教学随笔：麦克斯韦是如何得出光的电磁学说的

——科学理论素养是科学方法的基础和科学发现的源泉!

冯杰

1801 年英国医生托马斯·杨(Thomas Young，1773~1829)实现了普通光源的干涉现象，彻底终结了牛顿的光粒子说，更新了惠更斯的光波动说，使人们确信光是一种波动。1865 年前后，英国科学家麦克斯韦在总结前人研究电磁现象的基础上，对前人和他自己工作进行了概括、演绎和综合，接连发表了电磁场理论的三篇论文：《论法拉第的力线》、《论物理的力线》和《电磁场的动力学理论》，将电磁场理论用简洁、对称、完美数学形式表示出来。导出电磁波的传播速度与光的速度相同，提出了光的电磁波学说，使人类对光本质的认识向前迈进了一大步。1888 年德国物理学家赫兹用实验证实了电磁波的存在。1898 年前后，意大利的马可尼和俄国的波波夫先后将电磁波作为通讯信号，开启了人类的无线电通信技术。

那么，麦克斯韦是如何得出光的电磁学说的呢？

1、十七世纪以来人们对光的本质认识的历程

对于光的本质，在十七世纪，在微粒说占优势的同时，波动说也被粗略地提了出来，两种截然不同的学说自产生之日起一方面沿着各自的道路发展，另一方面却互有斗争。在整个十八世纪中，光的微粒说理论在光学中仍占优势，但光的波动理论却从没有停止对微粒流理论的斗争。

我们知道，在麦克斯韦的光的电磁波说之前，人们一直在苦苦探究光的本质。具有代表性的两种观点一是牛顿根据经典力学的原理提出带有机械力学色彩的“光的微粒说”，另一是惠更斯根据点源次波原理提出带有唯象推测性质的“光的波动说”。两种对立观点的学说都在一定程度上与一部分实验现象吻合，而又与另外一些实验现象相矛盾。比如，牛顿的“光微粒说”可以轻松地解释光的反射现象，却不能解释光的折射现象，而关于光速度的推论与实验事实相反；惠更斯的“光波动说”虽然可以简单地解释光的反射现象和光的折射现象，却既没有展现波动的周期性特点、又得出了光可以后退的错误结论。直到托马斯杨成功地实现了普通光源的干涉现象，才使人们确信光是一种波动。

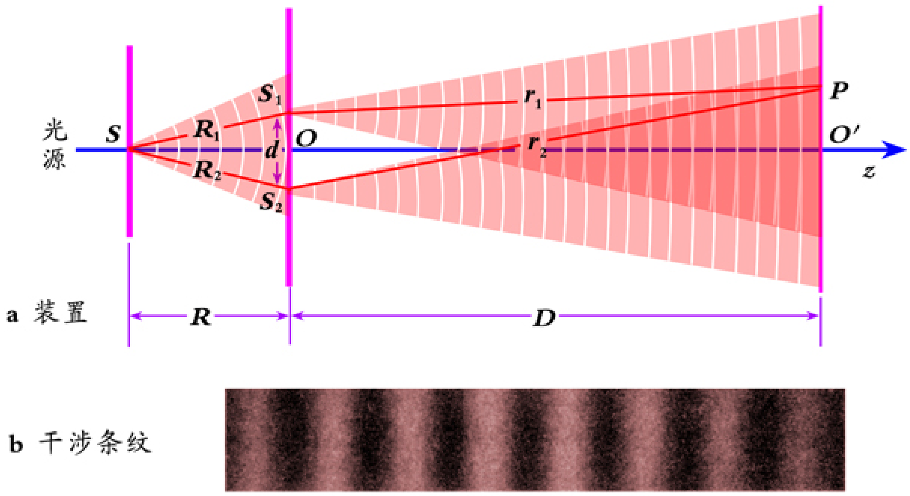

图 1 著名的杨氏干涉现象

随后马吕斯和菲涅尔等人通过简单的偏振实验，证明了光是横波。

——这是《普通物理学-光学》的简单内容！

“光是横波”的结论使他们大吃一惊。因为依据经典力学的观点，横波只有在弹性介质中才可以存在，换句话说，横波只有杨氏模量比钢材还要大上万倍的具有弹性切变介质中才传输速度为每秒三十万千米的光，这种来无踪去无影的真空怎么可能传输“横波光”呢？不得已，麦克斯韦在提出了光的电磁波说之后，不得不假设真空中有一种特殊的物质可以传输“横波光”，他命名为“以太”。其实，他命名为“以太”他还注意到了另外一个问题，即他在推导电磁波波动方程发现，电磁波的传播速度不仅与光的速度相同，而且好像与参考系的选择无关（正是人们苦苦寻找“以太”而不达，导致绝对静止参照系狭义相对论的诞生），以下我们详细讨论。

——这是《普通物理学-力学》的狭义相对论诞生缘由的简单内容！

2、弹性介质机械波的波动方程

一维均匀弦微小横振动的波动方程的导出。

十九世纪以前，人们对机械振动的规律已经认识的比较透彻了，结合微积分，可以导出完整的机械振动传播的波动方程。比如，均匀弦的微小横振动的波动方程。

振动是怎样传播的呢？不妨认为弦是柔软的，就是说在放松的条件下，把弦完成任意的形状，它都保持静止。可是在绷紧以后，相邻小段之间有拉力，这种

拉力叫作弦中张力。张力沿着弦的切线方向。由于张力作用，一个小段的振动必定带动它的邻段，而邻段又带动它自己的邻段，……。这样，一个小段的振动必然传播到整根弦。这种振动传播现象叫作波。

假设柔软的弦很轻，其重量只有其形变张力的几万分之一。跟张力相比，弦的重量完全可以略去。这样，真实的弦就抽象为“没有重量的”弦。

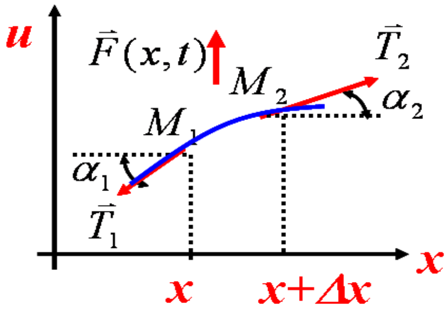

图 2 （梁昆淼《数学物理方法》第四版 P109）

把这根没有重量的弦绷紧，它在不振动时是一根直线，就取这直线作为 x 轴，如图 1 所示。把弦上各点的横向位移记作 u。这样，横向位移 u 是 x 和 t 的函数，记作 $u(x,t)$。要推导的就是 u 所遵从的方程。

弦的振动是一直机械运动。机械运动的基本定律是质点力学的 $F=ma$。然而弦并不是质点，所以 $F=ma$ 对整根弦并不合用。但整根弦可以细分为许多极小的小段，每个小段可以抽象为质点，就是说，整根弦由许多互相牵连的质点组成，对每个质点即每个小段可以应用 $F=ma$。

把弦细分为许多极小的小段。拿区间 $(x, x+dx)$ 上的小段 B 为代表加以研究。B 既然没有重量而且是柔软的，它就只受到邻段 A 和 C 的拉力 T_1 和 T_2。

弦的每小段都没有纵向（即 x 方向）的运动，所以作用于 B 的纵向合力应为零。

弦的横向加速度记作 x_{tt}（这是记号 $\partial^2 u/\partial t^2$ 的缩写）。按照 $F=ma$，小段 B 的纵向和横向运动方程分别为

$$\begin{cases} T_2\cos\alpha_2 - T_1\cos\alpha_1 = 0 & \text{(1-1)} \\ T_2\sin\alpha_2 - T_1\sin\alpha_1 = (\rho ds)u_{tt} & \text{(1-2)} \end{cases}$$

（1-2）式中 ρ 是弦的线密度，即单位长度的质量。ds 为小段 B 的弧长。

我们将限于考虑小的振动。这时α_1、α_2为小量，如果忽略α_1^2、α_2^2以上的高阶小量，则

$$\cos\alpha_1 \approx 1-\alpha_1^2/2!+\cdots \approx 1，\cos\alpha_2 \approx 1,$$

$$\sin\alpha_1 \approx \alpha_1-\alpha_1^3!+\cdots \approx \alpha_1 \approx \tan\alpha_1,$$

$$\sin\alpha_2 \approx \alpha_2 \approx \tan\alpha_2,$$

$$ds=\sqrt{(ds)^2+(du)^2}=\sqrt{1+(\mu_x)^2}dx \approx dx$$

（其中$u_x=\partial u/\partial x=\tan\alpha \approx \alpha$），又$\tan\alpha_1=u_x\big|_x$，$\tan\alpha_2=u_x\big|_{x+dx}$。这样，（1-1）和（1-2）简化为

$$\begin{cases} T_2-T_1=0 & \text{（1-3）} \\ T_2u_x\big|_{x+dx}-T_1u_x\big|_x=u_{tt}\rho dx & \text{（1-4）} \end{cases}$$

因此$T_2=T_1$，弦中张力不随x而变，它在整根弦中取同一数值。另一方面。在振动过程中的每个时刻都有长度$d_s \approx d_x$，即长度ds不随时间而变，所以作用于B段的张力也不随时间而变。弦中张力既与x无关，又跟t无关，只能是常数，记为T。（1-4）成为

$$T\left(u_x\big|_{x+dx}-u_x\big|_x\right)=\rho u_{tt}dx$$

由于dx取的很小，$u_x\big|_{x+dx}-u_x\big|_x=(\partial u_x/\partial x)dx=u_{xx}dx$（其中$u_{xx}$是$\partial u_x/\partial x=\partial^2u/\partial x^2$的缩写。这样，$B$段的运动方程就成为

$$\rho u_{tt}-Tu_{xx}=0 \qquad (1\text{-}5)$$

其实，作为代表的B段是任选的，所以方程（1-5）适用于弦上各处，是弦作微小横振动的运动方程，简称为弦振动方程。

对于均匀弦，ρ是常数，(1-5)通常改写为

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=0, \qquad (1\text{-}6)$$

其中$a^2=T/\rho$。以后会看到a就是振动在弦上传播的速度。

质点的位移仅是时间t的函数，质点的运动方程也就是以时间t为自变量的常微分方程。而弦的位移u是时间t和坐标x两个自变量的函数，弦的运动方程则是以x和t为自变量的偏微分方程。它是弦上许多彼此相牵连的质点的运动方程，质点之间的牵连反映在u_{xx}项。

——这是《数学物理方法》第七章第一节的简单内容！

3、真空中电磁波的波动方程

由电磁学中静电场的环路定理、高斯定律、安培环路定律和法拉第电磁感应定律的可以得到麦克斯韦方程组的积分形式（2-1）。

$$\begin{cases} \oiint \vec{D}\bullet d\vec{S} = \sum q_0 \\ \oiint \vec{B}\bullet d\vec{S} = 0 \\ \oint_L \vec{E}\bullet d\vec{l} = -\iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \\ \oint_L \vec{H}\bullet d\vec{l} = \sum I_0 + \iint \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \end{cases} \quad (2\text{-}1)$$

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{E} = 0 \\ \nabla\cdot\vec{H} = 0 \\ \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla\times\vec{B} = \mu_0\mu_r\varepsilon_0\varepsilon_r\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases} \quad (2\text{-}2)$$

（2-1）第一个方程$\oiint \vec{D}\bullet d\vec{S} = \sum q_0$说明静电场是有源无旋场：其左边$=\oiint_S \vec{D}\bullet d\vec{S} = \iiint_V \nabla\bullet\vec{D}dV$，右边$=\sum q_0 = \iiint_V \rho dV$，所以得方程（2-2）第一式；同理，得方程（2-2）第二式，即说明静磁场是无源有旋场；（2-1）第三个方程$\oint_L \vec{E}\bullet d\vec{l} = -\iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$说明随时间变化的磁场可以产生电场：其左边$=\oint_L \vec{E}\bullet d\vec{l} = \iint_S \nabla\times\vec{E}\bullet d\vec{S}$=右边，所以得方程（2-2）第三式；（2-1）第四个方程$\oint_L \vec{H}\bullet d\vec{l} = \sum I_0 + \iint \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$说明随时间变化的电场可以产生磁场：其左边$=\oint_L \vec{H}\bullet d\vec{l} = \iint_S \nabla\times\vec{H}\bullet d\vec{S}$，右边$=\sum I_0 + \iint \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\bullet d\vec{S} = \iint_S \vec{J}\bullet d\vec{S} + \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\bullet d\vec{S}$，如果在真空中，而且没有电流，所以可以得方程（2-2）第四式。

式中$\vec{E}$、$\vec{B}$和$\vec{H}$分别为真空中电场强度、磁感应强度和磁场强度。ε_0、u_0、ε_r、u_r分别为真空和中的介电常数和磁导率。根据矢量场分析的散度和旋度的运算法

则，由麦克斯韦方程组的微分形式（2-2）很容易导出真空中的电磁波方程：

$$\begin{cases} \vec{E}_{tt} - \dfrac{1}{\mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r} \Delta_3 \vec{E} = 0 \\ \vec{H}_{tt} - \dfrac{1}{\mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r} \Delta_3 \vec{H} = 0 \end{cases} \tag{2-3}$$

其中，$\Delta_3 = \nabla \bullet \nabla = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$。

如果考虑真空一维电磁波情况，即 ε_r =1 、 u_r =1 和 $\Delta_3 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} \to \Delta_1 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$，则（2-3）为

$$\begin{cases} \vec{E}_{tt} - \dfrac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \vec{E}_{xx} = 0 \\ \vec{H}_{tt} - \dfrac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \vec{H}_{xx} = 0 \end{cases} \tag{2-4}$$

（2-4）即一维电磁波的波动方程。

——这是《电磁学》的基本理论结构！

4、类比推理的结论

将机械振动的波动方程（1-2）与电磁波的波动方程（2-3）进行比较，显然有 $a^2 = 1/\mu_0 \varepsilon_0$，即

$$a = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}} = c \tag{2-4}$$

麦克斯韦当时把韦伯等科学家测出介电常数和磁导率代入，计算结果恰恰等于当时测得的光速数值。由此，麦克斯韦提出了光的电磁学说。

——这是科学研究的基本方法、物理教学中的基本科学方法和中学物理教师的基本逻辑思路！

光的电磁学说是麦克斯韦继预言了电磁波存在之后的又一重大科学发现和科学成就。麦克斯韦凭借他高深的数学造诣和丰富的想象力，将电学、磁学和光学统一起来，建立了完整的电磁场理论，其是 19 世纪物理学发展的最光辉的成果，是科学史上最伟大的综合之一。是物理学、数学和科学方法有机结合的典范。

——这是经典物理学理论建立的标志性里程碑之一！