第 35 届全国中学生物理竞赛复赛理论考试试题解答

2018 年 9 月 22 日

一、（40 分）假设地球是一个质量分布各向同性的球体，地球自转及地球大气的影响可忽略。从地球上空离地面高度为 h 的空间站发射一个小物体，该物体相对于地球以某一初速度运动，初速度方向与其到地心的连线垂直。已知地球半径为 R，质量为 M，引力常量为 G。

（1）若该物体能绕地球做周期运动，其初速度的大小应满足什么条件？

（2）若该物体的初速度大小为 v_0，且能落到地面，求其落地时速度的大小和方向（即速度与其水平分量之间的夹角）、以及它从开始发射直至落地所需的时间。

已知：对于 $c<0$，$\Delta=b^2-4ac>0$，有

$$\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=\frac{\sqrt{a+bx+cx^2}}{c}-\frac{b}{2(-c)^{3/2}}\arcsin\frac{2cx+b}{\sqrt{\Delta}}+C$$

式中 C 为积分常数。

参考解答：

（1）**解法（一）**

假设小物体初始速度大小为 v_0，在地球引力场中其能量为

$$E=\frac{1}{2}mv_0^2-G\frac{Mm}{R+h}$$

式中 m 是小物体的质量。小物体相对于地球中心的角动量为

$$L=mv_0(R+h)$$

该物体能绕地球做周期运动，其能量应

$$E<0$$

由此条件以及 E 的表达式，得

$$v_0^2<\frac{2GM}{R+h}，\text{即 } v_0<\sqrt{\frac{2GM}{R+h}} \qquad ①$$

物体能绕地球做持续的周期运动，不能坠落到地球表面。当物体初始速度 v_0 降低到某个值 $v_{0\min}$ 时，物体运动的椭圆轨道将与地球表面相切，设这种情况下物体在与地球表面相切时的运动速度为 v，由角动量守恒定律

$$mv_{0\min}(R+h)=mvR，\text{即 } v=v_{0\min}\frac{R+h}{R} \qquad ②$$

由能量守恒定律有

$$\frac{1}{2}mv_{0\min}^2-G\frac{Mm}{R+h}=\frac{1}{2}mv^2-G\frac{Mm}{R} \qquad ③$$

将②式代入③式得

$$v_{0\min}=\sqrt{\frac{2GMR}{(R+h)(2R+h)}} \qquad ④$$

当物体初速度 v_0 低于 $v_{0\min}$ 时，其轨道都将与地球表面相交，因此会坠落到地面上。所以物体绕地球作椭圆或圆形轨道运动，但不会坠落到地球表面的条件是

$$\sqrt{\frac{2GMR}{(R+h)(2R+h)}}<v_0<\sqrt{\frac{2GM}{R+h}} \qquad ⑤$$

解法（二）

该物体能绕地球做周期运动，其运动轨迹应为椭圆（圆被视为椭圆的特殊情形），设其近或远地点之一与地心的距离和速度大小分别为r_1和v_1，另一近或远地点与地心的距离和速度大小分别为r_2和v_2。由角动量守恒和能量守恒有

$$r_1v_1=r_2v_2 \qquad ①$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2-G\frac{Mm}{r_1}=\frac{1}{2}mv_2^2-G\frac{Mm}{r_2} \qquad ②$$

式中m是小物体的质量。消去v_2得

$$\frac{1}{r_2^2}-\frac{2GM}{r_1^2v_1^2}\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1^2v_1^2}\left(v_1^2-\frac{2GM}{r_1}\right)=0$$

将r_1和v_1视为已知，上式是$\frac{1}{r_2}$满足的一个一元二次方程。$r_2=r_1$显然满足方程①②，因而$\frac{1}{r_1}$是一元二次方程的解。利用韦达定理，另一解是

$$\frac{1}{r_2}=\frac{1}{r_1}\left(\frac{2GM}{r_1v_1^2}-1\right) \qquad ③$$

显然，$r_2>R$，且有限，故有

$$0<\frac{1}{r_2}<\frac{1}{R} \qquad ④$$

由③④式得，当r_1给定时，v_1必须满足

$$\sqrt{\frac{2GMR}{r_1(r_1+R)}}<v_1<\sqrt{\frac{2GM}{r_1}}.$$

由题意知

$$r_1=R+h,\quad v_1=v_0$$

故有

$$\sqrt{\frac{2GMR}{(R+h)(2R+h)}}<v_0<\sqrt{\frac{2GM}{R+h}} \qquad ⑤$$

（2）如果

$$v_0<\sqrt{\frac{2GMR}{(R+h)(2R+h)}} \qquad ⑥$$

则物体会落到地球上。根据能量守恒，它落到地面时的速度大小v满足方程

$$\frac{1}{2}mv^2-G\frac{Mm}{R}=\frac{1}{2}mv_0^2-G\frac{Mm}{R+h} \qquad ⑦$$

由⑦式得

$$v=\sqrt{v_0^2+\frac{2GM}{R}-\frac{2GM}{R+h}}=\sqrt{v_0^2+\frac{2GMh}{R(R+h)}} \qquad ⑧$$

设物体落地点相对于地心的矢径与物体初始位置相对于地心的矢径之间的夹角为θ。根据角动量守恒，物体落到地面时的水平速度v_θ满足方程

$$Rv_\theta=(R+h)v_0$$

上式即

$$v_\theta=\frac{R+h}{R}v_0 \qquad ⑨$$

物体的速度方向与水平面的夹角是

$$\alpha=\arccos\frac{v_\theta}{v}=\arccos\frac{(R+h)v_0}{\sqrt{R^2v_0^2+\dfrac{2GMRh}{R+h}}} \tag{10}$$

将物体的运动用极坐标$\theta(t)$、$r(t)$描写，角动量守恒和能量守恒可分别表为

$$r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=(R+h)v_0 \tag{11}$$

和

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2+\frac{1}{2}r^2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2-G\frac{Mm}{r}=\frac{1}{2}mv_0^2-G\frac{Mm}{R+h} \tag{12}$$

消去$\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$得

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=-\sqrt{-\frac{(R+h)^2v_0^2}{r^2}+\frac{2GM}{r}+v_0^2-\frac{2GM}{R+h}} \tag{13}$$

物体从开始发射直至落地需要的时间为

$$\begin{aligned}t&=\int_R^{R+h}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{-\dfrac{(R+h)^2v_0^2}{r^2}+\dfrac{2GM}{r}+v_0^2-\dfrac{2GM}{R+h}}}\\&=\int_R^{R+h}\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{\left(v_0^2-\dfrac{2GM}{R+h}\right)r^2+2GMr-(R+h)^2v_0^2}}\end{aligned} \tag{14}$$

取参量$a=-(R+h)^2v_0^2$，$b=2GM$，$c=v_0^2-\dfrac{2GM}{R+h}<0$，有

$$\begin{aligned}\Delta&=b^2-4ac\\&=(2GM)^2+4(R+h)^2v_0^2\left(v_0^2-\frac{2GM}{R+h}\right)\\&=4(R+h)^2\left(v_0^2-\frac{2GM}{R+h}\right)^2>0\end{aligned}$$

利用题给积分公式，完成积分得

$$\begin{aligned}t=&\frac{R+h}{2GM-v_0^2(R+h)}\sqrt{\frac{2GMRh}{R+h}-v_0^2(2R+h)h}\\&+GM\left[\frac{R+h}{2GM-v_0^2(R+h)}\right]^{\frac{3}{2}}\left[\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{v_0^2R(R+h)-GM(R-h)}{GM(R+h)-v_0^2(R+h)^2}\right]\end{aligned} \tag{15}$$

当初始速度大小为临界值$v_0=\sqrt{\dfrac{2GMR}{(R+h)(2R+h)}}$时，下落时间为

$$t=\frac{\pi}{\sqrt{GM}}\left(\frac{2R+h}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

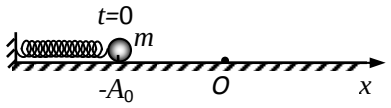
评分标准：本题 40 分。

第（1）问 15 分，解法（一）①②③④⑤式各 3 分；

解法（二）①式 6 分，②式 1 分，③式 2 分，④⑤式各 3 分。

第（2）问 25 分，⑥⑩式各 3 分，⑦⑨⑪⑫⑬式各 2 分，⑧式 1 分，⑭⑮各 4 分。

二、（40 分）如图，一劲度系数为 k 的轻弹簧左端固定，右端连一质量为 m 的小球；弹簧水平，它处于自然状态时小球位于坐标原点 O；小球可在水平地面上滑动，它与地面之间的动摩擦因数为 μ。初始时小球速度为零，将此时弹簧相对于其原长的伸长记为 $-A_0$（$A_0>0$，但 A_0 并不是已知量）。重力加速度大小为 g，假设最大静摩擦力等于滑动摩擦力。



（1）如果小球至多只能向右运动，求小球最终静止的位置，和此种情形下 A_0 应满足的条件；

（2）如果小球完成第一次向右运动至原点右边后，至多只能向左运动，求小球最终静止的位置，和此种情形下 A_0 应满足的条件；

（3）如果小球只能完成 n 次往返运动（向右经过原点，然后向左经过原点，算 1 次往返），求小球最终静止的位置，和此种情形下 A_0 应满足的条件；

（4）如果小球只能完成 n 次往返运动，求小球从开始运动直至最终静止的过程中运动的总路程。

参考解答：

（1）若

$$kA_0 \le \mu mg \qquad \text{或} \qquad 0 < A_0 \le \frac{\mu mg}{k} \tag{①}$$

小球静止于其初始位置

$$x = -A_0 < 0 \tag{②}$$

若

$$A_0 > \frac{\mu mg}{k} \qquad \text{或} \qquad kA_0 > \mu mg$$

小球能向右运动。设小球第一次向右运动到速度为零时弹簧的伸长量为 x（其符号暂未确定），根据功能原理有

$$\frac{1}{2}kA_0^2 - \frac{1}{2}kx^2 = \mu mg(A_0 + x)$$

由此得

$$x = A_0 - \frac{2\mu mg}{k} \tag{③}$$

当 $x \le 0$，即

$$\frac{\mu mg}{k} < A_0 \le \frac{2\mu mg}{k} \tag{④}$$

弹簧处于压缩或自由状态，且小球所受向右的弹力

$$F = k\left|B_1\right| = 2\mu mg - kA_0 \le \mu mg$$

故小球最终静止于原点左边或原点

$$x = A_0 - \frac{2\mu mg}{k} \le 0 \tag{⑤}$$

④式中取等号时，⑤式也取等号。

当 $x > 0$，即

$$A_0 > \frac{2\mu mg}{k}$$

弹簧处于伸长状态，小球所受向左的弹力

$$kx = kA_0 - 2\mu mg$$

若 $kx \le \mu mg$，即

$$\frac{2\mu mg}{k} < A_0 \le \frac{3\mu mg}{k} \tag{⑥}$$

小球最终静止于原点右边

$$x = B_1 = A_0 - \frac{2\mu mg}{k} > 0 \tag{⑦}$$

（2）**解法（一）**

设在小球完成第一次向右运动后的瞬间，记弹簧的伸长为B_1。按题意，此后小球至多只能向左运动。若

$$B_1 > \frac{\mu mg}{k} \qquad 或 \qquad A_0 > \frac{3\mu mg}{k}$$

小球能向左运动。设小球第一次向左运动到速度为零时弹簧的伸长量为x（其符号暂未确定），根据功能原理有

$$\frac{1}{2}kB_1^2 - \frac{1}{2}kx^2 = \mu mg(B_1 - x)$$

由此得

$$x = \frac{2\mu mg}{k} - B_1 = \frac{4\mu mg}{k} - A_0$$

当$x \geq 0$，即

$$\frac{3\mu mg}{k} < A_0 \leq \frac{4\mu mg}{k} \qquad ⑧$$

弹簧处于伸长或自由状态，小球所受向左的弹力

$$kx = 4\mu mg - kA_0 \leq \mu mg$$

小球最终静止于原点右边或原点

$$x = \frac{4\mu mg}{k} - A_0 \geq 0 \qquad ⑨$$

⑨式中取等号时，⑩式也取等号。

当$x < 0$，即

$$A_0 > \frac{4\mu mg}{k}$$

弹簧处于压缩状态，且小球所受向右的弹力

$$k|x| = kA_0 - 4\mu mg$$

如果$k|x| \leq \mu mg$，即当

$$\frac{4\mu mg}{k} < A_0 \leq \frac{5\mu mg}{k} \qquad ⑩$$

小球最终静止于

$$x \equiv -A_1 = \frac{4\mu mg}{k} - A_0 < 0 \qquad ⑪$$

解法（二）

设在小球完成第一次向右运动后的瞬间，记弹簧的伸长为B_1。按题意，此后小球至多只能向左运动。将将B_1视为A_0，利用（1）的结果①②④⑤以及B_1的表达式⑦可知，当

$$\frac{3\mu mg}{k} < A_0 \leq \frac{4\mu mg}{k} \qquad ⑧$$

时，小球最终静止于

$$x = \frac{4\mu mg}{k} - A_0 \geq 0 \qquad ⑨$$

⑧式取等号时，⑨式也取等号。当

$$\frac{4\mu mg}{k} < A_0 \leq \frac{5\mu mg}{k} \qquad ⑩$$

时，小球最终静止于

$$x \equiv -A_1 = \frac{4\mu mg}{k} - A_0 < 0 \qquad ⑪$$

（3）设小球第 1 次向右运动至速度为零的位置为B_1（$B_1 > 0$），第 1 次返回至速度为零的位

置为$-A_1$（$A_1>0$）；…；第n次向右运动至速度为零的位置为B_n（$B_n>0$），第n次返回至速度为零的位置为$-A_n$（$A_n>0$）。由⑦⑪式并类推有

$$A_0-B_1=\frac{2\mu mg}{k},$$

$$B_1-A_1=\frac{2\mu mg}{k},$$

$$A_1-B_2=\frac{2\mu mg}{k},$$

$$\cdots,$$

$$A_{n-1}-B_n=\frac{2\mu mg}{k},$$

$$B_n-A_n=\frac{2\mu mg}{k}.$$

由此得

$$A_n=A_0-\frac{4n\mu mg}{k} \qquad ⑫$$

将A_n视为初始压缩量A_0，利用（1）（2）的结果①②④⑤⑥⑦⑧⑨⑩⑪式以及A_n的表达式⑫可知，小球最终静止于

$$x=\frac{4n\mu mg}{k}-A_0<0,\ \text{当}\frac{4n\mu mg}{k}<A_0\le\frac{(4n+1)\mu mg}{k}, \qquad ⑬$$

$$x=A_0-\frac{2(2n+1)\mu mg}{k}\le 0,\ \text{当}\frac{(4n+1)\mu mg}{k}<A_0\le\frac{2(2n+1)\mu mg}{k}, \qquad ⑭$$

$$x=A_0-\frac{2(2n+1)\mu mg}{k}>0,\ \text{当}\frac{2(2n+1)\mu mg}{k}<A_0\le\frac{(4n+3)\mu mg}{k}, \qquad ⑮$$

$$x=\frac{4(n+1)\mu mg}{k}-A_0\ge 0,\ \text{当}\frac{(4n+3)\mu mg}{k}<A_0\le\frac{4(n+1)\mu mg}{k} \qquad ⑯$$

⑭⑯式中当后式取等号时前式也取等号。

（4）设小球在由开始运动直至静止整个过程中通过的总路程为s，设由功能原理有

$$\frac{1}{2}kA_0^2-\frac{1}{2}kx^2=\mu mgs$$

式中，x的值如⑬⑭⑮⑯式所示。由此得

$$s=\frac{k}{2\mu mg}(A_0^2-x^2) \qquad ⑰$$

即

$$s=4n\left(A_0-\frac{2n\mu mg}{k}\right),\ \text{当}\frac{4n\mu mg}{k}<A_0\le\frac{(4n+1)\mu mg}{k}, \qquad ⑱$$

$$s=2(2n+1)\left(A_0-\frac{(2n+1)\mu mg}{k}\right),\ \text{当}\frac{(4n+1)\mu mg}{k}<A_0\le\frac{(4n+3)\mu mg}{k}, \qquad ⑲$$

$$s=4(n+1)(A_0-\frac{2(n+1)\mu mg}{k}),\ \text{当}\frac{(4n+3)\mu mg}{k}<A_0\le\frac{4(n+1)\mu mg}{k} \qquad ⑳$$

评分标准：本题 40 分。

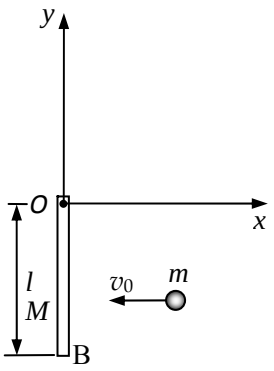
第（1）问 12 分，①②式各 1 分，③④⑤⑥⑦式各 2 分；

第（2）问 8 分，⑧⑨⑩⑪式各 2 分；

第（3）问 11 分，⑫式 3 分，⑬⑭⑮⑯式各 2 分；

第（4）问 9 分，⑰式 3 分，⑱⑲⑳式各 2 分。

三、（40 分）如图，一质量为 M 、长为 l 的匀质细杆 AB 自由悬挂于通过坐标原点 O 点的水平光滑转轴上（此时，杆的上端 A 未在图中标出，可视为与 O 点重合），杆可绕通过 O 点的轴在竖直平面（即 $x-y$ 平面， x 轴正方向水平向右）内转动； O 点相对于地面足够高，初始时杆自然下垂；一质量为 m 的弹丸以大小为 v_0 的水平速度撞击杆的打击中心（打击过程中轴对杆的水平作用力为零）并很快嵌入杆中。在杆转半圈至竖直状态时立即撤除转轴。重力加速度大小为 g 。



（1）求杆的打击中心到 O 点的距离；

（2）求撤除转轴前，杆被撞击后转过 θ （ $0\le\theta<\pi$ ）角时转轴对杆的作用力；

（3）以撤除转轴的瞬间为计时零点，求撤除转轴后直至杆着地前，杆端 B 的位置随时间 t 变化的表达式 $x_{\mathrm{B}}(t)$ 和 $y_{\mathrm{B}}(t)$ ；

（4）求在撤除转轴后，杆再转半圈时 O 、 B 两点的高度差。

参考解答：

（1）设打击中心位置距转轴距离为 L ，水平外力 F 作用于打击中心后杆的角加速度为 β 。由刚体定轴转动的动力学方程有

$$FL=\frac{1}{3}Ml^2\beta \qquad ①$$

式中 $\frac{1}{3}Ml^2$ 是杆绕过其端点 A （即 O 点）的水平轴转动的转动惯量。由①式得

$$\beta=\frac{3FL}{Ml^2}$$

在弹丸撞击杆后的瞬间，杆的质心加速度的水平分量为

$$a_x=\frac{l}{2}\beta=\frac{3FL}{2Ml} \qquad ②$$

设轴对杆的作用力的水平分量为 F_x ，由质心运动定理有

$$F-F_x=Ma_x \qquad ③$$

将②式代入③式，水平外力打击到杆的打击中心处，轴对杆的作用力的水平分量应为零

$$F_x=\left(1-\frac{3L}{2l}\right)F=0$$

由此得，杆的打击中心到 O 点的距离为

$$L=\frac{2}{3}l \qquad ④$$

（2）弹丸与杆的碰撞过程满足动量守恒

$$mv_0=(M+m)v$$

解得

$$v=\frac{mv_0}{M+m} \qquad ⑤$$

设碰撞后带弹丸的杆的质心位置与 O 点的距离为 L_{c} ，则

$$(M+m)L_{\mathrm{c}}=\frac{1}{2}Ml+mL$$

即

$$L_{\mathrm{c}}=\frac{4m+3M}{6(M+m)}l \qquad ⑥$$

在碰撞后的瞬间，杆转动的角速度为

$$\omega_0 = \frac{v}{L_c} = \frac{6mv_0}{(4m+3M)l} \qquad ⑦$$

带弹丸的杆的转动惯量为

$$I = \frac{1}{3}Ml^2 + m\left(\frac{2}{3}l\right)^2 = \frac{1}{9}(3M+4m)l^2$$

在杆从垂直位置转过 θ（$0 \le \theta < \pi$）角的过程中，系统的机械能守恒，有

$$\frac{1}{2}I\omega_0^2 = \frac{1}{2}I\omega^2 + (M+m)gL_c(1-\cos\theta) \qquad ⑧$$

解得

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{2(M+m)gL_c(1-\cos\theta)}{I}$$

将⑤⑥⑦式以及转动惯量 I 的表达式代入上式得

$$\omega = \sqrt{\frac{36m^2v_0^2}{(4m+3M)^2l^2} - \frac{3g}{l}(1-\cos\theta)} \qquad ⑨$$

另一方面，杆由初始位置转过 θ 角时，由刚体定轴转动的动力学方程有

$$(M+m)gL_c\sin\theta = I\beta'$$

式中 β' 是重力矩产生的角加速度。由此得

$$\beta' = \frac{(M+m)gL_c\sin\theta}{I} = \frac{3g}{2l}\sin\theta \qquad ⑩$$

此时质心加速度的 x 分量 a_{cx} 和 y 分量 a_{cy} 分别为

$$a_{cx} = L_c\beta'\cos\theta + L_c\omega^2\sin\theta$$

$$a_{cy} = L_c\omega^2\cos\theta - L_c\beta'\sin\theta$$

其中角速度 ω 由⑨式给出。设撤除转轴前，杆被撞击后转过 θ 角时转轴对杆的作用力的 x 分量和 y 分量分别为 N_x 和 N_y，由质心运动定理有

$$N_x = (M+m)a_{cx} = (M+m)L_c(\beta'\cos\theta + \omega^2\sin\theta) \qquad ⑪$$

$$N_y = (M+m)(g+a_{cy}) = (M+m)[g + L_c(\omega^2\cos\theta - \beta'\sin\theta)] \qquad ⑫$$

将⑥⑨⑩式代入⑪⑫式得

$$N_x = \frac{(4m+3M)g}{4}(3\sin\theta\cos\theta - 2\sin\theta) + \frac{6m^2v_0^2}{(4m+3M)l}\sin\theta \qquad ⑬$$

$$N_y = (M+m)g + \frac{6m^2v_0^2}{(4m+3M)l}\cos\theta + \frac{(4m+3M)g}{4}\left(3\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1\right) \qquad ⑭$$

（3）当杆转到竖直位置即 $\theta = \pi$ 时，由⑨式得，角速度 ω' 为

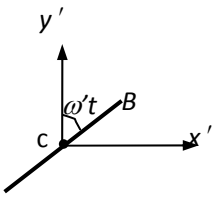
$$\omega' = \sqrt{\frac{36m^2v_0^2}{(4m+3M)^2l^2} - \frac{6g}{l}} \qquad ⑮$$

撤除转轴后，带弹丸的杆的质心做平抛运动，同时杆绕其质心以角速度 ω' 在竖直平面内做顺时针转动。以撤除转轴的瞬间为计时零点，在 t 时刻的质心坐标为

$$x_c = v_c t = (L_c\omega')t$$

$$y_c = L_c - \frac{1}{2}gt^2$$

建立如图所示的质心坐标系，由于杆同时绕质心以角速度 ω' 在竖直平面内顺时针转动，在 t 时刻杆的 B 端相对于其质心的坐标为



$$x'_{\mathrm{B}}=(l-L_{\mathrm{c}})\sin\omega' t \qquad y'_{\mathrm{B}}=(l-L_{\mathrm{c}})\cos\omega' t$$

在地面参考系中，t 时刻杆的 B 端的坐标为

$$x_{\mathrm{B}}(t)=x_{\mathrm{c}}+x'_{\mathrm{B}}=\left(L_{\mathrm{c}}\omega'\right)t+(l-L_{\mathrm{c}})\sin\omega' t \qquad ⑯$$

$$y_{\mathrm{B}}(t)=y_{\mathrm{c}}+y'_{\mathrm{B}}=L_{\mathrm{c}}-\frac{1}{2}gt^2+(l-L_{\mathrm{c}})\cos\omega' t \qquad ⑰$$

（4）撤除转轴后，经过时间 t_1，杆再转了半圈，即

$$\omega' t_1=\pi$$

设此时 O、B 两点的高度差为 h，即此时杆 B 端的 y 坐标的绝对值。由⑰式得

$$h=\left|y_{\mathrm{B}}(t_1)\right|=\left|2L_{\mathrm{c}}-l-\frac{1}{2}g\left(\frac{\pi}{\omega'}\right)^2\right| \qquad ⑱$$

将⑥⑮式代入⑱式得

$$h=\left|\frac{\pi^2 g}{2}\left[\frac{36m^2v_0^2}{(4m+3M)^2l^2}-\frac{6g}{l}\right]^{-1}-\frac{ml}{3(M+m)}\right| \qquad ⑲$$

或

$$h=\left|\frac{\pi^2 g(4m+3M)^2l^2}{12\left[6m^2v_0^2-g(4m+3M)^2l\right]}-\frac{ml}{3(M+m)}\right| \qquad ⑳$$

评分标准：本题 40 分。

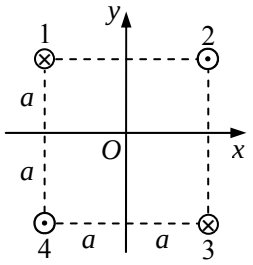
第（1）问 5 分，①②③式各 1 分，④式 2 分；

第（2）问 23 分，⑤式 3 分，⑥⑦式各 2 分，⑧式 3 分，⑨式 2 分，⑩⑪⑫式各 3 分，⑬⑭式各 1 分；

第（3）问 7 分，⑮式 1 分，⑯⑰式各 3 分；

第（4）问 5 分，⑱式 3 分，⑲或⑳式 2 分。

四、（40 分）Ioffe-Pritchard 磁阱可用来束缚原子的运动，其主要部分如图所示。四根均通有恒定电流 I 的长直导线 1、2、3、4 都垂直于 x-y 平面，它们与 x-y 平面的交点是边长为 $2a$ 、中心在原点 O 的正方形的顶点，导线 1、2 所在平面与 x 轴平行，各导线中电流方向已在图中标出。整个装置置于匀强磁场 $\boldsymbol{B}_0 = B_0\boldsymbol{k}$ （ $\boldsymbol{k}$ 为 z 轴正方向单位矢量）中。已知真空磁导率为 μ_0 。



（1）求电流在通电导线外产生的总磁场的空间分布；

（2）电流在原点附近产生的总磁场的近似表达式，保留至线性项；

（3）将某原子放入磁阱中，该原子在磁阱中所受的磁作用束缚势能正比于其所在位置的总磁感应强度 $\boldsymbol{B}_{\text{tot}}$ 的大小，即磁作用束缚势能 $V = \mu|\boldsymbol{B}_{\text{tot}}|$， μ 为正的常量。求该原子在原点 O 附近所受磁场的作用力；

（4）在磁阱中运动的原子最容易从 x-y 平面上什么位置逸出？求刚好能够逸出磁阱的原子的动能。

参考解答：

（1）四根通有直流电流 I 的导线在 x-y 平面内的空间坐标依次是

$$(-a,a),\ (a,a),\ (a,-a),\ (-a,-a)$$

取 x 轴和 y 轴方向单位矢量为 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$，考虑通电导线外任一点 (x,y) 。导线 1、2、3、4 上的电流在点 (x,y) 产生的磁场 $\boldsymbol{B}_1$ 、 $\boldsymbol{B}_2$ 、 $\boldsymbol{B}_3$ 、 $\boldsymbol{B}_4$ 为

$$\boldsymbol{B}_1 = \frac{\mu_0(-I)}{2\pi}\frac{-(y-a)\boldsymbol{i}+(x+a)\boldsymbol{j}}{(x+a)^2+(y-a)^2} \qquad ①$$

$$\boldsymbol{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{-(y-a)\boldsymbol{i}+(x-a)\boldsymbol{j}}{(x-a)^2+(y-a)^2} \qquad ②$$

$$\boldsymbol{B}_3 = \frac{\mu_0(-I)}{2\pi}\frac{-(y+a)\boldsymbol{i}+(x-a)\boldsymbol{j}}{(x-a)^2+(y+a)^2} \qquad ③$$

$$\boldsymbol{B}_4 = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{-(y+a)\boldsymbol{i}+(x+a)\boldsymbol{j}}{(x+a)^2+(y+a)^2} \qquad ④$$

导线电流在通电导线外产生的总磁场的空间分布为

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2+\boldsymbol{B}_3+\boldsymbol{B}_4$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left\{\left[\frac{y-a}{(x+a)^2+(y-a)^2}-\frac{y-a}{(x-a)^2+(y-a)^2}+\frac{y+a}{(x-a)^2+(y+a)^2}-\frac{y+a}{(x+a)^2+(y+a)^2}\right]\boldsymbol{i}\right. \qquad ⑤$$

$$\left.+\left[-\frac{x+a}{(x+a)^2+(y-a)^2}+\frac{x-a}{(x-a)^2+(y-a)^2}-\frac{x-a}{(x-a)^2+(y+a)^2}+\frac{x+a}{(x+a)^2+(y+a)^2}\right]\boldsymbol{j}\right\}$$

（2）对于原点 O 附近的任一点 (x,y)，有

$$|x| << a,\ |y| << a$$

保留至 $\frac{x}{a}$、$\frac{y}{a}$ 的一次项， $\boldsymbol{B}_1$ 、 $\boldsymbol{B}_2$ 、 $\boldsymbol{B}_3$ 、 $\boldsymbol{B}_4$ 可近似为

$$\boldsymbol{B}_1 \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2}[-(a-x)\boldsymbol{i}-(a+y)\boldsymbol{j}] \qquad ⑥$$

$$\boldsymbol{B}_2 \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2}[(a+x)\boldsymbol{i}-(a+y)\boldsymbol{j}] \qquad ⑦$$

$$\boldsymbol{B}_3 \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2}[(a+x)\boldsymbol{i}+(a-y)\boldsymbol{j}] \qquad ⑧$$

$$\boldsymbol{B}_4 \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2}[-(a-x)\boldsymbol{i}+(a-y)\boldsymbol{j}] \qquad ⑨$$

电流在原点附近任一点 (x,y) 产生的总磁场可近似为

$$\boldsymbol{B}\approx\frac{\mu_0 I}{\pi a^2}(x\boldsymbol{i}-y\boldsymbol{j}) \qquad ⑩$$

（3）在原点附近的总磁感应强度为

$$\boldsymbol{B}_{\text{tot}}\approx\frac{\mu_0 I}{\pi a^2}(x\boldsymbol{i}-y\boldsymbol{j})+B_0\boldsymbol{k} \qquad ⑪$$

在原点 O 附近总磁感应强度的大小为

$$|\boldsymbol{B}_{\text{tot}}|=\sqrt{B_0^2+\left(\frac{\mu_0 I}{\pi a^2}\right)^2(x^2+y^2)}\approx B_0+\frac{1}{2B_0}\left(\frac{\mu_0 I}{\pi a^2}\right)^2(x^2+y^2) \qquad ⑫$$

原子在原点 O 附近所受的磁作用的束缚势能为

$$V=\mu|\boldsymbol{B}_{\text{tot}}|\approx\mu B_0+\frac{1}{2}\frac{\mu}{B_0}\left(\frac{\mu_0 I}{\pi a^2}\right)^2(x^2+y^2) \qquad ⑬$$

除开常数项外，这是二维（ x-y 平面）简谐振子势能，因此该原子在原点 O 附近所受磁场的作用力应是 x-y 平面上沿径向指向原点 O 的力

$$\boldsymbol{F}=-\frac{\mu}{B_0}\left(\frac{\mu_0 I}{\pi a^2}\right)^2(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}) \qquad ⑭$$

（4）原子在磁阱中所受的磁作用的束缚势能为

$$V=\mu|\boldsymbol{B}_{\text{tot}}|=\mu\sqrt{B_0^2+|\boldsymbol{B}|^2} \qquad ⑮$$

式中 $\boldsymbol{B}$ 如⑤式所示。

由系统的电流分布可以断定，在 x-y 平面内磁感线最稀疏的位置应该在 x 轴或 y 轴上，或者说束缚势垒高度最小的位置应该在 x 轴或 y 轴上，这也是原子在 x-y 平面内最容易逸出的方向。由⑤式，当 $y=0$ 时，在 x 轴上束缚势能为

$$V(x,y=0)=\mu\sqrt{B_0^2+\left(\frac{\mu_0 Ia}{\pi}\right)^2\left[\frac{1}{(x-a)^2+a^2}-\frac{1}{(x+a)^2+a^2}\right]^2} \qquad ⑯$$

由极值条件 $\dfrac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}x}=0$ 得

$$x(3x^4-4a^4)=0$$

解为

$$x_1=\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{4}}a,\quad x_2=-\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{4}}a,\quad x_3=0 \qquad ⑰$$

其中，极值点 $x_3=0$，即原点位置对应于势能最小值位置；而极值点 x_1 和 x_2 对应于 x 轴上势能极大值位置。在 y 轴方向也有类似结果。

因此，运动原子在 x-y 平面内最容易沿 x 轴或 y 轴方向，在下述空间位置

$$（\pm\left(\frac{4}{3}\right)^{1/4}a,0）、（0,\pm\left(\frac{4}{3}\right)^{1/4}a） \qquad ⑱$$

从磁阱中逸出。

由⑯式知，在 $(x=\pm\left(\dfrac{4}{3}\right)^{1/4}a,0)$ 处，原子的束缚势能为

$$V(x=\pm\left(\frac{4}{3}\right)^{1/4}a,y=0)=\mu\sqrt{B_0^2+\frac{3\sqrt{3}}{8}\left(\frac{\mu_0 I}{\pi a}\right)^2} \qquad ⑲$$

类似的，在 $(x=0,y=\pm\left(\dfrac{4}{3}\right)^{1/4}a)$ 处，原子的束缚势能也为⑲式所示。由⑤式，在磁阱中心 $(x=0,y=0)$ 原子所受磁作用的束缚势能为

$$V_O=\mu B_0$$

所以刚好能够逸出磁阱的原子的动能为

$$E_{\mathrm{k}} = V\left(x = \pm\left(\frac{4}{3}\right)^{1/4} a, y = 0\right) - V_O$$

$$= V\left(x = 0, y = \pm\left(\frac{4}{3}\right)^{1/4} a\right) - V_O \qquad ⑳$$

$$= \mu B_0 \left[\sqrt{1 + \frac{3\sqrt{3}}{8}\left(\frac{\mu_0 I}{\pi a B_0}\right)^2} - 1\right]$$

评分标准：本题 40 分。

第（1）问 10 分，①②③④⑤式各 2 分；

第（2）问 10 分，⑥⑦⑧⑨⑩式各 2 分；

第（3）问 8 分，⑪式 3 分，⑫式 1 分，⑬⑭式各 2 分；

第（4）问 12 分，⑮⑯⑰⑱⑲⑳式各 2 分。

五、（40 分）塞曼发现了钠光 D 线在磁场中分裂成三条，洛仑兹根据经典电磁理论对此做出了解释，他们因此荣获 1902 年诺贝尔物理学奖。假定原子中的价电子（质量为 m，电荷量为 $-e$，$e>0$）受到一指向原子中心的等效线性回复力 $-m\omega_0^2\boldsymbol{r}$（$\boldsymbol{r}$ 为价电子相对于原子中心的位矢）作用，做固有圆频率为 ω_0 的简谐振动，发出圆频率为 ω_0 的光。现将该原子置于沿 z 轴正方向的匀强磁场中，磁感应强度大小为 B（为方便起见，将 B 参数化为 $B=\dfrac{2m}{e}\omega_{\mathrm{L}}$）。

（1）选一绕磁场方向匀角速转动的参考系，使价电子在该参考系中做简谐振动，导出该电子运动的动力学方程在直角坐标系中的分量形式并求出其解；

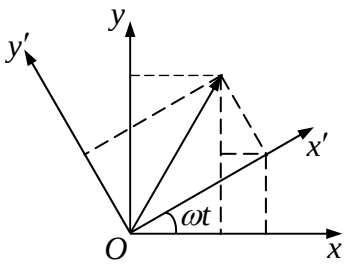
（2）将（1）问中解在直角坐标系中的分量形式变换至实验室参考系的直角坐标系；

（3）证明在实验室参考系中原子发出的圆频率为 ω_0 的谱线在磁场中一分为三；并对弱磁场（即 $\omega_{\mathrm{L}}<<\omega_0$）情形，求出三条谱线的频率间隔。

已知：在转动角速度为 $\boldsymbol{\omega}$ 的转动参考系中，运动电子受到的惯性力除惯性离心力外还受到科里奥利力作用，当电子相对于转动参考系运动速度为 $\boldsymbol{v}'$ 时，作用于电子的科里奥利力为 $\boldsymbol{f}_{\mathrm{c}}=-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}'$。

解法（一）

（1）以正离子中心为原点 O 的实验室参考系 $Oxyz$ 与以角速度 ω 绕 z 轴旋转的参考系 $Ox'y'z'$ 如图所示，z 轴和 z' 轴重合，沿磁场方向。记两参考系坐标轴正向单位矢量分别为 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{i}'$、$\boldsymbol{j}'$、$\boldsymbol{k}'$。旋转系中，价电子除受线性回复力 $-m\omega_0^2\boldsymbol{r}$ 和洛伦兹力 $-e\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ 外，还受惯性离心力 $-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$ 和科里奥利力 $-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}'$ 作用，其合力为



$$\boldsymbol{F}'=-m\omega_0^2\boldsymbol{r}-e\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}' \qquad ①$$

或写成等价的分量形式

$$\begin{cases} F_{z'}'=-m\omega_0^2 z' \\ F_{x'}'=-m\omega_0^2 x'-ev_{y'}B+m\omega^2 x'+2m\omega v_{y'}' \\ F_{y'}'=-m\omega_0^2 y'+ev_{x'}B+m\omega^2 y'-2m\omega v_{x'}' \end{cases} \qquad ①$$

式中 $v_{x'}$ 和 $v_{y'}$ 是实验室参考系中价电子速度 $\boldsymbol{v}$ 在 x' 和 y' 坐标轴上的分量，而 $v_{x'}'$ 和 $v_{y'}'$ 是旋转系中价电子速度 $\boldsymbol{v}'$ 在 x' 和 y' 坐标轴上的分量。两参考系位矢之间和速度之间的变换关系为

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}' \\ \boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{v}' \end{cases} \qquad ②$$

速度之间的变换关系可写成等价的分量形式

$$\begin{cases} v_{x'}=v_{x'}'-\omega y' \\ v_{y'}=v_{y'}'+\omega x' \end{cases} \qquad ②$$

①式可写为

$$\boldsymbol{F}'=-m\omega_0^2\boldsymbol{r}+m(2\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{L}}-\boldsymbol{\omega})\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})+2m(\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{L}}-\boldsymbol{\omega})\times\boldsymbol{v}' \qquad ③$$

式中，$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{L}}=\omega_{\mathrm{L}}\boldsymbol{k}'$，$\boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{k}'$，而

$$\omega_{\mathrm{L}}=\frac{eB}{2m}$$

③式也可写成等价的分量形式

$$\begin{cases} F_x'=-m\left[\omega_0^2+(2\omega_{\mathrm{L}}-\omega)\omega\right]x'-2m(\omega_{\mathrm{L}}-\omega)v_{y'}' \\ F_y'=-m\left[\omega_0^2+(2\omega_{\mathrm{L}}-\omega)\omega\right]y'+2m(\omega_{\mathrm{L}}-\omega)v_{x'}' \end{cases} \qquad ③$$

令

$$\omega=\omega_{\mathrm{L}} \qquad ④$$

有

$$\boldsymbol{F}'=-m\omega_0^2\boldsymbol{r}+m\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{L}}\times\left(\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{L}}\times\boldsymbol{r}\right)=-m\left[\left(\omega_0^2+\omega_{\mathrm{L}}^2\right)\left(x'\boldsymbol{i}'+y'\boldsymbol{j}'\right)+\omega_0^2z'\boldsymbol{k}'\right] \qquad ⑤$$

这是各向异性的线性回复力。旋转系中价电子运动的动力学方程为

$$m\boldsymbol{a}'=\boldsymbol{F}' \qquad ⑥$$

利用④式，⑥式的分量形式为

$$\begin{cases}\ddot{x}'=-\left(\omega_0^2+\omega_{\mathrm{L}}^2\right)x'\\ \ddot{y}'=-\left(\omega_0^2+\omega_{\mathrm{L}}^2\right)y'\\ \ddot{z}'=-\omega_0^2z'\end{cases} \qquad ⑦$$

这是三维简谐振动的动力学方程，其解为

$$\begin{cases}x'=A_1\cos\left(\sqrt{\omega_0^2+\omega_{\mathrm{L}}^2}t+\varphi_1\right)\\ y'=A_2\sin\left(\sqrt{\omega_0^2+\omega_{\mathrm{L}}^2}t+\varphi_2\right)\\ z'=A_3\cos\left(\omega_0t+\varphi_3\right)\end{cases} \qquad ⑧$$

式中，常量 A_1、A_2、A_3 和 φ_1、φ_2、φ_3 分别是相应的振幅和相位，它们由价电子的初始位置与初始速度决定。

（2）由几何关系，可得两参考系之间的坐标变换关系为

$$\begin{cases}x=x'\cos\omega t-y'\sin\omega t\\ y=x'\sin\omega t+y'\cos\omega t\\ z=z'\end{cases} \qquad ⑨$$

将⑧式代入⑨式，利用积化和差公式，并注意到④式，可得实验室参考系中的解为

$$\begin{cases}x=\left[\dfrac{A_1}{2}\cos\left(\omega_+t+\varphi_1\right)+\dfrac{A_2}{2}\cos\left(\omega_+t+\varphi_2\right)\right]+\left[\dfrac{A_1}{2}\cos\left(\omega_-t+\varphi_1\right)-\dfrac{A_2}{2}\cos\left(\omega_-t+\varphi_2\right)\right]\\ y=\left[\dfrac{A_1}{2}\sin\left(\omega_+t+\varphi_1\right)+\dfrac{A_2}{2}\sin\left(\omega_+t+\varphi_2\right)\right]-\left[\dfrac{A_1}{2}\sin\left(\omega_-t+\varphi_1\right)-\dfrac{A_2}{2}\sin\left(\omega_-t+\varphi_2\right)\right]\\ z=A_3\cos\left(\omega_0t+\varphi_3\right)\end{cases} \qquad ⑩$$

式中

$$\omega_\pm=\sqrt{\omega_0^2+\omega_{\mathrm{L}}^2}\pm\omega_{\mathrm{L}} \qquad ⑪$$

（3）根据同方向同频率简谐振动合成的振幅矢量法，可令

$$\begin{cases}\dfrac{A_1}{2}\cos\left(\omega_+t+\varphi_1\right)+\dfrac{A_2}{2}\cos\left(\omega_+t+\varphi_2\right)=A_+\cos\left(\omega_+t+\varphi_+\right)\\ \dfrac{A_1}{2}\sin\left(\omega_+t+\varphi_1\right)+\dfrac{A_2}{2}\sin\left(\omega_+t+\varphi_2\right)=A_+\sin\left(\omega_+t+\varphi_+\right)\\ \dfrac{A_1}{2}\cos\left(\omega_-t+\varphi_1\right)-\dfrac{A_2}{2}\cos\left(\omega_-t+\varphi_2\right)=A_-\cos\left(\omega_-t+\varphi_-\right)\\ \dfrac{A_1}{2}\sin\left(\omega_-t+\varphi_1\right)-\dfrac{A_2}{2}\sin\left(\omega_-t+\varphi_2\right)=A_-\sin\left(\omega_-t+\varphi_-\right)\end{cases} \qquad ⑫$$

而⑩式化为

$$\begin{cases}x=A_+\cos\left(\omega_+t+\varphi_+\right)+A_-\cos\left(\omega_-t+\varphi_-\right)\\ y=A_+\sin\left(\omega_+t+\varphi_+\right)-A_-\sin\left(\omega_-t+\varphi_-\right)\\ z=A_3\cos\left(\omega_0t+\varphi_3\right)\end{cases} \qquad ⑬$$

可见，处于磁场中的原子的价电子参与三个频率的振动，发出三种园频率分别为

$$\omega_+、\ \omega_0、\ \omega_- \qquad ⑭$$

的光。

对弱磁场（即 $\omega_{\mathrm{L}} \ll \omega_0$）情形，由⑪式，略去二阶小量得，园频率可近似为

$$\omega_{\pm} \approx \omega_0 \pm \omega_{\mathrm{L}} \qquad ⑮$$

三条谱线的园频率间隔为

$$\omega_{+} - \omega_0 = \omega_0 - \omega_{-} = \omega_{\mathrm{L}} \qquad ⑯$$

评分参考：本题 40 分。

第（1）问 20 分，①②式各 2 分，③式 4 分，④⑤⑥式各 2 分，⑦式 4 分，⑧式 2 分；

第（2）问 9 分，⑨⑩⑪式各 3 分；

第（3）问 11 分，⑫式 2 分，⑬式 3 分，⑭⑮⑯式各 2 分。

解法（二）

（1）牛顿第二定律可写成

$$m\boldsymbol{a} = -m\omega_0^2 \boldsymbol{r} - e\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \qquad ①$$

在直角坐标系中，该运动方程为

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\omega_0^2 x - 2\omega_{\mathrm{L}} \dot{y} \\ \ddot{y} = -\omega_0^2 y + 2\omega_{\mathrm{L}} \dot{x} \\ \ddot{z} = -\omega_0^2 z \end{cases} \qquad ②$$

对方程②做变换

$$\begin{cases} x = x' \cos \omega t - y' \sin \omega t \\ y = x' \sin \omega t + y' \cos \omega t \\ z = z' \end{cases} \qquad ③$$

对上式关于时间求导得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \left(\dfrac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t} - \omega y' \right) \cos \omega t - \left(\dfrac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t} + \omega x' \right) \sin \omega t \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \left(\dfrac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t} - \omega y' \right) \sin \omega t + \left(\dfrac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t} + \omega x' \right) \cos \omega t \end{cases}$$

再对上式关于时间求一次求导得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = \left(\dfrac{\mathrm{d}^2 x'}{\mathrm{d}t^2} - 2\omega \dfrac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t} - \omega^2 x' \right) \cos \omega t - \left(\dfrac{\mathrm{d}^2 y'}{\mathrm{d}t^2} + 2\omega \dfrac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t} - \omega^2 y' \right) \sin \omega t \\ \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = \left(\dfrac{\mathrm{d}^2 x'}{\mathrm{d}t^2} - 2\omega \dfrac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t} - \omega^2 x' \right) \sin \omega t + \left(\dfrac{\mathrm{d}^2 y'}{\mathrm{d}t^2} + 2\omega \dfrac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t} - \omega^2 y' \right) \cos \omega t \end{cases}$$

将以上三式代入②式得

$$\begin{cases} \left[\dfrac{\mathrm{d}^2 x'}{\mathrm{d}t^2} - 2(\omega - \omega_{\mathrm{L}}) \dfrac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t} - \left(\omega^2 - \omega_0^2 - 2\omega\omega_{\mathrm{L}} \right) x' \right] \cos \omega t - \left[\dfrac{\mathrm{d}^2 y'}{\mathrm{d}t^2} + 2(\omega - \omega_{\mathrm{L}}) \dfrac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t} - \left(\omega^2 - \omega_0^2 - 2\omega\omega_{\mathrm{L}} \right) y' \right] \sin \omega t = 0 \\ \left[\dfrac{\mathrm{d}^2 x'}{\mathrm{d}t^2} - 2(\omega - \omega_{\mathrm{L}}) \dfrac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t} - \left(\omega^2 - \omega_0^2 - 2\omega\omega_{\mathrm{L}} \right) x' \right] \sin \omega t + \left[\dfrac{\mathrm{d}^2 y'}{\mathrm{d}t^2} + 2(\omega - \omega_{\mathrm{L}}) \dfrac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t} - \left(\omega^2 - \omega_0^2 - 2\omega\omega_{\mathrm{L}} \right) y' \right] \cos \omega t = 0 \end{cases} \qquad ④$$

⑤式对于任意时间 t 时刻成立，应有

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 x'}{\mathrm{d}t^2} - 2(\omega - \omega_{\mathrm{L}}) \dfrac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t} - \left(\omega^2 - \omega_0^2 - 2\omega\omega_{\mathrm{L}} \right) x' = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}^2 y'}{\mathrm{d}t^2} + 2(\omega - \omega_{\mathrm{L}}) \dfrac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t} - \left(\omega^2 - \omega_0^2 - 2\omega\omega_{\mathrm{L}} \right) y' = 0 \end{cases} \qquad ⑤$$

如果选择

$$\omega = \omega_{\mathrm{L}} \qquad ⑥$$

则上式化简为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2x'}{\mathrm{d}t^2}+\left(\omega_0^2+\omega_{\mathrm{L}}^2\right)x'=0\\ \dfrac{\mathrm{d}^2y'}{\mathrm{d}t^2}+\left(\omega_0^2+\omega_{\mathrm{L}}^2\right)y'=0\end{cases}$$

与 z' 满足的方程合并，得转动参考系中的动力学方程为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2x'}{\mathrm{d}t^2}=-\left(\omega_0^2+\omega_{\mathrm{L}}^2\right)x'\\ \dfrac{\mathrm{d}^2y'}{\mathrm{d}t^2}=-\left(\omega_0^2+\omega_{\mathrm{L}}^2\right)y'\\ \dfrac{\mathrm{d}^2z'}{\mathrm{d}t^2}=-\omega_0^2z'\end{cases}\qquad ⑦$$

其解为

$$\begin{cases}x'=A_1\cos\left(\sqrt{\omega_0^2+\omega_{\mathrm{L}}^2}t+\varphi_1\right)\\ y'=A_2\cos\left(\sqrt{\omega_0^2+\omega_{\mathrm{L}}^2}t+\varphi_2\right)\\ z'=A_3\cos\left(\omega_0t+\varphi_3\right)\end{cases}\qquad ⑧$$

（2）、（3）的解法与解法（一）相同。

评分参考：

第（1）问 20 分，①②③④式各 2 分，⑤式 4 分，⑥式 2 分，⑦式 4 分，⑧式 2 分。

第（2）、（3）问，与解法（一）相同。

解法（三）

（1）磁场沿 z 轴方向，价电子受到磁场洛仑兹力在垂直磁场方向的平面上。在该平面上取极坐标 (ρ,θ) 下，价电子的位式、运动速度和加速度可分别表示为

$$\boldsymbol{r}=\rho\boldsymbol{e}_\rho+z\boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{v}=\dot\rho\boldsymbol{e}_\rho+\rho\dot\theta\boldsymbol{e}_\theta+\dot z\boldsymbol{k}\qquad ①$$

$$\begin{cases}a_\rho=\ddot\rho-\rho\dot\theta^2\\ a_\theta=2\dot\rho\dot\theta+\rho\ddot\theta=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\mathrm{d}\left(\rho^2\dot\theta\right)}{\mathrm{d}t}\\ a_z=\ddot z\end{cases}\qquad ②$$

式中，$\boldsymbol{e}_\rho$、$\boldsymbol{e}_\theta$ 和 $\boldsymbol{k}$ 分别是径向单位矢量、角度方向（即垂直磁场方向的平面上垂直于 $\boldsymbol{\rho}$ 的方向）单位矢量和沿 z 向（与磁场方向相同）单位矢量。利用牛顿第二定律可得，价电子运动的动力学方程为

$$m\boldsymbol{a}=-m\omega_0^2\boldsymbol{r}-e\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}=-m\omega_0^2\boldsymbol{r}-2m\omega_L\rho\dot\theta\boldsymbol{e}_\rho+2m\omega_L\dot\rho\boldsymbol{e}_\theta$$

式中

$$\omega_{\mathrm{L}}=\frac{eB}{2m}$$

动力学方程的分量形式为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}t^2}-\rho\left(\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2=-\omega_0^2\rho-2\omega_{\mathrm{L}}\rho\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\\ 2\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+\rho\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}=2\omega_{\mathrm{L}}\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\\ \dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}=-\omega_0^2z\end{cases}\qquad ③$$

选一绕磁场方向匀角速转动的参考系，设此参考系绕 z 轴转动的角速度为 ω（ω 与时间无关）。在这一旋转参考系中，设在垂直磁场平面上角位置坐标为 θ'，应有

$$\theta=\omega t+\theta' \qquad ④$$

将上式代入动力学方程的第二个方程，有

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\rho^2\frac{\mathrm{d}\theta'}{\mathrm{d}t}\right)=2\left(\omega_{\mathrm{L}}-\omega\right)\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} \qquad ⑤$$

如果选择

$$\omega=\omega_{\mathrm{L}} \qquad ⑥$$

便有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\rho^2\frac{\mathrm{d}\theta'}{\mathrm{d}t}\right)=0$$

这表明旋转系中电子在角度方向上不受力，由上式得

$$\rho^2\frac{\mathrm{d}\theta'}{\mathrm{d}t}=C$$

由于上式对于所有的 ρ 均要成立，故常量 $C=0$，即有

$$\frac{\mathrm{d}\theta'}{\mathrm{d}t}=0$$

所以，在绕磁场方向以匀角速度 ω_{L} 转动的参考系中，价电子的动力学方程为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}t^2}=-\left(\omega_0^2+\omega_{\mathrm{L}}^2\right)\rho\\ \dfrac{\mathrm{d}^2\theta'}{\mathrm{d}t^2}=0\\ \dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}=-\omega_0^2z\end{cases}\qquad ⑦$$

可见，在旋转系中，价电子做简谐振动。方程的解为

$$\begin{cases}\rho=A_\rho\cos\left(\sqrt{\omega_0^2+\omega_{\mathrm{L}}^2}\,t+\varphi_\rho\right)\\ \theta'=\varphi_\theta\\ z=A_{\mathrm{z}}\cos(\omega_0t+\varphi_{\mathrm{z}})\end{cases}\qquad ⑧$$

其中 A_ρ、φ_ρ、φ_θ、A_{z}、φ_{z} 为待定常量。

（2）将旋转系中的解⑧式变回到实验室坐标系。由④⑥式和⑧式第二式有

$$\theta=\omega_{\mathrm{L}}t+\varphi_\theta$$

将上式和⑧式代入下式

$$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}\qquad ⑨$$

利用三角函数积化和差关系，得

$$x=\frac{A_\rho}{2}\left[\cos\left(\omega_+ t+\varphi_\rho+\varphi_\theta\right)+\cos\left(\omega_- t+\varphi_\rho-\varphi_\theta\right)\right]$$

$$y=\frac{A_\rho}{2}\left[\sin\left(\omega_+ t+\varphi_\rho+\varphi_\theta\right)-\sin\left(\omega_- t+\varphi_\rho-\varphi_\theta\right)\right] \qquad ⑩$$

$$z=A_z\cos(\omega_0 t+\varphi_z)$$

式中

$$\omega_\pm=\sqrt{\omega_0^2+\omega_L^2}\pm\omega_L \qquad ⑪$$

[或

由几何关系，可得实验室参考系和旋转系之间的坐标变换关系为

$$\begin{cases}x=x'\cos\omega t-y'\sin\omega t=\rho\cos\theta'\cos\omega t-\rho\sin\theta'\sin\omega t\\ y=x'\sin\omega t+y'\cos\omega t=\rho\cos\theta'\sin\omega t+\rho\sin\theta'\cos\omega t\\ z=z'\end{cases} \qquad ⑨$$

将⑧式代入⑨式，利用积化和差公式，并注意到$\theta'=\varphi_\theta$，可得实验室参考系中的解为

$$\begin{cases}x=\left[\frac{A_1}{2}\cos\left(\omega_+ t+\varphi_1\right)+\frac{A_2}{2}\cos\left(\omega_+ t+\varphi_2\right)\right]+\left[\frac{A_1}{2}\cos\left(\omega_- t+\varphi_1\right)-\frac{A_2}{2}\cos\left(\omega_- t+\varphi_2\right)\right]\\ y=\left[\frac{A_1}{2}\sin\left(\omega_+ t+\varphi_1\right)+\frac{A_2}{2}\sin\left(\omega_+ t+\varphi_2\right)\right]-\left[\frac{A_1}{2}\sin\left(\omega_- t+\varphi_1\right)-\frac{A_2}{2}\sin\left(\omega_- t+\varphi_2\right)\right]\\ z=A_3\cos\left(\omega_0 t+\varphi_3\right)\end{cases} \qquad ⑩$$

式中，常量A_1、A_2、A_3和φ_1、φ_2、φ_3是由价电子的初始位置与初始速度决定的常量，且与A_ρ、φ_ρ、φ_θ、A_z、φ_z有关，而

$$\omega_\pm=\sqrt{\omega_0^2+\omega_L^2}\pm\omega_L \qquad ⑪]$$

（3）的解法与解法（一）相同。

评分参考：与解法（一）相同。

解法（四）（未按题目要求做）

利用牛顿第二定律可得，价电子运动的动力学方程为

$$m\boldsymbol{a}=-m\omega_0^2\boldsymbol{r}-e\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} \qquad ①$$

在直角坐标系中电子的运动方程的分量形式为

$$\begin{cases}\ddot{x}=-\omega_0^2 x-2\omega_L\dot{y}\\ \ddot{y}=-\omega_0^2 y+2\omega_L\dot{x}\\ \ddot{z}=-\omega_0^2 z\end{cases} \qquad ②$$

这里

$$\omega_L=\frac{eB}{2m}$$

②中第三个方程的解为

$$z=A_3\cos(\omega_0 t+\varphi_3) \qquad ③$$

②中前两个方程具有下列形式的解

$$\begin{cases}x=A_1\cos(\omega t+\varphi_1)\\ y=A_2\sin(\omega t+\varphi_2)\end{cases} \quad（A_1、A_2 不全为零） \qquad ④$$

将④式代入方程②得

$$\begin{cases}\varphi_1=\varphi_2=\varphi\\ A_1^2=A_2^2\\ \left(-\omega^2+\omega_0^2\right)^2-\left(2\omega_L\omega\right)^2=0\end{cases} \qquad ⑤$$

解为

$$\omega=\omega_{\pm}=\sqrt{\omega_0^2+\omega_{\mathrm{L}}^2}\pm\omega_{\mathrm{L}}\approx\omega_0\pm\omega_{\mathrm{L}} \qquad ⑥$$
$$A_1=\pm A_2$$

于是，②中前两个方程的解是上述两解的叠加，即

$$\begin{cases}x=A_+\cos(\omega_+t+\varphi_1)+A_-\cos(\omega_-t+\varphi_1)\\ y=A_+\sin(\omega_+t+\varphi_2)-A_-\sin(\omega_-t+\varphi_2)\end{cases} \qquad ⑦$$

或等价地⑪⑫⑬⑭⑮⑯

$$\begin{cases}x=A_+\cos\left(\omega_+t+\varphi_+\right)+A_-\cos\left(\omega_-t+\varphi_-\right)\\ y=A_+\sin\left(\omega_+t+\varphi_+\right)-A_-\sin\left(\omega_-t+\varphi_-\right)\\ z=A_3\cos\left(\omega_0t+\varphi_3\right)\end{cases} \qquad ⑧$$

可见，处于磁场中的原子的价电子参与三个频率的振动，发出三种园频率分别为

$$\omega_+、\ \omega_0、\ \omega_- \qquad ⑨$$

的光。

对弱磁场（即 $\omega_{\mathrm{L}}<<\omega_0$）情形，由⑪，略去了二阶小量得，园频率可近似为

$$\omega_{\pm}\approx\omega_0\pm\omega_{\mathrm{L}} \qquad ⑩$$

三条谱线的园频率间隔为

$$\omega_+-\omega_0=\omega_0-\omega_-=\omega_{\mathrm{L}} \qquad ⑪$$

评分参考：本题 22 分。①②③④⑤⑥⑦⑧⑨⑩⑪式各 2 分

解法（五）（未按题目要求做）

磁场沿 z 轴方向，价电子受到磁场洛仑兹力在垂直磁场方向的平面上。在该平面上取极坐标 (ρ,θ) 下，价电子的位置矢量、运动速度和加速度可分别表示为

$$\boldsymbol{r}=\rho\boldsymbol{e}_\rho+z\boldsymbol{e}_z$$
$$\boldsymbol{v}=\dot{\rho}\boldsymbol{e}_\rho+\rho\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta+\dot{z}\boldsymbol{k}$$
$$\begin{cases}a_\rho=\ddot{\rho}-\rho\dot{\theta}^2\\ a_\theta=2\dot{\rho}\dot{\theta}+\rho\ddot{\theta}=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\mathrm{d}\left(\rho^2\dot{\theta}\right)}{\mathrm{d}t}\\ a_z=\ddot{z}\end{cases} \qquad ①$$

式中，$\boldsymbol{e}_\rho$、$\boldsymbol{e}_\theta$ 和 $\boldsymbol{k}$ 分别是径向单位矢量、角度方向（即在垂直磁场方向的平面上垂直于 $\boldsymbol{\rho}$ 的方向）单位矢量和沿 z 轴方向（与磁场方向相同）单位矢量。利用牛顿第二定律可得，价电子运动的动力学方程为

$$m\boldsymbol{a}=-m\omega_0^2\boldsymbol{r}-e\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}=-m\omega_0^2\boldsymbol{r}-2m\omega_L\rho\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\rho+2m\omega_L\dot{\rho}\boldsymbol{e}_\theta \qquad ②$$

式中

$$\omega_{\mathrm{L}}=\frac{eB}{2m}$$

②式可写为

$$\ddot{\rho}-\rho\dot{\theta}^2=-\omega_0^2\rho-2\omega_L\rho\dot{\theta}$$
$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\left(\rho^2\dot{\theta}\right)}{\mathrm{d}t}=2\omega_{\mathrm{L}}\dot{\rho} \qquad ③$$
$$\ddot{z}=-\omega_0^2z$$

③中第二个方程可写为

$$\frac{\mathrm{d}\left(\rho^2\dot{\theta}\right)}{\mathrm{d}t}=2\omega_{\mathrm{L}}\rho\dot{\rho}=\omega_{\mathrm{L}}\frac{\mathrm{d}(\rho^2)}{\mathrm{d}t}$$

即

$$\rho^2\dot{\theta}=\rho^2\omega_{\mathrm{L}}+C$$

此式对于所有 ρ 都成立，任意常数 $C=0$。故

$$\dot{\theta}=\omega_{\mathrm{L}},\quad \theta=\omega_{\mathrm{L}}t+\varphi_\theta$$

将上两式代入⑨中第一式得

$$\ddot{\rho}-\rho\omega_{\mathrm{L}}^2=-\omega_0^2\rho-2\omega_{\mathrm{L}}^2\rho$$

即

$$\ddot{\rho}=-(\omega_0^2+\omega_{\mathrm{L}}^2)\rho \qquad ④$$

价电子在 x-y 平面上的径向运动（即 ρ 随时间的变化）是园频率为 $\sqrt{\omega_0^2+\omega_{\mathrm{L}}^2}$ 的简谐振动，其一般解可写成

$$\rho=A_\rho\cos\left(\sqrt{\omega_0^2+\omega_{\mathrm{L}}^2}\,t+\varphi_\rho\right)$$

式中，A_ρ 和 φ_ρ 分别是相应的振幅和相位。由上式及③中第三式得

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta=A_\rho\cos\left(\sqrt{\omega_0^2+\omega_{\mathrm{L}}^2}\,t+\varphi_\rho\right)\cos(\omega_{\mathrm{L}}t+\varphi_\theta) \\ y=\rho\sin\theta=A_\rho\cos\left(\sqrt{\omega_0^2+\omega_{\mathrm{L}}^2}\,t+\varphi_\rho\right)\sin(\omega_{\mathrm{L}}t+\varphi_\theta) \\ z=A_{\mathrm{z}}\cos(\omega_0t+\varphi_z) \end{cases} \qquad ⑤$$

利用三角函数积化和差公式得

$$\begin{aligned} 2\cos\left(\sqrt{\omega_0^2+\omega_{\mathrm{L}}^2}\,t+\varphi_\rho\right)\cos(\omega_{\mathrm{L}}t+\varphi_\theta)&=\cos\left(\omega_+t+\varphi_+\right)+\cos\left(\omega_-t+\varphi_-\right) \\ 2\cos\left(\sqrt{\omega_0^2+\omega_{\mathrm{L}}^2}\,t+\varphi_\rho\right)\sin(\omega_{\mathrm{L}}t+\varphi_\theta)&=\sin\left(\omega_+t+\varphi_+\right)-\sin\left(\omega_-t+\varphi_-\right) \end{aligned} \qquad ⑥$$

式中

$$\omega_\pm=\sqrt{\omega_0^2+\omega_{\mathrm{L}}^2}\pm\omega_{\mathrm{L}} \qquad ⑦$$

⑤式可写为

$$\begin{cases} x=A_+\cos\left(\omega_+t+\varphi_+\right)+A_-\cos\left(\omega_-t+\varphi_-\right) \\ y=A_+\sin\left(\omega_+t+\varphi_+\right)-A_-\sin\left(\omega_-t+\varphi_-\right) \\ z=A_3\cos\left(\omega_0t+\varphi_3\right) \end{cases} \qquad ⑧$$

可见，处于磁场中的原子的价电子参与三个频率的振动，发出三种园频率分别为

$$\omega_+、\ \omega_0、\ \omega_- \qquad ⑨$$

的光。

对弱磁场（即 $\omega_{\mathrm{L}}<<\omega_0$）情形，由⑪式，略去了二阶小量得，园频率可近似为

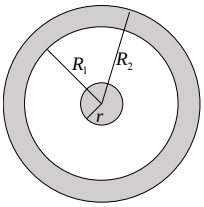
$$\omega_\pm\approx\omega_0\pm\omega_{\mathrm{L}} \qquad ⑩$$

三条谱线的园频率间隔为

$$\omega_+-\omega_0=\omega_0-\omega_-=\omega_{\mathrm{L}} \qquad ⑪$$

评分参考：本题 22 分。①②③④⑤⑥⑦⑧⑨⑩⑪式各 2 分。

六、（40 分）如图，太空中有一由同心的内球和球壳构成的实验装置，内球和球壳内表面之间为真空。内球半径为$r=0.200$ m，温度保持恒定，比辐射率为$e=0.800$；球壳的导热系数为κ=$1.00\times10^{-2}\,\mathrm{J\cdot m^{-1}\cdot s^{-1}\cdot K^{-1}}$，内、外半径分别为$R_1=0.900$m 、$R_2=1.00$ m，外表面可视为黑体；该实验装置已处于热稳定状态，此时球壳内表面比辐射率为$E=0.800$。斯特藩常量为$\sigma=5.67\times10^{-8}\,\mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-4}}$，宇宙微波背景辐射温度为$T=2.73\mathrm{K}$。若单位时间内由球壳内表面传递到球壳外表面的热量为$Q=44.0\mathrm{W}$，求



（1）球壳外表面温度T_2；（2）球壳内表面温度T_1；（3）内球温度T_0。

已知：物体表面单位面积上的辐射功率与同温度下的黑体在该表面单位面积上的辐射功率之比称为比辐射率。当辐射照射到物体表面时，物体表面单位面积吸收的辐射功率与照射到物体单位面积上的辐射功率之比称为吸收比。在热平衡状态下，物体的吸收比恒等于该物体在同温度下的比辐射率。当物体内某处在 z 方向（热流方向）每单位距离温度的增量为$\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}$时，物体内该处单位时间在 z 方向每单位面积流过的热量为$-\kappa\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}$，此即傅里叶热传导定律。

参考解答：

（1）根据斯特藩定律（下同），由球壳外表面单位时间向外界辐射的热量为

$$Q'=4\pi R_2^2\sigma\left(T_2^4-T^4\right) \qquad ①$$

在热稳定情形下有

$$Q=Q' \qquad ②$$

联立①②式得

$$T_2=\left(\frac{Q}{4\pi R_2^2\sigma}+T^4\right)^{1/4} \qquad ③$$

将题给数据代入③式得

$$T_2=88.6\mathrm{K} \qquad ④$$

（2）在热稳定状态下，球壳中不同半径的球面上在单位时间内通过的热量相同，故单位时间球壳中不同半径球面上传导的热量也为Q。由傅里叶热传导定律得

$$Q=-4\pi R^2\kappa\frac{dT}{dR} \qquad ⑤$$

⑤式可写成

$$Q\frac{dR}{R^2}=-4\pi\kappa dT$$

对上式两边积分

$$\int_{R_1}^{R_2}Q\frac{dR}{R^2}=-\int_{T_1}^{T_2}4\pi\kappa dT$$

得

$$Q\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=4\pi\kappa(T_1-T_2)$$

此即

$$Q=4\pi\kappa R_1R_2\frac{T_1-T_2}{R_2-R_1} \qquad ⑥$$

由⑥式有

$$T_1=\frac{(R_2-R_1)Q}{4\pi\kappa R_1R_2}+T_2 \qquad ⑦$$

将题给数据代入⑦式，并利用④式得

$$T_1=128\mathrm{K} \qquad ⑧$$

（3）记内球表面为 I，其表面积

$$S_{\mathrm{I}}=4\pi r^2$$

壳内表面为 II，其表面积

$$S_{\mathrm{II}}=4\pi R_1^2$$

根据斯特藩定律（下同），由 I 在单位时间内发射的热量为

$$Q_{\mathrm{I}0}=e\sigma T_0^4 S_{\mathrm{I}} \tag{9}$$

由于在热平衡状态下，物体的吸收比恒等于该物体在同温度下的比辐射率（下同），$Q_{\mathrm{I}0}$ 被 II 在单位时间内吸收的热量为

$$Q_{\mathrm{IIa}}^{(1)}=EQ_{\mathrm{I}0}=Ee\sigma T_0^4 S_{\mathrm{I}} \tag{10}$$

$Q_{\mathrm{I}0}$ 被 II 在单位时间内反射的热量为

$$Q_{\mathrm{IIr}}^{(1)}=(1-E)Q_{\mathrm{I}0}=(1-E)e\sigma T_0^4 S_{\mathrm{I}} \tag{11}$$

$Q_{\mathrm{IIr}}^{(1)}$ 被 I 在单位时间内反射的热量为

$$Q_{\mathrm{Ir}}^{(1)}=(1-e)Q_{\mathrm{IIr}}^{(1)}=(1-e)(1-E)e\sigma T_0^4 S_{\mathrm{I}} \tag{12}$$

$Q_{\mathrm{Ir}}^{(1)}$ 被 II 在单位时间内吸收的热量为

$$Q_{\mathrm{IIa}}^{(2)}=EQ_{\mathrm{Ir}}^{(1)}=E(1-e)(1-E)e\sigma T_0^4 S_{\mathrm{I}} \tag{13}$$

如此等等。不断反射、吸收后，被 II 在单位时间内吸收的总热量为

$$\begin{aligned} Q_{\mathrm{IIa}} &= Q_{\mathrm{IIa}}^{(1)}+Q_{\mathrm{IIa}}^{(2)}+\cdots \\ &= Ee\sigma T_0^4 S_{\mathrm{I}}\left[1+(1-e)(1-E)+(1-e)^2(1-E)^2+\cdots\right] \end{aligned} \tag{14}$$

同理可得由 II 发射的热量 $Q_{\mathrm{II}0}=e\sigma T_1^4 S_{\mathrm{II}}$ 被 I 在单位时间内吸收的总热量为

$$Q_{\mathrm{Ia}}=Ee\sigma T_1^4 S_{\mathrm{II}}\left[1+(1-e)(1-E)+(1-e)^2(1-E)^2+\cdots\right] \tag{15}$$

内球与球壳内表面之间在单位时间内交换的热量为

$$\begin{aligned} Q'' &= Q_{\mathrm{Ia}}-Q_{\mathrm{IIa}} \\ &= Ee\sigma\left(T_0^4 S_{\mathrm{I}}-T_1^4 S_{\mathrm{II}}\right)\left[1+(1-e)(1-E)+(1-e)^2(1-E)^2+\cdots\right] \end{aligned} \tag{16}$$

完成⑰式右边的求和得，单位时间内从内球传递给球壳内表面的净热量为

$$Q''=4\pi Ee\sigma\left(T_0^4 r^2-T_1^4 R_1^2\right)\left.\frac{1-(1-e)^n(1-E)^n}{1-(1-e)(1-E)}\right|_{n\to\infty}=4\pi Ee\sigma\frac{T_0^4 r^2-T_1^4 R_1^2}{1-(1-e)(1-E)} \tag{17}$$

由热稳定条件

$$Q''=Q \tag{18}$$

和⑰式有

$$T_0=\frac{1}{\sqrt{r}}\left\{\frac{1-(1-e)(1-E)}{4\pi Ee\sigma}Q+R_1^2 T_1^4\right\}^{1/4} \tag{19}$$

将题给数据代入⑲式，并利用⑧式得

$$T_0=296\mathrm{K} \tag{20}$$

评分标准：本题 40 分。

第（1）问分 13 分，①②式各 5 分，④式 3 分；

第（2）问分 12 分，⑤⑥⑧式各 4 分；

第（3）问分 15 分，⑨⑩⑪⑫式各 1 分，⑬⑭式 2 分，⑮⑯式各 1 分，⑰式 2 分，⑱式 1 分，⑳式 2 分。

七、（40 分）用波长为 633 nm 的激光水平照射竖直圆珠笔中的小弹簧，在距离弹簧 4.2 m 的光屏（与激光水平照射方向垂直）上形成衍射图像，如图 a 所示。其右图与 1952 年拍摄的首张 DNA 分子双螺旋结构 X 射线衍射图像（图 b）十分相似。

（1）利用图 a 右图中给出的尺寸信息，通过测量估算弹簧钢丝的直径 d_1，弹簧圈的半径 R 和弹簧的螺距 p；

（2）图 b 是用波长为 0.15 nm 的平行 X 射线照射 DNA 分子样品后，在距离样品 9.0 cm 的照相底片上拍摄的。假设 DNA 分子与底片平行，且均与 X 射线照射方向垂直。根据图 b 中给出的尺寸信息，试估算 DNA 螺旋结构的半径 R' 和螺距 p'。

说明：由光学原理可知，弹簧上两段互成角度的细铁丝的衍射、干涉图像与两条成同样角度、相同宽度的狭缝的衍射、干涉图像一致。

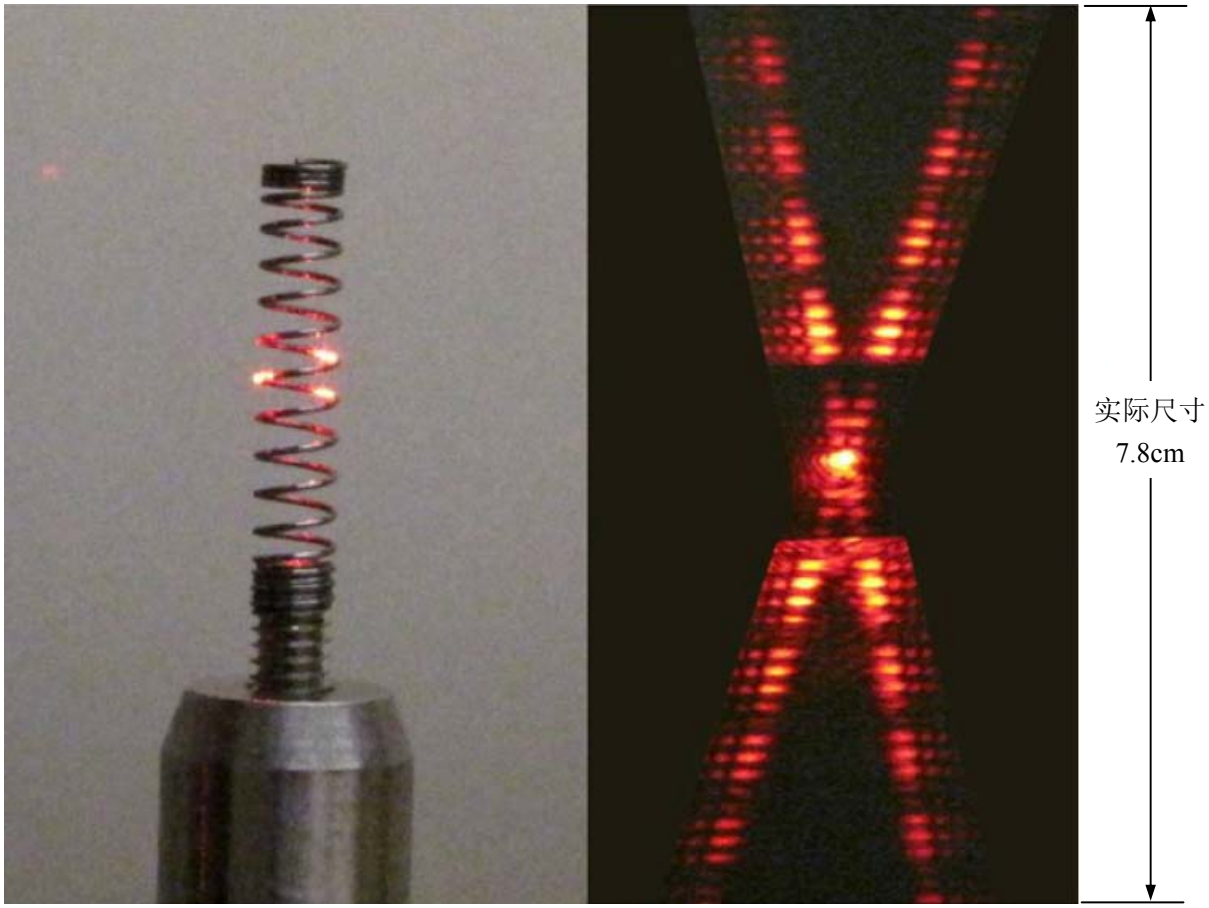


图 a

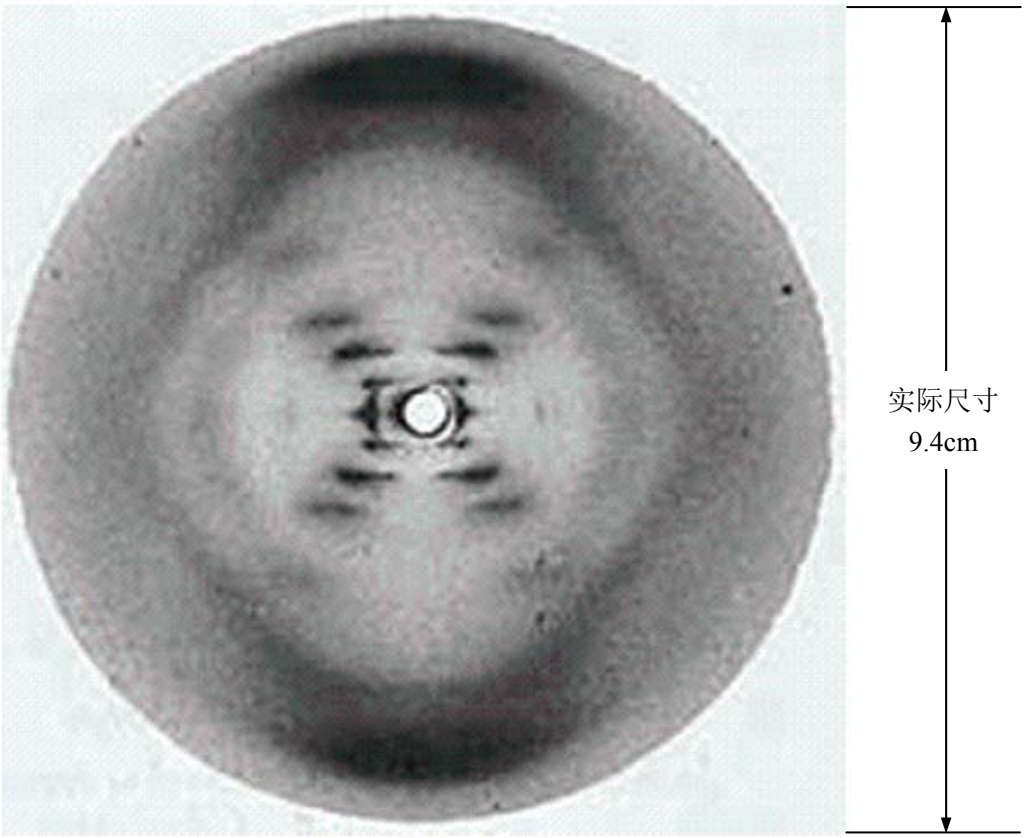


图 b （黑色表示 X 射线曝光较强。中心零级亮纹不可见，1 级亮纹刚好可见，2、3、5 级较清晰，4 级亮纹因 DNA 双螺旋结构的关系“失踪”了）

参考解答：

（1）平行激光束照射弹簧可先、后照到两小段倾斜的细丝，沿光束方向看，两段细丝呈现交叉状。根据题给说明，两者分别产生与单缝衍射相同的条纹。通过图 a 右图测量可得，各组单缝衍射条纹中点连线之间的夹角为

$$\phi = 30° \qquad ①$$

细丝直径和两根相邻的平行细丝间距可通过衍射条纹的细节结构计算得到。可以看到，图 a 右图中的衍射条纹有一种长的空间周期和一种短的空间周期，分别对应细丝的衍射条纹和相邻细丝间空隙的衍射条纹。设第 n 级暗纹在屏上的位置为 x_n，由于光屏远离细丝，衍射角 θ_n 可视为很小的角，即对第 n 级暗纹近似有

$$d\sin\theta_n \approx d\theta_n = d\frac{x_n}{L} = n\lambda \qquad ②$$

式中 λ 是激光的波长。相邻暗纹间距为

$$X \equiv x_{n+1} - x_n = \lambda\frac{L}{d} \qquad ③$$

通过图 a 右图进行测量，可得到长的空间周期为

$$X_1 = 7.9 \text{ mm} \qquad ④$$

由③式可得细丝直径为

$$d_1 = \lambda\frac{L}{X_1} = 0.34 \text{ mm} \qquad ⑤$$

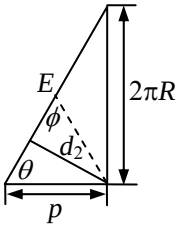
通过图 a 右图进行测量，可得到短的空间周期为

$$X_2 = 1.7\ \text{mm} \qquad ⑥$$

由③式可得相邻平行细丝的间距为

$$d_2 = \lambda \frac{L}{X_2} = 1.6\ \text{mm} \qquad ⑦$$

如右图所示，螺旋线在平面上展开即成为一直角三角形的斜边，两条直角边的长度分别为螺距 p 和圆周长 $2\pi R$， E 点为斜边中点。由相邻平行细丝间距 d_2 和两交叉细丝夹角 ϕ 可算出螺旋结构的螺距



$$p = \frac{d_2}{\cos\frac{\phi}{2}} = \frac{\lambda L}{X_2 \cos\frac{\phi}{2}} \qquad ⑧$$

将已得到的数据（见①⑦式）代入⑧式得

$$p = 1.6\ \text{mm} \qquad ⑨$$

由右图中几何关系得

$$\frac{2\pi R}{p} = \tan\theta = \cot\frac{\phi}{2}$$

将⑧式代入上式得，螺旋结构俯视圆的半径为

$$R = \frac{d_2}{2\pi \sin\frac{\phi}{2}} = \frac{\lambda L}{2\pi X_2 \sin\frac{\phi}{2}} \qquad ⑩$$

将已得到的数据代入⑩式得

$$R = 0.96\ \text{mm} \qquad ⑪$$

（2）由图 b 可测出，各组衍射条纹中心的连线之间的夹角 ϕ' 为

$$\phi' = 84° \qquad ⑫$$

测出条纹的空间周期 X' 为

$$X' = 4.7\ \text{mm} \qquad ⑬$$

利用③式，相邻分子链间距为

$$d' = \lambda' \frac{L'}{X'} = 2.9\ \text{nm} \qquad ⑭$$

根据分子链间距 d'（见⑭式）和夹角 ϕ'（见⑫式），由类似⑧式，可算出螺距 p'

$$p' = \frac{d'}{\cos\frac{\phi'}{2}} = \frac{\lambda' L'}{X' \cos\frac{\phi'}{2}} = 3.9\ \text{nm} \qquad ⑮$$

由类似⑩式，可算出俯视半径 R'

$$R' = \frac{d'}{2\pi \sin\frac{\phi'}{2}} = \frac{\lambda' L'}{2\pi X' \sin\frac{\phi'}{2}} = 0.68\ \text{nm} \qquad ⑯$$

评分标准：本题 40 分。

第（1）问 25 分，①式 2 分，②式 3 分，③④⑤⑥⑦式各 2 分，⑧式 3 分，⑨式 2 分，⑩式 3 分，⑪式各 2 分；

第（2）问 15 分，⑫⑬⑭⑮⑯式各 3 分。

测量相对误差最大可容许达到 10%。

八、（40 分）1958 年穆斯堡尔发现的原子核无反冲共振吸收效应（即穆斯堡尔效应）可用于测量光子频率极微小的变化。穆斯堡尔因此荣获 1961 年诺贝尔物理学奖。类似于原子的能级结构，原子核也具有分立的能级，并能通过吸收或放出光子在能级间跃迁。原子核在吸收和放出光子时会有反冲，部分能量转化为原子核的动能（即核反冲能）。此外，原子核的激发态相对于其基态的能量差并不是一个确定值，而是在以 E_0 为中心、宽度为 2Γ 的范围内取值的。对于 ^{57}Fe 从第一激发态到基态的跃迁，$E_0 = 2.31\times10^{-15}\,\mathrm{J}$，$\Gamma \simeq 3.2\times10^{-13}E_0$。已知质量 $m_{\mathrm{Fe}} \simeq 9.5\times10^{-26}\,\mathrm{kg}$，普朗克常量 $h = 6.6\times10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}$，真空中的光速 $c = 3.0\times10^{8}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$。

（1）忽略激发态的能级宽度，求核反冲能，以及在考虑核反冲和不考虑核反冲的情形下，^{57}Fe 从第一激发态跃迁到基态发出的光子的频率之差；

（2）忽略激发态的能级宽度，求核反冲能，以及在考虑核反冲和不考虑核反冲的情形下，^{57}Fe 从基态跃迁到激发态吸收的光子的频率之差；

（3）考虑激发态的能级宽度，处于第一激发态的静止原子核 $^{57}\mathrm{Fe}^{*}$ 跃迁到基态时发出的光子能否被另一个静止的基态原子核 ^{57}Fe 吸收而跃迁到第一激发态 $^{57}\mathrm{Fe}^{*}$（如发生则称为共振吸收）？并说明理由。

（4）现将 ^{57}Fe 原子核置于晶体中，该原子核在跃迁过程中不发生反冲。现有两块这样的晶体，其中一块静止晶体中处于第一激发态的原子核 $^{57}\mathrm{Fe}^{*}$ 发射光子，另一块以速度 V 运动的晶体中处于基态的原子核 ^{57}Fe 吸收光子。当速度 V 的大小处于什么范围时，会发生共振吸收？如果由于某种原因，到达吸收晶体处的光子频率发生了微小变化，其相对变化为 10^{-10}，试设想如何测量这个变化（给出原理和相关计算）？

参考解答：

（1）设该原子核从静止的第一激发态 $^{57}\mathrm{Fe}^{*}$ 跃迁到基态 ^{57}Fe，发出一频率为 ν_{e} 的光子，同时基态 ^{57}Fe 获得一反冲速度 v（发射过程）。由能量、动量守恒有

$$E_0 = h\nu_{\mathrm{e}} + \frac{1}{2}m_{\mathrm{Fe}}v^2 \qquad ①$$

$$0 = \frac{h\nu_{\mathrm{e}}}{c} - m_{\mathrm{Fe}}v \qquad ②$$

将②式代入①式得，在考虑核反冲的情形下，从激发态跃迁到基态发出的光子的频率为

$$\nu_{\mathrm{e}} = \frac{E_0}{h} - \frac{h\nu_{\mathrm{e}}^{2}}{2m_{\mathrm{Fe}}c^2} = \nu_0 - \frac{h\nu_{\mathrm{e}}^{2}}{2m_{\mathrm{Fe}}c^2} \qquad ③$$

式中

$$\nu_0 = \frac{E_0}{h} \qquad ④$$

是在不考虑核反冲情形下 ^{57}Fe 从第一激发态跃迁到基态发出的光子的频率，或从基态跃迁到第一激发态吸收的光子的频率。

注意到 $\frac{h\nu_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{Fe}}c^2} << 1$，③式右边的 ν_{e} 可以用 ν_0 代替，于是有

$$\nu_{\mathrm{e}} \approx \nu_0 - \frac{h\nu_0^{2}}{2m_{\mathrm{Fe}}c^2} = \nu_0\left(1 - \frac{E_0}{2m_{\mathrm{Fe}}c^2}\right)$$

在考虑核反冲和不考虑核反冲的情形下，从第一激发态跃迁到基态发出的光子的频率之差为

$$\nu_{\mathrm{e}} - \nu_0 \approx -\nu_0\frac{E_0}{2m_{\mathrm{Fe}}c^2} = -4.7\times10^{11}\,\mathrm{Hz} \qquad ⑤$$

由①⑤式得，核反冲能量 $E_{\mathrm{R}} = \frac{1}{2}m_{\mathrm{Fe}}v^2$ 为

$$E_{\mathrm{R}} = E_0 - h\nu_{\mathrm{e}} = \frac{E_0^2}{2m_{\mathrm{Fe}}c^2} = 3.1\times10^{-22}\,\mathrm{J} \qquad ⑥$$

（2）设该原子核从静止的基态 $^{57}\mathrm{Fe}$ 吸收一频率为 ν_{e} 的光子，跃迁到激发态 $^{57}\mathrm{Fe}^{*}$，并同时获得一反冲速度 v'（吸收过程）。由能量、动量守恒有

$$h\nu_{\mathrm{a}} = E_0 + \frac{1}{2}m_{\mathrm{Fe}}v'^2 \qquad ⑦$$

$$\frac{h\nu_{\mathrm{a}}}{c} = m_{\mathrm{Fe}}v' \qquad ⑧$$

由⑦⑧式解得

$$\nu_{\mathrm{a}} = \frac{E_0}{h} + \frac{h\nu_{\mathrm{a}}^{\ 2}}{2m_{\mathrm{Fe}}c^2} \approx \nu_0 + \nu_0\frac{E_0}{2m_{\mathrm{Fe}}c^2}$$

这里也利用了 $\frac{h\nu_{\mathrm{a}}}{m_{\mathrm{Fe}}c^2} << 1$，将上式右边的 ν_{a} 用 ν_0 代替。于是

$$\nu_{\mathrm{a}} - \nu_0 = \nu_0\frac{E_0}{2m_{\mathrm{Fe}}c^2} = 4.7\times10^{11}\,\mathrm{Hz} \qquad ⑨$$

由⑦⑨式得，核反冲能量 $E'_{\mathrm{R}} = \frac{1}{2}m_{\mathrm{Fe}}v'^2$ 为

$$E'_{\mathrm{R}} = h\nu_{\mathrm{a}} - E_0 = \frac{E_0^2}{2m_{\mathrm{Fe}}c^2} = E_{\mathrm{R}} = 3.1\times10^{-22}\,\mathrm{J} \qquad ⑩$$

（3）由⑤⑨式有

$$\nu_{\mathrm{e}} < \nu_0 < \nu_{\mathrm{a}} \qquad ⑪$$

由题设条件知，处于第一激发态 $^{57}\mathrm{Fe}^{*}$ 能级的宽度为 Γ。静止的处于第一激发态原子核 $^{57}\mathrm{Fe}^{*}$ 跃迁到基态时发出的光子的频率 ν 处于频率范围

$$\left[\nu_{\mathrm{e}} - \frac{\Gamma}{h}, \nu_{\mathrm{e}} + \frac{\Gamma}{h}\right] \qquad ⑫$$

内，能够被另一个静止的基态原子核 $^{57}\mathrm{Fe}$ 吸收而跃迁到第一激发态 $^{57}\mathrm{Fe}^{*}$ 的光子的频率 ν' 处于频率范围

$$\left[\nu_{\mathrm{a}} - \frac{\Gamma}{h}, \nu_{\mathrm{a}} + \frac{\Gamma}{h}\right] \qquad ⑬$$

内。共振吸收能够发生的条件是频率范围⑫和⑬有重叠。频率范围⑫和⑬有重叠时应有

$$\nu_{\mathrm{e}} - \frac{\Gamma}{h} < \nu_{\mathrm{a}} - \frac{\Gamma}{h} \le \nu_{\mathrm{e}} + \frac{\Gamma}{h} < \nu_{\mathrm{a}} + \frac{\Gamma}{h}$$

考虑到⑪式可知，频率范围⑫和⑬有重叠的条件（即共振吸收能够发生的条件）是

$$\nu_{\mathrm{a}} - \frac{\Gamma}{h} \le \nu_{\mathrm{e}} + \frac{\Gamma}{h} \qquad ⑭$$

由⑥⑩⑭式得，⑭式等价于

$$\Gamma > E_{\mathrm{R}} \qquad ⑮$$

这与题给数据矛盾。实际上

$$\frac{E_{\mathrm{R}}}{\Gamma} = \frac{\frac{E_0}{2m_{\mathrm{Fe}}c^2}E_0}{3.2\times10^{-13}E_0} = 4.2\times10^{5}$$

即

$$E_{\mathrm{R}} >> \Gamma \quad （大了 5 个数量级） \qquad ⑯$$

因此不可能发生共振吸收。

（4）当原子核处于晶体中时，发射和吸收光子时晶体作为一个整体反冲，但因晶体的质量远大于原子核的质量，其反冲能量可视为零。考虑到激发能级具有一定的宽度，发射的光子和能够吸收的光子的能量都应在

$$\left[E_0 - \Gamma, E_0 + \Gamma\right] \qquad ⑰$$

范围内，或光子频率应在上下限

$$\left[\nu_0-\frac{\Gamma}{h},\nu_0+\frac{\Gamma}{h}\right] \qquad ⑰$$

之内的范围内。设晶体 A 相对于另一静止的晶体 B 以速度V（V 的正负对应于两块晶体相互接近或相互远离）运动时，当 A 发射频率为ν（在相对于 A 静止的参考系中）的光子，由于多普勒效应，B 所接收到的该光子的频率ν'为

$$\nu'=\nu\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\approx\nu(1+\beta)=\left(1+\frac{V}{c}\right)\nu$$

式中$\beta=\dfrac{V}{c}$。由此得

$$V=\left(\frac{\nu'}{\nu}-1\right)c=\left(\frac{E'}{E}-1\right)c \qquad ⑱$$

式中$E'=h\nu'$，$E=h\nu$。

在相互接近的情形下，接收到的光子频率增加，当发射的最低频率光子（对应于$E=E_0-\Gamma$）的频率因多普勒效应增加到超过最高频率（对应于$E=E_0+\Gamma$）时，共振吸收条件便无法满足。由⑱式得，V 的上限为

$$V_{\max}=\left(\frac{E_0+\Gamma}{E_0-\Gamma}-1\right)c$$

在相互远离的情形下，接收到的光子频率减小，当发射的最高频率光子（对应于$E=E_0+\Gamma$）的频率因多普勒效应减小到低于最低频率（对应于$E=E_0-\Gamma$）时，共振吸收条件便无法满足。由⑱式得，V 的下限为

$$V_{\min}=\left(\frac{E_0-\Gamma}{E_0+\Gamma}-1\right)c$$

因此，为使共振吸收发生，V 应处于下述范围内

$$|V|\le\frac{2\Gamma}{E_0-\Gamma}c\approx\frac{2\Gamma}{E_0}c=0.19\,\mathrm{mm\cdot s^{-1}} \qquad ⑲$$

上述分析表明， 通过使吸收晶体体以一定速度运动可补偿待测光子频率的变化；当速度合适时，恰好可实现共振吸收。只要不断地改变速度并测量吸收，就能通过达到共振吸收时速度的改变量来判断频率的变化，从而达到测量光子频率微小变化的目的。假设由于某种原因，到达吸收晶体处的光子频率ν相对于ν_0发生了相对变化$\dfrac{\nu-\nu_0}{\nu_0}=\pm1\times10^{-10}$，可让吸收晶体以一定的速度$V'$（$V'$的正负表示晶体速度方向与光子运行方向相反或相同）运动，以补偿光子频率的上述变化，从而实现共振吸收，以精确测量光子频率的微小变化。为了使待测光子的频率ν在吸收晶体自身参考系中变为ν_0，由多普勒效应公式⑱，所需的吸收晶体的运动速度为

$$V'=-\frac{\nu-\nu_0}{\nu}c\approx-\frac{\nu-\nu_0}{\nu_0}c=\mp1\times10^{-10}c=\mp3\ \mathrm{cm\cdot s^{-1}} \qquad ⑳$$

通过测量达到共振吸收时吸收晶体的速度，就能够测出光子频率的改变量。

评分标准：本题 40 分。

第（1）问 12 分，①②③④⑤⑥式各 2 分；

第（2）问 8 分，⑦⑧⑨⑩式 各 2 分；

第（3）问 12 分， ⑫⑬式各 2 分，⑭式 3 分，⑮⑯式各 2 分，结论为“不可能发生共振吸收”给 1 分；

第（4）问 8 分，⑰⑱⑲⑳式各 2 分。