

微积分思想在高中物理学科的逐步渗透实践

李建丽

(汾阳市第五高级中学 山西 汾阳 032200)

摘要:2019年全国I卷第21题利用物体加速度和弹簧压缩量之间关系的图象,要求学生结合图象和万有引力定律、牛顿定律、胡克定律、动能定理等综合分析判断.其中最主要的一点是,对象所受合力是变力,运动形式既不是匀速直线运动也不是匀变速直线运动,而是加速度随位移线性变化的特殊变速运动,所以变力功的计算在本题中是一个无法回避的问题,如何借助图象的面积(定积分量)去解决题目提出的问题,对学生微积分思想有很高的要求.洞见历年高考对图象(如本题的 $a-x$ 图象)模型处理的考查,给我们的教学释放了这样的信号——对运用数学处理物理问题这个关键能力的考查,图象便是一个很好的载体.课本未出现过、而物理量关系又存在的这类图象能很好地考查学生灵活处理问题的迁移能力.应该引起我们的重视.

关键词:微积分;图象;斜率;面积

文章编号:1008-4134(2019)15-0040

中图分类号:G633.7

文献标识码:B

秉承三年一盘棋的统筹系统理念,考虑学生认知结构的逐步形成,一个重要的思想——初步的微积分思想需要借助于教材并很好地利用教材逐步渗透给学生.

1 微积分思想第一次呈现:必修一研究匀变速直线运动的位移与时间的关系

为了帮助学生理解,提出如下问题:

(1)为了粗略计算物体发生的位移,物体运动近似看做几段匀速运动,发生的位移如何计算?

(2)算出的位移在数值上与图示几个不等高矩形面积之和有什么关系?

(3)算出的位移与图示图象中 $v-t$ 图线与坐标轴围成的梯形面积是不是有很大差距?

(4)如果分割的时间段越短,重复回答上面(1)(2)(3)提出的问题.

在理解的基础上分析,如果时间再短、分得更细,物体发生的位移就可以用 $v-t$ 图象中图线与坐标轴围成的面积表示.这样就帮助学生顺利完成了微积分思想的第一次初步认识.

(5)请画出加速度逐渐减小的加速直线运动的 $v-t$ 图象.

(6)请描述位移 x 跟 $v-t$ 图象上图线与坐标轴围成的面积的关系.

(7)这里面积反映的物理量 x 与纵轴表示的物理量 v 以及横轴表示的物理量 t 的单位的的关系是什么?

$$(m = \frac{m}{s} \times s)$$

(8)如何找到图象中图线与坐标轴围成的面积表示的是哪个物理量?(这个物理量是 y 轴表示物理量与 x 轴表示物理量的乘积)

例1(名校模拟)甲、乙两汽车在一平直公路上同向行驶.在 $t=0$ 到 $t=t_1$ 的时间内,它们的 $v-t$ 图象如图1所示.在这段时间内

A. 汽车甲的平均速度比乙的大

B. 汽车乙的平均速度等于 $\frac{v_1+v_2}{2}$

C. 甲、乙两汽车的位移相同

D. 汽车甲的加速度大小逐渐减小,汽车乙的加速度大小逐渐增大

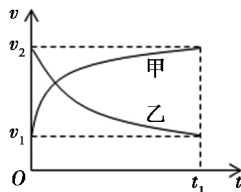


图1

微积分思想突破点提示: $v-t$ 图线的斜率反映加速度大小; $v-t$ 图线与坐标轴围成的面积反映位移的大小.

2 微积分思想第二次呈现:必修二探究弹性势能的表达式

实施如下操作:

作者简介:李建丽(1969-),女,山西汾阳人,本科,中学正高级教师,研究方向:课堂教学研究.

- (1) 不可省略步骤:复习前面的(5)(6)(7)(8).
- (2) 请画出恒力作用过程的 $F-x$ 图象.
- (3) 请计算恒力在位移 x 段做的功 W .
- (4) 请描述 W 跟图象上图线与坐标轴围成的面积的关系.
- (5) 请画出弹簧弹力作用过程的 $F-x$ 图象.
- (6) 请描述功 W 跟图象上图线与坐标轴围成的面积的关系.
- (7) 如果 $F-x$ 图线不是直线,即 F 随 x 变化不是均匀变化,情况怎样?

例2 (2019 全国 I 卷) 在星球 M 上将一轻弹簧竖直固定在水平桌面上,把物体 P 轻放在弹簧上端 P 由静止向下运动,物体的加速度 a 与弹簧的压缩量 x 间的关系如图2中实线所示.在另一星球 N 上用完全相同的弹簧,改用物体 Q 完成同样的过程,其 $a-x$ 关系如图2中虚线所示,假设两星球均为质量均匀分布的球体.已知星球 M 的半径是星球 N 的3倍,则

- A. M 与 N 的密度相等
- B. Q 的质量是 P 的3倍
- C. Q 下落过程中的最大动能是 P 的4倍
- D. Q 下落过程中弹簧的最大压缩量是 P 的4倍

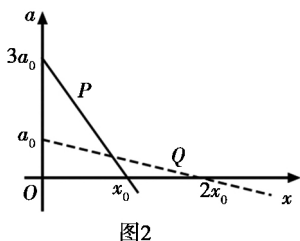


图2

答案解析: O 位置: P 、 Q 分别在星球 M 、 N 上刚接触弹簧, 则有关系:

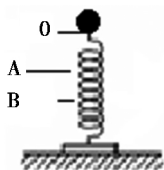
$$3a_0 = \frac{GM_M}{R_M^2}; a_0 = \frac{GM_N}{R_N^2} \quad R_M:R_N = 3:1 \quad \text{则}$$

$$M_M:M_N = 27:1$$

可得 $\rho_M:\rho_N = 1:1$, 即选项 A 正确.

A 位置: P 、 Q 物体分别压缩弹簧达到加速度为零, 此时速度、动能均最大, 则有关系: $m_P \times 3a_0 = kx_0$; $m_Q a_0 = k \times 2x_0$, 解得 $6m_P = m_Q$, 即选项 B 错误.

微积分思想突破点: $O \rightarrow A$: $W_{P总} = E_{kPmax}$, $W_{Q总} = E_{kQmax}$, 两物所受合力均为变力, 各自 $a-x$ 都是线性函数, 所以各自 $F_{合}$ 随 x 也都是均匀变化. $W_{合}$ 为各自 $F_{合}-x$ 图象中图线



情景再现
 P 、 Q 运动示意图
图3

与横轴围成的面积,也等于各自 $a-x$ 图象中图线与横轴围成的面积与各自质量的乘积. 所以 $W_{P合} = m_P \times \frac{1}{2} \times 3a_0 \times x_0 = 1.5m_P a_0 x_0$, $W_{Q合} = m_Q \times \frac{1}{2} \times 2a_0 \times 2x_0 = 2m_Q a_0 x_0$.

所以 $E_{kQmax} = 4E_{kPmax}$, 故选项 C 正确.

B 位置: 写出 P 、 Q 物体落到弹簧上运动的牛顿第二定律表达式 ($a-x$ 物理量关系):

$$m_P \times 3a_0 - kx = m_P a_P, \text{ 变形得: } a_P = 3a_0 - \frac{k}{m_P} x.$$

$$m_Q a_0 - kx = m_Q a, \text{ 变形得: } a_Q = a_0 - \frac{k}{m_Q} x.$$

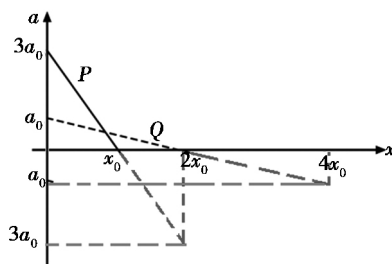


图4

上面 $a-x$ 关系均为 $y = b - kx$ 的一次函数形式, 所以在 P 、 Q 物体运动期间它们各自的 a 随 x 图线均为斜率确定的直线. 所以对于 P 、 Q 以后的运动可以做如图4所示辅助线去进一步表示 P 、 Q 的动能从最大值减为零的过程中, 合力所做的负功与从零增加到最大值的过程中所做的正功相等, 这个负功值即等于辅助线(图中虚线)与横轴所围的面积. 根据图示图象对称性可知 P 、 Q 速度为零时的位置分别在 $2x_0$ 与 $4x_0$ 处, 所以 $x_{Qmax} = 2x_{Pmax}$, D 错误. 当然, 上述的分析过程较为复杂, 如果用弹簧弹力做的功 $W = \frac{1}{2} kx^2$ 进行计算, 或利用简谐运动的对称性, 则比较简单, 但这两个思路都超出了必考知识内容的要求范围.

3 微积分思想第三次呈现: 必修二机械能守恒定律的章末复习

进行如下操作:

- (1) 请画出匀变速直线运动的 $v-t$ 图象.
- (2) 请描述加速度 a 跟图象上图线的斜率的关系.
- (3) 请画出加速度逐渐减小的加速直线运动的 $v-t$ 图象.
- (4) 请描述加速度 a 跟图象上图线的斜率的关系.

(5) 这里斜率反映的物理量 a 与纵轴、横轴分别表示的物理量 v 、 t 有什么关系? ($a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$)

(6) 如何找到图象中图线的斜率反映的是哪个物理量? ($k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ 是 y 随 x 的变化率)

(7) 动能 E_k 随 x 变化时 $E_k - x$ 图线的斜率表示哪个物理量? ($\frac{\Delta E_k}{\Delta x} = F_{\text{合}}$)

(8) 机械能 E 随 x 变化时 $E - x$ 图线的斜率表示哪个物理量? ($\frac{\Delta E}{\Delta x} = F_{\text{其它}}$ 说明: $F_{\text{其它}}$ 为系统受到的除重力、弹力之外其它力的合力)

例3 (名校模拟) 如图5, 半径为 R 的均匀带正电薄球壳, 其上有一小孔 A , 已知壳内的场强处处为零, 壳外空间的电场与将球壳上的全部电荷集中于球心 O 时在壳外产生的电场一样, 一带正电的试探电荷(不计重力)从球心以初动能 E_{k0} 沿 OA 方向射出, 图6中关于试探电荷的动能 E_k 与离开球心的距离 r 的关系图线, 可能正确的是

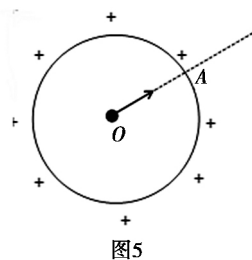


图5

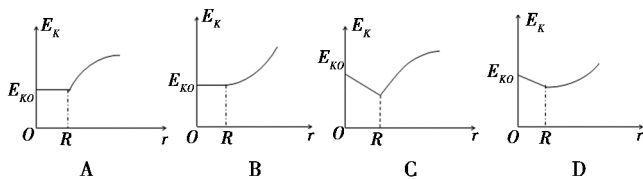


图6

微积分思想突破点提示: $E_k - r$ 图线的斜率反映静电力的大小, 壳内场强处处为零, 壳外场强逐渐减小, 故选 A.

4 微积分思想第四次呈现: 选修3-1的电势差与电场强度的关系

实施如下操作:

- (1) 请画出匀强电场的 $E - x$ 图象.
- (2) 请计算匀强电场中沿场强方向 AB 两点间的电势差 U_{AB} .
- (3) 请描述 U_{AB} 跟 $E - x$ 图象上图线与坐标轴围成的面积的关系.
- (4) 请大致画出点电荷电场中 A 、 B 两点间的 $E - x$ 图象.

(5) 请描述电势差 U_{AB} 跟 $E - x$ 图象上图线与坐标轴围成的面积的关系.

(6) 电势 φ 随位置 x 变化时 $\varphi - x$ 图象中图线的斜率表示哪个物理量? ($\frac{\Delta \varphi}{\Delta x} = E$)

例4 (2017年全国I) 在一静止点电荷的电场中, 任一点的电势 φ 与该点到点电荷的距离 r 的关系如图7所示. 电场中四个点 a 、 b 、 c 和 d 的电场强度大小分别为 E_a 、 E_b 、 E_c 和 E_d . 点 a 到点电荷的距离 r_a 与点 a 的电势 φ_a 已在图中用坐标 (r_a, φ_a) 标出, 其余类推. 现将一带正电的试探电荷由 a 点依次经 b 、 c 点移动到 d 点, 在相邻两点间移动的过程中, 电场力所做的功分别为 W_{ab} 、 W_{bc} 和 W_{cd} . 下列选项正确的是

- A. $E_a : E_b = 4 : 1$ B. $E_c : E_d = 2 : 1$
 C. $W_{ab} : W_{bc} = 3 : 1$ D. $W_{bc} : W_{cd} = 1 : 3$

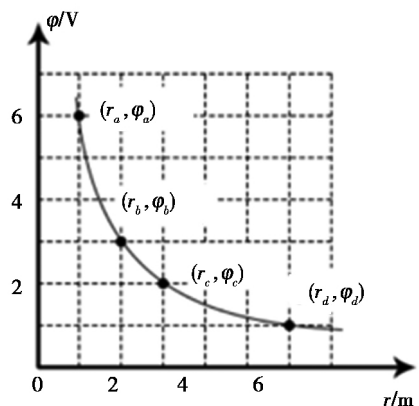


图7

微积分思想突破点提示: $\varphi - r$ 图的斜率反映电场强度的大小.

引导学生切实理解:

匀强电场 $E - x$ 图象应该是平行于横轴的直线.

匀强电场 $\varphi - x$ 图象应该是倾斜直线.

$\varphi - x$ 图象的斜率是 $\frac{\Delta \varphi}{\Delta x} = E$, 其物理意义为电场强度反映电势在空间变化的快慢.

$E - x$ 图象上图线与坐标轴围成的面积是这两点间的电势差 U_{AB} .

例5 (2013上海) 半径为 R 均匀带正电荷的球体在空间产生球对称的电场; 场强大小沿半径分布如图8所示, 图中 E_0 已知 $E - r$ 曲线下 $O - R$ 部分的面积等于 $R - 2R$ 部分的面积.

- (1) 写出 $E - r$ 曲线下面积的单位(V 伏特).
- (2) 已知带电球在 $r \geq R$ 处的场强 $E = k \frac{Q}{r^2}$, 式中 k

为静电力常量,该均匀带电球所带的电荷量 Q 为多大? ($Q = \frac{E_0 R^2}{k}$)

(3) 求球心与球表面间的电势差 ΔU : ($\Delta U = \frac{1}{2} E_0 R$).

(4) 质量为 m , 电荷量为 q 的负电荷在球面处需具有多大的速度可以刚好运动到 $2R$ 处? (由动能定

理: $q\Delta U = \frac{1}{2}mv_0^2$, 所以 $v_0 = \sqrt{\frac{qE_0 R}{m}}$)

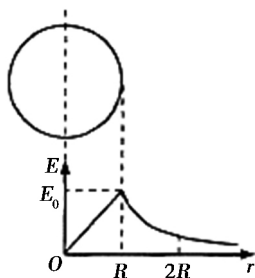


图8

微积分思想突破点提示: $E-r$ 图象与坐标轴围成的面积是 $E_r = \Delta U$, 单位 V.

5 微积分思想第五次呈现: 选修3-1, 关于电容器充放电的探究

操作如下:

(1) 在图中画一个竖立的狭长矩形, 它的面积的物理意义是什么? ($CU = \Delta Q$ 是电荷量)

(2) 怎样根据图象估算电容器在全部放电过程中释放的电荷量? (试着算一算)

(3) 根据以上数据估算的电容是多少?

6 微积分思想第六次呈现: 选修3-2, 法拉第电磁感应定律的教学

操作如下:

人教版课本3-2 法拉第电磁感应定律 $e = N \frac{\Delta\phi}{\Delta t}$

的理解:

(1) 电动势正比于磁通量的变化率 $\frac{\Delta\phi}{\Delta t}$.

(2) 通过磁通量 ϕ 随时间 t 变化的 $\phi-t$ 图象, 如何确定电动势 e 的变化情况? (看斜率绝对值)

(3) 动生的情况下电动势 $e = NS \frac{\Delta B}{\Delta t}$, 通过磁感应

强度 B 随时间 t 变化的 $B-t$ 图象, 如何确定电动势 e 的变化情况? (也是看斜率绝对值)

例6 (2014 新课标 I) 如图9 线圈 ab 、 cd 绕在同一软铁芯上, 在 ab 线圈中通以变化的电流, 用示波器测得线圈 cd 间电压如图9(b) 所示. 已知线圈内部的磁场与流经线圈的电流成正比, 则下列描述线圈 ab 中电流随时间变化关系的图10 中, 可能正确的是

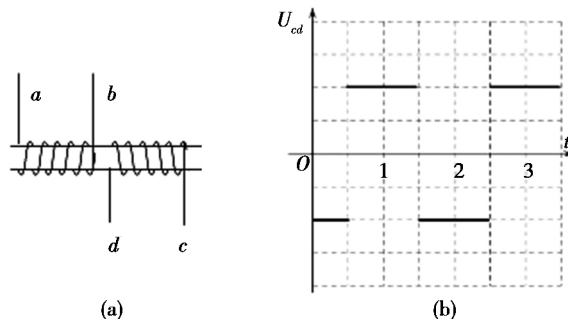


图9

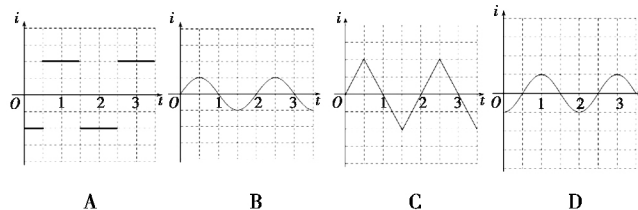


图10

微积分思想突破点提示: $i-t$ 图是励磁电流随时间变化图象, 可以反映 $B-t$ 关系, 进一步反映穿过 cd 线圈的 $\phi-t$ 关系, 根据 $e = N \frac{\Delta\phi}{\Delta t}$, $U_{cd} \propto \phi' \propto i'$, 只有 $i-t$ 是分段线性函数, $U_{cd}-t$ 才是分段常函数.

7 微积分思想第七次呈现: 选修3-5 动量的教学

如下操作:

(1) 合外力 F 随时间 t 变化, 请问 $F-t$ 图象中图线与坐标轴围成的面积的物理意义是什么? ($Ft = I$ 是合外力的冲量)

(2) 物体动量 P 随时间 t 变化, 请问 $P-t$ 图象中图线的斜率的物理意义是什么? ($\frac{\Delta P}{\Delta t} = F_{\text{合}}$ 是合外力)

8 微积分思想第八次呈现: 选修3-3, 气体的等温变化的教学

进行如下操作:

(1) 请画出理想气体发生等压变化过程中的 $P-V$ 图象.

(2) 请计算等压过程中, 气体体积膨胀 ΔV 对外做的功 W .

(3) 请描述 W 跟 $P-V$ 图象上图线与坐标轴围成的面积的关系.

(4) 画出等温过程(不等压过程)的 $P-V$ 图象.

(5) 请描述不等压过程中气体体积膨胀 ΔV 对外做的功 W 跟图象上图线与坐标轴围成的面积的关系(相等).

9 微积分思想第九次呈现: 高三总复习过程

物理量的变化率与图象中图线的斜率以及数学的导数是一码事.

物理量对时间或空间的累积与图象中图线与坐标轴围成的面积以及数学的定积分是一码事.

例7 (2010·北京) 如图11,

若 x 轴表示时间, y 轴表示位置, 则该图象反映了某质点做匀速直线运动时, 位置与时间的关系. 若令 x 轴和 y 轴分别表示其它的物理量, 则该图象又可以反映在某种情况下, 相应的物理量之间的关系. 下列说法中正确的是

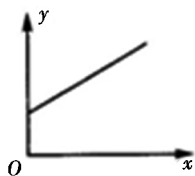


图11

A. 若 x 轴表示时间, y 轴表示动能, 则该图象可以反映某物体受恒定合外力作用做直线运动过程中, 物体动能与时间的关系

B. 若 x 轴表示频率, y 轴表示动能, 则该图象可以

反映光电效应中, 光电子最大初动能与入射光频率之间的关系

C. 若 x 轴表示时间, y 轴表示动量, 则该图象可以反映某物体在沿运动方向的恒定合外力作用下, 物体动量与时间的关系

D. 若 x 轴表示时间, y 轴表示感应电动势, 则该图象可以反映静置于磁场中的某闭合回路, 当磁感应强度随时间均匀增大时, 闭合回路的感应电动势与时间的关系

微积分思想突破点提示:

若 A 正确, 对应函数 $E_k = \frac{1}{2}ma^2t^2$, 形如 $y = kx^2$, ($y = E_k, x = t^2$), 故 A 错误.

若 B 正确, 对应函数 $E_k = h\nu - W$, 形如 $y = kx + b$, $b < 0$, 不满足 B 错误.

若 C 正确, 对应函数 $P = P_0 + Ft$, 形如 $y = kx + b$, 且斜率 $\frac{\Delta P}{\Delta t} = F$ 为定值, C 正确.

若 D 正确, 对应函数 $e = NSB'$, 此时 B' 为定值, $e(t)$ 为常函数, D 错误.

10 微积分思想第十次呈现: 高考一轮复习

表1 将见到过的物理量微积分关系进行梳理.

表1

图象名称	斜率	图象名称	面积
$s-t$ (位置—时间)	速度 v	$v-t$ (速度—时间)	位移 s
$v-t$ (速度—时间)	加速度 a	$a-t$ (加速度—时间)	速度的变化量 Δv
$p-t$ (动量—时间)	合外力 F	$F-t$ (力—时间)	冲量 I
E_k-x (动能—位移)	合外力 F	$F_{\text{合}}-t$ (合外力—时间)	$I_{\text{合}} \Leftrightarrow \Delta P$
$q-t$ (电荷量—时间)	电流 i	$F-x$ (力—位移)	力做的功 W
$\phi-t$ (磁通量—时间)	磁通量变化率 ϕ'	$F_{\text{合}}-x$ (合外力—位移)	$W_{\text{合}} \Leftrightarrow \Delta E_k$
$B-t$ (磁感应强度—时间)	磁感应强度的变化率 B'	$i-t$ (电流—时间)	流过的电荷量 Δq
$\varphi-x$ (电势—距离)	沿 x 方向场强投影 E_x	$E-x$ (电场强度—距离)	两点间电势差 $\Delta\phi$
$P-V$ (压强—体积)	气体做的功 E	—	—
$\blacktriangle a-x$ (加速度—位移)	面积: 数值上等于单位质量物体动能的变化量		

11 结束语

一种思想方法, 要真正让学生明白领悟, 并践行在解决问题的策略举措中, 作为教师我们必须有三年一盘棋的整体规划, 有计划、有目的地逐步渗透、层层递进, 切忌一步到位, 也切忌碎片化式信手拈来. 真正体会数学对于物理问题研究的工具性, 并深刻体会考试大纲所说的应用数学处理物理问题的能力的真正确切含义.

参考文献:

[1] 徐文晖, 陆建隆. 从高考试题反思教学过程中核心素养的渗透[J]. 中学物理, 2017, 35(6): 41—42.
 [2] 中华人民共和国教育部. 义务教育物理课程标准(2011年版) [M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2012.
 [3] 王欢. 基于初中物理学习的课堂观察量表编制研究 [D]. 西安: 陕西师范大学, 2016.

(收稿日期: 2019-06-20)