2023 年中国科技大学少年班初试物理真题

杨成道　整理

1.在水平面有两点 AB，间距为 3r，AB 两点系着长为 5r 的轻质不可伸长绳子，半径为 r 的小球质量 m 穿过绳子。

（1）小球固定在绳子中间，求小球垂直于 AB 做微振动的周期；

（2）小球可以在绳子上光滑移动，求小球在 AB 所在竖直面上做微振动的周期。

解（1） 等效摆长 L=3R

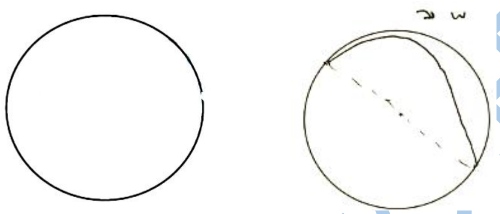
$$g=\frac{4\pi^2L}{T^2}=\frac{12\pi^2R}{T^2}$$

（2）小球的运动轨迹为椭圆轨道的一小部分，所以等效摆长为此处的曲率半径和小球半径 R 之和

$$\rho=\frac{a^2}{b}=\frac{25R}{8}$$

$$T'^2=\frac{4\pi^2(\rho+R)}{g}=\frac{11}{8}T^2\Rightarrow T'=\frac{\sqrt{22}}{4}T$$

2.如图，一个滚筒洗衣机以角速度 ω 绕中轴线匀速圆周运动，一枚扣子随着它运动，过圆心所在高度后脱离洗衣机，经过一定时间恰落在其脱落点，求洗衣机的角速度。



解 脱离时 $mg\cos\theta=\frac{mv^2}{R}$

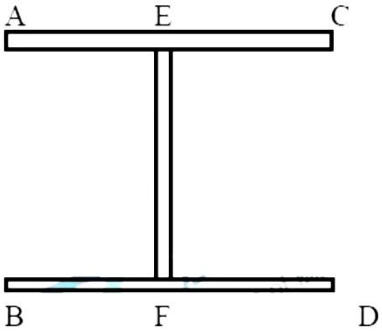
斜抛过程有 $\begin{cases} v\cos\theta\cdot t=2R\sin\theta \\ v\sin\theta\cdot t+\frac{1}{2}gt^2=2R\cos\theta \end{cases}$

解得 $v=\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}gR}$

$\because v=wR$

$\therefore w=\sqrt{\frac{\sqrt{2}g}{2R}}$

3.已知傅里叶传导定律为$P=\kappa\dfrac{T_1-T_2}{l}S$。如图，一个“工”型导热装置，A,B 点温度为 300K,C,D 点温度为 350K，E，F 分别为 AC，BD 中点。AE 长度为 10cm，热导率为 1.2，EC 热导率为 1.8，AC 横截面积为1cm^2；BF 长度为 10cm，热导率为 0.6，FD 热导率为 0.9，BD 横截面积为2cm^2；EF 长度为 5cm，横截面积为0.8cm^2。求 EF 两点的温度差。



解：由系统热平衡得

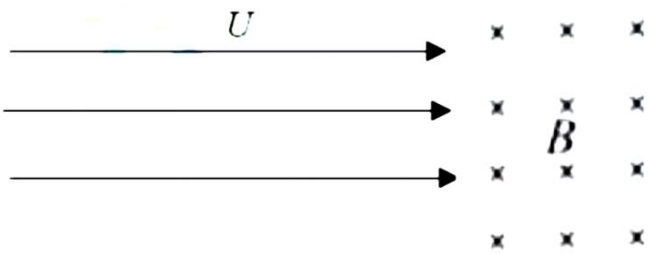
$$\begin{cases} j_{CE}\cdot S_{AC}-j_{EA}\cdot S_{AC}+j_{EF}\cdot S_{EF}=0 \\ j_{DF}\cdot S_{BD}-j_{FB}\cdot S_{BD}+j_{EF}\cdot S_{EF}=0 \\ j_{CE}=k_{CE}\cdot\dfrac{\Delta T_{CE}}{L_{CE}} \\ j_{EA}=k_{EA}\cdot\dfrac{\Delta T_{EA}}{L_{EA}} \\ j_{EF}=k_{EF}\cdot\dfrac{\Delta T_{EF}}{L_{EF}} \\ j_{DF}=k_{DF}\cdot\dfrac{\Delta T_{DF}}{L_{DF}} \\ j_{FB}=k_{FB}\cdot\dfrac{\Delta T_{FB}}{L_{FB}} \end{cases}$$

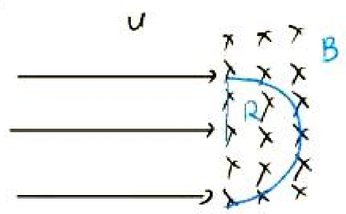
解得 $\Delta T_{EF}=0$

4（高考层次，质谱仪的知识点）如图，一加速电场衔接一偏转电场。

（1）已知垂直入射磁场的粒子比荷为 $\frac{q}{m}$，在磁感应强度为 B 的磁场中中运动半径为 R，求加速电场的电压。

（2）有 ${}^{235}_{92}U$ 和 ${}^{238}_{92}U$ 的原子核在磁场同一位置入射，加速电压不稳定，存在大小为 $\pm\Delta U$ 的波动，求 $\frac{\Delta U}{U}$ 的取值范围，使得可以完全区分两种原子核。





解（1）$\begin{cases} qvB = \dfrac{mv^2}{R} \\ qV = \dfrac{1}{2}mv^2 \end{cases} \Rightarrow v = \dfrac{qB^2R^2}{2m}$

（2）$\begin{cases} \dfrac{It}{q} = N \\ M = Nm \end{cases} \Rightarrow M = \dfrac{Itm}{q}$

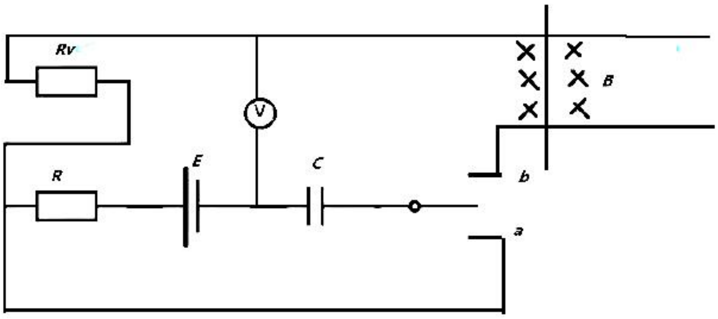
（3）由题意得

$$\begin{cases} qU_1 = \dfrac{1}{2}m_1v_1^2 \\ qv_1B = \dfrac{m_1v_1^2}{R_1} \\ qU_2 = \dfrac{1}{2}m_2v_2^2 \\ qv_2B = \dfrac{m_2v_2^2}{R_2} \end{cases}$$

$$\therefore R_2 - R_1 = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2m_2U_2}{q}} - \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2m_1U_1}{q}} \geq \frac{1}{B}\left(\sqrt{\frac{2m_2(V-\Delta V)}{q}} - \sqrt{\frac{2m_1(V+\Delta V)}{q}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta V}{V} < \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \times 100\% \approx 0.63\%$$

5.导轨间距 L, 导轨上金属棒 m 磁场 B, 将开关分别拨至 a、b 端，发现电压表读数 V 随 t 变化一致，求电阻 R_V 应取多少?(两次开始时电容均不带电，E、C、R、m、B、1 均为已知量)



解 接 a $\begin{cases} E = iR + \dfrac{Q}{C} \\ i = \dfrac{dQ}{dt} = c \cdot \dfrac{dU}{dt} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{dU}{dt} + \dfrac{U}{RC} = \dfrac{E}{RC}$

$$\begin{cases} E = i(R + R_V) + BLv + \dfrac{Q}{C} \\ ma = BiL \end{cases} \Rightarrow mv = BQL \Rightarrow v = \dfrac{BQL}{m}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E = i(R + R_V) + \left(\dfrac{1}{C} + \dfrac{B^2L^2}{m}\right)Q \\ U = \left(\dfrac{1}{C} + \dfrac{B^2L^2}{m}\right)Q \end{cases}$$

接 b

$$\Rightarrow i = \frac{mc}{m + B^2L^2C}\frac{dU}{dt} = \alpha\frac{dU}{dt}$$

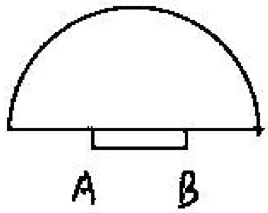
$$\Rightarrow \frac{dU}{dt} + \frac{1}{\alpha(R + R_V)}U = \frac{E}{\alpha(R + R_V)}$$

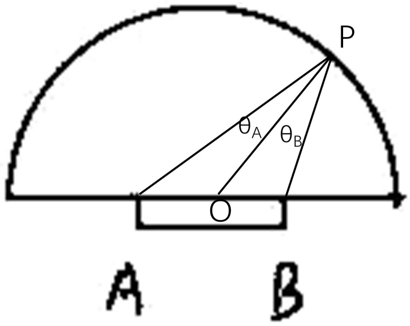
$$\Rightarrow RC = \alpha(R + R_V)$$

$$\Rightarrow R_v = \frac{B^2L^2C}{m}R$$

6. 有一半导体砷化镓发光管，它发出波长为 0.9μm 的红外光。发光区为直径 AB 等于 3mm 的圆盘，发光面上覆盖一折射率$n=3.4$的半球形介质，要使发光区发出的全部光线在球面上都不发生全反射，介质半球的半径至少要多大?

介质，如图 17-16 所示问：要使发光区发出的全部光线在球面上都不发生全反射，介质半球的半径 R 至少应该多大?





解：

$$\begin{cases} \dfrac{\sin\theta_A}{r} = \dfrac{\sin\angle AOP}{AP} \\ \dfrac{\sin\theta_B}{r} = \dfrac{\sin\angle BOP}{BP} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\theta_B}{\sin\theta_A} = \frac{AP}{BP} > 1$$

$$\Rightarrow \theta_B > \theta_A$$

由正弦定理得

$$\because \frac{\sin\theta_B}{r} = \frac{\sin\angle OBP}{R}$$

$$\therefore \sin\theta_B = \frac{r}{R}\sin\angle OBP \le \frac{r}{R}$$

$$\because n = \frac{1}{\sin C}$$

$$\therefore \sin\theta_B \le \sin C$$

$$\therefore R \le 5.1mm$$

7.已知 $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=\lambda$

（1）已知 M 原子核衰变生成子核 D，求 D 核的数目 N_D 所满足的方程。

（2）已知初始时刻 M 原子核的数目为 N_0，D 核数目为 0，求 N_D 对时间 t 的函数。

（3）画出 N_M，N_D 随 t 的变化示意图。

解（1）

$$\because \frac{\mathrm{d}N}{dt}=-\lambda N$$

$$\therefore \frac{\mathrm{d}N_D}{dt}=\lambda_1 N_M-\lambda_2 N_M$$

(2)

$$\frac{\mathrm{d}N_m}{dt}=-\lambda_1 N_M$$

$$\Rightarrow N_M(t)=N_0 e^{-\lambda_1 t}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}N_D}{dt}=\lambda_1 N_0 e^{-\lambda_1 t}-\lambda_2 N_D$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}N_D}{dt}+\lambda_2 N_D=\lambda_1 N_0 e^{-\lambda_1 t}$$

可以解得这个一阶非线性齐次方程的解为

$$N_0(\mathrm{t})=\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}N_0\left(e^{-\lambda_1 t}-e^{-\lambda_2 t}\right)$$

（3）根据上题的这个函数图像就是 e 的变化图像

拐点为 $\frac{\mathrm{d}N_D}{dt}=0$

讨论一下 **N_0(t)**的单调性：向上升后下降，**N_m(t)**一直衰减。