专题 4　曲线运动 万有引力答案

1. 答案：C　两球从同一高度水平发出,水平方向做匀速直线运动,竖直方向做自由落体运动。

在竖直方向：由 $h=\frac{1}{2}gt^2$ 可得：$t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$　两球下落相同距离所用时间相等，A 选项错误；

由 $v^2=2gh$ 可得：$v=\sqrt{2gh}$　两球下落相同距离竖直方向的分速度相等，B 选项错误；

在水平方向：由 $S=v_0t$ 可得：$t=\frac{S}{v_0}$　可见 C 选项正确；

由 $h=\frac{1}{2}gt^2$　可知相同时间间隔内下降的距离，D 选项错误。

2. 答案：C　随着角速度的增大，小物体最先相对圆盘发生滑动的位置为最低点，根据牛顿第二定律，有：$\mu mg\cos\theta-mg\sin\theta=m\omega^2r$，解得：$\omega=\sqrt{\frac{\mu g\cos\theta-g\sin\theta}{r}}=1\text{rad/s}$。

【解法研究】

在最低点：静摩擦力沿斜面向上，静摩擦力与下滑力的合力提供向心力，随着角速度的增大静摩擦力增大，设小物体相对圆盘发生滑动的角速度的临界值为 ω_1，根据牛顿第二定律，有：

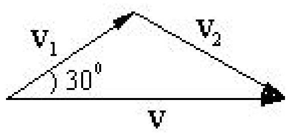
$\mu mg\cos\theta-mg\sin\theta=m\omega_1^2r$，解得：$\omega_1=\sqrt{\frac{\mu g\cos\theta-g\sin\theta}{r}}=1\text{rad/s}$。

在最高点：设角速度为 ω_0 时静摩擦力为零，下滑力提供向心力，有：$mg\sin\theta=m\omega_0^2r$，解得：

$\omega=\sqrt{\frac{g\sin\theta}{r}}=\sqrt{2}\text{rad/s}$；当 $\omega<\omega_0$ 时静摩擦力向上；当角速度由 ω_0 逐渐增大时静摩擦力向下并逐渐增大，当静摩擦力达到最大值时设角速度为 ω_2，根据牛顿第二定律，有：

$\mu mg\cos\theta+mg\sin\theta=m\omega_2^2r$，解得：$\omega_2=\sqrt{\frac{\mu g\cos\theta+g\sin\theta}{r}}=\sqrt{5}\text{rad/s}$；当角速度 $\omega>\omega_2$ 时小物体在最高点相对圆盘滑动。

3. 答案：B　设同步卫星的环绕速度为 v，卫星在转移轨道上飞经赤道上空时的速度为 v_1，发动机点火给卫星的附加速度为 v_2，如图，由余弦定理可得：$v_2=\sqrt{v^2+v_1^2-2vv_1\cos 30^0}=1.9\times10^3\text{m/s}$　方向东偏南

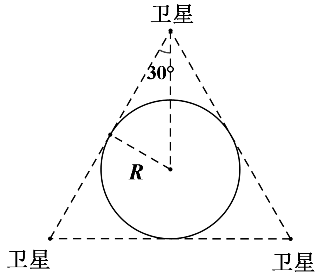


4. 答案：B　根据万有引力提供向心力，可得：$\frac{GMm}{r^2}=m(\frac{2\pi}{T})^2r$，解得中心天体的质量为：$M=\frac{4\pi^2r^3}{GT^2}$，于是有：$\frac{M_{恒}}{M_{日}}=(\frac{r_{51}}{r_{地}})^3\cdot(\frac{T_{地}}{T_{51}})^2=(\frac{1}{20})^3\times(\frac{365}{4})^2\approx1$。

5. 答案：B　卫星在轨道 2 上运行满足：$\frac{GMm}{r_2^2}=m\frac{v_2^2}{r_2}$，卫星在轨道 1 上运行过 P 点时有：$v_{1P}<v_2$，

$m\frac{v_{1P}^2}{r_2} < m\frac{v_2^2}{r_2} = \frac{GMm}{r_2^2}$ ，卫星过 P 点沿轨道 1 做向心运动。卫星原来在椭圆轨道 1 绕地球运行，在 P 加速后进入轨道 2 做匀速圆周运动，A 选项错误；根据 $ma = \frac{GMm}{r^2}$ 可得：$a = \frac{GM}{r^2}$，B 选项正确；卫星在轨道 1 的不同位置加速度不同，C 选项错误；卫星在轨道 2 的不同位置速度大小相同、方向不同，动量大小相同、方向不同，D 选项错误。

6. 答案：B　由 $\frac{GMm}{r^2} = m(\frac{2\pi}{T})^2 r$ 可得：$r = (\frac{GMT^2}{4\pi^2})^{\frac{1}{3}}$ 地球的自转周期 T 变小，则同步卫星的轨道半径变小。要实现三颗卫星覆盖全球的目的，则卫星轨道半径最小时，可做出右图。



由图中几何关系得卫星的轨道半径为：$r = \frac{R}{\sin 30^\circ} = 2R$

由开普勒第三定律可得：$\frac{r_1^3}{T_1^2} = \frac{r_2^3}{T_2^2}$ 代入数据得：$\frac{(6.6R)^3}{24^2} = \frac{(2R)^3}{T_2^2}$ 解得：$T_2 \approx 4\text{h}$

7. 答案：D　由 $ma = \frac{GMm}{(R+h)^2}$　可得：$a = \frac{GM}{(R+h)^2}$　于是有：$a_1 > a_2$

东方红二号卫星运行在地球同步轨道上，由 $a = (\frac{2\pi}{T})^2 r$ 可知 $a_2 > a_3$

8. 答案：C　若使飞船与空间站在同一轨道上运行，飞船加速后由于需要的向心力变大而提供的引力不变，飞船将做离心运动，不能实现对接，选项 A 错误；若使飞船与空间站在同一轨道上运行，空间站减速后由于需要的向心力变小而提供的引力不变，空间站将做向心运动，不能实现对接，选项 B 错误；要想实现对接，可使飞船在比空间试验室轨道半径小的轨道上加速，飞船将做离心运动，当飞船接近较高的空间试验室轨道，逐渐靠近空间站后再做微调，当两者速度接近时实现对接，选项 C 正确；若飞船在比空间试验室半径较小的轨道上减速，飞船将做向心运动，不能实现对接，选项 D 错误。

9. 答案：AD　由 $\frac{GMm}{r^2} = m(\frac{2\pi}{T})^2 r$　可得：$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM}}$　$T_A > T_B$　可见 A 选项正确；

由 $\frac{GMm}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$　可得：$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{2r}$　$E_{kA} < E_{kB}$　可见 B 选项错误；

根据行星运动第二定律，同一行星与地心连线在相等时间内扫过的面积相等，因此 C 选项错误；根据行星运动第三定律，D 选项正确。

10. 答案：CD　从 P 经 M 到 Q 的时间为 $\frac{T_0}{2}$，根据开普勒行星运动第二定律，从 P 经 M 到 Q 速率逐渐减小，可知从 P 到 M 的时间小于 $\frac{T_0}{4}$，选项 A 错误，C 选项正确；

在海王星绕太阳沿椭圆轨道运动中只有引力做功，机械能守恒，B 选项错误；从 M 到 Q 引力做负功，从 Q 到 N 引力做负功，D 选项正确。

【解法研究】

运动速度沿轨迹的切向，引力与速度夹角为钝角时引力做负功，引力与速度夹角为锐角时引力做正功。

11. 答案：BD　万有引力提供向心力，有：$G\dfrac{Mm}{R^2}=m\dfrac{v^2}{R}$　解得：$v=\sqrt{\dfrac{GM}{R}}$　可见发射速度与探测器的质量 m 无关，A 选项错误；

由 $F=G\dfrac{Mm}{R^2}$ 可得：$\dfrac{F_d}{F_h}=\dfrac{M_d}{M_h}\times\dfrac{R_h^2}{R_d^2}=\dfrac{10}{1}\times(\dfrac{1}{2})^2=\dfrac{5}{2}$　可见 B 选项正确；

根据题意由 $v=\sqrt{\dfrac{GM}{R}}$ 可得摆脱星球引力束缚的速度 $v^{/}=\sqrt{2}v=\sqrt{\dfrac{2GM}{R}}$

可得：$\dfrac{v_d^{/}}{v_h^{/}}=\sqrt{\dfrac{M_d}{M_h}\times\dfrac{R_h}{R_d}}=\sqrt{\dfrac{10}{1}\times\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{1}$　可见 C 选项错误；

探测器脱离星球的过程中引力做负功势能逐渐变大，D 选项正确。

12.（1）设货物相对地心的距离为 r_1，线速度为 v_1，则：$r_1=R+h_1$，$v_1=\omega r_1=\omega(R+h_1)$

货物对地心的动能为：$E_{\rm k}=\dfrac{1}{2}m_1v_1^2=\dfrac{1}{2}m_1\omega^2(R+h_1)^2$

（2）设地球质量为 M，人相对地心的距离为 r_2，相信加速度为 $a_{向}$，受地球的万有引力为 F，则：

$r_2=R+4R=5R$，$a_{向}=\omega^2r_2=5\omega^2R$，在地表：$g=\dfrac{{\rm G}M}{R^2}$，有 ${\rm G}M=gR^2$

电梯中人受到的引力：$F={\rm G}\dfrac{m_2M}{r_2^2}={\rm G}\dfrac{m_2M}{(5R)^2}=\dfrac{m_2gR^2}{25R^2}=\dfrac{m_2g}{25}$

设水平地板对人的支持力大小为 N，人对水平地板的压力大小为 $N^{/}$，由牛顿第二定律可得：

$F-N=m_2a_{向}$，解得：$N=F-m_2a_{向}=\dfrac{m_2g}{25}-m_25\omega^2R=20-8.5=11.5{\rm N}$。

由牛顿第三定律可知人对水平地板的压力：$N^{/}=N=11.5{\rm N}$

【解法研究】

对于地球同步卫星 ${\rm G}\dfrac{mM}{(R+h_1)^2}=m\omega^2(R+h_1)$，解得：$R+h_1=(\dfrac{GM}{\omega^2})^{\frac{1}{3}}=(\dfrac{gR^2}{\omega^2})^{\frac{1}{3}}$，

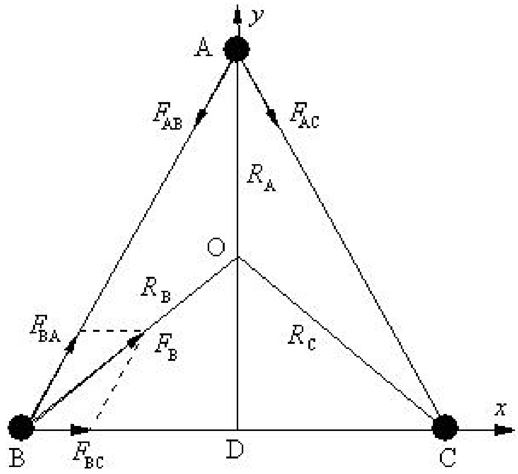
$h_1=(\dfrac{gR^2}{\omega^2})^{\frac{1}{3}}-R=3.59\times10^7{\rm m}\approx5.6R$，即地球同步卫星离地面的高度约为地球半径的 5.6 倍。

13. （1）根据万有引力定律，　有：$F_{\rm AB}=F_{\rm AC}={\rm G}\dfrac{2mm}{a^2}={\rm G}\dfrac{2m^2}{a^2}$

星体 B、C 对星体 A 的引力方向如图所示，星体 A 受到的合力为：$F_{\rm A}=2{\rm G}\dfrac{2m^2}{a^2}\cos30^{\circ}=2\sqrt{3}{\rm G}\dfrac{m^2}{a^2}$

（2）B 星体受 A、C 星体引力分别为：$F_{\rm BA}={\rm G}\dfrac{2mm}{r^2}={\rm G}\dfrac{2m^2}{a^2}$　　$F_{\rm BC}={\rm G}\dfrac{mm}{r^2}={\rm G}\dfrac{m^2}{a^2}$

建立如图直角坐标系，有：



$$F_{Bx}=F_{BA}\cos 60°+F_{BC}=2G\frac{m^2}{a^2}$$

$$F_{By}=F_{BA}\sin 60°=\sqrt{3}G\frac{m^2}{a^2}$$

可得 B 星体所受的合力：$F_B=\sqrt{F_{Bx}^2+F_{By}^2}=\sqrt{7}G\frac{m^2}{a^2}$

$$\tan\alpha=\frac{F_{By}}{F_{Bx}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

（3）如图所示，F_A、F_B、F_C 延长线交点为 O，OA、OB、OC 分别为三颗星做匀速圆周运动的圆心，由对称性知，OA 在 BC 的中垂线上，$R_C=R_B$。

对 A 星体：$\frac{2\sqrt{3}Gm^2}{a^2}=2m\omega^2R_A$　　解得：$R_A=\frac{\sqrt{3}Gm}{\omega^2a^2}$

对 C 星体：$\frac{\sqrt{7}Gm^2}{a^2}=m\omega^2R_C$　　解得：$R_C=\frac{\sqrt{7}Gm}{\omega^2a^2}$　　于是有：$R_A=\sqrt{\frac{3}{7}}R_C$，

在三角形 ODC 中，有：$(\frac{\sqrt{3}}{2}a-R_A)^2+(\frac{a}{2})^2=R_C^2$，解得 $R_C=\frac{\sqrt{7}}{4}a$

（4）三星体运动周期相同，对 C 星体，有：$G\frac{\sqrt{7}m^2}{a^2}=m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2R_C$　　解得：$T=\pi\sqrt{\frac{a^3}{Gm}}$

【解法研究】

对 B 星体，在矢量三角形中由余弦定理可得：

$$F_B=\sqrt{F_{BA}^2+F_{BC}^2-2F_{BA}F_{BC}\cos 120^o}=\frac{\sqrt{7}Gm^2}{a^2}$$

设 F_B 与 BC 边的夹角为 α，有：$\tan\alpha=\frac{F_{By}}{F_{Bx}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，在三角形 OBD 中，有：

$$OB=\frac{BD}{\cos\alpha}=\frac{a/2}{\cos\alpha}=\frac{a}{2}\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{a}{2}\sqrt{1+\tan^2\alpha}=\frac{a}{2}\sqrt{1+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}a$$

于是有：$R_C=R_B=OB=\frac{\sqrt{7}}{4}a$。