

均匀杆在什么位置离开竖直墙面

姜付锦

(武汉市黄陂一中 湖北 武汉 430300)

(收稿日期:2015-10-29)

摘要:先以杆的质心 C 为研究对象并结合机械能守恒定律求出杆转动的角速度与夹角 θ 的关系,接着用牛顿第二定律分析了匀质杆脱离墙面的条件,最后求得匀质杆脱离墙面的角度.通过研究发现,这个角与杆的长度无关,理论上 有 4 个解,其中有两个虚数解,一个解为零,还有一个实数解;当两个小球质量相同时脱离角度为 $\arccos\left(\frac{2}{3}\cos\theta_0\right)$.

关键词:转动惯量 机械能守恒定律 脱离条件

1 题目

如图 1 所示,小球 A 和 B 的质量分别为 m_1, m_2 , 两球之间用一长为 L , 质量为 m 均匀分布的杆连接, 杆放在光滑的水平面和光滑的竖直墙壁之间. 开始时杆与竖直墙面的夹角为 θ_0 , 某一时刻释放杆, 试分析当小球 A 脱离墙壁时杆与墙壁的夹角.

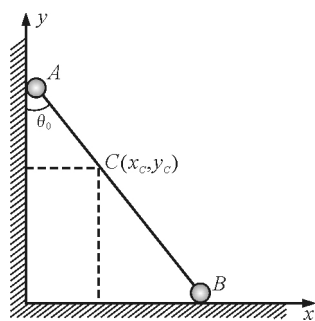


图 1

2 杆转动角速度的求解

某一时刻杆与墙壁成 θ 角, 则系统的质心位置坐标为 (x_c, y_c) , 由质心的定义式可知

$$x_c = \frac{m \frac{L}{2} \sin \theta + m_2 L \sin \theta}{m_1 + m_2 + m}$$

$$y_c = \frac{m \frac{L}{2} \cos \theta + m_1 L \cos \theta}{m_1 + m_2 + m}$$

整理后得

$$x_c = \frac{L(m + 2m_2) \sin \theta}{2(m_1 + m_2 + m)}$$

$$y_c = \frac{L(m + 2m_1) \cos \theta}{2(m_1 + m_2 + m)}$$

对位置坐标求时间 t 的一阶导数得质心的两个分速度大小

$$\dot{x}_c = \frac{L(m + 2m_2) \cos \theta \cdot \dot{\theta}}{2(m_1 + m_2 + m)}$$

$$\dot{y}_c = \frac{L(m + 2m_1)(-\sin \theta) \cdot \dot{\theta}}{2(m_1 + m_2 + m)}$$

对位置坐标求时间 t 的二阶导数得质心的两个分加速度大小

$$\ddot{x}_c = \frac{L(m + 2m_2)[\cos \theta \cdot \ddot{\theta} - \sin \theta \cdot \dot{\theta}^2]}{2(m_1 + m_2 + m)}$$

$$\ddot{y}_c = \frac{L(m + 2m_1)[(-\sin \theta) \cdot \ddot{\theta} - \cos \theta \cdot \dot{\theta}^2]}{2(m_1 + m_2 + m)}$$

由系统机械能守恒可知

$$mg \frac{L}{2} (\cos \theta_0 - \cos \theta) + m_1 g L (\cos \theta_0 - \cos \theta) = \frac{1}{2} (m + m_1 + m_2) (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2) + \frac{1}{2} J_c \dot{\theta}^2$$

式中 $J_c = aL^2$ (a 为某一定值) 为系统相对于质心的转动惯量, 则得

$$\dot{\theta}^2 = 4(2m_1 + m)(m_1 + m_2 + m)(\cos \theta_0 - \cos \theta) g \{L[4(m_2 - m_1)(m_1 + m_2 + m) \cos^2 \theta + (m + 2m_1)^2 + 4(m_1 + m_2 + m)a]\}^{-1}$$

两边对时间求导得

$$2\dot{\theta}\ddot{\theta} = 4(2m_1 + m)(m_1 + m_2 + m)g \sin \theta [-4(m_2 - m_1)(m_1 + m_2 + m) \cos^2 \theta + 8(m_2 - m_1)(m_1 + m_2 + m) \cos \theta_0 \cos \theta + (m + 2m_1)^2 + 4(m_1 + m_2 + m)a] \cdot$$

$$\dot{\theta} \{L[4(m_2 - m_1)(m_1 + m_2 + m) \cos^2 \theta + (m + 2m_1)^2 + 4(m_1 + m_2 + m)a]\}^{-1}$$

进一步整理得

$$\ddot{\theta} = 2(2m_1 + m)(m_1 + m_2 + m)g \sin \theta [-4(m_2 - m_1)(m_1 + m_2 + m) \cos^2 \theta + 8(m_2 - m_1)(m_1 + m_2 + m) \cos \theta_0 \cos \theta + (m + 2m_1)^2 + 4(m_1 + m_2 + m)a] \{L[4(m_2 - m_1)(m_1 + m_2 + m) \cos^2 \theta + (m + 2m_1)^2 + 4(m_1 + m_2 + m)a]\}^{-1}$$

3 系统的转动惯量的计算^[1]

系统对过质心垂直纸面的轴的转动惯量为

$$J_C = m_1 \left[\frac{(m + 2m_2)L}{2(m + m_1 + m_2)} \right]^2 + m_2 \left[\frac{(m + 2m_1)L}{2(m + m_1 + m_2)} \right]^2 + \int_0^{\frac{(m+2m_1)L}{2(m+m_1+m_2)}} \frac{m}{L} x^2 dx + \int_0^{\frac{(m+2m_2)L}{2(m+m_1+m_2)}} \frac{m}{L} x^2 dx$$

整理后得

$$J_C = m_1 \left[\frac{(m + 2m_2)L}{2(m + m_1 + m_2)} \right]^2 + m_2 \left[\frac{(m + 2m_1)L}{2(m + m_1 + m_2)} \right]^2 + \frac{m}{L} \left\{ \frac{1}{3} \left[\frac{(m + 2m_2)L}{2(m + m_1 + m_2)} \right]^3 + \frac{1}{3} \left[\frac{(m + 2m_1)L}{2(m + m_1 + m_2)} \right]^3 \right\}$$

4 小球 A 脱离墙面的条件

如图 2 所示,系统所受的外力有重力、地面支持力和墙面的弹力,墙面的弹力的方向水平向右。

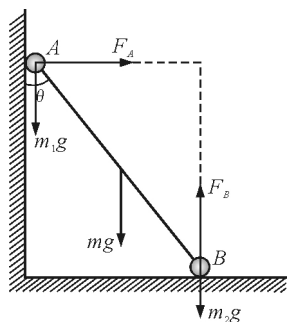


图 2 系统的受力图

$$(m_1 + m_2 + m)\ddot{x}_C = F_A$$

$$(m_1 + m_2 + m)\ddot{y}_C =$$

$$F_B - (m_1 + m_2 + m)g$$

当 $F_A = 0$ 时,小球 A 脱离墙面,则有

$$\ddot{x}_C = \frac{L(m + 2m_2)[\cos \theta \cdot \ddot{\theta} - \sin \theta \cdot \dot{\theta}^2]}{2(m_1 + m_2 + m)} = 0$$

代数值后整理得

$$\{4(m_2 - m_1)(m_1 + m_2 + m) \cos^3 \theta +$$

$$3[(m + 2m_1)^2 + 4(m_1 + m_2 + m)a] \cos \theta - 2[(m + 2m_1)^2 + 4(m_1 + m_2 + m)a] \cos \theta_0\} \cdot \sin \theta = 0$$

式中

$$a = m_1 \left[\frac{(m + 2m_2)}{2(m + m_1 + m_2)} \right]^2 + m_2 \left[\frac{(m + 2m_1)}{2(m + m_1 + m_2)} \right]^2 +$$

$$m \left\{ \frac{1}{3} \left[\frac{(m + 2m_2)}{2(m + m_1 + m_2)} \right]^3 + \frac{1}{3} \left[\frac{(m + 2m_1)}{2(m + m_1 + m_2)} \right]^3 \right\}$$

5 杆与墙壁夹角的求解

这个方程有一个特解 $\sin \theta = 0$, 即 $\theta = 0$, 由题意可知这个解无意义舍去。

(1) 当 $m_1 = m_2$ 时, $\cos \theta = \frac{2}{3} \cos \theta_0$ 这是一个特解, 与没有两个小球的匀质杆脱离角度相同^[2];

(2) 当 $m_1 \neq m_2$ 时, $\cos \theta$ 在理论上 3 个解, 其中有两个解是虚数, 另外 1 个实数解, 由于这个方程非常复杂, 很难求出解析解, 故本文给出以下数值模拟解:

设 $m_1 = 2 \text{ kg}$, $m_2 = 4 \text{ kg}$, $m = 1 \text{ kg}$, 初始角度为 θ_0 , 则脱离时的角度满足

$$\cos \theta =$$

$$\frac{1}{6} \{252 \cos(\theta_0) + 42 [42 + 36 \cos(\theta_0)^2]^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{3}} -$$

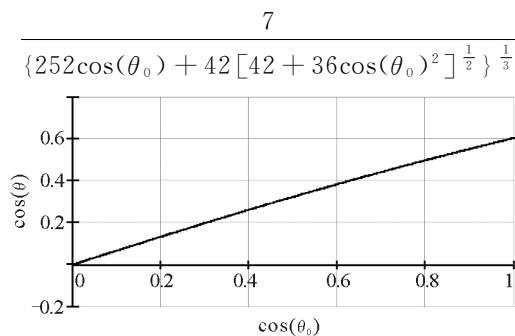


图 3 当系统质量一定时,脱离角度与初始角度的关系

由图 3 可知,初始时角度的 $\cos(\theta_0)$ 越大,脱离时角度的 $\cos(\theta)$ 越大;当 $\theta_0 = 0$ 时, $\cos(\theta) = 0.604$, 约为 52.8° . 若系统质量是其他值时, 则只需将以上的程序略作修改即可, 限于篇幅这里不再讨论。

参考文献

- 1 周衍柏. 理论力学教程(第 2 版). 北京: 高等教育出版社, 1985.128 ~ 131
- 2 郑永令, 贾起民. 普通物理学教程丛书 力学(第 1 版). 上海: 复旦大学出版社, 1989.280 ~ 282