高等学校教材

电路分析基础（第4版）

下册

李瀚荪

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

ISBN 7-04-018471-0



9 787040 184716 >

定价 18.70元

TN7
6=4
:2

● 高等学校教材

电路分析基础（第4版）

下册

李瀚荪

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容提要

《电路分析基础》是一套深受读者好评的教材。在第3版出版十余年后，作者对此书进行了修订。除内容有所调整外，还将原来上、中、下三册的结构改为上、下两册。

《电路分析基础》第4版下册讲授动态电路的相量分析法和s域分析法。具体内容有：阻抗和导纳、正弦稳态功率和能量/三相电路、频率响应/多频正弦稳态电路、耦合电感和理想变压器、拉普拉斯变换在电路分析中的应用。

本书可供普通高等学校电子信息、通信工程、电子科学等专业作为教材使用，也可供有关工程技术人员参考。

图书在版编目 (CIP) 数据

电路分析基础. 下册 / 李瀚荪. —4 版. —北京：
高等教育出版社，2006. 5
ISBN 7 - 04 - 018471 - 0

Ⅰ. 电… Ⅱ. 李… Ⅲ. 电路分析 - 高等学校 - 教材 Ⅳ. TM133

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 027417 号

策划编辑 刘激扬 **责任编辑** 曲文利 **封面设计** 张 志 **责任绘图** 朱 静
版式设计 胡志萍 **责任校对** 张 颖 **责任印制** 宋克学

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010 - 58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800 - 810 - 0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010 - 58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	天津新华二印刷有限公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	1978 年 7 月第 1 版
印　　张	16	**版　　次**	2006 年 5 月第 4 版
字　　数	300 000	**印　　次**	2006 年 5 月第 1 次印刷
		定　　价	18. 70 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有　侵权必究

物料号　18471 - 00

目　录

下　册

第三篇　动态电路的相量分析法和 *s* 域分析法 …… 1

第八章　阻抗和导纳 …… 3

§8－1　变换方法的概念 …… 4

§8－2　复数 …… 5

§8－3　振幅相量 …… 8

§8－4　相量的线性性质和基尔霍夫定律的相量形式 …… 12

§8－5　三种基本电路元件 VCR 的相量形式 …… 16

§8－6　VCR 相量形式的统一——阻抗和导纳的引入 …… 23

§8－7　正弦稳态电路与电阻电路分析方法的类比——相量模型的引入 …… 25

§8－8　正弦稳态混联电路的分析 …… 32

§8－9　相量模型的网孔分析和节点分析 …… 36

§8－10　相量模型的等效 …… 39

§8－11　有效值　有效值相量 …… 44

§8－12　两类特殊问题　相量图法 …… 48

习题 …… 54

第九章　正弦稳态功率和能量　三相电路 …… 65

§9－1　基本概念 …… 65

§9－2　电阻的平均功率 …… 67

§9－3　电感、电容的平均储能 …… 69

§9－4　单口网络的平均功率 …… 75

§9－5　单口网络的无功功率 …… 82

§9－6　复功率　复功率守恒 …… 86

§9－7　正弦稳态最大功率传递定理 …… 90

§9－8　三相电路 …… 93

习题 …… 105

第十章　频率响应　多频正弦稳态电路 …… 111

§10－1　基本概念 …… 111
§10－2　再论阻抗和导纳 …… 113
§10－3　正弦稳态网络函数 …… 118
§10－4　正弦稳态的叠加 …… 121
§10－5　平均功率的叠加 …… 130
§10－6　*RLC* 电路的谐振 …… 134
习题 …… 143
第十一章　耦合电感和理想变压器 …… 148
§11－1　基本概念 …… 148
§11－2　耦合电感的 VCR　耦合系数 …… 152
§11－3　空心变压器电路的分析　反映阻抗 …… 158
§11－4　耦合电感的去耦等效电路 …… 165
§11－5　理想变压器的 VCR …… 167
§11－6　理想变压器的阻抗变换性质 …… 169
§11－7　理想变压器的实现 …… 173
§11－8　铁心变压器的模型 …… 175
习题 …… 181
第十二章　拉普拉斯变换在电路分析中的应用 …… 187
§12－1　拉普拉斯变换及其几个基本性质 …… 187
§12－2　反拉普拉斯变换——赫维赛德展开定理 …… 195
§12－3　零状态分析 …… 200
§12－4　网络函数和冲激响应 …… 203
§12－5　线性时不变电路的叠加公式 …… 208
习题 …… 212

附录 A　复习、检查用题 …… 217
附录 B　复习大纲 …… 225
部分习题答案(下册) …… 238
索引 …… 246
结束语 …… 251

第三篇

动态电路的相量分析法和 s 域分析法

“你能记住任何一则新信息，如果它与你已知或已经记住的有联系。”

——珍妮特·沃斯等《学习的革命》第 146 页
上海三联书店(1998 年译本)

第八章

阻抗和导纳

第三篇转入动态电路的变换(域)分析,这类方法题材广泛,内容丰富。本书只涉及其中的相量分析法和 s 域(复频率域)分析法[①]。在"信号及系统"和其他有关课程中将会学到更多的变换方法。

引入"变换"的思路,并体会到它带来的巨大好处是本篇的主旨。在第六章中,我们曾求解过简单电路的正弦稳态问题,当时是用待定系数法求解电路微分方程的特解得出答案的,即便电路很简单,也感到很麻烦。当把时间 t 的正弦函数变换为相应的复数(相量)后,解微分方程特解的问题就可以简化为解代数方程的问题,且可运用电阻电路的分析方法来处理正弦稳态分析问题,这就需要引入阻抗和导纳这两个相量分析中的重要参数,它们是本章的核心内容。

本章分为两部分。第一部分在引入阻抗、导纳的基础上,再引入相量模型,强调类比运用已很熟悉的电阻电路解法。此时可明确正弦稳态电路分析问题的一般特征,即建立起既要求解未知量的振幅又要求解其初相的概念[②],认识到使用复数的必要性,"一个顶俩",一次完成求解任务。这一部分的重点在求解电压、电流的瞬时值问题,目标单纯。这样也能为电子信息技术所需的多频正弦稳态电路分析奠定基础。第二部分则为学习有一定应用价值的只求有效值(或振幅)和只求相位的两类特殊问题,由此引入相量法中除解析法外的另一"子方法"——相量图法。有了第一部分中得到的体会,就能正确处理这两类问题。求解的对象虽只是有效值,却不能脱离相位关系;求解的对象虽只是相位关系,却也离不开有效值间大小的影响。

这两部分是学习正弦稳态分析相量法必须具备的内容,奠定了正弦稳态分析的基础。

然而,正弦稳态电路也有它的特殊性,简单的类比不能解决正弦稳态分析的所有问题。单一频率的正弦稳态功率、能量的分析,多频正弦稳态电路的分析和含电感电压电路的分析就是随后要解决的三个问题。问题的关键在于如何继续使用相量法。本篇的第九、十、十一章分别涉及这三个问题。

---

① 即拉普拉斯变换分析法,见第十二章。

② 思考题 6-12。

以上所述便是本书为读者学习正弦稳态电路分析提供的一个进程表。

§8-1　变换方法的概念

科学技术领域常使用变换方法，虽然有些方法在提出之初并未意识到它也属这一范畴。所有变换方法的基本思路都如图 8-1 所示，均可分为三个步骤，即：

（1）把原来的问题变换为一个较容易处理的问题。

（2）在变换域中求解问题。

（3）把变换域中求得的解答反变换为原来问题的解答。

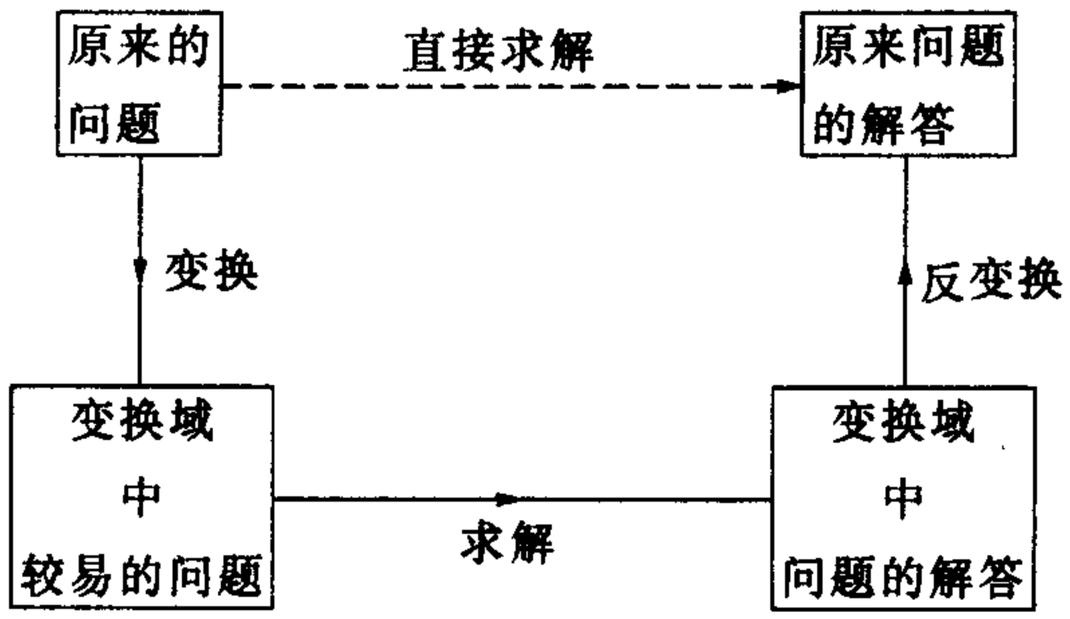


图 8-1　变换方法的思路

图 8-1 中，三个实线箭头依次表明了这三个步骤。

读者实际上早已遇到过运用变换思路来求解问题的例子。例如，求解满足方程式

$$x^{2.35}=5 \tag{8-1}$$

的实数 x 问题。直接求解是很困难的，如果对(8-1)式的两端取对数后再做，求解就很容易。取对数后，得

$$2.35\lg x=\lg 5 \tag{8-2}$$

因此

$$\lg x=\frac{\lg 5}{2.35}\approx\frac{0.698\,9}{2.35}\approx 0.297\,4 \tag{8-3}$$

解得

$$x=\lg^{-1}0.297\,4\approx 1.983 \tag{8-4}$$

借助对数表就能顺利地进行解算。

上述计算过程大家并不陌生。实际上，它就是一种变换方法，对照图 8-1，这一计算过程如图 8-2 所示。

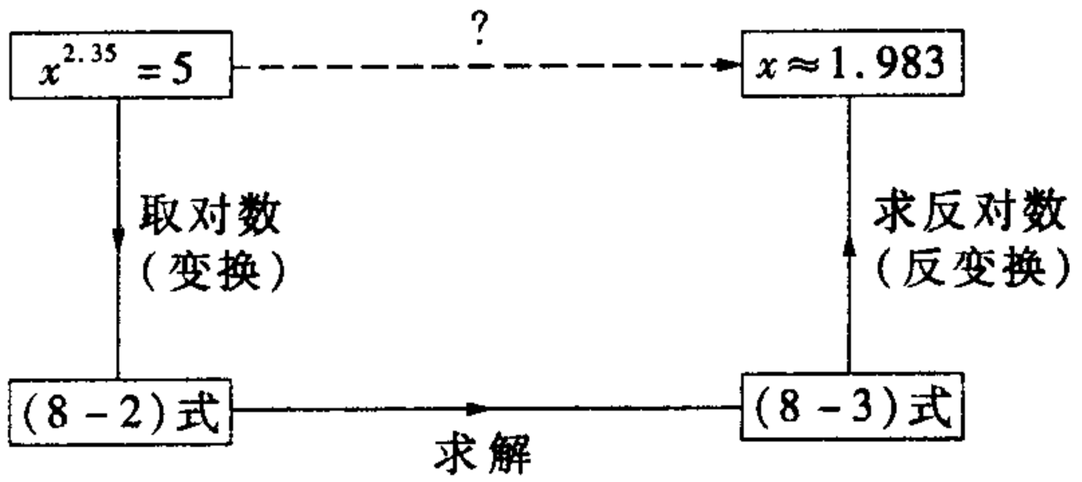


图 8－2　运用对数求解问题

(8－2)式可看作是(8－1)式的变换式，变换不仅改变了数值(lg 5 当然与 5 不同)还改变了数值间的运算方式。(8－1)式左端的指数运算变换成(8－2)式左端的乘法运算。求解(8－2)式并不困难。借助对数表，其结果如(8－3)式所示。但这一结果还是“变换域中的解答”，并非就是我们所要的结果。为得到这一结果，还需进行反变换，即对(8－3)式两端取反对数，最后得出解答。

§8－2　复　　数

在相量分析法中，需运用复数。为此，需对复数及其四则运算加以复习。

设 A 为一复数，a_1 及 a_2 分别为其实部及虚部，则

$$A = a_1 + ja_2 \tag{8-5}$$

其中 $j=\sqrt{-1}$，为虚数单位。(8－5)式的右端称为复数 A 的直角坐标形式。在实际应用中，有时只要保留复数的实部或虚部而不计另一部，遇到这种情况时，可采用 Re 和 Im 两种记号①。如果把 Re 写于一复数的左边就表示只取这复数的实部，即

$$\mathrm{Re}\,A = \mathrm{Re}(a_1 + ja_2) = a_1$$

同理

$$\mathrm{Im}\,A = \mathrm{Im}(a_1 + ja_2) = a_2$$

Re 和 Im 可以理解为一种“算子”，复数受到它们的运算后即分别得出该复数的实部和虚部。应该注意，所谓虚部是指 a_2 而不是指 ja_2。

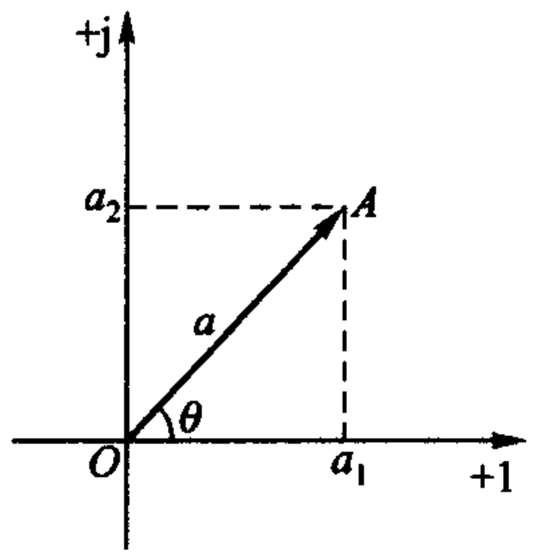


图 8－3　复数 A 的模和辐角

复数 A 在复平面上可以用有方向的线段来表示。在原点 O 与点 A 之间连一直线。把这直线的长度记作 a，称为复数 A 的模，模总是取正值。在这直线 A 端加上箭头，把它和实轴正方向的夹角记为 θ，称为复数 A 的辐角。这样，复数 A 在复平面上就可以用有向线段来表示，也就是说用模 a 和辐角 θ 来表示，如图 8－3 所示。根据这一表示方式，可以得到复数的另一形式

① Re 是 real part(实部)的头两个字母；Im 是 imaginary part(虚部)的头两个字母。

$$A = a\cos\theta + ja\sin\theta$$
$$= a(\cos\theta + j\sin\theta) \tag{8-6}$$

又根据欧拉(Euler)恒等式

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

(8-6)式可进一步写为

$$A = ae^{j\theta} \tag{8-7}$$

上式的右端是复数的另一种形式,称为复数 A 的极坐标形式。它也是用模 a 和辐角 θ 来表示一个复数的。在工程上,常把(8-7)式简写为

$$A = a\angle\theta \tag{8-8}$$

可读为"a 在一个角度 θ"。

运用复数计算正弦交流电路时,常常需要进行直角坐标形式和极坐标形式之间的相互转换。某些型号的电子计算器可以直接进行两种形式的互换运算,应尽量利用。

有关复数的四则运算分别叙述如下:

1. 相等

若两复数的实部和虚部分别相等,则这两复数相等。例如:若 $a_1 = \mathrm{Re}\ A$、$b_1 = \mathrm{Re}\ B$、$a_2 = \mathrm{Im}\ A$、$b_2 = \mathrm{Im}\ B$,且

$$a_1 = b_1, a_2 = b_2$$

则

$$A = B$$

当复数表示为极坐标形式,若它们的模相等,辐角相等,则这两复数相等。

2. 加减运算

几个复数的相加或相减就是把它们的实部和虚部分别相加或相减。例如:

若

$$A = a_1 + ja_2 \quad B = b_1 + jb_2$$

则

$$A \pm B = (a_1 + ja_2) \pm (b_1 + jb_2)$$
$$= (a_1 \pm b_1) + j(a_2 \pm b_2)$$

因此,复数的加、减运算必须用直角坐标形式进行。

复数的加减运算也可以在复平面上用图形来表示(几何意义)。

设有两复数 $A = a_1 + ja_2$ 和 $B = b_1 + jb_2$,在复平面上复数 A 可以用点 A 或有向线段 $\overline{OA}$ 来表示,复数 B 也可作类似的表示,如图 8-4 所示。设 $\overline{OC}$ 为以 $\overline{OA}$ 及 $\overline{OB}$ 为边的平行四边形的对角线,并设点 C 所代表的复数为 C,则由图显然可见:复数 C 的实部为 $a_1 + b_1$,虚部为 $a_2 + b_2$。即

$$C = (a_1 + b_1) + j(a_2 + b_2)$$

而根据复数相加的法则可知

$$A + B = a_1 + ja_2 + b_1 + jb_2 = (a_1 + b_1) + j(a_2 + b_2) = C$$

因此,求两复数之和的运算在复平面上是符合平行四边形求和法则的。这是表明复数之和的一种很方便的方法,以后经常用到。图 8-5 表明两复数相减在复平面上的图示。

图 8-4 和图 8-5 所示的复数相加和相减的运算法则和 xy 平面上向量相加、减的运算法则完全相同,但乘除运算却并非如此,向量代数和复数代数之间的相似性只限于相加法则。

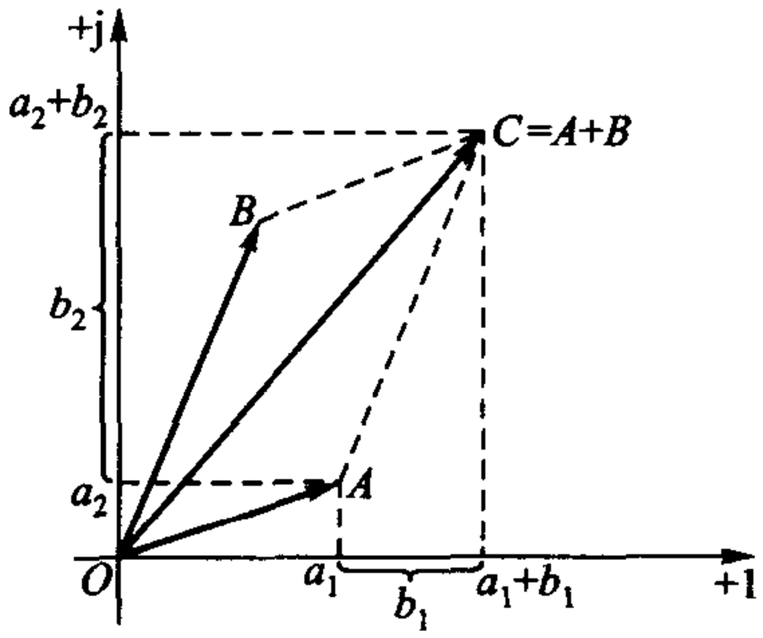


图 8－4　复数相加的图示

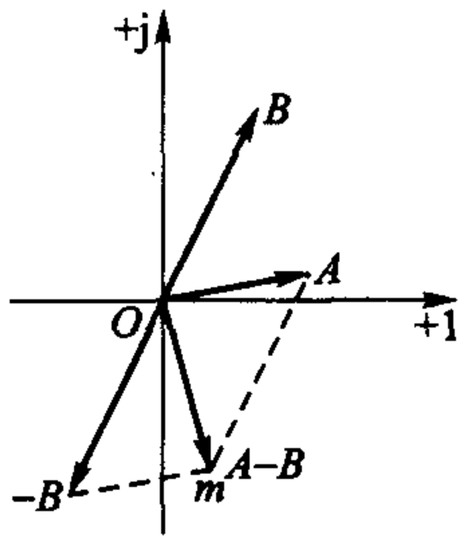


图 8－5　复数相减的图示

3. 乘法运算

设复数 $A=a_1+ja_2$，$B=b_1+jb_2$，则

$$\begin{aligned} A\cdot B &=(a_1+ja_2)(b_1+jb_2)\\ &=a_1b_1+ja_2b_1+ja_1b_2+j^2a_2b_2\\ &=(a_1b_1-a_2b_2)+j(a_2b_1+a_1b_2) \end{aligned}$$

这里用到了 $j^2=-1$ 这一关系。在复数的乘法运算中，有时还需用到 $j^3=-j$，$j^4=1$ 等关系。

如果复数用极坐标形式表示，例如 $A=a\angle\theta_a$，$B=b\angle\theta_b$，则

$$A\cdot B=ae^{j\theta_a}\cdot be^{j\theta_b}=a\cdot be^{j\theta_a}\cdot e^{j\theta_b}$$

$$=abe^{j(\theta_a+\theta_b)}=ab\angle\theta_a+\theta_b$$

即复数相乘时，其模相乘，其辐角相加。

4. 除法运算

设复数 $A=a_1+ja_2$，$B=b_1+jb_2$ 则

$$\frac{A}{B}=\frac{a_1+ja_2}{b_1+jb_2}$$

为使分母有理化，必须把分子和分母同乘以分母的共轭复数。若两个复数实部相等，虚部的数值相等，但符号相反，则这两个复数就称为共轭(conjugate)复数。因此得

$$\frac{A}{B}=\frac{(a_1+ja_2)(b_1-jb_2)}{(b_1+jb_2)(b_1-jb_2)}=\frac{(a_1b_1+a_2b_2)+j(a_2b_1-a_1b_2)}{b_1^2+b_2^2}$$

$$=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{b_1^2+b_2^2}+j\frac{a_2b_1-a_1b_2}{b_1^2+b_2^2}$$

如果复数用极坐标形式表示，例如 $A=a\angle\theta_a$，$B=b\angle\theta_b$，则

$$\frac{A}{B}=\frac{ae^{j\theta_a}}{be^{j\theta_b}}=\frac{a}{b}e^{j(\theta_a-\theta_b)}=\frac{a}{b}\angle\theta_a-\theta_b$$

即复数相除时，其模相除，其辐角相减。

一般来说，复数的乘、除运算用极坐标形式进行较为简便，在进行理论分析、公式推导时往往需要用直角坐标形式来进行乘除运算。

例 8－1　已知 $A=6+j8=10\angle 53.1°$，$B=-4.33+j2.5=5\angle 150°$。试计算 $A+B$、$A-$

B、$A \cdot B$ 和 A/B。

解　$A+B=6+\mathrm{j}8-4.33+\mathrm{j}2.5=1.67+\mathrm{j}10.5$

$A-B=6+\mathrm{j}8+4.33-\mathrm{j}2.5=10.33+\mathrm{j}5.5$

$A \cdot B=(10\angle 53.1^\circ)(5\angle 150^\circ)=50\angle 203.1^\circ$

$=50\angle -156.9^\circ$

或

$A \cdot B=(6+\mathrm{j}8)(-4.33+\mathrm{j}2.5)=-26-20-\mathrm{j}34.6+\mathrm{j}15$

$=-46-\mathrm{j}19.6=50\angle -156.9^\circ$

$$\frac{A}{B}=\frac{10\angle 53.1^\circ}{5\angle 150^\circ}=2\angle 53.1^\circ-150^\circ=2\angle -96.9^\circ$$

或

$$\frac{A}{B}=\frac{6+\mathrm{j}8}{-4.33+\mathrm{j}2.5}=\frac{(6+\mathrm{j}8)(-4.33-\mathrm{j}2.5)}{4.33^2+2.5^2}$$

$$=\frac{-26+20-\mathrm{j}34.6-\mathrm{j}15}{18.8+6.25}$$

$$=\frac{-6-\mathrm{j}49.6}{25.05}=-0.24-\mathrm{j}1.97=2\angle -96.9^\circ$$

练习题

8-1　(1) 把下列复数化为直角坐标形式：

$5\angle 30^\circ$，$5\angle 150^\circ$，$5\angle -150^\circ$，$5\angle -30^\circ$，$10\angle 240^\circ$，$2\angle 90^\circ$，$2\angle -90^\circ$及 $2\angle 180^\circ$。

(2) 把下列复数化为极坐标形式：

$1+\mathrm{j}1$，$1+\mathrm{j}10$，$1-\mathrm{j}1$，$-1-\mathrm{j}1$，$-1+\mathrm{j}1$，$\mathrm{j}4$，$-\mathrm{j}4$，3 及 -3。

8-2　设 $A=3+\mathrm{j}4$、$B=10\angle 60^\circ$，试计算 $A+B$、$A \cdot B$ 及 A/B。

$(8+\mathrm{j}12.66;50\angle 113^\circ;0.5\angle -6.9^\circ)$

8-3　若 K 为复数，且 $\mathrm{Re}\,K=17$ 及 $\mathrm{Re}[(-3+\mathrm{j}6)K]=4$，试求 K。

§8-3　振幅相量

时间 t 的正弦函数已在第六章(6-42)式提到，以正弦电压为例，可表示为

$$u(t)=U_\mathrm{m}\cos(\omega t+\psi)=U_\mathrm{m}\cos(2\pi f t+\psi)=U_\mathrm{m}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\psi\right)$$

其中振幅 U_m，角频率 ω(或频率 f，或周期 T)和初相 ψ 称为正弦波的三特征。

正弦激励下电路的稳定状态称为正弦稳态，已如 §6-8 中所述。

不论在实际应用中还是在理论分析中，正弦稳态分析都是极其重要的。许多电气设备的设计、性能指标就是按正弦稳态来考虑的，例如，在设计高保真度音频放大器时，就要求它对输入的正弦信号能够“忠实地”再现并加以放大。又

如,在电力系统中,大多数的问题也都可以用正弦稳态分析来解决。以后还会知道,如果掌握了线性、时不变电路的正弦稳态响应,那么,从理论上说,便掌握了它对任何信号的响应。

由于在正弦稳态电路中,各个电压、电流响应与激励均为同频率的正弦波,在已知频率的情况下,正弦波的三特征降为两个特征,从而利用欧拉恒等式,可把给定 ω 的正弦函数变换为复平面上的相量(phasor)。相量分析法是一种专用以分析正弦稳态电路的变换方法。

欧拉恒等式

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

式中 θ 为一实数(单位为弧度),可以把这一公式推广到 θ 为 t 的实函数的情况,如

$$\theta = \omega t$$

其中 ω 为常量,单位为 rad/s。这样便得到

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t) \tag{8-9}$$

这一公式把一个实变数的复指数函数和两个实变数 t 的正弦函数相联系,这样就可以把时间 t 的正弦函数变换为复数。由上式可得

$$\cos(\omega t) = \mathrm{Re}(e^{j\omega t})$$

$$\sin(\omega t) = \mathrm{Im}(e^{j\omega t})$$

因此,设正弦电压为

$$u(t) = U_m\cos(\omega t + \psi)$$

就可以把它写为

$$u(t) = \mathrm{Re}[U_m e^{j(\omega t+\psi)}] = \mathrm{Re}(U_m e^{j\psi} e^{j\omega t})$$

$$= \mathrm{Re}[\dot{U}_m e^{j\omega t}] = \mathrm{Re}(\dot{U}_m \angle \omega t) \tag{8-10}$$

其中

$$\dot{U}_m = U_m e^{j\psi} = U_m \angle \psi \tag{8-11}$$

是一个与时间无关的复值常数,其模为该正弦电压的振幅,辐角为该正弦电压的初相。这一复值常数包含振幅和初相两种信息,称为电压振幅相量,同样也有电流振幅相量 $\dot{I}_m$。振幅相量只是一个复数,但它具有特殊的意义,它是代表一个正弦波的,为了与一般复数有所区别,在这相量的字母上端需加一点,如以上所示。

变换简单易行。例如,已知

$$u(t) = 100\cos(314t + 60°)\ \mathrm{V}$$

则由(8-11)式可得该电压的振幅相量为

$$\dot{U}_m = 100 \angle 60°\ \mathrm{V}$$

相反，如已知

$$\dot{I}_m = 5 \angle 30° \text{ A}$$

且已知 $\omega = 314$ rad/s，则对应的正弦电流为

$$i(t) = 5\cos(314t + 30°) \text{ A}$$

初学者常易在 $u(t)$ 与 $\dot{U}_m$、$i(t)$ 与 $\dot{I}_m$ 间画等号，这是错误的。振幅相量是正弦波的变换式，并非正弦波本身，这就好比 §8-1 中 5 与 lg 5 间不能画等号是一样的。以电压为例，振幅相量及其所对应的正弦波之间的完整关系由(8-10)式表明。这一关系可用双箭头“$\Longleftrightarrow$”符号表示。也就是说，若

$$\dot{U}_m \Longleftrightarrow u(t)$$

则

$$u(t) = \text{Re}(\dot{U}_m \angle \omega t)$$

时间 t 的正弦函数属时域，振幅相量属复数域，给定频率的正弦时间函数和复数(振幅相量)之间有着一一的对应关系。在不致引起混淆时，“振幅相量”可简写为“相量”①。

作为一个复数，相量在复平面上可用有向线段表示，如图 8-6 所示。相量在复平面上的图示称为相量图。

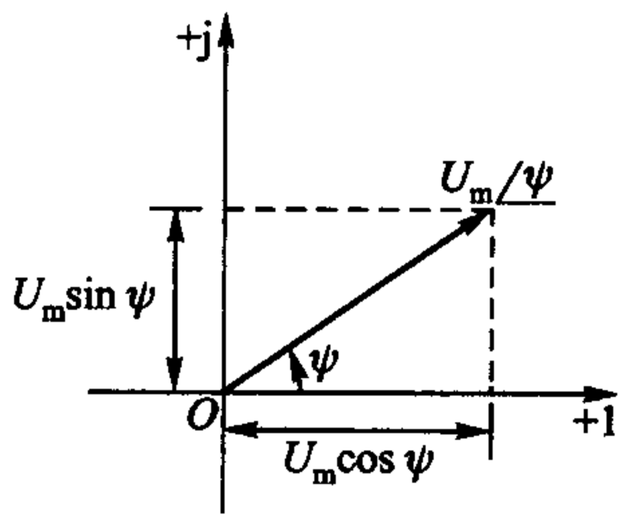


图 8-6　电压相量图

相量与 $e^{j\omega t}$ 的乘积则是时间 t 的复值函数，在复平面上可用以恒定角速度 ω 逆时针方向旋转的相量表示。这是因为这一乘积的辐角 $(\psi + \omega t)$ 并非常量而是随时间的增长而增长的。其角速度为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\psi + \omega t) = \omega$$

例 8-2　若 $i_1(t) = 5\cos(314t + 60°)$ A，$i_2(t) = -10\sin(314t + 60°)$ A，$i_3(t) = -4\cos(314t + 60°)$ A。试写出代表这三个正弦电流的各振幅相量，并绘相量图。

解　(1) $i_1(t) = 5\cos(314t + 60°)$ A

代表电流 i_1 的相量为

$$\dot{I}_{1m} = 5 \angle 60° = (2.5 + \text{j}4.34) \text{ A}$$

这一相量是根据正弦波的振幅和初相直接写出的。

---

① 这里是指以后还会遇到的有效值相量(§8-11)，国内习惯把它简称为相量。

(2) $i_2(t) = -10\sin(314t+60°)$ A

$= 10\cos(314t+60°+90°)$ A

从上式可直接写出代表 i_2 的相量为

$$\dot{I}_{2m} = 10\angle 150° \text{ A}$$

应注意:本书是用 $1\angle 0°$ 代表 $\cos(\omega t)$ 的,因此,以 sin 函数表示的正弦电流应化为以 cos 函数表示,然后再写相量。如用 $1\angle 0°$ 代表 $\sin(\omega t)$ 当然也是可以的,相应地,i_2 的相量为 $-10\angle 60°$,但在同一问题中不允许采用两种标准。

(3) $i_3(t) = -4\cos(314t+60°)$ A

$= 4\cos(314t+60°+180°)$ A $= 4\cos(314t-120°)$ A

故得代表 i_3 的相量为

$$\dot{I}_{3m} = 4\angle -120° \text{ A}$$

这三个电流的相量图如图 8-7 所示。如考虑它们的相量以逆时针方向旋转,则由于它们是同频率的,各相量间的夹角在任何瞬间都是不变的,因此,从这张静止的相量图就能了解这三个电流彼此的相位关系。结合旋转方向就可判定相量间的超前或滞后的关系。例如,由相量图便可确定 i_2 超前 i_1 的角度为 $150°-60°=90°$。

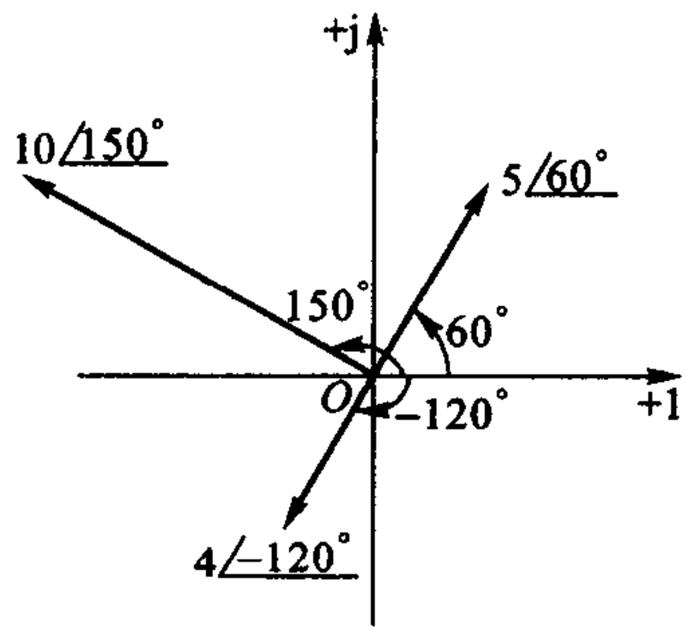


图 8-7　例 8-2

例 8-3　已知振幅相量 $\dot{U}_{1m} = 50\angle -30°$ V,$\dot{U}_{2m} = 100\angle 150°$ V,$f = 50$ Hz,试写出它们所代表的正弦电压。

解　$\omega = 2\pi f = 2\pi \times 50 \text{ rad/s} = 100\pi \text{ rad/s}$

本书采用 cos 函数表示正弦波,$u_1(t)$ 可根据所给振幅相量直接写出。振幅相量提供振幅及初相的数据,故得

$$u_1(t) = 50\cos(100\pi t - 30°) \text{ V}$$

同理,得

$$u_2(t) = 100\cos(100\pi t + 150°) \text{ V}$$

练习题

8-4　(1) 求代表下列正弦波的振幅相量[以 $1\angle 0°$ 代表 $\cos(\omega t)$],并绘出相量图:

(a) $5\sin(\omega t+30°)$;(b) $-8\cos(\omega t-45°)$;(c) $-6\sin(\omega t-120°)$。

(2) 重复上题,但用 $1\angle 0°$ 代表 $\sin(\omega t)$。这两题所绘相量图有什么不同?

§8-4　相量的线性性质和基尔霍夫定律的相量形式

我们从求同频率时间 t 正弦函数的和(差)问题谈起,这一问题已在 §6-8 中谈过[(6-48)式]。现在再举一个涉及这一问题的例子。

例 8-4　已知 $u_1(t)=20\cos(\omega t-30°)$, $u_2(t)=40\cos(\omega t+60°)$, 试求 $u_1(t)+u_2(t)$。

解一　运用三角方法解。从三角函数的加法公式可知

$$u_1(t)=20\cos(\omega t)\cos 30°+20\sin(\omega t)\sin 30°$$

$$u_2(t)=40\cos(\omega t)\cos 60°-40\sin(\omega t)\sin 60°$$

所以　$u_1(t)+u_2(t)=(20\cos 30°+40\cos 60°)\cos(\omega t)+(20\sin 30°-40\sin 60°)\sin(\omega t)$

$$=37.32\cos(\omega t)-24.64\sin(\omega t)$$

以 37.32 和 24.64 为两直角边作辅助三角形,其斜边为 $\sqrt{37.32^2+24.64^2}=44.72$,夹角为 $\arctan\left(\frac{24.64}{37.32}\right)=33.43°$,如图 8-8 所示,则

$$u_1(t)+u_2(t)=44.72\left[\frac{37.32}{44.72}\cos(\omega t)-\frac{24.64}{44.72}\sin(\omega t)\right]$$

$$=44.72[\cos 33.43°\cos(\omega t)-\sin 33.43°\sin(\omega t)]$$

$$=44.72\cos(\omega t+33.43°)$$

可见两同频率正弦量之和仍为一同频率的正弦量。

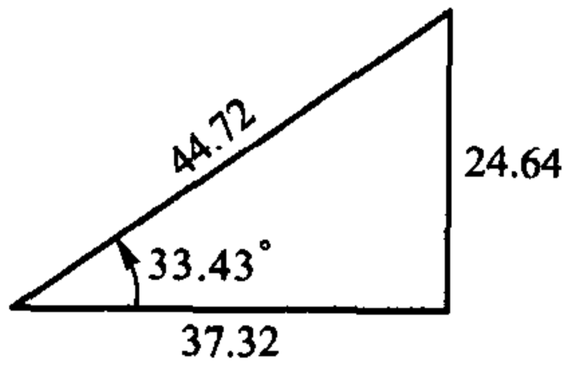


图 8-8　辅助三角形

解二　同频率正弦量之和仍为一同频率正弦量,这就提示我们可以运用相量来解决上述的求和问题。按照图 8-1 所示的思路,可分为三个步骤来求解。

第一步　把正弦量变换为对应的相量,得

$$u_1(t)\Rightarrow\dot{U}_{1m}=20\angle -30°$$

$$u_2(t)\Rightarrow\dot{U}_{2m}=40\angle 60°$$

第二步　在变换域中把 $\dot{U}_{1m}$ 和 $\dot{U}_{2m}$ 相加,得

$$\dot{U}_{1m}+\dot{U}_{2m}=20\angle -30°+40\angle 60°$$

$$=(17.32-\mathrm{j}10)+(20+\mathrm{j}34.64)$$

$$=(37.32+\mathrm{j}24.64)=44.72\angle 33.43°$$

第三步　反变换得

$$u_1(t) + u_2(t) = 44.72\cos(\omega t + 33.43°)$$

显然，解二比解一方便得多，代数运算代替了繁琐的三角运算。如果相加的正弦量更多些，相量方法的优越性就更突出，辅以带有复数两种形式互换功能的电子计算器将更感便利。

上述的例子反映了相量的一个重要性质，即

线性性质[①]　表示若干个同频率正弦量（可带有实系数）线性组合的相量等于表示各个正弦量的相量的同一线性组合。亦即，如设正弦量为

$$f_1(t) = \mathrm{Re}(\dot{A}_1 e^{j\omega t}), f_2(t) = \mathrm{Re}(\dot{A}_2 e^{j\omega t})$$

即

$$\dot{A}_1 \Longleftrightarrow f_1(t), \dot{A}_2 \Longleftrightarrow f_2(t)$$

设 α_1 和 α_2 为两个实数，则正弦量 $\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)$ 可用相量 $\alpha_1 \dot{A}_1 + \alpha_2 \dot{A}_2$ 表示。

由线性性质可得基尔霍夫定律的相量形式。

由 KCL 可知：在任一时刻，流出电路节点的电流的代数和为零。设线性时不变电路在单一频率 ω 的正弦激励下（正弦电源可以有多个，但频率必须相同）进入稳态时，各处的电压、电流都将为同频率的正弦波。因此，在所有时刻，对任一节点 KCL 可表示为

$$\sum_{k=1}^{K} i_k = \sum_{k=1}^{K} \mathrm{Re}(\dot{I}_{km} e^{j\omega t}) = 0 \tag{8-12}$$

其中

$$\dot{I}_{km} = I_{km} \angle \psi_k$$

为流出该节点的第 k 条支路正弦电流 i_k 的振幅相量，K 为该节点处的支路数。根据上述线性性质，由(8-12)式可得

$$\sum_{k=1}^{K} \dot{I}_{km} = 0 \tag{8-13}$$

同理，在正弦稳态电路中，沿任一回路，KVL 可表示为

$$\sum_{k=1}^{K} \dot{U}_{km} = 0 \tag{8-14}$$

式中 $\dot{U}_{km}$ 为回路中第 k 条支路的电压振幅相量，K 为该回路的支路数。因此，在正弦稳态电路中，基尔霍夫定律可直接用电流振幅相量和电压振幅相量写出，如

---

① 一般证明可参阅《简明电路分析基础》§9-4。

同(8－13)、(8－14)两式所示。

例 8－5　图 8－9 所示为电路中的一个节点，已知：

$$i_1(t) = 10\cos(\omega t + 60°)\ \text{A}$$

$$i_2(t) = 5\sin(\omega t)\ \text{A}$$

求 $i_3(t)$。

解　为了要利用 KCL 的相量形式，首先应写出已知电流 i_1 和 i_2 的相量，即

$$\dot{I}_{1m} = 10\angle 60°\ \text{A},\ \dot{I}_{2m} = 5\angle -90°\ \text{A}$$

注意不要把 $\dot{I}_{2m}$ 写为 $5\angle 0°$ A。设未知电流 i_3 的相量为 $\dot{I}_{3m}$，则由(8－13)式可得

$$\dot{I}_{1m} + \dot{I}_{2m} - \dot{I}_{3m} = 0$$

注意在运用(8－13)式时，各相量前的正、负号仍然根据相对应的正弦电流的参考方向而定。流出节点为正，流入节点为负。由此可得

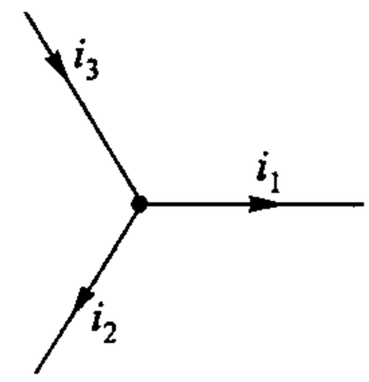


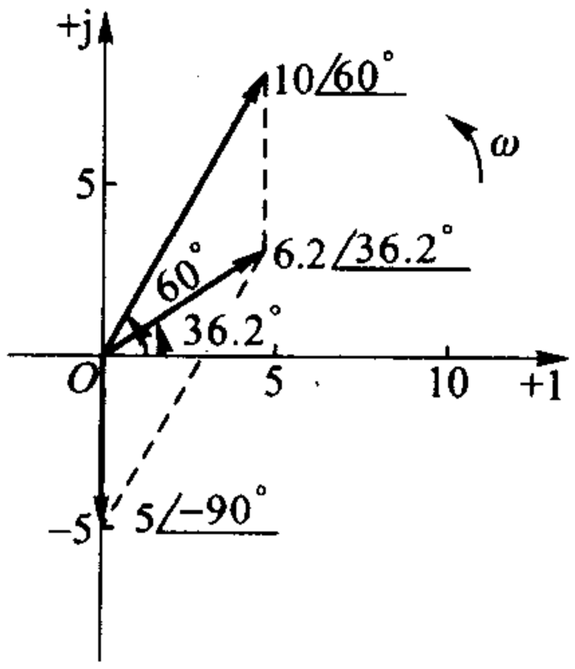
图 8－9　例 8－5

$$\begin{aligned}\dot{I}_{3m} &= \dot{I}_{1m} + \dot{I}_{2m}\\ &= 10\angle 60°\ \text{A} + 5\angle -90°\ \text{A}\\ &= (5 + \text{j}8.66 - \text{j}5)\ \text{A} = (5 + \text{j}3.66)\ \text{A} = 6.2\angle 36.2°\ \text{A}\end{aligned}$$

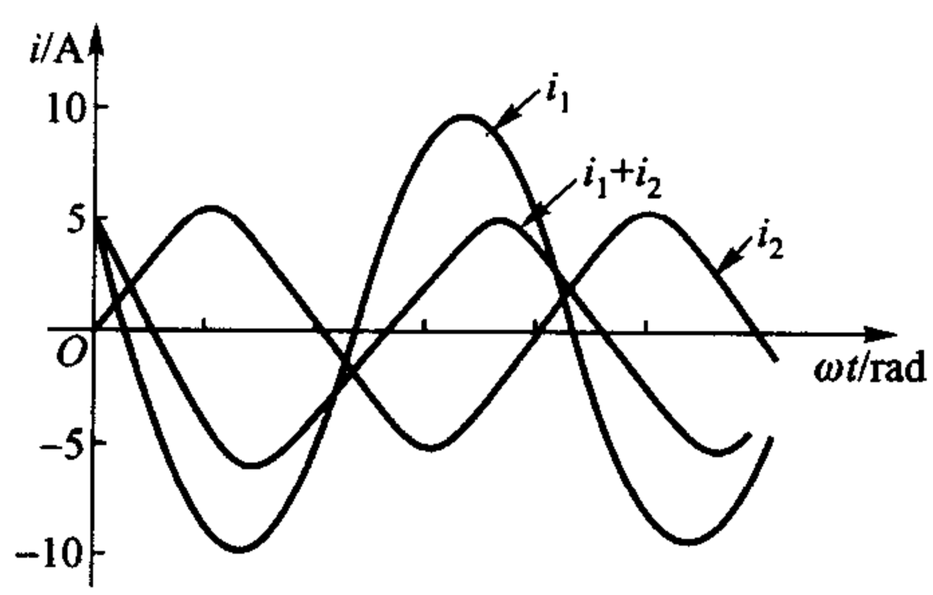
最后，根据所得相量 $\dot{I}_{3m}$ 写出相对应的正弦电流 i_3，即

$$i_3(t) = 6.2\cos(\omega t + 36.2°)\ \text{A}$$

相量图及波形图分别如图 8－10(a)、(b)所示。相量图中表明了 $\dot{I}_{1m} + \dot{I}_{2m} = \dot{I}_{3m}$ 这一关系，如同 §8－2 所指出的那样，在相量图中相量 $\dot{I}_{1m}$ 和 $\dot{I}_{2m}$ 构成平行四边形



(a) 相量图



(b) 波形图

图 8－10　例 8－5

的两边而相量$\dot{I}_{3m}$则是其对角线。相量图还显示了各相对应正弦波之间的相位关系，例如，从相量图可知i_3相位超前i_2的角度为$36.2°+90°=126.2°$①。今后可从相量图而不必从波形图来研究相位关系。在图8-10(a)中标示了相量的旋转方向，以后不必如此。

例8-6　已知$u_{ab}=-10\cos(\omega t+60°)$ V，$u_{bc}=8\sin(\omega t+120°)$ V，求u_{ac}。

解

$$u_{ac}=u_{ab}+u_{bc}$$

各电压均为同频率的正弦波，以相量表示后得

$$\dot{U}_{acm}=\dot{U}_{abm}+\dot{U}_{bcm}$$

其中

$$\dot{U}_{abm}=-10\angle 60°\ \text{V}=(-5-\text{j}8.66)\ \text{V}$$

$$\dot{U}_{bcm}=8\angle 120°-90°\ \text{V}=(6.93+\text{j}4)\ \text{V}$$

故得

$$\begin{aligned}\dot{U}_{acm}&=(-5-\text{j}8.66+6.93+\text{j}4)\ \text{V}\\&=(1.93-\text{j}4.66)\ \text{V}\\&=5.04\angle -67.5°\ \text{V}\end{aligned}$$

因此

$$u_{ac}=5.04\cos(\omega t-67.5°)\ \text{V}$$

相量图如图8-11所示。

$$\dot{U}_{acm}=\dot{U}_{abm}+\dot{U}_{bcm}$$

这一关系，也可以从这三个相量形成的图8-11所示的闭合三角形来反映。

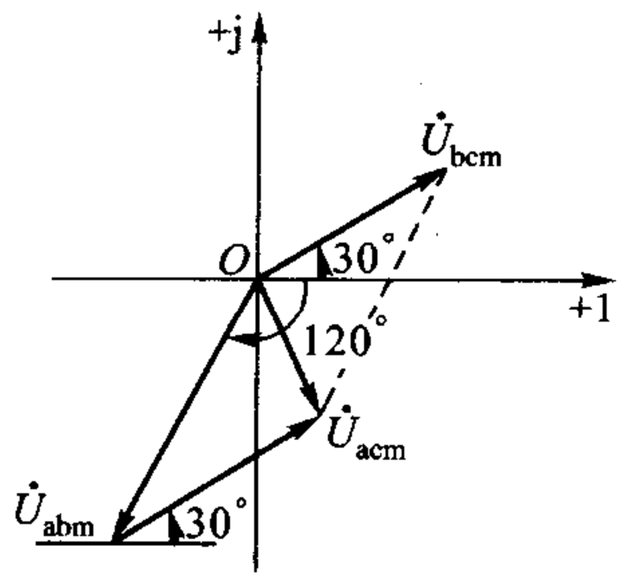


图8-11　例8-6

由相量图可知u_{ac}相位滞后u_{bc}的角度为$30°+67.5°=97.5°$，超前u_{ab}的角度为$120°-67.5°=52.5°$。

思考题

8-1　若汇集于某节点的三个同频率正弦电流的振幅为I_{1m}、I_{2m}和I_{3m}，则这三个振幅满足KCL，对吗？

8-2　若同频率正弦电流$i_1(t)$及$i_2(t)$的振幅为I_{1m}、I_{2m}，$i_1(t)+i_2(t)$的振幅为I_m，问在什么条件下，下列关系成立：

(1) $I_{1m}+I_{2m}=I_m$；

(2) $I_{1m}-I_{2m}=I_m$；

(3) $I_{1m}^2+I_{2m}^2=I_m^2$。

---

① 参见例8-2。

8-3　如果在例 8-5 中，i_2 改为 $5\sin(2\omega t)$，则例题中的计算是否有效？

练习题

8-5　已知 $i_1(t)=4\cos t$ A、$i_2(t)=3\sin t$ A，试求 $i_1(t)+i_2(t)$。

$[5\cos(t-36.87°)\text{ A}]$

8-6　电路如图 8-12(a)所示，$i_S(t)=10\cos(\omega t)$ A，由示波器测得 u_{ab}、u_{bc} 的波形如图 8-12(b)所示。

(1) 求 u_{ac}；

(2) 绘相量图(包含上述所有电压和电流相量)；

(3) 求 u_{ac} 与 i_S，u_{ab} 与 i_S 以及 u_{bc} 与 i_S 的相位关系。

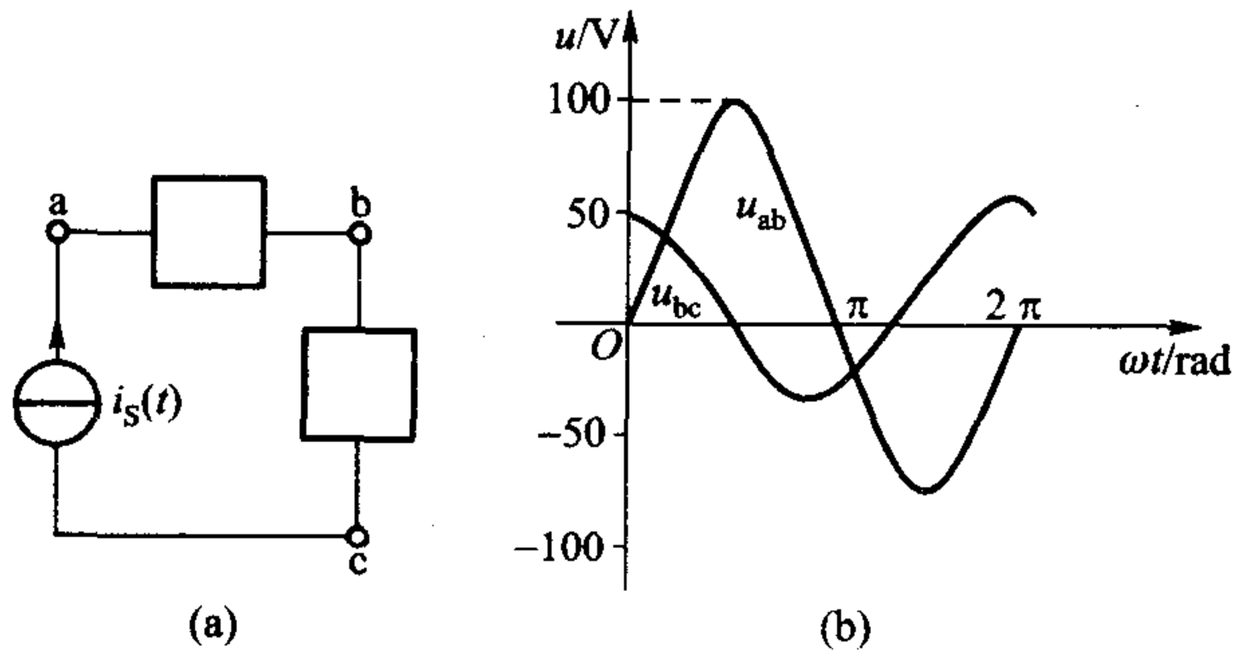


图 8-12　练习题 8-6

§8-5　三种基本电路元件 VCR 的相量形式

在关联参考方向下，线性时不变电阻、电容及电感元件的 VCR 分别为

$$u=Ri \tag{8-15}$$

$$i=C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \tag{8-16}$$

$$u=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \tag{8-17}$$

在正弦稳态电路中，这些元件的电压、电流都是同频率的正弦波。为适应使用相量进行正弦稳态分析的需要，下面将导出这三种基本元件 VCR 的相量形式。

设要研究的元件接在一正弦稳态电路中，元件两端的电压和流过的电流为关联参考方向，可表示为

$$u(t)=U_m\cos(\omega t+\psi_u) \tag{8-18}$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi_i) \tag{8-19}$$

对应的相量为

$$\dot{U}_m = U_m \angle \psi_u$$

$$\dot{I}_m = I_m \angle \psi_i$$

我们的任务是要求出相量$\dot{U}_m$与$\dot{I}_m$的关系。

先考虑元件为电阻的情况，电路如图 8－13(a)所示。根据欧姆定律(8－15)式

$$u = Ri$$

得

$$U_m \cos(\omega t + \psi_u) = RI_m \cos(\omega t + \psi_i) \tag{8-20}$$

由于 R 是常数，这一式子表明电阻两端的正弦电压和流过的正弦电流同步变化，亦即是同相的，波形图如图 8－13(c)所示。不论是(8－20)式还是波形图，表明的都是电压的时间函数与电流的时间函数之间的关系，称为时域关系。

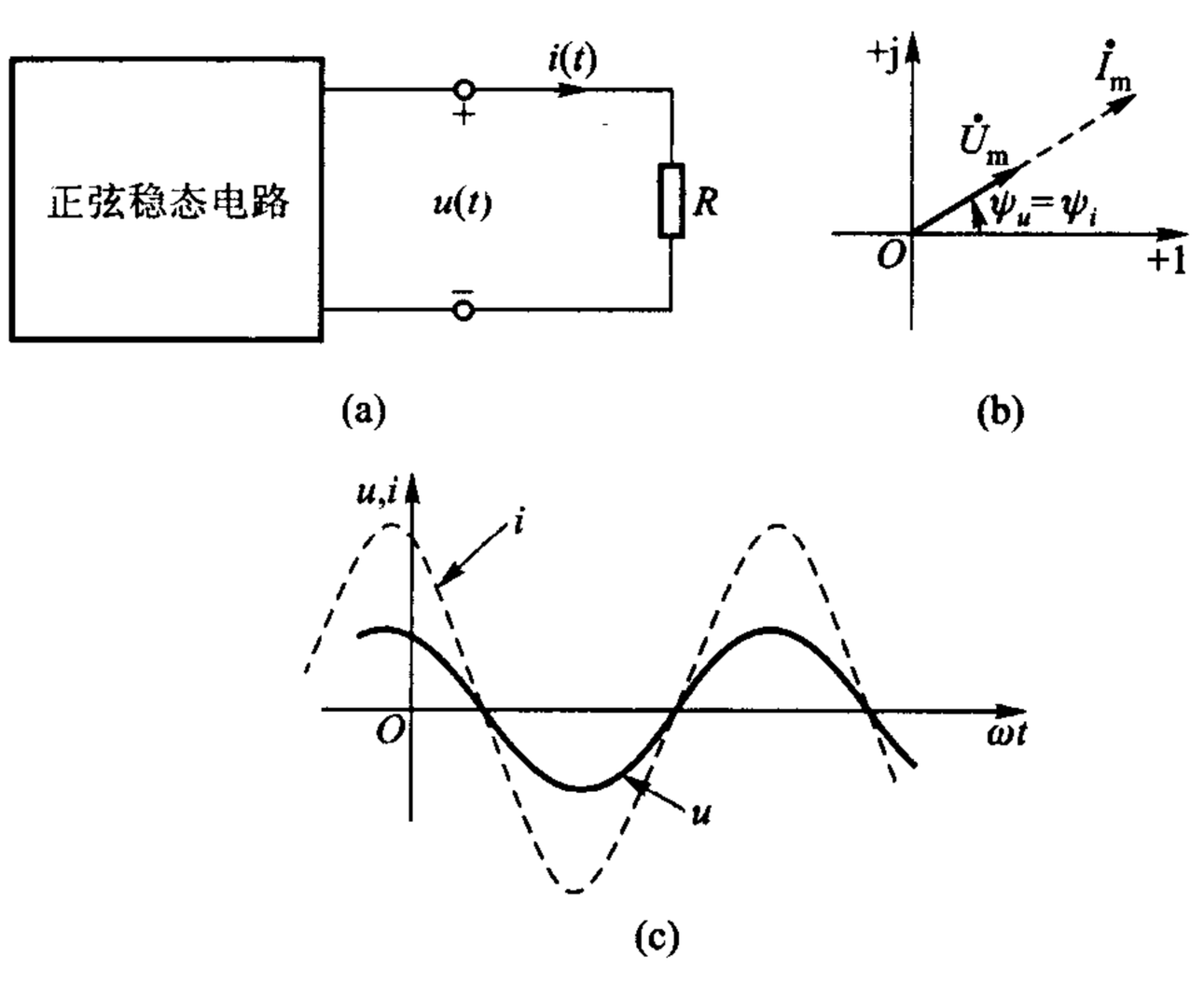


图 8－13　线性时不变电阻的正弦稳态特征

如同在第一章中所指出的那样，正弦电阻电路在处理方法上和直流电阻电路并没有什么不同，本书第一篇各公式中的电压、电流也都可以理解为正弦时间函数。纯电阻电路问题并不涉及求解微分方程，因此不必运用相量法。但为了处理一般正弦交流电路的需要，仍需得出电阻的相量关系式。利用相量的线性性质，可得

$$\dot{U}_m = R\dot{I}_m \tag{8-21}$$

(8-21)式即我们要求的相量关系式,它是一个用复数“语言”来描述的 VCR 式。一身二任,它既能表明电压、电流振幅之间的关系,又能表明电压、电流相位之间的关系。确实,如把它写为

$$U_m \angle \psi_u = RI_m \angle \psi_i \tag{8-22}$$

就不难看到,它包含两个内容,即

$$U_m = RI_m \tag{8-23}$$

和

$$\psi_u = \psi_i \tag{8-24}$$

前者表明电压振幅和电流振幅符合欧姆定律,后者表明电压与电流是同相的。电压与电流时域特征完全包含在(8-21)式一个公式中,“一个顶俩”,其中所反映的相位关系还可通过相量图表示出来。由于 $\psi_u = \psi_i$,电压相量和电流相量必然是重叠的。相量图和波形图如图 8-13(b)、(c)所示。它们都表明了电压、电流的同相关系,如以前所述,采用相量图更为简便。

例 8-7　4 Ω 电阻两端的电压为 $u = 8\cos(314t - 60°)$ V,求 i。

解一　用时域关系式(8-15)式解

$$i(t) = \frac{u(t)}{R} = \frac{8\cos(314t - 60°)}{4}\ \text{A}$$

$$= 2\cos(314t - 60°)\ \text{A}$$

解二　用相量关系式(8-21)式解。三个步骤:

(a) 写出已知正弦量的相量

$$\dot{U}_m = 8 \angle -60°\ \text{V}$$

(b) 利用相量关系式进行计算

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_m}{R} = \frac{8 \angle -60°}{4}\text{A} = 2 \angle -60°\ \text{A}$$

(c) 根据算得的相量写出对应的正弦量

$$i = 2\cos(314t - 60°)\ \text{A}$$

显然,解一简便直接,对纯电阻电路可以不必用相量法。电阻 VCR 的相量关系式主要用于一般正弦稳态电路(含 R、L、C 等各种元件)的分析。　◀

现在考虑电容 VCR 的时域关系,电路如图 8-14(a)所示。为此,把(8-18)式代入(8-16)式

$$\begin{aligned} i &= C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U_m\cos(\omega t + \psi_u) \\ &= -\omega C U_m \sin(\omega t + \psi_u) \\ &= \omega C U_m \cos(\omega t + \psi_u + 90°) \end{aligned} \tag{8-25}$$

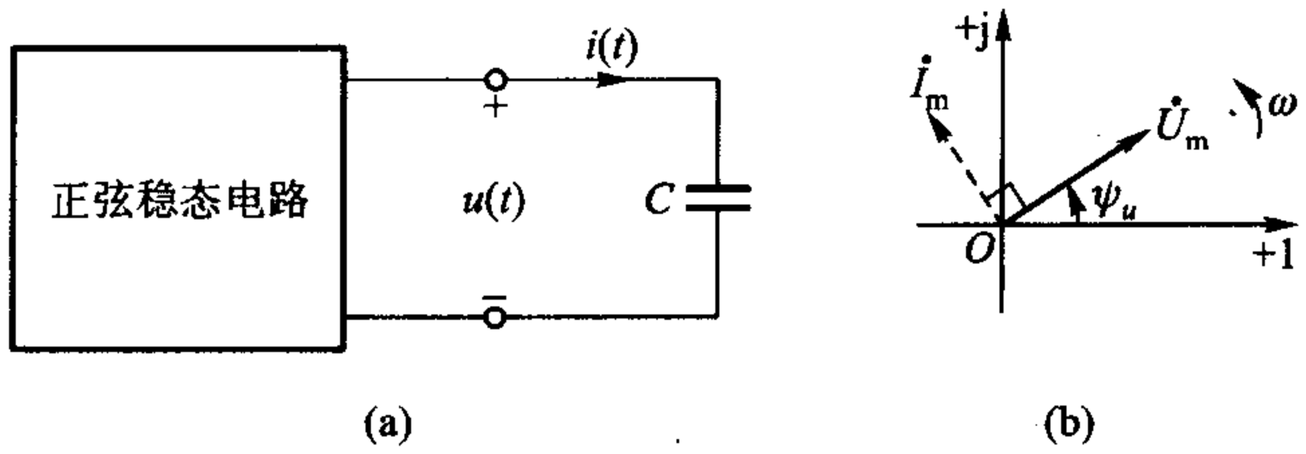


图 8－14　线性时不变电容的正弦稳态特性

即

$$\begin{aligned} i &= I_m\cos(\omega t+\psi_i) \\ &= \omega C U_m\cos(\omega t+\psi_u+90^\circ) \end{aligned}$$

其中

$$I_m = \omega C U_m \tag{8-26}$$

$$\psi_i = \psi_u + 90^\circ \tag{8-27}$$

(8－26)式表明电压、电流振幅的关系不仅与 C 有关而且还与角频率 ω 有关，而电阻元件的这一关系是与 ω 无关的。当 C 值一定时，对一定的 U_m 来说，ω 越高则 I_m 越大，也就是说电流越容易通过；ω 越低则 I_m 越小，也就是说电流越难通过。当 $\omega=0$（相当于直流激励）时，$I_m=0$，电容相当于开路，这正是直流稳态时电容应有的表现。(8－27)式表明电流超前电压的角度为 90°，如图 8－14(c)波形图所示。

电容 VCR 的相量式可推导如下：设电压 $u(t)$ 如(8－18)式所示，则其电流 $i(t)$ 已求得如(8－25)式所示，$u(t)$ 的相量应为 $\dot{U}_m = U_m\angle\psi_u$，$i(t)$ 的相量则可表示为

$$\begin{aligned} \dot{I}_m &= \omega C U_m\angle\psi_u+90^\circ = \omega C U_m\angle\psi_u\cdot\angle 90^\circ \\ &= \omega C\,\dot{U}_m\angle 90^\circ = \mathrm{j}\omega C\,\dot{U}_m \end{aligned} \tag{8-28}$$

这里用到了$\angle 90° = \cos 90° + \mathrm{j}\sin 90° = \mathrm{j}$（这是以后常见的关系，应该记住！）。这便是电容 VCR 的相量形式。它一身二任，包含两项内容。的确由该式可得

$$I_m \angle \psi_i = \omega C U_m \angle \psi_u + 90°$$

亦即(8－28)式包含的两项内容为

$$I_m = \omega C U_m \tag{8-29}$$

和

$$\psi_i = \psi_u + 90° \tag{8-30}$$

前者反映振幅关系，后者反映相位关系。图 8－14(b)所示相量图和图 8－14(c)所示波形图都表明电流超前电压的角度为 90°，但绘相量图远比绘波形图简便。在图 8－14(b)所示相量图中，电流相量应画在电压相量前方(按逆时针方向考虑)90°处，这就意味着电流超前电压的角度为 90°，在图中再次注明相量旋转方向，以后不再如此处理。

如图 8－15(a)所示电路，对电感元件来说，考虑到它的 VCR

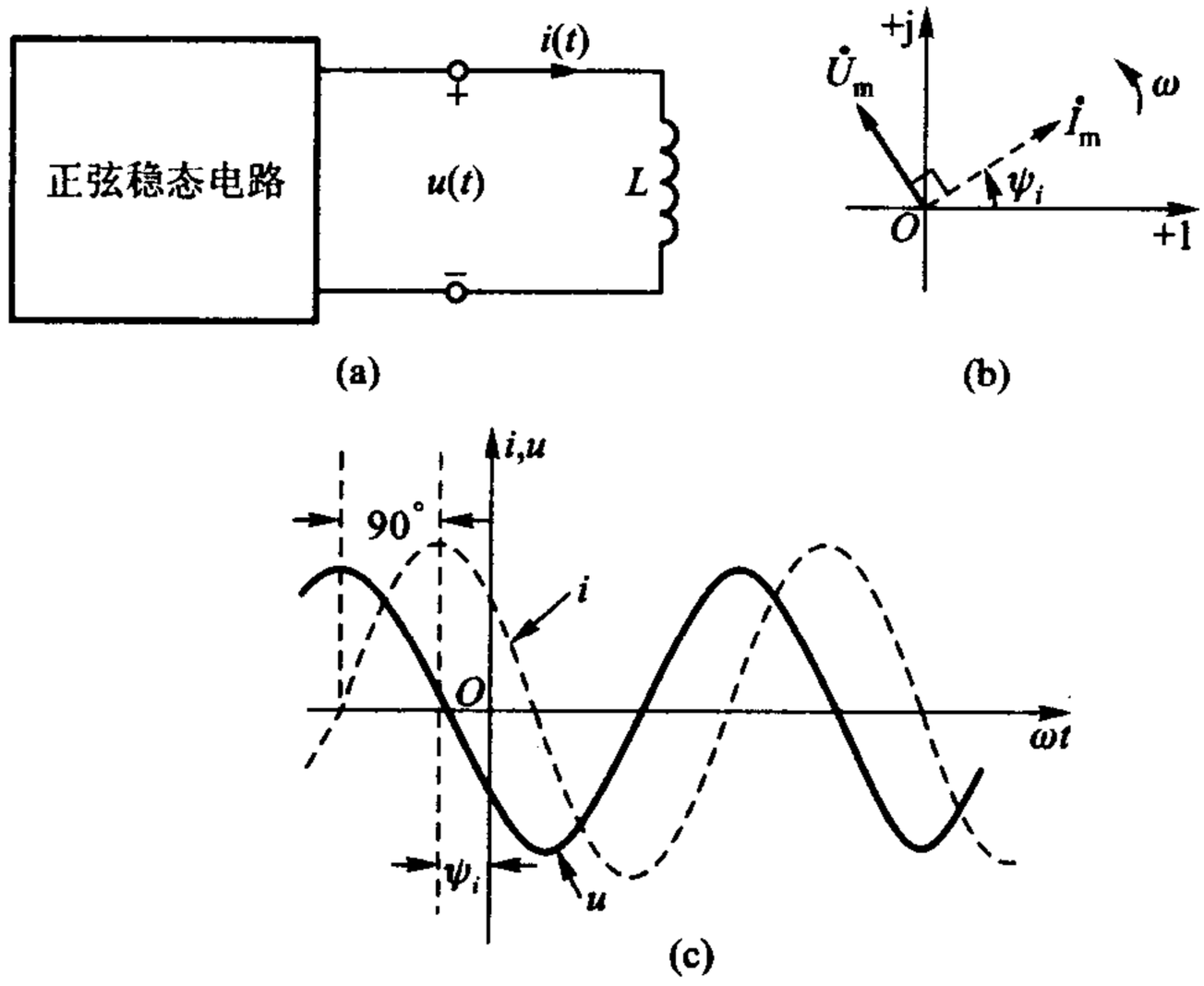


图 8－15　线性时不变电感的正弦稳态特性

$$u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

与电容的 VCR

$$i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

存在对偶关系。因此，根据已求得的电容 VCR 相量形式(8－28)式，把其中的

$\dot{U}_m$ 换以 $\dot{I}_m$，$\dot{I}_m$ 换以 $\dot{U}_m$，C 换以 L，就可得到电感 VCR 的相量形式，即

$$\dot{U}_m = j\omega L \dot{I}_m \tag{8-31}$$

这也是正弦稳态分析的一个基本公式。这个式子表明

$$U_m = \omega L I_m \tag{8-32}$$

和

$$\psi_u = \psi_i + 90° \tag{8-33}$$

(8-32)式表明电压、电流振幅关系不仅与 L 有关而且还与角频率 ω 有关。与电容不同之处在于：当 L 值一定时，对一定的 I_m 来说，ω 越高则 U_m 越大；ω 越低则 U_m 越小。当 $\omega = 0$（相当于直流激励）时，$U_m = 0$，电感相当于短路。(8-33)式表明电流滞后电压的角度为 90°，相量图如图 8-15(b)所示，这和电容的电压、电流相位关系也是不同的。对偶关系在这里也是存在的。

因此对电感就时域关系来说：若

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi_i)$$

则

$$u(t) = I_m \omega L \cos(\omega t + \psi_i + 90°)$$

波形图如图 8-15(c)所示，电流相位滞后电压相位 90°。

例 8-8　流过 0.5 F 电容的电流为 $i(t) = \sqrt{2}\cos(100t - 30°)$ A。试求电容的电压 $u(t)$，并绘相量图。

解　(1) 用时域关系式解，涉及积分运算，比较麻烦，从略。

(2) 用相量关系解。三个步骤：

(a) 写出已知正弦量 $i(t)$ 的相量

$$\dot{I}_m = \sqrt{2}\angle -30° \text{ A}$$

(b) 利用相量关系式进行运算

$$\dot{U}_m = \frac{\dot{I}_m}{j\omega C} = -j\frac{\dot{I}_m}{\omega C} = -j\frac{\sqrt{2}\angle -30°}{100 \times 0.5} \text{ V}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{50}\angle -90° - 30° \text{ V}$$

$$= 0.02\sqrt{2}\angle -120° \text{ V}$$

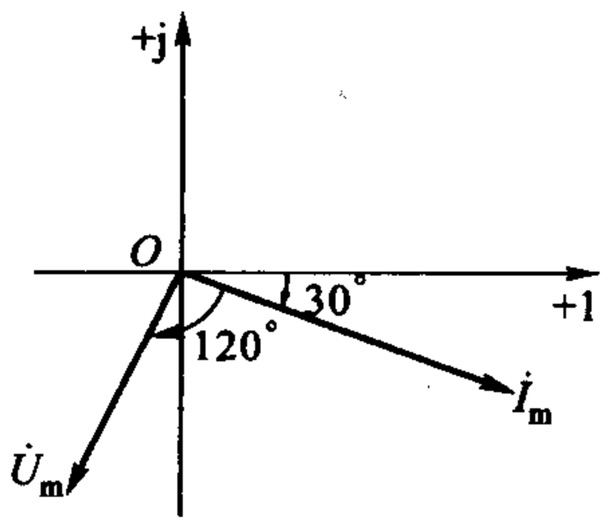


图 8-16　例 8-8

(c) 根据算得的相量写出对应的正弦量

$$u(t) = 0.02\sqrt{2}\cos(100t - 120°) \text{ V}$$

相量图如图 8-16 所示，表明了电流超前电压的角度为 90°。

例 8-9　4 H 电感两端电压为 $u(t) = 8\cos(\omega t - 50°)$ V，$\omega = 100$ rad/s，求流过电感的电流 $i(t)$。

解　利用相量关系解：

(a) $\dot{U}_m = 8 \angle -50°$ V

(b) $\dot{I}_m = \dfrac{\dot{U}_m}{j\omega L} = \dfrac{8 \angle -50°}{j100 \times 4}$ A $= -j0.02 \angle -50°$ A

$= 0.02 \angle -50° -90°$ A $= 0.02 \angle -140°$ A

(c) $i(t) = 0.02\cos(\omega t - 140°)$ A

例 8-10　电路如图 8-17(a)所示，已知 $u(t) = 120\cos(1\,000t + 90°)$ V，$R = 15\ \Omega$、$L = 30$ mH、$C = 83.3\ \mu$F，求 $i(t)$。

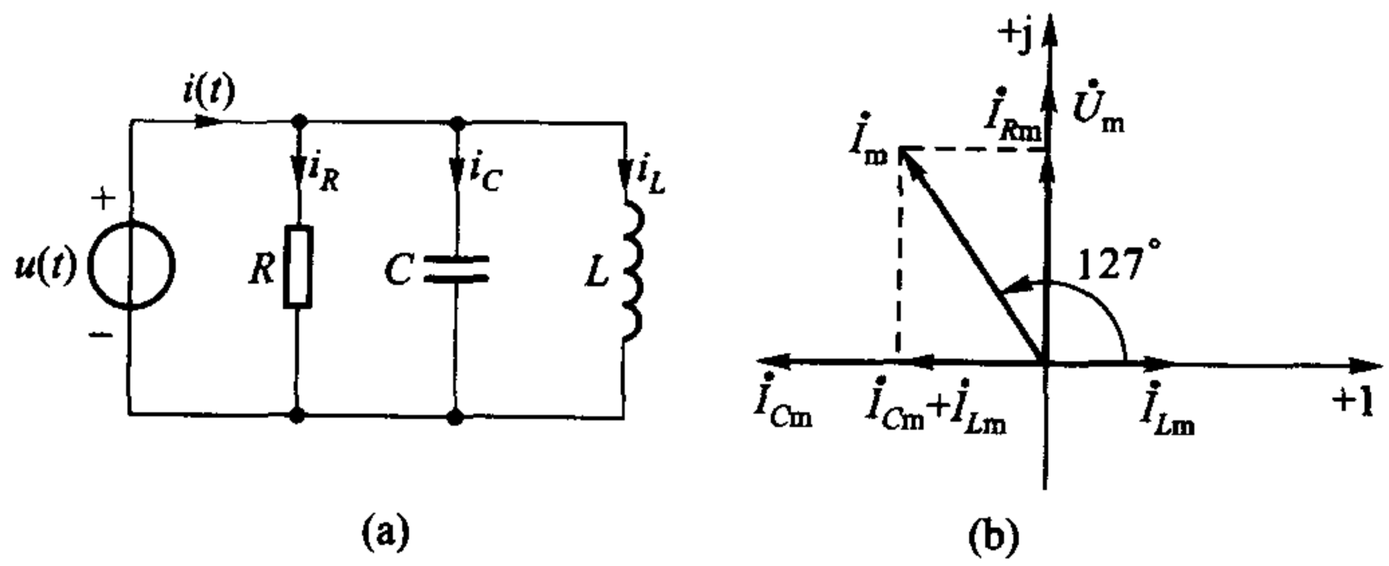


图 8-17　例 8-10

解　用相量关系解：

(a) $\dot{U}_m = 120 \angle 90°$ V

(b) 对电阻元件

$$\dot{I}_{Rm} = \frac{\dot{U}_m}{R} = 8 \angle 90° \text{ A} = j8 \text{ A}$$

对电容元件

$$\dot{I}_{Cm} = j\omega C\, \dot{U}_m = 1\,000 \times 83.3 \times 10^{-6} \times 120 \angle 90° + 90° \text{ A}$$

$$= 10 \angle 180° \text{ A} = -10 \text{ A}$$

对电感元件

$$\dot{I}_{Lm} = \frac{\dot{U}_m}{j\omega L} = \frac{120 \angle 90°}{1\,000 \times 30 \times 10^{-3} \angle 90°} \text{ A} = 4 \angle 0° \text{ A}$$

由 KCL

$$\dot{I}_m = \dot{I}_{Rm} + \dot{I}_{Cm} + \dot{I}_{Lm} = (j8 - 10 + 4) \text{ A}$$

$$= (-6 + j8) \text{ A} = 10 \angle 127° \text{ A}$$

(c) 写出 $i(t)$

$$i(t) = 10\cos(1\,000t + 127°) \text{ A}$$

相量图如图 8 - 17(b)所示。由图可见电流 i 超前电压 u 的角度为 37°。

思考题

8 - 4　图 8 - 18 所示电路 ab 端间为一单个元件，其电压、电流波形如图所示。若电压波形系指：(1) u_{ab} 的波形，(2) u_{ba} 的波形，求该元件的参数值。

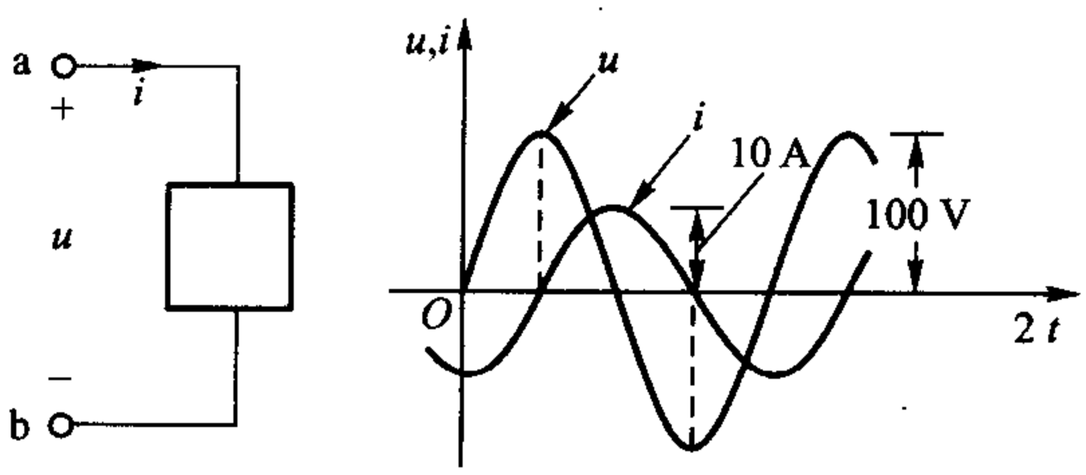


图 8 - 18　思考题 8 - 4

8 - 5　(1) 指出下列各式哪些是错的？哪些是对的？

$$u=\omega Li,\ u=Li,\ u=\mathrm{j}\omega Li,\ \dot{U}_m=\mathrm{j}\omega L\,\dot{I}_m,\ u=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t},\ \dot{U}_m=\omega L\,\dot{I}_m$$

(2) 已知电感电压为 $u(t)=10\cos(\omega t+30°)$，则电感电流 $i(t)=\dfrac{10}{\mathrm{j}\omega L}\cos(\omega t+30°)=\dfrac{10}{\omega L}\cos(\omega t+30°-90°)$，对吗？

(3) 如果电容电压、电流为非关联参考方向，相量图仍如图 8 - 14(b)所示，对吗？

练习题

8 - 7　电流振幅相量(30 - j10) mA 流过 40 Ω 电阻，求电阻两端的电压振幅相量。又在 $t=1$ ms时电阻两端电压是多少？已知 $\omega=1\ 000$ rad/s，并设电压、电流参考方向一致。

[(1.2 - j0.4) V;0.985]

8 - 8　电容两端电压为 $u(t)=141\cos(3\ 140t+15°)$ V，若 $C=0.01$ μF，求电容电流 $i(t)$。

[4.427cos(3 140t + 105°) mA]

8 - 9　电感电压 $u(t)=80\cos(1\ 000t+105°)$ V，若 $L=0.02$ H，求电感电流 $i(t)$。

[4cos(1 000t + 15°) A]

§8 - 6　VCR 相量形式的统一——阻抗和导纳的引入

上节讨论了三种基本元件 VCR 的相量形式，在关联参考方向的前提下，它们是

$$\dot{U}_m=R\,\dot{I}_m$$

$$\dot{U}_m = \frac{1}{j\omega C}\dot{I}_m$$

$$\dot{U}_m = j\omega L\,\dot{I}_m$$

如果把元件在正弦稳态时电压相量与电流相量之比定义为该元件的阻抗(impedance),记为 Z,即

$$\frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = Z \tag{8-34}$$

那么,三种基本元件的相量关系式可归结为

$$\dot{U}_m = Z\,\dot{I}_m \tag{8-35}$$

这一统一形式。而电阻、电容、电感的阻抗则分别为

$$Z_R = R \tag{8-36}$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C} \tag{8-37}$$

$$Z_L = j\omega L \tag{8-38}$$

(8-35)式常称为欧姆定律的相量形式,其中电压相量与电流相量的参考方向设为一致。

阻抗的倒数定义为导纳(admittance),记为 Y,即

$$Y = \frac{1}{Z} \tag{8-39}$$

或

$$Y = \frac{\dot{I}_m}{\dot{U}_m} \tag{8-40}$$

导纳的单位为西门子(S)。电阻、电容和电感的导纳分别为

$$Y_R = \frac{1}{R} = G \tag{8-41}$$

$$Y_C = j\omega C \tag{8-42}$$

$$Y_L = \frac{1}{j\omega L} = -j\frac{1}{\omega L} \tag{8-43}$$

这样,基本元件的相量关系式还可以归结为另一形式,即

$$\dot{I}_m = Y\,\dot{U}_m \tag{8-44}$$

这个式子也常称为欧姆定律的相量形式。

由(8-37)、(8-38)和(8-42)、(8-43)等式可知,电容或电感的阻抗和导纳均为虚数,它们的阻抗可表示为 $Z = jX$,X 称为电抗(reactance),亦即

$$X = \mathrm{Im}[Z] \tag{8-45}$$

对电容来说

$$X_C = \mathrm{Im}[Z_C] = -\frac{1}{\omega C} \tag{8-46}$$

X_C 称为电容的电抗，简称容抗[①]。

对电感来说

$$X_L = \mathrm{Im}[Z_L] = \omega L \tag{8-47}$$

X_L 称为电感的电抗，简称感抗。

电容或电感的导纳可表示为 $Y = \mathrm{j}B$，B 称为电纳(susceptance)，亦即

$$B = \mathrm{Im}[Y] \tag{8-48}$$

对电容来说

$$B_C = \mathrm{Im}[Y_C] = \omega C \tag{8-49}$$

B_C 称为电容的电纳，简称容纳。

对电感来说

$$B_L = \mathrm{Im}[Y_L] = -\frac{1}{\omega L} \tag{8-50}$$

B_L 称为电感的电纳，简称感纳[②]。

运用复数分析正弦稳态电路，只有在引入阻抗和导纳后方能充分体现出优越性。它们的引入是电路理论发展的一个里程碑。它们是采用复数描述正弦稳态电路的元件参数，两类约束中的元件约束关系是用它们来表征的。

练习题

8-10　试求 200 μF 电容在 50 Hz 及 1 kHz 时的阻抗和容抗；1.4 H 电感在 50 Hz 及 1 kHz时的阻抗和感抗。

(−j15.9 Ω、−j0.796 Ω，−15.9 Ω、−0.796 Ω；j440 Ω、j8.8 kΩ，440 Ω、8.8 kΩ)

§8-7　正弦稳态电路与电阻电路分析方法的类比——相量模型的引入

综合以上各节所述，如用相量表示正弦稳态电路内的各电压、电流，那么，这些相量必须服从基尔霍夫定律的相量形式和欧姆定律的相量形式。这些定律的

---

①　有些书采用 $X_C = \frac{1}{\omega C}$。根据《中华人民共和国国家标准　电学和磁学的量和单位》(GB 3102.5—81)5—41.3(中国标准出版社，1983)，电抗定义为阻抗的虚部而不是动态元件电压振幅与电流振幅之比。

②　有些书采用 $B_L = \frac{1}{\omega L}$。

形式和本书第一篇讨论过的电阻电路中同一定律的形式完全相同，其差别仅在于这里不直接用电压和电流，而用代表相应电压和电流的相量；不用电阻和电导，而用阻抗和导纳。注意到这一对换关系，计算电阻电路时的一些公式和方法，就可以完全用到正弦稳态分析中来。这就是说，运用相量并引用阻抗及导纳，正弦稳态电路的计算可以仿照电阻电路的处理方法来进行。这样，在分析正弦稳态电路时，就可以省略了列微分方程的步骤，同时还能利用电阻电路的分析方法进行分析。阻抗及导纳概念的引入对正弦稳态分析理论的发展起着重要的作用。

为便于正确仿照，有必要引入相量模型(phasor model)。

什么是相量模型呢？以前所用的电路模型，以 R、L、C 等原参数来表征元件，称为时域模型，它反映了电压与电流时间函数之间的关系。也就是说，从该模型可列出电路的微分方程，从而解出未知的时间函数。相量模型则是一种运用相量能很方便地对正弦稳态电路进行分析、计算的假想模型。它和原正弦稳态电路具有相同的拓扑结构，但原电路中各个元件要用阻抗(或导纳)表示，也就是说，在作相量模型时，要把每个电容元件看作是具有 $\frac{1}{j\omega C}$ 值的阻抗，把每个电感元件看作是具有 $j\omega L$ 值的阻抗，把每个电阻元件看作是具有 R 值的阻抗。该模型中的电压、电流都是代表原电路图中各正弦电压、电流的相量，其参考方向仍与原电路相同。由于实际上并不存在用复数来计量的电压和电流，也没有一个元件的参数会是虚数，所以相量模型是一种假想的模型，是对正弦稳态电路进行分析的工具。

可以说引用阻抗和导纳便可将任何线性时不变正弦 R、L、C 电路变换为“等效的电阻电路”。

图 8－19 表示用相量法求解正弦稳态电路的步骤，仍然体现出 §8－1 中图 8－1 所示变换方法的思路。其求解进程是以实线箭头表示的。步骤 1 中所称的变换，不仅包含正弦量变换为相量，也包含着电路参数“变换”为 Z 或 Y。这

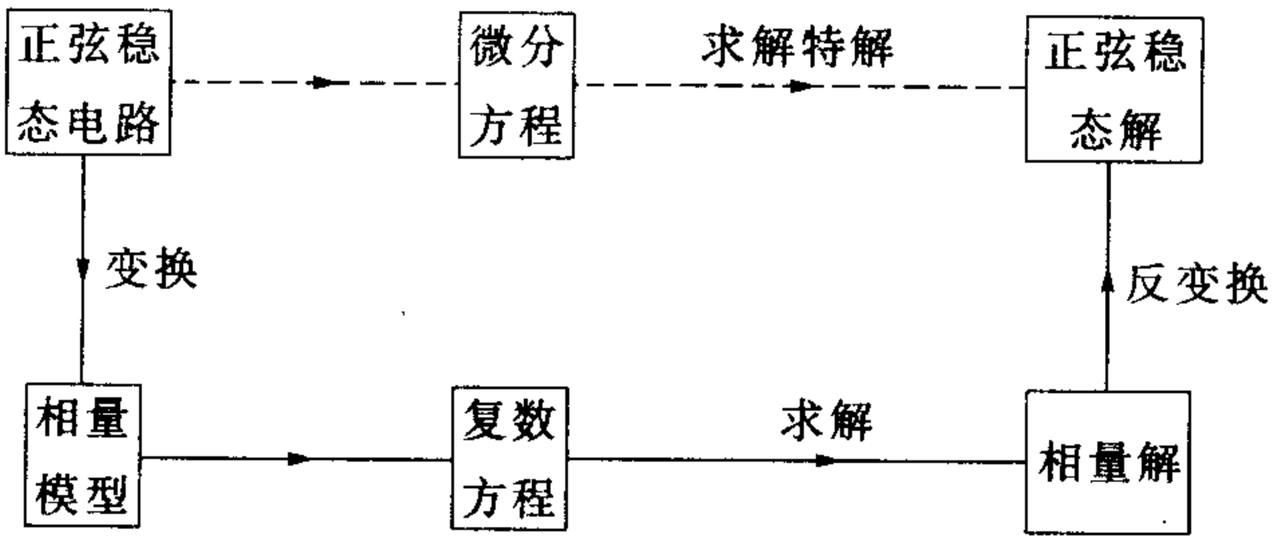


图 8－19　相量法求正弦稳态解的步骤

样，在得出相量模型后，便可类比电阻电路解法，对模型进行求解，这时只涉及复数运算，这就是步骤 2 的内容。最后把相量解反变换为对应的正弦时间 t 的函数，这是步骤 3 的内容，处理十分简便。图 8 - 19 中虚线箭头表示时域分析的过程。

阻抗及导纳的概念也可运用于不含独立电源的、由线性时不变元件所组成的单口网络。在这种情况下，(8 - 35) 及 (8 - 40) 两式中的 $\dot{U}_m$ 和 $\dot{I}_m$ 系指该单口网络端钮的电压相量和电流相量而言，Z 和 Y 则分别为单口网络的阻抗和导纳，即输入阻抗和输入导纳。

根据上述的对换关系，并与电阻电路的有关公式进行对比，不难得知，若单口网络的各元件系串联的，则其阻抗为

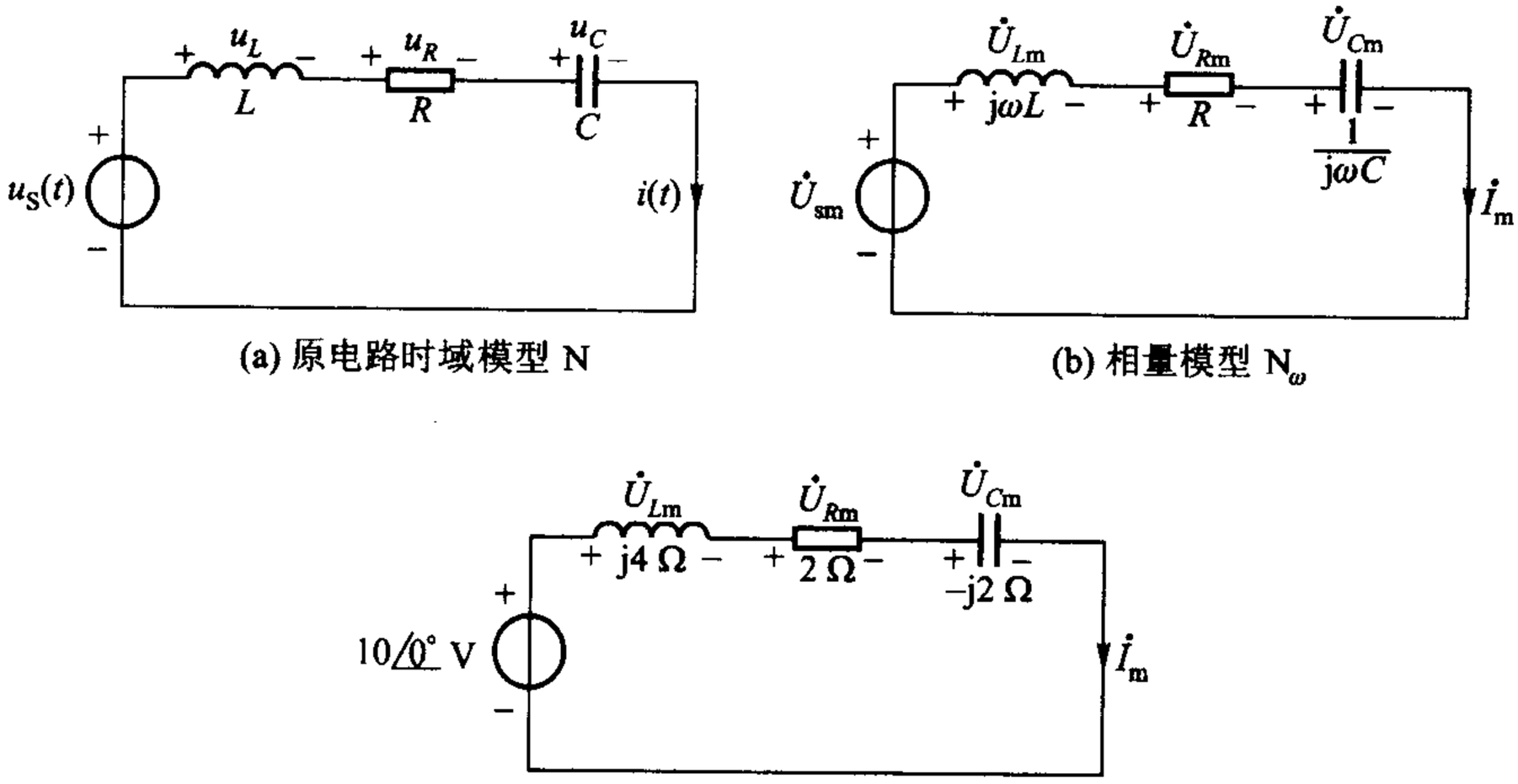
$$Z = \sum_{k=1}^{n} Z_k \tag{8-51}$$

若单口网络的各元件系并联的，则其导纳为

$$Y = \sum_{k=1}^{n} Y_k \tag{8-52}$$

式中的 Z_k、Y_k 等为组成该网络各元件的阻抗、导纳。

例 8 - 11　*RLC* 串联电路如图 8 - 20 (a) 所示，已知电源电压 $u_S(t) = \cos(2t)$ V、$R = 2\ \Omega$、$L = 2$ H、$C = 0.25$ F。试求稳态电流 $i(t)$ 以及各元件的电压。



(a) 原电路时域模型 N

(b) 相量模型 N_ω

(c) 以已知量代入后的 N_ω

图 8 - 20　例 8 - 11

解　运用相量分析该正弦稳态电路的三个步骤为：

(a) 写出已知正弦量的相量。本题中，对应于 $u_S(t)$ 的相量为

$$\dot{U}_{sm} = 10 \angle 0° \text{ V}$$

作出原电路的相量模型 N_ω 如图 8－20(b)所示，以已知量代入后得 N_ω 如图 8－20(c)所示。其中

$$Z_R = R = 2\ \Omega$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j2 \times 0.25}\ \Omega = -j\frac{1}{0.5}\ \Omega = -j2\ \Omega$$

$$Z_L = j\omega L = j2 \times 2\ \Omega = j4\ \Omega$$

(b) 由图 8－20(c)类比电阻电路分析，可求得

$$\begin{aligned} Z &= Z_R + Z_L + Z_C \\ &= (2 + j4 - j2)\ \Omega = (2 + j2)\ \Omega \\ &= 2.83 \angle 45°\ \Omega \end{aligned}$$

必须注意，不要把 *RLC* 串联电路的阻抗写为

$$Z = R + \omega L + \frac{1}{\omega C}$$

在相量法中必须用阻抗来进行计算，而 ωL 和 $\frac{1}{\omega C}$ 并非电感和电容的阻抗。作出相量模型再进行分析，就可避免发生这类错误。由图 8－20(c)所示相量模型可得

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_{sm}}{Z} = \frac{10 \angle 0°}{2.83 \angle 45°}\ \text{A} = 3.53 \angle -45°\ \text{A}$$

$$\dot{U}_{Lm} = Z_L\ \dot{I}_m = j4 \times 3.53 \angle -45°\ \text{V} = 14.1 \angle 45°\ \text{V}$$

$$\dot{U}_{Rm} = Z_R\ \dot{I}_m = 2 \times 3.53 \angle -45°\ \text{V} = 7.06 \angle -45°\ \text{V}$$

$$\dot{U}_{Cm} = Z_C\ \dot{I}_m = -j2 \times 3.53 \angle -45°\ \text{V} = 7.06 \angle -135°\ \text{V}$$

(c) 根据求得的各相量写出相应的正弦波

$$i(t) = 3.53\cos(2t - 45°)\ \text{A}$$

$$u_L(t) = 14.1\cos(2t + 45°)\ \text{V}$$

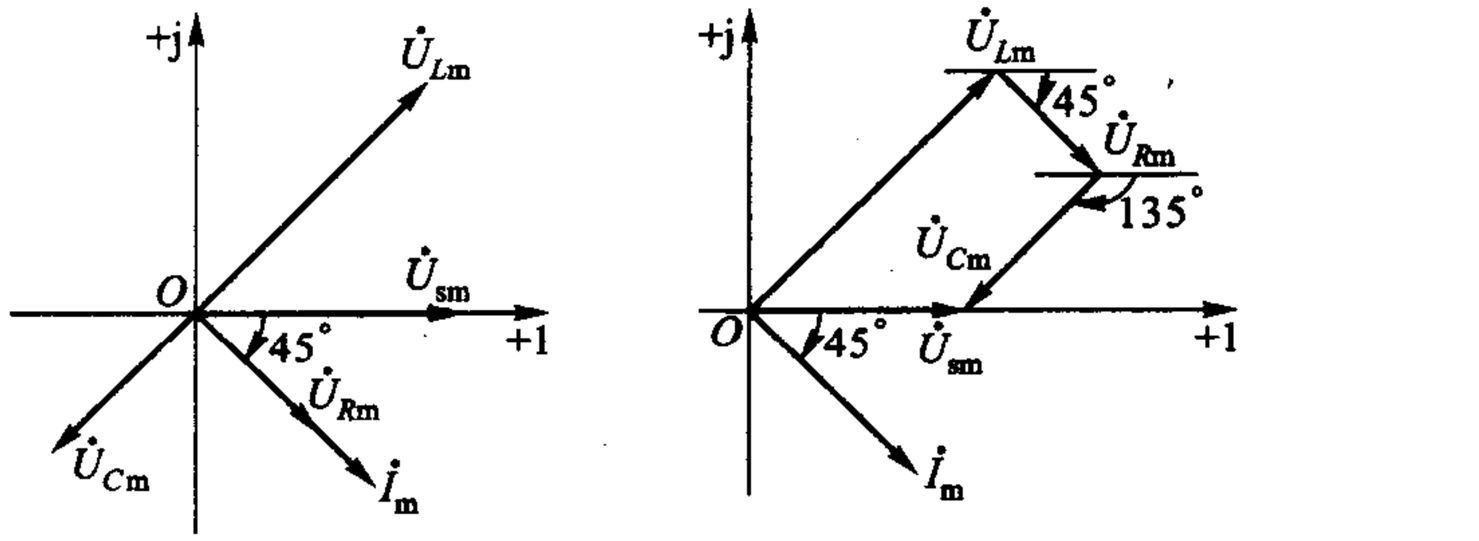
$$u_R(t) = 7.06\cos(2t - 45°)\ \text{V}$$

$$u_C(t) = 7.06\cos(2t - 135°)\ \text{V}$$

从答案可以看到，u_L 的振幅比电源电压的振幅还大。这在正弦交流电路内是完全可能的，因为各电压并不一定同相，它们的最大值并不一定在同一瞬间发生。

各电压及电流的相量图如图 8－21(a)、(b)所示。从相量图可以一目了然地表明了各电压、电流间的相位关系。图(a)和图(b)实质上是一样的，但图(b)更清楚地表明了 $\dot{U}_{Lm} + \dot{U}_{Rm} + \dot{U}_{Cm} = \dot{U}_{sm}$ 这一关系。这是由这四个相量形成的

闭合多边形来反映的。注意等式前的三个相量是依次首尾衔接地画出的，而连接$\dot{U}_{Lm}$的箭尾（在坐标原点处）与$\dot{U}_{Cm}$的箭头的有向线段应恰为相量$\dot{U}_{sm}$。



(a)　　(b)

图 8－21　例 8－11 相量图

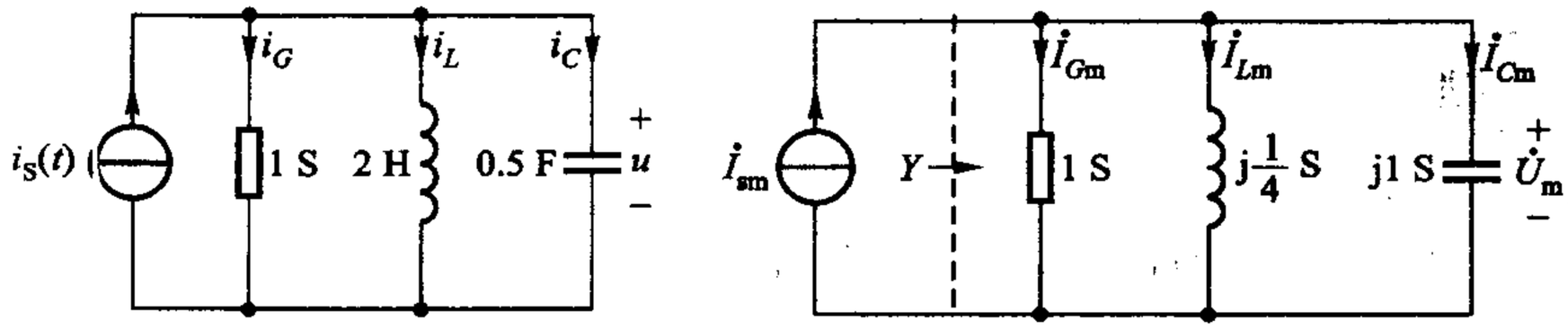
最后，还应着重指出，阻抗 Z 的辐角表明了 u_s、i 之间的相位关系。本题 Z 的辐角为 +45°，而根据阻抗的定义(8－34)式它的辐角 φ_Z 应为 $\psi_u - \psi_i$，若 $\varphi_Z > 0$，则意味着 $\psi_u > \psi_i$，反映在相量图上，必然是依照逆时针方向电压相量在前，而电流相量在后（参看图 8－14），即电流滞后电压角 φ_Z，本题电流 i 滞后电压 u_s 的角度为 45°，参看图 8－21。故根据阻抗角 φ_Z 的正、负，即可判断电压与电流的相位关系。

$\varphi_Z > 0$　　电流滞后电压的角度为 $|\varphi_Z|$

$\varphi_Z < 0$　　电流超前电压的角度为 $|\varphi_Z|$

$\varphi_Z = 0$　　电流与电压同相

例 8－12　*GCL* 并联电路如图 8－22(a)所示。已知 $G = 1$ S、$L = 2$ H、$C = 0.5$ F、$i_S(t) = 3\cos(2t)$ A。求 $u(t)$。



(a) 原电路时域模型　　(b) 相量模型

图 8－22　例 8－12

解　(a) $\dot{I}_{sm} = 3 \angle 0°$ A

$$Y_C = G = 1 \text{ S}$$

$$Y_L = -\text{j}\frac{1}{\omega L} = -\text{j}\frac{1}{4} \text{ S}$$

$$Y_C = j\omega C = j1\ \text{S}$$

相量模型如图 8－22(b)所示。

(b) 由(8－52)式可求得这一并联电路的导纳为

$$\begin{aligned} Y &= Y_G + Y_C + Y_L \\ &= \left(1 + j1 - j\frac{1}{4}\right)\text{S} = (1 + j0.75)\ \text{S} \\ &= 1.25 \angle 36.9°\ \text{S} \end{aligned}$$

由相量模型可知

$$\begin{aligned} \dot{U}_m &= \frac{\dot{I}_{sm}}{Y} = \frac{3 \angle 0°}{1.25 \angle 36.9°}\ \text{V} \\ &= 2.4 \angle -36.9°\text{V} \end{aligned}$$

(c) 根据算得的相量 $\dot{U}_m$，得

$$u(t) = 2.4\cos(2t - 36.9°)\ \text{V}$$

电压 u 与电流 i 的相量图一目了然地表明了 i 相位超前 u 角 36.9°的相位关系，相位差角 36.9°即导纳的辐角(导纳角)(见图 8－23)。

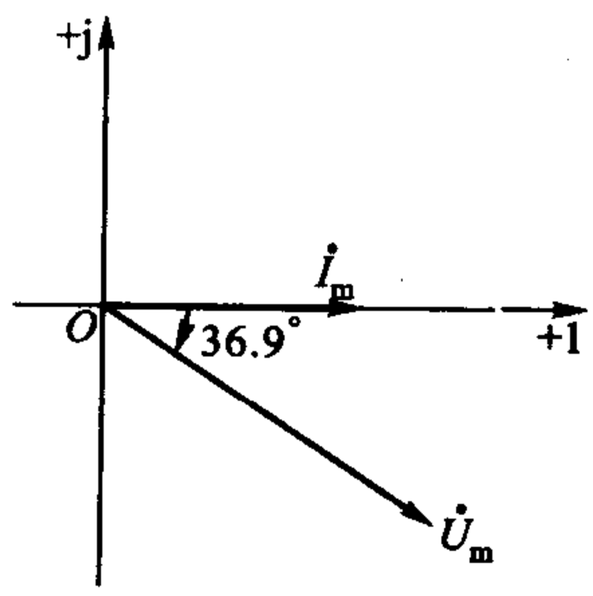


图 8－23　例 8－12 相量图

根据导纳角也能判断电压、电流的相位关系，正如同根据阻抗角可以判断电压、电流的相位关系一样。但由于导纳系 $\dot{I}_m$ 与 $\dot{U}_m$ 的比值，故其辐角为 $\psi_i - \psi_u$，因而当导纳角为正值时，说明

$$\psi_i > \psi_u$$

电流超前电压，如本例所示。

思考题

8－6　若 $u = 311\cos(\omega t + 45°)\ \text{V}$，$Z = 2.5 \angle 60°\ \Omega$

则
$$i = \frac{311\cos(\omega t + 45°)}{2.5 \angle 60°}\ \text{A} = \frac{311}{2.5}\cos(\omega t + 45° - 60°)\ \text{A}$$

对吗，为什么？

8－7　在某一频率时，测得若干线性时不变无源电路的阻抗如下：

RC 电路：$Z = (5 + j2)\ \Omega$　　RL 电路：$Z = (5 - j7)\ \Omega$

RLC 电路：$Z = (2 - j3)\ \Omega$　　LC 电路：$Z = (2 + j3)\ \Omega$

这些结果合理吗？

练习题

8－11　作出图 8－24 所示各电路的相量模型，并求 ab 端的阻抗及导纳。又 ab 端正弦

稳态电压与电流的相位关系如何？

[部分答案：(b) $Z_{ab}=(1-j1)\ \Omega$；(c) $Y_{ab}=(0.1-j0.1)\ S$；(d) $Y_{ab}=j0.1\ S$]

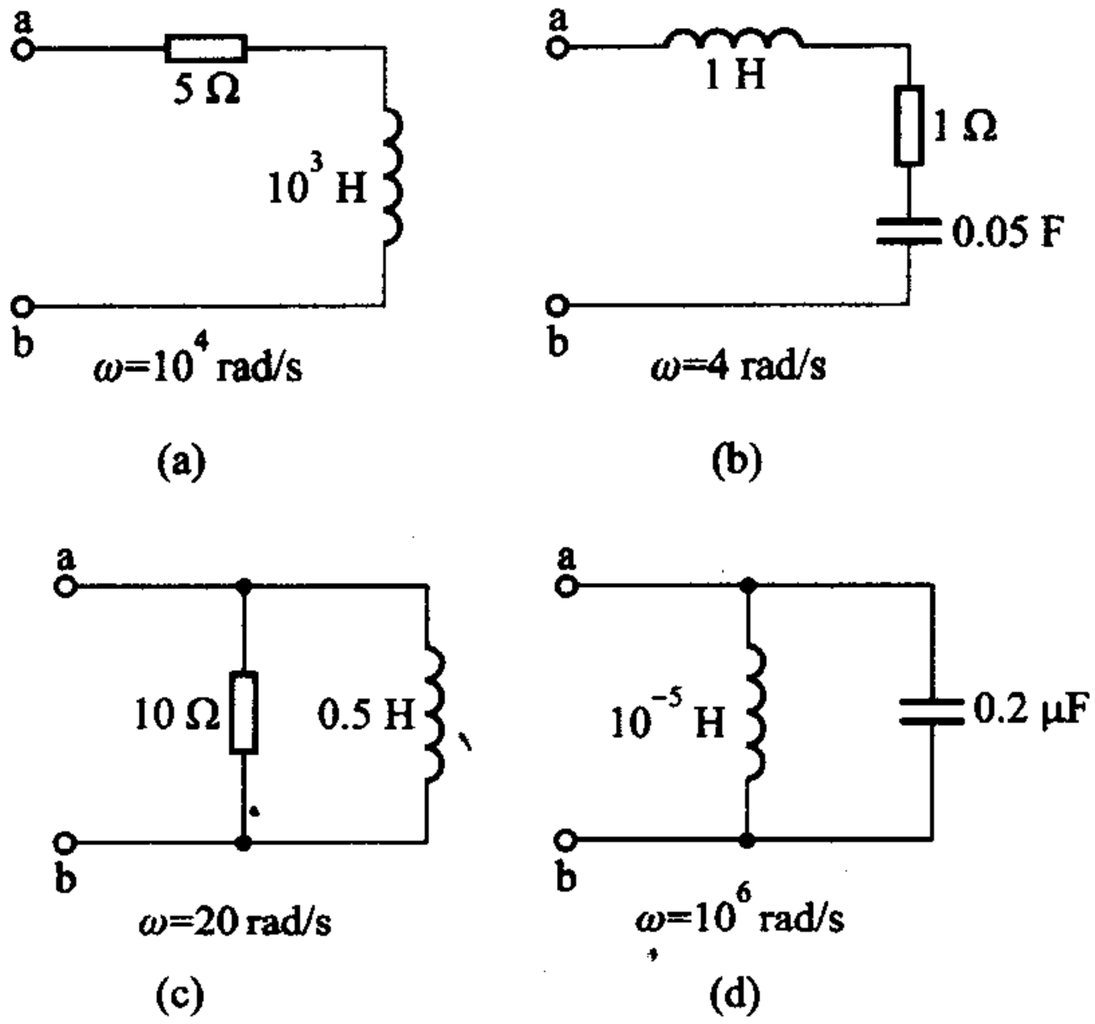


图 8－24　练习题 8－11

8－12　电路如图 8－25 所示，已知 $u_S=100\cos(20t)$ V。

(1) 计算 $\dot{I}_m$、$\dot{U}_{abm}$、$\dot{U}_{bcm}$和$\dot{U}_{cdm}$；

(2) 绘相量图表明(1)中各相量；

(3) 求 $\dot{I}_m$和$\dot{U}_{adm}$的相位关系；

(4) 写出 i、u_{ab}、u_{bc}及 u_{cd}。

(部分答案：$\dot{I}_m=7.07\angle -45°$ A)

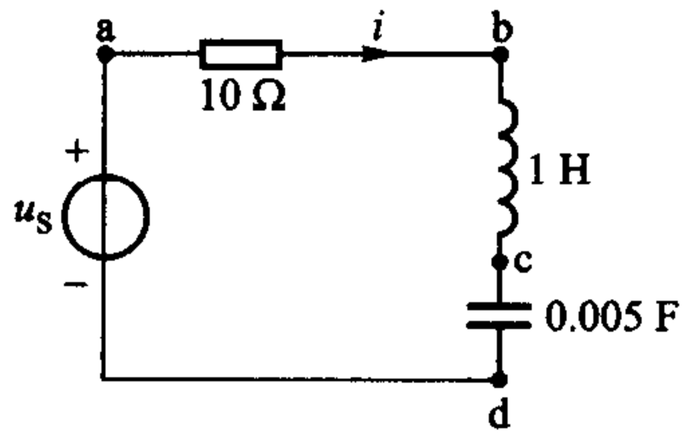


图 8－25　练习题 8－12

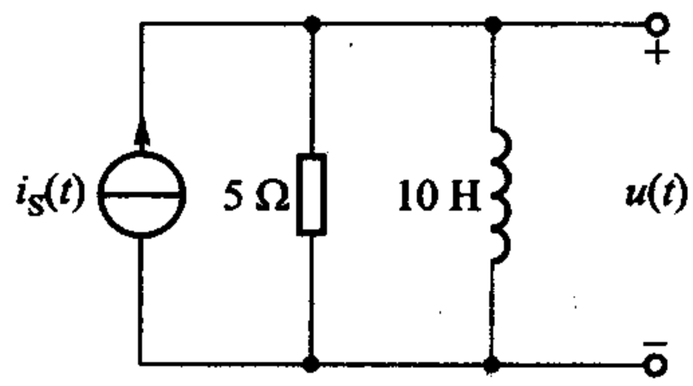


图 8－26　练习题 8－13

8－13　电路如图 8－26 所示，已知 $i_S(t)=\cos(t+90°)$ A，试求稳态电压 $u(t)$，并绘相量图。

[$-4.48\cos(t-63.4°)$ V]

§8-8　正弦稳态混联电路的分析

上节曾以一些简单的串、并联电路为例阐述了运用相量求解正弦稳态电路的方法。本节说明混联电路的相量解法。

作出正弦稳态混联电路的相量模型后，就可仿照电阻混联电路的处理方法来求输入阻抗或导纳、各支路电流相量以及电压相量等。

在求输入阻抗或导纳时，只需注意到下列几点就不难求得正确结果：

（1）同一元件的阻抗与导纳互为倒数；同一对端钮间的阻抗与导纳互为倒数，即

$$Z=\frac{1}{Y},\quad Y=\frac{1}{Z}$$

至于采用阻抗还是采用导纳来表征元件，则应根据具体情况，以便于计算而定。

（2）记住基本元件的阻抗和导纳，如表 8-1 所示。

表 8-1　基本元件的阻抗和导纳

	Z	Y
R	R	$\frac{1}{R}=G$
C	$\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}$	$\mathrm{j}\omega C$
L	$\mathrm{j}\omega L$	$\frac{1}{\mathrm{j}\omega L}$

（3）串联部分：可根据(8-51)式进行化简，得

$$Z=\sum_{k=1}^{n}Z_k$$

因此，凡是串联的元件，用阻抗来表征较为方便。

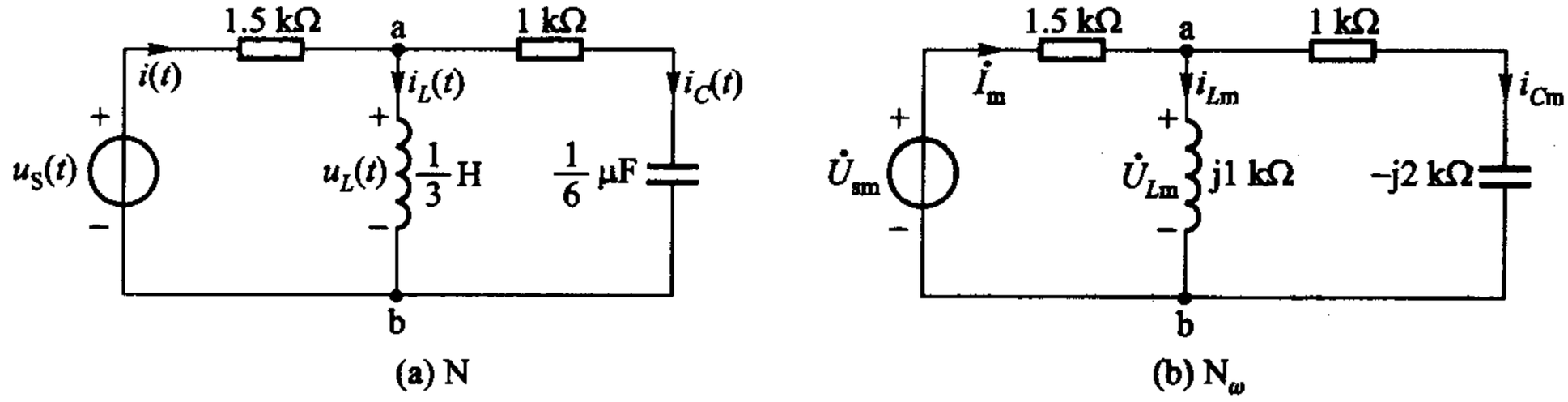
并联部分：可根据(8-52)式进行化简，得

$$Y=\sum_{k=1}^{n}Y_k$$

因此，凡是并联的元件，用导纳来表征较为方便。但在两个元件并联时，也可根据下式进行化简

$$Z=\frac{Z_1Z_2}{Z_1+Z_2}\tag{8-53}$$

例 8 – 13　电路如图 8 – 27 (a) 所示，$u_S(t) = 40\cos(3\ 000t)$ V，求 $i(t)$、$i_C(t)$、$i_L(t)$。



(a) N　　(b) N_ω

图 8 – 27　例 8 – 13 电路图及相量模型

解　写出已知正弦量的相量

$$\dot{U}_{sm} = 40 \angle 0°\text{V}$$

作相量模型，如图 8 – 27 (b) 所示。其中

$$Z_L = j\omega L = j3\ 000 \times \frac{1}{3}\ \Omega = j1\ \text{k}\Omega$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{3\ 000 \times \frac{1}{6} \times 10^{-6}}\ \Omega = -j2\ \text{k}\Omega$$

根据相量模型进行计算。输入阻抗

$$Z = 1.5\ \text{k}\Omega + Z_{ab} = \left[1.5 + \frac{(j1)(1-j2)}{j1+1-j2}\right]\ \text{k}\Omega$$

$$= \left(1.5 + \frac{2+j1}{1-j1}\right)\ \text{k}\Omega = (2+j1.5)\ \text{k}\Omega = 2.5 \angle 36.9°\text{k}\Omega$$

电流　$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_{sm}}{Z} = \frac{40 \angle 0°}{2.5 \angle 36.9°}\ \text{mA} = 16 \angle -36.9°\ \text{mA}$$

利用分流关系可得

$$\dot{I}_{Cm} = \dot{I}_m\left(\frac{j1}{1+j1-j2}\right) = \dot{I}_m\left(\frac{j1}{1-j1}\right)$$

$$= \dot{I}_m\left[\frac{(j1)(1+j1)}{2}\right] = \dot{I}_m\left(\frac{-1+j1}{2}\right)$$

$$= \dot{I}_m(-0.5+j0.5) = \dot{I}_m \times 0.707 \angle 135°$$

$$= 16 \angle -36.9° \times 0.707 \angle 135°\ \text{mA} = 11.3 \angle 98.1°\ \text{mA}$$

$$\dot{I}_{Lm} = \dot{I}_m\left(\frac{1-j2}{1+j1-j2}\right) = 16 \angle -36.9° \times 1.58 \angle -18.4°\ \text{mA}$$

$$= 25.3 \angle -55.3°\ \text{mA}$$

由算得的各个相量写出对应的正弦量

$$i(t) = 16\cos(3\,000t - 36.9°)\ \text{mA}$$

$$i_C(t) = 11.3\cos(3\,000t + 98.1°)\ \text{mA}$$

$$i_L(t) = 25.3\cos(3\,000t - 55.3°)\ \text{mA}$$

由算得的结果绘出相量图如图 8 - 28 所示。

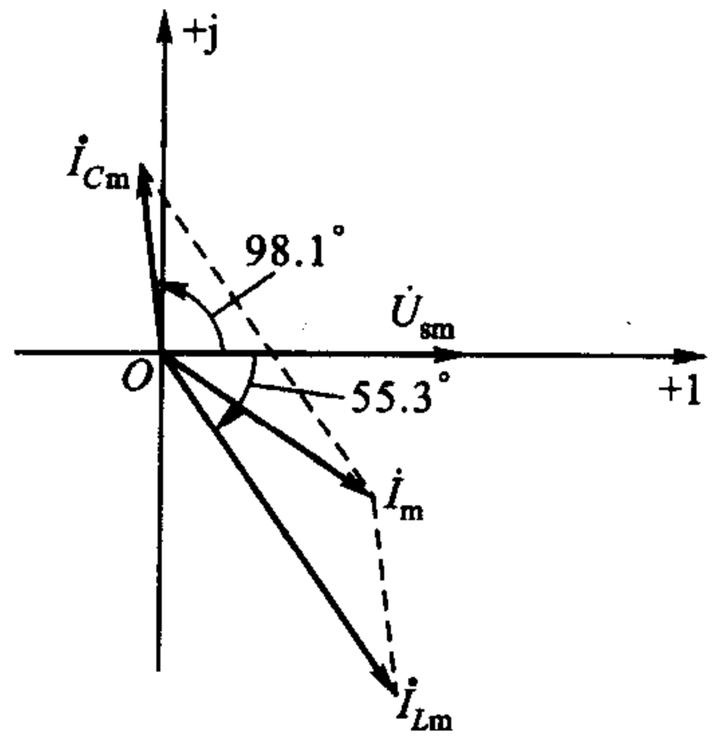


图 8 - 28　例 8 - 13 相量图

例 8 - 14　利用相量法求解习题 6 - 48(图题 6 - 41)所示电路,在 $u_S(t) = 17\cos(16t)$ V,于 $t = 0$ 时接入电路后电容电压 $u(t)$ 的过渡过程,已知 $u(0) = 0$。

解　由 §6 - 8 可知正弦激励的过渡过程由瞬态响应和稳态响应组成。

先用相量法求解稳态响应。作相量模型,其中

$$\dot{U}_{sm} = 17 \angle 0°\ \text{V}$$

$$Z_C = -\text{j}\frac{1}{\omega C} = -\text{j}\frac{1}{16 \times 0.01}\ \Omega = -\text{j}\frac{100}{16}\ \Omega = -\text{j}6.25\ \Omega = 6.25 \angle -90°\ \Omega$$

试自行绘出该图。再求该模型对 Z_C 的戴维南等效电路,其中开路电压,即等效电压源电压为

$$\dot{U}_{ocm} = \dot{U}_{sm} \times \frac{5}{10 + 5} = \frac{17}{3} \angle 0°\ \text{V}$$

等效阻抗为

$$Z_o = \frac{5 \times 10}{5 + 10}\ \Omega = \frac{50}{15}\ \Omega = \frac{10}{3}\ \Omega = R_o$$

利用分流关系可得电容电压相量为

$$\dot{U} = \dot{U}_{ocm} \times \frac{Z_C}{Z_C + Z_o} = \frac{17}{3} \times \frac{6.25 \angle -90°}{7.08 \angle -62°}\ \text{V} = 5 \angle -28°\ \text{V}$$

故得电容电压的稳态响应为

$$u_p(t) = 5\cos(16t - 28°)\ \text{V}$$

$t = 0$ 时

$$u_p(0) = 5\cos(-28°) = 5\cos 28° = 4.41\ \text{V}$$

不符合 $u = 0$ 这一初始条件。电路将产生瞬态响应 $Ke^{-\frac{t}{\tau}}$,其中 K 为 $u(0)$ 与 $u_p(0)$ 之差,即 $K = (0 - 4.41)\ \text{V} = -4.41\ \text{V}$。$\tau = R_oC = \frac{1}{30}$ s。故得

$$u(t) = u_p(t) + Ke^{-\frac{t}{\tau}} = 5\cos(16t - 28°) - 4.41e^{-30t}\ \text{V}$$

练习题

8－14　作出图 8－29 所示各电路的相量模型 N_ω，并求 ab 端的阻抗及导纳。ab 端正弦稳态电压与电流的相位关系如何？

（阻抗：$5.13\angle -16.33°\ \Omega$；$2.83\angle -45°\ \Omega$；$1.58\angle 18.43°\ \Omega$；$6.07\angle -4.86°\ \Omega$）

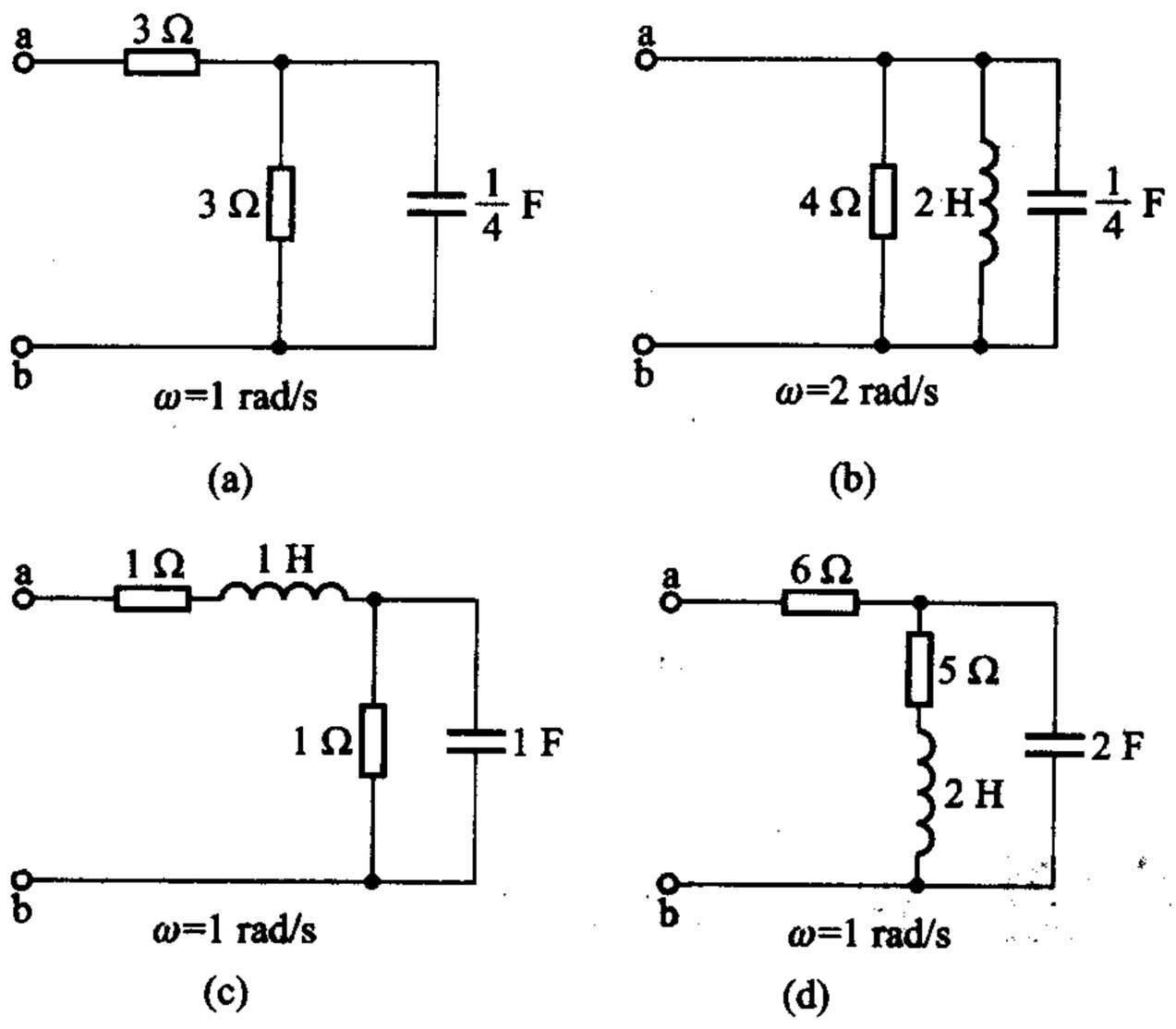


图 8－29　练习题 8－14

8－15　电路相量模型如图 8－30 所示，试用分压关系求 $\dot{U}_{abm}$ 和 $\dot{U}_{bcm}$ 并用相量图表明 $\dot{U}_m$、

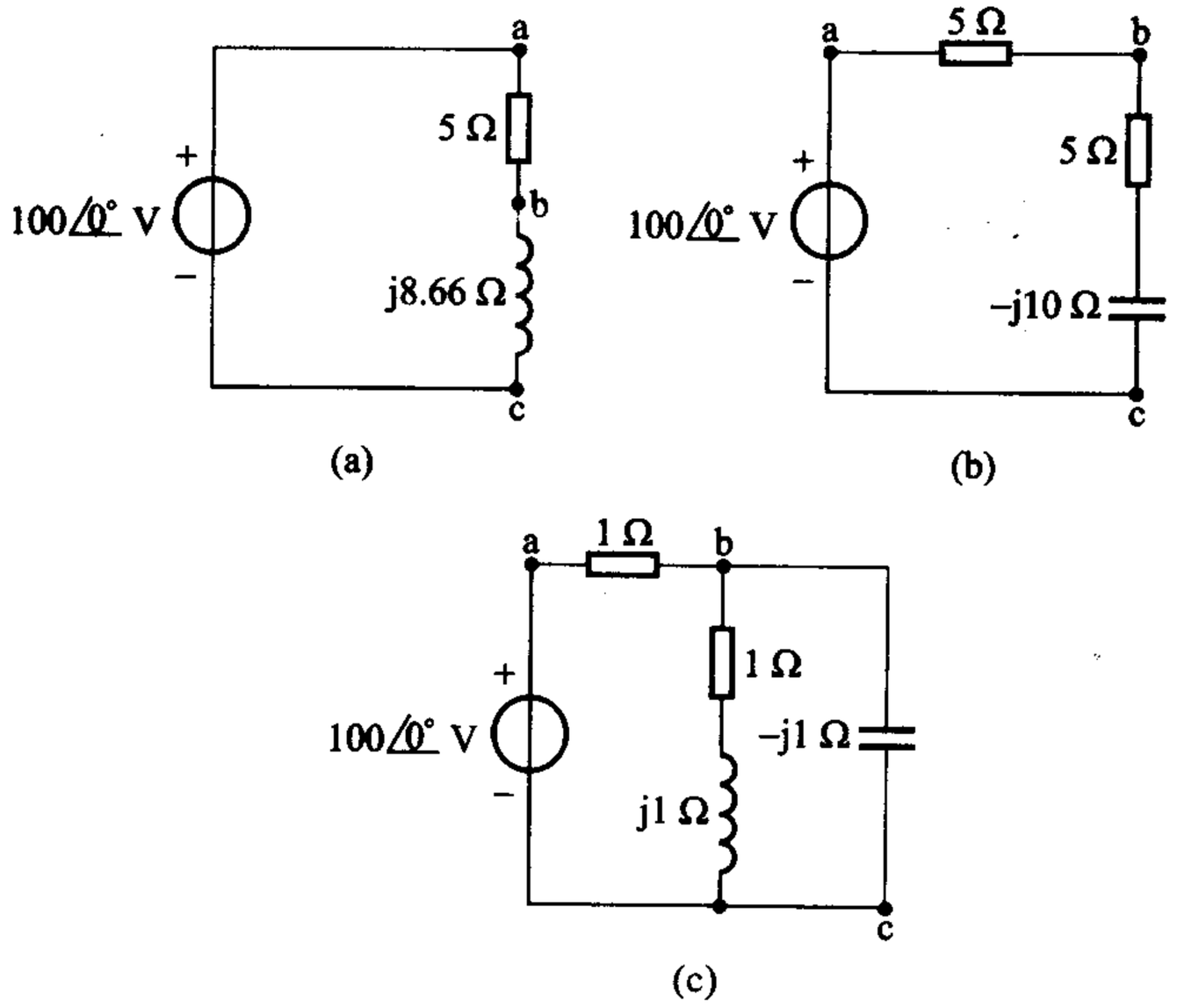


图 8－30　练习题 8－15

$\dot{U}_{abm}$、$\dot{U}_{bcm}$之间的关系。

[部分答案:(c) $\dot{U}_{bcm}=(60-j20)$ V]

8-16　电路相量模型如图 8-31 所示,试用分流公式求每一支路的电流。并用相量图表明各电流相量之间的关系。

[部分答案:(a) 1.41 $\angle 45°$ A;(b) 14.1 $\angle 45°$ A;(c) 40 $\angle -60°$ A]

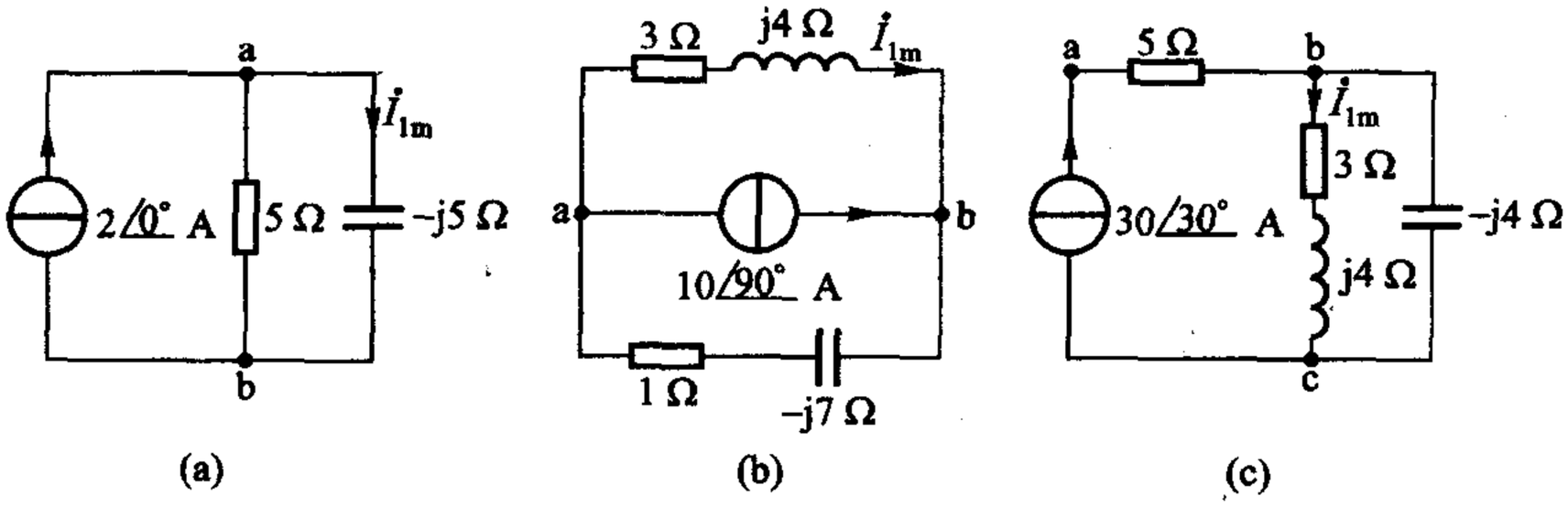


图 8-31　练习题 8-16

§8-9　相量模型的网孔分析和节点分析

本节将通过具体举例说明如何对相量模型运用网孔分析和节点分析。

例 8-15　电路如图 8-32(a)所示,其中 $r=2\ \Omega$。求解 $i_1(t)$ 和 $i_2(t)$。已知 $u_S(t)=10\cos(10^3 t)$ V。

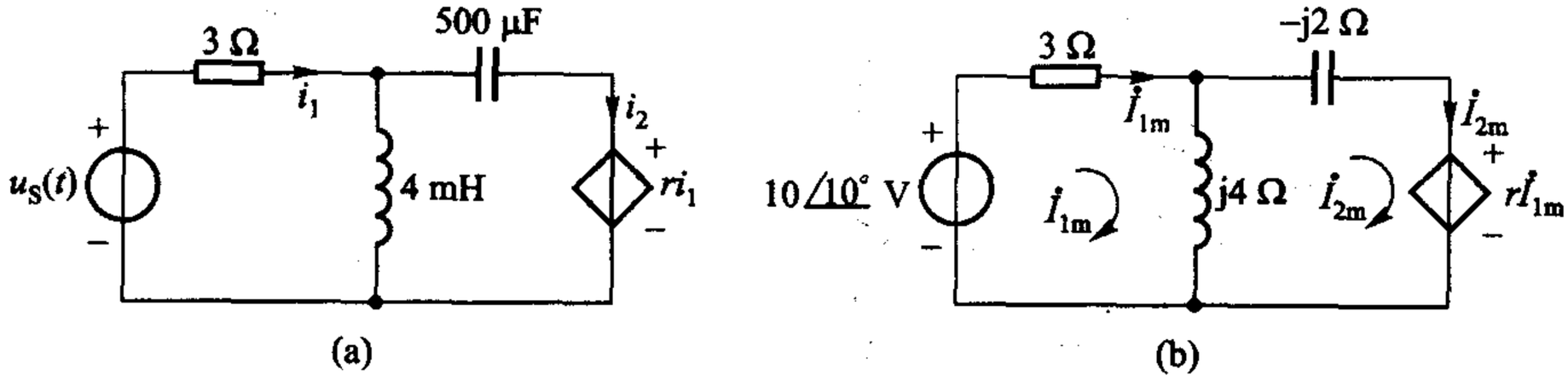


图 8-32　例 8-15

解　作相量模型如图 8-32(b)所示。其中

$$Z_L=j\omega L=j10^3\times 4\times 10^{-3}\ \Omega=j4\ \Omega$$

$$Z_C=\frac{1}{j\omega C}=-j\frac{10^6}{10^3\times 500}\ \Omega=-j2\ \Omega$$

网孔电流相量方程为

$$(3+j4)\dot{I}_{1m}-j4\ \dot{I}_{2m}=10\angle 0° \qquad (a)$$

$$-\mathrm{j4}\ \dot{I}_{1\mathrm{m}}+(\mathrm{j4}-\mathrm{j2})\ \dot{I}_{2\mathrm{m}}=-2\ \dot{I}_{1\mathrm{m}} \tag{b}$$

由(b)式可得

$$(2-\mathrm{j4})\ \dot{I}_{1\mathrm{m}}+\mathrm{j2}\ \dot{I}_{2\mathrm{m}}=0 \tag{c}$$

2×(c)+(a)得

$$(7-\mathrm{j4})\ \dot{I}_{1\mathrm{m}}=10$$

即

$$\dot{I}_{1\mathrm{m}}=\frac{10}{7-\mathrm{j4}}\ \mathrm{A}=1.24\angle 29.7^{\circ}\ \mathrm{A}$$

代入(c)得

$$\dot{I}_{2\mathrm{m}}=\frac{10(2-\mathrm{j4})}{7-\mathrm{j4}}\times\frac{1}{(-\mathrm{j2})}\ \mathrm{A}=\frac{20+\mathrm{j30}}{13}\ \mathrm{A}=2.77\angle 56.3^{\circ}\ \mathrm{A}$$

故得

$$i_1(t)=1.24\cos(10^3t+29.7^{\circ})\ \mathrm{A}$$

$$i_2(t)=2.77\cos(10^3t+56.3^{\circ})\ \mathrm{A}$$

例 8-16　电路相量模型如图 8-33 所示。试列出节点电压相量方程。

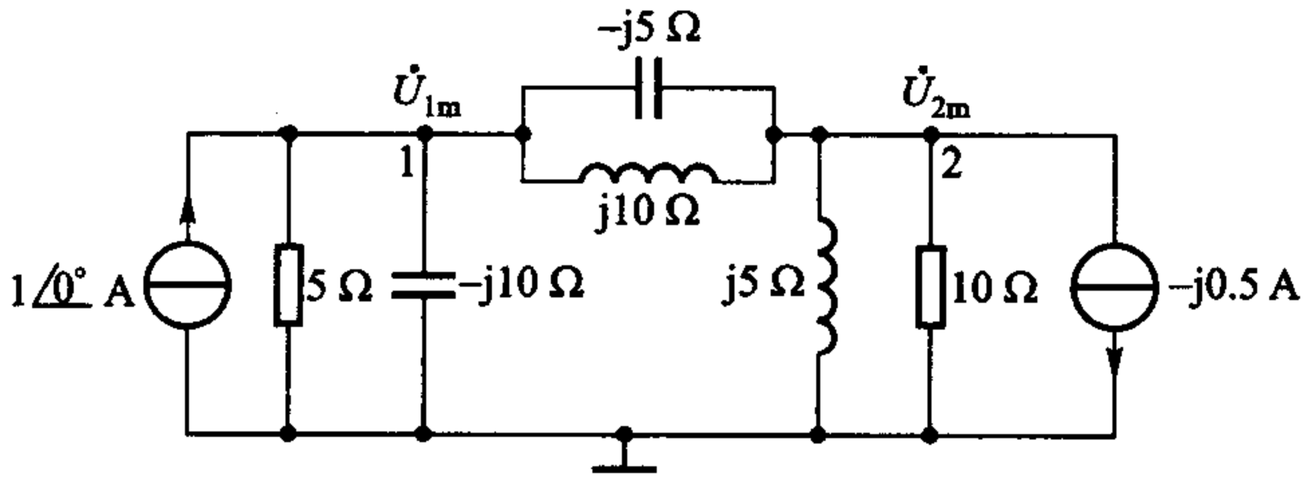


图 8-33　例 8-16

解　采用导纳表示各元件，得节点 1 的节点电压相量方程为

$$\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{-\mathrm{j10}}+\frac{1}{\mathrm{j10}}+\frac{1}{-\mathrm{j5}}\right)\dot{U}_{1\mathrm{m}}-\left(\frac{1}{-\mathrm{j5}}+\frac{1}{\mathrm{j10}}\right)\dot{U}_{2\mathrm{m}}=1\angle 0^{\circ}\ \mathrm{A}$$

即

$$(0.2+\mathrm{j0.2})\ \dot{U}_{1\mathrm{m}}-\mathrm{j0.1}\ \dot{U}_{2\mathrm{m}}=1\angle 0^{\circ} \tag{a}$$

节点 2：

$$-\left(\frac{1}{-\mathrm{j5}}+\frac{1}{\mathrm{j10}}\right)\dot{U}_{1\mathrm{m}}+\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{\mathrm{j5}}+\frac{1}{\mathrm{j10}}+\frac{1}{-\mathrm{j5}}\right)\dot{U}_{2\mathrm{m}}=-(-\mathrm{j0.5})$$

即

$$-\mathrm{j0.1}\ \dot{U}_{1\mathrm{m}}+(0.1-\mathrm{j0.1})\ \dot{U}_{2\mathrm{m}}=\mathrm{j0.5} \tag{b}$$

(a)、(b)式即为所示电路的节点电压相量方程。

例 8－17　单口网络如图 8－34(a)所示，试求输入阻抗及输入导纳。

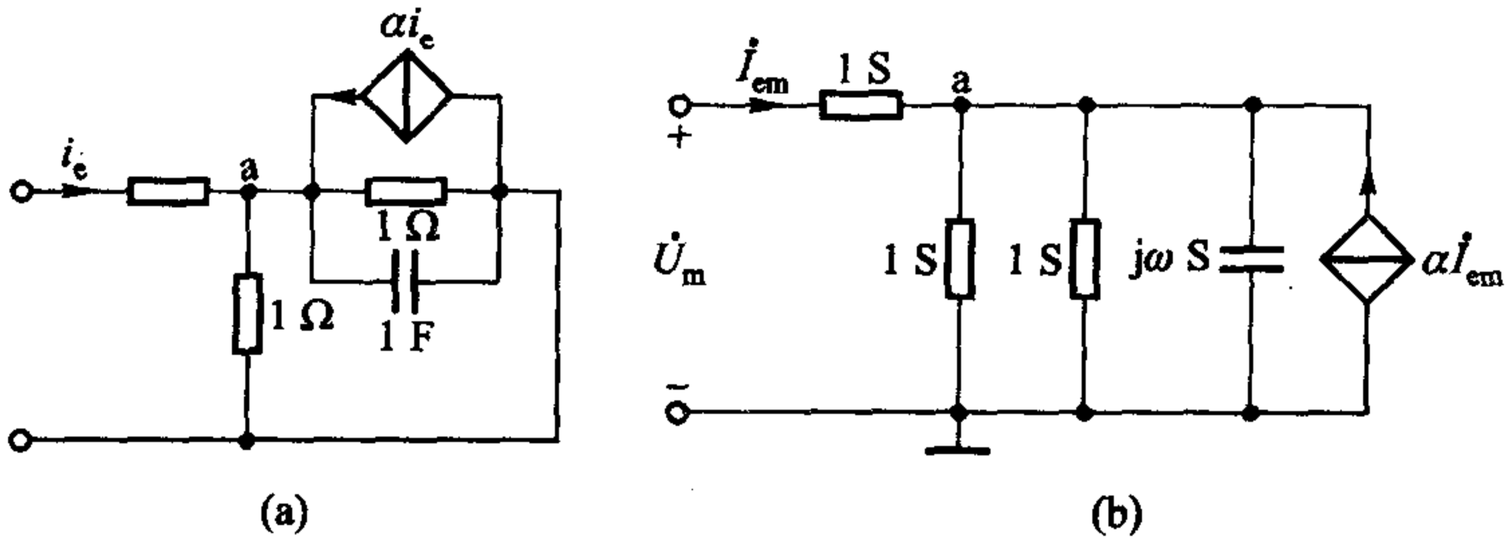


图 8－34　例 8－17

解　作相量模型如图 8－34(b)所示，各无源元件用导纳表示。设想端钮上外接电压源 $\dot{U}_m$，令 5 个元件的连接点为 a，则节点方程为

$$(3+\mathrm{j}\omega)\dot{U}_{am}=(\dot{U}_m)1+\alpha\dot{I}_{em} \tag{a}$$

又

$$\dot{U}_m-\dot{U}_{am}=1\times\dot{I}_{em} \tag{b}$$

由(a)、(b)两式，得

$$[(3+\mathrm{j}\omega)-1]\dot{U}_m=(3+\mathrm{j}\omega+\alpha)\dot{I}_{em}$$

由此可得

$$Z=\frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_{em}}=\frac{3+\alpha+\mathrm{j}\omega}{2+\mathrm{j}\omega}=\frac{6+2\alpha+\omega^2}{4+\omega^2}-\mathrm{j}\frac{(1+\alpha)\omega}{4+\omega^2} \tag{c}$$

$$Y=\frac{1}{Z}=\frac{2+\mathrm{j}\omega}{3+\alpha+\mathrm{j}\omega}=\frac{6+2\alpha+\omega^2}{(3+\alpha)^2+\omega^2}+\mathrm{j}\frac{(1+\alpha)\omega}{(3+\alpha)^2+\omega^2} \tag{d}$$

练习题

8－17　电路如图 8－35 所示，图中 $r=200\ \Omega$，求稳态电流 $i_1(t)$ 和 $i_2(t)$。

[0、6cos(3 000t + 90°) mA]

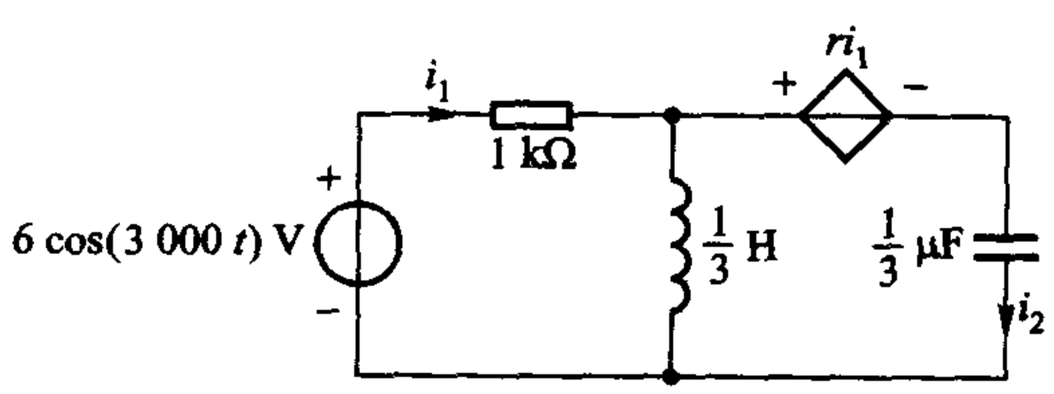


图 8－35　练习题 8－17

§8-10　相量模型的等效

等效概念也可用于相量模型。

给定单口网络 $N_{0\omega}$ 如图 8-36(a)所示，下标“0”表示该网络不含独立源，其 VCR 当为

$$\dot{U}_m = Z\dot{I}_m \tag{8-54}$$

其中 Z 为单口网络的输入阻抗，即等效阻抗。输入阻抗一般为复数，具有实部和虚部，亦即

$$Z = \mathrm{Re}\ Z + j\mathrm{Im}\ Z = R + jX \tag{8-55}$$

其中 R 称为输入阻抗的电阻分量，它并不一定只由网络中的电阻元件所确定，一般来说，它是网络中各元件参数和频率的函数；X 称为输入阻抗的电抗分量，它并不一定只由网络中的动态元件所确定，一般来说，它是网络中各元件参数和频率的函数[参看例8-17中(c)式]。因此，该单口网络可等效为一个由 R 和 jX 串联的相量模型，如图 8-36(b)所示。

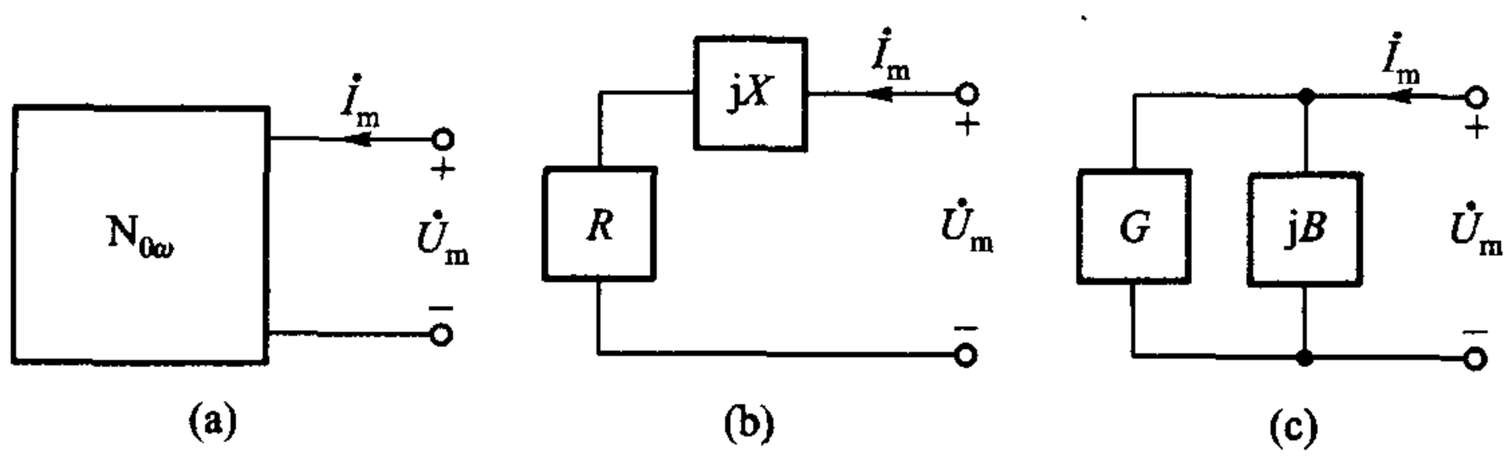


图 8-36　单口网络 $N_{0\omega}$ 及其两种等效相量模型

单口网络 $N_{0\omega}$ 的 VCR 也可表示为

$$\dot{I}_m = Y\dot{U}_m \tag{8-56}$$

而

$$Y = \mathrm{Re}\ Y + j\mathrm{Im}\ Y = G + jB \tag{8-57}$$

其中 G、B 分别称为输入导纳的电导分量和电纳分量[参看例 8-17 中(d)式]。因此，该单口网络尚有另一种由 G 和 jB 并联的等效相量模型如图 8-36(c)所示。

这两种相量模型相互间的变换公式，仍可根据本书第四章所述的等效电路的定义求得。如果表征这两种相量模型的 VCR，即(8-54)式和(8-56)式完全相同，则显然要求

$$Z = \frac{1}{Y} \tag{8-58}$$

根据这一关系，即可求得变换公式。具体推导如下。

设已知

$$Z = R + \mathrm{j}X$$

则由(8-58)式可得

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + \mathrm{j}X} = \frac{R - \mathrm{j}X}{(R + \mathrm{j}X)(R - \mathrm{j}X)}$$

$$= \frac{R}{R^2 + X^2} - \mathrm{j}\frac{X}{R^2 + X^2} = G + \mathrm{j}B$$

亦即并联相量模型的电导与电纳分别应为

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2} \tag{8-59}$$

$$B = -\frac{X}{R^2 + X^2} \tag{8-60}$$

读者应注意，一般情况 G 并非是 R 的倒数，B 则不可能是 X 的倒数。因为对一个复数 $a_1 + \mathrm{j}a_2$ 来说，除非 $a_2 = 0$，否则

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{a_1 + \mathrm{j}a_2}\right) \neq \frac{1}{a_1}$$

就物理意义来说，串联电路中的 R 和并联电路中的 G，并非指同一电阻元件，而公式 $R = \frac{1}{G}$ 原是指同一个电阻元件的电阻参数与电导参数的关系，因而不能用于两个不同的电阻元件。B 并非 X 的倒数，即使是指同一动态元件也不能认为 $X = \frac{1}{B}$。应根据 $Z = \frac{1}{Y}$ 来考虑，在单个动态元件时可得 $\mathrm{j}X = \frac{1}{\mathrm{j}B}$，因此 $X = -\frac{1}{B}$。

如已知

$$Y = G + \mathrm{j}B$$

则由(8-58)式可得

$$Z = \frac{1}{Y} = \frac{1}{G + \mathrm{j}B} = \frac{G - \mathrm{j}B}{(G + \mathrm{j}B)(G - \mathrm{j}B)} = \frac{G}{G^2 + B^2} - \mathrm{j}\frac{B}{G^2 + B^2}$$

$$= R + \mathrm{j}X$$

亦即串联相量模型的电阻与电抗分别应为

$$R = \frac{G}{G^2 + B^2} \tag{8-61}$$

$$X = -\frac{B}{G^2 + B^2} \tag{8-62}$$

一般来说，R 并非是 G 的倒数，X 则不可能是 B 的倒数。

以上各式中的 R、G、X、B 等均为 ω 的函数，为简便计，未写作诸如 $R(\omega)$ 之类的形式。因此，只有在某一指定频率时才能确定 R、G 的数值和 X、B 的数值及其正、负号。等效相量模型只能用来计算在该频率下的正弦稳态响应。由此得出的时域电路，不能据以列写微分方程来求解原电路的全响应。

例 8－18　图 8－37 所示为一单口网络及相量模型，试求在 $\omega = 4$ rad/s 时以及 $\omega = 10$ rad/s 时的等效相量模型。

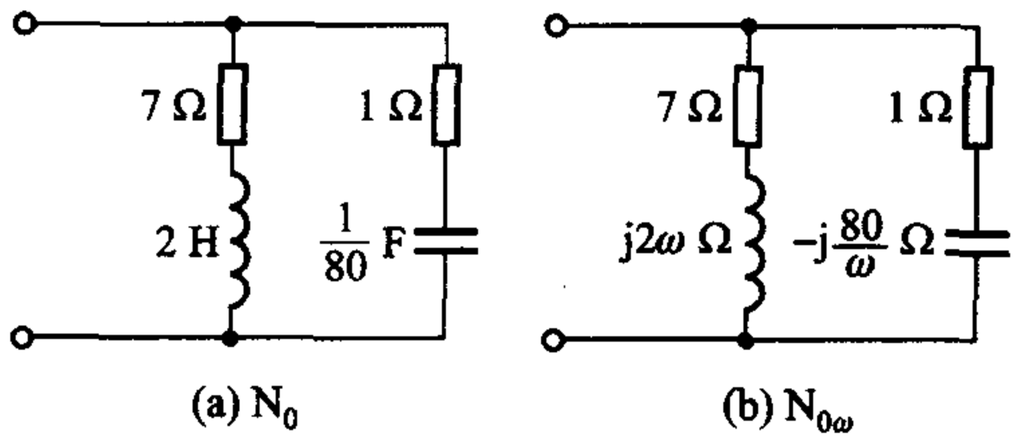


图 8－37　例 8－18

解　当 $\omega = 4$ rad/s 时，

$$Z(\mathrm{j}4) = \frac{(7 + \mathrm{j}8)(1 - \mathrm{j}20)}{7 + \mathrm{j}8 + 1 - \mathrm{j}20}\ \Omega = \frac{2\,920 + \mathrm{j}948}{64 + 144}\ \Omega = (14.04 + \mathrm{j}4.56)\ \Omega$$

得串联形式的等效相量模型如图 8－38(a)所示。与此相对应的时域电路如图 8－38(b)所示，它只在 $\omega = 4$ rad/s 时才有意义。

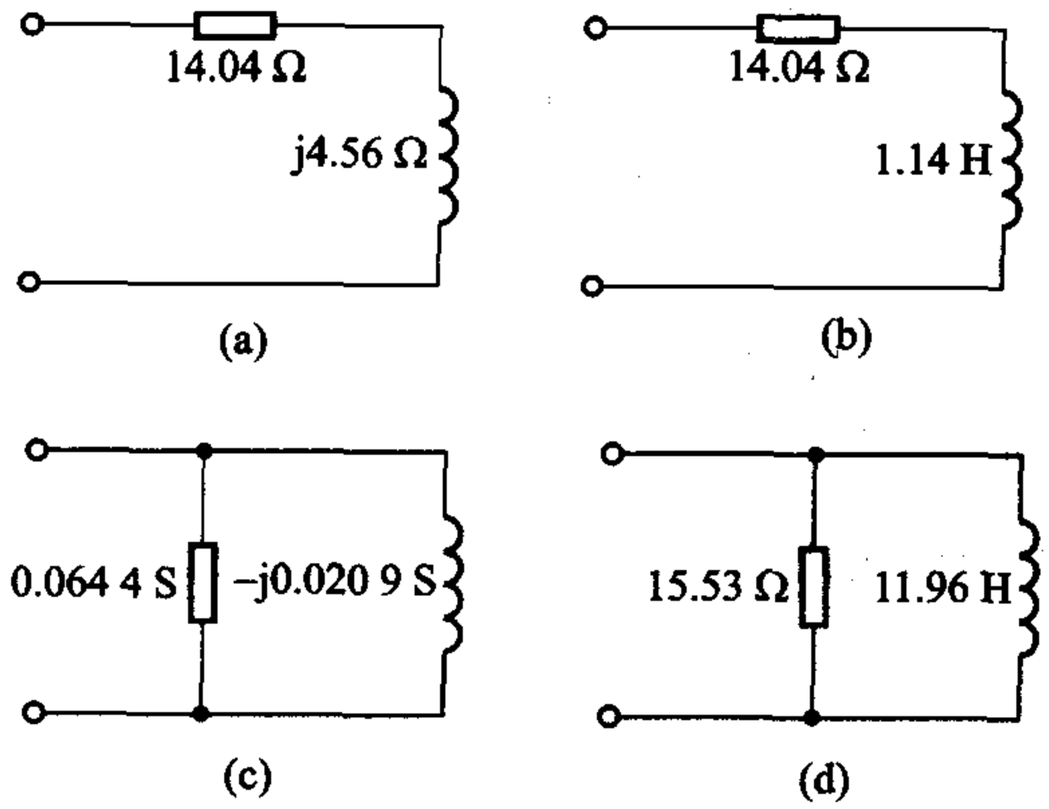


图 8－38　图 8－37(a)的等效电路

另一种等效相量模型可求得如下：

$$Y(\mathrm{j}4)=\frac{1}{Z(\mathrm{j}4)}=\frac{1}{14.04+\mathrm{j}4.56}\ \mathrm{S}=\frac{14.04-\mathrm{j}4.56}{14.04^2+4.56^2}\ \mathrm{S}$$

$$=\left(\frac{14.04}{217.9}-\mathrm{j}\frac{4.56}{217.9}\right)\ \mathrm{S}=(0.064\ 4-\mathrm{j}0.020\ 9)\ \mathrm{S}$$

得并联形式的相量模型如图 8-38(c)所示，由于 $B<0$，电纳为电感性。与此相对应 $\omega=4$ rad/s 时的时域电路，如图 8-38(d)所示，其中电阻元件的参数用电阻表示，其值为 $\frac{1}{0.064\ 4}\ \Omega=15.53\ \Omega$，由于

$$B_L=-\frac{1}{\omega L}=-0.020\ 9\ \mathrm{S}$$

电感元件的参数

$$L=\frac{1}{4\times 0.020\ 9}\ \mathrm{H}=11.96\ \mathrm{H}$$

当 $\omega=10$ rad/s 时

$$Z(\mathrm{j}10)=\frac{(7+\mathrm{j}20)(1-\mathrm{j}8)}{7+\mathrm{j}20+1-\mathrm{j}8}\ \Omega=\frac{(167-\mathrm{j}36)(8-\mathrm{j}12)}{(8+\mathrm{j}12)(8-\mathrm{j}12)}\ \Omega$$

$$=\frac{904+\mathrm{j}2\ 292}{64+144}\ \Omega=(4.35-\mathrm{j}11.02)\ \Omega=R+\mathrm{j}X$$

在这一频率时，电抗分量变为负值，说明等效相量模型的两串联元件系阻抗为 4.35 Ω 的电阻和阻抗为 $-\mathrm{j}11.02\ \Omega$ 的电容。

$$Y(\mathrm{j}10)=\frac{1}{Z(\mathrm{j}10)}=\frac{1}{4.35-\mathrm{j}11.02}\ \mathrm{S}=\frac{4.35+\mathrm{j}11.02}{4.35^2+11.02^2}$$

$$=\frac{4.35+\mathrm{j}11.02}{140.36}\ \mathrm{S}=\left(\frac{4.35}{140.36}+\mathrm{j}\frac{11.02}{140.36}\right)\ \mathrm{S}$$

$$=(0.030\ 99+\mathrm{j}0.078\ 5)\ \mathrm{S}=G+\mathrm{j}B$$

并联相量模型中的两元件，其一为导纳等于 0.030 99 S 的电阻，另一为导纳等于 $\mathrm{j}0.078\ 5$ S 的电容。◀

给定含独立电源的单口网络 N_ω，也可运用戴维南定理及诺顿定理求得它的等效相量模型。下面举例说明。

例 8-19　用戴维南定理求图 8-39 所示相量模型中的电流 $\dot{I}_{2\mathrm{m}}$，已知 $\dot{U}_{\mathrm{sm}}=10\angle 0^\circ$ V。

解　求 $\dot{U}_{\mathrm{ocm}}$ 如图 8-40 所示，可得

$$\dot{U}_{\mathrm{ocm}}=10\angle 0^\circ\times\frac{-\mathrm{j}50}{100-\mathrm{j}50}\ \mathrm{V}=10\angle 0^\circ\times\frac{-\mathrm{j}}{2-\mathrm{j}}\ \mathrm{V}$$

$$=10\times\frac{\angle -90^\circ}{2.24\angle -26.6^\circ}\ \mathrm{V}=4.47\angle -63.4^\circ\ \mathrm{V}$$

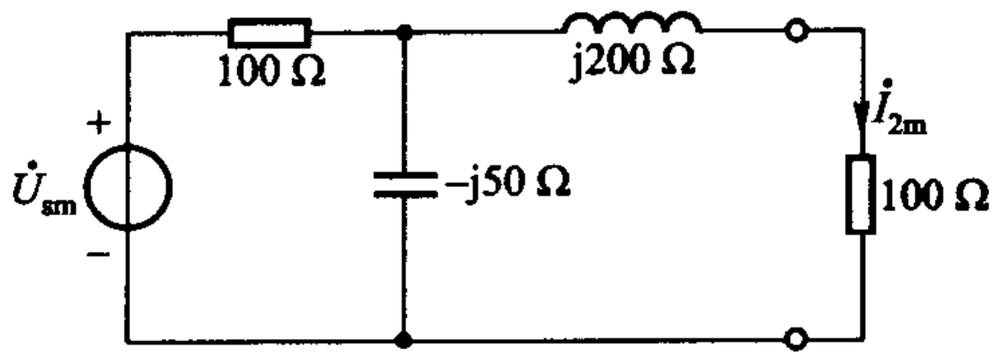


图 8－39　例 8－19

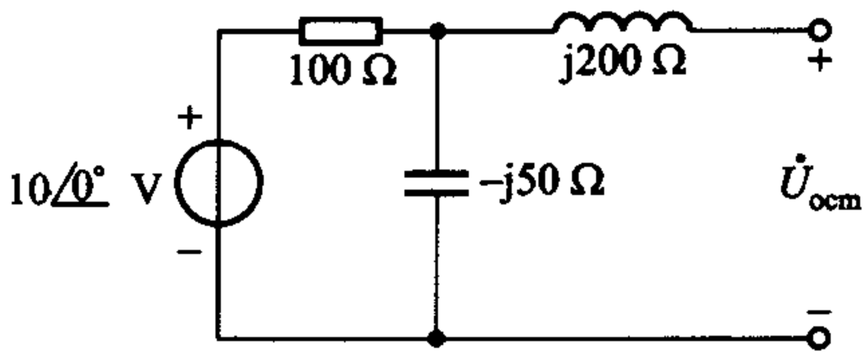


图 8－40　求 $\dot{U}_{ocm}$ 用图

求 Z_o

$$Z_o = \left[\text{j}200 + \frac{100(-\text{j}50)}{100-\text{j}50} \right] \Omega = \left(\text{j}200 + \frac{-\text{j}100}{2-\text{j}1} \right) \Omega$$

$$= \left[\text{j}200 + \frac{-\text{j}100(2+\text{j}1)}{5} \right] \Omega = \left(\text{j}200 + \frac{-\text{j}200+100}{5} \right) \Omega$$

$$= (\text{j}200 - \text{j}40 + 20)\ \Omega = (20 + \text{j}160)\ \Omega$$

得等效电路如图 8－41 所示。由此可得

$$\dot{I}_{2m} = \frac{4.47 \angle -63.4°}{20+\text{j}160+100}\ \text{A} = \frac{4.47 \angle -63.4°}{120+\text{j}160}\ \text{A}$$

$$= \frac{4.47 \angle -63.4°}{200 \angle 53.13°}\ \text{A} = 0.022\ 4 \angle -116.53°\ \text{A}$$

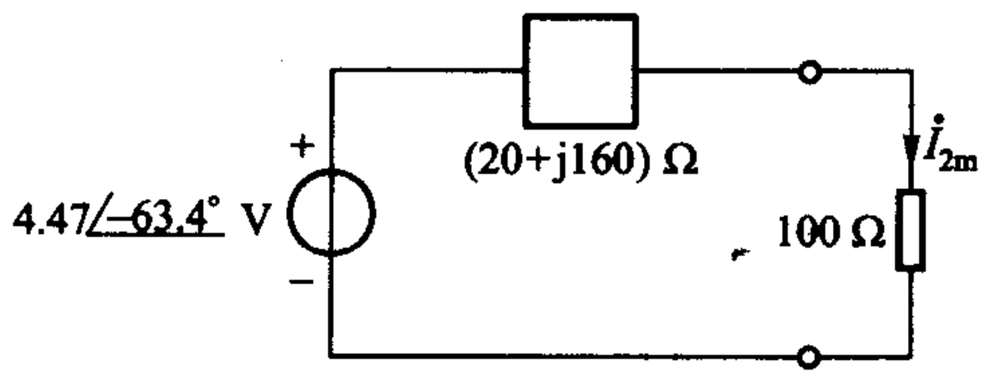


图 8－41　求 $\dot{I}_{2m}$ 的等效电路

思考题

8-8　(1) 若某电路的阻抗 $Z=(3+j4)\ \Omega$,则导纳为 $Y=\left(\frac{1}{3}+j\frac{1}{4}\right)$ S,对吗,为什么?

(2) 若某串联电路为电容性的,与其等效的并联电路,也一定是电容性的吗?

练习题

8-18　若在某频率时,图 8-42 所示相量模型的阻抗 $Z=(5+j10)\ \Omega$,问该频率时,等效的并联相量模型如何?

(部分答案:$R'=25\ \Omega$)

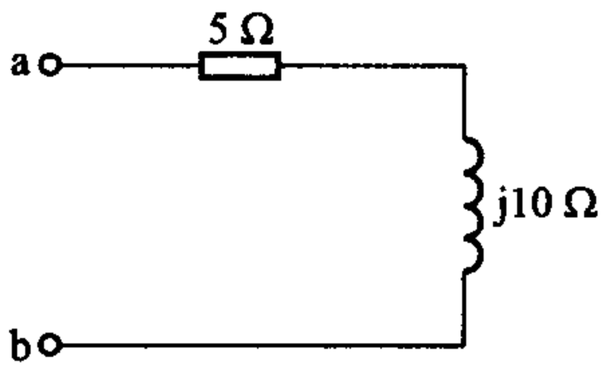


图 8-42　练习题 8-18

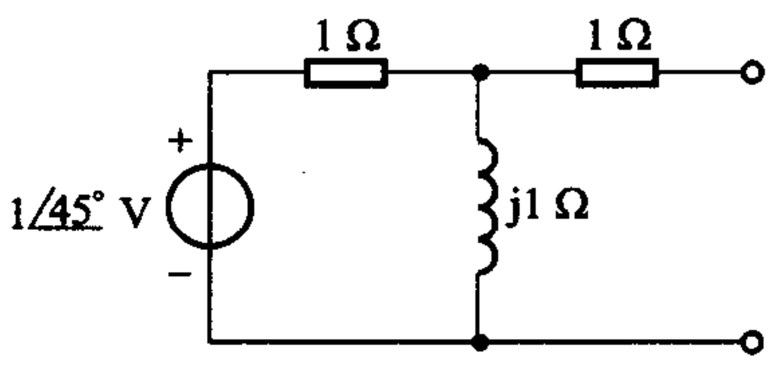


图 8-43　练习题 8-19

8-19　求图 8-43 所示电路的戴维南等效相量模型。

[$\dot{U}_{ocm}=1/\sqrt{2}\angle 90°$ V, $Z_o=(1.5+j0.5)\ \Omega$]

§8-11　有效值　有效值相量

相量分析法的主体已如以上几节所述。本章的最后部分将谈论相量分析法中的两类特殊问题,为此,本节又回到了正弦量的表示问题。

周期电流、电压的瞬时值是随时间而变化的,在电工技术中,往往并不需要知道它们每一瞬间的大小,在这种情况下,就需要为它们规定一个表征大小的特定值。用它们的平均值作为这一特定值是不合适的。例如,正弦波作为一类重要的周期波,在一个周期内的平均值为零。用它们的最大值也是不合适的,因为最大值只能表明某一瞬间的大小。

考虑到周期电流(电压)和直流电流(电压)施加于电阻时,电阻都要消耗电能,以此为依据,可以为周期波规定一个表征其大小的特定值。设有两个相同的电阻 R,分别通以周期电流 i 和直流电流 I。当周期电流 i 流过电阻 R 时,该电阻在一个周期 T 内所消耗的电能为

$$\int_0^T p(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^T i^2R\,\mathrm{d}t=R\int_0^T i^2\,\mathrm{d}t \tag{8-63}$$

当直流电流 I 流过电阻 R 时，在相同的时间 T 内消耗的电能为

$$PT = RI^2T \tag{8-64}$$

如果在周期电流的一个周期（或其任意整数倍）的时间内，这两个电阻 R 消耗的电能相等，也就是说，就平均作功能力来说，这两个电流是等效的，则该直流电流 I 的数值可用以表征周期电流 i 的大小，这一特定的数值 I 称为周期电流 i 的有效值（effective value）。如令以上两式相等，就可得到周期电流 i 的有效值的定义式，亦即

$$RI^2T = R\int_0^T i^2\,\mathrm{d}t \tag{8-65}$$

或

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2\,\mathrm{d}t} \tag{8-66}$$

由（8-66）式所示的有效值定义可知：周期电流的有效值等于它的瞬时值的平方在一个周期内积分的平均值再取平方根，因此，有效值又称为方均根值（root-mean-square value）。

类似地，可得周期电压 u 的有效值

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2\,\mathrm{d}t} \tag{8-67}$$

按照国内惯例，本书用不加下标的大写字母表示有效值。

把有效值的定义式运用于正弦电流

$$i = I_\mathrm{m}\cos(\omega t + \psi_i)$$

可得

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_\mathrm{m}^2\cos^2(\omega t + \psi_i)\,\mathrm{d}t} \\ &= \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \frac{I_\mathrm{m}^2}{2}[\cos(2\omega t + 2\psi_i) + 1]\,\mathrm{d}t} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}I_\mathrm{m} = 0.707I_\mathrm{m} \end{aligned} \tag{8-68}$$

类似地，可得

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}U_\mathrm{m} = 0.707U_\mathrm{m} \tag{8-69}$$

由此可见：正弦波的有效值为其振幅的$\frac{1}{\sqrt{2}}$有效值可代替振幅作为正弦量的一个特征。

必须指出：大部分使用于 50 Hz 的交流仪表测读的都是有效值。50 Hz 的电

压或电流如不加申明通常都是指有效值，例如，我们日常生活中用的交流电为 200 V，指的就是有效值，其振幅为$\sqrt{2}\times 200\ \text{V}=311\ \text{V}$。

引用有效值后，以电压为例，正弦波也可表示为

$$\begin{aligned} u(t) &= U_{\text{m}}\cos(\omega t+\psi_u) \\ &= \sqrt{2}U\cos(\omega t+\psi_u) \end{aligned} \tag{8-70}$$

对应的电压振幅相量则可表示为

$$\dot{U}_{\text{m}} = U_{\text{m}}\angle\psi_u = \sqrt{2}U\angle\psi_u \tag{8-71}$$

在正弦稳态电路的计算问题中，有时我们关心的是正弦量的有效值，因此，把上式中的复数$U\angle\psi_u$定义为电压有效值相量，记为$\dot{U}$，这就是说，电压有效值相量为

$$\dot{U} = U\angle\psi_u \tag{8-72}$$

它是一个复数，它的模为正弦电压的有效值，它的辐角为正弦电压的初相。

§8-3 定义的电压振幅相量$\dot{U}_{\text{m}}$与此处定义的电压有效值相量$\dot{U}$的关系为

$$\dot{U}_{\text{m}} = \sqrt{2}\dot{U} \tag{8-73}$$

今后，除非特别声明，本书所给定的相量均系指有效值相量[①]。在不致引起误解时虽也可把振幅相量简称相量，但在采用符号表示时，需加下标 m，或加声明，已如以上各节所示。相量图则可用有效值相量绘制。由于两种相量仅有常数$\sqrt{2}$的差别，故KCL、KVL以及阻抗、导纳的定义式，对有效值相量仍成立。即

由(8-13)、(8-14)两式可得

$$\sum_{k=1}^{K}\dot{I}_k = 0 \tag{8-74}$$

$$\sum_{k=1}^{K}\dot{U}_k = 0 \tag{8-75}$$

由(8-35)、(8-44)两式得

$$\dot{U} = Z\dot{I} \tag{8-76}$$

---

① 有关振幅相量和有效值相量：《中华人民共和国标准有关电路和磁路的基本规定》(GB8445—87)和IEC(国际电工委员会)同样内容的基本规定(1972)，均明确这两种相量在表征时间 t 的正弦函数上，具有同等地位。我国教材以采用有效值相量为主，不加下标；美国教材基本上采用振幅相量，不加下标，有效值加下标。本书根据具体情况，加以选用。例如，已知正弦激励的瞬时值表示式，需求响应的瞬时值表示式时，一般采用振幅相量，如以上各节所述，这样往往可避免先除以$\sqrt{2}$，最后又乘以$\sqrt{2}$的运算。$\sqrt{2}$为一无理数，在不可避免的反复运算过程中易累积误差。

$$\dot{I} = Y\dot{U} \tag{8-77}$$

式中基本元件的阻抗 Z 和导纳 Y 仍如 §8-8 中表 8-1 所示。

例 8-20　已知 $\dot{U}_1 = 50 \angle -30°$ V、$\dot{U}_2 = 220 \angle 150°$ V、$f = 50$ Hz，试写出它们所代表的正弦电压。

解　由给定的相量可知

$$U_1 = 50 \text{ V}, U_{1m} = 50\sqrt{2} \text{ V}, \psi_1 = -30°$$

$$U_2 = 220 \text{ V}, U_{2m} = 220\sqrt{2} \text{ V}, \psi_2 = 150°$$

又　　$\omega = 2\pi f = 100\pi$

故得

$$u_1(t) = 50\sqrt{2}\cos(100\pi t - 30°) \text{ V}$$

$$u_2(t) = 220\sqrt{2}\cos(100\pi t + 150°) \text{ V}$$

例 8-21　相量模型如图 8-44 所示，已知 $\dot{U}_s = 10 \angle 0°$ V，试求 $\dot{I}_1$、$\dot{I}_2$、$\dot{I}_3$ 和 $\dot{U}_1$、$\dot{U}_2$；如已知 $\omega = 1$ rad/s，试求 i_1、i_2、i_3 和 u_1、u_2。

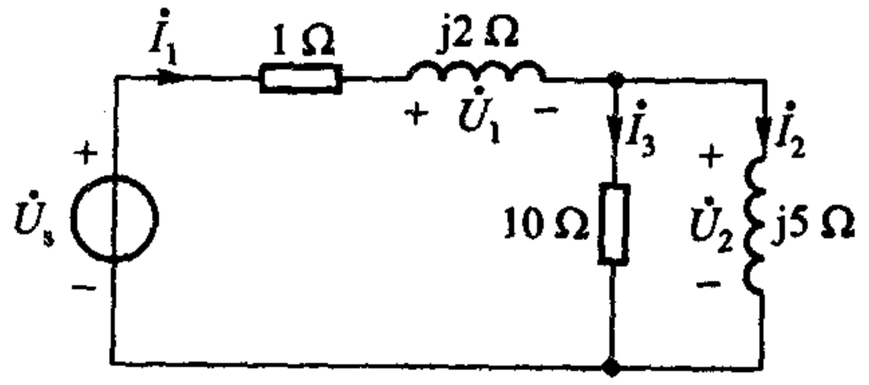


图 8-44　例 8-21

解　本题相量模型中各电压、电流为有效值相量，已如采用的符号所示。电路对电源的等效阻抗为

$$Z = \left(1 + \text{j}2 + \frac{10 \times \text{j}5}{10 + \text{j}5}\right) \Omega$$

$$= (1 + \text{j}2 + \text{j}4 + 2) \ \Omega$$

$$= (3 + \text{j}6) \ \Omega$$

$$\dot{I}_1 = \frac{10 \angle 0°}{3 + \text{j}6} \text{ A} = 1.491 \angle -63.43° \text{ A}$$

由分流规律得

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_1 \times \frac{10}{10 + \text{j}5} = 1.334 \angle -90° \text{ A}$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_1 \times \frac{\text{j}5}{10 + \text{j}5} = 0.666\,8 \angle 0° \text{ A}$$

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1(\text{j}2 \ \Omega) = 2.982 \angle 90° \text{ V}$$

$$\dot{U}_2 = \dot{I}_3(10 \ \Omega) = 6.668 \angle 0° \text{ V}$$

求得各相量均为有效值相量。

当 $\omega = 1$ rad/s 时，有

$$i_1(t) = \sqrt{2} \times 1.491\cos(t - 63.43°) = 2.108\cos(t - 63.43°) \text{ A}$$

$$i_2(t) = \sqrt{2} \times 1.334\cos(t - 90°) = 1.886\sin t \text{ A}$$

$$i_3(t) = \sqrt{2} \times 0.666\ 8\cos t = 0.942\ 8\cos t \text{ A}$$

$u_1(t)$和 $u_2(t)$从略，试自行写出。

练习题

8－20　求代表下列各正弦波的相量$\left[\text{以}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\angle 0°\text{代表 cos}(\omega t)\right]$，并绘相量图：

(1) $5\sin(\omega t + 30°)$；(2) $-8\cos(\omega t - 45°)$；(3) $-6\sin(\omega t - 120°)$。

8－21　若 I 为流过电阻 R 的正弦电流的有效值，试证明：R 的平均功率 $P = RI^2$。

8－22　求下列各相量所代表的正弦电压或电流，已知 $f = 50$ Hz：

(1) $\dfrac{10}{\sqrt{2}}\angle 30°$ V；(2) $-0.25\angle -30°$ V；(3) $-0.69\angle 30°$ A。

§8－12　两类特殊问题　相量图法

在电工、电子技术中往往会遇到只要计算有效值的问题和只要计算相位差的两类特殊问题。本来在相量法的第二步中即可得到所需结果，似毋需专节讨论，然由于对这类问题，初学者常易出错，更重要的是通过本节将推出适合求解这类问题的相量图法，因此，本节并非多余。

相量图在前几节中早已用过，但只是在问题已经解决后，根据答案绘制，起着陪衬作用，直观地显示出各正弦电压、电流的相位关系。下面即将介绍的相量图法，顾名思义，乃是先定性地画出相量图，然后根据图形的特征解决问题。相应地，把以前根据相量方程求解问题的方法称为相量解析法。其实，两者均属相量法的范畴，依据是共同的，都是依据两类约束的相量形式。

相量图法中相量采用有效值相量为宜。

例 8－22　图 8－45(a)所示电路 $u_S(t) = \sqrt{2}U_S\cos(\omega t)$，求输出电压 $u_O(t)$ 对 $u_S(t)$ 的相位关系。

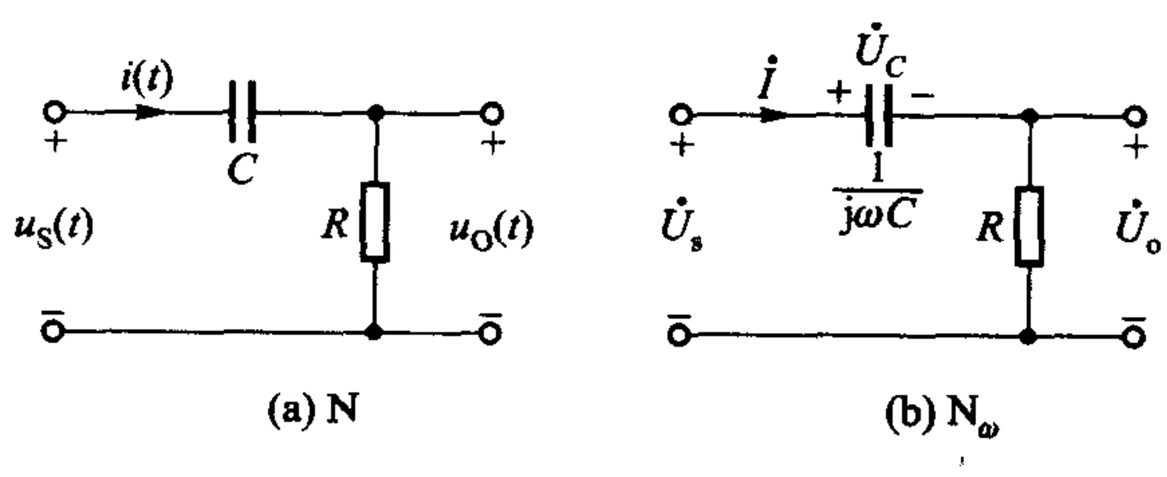


图 8－45　例 8－22

解一　本题电路实际上是一个 *RC* 串联电路，输出电压取自电阻两端。先用相量图法解。此时相量图只能定性而不能定量地绘制。

画相量模型如图 8－45(b)所示，其中 $\dot{U}_s = U_s \angle 0°$。可依照以下步骤，逐个绘出相量：

(1) 串联电路宜从电流相量下手，即首先绘电流相量 $\dot{I}$，一般绘在正实轴上。见图 8－46，“①”表示第一笔画。称为参考相量。

(2) 利用元件电压、电流的相位关系绘出各元件的电压相量。电阻元件的电压 $\dot{U}_o$ 应与 $\dot{I}$ 同相；电容元件的电压 $\dot{U}_C$ 应滞后 $\dot{I}$ 的角度为 90°，得图中的②和③。

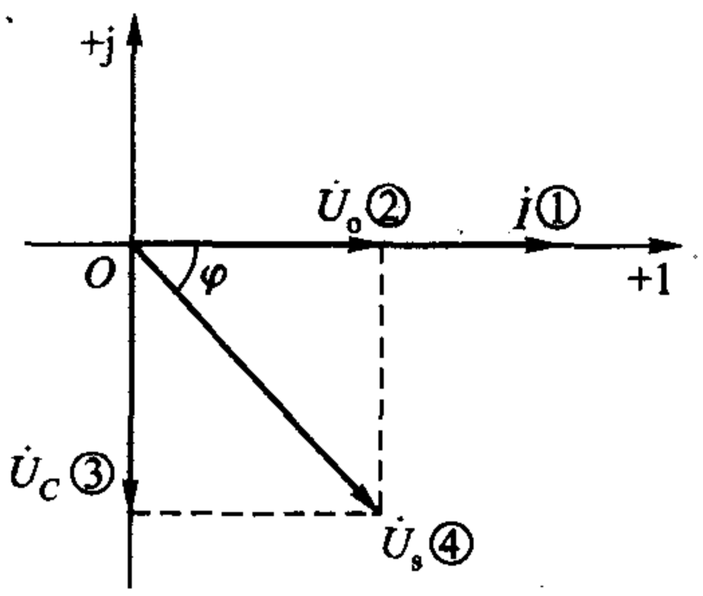


图 8－46　例 8－22 相量图的绘制

(3) 根据 KVL，可知

$$\dot{U}_s = \dot{U}_o + \dot{U}_C$$

因此，$\dot{U}_s$ 应为 $\dot{U}_o$ 与 $\dot{U}_C$ 的相量和。

绘相量图的依据无非还是两类约束，就元件来说，特别要用到电压、电流的相位约束关系。至于从何下手，则是一个如何便于绘制的技巧问题。

绘出相量图后，显然可见 $\dot{U}_o$ 总是超前 $\dot{U}_s$ 的。相位差角 φ 也可在相量图上利用几何、三角关系求得。相量 $\dot{U}_o$ 的长度为 RI，相量 $\dot{U}_C$ 的长度为 $\dfrac{I}{\omega C}$。由相量图中 $\dot{U}_o$、$\dot{U}_C$、$\dot{U}_s$ 构成的直角三角形可知

$$\tan\varphi = \frac{U_C}{U_o} = \frac{\dfrac{I}{\omega C}}{RI} = \frac{1}{\omega CR}$$

故得

$$\varphi = \arctan\left(\frac{1}{\omega CR}\right)$$

解二　用相量解析法。由相量模型图 8－45(b)，根据串联电路分压关系可知

$$\dot{U}_o = \dot{U}_s \frac{R}{R - \mathrm{j}\dfrac{1}{\omega C}}$$

$$= \dot{U}_s \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \angle -\arctan\left(\frac{1}{\omega CR}\right)}$$

$$= U_o \angle \arctan\left(\frac{1}{\omega CR}\right) = U_o \angle \psi_o$$

把 $R - j\frac{1}{\omega C}$ 化为极坐标形式时，其幅角为 $\arctan\left(\frac{-\frac{1}{\omega C}}{R}\right)$。由于虚部是负，实部为正，可断定幅角是在第Ⅳ象限，故幅角可写作 $-\arctan\left(\frac{\frac{1}{\omega C}}{R}\right) = -\arctan\left(\frac{1}{\omega CR}\right)$。

上式中 U_o 为输出电压 u_o 的有效值

$$U_o = \frac{U_s R}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

ψ_o 为输出电压 u_o 的初相

$$\psi_o = \arctan\left(\frac{1}{\omega CR}\right)$$

故知相位差角

$$\varphi = \psi_o - \psi_s = \arctan\left(\frac{1}{\omega CR}\right) > 0$$

$\varphi > 0$，说明 $\psi_o > \psi_s$，即相量图如图 8－47 所示，输出电压超前输入电压。因此，u_o 与 u_s 的相位关系为：u_o 总是超前 u_s，超前的角度 $\varphi = \arctan\left(\frac{1}{\omega CR}\right)$，介于 0°与 90°之间。

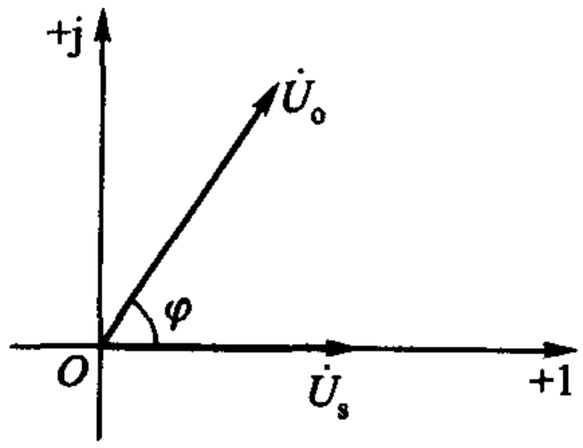


图 8－47　例 8－22 解二相量图

当 $\omega \to \infty$，$\varphi \to 0°$；$\omega \to 0$，$\varphi \to 90°$。

注意：由于 u_o 与电流 i 同相（u_o 是电阻电压），因此 u_o 超前 u_s 角 φ，也就是 i 超前 u_s 角 φ，φ 介于 0°与 90°之间。要特别注意：u_s 不是电容两端电压，而是电容与电阻串联组合两端的电压，因而电流虽然仍超前电压，但超前角度并非 90°。

例 8－23　图 8－48(a)所示正弦稳态电路中，电流表 A_1、A_2 的指示均为有效值，求电流表 A 的读数。

解一　在解题时，初学者往往容易发生这样的错误：认为电流表 A 的读数

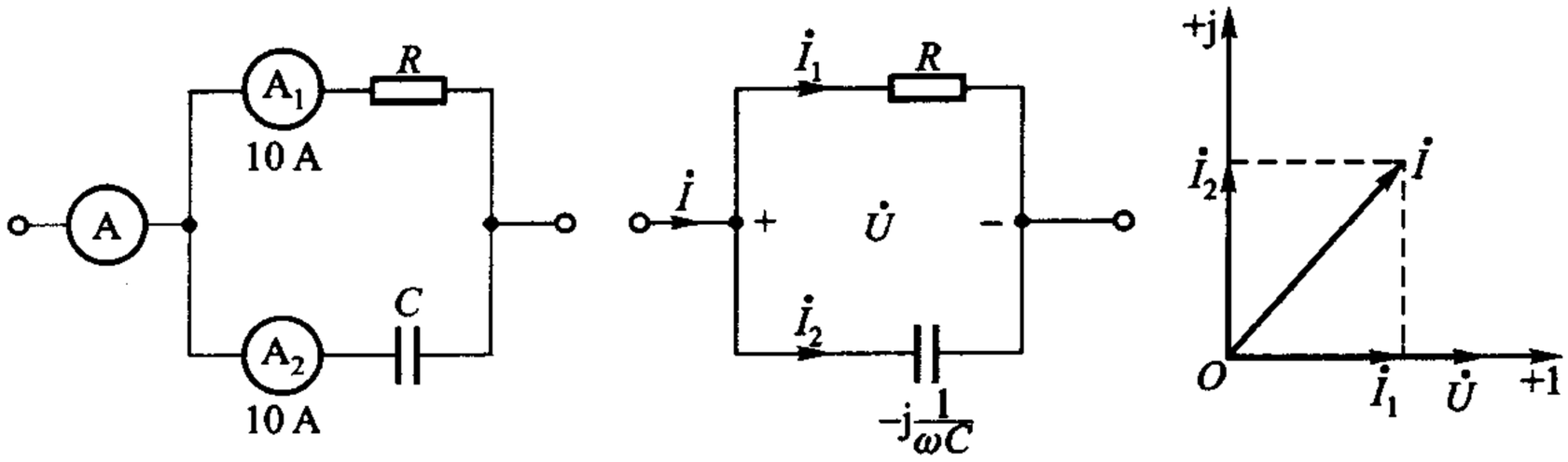


图 8－48　例 8－23

是 10 A + 10 A = 20 A。实际上汇集在节点处电流的有效值一般是不满足 KCL 的，满足 KCL 的是电流有效值相量！

电路如图 8－48(b)所示，其中电流、电压均用相量表示。设并联支路电压 $\dot{U} = U\angle 0°$，则

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{R} = \frac{U\angle 0°}{R} = \frac{U}{R}\angle 0° = I_1\angle 0°$$

电流表 A_1 的读数为正弦电流 i_1 的有效值，即 $I_1 = 10$。故得

$$\dot{I}_1 = 10\angle 0°\ \text{A}$$

又

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}}{-\text{j}\dfrac{1}{\omega C}} = U\omega C\angle 90° = I_2\angle 90°\ \text{A}$$

根据电流表 A_2 的读数可知 $I_2 = 10$ A。故得

$$I_2 = 10\angle 90°\ \text{A} = \text{j}10\ \text{A}$$

由 KCL 可知

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = (10 + \text{j}10)\ \text{A} = 10\sqrt{2}\angle 45°\ \text{A}$$

其有效值为 $10\sqrt{2}$ A = 14.1 A，即电流表 A 的读数应为 14.1 A。

解二　利用相量图求解。

在水平方向作 $\dot{U}$ 相量，其初相为零，称为参考相量。因电阻的电压、电流同相，故相量 $\dot{I}_1$ 与 $\dot{U}$ 同相；因电容的电流超前电压 90°，故相量 $\dot{I}_2$ 垂直 $\dot{U}$ 且处于超前 $\dot{U}$ 的位置。根据已知条件，相量 $\dot{I}_1$、$\dot{I}_2$ 的长度相等，都等于 10。由这两相量所构成的平行四边形的对角线确定了相量 $\dot{I}$，且由相量图的几何关系可知

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2} = \sqrt{2\times 10^2}\ \text{A} = 10\sqrt{2}\ \text{A}$$

故得电流表 A 的读数为 $10\sqrt{2}$ A，即 14.1 A。

例 8－24　并联电路如图 8－49 所示，用相量图表明各电流相量的相位关系。

解　并联电路宜从两端电压下手。先画相量 $\dot{U}_s$（图 8－50）。再画并联支路电流相量 $\dot{I}_1$ 和 $\dot{I}_2$。$\dot{I}_1$ 和 $\dot{U}_s$ 同相，因为该支路是电阻元件组成的。画 $\dot{I}_2$ 时，要注意它和 $\dot{U}_s$ 的相位关系，不能说 $\dot{I}_2$ 超前 $\dot{U}_s$ 的角度为 90°。$\dot{I}_2$ 确实超前电容电压 90°，但 $\dot{U}_s$ 并非电容两端的电压，而是电容－电阻两端的电压。$\dot{I}_2$ 虽超前 $\dot{U}_s$，但并非 90°（参看例 8－22）。故绘 $\dot{I}_2$ 如图 8－50 中所示，具体角度不定（视元件参数及频率而定），但必然在第 I 象限内。最后，由 KCL 知 $\dot{I}=\dot{I}_1+\dot{I}_2$，求 $\dot{I}_1$ 和 $\dot{I}_2$ 的相量和，即得 $\dot{I}$。

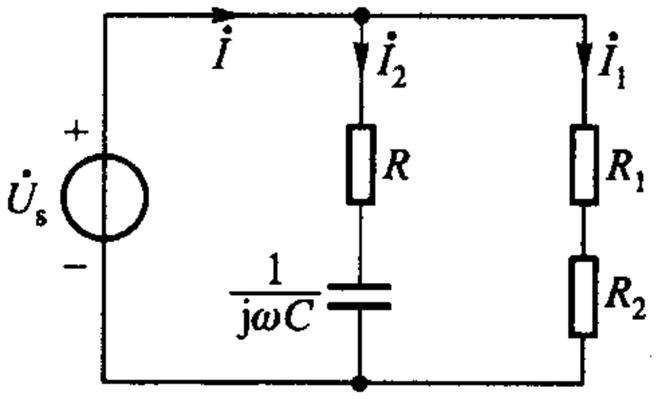


图 8－49　例 8－24

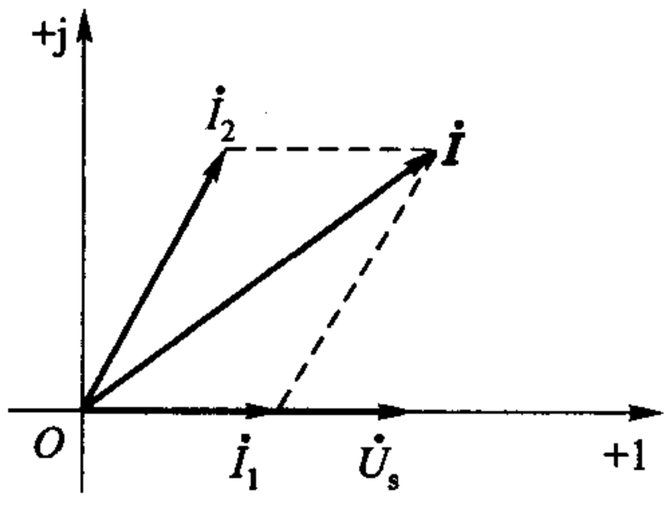


图 8－50　例 8－24 相量图

例 8－25　为测定某电感线圈的参数 L 和 R，可把该线圈与一已知电阻 R_1 串联后接在正弦交流电源两端。用交流电压表测得电感线圈、电阻 R_1 和电源两端的电压分别为 80 V、50 V 和 100 V，如图 8－51 所示。已知：$R_1=25\ \Omega$，电源的角频率为 314 rad/s。交流电压表测读有效值。试求线圈的参数 L 和 R。（图 8－51 只用以表明各部分电压的有效值，慎勿将该图当作相量模型或时域模型。）

解　以电流 $\dot{I}$ 为参考相量，绘相量图，I 为电流 $i(t)$ 的有效值，其值为 $\frac{50}{25}$ A＝2 A。与 $\dot{I}$ 同相作线段 $\overline{OB}$，此即为已知电阻 R_1 的电压相量，其值为 50 V，分别以 O、B 为圆心，对应于 100 V 和 80 V 的长度为半径作弧相交于 A 点，电压三角形 OAB 表明了线圈电压，已知电阻电压和电源电压的相量关系，即 $\overline{OB}$ 和 $\overline{BA}$ 的相量和为 $\overline{OA}$，如图 8－52 所示。

由余弦定理可以求得电源电压与电流的相位差角 φ。即由

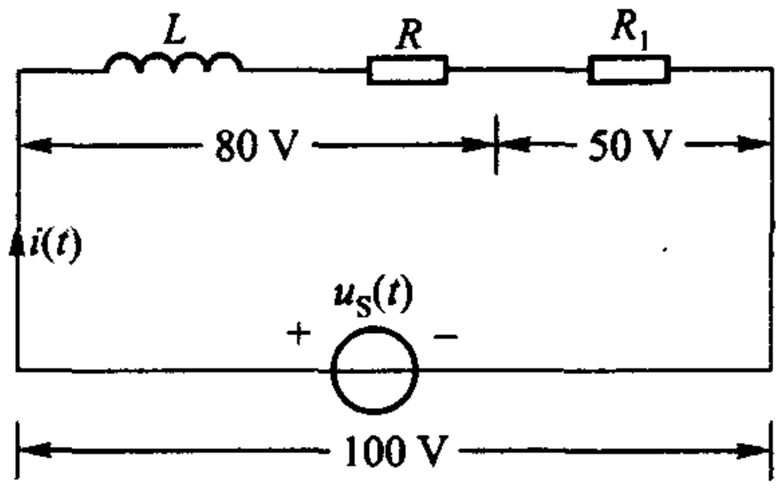


图 8－51　例 8－25

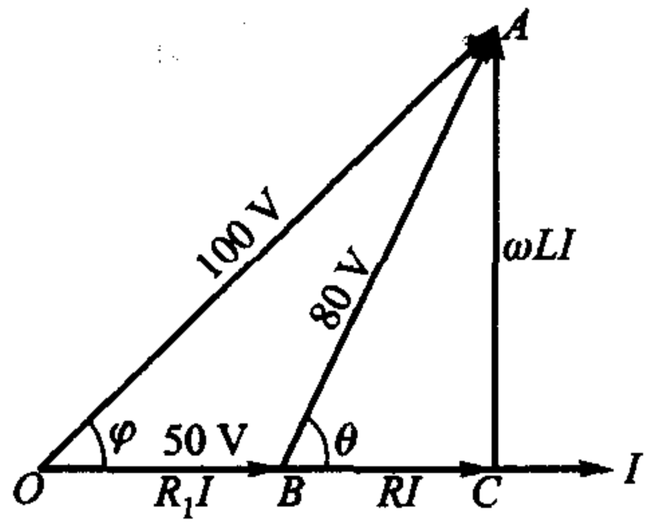


图 8－52　例 8－25 相量图

$$80^2 = 100^2 + 50^2 - 2 \times 100 \times 50\cos\varphi$$

解得

$$\cos\varphi = 0.61$$

故

$$\varphi = 52.4°$$

如果绘制电压三角形 OAB 时，各边长度比例足够准确，则 φ 角也可由量角器测得。

待测线圈的电压三角形 BCA 反映出线圈电压 $\overline{BA}$ 应为其电阻部分电压 RI（$\overline{BC}$）与电感部分电压 ωLI（$\overline{CA}$）的相量和，$\overline{BC}$ 与电流相量同相，$\overline{CA}$ 则与电流相量垂直。

在直角三角形 OCA 中

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} = \cos\varphi = 0.61$$

得

$$\overline{OC} = \overline{OA} \times 0.61 = 100 \times 0.61\ \text{V} = 61\ \text{V}$$

因而

$$\overline{BC} = (61 - 50)\ \text{V} = 11\ \text{V}$$

故得

$$R = \frac{11}{2}\ \Omega = 5.5\ \Omega$$

又

$$\frac{\overline{CA}}{100} = \sin\varphi = \sin 52.4° = 0.792\ 3$$

得

$$\overline{CA} = 100 \times 0.792\ 3\ \text{V} = 79.23\ \text{V}$$

故得

$$\omega L = \frac{79.23}{2}\ \Omega = 39.62\ \Omega$$

$$L = \frac{39.62}{314}\ \text{H} = 126\ \text{mH}$$

本题如用相量解析法解，可进行如下：令 $\dot{I}=2\angle 0°$，由

$$\dot{I}\ (R+R_1+\mathrm{j}\omega L)=100\angle\varphi$$

和

$$\dot{I}\ (R+\mathrm{j}\omega L)=80\angle\theta$$

得

$$2\sqrt{(R+R_1)^2+(\omega L)^2}=100^2 \qquad \text{(a)}$$

$$2\sqrt{R^2+(\omega L)^2}=80^2 \qquad \text{(b)}$$

联立(a)、(b)两式，可解得 R 和 L。

思考题

8－9　若同频率正弦电流 $i_1(t)$ 及 $i_2(t)$ 的有效值为 I_1 及 I_2，$i_1(t)+i_2(t)$ 的有效值为 I，问下列关系是否可能存在？

(1) $I_1+I_2=I$；

(2) $I_1-I_2=I$；

(3) $I_1^2+I_2^2=I^2$。

8－23　图 8－53 所示电路中，各电压表指示有效值，试求电压表 V_2 的读数。

(80 V)

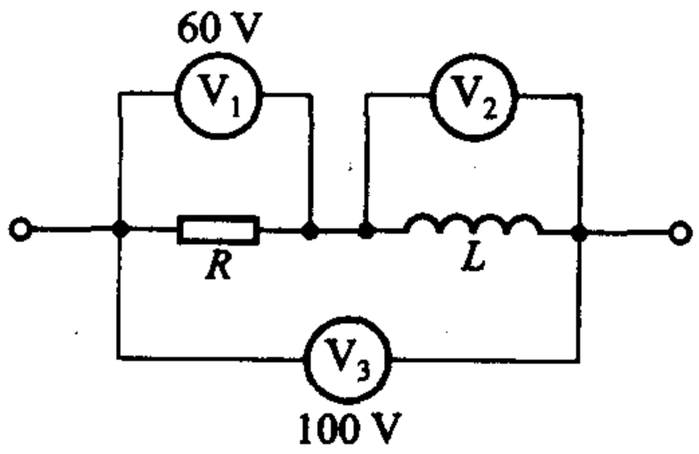


图 8－53　练习题 8－23

习题

§8－2　复数

8－1　计算以下各式：

(1) $6\angle 15° - 4\angle 40° + 7\angle -60°$;

(2) $\dfrac{(10+j33)(4+j5)(6-j4)}{7+j3}$;

(3) $(2+3\angle 60°)(3\angle 150° + 3\angle 30°)$;

(4) $\dfrac{-j17 + \dfrac{4}{j} + 5\angle 90°}{2.5\angle 45° + 2.1\angle -30°}$。

8-2　若 $100\angle 0° + A\angle 60° = 173\angle \theta$,试求 A 和 θ。

§8-3　振幅相量

8-3　(1) 求对应于下列正弦量的振幅相量:

(a) $4\cos(2t) + 3\sin(2t)$;(b) $-6\sin(5t - 75°)$。

(2) 求下列振幅相量对应的正弦量:

(a) $6 - j8$;(b) $-8 + 6j$;(c) $-j10$。

§8-4　相量的线性性质和基尔霍夫定律的相量形式

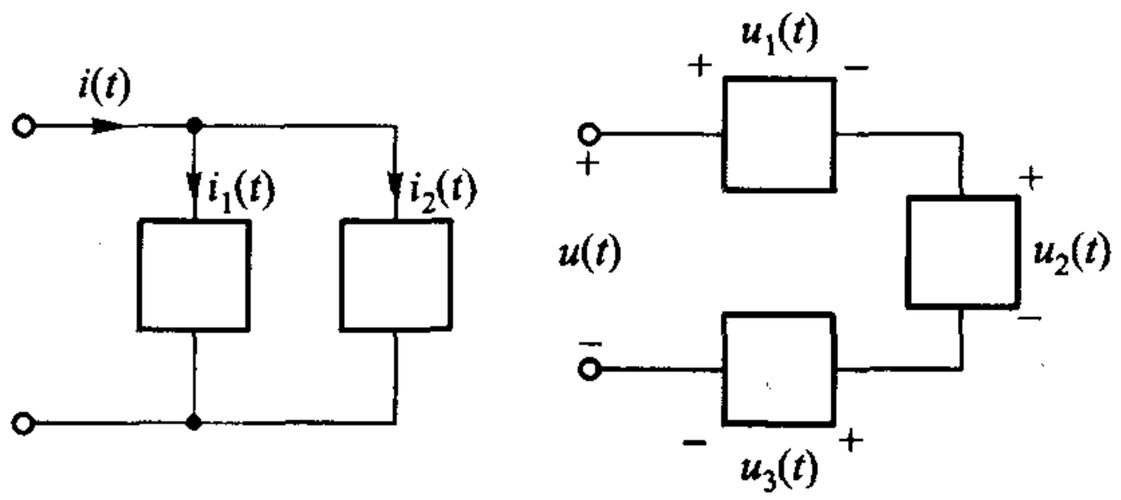
8-4　若 $i_1(t) = \sqrt{2}\cos(\omega t)$ A;$i_2(t) = -\sqrt{6}\sin(\omega t)$ A,求 $i_1(t) + i_2(t)$。

8-5　若 $100\cos(\omega t) = f(t) + 30\sin(\omega t) + 150\sin(\omega t - 210°)$,试利用相量求解 $f(t)$。

8-6　若 $f_1(t) = 6\cos(\omega t - 72°)$,$f_2(t) = 12\sin(\omega t + 150°)$,求 $f_1(t) + f_2(t)$ 及 $f_1(t) - f_2(t)$ 的最大值。

8-7　(1) 已知图题 8-1(a) 中,$i_1(t) = 10\cos(\omega t + 36.86°)$ A,$i_2(t) = 6\cos(\omega t + 120°)$ A,求 $i(t)$ 并绘相量图。

(2) 已知图题 8-1(b) 中,$u_1(t) = 80\cos(\omega t + 36.86°)$ V,$u_2(t) = 60\cos(\omega t + 126.9°)$ V,$u_3(t) = 120\cos(\omega t - 53.13°)$ V,求 $u(t)$ 并绘相量图。



(a)　　(b)

图题 8-1

8-8　已知电路有 4 个节点 1、2、3、4,$\dot{U}_{12} = (20 + j50)$ V、$\dot{U}_{32} = (-40 + j30)$ V、$\dot{U}_{34} = 30\angle 45°$ V,各相量均为振幅相量,省略下标 m。求在 $\omega t = 30°$ 时,u_{14} 为多少? u_{14} 的振幅是多少?

§8-5　三种基本电路元件 VCR 的相量形式

8-9　已知元件 A 的正弦电压 $u(t)=12\cos(1\,000t+30°)$ V，求流过元件 A 的正弦电流 $i(t)$，若 A 为：(1) 电阻，且 $R=4$ kΩ；(2) 电感，且 $L=20$ mH；(3) 电容，且 $C=1$ μF。绘三种情况的相量图。

8-10　已知元件 A 为电阻或电感或电容，若其两端电压、电流各如下列情况所示，试确定元件的参数 R、L、C。

(1) $u(t)=1\,600\cos(628t+20°)$ V，$i(t)=4\cos(628t-70°)$ A；

(2) $u(t)=70\cos(314t+30°)$ V，$i(t)=7\sin(314t+120°)$ A；

(3) $u(t)=300\cos\left(1\,000t+\dfrac{\pi}{4}\right)$ V，$i(t)=60\cos(1\,000t+45°)$ A；

(4) $u(t)=250\cos(200t+50°)$ V，$i(t)=0.5\cos(200t+140°)$ A；

(5) $u(t)=3\,800\sin(400t+60°)$ V，$i(t)=4\cos(400t+60°)$ A。

§8-6　VCR 相量形式的统一——阻抗和导纳的引入

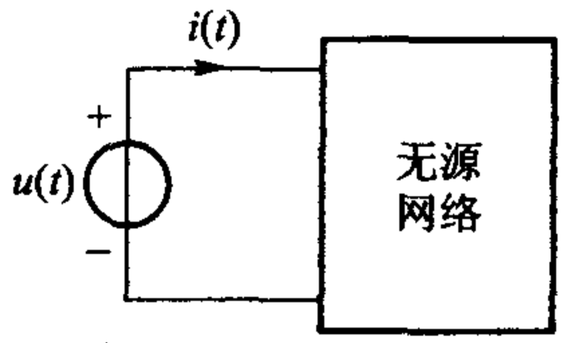
8-11　已知图题 8-2 所示无源网络两端的电压 $u(t)$ 和电流 $i(t)$ 各如下式所示。试求每种情况时的阻抗及导纳。

(1) $u(t)=200\cos(314t)$ V，$i(t)=10\cos(314t)$ A；

(2) $u(t)=10\cos(10t+45°)$ V，$i(t)=2\cos(10t+35°)$ A；

(3) $u(t)=100\cos(2t+30°)$ V，$i(t)=5\cos(2t-60°)$ A；

(4) $u(t)=40\cos(100t+17°)$ V，$i(t)=8\cos(100t)$ A；



图题 8-2

(5) $u(t)=100\cos(\pi t-15°)$ V，$i(t)=\sin(\pi t+45°)$ A；

(6) $u(t)=[-5\cos(2t)+12\sin(2t)]$ V，$i(t)=1.3\cos(2t+40°)$ A；

(7) $u(t)=\mathrm{Re}[\mathrm{j}e^{\mathrm{j}2t}]$ V，$i(t)=\mathrm{Re}[(1+\mathrm{j})e^{\mathrm{j}(2t+30°)}]$ mA。

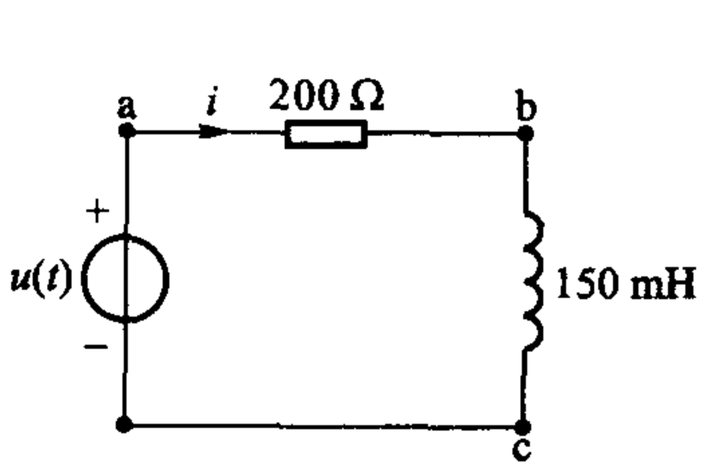
§8-7　正弦稳态电路与电阻电路分析方法的类比——相量模型的引入

8-12　正弦稳态电路如图题 8-3 所示，已知 $u(t)=200\cos\left(1\,000t+\dfrac{\pi}{4}\right)$ V。

(1) 求振幅相量 $\dot{U}_{abm}$、$\dot{U}_{bcm}$、$\dot{I}_m$，绘相量图；

(2) 求 u_{ab}、u_{bc} 和 i；

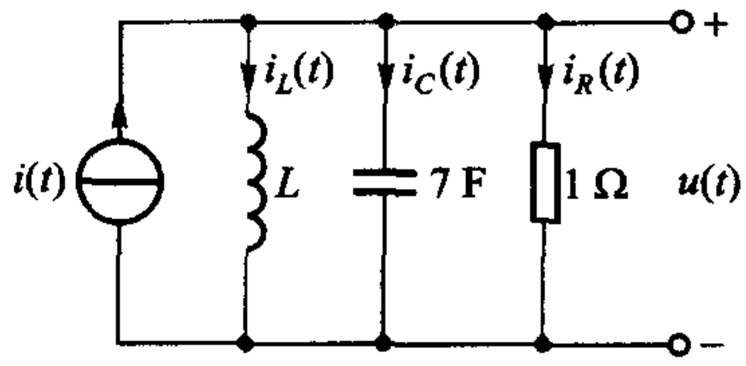
(3) 计算 u_{ab} 和 u_{bc} 间的相位差。



图题 8-3

8-13　图题 8-4 所示电路中，施加于电路

的电流源电流为 $i(t)=(8\cos t-11\sin t)$ A，已知电压 $u(t)=(\sin t+2\cos t)$ V。求 $i_R(t)$、$i_C(t)$、$i_L(t)$以及 L，并绘出相量图。

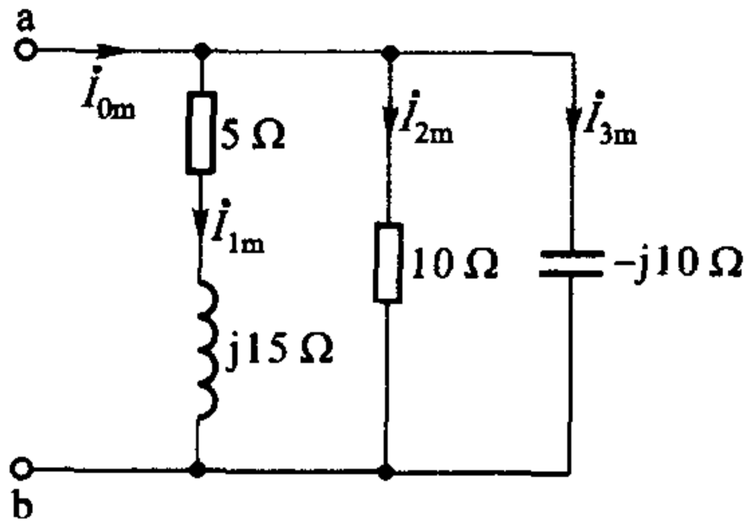


图题 8－4

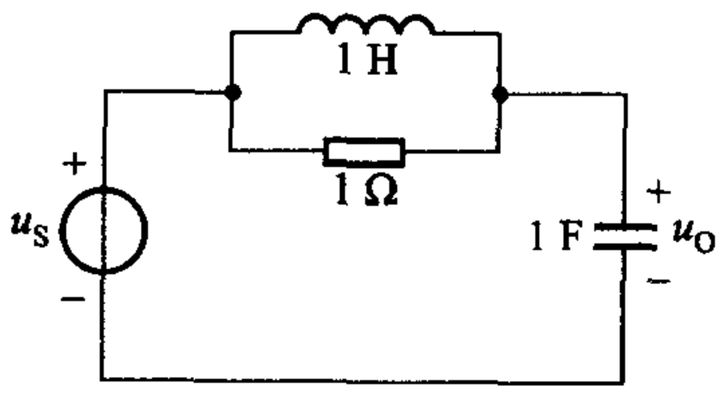
§8－8　正弦稳态混联电路的分析

8－14　电路的相量模型如图题 8－5 所示。已知 ab 端电压的振幅相量为(100 + j0) V。求振幅相量 $\dot{I}_{1m}$、$\dot{I}_{2m}$、$\dot{I}_{3m}$和 $\dot{I}_{0m}$并绘相量图、应显示 $\dot{U}_{abm}$和 $\dot{I}_{0m}$的相位关系以及 $\dot{I}_{0m}=\dot{I}_{1m}+\dot{I}_{2m}+\dot{I}_{3m}$的关系。

8－15　图题 8－6 所示电路中 $u_S(t)=U_{Sm}\cos t$，求 $u_0(t)$。

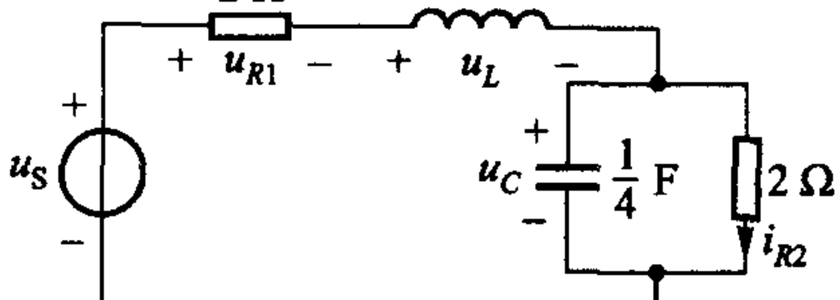


图题 8－5



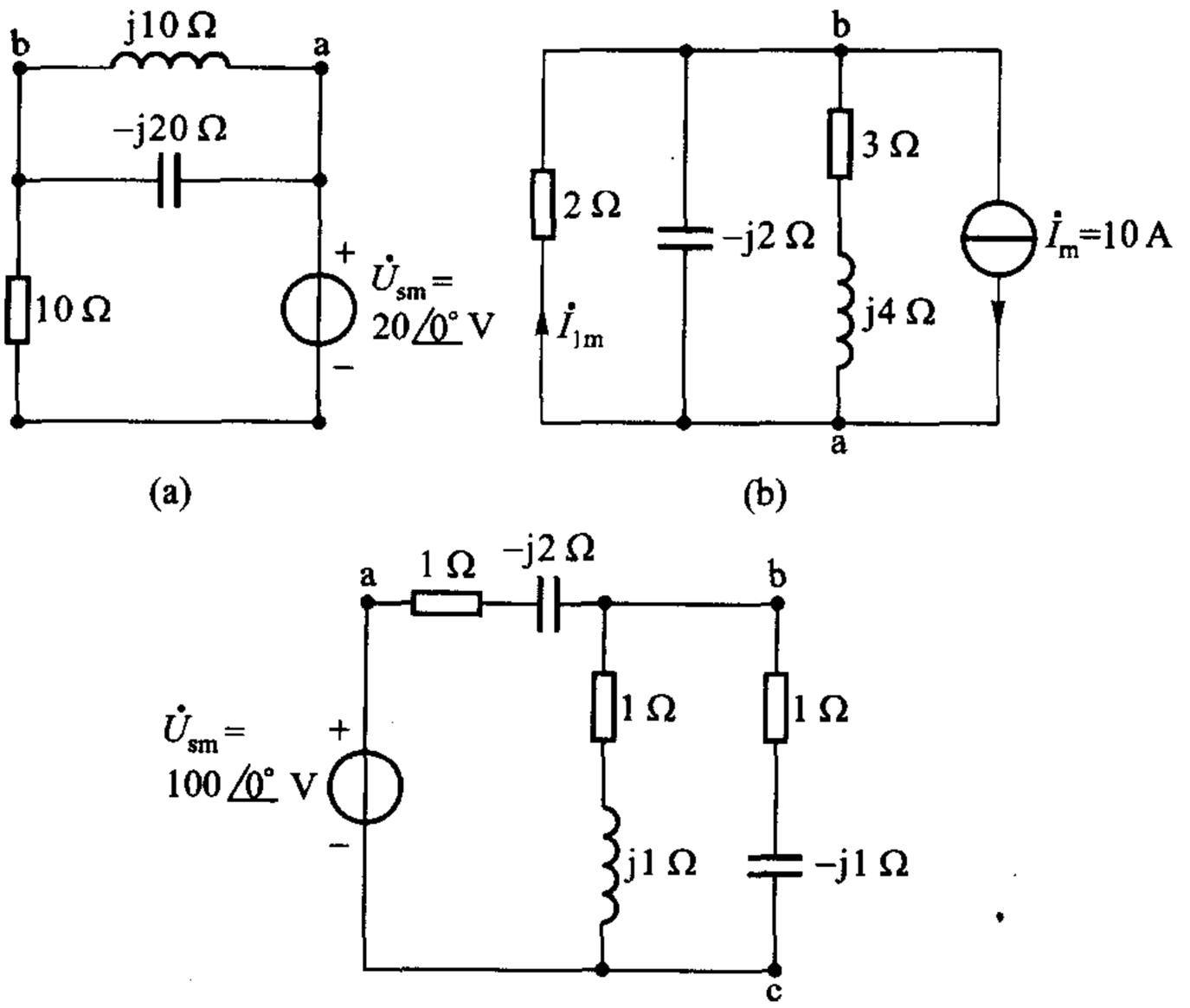
图题 8－6

8－16　电路如图题 8－7 所示，已知 $u_C(t)=\sqrt{2}\cos(2t)$ V，试求电源电压 $u_S(t)$。绘所有电压、电流的相量图。



图题 8－7

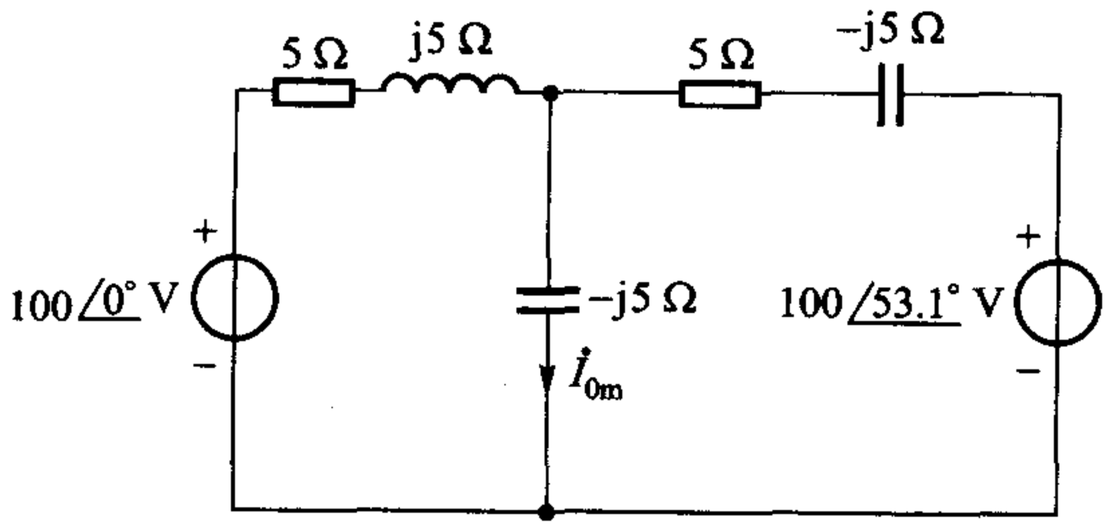
8－17　电路相量模型如图题 8－8 所示，试求振幅相量 $\dot{U}_{abm}$、$\dot{U}_{bcm}$ 以及各支路的电流振幅相量。分别绘出电压振幅相量图和电流振幅相量图。



图题 8－8

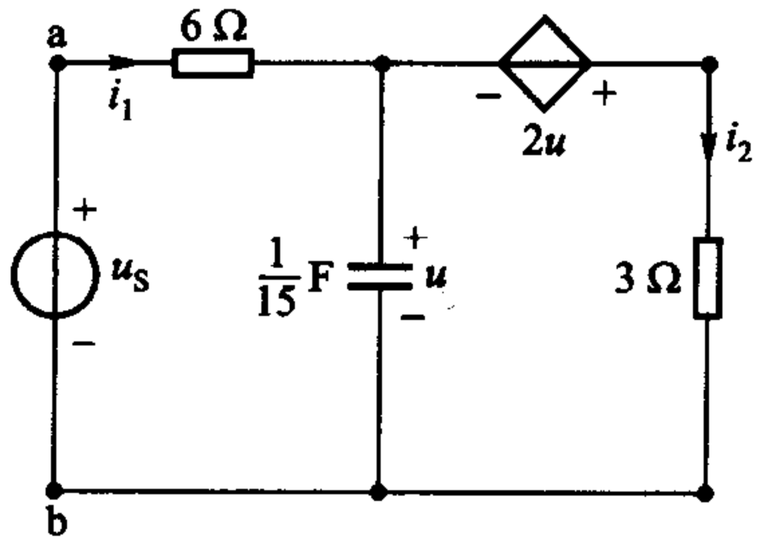
§8－9　相量模型的网孔分析和节点分析

8－18　电路的相量模型如图题 8－9 所示，试分别用网孔分析和节点分析求解 $\dot{I}_{0m}$。（各电源电压相量均系振幅相量。）



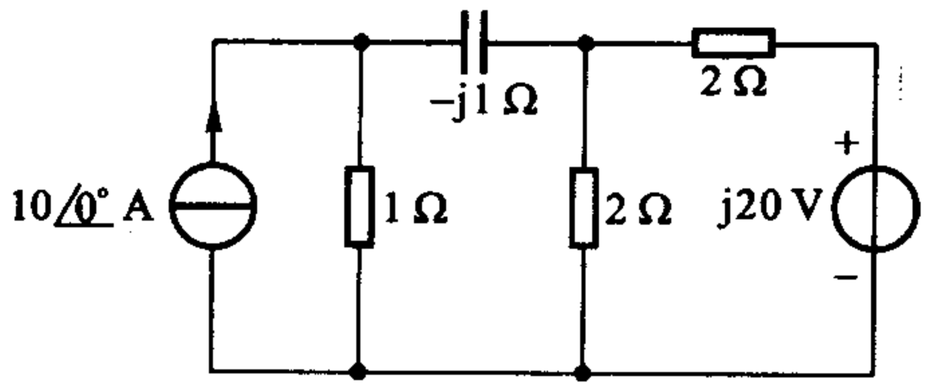
图题 8－9

8－19　试用网孔分析求解图题 8－10 所示电路中的正弦稳态电流 $i_1(t)$ 和 $i_2(t)$。已知 $u_S(t)=9\cos(5t)$ V。



图题 8 - 10

8 - 20　电路相量模型如图题 8 - 11 所示。用节点法求节点电压以及流过电容的电流。(各电源电压均用振幅相量表示。)

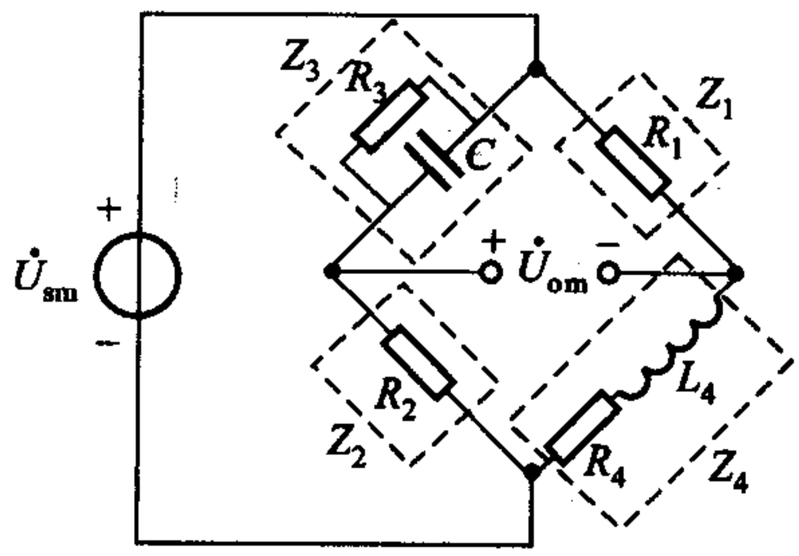


图题 8 - 11

8 - 21　(1) 图题 8 - 12 所示为常用于测量电路参数的交流电桥，试证明：当电桥平衡时，亦即 $\dot{U}_{om}=0$ 时，$Z_1Z_2=Z_3Z_4$；(2) 若 L_4、R_4 为未知电感线圈的参数，试利用上述结果，导出电桥平衡时 L_4、R_4 分别与电路其他参数的关系为

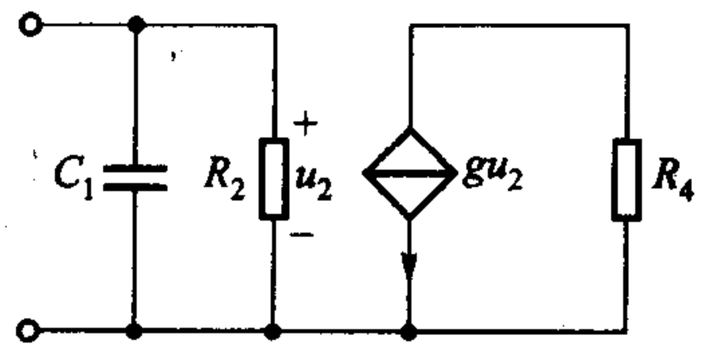
$$L_4=R_1R_2C,R_4=\frac{R_1R_2}{R_3}$$

因此，已知 R_1、R_2、R_3 及 C 的数值，便可算出未知量 L_4 和 R_4(Maxwell 电桥)。



图题 8 - 12

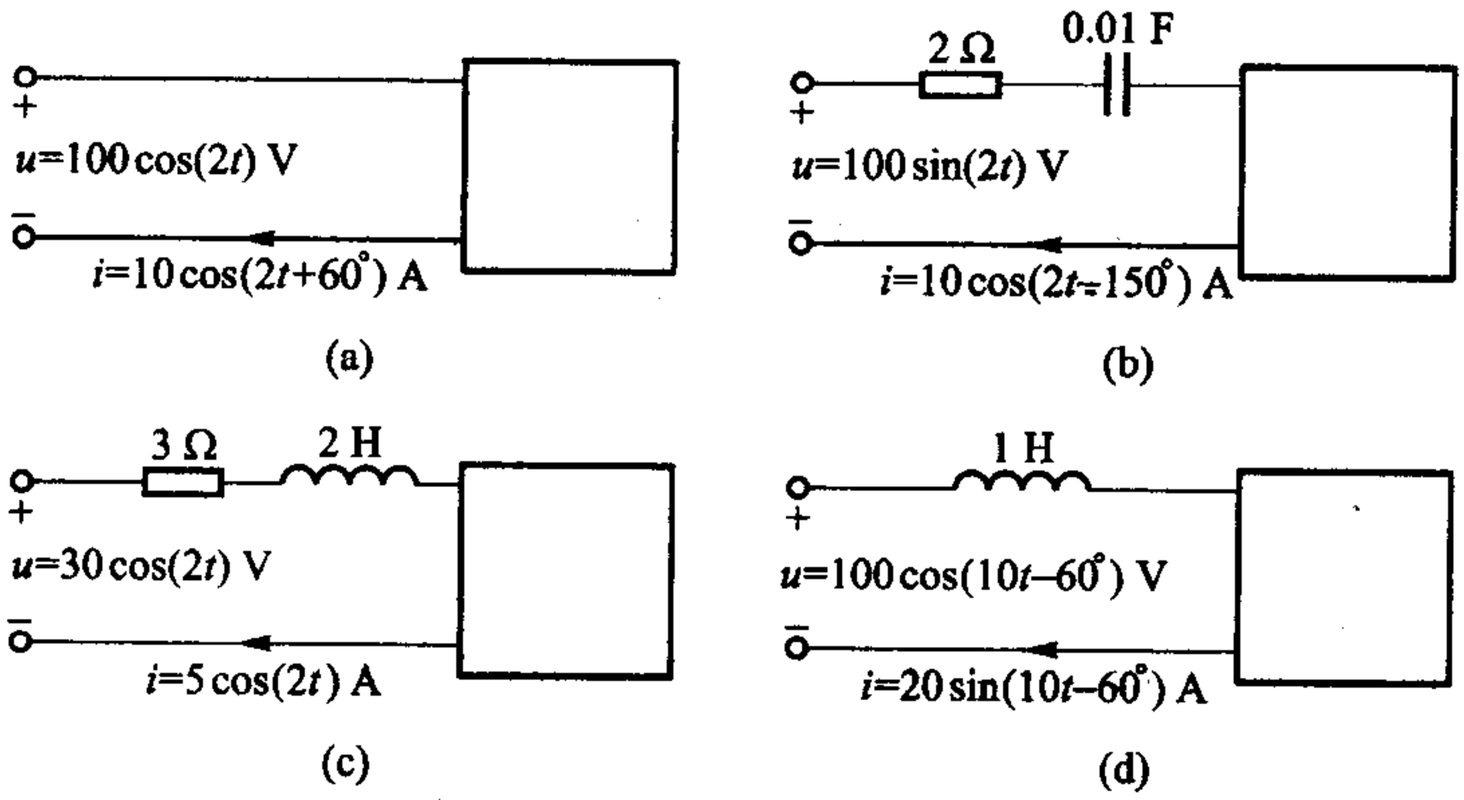
8－22　求图题 8－13 所示正弦稳态电路的输入阻抗。



图题 8－13

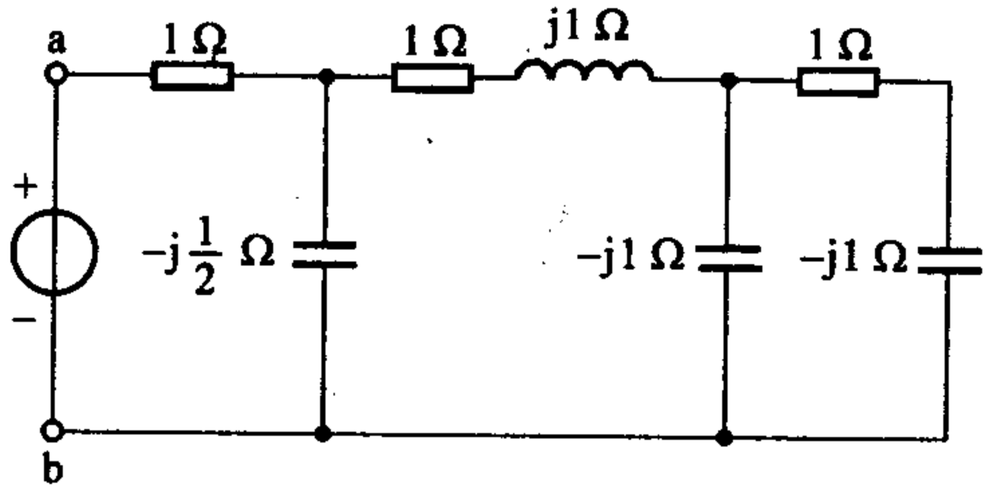
§8－10　相量模型的等效

8－23　电路如图题 8－14 所示，试确定方框内最简单串联组合的元件值。



图题 8－14

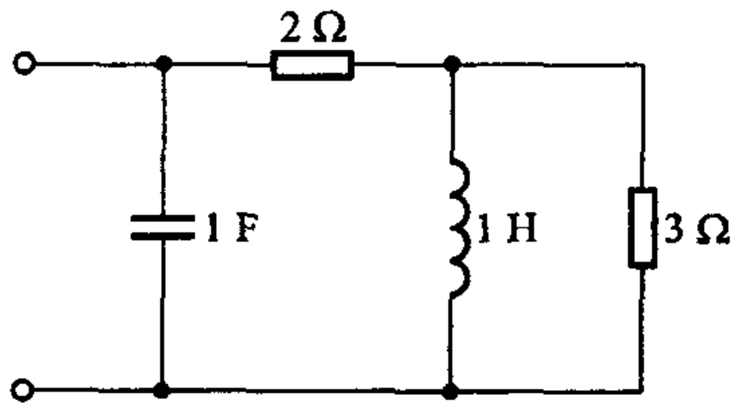
8－24　根据图题 8－15 所示电路的输入阻抗 Z_{ab}，把原电路表示为：(1) 两元件串联的相量模型；(2) 两元件并联的相量模型。给定 $\omega = 2$ rad/s。



图题 8－15

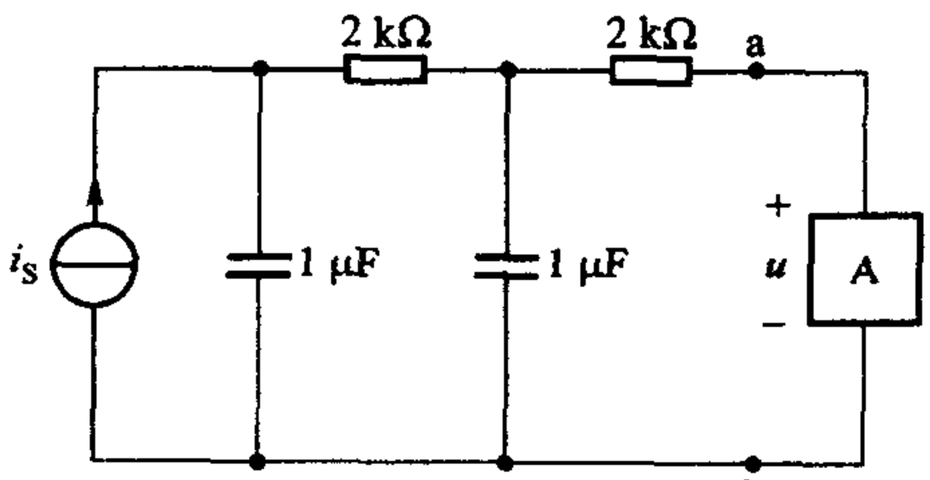
8－25　10μF 电容与 25 Ω 电阻并联，问当 $\omega = 8\,000$ rad/s 时，需用多大的电感与这一并联组合串联，使整个电路的电抗分量为零？

8－26　求图题 8－16 电路 $Y(j\omega)$ 的表示式。若 $\omega = 2$ rad/s，求它的等效相量模型（两种形式）。



图题 8－16

8－27　图题 8－17 所示为正弦稳态电路，已知 $i_S(t) = 10\cos(120\pi t)$ mA。



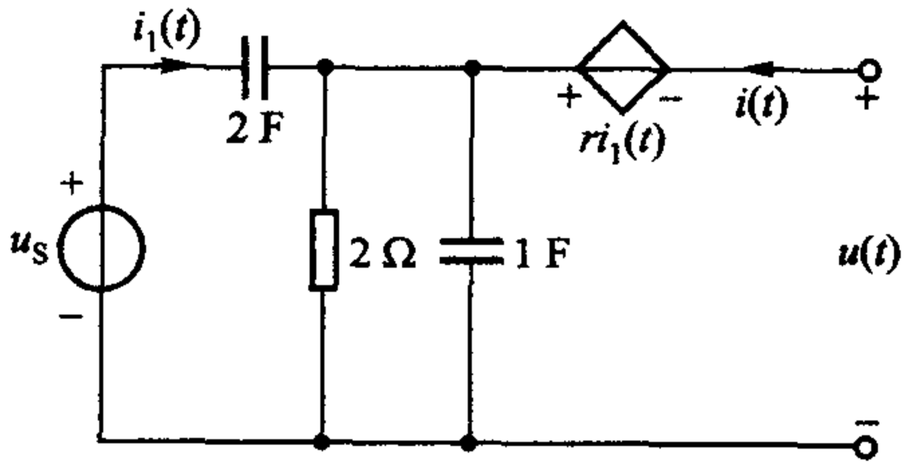
图题 8－17

（1）试求自 ab 端向左看的戴维南等效相量模型；

（2）如果电流源的频率加倍，上述相量模型是否有效？

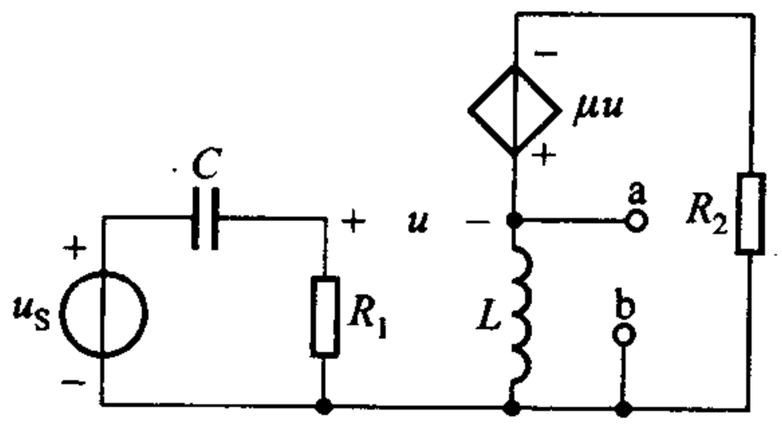
（3）如果负载 A 是一个 1 μF 的电容，试求它两端的电压 $u(t)$。

8－28　求图题 8－18 所示正弦稳态电路的戴维南和诺顿相量模型，已知 $u_S(t) = 2\cos(0.5t + 120°)$ V，$r = 1$ Ω。



图题 8－18

8－29　含受控源的正弦稳态电路如图题 8－19 所示，已知：$R_1 = 1\ \text{k}\Omega$、$R_2 = 10\ \text{k}\Omega$、$L = 10\ \text{mH}$、$C = 0.1\ \mu\text{F}$、$\mu = 99$、$u_S(t) = \cos(\omega t)\ \text{V}$、$\omega = 10^4\ \text{rad/s}$。试求 ab 端戴维南相量模型的 U_{ocm} 和 Z_o。



图题 8－19

§8－11　有效值　有效值相量

8－30　求下列电流的有效值：(1) $i = 10\sin(\omega t)\ \text{A}$；(2) $i = [10\sin(\omega t) + 20\cos(\omega t + 30°)]\ \text{A}$；(3) $i = [\cos(2t) + \sin(2t)]\ \text{A}$。

8－31　求上题各正弦电流的相量(即有效值相量)。

8－32　若周期信号 $f(t)$ 可表示为

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t)$$

其中

$$f_1(t) = A_1\cos(n\omega_0 t)$$

$$f_2(t) = A_2\cos(m\omega_0 t + \theta)$$

m，n 为整数。设 $f(t)$ 的有效值为 F。

(1) 试表明 $F = \sqrt{\dfrac{1}{2}(A_1^2 + A_2^2)}$　(若 $m \neq n$)；

(2) 试表明 $F = \sqrt{\dfrac{1}{2}(A_1^2 + 2A_1A_2\cos\theta + A_2^2)}$　(若 $m = n$)。

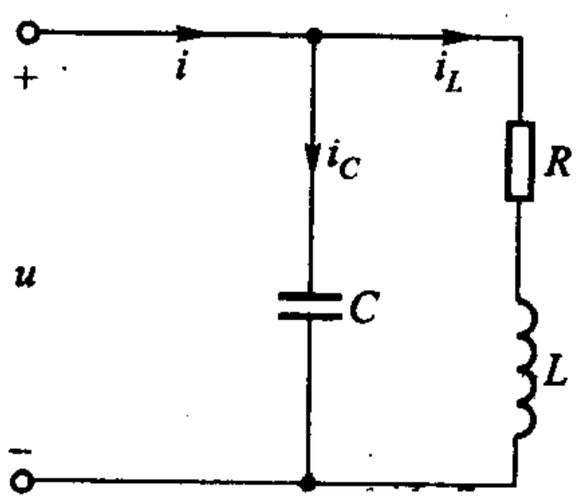
§8－12　两类特殊问题　相量图法

(以下除特别声明，一律采用有效值相量。)

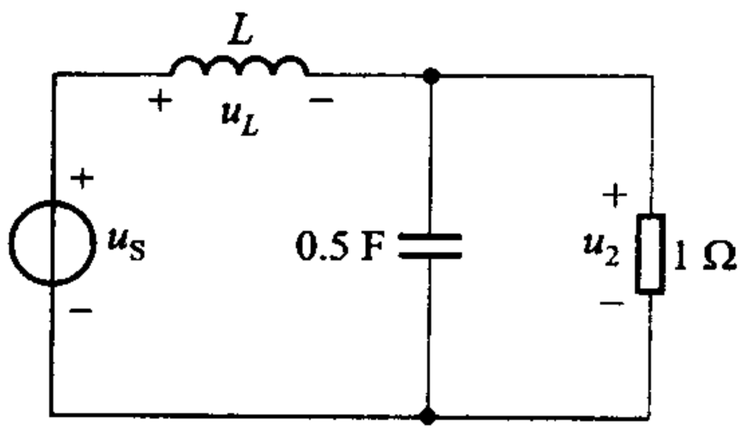
8－33　图题 8－20 所示正弦稳态电路中，若电容支路电流有效值 I_C 为 8 A，电感电阻支路电流有效值 I_L 为 10 A，电路端电压 u 和总电流 i 同相，试求总电流 i 的有效值 I。

8－34　图题 8－21 所示正弦稳态电路中，u_S 的有效值为 2 V，$\omega = 2\ \text{rad/s}$，试求电感电压 u_L 与电阻电压 u_2 的相位关系。

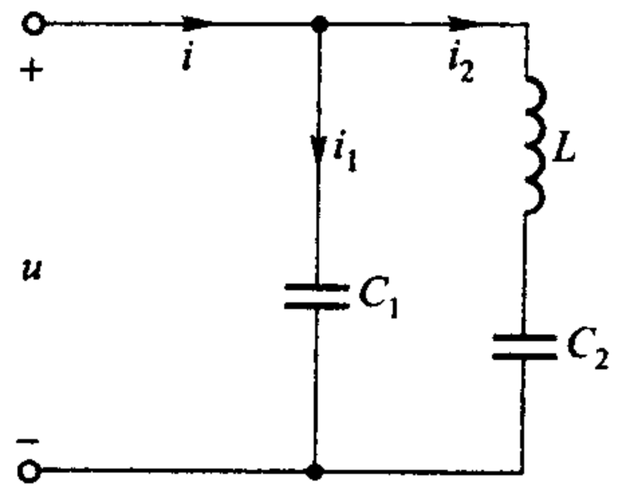
8－35　图题 8－22 所示正弦稳态电路中，已知 $\omega L > \dfrac{1}{\omega C_2}$，有效值 $I_1 = 4\ \text{A}$、$I_2 = 3\ \text{A}$，求总电流 i 的有效值 I。



图题 8－20



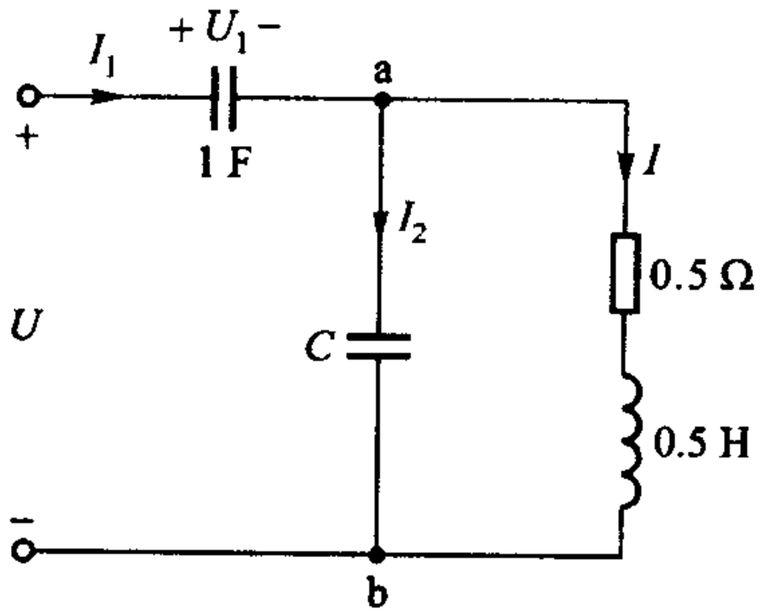
图题 8－21



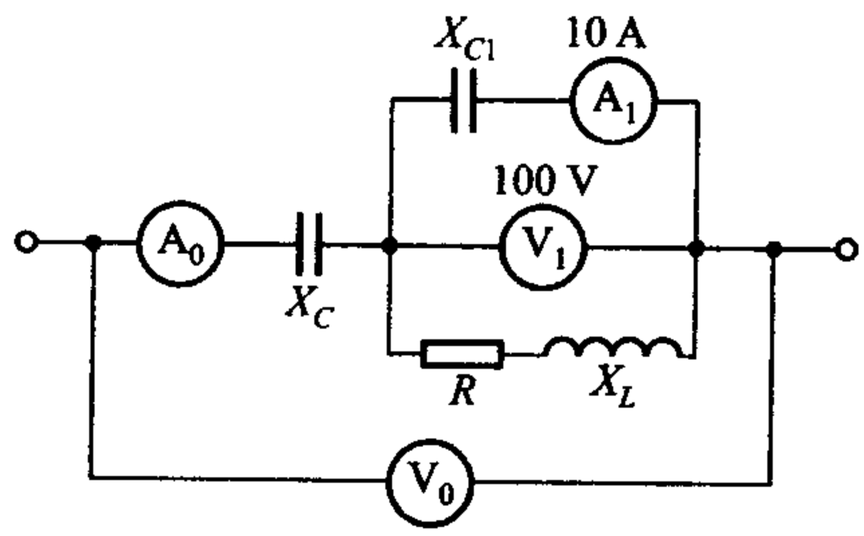
图题 8－22

8－36　图题 8－23 所示正弦稳态电路中，已知 $\omega = 1$ rad/s，有效值 $U_{ab} = 10$ V，$I_2 = 10$ A，试求有效值 I_1 和 U。

8－37　电路如图题 8－24 所示，已知 $X_C = -10\ \Omega$、$R = 5\ \Omega$、$X_L = 5\ \Omega$，各仪表指示有效值，试求 A_0 及 V_0 的读数。



图题 8－23

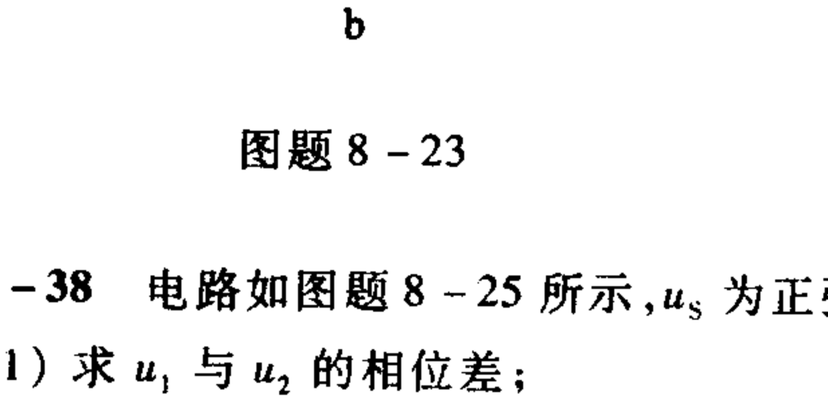


图题 8－24

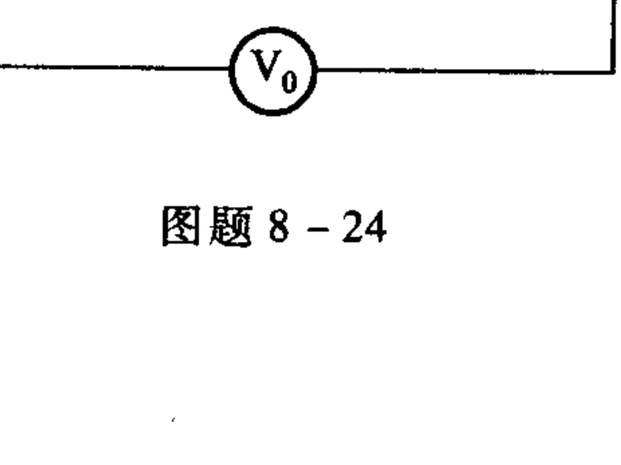
8－38　电路如图题 8－25 所示，u_S 为正弦电压。

（1）求 u_1 与 u_2 的相位差；

（2）如要求相位差为 90°，应满足什么条件？



图题 8－25



图题 8－26

8－39　图题 8－26 所示移相电路常用于闸流晶体管（thyristor）触发电路中。（1）试证

明：若 $R=\dfrac{1}{\omega C}$，则电压 u_{ab} 的有效值为外施电压 u_S 有效值的一半，且 u_{ab} 超前 u_S 的角度为 90°。

（2）试证明：改变 R 值，可改变 u_{ab} 对 u_S 的相位差角，且其有效值不变。

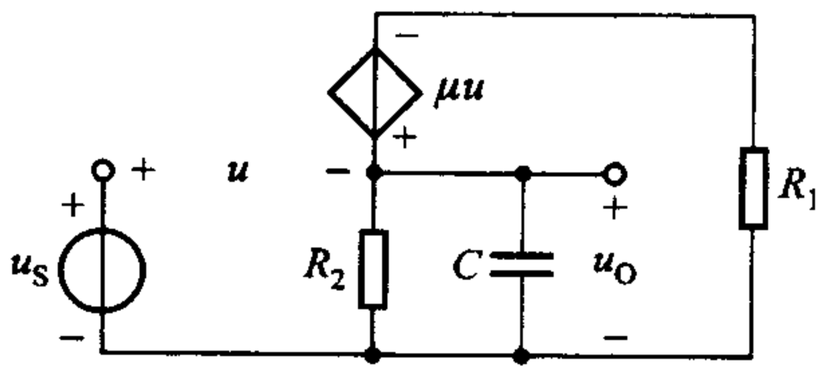
综合

8－40　求图题 8－27 所示电路输出电压 $\dot{U}_{om}$ 的表示式。

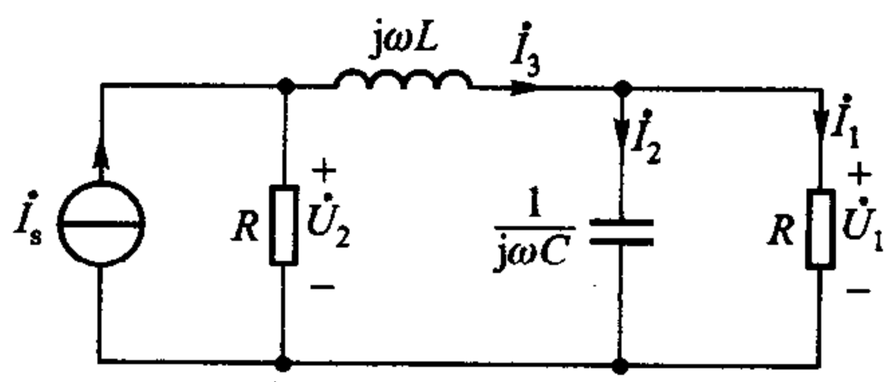
8－41　已知某相量模型的节点电压法相量方程为 $(2-j1)\dot{U}_1-j3\ \dot{U}_2=10$，$-j3\ \dot{U}_1+4\ \dot{U}_2=-6$ 以及 $\omega=1\ 000$ rad/s。求节点电压 $u_1(t)$、$u_2(t)$。（各相量均为振幅相量，省略下标 m。）

8－42　试作出上题可能的相量模型，并作出该角频率的时域模型。

8－43　相量模型如图题 8－28 所示，已知 $R=1\ \text{k}\Omega$、$\omega RC=2\ \text{k}\Omega$、试以 $\dot{U}_1$ 为参考相量，用相量图法求满足 $\varphi=\psi_2-\psi_1=45°$ 所需的 ωL 值，ψ_1、ψ_2 分别为 $\dot{U}_1$、$\dot{U}_2$ 的初相角。

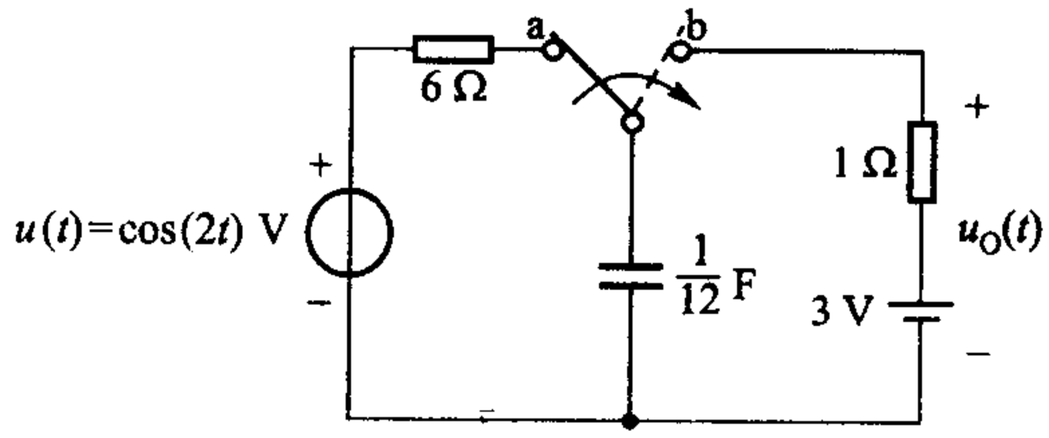


图题 8－27



图题 8－28

8－44　图题 8－29 电路在所示开关位置已工作于稳态。当 $u(t)$ 达到正的最大值时，开关投向 b，并以此为计算起点（$t=0$），求 $u_o(t)$，$t\geqslant 0$。



图题 8－29

第九章

正弦稳态功率和能量　三相电路

第八章讨论了正弦稳态的相量分析法。在引入阻抗和导纳这两个相量分析的重要参数后，便能把电阻电路的分析方法运用到正弦稳态分析。然而，正弦稳态电路有其本身的个性，并不能全借助电阻电路，依靠类比的方法体现出来。主要表现在功率、能量，频率响应和互感等三个方面，本书在第八章后用三章篇幅分别论述这三方面的问题。

对一个纯电阻单口网络，在端钮上电压和电流的乘积等于此单口网络消耗的功率，对一个不含电源的单口相量模型，其端钮上电压相量和电流相量的乘积又代表什么？据此能得出该单口网络消耗的功率吗？能否根据端口电压有效值和电流有效值的乘积得出消耗的功率？

由于包含电感、电容等储能元件，正弦稳态电路的功率、能量问题要比电阻电路复杂，不是简单的类比就能得到解决的，需要引入一些新的概念。正弦稳态电路的功率和能量都是随时间变化的，但通常我们感兴趣的并不是它们的瞬时值而是它们的平均值——电路中消耗功率的平均值以及储存能量的平均值。这样，就要引入平均功率以及无功功率的概念，并进而引入视在功率及功率因数的概念。通过本章的学习应了解它们的定义并能进行计算，计算的基础仍在于电路中电压、电流的计算，因此本章是和上章紧密相连的。

目前，在动力方面应用的交流电，几乎都采用三相制。三相电路实际上是正弦交流电路中的一种特殊类型，本可在上章解决，但因涉及功率问题，以在本章处理为宜。有关它的基本概念也将列入本章内容。

§9-1　基本概念

有关功率和能量的基本概念已在第一章和第五章中学过。我们将在这一基础上讨论正弦稳态时的特点，因此本节对一些有关的基本概念先作一简要的回顾，以便进入本章的学习。

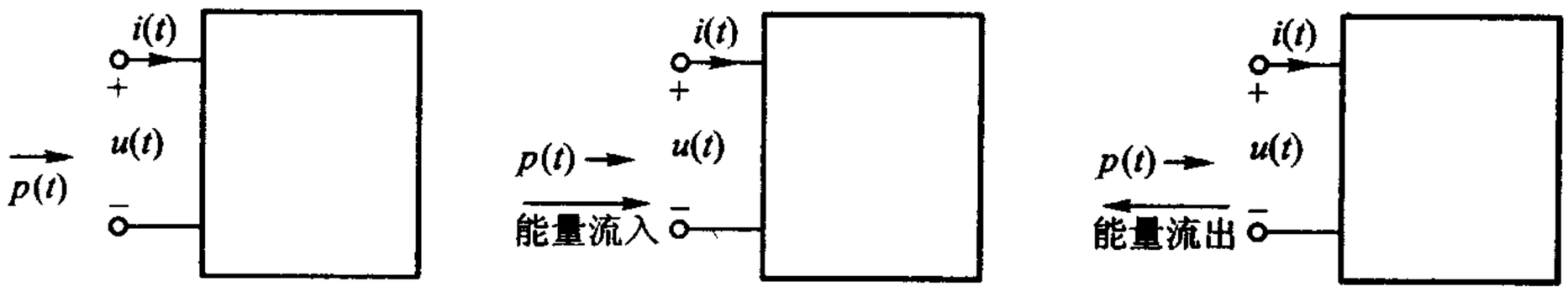
瞬时功率 p 定义为能量对时间的导数，是由同一时刻的电压与电流的乘积来确定的。亦即

$$p(t)=\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=u(t)\cdot i(t) \tag{9-1}$$

在时间区间 t_0、t_1 内，给予二端元件或单口网络的能量为

$$w(t_0,t_1)=\int_{t_0}^{t_1}u(t)i(t)\mathrm{d}t=w(t_1)-w(t_0) \tag{9-2}$$

如果 $u(t)$ 和 $i(t)$ 的参考方向一致，则 $p(t)$ 就是流入元件或网络的能量的变化率，$p(t)$ 称为该元件或网络所吸收的功率。因此，$p(t)>0$，就表示能量确实流入元件或网络；$p(t)<0$，就表示能量实际上流出元件或网络，如图 9-1 所示。



(a) $p(t)$ 的参考方向　　(b) $p(t)>0$　　(c) $p(t)<0$

图 9-1　功率正、负的含义

(9-2)式中的 $w(t_0)$、$w(t_1)$ 可理解为从 $t=-\infty$ 开始到 t_0 或 t_1 时给予元件或网络的能量。以 $w(t_1)$ 为例

$$\begin{aligned}w(t_1)&=\int_{-\infty}^{t_1}u(t)\cdot i(t)\mathrm{d}t\\&=\int_{-\infty}^{t_0}u(t)\cdot i(t)\mathrm{d}t+\int_{t_0}^{t_1}u(t)\cdot i(t)\mathrm{d}t\\&=w(t_0)+\int_{t_0}^{t_1}u(t)\cdot i(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

经移项后，上式与(9-2)式完全相同。

如果元件是电阻元件，流入的能量将变换成热能而被消耗，不可能再行流出。因此，对电阻元件来说，$p(t)$ 不可能为负。

如果元件是动态元件，流入的能量可以被存储起来，而在其他时刻再行流出，送回外电路。因此，对这类元件来说，$p(t)$ 有时为正，有时为负。

流入动态元件的能量可以为正或负，以电容为例，视 $u^2(t)$ 大于或小于 $u^2(t_0)$ 而定。亦即 $p(t)$ 可能为正或为负，但动态元件的储能却总为正，因为 $u^2(t)$ 或 $i^2(t)$ 总是大于零的。储能可以增加或减小，但储能不可能为负值。

线性时不变 R、L、C 的功率、能量的一般关系式可由表 9-1 表明。

表 9-1

二端元件的 VCR	功率(9-1)式		能量(9-2)式	
	吸收功率	消耗功率	流入能量	存储能量
$u=Ri$ 或 $i=Gu$	$Ri^2=Gu^2$		$R\int_{t_0}^{t_1} i^2\mathrm{d}t$ 或 $G\int_{t_0}^{t_1} u^2\mathrm{d}t$	0
$i=C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$	$Cu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u^2$	0	$\frac{1}{2}C[u^2(t_1)-u^2(t_0)]$	$\frac{1}{2}Cu^2$
$u=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$	$Li\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i^2$	0	$\frac{1}{2}L[i^2(t_1)-i^2(t_0)]$	$\frac{1}{2}Li^2$

我们将从上述的一般关系式出发，研究正弦稳态情况下单个元件与单口网络的功率和能量。

§9-2　电阻的平均功率

设施加于电阻两端的电压为

$$u(t)=U_{\mathrm{m}}\cos(\omega t)$$

则流过该电阻的电流为

$$i(t)=\frac{u(t)}{R}$$

因此电阻吸收的瞬时功率为

$$p(t)=U_{\mathrm{m}}\cos(\omega t)\cdot\frac{U_{\mathrm{m}}}{R}\cos(\omega t)$$

$$=U_{\mathrm{m}}I_{\mathrm{m}}\cos^2(\omega t)$$

其中

$$I_{\mathrm{m}}=\frac{U_{\mathrm{m}}}{R}$$

由于对任何角 x，$2\cos^2 x=1+\cos(2x)$，因此

$$p(t)=\frac{1}{2}U_{\mathrm{m}}I_{\mathrm{m}}[1+\cos(2\omega t)]$$

$$= \frac{U_m}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_m}{\sqrt{2}}[1 + \cos(2\omega t)]$$

$$= UI[1 + \cos(2\omega t)] \tag{9-3}$$

其中 U、I 为电压、电流的有效值，在正弦波的条件下

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}, \qquad I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

功率波形图如图 9-2 所示。由此可见，电阻吸收的功率是随时间变化的，有时虽为零，但不出现负值，这就是说，电源不断供给功率予电阻。(9-3)式还表明瞬时功率包含一常数项和一正弦项，后者的角频率为 2ω，为电压或电流角频率的两倍。因此，电压或电流变化一个循环，功率变化了两个循环。

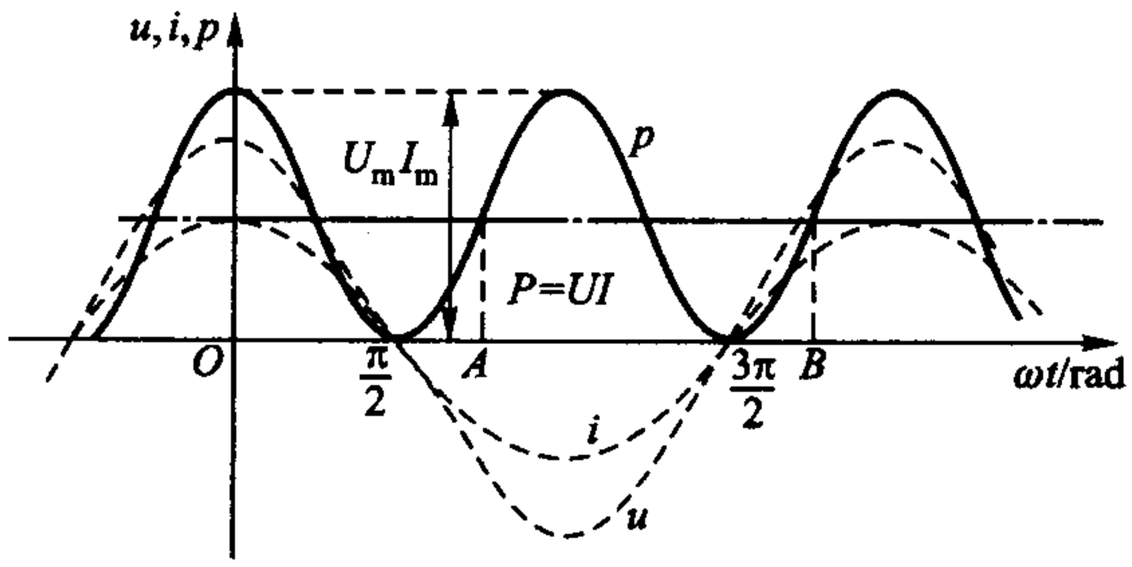


图 9-2　电阻的功率波形图

瞬时功率在一周期内的平均值，称为平均功率(average power)，记为 P，即

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,\mathrm{d}t \tag{9-4}$$

以(9-3)式代入(9-4)式，可得电阻的平均功率为

$$P = \frac{1}{2}U_m I_m = UI \tag{9-5}$$

也可以由图 9-2 所示的波形图求出平均功率。取功率变化的一整个循环来看，例如从图中的 A 到 B 来看，可以看到在 A 到 B 区间内功率波形所覆盖的面积为 $\frac{1}{2}U_m I_m(B-A)$，因此，对任一整个循环(或任何数目的整个循环)，功率的平均值为 $\frac{1}{2}U_m I_m = UI$。

通常所说的功率，都是指平均功率而言。平均功率又称为有功功率(active power)。

如果把电阻元件有效值电压、电流之间的关系 $U = RI$ 代入(9-5)式，可得

$$P = I^2 R \tag{9-6}$$

或

$$P = \frac{U^2}{R} = U^2 G \tag{9-7}$$

这两个公式与直流电阻电路中计算电阻消耗功率的式子完全相同。这就是说，如使用有效值，那么电阻元件消耗的平均功率可以按直流电阻电路中所用的公式来计算。因此，在有关正弦稳态功率、能量的计算中，常使用有效值。

例 9-1　振幅为 10V 的正弦电压施加于 8Ω 电阻两端。电阻消耗的平均功率是多少？

解

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}}\ \text{V}$$

因此

$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{\left(\frac{10}{\sqrt{2}}\right)^2}{8}\ \text{W} = 6.25\ \text{W}$$

例 9-2　流过 20Ω 电阻的电流为 $8\cos(314t + 60°)$ A，问电阻消耗的平均功率是多少？

解　可以用(9-6)式计算。电流有效值

$$I = \frac{8}{\sqrt{2}}\ \text{A}$$

因此

$$P = \left(\frac{8}{\sqrt{2}}\right)^2 \times 20\ \text{W} = 640\ \text{W}$$

注意，平均功率的大小与电流的频率及初相角无关。

练习题

9-1　电压 $u(t) = 100\cos(314t)$ V 施加于 10Ω 的电阻。

(1) 求电阻吸收的瞬时功率 $p(t)$；(2) 求平均功率 P；(3) 绘 $p(t)$ 草图。

9-2　正弦电压施加于 10Ω 电阻时，电阻消耗功率为 360W，求电压及电流的有效值。

(60V，6A)

§9-3　电感、电容的平均储能

电感和电容都是储能元件，有关它们功率和能量的一般关系式，在第五章中已讨论过，并在 §9-1 中又进行了复习。本节讨论这两种元件在正弦稳态情况下的功率、能量关系。

先讨论电感的情况。设电感两端电压为

$$u(t) = U_m \cos(\omega t)$$

电感电流的振幅相量可算得为

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_m}{Z_L} = \frac{\dot{U}_m}{j\omega L} = \frac{U_m \angle 0°}{\omega L \angle 90°}$$

$$= \frac{U_m}{\omega L} \angle -90°$$

由此可得电感电流为

$$i(t) = \frac{U_m}{\omega L} \cos(\omega t - 90°) = \frac{U_m}{\omega L} \sin(\omega t)$$

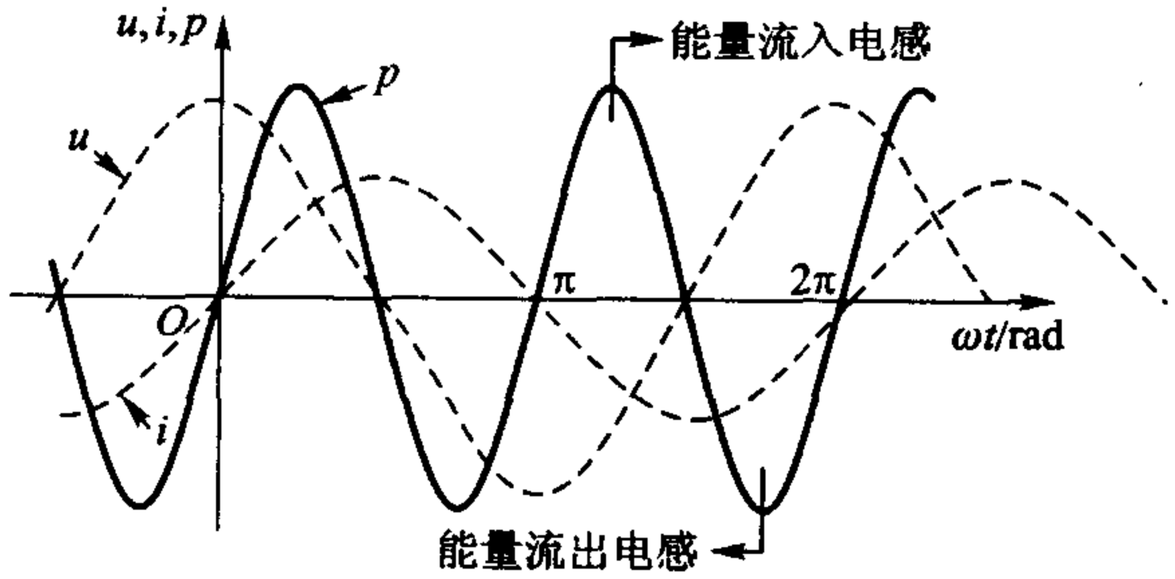
瞬时功率

$$p(t) = u \cdot i = U_m I_m \cos(\omega t) \cdot \sin(\omega t) = \sqrt{2}U \cdot \sqrt{2}I \cos(\omega t) \cdot \sin(\omega t)$$

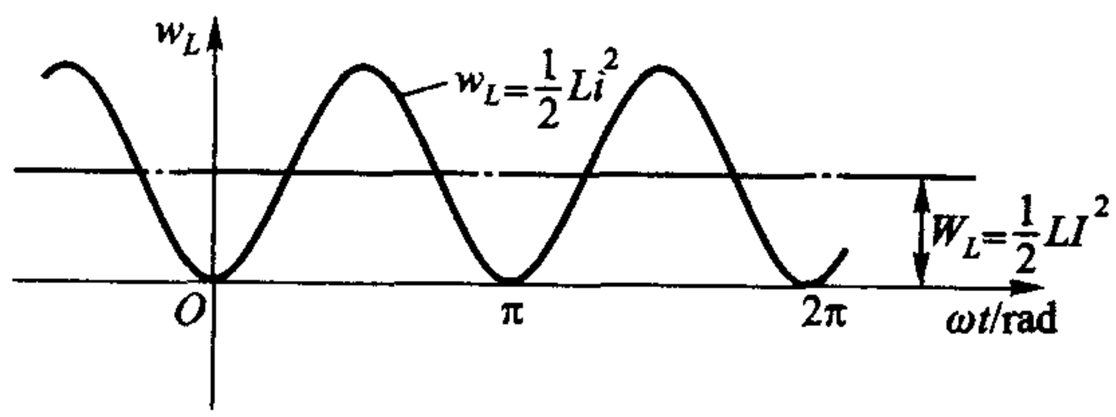
$$= UI \cdot 2\cos(\omega t) \cdot \sin(\omega t) = UI \sin(2\omega t) \qquad (9-8)$$

瞬时功率波形图如图 9-3(a)所示。瞬时功率以 2ω 的频率在横轴上下波动,平均值为零,亦即

$$P = 0$$



(a)



(b)

图 9-3　电感的功率及能量波形图

因此,正弦激励时,电感吸收的平均功率为零,电感的瞬时能量则为

$$w_L(t) = \frac{1}{2}Li^2(t) = \frac{1}{2}LI_m^2\sin^2(\omega t) = \frac{1}{2}LI^2[1-\cos(2\omega t)] \qquad (9-9)$$

其波形图如图 9-3(b)所示。能量以 2ω 的频率在其平均值 W_L 上下波动，但在任何时刻，$w_L(t) \geqslant 0$。电感储能平均值

$$W_L = \frac{1}{2}LI^2 \qquad (9-10)$$

类似(5-23)式。

从图 9-3 不难看到当 p 为正值时，能量流入电感，电感储能增长；当 p 为负值时，能量自电感流出，电感储能减少。在正弦稳态时，电感与外电路(电源)间存在着能量不断往返的现象。从表明每一瞬间储能变化率的(9-8)式可见，最大的变化率是由电感电压、电流有效值的乘积所确定的。在电工技术中，这一乘积定义为电感的无功功率(reactive power)，记为 Q_L，用以表明电感与外电路能量往返的规模，即

$$Q_L = UI \qquad (9-11)$$

确实，无功功率与储能之间存在一定关系，可进一步说明无功功率的物理意义。由于

$$\dot{U} = Z_L\dot{I} = j\omega L\ \dot{I}$$

可知 $U = \omega LI$，故得

$$Q_L = UI = \omega LI^2 = 2\omega W_L \qquad (9-12)$$

上式表明：电感的无功功率等于其储能平均值的 2ω 倍。储能越多，能量每秒往返的次数越多，则能量往返的规模也越大。无功功率能够反映这一情况。

无功功率虽具有功率的量纲，但它终究不是实际作功的功率，它的单位也应与功率的单位有所区别。无功功率的单位为乏(var)，这一单位是由 volt ampere reactive(无功伏安)一词的三个为首字母组成，中文用其译音。

例 9-3　接续例 8-21(图 8-44)，试求两电感的平均储能、电路的磁场储能和两电感的无功功率。

解　由例 8-21 可知

$$Z_{L1} = j2\ \Omega = j\omega L_1 = jL_1 \qquad L_1 = 2\text{H}$$

$$Z_{L2} = j5\ \Omega = j\omega L_2 = jL_2 \qquad L_2 = 5\text{H}$$

$$\frac{1}{2}L_1I_1^2 = \frac{1}{2}\times 2\times 1.491^2\ \text{J} = 2.223\ \text{J}$$

$$\frac{1}{2}L_2I_2^2 = \frac{1}{2}\times 5\times 1.334^2\ \text{J} = 4.449\ \text{J}$$

电路中的磁场储能，以平均值计应为两电感平均值之和，即

$$W_L = (2.223 + 4.449)\ \text{J} = 6.672\ \text{J}$$

能量平均值是一个与时间无关的常量，无需考虑相位问题，可以直接相加，得答案如上。也可由(9－12)式求解，即

$$Q_{L1} = U_1 I_1 = I_1^2 \omega L_1 = 1.491^2 \times 2 \text{ var} = 4.446 \text{ var}$$

$$Q_{L2} = U_2 I_2 = I_2^2 \omega L_2 = 1.334^2 \times 5 \text{ var} = 8.898 \text{ var}$$

电路中的磁场储能可由无功功率之和求得为

$$W_L = \frac{Q_{L1} + Q_{L2}}{2\omega} = 6.672 \text{ J}$$ ◀

电容元件也是储能元件，吸收的能量储存于电场中，可以再行放出。因此，对电容元件来说，瞬时功率 $p(t)$ 可以为正或为负。电场储能与电压平方有关，因而尽管储能可以增长或减少，但储能 $w(t)$ 在任何时刻都不能为负。情况与电感元件类似。

设电容的电流为

$$i(t) = I_m \sin(\omega t) = I_m \cos(\omega t - 90°)$$

则电容电压的振幅相量可算得为

$$\dot{U}_m = Z_C \dot{I}_m = \left(\frac{1}{j\omega C}\right)(I_m \angle -90°) = \frac{I_m}{\omega C} \angle -90° -90° = -\frac{I_m}{\omega C}$$

由此可得电容电压为

$$u(t) = -\frac{I_m}{\omega C}\cos(\omega t) = -U_m \cos(\omega t)$$

瞬时功率

$$p(t) = ui = -U_m I_m \cos(\omega t)\sin(\omega t) = -UI\sin(2\omega t) \qquad (9-13)$$

瞬时功率波形图如图 9－4(a)所示。瞬时功率以 2ω 的频率在横轴上下波动，平均值为零，亦即

$$P = 0$$

正弦激励时，电容吸收的平均功率为零。电容的瞬时能量

$$w_C(t) = \frac{1}{2}Cu^2(t) = \frac{1}{2}CU_m^2 \cos^2(\omega t) = \frac{1}{2}CU^2[1 + \cos(2\omega t)] \qquad (9-14)$$

瞬时能量的波形图如图 9－4(b)所示。能量以 2ω 的频率在其平均值 W_C 上下波动，但在任何时刻，$w_C(t) \geqslant 0$。电容储能平均值

$$W_C = \frac{1}{2}CU^2 \qquad (9-15)$$

类似(5－14)式。

从图 9－4 不难看出：$p > 0$ 时，能量流入电容，电容储能增长；$p < 0$ 时，能量自电容流出，电容储能减少。亦即在正弦稳态电路中，电容与外电路(电源)存在着能量不断往返的现象。与电感元件相似，在电工技术中也把式(9－13)中

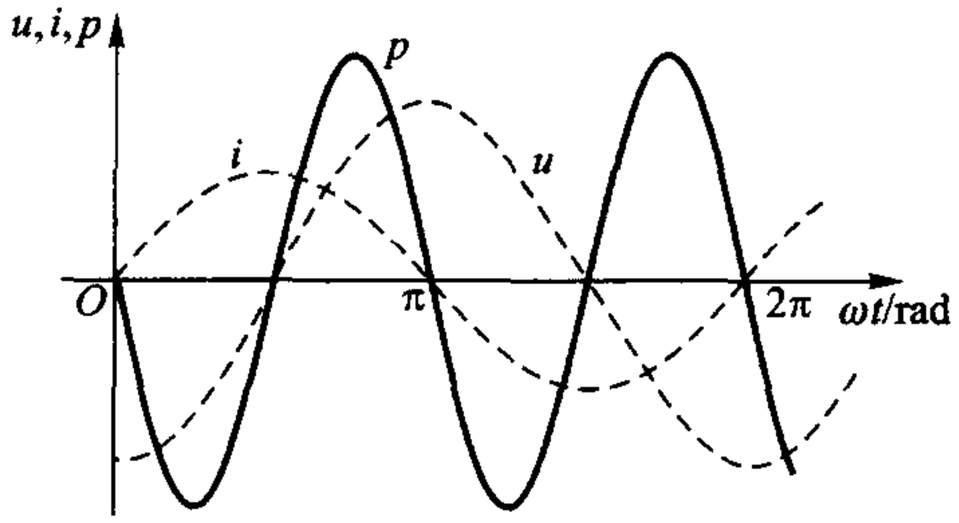


图 9－4　电容的功率及能量波形图

的振幅定义为电容元件的无功功率，记为 Q_C，用以表明电容与外电路能量往返的规模，即

$$Q_C = -UI \tag{9-16}$$

根据约定①，电容的无功功率为负，电感的无功功率为正，以表明两者所涉及的储能性质不同。与电感元件相似，也可求得电容无功功率与电场储能间的关系为

$$Q_C = -UI = -\omega CU^2 = -2\omega W_C \tag{9-17}$$

上式表明：电容的无功功率为负，其值为电场储能平均值的 2ω 倍。

例 9－4　求图 9－5(a)所示正弦稳态电路中各电阻的平均功率的总和，各电感、电容的平均储能的总和。

解　作出相量模型如图 9－5(b)所示，列出网孔电流方程

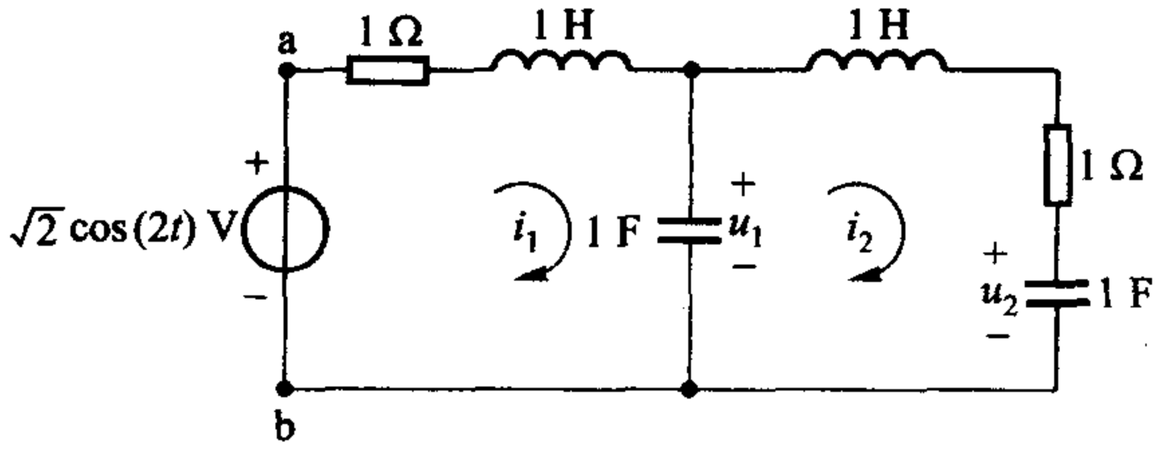
$$(1+\mathrm{j}2-\mathrm{j}0.5)\dot{I}_1-(-\mathrm{j}0.5)\dot{I}_2=1\angle 0^\circ$$

$$-(-\mathrm{j}0.5)\dot{I}_1+(1+\mathrm{j}2-\mathrm{j})\dot{I}_2=0$$

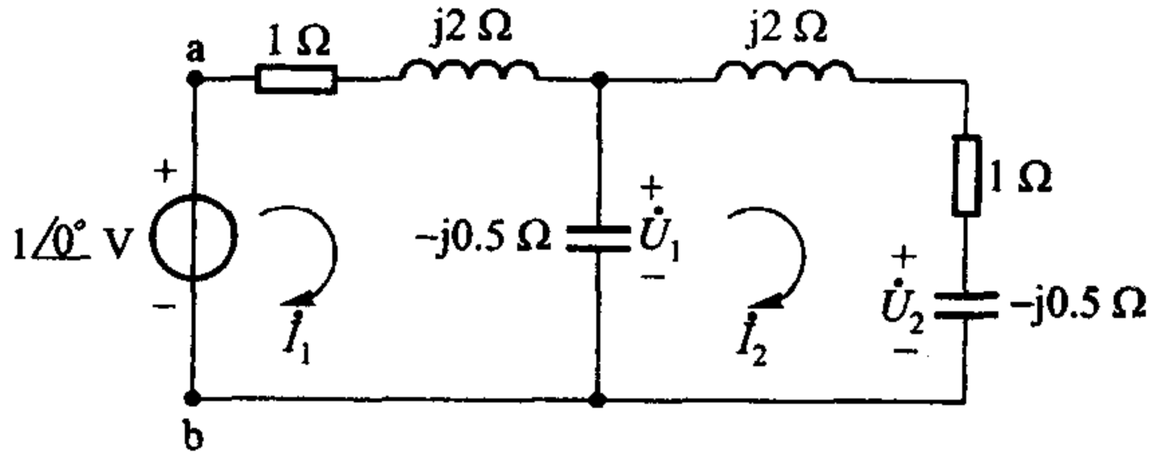
其中 $1\angle 0^\circ$ 系电源电压的有效值相量，$\mathrm{j}2\Omega$ 为 1H 电感的阻抗，$-\mathrm{j}0.5\Omega$ 为 1F 电容的阻抗。

---

① 参见 §9－6 复功率守恒的证明部分，所得 Q_C 应为负。



(a)



(b)

图 9－5　例 9－4

解得

$$\dot{I}_1 = 0.563 \angle -50.7°\text{A},\ \dot{I}_2 = 0.2 \angle 174.3°\text{A}$$

各电阻的平均功率的总和为

$$P = RI_1^2 + RI_2^2 = (0.563^2 + 0.2^2)\ \text{W} = 0.356\ \text{W}$$

各电感的平均储能的总和为

$$W_L = \frac{1}{2}LI_1^2 + \frac{1}{2}LI_2^2 = \frac{1}{2}(0.563^2 + 0.2^2)\ \text{J} = 0.178\text{J}$$

各电容的平均储能的总和为

$$W_C = \frac{1}{2}CU_1^2 + \frac{1}{2}CU_2^2$$

式中

$$U_2 = I_2 \frac{1}{\omega C} = 0.2 \times 0.5\ \text{V} = 0.1\ \text{V}$$

$$U_1 = I_2 |1 + \text{j}2 - \text{j}0.5| = I_2 \sqrt{1^2 + 1.5^2}$$
$$= 0.2 \times 1.803\ \text{V} = 0.36\ \text{V}$$

U_1 系循右侧由 1H、1Ω 及 1F 等电感、电阻及电容组成的支路计算的。故得

$$W_C = \frac{1}{2}(0.36^2 + 0.1^2)\ \text{J} = 0.0698\ \text{J}$$

练习题

9-3　电压 $u(t)=100\cos(10t)$ V 施加于 10H 的电感。

(1) 求电感吸收的瞬时功率 $p(t)$；(2) 求储藏的瞬时能量 $w(t)$；(3) 求平均储能 W_L；(4) 绘 $p(t)$。

$[p=50\sin(20t)\ \text{W};w=2.5[1-\cos(20t)]\ \text{J};W_L=2.5\text{J}]$

9-4　电压 $u(t)=100\cos(10t)$ V 施加于 0.001 F 的电容。

(1) 求电容吸收的瞬时功率$p(t)$；(2) 求储藏的瞬时能量 $w(t)$；(3) 求平均储能 W_C；(4) 绘 $p(t)$。

$[p=-50\sin(20t)\ \text{W};w=2.5[1+\cos(20t)]\ \text{J};W_C=2.5\text{J}]$

9-5　图 9-6 所示电路中 $i_S(t)=10\cos(10^3t)$ mA，求每个电阻、电容及电源吸收的平均功率。

(20mW，10mW，0，-30mW)

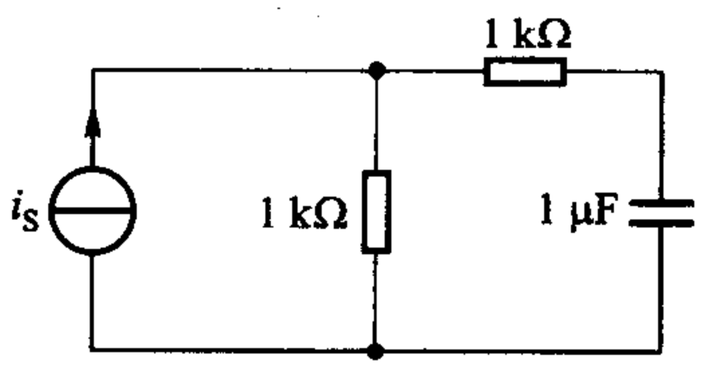


图 9-6　练习题 9-5

§9-4　单口网络的平均功率

以上讨论了三种基本元件正弦稳态的平均功率。电阻元件的平均功率可由它两端电压有效值 U 和流过电流有效值 I 的乘积来计算，电感和电容元件的平均功率则均为零。如果由这些元件组成一个单口网络，在正弦激励下，整个单口网络的平均功率又该如何计算？根据功率守恒，可以先分别计算网络内部各个电阻的平均功率，求其总和，可得整个网络的平均功率。然而，如果单口网络结构复杂或内部情况不明，就有必要知道如何从其端口电压、电流去计算平均功率。平均功率是否等于端口电压有效值和电流有效值的乘积呢？

以上节例 9-4 为例，把图 9-5 所示电路 ab 右侧部分看成一个单口网络，其中除电阻元件，还含有电感、电容等动态元件。在例 9-4 中已算得该单口网络端口电流相量为

$$\dot{I}_1=0.563\angle -70.7°\text{A}$$

即有效值 I_1 为 0.563 A，已知端口电压有效值为 1 V，两者的数值乘积为 $1\times 0.563=0.563$，能否认为该单口网络消耗的平均功率即为 0.563 W？例中我们

也已从网络内部算得电阻消耗的平均功率为 0.356 W，小于这一数值。而根据功率守恒，0.356 W 似应为正确结果！

如果作出该单口网络的等效相量模型，便可说明何以端口电压、电流有效值的乘积并非单口网络的平均功率，然则从端口相量又该如何正确得出平均功率？

对图 9－5 所示电路，ab 端的等效阻抗

$$Z = \left[1 + \mathrm{j}2 + \frac{-\mathrm{j}0.5(1 + \mathrm{j}2 - \mathrm{j}0.5)}{-\mathrm{j}0.5 + 1 + \mathrm{j}2 - \mathrm{j}0.5}\right]\Omega = \left(1 + \mathrm{j}2 + \frac{0.75 - \mathrm{j}0.5}{1 + \mathrm{j}1}\right)\Omega$$

$$= \left(1 + \mathrm{j}2 + \frac{0.901 \angle 33.69°}{1.414 \angle 45°}\right)\Omega = (1 + \mathrm{j}2 + 0.637 \angle -78.69°)\ \Omega$$

$$= (1 + \mathrm{j}2 + 0.125 - \mathrm{j}0.625)\ \Omega = (1.125 + \mathrm{j}1.375)\ \Omega$$

$$= 1.777 \angle 50.71°\ \Omega$$

由此可知，图 9－5 中 ab 端的单口网络的等效相量模型是由阻抗 $Z_R = 1.125\ \Omega$ 和阻抗 $Z_L = \mathrm{j}1.375\ \Omega$ 串联组成，如图 9－7(a)所示。看来，在计算平均功率时，如果用整个串联电路的电压来计算，就会把对平均功率并无贡献的电感电压也包含在内，计算结果显然会大于正确数值的。如果只用电阻电压来计算，应能得到正确结果。由图 9－7(b)所示的相量图，不难得到电阻部分的电压

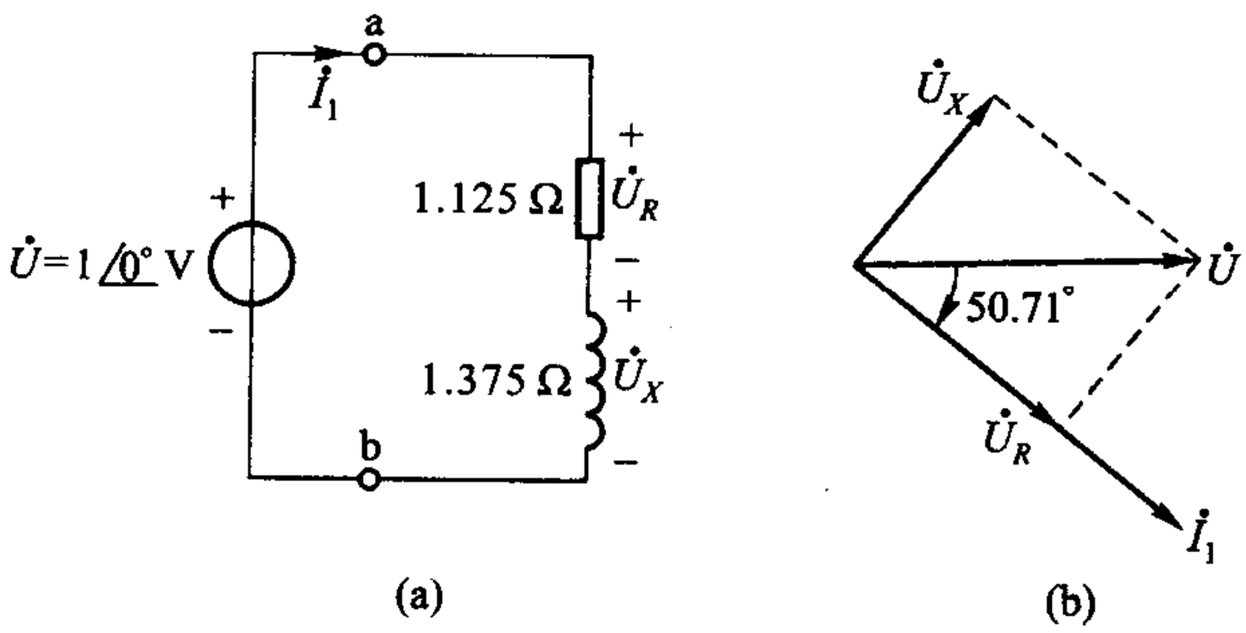


图 9－7　图 9－5 的等效相量模型及其相量图

$$U_R = U\cos 50.71° = 1 \times 0.633\ \mathrm{V} = 0.633\ \mathrm{V}$$

由此可得

$$U_R I_1 = 0.633 \times 0.563\ \mathrm{W} = 0.356\ \mathrm{W}$$

这正是该单口网络的平均功率。

因此，在一般情况下，若单口网络端口电压与端口电流的相位差角为 φ，则电阻部分的电压应为 $U\cos\varphi$，计算平均功率的公式应为①

$$P = UI\cos\varphi \tag{9-18}$$

① 一般证明见习题 9－7。

这是正弦稳态电路的一个重要公式。电压分量 $U\cos\varphi$ 称为电压的有功分量。

若单口网络只含电阻，则电压与电流的相位差角为零，$\cos\varphi=1$，(9－18)式即成为电压元件的平均功率计算公式(9－5)。若单口网络只含电感和电容，则电压与电流的相位差角为 $\pm90°$，$\cos\varphi=0$，(9－18)即等于零，这是电感元件或电容元件应有的结果。因此，平均功率计算公式(9－18)也概括了上节所述的情况。

如果单口网络除上述元件外尚有受控源，则 φ 可能大于 90°。在这种情况下，平均功率 P 为负值，说明该网络对外提供能量。

在所有上述情况中，φ 角即单口网络的阻抗角。

在电工技术中，把 $UI\left(\text{即}\frac{1}{2}U_mI_m\right)$ 称为视在功率(apparent power)，记作 S，即

$$S=UI \tag{9-19}$$

为与平均功率有所区别，视在功率不用瓦特(W)为单位，而用伏安(V·A)为单位。图 9－5 中所示单口网络的视在功率为 $UI_1=0.563\ \text{V}\cdot\text{A}$。

由此可见，在正弦稳态电路中，平均功率 P 一般并不等于 UI，(9－5)式只适用于纯电阻的情况。

平均功率一般是小于视在功率的，也就是说要在视在功率上打一个折扣才能等于平均功率。这折扣就是 $\cos\varphi$，称为功率因数(power factor)，记为 λ。即

$$\lambda=\frac{P}{S}=\cos\varphi \tag{9-20}$$

因此，阻抗角 φ 也称为功率因数角。由上章可知阻抗角介于 $\pm90°$ 之间，若阻抗为电感性时，$\varphi>0$；阻抗为电容性时，$\varphi<0$。但是不论 φ 是正还是负，$\cos\varphi$ 总为正值，单给出 λ 值不能体现电路的性质，因此习惯上常同时加上“感性”、“容性”或“滞后”、“超前”字样。所谓滞后，是指电流滞后电压，即 φ 为正值的情况；所谓超前，是指电流超前电压，即 φ 为负值的情况。

既然视在功率一般不等于平均功率，为什么还要用它呢？因为视在功率反映设备的容量。以发电机为例，发电机是按照一定的额定电压和额定电流值来设计和使用的，在使用时，如电压、电流超过额定值，发电机就可能遭到损坏。因此，电气设备都是以额定视在功率来表示它的容量的，至于一个发电机对负载能提供多大的平均功率，则还要看负载的 λ 是多大而定。例如，容量为 117 500kV·A的发电机，在 λ 为 0.85 时能发出 100 000kW 的功率，在 λ 为 0.6 时只能发出 70 500kW 的功率。负载的 λ 太低使发电机的容量不能充分利用。

平均功率 P 除了可用(9－18)式计算，还可用电流或电压来计算。对内部不含电源的单口网络可根据其等效阻抗的实部与电流有效值来计算平均功率，

即

$$P = I^2 \mathrm{Re}[Z] \tag{9-21}$$

类似于(9-6)式。同理,也可根据等效导纳 Y 的实部与电压有效值来计算平均功率,即

$$P = U^2 \mathrm{Re}[Y] \tag{9-22}$$

类似于(9-7)式。

注意,$\mathrm{Re}[Z]$ 和 $\mathrm{Re}[Y]$ 一般与单口网络中所含的所有元件有关,不只与电阻元件有关,且 $\mathrm{Re}[Z] \neq \dfrac{1}{\mathrm{Re}[Y]}$,参看(8-61)式。

内部不含电源的单口网络 N_0 的平均功率也可以根据功率守恒法则来计算,如同本节图 9-5 电路的计算所示。一般来说,网络吸收的总瞬时功率 p 应为各元件吸收的瞬时功率的总和,参看(1-11)式,即

$$p = \sum p_k$$

其中 p_k 为第 k 个元件的瞬时功率。对上式两端取一周期的平均值,可得

$$P = \sum P_k$$

其中 P_k 为第 k 个元件的平均功率,由 §9-3 可知,若元件为电感或电容,则该元件的平均功率为零。因此,对不含电源的单口网络来说,消耗的平均功率

P = 网络内部各电阻消耗的平均功率的总和

= 端口处所接电源提供的平均功率

思考题

9-1　在 §8-11 曾指出单口网络的等效相量模型也可采用并联形式,试问在这种情况下,如何理解计算平均功率的(9-18)式?

9-2　正文中提到了“电压的有功分量”,你认为有没有“电流的有功分量”这一提法?

例 9-5　单口网络的电压为 $u = 300\sqrt{2}\cos(314t + 10°)$ V,电流为 $i = 50\sqrt{2}\cos(314t - 45°)$ A,电压、电流为关联参考方向,求该网络吸收的功率。

解　$U = 300$ V　　$I = 50$ A

$$\varphi = 10° - (-45°) = 55°$$

$$\lambda = \cos\varphi = \cos 55° = 0.573\ 6 \text{(电感性)}$$

$$P = UI\cos\varphi = 300 \times 50 \times 0.573\ 6 \text{ W} = 8\ 604 \text{ W}$$

例 9-6　图 9-8(a)所示电路的相量模型如图 9-8(b)所示,其中 $R = 3\Omega$,$\mathrm{j}\omega L = \mathrm{j}4\Omega$,$-\mathrm{j}\dfrac{1}{\omega C} = -\mathrm{j}5\Omega$。已知

$$\dot{I} = 12.65 \angle 18.5° \text{ A}$$

$$\dot{I}_1 = 20 \angle -53.1° \text{ A}$$

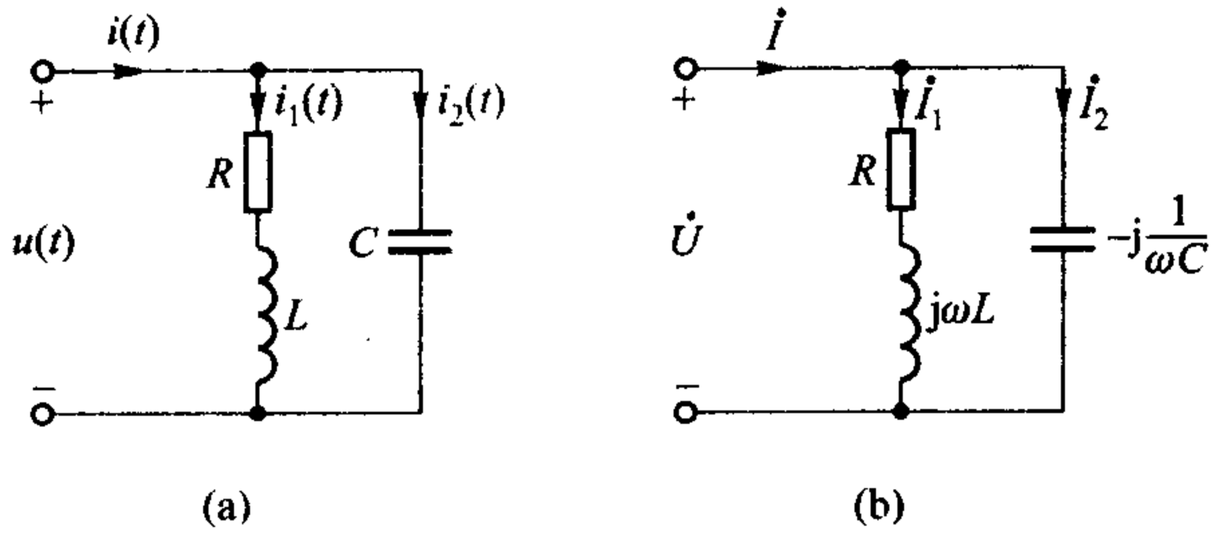


图 9－8　例 9－6

$$\dot{I}_2 = 20 \angle 90° \text{ A}$$

$$\dot{U} = 100 \angle 0° \text{ V}$$

求单口网络的功率 P。

解一　就网络端口电压和电流来计算

$$P = UI\cos(\psi_u - \psi_i)$$

$$= 100 \times 12.65\cos 18.5° \text{ W} = 1\ 200 \text{ W}$$

解二　就内部电阻进行计算。网络内部只有一个电阻，其功率

$$P = RI_1^2 = 3 \times 20^2 \text{ W} = 1\ 200 \text{ W}$$

也可用 $P = U_1^2/R$ 计算，U_1 是 R 两端电压的有效值。

这也就是整个网络的功率，因为没有其他消耗功率的元件。

解三　根据网络内部的 RL 支路计算，该支路的功率

$$P = U_1 I_1 \cos(0° + 53.1°)$$

式中 U_1 为该支路两端电压的有效值，I_1 为该支路电流的有效值，又该电压的初相为 0°，电流的初相为 −53.1°。由上式可得

$$P = 100 \times 20\cos 53.1° \text{ W} = 1\ 200 \text{ W}$$

这也就是整个网络的功率。

解四　根据单口网络等效阻抗的实部，即电阻分量来计算。

$$Z = \frac{(3 + \text{j}4)(-\text{j}5)}{3 + \text{j}4 - \text{j}5}\Omega = \frac{20 - \text{j}15}{3 - \text{j}1}\Omega = \frac{25 \angle -36.87°}{3.162 \angle -18.43°}\Omega$$

$$= 7.911 \angle -18.44°\Omega = (7.5 - \text{j}2.5)\ \Omega$$

$$P = I^2 \text{Re}[Z] = (12.65^2 \times 7.5)\ \text{W}$$

$$= 1\ 200 \text{ W}$$

或由电阻分量的电压

$$U_R = 7.5 \times 12.65 \text{ V} = 94.87 \text{ V}$$

算得

$$P = U_R I = 94.87 \times 12.65\ \text{W} = 1\ 200\ \text{W}$$

注意:等效阻抗的电阻分量并不等于单口网络中的电阻 R;本解法中所用电流为总电流 I。

例 9-7　接续上例,求单口网络的视在功率和功率因数。

解　$S = UI = (100 \times 12.65)\ \text{V} \cdot \text{A} = 1\ 265\ \text{V} \cdot \text{A}$

$$\lambda = \frac{P}{S} = \frac{1\ 200}{1\ 265} = 0.949(\text{电容性})$$

由 $\dot{U}$、$\dot{I}$ 的初相角可判断出"电容性"这一情况。

例 9-8　用以连接发电机与负载的输电线,电阻为 0.09 Ω,电抗 X_L 为 0.3 Ω,若负载为 20 kW 的感应电动机,功率因数为 0.8,负载端的电压为 220 V,试求发电机端的电压和功率因数,并求发电机提供的功率(见图 9-9)。

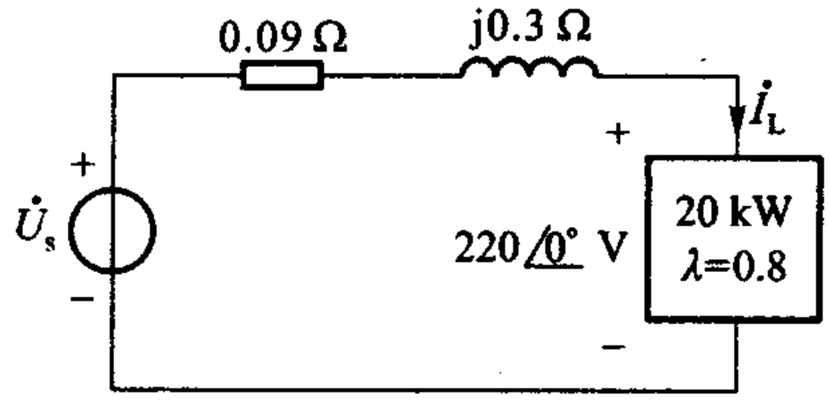


图 9-9　例 9-8

解　负载电流 I_L 可以由(9-18)式算得为

$$I_L = \frac{P_L}{\lambda U} = \frac{20 \times 10^3}{(0.8)(220)}\ \text{A} = 113.64\ \text{A}$$

感应电动机为电感性负载,电流滞后电压,相位差角 $\varphi_L = \arccos 0.8 = 36.87°$。

如设负载电压相量为 $220 \angle 0°$ V,则负载电流相量为

$$I_L = 113.64 \angle -36.87°\ \text{A}$$

由 KVL 可得

$$\begin{aligned}\dot{U}_s &= [220 \angle 0° + (0.09 + \text{j}0.3)(113.64 \angle -36.87°)]\ \text{V} \\ &= (220 \angle 0° + 35.59 \angle 36.43°)\ \text{V} = 249.53 \angle 4.86°\ \text{V}\end{aligned}$$

故知发电机端的电压

$$U_s = 249.53\ \text{V}$$

又 $\dot{U}_s$ 与 $\dot{I}_L$ 的相位差角为

$$4.86° - (-36.87°) = 41.73°$$

故得发电机端的功率因数为

$$\cos 41.73° \approx 0.75(\text{电感性})$$

发电机除了提供电动机所需功率，还必须提供传输线的功率损失，因此，发电机提供的功率为

$$P_s = 20 \times 10^3 + 0.09 \times I_L^2 = (20 \times 10^3 + 1\ 162)\ \text{W} = 21\ 162\ \text{W}$$

或

$$P_s = U_s I_L \cos 41.73° = 249.53 \times 113.64 \cos 41.73°\ \text{W}$$
$$= 21\ 162\ \text{W}$$

练习题

9-6　电路如图 9-10 所示，求电路的 P，S 和 λ。

（3 000 W）

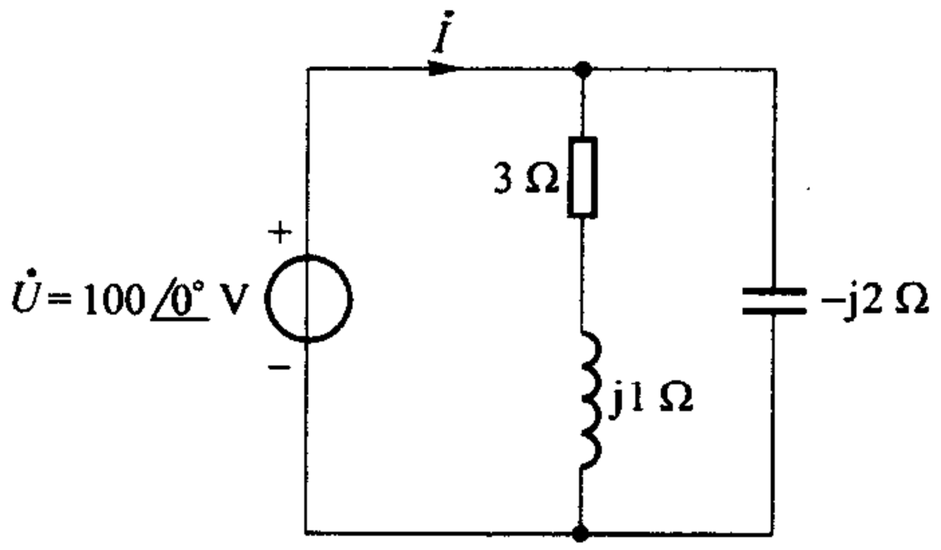


图 9-10　练习题 9-6

9-7　试求图 9-11 所示电路中两电源的功率，并核对功率守恒关系。已知 $\dot{U}_{s1} = 24\angle 0°$ V，$\dot{U}_{s2} = 12\angle 0°$ V。

（-110.8 W，11 W，44.2 W，55.6 W）

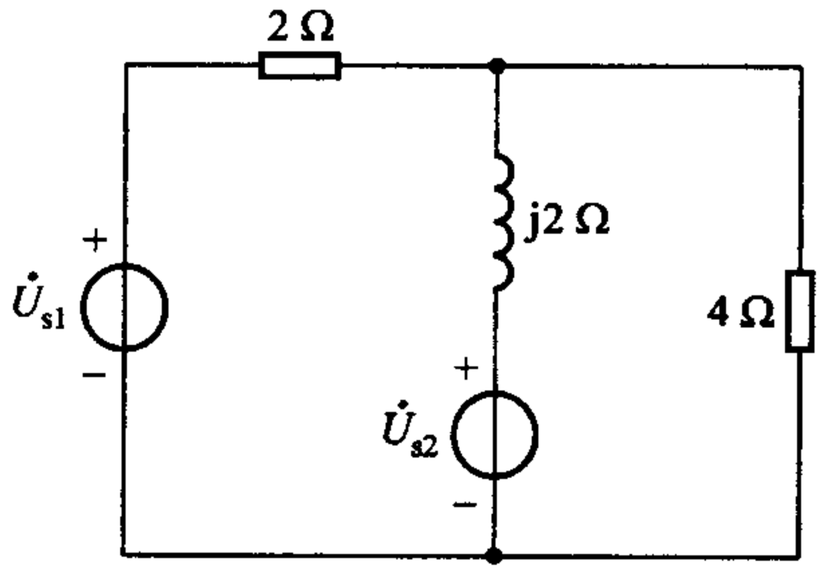


图 9-11　练习题 9-7

9-8　某网络的输入阻抗为 $Z = 20\angle 60°\ \Omega$，外施电压为 $\dot{U} = 100\angle -30°$ V。求网络消

耗的功率及功率因数。

(250W,0.5)

§9-5　单口网络的无功功率

含有电感、电容元件的单口网络与外电路也存在能量往返的现象,如何反映这种能量往返的规模? 从另一方面,我们也会要问,在图 9-7 中电压的有功分量 $U\cos\varphi$ 与电流的乘积是电路的平均功率 P,那么,电压的另一分量 $U\sin\varphi$ 又具有什么意义? 也许,它与电流的乘积恰好就是单口网络的无功功率。

我们仍以 §9-3 例 9-4 所示电路为例来探讨这一问题。从例 9-4,我们不难根据(9-12)式得到电感的无功功率

$$Q_L = 2\omega W_L = 2 \times 2 \times 0.178 \text{ var} = 0.712 \text{ var}$$

电容的无功功率则根据(9-17)式可得

$$\begin{aligned} Q_C &= -2\omega W_C = -2 \times 2 \times 0.0698 \text{ var} \\ &= -0.279 \text{ var} \end{aligned}$$

总的无功功率

$$Q = Q_L + Q_C = (0.712 - 0.279) \text{ var} = 0.433 \text{ var} \qquad (9-23)$$

这是从单口网络内部来计算的。

从另一角度来看,利用图 9-7(b)所示的相量图,不难得到

$$U_X = U\sin 50.71° = 1 \times 0.774 \text{ V} = 0.774 \text{ V}$$

由此可得

$$U_X I_1 = 0.774 \times 0.563 \text{ V} \cdot \text{A} = 0.433 \text{ V} \cdot \text{A}$$

其值恰与(9-23)式所示的无功功率相同。

因此,在一般情况下,从单口网络端口上计算无功功率的公式应为①

$$Q = UI\sin\varphi \qquad (9-24)$$

U、I 分别为端口电压、电流的有效值,φ 为电压与电流的相位差角。其单位已如 §9-3 中所述,应为乏(var)。U_X 称为电压的无功分量。对不含电源的单口网络,φ 即单口网络的阻抗角。

由以上所述,不难得到无功功率所含的物理意义

$$Q = 2\omega(W_L - W_C) \qquad (9-25)$$

亦即,无功功率 Q 正比于网络中两种储能平均值的差额。这就是说,两种储能就其平均值来说,在网络内部可自行交换,即磁场储能放出时可为电场所吸收而

① 一般证明见习题 9-34。

电场储能放出时可为磁场所吸收，与外电路往返的能量仅为两种储能平均值的差额。如果两种储能平均值恰好相等，则外电路（电源）并不参与能量的交换。因此，(9－24)式所示无功功率的大小反映了外电路（电源）参与能量往返的程序。

若单口网络包含多个电感和电容，不论如何连接，(9－25)式仍然成立，式中 W_L 为所有电感平均储能的总和，W_C 为所有电容平均储能的总和[①]。由此，不难得出

$$Q = \sum Q_k \tag{9-26}$$

Q_k 为第 k 个电感或电容的无功功率，电感取正，电容取负。(9－26)式称为无功功率守恒，与有功（平均）功率守恒，同为正弦交流电路功率分析的重要关系。

显然，单口网络的视在功率 S、平均功率 P 和无功功率 Q，三者在数值上的关系为

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \tag{9-27}$$

这一关系可由图 9－12 所示的直角三角形表明，φ 即功率因数角。这三角形称为功率三角形，便于掌握 P、Q、S 和 φ 之间的关系。需注意单口网络的视在功率

$$S \neq \sum S_k$$

S_k 为第 k 个元件的视在功率。

无功功率 Q 除了可用(9－24)式计算外，还可以用电压或电流来计算，即

$$Q = I^2 \mathrm{Im}[Z] \tag{9-28}$$

及

$$Q = -U^2 \mathrm{Im}[Y] \tag{9-29}$$

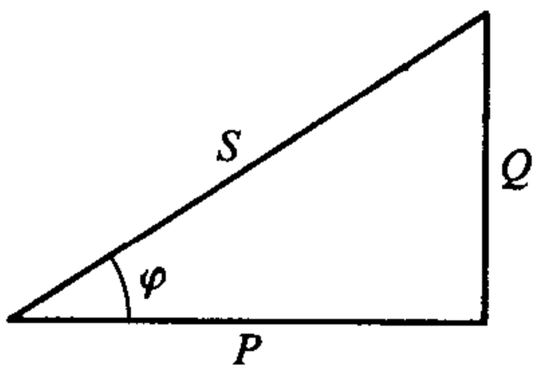


图 9－12　功率三角形

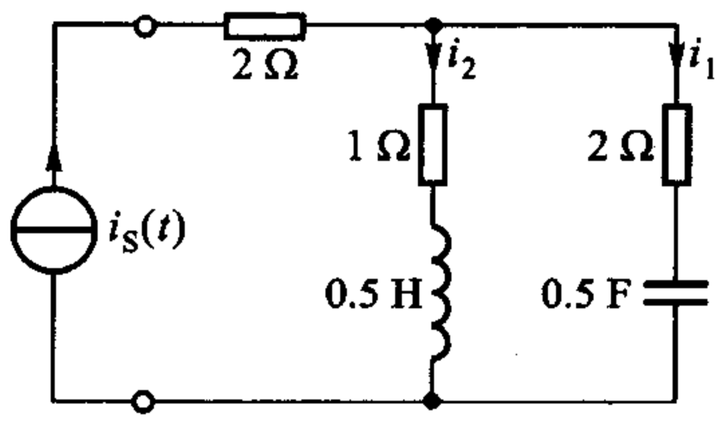


图 9－13　例 9－9

例 9－9　图 9－13 所示电路中 $i_S(t) = 5\sqrt{2}\cos(2t)$ A，电路处于稳态。试求电源提供的 P、Q，并计算 S、λ。

解　自行作出相量模型后，可得出对电源而言的单口网络的输入阻抗为

① 参看 §9－6 复功率守恒。

$$Z=\left[2+\frac{(1+\mathrm{j}1)(2-\mathrm{j}1)}{1+\mathrm{j}1+2-\mathrm{j}1}\right]\ \Omega=\left(2+\frac{3+\mathrm{j}}{3}\right)\ \Omega=\left(3+\mathrm{j}\ \frac{1}{3}\right)\ \Omega$$

故得

$$P=I^2\mathrm{Re}[Z]=25\times3\ \mathrm{W}=75\ \mathrm{W}$$

$$Q=I^2\mathrm{Im}[Z]=25\times\frac{1}{3}\ \mathrm{var}=8.3\ \mathrm{var}(\text{电感性})$$

$$S=\sqrt{P^2+Q^2}=75.5\ \mathrm{V\cdot A}$$

$$\lambda=\cos\varphi_Z=\cos\left[\arctan\left(\frac{\frac{1}{3}}{3}\right)\right]=0.994(\text{电感性})$$

或由图 9－12 所示功率三角形，得

$$\lambda=\cos\varphi=\frac{P}{S}=\frac{75}{75.5}=0.993(\text{电感性})$$

例 9－10　工厂中及自动控制中用的感应电动机是电感性负载，功率因数较低，为提高负载的功率因数，可并联大小适当的电容器。设有一 220 V，50 Hz，50 kW 的感应电动机，功率因数为 0.5。（1）问在使用时，电源供应的电流是多少，无功功率 Q 是多少？（2）如果并联电容器，使功率因数达到 1，问所需的电容值是多少，此时电源供应的电流是多少？

解　（1）$P_{\mathrm{L}}=UI_{\mathrm{L}}\cos\varphi_{\mathrm{L}}$

故得　　$$I_{\mathrm{L}}=\frac{P_{\mathrm{L}}}{U\cos\varphi_{\mathrm{L}}}=\left(\frac{50\times10^3}{220\times0.5}\right)\ \mathrm{A}=455\ \mathrm{A}$$

P_{L} 为电动机的功率，亦即为电源提供的功率。此处下标 L 表示负载（Load），而非电感之意。

$$Q_{\mathrm{L}}=UI_{\mathrm{L}}\sin\varphi_{\mathrm{L}}=UI_{\mathrm{L}}\sqrt{1-\cos^2\varphi_{\mathrm{L}}}$$
$$=220\times455\times0.866\ \mathrm{kvar}=86.7\ \mathrm{kvar}$$

Q_{L} 为电源提供的无功功率，这表明电源与负载间有能量交换。

（2）为减少电源与负载间徒劳往返的能量交换，可在负载处并联储能性质相反的元件，成为负载的一个组成部分。在本例中，应并联电容器如图 9－14 虚线所示，使能量可以在虚线框所示的总负载中自行交换。如使总负载的功率因数为 1，则电源就可不再提供无功功率。由于电容本身不消耗功率，因而电源提供的平均功率并不改变，电动机的工作状态也不受影响。

并联电容后，电源提供的无功功率

$$Q=Q_{\mathrm{L}}+Q_C$$

当 $\lambda=1$ 时，$Q=0$，因此

$$Q_C=-Q_{\mathrm{L}}=-86.7\ \mathrm{kvar}$$

由(9－29)式可知

$$Q_C = -\omega C U^2$$

故得

$$C = \frac{-Q_C}{\omega U^2} = \frac{86.7 \times 10^3}{100\pi \times 220^2}\ \text{F} = 5\ 702\ \mu\text{F}$$

又因 $\lambda = 1$

$$P = UI$$

且 $P = P_L = 50$ kW，故得

$$I = \frac{50 \times 10^3}{220}\ \text{A} = 221\ \text{A}$$

可见电源提供的电流大为降低，由 455 A 下降为 221 A。

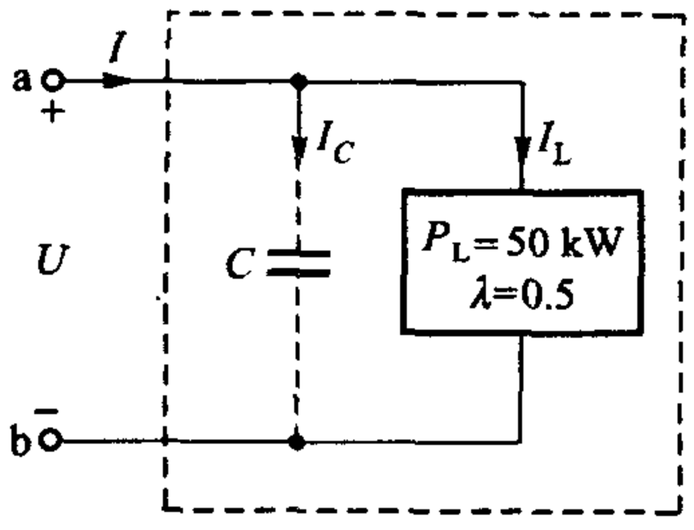


图 9－14　例 9－10

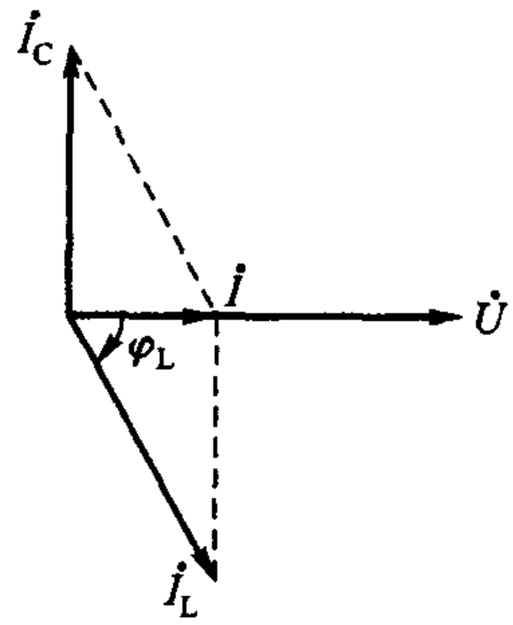


图 9－15　例 9－10 相量图

利用相量图也可以说明并联电容对电感性负载所起的作用。本例的相量图如图 9－15 所示，电动机电流滞后电压的角度为

$$\varphi_L = \arccos 0.5 = 60°$$

并联电容后，电容所取电流超前电压角 90°。显然，如选用电容使 $\dot{I}_C$ 的大小合适，便可使总电流 $\dot{I}$ 与电压 $\dot{U}$ 同相，且使电源提供的电流大为降低。

在实际应用中，功率因数通常提高到 0.9 左右。

思考题

9－3　为提高电感性负载的功率因数，采用串联电容的办法是否可以？

9－4　用电压、电流的振幅来表示的 P、Q、S 公式应该是怎样的？

练习题

9-9　已知某单口网络端口电压 $u(t)=75\cos(\omega t)$ V，端口电流 $i(t)=10\cos(\omega t+30°)$ A，u 和 i 为关联参考方向，求单口网络的 P、Q 和 λ。

（352 W，-187.5 var，0.866 电容性）

9-10　试确定 50 kW 负载的无功功率及视在功率，若功率因数为：(1) 0.80（电感性）；(2) 0.90（电容性）。

（37.5 kvar，62.5 kV·A；-24.2 kvar，55.6 kV·A）

§9-6　复功率　复功率守恒

设已知某单口网络的电压、电流相量 $\dot{U}$、$\dot{I}$，两者相乘，所得当为另一复量，如它的实部、虚部即为有功功率、无功功率，岂不太妙！

设 $\dot{U}=U\angle\psi_u$、$\dot{I}=I\angle\psi_i$，两者的乘积为

$$\dot{U}\,\dot{I}=UI\angle\psi_u+\psi_i=UI\cos(\psi_u+\psi_i)+\mathrm{j}UI\sin(\psi_u+\psi_i)$$

结果并未符合我们的想像。但由此却不难获知，如果不用电流相量 $\dot{I}$，而用电流相量的共轭复量 $\dot{I}^*$（简称电流共轭相量），即

$$\dot{I}^*=I\angle-\psi_i$$

以之与电压相量 $\dot{U}$ 相乘，可得

$$\begin{aligned}\dot{U}\,\dot{I}^*&=UI\angle\psi_u-\psi_i=UI[\cos(\psi_u-\psi_i)+\mathrm{j}\sin(\psi_u-\psi_i)]\\&=P+\mathrm{j}Q\end{aligned}$$

显然，结果符合愿望。我们把复量 $\dot{U}\,\dot{I}^*$ 称为复功率或功率相量，记为 $\tilde{S}$，即

$$\tilde{S}=\dot{U}\,\dot{I}^*=P+\mathrm{j}Q=P+\mathrm{j}2\omega(W_L-W_C)\tag{9-30}$$

显然复功率 $\tilde{S}$ 的模即为视在功率 S。

(9-30)式中，复功率的实部 P 应为网络中各电阻元件消耗功率的总和，虚部 Q 应为网络中各动态元件无功功率的代数和，且 W_L 应为网络中所有电感储能平均值的总和，W_C 应为网络中所有电容储能平均值的总和。这一关系称为复功率守恒。

复功率守恒可证明如下：

设电路如图 9-16 所示，电源施加于第 1 个回路中，其电压为 $\dot{U}_1$，该回路的电流为 $\dot{I}_1$。电路中的其他回路均由 R、L、C 等无源元件组成，设电路共有 b 条支路，n 个节点。

由 KCL 可得如下形式的$(n-1)$个方程

$$\dot{I}_{12}+\dot{I}_{13}+\cdots+\dot{I}_{1n}=0 \qquad \text{（第 1 节点）}$$

……

$$\dot{I}_{n-1,1}+\dot{I}_{n-1,2}+\cdots+\dot{I}_{n-1,n}=0 \qquad \text{（第 } n-1 \text{ 节点）}$$

由此可得

$$\dot{I}^{*}_{12}+\dot{I}^{*}_{13}+\cdots+\dot{I}^{*}_{1n}=0 \qquad \text{（第 1 节点）}$$

……

$$\dot{I}^{*}_{n-1,1}+\dot{I}^{*}_{n-1,2}+\cdots+\dot{I}^{*}_{n-1,n}=0$$

（第 $n-1$ 节点）

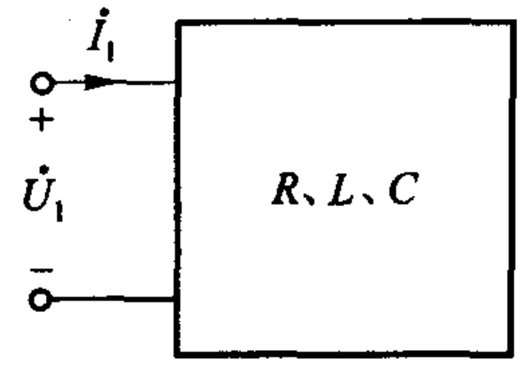


图 9-16　复功率守恒证明用图

设第 n 个节点为参考节点。把上列各个节点的方程乘以相应节点的节点电压，然后把这些方程相加，可得

$$\dot{U}_{1n}(\dot{I}^{*}_{12}+\dot{I}^{*}_{13}+\cdots+\dot{I}^{*}_{1n})+$$

$$\dot{U}_{2n}(\dot{I}^{*}_{21}+\dot{I}^{*}_{23}+\cdots+\dot{I}^{*}_{2n})+$$

$$\cdots\cdots+$$

$$\dot{U}_{n-1,n}(\dot{I}^{*}_{n-1,1}+\dot{I}^{*}_{n-1,2}+\cdots+\dot{I}^{*}_{n-1,n})=0$$

由 KVL 可知支路电压与节点电压的关系为

$$\dot{U}_{12}=\dot{U}_{1n}-\dot{U}_{2n}$$

……

又

$$\dot{I}^{*}_{12}=-\dot{I}^{*}_{21}$$

……

因此，可得到用支路电压、支路电流表示的方程

$$\dot{U}_{12}\dot{I}^{*}_{12}+\dot{U}_{13}\dot{I}^{*}_{13}+\cdots+\dot{U}_{n-1,n}\dot{I}^{*}_{n-1,n}=0$$

这一方程中共有 b 项。如果改用 $\dot{U}_1$、$\dot{U}_2$、…、$\dot{U}_b$ 表示支路电压，$\dot{I}_1$、$\dot{I}_2$、…、$\dot{I}_b$ 表示支路电流，则

$$\sum_{k=1}^{b}\dot{U}_k\dot{I}^{*}_k=0 \qquad (9-31)$$

其中 U_k、I_k 为第 k 条支路的电压、电流，各支路电压、电流均为关联参考方向。

把(9-31)式用于图 9-16 所示电路，由于 $\dot{U}_1$ 与 $\dot{I}_1$ 为非关联参考方向，故得

$$\dot{U}_1\dot{I}^{*}_1=\sum_{k=2}^{b}\dot{U}_k\dot{I}^{*}_k \qquad (9-32)$$

右端的每一项表示网络内部某一支路的复功率。如果其中有 l 条支路是由电阻构成，则

$$\dot{U}_l\dot{I}^{*}_l=R_l\dot{I}_l\dot{I}^{*}_l=R_lI_l^2=P_l$$

如果其中有 h 条支路是由电感 L_h 构成，则

$$\dot{U}_h \dot{I}_h^* = j\omega L_h \dot{I}_h \dot{I}_h^* = j\omega L_h I_h^2 = j2\omega\left(\frac{1}{2}L_h I_h^2\right)$$

$$= j2\omega(W_L)_h = jQ_{Lh}$$

如果其中有 n 条支路是由电容 C_n 构成，则

$$\dot{U}_n \dot{I}_n^* = -j\omega C_n \dot{U}_n^* \dot{U}_n = -j\omega C_n U_n^2 = -j2\omega\left(\frac{1}{2}C_n U_n^2\right)$$

$$= -j2\omega(W_C)_n = -jQ_{Cn}$$

因此

$$\sum_{k=2}^{b} \dot{U}_k \dot{I}_k^* = \sum_l P_l + \sum_h jQ_{Lh} - \sum_n jQ_{Cn} = P + jQ$$

其中　　$P = \sum P_l$

$$Q = \sum Q_{Lh} - \sum Q_{Cn}$$

且　　$Q = 2\omega(W_L - W_C)$

其中 W_L 为所有电感储能平均值的总和，W_C 为所有电容储能平均值的总和。故得

$$\tilde{S} = \dot{U}_1 \dot{I}_1^* = P + jQ = P + j2\omega(W_L - W_C)$$

正弦稳态单口网络功率关系如表 9－2 所示，备查。

表 9－2　正弦稳态单口网络功率关系

符号	名称	公式	备注
p	瞬时功率	ui	单位：W
P	功率	$P = UI\cos\varphi_Z = I^2\mathrm{Re}[Z] = U^2\mathrm{Re}[Y]$ $= \mathrm{Re}[\dot{U}\ \dot{I}^*]$	即平均功率或 有功功率 单位：W $\varphi_Z = \psi_u - \psi_i$
Q	无功功率	$Q = UI\sin\varphi_Z = I^2\mathrm{Im}[Z]$ $= -U^2\mathrm{Im}[Y]$ $= \mathrm{Im}[\dot{U}\ \dot{I}^*] = 2\omega(W_L - W_C)$	单位：var $W_L = \frac{1}{2}LI^2$ $W_C = \frac{1}{2}CU^2$ W_L, W_C 单位为 J
S	视在功率	$S = UI = I^2\lvert Z\rvert = U^2\lvert Y\rvert = \lvert\dot{U}\ \dot{I}^*\rvert$	单位：V · A
S	复功率	$S = \dot{U}\ \dot{I}^* = P + jQ$	单位：V · A，其实部、虚部单位分别为 W、var

续表

符号	名称	公式	备注
λ	功率因数	$\lambda=\cos\varphi_z=\dfrac{P}{S}=\dfrac{R}{\lvert Z\rvert}=\dfrac{G}{\lvert Y\rvert}$	φ_z 为正时，电流滞后，电感性；φ_z 为负号、电流超前，电容性

例 9－11　施加于电路的电压 $u(t)=100\sqrt{2}\cos(314t+30°)$ V，输入电流 $i(t)=50\sqrt{2}\cos(314t+60°)$ A，电压、电流为关联参考方向，问电路吸收的复功率是多少？

解　$\dot{U}=100\angle 30°$ V，$\dot{I}=50\angle 60°$ A

$$\tilde{S}=\dot{U}\dot{I}^{*}=(100\angle 30°\times 50\angle -60°)\ \text{V}\cdot\text{A}=5\,000\angle -30°\ \text{V}\cdot\text{A}$$
$$=(4\,330-\text{j}2\,500)\ \text{V}\cdot\text{A}$$

由此可知

$$P=4\,330\ \text{W}\qquad Q=-2\,500\ \text{var}$$

例 9－12　电路如图 9－17 所示，求两负载吸收的总复功率，并求输入电流（有效值）和总功率因数。

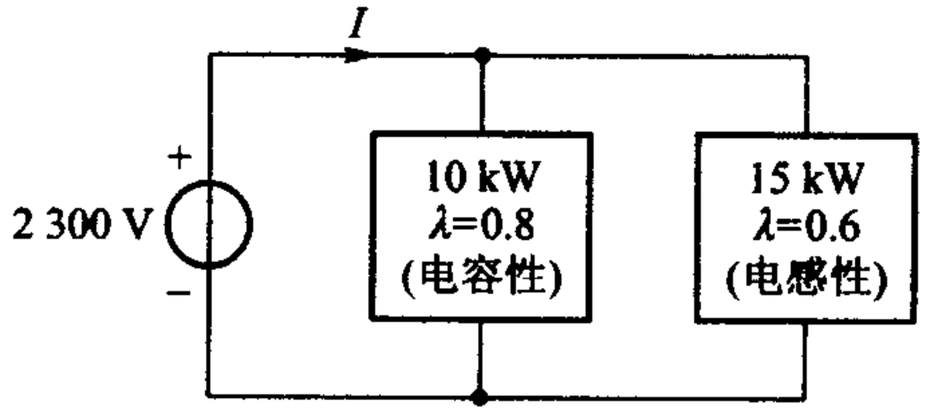


图 9－17　例 9－12

解　先求每一负载的复功率

$$S_1=\frac{10\times 10^3}{0.8}\ \text{V}\cdot\text{A}=12\,500\ \text{V}\cdot\text{A}$$
$$Q_1=S_1\sin\varphi_1=S_1\sin(-\arccos 0.8)$$
$$=12\,500\sin(-36.9°)\ \text{var}=-7\,500\ \text{var}$$

得

$$\tilde{S}_1=(10\,000-\text{j}7\,500)\ \text{V}\cdot\text{A}$$

$$S_2=\frac{15\times 10^3}{0.6}\ \text{V}\cdot\text{A}=25\,000\ \text{V}\cdot\text{A}$$
$$Q_2=S_2\sin\varphi_2=S_2\sin(\arccos 0.6)$$
$$=25\,000\sin 53.1°\text{var}=20\,000\ \text{var}$$

得

$$\tilde{S}_2 = (15\ 000 - j20\ 000)\ \text{V} \cdot \text{A}$$

$$\tilde{S} = \tilde{S}_1 + \tilde{S}_2 = (25\ 000 + j12\ 500)\ \text{V} \cdot \text{A} = 27\ 951 \angle 26.56^\circ\ \text{V} \cdot \text{A}$$

$$S = 27\ 951\ \text{V} \cdot \text{A} = UI$$

得

$$I = \frac{27\ 951}{2\ 300}\ \text{A} = 12.2\ \text{A}$$

$$\lambda = \cos 26.56^\circ = 0.894\ 5(\text{电感性})$$ ◀

在处理多负载的功率分析问题时，复功率守恒是很有用的，如上例所示。

练习题

9-11　求单口网络的阻抗。若该网络在(1) 电压为 230 V 时，吸收的复功率为 4 600 $\angle 30^\circ$ V · A；(2) 电流为 12.5 A 时，吸收的复功率为 5 000 $\angle 45^\circ$ V · A；(3) 在电压为 230 V、电流为 10 A 时，吸收无功功率 -1 500 var。

[(9.96 + j5.75) Ω；(22.66 + j22.6) Ω；(17.4 - j15.0) Ω]

§9-7　正弦稳态最大功率传递定理

负载电阻从具有内阻的直流电源获得最大功率的问题已在第四章中讨论过。本节将讨论在正弦稳态时负载，从电源获得最大功率的条件。设电路如图 9-18 所示，交流电源的电压为 $\dot{U}_s$，其内阻抗为 $Z_s = R_s + jX_s$，负载阻抗则为 $Z_L = R_L + jX_L$。这里所用的下标 L，已如例 9-10 所述，是指负载，而非电感。负载电阻获得最大功率的条件取决于电路内何者为定值、何者为变量。设给定电源及其阻抗，下面将分析两种情况：负载的电阻及电抗均可独立地变化；负载阻抗角固定而模可改变。先分析第一种情况。

由图 9-18 可知，电路电流为

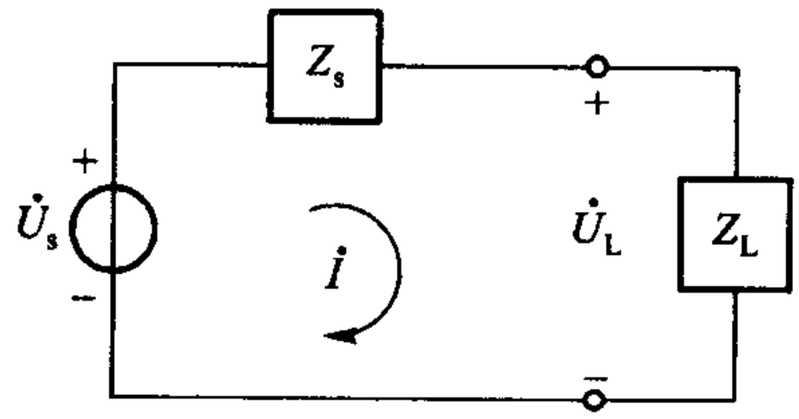


图 9-18　求最大功率传输用图

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_s}{(R_s + R_L) + j(X_s + X_L)}$$

电流有效值应为

$$I=\frac{U_s}{\sqrt{(R_s+R_L)^2+(X_s+X_L)^2}}$$

由此可得负载电阻的功率为

$$P_L=R_L I^2=R_L\frac{U_s^2}{(R_s+R_L)^2+(X_s+X_L)^2}$$

我们的任务是要求出使上式所示的 P_L 为最大时的 X_L 及 R_L 值。由于 X_L 只出现在分母中，显然，对任何 R_L 值来说，当 $X_L=-X_s$ 时分母之值为最小，此即为所求的 X_L 值。举例来说，若电源内阻抗由电阻及 1H 的电感串联组成，而 $\omega=2$ rad/s，则 $X_s=\omega L=2\Omega$，因而所需的 X_L 值应为 -2Ω，这一电抗可由 $\frac{1}{4}$F 的电容来实现。满足这一条件时，功率为

$$P_L=\frac{U_s^2R_L}{(R_s+R_L)^2}$$

再继续求出使上式所示 P_L 为最大时的 R_L 值。为此，可求出上式对 R_L 的导数并使之为零，即

$$\frac{\mathrm{d}P_L}{\mathrm{d}R_L}=U_s^2\frac{(R_s+R_L)^2-2(R_s+R_L)R_L}{(R_s+R_L)^4}=0$$

由此可得

$$R_L=R_s$$

因此，在第一种情况下，负载获得最大功率的条件是：$X_L=-X_s$ 以及 $R_L=R_s$，也就是说负载阻抗为电源内阻抗的共轭复数。即

$$Z_L=Z_s^* \tag{9-33}$$

满足这一条件时，负载阻抗与电源内阻抗为最大功率匹配或共轭匹配。此时，最大功率为

$$P_{Lmax}=\frac{U_s^2}{4R_s} \tag{9-34}$$

在第二种情况时[①]，设负载阻抗为

$$Z_L=|Z|\angle\varphi=|Z|\cos\varphi+\mathrm{j}|Z|\sin\varphi$$

则

$$i=\frac{\dot{U}_s}{(R_s+|Z|\cos\varphi)+\mathrm{j}(X_s+|Z|\sin\varphi)}$$

负载电阻的功率为

① 用理想变压器来使负载获得最大功率，即属这一情况，见第十一章。

$$P_{\mathrm{L}}=\frac{U_{\mathrm{s}}^{2}|Z|\cos\varphi}{(R_{\mathrm{s}}+|Z|\cos\varphi)^{2}+(X_{\mathrm{s}}+|Z|\sin\varphi)^{2}}$$

上式中的变量为$|Z|$,求该式对$|Z|$的导数得

$$\frac{\mathrm{d}P_{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}|Z|}=U_{\mathrm{s}}^{2}[(R_{\mathrm{s}}+|Z|\cos\varphi)^{2}+(X_{\mathrm{s}}+|Z|\sin\varphi)^{2}]\cos\varphi-$$

$$\frac{2|Z|\cos\varphi[(R_{\mathrm{s}}+|Z|\cos\varphi)\cos\varphi+(X_{\mathrm{s}}+|Z|\sin\varphi)\sin\varphi]}{[(R_{\mathrm{s}}+|Z|\cos\varphi)^{2}+(X_{\mathrm{s}}+|Z|\sin\varphi)^{2}]^{2}}$$

使

$$\frac{\mathrm{d}P_{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}|Z|}=0$$

可得

$$(R_{\mathrm{s}}+|Z|\cos\varphi)^{2}+(X_{\mathrm{s}}+|Z|\sin\varphi)^{2}-2|Z|\cos\varphi(R_{\mathrm{s}}+|Z|\cos\varphi)-$$

$$2|Z|\sin\varphi(X_{\mathrm{s}}+|Z|\sin\varphi)=0$$

可得

$$|Z|^{2}=R_{\mathrm{s}}^{2}+X_{\mathrm{s}}^{2}$$

即

$$|Z|=\sqrt{R_{\mathrm{s}}^{2}+X_{\mathrm{s}}^{2}} \tag{9-35}$$

因此,在第二种情况下,负载获得最大功率的条件是:负载阻抗的模应与电源内阻抗的模相等,称为模匹配。当负载是纯电阻时,即$|Z|=R_{\mathrm{L}}$时,最大功率的条件是$R_{\mathrm{L}}=\sqrt{R_{\mathrm{s}}^{2}+X_{\mathrm{s}}^{2}}$而不是$R_{\mathrm{L}}=R_{\mathrm{s}}$,这是应当注意的。显然,在这一情况下所得的最大功率并非为可能获得的最大值。如果阻抗角也可调节,还能使负载得到更大一些的功率。

例 9-13　电路如图 9-19 所示,试求负载功率,若:(1) 负载为 5 Ω 电阻;(2) 负载为电阻且与电源内阻抗匹配;(3) 负载与电源内阻抗为共轭匹配。

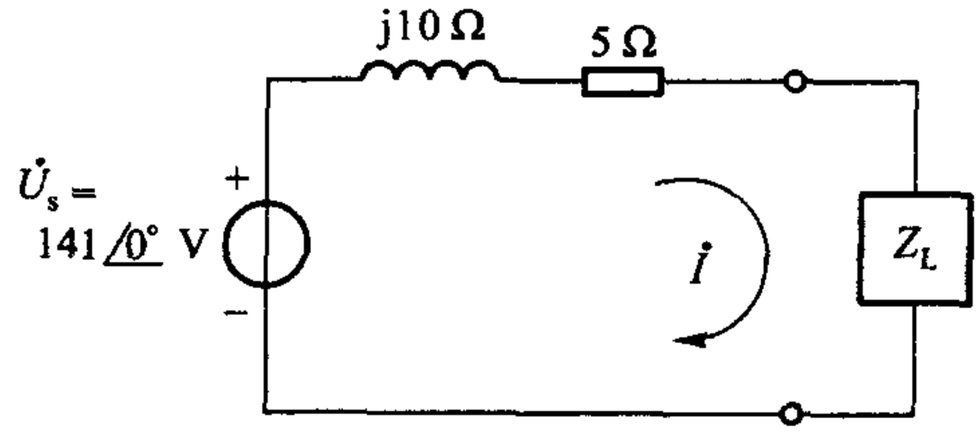


图 9-19　例 9-13

解　　$Z_{\mathrm{s}}=(5+\mathrm{j}10)\ \Omega=11.2\angle 63.5^{\circ}\ \Omega$

(1) $Z_{\mathrm{L}}=R_{\mathrm{L}}=5\ \Omega$ 时

$$\dot{I}=\frac{141\angle 0^{\circ}}{Z_{\mathrm{s}}+5}\ \mathrm{A}=\frac{141\angle 0^{\circ}}{10+\mathrm{j}10}\ \mathrm{A}=\frac{141\angle 0^{\circ}}{14.1\angle 45^{\circ}}\ \mathrm{A}=10\angle -45^{\circ}\ \mathrm{A}$$

$$P_L = 10^2 \times 5\ \text{W} = 500\ \text{W}$$

(2) $Z_L = R_L = |Z_s| = 11.2\ \Omega$ 时(模匹配)

$$\dot{I} = \frac{141\angle 0°}{Z_s + 11.2}\ \text{A} = \frac{141\angle 0°}{16.2 + \text{j}10}\ \text{A} = \frac{141\angle 0°}{19\angle 31.7°}\ \text{A} = 7.42\angle -31.7°\ \text{A}$$

$$P_L = 7.42^2 \times 11.2\ \text{W} = 617\ \text{W}$$

(3) $Z_L = Z_s^* = (5 - \text{j}10)\ \Omega$ 时(共轭匹配)

$$\dot{I} = \frac{141\angle 0°}{Z_s + Z_L}\ \text{A} = \frac{141\angle 0°}{10 + \text{j}0}\ \text{A} = \frac{141\angle 0°}{10\angle 0°}\ \text{A} = 14.1\angle 0°\ \text{A}$$

$$P_L = 14.1^2 \times 5\ \text{W} = 1\ 000\ \text{W}$$

可见共轭匹配时,负载所得功率最大。

练习题

9-12　电路如图 9-20 所示,试求负载 R_L 获得最大功率时的 R_L 值,并求最大功率值。已知 $\dot{U}_s = 254\angle 30°$ V。

(1 800 W)

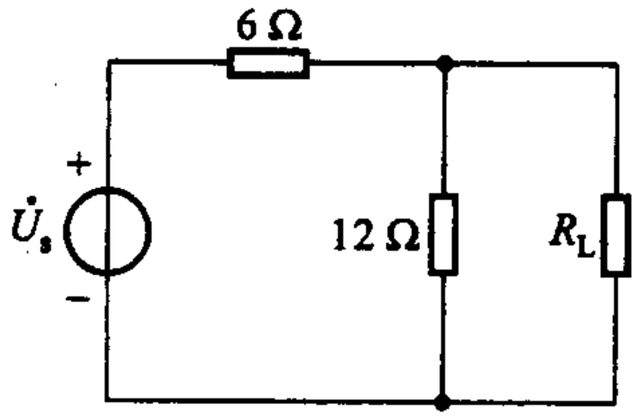


图 9-20　练习题 9-12

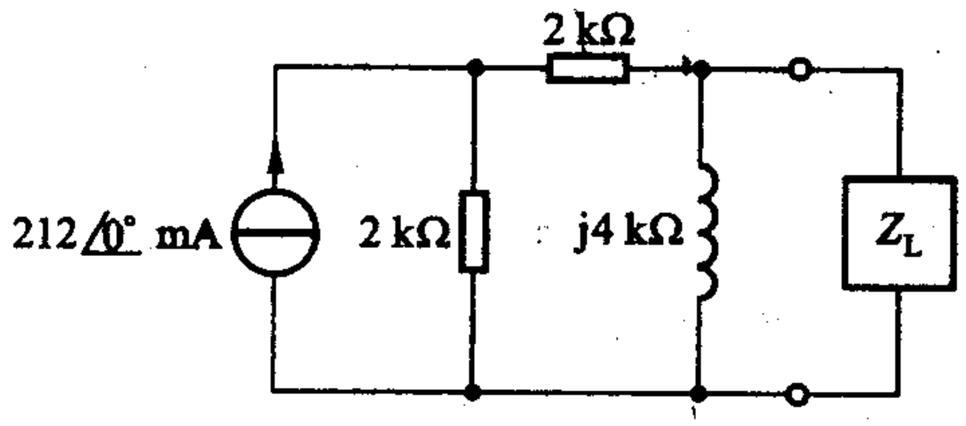


图 9-21　练习题 9-13

9-13　电路如图 9-21 所示。求:(1) 获得最大功率时 Z_L 为何值?(2) 最大功率值;(3) 若 Z_L 为纯电阻,Z_L 获得的最大功率。

(2.83∠−45° kΩ;11.25 W;9.32 W)

§9-8　三相电路

目前,交流电在动力方面的应用,几乎都是属于所谓三相制。这是由于三相制在发电、输电和用电方面都有许多优点。单相电路的瞬时功率是随时间交变的,但对称三相电路的总瞬时功率却是恒定的,因而三相电动机能产生恒定的转矩。提供大功率直流电的电子整流器也是从三相或相数更多的电源取得能量的。日常生活用电也是取自三相制中的一相。

三相电路实际上是复杂正弦交流电路的一种特殊类型,第八章以及本章的

前半部分所述内容仍是分析三相电路的依据。

三相电路中最基本的组成部分便是三相交流发电机，图 9－22(a)为其示意图。定子内侧周围旋置三组相同的绕组，其端钮分别为 aa′、bb′和 cc′[①]，各占定子内侧的$\frac{1}{3}$空间。当转子(磁铁)以角速度 ω 逆时针旋转时，磁通依次穿过这三个绕组感应出随时间按正弦方式变化的电压。这三个电压的振幅、频率都是相同的，但由于三个绕组分布的位置不同，它们不可能是同相的。从图 9－22(a)不难看出 $u_{c'c}$ 滞后 $u_{aa'}$ 角 60°，而 $u_{bb'}$ 滞后 $u_{aa'}$ 角 120°，$u_{aa'}$、$u_{c'c}$ 和 $u_{bb'}$ 的波形如图 9－22(b)所示。如果设 a、b、c 三端各为相对应绕组电压参考方向的正端，并考虑到 $u_{c'c} = -u_{cc'}$，亦即 $u_{c'c}$ 与 $u_{cc'}$ 反相 180°，便可得知如图 9－22(c)所示 $u_{aa'}$、$u_{bb'}$ 和 $u_{cc'}$ 的波形图，其中 $u_{cc'}$ 滞后 $u_{aa'}$ 的相角成为 60° + 180° = 240°。因此，从图 9－22所示三相发电机可以获得如下所示的三组电压：

$$\left.\begin{aligned} u_{aa'}(t) &= U_{Pm}\cos(\omega t) \\ u_{bb'}(t) &= U_{Pm}\cos(\omega t - 120°) \\ u_{cc'}(t) &= U_{Pm}\cos(\omega t - 240°) = U_{Pm}\cos(\omega t + 120°) \end{aligned}\right\} \tag{9-36}$$

式中 U_{Pm} 为电压的振幅，下标 P 为相(phase)的意思。这三组具有相同振幅、相同频率而相位依次相差 120°的电压便是一般所称的对称三相电压。$u_{aa'}$、$u_{bb'}$ 和 $u_{cc'}$ 常简写为 u_a、u_b 和 u_c，并相应地称为 a 相电压、b 相电压和 c 相电压。端钮 a、b、c 称为绕组的始端，端钮 a′、b′、c′则称为绕组的末端。

对应于对称三相电压的相量为

$$\left.\begin{aligned} \dot{U}_a &= U_P \angle 0° \\ \dot{U}_b &= U_P \angle -120° \\ \dot{U}_c &= U_P \angle 120° \end{aligned}\right\} \tag{9-37}$$

式中 U_P 为有效值，即 $U_P = U_{Pm}/\sqrt{2}$。相量图如图 9－22(d)所示。

对称三相电压有一个重要特点：在任一瞬间，对称三相电压之和恒等于零。即

$$u_{aa'}(t) + u_{bb'}(t) + u_{cc'}(t) = 0 \tag{9-38}$$

利用图 9－22(c)所示的三相电压波形图，把任一时刻波形的数值代数相加，即可得到证实。其实，这就是恒等式

---

① 国家标准中规定电机的三相用字母 U、V、W 表示，本书为了统一，均用字母 a、b、c 表示。

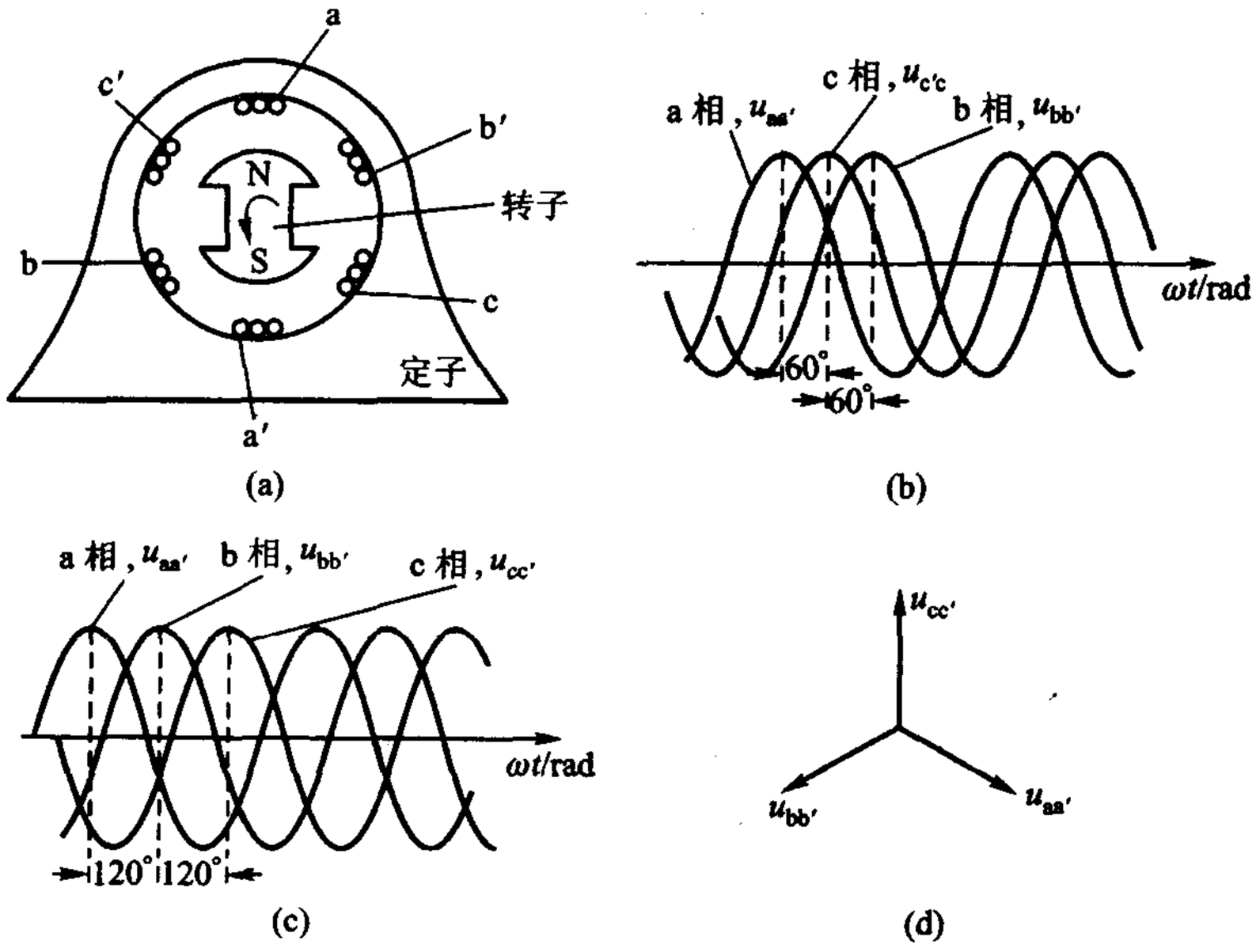


图 9－22　三相发电机及其电压波形图、相量图

$$\cos\theta + \cos(\theta - 120°) + \cos(\theta + 120°) = 0$$

的反映。

由相量的线性性质（§8－4）可知，(9－38)式表示

$$\dot{U}_a + \dot{U}_b + \dot{U}_c = 0 \tag{9-39}$$

表现在相量图上，任何两个电压的相量和必与第三个电压相量大小相等、方向相反。

上述三个电压到达最大值的先后次序称为相序（phase sequence）。图 9－22(a)所示发电机以角速度 ω 逆时针方向旋转时，其相序为 a—b—c；顺时针方向旋转时，其相序为 a—c—b。图 9－22(b)所示波形图以及相应的(9－36)式、图 9－22(d)的相量图均代表 a—b—c 相序。

如果把上述三相发电机三个定子绕组的末端连在一公共点 n 上，就构成了一个对称 Y 形联结的三相发电机，如图 9－23 所示。公共点 n 称为中性点（neutral point），a、b、c 三端与输电线相接，输送能量到负载，这三根输电线称为相（火）线。图中每个电源（即每一定子绕组）的电压称为相电压（phase voltage），相线之间电压称为线电压（line voltage），如 u_{ab}、u_{bc} 和 u_{ca}，显然

$$u_{ab} = u_a - u_b$$

$$u_{bc} = u_b - u_c$$

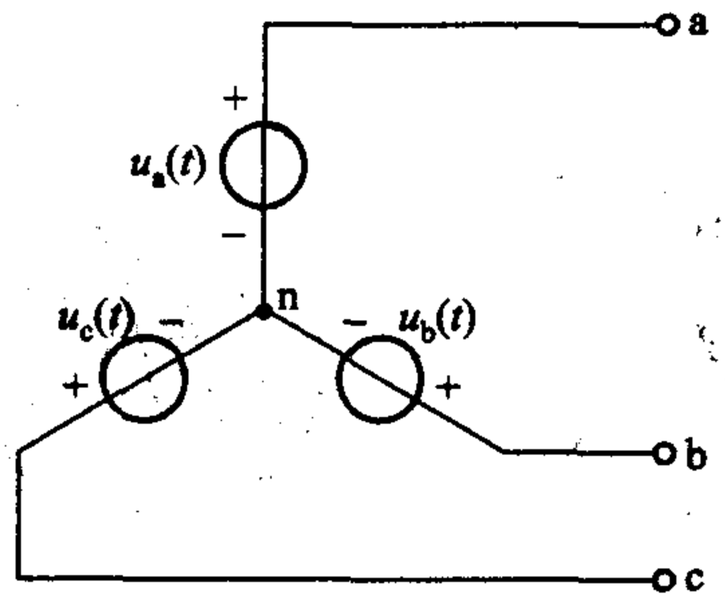


图 9－23　Y 形联结的三相电源

$$u_{ca} = u_c - u_a$$

由此可得各相电压、线电压的相量图如图 9－24(a)所示。如以 U_L 表示线电压的有效值，U_P 表示相电压的有效值，则由相量图可得

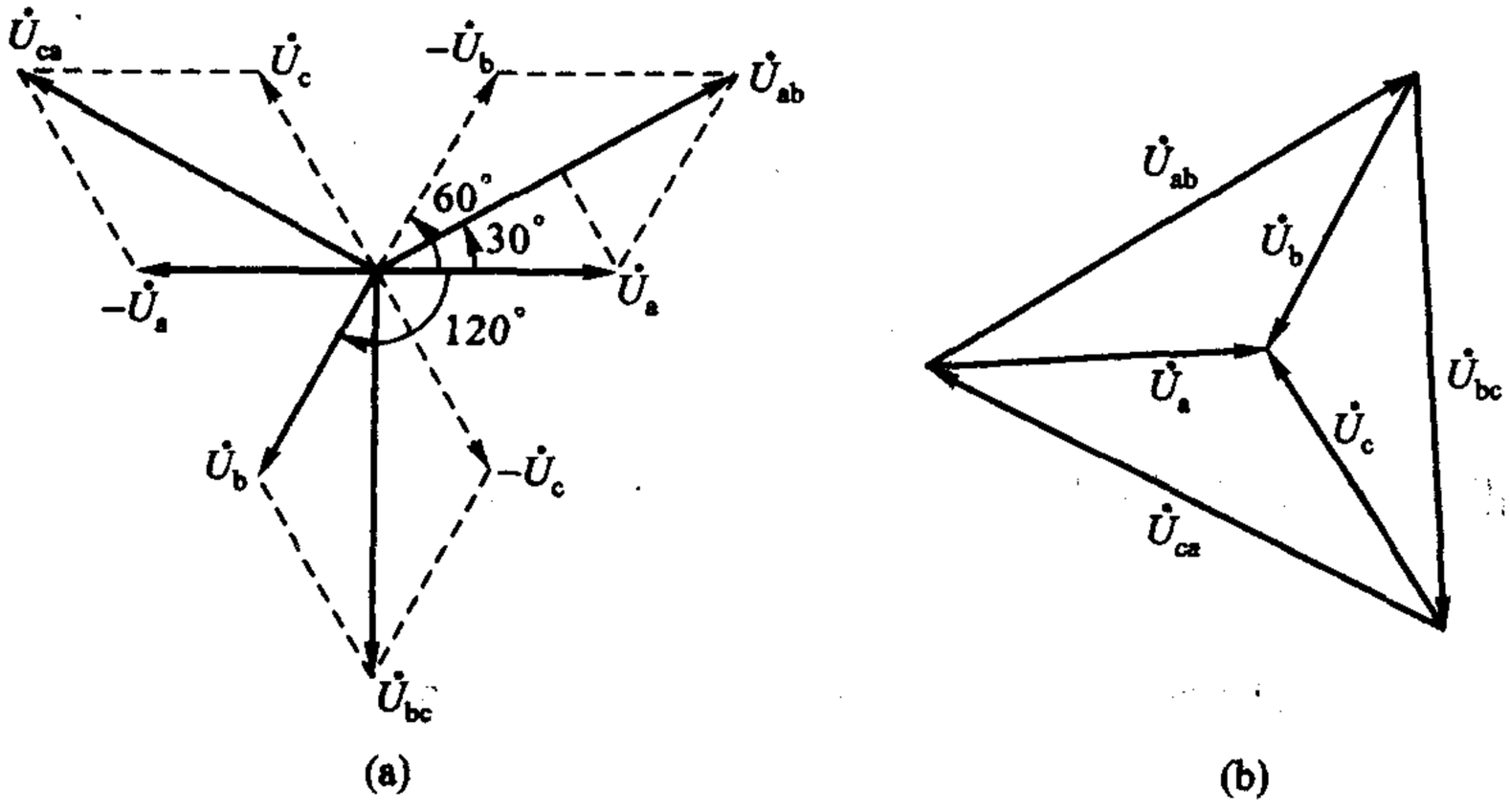


图 9－24　Y 形联结三相电源相电压和线电压相量图

$$\frac{1}{2}U_L = U_P \cos 30°$$

即

$$U_L = \sqrt{3}U_P \tag{9-40}$$

如相电压的有效值为 220 V，则线电压的有效值为 $\sqrt{3} \times 220$ V = 380 V。另外，由

相量图可知，若以 $\dot{U}_a$ 为参考相量，则①

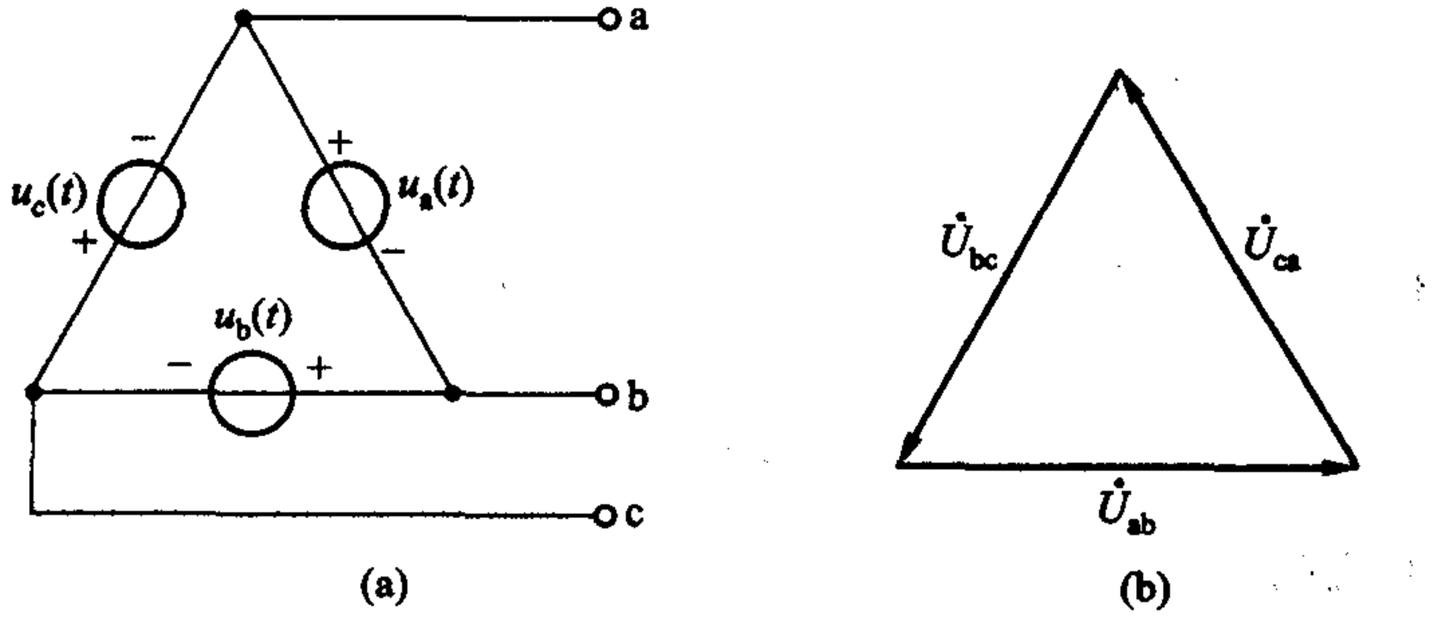
$$\dot{U}_{ab}=\sqrt{3}U_P\angle 30°,\quad u_{ab}(t)=\sqrt{3}U_{Pm}\cos(\omega t+30°)$$

$$\dot{U}_{bc}=\sqrt{3}U_P\angle -90°,\quad u_{bc}(t)=\sqrt{3}U_{Pm}\cos(\omega t-90°)$$

$$\dot{U}_{ca}=\sqrt{3}U_P\angle 150°,\quad u_{ca}(t)=\sqrt{3}U_{Pm}\cos(\omega t+150°)$$

如把线电压相量平移，相量图也可绘成如图 9-24(b)所示。

如果把三个绕组的始、末端顺次相接，再从各连接点 a、b、c 引出相线来，就构成了一个 Δ 形联结的三相电源，如图 9-25(a)所示。在这种接法中是没有中性点的，线电压即相电压，相量图如图 9-25(b)所示。必须注意，如果任何一相绕组接法相反，三个相电压之和将不复为零，因而在 Δ 形联结的闭合回路中将产生极大的短路电流，造成严重恶果。



(a)　　(b)

图 9-25　Δ 形联结的三相电源及其电压相量图

下面分析典型的三相电路。首先分析对称 Y 形联结负载与对称 Y 形联结三相发电机组成的三相电路，这种电路称为 Y-Y 对称三相电路，如图9-26所示。所谓对称三相负载是由三个相同的负载组成的，每一个负载构成三相负载的一相。设每相负载的阻抗为 $Z=|Z|\angle\varphi$，电源中性点 n 与负载中性点 n′的连接线称为中性线，设中性线的阻抗为 Z_n。由节点分析可知

$$\dot{U}_{n'n}=\frac{\dfrac{\dot{U}_a+\dot{U}_b+\dot{U}_c}{Z}}{\dfrac{3}{Z}+\dfrac{1}{Z_n}}\qquad(9-41)$$

① 线电压对相电压的相位关系存在下述规律：线电压超前于其下标第一字母所对应的相电压角 30°。$\dot{U}_{ab}$ 超前 $\dot{U}_a$ 角 30°，$\dot{U}_{bc}$ 超前 $\dot{U}_b$ 角 30°，$\dot{U}_{ca}$ 超前 $\dot{U}_c$ 角 30°。图 9-24(b)显示了这一关系。

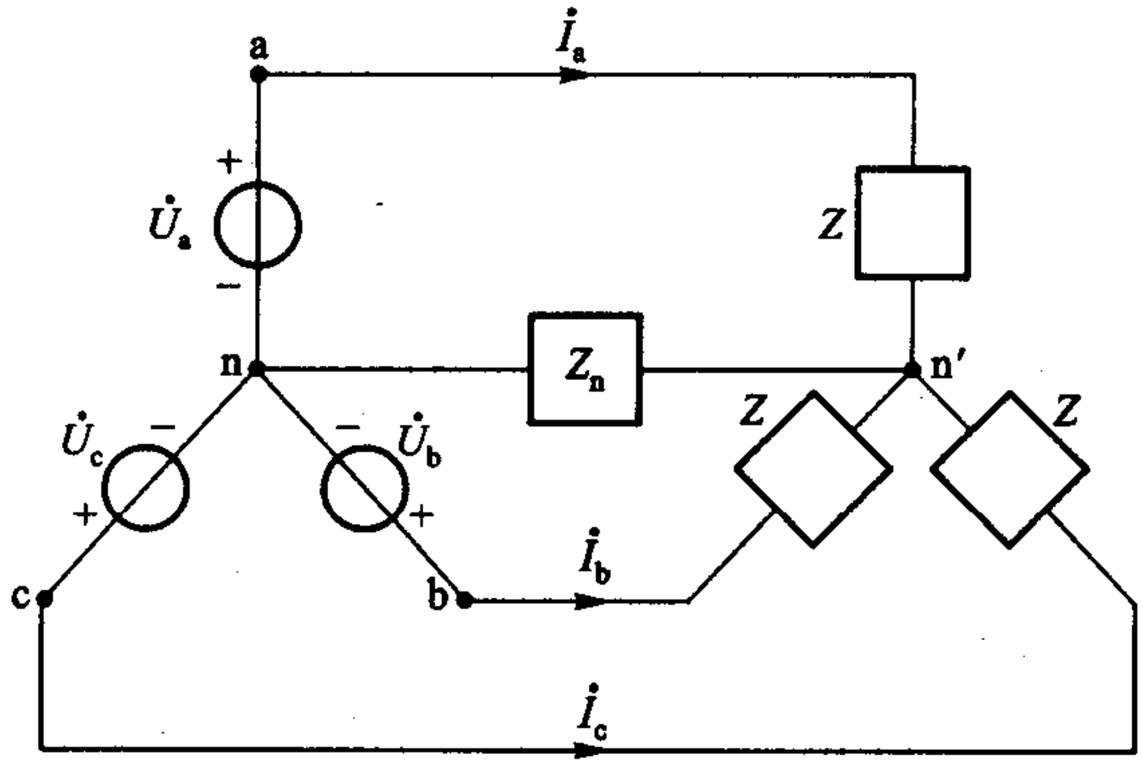


图 9－26　Y－Y 对称三相电路

由于 $\dot{U}_a+\dot{U}_b+\dot{U}_c=0$，故得

$$\dot{U}_{n'n}=0 \tag{9-42}$$

亦即 n 点和 n′点是同电位点。由此可得 a 相的电流为

$$\dot{I}_a=\frac{\dot{U}_a}{Z}=\frac{U_P}{|Z|}\angle -\varphi \tag{9-43}$$

其他两相电流则为

$$\dot{I}_b=\frac{U_P}{|Z|}\angle -\varphi-120° \tag{9-44}$$

$$\dot{I}_c=\frac{U_P}{|Z|}\angle -\varphi+120° \tag{9-45}$$

相量图如图 9－27 所示。每相中的电流称为相电流，而相线电流则称为线电流，在 Y 形联结中，线电流即相电流。由相量图可知，三个相电流 $\dot{I}_a$、$\dot{I}_b$、$\dot{I}_c$ 之和为零。因此，如在中性点 n 或 n′处运用基尔霍夫电流定律，就可得出中性线电流为零的结论。所以，在对称三相电路中，取消中性线对电路是不会发生影响的。有中性线的三相制称为三相四线制，取消中性线时即成为三相三线制。由于在对称三相电路中，$\dot{U}_{n'n}$ 总是等于零的，已如(9－42)式所示，因此，在分析这类电路时，不论原来有没有中性线，也不论中性线的阻抗是多少，都可以设想在 n′n 间用一根理想导线连接起来，运用(9－43)式求出一相的电流，再按(9－44)、(9－45)两式推知其他两相的电流，不必按原电路进行计算。

每相负载的功率为

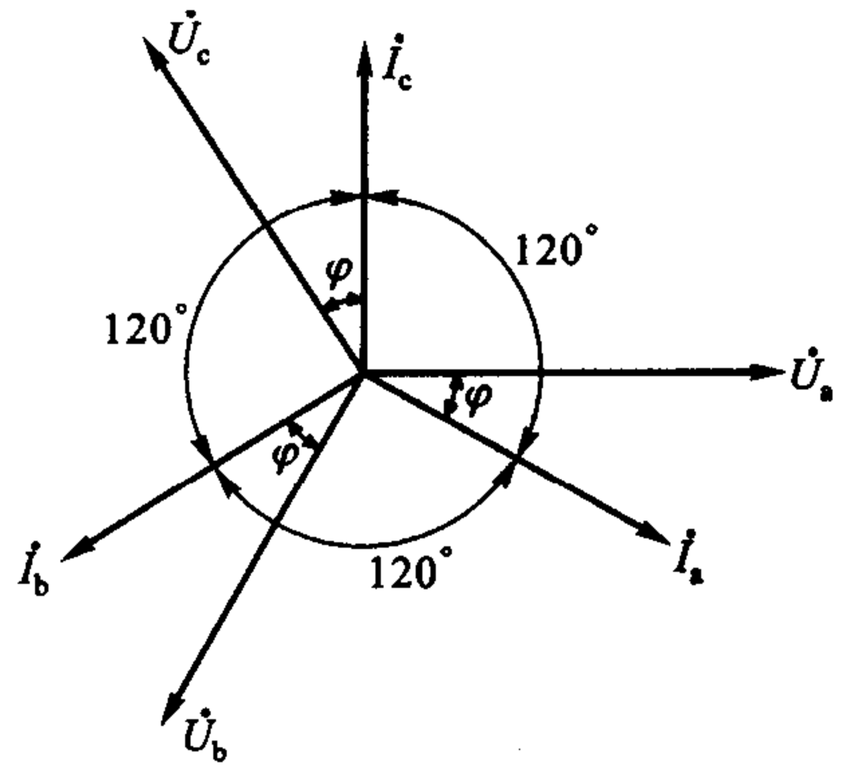


图 9－27　Y－Y 对称三相电路相量图

$$P_P = U_P I_P \cos\varphi = \left(\frac{U_L}{\sqrt{3}}\right) I_L \cos\varphi \tag{9-46}$$

其中 I_P、I_L 分别为相电流、线电流的有效值，在 Y 形联结中两者是相等的。三相总功率为

$$P = 3P_P = 3U_P I_P \cos\varphi = \sqrt{3} U_L I_L \cos\varphi \tag{9-47}$$

例 9－14　正相序对称三相三线制的电压为 380 V，Y 形对称负载每相阻抗 $Z = 10 \angle 10° \ \Omega$，求电流。

解　在三相电路问题中，如不加说明，电压都是指线电压，且为有效值。线电压为 380 V，则相电压应为 $\frac{380}{\sqrt{3}}$ V = 220 V。设 a 相电压初相为零，则

$$\dot{U}_a = 220 \angle 0° \text{ V}$$

设想电源中性点 n 与负载中性点 n′用理想导线相连接，则

$$\dot{I}_a = \frac{\dot{U}_a}{Z} = \frac{220 \angle 0°}{10 \angle 10°} \text{ A} = 22 \angle -10° \text{ A}$$

其他两相电流为

$$\dot{I}_b = 22 \angle -10° - 120° \text{ A} = 22 \angle -130° \text{ A}$$

$$\dot{I}_c = 22 \angle -10° + 120° \text{ A} = 22 \angle 110° \text{ A}$$

各相电流的有效值为 22 A。

如果在 Y－Y 形联结电路中，负载不对称，但电源对称，有中性线，且其阻抗可忽略不计，则仍可分离一相进行计算，但不能由一相的结果推知其他两相。

例 9－15　电路如图 9－26 所示，但三相负载不对称，$Z_{an'} = 48.4 \ \Omega$、$Z_{bn'} =$

48.4 Ω、$Z_{cn'}$ = 242 Ω，正相序对称三相电源相电压有效值为 220 V，中性线阻抗可忽略不计，试求 $\dot{I}_a$、$\dot{I}_b$ 和 $\dot{I}_c$。

解　由于中性线阻抗可忽略不计，即使中性线有电流，$\dot{U}_{n'n}$仍为零，仍可用对称电路分离一相的计算方法。对第一相，可得

$$\dot{I}_a = \frac{\dot{U}_a}{48.4} = \frac{220 \angle 0°}{48.4}\ \text{A} = 4.55 \angle 0°\ \text{A}$$

第二相负载也是 48.4 Ω，故可知

$$\dot{I}_b = 4.55 \angle -120°\ \text{A}$$

第三相负载为 242 Ω，分离该相算得

$$\dot{I}_c = \frac{\dot{U}_c}{242} = \frac{220 \angle 120°}{242}\ \text{A} = 0.91 \angle 120°\ \text{A}$$

中性线电流

$$\dot{I}_n = \dot{I}_a + \dot{I}_b + \dot{I}_c = 3.64 \angle -60°\ \text{A} \neq 0$$

$\dot{I}_c$ 是不能推知的，是在分离该相后再行算得的。

从本例可知：在日常用电时，即使三相负载不对称，但由于有中性线，且中性线阻抗甚小，各相负载两端电压仍然对称，并保持正常的电压。 ◀

作为另一类典型的三相电路，下面分析对称 Δ 形联结负载与对称三相电源组成的三相电路。三相电源可能是 Y 形联结也可能是 Δ 形联结。当只要求分析负载的电流和电压时，只需知道电源的线电压，不必追究电源的具体接法。设 Δ 形联结对称负载如图 9－28 所示，由于电源的线电压是对称的，设为正相序，则三个相电流 $\dot{I}_{ab}$、$\dot{I}_{bc}$、$\dot{I}_{ca}$ 在相位上顺序相差角 120°，它们与三个线电流 $\dot{I}_a$、$\dot{I}_b$、$\dot{I}_c$ 之间的关系为

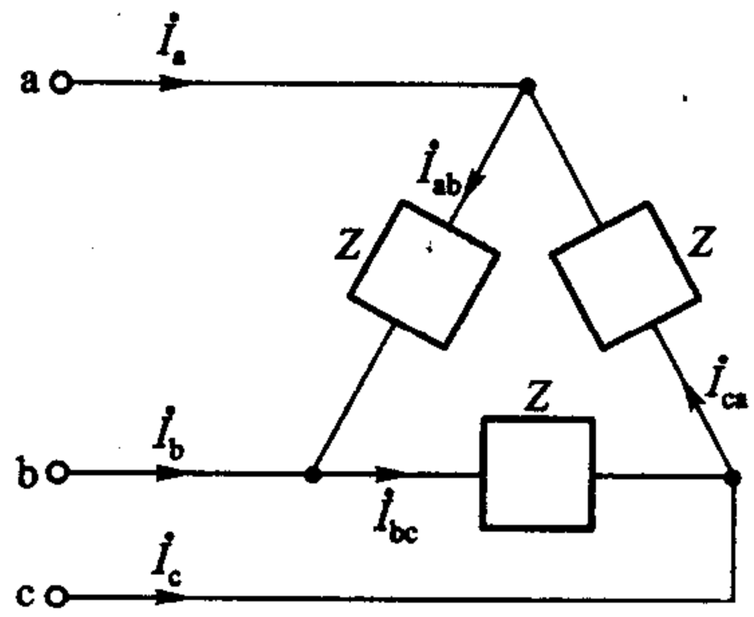


图 9－28　Δ 形联结对称负载

$$\left.\begin{aligned}\dot{I}_a &= \dot{I}_{ab} - \dot{I}_{ca}\\ \dot{I}_b &= \dot{I}_{bc} - \dot{I}_{ab}\\ \dot{I}_c &= \dot{I}_{ca} - \dot{I}_{bc}\end{aligned}\right\} \qquad (9-48)$$

如以 I_L 表示线电流的有效值，I_P 表示相电流的有效值，则由图 9－29 所示的相量图可得

$$\frac{1}{2}I_L = I_P \cos 30°$$

即
$$I_L = \sqrt{3} I_P \tag{9-49}$$

若以线电压 $\dot{U}_{ab}$ 为参考相量，负载的阻抗角为 φ，则相电流相量为

$$\dot{I}_{ab} = I_P \angle -\varphi, \dot{I}_{bc} = I_P \angle -\varphi - 120°, \dot{I}_{ca} = I_P \angle -\varphi + 120°$$

线电流相量则由图 9-29 相量图可知应为①

$$\dot{I}_a = \sqrt{3} I_P \angle -\varphi - 30°$$

$$\dot{I}_b = \sqrt{3} I_P \angle -\varphi - 30° - 120° = \sqrt{3} I_P \angle -\varphi - 150°$$

$$\dot{I}_c = \sqrt{3} I_P \angle -\varphi - 30° + 120° = \sqrt{3} I_P \angle -\varphi + 90°$$

显然，在 Δ 形联结中相电压与线电压是相等的。每相负载的功率为

$$P_P = U_P I_P \cos\varphi = U_L \left(\frac{I_L}{\sqrt{3}}\right) \cos\varphi$$

式中 U_P 为相电压的有效值，U_L 为线电压的有效值，两者是相等的。三相总功率为

$$P = 3P_P = 3U_P I_P \cos\varphi = \sqrt{3} U_L I_L \cos\varphi \tag{9-50}$$

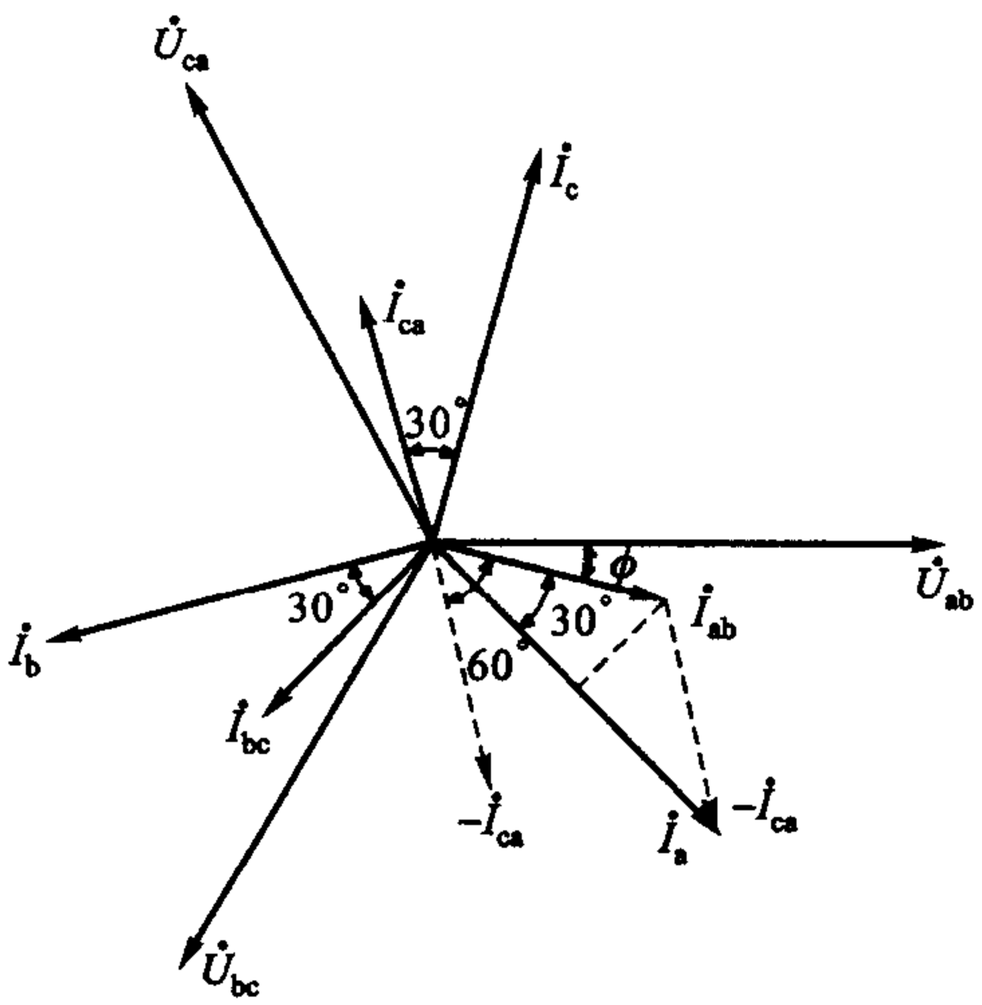


图 9-29　Δ 形联结对称负载相量图

(9-50)式与(9-47)式完全相同，这就是说，不论是 Y 形或 Δ 形联结的对称负

① 相电流对线电流的相位关系存在下述规律：相电流超前于第一字母所对应的线电流角 ±30°。$\dot{I}_{ab}$ 超前 $\dot{I}_a$ 角 ±30°；$\dot{I}_{bc}$ 超前 $\dot{I}_b$ 角 ±30°；$\dot{I}_{ca}$ 超前 $\dot{I}_c$ 角 ±30°。正相序取“+”号，负相序取“-”号。

载，三相总功率都等于线电压有效值、线电流有效值乘积的$\sqrt{3}$倍、再乘以负载的功率因数。

例 9－16　图 9－28 所示三相电路中，$Z=10\angle 60°\ \Omega$，线电压为正相序，$\dot{U}_{ab}=450\angle 0°\ \text{V}$，试求负载相电流和线电流。

解　$$\dot{I}_{ab}=\frac{\dot{U}_{ab}}{Z}=\frac{450\angle 0°}{10\angle 60°}\ \text{A}=45\angle -60°\ \text{A}$$

根据相序，其他两相电流推知为

$$\dot{I}_{bc}=45\angle -60°-120°\ \text{A}=45\angle -180°\ \text{A}$$

$$\dot{I}_{ca}=45\angle -60°+120°\ \text{A}=45\angle 60°\ \text{A}$$

线电流

$$\dot{I}_{a}=\dot{I}_{ab}-\dot{I}_{ca}=(45\angle -60°-45\angle 60°)\ \text{A}=-\text{j}77.9\ \text{A}=77.9\angle -90°\ \text{A}$$

其他两线电流可推知为

$$\dot{I}_{b}=77.9\angle -90°-120°\ \text{A}=77.9\angle -210°\ \text{A}$$

$$\dot{I}_{c}=77.9\angle -90°+120°\ \text{A}=77.9\angle 30°\ \text{A}$$

线电流 I_a 也可利用(9－49)式(确定其大小)和相量图 9－29(确定其相角)求得为

$$\dot{I}_{a}=\sqrt{3}\times 45\angle -60°-30°\ \text{A}=77.9\angle -90°\ \text{A}$$

然后推知其他两线电流。

例 9－17　对称 Δ 形联结负载，每相阻抗为$(10+\text{j}7.54)\ \Omega$，与正序 Y 形联结电源相接，相电压 $\dot{U}_a=220\angle 30°\ \text{V}$，试求负载的相电流和线电流。

解　求解 Δ 形联结负载三相电路，一般需要知道每相负载的线电压，然后逐相求得负载相电流，再求出线电流，如例 9－16 所示。

根据 $\dot{U}_a=220\angle 30°\ \text{V}$，可知 $\dot{U}_b=220\angle -90°\ \text{V}$，$\dot{U}_c=220\angle 150°\ \text{V}$，因而

$$\dot{U}_{ab}=\dot{U}_{a}-\dot{U}_{b}=(220\angle 30°-220\angle -90°)\ \text{V}=381\angle 60°\ \text{V}$$

或由(9－49)式，结合相量图 9－29，得

$$\dot{U}_{ab}=\sqrt{3}\times 220\angle 30°+30°\ \text{V}=381\angle 60°\ \text{V}$$

故得

$$\dot{I}_{ab}=\frac{\dot{U}_{ab}}{Z}=\frac{381\angle 60°}{10+\text{j}7.54}\ \text{A}=30.43\angle 22.98°\ \text{A}$$

其他两相电流为

$$\dot{I}_{bc} = 30.43 \angle 22.98° - 120° \text{ A} = 30.43 \angle -97.02° \text{ A}$$

$$\dot{I}_{ca} = 30.43 \angle 22.98° + 120° \text{ A} = 30.43 \angle 142.98° \text{ A}$$

线电流 $\dot{I}_a$ 可求得如下：

$$\dot{I}_a = \dot{I}_{ab} - \dot{I}_{ca} = (30.43 \angle 22.98° - 30.43 \angle 142.98°) \text{ A} = 52.70 \angle -7.02° \text{ A}$$

或由(9－49)式和电流相量图求得为

$$\dot{I}_a = \sqrt{3} \times 30.43 \angle 22.98° - 30° \text{ A} = 52.70 \angle -7.02° \text{ A}$$

其他两线电流为

$$\dot{I}_b = 52.70 \angle -7.02° - 120° \text{ A} = 52.70 \angle -127.02° \text{ A}$$

$$\dot{I}_c = 52.70 \angle -7.02° + 120° \text{ A} = 52.70 \angle 112.98° \text{ A}$$

本题也可以先把 Δ 形联结负载化为等效 Y 形联结负载后直接利用已知的相电压 $\dot{U}_a$ 求解。这样做，先求出的是线电流 $\dot{I}_a$，然后再设法求得负载相电流。当输电线的阻抗不能忽略时，在求线电流时，就需如此处理。◀

通常，在不对称三相电路中，只是负载是不对称的，而电源则仍是对称的。不对称三相电路是一种具有三个电源的复杂交流电路，用 KCL、KVL 及 §8－9 所述的网孔、节点分析即可解决。

最后，再谈谈三相功率。

对称三相电路的平均功率已由(9－47)式或(9－50)式表明，即

$$P = \sqrt{3} U_L I_L \cos \varphi \tag{9-51}$$

类似地，对称三相电路的无功功率

$$Q = \sqrt{3} U_L I_L \cos \varphi \tag{9-52}$$

必须再次指出：公式中的 φ 角是指负载的阻抗角，即相电压 U_P 与相电流 I_P 间的相位差角，并非线电压 U_L 与线电流 I_L 间的相位差角！

在讨论单相电路时，我们着重于讨论瞬时功率的平均值，即平均功率 P。瞬时功率是随时间波动的。但在三相电路中，对称三相电路总的瞬时功率是恒定的，且等于其平均功率 P。a 相的瞬时功率为

$$\begin{aligned} p_a &= u_a i_a = U_{Pm} \cos(\omega t) \cdot I_{Pm} \cos(\omega t - \varphi) \\ &= U_P I_P [\cos \varphi + \cos(2\omega t - \varphi)] \end{aligned}$$

b 相的瞬时功率为

$$\begin{aligned} p_b &= u_b i_b = U_{Pm} \cos(\omega t - 120°) I_{Pm} \cos(\omega t - 120° - \varphi) \\ &= U_P I_P [\cos \varphi + \cos(2\omega t - 240° - \varphi)] \end{aligned}$$

c 相的瞬时功率为

$$p_c = u_c i_c = U_{Pm} \cos(\omega t + 120°) I_{Pm} \cos(\omega t + 120° - \varphi)$$

$$= U_P I_P [\cos\varphi + \cos(2\omega t + 240° - \varphi)]$$

p_a、p_b、p_c 中都含有一个交变分量，它们的振幅相等，相位上互差 120°，由(9-39)式可知这三个交变分量相加得零。故得

$$p_a + p_b + p_c = 3U_P I_P \cos\varphi = 3P_P = P = 定值$$

如果三相负载是电动机，由于三相总瞬时功率是定值，因而电动机的转矩是恒定的。因为，电动机转矩的瞬时值是和总瞬时功率成正比的。这样，虽然每相的电流是随时间变化的，但转矩却并不是时大时小，这是三相电胜于单相电的一个优点。

不对称三相电路的平均功率 P、无功功率 Q 只能逐相计算后相加获得。三相复功率则为

$$\tilde{S} = P + jQ = S\angle\varphi \qquad (9-53)$$

S 为三相视在功率，但 φ 角在此处并无物理意义，在对称三相电路中，φ 角则为每相负载的功率因数角。

思考题

9-5　在把电源三相绕组作 Y 形联结时，如把 a′b′和 c 连在一起作为中性点，后果如何？

9-6　试绘三相 Y 形联结电源的相量图，包含三个相电压和三个线电压，已知 $\dot{U}_a = 100\angle 0°$ V，正相序。

练习题

9-14　一台三相电动机接在 380 V 的线路上使用，若功率为 10 kW，功率因数为 0.8，求电流。

(19 A)

9-15　Y 形联结对称负载每相阻抗 $Z = (8 + j6)\ \Omega$，线电压为 220 V，试求各相电流，并计算三相总功率。设相序为 a—b—c。

(部分答案：$\dot{I}_a = 12.7\angle -36.8°$ A，相电流有效值 12.7 A，$P = 3\ 871$ W)

9-16　正相序三相对称电源向对称 Δ 形联结负载供电，已知线电流 $\dot{I}_a = 12\angle 40°$ A，试求负载的相电流 $\dot{I}_{ab}$、$\dot{I}_{bc}$和 $\dot{I}_{ca}$(图 9-28)。

($\dot{I}_{ab} = 6.93\angle 70°$ A)



习题

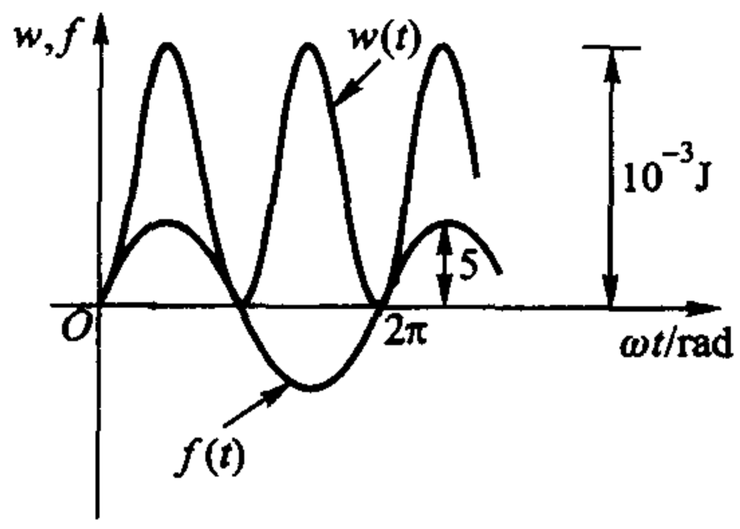
§9-2　电阻的平均功率

9-1　流过 100 Ω 的电流为 $10|\cos(10t)|$ mA。求平均功率 P。

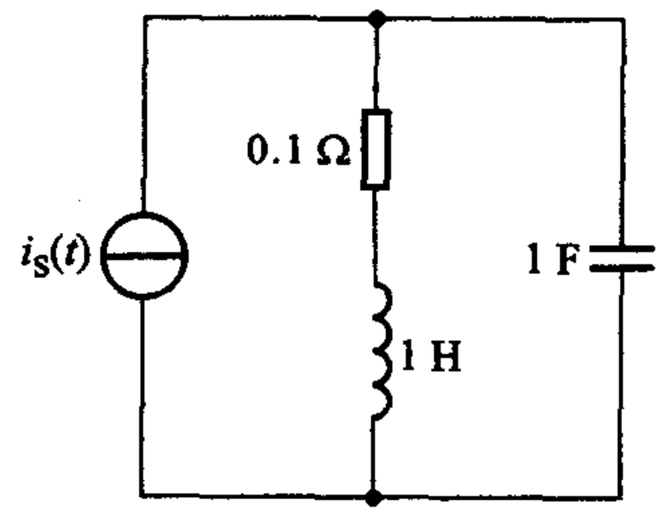
9-2　电压 $u(t)=10\cos(100t)-20\cos(100t+30°)$ V 施加于 10 Ω 电阻，求电阻的平均功率。

§9-3　电感、电容的平均储能

9-3　正弦波 $f(t)$ 及其供给元件的能量 $w(t)$ 如图题 9-1 所示。试确定元件的性质及参数，若：(1) $f(t)=u(t)$，单位为 V；(2) $f(t)=i(t)$，单位为 A。



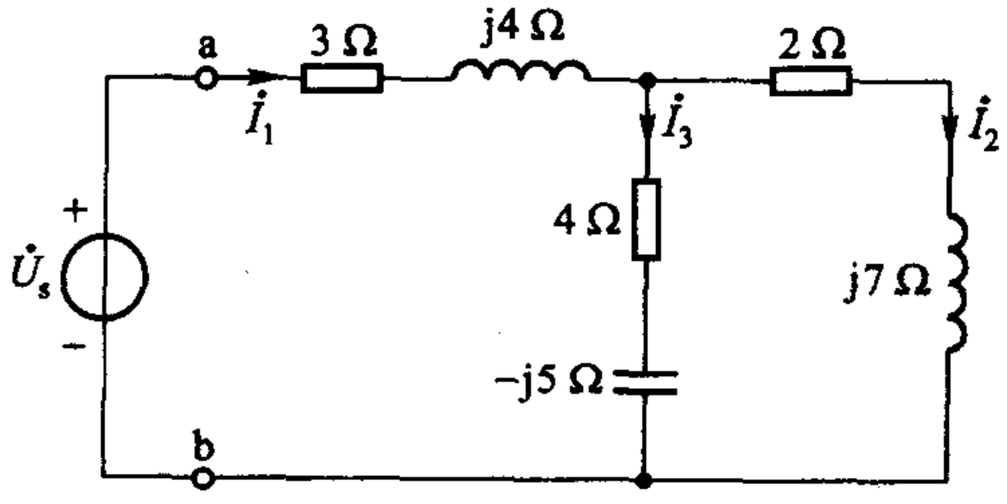
图题 9-1



图题 9-2

9-4　电路如图题 9-2 所示，已知 $i_S(t)=\cos t$ A，试计算稳态时：(1) 电感储能的平均值；(2) 电容储能的平均值；(3) 在一循环内电阻消耗的能量（$t=0$ 到 $t=2\pi$）。

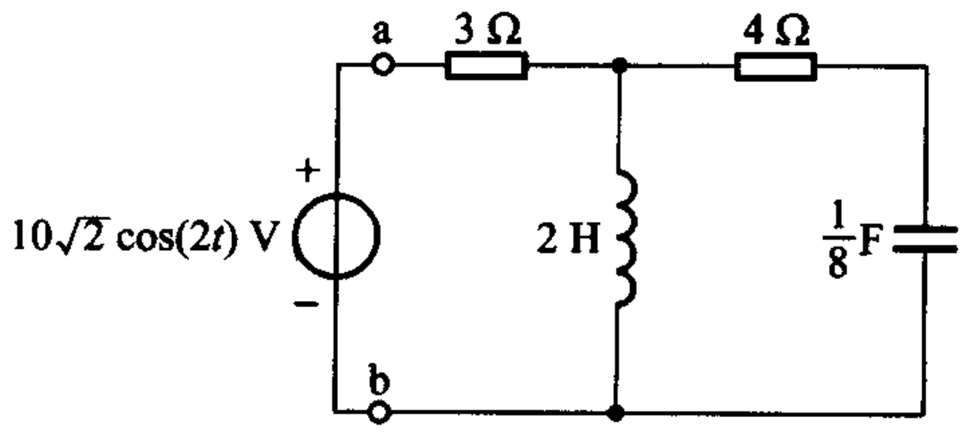
9-5　电路如图题 9-3 所示，试求两电感的无功功率 Q_{L1} 和 Q_{L2}，电容的无功功率，并求电路总的磁场储能平均值，电场储能平均值。已知 $\omega=1$ rad/s，电源电压有效值相量 $\dot{U}_s$ 为 $100\angle 10°$ V。



图题 9-3

§9-4　单口网络的平均功率

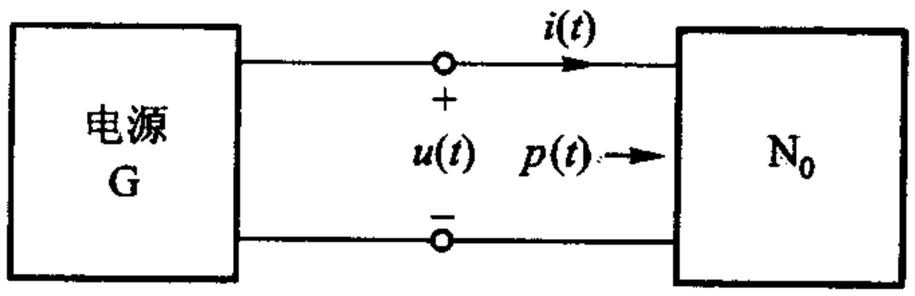
9-6　正弦稳态电路如图题9-4所示，(1) 分别求出4 Ω和3 Ω电阻的平均功率；(2) 试由端口ab的电压相量、电流相量，求出ab右侧单口网络的平均功率。



图题9-4

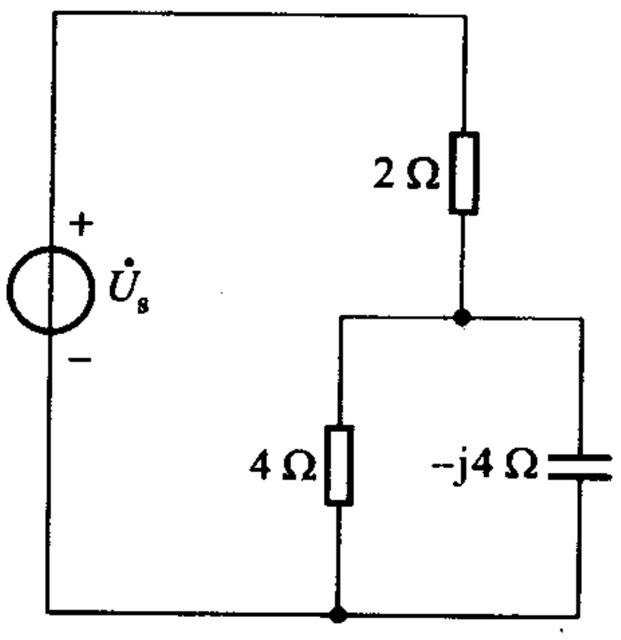
9-7　已知图题9-5所示电路中单口网络 N_0 由电源G供电，已知 $u(t)=U_m\cos(\omega t+\psi)$，$i(t)=I_m\cos(\omega t)$，试求瞬时功率 $p(t)$；$p(t)$ 的周期与 $u(t)$、$i(t)$ 周期的关系；绘 $p(t)$ 波形图；平均功率 P。(本书采用 N_0 表示内部不含电源的单口网络，见图4-42。)

在什么情况下，功率波形图，在一整个循环内 $p<0$ 部分可能大于 $p>0$ 部分？

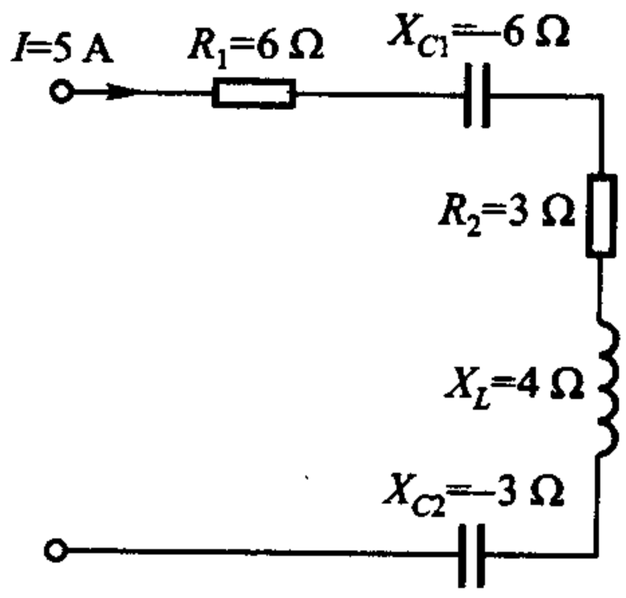


图题9-5

9-8　求图题9-6电路的功率：(1) 由两电阻的功率求得；(2) 由电源提供的功率求得。已知 $\dot{U}_s=12\angle 60°$ V。



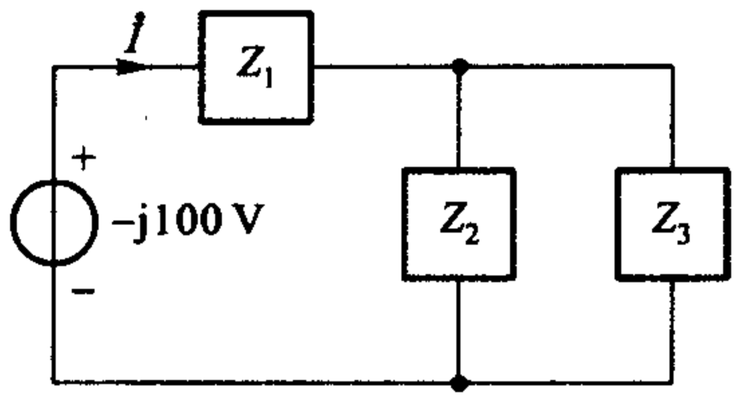
图题9-6



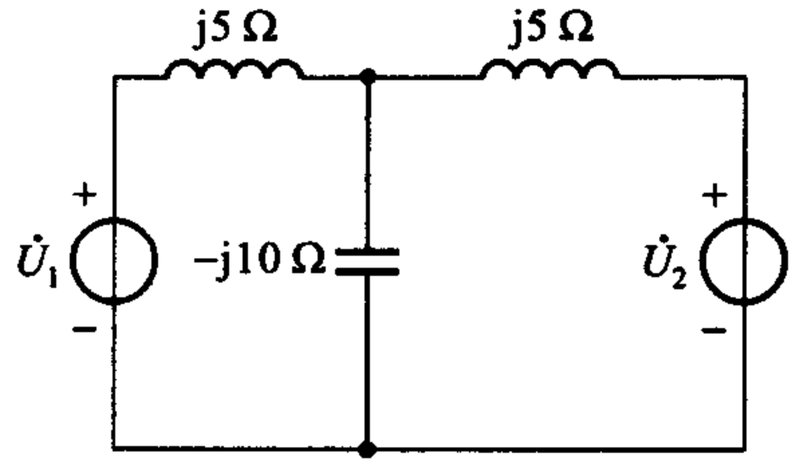
图题9-7

9-9　电路如图题9-7所示，电流 $I=5$ A，求电路的 P，S 和 λ。

9-10　电路如图题9-8所示。(1) 求 $\dot{I}$；(2) 求整个电路吸收的平均功率和功率因数。已知 $Z_1 = (0.5 - j3.5)\ \Omega$、$Z_2 = 5 \angle 53°\ \Omega$、$Z_3 = 5 \angle -90°\ \Omega$，电源电压有效值相量为 $100 \angle -90°$ V。



图题9-8



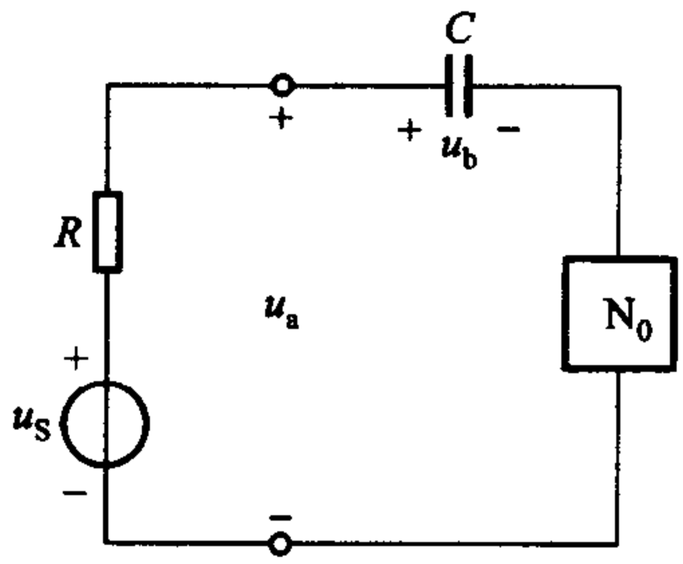
图题9-9

9-11　电路如图题9-9所示，试求每个电源的功率，并指出每一电源对电路是提供功率还是吸收功率？已知 $\dot{U}_1 = 100 \angle 60°$ V、$\dot{U}_2 = 100 \angle 0°$ V。

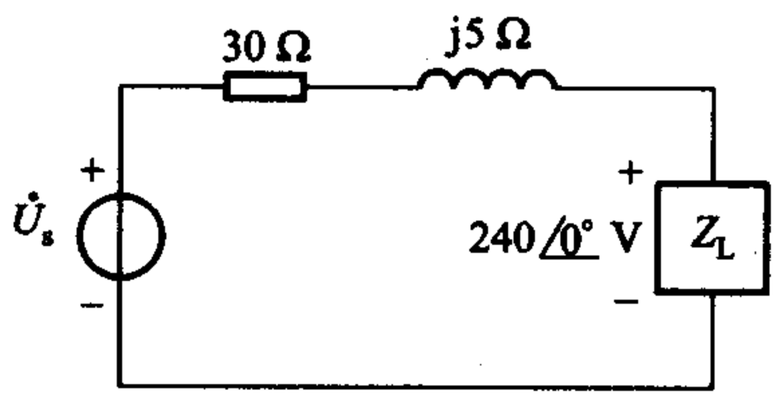
9-12　电路如图题9-10所示。已知 $u_a(t) = 10\sin(1\ 000t + 60°)$ V，$u_b(t) = 5\sin(1\ 000t - 30°)$ V，电容的阻抗为 $-j10\ \Omega$。试计算单口网络 N_0 的阻抗及吸收的功率。

9-13　输电线的阻抗为 $(0.08 + j0.25)\ \Omega$，用它来传送功率给负载。负载为电感性，其电压有效值相量为 $220 \angle 0°$ V，功率为12 kW。已知输电线的功率损失为560 W，试求负载的功率因数角。

9-14　电路如图题9-11所示，负载 Z_L 的功率为2 kW，功率因数为0.8(电容性)，电压有效值相量为 $240 \angle 0°$ V，求电源端的电压 $\dot{U}_s$，并求负载的等效相量模型。



图题9-10



图题9-11

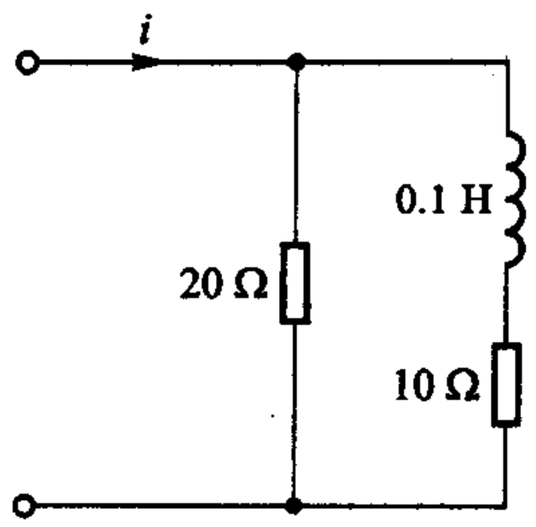
9-15　*RC* 串联电路，已知电容电压有效值 $U_C = 6$ V，电阻消耗功率 $P = 18$ W，外施电压 $u_S(t) = 12\cos(4t)$ V，求 R 和 C。

§9-5　单口网络的无功功率

9-16　电路如图题9-12所示，已知电流 i 的有效值 $I = 10$ A，$\omega = 1\ 000$ rad/s。试求电

路的 P、Q 和 S。

9-17　某负载需功率 40 kW 功率因数为 0.84(感性)，负载电压有效值相量为 $220\angle 0°$ V。已知输电线的阻抗为 $(0.1+j0.25)\ \Omega$。(1) 试求输电线的功率和无功功率；(2) 试求电源提供的功率和无功功率。



图题 9-12

9-18　某负载的平均功率及无功功率为 6 W 及 8 var，已知负载电压 $u(t)=100\cos(100t)$ V，如要求负载功率因数为 1，应并联多大的电容？

9-19　60 kW 的负载，功率因数为 0.5(电感性)，负载电压为 220 V，由电阻为 0.1 Ω 的输电线供电。若要使负载功率因数提高到 0.9(电感性)，求并联电容应为多大？问并联前后，输电线的功率损失有何变化？

§9-6　复功率　复功率守恒

9-20　试求具有下列特点负载的功率因数：

(1) $\tilde{S}=(5\ 000+j4\ 000)$ V·A

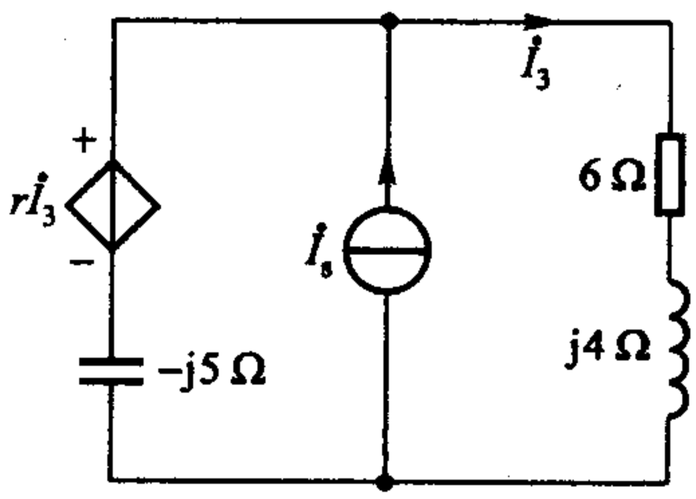
(2) $I=5.2$ A，$U=220$ V，$Q=400$ var

(3) $|Z|=500\ \Omega$，$I=4.8$ A，$P=5\ 000$ W，$Q<0$

(4) $\dot{I}=10\angle 40°$ V，$U=400$ V，$\mathrm{Re}[Z]=25\ \Omega$，$\varphi>0$

9-21　接续习题 9-13，试求输入输电线的复功率 $\tilde{S}$，并由此确定输入端的电压和功率因数。

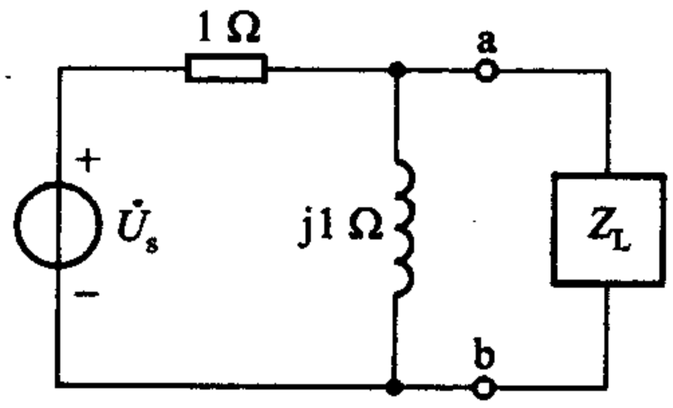
9-22　图题 9-13 所示电路中 $\dot{I}_s=10\angle 0°$ A，$r=7\ \Omega$，试分别求三条支路吸收的复功率。



图题 9-13

§9-7　正弦稳态最大功率传递定理

9-23　电路如图题 9-14 所示，若 Z_L 的实部、虚部均能变动，若使 Z_L 获得最大功率，Z_L 应为何值，最大功率是多少？已知 $\dot{U}_s=14.1\angle 0°$ V。



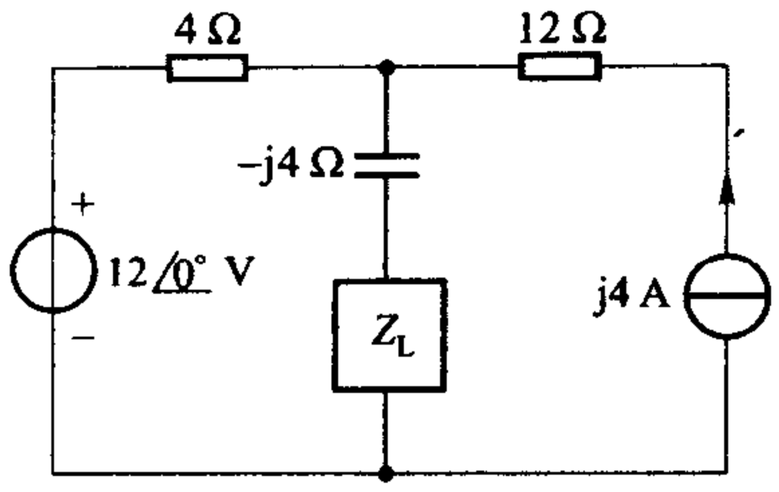
图题 9-14

9-24　电路如图题 9-15 所示，试求获得最大功率时负载的阻抗 Z_L，并求所获得的功率 P，(两电源电压、电流系有效值相量。)

9-25　电路如图题 9-16 所示，试求获得最大功率时的负载电阻 R_L，并求所获得的功率 P。已知 $u_S(t)=36\sin(3t-60°)$ V。

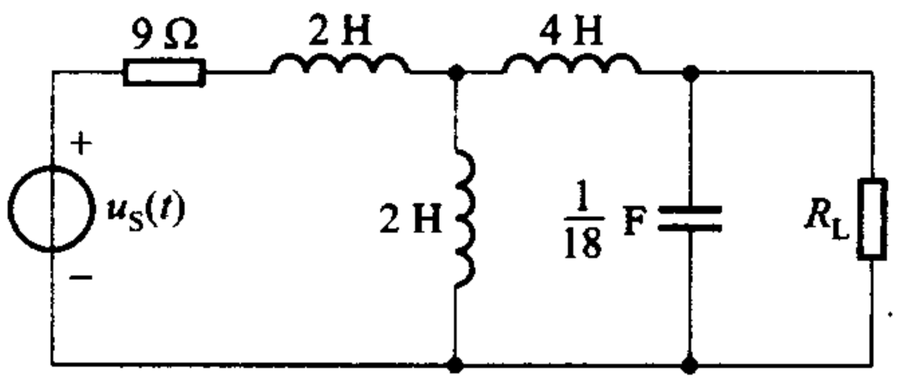
9-26　电路如图题 9-17 所示，$u_S(t)=100\sqrt{2}\cos(200\ t)$ V，

(1) 求 200 Ω 负载的功率；

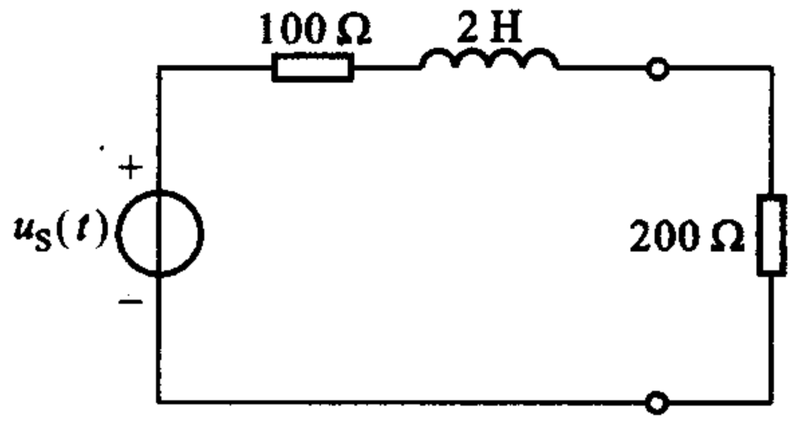


图题 9 − 15

（2）如在负载两端并联电容，要使负载获得最大功率，求电容 C 及此时负载功率。



图题 9 − 16



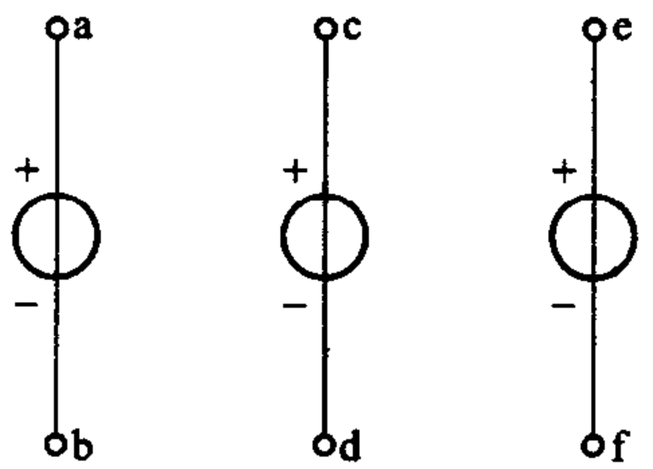
图题 9 − 17

§9 − 8　三相电路

9 − 27　设三个理想电源如图题 9 − 18 所示，它们的电压相量为 $\dot{U}_{ab} = U\angle 0°$，$\dot{U}_{cd} = U\angle 60°$，$\dot{U}_{ef} = U\angle -60°$，问这些电源应如何连接以组成：(1) Y 形联结对称三相电源；(2) Δ 形联结对称三相电源。

9 − 28　对称 Y − Y 三相电路，已知 $\dot{U}_c = 240\angle 0°$ V，各相负载阻抗为 $100\angle 20°\Omega$，相序为 a—b—c，求各线电流。

9 − 29　Y − Y 三相四线电路，电源对称、正序，线电压有效值为 240 V，a 相负载阻抗 $Z_a = 3\angle 0°\ \Omega$、其他两相阻抗为 $Z_b = 4\angle 60°\ \Omega$、$Z_c = 5\angle 90°\ \Omega$，试求每相电流以及中性线电流。



图题 9 − 18

9 − 30　图 9 − 28 所示 Δ 形联结对称负载，相序为负，若已知 $\dot{I}_a = 35\angle -20°$ A，求 $\dot{I}_{ab}$、$\dot{I}_{bc}$、$\dot{I}_{ca}$。

9 − 31　三相电动机的输出功率为 3.7 kW，效率 80%，$\lambda = 0.8$，线电压为 220 V，求电流。

9 − 32　对称 Y − Y 三相电路，线电压为 208 V，负载吸收的平均功率为 12 kW，$\lambda = 0.8$（电感性），试求负载每相的阻抗。

综合

9－33　10 Ω 电阻与一未知电路串联，串联后电路的视在功率为 500 V·A，功率因数为 0.6（电容性）。若电路电流为 4 A，试求未知电路的阻抗。

9－34　接续习题 9－7，试表明瞬时功率 $p(t)$ 可分为两个分量 $p_a(t)$ 和 $p_r(t)$，$p_a(t)$ 为非负的，以 2ω 波动，其平均值即平均功率 P；$p_r(t)$ 以 2ω 波动，其平均值为零，其振幅即为无功功率 Q。

9－35　某负载由一感应电动机和一同步电动机（属电容性负载）并联组成，功率因数为 0.9（电感性）。已知感应电动机输出机械功率为 1 500 W，效率为 80%；同步电动机视在功率为 1 kV·A，功率因数为 0.95（电容性），试求感应电动机的功率因数。（感应电动机的电功率等于输出机械功率除以效率。）

9－36　2.5 kV·A 的负载，功率因数为 0.6（电感性），为使功率因数提高到 0.9（电感性），求并联电容的无功功率。

第十章

频率响应　多频正弦稳态电路

以上两章讨论了单一频率正弦激励下电路的稳态响应和能量、功率问题。当正弦激励的频率不同时，同一电路的响应也会有所不同。频率的量变可以引起电路的质变，这是动态电路本身特性的反映。电阻电路无此特点，电阻电路响应与激励的关系不会因激励频率的不同而有所不同。正因如此，动态电路可以完成许多电阻电路所不能完成的任务，如滤波、选频、移相等等。

多频正弦稳态电路，顾名思义，就是多个不同频率正弦激励下的稳态电路，如何求得这类电路的响应？如何求得平均功率？解决这一问题先要研究不同频率正弦稳态下，电路响应与频率的关系即频率响应(frequency response)。这一关系可由正弦稳态网络函数来表明。本章除了运用网络函数结合叠加方法来解决多频正弦稳态电路的响应和平均功率外，还将运用网络函数来研究若干典型电路的低通、高通、带通和谐振等性能。

§10-1 基本概念

相量分析法的使用条件有三：线性、时不变、渐近稳定电路[①]；单一频率的正弦激励；求解稳定状态。多频正弦稳态分析仍可采用相量法，但只能逐个频率处理，最后需用叠加方法求得结果。因此，本章可视为第三章叠加方法在频率域的延伸。

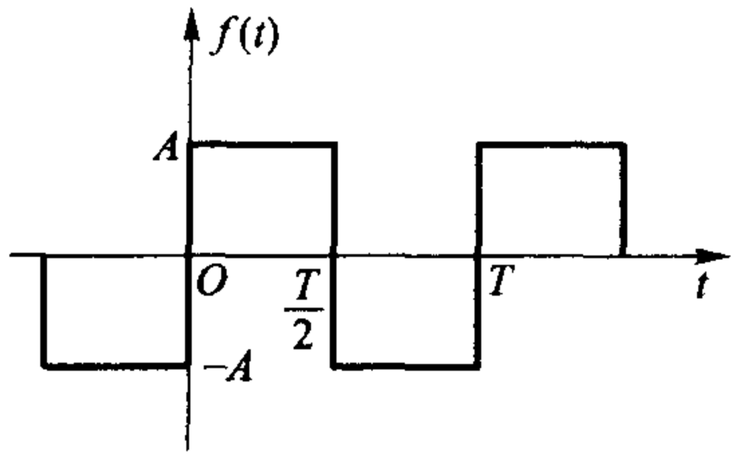
在电工、电子技术中出现多个频率正弦激励大致可分为两种情况。

其一：电路的激励原本为非正弦周期波，如方波、锯齿波等等，这类波形在分解为傅里叶级数后，可视为含有直流分量和一系列频率成整数倍的正弦分量、即谐波(harmonics)分量。这类电路问题就相当于多个不同频率的正弦波作用于电路的问题。

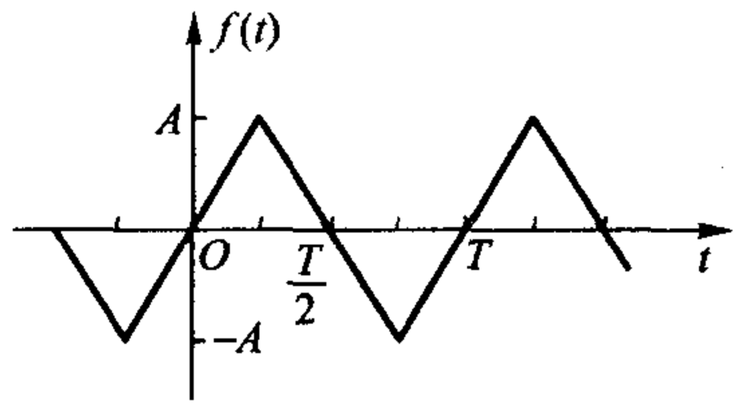
图 10-1 列举了几种非正弦周期波，它们的傅里叶级数为

---

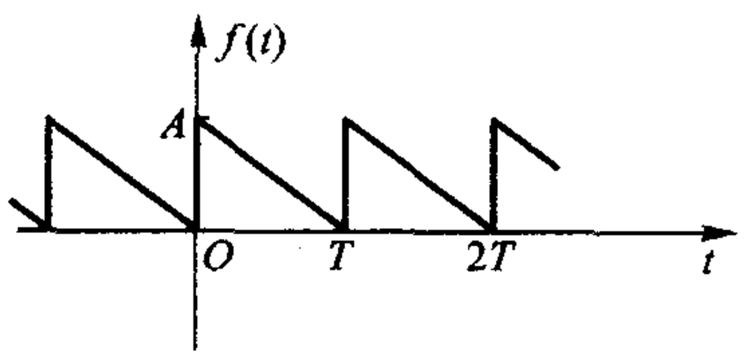
① 简单说就是正弦电源接通后最终能进入正弦稳态的电路。



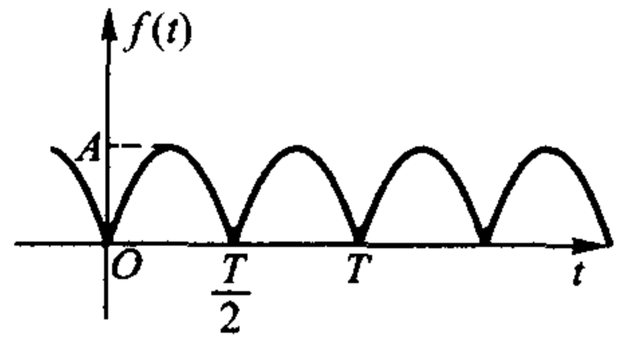
(a)



(b)



(c)



(d)

图 10－1　非正弦周期波举例

图(a)所示方波

$$f(t)=\frac{4A}{\pi}\left[\sin(\omega t)+\frac{1}{3}\sin(3\omega t)+\frac{1}{5}\sin(5\omega t)+\cdots\right]$$

图(b)所示等腰三角波

$$f(t)=\frac{8A}{\pi^2}\left[\sin(\omega t)-\frac{1}{9}\sin(3\omega t)+\frac{1}{25}\sin(5\omega t)-\cdots\right]$$

图(c)所示锯齿波

$$f(t)=\frac{A}{2}+\frac{A}{\pi}\left[\sin(\omega t)+\frac{1}{2}\sin(2\omega t)+\frac{1}{3}\sin(3\omega t)+\cdots\right]$$

图(d)所示正弦整流全波

$$f(t)=\frac{4A}{\pi}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cos(2\omega t)-\frac{1}{15}\cos(4\omega t)-\frac{1}{35}\cos(6\omega t)-\cdots\right]$$

级数中频率与原非正弦周期波的频率相一致的分量称为基波或一次谐波，其余分量相应地称为二次、三次、……谐波分量。

把周期函数分解为傅里叶级数并非本课程的任务。常用波形的傅里叶级数可从手册等查得。

如果波形在一周期内净面积为零，则不含直流分量，如图 10－1(a)、(b)所示波形；如波形对原点对称，则级数中只含 sin 项，如图 10－1(a)、(b)所示波形，但如一周期内平均值(直流分量)不为零，则应将横坐标平移至平均值处，再检查原点对称性，如图 10－1(c)波形仍属原点对称；如波形对纵轴对称则级数中只含 cos 项；如在任一周期内，把后半周期的波形前移半个周期而与前半周期波形成镜像(对横轴对称)，则级数中只含奇次谐波，如图 10－1(a)、(b)所

示波形。

其二:电路的激励原本就是多个不同频率的正弦波,频率不一定成整数倍,这是多频正弦稳态分析最一般的情况。日常生活中使用的双音频拨号(按钮式)电话机即是一例。0 至 9 的十个数字连同两个特殊用途的符号“ * ”和“#”共用十二个按钮,控制着机内两组音频信号的混合发送,如图 10 - 2 所示。例如,按“5”字,即同时混合发出770 Hz和1 336 Hz的音频信号,在电话局经过滤波等手段处理后送至交换系统。这里涉及的音频信号并非谐波信号。

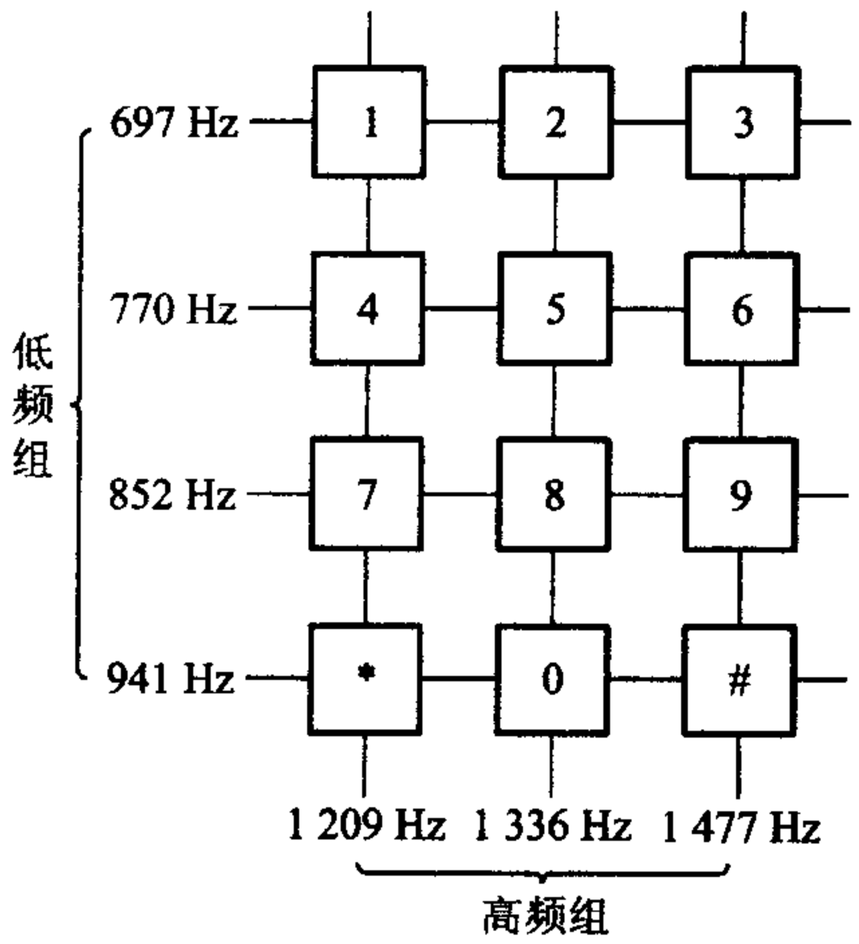


图 10 - 2　电话机双音频拨号示意图

不论属哪一情况,都可用本节开始所述方法处理。但务请注意:用以表征某一频率正弦激励的相量本身并未含有频率因素;阻抗、导纳等则很明显地与 jω 有关。

§10 - 2　再论阻抗和导纳

阻抗和导纳的引入,使正弦稳态的分析方法同电阻电路的分析方法统一起来,意义重大,已如第八章中所述。本节从电路频率响应的角度再次讨论阻抗和导纳的作用。

设单口网络 N_0 由线性时不变元件组成,可含受控源但不含独立电源,则该网络在正弦稳态时的表现,可以由它的输入阻抗或输入导纳获悉。

确实,在关联参考方向下,若端口电压为 $\dot{U}$,端口电流为 $\dot{I}$,则其 VCR 可表示为

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = Z \tag{10-1}$$

或

$$\frac{\dot{I}}{\dot{U}} = Y \tag{10-2}$$

式中 Z 和 Y 分别为单口网络的输入阻抗和输入导纳。

由(10 - 1)式可知

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U\angle\psi_u}{I\angle\psi_i} = \frac{U}{I}\angle\psi_u - \psi_i \tag{10-3}$$

而输入阻抗 Z 又可表示为

$$Z = |Z| \angle \varphi_Z \tag{10-4}$$

因此,可知

$$|Z| = \frac{U}{I} = \frac{U_m}{I_m} \tag{10-5}$$

和

$$\varphi_Z = \psi_u - \psi_i \tag{10-6}$$

也就是说:由输入阻抗的模 $|Z|$ 可以掌握正弦稳态时端口上电压有效值(或振幅)与电流有效值(或振幅)的比值关系;由输入阻抗的辐角 φ_Z 可以掌握正弦稳态时端口上电压与电流的相位关系。在正弦稳态时需要研究的也就是这两方面的关系,因此,掌握了单口网络的输入阻抗 Z,也就掌握了该单口网络在正弦稳态时的表现。对输入导纳 Y 也可作出同样的结论。

以由 R 和 L 串联组成的单口网络为例来说明上述结论。若 $R = 1\ \text{k}\Omega$, $L = 1\ \text{H}$,在 $\omega = 10^3\ \text{rad/s}$ 的正弦激励下,其输入阻抗为

$$\begin{aligned} Z &= Z_R + Z_L = R + \text{j}\omega L \\ &= (1\,000 + \text{j}1\,000)\ \Omega = 1\,414 \angle 45°\ \Omega \end{aligned}$$

模 $|Z| = 1\,414$,表明 $U/I = U_m/I_m = 1\,414$;φ_Z 角 45°,表明电压超前角 45°。若外施电流 $i(t) = \cos(10^3 t)\ \text{A}$,则电压 $u(t) = 1\,414\cos(10^3 t + 45°)\ \text{V}$。由此可见,根据该网络在 $\omega = 10^3\ \text{rad/s}$ 时的阻抗 Z,便可知悉它在该频率时的正弦稳态表现。

必须着重指出:输入阻抗 Z 是 $\text{j}\omega$ 的函数,一般来说,它的模 $|Z|$ 和幅角 φ_Z 也都是频率的函数。上例单口网络的阻抗 Z 可表示为

$$\begin{aligned} Z(\text{j}\omega) &= R + \text{j}\omega L \\ &= \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \angle \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right) \\ &= |Z(\text{j}\omega)| \angle \varphi(\omega) \end{aligned} \tag{10-7}$$

显然可见,$|Z|$ 和 φ_Z 都是频率的函数。由此可见,根据网络的阻抗 $Z(\text{j}\omega)$,即可知悉它在各个不同频率下的正弦稳态表现。因此,单口网络的输入阻抗函数 $Z(\text{j}\omega)$ 可用于研究该网络的频率响应。$|Z|$ 与频率的关系称为输入阻抗的幅频(magnitude - frequency)特性;φ_Z 与频率的关系称为输入阻抗的相频(phase - frequency)特性。这两种特性通常用曲线来表示,使我们对任何频率下电路在正弦稳态时的表现能一目了然。类似地,单口网络的输入导纳函数 $Y(\text{j}\omega)$ 也可用来表明该网络的频率响应。而且

$$|Y(\text{j}\omega)| = \frac{1}{|Z(\text{j}\omega)|} \tag{10-8}$$

$$\varphi_Y(\omega) = -\varphi_Z(\omega) \tag{10-9}$$

由(10-1)式不难看出:输入阻抗 Z 可看作激励电流 $1\angle 0°$ A 所产生的电压响应。类似地,输入导纳 Y 可看作激励电压 $1\angle 0°$V 所产生的电流响应。因此,其幅频特性和相频特性(不论是解析形式还是曲线形式)径称为单口网络的频率响应①。

输入阻抗也可用它的实部和虚部表示。以 R 和 L 并联组成的单口网络为例,它的输入阻抗函数可表示为

$$\begin{aligned} Z(\mathrm{j}\omega) &= \frac{Z_R Z_L}{Z_R + Z_L} = \frac{\mathrm{j}\omega LR}{R + \mathrm{j}\omega L} \\ &= \frac{\omega^2 L^2 R + \mathrm{j}\omega LR^2}{R^2 + \omega^2 L^2} \\ &= \frac{\omega^2 L^2 R}{R^2 + \omega^2 L^2} + \mathrm{j}\frac{\omega LR^2}{R^2 + \omega^2 L^2} \end{aligned} \tag{10-10}$$

一般来说

$$Z(\mathrm{j}\omega) = R(\omega) + \mathrm{j}X(\omega) \tag{10-11}$$

其中 $R(\omega)$ 是 $Z(\mathrm{j}\omega)$ 的实部,称为电阻分量。它并不一定只由网络中的电阻所确定,一般来说,它是网络中各元件参数和频率的函数,如(10-10)式中所示。$X(\omega)$ 是 $Z(\mathrm{j}\omega)$ 的虚部,称为电抗分量。它并不一定只由网络中的动态元件所确定,一般来说,它是网络中各元件参数和频率的函数,如(10-10)式中所示。单个二端动态元件的阻抗也符合(10-11)式的形式,此时,$R(\omega)=0$。对电容元件来说 $X(\omega)=X_C(\omega)$,容抗 $X_C(\omega)$ 为负值;对电感元件来说 $X(\omega)=X_L(\omega)$,感抗 $X_L(\omega)$ 为正值。因此,对单口网络来说,若 $X(\omega)<0$,则表明该网络呈现电容性;若 $X(\omega)>0$,则表明该网络呈电感性。例如,(10-10)式所示阻抗的虚部 $X(\omega)$ 对任何 ω 恒为正,表明 RL 并联组成的单口网络总是表现出电感性的。

输入导纳函数也可表示为

$$Y(\mathrm{j}\omega) = G(\omega) + \mathrm{j}B(\omega) \tag{10-12}$$

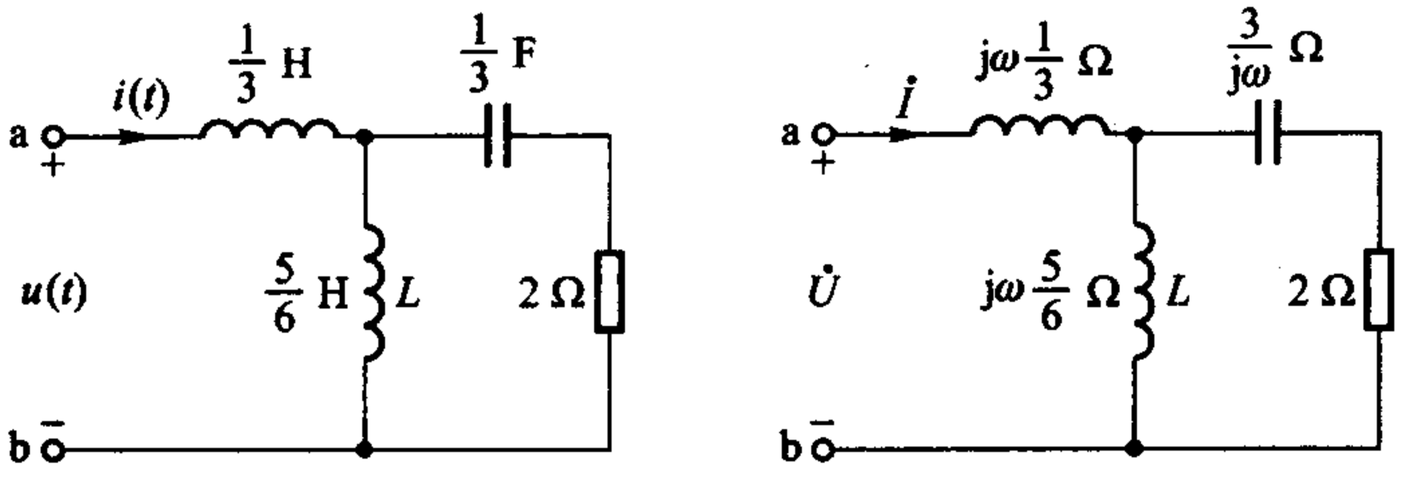
其中 $G(\omega)$ 称为电导分量,$B(\omega)$ 称为电纳分量。$B(\omega)>0$,网络呈电容性;$B(\omega)<0$,网络呈电感性。

例 10-1　试求图 10-3(a)所示电路 ab 端的输入阻抗函数。若 $i(t)=\cos(3t+45°)$ A,试求稳态电压 $u(t)$。若正弦电流的角频率改为 6 rad/s,试求 $u(t)$。

解　作出原电路的相量模型如图 10-3(b)所示。由此可得

---

① 有些教材把幅频特性曲线和相频特性曲线合称为频率特性曲线。



(a) 原电路　　(b) 相量模型

图 10－3　例 10－1

$$Z_{ab}(j\omega)=\left[\frac{j\omega}{3}+\frac{(j5\omega/6)(2+3/j\omega)}{(j5\omega/6)+2+(3/j\omega)}\right]\Omega$$

$$=\left[\frac{j\omega}{3}+\frac{j5\omega(3+j2\omega)}{18+j12\omega-5\omega^2}\right]\ \Omega$$

如 $\omega=3$ rad/s，则

$$Z_{ab}(j3)=\left(j+\frac{-90+j45}{-27+j36}\right)\ \Omega=\left(j+\frac{-10+j5}{-3+j4}\right)\ \Omega$$

$$=\left(j+\frac{50+j25}{25}\right)\ \Omega=(2+j2)\ \Omega=2\sqrt{2}\underline{/45°}\ \Omega$$

由阻抗可知

$$\frac{U_m}{I_m}=2\sqrt{2},\ \varphi_Z=45°$$

故知

$$u(t)=U_m\cos(3t+45°+\varphi_Z)$$

$$=2\sqrt{2}\cos(3t+90°)\ \text{V}$$

如 $\omega=6$ rad/s，则

$$Z_{ab}(j6)=\left(j2+\frac{-360+j90}{-162+j72}\right)\ \Omega=3.13\underline{/48.9°}\ \Omega$$

由阻抗可知

$$\frac{U_m}{I_m}=3.13,\qquad \varphi_Z=48.9°$$

故知

$$u(t)=3.13\cos(6t+45°+48.9°)\ \text{V}=3.13\cos(6t+93.9°)\ \text{V}$$

因此，输入阻抗函数包含了与指定正弦稳态响应有关的全部信息。

例 10－2　求图 10－4 所示 *RC* 并联电路的输入阻抗，并绘出它的幅频特性和相频特性曲线。

解　作出相量模型后可得输入阻抗

$$Z(j\omega)=\frac{R\cdot\dfrac{1}{j\omega C}}{R+\dfrac{1}{j\omega C}}$$

$$=\frac{R}{1+j\omega RC}=\frac{R}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\angle-\arctan(\omega RC)$$

$$=|Z|\angle\varphi_Z$$

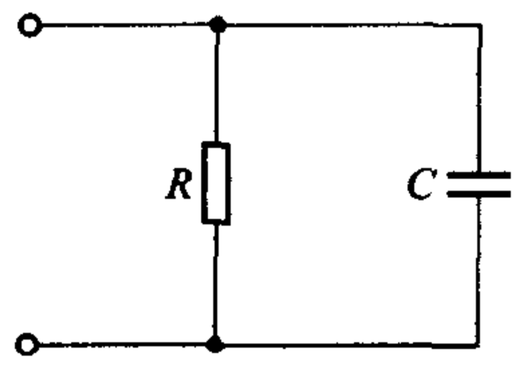


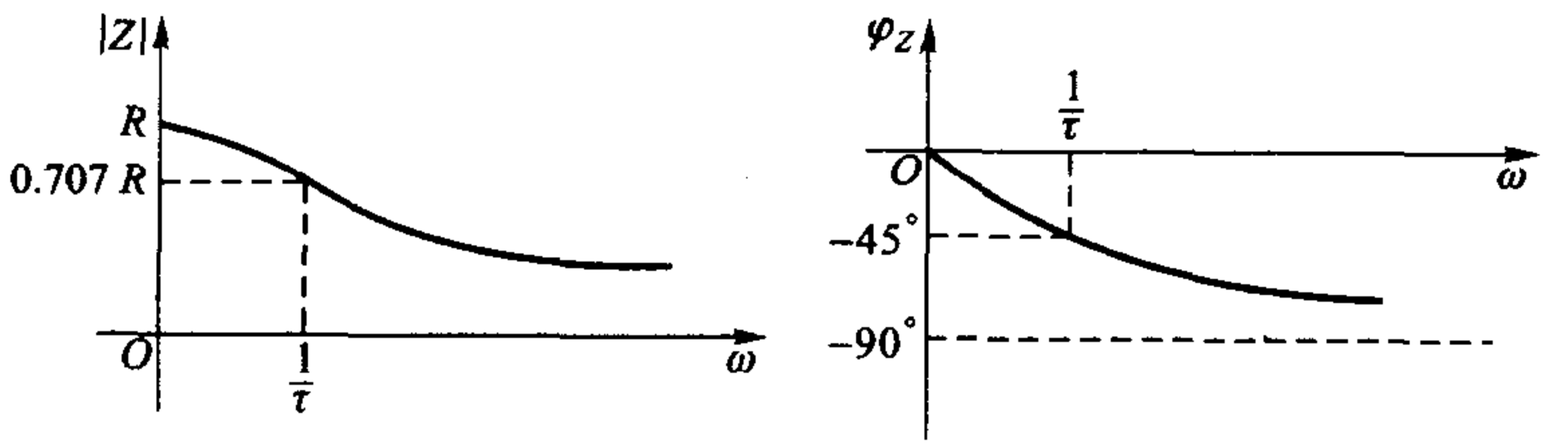
图 10－4　*RC* 并联电路

故得幅频关系为

$$|Z|=\frac{R}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}$$

由此可知：当 $\omega=0$ 时，$|Z|=R$；$\omega\to\infty$ 时，$|Z|\to0$；当 $\omega=\dfrac{1}{RC}=\dfrac{1}{\tau}$ 时，$|Z|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}R=0.707R$。绘得幅频特性曲线如图 10－5(a)所示。相频关系为

$$\varphi_Z=-\arctan(\omega RC)$$



(a) 幅频特性　　(b) 相频特性

图 10－5　*RC* 并联电路的频率响应

由此可知：当 $\omega=0$ 时，$\varphi_Z=0$；$\omega\to\infty$ 时，$\varphi_Z\to-\dfrac{\pi}{2}$；当 $\omega=\dfrac{1}{RC}=\dfrac{1}{\tau}$ 时，$\varphi_Z=-\dfrac{\pi}{4}$。绘得相频特性曲线如图 10－5(b)所示。

由幅频特性可以看到：频率越高，阻抗模值越小，因而电流通过它所产生的电压也越小。从物理意义上看：当 $\omega=0$ 时，亦即当输入电流为直流时，电容相当于开路，电流将全部流过电阻；当频率增高时，如仍保持输入电流大小不变，则由于电容能分走一部分电流(旁路作用)，且频率越高电容的阻抗越小，由电容分走的电流也越大，故电阻的电流就越小，电阻 *R* 的电压(亦即输出电压)也越小，形成如图 10－5(a)所示的幅频特性。因此，当不同频率的信号电流作用于这电路时，输出电压中将只含低频成分，而高频成分被滤掉；当含有直流成分和

交流成分的信号电流作用这电路时，输出电压基本上只含直流成分，而交流成分被滤掉。这里的电容被称为旁路电容。电阻器与电容器的并联电路常用于晶体管电路中，起着上述滤去输入电流中的高频成分或交流成分的作用。

思考题

10－1　$X_L(\omega)$和$X_C(\omega)$的曲线是怎样的？*RLC* 串联电路的 $X(\omega)$的曲线又是怎样的？$X(\omega)=0$时，频率（这一频率称为该电路的谐振频率）是多少？设外施电压的有效值为 U_s，此时电流是多少？

10－2　电路如图 10－6 所示，问频率 ω 为多大时，稳态电流 $i(t)$为零？

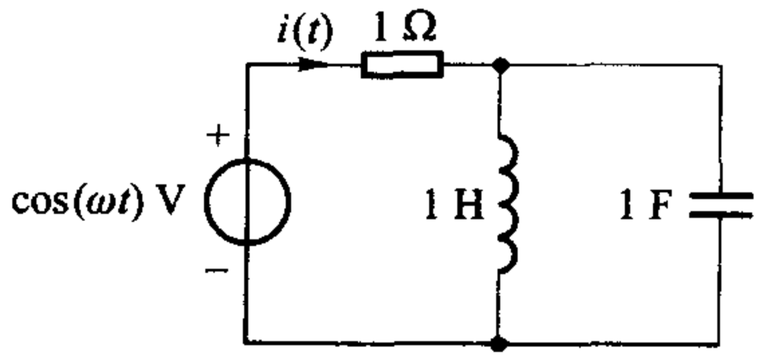


图 10－6　思考题 10－2

§10－3　正弦稳态网络函数

在 §3－1 中，已就电阻电路提出网络函数的概念。电阻电路的网络函数 *H* 是一个实数。根据响应与激励所在的位置不同，可分为策动点函数和转移函数两大类，见表 3－1。

对相量模型（见图 10－7），在单一激励的情况下，网络函数定义为

$$\frac{\text{响应相量}}{\text{激励相量}}=H(\mathrm{j}\omega) \qquad (10-13)$$

定义中的两相量，可以均为振幅相量，也可以均为有效值相量。与电阻电路不同，它是 $\mathrm{j}\omega$ 的函数。上节讨论过的无独立源单口网络 N_0 的输入阻抗、输入导纳实际就是(10－13)式定义的网络函数中的一类——策动点函数，它们都是 $\mathrm{j}\omega$ 的函数。

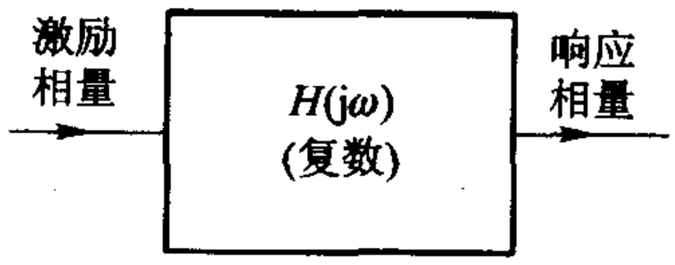


图 10－7　表征相量模型响应与激励的方框图

给定网络函数并假定激励相量为 $\dot{U}_{1m}$，响应相量为 $\dot{U}_{2m}$，则由

$$H(\mathrm{j}\omega)=|H(\mathrm{j}\omega)|\underline{/\varphi(\omega)} \qquad (10-14)$$

就可求得在频率为 ω 的正弦激励

$$u_1(t)=U_{1m}\cos(\omega t+\psi_1)=\sqrt{2}U_1\cos(\omega t+\psi_1) \qquad (10-15)$$

作用下的稳态响应

$$u_2(t) = U_{2m}\cos(\omega t + \psi_2) = \sqrt{2}U_2\cos(\omega t + \psi_2) \tag{10-16}$$

其中：

$$U_{2m} = |H(j\omega)|U_{1m}，或\ U_2 = |H(j\omega)|U_1 \tag{10-17}$$

$$\psi_2 = \varphi(\omega) + \psi_1 \tag{10-18}$$

因此，分析电路的频率响应应先掌握该电路在正弦稳态时的网络函数。电路的任何一个网络函数（策动点函数和转移函数）的幅频特性曲线和相频特性曲线都可称为在指定输入和输出下的频率响应。

例 10-3　*RC* 低通电路　求图 10-8 所示 *RC* 电路的电压转移函数 $H_u = \dot{U}_2/\dot{U}_1$，并绘出幅频特性曲线和相频特性曲线。若输入电压 $u_1 = 2.5\sqrt{2}(500\pi t + 30°)$ V，试求输出电压 u_2，已知 $\tau = RC = 10^{-3}$ s。

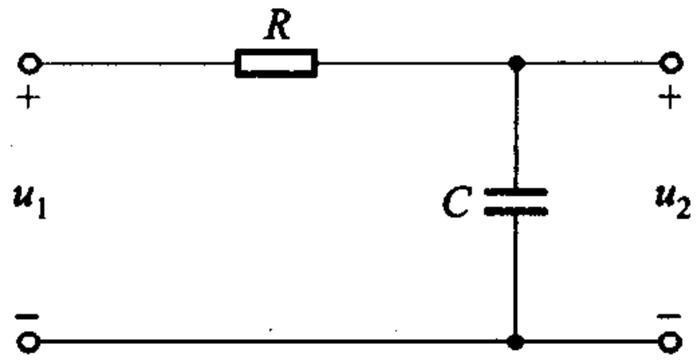


图 10-8　例 10-3

解　作出相量模型后，利用串联电路分压关系可得

$$H_u = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}}$$

$$= \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \angle -\arctan(\omega RC)$$

$$|H_u| = \frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \tag{a}$$

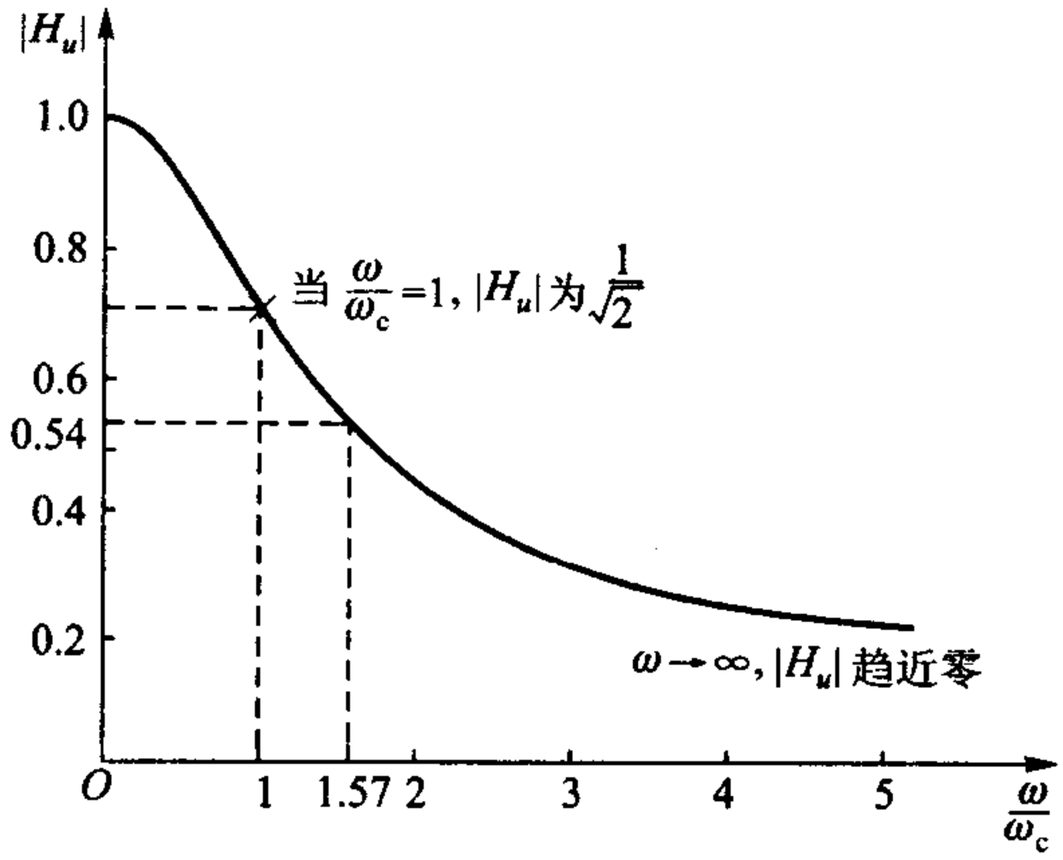
$$\varphi = \psi_2 - \psi_1 = -\arctan(\omega RC) \tag{b}$$

据此可绘出电路的幅频特性曲线和相频特性曲线。由（a）式可知，当 $\omega = 0$（直流）时，$|H_u| = 1$；当 $\omega \to \infty$ 时，$|H_u| \to 0$；而当 $\omega = \frac{1}{RC} = \frac{1}{\tau}$ 时，$|H_u| = \frac{1}{\sqrt{2}}$。再计算其他若干 ω 时的 $|H_u|$ 值，便可得幅频特性曲线如图 10-9（a）所示。这一特性表明：对同样大小的输入电压来说，频率越高，输出电压就越小，在直流时，输出电压最大，恰等于输入电压。因此，低频的正弦信号要比高频的正弦信号更易通过这一电路。这一电路被称为*RC*低通（low pass，简写作 LP）电路。至于相频特性则由（b）式可知：随着 ω 由零向 ∞ 趋近，相移角 φ 单调地趋向 $-90°$。φ 总为负，说明输出电压总是滞后于输入电压的，滞后的角度介于 $0°$ 与 $-90°$ 之间，具体的数值取决于 ω。从这一角度来看，这一 *RC* 电路又称为滞后网络。

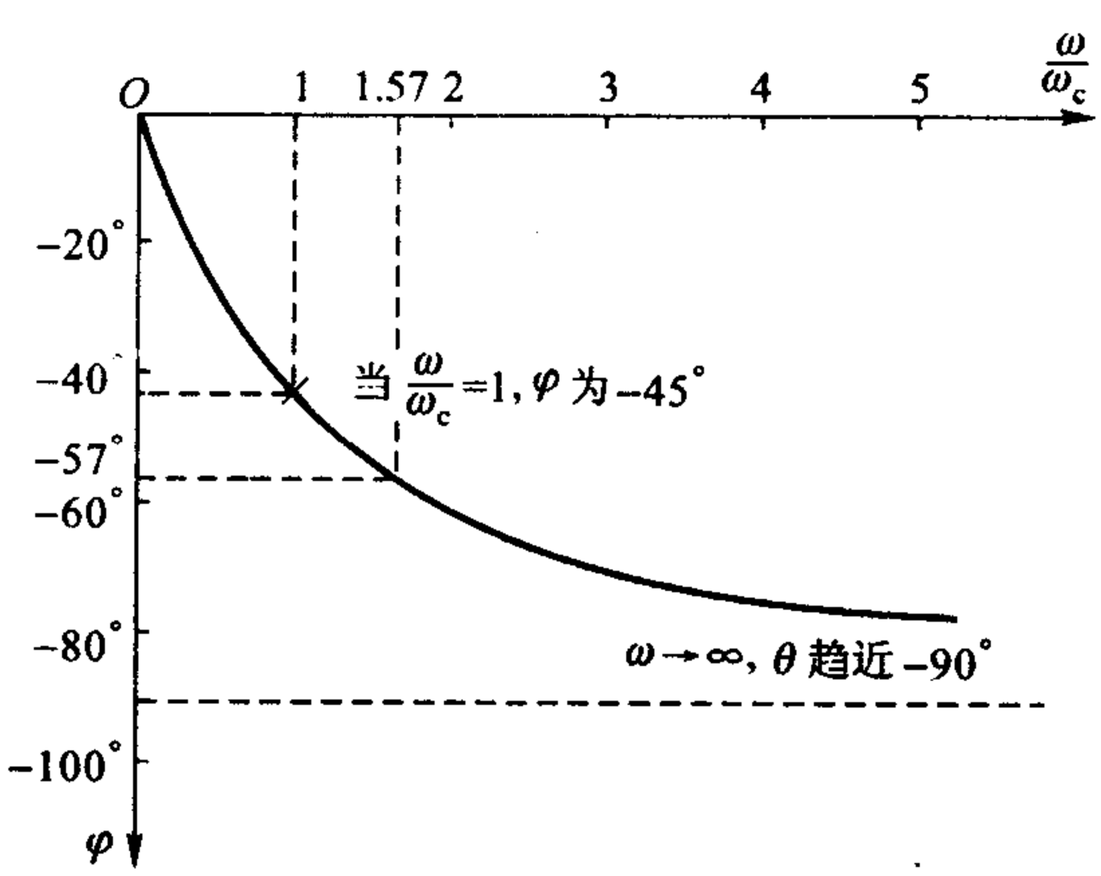
当 $\omega = 1/\tau$ 时，$|H_u| = 0.707$。τ 是一阶 *RC* 电路的时间常数，在频率响应中

也有它特殊的意义。当输出电压降低到输入电压或最大输出电压的 0.707 即$\frac{1}{\sqrt{2}}$时，由于功率与电压平方成正比，功率将降低$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{2}$。因此，$\frac{1}{\tau}$称为半功率点频率，记为 ω_c，即

$$\omega_c=\frac{1}{\tau}$$



(a)



(b)

图 10－9　*RC* 低通电路的频率响应

工程技术上，把频率从 0 到 ω_c 的范围定为这一低通滤波器的通频带（bandwith，简写作 *BW*），而 ω_c 则又称为截止频率（cut-off frequency）。在 $\omega=\omega_c$ 时，相移为 −45°。引用 $\omega_c=\frac{1}{\tau}$后，H_u 可写为

$$H_u = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_c}}$$

图 10－9 所示频率响应的横坐标为$\dfrac{\omega}{\omega_c} = \omega RC$，可适用于具有不同 R、C 值的 RC 低通电路。

当 $\omega = 500\pi = 1\,571$ rad/s 时，由(a)式或由图 10－9(a)可得 $|H_u| \approx 0.54$；由(b)式或由图 10－9(b)可得 $\varphi \approx -57°$，故知

$$\begin{aligned}\dot{U}_2 &= H_u \dot{U}_1 \\ &= (0.54 \angle -57°)(2.5 \angle 30°)\ \mathrm{V} \\ &= 1.35 \angle -27°\ \mathrm{V}\end{aligned}$$

$$u_2(t) = 1.35\sqrt{2}\cos(500\pi t - 27°)\ \mathrm{V}$$

注意 $U_2 = 1.35$ V 是有效值，在列写 $u_2(t)$ 时需乘以$\sqrt{2}$。在本章中有效值相量、振幅相量均可遇到，请加以注意。

思考题

10－3　试根据电抗与频率的关系来说明图 10－8 所示电路是低通电路；图 10－10 所示电路是高通电路。试用相量图来说明图 10－8 及图 10－10 所示电路分别为滞后网络及超前网络。

练习题

10－1　试求图 10－10 所示 RC 电路的 H_u。绘出电路的频率响应曲线。说明该电路具有高通及相位超前的性质。计算截止频率 ω_c 与电路参数的关系。

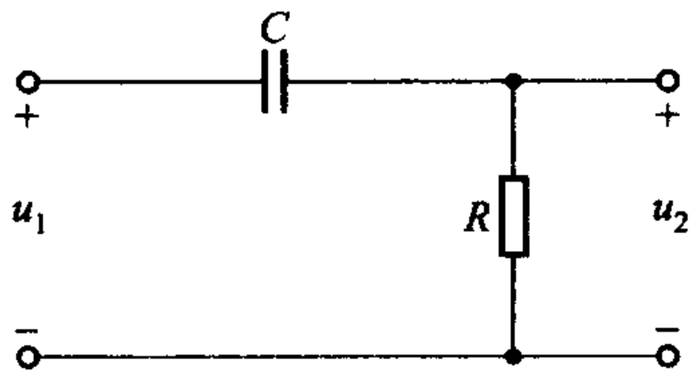


图 10－10　练习题 10－1

§10－4　正弦稳态的叠加

运用叠加原理计算多个正弦电源作用下线性时不变电路的稳态响应时，需

注意到有两种不同的情况：其一，正弦电源的频率相同；其二，正弦电源的频率不相同。

运用时，我们总是先分别算出各正弦电源单独作用下的正弦稳态响应分量。当正弦电源频率相同时，这些分量都是同频率的正弦波，同频率正弦波之和仍为一同频率的正弦波，此即所求的正弦稳态响应。当正弦电源频率不相同时，这些分量是些不同频率的正弦波，不同频率正弦波之和不再是正弦波，此即为所求的响应，波形视具体情况而定。

今以图 10－11 所示的电路 N 来进一步说明正弦稳态的叠加过程。设 N 由一个正弦电压源 $u_S(t)$ 和一个正弦电流源 $i_S(t)$ 激励，响应为其中某一支路 k 的电压 $u_k(t)$，除电源外 N 的其余部分表示为 N_0，并设电路处于稳定状态。

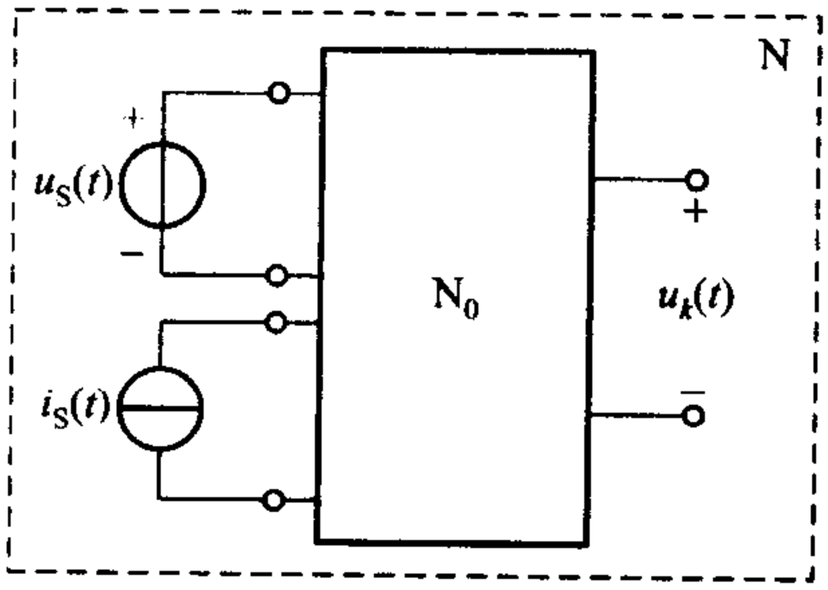


图 10－11　由电压源和电流源激励的电路 N

若两电源的频率均为 ω，则在根据相量模型 $N_{0\omega}$ 分别求得两个响应分量 $\dot{U}'_k$ 和 $\dot{U}''_k$（图 10－12）后，对相量运用叠加原理得

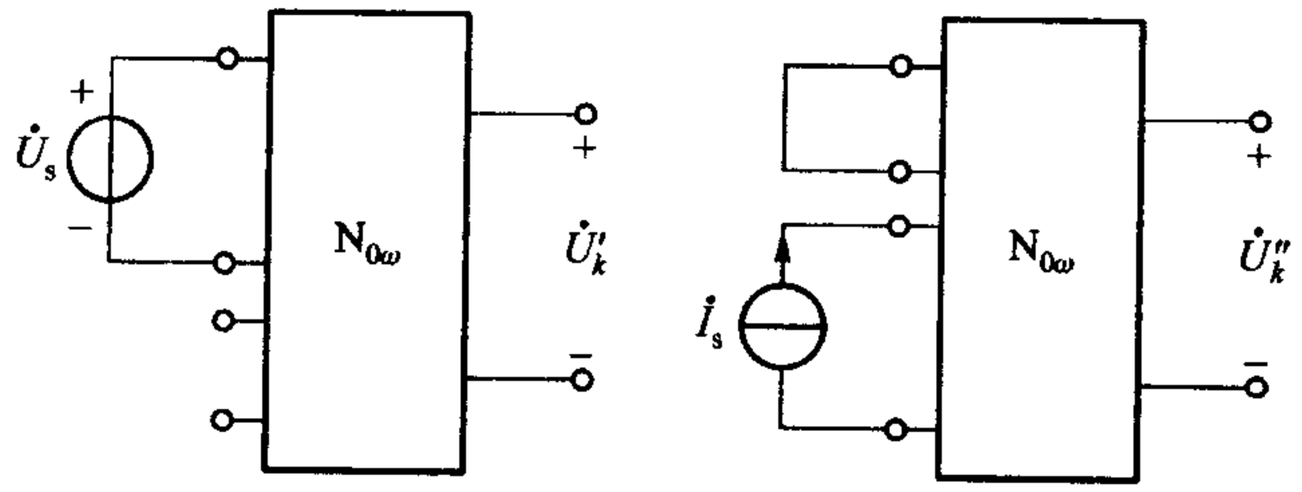


图 10－12　由同一相量模型求响应分量 $\dot{U}'_k$ 和 $\dot{U}''_k$

$$\dot{U}'_k + \dot{U}''_k = \dot{U}_k \tag{10-19}$$

式中：

$$\dot{U}'_k = H_u(j\omega)\dot{U}_s$$

$$\dot{U}''_k = Z_T(j\omega)\dot{I}_s$$

$H_u(j\omega)$为 N_0 中 $\dot{U}_s$ 对 $\dot{U}'_k$ 的电压转移函数，$Z_T(j\omega)$为 N_0 中 $\dot{I}_s$ 对 $\dot{U}''_k$ 的转移阻抗函数。由 $\dot{U}_k$ 可得频率为 ω 的正弦电压 $u_k(t)$

$$u_k(t) = \sqrt{2}U_k\cos(\omega t + \psi_k)$$

设 $\dot{U}_k = U_k\angle\psi_k$。

若两电源的频率分别为 ω_1 和 ω_2，则仍可用相量法求得两个响应分量 $\dot{U}'_k$ 和 $\dot{U}''_k$，但需各自根据相应的相量模型 $N_{0\omega_1}$，和 $N_{0\omega_2}$求解（图 10－13），在进而写出频率分别为 ω_1 和 ω_2 的正弦电压分量 $u'_k(t)$和 $u''_k(t)$后方可运用叠加原理得

$$u'_k(t) + u''_k(t) = u_k(t) \tag{10-20}$$

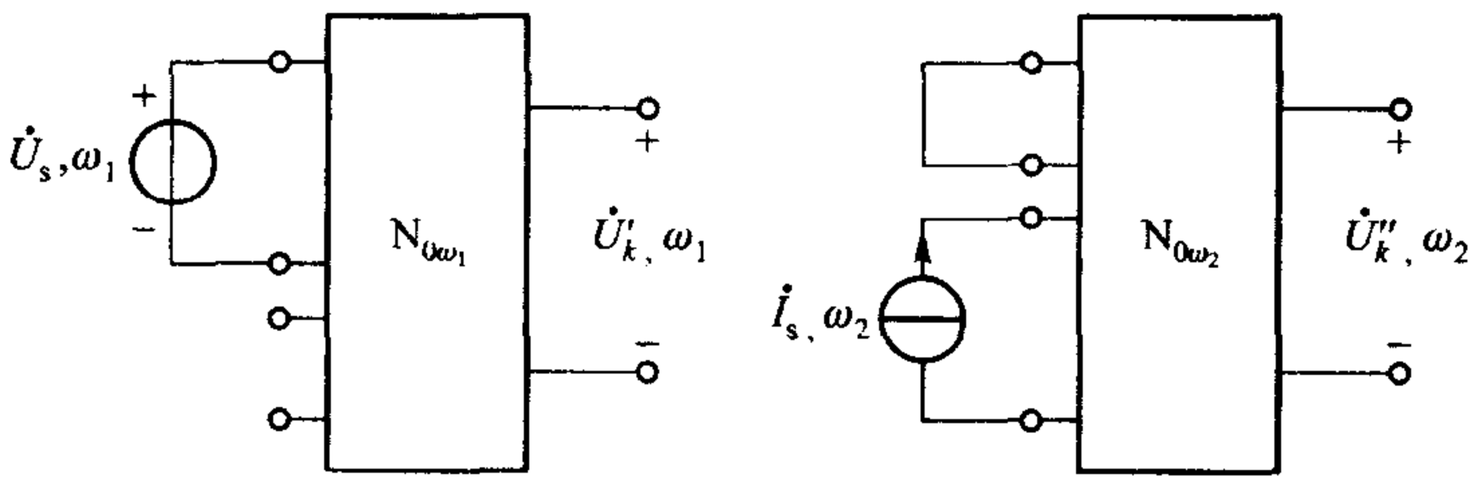


图 10－13　由不同相量模型求响应分量 $\dot{U}'_k$ 和 $\dot{U}''_k$

$u'_k(t)$和 $u''_k(t)$分别计算如下：

$$u'_k(t) = \sqrt{2}U'_k\cos(\omega_1 t + \psi'_u)$$

其中 U'_k、ψ'_u 是由下式求得的：

$$\dot{U}'_k = H_u(j\omega_1)\dot{U}_s = |H_u(j\omega_1)|\angle\varphi_H \cdot U_s\angle\psi_u = |H_u(j\omega_1)|U_s\angle\varphi_H + \psi_u$$

$$= U'_k\angle\psi'_u$$

类似地

$$u''_k(t) = \sqrt{2}U''_k\cos(\omega_2 t + \psi''_u)$$

$$\dot{U}''_k = Z_T(j\omega_2)\dot{I}_s = |Z_T(j\omega_2)|\angle\varphi_Z \cdot I_s\angle\psi_i = |Z_T(j\omega_2)|I_s\angle\varphi_Z + \psi_i$$

$$= U''_k\angle\psi''_u$$

下面讨论 u_k 的波形问题。

若 $u'_k(t)$的角频率 $\omega_1 = \omega$，$u''_k(t)$的角频率为 $\omega_2 = 2\omega$，且 $u'_k(t)$和 $u''_k(t)$可表示为

$$u_k'(t) = 2\sin(\omega t)$$

$$u_k''(t) = \sin(2\omega t + 90°)$$

则 $u_k(t) = u_k'(t) + u_k''(t)$ 的波形当如图 10－14所示，$u_k(t)$ 为一周期 $T = T_1 = \dfrac{2\pi}{\omega}$ 的周期性非正弦波。$u_k'(t)$ 称为基波，$u_k''(t)$ 称为二次谐波。

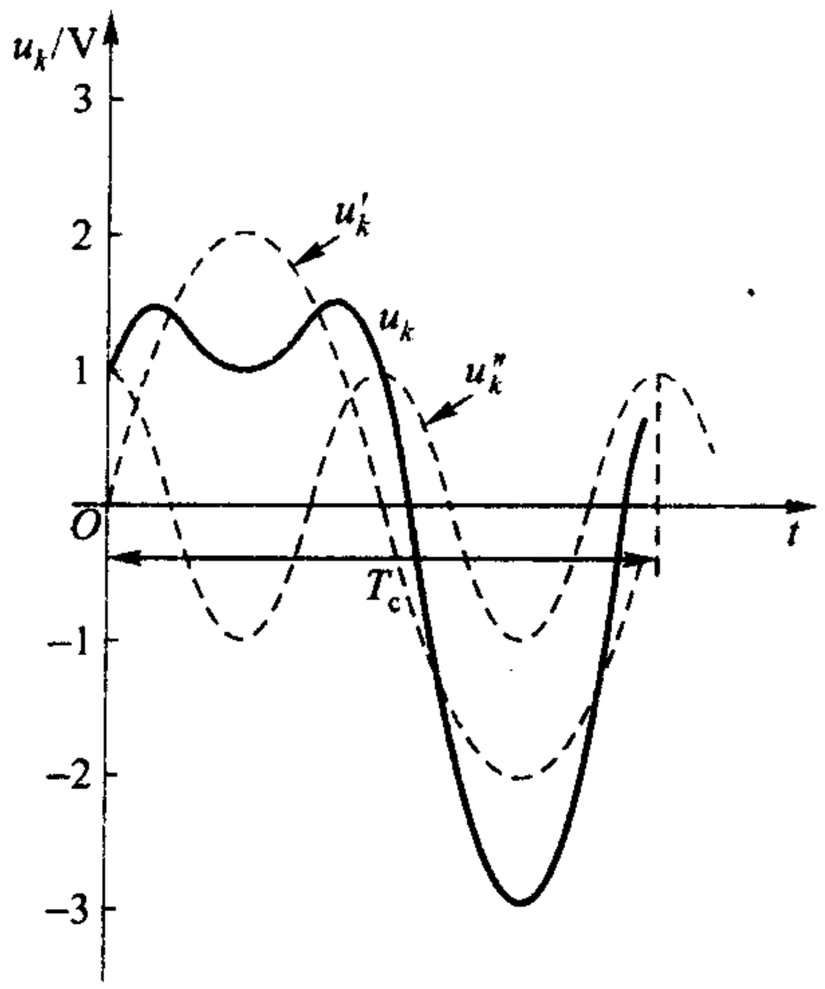


图 10－14　两不同频率正弦波的叠加

一般来说，如果 $\omega_1 \neq \omega_2$，则两频率间的关系可表示为 $\omega_2 = r\omega_1$（$r \neq 1$）。设 $u_k'(t)$ 的周期为 T_1，则 $T_1 = \dfrac{2\pi}{\omega_1}$，$u_k''(t)$ 的周期为 T_2，则 $T_2 = \dfrac{2\pi}{\omega_2}$。只要 r 是有理数，总可以找到一个公周期（common period）T_c，使得每一公周期内包含着整数个 T_1 和 T_2，即

$$T_c = mT_1 = nT_2 \qquad (10-21)$$

m、n 为适当的正整数，且 $n = rm$。因此，由（10－20）式确定的 $u_k(t)$ 是一个以 T_c 为周期的非正弦波。例如，$r = 1.2$，可得 $T_c = 5T_1 = 6T_2$，$u_k(t)$ 的周期为 $u_k'(t)$ 周期的 5 倍或为 $u_k''(t)$ 周期的6 倍。在最简单的情况，r 本身即为正整数，若 $T_1 > T_2$，则公周期 T_c 即为 T_1。图 10－14 表明 $r = 2$ 的情况，其中 $T_c = T_1$。

若 $\omega_2 = r\omega_1$，而 r 为无理数（例如 $\sqrt{2}$、π、ln2、…）则响应 $u_k(t)$ 将是非周期性的。

例 10－4　试用叠加原理求图 10－15（a）所示电路的电流 $i(t)$，已知 $u_{S1}(t) = 5\sqrt{2}\cos(2t)$ V，$u_{S2}(t) = 10\sqrt{2}\cos(2t + 90°)$ V。

解　作用于电路的两电压源频率相同，作出 $\omega = 2\text{rad/s}$ 的相量模型如图 10－15（b）所示，适用于计算任一电源单独作用时的电流。根据叠加原理

$$\dot{I} = \dot{I}' + \dot{I}''$$

其中 $\dot{I}'$ 和 $\dot{I}''$ 分别为图 10－15（b）中 $\dot{U}_{s1} = 0$ 时和 $\dot{U}_{s2} = 0$ 时支路 Z_3 的电流。即

$$\dot{I}' = \frac{\dot{U}_{s2}}{Z_2 + Z_1 Z_3/(Z_1 + Z_3)} \cdot \frac{Z_1}{Z_1 + Z_3}$$

$$= \frac{\dot{U}_{s2} Z_1}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3} = \frac{\text{j}10}{2 + \text{j}6}\ \text{A} = \frac{10 \angle 90°}{6.32 \angle 71.6°}\ \text{A}$$

$$= 1.58 \angle 18.4°\text{A}$$

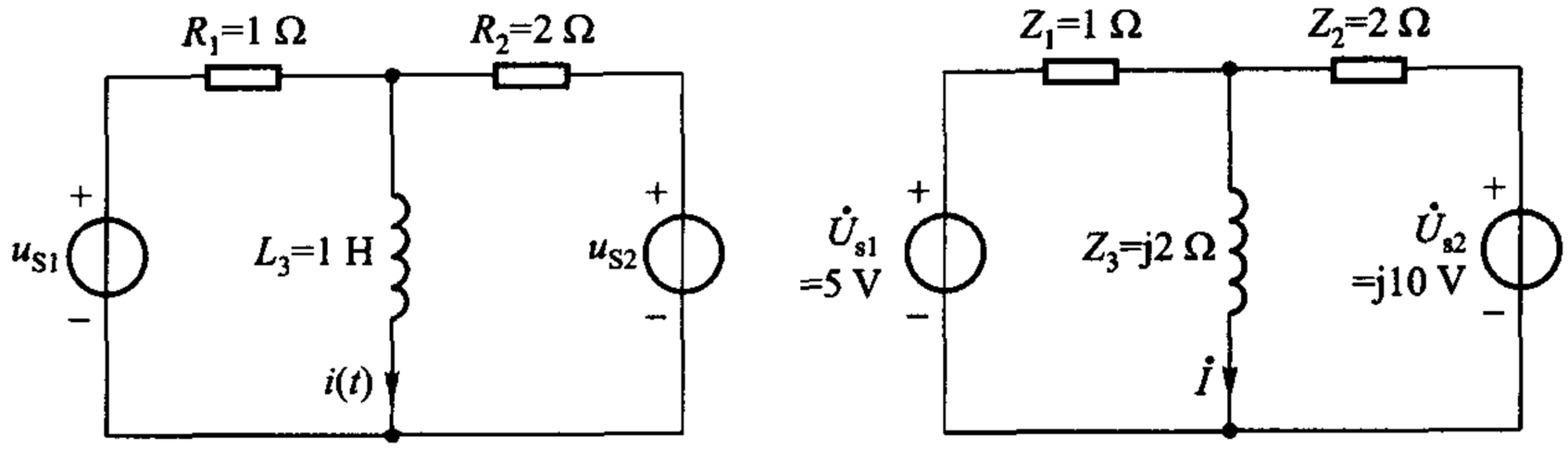


图 10－15　例 10－4

$$\dot{I}'' = \frac{\dot{U}_{s1}}{Z_1 + Z_2 Z_3/(Z_2+Z_3)} \cdot \frac{Z_2}{Z_2+Z_3} = \frac{\dot{U}_{s1} Z_2}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}$$

$$= \frac{10}{6.32 \angle 71.6°}\ \text{A} = 1.58 \angle -71.6°\ \text{A}$$

故得

$$\dot{I} = (1.58 \angle 18.4° + 1.58 \angle -71.6°)\ \text{A}$$

$$= (1.5 + \text{j}0.5 + 0.5 - \text{j}1.5)\ \text{A}$$

$$= (2 - \text{j})\ \text{A} = 2.24 \angle -26.6°\ \text{A}$$

$$i(t) = 2.24\sqrt{2}\cos(2t - 26.6°)\ \text{A}$$

请注意本题相量模型中电源电压采用有效值相量，计算结果为有效值相量，在列写瞬时值表示式时，不要忘记乘以$\sqrt{2}$！

例 10－5　电路如图 10－16 所示，求电流 $i(t)$。

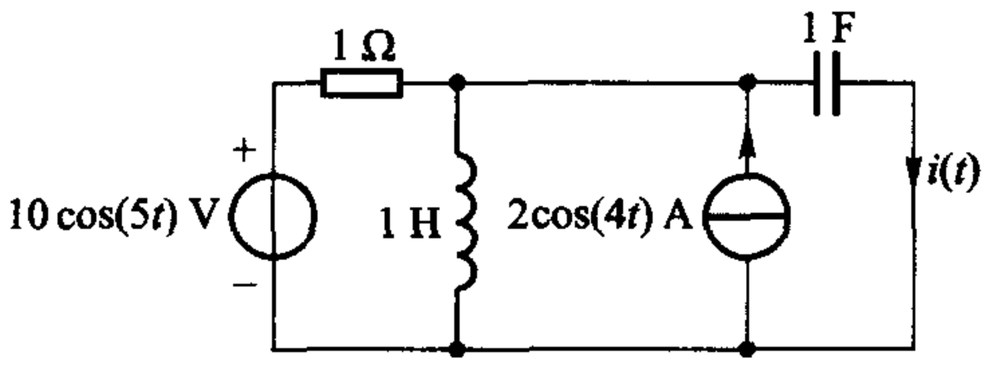
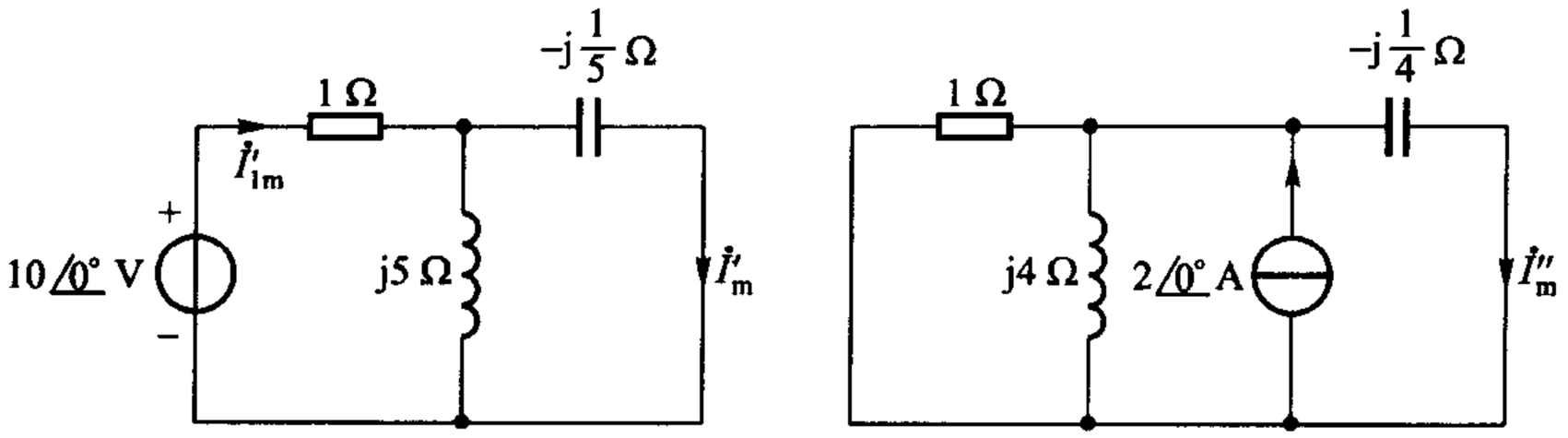


图 10－16　例 10－5

解　本题系不同频率的正弦电源作用于电路的问题。就整体说，本题不符合单一频率的条件，不能运用相量法。但是，如果只求每一电源单独作用时的响应，则仍可运用相量法。再根据叠加原理即可解决问题。

先考虑 10cos(5t) V 电源单独作用于电路，得相量模型如图 10－17(a)所示，注意各元件的阻抗系根据 ω = 5 rad/s 算得。在计算中均用振幅相量，这样在解题时，可避免先除以$\sqrt{2}$，最后在求瞬时值时，又需乘以$\sqrt{2}$。



(a) ω=5 rad/s 时　　(b) ω=4 rad/s 时

图 10－17　例 10－5 相量图

$$\dot{I}'_{\mathrm{m}} = \dot{I}'_{1\mathrm{m}}\frac{\mathrm{j}5}{\mathrm{j}5-\mathrm{j}\frac{1}{5}} = \dot{I}'_{1\mathrm{m}}\frac{\mathrm{j}25}{\mathrm{j}24} = \frac{10\angle 0°}{1+\dfrac{(\mathrm{j}5)\left(-\mathrm{j}\dfrac{1}{5}\right)}{\mathrm{j}5-\mathrm{j}\dfrac{1}{5}}}\times\frac{25}{24}\ \mathrm{A}$$

$$=\frac{250}{24-\mathrm{j}5}\ \mathrm{A}=\frac{250}{24.5}\underline{\angle 11.8°}\ \mathrm{A}=10.2\underline{\angle 11.8°}\ \mathrm{A}$$

$$i'(t)=10.2\cos(5t+11.8°)\ \mathrm{A}$$

考虑 $2\cos(4t)$ A 电源单独作用，得相量模型如图 10－17(b)所示，各元件的阻抗系根据 $\omega=4$ rad/s 算得。采用振幅相量进行计算。

$$\dot{I}''_{\mathrm{m}} = 2\underline{\angle 0°}\times\frac{\mathrm{j}4}{1+\dfrac{1}{\mathrm{j}4}+\mathrm{j}4}\ \mathrm{A}=2\underline{\angle 0°}\times\frac{16}{15-\mathrm{j}4}\ \mathrm{A}$$

$$=\frac{32\underline{\angle 0°}}{15.5\underline{\angle -14.9°}}\ \mathrm{A}=2.06\underline{\angle 14.9°}\ \mathrm{A}$$

$$i''(t)=2.06\cos(4t+14.9°)\ \mathrm{A}$$

故得　$i(t)=i'(t)+i''(t)$

$$=[10.2\cos(5t+11.8°)+2.06\cos(4t+14.9°)]\ \mathrm{A}$$

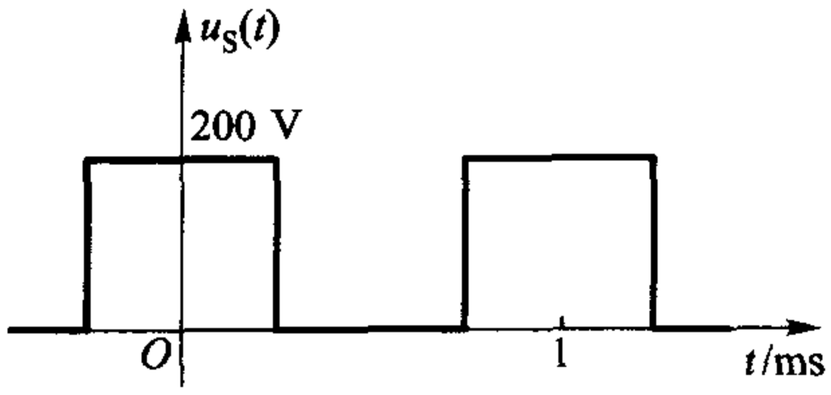
$i(t)$为非正弦周期波，试问其周期是多少？

上例可以不用叠加原理求解，本例只能用叠加原理做。

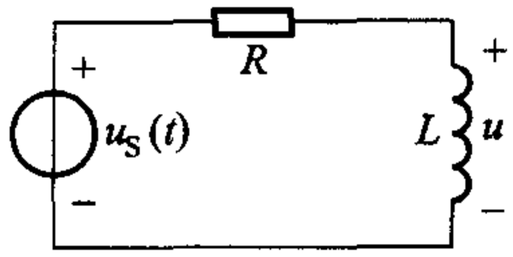
例 10－6　图 10－18(a)所示幅度为 200 V、周期为 1 ms 的方波，作用于图 10－18(b)所示的 RL 电路。已知方波的傅里叶级数为

$$u_{\mathrm{S}}(t)=\left\{100+\frac{400}{\pi}\left[\cos(\omega_1 t)-\frac{1}{3}\cos(3\omega_1 t)+\right.\right.$$

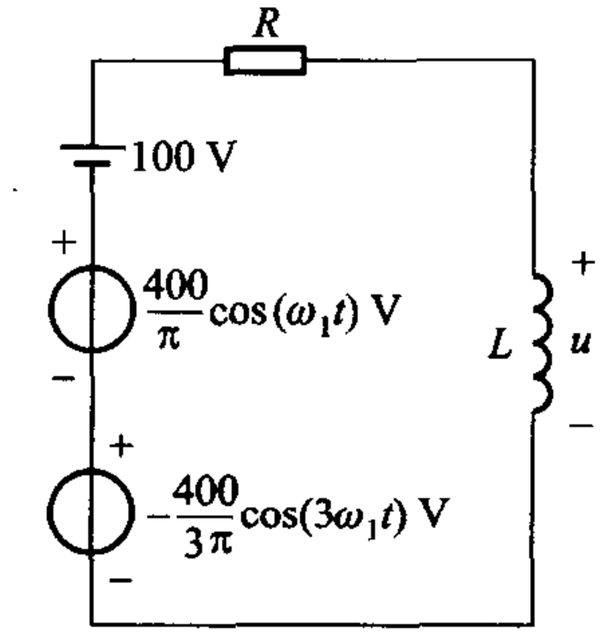
$$\left.\left.\frac{1}{5}\cos(5\omega_1 t)-\cdots\right]\right\}\mathrm{V}$$



(a)



(b)



(c)

图 10－18　例 10－6

式中

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \times 10^3 \text{ rad/s}$$

又，$R = 50\Omega$、$L = 25$ mH，试求稳态时的电感电压。

解　由(10－13)式，转移电压函数

$$H_u(\mathrm{j}\omega) = \frac{\dot{U}_{\mathrm{m}}}{\dot{U}_{\mathrm{sm}}} = \frac{\mathrm{j}\omega L}{R + \mathrm{j}\omega L}$$

本题输入电压 u_S 的频率 ω 为 0、ω_1、$3\omega_1$、$5\omega_1$、…。电路可改画为图 10－18(c)。

先考虑输入电压的直流分量 100V 单独作用。此时 $\omega = 0$，$H_u(\mathrm{j}0) = 0$，输出电压为零。

再考虑输入电压的基波 $\frac{400}{\pi}\cos(\omega_1 t)$ V 单独作用。此时电压的振幅相量

$$\dot{U}_{\mathrm{sim}} = \frac{400}{\pi}\angle 0° \text{ V} = 127 \angle 0° \text{ V}$$

由于 $\omega = \omega_1 = 2\pi \times 10^3$ rad/s，得

$$H_u(\mathrm{j}\omega_1)=\frac{\mathrm{j}\omega_1 L}{R+\mathrm{j}\omega_1 L}=\frac{\mathrm{j}2\pi\times10^3\times25\times10^{-3}}{50+\mathrm{j}2\pi\times10^3\times25\times10^{-3}}$$
$$=0.955\angle 17.66^\circ$$

故得此时输出电压的振幅相量

$$\dot{U}_{1\mathrm{m}}=\dot{U}_{s1\mathrm{m}}H_u(\mathrm{j}\omega_1)=127\angle 0^\circ\times0.955\angle 17.66^\circ\ \mathrm{V}$$
$$=121.28\angle 17.66^\circ\ \mathrm{V}$$

因而输出电压的基波

$$u_1(t)=121.28\cos(\omega_1 t+17.66^\circ)\ \mathrm{V}$$

输入电压的三次谐波 $-\frac{400}{3\pi}\cos(3\omega_1 t)$ V 单独作用时，$\omega=3\omega_1=3\times2\pi\times10^3$ rad/s，类似地可得

$$\dot{U}_{s3\mathrm{m}}=-\frac{400}{3\pi}\angle 0^\circ\ \mathrm{V}=42.4\angle -180^\circ\ \mathrm{V}$$

$$H_u(\mathrm{j}3\omega_1)=\frac{\mathrm{j}3\omega_1 L}{R+\mathrm{j}3\omega_1 L}=0.993\angle 6.05^\circ$$

$$\dot{U}_{3\mathrm{m}}=\dot{U}_{s3\mathrm{m}}H_u(\mathrm{j}3\omega_1)=(42.4\angle -180^\circ\times0.993\angle 6.05^\circ)\ \mathrm{V}$$
$$=42.10\angle -173.95^\circ\ \mathrm{V}=-42.10\angle 6.05^\circ\ \mathrm{V}$$

故得输出电压的三次谐波

$$u_3(t)=42.10\cos(3\omega_1 t-173.95^\circ)\ \mathrm{V}$$
$$=-42.10\cos(3\omega_1 t+6.05^\circ)\ \mathrm{V}$$

其他各次谐波单独作用时，计算方法相似。各次谐波计算结果如表 10－1 所示，表中所列数据已算至 9 次谐波。

表 10－1　各次谐波计算结果（表中所示为振幅相量）

谐波次数	输入谐波相量（单位：V）	$H_u(\mathrm{j}\omega)$	输出谐波相量（单位：V）
0	100	0	0
1	$127.0\angle 0^\circ$	$0.955\angle 17.66^\circ$	$121.28\angle 17.66^\circ$
3	$42.4\angle -180^\circ$	$0.993\angle 6.05^\circ$	$-42.10\angle 6.05^\circ$
5	$25.4\angle 0^\circ$	$0.993\angle 3.66^\circ$	$25.35\angle 3.66^\circ$
7	$18.1\angle -180^\circ$	$0.998\angle 2.60^\circ$	$-18.06\angle 2.60^\circ$
9	$14.1\angle 0^\circ$	$0.999\angle 2.00^\circ$	$14.10\angle 2.00^\circ$

由输出谐波相量栏可得输出电压，即电感电压

$$u(t)=[121.28\cos(\omega_1 t+17.66°)-42.10\cos(3\omega_1 t+6.05°)+25.35\cos(5\omega_1 t+3.66°)-18.06\cos(7\omega_1 t+2.60°)+14.10\cos(9\omega_1 t+2.00°)+\cdots]\ \text{V}$$

波形如图 10－19 所示。

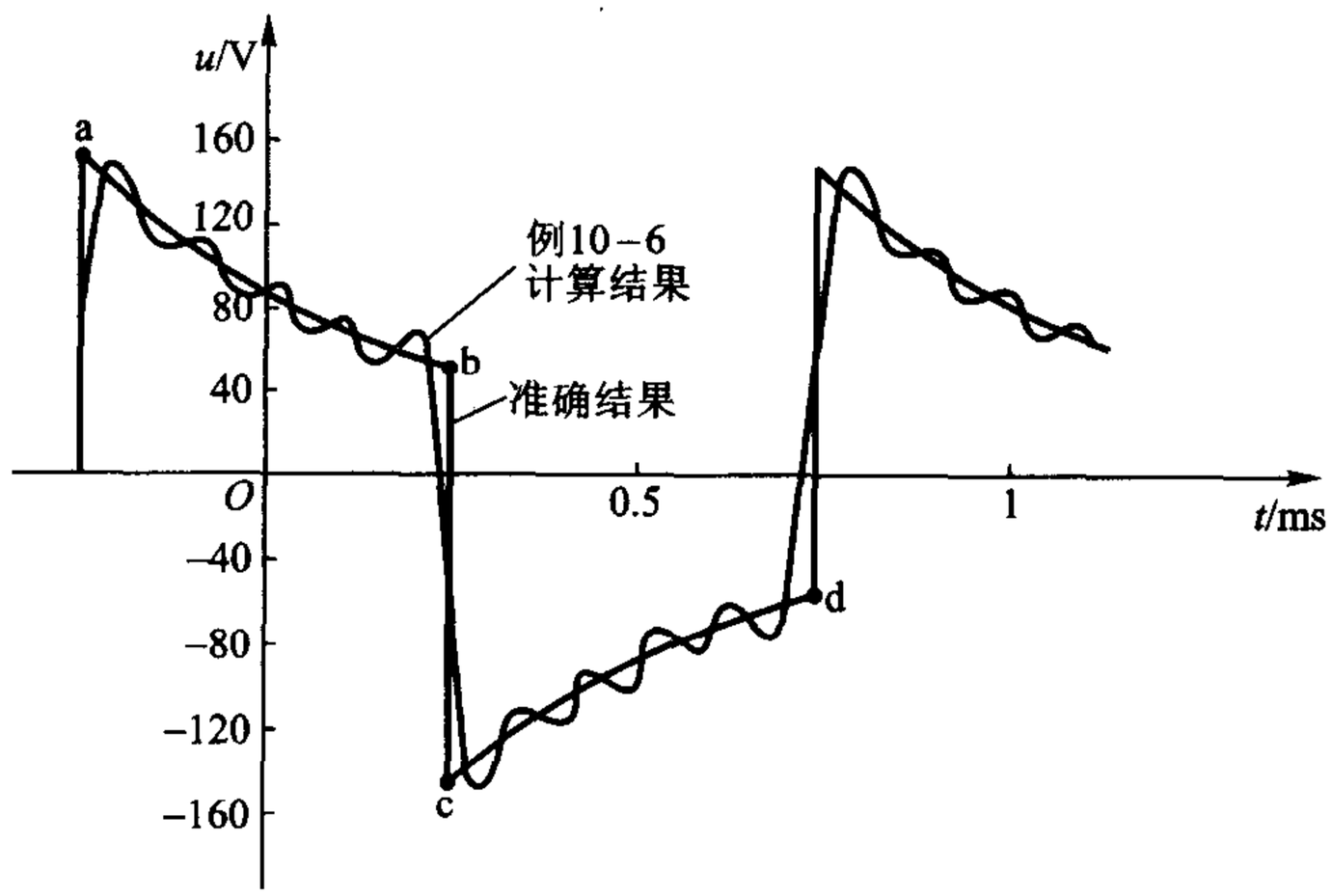


图 10－19　例 10－6 输出电压波形

傅里叶级数是一个无穷级数，在实际应用时总只能取有限项来计算，必然会有误差。①

思考题

10－4　设 $i_1(t)=[10\cos(\omega t)+5\cos(3\omega t-30°)-3\cos(5\omega t+60°)]$ A，$i_2(t)=[20\cos(\omega t-30°)+10\cos(5\omega t+45°)]$ A，如果要求出 $i(t)=i_1(t)+i_2(t)$。下列的做法对不对？为什么？

先求出 $i_1(t)$、$i_2(t)$ 的相量分别为

$$\dot{I}_{1m}=(10\angle 0°+5\angle -30°-3\angle 60°)\ \text{A}$$

$$\dot{I}_{2m}=(20\angle -30°+10\angle 45°)\ \text{A}$$

再求出这两相量之和

$$\dot{I}_{1m}+\dot{I}_{2m}\approx I_m$$

由此可得相量 $\dot{I}_m$ 所对应的电流 $i(t)$。

① 图 10－19 中标有准确结果字样的波形是由时域方法算得的，参看《简明电路分析基础》第七章图 7－70 及其说明，该方法虽方便准确，但使用场合毕竟有限。

练习题

10－2　某网络的网络函数

$$H(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega}$$

（1）若激励为 $3\cos(2t)+4\sin(2t)$，求响应；

（2）若激励为 $3\cos t+4\sin(2t)$，求响应。

$[2.23\cos(2t-116.6°);2.12\cos(t-45°)+1.78\cos(2t-153.4°)]$

§10－5　平均功率的叠加

本节讨论多个电源作用于电路时功率的计算。设电路如图 10－20 所示。由叠加原理可知

$$i(t)=i_1(t)+i_2(t)$$

其中 $i_1(t)$、$i_2(t)$ 分别是电源 $u_{S1}(t)$、$u_{S2}(t)$ 单独作用时在电阻 R 中产生的电流。瞬时功率为

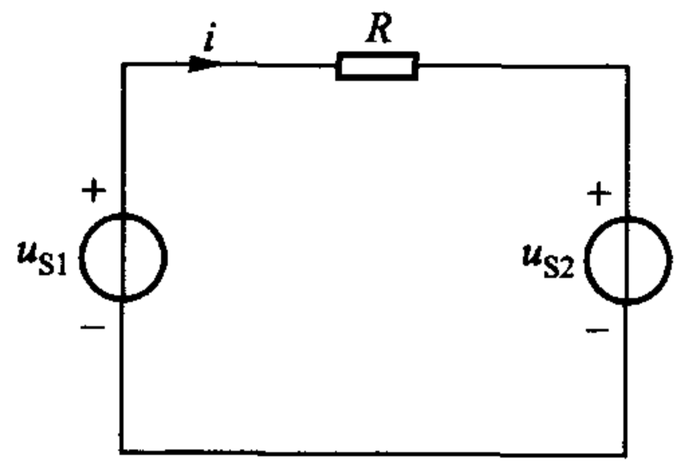


图 10－20　两个电源作用的电路

$$\begin{aligned}p&=R(i_1+i_2)^2\\&=Ri_1^2+Ri_2^2+2Ri_1i_2\\&=p_1+p_2+2Ri_1i_2\end{aligned}\qquad(10-22)$$

其中 p_1、p_2 分别为 u_{S1}、u_{S2} 单独作用时所产生的瞬时功率。一般说，$i_1i_2\neq0$，因此 $p\neq p_1+p_2$，这就是说叠加原理不适用于瞬时功率。

如果 p 为周期函数，其周期为 T，则一周期内的平均功率当为

$$\begin{aligned}P&=\frac{1}{T}\int_0^T p\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{T}\int_0^T(p_1+p_2+2Ri_1i_2)\,\mathrm{d}t\\&=P_1+P_2+\frac{2R}{T}\int_0^T i_1i_2\,\mathrm{d}t\end{aligned}\qquad(10-23)$$

这里假定了 p 的每一分量均是周期为 T 的周期函数。式中 P_1、P_2 分别为 u_{S1}、u_{S2} 单独作用时产生的平均功率。显然，若

$$\int_0^T i_1i_2\,\mathrm{d}t=0\qquad(10-24)$$

成立，则

$$P=P_1+P_2\qquad(10-25)$$

即叠加原理可适用于平均功率。

我们来探讨在正弦稳态下，使(10－24)式成立，应满足什么条件。设

$$i_1(t) = I_{1m}\cos(\omega_1 t + \psi_1)$$

$$i_2(t) = I_{2m}\cos(\omega_2 t + \psi_2)$$

若 $\omega_1 \neq \omega_2$，且 $\omega_2 = r\omega_1$，r 为有理数，必然存在一个公周期 T_c，而 $T_c = mT_1 = nT_2$，T_1、T_2 分别为 i_1、i_2 的周期，m、n 为正整数。因此，(10－23)式的积分可在[0，T_c]区间进行。又若令 $\omega = \dfrac{2\pi}{T_c}$，则 $\omega_1 = m\omega$，$\omega_2 = n\omega$，在这情况下

$$\int_0^T i_1 i_2 \mathrm{d}t = I_{1m}I_{2m}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos(m\omega t + \psi_1)\cos(n\omega t + \psi_2)\mathrm{d}t$$

$$= \begin{cases} \dfrac{I_{1m}I_{2m}\pi\cos(\psi_1 - \psi_2)}{\omega} & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases} \qquad (10-26)$$

由此可见，若 $m = n$(即 $\omega_1 = \omega_2$)，叠加原理对平均功率不适用；若 $m \neq n$，叠加原理对平均功率适用。这就是说，多个不同频率的正弦电流(电压)产生的平均功率等于每一正弦电流(电压)单独作用时所产生的平均功率的总和。设流过电阻 R 的电流可表示为

$$i(t) = I_0 + I_{1m}\cos(\omega_1 t + \psi_1) + I_{2m}\cos(\omega_2 t + \psi_2) + \cdots + I_{Nm}\cos(\omega_N t + \psi_N) \qquad (10-27)$$

其中 I_0 为直流电流(其频率可视为零)，ω_1、ω_2、…、ω_N 各不相同，且比值为有理数(不一定为整数)，则由叠加原理可得一个公周期的平均功率为

$$P = I_0^2 R + \left(\frac{I_{1m}}{\sqrt{2}}\right)^2 R + \left(\frac{I_{2m}}{\sqrt{2}}\right)^2 R + \cdots + \left(\frac{I_{Nm}}{\sqrt{2}}\right)^2 R$$

$$= I_0^2 R + I_1^2 R + I_2^2 R + \cdots + I_N^2 R$$

$$= P_0 + P_1 + P_2 + \cdots + P_N \qquad (10-28)$$

其中 I_1、I_2、…、I_N 为各不同频率正弦电流的有效值。在 $\omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_N$，且频率成整数倍的情况下，则 $i(t)$ 的周期为 $T_1 = \dfrac{2\pi}{\omega_1}$，(10－28)式所示为一个周期 T_1 的平均功率。

在§8－11曾引入有效值的概念。周期电流(电压)的有效值为一与直流电流(电压)数值相等的常数，该直流电流与周期电流在电阻 R 上的平均功率相等，如以 I 表示该直流电流，则应有

$$I^2 R = I_0^2 R + I_1^2 R + I_2^2 R + \cdots + I_N^2 R$$

因此

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \cdots + I_N^2} \qquad (10-29)$$

根据定义，上式即电流 $i(t)$ 的有效值 I 的计算式。同理，如以 U 代表周期电压

$u(t)$的有效值,则

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \cdots + U_N^2} \tag{10-30}$$

其中 U_0 为直流电压分量的数值,U_1、U_2、…、U_N 为各不同频率正弦电压的有效值。

周期性非正弦波在用傅里叶级数分解出它的直流分量和各次谐波分量后,也可用(10-29)、(10-30)式计算该非正弦波的有效值。

例 10-7　图 10-20 电路中,若(1) $u_{S1}(t) = 100\cos(314t + 60°)\,\mathrm{V}$,$u_{S2}(t) = 50\cos(314t)\ \mathrm{V}$;(2) $u_{S1}(t) = 100\cos(314t + 60°)\,\mathrm{V}$,$u_{S2} = 50\ \mathrm{V}$;(3) $u_{S1}(t) = 100\cos(314t + 60°)\,\mathrm{V}$,$u_{S2}(t) = 50\cos(471t)\,\mathrm{V}$。试分别求这三种情况 R 的平均功率,已知 $R = 100\Omega$。

解　(1) 由于 u_{S1} 和 u_{S2} 系同频率的正弦电压,求平均功率时不得使用叠加原理,但可以用叠加原理求得电流,然后再算平均功率 P。

由 u_{S1} 和 u_{S2} 分别作用时产生的电流,以相量表示为

$$\dot{I}' = \frac{1}{\sqrt{2}}\angle 60°\ \mathrm{A}$$

$$\dot{I}'' = \frac{-1}{2\sqrt{2}}\angle 0°\ \mathrm{A}$$

因而

$$\dot{I} = \dot{I}' + \dot{I}'' = \mathrm{j}\frac{0.866}{\sqrt{2}}\ \mathrm{A}$$

故得

$$P = \left(\frac{0.866}{\sqrt{2}}\right)^2 (100)\ \mathrm{W} = 37.5\ \mathrm{W}$$

(2) u_{S1} 和 u_{S2} 频率不同,可用叠加原理计算平均功率。u_{S1} 单独作用时

$$P_1 = \frac{U_{s1}^2}{R} = \frac{(100/\sqrt{2})^2}{100}\ \mathrm{W} = 50\ \mathrm{W}$$

u_{S2} 单独作用时

$$P_2 = \frac{U_{s2}^2}{R} = \frac{50^2}{100}\ \mathrm{W} = 25\ \mathrm{W}$$

故得

$$P = P_1 + P_2 = 75\ \mathrm{W}$$

平均功率 P 是瞬时功率 p 在 $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{314}\ \mathrm{s} = \frac{1}{50}\ \mathrm{s}$ 期间的平均值。

(3) u_{S2} 和 u_{S1} 的频率不同,其比值 $\frac{471}{314} = 1.5$ 为有理数,u_{S1} 单独作用时

$$P_1 = \frac{(100/\sqrt{2})^2}{100}\ \text{W} = 50\ \text{W}$$

u_{S2}单独作用时

$$P_2 = \frac{(50/\sqrt{2})^2}{100}\ \text{W} = 12.5\ \text{W}$$

故得

$$P = P_1 + P_2 = 62.5\ \text{W}$$

平均功率 P 是瞬时功率 p 在 $2T_1$（或 $3T_2$）期间，即$\frac{1}{25}$ s 期间的平均值。

例 10－8　单口网络端口电压，电流分别为

$$u(t) = [100 + 100\cos t + 50\cos(2t) + 30\cos(3t)]\ \text{V}$$

$$i(t) = [10\cos(t - 60°) + 2\cos(3t - 135°)]\ \text{A}$$

$u(t)$与 $i(t)$为关联参考方向，试求单口网络吸收的功率。

解　在运用叠加原理计算平均功率时，每次只考虑一种频率成分的平均功率，如给定该频率的电压和电流（同频率的电压分量需合并，电流亦然），则由第九章(9－18)式可知，该项功率为 $UI\cos\varphi$，因此，在电压、电流都含多种频率成分时

$$\begin{aligned} P &= U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos(\psi_{u1} - \psi_{i1}) + U_2 I_2 \cos(\psi_{u2} - \psi_{i2}) + \cdots + \\ &\quad U_N I_N \cos(\psi_{uN} - \psi_{iN}) \\ &= P_0 + P_1 + P_2 + \cdots + P_N \end{aligned} \tag{10-31}$$

本题 $U_0 = 100$，$I_0 = 0$，因此 $P_0 = 0$。

$$\begin{aligned} P_1 &= U_1 I_1 \cos(\psi_{u1} - \psi_{i1}) \\ &= \left(\frac{100}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{10}{\sqrt{2}}\right)\cos 60°\ \text{W} \\ &= 250\ \text{W} \end{aligned}$$

本题 $U_2 = 50/\sqrt{2}$，$I_2 = 0$ 因此 $P_2 = 0$。

$$\begin{aligned} P_3 &= U_3 I_3 \cos(\psi_{u3} - \psi_{i3}) = \left(\frac{30}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)\cos 135° \\ &= -21.2\ \text{W} \end{aligned}$$

故得

$$P = P_1 + P_3 = (250 - 21.2)\ \text{W} = 228.8\ \text{W}$$

练习题

10－3　图 10－20 所示电路中，$R = 10\ \Omega$，求 P，若：

(1) $u_{S1}(t) = 10\cos(100t)$ V, $u_{S2}(t) = 20\cos(100t + 30°)$ V;

(2) $u_{S1}(t) = 20\cos(t + 25°)$ V, $u_{S2}(t) = 30\sin(5t - 50°)$ V。

(7.68 W;65 W)

10 - 4　求下列电流的有效值:

(1) $i(t) = [10\sin(\omega t) + 20\cos(\omega t + 30°)]$ A

(2) $i(t) = [10\sin(\omega t) + 20\cos(2\omega t + 10°)]$ A

(3) $i(t) = 15[1 + \cos(314t)]$ A

(12.25 A;15.81 A;18.37 A)

10 - 5　施加于单口网络的电压 $u_{ab}(t) = [100 + 100\cos(\omega t) + 30\cos(3\omega t)]$ V;流入 a 端的电流 $i(t) = [50\cos(\omega t - 45°) + 10\sin(3\omega t - 60°) + 20\cos(5\omega t)]$ A。求:(1) u_{ab} 的有效值;(2) i_{ab} 的有效值;(3) 平均功率 P。

(124.3 V;38.7 A;1637.8 W)

§10 - 6　*RLC* 电路的谐振

含有两种不同储能性质元件的电路,在某一频率的正弦激励下,可以产生一种重要的现象——谐振(resonance)。先请看一例。

图 10 - 21 所示为一 *RLC* 串联电路及其相量模型,$u_S = 10\sqrt{2}\cos(2\,000t)$ V。由相量模型可算得

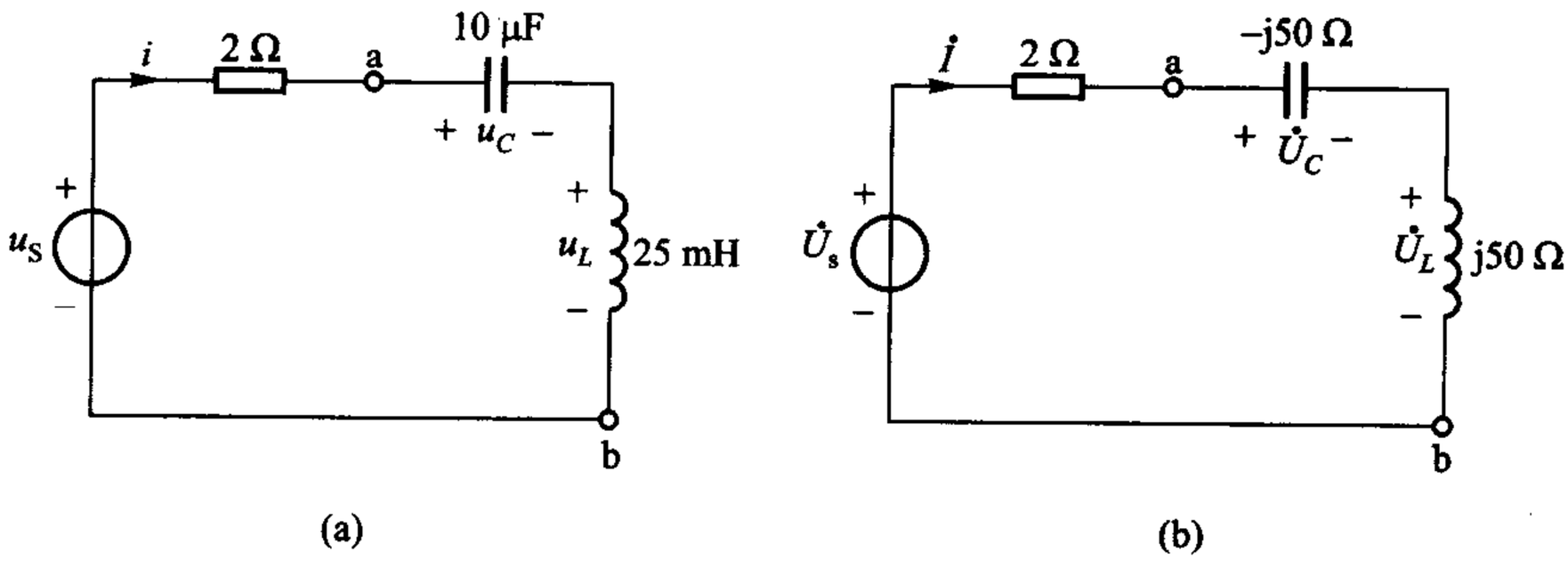


图 10 - 21　*RLC* 串联谐振电路

$$Z = (2 - \mathrm{j}50 + \mathrm{j}50)\ \Omega = 2\angle 0°\ \Omega$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_s}{Z} = \frac{10\angle 0°}{2\angle 0°}\ \mathrm{A} = 5\angle 0°\ \mathrm{A}$$

$$\dot{U}_C = \dot{I}\ (-\mathrm{j}50) = -\mathrm{j}250\ \mathrm{V} = 250\angle -90°\ \mathrm{V}$$

$$\dot{U}_L = \dot{I}\ (\mathrm{j}50) = \mathrm{j}250\ \mathrm{V} = 250\angle 90°\ \mathrm{V}$$

$$\dot{U}_{ab} = \dot{U}_C + \dot{U}_L = 0 \text{ V}$$

对应的时间函数为

$$i = 5\sqrt{2}\cos(2\,000t) \text{ A}$$

$$u_C = 250\sqrt{2}\cos(2\,000t - 90°) \text{ V} = 250\sqrt{2}\sin(2\,000t) \text{ V}$$

$$u_L = 250\sqrt{2}\cos(2\,000t + 90°) \text{ V} = -250\sqrt{2}\sin(2\,000t) \text{ V}$$

$$u_{ab} = 0 \text{ V}$$

从以上结果不难发现：

（1）该电路虽有电容与电感，但当正弦激励的频率为 2 000 rad/s 时，整个电路却表现如一个纯电阻电路。此时，阻抗值 $|Z|$ 为最小，在给定电压下，电流为最大。

（2）电容和电感电压的有效值均为 250 V，为外施电压有效值 10 V 的 25 倍！局部电压远高于外施电压。但 u_C 与 u_L 反相，互相抵消。

这是一个 *RLC* 串联谐振电路的例子。对含有电容和电感的正弦交流电路，当输入阻抗为纯电阻，亦即输入电压、电流同相时，称该电路处于谐振状态。串联电路谐振时可能伴有电容和电感的超高电压。对给定的 *RLC* 串联电路只有在正弦激励为某一特定频率时，电路才能处于谐振状态，这一特定频率称为谐振频率，以 Hz 为单位时，记为 f_0，以 rad/s 为单位时，记为 ω_0。

由 *RLC* 串联电路的输入阻抗

$$Z(\mathrm{j}\omega) = R + \mathrm{j}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \tag{10-32}$$

可知，若

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \tag{10-33}$$

则输入阻抗的虚部为零。满足(10-33)式的 ω 值记为 ω_0，即

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{10-34}$$

也就是说，在这一频率时

$$Z(\mathrm{j}\omega_0) = R \tag{10-35}$$

ω_0 即为上面所说的谐振频率。

由(10-32)式可知

$$|Z(\mathrm{j}\omega)| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \tag{10-36}$$

由此可绘出输入阻抗的幅频特性如图 10－22 所示，$\omega L-\dfrac{1}{\omega C}$随 ω 变化的情况则用虚线绘在同一图中。由图中可见，当 $\omega=\omega_0$ 时，$|Z|=R$ 达到最小值，而在 ω 大于或小于 ω_0 时，$|Z|$均呈增大趋势，但 $\omega<\omega_0$ 时，容抗占优势，电路将呈现电容性；$\omega>\omega_0$ 时，感抗占优势，电路将呈现电感性。这一现象也可用图 10－23 所示相量图表示，图中外施电压的有效值为 U。

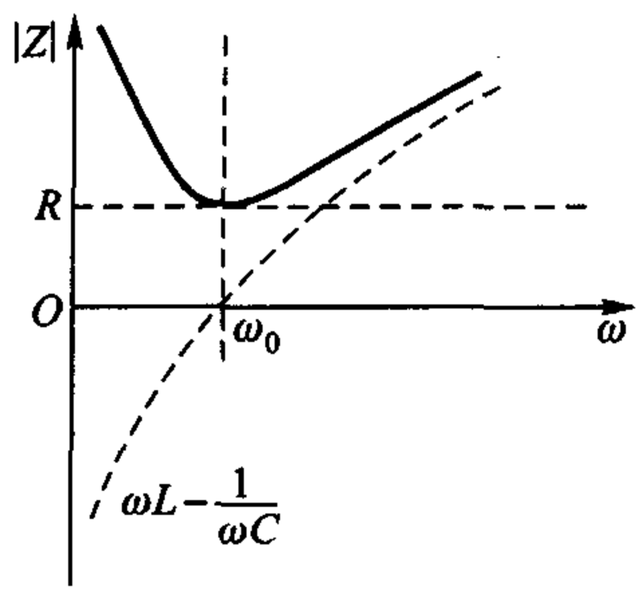


图 10－22　*RLC* 串联电路输入阻抗幅频特性曲线

如果把谐振时动态元件的电压与激励电压之比用 Q 表示，以 I_0 表示谐振电流，则有

$$\frac{U_L}{U}=\frac{I_0\omega_0 L}{I_0 R}=\frac{\omega_0 L}{R}=Q$$

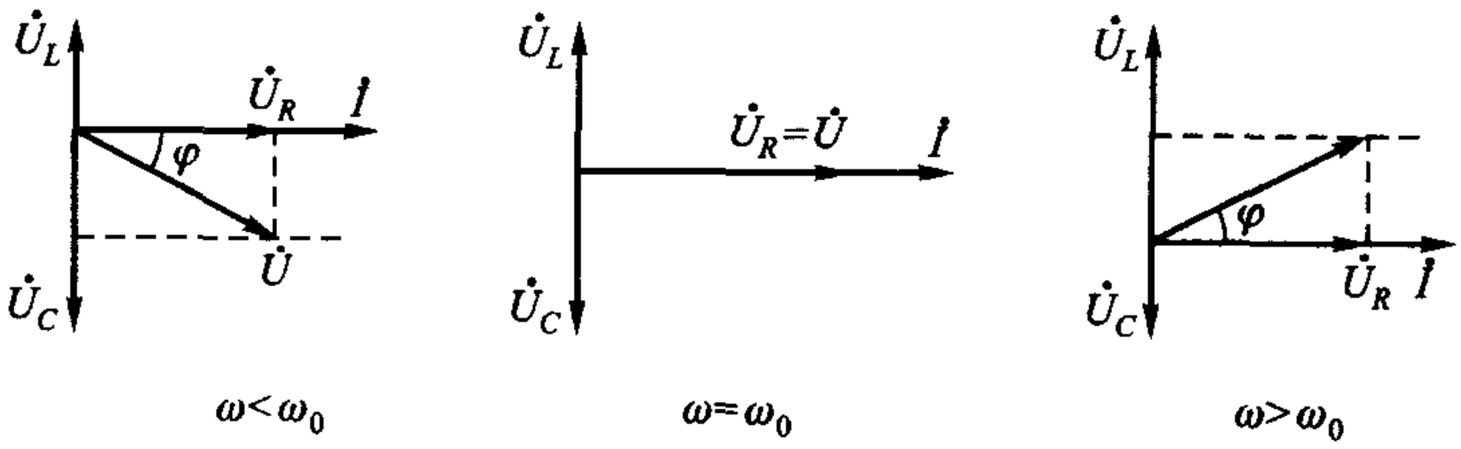


图 10－23　*RLC* 串联电路的相量图

$$\frac{U_C}{U}=\frac{I_0/\omega_0 C}{I_0 R}=\frac{1}{\omega_0 RC}=\frac{\omega_0 L}{R}=Q$$

在谐振时，电容和电感两端电压相等，且为电源电压的 Q 倍。Q 称为 *RLC* 串联电路的品质因数，常定义为

$$Q=\frac{\omega_0 L}{R} \tag{10-37}$$

由于谐振时电抗常比电路中的电阻大得多，Q 值一般在几十到几百之间。对一定的 ω_0 来说，电阻越小，品质因数越高。

谐振电路的输出电压可以取自电阻、电容或电感。取自电阻时，电压随频率变化的情况与电流随频率变化的情况相似。以图 10－21 所示电路为例并结合图 10－22 所示的输入阻抗幅频特性，不难得出图 10－24 的电流幅频特性，即谐振曲线，图中显示了 $R=2\ \Omega$，即 $Q=25$ 时和 $R=0.5\ \Omega$、即 $Q=100$ 时的两条曲线。两相比较，Q 较大时，曲线较为尖锐。这是因为：当 L、C 为定值而 R 较小

时，R 在阻抗中居弱势，电流随频率而变就较为明显。这样就能较好地选择某一频率而排除其他频率成分，这种性质称为电路的选择性(selectivity)。Q 值越高，选择性越强。收音机就是利用 RLC 电路的这一性质，选择需要收听的电台。但选择性并非越高越好，还需考虑通频带 BW 这一技术指标。单一频率的正弦波并不能携带信息。谐振电路必须具有足够宽的通频带，对收音机，通频带宽其音质就好，因为它能将低音到高音都逼真地放送出来。通频带的概念已在 §10-3 的例 10-3 中作过介绍，当时规定低通电路从 0 至半功率点频率为其通频带。RLC 电路具有带通(band pass)的性质，其通频带也是由半功率点频率规定的，半功率点频率为电流下降至谐振电流 I_0 的 $1/\sqrt{2}$ 时的频率，如图 10-25 所示。显然，存在两个半功率点频率 ω_2 和 ω_1，可分别称为上、下半功率点频率，而通频带

$$BW = \omega_2 - \omega_1 \tag{10-38}$$

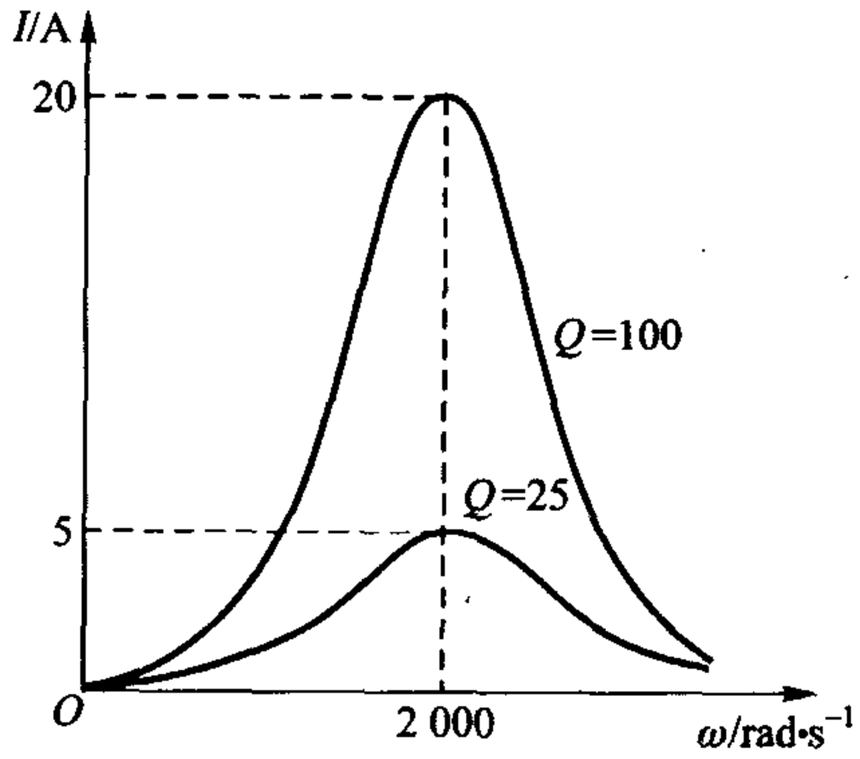


图 10-24　谐振曲线

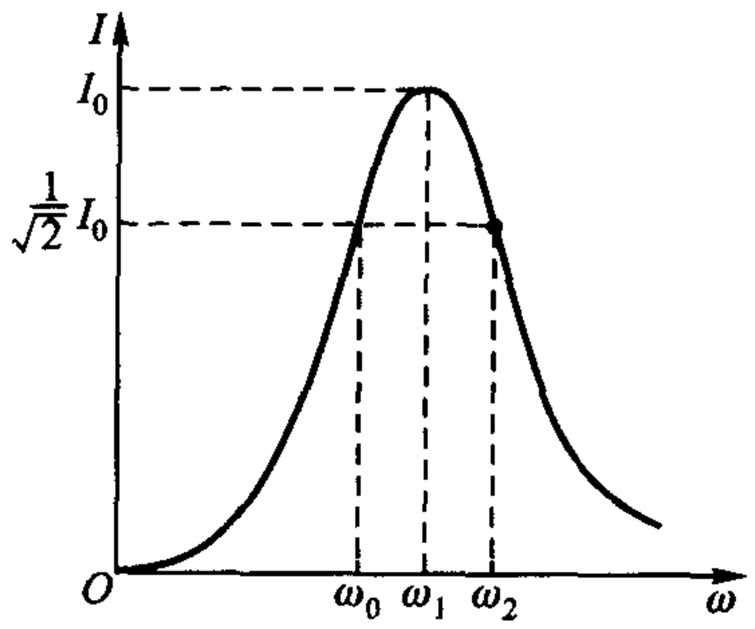


图 10-25　RLC 电路的通频带

我们也许已感到了品质因数越高(选择性越强)通频带越窄这一情况，但随后将证明这一事实。

就电容电压、电感电压来说，谐振时虽然可以出现越高电压，但都并非它们的最高电压，前者的最高电压出现在谐振频率之前，而后者则在谐振频率之后。图 10-21 所示电路的各响应随 ω 变化的曲线如图 10-26 所示。以 U_L 为例来说，谐振频率时电流达到最大，频率增加电流虽然下降，但感抗 ωL 却是增长的，因而 U_L 的最大值是可以发生在谐振频率之后的。类似地，也可理解何以 U_C 的最大值发生在谐振频率之前。

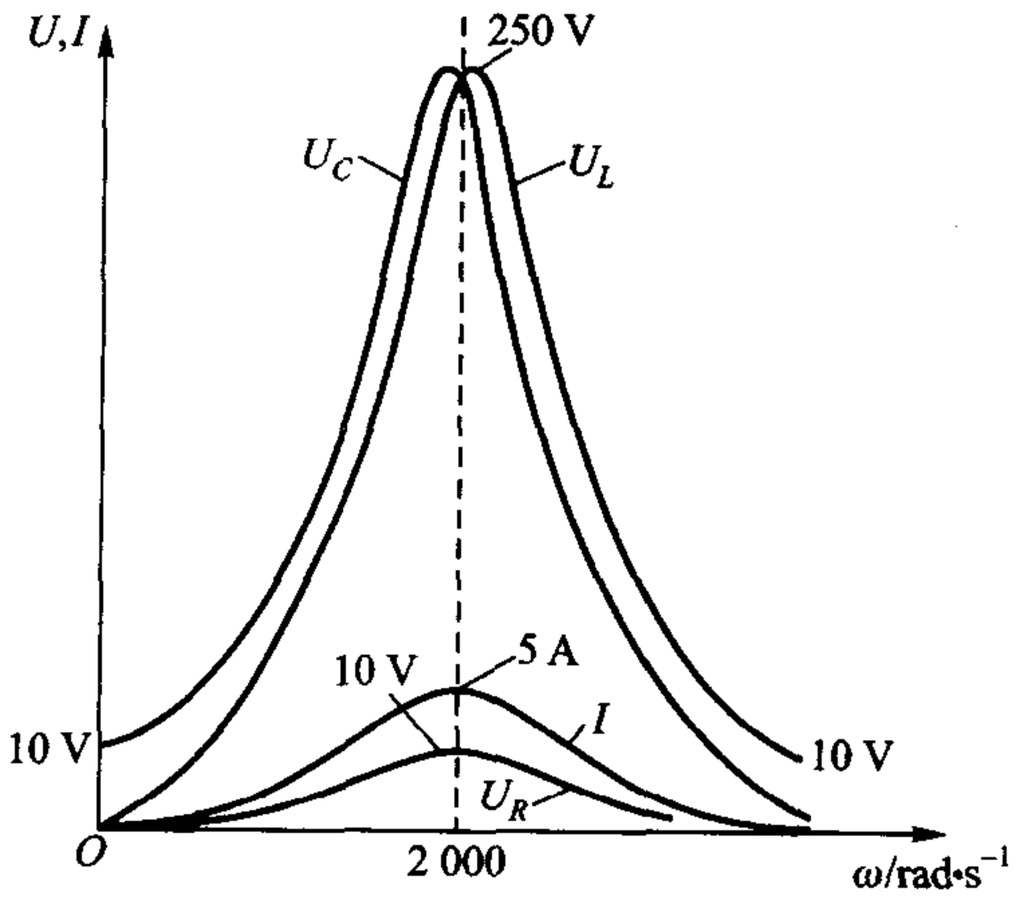


图 10－26　图 10－21 所示电路各电流、电压的幅频曲线

例 10－9　已知 *RLC* 串联电路中 $R=100\ \Omega, L=1\ \text{H}, C=1\ \mu\text{F}$，求在外施电压 $100\sqrt{2}\cos(1\ 003t)\ \text{V}$ 作用下，$\omega=\omega_0$ 和 $\omega=1\ 003\ \text{rad/s}$ 时的电感电压。

解　该电路的谐振频率

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}=1\ 000\ \text{rad/s}$$

当 $\omega=1\ 003\ \text{rad/s}$ 时

$$U_L=\frac{|\text{j}1\ 003|}{\left|100+\text{j}1\ 003-\text{j}\dfrac{10^6}{1\ 003}\right|}\times 100\ \text{V}$$

$$=\frac{|\text{j}1\ 003|}{|100+\text{j}5.99|}\times 100\ \text{V}=\frac{10\ 030}{100.18}\ \text{V}=1\ 001.2\ \text{V}$$

谐振时若外施电压仍为 100 V，则此时的 U_L 应为 $100Q$，而 $Q=\omega_0 L/R=10$，故 $U_L=1\ 000\ \text{V}$。由此可见，所求电感电压仅略高于谐振时的 1 000 V，实用上常忽略这一差别，认为谐振时 U_L 最大。　◀

下面来推导品质因数 *Q* 和通频带 *BW* 的关系。

谐振时电流为

$$I_0=\frac{U_s}{R}$$

其他情况时电流为

$$I=\frac{U_s}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

根据半功率频率的定义，由以上两式可得出频率为 ω_1、ω_2 时的关系式，即

$$\frac{I}{I_0}=\frac{R}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}} \tag{10-39}$$

由此可得

$$\omega L-\frac{1}{\omega C}=\pm R$$

$$\omega^2\mp\frac{R}{L}\omega-\frac{1}{LC}=0$$

解得

$$\omega=\pm\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2+\frac{1}{LC}}$$

由于 ω 必须为正值，故得上、下半功率点频率

$$\omega_2=\frac{R}{2L}+\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2+\frac{1}{LC}} \tag{10-40a}$$

$$\omega_1=-\frac{R}{2L}+\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2+\frac{1}{LC}} \tag{10-40b}$$

因此由(10－38)式可得

$$BW=\omega_2-\omega_1=\frac{R}{L} \tag{10-41}$$

亦即通频带的宽度与电路参数 R、L 有关。根据(10－37)式可得品质因数 Q 与通频带的关系为

$$Q=\frac{\omega_0}{BW} \tag{10-42}$$

综合有关公式可得

$$BW=\omega_2-\omega_1=\frac{\omega_0}{Q}=\frac{R}{L} \tag{10-43}$$

这一重要公式表明：对一定的 ω_0 来说，品质因数越高，通频带越窄。

若把(10－40a)、(10－40b)两式相乘，由(10－34)式可得

$$\omega_0=\sqrt{\omega_1\omega_2} \tag{10-44}$$

例 10－10　设计一 *RLC* 串联电路，谐振频率为 10^4 Hz，通频带为 100 Hz。串联电阻及负载电阻为 10 Ω 及 15 Ω。通频带起止频率是多少？

解　电路总电阻为(10＋15) Ω＝25 Ω。

$$Q=\frac{\omega_0}{\omega_2-\omega_1}=\frac{f_0}{f_2-f_1}=\frac{10^4}{100}=10^2$$

所需电感

$$L=\frac{QR}{\omega_0}=39.8\ \text{mH}$$

所需电容

$$C=\frac{1}{\omega_0 RQ}=6\ 360\ \text{pF}$$

由(10－40a)、(10－40b)两式可得以频率 f 和品质因数 Q 表示的上、下半功率点频率(以 Hz 计)的公式为

$$f_1=f_0\left(-\frac{1}{2Q}+\sqrt{\frac{1}{4Q^2}+1}\right)$$

$$f_2=f_0\left(\frac{1}{2Q}+\sqrt{\frac{1}{4Q^2}+1}\right)$$

当 Q 值较高时，$\frac{1}{4Q^2}<<1$，故得

$$f_1\approx f_0\left(-\frac{1}{2Q}+1\right)=9\ 950\ \text{Hz}$$

$$f_2\approx f_0\left(\frac{1}{2Q}+1\right)=10\ 050\ \text{Hz}$$

通频带为 9 950 Hz 至 10 050 Hz。◀

在电子技术中也常用到如图 10－27 所示 GLC 并联电路，外施正弦电流源为 i，输出为电导电流 i_G。由相量模型可得电路的输入导纳

$$Y(\mathrm{j}\omega)=G+\mathrm{j}\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)$$

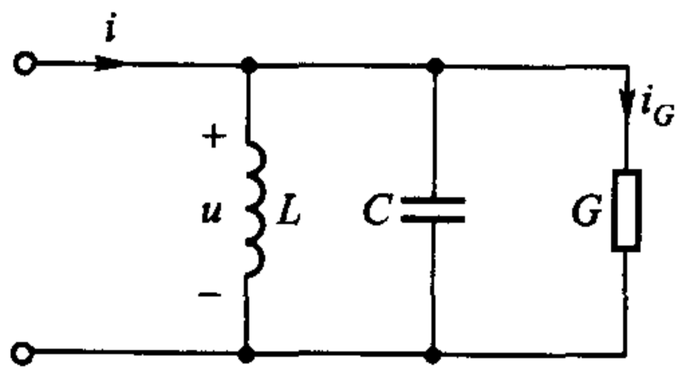


图 10－27　GLC 并联谐振电路

由此可知，若

$$\omega C=\frac{1}{\omega L}\qquad(10-45)$$

则输入导纳的虚部为零。满足(10－45)式的 ω 值记为 ω_0，即

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}\qquad(10-46)$$

时，Y 的虚部为零，此时 $Y=G$，$\dot{I}$ 与 $\dot{I}_G$ 同相，亦即 $\dot{I}$ 与 $\dot{U}$ 同相。电路发生谐振。此时电感电流与电容电流反相，互相抵消。它们均可能远高于外施电流，出现超高电流。根据对偶关系，电路的品质因数则为

$$Q=\frac{\omega_0 C}{G}=\frac{1}{\omega_0 LG}\qquad(10-47)$$

Q 与电导成反比。因而对一定的 ω_0 来说，电导越小，通频带越窄。通频带为

$$BW = \frac{G}{C} = \frac{\omega_0}{Q} \tag{10-48}$$

半功率点频率的计算公式仍如(10－40a)、(10－40b)两式所示。

由对偶关系也可知：当频率低于 ω_0 时，电路呈现电感性，$\dot{I}$ 滞后 $\dot{I}_C$，即 $\dot{I}$ 滞后 $\dot{U}$。当频率高于 ω_0 时，电路呈现电容性。

例 10－11　*GLC* 并联电路如图 10－27 所示，$G = \frac{1}{10}$ S，$L = 0.25$ mH，$C = 100$ μF，已知外施电流源电流有效值为 10 A，若电路处于谐振，试求各支路电流和电压的有效值。

解　谐振时外施电流全部流经电阻，产生电压 10×10 V $= 100$ V，此即所求电路电压。

电感电流、电容电流均为外施电流的 Q 倍，而 $Q = \frac{\omega_0 C}{G} = \left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)\left(\frac{C}{G}\right) = 20$，故得这两支路电流均为 20×10 A $= 200$ A。

例 10－12　*GLC* 并联电路也常用于收音机中。设立体声收音机调谐在 FM 波段 98 MHz，已知 $L = 0.1$ μH，$Q = 120$。(1) 试求 G 和 C；(2) 试求 98.1 MHz 信号电流产生的电压与谐振时的电压之比，设信号电流幅度不变。

解　(1) $$C = \frac{1}{\omega_0^2 L} = \frac{1}{(2\pi \times 98 \times 10^6)^2 (0.1 \times 10^{-6})} \text{ F} = 26.4 \text{ pF}$$

$$G = \frac{1}{\omega_0 L Q} = \frac{1}{(2\pi \times 98 \times 10^6)(10^{-7})(120)} \text{ S} = 135 \text{ μS}$$

(2) 谐振时，电压记为 $\dot{U}_0$，则

$$\dot{U}_0 = \frac{\dot{I}}{Y(j\omega)} = \frac{\dot{I}}{G} = \frac{1}{135 \times 10^{-6}}\dot{I} = 7\,407\ \dot{I}$$

$$U_0 = 7\,407 I$$

98.1 MHz 时

$$U = \frac{I}{\sqrt{G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}}$$

其中

$$G = 135 \times 10^{-6} \text{ S}$$

$$\omega C = (2\pi \times 98.1 \times 10^6)(26.4 \times 10^{-12}) \text{ S} = 16.27 \times 10^{-6} \text{ S}$$

$$\frac{1}{\omega L}=\frac{1}{(2\pi\times 98.1\times 10^{6})(10^{-7})}\ \mathrm{S}=1/61.64\ \mathrm{S}=16.22\times 10^{-6}\ \mathrm{S}$$

因此

$$U=\frac{I}{14.65\times 10^{-6}}=68I \qquad \frac{U}{U_0}=\frac{68}{7\,407}=0.009\,2$$

此时电压不及谐振时电压的 1%，反映出电路的频率选择性。

思考题

10－5　图 10－28 所示四个电路，(1) 当 $\omega=\omega_1=\dfrac{1}{\sqrt{LC_1}}$ 时，哪些电路相当于短路，哪些相当于开路？

(2) 有人认为在另一频率 ω_2 时，图 10－28(c)、(d)所示两电路相当于开路。是否可能？如有可能，ω_2 是大于还是小于 ω_1？

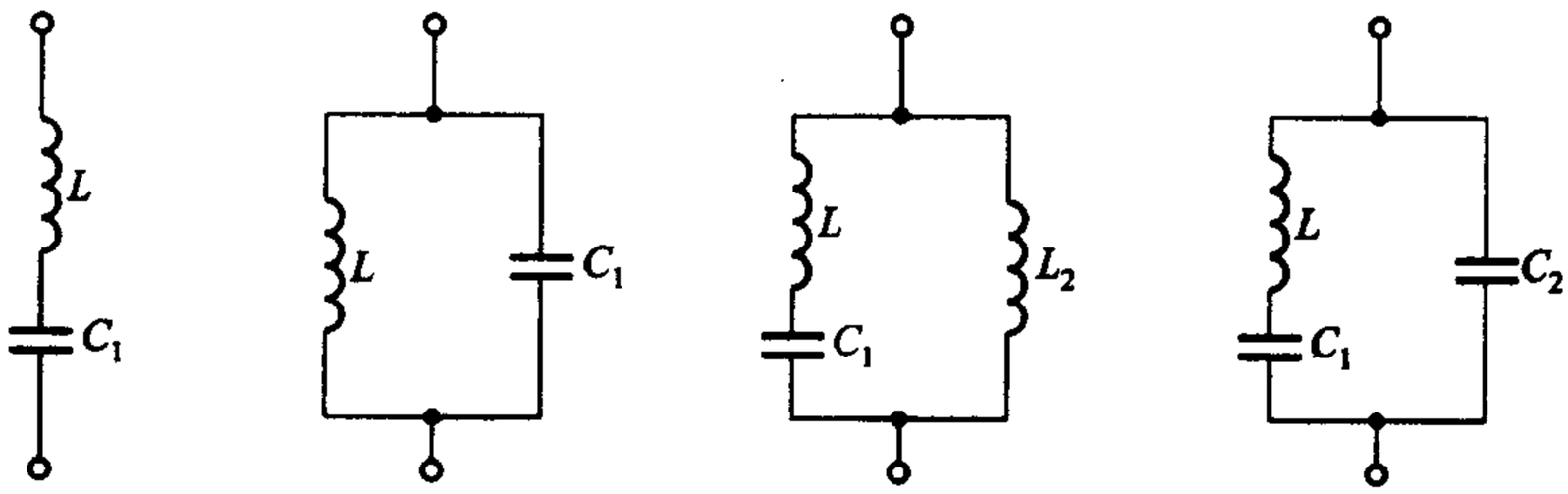


图 10－28　思考题 10－5

10－6　若 *RLC* 串联电路的输出电压取自电容，则该电路具有带通、高通、低通三种性质中的哪一种？

练习题

10－6　*RLC* 串联电路中 $R=10\ \Omega$，$L=0.2\ \mathrm{mH}$，$C=5\ \mathrm{nF}$，计算：(1) ω_0；(2) Q；(3) BW；(4) 电流为其谐振时电流的 80% 时的频率值。

(10^6 rad/s；20；$5+10^4$ rad/s；1.019×10^6 rad/s；0.981×10^6 rad/s)

10－7　*RLC* 并联电路的谐振频率为 10^7 rad/s，通频带为 10^5 rad/s，若 R 为 100 kΩ，计算：(1) Q；(2) L；(3) C；(4) 上、下半功率点频率

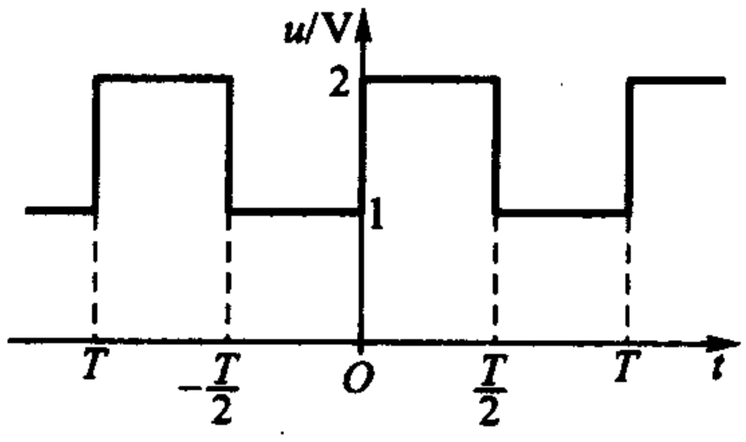
(100，100 μH，100 pF，9.95×10^6 rad/s，10.05×10^6 rad/s)



习题

§10－1　基本概念

10－1　如图题 10－1(a)所示方波电压的峰谷值为 20 V,周期为 2 πs。若滤去其三次谐波,试绘出波形图。问所得波形的峰谷值是多少?[非正弦周期波的峰值(最大值)与谷值(最小值)之差称为该周期波的“峰谷值”(peak-to-valley value),旧称“峰峰值”(peak-to-peak value)。]



图题 10－1

10－2　试写出图题 10－1 所示方波的傅里叶级数。(利用正文图 10－1(a)所示方波的傅里叶级数表示式。)

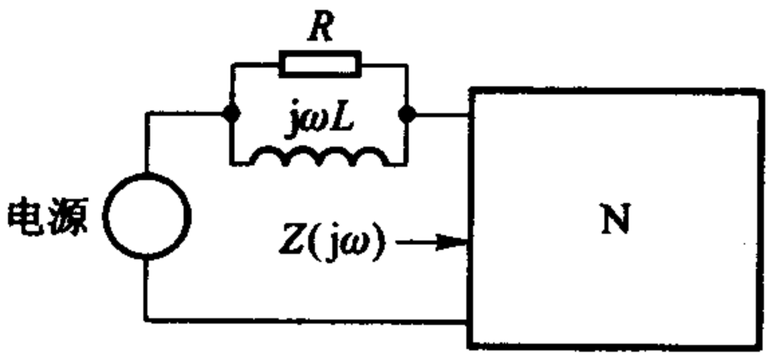
§10－2　再论阻抗和导纳

10－3　电路如图题 10－2 所示,已知网络 N 的输入阻抗

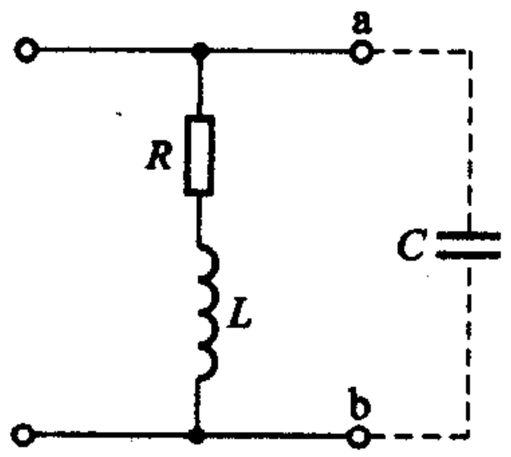
$$Z(j\omega)=\frac{j\omega[(j\omega)^2+4]}{(j\omega)^2+1}$$

(1) 当电流源 $i_S(t)=2\cos(2t)$ A 经过 RL 并联电路作用于网络 N 时,求 N 两端的电压。已知 $R=2\ \Omega$、$L=1$ H;(2) 当 RL 并联组合换以 1 Ω 的电阻,且电流源改为电压源 $u_S(t)=2\cos(2t)$ V 时,求流入网络 N 的电流。

10－4　电路如图题 10－3 所示,



图题 10－2



图题 10－3

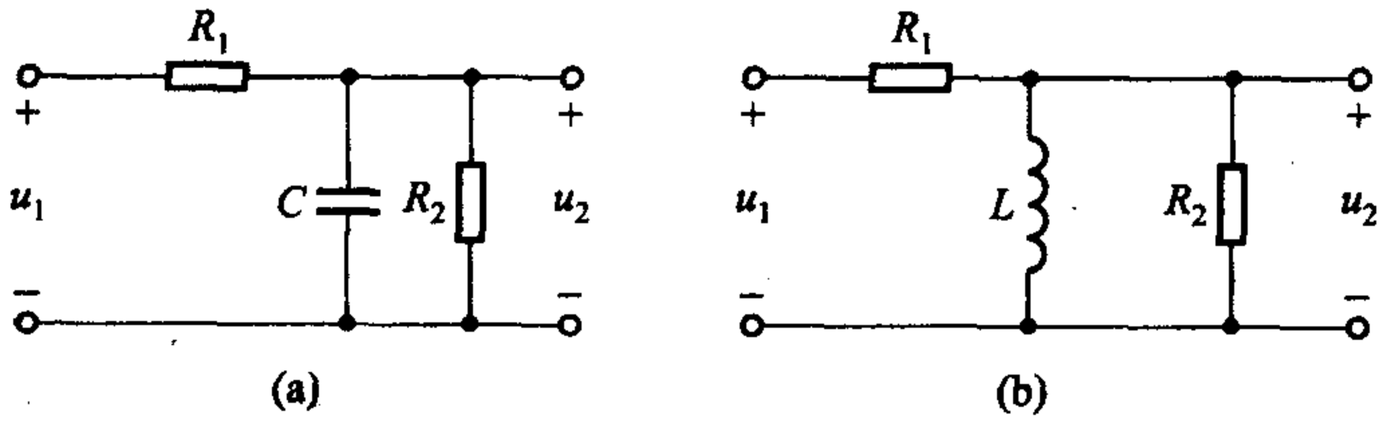
(1) 在 $\omega\neq0$ 时,是否存在能使 $Z(j\omega)$ 为实数的 R、L 值? a、b 端开路,C 未接入。

(2) 如果在 a、b 端接电容 C,求 $Z(j\omega)$;

(3) 使 $Z(j\omega)=\frac{L}{RC}$,频率应为多少?

§10-3　正弦稳态网络函数

10-5　你能总结出一阶低通电路和一阶高通电路电压转移函数 H_u 的一般形式吗？试求图题 10-4 所示两电路的 H_u，确定它们是低通还是高通，并绘频率响应草图。



图题 10-4

10-6　多级放大器常用图 10-10 所示电路来进行级间耦合。若 $C=10\ \mu F$、$R=1.5\ k\Omega$，求该电路的通频带是多少？若增大电容，对通频带有何影响？（在电子电路中 C 称为耦合电容。）

10-7　在图 10-10 所示 RC 电路中，若 $R=10\ k\Omega$，$C=0.01\ \mu F$，问输入电压 u_1 的频率应为多少，才能使输出电压 u_2 的相移恰好超前于输入电压 45°？如输入电压振幅为 1 V，求输出电压的振幅。

如果输入电压的频率 $f=600$ Hz，振幅为 1 V，问输出与输入的相位差是多少度？输出电压振幅是多少？

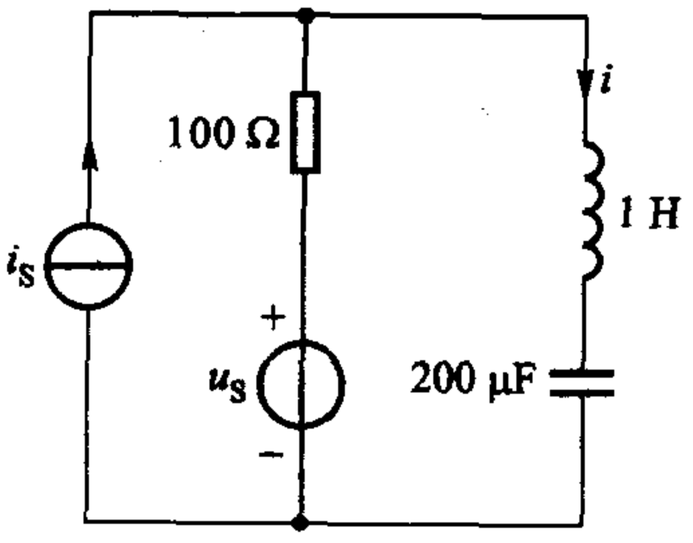
§10-4　正弦稳态的叠加

10-8　已知作用于 RLC 串联电路的电压为 $u(t)=[50\cos(\omega t)+25\cos(3\omega t+60°)]$ V，且已知基波频率时的输入阻抗为 $Z(j\omega)=R+j\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)=[8+j(2-8)]\ \Omega$。求电流 $i(t)$。

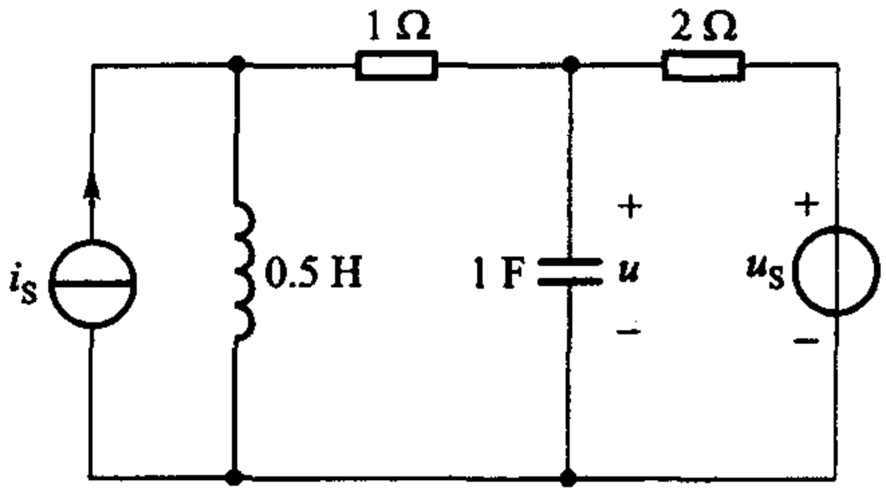
10-9　试用叠加原理求图题 10-5 所示电路中的电流 $i(t)$。已知 $i_S(t)=10\sin(100t)$ mA，$u_S(t)=5\cos(100t)$ V。

10-10　电路如图题 10-6 所示，已知 $i_S(t)=\sin t$ A，$u_S(t)=\cos(3t)$ V，试求 $u(t)$。

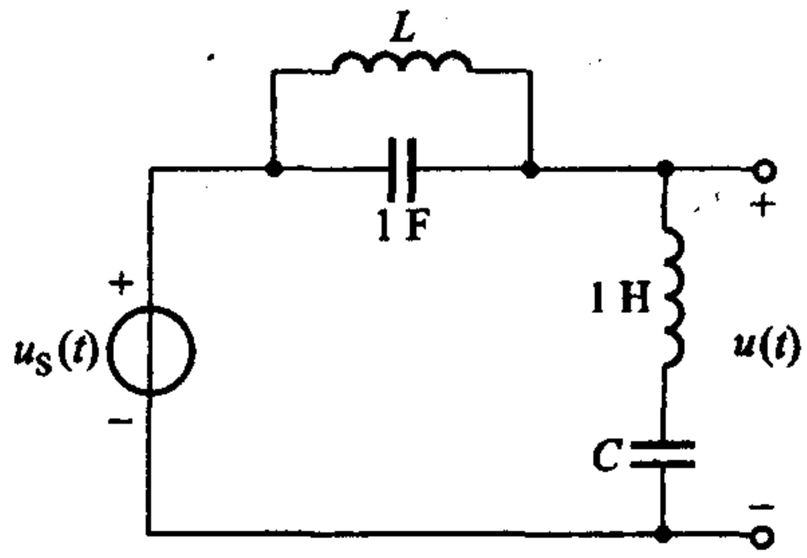
10-11　图题 10-7 所示电路的输入 $u_S(t)$ 为非正弦波，其中含有 $\omega=3$ rad/s 及 $\omega=7$ rad/s 的谐波分量。如果要求在输出电压 $u(t)$ 中不含这两个谐波分量，问 L 和 C 应为多少？



图题 10-5



图题 10－6



图题 10－7

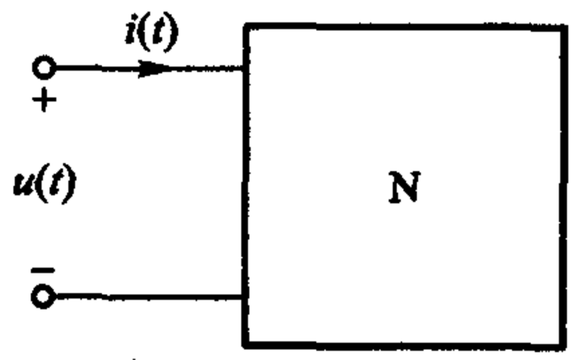
§10－5　平均功率的叠加

10－12　图题 10－8 所示单口网络 N 端口电压、电流为

$$u(t)=\left[\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(2t-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(3t-\frac{\pi}{3}\right)\right]\ \text{V}$$

$$i(t)=\left[5\cos t+2\cos\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)\right]\ \text{A}$$

求网络消耗的平均功率，电流、电压的有效值。



图题 10－8

10－13　施加于 15 Ω 电阻的电压为

$$u(t)=[100+22.4\cos(\omega t-45°)+4.11\cos(3\omega t-67°)]\ \text{V}$$

试求电压的有效值和电阻消耗的平均功率。

10－14　非正弦周期波的有效值也可以根据定义式(8－66)或(8－67)由波形来计算，试计算图 10－1 所示各周期波的有效值。

10－15　电路如图题 10－9 所示，已知

$$u_{S1}(t)=u_{S2}(t)=\cos t\ \text{V}$$

(1) 计算电路中的电流 $i(t)$；

(2) $i(t)$的有效值是多少？

(3) 计算电阻消耗的平均功率；

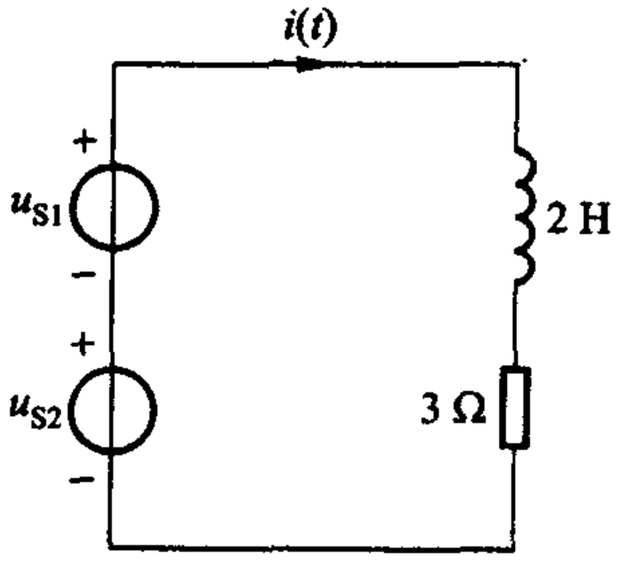
(4) 计算 $u_{S1}(t)$单独作用时电阻消耗的平均功率；

(5) 计算 $u_{S2}(t)$单独作用时电阻消耗的平均功率；

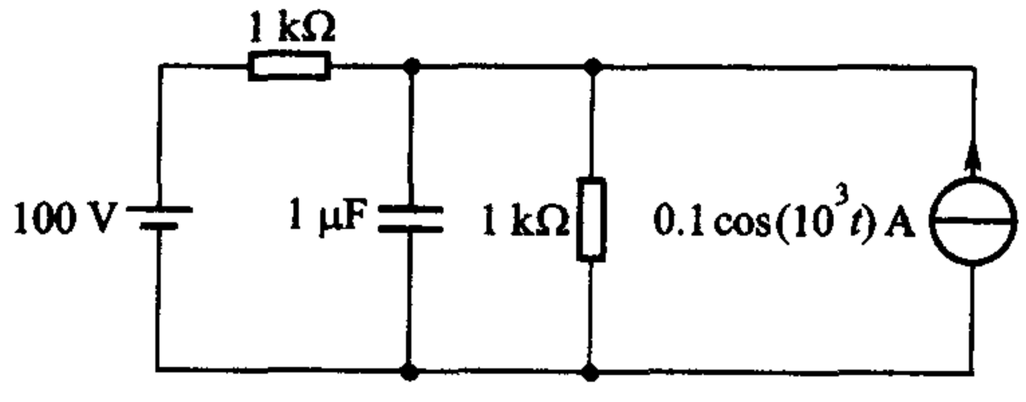
(6) 由(3)、(4)、(5)的计算结果，你能得出什么结论？

10－16　接续上题，当 $u_{S1}(t)=\cos t\ \text{V}$，$u_{S2}(t)=\cos(2t)\ \text{V}$ 时，重复求解各项，并讨论所得结果。

10－17　图题 10－10 所示电路，求其中每一电阻及电源吸收的平均功率。



图题 10－9



图题 10－10

§10－6　*RLC* 电路的谐振

10－18　*RLC* 串联电路的谐振频率为$\frac{1\,000}{2\pi}$ Hz，通频带为$\frac{100}{2\pi}$ Hz。谐振时阻抗为 100 Ω。求 R、L、C。

10－19　*RLC* 串联电路的谐振频率为 876 Hz，通频带为 750 Hz 到 1kHz，已知 $L=0.32$ H。

（1）求 R、C 及 Q；

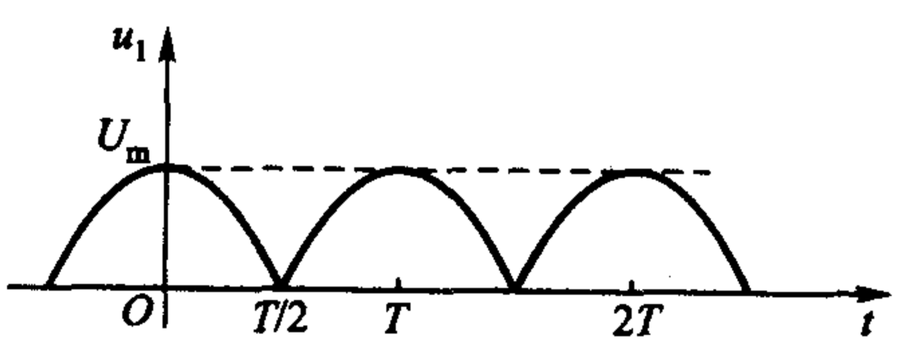
（2）若电源电压有效值 $U_1=23.2$ V，在各频率时保持不变，试求在 $\omega=\omega_0$ 以及在通频带两端的频率（即 750 Hz 及 1 kHz）处电路的平均功率；

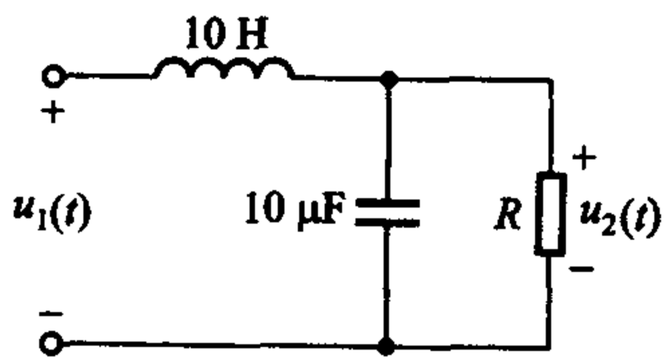
（3）试求在 $\omega=\omega_0$ 时电感及电容电压的有效值。

10－20　*RLC* 并联电路的谐振频率为$\frac{1\,000}{2\pi}$ Hz。谐振时阻抗为 10^5 Ω，通频带为$\frac{100}{2\pi}$ Hz。求 R、L、C。

综合

10－21　图题 10－11 所示为全波整流器的输出电压波形，与想得到的直流波形相距较远，为减少负载 R 所得电压中的纹波，使波形更接近直流，在整流器的输出端与负载间接入 *LC* 滤波器。已知整流器输出电压的波形为





图题 10－11

$$u_1(t) = \frac{2}{\pi}U_m\left[1 + \frac{2}{3}\cos(\omega t) - \frac{2}{15}\cos(2\omega t) + \frac{2}{35}\cos(3\omega t) - \cdots\right] \text{V}$$

其中 $\omega = 2 \times 314 \text{ rad/s} = 628 \text{ rad/s}$。已知 $R = 3 \text{ k}\Omega$，求输出波形 $u_2(t)$ 中的直流分量、基波及二次谐波，并计算基波分量、二次谐波分别对原有分量的百分比。

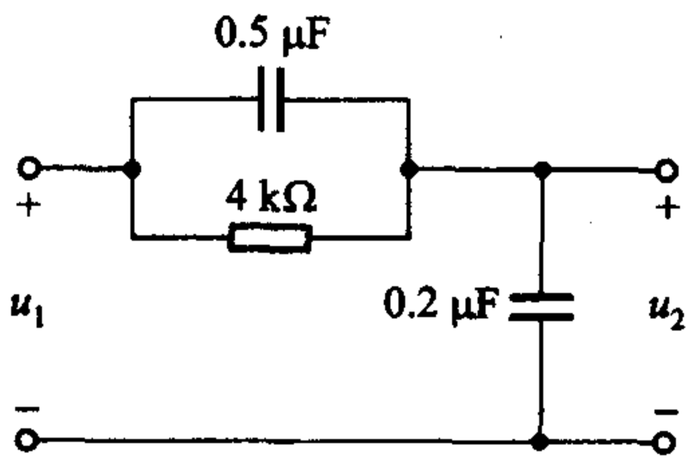
10－22　某非线性电阻的 VCR 为 $u = i^3$，由两电流源 $i_1(t) = I_{m1}\cos(\omega_1 t)$ 和 $i_2(t) = I_{m2}\cos(\omega_2 t)$ 并联供电，I_{m1}、I_{m2}、ω_1、ω_2 均为常数。试计算当两电流源分别作用和一起作用时的电压。据此说明：

（1）此电路是否可用叠加原理求解？

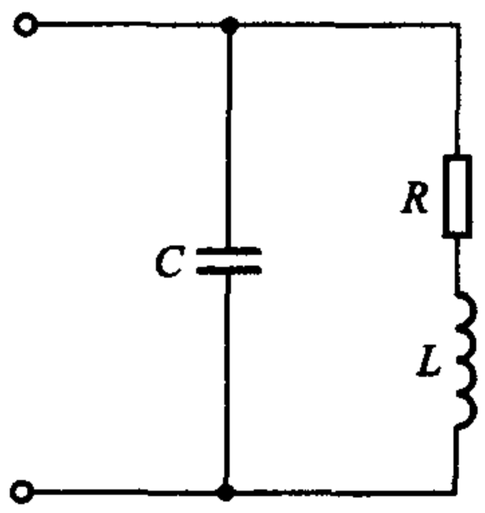
（2）输出电压中有哪些频率成分？

10－23　在电子仪器中，经过放大后的电压如在相位上比原来的电压超前而引起误差时，可以设法加以补偿。其办法是加一个滞后网络，使相位落后一些。图题 10－12 所示是一种滞后网络，求当 $f = 50 \text{ Hz}$ 时，输出对输入的相移是多少？

10－24　实际的并联谐振电路如图题 10－13 所示，R 为电感线圈的电阻。



图题 10－12



图题 10－13

（1）该电路的谐振频率是否仍为 $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$？试计算之。

（2）谐振时阻抗是否为 R？试计算之。

（3）并联电路两端电压的最大值是否出现在谐振时？试计算之。

第十一章

耦合电感和理想变压器

本章介绍两种电路元件——耦合电感和理想变压器，这是本书所要介绍的最后两种元件。它们和受控源同属耦合元件。耦合元件由一条以上的支路组成，其中一条支路的电压、电流与其他的支路电压、电流直接有关。与受控源不同，这两种元件涉及通过磁场的耦合。一对相耦合的电感，若流过其中一个电感的电流随时间变化，则在另一电感两端将出现感应电压，这两电感间可能并无导线相连。这便是电磁学中所称的互感现象。在直流电流电路中无此现象。

耦合电感(coupled inductor)元件是通过磁场相互约束的若干个电感的总称。互感不能单独存在，不能看成是一个电路元件。一对耦合电感是一个电路元件，其参数为两电感的自感 L_1、L_2(此前径称为电感)和互感 M。在包含三个耦合电感时，一般就需用自感 L_1、L_2、L_3 和互感 M_{12}、M_{23}、M_{31} 等六个参数来表征。本章还将介绍理想变压器。虽然在满足一定的条件后，耦合电感可以表现如同理想变压器。但是，这两种元件的性质是不同的，耦合电感是动态元件而理想变压器却属电阻元件；耦合电感是储能元件而理想变压器却既不储能也不耗能。理想变压器虽可利用电磁感应现象来近似实现，但从理论上、从目前实际情况上说，这并非是实现的唯一途径，因此本章是把它们作为两种不同的电路元件提出的。

§11-1 基本概念

含耦合电感的电路无非就是在自感电压的基础上多了一些互感电压，处理好后者，§8-7 所述类比方法，就可运用于包括含耦合电感的电路。

§5-6 曾经讨论过自感(当时径称为电感)的 VCR，这涉及三个物理量：电流、(自感)磁链和(自感)电压，特别是它们参考方向的规定。若电流与磁链的参考方向、电压与磁链的参考方向均符合右手螺旋法则，这就意味着电压与电流的参考方向一致，从而

$$u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \tag{11-1}$$

此公式已多次运用，谅必已十分熟悉，特别是使用时关于电流、电压参考方向须

一致的前提。

设一对耦合电感如图 11－1 所示，电感Ⅱ开路，图(a)与图(b)的差别仅为线圈的绕向不同。N_1、N_2 为电感线圈Ⅰ、Ⅱ的匝数。设电感Ⅰ的电流为 i_1，产生的自感磁通为 Φ_{11}，与电感Ⅱ相耦合的磁通为 Φ_{21}，当 Φ_{21} 随时间变化时，电感Ⅱ两端将产生互感电压 u_2，由于互感磁链源自 i_1，可表示为

$$\Psi_M = N_2\Phi_{21} = Mi_1 \tag{11-2}$$

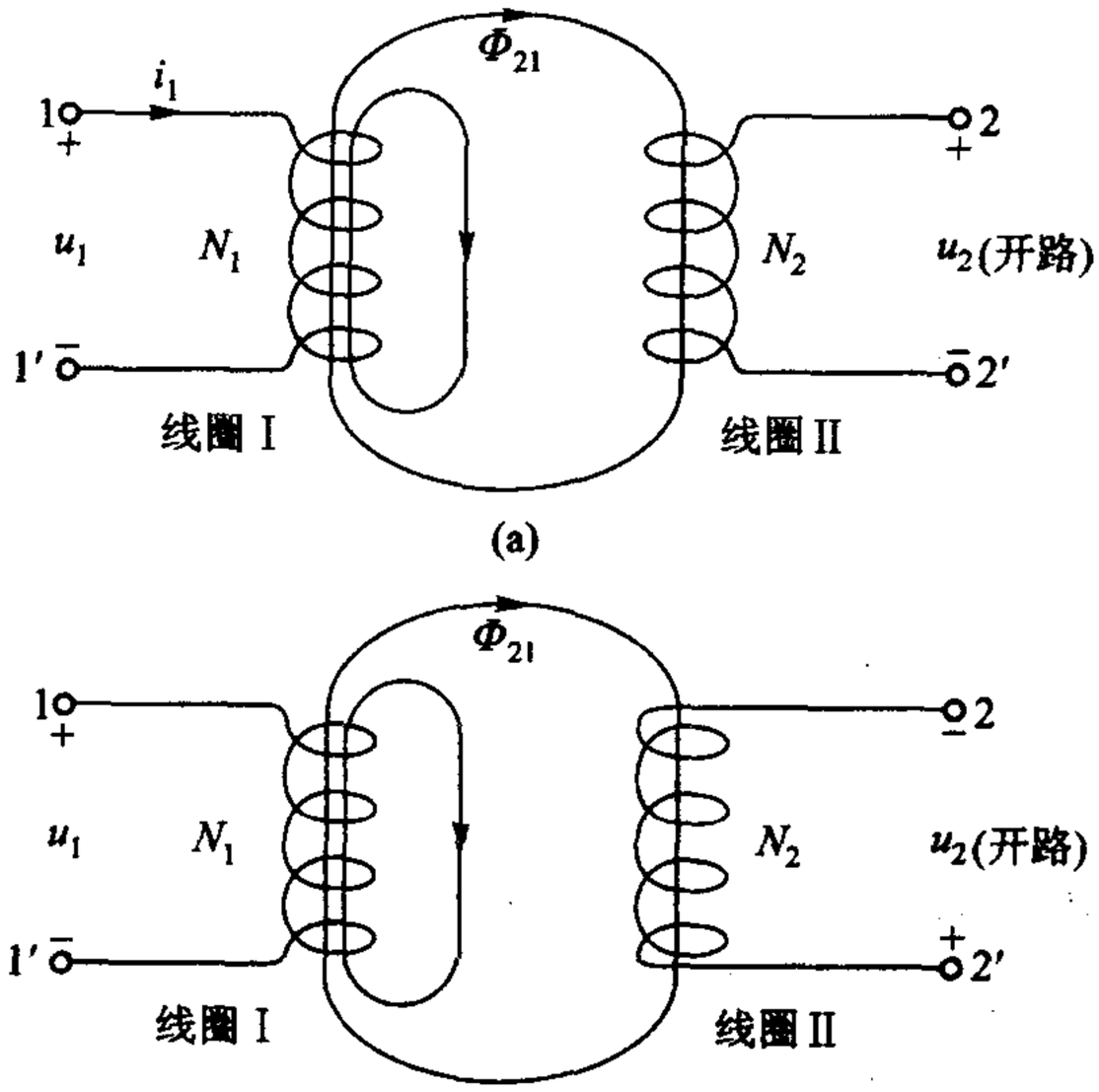


图 11－1　一对耦合电感，电感Ⅱ开路

亦即当线圈的媒质为非铁磁物质时，该互感磁链可表示为 Mi_1，M 为互感(系数)。由(5－16)式可得

$$u_2 = \frac{\mathrm{d}\Psi_M}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}N_2\Phi_{21}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}Mi_1}{\mathrm{d}t} = M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \tag{11-3}$$

如同 §5－6 中所述，使用该式，(互感)感应电压与磁链的参考方向必须符合右手螺旋法则，故图 11－1(a)和图 11－1(b)所设感应电压 u_2 的参考方向因线圈绕向不同而有图中所示的差别。这样看来，为了正确使用(11－2)式，必须如实绘出两电感线圈的绕线方向和相互位置。显然，这是十分不方便的。

电工技术中采用了一种约定的标志，可避免如实绘图。约定在产生互感电压的电流参考方向的流入端(例如图 11－1 的 1 端)标上“·”号，在互感电压参考方向的“+”号端也用“·”号标出，则图 11－1 所示的耦合电感电路模型可简

化如图 11 -2 所示。同标有“·”号的端钮称为同名端。当电流 i 与互感电压 u_M 的参考方向对同名端一致时,有

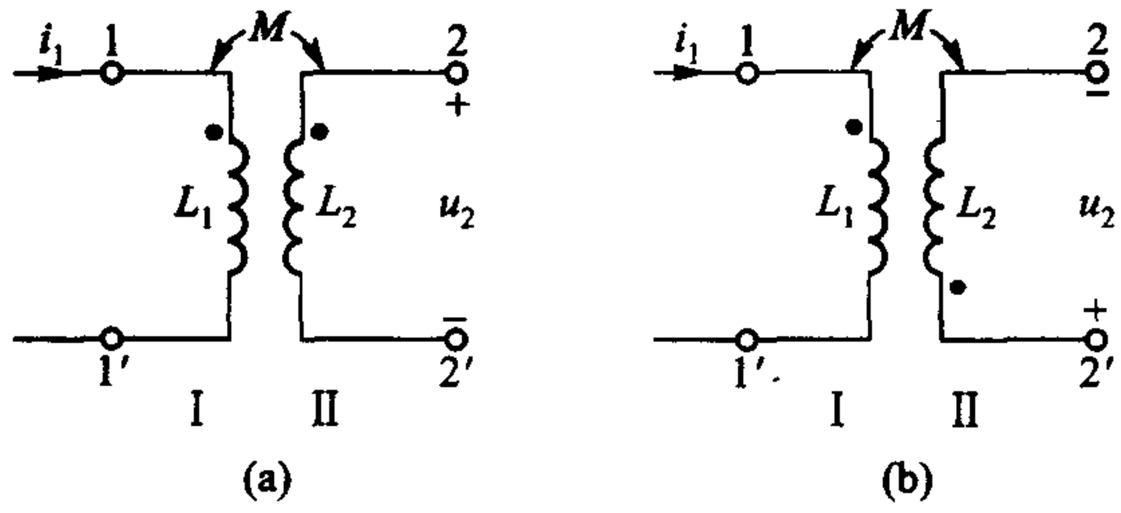


图 11 -2　采用同名端标志后图 11 -1 所示耦合电感的电路模型

$$u_M = M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \tag{11-4}$$

否则

$$u_M = -M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \tag{11-5}$$

这一规律普遍适用,不仅指图 11 -1 所示的例子而已。试在图 11 -1(a)中设电流由 2 端流入,1、1′端开路而设 1 端为互感电压的“ + ”号端,结合线圈的实际绕向,可以确定上述规律仍适用①。

成品的耦合电感线圈,其同名端是已知的,是由设计者、制作者确定的。同名端也可由实验方法确定、其装置如图 11 -3所示,虚线方框内为待测耦合电感线圈,把其中一个线圈通过开关 S 接到一个直流电源(如干电池),把一个直流电压表(或电流表)接到另一个线圈。开关 S 迅速闭合时,就有随时间增长的电流 i_1 流入线圈端钮 1,即 $\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}>0$。如果此时电压表指针正向偏转,由于电压表的正极连接在线圈端钮 2,这就表明端钮 2 为高电位端。由此可判定端钮 1 和端钮 2 是同名端。

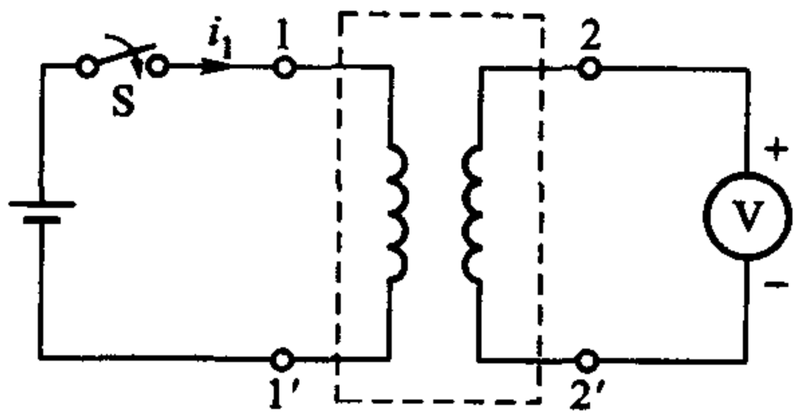


图 11 -3　同名端的实验确定法

综上所述,电路中的互感现象可用附加的电压源加以考虑,如图11 -4所

① 线圈 I 对线圈 II 的互感 M_{21} 和线圈 II 对线圈 I 的互感 M_{12} 是相等的,统一记为 M。详见任一本电磁学教材。

示。其中图(c)可用于相量模型,若电流用相量 $\dot{I}$ 表示,互感电压相量可表示为 $j\omega M\dot{I}$,与自感电压相量可表示为 $j\omega L\dot{I}$ 相似①。注意图 11-4(b)、(c)中已无必要标示同名端和参数 M,互感电压原系出现在 L_2 中,移出作为附加电压源要注意正确标出极性。经过这样的等效处理,含耦合电感的电路就可归结到第八章涉及的内容之中。采用附加电压源是本书处理含耦合电感电路的基本方法。

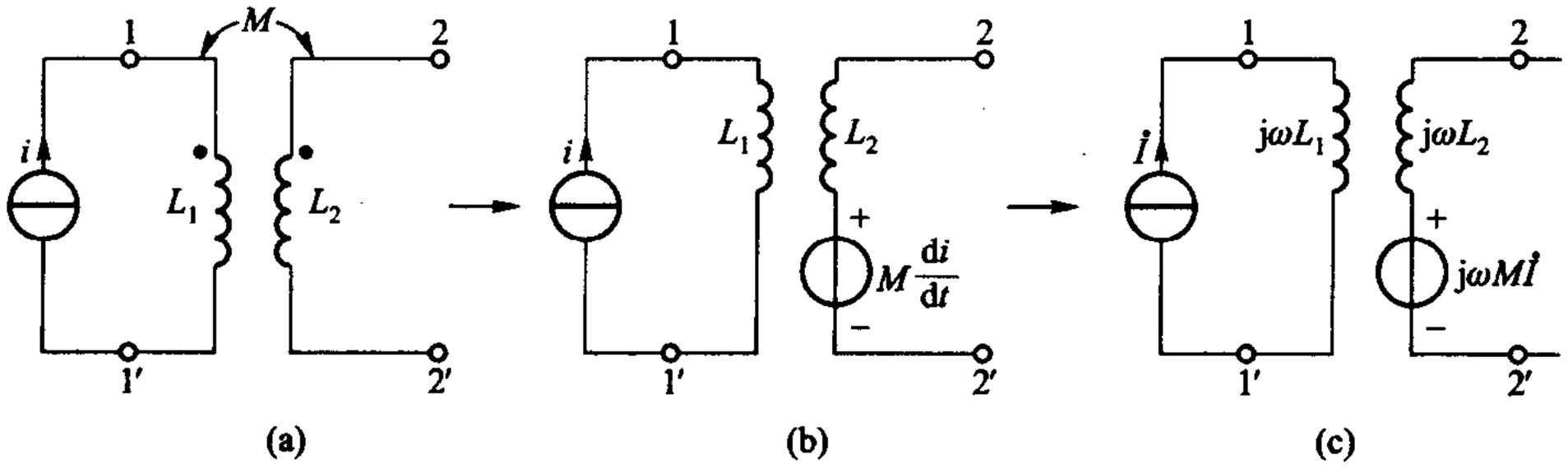


图 11-4　用附加电压源计及互感的影响

例 11-1　电路如图 11-5 所示,试确定开关打开瞬间,22′间电压的真实极性。

解　假定 i 及互感电压 u_M 的参考方向如图中所示,则根据同名端的含义可得

$$u_M = +M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

当 S 打开瞬间,正值电流减小,$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}<0$,故知 $u_M<0$,其极性与假设相反,亦即 2′为高电位端,2 为低电位端。

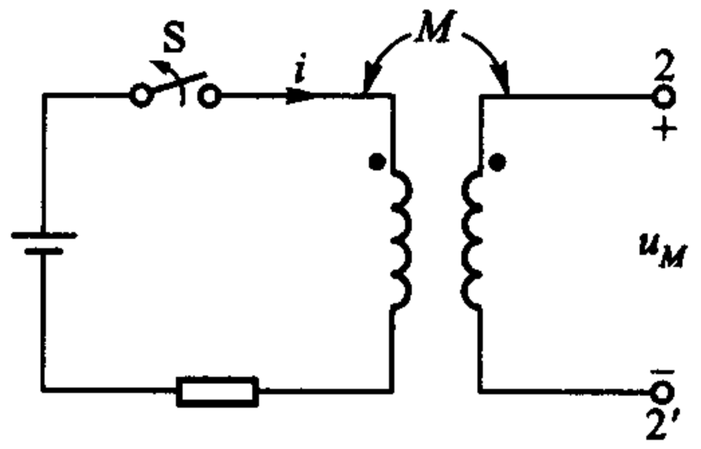


图 11-5　例 11-1



11-1　(1) 试确定图 11-6 所示耦合线圈的同名端。试设各种不同情况的电流参考方向,其结果是否相同?(2) 若在端钮 1 输入正弦电流 $i=10\sin t$ A,其参考方向指向端钮 1,已知互感 $M=0.01$ H,求 u_{34}。

(1、4 或 2、3; $-0.1\cos t$ V)

11-2　电路如图 11-7 所示,求开关 S 闭合瞬间,自感电压及互感电压的真实极性。

(下正;上正)

---

① 参阅(8-31)式。

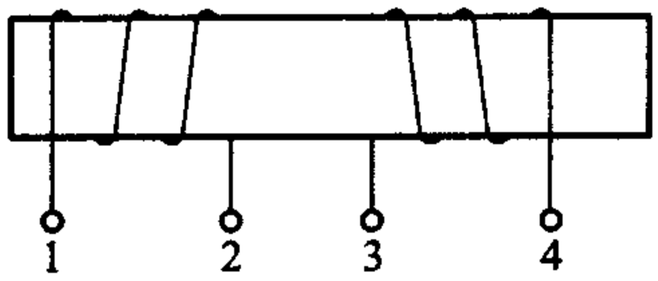


图 11－6　练习题 11－1

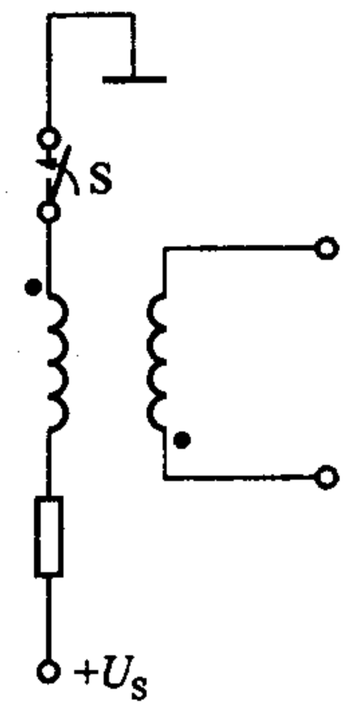
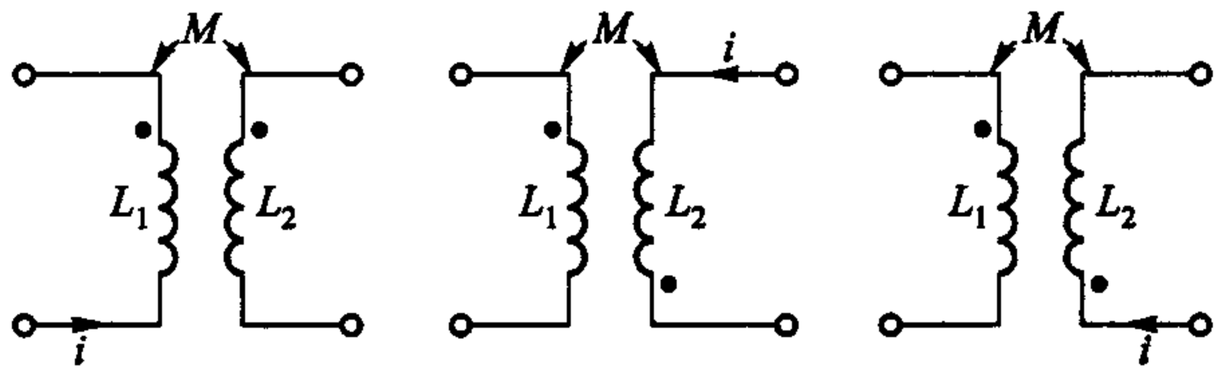


图 11－7　练习题 11－2

11－3　试为图 11－8(a)、(b)、(c)所示三耦合电感绘出类似图 11－4 所示的含互感附加电压源的等效电路。



(a)　　(b)　　(c)

图 11－8　练习题 11－3

§11－2　耦合电感的 VCR　耦合系数

设一对耦合电感如图 11－9(a)所示，其端口电流、电压及所设参考方向如图所示，已知的同名端亦示于图。可用附加电压源来计及互感电压。为方便计，可以先考虑 i_1 引起的互感电压 $M\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$，其对应的附加电压源如图 11－9(b)中所示。$i_2$ 引起的互感电压 $M\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$，如图 11－9(c)所示。因此，图 11－9(a)的等效电路应如图 11－9(d)所示，由该图不难得出

$$u_1 = L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \tag{11-6}$$

$$u_2 = L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \tag{11-7}$$

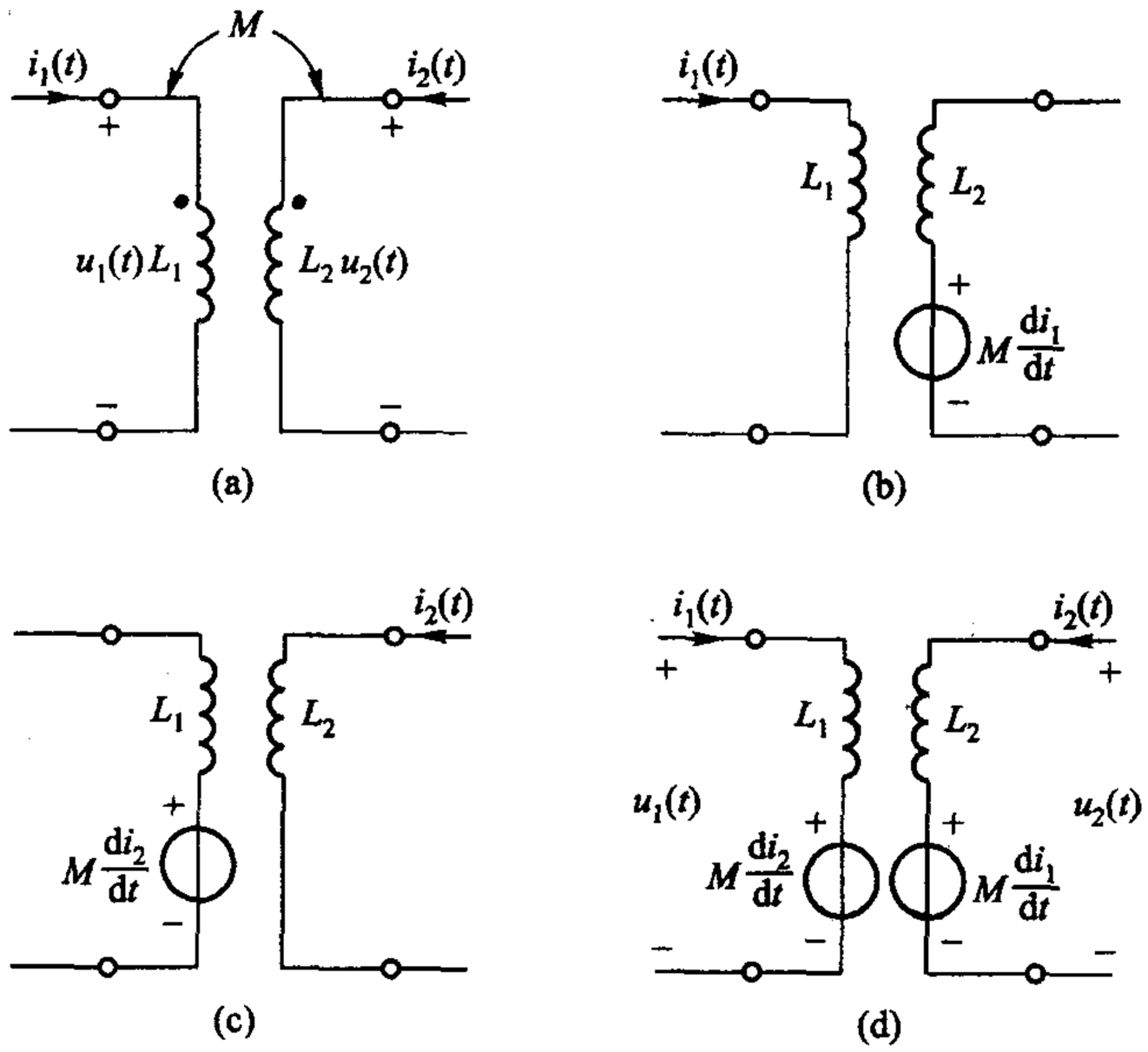


图 11－9　一对耦合电感及其等效电路

此即为图 11－9(a)所示耦合电感的 VCR。正弦稳态的 VCR 相量形式为

$$\dot{U}_1 = j\omega L_1\ \dot{I}_1 + j\omega M\ \dot{I}_2 \qquad (11-8)$$

$$\dot{U}_2 = j\omega L_2\ \dot{I}_2 + j\omega M\ \dot{I}_1 \qquad (11-9)$$

如同名端的位置与图 11－9 所示不同，如图 11－10 所示，(这可能是由于 L_2 绕线方向不同的缘故)。若电流、电压参考方向不变，则可得

$$u_1 = L_1\frac{di_1}{dt} - M\frac{di_2}{dt} \qquad (11-10)$$

$$u_2 = L_2\frac{di_2}{dt} - M\frac{di_1}{dt} \qquad (11-11)$$

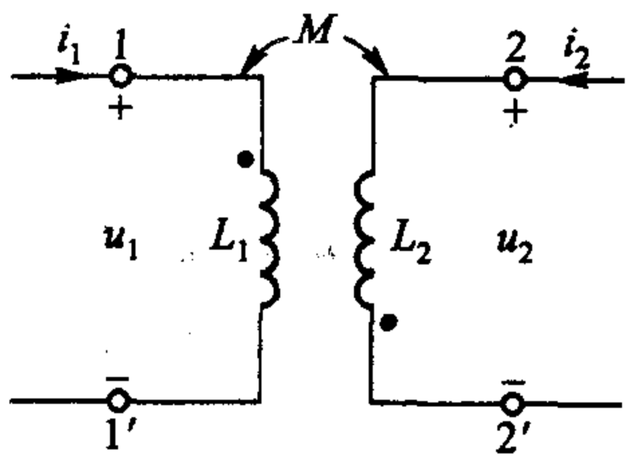


图 11－10　同名端不同的另一对耦合电感

正弦稳态的 VCR 相量形式为

$$\dot{U}_1 = j\omega L_1\ \dot{I}_1 - j\omega M\ \dot{I}_2 \qquad (11-12)$$

$$\dot{U}_2 = j\omega L_2\ \dot{I}_2 - j\omega M\ \dot{I}_1 \qquad (11-13)$$

不难理解(11－6)、(11－7)两式分别表示了两线圈中的自感磁通和互感磁通参考方向是一致的，从而结合图 11－9 中所设电流参考方向可以得出结论：若

电流均指向同名端，则自感磁通与互感磁通方向一致[①]。图 11－10 结合(11－12)(11－13)两式则从反面说明了上述结论。

下面讨论给定耦合电感的 L_1、L_2，互感 M 值的上限是多少的问题。由互感、自感的定义，有

$$\Psi_{11} = N_1\Phi_{11} = L_1 i_1 \tag{11-14}$$

$$\Psi_{22} = N_2\Phi_{22} = L_2 i_2 \tag{11-15}$$

$$\Psi_{21} = N_2\Phi_{21} = Mi_1 \tag{11-16}$$

$$\Psi_{12} = N_1\Phi_{12} = Mi_2 \tag{11-17}$$

其中(11－16)式即(11－2)式。显然，在极限情况 $\Phi_{21} = \Phi_{11}$，$\Phi_{12} = \Phi_{22}$，即每一线圈产生的磁通全部与另一线圈相交链，这种耦合称为全耦合(perfect coupling)，此时

$$L_1L_2 = \left(\frac{N_1\Phi_{11}}{i_1}\right)\left(\frac{N_2\Phi_{22}}{i_2}\right) = \frac{N_1N_2\Phi_{11}\Phi_{22}}{i_1i_2}$$

$$= \left(\frac{N_2\Phi_{21}}{i_1}\right)\left(\frac{N_1\Phi_{12}}{i_2}\right) = M^2$$

故得

$$M_{max} = \sqrt{L_1L_2} \tag{11-18}$$

因此，M 值的上限不能超过两电感的几何平均值。

为了反映耦合的强弱，把实际的 M 值与由(11－18)式确定的 M_{max} 之比定义为耦合系数，记为 k，即

$$k = \frac{M}{M_{max}} = \frac{M}{\sqrt{L_1L_2}} \tag{11-19}$$

显然，全耦合时 k 值最大，等于 1；无耦合时，M 为零，k 值为零，因此

$$0 \leqslant k \leqslant 1$$

$k > 0.5$ 时称紧耦合，$k < 0.5$ 时称为松耦合。k 值可以反映耦合的强弱程度。

电磁学中已经证明：含互感 M 的两线圈 L_1 和 L_2，其储能为

$$w = \frac{1}{2}L_1i_1^2 + \frac{1}{2}L_2i_2^2 \pm Mi_1i_2 \tag{11-20}$$

当自感磁通与互感磁通方向一致时取正号，否则取负号。

本书不打算再证明这一公式，仅说明如何理解。自感的储能公式可理解为

$$\frac{1}{2}L_1i_1^2 = \frac{1}{2}\Psi_{11}i_1$$

Ψ_{11} 为自感磁链，线圈 L_1 中由于互感磁链 Ψ_{12} 的储能为

---

① 有些教材用这一结论作为同名端的定义。

$$\frac{1}{2}\Psi_{12}i_1=\frac{1}{2}(Mi_2)i_1=\frac{1}{2}Mi_1i_2$$

同理线圈 L_2 中由于互感磁链 Ψ_{21} 的储能为

$$\frac{1}{2}\Psi_{21}i_2=\frac{1}{2}(Mi_1)i_2=\frac{1}{2}Mi_1i_2$$

故总的磁场储能考虑到自感磁通与互感磁通是否一致后应如(11－20)式所示。

例 11－2　含一对耦合电感的电路如图 11－11 所示。(1) 试求网络函数 $\frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_s}$ 和 $\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_s}$(用 M 表示);(2) 试求 M 的极限值;(3) 试求 $k=0.707$ 时稳态电流 $i_1(t)$。已知:$L_1=4$ H、$L_2=1$ H、$R=10\ \Omega$、$u_S=26\cos(10t)$ V。

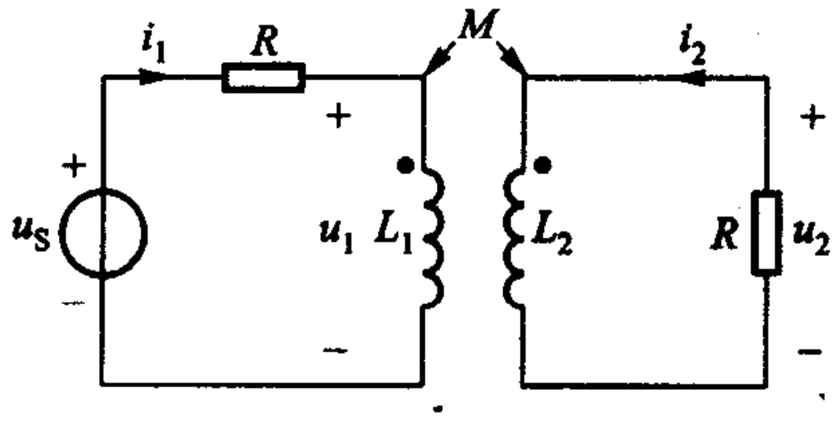


图 11－11　例 11－2

解　(1) 作相量模型(试自绘出)。

VCR:由(11－8)、(11－9)式或自行推导,得耦合电感 VCR 为

$$\dot{U}_1=\mathrm{j}4\omega\ \dot{I}_1+\mathrm{j}\omega M\ \dot{I}_2$$

$$\dot{U}_2=\mathrm{j}\omega M\ \dot{I}_1+\mathrm{j}\omega\ \dot{I}_2$$

又

$$\dot{U}_2=-10\ \dot{I}_2$$

KVL 为

$$\dot{U}_s=\dot{U}_1+10\ \dot{I}_1$$

由上列各式,解得

$$\frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_s}=\frac{10+\mathrm{j}\omega}{100+\omega^2(M^2-4)+\mathrm{j}50\omega}=Y(\mathrm{j}\omega)$$

$$\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_s}=\frac{\mathrm{j}10M\omega}{100+\omega^2(M^2-4)+\mathrm{j}50\omega}=H_u(\mathrm{j}\omega)$$

当 $\omega=10$ rad/s 时

$$Y(\mathrm{j}10)=\frac{10+\mathrm{j}10}{100M^2-300+\mathrm{j}500}$$

$$H_u(\mathrm{j}10)=\frac{\mathrm{j}100M}{100M^2-300+\mathrm{j}500}$$

(2) $M_{\max}=\sqrt{L_1L_2}=2$ H

$$Y(\mathrm{j}10)=\frac{10+\mathrm{j}10}{100+\mathrm{j}500}\mathrm{S}=\frac{1+\mathrm{j}}{10+\mathrm{j}50}\mathrm{S}$$

$$H_u(\mathrm{j}10)=\frac{\mathrm{j}200}{100+\mathrm{j}500}=\frac{\mathrm{j}2}{1+\mathrm{j}5}$$

(3) $k=0.707$ 时

$$M=k\sqrt{L_1L_2}=\sqrt{2}\mathrm{H}$$

$$Y(\mathrm{j}10)=\frac{10+\mathrm{j}10}{-100+\mathrm{j}500}\mathrm{S}=\frac{1+\mathrm{j}}{-10+\mathrm{j}50}\mathrm{S}$$

$$H_u(\mathrm{j}10)=\frac{\mathrm{j}100\sqrt{2}}{-100+\mathrm{j}500}=\frac{\mathrm{j}\sqrt{2}}{-1+\mathrm{j}5}$$

$$\dot{I}_{1\mathrm{m}}=\dot{U}_{\mathrm{sm}}Y(\mathrm{j}10)=26\left(\frac{1+\mathrm{j}}{-10+\mathrm{j}50}\right)\mathrm{A}=\frac{26\sqrt{2}\angle 45^\circ}{51\angle 101.3^\circ}\mathrm{A}=0.721\angle -56.3^\circ\ \mathrm{A}$$

$$i_1(t)=0.721\cos(10t-56.3^\circ)\mathrm{A}$$

本题也可在绘出附加电压源后,用网孔分析求解。其网孔方程为①

$$(R+\mathrm{j}\omega L_1)\dot{I}_1+\mathrm{j}\omega M\ \dot{I}_2=\dot{U}_s$$

$$\mathrm{j}\omega M\ \dot{I}_1+(R+\mathrm{j}\omega M)\dot{I}_2=0$$

当电路含有多个耦合电感时一般需用网孔分析。

例 11-3　一对耦合电感的串联

与两个一般电感不同,一对耦合电感的串联有两种方式——顺接和反接。顺接就是异名端相接,如图 11-12(a)所示,把互感电压看作电压源后得电路如图 11-12(b)所示。注意:由于 $i(t)$ 是从 L_1 的"·"端流入的,故在 L_2 处产生的互感电压 $M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ 的参考方向应由其"·"端指向另一端的;而 $i(t)$ 也是从 L_2 的"·"端流入的,故在 L_1 处产生的互感电压 $M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ 的参考方向应由其"·"端指向另一端。因此,附加电压源的参考极性如图 11-12(b)中所示。由该图可得

$$u(t)=L_1\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+L_2\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$$=(L_1+L_2+2M)\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

由等效定义可知,等效电感应符合

$$u(t)=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

故得等效电感应为

---

① 方程式中 $\mathrm{j}\omega M$ 可看成为互阻抗,两互阻抗相等。含受控源电路,网孔方程的互阻抗一般是不相等的(思考题 2-1)。可见计及互感电压的"电源",不宜看作受控源。

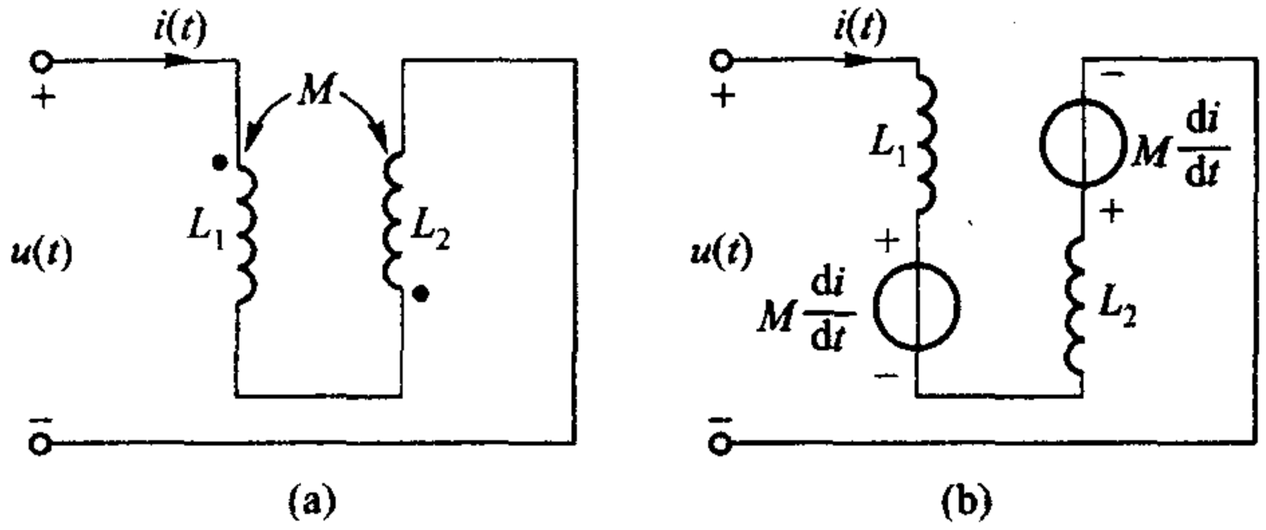


图 11－12　耦合电感的顺接串联

$$L = L_1 + L_2 + 2M \tag{a}$$

由此可知，顺接串联的耦合电感可以用一个等效电感 L 来代替，等效电感 L 应由(a)式来定。

耦合电感的另一种串联方式是反接串联。反接就是同名端相接，如图 11－13(a)所示。把互感电压看作电压源后得电路如图 11－13(b)所示。由此可得

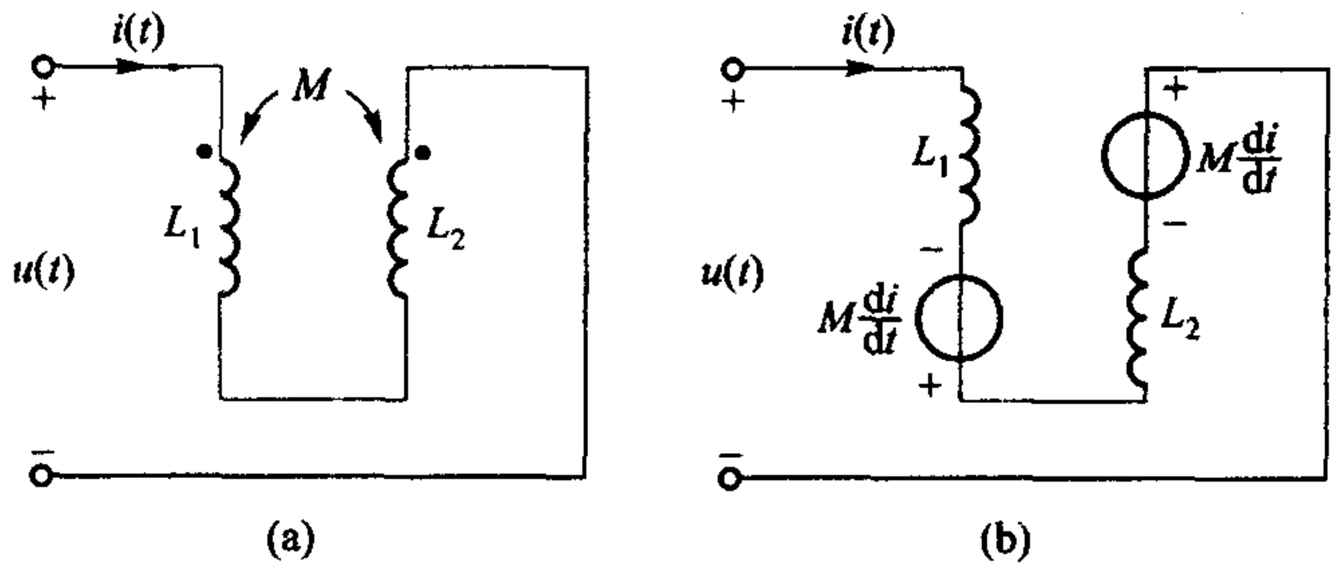


图 11－13　耦合电感的反接串联

$$u(t) = L_1 \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - M \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + L_2 \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - M \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$$= (L_1 + L_2 - 2M) \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

故得等效电感应为

$$L = L_1 + L_2 - 2M \tag{b}$$

由此可知，反接串联的耦合电感可以用一个等效电感 L 来代替，等效电感 L 应由(b)式来定。

在正弦稳态时，由(a)、(b)两式，分别可得

$$\dot{U} = (\mathrm{j}\omega L_1 + \mathrm{j}\omega L_2 + 2\mathrm{j}\omega M)\,\dot{I} \tag{c}$$

$$\dot{U} = (\mathrm{j}\omega L_1 + \mathrm{j}\omega L_2 - 2\mathrm{j}\omega M)\,\dot{I} \tag{d}$$

故得顺接时

$$\begin{aligned} Z &= \mathrm{j}\omega L_1 + \mathrm{j}\omega L_2 + 2\mathrm{j}\omega M \\ &= Z_1 + Z_2 + 2Z_M \end{aligned} \tag{e}$$

反接时

$$Z = Z_1 + Z_2 - 2Z_M \tag{f}$$

其中

$$Z_M = \mathrm{j}\omega M \tag{g}$$

由此可见，在正弦稳态分析中，两个串联电感的等效阻抗，在有互感时，并不能模仿直流电阻电路把该两电感的阻抗相加而求得，必须根据电感是顺接还是反接串联，相应地加上或减去 $2Z_M$。因此，在运用阻抗、导纳等概念仿照直流电阻电路的处理方法来作正弦稳态分析时，必须注意到电路中的互感现象。在把各互感电压作为附加的电压源看待，并能正确标定其极性后，仍可用第八章所述的方法来进行分析、计算。

思考题

11－1　为什么将有互感的两线圈串联时，必须注意同名端，否则有烧毁的危险？

练习题

11－4　试写出图 11－14 所示 4 个电路的 VCR。

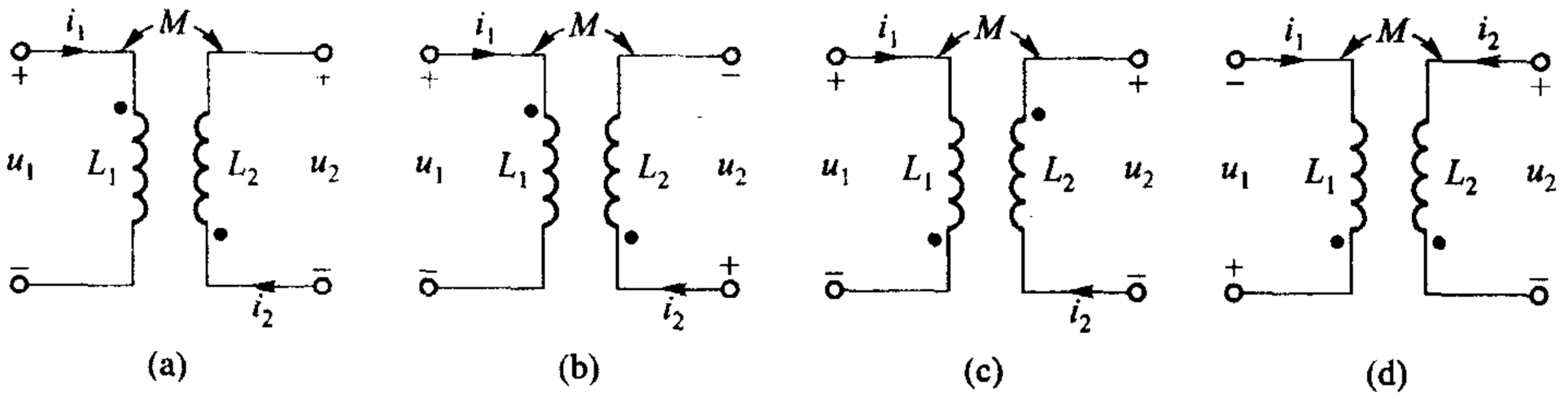


图 11－14　练习题 11－4

11－5　图 11－9(a)所示耦合电感，$L_1 = 4$ H、$L_2 = 3$ H，$M = 2$ H。求 u_2，若：(1) $i_1 = 5\cos(6t)$ A，$i_2 = 0$；(2) $i_1 = 0$，$i_2 = 3\cos(6t)$ A；(3) $i_1 = 5\cos(6t)$ A，$i_2 = 3\cos(6t)$ A。

$(-60\sin(6t)\ \mathrm{V};\ -54\sin(6t)\ \mathrm{V};\ -114\sin(6t)\ \mathrm{V})$

§11－3　空心变压器电路的分析　反映阻抗

变压器是电子技术中经常用到的器件，它通常有一个一次线圈和一个二次线圈。一次线圈接电源，二次线圈接负载，能量可以通过磁场的耦合，由电源传递给负载。

变压器可以用铁心也可以不用铁心(空心变压器)。铁心变压器的耦合系数可接近1,属于紧耦合;空心变压器的耦合系数则较小,属于松耦合。

变压器是利用电磁感应原理而制作的,可以用耦合电感来构成它的模型。这一模型常用于分析空心变压器电路。本节说明这类电路的正弦稳态分析方法。

设空心变压器电路如图11-15(a)所示,其中R_1、R_2分别为变压器一、二次绕组的电阻,R_L为负载电阻。设u_S为正弦输入电压,由图11-15(b)所示的相量模型可列出网孔方程为

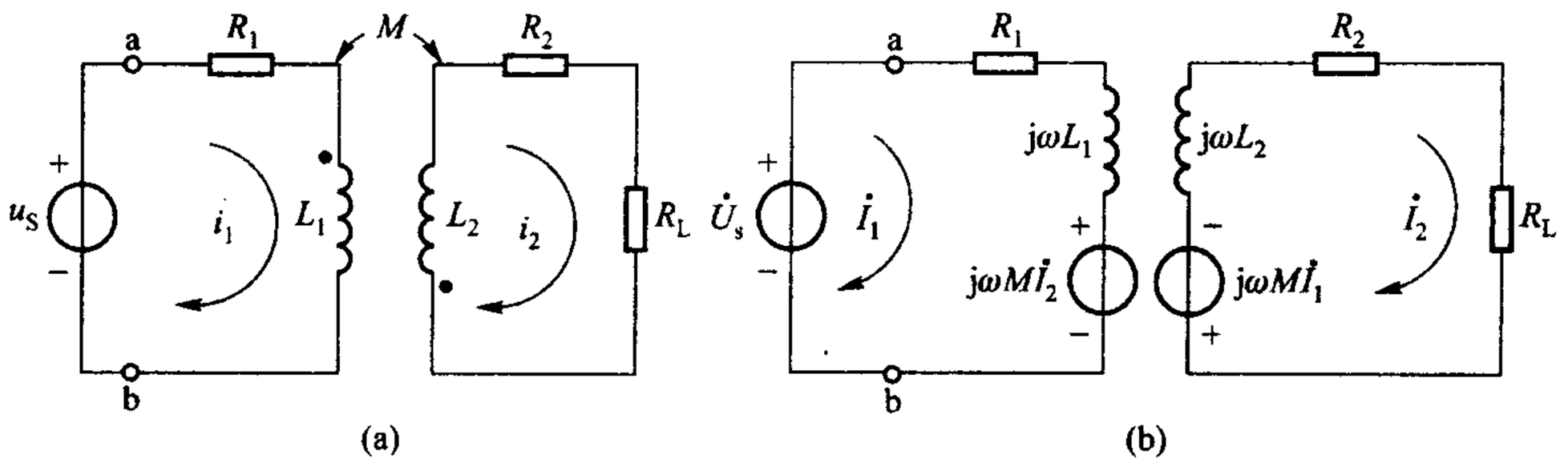


图11-15　空心变压器电路

$$(R_1 + j\omega L_1)\,\dot{I}_1 + j\omega M\,\dot{I}_2 = \dot{U}_s \tag{11-21}$$

$$j\omega M\,\dot{I}_1 + (R_2 + j\omega L_2 + R_L)\,\dot{I}_2 = 0 \tag{11-22}$$

或写为

$$Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2 = \dot{U}_s \tag{11-23}$$

$$Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 = 0 \tag{11-24}$$

其中

$$Z_{11} = R_1 + j\omega L_1$$

$$Z_{22} = R_2 + j\omega L_2 + R_L$$

$$Z_{12} = Z_{21} = j\omega M$$

由(11-23)、(11-24)两式,可求得图11-15所示耦合电路的一次、二次电流相量分别为

$$\dot{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} \dot{U}_s & Z_{12} \\ 0 & Z_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{vmatrix}} = \frac{Z_{22}\dot{U}_s}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}$$

$$= \frac{R_2 + j\omega L_2 + R_L}{(R_1 + j\omega L_1)(R_2 + j\omega L_2 + R_L) - (j\omega M)^2}\dot{U}_s$$

$$= \frac{R_2 + j\omega L_2 + R_L}{(R_1 + j\omega L_1)(R_2 + j\omega L_2 + R_L) + \omega^2 M^2}\dot{U}_s \qquad (11-25)$$

$$\dot{I}_2 = \frac{-j\omega M}{(R_1 + j\omega L_1)(R_2 + j\omega L_2 + R_L) + \omega^2 M^2}\dot{U}_s \qquad (11-26)$$

显然，如果同名端的位置与图中所示不同，$Z_{12} = Z_{21} = -j\omega M$，在(11－25)、(11－26)两式中，$j\omega M$ 前应加负号。对一次电流 $\dot{I}_1$ 来说，由于式中的 $j\omega M$ 以平方形式出现，不管 $j\omega M$ 的符号为正还是为负，算得的 $\dot{I}_1$ 都是一样的。但对于二次电流 $\dot{I}_2$ 却不同，随着 $j\omega M$ 前符号的改变，$\dot{I}_2$ 的符号也要改变。这就是说，如把变压器二次线圈接负载的两个端钮对调一下，或是改变两线圈的相对绕向，流过负载的电流将反相 180°。在电子电路中，如对变压器耦合电路的输出电流相位有所要求时，应注意线圈的相对绕向和负载的接法。

由(11－15)式可求得电源端的输入阻抗为

$$Z_i = \frac{\dot{U}_s}{\dot{I}_1} = R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R_2 + j\omega L_2 + R_L} = Z_{11} + \frac{\omega^2 M^2}{Z_{22}} \qquad (11-27)$$

由此可见，输入阻抗由两部分组成：$Z_{11} = R_1 + j\omega L_1$，即一次回路的自阻抗；$\frac{\omega^2 M^2}{Z_{22}} = \frac{\omega^2 M^2}{R_2 + j\omega L_2 + R_L}$，称为二次回路在一次回路中的反映阻抗(reflected impedance)。当 $\dot{I}_2 = 0$，亦即二次开路时，由(11－23)式可知，$Z_i = Z_{11}$；当 $\dot{I}_2 \neq 0$ 时，在输入阻抗中即增加了反映阻抗这一项。这就是说，二次回路对一次回路的影响可以用反映阻抗来计及。因此，由电源端看进去的等效电路，亦即等效一次电路应如图 11－16 所示。当只需求解一次电流时，可利用这一等效电路迅速求得结果。反映阻抗的算法是很容易记住的，把 $\omega^2 M^2$ 除以二次回路的阻抗即为反映阻抗。

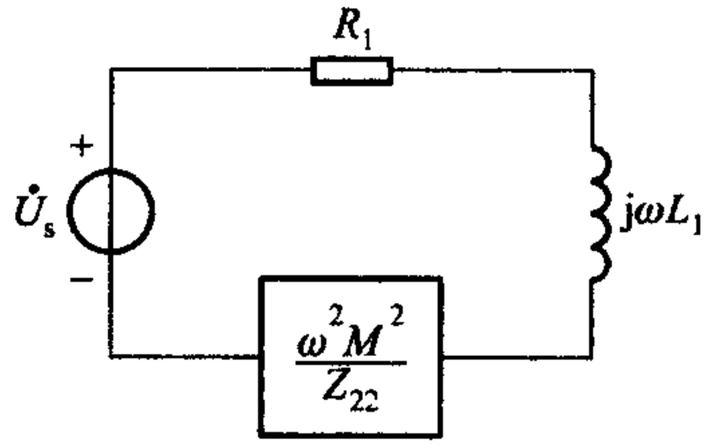


图 11－16　等效一次电路，方框代表反映阻抗

另外，由(11－25)、(11－26)两式还可求得一、二次转移电流比和一、二次转移电压比，它们分别为

$$\frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1}=\frac{-\mathrm{j}\omega M}{R_2+\mathrm{j}\omega L_2+R_\mathrm{L}} \tag{11-28}$$

$$\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_s}=\frac{R_\mathrm{L}\dot{I}_2}{\dot{U}_s}=\frac{\mathrm{j}\omega MR_\mathrm{L}}{(R_1+\mathrm{j}\omega L_1)(R_2+\mathrm{j}\omega L_2+R_\mathrm{L})+\omega^2M^2} \tag{11-29}$$

(11-28)式所示的结果是很易理解的。该式即

$$\dot{I}_2=\frac{-\mathrm{j}\omega M\dot{I}_1}{R_2+\mathrm{j}\omega L_2+R_\mathrm{L}} \tag{11-30}$$

其中 $-\mathrm{j}\omega M\dot{I}_1$ 系一次电流 $\dot{I}_1$ 通过互感而在二次线圈中产生的感应电压，二次电流就是这一电压作用的结果。因此，$-\mathrm{j}\omega M\dot{I}_1$ 除以二次总阻抗 $(R_2+\mathrm{j}\omega L_2+R_\mathrm{L})$ 即得二次电流 $\dot{I}_2$。在算得 $\dot{I}_1$ 后，利用该式即可算得 $\dot{I}_2$。因此，(11-27)、(11-28)两式常用来计算耦合电感电路的一次、二次电流。这两个式子都很容易记忆。

在计算二次电流的公式(11-30)中，分母仅含二次阻抗。为什么二次侧对一次侧有反映阻抗，而一次侧对二次侧就没有考虑反映阻抗呢？其实，两回路间的相互影响都在于互感电压。二次侧对一次侧的感应电压为 $\mathrm{j}\omega M\dot{I}_2=\left(\frac{\omega^2M^2}{Z_{22}}\right)\dot{I}_1$，可看成是由 $\dot{I}_1$ 在假想的阻抗 $\frac{\omega^2M^2}{Z_{22}}$ 上产生的电压降。故在一次回路内考虑有一个反映阻抗，实际上也是计及二次侧对一次侧的感应电压的一种方法。至于在(11-30)式中由于已考虑了一次侧对二次侧的感应电压 $-\mathrm{j}\omega M\dot{I}_1$，因此就不必再用反映阻抗来考虑一次侧对二次侧的影响。

例 11-4　电路如图 11-17(a)所示，已知 $L_1=5\ \mathrm{H}$，$L_2=1.2\ \mathrm{H}$，$M=1\ \mathrm{H}$，$R=10\ \Omega$，$u_\mathrm{S}=10\sqrt{2}\cos(10t)\ \mathrm{V}$，求稳态电流 i_2。

又，若 $k=1$，L_1、L_2 仍为原值，求稳态电流 i_2。

解　由图 11-17(a)可绘出相量模型如图 11-17(b)所示，回路方程为

$$\mathrm{j}\omega L_1\dot{I}_1-\mathrm{j}\omega M\dot{I}_2=\dot{U}_s$$

$$-\mathrm{j}\omega M\dot{I}_1+(R+\mathrm{j}\omega L_2)\dot{I}_2=0$$

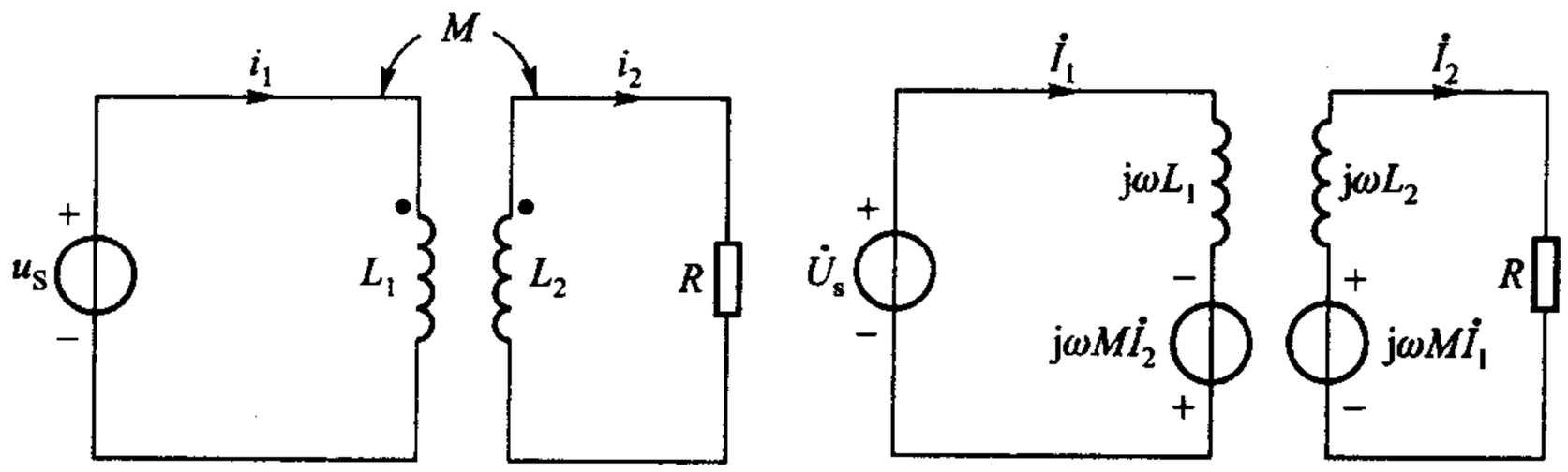


图 11－17　例 11－4

$$\dot{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} j\omega L_1 & \dot{U}_s \\ -j\omega M & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} j\omega L_1 & -j\omega M \\ -j\omega M & R + j\omega L_2 \end{vmatrix}} = \frac{j\omega M\,\dot{U}_s}{j\omega L_1(R + j\omega L_2) + \omega^2 M^2}$$

$$= \frac{\dot{U}_s\left(\frac{M}{L_1}\right)}{R + j\omega L_2 + \frac{\omega^2 M^2}{j\omega L_1}} = \frac{\dot{U}_s\left(\frac{M}{L_1}\right)}{R + j\omega\left(L_2 - \frac{M^2}{L_1}\right)}$$

$$= \frac{\dot{U}_s\left(\frac{M}{L_1}\right)}{R + j\omega\left(\frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1}\right)}$$

代入数据得

$$\dot{I}_2 = \frac{10\left(\frac{1}{5}\right)}{10 + j\omega\left(\frac{6-1}{5}\right)}\text{A} = \frac{2}{10 + j10}\text{A} = \frac{2}{10\sqrt{2}\angle 45°}\text{A}$$

$$= 0.141\angle -45°\ \text{A}$$

故

$$i_2(t) = 0.141\sqrt{2}\cos(10t - 45°)\ \text{A}$$

当 $k = 1$ 时，$M^2 = L_1 L_2$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_s\left(\frac{M}{L_1}\right)}{R} = \frac{\dot{U}_s}{R}\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$$

代入数据

$$\dot{I}_2 = \frac{10}{10}\sqrt{\frac{1.2}{5}}\text{A} = 0.49\ \text{A}$$

故　　$$i_2(t) = 0.49\sqrt{2}\cos(10t)\ \text{A}$$

比较两种情况的电流 $i_2(t)$，可知当 $k<1$ 时电流将减少且产生相位移。

例 11－5　电路如图 11－18(a)所示，已知 $L_1 = 3.6\ \text{H}$，$L_2 = 0.06\ \text{H}$，$M = 0.465\ \text{H}$，$R_1 = 20\ \Omega$，$R_2 = 0.08\ \Omega$，$R_L = 42\ \Omega$，正弦电压 $u_S = 115\sqrt{2}\cos(314t)\ \text{V}$。求初级电流 $\dot{I}_1$。

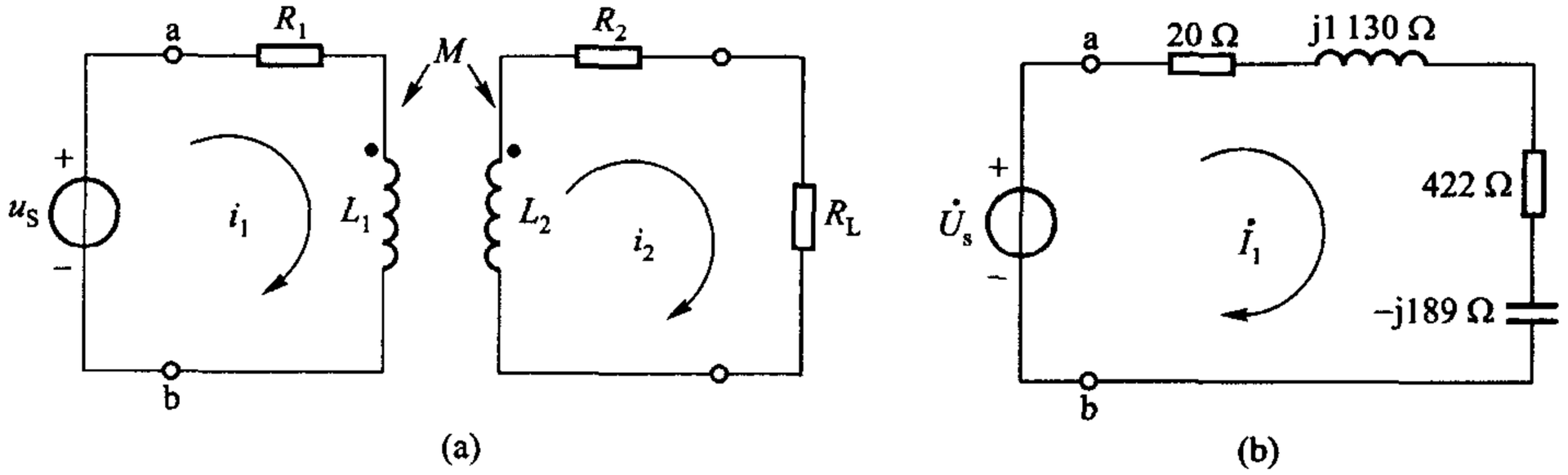


图 11－18　例 11－5

解　用反映阻抗的概念求解本题。

$$Z_{11} = R_1 + \text{j}\omega L_1 = (20 + \text{j}314 \times 3.6)\ \Omega = (20 + \text{j}1\ 130)\ \Omega$$

$$Z_{22} = R_L + R_2 + \text{j}\omega L_2 = (42.08 + \text{j}314 \times 0.06)\ \Omega$$

$$= (42.08 + \text{j}18.84)\ \Omega = 46.1 \angle 24.1^\circ\ \Omega$$

反映阻抗

$$Z_{ref} = \frac{\omega^2 M^2}{Z_{22}} = \frac{314^2 \times 0.465^2}{46.1 \angle 24.1^\circ}\Omega$$

$$= 462.4 \angle -24.1^\circ\ \Omega$$

$$= (422 - \text{j}189)\ \Omega$$

请注意二次回路中的电感性阻抗反映到一次回路为电容性阻抗($X = -189\ \Omega$)。

输入阻抗为

$$Z_{ab} = Z_{11} + Z_{ref} = (20 + \text{j}1\ 130 + 422 - \text{j}189)\ \Omega$$

$$= (442 + \text{j}941)\ \Omega = 1\ 040 \angle 64.8^\circ\ \Omega$$

一次等效电路如图 11－18(b)所示。算得一次电流相量为

$$\dot{I}_1 = \frac{115 \angle 0^\circ}{1\ 040 \angle 64.8^\circ}\text{A} = 110.6 \angle -64.8^\circ\ \text{mA}$$

例 11－6　接续上例，求二次电流 $\dot{I}_2$。

解　用(11－28)式解本题。

$$\dot{I}_2 = \frac{\text{j}\omega M\ \dot{I}_1}{Z_{22}}$$

$$= \frac{314 \times 0.465 \angle 90° \times 110.6 \times 10^{-3} \angle -64.8°}{46.1 \angle 24.1°} \text{A} = 0.35 \angle 1.1° \text{ A}$$

注意，这一结果是根据图 11－18(a)所示的同名端位置及电流的参考方向得出的。如果改变同名端位置，其结果应为 $-0.35 \angle 1.1°$ A，即 $0.35 \angle 181.1°$ A。

例 11－7　图 11－19 所示电路二次侧短路，已知：$L_1 = 0.1$ H，$L_2 = 0.4$ H，$M = 0.12$ H，求 ab 端的等效电感 L。

解　可在一次侧施加正弦电压，求一次电流。求出等效阻抗后，即可算出等效电感。

用反映阻抗的概念做更为简便。用 Z_{ref} 代表反映阻抗，则一次等效阻抗为

$$Z = j\omega L_1 + Z_{ref} = j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{j\omega L_2}$$

$$= j\omega\left(L_1 - \frac{M^2}{L_2}\right)$$

式中 $\left(L_1 - \frac{M^2}{L_2}\right)$ 即为所求等效电感。以数据代入得

$$L = L_1 - \frac{M^2}{L_2} = 0.064 \text{ H} = 64 \text{ mH}$$

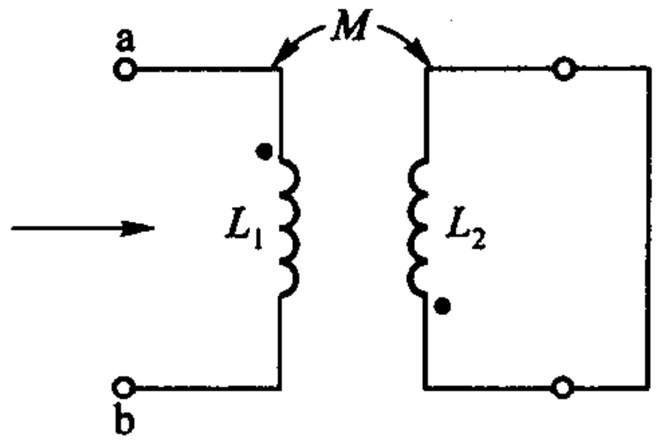


图 11－19　例 11－7

思考题

11－2　有人说：二次回路中的电流是感应电流，它产生的磁通应与一次回路电流所产生的磁通相消，因此，二次回路电流和一次回路电流一定是反相 180°的。对吗？你觉得在含耦合电感的电路中，属于一次回路和二次回路的诸相量中，在任何情况下具有不变的相位关系的应该是哪两个？它们的相位关系如何？

练习题

11－6　耦合电感 $L_1 = 6$ H、$L_2 = 4$ H、$M = 3$ H，若 L_2 短路，求 L_1 端的电感值。

$\left(\frac{15}{4}\text{H}\right)$

11－7　接续上题，若 L_1 短路，求 L_2 端的电感值。

$\left(\frac{5}{2}\text{H}\right)$

11－8　图 11－20 所示电路的 $Z_{11'}$ 等于下列 5 个答案中的哪一个？

(A) j10 Ω；(B) j5Ω；(C) j1.25Ω；(D) j15Ω；(E) j11.25Ω。

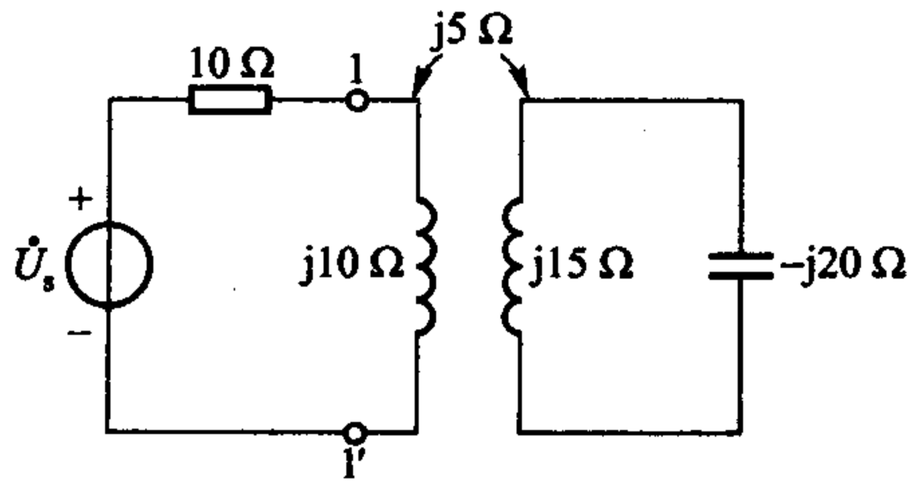


图 11－20　练习题 11－8

§11-4　耦合电感的去耦等效电路

对于在一个公共端钮相连接的一对耦合电感，如图 11-21(a)所示，可以用三个电感组成的 T 形网络来作等效替换，如图 11-21(b)所示。下面来推导这种网络等效替换的关系。

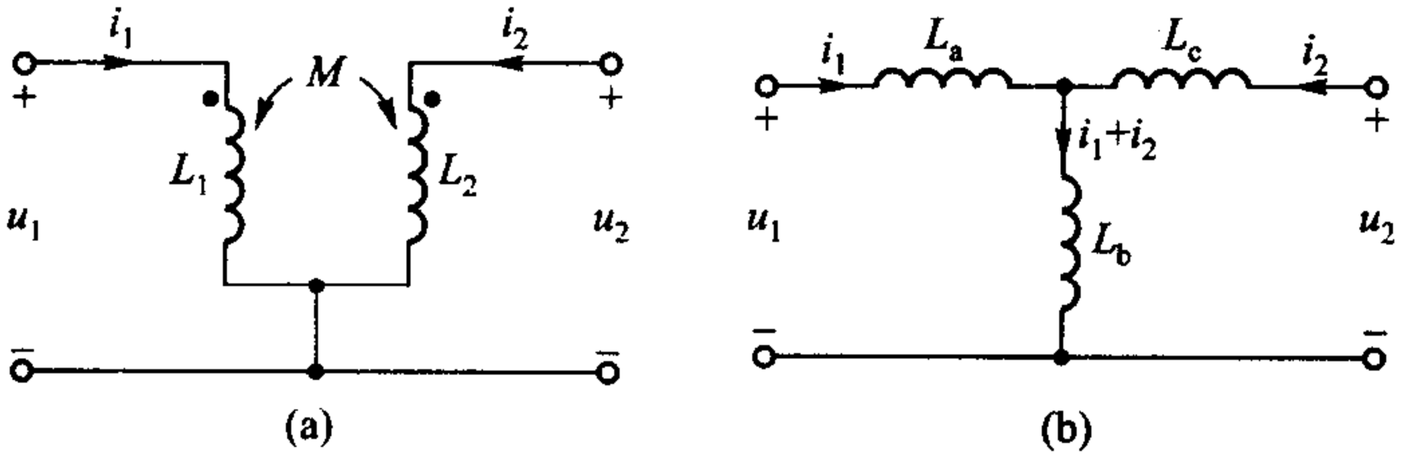


图 11-21　耦合电感及其 T 形等效电路

由(11-6)、(11-7)两式可知，对于如图 11-21(a)所示耦合电感，其端钮的 VCR 为

$$u_1 = L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

$$u_2 = M \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

而在 T 形等效电路中，由 KVL 得

$$u_1 = L_a \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_b \frac{\mathrm{d}(i_1 + i_2)}{\mathrm{d}t} = (L_a + L_b)\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_b \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

$$u_2 = L_b \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + (L_b + L_c)\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

比较$\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$和$\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$前面的系数，即可求得 T 形等效电路中各电感值应为

$$\left.\begin{aligned} L_a &= L_1 - M \\ L_b &= M \\ L_c &= L_2 - M \end{aligned}\right\}$$

如果改变图 11-21(a)所示电路中同名端的位置，则以上各式中 M 前的符号也应改变。

上述的这种等效消除了原电路中的感应耦合——互感，称为去耦等效。替换后的电路即可作为一般无互感电路来分析计算，但使用范围有限，需记忆公式。

例 11－8　试求图 11－22(a)所示电路的输入阻抗。

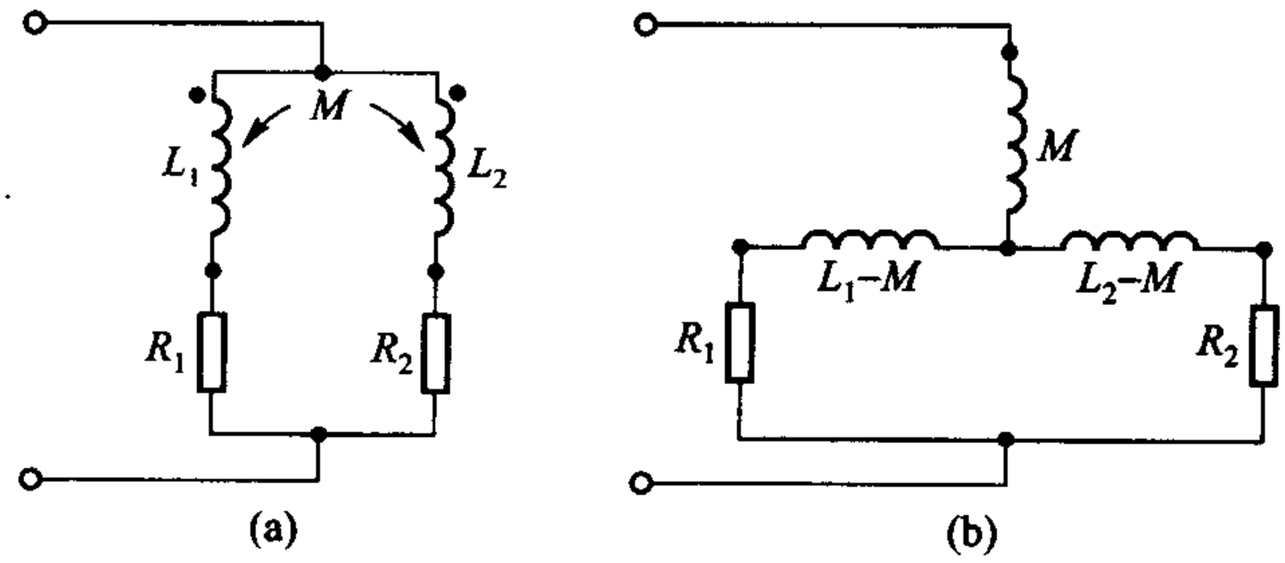


图 11－22　例 11－8

解　利用图 11－21(b)的替换电路，可得无互感的等效电路如图 11－22(b)所示。根据一般混联电路的计算方法可得

$$Z_i = j\omega M + \frac{[R_1 + j\omega(L_1 - M)][R_2 + j\omega(L_2 - M)]}{R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 - 2M)}$$

例 11－9　图 11－23(a)所示为自耦变压器(auto-transformer)电路，其中的两个线圈实际上是由一个线圈抽头而成。因此，这两线圈的绕向必然相同，同名端必然是图中所示的位置。设这两线圈的电感分别为 L_1 及 L_2，它们之间的互感为 M。试列出求解电流相量 $\dot{I}_1$ 和 $\dot{I}_2$ 所需的方程组。

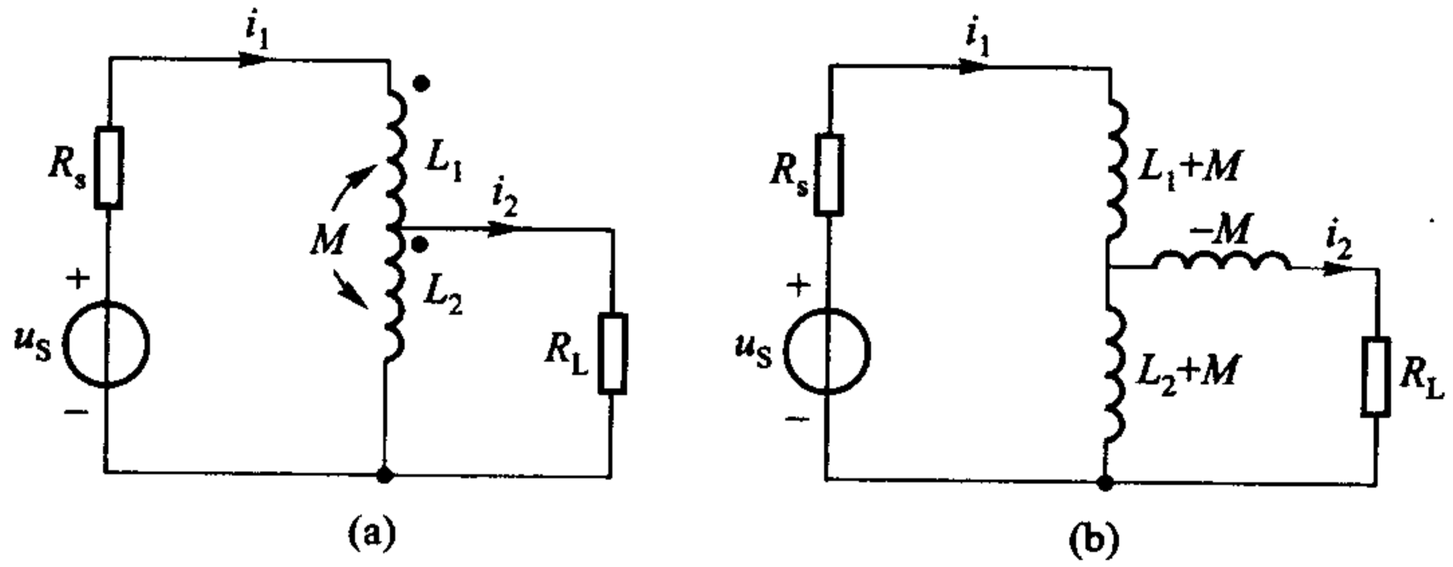


图 11－23　例 11－9

解　利用 T 形替换电路，得等效电路如图 11－23(b)所示，注意其等效电感中 M 的符号应与正文所示公式相反。这是因为原电路中耦合电感的异名端相接，与图 11－21(a)所示不同。

根据图 11－23(b)不难得到回路方程为

$$[R_s + j\omega(L_1 + M) + j\omega(L_2 + M)]\dot{I}_1 - j\omega(L_2 + M)\dot{I}_2 = \dot{U}_s$$

$$-j\omega(L_2+M)\dot{I}_1+[R_L+j\omega(L_2+M)-j\omega M]\dot{I}_2=0$$

即

$$[R_s+j\omega(L_1+L_2+2M)]\dot{I}_1-j\omega(L_2+M)\dot{I}_2=\dot{U}_s$$

$$-j\omega(L_2+M)\dot{I}_1+(R_L+j\omega L_2)\dot{I}_2=0$$

练习题

11－9　推导图 11－24 所示电路的输入阻抗公式为

$$R_1+j\omega(L_1-M)+\frac{[R_2+j\omega(L_2-M)](j\omega M+R_0)}{R_2+R_0+j\omega L_2}$$

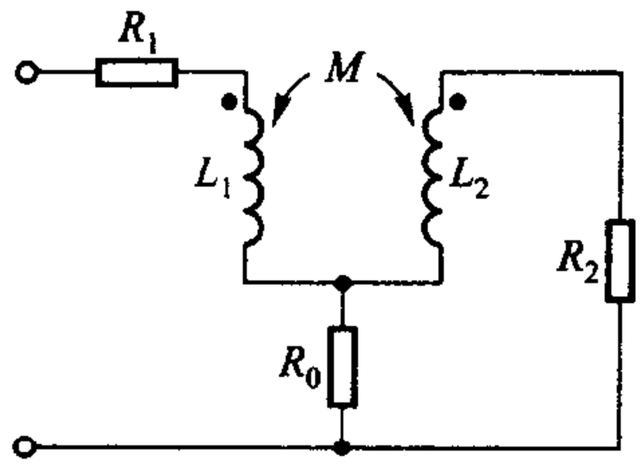


图 11－24　练习题 11－9

§11－5　理想变压器的 VCR

理想变压器(ideal transformer)是一种双口电阻元件,它原是由实际铁心变压器抽象而来的。它的电路模型如图 11－25(a)、(b)所示。与耦合电感元件的符号相同,但它唯一的参数只是一个称之为变比(transformation ratio)或匝比(turns ratio)的常数 n,而不是 L_1、L_2 和 M 等参数。在图 11－25(a)中所示同名端和电压、电流的参考方向下,理想变压器的定义式是

$$u_2(t)=nu_1(t) \tag{11-31}$$

$$i_2(t)=-\frac{1}{n}i_1(t) \tag{11-32}$$

不论在什么时刻,也不论它的端钮上接的是什么元件,对所有的 u_1、u_2、i_1、i_2 以上两式都应成立。上列两式也就是理想变压器的 VCR。显然,这是两个代数关系式,因此理想变压器是一种电阻元件,它具有按照以上两式的规定改变电压、电流大小的能力,而并不附带引入电感、电阻等其他元件的作用。这正是我们希望一个实际变压器具有的特性。

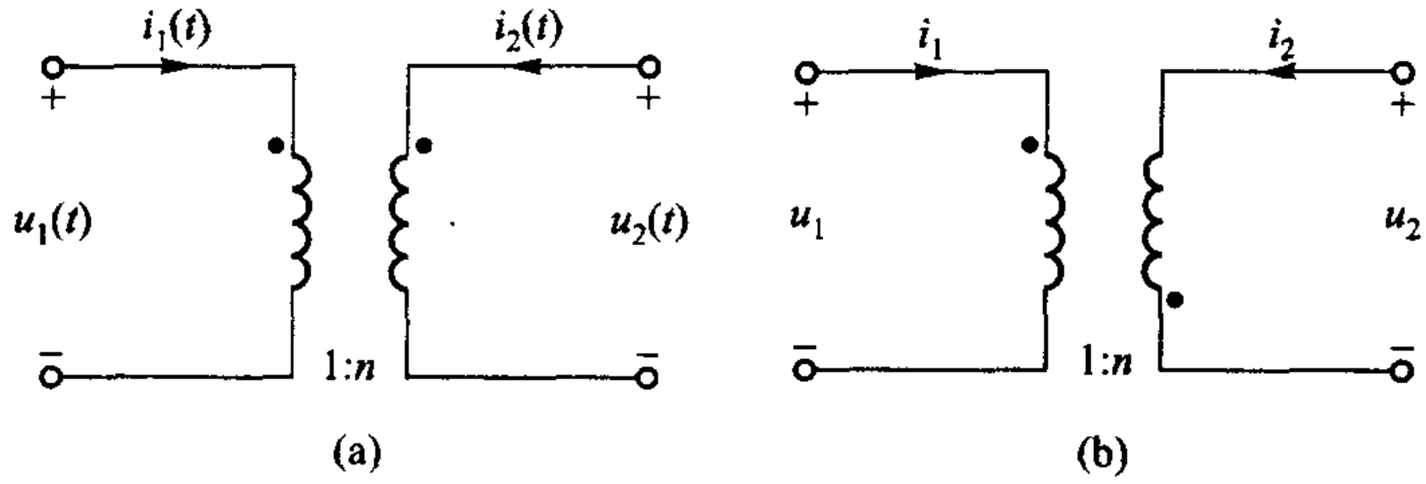


图 11－25　理想变压器

若变压器的一次匝数为 N_1、二次匝数为 N_2，则匝比[①]

$$n=\frac{N_2}{N_1} \tag{11-33}$$

(11－31)、(11－32)两式是与图 11－25(a)所示的电压、电流参考方向和同名端位置相配合的。如果选择 u_1 和 u_2 的参考方向对同名端来说正好相反，而 i_2 改由“·”端流出，如图 11－25(b)所示，则理想变压器 VCR 为

$$u_2(t)=-nu_1(t) \tag{11-34}$$

$$i_2(t)=\frac{1}{n}i_1(t) \tag{11-35}$$

不论是由(11－31)、(11－32)两式还是由(11－34)、(11－35)两式，都可知理想变压器在所有时刻 t

$$u_1(t)i_1(t)+u_2(t)i_2(t)=0 \tag{11-36}$$

亦即在所有时刻 t，从一次及二次线圈的输入功率的总和为零。这就是说，理想变压器不消耗能量也不储存能量，是非能元件。从一次线圈输入的功率全部都能从二次线圈输出到负载。理想变压器不储存能量，是一种无记忆元件。在电路图中，理想变压器虽然也用线圈作为电路符号，但这符号并不意味着任何电感的作用，它并不代表 L_1 或 L_2，它只是代表着如同(11－31)、(11－32)或(11－34)、(11－35)两式所示的电压之间以及电流之间的简单约束关系。

显然，在正弦稳态，上述理想变压器的各 VCR 式都可以表示为相对应的相量形式。

在分析有关互感、变压器的问题时，初学者往往对电流或电压的方向、相位等发生困难。其原因主要在于对它们的参考方向与真实方向混淆不清。在物理课中往往是用真实方向来分析感应电压(电动势)、电流的，这只宜于分析较简单的电路。在本书第一章中已指出，电路是受一些基本定律约束的，而各定律又

---

① 有些书把 $\frac{N_1}{N_2}$ 定义为匝比 n。各 VCR 式与本书不同，例如(11－31)式将写作 $u_2=\frac{1}{n}u_1$。

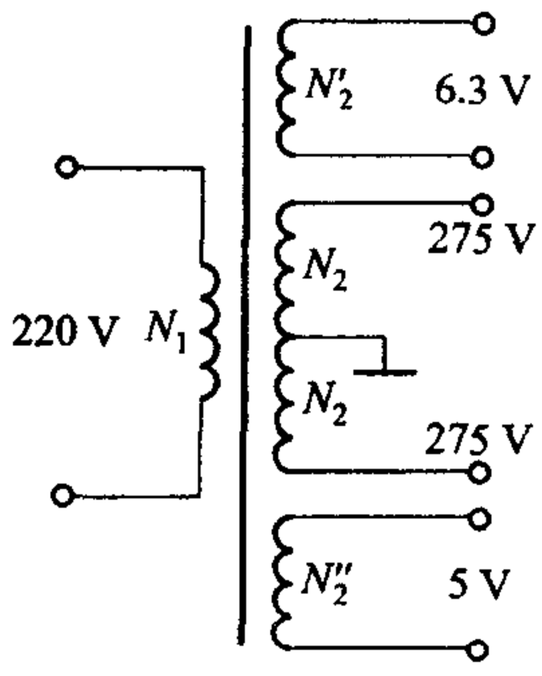
是在一定的参考方向下以公式形式来表达的。因此对电路的一切分析、计算，都是在假定了参考方向后进行的，其结果（包括方向、相位）也需按照参考方向来解释。例如，理想变压器一、二次电流究竟是同相还是反相是与所设电流的参考方向有关的。就其物理实际来说，电流当然只能有一种肯定的流向，不论对电流的参考方向作何假定，其最后答案结合着这一参考方向总能反映实际情况。

思考题

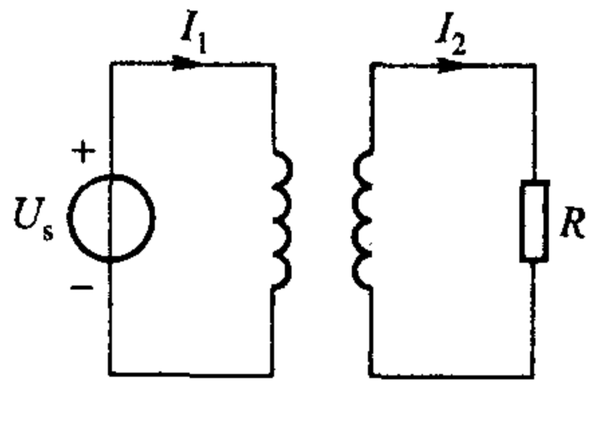
11－3　如果在图 11－25(a)、(b)中，i_2 的参考方向与图中所示相反，问理想变压器的 VCR 如何？

练习题

11－10　某电源变压器如图 11－26(a)所示（图所示为铁心变压器的电气图形符号，见表 1－1）已知一次电压有效值为 220 V，匝数为 600，问为了满足二次电压有效值各为 6.3 V，275 V 及 5 V 的要求，二次各绕组的匝数应为多少？又一次电流能算得吗？均按理想变压器考虑。



(a) 练习题 11－10



(b) 练习题 11－11

图 11－26　练习题用图

11－11　带负载 R 的理想变压器电路如图 11－26(b)所示，已知二次电流有效值 I_2 = 100 mA、负载电阻 R = 2 kΩ，一次、二次匝数分别为 400 和 50 匝。试求一次电流和外施交流电源的有效值。

（12.5 mA、1 600 V）

§11－6　理想变压器的阻抗变换性质

由上节可知理想变压器可以起到改变电压及改变电流大小的作用，由于它具有这两方面的作用因而也同时具备改变电阻大小的作用。

如果在图 11 -27(a)所示理想变压器的二次侧接电阻 R_L,则由于

$$i_1 = -ni_2 = -n\left(-\frac{u_2}{R_L}\right) = \frac{n^2 u_1}{R_L}$$

故得

$$R_i = \frac{u_1}{i_1} = \frac{1}{n^2}R_L \tag{11-37}$$

如图 11 -27(b)所示。

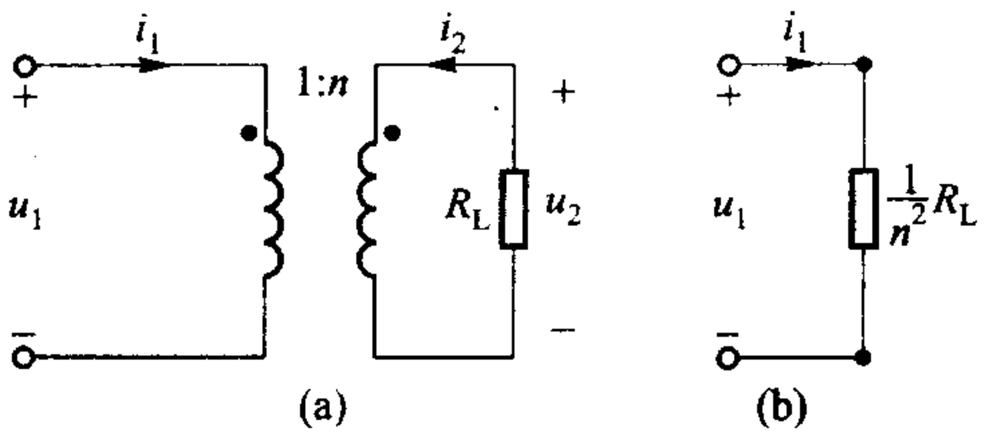


图 11 -27　理想变压器的电阻变换作用

由此可见,把电阻 R_L 接在理想变压器的二次侧,变压器一次侧的输入电阻即为 $\frac{R_L}{n^2}$。理想变压器起着改变电阻大小的作用,把 R_L 变换为 $\frac{R_L}{n^2}$。如果 $n>1$($N_2>N_1$,即升压变压器),电阻变换后,数值减小;如果 $n<1$,电阻变换后,数值增大。也就是说,从匝数少的一边所得的输入电阻是减小的;从匝数多的一边所得的输入电阻是增大的。$\frac{R_L}{n^2}$亦称二次电阻 R_L 对一次侧的折合(referred)电阻。

正弦稳态时,若二次侧所接阻抗为 $Z_L(j\omega)$,则一次侧的输入阻抗,或二次侧的 Z_L 对一次侧的折合阻抗为

$$Z_i(j\omega) = \frac{1}{n^2}Z_L(j\omega) \tag{11-38}$$

因此,理想变压器有改变电阻或阻抗大小的性质。

例 11 -10　某电源的内阻 R_s 为 10 kΩ,负载 R_L = 10 Ω。为使负载能从电源获得最大功率,由 §9 -7 可知,电源内阻应与负载电阻相等。可利用变压器来达到最大功率匹配。设电路如图 11 -28(a)所示,试求理想变压器的匝比。

解　设变压器为理想的,可得等效一次电路如图 11 -28(b)所示。根据 §9 -7所述,最大功率匹配的条件是

$$R_s = \frac{1}{n^2}R_L$$

因此

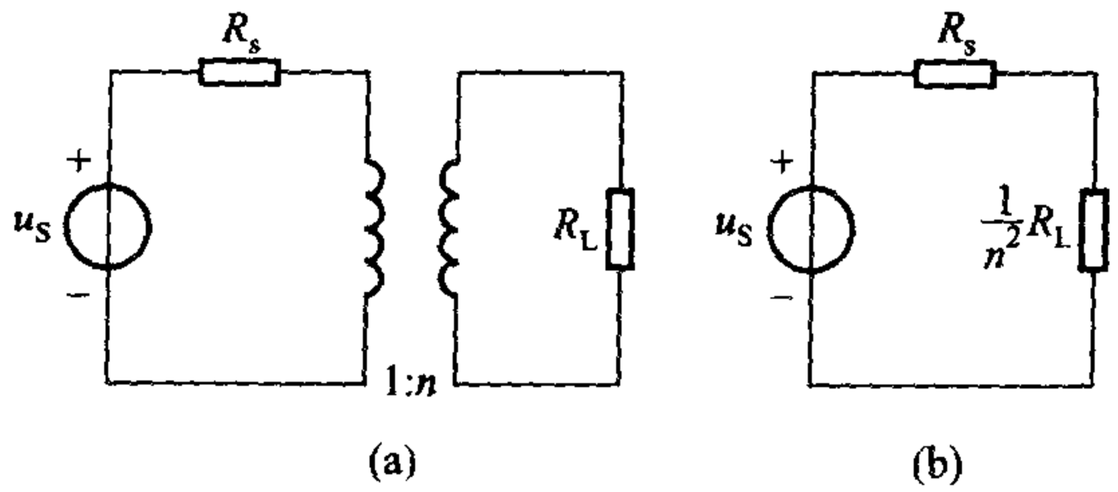


图 11－28　例 11－10

$$n^2 = \frac{R_1}{R_2} = \frac{10}{10 \times 10^3} = \frac{1}{10^3}$$

$$n = \frac{1}{\sqrt{10^3}} = \frac{1}{31.6}$$

即

$$\frac{N_1}{N_2} = 31.6$$

例 11－11　电路如图 11－29 所示，试求电压 $\dot{U}_2$。

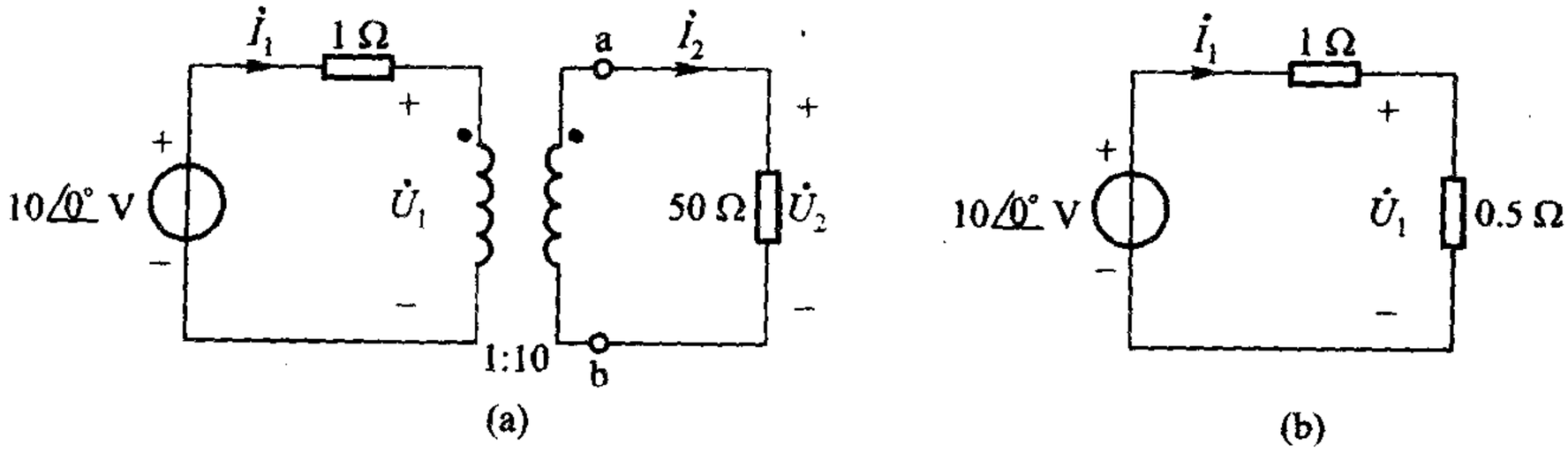


图 11－29　例 11－11

解一　用网孔分析做。由原电路可得

$$\dot{I}_1 \times 1 + \dot{U}_1 = 10 \angle 0°$$

$$50\ \dot{I}_2 = \dot{U}_2$$

又由理想变压器的 VCR

$$\dot{U}_2 = 10\ \dot{U}_1$$

$$\dot{I}_2 = \frac{1}{10}\dot{I}_1$$

注意 $\dot{I}_2$ 的参考方向与图 11－25 所示相反。

由这 4 个式子可得

$$\dot{U}_2 = 10\ \dot{U}_1 = 10(10 - \dot{I}_1) = 100 - 10\ \dot{I}_1$$

$$= 100 - 100\ \dot{I}_2 = 100 - \frac{100}{50}\dot{U}_2$$

解得

$$U_2 = 33.3\ \text{V}$$

解二　二次电阻在一次侧折合为 $\frac{50}{n^2} = \frac{50}{100}\Omega = 0.5\ \Omega$，得等效一次电路如图 11 -29(b)所示。由此可得

$$\dot{U}_1 = 10\ \angle 0° \frac{0.5}{1 + 0.5}\text{V} = 3.33\ \text{V}$$

$$\dot{U}_2 = n\ \dot{U}_1 = 10 \times 3.33\ \text{V} = 33.3\ \text{V}$$

解三　用戴维南定理做。原电路中在 ab 两端断开，求其左侧部分的戴维南等效电路。为此，应先求得 ab 端的开路电压。

由于 $\dot{I}_2 = 0$，$\dot{I}_1$ 必然为零，因此 $\dot{U}_1 = 10\ \angle 0°\ \text{V}$。故得开路电压

$$\dot{U}_{oc} = 10\ \dot{U}_1 = 100\ \angle 0°\ \text{V}$$

为求得戴维南等效电路的串联电阻，可令外施电压为零。折合电阻为

$$R_o = 10^2 \times 1\ \Omega = 100\ \Omega$$

请注意，此处匝比 n 应为 $\frac{1}{10}$，故 $\frac{1}{n^2}$ 为 10^2。

故得

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_{oc}\frac{50}{100 + 50} = 100 \times \frac{1}{3}\ \text{V} = 33.3\ \text{V}$$

练习题

11 -12　若在图 11 -27 中二次侧的“·”端改在下方，试证明有关折合电阻、折合阻抗的算法仍然成立。试求图 11 -26(b)所示电路的输入电阻。

(128 kΩ)

11 -13　电路如图 11 -30 所示。(1) 试选择匝比使传输到负载的功率为最大；(2) 求 R 获得的最大功率。

$\left(\frac{1}{100};\frac{1}{4}\text{W}\right)$

11 -14　电路如图 11 -31 所示，试求 $\dot{U}_3$。

(353.6 $\angle -45°$ V)

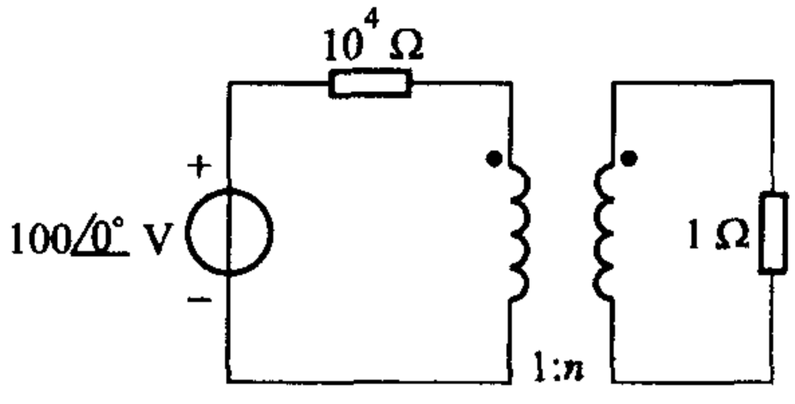


图 11－30　练习题 11－13

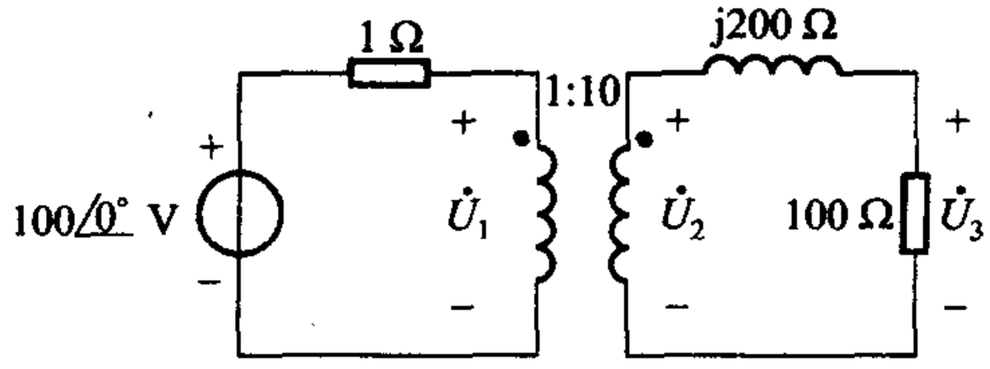


图 11－31　练习题 11－14

§11－7　理想变压器的实现

理想变压器的定义式中对电压、电流没有限制，直流也是适用的。如果定义式中的电压、电流仅指时变的，则理想变压器可利用电磁感应现象来近似实现。这时，理想变压器可看成是满足一定条件后的耦合电感。量变引起质变，使这两种性质迥异的元件得到了沟通。

首先，要求耦合电感没有漏磁通(leakage flux)。这就是说，要求耦合电感每一个线圈中电流产生的磁通全部与另一线圈相交链，没有那种只与一个线圈相交链的漏磁通。这一情况即 §11－2 中所称的全耦合情况。如用 Φ_{11} 表示 i_1 产生的全部磁通，Φ_{21} 表示 i_1 产生并与第二线圈相交链的磁通；Φ_{22} 表示 i_2 产生的全部磁通，Φ_{12} 表示 i_2 产生并与第一线圈相交链的磁通，则应有

$$\Phi_{11} = \Phi_{21} \tag{11-39}$$

$$\Phi_{22} = \Phi_{12} \tag{11-40}$$

图 11－32 即为这一情况下磁通分布的示意图。由 i_1 产生的磁通 Φ_{11} 应穿过线圈 2 而闭合。为清楚起见，图中只绘出了在线圈 1 中的部分。Φ_{22} 也同样地只绘出了在线圈 2 中的部分。显然，穿过两线圈的磁通 Φ 是一样的，即

$$\Phi = \Phi_{11} + \Phi_{22} \tag{11-41}$$

这磁通称为互磁通(mutual flux)或主磁通。互磁通在两线圈中分别产生感应电压 u_1 和 u_2，由于 $u_1(t) = N_1 \dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$，$u_2(t) = N_2 \dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$，故得

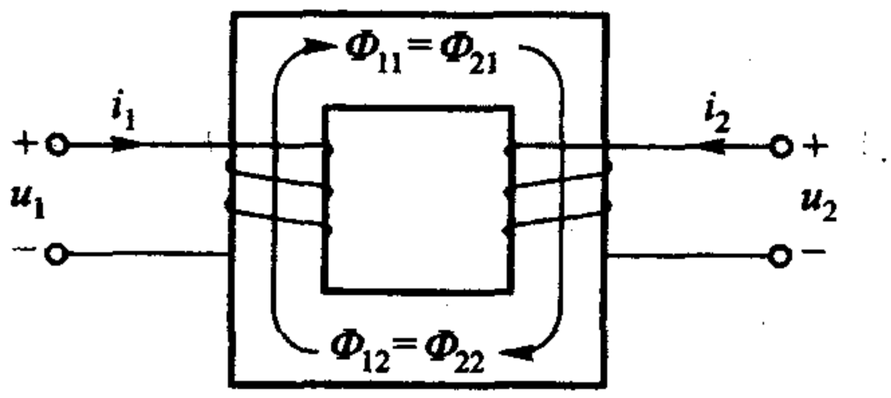


图 11－32　全耦合示意图

$$\frac{u_2(t)}{u_1(t)} = \frac{N_2}{N_1} = n \tag{11-42}$$

此即(11－31)式。式中 N_1 与 N_2 分别为第一线圈与第二线圈，即一次线圈与二次线圈的匝数，故变比 n 即二次侧对一次侧的匝比。

又由(11 - 14)、(11 - 15)、(11 - 16)、(11 - 17)等有关自感、互感的定义式,并考虑到全耦合的特点 $\Phi_{21}=\Phi_{11}$、$\Phi_{12}=\Phi_{22}$,不难得出全耦合时

$$\frac{N_1}{N_2}=\sqrt{\frac{L_1}{L_2}}=\frac{1}{n} \tag{11-43}$$

其次,要求电感 L_1、L_2 应为无限大(但其比值$\frac{L_1}{L_2}$仍为有限值)。在全耦合条件下,耦合电感的 VCR 可表示为

$$\frac{u_1}{L_1}=\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}+\frac{M}{L_1}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}+\frac{N_2}{N_1}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \tag{11-44}$$

$$\frac{u_2}{L_2}=\frac{M}{L_2}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}=\frac{N_1}{N_2}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \tag{11-45}$$

如果 L_1 和 L_2 均为无限大,则由上列任一式均可得

$$\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}=-\frac{N_2}{N_1}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}=-n\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

积分后可得

$$i_1(t)=-ni_2(t)+A \tag{11-46}$$

式中 A 为积分常数,不随时间而变。因此,如略去两线圈中的任何直流电流,仅就时变部分而论,有

$$i_1(t)=-ni_2(t) \tag{11-47}$$

此即(11 - 32)式。

由此可见,理想变压器可看成是耦合电感的极限情况,也就是说,可看成是耦合系数为 1,电感均为无限大的线性时不变耦合电感元件。这就为理想变压器的实现提供了一条途径。为了实现耦合系数 k 为 1 的条件,应该把一次线圈和二次线圈同绕在一个用磁导率 μ 为无限大的磁性材料制成的心子上,这样才能把全部磁通都限制在心子中,实现全耦合。实际上,这是办不到的。用以制成心子的磁性材料(如铁、镍、钴及其合金、铁氧体等),其磁导率约为空气的数千倍,只可认为绝大部分磁通都限制在心子内而仍有少量的漏磁通。电感为无限大的条件实际上也是办不到的,但是使用磁导率高的材料作为心子,并使线圈的匝数增多(电感与匝数的平方成正比),可以使电感很大。这就构成了所谓的铁心(iron-core)变压器。人们把设计精良并认为能体现出(11 - 31)和(11 - 32)两式所示 VCR 的铁心变压器当作理想变压器使用。

就理想变压器的 VCR(亦即它的定义式)而论,其中并无电磁感应的"迹象",理想变压器并非一种依靠磁场工作的元件,它是一种双口电阻元件,利用电磁感应现象来近似实现也并非是唯一的方法,况且这一方法不能解决直流情况下的实现问题。

思考题

11－4　有人说：图 11－32 中，按照楞次定律，电流 i_2 的方向应该和图中所示者相反。这样说，对吗？

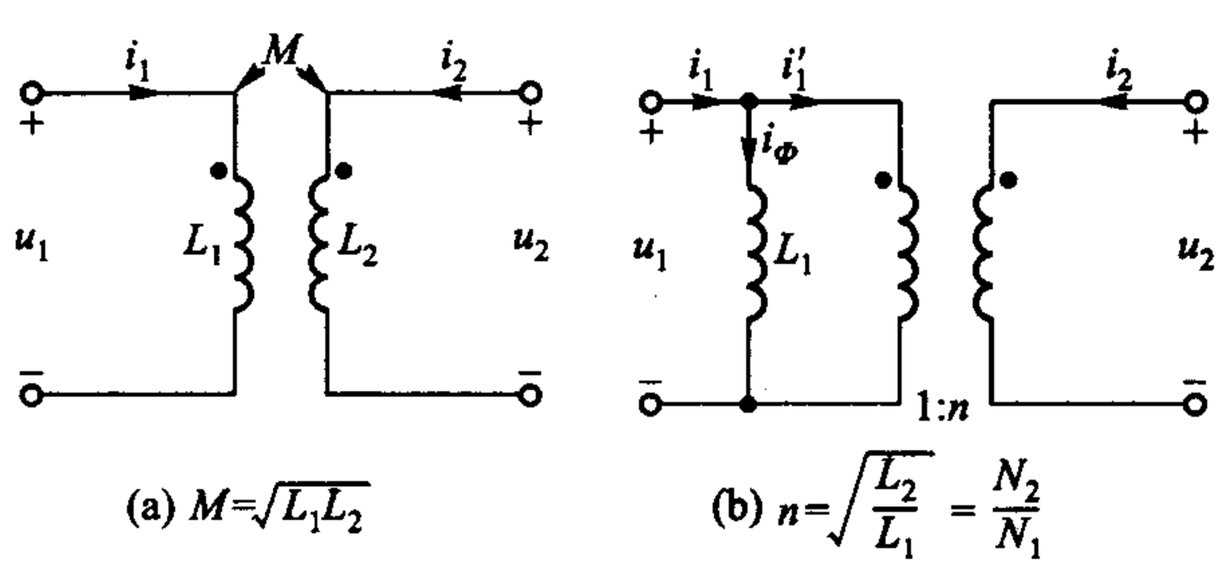
11－5　理想变压器在任何情况下，一次电流与二次电流有不变的相位关系吗？全耦合变压器（只满足 $k=1$ 的耦合电感）一次与二次电压的相位关系又如何呢？（试与思考题 11－2联系。）

§11－8　铁心变压器的模型

铁心变压器是常用的器件，本节讨论它的模型问题。

（1）如能认为变压器较好地满足了 $k=1$ 和 L_1、L_2 为无限大的条件，或对分析要求不高，允许存在相当误差，就可以用理想变压器作为模型。例如，对电子设备中的电源变压器，并不需要研究它的频率响应，就属于这种情况，我们常用（11－31）、（11－32）等式来估算匝比等。

（2）如果变压器的耦合系数可认为等于 1 而电感不为无限大，则这样的变压器称为全耦合变压器，如图 11－33（a）所示，为无线电工程中所常见。我们来推导它的模型。



(a) $M=\sqrt{L_1L_2}$　　(b) $n=\sqrt{\dfrac{L_2}{L_1}}=\dfrac{N_2}{N_1}$

图 11－33　全耦合变压器及模型

根据 §11－7 中所述，由于 $k=1$，可得

$$u_2(t)=nu_1(t) \tag{11-48}$$

此即为全耦合变压器一次电压与二次电压间的关系式。

由（11－44）式可得

$$\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}=\frac{u_1}{L_1}-n\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

积分后可得

$$i_1(t)=\frac{1}{L_1}\int_0^t u_1(\xi)\mathrm{d}\xi-ni_2(t)+A \tag{11-49}$$

与（11－46）式比较，（11－49）式多了等式后的第一项——由于 L_1 不为无限大而出现的一项。就时变部分论

$$i_1(t) = \frac{1}{L_1}\int_0^t u_1(\xi)\,\mathrm{d}\xi - ni_2(t) \tag{11-50}$$

此即为全耦合变压器一次电流与二次电流的关系式。

(11-50)式可写为

$$i_1(t) = i_\Phi(t) + i_1'(t) \tag{11-51}$$

其中

$$i_\Phi = \frac{1}{L_1}\int_0^t u(\xi)\,\mathrm{d}\xi \tag{11-52}$$

$$i_1'(t) = -ni_2(t) \tag{11-53}$$

这就是说，全耦合变压器的输入电流应包括两个分量：(a) 由于 L_1 不为无限大而出现的电感性电流分量 i_Φ；(b) 由于二次电流 i_2 而相应出现的电流分量 i_1'，注意 i_1' 与 i_2 是符合理想变压器的电流关系的。[如由(11-45)式出发，结论如何？]

因此，根据(11-48)、(11-51)两式可得出全耦合变压器模型如图 11-33(b)所示，其中理想变压器部分反映了(11-48)及(11-53)两式所示的关系。

在理想变压器中一次线圈产生的磁通与二次线圈产生的磁通互相抵消殆尽，这是楞次定律的反映，(11-32)式、(11-53)式均表明了这点，但这一情况实际上是不能存在的。一次线圈电源所提供的电流中必须有一部分用来产生互磁通 Φ，这部分电流即(11-51)式中的 i_Φ，称为磁化(magnetizing)电流，相应地，一次电感 L_1 称为一次侧的磁化电感，也可记为 L_M，在全耦合变压器中 $L_M = L_1$。

在无线电工程中常用到带有抽头的电感线圈，其绕组密集地绕在高频磁芯上，这种线圈可看成是全耦合自耦变压器(图 11-34)，可用来改变元件参数值使之达到设计要求。若二次侧所接元件分为 R、L、C 时，在一次侧所得元件的折合值分别为 $\frac{R}{n^2}$、$\frac{L}{n^2}$、n^2C。

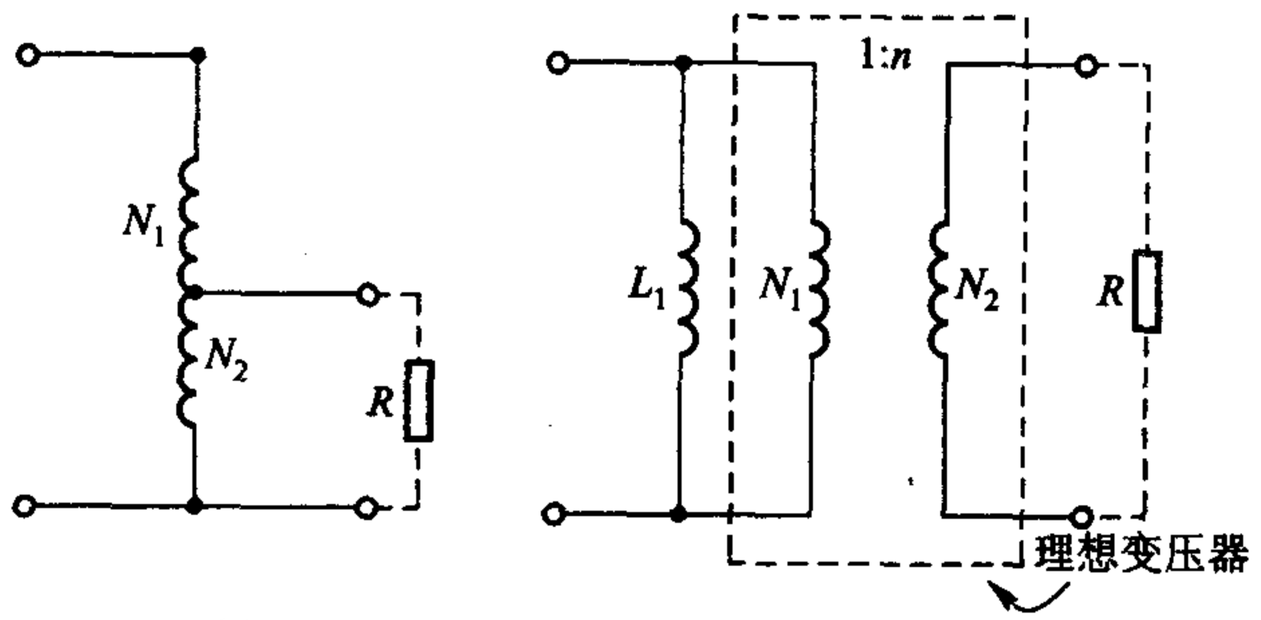
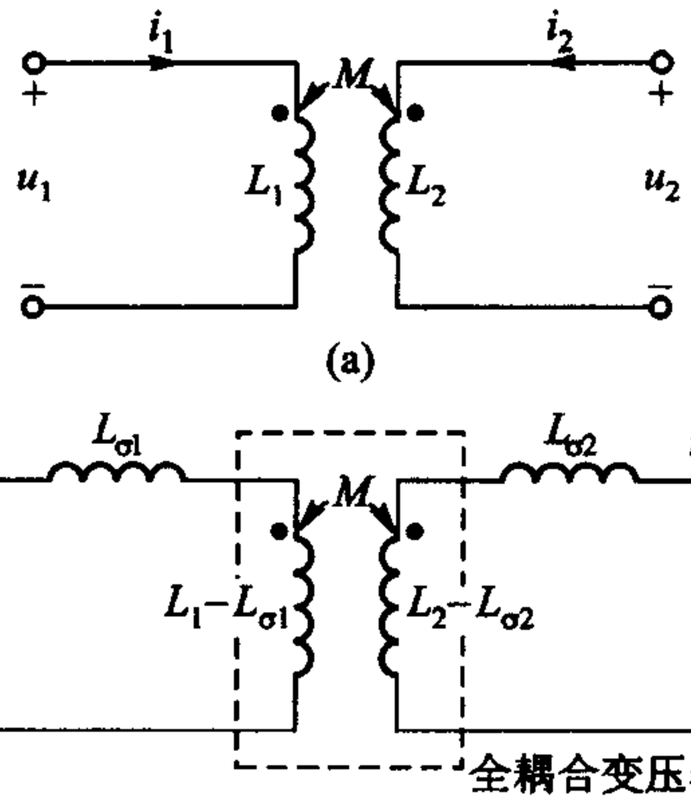


图 11-34　自耦变压器[图(a)]和全耦合变压器模型[图(b)]

(3) 一般变压器的电感既不能为无限大，耦合系数也往往小于 1。这就是说，它们的磁通除了互磁通外，还有漏磁通，如同图 11-35 所示。漏磁通所对应的电感称为漏感(leakage inductance)。设一般变压器如图 11-36(a)所示，如果从两个线圈的电感中减去各自所具有的漏感，就可得到一个全耦合变压器如图 11-36(b)虚线框内所示。根据图 11-36(b)可得

一般变压器模型如图 11－36(c)所示，其中 $L_M = L_1 - L_{\sigma 1}$ 即为磁化电感。



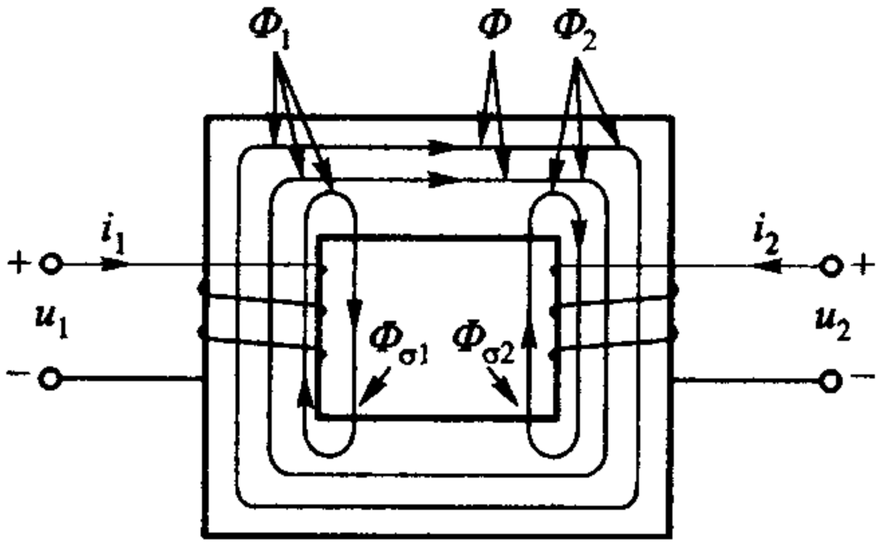


图 11－35　互磁通 Φ 和漏磁通 $\Phi_{\sigma 1}$、$\Phi_{\sigma 2}$

图 11－36　一般变压器模型(未考虑损耗)

考虑到变压器绕组的损耗，还应在电路模型的一次和二次回路中添加串联电阻 R_1 和 R_2。比较完整的变压器模型如图 11－37 所示，R_2 和 $L_{\sigma 2}$ 已折合到一次回路内。

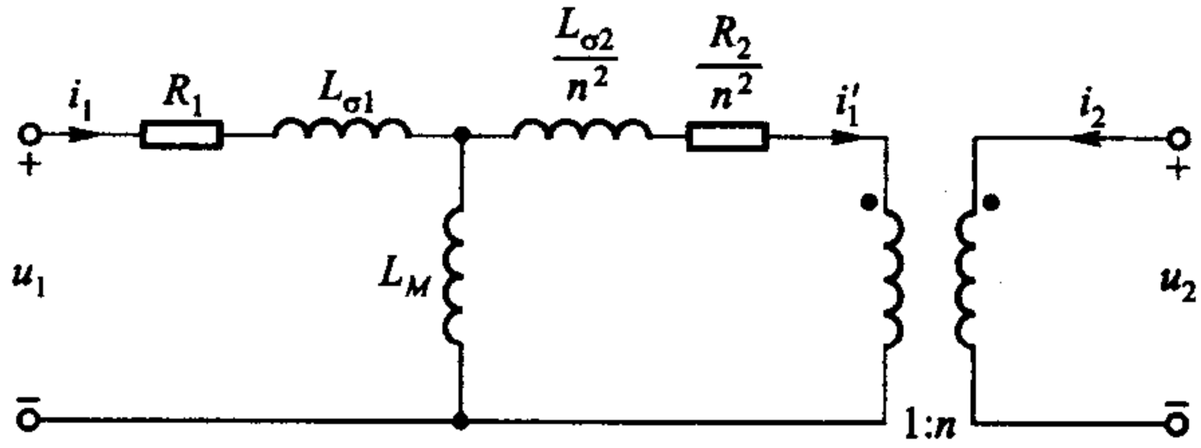


图 11－37　考虑绕组损耗的变压器模型

由于铁磁材料 $B-H$ 曲线的非线性，铁心变压器的耦合电感模型一般是非线性的，不能按线性电路的方法来分析、计算。但是，如采用含理想变压器的模型，情况就会有所不同。由于漏磁通主要是通过空气闭合的，漏感 $L_{\sigma 1}$ 和 $L_{\sigma 2}$ 基本上是线性的。磁化电感 L_M 虽是非线性的，但由于电感值很大，并联在电路上只吸取很小的电流，影响很小。因此，上述的变压器模型基本上是线性的，可按线性电路的方法来分析计算。

例 11－12　全耦合变压器如图 11－38(a)所示，试求各电流和电压。

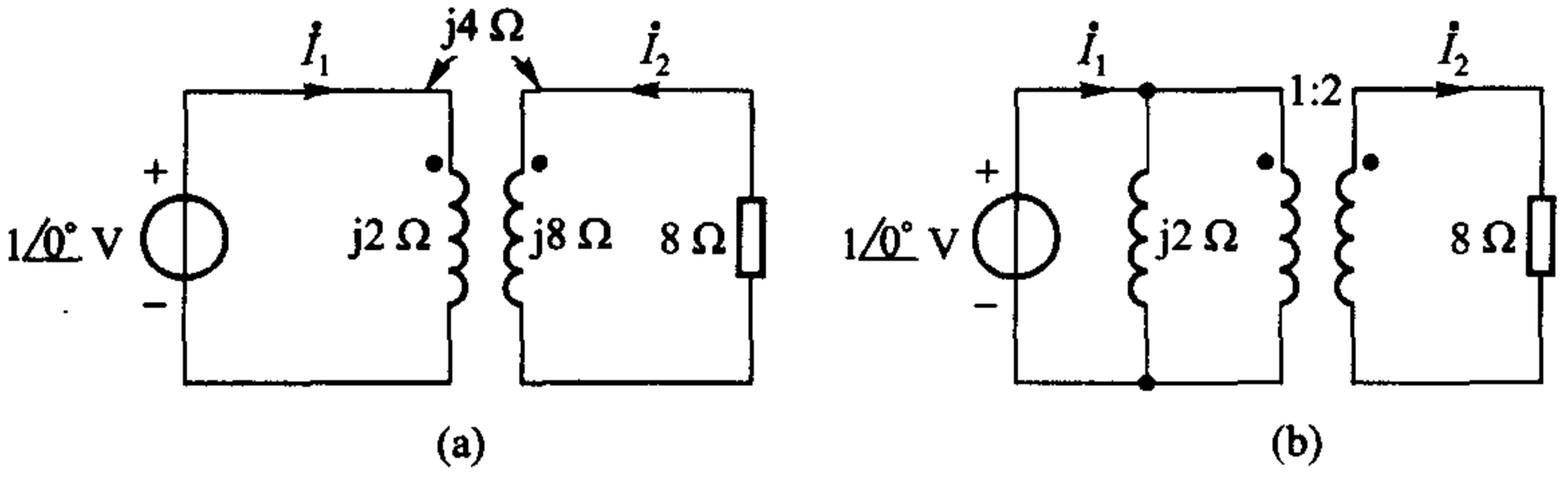


图 11－38　例 11－12

解　$$k=\frac{M}{\sqrt{L_1L_2}}=\frac{4}{\sqrt{16}}=1$$

全耦合变压器的模型如图 11－38(b)所示。其匝比由(11－43)式可得

$$n=\sqrt{\frac{\omega L_2}{\omega L_1}}=\sqrt{\frac{8}{2}}=2$$

通过理想变压器折合到一次侧的阻抗为$\frac{1}{n^2}Z$

$$\frac{1}{n^2}Z=\frac{8}{4}\Omega=2\ \Omega$$

因此电源提供的电流为流过电感的电流——$\frac{1}{\mathrm{j}2}$ A 以及流过理想变压器一次侧的电流——$\frac{1}{2}$ A。故得

$$\dot{I}_1=\left(\frac{1}{2}-\mathrm{j}\frac{1}{2}\right)\mathrm{A}$$

二次电压、电流为

$$\dot{U}_2=n\,\dot{U}_1=2\times1\angle0°\ \mathrm{V}=2\angle0°\ \mathrm{V}$$

$$\dot{I}_2=\dot{U}_2/8=\frac{1}{4}\angle0°\ \mathrm{A}$$

也可以运用网孔分析就原电路进行计算。其方程为

$$\mathrm{j}2\ \dot{I}_1-\mathrm{j}4\ \dot{I}_2=1$$

$$-\mathrm{j}4\ \dot{I}_1+(8+\mathrm{j}8)\ \dot{I}_2=0$$

由此可解得

$$\dot{I}_1=\frac{\begin{vmatrix}1 & -\mathrm{j}4\\ 0 & 8+\mathrm{j}8\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\mathrm{j}2 & -\mathrm{j}4\\ -\mathrm{j}4 & 8+\mathrm{j}8\end{vmatrix}}\mathrm{A}=\left(\frac{1}{2}-\mathrm{j}\frac{1}{2}\right)\ \mathrm{A}$$

同理可得

$$\dot{I}_2=\frac{1}{4}\ \mathrm{A}$$

输出电压为

$$\dot{U}_2 = 8 \times \dot{I}_2 = 2\ \text{V}$$

这个答案与用全耦合变压器模型求得的值完全一致。显然,用前一方法比较简便。

例 11-13　试用戴维南定理求解图 11-18(a)所示电路的二次电流。

解　为方便起见,把图 11-18(a)所示电路重绘为图 11-39(a),其中 $L_1 = 3.6\ \text{H}, L_2 = 0.06\ \text{H}, M = 0.465\ \text{H}, R_1 = 20\ \Omega, R_2 = 0.08\ \Omega, R_L = 42\ \Omega, u_S = 115\sqrt{2}\cos(314t)\ \text{V}$。由于

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{0.465}{\sqrt{3.6 \times 0.06}} = 1$$

故图 11-39(a)所示为全耦合变压器,得等效一次电路如图 11-39(b)所示,其中 2 520 Ω 为二次电阻 42 Ω(略去 R_2)折合到一次侧的数值,系由$\frac{42}{n^2}$算得,其中

$$n = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = \sqrt{\frac{0.06}{3.6}} = \sqrt{\frac{1}{60}}$$

由图 11-39(b)可求得 ab 端左侧部分的戴维南等效电路,其中

$$\dot{U}_{oc} = \frac{115\angle 0^\circ \times \text{j}1\ 130}{20 + \text{j}1\ 130}\ \text{V} \approx 115\angle 0^\circ\ \text{V}$$

$$Z_o = \frac{20 \times \text{j}1\ 130}{20 + \text{j}1\ 130}\ \Omega \approx 20\ \Omega$$

故得

$$\dot{I}_1' = \frac{115\angle 0^\circ}{20 + 2\ 520}\text{A} = \frac{115}{2\ 540}\text{A}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{1}{n}\dot{I}_1' = \sqrt{60} \times \frac{115}{2\ 540}\text{A} = 0.35\ \text{A}$$

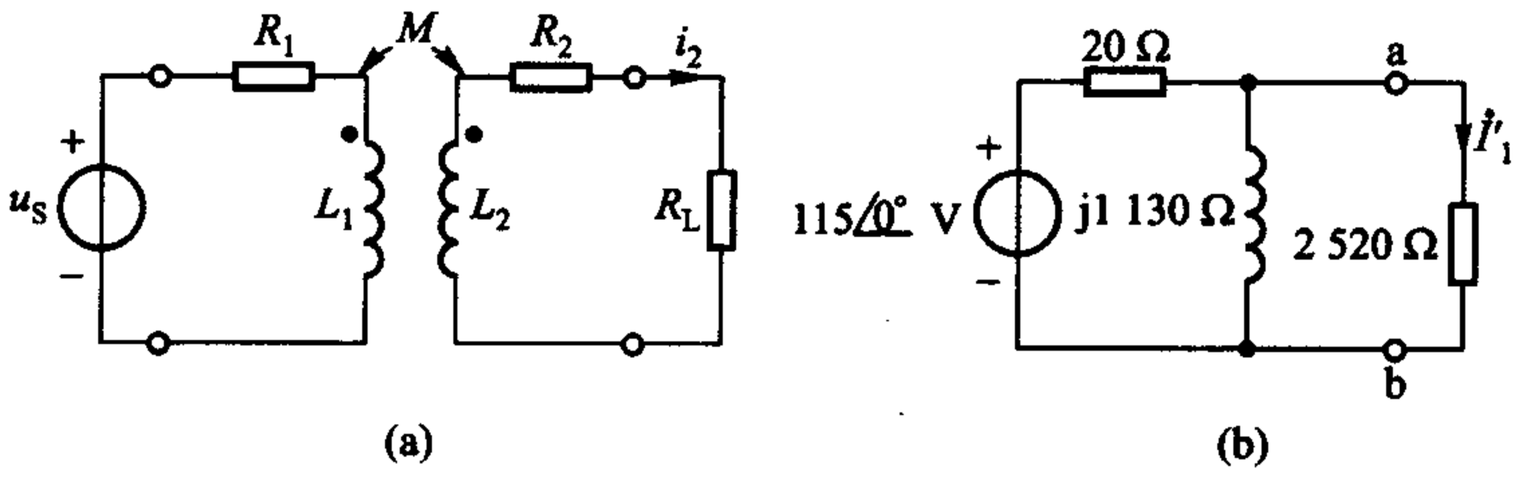


图 11-39　例 11-13

例 11-14　某调谐放大器的并联谐振电路已算得其参数为 $R = 100\ \Omega, L = 0.036\ 2\ \mu\text{H}, C = 7\ 000\ \text{pF}$,如图 11-40(a)所示。由于 L 值较小而 C 值较大,不易实现,可利用 $n = \frac{N_2}{N_1} = 10$ 的全耦合自耦变压器[见图 11-40(b)],试计算 L_2 和 C_2。

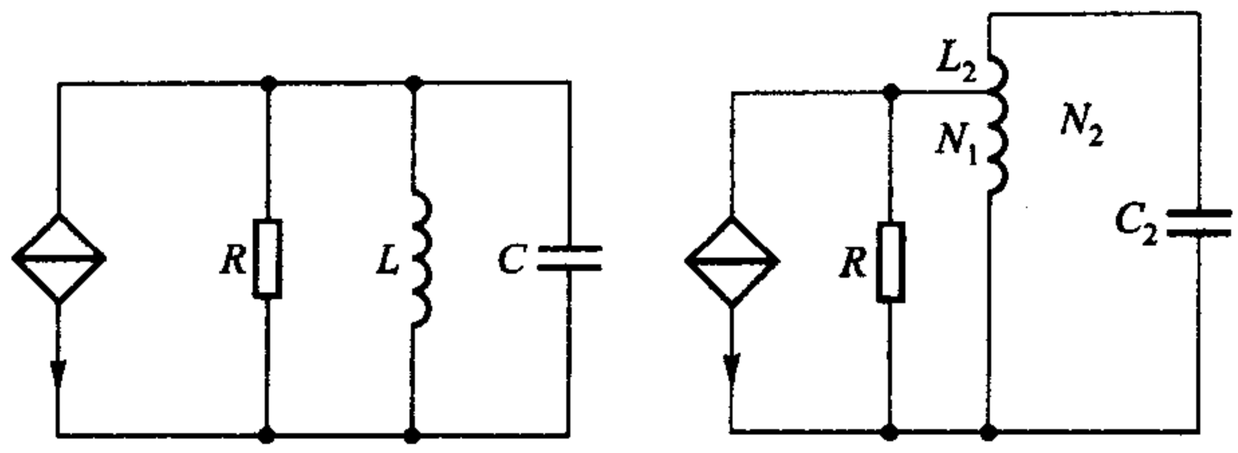


图 11－40　例 11－14

解　运用全耦合变压器模型得电路如图 11－41 所示。可得

$$L_2 = n^2 L = (100)(0.0362\times10^{-6})\text{H} = 3.62\ \mu\text{H}$$

$$C_2 = \frac{C}{n^2} = \frac{7\,000\times10^{-12}}{100}\text{F} = 70\ \text{pF}$$

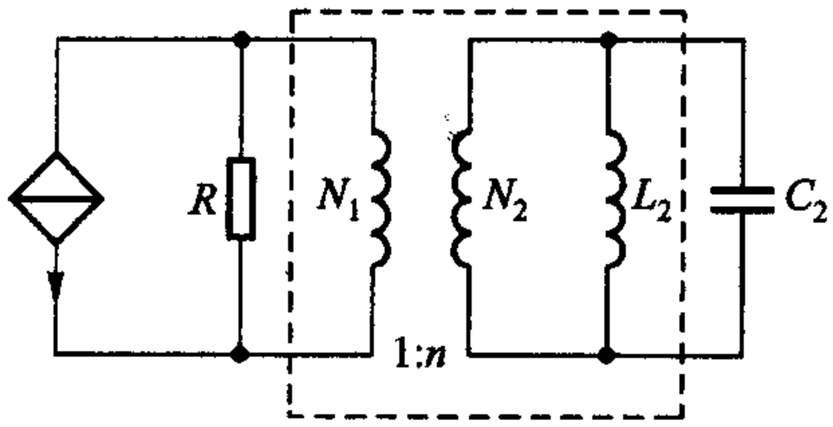


图 11－41　用全耦合变压器模型后所得电路

L_2 和 C_2 的数值较易实现，可用电感为 3.62 μH 的线圈绕在磁心上，在其匝数的$\frac{1}{10}$处抽头，即构成所需的自耦变压器。

思考题

11－6　有人认为图 11－40(b)所示抽头电感类似于抽头电阻(电位器)，因此，若总电感量为 L_2，则在匝数$\frac{1}{10}$处抽头，所得电感应为$\frac{1}{10}L_2$，对吗？

练习题

11－15　试用反映阻抗求解例 11－12 的电流 $\dot{I}_1$。

11－16　求图 11－42 所示电路的输入电流 $\dot{I}_1$ 和输出电压 $\dot{U}_2$

$(\dot{I}_1 = 0, \dot{U}_2 = 40\angle 0°\ \text{V})$

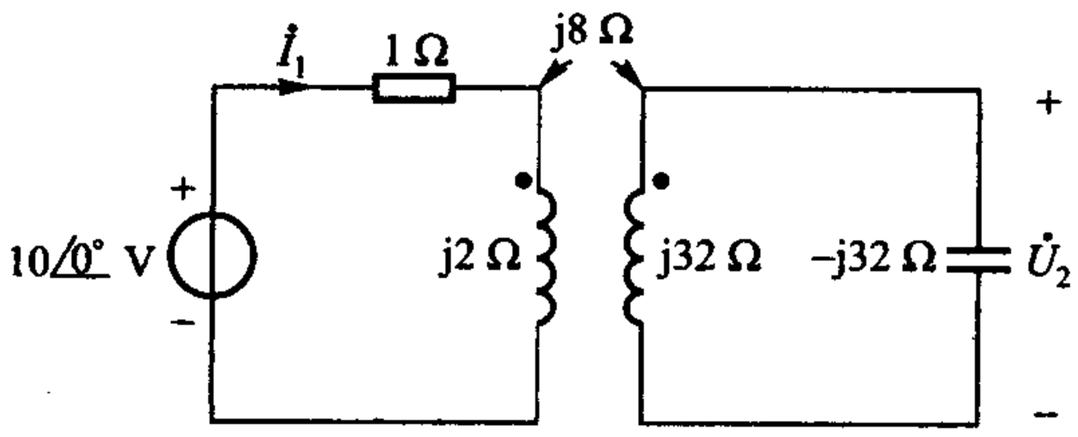


图 11－42　练习题 11－16

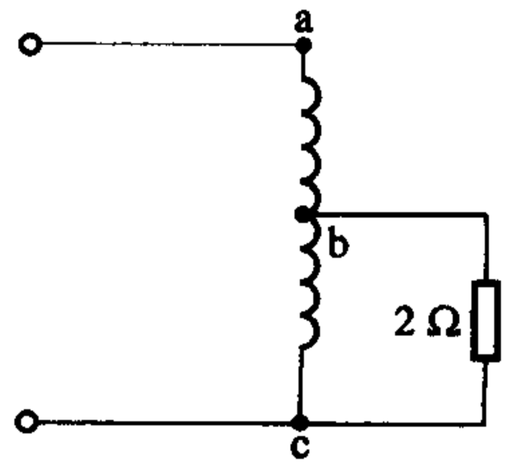


图 11－43　练习题 11－17

11－17　自耦变压器电路如图 11－43 所示，若 $U_{ac}=220$ V、$U_{bc}=200$ V，试求流过绕组的电流。

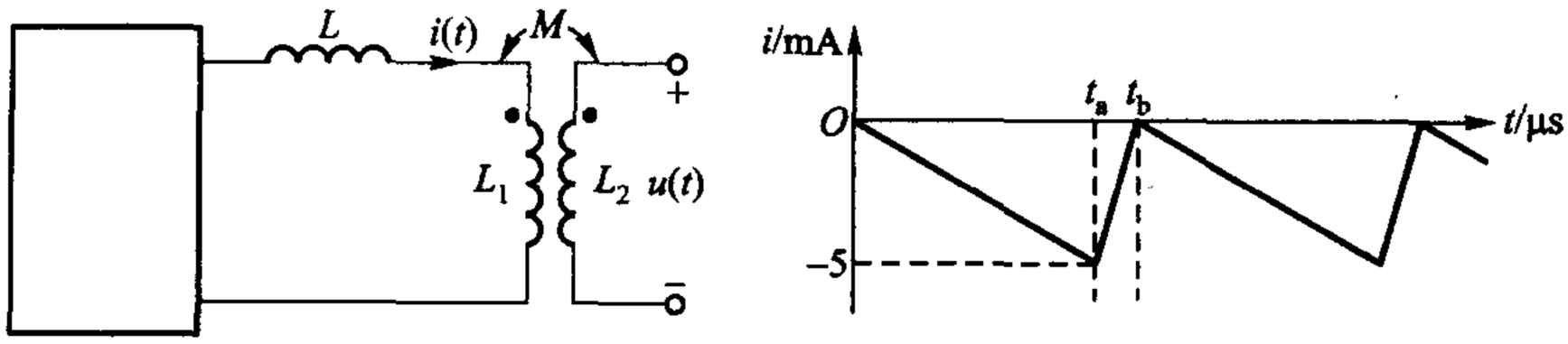
（ab 部分 90.9 A）



习题

§11－1　基本概念

11－1　在 TV 显像管中需用高电压来加速电子束，在如图题 11－1(a)所示简化电路中，L 为水平偏转线圈，其电流波形如图题 11－1(b)所示。高压取自耦合电感的 L_2 两端，两端可视为开路，已知图题 11－1(b)电流波形中 $t_b-t_a=1$ μs，若要求在该期间产生电压 u 的峰值为 15 000V，求所需 M。绘 t_a 与 t_b 期间 u 的波形。

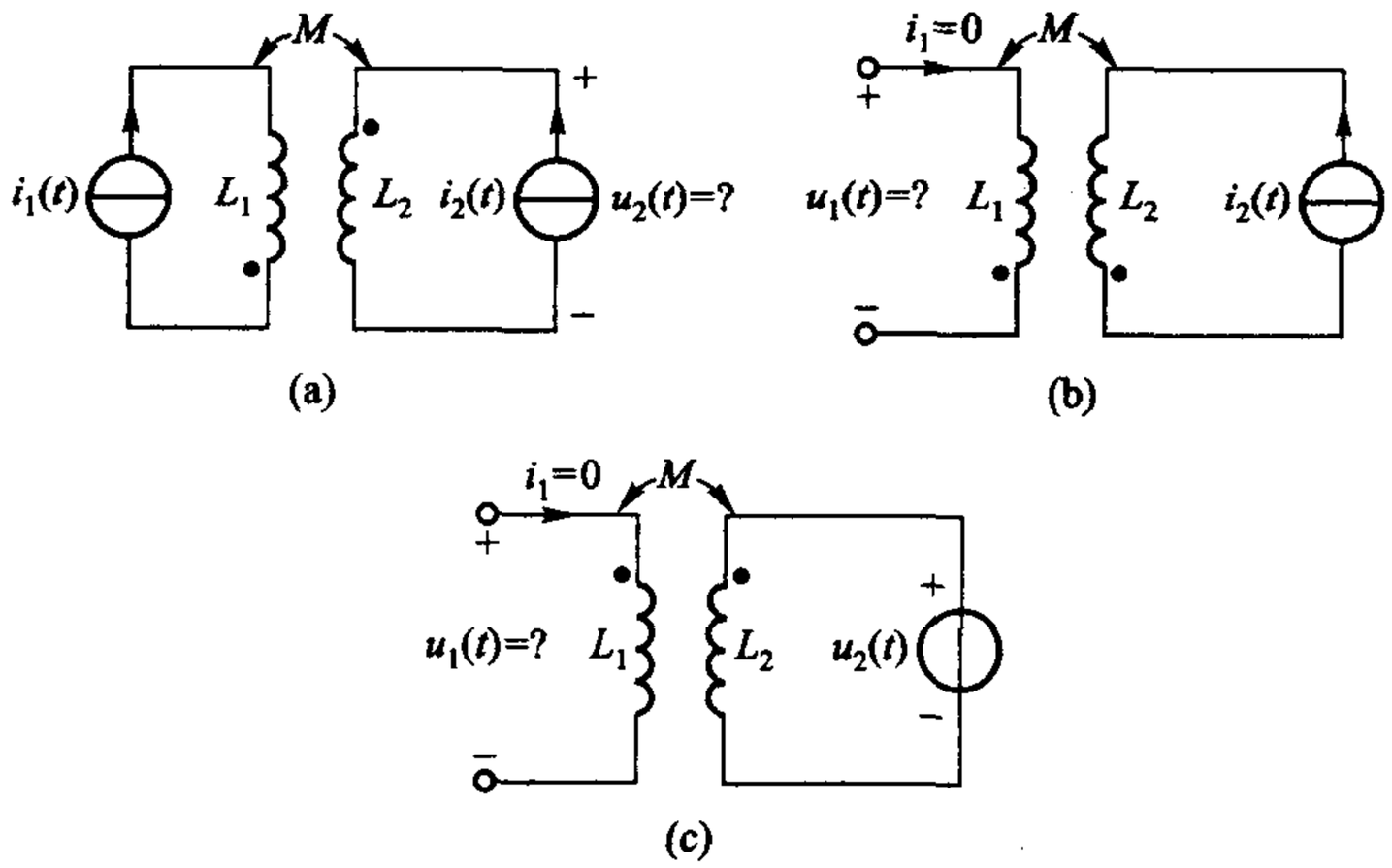


(a)　　(b)

图题 11－1

§11－2　耦合电感的 VCR　耦合系数

11－2　求图题 11－2 所示各电路中标有问号的电压或电流的表示式。

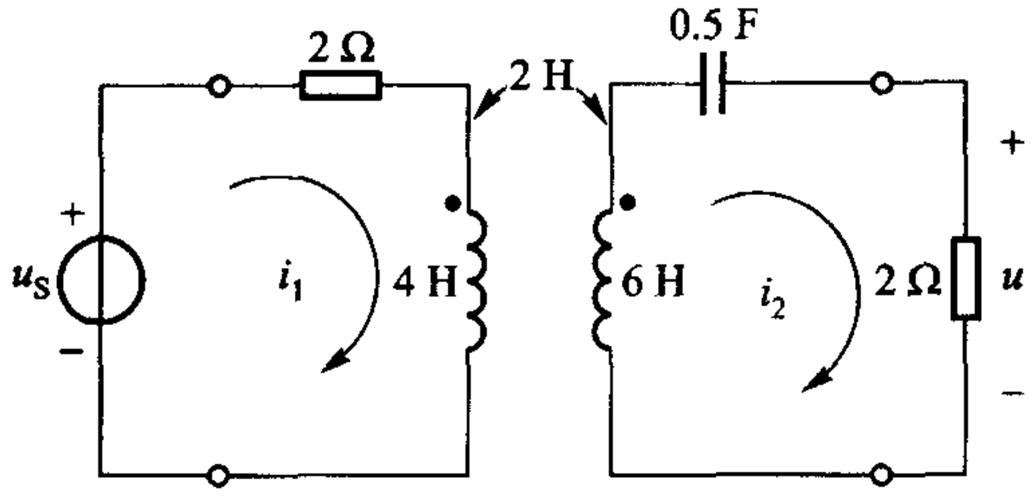


(a)　　(b)

(c)

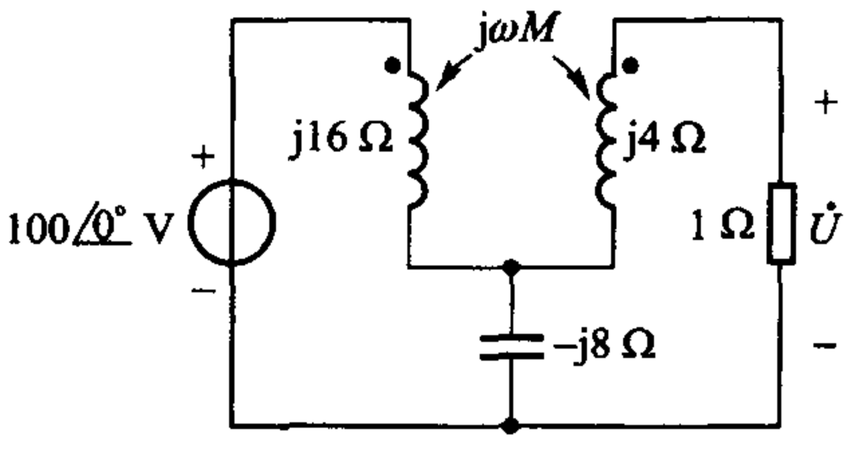
图题 11－2

11－3　图题 11－3 所示电路中，已知 $u_S = 24\cos(t + 30°)$ V，试求输出电压 $u(t)$。

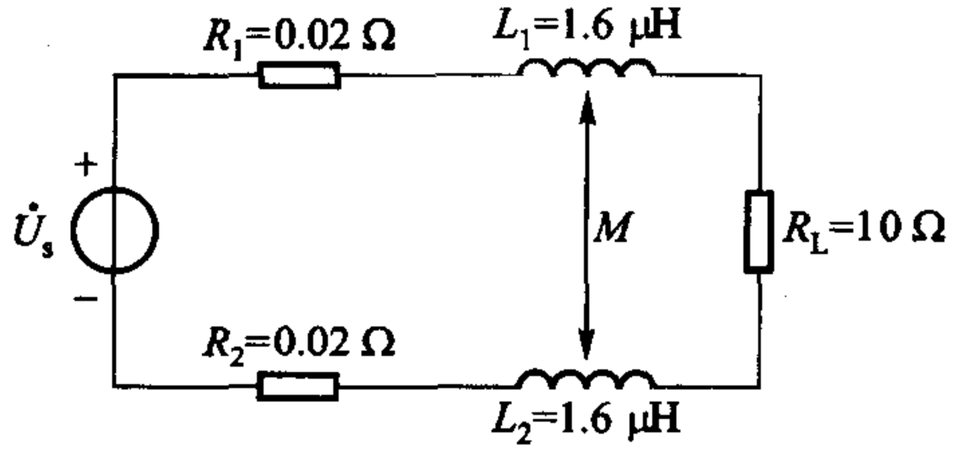


图题 11－3

11－4　图题 11－4 所示电路，耦合系数 $k = \frac{1}{2}$，求输出电压 $\dot{U}$。



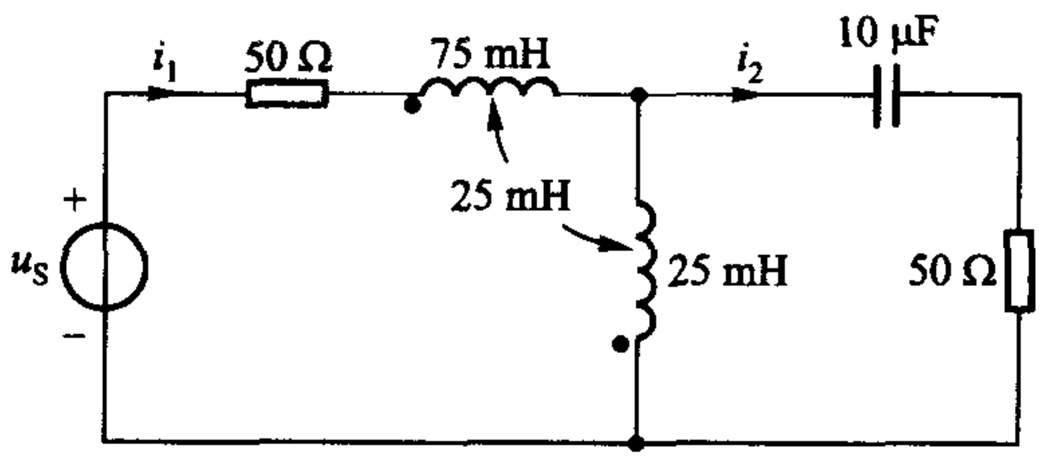
图题 11－4



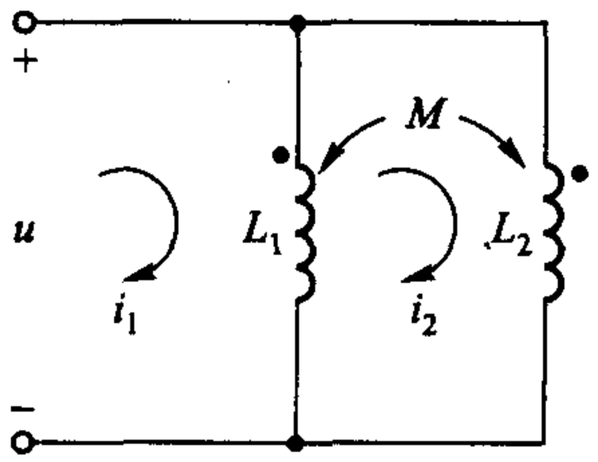
图题 11－5

11－5　同轴电缆的外导体与内导体之间总存在一些互感，图题 11－5 所示电缆用来传送 1 MHz 信号至负载 R_L，试计算耦合系数 k 为 0.75 和 1 时传送给负载的功率。已知 $\dot{U}_s = 1\angle 0°$ V。

11－6　求图题 11－6 所示电路中的 i_1 和 i_2，已知 $u_S(t) = 100\cos(10^3 t + 30°)$ V。



图题 11－6



图题 11－7

11－7　（1）试证明如图题 11－7 所示一对耦合电感并联，其等效电感 L 为

$$L = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$$

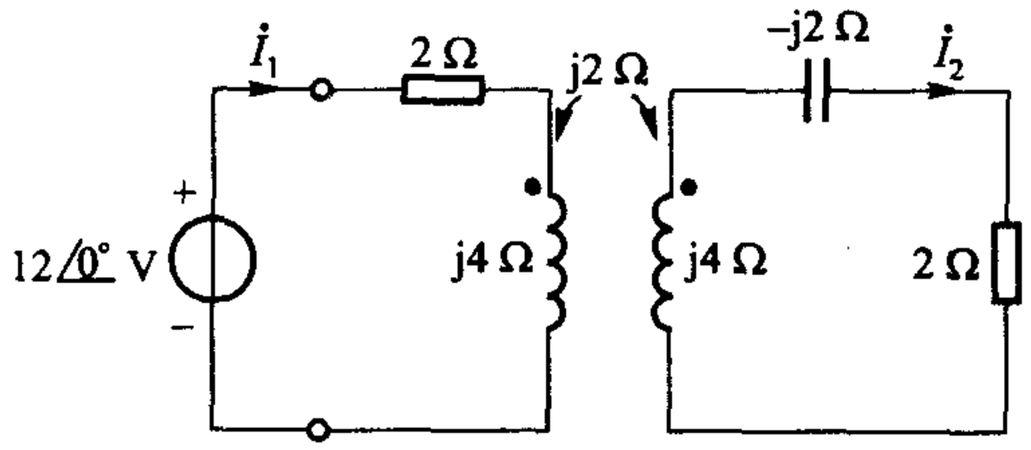
（提示：设网孔电流 i_1、i_2，列网孔方程，求解$\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$，得$\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$与 u 的关系式。）

（2）若图中两耦合电感中的任一个改变“·”端的位置，试表明此时的等效电感 L 为

$$L=\frac{L_1L_2-M^2}{L_1+L_2-2M}$$

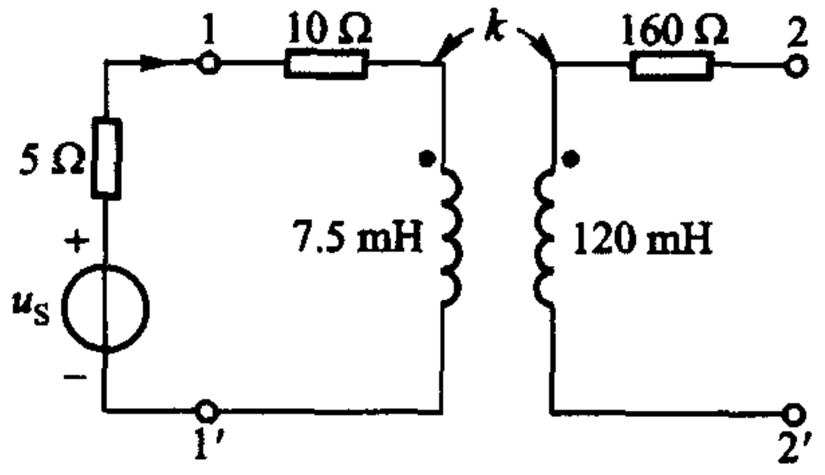
§11-3　空心变压器电路的分析　反映阻抗

11-8　电路如图 11-8 所示，试求对电源端的输入阻抗、电流 $\dot{I}_1$ 和 $\dot{I}_2$。



图题 11-8

11-9　已知空心变压器的参数：$L_1=9$ H、$R_1=200$ Ω、$L_2=4$ H、$R_2=100$ Ω 及 $k=0.5$。所接负载为 800 Ω 电阻和 1 μF 电容串联，所接正弦电压源频率为 400 rad/s，电压有效值为 300 V，内阻为 500 Ω，内电感为 0.25 H。试求传送给负载的功率 P 和空心变压器的功率传输效率。



图题 11-9

11-10　图题 11-9 所示空心变压器电路，已知 $k=0.4$，所接正弦电压源的频率为 4 000 rad/s，电压有效值为 45 V，求 22′端所接负载的阻抗应为多少，才能获得最大功率？并求最大功率和此功率占电源输送给变压器 11′端功率的百分比。

§11-4　耦合电感的去耦等效电路

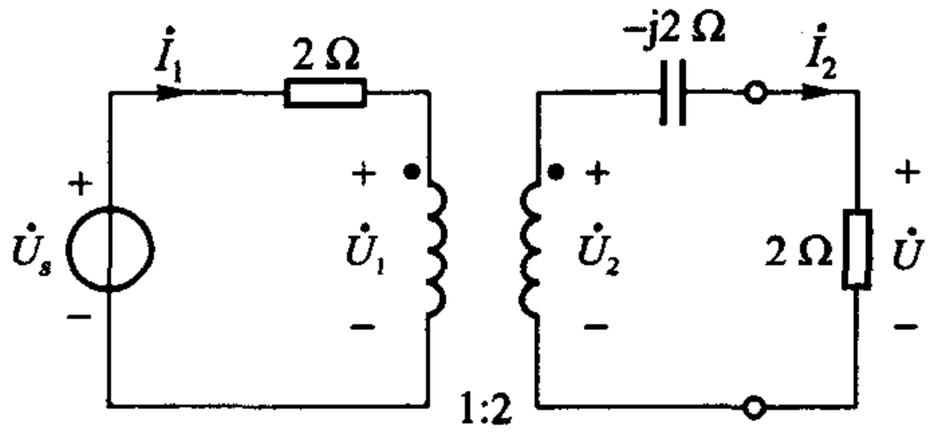
11-11　试利用 T 形去耦电路求解例 11-5。

11-12　试利用 T 形去耦电路求解例 11-7。

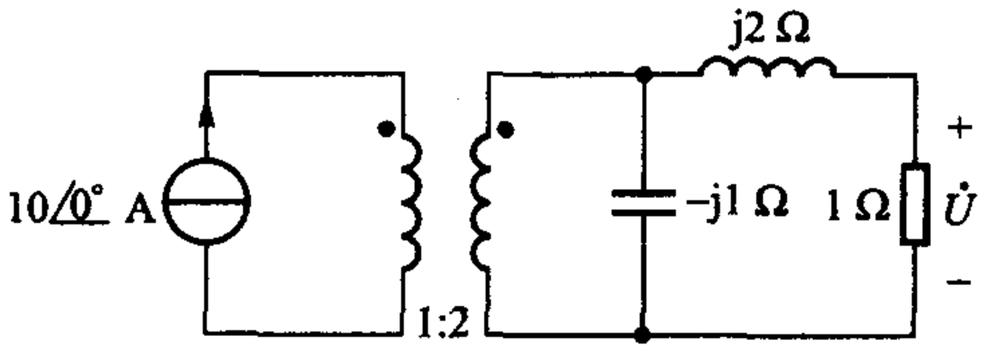
§11-5　理想变压器的 VCR

11-13　电路如图题 11-10 所示，已知 $\dot{U}=10\angle 0°$ V，试求 $\dot{U}_o$。

11-14　图题 11-11 所示电路中的理想变压器由电流源激励。求输出电压 $\dot{U}$。



图题 11 – 10

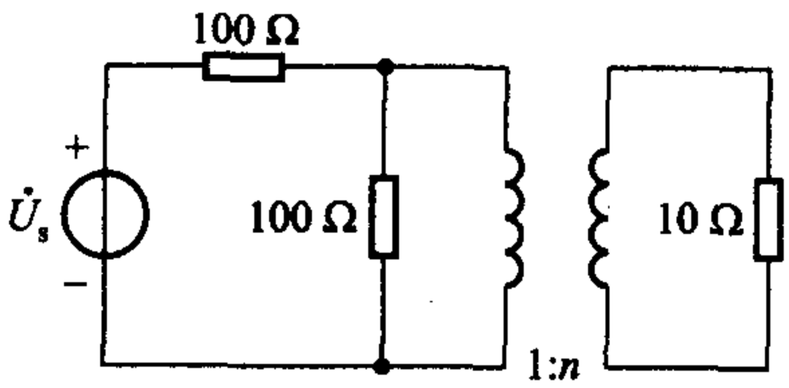


图题 11 – 11

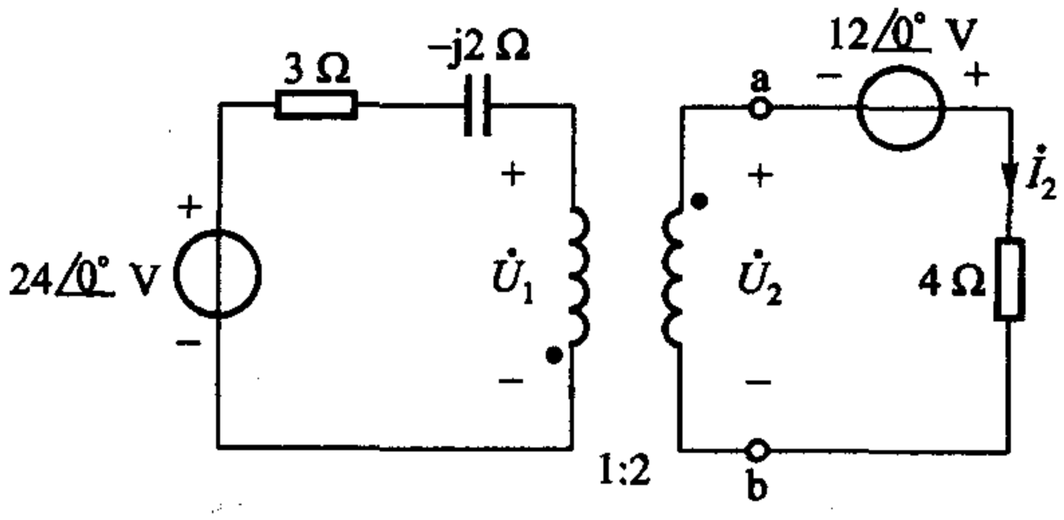
§ 11 – 6　理想变压器的阻抗变换性质

11 – 15　电路如图题 11 – 12 所示，试确定理想变压器的匝比 n，使 10 Ω 电阻能获得最大功率。

11 – 16　电路如图题 11 – 13 所示，试求 ab 左侧的戴维南等效电路，并由此求解 $\dot{I}_2$。



图题 11 – 12



图题 11 – 13

§ 11 – 8　铁心变压器的模型

11 – 17　全耦合变压器如图题 11 – 14 所示。

（1）求 ab 端的戴维南等效电路；

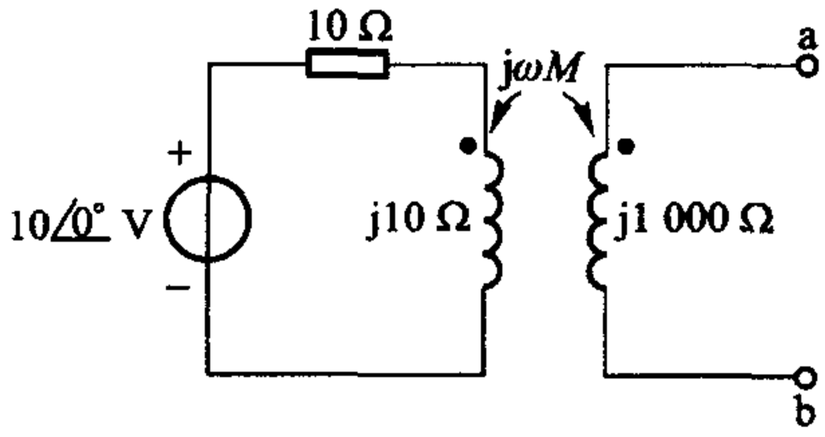
（2）若 ab 端短路，求短路电流。

11 – 18　1 000 Hz 信号源的内阻为 500 Ω，负载电阻为 10 Ω。

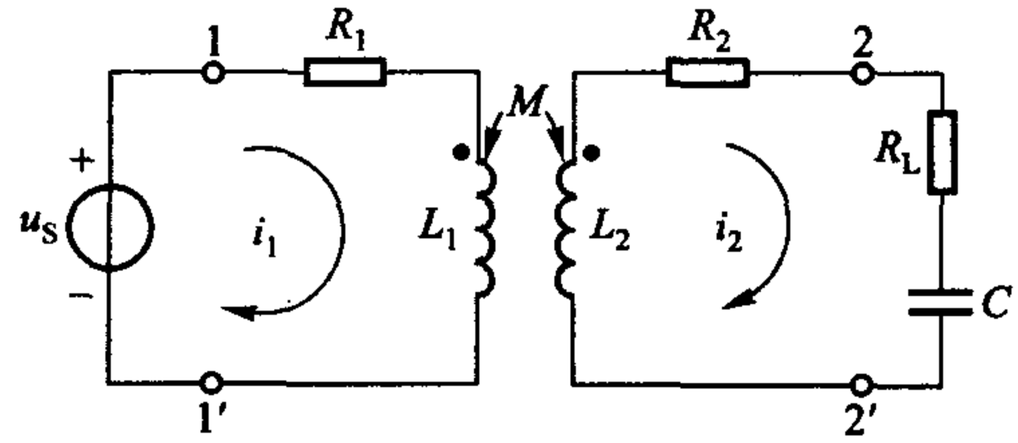
（1）如果用一个理想变压器使负载能获得最大功率，求变压器的匝比；

（2）如果用全耦合变压器，损耗可忽略不计，高压线圈的电感为 0.1 H，试计算匝比。

11－19　电路如图题 11－15 所示。已知 $R_1 = R_2 = 5\ \Omega$，$R_L = 1\ \text{k}\Omega$，$C = 0.25\ \mu\text{F}$，$L_1 = 1\ \text{H}$，$L_2 = 4\ \text{H}$，$M = 2\ \text{H}$，$u_S = 120\cos(1\,000t)\ \text{V}$，求 i_1。



图题 11－14



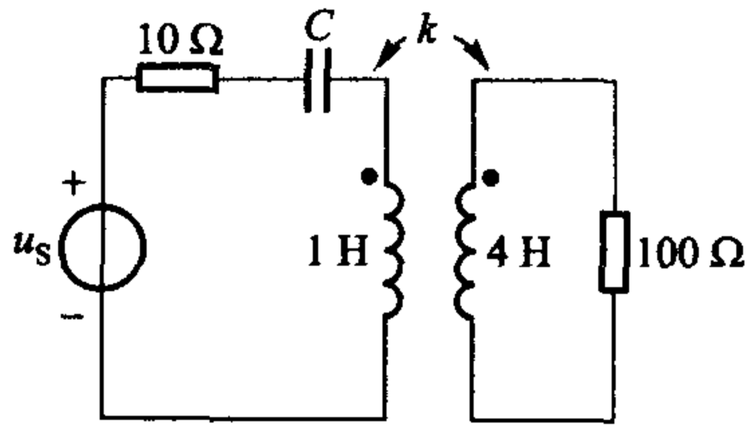
图题 11－15

综合

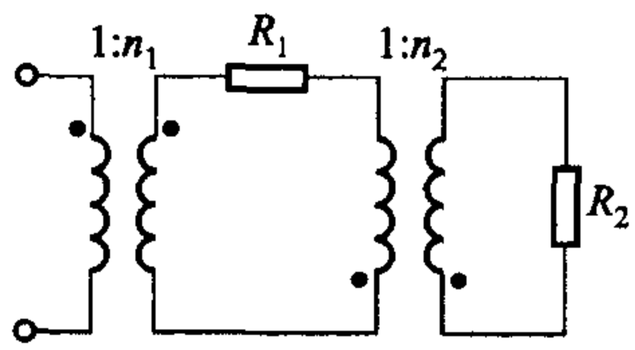
11－20　试用戴维南定理求解图 11－18(a)所示电路的二次电流 $\dot{I}_2$。

11－21　图题 11－16 所示电路在 $\omega = 1\,000\ \text{rad/s}$ 时串联谐振，试求 C，已知 $k = 0.5$。

11－22　求图题 11－17 所示电路的输入阻抗。

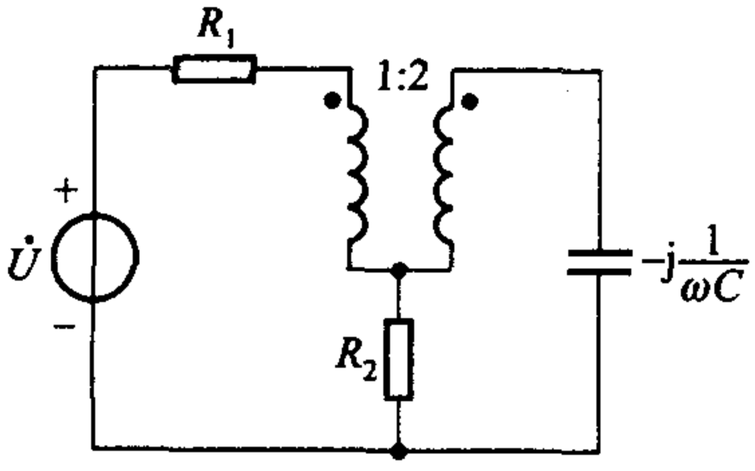


图题 11－16

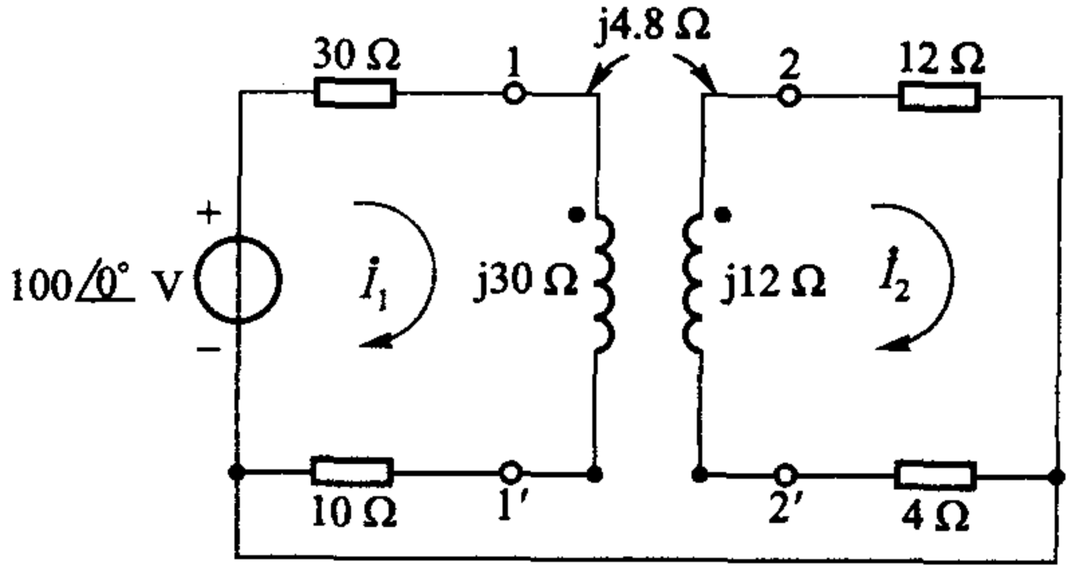


图题 11－17

11－23　图题 11－18 所示电路中，$R_1 = R_2 = 10\ \Omega$，$\dfrac{1}{\omega C} = 50\ \Omega$，$\dot{U} = 50\angle 0°\ \text{V}$。求流过 R_2 的电流 $i_R(t)$。



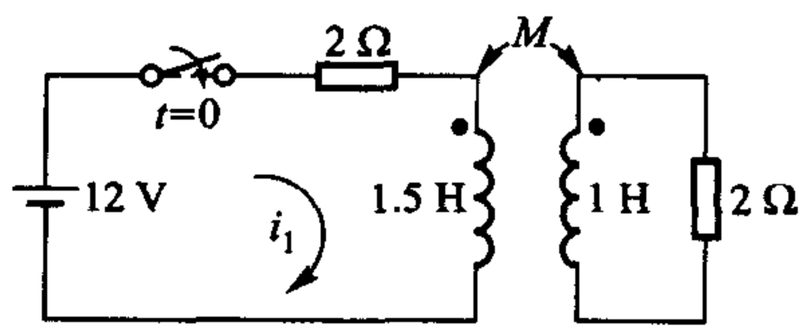
图题 11－18



图题 11－19

11－24　试用电压源替代互感电压后求解图题 11－19 所示电路中的电流 $\dot{I}_1$、$\dot{I}_2$，是否能用 T 形去耦电路求解？为什么？

11－25　求图题 11－20 所示电路的 $i_1(t)$，$t>0$。已知 $M=\frac{1}{\sqrt{2}}$H，设电路为零初始状态。



图题 11－20

第十二章

拉普拉斯变换在电路分析中的应用

本篇的前四章讨论了线性时不变动态电路的正弦稳态分析，运用的工具是相量，属变换(域)方法。作为本篇的最后一章，本章将讨论线性时不变动态电路的一般分析，涉及的激励不仅只是正弦波，研究的对象也不仅只是电路的稳态。运用的工具是拉普拉斯(Laplace)变换，简称拉氏变换，这一方法称为拉氏变换法或复频率域(s域)分析法。

实际上，在第二篇“动态电路的时域分析”中，也讨论了动态电路的一般分析，除直流一阶电路的三要素法外，都是用微分方程法(经典法)来求解的。由于列写和求解微分方程的困难，当时只着重于R、L、C的串联和并联电路。更复杂的电路将如何处理？运用相量，正弦稳态分析可类比电阻电路分析来解决，一般动态电路分析是否也能如此？这一章将回答这些问题。

本章内容经过仔细安排。如仅需了解s域分析方法最基本的概念，学习§12-1即可。根据需要增添§12-2、§12-3或再增添§12-4直至全部。

§12-1 拉普拉斯变换及其几个基本性质

时间函数$f(t)$的拉普拉斯变换记为$\mathscr{L}[f(t)]$其定义为

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[f(t)] &= \int_{0_-}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t \\ &= \int_{0_-}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{12-1}$$

其中$s=\sigma+\mathrm{j}\omega$称为复频率，积分限$0_-$和$\infty$是固定的，所以积分的结果与$t$无关，而只取决于$s$，即复频率$s$的函数，记为

$$\mathscr{L}[f(t)] = F(s) \tag{12-2}$$

$F(s)$即为函数$f(t)$的拉普拉斯变换。在电路中用$U(s)$和$I(s)$分别表示$u(t)$和$i(t)$的拉普拉斯变换。拉普拉斯变换以后简称拉氏变换。

应该认识到：$u(t)$和$i(t)$是时间t的函数，即时域变量。它们可以用电压表及电流表来测定，而且还可以用示波器观测到它们随时间变化的情况。时域变量是实际存在的变量，而它们的拉氏变换$U(s)$和$I(s)$则是一种抽象的变量。之

所以把直观的时域变量变为抽象的复频率变量，是为了便于分析和计算电路问题，待得出结果后再反变换为相应的时域变量。这与以前在分析正弦稳态电路时，把直观的正弦量（时域变量）变为抽象的相量（频域变量），以求简化电路的分析、计算，目的完全相同，均属变换（域）方法。

为方便起见，仍用 $u(t)$ 的单位作为 $U(s)$ 的单位，用 $i(t)$ 的单位作为 $I(s)$ 的单位。这种做法只是用以表明时域变量原来用的是什么单位，并不意味着变换量具有任何物理性质。①

请注意：在定义式中，用 0_- 作为积分下限。如果 $f(t)$ 包含一个 $t=0$ 时刻的冲激 $\delta(t)$，则定义积分式中将包含这一冲激。

例 12－1　求单位阶跃函数 $\varepsilon(t)$ 的拉氏变换。

解

$$\mathscr{L}[\varepsilon(t)] = \int_{0_-}^{\infty} \varepsilon(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \int_{0_-}^{\infty} \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-st}\Big|_{0_-}^{\infty} = -\frac{1}{s}(0-1) = \frac{1}{s}$$

例 12－2　求余弦函数 $\cos(\omega t)$ 的拉氏变换。

解

$$\mathscr{L}[\cos(\omega t)] = \int_{0_-}^{\infty} \cos(\omega t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$$= \int_{0_-}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}}{2}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$$= \int_{0_-}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-(s-\mathrm{j}\omega)t} + \mathrm{e}^{-(s+\mathrm{j}\omega)t}}{2}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-\mathrm{j}\omega} + \frac{1}{s+\mathrm{j}\omega}\right) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

例 12－3　求冲激函数 $\delta(t)$ 的拉氏变换。

解

$$\mathscr{L}[\delta(t)] = \int_{0_-}^{\infty} \delta(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \int_{0_-}^{0_+} \delta(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$$= \mathrm{e}^{-s(0)} = 1$$

◀

求函数 $f(t)$ 的拉氏变换并非本课程的任务，事实上，如果求解电路问题每次都需从求激励函数的拉氏变换做起，会感到很不方便。在工程技术上，激励函数是有限的，通常有表可查（如同查对数表），少数几个常用的还可记住。

表 12－1 给出了一些常用时间函数的拉氏变换，可供查阅使用②。当 $t<0$ 时，表中所有函数 $f(t)$ 都假定为零，亦即，它们都可认为被 $\varepsilon(t)$ 相乘。

---

① 有些文献用拉普拉斯伏（Laplaced Volt）作为 $U(s)$ 的单位。$U(s)$ 的实际单位为伏·秒。

② 一些数学手册提供拉普拉斯变换表。

表 12－1　初等函数的拉普拉斯变换简表

序号	$f(t)$	$F(s)$
1	$\delta(t)$	1
2	$\epsilon(t)$	$\frac{1}{s}$
3	A	$\frac{A}{s}$
4	$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}(n=1、2、\cdots)$
5	$e^{-\alpha t}$（α 实数或复数）	$\frac{1}{s+\alpha}$
6	$\frac{t^n}{n!}e^{-\alpha t}$（$\alpha$ 实数或复数）	$\frac{1}{(s+\alpha)^{n+1}}(n=1、2、\cdots)$
7	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
8	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
9	$e^{-\alpha t}\cos(\omega t)$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$
10	$e^{-\alpha t}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$
11	$ae^{-\alpha t}\cos(\omega t)+\frac{(b-a\alpha)}{\omega}e^{-\alpha t}\sin(\omega t)$	$\frac{as+b}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$
12	$2\lvert K\rvert e^{-\alpha t}\cos(\omega t+\angle K)$	$\frac{K}{s+\alpha-j\omega}+\frac{K^*}{s+\alpha+j\omega}$

采用拉氏变换求解电路问题是基于它的一些性质，此处仅阐述几个与本章有关的几个最基本的性质。

线性性质　若 $\mathscr{L}[f_k(t)]=F_k(s)$，$k=1、2$，则对任何常数 α_1 和 α_2（实数或复数）

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[\alpha_1 f_1(t)+\alpha_2 f_2(t)] &= \alpha_1\mathscr{L}[f_1(t)]+\alpha_2\mathscr{L}[f_2(t)]\\ &= \alpha_1 F_1(s)+\alpha_2 F_2(s)\end{aligned}\tag{12-3}$$

证明　$\mathscr{L}[\alpha_1 f_1(t)+\alpha_2 f_2(t)]=\int_{0_-}^{\infty}[\alpha_1 f_1(t)+\alpha_2 f_2(t)]e^{-st}dt$

$$\begin{aligned}&= \alpha_1\int_{0_-}^{\infty}f_1(t)e^{-st}dt+\alpha_2\int_{0_-}^{\infty}\alpha_2 f_2(t)e^{-st}dt\\ &= \alpha_1 F_1(s)+\alpha_2 F_2(s)\end{aligned}$$

◀

应用　KCL、KVL 的拉氏变换形式或称为 s 域（复频域）形式

对集总电路的任一节点，在任一时刻，流出节点的电流代数和为零，即

$$\sum_{k=1}^{K} i_k = 0$$

若 $\mathscr{L}[i_k(t)] = I_k(s)$，则由线性性质可得

$$\sum_{k=1}^{K} I_k(s) = 0 \tag{12-4}$$

此即 KCL 的拉氏变换形式。类似地，还可得到 KVL 的拉氏变换形式为

$$\sum_{k=1}^{K} U_k(s) = 0 \tag{12-5}$$

式中 $U_k(s) = \mathscr{L}[u_k(t)]$。

微分性质　若

$$\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$$

则

$$\mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right] = sF(s) - f(0_-) \tag{12-6}$$

证明　利用分部积分法，有

$$\mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right] = \int_{0_-}^{\infty} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$$= f(t)\mathrm{e}^{-st}\Big|_{0_-}^{\infty} - \int_{0_-}^{\infty} f(t)(-s)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$$= s\int_{0_-}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t - f(0_-)$$

$$= sF(s) - f(0_-)$$

不难看到，当初始条件均为零时，在时域内对 t 求一次导数即相当于在复频域内乘以 s。因此，时域内的微分运算相当于复频域内的乘法运算，其情况类似于两数相乘在经过取对数的变换后即简化为相加问题。

积分性质　若　　$\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$

则

$$\mathscr{L}\left[\int_{0_-}^{t} f(\xi)\mathrm{d}\xi\right] = \frac{1}{s}F(s) \tag{12-7}$$

证明

$$\mathscr{L}\left[\int_{0_-}^{t} f(\xi)\mathrm{d}\xi\right] = \int_{0_-}^{\infty} \left[\int_{0_-}^{t} f(\xi)\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

用分部积分法计算，为此令

$$u = \int_{0_-}^{t} f(\xi)\mathrm{d}\xi \qquad \mathrm{d}v = \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}u = f(\xi)\mathrm{d}\xi \qquad v = -\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-st}$$

可得

$$\mathscr{L}\left[\int_{0_-}^{t} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right] = -\left[\int_{0_-}^{t} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right]\left(\frac{\mathrm{e}^{-st}}{s}\right)\Bigg|_{0_-}^{\infty} + \frac{1}{s}\int_{0_-}^{\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$$

由于当 $t\to\infty$ 时 $\mathrm{e}^{-st}\to 0$，上式第一项在 $t=\infty$ 时之值应为零；当 $t\to 0$ 时该项在 $t=0$ 时之值也显然为零。故得

$$\mathscr{L}\left[\int_{0_-}^{t} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right] = \frac{1}{s}\int_{0_-}^{\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{s}F(s)$$

由此可见，在时域中的积分运算相当于复频率域中的除法运算。

◀

应用　电路元件 VCR 的 s 域（复频率域）形式

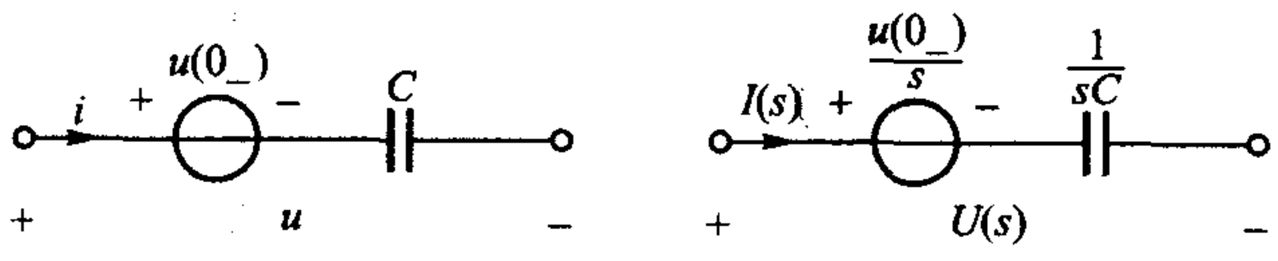
线性时不变电容的 VCR 已如（5－7）式所示，如设初始时刻 $t_0=0_-$ 则可表示为

$$u(t) = u(0_-) + \frac{1}{C}\int_{0_-}^{t} i(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

取拉氏变换，得

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[u(t)] &= \mathscr{L}\left[u(0_-) + \frac{1}{C}\int_{0_-}^{t} i(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right]\\ &= \mathscr{L}[u(0_-)] + \mathscr{L}\left[\frac{1}{C}\int_{0_-}^{t} i(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right]\\ &= \frac{u(0_-)}{s} + \frac{1}{C}\,\frac{1}{s}I(s)\end{aligned} \tag{12-8}$$

初始电压 $u(0_-)$ 为常数故由表 12－1 第 3 项可知其拉氏变换为 $\dfrac{u(0_-)}{s}$。式中后一项则为上述积分性质的结果。该式即电容 VCR 的 s 域形式，且由该式可得电容的 s 域模型如图 12－1（b）所示，图 12－1（a）所示则为时域模型，参看图5－8。注意初始电容电压以串联电压源的形式出现在 s 域模型中。



(a)　(b)

图 12－1　$t\geqslant 0_-$ 电容元件的时域模型和 s 域模型

线性时不变电感的 VCR（5－19）式中如令初始时刻 $t_0=0_-$ 则可得

$$i(t) = i(0_-) + \frac{1}{L}\int_{0_-}^{t} u(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

类似于（12－8）式的推导过程，可得

$$I(s) = \frac{i(0_-)}{s} + \frac{1}{L} \cdot \frac{1}{s} U(s) \tag{12-9}$$

此即为电感 VCR 的 s 域形式，其 s 域模型如图 12－2(b)所示图 12－2(a)则为时域模型，参看图 5－17。注意初始电流以并联电流源的形式出现在模型中。

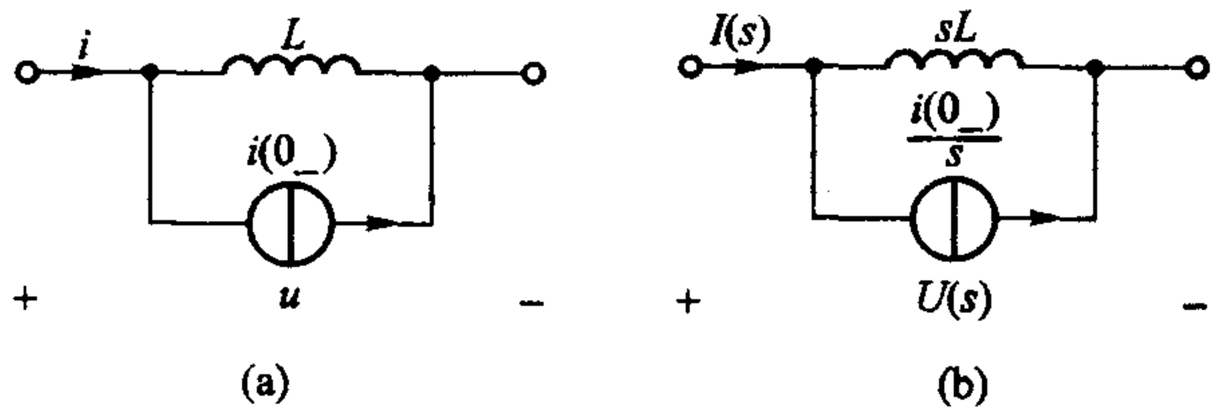


图 12－2　$t \geqslant 0_-$ 电感元件的时域模型和 s 域模型

至于线性时不变电阻 VCR 的 s 域形式，则根据线性性质由它的时域 VCR 不难得到

$$U(s) = RI(s) \tag{12-10}$$

其 s 域模型仍以 R 表示。

结论　线性时不变电路中的电压、电流如表示为它们的拉氏变换式，则 KVL、KCL 仍能满足，且 R、L、C 等电路元件的 VCR 也能以电压、电流的拉氏变换表示，故电路分析、计算可在 s 域进行，称为 s 域分析法。用拉氏变换求解电路，属变换方法，可按 §8－1 所示的基本思路分为三个步骤进行。

例 12－4　练习题 6－14(图 6－61)所示电路，给定参数如图 12－3 中所示，试用 s 域分析法求解。

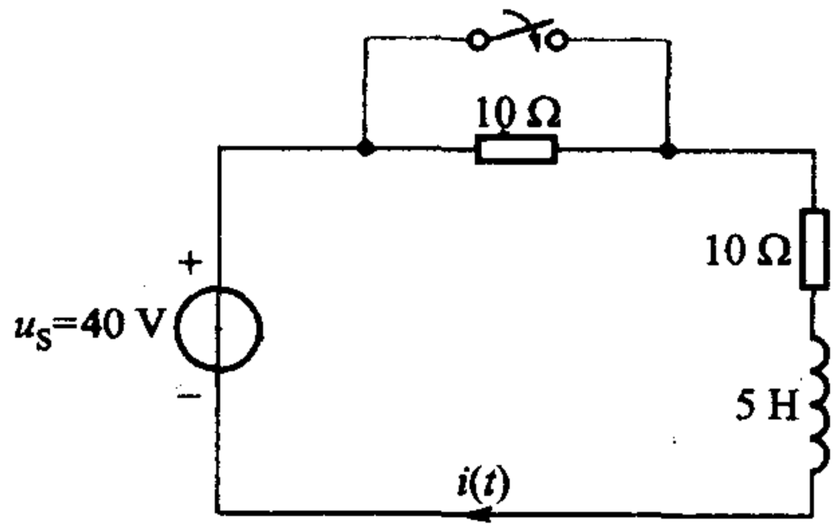


图 12－3　例 12－4

解　仿照相量法，分三步求解。

(a) 求给定电压源电压 u_S 的拉氏变换，由表 12－1 可知

$$\mathscr{L}[u_S] = \mathscr{L}[40] = \frac{40}{s}$$

上述步骤与相量法中求给定正弦电压的相量相当。

由于电容、电感 $t=0_-$ 时的初始状态自动包含在它们的 s 域模型中，因此，在这一步骤中，须求出 $u_C(0_-)$、$i_L(0_-)$ 等初始值，本题

$$i_L(0_-)=\frac{40}{10+10}\text{A}=2\ \text{A}$$

作出电路的 s 域模型，这与相量法中作出相量模型相当。s 域模型作出后，同样可类比电阻电路进行分析、计算。

（b）本题的 s 域模型如图 12－4 所示，注意电感 s 域模型中的并联初始电流源电流$\frac{2}{s}$及其方向。有了这一模型，便可利用电阻电路解法去求解未知量$I(s)$。为方便计，需要把电感的并联模型等效变换为串联形式模型，这类似于 §4－5所述电阻并联电流源电路等效变换为电阻串联电压源电路。图 12－4 右侧即为变换后的模型，其中电压源电压为$\left(\frac{2}{s}\right)(5s)=10$。由该模型可得

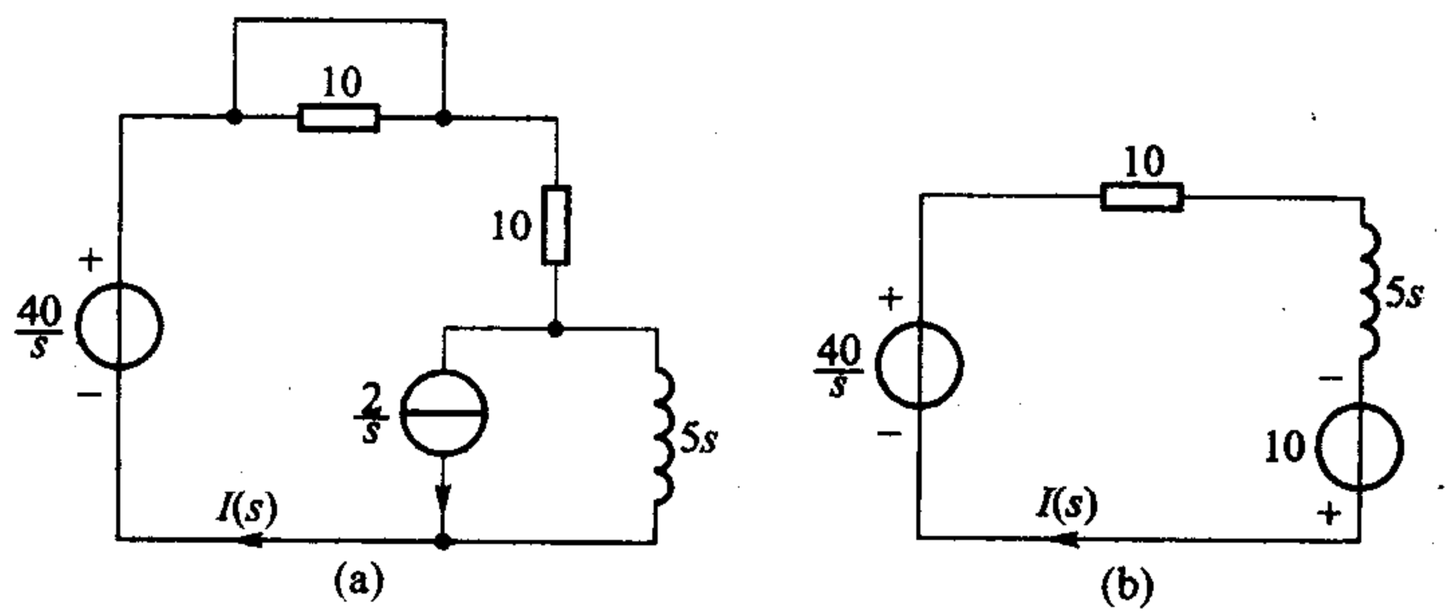


图 12－4　图 12－3 电路的 s 域模型

$$I(s)=\frac{\frac{40}{s}+10}{5s+10}=\frac{40+10s}{s(5s+10)}$$
$$=\frac{2(s+4)}{s(s+2)}$$

此为 s 域的解答。

（c）反变换　这一步骤不如相量法中的反变换那样简单易行。可以利用表 12－1 由 $F(s)$ 反求 $f(t)$。为此，需把 $I(s)$ 分解成部分分式，即

$$I(s)=\frac{2(s+4)}{s(s+2)}=\frac{K_1}{s}+\frac{K_2}{s+2}$$

常数 K_1 和 K_2 的数值应使上式成为恒等式，故

$$K_1(s+2)+K_2(s)=2(s+4)$$

即

$$(K_1 + K_2)s + 2K_1 = 2s + 8$$

比较系数后可得

$$K_1 + K_2 = 2$$

$$2K_1 = 8$$

解得

$$K_1 = 4, K_2 = -2$$

故得

$$I(s) = \frac{4}{s} - \frac{2}{s+2}$$

由表 12 - 1 第 3、5 项可得

$$i(t) = \mathscr{L}^{-1}[I(s)] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{4}{s}\right] - \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{s+2}\right]$$

$$= (4 - 2e^{-2t})\varepsilon(t)\,\mathrm{A}$$

反拉普拉斯变换记为 $\mathscr{L}^{-1}$。◀

读者会感到本题用三要素法似更容易，确实如此。然而，对于不能使用三要素法的电路①，情况就不同了，s 域分析法避免列写和求解微分方程，且能利用电阻电路的分析方法。

从数学观点看，拉氏变换原是求解非齐次、线性、常系数微分方程通解的一种方法，正如相量是求解非齐次、线性、常系数微分方程右端为正弦函数时特解的一种方法。线性时不变动态路由线性、常系数微分方程来描述。但我们所称的 s 域分析法，并非是列出微分方程后再用拉氏变换去简化方程的求解，而是越过列写微分方程这一步，在 s 域内得出电路的模型进行求解。在本节中已说明了这点。事实上，我们已把本书的三篇内容“同归”于此，倒过来说，相量分析和电阻电路分析可看成是 s 域分析法的特例。变换(域)方法是本书基本结构中三大基本方法中涉及面最广的方法！

思考题

12 - 1　试利用拉氏变换的微分性质求得上章图 11 - 9 所示耦合电感的 s 域模型，设 i_1、i_2 的初始值均为零。

12 - 2　试求图 11 - 25 所示理想变压器的 s 域模型。

12 - 3　试求四种受控源的 s 域模型。

12 - 4　试作出类似于图 8 - 19 用 s 域分析法求解线性时不变动态电路的流程图。

---

① 如习题 12 - 3，12 - 4。

练习题

12-1　求 $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{2s+3}{(s+1)(s+2)}\right]$。

$[(e^{-t}+e^{-2t})\varepsilon(t)]$

12-2　求 $\mathscr{L}[t\varepsilon(t)-\varepsilon(t)]$。

$\left(\dfrac{1}{s^2}-\dfrac{1}{s}\right)$

§12-2　反拉普拉斯变换——赫维赛德展开定理

有拉氏变换就有反拉氏变换。

若 $F(s)$ 为有理代数函数且可表示为两个 s 多项式之比，可把 $F(s)$ 展开为部分分式之和。这时每一项分式应能在拉氏变换表中找到相应的函数 $f(t)$，从而较容易地解决反变换问题。例 12-4 就是按照这一思路完成反变换的，所用的方法是初等代数中的待定（或称比较）系数法。但这一方法在部分分式多于三项时，计算繁琐。赫维赛德展开定理提供了工程技术上常用的求反拉氏变换的方法。

设 $F(s)$ 可表示为 s 的多项式之比，如

$$F(s)=\frac{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}{b_m s^m+a_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}=\frac{A(s)}{B(s)} \tag{12-11}$$

其中 n 为分子 $A(s)$ 的阶，m 为分母 $B(s)$ 的阶。我们将区别两种情况，$n\geqslant m$ 和 $n<m$。若 $n\geqslant m$，则 $F(s)$ 称为假分式；若 $n<m$，则 $F(s)$ 称为真分式。如果 $F(s)$ 为假分式，则总能分解为一个 s 多项式和一个真分式之和，例如

$$F(s)=\frac{s^3+4s^2+6s+6}{s^2+3s+2}$$

分母去除分子（长除法）可得

$$F(s)=s+1+\frac{s+4}{s^2+3s+2}$$

以下的讨论仅限于 $F(s)$ 为真分式的情况。

我们再分为两种情况来研究。其一，方程式 $B(s)=0$ 为不等根的情况。先举一例，设

$$F(s)=\frac{2s+8}{s(s+2)}=\frac{K_1}{s}+\frac{K_2}{s+2}$$

此即例 12-4 中所遇到的 $F(s)$ 及其部分分式，$B(s)=0$ 的两根为 0、-2。现采用另一思路来求解 K_1 和 K_2。欲求 K_1，可用 K_1 所属分式的分母 s 去乘 $F(s)$，这

样可使 K_1 出现在等式之中，即

$$sF(s)=\frac{2s+8}{s+2}=K_1+\frac{sK_2}{s+2}$$

显然，如欲求得 K_1，须使含 K_2 的分式为零。由于上式对任何 s 值都应成立，可求 $s=0$ 时上列等式之值，即

$$\left.\frac{2s+8}{s+2}\right|_{s=0}=K_1+\left.\frac{sK_2}{s+2}\right|_{s=0}=K_1$$

故得

$$K_1=\frac{2(0)+8}{0+2}=\frac{8}{2}=4$$

同样，K_2 可求得如下：

$$(s+2)F(s)=\frac{2s+8}{s}=\frac{(s+2)K_1}{s}+K_2$$

$$\left.\frac{2s+8}{s}\right|_{s=-2}=\left.\frac{(s+2)K_1}{s}\right|_{s=-2}+K_2$$

$$K_2=\frac{2(-2)+8}{-2}=\frac{4}{-2}=-2$$

用待定系数法须涉及求解联立方程，而用上述方法每一个方程只含一个未知量 K。一般来说，若 $F(s)$ 为真分式，s_1、s_2、…、s_m 为 $B(s)=0$ 的不等根，则 $F(s)$ 可表示为

$$F(s)=\frac{A(s)}{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_m)}=\frac{K_1}{s-s_1}+\frac{K_2}{s-s_2}+\cdots+\frac{K_m}{s-s_m}\qquad(12-12)$$

计算 K_1 时，等式两端乘以 $(s-s_1)$，得

$$\frac{(s-s_1)A(s)}{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_m)}=K_1+\frac{(s-s_1)K_2}{(s-s_2)}+\cdots+\frac{(s-s_1)K_m}{(s-s_m)}\qquad(12-13)$$

上式应对 s 的每一数值都成立。若令 $s=s_1$，则等式右端各项除 K_1 外均为零。等式左端不为零，因为分子分母中的公因式 $(s-s_1)$ 可约分。因此，K_1 的计算公式为

$$K_1=(s-s_1)\left.\frac{A(s)}{B(s)}\right|_{s=s_1}\qquad(12-14)$$

一般来说

$$K_k=(s-s_k)\left.\frac{A(s)}{B(s)}\right|_{s=s_k}\qquad(12-15)$$

因此

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{A(s)}{B(s)}\right]=\sum_{k=1}^{m}\left\{(s-s_k)\frac{A(s)}{B(s)}\right\}_{s=s_k}e^{s_kt}\quad t\geqslant 0\qquad(12-16)$$

上述方法可推广到包含重根的情况，通常称为赫维赛德展开定理。

例 12－5　试求 $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{30(s+1)(s+2)}{s(s+3)(s^2+9s+20)}\right]$。

解
$$F(s)=\frac{30(s+1)(s+2)}{s(s+3)(s^2+9s+20)}=\frac{30(s+1)(s+2)}{s(s+3)(s+4)(s+5)}$$
$$=\frac{K_1}{s}+\frac{K_2}{s+3}+\frac{K_3}{s+4}+\frac{K_4}{s+5}$$
$$K_1=\left.\frac{30(s+1)(s+2)}{(s+3)(s+4)(s+5)}\right|_{s=0}=\frac{(30)(1)(2)}{(3)(4)(5)}=1$$
$$K_2=\left.\frac{30(s+1)(s+2)}{s(s+4)(s+5)}\right|_{s=-3}=\frac{(30)(-2)(-1)}{(-3)(1)(2)}=-10$$
$$K_3=\left.\frac{30(s+1)(s+2)}{s(s+3)(s+5)}\right|_{s=-4}=\frac{(30)(-3)(-2)}{(-4)(-1)(1)}=45$$
$$K_4=\left.\frac{30(s+1)(s+2)}{s(s+3)(s+4)}\right|_{s=-5}=\frac{(30)(-4)(-3)}{(-5)(-2)(-1)}=-36$$
$$\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}-\frac{10}{s+3}+\frac{45}{s+4}-\frac{36}{s+5}\right]$$
$$=(1-10\mathrm{e}^{-3t}+45\mathrm{e}^{-4t}-36\mathrm{e}^{-5t})\varepsilon(t)$$

以上用到表 12－1 第 2、5 项。

求解本题，你还想去用待定系数法吗？

例 12－6　试求 $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{s^2+2s+5}\right]$。

解
$$B(s)=s^2+2s+5=0$$

解得
$$s=-1\pm\mathrm{j}2$$

为一对共轭复根，仍属不相等根。

$$F(s)=\frac{s}{s^2+2s+5}=\frac{s}{(s-s_1)(s-s_2)}=\frac{s}{(s+1-\mathrm{j}2)(s+1+\mathrm{j}2)}$$
$$=\frac{K_1}{s+1-\mathrm{j}2}+\frac{K_2}{s+1+\mathrm{j}2}$$

仍按(12－16)式求 K_1 和 K_2

$$K_1=\left.\frac{s}{s+1+\mathrm{j}2}\right|_{s=-1+\mathrm{j}2}=\frac{-1+\mathrm{j}2}{-1+\mathrm{j}2+1+\mathrm{j}2}=\frac{-1+\mathrm{j}2}{\mathrm{j}4}=\frac{2+\mathrm{j}}{4}$$
$$K_2=\left.\frac{s}{s+1-\mathrm{j}2}\right|_{s=-1-\mathrm{j}2}=\frac{2-\mathrm{j}}{4}$$

K_1 与 K_2 成共轭关系，即 $K_2=K_1^*$。

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+2s+5}\right]=\frac{1}{4}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2+\mathrm{j}}{s+1-\mathrm{j}2}+\frac{2-\mathrm{j}}{s+1+\mathrm{j}2}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[(2+\mathrm{j})\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{j}2)t} + (2-\mathrm{j})\mathrm{e}^{(-1-\mathrm{j}2)t} \right]$$

$$= \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-t}\left[2(\mathrm{e}^{\mathrm{j}2t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2t}) + \mathrm{j}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}2t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2t}) \right]$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}\left[2\cos(2t) - \sin(2t) \right]\varepsilon(t)$$

这里用到 $\cos(\omega t) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t})$ 和 $\sin(\omega t) = \frac{1}{2\mathrm{j}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t})$

由以上解法可见，当 $B(s)$ 具有复根时，确定常数 K 和最后对指数项的处理均较费事。另有一种技巧性较强的解法——配方法，较为省事。由于

$$\frac{s}{s^2+2s+5} = \frac{s}{(s^2+2s+1)+4} = \frac{s}{(s+1)^2+2^2}$$

故得

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+2s+5}\right] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} - \frac{1}{(s+1)^2+2^2}\right]$$

$$= \mathrm{e}^{-t}\cos(2t) - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}\sin(2t)$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}\left[2\cos(2t) - \sin(2t) \right]\varepsilon(t)$$

这里用到了表 12 - 1 的第 9、8 项。通过进一步运算，上列答案也可写为 $\frac{\sqrt{5}}{2}\mathrm{e}^{-t}\cos(2t+26.56^\circ)\varepsilon(t)$。

或利用表 12 - 1 第 12 项，在求得 $K_1 = \frac{2+\mathrm{j}}{4} = 0.5 + \mathrm{j}0.25 = 0.559\angle 26.56^\circ$，$K_2 = 0.559\angle -26.56^\circ$ 后直接得出答案。

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s)] = 2 \times 0.559\mathrm{e}^{-t}\cos(2t+26.56^\circ)$$

$$= \mathrm{e}^{-t}\left[\cos(2t) - \frac{1}{2}\sin(2t)\right] = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}\left[2\cos(2t) - \sin(2t)\right]\varepsilon(t)$$

拉氏变换表内容越详细，直接求得反变换的可能性就越大。◀

现在研究第二种情况，即 $B(s)=0$ 含有重根的情况。先举一例，设

$$F(s) = \frac{s+1}{s^2+4s+4} = \frac{s+1}{(s+2)^2}$$

$$= \frac{K_{11}}{s+2} + \frac{K_{12}}{(s+2)^2}$$

在求 K_{12} 时可仍按(12 - 16)式计算，即

$$K_{12} = (s+2)^2 F(s)\Big|_{s=-2} = (s+1)\Big|_{s=-2} = -1$$

如果在求 K_{11} 时仍按此处理，其结果为 ∞，不能求得解答。此时需先对 $(s+2)^2 \cdot F(s)$ 求导后再以 $s=-2$ 代入便可求得结果，即

$$K_{11}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[(s+2)^2F(s)]\Big|_{s=-2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(s+1)\Big|_{s=-2}=1$$

一般来说，若

$$F(s)=\frac{A(s)}{B(s)}=\frac{A(s)}{(s-s_1)^r}=\frac{K_{11}}{s-s_1}+\frac{K_{12}}{(s-s_1)^2}+\cdots+\frac{K_{1n}}{(s-s_1)^n}+\cdots+\frac{K_{1r}}{(s-s_1)^r} \tag{12-17}$$

等式两端均乘以 $(s-s_1)^r$，得

$$A(s)=(s-s_1)^{r-1}K_{11}+\cdots+(s-s_1)^{r-n}K_{1n}+\cdots+K_{1r}$$

K_{1r} 仍可在令 $s=s_1$ 后求得。求 K_{1n} 时，对上式微分 $(r-n)$ 次，得

$$\frac{\mathrm{d}^{r-n}}{\mathrm{d}s^{r-n}}A(s)=(r-n)!\ K_{1n}+\text{含}(s-s_1)\text{的各项}$$

令 $s=s_1$ 则含 $(s-s_1)$ 各项均可消除，故得

$$K_{1n}=\frac{1}{(r-n)!}\frac{\mathrm{d}^{r-n}}{\mathrm{d}s^{r-n}}A(s)\Big|_{s=s_1} \tag{12-18}$$

以上系就 $B(s)$ 只含 $(s-s_1)^r$ 而言，一般情况下 $B(s)$ 还含有其他因子，此时 (12-18) 式需作适当修改。在一般情况应为

$$K_{1n}=\frac{1}{(r-n)!}\frac{\mathrm{d}^{r-n}}{\mathrm{d}s^{r-n}}(s-s_1)^rF(s)\Big|_{s=s_1} \tag{12-19}$$

例 12-7　试求 $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{10(s+3)}{(s+1)^3(s+2)}\right]$。

解　$$F(s)=\frac{10(s+3)}{(s+1)^3(s+2)}=\frac{K_{11}}{s+1}+\frac{K_{12}}{(s+1)^2}+\frac{K_{13}}{(s+1)^3}+\frac{K_2}{(s+2)}$$

$$K_{13}=(s+1)^3F(s)\Big|_{s=-1}=\frac{10(s+3)}{(s+2)}\Big|_{s=-1}=20$$

$$K_{12}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[(s+1)^3F(s)]\Big|_{s=-1}=\frac{-10}{(s+2)^2}\Big|_{s=-1}=-10$$

$$K_{11}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}[(s+1)^3F(s)]\Big|_{s=-1}=\frac{10}{(s+2)^3}\Big|_{s=-1}=10$$

$$K_2=(s+2)F(s)\Big|_{s=-2}=-10$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{10(s+3)}{(s+1)^3(s+2)}\right]=(10\mathrm{e}^{-t}-10t\mathrm{e}^{-t}+20t^2\mathrm{e}^{-t}-10\mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t)$$

其中用到表 12-1 第 6 项。

练习题

12-3　求下列 $F(s)$ 的反拉氏变换：

(1) $\dfrac{2s+1}{s(s+2)(s+5)}$

$[(0.1+0.5e^{-2t}+0.6e^{-5t})\varepsilon(t)]$

(2) $\dfrac{s}{s^2+4s+8}$

$[\sqrt{2}e^{-2t}\cos(2t-45°)\varepsilon(t)]$

(3) $\dfrac{s}{(s+1)^2}$

$[(e^{-t}-te^{-t})\varepsilon(t)]$

§12-3　零状态分析

确定零状态响应是动态电路分析中最基本的问题。由于初始条件为零值，便于分析。当电路实际初始条件不为零时，可再叠加上零输入响应，以求得全响应[①]。若初始条件为零，元件的 s 域模型便可简化为图 12-5。(12-8)至(12-10)式分别成为

$$U(s)=\frac{1}{sC}I(s) \tag{12-20}$$

$$I(s)=\frac{1}{sL}U(s) \tag{12-21}$$

$$U(s)=RI(s) \tag{12-22}$$

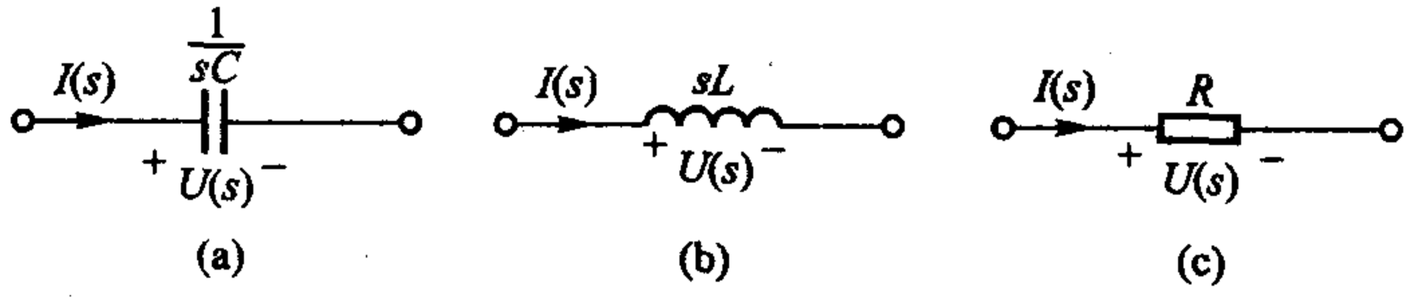


图 12-5　零状态元件的 s 域模型

零状态元件两端电压 $U(s)$ 与电流 $I(s)$ 之比定义为广义(generalized)阻抗或拉普拉斯(Lapalaced)阻抗[②]，记为 $Z(s)$，即

$$Z(s)=\frac{U(s)}{I(s)} \tag{12-23}$$

---

① 见本章 §12-5。

② 也有沿用运算术的名词称为运算阻抗的。运算术为早年所用名称，现已较少使用。

这样，三种元件可统一地用

$$U(s)=Z(s)I(s) \tag{12-24}$$

来表征电压与电流的关系，只是各种元件的广义阻抗各不相同。

对电容元件来说　$$Z(s)=\frac{1}{sC} \tag{12-25}$$

对电感元件来说　$$Z(s)=sL \tag{12-26}$$

对电阻元件来说　$$Z(s)=R \tag{12-27}$$

零状态元件电流 $I(s)$ 与电压 $U(s)$ 之比定义为广义导纳，记为 $Y(s)$，即

$$Y(s)=\frac{I(s)}{U(s)} \tag{12-28}$$

显然

$$Y(s)=\frac{1}{Z(s)} \tag{12-29}$$

(12-23)、(12-28)式所分别定义的阻抗及导纳，也可用于一个初始状态为零的无独立源单口网络。$Z(s)$、$Y(s)$ 的单位仍可沿用欧姆(Ω)、西门子(S)。不难看出新引入的概念更具有普遍性，它把阻抗、导纳考虑为复变量 s 的函数而不是纯虚数变量 $j\omega$ 的函数，因而它把元件或单口网络的零状态响应的拉氏变换和任意输入的拉氏变换联系起来，而不只是把正弦稳态的输出相量和输入相量联系起来。

我们也不难得出线性时不变电路的一个重要规则：若电路为零初始状态，则处理拉氏变换的规律与处理相量的规律完全相同，只需把 $j\omega$ 换以 s 即可。相量法中的相量模型在把 $j\omega$ 换以 s 后即可得到同一电路的 s 域模型，当然这一模型只适用于零状态分析，激励的拉氏变换也应根据具体情况而定。广义阻抗是 s 域分析法电路的参数，就像阻抗在相量分析法中的地位一般。

例 12-8　图 12-6(a)所示电路，求 $i(t)$，$t\geqslant 0$。已知 $u(t)=40\sin(3t)$ V。

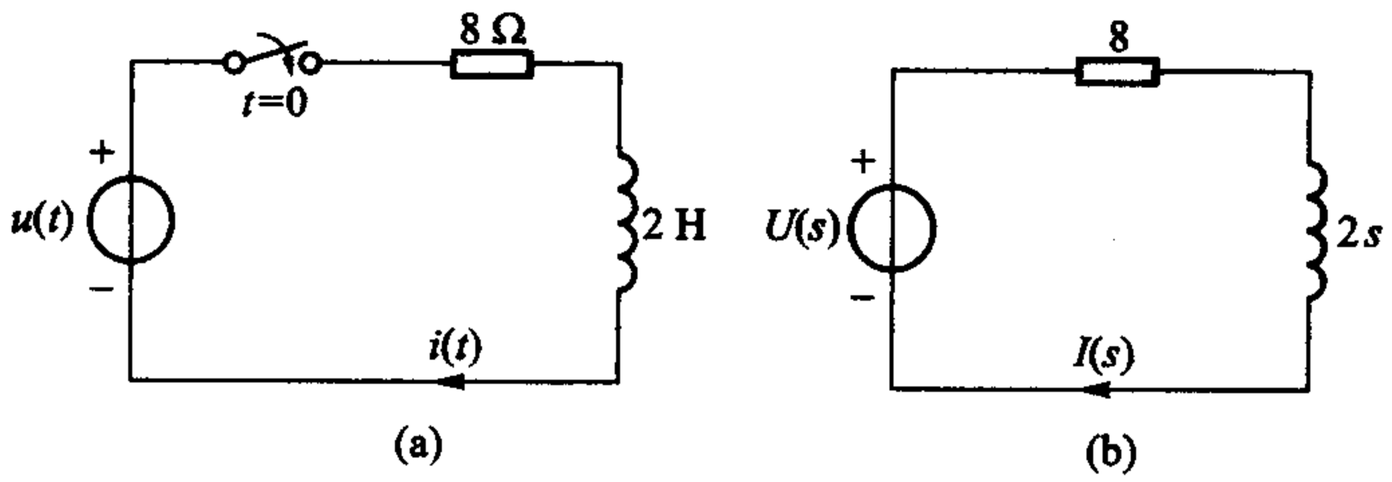


图 12-6　例 12-8

解　(1) $U(s)=\mathscr{L}^{-1}[40\sin(3t)]=40\left(\frac{3}{s^2+3^2}\right)=\frac{120}{s^2+32}$

$i(0_-)=0$，作 s 域模型如图 12-6(b)所示，除电源电压的拉氏变换外，其余部分

完全类似于相量模型。

(2) 由 s 域模型可得

$$I(s)=\frac{U(s)}{Z(s)}=\frac{\dfrac{120}{s^2+3^2}}{2s+8}=\frac{60}{(s+4)(s+\mathrm{j}3)(s-\mathrm{j}3)}$$

$$(3)\ i(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{60}{(s+4)(s+\mathrm{j}3)(s-\mathrm{j}3)}\right]$$

$$=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{K_1}{s+4}+\frac{K_2}{s+\mathrm{j}3}+\frac{K_2^*}{s-\mathrm{j}3}\right]$$

$$K_1=\left.\frac{60}{s^2+3^2}\right|_{s=-4}=2.4$$

$$K_2=\left.\frac{60}{(s+4)(s-\mathrm{j}3)}\right|_{s=-\mathrm{j}3}=\frac{60}{(-\mathrm{j}3+4)(-\mathrm{j}6)}$$

$$=\frac{60}{5\angle -37^\circ\cdot 6\angle -90^\circ}=\frac{60}{30\angle -127^\circ}=2\angle 127^\circ$$

$$K_2^*=2\angle -127^\circ$$

$$i(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2.4}{s+4}+\frac{2\angle 127^\circ}{s+\mathrm{j}3}+\frac{2\angle -127^\circ}{s-\mathrm{j}3}\right]$$

$$=(2.4\mathrm{e}^{-4t}+2\angle 127^\circ\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}3t}+2\angle -127^\circ\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}3t})\ \mathrm{A}$$

$$=[2.4\mathrm{e}^{-4t}+2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(3t-127^\circ)}+2\mathrm{e}^{\mathrm{j}(3t+127^\circ)}]\ \mathrm{A}$$

利用 $\cos\theta=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta})$，可得

$$i(t)=[2.4\mathrm{e}^{-4t}+4\cos(3t-127^\circ)]\varepsilon(t)\ \mathrm{A}$$

或

$$i(t)=[2.4\mathrm{e}^{-4t}+4\sin(3t-37^\circ)]\varepsilon(t)\ \mathrm{A}$$

根据已有的经验，可以确定解答中的第二项当为电路的正弦稳态解，这可由根据相量模型求得的结果加以核对。第一项当为瞬态解，电路的时间常数 $\tau=\frac{1}{4}\mathrm{s}$。由此可见，$s$ 域分析法求得的是电路的全响应。顺便指出，$Z(s)=2s+8$ 为电路的特征多项式，而 $2s+8=0$ 即为特征方程，特征根 $s=-4$，$\tau=\frac{1}{4}$。

练习题

12-4　试求图 12-7 所示电路的电流 $i(t)$，$t\geqslant 0$。(1) 用戴维南定理求解；(2) 用分流关系求解。

$[(2-2\mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t)\ \mathrm{A}]$

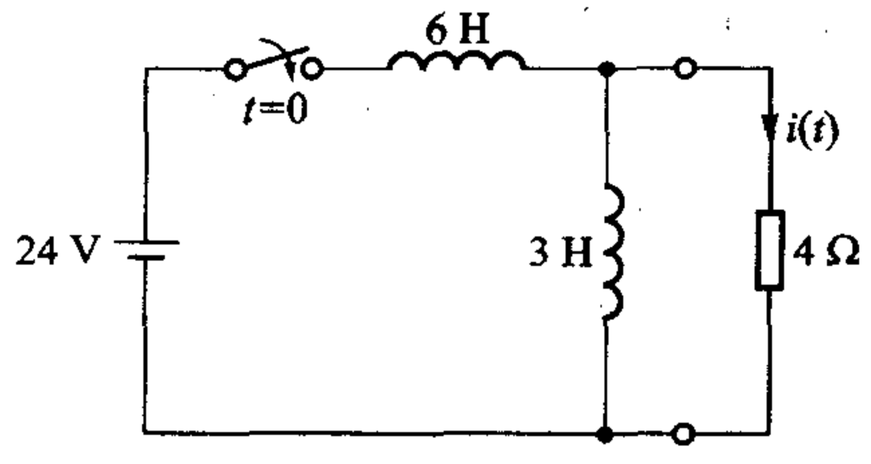


图 12－7　练习题 12－4

§12－4　网络函数和冲激响应

在第三章和第十章已就电阻电路和正弦稳态的相量模型分别对网络函数[①]定义。现在，就一般线性时不变电路的网络函数下定义，它概括了以前的定义，径称为网络函数。对 s 域模型，在单一激励情况下网络函数 $H(s)$ 定义为[②]

$$H(s)=\frac{\mathscr{L}[\text{零状态响应}]}{\mathscr{L}[\text{激励}]}=\frac{\mathscr{L}[y(t)]}{\mathscr{L}[x(t)]}=\frac{Y(s)}{X(s)} \tag{12-30}$$

见图 12－8。在具体问题中 $\mathscr{L}[y(t)]$、$\mathscr{L}[x(t)]$ 可以是 $U(s)$ 或 $I(s)$，网络函数也可分为策动点函数和转移函数。以例 12－8 电路为例，策动点导纳 $H(s)=\dfrac{I(s)}{U(s)}=\dfrac{1}{Z(s)}=\dfrac{1}{2s+8}$。

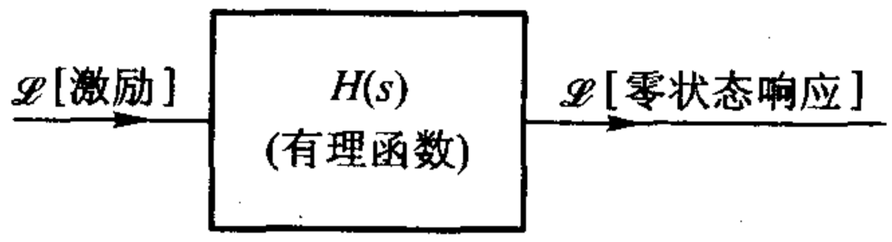


图 12－8　表征 s 域模型响应与激励关系的方框图

根据 s 域模型，不难求得指定响应对激励的网络函数。若已知网络函数 $H(s)$ 和 $X(s)$，则 $Y(s)$ 可求得为

$$\begin{aligned}Y(s)&=X(s)H(s)\\&=\frac{P(s)}{Q(s)}\cdot\frac{N(s)}{D(s)}\end{aligned} \tag{12-31}$$

---

① (3－3)式和(10－13)式。

② 网络函数是在单一激励下定义的，见 §3－1。在动态电路中初始状态也可看作激励，因此，单一激励下的网络函数是在零状态下定义的。另外，请注意，$Y(s)$ 既表示 $\mathscr{L}[y(t)]$ 又表示广义导纳，需结合上下文加以区别。

在一般情况下，如同上式表示，$X(s)$ 可表示为两个 s 的多项式 $P(s)$ 与 $Q(s)$ 之比，$H(s)$ 可表示为多项式 $N(s)$ 与 $D(s)$ 之比。例如，例 12－8 所示电路，零状态响应

$$I(s) = U(s)H(s) = \frac{120}{s^2 + 3^2} \cdot \frac{1}{2s + 8}$$

此处 $P(s) = 120$、$Q(s) = s^2 + 3^2$、$N(s) = 1$、$D(s) = 2s + 8$。

对应于 $Q(s)$ 的每一个根和 $D(s)$ 的每一个根，在 $\mathscr{L}$[零状态响应] 的部分分式展开式中都占有一项。亦即

$$\mathscr{L}[\text{零状态响应}] = [\text{来源于 } Q(s) \text{ 的根的各项}] + [\text{来源于 } D(s) \text{ 的根的各项}] \tag{12-32}$$

例如例 12－8，$I(s)$ 的展开式中部分分式共计三项，来自 $Q(s)$ 的两个根和 $D(s)$ 的一个根。(12－32) 式第一括号内是稳态（强迫）响应的拉氏变换而第二括号中为瞬态（固有）响应的拉氏变换。这由例 12－8 也可得到验证。

$Q(s)$ 和 $D(s)$ 的根称为响应 $Y(s)$ 的极点（pole），它们决定着零状态响应中各分量随时间变化的方式。其中 $D(s)$、即网络函数 $H(s)$ 的分母为电路的特征多项式，它的根为特征根或固有频率，决定着固有响应随时间变化的方式，$Q(s)$，即 $X(s)$ 的分母的根决定着强制响应随时间变化的方式。

例 12－9　电路如图 12－9(a) 所示。(1) 试求网络函数 $H(s) = \dfrac{I(s)}{U_s(s)}$；(2) 试求解当 $u_S(t)$ 为 $U_s e^{-\alpha t}\varepsilon(t)$ 时的电流 $i(t)$。

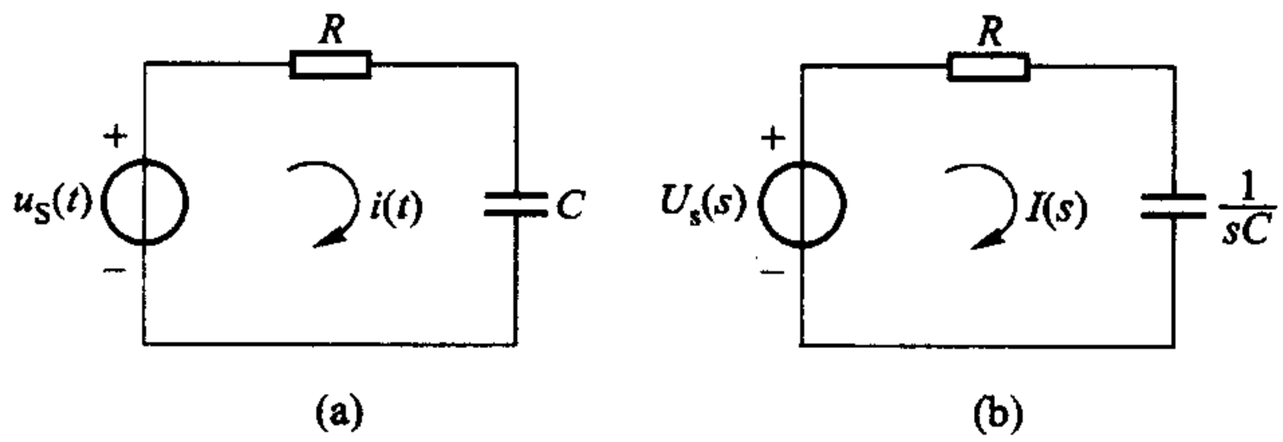


图 12－9　例 12－9

解　(1) 作零状态 s 域模型如图 12－9(b) 所示，得

$$H(s) = \frac{I(s)}{U_s(s)} = \frac{1}{R + \dfrac{1}{sC}} = \frac{\dfrac{s}{R}}{s + \dfrac{1}{RC}}$$

(2) $I(s) = U_s(s)H(s)$

当 $u_s(t) = U_s e^{-\alpha t}\varepsilon(t)$ 时，$U_s(s) = \dfrac{U_s}{s + \alpha}$

$$I_s(s) = U_s(s)H(s) = \frac{U_s}{s+\alpha} \cdot \frac{\frac{s}{R}}{s+\frac{1}{RC}}$$

若 $\alpha \neq \frac{1}{RC}$，因而在 $-\alpha$ 处无重极点（即分母多项式无重根），因而所求解答为

$$i(t) = (K_1 e^{-\alpha t} + K_2 e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t)$$

其中

$$K_1 = \frac{\alpha U_s C}{RC\alpha - 1}$$

$$K_2 = \frac{U_s}{R(-RC\alpha + 1)}$$

可由（12－16）式求得。解答的第一项为强迫响应，其变化方式为 $e^{-\alpha t}$，与激励相同，其中 $-\alpha$ 即激励变换式的极点。第二项为瞬态响应，其固有频率（由此可得时间常数 RC）即网络函数的极点。

例 12－10　试求 *RLC* 串联电路的网络函数 $\frac{U_R(s)}{U_s(s)}$。若 $u_S(t) = \sqrt{2}\cos(2t + 45°)\varepsilon(t)$ V，u_R 为响应变量，试求正弦稳态响应及零状态响应。已知 $R = 1\ \Omega$，$C = 1$ F 及 $L = 0.5$ H。

解　（1）由 s 域模型不难得出

$$\frac{U_R(s)}{U_s(s)} = \frac{2s}{s^2 + 2s + 2}$$

读者试自行计算。

（2）在正弦稳态情况下的网络函数可把上式中的 s 代之以 $j\omega$ 而得出

$$\frac{\dot{U}_R(j\omega)}{\dot{U}_s(j\omega)} = \frac{j2\omega}{2 - \omega^2 + j2\omega}$$

其中 $\dot{U}_R$、$\dot{U}_s$ 均为相量，当 $\omega = 2$ rad/s 时

$$\frac{\dot{U}_R(j2)}{\dot{U}_s(j2)} = \frac{j4}{-2 + j4} = \frac{4 - j2}{5}$$

今

$$\dot{U}_s = \sqrt{2}\angle 45°\ \text{V} = (1 + j1)\ \text{V}$$

故得

$$\dot{U}_R = \dot{U}_s\left(\frac{4 - j2}{5}\right) = (1 + j1)\frac{4 - j2}{5}\text{V} = \frac{6 + j2}{5}\text{V}$$

$$= (1.2 + j0.4)\,\mathrm{V} = 1.265 \angle 18.43^\circ\ \mathrm{V}$$

相应的正弦稳态响应为

$$u_R(t) = 1.265\cos(2t + 18.43^\circ)$$
$$= [1.2\cos(2t) - 0.4\sin(2t)]\,\mathrm{V}$$

(3) 零状态响应应根据 s 域网络函数求得。已知

$$u_S(t) = \sqrt{2}\cos(2t + 45^\circ)\varepsilon(t)\,\mathrm{V}$$
$$= [\cos(2t) - \sin(2t)]\varepsilon(t)\,\mathrm{V}$$

由表 12 - 1 可得

$$U_s(s) = \frac{s}{s^2+4} - \frac{2}{s^2+4} = \frac{s-2}{s^2+4}$$

根据本例(1)所得的网络函数得

$$U_R(s) = \frac{2s}{s^2+2s+2}\,\frac{s-2}{s^2+4}$$

为便于求得反变换,可先把上式写成

$$U_R(s) = \frac{as+b}{s^2+2s+2} + \frac{cs+d}{s^2+4}$$

根据以上两式,用待定系数法可求得 a、b、c 及 d,以之代入上式得

$$U_R(s) = \frac{-\frac{6}{5}s + \frac{2}{5}}{s^2+2s+2} + \frac{\frac{6}{5}s - \frac{4}{5}}{s^2+4}$$

$$= \frac{K_1}{s+1-j1} + \frac{K_1^*}{s+1+j1} + \frac{\frac{6}{5}s}{s^2+4} - \frac{\frac{4}{5}}{s^2+4}$$

其中 $K_1 = (s+1-j1)\left.\dfrac{-\frac{6}{5}s+\frac{2}{5}}{s^2+2s+2}\right|_{s=-1+j1} = \left.\dfrac{-\frac{6}{5}s+\frac{2}{5}}{s+1+j1}\right|_{s=-1+j1}$

$$= -0.6 - j0.8 = 1 \angle -126.86^\circ$$

由表 12 - 1 可得

$$u_R(t) = [2e^{-t}\cos(t - 126.86^\circ) + 1.2\cos(2t) - 0.4\sin(2t)]\varepsilon(t)\,\mathrm{V}$$

上式最后两项与本例(2)中用相量法求得的正弦稳态解完全相同,它们是零状态解中的特解分量。另一项不能由相量法求得,它是零状态解中的瞬态解分量。由此可见,由 s 域网络函数可求得整个的零状态解,亦即特解分量和瞬态分量都可求得。

◀

(单位)冲激响应 $h(t)$ 是单位冲激作用下的零状态响应(§6 - 3)。它是一类重要的零状态响应。从 s 域来看,冲激响应的重要意义更加明显。

若激励为 $\delta(t)$，则

$$X(s) = \mathscr{L}[\delta(t)] = 1$$

由(12－31)式，可得

$$Y(s) = X(s)H(s) = H(s) \tag{12-33}$$

故得

$$\mathscr{L}[h(t)] = H(s) \tag{12-34}$$

上式赋予网络函数 $H(s)$ 以新的含义，即某指定端的冲激响应拉氏变换等于该指定端对激励端的网络函数。网络函数 $H(s)$ 可根据 $h(t)$ 来确定。这是一个联系线性时不变电路 s 域表现与时域表现的重要关系式。例如，若已知某电路的冲激响应为

$$h(t) = K_1 e^{\alpha_1 t} + K_2 e^{\alpha_2 t}$$

即可确定相应的网络函数为

$$H(s) = \frac{K_1}{s-\alpha_1} + \frac{K_2}{s-\alpha_2}$$

由此可得其他激励下的零状态响应(练习题 12－6)。

例 12－11　试求图 12－10 所示电路的网络函数 $\frac{U(s)}{I(s)}$，并求冲激响应 $h(t) = u(t)$。

解　作出零状态 s 域模型(略)后，

$$H(s) = \frac{U(s)}{I(s)} = Z(s) = \frac{1}{s} + \frac{\frac{1}{s}\times 1}{1+\frac{1}{s}}$$

$$= \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}$$

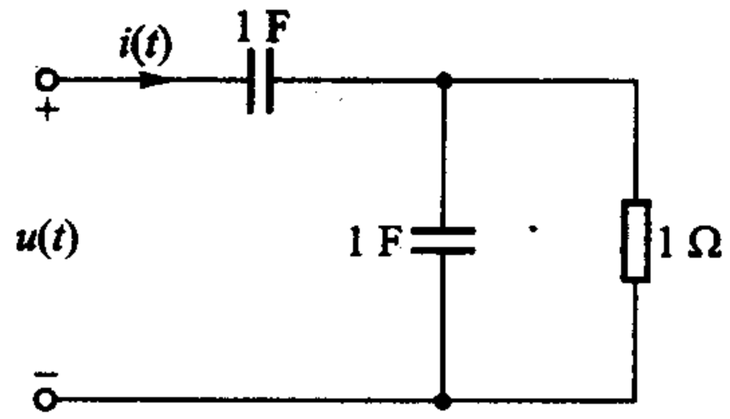


图 12－10　例 12－11

$$h(t) = u(t) = \mathscr{L}^{-1}[Z(s)] = (1 + e^{-t})\varepsilon(t)\,\mathrm{V}$$

注意，本题由于 $\delta(t)$ 通过电容，初始时刻电容电压跃变，每个电容的跃变量 $\frac{1}{C} = 1$ V。参看例 6－9。

◀

综合以上所述，不难得到网络函数的下述性质。若 N 为线性时不变电路，则：

(1) $\mathscr{L}$[零状态响应] = [网络函数] · $\mathscr{L}$[激励]；

(2) 网络函数的极点是 N 的固有频率；

(3) $\mathscr{L}$[冲激响应] = 网络函数

练习题

12－5　试求解例 6－9。先求网络函数 $\frac{U(s)}{I(s)}$，再求 $h(t)=u(t)$。

12－6　已知线性时不变电路的冲激响应为 $5e^{-4t}\varepsilon(t)$，求当激励为 $4e^{-5t}\varepsilon(t)$ 时的零状态响应。

$[20(e^{-4t}-e^{-5t})\varepsilon(t)]$

12－7　（1）已知电路的冲激响应为

$$h(t)=(e^{-t}+2e^{-2t})\varepsilon(t)$$

试求相应的网络函数。

$\left[\frac{3s+4}{(s+1)(s+2)}\right]$

（2）若已知电路的正弦稳态网络函数为

$$H(j\omega)=\frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

试求相应的冲激响应。

$[\omega_0 e^{-\omega_0 t}\varepsilon(t)]$

§12－5　线性时不变电路的叠加公式

这是本书的最后一节，我们再次回到叠加原理。

在 s 域分析中，对某选定的响应，设初始时刻为 $t=0$，叠加原理可表述为

$$\mathscr{L}[\text{全响应}]=\mathscr{L}[\text{零状态响应}]+\mathscr{L}[\text{零输入响应}] \qquad (12-35)$$

式中

$$\mathscr{L}[\text{零状态响应}]=\sum_{m=1}^{M}H_{em}X_m(s) \qquad (12-36)$$

$$\mathscr{L}[\text{零输入响应}]=\sum_{n=1}^{N}H_{in}\frac{\lambda(0_-)}{s} \qquad (12-37)$$

$X_m(s)$ 为施加于电路的第 m 个外施独立电压或电流源激励的拉氏变换，$H_{em}(s)$ 为 s 的函数，表明第 m 个外施激励及其响应的关系，即网络函数；$\lambda_n(0_-)$ 为电路内部第 n 个状态变量在 $t=0$ 时之值，即 $u_C(0_-)$ 或 $i_L(0_-)$ 值，$H_{in}(s)$ 为 s 的函数，表明第 n 个内部初始状态等效电源及其响应的关系。(12－35)式连同(12－36)、(12－37)两式称为线性时不变电路的叠加公式。公式表明，任意时刻 $t\geqslant 0$ 的响应是零状态响应与零输入响应之和，前者表明所有 $t\geqslant 0$ 的输入在该时刻所形成的效应，后者表明所有 $t<0$ 的输入在该时刻继续存在的效应。两者各自有其不同的含义。

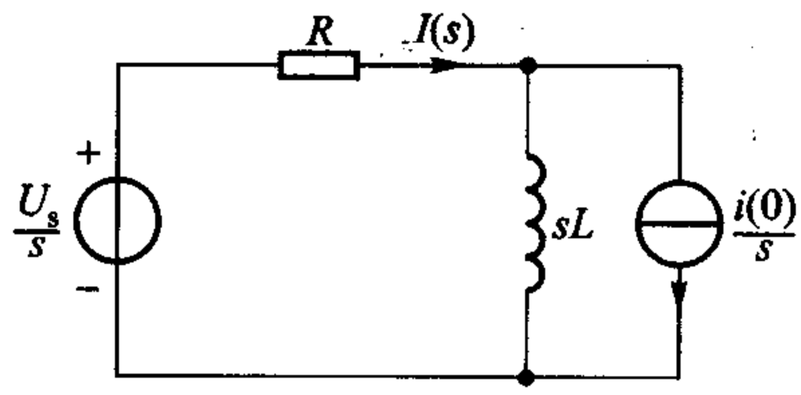
如果线性时不变电路存在正弦稳态，这一稳态与初始状态无关，以 $j\omega$ 代替 s，(12 - 36) 式中的 H_{em} 即成为正弦稳态函数 (10 - 13) 式，它是 $j\omega$ 的函数 (§10 - 3)。对线性时不变电阻电路，H_{em} 即电阻电路网络函数，它是一个实常数 (§3 - 1)。

例 12 - 12　对应于 $t\geqslant 0$ 的 s 域模型如图 12 - 11(a) 所示，试用叠加方法求解 $I(s)$ 及 $i(t)$，$t\geqslant 0$。

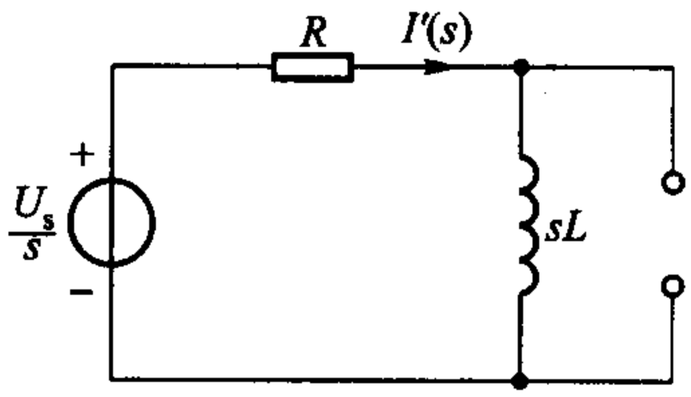
解　零状态响应：由图 12 - 11(b) 可得

$$I'(s)=\frac{\frac{U_s}{s}}{R+sL}=\frac{\frac{U_s}{L}}{s\left(s+\frac{R}{L}\right)}$$

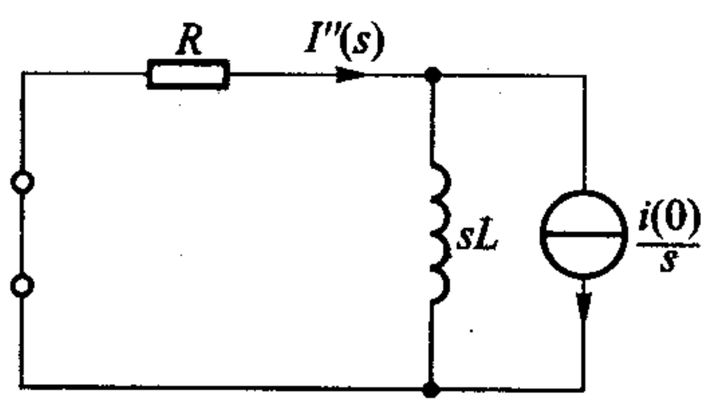
$H_{e1}(s)=\dfrac{1}{R+sL}$。$I_1(s)$ 的两个极点：$s=0$ 来源于输入；$s=-\dfrac{R}{L}$ 来源于电路本身。



(a)



(b)



(c)

图 12 - 11　例 12 - 12

零输入响应：由图 12 - 11(c) 可得

$$I''(s)=\frac{i(0)}{s}\cdot\frac{sL}{R+sL}=\frac{i(0)}{s+\frac{R}{L}}$$

$H_{i1}(s)=\dfrac{sL}{R+sL}$。$I''(s)$ 只有一个来源于电路的极点 $-\dfrac{R}{L}$。

$$I(s)=I'(s)+I''(s)$$

$$=\frac{\frac{U_s}{R}}{s}+\frac{\frac{U_S}{R}}{s+\frac{R}{L}}+\frac{i(0)}{s+\frac{R}{L}}$$

全响应

$$i(t)=\underbrace{\frac{U_S}{R}}_{\text{强迫响应}}+\underbrace{\frac{U_S}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}+i(0)e^{-\frac{t}{\tau}}}_{\text{固有响应}}\qquad t\geqslant 0$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{零状态响应}}\quad\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{零输入响应}}$$

例 12－13　试用叠加方法求图 12－12(a)所示电路的零状态响应 $I(s)$。

解　s 域模型如图 12－12(b)所示。

电流源单独作用，电压源处以短路代替，得

$$I_1(s)=\frac{I_s}{s+\alpha}\cdot\frac{\frac{1}{sC}}{R+\frac{1}{sC}}=\frac{I_s}{s+\alpha}\cdot\frac{1}{RCs+1}$$

电压源单独作用，电流源处以开路代替，得

$$I_2(s)=\frac{-U_{sm}\omega}{s^2+\omega^2}\cdot\frac{1}{R+\frac{1}{sC}}=\frac{-U_{sm}\omega Cs}{(RCs+1)(s^2+\omega^2)}$$

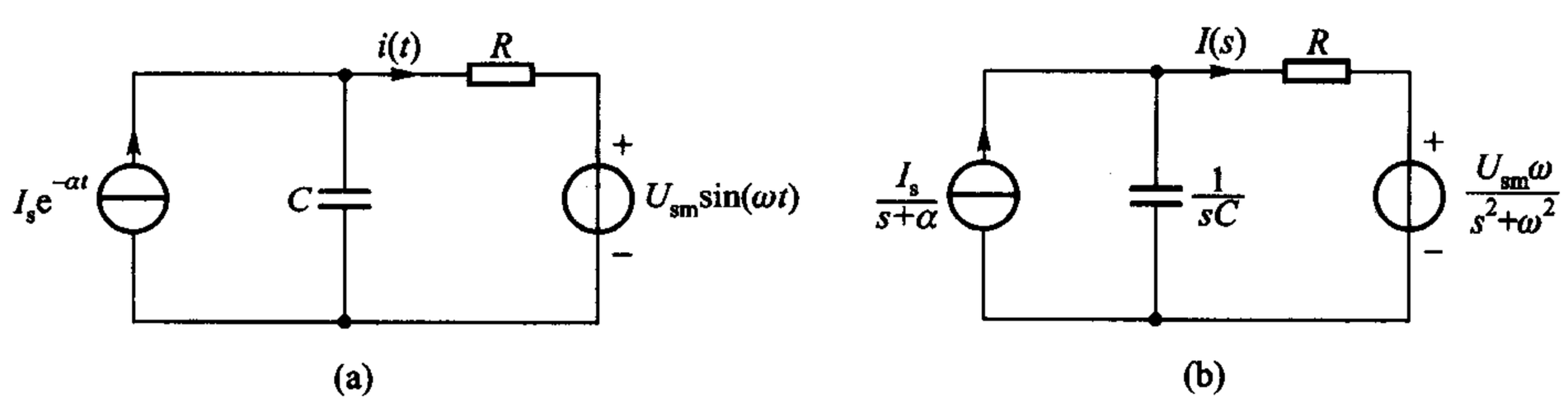


图 12－12　例 12－13

零状态响应

$$I(s)=I_1(s)+I_2(s)$$

$$=\frac{I_s}{(RCs+1)(s+\alpha)}-\frac{U_{sm}\omega Cs}{(RCs+1)(s^2+\omega^2)}$$

$I(s)$共有四个极点：$s=-\frac{1}{RC}$，来源于电路本身；$s=-\alpha$，来源于电流源；$s=\pm j\omega$，来源于电压源。

例 12－14　电路如图 12－13(a)所示，已知 $u_S(t)=[4-e^{-t}\varepsilon(t)]\,V$，试求 $u(t)$，$t\geqslant 0$。

解　对应于 $t\geqslant 0$ 的 s 域模型如图 12－13(b)所示，其中 $U_s(s)=\frac{4}{s}-\frac{1}{s+1}$。

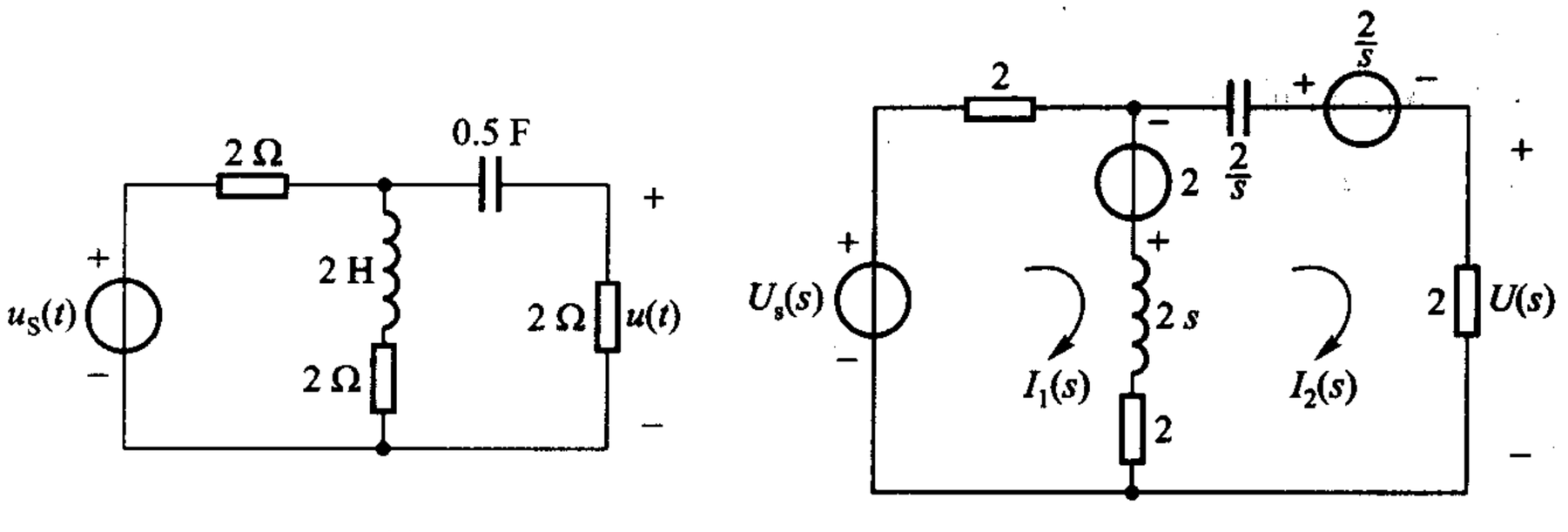


图 12－13　例 12－14

注意由于 $u_S(t)$ 中的 4 V 部分在 $t=0$ 前即作用于电路，因此，该电路在 $t=0$ 时，电容电压、电感电流均为非零。可以算得

$$i_L(0_-)=\frac{4}{2+2}\text{A}=1\ \text{A}$$

$$u_C(0_-)=2\ \text{V}$$

在图 12－13(b)所示 s 域模型中电感的并联模型已化为串联模型。

网孔电流方程为

$$(4+2s)I_1(s)-(2+2s)I_2(s)=2+\frac{4}{s}-\frac{1}{s+1}=\frac{2s^2+5s+4}{s(s+1)}$$

$$-(2+2s)I_1(s)+\left(4+2s+\frac{2}{s}\right)I_2(s)=-2-\frac{2}{s}=\frac{-2(s+1)}{s}$$

方程系数行列式

$$\Delta(s)=\begin{vmatrix} 2(s+2) & -2(s+1) \\ -2(s+1) & \left(4+2s+\frac{2}{s}\right) \end{vmatrix}=2(s+2)\times\frac{2(s+1)^2}{s}-4(s+1)^2$$

$$=\frac{8(s+1)^2}{s}$$

$$\Delta_2(s)=\begin{vmatrix} 2(s+2) & \frac{2s^2+5s+4}{s(s+1)} \\ -2(s+1) & \frac{-2(s+1)}{s} \end{vmatrix}=-2$$

$$I_2(s)=\frac{\Delta_2(s)}{\Delta(s)}=\frac{-2s}{8(s+1)^2}=-\frac{s}{4(s+1)^2}$$

$$U(s)=2I_2(s)=\frac{-2s}{4(s+1)^2}=\frac{0.5}{(s+1)^2}-\frac{0.5}{s+1}$$

故

$$u(t)=(0.5te^{-t}-0.5e^{-t})\text{V}\qquad t\geqslant 0$$

附注　电路的两个固有频率为 -1 和 -1。令 $\Delta(s)=0$ 也可求得，故 $\Delta(s)=0$ 为电路的特征方程（例 12－8 中 $Z(s)=0$），$\Delta(s)$ 称为特征行列式。

本题如用节点电压法，也可得同样的 $\Delta(s)$。固有频率不会因采用的解题方法不同而有所不同，它们是电路本身特性的反映，取决于元件的参数和元件的拓扑结构。

练习题

12－8　电路及外施电压 $u_S(t)$ 分别如图 12－14（a）、（b）所示，试求 $t\geqslant 0$ 时电流 $i(t)$ 的零输入响应、零状态响应和全响应。

$(0.5e^{-2t}, e^{-t}-e^{-2t})$

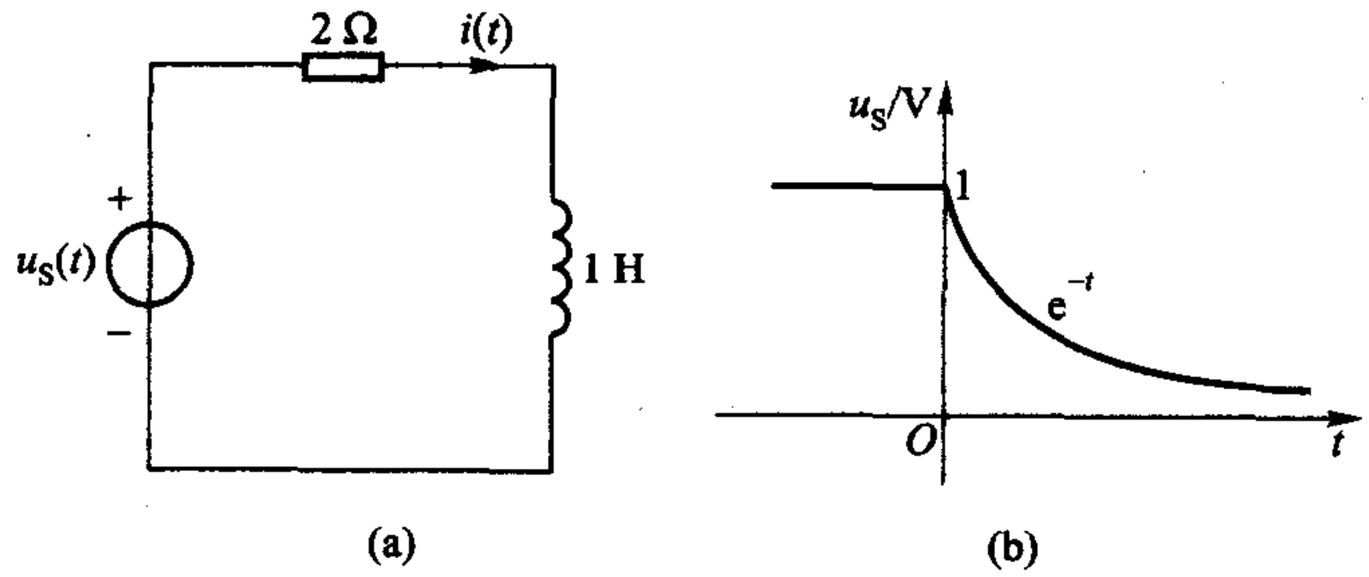


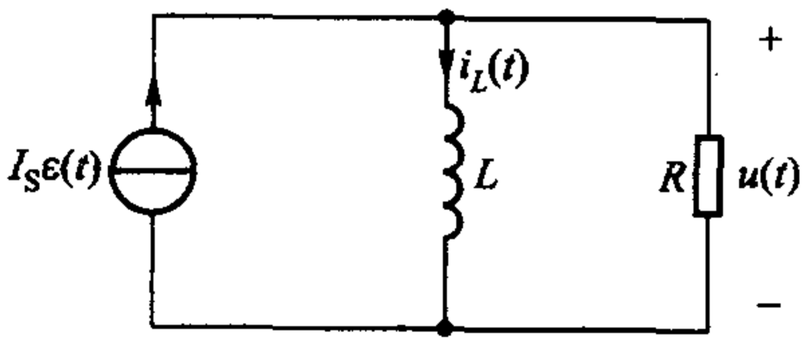
图 12－14　练习题 12－8

习题

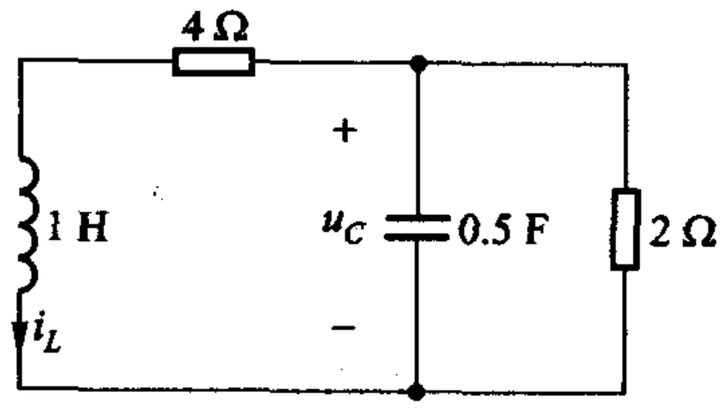
§12－1　拉普拉斯变换及其几个基本性质

12－1　RC 串联电路 $t=0$ 时与 10 V 电压源接通，已知 $R=2\ \mathrm{M\Omega}$、$C=1\ \mu\mathrm{F}$，试用拉氏变换法求电流 $i(t)$ 和电容电压 $u_C(t)$，$t\geqslant 0$。已知 $u_C(0_-)=0$。

12－2　RL 并联电路如图题 12－1 所示，已知 $i_L(0_-)=\rho$，试用拉氏变换法求 $u(t)$，$t\geqslant 0$。



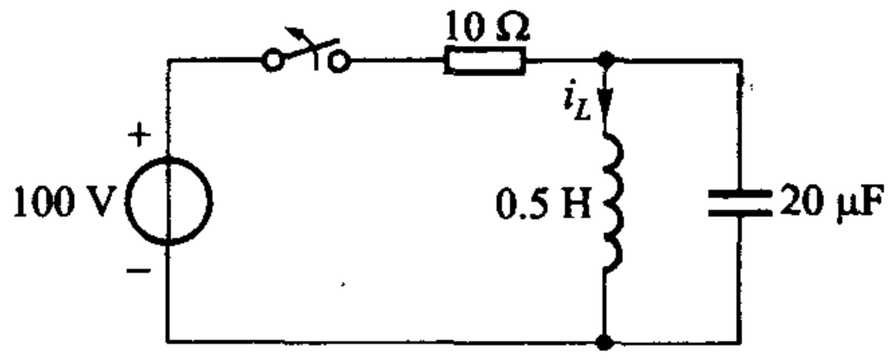
图题 12－1



图题 12－2

12－3　$t\geqslant 0$ 时电路如图题 12－2 所示，已知 $i_L(0_-)=-2\ \text{A}$，$u_C(0_-)=2\ \text{V}$，试求 $u_C(t)$，$t\geqslant 0$。

12－4　电路如图题 12－3 所示，$t=0$ 时开关打开，求 $i_L(t)$，$t\geqslant 0$。



图题 12－3

§12－2　反拉普拉斯变换——赫维赛德展开定理

12－5　求 $\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$，若 $F(s)$ 为：

(1) $\dfrac{12(s+1)(s+3)}{s(s+2)(s+4)(s+5)}$；

(2) $\dfrac{s^2}{(s+1)(s+2)}$；

(3) $\dfrac{8s^2+8s+1}{4s^2+6s+2}$；

(4) $\dfrac{4s^2+7s+1}{s(s+1)^2}$；

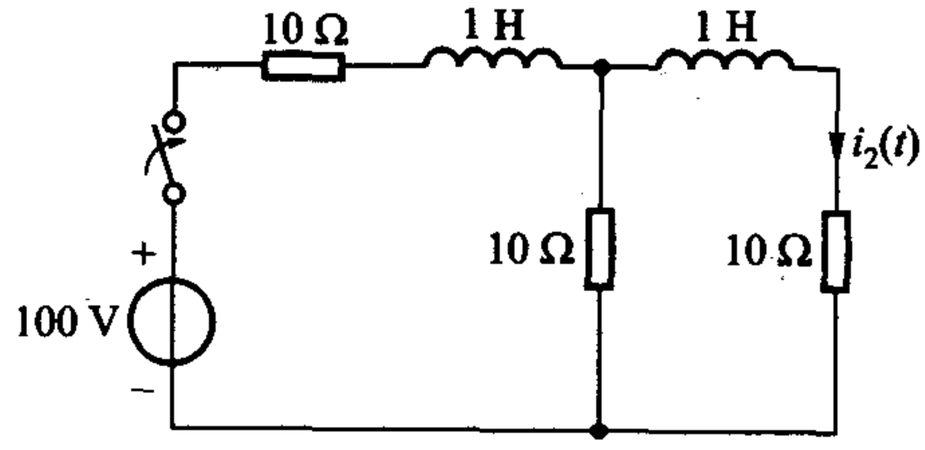
(5) $\dfrac{3s^2+7s+5}{(s+1)(s^2+2s+2)}$；

(6) $\dfrac{s^3+7s^2+14s+8}{(s+3)(s+4)(s+5)(s+6)}$。

12－6　用拉氏变换法求解例 6－4。

§12－3　零状态分析

12－7　试用网孔电流法求解图题 12－4 所示电路中的电流 $i_2(t)$。



图题 12－4

12－8　*RLC* 并联电路，并联的电流激励为 $1.2\cos t\cdot\varepsilon(t)\ \text{A}$，已知 $R=1\ \Omega$、$C=0.625\ \text{F}$、

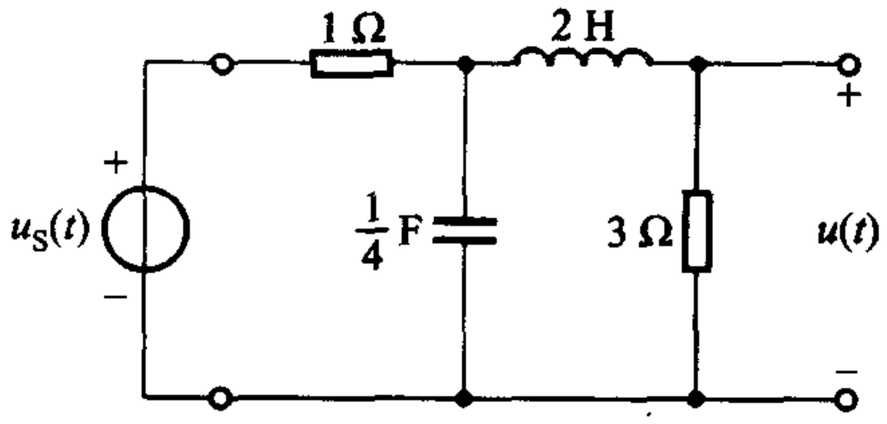
$L=1.6$ H，试求电压 $u(t)\cdot\varepsilon(t)$。

12－9　*RLC* 串联电路，电压源为 $10e^{-2t}\varepsilon(t)$ V，求 $i(t)$，$t\geqslant 0$。已知 $R=8\ \Omega$、$L=2$ H、$C=\frac{1}{6}$F。

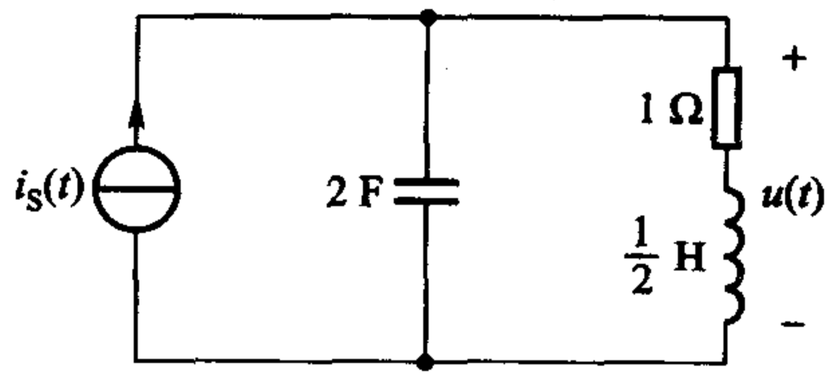
§12－4　网络函数和冲激响应

12－10　试求图题 12－5 所示电路的网络函数 $\frac{U(s)}{U_s(s)}$，并求电路的固有频率。

12－11　试求图题 12－6 所示电路的冲激响应 $h(t)=u(t)$，并求 $u(0_+)$，如发生跃变，试解释之。



图题 12－5



图题 12－6

12－12　试求图题 12－5 所示电路的冲激响应 $h(t)=u(t)$。

12－13　试求解例 12－9，若 $\alpha=\frac{1}{RC}$。所得解答能区分强迫响应和瞬态响应否？为什么？

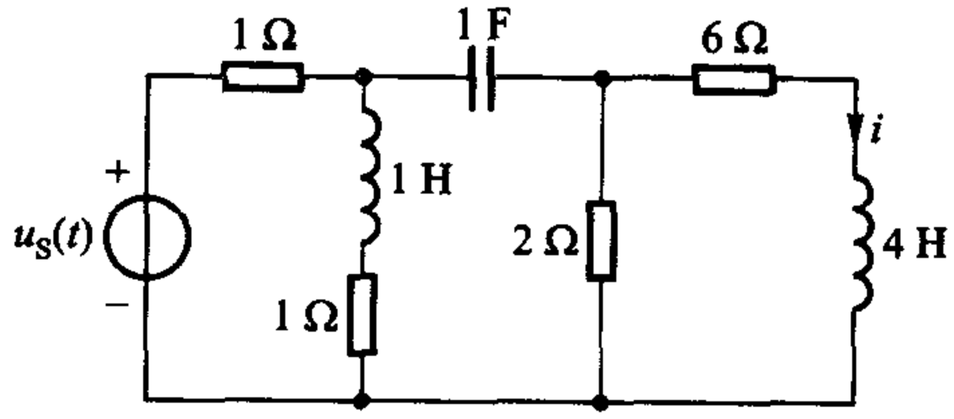
12－14　当施加于电路的激励为 $3\varepsilon(t)$ 时，零状态响应为 $te^{-4t}\varepsilon(t)$，(1) 试确定电路的网络函数；(2) 试求电路的冲激响应。

12－15　电路如图题 12－7 所示，u_S 和 i 分别为电路的激励和响应。

(1) 求网络函数 $H(s)=\frac{I(s)}{U_s(s)}$；

(2) 求当 $u_S(t)=3e^{-t}\cos(6t)$ V 时的零状态响应；

(3) 求当 $u_S(t)=[2+\cos(2t)]$ V 时的稳态响应。

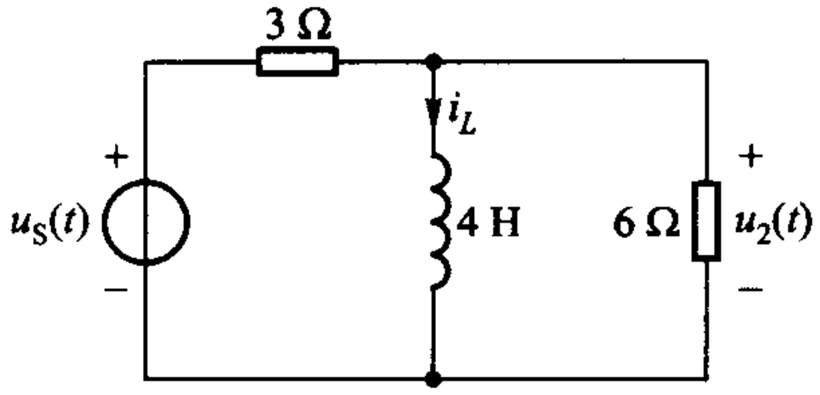


图题 12－7

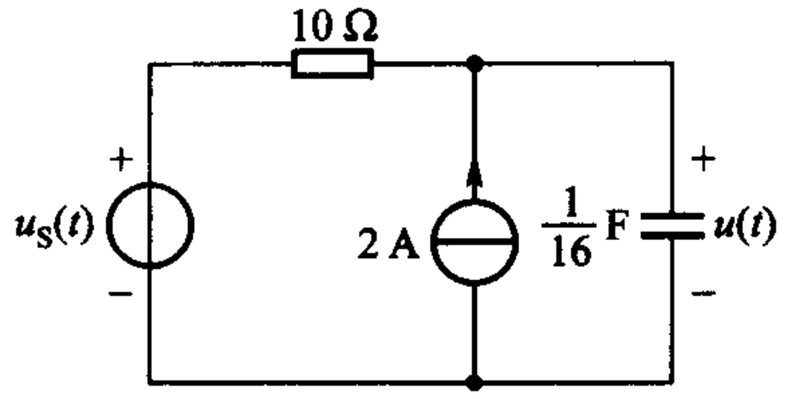
§12-5　线性时不变电路的叠加公式

12-16　电路如图题12-8所示，已知$i_L(0_-)=2$ A，试分别求出在下列$u_S(t)$时的电压$u_2(t)$，$t\geqslant 0$(1) $12\varepsilon(t)$ V；(2) $12\cos t\,\varepsilon(t)$ V；(3) $12e^{-t}\varepsilon(t)$ V。

12-17　电路如图题12-9所示，已知$u_S(t)=e^{-t}\cos(2t)\varepsilon(t)$ V，$u(0_-)=10$ V，求$u(t)$，$t\geqslant 0$。

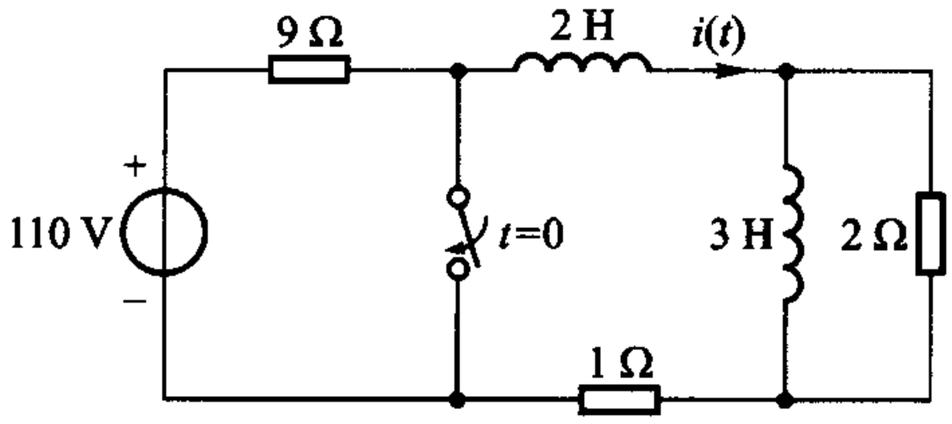


图题12-8



图题12-9

12-18　电路如图题12-10所示，试求$i(t)$，$t\geqslant 0$。

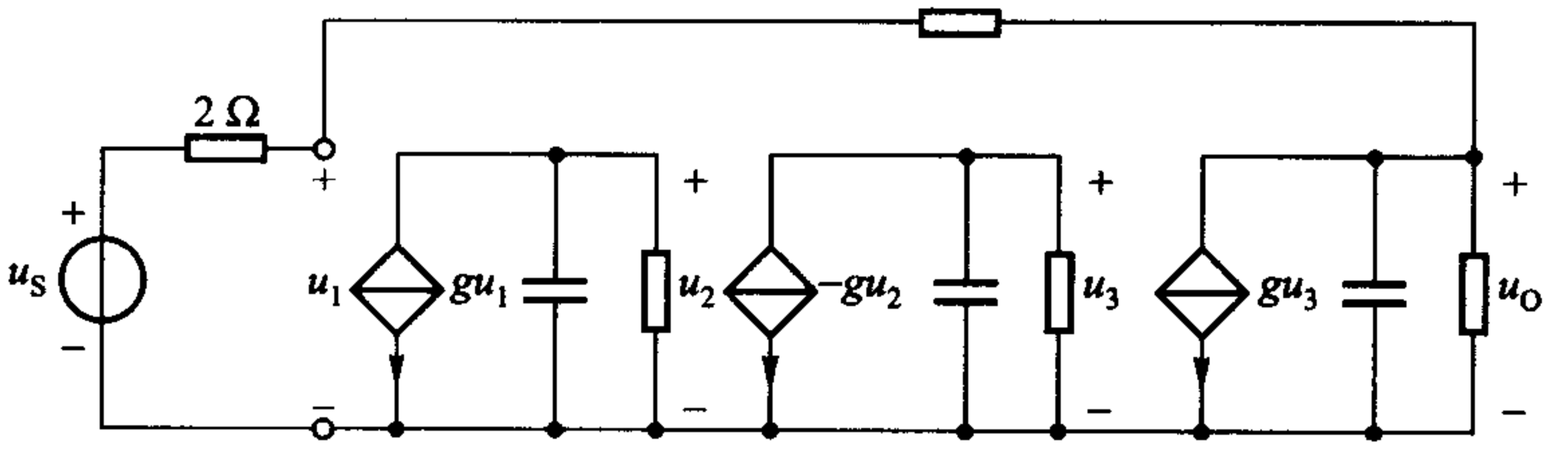


图题12-10

综合

12-19　反馈放大器的响应

电路如图题12-11所示，所有电阻除标示者外均为1 Ω，所有电容均为1 F，受控源控制系数$g=1$ S；



图题12-11

（1）试求网络函数 $H(s)=\dfrac{U_o(s)}{U_s(s)}$；

（2）求冲激响应；

（3）求 $u_S(t)=\cos(2t)\,\mathrm{V}$ 的稳态响应。

附录 A　复习、检查用题

“……知其惑者，非大惑也。大惑者，终生不解；……”

——《庄子·天地》

说明：本附录中习题不按章节次序，不按易、难排序。可供课程学完后，对基本概念掌握程度和解题能力作检查之用。可与附录 B 复习大纲配合使用。题目以中等难度者居多。

A－1　如图 A－1 所示集成电路 N 对外有 4 个端钮，外部接线如图中所示。(1) 试求 U_0、U_{03}、U_2、U_{23}和 U_{12}；(2) 试求 I_1 和 I_2。

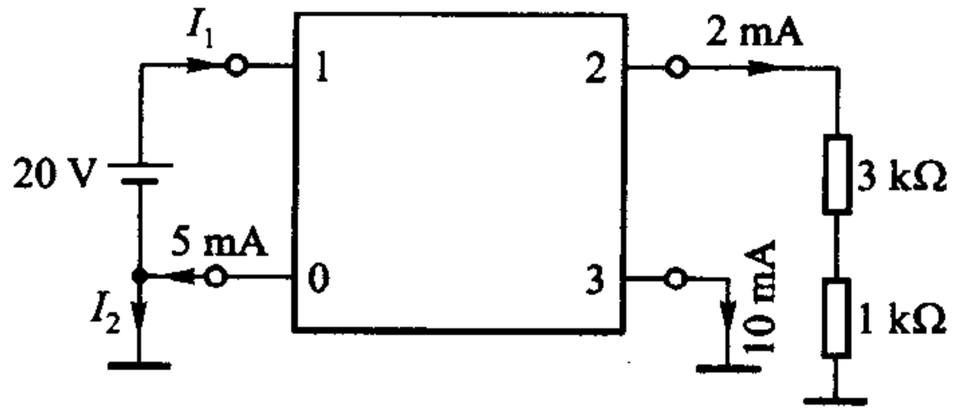


图 A－1

A－2　试用叠加方法求解图 A－2 所示电路中 2 Ω 电阻所消耗的功率。是否能确定哪一电源对这项功率贡献最多？

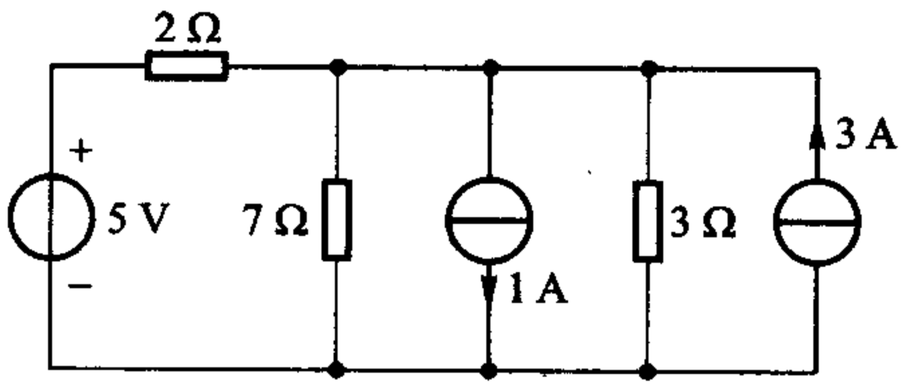


图 A－2

A－3　某线圈的电流、电压在关联参考方向下的波形如图 A－3 所示，(1) 绘出功率 $p(t)$的波形；(2) 计算由 $t=0$ 至 $t=3$ s 期间线圈所接受的能量；(3) 在$t=3$ s 至 $t=6$ s 期间重复(2)中的要求；(4) 试求线圈的电感 L 和电阻

R;(5) 求 $t=3$ s 时电感的储能和 0→3 s 期间电阻消耗的能量,试与(2)计算得出的能量相核对;(6) 求 $t=6$ s 时电感的储能和 3s→6s 期间电阻消耗的能量,试与(3)所得能量相核对。

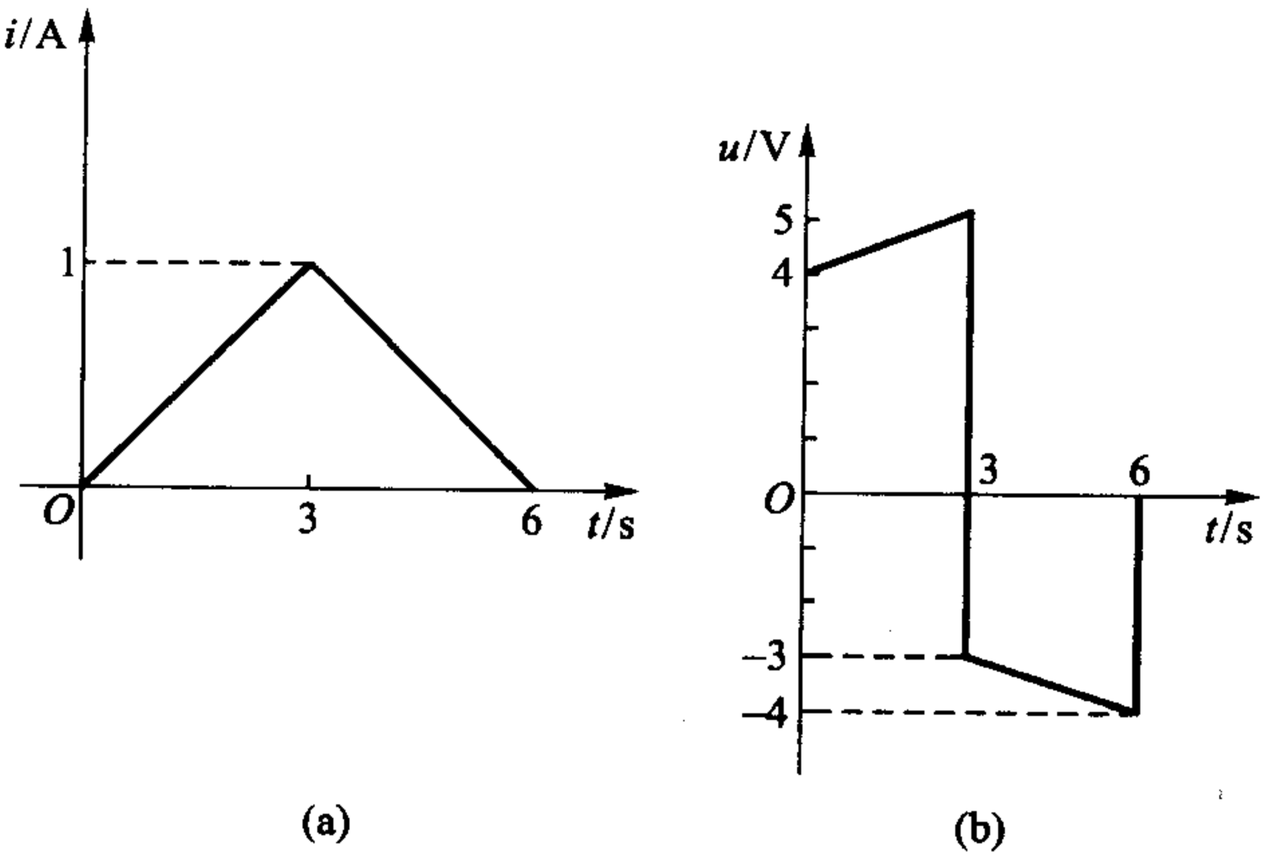


图 A－3

A－4　图 A－4 所示电路中,各电源与电路接通已久,试求电容电压 u_C 和电感电压 u_L。(提示:用叠加方法。)

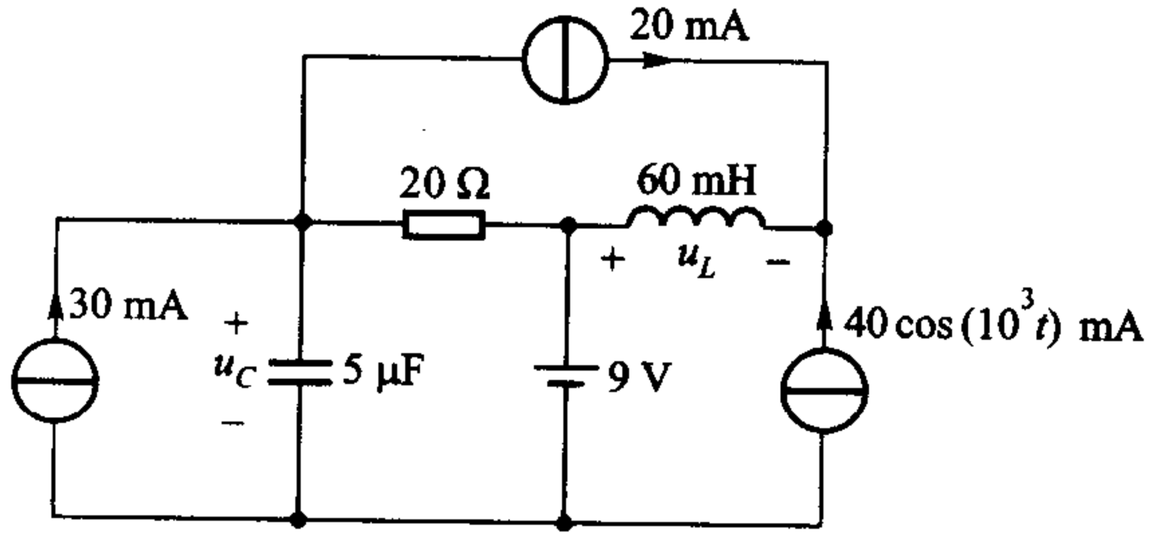


图 A－4

A－5　试求图 A－5 所示电路中两个电流源的功率,并核对功率守恒。

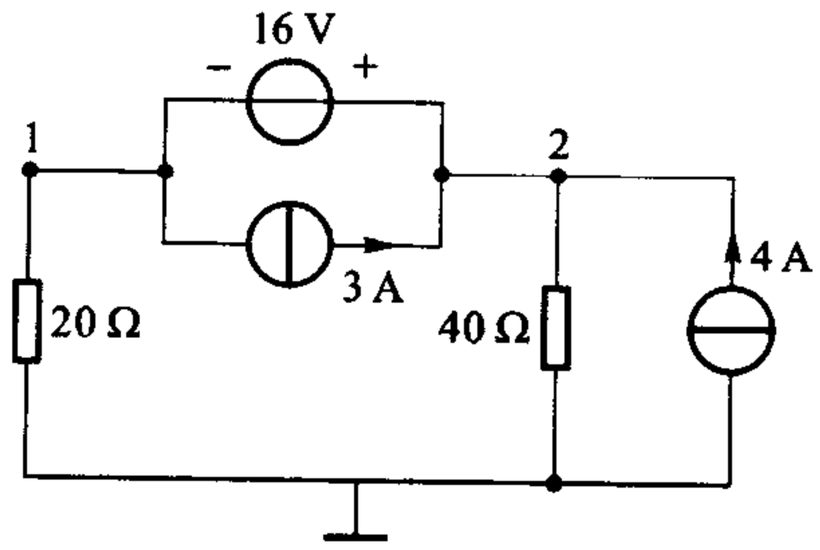


图 A－5

A－6　*RC* 电路及其输入 $u_S(t)$ 的波形如图 A－6 所示，试求对所有 t 的 $u_C(t)$、$i_C(t)$ 和 $u(t)$。

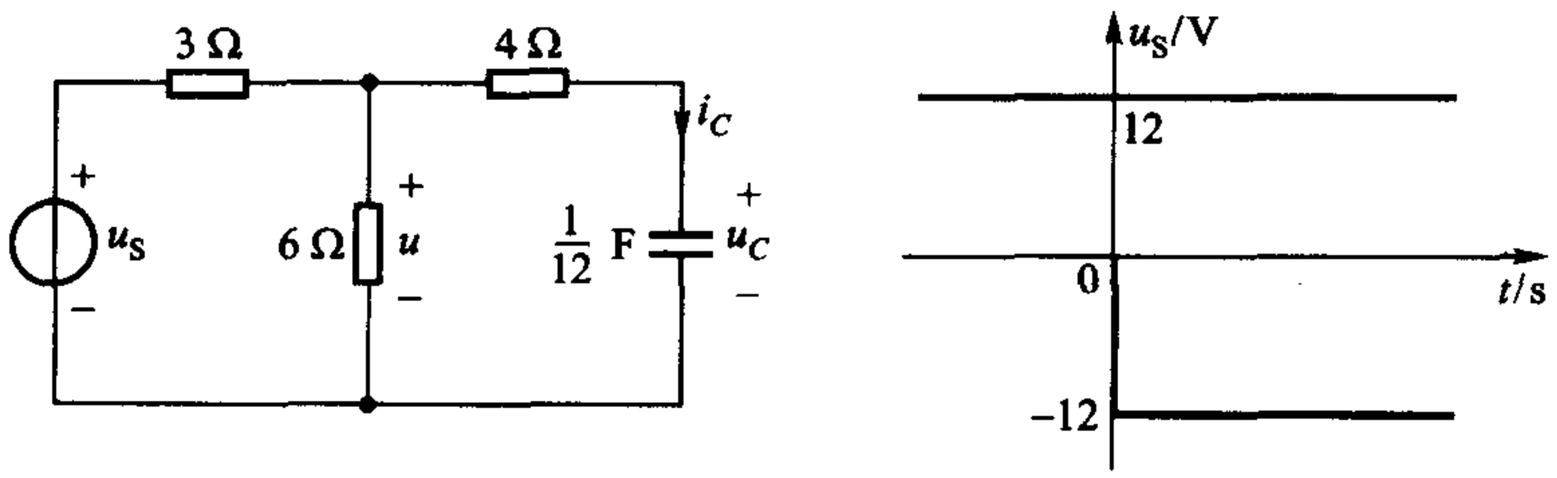


图 A－6

A－7　图 A－7 所示电路，试分别求出当网络 N 分别为如图中所示 6 种情况时，负载 R_L 为获得最大功率应有的阻值。

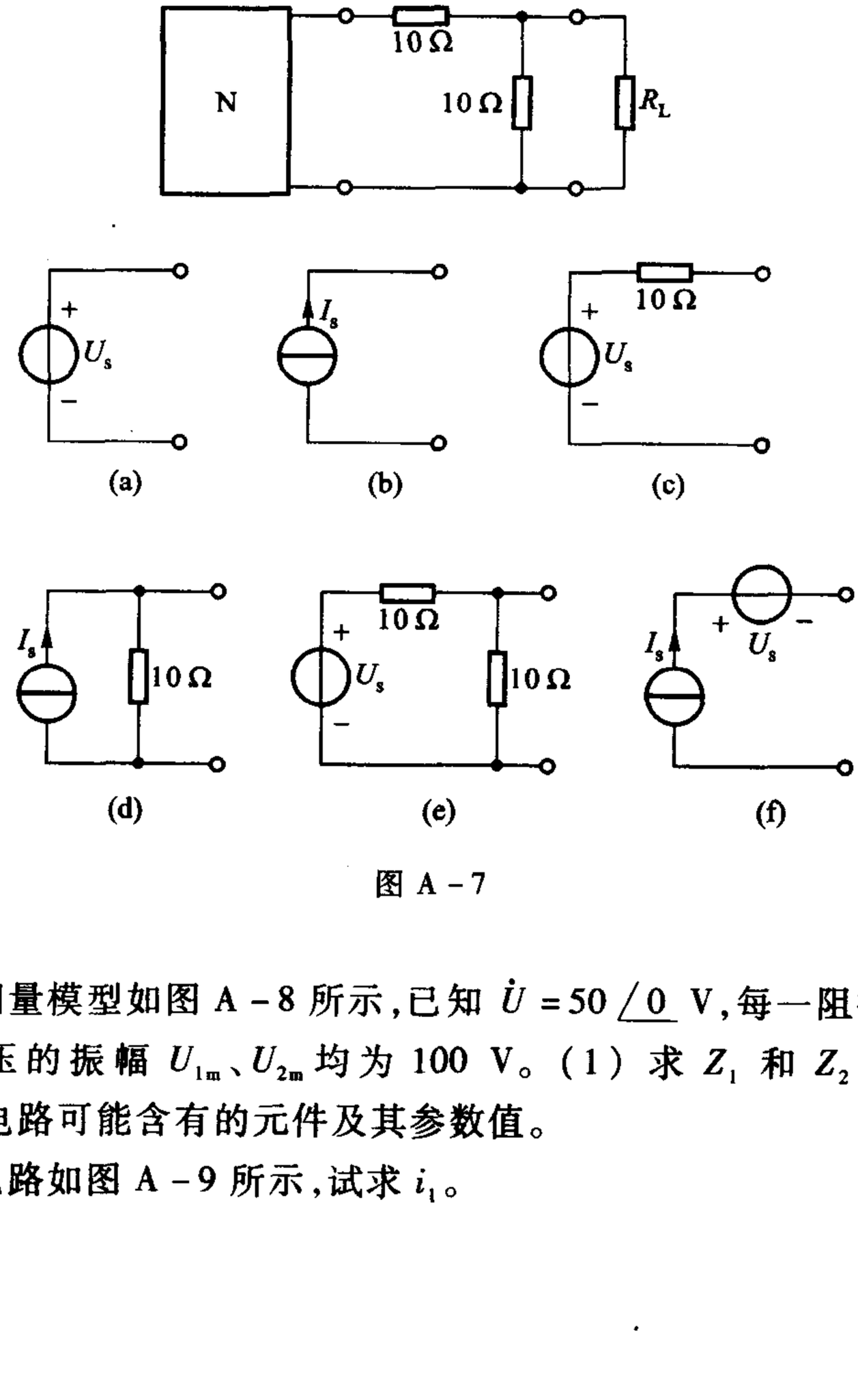


图 A－7

A－8　相量模型如图 A－8 所示，已知 $\dot{U}=50\angle 0$ V，每一阻抗均消耗功率 250 W，且电压的振幅 U_{1m}、U_{2m} 均为 100 V。（1）求 Z_1 和 Z_2；（2）若 $\omega=800$ rad/s，求电路可能含有的元件及其参数值。

A－9　电路如图 A－9 所示，试求 i_1。

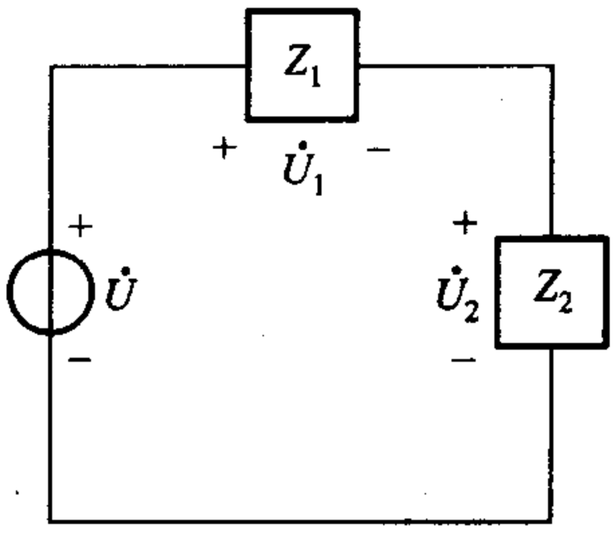


图 A－8

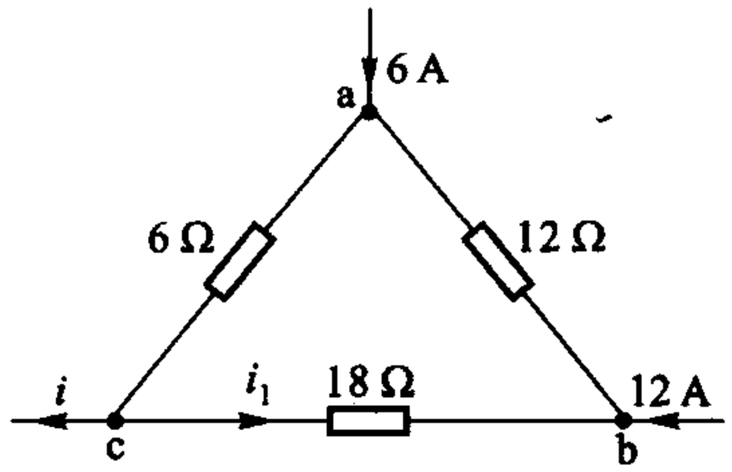


图 A－9

A－10　某发电厂通过三对输电线将功率输送给三个地区。从发电厂的仪表读数表明一号输电线输送 5 MW，功率因数为 0.95（电感性）；二号输电线输送 2 MV · A，功率因数为 0.9（电容性）；三号输电线输送 100 Kvar（电容性）和 1 MW。问发电厂端的功率因数是多少？

A－11　已知具有两个端口的含源电路如图 A－10 所示，设负载电阻 R_L = 2 Ω，问 R_L 接于 ab 端还是 cd 端方能获得最大功率？

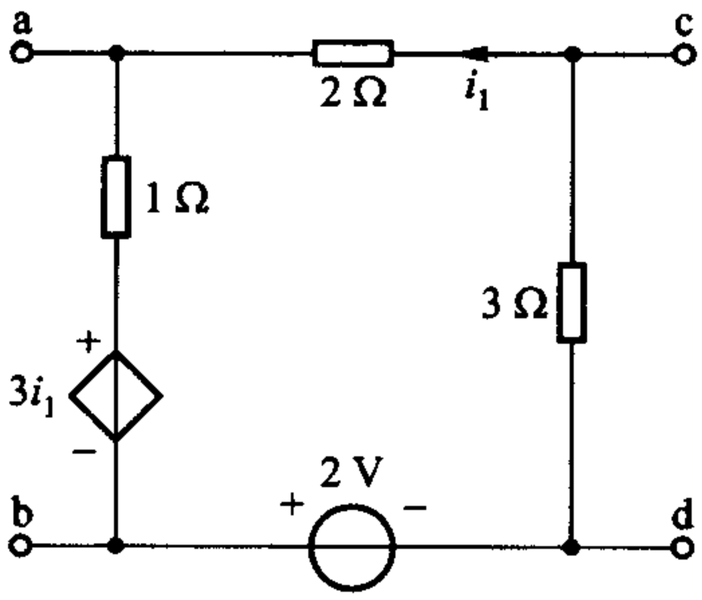


图 A－10

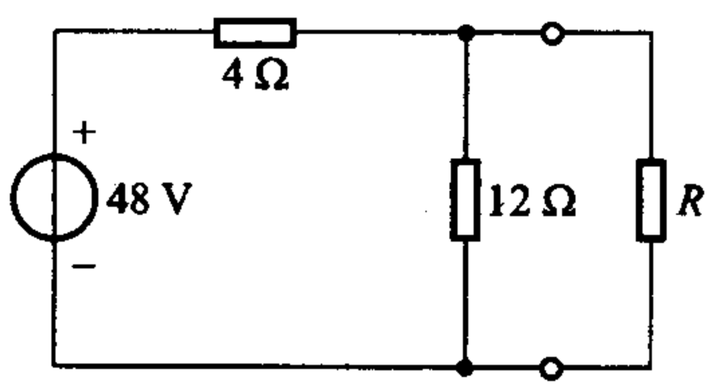


图 A－11

A－12　在图 A－11 所示电路中，如果 48 V 电压源对电路提供的功率为 288 W，试求 R。

A－13　图 A－12 所示由多个电源组成的电路，(1) 试求每个电源吸收的功率；(2) 4 V 电压源应改为多少伏才能使 －5 A 电流源提供的功率为零？

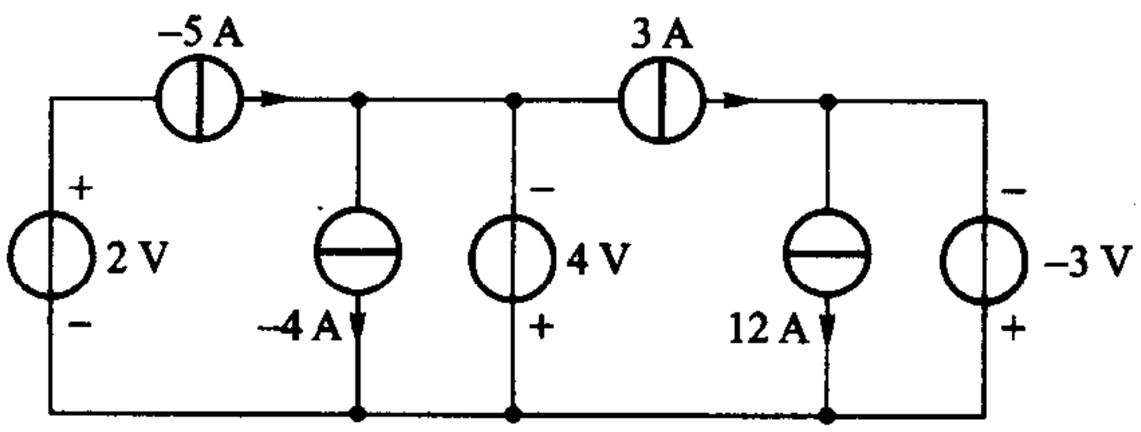


图 A－12

A－14　图 A－13 所示相量模型，已知 $j\omega L_1 = j\omega L_2 = j10\ \Omega$，耦合系数 $k = 0.5$，试求电压 $\dot{U}$ 和电感 L_1 的电压 $\dot{U}_1$。

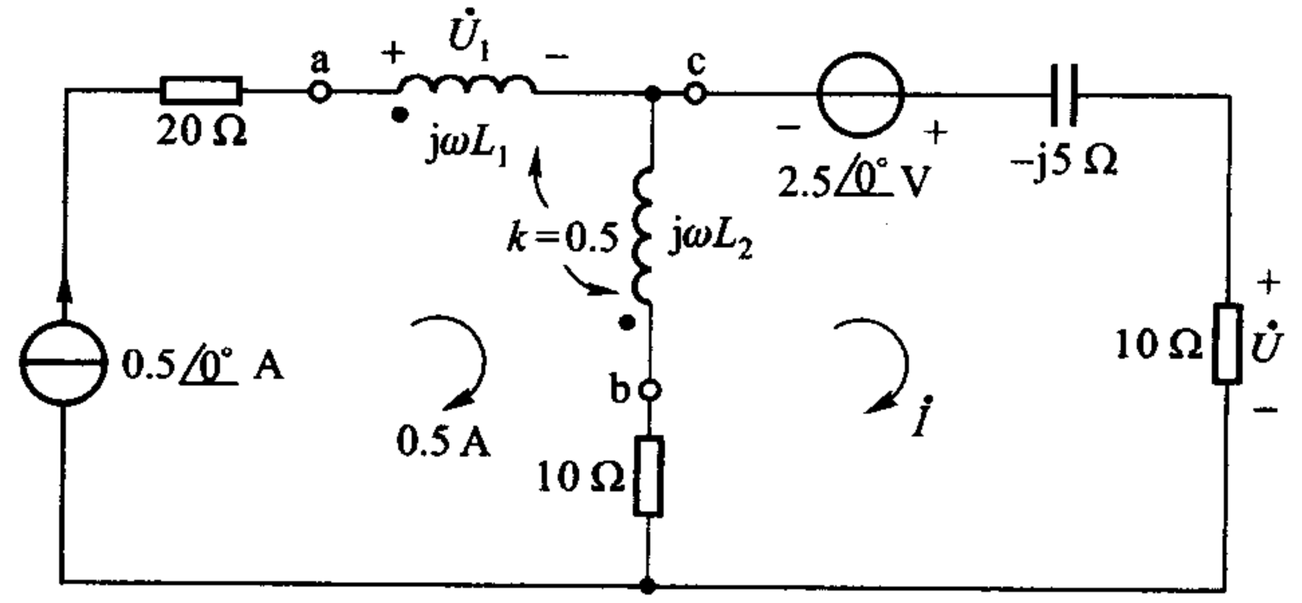


图 A－13

A－15　电路如正文例 6－11（图 6－32）所示，若作用的信号 u_S 到 $t = 0$ 时并未中止而是在 $t > 0$ 时一直保持为 10 V，试求 $t = 10$ s 时的 u_C 值。试用两种方法。

A－16　图 A－14 所示电路有时用作反馈放大器的补偿电路。试确定在正弦稳态时，使输出电压 $u_O(t)$ 滞后输入电压 $u_S(t)$ 的 ω 值。

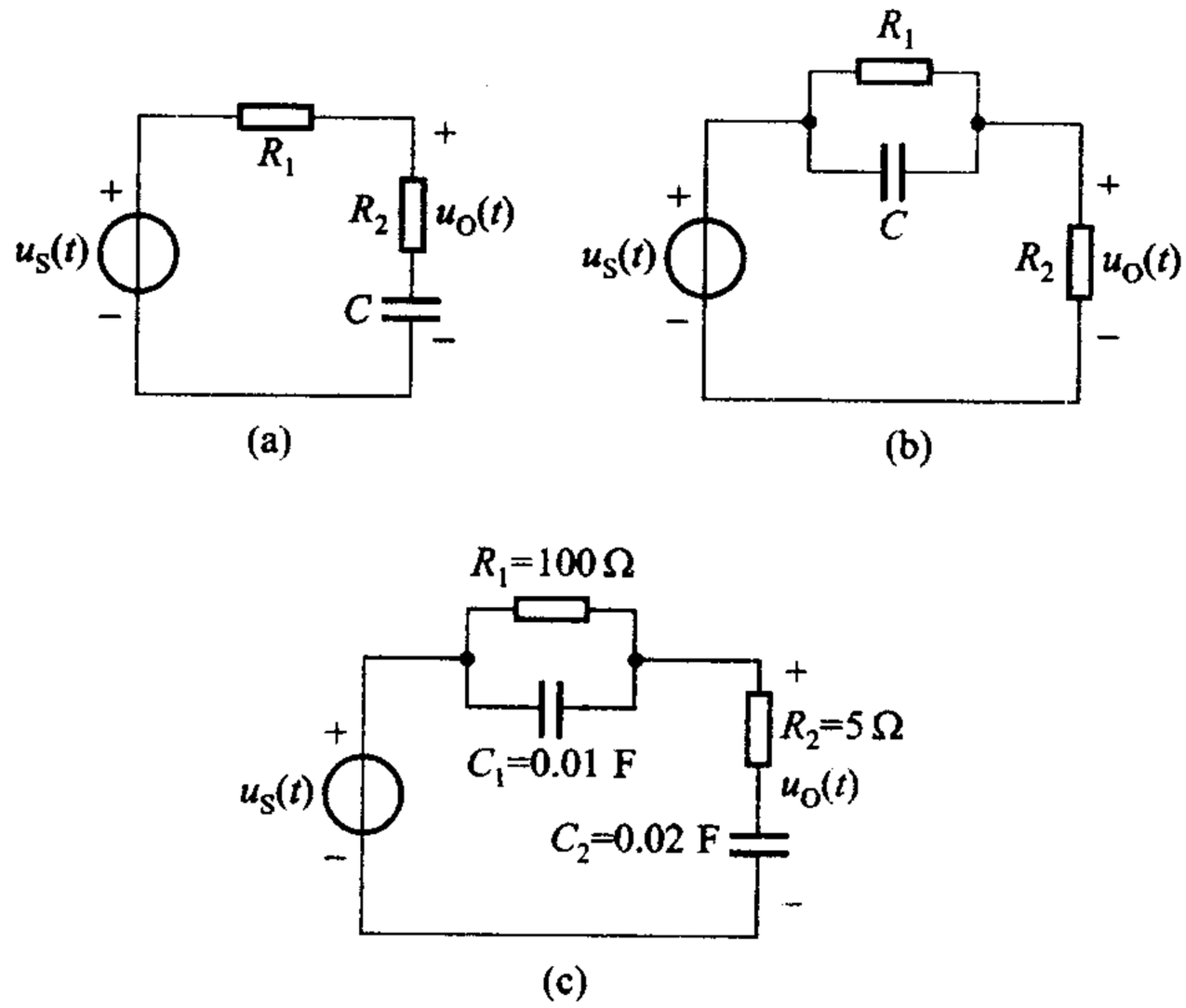


图 A－14

A－17　电路如图 A－15 所示，已知 $u_S(t) = \cos(2t)$ V，$C = 1$F、$R = 1\ \Omega$、受控源电压 $u(t) = 2i_C(t)$，试求 $u_R(t)$、$i_S(t)$。试用时域分析法和相量分析法两种方法分别求解。

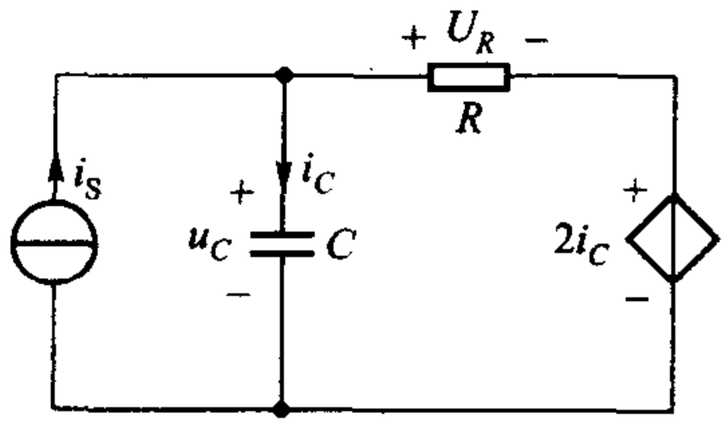


图 A－15

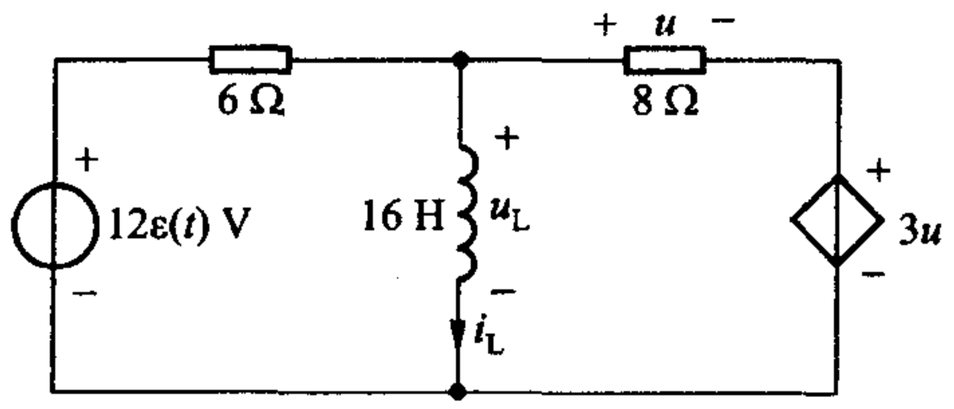


图 A－16

A－18　电路如图 A－16 所示，试求对有 t 的 $i_L(t)$、$u_L(t)$ 和 $u(t)$。

A－19　已知图 A－17 所示电路中 $L_1 = L_2 = 10$ H、$C = 10^3$ μF、M 可从 0 变至 6H，试求该电路谐振角频率的变化范围。

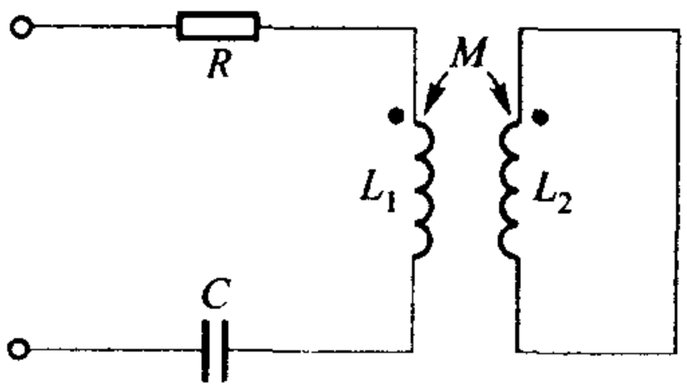


图 A－17

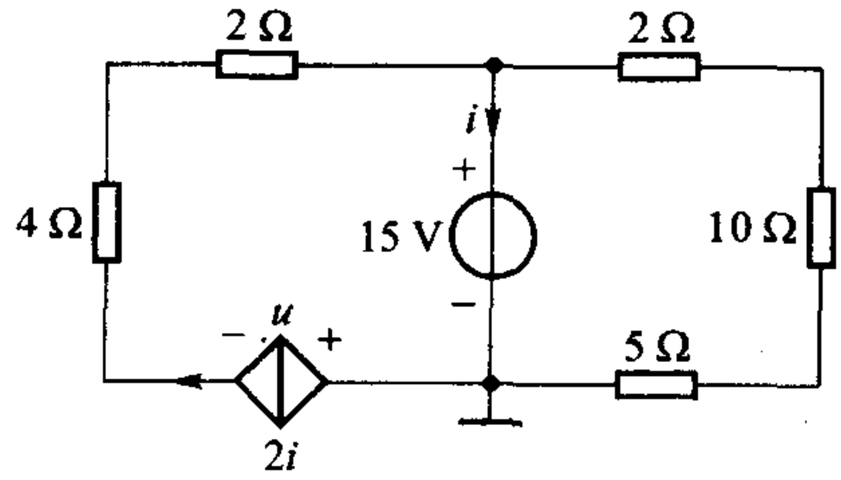
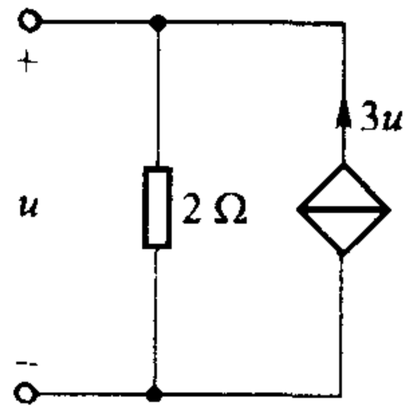


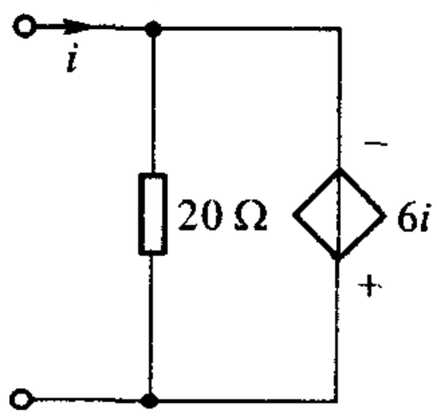
图 A－18

A－20　图 A－18 所示电路中，求电压 u 和受控源产生的功率。

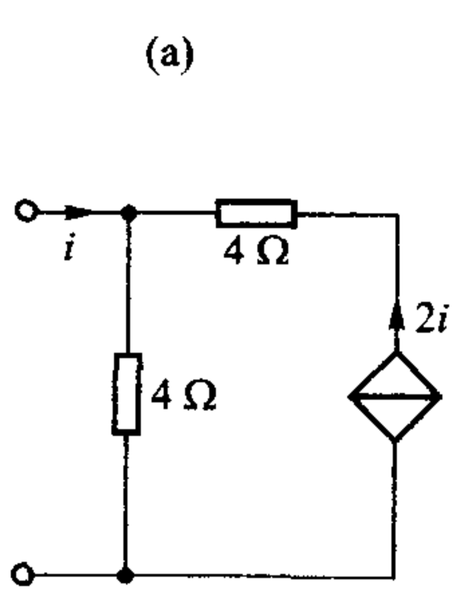
A－21　试求图 A－19 所示单口网络的等效电阻。



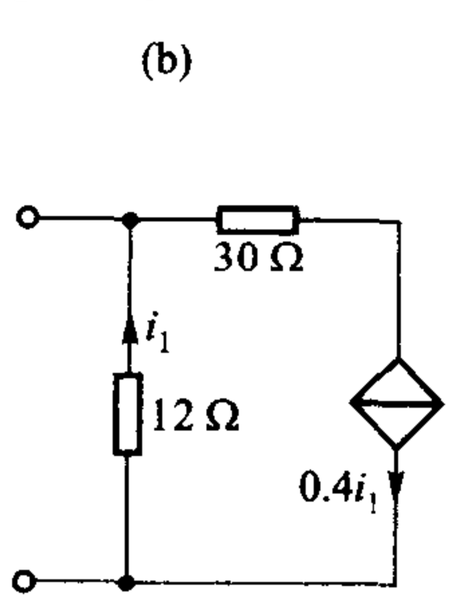
(a)



(b)



(c)



(d)

图 A－19

A－22　图 A－20 所示电路中，(1) 若 $u_S = 1$ V，计算 u 和 i；(2) 若 $u_S = 10$ V，计算 u 和 i；(3) 若 $u_S = \cos(2t)$ V，试求 u，i；(4) 若电路中每一个 1 Ω 电阻换为 10 Ω 电阻，u_S 为 10 V，计算 u 和 i。

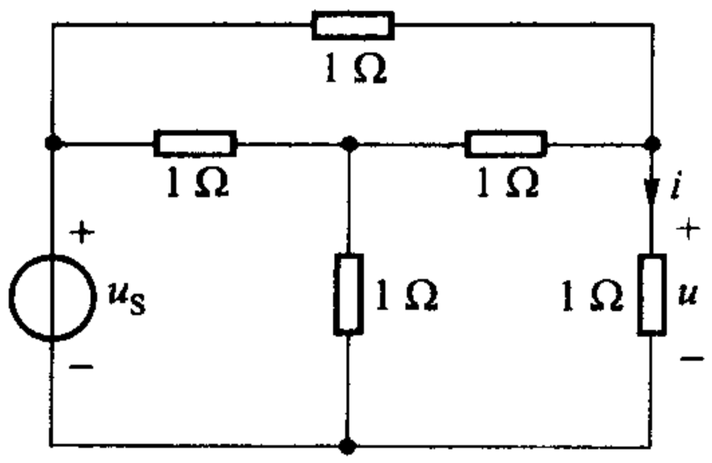


图 A－20

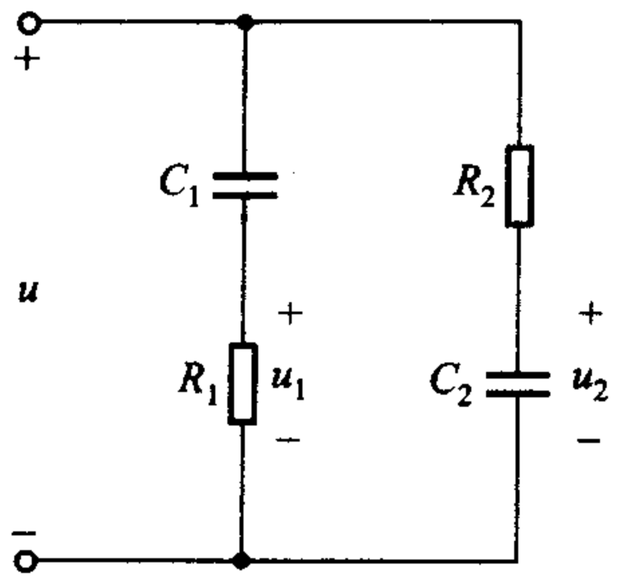


图 A－21

A－23　正弦稳态电路如图 A－21 所示，若 u_1 与 u_2 的相位差为 90°，试求参数间应满足的条件。

A－24　*RL* 串联电路的时间常数为 1 ms，电感为 1 H。若要求在零输入时的电感电压响应减半而电流响应不改变，求 *L*、*R* 应改为何值？

A－25　电路如图 A－22 所示，试求节点电压 u_1、u_2 和 u_3，已知 $i_S = 5$ A。

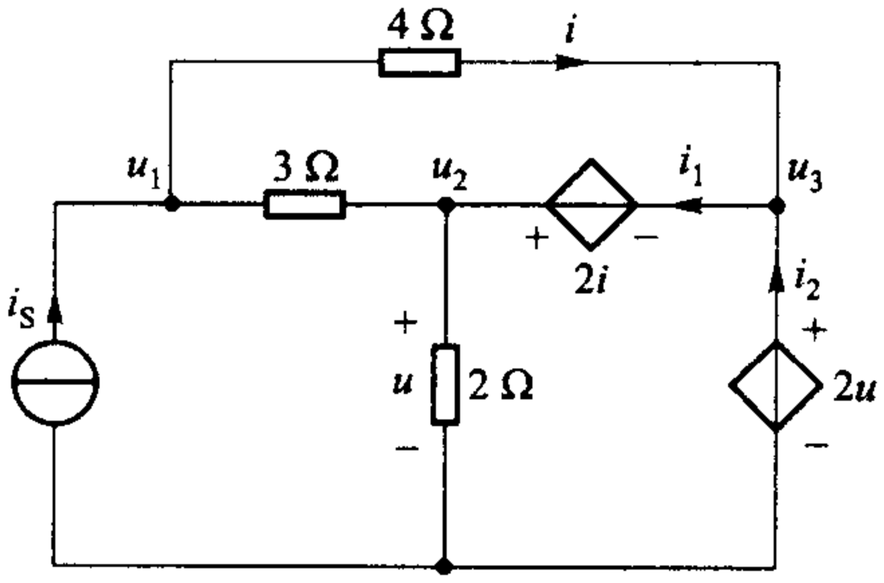


图 A－22

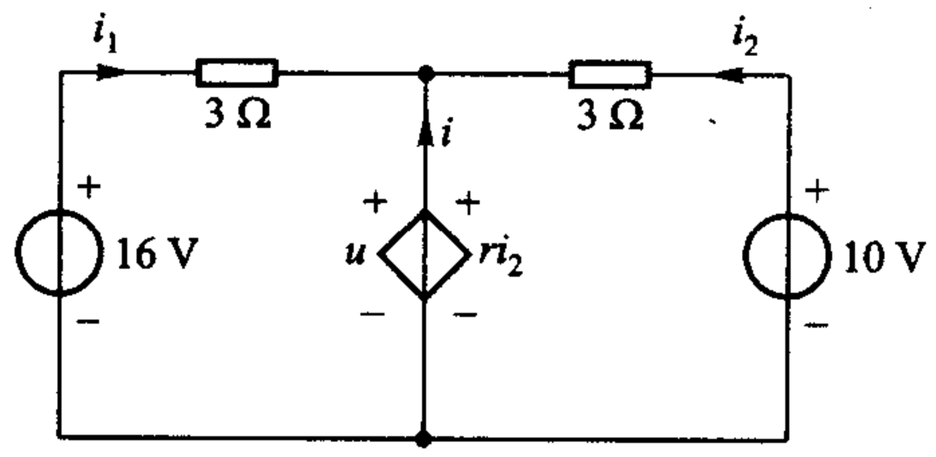


图 A－23

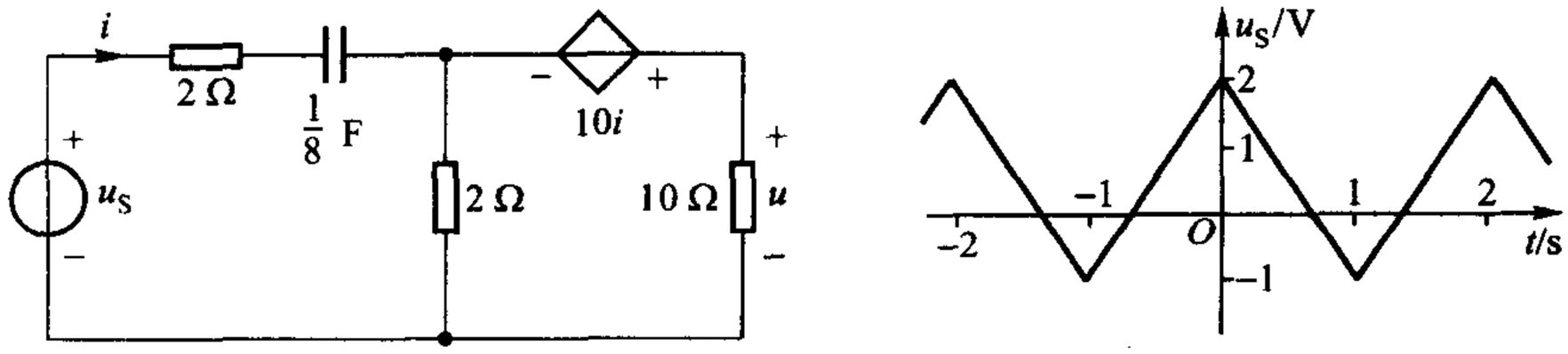
A－26　电路如图 A－23 所示，试求受控源的电压 u 和电流 i，并求比值 $\frac{u}{i}$。如果 16 V 电压源换以 12 V 电压源，试重复求解。已知受控源参数 $r = 2$ Ω。

A－27　设录音机机头的电阻为 10 Ω，放音时的信号电压以 1 mV 计，磁头通过 1∶n 的理想变压器与输入电阻为 100 Ω 的放大器相连接，试表明放大器获得的功率为

$$P = \left(n + \frac{10}{n}\right)^{-2} \ \mu\text{W}$$

并求获得最大功率时的 n 值。

A－28　已知电路如图 A－24(a)所示，作用于电路的电压源 $u_S(t)$ 为如图 A－24(b)所示的三角波，试求稳态电压 $u(t)$。



(a)　　(b)

图 A－24

A－29　相量模型如图 A－25 所示，试求对电源的功率因数。

A－30　*RLC* 串联电路，$R = 4\ \Omega$、$L = 1\ \text{H}$、$C = \frac{1}{3}\text{F}$，外施电压 $u_S(t) = 20\cos(3t)\text{V}$ 于 $t = 0$ 时作用于电路，试确定使电路立即进入正弦稳态所需的初始条件 $u_C(0)$ 和 $i(0)$。

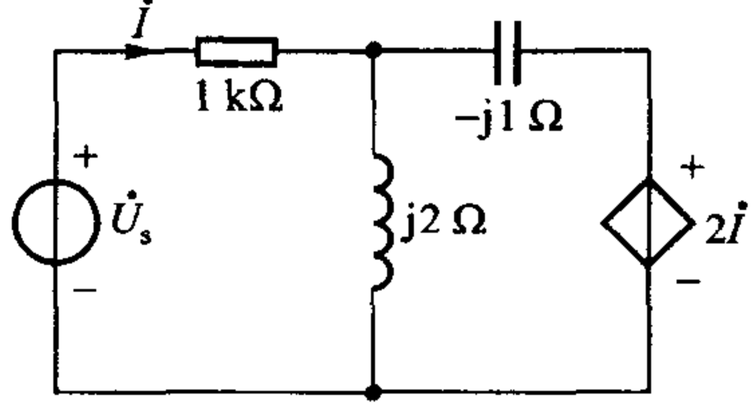


图 A－25

附录B　复习大纲

> “获得的知识，如果没有完满的结构把它连在一起，那是一种多半会被遗忘的知识。一串不连贯的论据在记忆中仅有短促得可怜的寿命。根据可借以推断出论据的那些原理和观念来组织论据，是降低人类记忆丧失的速率唯一的已知方法。”
>
> ——布鲁纳《教育过程》第21页
> 上海人民出版社(1973年译本)

说明：本大纲供课程全部学完后使用，也可在日后有需要时使用。大纲按课程的基本结构分节编写，基本结构是：一个假设(集总假设)，两类约束(KCL、KVL和元件VCR)，三大基本方法(叠加、分解和变换域)。每节后附注有关的基本习题编号。也可把曾对自己学习有帮助的题目，添加进去，成为一份经过个人整理的资料。大纲力求简单扼要，避免重复教材正文，甚至只有标题。由附注习题可追溯到教材有关章节。

§B-1　集总假设

§B-1-1　支路电流和支路电压

集总电路　由电阻、电容、电感等集总参数元件组成的电路。每一元件视为一条支路。支路电流 i 和支路电压 u 是集总电路问题中分析、研究的对象。

描述电现象的基本物理量是电荷 q 和能量 w，它们分别和 i 或 u 的关系是

$$i=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \tag{1}$$

$$u=\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}q} \tag{2}$$

习题1-2、5-5(2)、(4)

§B-1-2 功率和能量

它们也是电路分析的对象，可由支路的 u、i 求得该支路的功率 p，即

$$p = ui \tag{3}$$

p 和 w 的关系是

$$p = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} \tag{4}$$

习题 1-3、1-4、1-10

对周期性变化的 u、i，除瞬时功率 p 外，更常用的是平均功率 P。

习题 9-7

以上列举的(1)、(2)、(3)、(4)式应视为集总电路最基本、普遍适用的公式。其间关系如图 B-1 所示。

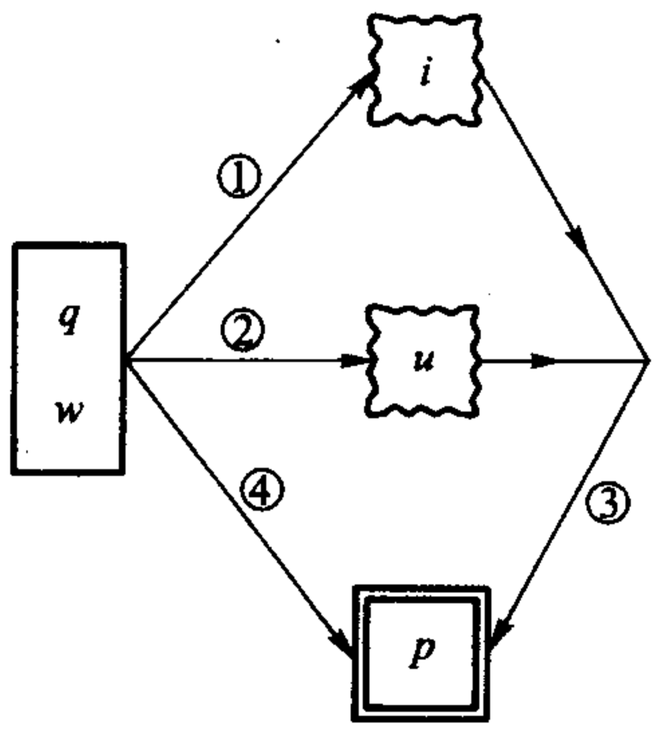


图 B-1

§B-1-3 功率、能量的专用公式

由普遍适用公式可得出适用于特殊情况的专用公式。

(1) 针对各种不同元件的公式。

(a) 电阻 R

$$p = i^2R = \frac{u^2}{R}$$

$$w = \int_{t_1}^{t_2} p\mathrm{d}t = R\int_{t_1}^{t_2} i^2\mathrm{d}t = \frac{1}{R}\int_{t_1}^{t_2} u^2\mathrm{d}t$$

习题 A-3

在正弦交流电路中、采用有效值 I、U，平均功率

$$P = I^2R = \frac{U^2}{R}$$

有效值为对应正弦量振幅(最大值)的$\frac{1}{\sqrt{2}}$。

习题 9 - 2

(b) 电容 C、电感 L

$$w_C = \frac{1}{2}Cu^2 , W_C = \frac{1}{2}CU^2$$

$$w_L = \frac{1}{2}Li^2 , W_L = \frac{1}{2}LI^2$$

W_C、W_L 为正弦交流电路中电容、电感的平均储能。

习题 5 - 5(4)、(3)、9 - 3

(2) 单相正弦稳态电路。

平均功率　$P = UI\cos\varphi$ W(瓦)

无功功率　$Q = UI\sin\varphi = 2\omega(W_L - W_C)$ var(乏)

视在功率　$S = UI$　V · A(伏安)

φ 为 u,i 之间的相位差角,$\cos\varphi$ 称为功率因数,常以 λ 表示。

复功率　$\tilde{S} = \dot{U}\,\dot{I}^* = P + jQ$

$\dot{U}$ 为电压有效值复量、$\dot{I}^*$ 为电流有效值共轭复量。

习题 9 - 14(1)、9 - 20(1)、(2)

(3) 对称三相正弦稳态电路。

$$P = 3U_P I_P \cos\varphi = \sqrt{3}U_L I_L \cos\varphi$$

下标 P 表示相(电压、电流)、下标 L 表示线(电压、电流),φ 为相电压、相电流的相位差角,即每相阻抗的幅角。

习题 9 - 31　练习题 9 - 14

§B-2　两类约束

两类约束　集总电路各支路电流、电压的制约关系,是分析、研究集总电路的基本依据。分为拓扑约束和元件约束。

§B-2-1　KCL 和 KVL

拓扑约束、即由电路连接方式所表现出的约束关系,由 KCL 和 KVL 表明,均属同类量之间的约束关系。时域形式是根本的,尚有相量形式和 s 域形式。

对任一节点或割集　$\sum i = 0$

对任一回路　$\sum u = 0$

习题 1-5、1-7

§B-2-2 元件约束——VCR

元件两端电压与流过电流间的约束关系，即 VCR。元件不同，约束关系亦异，表现出电路的个性。时域形式是根本的，尚有相量形式和 s 域形式。

（1）电阻元件 属单口元件。电压与电流呈代数关系。见图 B-2 曲线①，线性非时变电阻：$f(u,i)=u-Ri=0$。

习题 1-11、1-13

（2）电压源、电流源 电路内能量的源泉（来自其他形式能量的转换），响应的主宰者。电压源开路时，仍有电压，虽然电流为零；电流源短路时，仍有电流，虽然电压为零。电压源 $f(u,i)=u-u_S=0$、对任何 i，见图 B-2 曲线②；电流源 $f(u,i)=i-i_S=0$、对任何 u，见图 B-2 曲线③。

习题 1-21、1-34、4-16、A-13

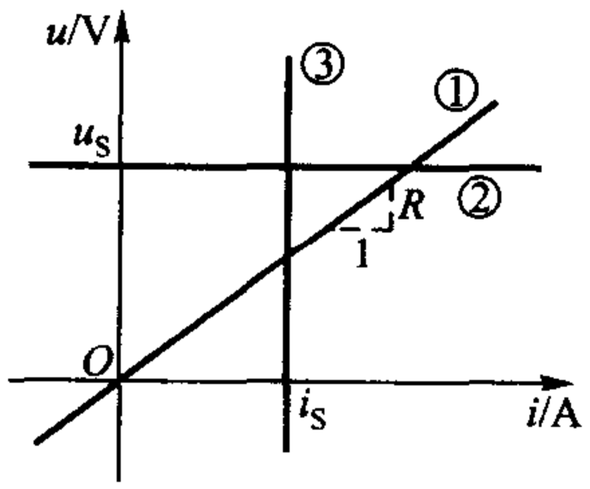


图 B-2

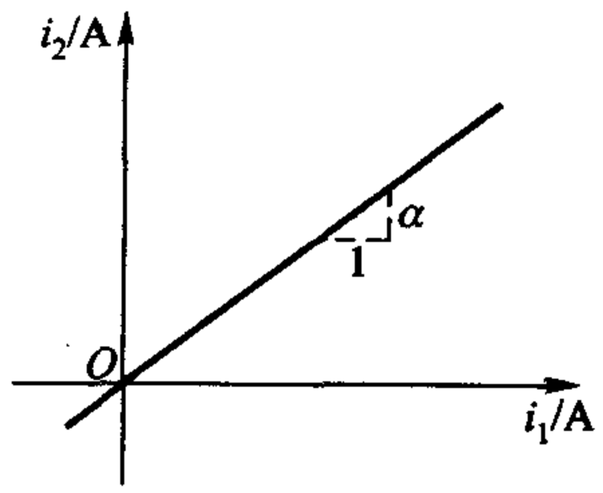


图 B-3

（3）受控源 因控制量（电压或电流）与受控量（电压或电流）不同而有四种搭配关系，故有 VCVS、VCCS、CCVS、CCCS 四种受控源，均系双口有源电阻元件。控制量与受控量呈代数关系，故属电阻（性）元件。例如 CCCS 中的 $i_2=\alpha i_1$、i_1 为控制量，i_2 为受控量，α 为受控源参数，称为转移电流比（图 B-3）。这一关系式表明 i_2 与 i_1 的约束关系，它们不在同一支路，属转移关系。

习题 1-25、A-26

（4）电容元件 元件因其约束性质不同，分为电阻（性）元件和动态元件。动态元件的约束关系涉及对电流、电压的微分和积分。电容、电感、耦合电感均属动态元件。

$$i=C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

$$u(t)=u(0)+\frac{1}{C}\int_0^t i\mathrm{d}\xi$$

根据电压、电流关系的积分形式可知初始电压为 $u(0)$ 的电容，在 $t\geqslant 0$ 时可

等效为电压源 $u(0)$ 与无初始电压的电容的串联电路。

习题 5－1、5－4

(5) 电感元件　其电压、电流关系为

$$u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$$i(t) = i(0) + \frac{1}{L}\int_0^t u\mathrm{d}\xi$$

请注意，电容电压、电流关系中的 i 换以 u，u 换以 i，C 换以 L 即可得到电感电压、电流关系。反之，由电感电压、电流关系可得电容电压、电流关系——对偶性。

初始电流为 $i(0)$ 的电感，在 $t\geqslant 0$ 时可等效为电流源 $i(0)$ 与无初始电流的电感的并联电路。

习题 5－8、5－10

(6) 耦合电感　一对耦合电感的电压、电流关系为

$$u_1 = L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \pm M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

$$u_2 = L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \pm M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

即在自感电压上加上(减去)互感电压即可。

习题 11－1

(7) 理想变压器　属双口电阻(性)元件。

$$u_2 = \pm nu_1$$

$$i_2 = \pm\frac{1}{n}i_1$$

n 为理想变压器的(唯一)参数，称为变比。在按电磁感应原理近似实现的理想变压器中，n 也称匝比，$n=\dfrac{N_2}{N_1}$，N_2 和 N_1 分别为二次线圈和一次线圈的匝数。

习题 11－14、11－15

§B－2－3　两类约束的应用

两类约束是解决集总电路问题的基本依据。整个电路分析课程内容可以说就是两类约束的应用。直接运用两类约束的问题大致可分为典型和非典型两类。

§B－2－3－1　典型问题

给定电路的结构、元件的参数和各独立电压源的电压和独立电流源的电流，需求所有的或某些指定的支路电压、支路电流。对象多为具有多个回路或多个

节点的复杂电路。手算解法含两个步骤:列出(联立)方程和求解方程。可处理所有集总电路问题。

(1) 列方程 根据两类约束可列出所需方程,一般均为联立方程组。最简单情况为单回路或两节点问题,只需一个 KVL 方程和元件 VCR 或一个 KCL 方程和元件 VCR。

为减少所需联立方程数,对较复杂电路常用支路电流法,即先仅以全部支路电流为求解对象,所需方程除 KCL 方程外,为以支路电流表示的 KVL 方程,省去元件的 VCR 方程。解得支路电流后,支路电压迎刃而解,不必求解联立方程。

习题 1-31、1-30(电阻电路代数方程)

习题 6-1、7-6(1)、7-10(1)(动态电路微分方程)

(2) 为进一步减少所需联立方程数,可运用网孔分析或节点分析。在用较少代价求得网孔电流或节点电压后,其他支路电流、电压可迎刃而解,此时不必求解联立方程。

习题 1-8、1-9

§B-2-3-1-1 网孔分析 所涉及的方程是以网孔电流表示的 KVL 方程组,因而,在列方程时除电阻外,最便于处置的便是电压源和 CCVS、VCVS。特别关注含电流源和 CCCS、VCCS 时的处置方法。

习题 2-1、2-2

教材例 2-5(CCVS)、习题 2-6(VCVS)、2-7(CCCS)、2-8(VCCS)

§B-2-3-1-2 节点分析 所涉及的方程是以节点电压表示的 KCL 方程组,因而,在列方程时除电导外,最便于处置的是电流源和 VCCS、CCCS。特别关注含电压源和 CCVS、VCVS 时的处置方法。

习题 2-12、2-14、教材例 4-12、习题 4-22

教材例 2-8(VCCS)、习题 2-17(CCCS)、A-25(CCVS)、2-19(VCVS)

§B-2-3-2 非典型问题

大量存在。求解典型问题有系统化步骤遵循。求解非典型问题,需灵活运用两类约束,分压、分流公式等。题型多样,无系统步骤可以遵循。求解对象并不限于 u、i。

(1) 有些问题或只需用 KCL 或只需用 KVL 或只需用元件 VCR 即可得到解决。

习题 1-14、1-23、A-9

习题 5-3、5-7、5-12

(2) 有些电路问题需联合运用两类约束,但往往毋需建立联立方程。

习题 1-5、1-24、1-27

习题 5-11

§B-2-4 电阻电路与动态电路

至少含有一个动态元件的电路为动态电路，否则为电阻电路。电路的分析方法即按此分为电阻电路分析和动态电路分析两大类。不论激励是直流、正弦交流还是其他形式，对电阻电路（内因、变化的依据）来说，分析方法是相同的。对动态电路也是如此。按响应的特点把电路分为直流电路、正弦交流电路，对系统掌握电路分析方法是不利的。

（1）电阻电路的（时域）分析　电阻电路是由代数方程描述的，不论 u、i 是常数还是时间 t 的函数，分析方法没有差别。

习题 1-17（表示为波形）、8-9、A-22（表示为具体的时间函数）、练习题 11-11、A-27

（2）动态电路的时域分析　实质上是解微分方程的问题。

（a）一阶电路（基本电路——*RC*、*RL* 电路）。

习题 6-20、6-3、A-24（零输入响应、零状态响应的基本概念、时间常数）

习题 6-44（过渡过程、瞬态的概念）、习题 6-47

（b）二阶电路（基本电路——*RLC* 电路）。

习题 7-4、7-5、7-6（求解的三个须知）

§B-2-5 两类约束和三大基本方法

任何一本电路分析的教材都不会止于两类约束的叙述，还必须介绍其他一些定理和方法，充实电路分析的基础。这些内容可归结为三大基本方法：叠加方法、分解方法和变换（域）方法。叠加方法使复杂激励的电路问题化为简单激励的问题；分解方法使复杂结构的电路问题化为简单结构的问题；变换（域）方法使动态电路分析能借助电阻电路的解法。三大方法都以两类约束为基础，彼此互相关联。

§B-3 叠加方法

叠加方法的理论基础是叠加原理。适用于线性电路。

§B-3-1 电阻电路的叠加原理

若以某一支路的电流或电压为响应 $y(t)$，散布于电路中的 M 个激励为 $x_m(t)$，则

$$y(t) = \sum_{m=1}^{M} H_m x_m(t)$$

H_m 为网络函数

$$H_m = \frac{y_m}{x_m}$$

y_m 为 $y(t)$ 的一个分量。对给定的电阻电路，H_m 为实常数，体现出响应与激励的比例性（齐次性）。

习题 3－6、3－9、3－10、A－22

§B－3－2 正弦稳态电路的叠加原理

（1）正弦稳态网络函数 $H(j\omega)$ 为频率 ω 的函数。

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| \underline{/\varphi(\omega)}$$

在某一特定 ω 时，为复常数。

习题 10－7

（2）若各正弦激励均为同一频率 ω，则可根据同一相量模型进行计算。

习题 10－9

（3）若各正弦激励的频率各不相同（不一定成谐波关系），则需根据各自频率的相量模型进行计算。

习题 10－8、A－4

（4）若激励为周期性非正弦波，使用傅里叶级数分解出各次谐波分量后，按各自频率的相量模型进行计算。响应也为周期性非正弦波，但波形不同。

习题 10－21、A－28

§B－3－3 动态电路时域分析的叠加原理

（1）初始时刻 $t=0$ 以后的全响应。

全响应＝零输入响应＋零状态响应

即 $t\geqslant 0$ 的响应为 $t<0$ 时的输入［由此确定了初始状态 $u_C(0)$、$i_L(0)$］和 $t\geqslant 0$ 时的输入分别单独作用的结果。实质上，响应仍然是各激励单独分别作用的总和，只是以初始时刻为界，加以区别，作不同的处理。

习题 6－30、A－15

（2）一阶电路，状态变量 $u_C(t)$ 或 $i_L(t)$ 统一用 $\lambda(t)$ 表示后，叠加原理可表示为

$$\lambda(t) = \lambda(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} + \lambda(\infty)(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) \qquad t\geqslant 0$$

第一项为零输入响应，第二项为零状态响应。

习题 6－3、6－28

较复杂的一阶电路，可用三要素法求解状态变量和非状态变量（本大纲§B－4－3）。

(3)(单位)阶跃响应 $s(t)$ 和(单位)冲激响应 $h(t)$。

它们都是在零状态下定义的。如遇非零初始状态,叠加上相应的零输入响应即得全响应。

习题 6 - 18

§B-3-4　动态电路 s 域分析的叠加原理

(1) 初始时刻 $t=0$ 以后的全响应。

$$\mathscr{L}[\text{全响应}]=\mathscr{L}[\text{零输入响应}]+\mathscr{L}[\text{零状态响应}]$$

其中

$$\mathscr{L}[\text{零输入响应}]=\sum_{n=1}^{N}H_{in}\frac{\lambda(0_-)}{s}$$

$$\mathscr{L}[\text{零状态响应}]=\sum_{m=1}^{M}H_{em}X_{m}(s)$$

网络函数 H_{in} 和 H_{em} 分别表示初始状态等效激励和外施激励及其相对应的响应的关系。H 为 s 的有理函数。

习题 12 - 20

(2) 关于 $H(s)$。

(a) 电阻电路、正弦稳态电路的网络函数均为 $H(s)$ 的特殊情况:$s=j\omega$ 和 $s=0$。

习题 12 - 15

(b) $H(s)$ 的极点是电路的固有频率。

习题 12 - 10

(c) $H(s)=\mathscr{L}[h(t)]$。

习题 12 - 12

§B-3-5　功率与叠加原理

(1) 功率一般不符合叠加原理。

习题 3 - 12

(2) 可运用叠加原理直接计算功率的特殊情况:

(a) 不同频率的正弦激励作用下的稳态电路,求平均功率 P。

习题 10 - 12

(b) 不含受控源的线性电阻电路,电压源组对电路提供的功率和电流源组对电路提供的功率等于所有电源对电路提供的总功率。

习题 3 - 13、3 - 14

§B-4 分解方法

分解方法的理论基础是置换定理、戴维南定理、诺顿定理和互易定理。

分解就是分而解之,“分”字既表示划分也表示分别。要分而解之,就必须知道如何最简便地考虑被割舍部分对其他部分的影响,这就要用到置换定理。如果划分是一分为二,要运用置换定理就必须知道划分处的电压或电流,这就需要知道这两个部分的VCR或戴维南、诺顿等效电路。这些问题解决后,就可分而解之,达到降低电路结构复杂程度,从而简化计算的目的。

§B-4-1 单口网络的VCR和等效电路

(1) 只含电阻时或只含电阻及受控源时,VCR呈 $u=Bi$,可等效为一个其值为 B 的电阻;含电阻、受控源和电源时,VCR呈 $u=A+Bi$ 或 $i=C+Du$,可等效为一个电阻 B 与电压源 A 的串联电路(戴维南等效电路)或一个电导 D 与电流源 C 的并联电路(诺顿等效电路)。

一个单口网络(不论是否含有电源),其VCR或等效电路,是由它本身的特性确定的,与外电路无关,因此,VCR可在任何外电路的条件下求解,最简便的便是外施电源法。VCR和等效电路是同一电路特性的两种表述方式,前者是数学的,后者是物理的。

习题4-3、4-19

(2) 戴维南定理和诺顿定理是求解单口网络VCR和等效电路的另一种方法。定理是由上述的外施电源法导出的,但更具概括性,更易于操作。外施电源法也可称为一步法,而运用这两定理之一可称为两步法,因为需经历求解 u_{oc}(或 i_{sc})和求解 R_o(或 G_o)等两个步骤。两种方法不要混淆。

习题4-20、4-28

§B-4-2 置换与等效

(1) 置换定理 必须算得划分处的 u 或 i 后才能运用。

习题2-9、2-10

(2) 置换与等效 两个概念不要混淆。等效和置换是两种不同方式的替代,都涉及用另一个二端元件或通常是更简单的网络去替代原来的网络,例如在习题4-4中N可以用1 V电压源和0.8 Ω电阻的串联电路来等效[这是根据给定的VCR($5u=4i+5 \longrightarrow u=\frac{4}{5}i+1$)得出的],虚线框内换以其他任何电路,包括非线性电路,这一等效电路,总是有效的,但在《〈电路分析基础〉(第四版)

教学指导书》题解中用以置换N的1.4 V电压源只对图题4-4所示电路有效，哪怕只是原来的5 V电压源，改为6 V电压源，也将失效，读者不妨试一下。

因此，我们有许多等效公式，却从来不曾听到有置换公式。在任何一个电路中如果知道某一元件、某一单口网络的 $u=\alpha$ V 和 $i=\beta$ A，都可以用一个其值为 α 的电压源或是其值 β 的电流源或是其值为 $\frac{\alpha}{\beta}$ 的电阻来置换，即便是非线性电路、动态电路也可适用置换定理。

习题4-11、A-26

§B-4-3　分解方法的运用

（1）先确定何处划分。如划分为两个部分，下一步就是分别找出这两部分的VCR（解析的或图示的）或等效电路。然后，或联立两VCR的解析式，或求两VCR的曲线相交点或解两等效电路组成的简单电路，得到划分处的 $u=\alpha$ V、$i=\beta$ A。最后，以电压源 α V 或电流源 β A 置换被舍弃部分后，在一个结构较简单的电路中求得解答。

习题4-4（VCR联立）、4-6（曲线相交）、4-24（等效电路）

（2）运用分解方法的最简单情况：划分为两部分之一的只是单个元件——线性或非线性电阻、动态元件。属一般教材戴维南定理或诺顿定理的内容。所谓断开元件所在的支路，即是要找另一部分的戴维南、诺顿等效电路。

习题4-26、4-22、4-30

（3）求解一阶电路的三要素法——若按以上所述，把一个复杂的一阶电路分为动态元件和含源电阻单口网络两部分，把动态元件以电压源（电容时）或电流源（电感时）置换，其值如本大纲§B-3-3(2)所列公式所示，则根据叠加原理可以求得该一阶电路任一元件的电压或电流，均可表示为

$$y(t)=y(\infty)+[y(0)-y(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad t\geqslant 0$$

三要素法是本课程的重点内容。

习题6-33、6-34、6-37

§B-5　变换域方法

电路分析课程的变换（域）方法通常包含相量分析法和 s 域分析法。前者的数学基础是欧拉公式，后者的数学基础是拉普拉斯变换。相量分析法是解决正弦稳态电路的主要方法，s 域分析法则对线性、时不变电路提供了一般的分析方法。变换方法包含三个步骤：变换、变换域中的解算和反变换。变换方法使电阻电路分析方法得以移植到动态电路的分析中来。

§B-5-1 变换与反变换

(1) 相量分析的变换与反变换。

以正弦电压为例。

$$U_m\cos(\omega t+\psi) \rightleftharpoons \dot{U}_m = U_m \angle \psi \text{(振幅相量)}$$

或

$$U_m\cos(\omega t+\psi) \rightleftharpoons \dot{U} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}\angle \psi \text{(有效值相量)}$$

两种相量变换均可使用,一般来说,给定的正弦量和需求解的正弦量均为瞬时值表示式时,以用振幅相量为宜。至于相量模型则国内教材习惯上均用有效值相量而美国教材一般均用振幅相量,且无下标 m。

习题 8-3、8-30、8-31

(2) s 域的变换与反变换。

有拉氏变换表可查。可记住几种常见激励的拉氏变换式。反拉氏变换是 s 域分析法的难点。对较简单的反变换问题可用待定(比较)系数法,一般需用赫维赛德展开定理。

习题 12-5

§B-5-2 阻抗和导纳、网络函数

时域分析法,元件用 R、L、C 等参数表征。相量分析法、s 域分析法零初始状态下,元件用阻抗(导纳)表征。阻抗(导纳)也用于无源单口网络,表明单口内各元件作一定连接后的整体性质,属网络函数中的策动点函数。

(1) $Z(j\omega)$、$Y(j\omega)$、$H(j\omega)$——用于相量分析法。

习题 8-11、8-23、10-24

(2) $Z(s)$、$Y(s)$、$H(s)$——用于零初始状态的 s 域分析法。注意 $j\omega \rightleftharpoons s$,由 $H(j\omega)$ 可得 $H(s)$。非零初始状态情况见本大纲 §B-5-3(3)。

习题 12-1、12-10

§B-5-3 相量模型与 s 域模型

在变换(域)分析法中,正确作出相量模型或 s 域模型是很重要的,便于把电阻电路分析方法移植到动态电路的正弦稳态分析或一般分析中来。

(1) 相量分析法。

习题 8-15、8-18、9-28

(2) s 域分析法——零状态。

习题 12-7

（3）s 域分析法——非零状态。表征元件不仅要用 $Z(s)$ 或 $Y(s)$，还要用初始状态等效电源。

习题 12 - 3

§B - 5 - 4　变换(域)分析中的叠加方法、分解方法

（1）叠加方法

本大纲 §B - 3 - 2、§B - 3 - 4

（2）分解方法

习题 8 - 28、12 - 3 方法二

§B - 5 - 5　正弦稳态分析的两类特殊问题

正弦稳态分析不仅有求解响应的瞬时值问题，还有只需求响应的部分特征的问题。

（1）只求有效值问题。（虽只求解有效值，但结果仍与相位的大小有关）

习题 8 - 37、8 - 39

（2）只求相位差问题。（虽只解相位差，但结果仍与有效值的大小有关）

习题 8 - 38、10 - 7

§B - 5 - 6　相量分析法中三个需注意的方面

采用相量分析法与电阻电路分析法作类比时，有三个需注意的方面，即功率计算、频率响应和互感现象。

（1）正弦稳态功率和能量。参见 §B - 1 - 3(2)、(3)。

习题 9 - 8、9 - 20、9 - 24

（2）频率响应，多频正弦稳态电路。参见 §B - 3 - 2。

习题 10 - 4

（3）含互感的电路。

习题 11 - 5、11 - 21、A - 14

部分习题答案(下册)

第八章

8-1 (1) 6.236 - j7.080　　(2) 208.8 $\angle$ 67.59°

(3) 13.07 $\angle$ 127.6°　　(4) 4.370 $\angle$ -101.3°

8-2 100　30°或 -200　-90°

8-3 (1) 5 $\angle$ -36.87°　　6 $\angle$ 15°

(2) 10 cos(ωt - 53.13°)　　10cos(ωt + 143.1°)

10 cos(ωt - 90°)

8-4 $2\sqrt{2}\cos(\omega t + 60°)$ A

8-5 103.1 cos(ωt - 75.96°)

8-6 9.146　16.62

8-7 12.26 cos(ωt + 65.94°)　　100cos(ωt)

8-8 49.73 V　　91.07 V

8-9 3 cos(1 000t + 30°) mA　　0.6cos(1 000t - 60°) A　　12 cos(1 000t + 120°) mA

8-10 0.637H　318.5 μF　　5 Ω　　10 μF　　2.631 μF

8-11 (1) 20 Ω　　0.05 S　　(2) 5 $\angle$ 10° Ω　　0.2 $\angle$ -10° S

(3) j20 Ω　　-j0.05 S　　(4) 5 $\angle$ 17° Ω　　0.2 $\angle$ -17° S

(5) 100 $\angle$ 30° Ω　　0.01 $\angle$ -30° S　　(6) 10 $\angle$ -152.62° Ω

8-12 (1) 160 $\angle$ 8.1° V　　120 $\angle$ 98.1° V　　0.8 $\angle$ 8.1° A

8-13 2.236cos(t - 26.56°) A　　15.68cos(t + 63.44°) A

2.236cos(t - 116.5°) A　　1H

8-14 (2 - j6) A　　10A　　j10A　　(12 + j4) A

8-15 $\sqrt{2}U_{sm}\cos(t - 45°)$ V

8-16 3.162cos(2t + 63.43°) V

8-17 (1) 17.86 $\angle$ 26.56° V　　1.786 $\angle$ -63.44° A　　0.893 $\angle$ 116.56° A

0.894 4 $\angle$ -63.44° A

(2) 14.14 $\angle$ -28.7° A　　7.07 $\angle$ -28.7° A　　7.07 $\angle$ 61.3° A

2.828 $\angle$ -81.8° A

(3) 35.36 $\angle$ 45° V　　79.06 $\angle$ -18.43° V　　35.36 $\angle$ 45° A　　25A　　j25 A

8-18 6.326 $\angle$ 71.57° A

8-19 $\Delta = 2 - j7$　　$\Delta_1 = 3 - j9$　　$\Delta_2 = -j9$

1.30cos(5t + 2.49°) A　　1.24cos(5t - 15.95°) A

8 - 20 $6.313 \angle -18.44°$ A

8 - 22 $\dfrac{R_2 - j\omega C_1 R_2^2}{1 + \omega_2^2 C_1^2 R_2^2}$

8 - 23 (1) 5Ω 0.057 7 F (2) 3Ω 29.33 H

(3) 3Ω 0.125 F (4) 0.02 F

8 - 24 (1) 1.206 Ω 1.035 F (2) $\frac{5}{7}$S 0.143 F

8 - 25 1.25 mH

8 - 26 $Y = (0.265 + j1.868)$S

8 - 27 (1) $\dot{U}_{ocm} = 12.41 \angle -110.67°$ V $Z_o = (2.44 - j1.49)$kΩ

(3) $6.851\cos(120\pi t - 141.17°)$V

8 - 28 $\dot{U}_{ocm} = 0.894 \angle 93.44°$ V $\dot{I}_{scm} = 0.5\ \dot{U}_{sm}$ $Z_o = 0.894 \angle -26.56°$

8 - 29 j0.5 V $(50 + j50)\Omega$

8 - 30 7.07 A 15.25 A 1 A

8 - 31 $7.07 \angle -90°$ A $15.25 \angle 0°$ A $1 \angle -45°$ A

8 - 33 6A

8 - 34 u_L 超前 u_2 角 135°

8 - 35 1A

8 - 36 10A 14.14 V

8 - 37 10A 141.4V

8 - 38 $\dfrac{\pi}{2} - \arctan(\omega R_2 C_2) + \arctan(\omega R_1 C_1)$ $R_1 C_1 = R_2 C_2$

8 - 40 $\dfrac{\mu R_2 \dot{U}_{sm}}{R_1 + (1+\mu)R_2 + j\omega C R_1 R_2}$

8 - 41 $2.512\cos(1\,000\,t - 11.04°)$V $2.174\cos(1\,000t + 121.67°)$V

8 - 43 333Ω

8 - 44 $(3 - 2.5e^{-12t})$V $t \geqslant 0$

第九章

9 - 1 5 mW

9 - 2 7.68 W

9 - 3 (1) 80 μF (2) 80 μH

9 - 4 (1) 25 J (2) 25.25 J (3) 31.41 J

9 - 5 312.6 var 560.7 var −518.2 var 436.6 J 259.1 J

9 - 6 (1) 6.15 W 4.61 W (2) $8.68 \times 1.24 = 10.76$ W

9 - 7 $p(t) = UI[\cos(2\omega t + \varphi) + \cos\varphi]$ $P = UI\cos\varphi$

9 - 8 (1) 14.44 W 14.44 W (2) 28.86 W

9 - 9 225 W 257 V · A 0.875(电容性或超前)

9-10 (1) $10\angle -53.1°$ A (2) 800 W 0.8(电容性)

9-11 -1 155 W 1 155 W

9-12 $(20+j10)\Omega$ 2.5 W

9-13 49.31°

9-14 $512.8\angle 26.55°$

9-15 2Ω $\frac{1}{8}$F

9-16 1 890 W 367 var 1 925.3 V·A

9-17 (1) 4.685 kW 11.713 kvar (2) 44.685 kW 37.55 kvar

9-18 16 μF

9-19 5 338 μF

9-20 (1) 0.781(电感性) (2) 0.937(电感性)
(3) 0.434(电容性) (4) 0.625(电感性)

9-21 240.23 V 0.624 4

9-22 $(-500-j2\,500)$V·A $(-7\,000-j2\,500)$V·A $(7\,500+j5\,000)$V·A

9-23 $(0.5-j0.5)\Omega$ 50W

9-24 $(4+j4)\Omega$ 25W

9-25 9.51 Ω 1.8 W

9-26 (1) 8 W (2) 11.76 μF 9.42 W

9-28 $\dot{I}_c=2.4\angle -20°$ A

9-29 $\dot{U}_a=80\sqrt{3}\angle 0°$ V $\dot{I}_a=46.19\angle 0°$ A

$\dot{I}_b=34.64\angle -180°$ A $\dot{I}_c=27.71\angle 30°$ A

$\dot{I}_n=38.15\angle 21.3°$ A

9-30 $\dot{I}_{ab}=20.2\angle -50°$ A $\dot{I}_{bc}=20.2\angle 70°$ A $\dot{I}_{ca}=20.2\angle -170°$ A

9-31 15.17 A

9-32 $2.88\angle 36.87°$ Ω

9-33 $(8.75-j25)\Omega$

9-34 $p(t)=UI[\cos\varphi+\cos(2\omega t+\varphi)]$
$=UI\cos\varphi[1+\cos(2\omega t)]-UI\sin\varphi\sin(2\omega t)$
$=p_a(t)-p_r(t)$

9-35 0.745(电感性)

9-36 -1.274 kvar

第十章

10-1 把 $-4.244\sin(3t)$的波形与 10 V 方波相加

10-2 $1.5+\frac{2}{\pi}\left[\sin(\omega_0 t)+\frac{1}{3}\sin(3\omega_0 t)+\frac{1}{5}\sin(5\omega_0 t)+\cdots\right]$

10-3 (1) $Z(j\omega)=0$ (2) $2\cos(2t)$

10-4 (3) $\frac{L}{RC}$(本题可与习题 10-25 相联系)

10-5 (1) $\frac{a_1(j\omega)+a_0}{j\omega+b_0}$ $a_1=0$ 低通 $a_0=0$ 高通

(2) $\frac{K}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}}$ $K=\frac{R_2}{R_1+R_2}$ $\omega_c=\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}$

(3) $\frac{K}{1-j\frac{\omega_c}{\omega}}$ $K=\frac{R_2}{R_1+R_2}$ $\omega_c=\frac{R_1R_2}{(R_1+R_2)L}$

10-6 $\omega_c=\frac{200}{3}$ rad/s $\omega_c\downarrow$ 通频带 $\uparrow$

10-7 10^4 rad/s 0.707 V 69.34° 0.353 V

10-8 $[5\cos(\omega t+36.9°)+2.88\cos(3\omega t+37.4°)]$A

10-9 $45.6\cos(100t-37.9°)$mA

10-10 $[0.312\cos(t-51.33°)+0.188\cos(3t-72.3°)]$V

10-11 $\frac{1}{9}$H $\frac{1}{49}$F 或 $\frac{1}{49}$H $\frac{1}{9}$F

10-12 0 1.22 V 3.81 A

10-13 101.3 V 684 W

10-14 A $\frac{A}{\sqrt{3}}$ $\frac{A}{\sqrt{3}}$ $\frac{A}{\sqrt{2}}$

10-15 (1) $0.555\cos(t-33.69°)$A (2) 0.392 A

(3) 0.462 W (4) 0.115 W (5) 0.115W

(6) 0.462 W $\neq$0.115W +0.115W

10-16 (1) $[0.277\cos(t-33.69°)+0.2\cos(2t-53.13°)]$A

(2) 0.242 A (3) 0.175 W (4) 0.115 W

(5) 0.06 W (6) 0.175 W =0.115 W +0.06 W

10-17 用叠加原理

(1) 2.5 W −5W (2) 1W −2W

10-18 100Ω 1H 1 μF

10-19 (1) 0.103 μF 503Ω 3.5

(2) 1.07 W 0.535 W

(3) 81.2V

10-20 10^5 Ω 10 10^{-7}F 10H

10-21 $\frac{2}{\pi}U_m[1+0.017\,3\cos(628\,t-176.9°)-0.000\,838\,\cos(1\,256\,t-178.47°)]$V

2.6% 0.04%

10-23 −9.2°

10-24 (1) $\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{L^2}}$ (2) $\frac{L}{RC}$

(3) $\sqrt{\frac{1}{LC}\sqrt{1+\frac{2R^2C}{L}}-\left(\frac{R}{L}\right)^2}$

第十一章

11-1 3H

11-2 $L_2\frac{di_2}{dt}-M\frac{di_2}{dt}$ $M\frac{di_2}{dt}$ $\frac{M}{L_2}u_2(t)$

11-3 $5.36\angle 3.4°$ V

11-4 $8.22\angle -99.46°$ A

11-5 79.3 mW 99.2 mW

11-6 $\sqrt{2}\cos(10^3t-15°)$ A 0

11-8 $(3+j3)\Omega$ $(2-j2)$ A 2A

11-9 2.843 W 71.1%

11-10 $(190.73-j418.56)\Omega$ 5.43 W 21.17%

11-13 $25.5\angle -11.31°$ V

11-14 $3.54\angle -135°$ V

11-15 0.447

11-16 $-48\angle 0°$ V $(12-j8)\Omega$ $-2.01\angle 26.56°$ A

11-17 $\dot{U}_{oc}=70.7\angle 45°$ V $Z_o=707\angle 45°\ \Omega$ $0.1\angle 0°$ A

11-18 $\frac{N_1}{N_2}=6.255$

11-19 $29.2\cos(1\,000t-14.09°)$ mA

11-20 $\dot{U}_{oc}=14.8\angle 1°$ V

$$Z_o=Z_{22}+\frac{\omega^2M^2}{Z_{11}}=(0.41-j0.04)\Omega$$

$$\dot{I}_2=0.35\angle 1°\ \text{A}$$

11-21 1.33 μF

11-22 $\left[\frac{1}{n_1^2}\left(R_1+\frac{R_2}{n_2^2}\right)\right]$

11-23 $2\cos(\omega t+45°)$ A

11-24 $\dot{U}_{1'2'}=11.55\angle -17.93°\ \text{V}\neq 0$

11-25 $(6-4e^{-t}-2e^{-4t})$ A

第十二章

12-1 $10(1-e^{-0.5t})\varepsilon(t)$ V

12-2 $(I_S R-\rho R)\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\varepsilon(t)$ V

12-3 $(8\ \mathrm{e}^{-2t}-6\mathrm{e}^{-3t})\varepsilon(t)$ V

12-4 $10\cos(316.23\ t)\varepsilon(t)$ A

12-5 (1) $\left(\frac{9}{10}+\mathrm{e}^{-2t}+\frac{9}{2}\mathrm{e}^{-4t}-\frac{32}{5}\mathrm{e}^{-5t}\right)\varepsilon(t)$

(2) $\delta(t)+(\mathrm{e}^{-t}-4\mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t)$

(3) $2\delta(t)-\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}})\varepsilon(t)$

(4) $(1+3t\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-t})\varepsilon(t)$

(5) $(\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-t}\cos t+\mathrm{e}^{-t}\sin t)\varepsilon(t)$

(6) $\left(\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3t}-6\mathrm{e}^{-5t}+\frac{20}{3}\mathrm{e}^{-6t}\right)\varepsilon(t)$

12-7 $(3.333-5\mathrm{e}^{-10t}+1.667\mathrm{e}^{-30t})\varepsilon(t)$ A

12-8 $U(s)=\dfrac{1.92s^2}{(s^2+1.6s+1)(s^2+1)}$

$u(t)=[2\mathrm{e}^{-0.8t}\cos(0.6t+233.13°)+1.2\cos t]\varepsilon(t)$ V

12-9 $(-2.5\mathrm{e}^{-t}+10\mathrm{e}^{-2t}-7.5\mathrm{e}^{-3t})\varepsilon(t)$ A

12-10 $\dfrac{12}{2s^2+11s+16}$ $\dfrac{-11\pm\mathrm{j}\sqrt{7}}{4}$

12-11 $\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{2}t\mathrm{e}^{-t}\right)\varepsilon(t)$ V

12-12 $\dfrac{24}{\sqrt{7}}\mathrm{e}^{-\frac{11t}{4}}\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t\right)\cdot\varepsilon(t)$ V

12-13 $\dfrac{U_s}{R}\left(1-\dfrac{t}{RC}\right)\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\cdot\varepsilon(t)$ A　　$U_s(s)$和$H(s)$有重极点

12-14 $\dfrac{s}{3(s+4)^2}$　　$\dfrac{1}{3}(1-4t)\mathrm{e}^{-4t}\varepsilon(t)$

12-15 (1) $\dfrac{s}{2(s+2)(3s+2)}$

(2) $-\frac{3}{148}\mathrm{e}^{-2t}-\frac{3}{1\,300}\mathrm{e}^{-\frac{2t}{3}}+0.083\,6\mathrm{e}^{-t}\cos(6t-74.3°)$ A　$t\geqslant 0$

(3) $0.056\cos(2t-26.5°)$ A

12-16 $4\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}$　　$-2.4\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}+6.4\cos t-3.2\sin t$　　$-12\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}+16\mathrm{e}^{-t}$(单位均为 V)

12-18 $(9\mathrm{e}^{-\frac{t}{6}}+2\mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t)$ A

12-19 (1) $\dfrac{s}{3s^2+4s+3}$

(2) $0.477\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}t+41.8°\right)\varepsilon(t)$ V

(3) $0.166\cos(2t-48.4°)$ V

附录 A

A-1 0 0 8V 8V 12V −12mA 17mA

A-2 76 mW(只能由叠加方法求得 2 Ω 的电流后算得)

A-3 (1) $\left(\frac{4}{3}t+\frac{1}{9}t^2\right)$W $\left(-4+\frac{1}{9}t^2\right)$W

(2) $w(0,3)=7$ J (3) $w(3,6)=-5$ J

(4) 12H 1Ω (5) $W_L=6$J $W_R=1$ J

(6) 0 1J

A-4 9.2 V $2.4\sin(10^3t)$V

A-5 用节点电压法得 $u_1=48$ V $u_2=64$ V

A-6 (1) $u_C(t)=u(t)=8$ V $i_C(t)=0$ $t<0$

($t<0$ 相当 12 V 电源作用已久的电路,属零状态响应)

(2) $u_C(t)=8e^{-2t}$V $i_C(t)=-\frac{4}{3}e^{-2t}$A

$u(t)=\frac{8}{3}e^{-2t}$ V $t\geqslant 0$

或 $u_C(t)=[8-8(1-e^{-2t})\varepsilon(t)]$V

$i_C(t)=-\frac{4}{3}e^{-2t}\varepsilon(t)$A

$u(t)=[8-8\varepsilon(t)+\frac{8}{3}e^{-2t}\varepsilon(t)]$V

A-7 5 Ω 10 Ω $\frac{20}{3}$ Ω $\frac{20}{3}$ Ω 6Ω 10 Ω

A-8 (1) (2.5 + j6.61)Ω (2.5 − j6.61)Ω

(2) 2.63 mH 60.1 μF

A-9 −7 A

A-10 0.996(电感性)

A-11 选择 ab 端

A-12 6 Ω

A-13 (1) 自左至右 10 W −30W 16W 16W −21W 36W −27W

(2) 改为 −2V

A-14 $3.83\angle 4.4°$ V $4.4\angle 92°$ V

A-15 7.5 V($\tau=10$ s 时)

A-16 任何 ω 值 任何 ω 值 $\omega<\sqrt{10}$rad/s

A-17 $\sqrt{17}\cos(2t-75.96°)$V $\sqrt{5}\cos(2t-63.43°)$A

A-18 $[2-2(1-e^{-2t})\varepsilon(t)]$A $-16e^{-2t}\varepsilon(t)$V $-64e^{-2t}\varepsilon(t)$V

A-19 10 rad/s→12.5 rad/s

A-20 −25.6 V 45.2 W

A-21 −0.4 Ω −6 Ω 12 Ω 20 Ω

A-22 (1) 0.5 V 0.5A (2) 5V 5A (3) 0.5 cos(2t)V 0.5cos(2t)A
(4) 5V 0.5 A

A-23 $R_1C_1 = R_2C_2$

A-24 0.5 H 500Ω

A-25 0 -6V -12V 用节点电压法

A-26 (1) 4V 6A $\frac{u}{i} = \frac{2}{3}\Omega$(受控源可用$\frac{2}{3}\Omega$电阻置换而不是等效)

(2) 4V $\frac{14}{3}$A $\frac{u}{i} = \frac{6}{7}\Omega$

A-27 3.16

A-28 提示:可利用正文§10-1三角波的傅里叶级数经90°移相处理后,得直流分量为零时的傅里叶级数

$$\frac{8\times 1.5}{\pi^2}\left[\cos(\pi t) + \frac{1}{9}\cos(3\pi t) + \frac{1}{25}\cos(5\pi t) + \cdots\right]$$

$\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$。

$[3.75\cos(\pi t + 51.83°) + 0.622\cos(3\pi t + 23°) + 0.236\cos(5\pi t + 14.29°) + \cdots]$ V

A-29 1

A-30 -2V 4A

索　引[①]

一　画

一阶电路　185
　定义　185
　微分方程　186
　时间常数　190、193、208
　三要素法　216
1*b* 法　49
2*b* 法　49
一次等效电路　(下)160

二　画

二端元件　34
二端(单口)网络　113
二阶电路　246
　RLC 串联电路　248
　GCL 并联电路　261
二次等效电路　(下)161

三　画

三大基本方法　91
三要素法　216
三相电路　(下)93
　对称三相电源　(下)94
　相序　(下)　95
　对称三相电路　(下)97
　相电压、线电压　(下)95
　相电流、线电流　(下)98、101
　三相三线制、三相四线制　(下)98
　三相功率　(下)99、103
工作点　122
　对工作点的等效　126

四　画

元件　4
　线性　20
　非线性　21
　时变与时不变　22
　有源与无源　24
　记忆　171、179
　无记忆　21
　储能　174
　非能　(下)168
　单向与双向　23
互感　(下)148
　互感电压　(下)150
反映阻抗　(下)160
开路　25
　开路电压　136
支路　12
　~分析　48
　~电流法　49
　~电压法　49
比例器　81
互易定理　69
双口元件　34
匹配　147
无功功率
　定义　(下)82
　与储能的关系　(下)82
　单位　(下)71

① 索引内容包含上、下两册，页码标注“(下)”字样的为下册页码。

无功伏安(乏)　(下)71
反相　(下)135、140
反接串联　(下)156
分段常量信号　200
分压电路(电位器)　40
分流电路　42
分解方法　113
　步骤　115
　在动态电路分析中的应用　186

五　画

电路　3
　集总电路　5
　电阻电路　5
　动态电路　5、163
　线性电路　91
　直流电路　27
　无记忆与记忆电路　163
电路模型　4
　时域模型　(下)27、29
　电阻模型　5
　相量模型　(下)26
　s 域模型　(下)191、192、193
电气图　4
　电气图用符号(部分)　4
电阻(元件)　21
　电导　21
电容(元件)
　定义　164
　VCR　165
　储能　174
　电压的连续性　171
　电压的记忆性　171
电感(元件)
　定义　176
　VCR　177
　储能　180
　电流的连续性　179
　电流的记忆性　179
电压源　26
电流源　31
电压　7
电流　6
电位　41
　参考点～　41
节点　12
　独立～　48
　～电压　41
　～分析(～电压法)　72
电源的等效变换　132
(电)压控(制)电压源 VCVS　35
电压跟随器　82
对偶性　84
加法器　83(练习题 2－7)
平面电路　46
电桥电路　93
正弦量　230
　三特征　231
　瞬时值表示式　230
　相量　(下)9、46
　有效值　(下)45
正弦稳态　231
　定义　233
　相量分析法　(下)46
　相量图、相量图法　(下)10、48
电抗、电纳　(下)24
功率
　参考方向　9
　吸收与提供　9
　电阻功率的计算　23
　瞬时功率　(下)66
　平均(有功)功率　(下)75
　无功功率　(下)82
　视在功率　(下)77
　功率因数　(下)77
　功率守恒　(下)86、78

复功率 (下)86
功率三角形 (下)83
去耦等效电路 (下)165

六 画

回路 12
独立~ 48
有伴电压源、有伴电流源 134
网孔 12
~电流 63
~分析(~电流法) 62
动态元件 164
动态电路 164
自感 175
同名端 (下)149
全耦合 (下)154、173
网络函数
定义 92
策动点函数 92
转移函数 92
阶跃函数 199
阶跃响应 199
冲激函数 203
冲激响应 203
全响应 188、212
齐次性 92
有效值 (下)45
有效值相量 (下)46
共轭匹配 (下)91
导纳 (下)24
广义导纳 (下)201
有功功率 (下)68
有功分量 (下)77
并联谐振 (下)140
过渡过程 225

七 画

串联 123
电阻~ 124
阻抗~ (下)32
电压源~ 128
电流源~ 130
运算放大器 78
初始状态 180、172、179
初始条件 249
状态
状态变量 180
时间常数
RC 电路 190、194
RL 电路 193、194
阻尼
过阻尼 251
临界阻尼 251、252
欠阻尼 251、254
无阻尼 256
初相 230
角频率 230
阻抗 (下)24
广义阻抗 (下)200
串联谐振 (下)134
谐振频率 (下)135
超高电压 (下)135
时不变性 200

八 画

两类约束 44
参考方向 6
关联~ 8
拓扑约束 45
受控源 34
欧姆定律 20
转移函数 92
转移特性 36
压控电压源 35、36
线性电路 91
图 17

固有频率　208、250
固有响应　225、263
视在功率　(下)77
变压器
　理想～　(下)167
　空心～　(下)158
　全耦合～　(下)174、176
　实际～　(下)176
　变比　(下)167
非线性电路　121
单口网络　113
　明确的～　115
定向图　17
弥尔曼定理　159
拉普拉斯变换
　定义　(下)187
　线性性质　(下)189
　微分性质　(下)190
　变换简表　(下)189
拉普拉斯反变换　(下)193
　部分分式展开法(赫维赛德展开定理)
　(下)195
拉普拉斯变换用于电路分析
　s 域分析法　(下)192
　s 域模型　(下)191、192、200
非正弦周期性波
　分解为傅里叶级数　(下)112
　稳态响应的计算　(下)121
　平均功率　(下)131、133
　有效值　(下)131
变换(域)方法　(下)3
　基本思路　(下)4

九　画

信号　8、31
响应
　零输入～　188、205
　零状态～　188、189
　全～　188、212
相位差　(下)29
相量
　振幅相量　(下)8
　有效值相量　(下)46
相量分析法
　适用条件　(下)111
　相量模型　(下)26
　作为变换(域)方法　(下)26
相关电源性　204
复数　(下)5
　～运算　(下)6
复功率　(下)86
　复功率守恒　(下)86
品质因数　(下)136
选择性　(下)137
相频特性　(下)114
复频率　(下)187
　复频率域分析法　(下)187
衰减振荡　254

十　画

能量　10
诺顿定理、诺顿等效电路　145
差分输入电压　79
振荡
　衰减(阻尼)振荡　254
　不衰减(无阻尼、等幅)振荡　247、257
换路　188
特征方程　250
　特征根　250
通解　258、235
特解　258、235
容抗、容纳　(下)25
通频带　(下)120、137、139

十　一　画

基本结构　91

基尔霍夫定律
时域形式 14、16
相量形式 (下)13
s 域形式 (下)190
基波 (下)112
梯形电路 94
理想运算放大器 80
理想变压器 (下)167
虚地 81
谐振电路
串联～ (下)134
并联～ (下)140
跃变 205

十 二 画

集总假设 5
集总参数 5
集总电路 5
短路 25
短路电流 140、145
等效
基于 VCR 相同基础上的～ 124、126
基于工作点相同基础上的～ 120、126
强制分量 225
等幅振荡 247、257
超前 (下)15
滞后 (下)15
等效电阻 123、127、149
等效阻抗(导纳) (下)27
幅频特性 (下)114
策动点函数 92

十 三 画

输入电阻 127
频率 230
叠加原理和叠加方法
在电阻电路中的应用 97
在动态电路中的应用 188、212
在相量分析法中的应用 (下)121
在 s 域分析法中的应用 (下)209
线性时不变电路的叠加公式 (下)208
叠加方法与功率计算 102
零输入响应
～比例性(线性) 208
～叠加性(线性) 208
零状态响应
～比例性(线性) 194
～叠加性(线性) 194
感抗、感纳 (下)25
频率响应 (下)111
置换定理 118

十 四 画

稳态(稳定状态) 225
稳态分量 233
模匹配 (下)92

十五画以上

耦合系数 (下)154
耦合电感 (下)152
激励 91
瞬时值(正弦波) 230
瞬态 225
戴维南定理 137
额定值 24、(下)77

结　束　语

“知之为知之，不知为不知，是知也。”

《论语·为政第二》

本书到此结束。你也许正在回想：“我究竟学到了些什么？”

本书以学习电路分析的基本原理为目标，而基本原理的掌握不可能毕其功于一役。它有一个渐进的过程。学完这门课也只是得到一个初步的认识而已，随着后续课程的学习，相辅相成，你会逐步加深认识的。

但是，所谓初步的认识还是有一个大致标准的。合上书，你是否能想起课程的基本结构，脱口而出？你是否能以此为出发点在书中找出你已不太清楚、有些记不起细节的内容？更具体些，附录 A 的 30 道题，你是否有一半能独立地做出？可以找书，也不必限时。

你既已踏入这个专业，爱它吧！什么事情都是需要经过一番努力才能达到目的的。不要知难而退，要知难而进！何况，在学习的过程中或在人生的道路上，你会经常遇到这样的情境：

“山重水复疑无路，柳暗花明又一村。”（陆游《游山西村》）

何等惬意！愿与读者诸君共勉、共享。