KCL，给定任意两个端钮的电流，其余一个端钮的电流便可确定，例如，给定 i_1 和 i_2，则由 $i_3=-(i_1+i_2)$，i_3 便可确定。因此，在对两个三端网络的端钮加以编号后，若两网络的 u_{12}、u_{23} 与 i_1、i_2 的关系完全相同，则这两个三端网络 N 和 N′是等效的。

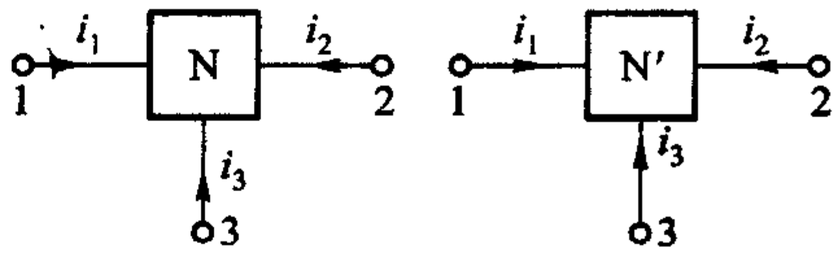
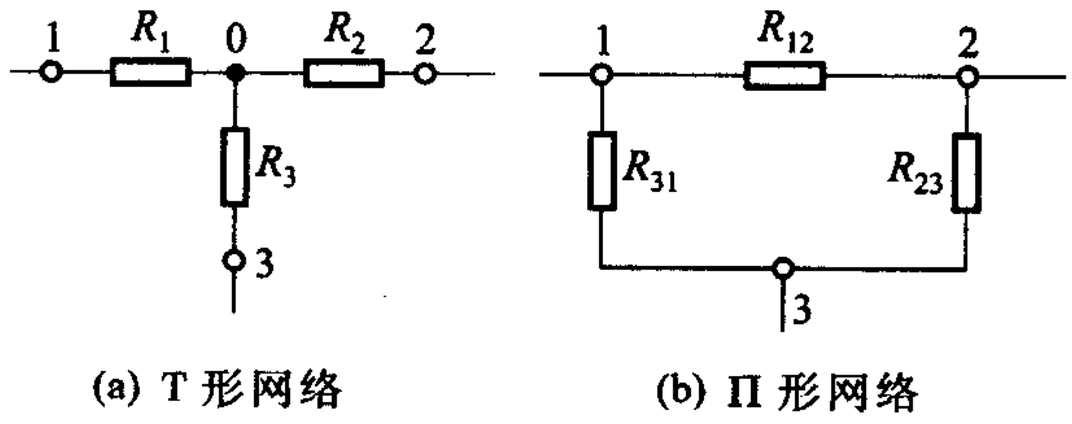


图 4－61　两个三端网络的等效

三端网络的最简单形式便是 T 形连接网络和 Π 形连接网络。

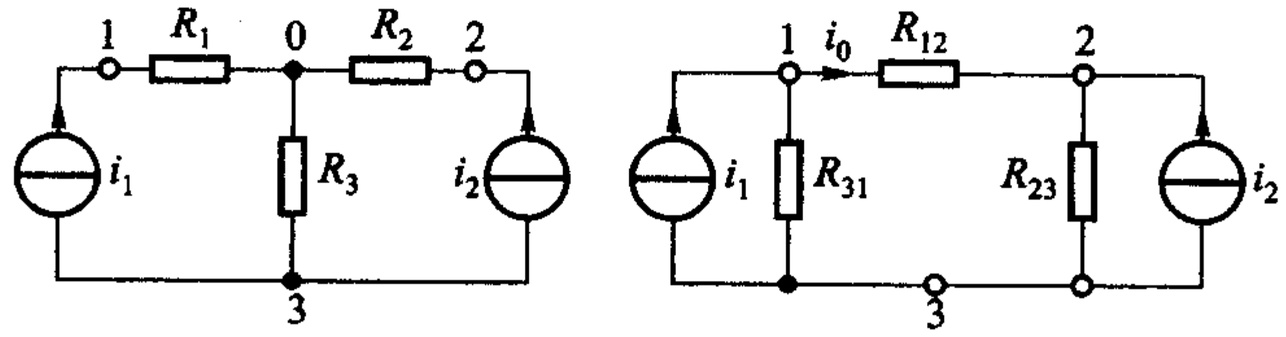
将三个电阻的一端连接在一个节点上，而它们的另一端分别接到三个不同的端钮上，这样就构成了如图 4－62(a)所示 T 形网络，亦称星形(Y 形)网络。如果将三个电阻分别接在每二个端钮之间，使三个电阻本身构成一个回路，这样就构成了图 4－62(b)所示的 Π 形网络，亦称三角形(△形)网络。



(a) T 形网络　　(b) Π 形网络

图 4－62　三端网络的最简单形式

现在根据三端网络等效的定义来推求 T 形网络和 Π 形网络的等效条件。为此，可以设想在这两种网络相对应的端钮上分别施加相同的电流源 i_1 和 i_2，如图 4－63 所示。分别推导它们端钮的 VCR。



(a)　　(b)

图 4－63　电流源施加于 T 形网络和 Π 形网络

对图 4－63(a)所示 T 形网络来说

$$u_{13} = R_1 i_1 + R_3 (i_1 + i_2)$$

$$u_{23} = R_2 i_2 + R_3 (i_1 + i_2)$$

即

$$\left.\begin{aligned} u_{13} &= (R_1 + R_3) i_1 + R_3 i_2 \\ u_{23} &= R_3 i_1 + (R_2 + R_3) i_2 \end{aligned}\right\} \tag{4-37}$$

对图 4-63(b)所示 Π 形网络来说，把图中的电流源并联电阻模型变为电压源串联电阻模型后，不难求得

$$i_0 = \frac{R_{31} i_1 - R_{23} i_2}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

以及：

$$u_{13} = R_{31} i_1 - R_{31} i_0$$

$$u_{23} = R_{23} i_0 + R_{23} i_2$$

由此可得

$$\left.\begin{aligned} u_{13} &= \frac{R_{31}(R_{12} + R_{23})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} i_1 + \frac{R_{23} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} i_2 \\ u_{23} &= \frac{R_{23} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} i_1 + \frac{R_{23}(R_{12} + R_{31})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} i_2 \end{aligned}\right\} \tag{4-38}$$

(4-37)式和(4-38)式分别为 T 形网络和 Π 形网络的 VCR。如果 VCR 完全相同，(4-37)两式和(4-38)两式中 i_1 与 i_2 的系数应分别相等，即

$$\left.\begin{aligned} R_1 + R_3 &= \frac{R_{31}(R_{12} + R_{23})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \\ R_3 &= \frac{R_{23} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \\ R_2 + R_3 &= \frac{R_{23}(R_{12} + R_{31})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \end{aligned}\right\} \tag{4-39}$$

由(4-39)式可解得

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= \frac{R_{31} R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \\ R_2 &= \frac{R_{12} R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \\ R_3 &= \frac{R_{23} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \end{aligned}\right\} \tag{4-40}$$

这就是 Π 形网络变换为等效 T 形网络的公式。(4 -40)中三式可概括为

$$R_i = \frac{\text{接于端钮 } i \text{ 的两电阻的乘积}}{\text{三电阻之和}}$$

由(4 -39)式可解得

$$\left.\begin{aligned} R_{12} &= \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_3} \\ R_{23} &= \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_1} \\ R_{31} &= \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_2} \end{aligned}\right\} \tag{4-41}$$

这就是 T 形网络变换为等效 Π 形网络的公式。(4 -41)中三式可概括为

$$R_{mn} = \frac{\text{电阻两两乘积之和}}{\text{接在与 } R_{mn} \text{ 相对端钮的电阻}}$$

接在复杂网络中的 T 形或 Π 形网络部分,可以运用上述公式等效互换,并不影响网络其余未经变换部分的电压和电流。这种等效变换有时可简化电路的计算。例如,在求图 4 -64(a)所示单口网络的输入电阻 R_i 时,就会遇到不能运用串联、并联等效电阻公式的情况。固然,可以从等效的定义,列出它的 VCR 来解决问题(例 4 -3)。但如果把图 4 -64(a)中由电阻 R_{12}、R_{23}、R_{31} 组成的 Π 形网络,变成图 4 -64(b)中所示由电阻 R_1、R_2、R_3 组成的 T 形网络后,显然可见,运用电阻串联、并联等效电阻公式就可方便地求得输入电阻 R_i。由于变换是等效的,因而它就是原电路的输入电阻。

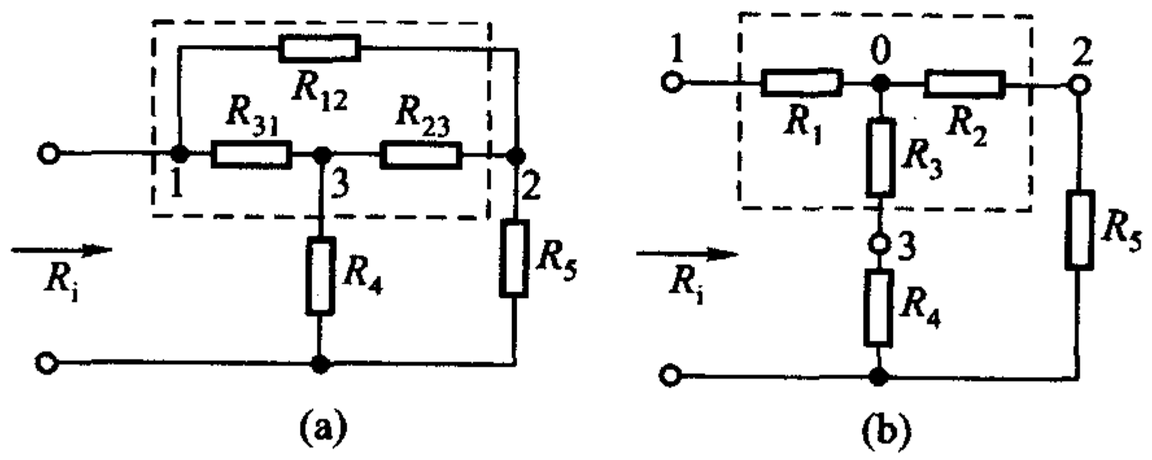


图 4 -64　不能直接运用串联、并联等效电阻公式求输入电阻的例子

练习题

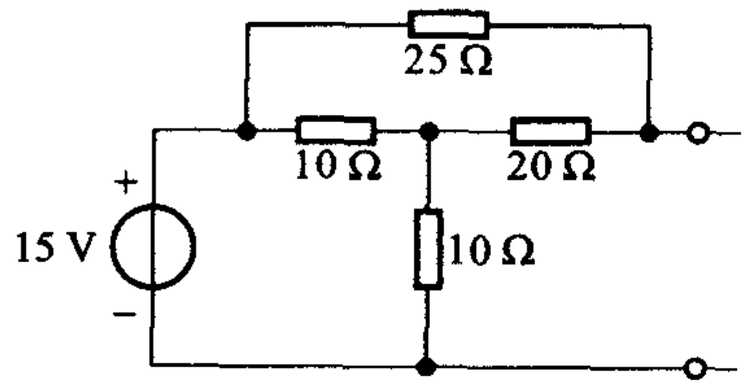
4 -21　试利用本节所述内容重新求解例 4 -3。



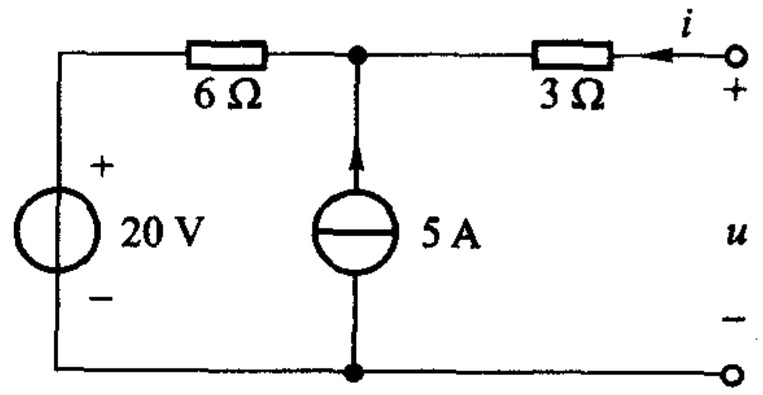
习题

§4-2　单口网络的电压电流关系

4-1　求图题4-1所示单口网络的VCR。



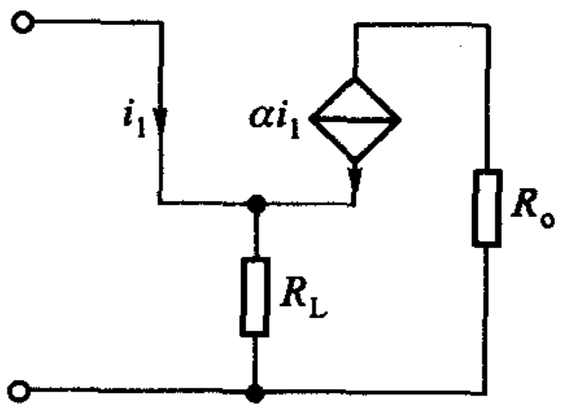
图题4-1



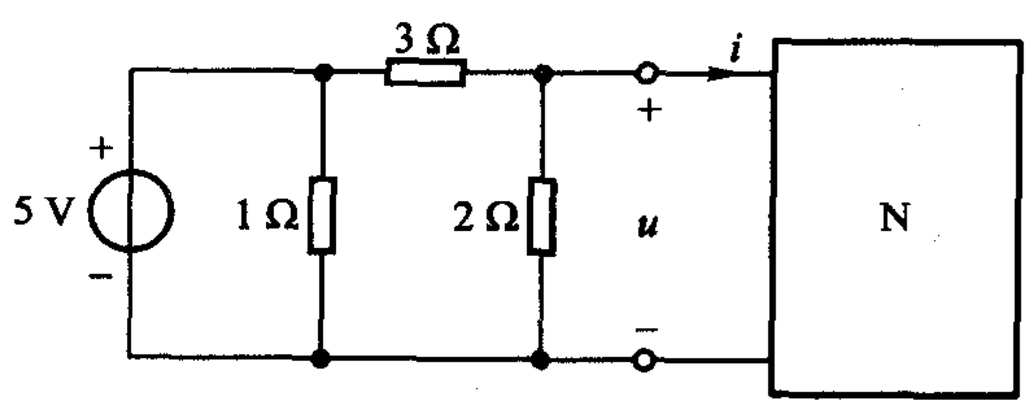
图题4-2

4-2　试用外施电源法求图题4-2所示含源单口网络的VCR,并绘出伏安特性曲线。

4-3　试求图题4-3所示电路的VCR。



图题4-3

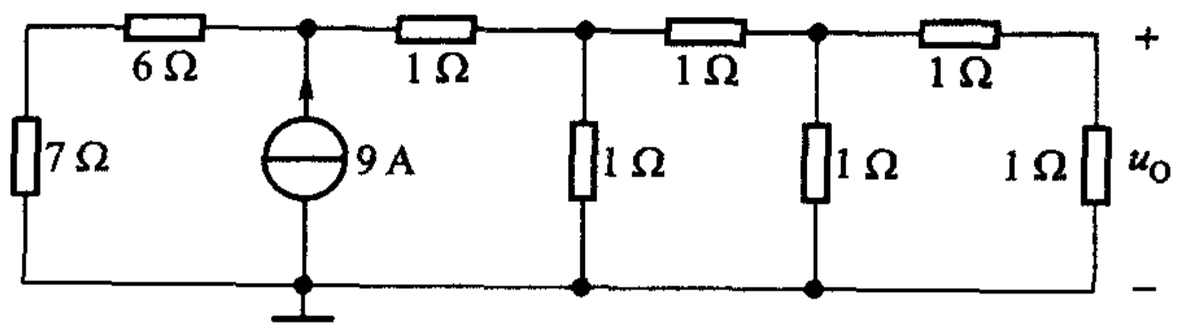


图题4-4

§4-3　单口网络的置换——置换定理

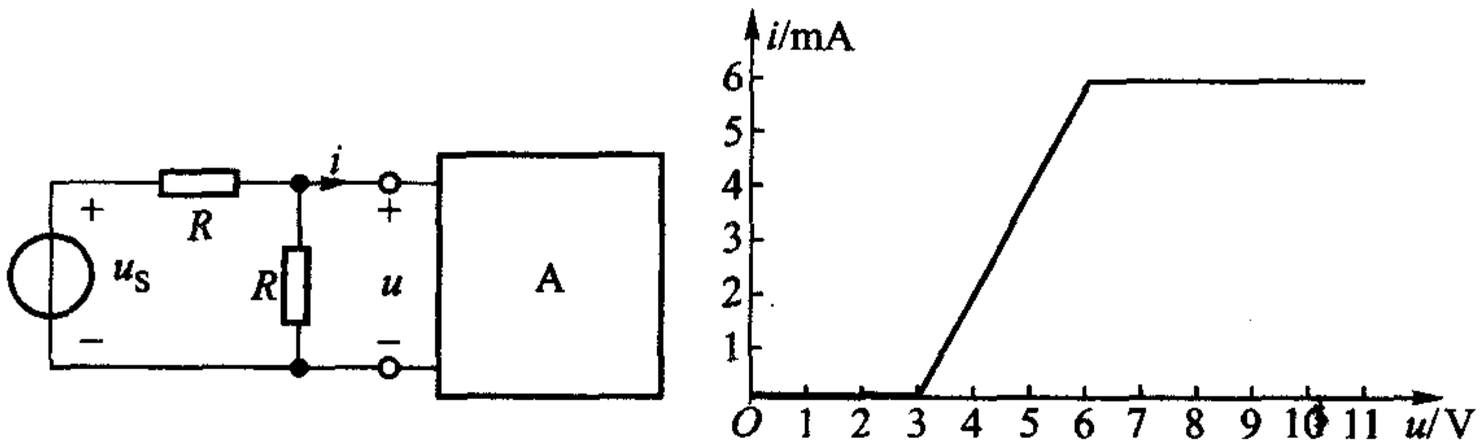
4-4　在图题4-4所示电路中已知N的VCR为$5u=4i+5$,试求电路中各支路电流。

4-5　试设法利用置换定理求解图题4-5所示电路中的电压u_0。何处划分为好？置换时用电压源还是电流源为好？



图题4-5

4－6　电路如图题4－6(a)所示，$u_S=12$ V、$R=2$ kΩ 网络 N 的 VCR 如图题4－6(b)所示，求 u 和 i，并求流过两线性电阻的电流。



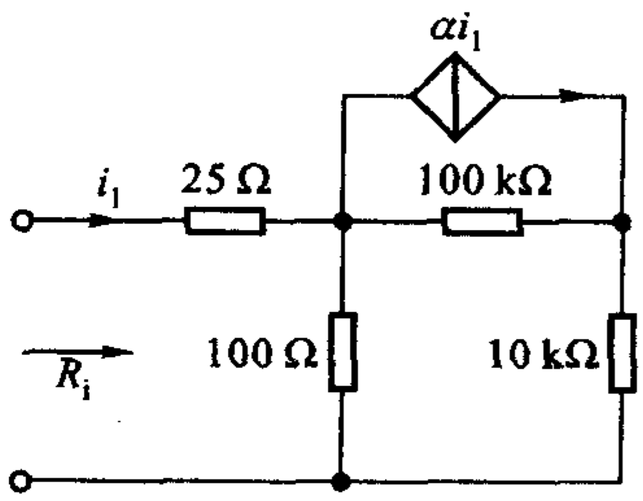
(a)　　(b)

图题4－6

§4－4　单口网络的等效电路

4－7　试用习题4－1、4－2、4－3所得结果，绘出图题4－1、4－2、4－3所示三个单口网络的等效电路。试对上述三种情况的等效电路做出结论。

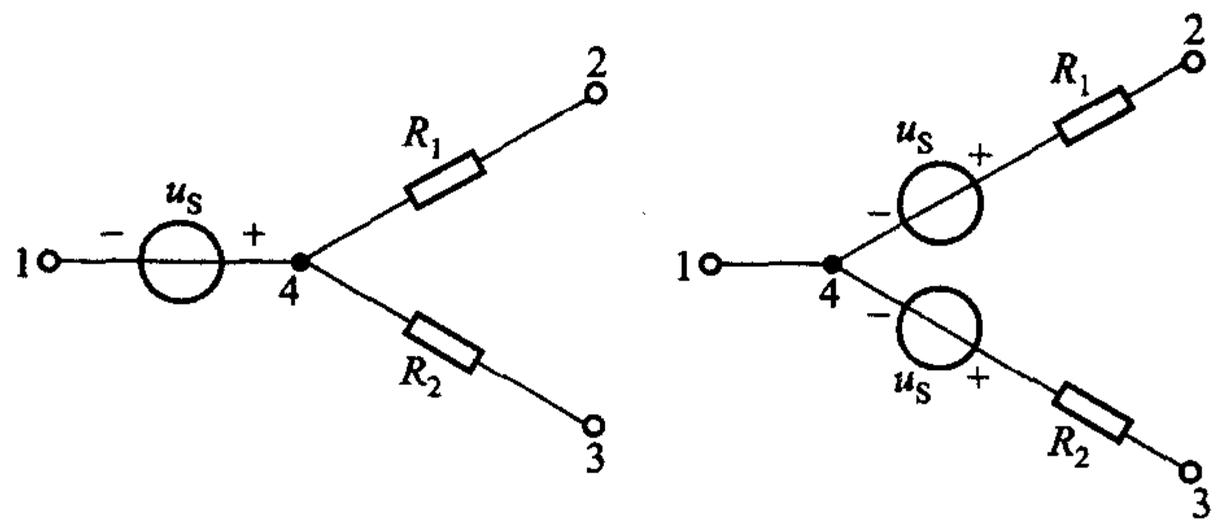
4－8　对于含有一个受控源的单口电阻网络，有时用下述方法去求输入电阻 R_i 是很简便的。其方法为：(1) 先设 $x=1$，x 为受控源的控制量；(2) 运用 KCL 及 KVL 设法算得 u 及 i；(3) 根据 $u=R_i i$，算得 R_i。试用这一方法求解练习题4－6。



图题4－7

4－9　求图题4－7所示电路的输入电阻 R_i，已知 $\alpha=0.99$。

4－10　对图题4－8(a)所含无伴电压源电路，试证明图题4－8(b)含有伴电压源电路与它是等效的。(称为电压源的转移，可解决含无伴电压源电路化为含电流源电路的等效变换问题。)



(a)　　(b)

图题4－8

§4-5　一些简单的等效规律和公式

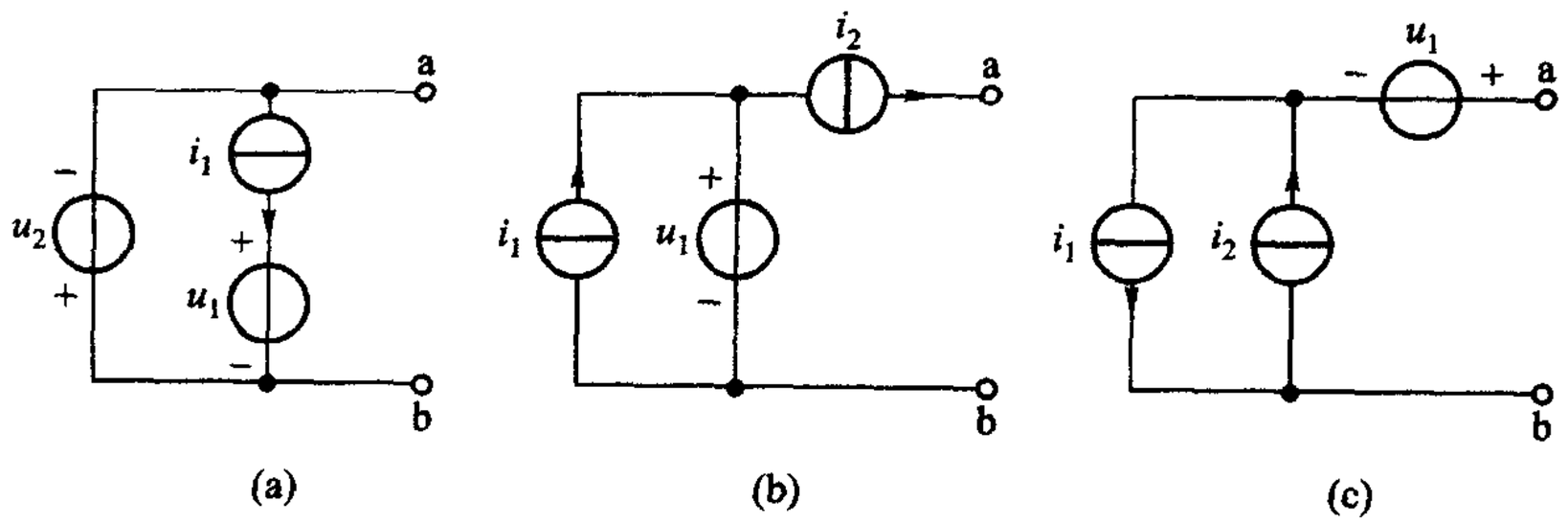
4-11　$R-2R$ 电阻阵列组件如第三章图题 3-18(a)所示，如何连接端钮以得到 $R/2$、$2R/3$、R、$8R/3$、$5R/3$、$2R$、$3R$ 及 $4R$ 的等效电阻？

4-12　试证明：

(1) 各串联电阻消耗功率的总和等于其等效电阻所消耗的功率；

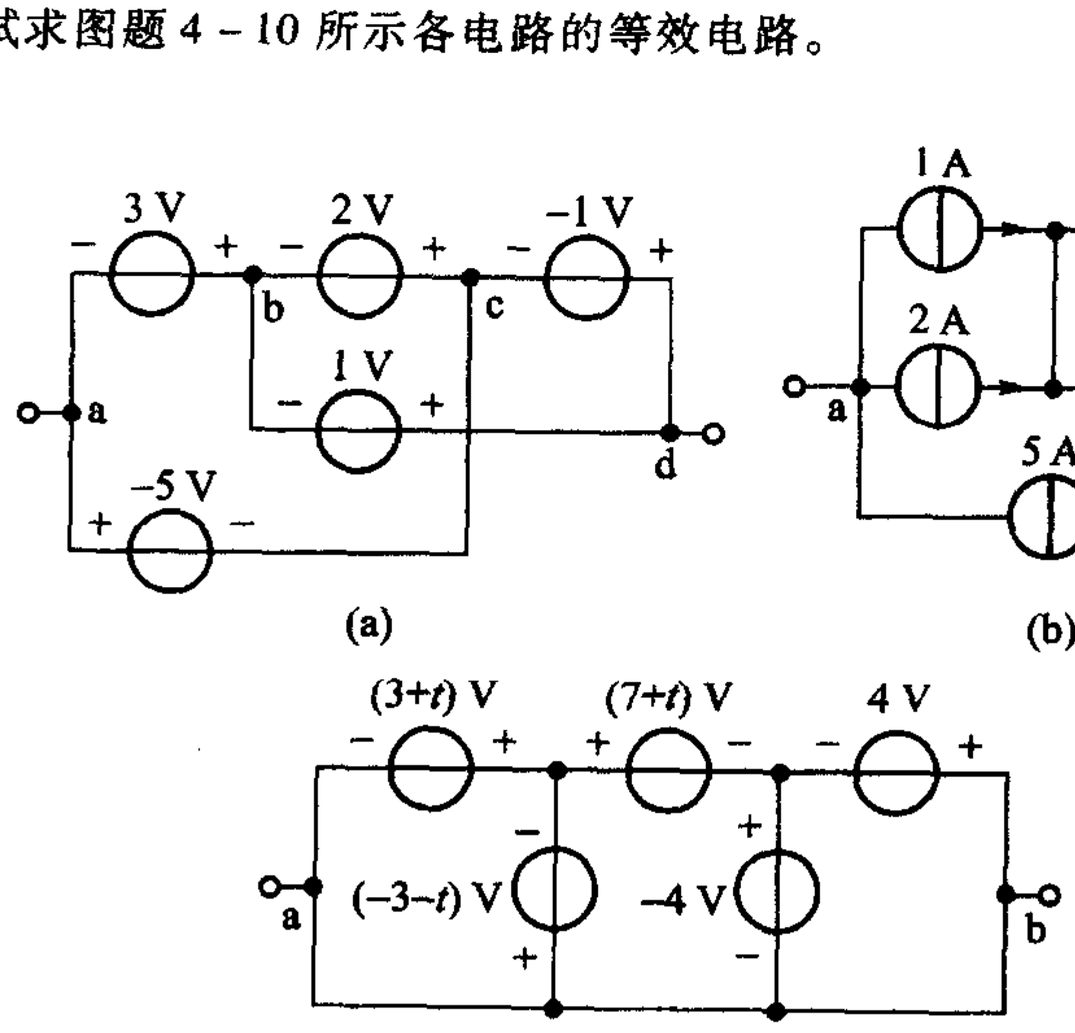
(2) 各并联电导消耗功率的总和等于其等效电导所消耗的功率。

4-13　试求图题 4-9 所示各电路的等效电路。



图题 4-9

4-14　试求图题 4-10 所示各电路的等效电路。



图题 4-10

4-15　对一个实际电源，在其端电压、电流为非关联参考方向下，测得它们间的关系如下表所示：

u/V	12	11	10	7	4	0
i/A	0	5	10	20	30	40

(1) 绘出 $u \sim i$ 特性。

(2) 建立适用于 $0 \leqslant i \leqslant 10$ A 范围内的电路模型。

(3) 使用这一模型,预计流入接于该电源两端的 5.8 Ω 电阻中的电流。

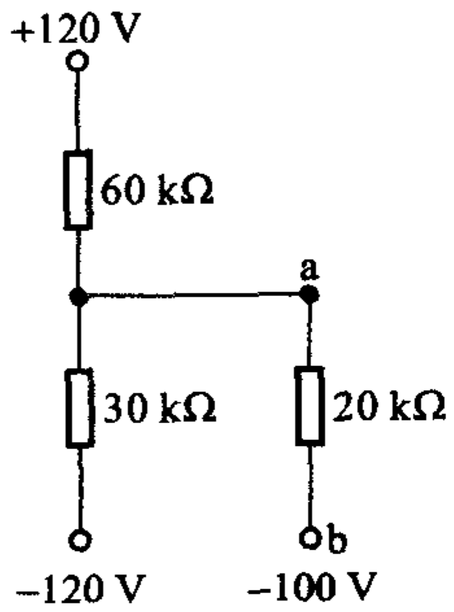
(4) 使用这一模型预计电源的短路电流是多少?

(5) 实际的短路电流是多少?

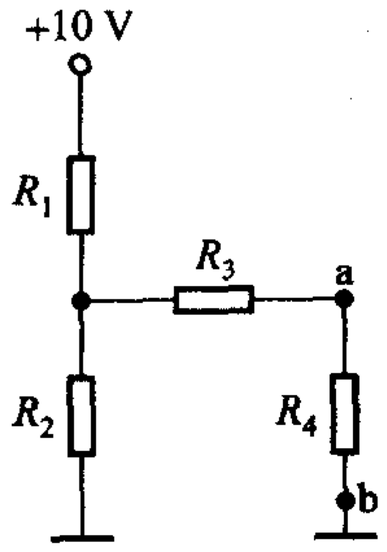
(6) 为什么(4)、(5)不一致?

§4-6　戴维南定理

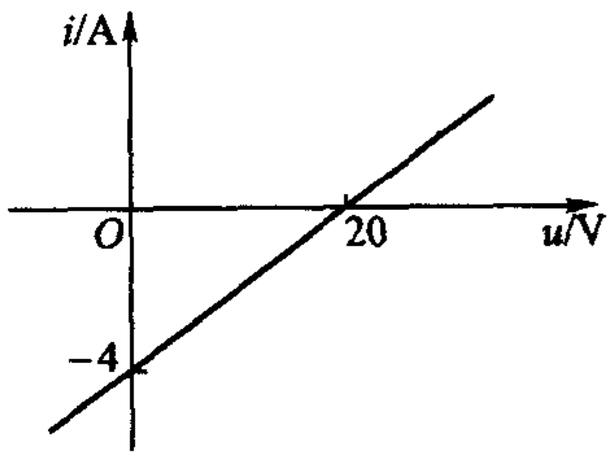
4-16　用戴维南定理求图题 4-11 所示电路中流过 20 kΩ 电阻的电流及 a 点电压 U_a。



图题 4-11



图题 4-12



图题 4-13

4-17　图题 4-12 所示电路中,4 个电阻均为 1 Ω,电源电压为 10 V,试求 ab 端的等效电路。试就原电路图及等效电路图,比较下列各项:(1) 两种情况下电阻 R_4 的功率;(2) 两种情况下电路中产生的功率;(3) 两种情况下 ab 端左侧部分损耗的功率。

比较后,你能得出什么结论?

4-18　图题 4-12 所示电路中,若电源电压改为 100 V、$R_1 = 10$ Ω、$R_4 = 5$ Ω、$R_2 = R_3 = R$,问 R 为何值时,电阻 R_4 的电压为最大?

4-19　测得某单口网络在关联参考方向下的 VCR 如图题 4-13 所示,试求它的戴维南等效电路。

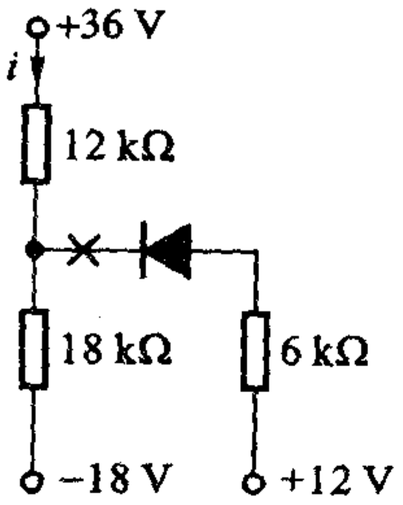
4-20　试用戴维南定理求解例 4-2。

4-21　在用电压表测量电路的电压时,由于电压表要从被测电路分取电流,对被测电路有影响,故测得的数值不是实际的电压值。如果用两个不同内阻的电压表进行测量,则从两次测得的数据及电压表的内阻就可知道被测电压的实际值。设对某电路用内阻为 10^5 Ω 的电压表测量,测得的电压为 45 V;若用内阻为 5×10^4 Ω 的电压表测量,测得电压为 30 V。问实际的电压应为多少?

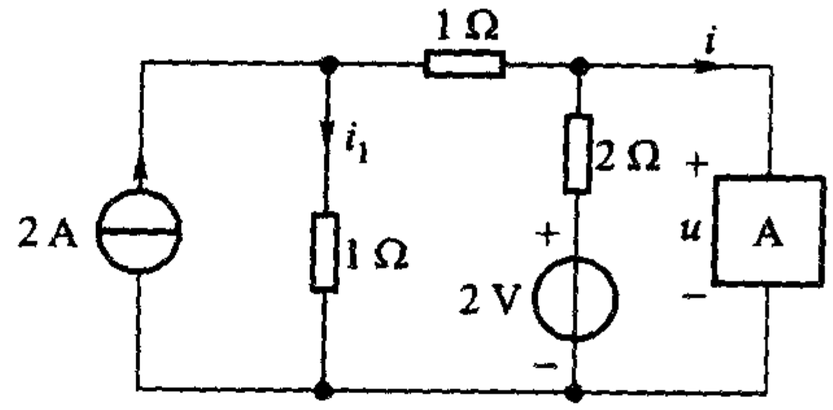
4-22　在分析含理想二极管电路时,需先确定二极管是否导通,运用戴维南定理可很方

便地解决这一问题。理想二极管导通时，其电阻可视为零；当截止时，其电阻可视为无限大。设含理想二极管电路如图题 4－14 所示，试求电流 i。

4－23　电路如图题 4－15 所示，已知非线性元件 A 的 VCR 为 $u=i^2$，试求 u，i 和 i_1。

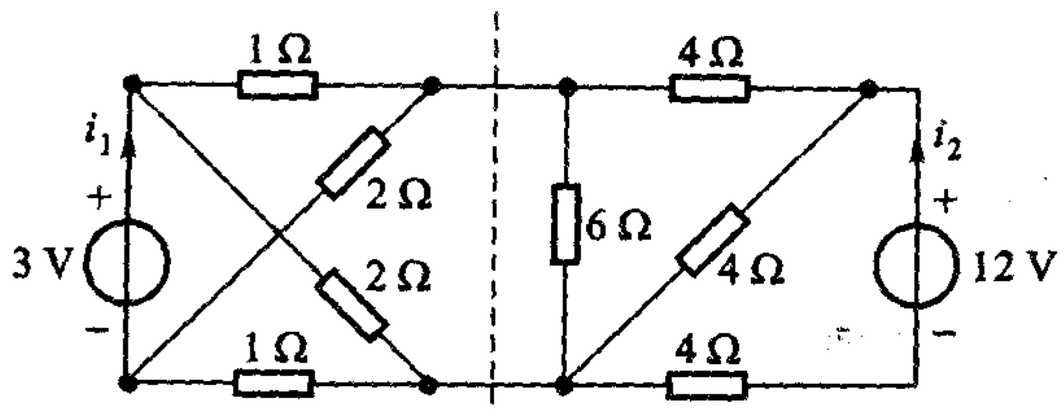


图题 4－14



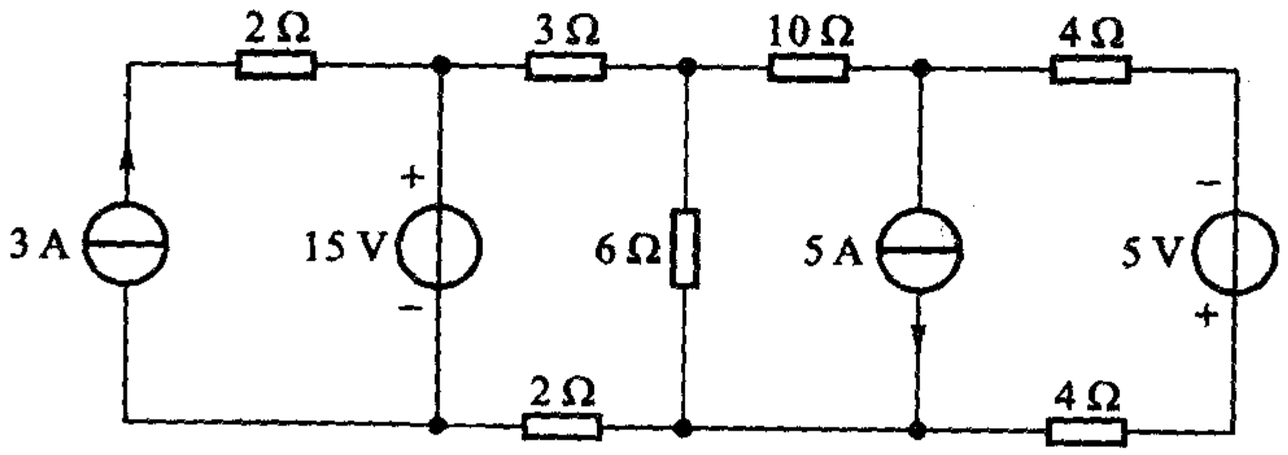
图题 4－15

4－24　试求图题 4－16 所示电路中流过两电压源的电流。可从虚线处分解为两个单口网络后做。（如不用分解的办法，你将如何做？）



图题 4－16

4－25　试求图题 4－17 所示电路中流过两电压源的电流。



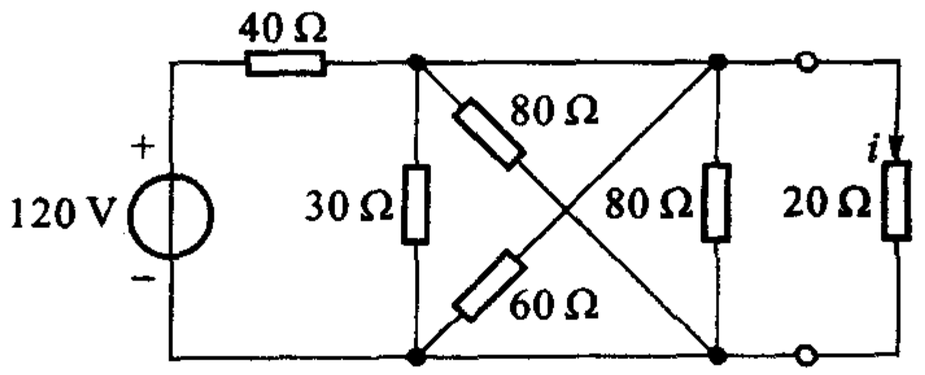
图题 4－17

§4－7　诺顿定理

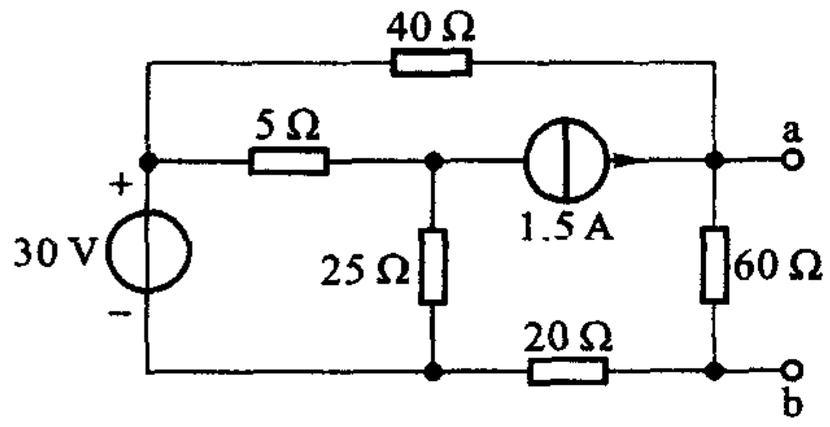
4－26　用诺顿定理求图题 4－18 所示电路的电流 i。

4－27　试求图题 4－19 所示单口网络的诺顿等效电路。

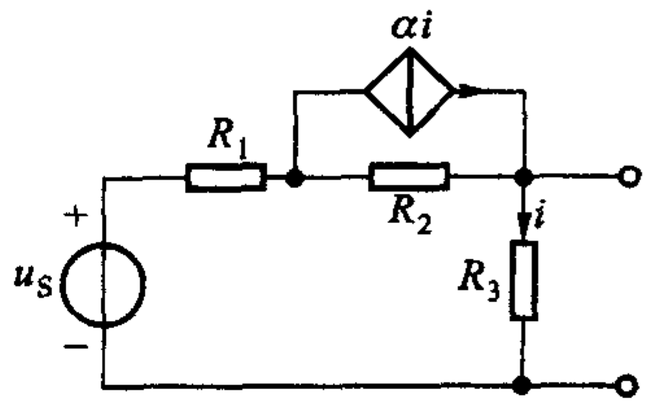
4－28　求图题4－20所示电路的诺顿等效电路。已知：$R_1=15\ \Omega$、$R_2=5\ \Omega$、$R_3=10\ \Omega$、$u_S=10\ \text{V}$及$i_S=1\ \text{A}$。



图题4－18



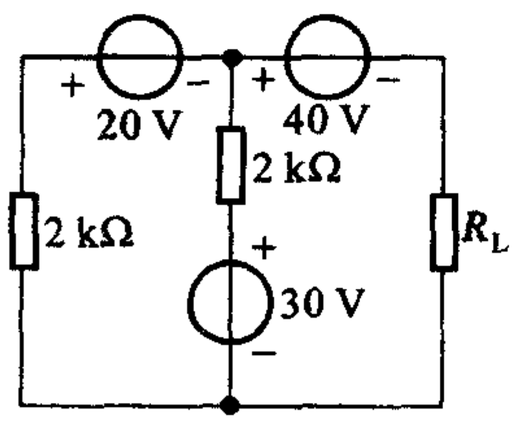
图题4－19



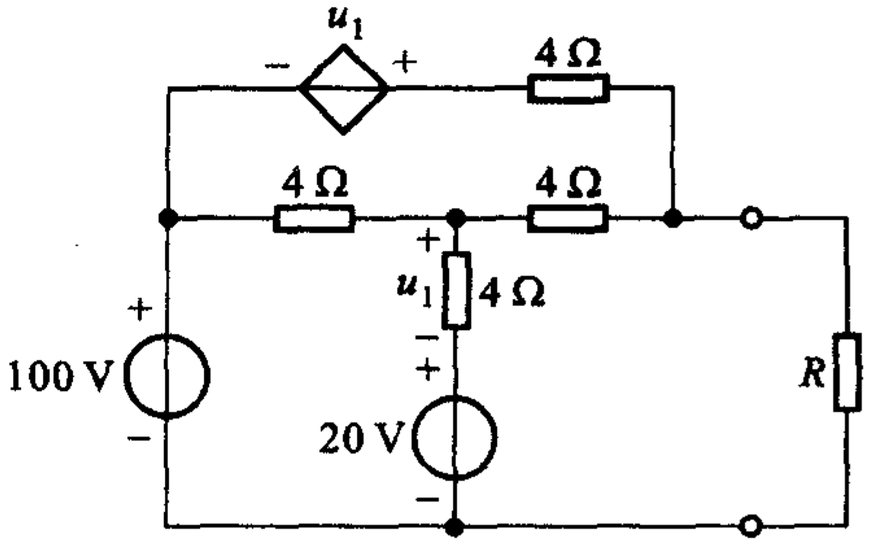
图题4－20

§4－8　最大功率传递定理

4－29　电路如图题4－21所示。（1）若$R_L=3\ \text{k}\Omega$，试求R_L获得的功率；（2）求R_L能获得的最大功率；（3）试求R_L获得20 mW时的电阻值。



图题4－21



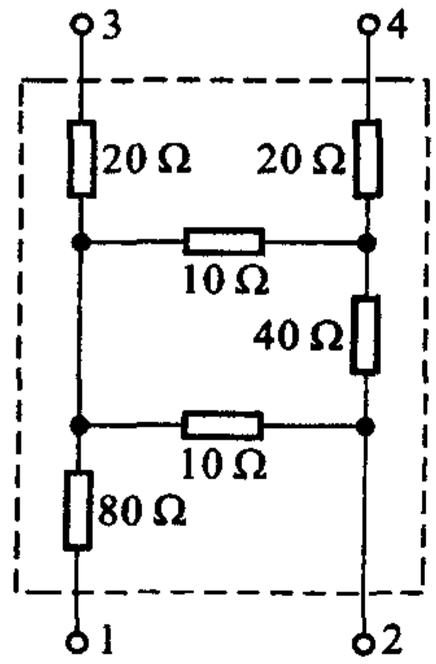
图题4－22

4－30　电路如图题4－22所示。（1）求R获得最大功率时的数值；（2）求在此情况下，R获得的功率；（3）求100 V电源对电路提供的功率；（4）求受控源的功率；（5）R所得功率占电路内电源产生功率的百分比。

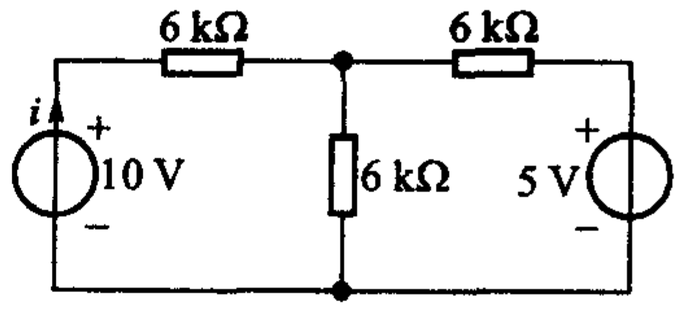
§4－9　T形网络和Π形网络的等效变换

4－31　电阻阵列组件内部结构如图题4－23所示，对外有4个端钮，试求下列端钮间的

电阻值:1 和 2;2 和 3;3 和 4;4 和 1。



图题 4 – 23

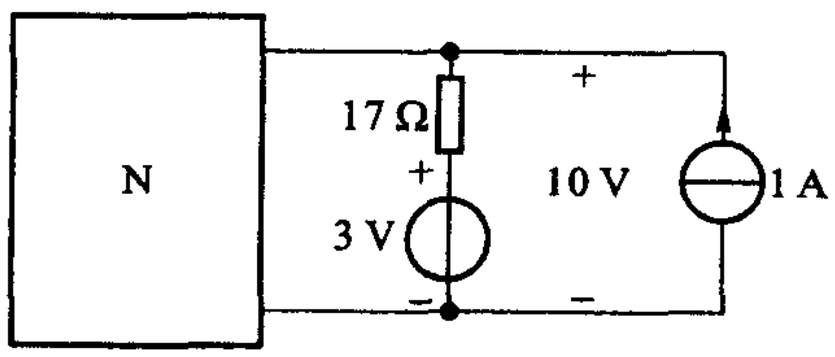


图题 4 – 24

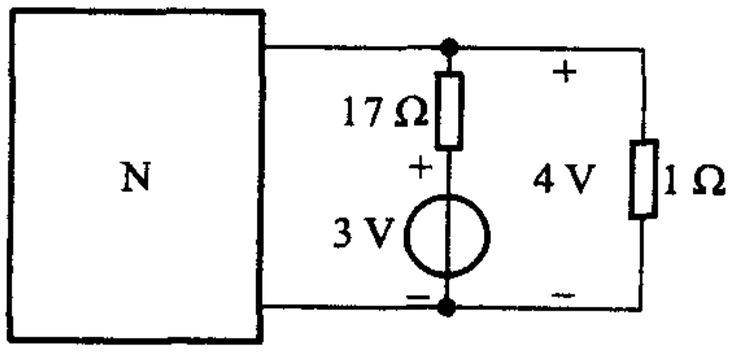
4 – 32　试利用 T – Π 变换求解图题 4 – 24 所示电路中 10 V 电压源的电流。

综合

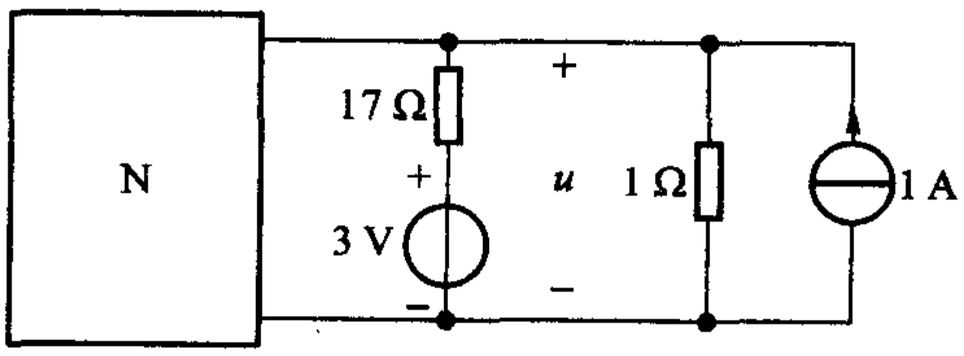
4 – 33　图题 4 – 25 所示网络 N 中含电源及线性电阻,试根据图(a)、(b)中的电压、电流数据确定图(c)中的电压 u。



(a)



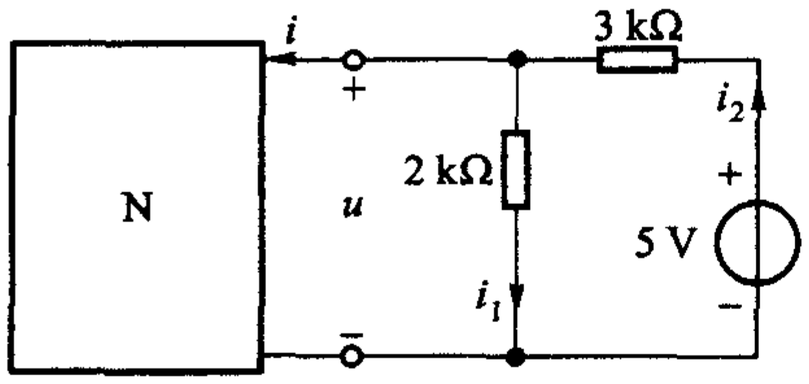
(b)



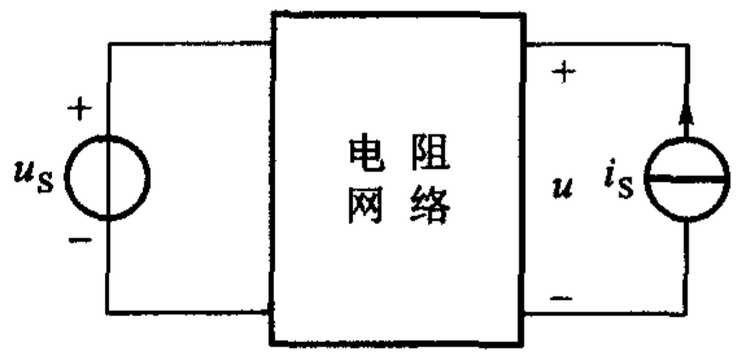
(c)

图题 4 – 25

4－34　电路如图题4－26所示，非线性网络N的VCR为$i=10^{-3}u^2$、$u>0$，式中i的单位为A，u的单位为V，试用分解方法求u和i_1、i_2。



图题4－26



图题4－27

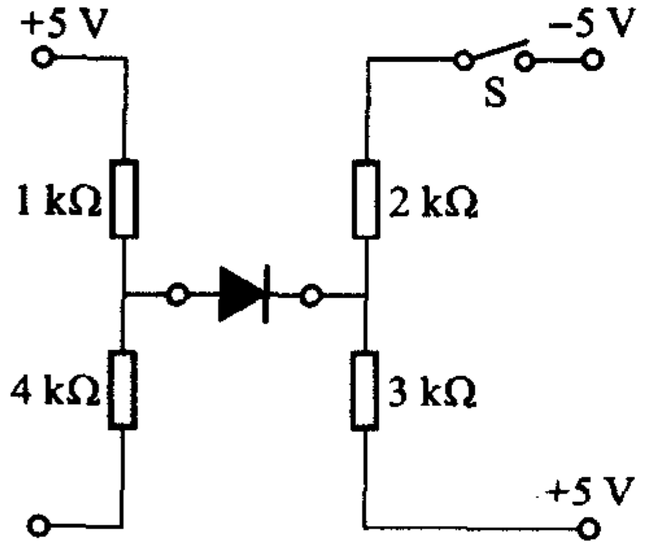
4－35　电路如图题4－27所示，已知当$u_S=4$ V，$i_S=0$时，$u=3$ V；当$u_S=0$，$i_S=2$ A时，$u=2$ V，求$u_S=1$ V，电流源用电阻$R=2\ \Omega$替代时，电压u为多少？

4－36　含理想二极管电路如图题4－28所示，当开关S由断开状态变为闭合状态时二极管将

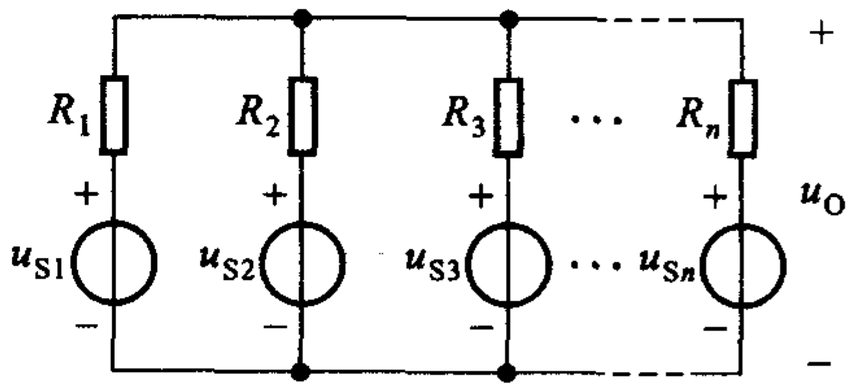
（1）由截止变为导通　　（2）由导通变为截止

（3）保持导通　　（4）保持截止

你将选择哪一答案？计算二极管电流。



图题4－28



图题4－29

4－37　弥尔曼(Millman)定理　试证明图题4－29所示电路中

$$u_O=\frac{\sum_n u_{Sn}G_n}{\sum_n G_n}$$

式中$G_n=\frac{1}{R_n}$。

第二篇

动态电路的时域分析

“一门课程在它的教学进展中，应反复地回到这些基本观念（指基本结构——引者注），以这些观念为基础，直至学生掌握了与这些观念相伴随的完全形式的体系为止。”

——布鲁纳《教育过程》第 9 页

上海人民出版社（1973 年译本）

第五章

电容元件与电感元件

本书的第一篇讨论了电阻电路的分析方法。电阻电路是用代数方程来描述的，这就意味着：如果外施的激励源（电压源或电流源）为常量，那么，在激励作用到电路的瞬间，电路的响应也立即为某一常量。例如，在由一个线性电阻元件 R 和一个电压源 u 组成的电路中，电压与电流的关系是由 $u = Ri$ 这一线性代数方程来描述的。如果电阻为 10 Ω，电源电压为 10 V，那么，在 10 V 电压（激励）施加于电路的瞬间，电路内立即就会有 1 A 的电流（响应）；如果电源电压变为 5 V，电路中的电流也立即变为 0.5 A。这就是说，电阻电路在任一时刻 t 的响应只与同一时刻的激励有关，与过去的激励无关。因此，电阻电路是“无记忆（memoryless）”，或说是“即时的（instantaneous）”。

实际上，许多实际电路并不能只用电阻元件和电源元件来构成它的模型。在模型中往往不可避免地要包含电容元件和电感元件。这两种元件的电压电流关系都涉及对电流、电压的微分或积分，因而称为动态元件（dynamic element）。电路模型中出现动态元件是由于下列原因：

（1）在实际电路中有意地接入了电容器、电感器等器件。这是由于要求电路能够实现某种功能的需要，例如，电阻电路不能完成滤波，必须利用动态元件才能实现这一功能。

（2）当信号变化很快时，一些实际器件已不能再用电阻模型来表示。例如，一个电阻器不能只用电阻元件来表示，而必须考虑到磁场变化及电场变化的影响，在模型中应该增添电感、电容等动态元件。当信号变化很快时，晶体管也不能再用电阻模型来表示。

至少包含一个动态元件的电路称为动态电路。任何一个集总电路不是电阻电路便是动态电路。动态电路在任一时刻的响应与激励的全部过去历史有关，这是和电阻电路完全不同的。例如，一个动态电路，尽管输入已不再作用，但仍然可以有输出，因为输入曾经作用过。这就是说，动态电路是有记忆（memory）的。本书的第二篇讨论动态电路的分析，但只限于一阶和二阶的动态电路，共分为三章。

在本书第一章中早已指出，两类约束是电路分析的基本依据。基尔霍夫定律施加于电路的约束关系只取决于电路的连接方式而与构成电路的元件性质无

关，这就是说，不论是电阻电路还是动态电路都要服从这一定律。为解决动态电路的分析问题，还须知道电容元件和电感元件的电压、电流约束关系。本章将讨论电容元件和电感元件的定义、VCR、等效电路，并引入记忆、状态等概念，为动态电路的分析奠定基础。

§5-1　电容元件

电路理论中的电容元件(capacitor)是(实际)电容器的理想化模型。

把两块金属极板用介质隔开就可构成一个简单的电容器。由于理想介质是不导电的，在外电源作用下，两块极板上能分别存储等量的异性电荷。外电源撤走后，这些电荷依靠电场力的作用互相吸引，而又被介质绝缘不能中和，因而极板上的电荷能长久地存储下去。因此，电容器是一种能存储电荷的器件。在电荷建立的电场中储藏着能量，因此，也可以说电容器是一种能够存储电场能量的器件。理想的电容器应该只具有存储电荷从而在电容器中建立起电场的作用，而没有任何其他的作用，也就是说，理想电容器应该是一种电荷与电压相约束的器件。由此，可定义出一种电容元件，并将它视为实际电容器的理想化模型。电容元件的定义如下：一个二端元件，如果在任一时刻 t，它的电荷 $q(t)$ 同它的端电压 $u(t)$ 之间的关系可以用 $u-q$ 平面上的一条曲线来确定，则此二端元件称为电容元件。在某一时刻 t，$q(t)$ 和 $u(t)$ 所取的值分别称为电荷和电压在该时刻的瞬时值。因此，电容元件的电荷瞬时值和电压瞬时值之间存在着一种代数关系。电容元件的符号如图 5-1 所示，这一符号与第一章表 1-1 中实际电容器的图形符号一样，但含义不同。在讨论 $q(t)$ 与 $u(t)$ 的关系时，通常采用关联的参考方向，即在假定为正电位的极板上电荷也假定为正。将 $q(t)$ 标注在假定为带有正电荷的极板侧，亦即标注在假定为正电位的极板侧。图 5-1 中 $q(t)$ 与 $u(t)$ 即假设为关联参考方向。

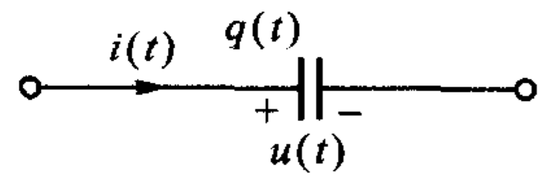


图 5-1　电容的符号

如果 $u-q$ 平面上的特性曲线是一条通过原点的直线，且不随时间而变，则此电容元件称之为线性时不变电容元件，亦即

$$q(t)=Cu(t) \tag{5-1}$$

式中 C 为正值常数，它是用来度量特性曲线斜率的，称为电容(capacitance)。在国际单位制中，C 的单位为法拉(中文代号为法，国际代号为 F)。习惯上也常把电容元件简称为电容，并且，如不加申明，电容都系指线性时不变电容。

常用电容器的电容量约自几皮法至几千微法。采用碳纳米管可制作超大电容量的电容器，可望达数百法，这在传统观念上是不可思议的！

实际的电容器除了具备上述的存储电荷的主要性质外，还有一些漏电现象。这是由于介质不可能是理想的，多少有点导电能力的缘故。在这种情况下，电容器的模型中除了上述的电容元件外，还应增添电阻元件。

一个电容器，除了标明它的电容量外，还需标明它的额定工作电压。从(5－1)式可知，一个电容器两端的电压越高，聚集的电荷也就越多。但是每一个电容器允许承受的电压是有限度的，电压过高，介质就会被击穿。一般电容器被击穿后，它的介质就从原来不导电变成导电，丧失了电容器的作用。因此，使用电容器时不应超过它的额定工作电压。

§5－2　电容的 VCR

虽然电容是根据 $q-u$ 关系来定义的，如(5－1)式所示，但在电路分析中我们感兴趣的往往是元件的 VCR，本节推导电容的 VCR。

设电容如图 5－1 所示，且设电流 $i(t)$ 的参考方向箭头指向标注 $q(t)$ 的极板，这就意味着当 $i(t)$ 为正值时，正电荷向这一极板聚集，因而电荷 $q(t)$ 的变化率为正。于是，有

$$i(t)=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \tag{5-2}$$

又设电压 $u(t)$ 和 $q(t)$ 参考方向一致，则对线性电容，得

$$q(t)=Cu(t) \tag{5-3}$$

以(5－3)式代入(5－2)式得

$$i(t)=\frac{\mathrm{d}Cu}{\mathrm{d}t}=C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \tag{5-4}$$

这就是电容的 VCR，其中涉及对电压的微分。显然，这一公式在 u 和 i 参考方向一致的前提下才能使用。如 u 和 i 的参考方向不一致，则

$$i(t)=-C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \tag{5-5}$$

(5－4)式表明：在某一时刻电容的电流取决于该时刻电容电压的变化率。如果电压不变，那么$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$为零，虽有电压，但电流为零，因此，电容有隔直流的作用。电容电压变化越快，即$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$越大，则电流也就越大。这是因为电容聚集电荷，当两端电压发生变化时，聚集的电荷也相应地发生变化，这时才会有电荷在电路

的导线中移动，形成电流[①]，当两端电压不变时，电荷也不变化，这时虽有电压，但电容中并没有电流。这和电阻元件完全不同，电阻两端只要有电压（不论是否变化），电阻中就一定有电流。

也可以把电容的电压 u 表示为电流 i 的函数。由(5-4)式可得

$$u(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\xi)\,\mathrm{d}\xi \tag{5-6}$$

如果只需了解在某一任意选定的初始时刻 t_0 以后电容电压的情况，可以把(5-6)式写为

$$u(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t_0} i(\xi)\,\mathrm{d}\xi+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

亦即

$$u(t)=u(t_0)+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\xi)\,\mathrm{d}\xi \qquad t\geqslant t_0 \tag{5-7}$$

由(5-6)式可知：在某一时刻 t 电容电压的数值并不取决于该时刻的电流值，而取决于从 $-\infty$ 到 t 所有时刻的电流值，也就是说与电流全部过去历史有关。这是因为电容是聚集电荷的元件，电容电压反映聚集电荷的多寡，而电荷的聚集是电流从 $-\infty$ 到 t 长期作用的结果。研究问题总有一个起点，即总有一个初始时刻 t_0，那么(5-7)式又告诉我们：没有必要去了解 t_0 以前电流的情况，t_0 以前全部历史情况对未来（$t>t_0$ 时）产生的影响可以由 $u(t_0)$，即电容的初始电压来反映。也就是说，如果知道了由初始时刻 t_0 开始作用的电流 $i(t)$ 以及电容的初始电压 $u(t_0)$，就能确定 $t\geqslant t_0$ 时的电容电压 $u(t)$。

电容是聚集电荷的元件，(5-4)式和(5-6)式实际上是分别从电荷变化的角度和电荷积累的角度来描述电容的 VCR 的。

例 5-1　电容与电压源相接如图 5-2(a)所示，电压源电压随时间按三角波方式变化如图 5-2(b)所示，求电容电流。

解　已知电源两端电压 $u(t)$，求电流可用(5-4)式。

从 0.25 ms 到 0.75 ms 期间，电压 u 由 +100 V 线性下降到 −100 V，其变化率

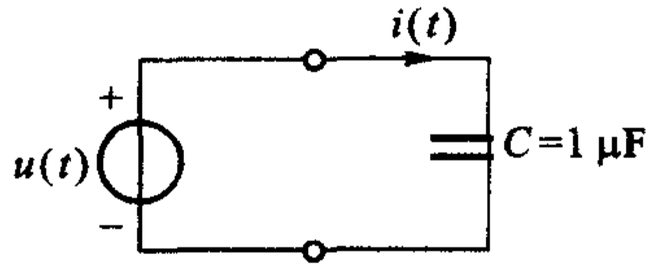
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-\frac{200}{0.5}\times 10^{3}\ \mathrm{V/s}=-4\times 10^{5}\ \mathrm{V/s}$$

故知在此期间，电流

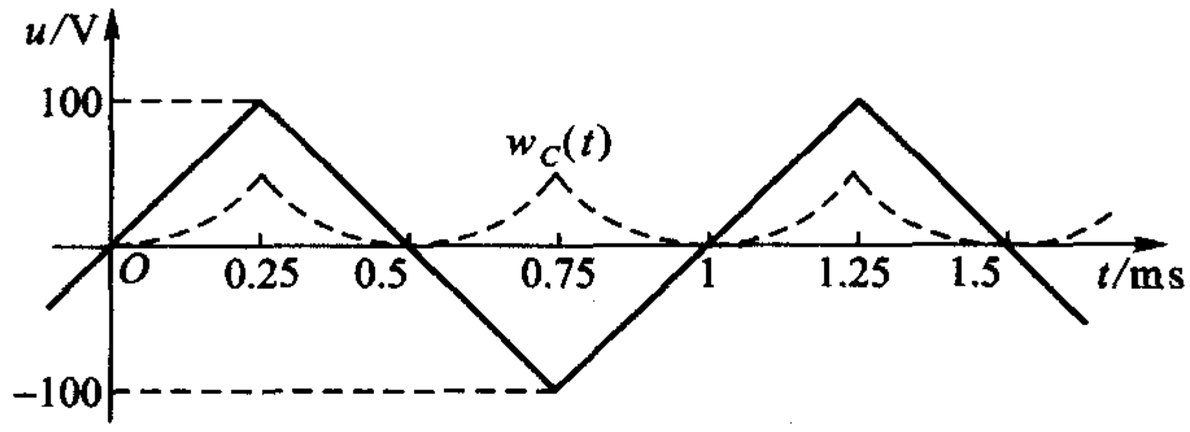
$$i=C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-10^{-6}\times 4\times 10^{5}\ \mathrm{A}=-0.4\ \mathrm{A}$$

---

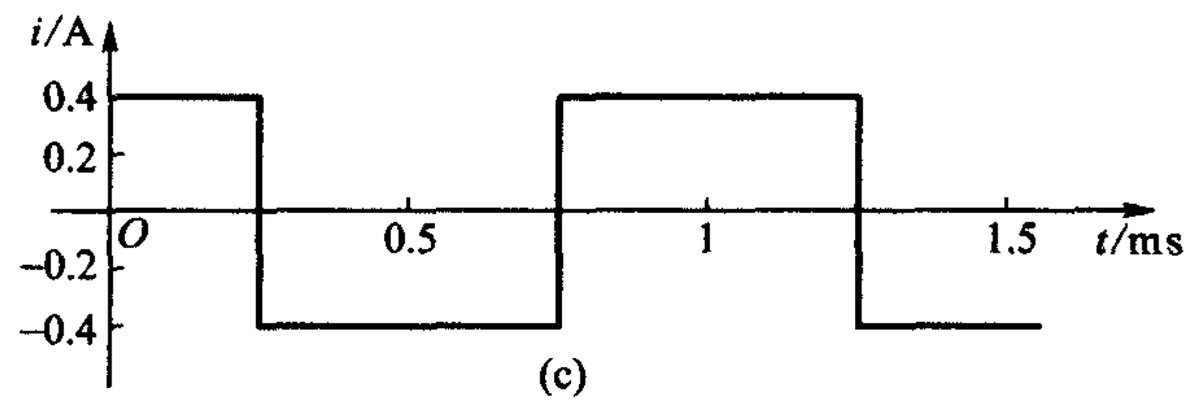
① 电流是以位移电流的形式通过介质的。介质中的电场强度发生变化时才能产生位移电流。



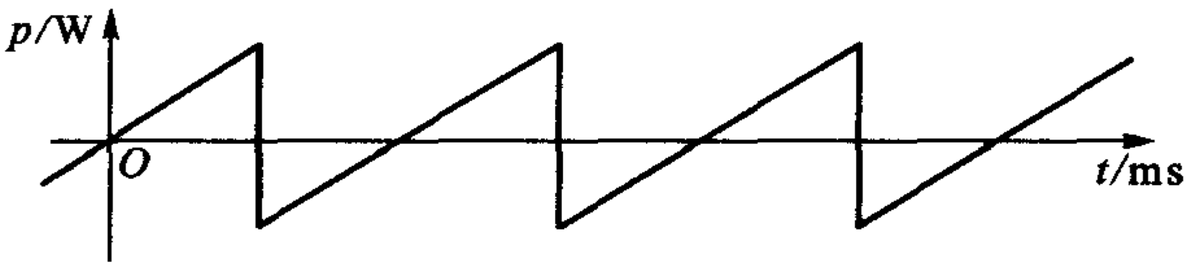
(a)



(b)



(c)



(d)

图 5－2　线性电容对三角波电压源的响应

从 0.75 ms 到 1.25 ms 期间

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{200}{0.5}\ \mathrm{V/s}=4\times10^{5}\ \mathrm{V/s}$$

故知在此期间

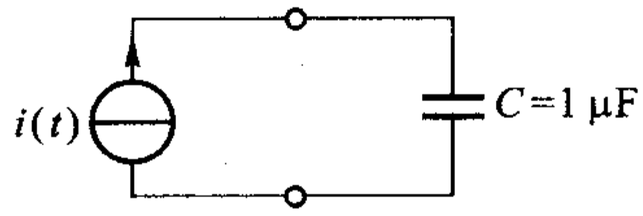
$$i=C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=10^{-6}\times4\times10^{5}\ \mathrm{A}=0.4\ \mathrm{A}$$

故得电流随时间变化的曲线(波形图)如图 5－2(c)中所示。

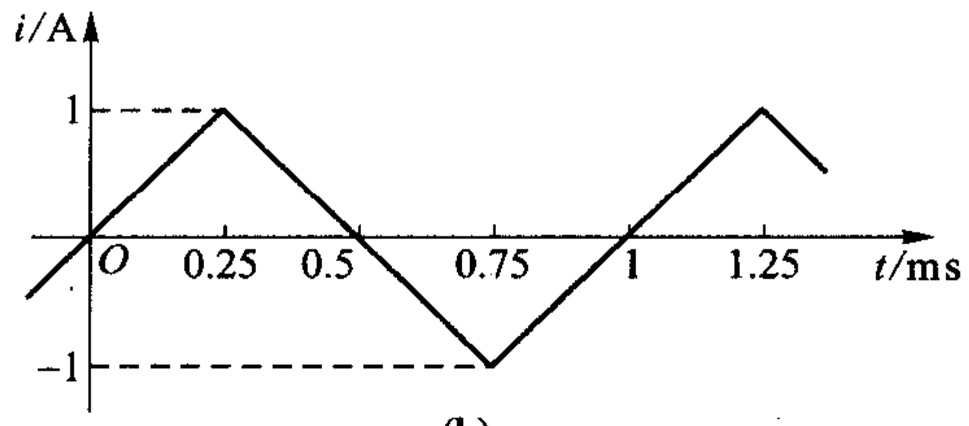
从本例可见电容的电压波形和电流波形是不相同的,这一情况和电阻元件所表现的情况是不同的。

例 5－2　设图 5－2 所示电容改为与一电流源相接,如图5－3(a)所示,电流波形如图 5－3(b)中所示,试求电容电压。设 $u(0)=0$。

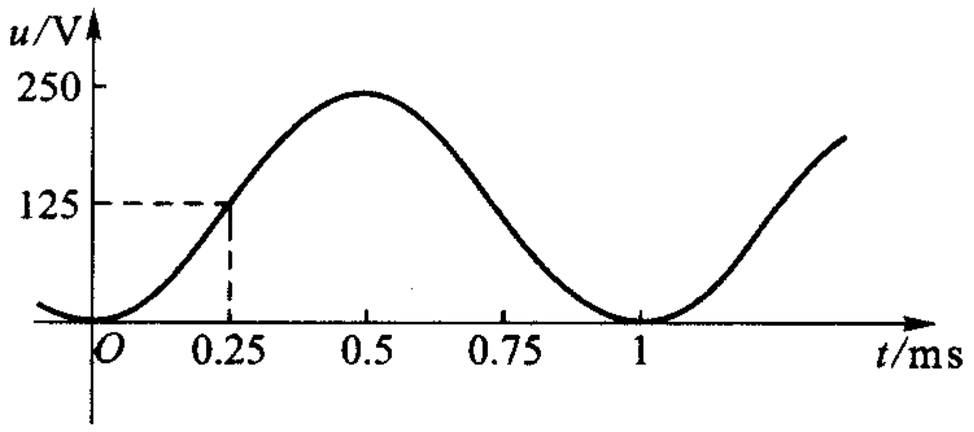
解　已知电容电流求电容电压时,可用(5－7)式。为此必须写出 $i(t)$ 的函数式,对所示三角波可分段写为



(a)



(b)



(c)

图 5－3　线性电容对三角波电流源的响应

$$i = \frac{1}{0.25\times10^{-3}}t\ \text{A} = 4\,000t\ \text{A} \qquad 0 \leqslant t \leqslant 0.25\times10^{-3}\text{s}$$

$$i = -4\,000(t-0.5\times10^{-3})\ \text{A}$$

$$= (-4\,000t+2)\ \text{A} \qquad 0.25\times10^{-3}\text{s} \leqslant t \leqslant 0.75\times10^{-3}\text{s}$$

$$i = 4\,000(t-10^{-3})\ \text{A}$$

$$= (4\,000t-4)\ \text{A} \qquad 0.75\times10^{-3}\text{s} \leqslant t \leqslant 1.25\times10^{-3}\text{s}$$

等等。利用(5－7)式,分段计算 $u(t)$:

$0 \leqslant t \leqslant 0.25\times10^{-3}$ s 期间

$$u(t) = u(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

$$= 10^6\int_0^t 4\,000\xi\,\mathrm{d}\xi = 2\times10^9 t^2\ \text{V}$$

电压随时间按抛物线规律上升,当 $t = 0.25$ ms 时,电压为 125 V。

$0.25\times10^{-3}\text{s} \leqslant t \leqslant 0.75\times10^{-3}$ s 期间

$$u(t) = u(0.25\times10^{-3}) + \frac{1}{C}\int_{0.25\times10^{-3}}^t i(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

$$= (125\ \text{V}) + 10^6\int_{0.25\times10^{-3}}^t (-4\,000\xi+2)\,\mathrm{d}\xi$$

$$= (-250 + 2 \times 10^6 t - 2 \times 10^9 t^2)\ \text{V}$$

此为一开口向下的抛物线方程，其顶点在 $t = 0.5$ ms、$u = 250$ V 处。当 $t = 0.75$ ms 时，电压下降到 125 V。

$0.75 \times 10^{-3}\text{s} \leqslant t \leqslant 1.25 \times 10^{-3}\text{s}$ 期间

$$u(t) = u(0.75 \times 10^{-3}) + \frac{1}{C}\int_{0.75\times10^{-3}}^{t} i(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

$$= (125\ \text{V}) + 10^6 \int_{0.75\times10^{-3}}^{t} (4\,000\xi - 4)\,\mathrm{d}\xi$$

$$= (2\,000 - 4 \times 10^6 t + 2 \times 10^9 t^2)\ \text{V}$$

此为一开口向上的抛物线方程，其顶点在 $t = 1$ ms，$u = 0$ 处。

电压波形如图 5-3(c)所示。

从定积分的几何意义可知：若 $i(t) \geqslant 0$，(5-7)式中的定积分就表示位于曲线 $i(t)$ 下方，由 t 轴积分的上、下限所围成的图形的面积。该面积随着 t 的变动而变化。据此，也可从求该面积着手求解本例。

思考题

5-1　一个 1 F 的电容，在某一时刻，其两端的电压为 10 V，能否算出该时刻的电流是多少？为什么？

如果已知电压为 $u = 5t^2$，且在某一时刻的瞬时值为 10 V，结果又如何？

5-2　(1) 试根据例 5-1 中分析所得的，在 $t = 0$、0.25、0.5、0.75、1、1.25 ms 时的一组 u 和 i 的数据，绘出该电容的 $u-i$ 特性曲线草图；

(2) 试根据例 5-2 分析结果，重复(1)；

(3) 同为一个 1 μF 的电容，(1)、(2)结果是否相同？

5-3　从例 5-1 和例 5-2 可知，电容的电压和电流波形是不相同的，你能根据微分的基本知识举出一个波形相同的例子么？

练习题

5-1　图 5-4(a)所示电压 u 施加于一电容 C，如图 5-4(b)所示。试求 $i(t)$，并绘出波形图。

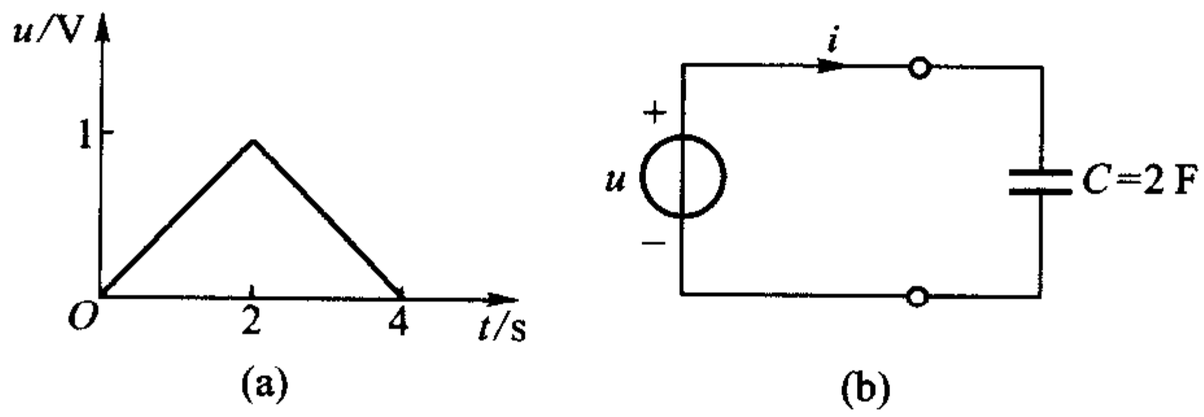


图 5-4　练习题 5-1

5-2　电流源的电流波形如图5-5(a)所示，施加于2F电容上，如图5-5(b)所示。设$u(0)=0$，试求$u(t)$，并绘出波形图。

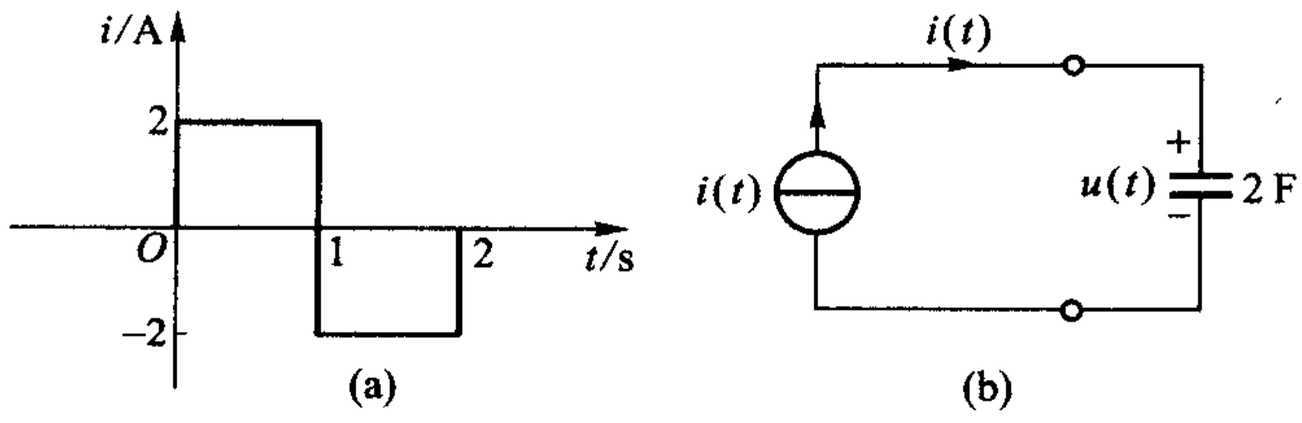


图5-5　练习题5-2

5-3　接续上题，若$u(0)=-\frac{1}{2}$V，重复上题所求各项。

§5-3　电容电压的连续性质和记忆性质

为了强调电容的这两种属性，在本节的讨论中，电容电压不省略下标，记为u_C，(5-7)式所示的电容VCR可写为

$$u_C(t)=u_C(t_0)+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\xi)\,\mathrm{d}\xi \quad t\geqslant t_0$$

该式反映出电容电压的两个重要性质，即电容电压的连续性质和记忆性质。

设想作用于电容的电流波形如图5-6(a)所示，若$u_C(0)=0$，则不难根据例5-2所示方法求得的电容电压如图5-6(b)所示。十分明显，电容电流波形是不连续的而电容电压波形却是连续的。这是电容电压连续性质的表现。如对例5-1所示电容电流和电容电压加以比较，也不难看出这点。如对例5-2所示两波形加以比较，则虽然电压波形与电流波形均为连续的但电压波形却比电流波形更为“平滑”。

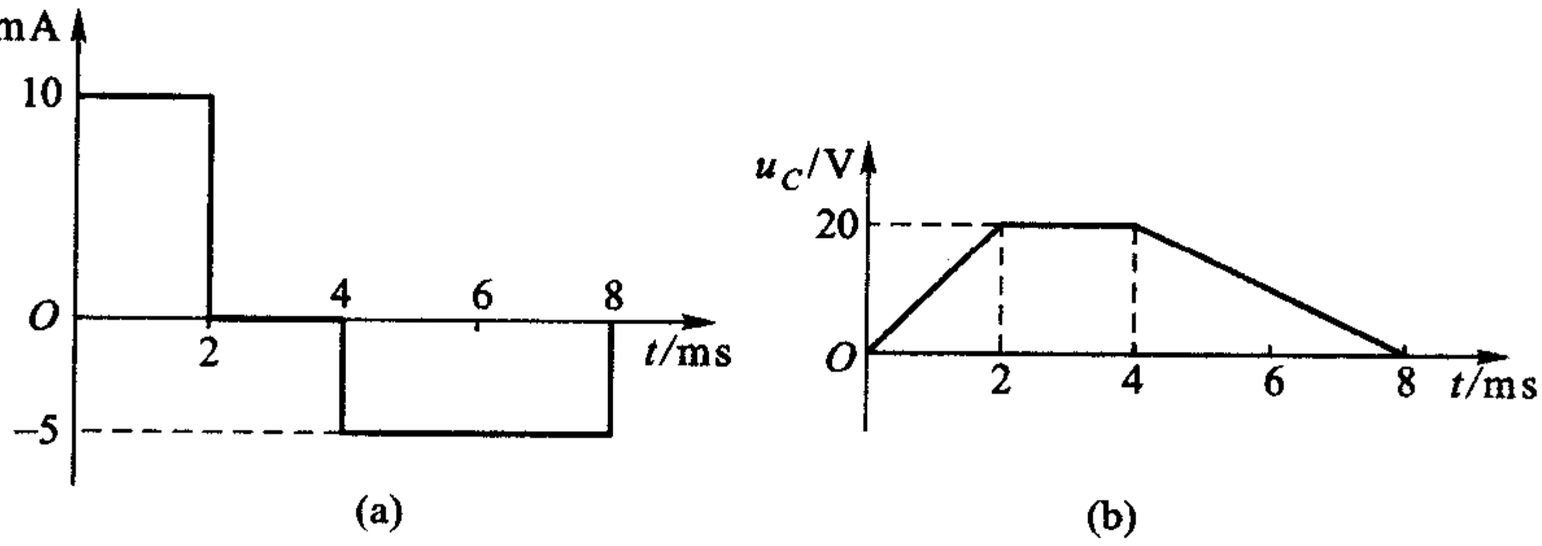


图5-6　1 μF电容的电流及电压波形

电容电压的连续性质可陈述如下：

若电容电流 $i(t)$ 在闭区间 $[t_a、t_b]$ 内为有界的，则电容电压 $u_C(t)$ 在开区间 $(t_a、t_b)$ 内为连续的。特别是[①]，对任何时刻 t，且 $t_a < t < t_b$，

$$u_C(t_-) = u_C(t_+) \tag{5-8}$$

证明　在区间上每一点都连续的函数，称为在该区间的连续函数。任取一点 t，以 t 和 $t+\mathrm{d}t$ 分别作为(5-7)式中积分的上、下限，且 $t_a < t < t_b$ 和 $t_a < t+\mathrm{d}t \leqslant t_b$，则

$$u_C(t+\mathrm{d}t) = u_C(t) + \frac{1}{C}\int_t^{t+\mathrm{d}t} i(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

即

$$u_C(t+\mathrm{d}t) - u_C(t) = \frac{1}{C}\int_t^{t+\mathrm{d}t} i(\xi)\,\mathrm{d}\xi \tag{5-9}$$

由于 $i(t)$ 在 $[t_a、t_b]$ 内为有界的，对所有在 $[t_a、t_b]$ 内的 t，必存在一个有限常数 M，使 $|i(t)| < M$。因而在曲线 $i(t)$ 下由 t 轴和上、下限所界定的图形的面积充其量为 $M\mathrm{d}t$，且当 $\mathrm{d}t \to 0$ 时该面积也将趋于零，根据(5-9)式，这就意味着当 $\mathrm{d}t \to 0$ 时，$u_C(t+\mathrm{d}t) \to u_C(t)$，亦即在 t 处，u_C 是连续的。 ◀

(5-8)式常归结为“电容电压不能跃变”，在动态电路分析问题中常常用到这一结论，但需注意应用的前提。当电容电流为无界时就不能运用。

(5-6)式还反映出电容电压的另一性质——记忆性质。

从(5-6)式可知，某一时刻的电容电压取决于在此之前电流的全部历史，因此，可以说电容电压有“记忆”电流的性质，电容是一种记忆元件。通常只知道在某一初始时刻 t_0 后作用于电容的电流情况，而对在此之前电容电流的情况并不了解，因此，(5-7)式是一个更有实际意义的、反映电容电压记忆性质的关系式。在该式中利用初始电压 $u_C(t_0)$ 表明 $t < t_0$ 时电流的记忆作用，因此得以不必过问 $t < t_0$ 时电流的具体情况，即能在 $t \geqslant t_0$ 时的电容电压 $u_C(t)$ 中考虑到它的影响。在含电容的动态电路分析问题中，这是一个十分重要的概念，因而电容的初始电压是一个解题时必须具备的条件。

(5-7)式所示关系可以用等效电路来表明。设电容的初始电压 $u_C(t_0) = U_0$[图 5-7(a)]，由(5-7)式可得

$$u_C(t) = u_C(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\,\mathrm{d}\xi$$

---

① 本书用 $f(t_-)$ 和 $f(t_+)$ 分别表示函数 $f(t)$ 在 t 点的左极限和右极限，未采用一般数学教材中 $f(t-0)$ 和 $f(t+0)$ 的记法，以求简便。

$$= u_C(t_0) + u_1(t)$$

$$= U_0 + u_1(t) \qquad t \geqslant t_0 \tag{5-10}$$

由此可知：一个已被充电的电容，若已知 $u_C(t_0) = U_0$，则在 $t \geqslant t_0$ 时可等效为一个未充电的电容与电压源相串联的电路，电压源的电压值即为 t_0 时电容两端的电压 U_0，如图 5-7(b)所示。电压 U_0 称为电容电压 u_C 的初始状态。

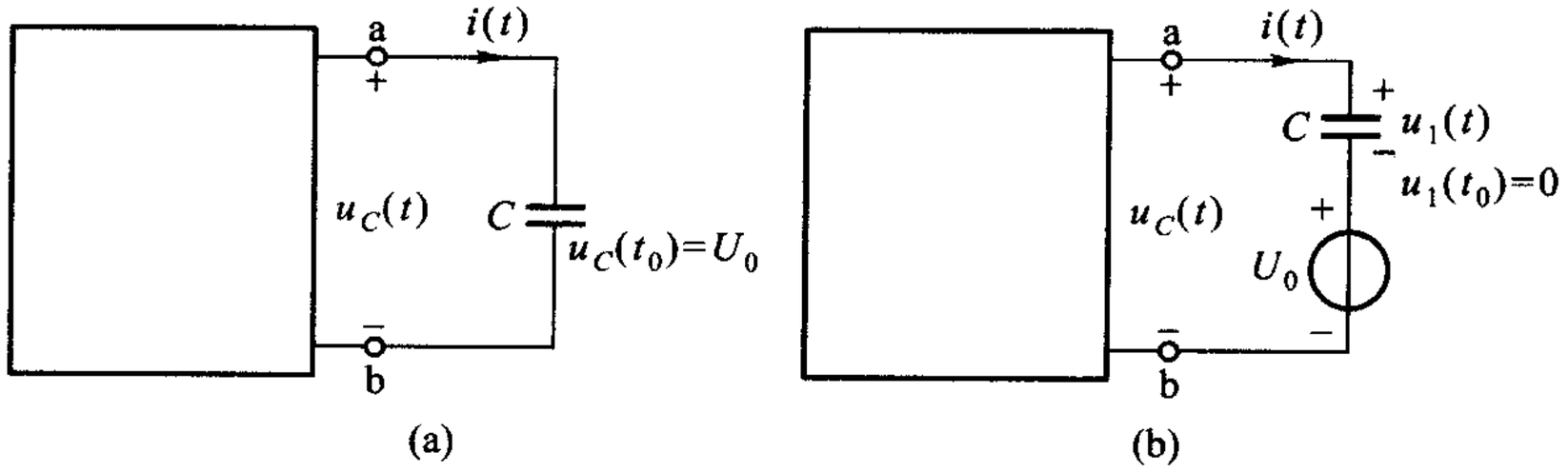


图 5-7　具有初始电压 U_0 的电容[图(a)]及其在 $t \geqslant t_0$ 时的等效电路[图(b)]

例 5-3　电容元件如图 5-1 所示，已知 $C = 4\text{F}$，对所有 t，$i(t)$ 波形如图 5-8(a)所示。(1) 试求电容电压 $u_C(t)$、$t \geqslant 0$；(2) 求 $u_C(0)$、$u_C(1)$、$u_C(-0.5)$；(3) 试作出 $t \geqslant 0$ 时该电容的等效电路。

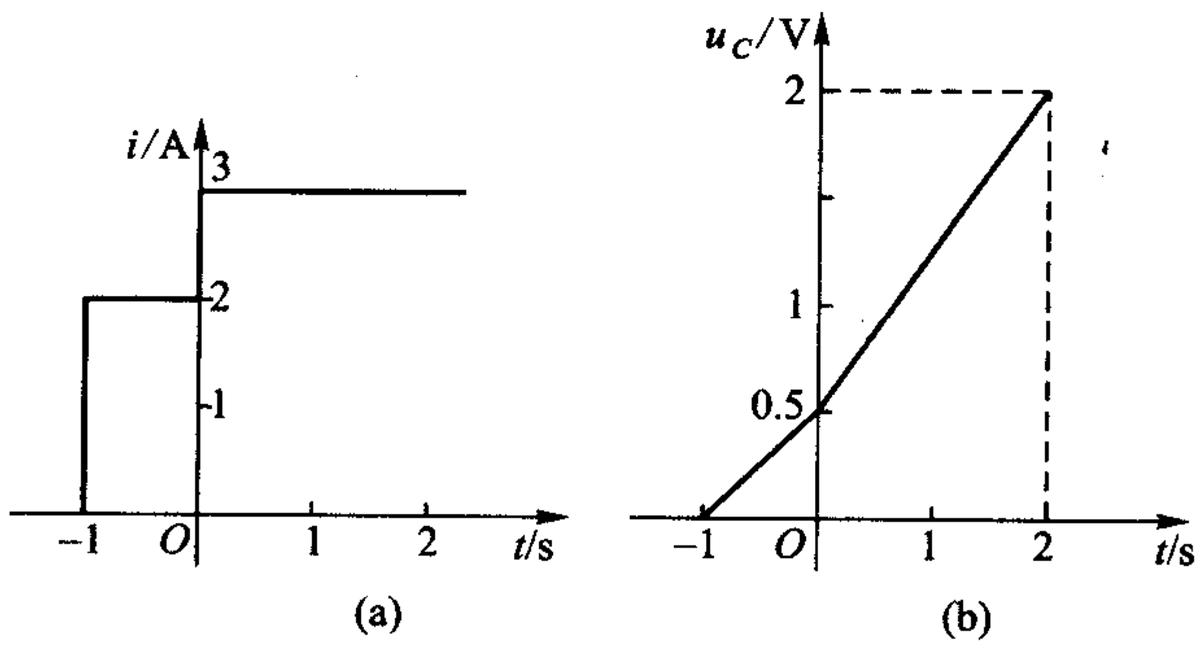


图 5-8　例 5-3(1)、(2)

解　(1)

$$u_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i\,\mathrm{d}\xi$$

$$= \frac{1}{4}\left[\int_{-\infty}^{0} i\,\mathrm{d}\xi + \int_{0}^{t} i\,\mathrm{d}\xi\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\int_{-1}^{0} 2\,\mathrm{d}\xi + \int_{0}^{t} 3\,\mathrm{d}\xi\right] \qquad \text{对所有 } t$$

得　　$u_C(t) = (0.5\ \text{V}) + \frac{3}{4}\int_0^t \mathrm{d}\xi = (0.5 + 0.75t)\ \text{V}$　　$t \geqslant 0$

对所有 t，波形如图 5－8(b)所示。

(2)　　$u_C(0) = 0.5\ \text{V}$

$$u_C(1) = (0.5\ \text{V}) + \frac{3}{4}\int_0^1 \mathrm{d}\xi = (0.5 + 0.75)\ \text{V} = 1.25\ \text{V}$$

$$u_C(-0.5) = \frac{1}{C}\int_{-1}^{-0.5} i\mathrm{d}\xi$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-1}^{-0.5} 2\mathrm{d}\xi = 0.25\ \text{V}$$

(3) $t \geqslant 0$ 时 4F 电容的等效电路如图 5－9(a)所示，其中 $i_1(t)$ 波形如图 5－9(b)所示，亦即仅在 $t \geqslant 0$ 时波形与 $i(t)$ 一致，在 $t < 0$ 时，$i_1(t) = 0$，或表示为

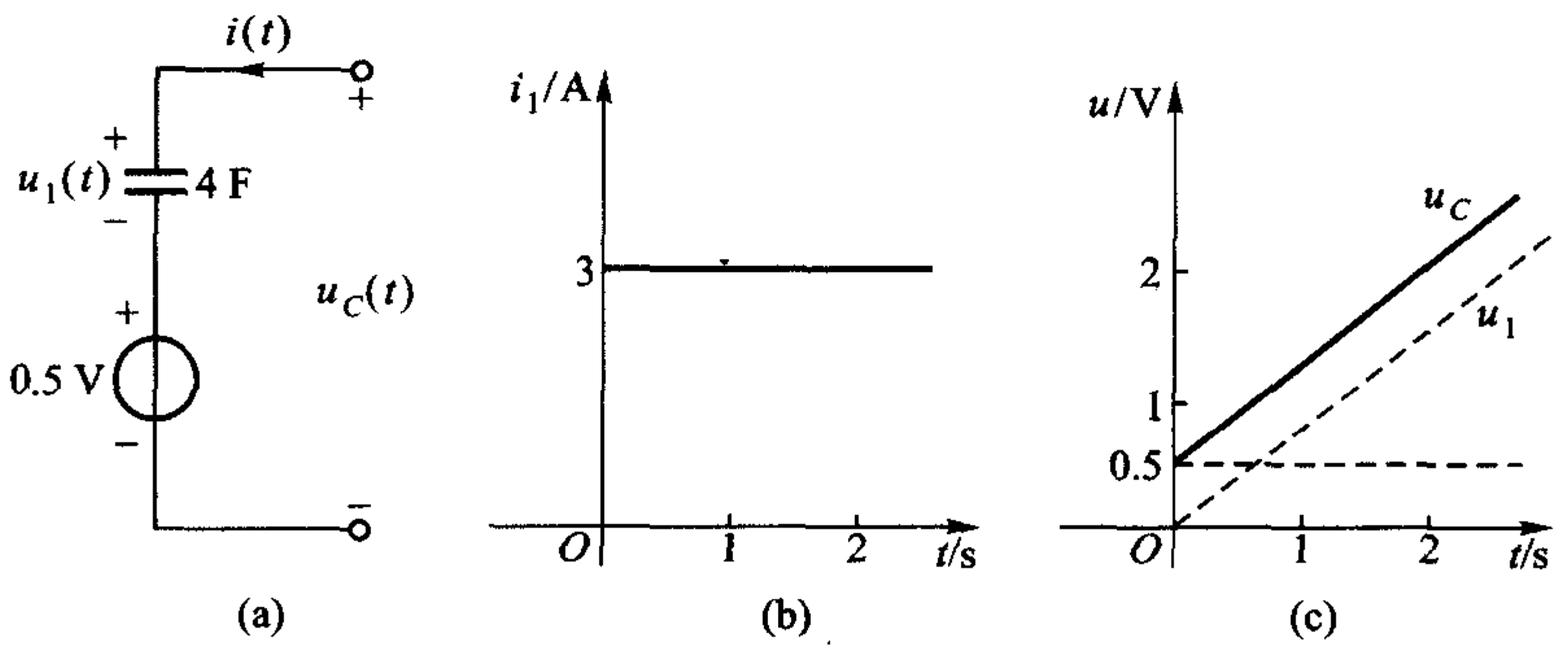
$$i_1(t) = i(t) \qquad t \geqslant 0$$

因此　　$u_1(t) = \frac{1}{4}\int_0^t 3\mathrm{d}t = 0.75t\ \text{V}$　　$t \geqslant 0$

$$u_C(t) = (0.5\ \text{V}) + u_1(t) = (0.5 + 0.75t)\ \text{V} \qquad t \geqslant 0$$

如图 5－9(c)所示。显然，运用 $t \geqslant 0$ 时的等效电路，毋需了解 $t < 0$ 时电流 i 或电路的具体状况，知道 $u_C(0)$ 的数值即可。$u_C(0)$ 是怎样形成的，不必过问，也可能无从过问。这正是电容电压记忆性的表现。

读者大概已经注意到，由图 5－8 可知流过电容的电流是不连续的，而电容电压却始终是连续的。



(a)　　(b)　　(c)

图 5－9　例 5－3(3)

思考题

5－4　某电容在 $t = 0$ 时电压为 U_0，在 $t = 0$ 时及在 $t \geqslant 0$ 时的等效电路各如何？

5－5　例 5－3 所示电容，在 $t \geqslant -0.5$ s 时和 $t \geqslant -1$ s 时的等效电路各如何？在 $t = 0$ 时，等效电路如何？

§5-4　电容的储能

电容是一种储能元件，已如§5-1中所述。本节讨论电容的储能公式。

先从电容的功率谈起。由§1-2可知，任何元件的功率都可由该元件两端电压 u 和流过的电流 i 的乘积来计算。若电压、电流都是随时间变化的，那么，算得的功率也是随时间变化的。每一瞬间的功率，称为瞬时功率，以符号 p 表示，则

$$p(t)=u(t)\cdot i(t) \tag{5-11}$$

其中 u、i 用关联的参考方向，p 为正值时表明该元件消耗或吸收功率，p 为负值时表明该元件提供或释放功率。

以例5-1所示电容来说，把同一瞬间的电压和电流相乘可逐点绘出功率随时间变化的曲线，称为功率波形图，如图5-2(d)中所示。从功率波形图可以看到：功率有时为正，有时为负，这和电阻的功率总为正值是大不相同的。电容功率的这个特点表明：电容有时吸收功率，有时却又放出功率。确实，如果考虑到

$$p=\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} \tag{5-12}$$

因而电容的能量 $w_C(t)$ 应为功率对时间 t 的积分，并由此绘出 w_C 的波形如图5-2(b)中所示(与 u 绘在一起)，就可看到电容的能量总是为正值，但有时增长，有时减少。在它增长的期间，亦即吸收能量的期间，功率 p 为正值；在 w_C 减少的期间，亦即放出能量的期间，功率 p 为负值。在一段时期，尽管电容吸收了能量，但在另一段时期，却又把它退还给了电源(或电路的其他部分)。该例表明电容是一种储能元件。根据第一章所述无源元件的定义(1-28)式，电容属无源元件。

下面进一步讨论电容的储能与什么因素有关，为简便计，略去电容电压 u_C 的下标 C。设在 t_1 到 t_2 期间对电容 C 充电，电容电压为 $u(t)$，电流为 $i(t)$，则在此期间供给电容的能量为

$$\begin{aligned}w_C(t_1,t_2)&=\int_{t_1}^{t_2}p(\xi)\,\mathrm{d}\xi=\int_{t_1}^{t_2}u(\xi)i(\xi)\,\mathrm{d}\xi\\&=\int_{t_1}^{t_2}Cu(\xi)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\xi=C\int_{u(t_1)}^{u(t_2)}u\,\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{2}Cu^2\Big|_{u(t_1)}^{u(t_2)}\\&=\frac{1}{2}C[u^2(t_2)-u^2(t_1)]\end{aligned} \tag{5-13}$$

由(5-13)式可知：在 t_1 到 t_2 期间供给电容的能量只与时刻 t_1 和 t_2 的电压值

$u(t_1)$和$u(t_2)$有关，与在此期间其他电压值无关。电容是储能元件，t_1到t_2期间供给电容的能量是用来改变电容的储能状况的，因此，(5－13)式中的$\frac{1}{2}Cu^2(t_2)$项应是表示t_2时刻电容储能的，即

$$w_C(t_2)=\frac{1}{2}Cu^2(t_2)$$

而另一项$\frac{1}{2}Cu^2(t_1)$则是表示t_1时刻电容储能的，即

$$w_C(t_1)=\frac{1}{2}Cu^2(t_1)$$

亦即电容C在某一时刻t的储能只与该时刻t的电压有关，即

$$w_C(t)=\frac{1}{2}Cu^2(t) \tag{5-14}$$

此即电容储能公式。电容电压反映了电容的储能状态。

由上述可知，正是电容的储能本质使电容电压具有记忆性质；正是电容电流在有界的条件下储能不能跃变使电容电压具有连续性质。如果储能跃变，能量变化的速率即功率$p=\frac{dw}{dt}$将为无限大，这在电容电流为有界的条件下是不可能的。

思考题

5－6　有人说：在电路中当电容两端有一定电压时，相应地也有一定的电流，因此，某时刻电容储能与该时刻的电压有关，也可以说成是与该时刻的电流有关。这样说，对不对？

练习题

5－4　5 μF电容的电压如图5－10所示（$t>4$ μs，电压为零）。

（1）试绘出电流波形图；

（2）试确定在$t=2$ μs及$t=10$ μs时电容的储能。

5－5　定值电流4A从$t=0$时开始对电容充电，$C=2$F。问在10 s后电容的储能是多少？100 s后储能又是多少？设电容初始电压为零。（400J；40 000J）

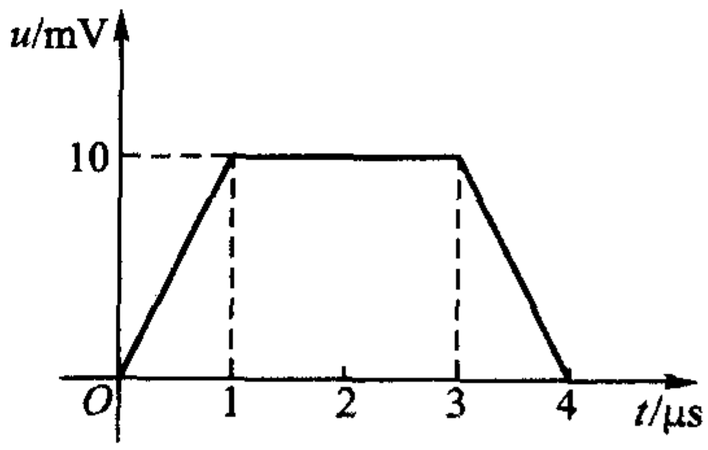


图5－10　练习题5－4

§5－5　电感元件

电路理论中的电感元件（inductor）又称自感元件，是（实际）电感器的理想化模型。

导线中有电流时，其周围即建立磁场。通常把导线绕成线圈如图 5－11 所示，以增强线圈内部的磁场，称为电感器或电感线圈。磁场也存储能量，因此电感线圈是一种能够存储磁场能量的器件。理想的电感器只具有产生磁通（存储磁场能量）的作用而无任何其他的作用，也就是说，理想电感器应是一种电流与磁链（flux linkage）相约束的器件。由此，可定义出一种电感元件作为电感器的理想化模型。电感元件的定义如下：一个二端元件，如果在任一时刻 t，它的电流 $i(t)$ 同它的磁链 $\Psi(t)$ 之间的关系可以用 $i-\Psi$ 平面上的一条曲线来确定，则此二端元件称为电感元件。亦即，电感元件的电流瞬时值与磁链瞬时值之间存在着一种代数关系。电感元件的符号如图 5－12 所示。在讨论 $i(t)$ 与 $\Psi(t)$ 的关系时，通常采用关联的参考方向，即两者的参考方向应符合右手螺旋法则。由于电感元件的符号并不显示绕线方向，在假定电流的流入端处标以磁链的“＋”号，这就表示，与该元件相对应的电感线圈中电流与磁链的参考方向符合右手螺旋法则。在图 5－12 中，“＋”、“－”号既表示磁链也表示电压的参考方向。

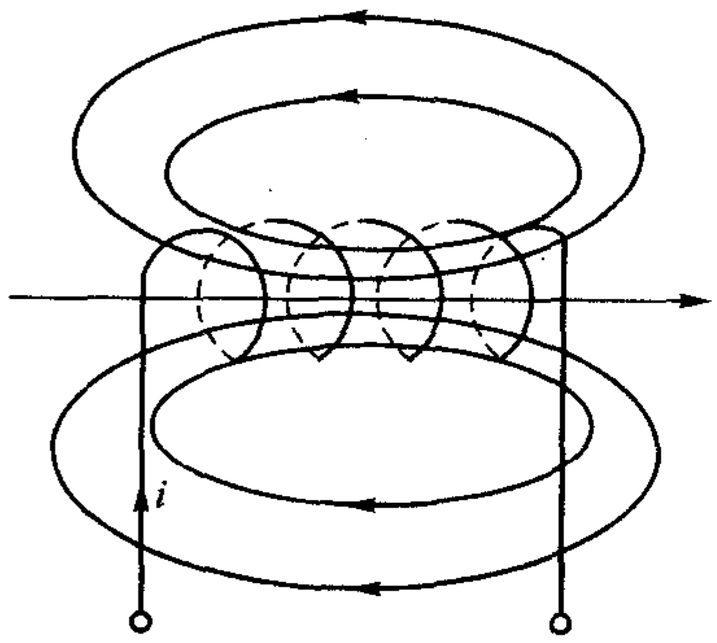


图 5－11　电感线圈及其磁通线

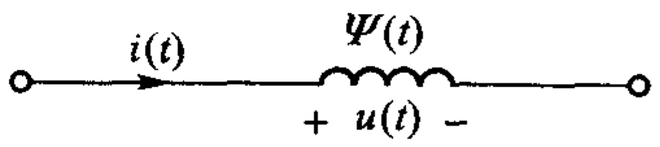


图 5－12　电感元件的符号

如果 $i-\Psi$ 平面上的特性曲线是一条通过原点的直线，且不随时间而变，则此电感元件称之为线性时不变电感元件，亦即

$$\Psi(t)=Li(t) \tag{5-15}$$

式中 L 为正值常数，它是用来度量特性曲线斜率的，称为电感（inductance）或自感（self inductance）①。国际单位制中，L 的单位为亨利（中文代号为亨，国际代号为 H）。习惯上也常把电感元件简称为电感或自感，并且，如不加申明，电感都系指线性时不变电感。当线圈周围的媒质为非铁磁物质时即属此种情况。

实际的电感器除了具备上述的存储磁能的主要性质外，还有一些能量损耗。这是由于构成电感器的导线多少有点电阻的缘故。在这种情况下，电感器的模

① 在本书中，自感是针对互感来说的，不涉及互感时，常用电感一词。

型中，除了上述的电感元件外，还应增添有电阻元件。

一个实际的电感线圈，除了标明它的电感量外，还应标明它的额定工作电流。电流过大，会使线圈过热或使线圈受到过大电磁力的作用而发生机械形变，甚至烧毁线圈。

为了使每单位电流产生的磁场增加，常在线圈中加入铁磁物质，其结果可以使同样电流产生的磁链比起不用铁磁物质时成百成千倍地增加，但 $\Psi - i$ 关系变为非线性的。

§5-6　电感的 VCR

虽然电感是根据 $\Psi - i$ 关系来定义的，在电路分析中我们感兴趣的往往是它的 VCR。当通过电感的电流发生变化时，磁链也相应地发生变化，根据电磁感应定律，电感两端出现（感应）电压；当通过电感的电流不变时，磁链也不发生变化，这时虽有电流但没有电压。这和电阻、电容元件完全不同，电阻是有电压就一定有电流；电容是电压变化才有电流；电感则是电流变化才有电压。

根据电磁感应定律，感应电压等于磁链的变化率。当电压的参考方向与磁链的参考方向符合右手螺旋法则时，可得

$$u = \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t} \tag{5-16}$$

若电流与磁链的参考方向符合右手螺旋法则，则可用（5－15）式所示电感的 $\Psi - i$ 关系式代入上式得

$$u = \frac{\mathrm{d}Li}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \tag{5-17}$$

这就是电感的 VCR，其中涉及对电流的微分。由以上推导过程可知，（5－17）式必须在电流、电压参考方向一致时才能使用。

（5－17）式表明：在某一时刻电感的电压取决于该时刻电流的变化率。如果电流不变，因而 $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ 为零，虽有电流，但电压为零，因此，电感对直流起着短路的作用。电感电流变化越快，即 $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ 越大，则电压也就越大。这是因为电感聚集磁链，它的电流发生变化时，聚集的磁链也相应地发生变化，这时才能发生电磁感应，产生电压；当电流不变时，磁链也不变化，这时虽有电流，电感两端并没有电压。

也可以把电感的电流 i 表示为电压 u 的函数，对(5－17)式积分，可得

$$i(t)=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}u(\xi)\,\mathrm{d}\xi=\frac{\Psi(t)}{L} \tag{5-18}$$

在任选初始时刻 t_0 以后，(5－18)式可表为

$$\begin{aligned}i_L(t)&=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t_0}u(\xi)\,\mathrm{d}\xi+\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t}u(\xi)\,\mathrm{d}\xi\\&=\frac{1}{L}\left[\Psi(t_0)+\int_{t_0}^{t}u(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right]\\&=i_L(t_0)+\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t}u(\xi)\,\mathrm{d}\xi\qquad t\geqslant t_0\end{aligned} \tag{5-19}$$

式中，电感电流未省略下标，记作 i_L。上式表明：在某一时刻 t 时的电感电流值取决于其初始值$i_L(t_0)$以及在$[t_0,t]$区间所有的电压值。

(5－17)式必须在 u、i 为关联参考方向时才能使用，这样，才能正确地反映楞次定律①。例如，在图 5－13(a)所示电感中，设电压 u 与电流 i 为关联参考方向，若电流在增长，亦即$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}>0$，则由(5－17)式可知此时 $u>0$，亦即感应电压的真实极性与参考极性一致，a 端应为高电位端，这正是反抗电流增长所应有的感应电压的极性。因此，(5－17)式能正确反映楞次定律。

在物理学中，感应电动势与磁链的关系表示为

$$e=-\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}=-L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \tag{5-20}$$

它与我们这里所用的 $u=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$如何统一呢？首先感应电压 u 和感应电动势 e 数值是相等的，在电路理论中，我们关心的是器件端钮上的表现，而对部件内部的物理过程并不感兴趣，因此，只用端钮间的电压 u 而不再另用电动势 e。其次，(5－20)式实际上也是有参考方向的规定的，那就是 e 与 i 的参考方向应一致，不这样规定，便不能反映楞次定律。由于 e 是指电压升，它的参考方向是指由“－”到“＋”的方向，故 e 与 i 参考方向一致时，其参考极性当如图 5－13 中所示。而如设 u 与 i 参考方向一致时，u 的“＋”“－”号与 e 的“＋”“－”号恰好相反。因此，对同一电流参考方向来说，e 与 i 参考方向一致以及 u 与 i 参考方向一致，必然导致 $e=-u$ 这一结果。即，在图 5－13 所示 i，e，u 参考方向的情况下，有

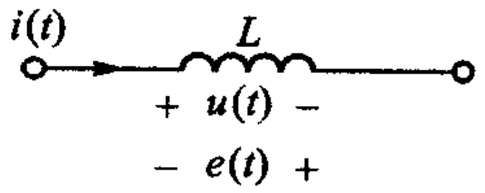


图 5－13　e 与 i 参考方向一致以及 u 与 i 参考方向一致的含义

$$u=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$$e=-u=-L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

① 楞次定律：与线圈相交链的磁通变化时，线圈两端就会产生力图阻碍这一变化的感应电压。

思考题

5－7　试标出图 5－14 所示电路中开关 S 打开瞬间，电感两端电压的极性。

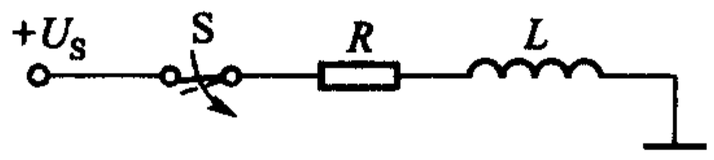


图 5－14　思考题 5－7

§5－7　电容与电感的对偶性　状态变量

如果将电容与电感的 VCR 加以比较，就会发现，把电容 VCR(5－4)式、(5－7)式中的 i 换以 u，u 换以 i，C 换以 L 就可得到电感的 VCR(5－17)式、(5－19)式；反之，通过类似的变换，也可由后者得到前者。因此，电容与电感是一对对偶量，这早已列入 §2－5，表 2－2 中。另外，由电容与电感的定义式即(5－1)式与(5－15)式可知电荷与磁链也是一对对偶量，见表 2－2。

根据对偶性，不难得出电感电流具有连续性质和记忆性质。若电感电压 $u(t)$ 在 $[t_a, t_b]$ 内为有界的，则对任何时刻 t，且 $t_a < t < t_b$

$$i_L(t_-) = i_L(t_+) \tag{5-21}$$

即“电感电流不能跃变”。电感元件也是一种记忆元件。

(5－19)式所示的关系也可以用等效电路来表明。设电感的初始电流为 $i_L(t_0) = I_0$[图 5－15(a)]，由(5－19)式可得

$$\begin{aligned} i_L(t) &= i_L(t_0) + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} u\,\mathrm{d}\xi \\ &= i_L(t_0) + i_1(t) \\ &= I_0 + i_1(t) \qquad t \geqslant t_0 \end{aligned} \tag{5-22}$$

由此可知，一个具有初始电流的电感，若已知 $i_L(t_0) = I_0$，则在 $t \geqslant t_0$ 时可等效为一个初始电流为零的电感与电流源的并联电路，电流源的电流值即为 t_0 时电感的电流 I_0[图 5－15(b)]，电流 I_0 称为 $t \geqslant t_0$ 时电感电流的初始状态。($t = t_0$ 时，等效电路又如何?)

这一等效电路也可由对偶关系直接得出。

电感也是一种储能元件，根据对偶关系，电感 L 在某一时刻 t 的储能只与该时刻的电流有关，即

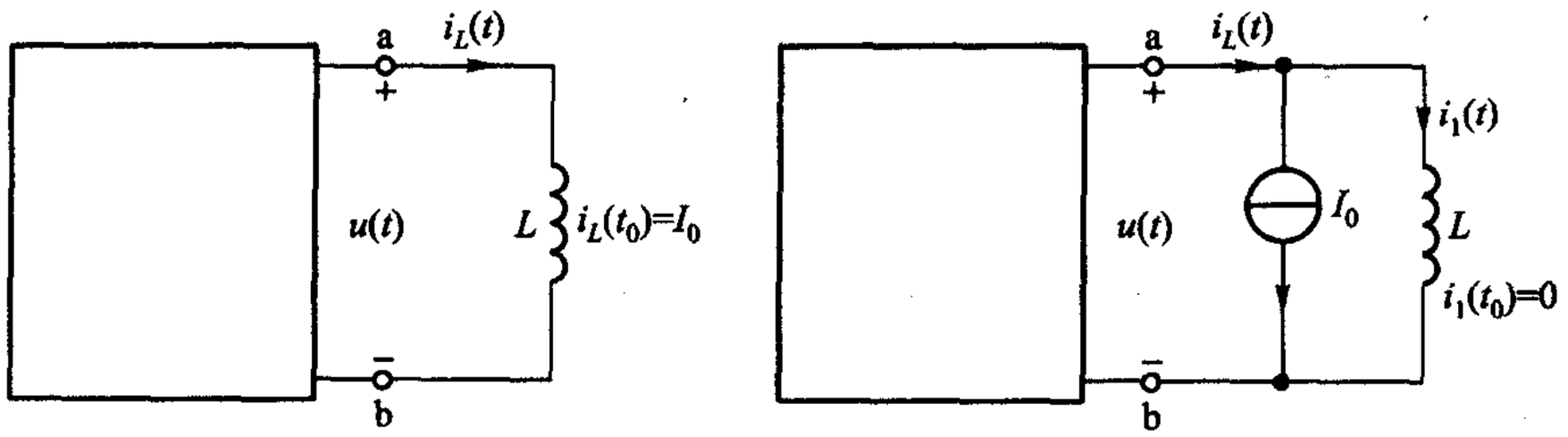


图 5－15　具有初始电流 I_0 的电感[图(a)]及其在 $t\geqslant t_0$ 时的等效电路[图(b)]

$$w_L(t)=\frac{1}{2}Li^2(t) \tag{5-23}$$

电感电流反映了电感的储能状态。

电感也属无源元件。

电感电流的连续性质和记忆性质正是电感储能本质的表现。

在动态电路的诸电压、电流变量中，电容电压 $u_C(t)$ 和电感电流 $i_L(t)$ 占有特殊的地位，它们是电路的状态(state)变量。

在电路及系统理论中，状态变量是指一组最少的变量，若已知它们在 t_0 时的数值(初始状态)，则连同所有在 $t\geqslant t_0$ 时的输入就能确定在 $t\geqslant t_0$ 时电路中的任何电路变量，电容电压 $u_C(t)$ 和电感电流 $i_L(t)$ 是符合这一定义的。全面地论述状态变量分析法已超出本书的范围，但本书将在随后的动态电路分析问题中把电容电压和电感电流作为主要的分析对象。

思考题

5－8　如果一个电感线圈两端的电压为零，是否可能有储能？(可结合练习题 5－6 的计算结果来说明。)

5－9　已知如图 5－12 所示电感的 $i(0_-)=5$ A，在 $t=0_+$ 时电感的等效电路如何？

练习题

5－6　流过 5 mH 电感的电流如图 5－16 所示，试求电感电压的波形(设电流与电压为关联参考方向)；并求 $t=1.5$ ms 和 $t=2.5$ ms 时电感的储能。

(562.5 nJ，250 nJ)

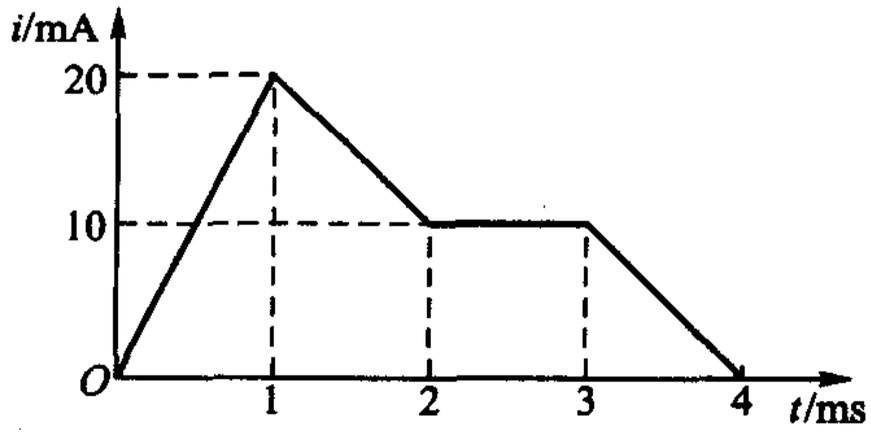


图 5－16　练习题 5－6



习题

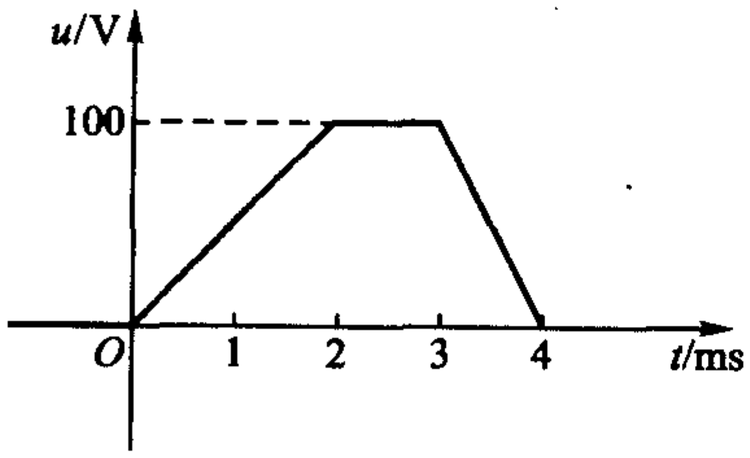
§5－2　电容的 VCR

5－1　(1) 1 μF 电容的端电压为 $100\cos(1\,000t)$ V，试求 $i(t)$。u 与 i 波形是否相同？最大值、最小值是否发生在同一时刻？

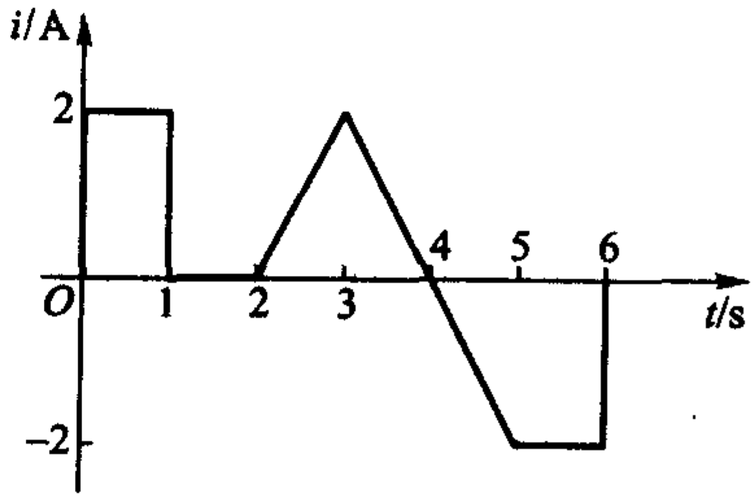
(2) 10 μF 电容的电流为 $10e^{-100t}$ mA，若 $u(0)=-10$ V，试求 $u(t)$，$t>0$。

5－2　考虑漏电现象，电容器可以用一个电容 C 与漏电阻 R 并联的电路作为模型。若某电容器的模型中 $C=0.1$ μF，$R=150$ kΩ，外施电压如图题5－1所示，试绘出电容器电流的波形。

5－3　0.1F 电容的电流如图题 5－2 所示，若 $u(0)=0$，试绘出电容电压的波形。



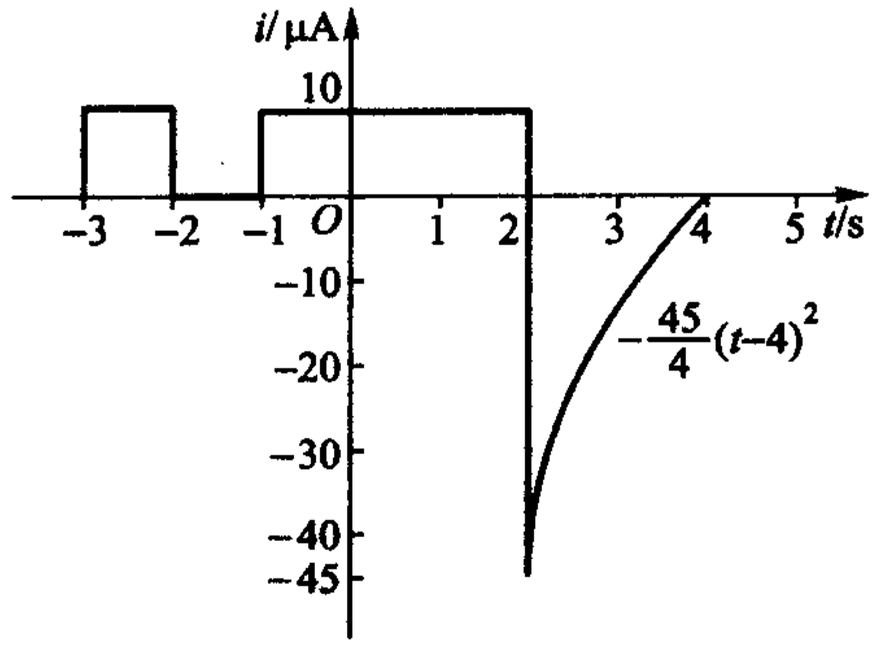
图题 5－1



图题 5－2

§5－3　电容电压的连续性质和记忆性质

5－4　流过 1.25 μF 电容的电流波形(对所有 t)，如图题 5－3 所示，求 $t>-1$，$t>0$ 和 $t>2$的等效电路。又，$t=0_+$ 时等效电路如何？



图题 5－3

§5－4 电容的储能

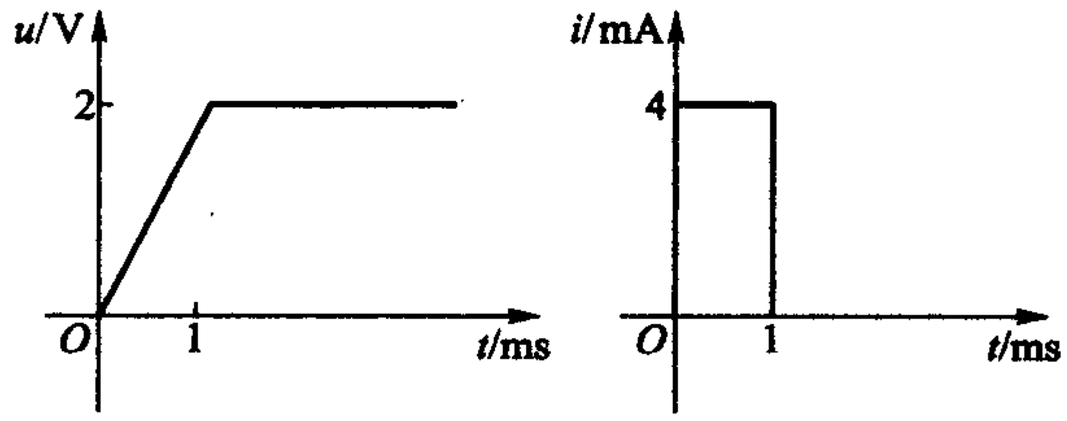
5－5 图题 5－4 所示为一电容的电压和电流波形。

(1) 求 C;

(2) 计算电容在 $0<t<1$ ms 期间所得到的电荷;

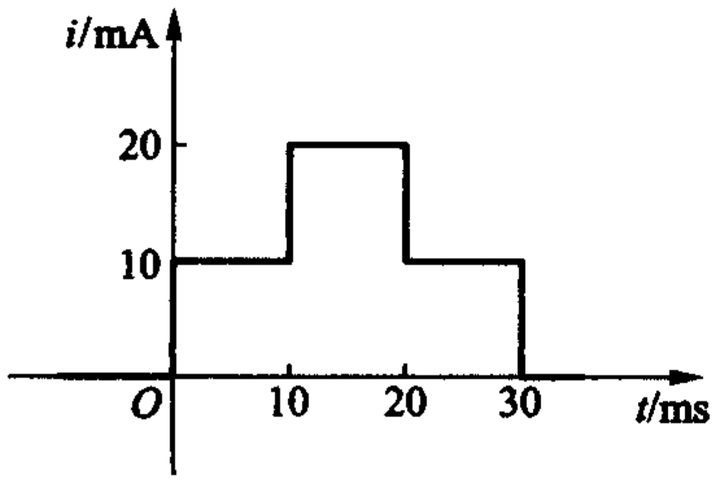
(3) 计算在 $t=2$ ms 时吸收的功率;

(4) 计算在 $t=2$ ms 时储存的能量。

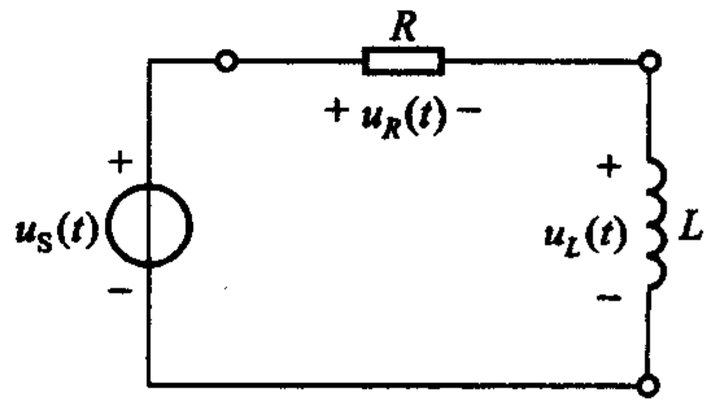


图题 5－4

5－6 作用于 25 μF 电容的电流如图题 5－5 所示。若 $u(0)=0$,试确定:(1) $t=17$ ms 及(2) $t=40$ ms 时的电压,吸收功率以及储能各为多少?



图题 5－5



图题 5－6

§5-6　电感的 VCR

5-7　在图题 5-6 所示电路中 $R=1\ \text{k}\Omega$，$L=100\ \text{mH}$，若

$$u_R(t)=\begin{cases}15(1-\mathrm{e}^{-10^4 t}) & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

其中 u_R 单位为 V、t 单位为 s。

(1) 求 $u_L(t)$，并绘波形图；

(2) 求电源电压 $u_S(t)$。

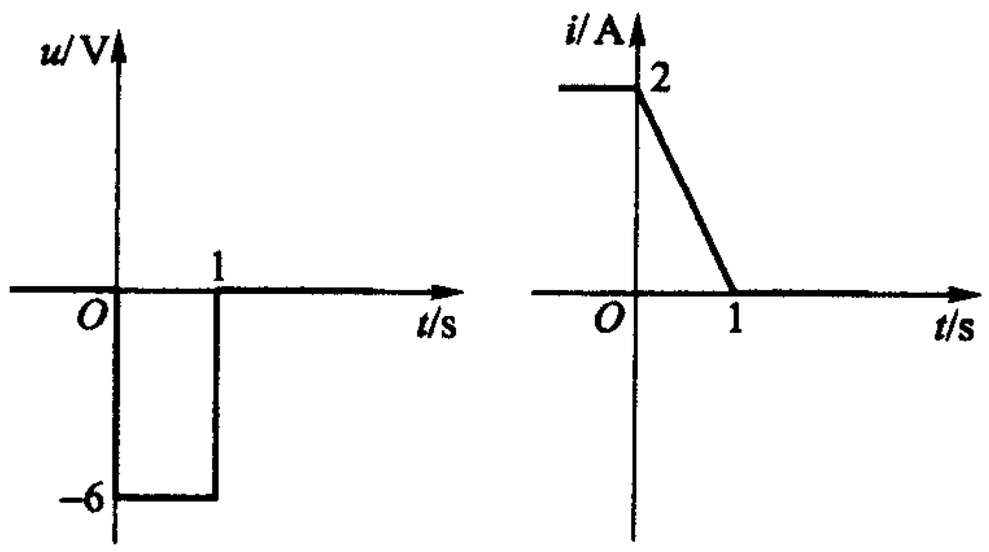
§5-7　电容与电感的对偶性　状态变量

5-8　在关联参考方向下某电感的电流及电压波形如图题 5-7 所示。

(1) 试求电感 L；

(2) 试求在 $0<t<1$ s 期间的 $w_L(t)$；

(3) 如果所示波形图时间轴的单位由 s 改变为 ms，重复(1)、(2)所求内容。



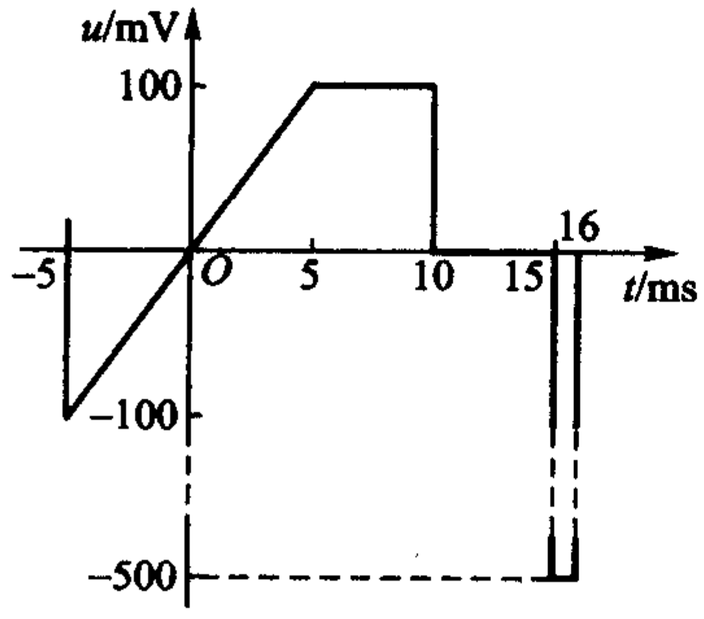
图题 5-7

5-9　2 mH 电感的电压如图题 5-8 所示，已知：$i=0$、$t<-5$ ms。

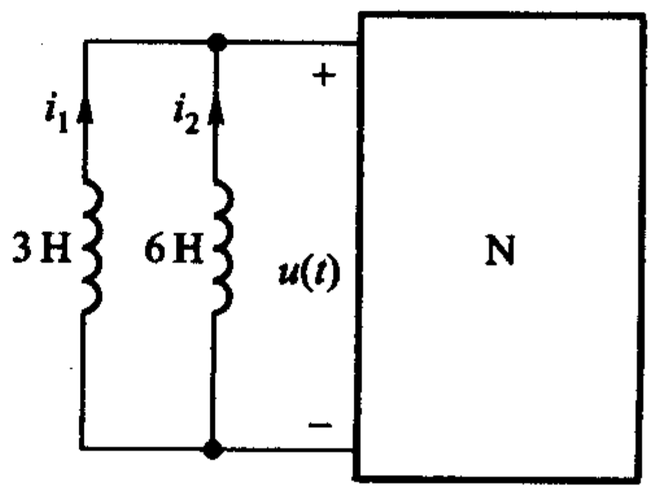
(1) 试绘出 $-5\ \text{ms}<t<20\ \text{ms}$ 期间电感电流波形(设电流、电压为关联参考方向)；

(2) 在什么时刻电感中的储能为最大？储能的最大值是多少？

(3) 绘出 $t\geqslant 0$ 时该电感的等效电路。



图题 5-8

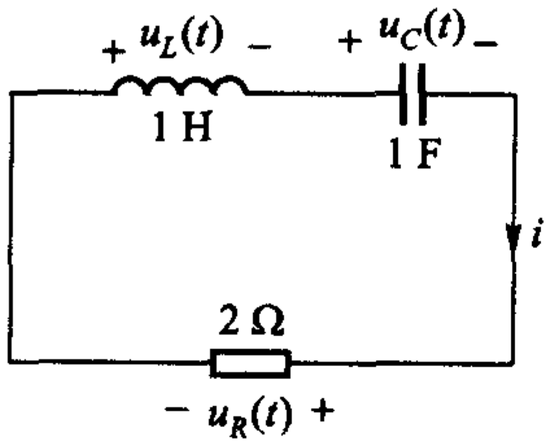


图题 5-9

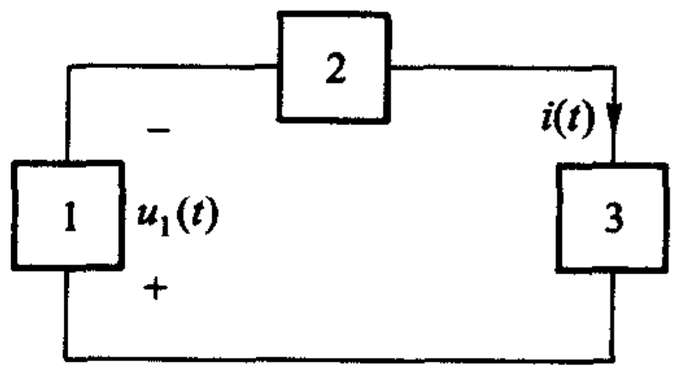
5－10　图题5－9所示两电感于$t=0$时接于黑箱N两端，已知$t\geqslant 0$时$u(t)=12e^{-t}V$，且$i_1(0)=2\ A$，$i_2(0)=4\ A$，试求$i_1(t)$和$i_2(t)$，$t\geqslant 0$。（提示：运用图5－15所示等效电路。）

综合

5－11　图题5－10所示电路中，已知$u_C(t)=te^{-t}V$。（1）求$i(t)$及$u_L(t)$，求$u_L(t)$要求用两种不同方法。（2）求电容储能达最大值的时刻，并求最大储能是多少？



图题5－10



图题5－11

5－12　已知图题5－11所示电路由一个电阻R，一个电感L和一个电容C组成。已知$i(t)=(10e^{-t}-20e^{-2t})\ A$，$t\geqslant 0$；$u_1(t)=(-5e^{-t}+20e^{-2t})\ V$，$t\geqslant 0$。若在$t=0$时，电路的总储能为25J，试求$R$、$L$、$C$之值。

第六章

一阶电路

不论是电阻电路还是动态电路，电路中的各支路电流和各支路电压都分别受 KCL 和 KVL 的约束，只是在动态电路中，来自元件性质的约束，除了电阻元件和电源元件的 VCR 外，还有电容和电感等动态元件的 VCR。后者需用微分或积分的形式来表示，已如上章所述。因此，线性、时不变动态电路要用线性、常系数常微分方程来描述。求解线性、时不变动态电路的问题涉及求解这类微分方程。

在实际工作中常遇到只含一个动态元件的线性、时不变电路，这种电路是用线性、常系数一阶常微分方程来描述的。用一阶微分方程来描述的电路称为一阶电路(first order circuit)。本书只限于讨论线性、时不变的动态电路，因此，以后所称的一阶电路都是指线性、时不变的一阶电路，所称的一阶微分方程也是指线性、常系数一阶常微分方程。

本章研究一阶电路。在本章中，将首先介绍第四章所述的分解方法在动态电路分析问题中的运用：求出电阻单口网络与动态元件相连处的状态变量后，再利用置换定理和电阻电路分析方法即可求出电路中其他任一变量。利用动态元件含初始值电源的等效电路，并根据叠加原理得出动态电路中零状态响应、零输入响应和全响应等三个重要概念，进而引入阶跃和冲激等两种典型信号作用下的零状态响应。叠加方法在本章中起着重要作用。作为本章的重点内容，可用于求直流[①]一阶电路中任一变量的三要素法，实际上便是叠加方法、分解方法综合运用的结果。

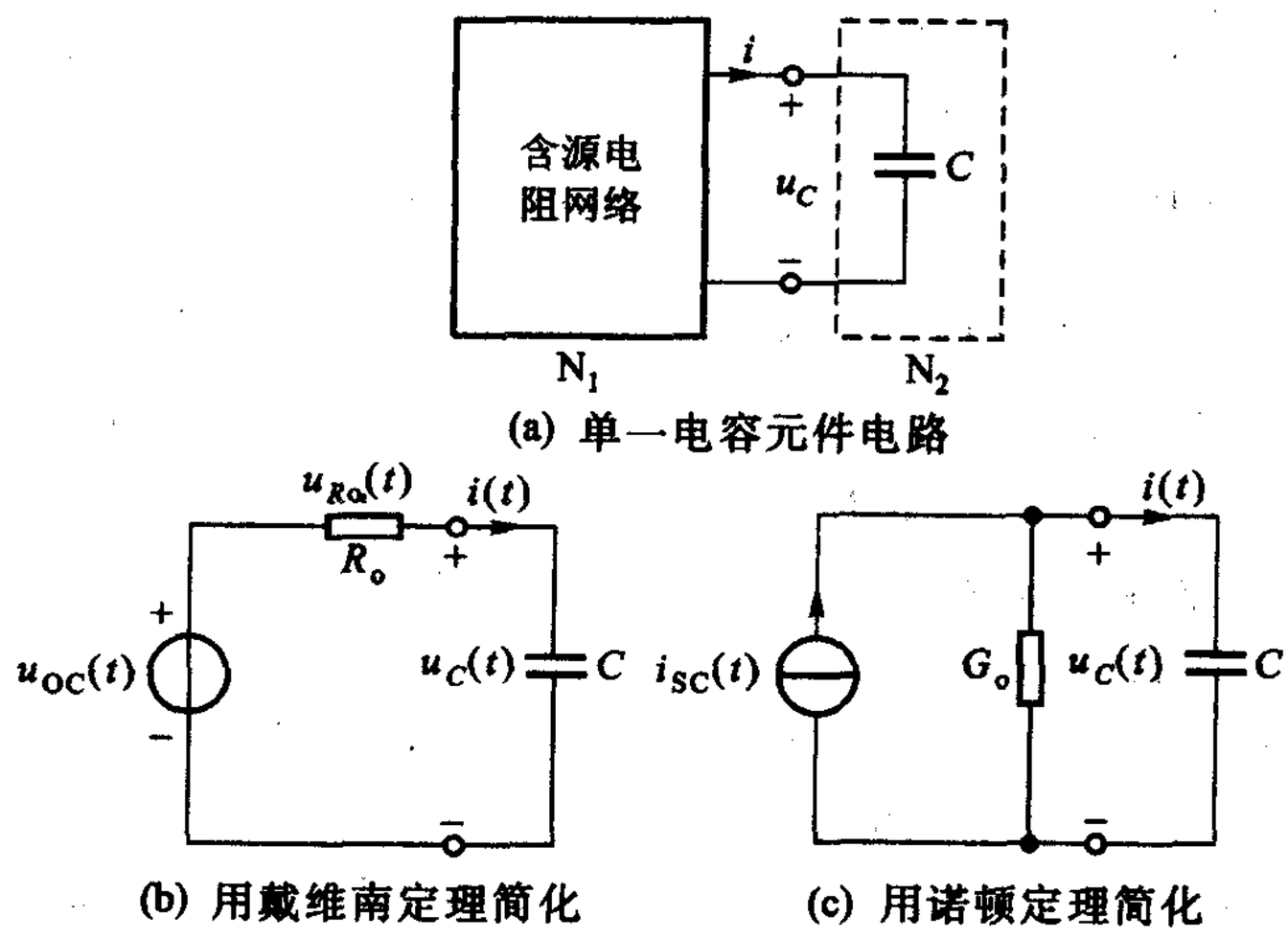
本章的大部分是从激励、响应的角度来论述一阶电路的，最后两节则是从动态电路工作状态的角度来论述，引出瞬态和稳态两个概念，其中正弦稳态的概念为第三篇中正弦稳态分析奠定基础。

---

① 直流电路的定义见 §1-5。请注意，此处直流一词系指电路中的直流电源(激励)而言。在直流线性时不变电阻电路中，直流电源产生的电流是不随时间而变的；在直流一阶电路中，直流电源产生的电流一般是随时间而变的。

§6-1　分解方法在动态电路分析中的运用

一阶电路可以按第四章§4-1所述的分解方法进行分析。这时，电路可看成由两个单口网络组成，其一含所有的电源及电阻元件，另一则只含一个动态元件。以电容为例，电路如图6-1(a)所示。含源电阻网络部分 N_1 用戴维南定理或诺顿定理化简后，电路将如图6-1(b)或(c)所示。由图6-1(b)或(c)，可以求得单口网络的端口电压，亦即电容电压 u_C。以图6-1(b)为例，由KVL可得



(a) 单一电容元件电路

(b) 用戴维南定理简化　　(c) 用诺顿定理简化

图6-1　按分解方法分析一阶电路举例

$$u_{R_0}(t) + u_C(t) = u_{OC}(t) \tag{6-1}$$

由元件VCR得

$$u_{R_0}(t) = R_0 i(t), i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} \tag{6-2}$$

以(6-2)式代入(6-1)式可得

$$R_0 C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + u_C(t) = u_{OC}(t) \tag{6-3}$$

类似地，对图6-1(c)电路，由KCL及元件的VCR可得

$$C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + G_0 u_C(t) = i_{SC}(t) \tag{6-4}$$

给定初始条件 $u_C(t_0)$ 以及 $t \geqslant t_0$ 时的 $u_{OC}(t)$ 或 $i_{SC}(t)$，便可由方程式(6-3)或(6-4)解得 $t \geqslant t_0$ 时的 $u_C(t)$。

一旦求得 $u_C(t)$，便可根据置换定理以电压源 $u_C(t)$ 去置换电容，使原电路

变换成为一个电阻电路，运用电阻电路的分析方法就可解得 $t \geqslant t_0$ 时所有的支路电流和电压。

对含电感 L 的一阶电路，在运用置换定理时可用电流为 $i_L(t)$ 的电流源去置换电感。而 $i_L(t)$ 为电感电流，则可由微分方程

$$L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} + R_o i_L(t) = u_{OC}(t) \tag{6-5}$$

或

$$G_o L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} + i_L(t) = i_{SC}(t) \tag{6-6}$$

并结合初始条件 $i_L(t_0)$ 求得。读者可自行利用图 6-1(b)、(c)，设想用电感 L 代替原来的电容 C，且令图中的电流 i 为 i_L 后得出上述微分方程。

因此，从分解方法观点上看，处理一阶电路最关键的步骤是求得 $u_C(t)$ 或 $i_L(t)$，即电路的状态变量（§5-7）。我们将着重分析如图 6-1(b)、(c)所示的含电容（电感）的这类简单的基本电路。并将 u_{OC}、i_{SC} 改为 u_S、i_S；R_o、G_o 改为 R、G。

§6-2　零状态响应

本节和随后的几节，讨论叠加方法在动态电路中的运用。

设在 $t = t_0$ 时图 6-1 所示电路中电容的电压为 $u_C(t_0)$，则根据图 5-7所示电容等效电路，可得出如图 6-2 所示电路在 $t \geqslant t_0$ 时的等效电路。从物理意义上来说，$u_C(t_0)$ 乃是 $t < t_0$ 时电流对电容充电的结果，如果我们关心的只是 $t \geqslant t_0$ 电路的表现，知道 $t = t_0$ 时的 $u_C(t_0)$ 值就足够了，不必追究它是如何来的。同时，在这电路中，也只需要知道 $u_S(t)$，$t \geqslant t_0$ 即可[①]。这里需要注意的是：尽管 u_S 在 $t = t_0$ 时可能是不连续的，但 $u_C(t_{0-}) = u_C(t_{0+})$，即电容电压在 $t = t_0$ 时却是连续的。

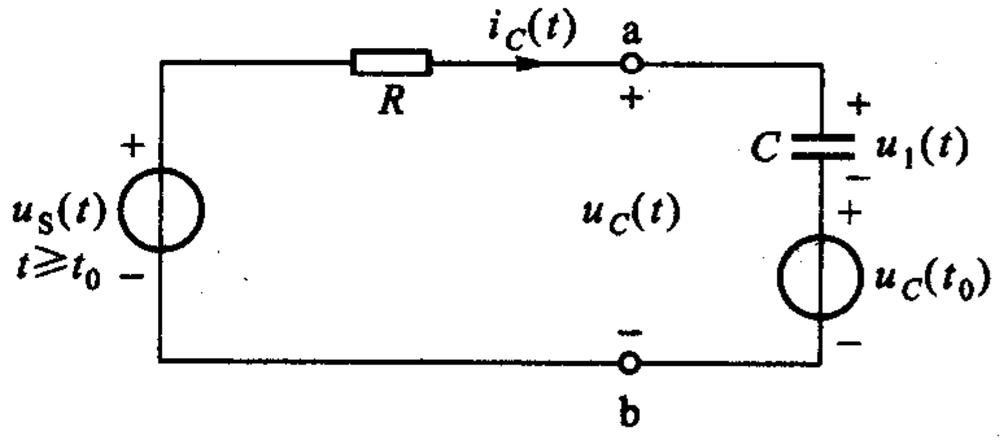


图 6-2　$t \geqslant t_0$ 时的 RC 串联等效电路

显然在图 6-2 所示等效电路中存在着两个独立电压源，而根据叠加原理，该电路中的任一电压、电流，譬如电容电压 $u_C(t)$ 乃是两个电源分别单独作用时产生的两个分量 $u'_C(t)$ 和 $u''_C(t)$ 的代数和。图 6-3(a)和(b)分别表示计算这两个分量所用的电路图。在电路理论中，这两个分量具有鲜明的物理意义，因而

① 建议复习例 5-3 和练习题 5-5、习题 5-4。

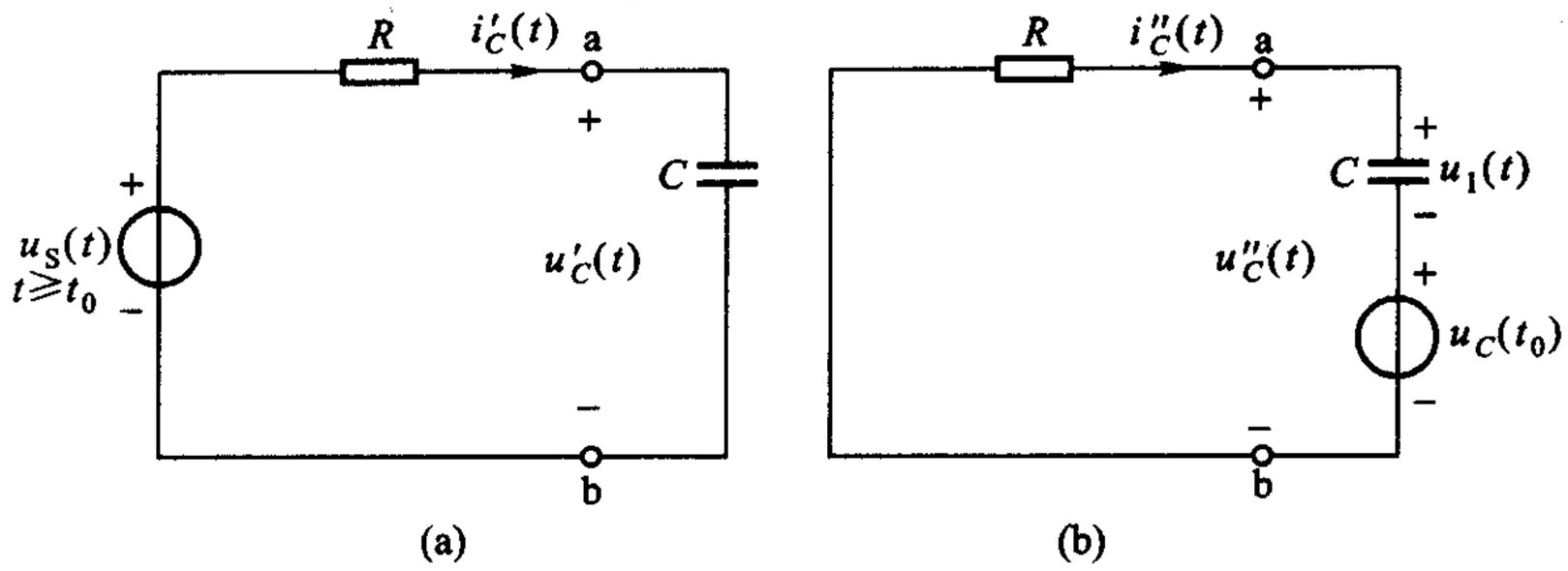


图 6－3　电容电压的零状态响应[图(a)]、零输入响应[图(b)]

赋予了特殊的名称。在 $t \geqslant t_0$ 时，我们把在零初始状态下，仅由电路的输入所引起的响应称为零状态响应(zero state response)；把在零输入情况下，仅由非零初始状态所引起的响应称为零输入响应(zero input response)。图 6－3(a)、(b)中的 $i'_C(t)$、$i''_C(t)$ 也分别属于上述的两种响应。两种响应之和称为全响应(complete response)，这是输入和非零初始状态共同作用下的响应。应该指出，这三种响应在电路分析中都可分别遇到。本节先讨论零状态响应。

按照上文所述零状态响应的定义，这一响应显然是与输入有关的。今仍以图 6－3(a)所示的零状态，*RC* 电路为例，且设 $t_0 = 0$，并设 $t \geqslant 0$ 时的输入为图 6－4所示的阶跃(step)波，其值为 U_S。这相当于在 t = 0 时，通过开关使该 RC 电路与直流电压源 U_S 接通。这开关可能是机械的或电子的，也可能只是示意的(泛指阶跃波的接入，具体的开关操作①)。图 6－5(a)所示电路准确地等效于图 6－4 所示阶跃波接通的情况，图 6－5(b)所示电路虽未能准确表明情况，但较简单，也可使用。

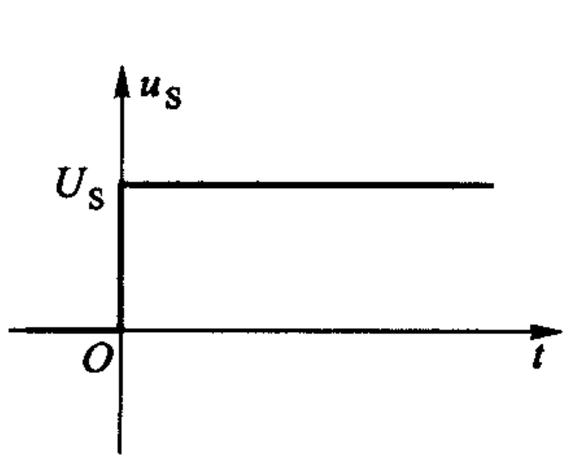


图 6－4　$t \geqslant 0$ 时作用于电路的阶跃波

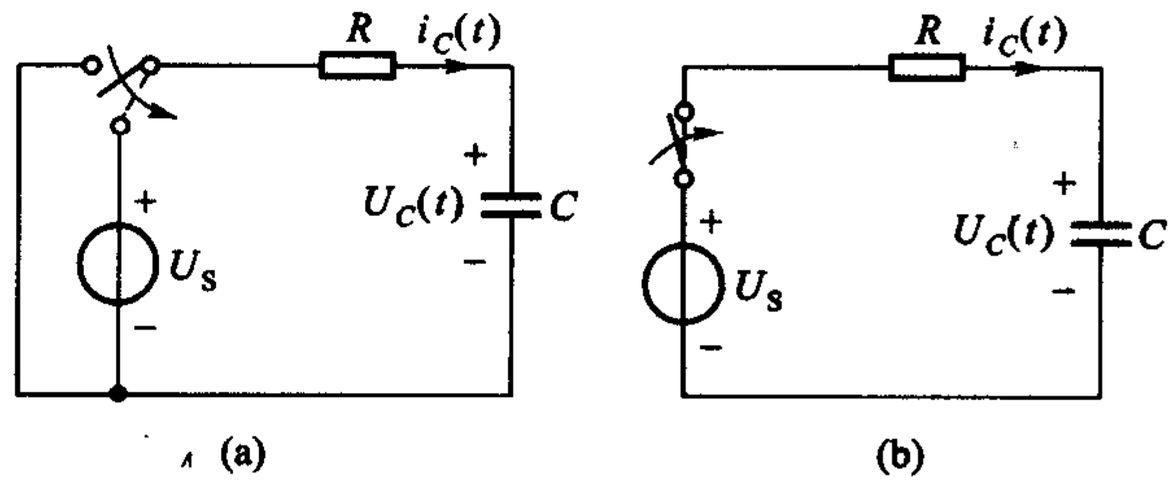


图 6－5　$t = 0$ 时 *RC* 电路与直流电压源的接通

由于在实际的电路分析中，零状态响应可以独立存在，不一定是全响应的一

① 开关的操作，称为“换路(switching)”。

个分量，因此，在专门讨论零状态响应的本节中，可以径用 u_C 来表示电容电压的零状态响应，如图 6－5 所示。从物理意义上说，u_C 的零状态响应反映电容的储能从无到有的增长过程，即电容的充电过程。电容电压 u_C 随时间增长的具体规律如何，要依靠数学分析方能知晓。

仿照(6－3)式，可得图 6－5 所示电路 $t\geqslant 0$ 的电路方程

$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=U_S \tag{6-7}$$

初始条件为

$$u_C(0)=0 \tag{6-8}$$

电容的初始电压为零，可能是这电容从未被充过电，也可能是在 $t<0$ 时曾被充过电，但到 $t=0$ 时，所充电压已消失殆尽，具体情况毋需过问，且就给定的图 6－5所示电路也无从加以追究。通常，根据 §5－3 所述，这一条件也可更准确地表示为①

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=0$$

我们的任务是要找到满足方程(6－7)式和初始条件(6－8)式的解答 $u_C(t)$。在求解之前，我们不妨先从物理概念上定性阐明开关闭合后 u_C 变化的趋势。由于电容电压不能跃变，开关闭合前一瞬间 $u_C(0_-)$ 既然为零，那么在刚闭合一瞬间 $u_C(0_+)$ 也必须为零，尽管此时电压源 U_S 已经接通。因此，在 $t=0_+$ 时电压 U_S 全部施加于电阻两端，充电电流 $i(0_+)=\dfrac{U_S}{R}$，开始对电容充电，由(6－7)式可知，此时电容电压的变化率应为

$$\left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{0_+}=\frac{U_S}{RC}=\frac{i(0_+)}{C}$$

这说明电容电压是上升的，且在 $t=0_+$ 时变化率最大，电压上升最快。一旦电容电压开始增长，充电电流必随之减小。因为总电压 U_S 是一定的，u_C 的增长，必然导致电阻电压的减小。到后来几乎所有的电压 U_S 都出现在电容两端，充电电流趋于零，电容如同开路，充电停止，$\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\approx 0$。因此，$u_C$ 变化的趋势是：起先增长很快，随着 u_C 的增长，增长越来越慢，最后趋于电压 U_S，电容充电完毕。当直流电路中各个元件的电压和电流都不随时间变化时，称电路进入了直流稳态(dc steady state)。图 6－6 表明电容电压在初始时刻以及最后到达直流稳态的情况，其稳态值为 U_S。

---

① 除非有意强调 $t=0$ 时换路的前后瞬间，在不致引起混乱时，可以省略“0”下角的 +、－号。如果我们对电路在 $t\geqslant 0$ 时的情况感兴趣，“0”就是指“0_+”。

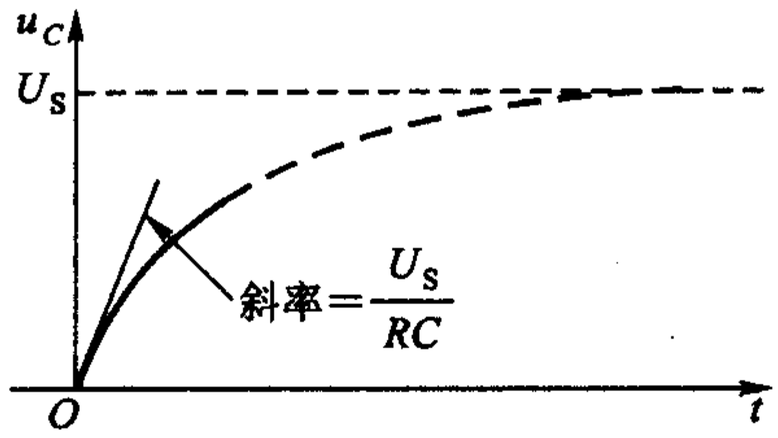


图 6－6　电容电压的起始和最后情况

运用微积分的基本运算，即可由(6－7)、(6－8)两式求得电容电压 $u_C(t)$。为此，需把(6－7)式写为

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{RC}(U_S-u_C)\quad t\geqslant 0 \tag{6-9}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{U_S-u_C}=\frac{1}{RC}\mathrm{d}t$$

$$-\frac{\mathrm{d}(U_S-u_C)}{U_S-u_C}=\frac{1}{RC}\mathrm{d}t$$

两端积分可得

$$-\ln(U_S-u_C)=\frac{1}{RC}t+k \tag{6-10}$$

积分常数 k 可由初始条件加以确定。$t=0$ 时 u_C 为零，故得

$$k=-\ln U_S \tag{6-11}$$

因此

$$\ln(U_S-u_C)-\ln U_S=-\frac{1}{RC}t \tag{6-12}$$

$$\ln\left(\frac{U_S-u_C}{U_S}\right)=-\frac{1}{RC}t$$

两端取反对数，得

$$\frac{U_S-u_C}{U_S}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}$$

即

$$u_C(t)=U_S-U_S\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}\qquad t\geqslant 0 \tag{6-13}$$

或

$$u_C(t)=U_S(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t})\qquad t\geqslant 0 \tag{6-14}$$

此即为在 $t\geqslant 0$ 时电容电压随时间变化的规律，其中核心的部分乃是指数函数 $\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}$，它是随时间 t 按指数规律衰减的。式中的指数 $-\frac{t}{RC}$ 的量纲应为 1，因此，R 和 C 的乘积应具有时间的量纲，以 τ 来表示，并称之为时间常数(time con-

stant)。当 C 用 F 为单位、R 用 Ω 为单位时，τ 的单位为 s。这是因为：$\Omega \cdot \mathrm{F} = \Omega \cdot \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V}} = \Omega \cdot \frac{\mathrm{A} \cdot \mathrm{s}}{\mathrm{V}} = \Omega \cdot \frac{\mathrm{s}}{\Omega} = \mathrm{s}$。由于在动态电路分析中，经常遇到这一指数函数，在此拟对该函数随时间衰减情况作进一步了解。为便于今后的参考，令

$$f(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}} \qquad t \geqslant 0 \tag{6-15}$$

K 为常数，在本节中如同(6-13)式中所示，$K = U_S$。以 τ 的倍数计，各时刻 $f(t)$ 值如表 6-1 所示。

表 6-1　以时间常数倍数计的各时刻 $f(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}}$ 值

t	$f(t)$	对初始值 K 的百分比
τ	$0.368K$	36.8
2τ	$0.135K$	13.5
3τ	$0.049\ 8K$	4.98
4τ	$0.018\ 3K$	1.83
5τ	$0.006\ 74K$	0.674
6τ	$0.000\ 912K$	0.091 2
7τ	$0.000\ 045\ 4K$	0.004 54
8τ	$3.72 \times 10^{-44}K$	3.72×10^{-42}

从表 6-1 可以看出：τ 越大则 $f(t)$ 下降到同一百分比值所需的时间越长；随着时间的增长，$f(t)$ 趋向于零。虽然从理论上讲，$t = \infty$ 时，$f(t)$ 才能衰减到零，但从实际应用角度上看，当 $t = 5\tau$ 时，$f(t)$ 已只有其初始值 K 的 0.674%。因此，工程上常取 $t = (4 \sim 5)\tau$ 作为 $f(t)$ 消失所需时间。τ 越大，衰减越慢，反之则越快。$f(t)$ 随时间变化的曲线如图 6-7 所示。

(6-15)式所示指数函数在本章和下章中经常遇到，常数 K 随具体情况不同而有不同的含义。

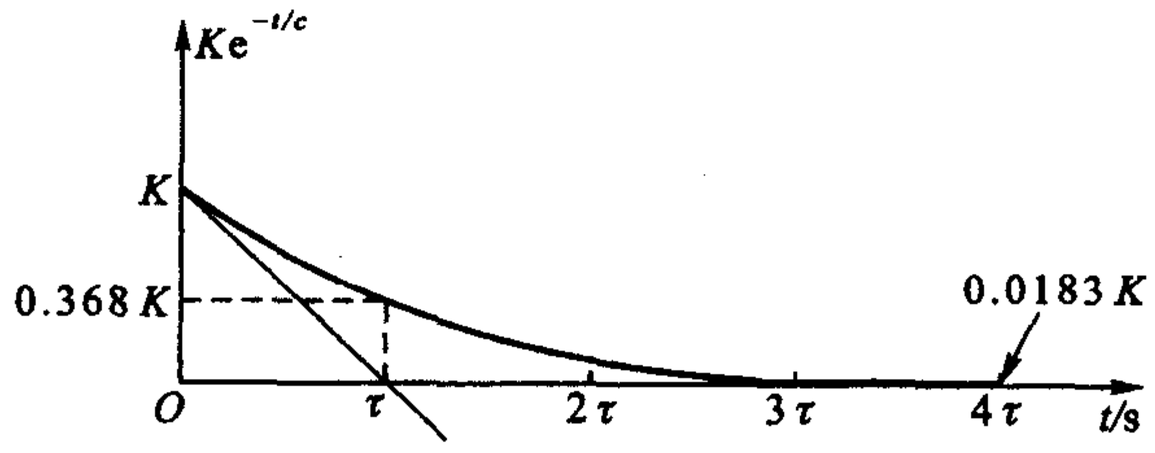


图 6-7　$Ke^{-\frac{t}{\tau}}$ 随时间变化的曲线

根据(6-13)式，结合图 6-7($K = U_S$)可得图 6-5 所示零状态 RC 电路在图 6-4 所示阶跃波作用下或与直流电压源接通后，电容电压 u_C 随时间变化的

全貌，如图 6－8 所示。它从零值开始按指数规律上升趋向于稳态值 U_S，其时间常数 τ 为 RC。在 $t=4\tau$ 时，电容电压与其稳态值相差仅为稳态值的 0.018 3≈0.02；$t=5\tau$ 时差别更小，故 $t=(4\sim5)\tau$ 时，可认为充电完毕，电压已达到稳态值 U_S。由此也可见 τ 越大，电容电压达到稳态值就越慢，反之则越快。

综上所述，电容电压到达直流电源所要求的稳态值 U_S，不是即时的，而是需要经历一段时间的。

至于图 6－5 中 $t\geqslant t_0(t_0=0)$ 时的充电电流 $i_C(t)$，则在求得(6－13)式所示的 $u_C(t)$ 后，可求得为

$$i_C(t)=C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=\frac{U_S}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}=i_C(0_+)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \tag{6-16}$$

$t=0_+$ 时，$i_C(0_+)=\dfrac{U_S}{R}$ 如前文所述。波形图如图 6－9 所示，符合图 6－7 所示的一般规律。请注意，$t=0_-$ 时，u_C、i_C 均为零，而 $t=0_+$ 时 u_C 仍保持为零，即 $u_C(0_+)=u_C(0_-)=0$，i 则一跃而为 $\dfrac{U_S}{R}$，$i_C(0_+)\neq i_C(0_-)$。在 $t=0$ 时，u_C 是连续的而 i_C 则是不连续的。

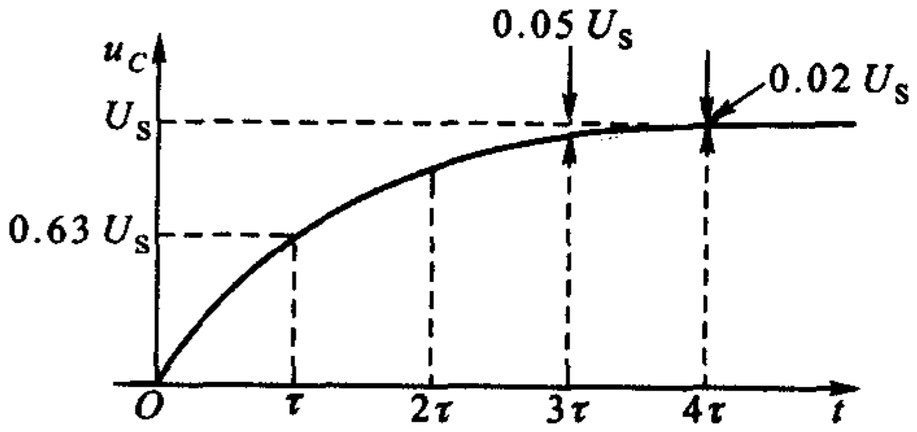


图 6－8　充电时电容电压波形图

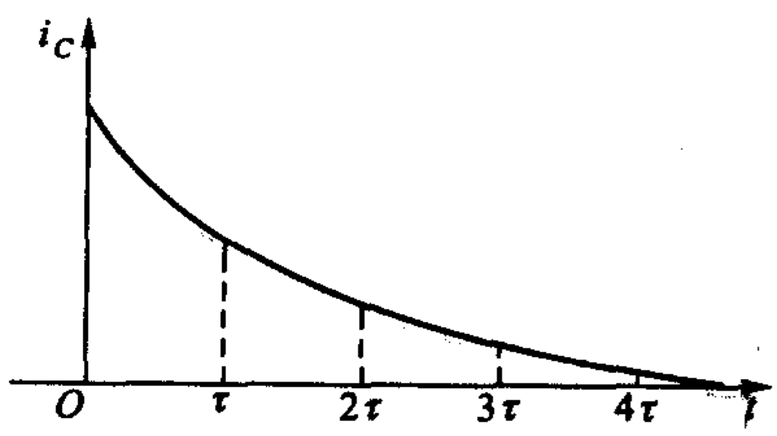


图 6－9　充电时电流波形图

在充电过程中电阻消耗的总能量为

$$W=\int_0^\infty i_C^2(t)R\mathrm{d}t=\int_0^\infty\frac{U_S^2}{R}\mathrm{e}^{-\frac{2}{RC}t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{U_S^2}{R}\left(-\frac{RC}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{2t}{RC}}\Big|_0^\infty=\frac{1}{2}CU_S^2 \tag{6-17}$$

这能量与 R 的大小无关。又因电容被充电至电压 U_S 时，其储能为 $\dfrac{1}{2}CU_S^2$，所以，在充电过程中电阻所消耗的总能量与电容最后所储的能量是相等的。电源提供的总能量为 $\dfrac{1}{2}CU_S^2+\dfrac{1}{2}CU_S^2=CU_S^2$。

对图 6－10 所示 RL 电路，其电流的零状态响应也可作类似的分析。设开关在 $t=0$ 时闭合，由于电感电流不能跃变，所以在 $t=0_+$ 时电流仍然为零，电阻的

电压也为零，此时全部外施电压 U_S 出现于电感两端，因此电流的变化率必须满足

$$L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\bigg|_{0_+}=U_S$$

亦即

$$\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\bigg|_{0_+}=\frac{U_S}{L}$$

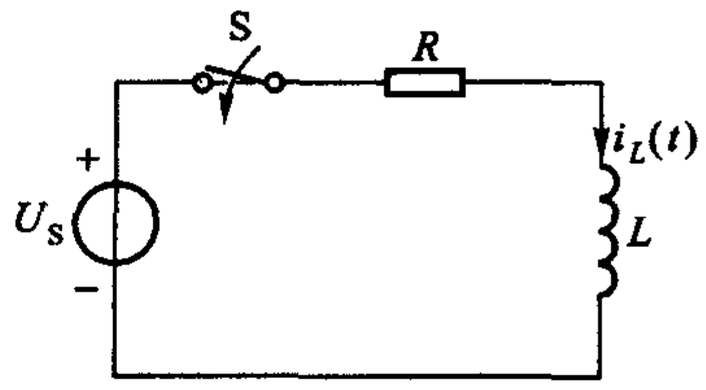


图 6－10　电压源与 RL 电路相接

这说明电流是要上升的。随着电流的逐渐上升，电阻电压也逐渐增大，因而电感电压应逐渐减小，因为总电压是一定的。电感电压减小，意味着电流变化率$\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$的减小，因此电流的上升将越来越缓慢，到后来$\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\approx 0$，电感电压几乎为零，电感如同短路。这时，全部电源电压将施加于电阻两端，电流应为

$$i_L\approx\frac{U_S}{R}$$

电流几乎不再变化，电路到达了直流稳态。

类似以上 RC 电路零状态响应的求解步骤可求得

$$i_L(t)=\frac{U_S}{R}-\frac{U_S}{R}\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}=\frac{U_S}{R}(1-\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t})\qquad t\geqslant 0\qquad(6-18)$$

这一响应是由零值开始按指数规律上升趋向于稳态值$\frac{U_S}{R}$的。

(6－18)式中$\frac{U_S}{R}\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}$项符合(6－15)式所示的函数，除 $K=\frac{U_S}{R}$外，重要的是对 RL 电路，时间常数应为

$$\tau=\frac{L}{R}\qquad(6-19)$$

i_L 变化规律应与图 6－8 中的 u_C 相似，而 $u_L=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=U_S\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$，$t\geqslant 0$，其变化规律应与图 6－9 相似。这里也体现了 L 和 C 的对偶性。也请注意，在 $t=0_-$ 时，i_L、u_L 均为零，在 $t=0_+$ 时，$i_L(0_+)=i_L(0_-)$，$u_L(0_+)=U_S\neq u_L(0_-)$。

以上讨论了在直流电源或阶跃波作用下电路在 $t\geqslant 0$ 时的零状态响应。这时电路内的物理过程，实质上是电路中动态元件的储能从无到有逐渐增长的过

程。因此，电容电压或电感电流都是从它的零值开始按指数规律上升到达它的稳态值的，时间常数 τ 分别为 RC 和 $\frac{L}{R}$。当电路到达稳态时，电容相当于开路，而电感相当于短路，由此可确定电容或电感的稳态值。零状态响应是由电容或电感的稳态值和时间常数 τ 所确定的，求解时不必再求解微分方程。掌握它们按指数规律增长的特点，即可直接写出 $u_C(t)$、$i_L(t)$。掌握了 $u_C(t)$ 或 $i_L(t)$ 后，根据置换定理就可求出其他各个电压和电流。

不论从(6-14)式或(6-18)式都可见到：若外施激励增大 m 倍，则零状态响应也增大 m 倍，称为零状态响应比例性。若有多个激励，则还存在零状态响应叠加性。亦即零状态响应是输入的线性函数，简称零状态响应线性或比例性。

例 6-1　电路如图 6-11 所示，开关在 $t=0$ 时打开，已知 $u_C(0)=0$，求 $u_C(t)$、$i(t)$ 和 $i_C(t)$。

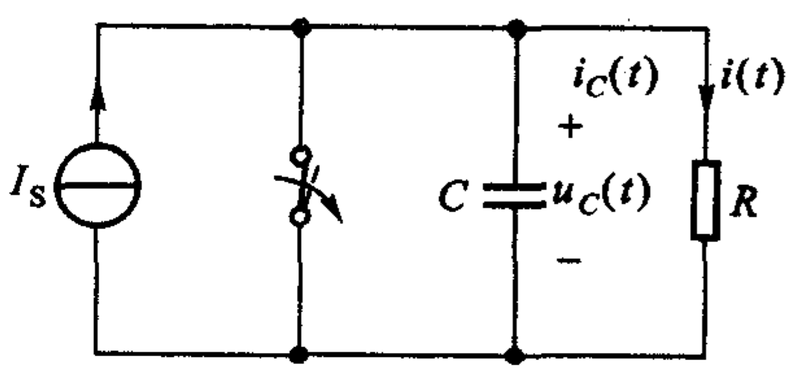


图 6-11　例 6-1

解　可以利用正文对零状态响应所作结论来解答。毋需再从列微分方程开始。

到达稳态后，电容相当于开路，其两端电压 $u_C(\infty)=I_SR$。电路的时间常数 $\tau=RC$。故得

$$u_C(t)=I_SR(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) \qquad t\geqslant 0$$

$$i(t)=\frac{u_C(t)}{R}=I_S(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) \qquad t\geqslant 0$$

$$i_C(t)=C\frac{du_C}{dt}=CI_SR\left(\frac{1}{RC}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}=I_Se^{-\frac{t}{\tau}} \qquad t\geqslant 0$$

或
$$i_C(t)=I_S-i(t)=I_Se^{-\frac{t}{\tau}} \qquad t\geqslant 0$$

注意 u_C(状态变量)是按指数规律增长的，其他变量未必都如此。

例 6-2　*RC* 定时器　*RC* 电路可用于测量时间。最简单的定时器，由一个电容 C 和一个电阻 R、直流电源、开关串联组成。设电压源电压为 200 V、$R=27\ \text{M}\Omega$、$C=10\ \mu\text{F}$。设 $u_C(0)=0$，开关闭合，计时开始，问电容电压显示为 51.84 V时，经历了多长时间？

解　u_C 的稳态值 $u_C(\infty)$ 应为 200 V，时间常数 $\tau=RC=(27\times10^6)(10\times10^{-6})\text{s}=270\ \text{s}$。开关闭合后，电容电压由零开始按指数规律增长至 200 V，即

$$u_C(t)=200(1-e^{-\frac{t}{270}})\ \text{V}$$

当 $u_C(t)=51.84$ V 时，$51.84=200(1-e^{-\frac{t}{270}})$，由此可得

$$e^{-\frac{t}{270}}=1-\frac{51.84}{200}$$

即

$$e^{\frac{t}{270}}=\frac{200}{148.16}=1.35$$

$$t=270\ \ln 1.35\ \text{s}=81\ \text{s}$$

某些速度较快的运动体（如赛车、奔马等），若在该时间段内，距离为已知的定值，据此即可得到运动体的平均速度。

例 6-3　图 6-12（a）所示电路在 $t=0$ 时开关 S 闭合，求 $i_L(t)$、$i(t)$，$t\geqslant 0$。

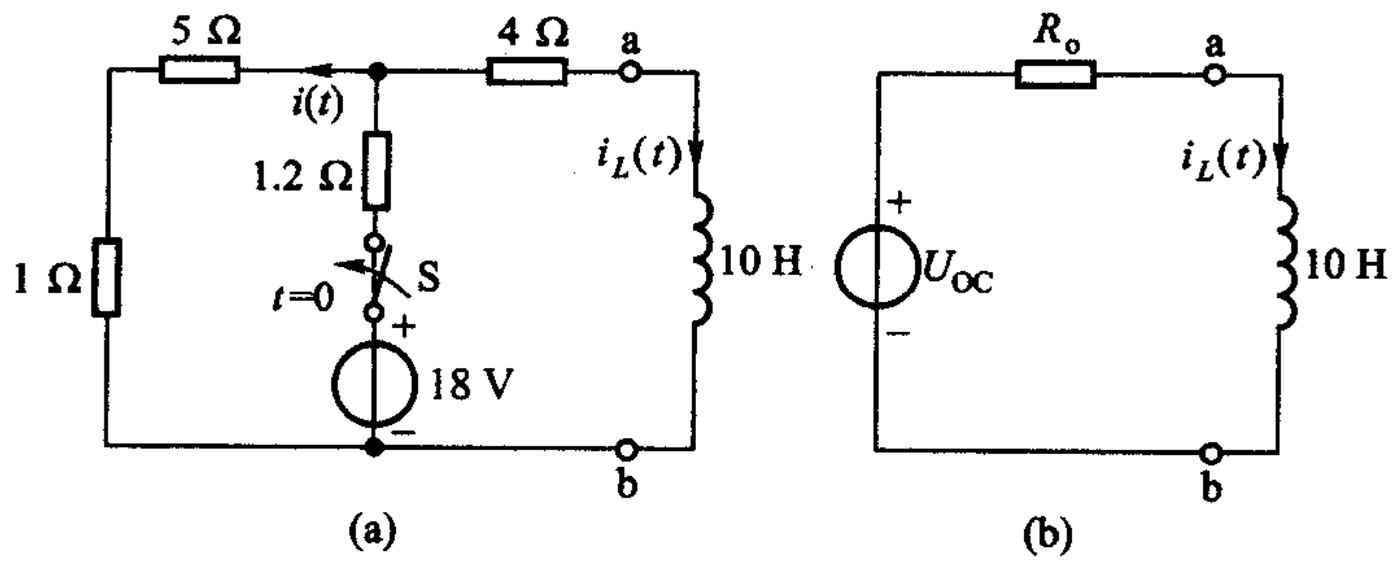


图 6-12　例 6-3

解　先求 $i_L(t)$，为此可用戴维南定理将原电路化简为图 6-12（b）所示电路，其中：

$$U_{OC}=18\times\frac{6}{7.2}\ \text{V}=15\ \text{V}$$

$$R_o=\left[\frac{1.2\times 6}{1.2+6}+4\right]\Omega=5\Omega$$

故得

$$\tau=\frac{L}{R_o}=\frac{10}{5}\ \text{s}=2\ \text{s}$$

又

$$i_L(\infty)=U_{OC}/R_o=3\ \text{A}$$

求 $i_L(\infty)$ 时，图 6-12（b）中电感相当于短路。

电感电流由 0 开始按指数规律上升到 3 A，故得

$$i_L(t)=3(1-e^{-\frac{t}{2}})\ \text{A}\qquad t\geqslant 0$$

或直接利用(6－18)式也可得到以上结果。

利用图6－12(a),设想开关S闭合,电感用电流源$i_L(t)$置换,运用网孔法求解$i(t)$。网孔电流按支路电流$i_L(t)$和$i(t)$设定,可得网孔方程

$$7.2i(t)+1.2i_L(t)=18$$

解得

$$i(t)=\frac{18-1.2i_L(t)}{7.2}=(2+0.5e^{-\frac{t}{2}})\ \text{A}\qquad t\geqslant 0$$

再次指出:$i(t)$不是按指数规律增长,而是按指数规律衰减的。不要以为零状态响应都是按指数规律增长的,在RL电路中只有$i_L(t)$才如此,其他各电压、电流不一定如此。

***例6－4**[①]　电路如图6－13(a)所示,两电源均在$t=0$时开始作用于电路,已知电容初始电压$u(0)$为零,试求电压源电流$i(t)$,$t\geqslant 0$。

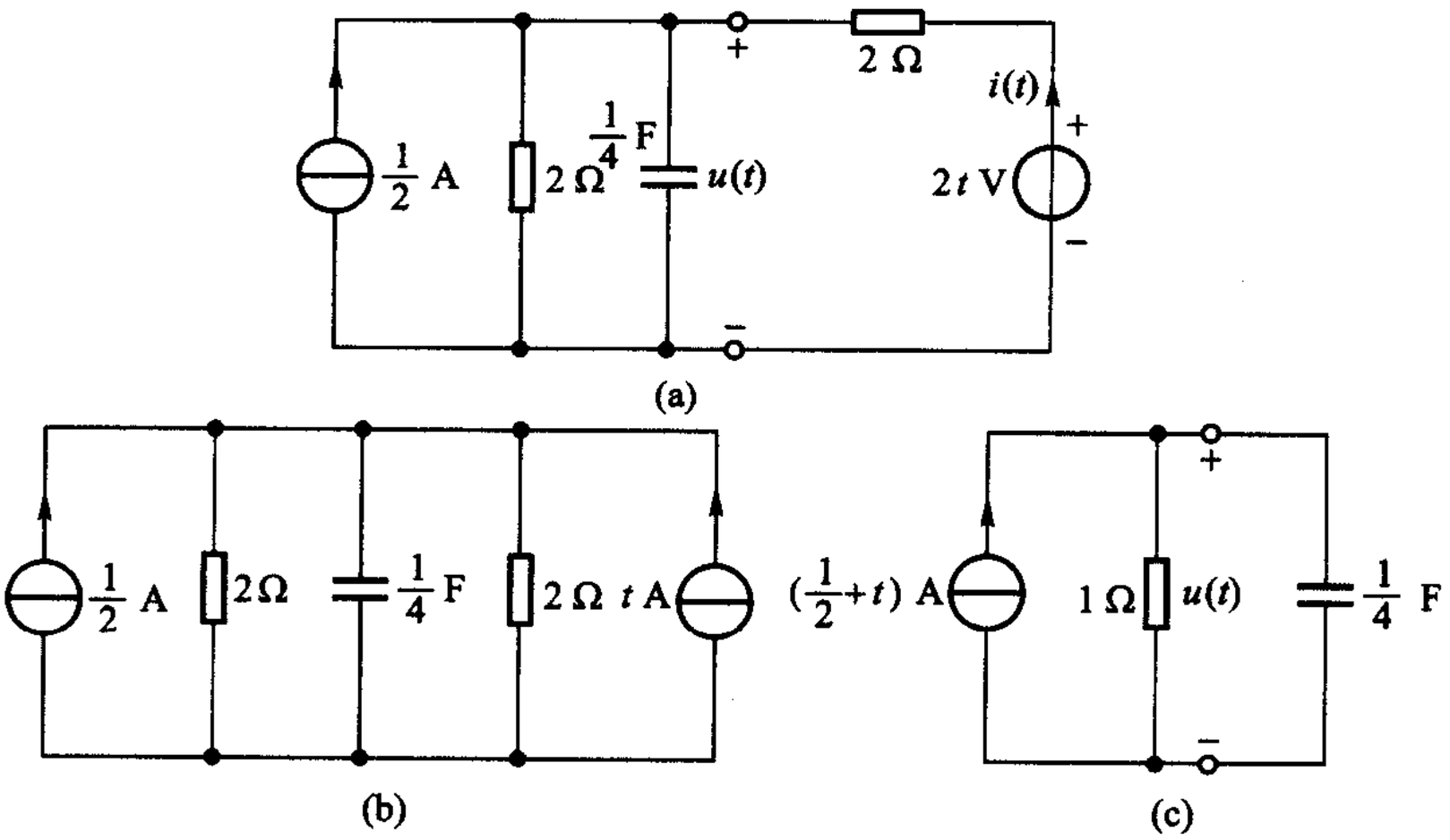


图6－13　例6－4

解　注意本题的电压源电压为$2t$ V,并非直流电压,在解题过程中需要求解微分方程。

根据§6－1所述方法,可先求解电容电压$u(t)$。为此,应先求得除电容以外单口网络的戴维南或诺顿等效电路。把电压源串联电阻组合化为等效的电流源并联电阻组合[图6－13(b)]后,与原有的电流源合并,即可求得该单口网络

① 加*号的例题为对学习有更高要求的学生而设。以后仿此。

的诺顿等效电路，最后得电路如图 6-13(c)所示。根据 KCL，可得方程

$$\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+u=\frac{1}{2}+t \qquad t\geqslant 0$$

即

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+4u=2+4t \qquad t\geqslant 0$$

采用直接积分求解 u。为此，可在方程两端均乘以积分因子 e^{4t}，于是

$$\mathrm{e}^{4t}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\mathrm{e}^{4t}4u=\mathrm{e}^{4t}(2+4t)$$

由于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}^{4t}u)=\mathrm{e}^{4t}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+4\mathrm{e}^{4t}u$$

因此原方程变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}^{4t}u)=\mathrm{e}^{4t}(2+4t)$$

两端对 t 积分

$$\int \mathrm{d}(\mathrm{e}^{4t}u)=\int \mathrm{e}^{4t}(2+4t)\,\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{e}^{4t}u=\int \mathrm{e}^{4t}(2+4t)\,\mathrm{d}t+k$$

两端均乘以 e^{-4t}，得

$$u=\mathrm{e}^{-4t}\int \mathrm{e}^{4t}(2+4t)\,\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{-4t}k$$

$$=\frac{1}{2}+4\mathrm{e}^{-4t}\int \mathrm{e}^{4t}t\mathrm{d}t+k\mathrm{e}^{-4t}$$

由积分表或由分部积分法可得

$$\int \mathrm{e}^{4t}t\ \mathrm{d}t=\frac{\mathrm{e}^{4t}}{4^2}(4t-1)=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{4t}t-\frac{1}{16}\mathrm{e}^{4t}$$

所以

$$4\mathrm{e}^{-4t}\int \mathrm{e}^{4t}t\ \mathrm{d}t=t-\frac{1}{4}$$

解得

$$u=\frac{1}{2}+t-\frac{1}{4}+k\mathrm{e}^{-4t}$$

k 为积分常数，由初始条件 $t=0, u(0)=0$ 确定。

解得

$$k=-\frac{1}{4}$$

故得

$$u(t) = \left(-\frac{1}{4}e^{-4t} + \frac{1}{4} + t \right) \text{ V}$$
$$= \left[\frac{1}{4}(1 - e^{-4t}) + t \right] \text{ V} \qquad t \geqslant 0$$

在图 6 - 13(a)中设想电容用电压为 $u(t)$ 的电压源所置换，解此电阻电路可得

$$i(t) = \frac{2t - u(t)}{2} = \left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{8}(1 - e^{-4t}) \right] \text{ A} \qquad t \geqslant 0$$

如果对图 6 - 13(a)所示电路，直接为 $i(t)$ 列写微分方程，解题并非易事。分解方法为分析动态电路的基本原理①，可使问题得到简化。

思考题

6 - 1　设有两个如图 6 - 5 所示的 *RC* 电路，时间常数不同，稳态电容电压也不同。如果 $\tau_1 > \tau_2$，那么它们的电压增长到同一个电压值所需的时间，必然是 $t_1 > t_2$，与稳态电压的大小无关，对不对？

如果 $\tau_1 > \tau_2$，那么它们的电压增长到各自稳态电压同一百分比值（例如，都增长到各自稳态电压的 37%）所需的时间，必须是 $t_1 > t_2$，对不对？

如果 $\tau_1 = \tau_2$，稳态电压不同，增长到同一电压所需的时间必然是 $t_1 = t_2$，对不对？

6 - 2　试从物理概念上定性绘出图 6 - 10 所示 *RL* 电路 u_L 及 u_R 随时间变化的曲线。

练习题

6 - 1　试列出图 6 - 10 所示 *RL* 电路以 i_L 为求解量的方程，并核对(6 - 18)式。

6 - 2　图 6 - 11 所示电路，开关在 $t = 0$ 时打开。试导出 u_C 到达某一指定值 U_0 所需时间 t_0 的计算公式。

$$\left[t_0 = -RC\ln\left(1 - \frac{U_0}{RI_S}\right) \right]$$

6 - 3　图 6 - 14 所示电路，开关在 $t = 0$ 时闭合。在闭合前处于打开状态为时已久。试求 $t \geqslant 0$ 时的 $u_L(t)$、$i_L(t)$ 以及其他各电流。

$$[i_L = 1.6(1 - e^{-10t}) \text{ A}]$$

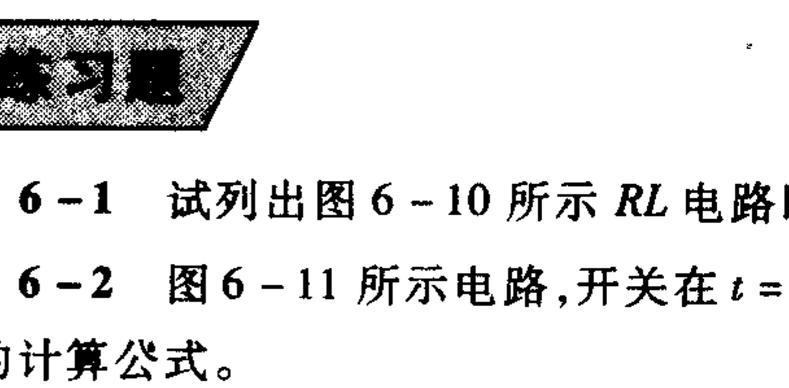


图 6 - 14　练习题 6 - 3

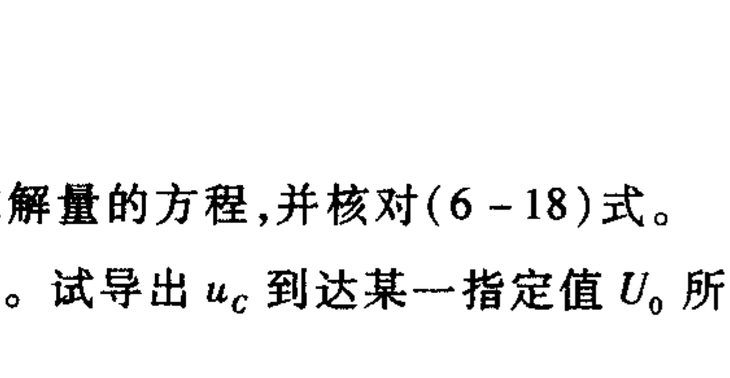


图 6 - 15　练习题 6 - 4

① 蔡少棠著，虞厥邦译《非线性网络理论引论(下)》§ 13 - 3，人民教育出版社，1980 年。

6-4　图 6-15 所示电路，开关在 $t=0$ 时闭合。在闭合前电容无储能。试求 $t\geqslant 0$ 时，电容电压 $u_C(t)$ 以及各电流。

§6-3　阶跃响应　冲激响应

本节继续讨论零状态响应。介绍两类重要的零状态响应。

上节图 6-4 所示阶跃波作用于电路的问题或图 6-5(a)所示直流电压源与电路接通的问题，能否用数学来描述？为此，引入单位阶跃函数(unit step function)，记为$\varepsilon(t)$[①]，其定义为

$$\varepsilon(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases} \tag{6-20}$$

波形如图 6-16(a)所示。$\varepsilon(t)$是奇异函数，$t=0$ 时无定义，可取 0 或 1。由于单位阶跃函数$\varepsilon(t)$在 t 为负值时为零，在 t 为正值时为 1，因此一个单位阶跃函数 $\varepsilon(x)$，在 x 为负值时为零，在 x 为正值时为 1。如果把 x 换以 $t-t_0$，所得的单位阶跃函数为$\varepsilon(t-t_0)$，在$(t-t_0)$为负值，亦即在 $t<t_0$ 时，函数值为零；在$(t-t_0)$为正值，亦即在 $t>t_0$ 时，函数值为 1。因此这一阶跃函数是在 $t=t_0$ 时而不是 $t=0$时发生阶跃的，即

$$\varepsilon(t-t_0)=\begin{cases}0 & t<t_0\\ 1 & t>t_0\end{cases} \tag{6-21}$$

这就是延时(delayed)单位阶跃函数，波形如图 6-16(b)所示。

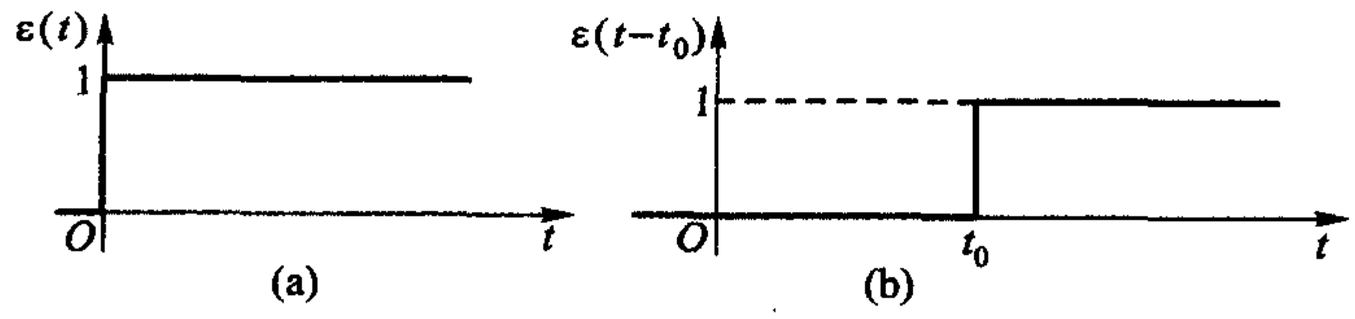


图 6-16　单位阶跃函数[图(a)]和延时单位阶跃函数[图(b)]

直流电压在 $t=0$ 时施加于电路，可以用开关来表示，已如图 6-5(a)所示，现重绘于图 6-17(a)。引入阶跃函数后，同一问题可用图 6-17(b)来表示，该图亦可用来表示图 6-4 所示阶跃波作用于电路。

单位阶跃输入作用下的零状态响应定义为单位阶跃响应，记为 $s(t)$。响应

---

① 在国外的书籍和文献中，单位阶跃函数常用 $u(t)$ 或 $u_{-1}(t)$ 来表示。在我国，$u(t)$ 已用来表示电压的时间函数，我国国标规定用$\varepsilon(t)$表示单位阶跃函数。

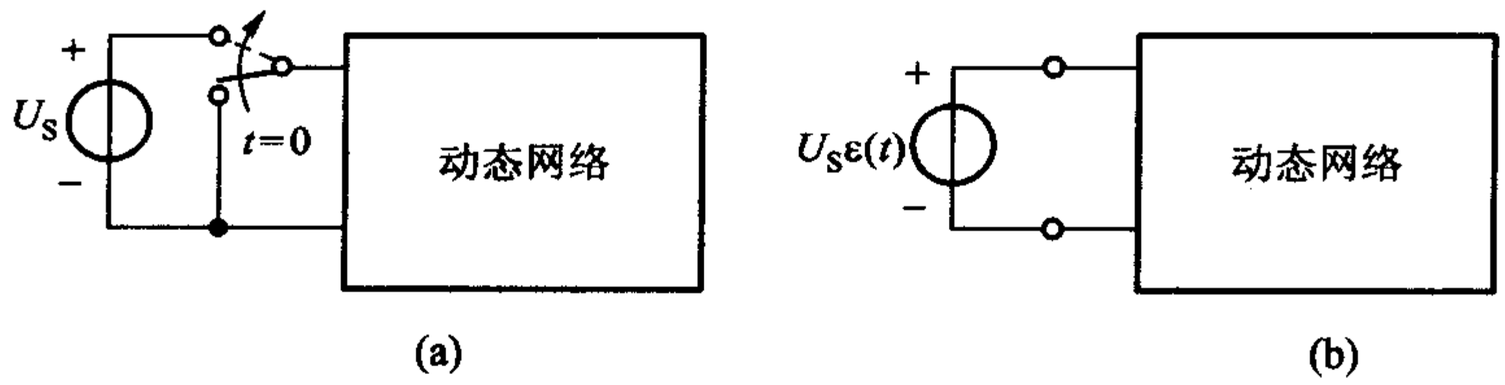


图 6－17　用单位阶跃函数表示直流电压在 $t=0$ 时作用于网络

可以是电压、也可以是电流。

如果电路的输入是幅度为 A 的阶跃信号，则根据零状态响应比例性可知 $As(t)$ 即为该电路的阶跃响应，亦即图 6－4 所示波形作用于该电路的零状态响应。由于时不变电路的电路参数不随时间变化，因此，若单位阶跃信号作用下的响应为 $s(t)$，则在延时单位阶跃信号作用下响应应为 $s(t-t_0)$。这一性质称为时不变性。

在电子技术问题中，常遇到如图 6－18 所示信号作用于电路的问题，这类信号称为分段常量信号（piecewise-constant signal），其中图（a）所示波形又称为矩形脉冲，简称脉冲（pulse），图（b）所示波形又称为脉冲串（pulse train）。运用阶跃函数和延时阶跃函数，分段常量信号可表示为一系列阶跃信号之和。例如，图 6－18（a）所示脉冲信号可分解为两个阶跃信号之和，其一是在 $t=0$ 时作用的正

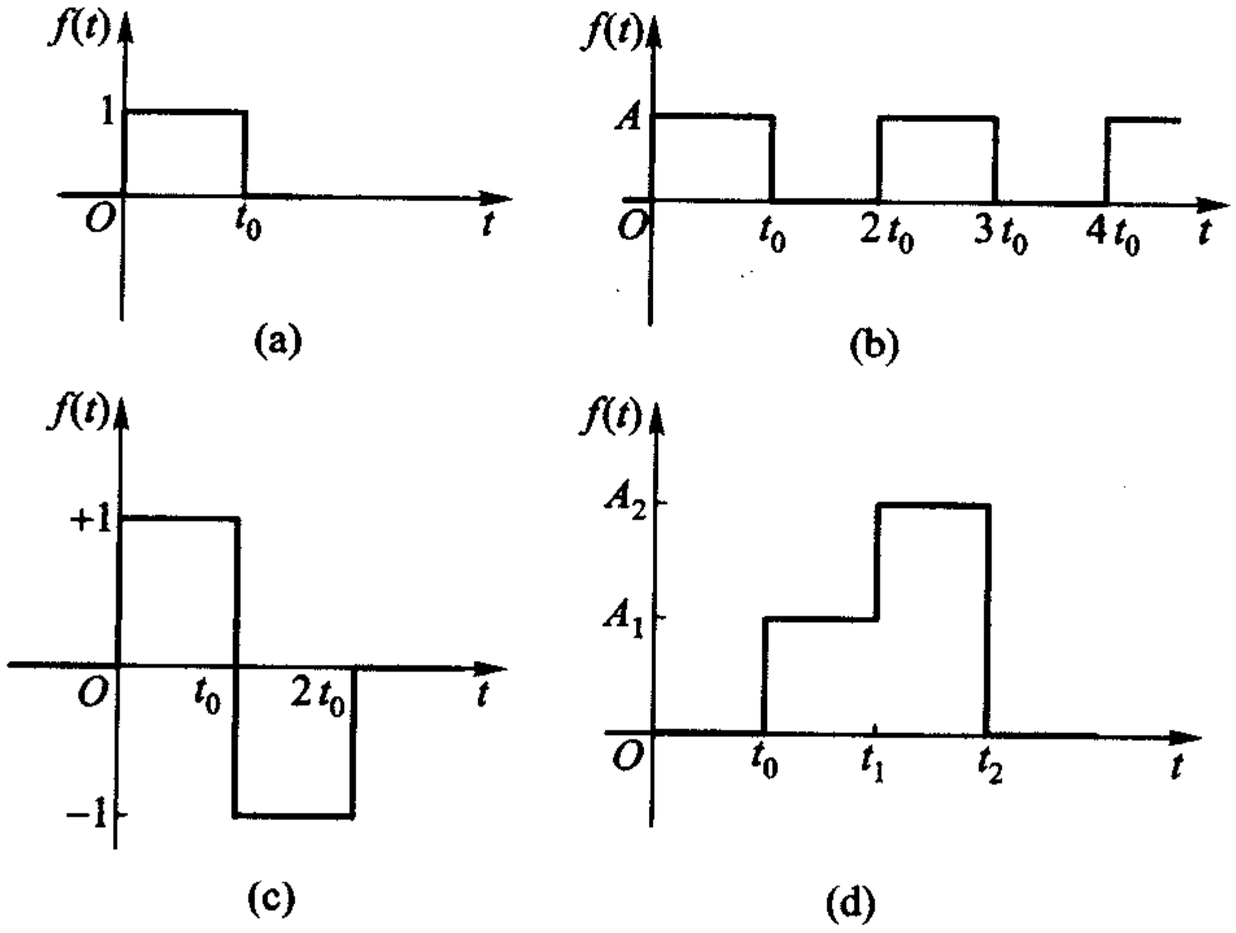


图 6－18　分段常量信号举例

单位阶跃信号，另一是在 $t=t_0$ 时作用的负单位延时阶跃信号，如图 6-19 所示。分段常量信号作用下的一阶电路分析问题，在将这类信号分解为阶跃信号后，即可按直流一阶电路处理，运用叠加性可求得其零状态响应。

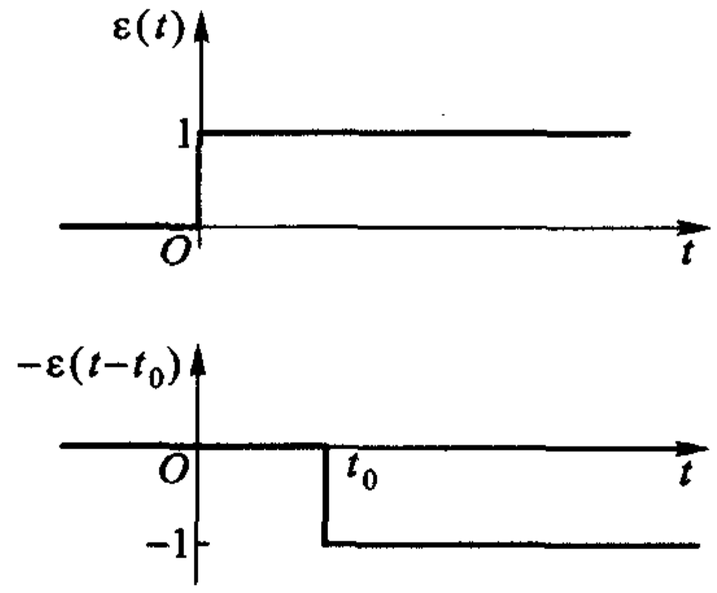


图 6-19　图 6-18(a)脉冲信号分解为两个阶跃信号之和

例 6-5　求图 6-20 所示零状态 *RL* 电路在图中所示脉冲电压作用下的电流 $i(t)$。已知 $L=1\ \mathrm{H}, R=1\Omega$。

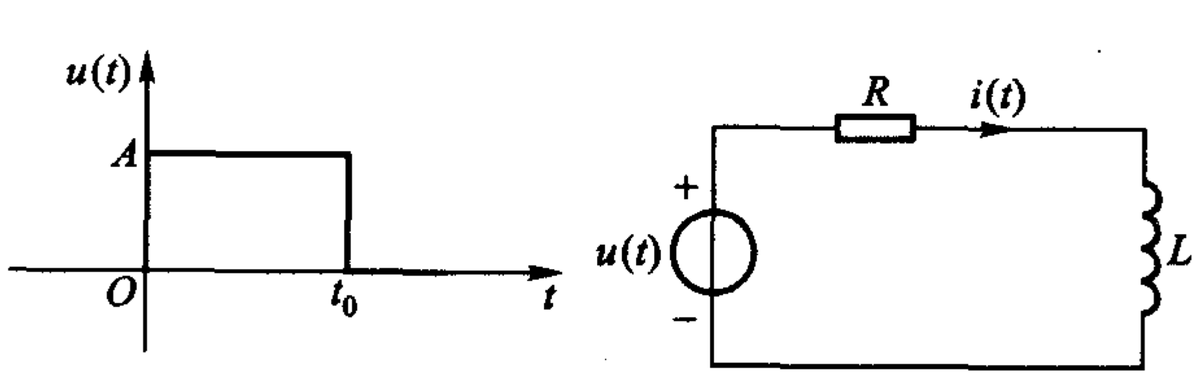


图 6-20　例 6-5

解　脉冲电压 $u(t)$ 可分解为如图 6-19 所示两个阶跃信号之和，但幅度为 A，即

$$u(t)=A\varepsilon(t)-A\varepsilon(t-t_0)$$

$A\varepsilon(t)$ 作用下的零状态响应为

$$i'(t)=\frac{A}{R}(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})\varepsilon(t)=A(1-\mathrm{e}^{-t})\varepsilon(t)$$

解答式中的因子 $\varepsilon(t)$ 表明该式实际上仅适用于 $t\geqslant 0$，式中 $\tau=\frac{L}{R}=1\ \mathrm{s}$。

$-A\varepsilon(t-t_0)$ 作用下的零状态响应为

$$i''(t) = -\frac{A}{R}(1-e^{-\frac{t-t_0}{\tau}})\varepsilon(t-t_0)$$

$$= -A(1-e^{-\frac{t-t_0}{\tau}})\varepsilon(t-t_0)$$

根据零状态响应的叠加性可得

$$i(t) = i'(t) + i''(t)$$

$$= A(1-e^{-t})\varepsilon(t) - A[1-e^{-(t-t_0)}]\varepsilon(t-t_0)$$　　对所有 t

$i'(t)$、$i''(t)$和 $i(t)$的波形如图 6-21 中所示。

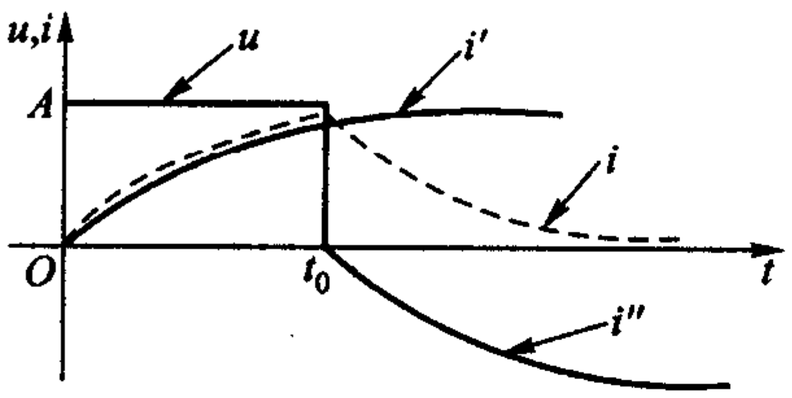


图 6-21　例 6-5 电流波形图

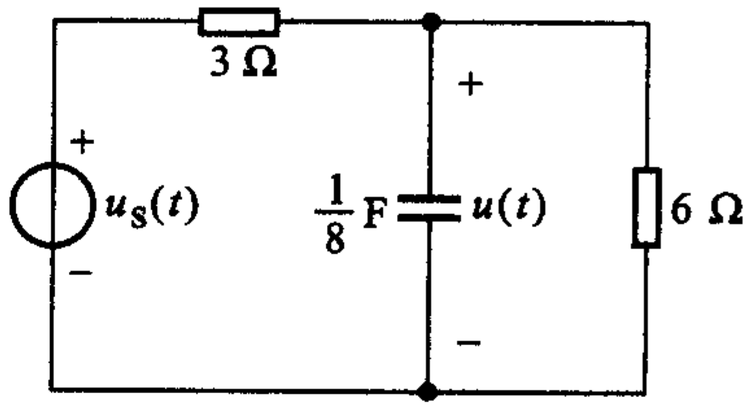


图 6-22　例 6-6

例 6-6　若作用于图 6-22 所示电路的电压

$$u_S(t) = [\,-3 + 4\,\varepsilon(t)\,]\ \text{V}$$

试求 $u(t)$,对所有 t。

解　利用叠加原理求解。输入可视为由 −3 V 和 $4\,\varepsilon(t)$ V 组成。

−3 V 直流电压始终作用于电路。电容可视为开路,其电压

$$u_0(t) = (-3)\left(\frac{6}{6+3}\right)\text{V} = -2\ \text{V}$$　　对所有 t

$4\,\varepsilon(t)$ V 在 $t=0$ 时才作用于电路,电容的零状态响应

$$u'(t) = u(\infty)(1-e^{-\frac{t}{\tau}})\varepsilon(t)$$

其中

$$u(\infty) = 4\left(\frac{6}{6+3}\right)\text{V} = \frac{8}{3}\ \text{V}$$

$$\tau = R_0 C = \left(\frac{6\times 3}{6+3}\right)\left(\frac{1}{8}\right)\text{s} = \frac{1}{4}\ \text{s}$$

故得

$$u(t) = u_0(t) + u'(t) = \left[\,-2 + \frac{8}{3}(1-e^{-4t})\varepsilon(t)\right]\text{V}$$　　对所有 t

如不采用$\varepsilon(t)$来描述,则 $u(t)$可分时间段表示为

$$u(t) = -2\ \text{V}\qquad t<0$$

$$u(t) = [\,-2 + \frac{8}{3}(1-e^{-4t})\,]\ \text{V}$$

$$=\left(\frac{2}{3}-\frac{8}{3}e^{-4t}\right)\ \mathrm{V}\qquad t\geqslant 0$$

例 6-7　接续例 6-5，试求 $u_L(t)$。

解　由图 6-20 可得

$$\begin{aligned}u_L(t)&=u(t)-Ri(t)\\&=A\varepsilon(t)-A\varepsilon(t-t_0)-A(1-e^{-t})\varepsilon(t)+A[1-e^{-(t-t_0)}]\varepsilon(t-t_0)\\&=[Ae^{-t}\varepsilon(t)-Ae^{-(t-t_0)}\varepsilon(t-t_0)]\ \mathrm{V}\qquad\text{对所有 } t\end{aligned}$$ ▶

如果要利用 $u_L=L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$来解，你会遇到什么新问题？

引用单位阶跃函数$\varepsilon(t)$后，在电路分析中可能就会遇到对$\varepsilon(t)$求导的问题。$\varepsilon(t)$是一个常量，当 $t<0$ 时为零；$t>0$ 时为 1。因此，在 $t<0$ 时或 $t>0$ 时，$\dfrac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t}=0$。在 $t=0$ 时，$\varepsilon(t)$是不连续的，有高度为 1 的跳跃，其斜率为无界的。我们把$\varepsilon(t)$的导数，记为 $\delta(t)$，称为单位冲激函数[①](unit impulse function)，即

$$\delta(t)=\frac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t}\qquad(6-22)$$

相应地就要求 $\delta(t)$对 t 的积分为$\varepsilon(t)$。综上所述，可知 $\delta(t)$的定义为

$$\delta(t)=0\qquad\text{对所有的 } t\neq 0\qquad(6-23)$$

以及

$$\int_{-\infty}^{t}\delta(\xi)\,\mathrm{d}\xi=1\qquad(6-24)$$

另外，由(6-23)式可得，若函数 $f(t)$与 $\delta(t)$相乘，应有

$$f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)\qquad(6-25)$$

称为 $\delta(t)$的取样性质(sampling property)。

对单位延时函数 $\delta(t-t_0)$，则相应于(6-23)(6-24)和(6-25)三式，有

$$\delta(t-t_0)=0\qquad\text{对所有 } t\neq t_0\qquad(6-26)$$

$$\int_{-\infty}^{t}\delta(\xi-t_0)\,\mathrm{d}\xi=1\qquad(6-27)$$

以及

$$f(t)\delta(t-t_0)=f(t_0)\delta(t-t_0)\qquad(6-28)$$

单位冲激输入作用下的零状态响应定义为单位冲激响应，记为 $h(t)$。响应可以是电压、也可以是电流。

根据线性、时不变电路的一个重要性质，即如果激励 x 产生响应 y，那么，激

---

① $\delta(t)$的正式定义见《简明电路分析基础》§7-8。

励$\frac{dx}{dt}$产生的响应为$\frac{dy}{dt}$;激励$\int x dt$产生的响应为$\int y dt + k$,k为积分常数①。考虑到(6-22)式所示的关系,可得出下述结论

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt} \tag{6-29}$$

即线性、时不变电路的冲激响应是它的阶跃响应的导数。

例 6-8　接续例 6-5,试由公式 $u_L = L\frac{di}{dt}$求解 u_L。

解

$$\begin{aligned}\frac{di}{dt} &= \frac{d}{dt}[A(1-e^{-t})\varepsilon(t)] - \frac{d}{dt}\{A[1-e^{-(t-t_0)}]\varepsilon(t-t_0)\} \\ &= A[\frac{d\varepsilon(t)}{dt} - \frac{d}{dt}e^{-t}\varepsilon(t) - \frac{d\varepsilon(t-t_0)}{dt} + \frac{d}{dt}e^{-(t-t_0)}\varepsilon(t-t_0)] \\ &= A[\delta(t) + e^{-t}\varepsilon(t) - e^{-t}\delta(t) - \delta(t-t_0) - e^{-(t-t_0)}\varepsilon(t-t_0) + \\ &\quad e^{-(t-t_0)}\delta(t-t_0)] \\ &= A[e^{-t}\varepsilon(t) - e^{-(t-t_0)}\varepsilon(t-t_0)]\end{aligned}$$

其中利用(6-25)式,得 $e^{-t}\delta(t) = e^0\delta(t) = \delta(t)$;利用(6-28)式,得

$$e^{-(t-t_0)}\delta(t-t_0) = e^0\delta(t-t_0) = \delta(t-t_0)。$$

$$u_L(t) = L\frac{di}{dt} = [Ae^{-t}\varepsilon(t) - Ae^{-(t-t_0)}\varepsilon(t-t_0)]\ \text{V}$$

例 6-9　求 RC 并联电路在冲激电流源 $\delta(t)$ 作用下电压 $u(t)$ 的单位冲激响应,电路如图 6-23 所示。

解　利用(6-14)式,电路中电压 u 的单位阶跃响应为

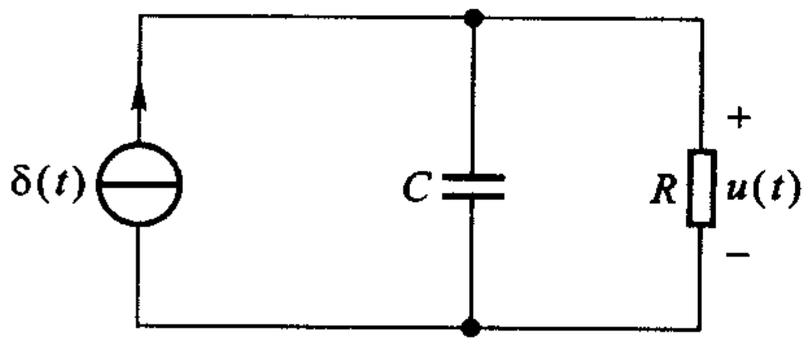


图 6-23　例 6-9

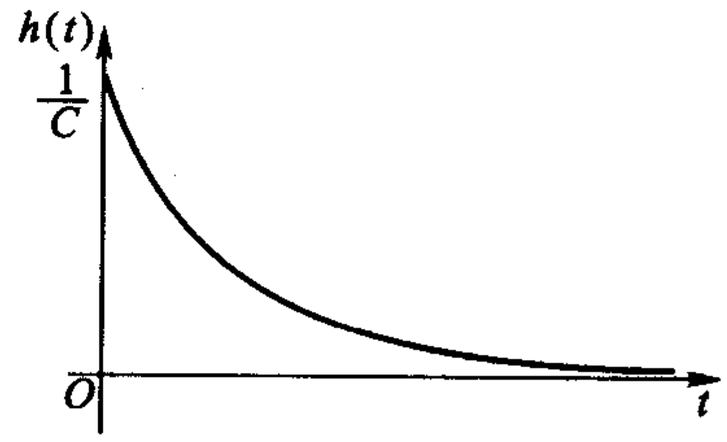


图 6-24　图 6-23 电路的单位冲激响应

$$s(t) = R(1-e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t)$$

由于

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

---

①　这一性质称为相关电源(related source)性。线性时变电路不适用。详见本书第三版(中册)第203页。

故得该电路电压 u 的单位冲激响应

$$h(t) = R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\varepsilon(t) - \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)]$$

$$= R[\delta(t) - \delta(t)\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} + \frac{1}{RC}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)]$$

$$= R[\delta(t) - \delta(t) + \frac{1}{RC}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)]$$

$$= \frac{1}{C}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

以上也用到了(6-25)式,得 $\delta(t)\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} = \delta(t)$。波形如图 6-24 所示。

◀

从上例不难看出:$t=0_+$ 时 $u=\frac{1}{C}$,而在 $t=0_-$ 时 $u=0$。在 $t=0$ 时电容电压发生跃变,似与已有的概念不同,然而,过去在表述这一结论时是有前提的,那就是"当电流为有界时",而这一前提在上例中并不存在![1]

练习题

6-5　图 6-25 所示 RL 电路,已知 $u_S(t) = 12\varepsilon(t)$ V 试求阶跃响应 i_L、u_L 和 u。

$[2(1-\mathrm{e}^{-3t})\varepsilon(t)\,\mathrm{A},\ 12\mathrm{e}^{-3t}\varepsilon(t)\,\mathrm{V},\ (4+8\mathrm{e}^{-3t})\varepsilon(t)\ \mathrm{V}]$

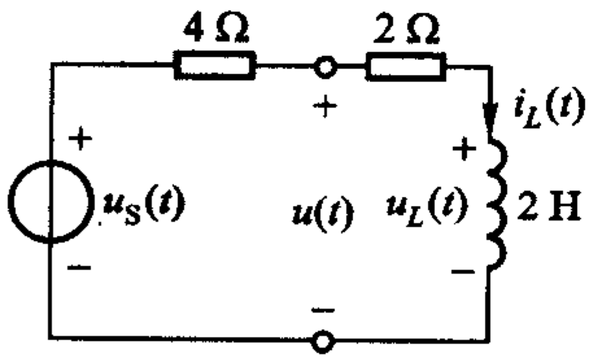


图 6-25　练习题 6-5

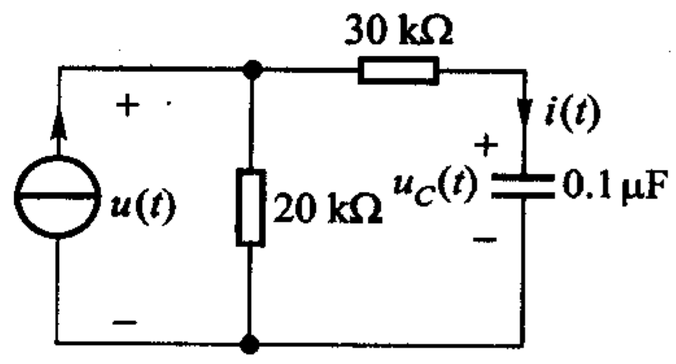


图 6-26　练习题 6-6

6-6　电路如图 6-26 所示,试求阶跃响应 $i(t)$ 和 $u(t)$。

$[3\mathrm{e}^{-200t}\varepsilon(t)\ \mathrm{mA},(150-60\mathrm{e}^{-200t})\varepsilon(t)\ \mathrm{V}]$

§6-4　零输入响应

本节转而讨论图 6-3(b)所示的零输入响应。由于在实际的电路分析中,

① 有关电容电压或电感电流跃变的电路问题,如有兴趣可参考《简明电路分析基础》§7-8,§13-5。

零输入响应可以独立存在，不一定是全响应的一个分量，因此，在专门讨论零输入响应的本节中，可以径用 u_C 来表示电容电压的零输入响应。需要特别注意之处是：在图 6－3(b)所示电容等效电路中，电容 C 的初始电压设为零，实际存在的初始电压 $u_C(t_0)$ 是以电压源的形式与之串联的。因此，所求电容电压 $u_C(t)$，在等效电路中是指 a、b 两端的电压，即

$$u_C(t) = u_1(t) + u_C(t_0) \tag{6-30}$$

为简便计可令 $t_0 = 0$。

$u_1(t)$ 只存在于等效电路中，然而在图 6－3(b)中它却是独立电压源 $u_C(0)$ 作用下的零状态响应，这样就可利用 §6－2(6－14)式得到

$$u_1(t) = -u_C(0)\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \qquad t \geqslant 0 \tag{6-31}$$

其中时间常数 $\tau = RC$。负号的出现是由于参考方向设定上的差别。由(6－30)式即可得所求的零输入响应为

$$\begin{aligned} u_C(t) &= u_1(t) + u_C(0) \\ &= -u_C(0)\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + u_C(0) \\ &= u_C(0)e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad t \geqslant 0 \end{aligned} \tag{6-32}$$

解答(6－32)式是一个由 $u_C(0)$ 开始随时间衰减的指数函数。在图 6－7 中，只需把 K 理解为 $u_C(0)$，即得 $u_C(t)$ 随时间变化的曲线，即电容的放电曲线。在(4～5)τ 时放电结束。

从物理意义上看，零输入响应是依靠动态元件的初始储能进行的，当电路中存在着耗能元件 R 时，有限的初始储能终将被消耗殆尽，零输入响应终将为零。这是一切含有耗能元件的动态电路中零输入响应的特点，不论是状态变量还是非状态变量都是如此。只是后者的初始值未必为 t_{0-} 时之值，也就是在 t_0 时未必是连续的。

试看电容放电电流 $i_C(t)$。由图 6－3(b)，设 $u_C(0) = U_0$，可得

$$i_C(t) = C\frac{du_1}{dt} = -\frac{U_0}{R}e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad t \geqslant 0 \tag{6-33}$$

负号表明放电电流与图中所设电流方向相反，从放电过程看，这是应有的结果。其变化规律亦如图 6－7 所示，但 $K = -\frac{U_0}{R}$，曲线在横坐标下方，亦即 i_C 的波形应如图 6－27 所示。在 $t = 0$ 时，电流由零一跃而为 $\frac{U_0}{R}$，表现出不连续性。

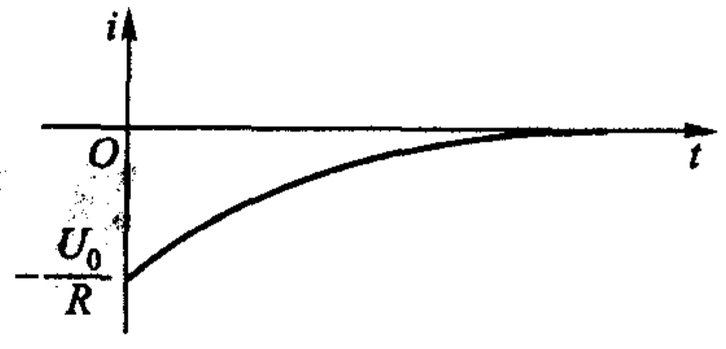


图 6－27　RC 电路电容放电时电流随时间变化的曲线

因此，在放电过程中，u_C 和 i_C 均随时间衰减，当 $t=(4\sim5)\tau$ 时可认为放电过程结束，u_C 和 i_C 均已趋于零。时间常数 τ 越小，则过程进行越快。

不论在零输入响应或是在零状态响应都有 $e^{-\frac{t}{\tau}}$ 这一因素，从而使电容的放电或充电都不能瞬间完成，这是动态电路的“惰性”使然。电容电压不能立即变化，以保持其连续性质。时间常数 τ 反映出一阶动态电路本身所固有的这一性质，它是一个与外施激励（外因）无关的常数。另一典型的一阶电路——*RL* 电路也有相似的情况。

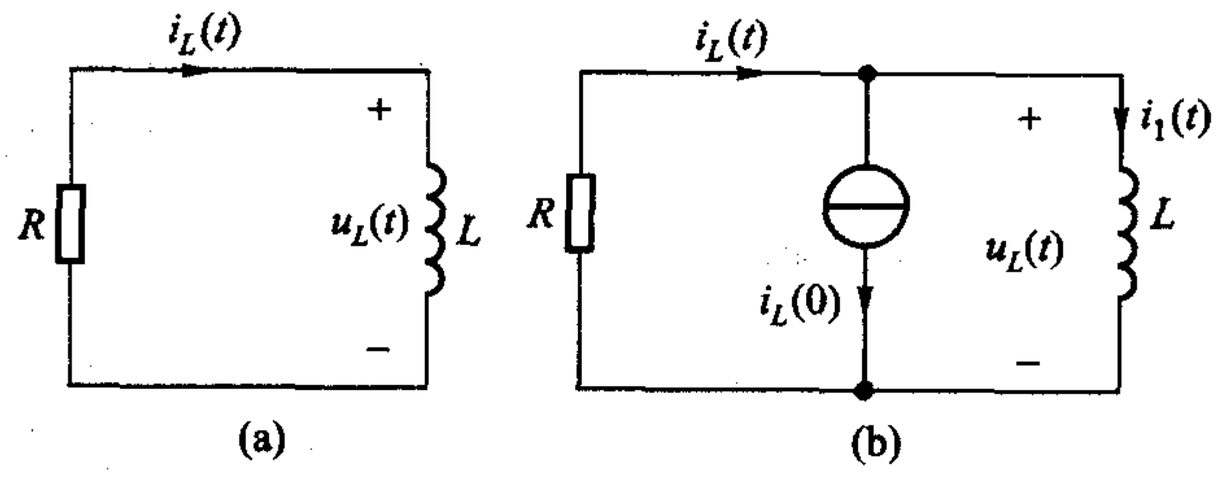


图 6－28　*RL* 电路，$i_L(0)=I_0$［图(a)］及 $t\geqslant0$ 时的等效电路［图(b)］

让我们来研究如图 6－28(a)所示电路的零输入响应。根据图 5－15(b)所示具有初始电流 $i_L(0)$ 的电感等效电路，得出图 6－28(b)后，零输入响应可分析如下：

$$i_L(t)=i_1(t)+i_L(0) \tag{6-34}$$

其中 $i_1(t)$ 为电流源 $i_L(0)=I_0$ 作用下的零状态响应，根据 §6－2 所述，不难得出

$$i_1(t)=-i_L(0)(1-e^{-\frac{t}{\tau}})=-I_0(1-e^{-\frac{t}{\tau}})\quad t\geqslant0 \tag{6-35}$$

再由(6－34)式，可得 $i_L(t)$ 的零输入响应为

$$\begin{aligned} i_L(t)&=-I_0(1-e^{-\frac{t}{\tau}})+i_L(0)=-I_0(1-e^{-\frac{t}{\tau}})+I_0\\ &=I_0e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad t\geqslant0 \end{aligned} \tag{6-36}$$

其中 $\tau=\dfrac{L}{R}$ 为该电路的时间常数。电感电压 u_L 则为

$$u_L=L\frac{di_L}{dt}=-RI_0e^{\frac{t}{\tau}} \qquad t\geqslant0 \tag{6-37}$$

电流 i_L 及电压 u_L 的波形如图 6－29 所示。它们也都是随时间衰减的指数曲线。i_L 不能瞬间地由 I_0 下降到零，从而决定了 u_L 的变化方式，也是由其初始值逐渐

下降到零。但在 $t=0$ 时，i_L 保持其连续性质，而 u_L 则发生了跃变。

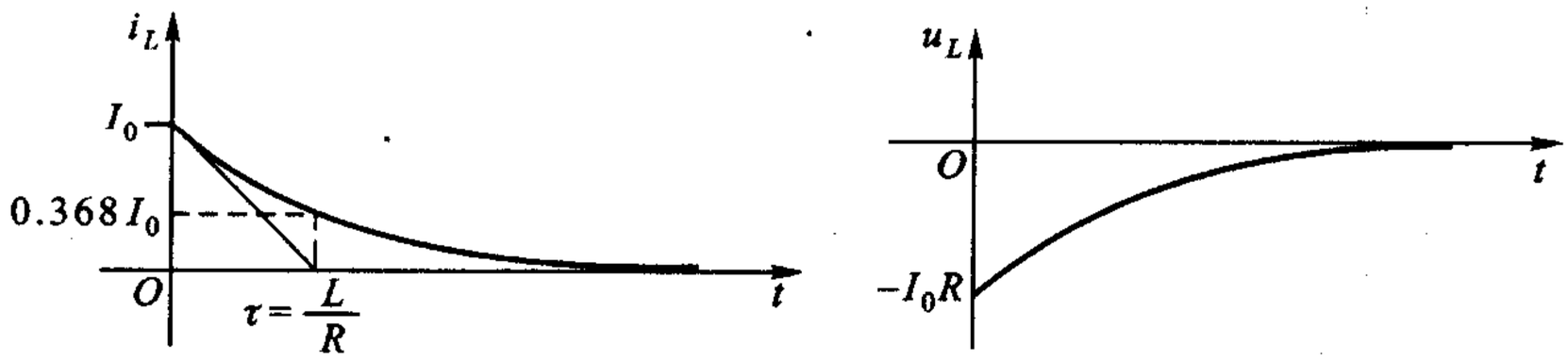


图 6－29　图 6－28 所示 RL 电路中 i_L 及 u_L 随时间变化的曲线

由(6－36)及(6－37)式可知，时间常数 τ 越小，电流、电压衰减越快；反之则越慢。这一结论和以上对 RC 电路分析所得结论相同。只是具体对 RL 电路来说 $\tau=\frac{L}{R}$，这就是说 L 越小，R 越大则电流、电压衰减越快。

零输入响应是在输入为零时，由非零初始状态产生的。它充分体现出在没有外来干预的“自由”状态下电路的表现，反映了电路的固有性质。理论上具有重要的意义。考虑到这一响应与初始状态和电路的特性有关。在求解时，首先必须掌握电容电压或电感电流的初始值，至于电路的特性，对一阶电路来说，则是通过时间常数 τ 来体现的(在电路理论中，$-\frac{1}{\tau}$称为固有频率)。不论是 RC 电路还是 RL 电路，零输入响应都是随时间按指数规律衰减的，这是因为在没有外施电源的条件下，原有的储能总是要逐渐衰减到零的。在 RC 电路中，电容电压 u_C 总是由初始值 $u_C(0)$ 按指数规律单调地衰减到零的，其时间常数 $\tau=RC$；在 RL 电路中，i_L 总是由初始值 $i_L(0)$ 按指数规律单调地衰减到零的，其时间常数 $\tau=\frac{L}{R}$。掌握了 $u_C(t)$、$i_L(t)$ 后，便可设法求得其他各个电压、电流(§6－1)。$u_C(t)$、$i_L(t)$ 主宰着电路中其他响应的变化情况。

初始状态既可认为是电路的激励，则从(6－32)式和(6－33)式、(6－36)和(6－37)式都不难看出：若初始状态增大 m 倍，则零输入响应也相应地增大 m 倍。这种初始状态和零输入响应的正比关系称为零输入响应比例性，亦即零输入响应是初始状态的线性函数，简称零输入响应线性或比例性。

思考题

6－3　试从物理概念上定性绘出 RC 电路中 u_R 随时间变化的曲线。

6－4　试表明图 6－29 中 i_L 曲线在 $t=0$ 处的切线交时间轴于 τ。这一结果说明什么？

例 6－10　电路如图 6－30 所示，已知 $R_1=9\ \Omega$、$R_2=4\ \Omega$、$R_3=8\ \Omega$、$R_4=3\ \Omega$、$R_5=1\ \Omega$。$t=0$ 时开关打开，求 $u_{ab}(t)$，$t\geqslant 0$。

解　$t=0_-$时，即开关尚未断开的瞬间 $u_C(0_-)=10\ \text{V}$，$i_C(0_-)=0$（电容隔断直流！）；$t=0_+$时，即开关刚断开的瞬间，由于 u_C 不能跃变，$u_C(0_+)=u_C(0_-)=u_C(0)=10\ \text{V}$。根据§6-1所述方法，应先求出 $u_C(t)$，$t\geqslant 0$。为此，需求出cd端右边网络的等效电阻，得

$$R_{\text{cd}}=\left[\frac{(4+8)\times(3+1)}{(4+8)+(3+1)}+9\right]\ \Omega=12\ \Omega$$

进而求得

$$\tau=R_{\text{cd}}C=12\times 1\ \text{s}\doteq 12\ \text{s}$$

故知

$$u_C(t)=u_C(0)\text{e}^{-\frac{t}{12}}=10\text{e}^{-\frac{t}{12}}\ \text{V}\qquad t\geqslant 0$$

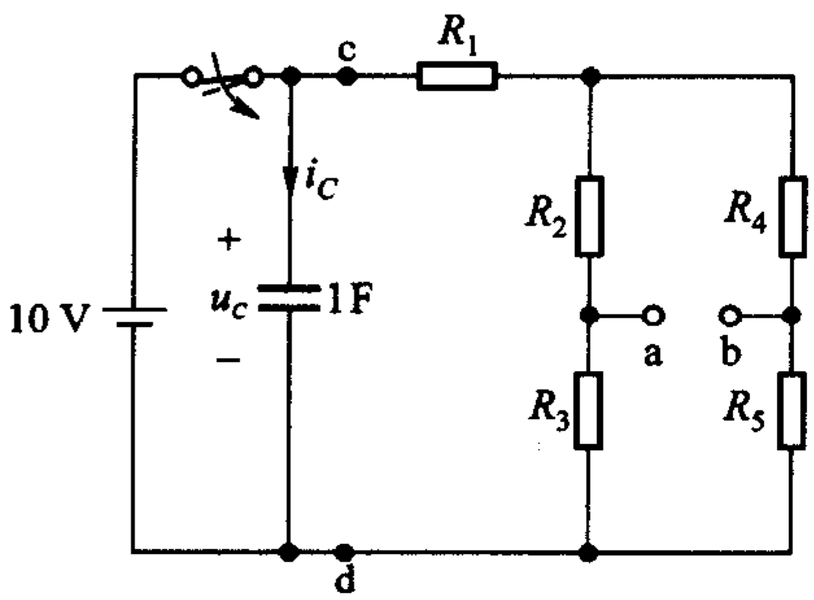


图6-30　例6-10

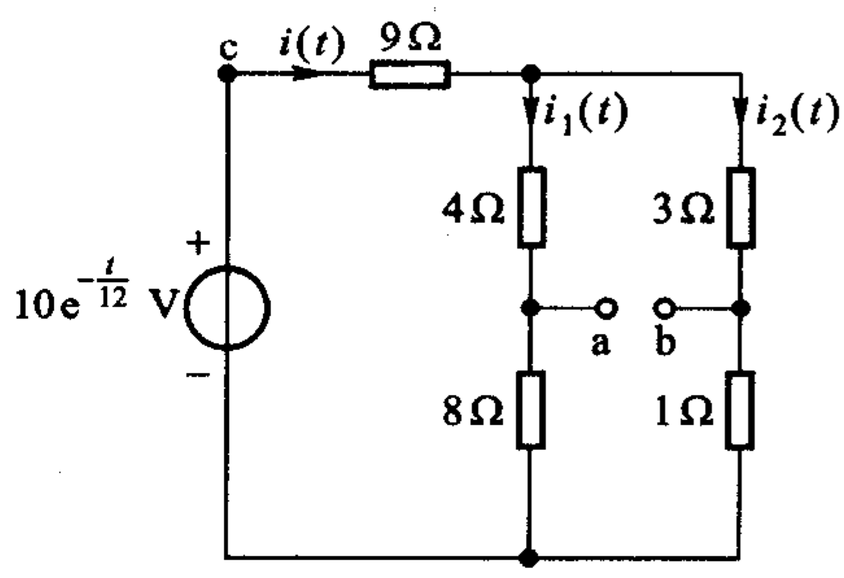


图6-31　用电压源置换电容后所得的电阻电路，$t\geqslant 0$

用电压为 $u_C(t)$ 的电压源置换电容后，得电阻电路如图6-31所示。算得

$$i(t)=\frac{10\text{e}^{-\frac{t}{12}}}{12}\ \text{A}=\frac{5}{6}\text{e}^{-\frac{t}{12}}\ \text{A}\qquad t\geqslant 0$$

$$i_1(t)=\frac{5}{6}\text{e}^{-\frac{t}{12}}\left(\frac{4}{12+4}\right)\ \text{A}=\frac{5}{24}\text{e}^{-\frac{t}{12}}\ \text{A}\qquad t\geqslant 0$$

$$i_2(t)=\frac{5}{6}\text{e}^{-\frac{t}{12}}\left(\frac{12}{12+4}\right)\ \text{A}=\frac{15}{24}\text{e}^{-\frac{t}{12}}\ \text{A}\qquad t\geqslant 0$$

故得

$$u_{\text{ab}}(t)=-4i_1(t)+3i_2(t)=\frac{25}{24}\text{e}^{-\frac{t}{12}}\ \text{V}\qquad t\geqslant 0$$

* **例6-11**　电路如图6-32(a)所示，对所有 t，输入波形如图6-32(b)所示，试求 $u_C(t)$、$i_C(t)$，$t\geqslant 0$。(1) $R=10\ \Omega$，$C=0.01\ \text{F}$ 时；(2) $R=10\ \Omega$，

$C=1$ F时。

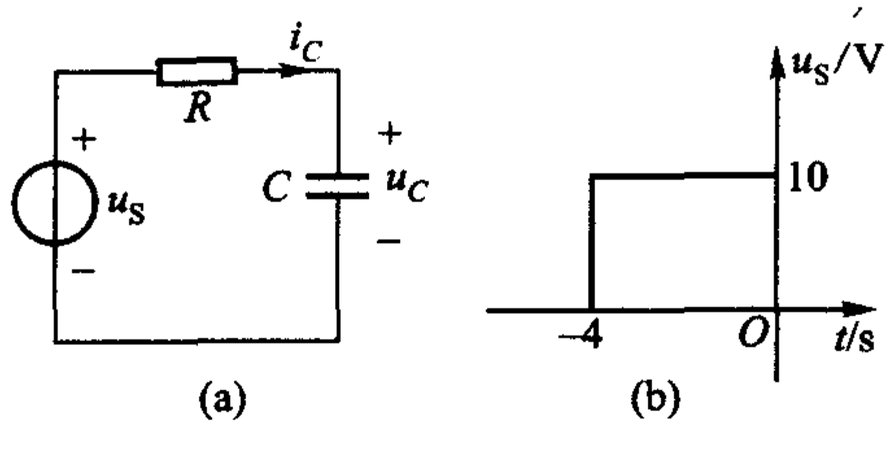


图 6－32　例 6－11

解　对 $t\geqslant 0$，u_C、i_C 为零输入响应，而对 $t\leqslant 0$，u_C、i_C 为零状态响应。

(1) $R=10\ \Omega$，$C=0.01$F 时，$\tau=RC=0.1$ s。在 $t\leqslant 0$ 时，输入脉冲的持续时间为 4 s，大于 $5\tau=0.5$ s，故在 $t=0$ 时，充电已完毕，得 $u_C(0_-)=10$ V。

由于电容电压的连续性，$u_C(0_+)=u_C(0_-)=u_C(0)=10$ V 故得 $t\geqslant 0$ 时的零输入响应

$$u_C(t)=u_C(0)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}=10\mathrm{e}^{-10t}\ \mathrm{V}\qquad t\geqslant 0$$

$$i_C(t)=C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=-0.1\times 10\mathrm{e}^{-10t}\ \mathrm{A}$$

$$=-\mathrm{e}^{-10t}\ \mathrm{A}\qquad t\geqslant 0$$

$i_C(0_+)=-1$ A 而 $i_C(0_-)=0$，电容电流在 $t=0$ 时发生跃变，见图 6－33。

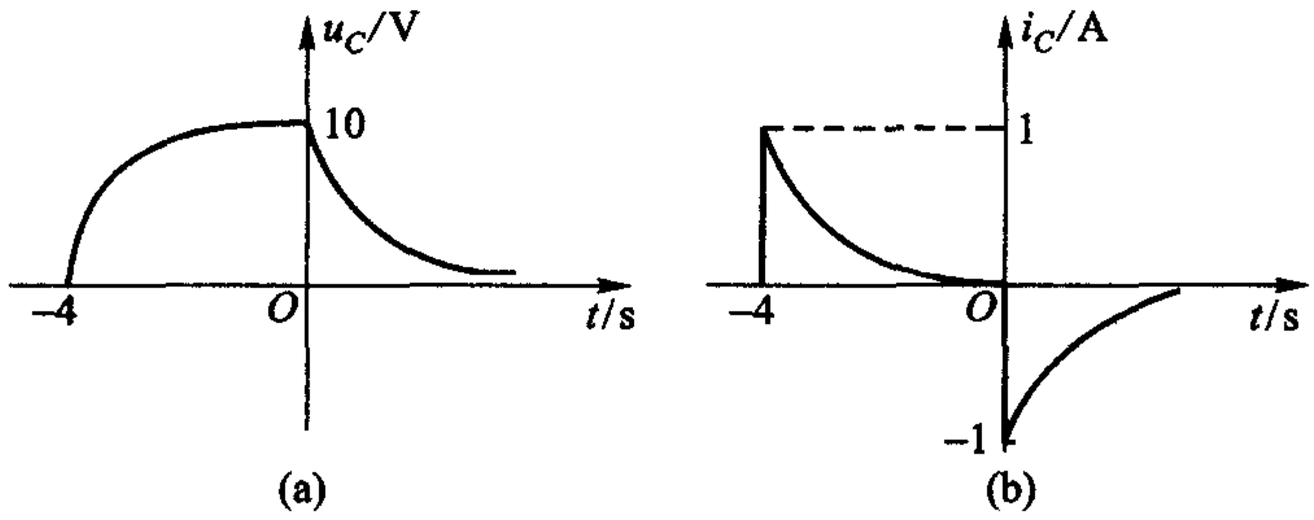


图 6－33　例 6－11，$\tau=0.1$ s

(2) $R=10\ \Omega$，$C=1$F 时，$\tau=RC=10$ s。τ 大于脉冲的持续时间 4 s，在 $t=0$ 时，充电尚未完毕。$t\leqslant 0$ 时的零状态响应为

$$u_C(t)=10[1-\mathrm{e}^{-0.1(t+4)}]\ \mathrm{V}\qquad t\leqslant 0$$

注意时间应记为 $t-(-4)=t+4$。由上式可得

$$u_C(0)=10(1-e^{-0.4})=10(1-0.670\ 3)=3.297\ \text{V}$$

$t\geqslant 0$ 时的零输入响应为

$$u_C(t)=u_C(0)e^{-0.1t}=3.297e^{-0.1t}\ \text{V}$$

$$i_C(t)=C\frac{du_C}{dt}=-0.329\ 7e^{-0.1t}\ \text{A}$$

由于电容电压的不连续性 $u_C(0_+)=u_C(0_-)=u_C(0)=3.297\ \text{V}$。电容电流在 $t=0$ 时则发生跃变。$i_C(0_-)$可由下式得到，$t\leqslant 0$ 时

$$i_C(t)=C\frac{du_C}{dt}=\frac{d}{dt}[10-10e^{-0.1(t+4)}]=-10e^{-0.4}\frac{d}{dt}e^{-0.1t}=e^{-0.4}e^{-0.1t}$$

$$=0.670\ 3e^{-0.1t}\ \text{A}$$

$$i_C(0_-)=0.670\ 3\ \text{A}$$

或 $t\leqslant 0$ 时，电阻电压

$$u_R(t)=10-u_C(t)=\{10-10[1-e^{-0.1(t+4)}]\}\ \text{V}$$

$$=10e^{-0.1(t+4)}\ \text{V}$$

所以

$$i_C(t)=\frac{u_R(t)}{10}=e^{-0.1(t+4)}\ \text{A}$$

$$i_C(0_-)=e^{-0.4}\text{A}=0.670\ 3\ \text{A}$$

而

$$i_C(0_+)=-0.329\ 7\text{A}$$

波形图见图 6-34。

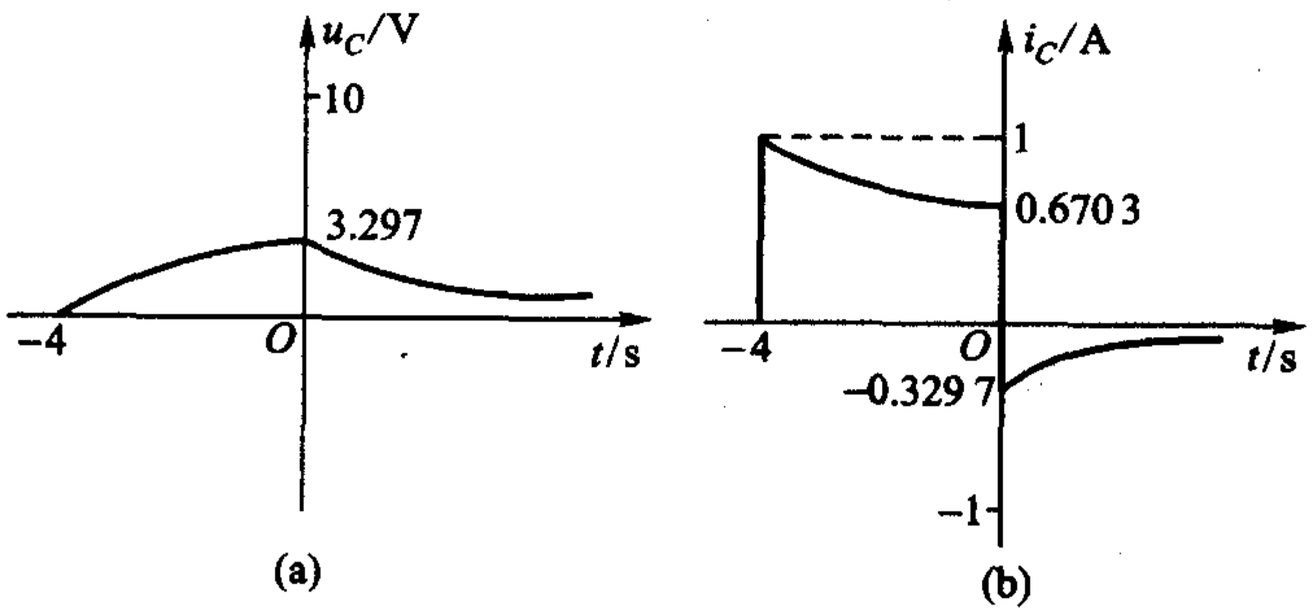


图 6-34　例 6-11，$\tau=10$ s

学习动态电路分析需特别重视“时间观念”。

练习题

6-7　电路如图 6-35 所示，在 $t=0$ 时开关由 a 投向 b，在此以前电容电压为 U。试求 $t\geqslant 0$ 时，电容电压及电流。

$$\left[\tau=(R_1+R_2)C,\ Ue^{-\frac{t}{\tau}},\ \frac{U}{R_1+R_2}e^{-\frac{t}{\tau}}\right]$$

6-8　如电路图 6-36 所示，在 $t=0$ 时开关打开，在打开前一瞬间，电容电压为 6 V。试求 $t\geqslant 0$ 时，3 Ω 电阻中的电流

$$(2e^{-\frac{t}{3}}\ \text{A})$$

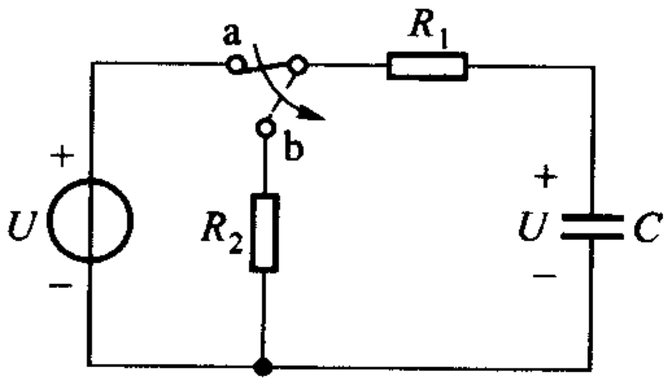


图 6-35　练习题 6-7

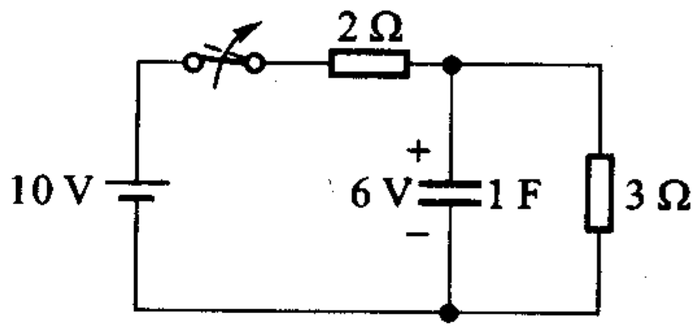


图 6-36　练习题 6-8

6-9　如电路图 6-37 所示，在 $t=0$ 时开关由 a 投向 b，已知在换路前一瞬间，电感电流为 1 A。试求 $t\geqslant 0$ 时各电流。

$$(i_L=e^{-10t}\ \text{A})$$

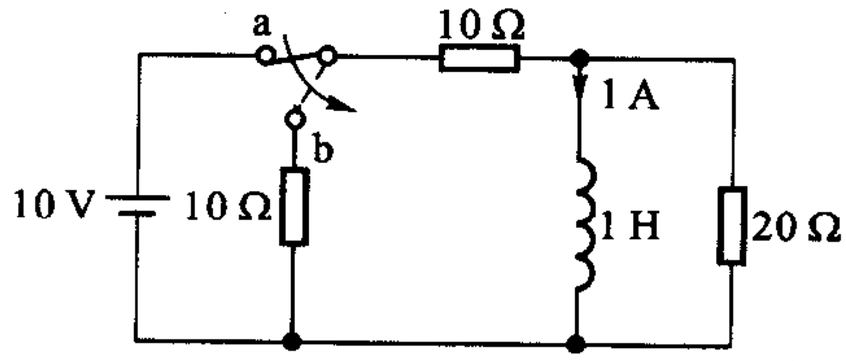


图 6-37　练习题 6-9

§6-5　线性动态电路的叠加原理

综上所述，线性一阶电路的叠加原理包含下述内容：若初始时刻为 $t=0$，则对所有 $t\geqslant 0$ 的时刻，我们有：

（1）全响应 = 零状态响应 + 零输入响应；

（2）零状态响应线性；

（3）零输入响应线性。

这一结论对线性 n 阶动态电路也是成立的。

动态电路叠加原理的这一表述，似较电阻电路的表述“复杂”，其原因在于非零初始状态的电容或电感，即便 C 或 L 为常量，其响应与激励也不呈线性关系。试以电容 $t\geqslant 0$ 时的 VCR(5－7)式为例，若激励 $i(t)$ 增长一倍，由于 $u(0)$ 的存在，响应 $u(t)$ 并不能随之增长一倍。非零初始状态动态元件的全响应不满足叠加原理！如果我们巧妙地把非零初始状态与元件分离，看成是一个独立电源，如图 5－7、图 6－3 所示，并引入零状态响应和零输入响应的概念，则正如上文(2)、(3)所述，它们分别具有线性性质，且为全响应的一个分量，如(1)所述。这样的表述，使叠加原理在动态电路分析中易于操作①。

例 6－12　$t\geqslant 0$ 时 RC 并联电路如图 6－38 所示，在电流源 $i_S(t)$ 的作用下，若 $R=1\ \Omega$、$C=1\ \mathrm{F}$，试求响应 $u_C(t)$，$t\geqslant 0$。若

(1) $i_S(t)=2\ \mathrm{A}$，$u_C(0)=1\ \mathrm{V}$；

(2) $i_S(t)=3\ \mathrm{A}$，$u_C(0)=1\ \mathrm{V}$；

(3) $i_S(t)=5\ \mathrm{A}$，$u_C(0)=1\ \mathrm{V}$，核对所求结果是否为(1)、(2)结果之和。

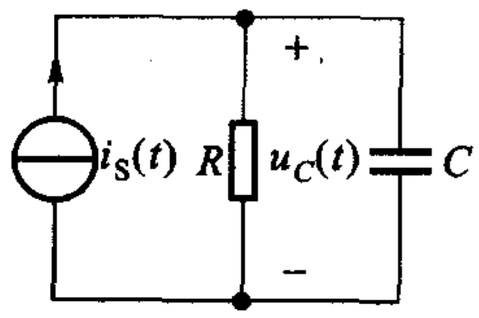


图 6－38　例 6－12

解　(1) 零状态响应 $u'_{C1}=i_S R(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})$

$$=2(1-\mathrm{e}^{-t})\ \mathrm{V}\qquad t\geqslant 0$$

零输入响应 $u''_{C1}=u_C(0)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}=\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{V}\qquad t\geqslant 0$

全响应 $u_{C1}=u'_{C1}+u''_{C1}=2-\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{V}\qquad t\geqslant 0$

(2) 零状态响应 $u'_{C2}=i_S R(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})=3(1-\mathrm{e}^{-t})\qquad t\geqslant 0$

零输入响应 $u''_{C2}=u_C(0)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}=\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{V}\qquad t\geqslant 0$

全响应 $u_{C2}=u'_{C2}+u''_{C2}=3-2\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{V}\qquad t\geqslant 0$

(3) 零状态响应 $u'_{C3}=5(1-\mathrm{e}^{-t})\ \mathrm{V}\qquad t\geqslant 0$

零输入响应 $u''_{C3}=\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{V}\qquad t\geqslant 0$

全响应 $u_{C3}=u'_{C3}+u''_{C3}=(5-4\mathrm{e}^{-t})\ \mathrm{V}\qquad t\geqslant 0$

$$u_{C3}\neq u_{C1}+u_{C2}=(5-3\mathrm{e}^{-t})\ \mathrm{V}$$

表明全响应并非激励单独作用时响应的总和，即便在相同的初始状态下。

例 6－13　电路如图 6－39 所示，开关闭合前电路已处于稳态，$t=0$ 时开关

---

① 事实上，在 $t\geqslant 0$ 时，零输入响应取决于 $t=0$ 时的初始状态，而这一初始状态又是 $t<0$ 时的输入在 $t=0$ 所形成的。因此，$t\geqslant 0$ 任意时刻的全响应乃是 $t<0$ 时的输入和 $t\geqslant 0$(到此时刻)的输入所形成效应的叠加。亦即全响应应为所有零状态响应的叠加，类似电阻电路中的提法。上述包含三点内容的提法只是一个推论。见蔡少棠、葛守仁等著《Linear and Nonlinear Circuit》§8－5.1。

闭合，求 $u_C(t)$、$t\geqslant 0$。若 12 V 电源改为 24 V 电源，求 $u_C(t)$，$t\geqslant 0$。

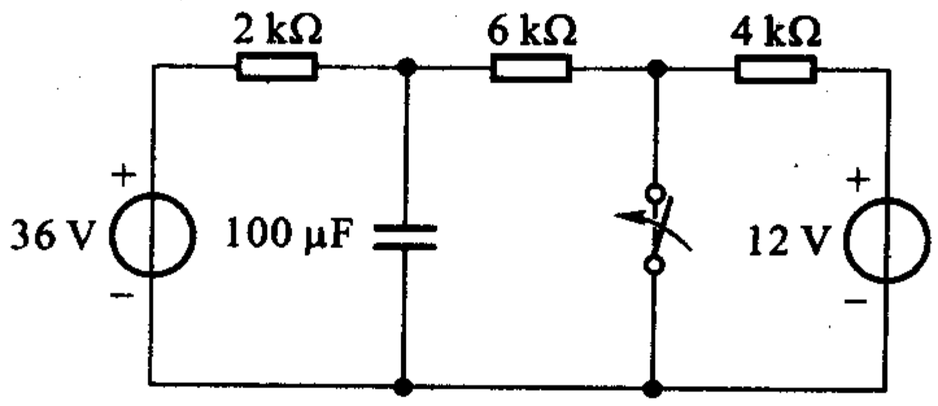


图 6－39　例 6－13

解　求 $t\geqslant 0$ 时零状态响应 $u'_C(t)$：开关闭合时的电路如图 6－40(a)所示，运用戴维南定理可得图 6－40(b)所示电路，其中

$$u_{OC}(t)=36\times\frac{6}{6+2}\ \text{V}=27\ \text{V}\qquad R_o=\frac{6\times 2}{6+2}\times 10^3\ \Omega=1.5\times 10^3\ \Omega$$

又

$$u'_C(\infty)=27\ \text{V}$$

$$\tau=R_oC=0.15\ \text{s}$$

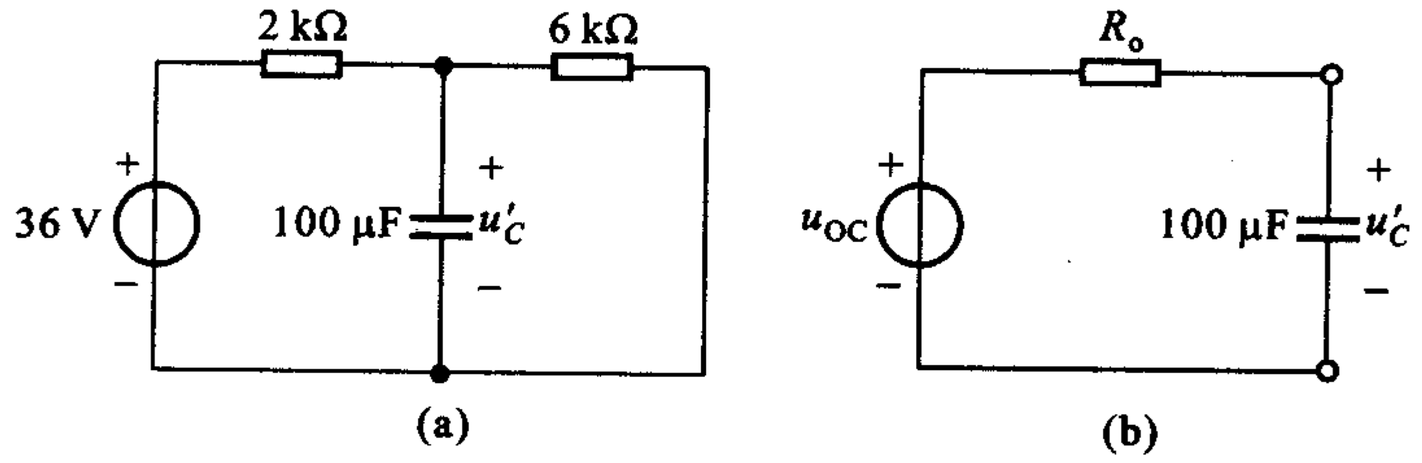


图 6－40　求零状态响应用图

故得

$$u'_C(t)=27(1-e^{-\frac{t}{0.15}})\ \text{V}\qquad t\geqslant 0$$

求 $t\geqslant 0$ 时的零输入响应 $u''_C(t)$：由于 $t=0_-$ 时电路处于直流稳态，开关尚未闭合，且电容相当于开路，得电路如图 6－41 所示。可知

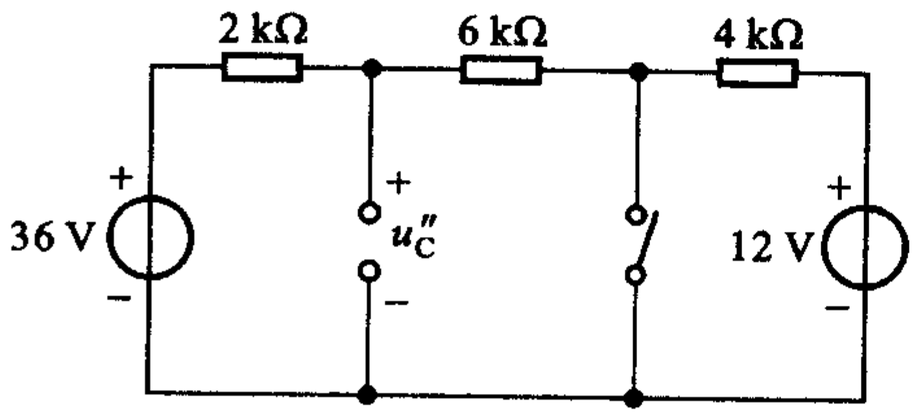


图 6－41　$t=0_-$ 时电路图

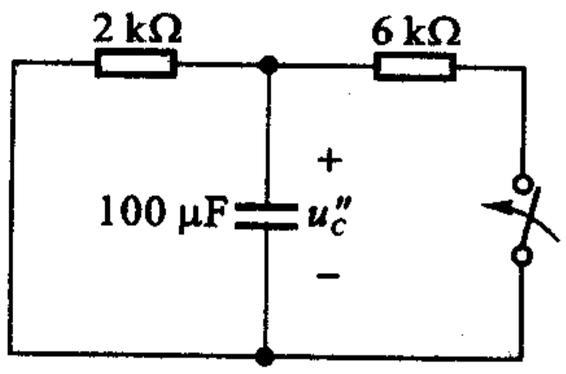


图 6－42　求零输入响应用图

$$u_C''(0_-)=\left[36-(36-12)\times\frac{2}{2+6+4}\right]\ \mathrm{V}=32\ \mathrm{V}=u_C''(0_+)$$

又
$$\tau=R_0C=\frac{6\times2}{6+2}\times10^3\times100\times10^{-6}\ \mathrm{s}=0.15\ \mathrm{s}$$

R_0 为开关闭合后，对电容两端的等效电阻（图 6－42）。

故得零输入响应

$$u_C''(t)=32\mathrm{e}^{-\frac{t}{0.15}}\ \mathrm{V}\qquad t\geqslant0$$

根据叠加原理，全响应

$$u_C(t)=u_C'(t)+u_C''(t)$$

$$=(27+5\mathrm{e}^{-\frac{t}{0.15}})\ \mathrm{V}\qquad t\geqslant0$$

其波形图如图 6－43 所示。

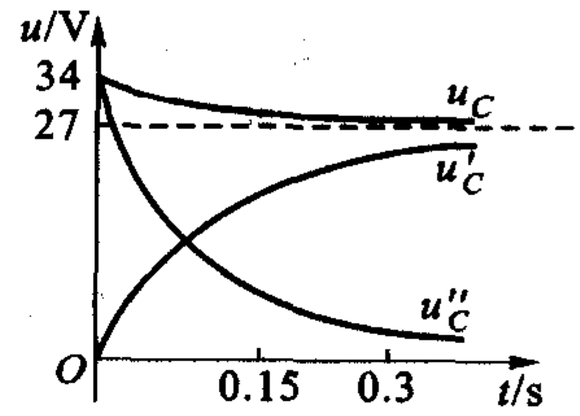


图 6－43　图 6－39 所示电路的全响应 u_C 及其两个分量 u_C'、u_C''

若 12 V 电压源改为 24V 电压源，只影响零输入响应，此时 $u_C(0_+)$ 有变化。得

$$u_C''(t)=\left[36-(36-24)\times\frac{2}{2+6+4}\right]\mathrm{e}^{-\frac{t}{0.15}}\ \mathrm{V}$$

$$=34\mathrm{e}^{-\frac{t}{0.15}}\ \mathrm{V}\qquad t\geqslant0$$

零状态响应不变，故得

$$u_C(t)=[34\mathrm{e}^{-\frac{t}{0.15}}+27(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{0.15}})]\ \mathrm{V}$$

$$=(27+7\mathrm{e}^{-\frac{t}{0.15}})\ \mathrm{V}\qquad t\geqslant0$$

思考题

6－5　图 6－5(b) 所示电路中，若 $U_S=1$ V，$u_C(0)=1$ V 时的全响应为 $u_{C1}(t)$，则：(1) $U_S=2$ V，$u_C(0)=1$ V 时的全响应 $u_{C2}(t)$ 为 $2u_{C1}(t)$；(2) $U_S=2$ V，$u_C(0)=2$ V 时的全响应为 $2u_{C2}(t)$。对吗？为什么？

练习题

6－10　图 6－38 所示电路中，若 $i_S(t)=1$ A、$u_C(0)=1$ V，试求全响应 $u_C(t)$，$t\geqslant0$。　(1 V)

6－11　电路如图 6－44 所示，已知 $U_S=8$ V，$t\geqslant0$；$R=500\ \Omega$、$L=10$ mH；$i(0)=-10$ mA。求 $i(t)$，$t\geqslant0$。

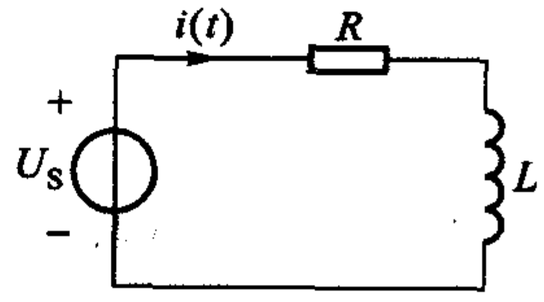


图 6－44　练习题 6－11

§6-6　三要素法

§6-1 提出的分解方法对任何输入都是适用的，见例6-4。运用这一方法时，首先求出状态变量，然后利用置换定理，将动态电路变为电阻电路。便可求得电路中的任一非状态变量[①]。属动态电路分析的基本原理。

如果只对电路中的某一非状态变量感兴趣，是否另有方法直接求解？当然，可以针对这一非状态变量，根据两类约束列出微分方程来求解。从工程应用角度看，这一方法虽是基本的，但不够简便。

本节介绍的三要素法是一种求解一阶电路的简便方法，有些文献称为视察法(inspection method)。它可用于求解电路任一变量的零输入响应和直流作用下的零状态响应、全响应，不论它是状态变量还是非状态变量。

这一方法的背景是：(1) 一阶电路中的响应是按指数规律变化的，都有它的初始值和稳态值(平衡值)，其变化过程唯一地由时间常数决定；(2) “提前”运用置换定理，不必等状态变量求得后再运用。[②]

确实，根据以前各节所述，我们不难看到，在直流一阶电路中各处的电压、电流都是按指数规律变化的，它们都是从各自的初始值开始，逐渐增长或是逐渐衰减到达稳态值的，且同一电路各支路电流和电压的时间常数是相同的。这类电路中电压、电流随时间变化的方式有四种可能的情况，分别如图 6-45 和图 6-46所示。图中：

$y(t)$可以代表电路中的任一电压或电流；

$y(0_+)$表示该电压或电流的初始值；

$y(\infty)$表示该电压或电流的稳态值；

τ 表示电路的时间常数。

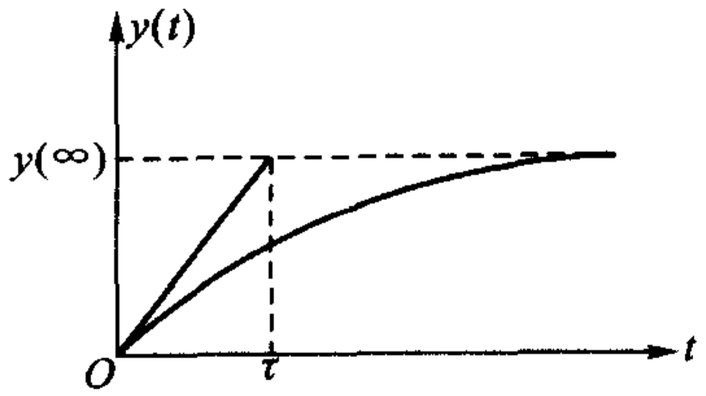
各种情况的解析表示式列在相对应的波形图下面。在分析电路时，只要抓住 $y(0_+)$，$y(\infty)$和 τ 这三个要素，就能画出波形图，并能立即写出相应的解析表示式，不必背诵这些式子[③]。

---

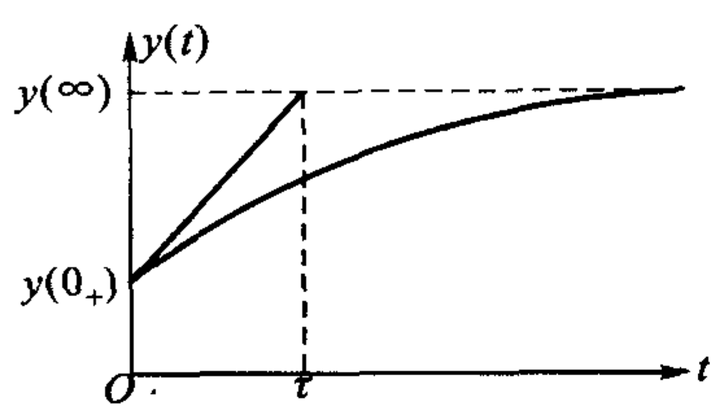
① 参阅 §5-7 有关状态变量的叙述。

② 三要素法是分解方法和叠加方法联合运用得出的结果。证明可参阅《简明电路分析基础》§7-6。

③ 这里的四个式子是可以合并成一个公式的，即：$y(t)=y(\infty)+[y(0_+)-y(\infty)]e^{-t/\tau}$，但需记住这一公式才能应用。

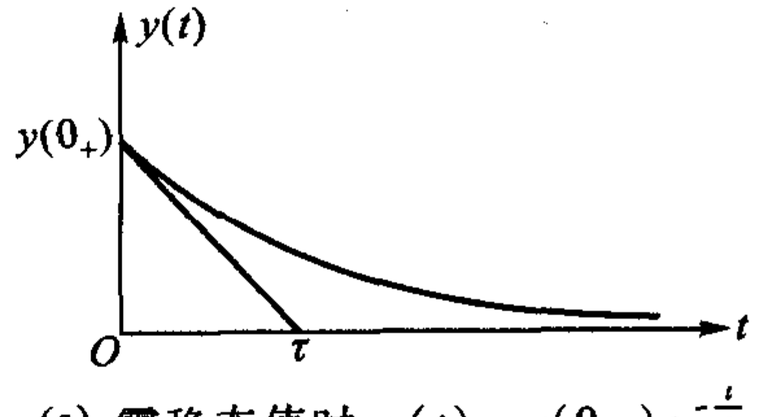


(a) 零初始值时，$y(t)=y(\infty)(1-e^{-\frac{t}{\tau}})$

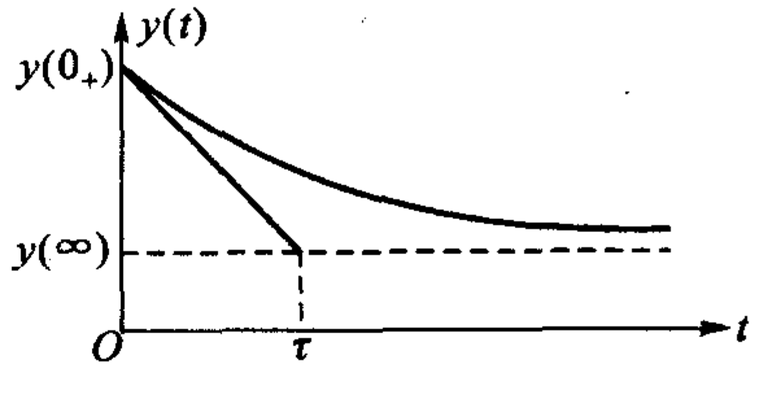


(b) 非零初始值时，$y(t)=y(0_+)+[y(\infty)-y(0_+)](1-e^{-\frac{t}{\tau}})$

图 6－45　$y(t)$增长的情况



(a) 零稳态值时，$y(t)=y(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}}$



(b) 非零稳态值时，$y(t)=y(\infty)+[y(0_+)-y(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$

图 6－46　$y(t)$衰减的情况

例 6－14　试写出电流 $i(t)$ 的表示式，若(1)波形如图 6－47(a)所示；(2)波形如图 6－47(b)所示。已知波形曲线均按指数规律变化。

解　图 6－47(a)所示波形：可理解为在 $i=-5$ A 的“基础”上，按指数规律“上升”，其“上升”幅度为 $5+10=15$，故得

$$i(t)=[-5+15(1-e^{-\frac{t}{\tau}})]\ \text{A}=(10-15e^{-\frac{t}{\tau}})\ \text{A}\qquad t\geqslant 0$$

参阅思考题 6－4，可知本题所示电流的时间常数 $\tau=2$ s。

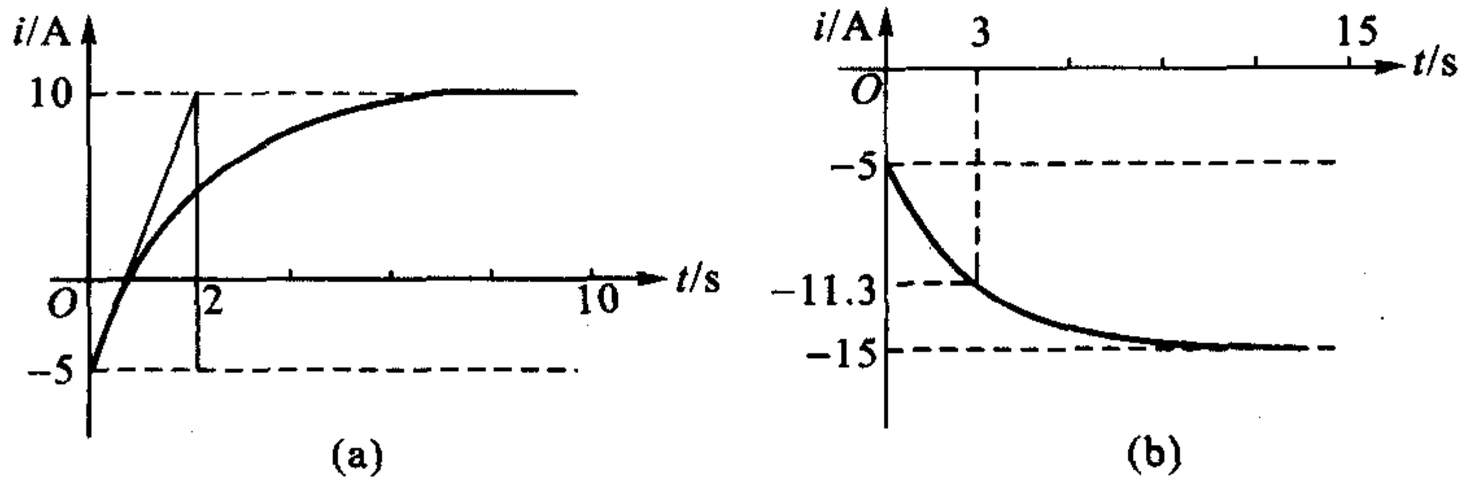


图 6－47　例 6－14

故所求 $i(t)$ 的表达式为

$$i(t)=(10-15e^{-\frac{t}{2}})\ \text{A}\qquad t\geqslant 0$$

图 6-47(b)所示波形:可理解为在 $i=-5$ A 的“基础”上,按指数规律“上升”,其“上升”幅度为 $-(15-5)=-10$,故得

$$i(t)=[-5-10(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})]\ \mathrm{A}=(-15+10\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})\ \mathrm{A}\qquad t\geqslant 0$$

由上式可知,当 $t=\tau$ 时,$i(\tau)=(-15+10\mathrm{e}^{-1})\ \mathrm{A}=-11.3\ \mathrm{A}$。因此,由图 6-47(b)所示波形图,可知 $\tau=3$ s。

故所求 $i(t)$ 的表达式为

$$i(t)=(-15+10\mathrm{e}^{-\frac{t}{3}})\ \mathrm{A}\qquad t\geqslant 0 \quad \blacktriangleleft$$

三要素法可按下列步骤进行,设已知电容电压初始值 $u_C(0)$ 或电感电流初始值 $i_L(0)$:

(1) 用电压为 $u_C(0)$ 的直流电压源置换电容或用电流为 $i_L(0)$ 的直流电流源置换电感,所得电路为一直流电阻电路,称为 $t=0$ 时的置换电路,由此电路可求得任一电压或电流的初始值,即 $y(0_+)$。前文所称“提前使用置换定理”即指这一步骤。

(2) 用开路置换电容或用短路置换电感,所得电路为一直流电阻电路,称为 $t=\infty$ 时的置换电路,由此电路可求得任一电压或电流的稳态值,即 $y(\infty)$。

(3) 求 N_1(图 6-1)的戴维南或诺顿等效电路以计算电路的时间常数 $\tau=R_0C$ 或 $\tau=\dfrac{L}{R_0}$。

(4) 根据(1)、(2)所得结果,绘出波形图或利用公式①

$$y(t)=y(\infty)+[y(0_+)-y(\infty)]\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \tag{6-38}$$

上式也可写为

$$y(t)-y(\infty)=[y(0_+)-y(\infty)]\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \tag{6-39}$$

以便记忆。

三要素法简便、易行,便于工程上迅速做出估计和运算,是本章学习重点。

例 6-15　求解图 6-12(a)所示电路的 $i(t)$,$t\geqslant 0$。

解　例 6-3 已解过本题,是先求出 $i_L(t)$ 后,运用置换定理解出 $i(t)$ 的。

本例运用三要素法求 $i(t)$,亦即求出 $i(0_+)$、$i(\infty)$ 和时间常数 τ 后得出 $i(t)$、$t\geqslant 0$。

(1) 求 $i(0_+)$:

在 $t=0_-$,亦即开关闭合前一瞬间,电路中并无电源,$i(0_-)$ 应为零,这是正

① 见第 217 页注①。

确的。在 $t=0_+$，亦即开关闭合后瞬间 $i(0_+)$ 是否仍为零？如果错误引用“电流不能跃变”，则将导致 $i(0_+)=0$ 的错误结果。须知只有“当电压为有界时，电感电流不能跃变”这一规律，其他元件的电流可以跃变也可以不跃变，并不能由其本身所确定，而应由其所处电路整体来确定。

$t=0_-$ 时，电感电流 $i_L(0_-)=0$，由于电感电流不能跃变，$i_L(0_+)=0$，这是正确的。由此可作出 $t=0_+$ 时的置换电路如图 6-48 所示，其中电感电流为零，故以开路代替。由该图不难确定

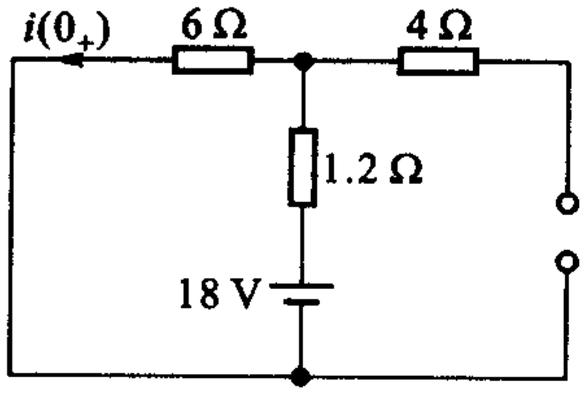


图 6-48　图 6-12(a)所示电路的 $t=0_+$ 置换电路

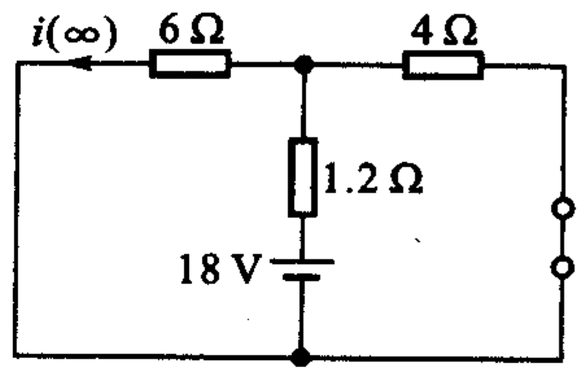


图 6-49　图 6-12(a)所示电路的 $t=\infty$ 置换电路

$$i(0)=i(0_+)=\frac{18}{6+1.2}\ \text{A}=2.5\ \text{A}$$

(2) 求 $i(\infty)$：

开关闭合后，$t=\infty$ 时电路达到直流稳态，电感相当于短路，此时置换电路如图 6-49 所示，不难求得

$$i(\infty)=\frac{18}{1.2+4\ 116}\times\frac{4}{6+4}\ \text{A}=2\ \text{A}$$

(3) 求 τ：

图 6-12(a)所示电路中开关闭合后，对电感而言的戴维南等效电阻

$$R_0=(4+1.211\ 6)\ \Omega=5\ \Omega$$

因此

$$\tau=\frac{L}{R_0}=\frac{10}{5}\ \text{s}=2\ \text{s}$$

(4) $i(t)$ 的波形图如图 6-50 所示，由于 $i(0)>i(\infty)$，$i(t)$ 是按指数规律下降的，可直接写出

$$i(t)=[2+(2.5-2)\text{e}^{-\frac{t}{2}}]\ \text{A}$$

$$= (2 + 0.5e^{-\frac{t}{2}})\ \text{A} \qquad t \geqslant 0$$

或代入(6－38)式亦可得出上列结果。

根据 $y(0_+)$ 和 $y(\infty)$ 绘波形图是很容易的，由波形图写出函数式也不困难，这样，可以不必背诵公式，做到简便、易行。

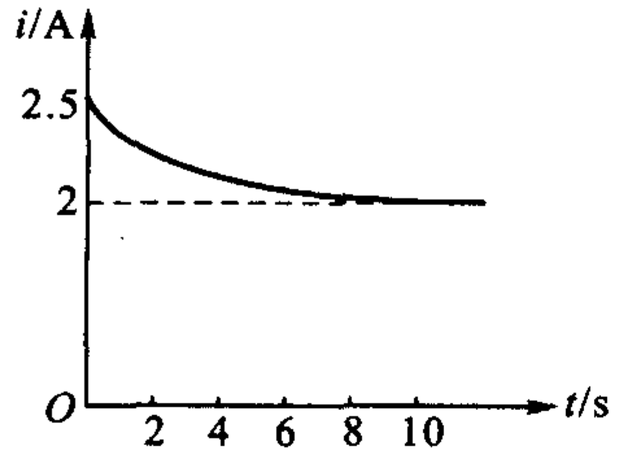


图 6－50　$i(t)$ 波形图

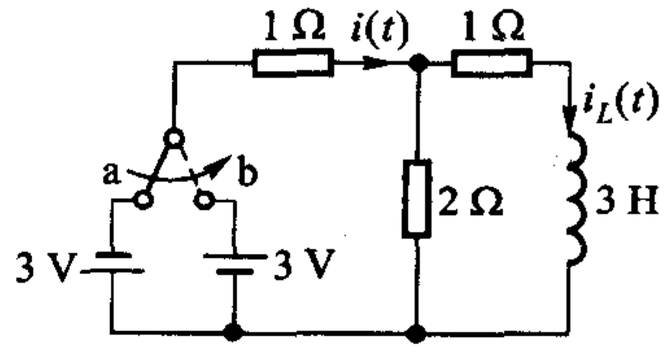


图 6－51　例 6－16

例 6－16　图 6－51 所示电路，$t=0$ 时开关由 a 投向 b。试绘出 $i(t)$、$i_L(t)$ 的波形图，并写出解析表达式。假定换路前电路处于稳态。

解　(1) 求 $i_L(0_+)$ 及 $i(0_+)$：

换路前电路已处于稳态，电感相当于短路，故得

$$i_L(0_-) = -\frac{3}{1+\frac{1\times 2}{1+2}} \times \frac{2}{1+2}\text{A}$$

$$= -\frac{6}{5}\ \text{A} = -1.2\ \text{A}$$

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = -1.2\ \text{A}$$

$t=0_+$ 时置换电路如图 6－52 所示，其中电感已用 1.2 A 的电流源置换，由此可得

$$3i(0_+) - 2i_L(0_+) = 3$$

即

$$3i(0_+) + 1.2\times 2 = 3$$

$$i(0_+) = \frac{3-2.4}{3}\ \text{A} = 0.2\ \text{A}$$

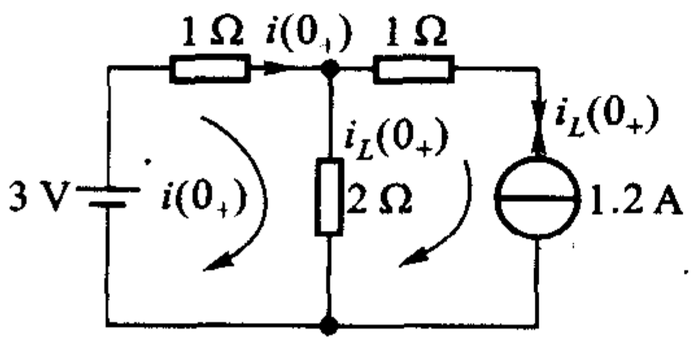


图 6－52　$t=0_+$ 时置换电路图

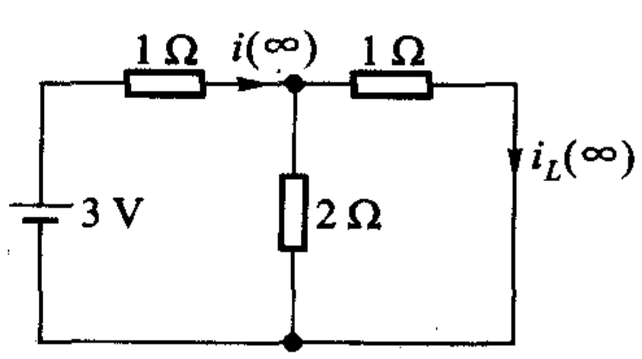


图 6－53　$t=\infty$ 时置换电路图

(2) 求 $i_L(\infty)$及 $i(\infty)$:

$t=\infty$ 时等效电路如图 6-53 所示,其中电感已用短路线置换。由此可得

$$i(\infty)=\frac{3}{1+\frac{2\times1}{2+1}}\ \mathrm{A}=1.8\ \mathrm{A}$$

$$i_L(\infty)=1.8\times\frac{2}{2+1}\ \mathrm{A}=1.2\ \mathrm{A}$$

(3) 求 τ:

开关投向 b 后,戴维南等效电阻为

$$R_0=1+\frac{2\times1}{2+1}\ \Omega=\frac{5}{3}\ \Omega$$

因而

$$\tau=\frac{L}{R_0}=\frac{3}{\frac{5}{3}}\ \mathrm{s}=\frac{9}{5}\ \mathrm{s}=1.8\ \mathrm{s}$$

根据 $i(0_+)$、$i(\infty)$;$i_L(0_+)$、$i_L(\infty)$等可绘出波形图如图6-54所示。由此可知

$$\begin{aligned}i(t)&=[0.2+(1.8-0.2)(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})]\ \mathrm{A}\\&=[0.2+1.6(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})]\ \mathrm{A}\\&=(1.8-1.6\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})\mathrm{A}\qquad t\geqslant0\\i_L(t)&=[-1.2+2.4(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})]\ \mathrm{A}\\&=(1.2-2.4\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})\mathrm{A}\qquad t\geqslant0\end{aligned}$$

其中 $\tau=1.8$ s。

如利用(6-38)式亦可得同样的结果。

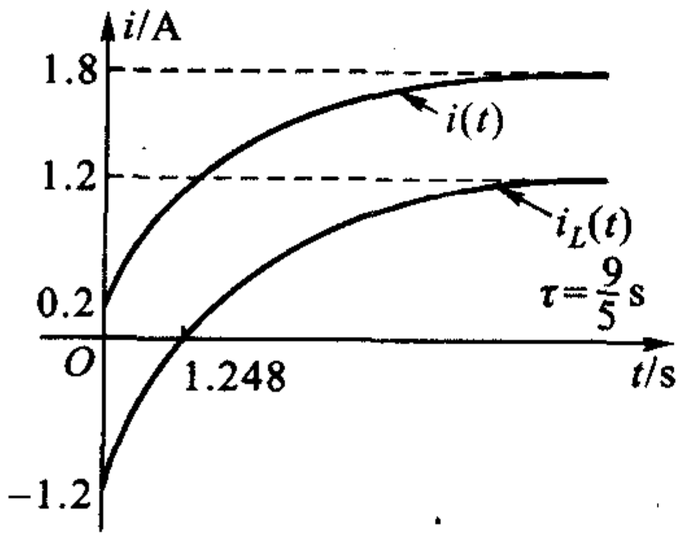


图 6-54　$i_L(t)$、$i(t)$波形图

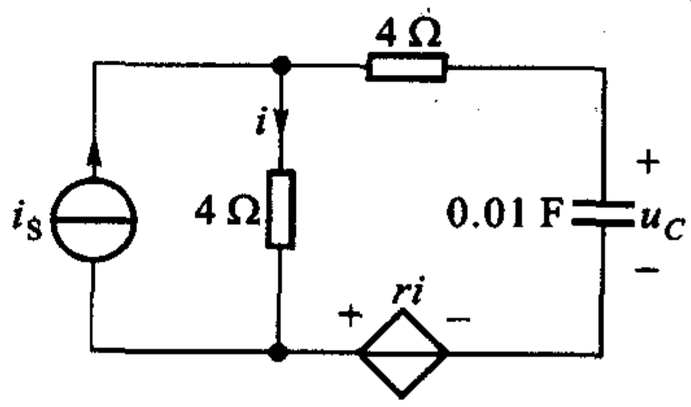


图 6-55　例 6-17

例 6-17　电路如图 6-55 所示，已知电流源 $i_s = 2\ \text{A}$、$t \geqslant 0$；$i_s = 0$、$i < 0$，$r = 2\ \Omega$。求 $i(t)$、$t \geqslant 0$。

解　(1) 求 $i(0_+)$：

$t < 0$ 时，$i_s = 0$，因而

$$u_C(0_-) = 0 = u_C(0_+)$$

作 $t = 0_+$ 置换电路如图 6-56 所示，把受控电压源与 4 Ω 串联支路等效为受控电流源与 4 Ω 的并联后，运用分流关系可得

$$i(0_+) = \frac{1}{2}\left[2 - \frac{2i(0_+)}{4}\right]$$

解得

$$i(0) = i(0_+) = 0.8\ \text{A}$$

(2) 求 $i(\infty)$：

作 $t = \infty$ 置换电路如图 6-57 所示，可知

$$i(\infty) = 2\ \text{A}$$

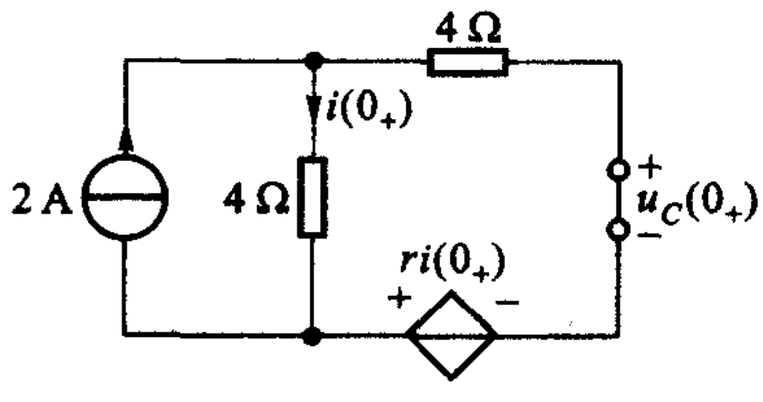


图 6-56　$t = 0_+$ 置换电路

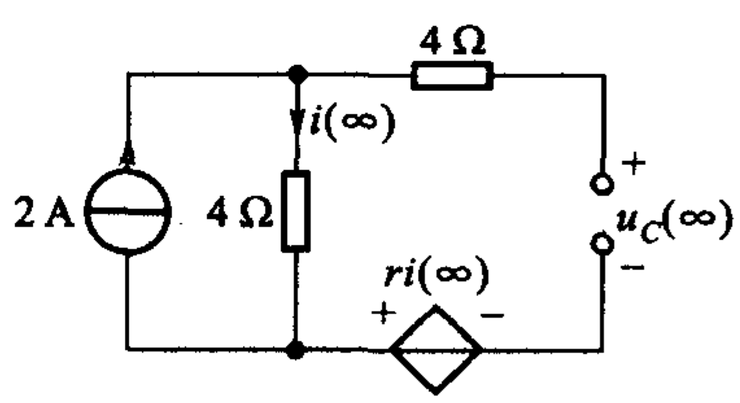


图 6-57　$t = \infty$ 置换电路

(3) 求 τ：

首先应求得对电容而言的戴维南等效电阻 R_o，为此，可在拟求该电阻的电路两端施加电压源 u_1 如图 6-58 所示，求得相应的电流 i_1 便可得到所求电阻。

由 KVL 可得

$$u_1 = 4i_1 + 4i_1 + 2i_1 = 10i_1$$

故

$$R_o = \frac{u_1}{i_1} = 10\ \Omega$$

得

$$\tau = R_o C = 10 \times 0.01\ \text{s} = 0.1\ \text{s}$$

(4) 由于 $i(\infty) > i(0)$，可知电流 i 系按指数规律上升，波形如图 6-59 所

示。可得

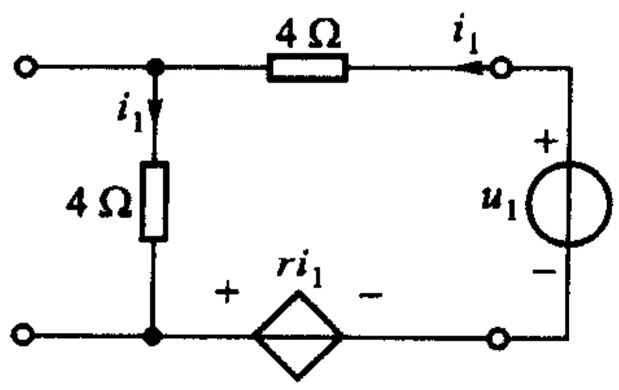


图 6－58　用外施电压源法求戴维南等效电阻

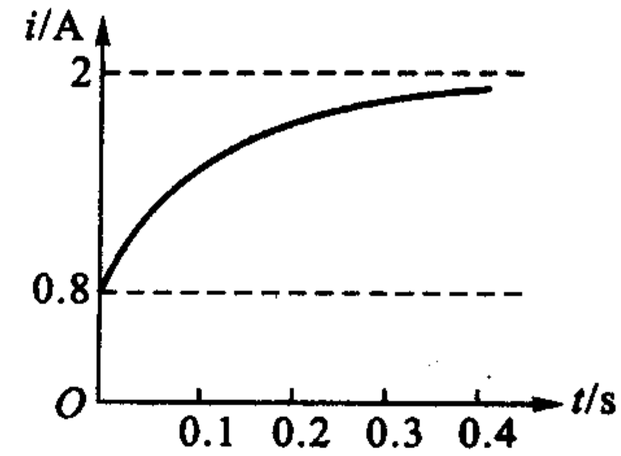


图 6－59　$i(t)$波形图

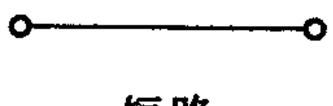
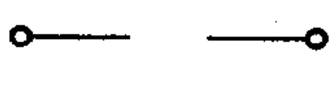
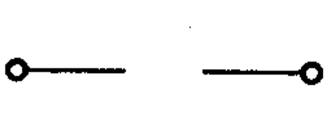
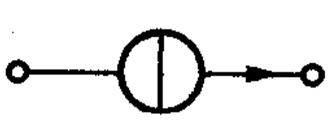
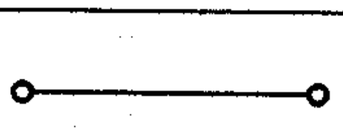
$$i(t) = [0.8 + (2 - 0.8)(1 - e^{-10t})]\text{A}$$
$$= (2 - 1.2e^{-10t})\text{A} \qquad t \geqslant 0$$

根据(6－38)式也可得出结果。

◀

三要素法的难点在于正确得出初始值。u_C、i_L 不能跃变，它们的初始值主宰着电路中其他电压、电流的初始值，这些初始值可能是跃变的，也可能并不跃变，需要通过计算才能确定其具体数值。为此，正确作出 $t=0_+$ 置换电路是非常重要的，若电路在 $t=0$ 时换路，表 6－2 有助于作出该电路。另外该表也有助于求稳态值。

表 6－2　C 和 L 在 $t=0_+$、$t=\infty$ 的置换电路

条件 / 元件	零初始状态，$t=0_+$	非零初始状态 $t=0_+$	直流稳态，$t=0_-$ 或 $t=\infty$
	 短路	 $u_C(0_+) = u_C(0_-)$	 开路
	 开路	 $i_L(0_+) = i_L(0_-)$	 短路

思考题

6－6　试利用第五章图 5－7 和图 5－15 所示电容和电感的置换电路得出如表 6－2 中所示 $t=0_+$ 时的置换电路。

6－7　你如何理解表 6－2 所示直流稳态的置换电路？

练习题

6－12　试用三要素法求解例 6－12 情况(1)。

6－13　(1) 求图 6－60 所示电路开关打开后各电压、电流的初始值。已知在开关打开前，电路已处于稳态。

(6 V、4 V、0、0.2 mA)

(2) 图 6－60 所示电路改为开关原系打开，$t=0$ 时闭合，求闭合后各电压、电流。已知在开关闭合前电路已处于稳态。

$$\left(10\ \text{V}、0、0、\frac{1}{3}\ \text{mA}\right)$$

6－14　电路如图 6－61 所示，开关在 $t=0$ 时闭合，闭合前电路处于直流稳态。求 $i(t)$，并绘波形图。

$$\left[\frac{U_S}{R_1}-\frac{R_2U_S}{R_1(R_1+R_2)}e^{-\frac{R_1}{L}t}\right]$$

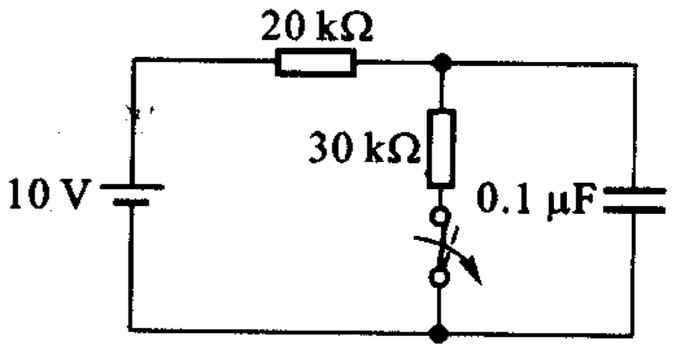


图 6－60　练习题 6－13

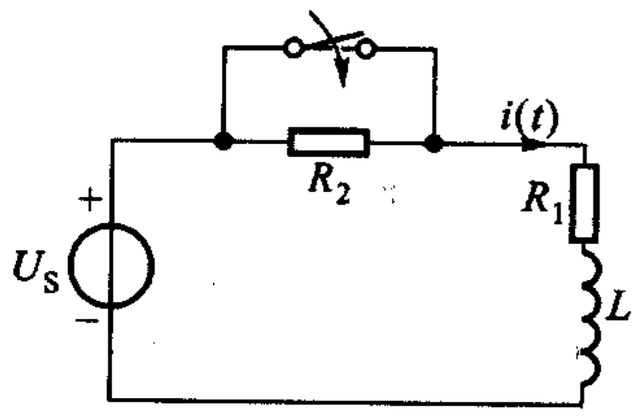


图 6－61　练习题 6－14

§6－7　瞬态和稳态

本章从 §6－2 到 §6－5 是从线性电路的因果关系，即叠加方法来研究一阶电路的。本章的最后两节则将从电路的工作状态——瞬态(transient state)和稳(定状)态(steady state)来研究一阶电路。

对输入或电路状况(例如参数)的变化，电阻电路能作出即时的反应，而动态电路由于储能的缘故一般却不能。在 §6－2 零状态响应一节中已经见到当直流电压源施加于 RC 串联电路时，电路不能立即“受命”，呈现出直流电源控制下的特点——电容隔直流、电容被充电到电源电压值，即进入直流稳态。在经历一段时间后才能达到直流稳态，这段时间电路处于瞬态。因此，这电路从时间上说可分为两种工作状态——瞬态和稳态。

许多动态电路都呈现出这两种工作状态，构成动态电路分析的一项内容。因此需要对这两种状态作出定义。

当描述动态电路的变量或为不随时间而变的常量，或为随时间而变的周期量时，我们称此电路进入了稳定状态。

电路不处于稳态即处于瞬态（暂态、瞬变）或非稳态（unsteady state）。

在直流电源或交流电源作用下，线性动态电路可能进入的稳态，称为直流稳态或交流稳态。直流稳态已在§6－2提到，交流稳态将在下节讨论。例6－4所示电路则不存在稳态，始终处于非稳态，直至最后，由于电压的增长，电路模型不适用时为止。

瞬态往往明显地具有从一种稳态或工作状态进入另一种稳态或工作状态的特征，常又称为过渡（transition）过程。§6－2所述的电容充电过程和§6－4所述的电容放电过程，即为例子。在此，不妨作一简单回顾。

回顾§6－2图6－5所示零初始状态的 RC 电路被直流电源 U_S 的充电情况。电路方程为

$$RC\frac{du_C}{dt}+u_C=U_S \quad t\geqslant 0 \tag{6-7}$$

在 $u_C(0)=0$ 时的解答为

$$u_C(t)=U_S-U_Se^{-\frac{t}{\tau}} \quad t\geqslant 0 \tag{6-13}$$

$u_C(t)$ 由两项组成。第一项 U_S 为稳态值，即直流电压源要求电容电压达到的数值，如图6－62中曲线①所示，称为 $u_C(t)$ 的稳态响应分量或强制（forced）响应分量。由于电容电压的连续性质，即电容电压不能跃变，在电压源作用到电路瞬间，电容电压将“坚持”在原有的初始值 $u_C(0)$，不能立即满足电压源对电路的要求。第二项 $-U_Se^{-\frac{t}{\tau}}$ 的出现，就是为了解决这一矛盾的。这一分量的初始值为 $-U_S$，与 $t=0$ 时的稳态分量 U_S 相抵消，以满足 u_C 的初始值为零的要求，以后即随时间按指数律逐渐消失，到 $t=(4\sim5)\tau$ 时，可认为已消失为零。此时，$u_C(t)$ 即达到直流电压源所要求的数值，在图6－5所示电路中即为 U_S。(6－13)式中的第二项，以其暂时存在，故称瞬态响应分量，其一般形式应如(6－15)式所示，此处 $K=-U_S$，实为 $u_C(0)$ 与 $t=0$ 时稳态值之差，波形如图6－62中曲线②所示。这一分量又称为固有（nature）响应分量或自由（free）响应分量，可认为是外施电源作用于电路后，电路本身作出的反应。这一反应的出现，既能使电路响应满足初始条件，又能使响应最终能满足外施电源的要求。我们能观测到的响应 $u_C(t)$ 如图6－62中曲线③所示，与图6－8所示相同，即直流

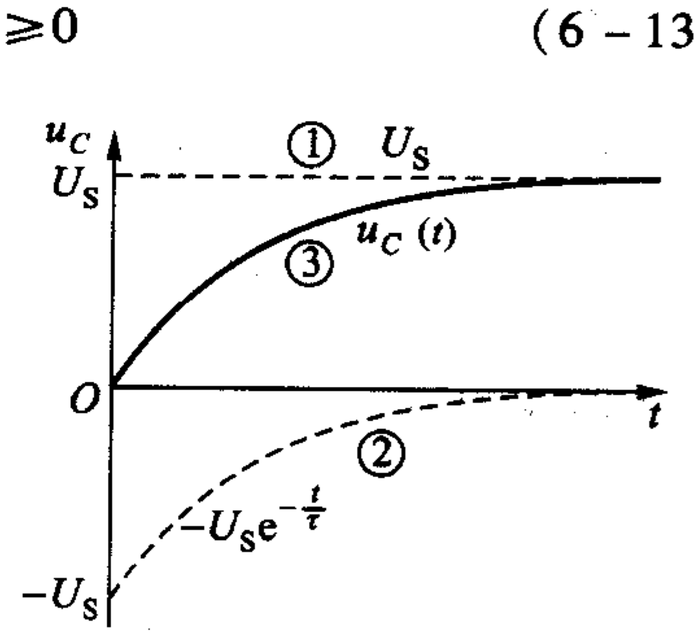


图6－62　稳态响应分量和瞬态响应分量

作用下的零状态响应。从工作状态来说，在电源作用于电路的时刻至电路到达稳态的时刻，属瞬态阶段，为时$(4\sim5)\tau$，以后即属稳态阶段，电路完全由外施电源主宰。这里瞬态明显地具有从一种稳态($u_C=0$)进入到另一种稳态($u_C=U_S$)的特征，又称过渡过程。

对非零初始状态、直流作用下的全响应，也是这样，也可分为稳态响应分量和瞬态响应分量。稳态响应分量可按换路后的直流电阻电路(C以开路、L以短路置换)求得，如同三要素法中求解$f(\infty)$。此处必须指出：直流电源作用下的稳态值应是一个常量，且这一常量应满足(6-7)式。令此常量为U_{Cp}，并代入(6-7)式可得

$$RC\frac{\mathrm{d}U_{Cp}}{\mathrm{d}t}+U_{Cp}=U_S$$

由于常数的导数为零，得$U_{Cp}=U_S$。这样也可解得稳态时的u_C值为U_S。瞬态响应分量一般形式为$Ke^{-\frac{t}{\tau}}$，如同(6-15)式所示，τ为电路的时间常数，但此处的K如上文所述，应为初始值与$t=0$时稳态值之差，即$u_C(0)$与U_{Cp}之差，知道这两个数据就可确定K。

例6-18　接续例6-12，试求情况(1)时$u_C(t)$的稳态响应瞬态响应和全响应。

解　例6-12中图6-38所示直流电流源作用下的RC并联电路，在直流稳态时，电容以开路置换后，可得稳态响应

$$U_{Cp}=i_SR=2\ \mathrm{V}$$

或根据KCL得$t\geqslant0$的微分方程为

$$i_S(t)=i_C(t)+i_R(t)=C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{u_C(t)}{R}$$

以$u_C(t)=U_{Cp}$代入，可得

$$\frac{U_{Cp}}{R}=2\ \mathrm{A}$$

稳态响应为

$$U_{Cp}=(2\ \mathrm{A})(1\ \Omega)=2\ \mathrm{V}$$

瞬态响应的一般形式为$Ke^{-\frac{t}{\tau}}$，其中$\tau=RC=1\ \mathrm{s}$，K为初始值$u_C(0)$与$t=0$时的稳态值之差，即

$$K=(1-2)\ \mathrm{V}=-1\ \mathrm{V}$$

令瞬态响应表示为u_{Ch}，则

$$u_{Ch}=(-1)e^{-t}\mathrm{V}=-e^{-t}\mathrm{V}$$

全响应$u_C(t)$为稳态响应与瞬态响应之和，得

$$u_C(t)=(2-e^{-t})\ \mathrm{V}\qquad t\geqslant0$$

求得的全响应与例 6－12(1)中求得者相同。

例 6－19　接续例 6－16,试求 $i(t)$ 和 $i_L(t)$ 的稳态响应和瞬态响应。

解　例 6－16 中已解得稳态值为

$$i_L(\infty)=\frac{6}{5}\ \mathrm{A}$$

$$i(\infty)=\frac{9}{5}\ \mathrm{A}$$

此即稳态响应 $i_{Lp}(t)$ 和 $i_p(t)$,均为常量,亦即为 $t=0$ 时的稳态值。

初始值为

$$i_L(0_+)=-\frac{6}{5}\ \mathrm{A}$$

$$i(0_+)=\frac{1}{5}\ \mathrm{A}$$

时间常数为

$$\tau=\frac{9}{5}\ \mathrm{s}$$

故得瞬态响应为

$$i_{Lh}(t)=Ke^{-\frac{t}{\tau}}=[i_L(0_+)-i_L(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}=\left(-\frac{6}{5}-\frac{6}{5}\right)e^{-\frac{5t}{9}}=-\frac{12}{5}e^{-\frac{5t}{9}}\ \mathrm{A}$$

$$i_h(t)=Ke^{-\frac{t}{\tau}}=[i(0_+)-i(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}=\left(\frac{1}{5}-\frac{9}{5}\right)e^{-\frac{5t}{9}}$$

$$=-\frac{8}{5}e^{-\frac{5t}{9}}\ \mathrm{A}$$

全响应为

$$i_L(t)=i_{Lp}(t)+i_{Lh}(t)=\left(\frac{6}{5}-\frac{12}{5}e^{-\frac{5t}{9}}\right)\ \mathrm{A}\quad t\geqslant 0$$

$$i(t)=i_p(t)+i_h(t)=\left(\frac{9}{5}-\frac{8}{5}e^{-\frac{5t}{9}}\right)\ \mathrm{A}\quad t\geqslant 0$$

所得全响应与用三要素法求得者相同。

◀

在 §6－2 和 §6－5 中,从叠加观点得到

全响应 = 零状态响应 + 零输入响应

在本节又从工作状态观点得到

全响应 = 稳态响应 + 瞬态响应

例 6－12 和例 6－18 分别表明了以上对全响应的两种分解观点。

当研究激励和初始状态对全响应的影响时,应该采用零状态响应和零输入响应的概念,由这两种响应叠加得出全响应。

当研究电路的稳态时,需求解电路的稳态响应。研究过渡过程则既要求得

稳态响应，又要求得瞬态响应，两者相加所得的全响应，表明为时$(4\sim5)\tau$的过渡过程的情况，这里所说的相加，并无叠加的含义。

请注意：零输入响应和瞬态响应在形式上都可用(6－15)式，即$Ke^{-\frac{t}{\tau}}$表示。前者K为初始值。后者K为初始值与初始时刻稳态值之差，若差值为零，电路中将无过渡过程。

若对§6－6三要素法的(6－38)式加以回顾，不难发现，该式的两项分别代表直流激励下响应的稳态分量和瞬态分量。本章§6－2至§6－5由因果关系讨论一阶电路，本节由工作状态讨论一阶电路，§6－6实际上起着前后的沟通作用。

***例6－20**　接续例6－4，试求图6－13(c)所示电路$u(t)$的稳态响应和瞬态响应。

解　电路的微分方程为

$$\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+u=\frac{1}{2}+t\qquad t\geqslant 0$$

外施电源为$\left(\frac{1}{2}+t\right)$ A，在达到稳态时，可设稳态响应

$$u_{\mathrm{p}}(t)=Q_0+Q_1t$$

Q_0和Q_1为待定常数。以$u_{\mathrm{p}}(t)$代入微分方程，得

$$\frac{1}{4}Q_1+Q_0+Q_1t=\frac{1}{2}+t$$

比较方程两端的同类项系数，可得

$$\frac{1}{4}Q_1+Q_0=\frac{1}{2}$$

$$Q_1=1$$

进一步可得

$$Q_0=\frac{1}{4}$$

因此，稳态响应为

$$u_{\mathrm{p}}(t)=\frac{1}{4}+t$$

瞬态响应为

$$u_{\mathrm{h}}(t)=Ke^{-\frac{t}{\tau}}$$

其中时间常数可由图6－13(c)求得为

$$\tau=RC=\frac{1}{4}\ \mathrm{s}$$

K为初始值与$t=0$时稳态值之差，已知$u(0)=0$，故得

$$K=-\frac{1}{4}$$

因此，瞬态响应为

$$u_h(t) = -\frac{1}{4}e^{-4t}$$

全响应为

$$u_p(t) + u_h(t) = \frac{1}{4} + t - \frac{1}{4}e^{-4t}$$

$$= \left[\frac{1}{4}(1 - e^{-4t}) + t\right] \text{ V} \qquad t \geqslant 0$$

注意：不能按直流稳态时将电容视为开路，得出稳态响应为$\left(\frac{1}{2} + t\right)(1\ \Omega)$

$= \left(\frac{1}{2} + t\right)$ V 的错误答案。严格来说，本题的稳态响应应称为强迫响应，它不符合正文所述的稳态定义。电路始终处于非稳态，直至电压不断增长，电容被击穿，模型无效为止。

例 6－4 求得者为零状态响应，即全响应（该电路的零输入响应为零）。

思考题

6－8　如何理解练习题 6－10 中直流电流源作用于动态电路所得的响应 $u_C(t)$？

6－9　瞬态响应分量和零输入响应均具有 $Ke^{-\frac{t}{\tau}}$ 形式，两者的 K 有何不同？试从物理意义上来加以理解。

6－10　某直流激励、初始状态不为零的动态电路，若直流激励增加一倍、初始状态不变，则全响应、零输入响应、零状态响应、瞬态响应、稳态响应五者之中何者也将增加一倍？若直流激励不变、初始状态增加一倍，结果又如何？

练习题

6－15　接续例 6－3，试求 $i(t)$ 的稳态响应、瞬态响应和全响应。

$[i(0) = 2.5\ \text{A}、i(\infty) = 2\ \text{A}]$

6－16　接续例 6－12，情况（1）中 $u_C(0)$ 改为 3 V，试绘稳态响应、瞬态响应、零状态响应、零输入响应以及全响应的波形图。

§6－8　正弦激励的过渡过程和稳态

本节讨论正弦交流电路的过渡过程和稳态。

随时间按正弦规律变化的电压和电流称为正弦（sinusoidal）交流电压和电流，它们都属正弦波。正弦波是周期波形的基本形式，在电路理论中和实际工作中都占有极其重要的地位。正弦电压可由发电机、电子振荡器产生。正弦电压

如图 6 - 63 所示。所谓正弦规律即简谐规律，既可用时间的 sin 函数表示，也可用时间的 cos 函数表示，本书采用 cos 函数，仍可称为正弦波①。以图 6 - 63 所示正弦电压为例，其瞬时值可表示为

$$u(t) = U_m \cos \omega t \tag{6-40}$$

其中 U_m 为电压的振幅(amplitude)或最大值，它是一个常量，ωt 是一个随时间变化的角度，ω 则是一个与频率 f 有关的常量，

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \tag{6-41}$$

T 为周期，单位为秒(s)，频率 f 的单位为赫(Hz)，ω 称为角频率，单位为弧度/秒(rad/s)。我国电力系统提供的正弦电压，f 为 50 Hz，ω 为 100π rad/s。应该指出，在进行理论分析时，常把角频率简称为频率，因此，在进行实际计算时，必须注意到两者的实际区别，考虑 2π 这一乘数。在以后的讨论中，也常把 ω 径称为频率。

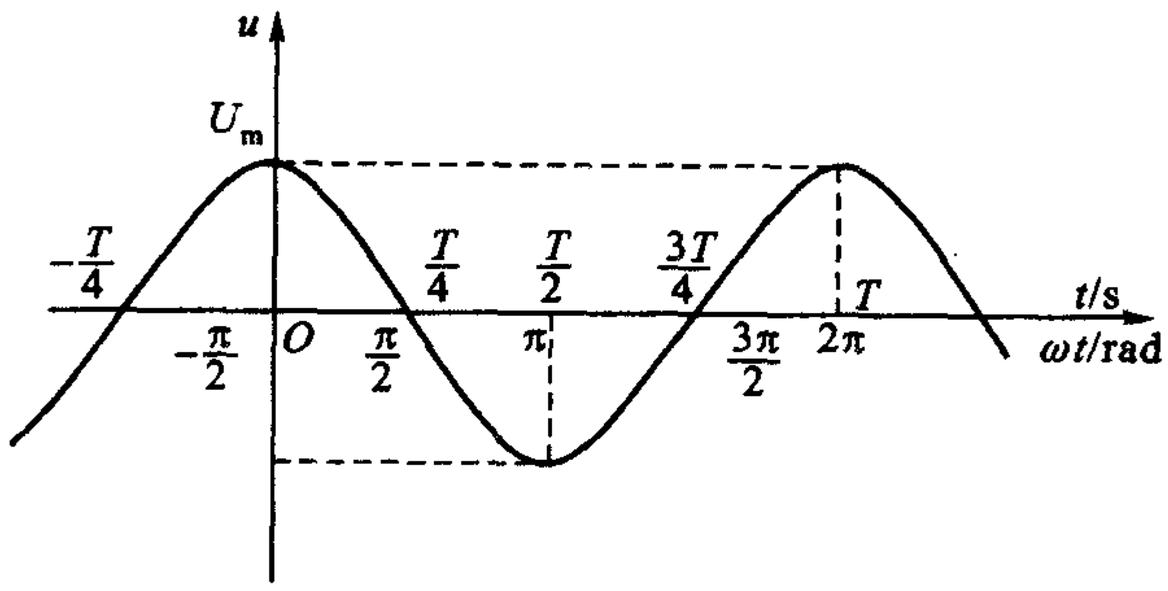


图 6 - 63　正弦电压波形

在一般情况下，时间的起点不一定恰好选在正弦波为正最大值的瞬间。例如，图 6 - 64 所示正弦电压，以角度来计量，时间起点选在离正弦波正最大值瞬间之后角 ψ 处，也就是说，当 $\omega t = -\psi$ 时，才有 $u = U_m$。因此，该正弦电压应表示为

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \psi) \tag{6-42}$$

ψ 称为初相角，简称初相(initial phase)。它反映了正弦波初始值的大小，即

$$u(0) = U_m \cos\psi \tag{6-43}$$

显然，根据(6 - 41)式，仍以电压为例，正弦波还可写为

$$u(t) = U_m \cos(2\pi f t + \psi)$$

① 《中华人民共和国国家标准有关电路和磁路的基本规定》(GB8445—1987)3.1，中国标准出版社，1989。

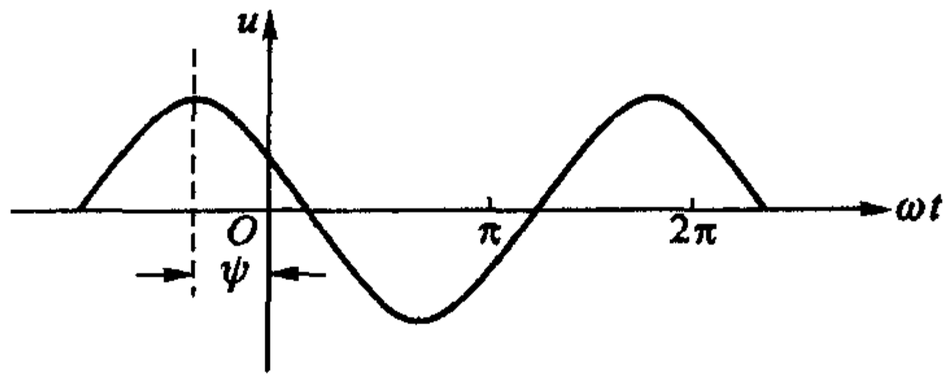
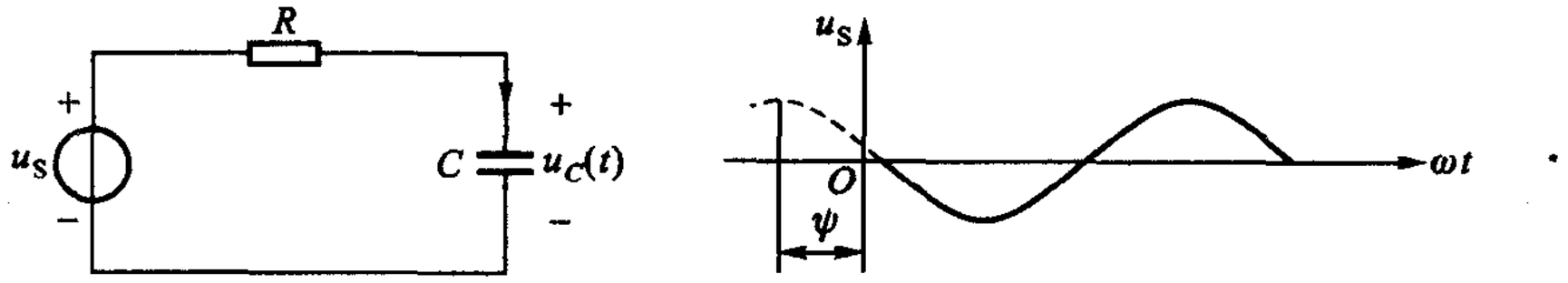


图 6－64　初相角

$$= U_{\mathrm{m}}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \psi\right) \tag{6-44}$$

由此可见，一个正弦波可由三个参数完全确定，这三个参数是：振幅、频率（或角频率或周期）以及初相，这三者称为正弦波的三特征。

下面求解图 6－65（a）所示 RC 电路于 $t=0$ 时与正弦电压源接通的正弦响应 $u_C(t)$。



(a)　　(b)

图 6－65　正弦电压作用于 RC 电路，$t=0$ 时开关闭合

设输入到 RC 电路的正弦电压为

$$u_{\mathrm{S}}(t) = U_{\mathrm{Sm}}\cos(\omega t + \psi) \quad t \geqslant 0 \tag{6-45}$$

波形如图 6－65（b）所示，ψ 为初相角，取决于开关闭合瞬间 u_{S} 的数值与方向。电路的微分方程和（6－7）式是一样的，只是输入改为正弦时间函数，即

$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = U_{\mathrm{Sm}}\cos(\omega t + \psi) \tag{6-46}$$

设电容的初始电压 $u_C(0)=0$。微分方程的解答 $u_C(t)$ 由稳态解 $u_{C\mathrm{p}}(t)$ 和瞬态解 $u_{C\mathrm{h}}(t)$ 组成。稳态解即上节所称的稳态响应，即电路完全由外施电源主宰时的响应，可设为同一频率的正弦时间函数，即

$$u_{C\mathrm{p}} = U_{C\mathrm{m}}\cos(\omega t + \psi_u) \tag{6-47}$$

其中 $U_{C\mathrm{m}}$ 和 ψ_u 为待定的常数。为确定这两个常数，可把（6－47）式代入（6－46）式，由于正弦函数的导数仍为同频率的正弦函数，可得

$$-RCU_{C\mathrm{m}}\omega\sin(\omega t + \psi_u) + U_{C\mathrm{m}}\cos(\omega t + \psi_u) = U_{\mathrm{Sm}}\cos(\omega t + \psi) \tag{6-48}$$

将上式左端的两项相加后①,得

$$\sqrt{R^2U_{Cm}^2\omega^2C^2+U_{Cm}^2}\cos[\omega t+\psi_u+\arctan(\omega CR)]$$
$$=U_{Sm}\cos(\omega t+\psi) \tag{6-49}$$

上式对所有 t 都应成立,由待定系数法得

$$\sqrt{R^2U_{Cm}^2\omega^2C^2+U_{Cm}^2}=U_{Sm} \tag{6-50a}$$

即

$$U_{Cm}=\frac{U_{Sm}}{\sqrt{1+R^2\omega^2C^2}} \tag{6-50b}$$

以及

$$\psi_u+\arctan(\omega CR)=\psi \tag{6-51a}$$

即

$$\psi_u=\psi-\arctan(\omega CR) \tag{6-51b}$$

由(6-50b)及(6-51b)两式可分别得出(6-47)式所示稳态响应中的待定常数 U_{Cm} 和 ψ_u,其中 $\arctan(\omega CR)$ 是一个介于0与90°之间的角度,其正切为 ωCR。稳态响应波形图如图6-66(b)所示,输入电压的波形也绘于图6-66(a)以资比较。在绘稳态响应波形时,所假定的初相 ψ_u 为负值。[设 $\psi=60°$, $\arctan(\omega CR)=75°$, $\psi_u=-15°$。]

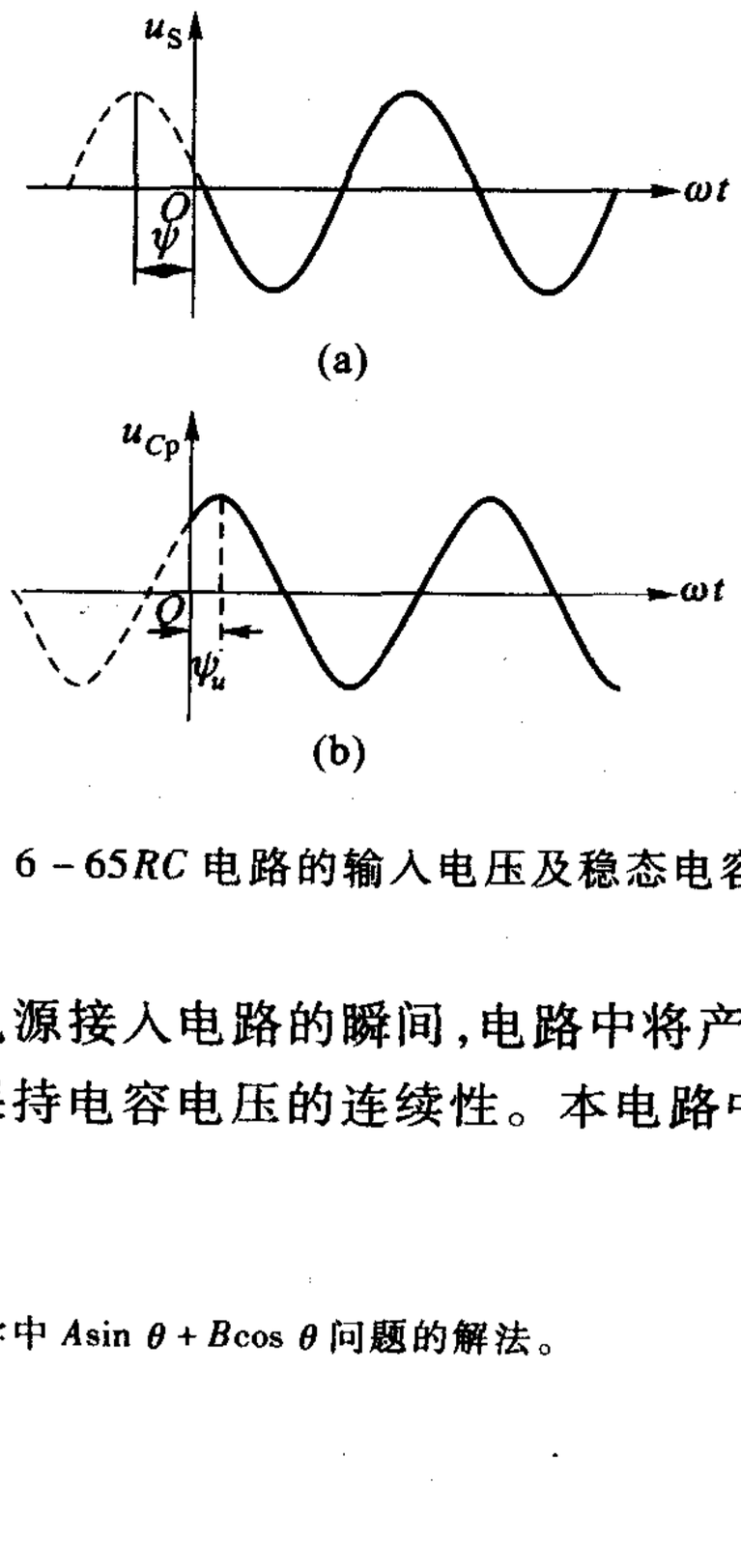


图6-66　图6-65 RC 电路的输入电压及稳态电容电压的波形

如同上节所述,在电源接入电路的瞬间,电路中将产生瞬态响应 $Ke^{-\frac{t}{\tau}}$,以满足初始条件的需要,即保持电容电压的连续性。本电路中,遵循外接电压源要求

① 这里需用到中学三角学中 $A\sin\theta+B\cos\theta$ 问题的解法。

的、如(6-47)式所示的稳态响应,在 $t=0$ 时其值为 $u_{Cp}(0)=U_{Cm}\cos\psi_u$,而初始条件 $u_C(0)=0$,两者并不一致。由瞬态响应初始值 K 的一般表示式

$$K=u_C(0)-U_{Cm}\cos\psi_u \tag{6-52}$$

可知当 $u_C(0)=0$ 时,$K=-U_{Cm}\cos\psi_u$。τ 则为 RC。

至此,图6-65(a)所示 RC 电路于 $t=0$ 时与正弦电压源接通的全响应,即正弦响应 u_C 已经解得,如下式所示:

$$u_C(t)=U_{Cm}\cos(\omega t+\psi_u)-U_{Cm}\cos\psi_u\cdot e^{-\frac{t}{RC}}\quad t\geqslant 0 \tag{6-53}$$

式中 U_{Cm} 与 ψ_u 分别如(6-50b)式、(6-51b)式所示。其波形如图6-67所示。

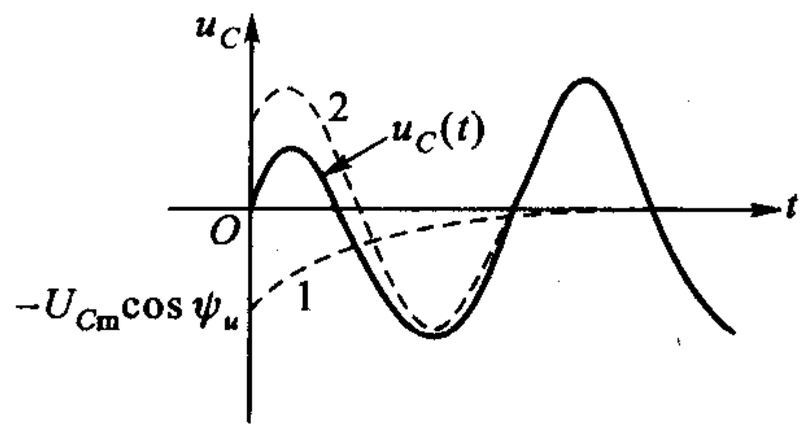


图6-67　图6-65RC电路的响应 $u_C(t)$,$u_C(0)=0$

曲线1——瞬态响应分量;

曲线2——稳态响应分量

在 $t=(4\sim5)\tau$ 期间,电路处于过渡过程,在此期间响应不是按正弦方式变化的,如图6-67中实线所示。当电路进入稳态后,响应将以与外施激励频率一致的正弦方式变化,这一响应特称为正弦稳态响应(sinusoidal steady state、简称SSS),本书第三篇中将专门讨论这一响应。

由(6-52)式可知,如果 $u_C(0)$ 恰与 $U_{Cm}\cos\psi_u$ 相等,电路中将无瞬态响应分量,换路后电路立即进入正弦稳态。在零状态条件下,K 值为零的情况显然发生在稳态响应分量的初相 $\psi_u=\pm\frac{\pi}{2}$ 时。由(6-51a)式可知,如 $\psi_u=\pm\frac{\pi}{2}$,则正弦输入的初相 ψ 必须等于 $\pm\frac{\pi}{2}+\arctan(\omega CR)$,也就是说,如果在正弦输入与电路接通的瞬间,其初相 ψ 刚好等于这一数值,电路将立即进入稳态。反过来,在零状态条件下,如果换路发生在稳态响应分量的初相 $\psi_u=0$ 或 π 时,则根据 $K=-U_{Cm}\cos\psi_u$,K 值将为 $-U_{Cm}$ 或

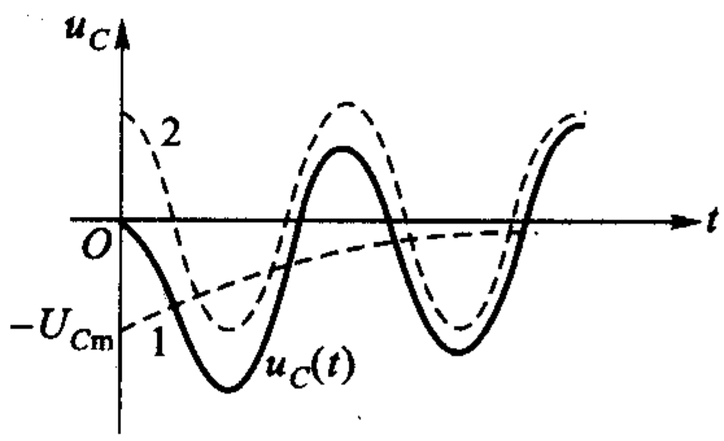


图6-68　RC电路的响应 $u_C(t)u_C(0)=0$,$\psi_u=0$,即 $\psi=\arctan(\omega CR)$ 时

U_{Cm}，达到了最大的可能值。在这种情况下，过渡过程中将可能出现过电压现象，亦即电压瞬时值超过稳态电压最大值的现象，如图 6－68 所示。该图系 $u_C(0)=0$，$\psi_u=0$，即 $\psi=\arctan(\omega CR)$ 时的情况。由图可以看到，过电压发生在靠近半周期末一带，其值还与电路的时间常数 τ 有关。由(6－51a)式可知，当 $\psi_u=0$ 或 π 时，则正弦输入的初相应为 $\arctan(\omega CR)$ 或 $\pi+\arctan(\omega CR)$。

以上内容虽只是在零状态条件下来讨论的，但对非零初始状态，也只是影响到(6－52)式中 K 值的大小，一切定性的结论均是适用的。

(6－53)式是在 $u_C(0)=0$ 的条件下得到的，属图 6－65(a)所示 RC 电路的零状态响应。如果 $u_C(0)\neq 0$，则在(6－53)式中，尚需增加零输入响应 $u_C(0)e^{-\frac{t}{RC}}$ 项。亦即，当 $u_C(0)\neq 0$ 时，

$$u_C(t)=\overbrace{\underbrace{u_C(0)e^{-\frac{t}{RC}}}_{\text{瞬态响应}}-U_{Cm}\cos\psi\cdot e^{-\frac{t}{RC}}}^{\text{零状态响应}}+\underbrace{U_{Cm}\cos(\omega t+\psi_u)}_{\text{稳态响应}}\quad t\geqslant 0 \qquad (6-54)$$

两种分解方式以及与此相关的四种响应，构成了本章主要内容，它们的物理意义、计算方法，希望读者已获得清晰的认识。

思考题

6－11　$u_C(0)$值对正弦稳态响应有影响吗？能从物理意义下加以解释吗？

6－12　求解线性时不变动态电路的某一正弦稳态响应，实际上需求解的未知量只有一个，还是两个，还是三个？你是否感到正文中求解这一响应并非轻松之事，是否渴望有更简便的方法？

练习题

6－17　问图 6－69 所示各电路电源接通后要过多长时间，电路才能进入正弦稳态？

$$\left[5(R_1+R_2)C;\frac{5L}{R_1+R_2}\right]$$

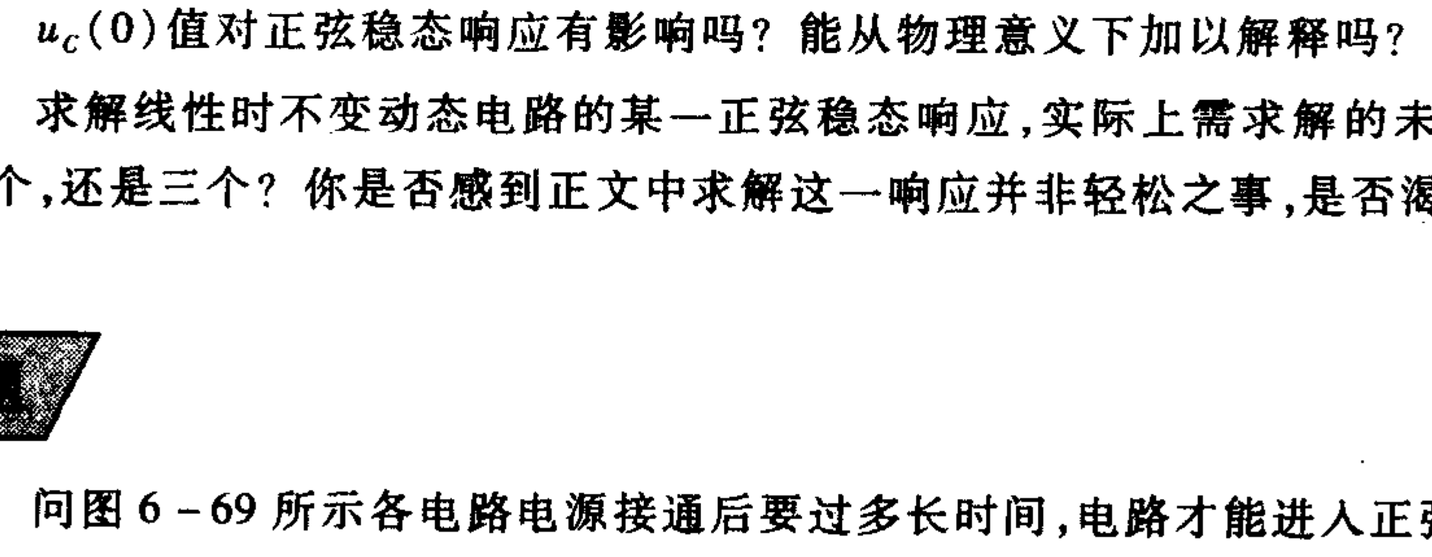


图 6－69　练习题 6－17

6-18　试由(6-48)式导出(6-49)式。

6-19①　(6-54)式是微分方程(6-46)式的解答,它一定满足该方程。解答中的稳态响应分量,已如正文(6-48)式所示,它是满足方程的。如果把解答中的瞬态响应分量代入(6-46)式的左端,你将得到什么结果?

(右端为零而不是 $U_{Sm}\cos(\omega t+\psi)$。如果你已学过常系数线性微分方程解答理论,就知道解答应由两部分组成,一部分是方程右端为零,即对应的齐次方程的通解,另一部分则是方程的特解。在电路理论中这两部分分别称为瞬态响应解和稳态响应解。对一阶电路,前者具有 Ke^{st} 的形式,K 由解答在 $t=0$ 之值与初始值确定,$s=-\frac{1}{\tau}$ 称为特征根。)

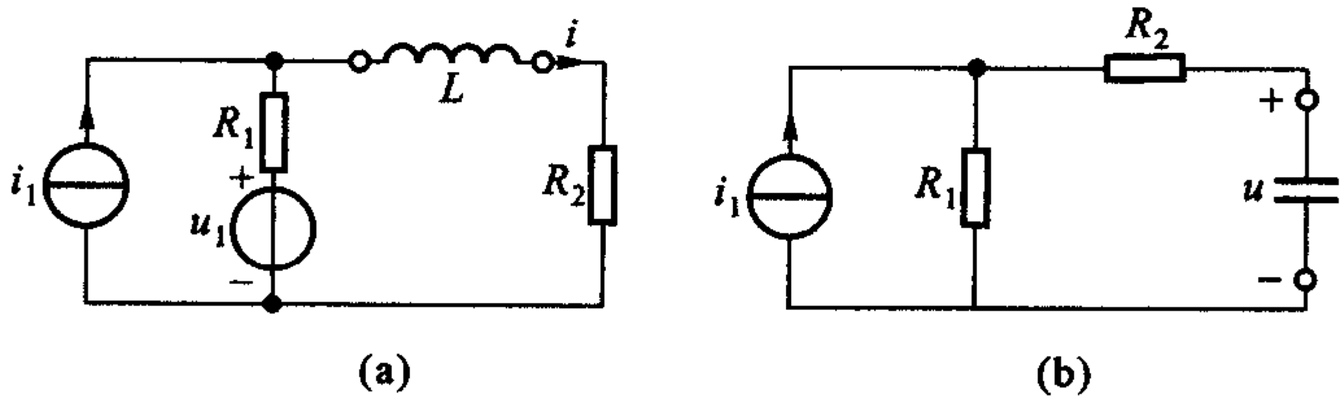
习题

§6-1　分解方法在动态电路分析中的运用

6-1　图题6-1两电路中,$R_1=100\ \Omega$,$R_2=200\ \Omega$,$R_3=300\ \Omega$,$L=2\ \text{mH}$,$C=1\ \mu\text{F}$。

(1) 把各电路中除动态元件以外的部分化简为戴维南或诺顿等效电路;

(2) 利用化简后的电路列出图中所注明输出量 u 或 i 的微分方程。



图题6-1

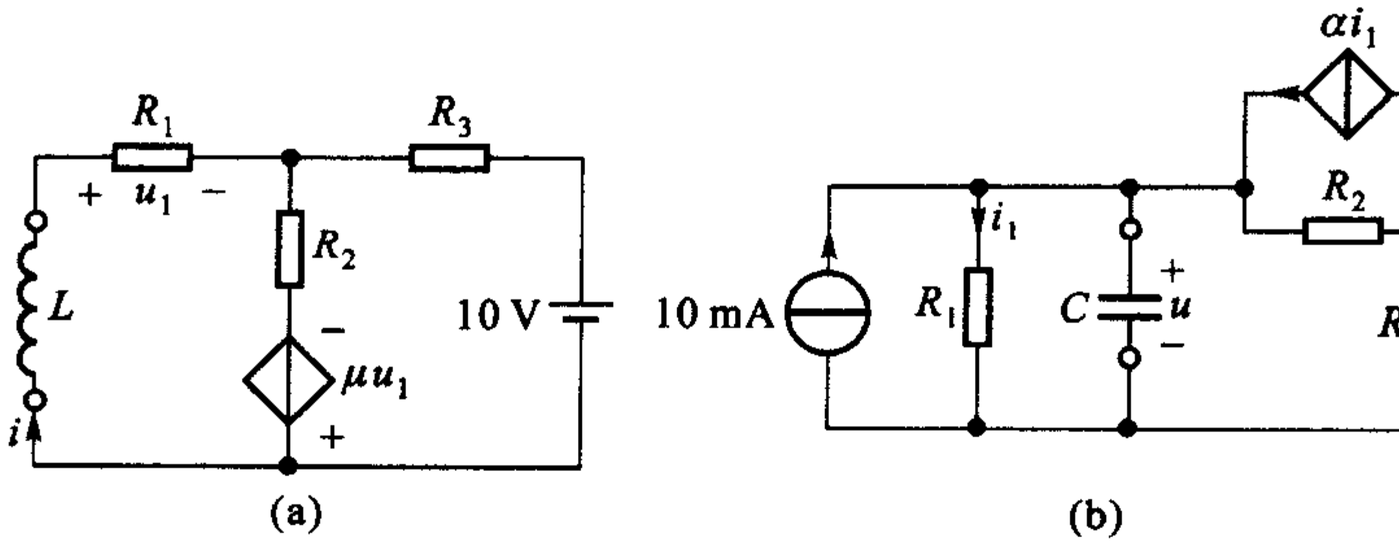
6-2　对图题6-2两电路,重复上题的要求。

§6-2　零状态响应

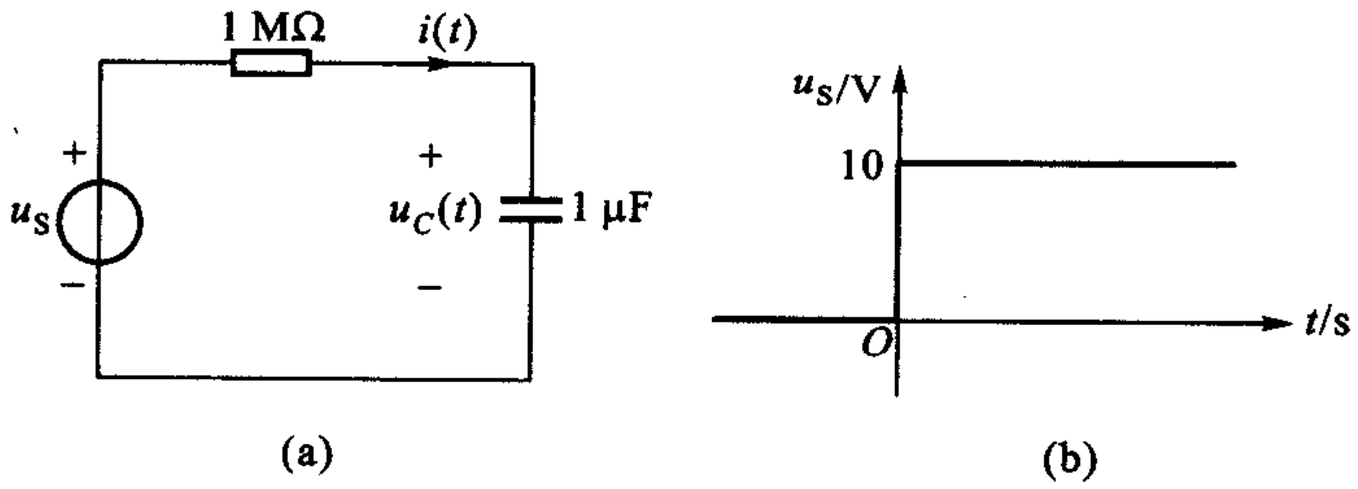
6-3　*RC* 电路如图题6-3(a)所示,若对所有 t,电压源 u_S 波形如图6-3(b)所示,试求 $u_C(t)$、$i(t)$,$t\geqslant 0$。

6-4　图题6-4所示电路中,各电源均在 $t=0$ 时开始作用于电路,求 $i(t)$。已知电容电压初始值为零。

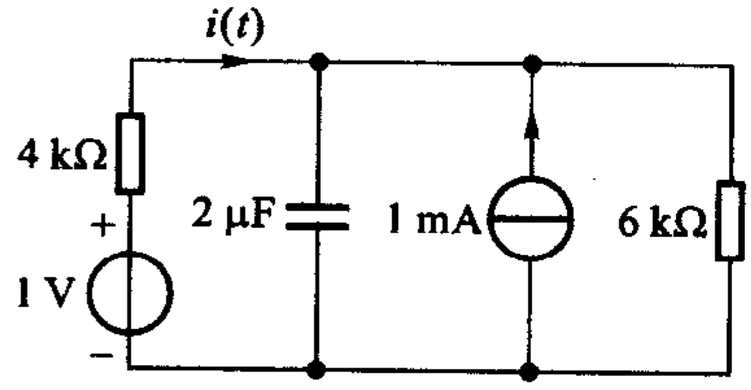
① 如果课程计划要讲授二阶电路,建议本题必做。



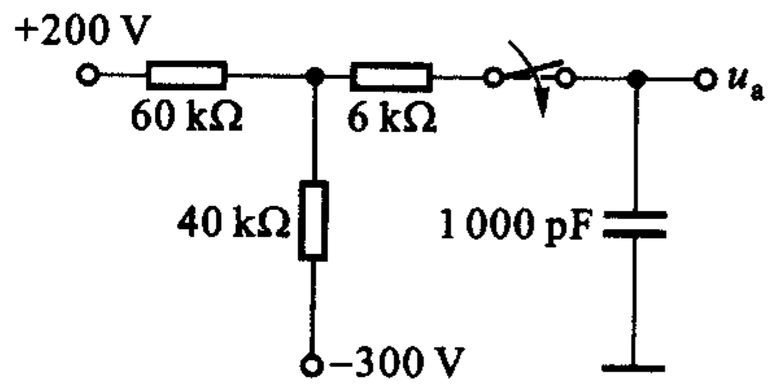
图题 6－2



图题 6－3



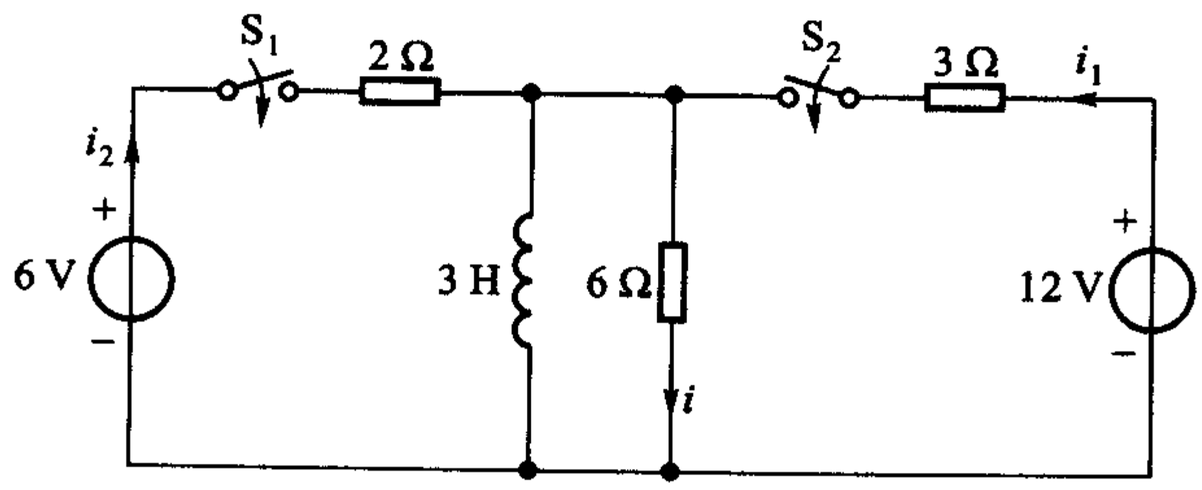
图题 6－4



图题 6－5

6－5　电路如图题 6－5 所示，开关在 $t=0$ 时闭合，求 $t=15$ μs 时 u_a 及各支路电流。

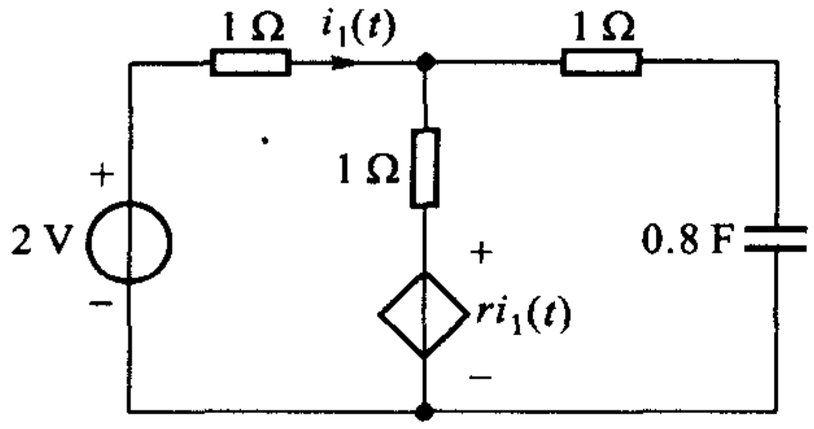
6－6　电路如图题 6－6 所示。(1) $t=0$ 时 S_1 闭合(S_2 不闭合)求 i，$t\geqslant 0$；(2) 若 $t=0$ 时 S_2 闭合(S_1 不闭合)，求 i，$t\geqslant 0$。



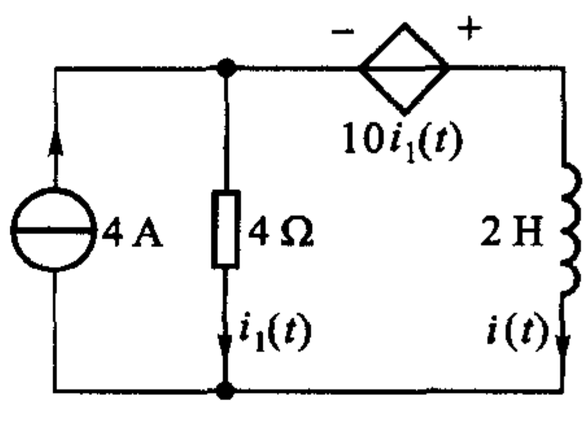
图题 6－6

6-7　图题6-6所示电路 $t=0$ 时，S_1、S_2 同时闭合，求 i_1 和 i_2，$t\geqslant 0$。

6-8　电路如图题6-7所示，电压源于 $t=0$ 时开始作用于电路，试求 $i_1(t)$，$t\geqslant 0$。已知受控源参数 $r=2\ \Omega$。



图题6-7



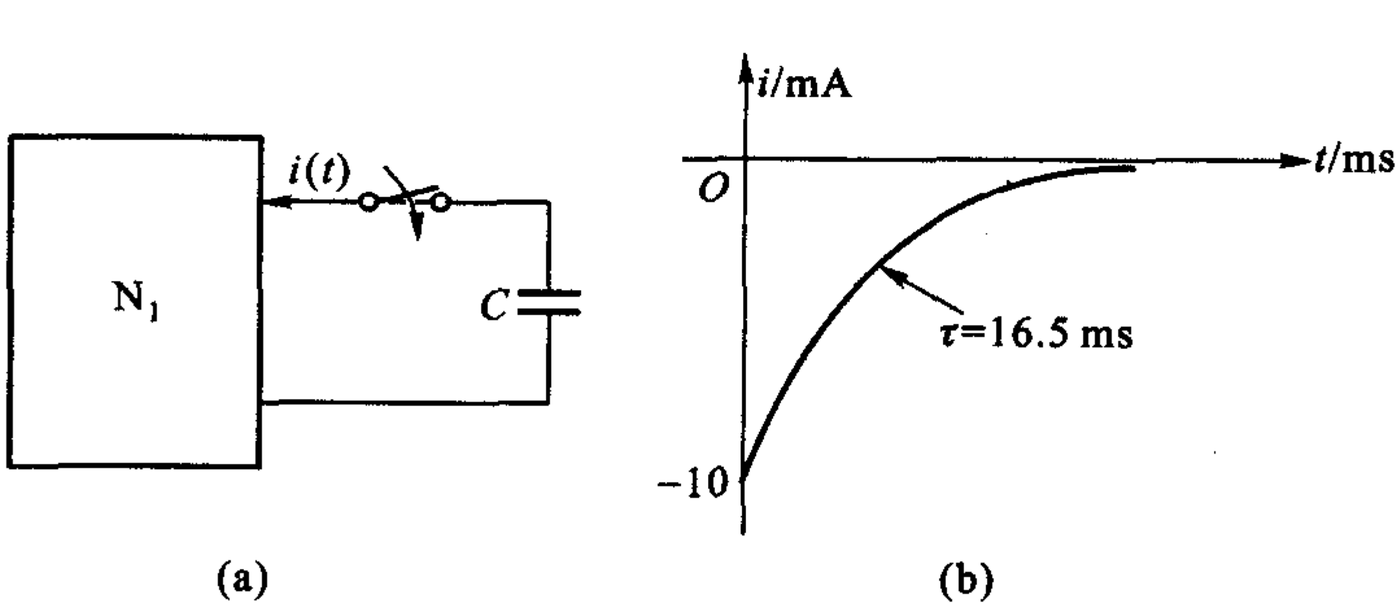
图题6-8

6-9　电路如图题6-8所示，电源于 $t=0$ 时开始作用于电路，试求 $i(t)$，$t\geqslant 0$。

6-10　电路如图题6-9(a)所示，已知 N_1 仅含直流电源及电阻，电容 $C=5\ \mu F$，初始电压为零。在 $t=0$ 时开关闭合，闭合后的电流波形如图题6-9(b)所示。

(1) 试确定 N_1 的一种可能结构；

(2) 若 C 改为 $1\ \mu F$，是否可能通过改变 N_1 而保持电流波形仍如图题6-9(b)所示？若能，试确定 N_1 的新结构形式。



(a)　　(b)

图题6-9

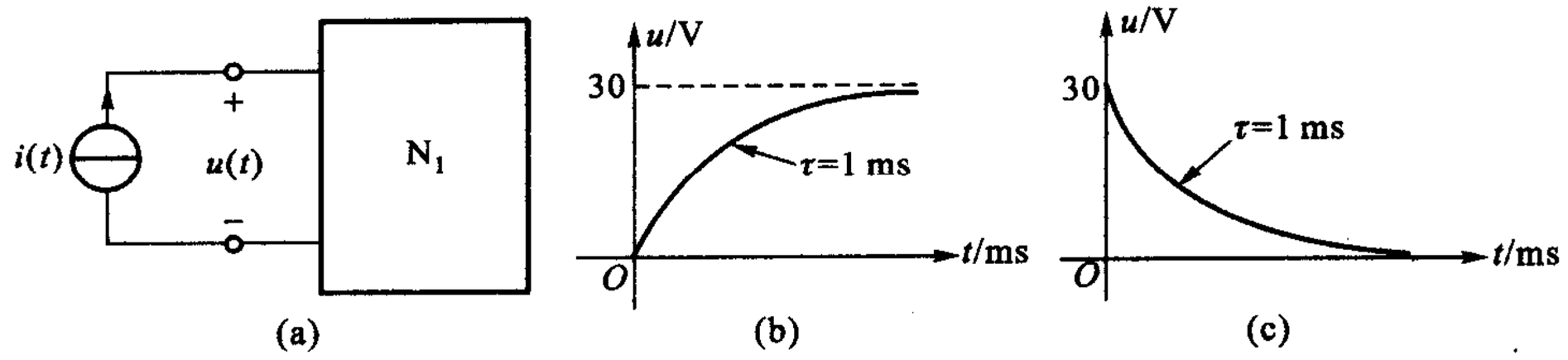
6-11　图题6-10(a)所示电路中，N_1 原无储能，在 $t=0$ 时电流 $i(t)=15$ mA 开始作用于电路。

(1) 若电压 $u(t)$ 的波形如图题6-10(b)所示，试确定 N_1 可能的结构；

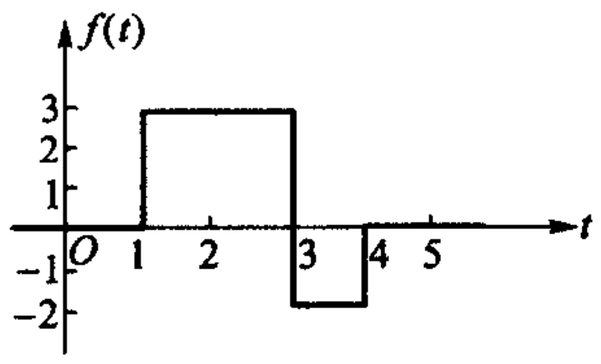
(2) 若电压 $u(t)$ 的波形如图题6-10(c)所示，试确定 N_1 可能的结构。

§6-3　阶跃响应　冲激响应

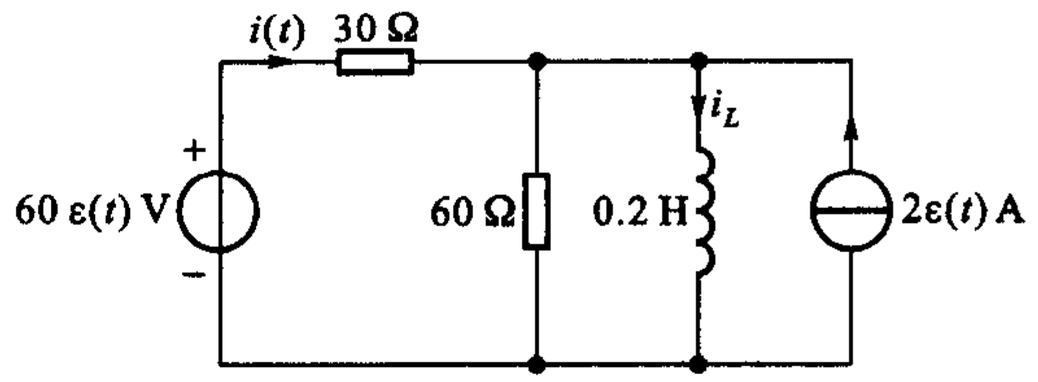
6-12　试用阶跃函数表示图题6-11所示波形。



图题 6－10



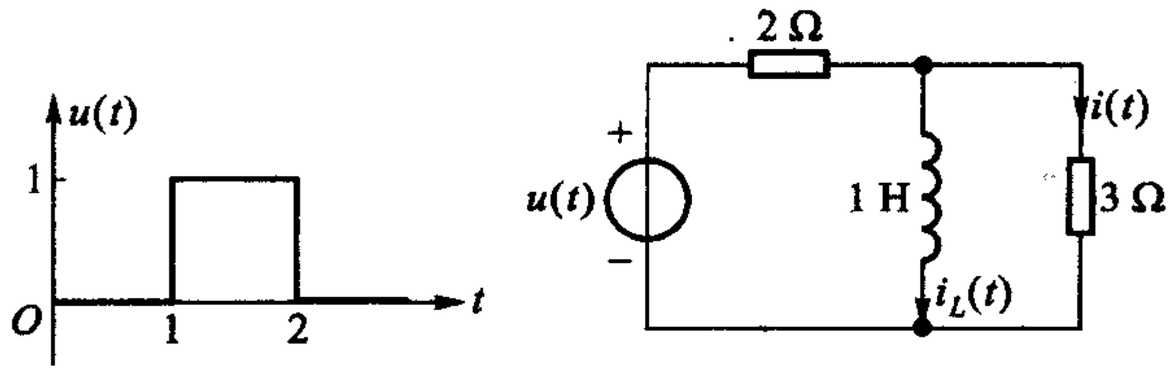
图题 6－11



图题 6－12

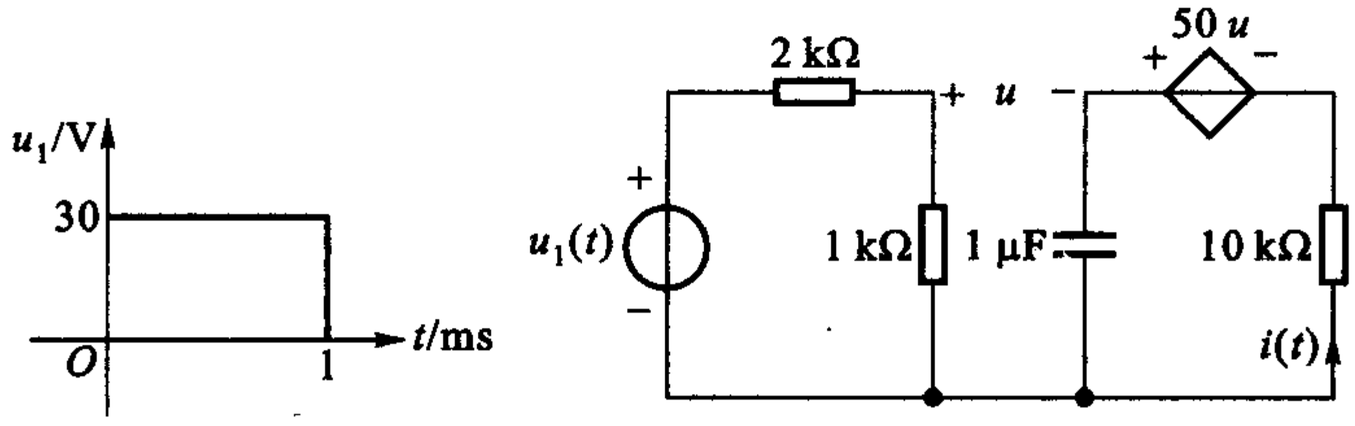
6－13　试求图题 6－12 所示电路中阶跃响应 $i(t)$ 和 $i_L(t)$。

6－14　延时脉冲作用于图题 6－13 所示电路，已知 $i_L(0_+)=0$，求 $i(t)$。



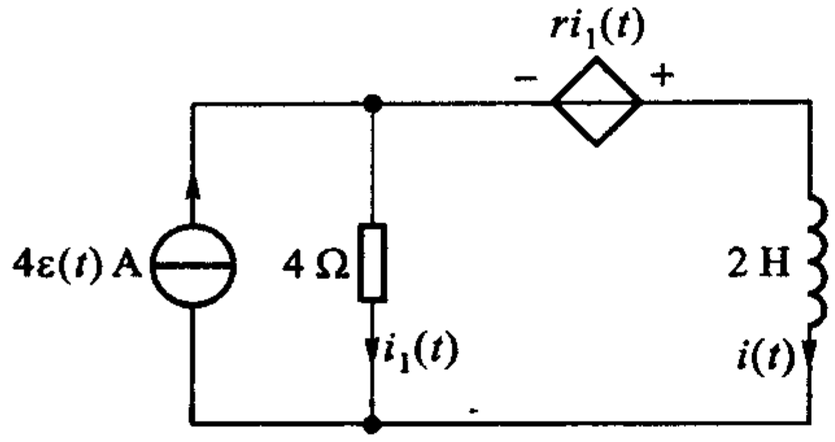
图题 6－13

6－15　图题 6－14 所示电路中电源 $u_1(t)$ 系一脉冲电压，该电压于 $t=0$ 时作用于电路，持续 1 ms，在持续期间脉冲幅度为 30 V，试求 $i(t)$。

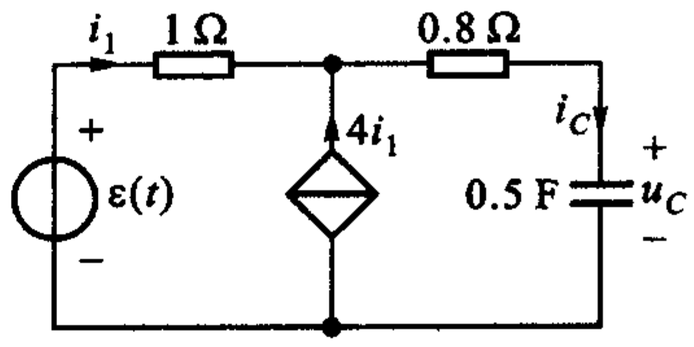


图题 6－14

6－16　图题6－15所示电路，已知受控源参数 $r=10\ \Omega$，求阶跃响应 $i(t)$、$i_1(t)$。



图题6－15



图题6－16

6－17　试求图题6－16所示电路的阶跃响应 $u_C(t)$、$i_1(t)$。

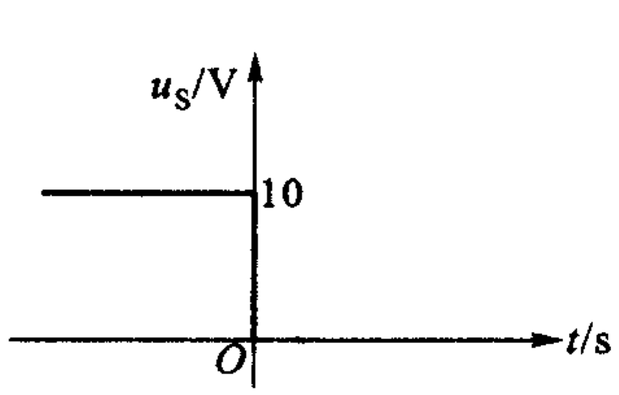
6－18　求 *RC* 串联电路在冲激电压源 $\delta(t)$ 作用下电流的冲激响应。

6－19　求 *RL* 并联电路在冲激电流源 $\delta(t)$ 作用下电压的冲激响应。

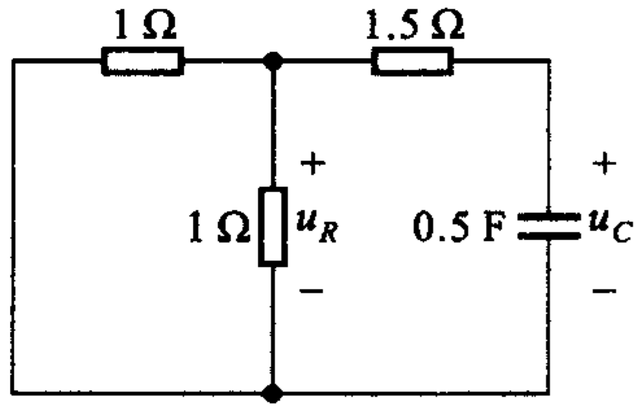
§6－4　零输入响应

6－20　电路如图题6－3(a)所示，对所有 t，电压源 u_S 波形则如图题6－17所示，求 $u_C(t)$、$i(t)$，$t\geqslant 0$。

6－21　电路如图题6－18所示，已知 $u_C(0)=-2$ V，求 $u_C(t)$ 及 $u_R(t)$，$t\geqslant 0$。



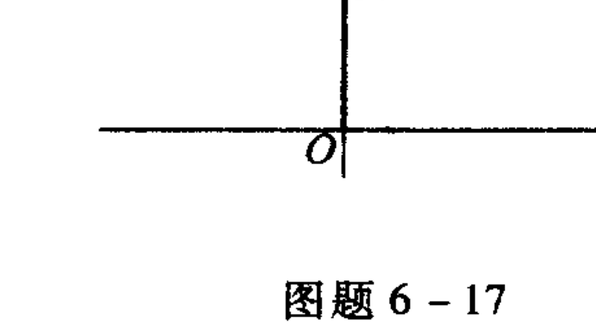
图题6－17



图题6－18

6－22　电路如图题6－19所示，在 $t=0$ 时开关闭合。已知在 $t=1$ s 及 $t=2$ s 时，$u_R(1)=10$ V，$u_R(2)=5.25$ V；$C=20\ \mu$F。试求电路的时间常数 τ 以及 R、$u_R(0_+)$。

6－23　图题6－20所示电路中，已知电感电压 $u_{cd}(0_+)=18$ V，求 $u_{ab}(t)$，$t\geqslant 0$。

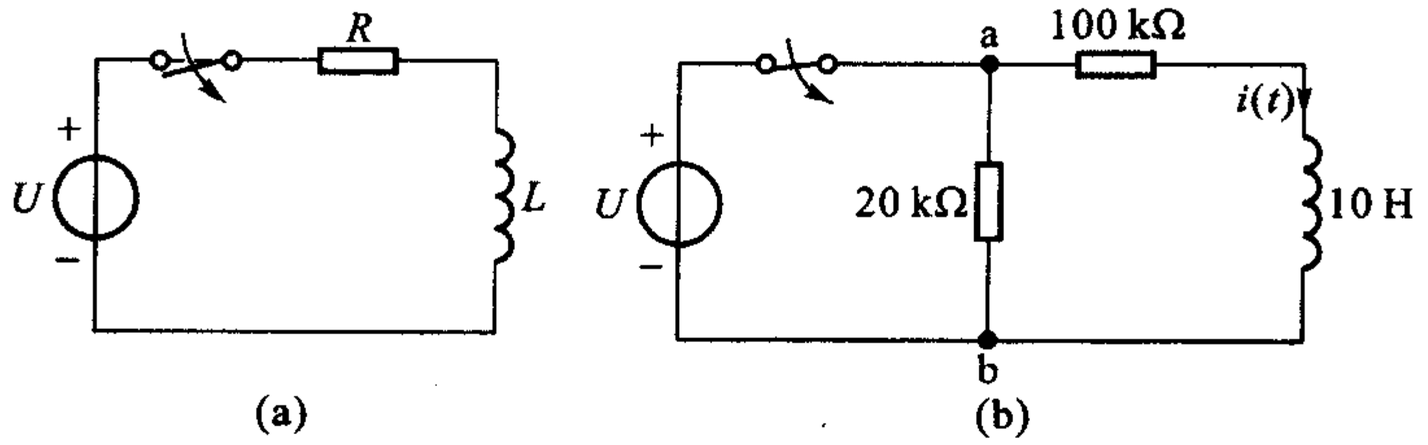


图题6－19

图题6－20

6－24　（1）如图题6－21(a)所示 *RL* 电路，开关断开切断电源瞬间开关将出现电弧，试加以解释。

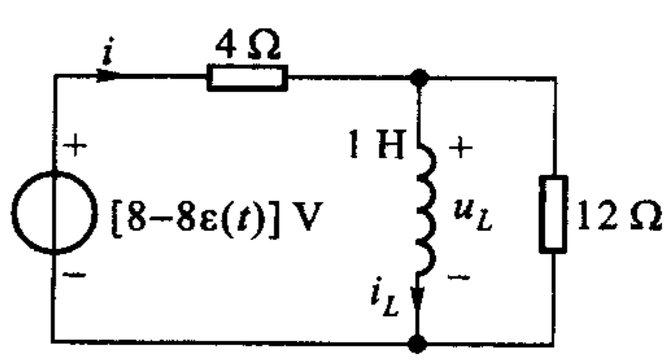
（2）图题6－21(b)所示电路，在 $t=0$ 时开关断开，试求 $u_{ab}(t)$，$t>0$，$i(0)=2$ A；若图中20 kΩ电阻系一用以测量 $t<0$ 时 u_{ab} 的电压表的内阻，电压表量程为300 V，试说明开关断开的瞬间，电压表将有什么危险，并设计一种方案来防止这种情况的出现。



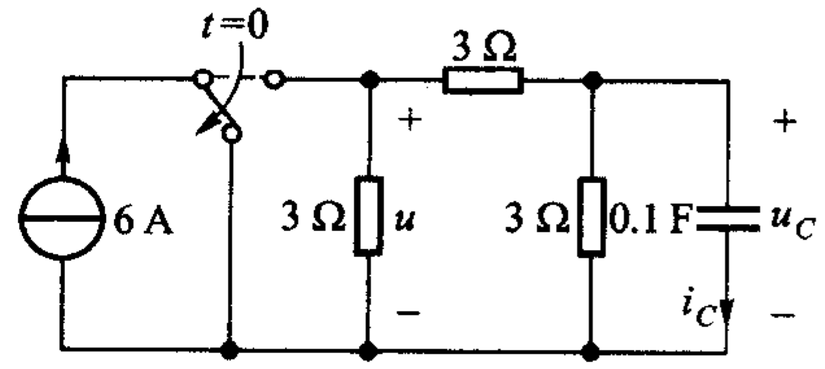
图题6－21

6－25　*RL* 串联电路的时间常数为1 ms，电感为1 H。若要求在零输入时的电感电压响应减半而电流响应不改变，求 *L*、*R* 应改为多少？

6－26　电路如图题6－22所示，试求对所有 t 时，$i_L(t)$、$u_L(t)$ 和 $i(t)$。



图题6－22

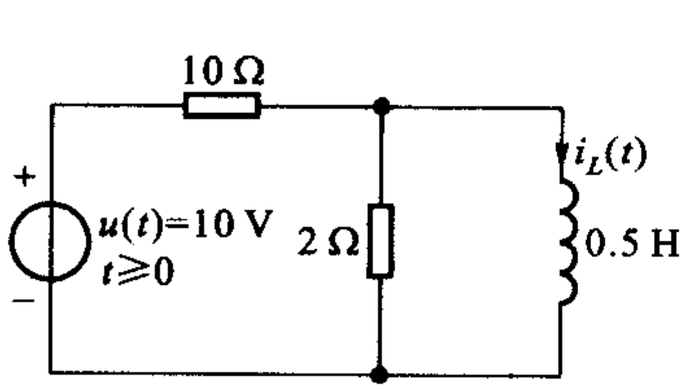


图题6－23

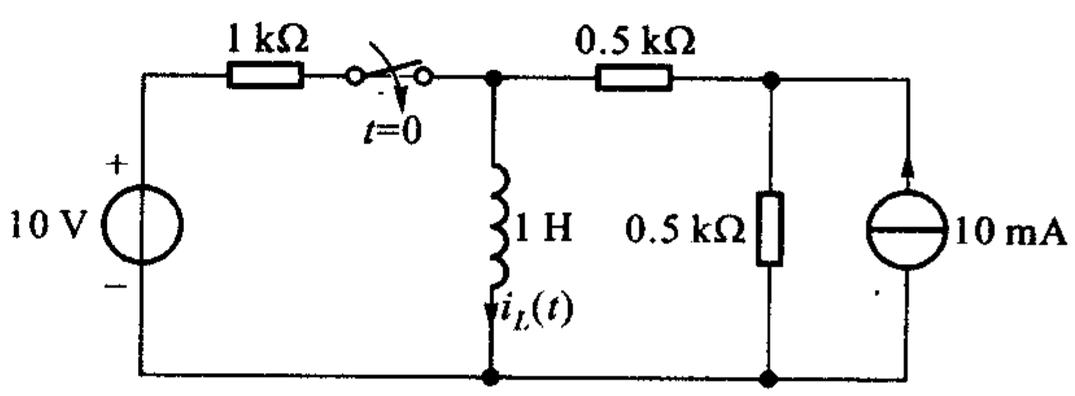
6－27　电路如图题6－23所示，试求对所有 t 时，$u_C(t)$、$i_C(t)$ 和 $u(t)$。

§6－5　线性动态电路的叠加原理

6－28　电路如图题6－24所示，试求 $i_L(t)$ 的零状态响应；若 $i_L(0_-)=1$ A，试求 $i_L(t)$ 的零输入响应。如果 $i_L(0_-)=-1$ A，求 $i_L(t)$ 的全响应。



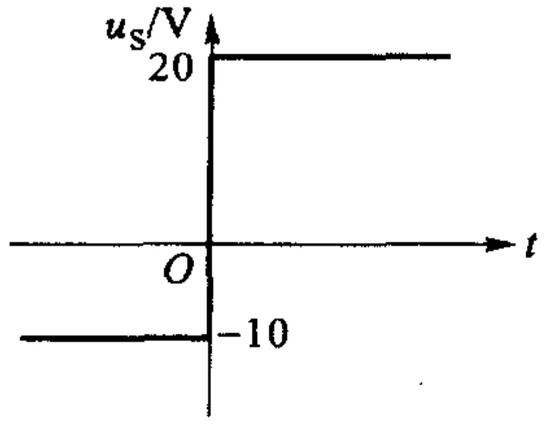
图题6－24



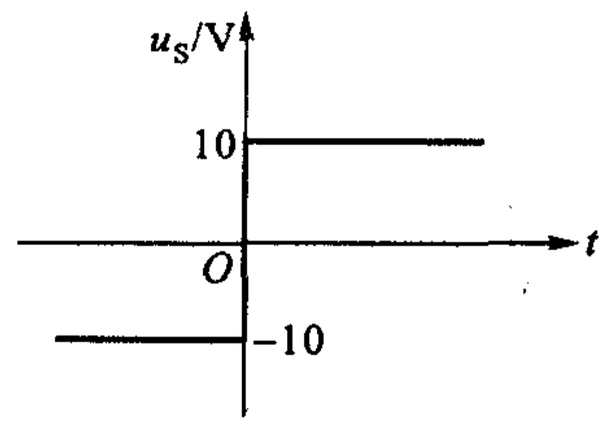
图题6－25

6－29　电路如图题6－25所示，求 $i_L(t)$，$t\geqslant 0$。假定开关闭合前电路已处于稳态。（指定用叠加原理。）

6-30　*RC* 电路如图题 6-3(a)所示，若对所有 t，电压源 u_S 的波形如图题 6-26(a)所示，试求 $u_C(t)$、$i(t)$，$t\geqslant 0$ 并绘波形图；若对所有 t，u_S 的波形如图题 6-26(b)所示，重复以上要求。



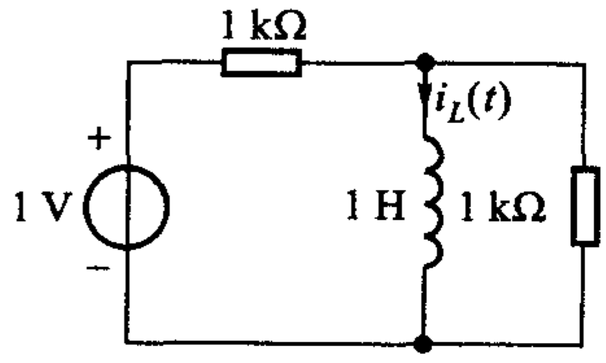
(a)



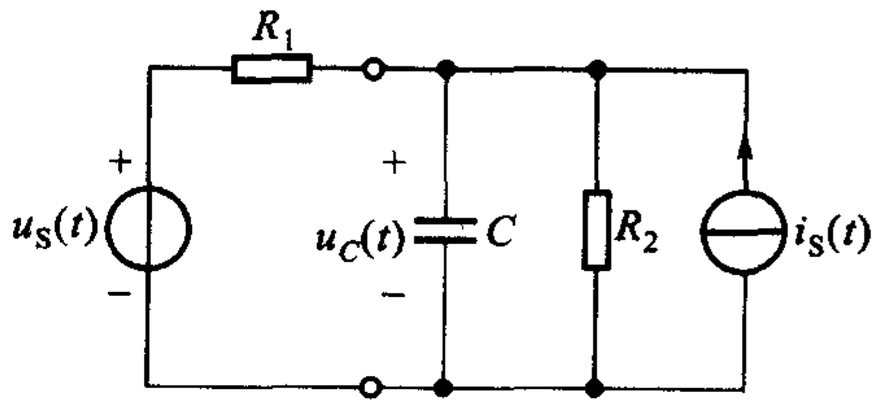
(b)

图题 6-26

6-31　图题 6-27 所示电路中，1 V 电压源在 $t=0$ 时作用于电路，已知 $i_L(t)=(0.001+0.005e^{-at})$ A，$t\geqslant 0$。问若电源为 2 V，$i_L(t)$ 是多少？



图题 6-27



图题 6-28

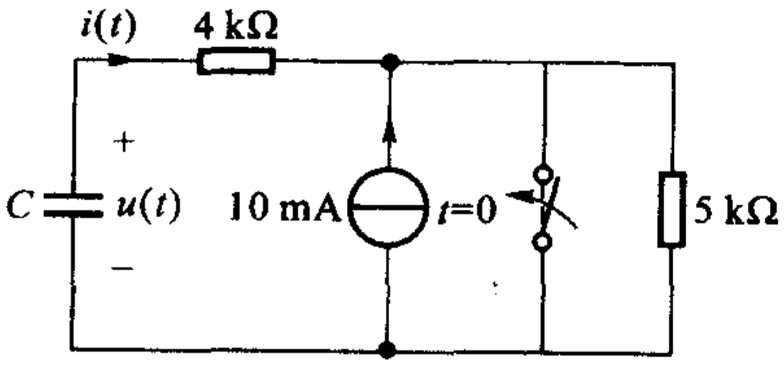
6-32　图题 6-28 所示电路中，已知当 $u_S(t)=1$ V，$i_S(t)=0$ 时，$u_C(t)=\left(2e^{-2t}+\frac{1}{2}\right)$ V，$t\geqslant 0$；当 $i_S(t)=1$ A，$u_S(t)=0$ 时，$u_C(t)=\left(\frac{1}{2}e^{-2t}+2\right)$ V，$t\geqslant 0$。电源在 $t=0$ 时开始作用于电路。

(1) 求 R_1、R_2 和 C；

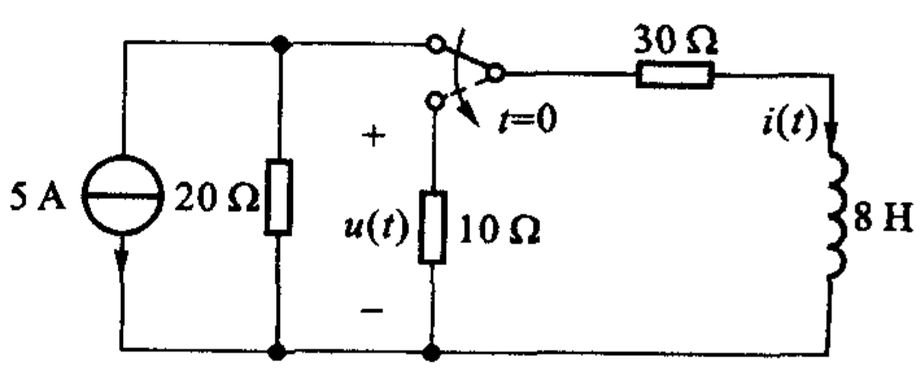
(2) 求电路的全响应。

§6-6　三要素法

6-33　图题 6-29 所示电路求 $u(0_+)$ 和 $i(0_+)$。开关闭合前电路已达稳定状态。



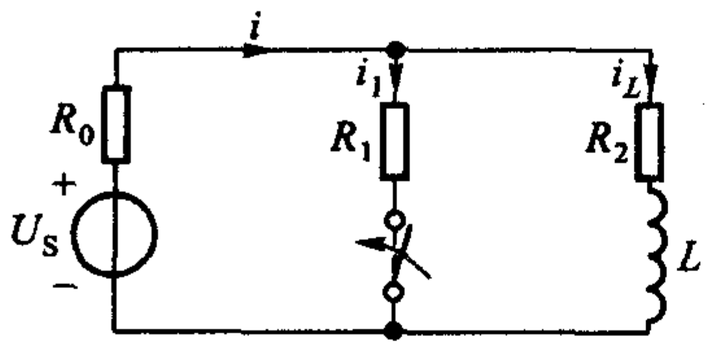
图题 6-29



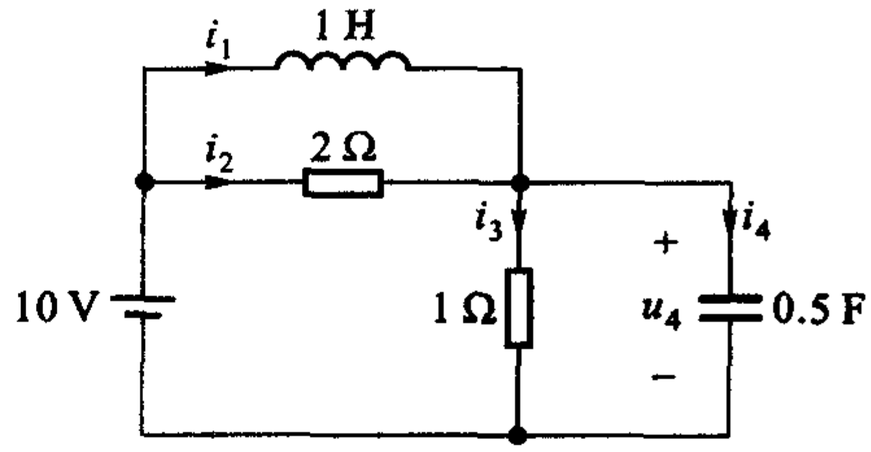
图题 6-30

6－34　图题6－30所示电路求 $u(0_+)$ 和 $i(0_+)$。开关闭合前电路已达稳定状态。

6－35　电路如图题6－31所示，求 $i_L(0_-)$、$i(0_-)$、$i_1(0_-)$；$i_L(0_+)$、$i(0_+)$、$i_1(0_+)$、$u_L(0_+)$。已知开关在 $t=0$ 时闭合，闭合前电路已处于稳态。



图题6－31



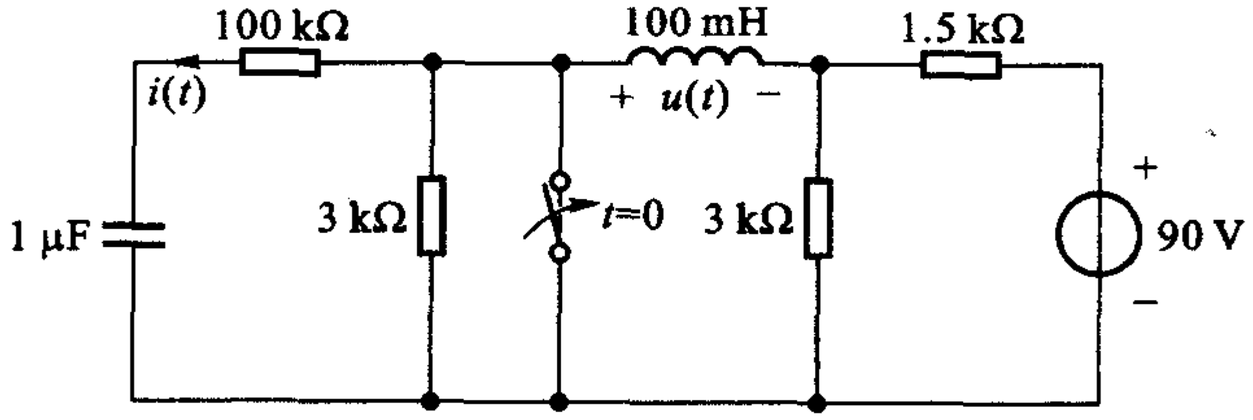
图题6－32

6－36　电路如图题6－32所示，在 $t=0$ 时10 V电压源作用于电路，且已知 $i_1(0)=2$ A、$u_4(0)=4$ V，试求 $t=0$ 及 $t=\infty$ 时，各电压、电流是多少？

6－37　试用三要素法求解习题6－8。

6－38　求图题6－25所示电路中，流过1 kΩ电阻的电流，$t\geqslant 0$。

6－39　图题6－33所示电路，求 $i(t)$ 和 $u(t)$，$t\geqslant 0$。已知 $t=0_-$ 时电路已处于直流稳态。

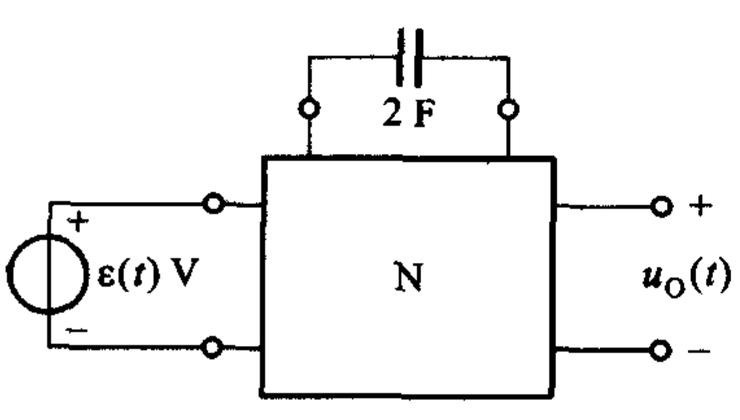


图题6－33

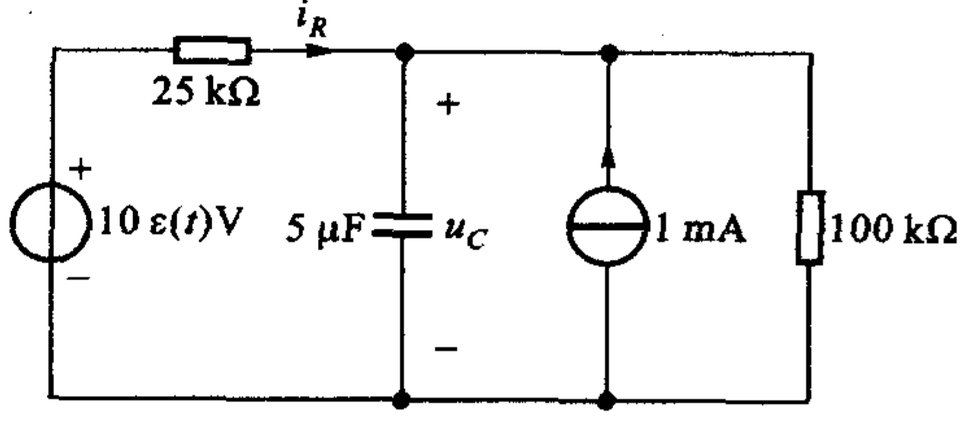
6－40　图题6－34所示电路中，N内部只含电源及电阻，若输出端所得阶跃响应为

$$u_O(t)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}e^{-0.25t}\right)\varepsilon(t)\ \text{V}$$

若把电路中的电容换以2 H的电感，输出端的阶跃响应 $u_O(t)$ 将如何？



图题6－34

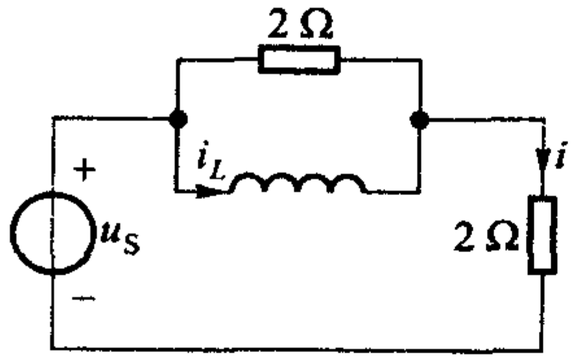


图题6－35

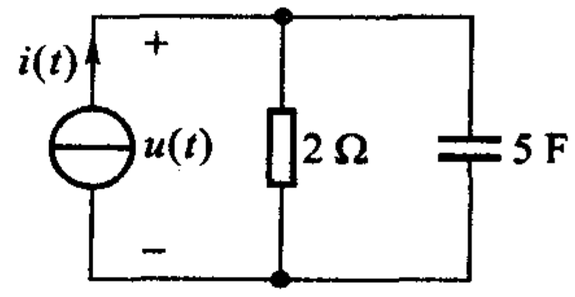
6－41　电路如图题6－35所示，试求下列各时刻的 $u_C(t)$：0_-、0_+、∞、0.08 s。

6-42　(1) 图题 6-36 所示电路连同已知条件 $u_S(t)=\varepsilon(t)$ V，$i_L(0)=2$ A 为通常要求解 $t\geqslant 0$ 时某一响应的命题方式，并不说明 $i_L(0)$ 为什么是 2 A 而不是其他数值，从给定电路也无法确认，但并不妨碍做题。试修改 $u_S(t)$，使之能产生 $i_L(0)=2$ A，且在 $t\geqslant 0$ 时仍为 1 V，从而不影响 $t\geqslant 0$ 时响应的求解。

(2) 试求 $t\geqslant 0$ 时的 $i_L(t)$、$i(t)$。已知电感 $L=1$ H。



图题 6-36

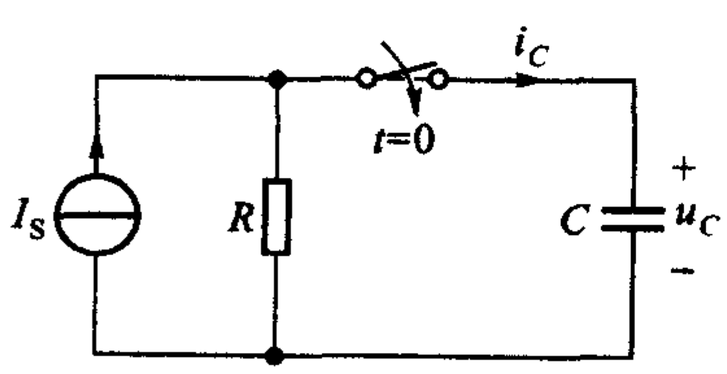


图题 6-37

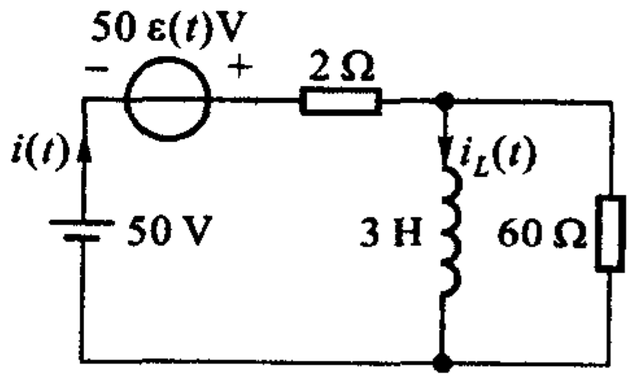
§6-7　瞬态和稳态

6-43　电路如图题 6-37 所示，已知 $i(t)=10$ A，$t\geqslant 0$；$u(0)=1$ V。求电压 $u(t)$ 的零输入响应和零状态响应，稳态响应和瞬态响应。

6-44　电路如图题 6-38 所示，已知 $I_S=100$ mA，$R=1$ kΩ。(1) 求使固有响应为零的电容电压初始值；(2) 若 $C=1$ μF，$u_C(0)=50$ V，求 $t=10^{-4}$ s 时的 i_C 值；(3) 若 $u_C(0)=-50$ V，为使 $t=10^{-3}$ s 时的 u_C 为零，问 C 应为多少？



图题 6-38



图题 6-39

6-45　电路如图题 6-39 所示，试求：(1) $t\geqslant 0$ 时，$i_L(t)$ 和 $i(t)$ 的瞬态响应；(2) $i_L(t)$ 和 $i(t)$ 的稳态响应；(3) 对所有 t，$i_L(t)$ 和 $i(t)$；(4) 对所有 t，$i_L(t)$ 和 $i(t)$ 的波形图。

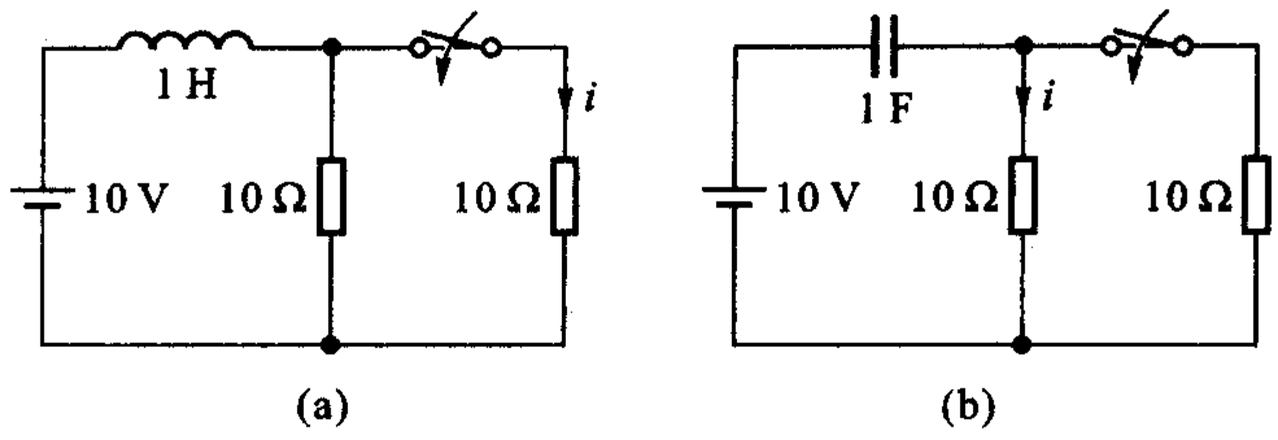
6-46　图题 6-40 所示两电路均于 $t=0$ 时开关闭合，试求电流 i 的稳态响应和瞬态响应。

§6-8　正弦激励的过渡过程和稳态

6-47　RL 串联电路在 $t=0$ 时与正弦电压 $U_m\cos(\omega t)$ 接通，试表明电流的全响应为

$$i(t)=Ke^{-\frac{Rt}{L}}+Q_1\cos(\omega t)+Q_2\sin(\omega t)$$

其中



图题 6 - 40

$$Q_1 = \frac{RU_m}{R^2 + \omega^2 L^2}, Q_2 = \frac{\omega L U_m}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

及

$$K = i(0) - \frac{RU_m}{\omega^2 L^2 + R^2}$$

[提示:求稳态响应时,与正文所设(6 - 47)式不同,也可设该响应为 $Q_1\cos(\omega t) + Q_2\sin(\omega t)$,代入原微分方程,解得待定常数 Q_1 和 Q_2。两种设定是等同的,可以任选,文中待定常数为 U_{Cm} 和 ψ_u,而本题则为 Q_1 和 Q_2。]

6 - 48　图题 6 - 41 所示电路中,$u_S = 17\cos(16t)$ V,在 $t = 0$ 时接入电路,已知 $u(0) = 0$。(1) 列出以电压 $u(t)$ 为求解量的微分方程,$t \geqslant 0$;(2) 求解 $u(t)$ 的稳态响应;(3) 求解 $u(t)$ 的瞬态响应;(4) 求解 $u(t)$,$t \geqslant 0$;(5) 求稳态电压的振幅、角频率、频率和初相角;(6) 列出稳态电压与外施电压的相位关系。

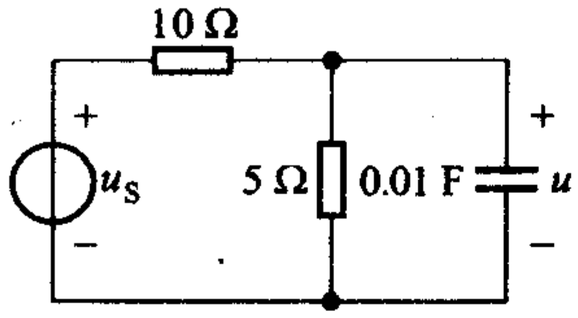
综合

6 - 49　555 型定时器(timer)是一个具有多种用途的集成电路,对外有八个端钮。在图题 6 - 42 中是将 555(方框部分)与 R_A、R_B、C 连接成一个自由间歇振荡器(不必追究其含义),在此情况下,555 的性能如同一个电压控制开关。当电压 U_{CC} 加上后,电流由电源 U_{CC} 经 R_A 和 R_B 使电容 C 充电,此时输出端与电源 U_{CC} 相连,使输出电压等于 U_{CC}。当电容电压 $u_C(t)$ 达到 $\frac{2}{3}U_{CC}$ 时,端钮 7 接地,电容经 R_B 放电,此时输出端也接地,其电压等于零。当电容电压下降到 $\frac{1}{3}U_{CC}$ 时,端钮 7 断开,使电容再度经 R_A 和 R_B 由电源 U_{CC} 充电,且使输出端又与电源 U_{CC} 相连,输出电压为 U_{CC}。当 $u_C(t)$ 达到 $\frac{2}{3}U_{CC}$ 时,电容再次放电,依次重复。

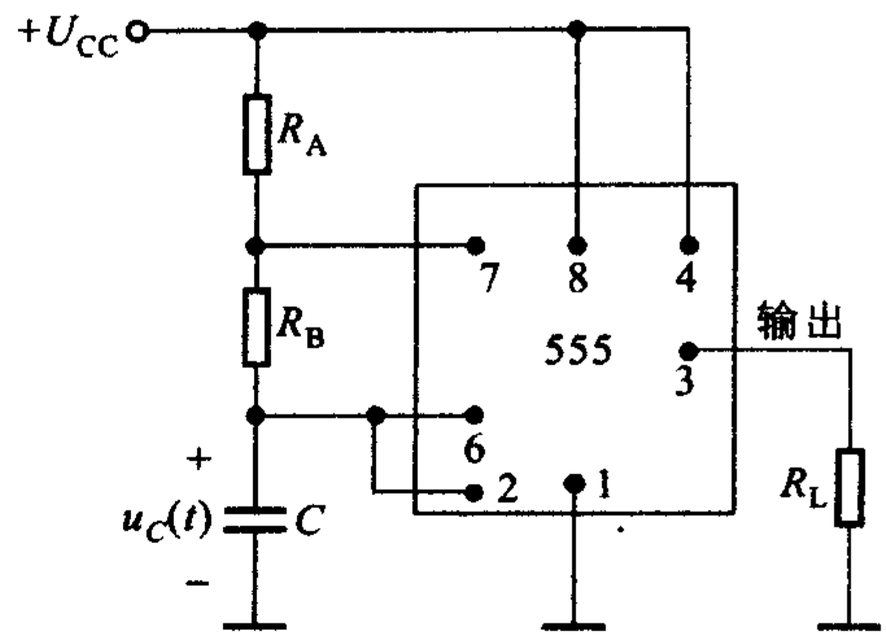
(1) 假定加上电源 U_{CC} 时,u_C 初始值为零,试画出电容电压 $u_C(t)$ 及输出电压波形图;

(2) 试证明振荡器的周期为

$$T = 0.693(R_A + 2R_B)C$$

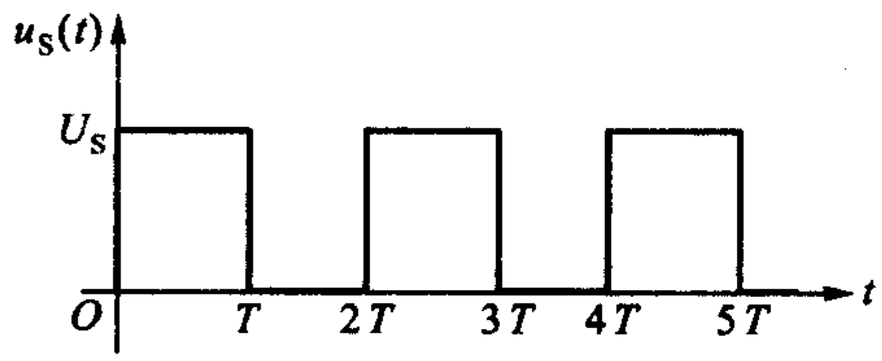


图题 6－41

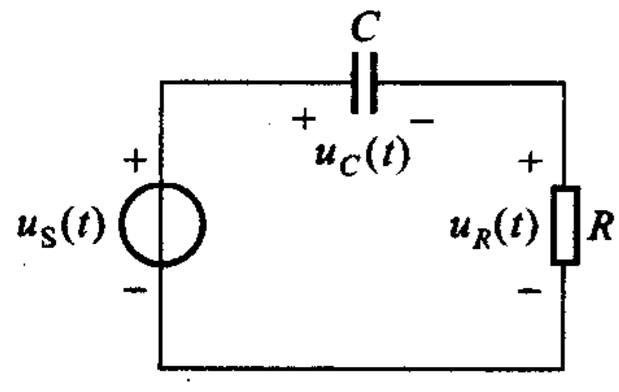


图题 6－42

6－50　方波(矩形脉冲串)如图题 6－43(a)所示,作用于图题 6－43(b)所示 RC 电路,试定性绘出 $u_C(t)$ 和 $u_R(t)$ 的波形图。若(1) $T >> \tau$ 时　(2) $T \leqslant \tau$ 时。(提示:参看例 6－11。)



(a)



(b)

图题 6－43

第七章

二阶电路

包含一个电容和一个电感，或两个电容，或两个电感的动态电路称为二阶电路。这类电路可以用一个二阶微分方程或两个联立的一阶微分方程来描述。如同一阶电路一样，二阶电路中可包含任意数目的电阻、独立源和受控源。这类电路仍然可以运用分解方法进行分析。本章只分析含电感和电容的二阶电路，和一阶电路不同，这类电路的响应可能出现振荡的形式。为了突出这一重要特点，本章首先从物理概念上阐明 *LC* 电路的零输入响应具有正弦振荡的形式，然后通过 *RLC* 串联电路说明二阶电路的一般分析方法以及固有频率（特征根）与固有响应形式的关系。

二阶电路的分析问题是求解二阶微分方程或一阶联立微分方程的问题。有固定的步骤可以遵循，并不困难。学习时应注意：电路微分方程的建立，特征根的重要意义，微分方程解答的物理含义等方面的内容。

§7-1 *LC* 电路中的正弦振荡

上章讨论过的一阶电路中只涉及一种储能——电场能量或是磁场能量，如果一个电路既能存储电场能量又能存储磁场能量，这样的电路会有什么特点呢？为了突出问题的实质，我们研究一个只由电容和电感组成的电路的零输入响应。设电容的初始电压为 U_0，电感的初始电流为零。

显然，在初始时刻，能量全部储于电容中，电感中是没有储能的。这时电路的电流虽然为零，但是电流的变化率却不为零，这是因为电感电压必须等于电容电压，电容电压不为零，电感电压也就不为零，而电感电压的存在，意味着 $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\neq 0$。因此电流将开始增长，原来存储于电容中的能量将发生转移。图 7-1(a) 表示了初始时刻的情况。随着电容放电、电流增长，能量逐渐转移到电感的磁场中。当电容电压下降到零的瞬间，电感电压也为零，因而 $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=0$，电流达到了最大值 I，如图 7-1(b) 所示，此时储能全部转入到电感。这时，虽然电容电压为零，但是它的变化率却不为零，这是因为电容中电流必须等于电感中的电流。同时，由

于电感电流不能跃变，电路中的电流将从 I 逐渐减小，电容在这电流的作用下又被充电，只是电压的极性与以前不同。当电感中电流下降到零的瞬间，能量又再度全部储于电容之中，电容电压又达到了 U_0，只是极性相反而已，如图 7－1(c)所示。以后，电容又开始放电，只是电流方向和上一次电容放电的方向相反，当电容电压再次下降到零的瞬间，能量又全部储于电感之中，电流又达到了最大值 I，如图 7－1(d)所示。接着，电容又在电流的作用下充电，当电流为零的瞬间，能量全部返回到电容，电容电压的大小和极性又和初始时刻一样，如图 7－1(e)所示。电路电能恢复到初始时刻的情况，这意味着上述过程将不断地重复进行。图 7－1 中电压、电流均用真实极性或真实方向标示。

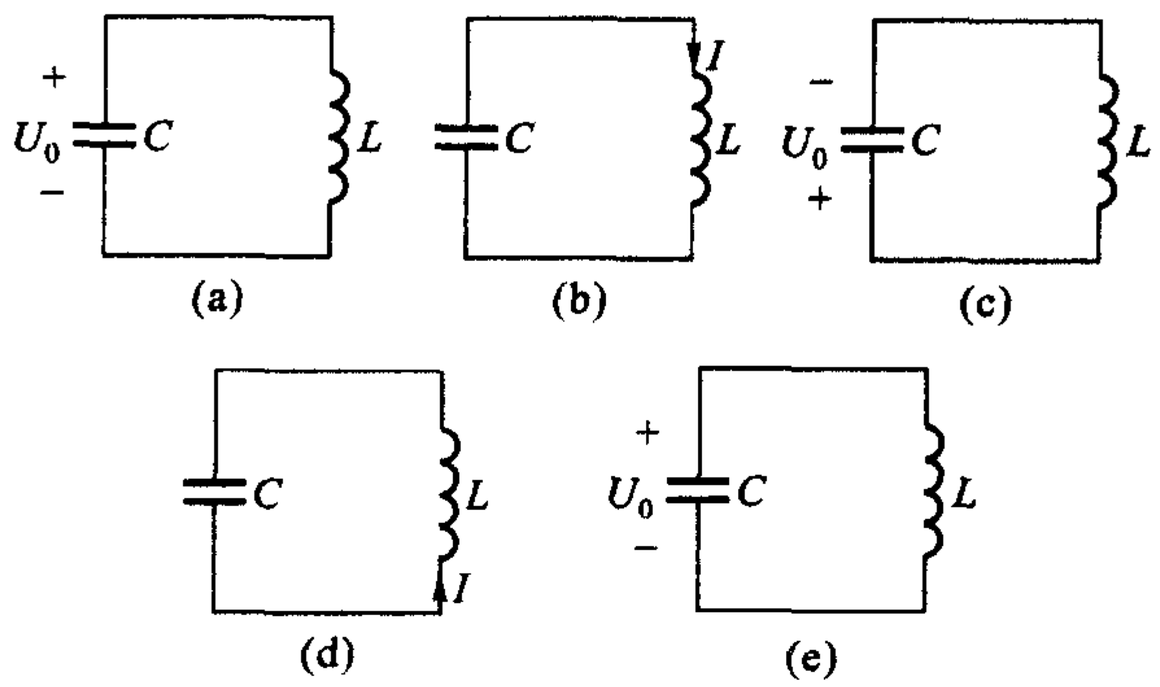


图 7－1　LC 电路中能量的振荡

由此可见，在由电容和电感两种不同的储能元件构成的电路中，随着储能在电场和磁场之间的往返转移，电路中的电流和电压将不断地改变大小和极性，形成周而复始的振荡。这种由初始储能维持的振荡是一种等幅振荡。不难想像，如果电路中存在电阻，那么，储能终将被电阻消耗殆尽，振荡就不可能是等幅的，而将是减幅的，即幅度将逐渐衰减而趋于零。这种振荡称为阻尼振荡(damped oscillation)或衰减振荡。如果电阻较大，储能在初次转移时它的大部分就可能被电阻所消耗，因而不可能发生储能在电场与磁场间的往返转移现象，电流、电压终将衰减为零，但不产生振荡。这就是一个既能储存电场能量又能储存磁场能量电路的特点。

下面进一步对 LC 回路中振荡的变化方式作一简单的分析。设 LC 回路如图 7－2 所示，$L=1$ H、$C=1$ F，$u_C(0)=1$ V、$i_L(0)=0$。

根据元件的 VCR 可得

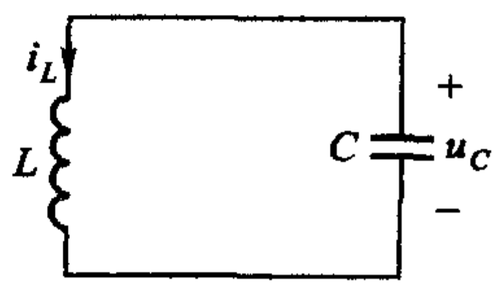


图 7－2　LC 振荡回路

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = -i_L \tag{7-1}$$

$$\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = u_C \tag{7-2}$$

这就是描述这一二阶电路的两个联立的一阶微分方程。这两个式子表明:电流的存在要求有电压的变化;电压的存在要求有电流的变化。因此电压、电流都必须处于不断的变化状态之中。结合初始条件

$$u_C(0) = 1 \tag{7-3}$$

$$i_L(0) = 0 \tag{7-4}$$

可以猜想到

$$u_C(t) = \cos t \tag{7-5}$$

$$i_L(t) = \sin t \tag{7-6}$$

因为这两个式子显然符合初始条件,而且在 $t \geqslant 0$ 时

$$\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos t = -\sin t = -i_L(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin t = \cos t = u_C(t)$$

表明这两个式子也满足(7-1)、(7-2)两式。因此,*LC* 回路中的等幅振荡是按正弦方式随时间变化的。

LC 回路中的储能为

$$w(t) = \frac{1}{2}Li^2(t) + \frac{1}{2}Cu^2(t) \tag{7-7}$$

以(7-5)、(7-6)两式代入(7-7)式,并考虑到 $L = 1\ \mathrm{H}$,$C = 1\ \mathrm{F}$,可得

$$w(t) = \frac{1}{2}(\sin^2 t + \cos^2 t)\,\mathrm{J} = \frac{1}{2}\ \mathrm{J}$$

正如料想到的一样,储能在任何时刻都为常量。而且

$$w(0) = \frac{1}{2}Li^2(0) + \frac{1}{2}Cu^2(0) = \frac{1}{2}\mathrm{J}$$

即对所有 $t \geqslant 0$,有

$$w(t) = w(0) \tag{7-8}$$

这就表明:储能不断地在电场和磁场之间往返,永不消失。

以后对 *RLC* 电路的零输入响应进行数学分析时,还将对这种等幅振荡进行定量的分析。

§7-2　*RLC* 串联电路的零输入响应

设含电感和电容的二阶电路如图 7-3(a)所示,运用戴维南定理后可得如

图 7－3(b)所示的 *RLC* 串联电路。对于每一元件,可以写出 VCR 为

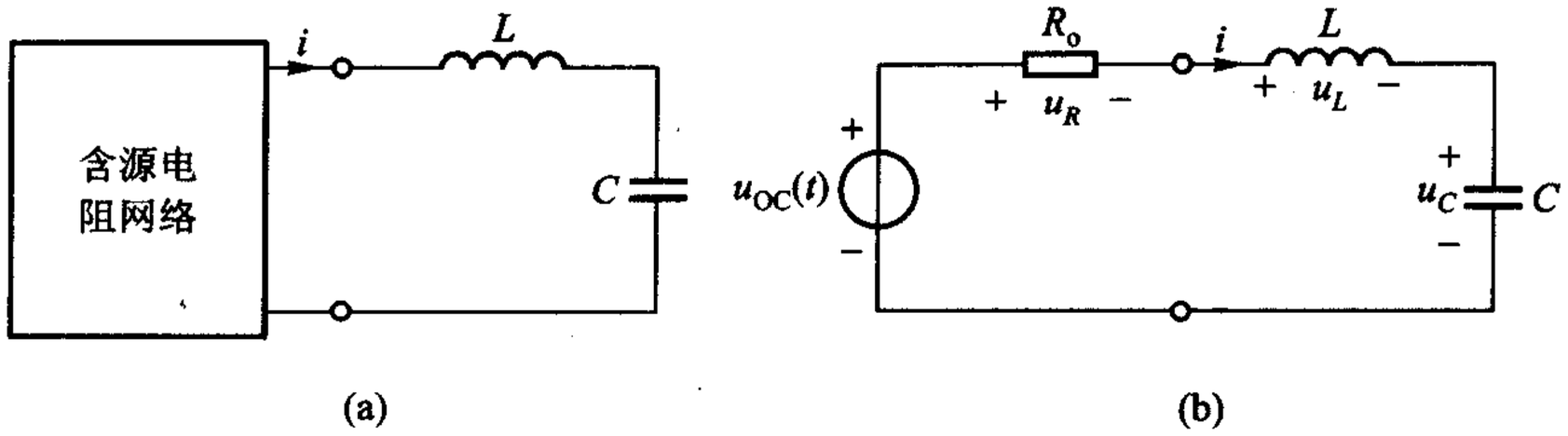


图 7－3　*RLC* 串联电路

$$\left.\begin{aligned} i &= C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \\ u_R &= Ri = RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \\ u_L &= L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} \end{aligned}\right\} \tag{7-9}$$

根据 KVL 可得

$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = u_{OC}(t) \tag{7-10}$$

这是一个线性二阶常系数常微分方程,未知量为 $u_C(t)$。为求出解答,必须知道两个初始条件,即 $u_C(0)$ 以及 $\left.\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_0$,$u_C(0)$ 即电容的初始状态,那么后一个初始条件又是怎样确定的呢? 由(7－9)第一式可知

$$\left.\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}\right|_0 = \left.\frac{i(t)}{C}\right|_0 = \frac{i(0)}{C} \tag{7-11}$$

知道了 $i(0)$ 就能确定后一条件,而 $i(0)$ 就是 $i_L(0)$,即电感的初始状态。在这里再次见到:根据电路的初始状态 $u_C(0)$、$i_L(0)$ 和 $t\geqslant 0$ 时电路的激励就可以完全确定 $t\geqslant 0$ 时的响应 $u_C(t)$。

本节只研究图 7－3 所示电路的零输入响应,也就是 $u_{OC}(t)=0$ 时电路的响应。使(7－10)式中 $u_{OC}(t)=0$,得

$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = 0$$

上列右端为零的方程,数学上称为齐次方程。该式也可表示为

$$\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u_C = 0 \tag{7-12}$$

求解这一方程,便可得到 $u_C(t)$。

根据对一阶微分方程求解的经验①,可假定上列齐次方程的解答具有

$$u_C(t) = Ke^{st} \tag{7-13}$$

的形式。其中 s 取代了一阶方程时的 $-\frac{1}{\tau}$。以之代入(7-12)式,可得

$$\frac{d^2}{dt^2}(Ke^{st}) + \frac{R}{L}\frac{d}{dt}(Ke^{st}) + \frac{1}{LC}(Ke^{st}) = 0$$

由此可得

$$s^2Ke^{st} + \frac{R}{L}sKe^{st} + \frac{1}{LC}Ke^{st} = 0$$

两端均除以 Ke^{st},得

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0 \tag{7-14}$$

上式称为特征方程(characteristic equation),这一方程有两个根,称为特征根,它们是

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \tag{7-15}$$

特征根又称固有频率。由于 R、L、C 数值不同,特征根 s_1 和 s_2 可出现三种不同的情况:

(1) 当 $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 > \frac{1}{LC}$ 时,即 $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时,s_1、s_2 为不相等的负实数;

(2) 当 $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 = \frac{1}{LC}$ 时,即 $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时,s_1、s_2 为相等的负实数;

(3) 当 $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 < \frac{1}{LC}$ 时,即 $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时,s_1、s_2 为共轭复数,其实部为负数。

由此可知,解答不会像(7-13)式所示的那样简单。至少在情况(1)时也应表示为

$$u_C(t) = K_1e^{s_1t} + K_2e^{s_2t}$$

其中 s_1 和 s_2 为两不相等的负实数。

好在微分方程理论提供了不同情况下解答应有的形式,如以下各例所示。求解过程其实是很死板的,并不困难。

在上述特征根的三种表述中,$2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 具有电阻的量纲,称为 RLC 串联电路的阻尼电阻,记为 R_d,即

---

① 建议复习练习题6-19,或复习高等教学中线性常系数微分方程解答理论。

$$R_d = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{7-16}$$

当串联电路 R 大于、等于、小于阻尼电阻 R_d 时分别称为过阻尼、临界、欠阻尼情况。

例 7-1　图 7-3 所示电路中 $C=1$ F，$L=1$ H，$R=3$ Ω；$u_C(0)=0$，$i_L(0)=1$ A；$t\geqslant 0$ 时 $u_{OC}(t)=0$，试求 $u_C(t)$ 及 $i_L(t)$，$t\geqslant 0$。

解

$$R_d = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 2\ \Omega$$

串联电路的电阻 R 为 3 Ω，因此

$$R > R_d$$

属情况(1)，即过阻尼(over damped)情况。其解答形式为

$$u_C(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t}$$

s_1、s_2 为特征根，K_1、K_2 由初始条件确定。特征根可按如下步骤求得。

电路的微分方程及其特征方程为

$$\frac{d^2}{dt^2}u_C + \frac{R}{L}\frac{d}{dt}u_C + \frac{1}{LC}u_C = 0$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$s^2 + \qquad \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}\times 1 = 0$$

特征根为

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -1.5 \pm \sqrt{(1.5)^2 - 1}$$

故

$$s_1 = -0.382 \quad s_2 = -2.618$$

特征根亦可由(7-15)式直接获得。

为确定 K_1、K_2 需要知道初始条件 $u_C(0)$ 及 $u'_C(0)$，$u'_C(0)$ 即 $\left.\frac{du_C}{dt}\right|_0$。已知

$$u_C(0) = 0$$

而 $u'_C(0)$ 可根据 $i_L(0)$ 求得，由(7-11)式

$$\left.\frac{du_C}{dt}\right|_0 = \frac{i_L(0)}{C} = 1$$

因此，可得

$$u_C(0) = K_1 + K_2 = 0$$

以及

$$\left.\frac{du_C}{dt}\right|_0 = s_1 K_1 + s_2 K_2 = 1$$

联立以上两式解得

$$K_1 = 0.447 \quad K_2 = -0.447$$

故得

$$u_C(t) = (0.447e^{-0.382t} - 0.447e^{-2.618t})\,\text{V} \qquad t \geqslant 0$$

又因 i_L 即流过电容的电流，故得

$$i_L(t) = C\frac{du_C}{dt} = (-0.171e^{-0.382t} + 1.17e^{-2.618t})\,\text{A} \qquad t \geqslant 0$$

波形图如图 7－4 所示。可由解答中的两项指数函数波形相加获得。

由波形图可知响应是非振荡性的。

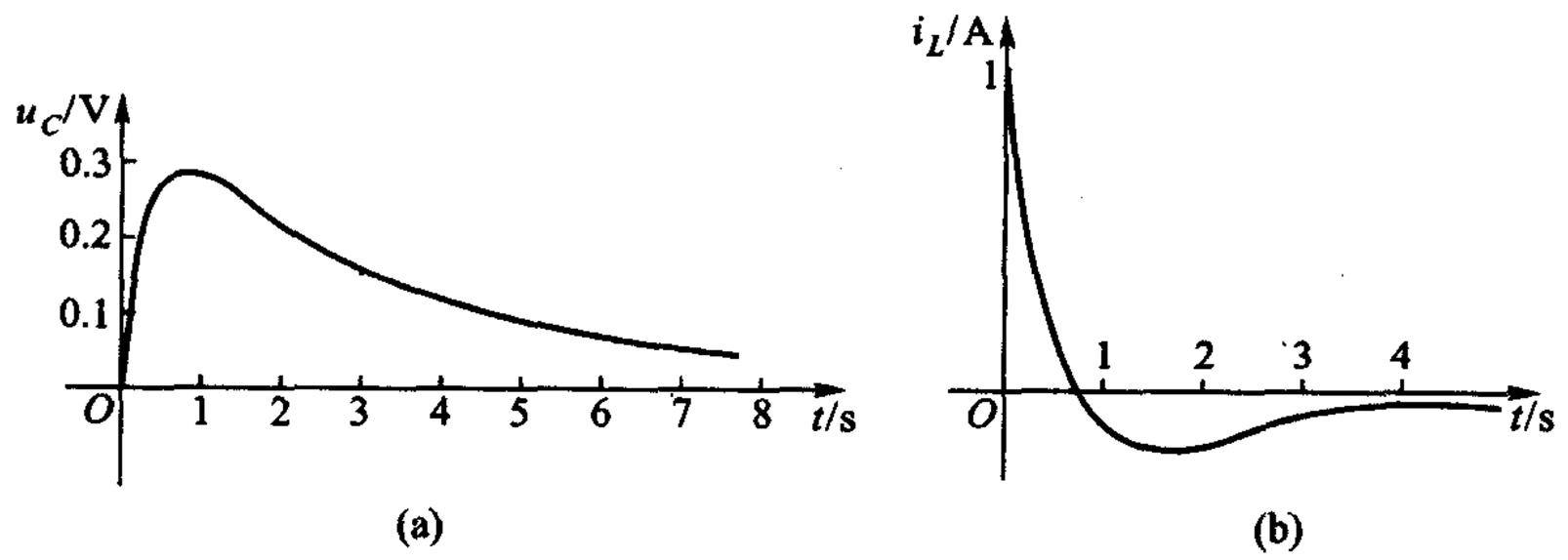


图 7－4　过阻尼时的零输入响应 $u_C(t)$ 和 $i_L(t)$

从物理意义上来看，初始时刻能量全部存储在电感中，电感电流随即对电容充电，因而电容电压上升，电感电流下降，磁场储能部分转变为电场能量，部分为电阻所消耗。到电感电流下降为零时，电容储能达到最大，电容电压也为最大。以后，电容放电，电流方向也改变，并且没有再被充电。这是因为：电阻较大，损耗也大，在储能的转移过程中，电阻消耗能量较大，当磁场储能再度释放时已不能再供给电场存储。不难想像，如果电阻较小，电容可能再度充电，形成不断放、充电的局面，从而产生振荡性的响应。

例 7－2　图 7－3 所示电路中 $R = 1\ \Omega, L = \frac{1}{4}\text{H}, C = 1\ \text{F}; u_C(0) = -1\ \text{V}$，$i_L(0) = 0; t \geqslant 0, u_{OC}(t) = 0$。试求 $i_L(t), t \geqslant 0$。

解

$$R_d = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 1\ \Omega$$

串联电路的电阻 R 为 1 Ω，因此

$$R = R_d$$

属情况(2)，即临界阻尼(critically damped)情况。其解答形式为

$$i_L(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 t e^{s_2 t}$$

注意上式中的第二项含有 t 这一因子。

特征根为

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -2$$

初始条件为

$$i_L(0) = 0 \tag{a}$$

又由图 7 -3 所示电路，根据 KVL，可得 $t=0$ 时应有

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\bigg|_0 + u_C(0) + Ri(0) = 0$$

其中 i 即 i_L，故得

$$\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\bigg|_0 = -\frac{u_C(0)}{L} = 4 \tag{b}$$

由解答形式可知

$$i_L(0) = K_1$$

$$\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\bigg|_0 = s_1K_1 + K_2$$

以初始条件代入以上两式可解得

$$K_1 = 0, K_2 = 4$$

必须指出，本题求解 $i_L(t)$，所需初始条件为 $i_L(0)$ 和 $i'_L(0)$。后者与给定的另一初始条件 $u_C(0)$ 不能由(7 -11)式得到。这类问题可根据 $t=0$ 时，电路的两类约束关系得到解决。上例利用了电容的 VCR，即(7 -11)式；本例利用了 KVL。

故得

$$i_L(t) = 4te^{-2t}\text{A} \qquad t \geqslant 0$$

$i_L(t)$ 的波形图如图 7 -5 所示。绘图时可先分别绘出 $4t$ 及 e^{-2t}，把它们相乘即可得出所求波形，响应仍为非振荡性。

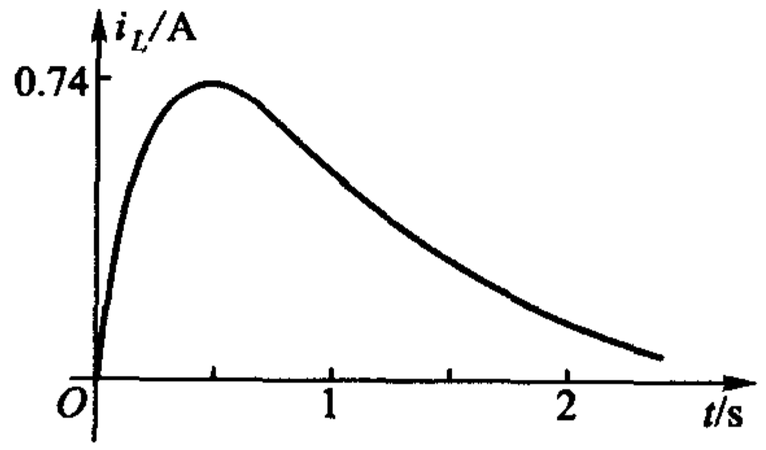


图 7 -5　临界阻尼时的零输入响应 $i_L(t)$

例 7 -3　电路如图 7 -3 所示，其中 $R=1\ \Omega$、$L=1\ \text{H}$、$C=1\ \text{F}$，$u_C(0)=1\ \text{V}$、$i_L(0)=1\ \text{A}$。求零输入响应 $u_C(t)$ 及 $i_L(t)$。

解　　$$R_d = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 2\ \Omega$$

串联电路的电阻 R 为 1 Ω,因此

$$R < R_d$$

属欠阻尼(under damped)情况。其解答形式为

$$u_C(t) = e^{-\alpha t}[K_1\cos(\omega_d t) + K_2\sin(\omega_d t)]$$

α、ω_d 为特征根 s_1 和 s_2 的实部和虚部。s_1、s_2 为共轭复数,即

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\frac{R}{2L} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

$$= -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2} = -\alpha \pm j\omega_d$$

特征根为共轭复数[①],响应是振荡性的。特征根的实部 α 又称衰减系数,其值为 $\frac{1}{2}$;虚部 ω_d 又称衰减振荡角频率,其值为$\frac{\sqrt{3}}{2}$。

初始条件

$$u_C(0) = 1\ V$$

$$\left.\frac{du_C}{dt}\right|_0 = \frac{i_L(0)}{C} = 1$$

由解答形式可知

$$u_C(0) = K_1$$

$$\left.\frac{du_C}{dt}\right|_0 = -\alpha K_1 + \omega_d K_2$$

以初始条件代入以上两式可解得

$$K_1 = 1, K_2 = \sqrt{3}$$

因此

$$u_C(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right]V \quad t \geqslant 0$$

或

$$u_C(t) = 2e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\pi}{3}\right)V \quad t \geqslant 0$$

由 $i_L = C\frac{du_C}{dt}$可得

---

① $j = \sqrt{-1}$,即数学中的 i。由于电路分析中,i 已用来表示电流,故用 j 表示 $\sqrt{-1}$。

$$i_L(t)=2e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{\pi}{3}\right)A\quad t\geqslant 0$$

$u_C(t)$及$i_L(t)$的波形图如图7-6所示，响应为振幅按指数规律衰减的振荡。

以$u_C(t)$为例，绘波形图可按下法进行：

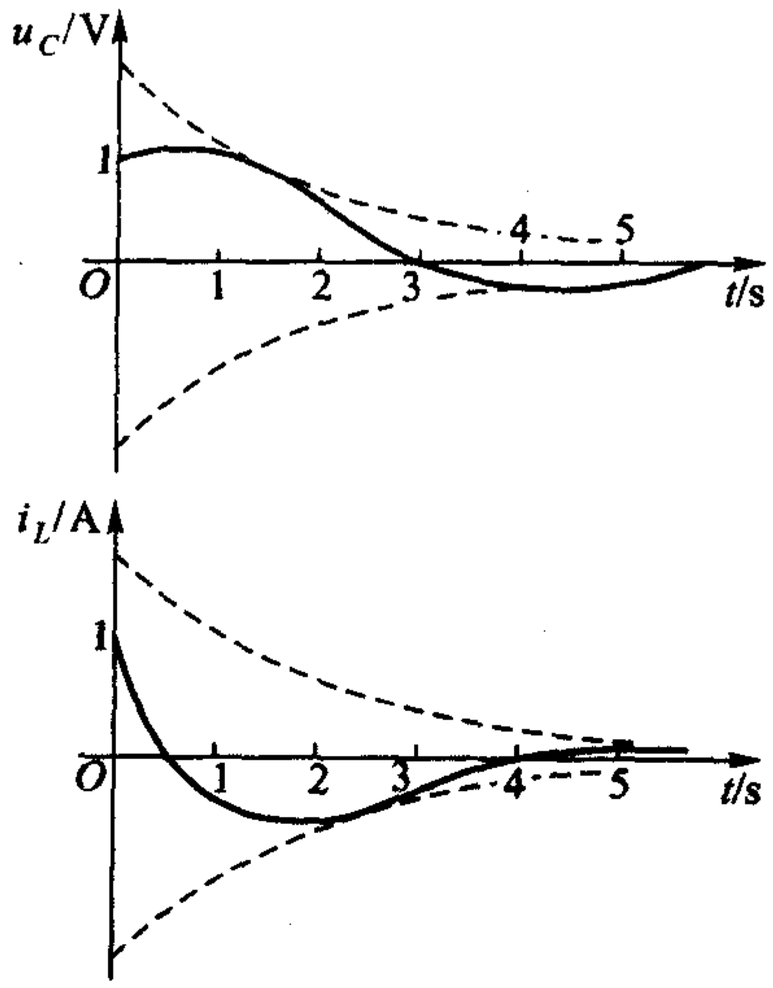


图7-6　欠阻尼时的零输入响应

先标出$u_C(t)$过时间轴的各点，亦即标出$u_C(t)=0$的各点。由于当$\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{\pi}{3}\right)=0$时，$u_C(t)=0$，故知

$$\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\cdots,(2n-1)\frac{\pi}{2}$$

时，亦即

$$t_1=\frac{5\pi}{6}\times\frac{2}{\sqrt{3}}\ \text{s}=3\ \text{s}$$

$$t_2=\frac{11}{6}\pi\times\frac{2}{\sqrt{3}}\ \text{s}=6.65\ \text{s}$$

$$\cdots$$

时，$u_C(t)$过时间轴。在t轴上标出$t_1,t_2,\cdots$。

又由于当$\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{\pi}{3}\right)=\pm 1$时，$u_C(t)=\pm 2e^{-\frac{1}{2}t}$ V，亦即此时$u_C(t)$值由包络线$\pm 2e^{-\frac{1}{2}t}$确定。当$\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{\pi}{3}\right)=\pm 1$时

$$\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{\pi}{3}=0,\pi,2\pi,\cdots,n\pi$$

即

$$t_1' = \frac{\pi}{3} \times \frac{2}{\sqrt{3}}\ \mathrm{s} = 1.2\ \mathrm{s}$$

$$t_2' = \frac{4\pi}{3} \times \frac{2}{\sqrt{3}}\ \mathrm{s} = 4.8\ \mathrm{s}$$

…

时，波形与包络线相切。在 t 轴上标出 $t_1', t_2', \cdots$。

标出 $t_1, t_2, \cdots$ 以及 $t_1', t_2', \cdots$ 后，绘出包络线 $+2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$ 和 $-2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$。由正包络线可确定 $t = t_1'$，$t_3', \cdots$ 时 $u_C(t)$ 的坐标；由负包络线可确定 $t = t_2', t_4', \cdots$ 时 $u_C(t)$ 的坐标。根据这些坐标点以及 $u_C(t)$ 为零的各点和 $u_C(0)$ 值即可绘出 $u_C(t)$ 的波形图。顺便指出：$u_C(t)$ 的最大值、最小值发生的时刻与 $\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\pi}{3}\right)$ 的最大值、最小值发生时刻不一致。

例 7-4　图 7-7 所示为 LC 振荡回路，$L = \frac{1}{16}\mathrm{H}$、$C = 4\ \mathrm{F}$，$u_C(0) = 1\ \mathrm{V}$、$i_L(0) = 1\ \mathrm{A}$。求零输入响应 $u_C(t)$ 及 $i_L(t)$。

解　电路电阻 $R = 0$，属无限尼情况。由上例欠阻尼的特征根，以 $R = 0$ 代入可得

$$s_{1,2} = \pm \mathrm{j}\frac{1}{\sqrt{LC}} = \pm \mathrm{j}\omega_0 = \pm \mathrm{j}2$$

ω_0 称为谐振（resonant）角频率。当 $R \neq 0$ 时，特征根的虚部 ω_d 可表示为 $\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$。

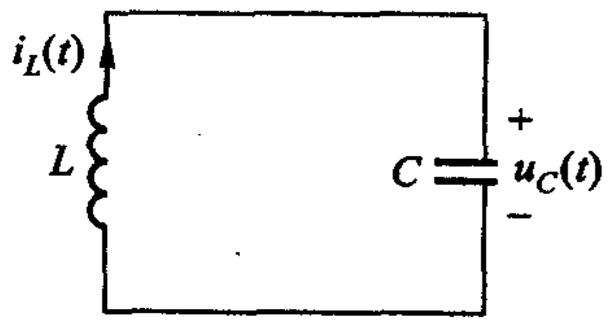


图 7-7　例 7-4

解答形式为

$$u_C(t) = K_1\cos(\omega_0 t) + K_2\sin(\omega_0 t)$$

初始条件为

$$u_C(0) = 1\ \mathrm{V}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_0 = \frac{i_L(0)}{C} = \frac{1}{4}$$

由解答形式可知

$$u_C(0) = K_1$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_0 = \omega_0 K_2$$

以初始条件代入以上两式可解得

$$K_1 = 1, K_2 = \frac{1}{8}$$

故得

$$u_C(t) = \left[\cos(2t) + \frac{1}{8}\sin(2t)\right]\ \mathrm{V} = 1.01\cos(2t - 7°)\ \mathrm{V} \quad t \geqslant 0$$

$$i_L(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}[-8\sin(2t) + \cos(2t)]\ \mathrm{A}$$

$$= 8.06\cos(2t + 83°)\ \mathrm{A} \quad t \geqslant 0$$

波形如图 7-8 所示，响应为等幅振荡。

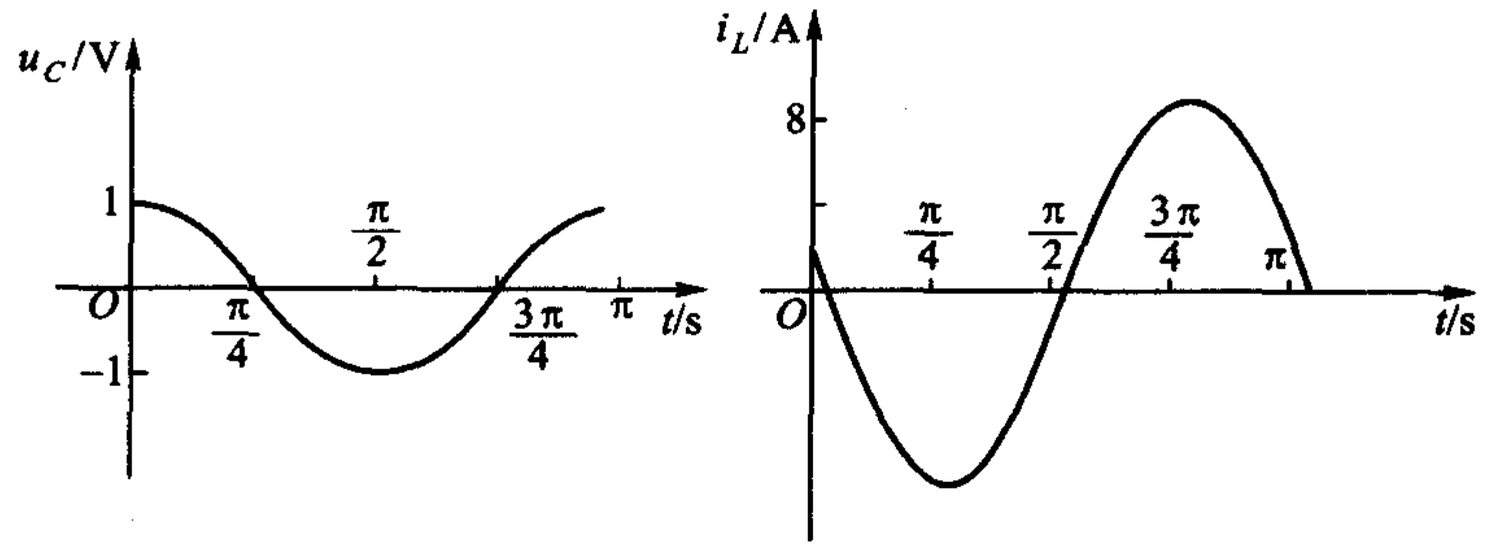


图 7-8　无阻尼时的零输入响应

思考题

7-1　在图 7-9(a)所示电路中增添一如虚线所示的电容，其结果是使电路成为过阻尼还是欠阻尼情况？在图 7-9(b)所示电路中，增添一如虚线所示的受控源($0 < \alpha < 1$)，其结果又如何？

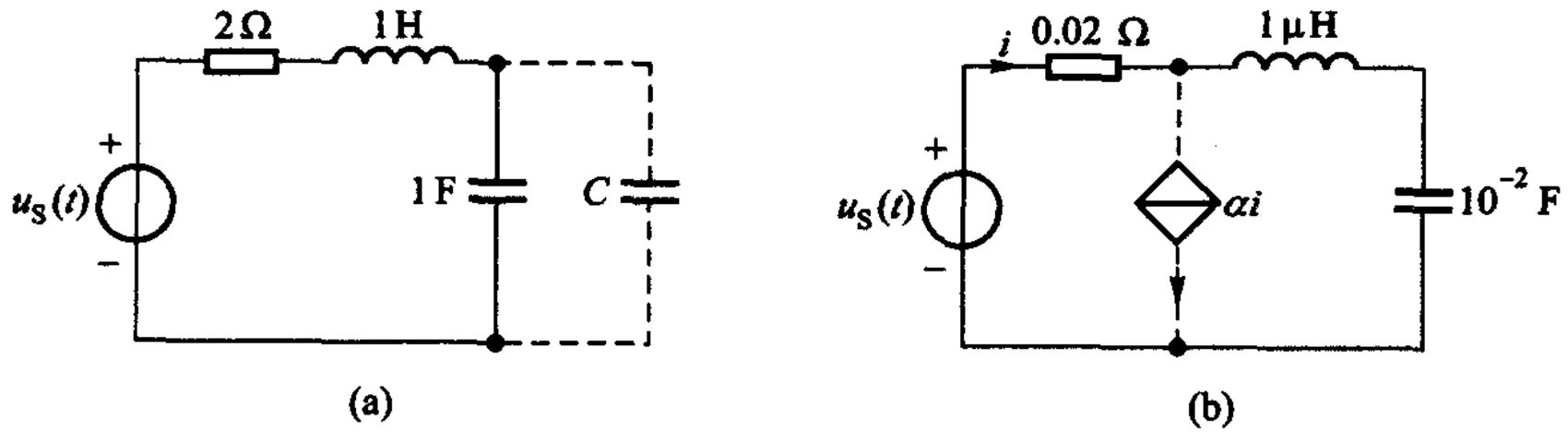


图 7-9　思考题 7-1

练习题

7-1　*RLC* 串联电路如图 7-3 所示，若特征根为

(1) $s_1 = -1$、$s_2 = -3$；

(2) $s_1 = s_2 = -2$；

(3) $s_1 = \mathrm{j}2$、$s_2 = -\mathrm{j}2$；

(4) $s_1 = -2 + \mathrm{j}3$、$s_2 = -2 - \mathrm{j}3$。

试写出各情况时零输入响应 $u_C(t)$ 及 $i_L(t)$ 的表示式。

7-2　已知(1) $\frac{d^2x}{dt^2}+4\frac{dx}{dt}+3x=0$;(2) $\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dx}{dt}+x=0$,试求它们的特征根。

$(-1,-3;-1,-1)$

7-3　已知 *RLC* 串联电路中 $L=2\ \text{H}$、$C=\frac{1}{8}\ \text{F}$,$u_C(0_-)=10\ \text{V}$,欲在 $t>0$ 时获得衰减振荡响应,求 R 的取值范围。

$(8\ \Omega>R>0)$

§7-3　*RLC* 串联电路的全响应

如果在图 7-3 所示电路中,$u_{oc}(t)=U_S(t\geqslant 0)$,则由(7-10)式可得电路的微分方程为

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2}+RC\frac{du_C}{dt}+u_C=U_S\quad t\geqslant 0 \tag{7-17}$$

方程的右端不为零,在数学上称为非齐次方程。非齐次方程的解答由两部分组成:其一为对应的齐次方程,即(7-12)式的解答,称为齐次解、补解或齐次方程通解,在技术上称为固有(自由)响应解或瞬态响应解;另一为非齐次方程的特解,在技术上又称为强迫响应解或稳态响应解。

齐次解的形式将随特征根的性质而定,如同例 7-1 至例 7-4 中所示。但其中的常数 K_1、K_2,需在求得(7-17)式的特解得出全响应后再根据初始条件加以确定。特解的形式,一般与方程右端的函数有关①,和 §6-8 所述相同。

满足(7-17)式的特解是 $u_{Cp}=U_S(t\geqslant 0)$。因此,若以特征根为两个不相等实数的情况为例,电路的全响应可表示为

$$u_C(t)=K_1e^{s_1t}+K_2e^{s_2t}+U_S\quad t\geqslant 0 \tag{7-18}$$

根据该式利用初始条件可求得 K_1 和 K_2。

例 7-5　图 7-10 所示为电火花加工器的原理电路。若 $u_C(0_-)=0$,$i(0_-)=0$,开关 S 在 $t=0$ 时闭合,电容被充电。当电容电压到达工作电极和金属工件间隙的击穿电压时,间隙处即产生电火花,电容通过间隙放电,然后电源再次对电容充电,重复上述过程。由于电火花的温度一般可达 10^4℃,足使工件局部熔化,从而对工件进行加工。若 $R=50\ \Omega$、$L=0.06\ \text{H}$、$C=1\ \mu\text{F}$,试计算加工频率及电容的最高充电电压。

解

$$R_d=2\sqrt{\frac{L}{C}}=489\ \Omega$$

① 特解与输入函数的关系可参阅《简明电路分析基础》表 7-1。

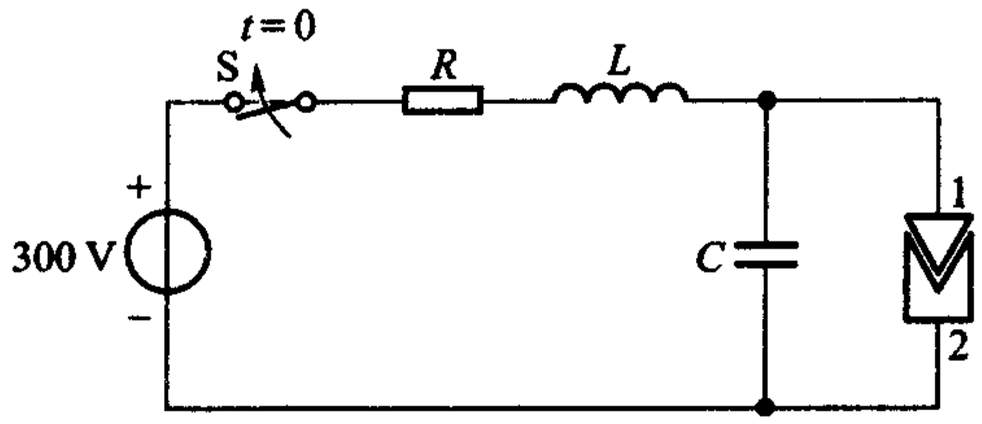


图 7-10　例 7-5

$$R < R_d$$

电路属欠阻尼状况。特征根为共轭复根

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R}{2L}} = -\alpha \pm j\omega_d$$

$$\alpha = 417, \omega_d = 4\ 060$$

或由(7-17)式,得特征方程

$$LCs^2 + RCs + 1 = 0$$

亦可解得上述 $s_{1,2}$ 的结果。特别需加注意:特征方程是根据对应的齐次方程得出的,慎勿在特征方程右端写为 U_S! 齐次解当属例 7-3 中所示的形式。

设特解为常数 U_{Cp},以 $u_C = U_{Cp}$ 代入(7-17)式可得

$$U_{Cp} = 300\ \text{V}$$

至此,可得(7-17)式的(全响应)解答为

$$u_C(t) = e^{-\alpha t}[K_1\cos(\omega_d t) + K_2\sin(\omega_d t)] + 300$$

最后,利用初始条件确定 K_1、K_2 如下:

$$u_C(0) = K_1 + 300 = 0$$

$$\left.\frac{du_C}{dt}\right|_0 = -\alpha K_1 + \omega_d K_2 = \frac{i_L(0)}{C} = 0$$

这里用到了(7-11)式。由以上两式解得

$$K_1 = -300, K_2 = -300\left(\frac{\alpha}{\omega_d}\right)$$

解答为

$$u_C(t) = \left\{-300e^{-\alpha t}\left[\cos(\omega_d t) + \frac{\alpha}{\omega_d}\sin(\omega_d t)\right] + 300\right\}\ \text{V}$$

以 α、ω_d 值代入上式,即 $u_C(t)$、$t \geqslant 0$。

为求 $u_C(t)$ 的最大值,可先求 u_C 对 t 的导数,得

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=300\mathrm{e}^{-\alpha t}\left(\frac{\sqrt{\alpha^2+\omega_\mathrm{d}^2}}{\omega_\mathrm{d}}\right)\sin\ (\omega_\mathrm{d}t)$$

$$=300\ \frac{\omega_0}{\omega_\mathrm{d}}\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin(\omega_\mathrm{d}t)$$

令$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=0$，由于$\mathrm{e}^{-\alpha t}\neq 0$，故得$u_C$最大值发生时

$$\sin(\omega_\mathrm{d}t)=0$$

由此可知，最大值发生在$t_\mathrm{m}=\frac{\pi}{\omega_\mathrm{d}},\frac{3\pi}{\omega_\mathrm{d}},\frac{5\pi}{\omega_\mathrm{d}},\cdots$时刻。

第一个最大值发生时刻为$\frac{\pi}{\omega_\mathrm{d}}=77.4\ \mathrm{ms}$，以之代入$u_C(t)$得

$$u_C(t_\mathrm{m1})=300(1+\mathrm{e}^{-417\times 77.4\times 10^{-3}})\ \mathrm{V}$$

$$=516\ \mathrm{V}$$

假设选定的电容电压最大值即为间隙击穿电压，并假设放电在瞬间完成，在再经历77.4 ms后，电容将又被充电到达$u_{C\mathrm{m}}$，再度放电，因此，电容电压的波形当如图7－11所示，其周期为

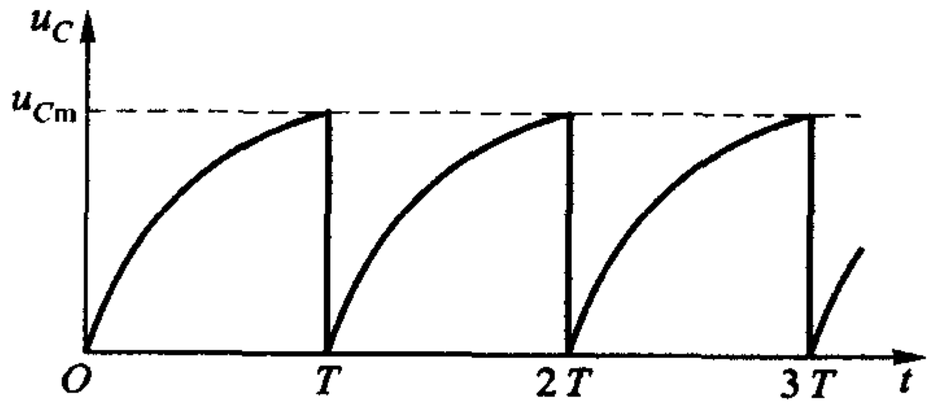


图7－11　电火花加工器u_C波形图

$$T=t_\mathrm{m}=77.4\ \mathrm{ms}$$

即加工频率

$$f=\frac{1}{T}=12.92\ \mathrm{Hz}$$

调节R、L、C的参数值即能根据加工需要调节加工频率及电容的最高充电电压。

若此例中无工件与电容并联，$u_C(t)$是一个最终趋于300 V的衰减振荡，如图7－12所示。最大值高于稳态值的数值常又称为“上冲”(overshoot)。

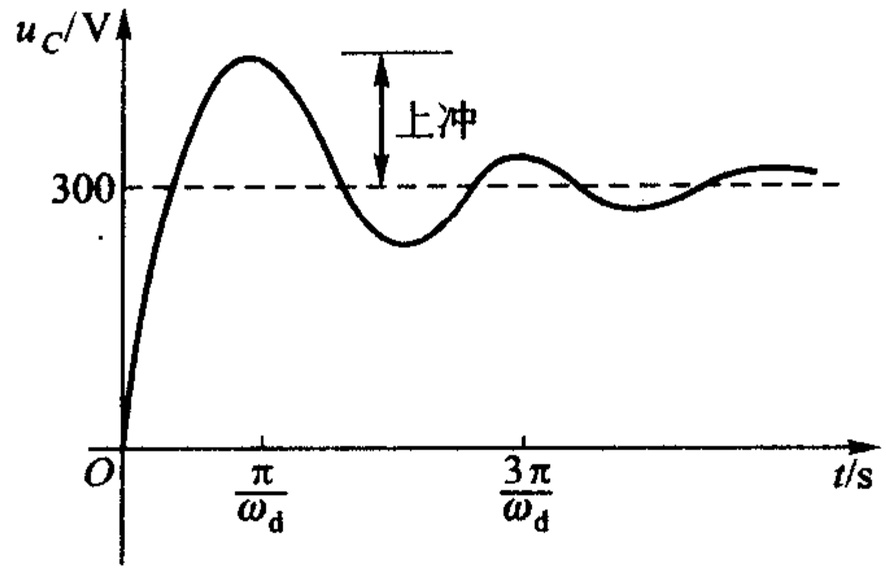


图 7－12　例 7－5 无放电旁路时 u_C 波形图

思考题

7－2　切断直流电动机(可认为是一个 *RL* 串联电路)的电源时,在开关两端产生火花,是什么原因？为什么在开关两端并联一个电容就可以消除火花？

§7－4　*GCL* 并联电路的分析

设含电感和电容的二阶电路如图 7－13(a)所示,运用诺顿定理后可得如图 7－13(b)所示的 *GCL* 并联电路。

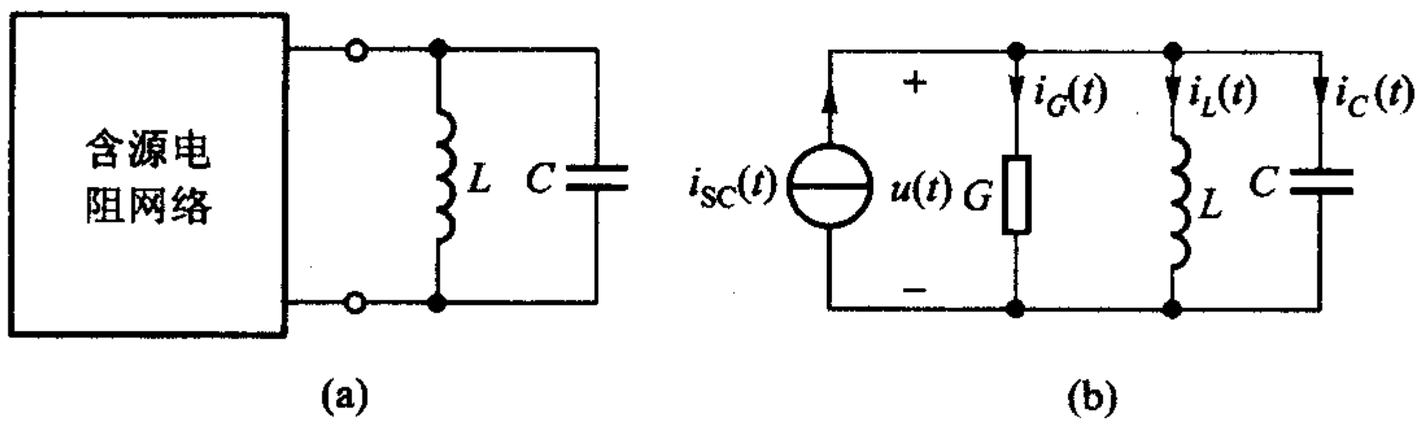


图 7－13　*GCL* 并联电路

根据 KCL

$$i_C(t) + i_G(t) + i_L(t) = i_{SC}(t)$$

以 $i_C = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = LC\dfrac{\mathrm{d}^2 i_L}{\mathrm{d}t^2}$ 和 $i_G = G = GL\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$ 代入,可得

$$LC\frac{\mathrm{d}^2 i_L(t)}{\mathrm{d}t^2} + GL\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} + i_L(t) = i_{SC}(t) \quad t \geqslant 0 \qquad (7-19)$$

解这一非齐次二阶微分方程便可求得 $i_L(t)$。

如果把(7－19)式和 *RLC* 串联电路的方程(7－10)式进行对比就会发现:把

串联电路方程中的 u_C 换以 i_L，L 换以 C，C 换以 L，R 换以 G，u_{OC} 换以 i_{SC} 就会得到并联电路的方程。这就是说 *RLC* 串联电路和 *GCL* 并联电路是具有对偶性质的电路。因此，如果遵照上述的更换法则，不难从已有的串联电路解答得到并联电路的解答，十分方便。由(7－15)式可得 *GCL* 并联电路阻尼电导

$$G_d = 2\sqrt{\frac{C}{L}} \tag{7-20}$$

这一公式可用于仅需对响应进行定性判断时。若 $G > G_d$ 时为过阻尼(非振荡性)；若 $G = G_d$ 时为临界阻尼(非振荡性)；若 $G < G_d$ 时为欠阻尼(衰减振荡)；若 $G = 0$ 时，为无阻尼(等幅振荡)。

如需进一步求得特征根 $s_{1,2}$，可由特征方程求解，或根据(7－14)式，运用对偶关系，得

$$s_{1,2} = -\frac{G}{2C} \pm \sqrt{\left(\frac{G}{2C}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \tag{7-21}$$

例 7－6　图 7－14 所示电路，假定开关 S 连接 15 V 电压源已久，在 $t = 0$ 时改与 10 V 电压源接通，求 $i(t)$，$t \geqslant 0$。

解　先定初始条件。

$$i(0_-) = \frac{15}{25}\ \text{A} = 0.6\ \text{A} = i(0_+)$$

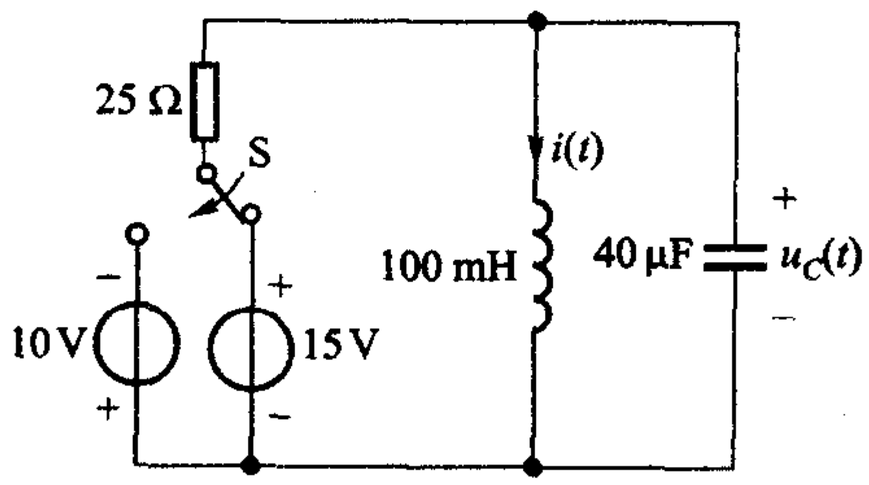


图 7－14　例 7－6

$$u_C(0_-) = 0 = u_C(0_+)$$

考虑到换路后 10 V 电压源与 25 Ω 可化为等效电流源与 25 Ω 并联电路，对 *GCL* 并联部分，由(7－21)式

$$s_{1,2} = -\frac{G}{2C} \pm \sqrt{\left(\frac{G}{2C}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

$$= -500$$

属临界阻尼，故得固有响应(瞬态响应)为

$$i_h(t) = (K_1 + K_2 t)\,e^{-500t}$$

由换路后的直流稳态可得强迫响应(稳态响应)为

$$i_p = -\frac{10}{25}\text{A} = -0.4\ \text{A}$$

$$i(t) = i_h(t) + i_p = (K_1 + K_2 t)e^{-500t} - 0.4$$

由初始条件

$$i(0) = 0.6, u_C(0) = 0$$

可得

$$i(0) = K_1 - 0.4 = 0.6, K_1 = 1$$

又

$$\left.\frac{di}{dt}\right|_0 = \frac{u_C(0)}{L} = \left(-500K_1 e^{-500t} + K_2 e^{-500t} - 500K_2 t e^{-500t}\right)\Big|_0$$

即

$$0 = -500K_1 + K_2$$

这里用到了 $t=0$ 时电感的 VCR，此处电感电压即电容电压。以 $K_1 = 1$ 代入后，得

$$K_2 = 500$$

故得

$$i(t) = [(1 + 500t)e^{-500t} - 0.4]\text{A} \quad t \geqslant 0$$ ◀

最后，把有关微分方程解答的一些名词归纳如下：

非齐次线性微分方程的解答（通解）= 对应的齐次方程通解 + 特解

数学名称	齐次方程的通解（补解、齐次解）	特解
技术名称	固有（自由）响应解	强制响应解
	瞬（暂）态响应解	稳态响应解

练习题

7-4　某 *RLC* 并联电路的特征根 $s_{1,2} = -3 \pm j4$，此时 $R = 2\ \Omega$。问欲使电路为临界阻尼，*R* 应增加还是减少？其值是多少？

（1.2 Ω）

习题

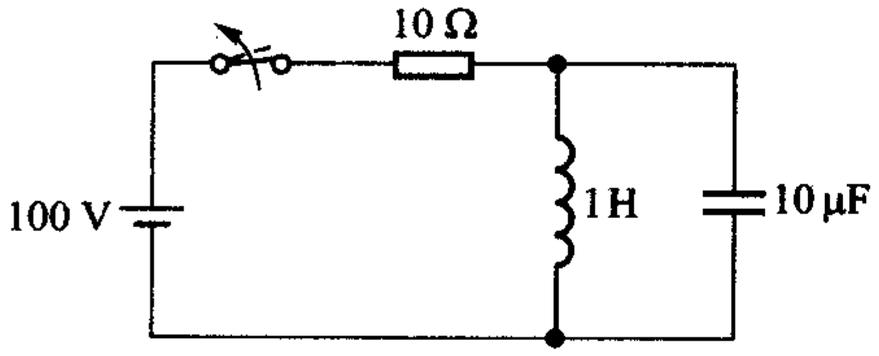
§7-1　LC 电路中的正弦振荡

7-1　无电源的 *LC* 电路中，电感的初始储能 $w_L(0_+) = W_L$，电容的初始储能 $w_C(0_+) =$

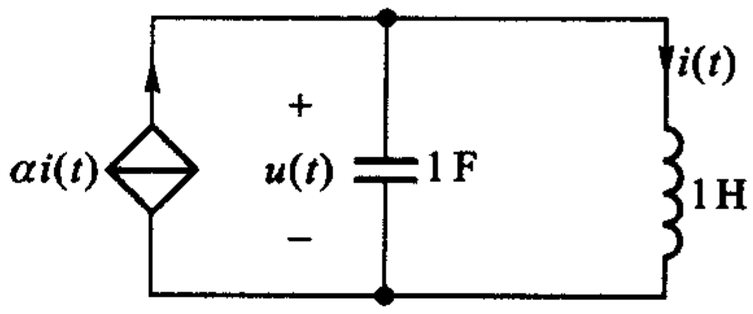
W_C。试根据能量守恒表明该电路中电流的最大值 $i_{max}=[2(W_L+W_C)/L]^{\frac{1}{2}}$，电压的最大值 $u_{max}=[2(W_L+W_C)/C]^{\frac{1}{2}}$。

7-2　电路如图题 7-1 所示，开关在 $t=0$ 时打开，打开前电路已处于稳态。求 $i_L(t)$、$u_C(t)$，$t\geqslant 0$。

7-3　电路如图题 7-2 所示，若 $i(t)=5\sin(3t)$，$t\geqslant 0$；$i(t)=0$，$t<0$。试确定 $i(0)$、$u(0)$以及 α 值。



图题 7-1



图题 7-2

§7-2　RLC 串联电路的零输入响应

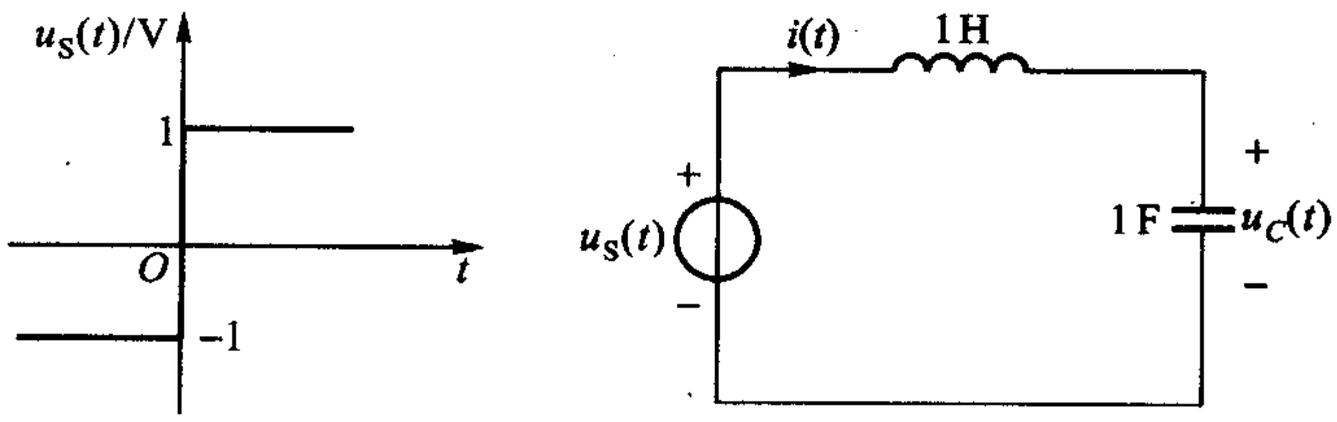
7-4　已知 *RLC* 串联电路中 $R=2\ \Omega$。$L=2\ \text{H}$，试求下列三种情况响应的形式：(a) $C=\frac{1}{2}\text{F}$；(b) $C=1\ \text{F}$；(c) $G=2\ \text{F}$。

7-5　已知 *RLC* 串联电路中 $R=6\ \Omega$，$L=1\ \text{H}$，$C=0.04\ \text{F}$，$i(0)=4\ \text{A}$ 和 $u_C(0)=-4\ \text{V}$（u_C 与 i 关联参考方向）。试求 $i(t)$、$u_C(t)$，$t\geqslant 0$。

§7-3　RLC 串联电路的全响应

7-6　图 7-3(b)所示电路中 $L=1\ \text{H}$，$C=1\ \text{F}$，$R=1\ \Omega$，求电容电压的阶跃响应 $s(t)$。第一个上冲发生在什么时刻，此时 u_C 是多少？

7-7　电路如图题 7-3 所示，当 $t<0$ 时，$u_S(t)=-1\ \text{V}$。在 $t=0$ 时，$u_S(t)$突然增至1 V，以后即一直保持为此值。试求电路中各元件的电压和电流，并绘波形图。



图题 7-3

§7-4　GCL 并联电路的分析

7-8　*GCL* 并联电路中 $C=\frac{1}{2}$ F、$L=\frac{1}{50}$ H、$G=1$ S，$u_C(0)=1$ V、$i_L(0)=2$ A。求 $u_C(t)$ 的零输入响应。

部分习题答案(上册)

第一章

1-1　-1 A　　0　　1 A

1-2　(1) 5 A　　(2) -5 A　　(3) 改变正、负号

1-3　(1) 10 V　　(2) -1 A　　(3) -1 A　　(4) -20 μW(提供功率 20 μW)

(5) -1 A　(6) -10 V　　(7) -1 mA

(8) -4 mW(提供功率为 4 mW)

1-4　吸收能量为零(该元件为电感元件)

1-7　(3) $u_1 = 15$ V　　$u_5 = 11$ V　　$u_4 = -6$ V

1-8　$u_5 = -5$ V　　$u_{11} = 10$ V　　$u_{10} = -14$ V　要求出所有电压,尚需知道

u_3、u_8、u_9 中的任一电压值　　七个　　线性无关

1-9　$i_5 = 3$ A　　$i_9 = -2$ A　　$i_{11} = -i_1 = -2$ A　　$i_{12} = -i_4 = -5$ A

尚需知道 i_3

1-10　-20 W　　10 W　　15 W　　-5 W

(注意:$\sum p = 0$,若 $\sum u = 0$, $\sum i = 0$,必有 $\sum p = 0$)

1-11　(1) $\frac{7}{4}\cos(2t)$ A　　(2) $\frac{1}{3}\ \Omega$　　(3) $\frac{9}{5}\cos^2(2t)$ W

1-12　44 V　　45 V

1-13　(1) 20 V　　(2) 8 V　　(3) -6 V　　(4) 2 V

1-14　$\frac{5}{8}$ A　　$-\frac{25}{4}$ W　　$\frac{25}{8}$ W

1-15　图(a) $i_3 = 1$ A　　$u_S = 36.2$ V

图(b) $i_2 = 2$ A　　$p_S = 24$ W

1-16　90 V　　1 A

1-17　1.54 V　　(这一电压在物理课程中称为电动势)

1-18　0.8×10^{-2} μA

1-19　$P = 36$ W　　$W = 518.4 \times 10^3$ J

耗电度数 $= 144 \times 10^{-3}$ kW·h

1-20　-45 V　　7 A　　-20 V　　1 A

1-21　(1) 提供功率 30 W　　(2) -2 A

1-22　$i = 2$ A　　40 W　　-20 W　　-20 W

1-23　-1 A　　0.5 W　　1 W　　1.5 W　　-5 W　　2 W

1-24　0

1-25　-18 V　　12 Ω

1-26 2 V 40 V

1-27 (1) 7 Ω (2) $\frac{9}{2}$ Ω (3) $\frac{2}{9}$ Ω (4) $\frac{4}{7}$ Ω

1-28 (1) $u_2 = u_1 - R_1 i_1$ $i_2 = i_1 - \frac{u_2}{R_2}$

(2) $u_2 = u_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2}$

(3) $u_2 = u_1$

(4) $i_2 = i_1$ $i_2 = i_1\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)$

1-29 0 0; 10 V 4 V; 10 V 0; 4 V 4 V; 10 V 10 V; 4 V 0

1-31 $U_3 - U_4 = U_X$ $I_1 = I_2 + (1\ A)$

1-32 $i_1 = \frac{10(R_2 + R_3)}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}$

提示:先列出两个 KVL 方程和 R_1、R_2、R_3 的 VCR,整理后得两个支路电流法方程。

1-33 $\Delta = -11$ -1 A 2 A 4 A

1-34 5 kΩ 5 V 电压源 10 V 电压源 2.5 mA 电流源

1-35 -158 V 至 158 V -925.4 V -1 000 V 至 -925 V

-776 V 至 -403 V 1 267 V

1-36 0 10 V 4 V 20 V 6 V -8 V 0 -6 V -1.5 A

第二章

2-1 3 A -3 V

2-2 -4 A 0 4 A

2-3 -8 A -2 A 0

2-5 20 mA 80 mW

2-6 3.75 V

2-7 -3.83 A

2-8 29.6 A 28 A 26 A 672 W

2-9 0.357 mA

2-10 2 V

2-11 $\frac{1}{3}$ A 2 A 1 A $\frac{2}{3}$ A

2-12 $\frac{12}{7}$ V $\frac{20}{7}$ V

2-13 11 A 4 A

2-14 2 V 2 mA

2-16 由 -100 V 变到 14.3 V 变化 114.3 V

2-17 1.6 A -0.8 A

2-18 12 V 2 A

2-22 $i(t)$为周期相同的方波,其幅度(振幅)为 7 A

第三章

3-1 3 A -1.02 A

3-2 (1) 2 A 45 V (2) 2.2 V

3-3 $\frac{1}{34}$

3-4 $\frac{1}{4}$ 750 Ω 0.15 mA 0.45 V

3-5 $\frac{1}{3.5}$ Ω

3-6 2 A

3-7 8 V

3-8 10.5 A 31.3 A -34.3 V -25.7 V

3-9 4 A

3-10 (1) 150 V (2) 160 V

3-12 27 mW

3-13 200 W

3-14 -120 W

3-15 (1) -5 A (2) $\frac{10}{3}$ A (3) 1.45 A 或 -11.45 A

3-16 (1) 2.8 V (2) -14 W -21.6 W 12.32 W

3-17 提供 130 W

3-18 $u_o = 0.5\,u_{s1} + 0.25\,u_{s2}$ $u_o = 0.6\,u_{s1} + 0.8\,Ri_{s2}$

3-19 (1) 3 A -8 A 17 A (2) -19 A

3-20 $(0.267 + 0.4e^{-2t})$ A

第四章

4-1 $u = 11.25 + 12.5\,i$ 或 $u = 11.25 - 12.5\,i$

4-2 $u = 50 + 9i$

4-3 $u = (1 + \alpha)R_L i_1$

4-4 0.5 A 0.7 A 5 A 1.2 A

4-5 1.95 V

4-6 4 V 2 mA

4-8 提示:图(a)设 $u = 1$ V,则 1 Ω 的电压为$(1 + \mu)$V,故得 $i = \frac{1 + \mu}{1}$ A,$R_i = \frac{u}{i} = \frac{1}{1 + \mu}$

4-9 35 Ω

4-14 提示:图(a)$u_{ad} = -4$ V 图(b) $i_{ba} = 8$ A 图(c) $u_{ab} = 0$

4-16 1.5 mA -70 V

4-17 (1) 均为 4 W (2) 60 W 10 W (3) 56 W 6 W

4-18 $\sqrt{50}\ \Omega$

4-21 90 V

4-22 1.8 mA

4-23 4 V −2 A 3 A; 1 V 1 A 1.5 A

4-24 1.846 A 1.865 A

4-25 0.237 A 2.434 A

4-26 1 A

4-27 1.5 A 30 Ω

4-28 0.5 A $\frac{40}{6-\alpha}\ \Omega$

4-29 230 mW 306 mW 59.2 kΩ 或 16.88 kΩ

4-30 3 Ω 1.2 kW 3 kW 800 W 31.58%

4-31 88.33 Ω 33.33 Ω 48.33 Ω 100 Ω

4-32 0.833 mA

4-33 4.547 V

4-34 0.94 V 0.47 mA 1.35 mA

4-35 2 V

4-36 选择(1) 2.5 mA

第五章

5-1 (1) $-0.1\sin(1\,000\,t)$ A (2) $-10e^{-100t}$ V

本题回答了思考题 5-3

5-4 (1) $u_C(-1)=8$ V (2) $u_C(0)=16$ V (3) $u_C(2)=32$ V

5-5 (1) 2 μF (2) 4 μC (3) 0 (4) 4 μJ

5-6 (1) 9.6 V 192 mW 1.152 mJ

(2) 16 V 0 3.20 mJ

5-7 (1) $15e^{-10^4t}$ V (2) 15 V

5-8 (1) 3 H (2) $(6t^2-12t+6)$ J

(3) 3 mH $(6t^2-12t+6)$ mJ

5-9 (2) 10 ~ 15 ms 62.5 μJ

5-10 $i_1(t)=(-2+4e^{-t})$ A $i_2(t)=(2+2e^{-t})$ A

5-11 $(1-t)e^{-t}$ A $(t-2)e^{-t}$ V

5-12 1.5 Ω 0.5 H 1 F

第六章

6-1 (1) $u_{OC}=(100\ i_1+u_1)$ V $R_o=300\ \Omega$

$u_{OC}=100\ i_1$ V $R_o=300\ \Omega$

(2) $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+1.5\times10^{5}\,i=500(100i_1+u_1)$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{3}\times10^{4}u=\frac{1}{3}\times10^{6}i_1$$

6-2 (1) $u_{\mathrm{OC}}=4\ \mathrm{V}$ $R_{\mathrm{o}}=(220-60\,\mu)\ \Omega$

$$u_{\mathrm{OC}}=\frac{5}{6-2\alpha}\ \mathrm{V}\qquad R_{\mathrm{o}}=\frac{250}{3-\alpha}\ \Omega$$

(2) $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+(1.1-0.3\,\mu)\times10^{5}i=-2\times10^{3}$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+4(3-\alpha)10^{3}\,u=10^{4}$$

6-3 $10(1-\mathrm{e}^{-t})\ \mathrm{V}$ $10^{-5}\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{A}$

6-4 $\left(\dfrac{3}{4}\mathrm{e}^{-208.3t}-\dfrac{1}{2}\right)\ \mathrm{mA}$

6-5 $-39.35\ \mathrm{V}$ $2.02\ \mathrm{mA}$ $4.19\ \mathrm{mA}$ $6.21\ \mathrm{mA}$

6-6 (1) $\dfrac{3}{4}\mathrm{e}^{-0.5t}\ \mathrm{A}$ (2) $\dfrac{4}{3}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}t}\ \mathrm{A}$

6-7 $\left(4-\dfrac{7}{3}\mathrm{e}^{-\frac{t}{3}}\right)\ \mathrm{A}$ $\left(3-\dfrac{7}{2}\mathrm{e}^{-\frac{t}{3}}\right)\ \mathrm{A}$

6-8 $(0.5+0.3\mathrm{e}^{-t})\ \mathrm{A}$

6-9 $u_{\mathrm{OC}}=56\ \mathrm{V}$ $R_{\mathrm{o}}=14\ \Omega$

6-10 33 V 电源和 3.3 kΩ 电阻 165 V 电源和 16.5 kΩ 电阻

6-11 $R=2\ \mathrm{k}\Omega$ 和 $C=0.5\ \mu\mathrm{F}$ 并联 $R=2\ \mathrm{k}\Omega$ 和 $L=2\ \mathrm{H}$ 并联

6-12 $3\varepsilon(t-1)-5\varepsilon(t-3)+2\varepsilon(t-4)$

6-13 $4(1-\mathrm{e}^{-100t})\varepsilon(t)\ \mathrm{A}$ $\left(2-\dfrac{8}{3}\mathrm{e}^{-100t}\right)\varepsilon(t)\ \mathrm{A}$

6-14 $[0.2\mathrm{e}^{-1.2(t-1)}\cdot\varepsilon(t-1)-0.2\mathrm{e}^{-1.2(t-2)}\cdot\varepsilon(t-2)]\ \mathrm{A}$

6-15 $50\mathrm{e}^{-5.1t}\ \mathrm{mA}\quad 0\leqslant t\leqslant 1\ \mathrm{ms}$ $-50\mathrm{e}^{-5.1(t-1)}\ \mathrm{mA}\quad t>1\ \mathrm{ms}$

或 $50[\mathrm{e}^{-5.1t}\varepsilon(t)-\mathrm{e}^{-5.1(t-1)}\varepsilon(t-1)]\ \mathrm{mA}$

两式中时间常数和 t 的单位均为 ms

6-16 $4(1-\mathrm{e}^{-7t})\ \mathrm{A}$

6-17 $(1-\mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t)\ \mathrm{V}$ $\dfrac{1}{5}\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)\ \mathrm{A}$

6-18 $u_C(0_+)=\dfrac{1}{RC}$ $i(0_+)=-\dfrac{1}{R^2C}$ $\dfrac{1}{R}\delta(t)-\dfrac{1}{R^2C}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\cdot\varepsilon(t)$

6-19 $R\delta(t)-\dfrac{R^2}{L}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\cdot\varepsilon(t)$

6-20 $10\ \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{V}$ $-10^{-5}\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{A}$

6-21 $-2\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{V}$ $-0.5\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{V}$

6-22 1.55 s 77.5 kΩ 19.05 V

6-23 $1.875\mathrm{e}^{-36t}\ \mathrm{V}$

6-24 $40\,000e^{-0.5\times10^{-3}t}$ V

6-25 0.5 H 500 Ω

6-26 $[2-2(1-e^{-3t})\varepsilon(t)]$ A $-6e^{-3t}\varepsilon(t)$ V $\left[2-\left(2-\frac{3}{2}e^{-3t}\right)\varepsilon(t)\right]$ A

6-27 $[6-6(1-e^{-5t})\varepsilon(t)]$ V $-3e^{-5t}\varepsilon(t)$ A $[12-(12-3e^{-5t})\varepsilon(t)]$ V

6-28 $(1-e^{-3.33t})$ A $e^{-3.33t}$ A $1-2e^{-3.33t}$ A

6-29 $(15-10e^{-500t})$ mA

6-30 $(20-30e^{-t})$ V $(10-20e^{-t})$ V

6-31 $(2+4e^{-\alpha t})$ mA

6-32 4 Ω 4 Ω 0.25 F 2.5 V

6-33 50 V 12.5 mA

6-34 20 V −2 A

6-38 $(10-5e^{-500t})$ mA

6-39 $-45e^{-10t}$ mA $-45e^{-10^4t}$ V

6-40 $\left(\frac{5}{8}-\frac{1}{8}e^{-t}\right)$ V (提示:接电感时的初始值与接电容时的稳态值相等。)

6-41 20 V 20 V 28 V 24.4 V

6-42 (1) $[4-3\varepsilon(t)]$ V 或$[4\varepsilon(-t)+\varepsilon(t)]$ V

(2) $(0.5+1.5\,e^{-t})$ A $(0.5+0.75\,e^{-t})$ A

6-43 $u(0_+)=1$ V $u(\infty)=20$ V $\tau=10$ s $e^{-0.1t}$V $20(1-e^{-0.1t})$ V

20 V $-19\,e^{-0.1t}$ V

6-44 100 V 45.2 mA 2.47 μF

6-45 $\tau=2$ s $i_L(0_-)=i_L(0_+)=25$ A $=i(0_-)$

$i(0_+)=\frac{250}{8}$ A $i_L(\infty)=i(\infty)=50$ A

(1) $(25-50)e^{-\frac{t}{\tau}}$ $\left(\frac{250}{8}-50\right)e^{-\frac{t}{\tau}}$

(3) $i_L(t)=25+(25-25e^{-\frac{t}{\tau}})\varepsilon(t)$ A

$i(t)=25+\left(25-\frac{150}{8}e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\varepsilon(t)$ A

6-48 $-4.41e^{-30t}+5\cos(16t-28.1°)$ V

6-49 提示:充电时间 t_c 由下式确定

$$\frac{2}{3}U_{CC}=U_{CC}-\left(U_{CC}-\frac{1}{3}U_{CC}\right)e^{-\frac{t_c}{\tau_1}}$$

再求得放电时间 t_d,可得 $T=t_c+t_d$。

第七章

7-2 $10\cos(316t)$ A

7-3 $i(0)=0$ $u_C(0)=15$ V $K=-8$

7-4 $e^{-\frac{1}{2}t}\left[K_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+K_2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right]$

$e^{-\frac{1}{2}t}\left[K_1\cos\left(\frac{1}{2}t\right)+K_2\sin\left(\frac{1}{2}t\right)\right]$

$e^{-\frac{1}{2}t}(K_1+K_2t)$

7-5 $e^{-3t}[4\cos(4t)-2\sin(4t)]$

$e^{-3t}[-4\cos(4t)+22\sin(4t)]$

7-6 $\left[1-\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t-30°\right)\right]\varepsilon(t)$

7-7 $(-2\cos t+1)$ V $\quad 2\sin t$ A

7-8 $e^{-t}[\cos(10t)-0.5\sin(10t)]$ V