

一种椭圆摆模型的深入研究

作者：陕西省府谷中学 高建平 时间：2021.12.18

一：模型引入与问题铺垫

如图所示，一只内壁光滑的半球形碗固定在小车上，小车静止在光滑的水平面上。碗和小车的总质量为 M ，在小车最后边的碗边 A 处无初速度释放一只质量为 m 的小球。小球从静止开始沿内壁下滑（碗的半径为 R ，重力加速度为 g ）

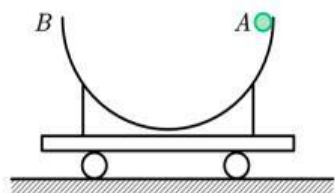


图 1

为了能够全面细致地了解此模型，我们不妨从最基本的牛顿运动定律入手，下面对 m 和 M 以及它们之间的运动关联分别写出方程：

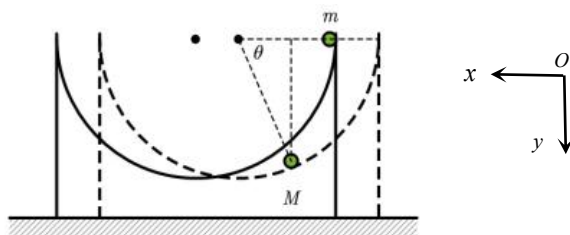


图 2

小球运动过程中受弹力 N 和重力 G ，对小球应用牛顿第二定律：

$$x\text{轴方向：} N \cos \theta = m a_x \quad (1) \quad y\text{轴方向：} mg - N \sin \theta = m a_y \quad (2)$$

对小车和碗整体应用牛顿第二定律：

$$\text{水平方向：} N \cos \theta = M a_2 \quad (3)$$

根据运动关联（相对运动）有：

$$\text{法向关联：} (a_x + a_2) \cos \theta - a_y \sin \theta = \dot{\theta}^2 R \quad (4)$$

$$\text{切向关联：} (a_x + a_2) \sin \theta + a_y \cos \theta = R \ddot{\theta} \quad (5)$$

1. 求解 M 和 m 加速度的微分表达式

设 $t = a_x + a_2$ （换元），(4)(5) 则变型为：

$$\text{法向关联：} t \cos \theta - a_y \sin \theta = \dot{\theta}^2 R \quad (6) \quad \text{切向关联：} t \sin \theta + a_y \cos \theta = R \ddot{\theta} \quad (7)$$

由(6)(7)两式联立可解得：

$$t = \dot{\theta}^2 R \cos \theta + R \ddot{\theta} \sin \theta \quad (8) \quad a_y = R \ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 R \sin \theta \quad (9)$$

由(1)(3)(8) 三式联立可解得:

$$a_x = \frac{M}{M+m} (\dot{\theta}^2 R \cos \theta + R \ddot{\theta} \sin \theta) \quad (10) \quad a_2 = \frac{m}{M+m} (\dot{\theta}^2 R \cos \theta + R \ddot{\theta} \sin \theta) \quad (11)$$

2. 求解 M 和 m 速度的微分表达式

$$\begin{aligned} \text{由(10) 式有: } \quad \frac{dv_x}{dt} &= \frac{M}{M+m} (\dot{\theta}^2 R \cos \theta + R \ddot{\theta} \sin \theta) \\ \Rightarrow \frac{dv_x}{d\theta} \dot{\theta} &= \frac{M}{M+m} (\dot{\theta}^2 R \cos \theta + R \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \dot{\theta} \sin \theta) \\ \Rightarrow \frac{dv_x}{d\theta} \dot{\theta} &= \frac{M}{M+m} (\dot{\theta}^2 R \cos \theta + R \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \dot{\theta} \sin \theta) \\ \Rightarrow \frac{dv_x}{d\theta} &= \frac{M}{M+m} (\dot{\theta} R \cos \theta + R \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \sin \theta) \\ \Rightarrow dv_x &= \frac{M}{M+m} (R \dot{\theta} d \sin \theta + R \sin \theta d \dot{\theta}) \\ \Rightarrow dv_x &= \frac{M}{M+m} R d(\dot{\theta} \sin \theta) \end{aligned}$$

对上式两边不定积分可得:

$$v_x = \frac{M}{M+m} R \dot{\theta} \sin \theta + C$$

初始条件, $t=0$ 时: $\theta=0$, $\dot{\theta}=0$

带入上式得: $C=0$, 所以速度 v_x 的表达式为: $v_x = \frac{MR}{M+m} \dot{\theta} \sin \theta \quad (12)$

同理由(9)(11) 式可得: $v_y = R \dot{\theta} \cos \theta \quad (13) \quad v_2 = \frac{mR}{M+m} \dot{\theta} \sin \theta \quad (14)$

3. 求解 $\dot{\theta}^2$ 关于 θ 的表达式

由(1)(2)(9)(10) 式联立可得:

$$\begin{aligned} g &= \frac{M}{M+m} (\dot{\theta}^2 R \cos \theta + R \ddot{\theta} \sin \theta) \tan \theta + (R \ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 R \sin \theta) \\ \Rightarrow g - \frac{MR}{M+m} \dot{\theta}^2 \cos \theta \tan \theta - \frac{MR}{2(M+m)} \sin \theta \tan \theta \frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta} &= \frac{1}{2} R \cos \theta \frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta} - R \dot{\theta}^2 \sin \theta \quad (15) \end{aligned}$$

设 $y = \dot{\theta}^2$, 则上式可以变型为:

$$\frac{MR + mR \cos^2 \theta}{2(M+m) \cos \theta} \cdot \frac{dy}{d\theta} - \frac{mR \sin \theta}{M+m} y = g \quad (16)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{d\theta} - \frac{2m \sin \theta \cos \theta}{M + m \cos^2 \theta} \cdot y = \frac{2(M+m)g \cos \theta}{MR + mR \cos^2 \theta} \quad (17)$$

这是一个一阶线性微分方程，一阶线性微分方程及其通解的形式如下（查阅高等数学相关章节）

$$\frac{dy}{dx} + p(x) \cdot y = q(x) \quad \text{通解: } y = \left[\int q(x) e^{\int p(x) dx} dx + C \right] e^{-\int p(x) dx} \quad (18)$$

由(17)(18)比较可得:

$$p(\theta) = -\frac{2m \sin \theta \cos \theta}{M + m \cos^2 \theta} \quad q(\theta) = \frac{2(M+m)g \cos \theta}{MR + mR \cos^2 \theta}$$

$$\int p(\theta) d\theta = -\int \frac{2m \sin \theta \cos \theta}{M + m \cos^2 \theta} d\theta = \int \frac{2m \cos \theta}{M + m \cos^2 \theta} d(\cos \theta) = \ln(M + m \cos^2 \theta)$$

所以(17)通解为:

$$\begin{aligned} y &= \left[\int q(\theta) e^{\int p(\theta) d\theta} d\theta + C \right] e^{-\int p(\theta) d\theta} \\ &= \left[\frac{2(M+m)g \cos \theta}{MR + mR \cos^2 \theta} e^{\ln(M+m \cos^2 \theta)} d\theta + C \right] e^{-\ln(M+m \cos^2 \theta)} \\ &= \left[\frac{2(M+m)g \cos \theta}{MR + mR \cos^2 \theta} \cdot (M + m \cos^2 \theta) d\theta + C \right] \frac{1}{M + m \cos^2 \theta} \\ &= \left[\frac{2(M+m)g \cos \theta}{R} d\theta + C \right] \frac{1}{M + m \cos^2 \theta} \\ &= \left[\frac{2(M+m)g \sin \theta}{R} + C \right] \frac{1}{M + m \cos^2 \theta} \\ &= \frac{2(M+m)g \sin \theta}{(M + m \cos^2 \theta)R} + \frac{C}{M + m \cos^2 \theta} \end{aligned}$$

综合以上可得:

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2(M+m)g \sin \theta}{(M + m \cos^2 \theta)R} + \frac{C}{M + m \cos^2 \theta} \quad (19)$$

初始条件: $t=0$ 时: $\dot{\theta}=0$; 将初始条件代入(19)式得: $C=0$

所以:

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2(M+m)g \sin \theta}{(M + m \cos^2 \theta)R} \quad (20)$$

当然通过系统机械能守恒定律联立(12)(13)(14)此式也可以得到此式。

二: 问题探究

问题1: 小球所受的弹力 N 的大小和 θ 关系式

由(20)式结合 $\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \dot{\theta}$ 可得:

$$\ddot{\theta} = \frac{2(M+m)(2M+3m-m\cos 2\theta)g\cos\theta}{R(2M+m+m\cos 2\theta)^2} \quad (21)$$

由(1)(10)(20)(21)式联立可得:

$$N = \frac{2Mmg(6M+5m+m\cos 2\theta)\sin\theta}{(2M+m+m\cos 2\theta)^2} \quad (22)$$

问题2: 小球速度大小 v 和 θ 关系式

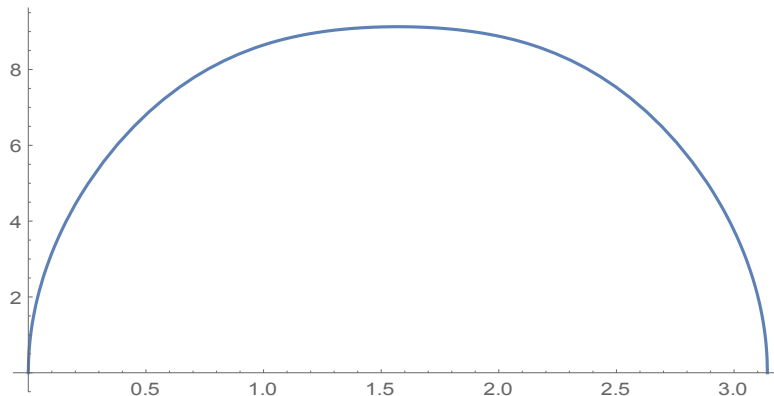
小球在任意位置速度的平方为: $v^2 = v_x^2 + v_y^2$ (23)

由(1)(10)(20)(23)式联立可得:

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{MR}{M+m}\dot{\theta}\sin\theta\right)^2 + (R\dot{\theta}\cos\theta)^2} \\ &= \sqrt{\frac{M^2R^2\sin^2\theta + (M+m)^2R^2\cos^2\theta}{(M+m)^2}}\dot{\theta} \\ &= \sqrt{\frac{M^2R^2\sin^2\theta + (M+m)^2R^2\cos^2\theta}{(M+m)^2} \cdot \frac{2(M+m)g\sin\theta}{(M+m\cos^2\theta)R}} \\ &= \sqrt{\frac{M^2\sin^2\theta + (M+m)^2\cos^2\theta}{(M+m)(M+m\cos^2\theta)}} \cdot 2gR\sin\theta \\ &= \sqrt{\frac{M^2\tan^2\theta + (m+M)^2}{M^2\tan^2\theta + (m+M)^2 + Mm\tan^2\theta}} \cdot 2gR\sin\theta \quad (24) \end{aligned}$$

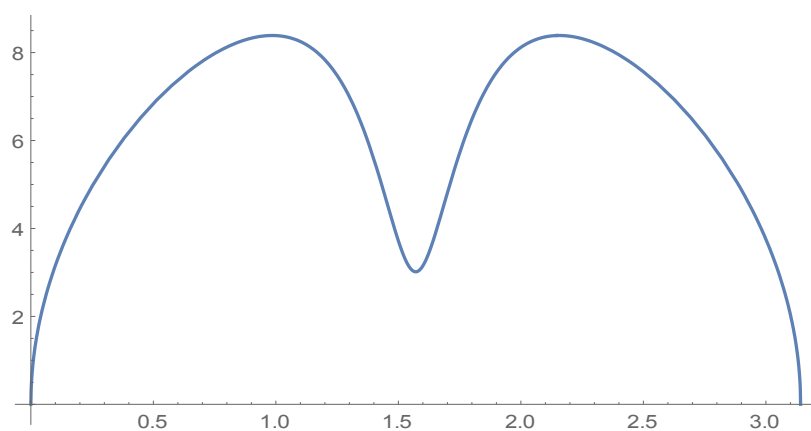
之前已经讨论过, 小球的~~最大速度~~出现的位置不一定在最低点, 其出现的位置和 m 和 M 的比值有关, 现在举例佐证如下。

1. 当 $\frac{m}{M} = 0.2, R = 5, g = 10$ 时, v 和 θ 的关系图:



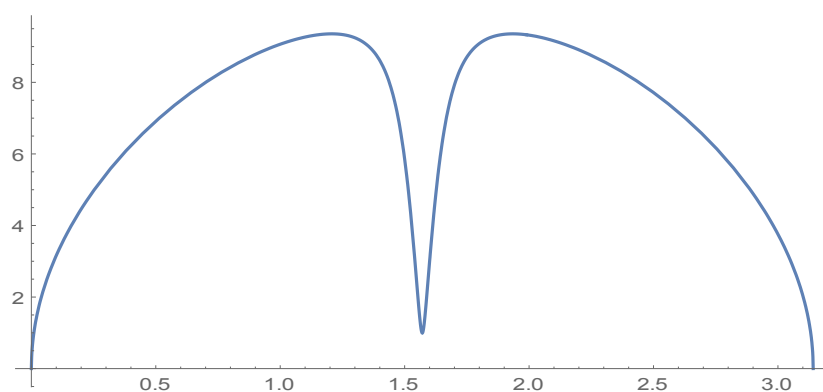
最大速度出现在最低点

2. 当 $\frac{m}{M}=10, R=5, g=10$ 时, v 和 θ 的关系图:



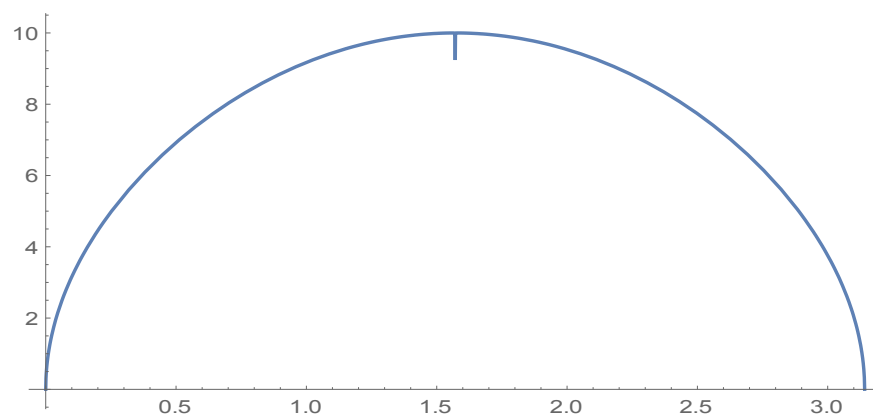
最大速度出现在最低点之前

3. 当 $\frac{m}{M}=100, R=5, g=10$ 时, v 和 θ 的关系图:



最大速度出现在最低点之前

4. 当 $\frac{m}{M}=10^8, R=5, g=10$ 时, v 和 θ 的关系图:



最大速度出现在最低点之前

问题3: 小球运动的轨迹情况

对小球由(12)式可得: $\frac{dx}{dt} = \frac{MR}{M+m} \dot{\theta} \sin \theta$ (25)

对小球由(13)式可得: $\frac{dy}{dt} = R \dot{\theta} \cos \theta$ (26)

对(25)(26)两式变形

$$x = \int \frac{MR}{M+m} \sin \theta d\theta + C_1 \quad (27)$$

$$y = \int R \cos \theta d\theta + C_2 \quad (28)$$

对(27)(28)两式积分得:

$$x = -\frac{MR}{M+m} \cos \theta + C_1 \quad (29)$$

$$y = R \sin \theta + C_2 \quad (30)$$

设小球释放点的坐标为 $(-\frac{MR}{M+m}, y_0)$ (质心为坐标原点, x 轴和 y 轴正方向如图3),

代入(29)(30)两式得:

$$C_1 = 0 \quad (31)$$

$$C_2 = y_0 \quad (32)$$

所以

$$x = -\frac{MR}{M+m} \cos \theta \quad (33)$$

$$y = R \sin \theta + y_0 \quad (34)$$

轨迹方程:

$$\frac{x^2}{\left(\frac{MR}{M+m}\right)^2} + \frac{(y-y_0)^2}{R^2} = 1 \quad (35)$$

由数学知识知 (35) 式为椭圆方程, 所以小球的运动轨迹为椭圆。

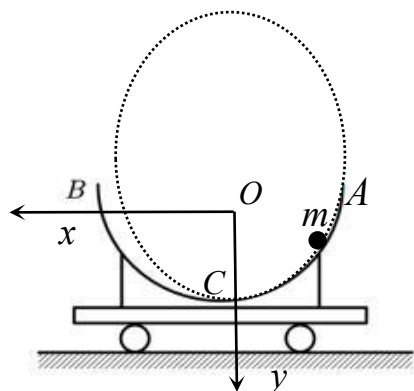


图 3

问题4：求椭圆 A 点和 C 的曲率半径

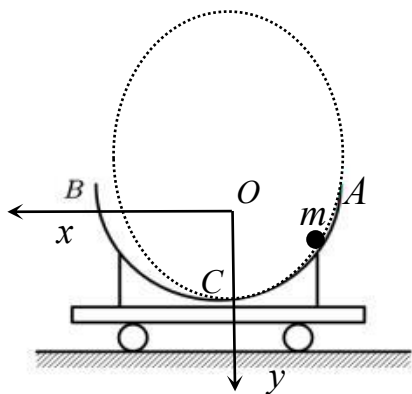


图 4

A 点曲率半径：

$$\rho_A = \frac{v_y^2}{a_x} \quad (36)$$

由(10)(13)知： $a_x = \frac{M}{M+m}(\dot{\theta}^2 R \cos \theta + R\ddot{\theta} \sin \theta)$ $v_y = R\dot{\theta} \cos \theta$

又有： $\theta = 0$

以上联立可得：

$$\rho_A = \frac{M+m}{M} R \quad (37)$$

C 点曲率半径：

$$\rho_C = \frac{v_x^2}{|a_y|} \quad (38)$$

由(9)(12)知： $a_y = R\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 R \sin \theta$ $v_x = \frac{MR}{M+m} \dot{\theta} \sin \theta$

又有： $\theta = \frac{\pi}{2}$

以上联立可得：

$$\rho_C = \left(\frac{M}{M+m} \right)^2 R \quad (39)$$

问题5：小球由 A 到 C 的运动时间以及小球在最低点做小角度摆动的周期

由(20)式可得：

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2(M+m)g \sin \theta}{(M+m \cos^2 \theta)R}} \quad (40)$$

变型可得：

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2(M+m)g \sin \theta}{(M+m \cos^2 \theta)R}}$$

$$t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{2(M+m)g \sin \theta}{(M+m \cos^2 \theta)R}} d\theta \quad (41)$$

讨论：若小球在最低点附近做小角度摆动，摆动周期是多少？

由(1)(9)(10) 联立可得：

$$mg - \frac{Mm}{M+m}(\dot{\theta}^2 R \sin \theta + R\ddot{\theta} \tan \theta \sin \theta) = mR(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) \quad (42)$$

由于是研究小球在最低点附近的小角度摆动，所以我们需要更换变量，将角度换为与竖直方向的夹角 α ，且 $\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$ ，上式变型为：

$$mg - \frac{Mm}{M+m}(\dot{\alpha}^2 R \cos \alpha - R\ddot{\alpha} \cot \alpha \cos \alpha) = mR(-\ddot{\alpha} \sin \alpha - \dot{\alpha}^2 \cos \alpha) \quad (43)$$

$$\Rightarrow mg - \frac{Mm}{M+m}(\dot{\alpha}^2 R \cos \alpha - R \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} \ddot{\alpha}) = -mR(\ddot{\alpha} \sin \alpha + \dot{\alpha}^2 \cos \alpha) \quad (40)$$

当 $\alpha \rightarrow 0$ 时, $\sin \alpha \approx \alpha, \cos \alpha \approx 1, \sin^2 \alpha \approx 0, \cos^2 \alpha \approx 1, \alpha^2 = 0, \dot{\alpha}^2 = 0$ ，代入上式近似处理得：

$$\ddot{\alpha} + \frac{(M+m)g}{MR} \alpha = 0 \quad (44)$$

所以小球的小角度振动周期为：

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{MR}{(M+m)g}} \quad (45)$$

当 $M \gg m$ 时，其周期为

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} \quad (46)$$

周期公式退化为单摆周期公式，合理，因为此时 M 几乎不动，相当于小球在固定的圆碗内做小角度振动，可以看做单摆。