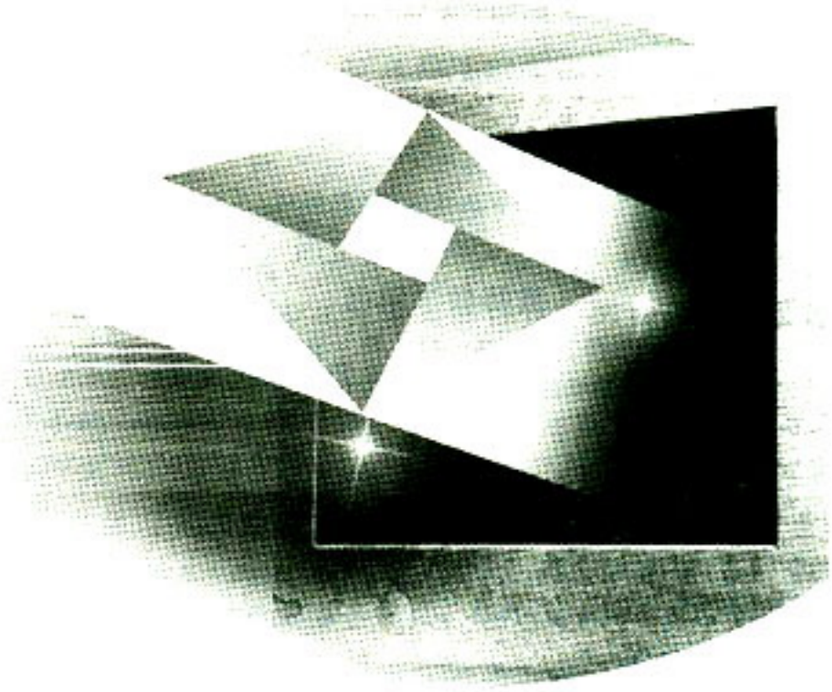
义务教育课程标准实验教科书

数学　八年级　上册

教师教学用书

课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心　编著



人民教育出版社

主　　编：林　群
副 主 编：田载今　薛　彬

本册主编：薛　彬　叶尧城
主要编者：田载今　左怀玲　薛　彬　李海东　林立军
　　叶尧城　邓泾河　万新才　南秀全　孙建伟
　　罗昭旭　郭茂荣　吴明龙
责任编辑：李海东

义务教育课程标准实验教科书
数学　八年级　上册
教师教学用书
课 程 教 材 研 究 所
中学数学课程教材研究开发中心　编著

人民教育出版社出版发行
（北京沙滩后街55号　邮编：100009）
网址：http://www.pep.com.cn
人民教育出版社印刷厂印装　全国新华书店经销

开本：787毫米×1 092毫米　1/16　印张：23　字数：491 000
2005年6月第1版　2005年7月第1次印刷
ISBN 7-107-18642-6/G·11732（课）　定价：24.70元
如发现印、装质量问题，影响阅读，请与出版社联系调换
（联系地址：北京市方庄小区芳城园三区13号楼　邮编：100078）

说明

人教版义务教育课程标准实验教材数学（七～九年级），是以教科书为基础的系列化教材，包括基本教材和配套教学资源．基本教材是教科书和教师教学用书；配套教学资源包括学生学习参考用书、自读课本、素质教育新学案、学具、教学设计与案例、教学投影片等．

人教版《义务教育课程标准实验教科书·数学（七～九年级）》是根据教育部制订的《全日制义务教育数学课程标准（实验稿）》编写的，全套书分为六册，每学期一册．内容包括“数与代数”“空间与图形”“统计与概率”“实践与综合应用”四个领域，在体系结构的设计上力求反映这些内容之间的联系与综合，使它们成为一个有机的整体，其中对于“实践与综合应用”领域的内容，以“课题学习”和“数学活动”等形式分散地编排于各章之中．

本套教科书在体例安排上有如下特点：

1．每章开始均配有反映本章主要内容的章前图和引言，可供学生预习用，也可作为教师导入新课的材料．

2．正文中设置了“观察”“思考”“探究”“讨论”“归纳”等栏目，栏目中以问题、留白或填空等形式为学生提供思维发展、合作交流的空间．

3．适当安排了“观察与猜想”“实验与探究”“阅读与思考”“信息技术应用”等选学栏目，为加深对相关内容的认识，扩大学生的知识面，运用现代信息技术手段学习等提供资源．

4．正文的边空设有“小贴示”和“云朵”，“小贴示”介绍与正文内容相关的背景知识，“云朵”中是一些有助于理解正文的问题．

5．每章安排了几个有一定综合性、实践性、开放性的“数学活动”，学生可以结合相关知识的学习或全章的复习有选择地进行活动，不同的学生可以达到不同层次的结果；“数学活动”也可供教师教学选用．

6．每章安排了“小结”，包括本章的知识结构图和对本章内容的回顾与思考．

7．本书的习题分为练习、习题、复习题三类．练习供课上使用，有些练习是对所学内容的巩固，有些练习是相关内容的延伸；习题供课内或课外作业时选用；复习题供复习全章时选用．其中习题、复习题按照习题的功能分为“复习巩固”“综合应用”“拓广探索”三类．

这套教师教学用书与《义务教育课程标准实验教科书·数学（七～九年级）》相对应，供教师教学参考使用．全套书分为六册，每册书按章编排，每章内容与相应教科书内容对应．教师教学用书的每一章主要包括以下六部分：

第一部分是总体设计，包括本章的课程学习目标、知识结构框图、内容安排、课时安排、学法教法建议等内容．

第二部分印有教科书的相应章节正文，正文旁印有教科书正文的注释及教科

书中练习的答案和说明，正文下部按小节分条阐述各小节编写意图、学生学习过程中可能出现的困难和问题、教学建议等.

第三部分是本章习题的参考答案.

第四部分提供了几个教学案例，供教师教学时参考. 每一个教学案例是一个课时的课堂教学设计，内容包括教学任务分析、教学流程安排、教学过程设计、教学设计说明等几方面.

第五部分是拓展资源. 根据每章的教学内容，为教师提供相应的拓展资料，包括知识内容的拓广延伸和相关史料、拓展性问题、数学活动等.

第六部分是评价建议和测试题. 评价建议从知识技能、数学能力、情感态度等几方面为教师提出本章评价建议，并提供了一套测试题供参考，并说明了每道测试题的设计意图、评分标准等.

本书是八年级上册的教师教学用书，内容包括“一次函数”“数据的描述”“全等三角形”“轴对称”“整式”五章，各章授课时间大致分配如下（仅供参考）：

第十一章	一次函数	15 课时
第十二章	数据的描述	12 课时
第十三章	全等三角形	10 课时
第十四章	轴对称	12 课时
第十五章	整式	13 课时

除已列出的主要编写者外，参加本册教师教学用书编写、讨论的还有雷宗刚、范海进、刘吉冬、邓明凤、胡华、吴青云、易爱华、汪彬、杨田、曾庆丰、赵小平、卢贤华、张成国、严博文、吕中浩、邵明武、李华斌、周军高、胡雄华、曹丽娟、谭春玲等.

本书在编写过程中征求了全国各地部分教师和教研人员的意见，在此表示衷心感谢.

课 程 教 材 研 究 所
中学数学课程教材研究开发中心

2005 年 4 月

第十一章　一次函数

Ⅰ　总体设计

一、课程学习目标

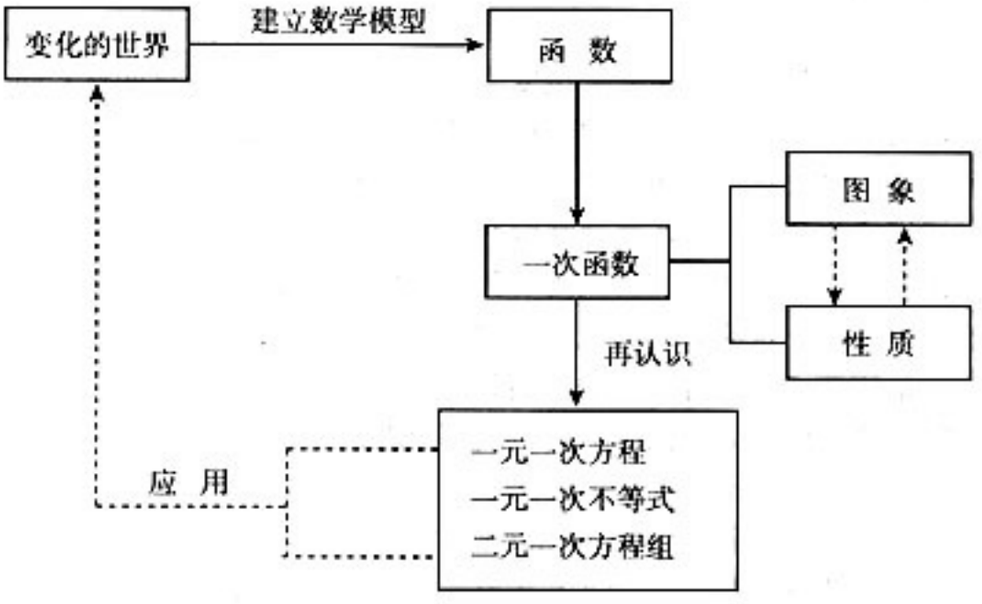
1. 以探索实际问题中的数量关系和变化规律为背景，经历“找出常量和变量，建立并表示函数模型，讨论函数模型，解决实际问题”的过程，体会函数是刻画现实世界中变化规律的重要数学模型.

2. 结合实例，了解常量、变量和函数的概念，体会“变化与对应”的思想，了解函数的三种表示方法（列表法、解析式法和图象法），能利用图象数形结合地分析简单的函数关系.

3. 理解正比例函数和一次函数的概念，会画它们的图象，能结合图象讨论这些函数的基本性质，能利用这些函数分析和解决简单实际问题.

4. 通过讨论一次函数与方程（组）及不等式的关系，从运动变化的角度，用函数的观点加深对已经学习过的方程（组）及不等式等内容的认识，构建和发展相互联系的知识体系.

二、本章知识结构框图



三、内容安排

本章的主要内容包括：变量与函数的概念，函数的三种表示法，正比例函数和一次函数的概念、图象、性质和应用举例，用函数观点再认识一元一次方程、一元一次不等式和二元一次方程组.

世界是运动变化的，函数是研究运动变化的重要数学模型，它来源于客观实际又服务于客观实际．本章中实际问题贯穿于始终，它们中有些是作为函数的实际背景为学习抽象概念服务的，有些

是作为应用举例体现函数的广泛的应用性，并为培养应用数学解决实际问题的意识和能力服务的．在建立和运用函数这种数学模型的过程之中，变化与对应的思想是重要的基础，所谓变化与对应的思想包括两个基本意思：（一）世界是变化的，客观事物中存在大量的变量；（二）在同一个变化过程中，变量之间不是孤立的，而是相互联系的，一个变量的变化会引起其他变量的相应变化，这些变化之间存在对应关系．以上两点正是本章内容中蕴涵的基本思想．函数是从数量角度反映变化规律的数学模型，而变化规律表现在变量（自变量与函数）之间的对应关系上，即通过数或形定量地描述这种对应关系．因此，函数是体现运动与对应思想的基本数学概念．

人的认识过程是波浪式前进、螺旋式上升的．学习数学中的一个重要的基本概念，需要分阶段地完成，逐步深化认识程度．本套教科书将对代数函数的学习分三章安排，即八年级上学期学习第十一章“一次函数”，八年级下学期学习第十七章“反比例函数”，九年级下学期学习第二十六章“二次函数”．在学习这些内容之前，分别安排了学习一次方程（组）、分式方程和一元二次方程，即按代数运算类型划分阶段，将函数作为方程的后续内容．本章是学习函数的第一阶段，其教学目标如前所述，重点在于初步认识函数概念，并具体讨论最简单的初等函数——一次函数．

本章在学生对一元一次方程、二元一次方程组和一元一次不等式等以一次（线性）运算为基础的数学模型的已有认识上，从变化和对应的角度，对一次运算进行更深入的讨论．

教科书在进入专门对一次函数的讨论之前，安排学生先了解函数的一般概念．第 11.1 节首先从 5 个具有实际背景的问题入手，引导学生通过填表和列式表示问题中相关的量，从中认识常量和变量的主要特征，学会区别它们．接着，教科书通过“归纳”栏目总结出这些问题中变量间关系的共同特点，即问题中的两个变量互相联系，当其中一个变量取定一个值时，另一变量有唯一确定的对应值．教科书又继续用心电图、人口统计表等问题对这种变化与对应关系进行了补充和强化，这也为后面的函数表示法写下伏笔．在此基础上，教科书第一次给出了函数的一般概念以及自变量、函数值等概念．教科书中给出的函数定义是突出变化与对应的，其中主要有两层意思：（一）两个变量互相联系，一个变量变化时另一个变量也发生变化；（二）函数与自变量之间是单值对应关系，自变量的值确定后，函数的值是唯一确定的．这是关于函数的最基本、最朴素的刻画．这一节的最后部分重点讨论了函数图象的概念，图象是直观地描述和研究函数的重要工具．三种常见的函数表示法，即列表法、解析式法和图象法，是反映函数关系的三种不同形式．

在对函数概念初步讨论后，教科书转入对一种具体的初等函数的讨论，第 11.2 节的标题“一次函数”点出了这一节的核心对象．人们认识事物往往经历从特殊到一般的过程，这一节首先从讨论正比例函数开始，正比例函数是特殊的一次函数，即 $y=kx+b$ 中 $b=0$ 的类型．对正比例函数的定义、图象和性质的讨论，可以为讨论一般的一次函数奠定基础．本节教科书注意了引导学生从特殊到一般地认识问题，特别是讨论一次函数的图象时，教科书先对比函数 $y=kx+b$ 和 $y=kx$ 的区别，由直线 $y=kx$ 的平移变换过渡到直线 $y=kx+b$，然后再得出由两点确定直线的一般方法．采用这种处理方式能够展示解决问题的一种基本策略，即“先特殊化、简单化，再一般化、复杂化”的做法．本节的最后部分，通过例题以解析式、图象和列表等不同形式，讨论了一次函数本身以及它的应用，初步反映了以一次函数为数学模型解决实际问题的过程．

在学习过程中，人们需要不断地提高认识问题的水平．本章最后的第 11.3 节“用函数观点看方程（组）与不等式”，从函数的角度对前面学习过的一元一次方程、一元一次不等式和二元一次方程组重新进行了分析，这种再认识不是原来水平上的回顾复习，而是站在更高的起点上的动态分析．用一次函数可以把上述三个不同的数学对象统一起来认识，由此可见函数的重要性．“水涨船高”，随着知识积累的增加，认识事物的水平也会相应提高．“站得高看得远”，通过学习本节内

容，不仅可以加深对方程（组）与不等式等数学对象的理解，而且可以加大对已经学过的相关内容之间的联系的认识，加强知识间横纵向的融会贯通，提高灵活地分析解决问题的能力．这也从一个侧面反映了函数概念的作用.

本章的数学活动中，安排了根据表格中实际问题的数据信息用函数进行预测估计或选择方案的问题．安排这些问题的目的在于：一方面通过实际生活中的问题，进一步突出函数这种数学模型应用的广泛性和有效性；另一方面使学生能在解决实际问题的情境中运用所学数学知识，进一步提高分析问题和解决问题的综合能力．本章在学生已有的建立方程或不等式这样的数学模型的基础上，继续重视数学与实际的关系，在建立函数这种应用更广泛的数学模型的过程中继续体现建模思想.

此外，教科书对于数学与其他科学技术的联系也予以关注．例如，“阅读与思考　科学家如何测算地球的年龄”中，介绍了放射性物质蜕变过程中指数函数变化曲线对确定半衰期的作用等．编者希望学生通过学习本章不仅进一步学习数学，而且也能扩大对相关科技知识的了解.

四、课时安排

本章教学时间约需 15 课时，具体分配如下（仅供参考）：

11.1　变量与函数	5 课时
11.2　一次函数	5 课时
11.3　用函数观点看方程（组）与不等式	3 课时
数学活动	
小结	2 课时

五、学法教法建议

1．重视数学概念中蕴涵的思想，注意从运动变化和联系对应的角度认识函数

数学是以数量关系和空间形式为主要研究对象的科学，数量关系和空间形式是从现实世界中抽象出来的，世界永远是处于运动变化之中的，因此无论是数量关系中还是空间形式中都充满了有关运动变化的问题．函数正是研究运动变化的重要数学模型，它反映的是变量之间的对应规律，它对研究数量关系的作用是十分显然的．由于空间形式可以代数化（解析几何的产生就是典型例证），所以在对于空间形式的研究中函数也能发挥巨大作用，数学史的发展对此有充分的证明，函数在当今数学的各个领域都是极为重要的角色.

函数概念来源于客观实际需要，也来自数学内部发展的需要．它是以变化与对应的思想为基础的数学概念．怎样认识函数概念呢？学习函数概念不能只注重背记定义而不关注它的实质，要使学生理解定义的真正含义，即函数概念的实质就是运动变化与联系对应．使学生了解对于许多客观事物必须从运动变化的角度研究，许多问题中的各种变量是相互联系的，变量之间存在对应规律．变量的值之间存在对应关系，其中就有单值对应关系，刻画这种关系的数学模型就是函数．本章所讨论的是最简单、最基本的函数，但是函数不分简单还是复杂在本质上都是上面所说的那样的数学模型．作为关于函数的初始教学，应有意识地体现函数的本质，这正是本章内容中蕴涵的基本思想．当然，对于运动变化与联系对应的思想的认识也是需要逐步理解的，所以教学中应注意在不同阶段对这一思想的渗透和介绍要有不同的做法和要求，要逐步深化，要从具体到抽象，从特殊到一般地引导学生认识它.

本套教科书在本章中首次正式出现函数概念，通过本章教学，学生应对函数形成初步的正确认识，即认识到虽然函数的表示方法有多种，不同问题所对应的函数的具体形式可以形形色色，但是

各种函数都是反映变化规律的数学工具．现在学习的函数都是刻画同一个变化过程中两个变量之间的对应关系的模型．对于同一类问题可以用同一类函数进行研究（例如用一次函数研究线性规划问题）．

2. 借助实际问题情境，由具体到抽象地认识函数；通过函数应用举例，体现数学建模思想

现实中存在大量问题涉及具有简单函数关系的变量．其中许多问题中的数量关系是一次（也称线性）的．这为学习本章内容提供了大量的现实素材．在本章教科书中，实际问题情境多次出现．其作用主要体现在以下方面：

（一）引入或解释函数等概念．例如通过候鸟飞行问题引入正比例函数，通过登山问题引入一次函数，通过第 11.1 节中一系列具体例子解释变量间的对应关系等．这样做的目的是借助直观的、具体的事物为理解抽象的内容服务．

（二）作为函数的应用举例．例如第 11.1 节中例 4 的水位预测，第 11.2 节中例 6 的运输规划等，体现数学建模思想，反映函数的广泛应用性．

本章明确提出“为了更深刻地认识千变万化的世界，人们经归纳总结得出一个重要的数学工具——函数，用它描述变化中的数量关系．函数的应用极其广泛．”在本章的教学和学习中，要充分注意有关现实背景，通过它们反映出函数来自实际又服务于实际，加强对函数是解决现实问题的一种重要数学模型的认识．

找出问题中相关变量之间的关系，并以数学形式表现这种关系，是本章中用数学模型表示和解决实际问题的关键步骤，而正确地理解问题情境是基础．在本章的教学和学习中，可以从多种角度思考，借助图象、表格、式子等进行分析，寻找变量之间的关系，检验所建立的函数的合理性．教师还可以结合实际情况选择更贴近学生生活的各种问题，引导学生用函数分析解决它们．

3. 重视数形结合的研究方法

本章所讨论的对象是函数，函数的表示法之一是图象法，即通过坐标系中的曲线上点的坐标反映变量之间的对应关系．这种表示方法的产生，将数量关系直观化、形象化，提供了数形结合地研究问题的重要方法，这在数学发展中具有重要地位．恩格斯说：“笛卡儿变数的出现，是数学中的一个转折点，从此运动和辩证法进入了数学．”

在本章的教学和学习中，不能仅仅着眼于具体题目的解题过程，而应不断加深对相关数学思想方法的领会，从整体上认识问题的本质．以前我们曾多次提到数学思想方法是通过数学知识的载体来体现的，而对于它们的认识需要一个较长的过程，既需要教材的渗透，也需要教师的点拨，最后还需要学生自身的感受和理解．结合本章内容可以对数形结合的方法顺势自然地理解，并逐步加以灵活运用，发挥从数和形两个方面共同分析解决问题的优势．教学过程中，在函数解析式与图象的结合方面应有细致的安排设计，注意两者的互补作用，体现两者的联系，突出两者间的转化对分析解决问题的特殊作用．学习了本章之后不仅要知道有关函数的图象，更要体验图象的作用和数形结合的方法．数学思想方法是具体的数学知识的灵魂，数学思想方法对一个人的影响往往要大于具体的数学知识．

4. 加强对知识之间内在联系的认识，体会函数观点的统领作用

设计本章教科书的内容和结构时，注意了函数与以前所学习的其他代数知识的关系，力求能够在构建和发展一个较好的知识体系方面起到一定引导作用．为此，本章安排了第 11.3 节“用函数观点看方程（组）与不等式”，用函数的观点对前面学习过的一元一次方程、一元一次不等式和二元一次方程组重新进行了分析．教学中应能感受到这种再认识不是原来水平上的简单复习，而是站在更高处的俯瞰．教师需要明确安排这一节的目的，把握这些内容的要求尺度．教科书的设计者希

望能通过这些内容的教学，加强知识间横向和纵向的联系，发挥函数对相关内容的统领作用，使学生能用一次函数可以把以前学习的方程和不等式等不同的数学对象统一起来认识，逐步达到新旧知识的融会贯通，进一步体验函数的重要性，提高灵活地分析解决问题的能力.

由于本章最后部分是以新带故的内容，其中多数内容学生并不生疏，所以这部分内容很适合探究式学习方式，希望教学中注意加强学习的主动性，注意鼓励学生积极探究，教师设计必要的铺垫以便更好地启发诱导，让学生能在经过自己的分析来体验知识间的内在联系.

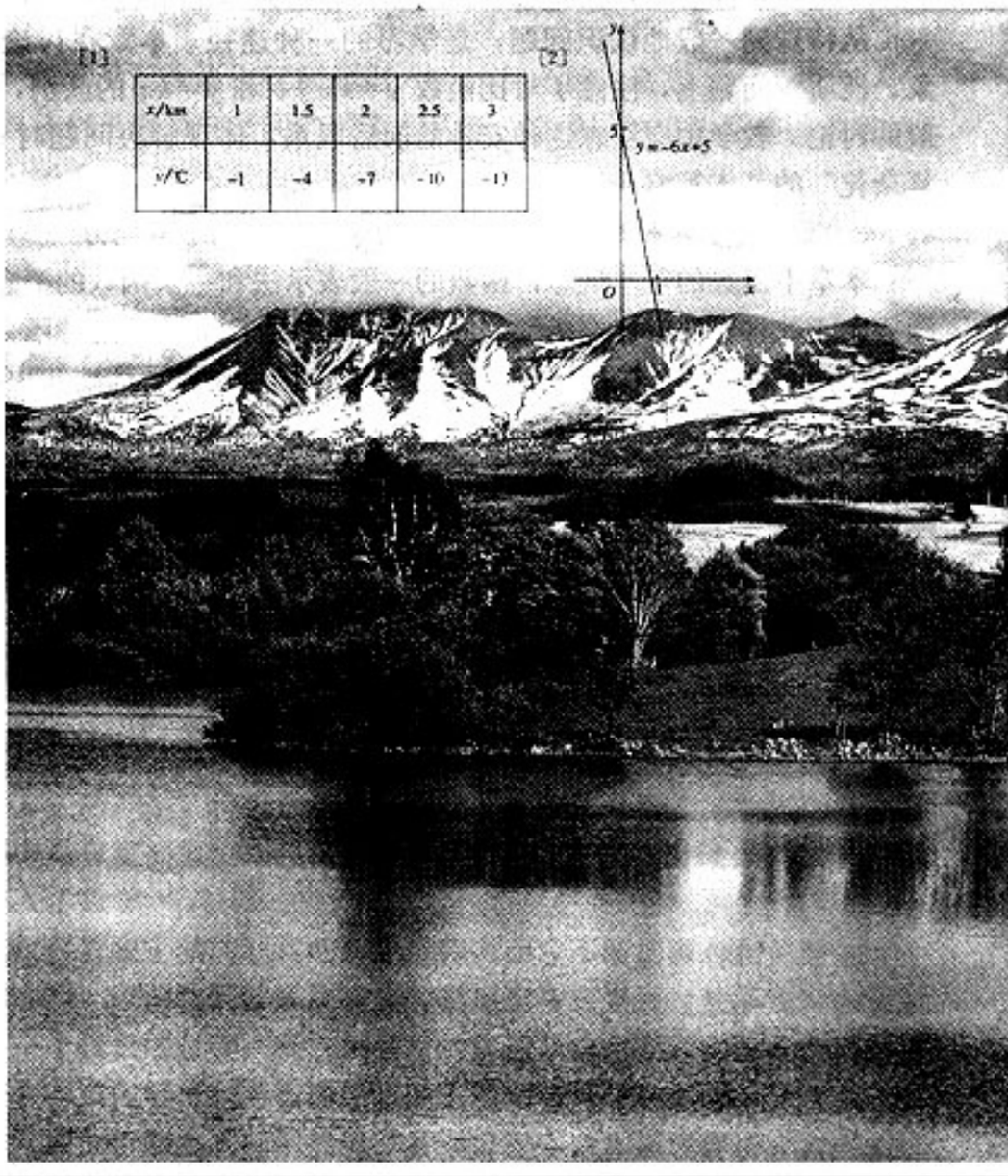
从特殊到一般地认识问题，是学习的一种途径．本章在讨论一次函数时，在函数解析式、图象、性质等问题上，注意了对比函数 $y=kx+b$ 和 $y=kx$ 的区别，并对这些问题进行了由特殊到一般的讨论．教学中应注意这种安排的前后联系，体现解决问题时“先特殊化、简单化，再一般化、复杂化”的基本策略.

5. 注重对于基础知识和基本技能的掌握，提高基本能力

本章中函数的基本概念，函数的一般表示法和一次函数的概念、图象、性质等是基础知识；会画一次函数（包括正比例函数）的图象，能结合图象讨论这些函数的基本性质等是基本技能；能利用这些函数分析和解决简单实际问题是基本能力．对于基础知识和基本技能的掌握和提高基本能力，都应在教学中得到落实．例如，第 11.1 节中对于描点法画函数图象的一般步骤进行了归纳，这对后续学习很重要，应使学生熟悉它．又如，一次函数 $y=kx+b(k\neq0)$ 中 k 的正负对函数的增减性（图象的升降）的影响等，属于一次函数的基本性质，应使学生从数形两方面理解它们.

Ⅱ 教材分析

第十一章 一次函数



[1] 这幅章前图的画面有近处的绿洲和远处雪山，它与本章第 11.2 节中的登山问题互相呼应. 自然界中，随着海拔的升高，气温下降. 气温的值 y 与海拔的改变量 x 之间具有一次函数关系.

[2] 这个表格和图象是对本章第 11.2 节中的登山问题中一次函数关系的两种描述方式.

1. 函数是重要的数学概念，它有广泛的应用，在义务教育阶段的数学课程中占重要地位. 函数解析式属于代数式（式子中不含有加、减、乘、除、乘方和开方之外的运算）的函数，叫做代数函数. 在本套教科书中有关代数函数的内容出现的先后顺序是：第 11 章 一次函数（八年级上），第 17 章 反比例函数（八年级下），第 26 章，二次函数（九年级下）. 学生在初中阶段对函数的认识也是逐步深入的.

2. 多项式函数一般按照其中自变量（元）的个数和自变量的最高次数（指数）分类，这与方程的分类类似. 按照课程标准，初中阶段所学习的代数函数包括：一次函数（含正比例函数），反比例函数和二次函数. 它们分别对应一次、负一次和二次解析式. 此外，还学习锐角三角函数，但锐角三角函数属于超越函数（三角运算不属于代数运算）.

3. 本章的第一节介绍一般函数的概念，第



11

11.1 变量与函数

11.2 一次函数

11.3 用函数观点看方程(组)与不等式

"万物皆变"——行星在宇宙中的位置随时间而变化；人体细胞的个数随年龄而变化；气温随海拔而变化；汽车行驶里程随行驶时间而变化……这种一个量随另一个量的变化而变化的现象大量存在.

为了更深刻地认识千变万化的世界，人们经归纳总结得出一个重要的数学工具——函数，用它描述变化中的数量关系.[1] 函数的应用极其广泛.

什么是函数？本章将通过具体问题引导你认识它，并且讨论一类最基本的函数——一次函数及其简单应用，最后用函数的观点再次认识方程(组)与不等式.[2]

[1] 函数是反映变量间一种特殊关系——单值对应关系的数学模型. 所谓单值对应关系，即对于自变量的每一个确定的值，另一变量有唯一确定的对应值.

[2] 本章以一次函数为核心内容，并通过一次函数对一次方程和不等式进行再认识.

二节是核心内容一次函数，第三节是应用一次函数对相关知识进行再认识.

4. 本章也可以用学生感兴趣的其他实际问题引入. 作为引入函数的实际问题背景应该是学生比较熟悉的，其中含有两个变量，可以分别它们设为 x，y. 当变量 x 每取定一个值后，变量 y 有唯一的对应值.

5. 本章教科书在编写时非常重视以下两点：

(1) 函数概念是重要的数学概念，对于它的理解需要经历较长的过程，初步认识它时应注意结合简单的例子；

(2) "变化与对应"思想是隐含于函数概念中的基本思想，用函数观点可以对数学中的许多内容加深认识，从本章起教科书将注意适当运用函数观点分析有关问题.

[1] 这里的几个问题是为引出常量与变量的概念而设计的，也是为后面学习函数概念作准备的.

[2] 匀速运动中，路程＝速度×时间，这里题目要求先填表，后写解析式，与后面的函数表示法相呼应.

[3] 弹簧原长指不挂重物时弹簧的长度. 挂重物后弹簧在原长的基础上伸长，伸长量与重物的重量成正比例.

[4] 这里要求写成 $r=\sqrt{\frac{S}{\pi}}$ 的形式，只写出 $S=\pi r^2$ 或 $r^2=\frac{S}{\pi}$ 的形式不合乎表示 r 的要求.

[5] 这里需要先用含 x 的式子表示长方形的宽度，然后再表示面积.

11.1 变量与函数

11.1.1 变量

先请思考下面几个问题：[1]

(1) 汽车以 60 千米/时的速度匀速行驶，行驶里程为 s 千米，行驶时间为 t 小时，先填下面的表，再试用含 t 的式子表示 s.[2]

t / 时	1	2	3	4	5
s / 千米					



(2) 每张电影票的售价为 10 元，如果早场售出票 150 张，日场售出票 205 张，晚场售出票 310 张，三场电影的票房收入各多少元？设一场电影售出票 x 张，票房收入为 y 元，怎样用含 x 的式子表示 y？

(3) 在一根弹簧的下端悬挂重物，改变并记录重物的质量，观察并记录弹簧长度的变化，探索它们的变化规律. 如果弹簧原长10 cm，[3]每1 kg重物使弹簧伸长0.5 cm，怎样用含重物质量 m(单位：kg)的式子表示受力后的弹簧长度 l(单位：cm)？

(4) 要画一个面积为10 cm² 的圆，圆的半径应取多少？圆面积为20 cm² 呢？怎样用含圆面积 S 的式子表示圆半径 r？[4]

(5) 如图 11.1-1，用10 m长的绳子围成长方形. 试改变长方形的长度，观察长方形的面积怎样变化. 记录不同的长方形的长度值，计算相应的长方形面积的值，探索它们的变化规律. 设长方形的长为 x m，面积为 S m²，怎样用含 x 的式子表示 S？[5]

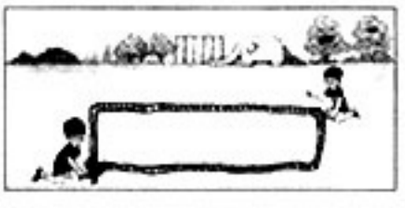


图 11.1-1

这些问题反映了不同的事物的变化过

1. 本节分为三个小节，即 11.1.1 变量，11.1.2 函数，11.1.3 函数的图象. 其中，函数的一般概念，即变化与对应意义下的函数定义是本节的重点.

2. 本节最前面的 5 个问题中都含有变量之间的单值对应关系，通过讨论这些问题不仅可以引出常量与变量的概念，而且也为后面引出变量间的单值对应关系进而学习函数的定义作了铺垫. 这种从实际问题出发开始讨论的方式，出于从具体到抽象地认识事物的考虑. 这 5 个问题的内容有物理问题、销售问题、几何问题等，问题的形式有填表、求值、写解析式等，这些都与后续讨论有联系。对如何发挥这些问题的作用，教学中应通盘规划，对如何使用这些例子作出整体安排，使其前后衔接. 围绕学生比较熟悉其背景几个例子，系统地认识有关概念，有助于认识相关概念之间的联系和区别.

3. 对于函数概念的学习，需要经历从具体

程，其中有些量（例如时间 t，里程 s；售出票数 x，票房收入 y……）的值是按照某种规律变化的. 在一个变化过程中，我们称数值发生变化的量为**变量**（variable）. 有些量的数值是始终不变的，例如上面问题中的速度 60（单位：千米/时），票价 10（单位：元）……绳长10（单位：m）以及长方形的长宽之和 5（单位：m），我们称它们为**常量**（constant）.[1]

思考

具体指出上面的各问题中，哪些量是变量，哪些量是常量.

练习

举出一些变化的实例，指出其中的常量与变量.

11.1.2 函数

11.1.1 的每个问题中是否各有两个变量？[2] 同一个问题中的变量之间有什么联系？

在问题（1）中，观察填出的表格，你会发现：每当行驶时间 t 取定一个值时，行驶里程 s 就随之确定一个值，例如 $t=1$，则 $s=60$；$t=2$，则 $s=120$……$t=5$，则 $s=300$.

问题（2）中，经计算可以发现：每当售票数量 x 取定一个值时，票房收入 y 就随之确定一个值，例

[1] 一般地，常量是不发生变化的量，变量是发生变化的量，这些都是针对某个变化过程而言的. 特别地，有时也可以把常量当作特殊的变量，例如对于 $y=1$（x 是任意实数），也称 y 是 x 的函数（常值函数）. 这里认为 y 是总取同一个值的变量. 当然，在本节中不宜过早地提及常量可当作特殊的变量，以免混淆常量与变量的区别.

练习答案

略.

[2] 本章讨论的都是一元函数，即问题中有两个变量相关，其中一个变量为自变量，另一个变量是自变量的函数.

到抽象的认识过程。其中的关键是认识变量之间的单值对应关系. 当一个变量取定一个值时，单值对应有两重含义：（一）另一变量有对应值；（二）对应值只有一个. 为此，应通过不同形式，包括观察表格、解析式和图象中不同变量的取值等，体会相关变量之间的对应关系. 当我们考虑单值对应关系时，对于两个相关变量往往不是同等对待的，而是先对其中一个赋值，再考虑另一个的对应值，如果后者对前者的每一取值都有对应值，并且每次的对应值只有一个，则称后者对前者单值对应. 这时称前者为自变量，后者为前者的函数，也称两者具有函数关系. 有些问题中，例如当 $y=2x$ 时，先考虑两个变量中的任何一个的取值，另一个变量都是函数，即两者互为对方的函数，$y=2x$ 且 $x=\frac{y}{2}$. 但是，不是所有具有函数关系的两个变量都互为函数，例如当 $y=x^2$ 时，y 对 x 单值对应，它是 x 的函数；而

[1] 填空答案：

$\sqrt{\frac{10}{\pi}}$，$\sqrt{\frac{20}{\pi}}$，$\sqrt{\frac{S}{\pi}}$.

[2] 填空答案：

1，2，2.5，3；

4，6，6.25，6

[3] 填空答案：

$x(5-x)$

或 $5x-x^2$.

[4] 这个归纳要引导学生概括出单值对应关系，即填出“有唯一确定的对应值”.

如早场 $x=150$，则 $y=1\,500$；日场 $x=205$，则 $y=2\,050$；晚场 $x=310$，则 $y=3\,100$.

问题（3）中，通过试验可以看出：每当重物质量 m 取定一个值时，弹簧长度 l 就随之确定一个值. 如果弹簧原长10 cm，每1 kg重物使弹簧伸长0.5 cm，那么当 $m=1$ 时，$l=10.5$. 当 $m=10$ 时，l 等于多少？

问题（4）中，你容易算出：[1]当 $S=10\ cm^2$ 时，$r=$____cm；当 $S=20\ cm^2$ 时，$r=$____ cm. 每当 S 取定一个值时，r 随之确定一个值. 你能得出：两者的关系为 $r=$____.

问题（5）中，我们可以根据下表中给出的数值确定长方形一边的长，得出另一边的长，计算长方形的面积，填表并探索变量间的关系.[2]

长 x / m	4	3	2.5	2
宽 $(5-x)$ / m				
面积 S / m^2				

每当长方形长 x 取定一个值时，面积 S 就随之确定一个值，$S=$_____.[3]

归纳[4]

上面每个问题中的两个变量互相联系，当其中一个变量取定一个值时，另一个变量就_____.

在一些用图或表格表达的问题中，也能看到两个变量间上面那样的关系.

x 对 y 不是单值对应（如对于 $y=4$，x 有两个对应值±2），它不是 y 的函数.

本章教学中，一般讨论问题时都已确定了哪个变量为自变量，所以不需要讨论两个变量是否都可以作为自变量的问题.

4. 本章教科书除特别指出要讨论自变量的取值范围的具体问题之外，一般不对函数定义域（自变量取值范围）作正式讨论，只是突出变量间的单值对应. 这样安排是为了降低初学函数阶段的难度，保证重点知识的落实.

5. 本节的难点是由于函数概念的含义比较抽象、深刻，往往不能一下子就能从其定义的文字真正地理解它. 突破难点的办法是由具体例子逐步过渡到抽象定义，教学中开始阶段不应急于给出定义，而需要让学生经历分析具体问题中变量如何单值对应的过程，通过对多个问题的分析，归纳出各问题中都具有相关的两个变量，这样的变量间都具有一个随另一个而变，而且对应

[1]

观察

(1) 图 11.1-2 是体检时的心电图，其中横坐标 x 表示时间，纵坐标 y 表示心脏部位的生物电流，它们是两个变量. 在心电图中，对于 x 的每一个确定的值，y 都有唯一确定的对应值吗？



图 11.1-2

(2) 在下面的我国人口数统计表中，年份与人口数可以记作两个变量 x 与 y，对于表中每一个确定的年份 (x)，都对应着一个确定的人口数 (y) 吗？

中国人口数统计表

年 份	人口数/亿
1984	10.34
1989	11.06
1994	11.76
1999	12.52

一般地，在一个变化过程中，如果有两个变量 x 与 y，并且对于 x 的每一个确定的值，y 都有唯一确定的值与其对应，那么我们就说 x 是**自变量** (independent variable)，y 是 x 的**函数** (function). 如果当 $x=a$ 时 $y=b$，那么 b 叫做当自变量的值为 a 时的**函数值**. [2]

可以认为：前面问题 (1) 中，时间 t 是自变量，里程 s 是 t 的函数，$t=1$ 时的函数值 $s=60$，$t=2$ 时的函数值 $s=120$，$t=2.5$ 时的函数值 $s=$ ____ [3]……同样地，在心电图中，时间 x 是自变量，心脏电流 y 是 x

[1] 这个“观察”栏目中安排了图象和表格的内容，目的在于展现变量间单值对应的不同形式，使学生对于函数概念有较全面的认识.

心电图是医学检查中用仪器记录心脏跳动状况的曲线，其中每个点的横纵坐标是有单值对应关系的两个变量.

[2] 函数的定义中包括了对应值的存在性和唯一性两重意思. 函数是对变量而言的，函数值是对具体数值而言的.

[3] 填空答案：150.

值是唯一确定的这种对应关系，在具体经验积累到一定程度的基础上，再给出定义，并说明定义是对具有上述对应关系的变量的描述，是对相关的两个变量的命名. 其中在变化过程中居于主导地位的变量叫做自变量，随之变化且对应值有唯一确定性的另一个变量叫做函数. 有了定义的文字后，还需要适当地再用具体例子对应文字加以解释. 这个认识过程需要一个较长的时间，教学中需要安排活动，反复加深对函数概念的理解.

6. 学生开始学习本节时，对于常量与变量比较容易区分，但是对于函数与函数值可能发生混淆，教学中需要引导学生认识到两者的区别，函数是变量，例如 $y=2x$，y 是可以随 x 的变化而变化的量，变量 y 是变量 x 的函数；函数值是变量所取的某个具体数值，一个函数可能有许多不同的函数值，例如当 $x=1$ 时，函数 $y=2x$ 的函数值等于 2，当 $x=-1$ 时，函数 $y=2x$ 的函数值等于 -2. 通过类似这样的具体例子，可

[1] 填空答案：12.25.

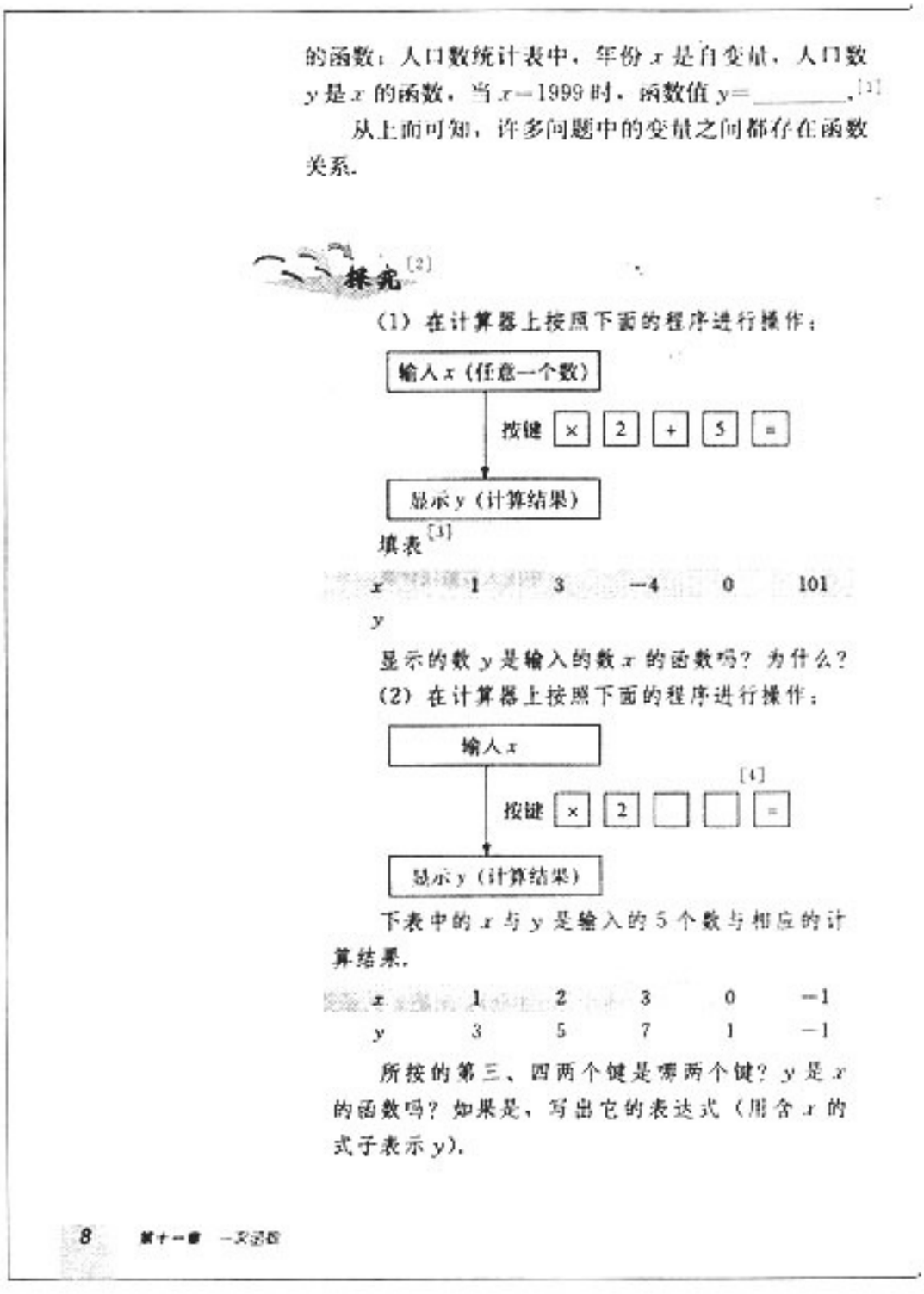
[2] 这个“探究”栏目将使用计算器与学习函数概念结合起来，其中（1）通过观察计算器显示的结果，认识变量间的单值对应关系；（2）又增加了填写计算程序的内容，这可以为以后的由对应值写函数解析式作准备.

[3] 填空答案：

7，11，−3，5，207.

[4] 填空答案：

+，1.



的函数；人口数统计表中，年份 x 是自变量，人口数 y 是 x 的函数，当 $x=1999$ 时，函数值 $y=$_____.[1]

从上面可知，许多问题中的变量之间都存在函数关系.

探究[2]

(1) 在计算器上按照下面的程序进行操作：

输入 x（任意一个数）

按键 × 2 + 5 =

显示 y（计算结果）

填表[3]

x	1	3	−4	0	101
y					

显示的数 y 是输入的数 x 的函数吗？为什么？

(2) 在计算器上按照下面的程序进行操作：

输入 x

按键 × 2 □[4] □ =

显示 y（计算结果）

下表中的 x 与 y 是输入的 5 个数与相应的计算结果.

x	1	2	3	0	−1
y	3	5	7	1	−1

所按的第三、四两个键是哪两个键？y 是 x 的函数吗？如果是，写出它的表达式（用含 x 的式子表示 y）.

8 第十一章 一次函数

以使学生提高分辨能力.

7. 变量间的单值对应关系有多种表示方法，常见的有列表法、解析式法和图象法. 教科书在引出函数的定义之前所举的例子中，有意识地使用了这些不同的表示形式，这一方面有助于全面地了解变量间的单值对应关系，进而形成对函数的较全面的认识，另一方面也为后面学习函数的三种表示方法进行了适当的准备. 希望教学中能体会教科书如此安排的用意.

8. 生活中有很多关于函数的例子，教学中可以启发学生去发现这样的例子，分析其中的哪个量是自变量，哪个量是函数，它们之间是如何对应的等. 这样做既有利于借助具体例子认识抽象的数学概念，又能提高学生把所学数学知识与现实世界相联系的意识和能力.

本节中安排了一个“探究”栏目，其内容是关于计算器的普通四则运算中隐含的函数关系. 学生对这样的运算并不陌生，但是可能不曾注意

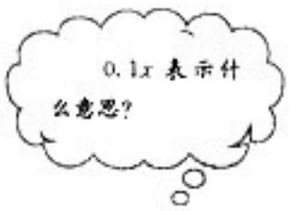


例 1 一辆汽车的油箱中现有汽油50 L，如果不再加油，那么油箱中的油量 y(单位：L) 随行驶里程 x(单位：km)的增加而减少，平均耗油量为0.1 L/km.

(1) 写出表示 y 与 x 的函数关系的式子.

(2) 指出自变量 x 的取值范围.[1]

(3) 汽车行驶 200 km 时，油箱中还有多少汽油?[2]



解：(1) 行驶里程 x(单位：km) 是自变量，油箱中的油量 y(单位：L) 是 x 的函数，它们的关系为

$$y=50-0.1x.$$

(2) 仅从式子 $y=50-0.1x$ 看，x 可以取任意实数，但是考虑到 x 代表的实际意义为行驶里程，所以 x 不能取负数，并且行驶中的耗油量为 $0.1x$，它不能超过油箱中现有汽油量50 L，即

$$0.1x\leqslant 50.$$

因此，自变量 x 的取值范围是

$$0\leqslant x\leqslant 500.$$

确定自变量的取值范围时，不仅要考虑函数关系式有意义，而且还要注意问题的实际意义.

(3) 汽车行驶200 km时，油箱中的汽油量是函数 $y=50-0.1x$ 在 $x=200$ 时的函数值. 将 $x=200$ 代入 $y=50-0.1x$，得

$$y=50-0.1\times 200=30.$$

汽车行驶200 km时，油箱中还有30 L汽油.

练习

下列问题中哪些量是自变量？哪些量是自变量的函数？试写出用自变量表示函数的式子.

1. 改变正方形的边长 x，正方形的面积 S 随之改变.
2. 秀水村的耕地面积是 10^6 m^2，这个村人均占有耕地面积 y 随这个村人数 n 的变化而变化.

[1] 这里要根据问题的实际意义来确定自变量的取值范围，因此 x，y 都不能取负数值.

[2] 这里要计算函数值，注意此时自变量的取值要在其取值范围之内.

练习答案

1. x 是自变量，S 是函数.

$$S=x^2.$$

2. n 是自变量，y 是函数.

$$y=\frac{10^6}{n}(\text{m}^2).$$

过其中还有变量以及变量间的单值对应关系. 通过探究这样的问题可以引导学生以函数的观点重新认识已经学习过的数学内容.

9. 本节的例 1 包括三个小题，它们的要求分别为写函数解析式，指出自变量的取值范围和计算函数值. 其中，第(1)小题，即写出函数解析式是重点，是基础. 要正确地写出函数解析式，就需要对问题的实际背景了解清楚，教学中应对此有适当介绍和解释. 这个问题中的函数是一次函数，这里虽然还不能指出这一点，但是让学生接触一下这样的具体函数，可以为后面的学习积累感性认识. 第(2)小题要求指出自变量的取值范围，这是在前一小题基础上的发展，单纯从函数解析式上分析可知，这里的自变量可以取任意实数，但是由于问题的实际意义，自变量不可以取负数，并且不能大于某个值，因此自变量的取值范围是一个区间 ($0\leqslant x\leqslant 500$). 本题在这里安排这个内容，是要加强联系实际，同时也

[1] 这里是根据几何意义（正方形的边长必定是正数值）确定自变量的取值范围的.

[2] 填空答案：

0，0.25，1，2.25，4，6.25，9，12.25，16.

[3] 一般地，描点法画出的函数图象是近似的. 描出的点只能有有限多个，其他点的位置需要根据描出的点来联想而得出.

[4] 描点法画函数图象时，要描出的点的个数应取得适当. 一般地，如果函数在描出的两点之间是连续的，那么已描出的点之间的连线要光滑（不出现明显的拐弯点）.

[5] 由于 $x=0$ 不在 x 的取值范围之内，所以点（0，0）不在函数图象上，故用空心圈表示它. 如果这点在函数图象上，则要画成实心点.

11.1.3 函数的图象

有些问题中的函数关系很难列式子表示，但是可以用图来直观地反映，例如用心电图表示心脏生物电流与时间的关系. 即使对于能列式表示的函数关系，如也能画图表示则会使函数关系更清晰.



正方形的边长 x 与面积 S 的函数关系为 $S=x^2$，其中自变量 x 的取值范围是 $x>0$. 我们还可以利用在坐标系中画图的方法来表示 S 与 x 的关系.

自变量 x 的一个确定的值与它所对应的唯一的函数值 S，是否确定了一个点（x，S）呢？

计算并填写下表：[2]

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
S									

表示 x 与 S 的对应关系的点有无数个，但是实际上我们只能描出其中有限个点，同时想象出其他点的位置. [3]

如图 11.1-3，在直角坐标系中，将上面表格中各对数值所对应的点画出，然后连接这些点，所得曲线上每一个点都代表 x 的值与 S 的值的一种对应，例如点（2，4）表示 $x=2$ 时，$S=4$.

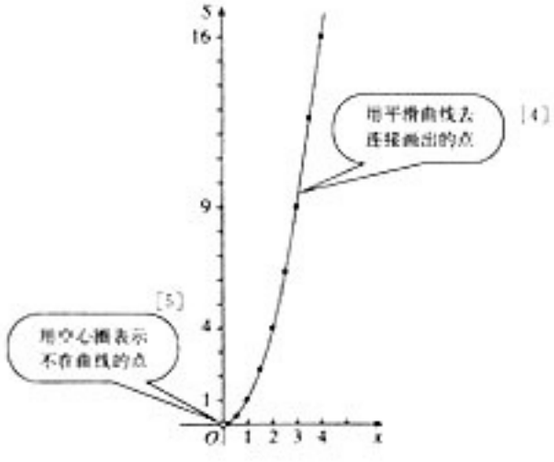


图 11.1-3

使现在所学的内容与前面所学的不等式等内容联系起来，以新带旧. 教学中应注意对这类问题不要做过多过深的扩张.

10. 函数的图象以几何形式直观地表示变量间的单值对应关系，是研究函数的重要工具. 学习函数的图象不仅要了解它的一般意义和作法，更重要的是了解其中包含的数形结合地研究问题的思想，学习如何使用这种工具讨论函数.

关于函数图象的意义，要注意“把自变量与函数的每对对应值分别作为点的横、纵坐标”，即完整的函数图象对应自变量的全部取值范围，但实际上由于条件所限我们往往画出图象中的一部分.

教科书从对一个具体函数 $S=x^2(x>0)$ 的讨论出发，让学生经历列表、描点、连线等绘制函数图象的具体过程，这既可以加深对图象的意义的认识，了解图象上点的横、纵坐标与自变量值、函数值之间的对应关系，又为学习如何画函

通过图象可以数形结合地研究函数.

一般地，对于一个函数，如果把自变量与函数的每对对应值分别作为点的横、纵坐标，那么坐标平面内由这些点组成的图形，就是这个函数的图象[1] (graph). 图 11.1-3 的曲线即函数

$$S=r^2 \quad (r>0)$$

的图象.

[2]

观察

图 11.1-4 是自动测温仪记录的图象，它反映了北京的春季某天气温 T 如何随时间 t 的变化而变化. 你从图象中得到了哪些信息?

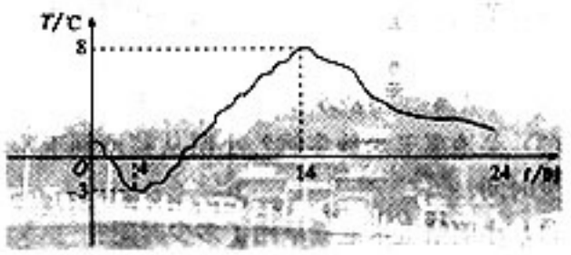


图 11.1-4

如有条件，你可以用带有温度探头的计算机(器)，测试、记录温度和绘制表示温度变化的图象.

可以认为，气温 T 是时间 t 的函数，图 11.1-4 是这个函数的图象. 由图象可知：

(1) 这一天中凌晨 4 时气温最低 (−3 ℃)，14 时气温最高 (8 ℃)；

(2) 从 0 时至 4 时气温呈下降状态 (即温度随时间的增长而下降)，从 4 时到 14 时气温呈上升状态，从 14 时至 24 时气温又呈下降状态；

(3) 我们可以从图象中看出这一天中任一时刻的气温大约是多少；

(4) 如果长期观察这样的气温图象，我们就能得到更多信息，掌握更多气温的变化规律.

[1] 函数的图象是一个由点组成的曲线，其中所有点的横坐标的集合恰好是自变量的取值范围. 各点的纵坐标，分别是自变量取值为各横坐标时对应的函数值.

[2] 这个“观察”栏目是为学习由图象分析函数的变化趋势而设计的，由图象分析数量变化规律是研究问题的方法之一.

数图象及后面对描点法画函数图象的一般步骤进行归纳作准备.

随着现代信息技术的不断进步，画函数图象的手段已迅速发展，使用计算机或具有画图功能的计算器可以方便地画出某些函数的图象. 但是，使用这些工具代替不了经历使用描点法的感受. 要对函数的图象形成正确的理解，离不开亲历描点法画函数图象的过程.

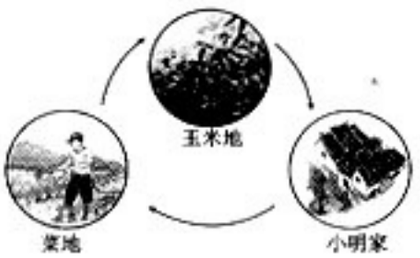
11. 有些函数的图象的产生过程是由式到图，即由解析式到列表，再用描点法画出的. 有些函数的图象 (例如用仪器自动记录温度变化的曲线) 却不能这样画出.

对于不易求出解析式的函数，如果能得到它的图象，那么可以根据图象分析函数的变化规律. 这种看图分析的能力很有用. 本节安排了一个关于自动测温仪的“观察”栏目，让学生通过观察图象分析函数的增减状况以及最大值和最小值，这是为培养学生的读图能力而安排的.

[1] 如果当自变量 x 在某个区间上取值时，函数 y 的值始终是同一个常数，那么在这个区间上的函数图象就是一条平行于 x 轴的线段.

[2] 这个函数的图象是由几条线段组成的折线，其中每条线段代表一个阶段的活动. 这条线段的左右端点的横坐标的差，对应相应活动所用时间的量.

例 2 下面的图象（图 11.1-5）反映的过程是：小明从家去菜地浇水，又去玉米地锄草，然后回家. 其中 x 表示时间，y 表示小明离他家的距离.



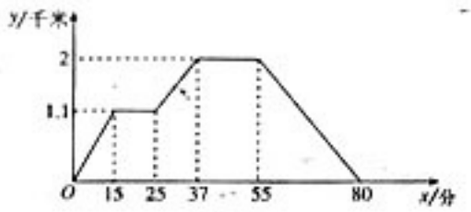


图 11.1-5

根据图象回答下列问题：

(1) 菜地离小明家多远？小明走到菜地用了多少时间？

(2) 小明给菜地浇水用了多少时间？

(3) 菜地离玉米地多远？小明从菜地到玉米地用了多少时间？

(4) 小明给玉米地锄草用了多少时间？

(5) 玉米地离小明家多远？小明从玉米地走回家的平均速度是多少？

分析：小明离家的距离 y 是时间 x 的函数，从图象中有两段是平行于 x 轴的线段可知，小明离家后有两段时间内先后停留在菜地与玉米地.[1]

解：(1) 由纵坐标看出，菜地离小明家1.1 千米；由横坐标看出，小明走到菜地用了 15 分.[2]

(2) 由横坐标看出，小明给菜地浇水用了 10(即 25−15)分.

(3) 由纵坐标看出，菜地离玉米地 0.9 (即 2−1.1)千米；由横坐标看出，小明从菜地到玉米地用了 12(即37−25)分.

(4) 由横坐标看出，小明给玉米地锄草用了 18 (即55−37)分.

12. 本节的例 2 是分析图象的问题. 题中的图象是由 5 条线段组成的，它对应 5 个时间段内的活动，其中变量 x 表示时间，每条线段的左右端点的横坐标之差表示了相应的时间段的长，变量 y（纵坐标）表示小明离家的距离. 课程标准中有类似这类问题的例子，这类问题的作用主要在结合问题的实际背景加深对图象意义的了解.

13. 本节的例 3 是由函数解析式画函数图象的问题. 完成这类题目的一般步骤即本题后面的归纳中总结的三步. 本例的作用是先给出具体画某个函数图象的过程，为后面的归纳作准备.

例 3 的第（2）小题中，函数 $y=\frac{6}{x}$ 中自变量 x 的取值不能为 0，否则分母为 0，函数无意义. 题中给定自变量 $x>0$，所以要注意画出的图象在 y 轴的右边而且不能与 y 轴相交，否则与 $x>0$ 不一致. 教学中可以对这样的地方进行

(5) 由纵坐标看出，玉米地离小明家 2 千米；由横坐标看出，小明从玉米地走回家用了 25(即 80−55)分，平均速度是 0.08 千米/分.[1]

例 3 在下列式子中，对于 x 的每一确定的值，y 有唯一的对应值，即 y 是 x 的函数，画出这些函数的图象：

(1) $y=x+0.5$；　　(2) $y=\frac{6}{x}$ $(x>0)$.

解：(1) $y=x+0.5$.

从上式可以看出，x 取任意实数式子都有意义，所以 x 的取值范围是全体实数.

从 x 的取值范围中选取一些数值，算出 y 的对应值，列表（计算并填写表中空格）：[2]

x	…	−3	−2	−1	0	1	2	3	…
y	…			−0.5	0.5	1.5	2.5		…

根据表中数值描点 (x, y)，并用平滑曲线连接这些点（图 11.1-6）.

你画出的图象与图 11.1-6 相同吗？

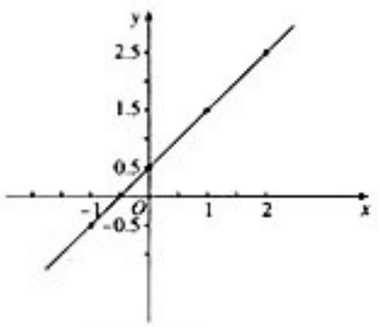


图 11.1-6

自变量的取值不能使函数解析式的分母为 0.[4]

从函数图象可以看出，直线从左向右上升，即当 x 由小变大时，$y=x+0.5$ 随之增大.[3]

(2) $y=\frac{6}{x}$ $(x>0)$.

列表（计算并填写表中空格）：

[1] 平均速度是由路程与时间计算出来的.

[2] 填空答案：

−2.5，−1.5，3.5.

[3] 函数图象从左向右上升，说明随着 x 的增加 y 也增加. 类似地，如果函数图象从左向右下降，则说明随着 x 的增加 y 却减少.

[4] 当自变量在分母上时，它的取值不应使分母为 0，否则分母为 0 使式子无意义.

设问，请学生回答其中的道理，以增强数形结合表达问题的能力.

对例 3 后面的“归纳”栏目的教学，应引导学生在回顾例 3 的解题过程的基础上自主地完成，教师最后进行概括总结.

14. 本节的例 3 后面的“思考”栏目的第(1)题，设计意图为结合物理背景理解如何利用图象表现函数的增减性以及变化规律，注意到“漏壶”中水位随时间增长而下降，应排除对左边图象的选择，又注意到水位下降是匀速的，应选择中间的图象，因为它是直线型的，表示在相同时间内水位下降高度也相同. 第(2)题的设计意图为结合图象强调函数概念中的单值对应关系，即对于自变量 x 的每个确定的值，函数 y 只有唯一的对应值.

15. 本节在“思考”栏目中，提请学生考虑函数的三种表示法各有什么优点. 事实上，各种表示法有不同的长处，列表法可以清楚地列出一

[1] 填空答案：

12，4，2.4，1.714，1.2，1.

[2] 这里设置“归纳”栏目，引导学生总结描点法画函数图象的一般步骤．教学时可以结合前面的例题进行归纳．

[1]

x	…	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	5	6	…
y	…		6		3		2		1.5			…

根据表中数值描点（x，y），并用平滑曲线连接这些点（图 11.1-7）．



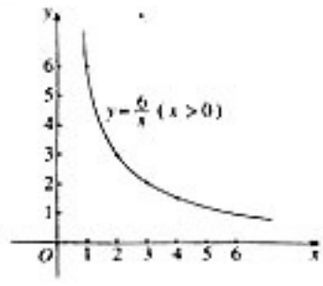


图 11.1-7

从函数图象可以看出，曲线从左向右下降，即当 x 由小变大时，$y=\frac{6}{x}$ 随之减小．

[2]

归纳

描点法画函数图象的一般步骤如下：

第一步：列表（表中给出一些自变量的值及其对应的函数值）；

第二步：描点（在直角坐标系中，以自变量的值为横坐标，相应的函数值为纵坐标，描出表格中数值对应的各点）；

第三步：连线（按照横坐标由小到大的顺序把所描出的各点用平滑曲线连接起来）．

些自变量和函数的对应值，这会对某些特定的数值带来一目了然的效果，例如火车时刻表，平方表等；解析式法可以从数量关系的角度明确自变量与函数的对应关系，例如表示自由落体的公式 $h=\frac{1}{2}gt^2$ 等；图象法可以直观形象地反映函数的变化趋势，而且对于一些无法用解析式表达的函数，图象可以充当重要角色，例如自动测温曲线．在不同条件下选择适当的方法表示函数，也是一种灵活解决问题的能力，它需要通过分析各种表示法的长短才能培养．本节的练习中含有用函数的不同表示法表示同一个函数的问题，完成它们后不妨对不同方法进行适当比较．

16．本节的例 4 是关于水库水位变化的问题，它要求综合使用函数的各种表示法．本题的设计意图中有体现函数的不同表示法之间的互相转化．本题的一个特点是题中未给出函数解析式，而要求学生根据给出的表格（6 对数据）发

思考

(1) 图 11.1-8 是一种古代计时器——“漏壶”[1]的示意图，在壶内盛一定量的水，水从壶下的小孔漏出，壶壁内画出刻度，人们根据壶中水面的位置计算时间. 用 x 表示时间，y 表示壶底到水面的高度，下面的哪个图象适合表示一小段时间内 y 与 x 的函数关系（暂不考虑水量变化对压力的影响）?[2]

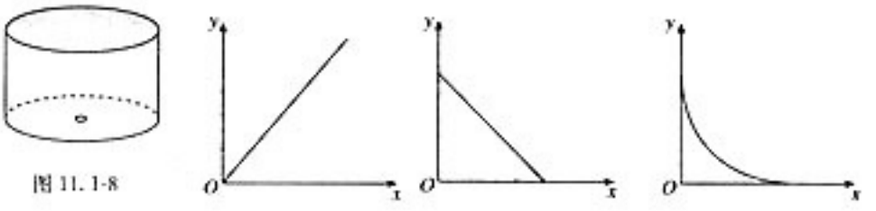


图 11.1-8

(2) a 是自变量 x 取值范围内的任意一个值，过点 $(a, 0)$ 画 y 轴的平行线，与图中曲线相交. 下列哪个图中的曲线（图 11.1-9）表示 y 是 x 的函数？为什么？

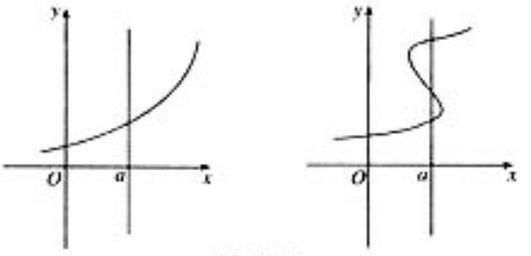


图 11.1-9

（提示：当 $x=a$ 时，x 的函数 y 只能有一个函数值.）[3]

[1] 漏壶是一种古代的计时工具，它根据有漏洞的容器中的水在一定时间内流出一定的量的道理制成. 类似的计时工具还有“沙漏”等.

[2] 随着水位的下降，水流出的速度会有微小的变化，但本题中对此忽略不计. 由于图中漏壶的形状是圆柱形状，按照水的流量与时间成正比的道理，本题应选中间的图象.

[3] 由于当 $x=a$ 时 y 只能有唯一的对应值，所以函数图象与直线 $x=a$ 只能有一个交点. 本题应选左边的图象.

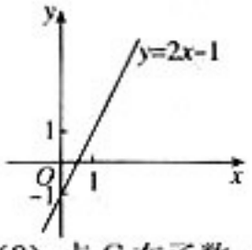
现变量之间的对应规律，根据规律写出函数解析式. 这对发现能力的培养很有益，教学中应引导学生积极探索. 此外本例还含有关于预测的问题，这可以培养学生利用所学函数知识推测未来事物的变化趋势的能力.

17. 关于描点法画函数图象中的连线方法，教科书采用了用平滑曲线连接相邻的点的方式. 此外也有用折线连接相邻的点的方式. 一般地，对于普通初等函数，用平滑曲线连接比用折线连接得到的图象的近似程度要更好一些. 例如，画函数 $y=x^2$，用平滑曲线画出的图象更接近于真实的图象——抛物线. 对于一次函数，由于画图象时相邻的点都在同一直线上，所以连接它们的平滑曲线就是直线.

18. 描点法画函数图象是最初级的方法，要准确地画函数图象，需要描出较多的点，操作起来较烦琐. 如果对于要画图象的函数进行过研究，已经掌握了函数随自变量变化的一定规律，

练习答案

1. (1)

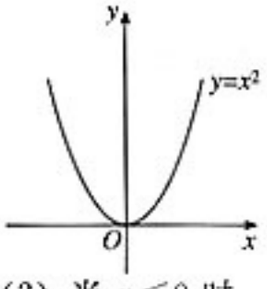


(2) 点 C 在函数 $y=2x-1$ 的图象上.

2. (1) 7 时，12 时；

(2) 0～7 时和 12～24 时上海气温高，7～12 时北京气温高.

3. (1)



(2) 当 $x<0$ 时，y 随 x 的增大而减小；当 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而增大.

[1] 这是常用的三种函数表示法.

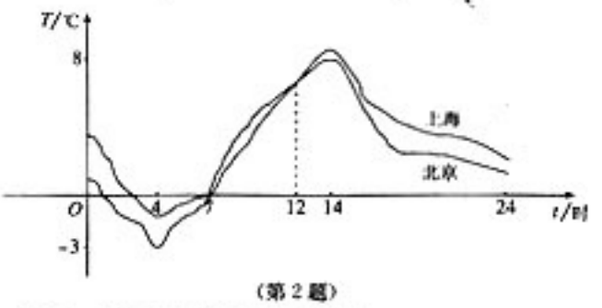
[2] 列表法直接给出部分函数值，解析式法明显地表示对应规律，图象法明显地表示变化趋势.

练习

1. (1) 画出函数 $y=2x-1$ 的图象；

(2) 判断点 $A(-2.5, -4)$，$B(1, 3)$，$C(2.5, 4)$ 是否在函数 $y=2x-1$ 的图象上.

2. 下图是北京与上海在某一天的气温随时间变化的图象.



(第 2 题)

(1) 这一天内，上海与北京何时温度相同？

(2) 这一天内，上海在哪段时间比北京温度高？在哪段时间比北京温度低？

3. (1) 画出函数 $y=x^2$ 的图象.

(2) 从图象中观察，当 $x<0$ 时，y 随 x 的增大而增大，还是 y 随 x 的增大而减小？当 $x>0$ 时呢？

我们已经看到或亲自动手用列表格、写式子和画图象的方法表示了一些函数，这三种表示函数的方法分别称为列表法、解析式法和图象法.[1]

思考

从前面的例子看，你认为三种表示函数的方法各有什么优点？[2]

表示函数时，要根据具体情况选择适当的方法，有时为全面地认识问题，需要几种方法同时使用.

那么就可以利用规律采用更直接更简单的方法画函数图象，例如本章第 11.2 节介绍的画一次函数的图象的两点法等.

19. 本节内容是关于函数的最基础的知识，对后续内容有很深远的影响. 打好基础至关重要，教学中对这些内容应予以充分重视.



例 4 一水库的水位在最近 5 小时内持续上涨，下表记录了这 5 小时的水位高度.

t / 时	0	1	2	3	4	5
y / 米	10	10.05	10.10	10.15	10.20	10.25

(1) 由记录表推出这 5 小时中水位高度 y(单位：米)随时间 t(单位：时)变化的函数解析式，并画出函数图象；[1]

(2) 据估计这种上涨的情况还会持续 2 小时，预测再过 2 小时水位高度将达到多少米. [2]

分析：记录表已经通过 6 组数值反映了时间 t 与水位 y 之间的对应关系，我们现在需要从这些数值找出这两个变量之间的一般联系规律，由它写出函数解析式，画出函数图象，进而预测水位.

解：(1) 由表中观察到开始水位高 10 米，以后每隔 1 小时，水位升高 0.05 米，这样的变化规律可以表示为

$$y=0.05t+10 \quad (0\leqslant t\leqslant 7). \text{ [3]}$$

这个函数的图象如图 11.1-10 中所示.

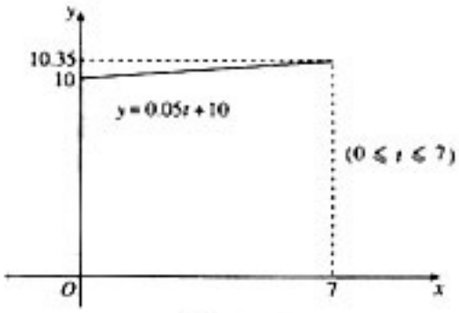


图 11.1-10

(2) 再过 2 小时的水位高度，就是 $t=5+2=7$ 时 $y=0.05t+10$ 的函数值，从解析式容易算出

$$y=0.05\times 7+10=10.35.$$

从函数图象也能估出这个值.

2 小时后，预计水位高 10.35 米.

[1] 这里用表格形式表示了 6 对变量的值，从中可以发现对应规律为每小时水位上升 0.05 m，由此可进一步写出函数解析式，然后再画出图象.

[2] 这里的预测是建立在未来 2 小时内水位上升规律不改变的假设之上的.

[3] 根据问题的数据及对未来的假设，有 $0\leqslant t\leqslant 7$. 相应地，函数图象应是线段，其左右端点的横坐标分别为 0 和 7. 如果不考虑假设则有 $0\leqslant t\leqslant 5$.

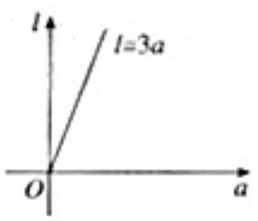
[1] 这里设置“归纳”栏目的目的，是通过回顾例4中如何由表格到解析式进而到图象，体会不同形式的函数表示法之间的转化.

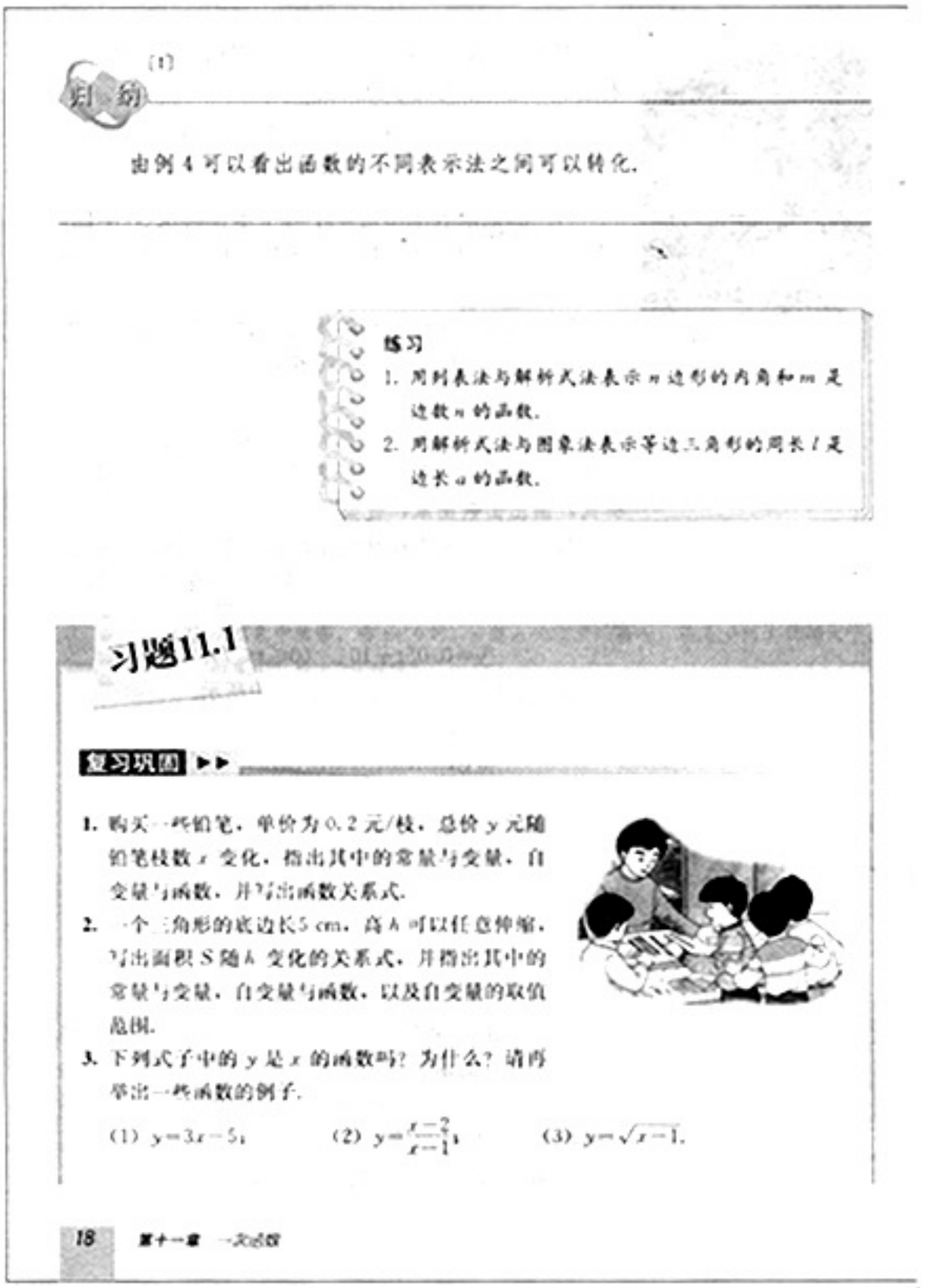
练习答案

1.

n	3	4	5	6	7	…
m (°)	180	360	540	720	900	…

2. $l=3a$





归纳 [1]

由例4可以看出函数的不同表示法之间可以转化.

练习

1. 用列表法与解析式法表示 n 边形的内角和 m 是边数 n 的函数.
2. 用解析式法与图象法表示等边三角形的周长 l 是边长 a 的函数.

习题11.1

复习巩固 ▶▶

1. 购买一些铅笔，单价为0.2元/枝，总价 y 元随铅笔枝数 x 变化，指出其中的常量与变量，自变量与函数，并写出函数关系式.
2. 一个三角形的底边长5 cm，高 h 可以任意伸缩，写出面积 S 随 h 变化的关系式，并指出其中的常量与变量，自变量与函数，以及自变量的取值范围.
3. 下列式子中的 y 是 x 的函数吗？为什么？请再举出一些函数的例子.

(1) $y=3x-5$； (2) $y=\frac{x-2}{x-1}$； (3) $y=\sqrt{x-1}$.

18 第十一章 一次函数

习题 11.1

1. 习题 11.1 中“复习巩固”的题目有两类：

(1) 复习巩固常量、变量、自变量、函数及函数值等概念的问题；

(2) 画简单函数的图象或根据图象复习巩固函数概念的问题.

这些题目虽然简单，但是基础性强，学生应能很熟练地完成它们.

2. 习题 11.1 中“综合运用”的题目有 5 道. 其中，有的题是观察图象，分析图中反映的变化规律的问题；有的题是分析变量间的规律，并以解析式或表格或图象表示函数关系的问题. 这些题目有不同的实际背景，需要将其数学化，即以函数形式表达相关变量的关系.

3. 习题 11.1 中“拓广探索”的题目有 2 道.

第 11 题需要从特殊到一般，从简单到复杂

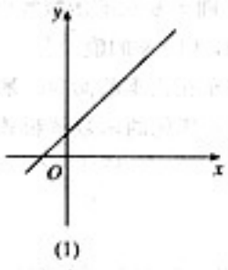
4. 分别对第 3 题的各式讨论：

(1) 自变量 x 在什么范围内取值时函数关系式有意义？

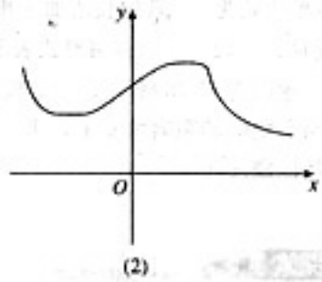
(2) 当 $x=5$ 时对应的函数值是多少？

5. 画出函数 $y=0.5x$ 的图象，指出自变量及其取值范围.

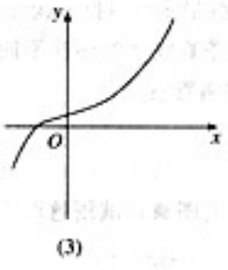
6. 下列各曲线中哪些表示 y 是 x 的函数？



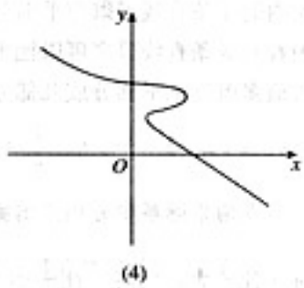
(1)



(2)



(3)

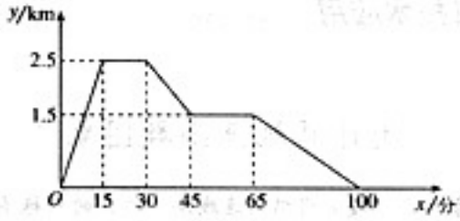


(4)

（第 6 题）

综合运用 ▶▶

7. 下面的图象反映的过程是：张强从家跑步去体育场，在那里锻炼了一阵后又走到文具店去买笔，然后散步走回家. 其中 x 表示时间，y 表示张强离家的距离.[1]



（第 7 题）

根据图象回答下列问题：

(1) 体育场离张强家多远？张强从家到体育场用了多少时间？

[1] 图象表示 5 种活动的全过程，即去体育场、在体育场锻炼、去文具店、在文具店买笔、回家.

地发现规律. 从 $n=1$，2，3，4 的情形可以得到猜想：n 条线段最多将平面分为（$1+1+2+3+\cdots+n$）个区域. 这个猜想是根据当增加第 n 条线段时平面区域在原基础上增加 n 个而产生的，这里不需要对其证明. 式子 $1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)+n$ 中，第 1 个数与最后 1 个数的和，等于第 2 个数与倒数第 2 个数的和，等于第 3 个数与倒数第 3 个数的和……，因此这个式子等于 $\frac{n(n+1)}{2}$.

第 12 题中，画出两个函数的图象后，需要比较它们的相对位置，根据同一个横坐标所对的两个函数的图象上的点的纵坐标的大小，确定两个函数的大小关系.

[1] 本题中不考虑复利，即利息不再产生利息.

[2] 注意本题中的 y 是面积的增加量，它等于相应的面积减 9 所得的差.

[3] 注意 x 的取值范围.

[4] 对本题应从简单到复杂，从特殊到一般地考虑，发现当增加第 n 条直线时平面区域数量增加的规律，从而产生 n 条直线所对应的区域数目.

[5] 画图后要能分清两个函数的图象各是什么样的曲线，然后再比较它们的相对位置.

[6] 用计算机画函数图象的基本原理与描点法一致，只是它的取值、计算、描点和连线由计算机完成，比人工完成要快速准确.

(2) 体育场离文具店多远?

(3) 张强在文具店逗留了多少时间?

(4) 张强从文具店回家的平均速度是多少?

8. 某种活期储蓄的月利率是 0.06%，存入 100 元本金，求本息和（本金与利息的和）y 元随所存月数 x 变化的函数解析式，并计算存期为 4 个月时的本息和.[1]

9. 正方形边长为 3，若边长增加 x 则面积增加 y，求 y 随 x 变化的函数解析式，指出自变量、函数，并以表格形式表示当 x 等于 1，2，3，4 时 y 的值.[2]

10. 甲车速度为 20 米/秒，乙车速度为 25 米/秒，现甲车在乙车前面 500 米，设 x 秒后两车之间的距离为 y 米，求 y 随 x（$0\leqslant x\leqslant 100$）变化的函数解析式，并画出函数图象.[3]

拓广探索 ▶▶

11. 平面内的 1 条直线可以把平面分成 2 部分，2 条直线最多可以把平面分成 4 部分，画图看看 3 条直线最多可以把平面分成几部分，4 条直线呢？你能不能想出 n 条直线最多可以把平面分成几部分？所得结果是 n 的函数吗？[4]

（提示：$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$.）

12. 在同一直角坐标系中分别画出函数 $y=x$ 与 $y=\frac{1}{x}$ 的图象，试用这两个图象说明何时 x 比 $\frac{1}{x}$ 大，何时 x 比 $\frac{1}{x}$ 小.[5]



信息技术应用 选学

用计算机画函数图象[6]

由解析式画函数图象时，一般采用描点连线法，描出的点越多，画出的函数图象越准确. 但是，仅靠手工操作有时很难画出准确的图象. 计算机可以帮助我们又快又准地画函数图象，下面介绍用《几何画板》软件画函数图象的一些例子.

信息技术应用

这篇选学材料介绍了使用计算机画函数图象的两个例子. 这里使用的《几何画板》软件，是一种比较容易使用的具有画图功能的软件，它可以自动画出某些函数的图象.

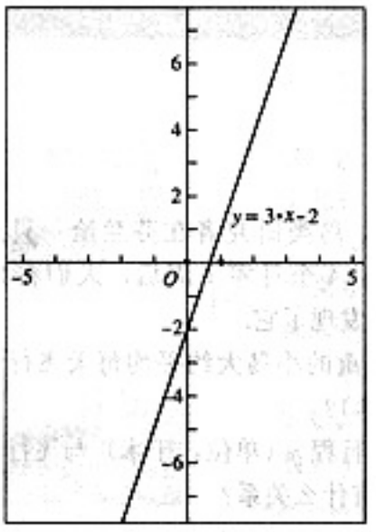
例 1 介绍了用计算机如何画一个函数的图象. 使用上述软件时，输入一般的初等函数的解析式，计算机都能自动画出相应的图象.

例 2 介绍了用计算机如何在同一坐标系中画两个函数的图象，并通过表格形式介绍了函数图象特征与函数变化规律之间的等价关系.

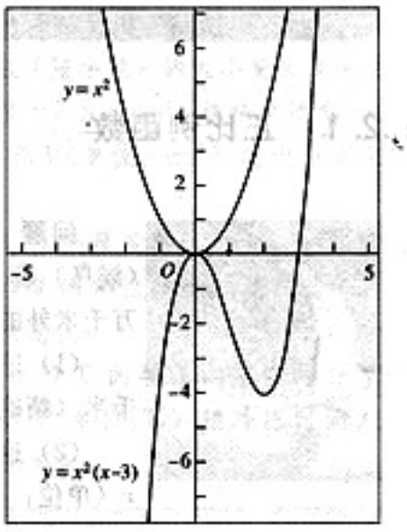
这篇选学材料比较适合有条件使用《几何画板》的学生，如暂时不具备这样的条件，可以通过阅读它了解函数图象特征与函数变化规律之间的等价关系.

例 1 画函数 $y=3x-2$ 的图象.

《几何画板》软件具有绘制函数图象的功能（new function / graph），启用这个功能，输入函数 $y=3x-2$ 的解析式，计算机便自动画出如下图象（图 1 中的直线）.



（图 1）



（图 2）

例 2 画函数 $y=x^2$ 与 $y=x^2(x-3)$ 的图象（如图 2）.

从画出的函数图象可以看出，函数图象与函数性质之间存在着必然的联系. 例如

图象特征		函数变化规律
由左至右曲线呈上升状态	⇔[1]	y 随 x 的增大而增大
由左至右曲线呈下降状态	⇔	y 随 x 的增大而减小
曲线上的最高点是 (a, b)	⇔	$x=a$ 时，y 有最大值 b
曲线上的最低点是 (a, b)	⇔	$x=a$ 时，y 有最小值 b

根据上面例子中的函数图象，你发现这些函数各具有什么性质？

[1] ⇔表示其左右两边等价，即有左就有右，同样地，有右就有左.

[1] 本节先从特殊的一次函数——正比例函数说起. 作为引子的问题中数量关系为行程问题中的“路程=速度×时间”，当速度为常量时，这可以归为正比例函数. 问题以候鸟飞行为背景，这可以增加自然知识.

[2] $y=200x$ 是这个问题中自变量 x 和函数 y 分别以“天”和“千米”为单位时的函数解析式. 如果 x 用“周”或“月”为单位，y 仍以“千米”为单位则对应的函数虽仍为 $y=kx$ 形式，但其中 k 的值不等于 200.

11.2 一次函数

11.2.1 正比例函数



问题 1996 年，鸟类研究者在芬兰给一只燕鸥（候鸟）套上标志环；4 个月零 1 周后，人们在 2.56 万千米外的澳大利亚发现了它.[1]

（1）这只百余克重的小鸟大约平均每天飞行多少千米（精确到 10 千米）?

（2）这只燕鸥的行程 y（单位：千米）与飞行时间 x（单位：天）之间有什么关系?

（3）这只燕鸥飞行 1 个半月的行程大约是多少千米?

一个月按 30 天计算.

分析：（1）这只燕鸥大约平均每天飞行的路程不少于

$$25\,600\div(30\times4+7)\approx200(\text{km}).$$

（2）假设这只燕鸥每天飞行的路程为 200 km，那么它的行程 y（单位：千米）就是飞行时间 x（单位：天）的函数，函数解析式为

$$y=200x \quad (0\leqslant x\leqslant 127).$$

（3）这只燕鸥飞行 1 个半月的行程，大约是 $x=45$ 时函数 $y=200x$ 的值，即

$$y=200\times45=9\,000\ (\text{km}).$$

以上我们用函数 $y=200x$[2] 对燕鸥的飞行路程问题进行了刻画，尽管这只是近似的，但它可以作为反映燕鸥的行程与时间的对应规律的一个模型.

1. 本节的内容是本章的重点知识. 教科书首先安排了正比例函数的内容，讨论了这种函数的定义、图象和增减性等，然后以此为基础，继续学习一次函数的定义、图象和增减性等，这是一个从特殊概念向一般概念推广的认识过程. 教学中应引导学生注意两个概念之间的联系与区别，体会类比和联想的方法，培养由此及彼地认识问题的能力.

2. 本节中，正比例函数和一次函数的概念都是从实际问题引出的，这样设计的目的是为了更好地体现函数概念的实际背景，反映数学与实际的关系，即数学理论来源于实际又服务于实际. 这样安排也有助于提高学生将实际问题抽象为函数概念的能力（即数学建模能力）.

教科书中的两个实际问题（燕鸥的飞行问题和登山时的气温变化问题），分别作为正比例函数和一次函数的引出问题，在数量关系上具有典型性，而且问题的实际背景都不复杂，比较容易

思考

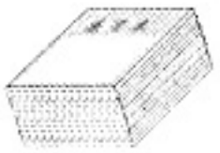
下列问题中的变量对应规律可用怎样的函数表示？这些函数有什么共同点？[1]

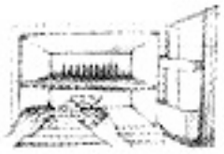
(1) 圆的周长 l 随半径 r 的大小变化而变化；

(2) 铁的密度为7.8 g/cm³，铁块的质量 m(单位：g) 随它的体积 V(单位：cm³) 的大小变化而变化；

(3) 每个练习本的厚度为0.5 cm，一些练习本摞在一起的总厚度 h(单位：cm) 随这些练习本的本数 n 的变化而变化；

(4) 冷冻一个 0 ℃的物体，使它每分下降 2 ℃，物体的温度 T(单位：℃) 随冷冻时间 t(单位：分) 的变化而变化.





可以得出上面问题中的函数分别为：

(1) $l=2\pi r$；　　(2) $m=7.8V$；

(3) $h=0.5n$；　　(4) $T=-2t$.

归纳[2]

正如函数 $y=200x$ 一样，上面这些函数都是常数与自变量的乘积的形式.

一般地，形如 $y=kx$ (k 是常数，$k\neq0$) 的函数，叫做**正比例函数** (proportional function)，其中 k 叫做比例系数.[3]

例 1　画出下列正比例函数的图象：

(1) $y=2x$；　　(2) $y=-2x$.

[1] 这个“思考”栏目给出 4 个问题，把它们抽象为数学模型后得到的都是 $y=kx$ 类型的函数.

[2] 教学中可以引导学生从函数解析式的外在形式入手进行归纳，注意虽然 π 是字母，但是它表示常数.

[3] 正比例函数的定义是从解析式的角度给出的，注意定义中对比例系数的要求：k 是常数，$k\neq0$.

理解. 教学中，如果有更贴近学生的实际问题具有这样的函数关系，那么可以采用那些问题替换教科书中的问题.

3. 正比例函数和一次函数都是根据函数的解析式来定义的，本套教科书后面的二次函数也是这样定义的. 这些函数都属于初等函数中的一元多项式函数. 一般地，设自变量为 x，则多项式函数

$$y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n(a_0\neq0)$$

叫做 n 次函数. 其中，$a_i(i=0, 1, \cdots, n)$ 为常数.

学习正比例函数和一次函数的定义时，要弄清解析式中各字母的意义，知道哪些是常数，哪些是变量，哪个是自变量，哪个是函数. 应知道对自变量系数的限制条件为这个系数 $k\neq0$.

4. 在第二学段（小学），曾经学习过正比例关系，即

两个相关联的量，一种量变化，另一种量也

[1] 填空答案：

−6，−4，−2，0，2，4，6.

[2] 画第（2）个函数的步骤同前面一样，教学中应引导学生自主完成.

解：（1）函数 $y=2x$ 中自变量 x 可以是任意实数，列表表示几组对应值（填空）：[1]

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y							

画出函数 $y=2x$ 的图象.

你画出的图象与图 11.2-1 相同吗？

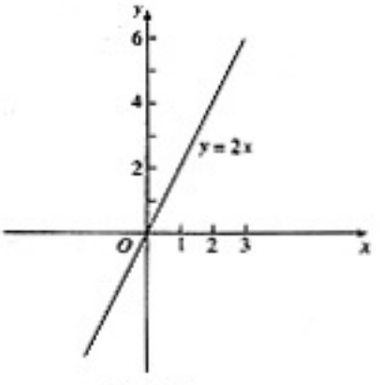


图 11.2-1

（2）请你独立地画出函数 $y=-2x$ 的图象.[2]

你画出的图象与图 11.2-2 相同吗？

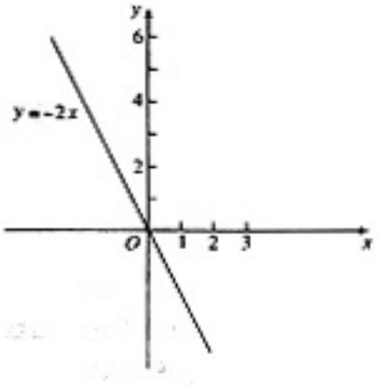


图 11.2-2

随着变化，如果这两个量中相对应的两个数的比值（也就是商）一定，这两种量就叫做成正比例的量，它们的关系叫做正比例关系.

上述定义与正比例函数定义在本质上是一致的，仅是表达方式不同. 此外，应注意第二学段中提比值时一般不涉及负数.

教学中，可以联系以前所学的正比例关系的概念，但需指出正比例函数中比例系数可以是正数也可以是负数.

5. 本节例 1 要画正比例函数 $y=2x$ 和 $y=-2x$ 的图象，所用方法为描点法. 画这两个函数的图象的步骤完全相同，图象的形状都是过原点的直线，只是直线在坐标系中的位置不同. 教科书列出了画函数 $y=2x$ 的图象的步骤，教学中要让学生参照画函数 $y=2x$ 的图象的步骤独立完成画函数 $y=-2x$ 的图象，这既是对描点法的巩固，又是让学生在亲自动手实践的过程中感悟两个函数的图象的相同点与不同点，为后面

观察

比较上面两个函数的图象的相同点与不同点，考虑两个函数的变化规律.

填写你发现的规律：[1] 两图象都是经过原点的____. 函数 $y=2x$ 的图象从左向右_____，经过第_____象限；函数 $y=-2x$ 的图象从左向右_____，经过第_____象限.

练习

在同一坐标系中，画出下列函数的图象，并对它们进行比较：

(1) $y=\frac{1}{2}x$；　　(2) $y=-\frac{1}{2}x$.

一般地，正比例函数 $y=kx$（k 是常数，$k\neq0$）的图象是一条经过原点的直线，我们称它为直线 $y=kx$. 当 $k>0$ 时，直线 $y=kx$ 经过第三、一象限，从左向右上升，即**随着 x 的增大 y 也增大**；当 $k<0$ 时，直线 $y=kx$ 经过第二、四象限，从左向右下降，即**随着 x 的增大 y 反而减小**.[2]

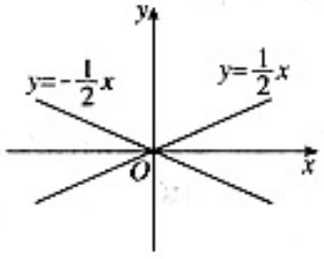
思考

经过原点与点 $(1, k)$ 的直线是哪个函数的图象？画正比例函数的图象时，怎样画最简单？为什么？[3]

[1] 填空答案：

直线，上升，一、三，下降，二、四.

练习答案



[2] 这里结合图象归纳出正比例函数的增减性. 注意有些学生受算术中正比例概念的影响，片面地认为正比例函数总是随自变量的增加而增加，应指出正比例函数的增或减是由 k 的正或负决定的.

[3] 可以先断定这个函数是 $y=kx$ 的形式，再由 $x=1$ 时 $y=k$ 确定这个函数是 $y=kx$. 画正比例函数的图象时可以用两点法，即过原点和点 $(1, k)$ 画直线.

的发现规律作准备.

教科书在画函数 $y=2x$ 的图象时，已说明自变量 x 可以是任意实数，教学中应指出：一般地，正比例函数中的自变量可以是任意实数.

6. 教科书在讨论正比例函数的增减性时，是通过观察函数图象的升降发现结论的，这是一种直观的发现方法. 然而，这不是关于正比例函数增减性的严格证明. 对于这个性质可以作出如下的证明：

设 x_1，x_2 为任意两个实数，且 $x_1<x_2$，考虑函数 $y=kx$ 在 x_1，x_2 的函数值的大小.

(1) 若 $k>0$，则 $kx_2-kx_1=k(x_2-x_1)>0$；

(2) 若 $k<0$，则 $kx_2-kx_1=k(x_2-x_1)<0$.

因此，若 $k>0$，函数 $y=kx$ 随自变量 x 的增加而增加；若 $k<0$，函数 $y=kx$ 随自变量 x 的增加而减小.

教学中，一般不要求对上述性质进行严格的证明，只要能结合图象对这个性质有所认识即

练习答案

（1）过原点和点$\left(1,\ \frac{3}{2}\right)$画直线；

（2）过原点和点（1，−3）画直线.

练习

用你认为最简单的方法画出下列函数的图象：

(1) $y=\frac{3}{2}x$；　　(2) $y=-3x$.

11.2.2　一次函数



问题　某登山队大本营所在地的气温为5 ℃，海拔每升高1 km气温下降6 ℃，登山队员由大本营向上登高x km时，他们所在位置的气温是y ℃，试用解析式表示y与x的关系.[1]

分析：y随x变化的规律是，从大本营向上当海拔增加x km时，气温从5 ℃减少$6x$ ℃. 因此y与x的函数关系为

$$y=5-6x.$$

这个函数也可以写为

$$y=-6x+5.$$

当登山队员由大本营向上登高0.5 km时，他们所在位置的气温就是$x=0.5$时函数$y=-6x+5$的值，即$y=-6\times0.5+5=2$(℃).

思考

下列问题中变量间的对应关系可用怎样的函数表示？这些函数有什么共同点？[2]

[1] 本章章前图及其中的表格和图象与这个问题相对应.

[2] 这里需要先引导学生写出函数解析式，再根据式子发现它们在形式上的共同点.

可. 但是，如果学生能够接受，也不妨在直观认识的基础上加上适当的式子证明，从数形两方面加深对这个性质的理解.

7. 关于正比例函数的图象是一条过原点的直线，教科书是从特例到一般用不完全归纳法给出的. 在有了这一结论后，画正比例函数的图象时，就可以通过两点而画出. 教科书对此设计了“思考”栏目，启发学生自己想出“两点法”. 紧接在后面的练习，是为使用两点法而设计的. 所谓“两点法”中有一点是原点，另一点可以是(1，k)，也可以是(2，$2k$)，(3，$3k$)等，具体如何选取要根据问题而确定. 例如，画函数$y=2x$，$y=\frac{1}{2}x$，$y=\frac{2}{3}x$的图象时，除原点外另一点分别选取(1，2)，(2，1)，(3，2)比较容易画. 函数$y=kx$的图象简称直线$y=kx$.

8. 一次函数是自变量的k（常数）倍与一个常数b的和. b是当自变量的值为0时的函数值.

(1) 有人发现，在20～25 ℃时蟋蟀每分鸣叫次数 c 与温度 t（单位：℃）有关，即 c 的值约是 t 的 7 倍与 35 的差；

(2) 一种计算成年人标准体重 G（单位：千克）的方法是，以厘米为单位量出身高值 h 减常数 105，所得差是 G 的值；

(3) 某城市的市内电话的月收费额 y（单位：元）包括：月租费 22 元，拨打电话 x 分的计时费按 0.01 元/分收取；

(4) 把一个长10 cm、宽5 cm的长方形的长减少 x cm，宽不变，长方形的面积 y（单位：cm^2）随 x 的值而变化.

可以得出上面问题中的函数解析式分别为：

(1) $c=7t-35$；　　(2) $G=h-105$；

(3) $y=0.01x+22$；　　(4) $y=-5x+50$.

归纳

正如函数 $y=-6x+5$ 一样，上面这些函数的形式都是自变量 x 的 k（常数）倍与一个常数的和.

一般地，形如 $y=kx+b$（k，b 是常数，$k\neq0$）的函数，叫做**一次函数**（linear function）.[1] 当 $b=0$ 时，$y=kx+b$ 即 $y=kx$，所以说正比例函数是一种特殊的一次函数.[2]

[1] 一次函数的定义是根据它的解析式的形式特征给出的，要注意其中对常数 k，b 的要求.

[2] 一次函数中常数 b 可以为 0，这时的一次函数即正比例函数. 这里给出了一次函数与正比例函数之间的关系，即一般与特殊的关系.

特别地，如果 $b=0$，则一次函数就是正比例函数.

一次函数是解析式中变元最少（一元），次数最低（一次）的函数. 由于一次函数的图象是一条直线，所以一次函数也被称为线性函数.

教科书用了多个例子说明一次函数的实际背景，事实上有大量的实际问题中变量之间具有一次函数关系. 教学中可以结合学生的生活实际，用学生熟悉的实际问题来加深他们对一次函数的理解.

9. 本节的例 2 是画两个函数 $y=-6x$ 和 $y=-6x+5$的图象. 这道例题的设计意图，是通过对比这两个函数的解析式及函数值，发现两个函数的图象的关系，进而利用对正比例函数的图象的了解来认识一般的一次函数的图象.

例 2 中安排了两个关系密切的函数 $y=-6x$ 和 $y=-6x+5$，容易发现，它们的解析式仅在常数项上有区别，其他部分完全相同. 因此，对

练习答案

1.（1）是一次函数，又是正比例函数；

（4）是一次函数.

2.（1）$v=2t$，是一次函数；

（2）5 米/秒.

3. $y=50-5x$，

$0\leqslant x\leqslant 10$.

是一次函数.

[1] 填空答案：

12，6，0，−6，−12；

17，11，5，−1，−7.

练习

1. 下列函数中哪些是一次函数，哪些又是正比例函数？

（1）$y=-8x$；　（2）$y=\frac{-8}{x}$；　（3）$y=5x^2+6$；（4）$y=-0.5x-1$.

2. 一个小球由静止开始在一个斜坡向下滚动，其速度每秒增加 2 米.

（1）求小球速度 v 随时间 t 变化的函数关系式，它是一次函数吗？

（2）求第 2.5 秒时小球的速度.



（第 2 题）

3. 汽车油箱中原有油 50 升，如果行驶中每小时用油 5 升，求油箱中的油量 y（单位：升）随行驶时间 x（单位：时）变化的函数关系式，并写出自变量 x 的取值范围. y 是 x 的一次函数吗？

例 2　画出函数 $y=-6x$ 与 $y=-6x+5$ 的图象.

解：函数 $y=-6x$ 与 $y=-6x+5$ 中，自变量 x 可以是任意实数，列表表示几组对应值（填空）：[1]

x	−2	−1	0	1	2
$y=-6x$					
$y=-6x+5$					

画出函数 $y=-6x$ 与 $y=-6x+5$ 的图象.

你画出的图象与图 11.2-3 相同吗？

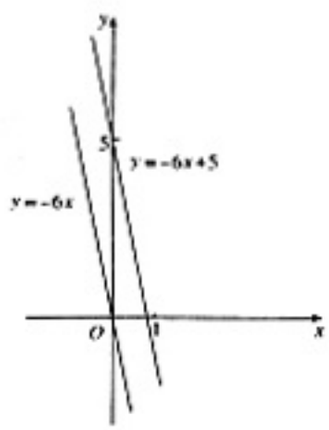


图 11.2-3

于自变量的任一值，这两个函数相应的值总差同一个常数. 这反映在图象上，就是不论横坐标为几，两个函数图象的纵坐标总差同一个值，即一个函数的图象总比另一个函数的图象高出同一高度.

教学中，可以引导学生通过比较解析式、表格和图象，发现两个函数的区别，以及这样的区别的不同表现形式，最后能认识到这些表现形式是从不同角度反映两个函数的差别，它们是相互联系的.

10. 本节例 2 的后面，安排了“观察”栏目，引导学生通过比较函数 $y=-6x$ 和 $y=-6x+5$ 的图象的相同点与不同点，发现将函数 $y=-6x$ 的图象向上平移 5 个单位长度，就能得到函数 $y=-6x+5$ 的图象，并从解析式的角度探讨为什么会有这样的现象. 这样安排可以将以前学习过的平移与现在讨论的函数图象联系起来，进而得出后面的猜想，发现函数 $y=kx+b$ 的图

观察

比较上面两个函数的图象的相同点与不同点.

填出你的观察结果：[1]这两个函数的图象形状都是_____，并且倾斜程度_____. 函数$y=-6x$的图象经过原点，函数$y=-6x+5$的图象与y轴交于点_____，即它可以看作由直线$y=-6x$向____平移____个单位长度而得到. 比较两个函数解析式，试解释这是为什么.

猜想 联系上面例2，考虑一次函数$y=kx+b$的图象是什么形状，它与直线$y=kx$有什么关系？

比较这两个函数的解析式，容易得出：

一次函数$y=kx+b$的图象是一条直线，我们称它为直线$y=kx+b$，它可以看作由直线$y=kx$平移$|b|$个单位长度而得到(当$b>0$时，向上平移；当$b<0$时，向下平移).[2]

例3' 画出函数$y=2x-1$与$y=-0.5x+1$的图象.

分析：由于一次函数的图象是直线，所以只要确定两个点就能画出它.

解：

x	0	1
$y=2x-1$	-1	1
$y=-0.5x+1$	1	0.5

过点(0，-1)与点(1，1)画出直线$y=2x-1$；过点(0，1)与点(1，0.5)画出直线$y=-0.5x+1$(图11.2-4).

先画直线$y=2x$与$y=-0.5x$，再平移它们，也能得直线$y=2x-1$与$y=-0.5x+1$.

[1] 填空答案：

直线，相同，(0，5)，上，5.

[2] 这里给出了函数$y=kx+b$与函数$y=kx$的图象之间的关系，通过平移它们可以互相转化.

象与直线$y=kx$有什么关系.

11. 关于一次函数$y=kx+b$的图象的形状，本节是这样推出的：函数$y=kx+b$的图象，可以由将函数$y=kx$的图象平移b个单位长度而得到，而函数$y=kx$的图象是过点(0，0)的一条直线，所以函数$y=kx+b$的图象是过点(0，b)的一条直线. 这样，不经过比较烦琐的描点法，就能得到对函数$y=kx+b$的图象的认识，这是一个由此及彼的认识过程.

12. 本节的例3是画一次函数的图象，在“分析”中，教科书指出：由于一次函数的图象是直线，所以只要确定两个点就能画出它. 这就会在前面画正比例函数的图象的基础上，引导学生考虑如何简单地画一次函数的图象. 对于一般的一次函数，为计算简单，可以选择点(0，b)和点(1，$k+b$)来画直线$y=kx+b$，但对具体的一次函数如何选点，应结合它的解析式作出具体选择.

[1] 这里的“探究”栏目的设计目的，是通过画函数图象的过程及观察比较，引出下面关于 k 对函数增减性影响的归纳.

[2] 填空答案：

增大，减小.

[3] 由形到数的认识是数形结合的一种探究方法，但不是唯一的方法.

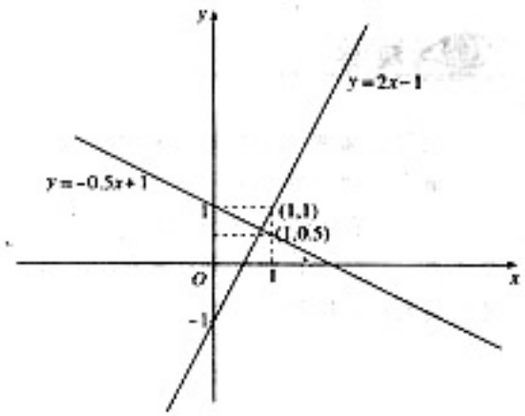


图 11.2-4

探究 [1]

画出函数 $y=x+1$，$y=-x+1$，$y=2x+1$，$y=-2x+1$ 的图象，由它们联想：一次函数解析式 $y=kx+b$（k，b 是常数，$k\neq0$）中，k 的正负对函数图象有什么影响？

观察前面一次函数的图象，可以发现规律：

当 $k>0$ 时，直线 $y=kx+b$ 由左至右上升；当 $k<0$ 时，直线 $y=kx+b$ 由左至右下降. 由此填出：一次函数 $y=kx+b$（k，b 是常数，$k\neq0$）具有如下性质：[2]

当 $k>0$ 时，y 随 x 的增大而_____；

当 $k<0$ 时，y 随 x 的增大而_____.

我们先通过观察发现图象（形）的规律，后又根据它得出关于数值大小的性质，这种数形结合的探究方法在数学学习中很重要. [3]

13. 由于前面已经讨论过正比例函数的增减性，而对一次函数的增减性可以进行类似的讨论，所以，一般地说，讨论一次函数的增减性并不会形成新的难点. 教学中，除通过图象解释一次函数的增减性外，也可以分 $k>0$ 和 $k<0$ 两种情形，利用不等式解释或证明这个性质，具体方法为：设 x_1，x_2 为任意两个实数，且 $x_1<x_2$，比较函数 $y=kx+b$ 在 x_1，x_2 的值的大小. 这样做可以进一步从数形结合的角度加深对一次函数的增减性的理解.

14. 本节的例 4 是根据直线上两点的坐标，求相应一次函数的解析式. 通过此例学生可以对待定系数法有所了解.

教学中，可以不提及待定系数法的名称，但要使学生能够掌握通过方程（组）确定相应系数从而确定函数解析式的方法. 这种方法在解析几何中经常被用来解决由曲线（图象）确定方程（函数）的问题. 现在接触这种方法可以为今后

练习

1. 直线 $y=2x-3$ 与 x 轴交点坐标为_____；与 y 轴交点坐标为_____；图象经过_____象限，y 随 x 的增大而_____.

2. 在同一直角坐标系中画出下列函数的图象，每小题中三个函数的图象有什么关系？

(1) $y=x-1$，$y=x$，$y=x+1$；

(2) $y=-2x-1$，$y=-2x$，$y=-2x+1$.

3. 在同一直角坐标系中画出下列函数的图象，并指出它们的共同之处：

$y=\frac{1}{2}x+1$，$y=x+1$，$y=2x+1$，$y=-x+1$.

例 4 已知一次函数的图象过点 (3，5) 与 (−4，−9)，求这个一次函数的解析式.

因为图象过 (3，5) 与 (−4，−9) 点，所以这两点的坐标必适合解析式.

分析：求一次函数 $y=kx+b$ 的解析式，关键是求出 k，b 的值，从已知条件可以列出关于 k，b 的二元一次方程组，并求出 k，b.[1]

解：设这个一次函数的解析式为 $y=kx+b$.

因为 $y=kx+b$ 的图象过点 (3，5) 与 (−4，−9)，所以

$$\begin{cases}3k+b=5,\\-4k+b=-9.\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}k=2,\\b=-1.\end{cases}$$

这个一次函数的解析式为 $y=2x-1$.

像例 4 这样先设出函数解析式，再根据条件确定解析式中未知的系数，从而具体写出这个式子的方法，叫做待定系数法.[2]

练习答案

1. $\left(\frac{3}{2},0\right)$，(0，−3)，一、三、四，增大.

2. 图象略.

每小题中各函数的图象是三条平行的直线.

3. 图象略.

这些直线都过点 (0，−1).

[1] 一般地，已知一次函数的图象经过两个点时，根据这两点的坐标，通过解二元一次方程组，可以确定这个函数的解析式.

[2] 这里结合例 4 介绍待定系数法. 这种方法的一般步骤是，先写出含字母系数的解析式，再根据题中条件确定系数的值.

的进一步学习作些准备.

15. 本节的例 3 和例 4 从两个不同方面说明了函数解析式与函数图象可以相互转化，实现这种转化的工具就是点的坐标，它是连接数与形两种对象的纽带. 教学中，在分别讨论过这两个例子后，把它们联系起来，讨论两个不同方向的转化很有必要，这样可以培养全面认识事物的观点.

16. 本节的例 5 是从实际问题中抽象出函数的解析式和图象. 问题中的函数关系有两个，即在第一段时间内是一次函数，在第二段时间内是常值函数. 对于这种分段函数的问题，特别要注意相应的自变量变化区间. 在解析式和图象上都要反映出自变量的相应取值范围.

教学中，应注意这里不是以讲分段函数为重点，而是重在培养数学建模能力.

17. 本节的例 6 是一个选择最优方案的实际问题，这个问题可以归为线性规划的初级问题.

[1] 这里结合例3和例4说明直线与一次函数解析式之间的互相转化过程.

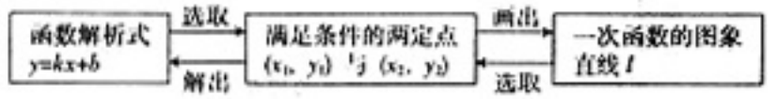
练习答案

1. $\frac{2}{5}$.

2. $k=\frac{4}{3}$，$b=-12$.

[2] 分段函数是在不同区间上有不同对应方式的函数. 这里只是介绍分段函数的名称，不是要讲它的定义.

例3与例4从两方面说明：[1]



练习.

1. 已知一次函数 $y=kx+2$，当 $x=5$ 时 y 的值为4，求 k 的值.

2. 已知直线 $y=kx+b$ 经过点 (9，0) 和点 (24，20)，求 k，b 的值.



例5 小芳以200米/分的速度起跑后，先匀加速跑5分，每分提高速度20米/分，又匀速跑10分. 试写出这段时间里她的跑步速度 y（单位：米/分）随跑步时间 x（单位：分）变化的函数关系式，并画出函数图象.

分析：本题 y 随 x 变化的规律分成两段（前5分与后10分），写出 y 随 x 变化的函数关系式时要分成两部分，画函数图象也要分成两段来画.

解：$y=\begin{cases}20x+200 & (0\leqslant x<5),\\ 300 & (5\leqslant x\leqslant 15).\end{cases}$

图11.2-5是这个函数的图象.

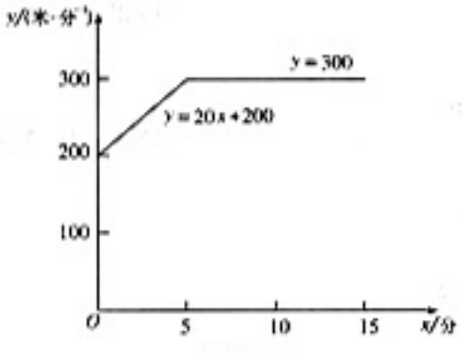


图11.2-5

我们称此类函数为分段函数. [2]

解决这个问题，需要先确定影响总运费的最关键的变量，再列出表示总运费的函数解析式，然后分析这个解析式或相应的图象，找出总运费的最小值.

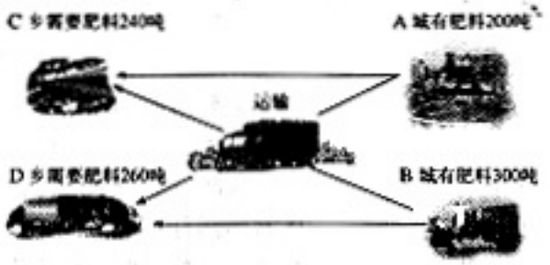
这道例题的第一个教学难点，是从比较复杂的已知数量关系中，列出函数解析式. 教科书通过安排填表帮助学生有条理地分析各个已知条件，列出相关代数式，然后提炼出函数解析式.

这道例题的第二个教学难点，是从函数解析式分析出最小值，突破它的办法是观察函数解析式或图象，从数值或几何意义上寻找答案.

这道例题的第三个教学难点，是从数字解还原到实际问题的解决方案，突破它的关键在于对列式中如何表示各相关的量有正确的理解.

总之，这道例题的综合性较强，有一定难度，但对于培养和提高学生分析问题和解决问题的能力有较明显的作用. 教学中，应根据学生的实际情况，进行适当的设计，注意分步地进行引

例 6[1] A 城有肥料 200 吨，B 城有肥料 300 吨，现要把这些肥料全部运往 C、D 两乡．从 A 城往 C、D 两乡运肥料的费用分别为每吨 20 元和 25 元；从 B 城往 C、D 两乡运肥料的费用分别为每吨 15 元和 24 元．现 C 乡需要肥料 240 吨，D 乡需要肥料 260 吨．怎样调运总运费最少？



思考

影响总运费的变量有哪些？由 A、B 城分别运往 C、D 乡的肥料量共有几个量？这些量之间有什么关系？

可以发现，A——C，A——D，B——C，B——D 运肥料共涉及 4 个数量．一方面，它们是影响总运费的变量；另一方面，它们互相联系，其中一个量确定后另外三个量随之确定．这样我们就可以设其中一个为变量 x，把其他量表示为含 x 的式子（填空）．[2]

收地 / 运地	C	D	总计
A	x 吨	_____吨	200 吨
B	_____吨	_____吨	300 吨
总计	240 吨	260 吨	500 吨

[1] 例 6 是关于运输方案的问题，属于线性规划的初步问题．

[2] 填空答案：

$200-x$，

$240-x$，$60+x$．

导，将复杂问题分解为若干个简单问题，步步深入，由易到难地寻求解答．

本例的后边对含有多个变量问题的解决方法进行了一般性的小结．教学中，可以结合本例的解决过程，让学生理解这个小结的含义．

18．得到例 6 的答案后，教科书在页边提出了改变问题的条件后的新问题．从表面看，新问题的解法与例 6 完全相同，但是认真分析后会发现新问题中自变量的最小值应为 40 而不是 0，因此相应的解答是 $x=40$ 时的函数值．教学中，应注意学生容易发生机械照搬例题解答的错误，引导他们注意新问题的新特点，并从问题的特点出发分析问题与解决问题．

[1] 由于 A 城有化肥 200 吨，所以由 A 城运往 C 乡的化肥数量满足 $0 \leqslant x \leqslant 200$.

[2] 这里提示可以从数和形两个不同角度确定 y 的最小值.

[3] 方法与例 6 相同，考虑函数

$y=20x+25(300-x)+15(240-x)+24(60+x)$.

但注意根据题中条件，由 A 城运往 C 乡的化肥数量满足 $40 \leqslant x \leqslant 240$. 因此，当 $x=40$ 时，y 有最小值 12 700.

练习答案

从 A 向甲调水 1 万吨，向乙调水 13 万吨；从 B 向甲调水 14 万吨，调运量有最小值 1 280 万吨·千米.

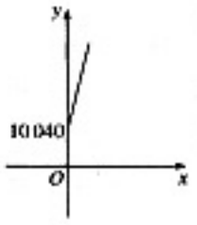


图 11.2-6

根据实际问题的需要，画函数图象时，x 轴和 y 轴的单位长度可以不同.

解：设总运费为 y 元，A 城运往 C 乡的肥料量为 x 吨，则运往 D 乡的肥料量为 $(200-x)$ 吨；B 城运往 C、D 乡的肥料量分别为 $(240-x)$ 吨与 $(60+x)$ 吨.

由总运费与各运输量的关系可知，反映 y 与 x 之间关系的函数为

$$y=20x+25(200-x)+15(240-x)+24(60+x).$$

化简得

$$y=4x+10\,040 \quad (0 \leqslant x \leqslant 200).$$ [1]

由解析式与图象（图 11.2-6）可看出：当 $x=0$ 时，y 有最小值 10 040. [2]

因此，从 A 城运往 C 乡 0 吨，运往 D 乡 200 吨；从 B 城运往 C 乡 240 吨，运往 D 乡 60 吨，此时总运费最少，总运费最小值为10 040元.

若 A 城有肥料 300 吨，B 城有肥料 200 吨，其他条件不变，又应怎样调运？[3]

解决含有多个变量的问题时，可以分析这些变量的关系，选取其中某个变量作为自变量，然后根据问题的条件寻求可以反映实际问题的函数.

练习

从 A、B 两水库向甲、乙两地调水，其中甲地需水 15 万吨，乙地需水 13 万吨. A、B 两水库各可调出水 14 万吨. 从 A 地到甲地 50 千米，到乙地 30 千米；从 B 地到甲地 60 千米，到乙地 45 千米. 设计一个调运方案使水的调运量（单位：万吨·千米）最小.

习题11.2

复习巩固 ▶▶

1. 一列火车以 90 千米/时的速度匀速前进，求它的行驶路程 s（单位：千米）随行驶时间 t（单位：时）变化的函数关系式，画出函数图象.
2. 函数 $y=-5x$ 的图象在第_____象限内，经过点（0，____）与点（1，____），y 随 x 的增大而_____.
3. 一个弹簧不挂重物时长 12 cm，挂上重物后伸长的长度与所挂重物的质量成正比. 如果挂上 1 kg 的物体后，弹簧伸长 2 cm，求弹簧总长 y（单位：cm）随所挂物体质量 x（单位：kg）变化的函数关系式.



4. 在同一直角坐标系中，画出函数 $y=2x+4$ 与 $y=-2x+4$ 的图象，指出每个函数中当 x 增大时 y 如何变化.
5. 已知一个一次函数的图象经过点（-4，9）和点（6，3），求这个函数的解析式.

综合运用 ▶▶

6. 一个函数的图象是经过原点的直线，并且这条直线过第四象限及点（2，$-3a$）与点（a，-6），求这个函数的解析式.
7. 点 $P(x, y)$ 在第一象限，且 $x+y=8$，点 A 的坐标为（6，0），设 $\triangle OPA$ 的面积为 S.
   （1）用含 x 的解析式表示 S，写出 x 的取值范围，[1] 画出函数 S 的图象.
   （2）当点 P 的横坐标为 5 时，$\triangle OPA$ 的面积为多少？[2]
   （3）$\triangle OPA$ 的面积能大于 24 吗？为什么？
8. 直线 $y=3x+4$ 与 $y=3x-4$ 具有什么样的位置关系？
9. 某公司在 A、B 两地分别有库存机器 16 台和 12 台，现要运往甲、乙两地，其中甲地 15 台，乙地 13 台. 从 A 地运一台到甲地的运费为 500 元，到乙地为 400 元；从 B 地运一台到甲地的运费为 300 元，到乙地为 600 元. 公司应设计怎样的调运方案，能使这些机器的总运费最省？



［1］这里要根据问题的条件，即点 P 在第一象限，且 $x+y=8$ 来确定自变量的取值范围.

［2］这里要计算函数值，注意此时自变量的取值要在其取值范围之内.

习题 11.2

1. 习题 11.2 中“复习巩固”的题目有两类：

（1）复习巩固正比例函数的问题；

（2）复习巩固关于一次函数的概念、图象、性质、方法的基本问题.

这些题目虽然简单，但是基础性强，学生应对它们有正确的理解，并能很熟练地完成它们.

2. 习题 11.2 中“综合运用”的题目有 4 道. 其中，第 6 题是根据图象求正比例函数的解析式的问题，解决它需要待定系数法；第 7 题是从几何角度考虑如何利用一次函数解决问题，解题时要注意自变量的取值范围；第 8 题是根据函数解析式推断两条直线的几何关系，解决问题时不应用画出图象再比较的笨方法；第 9 题与例 6 类似，参照例 6 可以解决它.

3. 习题 11.2 中“拓广探索”的题目有两道. 其中，第 9 题是根据图象回答问题，只要能

[1] 分情况讨论是化复杂问题为简单问题的重要方法.

拓广探索 ▶▶

10. 图中的折线表示一骑车人离家的距离 y 与时间 x 的关系. 骑车人 9:00 离开家，15:00 回家，请你根据这个折线图回答下列问题：

(1) 这个人什么时间离家最远？这时他离家多远？

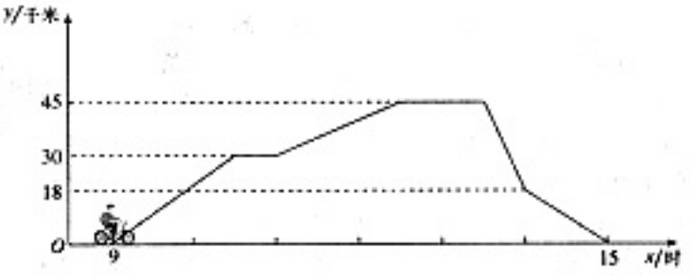
(2) 何时他开始第一次休息？休息多长时间？这时他离家多远？

(3) 11:00～12:30 他骑了多少千米？

(4) 他在 9:00～10:30 和 10:30～12:30 的平均速度各是多少？

(5) 他返家时的平均速度是多少？

(6) 14:00 时他离家多远？何时他距家 10 千米？



(第 10 题)

11. 一种出租车的收费方式如下：4 千米以内 10 元，4 千米至 15 千米部分每千米加收 1.2 元，15 千米以上部分每千米加收 1.6 元. 某乘客要乘出租车去 50 千米处的某地.

(1) 如果乘客中途不换车要付车费多少元？

(2) 如果乘客中途换乘一辆出租车，他在何处换比较合算？[1] 算出总费用与 (1) 比较.





阅读与思考 选学

科学家如何测算地球的年龄

你知道如何测算地球的年龄吗？在解决这个问题中也用到函数这个数学工具.

1896 年，法国物理学家贝克勒尔发现，铀的化合物能放射出一种肉眼看不见的射线，

正确理解折线图中横、纵坐标的意义，分段考虑问题就能得出答案. 第 10 题的难点在于第 (2) 问需要分情况进行讨论，这需要进行计算与比较大小. 具体解答可以参阅后面的“参考答案”.

阅读与思考

这篇短文通过介绍科学家如何测算地球的年龄，展现了函数的一项应用.

文中介绍的放射性物质衰减后所余量与时间之间的函数关系，是指数函数关系。但是初中不学习这种函数. 为使学生能直观地了解这种函数，短文采用了图象表示它. 由于教科书在课文中已经介绍了函数图象的一般意义，所以学生可以借助图象初步了解半衰期的含义，认识到每种

这种射线可以使在黑纸里的照相底片感光．这引起了科学家居里夫人的注意，她又发现了一些放射性更强的元素．1903 年，英国物理学家卢瑟福通过实验证实，放射性物质在放出射线的同时，本身有一部分“蜕变”为其他物质．这种蜕变的规律是：一种物质放出射线后，这种物质的量将减少，减少的速度开始较快，后来较慢．物质所剩的量与时间成指数函数关系．这种函数我们还没有学过，但可以从函数的图象中来认识它的变化规律．图 1 为镭的放射规律．

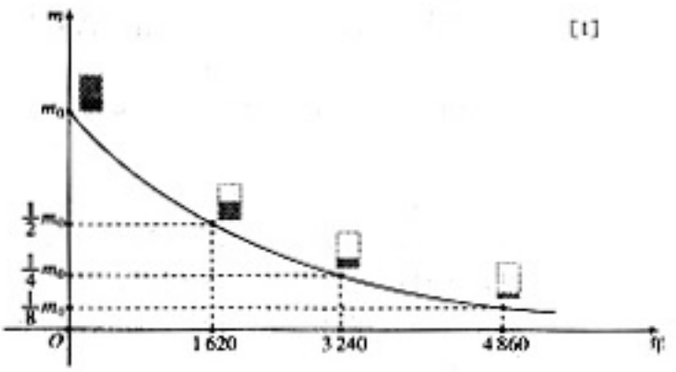


图 1

由图象我们可以发现：镭的质量由 m_0 缩减到 $\frac{1}{2}m_0$ 约需 1 620 年，由 $\frac{1}{2}m_0$ 缩减到 $\frac{1}{4}m_0$ 约需 3 240－1 620＝1 620（年），由 $\frac{1}{4}m_0$ 缩减到 $\frac{1}{8}m_0$ 约需 4 860－3 240＝1 620（年）．即镭的质量缩减为原来的一半所用的时间是一个不变的量——1 620 年，一般把 1 620 年称为镭的半衰期．

实际上，所有的放射性物质都有自己的半衰期，铀的半衰期为 45.6 亿年．蜕变后的铀最后成为铅，科学家们测出一块岩石中现在含铀和铅的质量，便可以算出这块岩石原来的含铀量，进而利用半衰期算出由原来含铀量到现在含铀量经过了多少时间，从而推算出这块岩石的年龄．正是利用这种方法，科学家测算出地球上最古老的岩石的年龄约为 30 亿年．当然，地球年龄要比这更大一些，估计有 45 亿 ～ 46 亿年．

[1] 指数函数的图象是一条曲线，这里是实际问题数学化后的指数函数 $y=m_0a^x$ 的图象，其中 a 是 0.5 的 1620 次算术根，即 $a^{1620}=0.5$，$a>0$.

高中数学中有关于指数函数的内容.

放射性物质的质量缩减一半所用的时间都是一个固定的常数．知道放射性物质铀的半衰期后，就能根据岩石中铀及其蜕变物质铅的含量测算岩石的年龄，并进而推算地球的年龄．在这个测算过程中半衰期是由指数函数确定的，因此解决这个问题需要了解这种函数的对应规律.

地球是人类生活的星球，它的年龄是人们关心的问题，学生很希望知道如何测算这个问题的答案，从短文中既能对此有初步了解，又看能到函数的一种应用．这就是读这篇短文的主要收获.

[1] 本节共分为3小节，用函数观点分别讨论3个已经学习过的数学概念. 11.3.1讨论的对象是一元一次方程，它在本套教科书中第2章首次出现.

[2] 应该说问题(1)和(2)是同一问题的两种不同的表达方式.

11.3 用函数观点看方程（组）与不等式

11.3.1 一次函数与一元一次方程[1]

我们先来看下面两个问题有什么关系：

(1) 解方程 $2x+20=0$.

(2) 当自变量 x 为何值时函数 $y=2x+20$ 的值为0?

在问题(1)中，解方程 $2x+20=0$，得 $x=-10$；解问题(2)就是要考虑当函数 $y=2x+20$ 的值为0时，所对应的自变量 x 为何值，这可以通过解方程 $2x+20=0$，得出 $x=-10$. 因此这两个问题实际上是同一个问题.[2]

从函数图象上看，直线 $y=2x+20$ 与 x 轴交点的坐标是 $(-10, 0)$ (图11.3-1)，这也说明，方程 $2x+20=0$ 的解是 $x=-10$.

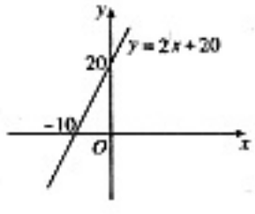


图11.3-1

思考

由上面两个问题的关系，能进一步得到“解方程 $ax+b=0$ (a, b 为常数)”与“求自变量 x 为何值时，一次函数 $y=ax+b$ 的值为0”有什么关系?

1. 总体上看，本章在学生已有对一元一次方程、二元一次方程组和一元一次不等式等的认识后，从变化和对应的角度，对一次运算进行更深入的讨论. 本节的内容为：学习了一次函数后，回过头重新认识已经学习过的一些其他数学概念，即通过讨论一次函数与方程（组）及不等式的关系，从运动变化的角度，用函数的观点加深对已经学习过的方程（组）及不等式等内容的认识，构建和发展相互联系的知识体系.

2. 本节讨论的三个主要对象为：一元一次方程、一元一次不等式和二元一次方程组. 它们已不是新知识，但过去的认识还有待于进一步深化. 本节用函数的观点对它们重新进行分析，这种再认识不是简单的回顾复习，而是居高临下地进行动态分析. 教师应体会安排这一节的意图，把握本节内容的要求尺度. 通过本节的教学，应加强知识间横向和纵向的联系，发挥函数对相关内容的统领作用，能用一次函数可以把以前学习

由于任何一元一次方程都可以转化为 $ax+b=0$（a，b 为常数，$a\neq0$）的形式，所以解一元一次方程可以转化为：当某个一次函数的值为 0 时，求相应的自变量的值．从图象上看，这相当于已知直线 $y=ax+b$，确定它与 x 轴交点的横坐标的值．[1]

例 1 一个物体现在的速度是5 米/秒，其速度每秒增加 2 米/秒，再过几秒它的速度为 17 米/秒？

解法 1：设再过 x 秒物体的速度为 17 米/秒．列方程

$$2x+5=17.$$

解得

$$x=6.$$

解法 2：速度 y（单位：米/秒）是时间 x（单位：秒）的函数

$$y=2x+5.$$

由

$$2x+5=17,$$

得

$$2x-12=0.$$

由图 11.3-2，看出直线 $y=2x-12$ 与 x 轴的交点为(6，0)，得 $x=6$.

这两种解法分别从数与形两方面得出相同的结果．[2]

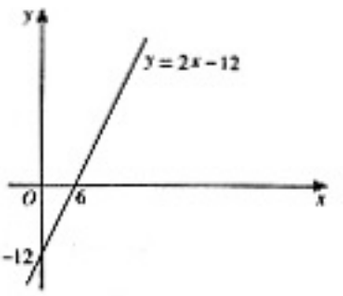


图 11.3-2

[1] 注意这里首先将一元一次方程化为 $ax+b=0$ 的形式，这样就可以用函数观点从数和形两个角度对解一元一次方程进行描述．

[2] 教学中，可以引导学生分别用两种解法解此题，然后再比较所得结果．

的方程和不等式等不同的数学概念统一起来，使得新旧知识融会贯通，从而进一步体现函数概念的重要性，加大分析问题的深度．

3. 任何一个一元一次方程都能写为 $ax+b=0(a\neq0)$ 的形式，因此解一元一次方程就是解这种形式的方程．

上述方程的左边恰是一次函数 $y=kx+b$ 的形式，从函数值的角度考虑，解这个方程就是寻求自变量为何值时函数值为 0；从函数图象的角度考虑，解这个方程就是确定直线 $y=ax+b$ 与 x 轴的交点的横坐标．教科书就从这两个角度讨论一元一次方程与一次函数的关系．

本节的例 1 分别给出两种解法，其中解法 1 就是直接解一元一次方程，这要比解法 2（从函数角度考虑问题）更简捷．但是，解法 2 显示了一次函数与一元一次方程之间的联系，它的意义已经不止是单纯地求解．

4. 一元一次不等式与一元一次方程在运算

[1] 11.3.2 小节中讨论的对象是一元一次不等式，它在本套教科书的第 9 章中首次出现.

[2] 问题（1）中的不等式与 $2x-4>0$ 是同解不等式，因此问题（1）(2) 是同一个问题的两种不同表达方式.

[3] 这里将不等式 $ax+b>0$ 与 $ax+b<0$ 列为两种形式. 实际上，后者可以写为 $-ax-b>0$ 的形式，所以任何一元一次不等式都能写为 $ax+b>0(a\neq 0)$ 的形式. 但为降低难度，教学中对此不必引申.

11.3.2 一次函数与一元一次不等式[1]

看下面两个问题有什么关系：

（1）解不等式 $5x+6>3x+10$.

（2）当自变量 x 为何值时函数 $y=2x-4$ 的值大于 0?

在问题（1）中，不等式 $5x+6>3x+10$ 可以转化为 $2x-4>0$，解这个不等式得 $x>2$；解问题（2）就是要解不等式 $2x-4>0$，得出 $x>2$ 时函数 $y=2x-4$ 的值大于 0. 因此这两个问题实际上是同一个问题.[2] 从直线 $y=2x-4$（图 11.3-3）可以看出，当 $x>2$ 时这条直线上的点在 x 轴的上方，即这时 $y=2x-4>0$.

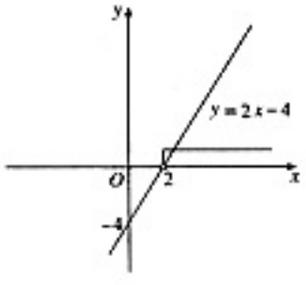


图 11.3-3

思考

由上面两个问题的关系，能进一步得到“解不等式 $ax+b>0$”与“求自变量 x 在什么范围内，一次函数 $y=ax+b$ 的值大于 0”有什么关系?

由于任何一元一次不等式都可以转化为 $ax+b>0$ 或 $ax+b<0$（a，b 为常数，$a\neq 0$）的形式，所以解一元一次不等式可以看作：当一次函数值大（小）于 0 时，求自变量相应的取值范围.[3]

形式上都是一次运算，不同之处只是“不等”与“相等”的区别. 由于任何一个一元一次不等式都能写为 $ax+b>$（或$<$）0 的形式，而此式的左边与一次函数 $y=kx+b$ 一致，所以从变化与对应的观点考虑问题，解一元一次不等式也可以归结为两种认识：

（1）从函数值的角度看，就是寻求使一次函数 $y=ax+b$ 的值大于（或小于）0 的自变量 x 的取值范围；

（2）从函数图象的角度看，就是确定直线 $y=kx+b$ 在 x 轴上（或下）方部分所有的点的横坐标所构成的集合.

教科书就从这两个角度讨论一元一次不等式与一次函数的关系.

本节的例 2 给出两种用函数图象解不等式 $5x+4<2x+10$ 的方法，其中解法 1 比解法 2 要少画一条直线，但解法 2 不需要先进行移项、合并同类项等化简变形. 介绍两种解法的目的，是

例 2 用画函数图象的方法解不等式 $5x+4<2x+10$.

解法 1：原不等式化为 $3x-6<0$，画出直线 $y=3x-6$（图 11.3-4），可以看出，当 $x<2$ 时这条直线上的点在 x 轴的下方，即这时 $y=3x-6<0$，所以不等式的解集为 $x<2$.

解法 2：将原不等式的两边分别看作两个一次函数，画出直线 $y=5x+4$ 与直线 $y=2x+10$（图 11.3-5），可以看出，它们交点的横坐标为 2，当 $x<2$ 时，对于同一个 x，直线 $y=5x+4$ 上的点在直线 $y=2x+10$ 上相应点的下方，这时 $5x+4<2x+10$，所以不等式的解集为 $x<2$.

两种解法都把解不等式转化为比较直线上点的位置的高低.[1]

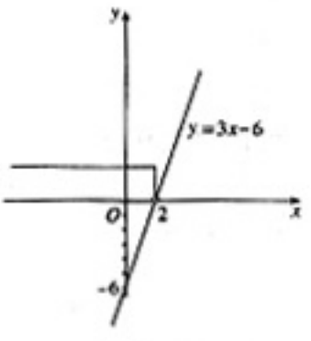


图 11.3-4

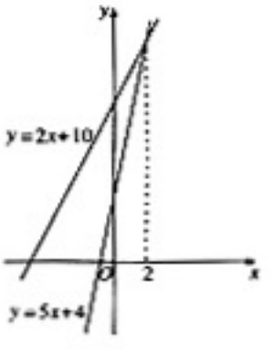


图 11.3-5

归纳[2]

虽然像上面那样用一次函数图象来解方程或不等式未必简单，但是从函数角度看问题，能发现一次函数、一元一次方程与一元一次不等式之间的联系，能直观地看到怎样用图形来表示方程的解与不等式的解，这种用函数观点认识问题的方法，对于继续学习数学很重要.

[1] 解法 1 中有一条直线，考虑它在 x 轴下方的部分所对应的 x 的取值范围. 解法 2 中有两条直线，考虑其中一条直线（$y=5x+4$）在另一条下方时所对应的 x 的取值范围.

[2] 这个“归纳”栏目指出了用函数观点认识其他有关数学概念的主要作用不是单纯解题，而是加强知识间的融会贯通.

以不同方式表现一元一次不等式与一次函数的联系，使学生能够用函数观点认识解一元一次不等式的实质.

5. 教科书在本节例 2 后面安排“归纳”的栏目，是要指出用函数观点认识有关数学概念的主要目的是加强知识间的联系，学习用变化和对应的眼光分析问题.

人对事物的认识需要不断深化，学习数学概念也是如此. 过去学习方程（组）和不等式时，是直接面对这些概念，没有将它们与其他概念更多地联系起来. 现在是在学习新概念（函数）后回头审视老概念，看问题的角度和高度都发生了变化，认识应更深刻，即应能将老概念纳入扩大后的新知识体系之中，这样才能体现学习中的进步.

教学中，应对本节内容的设计意图有明确的认识，这样才能有的放矢.

6. 一般地，二元一次方程 $mx+ny=p$ 能写

练习答案

1. (1)$x=-\frac{8}{3}$；

(2)$x=-5$；

(3)$x>-\frac{8}{3}$；

(4)$x<-2$.

2. (1)$x=2$；

(2)$x<2$.

练习

1. 当自变量 x 的取值满足什么条件时，函数 $y=3x+8$ 的值满足下列条件？

(1) $y=0$；　(2) $y=-7$；

(3) $y>0$；　(4) $y<2$.

2. 利用函数图象解出 x：

(1) $5x-1=2x+5$；　(2) $6x-4<3x+2$.

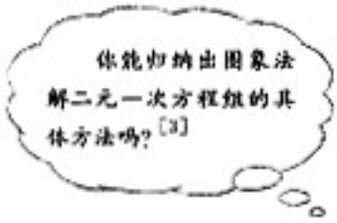
11.3.3　一次函数与二元一次方程(组)[1]

我们知道，方程 $3x+5y=8$ 可以转化为 $y=-\frac{3}{5}x+\frac{8}{5}$，并且直线 $y=-\frac{3}{5}x+\frac{8}{5}$ 上每个点的坐标 (x, y) 都是方程 $3x+5y=8$ 的解. 由于任意一个二元一次方程都可以转化为 $y=kx+b$ 的形式，所以每个二元一次方程都对应一个一次函数，于是也对应一条直线.

解二元一次方程组

$$\begin{cases}3x+5y=8,\\2x-y=1.\end{cases}$$

可以看作求两个一次函数 $y=-\frac{3}{5}x+\frac{8}{5}$ 与 $y=2x-1$ 图象的交点坐标（图 11.3-6），因此我们可以用画图象的方法解二元一次方程组.[2]



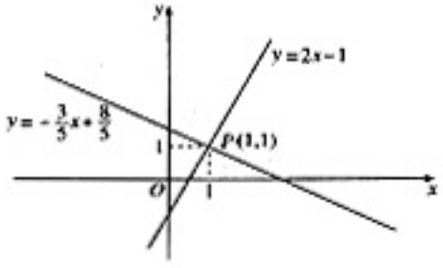


图 11.3-6

[1] 11.3.3 小节讨论的对象是二元一次方程组，它在本套教科书中第 8 章首次出现.

[2] 这里分析了用图象法解这个具体的二元一次方程组的道理.

[3] 先将两个方程化为一次函数 $y=kx+b$ 的形式，再将它们的图象画在同一直角坐标系中，最后确定两直线交点的坐标.

为 $y=kx+b$ 的形式. 因此，一般地一个二元一次方程对应一个一次函数. 又因为一个一次函数对应一条直线，所以一个二元一次方程就对应一条直线.

进一步可知，一般地一个二元一次方程组对应两个一次函数，因而也对应两条直线. 教科书正是按照这种逻辑关系来分析二元一次方程组和一次函数的关系.

一般地，如果一个二元一次方程组有唯一的解 $\begin{cases}x=a,\\y=b,\end{cases}$ 那么这个解就是方程组对应的两条直线的交点的坐标. 二元一次方程组的图象解法，就是依据了这样的道理.

7. 本节的例 3 是比较不同收费方式的问题，对于这个具有实际背景的问题，可以用两个一次函数来表示两种收费方式，通过讨论这两个函数来确定如何选择收费方式.

解法 1 中直接比较两个一次函数的图象，根

一般地，每个二元一次方程组都对应两个一次函数，于是也对应两条直线．从“数”的角度看，解方程组相当于考虑自变量为何值时两个函数的值相等，以及这个函数值是何值；从“形”的角度看，解方程组相当于确定两条直线交点的坐标.[1]

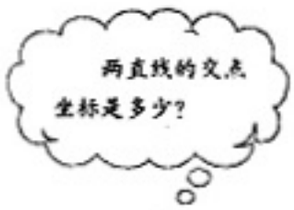
综上所述，一次函数与二元一次方程(组)有密切的联系.

例3 一家电信公司给顾客提供两种上网收费方式：方式A以每分0.1元的价格按上网时间计费；方式B除收月基费20元外再以每分0.05元的价格按上网时间计费.[2]如何选择收费方式能使上网者更合算？

分析：计费与上网时间有关，所以可设上网时间为x分，分别写出两种计费方式的函数模型，然后再做比较.

解法1：设上网时间为x分，若按方式A则收$y=0.1x$元；若按方式B则收$y=0.05x+20$元.

在同一直角坐标系中分别画出这两个函数的图象(图11.3-7).



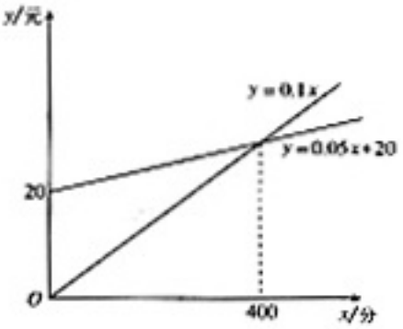


图11.3-7

解方程组$\begin{cases}y=0.1x,\\y=0.05x+20,\end{cases}$得$\begin{cases}x=400,\\y=40.\end{cases}$所以两图象交于点(400，40).

由图象易知：

[1] 这里从数和形两方面分析解一般的二元一次方程组的实质.

[2] 这里以“分”为时间单位，为简单起见不对1分钟内的时间再细分．粗略地考虑这一实际问题，可以用一次函数作为收费方式的数学模型.

据两图象的高低位置关系，确定在何种条件下应选择何种收费方式.

解法2中考虑两种收费方式的差额，并用一次函数表示它，然后根据这个函数的图象与x轴的相对位置关系，确定何时函数值大于0，何时函数值等于0，何时函数值小于0，从而确定应如何选择收费方式.

两种解法都利用了一次函数及其图象.

8. 本节依次分别讨论了三个不同的数学概念，尽管这些概念彼此不同，但它们都与一次函数有关．应用函数观点可以把许多数学概念统一起来，这样的分析方法很重要.

体会函数概念，学习应用函数观点分析问题和解决问题，需要一个较长的过程，应分阶段地进行．在本套教科书的后面的第26章“二次函数”中，还有这类内容.

9. 本节内容是在初步理解和掌握一次函数的定义、图象和性质后的进一步扩充，有关一次

[1] 填空答案：

$-0.05x+20$

[2] 由于自变量 $x \geqslant 0$，这个函数的图象是射线.

[3] 填空答案：

$0<x<400$，A；

$x=400$，一样；

$x>400$，B.

当 $0<x<400$ 时，$0.1x<0.05x+20$；

当 $x=400$ 时，$0.1x=0.05x+20$；

当 $x>400$ 时，$0.1x>0.05x+20$.

因此，当一个月内上网时间少于 400 分时，选择方式 A 省钱；当上网时间等于 400 分时，选择方式 A、方式 B 没有区别；当上网时间多于 400 分时，选择方式 B 省钱.

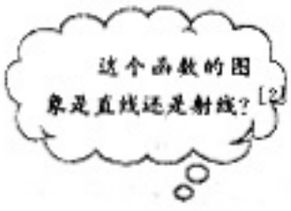
解法 2：设上网时间为 x 分，方式 B 与方式 A 两种计费的差额为 y 元，则 y 随 x 变化的函数关系式为

$$y=(0.05x+20)-0.1x,$$

化简得

$y=$_____.[1]

在直角坐标系中画出这个函数的图象(图 11.3-8).



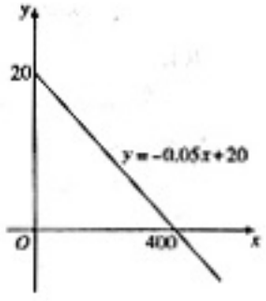


图 11.3-8

解方程 $-0.05x+20=0$，得出直线 $y=-0.05x+20$ 与 x 轴的交点为 (400，0).

由函数图象得：[3]

当_____时，$y>0$，即选方式____省钱；

当_____时，$y=0$，即方式 A，B _____；

当_____时，$y<0$，即选方式____省钱.

由此可得选择方案（略）.

函数的基础知识和基本技能是本节的基础，通过对本节的学习，有关的“双基”也应得到进一步的落实和巩固.

归纳

方程（组）、不等式与函数之间互相联系，用函数观点可以把它们统一起来[1]解决问题时，应根据具体情况灵活地、有机地把它们结合起来使用.

练习

在一元一次方程一章中，我们曾考虑过下面两种移动电话计费方式：

	全球通	神州行
月租费	50元/月	0
本地通话费	0.40元/分	0.60元/分

用函数方法解答如何选择计费方式更省钱.

习题11.3

复习巩固

1. 当自变量 x 的取值满足什么条件时，函数 $y=5x+17$ 的值满足下列条件？
   (1) $y=0$；　(2) $y=-7$；　(3) $y=20$.
2. 利用函数图象解出 x，并笔算检验：
   (1) $5x-3=x+2$；　(2) $0.5x-4=3x+2$.
3. 当自变量 x 的取值满足什么条件时，函数 $y=\frac{3}{2}x+6$ 的值满足下列条件？
   (1) $y=0$；　(2) $y<0$；　(3) $y>0$；　(4) $y<2$.
4. 利用函数图象解不等式：
   (1) $5x-1>2x+5$；　(2) $x-4<3x+1$.
5. 当自变量 x 取何值时，函数 $y=\frac{5}{2}x+1$ 与 $y=5x+17$ 的值相等？这个函数值是什么？

[1] 函数是联系这些数学概念的纽带.

练习答案

“全球通”用费 $y_1=0.4x+50$，“神州行”用费 $y_2=0.6x$.

$y=y_1-y_2=-0.2x+50$.

$x<250$ 分，$y>0$，$y_1>y_2$，“神州行”省钱；

$x=250$ 分，$y=0$，$y_1=y_2$，“神州行”“全球通”用钱一样；

$x>250$ 分，$y<0$，$y_1<y_2$，“全球通”省钱.

习题 11.3

1. 习题 11.3 中“复习巩固”的题目有三类：

（1）复习巩固联系一元一次方程和一次函数的基本问题；

（2）复习巩固联系一元一次不等式和一次函数的基本问题；

（3）复习巩固联系二元一次方程组和一次函数的基本问题.

这些题目虽然简单，但是基础性强，学生应对它们有正确的理解，并能很熟练地完成它们.

2. 习题 11.2 中“综合运用”的题目有 3 道，它们都有实际背景，解决问题的过程中首先需要根据题中条件建立一次函数形式的数学模型.

第 7 题中的条件“一个静止的物体开始运动，其速度每秒增加 0.5 米/秒”告诉我们：这个物体在作匀加速运动，其速度 $v=0.5t(t\geqslant 0)$.

6. 利用函数图象解方程组：

(1) $\begin{cases}3x+2y=5,\\2x-y=1;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x+2y=4,\\2x-y=6.\end{cases}$

综合运用 ▶▶

7. 一个静止的物体开始运动，其速度每秒增加 0.5 米/秒，多少秒后它的速度超过 6 米/秒？多少秒之内它的速度不超过 8.5 米/秒？

8. 从 A 地向 B 地打长途电话，通话 3 分以内收费 2.4 元，3 分后每增加通话时间 1 分加收 1 元，求通话费用 y（单位：元）随通话时间 x（单位：分，x 为正整数）变化的函数关系式．有 10 元钱时，打一次电话最多可以打多长时间？

9. A、B 两个商场平时以同样价格出售相同的商品，在春节期间让利酬宾，A 商场所有商品 8 折出售；在 B 商场消费金额超过 200 元后，可在这家商场 7 折购物．试问如何选择商场来购物更经济？

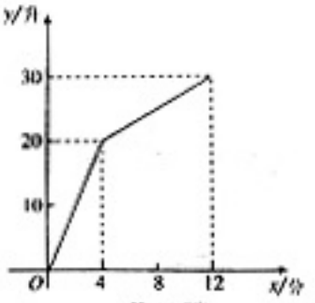
拓广探索 ▶▶

10. 一个有进水管与出水管的容器，单位时间内进出的水量都是一定的，设从某时刻开始的 4 分内只进水不出水，在随后的 8 分内既进水又出水，容器内的水量 y（单位：升）与时间 x（单位：分）之间的关系如图所示．

(1) 求 $0\leqslant x\leqslant 4$ 时 y 随 x 变化的函数关系式．

(2) 求 $4<x\leqslant 12$ 时 y 随 x 变化的函数关系式．

(3) 每分进水、出水各多少升？



(第 10 题)

11. 一次越野赛跑中，当小明跑了 1 600 米时，小刚跑了 1 450 米．此后两人分别以 a 米/秒和 b 米/秒匀速跑．又过 100 秒时小刚追上小明，200 秒时小刚到达终点，300 秒时小明到达终点．这次越野赛跑的全程为多少？



第 8，9 两题中，对某些量不能用一个解析式表示，而需要分情况（自变量的不同取值区间）用不同的解析式表示，因此得到的函数是形式比较复杂的分段函数．解题中要注意解析式对应的自变量的取值范围，分段考虑问题．

3. 习题 11.3 的“拓广探索”栏目中有两道题．其中，第 10 题用图象表示函数关系，由图象的形状可以确定函数类型为一次函数，于是可以用待定系数法确定函数解析式．第 11 题的条件表明，若以匀速跑的时间为自变量，则两人从出发起跑过的路程都可以表示为一次函数，于是可以用待定系数法确定函数解析式，进而求出问题的解．

数学活动

活动 1

(1) 根据下表的数据在直角坐标系中画出人口增长曲线图；

(2) 选择一个近似于人口增长曲线的一次函数，写出它的解析式；[1]

(3) 按照这样的增长趋势，试估计 2004 年我国的人口数.[2]

中国人口数统计表

年 份	人口数/亿	年 份	人口数/亿
1964	7.04	1984	10.34
1969	8.06	1989	11.06
1974	9.08	1994	11.76
1979	9.79	1999	12.52

活动 2

下表是“全球通”移动电话的几种不同收费方案.

方案代号	月租费/元	免费时间/分	超过免费时间的通话费/元/分
0	50	0	0.40
1	30	48	0.60
2	98	170	0.60
3	168	330	0.50
4	268	600	0.45
5	388	1 000	0.40

(1) 分别写出方案 0，3，5 中月话费（月租费与通话费的总和）y(单位：元) 与通话时间 x(单位：分) 的函数关系式；[3]

(2) 如果月通话时间为 300 分左右，选择哪个方案最省钱？[4]

(3) 通过图象比较方案 0，1，2 和 3，由此你对选择方案有什么建议？[5]

[1] 这个函数只是近似地表示时间（年）与人口数的对应关系，可以先画出一条你认为与标出的 8 个点最接近的直线，再用待定系数法求出这条直线对应的一次函数. 这样的答案不唯一.

参考答案：

$y=0.15x-287.3$.

[2] 参考答案：

13.3（亿）.

[3]

$y=0.4x+50$；

$y=168$ $(0\leqslant x\leqslant 330)$，

$y=0.5(x-330)+168$ $(x>330)$；

$y=388$ $(0\leqslant x\leqslant 1\,000)$，

$y=0.4(x-1\,000)+388$ $(x>1\,000)$.

[4] 选择方案 3 最省钱.

[5] 设通话时间为 x 分. 若 $0\leqslant x\leqslant 120$，则选方案 1；若 $120<x\leqslant 270$ 则选方案 2；若 $270<x\leqslant 295$ 则选方案 0；若 $295<x$，则选方案 3.

1. 数学活动 1 要求根据表格中的数据，画出数值变化曲线. 这里的自变量应选择时间（年），它的起始数据为 1964，对应的函数值为 7.04，以后自变量的增量为 5，共有 8 组数据. 在直角坐标系中标出 8 个点并依次连接它们，就得到人口增长曲线，这条曲线近似于直线型，可以用待定系数法得出一次函数，作为表示时间（年）与人口数（亿）之间对应关系的近似函数. 利用这个近似函数，可以对表中所列时间之后的年份预测人口数.

由于这条人口增长曲线不是真正的直线型，所以一次函数仅是近似的经验型公式，所得的解析式并无唯一的标准答案，相应的预测结果也有差别，但是它们在数值上应接近.

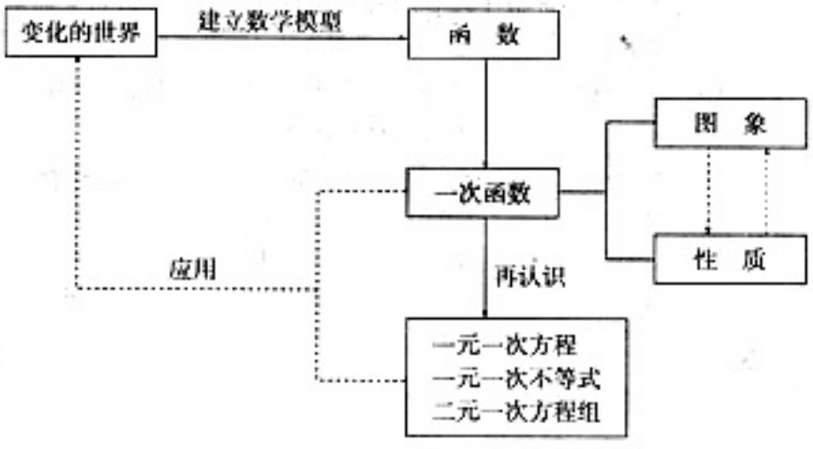
2. 数学活动 2 的表格中各种收费方案尽管不同，但它们所对应的函数类型基本一致. 根据表中数据，确定相应的函数关系式后，就能够进一步利用函数值及图象解决其中的问题 (2) 和 (3).

[1] 这幅框图表示了本章主要内容之间的联系，突出了函数是现实世界的数学模型，一次函数的图象与性质互相关联，用函数观点可以对方程（组）及不等式进行再认识.

[2] 由于函数的内容有一定抽象性，所以复习中要结合具体例子加深对抽象内容的认识.

小　结

一、本章知识结构图[1]



二、回顾与思考

1. 为了研究变化的世界，我们引入了函数. 在同一变化的过程中两个相互制约、相互依存的量 x，y 满足什么条件时，y 是 x 的函数？举出一些函数的实例. [2]

2. 举例说明函数有哪几种表示法，它们各有什么优点？

3. 举例说明一次函数 $y=kx+b$ 中的常数 k 对图象的影响，结合图象说明一次函数的性质. 由一次函数的图象怎样求出它的解析式？

4. 一元一次方程、一元一次不等式、二元一次方程组与一次函数之间有什么关系？怎样用函数图象解方程（组）或解不等式？

5. 体会怎样建立实际问题的函数模型.

1. 复习课可以引导学生先回忆本章的主要内容及学习的先后顺序，体会本章知识结构图，加深学生对各部分内容之间的关系的认识，使知识结构图发挥更好的总结作用.

2. 函数是研究变量之间关系的重要数学模型，函数概念中隐含着变化与对应的思想，利用函数观点可以从运动变化的角度加深对数学问题的理解.

在本章复习中，不仅要关注基础知识和基本技能，而且要关注数学思想方法，培养学生对运动变化和对应关系的把握能力，进一步加强数形结合地分析问题和解决问题的能力.

3. 一次函数的定义、图象和性质是本章的主要基础知识，会根据问题的条件写出一次函数的解析式，会画一次函数的图象和了解一次函数的性质，是学习本章后应具备的基本技能. 复习中应使以上“双基”得到落实.

4. 本章中对前面的相关内容进行了再认识，这对从整体上认识所学数学知识的联系很有益.

复习题11

复习巩固 ▶▶

1. 小亮为赞助“希望工程”现已存款100元，他计划今后三年每月存款10元，存款总数 y（单位：元）将随时间 x（单位：月）的变化而改变，指出其中的常量与变量，自变量与函数，试写出函数关系式.



2. 判断下列各点是否在直线 $y=2x+6$ 上，这条直线与坐标轴交于何处？[1]

$(-5,-4)$，$(-7,20)$，

$\left(-\frac{7}{2},1\right)$，$\left(\frac{2}{3},7\frac{1}{3}\right)$.

3. 填空：

(1) 直线 $y=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}x$ 经过第_____象限，y 随 x 的增大而_____；

(2) 直线 $y=3x-2$ 经过第_____象限，y 随 x 的增大而_____.

4. 根据下列条件分别确定函数 $y=kx+b$ 的解析式：

(1) y 与 x 成正比例，[2] $x=5$ 时 $y=6$；

(2) 直线 $y=kx+b$ 经过点 $(3,6)$ 与点 $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

5. 试根据函数 $y=3x-15$ 的图象或性质，确定 x 取何值时：

(1) $y>0$；　　(2) $y<0$.

综合运用 ▶▶

6. 在某火车站托运物品时，不超过1千克的物品需付2元，以后每增加1千克（不足1千克按1千克计）需增加托运费5角，设托运 p 千克（p 为整数）物品的费用为 c 元，写出 c 的计算公式.[3]

[1] 此题既要考虑 x 轴，又要考虑 y 轴.

[2] 因为 y 与 x 成正比例，所以 $b=0$.

[3] p 为整数，即 $p=1,2,3,\cdots$，不需考虑 p 不是整数的情形.

复习题11

1. 复习题11中“复习巩固”的题目有5道，这些题目都是关于基础知识和基本技能的内容，应达到能较熟练地解它们的程度.

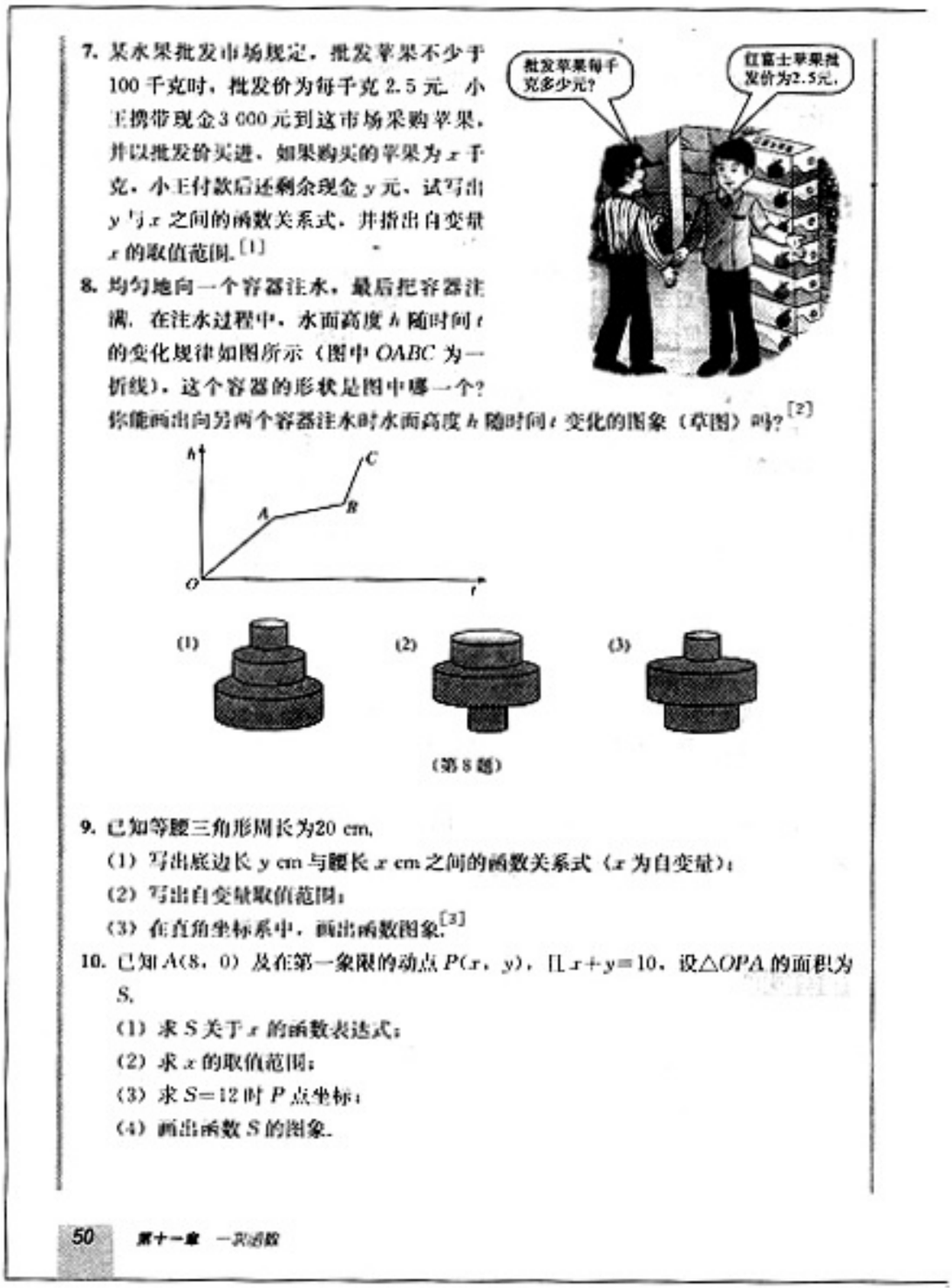
2. 复习题11中“综合运用”的题目有5道. 为简单起见，第6题只考虑物品重量为整数的情形. 第7题中对自变量的大小有两方面的约束，解题时容易忽略它的上限. 第8题图象中不同倾斜程度的线段表示水面升高的不同速度，容器的半径越大水面的升速越小. 第9和10题都是与几何图形有关的问题，也要注意其中自变量的取值范围.

3. 复习题11中“拓广探索”的题目有2道. 其中，第9题的难点在于将一个多元问题用式子适当地表示出来，并能将一个式子适当地进行分解变形，即 $2x+y+z=(x+y)+(x+z)$. 对此教科书作了相应的提示. 第10题在一次函数的基础上增加了绝对值的内容，即要求函数值

[1] 注意现金的数量与 x 的取值范围有关.

[2] 根据容器由下到上半径的变化情形，考虑水面上升速度变化的情形，再联系图象（折线）中线段倾斜程度的变化情形.

[3] 画图象时要对应自变量的取值范围.



7. 某水果批发市场规定，批发苹果不少于100千克时，批发价为每千克2.5元. 小王携带现金3 000元到这市场采购苹果，并以批发价买进，如果购买的苹果为 x 千克，小王付款后还剩余现金 y 元，试写出 y 与 x 之间的函数关系式，并指出自变量 x 的取值范围.[1]

8. 均匀地向一个容器注水，最后把容器注满. 在注水过程中，水面高度 h 随时间 t 的变化规律如图所示（图中 $OABC$ 为一折线），这个容器的形状是图中哪一个？你能画出向另两个容器注水时水面高度 h 随时间 t 变化的图象（草图）吗？[2]

（第8题）

9. 已知等腰三角形周长为20 cm，
   (1) 写出底边长 y cm 与腰长 x cm 之间的函数关系式（x 为自变量）；
   (2) 写出自变量取值范围；
   (3) 在直角坐标系中，画出函数图象.[3]

10. 已知 $A(8, 0)$ 及在第一象限的动点 $P(x, y)$，且 $x+y=10$，设 $\triangle OPA$ 的面积为 S，
   (1) 求 S 关于 x 的函数表达式；
   (2) 求 x 的取值范围；
   (3) 求 $S=12$ 时 P 点坐标；
   (4) 画出函数 S 的图象.

非负，因此所画出的图象均在 x 轴的上方. 根据绝对值的意义，正确地画出函数图象并不困难，实际上只是将一次函数图象的一部分沿 x 轴进行对称变换.

拓广探索 ▶▶

11. 如图点 A、B、C 是三家工厂，B 厂和 C 厂的产量都为 a 吨，A 厂的产量为 $2a$ 吨. 现在为把三厂的产品集中起来要建一仓库，设仓库设在 D 点，$AD=x$ 千米，$BD=y$ 千米，$CD=z$ 千米，每吨货物运行 1 千米所需费用为 10 元. 试用 x，y，z 表示总运费 W，D 点选在何处时总费用最小？



（第 11 题）

（提示：联系几何知识考虑 $x+y$，$x+z$ 的最小值，选择 D 点的位置.）[1]

12. (1) 画出函数 $y=|x-1|$ 的图象；

(2) 设 $P(x, 0)$ 是数轴上的一个动点，它与数轴上表示 -3 的点的距离为 y，求 x 的函数 y 的解析式，画出这个函数的图象. [2]

[1] 解题时可以画出草图，设 x，y，z 分别为仓库到 A，B，C 的距离，根据几何知识（三角形两边之和不小于第三边），确定仓库的位置. 注意适当地进行变形，即

$2x+y+z=$

$(x+y)+(x+z)$.

[2] 动点 $P(x, 0)$ 与数轴上表示定值 a 的定点 Q 的距离 $PQ=|x-a|$.

Ⅲ 习题解答

习题 11.1

1. 常量：单价 0.2，自变量：铅笔枝数 x，函数：总价 y. 函数关系式：$y=0.2x$.

2. 常量：底边长 5，自变量：高 h，函数：面积 S. 函数关系式：$S=\frac{5}{2}h(h>0)$.

3. 是. 因为对于各式中使式子有意义的 x 的每一个确定的值，y 都有唯一确定的值与其对应.

4. (1) 3(1)x 可以是任意实数；3(2)$x\neq 1$；3(3)$x\geqslant 1$.

(2) 当 $x=5$ 时，3(1)$y=10$；3(2)$y=\frac{3}{4}$；3(3)$y=2$.

5. 自变量 x 可以是任意实数，即其取值范围是全体实数.

6. (1)(2)(3)中 y 是 x 的函数，(4)中 y 不是 x 的函数.

7. (1)2.5 km，15 分；(2)1 km；(3)20 分；(4)$\frac{3}{70}$km/分.

8. $y=100(1+0.0006x)$，当 $x=4$ 时，$y=100.24$(元).

9. $y=(x+3)^2-3^2$ 即 $y=x^2+6x$. 其中 x 为自变量，y 为函数.

x	1	2	3	4
y	7	16	27	40

10. $y=500-(25-20)x(0\leqslant x\leqslant 100)$，即 $y=500-5x(0\leqslant x\leqslant 100)$.

11. 3 条直线最多把平面分为 7(即 1+1+2+3) 部分，4 条直线最多把平面分为 11 (即 1+1+2+3+4) 部分，n 条直线最多把平面分为 $1+1+2+3+4+\cdots+n=1+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2+n+2}{2}$ 部分，这个结果是 n 的函数.



(第 11 题)

12. 当 $x<-1$ 或 $0<x<1$ 时，$x<\frac{1}{x}$；当 $x>1$ 或 $-1<x<0$ 时，$x>\frac{1}{x}$.

习题 11.2

1. $s=90t$.

2. 二、四象限，(0，0)，(1，−5)，减小.

3. $y=2x+12$.

4. $y=2x+4$ 中，x 增大 y 增大；$y=-2x+4$ 中，x 增大 y 减小.

5. $y=-\frac{3}{5}x+\frac{33}{5}$.

6. $y=-3x$.

7. (1) $S=-3x+24$ $(0\leqslant x\leqslant 8)$;

(2) 9;

(3) 不能，当 $0\leqslant x\leqslant 8$ 时，$S=-3x+24$ 的最大值为 24.

8. 两条直线平行，直线 $y=3x+4$ 向下平移 8 个单位即直线 $y=3x-4$.

9. 设从 A 运到甲 x 台，总运费

$$y=500x+400(16-x)+300(15-x)+600(13-16+x)$$

即

$$y=400x+9\ 100\ (3\leqslant x\leqslant 15).$$

当 $x=3$ 时，$y=400x+9\ 100$ 有最小值 10 300.

最佳方案：从 A 运到甲 3 台，运到乙 13 台；从 B 运到甲 12 台，运到乙 0 台.

10. (1) 12：30～13：30，45 km；

(2) 10：30，30 分，30 km；

(3) 15 km；

(4) 20 km/h，7.5 km/h；

(5) 30 km/h；

(6) 18 km/h，9：30 和约 14：27 (14 点 $26\frac{2}{3}$ 分).

11. (1) $10+1.2\times(15-4)+1.6\times(50-15)=79.2$ (元)；

(2) 设乘第一辆车行驶 x $(0\leqslant x\leqslant 50)$ 千米后换车.

当 $0\leqslant x\leqslant 4$ 时，总费用

$$y=10+10+1.2(15-4)+1.6(50-x-15)=-1.6x+89.2. \qquad ①$$

$x=4$ 时，①有最小值 82.8 (元).

当 $4<x\leqslant 15$ 时，总费用

$$y=10+1.2(x-4)+10+1.2(15-4)+1.6(50-x-15)=-0.4x+84.4. \qquad ②$$

$x=15$ 时，②有最小值 78.4 (元).

当 $15<x\leqslant 35$ 时，总费用

$$y=10+1.2(15-4)+1.6(x-15)+10+1.2(15-4)+1.6(50-x-15)=78.4. \qquad ③$$

当 $35<x\leqslant 50$ 时，第二辆车的行程 $50-x$ 不到 15 千米，类比①②可知总费用不少于 78.4 元.

综上可知，在 15～35 千米处换车费用最少，最少费用为 78.4 元，比乘一次车省 0.8 元.

习题 11.3

1. (1) $x=-\frac{17}{5}$；　(2) $x=-\frac{24}{5}$；　(3) $x=\frac{3}{5}$.

2. (1) $x=\frac{5}{4}$；　(2) $x=-\frac{12}{5}$.

3. (1) $x=-4$；　(2) $x<-4$；　(3) $x>-4$；　(4) $x<-\frac{8}{3}$.

4. (1) $x>2$；　(2) $x>-2.5$.

5. $x=-6.4$，$y=-15$.

6. (1) $\begin{cases}x=1,\\y=1.\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=\frac{16}{5},\\y=\frac{2}{5}.\end{cases}$

7. 设所求时间为 t 秒.

$0.5t\geqslant 6$，$t\geqslant 12$；

$0.5t\leqslant 8.5$，$t\leqslant 17$.

8. $y=\begin{cases}2.4(0<x\leqslant 3),\\x-0.6(x>3，且为整数).\end{cases}$

有 10 元打一次电话可以最多通话 10 分，前 3 分花 2.4 元，后 7 分花 7 元，共花 9.4 元，余 0.6 元.

9. 购买原价为 x 元的商品，在 A 商场要用 $0.8x$ 元，在 B 商场要用 x 元 $(0\leqslant x\leqslant 200)$ 或 $200+0.7(x-200)=0.7x+60$ 元 $(x>200)$.

考虑函数 $y=0.8x$ 和函数 $\begin{cases}y=x(0\leqslant x\leqslant 200),\\y=0.7x+60(x>200).\end{cases}$ 由图象可知，当 $x<600$ 时在 A 商场购物省钱；当 $x=600$ 时在 A，B 商场购物花费相同；当 $x>600$ 时在 B 商场购物省钱.

10. (1) $y=5x$ $(0\leqslant x\leqslant 4)$；

(2) $y=\frac{5}{4}x+15$ $(4<x\leqslant 12)$；

(3) 由 $y=5x$ 知，每分进水 5 升；

由 $5-\left(\frac{5}{4}\times 5+15-20\right)=\frac{15}{4}$ 知，每分出水 $\frac{15}{4}$ 升.

11. 解：设 x 秒为匀速跑的时间.

小明出发后跑的路程为 $l=ax+1\,600$，小刚出发后跑的路程为 $l=bx+1\,450$.

$100a+1\,600=100b+1\,450$，

$300a+1\,600=200b+1\,450$.

这次越野赛跑的全程为 2 050 米.

复习题 11

1. 常数 100，10；自变量 x，函数 y.

$y=10x+100$ $(0\leqslant x\leqslant 36$，$x$ 为整数$)$.

2. $(-5，-4)$，$\left(\frac{2}{3}，7\frac{1}{3}\right)$在直线 $y=2x+6$ 上；$(-7，20)$，$\left(-\frac{7}{2}，1\right)$不在直线 $y=2x+6$ 上.

直线 $y=2x+6$ 与 x 轴交于 $(-3，0)$，与 y 轴交于 $(0，6)$.

3. (1) 一、二、四，减小；

(2) 一、三、四，增大.

4. (1) $y=\frac{6}{5}x$；

(2) $y=\frac{13}{5}x-\frac{9}{5}$.

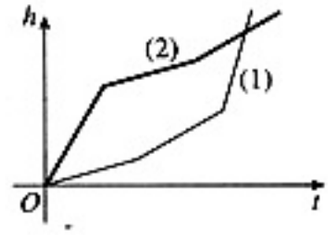
5. (1) $x>5$；

(2) $x<5$.

6. $c=0.5(p-1)+2=0.5p+1.5$（p 是正整数）.

7. $y=3\,000-2.5x$（$100\leqslant x\leqslant 1\,200$）.

8. 这个容器是（3）.（1）的草图是细线.（2）的草图是粗线.

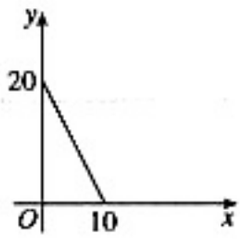


（第 8 题）

9.（1）$y=20-2x$；

（2）$0<x<10$；

（3）如图.



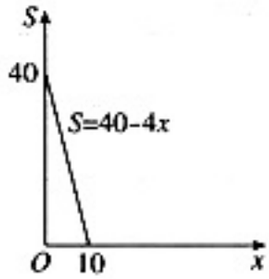
（第 9(3) 题）

10.（1）$S=\frac{1}{2}\times 8(10-x)=40-4x$；

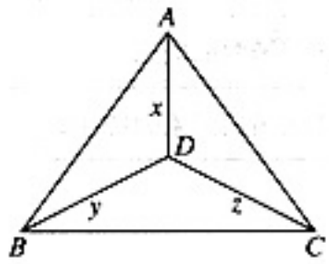
（2）$0\leqslant x\leqslant 10$；

（3）$S=12$ 时 P 点坐标为（7，3）.

（4）如图.



（第 10(4) 题）



（第 11 题）

11. $w=10(2ax+ay+az)$ 即 $w=10a(2x+y+z)$.

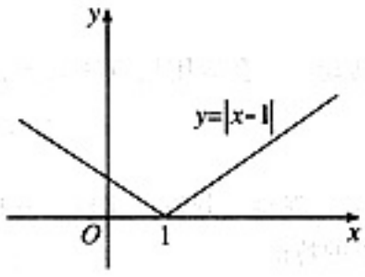
如图，$x+y\geqslant AB$，$x+z\geqslant AC$，

因为 $w=10a(2x+y+z)=10a[(x+y)+(x+z)]$，

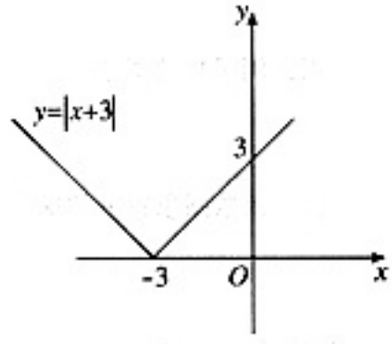
所以 $w\geqslant 10a(AB+AC)$，当 D 点选在 A 点处时，$x+y=AB$，$x+z=AC$，总费用最少.

12.（1）如图；

（2）$y=|x+3|$，函数图象如图.



（第 12(1) 题）



（第 12(2) 题）

Ⅳ 教学设计参考案例

11.2.1 正比例函数（第1课时）

教学任务分析

教学目标	知识技能	1. 初步理解正比例函数的概念及其图象的特征； 2. 能够画出正比例函数的图象； 3. 能够判断两个变量是否构成正比例函数关系.
	数学思考	1. 通过“燕鸥飞行路程问题”的研究，体会建立函数模型的思想； 2. 通过正比例函数图象的学习和探究，感知数形结合思想.
	解决问题	1. 能按要求运用“列表法”和“两点法”作正比例函数的图象； 2. 会利用正比例函数解决简单的数学问题.
	情感态度	1. 结合描点作图，培养学生认真、细心、严谨的学习态度和学习习惯； 2. 通过正比例函数概念的引入，使学生进一步认识数学是由于人们需要而产生的，与现实世界密切相关，同时渗透热爱自然和生活的教育.
重点	正比例函数的概念.	
难点	正比例函数图象的特征.	

教学流程安排

活动流程图	活动内容和目的
活动1 问题的引入	通过“燕鸥飞行路程问题”建立数学模型，理解行程与时间的对应函数关系，为导出正比例函数做铺垫.
活动2 正比例函数概念的学习	通过若干具体实例，概括、归纳出一类带有共性的函数关系表达式，导入正比例函数的概念.
活动3 画正比例函数的图象	通过师生共同活动，学会运用描点法画出正比例函数的图象.
活动4 正比例函数图象特征的探究	通过对若干实例的观察、分析、比较、概括，归纳出正比例函数图象的特征.
活动5 小结，布置作业	回顾和重现本节重点内容，加深对本节知识的理解. 通过巩固性练习，尝试运用本节知识解决问题.

教学过程设计

问题与情境	师生行为	设计意图
「活动1」 问题 (1) 你知道候鸟吗？它们在每年的迁徙中能飞多远？ (2) 候鸟燕鸥的飞行路程与时间之间有什么样的数量关系？	教师用课件或小黑板出示问题，用投影仪或地图的形式展示这只燕鸥飞行距离示意图. 让学生在地图上找出芬兰和澳大利亚的位置，并将两处用直线连接．然后思考并解答教科书上的问题. 学生稍作思考，自主解决三个问题： (1) 燕鸥每天飞行的路程； (2) 燕鸥总行程 y（千米）与飞行时间 x（天）的关系式：$y=200x$； (3) 燕鸥飞行 1 个半月的行程. 教师在学生得到结论的基础上提醒：这里用函数 $y=200x$ 对燕鸥飞行路程问题进行了刻画，尽管只是近似的，但它反映了燕鸥的行程与时间之间的对应规律. 在本次活动中，教师应重点关注： (1) 学生对飞行总行程 y 和飞行时间 x 的函数关系的理解； (2) 学生能否正确指出自变量、自变量的函数、自变量的取值范围．	从环保等人们关注的现实问题入手，使学生认识到数学总是与现实问题密不可分，人们的需要产生了数学. “这只百余克重的小鸟大约平均每天飞行 200 千米”隐含了生命的力量是无比强大的，教师应注意对学生潜在地进行热爱生活热爱自然的教育. 路程与速度、时间之间关系，学生较为熟悉．当速度一定时，路程是时间的函数．由这些简单的实例不断体会从现实世界中抽象数学模型、建立数学关系的方法．
「活动2」 问题 (1) 教科书 23 页上有 4 个实例，这些实际问题中的变量对应规律可用怎样的函数表示？这些函数有什么共同点？	教师出示四个实例问题（投影或小黑板），要求学生 (1) 能找出变量对应关系表达式；(2) 能说出表达式中的自变量，自变量的函数. 学生自主探究，分组讨论；然后教师让各小组代表回答问题．教师学生互动，对回答的	通过这些实际问题使学生逐步加深对函数概念的理解，也为导出正比例函数概念做好铺垫．

续表

问题与情境	师生行为	设计意图
	问题进行分析评价. 教师提问：$l=2\pi r$ 中，字母 π 是变量吗？ 教师引导学生观察、分析上面 5 个函数表达式的共性：都是常数和自变量乘积的形式. 教师口述并在黑板上板书正比例函数的概念. 教师让学生看书，在定义处画上记号，并提问：这里为什么强调 k 是常数，$k\neq0$？ 学生讨论，互相补充. 本次活动中，教师应重点关注学生： (1) 不要误认为表达式中的字母都是表示变量； (2) 对自变量的取值范围是否能分析清楚； (3) 是否概括出了这几个函数的共同特点.	通过归纳、分析，使学生明白正比例函数的特征，理解其解析式的特点.
(2) 你能列举出一些正比例函数的例子吗？	学生尝试解答左边的问题；教师提醒回答. 要求 (1) 举出实际问题；(2) 能对其中的自变量、比例系数、函数关系进行正确的解释. 教师注意：对于学生列举的不属于正比例函数的实例，不回避，恰当引导，紧扣定义，认真分析. 教师还可以视情况出示如下讨论题：(1) 以下表示梯形和圆的面积的函数式是否是正比例函数？在什么情况下是？ ①$S=\frac{1}{2}(a+b)\times h$； ②$S=\pi r^2$. (2) 在上面的实例 (4) 中，由函数解析式 $T=-2t$，当冷冻时间不超过 1 小时，物体的温度最低可达多少度？	通过对具体的实例问题搜集分析，既能深化学生对正比例函数的理解，又能为学生运用正比例函数解决问题打下基础. 通过讨论使学生对正比例函数概念的认识逐步深化. 此例视学生学习情况而定.

续表

问题与情境	师生行为	设计意图
「**活动3**」 问题 (1) 我们知道了怎样用解析式表示正比例函数，能否用图象来表示它呢? 怎样在直角坐标系中画出正比例函数的图象?	教师在黑板上演示用描点法画出例1 (1) $y=2x$ 的图象. 教师注意：(1) 要操作规范，给学生做好样板；(2) 教师在黑板上画时注意和学生交流，同时要求学生在下面画. 接着学生独立画出例1 (2) $y=-2x$ 的图象. 两位学生在黑板上画. 对于这个问题，教师应关注： (1) 组织学生对所画图象进行评价； (2) 和学生一起简要总结列表画图象的主要步骤：列表、描点、连线.	学生画图象，要有一个模仿、探索过程，然后才能掌握作函数图象的基本要领. 这符合学生的认知规律. 因此，第一个图象由教师示范很有必要.
(2) 观察分析两个图象的异同之处.	学生讨论、分析、比较 $y=2x$ 与 $y=-2x$ 图象的异同之处，填写所发现的规律. 两图象都经过原点，两个图象都是直线，函数 $y=2x$ 的图象从左向右上升，经过第三、一象限；函数 $y=-2x$ 的图象从左向右下降，经过第二、四象限.	比较异同之处为后面分析讨论正比例函数图象的特征准备.
(3) 巩固性练习画图象.	学生独立练习，在同一坐标系中画出 $y=\frac{1}{2}x$ 与 $y=-\frac{1}{2}x$ 的图象；让学生观察分析这两个图象异同之处.	练习画图象，通过多个实例，使学生分析后能领悟这一类图象的特点.

续表

问题与情境	师生行为	设计意图
「活动4」 问题 (1) 从以上作图过程可以发现正比例函数的图象有什么特征. (2) 经过原点与点 (1, k) 的直线是哪个函数的图象?	教师对画图过程进行巡回指导和个别辅导，学生画完图后提请学生回答这两个图象的特点并与上面的特点相比较. 学生在老师引导下概括、归纳出正比例函数图象的特征. 教师板书教科书 25 页上的正比例函数图象的特征. 对于这个问题，教师应重点关注： (1) 学生是否通过对正比例函数解析式观察分析，发现当 $k>0$ 时函数 y 与自变量 x 同号；当 $k<0$ 时函数 y 与自变量 x 异号； (2) 学生对正比例函数图象观察分析，知道其图象是一个随 x 增大而增大或减小的直线. 学生讨论左边的问题. 教师注意：(1) 提醒学生从解析式入手，探究当 $x=0$ 时和 $x=1$ 时，函数 y 的值分别是几；(2) 正比例函数的图象为什么一定过 (0, 0) 和 (1, k) 这两点；(3) 因为两点可以确定一条直线，因此，画正比例函数时只须过原点和 (1, k) 画一条直线即可.	在多个实例的基础上，归纳得到正比例函数图象的性质，潜移默化地对学生进行了概括、归纳、比较、分析的思维方法的教育. 这里通过对解析式和图象的分析，可使学生明白解析式和图象对正比例函数的刻画各有优势. 了解事物的特征就可以使解决问题来得更简捷一些，不断培养学生分析和解决问题的能力. 这里同时让学生加深领会数形结合思想.
(3) 用你认为最简单的方法画出正比例函数的图象 (教科书 26 页练习)	学生练习用“两点法”画图象，教师巡回辅导，并安排一名学生在黑板上画. 教师应当关注： (1) 学生画图中是否采用的是“两点法”； (2) 这两点是否最简单 (其中的关键是对 k 的确认).	完成当堂的练习，巩固“两点法”画图象的方法.

续表

问题与情境	师生行为	设计意图
「活动5」 问题 本节课学了哪些内容？你认为最重要的是什么？	学生稍加思考后分组讨论，让3～4名学生回答. 教师应当关注： (1) 允许学生答案不同，回答结论的不同只会对学生学习更有帮助，应当鼓励； (2) 最后应达到师生共同小结，明确正比例函数的概念、图象特征的效果.	让学生参与小结并允许学生答案不同，可以增强学生学习的积极性和主动性，培养他们对所学知识的回顾思考习惯；通过小结也强调了本节课的重点，巩固了学习内容.
布置作业 教科书习题11.2第1、2、6、7题.	学生独立完成作业（其中第7题可以作为选作题）. 教师批改后注意反馈. 教师应关注： (1) 学生作图象的规范性； (2) 不同层次学生在作业中反映出的问题应及时解决.	对作业中的问题要注意个体分析，布置作业要体现分层要求，有一定的弹性.

教学设计说明

本节内容是在学生学习了变量和函数的基本概念基础上进行的. 学习了正比例函数再引入一次函数，有利于降低教学难度，使难点分散. 学生在理解正比例函数概念、描点画函数图象、利用解析式和图象分析函数性质时来得更加容易.

在教材处理方面，采取：“建立数学模型——导入正比例函数的概念——画正比例函数图象——探究正比例函数性质——练习、小结”这样循序渐进的教学流程.

考虑到本节内容概念性较强，采取通过学生熟悉的行程问题来导入正比例函数的概念，学生易于接受.

在教学设计时，注重了学生的尝试和探究，如对正比例函数变量对应关系的辨析，自变量取值范围的讨论，学生列举正比例函数的实例的分析，4个小实例的探究，画图象时的动手尝试，小结时的自我概括和归纳等.

在教学时使学生的尝试和探究贯穿课堂全过程，同时重视教师的引导、指导和示范，如在概念出示时必要的板书，画图象时的示范，对关键之处的启发、点拨和讲解，还有教师与学生、学生与学生的互动等. 这样既有利于学生对概念的理解，也有利于培养学生的学习能力和学习习惯.

本节课的容量较大，教学中注意安排一定的弹性内容（有一处训练题和一道作业题可以视情况选用）.

11.2.2 一次函数（第2课时）

教学任务分析

教学目标	知识技能	1. 理解直线 $y=kx+b$ 与直线 $y=kx$ 之间的位置关系； 2. 会利用两个合适的点画出一次函数的图象； 3. 掌握一次函数的性质.
	数学思考	1. 通过对应描点来研究一次函数的图象，经历知识的归纳、探究过程； 2. 通过一次函数的图象归纳函数性质，体验数形结合法的应用.
	解决问题	通过一次函数图象和性质的研究，体会数形结合法在问题解决中的作用，并能运用性质、图象及数形结合法解决相关函数问题.
	情感态度	1. 通过画函数的图象，并借助图象研究函数的性质，体验数与形的内在联系，感受函数图象的简洁美； 2. 在探究一次函数的图象和性质的活动中，通过一系列富有探究性的问题，渗透与他人交流、合作的意识和探究精神.
重点	一次函数的图象和性质.	
难点	由一次函数的图象归纳得出一次函数的性质及对性质的理解.	

教学流程安排

活动流程图	活动内容和目的
活动1　复习正比例函数的图象和性质	回顾正比例函数的图象和性质，为学习一次函数的图象及其性质作铺垫，自然地引入课题.
活动2　认识一次函数的图象	通过对应描点画出一次函数的图象，进而发现它的形状及其与正比例函数图象的位置关系，加强对一次函数图象的认识.
活动3　选取两个合适的点画一次函数的图象	通过学生动手实践，熟悉和掌握一次函数图象的画法.
活动4　学习一次函数的性质	类比正比例函数 $y=kx$ 中 k 的正负对函数图象的影响，并结合一次函数的图象，归纳出一次函数 $y=kx+b$ 的性质.
活动5　练习与思考	巩固一次函数的图象和性质，留给学有余力的学生进一步发展的空间.
活动6　小结与作业	整理本节知识，加强学习反思.

教学过程设计

问题与情境	师生行为	设计意图
「活动1」 问题 1. 什么叫正比例函数、一次函数？它们之间有什么关系？ 2. 正比例函数的图象形状是什么样的？ 3. 正比例函数 $y=kx$（k 是常数，$k\neq 0$）中，k 的正负对函数的图象有什么影响？	教师提出问题，由学生口答之后，通过生生互评、师生共评，纠正出现的问题. 本次活动中，教师应重点关注： （1）学生在活动中的参与意识及回答问题的勇气； （2）能否理解直线的变化趋势（形）与函数性质（数）之间的对应关系.	设计知识“最近发展区”——正比例函数的图象及性质，为类比、探究一次函数的图象及其性质作好铺垫.
「活动2」 1. 画图：用描点法在同一坐标系中画出函数 $y=-6x$、$y=-6x+5$ 的图象（见教科书 28 页例 2）； 2. 观察：比较上面两个函数图象的相同点和不同点，根据你的观察结果回答下列问题： （1）这两个函数的图象形状都是_____，并且倾斜程度_____； （2）函数 $y=-6x$ 的图象经过原点，函数 $y=-6x+5$ 的图象与 y 轴交于点_____，即它可以看作由直线 $y=-6x$ 向____平移____个单位长度而得到； （3）比较两个函数的解析式，试由此解释两函数图象的位置关系. 3. 推广：（1）所有一次函数的图象都是直线吗？（2）直线 $y=kx$ 与直线 $y=kx+b$ 之间存在着怎样的位置关系？（3）由直线 $y=kx$ 可经过怎样的平移得到直线 $y=kx+b$？	学生对应描点、画图，并通过观察、比较两个函数图象完成问题 2，而后，对问题 2 进行推广. 教师对学生的观察、推广等结果进行适时评价，在此基础上，师生共同得出： （1）一次函数 $y=kx+b$ 的图象也是一条直线，我们称它为直线 $y=kx+b$；（2）直线 $y=kx+b$ 与直线 $y=kx$ 互相平行；（3）直线 $y=kx+b$ 可以看作由直线 $y=kx$ 平移 $\lvert b\rvert$ 个单位而得到. 本次活动中，教师应重点关注： （1）学生在描点的过程中，是否注意到了几组对应点的位置变化规律； （2）学生能否通过函数解析式（数）对“平移”（形）作出解释； （3）为什么说平移 $\lvert b\rvert$ 个单位，而不说平移 b 个单位； （4）从特殊到一般的数学思想方法及归纳能力.	在学生已经知道正比例函数的图象是一条直线的基础上，通过对应描点法来画正比例函数、一次函数的图象，让学生在描点的过程中去体验两者之间的位置关系：函数 $y=kx+b$ 的图象实际上是对直线 $y=kx$ 上的所有点进行了平移的结果. 通过一系列富有层次性、探究性的问题来揭示知识（问题 3）的形成过程. 让学生结合函数解析式对“平移”作出解释，进一步加强学生对一次函数图象的理性认识.

续表

问题与情境	师生行为	设计意图
「活动3」 实践：在同一坐标系中画出函数 $y=2x-1$ 与 $y=-0.5x+1$ 的图象.	学生独立用两个点画出函数的图象，并将自己所画的图象与同桌进行交流，体验选点的差异性和图象的一致性. 教师指出，画一次函数的图象时，虽然不同学生所选取的点不一样，但画出的图象却是一致的，我们通常选取 $(0, b)$ 和 $\left(-\frac{b}{k}, 0\right)$ 这两个点. 本次活动中，教师应重点关注： (1) 学生对描点的差异性和所画图象的一致性的理解； (2) 如何选择合适的点.	熟悉和掌握一次函数图象的画法.
「活动4」 1. 体验：在同一直角坐标系中画出函数 $y=x+1$、$y=-x+1$、$y=2x+1$、$y=-2x+1$ 的图象. 2. 探究：观察上面四个一次函数的图象，类比正比例函数 $y=kx$ 中 k 的正负对图象的影响，探究一次函数 $y=kx+b$ 中 k 的正负对函数图象有什么影响，并在此基础上表述一次函数的性质.	学生画出函数图象，并通过观察、类比，对问题2发表个人的看法. 教师归纳：当 $k>0$ 时，直线从左向右上升，即 y 随 x 的增大而增大；当 $k<0$ 时，直线从左向右下降，即 y 随 x 的增大而减小. 本次活动中，教师应重点关注： (1) 观察、类比探究新知的方法； (2) 一次函数的性质与 k 有关，且与正比例函数的性质相同； (3) 从“数”和“形”两个方面去理解和掌握一次函数的性质.	进一步巩固一次函数图象的画法，并为探究一次函数性质作准备. 通过改变一次项系数 k 的取值，引起直线位置和变化趋势的改变，使得“一次函数的性质”这一教学重点自然地浮出水面；类比正比例函数，旨在明确探究方向，揭示两者在性质上的一致性.

续表

问题与情境	师生行为	设计意图
「**活动5**」 1. 练习：教科书 31 页练习第 1、2 题. 2. 思考（课外）：根据练习 2 中的函数图象，归纳 $y=kx+b(k\neq0)$ 中 b 对函数图象的影响.	部分学生演板，剩余学生在课堂练习本上独立完成. 教师巡视，了解学生对知识的掌握情况. 本次活动中，教师应重点关注： (1) 学生在练习中反映出的问题，有针对性地讲解； (2) 学生能否通过数形结合法去分析和解决问题.	及时反馈教学效果，查漏补缺. 对学有困难的同学给予鼓励和帮助. 设计一个思考题的目的是，让学有余力的学生对常数项 b 也有一个较为深入的认识.
「**活动6**」 1. 小结 2. 作业： (1) 教科书 35 页习题 11.2 第 4、8 题； (2) (选作) 结合练习 1 (2) 中的函数图象，完成表格（见附录）.	教师引导学生回忆本节课所学的知识. 教师布置作业，学生按要求在课外完成. 本次活动中，教师应重点关注： (1) 学生对本节内容的知识结构是否清晰； (2) 学生在作业中反映出的问题，应做好记载，找出教、学之不足.	总结回顾学习内容，养成整理知识的习惯. 加强教、学反思，进一步提高教、学效果. 设计一个选作题是为了使“不同的人在数学上得到不同的发展”.

附录

$y=kx+b$		示意图（草图）	直线经过的象限	直线的变化趋势	性质
$k>0$	$b=0$				
	$b>0$				
	$b<0$				
$k<0$	$b=0$				
	$b>0$				
	$b<0$				

教学设计说明

本节课安排在正比例函数的图象与一次函数的概念之后，主要内容包括：一次函数图象的画法和一次函数的性质，它既是正比例函数的图象和性质的拓展，又是后继学习“用函数的观点看方程（组）与不等式”的基础，在本章中起着承上启下的作用. 本节内容还是学生进一步学习“数形结

合”这一数学思想方法的很好素材．作为一种数学模型，一次函数在日常生活中也有着极其广阔的应用.

考虑到学生在学习本节内容之前，已对正比例函数的图象和性质有了一定的认识，故在教学中，我们首先给出两个一次项系数相同的正比例函数和一次函数，让学生通过对应描点法画出它们的图象，在对应描点这一活动过程中，体验几组对应点的位置变化，感悟一次函数图象的形状及其与正比例函数图象的位置关系，在此基础上，归纳得出“一次函数的图象是一条直线”这一事实．紧接着，根据这个事实，让学生利用两个点（两点确定一条直线）画出一次函数的图象．对于一次函数性质的教学，着眼于一次项系数 k 的变化来设计四个一次函数，让学生先画出它们的图象，再观察相应图象的变化趋势，并类比正比例函数的性质，进而归纳出一次函数的性质，通过这种注重过程和体验的再设计，凸显本节的教学重点．最后，为了拓展一部分学有余力的学生的知识视野，在练习和作业中，我们又各设计了一个思考题和选作题，使“不同的学生在数学上得到不同的发展”.

本节课立足于学生的已有知识，把教学重点分解为一系列富有探究性的问题，让学生在解决问题的过程中经历知识的发生、发展、形成的过程，把知识的发现权交给学生，让他们在获取知识的过程中，体验成功的喜悦，真正体现学生是学习的主人，教师只是学习的参与者、合作者、引导者．在教学活动中，教师重点关注学生的实践能力、探究精神和交流合作意识，强调过程性评价.

11.3.3 一次函数与二元一次方程（组）

教学任务分析

教学目标	知识技能	1. 理解一次函数与二元一次方程（组）的对应关系. 2. 会用画图象的方法解二元一次方程组.
	数学思考	通过对一次函数与二元一次方程（组）关系的探究及相关实际问题的解决，学会用函数的观点去认识问题的方法.
	解决问题	能综合运用一次函数、一元一次方程、一元一次不等式、二元一次方程（组）解决相关的实际问题.
	情感态度	通过对一次函数与二元一次方程（组）关系的探索，培养学生严谨的科学态度及勇于探索的精神；通过从函数的角度看问题，让学生体会数学的价值.
重点	探索一次函数与二元一次方程（组）的关系.	
难点	综合运用方程（组）、不等式和函数的知识解决实际问题.	

教学流程安排

活动流程图	活动内容和目的
活动 1　提出问题　探索关系	通过设置几个小问题，帮助学生探索二元一次方程和一次函数之间的关系.
活动 2　操作交流　再次探索	通过动手操作和相互交流，探索二元一次方程组与一次函数之间的关系.
活动 3　解决问题　综合运用	通过综合运用一次函数、一元一次方程、一元一次不等式、二元一次方程（组）解决实际问题，让学生学会用函数的观点认识问题.
活动 4　巩固练习　深化理解	通过用函数的方法解决实际问题，让学生进一步理解方程、不等式、函数之间的联系.
活动 5　归纳小结　布置作业	师生共同小结本节内容.

教学过程设计

问题与情境	师生行为	设计意图
「**活动 1**」 问题 1. 二元一次方程 $3x+5y=8$ 可以转化成 $y=$_____. 思考：是不是任意的二元一次方程都能进行这样的转化呢？ 2. 在坐标系中画出一次函数 $y=-\frac{3}{5}x+\frac{8}{5}$ 的图象. 思考：在直线 $y=-\frac{3}{5}x+\frac{8}{5}$ 上任取一点 (x, y)，则 x，y 一定是方程 $3x+5y=8$ 的解吗？为什么？	学生独立思考问题 1、2. 教师巡视，师生共同归纳： (1) 由问题 1 得到每个二元一次方程都对应着一个一次函数，于是也对应一条直线. (2) 由问题 2 得到直线上的每个点的坐标都是对应的二元一次方程的解. 在此活动中，教师应重点关注： (1) 学生是否能通过问题 1 和 2 体会到一次函数与二元一次方程（组）在数及形两个方面的关系. (2) 学生独立思考及参与解决问题的积极性.	通过设置问题 1，帮助学生体会二元一次方程与一次函数的对应关系；通过设置问题 2 帮助学生感受一次函数图象上的点与二元一次方程的解的对应关系，为探究二元一次方程组的解与直线交点坐标的关系作好铺垫.

续表

问题与情境	师生行为	设计意图
「活动2」 1. 在同一坐标系中画出二元一次方程 $2x-y=1$ 所对应的直线. 观察：这两条直线有交点吗? 思考：这个交点坐标是方程组 $\begin{cases}3x+5y=8,\\2x-y=1\end{cases}$ 的解吗? 为什么?	学生独立完成画图，相互交流观察与思考的结果. 教师巡视，对学生在交流过程中可能出现的疑问给予帮助. 师生共同归纳得到，每个二元一次方程组对应两个一次函数，于是也对应两条直线. 从形的角度看，解二元一次方程组相当于确定两直线交点的坐标.	通过设置问题1，让学生通过画图去探索从形的角度去认识一次函数与解二元一次方程组的关系.
2. 当自变量 x 取何值时，函数 $y=-\frac{3}{5}x+\frac{8}{5}$ 与 $y=2x-1$ 的值相等? 这个函数值是什么? 思考：这个问题与解方程组 $\begin{cases}3x+5y=8,\\2x-y=1\end{cases}$ 是同一个问题吗?	学生独立完成问题2，然后师生共同归纳得到，从数的角度看，解方程组相当于考虑自变量为何值时两个函数的值相等、以及这个函数值是何值. 在此活动中，教师应重点关注： (1) 学生是否能通过探究从“数”和“形”两个角度去认识一次函数与解二元一次方程组. (2) 学生是否能意识到图象法求二元一次方程组的优点和缺点.	通过设置问题2，帮助学生从数的角度去认识一次函数与解二元一次方程组的关系.
「活动3」 问题 一家电信公司给顾客提供两种上网收费方式：方式A以每分0.1元的价格按上网时间计费；方式B除收月基费20元外再以每分0.05元的价格按上网时间计费. 如何选择收费方式使上网者更合算?	学生分组讨论后发表见解，相互交流. 教师首先引导学生分析得到收费方式的选择与每月上网时间 x（分）有关，然后深入小组参与讨论，帮助学生建立函数模型，得到不同的解决方法，并展示规范解答. (1) 若按方式A收则 $y=0.1x$ 元；若按方式B收则 $y=0.05x+20$ 元. 然后画出图象，计算出两直线的交点坐标，结合图象求解； (2) 设方式B与方式A两种计费的差额为 y 元，则 y 随 x 变化的函数关系式为 $y=(0.05x+20)-0.1x=-0.05x+20$. 然	通过综合运用一次函数、一元一次方程、一元一次不等式、二元一次方程（组）解决实际问题，让学生体会方程组、不等式与函数之间的相互联系，学会用函数的观点认识问题. 解决问题时，应根据具体情况灵活地选择数学模型并把它们有机地结合起来.

续表

<table>
<tr><th>问题与情境</th><th>师生行为</th><th>设计意图</th></tr>
<tr><td></td><td>后画出图象，计算出直线与 x 轴的交点坐标，结合图象求解.
在此活动中，教师应重点关注：
(1) 学生是否能建立方程和函数模型；
(2) 学生能否利用作差的方法去比较两个函数值的大小；
(3) 学生是否能得到所画的函数图象是射线；
(4) 学生是否能利用图象，从函数的角度去分析，从而选择合适的收费方式.</td><td>通过让学生独立思考、分组讨论和互相补充，培养学生的合作意识和多角度解决问题的能力.</td></tr>
<tr><td>「活动4」
练习
下面有两种移动电话计费方式：
<table><tr><th></th><th>全球通</th><th>神州行</th></tr><tr><td>月租费</td><td>50元/月</td><td>0</td></tr><tr><td>本地通话费</td><td>0.40元/分</td><td>0.60元/分</td></tr></table>你知道如何选择计费方式更省钱吗?</td><td>学生讨论并展示成果.
教师引导学生采用不同的方法解答.
在此活动中，教师应重点关注：
(1) 学生是否能写出两种计费方式的函数模型；
(2) 学生是否能灵活的结合方程组和不等式的有关知识解决问题.</td><td>通过这个活动让学生进一步理解方程组、不等式与函数之间的联系.</td></tr>
<tr><td>「活动5」
小结和作业
1. 你对本节课的内容有哪些认识?

2. 作业：教科书习题 11.3 第 5、6、11 题.</td><td>学生思考后充分发表自己的意见，然后相互补充.
师生共同归纳得到：
(1) 二元一次方程（组）与一次函数的关系；
(2) 从“数”和“形”两个方面去看二元一次方程组；
(3) 方法：从函数的观点来认识问题、解决问题，图象法解二元一次方程组.
在此活动中，教师应重点关注：
(1) 积极评价不同层次的学生对本节内容的不同认识；
(2) 学生对本节内容的整体感受，能否从不同角度去理解一次函数与二元一次方程（组）的关系.</td><td>通过小结明确本节的主要内容、思想和方法，培养学生善于反思的良好习惯.

巩固本节所学知识，并能解决实际问题.</td></tr>
</table>

教学设计说明

本节课是学生在学习完一次函数、一元一次方程与一元一次不等式的联系之后对一次函数和二元一次方程（组）关系的探究，是对一次函数及其相关内容更深入更全面的学习．根据教材及本节内容特点对教学设计作如下说明．

一次函数与二元一次方程（组）安排了两个内容：一是探索一次函数与二元一次方程（组）的关系，二是综合运用函数、方程和不等式来解决实际问题．由于学生已经具备了初步的数形结合的思想解决问题的能力，因此教师在引导学生得到一次函数与二元一次方程（组）关系的基础上，让学生自己从数和形两个角度去探究一次函数与解二元一次方程组的关系．考虑到学生已经可以建立一次函数模型来解决简单的实际问题，因此在例题教学中应着重引导学生利用图象，结合方程（组）、不等式及函数的关系来解决问题．

Ⅴ 拓展资源

一、知识的拓广延伸及相关史料

1．几个重要概念

（1）常量与变量：①常量与变量是相对的，在不同的研究过程中，常量与变量的身份是可以相互转换的．例如 $s=vt$ 中，若 v 确定，则 s、t 是变量；若 s 确定，则 v、t 是变量．②常量、变量并不一定都是量，也可以是常数或变数．

（2）函数：它的定义中包括了在一个变化过程中，两个变量之间的一种对应关系，这种对应关系只有满足“对于自变量的每一个取值，因变量有唯一的值与它对应”，才能叫因变量是自变量的函数．可以是“多对一”，但不能是“一对多”．

（3）函数的图象：①函数图象上任意一点的坐标满足函数的解析式；以满足函数解析式的任意一对对应值为坐标的点一定在函数图象上，两者缺一不可．②函数的三种表示方法各有优缺点．解析法能全面地体现函数的全部特征，但并非所有的函数都能用解析法表示；图象法直观，但数量关系的精确度较差；列表法简便易行，也具有一定的直观性，但它反映的往往是局部的情况．

（4）实际问题中的函数解析式的求法：①本书中所定义的函数解析式只能有两个变量；②一定要注意确定自变量的取值范围．

2．一次函数 $y=kx+b$（$k\neq0$）的一次项系数 k 和常数项 b

（1）k 相同，b 不同的所有直线平行；k 不同，b 相同的所有直线都过点（0，b）．

（2）若 $k_1=-k_2$ 且 $b_1=b_2$，则两直线关于 y 轴对称；k 不同，$-\frac{b}{k}$ 相同的所有直线都过点 $\left(-\frac{b}{k},\ 0\right)$；若 $k_1=-k_2$，则两直线关于 x 轴对称．

（3）平移与旋转：①所谓平移，就是将一条直线向左、向右（或向上、向下）平行移动．平移得到的直线 k 不变；反之，k 相同的两条直线，可以将一条直线平移到另一条直线上．②将一条直线绕一定点旋转得到其他直线就是直线的旋转，这个定点就是所有直线的交点．所有 b 相同的直线，都可以通过绕点（0，b）旋转来相互得到．

3. 直线和一次函数

在解二元一次方程组时，会遇到其中一个方程是 $x=3$ 或 $y=2$ 这种形式，那么 $x=3$ 或 $y=2$ 的图象是怎样的呢？方程 $x=3$ 可以看成不论 y 取何值，x 的值总是 3，把它们的一部分对应值列出表来，可以看到，所有表示方程 $x=3$ 的解的点组成一条直线，这条直线过点（3，0），且平行于 y 轴，这条直线就是方程 $x=3$ 的图象，我们把它叫做直线 $x=3$（如图 1）.

x	3	3	3	3
y	-1	0	1	2

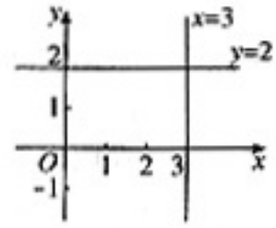


图 1

同样，方程 $y=2$ 的图象是过点（0，2），且平行 x 轴的一条直线，叫做直线 $y=2$.

4. 函数思想与探究规律性问题

规律性问题是指，给定图示或材料等，要求寻找两个变量关系的问题．如果能从函数的角度来研究，解决这类问题就会变得比较简单．求解的步骤可归纳为：①引入自变量 x 和因变量 y，并画出表格填上 x 和 y 的对应值；②通过假设函数解析式来列方程组；③求出方程组的解，即可得到问题的规律（通项）.

例如，如图 2，（1）是棱长为 a 的小正方体，（2）、（3）是由这样的小正方体摆放而成，按照这样的方法继续摆放，由上而下分别叫第一层、第二层、…、第 n 层，第 n 层的小正方体的个数记为 s，试探究 s 与 n 之间的规律.

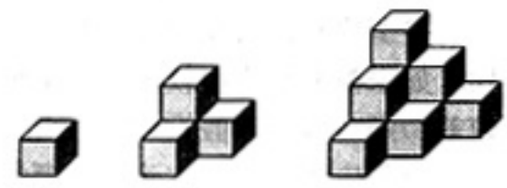


图 2

【答案与提示】（1）列表：

n	1	2	3	…
s	1	3	6	…

（2）设 $s=an^2+bn+c$，把点（1，1）、（2，3）、（3，6）代入解析式，列方程组；

（3）解这个方程组.

5. 一次函数在闭区间（半开区间）上的最大（小）值

一次函数 $y=kx+b(k\neq 0,\ x\in \mathbf{R})$ 的图象是一条直线，函数没有大（小）最值．但由实际问题写出的一次函数的自变量的取值范围一般不是全体实数，函数的最值就可能存在．当 $x\in[a,\ b]$ $(a>b)$时，函数有最大和最小值；当 $x\in(a,\ b]$或 $x\in[a,\ b)$ 时，函数有最大或最小值；当 $x\in(a,\ b)$时，函数没有最大（小）值.

例如，一根弹簧的原长为 12 cm，它允许挂的重物不能超过 15 kg，并且每挂一千克物体，弹簧就伸长 0.5 cm，则挂物体后弹簧长度 y（cm）与所挂物体质量 x（kg）之间函数关系式是：$y=0.5x+12$（$x\in[0,\ 15]$），故当 $x=0$ 时，y 有最小值是 12 cm，当 $x=15$ 时，y 有最大值是 19.5 cm.

6. 数学模型与数学建模

（1）数学模型：对于现实中的原型，为了某个特定目的，作出一些必要的简化和假设，运用适当的数学工具得到一个数学结构．也可以说，数学建模是利用数学语言（符号、式子与图象）模拟现实的模型．把现实模型抽象、简化为某种数学结构是数学模型的基本特征．它或者能解释特定现象的现实状态，或者能预测到对象的未来状况，或者能提供处理对象的最优决策或控制.

(2) 数学建模：把现实世界中的实际问题加以提炼，抽象为数学模型，求出模型的解，验证模型的合理性，并用该数学模型所提供的解答来解释现实问题，我们把数学知识的这一应用过程称为数学建模.

(3) 数学建模的几个过程

模型准备：了解问题的实际背景，明确其实际意义，掌握对象的各种信息，用数学语言来描述问题.

模型假设：根据实际对象的特征和建模的目的，对问题进行必要的简化，并用精确的语言提出一些恰当的假设.

模型建立：在假设的基础上，利用适当的数学工具来刻画各变量之间的数学关系，建立相应的数学结构（尽量用简单的数学工具）.

模型求解：利用获取的数据资料，对模型的所有参数做出计算（估计）.

模型分析：对所得的结果进行数学上的分析.

模型检验：将模型分析结果与实际情形进行比较，以此来验证模型的准确性、合理性和适用性. 如果模型与实际较吻合，则要对计算结果给出其实际含义，并进行解释. 如果模型与实际吻合较差，则应该修改假设，再次重复建模过程.

模型应用：应用方式因问题的性质和建模的目的而异.

(4) 学习数学建模的目的

①体会数学的应用价值，培养数学的应用意识；②增强数学学习兴趣，学会团结合作，提高分析和解决问题的能力；③知道数学知识的发生过程，培养数学创造能力.

7. 用《几何画板》探究一次函数的图象及其性质

7.1 课件的制作

7.1.1 借助动点的横坐标，来构造可连续变化的 k、b（图 3）

(1) 打开《几何画板 4.0》，新建一个几何画板文件：按 F 文件→按 N 新画板.

(2) 选择【图象】菜单中的“建立坐标轴”命令，建立平面直角坐标系.

(3) 用【画点】工具在 y 轴上任取两点，按住“shift”键，用【选择】工具同时选定这两点和 x 轴，选择【构造】菜单中的“平行线”命令，画出两条平行于 x 轴的直线.

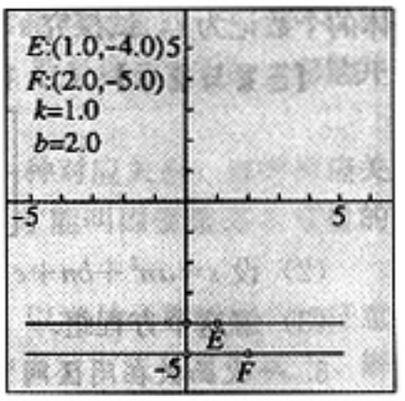


图 3

(4) 用【画点】工具分别在两条平行线上各取一点，并用【文本】工具单击两点标上字母 E、F.

(5) 按住“shift”键，用【选择】工具同时选定点 E、F，选择【测算】菜单中的“坐标”命令，测算并显示出点 E、F 的坐标.

(6) 用【选择】工具选定点 E 的坐标，选择【测算】菜单中的“计算…”命令，弹出计算器，在“值”对话框中选“点 E→x”，按“确认”关闭计算器，得到并显示出点 E 的横坐标 x_E. 用【文本】工具双击 x_E，弹出“测算格式”对话框，选“文本格式”并将文本“$x[E]$=”更改为“k=”，按“确认”关闭对话框. 用同样的方法得到点 F 的横坐标 x_F，并将文本“$x[F]$”更改为 b.

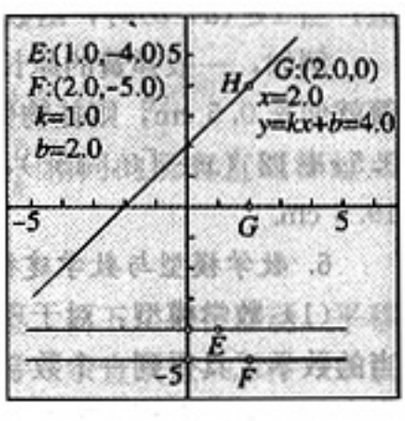


图 4

7.1.2 构造动态函数 $y=kx+b$ 的图象（图 4）

(1) 用【画点】工具在 x 轴上任取一点，并用【文本】工具标上字母 G，选择【测算】菜单中的“坐标”命令，测算并显示出点 G 的坐标.

(2) 类似上述操作 (6)，得到点 G 的横坐标 x_G，并将“$x[G]$”更改为 x.

(3) 用【选择】工具在空白处单击取消对点 G 的选定，按住“shift”键，同时选定 k、x 和 b，选择【测算】菜单中的“计算…”命令，弹出计算器，通过“值”对话框和计算器键盘顺次输入 k、*、x、+、b，按“确认”关闭对话框，计算并显示 $k\cdot x+b$.

(4) 用【文本】工具双击 $k\cdot x+b$，弹出“测算格式”对话框，选“文本格式”并将文本“$k\cdot x+b=$”更改为“$y=k\cdot x+b=$”，按“确认”关闭对话框.

(5) 用【选择】工具在空白处单击取消对 k、x 和 b 的选定，按住“shift”键，顺次选定 x 和“$y=k\cdot x+b=$”，选择【图面】工具中的“画点—根据 (x, y)”命令，画出一点，并用【文本】工具标上字母 H.

(6) 用【选择】工具，按住“shift”键，顺次选定点 G 和点 H，选择【构造】菜单中的“轨迹”命令，画出函数 $y=kx+b$ 的图象.

7.1.3 构造直线 $y=kx+b$ 上一动点 (图 5)

(1) 用【画点】工具在直线 $y=kx+b$ 上任取一点，并用【文本】工具标上字母 I，再双击字母 I，弹出“更改符号”对话框，将字母 I 更改为字母 P. 选择【测算】菜单中的“坐标”命令，计算并显示出点 P 的坐标.

(2) 按住“shift”键，用【选择】工具再选取 x 轴，选择【构造】菜单中的“垂直线”命令，画出过点 P 的 x 轴的垂线.

(3) 按住“shift”键，用【选择】工具再选取 x 轴，选择【构造】菜单中的“交点”命令，画出垂线和 x 轴的交点. 用【选择】工具选取垂线，选择【显示】菜单中的“隐藏直线”命令，把垂线隐藏起来. 按住“shift”键，用【选择】工具同时选取交点和点 P，选择【构造】菜单中的“线段”命令，画出点 P 到 x 轴的垂线段.

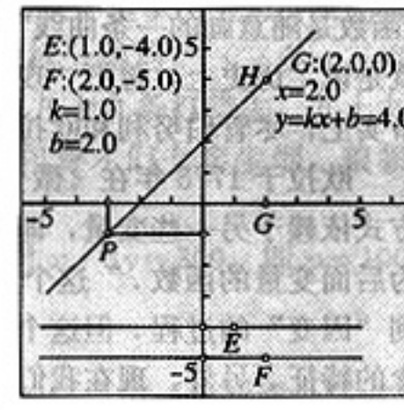


图 5

(4) 用同样的方法画出点 P 到 y 轴的垂线段.

(5) 用【选择】工具在空白处单击取消对垂线段的选定，按住“shift”键，顺次选取点 P 和直线 $y=k\cdot x+b$，选择【编辑】菜单中的“按钮→动画”命令，在弹出的“定义动画”对话框中选择“双向、慢速地”，按“动画”关闭对话框，得到一个“动画”按钮.

【注】根据教学需要，可以通过【选择】工具来安排文本的摆放位置；用【文本】工具双击文本，在“文本字体”对话框中调整字体、字号和字型；选择【显示】菜单中的“设置参数…”命令，在“参数设置”对话框中设置点坐标的精确度.

7.2 操作与效果

(1) 拖动点 E 来改变 k 的取值（点 E 移至 y 轴的左边，k 取负；点 E 移至 y 轴的右边，k 取正），则直线绕定点 $(0, b)$ 旋转. 此时直观地反映出 k 的意义及其对直线的影响：当 $k>0$ 时，直线一定经过一、三象限，当 $k<0$ 时，直线一定经过二、四象限，当 $k=0$ 时，直线与 x 轴平行；$|k|$ 越大直线越陡.

(2) 拖动点 F 来改变 b 的取值（点 F 移至 y 轴的左边，b 取负；点 F 移至 y 轴的右边，b 取正），则直线上下平行移动. 此时直观地反映出 b 的意义：b 表示直线与 y 交点的纵坐标，当 $b>0$ 时，直线与 y 轴正半轴相交；当 $b<0$ 时，直线与 y 轴负半轴相交；当 $b=0$ 时，直线经过原点.

(3) 综合 (1)、(2)，即可得出：$k>0$，$b>0$，则直线经过一、三、二象限；$k>0$，$b<0$，则直线经过一、三、四象限；$k<0$，$b>0$，则直线经过二、四、一象限；$k<0$，$b<0$，则直线经过二、四、三象限.

(4) 分 $k>0$ 和 $k<0$，双击“动画”按钮，则点 B 在直线 $y=kx+b$ 上来回移动，两条垂线随点 B 运动，点 B 的坐标也随之发生变化. 此时直观地反映出一次函数的性质：当 $k>0$ 时，直线从左向右上升，即 y 随 x 的增大而增大；当 $k<0$ 时，直线从左向右下降，即 y 随 x 的增大而减小.

【注】可将上述制作方法推广到二次函数、反比例函数的教学中.

8. “函数”的起源

函数（function）这一名词被用作数学术语，最早是微积分的奠基人之一——莱布尼茨（Leibniz，1646—1716，德国数学家）在 1692 年首先采用的. 最初莱布尼茨用函数一词表示幂，后来，他又用函数一词表示在直角坐标系中，曲线上一点的横坐标、纵坐标.

9. 函数定义的形成

从十七世纪笛卡儿在数学中引进变量算起，函数概念的形成，可以说经历了近三百年的历史，而且几经艰难曲折，最后形成了函数的近代定义.

继莱布尼茨提出“函数”这一名词后，他的学生约翰·伯努利（Bernoulli Johan，1667—1748，瑞士数学家）在 1718 年对函数进行了定义：“变量的函数是由这些变量与常量所组成的一个解析表达式”. 而到了十八世纪中叶，欧拉（Euler，1707—1783，瑞士数学家）则把函数定义为：“函数是随意画的一条曲线”（1748）. 现在知道，这乃是函数概念的解析表达式和图象表达法，这就是说，历史上，曾把“现象”当作“本质”，不过它也说明：“现象”已是进入“本质”的向导，事实上，尽管伯努利和欧拉的函数定义都具有片面性，但对以后函数概念的发展产生了巨大影响.

欧拉于 1775 年在《微分学》一书中还给出了函数的另一种定义：“如果某些变量，以这样一种方式依赖于另一些变量，即当后面这些变量变化时，前面这些变量也随之变化，则将前面的变量称为后面变量的函数.”这个定义朴素地反映了函数中的辩证因素，在特定条件下，体现了“自变”到“因变”的过程. 但这个定义没有提到两个变量之间的对应关系，因此没有反映出科学的函数概念的特征. 另外，现在我们广泛采用的函数符号 $f(x)$，也是欧拉在 1734 年首先引用的. 在 1834 年，俄国数学家罗巴契夫斯基（1793—1856，非欧几何创始人）进一步提出函数的下述定义：“x 的函数是这样的一个数：它对于每一个 x 都有确定的值，并随着 x 一起变化. 函数值可以由解析给出，也可以由一个条件给出，这个条件提供了一种寻求全部对应值的方法，函数的这种依赖关系可以存在，但仍然是未知的”. 这个定义指出了对应关系（条件）的必要性，利用这个关系，可以求出每一个 x 的对应值.

后来法国数学家狄利克雷认为怎样去建立 x 与 y 之间的关系是无关紧要的，他对函数的定义是：“如果对于 x 的每一个值，y 总有完全确定的值与之对应，则 y 是 x 的函数”. 这个定义抓住了函数概念的本质属性：变量 y 与 x 构成函数关系，只须有一个法则存在，使得对这个函数定义域中的每一个 x 值，都有一个确定的 y 值与它对应就行了，不管这个法则是公式或图象或表格或其他形式，这个定义比前面的定义更具有普遍性，和现在通常给出的函数定义可以说很接近了.

在我国，函数一词是清朝数学家李善兰最先使用的，他在《代数学》的译本（1859）中，把“function”译成“函数”，“凡式中有天，为天之函数”. 我国古代以天、地、人、物表示未知数（如 x、y、z），所以这个函数的定义相当于：若一式中含有 x，则称为关于 x 的函数. “函”和“含”在我国古代可以通用，所以“函”有着包含的意思，这大概就是李善兰用“函数”一词翻译 function 的原因吧.

二、拓展性问题

1.《中华人民共和国个人所得税》规定，公民月收入所得不超过800元的部分，不必纳税，超过800元的部分为全月应纳税所得额，此项税款按下表累税计算（纳税款＝应纳税额×对应的税率）：

全月应纳税所得额	税率
不超过500元的部分	5%
500元—2000元之间的部分	10%
2000元—5000元之间的部分	15%
……	……

请问如何根据公民月收入来计算需缴的所得税款？

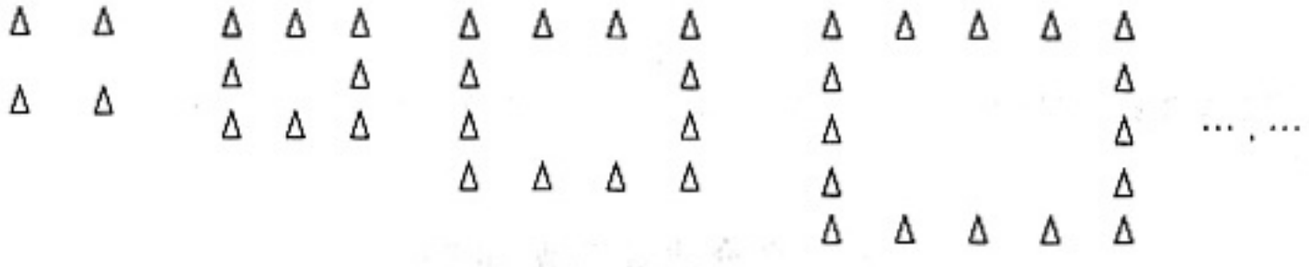
【答案与提示】 设公民月收入为x元，需缴的所得税为y元．（1）当$800<x\leqslant 1\,300$时，$y=0.05x-40$；当$1\,300<x\leqslant 2\,800$时，$y=0.1x-105$；当$2\,800<x\leqslant 5\,800$时，$y=0.15x-245$.

2. 刘三姐是壮族民间流传的具有传奇色彩的歌仙，我国优秀影片《刘三姐》中有这样一个精彩的故事情节：

当大财主莫怀仁的三个秀才与刘三姐对歌败下阵来，有个秀才急匆匆从怀里拿出书来摇头晃脑地唱道："三百条狗交给你，一少三多四个分，不要双数要单数，看你怎样分得均？"（三多：三组头数一样多）刘三姐镇定如常，向舟妹眨眼示意，舟妹心领神会作答："九十九条打猎去，九十九条看羊来，九十九条守门口，剩下三条财主请来当奴才．"气得财主和秀才们七窍生烟，狼狈不堪.

【答案与提示】 设头数较少的一组为x头，其他各组都为y头．则$x+3y=300$，即$y=100-\frac{1}{3}x$. 所以，当$x=3$时，$y=100-\frac{1}{3}\times 3=99$.

3. 数学兴趣活动小组的同学用棋子摆了如下四个正方形图案，图案的每条边（包括两个顶点）上都有$n(n\geqslant 2)$个棋子，每个图案中的棋子总数为s，按下图的排列规律推断，你知道第2004个图案中有多少个棋子吗？



$n=2$　　$n=3$　　$n=4$　　$n=5$

$s=4$　　$s=8$　　$s=12$　　$s=16$

【答案与提示】 $s=4n-4(n\geqslant 2$且n为正整数$)$．当$n=2\,004$时，$s=8\,012$.

4. 如图6，设有一个周长为C的正三角形，记作A_1；将A_1的每条边三等分，在中间的线段上向外作正三角形，去掉中间的线段后所得到的图形记作A_2；将A_2的每条边三等分，并重复上述过程，所得到的图形记作A_3；再将A_3的每条边三等分，并重复上述过程，所得到的图形记作A_4；…；将A_{n-1}的每条边三等分，并重复上述过程，所得到的图形记作A_n，那么A_n的周长是多少？

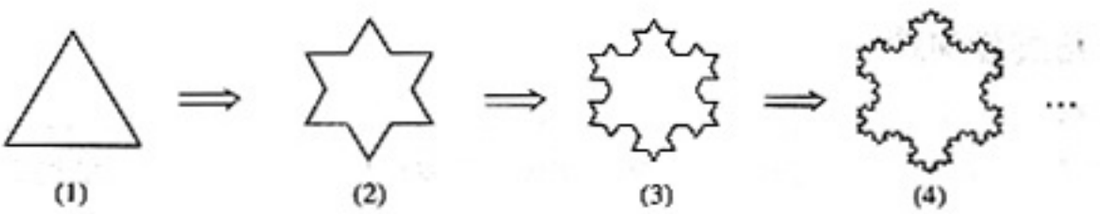


图 6

【答案与提示】 根据上述作法知，前后两条曲线之间的基本关系如图 7 所示．即后面一条曲线的周长是前面一条曲线周长的$\frac{4}{3}$倍．$C_n=\left(\frac{4}{3}\right)^n C$.

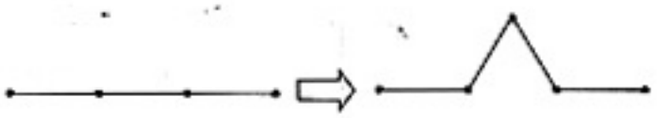


图 7

5. 当向图 8 中（1）—（10）的盛水容器均匀注水时，水深与注水量显示的关系如图 8. 请你在这组图象中选择和容器相应的图象.

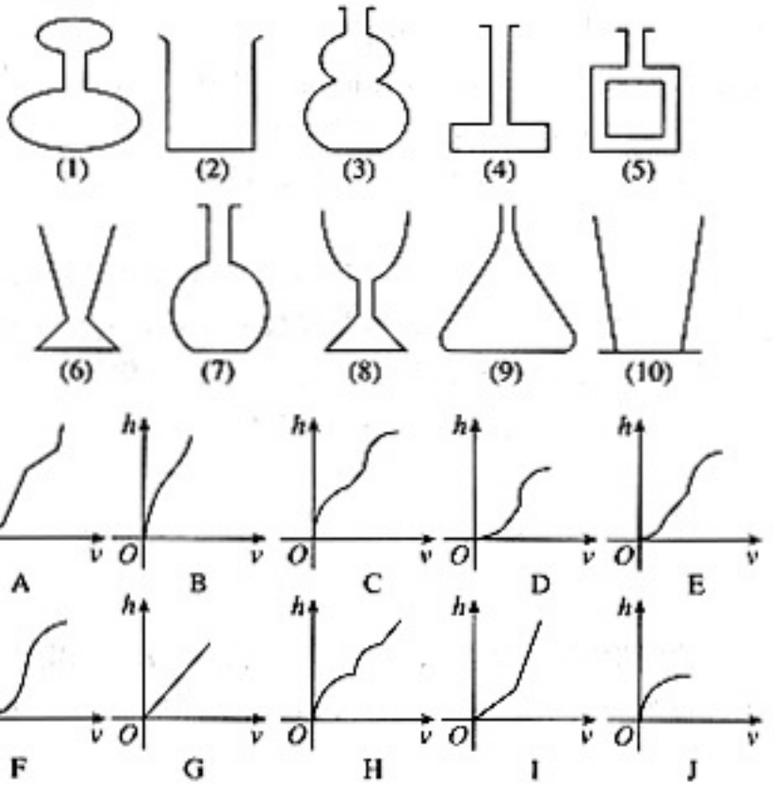


图 8

【答案与提示】 （1）C；（2）G；（3）H；（4）I；（5）A；（6）F；（7）B；（8）E；（9）D；（10）J.

Ⅵ 评价建议与测试题

一、评价建议

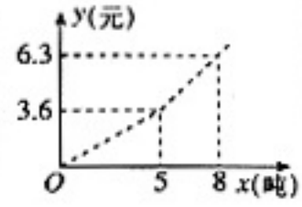
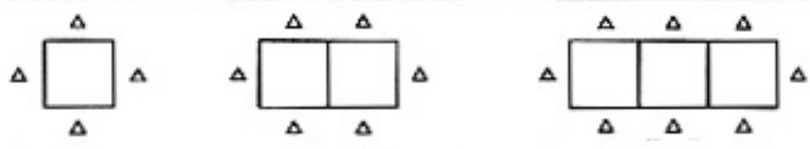
1. 本章的主要内容包括：函数及其图象的一般概念，一次函数的定义、图象和性质，用函数观点和一次函数的知识对一元一次方程、一元一次不等式和二元一次方程组进行再认识. 其中，11.1 节是全章的基础部分，11.2 节“一次函数”是全章的重点内容，11.3 节是引申的内容. 变化与对应的思想是函数概念中的要点，动态地分析问题是利用函数分析问题的特点. 对于本章的基础

知识和基本技能，应使学生比较熟练地掌握．确定评价内容时，应注意考虑本章的重点内容，有一定量的利用函数解决实际问题的题目，同时适当关注对函数与其他内容的联系的认识，为后续学习打好基础．

2. 现实生活中的实际问题在本章中占有相当的比重，教材力求让学生明白“函数来源于现实生活，而又服务于现实生活”这样一个道理．在研究“函数”这一数学模型时，又一直渗透着“数形结合”这一数学思想方法，例如，对函数、变量等概念的理解，用一次（正比例）函数的图象研究它们的性质，用函数的观点解方程（组）与不等式，….所以，在设计测试题时，既要注重函数图象和性质与函数模型的应用，又要关注对“数形结合”这一数学思想方法的考查．

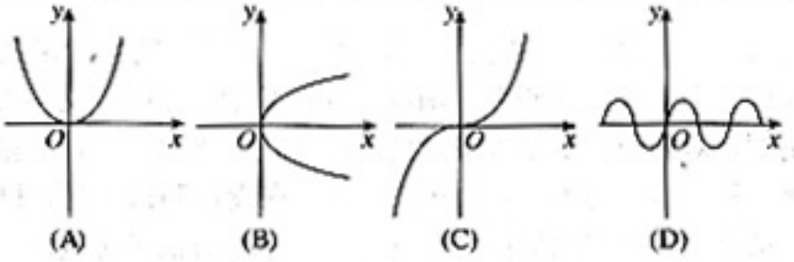
3. 一次函数是研究实际问题的一种重要模型，与日常生活关系密切．除卷面检测外，还可考虑其他评价方式．比如，就“身边的函数”这一话题，写一份调查报告，通过学生的实践、体验进行评价等．

二、测试题（时间：45 分钟，满分 100 分）

内　容	设计意图
一、填空题（每小题 5 分，共 25 分）： 1. 若函数 $y=(3-m)x^{m^2-8}$ 是正比例函数，则常数 m 的值是_____．	此题意在考查正比例函数的概念．
2. 已知一次函数 $y=kx-2$，请你补充一个条件_____，使 y 随 x 的增大而减小．	此题意在考查一次函数的性质．
3. 从 A 地向 B 地打长途电话，按时收费，3 分钟内收费 2.4 元，以后每超过 1 分钟加收 1 元．若通话 t 分钟（$t\geqslant 3$），则需付电话费 y（元）与 t（分钟）之间的函数关系式是_____．	此题意在考查实际问题中建立一次函数模型．
4. 某市自来水公司为了鼓励市民节约用水，采取分段收费标准，某市居民每月交水费 y（元）与水量 x（吨）的函数关系如图所示，请你通过观察函数图象，回答自来水公司收费标准：若用水不超过 5 吨，水费为_____元/吨；若用水超过 5 吨，超过部分的水费为_____元/吨．	此题意在考查阅读图象、捕捉、转译信息的能力．
 （第 4 题）	
5. 学校阅览室有能坐 4 人的方桌，如果多于 4 人，就把方桌拼成一行，2 张方桌拼成一行能坐 6 人，如图所示，请你结合这个规律，填写下表：	此题意在考查观察、猜想、归纳、建模（一次函数）能力．
拼成一行的桌子数 | 1 | 2 | 3 | 4 | …… | n 人数 | 4 | 6 | 8 | | …… |
 （第 5 题）	
二、选择题（每小题 5 分，共 25 分）： 6. 下列各曲线中不能表示 y 是 x 的函数是（　　）．	此题意在考查函数的概念．

续表

内　容	设计意图



（第 6 题）

7. 若点 A（2，4）在函数 $y=kx-2$ 的图象上，则下列各点在此函数图象上的是（　　）

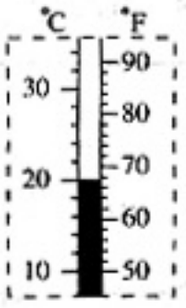
（A）（0，−2）．　（B）$\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$．　（C）（8，20）．　（D）$\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$．

此题意在考查函数图象与其解析式的关系．

8. 右图是温度计的示意图，左边的刻度表示摄氏温度，右边的刻度表示华氏温度，华氏（°F）温度 y 与摄氏温度（℃）x 之间的函数关系式为（　　）

（A）$y=\frac{9}{5}x+32$　　（B）$y=x+40$

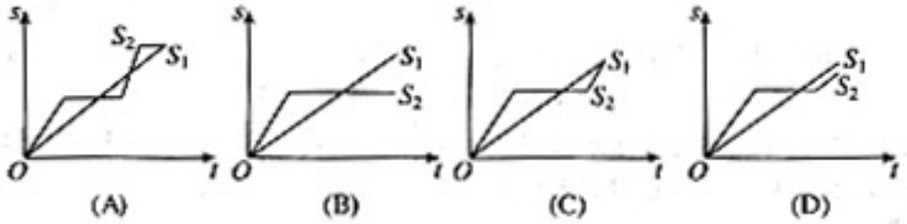
（C）$y=\frac{5}{9}x+32$　　（D）$y=\frac{5}{9}x+31$



（第 8 题）

此题意在考查学生的观察、建模能力．

9. “龟兔赛跑”讲述了这样的故事：领先的兔子看着缓慢爬行的乌龟，骄傲起来，睡了一觉，当它醒来时，发现乌龟快到终点了，于是急忙追赶，但为时已晚，乌龟先到达了终点．用 S_1，S_2 分别表示乌龟和兔子所行的路程，t 为时间，则下列图象中与故事相吻合的是（　　）

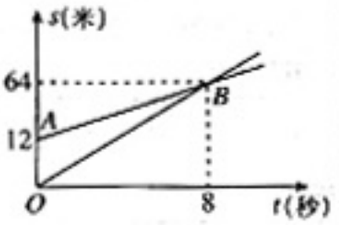


（第 9 题）

此题意在考查学生的识图能力．

10. 如图：OB、AB 分别表示甲、乙两名同学运动的一次函数图象，图中 s 和 t 分别表示运动路程和时间，已知甲的速度比乙快，下列说法：①射线 AB 表示甲的路程与时间的函数关系；②甲的速度比乙快 1.5 米/秒；③甲让乙先跑了 12 米；④8 秒钟后，甲超过了乙，其中正确的说法是（　　）

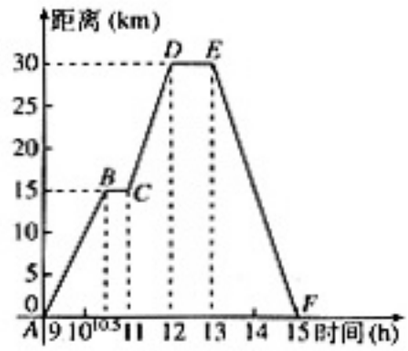
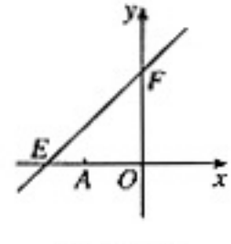
（A）①②．　（B）②③④．　（C）②③．　（D）①③④．



（第 10 题）

此题意在考查“数形结合”这一数学思想方法．

续表

内　容	设计意图
三、解答题（此大题满分 50 分）：	
11.（8 分）已知一次函数图象经过（3，5）和（−4，−9）两点．（1）求此一次函数解析式；（2）若点（a，2）在函数图象上，求 a 的值．	此题意在考查待定系数法．
12.（8 分）画出函数 $y=2x+6$ 的图象，利用图象：（1）求方程 $2x+6=0$ 的解；（2）求不等式 $2x+6>0$ 的解；（3）若 $-1\leqslant y\leqslant 3$，求 x 的取值范围．	此题意在考查一次函数与一元一次方程和一元一次不等式（组）．
13.（10 分）小强骑自行车去郊游，右图表示他离家的距离 y（千米）与所用的时间 x（小时）之间关系的函数图象，小明 9 点离开家，15 点回家，根据这个图象，请你回答下列问题： （1）小强到离家最远的地方需几小时？此时离家多远？ （2）何时开始第一次休息？休息时间多长？ （3）小强何时距家 21 km？（写出计算过程）  （第 13 题）	此题意在考查学生利用函数图象解决实际问题的能力及识图能力．
14.（12 分）网络时代的到来，很多家庭都接入了网络，电信局规定了拨号入网两种收费方式，用户可以任选其一： A：计时制：0.05 元/分；B：全月制：54 元/月（限一部个人住宅电话入网）．此外 B 种上网方式要加收通信费 0.02 元/分． （1）某用户某月上网的时间为 x 小时，两种收费方式的费用分别为 y_1（元）、y_2（元），写出 y_1、y_2 与 x 之间的函数关系式． （2）在上网时间相同的条件下，请你帮该用户选择哪种方式上网更省钱？	此题意在考查一次函数与二元一次方程组．
15.（12 分）某服装厂现有 A 种布料 70 m，B 种布料 52 m，现计划用这两种布料生产 M、N 两种型号的时装 80 套．已知做一套 M 型号的时装需要 A 种布料 0.6 m，B 种布料 0.9 m，可获利 45 元，做一套 N 型号的时装需要 A 种布料 1.1 m，B 种布料 0.4 m，可获利 50 元．若设生产 N 型号的时装套数为 x，用这批布料生产这两种型号的时装所获的总利润为 y 元． （1）求 y 与 x 的函数关系式，并求出自变量 x 的取值范围； （2）该服装厂在生产这批时装中，当生产 N 型号的时装多少套时，所获利润最大？最大利润是多少？	此题意在考查一次函数在解最大（小）值问题中的应用．
四、附加题（此大题满分 20 分）：	
16. 如图，直线 $y=kx+6$ 与 x 轴 y 轴分别交于点 E，F．点 E 的坐标为（−8，0），点 A 的坐标为（−6，0）． （1）求 k 的值； （2）若点 $P(x,y)$ 是第二象限内的直线上的一个动点，当点 P 运动过程中，试写出 $\triangle OPA$ 的面积 S 与 x 的函数关系式，并写出自变量 x 的取值范围； （3）探究：当 P 运动到什么位置时，$\triangle OPA$ 的面积为 $\frac{27}{8}$，并说明理由．  （第 16 题）	此题意在考查数形结合能力及坐标几何问题的综合应用．

测试题答案

1. -3.

2. $k<0$.

3. $y=t-0.6$ ($t\geqslant 3$，t 是整数).

4. 0.72；0.9.

5. 10；$2n+2$.

6. B.

7. A.

8. A.

9. D.

10. B.

11. $y=2x-1$；$a=\frac{3}{2}$.

12. (1) $x=-3$；(2) $x>-3$；(3) $-\frac{7}{2}\leqslant x\leqslant -\frac{3}{2}$.

13. (1) 3 小时，30 千米；(2) 10 点半；半小时；(3) 小强在 11：24 时和 13：36 时距家 21 km.

14. (1) $y_1=3x$，$y_2=1.2x+54$. (2) 当用户某月上网时间超过 30 小时时，选择 B 种上网方式更省钱；当上网时间为 30 小时时，两种上网方式费用一样；当上网时间少于 30 小时，选择 A 种上网方式更省钱.

15. (1) $y=5x+3\,600(40\leqslant x\leqslant 44)$；(2) 当生产 N 型号的时装 44 套时，所获利润最大，最大利润是 3 820 元.

16. (1) $k=\frac{3}{4}$；(2) $S=\frac{9}{4}x+18(-8<x<0)$；(3) 当 P 点的坐标为$\left(-\frac{13}{2},\ \frac{9}{8}\right)$时，$\triangle OPA$ 的面积为$\frac{27}{8}$.

第十二章 数据的描述

I. 总体设计

一、课程学习目标

1. 进一步认识条形图、折线图、扇形图，掌握它们各自的特点；

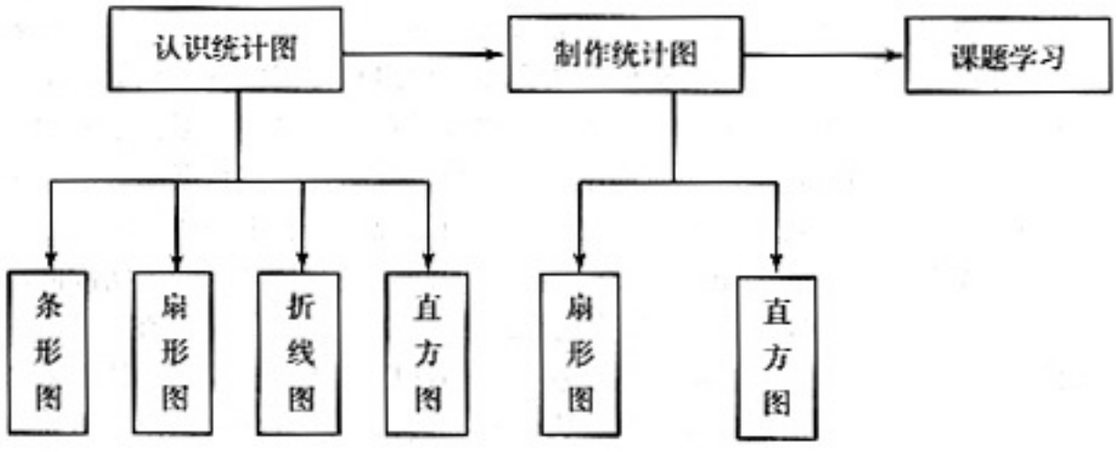
2. 会画扇形图，会用扇形图描述数据；

3. 结合实例进一步理解频数的概念，了解频数分布的意义和作用；

4. 能够根据需要对数据进行适当的分组；会列频数分布表，会画频数分布直方图和频数折线图，并会用它们描述数据；

5. 通过从事收集和处理数据的活动，经历统计的基本过程，感受统计在生活和生产中的作用，建立统计的观念，培养实事求是的科学态度.

二、本章知识结构框图



三、内容安排

本章属于《课程标准》中“统计与概率”领域的内容. 对于统计的内容，本套教科书编写了三章，分别安排在7年级上册、8年级上册和8年级下册，这三章内容是按照数据处理的基本过程（数据的收集、整理、描述和分析）来设计的. 本章继七年级上册第4章“数据的收集与整理”之后，是统计部分的第2章.

本章主要研究用统计图表描述数据的内容，重点是学习如何用扇形图、频数分布直方图和频数折线图来描述数据，其中包括两个层面的要求，一个是会画出这些统计图表，另一个是会根据问题的需要选择它们来描述数据.

全章分为三节，将内容分三步处理，第一步是认识统计图表；第二步是在认识的基础上，学习制作和选择统计图表描述数据的方法；最后安排所学内容的综合运用.

第一节介绍几种常见的统计图表. 本节在整理前两个学段已经学过的条形图、折线图和扇形图等统计图的基础上，进一步认识这几种常见的统计图，并引进一种新的统计图——频数分布直方图，研究它们在描述数据方面各自的特点，为下一节学习选择适当的统计图（主要是扇形图和直方图）描述数据打下基础.

本节开始首先设置一个实际问题情景：在地图上给出某天我国一些省会城市的空气污染指数（数据），要求根据图中给出的数据研究这些城市的空气质量情况. 根据所提问题的需要，教科书利用统计表整理了这些数据，并结合这个实际问题给出频数、频率等概念. 为了更直观形象地了解这些城市的空气质量情况，教科书给出了条形图和扇形图，通过分析统计表和统计图来研究这些城市的空气质量情况，并进一步通过比较条形图和扇形图，研究它们各自的特点. 这样，教科书就从一个实际案例出发，让学生经历了一个简单的收集、整理、描述和分析数据得出结论的基本过程，在这个过程中进一步认识条形图和扇形图.

对于折线图的学习，教科书首先给出一段文字资料，资料中包含一些国内生产总值数据，要求根据资料中的数据信息，讨论选择统计图描述国内生产总值的变化趋势的问题，由此引出用表格整理数据和用折线图描述数据的内容，通过分析作出的统计表和画出的折线图就可以解决案例中的问题，最后结合实际问题讨论折线图的特点. 这样，教科书也是从实际案例出发，案例展开的过程就是数据处理的基本过程，在这个过程中让学生进一步熟悉折线图的特点.

关于直方图，学生在前两个学段没有接触，这是本学段需要研究的新问题. 对于直方图本章分成两步学习，第一节通过一个实例认识直方图以及相关概念，第二节学习绘制和选择频数分布直方图描述数据的方法. 本节中，教科书首先呈现一个问题情景：体育老师统计800米赛跑后，全班每位同学一分时间的脉搏次数，由此引出频数分布表，在分析这个统计表的过程中，引出组数、组距、频数分布等有关概念，并介绍如何读出频数分布表中的信息；接下去由频数分布表自然地引出频数分布直方图，介绍频数分布直方图的构成，研究如何读出直方图中的信息等；本节最后，教科书归纳给出了直方图的特点，为下一节学习如何绘制和选择直方图描述数据打下基础.

第二节是在第一节的基础上，学习如何利用扇形图和直方图来描述数据的方法. 本节“用图表描述数据”包含两个含义，一个是根据问题需要选择适当的统计图表来描述数据，另一个是学习制作统计图表的方法. 本节首先研究了用扇形图描述数据的问题. 教科书从一个实际问题出发：根据2000年我国第五次人口普查数据，选择适当的统计图表示各种受教育人口在总人口中的百分比. 选择哪一种统计图来描述数据，要根据问题需要和数据的性质，结合统计图的特点来考虑，综合这些因素，教科书指出用扇形图来描述各种受教育人口在总人口中的百分比，使学生对统计图的选择有所体会，接下去讨论扇形图的制作方法. 扇形图是用扇形的面积表示部分在总体中所占的百分比，而扇形的面积是由扇形的圆心角决定的，因此制作扇形统计图的关键是求出扇形的圆心角，教科书通过一个探究活动得出了扇形所对圆心角的度数与百分比之间的关系，从而可以利用百分比求出扇形圆心角的度数，利用量角器等就可以画出扇形图.

用直方图描述数据是本章的一个重点，也是一个难点. 教科书从学生熟悉的问题情景入手：从63名学生中选出40名参加广播体操比赛. 选择参赛队员的一个要求是队员的身高应尽可能整齐. 我们可以用不同的方法选出符合这个要求的队员，教科书介绍了利用频数分布确定人选的方法. 分析数据的频数分布，首先是将数据分组，根据一组数据的最大值、最小值可以确定这组数据的极差，极差反映了数据的变化范围. 参照极差，可以确定组距和组数，进而可以将数据进行分组. 教科书选用组距为3，组数为8对数据进行分组，并用频数分布表整理了这组身高数据. 频数分布表给出了身高数据的分布情况，分析频数分布表可以看出大部分学生的身高分布在哪个范围，根据身

高的分布就可以确定参赛选手. 对于这组身高数据，不同的组距和组数，对应着不同的分组情况，也就对应着不同的频数分布，从而可能得到不同的结论，即选出几组不同的 40 名选手，这体现了统计结果的不确定性. 为了让学生对这种不确定性有所体会，教科书设置一个探究活动，要求学生按组距是 2 或 4 对数据分组，根据不同的频数分布确定选手的身高. 这个探究活动能够让学生感受到数据分组是制作频数分布表的关键所在，在此基础上，教科书归纳给出了对数据分组的一般经验. 对于连续性数据（如身高），分组后可以用频数分布直方图来描述频数分布的情况，教科书介绍了根据频数分布表作出频数分布直方图的方法，以及根据频数分布表和频数分布直方图作出频数折线图的方法. 这样教科书就结合一个实际问题，研究了将一组数据进行分组，作出频数分布表，画出频数分布直方图和频数折线图等内容，使学生进一步认识数据分组的必要性、频数分布的意义和作用等.

本章最后一节安排了一个课题学习. 完成这个课题，需要学生综合利用已学的统计知识和方法从事统计活动，经历收集、整理、描述和分析数据的基本过程. 教科书选择了一个赋有实际意义和时代气息的问题——水资源问题为主题编写了课题学习. 这个课题学习由两部分组成，第一部分有三个活动，这三个活动涉及三个不同的方面. 在第一个活动中，教科书根据附录中提供的背景材料提出几个问题，要求学生阅读背景材料，从中收集数据，通过数据处理回答这些问题. 在收集和处理数据的过程中，用到本章以及以前所学习的有关统计的知识和方法，比如频数分布，用条形图、扇形图和折线图描述数据等.

通过第一个活动，学生认识到目前全球正面临着严重的缺水挑战，我国是严重的缺水国家，可是我国的水资源浪费却非常严重. 我们每一个家庭和个人都是水资源的使用者，每一个家庭和个人都应该节约用水，那么我们在日常生活中是否节约用水呢？这样教科书就在第一个活动的基础上设计了第二个活动. 这个活动首先要求学生收集全班同学每个家庭人均月用水量，然后对所得数据进行处理并回答问题，这些问题是围绕家庭人均月用水量提出的，回答这些问题需要进行数据处理，在处理数据的过程中要综合运用所学统计知识和方法，例如设计调查问卷收集数据、用扇形图和直方图等描述数据、用平均数分析数据等等. 通过这个活动，学生对家庭和个人生活用水情况会有一些了解.

第三个活动是在第一、二个活动的基础上设计的. 通过前两个活动，学生对我国工农业以及生活用水的情况有了一些了解，能够认识到节约用水是我们目前所面临的紧迫任务，找到合理可行的节水方法是当务之急，这样就自然地引出第三个活动：讨论工农业生产和生活中节约用水的好办法.

上面的三个活动是本课题学习的第一部分，第二部分是根据第一部分的活动撰写总结报告，这个总结报告应该是有数据支撑的统计报告，一方面让学生梳理整个活动的流程，体会数据处理的基本过程，同时让学生进一步感受数据在解决实际问题中的作用，使学生看到数据有助于发现问题，可以使结论更具有说服力，为提出建议或作出决策提供依据等.

四、课时安排

本章教学时间约需 12 课时，具体分配如下（仅供参考）：

12.1　几种常见的统计图表	3 课时
12.2　用图表描述数据	4 课时
12.3　课题学习　从数据谈节水	3 课时
数学活动	
小结	2 课时

五、学法教法建议

1. 注意知识的前后联系

通过上面的内容分析可以看出，本章主要研究用统计图表（重点是扇形图、频数分布表、频数分布直方图和频数折线图）描述数据的问题. 从《课程标准》看，这些内容在三个学段均有安排，教学要求随着学段的升高逐渐提高. 在第一学段要求学生“通过实例认识统计表和象形、条形统计图，并完成相应的图表”；第二学段要求学生“进一步认识条形统计图，认识折线图、扇形图；选择条形图、折线图表示数据”，到第三学段要求学生“会用扇形图表示数据”“理解频数、频率的概念，会列频数分布表，画频数分布直方图和频数折线图，并能解决简单的实际问题”等. 根据《课程标准》中统计内容安排的这个特点，结合教学实际情况，本章编写时，注意与前两个学段相关内容的联系，在已有的基础上有所提高. 例如，对于条形图和折线图，学生在前两个学段已经会用这两种统计图表示数据，本章中又将它们放在用统计图描述数据这个大环境下来学习，通过比较各种统计图（主要是条形图、折线图、扇形图、直方图等）的特点，使学生对各种统计图有一个整体的认识，从而更有效地选择适当的统计图描述数据. 再如，对于扇形图，学生在前两个学段已经学会读扇形图，本章在复习扇形图的基础上，进一步研究了扇形图的特点以及扇形图的制作方法，并学习如何利用扇形图描述数据，在复习整理已有知识的基础上有所提高，完成本学段的教学要求.

2. 强调统计思想

强调统计思想，是本套教科书在编写统计内容时特别重视的问题，本章也是如此. 本章编写时，注意突出各种统计图表在描述数据中的意义和作用，避免把统计图表的内容写成单纯的绘制图表的技巧性问题，让学生感受统计结果对决策的意义和作用，建立统计观念. 例如在 12.2 节的编写中，教科书从解决实际问题的需要出发，根据扇形图、频数分布直方图的特点和作用，学习制作这两种统计图的方法，使学生感受它们在数据处理中所起的作用. 再如，对于本章中出现的一些概念，如频数、频率和频数分布等概念都是结合具体问题给出，使学生在具体情境中感知这些概念，而不追求严格定义. 这样淡化处理概念的目的，是使学生在具体情境中感知有关概念，更好地理解这些概念的统计意义.

3. 强调活动，经历数据处理的基本过程

统计与现实生活的联系是十分密切的，这为学生通过一些统计调查活动学习统计提供了舞台. 通过实际调查活动学习统计，是帮助学生建立统计观念，体会统计的作用和意义的有效方法，这样的调查活动也有助于改变学生的学习方式，培养学生的实践能力和合作交流能力. 本章编写时，沿用了“第 4 章　数据的收集与整理”思路，从实际案例出发，让学生从事统计活动，经历数据的收集、整理、描述、分析，以及根据统计结果进行合理的判断和预测的统计活动的过程，在这个数据处理的过程中，学习描述数据的几种统计图. 例如，在 12.1.2 节学习折线图时，从实际问题（我国近些年的国内生产总值）出发，通过阅读材料收集有关数据，然后用表格整理数据，根据问题需要又用折线图描述数据，最后通过“读图”栏目分析图表得出结论，这样就使学生经历了一个简单的数据处理的基本过程.

4. 素材丰富，体现统计与生活的密切联系

为体现统计与实际的密切联系，本章选取素材时注意选取生活和生产中常见的问题，例如空气污染、节约用水等环境保护方面的问题；身高、体重、脉搏、成绩等学生身边的问题；国内生产总值、进出口贸易等经济生活的问题. 这些问题大多是富有时代气息、学生熟悉和感兴趣的现实问题，它们涉及到生活和生产的方方面面. 以这样丰富有趣的素材为载体学习统计内容，可以使学生

充分感受到统计在实际中所起的作用. 虽然本章编写时，注意了素材的多样性，但还不够，教学中可以和学生一起挖掘现实生活中的实例，选择丰富有趣的、富有挑战性和时代气息的真实素材进行教学，使学生充分感受统计与现实生活的密切联系，培养学生用数据说话的习惯，帮助学生建立统计观念.

5. 重视计算机（器）在统计中的作用

信息技术的发展给统计学的研究带来很大变化，目前，实际工作中的很多统计图表都是利用计算机（器）画出的，许多统计分析也是借助于计算机（器）完成的. 为了体现计算机（器）等现代信息技术对统计的作用，本章编写了利用计算机画统计图作为选学内容，供有条件使用计算机的学校选用. 教学中如果能使用计算机（器）作统计图或进行统计分析，将有利于把学习重点放在理解统计思想和从事统计活动上来.

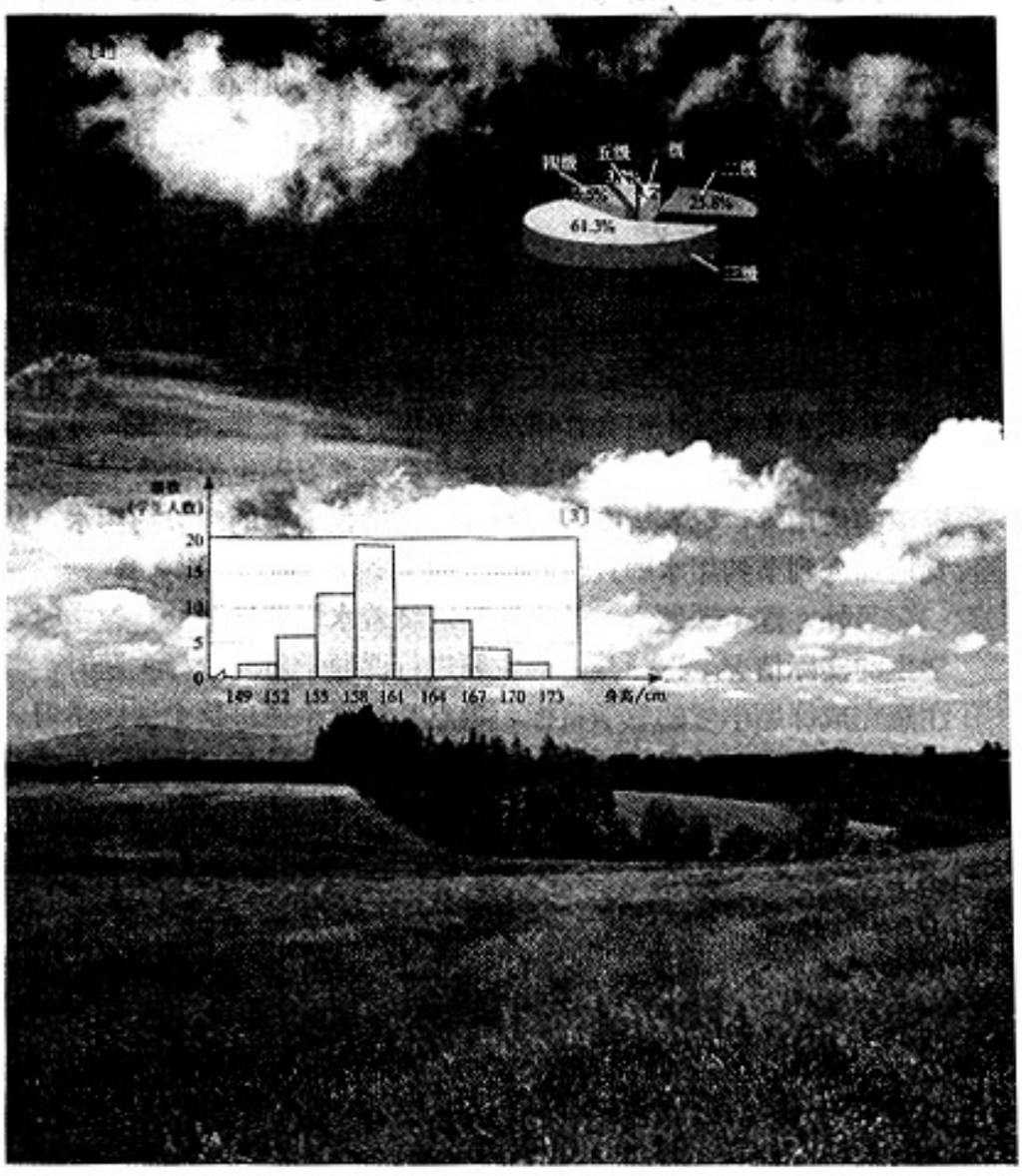
6. 关于课题学习

本套教科书在“统计与概率”领域的四章都安排了课题学习. 本章在最后一节安排了一个“课题学习”，这个“课题学习”选用了与环境保护有关的节约用水问题，具有一定综合性和活动性. 完成这个课题学习，一方面要求学生综合运用本章以及以前所学有关数据处理的知识和方法，另一方面要求学生通过小组合作活动，经历收集、整理、描述、分析数据得出结论以及对所得结论进行解释和反驳的统计过程. 通过这个“课题学习”也使学生对地球上淡水资源的储量和分布以及淡水资源的使用等情况有一个定量的认识，增强学生的“节约用水，从我做起”的环保意识，使学生自觉地加入到节约用水的宣传和行动中来.

另外，这个课题学习的主题是围绕着水资源展开的，教学时，不必拘泥于这个主题，可以根据学生的实际情况，选择其他的主题进行课题学习. 选择主题时，要注意课题的操作性和可行性，要注意完成课题学习的教学目标，重点是让学生通过这个课题学习，进行统计调查活动，经历数据处理的一般过程，感受统计的作用和意义，对统计活动有进一步的认识.

Ⅱ 教材分析

第十二章 数据的描述



[1] 章前图是一幅蓝天、白云和绿地的风景图画，这幅图画可以看作是第一节中空气污染指数问题的背景图，在背景图上有两个统计图，体现统计与实际生活的联系.

[2] 这个扇形图是正文中的图 12.1-2.

[3] 这个频数分布直方图是正文中的图 12.2-3.

1. 收集、整理、描述和分析数据，是数据处理的一个基本过程. 收集数据通常可以采用统计调查或科学实验得到第一手数据，也可以通过查阅资料等手段获得第二手数据. 通过各种途径将统计数据收集上来以后，需要对这些数据进行加工整理，使之系统化、条理化，以符合分析数据的要求. 统计中我们常用表格对数据加以整理，用表格整理数据可以大大简化数据，使数据更容易理解和分析. 表格一般能提供较多信息，为了一目了然地看出某一方面的信息，往往需要作出统计图. 各种统计图从不同的角度为我们提供所需要的信息. 通过分析统计表和统计图可以得到一些信息，统计图表也为进一步分析数据提供依据.

2. 在七年级上册的第 4 章中，我们学习了收集和整理数据的常用方法，本章我们将对描述数据的统计图表进行专门研究. 本章中，我们将进一步认识常用的几种统计图表，研究它们各自



12

12.1 几种常见的统计图表

12.2 用图表描述数据

12.3 课题学习 从数据谈节水

同学们，你们经常看电视、读报刊、上网浏览信息吗？你们是否注意到现在的电视、报刊以及互联网中包含了大量的统计图表？[1]

你们以前学过哪些统计图表？见过左面的统计图吗？认识看，从这些图中能获得哪些信息？

本章我们将通过对“空气质量”“脉搏”“身高”等问题中的统计数据的探讨，进一步学习如何从统计图表中获取信息，如何利用统计图表直观形象地描述数据．课题学习“从数据谈节水”为我们提供了利用图表描述数据的实践机会．学习本章之后，我们将感受到数据可以帮助我们解决很多问题，统计对我们非常有用．

[1] 教学中，可以引导学生注意电视、报刊或互联网上的统计图表，让学生体会统计与现实生活的联系．

的特点，学习如何从这些统计图表中读出信息，如何选择适当的统计图表来描述信息等．在学习这些描述数据的统计图表的同时，不断地经历数据处理的基本过程，感受统计的作用．

3．条形图（包括复合条形图）、扇形图、折线图、直方图是几种常见的统计图，这也是本章所要学习的统计图．除此之外，点图、茎叶图、箱线图等也是常用的统计图，其中茎叶图将在根据《高级中学数学课程标准》编写的教科书中学习．

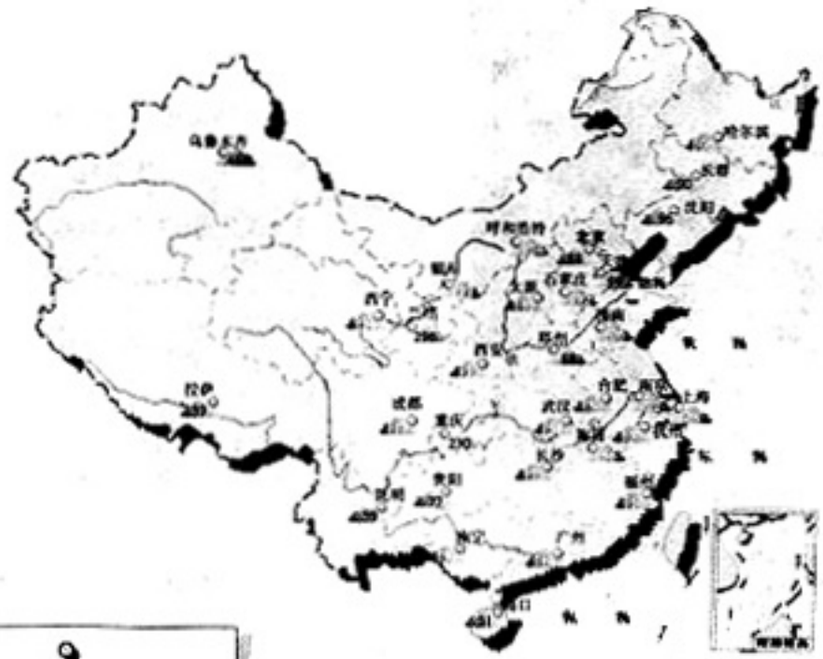
4．本章分为三节，第一节是认识条形图、扇形图、折线图、频数分布直方图和频数折线图等几种常见的统计图表，第二节是在第一节的基础上学习如何用扇形图和频数分布直方图描述数据，第三节是进行一个统计调查实践活动的课题学习．这三节对于这几种统计图的要求是逐步提高的，首先是学会读出统计图中的信息，再到会用它们描述数据，最后达到根据需要选择不同的统计图来描述数据的要求．

[1] 空气污染指数是一种反映和评价空气质量的方法，就是将常规监测的几种空气污染物的浓度简化成为单一的概念性数值形式、并分级表征空气质量状况与空气污染的程度，其结果简明直观，使用方便，适用于表示城市的短期空气质量状况和变化趋势.

目前我国计入空气污染指数的污染物项目暂定为：二氧化硫、氮氧化物和总悬浮颗粒物. 随着环境保护工作的深入和监测技术水平的提高，将调整增加其他污染项目，以便更为客观地反应污染状况.

12.1 几种常见的统计图表

12.1.1 条形图与扇形图



质量级别	污染指数m	质量状况
一级	[illegible]≤50	优
二级	[illegible]≤100	良
三级	[illegible]≤150	轻微污染
	[illegible]≤200	轻度污染
四级	201≤m≤250	中度污染
	251≤m≤300	中重度污染
五级	[illegible]≥301	重度污染

（数据来源：中国环境保护网 www.zhb.gov.cn 2002年1月1日空气质量日报）

上面地图中给出了2002年1月1日我国大陆地区31个城市的空气污染指数（API）[1]，请根据这组数据考虑下面的问题.

1. 对于收集到的数据一般要经过分类或分组整理，然后根据整理过的数据作出统计图. 对数据进行整理时，首先要搞清楚数据的类型，对于不同类型的数据所采用的整理方式和所适用的整理方法是不同的. 统计数据一般分为定性数据（也称品质数据）和定量数据（也称数值型数据），例如性别是定性数据，身高是定量数据. 对于定性数据通常要进行分类整理，一般可以用条形图和扇形图来显示，对于定量数据一般要进行分组整理，除了可以用条形图、扇形图显示以外，还可以用直方图和折线图显示.

为了降低学习难度，教科书没有介绍数据的类型，也没有介绍如何根据数据的类型整理和描述数据，教学中也不必介绍.

2. 在12.1.1小节中，教科书给出一个背景资料，资料中包含31个数据，这组数据是定量数据. 为了引出条形图和扇形图，教科书根据这个背景资料提出两个问题. 回答这两个问题需要

问题[1] 2002年1月1日，这31个城市中，空气质量为一级，二级，…，五级的城市各有多少个？各占百分之几？

我们按空气质量级别对这31个数据分组，数出每一组的城市个数，再计算它们所占的百分比，列出下表：

表 12.1-1

级别	划记	频数(城市个数)	频率(频数/31)	百分比[2]
一级	一	1	0.032	3.2%
二级	正下	8	0.258	25.8%
三级	正正正丅	19	0.613	61.3%
四级	丅	2	0.065	6.5%
五级	一	1	0.032	3.2%
合计	31	31	1	100%

从表12.1-1可以知道空气质量为各级的城市个数及其所占百分比．例如，空气质量为二级的有8个城市，占25.8%．

一般我们称落在不同小组中的数据个数为该组的**频数**(frequency)，频数与数据总数的比为**频率**[3]．频率反映了各组频数的大小在总数中所占的份量．频率×100%就是百分比．

根据表12.1-1，我们用**条形图**（bar graph）来描述空气质量为一级，二级，…，五级的城市个数（图12.1-1）．

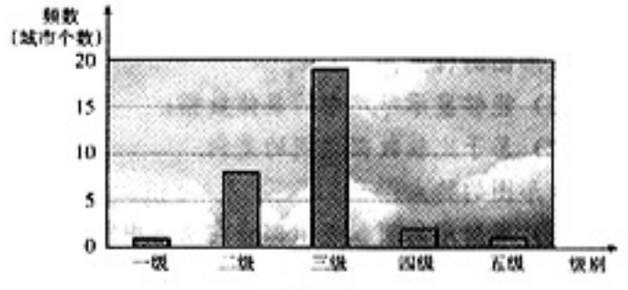


图 12.1-1

为了清楚地看出各个空气质量级别的城市个数在

[1] 这个问题中的数据是2002年1月1日的空气污染指数，因此本问题中考察的是这一天的空气质量情况．

[2] 各小组频数的和等于1，各小组所占百分比的和为100%．

[3] 这里结合频数的概念给出频率的概念，教学中要注意让学生对这个概念有所了解就可以了，不必要求太高．关于频率的意义和作用，将在“概率”一章中进行更深入的研究．

进行统计活动．首先是对数据进行整理．为了回答第一个问题，需要按照空气质量的评价标准，将这组数据分成五个小组，统计每个小组的频数；为回答第二个问题，需要计算每个小组的频数在数据总数中所占的百分比，将统计的结果整理到表格中就得到频数分布表．

3. 频数又称为次数，是指落在各类别（或组别）中的数据个数．我们把各个类别（或组别）以及相应的频数全部列出来就是频数分布或称次数分布，将频数分布用表格的形式表现出来就是频数分布表．表12.1-1、12.1-4和12.2-2都是频数分布表．

4. 频率通常是指每一个小组的频数与数据总数的比值，各个小组频率的和等于1．百分比就是频率乘100%．对于频率这个概念，本节只是结合百分比的概念给出，对于频率的更多的理解，将在九年级上册“概率”一章中展开．

5. 频数分布表可以反映一组数据的频数分

[1] “读图”中的空依次填 1，3.2%；71%，这个数据说明 2002 年 1 月 1 日这天，我国大部分城市的空气质量在三级以下.

城市总数中所占的百分比，我们可以用扇形图（pie chart）来描述（图 12.1-2）.



图 12.1-2

读图[1]

根据表 12.1-1、图 12.1-1 和图 12.1-2 回答问题：

(1) 空气质量为一级的有_____个城市，占百分之_____；

(2) 空气质量为三级至五级的城市占百分之_____，这个数据说明什么？

探究

比较上面的条形图和扇形图，看看它们在描述数据方面各有什么优缺点.

归纳

条形图的特点：

(1) 能够显示每组中的具体数据；

(2) 易于比较数据之间的差别.

扇形图的特点：

(1) 用扇形的面积表示部分在总体中所占的百分比；

(2) 易于显示每组数据相对于总数的大小.

布，我们可以从中获得一些信息. 如果用统计图来显示频数分布，就会更加形象和直观. 一张好的统计图，往往胜过冗长的文字表述. 统计图的类型有很多，多数统计图除了可以绘制二维平面图外，还可以绘制三维立体图. 例如，图 12.1-1 是二维平面统计图，图 12.1-2 是三维立体统计图. 用计算机可以很方便地画出二维或三维统计图. 用直尺、圆规等工具制作统计图，只要求会画二维的，对三维统计图不作要求.

6. 条形图是用宽度相同的条形的高度或长短来表示数据变动的统计图. 条形图可以横置或纵置，纵置时也称柱形图. 绘制时，如果将各类别（或组别）放在横轴，则用条形的高度表示频数，如果将各类别（或组别）放在纵轴，则用条形的长短表示频数. 例如，图 12.1-1 是条形图，习题 12.1 第 2 题的图是柱形图.

条形图有单式、复式等形式，复式的形式又称复合条形图. 例如图 12.1-5 就是复式的.

练习

根据前面地图中给出的31个城市的空气污染指数完成下面的问题：

(1) 参照本节开始给出的标准，将这组数据按空气质量状况分组，填写下表：

空气质量状况	划记	频数（城市个数）	频率（频数/31）	百分比
优				
良				
轻微污染				
轻度污染				
中度污染				
中重度污染				
重度污染				

(2) 用条形图描述空气质量状况为优，良，…，重度污染的城市个数；

(3) 下面的扇形图描述了空气质量状况为优，良，…，重度污染的城市个数在31个城市中所占的百分比.

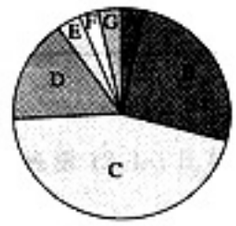
根据(1)中的表及这个扇形图填空：

区域A表示的百分比是3.2%，空气质量状况为优；

区域B表示的百分比是_____，空气质量状况为_____；

区域C表示的百分比是_____，空气质量状况为_____；

区域D表示的百分比是_____，空气质量状况为_____.

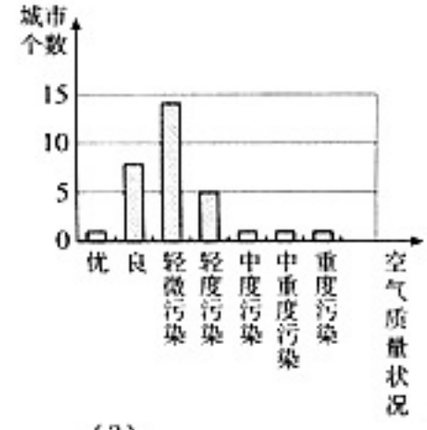


练习答案

(1)

频数	频率	百分比
1	0.032	3.2%
8	0.258	25.8%
14	0.452	45.2%
5	0.162	16.2%
1	0.032	3.2%
1	0.032	3.2%
1	0.032	3.2%

(2)



(3)

25.8%，良；45.2%，轻微污染；16.2%，轻度污染.

7. 扇形图也称圆形图或饼图，是用圆及圆内扇形的面积来表示数值大小的统计图. 扇形图主要用于表示总体中各组成部分所占的比例，对于研究结构性问题很有用. 本节用扇形图描述了空气质量为一级、二级……五级的城市个数在总城市个数中所占的百分比.

8. 从本节的“问题”开始到“读图”栏目为止，基本展示了一个简单的数据处理的过程. 通过“探究”“归纳”两个栏目的学习，应使学生对条形图和扇形图的特点有所认识，并应使学生会用条形图描述数据，会读出扇形图中的信息. 至于画出扇形图，并用扇形图描述数据应是下一节的任务.

9. 练习要求学生根据正文中的资料完成三个问题. 这三个问题是对本小节所学内容的复习巩固，是本小节应该达到的基本要求. 教学中，也可以让学生根据正文中的这个资料提出其他问题，并尝试着利用数据处理解决问题.

[1] 教学时，也可以让学生画出条形图描述表12.1-2中的数据，通过比较条形图和折线图，更容易发现折线图的特点.

12.1.2 折线图



从一万亿到九万亿

步入大会堂，看到代表委员们个个兴高采烈，脸上透着一种迈入新世纪的壮志豪情.

朱总理在政府工作报告中指出，去年，我国国内生产总值已经达到9.59万亿元，人们自然会联想到，我国的国内生产总值从1986年突破1万亿元，到去年突破9万亿元，15年，我们在不知不觉间已经跨越了9个"万亿元"台阶.

让我们稍微细味，看一看共和国曾经走过的步伐吧：

1985年，是我国实施"七五"计划的第一年，国内生产总值达到10201亿元，首次突破万亿元大关.

1991年，"八五"首年，经过"七五"5个年头的艰苦努力，我国国内生产总值达到21662亿元，突破2万亿元.

党的十四大召开以后，自1993年起，国内生产总值开始迅速增长，每年以近1万亿的速度递增，一年一个台阶，到1997年，国内生产总值已超过73143亿元.

1999年，在抵御亚洲金融危机的红风暴而后，我国GDP突破80423亿元，2000年接近9万亿元.

2001年，在改革开放20多年成果支撑和连续4年采取积极财政政策，稳健货币政策来扩大内需的作用下，我们超越了世界经济转轻低迷的影响，GDP首次突破9万亿元.

两会漫笔

（摘自2002年3月6日《经济日报》）

问题 分析上面报纸中的数据（文中提到1993年，当年的国内生产总值为34 561亿元），用什么样的统计图能很好地描述我国GDP（国内生产总值）的变化趋势？

我们可以用下面的**折线图**来描述.[1]

首先把有关数据整理到表格中（表12.1-2）.

表12.1-2

年份	1986	1991	1993	1997	1999	2001
GDP/万亿元	1.02	2.17	3.46	7.31	8.04	9.59

根据表12.1-2，以年份为横轴，GDP为纵轴建立平面直角坐标系，在坐标平面内描点（1986，1.02），…，（2001，9.59），再用线段将这些点依次连接起来，

10. 如果数据是在不同时间上取得的，我们通常称之为时间序列数据，对于这种数据，可以用折线图来描述. 本节中我们主要研究表示时间序列数据的折线图.

11. 折线图是在平面直角坐标系中用折线表现数量变化特征和规律的统计图，主要用于显示时间序列数据，用于反映事物发展变化的规律和趋势.

12. 在"两会漫笔"提供的资料中可以看出，我国国内生产总值（GDP）自1986年到2001年的发展变化情况. 每年的国民生产总值是时间序列数据. 根据这个资料，教科书提出问题，要求选择适当的统计图描述国内生产总值的变化趋势，由此引出对折线图的研究.

13. 绘制折线图时应注意以下几点：（1）时间一般绘在横轴上，时间序列数据绘在纵轴上；（2）图形的长宽比例要适当，一般应绘成横轴略大于纵轴的长方形，其长宽比例大致为10∶7.

得到折线图（图 12.1-3）.

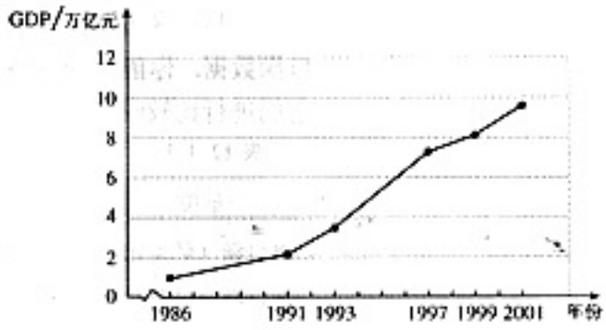


图 12.1-3

从图 12.1-3 中可以清楚地看出 1986—2001 年我国 GDP 的变化趋势.

读图

请用自己的语言描述 1986—2001 年来我国 GDP 的发展情况.[1]

探究

1. 用条形图描述表 12.1-2 中的数据，并与折线图 12.1-3 比较，看看条形图与折线图在描述数据方面各有什么特点.

2. 你能用扇形图描述这些数据吗？说说在什么情况下用扇形图描述数据更好.

归纳

折线图的特点：

易于显示数据的变化趋势.

[1] 教学中注意让学生用自己的语言描述 GDP 的发展情况. 例如，从图 12.1-3 可以看出自 1986—2001 年以来，我国 GDP 发展势头呈上升状态，尤其是 1991—1997 年 GDP 发展迅猛，等等.

图形过扁或过高，不仅不美观，而且容易给人造成视觉上的错觉，不便于对数据变化的理解；(3) 一般情况下，纵轴数据下端应从 0 开始，以便于比较. 如果数据与 0 间距过大，可以采用折断的符号将纵轴折断. 对于横轴的情况可作类似的处理. 例如图 12.1-3 就用了折断的符号将横轴折断.

14. 做出图 12.1-3 后，就可以从图中清楚地看出近些年国内生产总值的发展趋势.

“读图”栏目要求读出折线图中的信息，教学时可以引导学生用自己的语言描述折线图中的信息，并与“两会漫笔”中的信息进行比较，体会统计图的作用.

15. 从“两会漫笔”到“读图”栏目，基本上展示了一个简单的数据处理的基本过程.

16. “探究”栏目要求学生将条形图、折线图和扇形图进行比较，目的是使学生发现“归纳”栏目中关于折线图的特点.

[1] 正文中给出两种统计图：折线图和复合条形图，教学中可以将两种统计图做比较，让学生体会它们各自的特点.

问题　随着我国对外开放程度的不断扩大，我国对外贸易迅速发展. 下表是我国近几年的进口额与出口额数据. 你能用统计图来描述这两组数据，从而对它们进行比较吗？[1]

表 12.1-3

年份	1985	1990	1995	1998	2000	2002
出口额（亿美元）	274	621	1 488	1 837	2 492	3 256
进口额（亿美元）	423	534	1 321	1 402	2 251	2 952

我们可以画出一个折线图来描述进口额与出口额的发展趋势（图 12.1-4）.

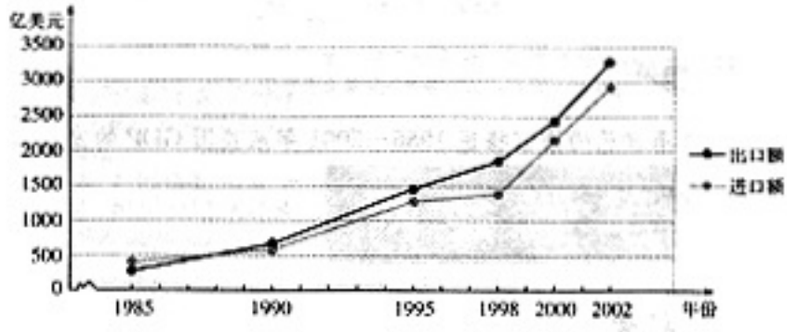


图 12.1-4

我们还可以用复合条形图来描述这两组数据（图 12.1-5）.

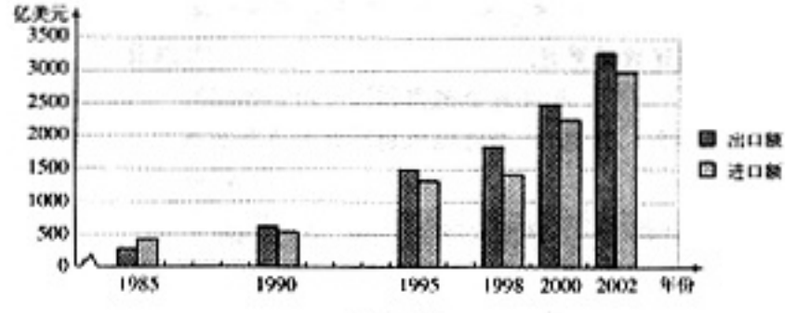


图 12.1-5

从图 12.1-5 不仅可以看出这几年的出口额与进口额的情况，而且还可以对它们进行比较.

17. 实际中，经常看到在一个平面直角坐标系中画有两条或两条以上折线的统计图. 第 12.1.2 小节中的第二个问题中就用到这种折线图. 在这个问题中涉及到两组数据，一组是进口额数据，一组是出口额数据，这两组数据都是时间序列数据. 描述这两组数据的变化趋势可以用折线图，如果将它们进行比较，一种常用的方法是将它们画在同一个平面直角坐标系中，这样就得到图 12.1-4.

18. 图 12.1-4 反映了表 12.1-3 中的信息，显示了近几年进口额和出口额的变化趋势. 此外，通过图 12.1-4，我们还可以比较几年中每一年的出口额和进口额以及它们的发展趋势. 比如，我们得到自 1990 年以来，我国每年的出口额大于进口额，出口额和进口额都有较强的发展势头等.

19. 图 12.1-5 是复合条形图. 它也能清楚地显示两组数据比较的结果. 例如，从图 12.1-5

读图 [1]

根据表 12.1-3、图 12.1-4 和图 12.1-5 回答下列问题：

(1) 1985 年的出口额_____进口额，从 1990 年开始以后的几年中，出口额_____进口额；

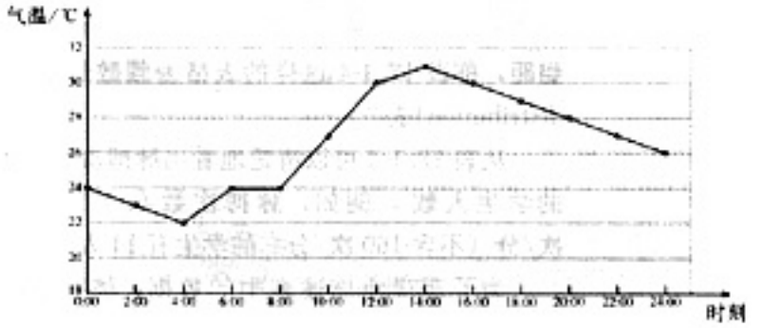
(2) 2002 年的出口额为_____，约是 1995 年出口额的____倍；

(3) 用语言描述这几年出口额与进口额的变化情况.

练习

1. 根据表 12.1-3 中的数据，分别用条形图和折线图描述这几年我国进出口总额（进口额与出口额的和）的变化情况.

2. 下面的折线图描述了某地某日的气温变化情况.



(第 2 题)

(1) 这一天的最高气温是多少？什么时候达到最高气温？

(2) 这一天的最低气温是多少？什么时候达到最低气温？

(3) 估计这一天 7 时、11 时、15 时和 19 时的气温.

[1]“读图”的答案：

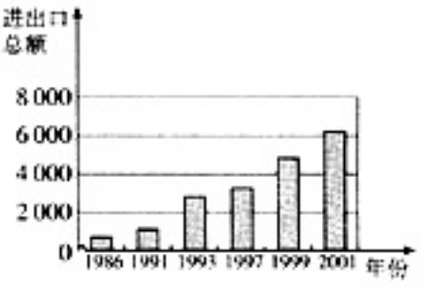
(1) 小于，大于；

(2) 3 256亿美元，2 倍；

(3) 1985—2002 年以来，进口额和出口额都呈现增长趋势，尤其是从 1998 年到 2002 年，它们增长的幅度都很大. 但 1995 年到 1998 年出口额较进口额增长缓慢.

练习答案

1.





2. (1) 31 ℃；14:00 时；

(2) 22 ℃；4:00 时；

(3) 24 ℃，28 ℃，30 ℃，29 ℃.

可以清楚地看出自 1990 年以来，我国每年的出口额大于进口额，但对于出口额和进口额发展趋势的比较，图 12.1-5 不如图 12.1-4 清楚.

20. 图 12.1-5 是等宽的长方形并排的复合条形图，有时也可以把代表一种变量的长方形放在代表另一种变量的长方形的上方. 比如，习题 12.1 的第 7 题就是这种复合条形图.

21. 统计中有时也将条形图和折线图画在一个统计图中，比如，我们可以在图 12.1-5 的基础上再画出两条折线，得到个个组合图.

22. 通过本节学习，学生应对折线图的特点有所认识，会读出折线图中的信息，会用条形图描述数据.

23. 直方图是本学段学生将要学习的一种新的统计图. 对于直方图的学习，本章分成两步完成，本节是第一步，主要任务是让学生认识频数

[1] 为了使数据“不重不漏”，教科书采用了 $130\leqslant x<135$、$135\leqslant x<140$ 的写法，使得数据 135 只属于 $135\leqslant x<140$.

12.1.3 直方图

为了研究 800 米赛跑后学生心率的分布情况，体育老师统计了全班同学一分时间脉搏的次数，并整理成下面的表格（表 12.1-4）.



表 12.1-4

脉搏次数 x（次/分）	频数（学生人数）
$130\leqslant x<135$[1]	1
$135\leqslant x<140$	2
$140\leqslant x<145$	4
$145\leqslant x<150$	6
$150\leqslant x<155$	9
$155\leqslant x<160$	14
$160\leqslant x<165$	11
$165\leqslant x<170$	2

表 12.1-4 中，体育老师把全班学生的脉搏次数按范围分成 8 组，每一组的两个端点的差都是 5. 我们把分成的组的个数称为**组数**，每一组两个端点的差称为**组距**，称表 12.1-4 这样的表格为**频数分布**(frequency distribution)表.

从表 12.1-4 可以清楚地看出脉搏次数在不同范围的学生人数. 例如，脉搏次数在 155 次/分到 160 次/分（不含 160 次/分）的学生有 14 人.

为了直观地描述表中的数据，体育老师画出图 12.1-6.

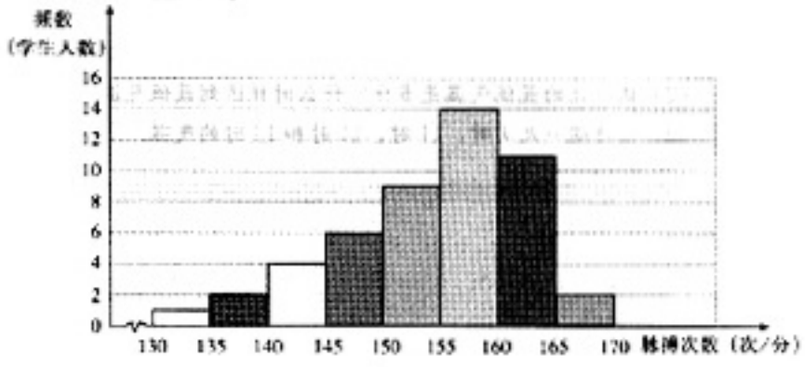


图 12.1-6

分布表和频数分布直方图，会读出这些图表中所包含的信息，在 12.2 节中将学习如何得到频数分布表，如何画出频数分布直方图和频数折线图，在什么情况下选择直方图描述数据等，教学中要注意把握教学要求.

24. 在 12.1.3 小节中，教科书根据一个实际问题情景，直接给出了将数据分组整理后的频数分布表，至于这个表是怎样得到的，将在下一节进行研究.

在介绍频数分布表的构成以及如何从表中读出信息时，教科书给出了有关频数分布的概念，包括组数和组距的概念，这些概念在对数据进行分组整理时是非常重要，本节介绍这些概念为下一节分组整理数据作准备.

通过分组整理后的频数分布表，可以看出一些数据分布的特征和规律. 如果用统计图来描述数据分布的结果，会更加形象和直观. 显示分组数据频数分布特征的统计图通常有直方图、折线

直方图实际上是用长方形的面积表示频数，当长方形的宽相等时，可以用矩形的高表示频数.

图 12.1-6 中，横轴表示脉搏次数，标出了每一组的两个端点，纵轴表示频数（学生人数），每个长方形的高代表对应组的频数. 我们称图 12.1-6 这样的统计图为频数分布**直方图**（histogram）. 直方图中各长方形之间没有空隙.

从图 12.1-6 可以看出学生脉搏次数的分布情况.

读图 [1]

根据表 12.1-4、图 12.1-6 回答问题：

(1) 脉搏次数 x 在_____范围的学生最多，有_____个；

(2) 脉搏次数 x 在 $135\leqslant x<140$ 范围的学生有_____个；

(3) 脉搏次数 x 在 $150\leqslant x<155$ 范围的学生比在 $160\leqslant x<165$ 范围的学生多还是少？

(4) 全班一共有_____学生.

结合图 12.1-1 和图 12.1-6，你能说说条形图与直方图有什么相同与不同吗？

归纳

直方图的特点：

(1) 能够显示各组频数分布的情况；

(2) 易于显示各组之间频数的差别.

统计中常见的条形图、扇形图、折线图和直方图各有其特点，它们可以从不同的角度清楚、有效地描述数据.

[1] “读图”的答案：

(1) $155\leqslant x<160$，14；

(2) 2；

(3) 少；

(4) 49.

图和曲线图，本章主要研究前两种.

24. 本节中，频数分布直方图也是直接给出的，至于直方图是怎样画出的，将在下一节研究.

直方图是用长方形的长度和宽度来表示频数分布的统计图. 在平面直角坐标系中，横轴表示数据分组，纵轴表示频数，这样，各组与相应的频数就形成一些长方形，即直方图.

直方图是用长方形的面积来表示各组的频数分布. 对于等距分组（各组的组距相等）的数据，可以用长方形的高直接表示频数的分布. 如果是不等距分组的数据，用长方形的高来表示各组的频数分布就不再适用了. 在本学段，我们只研究等距分组的情况.

25. 直方图与条形图不同，条形图是用长方形的高（纵置时）表示各类别（或组别）频数的多少，其宽度是固定的；直方图是用面积表示各组频数的多少（等距分组时可以用长方形的高表示频数），长方形的宽表示各组的组距，各长方形的高

[1] 象形图在前两个学段已经学习，教学时可以让学生适当复习.

习题12.1

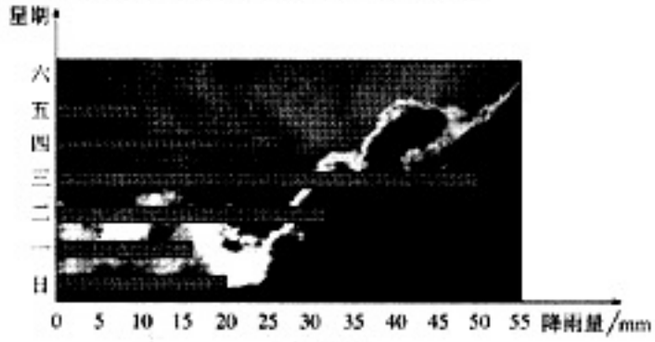
复习巩固

1. 每年植树节，同学们都参加植树造林活动，和平中学环保小组的同学用象形图描述了他们三年来植树的情况．他们三年一共植树多少棵？[1]



（第1题）

2. 下图是小明画出的雨季中某地某星期降雨量的条形图.



（第2题）

（1）哪一天降雨量最多？

（2）哪一天有可能是晴天？

（3）这个星期的总降雨量大概有多少？

（4）如果日降雨量在25毫米以上为大雨，那么这个星期哪几天在下大雨？

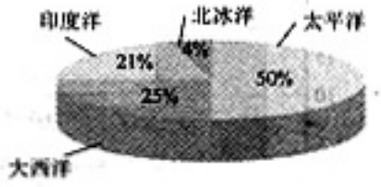
和宽都有意义．此外，由于分组数据具有连续性，直方图的各长方形通常是连续排列，中间没有空隙，而条形图则是分开排列，长方形之间有空隙.

26. 通过前面的分析可以看出，本节起承上启下的作用，一方面复习整理了前两个学段学过的象形图、条形图、扇形图和折线图，并在此基础上，进一步研究了这几种统计图的特点；另一方面也学习了新内容——频数分布，包括频数分布的有关概念，频数分布表，频数分布直方图，了解频数分布表和直方图的特征，学习如何从这些图表中读出信息等，为下一节学习利用扇形图和直方图描述数据打下基础.

习题 12.1

1. 习题 12.1 对几种常见的统计图进行复习提高，其中有些统计图是正文中讲到的，有些是正文中没有谈到的，这些正文中没有谈到的统计图也都是前两个学段学过的，教学中应给予足够的重视，注意及时复习.

3. 下面的扇形图给出了北冰洋、印度洋、大西洋和太平洋四大洋占海洋总面积（$3.622\ 58\times10^{7}$ 千米^2）的百分比.



（第3题）

（数据来源：《中国大百科全书·世界地理》）

（1）面积最大的是哪个大洋？

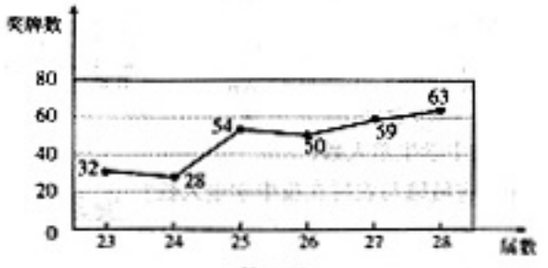
（2）使用计算器计算四大洋的面积.[1]

综合运用 ▶▶

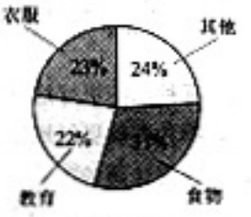
4. 我国体育健儿在六届奥运会上获得奖牌的情况如图所示.

（1）最近六届奥运会上，中国体育健儿共获得多少枚奖牌？

（2）用条形图表示折线图中的信息.



（第4题）



（第5题）

5. 张雪洁家下个月的开支预算如图所示. 如果用于教育上的支出是 150 元，请估计她家下个月的总支出，并估计各项支出的大致金额.

6. 江涛同学统计了他家 10 月份的长途电话明细清单，并按通话时间画出直方图.

（1）他家这个月一共打了多少次长途电话？

（2）通话时间不足 10 分的有多少次？

（3）哪个时间范围的通话最多？哪个时间范围的通话最少？

[1] 教学时，可以让学生画出条形图表示四大洋的面积，并将条形图与扇形图作比较，体会两种统计图的特点.

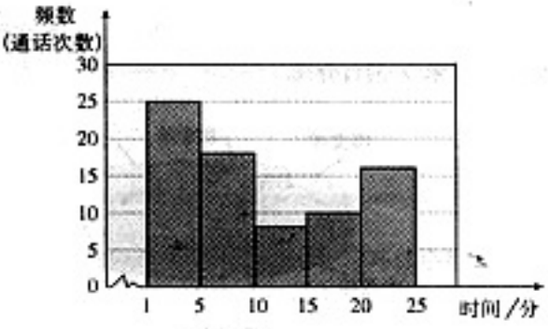
2. “复习巩固”的三道题目涉及到象形图、条形图和扇形图. 第 1 题中的象形图描述了三年来某环保小组植树的情况. 关于象形图，根据《义务教育数学课程标准》的要求，在前两个学段已经学习，由于这种统计图比较简单，教科书没有在正文中安排，而是放在习题中加以复习，教学中可以提醒学生注意，象形图也是用来描述数据的一种统计图，象形图的特点是形象，能够保留原始数据.

第 2 题中的统计图是一个横置的条形图，这种条形统计图教科书在正文中也没有涉及，教学中可以将它与正文中纵置的条形图统一起来，使学生对条形图有较全面的认识.

第 3 题是用一个三维的立体扇形图给出了四大洋的面积占海洋总面积的百分比，由于题目中给出了海洋总面积，因此根据扇形图中的信息，就可以进行计算，回答题目中的两个问题. 对于这种立体统计图，如果用计算机画图会非常容易，

[1] 教学时，可以让学生结合本题具体内容来谈两种统计图的特点，不必要求太高.

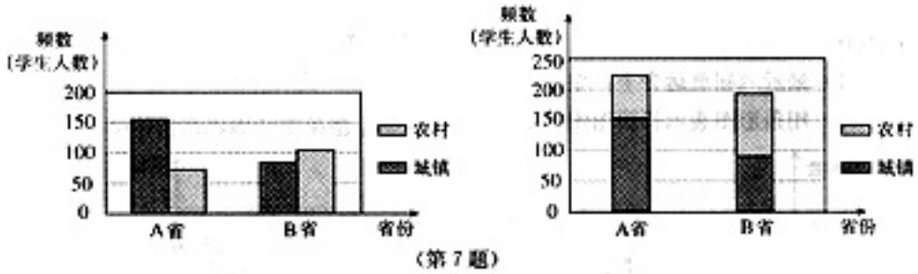




(第 6 题)

拓广探索 ▶▶

7. 据统计，A、B 两省人口总数基本相近. 2001 年 A 省的城镇在校中学生人数为 156 万，农村在校中学生人数为 72 万；B 省的城镇在校中学生人数为 84 万，农村在校中学生人数为 103 万. 李军同学根据数据画出下面两种复合条形图.



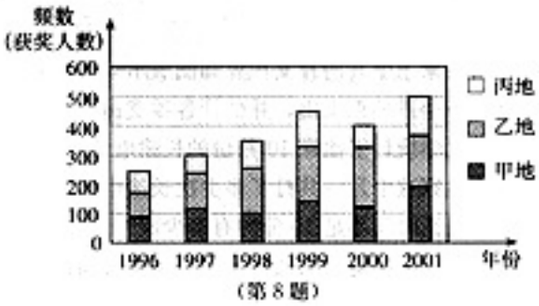
(第 7 题)

(1) 哪种图能更好地反映两省在校中学生总人数?

(2) 哪种图能更好地比较 A (B) 省城镇与农村在校中学生人数?

(3) 说说这两种图的特点.[1]

8. 右面的复合条形图反映了从 1996 年至 2001 年甲、乙、丙三地获得交通安全奖的人数情况. 从图中你可以获得哪些信息?



(第 8 题)

但用手工画图就会有些困难，因此教学中不要求学生会画立体统计图，只要能读出立体统计图中的信息即可.

3. “综合运用”中的第 4 题给出一个折线图，要求用条形图表示折线图中的信息，这样可以使学生将折线图和条形图联系起来，感受两者之间共同之处.

第 5 题和第 3 题在解决问题的方法上有一定的联系，教学中可以将两题结合起来.

第 6 题是关于直方图的，这种统计图是学生新学习的，教学中要注意检查学生掌握的情况，为下一节的教学作好准备.

4. “拓广探索”中的第 7、8 两题，涉及到两种不同形式的复合条形图，教学中要注意对它进行比较，发现各自的特点.

12.2 用图表描述数据

12.2.1 用扇形图描述数据



（资料来源：中华人民共和国国家统计局　http://www.stats.gov.cn）

问题　上面是2000年我国第五次人口普查的数据．你能用适当的统计图表示各种受教育人口在总人口中所占的百分比吗？

分析：用扇形图能有效地表示各种受教育人口在总人口中所占的百分比，根据资料，需要把圆分成面积不同的6个扇形．

探究[1]

如何把一个圆分成6个扇形，使6个扇形的面积分别代表各种不同受教育人口在总人口中所占的百分比？

（1）观察图12.2-1，扇形的面积与其对应的圆心角的关系是：

扇形的面积越大，圆心角的度数越_____，

扇形的面积越小，圆心角的度数越_____；

（2）扇形所对圆心角的度数与百分比的关系是：

圆心角的度数＝百分比×360°．



图12.2-1

[1]“探究”中的空白应填：大，小，即扇形的面积越大（小），圆心角的度数越大（小），这个结论为得出（2）中的结论作铺垫．

1. 通过第一节的学习，学生对几种常见的统计图有了一定的认识，本节在此基础上学习如何用统计图表描述数据，主要是如何用扇形图和直方图来描述数据，这包括两层意思，一层是如何画出扇形图和直方图，另一层是在什么情况下选择它们来描述数据．

2. 画统计图的目的有两个：一个是帮助你从数据中提取信息，另一个是帮助你把信息提供给别人．选用什么样的统计图描述数据取决于两个方面：一是你面对的是什么样的数据，二是你要用统计图展示什么信息．搞清了这两个问题，你就可以根据统计图的特点，找到适当的统计图描述数据．

3. 第12.2.1小节“问题”中的数据是分类数据，提出的问题是要选择一种统计图来表示各种受教育人口在总人口中所占的百分比，即部分在总体中所占的百分比，根据扇形图的特点，可以选择扇形图来描述这组数据．

4. 扇形图是用扇形的面积表示部分在总体

[1] 表 12.2-1 的空白处应填：

14 109	42 989	45 191	8 507	11 216
11%	34%	35%	7%	9%
40	123	126	25	32

练习答案

（1）图略.

（2）图略.

（1）与（2）中所画出的扇形图相同.

请你用计算器计算各种受教育人口在总人口中所占的百分比及相应圆心角的度数，并填在表 12.2-1 中：

表 12.2-1[1]

文化程度	大学	高中	初中	小学	文盲	其他
人数/万	4 571					
占总人口的百分比（精确到 1%）	4%					
圆心角度数（精确到度）	14°					

根据表 12.2-1 中数据，利用量角器量出圆心角，你就可画出扇形图.

你所画的扇形图与图 12.2-2 相同吗?



图 12.2-2

练习

用扇形图表示下面的信息：



（1）全班 43 名同学中，有 13 人最喜欢打排球，24 人最喜欢打篮球，6 人最喜欢踢足球；

（2）全年级 172 名同学中，有 52 人最喜欢打排球，96 人最喜欢打篮球，24 人最喜欢踢足球.

根据画出的扇形图，你发现什么有趣的现象?

中所占的百分比，而扇形的面积是由扇形所对的圆心角决定的，因此画扇形图实际上就是根据各个扇形所代表的百分比的大小来确定它们的圆心角的大小. 教科书就是按照这个思路来研究扇形图的制作方法的.

5. 画扇形图描述数据时，不必考虑各个扇形的相对位置. 扇形图中的一块扇形可以被移到其他位置而不改变扇形图的意义.

6. 扇形图中的圆的面积表示总体 100%，各个扇形的面积表示各部分在总体中所占的百分比，因此各扇形所代表的百分比的和应为 100%. 例如，图 12.2-2 中各扇形所代表的百分比之和 100%，图 12.1-2 也是这样.

7. 扇形图中的扇形表示的是每一类（组）数据在总数据中所占的百分比，即显示的是每一类（组）数据的相对大小. 从一个扇形图中我们不能判断每一类（组）的具体数据. 例如，本节的练习可以说明这个问题. 在练习的第（1）小题



信息技术应用　　选学

利用计算机画统计图

在计算机上画统计图不但快捷方便，而且画出的统计图标准、美观．我们可以用电子表格画统计图[1]．下面以画扇形图 12.2-2 为例，简单介绍一下操作过程：

1. 打开电子表格（如 Excel）软件，按列（或行）输入数据并选中它们（图 1）；

2. 利用软件的图表功能，打开“图表向导”窗口（图 2）；

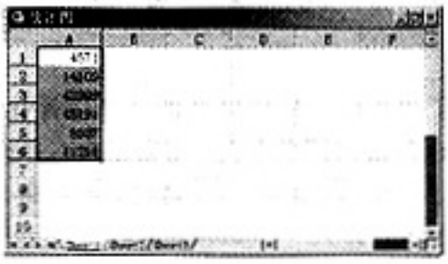


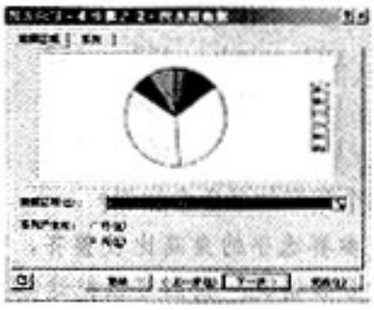
图 1



图 2

3. 在“标准类型”中选择“饼图”（扇形图），点击“下一步”，出现窗口（图 3）；

4. 选择“列”（或“行”），点击“完成”就可以画出扇形图（同图 12.2-2）．



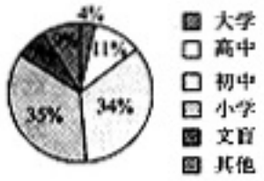


图 3

利用电子表格不仅能够画扇形图，还可以画出其他类型的统计图．

请利用电子表格画出条形图 12.1-1，折线图 12.1-3 和直方图 12.1-6．

[1] 有条件的学校还可以试着用其他的软件画统计图．

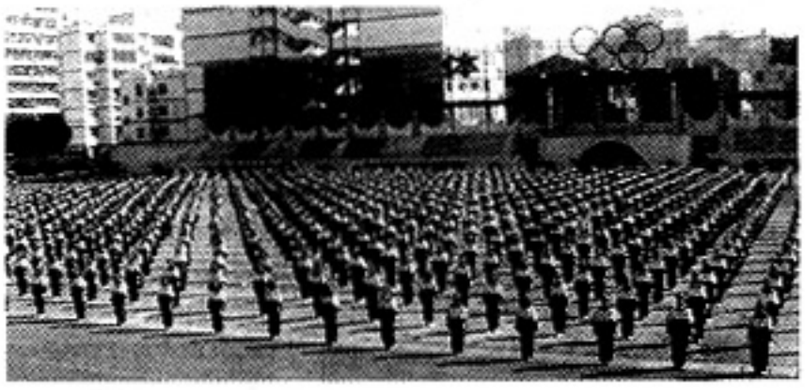
中，将 43 个数据分成三组，各组数据个数是 13、24 和 6，各组数据在总数据中所占的百分比分别是 30%、56%和 14%，画出的扇形图中各扇形所对的圆心角分别是 108°、202°和 50°；在练习的第（2）小题中，数据个数扩大四倍，总数据个数是 172，所分成的三个组的数据个数是 53、96 和 24，各组数据在总数据中所占的百分比也是 30%、56%和 14%，这样所画出的扇形图中各扇形所对的圆心角的度数与（1）中的一样，因此两个小题中画出的扇形图是一样的．

信息技术应用

随着信息技术的发展，越来越多的统计软件问世，利用统计软件可以做出符合不同需要的统计图．教科书就常用的电子表格软件对使用计算机制作统计图作了简单介绍．对于有条件使用计算机的学校，教学时可以让学生学习这个选学内容，体会计算机在处理统计中的作用．

[1] 本节是借用选择参加广播体操队员的实际情景来研究如何利用频数分布等解决问题的方法. 教学时，可以先引导学生讨论使用多种方法解决问题，然后再转到频数分布上来.

12.2.2 用直方图描述数据



问题 为了参加学校年级之间的广播体操比赛，初中二年级准备从63名同学中挑出身高相差不多的40名同学参加比赛. 为此收集到这63名同学的身高（单位：cm）数据如下：

158	158	160	168	159	159	151	158	159
168	158	154	158	154	169	158	158	158
159	167	170	153	160	160	159	159	160
149	163	163	162	172	161	153	156	162
162	163	157	162	162	161	157	157	164
155	156	165	166	156	154	166	164	165
156	157	153	165	159	157	155	164	156

选择身高在哪个范围的学生参加呢?

分析：为了使参赛选手的身高比较整齐，需要了解数据（身高）的分布情况. 我们可以把这些数据适当分组，数出每一组的频数（学生人数），根据频数分布的情况再作出决定.[1]

解：首先我们观察到这组数据的最小值是149，最大值是172，它们的差是23，说明身高（x）的变化

1. 通过前面一节的学习，学生已经认识了频数分布，包括与频数分布的有关概念（组数、组距等）、频数分布表和频数分布直方图等，本节在上一节的基础上学习用频数分布直方图描述数据的有关知识和方法.

2. 对于本节开始提出的问题，可以采用不同的方法来解决. 本节采用的是分析数据的频数分布，利用数据的分布规律来解决问题的方法.

3. 身高数据具有连续性，为了得到这组数据的频数分布，需要对数据进行分组整理. 获得一组数据的频数分布的一般步骤是：计算极差、决定组距与组数、列出频数分布表、画出频数分布直方图.

4. 极差是指一组数据中最大值与最小值的差. 一组数据的极差反映了这组数据的变化范围. 但为了控制教学要求，避免概念太多，教科书没有给出极差的概念. 极差的概念将在第20章“数据的分析”一章中出现，那里是利用极差这

范围是 23 cm，因此可以把数据按身高的范围进行分组．如果取组距为 3，则可以把数据按范围 $149 \leqslant x < 152$，$152 \leqslant x < 155$，…，$170 \leqslant x < 173$ 分成 8 个组，整理可得下面的频数分布表：

表 12.2-2

身高 (x)	划 记	频数（学生人数）
$149 \leqslant x < 152$	下	2
$152 \leqslant x < 155$	正一	6
$155 \leqslant x < 158$	正正下	12
$158 \leqslant x < 161$	正正正丅	19
$161 \leqslant x < 164$	正正	10
$164 \leqslant x < 167$	正下	8
$167 \leqslant x < 170$	丅	4
$170 \leqslant x < 173$	下	2

从表 12.2-2 可以看出，身高在 $155 \leqslant x < 158$，$158 \leqslant x < 161$，$161 \leqslant x < 164$ 三个组的人数最多，一共有 $12+19+10=41$ 人，因此可以从身高在 155～164 cm（不含 164 cm）之间的学生中选队员．

探究

上面对数据分组时，组距取 3，把数据分成 8 个组．如果组距取 2 或 4，那么数据分成几个组？这样做能否选出身高比较整齐的队员？

归纳

组距和组数的确定没有固定的标准，要凭借经验和研究的具体问题来决定．通常数据越多，分成的组数也越多，当数据在 100 个以内时，根据数据的多少通常分成 5～12 个组．[1]

[1] 在对数据分组时，可以先确定组距，再根据组距确定组数，也可以先确定组数，再根据组数确定组距．

个概念来刻画数据的波动程度．教学时也不必给出极差这个术语．

5. 决定组距和组数是一个教学难点．一组数据分成多少个组合适呢？这不仅与数据的多少有关，还与数据本身的特点有关．由于分组的目的之一是为了观察数据分布的特征，因此组数的多少应当适中，若组数太多，数据的分布就会过于分散，而组数太少，数据的分布就会过于集中，这都不便于观察数据分布的特征和规律．组数的确定应以能够较好地反映数据的分布特征和规律为目的．

当组数确定后，组距就可以根据极差和组数来确定，即组距＝极差÷组数．同样，如果组距确定了，组数也可以用组数＝极差÷组距来估计．

教科书在“归纳”栏目中提出的关于确定组数的规律是一个经验法则．实际决定组数时，常常有一个尝试的过程．比如可以先确定一个组距，然后算出相应的组数，最后根据这个组数对

[1] 为了从频数分布表直接画出频数折线图，这里给出了“组中值”的概念. 教学中，可以让学生结合具体例子体会组中值的意义. 组中值这个概念在第 20 章“数据的分析”一章还要用到.

为了更清楚地看出频数分布的情况，可以根据表 12.2-2 画出频数分布直方图.

用横轴表示身高，等距离标出各组的端点 149、152、155 等，用纵轴表示频数，等距离标出 5、10、15 等，以各组的频数为高画出与这一组对应的长方形，得到下面的频数分布直方图（图 12.2-3）.

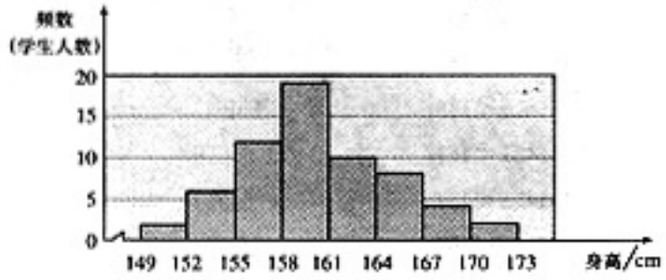


图 12.2-3

我们也可以用频数折线图来描述频数分布的情况. 频数折线图可以在频数分布直方图的基础上画出来.

首先取直方图中每一个长方形上边的中点，然后在横轴上取两个频数为 0 的点，在直方图的左边取点（147.5，0），在直方图的右边取点（174.5，0），将这些点用线段依次连接起来，就得到频数折线图（图 12.2-4）.

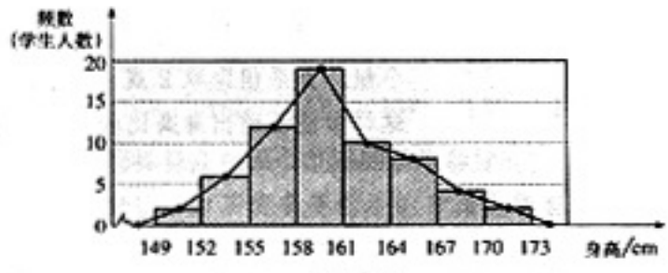


图 12.2-4

频数折线图也可以不通过直方图直接画出.

根据表 12.2-2，求出各个小组两个端点的平均数，这些平均数称为**组中值**.[1] 例如小组 $149 \leqslant x < 152$ 端点

数据进行分组整理，看看这样分组是否能够较好地反映数据的分布规律. 在尝试中，往往要比较相应于几个组距的组数，从中选择一个较好的组数.

组距和组数确定以后，就要根据组距和组数对数据分组. 数据分组时，对数据要遵循“不重不漏”的原则. “不重”是指一个数据只能分在其中的一个组，不能在其他组中重复出现；“不漏”是指在所分成的所有组别中，每个数据都能分在其中的某一组中，不能遗漏. 分组时，为了使数据“不重不漏”，统计中有不同的方法. 教科书中采用了“上限不在内”的原则. 例如，身高为 152 cm 的数据在 $152 \leqslant x < 155$ 小组，而不在 $150 \leqslant x < 152$ 小组.

6. 将数据分组后，就可以列出频数分布表. 例如表 12.2-2 就是一个频数分布表. 从频数分布表中，我们可以看出数据分组的情况，每一小组频数的多少，以及频数分布的情况. 教科书在表 12.2-2 的下面给出了从这个频数分布表所获

的平均数是$\frac{152+149}{2}=150.5$，这个小组的组中值就是150.5. 用横轴表示身高（组中值），用纵轴表示频数，以各小组的组中值为横坐标，各小组对应的频数为纵坐标描点，另外再取两个点（147.5，0）、（174.5，0），依次连接这些点，就得到频数分布折线图（图12.2-5）.

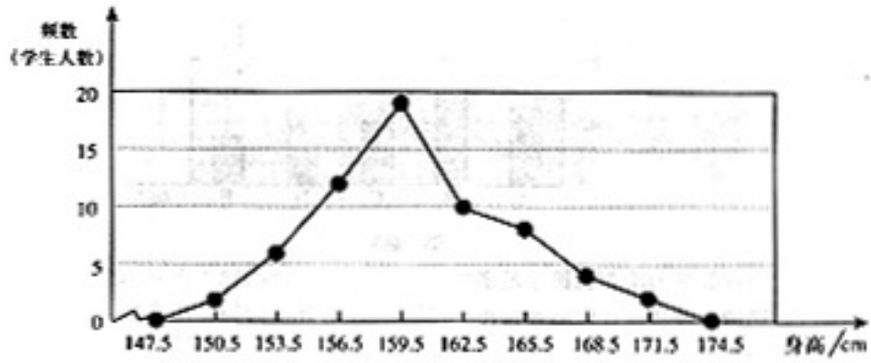


图12.2-5

练习

下列数据是截止到2002年费尔兹奖得主获奖时的年龄：

29	39	35	33	39	28	33	35	31
31	37	32	38	36	31	39	32	38
37	34	29	34	38	32	35	36	33
29	32	35	36	37	39	38	40	38
37	39	38	34	33	40	36	36	

请根据下面不同的分组方法列出频数分布表，画出频数分布直方图，比较哪一种分组能更好地说明费尔兹奖得主获奖时的年龄（x）分布：

（1）组距是2，各组是$28\leqslant x<30$，$30\leqslant x<32$，…；

（2）组距是5，各组是$25\leqslant x<30$，$30\leqslant x<35$，…；

（3）组距是10，各组是$20\leqslant x<30$，$30\leqslant x<40$，….



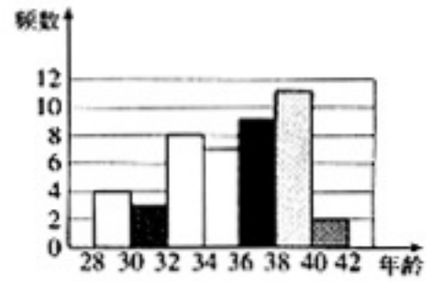
费尔兹奖是国际上享有崇高声誉的一个数学奖项，每4年评选一次，主要授予年轻的数学家. 美籍华人丘成桐（1949年出生）1982年获费尔兹奖.

练习答案

（1）频数分布表如下：

年龄	频数
$28\leqslant x<30$	4
$30\leqslant x<32$	3
$32\leqslant x<34$	8
$34\leqslant x<36$	7
$36\leqslant x<38$	9
$38\leqslant x<40$	11
$40\leqslant x<42$	2

频数分布直方图如下：



（2）、（3）略.

相比之下，（2）中的分组较好地说明了费尔兹奖得主的年龄分布.

得的信息，这些信息为解决本节开始时提出的问题提供依据.

7. 通过数据分组后形成的频数分布表，可以初步看出数据分布的一些特征和规律，如果将频数分布表中的结果直观、形象地表示出来，就会更容易看出数据的分布规律. 统计中显示分组数据的频数分布规律的统计图有直方图、折线图和曲线图等. 本章只研究了频数分布直方图和频数折线图.

画频数分布直方图时应注意的问题与画条形图时基本相同，这里不再赘述，但应注意两种统计图的区别，直方图中各个长方形之间没有空隙，而条形图中各个小长方形之间有空隙. 在画频数折线图时，要注意折线图左右两个端点的画法，不要忘记画出两个端点.

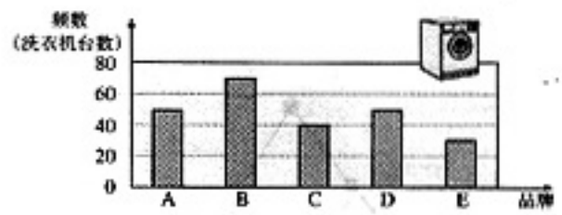
8. 练习中的这道题是要让学生体会对数据进行不同的分组，将得到不同的频数分布，组数确定的合适，数据的分布规律会呈现的较为清楚，

[1] 教学时，注意将本题中的条形图和扇形图进行比较，让学生感受两种统计图的特点.

习题12.2

复习巩固 ▶▶

1. 下面是一个商店某个月销售 A、B、C、D、E 五种品牌洗衣机的销量图.



(第 1 题)

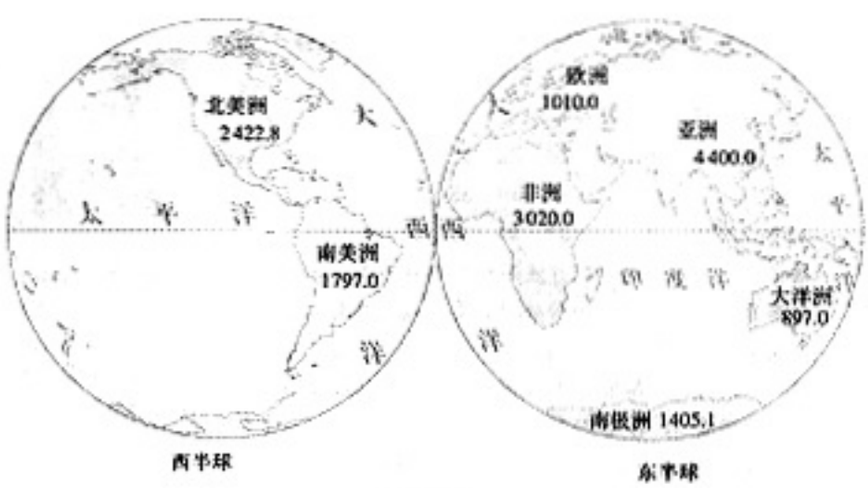
(1) 哪种品牌的洗衣机销量最多?

(2) 哪种品牌的洗衣机销量最少?

(3) 用扇形图表示上面的数据.[1]

(4) 你能对商家提出一些建议吗?

2. 根据下面世界七大洲的面积（单位：万平方千米），用扇形图表示各大洲面积占全球陆地面积的百分比，并用语言描述你获得的信息.



(第 2 题)

组数确定的不太合适，数据的分布规律呈现的比较模糊. 例如，对于这个练习题，如果组距取 2 或 10，相应的组数取 8 或 3，得到的频数分布规律就比较模糊，而组距取 5，把数据分成 4 组，得到的频数分布规律比上面的两种清楚.

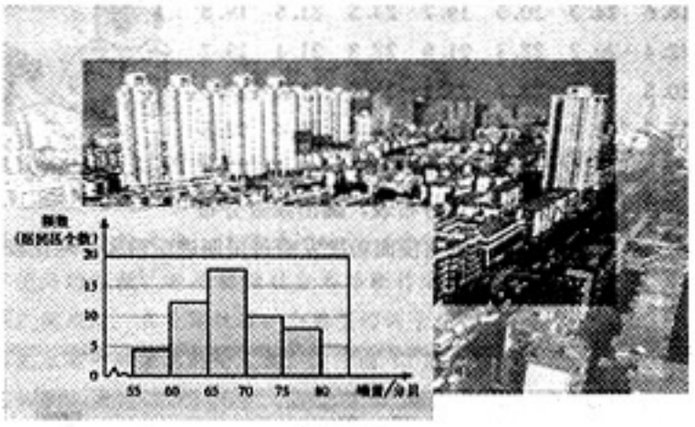
习题 12.2

1. 本节习题主要是让学生熟悉本节所学的如何使用扇形图和直方图描述数据.

在“复习巩固”的四道题目中，前两道是关于扇形图的，后两道是关于直方图的. 在第 1 题中，要求作出扇形图表示条形图所显示的数据，这就需要首先从条形图中获得信息，得到 A、B、C、D、E 五种品牌洗衣机的具体销量，然后再计算每种洗衣机销量在总销量中所占的百分比，最后利用扇形图表示这些百分比. 这样，结合条形图和扇形图可以为商店进货提出一些建议.

第 2 题利用东、西半球的地图给出了世界七大洲的面积，利用扇形图可以表示各大洲面积的

3. 为调查居民生活环境情况，环保局对所辖的 52 个居民区进行了噪音(单位：分贝)水平的调查，结果如下图.



(第 3 题)

请根据直方图回答下列问题.

(1) 在噪音最高的居民区，噪音水平在哪个范围?[1]

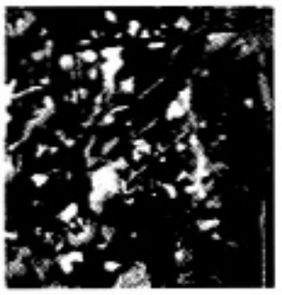
(2) 噪音水平低于 65 分贝的约有多少个居民区?

(3) 最高的长方形的高代表了哪个范围的噪音水平?

(4) 了解有关噪音方面的知识，并尝试评价这个地区的噪音污染情况，提出几条降低噪音的建议.

4. 从蔬菜大棚中收集到 50 株西红柿秧上西红柿的个数：

28	62	54	29	32	47	68	27	55	43
36	79	46	54	25	82	16	39	32	64
61	59	67	56	45	74	49	36	39	52
85	65	48	58	59	64	91	67	54	57
68	54	71	26	59	47	58	52	52	70



请按组距为 10 对数据分组，列出频数分布表，画出频数分布直方图和频数折线图，分析数据分布的情况.

综合运用 ▶▶

5. 为了了解初二同学对三种元旦活动方案的意见，校学生会对初二全体同学进行了一次调查(每人至多赞成一种方案)，结果 115 人赞成方案 1，62 人赞成方案 2，40 人赞成方案 3，10 人弃权，8 人反对. 请用扇形图描述这些数据，并对校学生会采用哪种方案组织元旦活动提出建议.

[1] 在本题的频数分布直方图中，横轴表示噪音水平，纵轴表示居民区个数，因此找噪音最高的居民区的噪音水平，不是看最高的长方形，而是看最右边的长方形.

相对大小，教学时，可以让学生对照这幅地图和扇形图，加深对扇形图的认识.

第 3 题要求根据直方图回答几个问题，也就是要求读出直方图中的信息. 在这个直方图中应注意横轴和纵轴的意义，横轴表示噪音水平，纵轴表示噪音在不同水平的居民区的个数，噪音水平最高不是指最高的长方形.

第 4 题要求对数据进行分组，作出频数分布表、画出频数分布直方图和频数折线图. 由于这道题是“复习巩固”层次的，因此题目中明确给出了组距，学生只需根据这个组距来确定组数，并对数据分组，得到数据的频数分布，这样就降低了对数据进行分组的难度，达到对有关频数分布的内容进行复习巩固的目的. 另外，实际分组时，对于第一组中的最小值，可以取这组数据的最小值，但有时为了方便，也可取小于这组数据的最小值作为第一组的最小值. 例如，本题中，给定一组数据的最小值是 16，为了统计方便，第

[1] 教学时，可以让学生以小组合作的方式完成本题. 不同的小组对数据进行不同的分组，作出相应的频数分布表、频数分布直方图和频数折线图，各小组交流结果，比较哪一种分组给出的频数分布更清楚，更有利于对面粉批发商提出建议.

6. 一位面粉批发商统计了前 48 个星期的销售量（单位：吨）：

24.4	19.1	22.7	20.4	21.0	21.6	22.8	20.9
21.8	18.6	24.3	20.5	19.7	23.5	21.6	19.8
20.3	22.4	20.2	22.3	21.9	22.3	21.4	19.2
23.5	20.5	22.1	22.7	23.2	21.7	21.1	23.1
23.4	23.3	21.0	24.1	18.5	21.5	24.4	22.6
21.0	20.0	20.7	21.5	19.8	19.1	19.1	22.4



请对数据适当分组，列出频数分布表，画出频数分布直方图和频数折线图，并分析这位面粉批发商每星期进面粉多少吨比较合适.[1]

拓广探索 ▶▶

7.



上面的资料是关于第五次人口普查与第四次人口普查的对比数据. 请选择适当的统计图描述、分析上面的信息，看看你能得出什么结论.

8. 下面是 1999 年全国一些省（自治区、直辖市）的城市园林绿地面积（单位：公顷）.

北京	19 070	上海	9 520	湖北	63 623	云南	9 566
天津	7 108	江苏	57 386	湖南	26 804	西藏	1 962
河北	22 626	浙江	24 180	广东	112 007	陕西	9 234
山西	8 581	安徽	31 317	广西	41 669	甘肃	4 091
内蒙古	15 246	福建	17 109	海南	5 522	青海	1 336
辽宁	58 906	江西	16 561	重庆	9 003	宁夏	3 303
吉林	22 777	山东	53 424	四川	45 798	新疆	16 527
黑龙江	32 097	河南	22 830	贵州	9 278		

（数据来源：2000 年中国统计年鉴）

根据上面提供的数据，分析 1999 年这些地区的城市园林绿地面积的分布情况.

一组可以取为 $15 \leqslant x < 25$，即第一组的最小值是 15，小于这组给定数据的最小值 16. 这种情况在本节的练习中也遇到了.

2. “综合运用”的两道题目，是分别用扇形图和频数分布直方图来描述数据. 第 5 题的素材是学生所熟悉的，教学中可以利用题目中给出的数据进行数据处理，也可以在全班开展统计活动，由学生自己收集数据，再对收集到的数据进行处理，让学生经历一个简单的收集、整理、描述、分析数据的基本过程.

第 6 题要考察一组给定数据的频数分布. 这里首先需要考虑确定组距、组数，对数据适当分组的问题. 对于这点，教学时要注意提醒学生选择不同的组距、组数进行尝试，从中找到一种适中的分组. 另外，教学中也要提醒学生注意，在对数据分组的问题上，不是分这么多组就行，分那么多组就不行的问题，而是怎样分组更合适一些的问题.



阅读与思考　　选学

作者可能是谁

你知道统计在历史学中有哪些应用吗？通过数据分析可以回答许多历史问题，比如利用频数分布可以推测一部历史作品的作者可能是谁．这种通过统计一些特殊词语在作品中使用的频数[1]并根据频数分布推断作者的做法已经得到广泛应用．在美国就有一个典型的例子．



詹姆斯·麦迪逊
James Madison



亚历山大·哈密尔顿
Alexander Hamilton

在美国历史上有一部著名的论文集[2]，其中有12篇论文不知道是詹姆斯·麦迪逊（James Madison，简写M）写的还是亚历山大·哈密尔顿[3]（Alexander Hamilton，简写H）写的．为了推测作者是谁，统计学家对论文集以外M的50篇文章和H的48篇文章进行了分析，统计每篇文章使用介词by、from、to的次数，结果发现，他们在使用介词by的数量上有很大区别．

统计学家是怎样计算一篇文章中使用by的次数呢？他们是按1 000字计算的．比如一篇文章包含2 500个单词，其中有45个by，则这篇文章使用by的次数是

$$\frac{45}{2\,500}\times 1\,000=18.$$

利用这种方法，统计学家分别计算了M的50篇文章和H的48篇文章中by的使用次数，并以2为组距对次数（x）进行分组，整理得到下面的频数分布表：

次　数（x）	频数（H）	频数（M）
$1\leqslant x<3$	2	0
$3\leqslant x<5$	7	0
$5\leqslant x<7$	12	5
$7\leqslant x<9$	18	7
$9\leqslant x<11$	4	8
$11\leqslant x<13$	5	16
$13\leqslant x<15$	0	6
$15\leqslant x<17$	0	5
$17\leqslant x<19$	0	3
总计	48	50

从表中我们可以看出H和M使用by的情况，例如由第2行第2列的“2”可以知道，在H的48篇文章中，有2篇使用by的次数在$1\leqslant x<3$之间．

[1] 字、词在作品中出现的频数可以体现作者的写作风格．

[2] 这部论文集是“联邦主义者”．

[3] 詹姆斯·麦迪逊是美国第四任总统，亚力山大·哈密尔顿是美国开国政治家．

3. “拓广探索”的两道题目，都是提供了一个带有数据的背景资料，要求学生根据这些材料，提出具体问题，通过收集、整理、描述和分析数据等数据处理的活动来回答这些问题．根据这些材料，学生可以从不同的角度提出不同的问题，解决问题的策略也不尽相同，得到的结论也各不相同，因此两道题目具有一定的开放性．

阅读与思考

1. 随着统计学的发展，尤其是计算机在统计学中的普遍运用，使统计的思想和方法在科研、生产等各个领域得到广泛应用．本章的这个“阅读与思考”介绍了如何利用频数分布来推测一部著作的作者，体现了统计在历史研究中的作用．通过阅读这个选学材料，力求使学生对统计的意义和作用有更进一步的了解，提高学生学习统计的积极性和热情．

[1] 教学时，要注意让学生体会通过统计调查得到的结论往往是一种推测，不是确切的结论，这与代数、几何等数学中所得的结论是准确的有所不同，这里体现了统计的思想.

统计学家利用上面的频数分布表画出图 1 和图 2，又分析了需要确定作者的那 12 篇论文中使用 by 的次数，画出图 3.

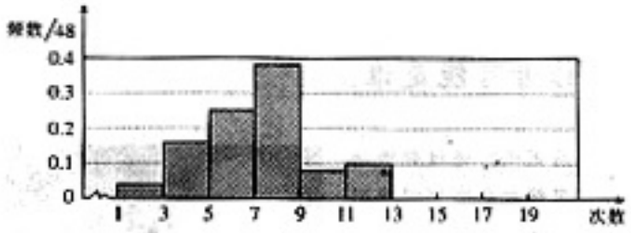


图 1 (Hamilton)

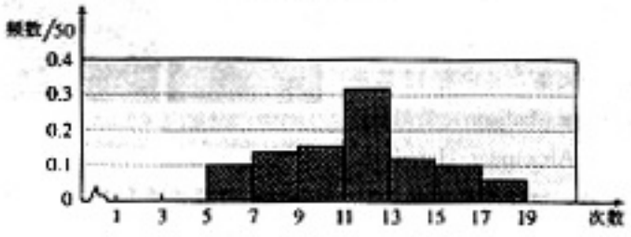


图 2 (Madison)

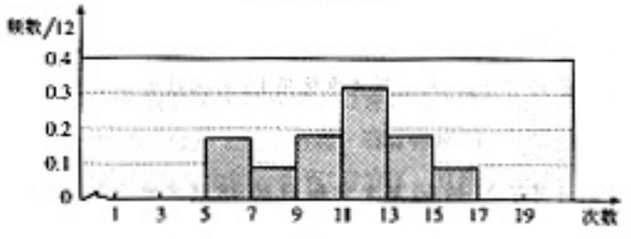


图 3

在图 1，图 2，图 3 中，横轴代表 by 的使用次数，纵轴代表每一个范围的频数与总数的比. 如图 1 中最高的长方形对应纵轴 0.375，是指 x 在 $7 \le x < 9$ 这一范围的频数 18 除以 48 所得的结果.

分析上面的 3 个直方图，统计学家发现，M 的文章使用 by 的情况更接近图 3. 这个结果为统计学家推测作者不详的那 12 篇论文可能是 M 写的提供了重要的依据.

请同学们注意，这里通过分析频数分布得到的结论只是一种推测，不是确定的结果，我们不能肯定这 12 篇论文的作者是 M，只能说作者是 M 比作者是 H 的可能性大[1]事实上，整个研究表明，这 12 篇论文中，11 篇极有可能是 M 写的，另一篇也有很大可能是 M 写的.

通过阅读统计在历史学中的奇妙用途，你对统计研究结果的作用有一些体验了吗？请同学们通过小组合作完成下列问题：

1. 统计学家是怎样统计单词 by 的使用次数的？

2. 统计学家是怎样得出作者可能是 M 的结论的？

2. “阅读与思考”选择的是国外的例子，这个例子所运用的统计的思想和方法在国际上受到好评. 这种使用统计的方法来进行“作者考证”在我国也有研究. 例如，对我国的名著《红楼梦》，长期以来，人们普遍认为曹雪芹只写了《红楼梦》的前 80 回，后 40 回是高鹗续写，但统计进入文学领域后，这个结论遭到了的质疑. 有研究人员从字、词出现的频率入手，利用计算机进行统计、处理、分析，从词汇上对《红楼梦》进行研究，对《红楼梦》后 40 回系高鹗所作这一流行看法提出异议，认为 120 回均系曹雪芹所作等.

3. “阅读与思考”中的三个直方图的纵轴表示的是频率，而不是频数，这一点教学中要注意. 由于三个直方图中的总数据个数不同（分别是 48、50、12），因此分析其频率分布比分析其频数分布更能说明问题.

12.3 课题学习 从数据谈节水[1]



目前全球正面临着缺水的严峻挑战. 我国是一个严重缺水的国家. 通过下面的统计活动, 同学们将对世界淡水资源、中国缺水的形势以及我国水资源的利用情况有所了解. 你会感到我们每个家庭和个人都应该有节约用水的意识: 节约用水, 从我做起.

一、课题要求

请合作完成下面的活动.

活动 1 阅读后面附录中的资料, 从中收集数据, 画出统计图, 并回答下列问题:

(1) 地球上的水资源和淡水资源分布情况怎样?

(2) 我国农业和工业耗水量情况怎样?

(3) 我国不同年份城市生活用水的变化趋势怎样?

(4) 根据国外的经验, 一个国家的用水量超过其水资源总量的 20%, 就有可能发生"水危机", 依据这个标准, 我国 2000 年是否曾出现"水危机"?

[1] 课题学习的标题"从数据谈节水"指出了活动的重点, 就是要用数据说话, 要让学生从事统计调查活动, 利用调查的结果谈论有关节水问题, 因此教学中要注意不要偏离主题.

另外, 教学时, 也可以根据学生的实际情况, 选用其他的课题展开统计调查活动.

1. 本章的"课题学习"与七年级上册第 4 章"数据的收集与整理"的"课题学习"相类似, 具有一定的综合性和活动性. 活动的主题是与生态环境有关的节水问题, 这个主题也是学生熟悉和感兴趣的. 活动中, 要求学生以小组合作的方式, 综合运用所学统计的知识和方法进行统计调查活动, 经历收集、整理、描述和分析数据的统计过程. 通过这个"课题学习", 使学生对地球上淡水资源的储量和分布以及淡水资源的使用等情况有一个定量的认识, 增强学生的节约用水意识, 使学生自觉地加入到节约用水的宣传和行动中来, 这样就可以较好地利用这个"课题学习"对学生进行人文方面的教育.

2. 在活动 1 中, 要求学生根据后面附录中提供的资料进行统计活动. 为了使活动更加丰富, 教学时可以引导学生查阅资料, 获得更多的关于水资源储量、分布和利用的数据, 对这些数据进行处理, 得到更多的结论. 例如, 对于第 (1) 小

[1] 由于篇幅的限制，这里的背景资料很有限，教学时，可以让学生查找更多的资料，丰富调查活动.



国家节水标志

活动2 收集全班同学各家庭人均月用水量，用频数分布直方图和频数折线图描述这些数据，并回答下列问题：

(1) 家庭人均月用水量在哪个范围的家庭最多？这个范围的家庭占全班家庭的百分之几？

(2) 家庭人均月用水量最多和最少的小组各有多少家庭？各占全班家庭的百分之几？

(3) 全班同学家庭人均日用水量的平均数是多少？按生活基本日均需水量(BWR)50升的用水标准，这个平均数是否超过用水标准？

(4) 如果每人每天节约用水10升，按12亿人口计算，一天可以节约多少吨水？按BWR标准计算，这些水可供1个人多少年的生活用水？

(5) 你还可以得到哪些信息？

活动3 讨论工农业生产及生活中节约用水的好办法.

二、课题报告

结合统计图表，写一篇研究报告，说明我国水资源短缺的形势及节约用水的紧迫性和可行办法.

附录：背景资料[1]

地球上的水包括大气水、地表水和地下水三大类. 地表水可分为海洋水和陆地水. 陆地水又可分为冰川、河流、湖泊等. 地球上水的总体积是14.2亿立方千米. 其中，海洋水约占96.53%以上，淡水约占2.53%. 而在淡水中，大部分在两极的冰川、冰盖和以地下水的形式存在，其中冰川、冰盖占77.2%，地下水占22.4%，而人类可以利用的水还不到1%.

目前，由于世界人口增长、水污染以及水资源浪费等原因，使全世界面临着淡水资源不足的问题. 世界各国特别是发展中国家水资源紧缺问题越来越严重. 发展中国家疾病死亡事件中80%与缺水和水资源污染有关.

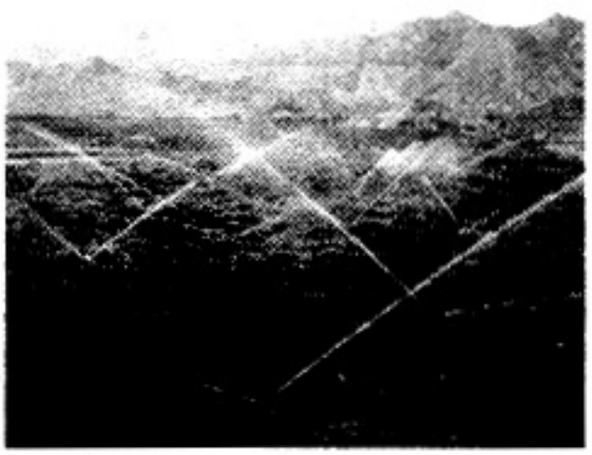
我国是世界上严重缺水的国家之一.

中国年水资源总量约为2.75×10^4亿立方米，居世界第六位，人均占有水量仅为2 400立方米左右，只相当于世界人均的$\frac{1}{4}$，居世界第110位. 中国已被联合国列为13个贫水国之一.

题，为了了解地球上水资源的分布情况，可以让学生查阅资料，了解水资源的构成以及各组成部分的储量. 通过活动1，应使学生经历从资料中收集数据，用适当的表格整理数据，利用条形图、扇形图、折线图等描述数据，分析统计图表得出结论，最后对结论进行解释或反驳的过程. 这个活动的重点应放在选择适当的统计图描述数据方面.

3. 活动2首先要求学生通过统计调查来收集数据. 为了获得家庭用水量数据，了解家庭用水习惯，提出合理的节约用水的方案，收集数据时需要设计调查问卷. 调查问卷中所包含的内容，除了完成本活动所需要的信息外，还应该考虑整个活动，尤其要注意考虑为最后写出课题报告作准备. 例如，调查问卷中可以就人们是否具有节约用水的意识设计问题，也可以就人们是否有某种浪费生活用水的不良习惯（洗脸时水龙头是开着的）设计问题等.

随着水利事业的发展，我国的水利建设工程取得了突飞猛进的发展．但由于人口、经济的进一步发展，水资源供应和需求出现了日益尖锐的矛盾．缺水状况在全国范围内普遍存在．以城市供水为例，全国大约 670 个城市中，一半以上不同程度缺水，其中严重缺水的有 110 多个．20 世纪 80 年代以来，我国北方许多大中城市因缺水致使居民定量供水，电厂、工厂停产或限产．



我国一方面存在水资源的供不应求，另一方面水资源得不到合理利用．这表现在农业用水效率很低，在灌溉农田时，60%的水消耗于蒸发渗透．农业用水量由 1979 年的4 195 亿立方米，到 1990 年的4 634亿立方米，发展到 2000 年的5 147亿立方米．工业用水的重复利用率仅为 50%，用水量由 1979 年的 523 亿立方米，到1990 年的 702 亿立方米，上升到 2000 年的 944 亿立方米．城市生活用水量逐年上升（见下表）．

全国不同年份主要城市生活用水情况　　单位：万吨

1986	1988	1990	1992	1994	1996	1997	1998	1999	2000
354 979	427 054	547 196	583 242	617 174	1 670 673	1 757 157	1 810 355	1 896 255	1 944 235

水资源的短缺已成为制约社会和经济发展的重要因素．合理利用水资源是人类可持续发展的当务之急．而节约用水是水资源合理利用的关键所在，是最快捷、最有效、最可行的维护水资源可持续利用的途径之一．我们每个家庭和个人都应该有节约用水的意识，积极参与节水行动，这是实现水资源合理利用的前提和保证．

由于学生设计的调查问卷会包含较为丰富的信息，对信息进行整理时，要注意对信息进行必要的分类．对学生收集到的全班同学各家庭人均月用水量数据，需要分析这组数据的频数分布，通过分组整理数据、列出频数分布表、画出频数分布直方图和频数折线图等回答本活动中提出的问题，这一点是本活动的重点．关于这一点，教科书中已经明确指出，教学中要注意落实．

4．为了完成活动 3，需要学生了解国内外有关工农业生产和生活中节约用水的做法和经验，这方面的问题在活动 2 设计的调查问卷中应该有所体现．

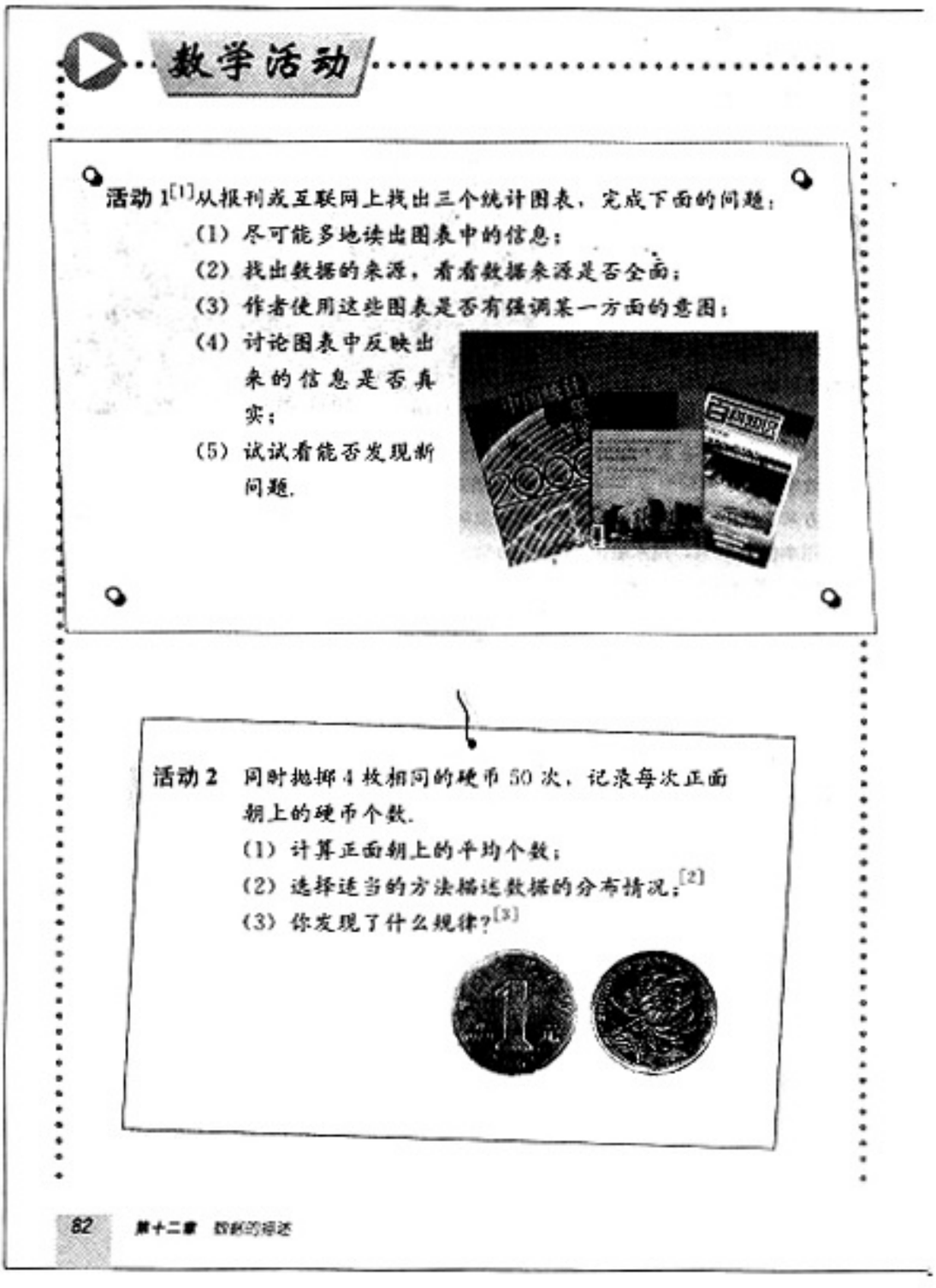
5．撰写课题报告，可以采用不同的形式，比如可以采用科学小论文的形式等．在撰写课题报告时，应注意体现数据的作用，尽量用数据、统计图表等代替冗长的文字叙述，使报告更具科学性和说服力．

[1] 一幅好的统计图，不仅应该真实地反映数据的特征，而且能够“在最短的时间里”“用最少的笔墨”“在最小的空间里”给人们最多的思想. 考虑到本学段的教学要求，在作图的好坏方面不做太高的要求，但应该使学生对不规范的统计图可能传递不真实的信息有所认识. 这是设计本活动的初衷.

[2] 教学时，可以从不同的方面描述数据，例如考察 50 次实验中出现正面向上的个数是 0、1、2、3、4 的次数.

[3] 重复做抛掷 4 枚相同硬币的试验，出现两枚硬币朝上的次数最多；出现 1 枚或 3 枚正面朝上的次数基本相同，出现 0 枚或 4 枚正面朝上的次数也基本相同.

通过分析试验的结果，学生可能得出不同的结论，有些结论具有一定的规律性. 在获得规律时，会遇到用样本估计总体的思想，教学时要注意让学生体会这一思想.



数学活动

活动 1[1] 从报刊或互联网上找出三个统计图表，完成下面的问题：

(1) 尽可能多地读出图表中的信息；

(2) 找出数据的来源，看看数据来源是否全面；

(3) 作者使用这些图表是否有强调某一方面的意图；

(4) 讨论图表中反映出来的信息是否真实；

(5) 试试看能否发现新问题.

活动 2 同时抛掷 4 枚相同的硬币 50 次，记录每次正面朝上的硬币个数.

(1) 计算正面朝上的平均个数；

(2) 选择适当的方法描述数据的分布情况；[2]

(3) 你发现了什么规律？[3]

82 第十二章 数据的描述

1. 本章的“数学活动”安排了四个小活动. 这些活动与前面的练习和习题有所不同，前面的练习或习题大多是给出了原始数据，要求学生根据这些原始数据从事数据处理的活动，而这里的数学活动，没有原始数据，需要学生首先从事收集数据的活动，然后再对所得数据进行处理. 另外，在数据处理的过程中，这些活动需要灵活运用描述数据和分析数据的策略，因此这几个活动有较强的实践性和综合性.

2. 设计活动 1 的目的是希望学生通过亲身体验，认识到形象、直观的统计图如果画的不规范可能会给人们留下不真实的印象，甚至会得出错误的结论. 活动 1 中提出的几个问题通常是阅读一幅统计图表时应该考虑的几个方面. 数据的来源是否真实、全面，所选择的样本是否具有代表性等，这些直接影响着统计结果的可靠性. 每一种统计图都可能在揭示数据的某一方面的特征时，掩盖了数据的其他方面的特征，而过分强调

活动 3　(1) 找几段英文，统计字母 T，H，A，M，O 出现的频数；

(2) 用适当的图表示这些字母的频数分布；

(3) 分析这些字母的频数分布，你得出什么结论；

(4) 和同学交流一下，看看是否有类似的结论.[1]

活动 4　谁的身高、体重没有达标？

(1) 查找资料，找到最新关于年龄、身高和体重的关系，确定身高体重的标准；

(2) 分别收集全班同学的身高和体重；

(3) 用适当的方法整理、描述这些数据；

(4) 根据数据分析的结果，试着分析身高、体重没有达标的原因，对同学们的生活、学习习惯提出建议.



[1] 教学时注意让学生体会用样本估计总体的思想.

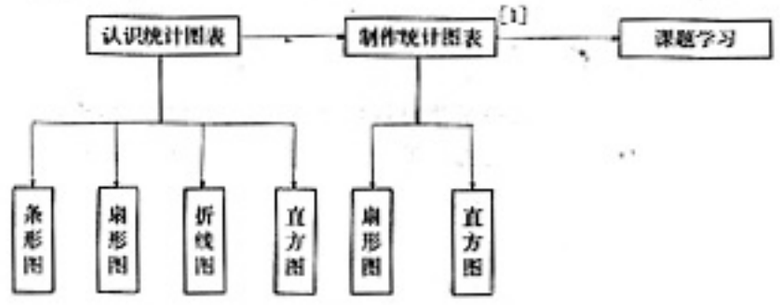
统计图在某方面的特征，可能会导致统计图的误用，从而给人们以不真实的信息.

3. 活动 2、活动 3 和活动 4 都是要求学生通过一些小实验来获得数据，再对所得数据进行处理，根据数据处理的结果回答活动中提出的问题. 这三个活动都强调让学生进行统计调查，经历收集数据和处理数据的基本过程. 在数据处理的过程中，需要综合运用本章所学有关描述数据的方法. 比如，在活动 2 的第 (2) 小题中，需要学生选择适当的统计图描述数据；在活动 3 的第 (2) 小题中，要求学生分析数据的频数分布；在活动 4 的第 (3) 小题中，要求学生分析全班同学的身高、体重的频数分布等等. 对于这三个活动，教学中可以组织学生以小组合作的方式进行活动，注意让学生在经历数据处理的基本过程中感受统计图表的作用和意义，体会用样本估计总体的思想. 活动 3 和活动 4 可以在全章结束时进行，也可以与第 12.2 节的学习结合起来.

[1] 由于会画条形图和折线图是前两个学段已经学过的内容，这里没有列出，正文中也没有专门学习. 教学时，可以根据学生掌握这两种统计图的实际情况进行适当复习.

小　结

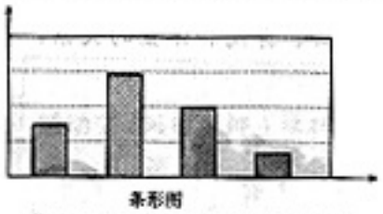
一、本章知识结构图



二、回顾与思考

1. 利用统计图表描述数据是统计分析的重要环节. 对于收集到的数据加以整理，并用统计图表描述出来，可以使我们了解数据的分布特征和规律，帮助我们从数据中获得信息，得出结论.

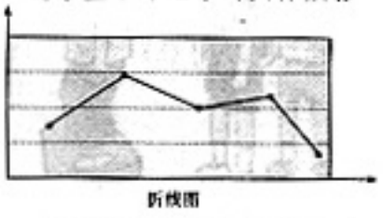
2. 条形图、扇形图、直方图、折线图各有什么特点？



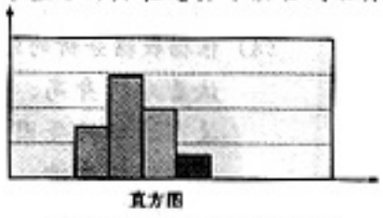
能够显示每组中的具体数据



能够显示部分在总体中所占的百分比



能够显示数据的变化趋势



能够显示数据的分布情况

3. 如何画扇形图？

4. 如何画频数分布直方图和频数折线图？

1. “本章知识结构图”展示出本章内容的展开顺序（横向箭头），也给出了本章的主要内容和教学要求（纵向箭头）. 教学时，可以以这个结构图为线索小结本章内容.

2. “回顾与思考”对本章主要内容（几种统计图的特点，如何画出扇形图和频数分布直方图、频数折线图等描述数据）以问题等形式进行了回顾，并对这些内容在统计活动的作用和地位进行了概述. 对于本章内容的复习，应放在一个数据处理的这个大环境下来进行，在收集、整理、描述和分析数据的基本过程中来审视描述数据的策略和方法，使学生对本章内容有更深刻的认识. 教学时，可以结合几个具体实例来复习，使学生在用统计的方法解决问题的过程中，经历数据处理的基本过程，达到对本章主要内容——如何用统计图表描述数据进行全面复习的目的.

复习题12

复习巩固 ▶▶

1. 某校学生来自甲、乙、丙三个地区，其人数比为 2∶7∶3. 如图所示的扇形图表示上述分布情况：

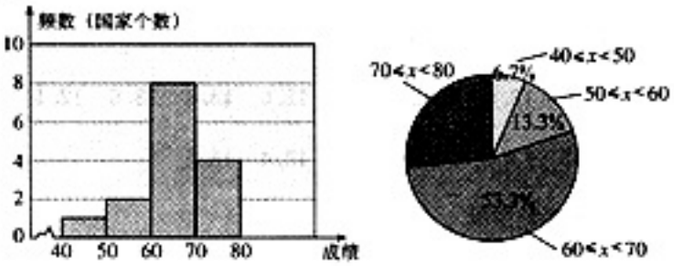
(1) 如果来自甲地区的为 180 人，求这个学校的学生总数；

(2) 求各个扇形的圆心角的度数.



(第 1 题)

2. 下面是 1998 年参加国际教育评估的 15 个国家学生的数学平均成绩(x)的统计图：



(第 2 题)

(1) 哪一个图能很好地说明一半以上国家的学生成绩在 $60\leqslant x<69$ 之间？

(2) 哪一个图能更好地说明学生成绩在 $70\leqslant x<80$ 的国家多于在 $50\leqslant x<60$ 的国家？

综合运用 ▶▶

3. 体育委员统计了全班同学 60 秒跳绳的次数，[1] 并列出下面的频数分布表：



[1] 教学时，可以组织学生进行跳绳比赛，让学生收集数据，对这些实际数据进行处理，使学生经历统计的基本过程.

1. “复习题 12”对本章所学内容进行了复习，重点复习有关扇形图和频数分布的内容.

“复习巩固”的第 1 题体现了统计图形象、直观的作用. 本题如果没有扇形图，对于通过计算得出的甲、乙、丙三个地区学生人数的相对多少就难以形成直观的印象，教学中要注意让学生体会这一点，本题中也要注意让学生体会统计与其他数学内容的联系. 第 2 题将频数分布直方图和扇形图放在一起进行比较，可以使学生更好地认识这两种统计图的特点. 这两道题是要求学生利用统计图中的信息来回答问题，属于读图这个层次.

2. “综合运用”的两道题目都要求画出统计图描述数据. 第 3 题给出了频数分布表，要求根据这个统计表回答一些问题，并用适当的统计图表示统计表中的信息. 根据数据的特点和频数分布表，可以选用不同的统计图（例如用频数分布直方图和扇形图等），从不同的角度表示统计表

次数 x	$60\leqslant x<80$	$80\leqslant x<100$	$100\leqslant x<120$	$120\leqslant x<140$	$140\leqslant x<160$	$160\leqslant x<180$	$180\leqslant x<200$
频数（学生人数）	2	4	21	13	8	4	1

（1）全班有多少同学？

（2）组距是多少？组数是多少？

（3）跳绳次数 x 在 $100\leqslant x<140$ 范围的同学有多少？占全班同学的百分之几？

（4）画出适当的统计图表示上面的信息.

（5）你怎样评价这个班的跳绳成绩？

4. 在同一条件下，对同一型号的 30 辆汽车进行耗油 1 升所行驶的路程的实验，结果如下（单位：km）：

14.1	12.3	13.7	14.0	12.8	12.9	13.1	13.6
14.4	13.8	13.8	12.6	13.2	13.3	14.2	13.9
12.7	13.0	13.2	13.5	13.6	13.4	13.6	12.1
12.5	13.1	13.5	13.2	13.4	12.6		

请统计分析汽车的耗油情况.

拓广探索 ▶▶

5.

2000年，我国国内生产总值由1952年的679亿元迅速扩大为89 404亿元，扣除价格因素，实际增长了33.8倍，年均实际增长7.7%，比1978年的3 624亿元增长了6.4倍，年均实际增长9.5%，大大高于同期发达国家年均2.5%和发展中国家年均5%的经济增长速度，也高于世界平均增长3%左右的速度，成为同期世界各国中经济增长最快的国家。

选择适当的统计图描述上面的数据，分析数据得出结论，并解释结论.

6. 中华民族的母亲河——黄河，从 1972 年以来下游出现断流现象，这给工农业生产带来巨大影响. 下面是黄河利津面（山东省境内）1972 年至 1995 年断流情况统计表：

中的信息. 关于这一点，教学中要注意引导学生选用多个统计图描述数据，并注意比较各种统计图的特点.

第 4 题给出一组数据，要求根据这组数据进行统计分析，在进行统计分析的过程中，必然会遇到选择适当的统计图表示数据的问题. 由于本题只有原始数据，难度比第 3 题要大. 与第 3 题一样，教学中要注意让学生选用多个统计图描述数据，另外，本题中，也要注意要学生体会对数据进行不同的分组，将会得到不同的频数分布，有些频数分布较好地呈现了数据的分布规律，而有些呈现的比较模糊.

3. “拓广探索”中的第 5 题没有提出具体问题，只是给出了一个含有数据的背景材料，要求根据这个材料中的数据，通过处理这些数据得出一些结论. 因此这道题有一定的开放性和综合性. 教学中可以引导学生充分利用资料中的数据，从不同的方面提出问题，采用多种统计策略

年　份	1972	1974	1975	1976	1978	1979	1980	1981	1982
断流次数	2	2	2	1	1	3	3	3	1
合计天数	20	13	8	5	21	8	36	10	5
年　份	1983	1987	1988	1989	1991	1992	1993	1994	1995
断流次数	1	1	1	4	2	5	6	5	6
合计天数	17	5	24	17	82	61	75	121	125

(1) 根据表中提供的数据，选择适当的统计图描述黄河利津面断流情况；

(2) 查找资料，分析黄河断流的原因，并尝试提出几条保护黄河的建议．

处理数据，利用数据处理的结果得出一些结论，并对所得结论进行解释和反驳，培养学生提出问题、解决问题和不断反思的能力.

第 6 题利用表格给出两组数据，要求根据这两组数据，选择适当的统计图来描述数据. 由于本题中给出两组不同方面的数据（断流次数、合计天数），因此可以从不同的角度提出具体问题，比如：自 1972 年到 1995 年以来，黄河利津面断流次数成怎样的变化趋势？断流天数在 20 天以上的有多少次？占到百分之几？等等. 针对不同的问题需要选择不同的统计图来显示数据，以便分析数据得出结论. 与第 5 题一样，教学中也要注意培养学生提出问题、解决问题和不断反思的能力. 另外，对本题中的第（2）小题应给予重视，这是一个对学生进行人文教育的好素材.

Ⅲ 习题解答

习题 12.1

1. 270 棵.

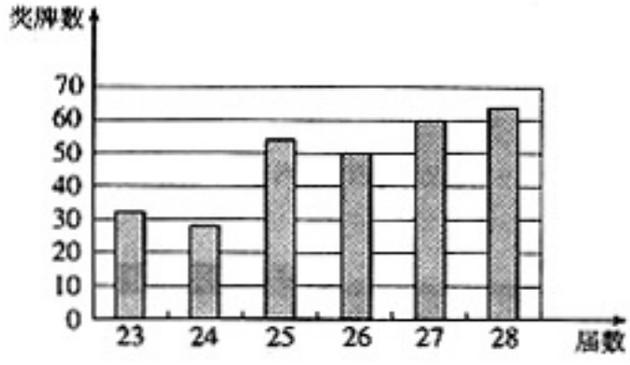
2. (1) 星期三；(2) 星期六；(3) 约 150 mm；(4) 星期二、三.

3. (1) 太平洋；

   (2) 印度洋的面积是 $7.607\,41\times10^7$；大西洋的面积是 $90.564\,5\times10^7$；
   北冰洋的面积是 $1\,044\,903\times10^7$；太平洋的面积是 $1.811\,29\times10^8$.

4. (1) 286 枚；

   (2) 条形图如下图所示.



(第 4 (2) 题)

5. 总支出是 681.8 元；用于食物上的支出是 211.4 元；用于衣服上的支出是 156.8 元；用于其他方面的支出是 163.6 元.

6. (1) 约 77 次；

   (2) 约 8 次；

   (3) 1～5 分的通话时间最多，10～15 分的通话时间最少.

7. (1) 右边的图；

   (2) 左边的图；

   (3) 略.

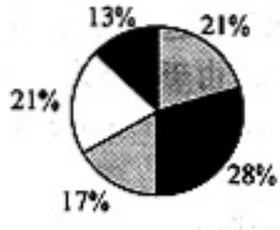
8. 从复合条形图中可以获得一些信息. 例如，甲、乙、丙三地在 1996 年到 2001 年的获奖总人数；获奖总人数的变化情况：2001 年获奖人数最多，达到 500 人；1996 年获奖人数最少，约 250 人等.

习题 12.2

1. (1) B 种品牌；

   (2) E 种品牌；

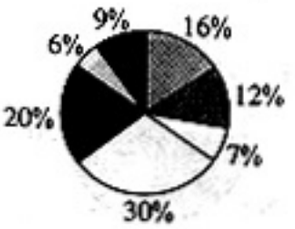
   (3) 扇形图如图所示；



(第 1 (3) 题)

（4）略．

2. 如图．



（第2题）

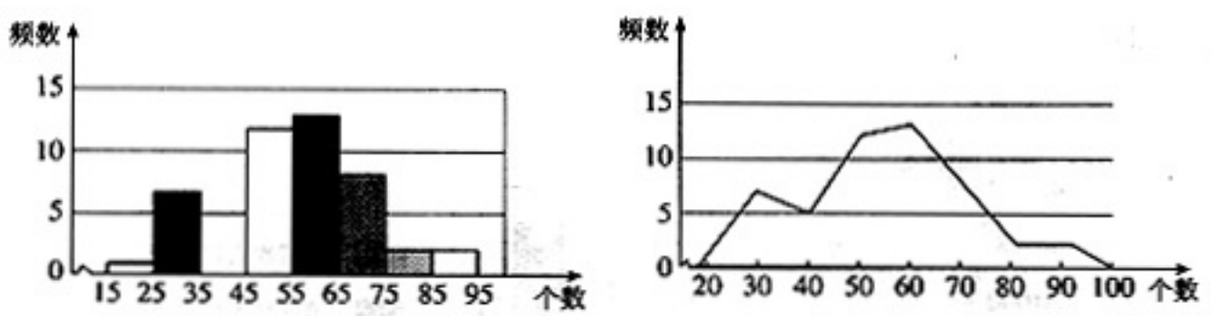
由图可知，世界陆地面积的一半是亚洲和非洲，尤以亚洲的面积最大，占世界陆地面积的29.4%，世界上面积最小的大洲是大洋洲，其次是欧洲．

3. (1) 75～80分贝；(2) 约有16个居民区；(3) 65～70分贝；(4) 略．

4. (1) 频数分布表：

个数 x	划记	频数
$15\leqslant x<25$	一	1
$25\leqslant x<35$	正 丅	7
$35\leqslant x<45$	正	5
$45\leqslant x<55$	正 正 丅	12
$55\leqslant x<65$	正 正 下	13
$65\leqslant x<75$	正 下	8
$75\leqslant x<85$	丅	2
$85\leqslant x<95$	丅	2
合计		50

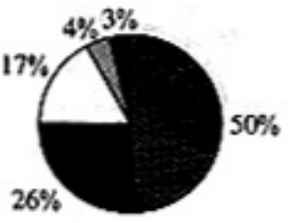
频数分布直方图和频数折线图：



（第4题）

从统计图表中可以看出，一株上结出西红柿的个数在45～65的最多，约占总株数的一半；其次，个数在25～35和65～75的有7株和8株共15株，占总株数的30%；个数在25个以上的只有一株；个数在75个以上的有4株，占总株数的8%．

5. 扇形图如下图所示：

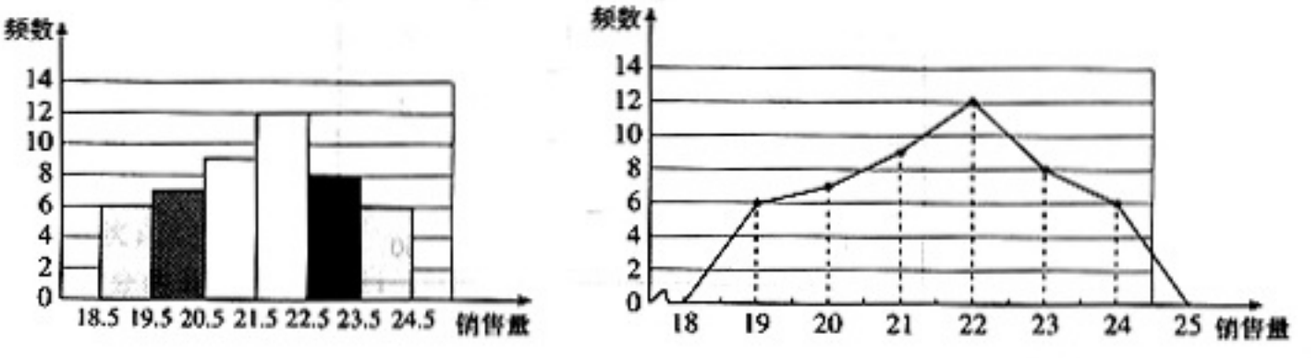


（第5题）

6.（1）频数分布表：

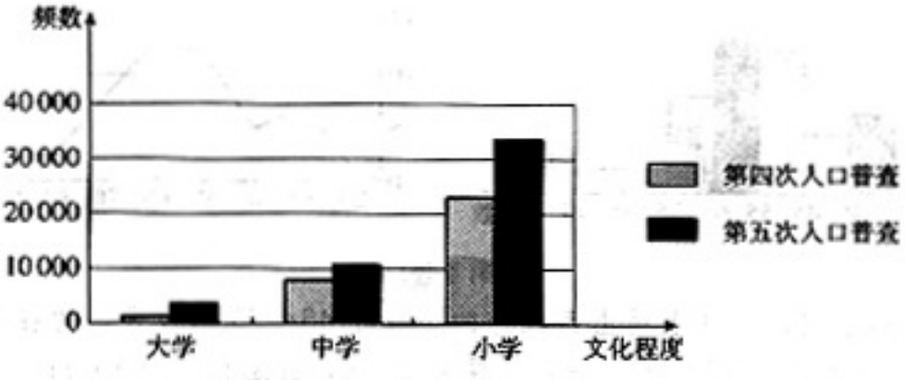
销售量 x	划记	频数
$18.5 \leqslant x < 19.5$	正 一	6
$19.5 \leqslant x < 20.5$	正 丅	7
$20.5 \leqslant x < 21.5$	正 丌	9
$21.5 \leqslant x < 22.5$	正 正 丅	12
$22.5 \leqslant x < 23.5$	正 下	8
$23.5 \leqslant x < 24.5$	正 一	6
合计		48

频数分布直方图和频数折线图：



（第6题）

7. 复合条形图：



（第7题）

分析结论略．

8. 略．

复习题 12

1. (1) 约为 308 人；

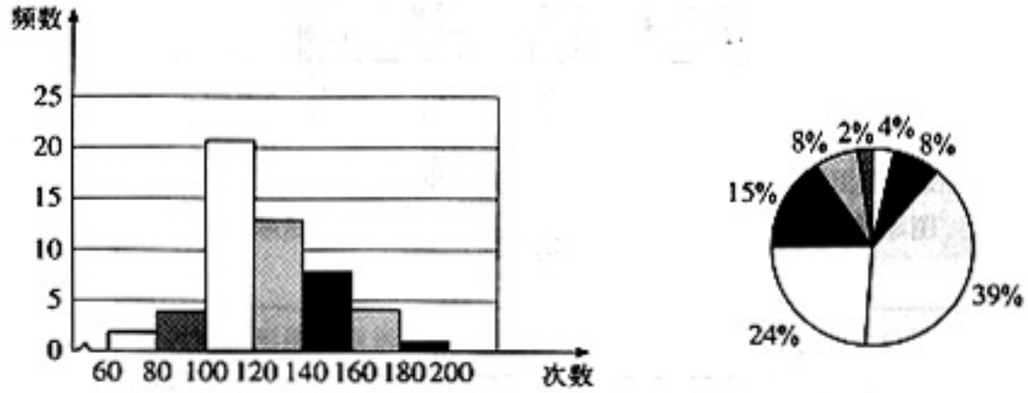
(2) 60°、210°和 90°.

2. (1) 扇形图；

(2) 直方图.

3. (1) 53 人；(2) 20，7；(3) 34，64.2%；

(4) 用频数分布直方图和扇形图表示数据如下：

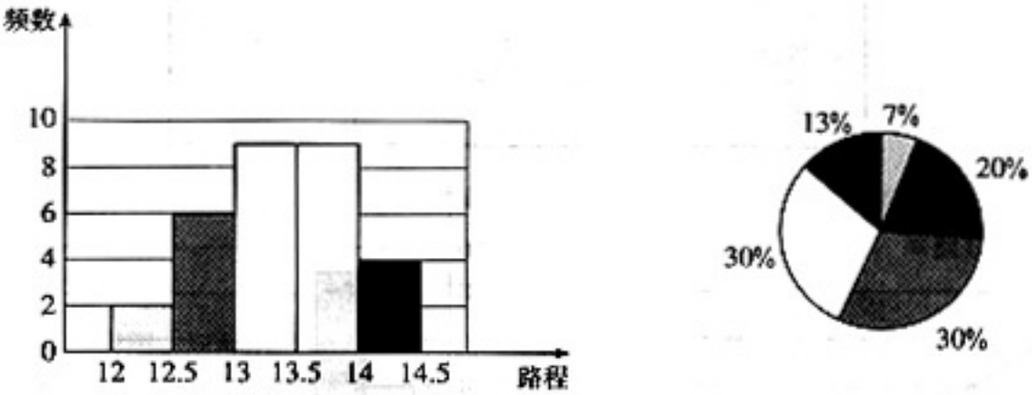


(第 3 (4) 题)

(5) 略.

4. 将数据适当分组整理，得到统计图表如下：

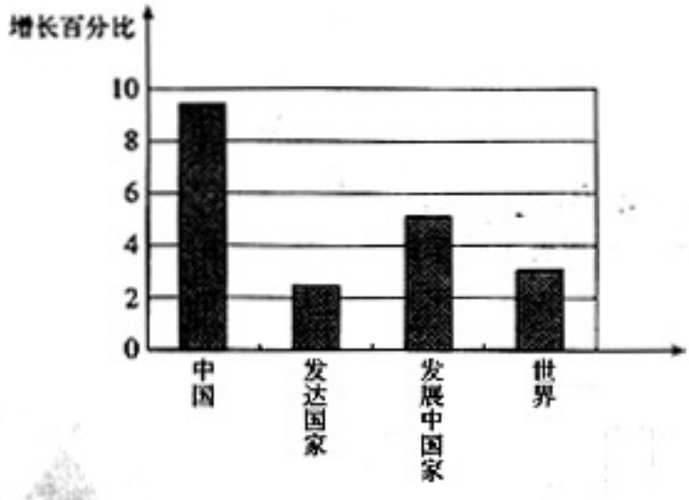
路程 x	划记	频数	百分比
$12 \leqslant x < 12.5$	丁	2	6.7%
$12.5 \leqslant x < 13$	正 一	6	20%
$13 \leqslant x < 13.5$	正 正	9	30%
$13.5 \leqslant x < 14$	正 正	9	30%
$14 \leqslant x < 14.5$	正	4	13.3%
合计		30	100%



(第 4 题)

分析：这种汽车耗油一升可行驶 12 公里以上，最多可行驶 14.4 公里，且 74.3%可行驶 13 公里以上等.

5. 画出统计图如下：



（第 5 题）

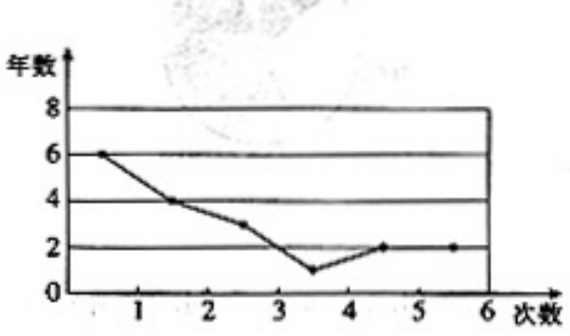
6. （1）统计图如下：

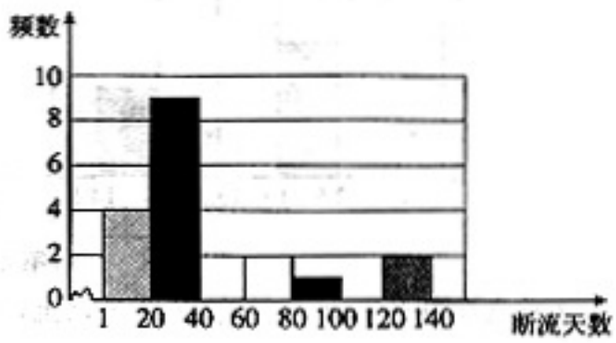
表 1

次数	1	2	3	4	5	6
年数	6	4	3	1	2	2

表 2

断流天数 x	划记	频数
$1 \leqslant x < 20$	正 正	9
$20 \leqslant x < 40$	正	4
$40 \leqslant x < 60$		0
$60 \leqslant x < 80$	丅	2
$80 \leqslant x < 100$	一	1
$100 \leqslant x < 120$		0
$120 \leqslant x < 140$	丅	2
合计		18





（第 6 题）

Ⅳ 教学设计参考案例

12.1.1 条形图与扇形图

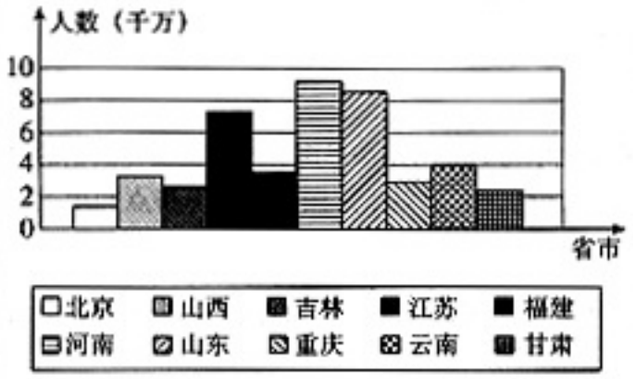
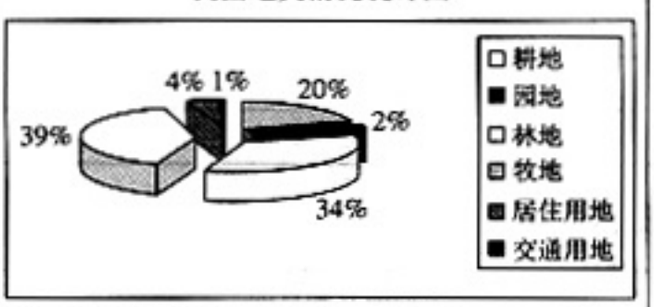
教学任务分析

教学目标	知识技能	1. 领会频数、频率概念并能统计频数、计算频率. 2. 了解用条形图和扇形图进行数据描述的过程. 3. 掌握条形图和扇形图描述数据的特征.
	数学思考	通过对31个城市空气质量数据描述的案例学习，经历用条形图和扇形图描述数据的过程，感受条形图、扇形图描述数据时的直观性，形成对条形图、扇形图特点和用途的认识.
	解决问题	通过对条形图、扇形图描述数据过程的研究，认识两种统计图的特征，能进行简单的统计应用.
	情感态度	通过经历数据处理的过程，体会社会生活中运用统计图描述数据的直观性和多样性，逐渐形成初步的统计意识.
重点	用条形图、扇形图描述数据的过程.	
难点	条形图、扇形图描述数据的特征.	

教学流程安排

活动流程图	活动内容和目的
活动1　设置问题情境，引入课题	通过让学生观察生活中的统计图，创设问题情境，激发学生的学习兴趣.
活动2　整理2002年1月1日我国31个城市的空气污染指数数据（API）	通过整理现实生活中的真实数据，认识频数分布表的构造，学会统计频数，计算频率和百分数，巩固数据的收集与整理的方法.
活动3　探究用条形图描述数据	通过探究条形图描述数据的过程，体验运用条形图进行数据描述的方法，掌握条形图描述数据的特征及用途.
活动4　探究扇形图的特征	通过探究扇形图描述百分数的过程，体验运用扇形图进行数据描述的方法，掌握扇形图描述数据的特征及用途.
活动5　探究并比较条形图、扇形图描述数据的特征	通过探究条形图和扇形图在描述数据时的特征，认识统计图在描述数据时的直观性，初步培养学生阅读统计图的能力.
活动6　归纳小结、课堂练习、作业	通过练习、作业巩固所学内容，加深对用统计图描述数据的理解.

教学过程设计

问题与情境	师生行为	设计意图
「**探究1**」 观察下面的两个统计图，回答下列问题： ①你在生活中见过这两种统计图吗？ ②试一试，你能从这两个图中获得哪些信息？ 2000年全国人口普查部分数据统计图  我国地类情况统计图  （资料来源：国家统计局　http://www.stats.gov.cn）	1. 教师展示图片和问题①，学生在对生活的回忆中来积极地回答问题①. 2. 教师出示问题②，学生分组讨论问题，小组代表回答问题②. 3. 教师和学生一起对学生代表的回答作简要的评价. 在本次活动中，教师应重点关注： （1）这两种统计图是在七年级上学期见过的，由于间隔的时间长，因此这里主要是对旧知识进行复习； （2）学生关于问题②的回答也可能不完备，不可求全，对回答的学生都要加以鼓励.	学生先回顾自己生活中的经历，再通过观察来自于生活实际中的统计图，获得其中的数据信息，从中领略统计图描述数据时的直观性，从而激发学生学习数据描述的兴趣，引入本课.
「**探究2**」 观察教科书第54页2002年1月1日全国31个城市空气质量日报图，回答下面的问题： 2002年1月1日，这31个城市中，空气质量为一级、二级、三级、四级、五级的城市各有多少个？各占百分之几？	1. 教师引导学生，让学生明确要解决这个问题其实质是要用统计表来整理数据. 这是七年级上学期学习过的内容. 2. 教师画出表格，学生仔细观察，动手统计各组省区的数目，填表. 3. 教师板书频数定义. 4. 师生共同计算各小组的频数在31个城市中所占的比值（频率）. 5. 教师板书频率定义.	通过整理生活中真实的数据，学生学会统计频数、计算频率，巩固数据的收集与整理，为学习下面数据的描述作准备，让学生感受数据处理的基本过程.

续表

<table>
<tr><th>问题与情境</th><th>师生行为</th><th>设计意图</th></tr>
<tr>
<td>
<table>
<tr><th>级别</th><th>划记</th><th>频数（城市个数）</th><th>频率（频数/31）</th><th>百分比</th></tr>
<tr><td>一级</td><td>一</td><td>1</td><td>0.03</td><td>3%</td></tr>
<tr><td>二级</td><td>正 下</td><td>8</td><td>0.26</td><td>26%</td></tr>
<tr><td>三级</td><td>正 正 正 下</td><td>19</td><td>0.62</td><td>62%</td></tr>
<tr><td>四级</td><td>丁</td><td>2</td><td>0.06</td><td>6%</td></tr>
<tr><td>五级</td><td>一</td><td>1</td><td>0.03</td><td>3%</td></tr>
<tr><td>合计</td><td></td><td>31</td><td>1</td><td>100%</td></tr>
</table>
</td>
<td>6. 师生一起把上面计算的比值转换成百分比，填表.
在本次活动中，教师应重点关注：
（1）学生能否明确：问题回答的实质是先要进行数据的整理. 这一点定要想办法让学生自己习得，这样学生才能体会数据处理的必要性；
（2）各小组频数的统计，有的学生可能统计的不准确，因此先让学生正确理解每一级空气指标的范围，再统计频数；
（3）要在这里注意培养学生仔细观察、精确计数的统计意识.
这里数据整理的活动形式也可以灵活进行.</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>「活动 3」
观察活动 1 中所得到的表格，回答下列问题：
①想一想，你能用什么样的统计图来描述空气质量为一级、二级、三级、四级、五级的城市的个数呢？为什么？
②你能发现用条形统计图来描述每一个级别中城市个数的优势吗？谈谈你的看法？</td>
<td>1. 教师先出示问题①，学生分小组讨论问题，教师深入小组参与活动，让学生自主得出结论，教师画出条形图（教科书图 12.1-1）.
2. 教师再出示问题②，学生观察条形图，并在小组内讨论或者独立思考，回答问题.
在本次活动中，教师应重点关注：
（1）学生在回答问题①时的困惑，教师要多引导，多鼓励，多让学生讨论，要让学生在小组讨论、合作交流下自主得出用条形图的结论；
（2）学生在回答问题②时语言表述的准确性；
（3）条形图也可以让学生画出，以巩固七年级上学期所学的相关知识.</td>
<td>通过运用条形图对每一级城市个数的描述，让学生感受数据描述的方法，体会数据处理的过程，形成对条形图的认识.</td>
</tr>
</table>

续表

问题与情境	师生行为	设计意图
「**活动4**」 继续观察活动1中所得到的统计表格，回答下列问题： ①你再想想，能用什么样的统计图来描述各个空气质量级别的城市个数在31个城市总数中所占的百分比呢？为什么？ ②你能发现本活动中的数据描述与上一个活动中的数据描述有什么不同吗？谈谈你的看法.	1. 教师先出示问题①，学生分组讨论问题①，自主得出结论后，师生共同画出扇形图(教科书图12.1-2). 2. 教师出示问题②，学生观察扇形图，教师组织学生代表回答问题②. 在本次活动中，教师应重点关注： (1) 回答问题①时也会有学生想到用条形图来描述百分比数据，这时教师要因势利导，运用小组交流合作等多种教学手段，让大多数学生得出正确的结论； (2) 学生在活动和交流中的参与意识，面对困难和克服困难的勇气与毅力； (3) 此处仍不要求学生会画扇形图.	通过运用扇形图对各个空气级别的城市个数在城市总数中所占百分比的描述，让学生再次感受数据描述的方法，体会数据处理的过程，形成对扇形图的认识.
「**活动5**」 观察比较活动3和活动4所得到的两个统计图，回答下列问题： ①空气质量为一级的有几个城市，占百分之几？ ②空气质量为三级至五级的城市占百分之几？这个数据说明什么？ ③通过以上两个问题的回答，你认为条形图和扇形图在描述数据时各有什么特点？	1. 教师展示两个统计图和问题，学生比较观察两个统计图，同时分组讨论老师提出的问题. 2. 学生分组回答问题. 3. 在学生形成较为统一的认识后，教师板书条形图和扇形图的特点. 在本次活动中，教师应重点关注： (1) 学生在回答问题①②时，不借助频数分布表，仅从统计图中是不能完整地回答问题的，教师这时就是要灵活地捕捉教育时机，让学生感受统计表与统计图的关系以及条形图、扇形图在描述数据时的各自特征，从中领略数据处理的过程； (2) 学生回答问题③能否清晰准确表述自己的观点； (3) 学生能否采用比较的方法.	让学生从读信息中认识两种统计图描述数据的特征，并感受数据描述的直观性和用途，初步培养阅读统计图的能力.

续表

问题与情境	师生行为	设计意图
「活动6」 小结、练习和作业： ①在描述数据时如何选用条形图和扇形图？ ②通过本节课的学习，你有什么体会？	1. 教师出示问题，学生回答问题. 2. 学生完成第57页的练习. 3. 教师公布正确答案. 4. 学生记录作业. 在本次活动中，教师应重点关注： (1) 基础较差的学生的回答问题的情形； (2) 问题②的回答可以不限于是知识上的体会，也可以是情感方面的.	练习巩固提高.

教学设计说明

本节课的内容是七年级“数据的收集与整理”的后续内容，同时也是本章的起始内容，地位相当重要.

本节课教材是选择了2002年1月1日我国31个城市的空气污染指数作为素材，理由是：首先数据真实可信，其次也与后面的节水以及七年级的电池回收呼应，有利于学生形成环保意识，这样能保障教材的完整性和系统性. 其实广大教师还可以选择其他材料进行教学，关键是要能体现条形图与扇形图的特征，能激发学生学习兴趣.

本节课的难点在于学生不易理解条形图与扇形图在描述数据时的特征，如何突破这个难点？①把扇形图的画法放在后面的课程中讲授，本节课着重突出让学生在处理数据描述实际例案过程中形成对条形图和扇形图的认识；②采用EXCEL软件画图（也可以用手工作图），主要是想集中精力让学生能掌握两种统计图在描述数据时的特征；③采用铺垫手法，在活动3与活动4中设计了层次不同的问题，同时活动3和活动4也是为活动5作铺垫.

12.2.1 用扇形图描述数据

教学任务分析

教学目标	知识技能	1. 理解扇形面积所占圆面积的百分比与扇形圆心角的关系. 2. 掌握绘制扇形图的方法. 3. 掌握用扇形图描述数据的基本过程.
	数学思考	1. 通过探究扇形面积所占圆面积的百分比与扇形圆心角的关系，进一步发展学生抽象概括能力. 2. 通过对数据的整理和描述，使学生初步具备综合运用统计知识的能力.

续表

教学目标	解决问题	通过用扇形图描述数据的学习，体会它在解决实际问题中的作用，并能利用扇形图描述实际生活中的数据.
	情感态度	1. 通过亲身经历扇形图描述数据的过程，让学生逐步形成用统计知识解决实际问题的意识. 2. 通过制定用扇形图描述数据的计划等活动，培养合作交流的意识. 3. 通过用扇形图描述数据的尝试，体验成功的喜悦.
重点	用扇形图描述实际问题中的数据.	
难点	扇形面积所占圆面积的百分比与扇形圆心角的关系.	

教学流程安排

活动流程图	活动内容和目的
活动 1　阅读材料，提出问题	阅读 2000 年我国第五次人口普查的数据，创设问题情境，激发学生的学习兴趣. 并通过比较，引导学生从百分比的角度来分析数据，并会利用扇形图描述数据.
活动 2　探究扇形面积所占圆面积的百分比与扇形圆心角的度数的关系	绘制扇形统计图，通过观察，导出扇形圆心角大小的计算公式，培养学生的抽象概括能力.
活动 3　用扇形图描述数据	通过对数据的整理、计算、描述，初步培养学生运用扇形图描述实际问题的能力.
活动 4　小结、练习、作业	回顾本节内容，完善学生的认知结构. 通过练习、作业，巩固对数据的整理能力、提高对数据的描述能力、形成对数据的初步分析能力.

教学过程设计

<table>
<tr><th>问题与情境</th><th>师生行为</th><th>设计意图</th></tr>
<tr>
<td>「活动 1」
1. 阅读材料
（1）2000 年我国第五次人口普查的数据（教科书引人的图片）；
（2）2000 年我国第五次人口普查的数据 .
各种受教育程度人口（2000 年）
单位：万人
<table>
<tr><th></th><th>总计</th><th>大专及以上</th><th>高中和中专</th><th>初中</th><th>小学</th><th>扫盲班</th><th>未上过学</th></tr>
<tr><td>全国</td><td>117 953</td><td>4 571</td><td>14 109</td><td>42 989</td><td>45 191</td><td>2 143</td><td>8 950</td></tr>
<tr><td>北京</td><td>1 327</td><td>233</td><td>320</td><td>475</td><td>234</td><td>5</td><td>59</td></tr>
</table>
（资料来源：中华人民共和国国家统计局　http://www.stats.gov.cn）</td>
<td>教师展示阅读材料，学生阅读材料. 教师解释问题背景.</td>
<td>通过阅读两段材料，让学生感知、理解、明确问题的实质，激发学生的求知欲.
教师说明问题背景，帮助学生对问题形成正确的理解.</td>
</tr>
</table>

续表

问题与情境	师生行为	设计意图
2. 问题： (1) 请比较北京市受教育状况与全国受教育状况？ (2) 你能计算出各种受教育人口在总人口中所占的百分比吗？ (3) 你能用适当的统计图表示各种受教育人口在总人口中所占的百分比吗？	教师展示问题 (1)，学生分小组讨论，互相发表自己的见解，充分交流，取长补短. 教师倾听学生的表述；参与学生的交流，并帮助学生完成对问题的分析. 教师提出问题 (2)(3)，学生继续思考，回答. 在本次活动中，教师应重点关注： (1) 学生能否选择正确的角度来考虑问题，因为北京市和全国的人口数相差较大，所以不能仅从数量上比较，而要从百分比角度来比较； (2) 学生能否在独立思考的基础上积极参与对数学问题的讨论，自主归纳出从百分比角度来考虑问题； (3) 学生能否区分各种统计图表的特点.	在学生已有的数学知识基础上，由学生自己比较、分析、表述、交流，选择从百分比的角度来考虑问题，从而引出用扇形图描述数据的必要性. 通过活动激励学生勇于发表自己的观点，善于理解他人的见解，在交流中受益. 帮助学生用已学知识分析具体问题.
「活动 2」 问题： (1) 扇形图如何表示各种受教育人口在总人口中所占百分比呢？ (2) 你能画出扇形图吗？ (3) 扇形图中每个扇形的面积与什么有关？ (4) 把圆分成 6 个扇形. ①扇形的面积与其对应的圆心角的关系是：扇形的面积越大，圆心角的度数越____；扇形的面积越小，圆心角的度数越____. ②扇形所对圆心角的度数与所占百分比的关系是____.	教师展示问题 (1)，学生在回顾已学扇形图知识的基础上，回答问题，教师对学生的回答进行归纳，指导学生总结出扇形面积与所占百分比的关系. 教师展示问题 (2)，并解释扇形图，学生作出示意图，教师参与、完善，展示成果. 教师展示问题 (3)，学生以小组为单位进行讨论，由各组派出代表发言，师生一起给予评价、修改、补充、完善. 教师展示问题 (4)，学生填空. 在本次活动中，教师应重点关注： (1) 学生已有的扇形图知识水平； (2) 学生能否得出要把圆分成面积不同的六个扇形； (3) 学生能否先定性分析：扇形面积与圆心角的度数有关，再进一步定量分析：圆心角的度数＝百分比×360°； (4) 学生能否用准确的语言表述自己的观点.	从学生已有的数学知识出发，建立新旧知识之间的联系，有利于学生获得新的知识和技能. 通过画图、观察、推断，获得数学猜想，体会数学活动充满探索性. 通过观察扇形图的示意图，让学生明确扇形的面积与其对应的圆心角的关系；扇形所对圆心角的度数与扇形所占百分比的数量关系.

续表

问题与情境	师生行为	设计意图
「**活动 3**」 问题： （1）你能用扇形图来描述 2000 年全国人口普查中，各种受教育人口在总人口中所占的百分比吗？谈谈你的计划？ （2）以组为单位制作扇形图来描述数据. （3）结合扇形图谈谈我国教育的现状.	教师提出问题. 学生分小组进行讨论，提出本组的计划，组与组之间互相交流，制定全班的计划. 学生以组为单位进行制作扇形图来描述数据的活动. 活动可以分以下四个步骤： （1）算一算： 以小组为单位，运用计算器计算各种受教育人口在总人口中所占的百分比及圆心角的度数； （2）画一画：利用量角器量出圆心角，作出扇形图； （3）评一评：各组派出代表汇报结果； （4）演一演：Excel 软件制作扇形图. 教师提出问题（3），学生回答. 在本次活动中，教师应重点关注： （1）引导学生回顾整理数据的方法——使用表格； （2）帮助学生分析，并确定表格中项目的选取. 即归纳出共性的项目； （3）如何解决计算中的精确度问题，即学生在活动中遇到的问题：百分比的和不为 100%，度数和不为 360°； （4）画图的准确性、规范性.	通过分组活动，学生自己完成用扇形图描述数据的全过程，培养学生计算、作图能力，综合分析的能力，以及合作交流的意识. 体现计算机技术在数学上的应用. 体验扇形图的直观性，感受统计图在科学决策中的作用.
「**活动 4**」 （1）请同学们来归纳一下用扇形图描述数据的基本过程？ （2）练习：教科书第 68 页练习. （3）布置作业：教科书习题 12. 2 第 1、2、5 题.	学生经历了具体的用扇形图描述数据的过程，再经过思考和讨论后归纳出制作扇形图的基本步骤： ① 整理数据，求出扇形面积所占圆面积的百分比. 计算出扇形的圆心角度数. ② 运用作图工具，画出扇形图. 教师布置作业，学生记录作业. 在本次活动中，教师应重点关注： （1）学生养成归纳小结的好习惯； （2）学生在作业中反映出的问题，针对性分析及讲解.	培养学生的语言归纳能力. 完善知识结构，了解学习效果，巩固知识.

教学设计说明

在学习本节前，学生已经学习了第四章“数据的收集与整理”，有了用表格收集数据的经验.学习了第十二章的第一节几种常见的统计图表，对于扇形图、条形图、折线图、直方图的特点有了认识.本节课主要学习如何绘制扇形图来描述数据，为后续学习中的分析数据打下基础.

本节课以2000年全国人口普查数据为素材，通过与北京市人口普查数据的对比，引导学生从百分比的角度来描述数据，重点是用扇形图描述数据.学生的难点在于扇形面积所占圆面积的百分比与扇形圆心角大小的关系，在安排上，先画出示意图，通过观察、定性分析、最后定量分析两者的关系.

整个教学安排以学生活动为主，突出学生知识的形成过程，思维的发展过程，以及学生的动手实验、合作学习的过程.

12.3 课题学习 从数据谈节水（第1课时）

教学任务分析

教学目标	知识技能	1. 灵活运用几种常见的统计图表描述数据. 2. 学习从资料中收集数据.
	数学思考	经历运用数据描述信息、作出推断的过程，建立统计观念.
	解决问题	能用图表清楚地表达解决问题的过程，并解释结果的合理性.
	情感态度	1. 体验数和图形是有效描述现实世界的重要手段. 2. 体验水资源短缺的危机感和节约用水的紧迫性.
重点	收集数据，画出统计图.	
难点	恰当选用统计图描述数据.	

教学流程安排

活动流程图	活动内容和目的
活动1 创设情境，引出课题	介绍我国的缺水形式，激发学生的学习兴趣.
活动2 阅读资料，回答问题	阅读附录中的资料，学生通过合作从中收集数据并画出统计图，根据统计图回答相关问题.在此过程中培养学生收集数据研究问题的能力，加深学生对各种统计图特征的理解.
活动3 回顾小结，布置作业	巩固新知，准备下节课.

教学过程设计

问题与情境	师生行为	设计意图
「活动1」 教师结合图片向学生介绍目前全球的缺水形式和黄河的今昔变迁.	教师讲述，学生倾听. 在活动1中教师应重点关注： 学生倾听时所表现出的情感态度.	通过介绍，使学生对水资源产生危机感，从而激发学生研究节水的兴趣.
「活动2」 阅读教材附录中的资料，通过小组合作，按以下步骤回答第79页的4个问题. 第一步：阅读资料，从中收集与问题相关的数据.	学生阅读资料后分组讨论，从资料中收集与四个问题有关的数据，最后各组选派代表参与全班交流. 教师组织学生活动，并参与各组讨论，最后引导学生统一数据. 在第一步教师应重点关注： (1) 学生针对四个问题所选出的数据是否准确、是否完整； (2) 学生在活动和交流过程中是否积极参与，敢于发表自己的见解.	通过阅读资料收集数据培养学生从资料中获取数学信息的能力和习惯. 让学生在独立思考的基础上，参与对数学问题的讨论，锻炼学生的表达能力，培养学生的合作意识.
第二步：画统计图描述数据.	学生画出统计图描述数据，然后全班交流，改进统计图. 教师巡视学生画图情况，选择各种类型的统计图投影显示，与学生一起点评所画统计图是否准确，所选统计图类型是否恰当. 在第二步教师应重点关注： (1) 所选统计图类型应丰富，以利于比较； (2) 让学生充分交流，根据统计图的特征自主得出结论.	通过画统计图使学生进一步熟悉统计图的画法. 在评析统计图的过程中，使学生进一步理解直方图、扇形图、折线图的特征，使学生能恰当选用统计图描述数据.
第三步：根据统计图回答相关问题. 问题4答案： ∵ $(4\,634+702+54.719\,6)/27\,500$ $=19.60\%<20\%$， ∴ 1990年我国没有出现“水危机”.	学生根据统计图回答相关问题. 教师引导学生发表各自的观点，完善统计语言. 在第三步教师应重点关注： 学生从不同的角度观察统计图就会有不同的答案，教师应让学生充分发表自己的观点，并及时肯定.	通过根据统计图回答问题培养学生从统计图中获取信息的能力.

续表

问题与情境	师生行为	设计意图
「**活动3**」 问题： (1) 通过这节课的学习，大家获得了哪些统计知识？ (2) 针对节水问题，谈谈你的想法.	教师提出问题，学生讨论.	通过小结强化学生的节水意识，加深学生对各种统计图特征的理解.
作业： 阅读资料，从中收集数据，画出统计图，并回答问题： (1) 2000年全世界淡水资源利用情况怎样？ (2) 如果我国的农田全部采用节水灌溉技术，每年至少可节约多少淡水资源？ (3) 你觉得解决我国水资源短缺问题的关键是什么？	教师布置作业，学生完成. 学生独立完成 (1) (2)，然后利用 (1) (2) 的研究成果对 (3) 展开讨论. 在活动3中教师应重点关注： 让学生充分发表自己的见解，教师用鼓励赞美性语言进行评价.	作业再次为学生提供了利用图表描述数据的实践机会，培养学生从数学的角度看问题并解决问题的能力和习惯. 资料中的内容还可使学生感受到节约用水的巨大潜力.

教学设计说明

本课时是课题学习“从数据谈节水”的第1课时，即“从资料中收集数据谈节水”. 这节课是在学完描述数据的几种统计图后开展的，为学生提供了利用图表描述数据的实践机会. 通过这节课的学习可以使学生更加深刻地认识到各种统计图的不同特征和适用范围，锻炼学生从资料中收集数据研究问题的能力.

这节课始终以水为研究对象，以数据为研究工具. 首先以水危机引出课题，然后收集数据了解水的分布和使用状况，最后又用数据说明节约用水是大有可为的. 整堂课结构紧凑，目标明确，内容现实有意义且富有挑战性，使学生始终能带着饱满的热情和强烈的好奇心参与到课堂教学的每一个活动中来.

本课时力求向学生提供充分从事数学活动的机会，让他们在自主探索和合作交流的过程中真正理解和掌握基本的数学知识和技能、数学思想和方法，获得广泛的数学活动经验，让学生成为数学学习的主人，教师只是学习的组织者、引导者与合作者.

V 拓展资源

一、拓展性问题

1. 统计结果的误用

统计资料表明：大多数汽车事故出在中等速度行驶中，极少的事故是出在大于 150 公里/小时的行驶速度上的. 这是否意味着高速行驶比较安全？绝对不是这样，统计关系往往不能表明因果关系，由于多数人是以中等速度开车，所以多数事故是出在中等速度的行驶中. 统计资料还表明：在亚利桑那州死于肺结核的人比其他州的人多. 这是否意味着亚利桑那州的气候易生肺结核病？正好相反，该州气候对患肺结核病的人有好处，所以他们纷纷前来，自然就使这个州死于肺结核的平均数升高了.

2. 如何识破带有欺骗性的统计图

以条形图为例，一般说来应注意以下几点：

（1）看横轴和纵轴是否都按适当比例划出尺度.

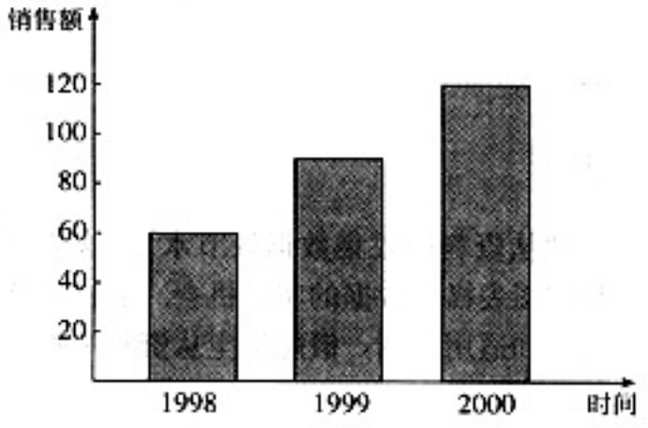


图 1

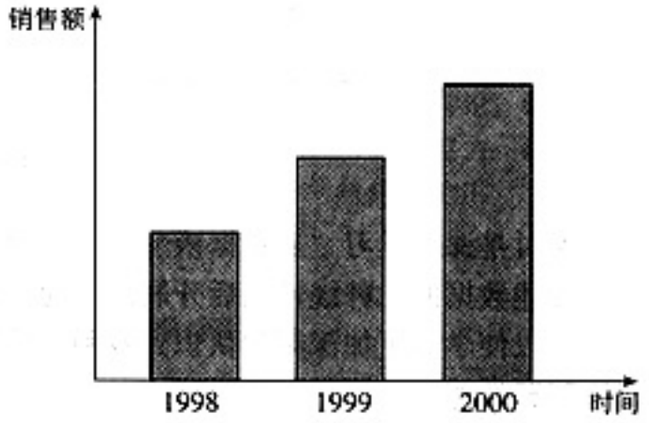


图 2

绘制条形图时，直角坐标系中的纵轴和横轴通常都要按照适当的比例划出尺度. 图 1 是较为规范的图形. 出于不同原因，绘图者有时也会绘制如图 2 的图形，由于纵轴上没有标明尺度，观察图 2，我们可以认为该公司的销售额几年来增长了 100%，也可以认为增长了 50%，甚至 1%等等，形成不了准确的数量变化概念；而根据图 1 则很容易得出该公司三年来销售额增长了 100%.

（2）看条形图的宽度是否与其高度成比例地增加.

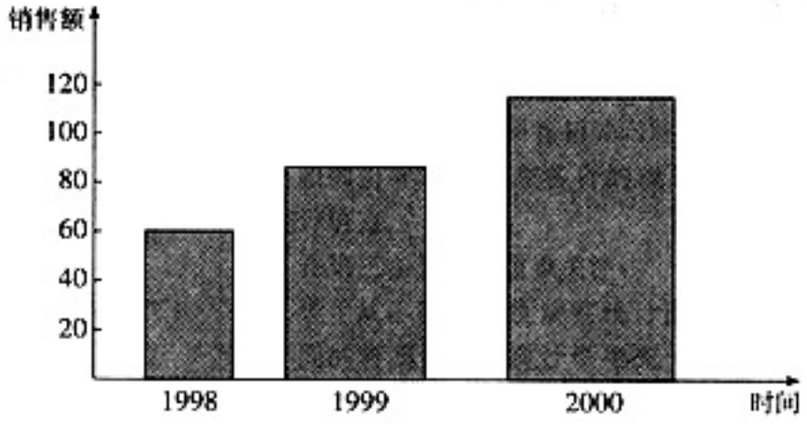


图 3

条形图是以宽度相等的条形高度或长度来表现被研究现象数量的多少和比较图示变量值大小的统计图形，在使用条形图时，我们应该注意观察其条形的宽度是否相等，如图 1. 否则，就会产生误解，如图 3，这个图违反了绘制规则，细心的人会发现其条形的宽度与其高度成比例地增加，粗心的人则很可能凭直觉认为 2000 年的条形面积是 1998 年的 4 倍，从而认为 2000 年销售额是 1998 年的 4 倍，夸大了变量的变化程度.

(3) 看其是否伸长或缩短了纵尺度或横尺度.

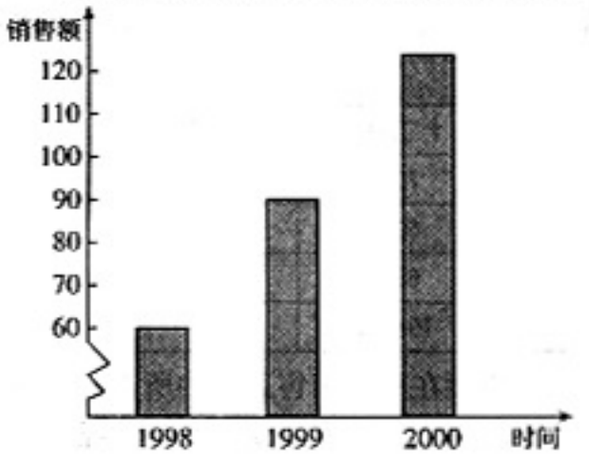


图 4

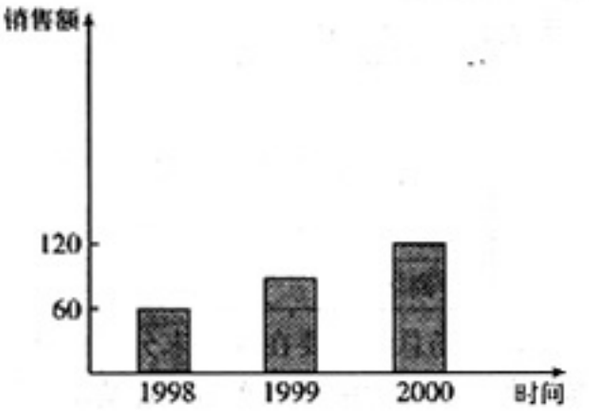


图 5

这是利用统计图进行数字欺骗较为狡猾的方法，因为尺度的选择在统计图绘制过程中非常重要，尺度的每一个变化，都会改变图形的形状，从而影响到对图形的阐释，会使变量的变化情况看起来要比实际情况更为突出，尺度如果太小，则有可能让人看不出实际变化量的大小. 如图 4，与图 1 比较，伸长了纵尺度，使销售额的变化更加突出. 其实，只是把单位给定销售额数量用一个比正常高度更大的高度来表示了（往往是采取纵尺度的度量不从零开始或者从零开始但用断线的方法）；相反，伸长横尺度或缩短纵尺度也会使变量的变化显得更加平稳，如图 5，这些做法，产生的欺骗性影响都是明显的.

(4) 注意是否有带有误导性的插图说明或说明性短语.

看图者有时也容易把注意力集中在某图的说明性短语或插图说明上，而并不注意图本身，这就很容易给动机不纯的绘图者以可乘之机. 如图 6、图 7，人们对利率变动趋势的印象，会因为看到的是哪一种（图 7 或图 8）说明而不同.

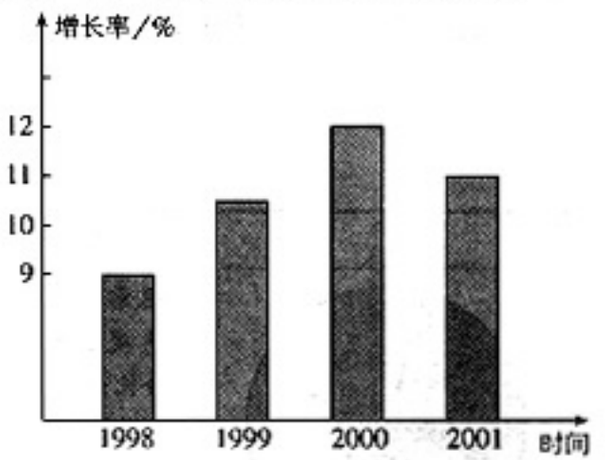


图 6 增长率终于开始下降

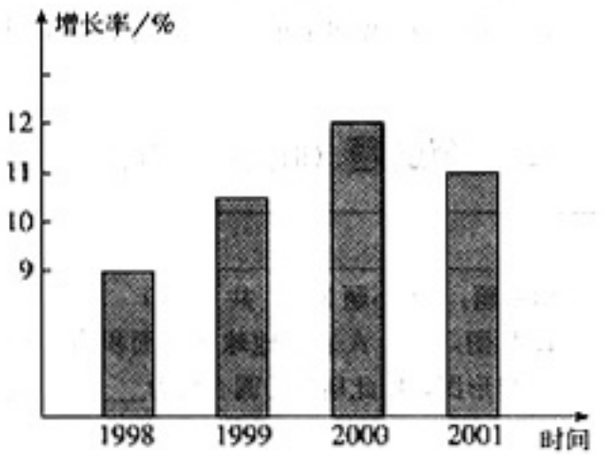


图 7 2001 年增长率上升趋势暂时缓和

(5) 注意图形所代表的数值本身的大小.

当我们观察一幅统计图时，为了防止受蒙蔽，除了应注意上述几点外，最重要的一点是要注意

图形所代表的变量值本身的大小，在使用任何类型的统计图时都要牢记这一点. 这样，我们就可以正确地阐释和解读统计图了. 利用统计图进行统计欺骗并不是普遍存在的，尽管如此，当使用统计图时，我们仍须小心谨慎. 不仅要了解描绘和识读统计图的基本方法，而且要学会识别统计图的真伪，从而不再被某些企图制造假象的统计图所迷惑，这对正确使用统计图是非常重要的.

3. 统计图在生活中的一个应用

某家中型商场有家电、日用百货和家具三个经营部，三个部门十月、十一月、十二月的营业额情况如下表：（单位：万元）

	十月	十一月	十二月	部门总额
家　电	50	65	70	185
日用百货	55	48	60	163
家　具	57	63	68	198
商场总额	162	176	198	

现在，商场总经理要在季度末分析各部门第四季度销售额在商场销售总额中所占份额的情况以及各部门在第四季度中销售额的变化情况，他要求财务部门用统计图来反映这两种情况，如果你是财务经理，你应该提供什么统计图？

Ⅵ　评价建议与测试题

一、评价建议

1. 本章主要内容是数据描述的方法，它们是通过几个案例来介绍描述数据时常用的条形图、扇形图、折线图和直方图四种统计图，因此评价时要关注学生能否会利用四种统计图描述数据，能否根据不同用途选择恰当的数据描述方法.

2. 本章教学中很注重学生从自主探究和合作中完成学习任务，因而评价时要关注数据描述的活动过程，包括学生参与活动的情感态度、参与程度、合作精神和能力.

3. 本章所要求学生的动手能力较高，因此评价中要注重实践动手能力的评估与测试.

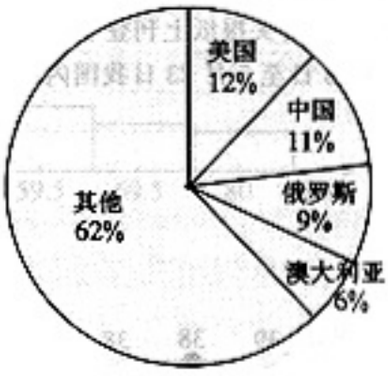
二、测试题（时间：45 分钟，满分：100 分）

内　容	设计意图
一、**填空题**：（每小题 3 分，共 24 分） 1. 如图，扇形 A 表示地球陆地面积占全球面积的百分比的扇形图，则此扇形的圆心角为_____度.  （第 1 题）	此题意在考查圆心角度数与所占百分比的关系.

2. 已知数据25，21，23，27，29，24，22，26，27，26，
25，25，26，28，30，28，29，26，24，25
在列频率分布表时，如果取组距为2，那么应分成_____组.

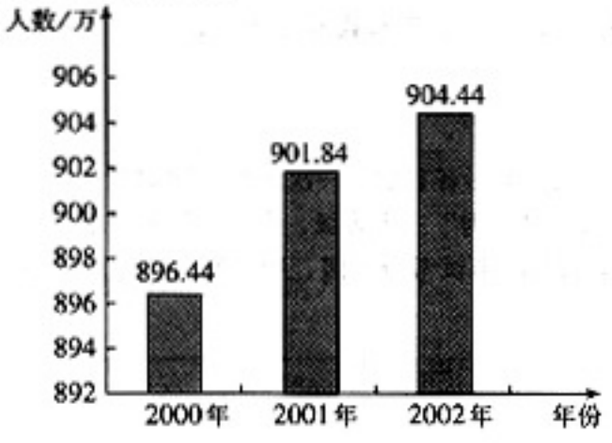
3. 已知在一个样本中，50个数据分别落在5个组内，第一、二、三、四、五组数据的个数分别是2，8，15，20，5，则第四组频数为_____，频率为_____.

4. 如图是表示第28届奥运会金牌分布的扇形统计图，由扇形统计图可知，美国的金牌数约占金牌总数的_____. 已知中国获得金牌32枚，由此估计美国比中国多_____枚.



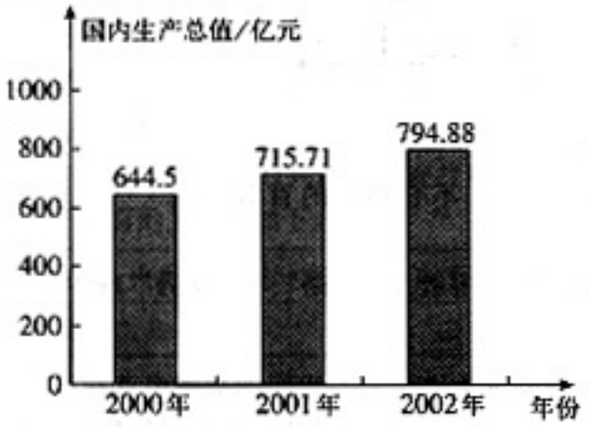
（第4题）

5. 先阅读下面两个图表，再填空：
某市近三年年末总人口数（万人）



（第5题（1））

某市近三年国内生产总值（亿元）



（第5题（2））

请计算出近三年来该市人均国内生产总值（精确到1元），填入下表：

第2、3题意在考查频率、频数、数据总量的概念.

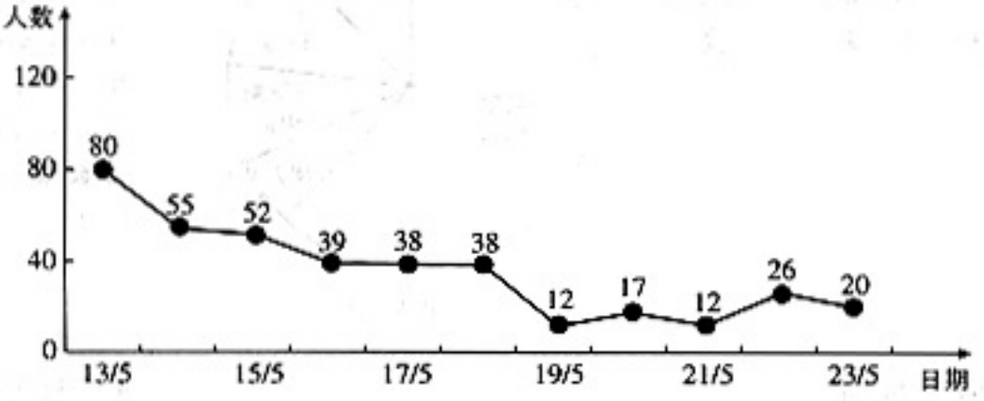
第4题意在考查：①百分数之和为1；②数据总量×所占百分比＝频数. 通过此题提高学生对统计图表数据的整理能力.

第5题意在考查学生对条形图的理解和应用能力.

年　份	2000 年	2001 年	2002 年
人均国内生产总值（元）			
备　注			

6. 在 2003 年 5 月 24 日的有关报纸上刊登了如下图片：

5 月 13 日至 5 月 23 日我国内地新发现非典病例变化图



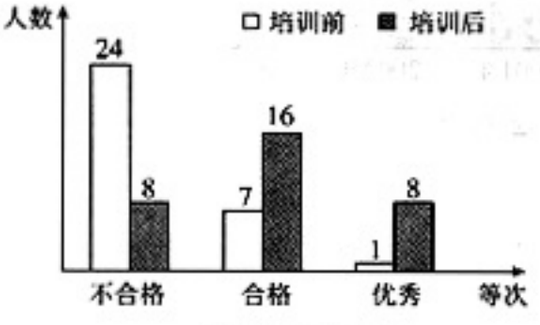
（第 6 题）

请用简洁的语言描述出 2003 年 5 月 13 日到 5 月 23 日我国内地新发现非典病例的变化情况：_____

_____

第 6 题是为考查折线图描述数据.

7. 某校初二年级全体 320 名学生在电脑培训前后各参加了一次水平相同的考试，考分都以同一标准划分成“不合格”“合格”“优秀”三个等级，为了了解电脑培训的效果，用抽签方式得到其中 32 名学生的两次考试考分等级，所绘制的统计图如图所示，试结合图示信息回答下列问题：



（第 7 题）

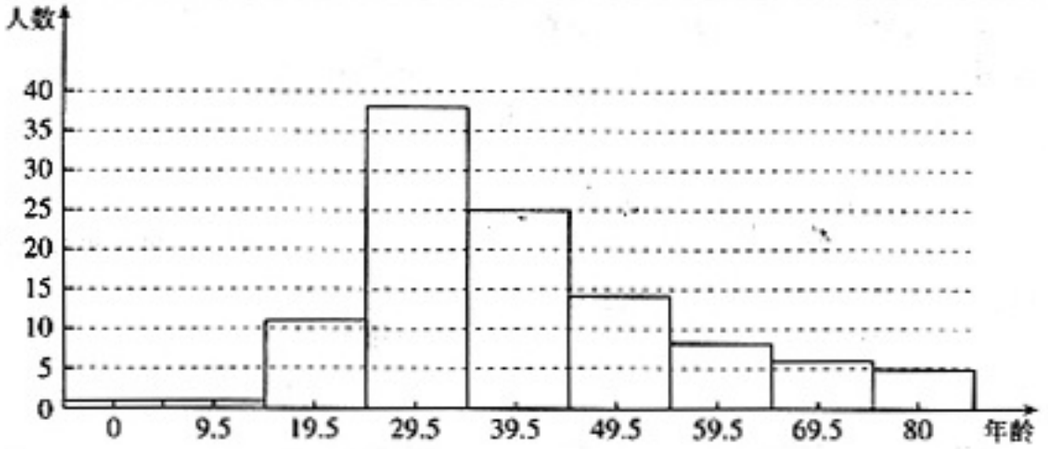
(1) 这 32 名学生经过培训，考分等级“不合格”的百分比由_____下降到_____.

(2) 估计该校整个初二年级中，培训后考分等级为“合格”与“优秀”的学生共有_____名.

第 7 题是复合条形图，意在考查条形图的实际应用.

8. 国家卫生部信息统计中心根据国务院新闻办公室授权发布的全国内地 5 月 21 日至 5 月 25 日非典性肺炎发病情况，按年龄段进行统计分析中，各年龄段发病的总人数如图所示（发病的病人年龄在 0～80 岁之间），请你观察图形回答下面的问题：

第 8 题考查直方图.



（第 8 题）

（1）年龄在 29.5～39.5 这一组的频数是_____.

（2）根据统计图，年龄在_____范围内的人发病最多.

二、选择题：（每小题 3 分，共 9 分）

9. 空气是由多种气体混合而成的，教师为了简明扼要的向学生介绍空气的组成情况，使用_____图描述数据较好.

A. 条形统计图　　B. 折线统计图　　C. 扇形统计图　　D. 直方图

10. 反映某种股票的涨跌情况，应选择（　　）

A. 条形统计图　　B. 折线统计图　　C. 扇形统计图　　D. 直方图

11. 一个容量为 80 的样本最大值是 141，最小值是 50，取组距为 10，则可以分成（　　）

A. 10 组　　B. 9 组　　C. 8 组　　D. 7 组

第 9、10 题意在考查条形统计图、折线统计图、扇形统计图的特点和在描述数据中的特点.

第 11 题意在考查直方图中分组的原则.

三、解答题：

12.（18 分）建国以来，我国已进行了五次人口普查，下表是历次普查得到的全国人口数量统计表.

普查年份	1953	1964	1982	1990	2000
人口数（亿）	5.94	6.95	10.08	11.34	12.95

（1）1953 年和 2000 年我国人口数是多少亿？

（2）从 1953 年到 2000 年，我国人口数量增加了多少亿？

（3）请用折线统计图反映我国人口的变化情况.

从统计图中你能获得哪些信息？

第 12 题考查学生对已收集数据的整理、描述、分析能力.

13.（18 分）2003 年 10 月 16 日，中国首次载人航天飞行圆满成功，对此全国人民欢欣鼓舞，激发了青少年了解太空知识的兴趣. 经查找资料获知：我们的太阳系有九大行星，九大行星所拥有的卫星数如下表.

行星	地球	木星	火星	水星	海王星	冥王星	土星	天王星	金星
卫星数	1	14	2	0	2	0	15	5	0

若制作一个统计图形象的表示九大行星分别拥有的卫星数，请回答下列问题：

（1）扇形统计图适合描述这些数据吗？为什么？

（2）折线统计图适合描述这些数据吗？为什么？

（3）条形统计图适合描述这些数据吗？为什么？

第 13 题考查统计图在描述数据的综合应用.

续表

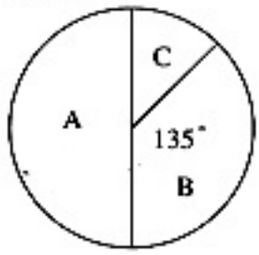
（4）设计一个你认为较适合的统计图，表示九大行星分别拥有的卫星数.

14.（18 分）观察右图，并回答问题：

（1）如果整个圆代表你校初一年级的人数，那么扇形 A 大约代表多少人？

（2）如果整个圆代表 16 公顷旱地，那么扇形 B 代表多少公顷的旱地？

（3）如果整个圆代表 36 吨黄豆，那么扇形 C 代表多少吨黄豆？



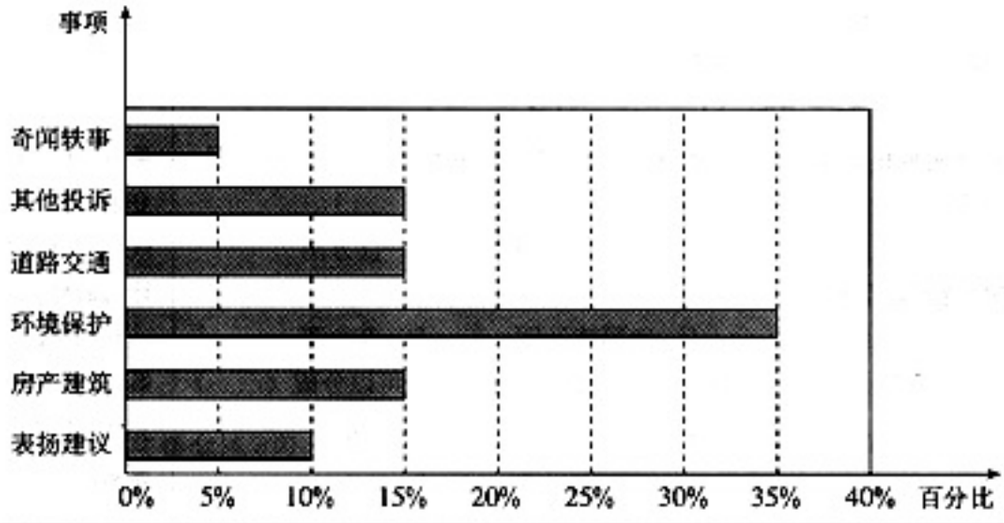
（第 14 题）

第 14 题考查统计图在描述数据的综合运用.

四、小设计：（13 分）

15. 如图是某晚报“百姓热线”一周内接到热线电话的条形统计图，其中有关环境保护问题的电话最多，共 70 个. 请你另设计一种统计图来描述一周内“百姓热线”情况？

第 15 题考查统计图间的转换.



测试题答案

1. 144°.

2. 5.

3. 20，0.4.

4. 12%，3.

5. 7 190，7 936，8 789.

6. 至 21 日止呈下降趋势，21 日后略有回升.

7. 75%，25%，240.

8. 25，19.5 至 29.5.

9. C.

10. B.

11. A.

12. 5.94 12.95，7.01，人口不断增加.

13. 用条形图较好.

14. 初一年级一半人数，6，4.5.

15. 用扇形图，图略.

第十三章 全等三角形

Ⅰ 总体设计

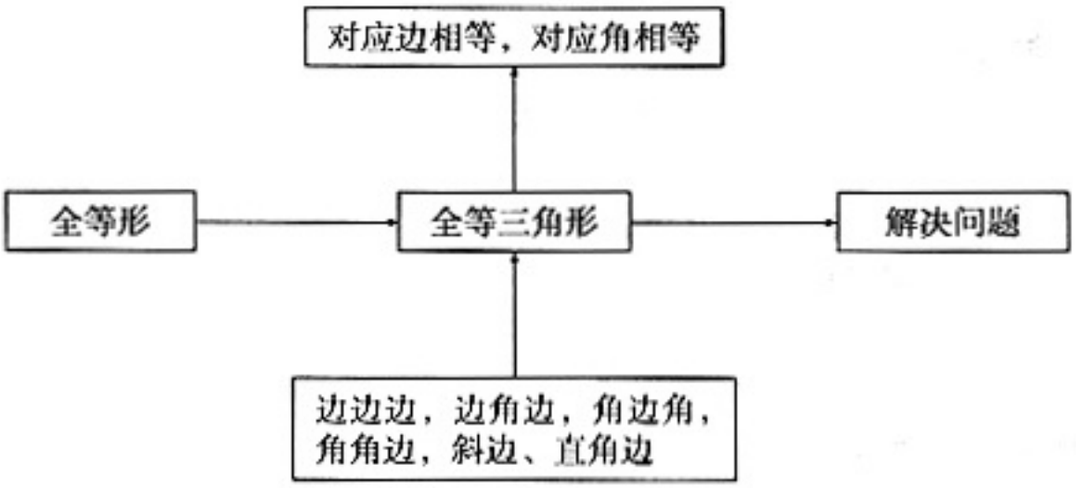
一、课程学习目标

1. 了解全等三角形的概念和性质，能够准确地辨认全等三角形中的对应元素.

2. 探索三角形全等的条件，能利用三角形全等进行证明，掌握综合法证明的格式.

3. 会作角的平分线，了解角的平分线的性质，能利用三角形全等证明角的平分线的性质，会利用角的平分线的性质进行证明.

二、本章知识结构框图



三、内容安排

本章的主要内容是全等三角形，主要学习全等三角形的性质及各种三角形全等的判定方法，同时学会如何利用全等三角形进行证明. 本章分三节，第一节介绍全等形，包括三角形全等的概念，全等三角形的性质. 第二节介绍一般三角形全等的判定方法，及直角三角形全等的一个特殊的判定方法. 在第三节，利用直角三角形的判定方法，证明了角平分线的性质.

全等三角形是研究图形的重要工具，学生只有掌握好全等三角形的内容，并且能灵活地运用它们，才能学好四边形、圆等内容.

本章开始，要使学生理解证明的基本过程，掌握用综合法证明的格式. 这既是本章的重点，也是教学的难点. 教科书把研究三角形全等条件的重点放在第一个条件（边边边条件）上，使学生以边边边条件为例，理解什么是三角形的判定，怎样判定. 在掌握了边边边条件的基础上，使学生学会怎样运用边边边条件进行推理论证，怎样正确地表达证明过程. 边边边条件掌握好了，再学习其他条件就不困难了.

在“全等三角形的条件”一节中，得出如下结论：三边对应相等的两个三角形全等；两边和它们的夹角对应相等的两个三角形全等；两角和它们的夹边对应相等的两个三角形全等. 用这些结论

可以判定两个三角形全等. 三角形全等的这些判定方法都是可以证明的，都可以作为定理处理. 但是，这些定理（除边边边定理外）的证明方法都比较特殊. 学生开始学习这些判定定理时，掌握定理的内容并不困难，困难的是定理的证明，而这些特殊的证明方法，在正式学习推理证明的开始阶段，并不要求学生掌握. 所以为了突出重点，突出判定方法这条主线，本章中上述判定方法都是作为基本事实（公理）提出来的，通过画图和实验，使学生确信它们的正确性. 值得注意的是，本节中的另一个判定方法“两个角和其中一个角的对边对应相等的两个三角形全等”，则是利用“两角和它们的夹边对应相等的两个三角形全等”证明的.

运用三角形全等的条件可以判定两个直角三角形全等. 还可以利用“斜边和一条直角边对应相等的两个直角三角形全等”判定两个直角三角形全等. 本章中这个判定方法是作为基本事实（公理）提出来的，也是通过画图和实验，使学生确信它的正确性.

在“角的平分线的性质”一节中，“角的平分线上的点到角的两边的距离相等”与“到角的两边的距离相等的点在角的平分线上”是互逆定理. 为了保证学生在本章学好简单证明的重点，本章暂不介绍互逆命题、互逆定理等内容，这些内容在八年级下册“勾股定理”一章中介绍. 本节例题让学生证明三角形两条角平分线的交点到三角形三边的距离相等，并进一步让学生得出这个交点在第三条角平分线上，即三角形的三条角平分线交于一点. 这也为学生今后在圆一章学习内心作好了准备.

四、课时安排

本章教学时间约需 10 课时，具体分配如下（仅供参考）：

13.1　全等三角形	1 课时
13.2　三角形全等的条件	5 课时
13.3　角的平分线的性质	2 课时
数学活动	
小结	2 课时

五、学法教法建议

1. 注重探索结论

要让学生经历三角形全等条件的探索过程，可以如下展现这个过程：

探究 1　两个三角形满足三条边对应相等，三个角对应相等这六个条件中的一个或两个，两个三角形是否一定全等；

探究 2　三边对应相等，两个三角形是否一定全等；

探究 3　两边及其夹角对应相等，两个三角形是否一定全等；

探究 4　两边及其中一边所对的角对应相等，两个三角形是否一定全等；

探究 5　两角和它们的夹边对应相等，两个三角形是否一定全等；

探究 6　两角和其中一个角的对边对应相等，两个三角形是否一定全等；

探究 7　三个角对应相等，两个三角形是否一定全等；

探究 8　斜边和一条直角边对应相等，两个直角三角形是否一定全等.

探究 2～7 让学生探索两个三角形满足三条边对应相等，三个角对应相等这六个条件中的三个，两个三角形是否一定全等. 总的发展脉络是三边，两边一角（包括探究 3，探究 4 两种情况），一边两角（包括探究 5，探究 6 两种情况），三个角，这样学生容易把握探索的过程.

探究 1，探究 4，探究 7 是不一定能判定全等的情况，探究 2，探究 3，探究 5，探究 6 是能判定全等的情况. 这样的处理也与先给出可判定全等的情况再给出不一定能判定全等的情况的处理不同，尽量排除人为安排的因素，呈现更为自然.

学完三角形全等的条件，让学生将三角形全等的条件运用于直角三角形，讨论得出直角三角形全等的条件. 其中，斜边和一条直角边对应相等不能运用三角形全等的条件，又需要学生进一步加以实验探索.

2. 注重推理能力的培养

本章正式出现证明及证明的格式. 七年级两册教科书中安排了一些说理的内容，就是为现在正规练习证明作准备的. 要求学生有理有据地推理证明，精练准确地表达推理过程，是比较困难的. 在教学中要注意采取措施解决这个难点.

(1) 注意减缓坡度，循序渐进. 开始阶段，证明的方向明确，过程简单，书写容易规范化. 这一阶段要求学生体会例题的证明思路及格式，然后再逐步增加题目的复杂程度，小步前进，每一步都为下一步作准备，下一步又注意复习前一步训练的内容. 特别是通过精心选择全等三角形的证明问题，减缓学生学习几何证明的坡度.

(2) 在不同的阶段，安排不同的练习内容，突出一个重点，每个阶段都提出明确要求，便于教师掌握. 先让学生会证明两个三角形全等，然后安排通过证明三角形全等，证明两条线段或两个角相等的问题，从而熟悉证明的步骤和方法. 在此之后安排的问题还会涉及以前学过的平行线等内容，重点培养学生会分析思路，会根据需要选择有关的结论去证明.

(3) 注重分析思路，让学生学会思考问题，注重书写格式，让学生学会清楚地表达思考的过程. 例如，在第二节证明例 1 的结论“$\triangle ABD \cong \triangle ACD$”以前，首先指出证题的思路：“要证 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$，可看这两个三角形的三条边是否对应相等.”师生共同思考：

(1) 由已知条件 $AB=AC$ 可知，这两个三角形有一对相等的边.

(2) 从图上看，AD 既是 $\triangle ABD$ 的边又是 $\triangle ACD$ 的边. 这是这两个三角形第二对相等的边.

(3) 关键是第三对边 BD，CD 是否相等. 由 D 是 BC 的中点可知，$BD=CD$，它们是这两个三角形第三对相等的边.

(4) 因此，“边边边”的条件得到了满足. 因而 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$.

为了清楚地表达上述思考过程，引入“$\because$”“$\therefore$”及综合法证明的格式，把证明的过程简明地表达出来.

3. 注重联系实际

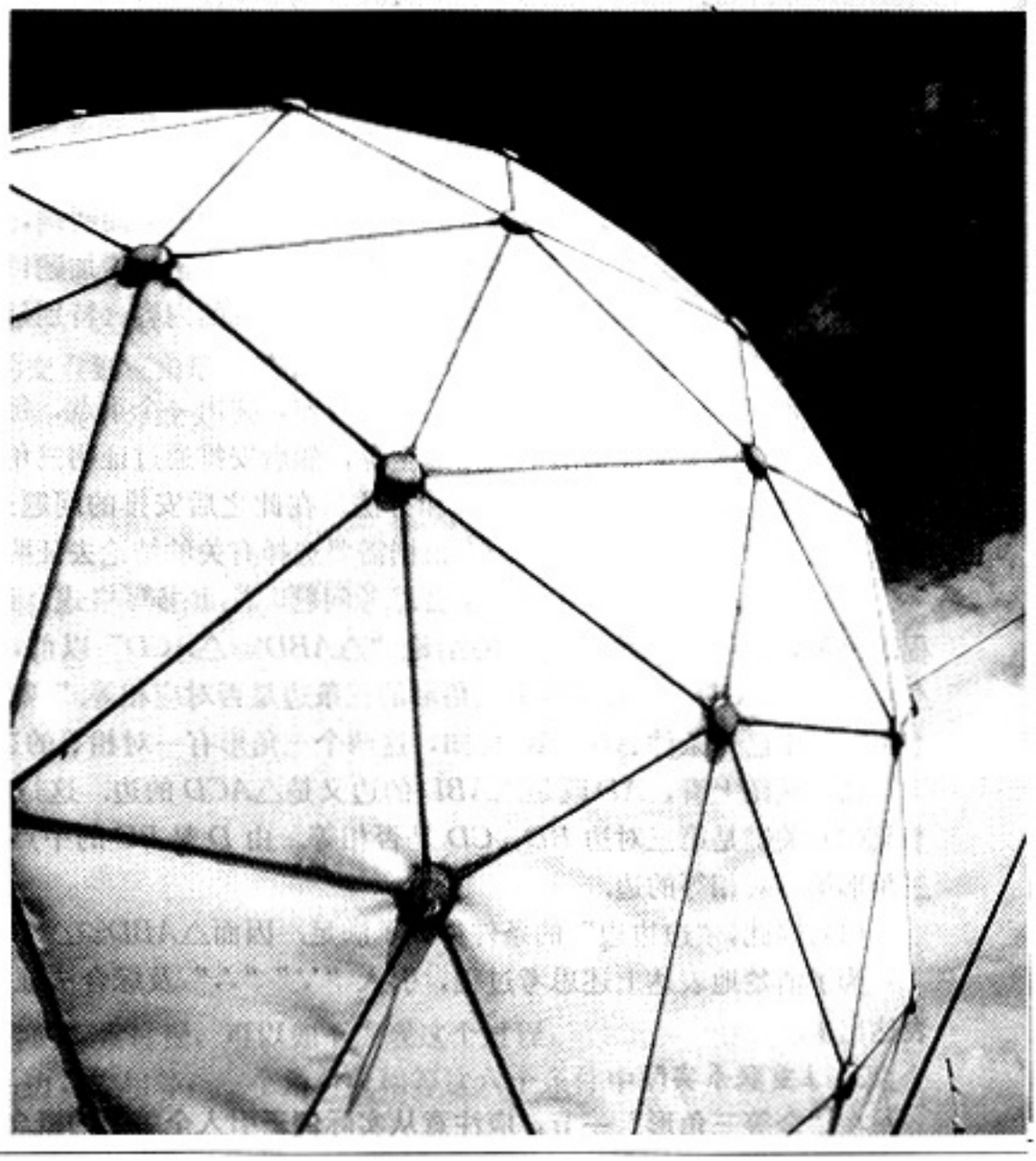
在“全等三角形”一节，应注意从实际例子引入全等形的概念，并让学生举出一些例子. 在我们的周围，经常可以看到形状、大小相同的图形，这样做既可以使学生易于理解相关概念，也可以调动它们学习的积极性. 又如，从分析平分角的仪器的原理引入角的平分线的画法. 再如，通过确定集贸市场的位置的问题引出“到角的两边的距离相等的点在角的平分线上”的结论，使学生看到理论来自实际的需要.

用三角形全等可以说明实际测量方法的道理，例如，测量池塘两端的距离，测量河两岸相对两点的距离，用卡钳测量工件的内槽宽. 还安排了利用三角形全等测量旗杆高度的数学活动. 教学中，应注意引导学生解决这些问题，使学生会运用全等三角形.

Ⅱ 教材分析

[1] 从章头图中可以看出许多形状、大小相同的图形，让学生试着找一找.

第十三章 全等三角形[1]



1. 学生已学过线段、角，相交线、平行线以及三角形的有关知识，七年级两册教科书中安排了一些说理的内容，这些为学习全等三角形的有关内容作好了准备. 通过本章的学习，可以丰富和加深学生对已学图形的认识（如两个三角形满足一定的条件就完全一样了；角的平分线上的一点到角的两边的距离相等），同时为学习其他图形知识打好基础. 可通过引言向学生指出学习本章的意义，了解本章内容的地位和作用.

2. 从自然景观到微型模型，从建筑物到艺术作品，甚至日常生活用品，都可以找到形状、大小相同的图形的例子. 可让学生自己举出形状、大小相同的图形的实际例子，这样可以加深学生对形状、大小相同的图形的认识，又可以引起学生的学习兴趣.

3. 可以提出两个三角形满足什么条件就完全一样这样的问题，让学生感受到要解决这个问题，需要进一步认识和研究三角形.

13



13.1 全等三角形

13.2 三角形全等的条件

13.3 角的平分线的性质

在我们的周围，经常可以看到形状、大小相同的图形.

形状、大小相同的图形有什么性质?

两个三角形满足什么条件就完全一样了呢?

角的平分线有什么性质?

本章我们就来讨论这些问题.[1]

本章中我们还会结合具体问题，初步掌握经过一步步的推理，最后证明结论正确的方法.

通过本章的学习，你的知识会进一步丰富，能力会进一步提高.

[1] 这些问题是本章要研究的主要内容，结合这些内容，还要介绍证明的方法.

4. 全等三角形的有关内容为研究图形提供了一种方法. 在本章中，学了全等三角形的有关内容，就可以进一步学习角的平分线的性质的内容，使全等三角形的有关内容得到运用和发展.

5. 引言中指出，本章中还会结合具体问题，初步掌握经过一步步的推理，最后证明结论正确的方法. 这是本章的重点，也是难点. 从内容的前后顺序看：本章从以前的说理过渡到正式证明，并为以后的学习打下基础. 在本章中，要在学生已有学习经验的基础上，注重分析，帮助学生克服学习上的困难.

[1] 学生通过观察可以得出：

裁得的纸板和样板形状、大小完全一样；

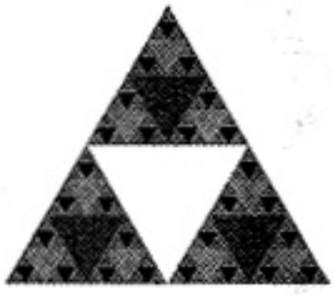
把样板和裁得的纸板放在一起能够完全重合；

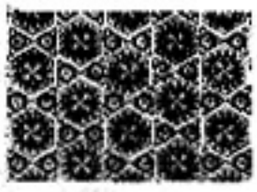
从同一张底片冲洗出来的两张照片上的图形，放在一起也能够完全重合.

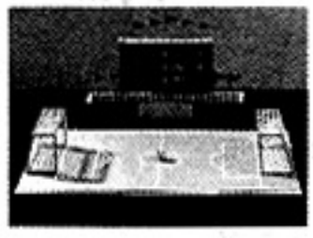
13.1 全等三角形

下面的例子里都有形状、大小相同的图形.









观察

把一块样板按在纸板上，画下图形，照图形裁下来的纸板和样板形状、大小完全一样吗？把样板和裁得的纸板放在一起能够完全重合吗？从同一张底片冲洗出来的两张照片上的图形，放在一起也能够完全重合吗？[1]

可以看到，形状、大小相同的图形放在一起能够完全重合. 能够完全重合的两个图形叫做**全等形**(congruent figures).

能够完全重合的两个三角形叫做**全等三角形**(congruent triangles).

1. 本节主要介绍全等三角形的概念和性质，重点要求学生会确定全等三角形的对应元素.

2. 教科书通过具体例子引出本章要研究的主题——形状、大小相同的图形，然后让学生通过观察得出形状、大小相同的图形的特征：放在一起能够完全重合，由此引出全等形的概念. 本章主要研究全等三角形，因此在给出全等形的概念后，特别给出全等三角形的概念.

3. 一个图形经过平移、翻折、旋转后，位置变化了，但形状、大小都没有改变，即平移、翻折、旋转前后的图形全等. 这个结论是运用全等形的概念得出的，从而起到巩固新概念的作用。另一方面，掌握这个结论，对学生在某些情况下确定全等三角形的对应元素有帮助.

4. 在全等三角形中，我们把互相重合的边或角，叫做对应边或对应角。教学时，结合具体图形使学生理解“对应”的意义就可以了，不要过多地解释. 以后还会遇到“对应”这个词，在

思考

在图 13.1-1 中，把△ABC 沿直线 BC 平移，得到△DEF.
在图 13.1-2 中，把△ABC 沿直线 BC 翻折 180°，得到△DBC.
在图 13.1-3 中，把△ABC 旋转 180°，得到△AED.
各图中的两个三角形全等吗？[1]

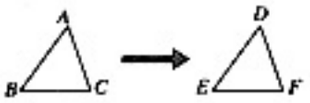


图 13.1-1

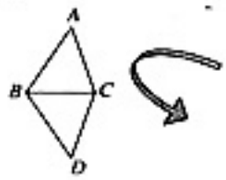


图 13.1-2

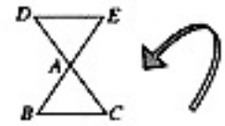


图 13.1-3

一个图形经过平移、翻折、旋转后，位置变化了，但形状、大小都没有改变，即平移、翻折、旋转前后的图形全等.

把两个全等的三角形重合到一起，重合的顶点叫做对应顶点，重合的边叫做对应边，重合的角叫做对应角. 例如，图 13.1-1 中的△ABC 和△DEF 全等，记作△ABC≌△DEF，其中点 A 和点 D，点 B 和点 E，点 C 和点 F 是对应顶点，AB 和 DE，BC 和 EF，AC 和 DF 是对应边，∠A 和∠D，∠B 和∠E，∠C 和∠F 是对应角.

“全等”用“≌”表示，读作“全等于”.[2]

记两个三角形全等时，通常把表示对应顶点的字母写在对应的位置上. 例如，图 13.1-2 中的△ABC 和△DBC 全等，点 A 和点 D，点 B 和点 B，点 C 和点 C 是对应顶点，记作△ABC≌△DBC.

思考

图 13.1-1 中，△ABC≌△DEF，对应边有什么关系？对应角呢？[3]

全等三角形有这样的性质：

全等三角形的对应边相等；

全等三角形的对应角相等.

[1] 各图中的△ABC 经过平移、翻折、旋转后，位置变化了，但形状、大小都没有改变，所以各图中的两个三角形全等.

[2] 全等符号“≌”中，“∽”表示形状相同（即相似），“=”表示大小相等，合起来就是形状相同，大小相等，也就是全等.

[3] 因为对应边是重合的边，对应角是重合的角，所以 $AB=DE$，$BC=EF$，$AC=DF$；

∠A=∠D，∠B=∠E，∠C=∠F，

即对应边相等，对应角相等.

后面多次运用中，学生会逐步加深对它的理解. 因为全等三角形对应边、对应角很重要，以后常常用到，所以在这一节里要求学生能在全等三角形中正确地找出对应边、对应角.

找对应边、对应角通常有下面两种方法：

（1）全等三角形对应角所对的边是对应边，两个对应角所夹的边是对应边；

（2）全等三角形对应边所对的角是对应角，两条对应边所夹的角是对应角.

由于两个三角形的位置关系不同，还可以根据具体情况，针对两个三角形不同的位置关系，总结出寻找对应边、角的规律：

（1）有公共边的，公共边一定是对应边；

（2）有公共角的，公共角一定是对应角；

（3）有对顶角的，对顶角一定是对应角；

（4）两个全等三角形中一对最长的边（或最大的角）是对应边（或角），一对最短的边（或最小的角）是对应边（或角），等等.

练习答案

1. 在图 13.1-2 中，AB 和 DB，BC 和 BC，AC 和 DC 是对应边，$\angle A$ 和 $\angle D$，$\angle ABC$ 和 $\angle DBC$，$\angle ACB$ 和 $\angle DCB$ 是对应角.

   在图 13.1-3 中，AB 和 AE，BC 和 ED，AC 和 AD 是对应边，$\angle BAC$ 和 $\angle EAD$，$\angle B$ 和 $\angle E$，$\angle C$ 和 $\angle D$ 是对应角.

2. $AC = DB$，$OA = OD$，$OC = OB$；

   $\angle A = \angle D$，$\angle C = \angle B$，$\angle AOC = \angle DOB$.

练习

1. 在图 13.1-2，图 13.1-3 中，说出其中两个全等三角形的对应边，对应角.
2. 如图，$\triangle OCA \cong \triangle OBD$，$C$ 和 B，A 和 D 是对应顶点，说出这两个三角形中相等的边和角.

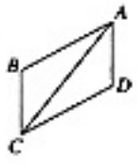


（第 2 题）

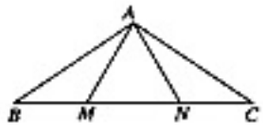
习题13.1

复习巩固 ▶▶

1. 如图，$\triangle ABC \cong \triangle CDA$，$AB$ 和 CD，BC 和 DA 是对应边，写出其他对应边及对应角.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，$\triangle ABN \cong \triangle ACM$，$\angle B$ 和 $\angle C$ 是对应角，AB 与 AC 是对应边. 写出其他对应边及对应角.

综合运用 ▶▶

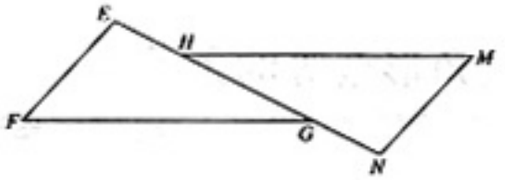
3. 如图，$\triangle EFG \cong \triangle NMH$. 在 $\triangle EFG$ 中，FG 是最长边. 在 $\triangle NMH$ 中，MH 是最长边. $\angle F$ 和 $\angle M$ 是对应角. $EF = 2.1$ cm，$EH = 1.1$ cm，$HN = 3.3$ cm.
   (1) 写出其他对应边及对应角.
   (2) 求线段 NM 及线段 HG 的长度.

5. 对应边、对应角、对边、对角容易混淆. 对应边或角，是对两个三角形说的，是两条边之间或两个角之间的关系. 而对边、对角，是对同一个三角形中边和角的关系说的，“对边”是对某个角说的，“对角”是对某个边说的，教学中可结合图形向学生说明，注意它们的区别.

6. 教科书是用“完全重合”来定义全等三角形的. 根据这个定义，全等三角形的对应边相等、对应角相等. 这个结论很重要，以后经常用到.

习题 13.1

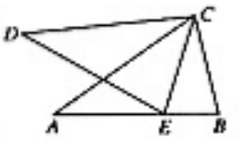
第 1～2 题复习巩固对应边、对应角的概念. 第 3 题要用到全等三角形的性质，由 $NM = EF$ 可直接求出线段 NM 的长度；求线段 HG 的长度，则要先由 $GE = HN$ 求出线段 GE 的长度，再由 $HG = GE - EH$ 得到答案. 在第 4 题中，关键是能够发现 $\angle ACD = \angle DCE - \angle ACE$，$\angle BCE = \angle ACB - \angle ACE$.



（第3题）

拓广探索 ▶▶

4. 如图，$\triangle ABC \cong \triangle DEC$，$CA$ 和 CD，CB 和 CE 是对应边，$\angle ACD$ 和 $\angle BCE$ 相等吗？为什么？[1]



（第4题）

[1] 可提示学生：$\angle ACD = \angle DCE - \angle ACE$，$\angle BCE = \angle ACB - \angle ACE$.

[1] 满足三条边对应相等，三个角对应相等这六个条件中的一个，包括一条边对应相等，一个角对应相等两种情况.

满足三条边对应相等，三个角对应相等这六个条件中的两个，包括两条边对应相等，两个角对应相等，一条边对应相等且一个角对应相等三种情况. 其中，一条边对应相等且一个角对应相等的情况，又要根据这个角是否这条边的对角分两种情况探究.

[2] $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 满足三条边对应相等，三个角对应相等这六个条件中的一个或两个，$\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 不一定全等.

13.2 三角形全等的条件

我们知道，如果 $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$，那么它们的对应边相等，对应角相等. 反过来，如果 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 满足三条边对应相等，三个角对应相等，即

$AB=A'B'$，$BC=B'C'$，$CA=C'A'$，

$\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$，$\angle C=\angle C'$

这六个条件，就能保证 $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$（图 13.2-1）. $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 满足上述六个条件中的一部分是否也能保证 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 全等呢？

本节我们就来讨论这个问题.

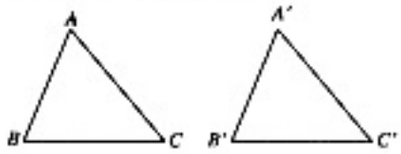


图 13.2-1

探究1

先任意画出一个 $\triangle ABC$. 再画一个 $\triangle A'B'C'$，使 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 满足上述六个条件中的一个或两个.[1] 你画出的 $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 一定全等吗？[2]

通过画图可以发现，满足上述六个条件中的一个或两个，$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 不一定全等. 满足上述六个条件中的三个，能保证 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 全等吗？我们分情况进行讨论.

1. 本节的主要内容是探索三角形全等的条件，及利用全等三角形进行证明.

2. 在本节设计了 8 个探究，让学生经历三角形全等条件的探索过程. 首先让学生探索两个三角形满足三条边对应相等，三个角对应相等这六个条件中的一个或两个，两个三角形是否一定全等. 然后让学生探索两个三角形满足上述六个条件中的三个，两个三角形是否一定全等，分以下情况讨论：

（1）三边对应相等；

（2）两边及其夹角对应相等；

（3）两边及其中一边所对的角对应相等；

（4）两角和它们的夹边对应相等；

（5）两角和其中一个角的对边对应相等；

（6）三个角对应相等.

最后让学生探究判定直角三角形全等的一个特殊方法：斜边和一条直角边对应相等的两个直角三角形全等.

探究2

先任意画出一个$\triangle ABC$. 再画一个$\triangle A'B'C'$，使$A'B'=AB$，$B'C'=BC$，$C'A'=CA$. 把画好的$\triangle A'B'C'$剪下，放到$\triangle ABC$上，它们全等吗？

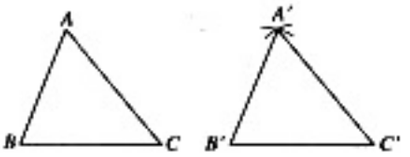


图 13.2-2

画一个$\triangle A'B'C'$，使$A'B'=AB$，$A'C'=AC$，$B'C'=BC$：

1. 画线段$B'C'=BC$；
2. 分别以B'、C'为圆心，线段AB，AC为半径画弧，两弧交于点A'；
3. 连接线段$A'B'$、$A'C'$.

图 13.2-2 给出了画$\triangle A'B'C'$的方法，[1]你是这样画的吗？探究 2 的结果反映了什么规律？

探究 2 反映的规律是：

三边对应相等的两个三角形全等（可以简写成“边边边”或“SSS”）.

我们曾经做过这样的实验：将三根木条钉成一个三角形木架，这个三角形木架的形状、大小就不变了. 就是说，三角形的三边确定了，这个三角形的形状、大小也就确定了.[2] 这里就用到上面的结论.

用上面的结论可以判断两个三角形全等. 判断两个三角形全等的推理过程，叫做证明三角形全等.

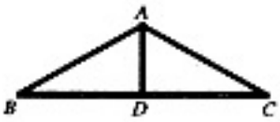


图 13.2-3

例 1 如图 13.2-3，$\triangle ABC$是一个钢架，$AB=AC$，AD是连接点A与BC中点D的支架. 求证$\triangle ABD\cong\triangle ACD$.

分析：要证$\triangle ABD\cong\triangle ACD$，可看这两个三角形

[1] 在画图时，两弧在直线BC的另一侧还有一个交点，因此，按已知条件可画出两个三角形. 这两个三角形都与$\triangle ABC$完全重合.

[2] 让学生回忆三角形的稳定性的内容.

3. 在本节安排利用全等三角形进行证明的内容，使学生理解证明的基本过程，掌握综合法证明的格式.

4. 探究 2 是讨论三边对应相等的三角形是否全等，其过程是

（1）任意画出一个三角形；

（2）再画出一个三角形，使两个三角形的三边对应相等；

（3）观察两个三角形是否能够重合.

其中的(2)相当于已知三边画三角形. 在作出一边后，关键是确定第三个顶点. 这个顶点实际上在两个圆上，也就是两个圆的交点. 具体画图时，只画出两段弧就可以了.

已知三边画三角形是一种重要的作图，在几何中用途很多，所以这种画图方法一定要使学生掌握. 另外，这种画法实际上不需要量角器等工具，只用圆规和直尺就可以画出，所以这个方法属于尺规作图.

[1] 还应该有 $AB=FD$.

由 $AD=FB$ 可得

$AD+DB=FB+DB$,

即 $AB=FD$.

练习答案

证明：在 $\triangle CMO$ 和 $\triangle CNO$ 中，

$$\begin{cases} OM=ON, \\ CM=CN, \\ CO=CO, \end{cases}$$

$\therefore \triangle CMO \cong \triangle CNO$ (SSS).

$\therefore \angle COM=\angle CON$.

$\therefore OC$ 是 $\angle AOB$ 的平分线.

符号“$\because$”表示“因为”，“$\therefore$”表示“所以”.

AD 既是 $\triangle ABD$ 的边又是 $\triangle ACD$ 的边，我们称它为公共边.

的三条边是否对应相等.

证明：$\because$ D 是 BC 的中点，

$\therefore$ $BD=CD$.

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 中，

$$\begin{cases} AB=AC, \\ BD=CD, \\ AD=AD, \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ (SSS).

从例 1 可以看出，证明是由题设（已知）出发，经过一步步的推理，最后推出结论（求证）正确的过程.

思考

已知 $AC=FE$，$BC=DE$，点 A、D、B、F 在一条直线上，$AD=FB$（图 13.2-4）. 要用“边边边”证明 $\triangle ABC \cong \triangle FDE$，除了已知中的 $AC=FE$，$BC=DE$ 以外，还应该有什么条件？怎样才能得到这个条件？[1]

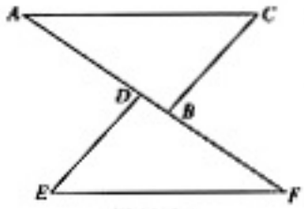
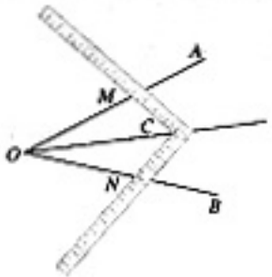


图 13.2-4



练习

工人师傅常用角尺平分一个任意角. 做法如下：如图，$\angle AOB$ 是一个任意角，在边 OA，OB 上分别取 $OM=ON$，移动角尺，使角尺两边相同的刻度分别与 M，N 重合. 过角尺顶点 C 的射线 OC 便是 $\angle AOB$ 的平分线. 为什么？

5. 由探究 2 可以得到三边对应相等的两个三角形全等. 可以用这个结论判定两个三角形全等. 由于这个判定方法是作为基本事实（公理）提出的，所以一定要使学生对这个公理确信无疑. 为此，一定要让学生自己动手画图实验，不要怕麻烦，只有亲自动手才会确信，印象才会深刻.

6. 得到三边对应相等的两个三角形全等这个结论后，可以让学生回过头解释七年级下册第七章学过的三角形的稳定性.

7. 为了让学生熟悉边边边条件，学会运用边边边条件证明两个三角形全等，特别是学会把证明过程正确地写出来，本节配备了例 1.

在证明例 1 的结论“$\triangle ABD \cong \triangle ACD$”以前，首先指出证题的思路：“要证 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$，可看这两个三角形的三条边是否对应相等.”而由已知条件可知 $AB=AC$，从图可知 $AD=AD$. 关键是第三对边 BD，CD 是否相等.

探究3

先任意画出一个$\triangle ABC$. 再画出一个$\triangle A'B'C'$，使$A'B'=AB$，$A'C'=AC$，$\angle A'=\angle A$（即使有两边和它们的夹角对应相等）. 把画好的$\triangle A'B'C'$剪下，放到$\triangle ABC$上，它们全等吗？

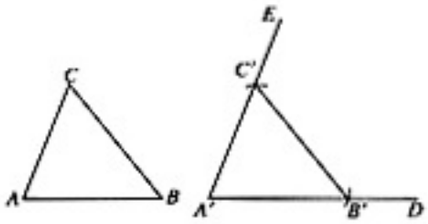


图 13.2-5

画一个$\triangle A'B'C'$，使$A'B'=AB$，$A'C'=AC$，$\angle A'=\angle A$：

1. 画$\angle DA'E=\angle A$；
2. 在射线$A'D$上截取$A'B'=AB$，在射线$A'E$上截取$A'C'=AC$；
3. 连接$B'C'$.

图 13.2-5 给出了画$\triangle A'B'C'$的方法. 你是这样画的吗？探究 3 的结果反映了什么规律？

探究 3 反映的规律是：

两边和它们的夹角对应相等的两个三角形全等（可以简写成“边角边”或“SAS”）.

例 2 如图 13.2-6，有一池塘，要测池塘两端 A、B 的距离，可先在平地上取一个可以直接到达 A 和 B 的点 C，连接 AC 并延长到 D，使 $CD=CA$. 连接 BC 并延长到 E，使 $CE=CB$. 连接 DE，那么量出 DE 的长就是 A、B 的距离. 为什么？[1]

分析：如果能证明$\triangle ABC\cong\triangle DEC$，就可以得出$AB=DE$.

在$\triangle ABC$和$\triangle DEC$中，$CA=CD$，$CB=CE$. 如果能得出$\angle 1=\angle 2$，$\triangle ABC$和$\triangle DEC$就全等了.

证明：在$\triangle ABC$和$\triangle DEC$中，

[1] 注意把测量方法交待清楚，强调指出，测量中所做的 $CD=CA$，$CE=CB$，以及 A、C、D 和 B、C、E 各成一条直线，都是已知条件，证明时可以利用它们.

由 D 是 BC 的中点可知，$BD=CD$. 为了清楚地表达上述思考过程，教科书介绍了综合法证明的格式. 应结合例 1 让学生理解证明的基本过程，掌握综合法证明的格式.

例 1 的已知中没有直接给出三角形全等所需的三个条件，有的条件（$BD=CD$）需要根据已知去证明. 现阶段例、习题中需要证明的都比较简单，常遇到的有下列几种情况：

（1）利用中点的定义证明线段相等；

（2）利用垂直的定义证明角相等；

（3）利用平行线的性质证明角相等；

（4）利用三角形的内角和等于 180°证明角相等；

（5）利用图形的和、差证明边或角相等.

这些情况在练习和习题中都出现了，教学时可以选用. 如果发现学生在哪一方面有困难，要及时帮助，并再选一些类似的题目巩固.

8. 证明一个几何中的命题有以下步骤：

[1] $\angle 1=\angle 2$ 的根据是对顶角相等. $AB=DE$ 的根据是全等三角形的对应边相等.

$$\begin{cases} CA=CD, \\ \angle 1=\angle 2, \\ CB=CE, \end{cases}$$

$\therefore\ \triangle ABC\cong\triangle DEC$ (SAS).

$\therefore\ AB=DE.$

想一想，$\angle 1=\angle 2$ 的根据是什么？$AB=DE$ 的根据是什么？[1]

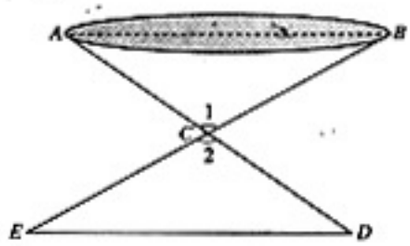


图 13.2-6

从例 2 可以看出：因为全等三角形的对应边相等，对应角相等，所以，证明分别属于两个三角形的线段相等或者角相等的问题，常常通过证明这两个三角形全等来解决.

探究4

我们知道，两边和它们的夹角对应相等的两个三角形全等. 由“两边及其中一边的对角对应相等”的条件能判定两个三角形全等吗？为什么？

我们可以通过画图回答，还可以通过实验回答.

把一长一短两根细木棍的一端用螺钉铰合在一起，使长木棍的另一端与射线 BC 的端点 B 重合. 适当调整好长木棍与射线 BC 所成的角后，固定住长木棍，把短木棍摆起来（图 13.2-7）.

(1) 根据题意，画出图形；

(2) 根据题设、结论，结合图形，写出已知、求证.

(3) 经过分析，找出由已知推出求证的途径，写出证明的过程.

在一般情况下，分析的过程不要求写出来. 有些题目中，已经画好了图形，写好了已知、求证，这时只要写出“证明”一项就可以了.

分析证明命题的途径，这一步学生比较困难，需要在学习中逐步培养学生的分析能力.

证明中的每一步推理都要有根据，不能“想当然”. 这些根据，可以是已知条件，也可以是定义、公理、已经学过的重要结论.

9. 讨论完边边边情况，再来讨论两边一角的情况. 这种情况要分两边和它们的夹角，两边及其一边的对角两种情况探究.

10. 探究 3 可以采取与探究 2 同样的处理方法. 一要介绍已知两边和它们的夹角画三角形的

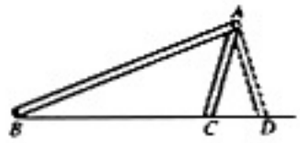


图 13.2-7

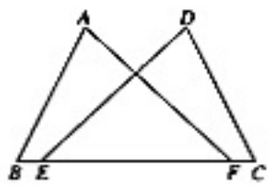
图 13.2-7 中的$\triangle ABC$与$\triangle ABD$满足两边及其中一边对角相等的条件，但$\triangle ABC$与$\triangle ABD$不全等. 这说明，有两边和其中一边的对角对应相等的两个三角形不一定全等.

练习

1. 如图，两车从路段AB的一端A出发，分别向东、向西行进相同的距离，到达C、D两地. 此时C、D到B的距离相等吗？为什么？



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，点E、F在BC上，$BE=CF$，$AB=DC$，$\angle B=\angle C$. 求证$\angle A=\angle D$.

探究5

先任意画出一个$\triangle ABC$. 再画一个$\triangle A'B'C'$，使$A'B'=AB$，$\angle A'=\angle A$，$\angle B'=\angle B$（即使两角和它们的夹边对应相等）. 把画好的$\triangle A'B'C'$剪下，放到$\triangle ABC$上，它们全等吗？

练习答案

1. 证明：在$\triangle ABC$和$\triangle ABD$中，

$$\begin{cases} AB=AB, \\ \angle BAC=\angle BAD, \\ AC=AD, \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle ABD(SAS)$.

$\therefore BC=BD$.

2. 证明：$\because BE=CF$，

$\therefore BE+EF=CF+EF$，

即$BF=CE$.

在$\triangle ABF$和$\triangle DCE$中，

$$\begin{cases} AB=DC, \\ \angle B=\angle C, \\ BF=CE, \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABF\cong\triangle DCE(SAS)$.

$\therefore \angle A=\angle D$.

方法，二要通过画图和实验，使学生确信结论的正确性. 一定要学生自己动手画图、实验.

在探究 3 中，教科书介绍的画法是先画角，再画两边. 也可以先画一边，然后画角，再画另一边：

（1）画$A'B'=AB$；

（2）画$\angle B'A'E=\angle A$；

（3）在射线$A'E$上截取$A'C'=AC$；

（4）连接$B'C'$.

11. 由探究 3 可以得到两边和它们的夹角对应相等的两个三角形全等. 可以用这个结论判定两个三角形全等. 为了让学生熟悉边角边条件，学会运用边角边条件证明两个三角形全等，配备了例 2.

例 2 是一个实际问题，虽然实际上很少这样测量，不过它可以激发学生的兴趣，启发他们运用学过的知识解决实际问题. 本题不只是证明两个三角形全等，而是在全等的基础上进一步推证两条线段相等，这比例 1 的要求又提高了一步.

教科书希望通过这样一步一步地提高要求，

[1] 证明：∵ $\angle A=\angle D$，$\angle B=\angle E$，

∴ $180^\circ-\angle A-\angle B=180^\circ-\angle D-\angle E$，

即 $\angle C=\angle F$.

在$\triangle ABC$和$\triangle DEF$中，

$$\begin{cases}\angle B=\angle E,\\ BC=EF,\\ \angle C=\angle F,\end{cases}$$

∴ $\triangle ABC\cong\triangle DEF$ (ASA).

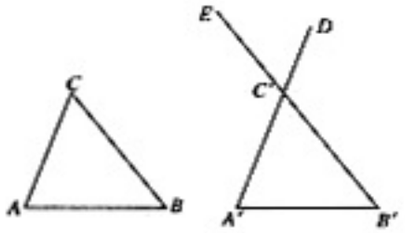


图 13.2-8

画一个$\triangle A'B'C'$，使 $A'B'=AB$，$\angle A'=\angle A$，$\angle B'=\angle B$：

1. 画 $A'B'=AB$；

2. 在 $A'B'$ 的同旁画 $\angle DA'B'=\angle A$，$\angle EB'A'=\angle B$，$A'D$，$B'E$ 交于点 C'.

图 13.2-8 给出了画$\triangle A'B'C'$的方法. 你是这样画的吗？探究 5 的结果反映了什么规律？

探究 5 反映的规律是：

两角和它们的夹边对应相等的两个三角形全等（可以简写成“角边角”或“ASA”）.

探究6

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中，$\angle A=\angle D$，$\angle B=\angle E$，$BC=EF$（图 13.2-9），$\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 全等吗？能利用角边角条件证明你的结论吗？[1]

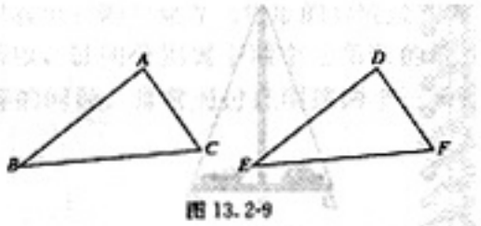


图 13.2-9

两个角和其中一个角的对边对应相等的两个三角形全等（可以简写成“角角边”或“AAS”）.

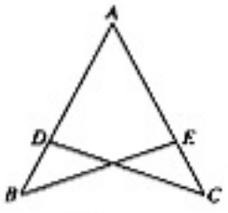


图 13.2-10

例 3 如图 13.2-10，D 在 AB 上，E 在 AC 上，$AB=AC$，$\angle B=\angle C$. 求证 $AD=AE$.

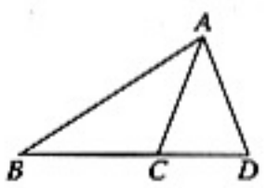
分析：如果能证明$\triangle ACD\cong\triangle ABE$，就可以得出 $AD=AE$.

证明：在$\triangle ACD$与$\triangle ABE$中，

$$\begin{cases}\angle A=\angle A\ (\text{公共角}),\\ AC=AB,\\ \angle C=\angle B,\end{cases}$$

使学生逐步学会运用三角形全等的判定方法，证明两个三角形全等，进而证明两条线段或两个角相等，后者的依据是全等三角形的性质.

12. 探究 4 讨论两边及其中一边的对角对应相等的情况. 可以画图实验，例如，如下图，在



$\triangle ABC$ 和 $\triangle ABD$ 中，$AB=AB$，$AC=AD$，$\angle B=\angle B$，显然它们不全等. 这说明，两边及其中一边的对角对应相等的两个三角形不一定全等. 也就是说，两边及其中一边的对角对应相等的两个三角形全等是一个假命题.

判断一个命题是假命题，只要举出一个反例. 找反例对学生来说是比较困难的，学生在一般情况下不容易发现反例. 教师要根据学生的画图情况进行指导，尽量多发现几个反例的图形.

∴ $\triangle ACD \cong \triangle ABE$ (ASA).

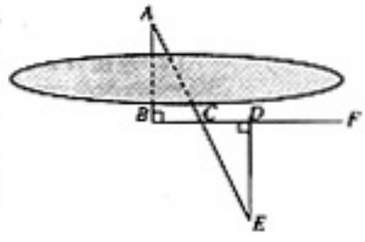
∴ $AD=AE$.

探究7

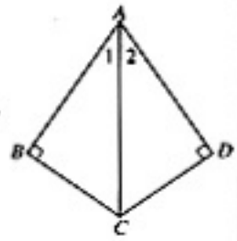
三角对应相等的两个三角形全等吗？解答上述问题后把三角形全等的判定方法做一个小结.

练习

1. 如图，要测量河两岸相对的两点 A，B 的距离，可以在 AB 的垂线 BF 上取两点 C，D，使 $BC=CD$，再定出 BF 的垂线 DE，使 A，C，E 在一条直线上，这时测得 DE 的长就是 AB 的长. 为什么？



(第1题)



(第2题)

2. 如图，$AB \perp BC$，$AD \perp DC$，$\angle 1=\angle 2$. 求证 $AB=AD$.

讨论

对于两个直角三角形，除了直角相等的条件，还要满足几个条件，这两个直角三角形就全等了？

由三角形全等的条件可知，对于两个直角三角形，满足一边一锐角对应相等，或两直角边对应相等，这两个直角三角形就全等了. 如果满足斜边和一条直角边对应相等，这两个直角三角形全等吗？

练习答案

1. 证明：∵ $AB \perp BF$，$DE \perp BF$，

∴ $\angle B=\angle D=90°$.

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle EDC$ 中，

$$\begin{cases}\angle B=\angle D,\\ BC=DC,\\ \angle ACB=\angle ECD.\end{cases}$$

∴ $\triangle ABC \cong \triangle EDC$ (ASA).

∴ $AB=ED$.

2. 证明：∵ $AB \perp BC$，$AD \perp DC$，

∴ $\angle B=\angle D=90°$.

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADC$ 中，

$$\begin{cases}\angle B=\angle D,\\ \angle 1=\angle 2,\\ AC=AC,\end{cases}$$

∴ $\triangle ABC \cong \triangle ADC$ (AAS).

∴ $AB=AD$.

13. 讨论完边边边和两边一角的情况，再来讨论一边两角的情况. 这种情况要分两角和它们的夹边，两角和其中一个角的对边两种情况探究.

14. 探究 5 可以采取与探究 2、探究 3 同样的处理方法. 一要介绍已知两角和它们的夹边画三角形的方法，二要通过画图和实验，使学生确信结论的正确性.

由探究 5 可以得到两角和它们的夹边对应相等的两个三角形全等. 可以用这个结论判定两个三角形全等. 为了让学生熟悉角边角条件，学会运用角边角条件证明两个三角形全等，配备了例 3. 也是先证三角形全等，进而证两条线段相等.

15. 探究 6 讨论两角及其中一角的对边对应相等的情况. 由三角形的内角和等于 180°可得两个三角形的第三对角对应相等. 这样就可由两角和它们的夹边对应相等判定两个三角形全等. 也就是说，用角边角条件可以证明角角边条件，后者是前者的推论.

[1] H、L 分别是英文斜边 Lypotenuse，直角边 Leg 的头一个字母.

直角三角形用 Rt△表示.

探究8

任意画出一个 Rt△ABC，使∠C=90°. 再画一个 Rt△$A'B'C'$，使 $B'C'=BC$，$A'B'=AB$. 把画好的 Rt△$A'B'C'$剪下，放到 Rt△ABC 上，它们全等吗？

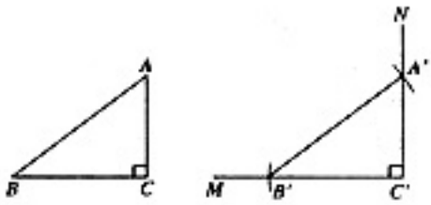


图 13.2-11

画一个 Rt△$A'B'C'$，使 $B'C'=BC$，$A'B'=AB$；

1. 画∠$MC'N$=90°.
2. 在射线 $C'M$ 上取 $B'C'=BC$.
3. 以 B' 为圆心，AB 为半径画弧，交射线 $C'N$ 于点 A'.
4. 连接 $A'B'$.

图 13.2-11 给出了画 Rt△$A'B'C'$的方法. 你是这样画的吗？探究 8 的结果反映了什么规律？

探究 8 反映的规律是：

斜边和一条直角边对应相等的两个直角三角形全等（可以简写成“斜边、直角边”或“HL”）.[1]

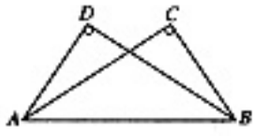


图 13.2-12

例 4 如图 13.2-12，$AC\perp BC$，$BD\perp AD$，$AC=BD$. 求证 $BC=AD$.

证明：∵ $AC\perp BC$，$BD\perp AD$，

∴ ∠C 与∠D 都是直角.

在 Rt△ABC 和 Rt△BAD 中，

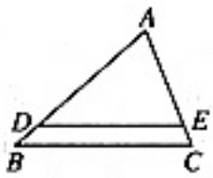
$$\begin{cases} AB=BA, \\ AC=BD, \end{cases}$$

∴ Rt△ABC≌Rt△BAD（HL），

∴ $BC=AD$.

由探究 6 可以得到两角和其中一个角的对边对应相等的两个三角形全等. 也可以用这个结论判定两个三角形全等.

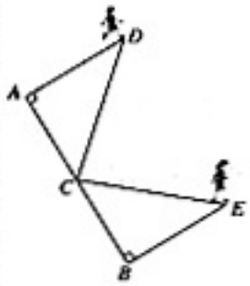
16. 探究 7 讨论三角对应相等的情况. 可以画图实验. 例如，如下图，在△ABC 和△ADE 中，如果 $DE\ //\ BC$，那么 ∠ADE = ∠B，∠AED = ∠C，又 ∠A = ∠A，但 △ABC 和 △ADE 不全等. 这说明，三角对应相等的两个三角形不一定全等.



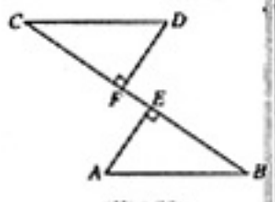
至此，教科书讨论完了两个三角形三组角或边对应相等的六种情况. 应使学生明确：运用边边边条件，边角边条件，角边角条件，角角边条件可以判定两个三角形全等；但已知三个角对应相等，或两边及其中一边的对角对应相等，不能判定两个三角形全等.

练习

1. 如图，C 是线段 AB 的中点，两人从 C 同时出发，以相同的速度分别沿两条直线行走，并同时到达 D，E 两地．$DA\perp AB$，$EB\perp AB$，D，E 与线段 AB 的距离相等吗？为什么？



（第 1 题）



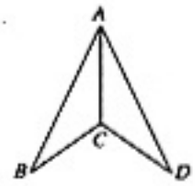
（第 2 题）

2. 如图，$AB=CD$，$AE\perp BC$，$DF\perp BC$，$CE=BF$．求证 $AE=DF$．

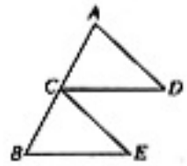
习题13.2

复习巩固 ▶▶

1. 如图，$AB=AD$，$CB=CD$．$\triangle ABC$ 与 $\triangle ADC$ 全等吗？为什么？



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，C 是 AB 的中点，$AD=CE$，$CD=BE$．求证 $\triangle ACD\cong\triangle CBE$．

练习答案

1. 证明：$\because DA\perp AB$，$EB\perp AB$，

$\therefore\angle A=\angle B=90^\circ$．

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle BCE$ 中，

$$\begin{cases}AC=BC,\\CD=CE,\end{cases}$$

$\therefore\mathrm{Rt}\triangle ACD\cong\mathrm{Rt}\triangle BCE$（HL）．

$\therefore AD=BE$．

2. 证明：$\because AE\perp BC$，$DF\perp BC$，

$\therefore\angle AEB=\angle DFC=90^\circ$．

$\because BF=CE$，

$\therefore BF-EF=CE-EF$，

即 $BE=CF$．

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle DCF$ 中，

$$\begin{cases}AB=DC,\\BE=CF,\end{cases}$$

$\therefore\mathrm{Rt}\triangle ABE\cong\mathrm{Rt}\triangle DCF$（HL）．

$\therefore AE=DF$．

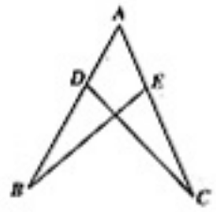
17. 探究 7 后讨论直角三角形的判定方法．直角三角形是三角形中的一类，一般三角形所具有的性质，直角三角形都具备，因此判定两个三角形全等时，完全可以用刚刚学过三角形全等的判定方法．由于直角三角形中，有一个角是直角，而直角都相等，所以判定两个三角形全等时，要注意这两个三角形中已经具有一对角相等的条件，只需找到另外两个条件即可．

18. 由于直角三角形是特殊的三角形，因而它还具备一般三角形所没有的特殊性质．例如，对于一般三角形来说，已知两边及其中一边的对角对应相等，不能判定这两个三角形全等．而对于直角三角形来说，斜边和一条直角边对应相等，就是两边及其中一边的对角对应相等，不过这个角是直角，此时可以判定两个直角三角形全等．这是直角三角形的特殊性决定的，这个判定方法是直角三角形所独有的，一般的三角形不具备．

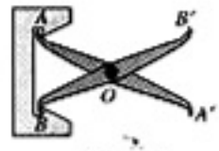
因为这是第一次涉及特殊三角形的特殊性，

[1] 卡钳是一种度量工具，内卡钳可以量出工件的内径。可以告诉学生，在实际工作中，常利用三角形全等的原理，把不能直接度量的物体“移”到可以直接度量的位置来度量。通过这样的例子，可以使学生认识学习理论知识的重要意义，注意理论联系实际.

3. 如图，$AB=AC$，$AD=AE$，求证$\angle B=\angle C$.



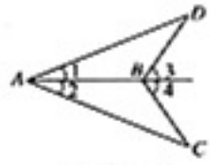
（第3题）



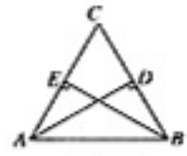
（第4题）

4. 如图，把两根钢条的中点连在一起，可以做成一个测量工件内槽宽的工具（卡钳）.[1] 在图中，要测量工件内槽宽，只要测量什么？为什么？

5. 如图，$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，求证$AC=AD$.



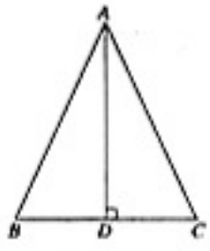
（第5题）



（第6题）

6. 如图，从C地看A、B两地的视角$\angle C$是锐角，从C地到A、B两地的距离相等. A到路段BC的距离AD与B到路段AC的距离BE相等吗？为什么？

7. 如图，$\triangle ABC$中，$AB=AC$，AD是高，求证：（1）$BD=CD$；（2）$\angle BAD=\angle CAD$.



（第7题）



（第8题）

8. 如图，$AC\perp CB$，$DB\perp CB$，$AB=DC$，求证$\angle ABD=\angle ACD$.

综合运用 ▶▶

9. 如图，点B，E，C，F在一条直线上，$AB=DE$，$AC=DF$，$BE=CF$，求证$\angle A=\angle D$.

所以教学时要注意说明这种思想，一方面可以使学生掌握这个结论，另一方面为学习特殊三角形作些准备.

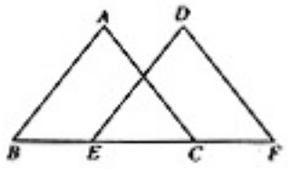
19. 探究8可以采取与探究2、探究3、探究5同样的处理方法. 一要介绍已知斜边和一条直角边画直角三角形的方法，二要通过画图和实验，使学生确信结论的正确性.

由探究8可以得到斜边和一条直角边对应相等的两个直角三角形全等. 可以用这个结论判定两个直角三角形全等. 为了让学生熟悉斜边、直角边条件，配备了例4，先证直角三角形全等，进而证两条线段相等.

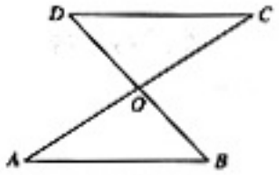
习题13.2

1. 第1～2题只证三角形全等. 其余各题要先证三角形全等，进而证线段或角相等. 第10题还要进一步由角相等得到线段平行.

2. 本节的习题要求按教科书的形式书写，使学生逐步掌握证明题的书写方法，有利于尽快



（第9题）

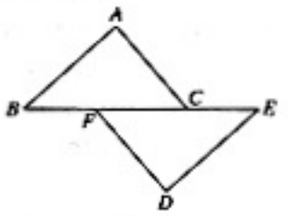


（第10题）

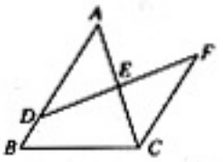
10. 如图，AC 和 BD 相交于点 O，$OA=OC$，$OB=OD$. 求证 $DC/\!/AB$.[1]

拓广探索 ▶▶

11. 如图，点 B，F，C，E 在一条直线上，$FB=CE$，$AB/\!/ED$，$AC/\!/FD$. 求证 $AB=DE$，$AC=DF$.



（第11题）



（第12题）

12. 如图，D 是 AB 上一点，DF 交 AC 于点 E，$DE=FE$，$FC/\!/AB$. AE 与 CE 有什么关系？证明你的结论.

[1] 让学生回忆与平行线有关的结论，第 10～12 题中要用到.

掌握证明.

3. 本节习题中图形变化包括了平移、对称、旋转等不同情况，教学时要引导学生观察分析图形，顺利完成证明.

[1] 本文采取师生对话的形式，吸引学生阅读.



阅读与思考　　选学

为什么要证明[1]



李老师：小明，我们知道三角形的内角和是180°，你能根据已学的知识证明这个结论吗？

小明：我们观察任意一个三角形，量出它的内角，都能得出它的内角和等于180°，为什么还要证明这个结论呢？

李老师：通过观察、试验等可以寻找规律，但是由于观察可能有误差，试验可能受干扰，考察对象可能不具一般性等原因，一般说由观察、试验等所产生的“结论”未必正确．例如，让一个班的学生每人任意画一个三角形，再量出它的每个内角，计算三个内角的和，得到的结果未必全是180°，可能有的会比180°大些，有的会比180°小些．

小明：如果观察细致，仪器精确，不产生误差，还需要证明吗？

李老师：仅通过观察、试验等就下结论有时也缺乏说服力．例如，即使不考虑误差等因素，当上面观察的所有结果全是180°时，人们还会有疑问：“不同形状的三角形有无数个，我们画出并验证的只是其中有限个，其余的三角形的内角和是多少呢？能对所有三角形都进行验证吗？”事实上，不管我们经历多长时间，画出多少个三角形，观察、试验的对象也是有限个．因此，要确认“三角形内角和等于180°”，就不能依靠度量的手段和观察、试验、验证的方法，而必须进行推理论证——从道理上得出“无论三角形的具体形状如何，它的内角和一定等于180°”．

小明：究竟什么是证明？它起什么作用？

李老师：一个命题是否正确，需要经过理由充足，使人信服的推理论证才能得出结论，这样的推理过程叫做“证明”．观察、试验等是发现规律的重要途径，而证明则是确认规律的必要步骤．



1. 为了使学生认识证明的必要性，教科书安排了这篇阅读材料，它以师生对话的形式结合具体例子介绍了逻辑推理的必要性.

2. 通过观察和实验，可以获得许多知识. 几何中研究的物体的形状、大小、位置关系等，许多都是通过观察得来的.

不过，从观察得到的认识，是初步的，往往是不全面的，不深入的. 如本文中的例子，观察一些三角形三个角的和，得到三角形的三个角的和等于180°的结论. 那么是不是所有的三角形都是这样的呢？为什么三角形的三个角的和必然等于180°呢？只用观察的方法就不够了，而要在观察的基础上，一步一步地，有根有据地说明理由，也就是要进行证明. 可通过这个例子的分析，使学生体会证明的必要性.

13.3 角的平分线的性质

探究

图 13.3-1 是一个平分角的仪器，其中 $AB=AD$，$BC=DC$. 将点 A 放在角的顶点，AB 和 AD 沿着角的两边放下，沿 AC 画一条射线 AE，AE 就是角平分线. 你能说明它的道理吗？[1]

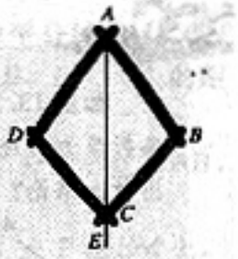


图 13.3-1

由上面的探究可以得出作已知角的平分线的方法.

已知：$\angle AOB$.

求作：$\angle AOB$ 的平分线.

作法：(1) 以 O 为圆心，适当长为半径作弧，交 OA 于 M，交 OB 于 N.

(2) 分别以 M、N 为圆心，大于 $\frac{1}{2}MN$ 的长为半径作弧，两弧在 $\angle AOB$ 的内部交于点 C.

(3) 作射线 OC. 射线 OC 即为所求 (图 13.3-2).

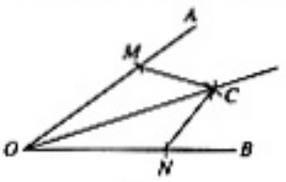


图 13.3-2

[1] 证明：在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADC$ 中，

$$\begin{cases} AB=AD, \\ BC=DC, \\ AC=AC, \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle ADC$ (SSS).

$\therefore \angle BAC=\angle DAC$.

$\therefore AE$ 是角平分线.

1. 本节首先介绍作一个角的平分线的方法，然后用三角形全等证明“角的平分线上的点到角的两边的距离相等”与“到角的两边的距离相等的点在角的平分线上”两个结论，并运用这两个结论进行证明.

2. 在全等三角形以后，再学习作一个角的平分线的方法，这时，由于懂得了道理，难度就会小些.

作一个角的平分线是最基本、最常用的作图之一. 用尺规作这种图，由于免去了度量，准确度更高，在平面几何的学习中和工程绘图中经常应用. 因此，通过本节的教学应使学生掌握这种作图.

在作法中，要让学生思考为什么要用大于 $\frac{1}{2}MN$ 的长为半径（因为在一般情况下，半径小于或等于 $\frac{1}{2}MN$ 的长时，两弧没有交点）. 另外，两弧的交点应在角的内部找，因为要作的是角的平分线.

3. 教科书通过折纸活动得到“角的平分线

[1] 作平角的平分线即可平分平角. 由此也得到过直线上一点作这条直线的垂线的方法.

练习答案略.

练习[1]

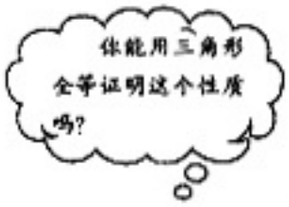
平分平角$\angle AOB$. 通过上面的步骤得到射线OC以后，把它反向延长得到直线CD. 直线CD与直线AB是什么关系?

探究

如图 13.3-3，将$\angle AOB$对折，再折出一个直角三角形（使第一条折痕为斜边），然后展开. 观察两次折叠形成的三条折痕，你能得出什么结论?



图 13.3-3



可以看出，第一条折痕是$\angle AOB$的平分线OC，第二次折叠形成的两条折痕PD，PE是角的平分线上一点到$\angle AOB$两边的距离，这两个距离相等.

由此我们得到角的平分线的性质：

角的平分线上的点到角的两边的距离相等.

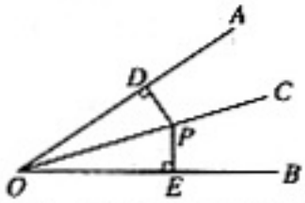
思考

如图 13.3-4，要在S区建一个集贸市场，使它到公路、铁路距离相等，离公路与铁路交叉处 500 米. 这个集贸市场应建于何处（在图上标出它的位置，比例尺为1∶20 000)?



图 13.3-4

上的点到角的两边的距离相等”的结论. 这个结论能用三角形全等证明. 可让学生如下先画图，写出已知、求证，再加以证明：



如图，OC是$\angle AOB$的平分线，点P在OC上，$PD\perp OA$，$PE\perp OB$，垂足分别是D、E. 求证$PD=PE$.

证明：$\because PD\perp OA$，$PE\perp OB$，

$\therefore \angle ODP=\angle OEP=90^\circ$.

在$\mathrm{Rt}\triangle ODP$和$\mathrm{Rt}\triangle OEP$中，

$$\begin{cases}\angle ODP=\angle OEP,\\ \angle DOP=\angle EOP,\\ OP=OP,\end{cases}$$

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ODP\cong \mathrm{Rt}\triangle OEP$ (AAS).

$\therefore PD=PE$.

自己证一证

我们知道，角的平分线上的点到角的两边的距离相等. 到角的两边的距离相等的点是否在角的平分线上呢？利用三角形全等，可以得到

到角的两边的距离相等的点在角的平分线上. [1]

根据上述结论，就知道这个集贸市场应建于何处了.

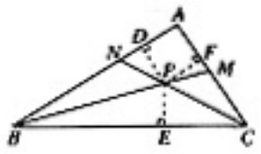


图 13.3-5

例　如图 13.3-5，$\triangle ABC$ 的角平分线 BM、CN 相交于点 P. 求证：点 P 到三边 AB、BC、CA 的距离相等.

证明：过点 P 作 PD、PE、PF 分别垂直于 AB、BC、CA，垂足为 D、E、F.

∵　BM 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，点 P 在 BM 上，

∴　$PD=PE$.

同理[2] $PE=PF$.

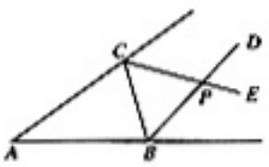
∴　$PD=PE=PF$.

即点 P 到三边 AB、BC、CA 的距离相等.

想一想，点 P 在 $\angle A$ 的平分线上吗？这说明三角形的三条角平分线有什么关系？[3]

练习

如图，$\triangle ABC$ 的 $\angle B$ 的外角的平分线 BD 与 $\angle C$ 的外角的平分线 CE 相交于点 P. 求证：点 P 到三边 AB、BC、CA 所在直线的距离相等.

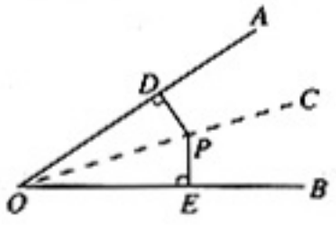


[1] 这个结论是从“角的平分线上的点到角的两边的距离相等”变来的. 它所说的点都是角内部的点. 目前我们不讨论角外部的点的情况.

[2] 如果证明的过程完全一样，只是字母不同，可以用“同理”两字概括，省略详细证明过程.

[3] 由点 P 在 $\angle A$ 的内部，$PD=PF$ 可知，点 P 在 $\angle A$ 的平分线上. 这说明三角形的三条角平分线交于一点.

3. 将“角的平分线上的点到角的两边的距离相等”的题设、结论互换，得到命题“到角的两边的距离相等的点在角的平分线上”. 也可以利用全等三角形证明这个命题正确. 可让学生如下先画图，写出已知、求证，再加以证明：



如图，$PD\perp OA$，$PE\perp OB$，垂足分别是 D、E，$PD=PE$. 求证点 P 在 $\angle AOB$ 的平分线上.

证明：经过点 P 作射线 OC.

$PD\perp OA$，$PE\perp OB$.

$\therefore \angle ODP=\angle OEP=90°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ODP$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle OEP$ 中，

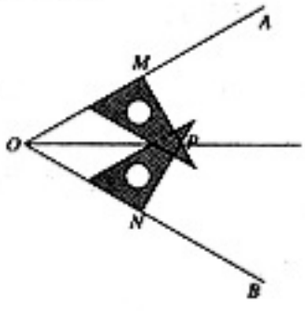
$$\begin{cases} OP=OP, \\ PD=PE, \end{cases}$$

[1] 学生可能会先证明 $\triangle AED \cong \triangle AFD$，得 $DE=DF$. 这实际上是重新证明了一次角的平分线的性质. 如果发现这种情况，要提醒学生直接利用角的平分线的性质，采取最简便的方法证明.

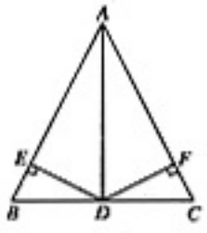
习题13.3

复习巩固

1. 用三角尺可按下面方法画角平分线：在已知的 $\angle AOB$ 的两边上，分别取 $OM=ON$，再分别过点 M、N 作 OA、OB 的垂线，交点为 P，画射线 OP，则 OP 平分 $\angle AOB$. 为什么？



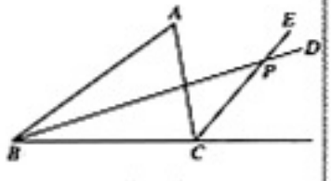
（第1题）



（第2题）

2. $\triangle ABC$ 中，AD 是它的角平分线，且 $BD=CD$，DE、DF 分别垂直 AB、AC，垂足为 E、F. 求证 $EB=FC$.[1]

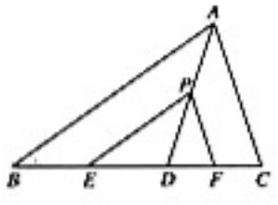
3. 如图，$\triangle ABC$ 的 $\angle B$ 的平分线 BD 与 $\angle C$ 的外角的平分线 CE 相交于点 P. 求证：点 P 到三边 AB，BC，CA 所在直线的距离相等.



（第3题）

综合运用

4. 如图，$\triangle ABC$ 中，AD 是它的角平分线，P 是 AD 上的一点，$PE/\!/AB$ 交 BC 于 E，$PF/\!/AC$ 交 BC 于 F. 求证：D 到 PE 的距离与 D 到 PF 的距离相等.



（第4题）

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ODP \cong \mathrm{Rt}\triangle OEP$（HL）.

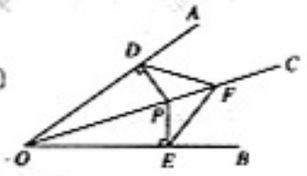
$\therefore \angle AOC=\angle BOC$.

$\therefore OC$ 是 $\angle AOB$ 的平分线.

4. “角的平分线上的点到角的两边的距离相等”与“到角的两边的距离相等的点在角的平分线上”是互逆定理. 逆定理的概念以后学，先不要向学生提这种说法. 但教学时要引导学生分析它们的题设、结论，通过比较，认识它们的区别. 以前已见过一些这样成对出现的命题（如两直线平行，内错角相等和内错角相等，两直线平行），以后还要学习许多这样的命题，使学生逐步加深理解和认识.

5. 本节例题实际上是证明三角形三条角平分线相交于一点的问题. 证明三线共点的问题可以转化为证明两条直线的交点在第三条直线上的问题. 由“角的平分线上的点到角的两边的距离相等”可得两条角平分线的交点到三角形三边的距离相等. 进一步，由“到角的两边的距离相等的点在角的平

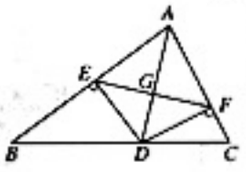
5. 如图，OC 是 $\angle AOB$ 的角平分线，P 是 OC 上的一点，$PD\perp OA$ 交 OA 于 D，$PE\perp OB$ 交 OB 于 E，F 是 OC 上的另一点，连接 DF，EF，求证 $DF=EF$.[1]



（第 5 题）

拓广探索 ▶▶

6. 如图，AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，$DE\perp AB$，$DF\perp AC$，垂足分别是 E、F，连接 EF，EF 与 AD 交于 G，AD 与 EF 垂直吗？证明你的结论.



（第 6 题）

[1] 可用“角的平分线上的点到角的两边的距离相等”证得 $PD=PE$. 再证明 $\angle DPF=\angle EPF$，从而 $\triangle DPF\cong\triangle EPF$.

分线上”可得，这个交点在第三条角平分线上. 这就证明了三角形的三条角平分线交于一点.

这时可以让学生回忆一下，七年级下册第七章画三角形的三条角平分线时，曾发现它们交于一点，现在从理论上给出了证明. 在九年级上册中，还将进一步说明这个交点的意义：它是三角形内切圆的圆心，叫做三角形的内心.

习题 13.2

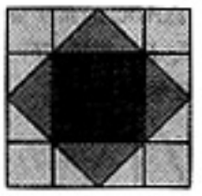
本节习题用来复习巩固本节所学的“角的平分线上的点到角的两边的距离相等”与“到角的两边的距离相等的点在角的平分线上”这两个结论. 学过这两个结论后，许多涉及到角的平分线的问题用这两个结论解决很方便. 但是由于学生对证明两个三角形全等的问题已经很熟悉了，所以证题时，不习惯直接应用这两个结论，仍然去找全等三角形，结果相当于重新证明了一次这两个结论. 所以要提醒学生，能用简单方法的，不要绕远路.

数学活动

活动 1

下图是两个根据全等形设计的图案．仔细观察一下，每个图案中有哪些全等形？有几种全等三角形？注意一下你的身边，哪些是全等形？哪些是全等三角形？各找几个例子与同学交流．





活动 2　测量旗杆的高度

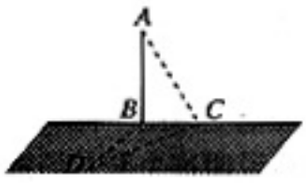
操场上有一根旗杆．你能利用一些简易工具，根据全等三角形的有关知识，测量出旗杆的高吗？



1. 活动 1 让学生观察一些含有全等形的图案，并收集一些全等形的例子，以复习巩固全等形的概念．

2. 活动 2 让学生根据全等三角形的知识测量旗杆的高度，可用如下办法．

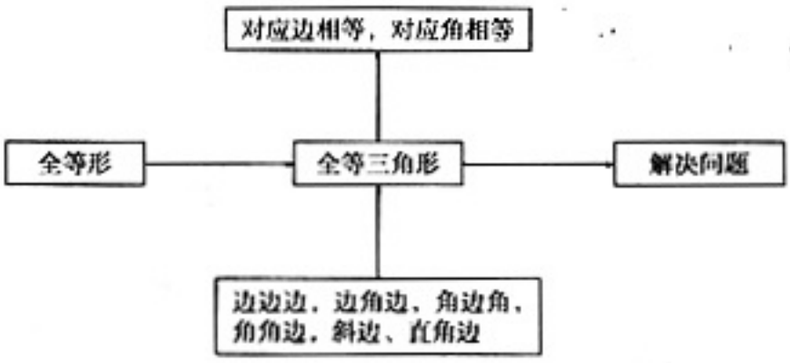
如图所示，要测量旗杆 AB 的高度，可利用三角尺使$\angle ACB=60°$．在地面上由点 C 出发沿与 BC 成 60°角的方向行走到点 D，使 $BD\perp BC$．由角边角条件可证得 $\triangle ABC\cong\triangle DBC$，所以 $AB=DB$．因此，量出 DB 的长就是旗杆 AB 的高度．



以后我们还会用学到的其他知识测量旗杆的高度．

小　结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

1. 举一些全等形的实际例子．全等三角形的对应边有什么关系？对应角呢？

2. 一个三角形有三条边，三个角．从中任选三个来判定两个三角形全等，哪些是能够判定的？哪些是不能够判定的？

3. 学习本章内容，可以解决一些实际问题，例如长度与角度的度量问题，就是从全等三角形对应边相等，对应角相等出发，设法形成满足全等条件的两个三角形，从而得到结果．

4. 学了本章，你对角的平分线有了哪些新的认识？你能用全等三角形证明角的平分线的性质吗？

5. 你能结合本章的有关问题，说一说证明一个结论的过程吗？

1. 本章学过几种判定三角形全等的判定方法．应把学过的方法进行总结，在对比中认清各种判定方法的条件，特别是已知两边和一角对应相等时，要注意两边与其中一边的对角对应相等，两个三角形不一定全等，三个角对应相等时，两个三角形也不一定全等．判定两个直角三角形全等还有一种特殊的方法：斜边和一条直角边对应相等的两个直角三角形全等．

2. 本章正式学习证明及综合法证明的格式，可结合具体例子，总结如何分析证题思路，用综合法的格式书写证明过程．

3. 注意复习本章中涉及的下面几种作图：

（1）已知三边作三角形；

（2）已知两边和它们的夹角作三角形；

（3）已知两角和它们的夹边作三角形；

（4）已知斜边和一条直角边作直角三角形；

（5）作角的平分线．

[1] 这道题用来复习巩固“到角的两边的距离相等的点在角的平分线上”这个结论. 证得 $DE=DF$ 后直接应用这个结论，不要再去找全等三角形证角相等.

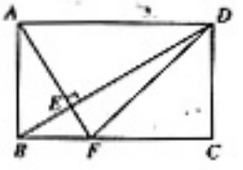
复习题13

复习巩固

1. 如图，其中含有三个正方形，图中有几种全等三角形？每种各有几个？



（第1题）



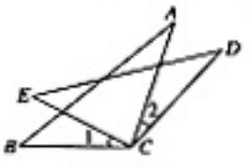
（第2题）

2. 如图，在长方形 $ABCD$ 中，$AF\perp BD$ 于 E，交 BC 于 F，连接 DF.

（1）图中有全等三角形吗？

（2）图中有面积相等但不全等的三角形吗？

3. 如图，$CD=CA$，$\angle 1=\angle 2$，$EC=BC$，求证 $DE=AB$.



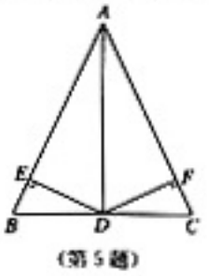
（第3题）



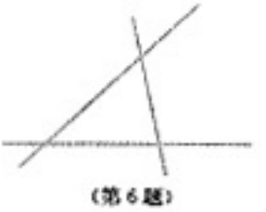
（第4题）

4. 如图，海岸上有 A，B 两个观测点，点 B 在点 A 的正东方，海岛 C 在观测点 A 的正北方，海岛 D 在观测点 B 的正北方，从观测点 A 看海岛 C，D 的视角 $\angle CAD$ 与从观测点 B 看海岛 C，D 的视角 $\angle CBD$ 相等. 那么海岛 C，D 到观测点 A，B 所在海岸的距离相等. 为什么？

5. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，D 是 BC 的中点，$DE\perp AB$，$DF\perp AC$，垂足分别是 E，F，$BE=CF$. 求证 AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线.[1]



（第5题）



（第6题）

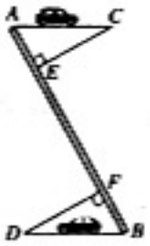
1. 第 1～2 题复习全等三角形的概念. 第 3～4 题，第 7～10 题复习用三角形全等的条件证题. 第 5～6 题，第 11 题复习角的平分线的性质.

2. 三角形全等的条件及其运用是复习的重点. 在第二节中，三角形全等的条件是一个一个出现的，而且每学过一个条件，紧接着就做关于这个条件的练习题，因此学生在证明两个三角形全等时，不用考虑运用哪个条件，一定是用刚学过的条件. 现在，要求他们根据题目的条件，同时结合求证什么结论，选择适当的方法，有一定困难. 教学时，要重点帮助学生学会分析，要求学生学会从不同角度去试探，不要怕碰壁，要善于总结规律，不断提高证题能力.

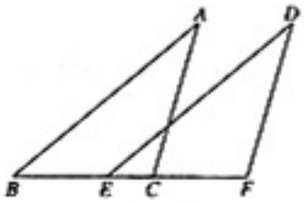
6. 如图，为了促进当地旅游发展，某地要在三条公路围成的一块平地上修建一个度假村．要使这个度假村到三条公路的距离相等，应在何处修建？

综合运用 ▶▶

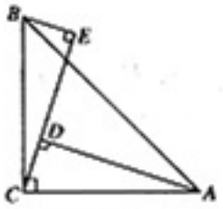
7. 如图，两车从路段 A，B 的两端同时出发，以相同的速度行驶，相同时间后分别到达 C，D 两地，两车行进的路线平行．那么 C，D 两地到路段 AB 的距离相等吗？为什么？



（第 7 题）



（第 8 题）



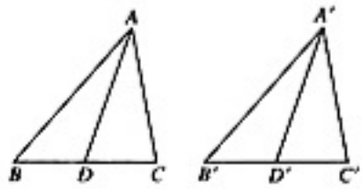
（第 9 题）

8. 如图，$AB=DE$，$AC=DF$，$BE=CF$．求证 $AB/\!/DE$，$AC/\!/DF$．

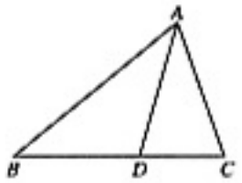
9. 如图，$\angle ACB=90°$，$AC=BC$，$BE\perp CE$，$AD\perp CE$ 于 D，$AD=2.5$ cm，$DE=1.7$ cm．求 BE 的长．

拓广探索 ▶▶

10. 如图，$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$，$AD$，$A'D'$ 分别是 $\triangle ABC$，$\triangle A'B'C'$ 的对应边上的中线，AD 与 $A'D'$ 有什么关系？证明你的结论．[1]



（第 10 题）



（第 11 题）

11. 如图，$\triangle ABC$ 中，AD 是它的角平分线．求证 $S_{\triangle ABD}:S_{\triangle ACD}=AB:AC$．
（提示：作 $DE\perp AB$，$DF\perp AC$，垂足分别为 E，F．）

[1] 本题实际上证明了全等三角形的一个性质：全等三角形对应边上的中线相等．

已知两个三角形全等，相当于已知它们的对应边相等，对应角相等．在证明过程中，可根据需要选取其中的一部分相等关系．

Ⅲ 习题解答

习题 13.1

1. 其他对应边：AC 和 CA. 对应角：$\angle BAC$ 和 $\angle DCA$，$\angle B$ 和 $\angle D$，$\angle ACB$ 和 $\angle CAD$.
2. 其他对应边：AN 和 AM，BN 和 CM. 其他对应角：$\angle ANB$ 和 $\angle AMC$，$\angle BAN$ 和 $\angle CAM$.
3. (1) 其他对应边：EG 和 NH，EF 和 NM. 其他对应角：$\angle E$ 和 $\angle N$，$\angle EGF$ 和 $\angle NHM$.
   (2) 由 $\triangle EFG \cong \triangle NHM$ 得 $NM=EF=2.1$ cm，$EG=NH=3.3$ cm.
   $HG=EG-EH=2.2$ cm.
4. 相等. 因为 $\triangle ABC \cong \triangle DEC$，所以 $\angle ACB=\angle DCE$. 由 $\angle ACB-\angle ACE=\angle DCE-\angle ACE$ 可得，$\angle BCE=\angle ACD$，即 $\angle ACD=\angle BCE$.

习题 13.2

1. 证明：在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$ 中，
   $$\begin{cases} AB=AD, \\ CB=CD, \\ AC=AC. \end{cases}$$
   $\therefore \triangle ABC \cong \triangle ADC$ (SSS).
2. 证明：$\because C$ 是 AB 的中点，
   $\therefore AC=CB$.
   在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle CBE$ 中，
   $$\begin{cases} AC=CB, \\ AD=CE, \\ CD=BE, \end{cases}$$
   $\therefore \triangle ACD \cong \triangle CBE$ (SSS).
3. 提示：证明 $\triangle ABE \cong \triangle ACD$.
4. 提示：只要测量 $A'B'$. 证明 $\triangle AOB \cong \triangle A'OB'$.
5. 提示：证明 $\triangle ABC \cong \triangle ABD$.
6. 提示：证明 $\triangle ACD \cong \triangle BCE$.
7. 提示：证明 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$.
8. 提示：先证 $\triangle ABC \cong \triangle DCB$ 得 $\angle ABC=\angle DCB$. 再证 $\angle ABD=\angle ACD$.
9. 提示：证明 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.
10. 提示：证明 $\triangle AOB \cong \triangle COD$.
11. 提示：证明 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.
12. 提示：证明 $\triangle ADE \cong \triangle CFE$.

习题 13.3

1. 提示：证明 $\triangle OMP \cong \triangle ONP$.
2. 提示：证明 $\triangle BDE \cong \triangle CDF$.
3. 提示：参照本节例题.

4. 提示：证明$\angle EPD=\angle FPD$.

5. 提示：证明$\triangle PDF\cong\triangle PEF$.

6. 提示：证明$\triangle DEG\cong\triangle DFG$.

复习题 13

1. 三种．每种各有两个．

2. (1) 有，$\triangle ABD\cong\triangle CDB$.

(2) 有，$\triangle ABD$ 和$\triangle AFD$.

3. 提示：证明$\triangle ABC\cong\triangle DEC$.

4. 提示：证明$\triangle ABC\cong\triangle BAD$.

5. 提示：证明$\triangle BDE\cong\triangle CDF$，得 $DE=DF$.

6. 提示：参照 13.3 节例题．

7. 提示：证明$\triangle ACE\cong\triangle BDF$.

8. 提示：证明$\triangle ABC\cong\triangle DEF$.

9. 0.8 cm. 提示：证明$\triangle ACD\cong\triangle CBE$.

10. 提示：证明$\triangle ABD\cong\triangle A'B'D'$.

11. 提示：用三角形面积公式．

Ⅳ 教学设计参考案例

13.1 全等三角形

教学任务分析

教学目标	知识技能	1. 了解全等形及全等三角形的概念. 2. 理解全等三角形的性质.
	数学思考	在图形变换以及实际操作的过程中发展学生的空间观念，培养学生的几何直觉.
	解决问题	学生经历观察、操作、探究、归纳、总结等过程，获得全等三角形的性质和寻找对应边与对应角的方法，能够运用全等三角形的性质解决简单的问题.
	情感态度	让学生在观察、发现生活中的全等形和实际操作中获得全等三角形的体验；在探究和运用全等三角形性质的过程中感受到数学活动的乐趣.
重点	探究全等三角形的性质.	
难点	掌握两个全等三角形的对应边、对应角的寻找规律，迅速正确地指出两个全等三角形的对应元素.	

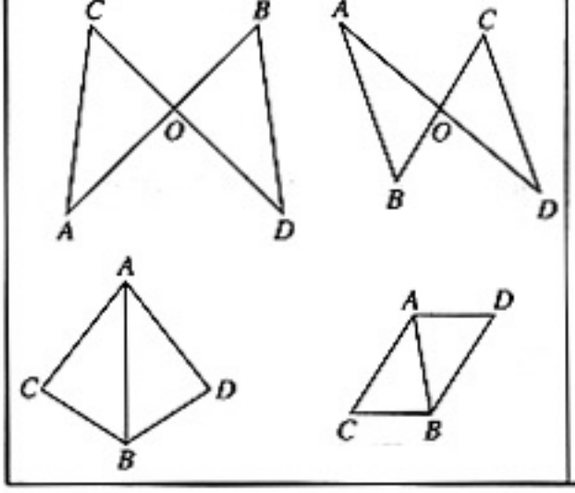
教学流程安排

活动流程图	活动内容和目的
活动 1　观察图形，实际操作，获得全等三角形的概念	观察、发现生活中形状与大小相同的图形，并动手剪出两个全等三角形纸板，获得全等形和全等三角形的体验，得到全等形和全等三角形的概念.
活动 2　观察平移、翻折、旋转后的两个图形	利用两个全等三角形纸板进行图形的平移、翻折、旋转实验，巩固全等三角形的概念.
活动 3　探究全等三角形的性质	通过图形变换实验，形成对应的概念，获得全等三角形的性质.
活动 4　全等三角形性质的运用	运用全等三角形的性质解决问题.
活动 5　小结，布置作业	回顾反思，进一步理解全等三角形的概念，掌握全等三角形的性质. 学生课后作业，巩固，提高.

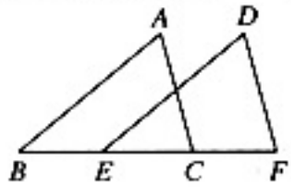
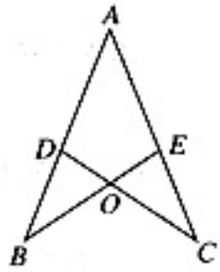
教学过程设计

问题与情境	师生行为	设计意图
「活动1」 问题 (1) 观察下列图案，指出这些图案中形状与大小相同的图形. (给出教科书章前图以及13.1引入图片) (2) 你能再举出生活中的一些实际例子吗?	教师演示课件（或展示图片），提出问题，学生观察、思考、交流. 学生思考、联想、发表见解. 教师可以举例，引导学生寻找生活中的实例，对学生提出的具有新意的例子要予以鼓励. (如同一底片冲洗出的相片、电脑对图形的复制等.) 教师结合章前图引出本章内容，板书课题.	运用贴近学生生活的图案激发学生探究的兴趣. 通过问题(1)，引导学生从图形的形状与大小的角度去观察图形.
(3) 将一块三角形样板按在纸板上，画下图形，照图形裁下纸板. 观察裁下的纸板和样板的形状、大小是否完全一样，能否完全重合.	教师提出要求，学生动手操作. 学生观察、实践，回答问题. 教师给出全等形的概念，引导学生得到全等三角形的概念. 本次活动中，教师应重点关注： (1) 学生观察、发现全等形、全等三角形的能力，举出的例子是否局限于某一范围，是否有新意； (2) 学生是否能够按要求裁下纸板，准确地重合纸板，并认真地进行观察.	图形全等在生活中大量存在，创设这样的问题情境，引起学生有意注意，激发学生主动思考和联想；引导学生进一步联系生活，激发探究欲望. 通过动手实践，获得全等形的体验.
「活动2」 问题 将剪得的两个三角形纸板重合放在图中$\triangle ABC$的位置上，试一试： (1) 如教科书图13.1-1，把$\triangle ABC$沿直线BC平移，得到$\triangle DEF$. (2) 如教科书图13.1-2，把$\triangle ABC$沿直线BC翻折180°，得到$\triangle BCD$.	教师提出要求. 学生用两个全等三角形纸板实践，教师用课件（或全等三角形纸板）展示. 教师提出问题. 学生猜测，发表见解，再得出结论.	通过学生动手尝试图形全等变换的过程，形成直观感觉.

续表

问题与情境	师生行为	设计意图
(3) 如教科书图 13.1-3，把△ABC绕顶点A旋转 180°得到△AED. 观察△ABC在平移、翻折、旋转过程中是否发生了改变？各图中的两个三角形全等吗？	本次活动中，教师应重点关注： (1) 对实践操作的理解； (2) 是否能体会到三角形的位置变化了，但经过平移、翻折、旋转后两个图形仍然全等.	通过学生动手实践、分析，总结出图形变换的本质，加深对图形变换的理解.
「**活动 3**」 问题 (1) 将两个三角形纸板完全重合，分别在顶点处标上字母，观察并指出重合的顶点、边和角. (2) 如何用数学符号表示两个三角形全等呢？ (3) 将两个三角形纸板重合在一起，观察对应边、对应角的关系.	教师提出问题. 学生实践，小组之间互相交流结论. 教师给出对应顶点、对应边、对应角的概念并板书. 教师提问，并通过演示，引导学生观察. 教师提问. 学生动手实践并回答. 教师引导学生得出全等三角形的性质并板书. 本次活动中，教师应重点关注： (1) 对应概念的理解； (2) 全等符号的书写； (3) 全等三角形性质的理解.	在操作实践的过程中建立对应的概念. 使学生掌握全等三角形的表达方式，会使用全等符号. 使学生在动手实践的过程中理解全等三角形的性质.
「**活动 4**」 问题 (1) 将剪得的两个全等三角形，按下列图形的位置摆一摆，使其符合下列图形；并指出它们的对应顶点、对应边、对应角.  	教师提问. 学生动手实践，独立回答. 全班交流. 教师观察学生对图形的理解程度.	使学生掌握对应边、对应角的找法，会初步辨析图形.

续表

问题与情境	师生行为	设计意图
(2) 将△ABC沿直线BC平移，得到△DEF，形成了以下图形：  观察图中线段、角之间的关系，说出你得到的结论，并说明理由？	教师提问. 学生分组探究. 教师巡回指导，观察学生能否发现AB与DE、AC与DF平行，BE与CF相等，然后加以引导，全班交流.	培养学生对较复杂图形的识别能力，进一步加深学生对全等三角形性质的理解.
(3) 如图，△ABE≌△ACD，AB与AC，AD与AE是对应边，已知：$\angle A=43°$，$\angle B=30°$，求$\angle ADC$的大小.  	教师提问. 学生独立思考回答. 教师给出解题过程. 本次活动中，教师应重点关注： (1) 学生是否能准确找出对应边、对应角； (2) 学生对全等三角形的性质的理解； (3) 同学之间的交流程度，活动的参与程度.	运用全等三角形的性质对较复杂图形进行探究，初步培养学生综合运用全等三角形性质的能力.
「**活动5**」 (1) 小结：谈谈本次活动的收获和体会. (2) 布置课后作业 必做题： 教科书第92页习题：1、2、3. 选做题： 教科书第92页习题：4.	学生分小组总结，代表发言. 教师布置作业，学生课后独立练习. 本次活动中，教师应重点关注： (1) 对知识的梳理、总结的习惯； (2) 小组合作学习的意识； (3) 学生对本节内容的理解程度； (4) 学生对全等三角形的情感认识.	加深学生对知识的理解，促进学生对课堂的反思. 巩固、提高、反思. 使各层次的学生得到不同的发展.

教学设计说明

本节内容是第13章的第一节，主要介绍全等三角形的概念和性质，让学生获得全等形和全等三角形的体验，建立对应的概念，掌握寻找对应边与对应角的方法，理解全等三角形的性质，为后面的学习打下基础.

本节课的设计注重学生的情感体验，重视学生学习兴趣的培养和几何直觉的建立. 利用章前图和日常生活中的实例，充分调动学生的学习热情；通过学生亲自动手实践，让学生充分感受到图形

变换过程，建立对应的概念，培养学生的几何识图能力；利用变式图形使学生掌握各种不同的图形中边、角的对应关系，突破本节课的难点.

本节涉及到的证明暂时不要求学生给出严格的证明，以免影响到对新知识的掌握，但是要求学生掌握三角形全等的书写. 作业布置采用分层布置，有利于不同层次的学生逐步掌握知识，体现了新教材的思想.

13.2 三角形全等的条件（第1课时）

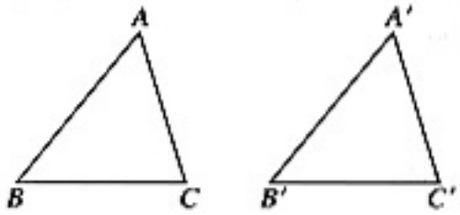
教学任务分析

教学目标	知识技能	1. 掌握“边边边”条件的内容. 2. 能初步应用“边边边”条件判定两个三角形全等.
	数学思考	使学生经历探索三角形全等的条件的过程，体验用操作、归纳得出数学结论的过程.
	解决问题	会运用“边边边”条件证明两个三角形全等.
	情感态度	通过探究三角形全等的条件的活动，培养学生合作交流的意识和大胆猜想、乐于探究的良好品质以及发现问题的能力.
重点	“边边边”条件.	
难点	探究三角形全等的条件.	

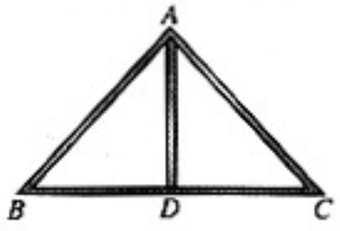
教学流程安排

活动流程图	活动内容和目的
活动1 提出问题，创设情境.	提出保证两个三角形全等需要几个条件，激发探究欲望.
活动2 探索两个三角形全等需要的条件.	让学生在实际操作中探索三角形全等的条件.
活动3 探究三条边对应相等的两个三角形全等.	按所给条件画三角形，得出规律（SSS）.
活动4 运用条件（SSS）证明两个三角形全等.	通过解决具体问题，加深对“边边边”条件的理解.
活动5 小结、布置作业	回顾本节课内容，反思总结.

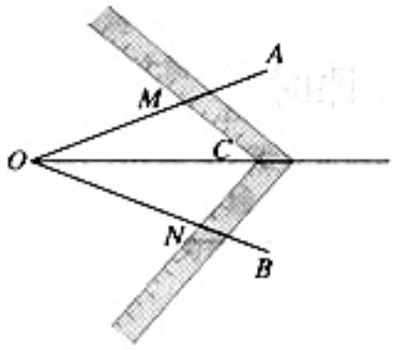
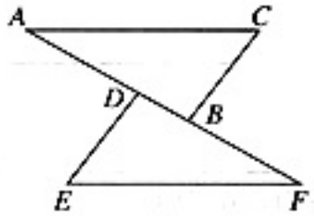
教学过程设计

问题与情境	师生行为	设计意图
「活动1」 问题 (1) 如果$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$，点$A$与点$A'$，点$B$与$B'$是对应顶点，试找出其中相等的线段和角. (2) 如果$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$满足三条边对应相等、三个角对应相等，即 $AB=A'B'$，$BC=B'C'$，$CA=C'A'$， $\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$，$\angle C=\angle C'$ 这六个条件就能保证两个三角形全等吗？  (3) $\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$全等是不是一定要六个条件呢？满足上述六个条件中的一部分是否就能保证两个三角形全等呢？	教师提问，引导学生回答，教师板书课题. 本次活动中，教师应重点关注： (1) 学生能否明确两个三角形满足六个条件就能保证三角形全等； (2) 学生是否有探究两个三角形全等所需条件的欲望.	明确探究方向，激发探究欲望.
「活动2」 问题 (1) $\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$满足上述六个条件中的一个有几种情形？满足上述六个条件中的两个有几种情形？ (2) 先任意画一个$\triangle ABC$，再画$\triangle A'B'C'$，使$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$满足上述六个条件中的一个或两个. 你画的$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$一定全等吗？试一试.	教师引导学生分别从“角”和“边”的角度分析一个条件、两个条件各有几种情形. 老师引导全班学生共同完成满足一个条件的情况的探究，然后指导学生分组操作，对满足两个条件的情况进行探究，并在组内进行交流、讨论. 教师深入小组参与活动，倾听学生的交流，并帮助、指导学生比较各种情况. 本次活动中，教师应重点关注： (1) 在比较活动中，学生是否分情况比较，进而得出只给出一个条件或两个条件时，所画的三角形不一定全等的结论； (2) 学生在活动和交流中的参与意识及发表个人见解的勇气.	通过学生实践，形成认知：只给出一个条件或两个条件不能保证所画的三角形一定全等. 让学生在合作学习中共同解决问题，使学生主动探究三角形全等的条件，培养学生分析、探究问题的能力.

续表

问题与情境	师生行为	设计意图
「活动3」 问题 (1) 满足上述条件中的三个条件，能保证$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$全等吗？我们可以分情况讨论，有哪几种情况？ (2) 我们先探究两个三角形三边分别对应相等这种情况： 先任意画一个$\triangle ABC$，再画$\triangle A'B'C'$，使$AB=A'B'$，$BC=B'C'$，$CA=C'A'$. (3) 你能画出满足上述条件的$\triangle A'B'C'$吗？应该怎样画呢？ (4) 把画好的$\triangle A'B'C'$剪下，放到$\triangle ABC$上，它们全等吗？ (5) 上面的探究反映了什么规律？ (6) 我们曾经做过这样的实验：将三根木条钉成一个三角形木架，这个三角形木架的形状、大小就不变了，你能解释其中的道理吗？	教师先提问，引导学生回答出满足三个条件的四种情况，老师再明确探究任务，指导学生进行画图探究，获取“SSS”条件. 在画图中，教师可先让学生试着画图，再让学生发现存在的问题，最后给出正确的画法. 在本次活动中，教师应重点关注： (1) 学生能否根据条件画$\triangle A'B'C'$使它的三边分别和$\triangle ABC$的三边对应相等； (2) 学生是否在与同伴交流的基础上以小组为单位通过观察、比较，发现规律； (3) 学生是否能够根据探究中发现的规律概括得出结论“SSS”； (4) 在阐述结论时，学生的语言是否规范.	让学生明确满足条件中的三个有哪几种情形，为以后学习埋下伏笔. 以学生画图活动为主线展开探究活动，注重“SSS”条件的发生过程和学生的亲身体验，从实践中获取“SSS”条件，培养学生探索、发现、概括规律的能力.
「活动4」 问题 例1　如图，$\triangle ABC$是一个钢架，$AB=AC$，AD是连接点A与BC中点D的支架. 求证$\triangle ABD\cong\triangle ACD$.  练习题：工人师傅常用角尺平分一个任意角. 做法如下：如图，$\angle AOB$是一个任意角，在边OA、OB上分别取$OM=ON$，移动角尺，使角尺两边相同的刻度分别与M、N重合，过角尺顶点C的射线OC便是$\angle AOB$的平分线. 为什么？	教师引导学生分析问题中的已知条件，以及两个三角形全等还需要的条件. 学生先独立思考，然后分析、讨论，相互交流. 教师板书过程. 本次活动中，教师应重点关注： (1) 学生对“SSS”条件的理解程度； (2) 学生是否能发现公共边AD. 学生独立分析，写出证明过程，全班交流. 在“练习”中，教师应重点关注： (1) 学生对“SSS”条件的熟练程度；	培养学生的逻辑推理能力，学会运用“SSS”条件判断三角形全等. 培养学生的独立分析能力，会运用“SSS”条件判断三角形全等，规范地书写证明过程.

续表

问题与情境	师生行为	设计意图
 思考题：如图，已知 $AC=FE$，$BC=DE$，点 A、D、B、F 在一条直线上，$AD=FB$. 要用“边边边”证明 $\triangle ABC\cong\triangle FDE$，除了已知中的 $AC=FE$，$BC=DE$ 以外，还应该有什么条件？怎样才能得到这个条件？ 	（2）学生的证明过程的书写是否规范. 在学生独立思考的基础上，教师指导学生观察图形，寻找隐含条件（等量之和相等），并强调已知条件包含两部分，一是图形直接给出的，二是图中隐含的. 在“思考”中，教师应重点关注： （1）学生是否会观察图形，根据证明的需要寻找隐含条件； （2）学生是否理解点 A、D、B、F 在一条直线上的必要性.	培养学生观察图形的能力和分析问题能力，会从问题中的条件出发，获得运用“SSS”条件所需要的条件.
「活动5」 小结 （1）从本节课的学习中你有何收获？ 作业 （1）教科书 103 页习题 13.2 第 1 题，第 2 题.	学生自我小结，谈感受，教师点评. 学生独立思考，把第 1 题，第 2 题做在作业本上，教师检查、批改. 本次活动中，教师应重点关注： （1）不同层次学生对知识的理解程度，有针对性地给予指导； （2）学生在练习中出现的问题，有针对性地讲解.	及时了解学生学习效果，调整教学安排. 通过独立思考，自我评价学习效果；学会反思，发现问题；并试着与同学交流解决问题，养成良好的学习习惯.

总体设计说明

本节课为第十三章第二节的第一课时，安排的教学内容为第二节三角形全等的条件中的三边对应相等的两个三角形全等（边边边）条件，及运用条件判断两个三角形全等.

教材安排的上述教学内容是在学习了全等三角形的概念、全等三角形的性质后展开的，在本节课中给学生提供探索交流的时间和空间，让学生充分感受探究三角形全等条件的过程，符合学生的认知过程.

教学设计上，强调自主活动，注重合作交流，让学生的学习在合作探究过程中进行，使他们在自主探究的过程中理解和掌握三角形的条件，并获得数学活动的经验，提高探究、发现和创新能力.

13.3 角的平分线的性质（第1课时）

教学任务分析

教学目标	知识技能	1. 掌握作已知角的平分线的方法. 2. 掌握角平分线的性质.
	数学思考	在探究作已知角的平分线的方法和角平分线的性质的过程中，发展几何直觉.
	解决问题	1. 提高综合运用三角形全等的有关知识解决问题的能力. 2. 初步了解角的平分线的性质在生活、生产中的应用.
	情感态度	在探讨作角的平分线的方法及角的平分线的性质的过程中，培养学生探究问题的兴趣，增强解决问题的信心，获得解决问题的成功体验，逐步培养学生的理性精神.
重点	角的平分线的性质的证明及运用.	
难点	角的平分线的性质的探究.	

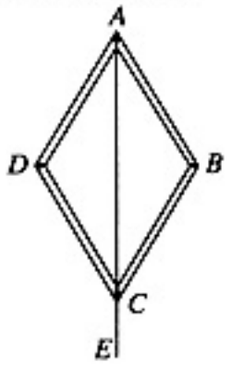
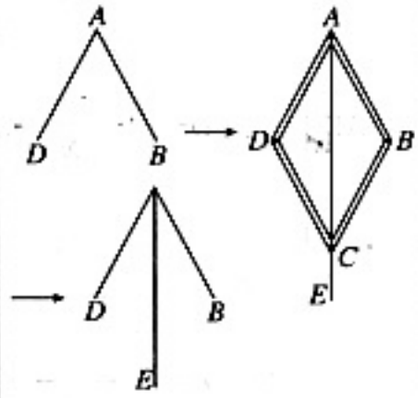
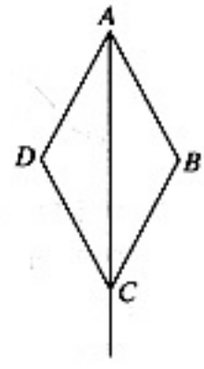
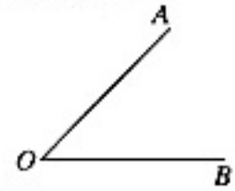
教学流程安排

活动流程图	活动内容和目的
活动1　探究与实验	通过探究与实验，掌握如何将一个角平分.
活动2　探索作已知角的平分线的方法	掌握角的平分线的作法.
活动3　探究角的平分线的性质	从探究角的平分线的性质的过程中培养学生的几何直觉.
活动4　实践与应用	运用三角形全等的有关知识，归纳、证明角的平分线的性质. 通过举例，证明角的平分线的性质在生活、生产中的应用，提高学生解决问题的能力.
活动5　小结与作业	总结、反思、提高.

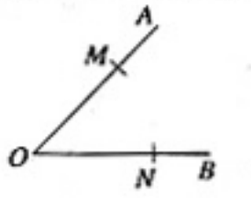
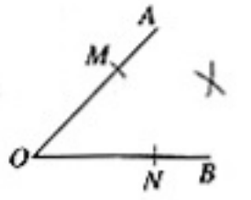
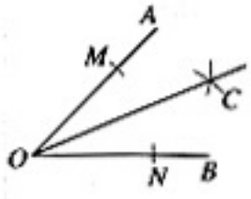
教学过程设计

问题与情境	师生行为	设计意图
「**活动1**」 问题 (1) 在纸上任意画一个角，用剪刀剪下，用折纸的方法，如何确定角的平分线?	学生实验： 通过折纸的方法作角的平分线.	回忆角的平分线的定义 掌握角的平分线的简易作法.

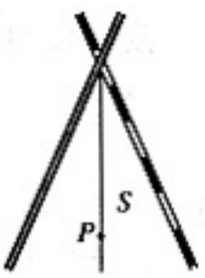
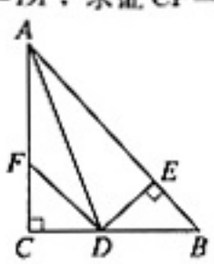
续表

问题与情境	师生行为	设计意图
（2）如何将一个角平分是一个有趣的实验课题. 有一个简易平分角的仪器（如图），其中 $AB=AD$，$BC=DC$，将 A 点放角的顶点，AB 和 AD 沿着角的两边放下，沿 AC 画一条射线 AE，AE 就是 $\angle BAD$ 的平分线，为什么？ 	教师课件展示实验过程.  学生将实物图抽象出数学图形.  学生独立运用三角形全等的方法证明 AE 是 $\angle BAD$ 的平分线. 本次活动中，教师应重点关注： （1）学生是否能从简易角平分仪中抽象出两个三角形； （2）学生能否运用三角形全等的条件证明两个三角形全等，从而说明线段 AE 是 $\angle BAD$ 的平分线.	说明用其他实验的方法可以将一个角平分. 培养学生的抽象思维能力和运用三角形全等的知识（SSS）解决问题的能力.
「**猜动2**」 问题 （1）从上面的探究中，可以得出作已知角的平分线的方法. 已知什么？求作什么？ （2）把简易平分角的仪器放在角的两边. 且平分角的仪器两边相等，从几何角度怎么画？	教师提问，学生与老师一起完成探究过程. 	从实验中抽象出几何模型，明确几何作图的基本思路和方法.

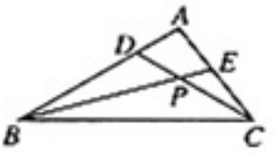
续表

问题与情境	师生行为	设计意图
(3) 简易平分角的仪器 $BC=DC$，从几何角度如何画？ (4) OC 与简易平分角的仪器中 AE 是同一条射线吗？	  	培养学生运用直尺和圆规作已知角的平分线的能力.
(5) 你能说明 OC 是 $\angle AOB$ 的平分线吗？ (6) 归纳角平分线的作法. (7) 作一个平角 $\angle AOB$，作出它的角平分线 OC，反向延长 OC 得到直线 CD. 你能说出直线 CD 与直线 AB 的关系吗？	学生独立说明. 学生相互讨论，交流，归纳. 学生独立作图，思考，发现直线 CD 与直线 AB 的关系. 本次活动中，教师应重点关注： (1) 学生是否能从简易角平分仪出发抽象出作一个已知角的平分线的方法； (2) 操作过程与书写是否统一； (3) 学生能否独立运用三角形全等的规律说明两个三角形全等； (4) 说明射线 OC 是 $\angle AOB$ 的平分线.	让学生掌握过直线上一点作已知直线的垂线的方法.
「探究3」 (1) 在用折纸的方法作角平分线时，将 $\angle AOB$ 对折，再折成直角三角形（使第一条折痕为斜边），然后再展开，观察两次折叠形成的三条折痕，两个直角三角形全等吗？两个直角三角形中的直角边 PD 和 PE 与角的两边 OA 和 OB 是什么关系？你能得出什么结论？	学生实验，参考教科书图 13.3.3.	从实验中探索、发现角的平分线的性质.

续表

问题与情境	师生行为	设计意图
(2) 你能归纳角的平分线的性质吗? (3) 你能用三角形全等证明这个性质吗?	学生分组讨论，教师引导得出结论. 学生分析已知条件，利用(AAS)证明. 本次活动中，教师应重点关注: (1) 学生能否从实验中探索、发现角的平分线的性质; (2) 学生能否独立运用三角形全等的条件证明两个三角形全等; (3) 说明射线 OP 是 $\angle AOB$ 的平分线.	培养学生的数学抽象概括能力及理性精神.
「活动4」 问题 (1) 你身边哪些现象运用到角的平分线?	学生独立思考或者相互交流，举出生活中的实际例子. 教师也可以给出一些事例，例如: 一个 S 区有一个贸易市场，在公路与铁路所成角的平分线上的 P 点，要从 P 点建两条路，一条到公路上，另一条到铁路上，怎样修建距离最短?这两条路有什么关系?画出来看一看.  	利用所学的数学知识，解决生活中的问题，加强数学与生活的联系，体验数学是描述现实世界的重要手段.
(2) 解决问题: ①如图:$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，AD 是 $\angle BAC$ 的平分线，$DE\perp AB$ 于 E，F 在 AC 上，$BD=DF$，求证 $CF=EB$.  	学生独立练习，同组同学交流，并推荐 1~2 名学生上黑板板演.	通过学生对角的平分线的知识进行独立练习，自我评价学习效果，及时发现问题、解决知识盲点，培养学生的创新精神和实践能力.

续表

问题与情境	师生行为	设计意图
②画一个任意三角形，并作出两个角的平分线，观察交点与这个三角形三条边的距离，你发现了什么？  	学生独立练习，同组同学交流，老师根据学生的学习情况适时加以指导，获得正确的结论. 本次活动中，教师应重点关注： (1) 不同层次的学生对角的平分线的性质的理解程度； (2) 对学生在练习中的问题进行针对性的分析、讲解.	
「**活动5**」 小结：我们这节课学习了哪些知识？有哪些运用？ 布置作业：教科书第110页习题第2、3题.	教师引导学生回顾. 学生练习，老师巡视，对个别学生加以指导. 教师重点关注： (1) 学生的归纳总结能力； (2) 能否对问题有进一步思考； (3) 能否发表自己的见解，倾听他人的意见，反思学习过程； (4) 学生对角的平分线的作法及角的平分线的性质的理解程度.	回顾，总结，矫正，提高.

教学设计说明

本节内容是第十三章第三节“角的平分线的性质”的第1课时，主要介绍角的平分线的作法和角的平分线的性质.

本案例从运用富有挑战性的学习材料——简易平分角仪器出发，提出了将一个已知角进行平分的方法，同时，从简易平分角仪器中，引导学生总结角的平分线的作法，并对结果运用三角形全等的知识加以证明，提高了学生运用知识解决问题的能力. 充分体现了学生自己动手，主动探索，合作交流的学习方式. 同时，通过折纸的方法，探索、归纳出角的平分线的性质，在证明角的平分线性质的基础上，把角的平分线的性质运用到实际生活中去，从解决问题的过程中提高学生综合运用知识的能力.

V 拓展资源

一、知识的拓广延伸及相关史料

1. 全等符号“≌”的起源

数学除了记数以外，还需要一套数学符号来表示数和数、数和形的相互关系.

数学符号的发明和使用比数字晚，现在常用的有 200 多个，初中数学书里就不下 20 多种. 它们都有一段有趣的经历.

十六世纪法国数学家维叶特用“=”表示两个量的差别. 可是英国牛津大学数学、修辞学教授列考尔德觉得，用两条平行而又相等的直线来表示两数相等是最合适不过的了，于是等于符号“=”就从 1540 年开始使用起来.

1591 年，法国数学家韦达在书中大量使用这个符号，才逐渐为人们接受. 十七世纪德国莱布尼广泛使用了“=”号，他还在几何学中用“∽”表示相似，用“≌”表示全等. 这就是全等符号“≌”的起源.

2. 三角形的五心

重心：三角形的三条中线交于一点，这点到顶点的距离是它到对边中点距离的 2 倍. 上述交点叫做三角形的重心.

外心：三角形的三边的垂直平分线交于一点. 这点叫做三角形的外心.

垂心：三角形的三条高交于一点. 这点叫做三角形的垂心.

内心：三角形的三内角平分线交于一点. 这点叫做三角形的内心.

旁心：三角形的一内角平分线和另外两顶点处的外角平分线交于一点. 这点叫做三角形的旁心. 三角形有三个旁心.

3. 三等分任意角问题

大约在公元前 5 世纪，古希腊巧辩学派的学者们提出并研究了三个几何作图问题. 其中之一就是将任意给定的角三等分.

两千多年来，历代数学家为了解决这个问题耗费了许多心血，但都遭到了失败. 值得注意的是，至今还有不少青少年数学爱好者盲目地致力于解决这个问题，那是白白地浪费精力. 事实上，这个问题早在上个世纪被严格证明为不可能用直尺、圆规经有限次的作图步骤来解决的问题. 具体说来，自 1637 年笛卡儿创立解析几何之后，尺规作图的可能性就有了判定准则. 到 1837 年万泽尔（Pierre Laurent Wantzel，1814—1848）首先证明了“三等分任意角”不可能尺规作图. 克莱因（Felix Klein，1849—1925）在 1895 年总结了前人的研究，给出这个问题不可能用尺规作图的简明证法，从而彻底解决了两千多年的问题.

当然，所谓不能三等分一角，是指不能一般地解决三等分角问题，而可以用尺规三等分的特殊角是存在的，例如 90°，45°，135°角等.

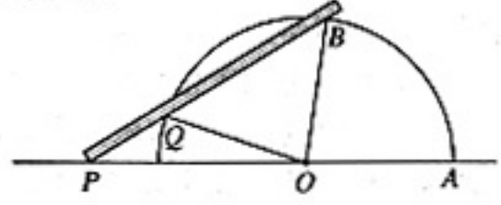


图 1

如果放开尺规作图条件的限制，三等分角的问题就很容易解决，古希腊的数学家阿基米德给出的最简单的三等分一角的方法：设所要等分的角为$\angle AOB$，如图 1，阿基米德取一直尺，其一端为点 P，另外，在该尺边缘上再取一点 Q，以 O 为圆心，PQ 长为半径作圆，交$\angle AOB$ 的两边于点 A、B. 让点 P 在OA 的反向延长线上移动，点 Q 在圆上移动，当尺刚好通过点 B 时，画出直线 PQB，这时不难证明

$$\angle APB=\frac{1}{3}\angle AOB.$$

阿基米德在直尺上标上了一点 Q，这等于利用了直尺上的刻度，因此根本不能作为尺规作图. 仅仅是“加上一点”，就把本来无法解决的问题很轻松地解决了. 阿基米德不愧为“数学之神”.

为了解决三等分角问题，人们设计了许多机械装置、联动机械和复合圆规. 当然，它们都违反了尺规作图的规定. 三等分一角问题的研究也曾对数学的发展起过一定的作用. 16 世纪法国数学家韦达就是在研究三等分一角的基础上，得到了三次方程的三角解法.

参考资料

【1】七市高中选修教材编号委员会编著　数学史话　生活·读书·新知三联书店

4. 数学中的推理、逻辑与证明

数学中的推理方法有归纳推理和演绎推理. 我们看到这两种方法都有用处，但是各有缺点，归纳推理能用以发现新的东西，但如果所考虑的事例并不具有代表性，或者被误解了，那么就可能推得错误的结论. 演绎推理能用以产生正确的结论，但必须从正确的假定出发. 在数学中经常一起使用这两种方法：用归纳法去导出可接受的假设，用演绎法从假设去推导正确的结论.

人类最初的数学知识是由归纳法得到的. 远古的埃及人和巴比伦人，通过观察和实验获得了许多数学知识，并把这些数学知识应用于他们的日常生活之中. 古希腊人对哲学和逻辑很有兴趣，十分强调推理. 他们接受了一些基本的数学假设，然后从这些假设出发，用演绎法证明了大部分我们今天知道的几何定理. 所以，演绎证明是数学的一个重要部分.

从古希腊的时代起，演绎法就成为数学中最重要的一种推理方法. 但是，数学家们像其他科学家一样，仍然通过预感、想象、类比、推测、实验等各种方法继续发现新的思想，然后他们为了验证新的思想确实成立，苦心作成严格的证明. 这种严格的形式证明完全不同于想象. 他们应用假设、定义和先前已证明过的命题去证明新的命题. 通过他们决不说：“如此这般是正确的”，而是说，“如果 A 成立，那么 B 成立”. 他们了解，结论 B 依赖于作为出发点的假设 A，而且可能只在数学的世界里是成立的，在物理世界里可能没有明显的应用或解释. 例如两个波兰数学家，斯蒂凡·巴拿赫与艾尔弗雷德·塔斯基，从数学观点用一种逻辑证明了：一粒豌豆大小的固体球能够分割成有限多数目的薄片，然后装配成太阳大小的一个球！难怪数学被认为是一门不寻常的科学.

参考资料

【1】[英] D. A. 约翰逊 W. H 格伦 著　大家学数学　科学出版社

5. 吴文俊和机器证明

吴文俊是我国当代的著名数学家，中国科学院院士. 他研究的几何定理的机器证明旨在寻求一般性的方法，它不仅适用于个别的定理，而且适用于整个某一类型的定理，甚至可以说是某一种几何的所有定理. 只要依照他所述的方法机械地进行，在有限步之后，就可对整个一类定理得到统一的证真和证伪，而无分难易. 要做到这一点，必须通过以数量关系为主的代数方法，而几何的代数化乃是关键性的一步.

吴文俊不仅论述了初等几何机械化的原理与方法，还研究了这些理论与方法在计算机上的具体实施，其中包括程序的编制，计算量的估计，具体定理的证明，新定理的发明以及几何的理论和方法对计算机使用效率的改进与各种应用等等. 后来，他还致力于研究微分几何的机械化问题以及各种有关的理论问题.

吴文俊关于机器证明的成果已引起国内外逻辑学家和人工智能学者的高度重视. 此外，他还致力于中国古代数学史的研究. 1983 年，吴文俊当选为中国数学会理事长，这是继华罗庚之后的第二任理事长.

参考资料

【1】郭熙汉　刘知海　刘健，数学知识探源，湖北教育出版社

二、拓展性问题

1. 关于“边边角”的讨论

我们已经知道：“有两边和一角对应相等的两个三角形全等”是假命题，如图 2 中，虽 $AB=A'B'$，$AC=A'C'$，$\angle B=\angle B'$，但$\triangle ABC$ 与$\triangle A'B'C'$不全等. 那么，如何处理安排这三个条件，这两个三角形就全等了呢？比如“已知角为已知两边夹角时，这两个三角形全等”，请你对三个条件或三角形的形状给些必要的限制使得具备两边和一角对应相等的两个三角形全等.

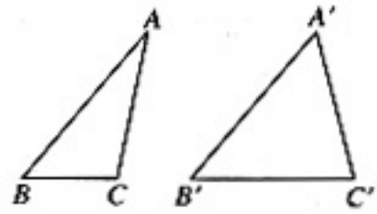


图 2

【答案与提示】

(1) 已知角为已知两边夹角时，这两个三角形全等.

(2) 已知角为已知两边中的一边的对角且这个角为直角时，两个三角形全等.

(3) 已知角为已知两边中的一边的对角且这个角为钝角时，两个三角形全等.

(4) 若已知两边相等时，两个三角形全等.

(5) 已知角的对边为已知两边中的大边时，两个三角形全等.

2. 哪辆车先到达指定站？

图 3 是城市部分街道示意图，$AB=BC=AC$，$CD=CE=DE$，A、B、C、D、E、F、G 为公汽“停靠点”，甲公汽从 A 站出发，按照 A、H、G、D、E、C、F 的顺序到达 F 站，“乙公汽”从 B 站出发，沿 F、H、E、D、C、G 顺序到达 G 站，如果甲、乙分别从 A、B 站出发，在各站耽误时间相同，两车速度也一样，哪一辆公汽先到达指定站？为什么？

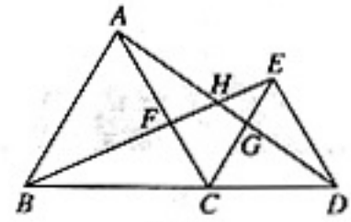


图 3

【答案与提示】 可以证明$\triangle ACD\cong\triangle BCE$，$\triangle FCE\cong\triangle GCD$，这样 $AH+HG+GD=BF+FH+HE$，$DE+EC=ED+DC$，$CF=CG$，所以两辆公汽同时到达指定站.

3. 图形的分割

图 4 是一个正方形和另半个正方形结合而成的图形，现要 4 等分为同一形状，如何分？

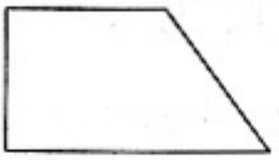


图 4

【答案与提示】 参考方法：如图 5 所示.

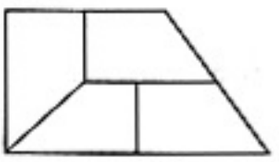


图 5

4. 拼等边三角形

使用 6 枝火柴棒能否拼成 4 个以火柴棒为边长的正三角形？试试看.

【答案与提示】 拼成以火柴棒为棱的正三棱锥.

5. 剪一剪，填一填

如图 6，将标号为 A、B、C、D 的正方形沿图中的虚线剪开后得到标号 P、Q、M、N 的四组图形. 试按照“哪个正方形剪开后得到哪组图形”的对应关系，填空：

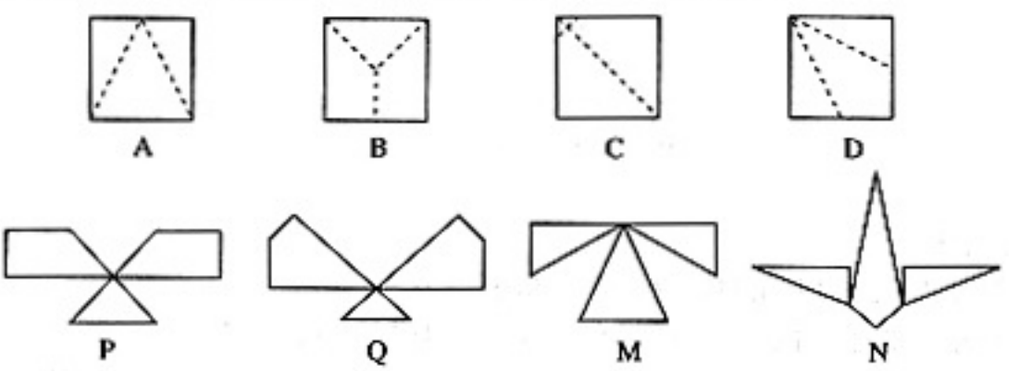


图 6

A 与____对应，B 与____对应，C 与____对应，D 与____对应.

【答案与提示】 A 与 M 对应，B 与 P 对应，C 与 Q 对应，D 与 N 对应.

6. 如何测量不可直接到达两点的距离

在某市郊的一空旷地上有一个较大的圆形土丘，经分析判断很可能是一座王储陵墓，请你应用所学知识设计一种方案，能用皮尺量出不能直接到达的 A、B 两点的距离（只要求说明设计方案和说明这种设计方案的根据并画出草图，不要求设数据计算）



图 7

【答案与提示】 答案不唯一. 例如：求土丘宽 AB. 可在平地上选取一个可直接到达 A 和 B 的点 C，连接 AC 并延长到 D，使 $CD=CA$，连接 BC 并延长到 E，使 $CE=CB$，连接 DE，那么量出 DE 的长，就是 A、B 的距离.

7. 巧妙的加工

世界著名魔术大师兰迪有个小故事，他有一块边长为 13 分米的正方形地毯，想把它改成 8 分米宽，21 分米长的地毯，于是，他找来一位工匠，请他加工. 大家想一想，本来地毯面积是 $13\times13=169$，加工后地毯的面积是 $8\times21=168$，这位工匠，当然无法完成. 于是，他对兰迪说："先生，我不是魔术师，恕我无法加工." 这时，聪明的兰迪教他按图 8 中的方法割成四块，再重新拼凑一下，就得到了一块 8×21（平方分米）的地毯（如图 8）. 兰迪不愧为魔术大师，169 平方分米分明比 168 平方分米大，这差数 1 平方分米变到哪里去了呢?

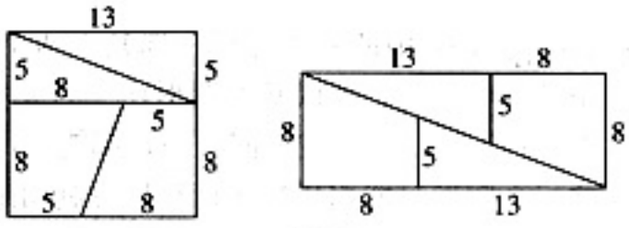


图 8

【答案与提示】 读者如果自己动手，用硬纸剪割拼凑一下，也许会发现，当你将剪下的四个小块拼成长方形时，在对角线中段会出现微小的重叠，正是这种重叠，造成面积的误差. 十分奇妙，上面切割拼凑过程中碰到的四个数字 5，8，13，21 正好是裴波纳契数，并且 $13^2=8\times21+1$，$8^2=5\times13-1$. 看来，兰迪掌握了裴波纳契数列的一条重要性质：

$$F_n^2=F_{n+1}\cdot F_{n-1}+(-1)^{n-1}(n\geqslant2).$$

8. 八等分正方形

有一个正方形的花坛，现要将它分成面积相同的八块，分别种上不同颜色的花.

(1) 如果要求这样分成的八块的形状也相同. 请你画出几种设计方案；

(2) 为了画出更多的设计方案，你能从中找出一些规律吗?

(3) 如果要求八块中的每四块形状相同，应如何设计? 试尽可能精确地画出你的创意.

【答案与提示】

(1) 图 9 提供了部分设计方案：

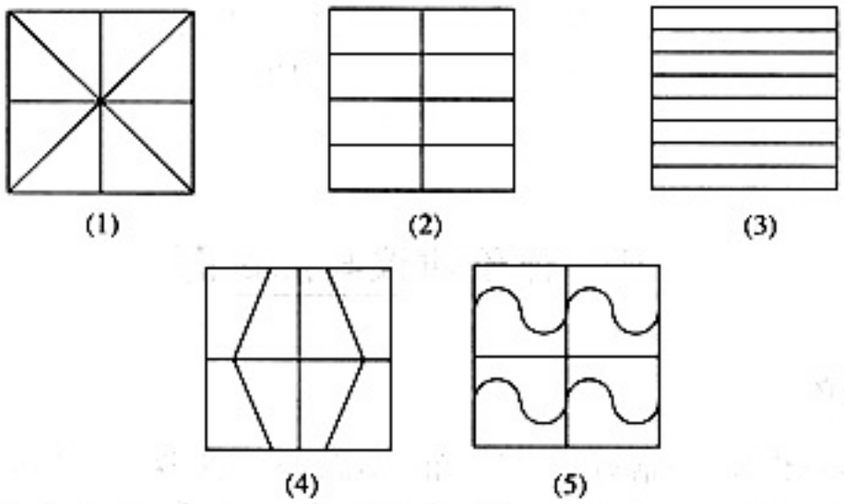


图 9

(2) 我们发现：图 9 中的 5 个图都是由图 10 中的 5 种基本图形拼成的，如果我们考虑用 8 个相同的基本图形拼成一个正方形的各种不同拼法，那么就能画出更多的设计方案. 在这里我们注意：图 10 并没有画出所有可能的基本图形，因此寻找更多的基本图形也就成为一个富有创意的问题. 而沿着这条解题思路走下去，我们将会得到各种各样的问题，发现一个五彩缤纷的世界，我们把这

种“曲径通幽处”的感受留给您去亲身体验：

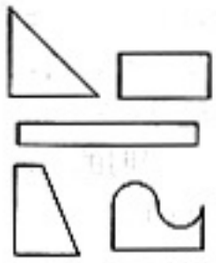


图 10

（3）一种比较自然的思路是：用图 10 中的基本图形，选其中两个（每个用 4 遍）拼成一个正方形，但应该注意的是现在的条件已经放宽，所以基本图形比原来要多得多，图 11 给出部分设计方案供参考. 其中除了图 11（6）、（7）、（10）这三个图形外，都能用尺规作图的方法精确地作出图形，而对于（6）、（7）、（10）这三个图形只能用代数式计算后再利用刻度尺作出近似的图形.

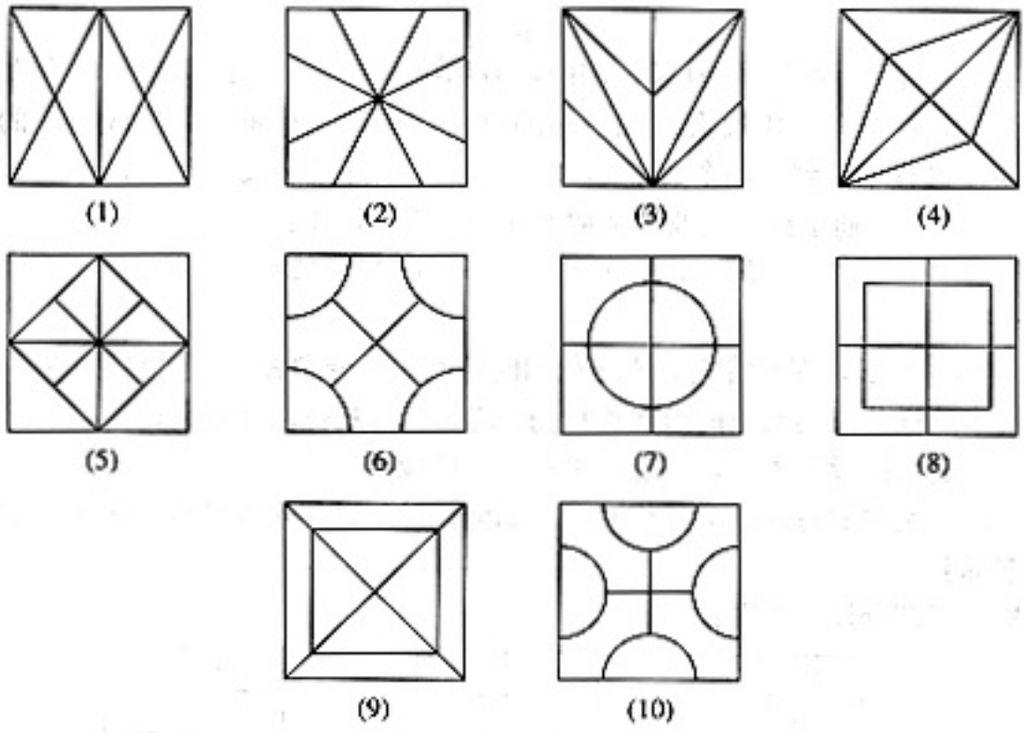


图 11

Ⅵ 评价建议与测试题

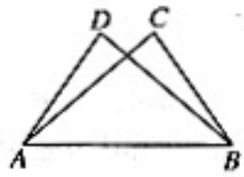
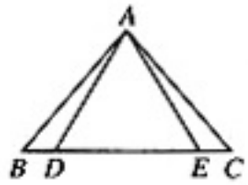
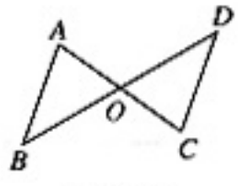
一、评价建议

1. 关注学生在本章数学学习活动中全等三角形概念的建立和探究三角形全等的条件的过程.

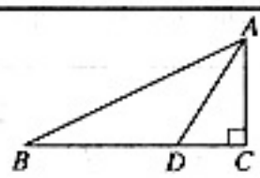
2. 对知识与技能的评价应侧重于在三角形全等的判定、性质和角的平分线性质的运用上，同时还要有一定的数量的实际问题.

3. 在掌握知识的同时，关注学生在观察、思考、探究、交流活动中主动参与的程度以及交流的意识. 例如：设计一些开放性，探究性的问题，写心得体会，通过交流进行评价.

二、测试题（时间：45 分钟，满分 100 分）

内　容	设计意图
一、选择题（每小题 4 分，共 20 分） **1.** 如图，$\triangle ABC\cong\triangle BAD$，点 A 和点 B，点 C 和点 D 是对应点，如果 $AB=6$ cm，$BD=5$ cm，$AD=4$ cm，那么 BC 的长是（　　） (A) 4 cm　　(B) 5 cm (C) 6 cm　　(D) 无法确定  （第 1 题）	本题意在考查全等三角形对应边的确定和全等三角形的性质（对应边相等）.
2. 如图，$\triangle ABE\cong\triangle ACD$，$AB=AC$，$BE=CD$，$\angle B=50°$，$\angle AEC=120°$，则 $\angle DAC$ 的度数等于（　　） (A) 120°　　(B) 70° (C) 60°　　(D) 50°  （第 2 题）	本题意在考查全等三角形对应角的确定和全等三角形性质对应角相等.
3. 使两个直角三角形全等的条件是（　　） (A) 一锐角对应相等　　(B) 两锐角对应相等 (C) 一条边对应相等　　(D) 两条边对应相等	本题意在考查用“SAS”判定两个三角形全等和用“HL”判定两个直角三角形全等的方法.
4. 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中，已知 $\angle A=\angle A'$，$AB=A'B'$，在下面判断中错误的是（　　） (A) 若添加条件 $AC=A'C'$，则 $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$ (B) 若添加条件 $BC=B'C'$，则 $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$ (C) 若添加条件 $\angle B=\angle B'$，则 $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$ (D) 若添加条件 $\angle C=\angle C'$，则 $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$	本题意在考查对三角形全等判定条件（SSS、SAS、ASA、AAS）全面把握的情况和识别能力.
5. 某同学把一块三角形的玻璃打碎成了 3 块，现在要到玻璃店去配一块完全一样的玻璃，那么最省事的方法是（　　） (A) 带①去　　(B) 带②去 (C) 带③去　　(D) ①②③都带去  （第 5 题）	本题意在考查判定三角形全等的条件（ASA）及数学在生活中的应用意识.
二、填空题（每小题 4 分，共 16 分） **6.** 如图，AC，BD 相交于点 O，$\triangle AOB\cong\triangle COD$，$\angle A=\angle C$，则其他对应角分别为_____，对应边分别为_____.  （第 6 题）	本题意在考查全等三角形的对应元素的辨认.

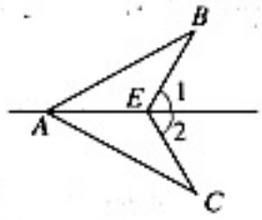
7. 如图，在△ABC中，$\angle C=90^\circ$，AD平分$\angle BAC$，$BC=10$ cm，$BD=6$ cm，则点D到AB的距离为_____.



（第7题）

本题意在考查对角的平分线性质的掌握情况.

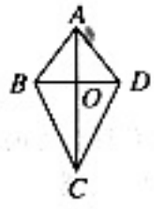
8. 如图，$\angle 1=\angle 2$，要使△ABE≌△ACE，还需添加一个条件是_____（填上你认为适当的一个条件即可）.



（第8题）

本题具有开放性，属条件开放题，考查三角形全等判定的知识；思维发散能力和思维的全面性.

9. 如图，$AC\perp BD$于O，$BO=OD$，图中共有全等三角形_____对.

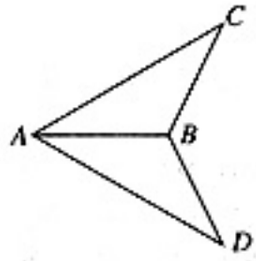


（第9题）

本题意在考查判定三角形全等条件的综合运用、全等三角形的性质及观察能力、抽象思维能力.

三、**证明题**（每题12分，共36分）

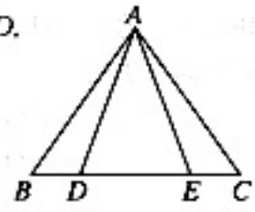
10. 如图，$AC=AD$，$BC=BD$，图中有相等的角吗？请找出来，并说明你的理由.



（第10题）

本题意在考查根据已知条件证明两个三角形全等；利用全等三角形证明角相等的方法.

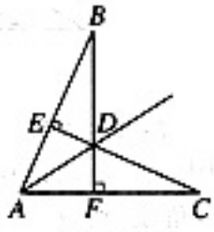
11. 如图，D、E在BC上，且$BD=CE$，$AD=AE$，$\angle ADE=\angle AED$. 求证$AB=AC$.



（第11题）

本题意在考查寻找隐含条件，推出所需要的条件，证明两个三角形全等；并利用全等三角形证明线段相等的方法.

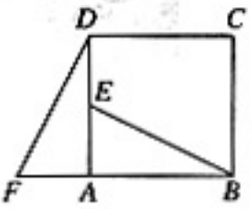
12. 如图，$BD=CD$，$BF\perp AC$，$CE\perp AB$. 求证：点D在$\angle BAC$的平分线上.



（第12题）

本题意在考查观察图形，探索选择适当的判定三角形全等的方法.

续表

四、试试看（14 分） 13. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，E 是 AD 的中点，F 是 BA 延长线上一点，$AF=\frac{1}{2}AB$，已知 $\triangle ABE\cong\triangle ADF$. （1）在图中，可以通过平移、翻折、旋转中哪一种方法，使 $\triangle ABE$ 变到 $\triangle ADF$ 的位置； （2）线段 BE 与 DF 有什么关系？证明你的结论.  （第 13 题）	本题意在考查对平移、翻折、旋转的理解；合理猜想、探索，推理、论证能力也在考查之中.
五、做做看（14 分） 14. 请用三角形全等的知识自行设计一种测量底部不可到达的物体的宽度（如河宽）的方案.	本题是一道开放性试题，意在考查学生对本章知识的综合运用能力；同时考查将实际问题转化为数学问题和解决问题的能力.

测试题答案

1. A.
2. B.
3. D.
4. B.
5. C.
6. $\angle B$ 与 $\angle D$，$\angle AOB$ 与 $\angle COD$；AO 与 CO，BO 与 DO，AB 与 CD.
7. 4 cm.
8. $\angle BAE=\angle CAE$ 或 $BE=CE$ 或 $\angle B=\angle C$.
9. 3.
10. 有，它们是 $\angle BAC=\angle BAD$，$\angle CBA=\angle DBA$，$\angle C=\angle D$. 提示：证明 $\triangle ABC\cong\triangle ABD$.
11. 提示：证明 $\triangle ADB\cong\triangle AEC$（SAS）
12. 提示：证明 $\triangle DEB\cong\triangle DFC$.
13. （1）图中是通过绕点 A 旋转 90°，使 $\triangle ABE$ 变到 $\triangle ADF$ 位置的.
    （2）$BE=DF$，$BE\perp DF$.
    提示：延长 BE 交 DF 于 G，由 $\triangle ABE\cong\triangle ADF$ 有 $BE=DF$，$\angle ABE=\angle ADF$. 又 $\angle AEB=\angle DEG$，$\therefore\angle DGB=\angle DAB=90°$. $\therefore BE\perp DF$.
14. 答案不唯一. 例如：求河宽 AB. 可在平地上选取一个可直接到达 A 和 B 的点 C，连接 AC 并延长到 D，使 $CD=CA$，连接 BC 并延长到 E，使 $CE=CB$，连接 DE，那么量出 DE 的长，就是 A、B 的距离.

第十四章 轴对称

Ⅰ 总体设计

一、课程学习目标

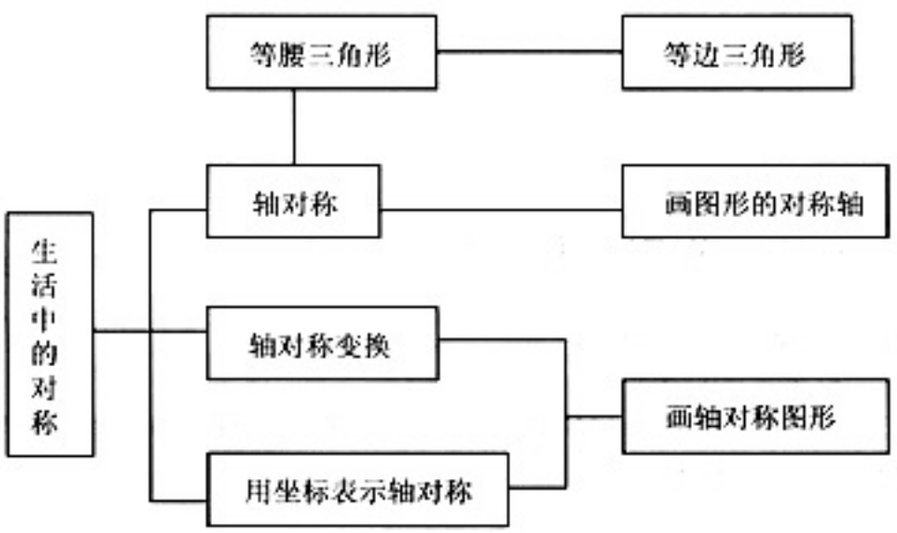
1. 通过具体实例认识轴对称、轴对称图形，探索轴对称的基本性质，理解对应点连线被对称轴垂直平分的性质.

2. 探索简单图形之间的轴对称关系，能够按照要求作出简单图形经过一次或两次轴对称后的图形；认识和欣赏轴对称在现实生活中的应用，能利用轴对称进行简单的图案设计.

3. 了解线段垂直平分线的概念，探索并掌握其性质；了解等腰三角形、等边三角的有关概念，探索并掌握它们的性质以及判定方法.

4. 能初步应用本章所学的知识解释生活中的现象及解决简单的实际问题，在观察、操作、想象、论证、交流的过程中，发展空间观念，激发学习空间与图形的兴趣.

二、本章知识结构框图



三、内容安排

本章的主要内容是从生活中的图形入手，学习轴对称及其基本性质，欣赏、体验轴对称在现实生活中的广泛应用. 在此基础上，利用轴对称变换，探索等腰三角形的性质，学习它的判定方法，并进一步学习等边三角形.

轴对称是现实生活中广泛存在的一种现象，是密切数学与现实联系的重要内容. 在本章第一小节“轴对称”中，教科书立足于学生的生活经验和数学活动经历，从观察现实生活中的对称现象开始，引出轴对称图形和图形的轴对称的概念，从整体上概括出轴对称的特征. 结合探索对称点的关系，归纳得出对应点连线被对称轴垂直平分的性质，并结合这一性质的得出，讨论了垂直平分线的

性质定理及其逆定理. 接下来，在第 2 小节“轴对称变换”中，通过观察一系列的图形，引出了轴对称变换并归纳了其特征，通过作轴对称图形、简单的图案设计、确定最短路线等活动，让学生进一步体会轴对称的应用价值和丰富内涵. 用坐标表示轴对称，从数量关系的角度刻画了轴对称变换. 教科书从观察和实验入手，归纳得出坐标平面上一个点关于 x 轴或 y 轴对称的点的坐标的规律，并进一步探讨了如何利用这种规律在平面直角坐标系中作出一个图形关于 x 轴或 y 轴对称的图形.

等腰三角形是一种特殊的三角形，它除了具有一般三角形的所有性质外，还有许多特殊的性质. 由于它的这些特殊性质，使它比一般三角形应用更广泛. 而等腰三角形的许多特殊性质，又都和它是轴对称图形有关，这也是教科书把这部分内容安排在本章的一个重要原因. 在本章第 3 小节“等腰三角形”中，利用等腰三角形的轴对称性，得出了“等边对等角”“三线合一”等性质，并进一步讨论了等腰三角形的判定方法以及等边三角形的性质与判定方法的内容.

在本章，轴对称的性质是本章的重点，其他轴对称变换的应用，利用轴对称设计图案，用坐标表示轴对称等都是围绕这一性质进行的，要注意让学生掌握. 另外，等腰三角形的性质和判定也是本章的重点，它们是证明线段和角相等的重要根据，应用也比较广泛，也要注意让学生掌握.

按照整套教科书对于推理证明的安排，上一章“全等三角形”已经要求让学生会用符号表示推理（证明）. 在这一章，对于一些图形的性质（如线段垂直平分线的性质、等腰（边）三角形的性质与判定等），仍是要求学生证明. 由于学生刚开始接触用符号表示推理，虽然教科书控制了证明难度，但是相对于上一章，推理的依据多了，图形、题目的复杂程度也增加了，因此会使一些学生感到无处下手，这是本章教学的一个难点. 要克服这个难点，关键是要加强对问题分析的教学，帮助学生分析证明问题的思路，这时可以结合所要求证的结论一起考虑，即“两头凑”，帮助学生克服这一难点.

四、课时安排

本章教学时间约需 12 课时，具体分配如下（仅供参考）：

14.1　轴对称	3 课时
14.2　轴对称变换	3 课时
14.3　等腰三角形	4 课时
数学活动	
小结	2 课时

五、学法教法建议

1. 注意联系实际

人们生活在三维空间，丰富多彩的图形世界给“空间与图形”的学习提供了大量真实的素材. 本章的内容具有丰富的实际背景，在现实世界中也有着广泛的应用，因此在教学中要注意联系实际，从实际出发引入概念，并将所学知识应用到实际生活中.

例如，轴对称现象在生活中是很常见的，教科书选用了从天安门到故宫的鸟瞰图作为章头图，在第 1 节的开头，也举出了如自然景观、分子结构、建筑物、艺术作品、日常生活用品、窗花等实际例子，让学生感受对称现象的无处不在，通过观察这些图形，引出轴对称的概念. 在实际教学中，可以结合当地实际选择一些轴对称图形的例子，这些素材不仅应包括人们所习惯的标准几何图形，更应包括丰富多彩的现实世界中的二、三维图形，使学生欣赏现实世界中与轴对称有关的图

案，并能够从中发现轴对称的特征.

除了注意从实际例子引出轴对称内容的学习以外，教科书也给出了一些应用轴对称变换的例子，如利用轴对称的观点来解释现实生活中的有关现象、简单的利用轴对称变换设计图案、一些选址问题等等，要注意这方面内容的教学，体现知识的应用，体现具体——抽象——具体的过程.

2. 注意知识间的联系，有机的整合“空间与图形”领域的相关内容

本章的内容较多，课程标准“空间与图形”领域中图形的认识、图形与变换、图形与坐标、图形与证明各个部分的内容在本章都有涉及，教学时要注意把握各个部分内容之间的联系，有机的整合各个部分的内容.

本章从认识轴对称图形开始，又进一步介绍了两个图形关于某条直线对称（两个图形成轴对称），要注意这两个概念间的区别：轴对称图形指的是一个图形沿对称轴折叠后这个图形的两部分能完全重合，说的是一个具有特殊形状的图形，而两个图形成轴对称指的是两个图形之间的位置关系，这两个图形沿对称轴折叠后能够重合. 它们的联系：定义中都有一条直线，都要沿这条直线折叠重合；如果把轴对称图形沿对称轴分成两部分，这两个图形就是关于这条直线成轴对称，反过来，如果把两个成轴对称的图形看成一个整体，那么它就是一个轴对称图形. 从轴对称变换的角度来看，成轴对称的两个图形的任何一个可以看做由另一个图形经过轴对称变换得到，一个轴对称图形由它的一部分为基础，经过轴对称变换拓展而成.

在轴对称变换之后，教科书安排了用坐标表示轴对称的内容，从数的角度刻画轴对称的内容. 包括关于坐标轴对称的点或图形的坐标的变化以及由点或图形坐标的变化引起点或图形轴对称变换的内容. 这里的关键是要让学生感受图形轴对称变换之后点的坐标的变化，把“形”和“数”紧密的结合在一起，把坐标思想和图形变换的思想联系起来.

等腰三角形的是一种轴对称图形，教科书将等腰三角形的相关内容安排在轴对称之后，就是要利用轴对称研究等腰三角形的有关性质，并进一步利用三角形的全等证明这些性质. 教科书中有关等腰三角形性质的探究，都是结合轴对称来进行的，教学时要充分注意到这一点，将图形的变换与图形的认识、图形的证明有机整合，利用变换研究图形，得到图形的性质，再通过推理证明这些结论.

3. 注意让学生经历观察、实验、归纳、论证的过程

学习方式的转变是这次课程改革的一个重要目标，与其他教学内容相比，“空间与图形”的内容的教学更能激起学生对数学学习的情感体验，强调学生通过“做数学”来学习数学也是本章教科书的一个突出特点. 在内容处理上，教科书加强了实验几何的成分，将实验几何与论证几何有机结合. 论证几何在培养人的逻辑思维能力方面起着重要作用，而实验几何则是发现几何命题和定理的有效工具，在培养人的直觉思维和创造性思维方面起着重大的作用. 对于本章中的一些概念、性质、公理和定理，教科书大多是通过“留空”、设问、设置“观察”“思考”“讨论”“探究”“归纳”以及“数学活动”等栏目，让学生通过画图、折纸、剪纸、度量或做试验等活动，探索发现几何结论，经历知识的“再发现”过程，在探究活动的过程中发展创新思维能力，改变学生的学习方式. 在发现结论的基础上，再经过推理证明这些结论，使得推理证明成为学生观察、实验、探究得出结论的自然延续，使图形的认识与图形的证明有机整合.

例如，对于等腰三角形“等边对等角”“三线合一”的性质的得出，教科书通过设置“探究”“思考”栏目，让学生剪出等腰三角形，并进一步利用轴对称的性质思考其中相等的线段和相等的角，进而发现等腰三角形的性质. 接下来，从上面的操作过程启发，通过做出等腰三角形的对称轴，得到两个全等的三角形，从而利用三角形的全等证明等腰三角形的这两个性质. 这种处理，将

实验几何与论证几何有机的整合在一起，使学生经历了一个观察、实验、探究、归纳、推理、证明的认识图形的全过程，完成好由实验几何到论证几何的过渡，这样的例子还很多，在教学时应充分注意这一点.

4. 满足学生多样化的学习需求，为学生提供个性化学习的时间和空间

本章内容中有许多需要发挥学生想象和个性的活动，如欣赏轴对称图案，利用轴对称进行图案设计，探究对称轴是与坐标轴平行（垂直）时轴对称的坐标特点，发现等腰三角形中相等的线段等等，这些内容都为学生个性化的学习提供了空间. 教学时应有意识地满足学生多样化的学习需求，真正为学生提供个性化学习的时间和空间. 例如，对于利用轴对称设计图案，不同学生可能会有不同的创意，也会有不同的操作方法（如折叠、剪纸、扎眼、计算机等）完成自己的创意，教师应该鼓励学生大胆想象、大胆尝试，不能用唯一的标准判断全体学生的成果，要把关注点放在活动中的数学层面上，看学生是否真正理解了轴对称变换的特点.

5. 重视现代信息技术工具的应用

信息技术工具的使用能为学生的数学学习和发展提供丰富多彩的教育环境和有力的学习工具. 利用信息技术工具，可以很方便地制作图形，可以很方便地让图形动起来. 许多计算机软件还具有测量功能，这也有利于我们在图形的运动变化的过程中去发现其中不变的位置关系和数量关系，有利于发现图形的性质，这可以使得许多传统的数学教学做不到或做不好的事情变得容易起来.

在这一章，信息技术工具是大有用武之地的，许多计算机软件都有进行轴对称变换的功能，利用这个功能，可以方便的做出轴对称图形，并研究它的性质，教科书也专门安排了一个“信息技术应用”的选学栏目，利用计算机软件探索轴对称的性质，探索轴对称的点的坐标的特点，探索线段垂直平分线的性质，利用计算机软件进行图案设计等. 有条件的学校，应尽可能多的使用计算机或图形计算器等信息技术工具，帮助学生的数学学习.

Ⅱ 教材分析

第十四章 轴对称

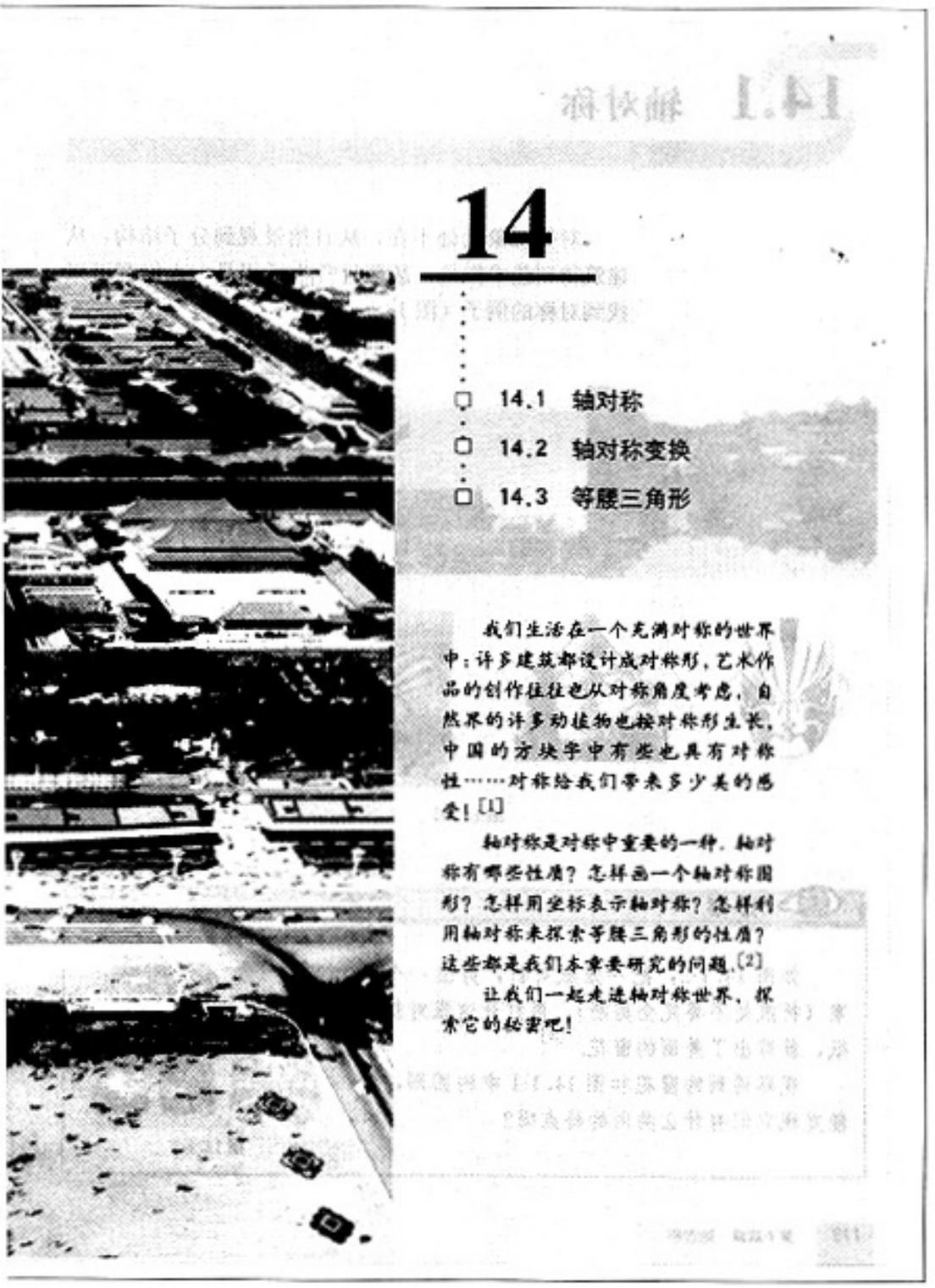


[1] 教科书章前图选用的是天安门到故宫的鸟瞰图，从整体建筑布局上来看，它是沿中轴线对称的. 事实上，不仅仅是故宫，老北京城整体上也是沿中轴线对称的，这一点在本章还要看到. 在建筑设计中，对称是被广泛应用的，从中也能看到数学的对称美.

1. 本章的主要内容是从生活中的图形入手，学习轴对称及其基本性质，欣赏、体验轴对称在现实生活中的广泛应用. 在此基础上，利用轴对称变换，探索等腰三角形的性质，学习它的判定方法，并进一步学习等边三角形.

2. 轴对称现象在现实生活中随处可见，教科书章前图选用的故宫的鸟瞰图，就是建筑设计中运用轴对称的一个例子，章前引言也指出了建筑设计、艺术作品、自然界的动植物、中国的汉字等方面，通过实例，让学生感受到对称的无处不在，体会数学与实际生活的密切联系，提高学生学习的兴趣.

3. 轴对称变换也是数学中一种基本的变换，同平移变换一样，它也是保持两点之间距离不变的变换，即保距变换或合同变换. 这种变换只改变图形的位置，不改变图形的形状和大小. 应当注意，在本章，并不要求从严格的几何变换定义出发来研究变换的性质，从而研究图形的性质，



14

14.1 轴对称

14.2 轴对称变换

14.3 等腰三角形

我们生活在一个充满对称的世界中：许多建筑都设计成对称形，艺术作品的创作往往也从对称角度考虑，自然界的许多动植物也按对称形生长，中国的方块字中有些也具有对称性……对称给我们带来多少美的感受！[1]

轴对称是对称中重要的一种，轴对称有哪些性质？怎样画一个轴对称图形？怎样用坐标表示轴对称？怎样利用轴对称来探索等腰三角形的性质？这些都是我们本章要研究的问题.[2]

让我们一起走进轴对称世界，探索它的秘密吧！

[1] 现实世界中，对称现象是普遍存在的，章前引言中指出的几个方面，如建筑设计、艺术作品、自然界的动植物、中国汉字等等，在本章都会涉及到. 事实上，这方面的例子还是很多的，可以引导学生多举出一些例子，体会对称的美学价值和文化内涵.

[2] 这里给出了本章要学习的一些主要内容，初步掌握对称的知识，不仅使我们感受到自然界的美与和谐，还可以帮助我们发现一些图形（如等腰三角形）的特征，并能根据自己的设计创造出对称作品，美化生活.

而是定位在通过对生活中的对称现象的分析，探索轴对称的性质，并能利用轴对称进行简单的图案设计，进一步利用轴对称的性质探索图形（等腰三角形）的性质，教学时要注意把握好这一点对于轴对称变换的教学要求.

4. 本章在学习了轴对称后，安排了等腰三角形的相关内容，这也是教科书安排上的一个变化. 由于等腰三角形本身就是轴对称图形，学生先学习轴对称的内容，有助于学生对于等腰三角形性质的探究，这也是本章这样安排的目的所在，教学时要注意到这一点.

5. 随着上一章全等三角形的有关知识的学习，已经要求学生学会证明. 在本章，对于证明的要求要持续下来，不仅要求学生探索得出一些图形的性质，还要求证明，这一点也要注意.

[1] 教学时可以结合当地实际，多举出一些对称的例子让学生观察，有条件的地方还可以利用多媒体技术，向学生展示这种对称性，帮助学生归纳出它们的共同特征.

[2] 从斑马的头部或尾部看，斑马的条纹是左右对称的.

[3] 可以让学生动手操作，模拟剪窗花的过程，剪出一些轴对称图形，这也有助于他们归纳出轴对称图形的特征.

14.1 轴对称

对称现象无处不在，从自然景观到分子结构，从建筑物到艺术作品，甚至日常生活用品，人们都可以找到对称的例子（图 14.1-1）.[1]

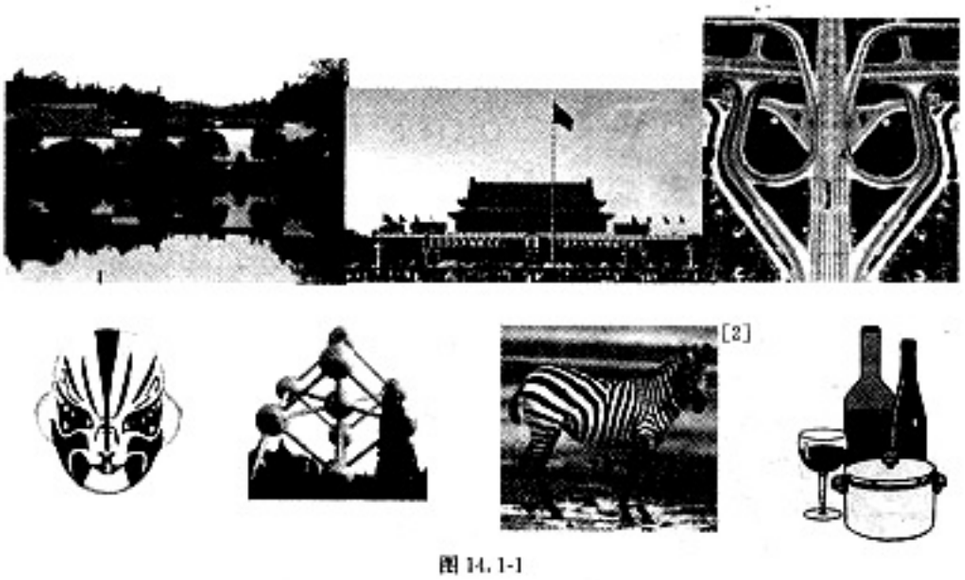


图 14.1-1

观察

如图 14.1-2，把一张纸对折，剪出一个图案（折痕处不要完全剪断），再打开这张对折的纸，就剪出了美丽的窗花.[3]

观察得到的窗花和图 14.1-1 中的图形，你能发现它们有什么共同的特点吗？

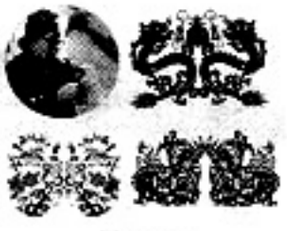


图 14.1-2

1. 本节主要介绍轴对称图形、图形的轴对称的概念、轴对称的基本概念、线段的垂直平分线的性质等内容. 通过本节的教学，要求学生通过丰富的实例认识轴对称，体会轴对称在现实生活中的广泛应用和它的文化价值，能够识别简单的轴对称图形及其对称轴，探索发现轴对称的基本性质，并能够做出轴对称图形或成轴对称的两个图形的对称轴.

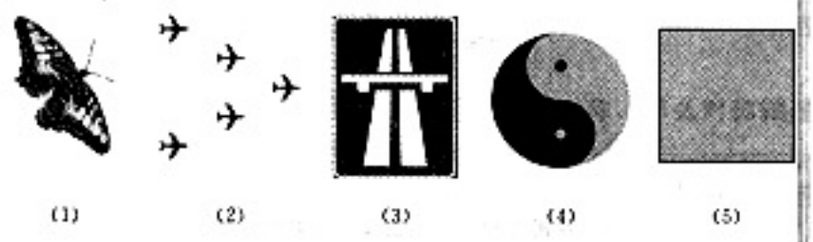
2. 对称现象在现实生活中广泛存在，教科书首先提供建筑倒影、天安门、立交桥、京剧脸谱、分子结构雕塑、斑马、日常用品等例子，让学生认识到对称现象的广泛性，同时也要求学生通过观察这样的图片，通过空间想象，归纳它们的共同特征. 要注意，这里举出的是一些广泛意义上的对称的例子，包括静面对称、立体图形的对称等，并不仅仅是平面上的轴对称图形.

接下来，教科书设置了一个观察栏目，通过观察剪窗花的过程，结合观察图 14.1-1 中的图

像窗花一样，如果一个图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分[1]能够互相重合，这个图形就叫做**轴对称图形**[2]（symmetric figure），这条直线就是它的**对称轴**（axis of symmetry）．这时，我们也说这个图形关于这条直线（成轴）对称．

练习

下面的图形是轴对称图形吗？如果是，你能指出它的对称轴吗？[3]



(1)　(2)　(3)　(4)　(5)

观察

下面的每对图形有什么共同特点？[4]

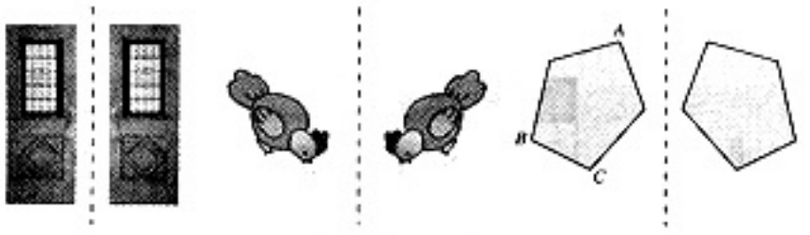


图 14.1-3

图 14.1-3 中的每一对图形，如果沿着虚线折叠，左边的图形能与右边的图形重合．

像这样，把一个图形沿着某一条直线折叠，如果

[1] 注意提醒学生，两旁的部分，都是同一个图形的，不是两个图形．

[2] 在观察和操作的基础上，给出轴对称图形的直观描述．

[3] 学生能够进行直观判断，指出其一些对称轴，并能用折叠的方法验证即可，不要作严格的要求．

[4] 可以结合动手操作，把这些图形折叠，观察两个图形的关系．

练习答案

第（1）、（2）、（3）、（5）是轴对称图形，对称轴略．

片，让学生归纳出这些图片的共同特征，并引出轴对称图形的概念．教学时应鼓励学生充分观察、操作，运用自己的语言概括出这些图形的特征，有条件的地方可以采用多媒体技术展示它们的轴对称性，帮助学生建立轴对称图形的概念．

3．接下来，教科书又通过一个观察栏目，让学生归纳出这三组图形的共同特征，教学时，除了观察以外，还可以结合动手操作，通过把它们沿虚线折叠，观察这两个图形之间的关系，引出两个图形成轴对称的概念．

4．教科书在学生了解了轴对称图形和两个图形成轴对称的概念后，都安排了一组练习，要求学生判断所给出的图形是否轴对称，并要求指出其对称轴或对称点．要注意，由于这时学生还没有学习轴对称的基本性质，因此这时只是要求学生进行直观判断，想象出它们的对称轴，并能用折叠等方法进行验证即可．对于一些具有多条对称轴的轴对称图形，学生能指出一些即可，不

[1] 为了讨论的方便，教科书区分了轴对称图形和两个图形关于某条直线对称（两个图形成轴对称）的概念，其实二者的本质是一致的，教学时不宜在此深究.

[2] 成轴对称的两个图形全等；轴对称图形被对称轴分成的两部分全等，这两部分也是关于对称轴对称.

练习答案

(1)、(3)、(4) 是，对称轴和对称点略.

[3] 也可以通过折叠，发现它们之间的关系.

请你标出图 14.1-3 中点 A，B，C 的对称点 A'，B'，C'.

它能够与另一个图形重合，那么就说这两个图形**关于这条直线对称**，[1]这条直线叫做对称轴，折叠后重合的点是对应点，叫做**对称点**（symmetric points）. 你能再举出一些生活中两个图形成轴对称的例子吗？

思考

成轴对称的两个图形全等吗？如果把一个轴对称图形沿对称轴分成两个图形，那么这两个图形全等吗？这两个图形对称吗？[2]

练习

下面给出的每幅图形中的两个图案是轴对称的吗？如果是，试着找出它们的对称轴，并找出一对对称点.



(1)　(2)　(3)　(4)

观察

如图 14.1-4，$\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 关于直线 MN 对称，点 A'、B'、C' 分别是点 A、B、C 的对称点，线段 AA'、BB'、CC' 与直线 MN 有什么关系？[3]

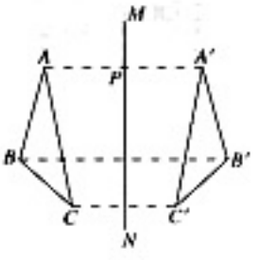


图 14.1-4

要做严格的要求.

5. 为了讨论问题的方便，教科书先介绍了轴对称图形，又介绍了两个图形成轴对称的概念，二者的本质实际上是一致的. 轴对称图形和两个图形轴对称是紧密联系的，可以把一个轴对称图形沿对称轴分成成轴对称的两个图形，也可以把成轴对称的两个图形看成是一个轴对称图形. 学习了轴对称变换后还可以看到，成轴对称的两个图形的任何一个可以看做由另一个图形经过轴对称变换得到，一个轴对称图形由它的一部分为基础，经过轴对称变换拓展而成. 但同时二者也是有区别的，轴对称图形指的是一个图形沿对称轴折叠后这个图形的两部分能完全重合，而轴对称指的是两个图形之间的位置关系，这两个图形沿对称轴折叠后能够重合.

6. 接下来，教科书通过一个观察栏目，直接从轴对称的定义出发，利用两个图形沿某一条直线折叠后能完全重合这一特点，推出了两个图

图 14.1-4 中，点 A、A' 是对称点，设 AA' 交对称轴 MN 于点 P，将 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 沿 MN 折叠后，点 A 与 A' 重合.[1] 于是有

$$AP=PA',$$

$$\angle MPA=\angle MPA'=90°.$$

对于其他的对应点，如点 B、B'、C、C' 也有类似的情况. 因此，对称轴所在直线经过对称点所连线段的中点，并且垂直于这条线段.

经过线段中点并且垂直于这条线段的直线，叫做这条线段的**垂直平分线**（perpendicular bisector）. 这样，我们就得到图形轴对称的性质：

如果两个图形关于某条直线对称，那么对称轴是任何一对对应点所连线段的垂直平分线.

类似地，**轴对称图形的对称轴，是任何一对对应点所连线段的垂直平分线.**[2] 例如图 14.1-5 中，

l 垂直平分____，
l 垂直平分____，
l 垂直平分____.



图 14.1-5

探究

如图 14.1-6，木条 l 与 AB 钉在一起，l 垂直平分 AB，P_1，P_2，P_3，…是 l 上的点，分别量一量点 P_1，P_2，P_3，…到 A 与 B 的距离，你有什么发现？[3]



图 14.1-6

[1] 这一段要注意提醒学生注意两个问题，一是已知 A 和 A' 是对称点，所以折叠后 A 与 A' 重合；二是重合后说明了两个问题，(1) $PA=PA'$，(2)$\angle APM$，$\angle A'PM$ 的顶点重合，所以这两个角相等.

[2] 由两个图形成轴对称的性质可以很容易得到轴对称图形的性质，这也说明二者本质是一致的.

[3] 利用计算机软件，可以在动态中进行测量，有条件的地方应当多使用.

形成轴对称的一条基本性质：“如果两个图形关于某条直线对称，那么对称轴是任何一对对应点所连线段的垂直平分线”，这条性质比较直观，学生容易理解. 对于其他性质，教科书也有所涉及，如“关于某条直线对称的两个图形是全等的”是在 120 页思考栏目中体现的，“两个图形关于某条直线对称，如果它们的对应线段或延长线相交，那么交点在对称轴上”的性质在本节习题第 10 题有所体现. 这里主要要求学生掌握“对称轴是对应点所连线段的垂直平分线”的性质.

7. 关于线段垂直平分线的概念，教科书是结合探究关于某条直线对称的图形的特征给出的，接下来教科书讨论了线段垂直平分线的性质. 对于线段垂直平分线的定理和逆定理，教科书都是先安排一个探究栏目，让学生自己通过测量、猜想得到这两个性质. 另外，得出这两个性质的图形，就是一个轴对称图形，因此可以结合

[1] 利用判断三角形全等的“边角边”方法，可以很容易得出这个结论.

[2] 利用判断两个三角形全等的方法，也可以得到这个结论. 如图 14.1-7，如果题设是 $PA=PB$，过点 P 作 PC 垂直于 AB，垂足为 C，那么根据判定直角三角形全等的“斜边、直角边”的方法，可以得到 $\triangle PAC\cong\triangle PBC$，从而 PC 是线段 AB 的垂直平分线.

[3] 可以通过作一些满足条件的点，让学生看出它们组成一条直线，进一步说明，一条直线可以看成是点动形成的.

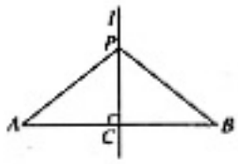


图 14.1-7

可以发现，点 P_1，P_2，P_3，…到点 A 的距离与它们到点 B 的距离分别相等. 如果把线段 AB 沿直线 l 对折，线段 P_1A 与 P_1B、线段 P_2A 与 P_2B、线段 P_3A 与 P_3B……都是重合的，因此它们也分别相等.

由此我们可以得出：

线段垂直平分线上的点与这条线段两个端点的距离相等.

利用判定两个三角形全等的方法，怎样证明这个结论呢？请同学们自己完成（参照图 14.1-7）.[1]

反过来，如果 $PA=PB$，那么点 P 是否在线段 AB 的垂直平分线上呢？

探究

如图 14.1-8，用一根木棒和一根弹性均匀的橡皮筋，做一个简易的“弓”，“箭”通过木棒中央的孔射出去，怎样才能保持射出箭的方向与木棒垂直呢？为什么？

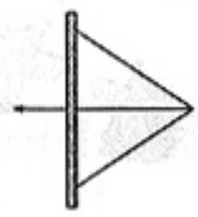


图 14.1-8

通过探究可以得到：

与一条线段两个端点距离相等的点，在这条线段的垂直平分线上.[2]

从上面两个结论可以看出：在线段 AB 的垂直平分线 l 上的点与 A、B 的距离都相等；反过来，与两点 A、B 的距离相等的点都在 l 上，所以直线 l 可以看成与两点 A、B 的距离相等的所有点的集合.[3]

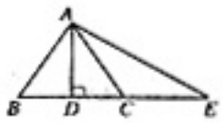
轴对称的性质，在后面学习了等腰三角形后，就可以更清楚的看到这一点. 在学生探究得到这两个性质之后，还可以要求学生利用三角形的全等证明这个结论，体现观察、探究、猜想、证明的过程，感受证明的必要性.

8. 线段垂直平分线的两个性质是定理及逆定理的关系，由于教科书还没有出现定理以及逆定理的概念，这里不必要向学生强调，能让学生从它们得出的过程和性质本身字面上体会二者之间具有一个互逆（相反）的关系即可.

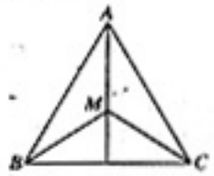
同时，线段的垂直平分线是一条重要的轨迹，线段垂直平分线上的点和线段两个端点的距离相等，和线段两个端点距离相等的点在这条线段的垂直平分线上，这就从纯粹性和完备性两个方面证明了一条轨迹：和线段两个端点距离相等的点是这条线段的垂直平分线. 由于学生没有轨迹的概念，理解这些还是有困难，现在不要向学生说明这些问题. 在这里，只要求结合图形说明

练习

1. 如图，$AD \perp BC$，$BD=DC$，点 C 在 AE 的垂直平分线上，AB、AC、CE 的长度有什么关系？$AB+BD$ 与 DE 有什么关系？



（第 1 题）



（第 2 题）

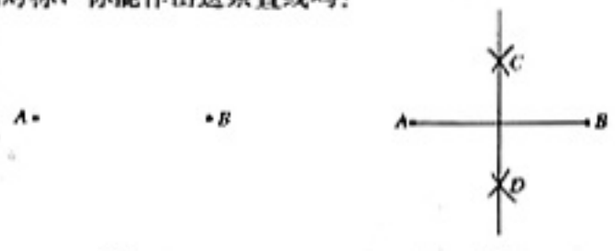
2. 如图，$AB=AC$，$MB=MC$，直线 AM 是线段 BC 的垂直平分线吗？

思考

有时我们感觉两个平面图形是轴对称的，如何验证呢？[1] 不折叠图形，你能比较准确地作出轴对称图形的对称轴吗？

如果两个图形成轴对称，其对称轴就是任何一对对应点所连线段的垂直平分线．因此，我们只要找到一对对应点，作出连接它们的线段的垂直平分线，就可以得到这两个图形的对称轴．

例 如图 14.1-9(1)，点 A 和点 B 关于某条直线成轴对称，你能作出这条直线吗？



(1) (2)

图 14.1-9

[1] 如果两个图形的对应点连线被同一条直线垂直平分，那么这两个图形关于这条直线对称，这条直线就是它们的对称轴．用这种方法可以判定两个图形是否关于某条直线对称．

练习答案

1. 由点 C、D 分别在线段 AE、BC 的垂直平分线上，可得 $AB=AC=CE$，$AB+BD=DE$．
2. 由 $AB=AC$，$MB=MC$，可知点 A、M 都在线段 BC 的垂直平分线上，根据“两点确定一条直线”，直线 AM 就是线段 BC 的垂直平分线．

线段垂直平分线是到两个端点距离相等的点的集合，同时说明，这条线上实际包含了满足条件的所有点，这也为学生今后进一步的学习打下了基础．

线段的垂直平分线，在今后的学习中经常要用到，要注意让学生理解和掌握．

9. 接下来，教科书讨论了如何作出成轴对称的两个图形或一个轴对称图形的对称轴的问题．教科书结合作出两点的对称轴，给出了线段垂直平分线的尺规作图，这实际上还是作出一条线段的中点的尺规作图方法．根据垂直平分线的性质“到线段两端距离相等的点，在线段的垂直平分线上”，作出了两个线段 AB 的垂直平分线上的点，再根据“两点确定一条直线”，即可得到直线 CD 就是线段 AB 的垂直平分线，也就是点 A 与点 B 的对称轴．实际上，点 A 与点 B 还有另外一条对称轴，即线段 AB 所在直线，这里不要求学生掌握．

[1] 如果作弧的半径小于 $\frac{1}{2}AB$，就不能得到交点了.

[2] 要让学生逐步熟悉尺规作图作法的表示方法，逐步会用简洁的几何语言表示作图过程.

练习答案

1. 对称轴略. 要注意有些图形不止有一条对称轴.
2. 角是轴对称图形，它的对称轴是角平分线所在直线. 图略.
3. 图形 B、D，对称轴图略.

这个作法实际上就是线段垂直平分线的尺规作图. 我们也可以用这种方法确定线段的中点.

分析：我们只要连接点 A 和点 B，画出线段 AB 的垂直平分线，就可以得到点 A 和点 B 的对称轴. 而由两点确定一条直线和线段垂直平分线的性质，只要作出到点 A、B 距离相等的两点即可.

作法：如图 14.1-9(2).

(1) 分别以点 A、B 为圆心，以大于 $\frac{1}{2}AB$ 的长为半径作弧（想一想为什么）,[1] 两弧相交于 C、D 两点；

(2) 作直线 CD.[2]

CD 即为所求的直线.

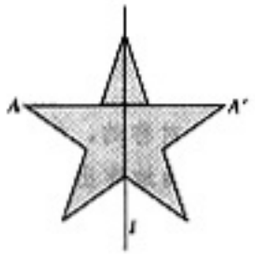


图 14.1-10

同样，对于轴对称图形，只要找到任意一组对应点，作出对应点所连线段的垂直平分线，就得到此图形的对称轴.

例如，对于图 14.1-10 的五角星，我们可以找出它的一对应点 A 和 A'，连接 AA'，作出线段 AA' 的垂直平分线 l，则 l 就是这个五角星的一条对称轴.

类似地，你能作出这个五角星的其他对称轴吗？

练习

1. 画出下列图形的一条对称轴，和同学比较一下，你们画的对称轴一样吗？


（第 1 题）

2. 如图，角是轴对称图形吗？如果是，它的对称轴是什么？



（第 2 题）　　（第 3 题）

3. 如图，与图形 A 点轴对称的是哪个图形？画出它们的对称轴.

同样，对于一个轴对称图形的对称轴，只要找到其任意一对对称点，作出所连线段的垂直平分线，就可以得到，教科书是以一个五角星为例来说明的.

在前面学生学习过的图形中，有许多具有对称性，这种性质是图形的一个重要特征，这时可以从轴对称的角度再重新认识一下这样的图形. 教科书在练习和习题中也给出了一些这方面的例子，让学生判断一些图形是否轴对称，并找出其对称轴. 注意，这些图形的对称性都不是严格证明的，不要求学生证明它们，只要能说出是不是轴对称图形，能找出其对称轴即可.

习题14.1

复习巩固

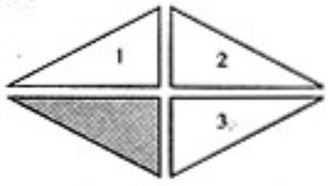
1. 下面的图形是轴对称图形吗？如果是，你能画出它的对称轴吗？[1]



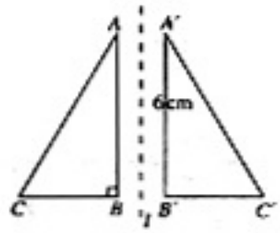


（第1题）

2. 图中有阴影的三角形与哪些三角形成轴对称？整个图形是轴对称图形吗？它共有几条对称轴？[2]



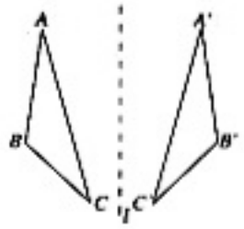
（第2题）



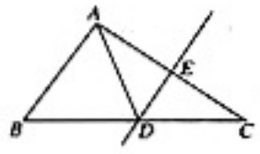
（第3题）

3. 如图，$\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 关于直线 l 对称，根据图中的条件，求 $\angle A'B'C'$ 的度数和 AB 的长.

4. 如图，$\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 关于直线 l 对称，这两个三角形全等吗？如果 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$，那么 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 一定关于某条直线 l 对称吗？[3]



（第4题）



（第5题）

[1] 对于这些图形，不要考虑它们的颜色，只考虑其几何特征.

[2] 由这个简单图形，可以看出两个图形关于某条直线对称和轴对称图形的关系.

[3] 成轴对称的两个图形一定是全等的，但反过来，全等的两个图形不一定关于某条直线对称.

习题 14.1

1. 复习巩固的第 1 题是让学生判断轴对称图形，要注意把这些图形当作几何图形来看，不要考虑它们的颜色；第 2 题是两个图形关于某条直线对称的问题，通过这个问题，也进一步说明了成轴对称的两个图形与轴对称图形的关系；第 3 题和第 4 题都是应用轴对称的性质的问题，成轴对称的两个图形是全等的，由此已知一个图形的边角大小，可以知道另一个图形的边角大小；第 5 题是利用线段的垂直平分线的问题.

2. 综合运用的第 6、7、8 题都是判断轴对称图形，并找出图形的对称轴的问题. 这里图形是否为轴对称图形不要求学生证明，能判断即可. 对于它们的对称轴，开始时也不要求学生能全部找出，应鼓励学生之间进行交流，在此基础上，鼓励它们发现对称轴所在位置的特征. 第 10 题是关于轴对称的另一个特征，鼓励学生自己去探索发现，不要求证明.

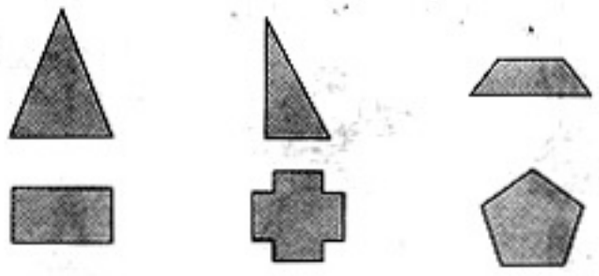
[1] 可以让学生比较他们画出的对称轴，看看是否相同，引导学生总结对称轴所在位置的特点.

[2] 这里隐含了轴对称的一条性质："两个图形关于某条直线对称，如果它们的对应线段或延长线相交，那么交点在对称轴上".

5. 如图，$\triangle ABC$ 中，DE 是 AC 的垂直平分线，$AE=3$ cm，$\triangle ABD$ 的周长为 13 cm，求$\triangle ABC$的周长.

综合运用 ▶▶

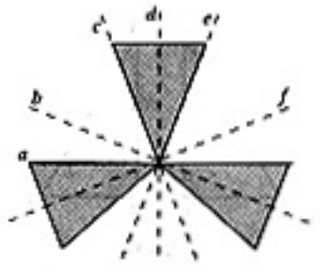
6. 下列各图形是轴对称图形吗？如果是，画出它们的一条对称轴.[1]



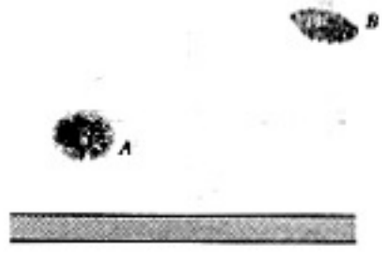
(第 6 题)

7. 平面内两条相交直线是轴对称图形吗？如果是，它有几条对称轴？画画看.

8. 如图所示的虚线中，哪些是图形的对称轴？



(第 8 题)



(第 9 题)

9. 如图，某地由于居民增多，要在公路边增加一个公共汽车站，A、B 是路边两个新建小区，这个公共汽车站建在什么位置，能使两个小区到车站的路程一样长？

10. 如第 4 题图，$\triangle ABC$ 和$\triangle A'B'C'$关于直线 l 对称，延长对应线段 AB 和 $A'B'$，两条延长线相交吗？交点与对称轴 l 有什么关系？延长其他对应线段呢？再找几个成轴对称的图形观察一下，你能发现什么规律吗？[2]

拓广探索 ▶▶

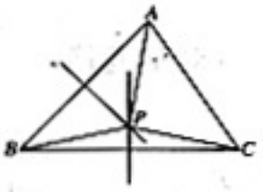
11. 电信部门要修建一座电视信号发射塔，如图，按照设计要求，发射塔到两个城镇

3. 复习巩固的第 9 题和拓广探索的第 11 题都是有关确定位置的问题，它们都要用到线段的垂直平分线的性质，通过确定交点来确定位置；拓广探索的第 12 题，实际上证明了三角形三条边的垂直平分线相交于一点，教科书不要求每个学生都掌握三条直线交于一点的证明，对学有余力的学生，可让它们体会这一点.

A、B 的距离必须相等，到两条高速公路 m 和 n 的距离也必须相等．发射塔应修建在什么位置？在图上标出它的位置．



（第 11 题）



（第 12 题）

12. 如图，$\triangle ABC$ 中，边 AB、BC 的垂直平分线交于点 P．

（1）求证 $PA=PB=PC$．

（2）点 P 是否也在边 AC 的垂直平分线上呢？由此你还能得出什么结论？[1]

[1] 这是一个利用线段垂直平分线作图的一个例子．由 $PA=PC$，还可以得出点 P 也在线段 AC 的垂直平分线上，这就证明了三角形三边的垂直平分线交于一点，并且这个点到三个顶点的距离相等．在后面学习“圆”时，我们将进一步说明这个点的意义，它是三角形的外心．

[1] 教科书采用的是在半透明纸上描图的方法，实际方法还很多，如扎眼，印墨迹，剪纸，画图等，可以采用不同的方法.

[2] 这里即可以多次应用轴对称，也可以运用平移，要让学生注意到.

[3] 引导学生归纳轴对称变换的特征.

14.2 轴对称变换

14.2.1 轴对称变换

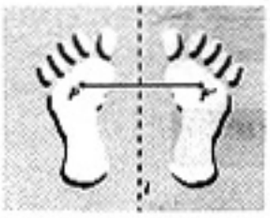


图 14.2-1



图 14.2-2

如图 14.2-1，在一张半透明的纸的左边部分，画一只左脚印，把这张纸对折后描图，打开对折的纸，就能得到相应的右脚印.[1] 这时，右脚印和左脚印成轴对称，折痕所在直线就是它们的对称轴，并且连接任意一对对应点的线段被对称轴垂直平分.

类似地，我们也可以由一个图形得到与它成轴对称的另一个图形，重复这个过程，可以得到美丽的图案（图 14.2-2、14.2-3）.[2]



图 14.2-3

对称轴方向和位置发生变化时，得到的图形的方向和位置也会发生变化（图 14.2-4）.



图 14.2-4

自己动手在一张纸上画一个图形，将这张纸折叠，描图，再打开纸，看看你得到了什么？改变折痕的位置并重复几次，你又得到了什么？与同学交流一下.[3]

1. 本节的主要内容是轴对称变换，要求学生认识轴对称变换的特征，能够作出简单图形经过一次或两次轴对称变换的的图形，能够利用轴对称变换进行简单的图案设计，认识平面直角坐标系中图形轴对称变换后点的坐标变化的特点.

2. 前面一节学生认识了轴对称图形和两个图形关于某条直线对称，它们都是讲的一个图形或两个图形之间的位置关系，是一个静止的状态. 轴对称变换是一种变换，讲的是由一个图形得到与它轴对称的图形的过程，是一个运动的过程，这一点要让学生认识到.

教科书首先通过在半透明的纸上描图的方法，由左脚印得到了与它对称的右脚印，接下来通过让学生继续观察一些通过多次轴对称变换得到的图形以及自己动手得到轴对称变换的图形的过程，让学生观察并归纳得出轴对称变换的特点，并给出轴对称变换的描述. 学生有了前面一节关于轴对称图形的知识，这一过程应当是不困

归纳

由一个平面图形可以得到它关于一条直线 l 对称的图形，这个图形与原图形的形状、大小完全一样；[1]

新图形上的每一点，都是原图形上的某一点关于直线 l 的对称点；

连接任意一对对应点的线段被对称轴垂直平分.

像上面那样，由一个平面图形得到它的轴对称图形叫做**轴对称变换**.

成轴对称的两个图形中的任何一个可以看作由另一个图形经过轴对称变换后得到. 一个轴对称图形也可以看作以它的一部分为基础，经轴对称变换扩展而成的.[2]

思考

如果有一个图形和一条直线，如何作出与这个图形关于这条直线对称的图形呢？

例 1 如图 14.2-5(1)，已知△ABC 和直线 l，作出与△ABC 关于直线 l 对称的图形.

分析：△ABC 可以由三个顶点的位置确定，只要能分别作出这三个顶点关于直线 l 的对称点，连接这些对称点，就能得到要作的图形.

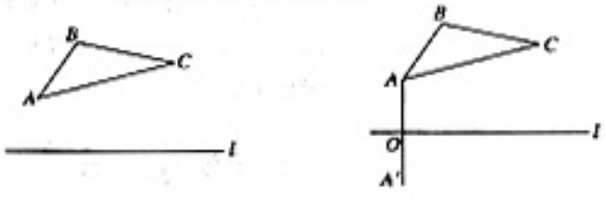


图 14.2-5

[1] 轴对称变换是合同变换，得到的图形与原图形是全等的.

[2] 这里从轴对称变换的角度说明了轴对称图形和两个图形成轴对称之间的联系.

难的. 要让学生注意其中关键的两点，一是轴对称变换前后两个图形全等，二是对应点连线被对称轴垂直平分.

3. 接下来，教科书讨论了如何作出一个图形的轴对称图形的问题，通过一个思考栏目和一个作出一个三角形的轴对称图形的例题，归纳得出了得到轴对称图形的方法. 得到一个图形的轴对称图形的作法的根据就是上面一节提到的图形轴对称的判定方法，即“如果两个图形的对应点连线被同一条直线垂直平分，那么这两个图形关于这条直线对称”. 对于教科书的例 1，可以这样证明：由作法可知，点 A 与点 A' 是对称点，点 B 与点 B' 是对称点，所以沿直线 l 折叠，点 A 与点 A'，点 B 与点 B' 能够重合，又因为过两点可以并且只可以作一条直线，所以线段 AB 与线段 $A'B'$ 也互相重合，同理 AC 与 $A'C'$，BC 与 $B'C'$ 互相重合，所以△ABC 与△$A'B'C'$ 关于直线 l 对称. 这个证明用的是重合的方法，不要求

[1] 按照作法，线段 AA' 被直线 l 垂直平分，所以点 A 与点 A' 关于直线 l 对称.

[2] 可以多举出一些这样的例子，让学生欣赏其中的对称美.

作法：如图 14.2-5(2).



(1) 过点 A 作直线 l 的垂线，垂足为点 O，在垂线上截取 $OA'=OA$，点 A' 就是点 A 关于直线 l 的对称点（想一想为什么）；[1]

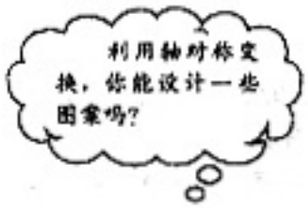
(2) 类似地，请你自己在图 14.2-5 上分别作出点 B、C 关于直线 l 的对称点 B'、C'；

(3) 连接 $A'B'$、$B'C'$、$C'A'$：得到的 $\triangle A'B'C'$ 即为所求.



几何图形都可以看作由点组成，我们只要分别作出这些点关于对称轴的对应点，再连接这些对应点，就可以得到原图形的轴对称图形；对于一些由直线、线段或射线组成的图形，只要作出图形中的一些特殊点（如线段端点）的对称点，连接这些对称点，就可以得到原图形的轴对称图形.

利用轴对称变换，可以设计出精美的图案. 在许多美术作品中，都能看到轴对称变换的例子（图 14.2-6).



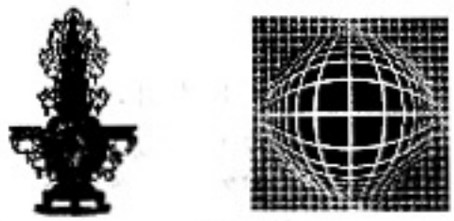


图 14.2-6

有时，将平移和轴对称结合起来，可以设计出更美丽的图案，许多镶边和背景的图案就是这样设计的（图 14.2-7).[2]



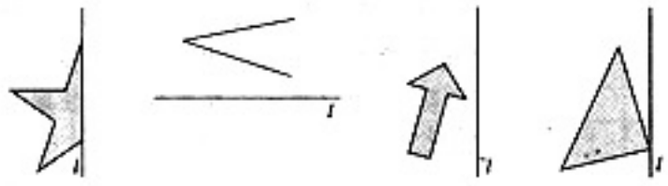
图 14.2-7

学生掌握. 用这种方法也可以说明后面归纳栏目中作出由直线、线段、射线组成的图形的轴对称图形的方法的道理，这里不再重复.

4. 轴对称变换在图案设计中有着广泛的应用，接下来，教科书给出了一些轴对称图案的例子，让学生欣赏. 这时，学生已经掌握了作简单图形的轴对称图形的方法，也可以要求学生自己利用轴对称变换设计一些图案，再进行交流. 在设计轴对称图案的过程中，要让学生在动手实践中体会轴对称在现实生活中的应用，感受数学美，进一步理解和掌握轴对称的性质，体会轴对称变换的特点. 教学时可以安排一些设计活动，如设计墙报、公益宣传图案，小组分工进行比赛等. 学生设计图案时，可能会有不同的创意，也会用到不同的方法，教师不能用唯一的标准衡量全体学生活动的结果，要关注学生能否有清晰的设计意图，能否利用轴对称变换进行设计，能否按照设计完成制作，能否清晰的表达自己的设计

练习

1. 如图，把下列图形补成关于直线 l 对称的图形.



（第 1 题）

2. 用纸片剪一个三角形，分别沿它一边的中线、高、角平分线对折，看看哪些部分能够重合，哪些部分不能重合.[1]

探究

如图 14.2-8(1)，要在燃气管道 l 上修建一个泵站，分别向 A、B 两镇供气. 泵站修在管道的什么地方，可使所用的输气管线最短？

你可以在 l 上找几个点试一试，能发现什么规律吗？

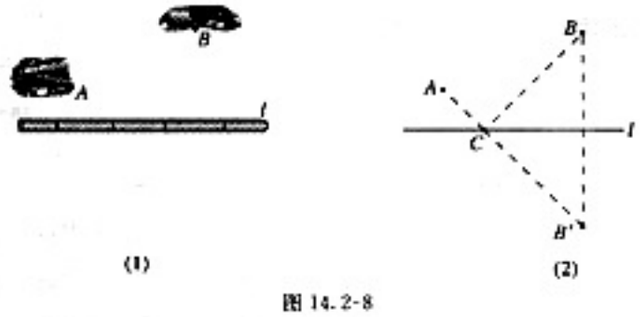


图 14.2-8

我们可以把管道 l 近似地看成一条直线（图 14.2-8(2)），问题就是要在 l 上找一点 C，使 AC 与 CB 的和最小. 设 B' 是 B 的对称点，本问题也就是要使 AC 与 CB' 的和最小. 在连接 AB' 的线中，线段 AB' 最短. 因此，线段 AB' 与直线 l 的交点 C 的位置即为所求.[2]

练习答案

1. 略.
2. 略.

[1] 对于不同的三角形会有不同的结果，为下一节学习等腰三角形作准备.

[2] 利用轴对称变换，把路径中的 BC 转化成了 $B'C$，而点 A 和点 B' 在管道的两侧，从而利用“两点之间，线段最短”的性质使问题得到解决. 注意这里轴对称变换所起的转化作用.

和制作过程等等. 有条件的地区，还应当鼓励学生利用计算机进行设计.

5. 接下来的探究问题是一个极值问题，这也是一个利用轴对称变换解决极值问题的经典问题，在解决这个问题中，轴对称变换起到了一个桥梁的作用，通过轴对称变换，将管道同侧的一点映射到了管道另一侧，而不改变路径的总长度，从而利用“两点之间，线段最短”使问题得到解决，要让学生注意到这里轴对称变换的作用.

对于这样的极值问题，学生初次接触，难度较大，主要在两个方面. 一是第一次遇到要找出某条线段（或线段的和）最短，无从下手，再就是证明中要另选一点，学生想不到，不会用.

为解决这些难点，教学时要注意，首先让学生回忆我们学过哪些有关线段大小关系的结论，学生一般会想到：两点之间线段最短，或三角形中两边之和大于第三边. 实际上，这两个结论是一个道理，在几何极值问题中，常常要用到. 对

[1] 可以证明如下：在直线 l 上任取一点 C'，连接 AC'，BC'，$B'C'$. 因为直线 l 是点 B、B' 的对称轴，点 C、C' 在直线 l 上，所以 $BC=B'C$，$BC'=B'C'$. 所以 $AC+CB=AC+CB'=AB'<AC'+C'B'=AC'+C'B$. 即 $AC+CB$ 最小.

[2] 老北京城的建筑分布多是关于南北中轴线对称的，可以多举几处例子，也可以结合当地实际选择一些例子.

[3] $A'(2,\ 3)$，$B'(-1,\ -2)$，$C'(-6,\ 5)$，$D'\left(\frac{1}{2},\ -1\right)$，$E'(4,\ 0)$；

$A''(-2,\ -3)$，$B''(1,\ 2)$，$C''(6,\ -5)$，$D''\left(-\frac{1}{2},\ 1\right)$，$E''(-4,\ 0)$.

思考

为什么在点 C 的位置修建泵站，就能使所用的输气管线最短呢？也就是说，你能证明 $AC+CB$ 最小吗？（提示：在直线 l 上任取一点 C'，证明 $AC+CB<AC'+C'B'$.）[1]

14.2.2 用坐标表示轴对称

观察

图 14.2-9 是一幅老北京城的示意图，其中西直门和东直门是关于中轴线对称的. 如果以天安门为原点，分别以长安街和中轴线为 x 轴和 y 轴建立平面直角坐标系，对应于如图所示的东直门的坐标，你能说出西直门的坐标吗？[2]

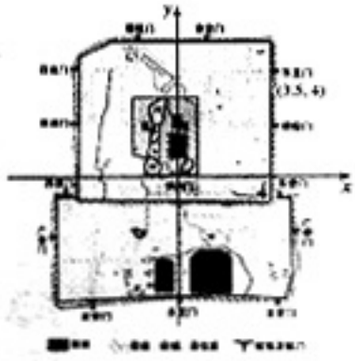


图 14.2-9

在如图 14.2-10 的平面直角坐标系中，画出下列已知点及其对称点，并把坐标填入表格中，看看每对对称点的坐标有怎样的规律，再和同学讨论一下.

已知点	$A(2,\ -3)$	$B(-1,\ 2)$	$C(-6,\ -5)$	$D\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$	$E(4,\ 0)$
关于 x 轴的对称点	$A'(_,\ _)$	$B'(_,\ _)$	$C'(_,\ _)$	$D'(_,\ _)$	$E'(_,\ _)$
关于 y 轴的对称点	$A''(_,\ _)$	$B''(_,\ _)$	$C''(_,\ _)$	$D''(_,\ _)$	$E''(_,\ _)$

于本题具体就是要把 AC、BC “接”成一条线段，怎样才能“接起来”，就要用到轴对称变换.

对于第二个难点，教科书中给了一些提示，可以告诉学生，证明“最大”“最小”这类问题，常常要另选一个量，通过与求证的那个“最大”“最小”的量进行比较来证明. 学生可能会对于只选一个 C' 不放心，可以让学生再选一个 C'' 证明一次，这时学生会发现，证明过程中，只用到 C' 与 C'' 点不同，不涉及它在什么位置. 实际上，“任选”一点 C'，就是除点 C 外什么地方都可以，由于点 C' 位置的任意性，所以结论对于直线 l 上每一点（除 C 外）都成立. 这也是数学中常采用的方法.

6. 用坐标表示轴对称体现了轴对称在平面直角坐标系中的应用. 14.2.2 小节主要研究两方面的问题，一是探究点或图形的轴对称变换引起的点的坐标的变化规律，另一个是如何利用这种坐标的变化规律在平面直角坐标系中作出一

再找几个点，分别画出它们的对称点，检验一下你发现的规律.[1]

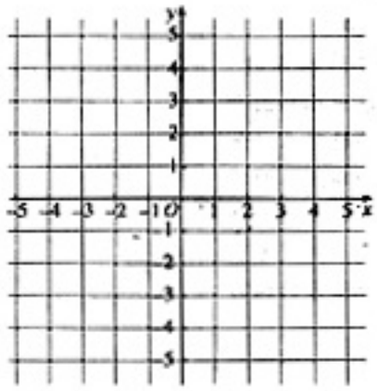


图 14.2-10

归纳

点(x, y)关于x轴对称的点的坐标为(____, ____)；
点(x, y)关于y轴对称的点的坐标为(____, ____).[2]

利用平面直角坐标系中，与已知点关于x轴或y轴对称的点的坐标的规律，我们也可以很容易地在平面直角坐标系中作出与一个图形关于x轴或y轴对称的图形.

例 3 如图 14.2-11，四边形$ABCD$的四个顶点的坐标分别为$A(-5, 1)$、$B(-2, 1)$、$C(-2, 5)$、$D(-5, 4)$，分别作出与四边形$ABCD$关于y轴和x轴对称的图形.

解：点(x, y)关于y轴对称的点的坐标为$(-x, y)$，因此四边形$ABCD$的顶点A、B、C、D关于y轴对称的点分别为A'(____, ____)、B'(____, ____)、C'(____, ____)、D'(____, ____)；[3]依次连接$A'B'$，$B'C'$，$C'D'$，$D'A'$，就可得到与四边形$ABCD$关于y轴对称的四边形$A'B'C'D'$.

[1] 有条件的，也可以利用计算机软件，作出这些对称点，测量它们的坐标，发现规律.

[2] $(x, -y)$；$(-x, y)$.

[3] $A'(5, 1)$，$B'(2, 1)$，$C'(2, 5)$，$D'(5, 4)$.

个图形轴对称图形.

在本小节中，教科书首先设置了一个“观察”栏目，让学生说出一些对称的点的坐标. 接下来，通过让学生在平面直角坐标系中画出一些已知点关于x轴或y轴对称的点，写出这些对称点的坐标，归纳出其中的规律. 教学时，要注意留给学生足够的空间，使学生活动起来，通过探究发现并总结规律. 对于这些规律，不要让学生死记硬背，要让学生平面直角坐标中，结合实例理解这些规律.

7. 已知点关于x轴或y轴对称的点的坐标的规律，就可以很容易的在平面直角坐标系中作出一个图形关于x轴或y轴对称的图形. 同进行轴对称变换类似，只要找到一些特殊点（多边形的顶点）的对称点的坐标，描出并连接这些点，就可以得到这个图形的轴对称图形，教科书接下来的例 3 就是这样的一个例子.

对于例 3，教科书解答中留有余地，如让学

[1] 对于学有余力的学生，在掌握了关于 x 轴和 y 轴对称的点的坐标特点后，可以让它们完成这样的探究. 类似这样的问题还有关于直线 $y=x$，或 $y=-x$ 对称的点的坐标特点等.

[2] 点 (x, y) 关于直线 $x=1$ 对称的点的坐标为 $(-x+2, y)$，关于直线 $y=-1$ 对称的点的坐标为 $(x, -y-2)$.

对于这类问题，只要先求出已知图形中的一些特殊点（如多边形的顶点）的对称点的坐标，描出并连接这些点，就可以得到这个图形的轴对称图形.

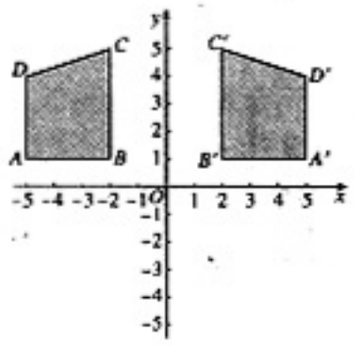


图 14.2-11

类似地，请你在图 14.2-11 上作出与四边形 $ABCD$ 关于 x 轴对称的图形.

探究 [1]

如图 14.2-12，分别作出 $\triangle PQR$ 关于直线 $x=1$（记为 m）和直线 $y=-1$（记为 n）对称的图形. 你能发现它们的对应点的坐标之间分别有什么关系吗？[2]

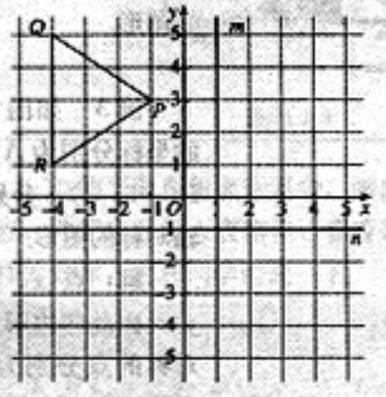


图 14.2-12

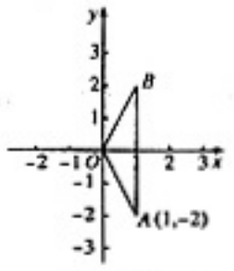
生根据学过的规律自己写出对称点的坐标，自己作出对称的图形等. 应注意让学生参与到解决问题的过程中去，引导学生思考，让学生操作完成，重点放在解决问题的方法上.

8. 教科书接下来的“探究”栏目是在前面所学内容上的拓展，可以结合学生前面知识实际掌握的情况，让学生探索完成. 有了关于 x 轴或 y 轴对称的点的坐标特点的知识，沿用前面探索发现规律的方法，可以让学生先作出轴对称图形，再写出对称点的坐标，然后归纳总结规律. 类似的，还可以让学生写出一个点关于直线 $y=x$ 或 $y=-x$ 对称的点的坐标等等. 但要注意，这里也不要拓展太多，如没有必要让学生掌握一个点关于任何一条与 x 轴平行的直线 $y=a$ 或与 y 轴平行的直线 $x=b$ 对称的点的坐标的特点，安排这个探究的目的主要在于让学生学习探索问题的方法，而不在于记忆某些特定的结论. 本小节要求学生掌握的主要是一个点关于 x 轴

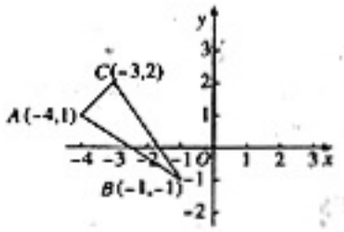
练习

1. 分别写出下列各点关于 x 轴和 y 轴对称的点的坐标：
$(-2, 6)$，$(1, -2)$，$(-1, 3)$，$(-4, -2)$，$(1, 0)$.

2. 如图，$\triangle ABO$ 关于 x 轴对称，点 A 的坐标为 $(1, -2)$，标出点 B 的坐标.



(第 2 题)



(第 3 题)

3. 如图，利用关于坐标轴对称的点的坐标的特点，分别作出与 $\triangle ABC$ 关于 x 轴和 y 轴对称的图形.

习题 14.2

复习巩固

1. 把下列各图形补成关于 l 对称的图形.[1]



(第 1 题)

2. 分别写出下列各点关于 x 轴和 y 轴对称的点的坐标：
$(3, 6)$，$(-7, 9)$，$(6, -1)$，$(-3, -5)$，$(0, 10)$.

3. 如图，以正方形 $ABCD$ 的中心为原点建立坐标系，点 A 的坐标为 $(1, 1)$，标出点 B、C、D 的坐标.[2]

[1] 可以让学生观察得到了一个什么图形，这个图形是否轴对称图形，与前面知识联系起来.

[2] 这样建立平面直角坐标系后，正方形的四个顶点分别是关于 x 轴和 y 轴对称的.

或 y 轴对称的点的坐标的变化规律，以及如何利用这种坐标的变化规律在平面直角坐标系中作出一个图形关于 x 轴或 y 轴对称的图形.

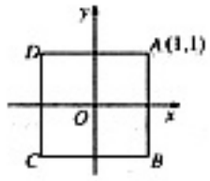
习题 14.2

1. “复习巩固”有 4 道题，涉及到了作出简单图形的轴对称图形以及用坐标表示轴对称的问题. 第 1 题，让学生把这些图形补成一个轴对称图形，实际就是要作出已知部分关于直线 l 对称的图形，由此也可以让学生更进一步的认识到轴对称图形和图形的轴对称的关系. 第 2、3 题是让学生复习巩固一个点关于坐标轴对称的点的坐标的特点，像第 3 题这样建立平面直角坐标系后，还可以用坐标证明正方形的某些结论，这一点在下一册“四边形”一章中还要涉及. 第 4 题比教科书例 3 略复杂，$\triangle ABC$ 上所有点不是在 x 轴的一侧，因此它关于 x 轴对称的图形也不在 x 轴的同一侧.

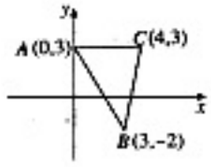
2. “综合运用”安排了 3 道题，第 5 题与“复

[1] 进一步体会轴对称图形可以由它的一半经过轴对称变换得到.

[2] 第(4)小题实际是中心对称，这里可以理解为进行了两次轴对称变换.



(第3题)

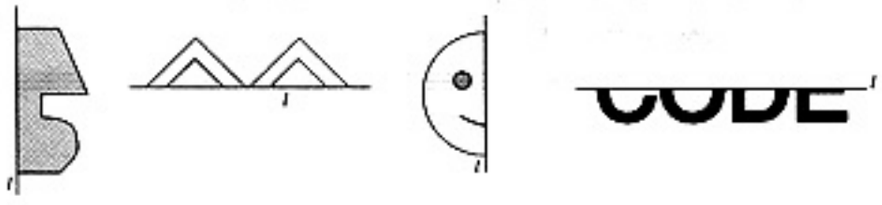


(第4题)

4. 如图，利用关于坐标轴对称的点的坐标的特点，分别作出$\triangle ABC$关于x轴和y轴对称的图形.

综合运用 ▶▶

5. 如图，把下列图形补成关于l对称的图形，看一看你得到了什么.[1]



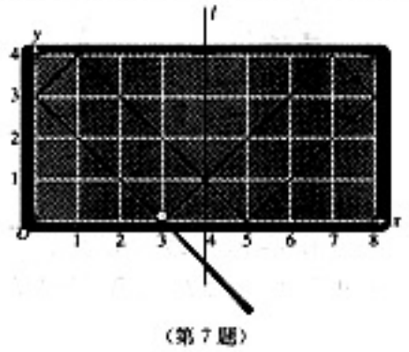
(第5题)

6. 根据下列点的坐标的变化，判断它们进行了怎样的变换：

(1) $(-1, 3)\to(-1, -3)$；　(2) $(-5, -6)\to(-5, -1)$；

(3) $(3, 4)\to(-3, 4)$；　(4) $(-2, 3)\to(2, -3)$.[2]

7. 如图，小球起始时位于(3，0)处，沿所示的方向击球，小球运动的轨迹如图所示，用坐标描述这个运动，找出小球运动的轨迹上几个关于直线l对称的点. 如果小球起始时位于(1，0)处，仍按原来方向击球，请你画出这时小球运动的轨迹.



(第7题)

习巩固”的第1题类似，通过作图，进一步掌握作出一个简单图形的轴对称图形的方法，进一步体会轴对称图形与图形的轴对称的关系，只是这里的图形更复杂一些（如涉及到的不止是线段，还包括圆弧等）. 第6题是教科书内容的扩展，要求学生根据点的坐标的变化，判断它进行了什么变换，这里涉及到了轴对称、平移，两次轴对称（实际是中心对称）等. 第7题是一个在平面直角坐标系中进行轴对称变换的问题. 安排这几个题目的在于综合运用本节的知识解决一些问题.

3. “拓广探索”安排了三个问题，相对比较复杂，难度也比较高. 第8题要把左边的树变到右边的树，需要进行两次轴对称变换，首先要把树“立直”，实际上，以后学习了图形的旋转后，也可以利用旋转解决这个问题. 第9题是教科书131页“探究”的拓展，仍是一个确定最短路线的问题，思路实际上还是一致的，仍是要利用轴

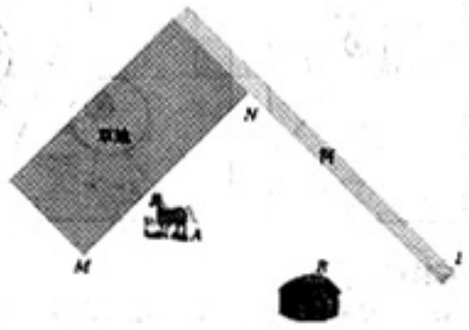
拓广探索 ▶▶

8. 如图，左边的树经过几次轴对称变换，可以变成右边的树？你能设计一种变换方案吗？[1]



（第8题）

9. 如图，A 为马厩，B 为帐篷，牧马人某一天要从马厩牵出马，先到草地边某一处牧马，再到河边饮马，然后回到帐篷．请你帮他确定这一天的最短路线．[2]



（第9题）

10. 展开你的想象，从一个或几个图形出发，利用轴对称变换或与平移进行组合，设计出一些图案，并与同学交流一下．[3]

[1] 要进行两次变换，先要把这棵树变“直”．

[2] 这个问题涉及到两次取点的问题，让学生结合131页探究进一步思考．

[3] 鼓励学生大胆想象，完成创作，并互相交流．

对称变换把这几个路径变到一条直线上，这样才能保证它最短，这个问题是可以证明的，方法与“探究”的证明类似，这里从略，证明也不要求学生掌握．第10题是一个设计图案的问题，由于学生已经分别学习了利用平移和轴对称设计图案，这里要求学生能把平移和轴对称组合，进行简单的图案设计，实际上，许多精美的图案都是离不开平移和轴对称的组合的，许多镶边和剪纸的图案都体现了这一点．这里要鼓励学生大胆想象、完成设计，并能运用不同的方法实现设计，再互相交流．

[1] 可以利用软件的测量功能测量出交角的大小和线段的长短，再让图形动起来，有助于发现轴对称的性质.

[2] 还可以在三角形的边上任意取几个点，作出它们关于 y 轴的对称点，观察它们坐标之间的关系.



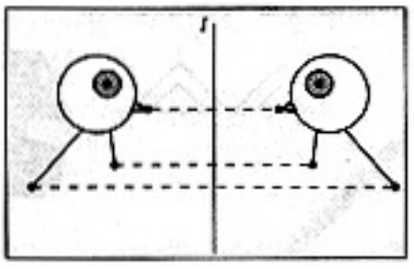
信息技术应用　　选学

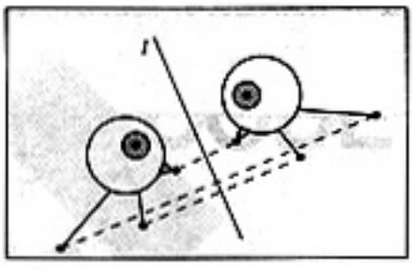
探索轴对称的性质

利用图形计算器或计算机等信息技术工具，可以很方便、直观地发现轴对称的性质，并利用轴对称进行图案设计. 下面以《几何画板》软件为例说明.

探索轴对称的性质

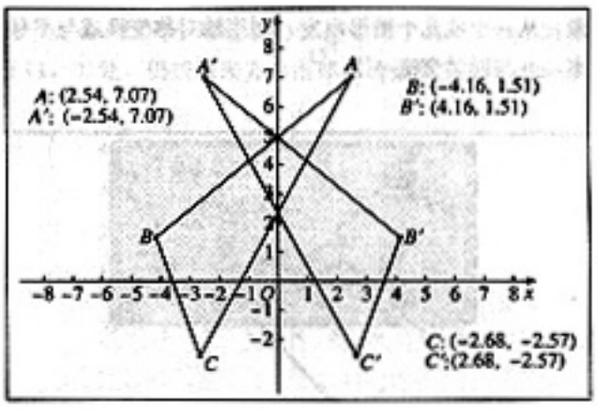
任意画一个图形，作这个图形关于直线 l 对称的图形，改变直线 l 的位置，或者改变其中一个图形的位置，观察对称点所连线段与对称轴的关系.[1]





探索轴对称的点的坐标特点

画一个 $\triangle ABC$，以 y 轴为对称轴作对称变换，得到 $\triangle A'B'C'$，度量点 A、A' 的坐标，观察它们的坐标有什么关系；再度量点 B、B' 的坐标，观察它们的坐标有什么关系.[2]



改变三角形的位置，观察它们的坐标有什么变化；再分别度量点 A、A'、B、B' 的坐

信息技术应用

1. 利用信息技术工具，可以很方便地制作出图形，可以很方便地让图形动起来. 许多计算机软件还具有测量功能，这也有利于我们在图形的运动变化的过程中去发现其中的不变的位置关系和数量关系，有利于发现图形的性质，这可以使得许多传统的数学教学做不到或做不好的事情变得容易起来. 因此，有条件的应尽可能多的使用计算机或图形计算器等信息技术工具.

2. 在本章，信息技术工具在许多地方都有用武之地. 许多数学软件都有轴对称变换的功能，再加上其测量功能以及可以使作出的图形动态变化的特点，可以让我们更方便的探索轴对称的性质、探索轴对称的点的坐标特点，探索线段垂直平分线的性质，利用轴对称变换设计图案，探索等腰三角形的一些性质等. 教科书以几何画板为例进行了一些说明.

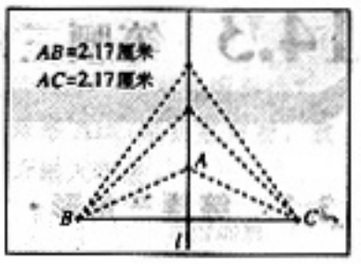
3. 为了编排方便，教科书设置了这样一个信

标，观察它们的坐标有什么关系.

用同样的方法，探索关于 x 轴对称的点的坐标关系.

探索线段垂直平分线的性质

在线段 BC 的垂直平分线 l 上任取一点 A，分别度量点 A 与点 B、点 C 之间的距离，用鼠标拖动点 A，使点 A 在直线 l 上运动，观察度量值的变化，你能发现什么规律吗?[1]

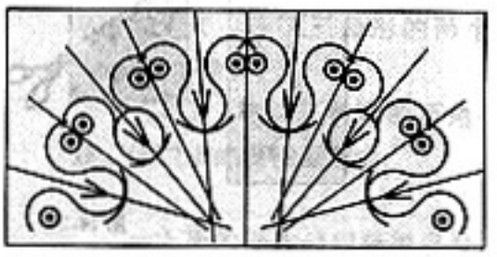


用多次轴对称变换进行图案设计[2]

对称轴平行，例如



对称轴不平行，例如



[1] 在动点 A 的变化过程中，可以发现，它到线段 BC 的顶点的距离总是相等的.

[2] 利用一些计算机软件，可以很方便进行轴对称变换，从而得到非常美丽的图案.

息技术应用的选学内容，将相关的知识放在了一起，教学时应结合具体情况，灵活使用.

[1] 等腰三角形学生小学接触过，生活中也有很多实例，可以让学生自己举出一些实例，巩固概念.

[2] 鼓励学生不同的得到等腰三角形的方法，并引导他们由此得到等腰三角形的性质.

14.3 等腰三角形

14.3.1 等腰三角形

探究

如图 14.3-1，把一张长方形的纸按图中虚线对折，并剪去阴影部分，再把它展开，得到的 $\triangle ABC$ 有什么特点？

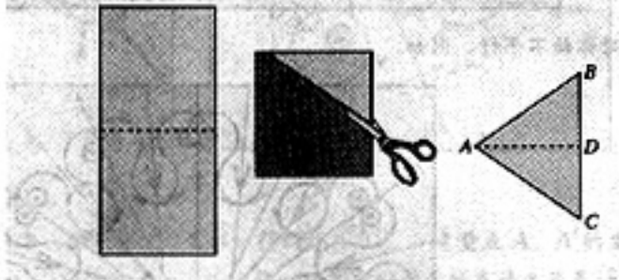


图 14.3-1

除了剪纸的方法，还可以怎样作（画）出一个等腰三角形？在你作（画）出的等腰三角形中，指明它的腰、底边、顶角和底角.[2]

上述过程中，剪刀剪过的两条边是相等的，即 $\triangle ABC$ 中 $AB=AC$. 像这样有两条边相等的三角形，叫做**等腰三角形**[1]（isosceles triangle），相等的两条边 AB 和 AC 叫做腰，另一条边 BC 叫做底边，两腰所夹的角 $\angle BAC$ 叫做顶角，底边与腰的夹角 $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$ 叫做底角.

1. 等腰三角形是一种特殊的三角形，它除了具有一般三角形的性质以外，还具有一些特殊性质. 而等腰三角形是轴对称图形，可以借助轴对称变换来研究等腰三角形的一些特殊性质，这也正是教科书把等腰三角形的相关内容安排在了轴对称内容之后的原因. 这一节的主要内容是等腰三角形的性质和判定，以及等边三角形的相关知识，重点是等腰三角形的性质与判定，它们是研究等边三角形，是证明线段相等和角相等的重要依据，这也是全章的重点之一.

2. 学生在小学已经接触过等腰三角形，生活中也有许多等腰三角形的实例，学生对于等腰三角形并不陌生. 因此，教科书并没有通过举出一些实例来引出等腰三角形的概念，而是直接通过一个“探究”栏目，让学生自己剪出一个三角形. 这个剪三角形的过程，保证了这个三角形的两条边相等，因此得到了一个等腰三角形. 同时这个剪三角形的过程也保留下了中间折叠的痕

思考

上面剪出的等腰三角形是轴对称图形吗？

把剪出的等腰三角形 ABC 沿折痕对折，找出其中重合的线段和角，填入下表：

重合的线段	重合的角

你能发现等腰三角形的性质吗？说一说你的猜想.

我们很容易发现等腰三角形的性质：[1]

性质 1　等腰三角形的两个底角相等（简写成“等边对等角”）；

性质 2　等腰三角形的顶角平分线、底边上的中线、底边上的高相互重合.[2]

由上面的操作过程获得启发，我们可以通过作出 $\triangle ABC$ 的对称轴，得到两个全等的三角形，从而利用三角形的全等证明这些性质.

如图 14.3-2，$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，作底边 BC 的中线 AD.

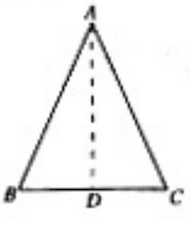


图 14.3-2

$$\because \begin{cases} AB=AC, \\ BD=CD, \\ AD=AD, \end{cases}$$

$\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAD$ (SSS).

$\therefore \angle B=\angle C.$

这样，我们就证明了性质 1.

从这个证明也可以看出，等腰三角形底边上的中线的左右两部分经翻转可以重合，等腰三角形是轴对称图形，底边上的中线（顶角平分线、底边上的高）所在直线就是它的对称轴.[3]

[1] 性质 1 很容易得出，对于性质 2，可以在学生找出重合的线段和角的基础上让学生回答等腰三角形的对称轴是什么，这时会有不同的回答，有的可能回答是顶角平分线所在直线，有的可能会回答是底边上的中线或高所在直线，这时可以进一步提问：“你们所说的是同一条直线吗”，由此引出性质 2.

[2] “三线和一”的性质，学生不容易引起重视，但它的应用十分广泛，教学时可以适当补充例题让学生巩固对这个性质的掌握，如本节习题 8.

[3] 这个证明过程证明了等腰三角形的左右两部分是全等的，从而也就证明了等腰三角形是轴对称图形.

迹，它就是等腰三角形的对称轴，这也为后面“思考”栏目作准备. 得到剪出的三角形之后，可以让学生回忆小学学过的等腰三角形，给出等腰三角形的概念，举出一些生活中的例子，并进一步介绍等腰三角形中腰、底边、顶角、底角等概念.

3. 教科书接下来安排的“思考”栏目是前面“探究”的继续，受剪出等腰三角形的过程的启发，学生很容易想到它是一个轴对称图形，折痕就是它的对称轴. 通过找出其中重合的线段和重合的角，利用轴对称变换的性质，可以很容易的引导学生得出等腰三角形的两个性质：“等边对等角”以及“三线和一”.

等腰三角形的两个性质，并不是通过论证给出的，但这并不代表不需要论证. 教科书接下来安排了利用三角形的全等证明了性质 1，并要求学生自己证明性质 2. 在证明性质 1 的过程中，关键是要添加辅助线，而有了前面的“探究”“思考”的铺垫，如何添加这个辅助线也就是水

[1] 性质 2 实际上包含三个命题：如图 14.3-2，由 $AB=AC$，$\angle BAD=\angle CAD$ 得到 $AD\perp BC$，$BD=DC$；由 $AB=AC$，$BD=DC$ 得到 $AD\perp BC$，$\angle BAD=\angle CAD$；由 $AB=AC$，$AD\perp BC$ 得到 $BD=DC$，$\angle BAD=\angle CAD$.

[2] 这是常见的利用等腰三角形性质的题目，解这类题目一般要与三角形的内角和定理相配合. 另外，等腰三角形的两个性质在证明线段相等或角相等方面有很多的应用，可以适当补充这方面的问题.

[3] 可以让学生证明其中的一些结论.

思考

受性质 1 证明的启发，你能证明性质 2 吗？[1]

例 1[2] 如图 14.3-3，在△ABC 中，$AB=AC$，点 D 在 AC 上，且 $BD=BC=AD$，求△ABC 各角的度数.

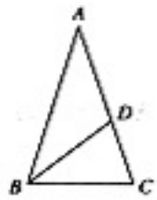


图 14.3-3

解：∵ $AB=AC$，$BD=BC=AD$，

∴ $\angle ABC=\angle C=\angle BDC$，

$\angle A=\angle ABD$（等边对等角）.

设 $\angle A=x$，则

$\angle BDC=\angle A+\angle ABD=2x$，

从而 $\angle ABC=\angle C=\angle BDC=2x$.

于是在△ABC 中，有

$\angle A+\angle ABC+\angle C=x+2x+2x=180°$.

解得 $x=36°$.

在△ABC 中，$\angle A=36°$，$\angle ABC=\angle C=72°$.

讨论

猜想一下，等腰三角形底边中点到两腰的距离相等吗？如图 14.3-4，你可以将等腰三角形 ABC 沿对称轴 AD 折叠，观察 DE 与 DF 的关系.

如果 DE、DF 分别是 AB、AC 上的中线或 $\angle ADB$、$\angle ADC$ 的平分线，它们还相等吗？[3] 由等腰三角形是轴对称图形，利用类似的方法，还可以得到等腰三角形中哪些线段相等？

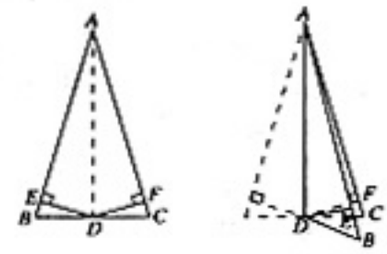


图 14.3-4

到渠成的了. 要证明性质 2，实际上要证明三个命题，教师应引导学生用符号语言表示出这三个命题，已知什么，要证什么，这一点清楚了，有前面证明作为基础，性质 2 的证明也就不难了.

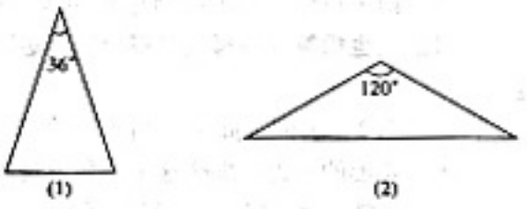
从本节开始到性质 2 的证明，教科书呈现了一个动手操作得出概念、观察实验得出性质、推理证明论证性质的过程，这也充分体现了一个观察、实验、猜想、论证的研究几何图形问题的全过程，教学时要注意到这一点.

4. 利用等腰三角形的轴对称性，可以发现等腰三角形中许多相等的线段或角，如两底角平分线、两腰的中线、两腰的高，以及教科书安排的“讨论”栏目中提到的一些线段和角等，而利用全等三角形和等腰三角形的性质又可以比较容易的证明这些结论.

在与等腰三角形有关的一些命题的证明过程中，会遇到一些添加辅助线的问题，其顶角平分线、底边上的高、底边上的中线是常见的辅助线.

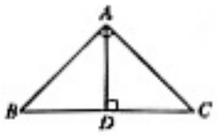
练习

1. 如图，在下列等腰三角形中，分别求出它们的底角的度数.

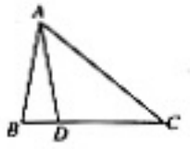


(第1题)

2. 如图，$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形（$AB=AC$，$\angle BAC=90°$），AD 是底边 BC 上的高，标出 $\angle B$、$\angle C$、$\angle BAD$、$\angle DAC$ 的度数. 图中有哪些相等的线段？[1]



(第2题)



(第3题)

3. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AD=DC$，$\angle BAD=26°$，求 $\angle B$ 和 $\angle C$ 的度数.

思考

如图 14.3-5，位于在海上 A、B 两处的两艘救生船接到 O 处遇险船只的报警，当时测得 $\angle A=\angle B$. 如果这两艘救生船以同样的速度同时出发，能不能大约同时赶到出事地点（不考虑风浪因素）？

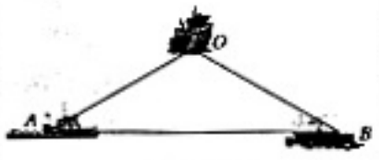


图 14.3-5

在一般的三角形中，如果有两个角相等，那么它们所对的边有什么关系？[2]

练习答案

1. (1) 72°；(2) 30°.
2. $\angle B=\angle C=45°$，$\angle BAD=\angle DAC=45°$，$AB=AC$，$BD=AD=CD$.
3. $\angle B=77°$，$\angle C=38.5°$.

[1] 这是一个等腰直角三角形的图形，也很常见. 教科书并没有专门介绍.

[2] 引导学生通过思考再经过推证得出等腰三角形的判定定理、

虽然“三线和一”，但添加辅助线时，有时作那条线都可以，有时不同的做法引起解决问题的复杂程度也不同，需要具体问题具体分析，这一点要注意.

另外，以前学生证明问题时，主要考虑利用全等三角形，也总习惯于找全等三角形. 虽然涉及利用等腰三角形性质的问题都可以利用全等三角形来解决，但要注意纠正这种不顾条件，一概依赖全等三角形的思维定势. 可结合具体问题让学生自己分析，寻找证明方法. 对于可以直接利用等腰三角形性质的问题，应当让学生选择简便方法.

5. 接下来，教科书讨论了等腰三角形的判定方法. 等腰三角形的判定方法，是证明两条线段相等的重要方法，它是把三角形中角的相等关系转化为边的相等关系的重要依据，要让学生掌握，这也是本节的一个重点.

等腰三角形的性质“等边对等角”和它的判

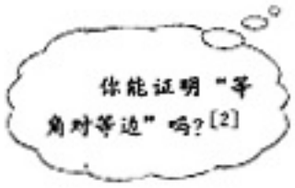
[1] 注意："等角对等边""等边对等角"都是指的同一个三角形中的边角关系.

[2] 通过添加辅助线(顶角平分线或底边上的中线或底边上的高)，类似于证明"等边对等角"方法，可以很容易利用三角形的全等证明这个结论.

[3] 例 2 是一个文字叙述的证明题，先要让学生根据这个命题写出已知、求证，再进行证明.

[4] 可以提醒学生，遇到三角形外角时，常常要考虑外角的两个特征：(1) 它与相邻的内角互补；(2) 它等于不相邻的两个内角的和.

[5] 括号里添的理由分别是：两直线平行，同位角相等；两直线平行，内错角相等；等角对等边.



由上面的思考再经过推证，我们可以进一步得到等腰三角形的判定定理：

如果一个三角形有两个角相等，那么这两个角所对的边也相等（简写成"等角对等边"）.[1]

例 2[3] 求证：如果三角形一个外角的平分线平行于三角形的一边，那么这个三角形是等腰三角形.

已知：$\angle CAE$ 是 $\triangle ABC$ 的外角，$\angle 1=\angle 2$，$AD\parallel BC$ (图 14.3-6).

求证：$AB=AC$.

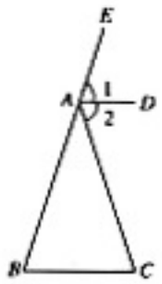


图 14.3-6

分析：要证明 $AB=AC$，可先证明 $\angle B=\angle C$. 因为 $\angle 1=\angle 2$，所以可以设法找出 $\angle B$、$\angle C$ 与 $\angle 1$、$\angle 2$ 的关系.[4]

证明：∵ $AD\parallel BC$，

∴ $\angle 1=\angle B$ (_____)，

$\angle 2=\angle C$ (_____).

而已知 $\angle 1=\angle 2$，

∴ $\angle B=\angle C$.

$AB=AC$ (_____).[5]

例 3 如图 14.3-7，标杆 AB 高 5 m，为了将它固定，需要由它的中点 C 向地面上与点 B 距离相等的 D、E 两点拉两条绳子，使得点 D、B、E 在一条直线上，量得 $DE=4$ m，绳子 CD 和 CE 要多长?

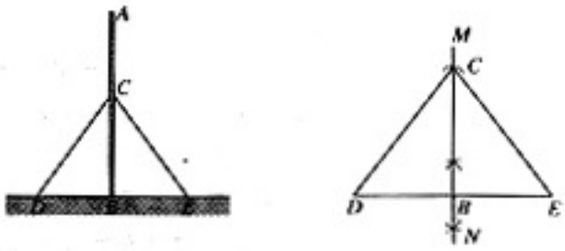


图 14.3-7

定方法"等角对等边"是不一样的结论，它们的题设和结论正好相反，实际上是互逆命题，这一点要让学生体会. 学生前面已经学过一些性质和判定方法如平行线的性质和判定，全等三角形的性质和判定等. 但学生应用它们的时候，还是容易混淆，这里要结合等腰三角形的性质和判定的教学，进一步帮助学生认识判定和性质的区别，这也是一个难点.

6. 教科书首先给出一个海上救生的问题，救援船只沿同样的角出发，能否同时赶到出事地点，引出等角是否对等边的问题. 结合直观，学生很容易得出这个结论，接下来教科书要求学生通过论证得出这个结论. 教学时，也可以直接提出问题："等腰三角形中，等边对等角，反过来，等角对等边吗"，直接引入对判定方法的讨论和证明.

7. 等腰三角形性质 2"三线合一"的逆命题实际上也是真命题，即在 $\triangle ABC$ 中，由 $AD\perp BC$，$BD=DC$ 或者 $AD\perp BC$，$\angle BAD=\angle CAD$

分析：显然绳长 CD 和 CE 是相等的．问题实际上就是已知底边和底边上的高求等腰三角形的腰长的问题，如果我们能以适当的比例画出这个等腰三角形，量出它的腰长，就能得到绳长了．

已知底边和底边上的高，你能用尺规作图方法作出这个等腰三角形吗？[1]

解：选取比例尺为 1∶100（即以 1 cm 代表1 m）．

(1) 作线段 $DE=4$ cm；

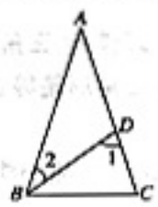
(2) 作线段 DE 的垂直平分线 MN，与 DE 交于点 B；

(3) 在 MN 上截取 $BC=2.5$ cm；

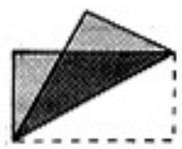
(4) 连接 CD、CE，$\triangle CDE$ 就是所求的等腰三角形．量出 CD 的长，就可以计算出要求的绳长．[2]自己试一试！

练习

1. 如图，$\angle A=36°$，$\angle DBC=36°$，$\angle C=72°$．分别计算$\angle 1$、$\angle 2$ 的度数，并说明图中有哪些等腰三角形．



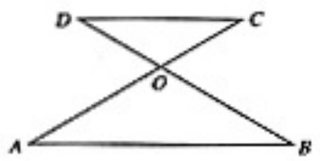
（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，把一张矩形的纸沿对角线折叠，重合部分是一个等腰三角形吗？为什么？

3. 如图，AC 和 BD 相交于点 O，且 $AB/\!/DC$，$OA=OB$，求证 $OC=OD$．



（第 3 题）

[1] 例 3 的解法实际上给出了已知底边和底边上的高求作等腰三角形的作图方法，这也是一个要求掌握的尺规作图．

[2] 后面学习了勾股定理后，还可以通过计算得出绳长．

练习答案

1. $\angle 1=72°$，$\angle 2=36°$；图中的等腰三角形有 $\triangle ABD$，$\triangle BDC$，$\triangle ABC$．
2. 是，根据两直线平行内错角相等，可知三角形中有两个角相等．
3. 由 $OA=OB$ 可得 $\angle A=\angle B$，从而利用 $AB/\!/DC$ 可知 $\angle C=\angle D$，因此 $OC=OD$．

或者 $BD=DC$，$\angle BAD=\angle CAD$ 都可以得到 $AB=AC$，其中的第一条实际上就是线段的垂直平分线的性质．它们也可以作为判断一个三角形是等腰三角形的方法，但是由于它们的叙述比较复杂，而且其中只有第 1 条常用，因此教科书并未把它们列出，教师掌握即可．

8. 对于等腰三角形的判定，教科书安排了两个例题，例 2 是文字叙述的证明题，例 3 是一个实际应用题，其中包含了已知底边和底边上的高求作等腰三角形的作图方法．对于例 2 这样的文字证明题，虽然前面也出现过，但在一般情况下，学生还是不容易掌握，主要是已知、求证写不好，最常见的是条件写的不全或不明确这实际上就是如何将数学中的文字语言翻译成符号语言的过程，要注意结合一些具体问题让学生慢慢掌握．

教学时，例题的已知、求证最好先让学生写，然后进行证明．在证明的过程中，他们会发现已知、求证写的不对或不好的地方，这时再纠

[1] 等边三角形也叫正三角形.

[2] 这时证明一个角是60°的常用方法，通过作出一个等边三角形，也可以作出一个60°的角.

[3] 要证明这个结论，需分两种情况讨论：(1) 顶角是60°；(2) 有一个底角是60°.

14.3.2 等边三角形

在等腰三角形中，有一种特殊的等腰三角形——三条边都相等的三角形，我们把这样的三角形叫做**等边三角形**[1] (equilateral triangle).



把等腰三角形的性质用于等边三角形，能得到什么结论？一个三角形满足什么条件就是等边三角形？

由等腰三角形的性质和判定方法，可以得到：

等边三角形的三个内角都相等，并且每一个角都等于60°.[2]

三个角都相等的三角形是等边三角形.

有一个角是60°的等腰三角形是等边三角形.[3]

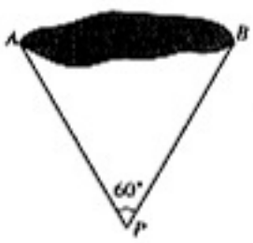


图 14.3-8

例4 如图14.3-8，课外兴趣小组在一次测量活动中，测得$\angle APB=60°$，$AP=BP=200$ m，他们便得出了一个结论：池塘最长处不小于200 m. 他们的结论对吗？

解：在$\triangle APB$中，$AP=BP$，$\angle APB=60°$，所以

$$\angle PAB=\angle PBA=\frac{1}{2}(180°-\angle APB)$$

$$=\frac{1}{2}(180°-60°)=60°.$$

于是 $\angle PAB=\angle PBA=\angle APB$.

从而$\triangle APB$是等边三角形，AB的长是200 m. 由此可以得出兴趣小组的结论是正确的.

正，效果会更好.

例3中隐含着等腰三角形的尺规作图的问题，这也是教学要求的，要注意让学生掌握.

9. 等边三角形是一种特殊的等腰三角形，把等腰三角形的性质应用于等边三角形，很容易得出等边三角形的性质；类似于等腰三角形的判定方法，也很容易得到等边三角形的判定方法. 教科书在给出等边三角形的定义之后，安排了一个“讨论”栏目，让学生根据等腰三角形的性质和判定方法讨论得出等边三角形的性质和判定方法. 教学中，在得出这些结论以后，还应当让学生利用所学知识进行证明.

等边三角形的性质实际上也是等边对等角的问题，只是由于等边三角形的三条边都相等，所以它的三个角也相等，再由三角形内角和定理，可知它们都等于60°；第一个判定方法实际也是等角对等边的问题，只是三个角都相等，所以所对的三条边都相等，从而它是等边三角形；第2

探究

如图 14.3-9，在等边三角形 ABC 的边 AB、AC 上分别截取 $AD=AE$，$\triangle ADE$ 是等边三角形吗？试说明理由.[1]

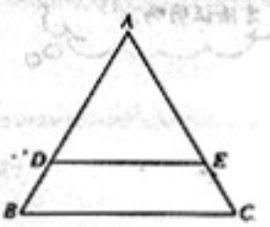
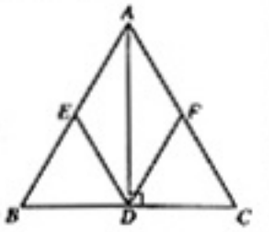


图 14.3-9

练习

1. 等边三角形是轴对称图形吗？如果是，指出它的对称轴.
2. 如图，等边三角形 ABC 中，AD 是 BC 上的高，$\angle BDE=\angle CDF=60°$，图中有哪些与 BD 相等的线段？



（第 2 题）

探究

如图 14.3-10，将两个含 30°角的三角尺摆放在一起. 你能借助这个图形，找到 Rt$\triangle ABC$ 的直角边 BC 与斜边 AB 之间的数量关系吗？

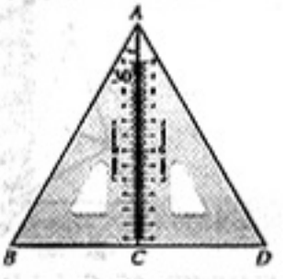


图 14.3-10

[1] $\triangle ADE$ 是等边三角形. 理由如下：因为 $\triangle ABC$ 是等边三角形，所以 $\angle A=60°$，又由 $AD=AE$ 可知 $\triangle ADE$ 是一个等腰三角形. 根据“有一个角是 60°的等腰三角形是等边三角形”即可证明 $\triangle ADE$ 是等边三角形.

练习答案

1. 等边三角形是轴对称图形，它有三条对称轴，对称轴是顶角平分线或底边上的高、中线所在直线.
2. 与 BD 相等的线段有 CD、CF、BE、DE、FD、AF、AE.

个判定方法告诉我们，在等腰三角形中，只要有一个角 60°，不论这个角是顶角还是底角，这个三角形就是等边三角形，这也给证明三角形中边相等带来方便.

等边三角形也是轴对称图形，它比一般的等腰三角形具有更多的对称轴，由等边三角形的轴对称性，也可以发现等边三角形的一些性质，这也可以让学生探索完成.

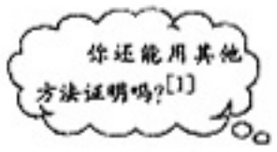
10. 教科书接下来安排的例 4 和“探究”就是等边三角形判定方法的应用. 在“探究”中，还可以把截取 $AD=AE$ 变为 $DE\parallel BC$，得到的 $\triangle ADE$ 是等边三角形. 实际上，DE 可以动态变化，只要保证 $AD=AE$ 或 $DE\parallel BC$ 就可以了.

11. 教科书接下来的“探究”得出的结论是由等边三角形推出的关于直角三角形的一个性质，它反映了直角三角形中边角之间的关系，主要作用是解决直角三角形中的有关计算问题，在

[1] 可以直接在 $\triangle ABC$ 的斜边上截取 $BE=BC$，通过证明 $\triangle BEC$ 是等边三角形，$\triangle ECA$ 是等腰三角形证明这个结论.

练习答案

$\angle B=60°$，$\angle A=30°$，$AB=2BC$.



由于 $\triangle ADC$ 是 $\triangle ABC$ 的轴对称图形，因此 $AB=AD$，$\angle BAD=2\times30°=60°$，从而 $\triangle ABD$ 是一个等边三角形. 再由 $AC\perp BD$ 可得 $BC=CD=\frac{1}{2}AB$. 于是我们得到：

在直角三角形中，如果一个锐角等于 30°，那么它所对的直角边等于斜边的一半.

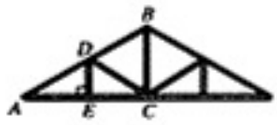


图 14.3-11

例 5 图 14.3-11 是屋架设计图的一部分，点 D 是斜梁 AB 的中点，立柱 BC、DE 垂直于横梁 AC，$AB=7.4$ m，$\angle A=30°$，立柱 BC、DE 要多长？

解：∵ $DE\perp AC$，$BC\perp AC$，$\angle A=30°$，由上面的结论，可得

$$BC=\frac{1}{2}AB,\ DE=\frac{1}{2}AD.$$

$$\therefore\ BC=\frac{1}{2}\times7.4=3.7(\text{m}).$$

又 $$AD=\frac{1}{2}AB,$$

$$\therefore\ DE=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}\times3.7=1.85(\text{m}).$$

答：立柱 BC 的长是 3.7 m，DE 的长是 1.85 m.

练习

Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\angle B=2\angle A$，$\angle B$ 和 $\angle A$ 各是多少度？边 AB 与 BC 之间有什么关系？

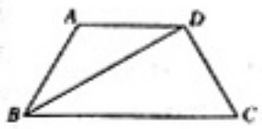
后面学习“锐角三角函数”时，将应用它及相似形的性质，引出三角函数的概念.

对于这个性质，教科书通过让学生探究，将两个含 30°角的三角尺拼在一起，得到一个等边三角形，再利用这个图形的轴对称性得出的这个性质. 实际上还可以直接由等边三角形的性质引入. 如图 14.3-10，作等边三角形 ABD 的高 AC，得直角三角形 ABC，由等边三角形的性质可知，$\angle BAC=30°$，$BC=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}AB$，这样就得到了这个结论. 反过来，如果作等边三角形的中线 AC，则 AC 也是高，$BC=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}AB$，于是可得 AC 平分 $\angle BAD$，$\angle BAC=30°$，即直角三角形中，如果一个直角边等于斜边的一半，那么它所对的角等于 30°，这说明这个结论的逆命题也是成立的. 教科书中没有给出这个逆命题，教

习题14.3

复习巩固 ▶▶

1. (1) 等腰三角形的一个角是 110°，它的另外两个角是多少度？
   (2) 等腰三角形的一个角是 80°，它的另外两个角是多少度？
2. 如图，$AD/\!/BC$，BD 平分 $\angle ABC$. 求证 $AB=AD$.

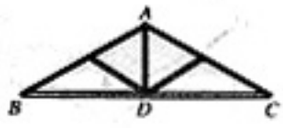


(第 2 题)

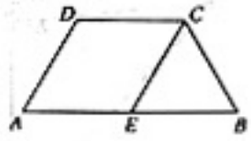


(第 3 题)

3. 如图，五角星的五个角都是顶角为 36°的等腰三角形，为了画出五角星，还需要知道 $\angle AMB$ 的度数，算一算 $\angle AMB$ 等于多少度.[1]
4. 如图，厂房屋顶钢架外框是等腰三角形，其中 $AB=AC$，立柱 $AD\perp BC$，且顶角 $\angle BAC=100°$，$\angle B$、$\angle C$、$\angle BAD$、$\angle CAD$ 各是多少度？

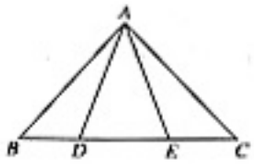


(第 4 题)

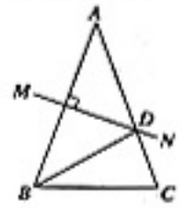


(第 5 题)

5. 如图，$\angle A=\angle B$，$CE/\!/DA$，CE 交 AB 于 E，$\triangle CEB$ 是等腰三角形吗？
6. 如图，点 D、E 在 $\triangle ABC$ 的边 BC 上，$AB=AC$，$AD=AE$，求证 $BD=CE$.[2]



(第 6 题)



(第 7 题)

7. 如图，$AB=AC$，$\angle A=40°$，AB 的垂直平分线 MN 交 AC 于点 D，求 $\angle DBC$ 的度数.

[1] 五角星中有很多等腰三角形，教学时可以在其中找一些问题，帮助学生巩固等腰三角形的性质和判定.

[2] 可以通过证明三角形全等，也可以通过作出底边上的高，通过利用等腰三角形“三线和一”的性质证明.

学时不必补充，对于学有余力的学生，可作适当介绍.

习题 14.3

1. “复习巩固”围绕等腰三角形、等边三角形的性质和判定方法安排了 7 个题目. 第 1、3、4 题是计算题，已知等腰三角形中顶角或一个底角的度数求其他角的度数；第 2、5 题是等腰三角形判定的证明题；第 6、7 题图形相对复杂一些，需要经过两三步的推理. 这些都是一些基本题型，要求学生能很好的掌握.

2. “综合运用”有 5 个题目，要求能综合应用本节的知识. 第 8 题是应用等腰三角形“三线合一”的性质，等腰三角形底边上的中线应垂直于底边，如果线绳经过直角顶点，说明房梁是水平的，根据是平面内过直线外一点有且只有一条直线与已知直线垂直. 第 9、10 题都是应用“等

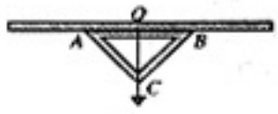
[1] 这是一个常用的测水平的简易工具.

[2] 在平面上用角度表示方向的问题，是常见的问题，在七年级已经见过一些，在这里还要复习，讲清怎样用角度表示平面内的方向的问题.

[3] 可以结合 142 页的讨论完成这个习题.

综合运用 ▶▶

8. 某地地震过后，河滨村中学的同学用下面的方法检测教室的房梁是否水平：在等腰直角三角尺斜边中点拴一条线绳，线绳的另一端挂一个铅锤，把这块三角尺的斜边贴在房梁上，结果线绳经过三角尺的直角顶点，同学们确信房梁是水平的. 他们的判断对吗？为什么？[1]



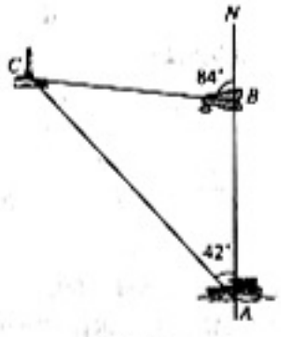
(第 8 题)



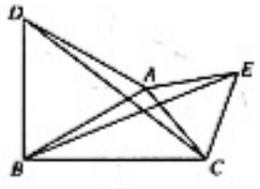
(第 9 题)

9. 检验员在对出厂钢架进行检验时，采用在△PAB 内测量∠PAB 和∠PBA 度数的方法，如果∠PAB=∠PBA，就可以断定铁架中 PA 与 PB 等长. 你能说出为什么吗？

10. 上午 8 时，一条船从海岛 A 出发，以 15 海里/时的速度向正北航行，10 时到达海岛 B 处. 从 A、B 望灯塔 C，测得∠NAC=42°，∠NBC=84°. 求从海岛 B 到灯塔 C 的距离.[2]



(第 10 题)



(第 11 题)

11. 如图，△ABD、△AEC 都是等边三角形，求证 BE=DC.

12. 等腰三角形两底角的平分线相等吗？两腰上的中线呢？两腰上的高呢？证明其中的一个结论.[3]

拓广探索 ▶▶

13. 如图，点 E 是∠AOB 的平分线上一点，EC⊥OA，ED⊥OB，垂足分别是 C、D.

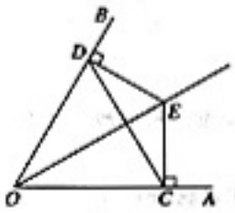
角对等边”的判定方法的问题. 第 11 题要综合运用等边三角形的性质和全等三角形的判定方法. 第 12 题是要学生证明等腰三角形中一些相等的线段，这个问题可以结合 142 页“讨论”栏目共同完成.

3. “拓广探索”有两个问题. 第 13 题要求学生综合运用等腰三角形的性质和判定方法，角平分线的性质、垂直平分线的性质，学生得出结论后，要求他们证明. 第 14 题是利用有一个角是 30°的直角三角形的性质，要把这样一个直角三角形分成三个全等形，还要用到三角形全等的知识，对于学有余力的学生还可以要求他们证明.

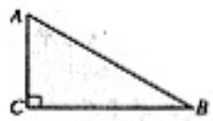
(1) $\angle ECD$ 和 $\angle EDC$ 相等吗?

(2) OC 和 OD 相等吗?

(3) OE 是线段 CD 的垂直平分线吗?



(第 13 题)



(第 14 题)

14. 如图，要把一块三角形的土地均匀分给甲、乙、丙三家农户去种植，如果 $\angle C=90°$，$\angle B=30°$，要使这三家农户所得土地的大小、形状都相同，请你试着分一分，在图上画出来.

实验与探究　选学

三角形中边与角之间的不等关系

学习了等腰三角形，我们知道：在一个三角形中，等边所对的角相等；反过来，等角所对的边也相等. 那么，不相等的边（或角）所对的角（或边）之间的大小关系怎样呢？[1] 大边所对的角也大吗？

如图 1，在 $\triangle ABC$ 中，如果 $AB>AC$，那么我们可以将 $\triangle ABC$ 折叠，使边 AC 落在 AB 上，点 C 落在 AB 上的 D 点，[2] 则

$$\angle C=\angle ADE.$$

而　　$\angle ADE>\angle B$（为什么），

所以　　$\angle C>\angle B$.

[1] 这里可以让学生回答是否相等. 回答这个问题，需要用到反证法的思想：如果边（或角）相等，那么角（或边）相等，与已知矛盾.

[2] 也可以直接在 AB 上截取 $AD=AC$.

实验与探究

1. 在学过等腰三角形的性质与判定之后，这个“实验与探究”进一步让学生探究了三角形中边与角之间的不等关系. 安排它的目的有两个，一是让学生探究三角形中边与角之间的不等关系，即教科书中给出的两个互逆命题，二是通过这两个问题的探究，介绍利用相等关系来解决不等关系的一种方法.

2. 在一些理论和实际问题中，有时会遇到三角形中的边角不等关系. 例如，在七年级下册中介绍过“垂线段最短”这个结论，是通过观察和探究得到的，应用边角不等关系的结论，可以证明，在直角三角形中，斜边最长，从而可以证明它. 又如，判断一个三角形是不是一个锐角三角形，如果最大的边所对的角是锐角，就可以判定这个三角形是锐角三角形，这也是根据三角形中边角的不等关系的结论.

3. 在证明不等关系时，通过进行一次轴对

[1] 在较大的角 $\angle ACB$ 内作 $\angle BCD=\angle B$，CD 交 AB 于点 D，则 $BD=DC$.

在 $\triangle ADC$ 中，因为 $AD+DC>AC$，所以 $AD+BD>AC$，即 $AB>AC$.

[2] 答案如下：

(1) $\angle A>\angle C>\angle B$；

(2) 是锐角三角形；

(3) 斜边.

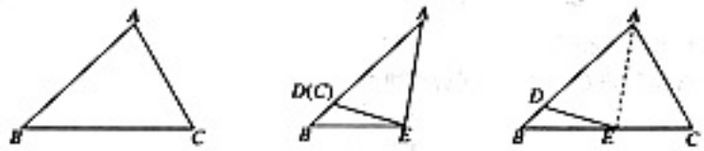


图 1

这说明，在一个三角形中，如果两条边不等，那么它们所对的角也不等，大边所对的角较大.

从上面的过程可以看出，利用轴对称的性质，可以把研究边与角之间的不等问题，转化为较大量的一部分与较小量相等的问题，这是几何中研究不等问题时的常用方法.

类似地，应用这种方法，你能说明“在一个三角形中，如果两个角不等，那么它们所对的边也不等，大角所对的边较大”吗？(图 2)[1]

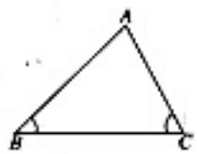


图 2

利用上面两个结论，回答下面的问题：[2]

(1) 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $BC>AB>AC$，那么 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 有怎样的大小关系？

(2) 如果一个三角形中最大的边所对的角是锐角，这个三角形一定是锐角三角形吗？为什么？

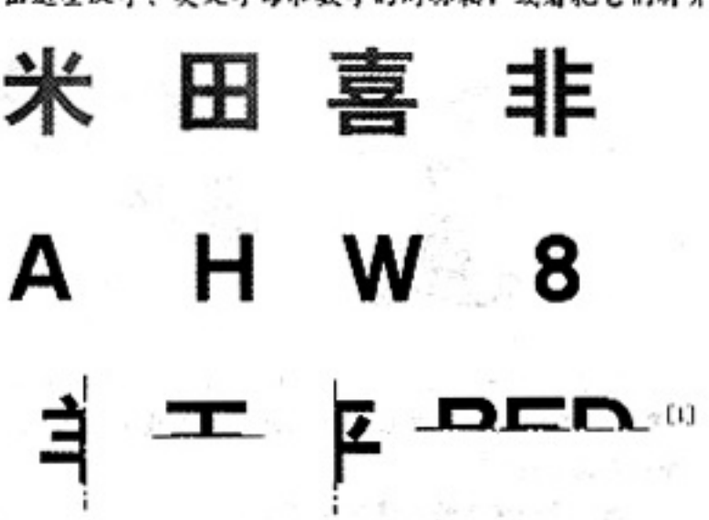
(3) 直角三角形的哪一条边最长？为什么？

称变换，把“不等”的问题转化成了“相等”的问题，通过已知的关于边角相等的知识，解决了未知的边角之间不等的问题，这种方法很有用，让学生了解这种方法，对于培养他们解决数学问题的能力很有好处.

数学活动

活动 1　艺术字与轴对称变换

在艺术字中，有些汉字、英文字母和阿拉伯数字是轴对称的．如图 1，画出这些汉字、英文字母和数字的对称轴，或者把它们补齐．



[1]

图 1

你能再写出几个轴对称的艺术字吗？画出它们的对称轴，并在小组中交流一下．

[1] 它们分别是羊、王、平、BED.

1. 本章安排了两个数学活动，艺术字与轴对称变换，镜子、倒影与轴对称变换．

在艺术字中，有些汉字、英文字母和阿拉伯数字是轴对称图形，教科书列举了一些这样的例子，让学生画出它们的对称轴，又举出一些例子，让学生把它们补齐，得到一个完整的汉字或字母．还可以让学生多举出一些这样的例子，互相交流．

安排这个活动主要是让学生感受到轴对称现象的无处不在，同时让学生复习本章所学的一些知识，如画出对称轴或作出轴对称图形等．现实生活中，这样的例子还很多，比如许多国家的国旗、一些品牌的商标等，都设计成轴对称的形状．也可以让学生收集一些这样的例子，作为一个小专题活动来开展．

2. 活动 2 安排了镜子、倒影与轴对称变换，

[1] 2.5 米.

[2] 警察没有看错，镜像中的右手，实际上是左手.

[3] 车牌号是京 E K 8051.

活动 2　镜子、倒影与轴对称变换

你检测过视力吗？直接看视力表检测视力时，要求视力表与被检测人的距离为 5 米. 小明检测视力时，医生把视力表挂在他背后的墙上，小明是从对面的镜子里看视力表的（图 2）. 你知道镜子应离小明几米吗？[1]



图 2



图 3

警察监视一名犯罪嫌疑人的时候，看到他右手缠着绷带（图 3），而审讯这名犯罪嫌疑人时，却发现他左手缠着绷带，警察看错了吗？[2]

图 4 是一辆车的车牌在水中的倒影，你知道这辆车的车牌号吗？[3]



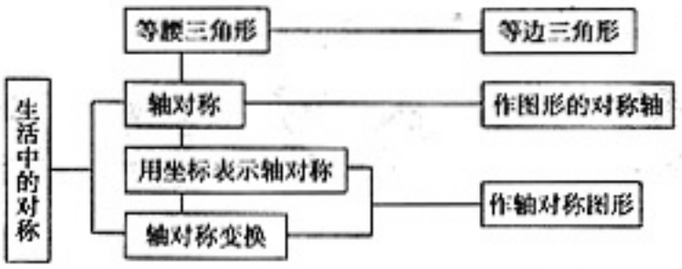
图 4

通过镜子观察物体时，我们看到的是这个物体通过镜面反射后得到的镜像，水中的倒影也是一样的. 生活中这种现象是很常见的，再找几个例子，仔细观察一下，你能总结出这种镜面反射的特点吗？它和我们学过的轴对称变换有什么异同？与同学交流一下你的发现.

镜面反射是轴对称变换的扩展，将它从平面扩展到了空间，但是它们具有和轴对称变换类似的性质. 教科书通过三个实例：看视力表，警察抓罪犯，车牌倒影来介绍这种镜面反射的. 在回答上述问题的过程中，学生会对镜面反射有所了解. 安排活动 2 的主要目的也就在于结合现实生活中的典型实例，了解并欣赏物体的静面对称，发展学生的空间观念. 教师可鼓励学生再举出一些这样的例子，并对此展开讨论，但不要求全体学生掌握镜面反射的性质，也不要求说出上述问题答案的理由.

小　结

一、本章知识结构图[1]



二、回顾与思考[2]

1. 在现实世界中，存在着大量的轴对称现象，你能举出一些例子吗？成轴对称的图形有什么特点？

2. 在我们学过的几何图形中，有哪些是轴对称图形？它们的对称轴与这个图形有怎样的位置关系？

3. 一个图形经过轴对称变换后，对应点所连线段与对称轴有什么关系？如何作出一个图形的轴对称图形？

4. 在平面直角坐标系中，如果两个图形关于 x 轴或 y 轴对称，那么对应点的坐标有什么关系？请结合例子说明.

5. 利用等腰三角形的轴对称性，我们发现了它的哪些性质？你能通过全等三角形加以证明吗？等边三角形作为特殊的等腰三角形，有哪些特殊性质？

[1] 可鼓励学生自己梳理本章的主要知识内容，画出知识结构图.

[2] 可结合一些具体例子来让学生回答这些问题.

1. 小结时，可以结合回顾与思考中提出的问题，引导学生独立思考，自己回顾本章的主要内容. 在对问题的回答过程中，教师应当关注学生运用自己的语言解释答案的过程，关注学生运用例子来说明对所学知识的理解，而不是简单的重复教科书上的结论. 回答后，让学生进行反思和交流，并在反思和交流的过程中建立知识体系.

2. 立足学生已有的生活经验和数学经验，从生活出发研究轴对称，再利用轴对称研究等腰三角形是本章编写的特点，也是一条主线，小结时要让学生引起注意. 同时，学生已经学习了证明，本章要在学生观察、探索得出图形性质的基础上进行推理，进一步感受证明的必要性，让学生经历一个从观察实验到推理证明的全过程，这也是发现图形特性的一个常见过程，要让学生理解. 另外，小结时，要注意引导学生用数学的眼

[1] 注意只考虑几何图形的特征，不要考虑颜色等.

[2] 可以连接 BC，应用垂直平分线的性质.

复习题14

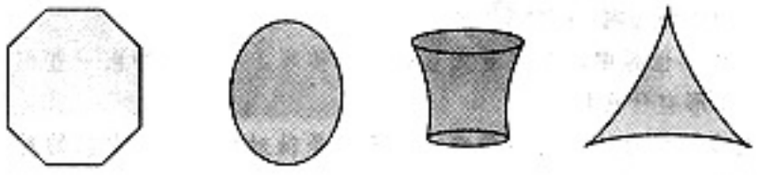
复习巩固

1. 下列图形是轴对称图形吗？如果是，找出它们的对称轴.[1]



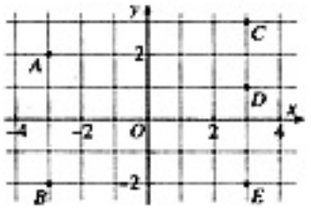
（第1题）

2. 画出下列轴对称图形的对称轴.

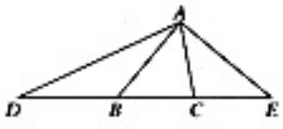


（第2题）

3. 如图所示的点 A、B、C、D、E 中，哪两个点关于 x 轴对称？哪两个点关于 y 轴对称？点 C 和点 E 关于 x 轴对称吗？为什么？



（第3题）



（第4题）

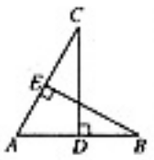
4. 如图，$\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=50°$，$\angle ACB=80°$，延长 CB 至 D，使 $DB=BA$，延长 BC 至 E，使 $CE=CA$. 连接 AD、AE. 求 $\angle D$、$\angle E$、$\angle DAE$ 的度数.

5. 如图，D、E 分别是 AB、AC 的中点，$CD\perp AB$ 于 D，$BE\perp AC$ 于 E，求证 $AC=AB$.[2]

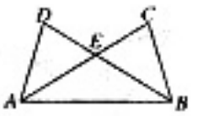
光观察世界，体会数学的广泛应用和文化价值，促进他们观察、分析、归纳、概括能力的进一步发展.

复习题14

1. “复习巩固”的第1题给出了一些生活中的图案，学生能判断出它们是否轴对称图形，并画出对称轴即可，不要求证明它们是轴对称. 第2题是一些规则的轴对称图形的对称轴，应当要求学生画出它们全部对称轴. 第3题是在平面直角坐标系中判断轴对称的问题，可以直接根据轴对称的特征，也可以根据关于坐标轴对称的点的坐标的特点. 第4题是应用等腰三角形的性质的计算题. 解答第5题可以利用三角形的全等，也可以连接 BC，直接利用线段垂直平分线的性质. 第6题先要证明三角形全等，再利用“等角对等边”的判定方法. 第7题是复习巩固有一角是30°的直角三角形的性质，这也是一个常见的图形，在讲相似时也常用到.



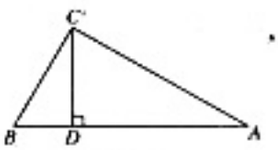
(第5题)



(第6题)

6. 如图，$AD=BC$，$AC=BD$，$\triangle EAB$ 是等腰三角形吗？

7. 如图，$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，CD 是高，$\angle A=30^\circ$，求证 $BD=\frac{1}{4}AB$.



(第7题)

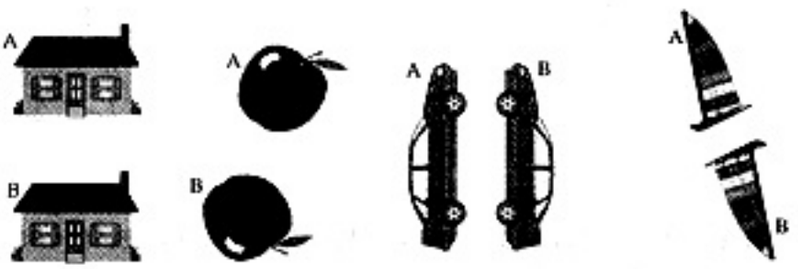
综合运用 ▶▶

8. 试确定如图所示的正多边形的对称轴的条数，一般地，一个正 n 边形有多少条对称轴？[1]



(第8题)

9. 如图，图形 B 是图形 A 的轴对称图形吗？如果是，画出它们的对称轴；如果不是，试着画出图形 A 的一个轴对称图形.[2]



(第9题)

10. 如图，从图形 I 到图形 II 是进行了平移还是轴对称变换？如果是轴对称，找出对称轴；如果是平移，是怎样的平移？

[1] 这些对称轴分别是对角线所在直线或对边中点的连线所在的直线或顶点和对边中点连线所在直线.

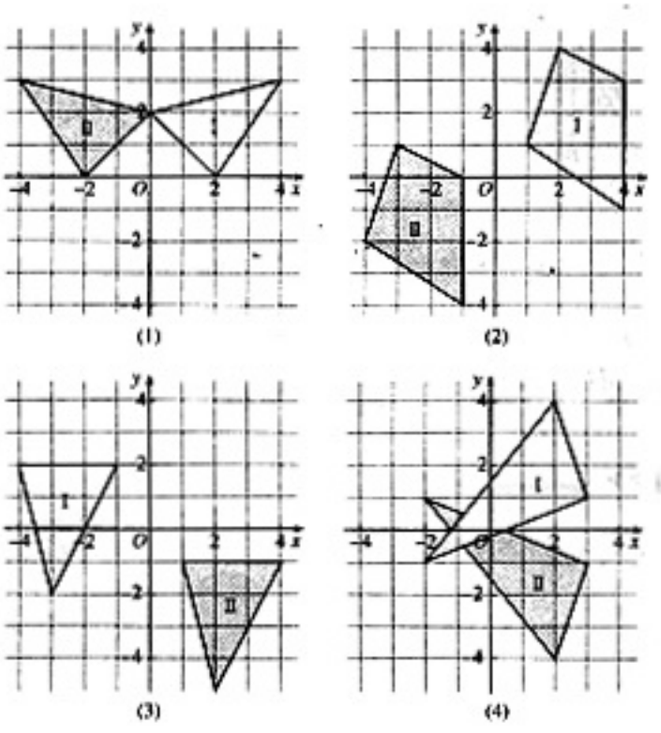
[2] 画图时，能画出基本轮廓即可.

2. “综合运用”的第 8 题是要判断正多边形的对称轴条数，这里要分边数是奇数和边数是偶数分别考虑，奇数边时，它的对称轴是顶点和对边中点连线所在直线；偶数边时对称轴是对角线所在直线和对边中点的连线所在的直线. 第 9 题的图案比较复杂，对于需要画出轴对称图形的，只要画出大致轮廓即可，不要求太严格. 第 10 题与第 3 题类似，是要判断两个图形在平面直角坐标系中的是对称还是平移关系，同样，可以直接从图形考虑，也可以找一些关键点，写出它们的坐标，利用坐标的特点判断是轴对称还是平移. 第 11 题比较综合，要用到角平分线的性质，三角形的全等线段垂直平分线的性质，两点确定一条直线等，它和 150 页第 13 题也是有联系的. 第 12 题主要是应用三角形的全等和等边三角形的判定方法，这种问题的变式也比较多.

3. “拓广探索”的第 13 题，可能会有不同的解法，后面的习题解答中也给出了几种方法，

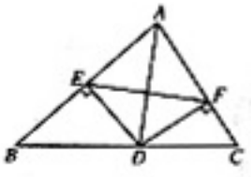
[1] 本题与 111 页第 6 题，150 页第 13 题都有联系，是一步一步的延拓展.

[2] 鼓励学生想出不同的画法.

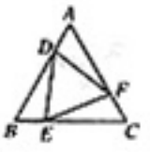


（第 10 题）

11. 如图，AD 是$\triangle ABC$的角平分线，DE、DF 分别是$\triangle ABD$ 和$\triangle ACD$的高. AD 垂直平分 EF 吗？[1]



（第 11 题）



（第 12 题）

12. 如图，在等边三角形 ABC 的三边上，分别取点 D、E、F，使 $AD=BE=CF$，求证$\triangle DEF$ 是等边三角形.

拓广探索 ▶▶

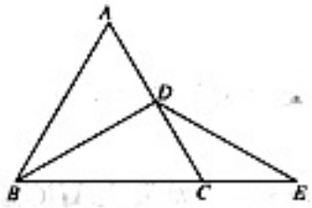
13. 在纸上画五个点，使任意三个点组成的三角形都是等腰三角形，这五个点应该怎样画？[2]

鼓励学生想出不同的方法. 第 14 题主要是应用等边三角形中的角的关系以及三角形外角的性质.

4. 整个复习题的安排基本都是按照教科书的顺序排列的，后面的综合性比前面的要强一些，复习时可以从前到后选择其中的题目让学生练习. 平时教学时，也可以选择使用.

14. 如图，$\triangle ABC$ 是等边三角形，BD 是中线，延长 BC 至 E，使 $CE=CD$. 求证 $DB=DE$.

如果把 BD 改为$\triangle ABC$ 的角平分线或高，能否得出同样的结论?[1]



（第 14 题）

[1] 改成角平分线或高，能得出同样的结论，这正体现了等边三角形的性质.

Ⅲ 习题解答

习题 14.1

1. 都是，图略.
2. 图中阴影三角形与三角形 1 和 3 成轴对称；整个图形是轴对称图形，它共有两条对称轴.
3. $\angle A'B'C'=\angle ABC=90°$，$AB=A'B'=6$ cm.
4. 如果$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$关于直线 l 对称，这两三角形全等；如果$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$，$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$不一定关于某条直线 l 对称.
5. 19 cm.
6. 除第一排中间一个外，其余的都是轴对称图形，图略.
7. 是，有两条对称轴，图略.
8. b，d，f.
9. 建在 AB 的垂直平线和公路的交点处.
10. AB 和 $A'B'$ 的延长线相交，交于对称轴 l 上同一点；规律：成轴对称的两个图形的对应线段所在直线或者平行，或者相交于对称轴上同一个点.
11. 建在线段 AB 的垂直平分线和 m、n 的交角（锐角）的角平分线的交点处.
12. (1) 证明：∵ 点 P 是 AB 的垂直平分线上的点，

    ∴ $PA=PB$.

    同理 $PB=PC$.

    ∴ $PA=PB=PC$.

    (2) 点 P 也在边 AC 的垂直平分线上，由此可以得出，三角形三条边的垂直平分线相交于一点.

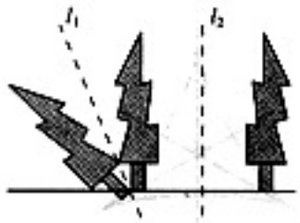
习题 14.2

1. 图略.
2.

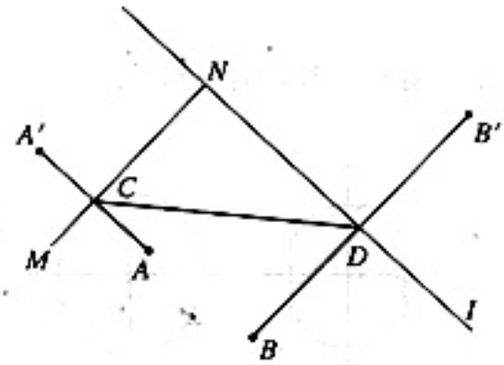
点	(3，6)	(−7，9)	(6，−1)	(−3，−5)	(0，10)
关于 x 轴对称	(3，−6)	(−7，−9)	(6，1)	(−3，5)	(0，−10)
关于 y 轴对称	(−3，6)	(7，9)	(−6，−1)	(3，−5)	(0，10)

3. B (1，−1)，C (−1，−1)，D (−1，1).
4. 图略.
5. 图略.
6. (1) 关于 x 轴对称；(2) 向下平移 5 个单位长度；

   (3) 关于 y 轴对称；(4) 先关于 x 轴，再关于 y 轴作对称变换.
7. 小球运动轨迹是 (3，0) → (0，3) → (1，4) → (5，0) → (8，3) → (7，4) → (3，0)；其中关于直线 l 对称的点有 (1，4) 与 (7，4)，(0，3) 与 (8，3) (3，0) 与 (5，0)；起始点位于 (1，0) 时的轨迹图略.
8. 一种方案如图：



（第 8 题）



（第 9 题）

9. 分别作出点 A、B 关于 MN 和 l 的对称点 $A'B'$，连接 $A'B'$，与 MN 和 l 分别相交于点 C、D，则路线 $ACDB$ 即为所求（如图）.

10. 略.

习题 14.3

1. （1）都是 35°；（2）80°，20°或 50°，50°.

2. 证明：∵ $AD/\!/BC$，

∴ $\angle ADB=\angle DBC$.

又 BD 平分 $\angle ABC$，

∴ $\angle ABD=\angle DBC$.

∴ $\angle ABD=\angle ADB$.

∴ $AB=AD$.

3. $\angle AMB=108°$.

4. $\angle B=\angle C=40°$，$\angle BAD=\angle CAD=50°$.

5. 由 $CE/\!/DA$ 可知 $\angle CEB=\angle A$，又由 $\angle A=\angle B$，得 $\angle CEB=\angle B$，由此可得 $\triangle CEB$ 是等腰三角形.

6. 由 $AB=AC$，可知 $\angle B=\angle C$. 又由 $AD=AE$，可得 $\angle ADE=\angle AED$，从而 $\angle ADB=\angle AEC$. 可得 $\triangle ABD\cong\triangle ACE$，从而 $BD=CE$.

7. 由 $AB=AC$，$\angle A=40°$，可得 $\angle ABC=70°$. 又由 $\angle ABD=\angle A=40°$，可得 $\angle DBC=70°-40°=30°$.

8. 他们的判断是对的，因为等腰三角形的底边中线和底边上的高重合.

9. 等角对等边.

10. 由 $\angle NAC=42°$，$\angle NBC=84°$，可得 $\angle BCA=42°$，从而 $BC=BA=30$（海里）.

11. 提示：$\triangle ABE\cong\triangle ADC$.

12. 相等，相等，相等. 证明略.

13. （1）由 $ED=EC$，可知 $\angle ECD=\angle EDC$；

（2）利用 $\triangle ODE\cong\triangle OCE$，可得 $OC=OD$；

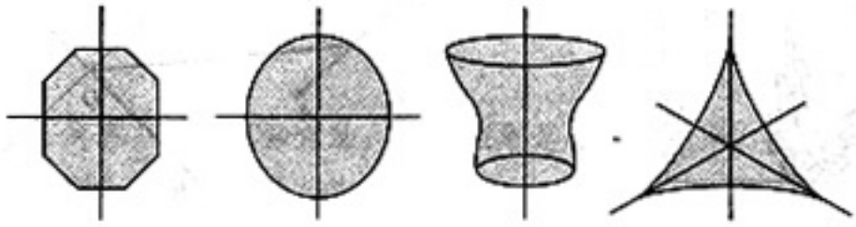
（3）是.

14. 作 $\angle A$ 的平分线 AD 交 BC 于 D，过点 D 作 $DE\perp AB$ 于 E. 则 $\triangle ADC\cong\triangle ADE\cong\triangle BDE$.

复习题 14

1. 第 3 个图形不是轴对称图形，其余都是.

2. 如图.



（第 2 题）

3. A、B 关于 x 轴对称，B、E 关于 y 轴对称，C、E 不关于 x 轴对称.

4. $\angle D=25°$，$\angle E=40°$，$\angle DAE=115°$.

5. 证明：连接 BC.

   ∵ 点 D 是 AB 的中点，$CD\perp AB$，

   ∴ $AC=BC$.

   ∵ 点 E 是 AC 的中点，$BE\perp AC$，

   ∴ $AB=BC$.

   ∴ $AC=AB$.

6. 是. 提示：利用 $\triangle ABC\cong ADB$，可得 $\angle CAB=\angle DBA$.

7. 证明：∵ $\angle ACB=90°$，$\angle A=30°$，

   ∴ $BC=\frac{1}{2}AB$.

   又 $\angle BCD=90°-\angle B=\angle A=30°$，

   ∴ $BD=\frac{1}{2}BC$.

   ∴ $BD=\frac{1}{4}AB$.

8. 3 条，4 条，5 条，6 条，7 条；一个正 n 边形有 n 条对称轴.

9. 第 2、4 个图形是轴对称图形，第 1、3 个图形不是轴对称图形.

10. （1）图形Ⅰ和图形Ⅱ关于 y 轴对称；

    （2）将图形Ⅰ先向左平移 5 个单位长度，再向下平移 3 个单位长度，得到图形Ⅱ；

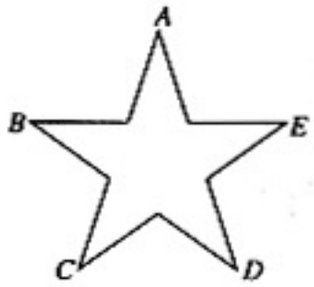
    （3）将图形Ⅰ先向右平移 5 个单位长度，再向下平移 3 个单位长度，得到图形Ⅱ；

    （4）图形Ⅰ和图形Ⅱ关于 x 轴对称；

11. 由 AD 是角平分线，DE、DF 分别垂直于 AB、AC，可知 $DE=DF$，从而点 D 在线段 EF 的垂直平分线上；再通过 $\triangle ADE\cong ADF$ 可知 $AE=AF$，从而点 A 也在线段 EF 的垂直平分线上. 由此得到 AD 垂直平分 EF.

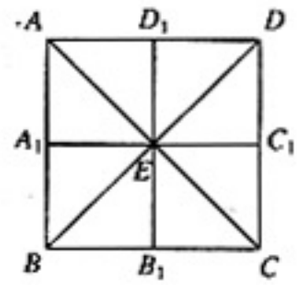
12. 通过 $\triangle DBE\cong ECF\cong FAD$，可得 $DE=EF=FD$，从而 $\triangle DEF$ 是等边三角形.

13. 参考答案如图：



A、B、C、D、E五点

(1)



A、B、C、D、E五点
或A_1、B_1、C_1、D_1、E五点

(2)

(第13题)

14. 证明：∵ BD是等边三角形ABC的中线，

∴ BD平分$\angle ABC$，

∴ $\angle DBE=\frac{1}{2}\angle ABC=\frac{1}{2}\angle ACB$.

又 $CE=CD$，

∴ $\angle E=\frac{1}{2}\angle ACB$.

∴ $\angle DBE=\angle E$.

∴ $DB=DE$.

如果把BD改为$\triangle ABC$的角平分线或高，仍能得出同样的结论.

Ⅳ 教学设计参考案例

14.1 轴对称（第1课时）

教学任务分析

教学目标	知识技能	1. 理解轴对称图形，两个图形关于某直线对称的概念. 2. 了解轴对称图形的对称轴，两个图形关于某直线对称的对称轴、对应点. 3. 了解轴对称图形与两个图形关于某直线对称的区别和联系.
	数学思考	1. 通过学习轴对称图形和两个图形成轴对称，进一步认识几何图形的本质特征. 2. 通过学习轴对称图形和两个图形成轴对称的区别和联系，进一步发展学生抽象概括的能力.
	解决问题	通过轴对称图形和两个图形成轴对称的学习，让学生关注生活，学会观察、增强交流.
	情感态度	通过轴对称图形和两个图形成轴对称的学习，激发学生学习欲望，主动参与数学学习活动.
重点	轴对称图形和两个图形关于某直线对称的概念.	
难点	比较观察轴对称图形和两个图形关于某直线对称的区别和联系.	

教学流程安排

活动流程图	活动内容和目的
活动1　创设情境 感知对称	通过图片、实物展示，感知对称，欣赏对称美，激发求知欲，引入新课程.
活动2　认识轴对称图形及对称轴	通过折叠剪纸，学生观察、分析、交流，教师引导得出轴对称图形及对称轴的概念.
活动3　认识两个图形成轴对称及对称轴、对应点	通过图片展示，学生观察、分析、交流，教师引导得出两个图形关于某直线对称及对称轴、对应点的概念.
活动4　认识两种图形的区别和联系	通过对两种图形的比较、观察、讨论、交流，教师引导，进一步认识这两种图形的区别和联系.
活动5　练习　思考　小结　作业	通过练习、思考、归纳总结、作业，进一步巩固、提高.

教学过程设计

问题与情境	师生行为	设计意图
「活动1」 创设情境 展示教科书章前图以及图 14.1.1，也可以再展示一些图形.	教师展示图片，学生欣赏图片，感知对称，并展示学生自带的有关轴对称的图片. 在活动中，教师说明：几何中含有三种对称，轴对称是对称中重要的一种. 轴对称有哪些性质？怎样画一个轴对称图形？怎样用坐标表示对称？这些都是本章要研究的内容. 本节课主要研究轴对称的相关概念. 在本次活动中，教师应重点关注： (1) 学生参与数学活动是否积极主动，全神贯注； (2) 学生自带的图片是否具有代表性； (3) 审美意识和情感是否在感知对称中有所增强.	展示的图片，包含自然景观、分子结构、建筑物、艺术作品、动物、植物、生活用品，力求丰富多彩，并联系学生的生活实际，让学生充分感知对称、欣赏对称，增加学生的审美意识，激发学生的学习欲望. 对章前图的说明和本章内容的简要介绍，明确本章研究的内容，让学生有一个基本的了解. 通过展示学生自带的图片，让学生联系现实生活实际，主动参与数学活动，感知数学与生活密切相关.
「活动2」 问题 (1) 把一张长方形纸片对折，剪出一个图案（折痕处不要完全剪断），再打开这张对折的纸，就剪出了美丽的窗花，试一试，你能剪吗？	教师先把长方形纸片对折，用剪刀剪出一个图案，再打开这张对折的纸，让学生欣赏，然后学生自己动手按上述方法剪一剪.	教师演示剪纸的过程起一个示范作用，学生动手剪纸是让学生参与到活动之中，发展学生的动手操作能力.
(2) 观察剪出的窗花和图 14.1-1 中的图形，你能发现它们有什么共同的特征吗？	学生观察，互相交流，尝试着表述这些图形的共同特征. 教师归纳学生的表述，引导得出轴对称图形及对称轴的概念，并板书概念.	通过观察活动，让学生主动思考，让学生互相交流，表述其特征，鼓励学生勇于发现，增强合作意识.
(3) 联系实际，你能举出一个轴对称图形的实例吗？你能正确地完成教科书 119 页的练习吗？	学生举例，处理练习. 在本次活动中，教师应重点关注： (1) 在剪纸中是否对折，剪纸的方法是否正确； (2) 学生在表述时是否明确“存在直线—将其折叠—互相重合”的图形特征.	通过举例、练习，进一步认识轴对称图形的本质.

续表

问题与情境	师生行为	设计意图
「**活动3**」 问题 (1) 教科书图 14.1-3 中，每对图形有什么共同特征？ (2) 联系实际，你能举出一些生活中两个图形成轴对称的例子吗？你能正确地完成教科书 120 页的练习吗？	学生观察、讨论交流，教师引导得出两个图形关于某直线对称及对称轴、对称点的概念，并板书概念. 学生举例，独立完成练习. 在本次活动中，教师应重点关注： (1) 对图形的观察是否用心； (2) 学生在表述时是否明确“存在直线—将其折叠—两图形重合”的图形特征.	通过学生观察、主动思考，认识两个图形关于某直线对称的本质特征，鼓励学生善于观察、勇于发现，培养合作意识. 通过学生举例，独自练习，进一步认识两个图形成轴对称的本质.
「**活动4**」 问题 (1) 结合教科书图形 14.1-2 和 14.1-3 进行比较，轴对称图形和两个图形成轴对称有什么区别吗？ (2) 如果把一个轴对称图形沿对称轴分成两个图形，那么这两个图形成轴对称吗？成轴对称的两个图形全等吗？如果把两个成轴对称的图形看成一个整体，它是一个轴对称图形吗？	学生根据两组图形比较观察，讨论交流，教师引导学生得出其区别. 教师提出问题，学生思考，讨论交流，进一步明确轴对称图形与两个图形成轴对称之间的联系. 在本次活动中，教师应重点关注： (1) 学生在比较两个图形的区别时，是否明确轴对称图形表述的是一个具有特殊形状的图形，两个图形成轴对称表述的是两个图形的位置关系； (2) 学生在问题 (2) 中思考两种图形的联系时，是否运用辩证的观点认识世界，明确整体与部分的辩证关系.	通过比较观察、相互讨论，进一步认识这两种图形的本质特征. 通过思考、讨论等活动，进行辩证唯物主义教育，让学生运用辩证的观点认识事物，进一步发展学生抽象思维的能力.
「**活动5**」 问题 (1) 成轴对称的两个图形全等吗？全等的两个图形一定成轴对称吗？为什么？	学生独立思考后，再展开讨论，教师参与学生讨论，及时指导.	通过思考成对称的两个图形与全等之间的关系，培养学生思维品质.

续表

问题与情境	师生行为	设计意图
(2) 看教科书图 14.1-3，你能标出 A、B、C 的对称点 $A'B'C'$ 吗?	教师提出问题，学生独立完成.	通过练习，进一步巩固两个图形成轴对称的对称点的概念.
(3) 小结：本节课你学到了什么?	学生回忆归纳，教师指导. 在本次活动中，教师应重点关注： (1) 学生在思考问题 (1) 时，全等的两个图形不一定成轴对称，能否举出反例； (2) 学生在小结本节课时，学生是否将知识系统化、条理化，是否把握两个图形的本质特征； (3) 按要求独立完成作业.	通过课堂小结，进一步巩固所学知识.
(4) 你能按要求完成教科书 125 页第 2、3 题吗?		通过复习，完成作业，进一步巩固提高.

教学设计说明

本课时设计的教学内容属本章第一课时的教学内容，重点研究轴对称图形和两个图形关于某直线对称的概念，为学习和研究线段的垂直平分线及性质、轴对称变换以及等腰三角形奠定基础.

在教学设计中，根据本节课的特点，共设置了 5 个活动. 首先创设情景，展示图片，让学生感知对称，通过对章前图的说明和本章内容的简要介绍，明确本章研究的内容并引入新课；通过学生自带图片的展示和剪纸活动，让学生动手操作、积极参与，体验数学活动的乐趣；通过学生的观察思考、相互交流、表述特征，引导学生自主学习，培养学生的观察能力、合作意识以及用数学语言表述的能力；通过对轴对称图形和两个图形成轴对称的比较思考，明确它们的联系和区别，进一步认识其本质特征；通过及时练习、自主小结、独立作业，进一步巩固所学知识.

本节教学力求充分体现教学内容的基础性、教学方法的灵活性、学生学习的主体性、教师教学的主导性. 在学习活动中，学生主动参与、认真观察、比较思考、动手操作、合作交流、大胆表述，充分体现学生是学习的主人，教师是学习活动的组织者、引导者和合作者.

14.2.1 轴对称变换

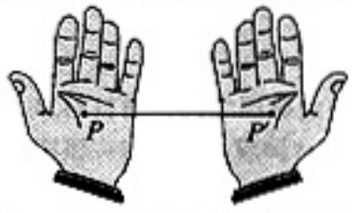
教学任务分析

教学目标	知识技能	1. 通过具体实例认识轴对称变换，探索它的基本性质和定义. 2. 能按要求作出简单平面图形经过一次或两次轴对称后的图形. 3. 能利用轴对称变换进行图案设计.
	数学思考	用轴对称变换的方式去认识和构建几何图形，发展形象思维，并尝试用轴对称变换去从事推理活动.
	解决问题	1. 经历轴对称变换的画图、观察、交流等活动理解其基本性质和定义. 2. 通过利用轴对称变换作图和图案设计，发展实践能力.
	情感态度	1. 通过欣赏轴对称变换图案，形成学生了解数学、应用数学的态度. 2. 通过用轴对称变换画图、设计图案，锻炼学生克服困难的意志，培养创新精神.
重点	轴对称变换及轴对称变换作图.	
难点	利用轴对称变换设计图案.	

教学流程安排

活动流程图	活动内容和目的
活动 1　理解轴对称变换的性质和定义	经历画手印、观察、交流，寻找四个图例的共同点，从而探索归纳出轴对称变换的基本性质和定义.
活动 2　利用轴对称变换的性质作图，归纳作图方法并练习	作已知三角形关于直线的对称图形，进一步理解轴对称变换的基本性质，掌握轴对称变换的作图方法.
活动 3　图案欣赏及利用轴对称变换设计简单图案	欣赏图案，让学生感受轴对称变换形成的图形美，用轴对称变换的作图方法，设计简单的轴对称图案，培养学生创造美的能力.
活动 4　课堂小结、布置作业	回顾本节内容，梳理知识要点，布置课外作业，巩固所学知识.

教学过程设计

问题与情境	师生行为	设计意图
「活动 1」 问题 (1) 在一张半透明纸张的左边部分，画出左手掌印，如何由此得到相应的右手掌印？  	学生动手画左手掌印，教师指导如何快速准确地画出左手掌印，并强调将纸对折后描图. 在学生画图中，教师关注： (1) 学生如何画左手掌印； (2) 左手掌印画出后，折痕如何选取.	通过画左手掌印，得到相应的右手掌印，让学生感受轴对称图形的形成过程，培养学生的动手能力. 同时，让学生明确：折痕所在的直线就是它们的对称轴.

续表

问题与情境	师生行为	设计意图
（2）教科书 128 页中图 14.2-2、14.2-3 是怎样得到的？	学生观察书中图例，独立思考，教师鼓励学生提出自己的见解. 教师应重点关注： （1）学生在思考中，是否找准了对称轴； （2）两个图案中，学生各找出了几条对称轴.	观察轴对称变换图形，寻找对称轴，理解轴对称图形的变换过程，培养学生独立思考问题，解决问题的能力.
（3）教科书 128 页中图 14.2-4 的图形是怎样得到的？	学生分若干小组活动，选出代表发言，教师倾听学生的交流. 教师应重点关注学生对对称轴的方向和位置的理解.	观察对称轴方向和位置的变化对图形的影响. 通过分小组活动，培养学生的合作精神.
（4）自己动手在一张纸上画一个你最喜欢的图形，将这张纸折叠，描图，再打开纸，看看你得到了什么？改变折痕的位置并重复几次，你又得到了什么？	学生动手画图，教师观察、指导. 展示学生作品，听取学生的评价. 在画图中教师应关注： （1）学生首先画出的是一个什么图形（并非要求是轴对称图形）； （2）是否改变了折痕，并重复几次.	进一步培养学生画轴对称图形的能力，感受对称轴变化对图形的影响. 展示学生作品，让学生获得成功的体验，初步形成评价与反思的意识.
（5）归纳轴对称变换的性质及定义. 拓展：成轴对称的两个图形中的任何一个可以看作由另一个图形经过轴对称变换后得到. 一个轴对称图形也可以看作以它的一部分为基础，经轴对称变换扩展而成的.	学生通过实践、观察，归纳以上四个小活动中所得到的图形之间的共同点，教师给予引导、纠正，并给出完整的归纳. 在学生归纳中教师应重点关注： （1）是否找出了上述图形的共同点； （2）叙述的完整性、准确性、规范性.	在经历了实践、观察、归纳等数学活动过程后，学生能主动、有条理、清晰地阐述自己对轴对称变换的性质及定义的理解.
「活动 2」 问题 如果有一个图形和一条直线，如何作出这个图形关于这条直线对称的图形呢？ 教科书 129 页例 1. 提出以下思考问题：	教师逐步提出问题，师生共同思考分析，学生尝试作图. 师生共同总结作图方法及步骤，通过折叠的方法加以验证.	分步设问，便于引导学生理解作图方法. 通过教师作图、板书的示范，让学生体验作图的准确性和规范性.

续表

问题与情境	师生行为	设计意图
(1) $\triangle ABC$ 关于直线 l 的对称图形是什么形状？ (2) $\triangle ABC$ 的轴对称图形可以由哪几个点确定？ (3) 在 $\triangle ABC$ 上，取哪几个点作出其关于 l 的对称点？ (4) 如何作一个已知点关于直线的对称点？ 课堂练习： 教科书 131 页练习第 1、2 题.	在上述基础上，归纳出作一般平面图形的轴对称图形的方法. 在学生作图中，教师应重点关注： (1) 在 $\triangle ABC$ 上，是否取的 A、B、C 三个顶点； (2) 是否掌握了作一点关于直线的对称点的方法； (3) 尺、规作图是否规范.	经过折叠验证，让学生感受实践与理论的结合. 通过归纳，让学生掌握作一般轴对称图形的方法. 练习、实践，巩固所学知识，了解教学效果.
「**活动 3**」 欣赏和设计.     自己设计一个轴对称图案.	学生先欣赏轴对称变换图案，然后自己设计图案. 教师指导，学生交流. 展示（直接展示或实物投影）学生作品. 在学生设计图案中，教师关注： (1) 是否每个学生在动手设计； (2) 设计方法是否正确； (3) 设计能力上的个体差异.	让学生在欣赏美中去感受美、创造美. 及时展示学生作品，为每一位学生创造在数学学习活动中获得成功的体验机会，为不同程度的学生提供展示自己的机会，满足多样化的需要，并通过多元评价方式，让学生获得成功的喜悦，培养学生的创新精神.
「**活动 4**」 问题 学完这节课你有哪些收获？ 课外作业 (1) 教科书 135 页习题 14. 2 第 1 题、136 页第 5 题； (2) 探究教科书 131 页提出的问题及教科书 137 页第 8、9 题.	学生自己总结，不全面的由其他学生补充完善，教师重点关注不同层次学生对本节知识的理解、掌握程度. 学生独立完成，教师批改、总结. 教师应重点关注： (1) 对学生在练习中反应出的问题，有针对性的给予分析； (2) 学生面对探究性问题的解决方法.	提炼对轴对称变换的认识，全员参与，体现集体的智慧. 了解教学效果，及时调整教学. 通过对实际问题的探究，完成从具体→抽象→具体的思维螺旋上升过程，形成应用数学的意识，加深对本节知识的理解.

教学设计说明

14.1 中，已介绍了轴对称图形、对称轴、轴对称的性质等相关知识，本课时是 14.2 轴对称变换的第 1 小节.

本小节可分为四个模块：a. 由 4 个小活动归纳出轴对称变换的性质及定义；b. 通过例 1 得到作一个图形的轴对称图形的方法；c. 利用轴对称变换设计图案；d. 小结与作业. 考虑教学容量，把教科书 131 页的探究活动作为学生课外活动的一项内容. 把这四个模块设计为 4 个活动，通过活动的开展，实现它们所承载的教学目标.

本案例中学生动手活动较多，教师要注意及时引导、纠正，同时对学生的作品要给予不同层次、不同角度的多元化评价，以激励学生的学习兴趣.

14.3.1 等腰三角形（第 1 课时）

教学任务分析

教学目标	知识技能	1. 理解掌握等腰三角形的性质. 2. 运用等腰三角形的性质进行证明和计算.
	数学思考	1. 观察等腰三角形的对称性，发展形象思维. 2. 通过实践、观察、证明等腰三角形的性质，发展学生合情推理能力和演绎推理能力.
	解决问题	1. 通过观察等腰三角形的对称性，培养学生观察、分析、归纳问题的能力. 2. 通过运用等腰三角形的性质解决有关的问题，提高运用知识和技能解决问题的能力，发展应用意识.
	情感态度	引导学生对图形的观察、发现，激发学生的好奇心和求知欲，并在运用数学知识解答问题的活动中获取成功的体验，建立学习的自信心.
重点	等腰三角形的性质及应用.	
难点	等腰三角形的性质证明.	

教学流程安排

活动流程图	活动内容和目的
活动 1　实践观察，认识等腰三角形	由折纸、剪纸，得到等腰三角形的有关概念，感知等腰三角形的对称性.
活动 2　探索等腰三角形的性质	通过探索，归纳等腰三角形的性质定理.
活动 3　等腰三角形的性质定理的证明	从理性上认识等腰三角形性质定理的正确性.
活动 4　等腰三角形性质定理的运用	在解题过程中加深对性质的理解，学会性质定理的运用.
活动 5　反馈练习	在练习中加深对本节知识的理解，感受等腰三角形性质的运用.
活动 6　自主探究等腰三角形中有关的相等线段、角	通过探究，更加深入了解等腰三角形的对称性.
活动 7　小结与作业	回顾本节知识和解决问题的方法. 课后作业，巩固、提高、发展.

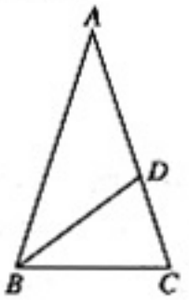
教学过程设计

问题与情境	师生行为	设计意图
「活动1」 问题 （1）把一张长方形的纸片对折，并剪下阴影部分（如教科书图 14.3-1），再把它展开，得到一个什么图形？ （2）上述过程中得到的△ABC有什么特点？ （3）除了剪纸的方法，还可以怎样作（画）出一个等腰三角形？	学生动手剪纸，观察. 教师在学生观察的同时提出问题. 学生讨论问题（3），教师在学生充分发表自己的想法基础上给出画图方法，并画出图形，介绍腰、底、顶角、底角. 本次活动中，教师应重点关注学生是否积极参加到数学活动中来.	为学生提供参与数学活动的时间和空间，调动学生的主观能动性，激发好奇心和求知欲.
「活动2」 问题 （1）活动1中剪出的等腰三角形是轴对称图形吗？ （2）把剪出的等腰三角形 ABC 沿折痕对折，找出其中重合的线段和角，填写表格. （3）你能猜一猜等腰三角形有什么性质吗？说说你的猜想.	学生动手折纸，观察，找出重合的线段和角，填写表格. 学生说出自己的猜想. 教师在学生的猜想基础上，引导学生观察、完善，归纳出性质1和性质2. 本次活动中，教师应重点关注： （1）学生能否从轴对称图形的概念出发折纸判断； （2）学生能否用规范清晰的数学语言说出自己的猜想； （3）学生能否归纳全面； （4）学生在活动和交流中表现出来的参与意识.	通过学生观察，教师的引导，归纳出等腰三角形的两条性质，在这个过程中培养学生自主探究学习的品质.

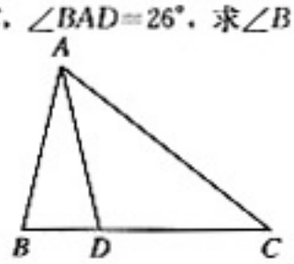
重合的线段

重合的角

续表

问题与情境	师生行为	设计意图
「活动3」 问题 (1) 性质1（等腰三角形的两个底角相等）的条件和结论分别是什么？ (2) 用数学符号如何表达条件和结论？ (3) 如何证明？ (4) 受性质1的证明的启发，你能证明性质2（等腰三角形顶角平分线、底边上的中线、底边上的高相互重合）吗？	学生分析性质1的条件和结论，并转换成数学符号. 教师纠正和补充学生的发言，引导学生利用全等三角形的性质，根据对称性寻找辅助线的添加方法. 学生证明，教师板书. 学生模仿证明性质2. 本次活动中，教师应重点关注： (1) 学生语言的规范性； (2) 学生的应用意识，模仿能力； (3) 学生在活动中发表个人见解的勇气.	培养学生的语言转换能力，增强理性认识，体验性质的正确性，提高演绎推理的能力.
「活动4」 问题 (1) 如果等腰三角形的顶角是36°，那么它的底角的度数是_____. (2) 在△ABC中，$AB=AC$，$\angle BAC=90°$，AD是BC边上的高，则$\angle BAD=$_____，$BD=$_____$=$_____. (3) 如图，在△ABC中，$AB=AC$，点D在AC上，且$BD=BC=AD$，求△ABC各角的度数.  	学生独立思考解决问题(1)(2). 教师评判. 学生讨论问题(3). 教师参与讨论，认真听取学生的分析，引导学生找出角之间的关系，书写解答过程. 本次活动中，教师应重点关注： (1) 学生能否正确应用等腰三角形的性质解决问题； (2) 学生应用所学知识的应用意识.	培养学生正确应用所学知识的应用能力，增强应用意识，参与意识，巩固所学性质.

续表

问题与情境	师生行为	设计意图
「**活动5**」 变式练习： (1) 等腰三角形的一个角是36°，它的另外两个角是_____. (2) 等腰三角形的一个角是110°，它的另外两个角是_____. (3) 如图，在$\triangle ABC$中$AB=AD=DC$，$\angle BAD=26°$，求$\angle B$和$\angle C$的度数.  	学生思考，练习. 教师指导，给出答案. 本次活动中，教师应重点关注： (1) 学生能否正确应用等腰三角形的性质； (2) 学生是否注意到等腰三角形的底角一定是一个锐角； (3) 学生是否注意到可能的多种情况； (4) 学生是否注意到等腰三角形的顶角可能是钝角，但底角一定是锐角.	及时巩固所学知识，了解学生学习效果，增强学生应用知识的能力，同时培养学生分类讨论的思想.
「**活动6**」 讨论探究： (1) 等腰三角形底边中点到两腰的距离相等吗？ (2) 利用类似的方法，还可以得到等腰三角形中哪些线段相等？	学生画图思考. 教师指导学生动手画图，折纸，得到结论. 教师指导学生寻找等腰三角形中其他相等的线段（两底角的平分线，两腰上的中线等）.	通过学生动手实践，增强学生动手能力，在此过程中启迪发散学生思维.
「**活动7**」 小结与作业： 这节课我们主要学习了什么内容？有哪些收获？ 作业：教科书习题14.3第1、4、6题.	教师与学生共同回顾性质，归纳常用辅助线的添加方法. 本次活动中，教师应重点关注： (1) 等腰三角形的性质的应用； (2) 辅助线的添加； (3) 学生在练习中反应出的问题，有针对性的讲解.	总结回顾学习内容，帮助学生归纳. 巩固学生所学知识，总结反思，通过课后独立思考，自我评价学习效果.

教学设计说明

本小节“等腰三角形”安排在第十四章“轴对称”的第三节. 根据新的教育理念，以轴对称图形为切入点，在学生动手操作的基础上，通过学生观察猜想，自主探究，证明应用等方式学习，获取新知.

这节课“等腰三角形的性质”在教学设计中，改变了以全等三角形为切入点的做法，而是通过学生动手实践，观察分析，猜想证明，完成了从感性到理性的知识发生发展的认知过程，最后动用所学知识解决问题，突现应用意识. 共设置了7个活动.

在教学过程中，强调学生形成积极主动的学习态度，关注学生的学习兴趣和体验，充分体现“数学教学主要是数学活动的教学”的这一教育思想.

Ⅴ 拓展资源

一、知识的拓广延伸及相关史料

1. 对称的起源

自古以来，人们就已经讨论“对称原理”之一——左和右之间的对称（比如还有上、下、前、后等之间的对称）了. 对称的概念源于数学（更确切地讲是欧氏几何）. 对于“对称”在生物现象中的研究，始于1848年的巴斯德（Pasteur）的工作. “对称”在天文学（甚至自然界）上的研究，则始于两千多年前的古希腊人. 20世纪的物理学家们研究中发现：对称的重要性在与日俱增，这从某个方面也说明了希腊人想法的合理性.

2. 美妙的对称

人们把闹钟、飞机、电扇制造成对称形状，不仅为了美观，而且还有一定的科学道理：闹钟的对称保证了走时的均匀性，飞机的对称使飞机能在空中保持平衡.

对称也是艺术家们创造艺术作品的重要准则. 像中国古代的近体诗中的对仗，民间常用的对联等，都有一种内在的对称关系. 建筑艺术中对称的应用就更广泛. 中国北京整个城市的布局也是以故宫、天安门、人民英雄纪念碑、前门为中轴线（对称轴）两边对称的.

对称还是自然界的一种生物现象. 不少植物、动物都有自己的对称形式. 比如人体就是以鼻尖、肚脐眼的连线为对称轴的对称形体，眼、耳、鼻、手、脚都是对称生长的. 眼睛的对称使人观看物体能够更加准确；双耳的对称能使所听到的声音具有较强的立体感，确定声源的位置；双手、双脚的对称能保持人体的平衡.

“对称”在数学上的表现则是普遍的. 几何上平面的情形有直线对称（轴对称）和点对称（中心对称），空间的情形除了直线和点对称外，还有平面对称. 比如：正方形既是轴对称图形（以过对边中点的直线为轴）、又是中心对称图形（对角线交点为对称中心），圆也是. 正六面体（立方体）、球等都是点、线、面对称图形.

从运算关系角度看：＋与－、×与÷、乘幂与开方、指数与对数、微分与积分、矩阵与逆矩阵……这些互逆运算也可视为“对称”关系.

从命题的角度去看：正定理与逆定理、否定理、逆否定理等也存在着对称关系. 而且，数学推理的内在的优美，以及由此而来的用数学推理去揭示物理学结论的复杂性和深度，是鼓舞物理学家的充沛源泉. 当代美国数学家赫尔曼·韦尔指出：“对称，尽管你可以规定其含义或宽或窄，然而从古到今都是人们用来理解和创造秩序、美妙以及尽善尽美的一种思想.”对称原理乃是数学中“最有力量和最优雅”的解题方法之一.

3.《周易》中的轴对称

《易经》是世界公认的第一本讨论排列的书. 阳爻“——”和阴爻“— —”这两种爻合称“两仪”. 每次取两个，共有四种不同的排列法，叫做“四象”：



每次取3个，共有八种不同的排列法，叫做“八卦”：



图1

“四象”和“八卦”都体现出轴对称这一特征.

4. 蝴蝶定理

如图 2，过圆中 AB 弦的中点 M 引任意两弦 CD 和 EF，连结 CF 和 ED 分别交 AB 于 P、Q，则 $PM=MQ$.

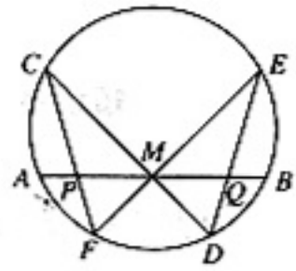


图 2

因为该定理的图形像只翩翩起舞的蝴蝶，故因此而得名.

这一问题最先出现在 1815 年英国一本通俗杂志“男士日记”的问题征解栏上. 第一个证明由一位叫霍纳（Horner）的英国人于同一年给出，但十分繁琐. 由于它的美丽图形和所包含的深刻意义，引起人们广泛的兴趣. 但在 1972 年以前，人们都把它看成是一个著名的几何难题，因为在这之前，所给出的证明都比较复杂，或并非初等的. 难怪 1972 年艾维斯在他的《几何概观》中写道：“如果限用高中几何知识的话，这的确是一个棘手的问题.”但是，1973 年，一位叫斯特温的中学教师给出了一个漂亮的初等证明. 1983 年，中国科技大学的单墫博士又给出了一个简捷的解析证明，这些年来研究者不乏其人，使得这只翩翩起舞的蝴蝶栖止不定，变化多端.

5. 等腰三角形的三线合一性质的证明

证明等腰三角形的三线合一性质时，可制作教具、投影片或计算机软件显示不等边三角形运动变化成等腰三角形时，三线合一的过程，进一步说明等腰三角形具有特殊的性质.

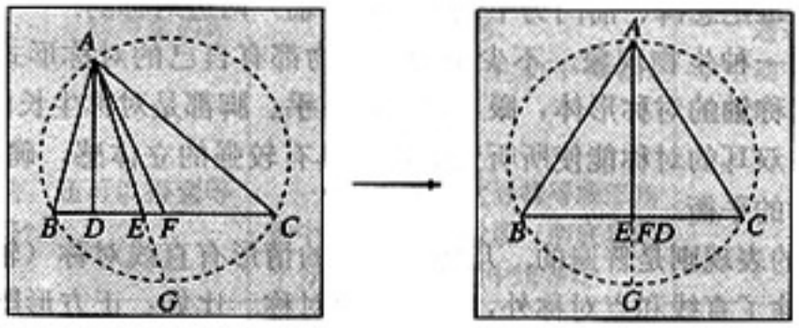


图 3

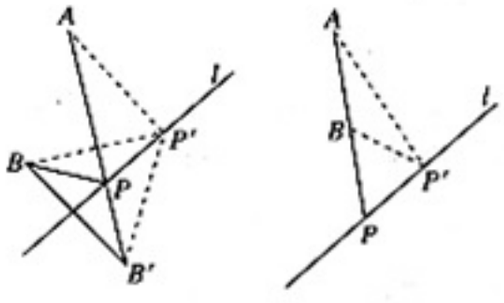
二、拓展性问题

1. 平面内有一直线及两点 A、B，在直线 l 上找一点 P，使（1）$AP+BP$ 最小；（2）$|AP-BP|$ 最大.

【答案与提示】 当 A、B 两点在 l 的同侧时.

（1）如图 4（1），作 B 点关于 l 的对称点 B'，连结 AB' 交 l 于点 P，点 P 即所求.

（2）如图 4（2）连结 AB 并延长交 l 于点 P，点 P 即所求.



（1）　　（2）

图 4

当 A、B 两点在直线 l 两侧时，类似可找出 P 点.

2. 三角形周长问题

设 A、B 是不在直线 l 上的两定点，在 l 上求一点 C，使 $\triangle ABC$ 周长最短.

【答案与提示】 由于点 A、B 可能位于直线 l 的同侧，也可能位于 l 的两侧，所以应分两种情形考虑：设 A、B 位于直线 l 的同侧，而 C 点已经求出（如图 5）. 由于线段 AB 为定长，要使 $\triangle ABC$ 的周长最短，只要 $AC+BC$ 最短.

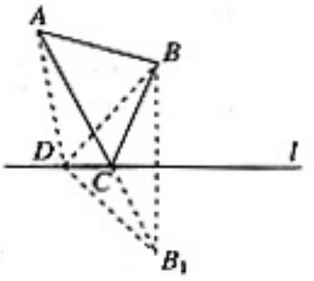


图 5

要使 $AC+BC$ 为最短，只要将 BC 变成 B_1C 的位置，使 ACB_1 成一直线，并且使 $B_1C=BC$. 要使 $BC=B_1C$，只要作 B 点关于直线 l 的对称点 B_1 就可以了. 因此，作 B 点关于直线 l 的对称点 B_1，连结 AB_1 交直线 l 于 C 点，则 C 点就是所求的点.

3. 等周问题

给你一根长度一定的绳子，怎样围出一个面积最大的三角形来？更一般地，如果将绳子围成一个平面图形，以绳子为周界（即一条封闭平面曲线），那么什么形状的图形面积最大？

【答案与提示】

这是一类特殊的几何极值问题，即对平面图形的周界加了一些限制，找出具有最大面积的平面图形，这类问题，我们称它为等周问题.

结论 1 在一切同底边并且周长相等的三角形中，以等腰三角形的面积最大.

证明：如图 6，设 AB 为固定的底边，$\triangle ABC$ 为等腰三角形，任作 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ABC$ 等周长，即 $AC+BC=AD+BD$. 不妨设 C 点和 D 点在 AB 的同侧，因为当 C 点和 D_1 点在 AB 的两侧时，只要把 $\triangle ABD_1$ 作直线 AB 的对称就可以了. 过 C 作直线 l 平行于直线 AB，再作 B 点关于直线 l 的对称 B_1 点，则 $BC=B_1C$. 因为

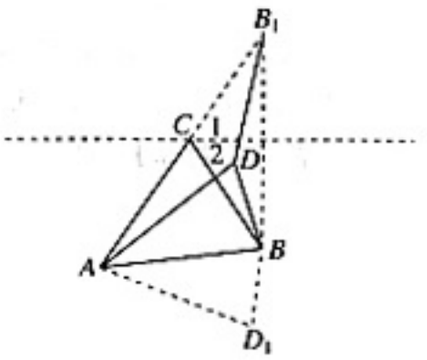


图 6

$\angle 1=\angle 2$，$\angle 2=\angle ABC$，$\angle ABC=\angle CAB$，

所以 $\angle 1+\angle 2+\angle ACB=\angle ABC+\angle CAB+\angle ACB=180°$.

从而 A、C、B 三点共线，连结 DB_1，则

$$B_1D+DA>AB_1=AC+BC=AD+BD,$$

所以 $B_1D>BD$.

由此可知，D 点和 B 点在 l 的同侧. 所以 $\triangle ABD$ 的面积小于 $\triangle ABC$ 的面积. 这就证得 $\triangle ABC$ 是这些三角形中面积最大的.

引申 1 周长一定的三角形中，面积最大的必为正三角形.

结论 2 在一切同底边并且等面积的三角形中，以等腰三角形周长为最短.

证明：如图 7，设 AB 为固定的底边，$\triangle ABC$ 为等腰三角形，ABD 与 $\triangle ABC$ 面积相等，且它们在 AB 的同侧，所以 $CD/\!/AB$. 作 B 点关于 CD 的对称点 B_1，由结论一的证明中可知，A、C、B_1 三点共线. 连结 B_1D，则

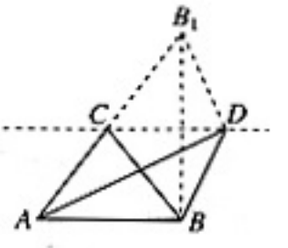


图 7

$$AD+BD=AD+B_1D>AB_1=AC+CB_1=AC+BC.$$

所以 $\triangle ABC$ 周长最短.

引申 2 面积一定的三角形中，周长最小者必为正三角形.

4. 等腰三角形两底角的平分线的交点到底边两端的距离相等吗？两腰上中线的交点呢？两腰上的高的交点呢？证明其中一个结论.

【答案与提示】

结论：等腰三角形两底角的平分线的交点到底边两端的距离相等，两腰上中线的交点到底边两端的距离相等，两腰上的高的交点到底边两端的距离相等.

已知：如图，$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$AD=DB$，$AE=EC$，CD 与 BE 相交于 O.

求证：$OB=OC$.

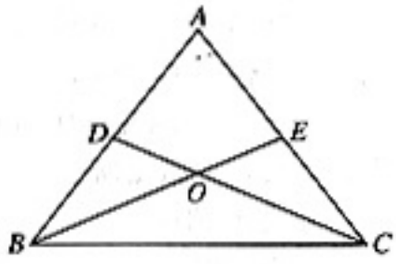


图 8

证明：∵ $AB=AC$，

∴ $\angle ABC=\angle ACB$.

∵ $AD=DB$，$AE=EC$，

∴ $DB=\frac{1}{2}AB$，$EC=\frac{1}{2}AC$，

∴ $DB=EC$.

在 $\triangle DBC$ 和 $\triangle ECB$ 中，

$DB=EC$，$\angle ABC=\angle ACB$，$BC=CB$，

∴ $\triangle DBC\cong\triangle ECB$.

∴ $\angle DCB=\angle EBC$.

∴ $OB=OC$.

5. 在正方形 $ABCD$ 内找一点 P，使 $\triangle PAB$、$\triangle PBC$、$\triangle PCD$、$\triangle PAD$ 都是等腰三角形，这样的 P 点有几个？在正方形 $ABCD$ 外呢？

【答案与提示】 在正方形内的 P 点有 5 个，在正方形外的 P 点有 4 个，如图 9：

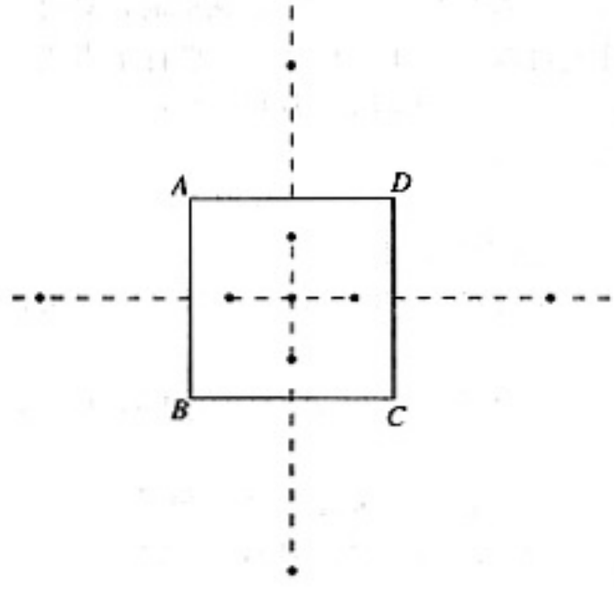


图 9

6. 已知 AB 是一个等腰三角形的一边，其另一个顶点 C 的集合是什么？

【答案与提示】 如图 10 点 C 的集合是分别以 A、B 为圆心，AB 长为半径的两圆（不含直线 AB 与圆的交点）以及线段 AB 的垂直平分线（不含 AB 的中点）.

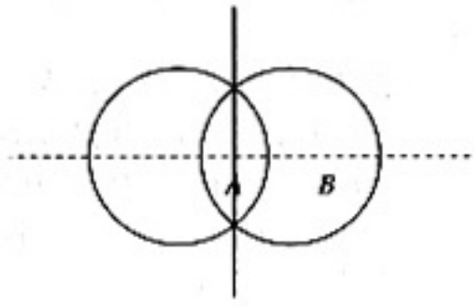


图 10

7. 由对称，找结论

两人轮流往方桌（或圆桌）上平放一枚在小相同的硬币，硬币不能重叠. 谁放下最后一枚而使对方没有空处可放，谁就获胜. 试问：先放者获胜还是后放者获胜？怎样放法才能稳操胜券？

【答案与提示】

分析：也许有人会想到先计算出可放硬币的数目. 若为奇数，则先放者获胜；若为偶数，则后放者获胜. 但是，题目没有告诉我们桌子多大？硬币多大？而且放法千变万化，不一定紧密排放. 故放下多少硬币，根本无法计算出来. 看来问题相当复杂，但转念从桌子的对称性来考虑，问题就迎刃而解.

解：先放者将一枚硬币放在桌子的中心，以后每次都将硬币放在对手所放硬币关于桌子中心对称的位置. 按照这个策略，先放者每当轮到他放时总有空处可放. 如果桌子和硬币的面积分别为 S 与 A，那么两人放硬币的次数不可能都超过 $\frac{S}{A}+1$，即放硬币的总次数只能是有限次. 因此，先放者采用以上策略，必然稳操胜券.

8. 当问题中含有角平分线时，若以角平分线为对称轴，作轴对称变换，构造出全等三角形，常常有利于问题的解决. 现举例说明.

例 1 已知△ABC 中，$\angle BAC:\angle ABC:\angle ACB=4:2:1$，$AM$ 是 $\angle BAC$ 的平分线. 求证 $AM=AC-AB$.

证明：如图 11，已知 $\angle ABC>\angle ACB$，所以 $AC>AB$，以 $\angle BAC$ 的平分线 AM 为对称轴，则点 B 的对称点 B' 必在 AC 上，由轴对称性质定理知：

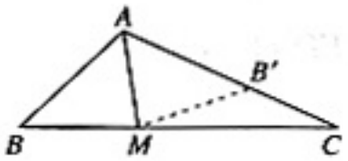


图 11

$\triangle AB'M\cong\triangle ABM$，得 $AB'=AB$，$\angle AB'M=\angle ABC$.

又∵ $\angle BAC:\angle ABC:\angle ACB=4:2:1$，

设 $\angle ACB=\alpha$，则 $\angle ABC=2\alpha$，$\angle BAC=4\alpha$，

∴ $\angle AB'M=2\alpha$，而 $\angle MAB'=\frac{1}{2}\angle BAC=2\alpha$，

∴ $AM=MB'$.

又∵ $\angle B'MC=\angle AB'M-\angle C=\alpha=\angle C$，

∴ $MB'=B'C$，$AM=B'C$.

∴ $AM=AC-AB'=AC-AB$.

例 2 已知点 E 是△ABC 外角 $\angle CAF$ 平分线上的一点. 求证 $BE+EC>AB+AC$.

证明：如图 12，以△ABC 的外角平分线 AE 为对称轴，则点 C 的对称点 F 必在射线 BA 上. 连接 EF，由对称性质定理知：

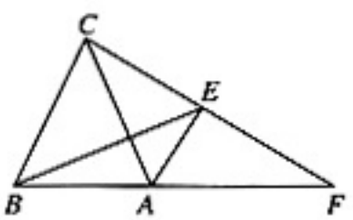


图 12

$\triangle ACE \cong \triangle AFE$.

$\therefore$ $AC=AF$, $CE=EF$.

又$\because$ $BE+EF>BF$,

$\therefore$ $BE+EC>AB+AC$.

例3 已知$\angle A=90°$, $AB=AC$, BD平分$\angle ABC$, $CE\perp BD$, 垂足为E. 求证$BD=2CE$.

证明: 如图13,

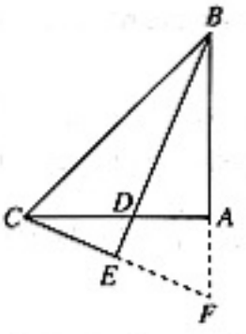


图13

$\because$ BE平分$\angle ABC$, $CE\perp BD$,

$\therefore$ 点C关于BE的对称点F必是BA、CE的延长线的交点.

由对称性质知:

$\triangle CBE \cong \triangle FBE$,

$\therefore$ $CF=2CE$.

又$\because$ $\angle BDA=\angle CDE$, $\angle BAC=\angle CED=90°$,

$\therefore$ $\angle DCE=\angle ABD$.

在$\triangle ABD$和$\triangle ACF$中,

$\because$ $AB=AC$, $\angle BAC=\angle CAF$, $\angle ABD=\angle ACF$,

$\therefore$ $\triangle ABD \cong \triangle ACF$,

$\therefore$ $BD=CF$,

$\therefore$ $BD=2CE$.

Ⅵ 评价建议与测试题

一、评价建议

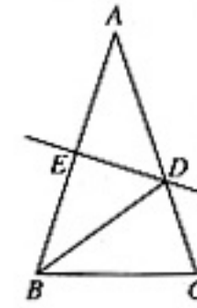
1. 本章主要内容包括：轴对称及其相关概念、轴对称变换、等腰三角形及其性质，其中以对称观点观察分析问题，并通过轴对称变换解决实际问题是全章的重点和难点，也是贯穿于全章的一根主线. 等腰三角形相关知识评价也应突出这根主线，同时，设计测试题时，应适量配置以对称变换为主体的实际问题.

2. 本章内容是培养学生动手能力、想象能力、创造能力的一个良好载体，建议除普通形式检测外，还可以通过其他形式进行评价，如新创意剪纸、图案设计评比、风筝制作竞赛等.

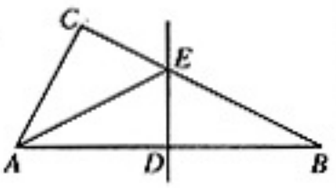
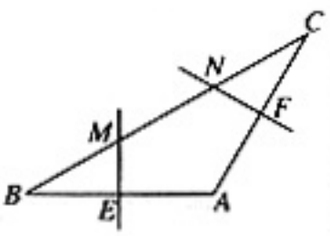
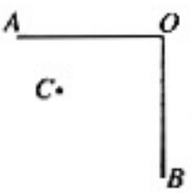
二、测试题（时间：45 分钟，满分 100 分）

内　　容	设计意图
一、选择题（每小题 5 分，共 25 分） 1. 下列四个图案中，轴对称图形的个数是（　　）  （A）3.　（B）2.　（C）1.　（D）0. （第 1 题）	此题意在考察图案的轴对称性.
2. 下列命题中，不正确的是（　　） （A）关于直线对称的两个三角形一定全等. （B）两个圆形纸片随意平放在水平桌面上构成轴对称图形. （C）若两图形关于直线对称，则对称轴是对应点所连线段的垂直平分线. （D）等腰三角形一边上的高、中线及这边对角平分线重合.	此题意在考察轴对称和轴对称图形的概念和性质，并由此判断实际问题中的对称性.
3. 下列四个图案中，具有一个共有性质  （第 3 题） 则下面四个数字中，满足上述性质的一个是（　　） （A）6.　（B）7.　（C）8.　（D）9.	此题意在考察学生观察、分析、归纳研究对象的公共属性（对称性）的能力.
4. 等腰三角形的一个内角是 50°，则另外两个角的度数分别是（　　） （A）65°，65°.　（B）50°，80°. （C）65°，65°或 50°，80°.　（D）50°，50°.	此题意在考察学生能运用等腰三角形基本性质以及分类讨论思想解决实际问题的能力.

续表

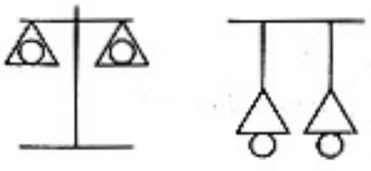
内　容	设计意图
5. 如果等腰三角形两边长是 6 cm 和 3 cm，那么它的周长是（　　） (A) 9 cm.　　(B) 12 cm. (C) 12 cm 或 15 cm.　　(D) 15 cm.	此题意在引导学生注意三角形基本定理的隐含作用.
二、填空题（每小题 5 分，共 20 分） 6. 等腰三角形是_____对称图形，它至少有_____条对称轴.	此题意在考察学生准确判断对称图形及其对称轴的能力.
7. 小明上午在理发店理发时，从镜子内看到背后墙上普通时钟的时针与分针的位置如图所示，此时时间是_____.  (第 7 题)	此题意在考察学生根据物体与镜象的对称关系，解决相关问题.
8. 已知△ABC 是轴对称图形，且三条高的交点恰好是 C 点，则△ABC 的形状是_____.	此题意在引导学生注意等腰三角形三条高的交点位置的三种可能性，会根据交点的不同位置反馈出等腰三角形的形状.
9. 已知点 A (−2, 4)，B (2, 4)，C (−1, 2)，D (1, 2)，E (−3, 1)，F (3, 1) 是平面坐标系内的 6 个点，选择其中三个点连成一个三角形，剩下三个点连成另一个三角形，若这两个三角形关于 y 轴对称，就称为一组对称三角形，那么，坐标系中可找出_____组对称三角形.	此题意在考察平面直角坐标系中的点对称和图形对称，及通过描点直观判断关于 x 轴或 y 轴对称的图形.
10. 如图，△ABC 中，$AB=AC$，$\angle A=36^\circ$，AB 的中垂线 DE 交 AC 于 D，交 AB 于 E，下述结论 (1) BD 平分$\angle ABC$；(2) $AD=BD=BC$；(3) △BDC 的周长等于 $AB+BC$；(4) D 是 AC 中点，其中正确的命题序号是_____.  (第 10 题)	此题意在考察学生运用等腰三角形性质和线段垂直平分线性质解决问题的能力.

续表

内　容	设计意图
三、画一画 11.（6 分）以“○○，△△，— — —”（即两个圆，两个三角形，三条线段）为条件在画出一个有实际意义的对称图形.	此题意在考察学生利用轴对称性质并根据设定的条件进行图案设计.
四、解答题 12.（10 分）在△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，DE 垂直平分斜边 AB，分别交 AB、BC 于 D、E，若 $\angle CAE=\angle B+30^\circ$，求 $\angle AEB$.  （第 12 题）	此题意在考察学生运用等腰三角形的性质及方程思想方法解决实际问题.
13.（10 分）在△ABC 中，$AB=AC$，$\angle A=120^\circ$，$BC=6$ cm，AB 的垂直平分线交 BC 于 M，交 AB 于 E，AC 的垂直平分线交 BC 于 N，交 AC 于 F，求证 $BM=MN=NC$.  （第 13 题）	此题意在考察学生运用线段垂直平分线的性质进行轴对称变换，及运用等边三角形的特殊性解决问题的能力.
五、应用题 14.（12 分）某班举行文艺晚会，桌子摆成两直条（如图中的 AO，BO），AO 桌面上摆满了桔子，OB 桌面上摆满了糖果，坐在 C 处的学生小明先拿桔子再拿糖果，然后回到座位，请你帮助他设计一条行走路线，使其所走的总路程最短？（尺规作图，并写出作法）  （第 14 题）	此题意在引导学生运用轴对称变换解决实际问题，提醒学生注意某个条件不很明朗时，要区分不同情形讨论.
六、探索题 15.（12 分）两个完全相同的矩形铁尺随意放在桌面上（不构成轴对称图形），你能通过轴对称变换使得两把铁尺互相重合吗？如果能，需要变换几次？画图举例说明对称变换的过程；如果不能，简述其理由.	此题意在引导学生注意观察身边事物，敢于提出新的疑问，并用所学知识去解释或解决问题.

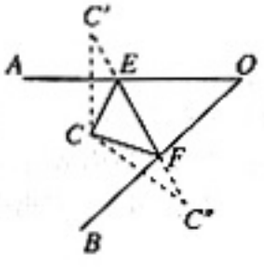
测试题答案

1. C.
2. D.
3. C.
4. C.
5. D.
6. 轴，1.
7. 10时45分.
8. 等腰直角三角形.
9. 4.
10. (1)，(2)，(3).
11. 例如



(第11题)

12. 140°.
13. 提示：连接MA、NA，证明：$MA=AN=MN$.
14. 分两种情况讨论：若$\angle AOB$小于90°，如图，行走路线为$C\to E\to F\to C$；若$\angle AOB$等于90°，从C点沿直线走到O处，再直线返回C处.



(第14题)

15. 能，至少变换两次，为叙述方便，把两尺缩成为两相等线段AB和CD，
(1) 连BD以BD中垂线l_1为轴将CD对称变换至$C'B$；
(2) 以$\angle ABC'$的平分线l_2为轴将$C'B$对称变换至AB即重合.

在此基础上，由学生熟悉的实例引出同类项，并在对同一个多项式的各项进行比较的基础上给出合并同类项的概念．在引进合并同类项的基础上，介绍了整式的加减法．

15.2　整式的乘法

本节分为四个小节，主要内容是整式的乘法，这些内容是在学生掌握了有理数、整式加减等知识的基础上学习的．其中，幂的运算性质，即同底数幂的乘法、幂的乘方和积的乘方是学习整式乘法的基础，教科书把它们作为本节的预备知识依次安排在前三个小节中．教学时，应适当复习幂、指数、底数等概念，特别要弄清正整数指数幂的意义．

在学生掌握了幂的运算性质后，作为它们的一个直接应用，教科书在第四小节的开始安排了单项式乘法．我们知道，运用多项式乘法法则进行多项式乘法的关键是熟练地进行单项式乘法，因此应该予以重视．在学生掌握了单项式乘法的基础上，利用分配律等就能进一步引进单项式与多项式乘法及多项式与多项式乘法，这样就使得整式乘法的运算从简到繁，由易到难，层层递进，环环相扣．

15.3　乘法公式

本节分为两个小节．乘法公式是在学习整式乘法的基础上得到的，在第一小节的开始，教材以“探究”的形式安排了3个题目，这些题目，按照多项式的乘法法则计算并不困难．通过总结三个题目结果的共同点，我们选取上述形式的多项式乘法并直接写出结果，把它们作为公式，即平方差公式，今后遇到相同形式的多项式乘法时，可以直接写出结果．

用类似的方式，第二小节引进了乘法的完全平方公式．在引进完全平方公式后，适时引进添括号法则，以满足整式运算的需要．

15.4　整式的除法

本节也分为两个小节．同底数幂的除法是学习整式除法的基础，因此教科书在第一小节中首先介绍同底数幂的除法性质．熟练地进行单项式除法是学好多项式除以单项式的关键，在第二小节，教科书根据乘、除互为逆运算的关系，并以分配律、同底数幂的除法为依据，由计算具体的实例得到单项式除法的法则．

对于多项式除以单项式，教科书是从计算

$$(am+bm)\div m$$

来导出运算法则的，根据是乘除法互为逆运算以及分配律．可以看出，法则的基本点是把多项式除以单项式“转化”为单项式的除法，而单项式除法是已经学习并掌握了的．

15.5　因式分解

本节的内容是多项式因式分解中一部分最基本的知识和基本方法，它包括因式分解的有关概念，整式乘法与因式分解的区别与联系，因式分解的两种基本方法，即提公因式法和公式法．这两种方法分别安排在第一和第二小节．

四、课时安排

15.1　整式的加减	2课时
15.2　整式的乘法	3课时
15.3　乘法公式	2课时
15.4　整式的除法	2课时
15.5　因式分解	2课时
数学活动	
小结	2课时

五、学法教法建议

1. 发挥整式承前启后的作用

在小学和七年级，已经学习了用字母代替数，列代数式表示现实世界中简单的数量关系，根据数量关系列方程和解方程，有了这些基本知识，学生已经对整式具有了一定的感性认识.

学习整式的有关概念以及运算，都必须以已学过的数学知识为基础，比如整式的乘方离不开实数的乘方，整式的加减乘除运算离不开实数的加减乘除运算法则.

整式中的字母表示数，整式的运算都是建立在数的运算的基础之上，在整式运算的教学中要强调运用数的运算律. 通过对数与式运算的分析，使学生理解认识事物的过程是由特殊（具体）到一般（抽象），又由一般（抽象）到特殊（具体），在不断重复中得到提高，培养学生初步的辩证唯物主义观点.

因式分解是代数式的重要内容之一，它与前面的整式和后续的分式联系极为密切，而因式分解方法的理论依据就是多项式乘法的逆变形. 因式分解在解方程和函数变形等方面也经常使用.

2. 适时渗透“转化”的思想方法以及数学知识间的内在联系

根据数与式之间的联系，教材通过类比的思想方法，由数的运算引出式的运算规律. 体现了数学知识间具体与抽象的内在联系及数学的内在统一性，强调整式乘法与因式分解是相反方向的变形.

在整式乘法法则的教学中，要注意“转化”的思想方法. 例如，多项式与多项式相乘的法则，第一步是“转化”为多项式与单项式相乘，第二步则是“转化”为单项式乘法，而单项式乘法则“转化”为有理数的乘法与同底数幂的乘法.

教科书的安排为渗透这种“转化”的思想方法提供了极大的方便. 我们知道，幂的运算性质是整式运算的基础，它们是集中安排的，要打好这基础. 而单项式乘法则是整式乘法的关键，它是作为幂的三个运算性质的直接运用安排的，这是通向本章的主要内容之一———多项式乘法的“桥梁”，然后依次安排多项式与单项式相乘、多项式与多项式相乘.

在整式除法的教学中也要注意“转化”的思想方法. 例如，多项式与单项式相除的法则，第一步是“转化”为单项式与单项式相除，第二步则是“转化”为有理数的除法与同底数幂的除法.

可以看出，在整式的乘除法的学习中，只有打好基础，才能够熟练地进行后面的运算；只有在熟练运用“转化”方法的前提下，才能够顺利地取得较好的效果.

在教学时，还要注意代数与几何之间的内在联系，在整式乘法和乘法公式部分，采用给出几何图形的方式来验证运算法则及公式的正确性，这充分体现了代数与几何之间的内在联系和统一.

3. 充分发挥学生的主观能动性

充分信任学生，努力发挥他们的主观能动性，让他们通过观察、思考、探究、讨论、归纳，主动地进行学习. 勤于思考，善于思考，是学好数学的先决条件.

在本章中，教材安排了大量的“探究”“讨论”和“思考”栏目. 通过“探究”栏目让学生体验研究问题，解决问题，最后探求出一般结论的过程，加深学生对问题的理解，使其既知其然，又知其所以然. 本章共安排了 9 个“探究”栏目，许多重要结论或概念都是通过这个栏目归纳和总结出来的. 在教学过程中应该尽可能地发挥“探究”栏目应有的作用. 通过这个栏目，学生一方面可以体验获得结论的过程，另一方面可以获得成功的喜悦.

“讨论”栏目为学生提供一个合作交流、互相启发以及相互促进的机会和平台，通过积极讨论和思想交流，可以拓展思维空间，促进数学思考，加深对问题的认识. 例如，在 15.3.1 节，通过对面积的讨论，可以发现平方差公式与面积之间的内在联系，进而感受到几何与代数内在的统一性. 再比如，在 15.4.2 节，通过“讨论”栏目鼓励学生自觉地在讨论实例的基础上归纳出单项式

相除的法则. 总之，通过“讨论”栏目，学生可以共同探索，共同发现，共同发展. 通过该栏目，学生可以感受到集体智慧的强大力量，进而培养集体意识和团队精神.

课程改革的目的之一是促进学习方式的转变，加强学习的主动性和探究性，而“思考”栏目的安排也是为实现上述的课改目标所做的设计之一. 通过“思考”栏目，可以强有力地培养学生的创新精神和自学意识.

在本章的教学中，要有意识地鼓励学生寻找“富有挑战性”的学习材料，并更多地进行数学活动和相互交流，在探究、讨论、思考的过程中获得知识，培养能力. 在本章的“数学活动”和“拓广探索”栏目中都设计了许多探究性的问题，教师应该适当地安排这些问题，鼓励学生积极思维，努力探索，努力提高数学思维水平.

4. 把握好教学要求

本章要求学生会进行简单的整式的加、减运算，会进行简单的整式乘法（其中的多项式相乘仅指一次式相乘）运算和除法运算. 会推导平方差公式和完全平方公式，并了解公式的几何背景，能利用公式进行简单的计算. 会用提公因式法和公式法进行因式分解（指数是正整数）.

多项式（升幂或降幂）的排列方式，在概念上不做要求，但可适当渗透.

整式是代数式中最基本的式子，为避免概念过分集中，本章介绍整式概念时不要求对代数式进行分类，避免过早地出现分式、有理式、无理式等概念.

单项式的系数是对式中的字母来说的，有数字系数与字母系数的不同. 单项式的次数是式中所有的字母的指数的总和，而且次数仅仅与字母有关. 要注意 a^1 规定为 a，指数 1 不写出，切不可把 a 的指数当作 0. 单独一个非零的数，也是单项式，叫做零次单项式. 数 0 也可看作单项式，它没有任何确定的次数. 这些不要讲给学生，以免概念太多，引起学生思维的混乱，反而影响教学效果.

教学时，要注意使学生掌握单项式与多项式的关系，重点在于使学生认识多项式是几个单项式的和，每个单项式是该多项式的一个项. 各项都应包括它前面的符号，这一点在教学时一定要特别予以强调.

添括号法则是在去括号法则的基础上建立的，而去括号法则已经在第一、二章学过. 教科书根据第二章中应用去括号法则得到的两个等式，再把它们反过来，分析等式两边对应项的符号变化，得到添括号法则. 教学时要向学生指出，要把添括号（或去括号）与括号前面的符号看成统一体，不能拆开. 这对正确地运用法则，熟练地进行计算有很大帮助. 要特别向学生强调，添括号与去括号恰好是互逆的过程，检查添括号是否正确，可以用去括号检验. 反之亦然.

本章系统地介绍了幂的运算性质、乘除运算法则以及乘法公式的知识，每个知识的发生过程都叙述得清晰明确. 在教学过程中，要以教科书为基础，探讨知识发生的过程，并和学生一起研究如何经过由具体到抽象概括得到性质、法则以及公式，这将有助于训练学生的思维，使学生领会到数学的思想和方法.

对于乘法公式，要使学生领会平方差公式和完全平方公式都是有几何意义的.

对于因式分解部分，只要求学生会灵活地运用提公因式法和公式法（平方差公式和完全平方公式）两种分解方法，对分组分解法和十字相乘法则不做要求. 对于其他因式分解方法，教材只在选学栏目中给出了一种，即

$$x^2+(p+q)x+pq$$

型式子的因式分解（十字相乘法），仅供学有余力的同学参考. 在教学时可以适时向学生提出几个（应用因式分解）解方程的问题，这样可以使学生感受到学习因式分解的重要意义.

5. 掌握并突破知识的重点、难点和关键

在本章，有较多的知识属于重点或难点，有的知识既是重点又是难点，下面分三部分进行具体

分析.

整式的加减

合并同类项是重点，也是难点. 合并同类项是整式加减的知识基础，整式的加减主要是通过合并同类项把整式化简. 熟练进行合并同类项，必须抓好三个关键环节的教学. 首先要使学生掌握同类项的概念，会辨别同类项，能准确地掌握判断同类项的两条标准（字母和字母指数）；其次，要明确合并同类项的含义是把多项式中同类项合并成一项，经过合并同类项，多项式的项数会减少，这样多项式就得到了简化；最后，要使学生明确“合并”是指同类项的系数的增加，把得到的结果作为新的系数，要保持同类项的字母和字母的指数不变.

进行整式的加减，关键是使学生明确整式加减的作用是把整式化简，化简的主要方法是合并多项式中的同类项.

整式的乘除

这部分内容的重点是整式的乘除法，尤其是其中的乘法公式. 从整式乘除的地位和作用可知，如果掌握不好这部分内容，将给以后的学习带来极大的困难. 因此要有针对性地加强练习，务必使学生对整式的乘除运算，特别是其中运用乘法公式进行计算达到熟练的程度.

乘法公式的结构特征以及公式中字母的广泛含义学生不易掌握，运用时容易混淆，因此乘法公式的灵活运用是本部分的难点. 在教学中要引导学生分析公式的结构特征，并在练习中与所运用公式的结构特征联系起来，对所发生的错误多做具体分析，以加深学生对公式结构特征的理解.

添括号（或去括号）时，括号中符号的处理是本部分的另一个难点. 添括号（或去括号）都是对多项式的变形，要根据添括号（或去括号）法则进行. 掌握法则的关键是把添上括号（或去掉括号）与括号前面的符号看成统一体，不能拆开，学生不易理解这一点，要结合例题分析.

学生在学习添括号（或去括号）时，感觉添括号难于去括号，括号前是“－”号难于括号前是“＋”号. 遇到括号前是“－”号时，学生容易漏掉括号中一部分项的变号，教师在讲解例题时要强调法则中“各项”的含义.

在整式的乘除中，单项式的乘除是关键. 这是因为其他乘除都要“转化”为单项式的乘除. 实际上，单项式的乘除进行的是幂的运算与有理数的运算，因此幂的运算是学好整式乘除的基石.

因式分解

因式分解这部分内容的难点是因式分解的两种基本方法，即提公因式法和公式法，在教学中一定要让学生牢固地掌握. 因式分解的理论比较多（如因式分解的因子存在性与唯一性），分解因式的方法很多，变化技巧较高，这是本部分知识的难点，教学时一定要按照教学要求教学，防止随意拓宽内容和加深题目的难度. 因式分解是整式乘法的逆向变形，教材中两种因式分解方法的引入，都紧紧扣住这一关键，采用对比的方法，从多项式乘法出发，根据相等关系得出因式分解公式和方法.

6. 利用好选学内容

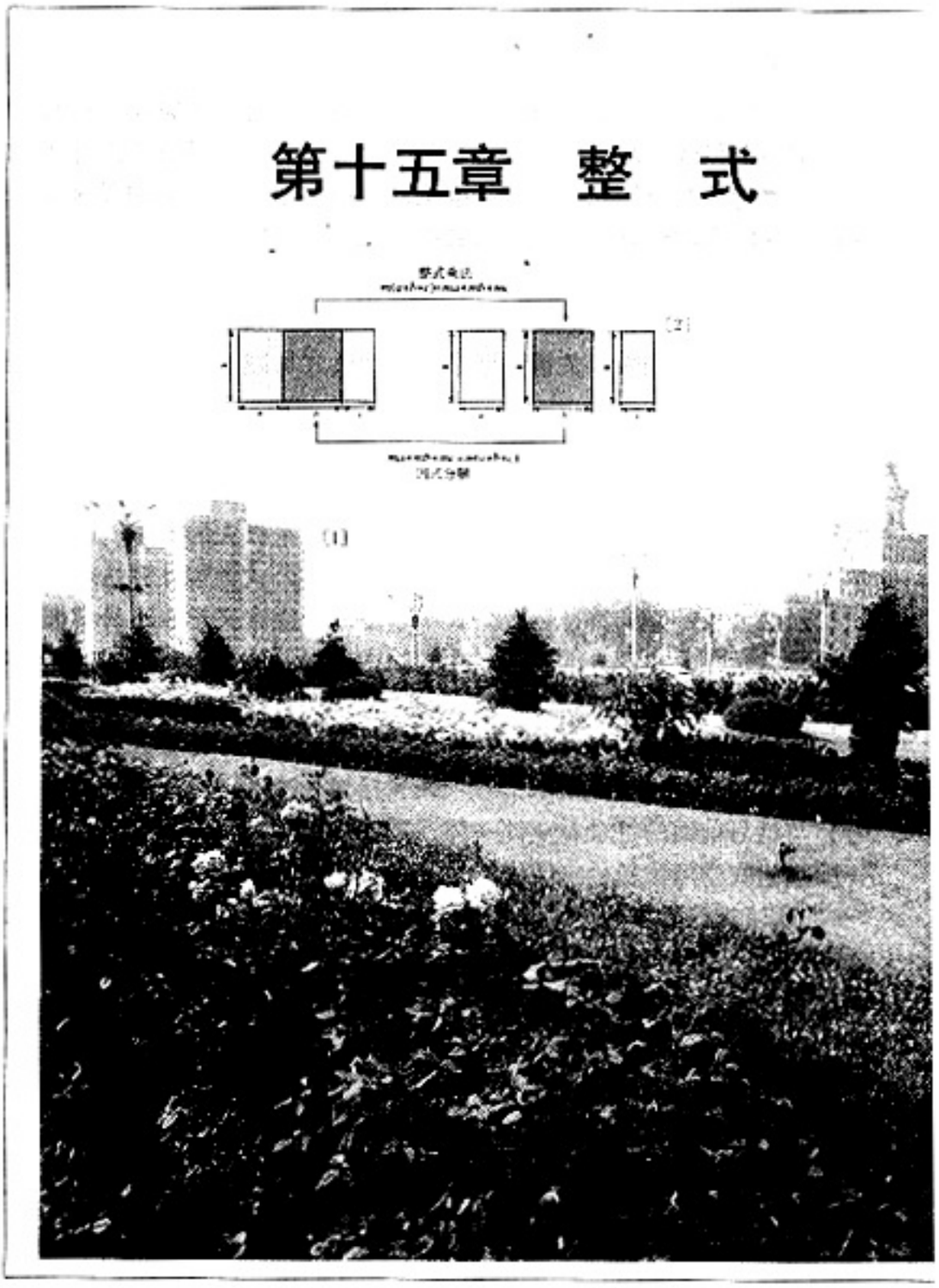
教学中除了要关注学生在数学知识和数学能力方面的提高外，还要考虑在传承数学史知识及数学文化修养方面做出努力，以使学生在获得数学知识的同时人文精神也得到陶冶.

本章安排了“阅读与思考”“观察与猜想”两个选学栏目，这些选学内容是本章有关内容的拓展与延伸. 不失时机地安排感兴趣的学生阅读这些材料，可以开阔他们的视野，拓展他们的知识面.

“阅读与思考”栏目中的“杨辉三角”，不但可以使学生了解一些二项展开式中各项系数的知识从而增强他们的数学修养，还可以潜移默化地培养他们的爱国情怀. “观察与猜想”栏目，可以使学生初步感受分解因式的另一种方法——十字相乘法，这对于促进学生理解必修内容是不无裨益的.

Ⅱ 教材分析

第十五章 整式



[1] 本章的章头图是某街心花园的绿地，与章前言中的问题相对应.

[2] 根据题意，章头图中给出了两种答案，第一个答案是

$$m(a+b+c),$$

另一个答案是

$$ma+mb+mc.$$

显然两者是相等的. 从数学角度看两者是方向相反的变形.

1. 学习本章前，学生已经掌握了用字母表示数、列简单的代数式，会把一些简单的实际问题中的数量关系用代数式表示出来.

2. 学生在前两个学段就已经学习了求面积的知识. 章引言中的问题能够使学生进一步体会整式运算的必要性，同时感受到整式方向相反的变形，使其初步体会到分解因式的奥妙，引起学生的好奇心.

这样就用实际例子引出了本章的内容.

3. 整式的加、减、乘、除运算法则与数的加、减、乘、除运算法则是基本一致的，事实上，数的运算可以看作整式运算的具体化，整式的运算可以看作数的运算的抽象化.

4. 章前引言提出了3个问题：

你能用几种方法表示扩大后绿地的面积？

不同的表示方法之间有什么关系？

如何从数学角度认识它们之间的关系？

这些问题可以充分发挥学生的求知欲，鼓励

15



15.1 整式的加减

15.2 整式的乘法

15.3 乘法公式

15.4 整式的除法

15.5 因式分解

为了扩大绿地面积，要把街心花园的一块长m米，宽b米的长方形绿地，向两边分别加宽a米和c米（如左图），你能用几种方法表示扩大后绿地的面积？不同的表示方法之间有什么关系？如何从数学的角度认识它们之间的关系？

回答上面的问题要用到本章将要学习的整式的运算和因式分解的知识.

整式与数一样，也有加、减、乘、除等运算，整式的运算是解方程、解不等式的重要基础.本章我们将学习整式的运算等内容，它们会给我们研究数量及其关系带来很大的方便.

[1] 应该说，章头图中给出的并不是所有的结果，还可以是

$$m(a+b)+mc$$

或

$$ma+m(b+c),$$

两个结果涉及到整式的运算和分解因式，这样就引出了本章的主要内容：整式的运算和分解因式.

他们找出除章头图中给出的两个表示方法外的其他方法，这有助于加深学生对整式的乘法和分解因式的初步感受，提纲挈领地引出本章的内容.

[1] $4x$，vt，$6a^2$，$-n$.

[2] 小帖示是为了更明显的显示这五个式子都是数字与字母的乘积.

教学时，可以引导学生一同分析上述各式子，指出各式的共同点.

$4x$ 是数字 4 与字母 x 的积；

vt 是字母 v 与 t 的积；

$6a^2$ 是数字 6 与字母 a 连乘两次的积；

$-n$ 可以看成是数字 -1 与字母 n 的积.

归纳出单项式的概念.

[3] 举例讲单项式时，最好避开含 π 的式子。如 $2\pi a$ 的系数是 2π. 依照系数的概念，学生不易理解 π 属于系数.

[4] 根据乘方概念：

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdots\cdot a}_{n\text{个}a}$$

n 表示相同因数的个数，因而单项式“所有”字母的指数的和就是单项式中字母因数的个数。

15.1 整式的加减

15.1.1 整式

思考[1]

先填空，再看看列出的式子有什么特点.

(1) 边长为 x 的正方形的周长为_____；

(2) 一辆汽车的速度是 v 千米/时，行驶 t 小时所走过的路程为_____千米；

(3) 如图 15.1-1，正方体的表面积为_____，正方体的体积为_____；

(4) 设 n 表示一个数，则它的相反数是_____.

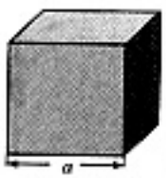


图 15.1-1

$4x=4\cdot x$，[2]
$vt=v\cdot t$，
$6a^2=6\cdot a\cdot a$，
$a^3=a\cdot a\cdot a$，
$-n=-1\cdot n$.

上面问题中，所列的式子是 $4x$，vt，$6a^2$，a^3，$-n$，它们都是数或字母的积，这样的式子叫做**单项式**（monomial）. 单独的一个数或一个字母也是单项式.

$6a^2$，a^3，$-n$ 的系数分别是多少？

单项式中的数字因数叫做这个单项式的**系数**（coefficient）. 例如，单项式 $4x$，vt 的系数分别是 4，1.[3]

$6a^2$，a^3，$-n$ 的次数分别是多少？

一个单项式中，所有字母的指数的和叫做这个单项式的**次数**（degree）.[4] 例如，在单项式 $4x$ 中，字母 x 的指数是 1，$4x$ 是一次单项式. 在单项式 vt 中，字母 v 与 t 的指数的和是 2，vt 是二次单项式.

1. 单项式的概念是本小节的重点，教科书以四个小填空题为出发点引出不同的单项式，既而抽象出多项式的概念.

首先举出计算正方形周长，汽车行程，正方体表面积，正方体的体积以及表示相反数的问题，列出一些含有不同字母，字母的个数、次数也有不同的五个代数式：

$$4x\ ,\ vt,\ 6a^2,\ a^3,\ -n.$$

分析它们的构成，都是数字和字母的积，指出具有这种特点的代数式叫做单项式.

2. 教科书只介绍了数字系数，教学时只要求学生掌握“单项式的数字因数叫做单项式的系数”就可以了. 在这里，系数是有理数范围内的数，要注意负数做系数，应强调系数包括前面的符号. 例如，$-7xy^2$ 的系数是 -7 而不是 7.

3. 务必使学生弄清，只含有字母因数的单项式的系数是 1 或 -1，为使学生明确它们的含义，可以对比整数乘法. 例如：

思考 [1]

先填空，再看看列出的式子有什么特点.

(1) 温度由 t ℃下降 5 ℃后是_____℃；

(2) 买一个篮球需要 x 元，买一个排球需要 y 元，买一个足球需要 z 元，买 3 个篮球、5 个排球、2 个足球共需要_____元；

(3) 如图 15.1-2，三角尺的面积为（π 取 3.14）_____；

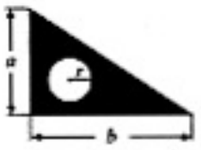


图 15.1-2

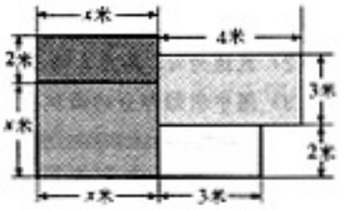


图 15.1-3

(4) 图 15.1-3 是一所住宅的建筑平面图，这所住宅的建筑面积是_____米^2.

上面列出的式子 $t-5$，$3x+5y+2z$，$\frac{1}{2}ab-3.14r^2$，$x^2+2x+18$，都可以看成由单项式的和组成的式子.

$3x+5y+2z$，$\frac{1}{2}ab-3.14r^2$，$x^2+2x+18$ 的项分别是什么？

几个单项式的和叫做**多项式**（polynomial）.[2]在多项式中，每个单项式叫做多项式的**项**（term），其中，不含字母的项叫做**常数项**（constant term）.[3]例如 $t-5$ 是 t 与 -5 的和，t 与 -5 都是它的项，-5 是常数项.

$3x+5y+2z$，$\frac{1}{2}ab-3.14r^2$ 的次数分别是几？

在上面的多项式中，$t-5$，$x^2+2x+14$ 里次数最高项的次数分别是 1，2，它们分别是一次多项式，二次多项式. 一般地，多项式里次数最高的项的次数，就是这个多项式的次数.[4]

单项式与多项式统称**整式**（integral expression）.

[1] $t-5$，

$3x+5y+2z$，

$\frac{1}{2}ab-3.14r^2$，

$x^2+2x+18$.

[2] 这样给出多项式定义，多项式不包含单项式.

[3] 常数项不含字母，只含数字，也是单项式，是零次单项式，教学时不必讲给学生.

注意，非零的数是零次单项式，数 0 的次数不确定，它不是零次式.

[4] 单项式、多项式、多项式的项都有次数，要弄清它们之间的联系与区别.

$3x=x+x+x$，3 表示字母 x 的个数，单独一个字母 x，就是 1 个 x，写成乘式就是 $1\cdot x$. 系数 1 通常省略. $-x$ 就是 $-1\cdot x$，系数是 -1，省略 1 写成 $-x$.

4. 多项式概念也是本小节的重点内容. 教科书是从实例出发，归纳共同点，着重指出多项式是几个单项式的和.

5. 强调多项式的读法，首先要读出每一项是什么，还要使学生注意单项式前的符号，有正号，也有负号.

6. 多项式的项是单项式，每个单项式都有系数，因此对多项式的每一项来讲有系数，一般对常数项不说系数，对整个多项式来说也没有系数概念.

7. 多项式的每一项都有次数，在比较各项的次数大小的基础上，引出多项式次数的概念. 多项式的次数是多项式中次数最高项的次数.

练习答案

1.

2	-1.2	1	-1	$-\frac{2}{3}$
2	1	3	2	2

2. (1) $12n$，1 次；

(2) $\frac{ah}{2}$，2 次；

(3) x^2+3x+6，2 次，其中的 x^2，$3x$ 和 6 分别为该多项式的 2 次，1 次和常数项.

练习

1. 填表：

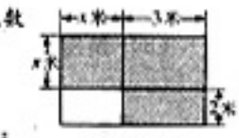
单项式	$2a^2$	$-1.2h$	xy^2	$-t^2$	$-\frac{2\pi t}{3}$
系数					
次数					

2. 用整式填空，指出单项式的次数以及多项式的次数和项：

(1) 每包书有 12 册，n 包书有（　　）册；

(2) 底边为 a，高为 h 的三角形的面积为（　　）；

(3) 图中阴影部分的面积为（　　）.



(第 2(3)题)

15.1.2　整式的加减

在前面第二章，我们解决过这样的问题：某校前年、去年、今年购买的计算机台数分别是 x，$2x$，$4x$，那么这个学校这三年购买的计算机台数是 $7x$，即

$$x+2x+4x=7x.$$

说说这个结果是怎样得到的.[1]

探究 [2]

(1) $3x^2+2x^2=(\quad)x^2$；

(2) $3ab^2-4ab^2=(\quad)ab^2$；

(3) $4x^2+2x+7+3x-8x^2-2=(\quad)x^2+(\quad)x+(\quad)$.

观察(1)中多项式的项 $3x^2$ 与 $2x^2$，它们含相同的字母 x，并且 x 的指数都是 2.（2）中多项式的项是 $3ab^2$ 与 $-4ab^2$，它们都含字母 a、b，并且 a 都是一次，

164　第十五章　整式

[1] 分配律公式

$c(a+b)=ac+bc$，

把公式反过来，即

$ac+bc=(a+b)c$.

这个结果的获得用到了乘法分配律.

[2] (1) 5；

(2) -1；

(3) -4，5，5.

8. 本小节的内容是整式的加减，而合并同类项则是本小节的重点，也是难点. 使学生掌握好同类项概念，正确运用合并同类项的法则，是学好整式加减的关键.

9. 教科书从学生熟悉的现实问题入手，列出代数式，并问结果是如何得到的. 其实这个问题并不难，学生很容易根据乘法分配律找到答案.

10. 接着向学生提出三个探究题，当学生根据乘法分配律找到这三个题目的答案之后，事实上他们已经完成了合并同类项的运算. 在完成

$$3x^2+2x^2=(3+2)x^2=5x^2$$

的过程中，学生已经认识到“相同字母的次数也相同”的含义了. 在随后的两个问题中则进一步加深了这种认识.

分析 $3x^2+2x^2$ 和 $3ab^2-4ab^2$ 两式可以得出共同规律，每式的两项之所以能够合并，是由于它们含有“相同的字母”，同时“相同的字母的次数也相同”，从而归纳出判断同类项的两条标准.

b 都是二次，像 $3x^2$ 与 $2x^2$（或 $3ab^2$ 与 $-4ab^2$）这种所含字母相同，并且相同字母的指数也相同的项叫做同类项．几个常数项也是同类项．

通常我们把一个多项式的各项按照某个字母的指数从大到小（降幂）或者从小到大（升幂）的顺序排列．如 $-4x^2+5x+5$ 也可以写成 $5+5x-4x^2$．

在多项式中遇到同类项，可以运用交换律、结合律、分配律进行合并．例如，对于上面探究中的(3)，我们可以将同类项合并：

$$\begin{aligned}&4x^2+2x+7+3x-8x^2-2\\=&(4x^2-8x^2)+(2x+3x)+(7-2)\\=&(4-8)x^2+(2+3)x+(7-2)\\=&-4x^2+5x+5.\end{aligned}$$

把多项式中的同类项合并成一项，即把它们的系数相加作为新的系数，而字母部分不变，叫做**合并同类项**．[1]

例 1 做大小两个长方体纸盒，尺寸如下（单位：cm）：

	长	宽	高
小纸盒	a	b	c
大纸盒	$1.5a$	$2b$	$2c$

(1) 做这两个纸盒共用料多少平方厘米？

(2) 做大纸盒比做小纸盒多用料多少平方厘米？

解：小纸盒的表面积是 $(2ab+2bc+2ca)\text{cm}^2$，

大纸盒的表面积是 $(6ab+8bc+6ca)\text{cm}^2$．

我们在第二章学过，如果括号前面是负号，去括号时，把括号与它前面的负号一起去掉，括号内各项要变号．

(1) 做这两个纸盒共用料（单位：cm^2）

$$\begin{aligned}&(2ab+2bc+2ca)+(6ab+8bc+6ca)\\=&2ab+2bc+2ca+6ab+8bc+6ca\\=&8ab+10bc+8ca.\end{aligned}$$ [2]

(2) 做大纸盒比做小纸盒多用料（单位：cm^2）

$$\begin{aligned}&(6ab+8bc+6ca)-(2ab+2bc+2ca)\\=&6ab+8bc+6ca-2ab-2bc-2ca\end{aligned}$$ [3]

[1] 合并同类项，实际上就是有理数的加减运算，计算时要注意符号．

[2] 合并同类项时，只能把同类项合并成一项，不是同类项不能合并．在

$$8ab+10bc+8ca$$

中不再有同类项，不能再合并了，这就是最后的结果．

[3] 依据加法交换律、结合律，使等式变形并未改变多项式的值．交换多项式的项的位置时，要使学生注意项的符号，尤其是在去括号或添括号的时候．

11. 要使学生切实掌握合并同类项的要点，一是“字母和字母的指数不变”（同类项），二是“系数相加”（合并）．

12. 例 1 的两个小题，每题都有 6 项，其中同类项有三对，即 $2ab$ 与 $6ab$，$2bc$ 与 $8bc$，$2ca$ 与 $6ca$．

13. 学生接受同类项的定义并不难，做到判断无误却非易事．需要通过练习，反复强调同类项的两条判断标准，使学生通过甄别、比较、逐步达到判断准确、合并熟练的程度．

14. 合并同类项时，为避免发生漏项的错误，讲解例题时要重视解题的步骤．先标出同类项，然后再根据法则，合并各组同类项．这样做，有利于巩固概念和准确掌握合并同类项的规律，使学生在计算中思维条理化，提高运算能力，减少计算上的错误．熟练后，可以减少中间过程，直接写出结果．

15. 整式的加减是本小节的主要内容，也是

[1] 第一步是去括号，注意括号内符号的变化.

[2] 第二步是合并同类项.

练习答案

1. (1) xy;

(2) $\frac{1}{12}a^2+\frac{1}{3}ab$.

2. (1) $6x^2-7x+2$;

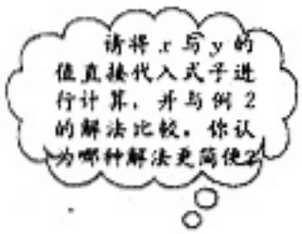
(2) $7a^2-3ab$.

3. $\frac{2}{3}$.

$=4ab+6bc+4ac$.

几个整式相加减，通常用括号把每一个整式括起来，再用加减号连接；然后去括号，合并同类项.

例 2 求 $\frac{1}{2}x-2\left(x-\frac{1}{3}y^2\right)+\left(-\frac{3}{2}x+\frac{1}{3}y^2\right)$ 的值，其中 $x=-2$，$y=\frac{2}{3}$.



解： $\frac{1}{2}x-2\left(x-\frac{1}{3}y^2\right)+\left(-\frac{3}{2}x+\frac{1}{3}y^2\right)$

$=\frac{1}{2}x-2x+\frac{2}{3}y^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{3}y^2$ [1]

$=-3x+y^2$. [2]

当 $x=-2$，$y=\frac{2}{3}$ 时，

原式 $=(-3)\times(-2)+\left(\frac{2}{3}\right)^2=6+\frac{4}{9}=6\frac{4}{9}$.

练习

1. 计算：

(1) $3xy-4xy-(-2xy)$；　　(2) $-\frac{1}{3}ab-\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{3}a^2-\left(-\frac{2}{3}ab\right)$.

2. 计算：

(1) $(-x+2x^2+5)+(4x^2-3-6x)$；(2) $(3a^2-ab+7)-(-4a^2+2ab+7)$.

3. 求值：

$5(3a^2b-ab^2)-(ab^2+3a^2b)$，其中 $a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{3}$.

全章的重点之一，教学中应使学生掌握整式加减的一般步骤，通过练习使学生能够熟练地进行整式的加减.

16. 整式加减实际上就是合并同类项，在运算中，如果遇到括号，就要先运用去括号法则，去掉括号再合并同类项. 教学时要留出较多的时间让学生练习.

17. 讲解例 2 时首先是去掉括号，去掉括号后可以看到式子中共有 5 项. 接下来学生就能够分辨出这 5 项中的同类项有两组，即

$\frac{1}{2}x$，$-2x$，$-\frac{3}{2}x$ 及 $\frac{2}{3}y^2$，$\frac{1}{3}y^2$.

18. 通过课堂练习题的训练，可以使学生对本小节知识的理解得到巩固.

习题15.1

复习巩固

1. 填表：[1]

整式	$-15ab$	$4a^2b^2$	$\frac{3x^2y}{5}$	$4x^2-3$	$a^4-2a^2b^2+b^4$
系数					
次数					

2. 下列各题计算的结果对不对？如果不对，指出错在哪里.[2]

(1) $3a+2b=5ab$；　　(2) $5y^2-2y^2=3$；

(3) $2ab-2ba=0$；　　(4) $3x^2y-5xy^2=-2x^2y$.

3. 计算：[3]

(1) $(5a+4c+7b)+(5c-3b-6a)$；

(2) $(8xy-x^2+y^2)-(x^2-y^2+8xy)$；

(3) $\left(2x^2-\frac{1}{2}+3x\right)-4\left(x-x^2+\frac{1}{2}\right)$；

(4) $3x^2-[7x-(4x-3)-2x^2]$.

4. 求值：

$(-x^2+5+4x)+(5x-4+2x^2)$，其中 $x=-2$.

综合运用

5. 一个四边形的周长是 48 cm，且第一条边长 a cm，第二条边比第一条边的 2 倍长 3 cm，第三条边长等于第一、二两条边长的和.

(1) 写出表示第四条边长的式子；

(2) 当 $a=3$ cm 或 $a=7$ cm 时，还能得到四边形吗？这时的图形是什么形状？

6. 一个两位数，其中 a 表示十位上的数字，b 表示个位上的数字，把这个两位数的两个数位上的数字交换位置，得到一个新的两位数，计算所得的数与原数的和，这个和能被 11 整除吗？[4]

7. 三个植树队，第一队植树 x 棵，第二队植的树比第一队植树的 2 倍少 25 棵，第三队植的树比第一队植树的一半多 42 棵，求当 x 为下列各值时，三个队共植树

[1] 考察学生识别单项式的系数以及多项式次数的能力.

[2] 考察学生识别同类项的能力.

[3] 在本习题中，为了避免烦琐的计算，没有安排项数过多的多项式相加减，项数都没有超过 6 项.

[4] 对于任意两个整数 a，b $(b\neq0)$，若存在整数 q，使 $a=bq$，就说 a 能被 b 整除，或 b 整除 a.

习题 15.1

1. 通过第 2 题的练习，可以巩固学生甄别同类项的基本能力.

2. 第 3 题～4 题是整式加减计算题，应使学生通过做题，熟练地进行计算. 提醒学生注意，运算时要按去括号法则先去括号，再合并同类项. 第 3(4)题有两层括号，按顺序一般先去小括号，再去中括号. 每去掉一层括号合并一次同类项，这样可以使运算简单些，并能减少差错. 也可以先把所有的括号去掉，再合并同类项.

3. 第 5 题是一个将代数和几何相结合的题目，解第 5(1)题，首先要根据题意列出多项式，然后进行整式的加减运算，最后得到结果，即

$48-\{a+(2a+3)+[a+(2a+3)]\}=42-6a$.

解决第 5(2)题的前提是知道四边形成立的条件：任一边的长不能小于等于 0，不能大于其他三边的总和.

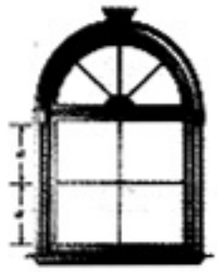
[1] 解决这个问题要用到圆周率 π，在此 π 应该看作是实数而非字母.

多少棵.

(1) $x=100$；　　(2) $x=240$.

8. 窗户的形状如图，其上部是半圆形，下部是边长相同的四个小正方形. 已知下部小正方形的边长为 a cm，计算：[1]

(1) 窗户的面积；　　(2) 窗户的外框的总长.

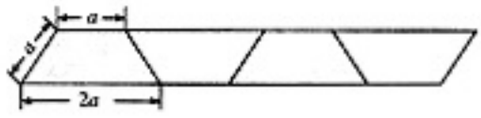


(第 8 题)

拓广探究 ▶▶

9. 观察下图并填表：

梯形个数	1	2	3	4	5	6	…	n
图形周长	$5a$	$8a$	$11a$	$14a$				



(第 9 题)

10. 10 个棱长为 a 的正方体摆放成如图的形状，这个图形的表面积是多少？



(第 10 题)

4. 解决第 6 题的关键是列出两个数的代数表达式. 根据题意，原两位数的代数表达式可写为 $10a+b$，新的两位数的代数表达式可写为 $10b+a$. 两个数的和为

$$10a+b+10b+a=11(a+b),$$

从结果可以看出这个和能被 11 整除.

5. 解决第 7 题的关键是根据题意列出代数表达式

$$x+(2x-25)+\left(\frac{x}{2}+42\right)=3\frac{1}{2}x+17,$$

再将 x 的值代入.

6. 从第 9 题图可以看出，每增加一个梯形，四边形的周长恰好增加梯形的两个底，即 $3a$.

7. 解决第 10 题的难点在于需要较强的空间想象力. 该立体左、右及下侧的面积都为 $6a$，正面的面积为 $3a\times3$，则表面积的表达式为

$$6a\times3+3a\times6=36a.$$

15.2 整式的乘法

15.2.1 同底数幂的乘法[1]



问题 一种电子计算机每秒可进行 10^{12} 次运算，它工作 10^3 秒可进行多少次运算？[2]

它工作 10^3 秒可进行运算的次数为 $10^{12}\times10^3$. 怎样计算 $10^{12}\times10^3$ 呢？

根据乘方[3]的意义可知

$$10^{12}\times10^3=\underbrace{(10\times\cdots\times10)}_{12\text{个}10}\times(10\times10\times10)$$
$$=\underbrace{(10\times10\times\cdots\times10)}_{15\text{个}10}$$
$$=10^{15}.$$

探究[4]

根据乘方的意义填空，看看计算结果有什么规律：

(1) $2^5\times2^2=2^{(\quad)}$；

(2) $a^3\cdot a^2=a^{(\quad)}$；[5]

(3) $5^m\cdot5^n=5^{(\quad)}$.

对于任意底数 a 与任意正整数 m，n.[6]

$$a^m\cdot a^n=\underbrace{(aa\cdots a)}_{m\text{个}a}\ \underbrace{(aa\cdots a)}_{n\text{个}a},$$
$$=\underbrace{aa\cdots a}_{(m+n)\text{个}a}=a^{m+n}.$$

一般地，我们有

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n}\ (m、n\text{都是正整数}).$$[7]

即同底数幂相乘，底数不变，指数相加.[8]

[1] 关于底数、指数、幂等概念，是理解同底数幂的乘法的基础，而这些概念是在有理数的乘法中学习的，储存知识的时间太长，学生可能生疏、遗忘. 因此，在讲解之前，要根据情况进行复习.

[2] 计算速度是决定计算机性能的根本指标.

[3] 乘方概念要与上述概念一并复习.

[4] 2^7；a^3；5^{m+n}.

[5] 运算性质的导出，是由特殊到一般的过程，这里的 a 就是由 10，2，5 等数推广到任意数.

[6] 这里的 m，n 已经扩充到任意正整数. 而前面的 a 是任意数，要注意它们的区别.

[7] 这个式子是由特殊到一般归纳出的同底数幂乘法的表达式. 要注意括号内的 m，n 都是正整数，是这个表达式的一部分.

[8] 这是同底数幂的乘法的语言表述. 表达式及其语言表述，不要求学生一字不差地死记硬背.

1. 同底数幂的乘法是学习整式乘法的基础，一定要学好.

2. 教学时，要注意导出这一性质的过程，而不是让学生死记硬背，导出性质的教学，是一个由特殊到一般的认识过程. 此前，学生对于字母表示数的广泛意义已有初步认识，但对于用字母表示幂的指数还是首次遇到，所以他们会感到抽象，不易理解. 为此，教科书从特殊到一般，从具体到抽象，有层次地进行概括抽象，归纳原理. 开始从 $10^{12}\times10^3$ 和 $2^5\times2^2$ 到 $a^3\cdot a^2$，再从 $a^3\cdot a^2$ 到 $a^m\cdot a^n$，把幂的底数与指数分两步概括抽象，就能使学生容易理解，教学时，要注意导出这一性质时每一步的根据.

3. 从幂的定义可知，12 个 10 的连乘积与 3 个 10 的连乘积相乘，就得 15(即 12+3)个 10 的连乘积. 当把底数由具体数换成字母 a 而计算探究栏目中的 $a^3\cdot a^2$ 时，计算的步骤和每一步的根据与第一个问题相同. 在这个基础上，再把幂

[1] 例 1 中的题都比较简单，应着重说明底数是什么，指数是什么，让学生观察是不是同底数的幂相乘，引导学生运用性质进行计算.

把同底数的幂相乘的性质运用到解题中去，是一个由一般到特殊的过程. 对于这四个例题的讲解，应着重于使学生进一步理解和掌握性质.

练习答案

(1) b^6；(2) 10^6；

(2) $-a^8$；(3) y^{3n+1}.

[2] 弄清幂的乘方的意义是下边进行归纳推理的基础.

[3] (1) 6；(2) 6；

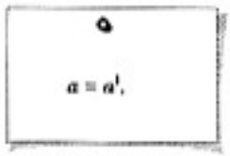
(3) $3m$.

通过探究这三个问题的答案，可以清楚地看出幂的乘方与同底数幂的乘法的区别与联系. 例如，对于(1)，利用乘方的意义，得

$$(3^2)^3=3^2\cdot 3^2\cdot 3^2,$$

再利用同底数幂的乘法的性质，得

$$3^{2+2+2}=3^{2\times 3}.$$



例 1　计算：[1]

(1) $x^2\cdot x^5$；　　(2) $a\cdot a^6$；

(3) $2\times 2^4\times 2^3$；　　(4) $x^m\cdot x^{3m+1}$.

解：(1) $x^2\cdot x^5=x^{2+5}=x^7$.

(2) $a\cdot a^6=a^{1+6}=a^7$.

(3) $2\times 2^4\times 2^3=2^{1+4+3}=2^8$.

(4) $x^m\cdot x^{3m+1}=x^{m+3m+1}=x^{4m+1}$.

练习

计算：

(1) $b^5\cdot b$；　　(2) $10\times 10^2\times 10^3$；

(3) $-a^2\cdot a^6$；　　(4) $y^{2n}\cdot y^{n+1}$.

15.2.2　幂的乘方[2]

探究[3]

根据乘方的意义及同底数幂的乘法填空，看看计算的结果有什么规律：

(1) $(3^2)^3=3^2\times 3^2\times 3^2=3^{(\ )}$；

(2) $(a^2)^3=a^2\cdot a^2\cdot a^2=a^{(\ )}$.

(3) $(a^m)^3=a^m\cdot a^m\cdot a^m=a^{(\ )}$ (m 是正整数).

对于任意底数 a 与任意正整数 m，n，

$$(a^m)^n=\overbrace{a^m\cdot a^m\cdot\cdots\cdot a^m}^{n\text{个}a^m}=a^{\overbrace{m+m+\cdots+m}^{n\text{个}m}}=a^{mn}.$$

一般地，我们有

的指数从特殊到一般进行抽象概括，从而得出指数是任意正整数的两个同底数的幂相乘，其计算上都有相同的规律：底数不变，指数相加.

这个性质很容易推广到三个以上的同底数幂相乘.

上述性质导出后，应要求学生用语言叙述这个性质，即“同底数的幂相乘，底数不变，指数相加”，这对于学生提高数学语言的表述能力是有益的.

4. 幂的乘方与积的乘方，是学习整式乘法的基础. 导出幂的乘方的根据是乘方的意义和同底数幂乘法的性质. 教学时，也要突出导出这一性质的过程. 可先以具体指数为例，明确幂的乘方的意义，导出性质，如探究中的

$$(3^2)^3=3^2\cdot 3^2\cdot 3^2=3^{2+2+2}=3^{2\times 3}.$$

对于从指数连加得到指数相乘，要根据学生的情况多作一些说明. 以探究中的 $(a^2)^3$ 为例，再一次说明(2+2+2)可以写成 2×3. 这一点是导出

$(a^m)^n=a^{mn}$（m、n 都是正整数）.[1]

即幂的乘方，底数不变，指数相乘.

例 2　计算：[2]

(1) $(10^3)^5$；　　(2) $(a^4)^4$；

(3) $(a^m)^2$；　　(4) $-(x^4)^3$.

解：(1) $(10^3)^5=10^{3\times5}=10^{15}$.

(2) $(a^4)^4=a^{4\times4}=a^{16}$.

(3) $(a^m)^2=a^{m\times2}=a^{2m}$.

(4) $-(x^4)^3=-x^{4\times3}=-x^{12}$.

练习

计算：

(1) $(10^3)^5$；　　(2) $(x^3)^2$；

(3) $-(x^m)^3$；　　(4) $(a^2)^3\cdot a^5$.

15.2.3　积的乘方[3]

探究[4]

填空，看看运算过程用到哪些运算律？运算结果有什么规律？

(1) $(ab)^2=(ab)\cdot(ab)=(a\cdot a)\cdot(b\cdot b)=a^{(\ )}b^{(\ )}$；

(2) $(ab)^3=$_____$=$_____$=a^{(\ )}b^{(\ )}$.

[1] 这里的“m，n 都是正整数”是该表达式的一部分.

[2] 此例题主要是帮助学生理解并掌握幂的乘方的性质.

练习答案

(1) 10^9；(2) x^6；

(3) $-x^{5m}$；(4) a^{11}.

注意，题(4)是一个幂的乘方与幂的乘法的混合题型，较前三题有难度.

[3] 回顾乘方的意义.

[4] (1) 2，2；

(2) $ab\cdot ab\cdot ab$，

$a\cdot a\cdot a\cdot b\cdot b\cdot b$，

3，3.

探究中的题目使学生初步感受简单的积的乘方的运算.

幂的乘方性质的关键，务必使学生真正理解. 在此基础上再导出性质.

5. 导出性质后，要通过一些实例说明其表达式及语言叙述中每句话的含义，以期使学生能够理解，并能在理解的基础上会用它进行计算.

6. 例题虽说是性质的应用，但讲解的侧重点应是帮助学生进一步理解性质. 如$(10^3)^5$，利用性质，得 $10^{3\times5}=10^{15}$. 与此同时，应让学生重述性质的语言表述. 使之进一步明确“幂的乘方，底数不变，指数相乘”的含义.

7. 练习第(4)题计算

$$(a^2)^3\cdot a^5=a^6\cdot a^5=a^{11},$$

先用幂的乘方性质得到 $a^6\cdot a^5$，再利用同底数幂的性质得 $a^6\cdot a^5=a^{11}$. 这里依次运用了两个性质，要注意因指数的概念不清可能发生的错误. 纠正错误的方法是在教学中注意强调每一性质得来的根据，在学生理解的基础上进行练习，做到计算正确、娴熟.

[1] 弄清积的乘方的意义，明确推导这一性质的根据.

[2] 三个性质的推导，都是运用了不完全归纳法. 但运用不完全归纳法，有可能归纳出不正确的结论. 实际上，幂的三个运算性质的结论都是正确的. 当然上述的问题没必要对学生讲.

[3] 每讲完性质后的第1个例题，都是为了理解并通过运用这一性质来掌握它. 此例也是如此. 但此例还包括了对前面讲过的性质的运用，如第(3)题：

$(xy^2)^2=x^2(y^2)^2$，

下一步计算$(y^2)^2=y^4$就是幂的乘方.

[4] 忽略大气层对光速的影响.

练习答案

(1) a^4b^4；

(2) $-8x^3y^3$；

(3) -27×10^6

或-2.7×10^7；

(4) $8a^3b^6$.

对于任意底数a，b与任意正整数n，

$$(ab)^n=\overbrace{(ab)\cdot(ab)\cdot\cdots\cdot(ab)}^{n\text{个}ab}$$

$$=\overbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}^{n\text{个}a}\cdot\overbrace{b\cdot b\cdot\cdots\cdot b}^{n\text{个}b}=a^nb^n.$$ [1]

一般地，我们有

$(ab)^n=a^nb^n$（n为正整数）.

即积的乘方，等于把积的每一个因式分别乘方，再把所得的幂相乘. [2]

例3 计算：[3]

(1) $(2a)^3$；　　(2) $(-5b)^3$；

(3) $(xy^2)^2$；　　(4) $(-2x^3)^4$.

解：(1) $(2a)^3=2^3\cdot a^3=8a^3$.

(2) $(-5b)^3=(-5)^3\cdot b^3=-125b^3$.

(3) $(xy^2)^2=x^2\cdot(y^2)^2=x^2y^4$.

(4) $(-2x^3)^4=(-2)^4\cdot(x^3)^4=16x^{12}$.

练习

计算：

(1) $(ab)^4$；　　(2) $(-2xy)^3$；

(3) $(-3\times10^2)^2$；　　(4) $(2ab^2)^3$.

15.2.4 整式的乘法



问题 光的速度约为3×10^5千米/秒，太阳光照射到地球上需要的时间大约是5×10^2秒，你知道地球与太阳的距离约是多少千米吗？ [4]

地球与太阳的距离约是$(3\times10^5)\times(5\times10^2)$千米.

8. 积的乘方性质是幂的第三个运算性质，也是学习整式乘法的基础.

和前两个性质的教学一样，这个性质也是先用具体指数为例说明积的乘方的意义和导出性质的每一步依据. 从而归纳出一般指数情形的性质. 这个性质也很容易推广到三个以上因式的乘方.

9. 我们知道，在这三个性质中的底数、指数中，指数注明为正整数，而底数可以是数、字母或式. 但在讲解这三个性质时，指数都是由数字到字母，底数也是由数字到字母，有层次地进行归纳得到数学表达式. 这里，我们没有把底数进一步扩充到式的范围. 例如，

$$(x+y)^3\cdot(x+y)^2,$$

把$(x+y)$看作底数，根据同底数的乘法性质可以得到

$$(x+y)^{3+2}=(x+y)^5,$$

这种类型的题，在三个性质的讲解中都未出现.



地球与太阳的距离约是
$1.5\times10^8=1.5\times10^5$
(千米).

(1) 怎样计算$(3\times10^3)\times(5\times10^2)$? 计算过程中用到哪些运算律及运算性质?[1]

(2) 如果将上式中的数字改为字母, 比如$ac^3\cdot bc^2$, 怎样计算这个式子?

$ac^3\cdot bc^2$是两个单项式ac^3与bc^2相乘, 我们可以利用乘法交换律、结合律及同底数幂的运算性质来计算:[2]

$$ac^3\cdot bc^2=(a\cdot b)\cdot(c^3\cdot c^2)=abc^{3+2}=abc^5.$$

单项式与单项式相乘, 把它们的系数、相同字母分别相乘, 对于只在一个单项式里含有的字母, 则连同它的指数作为积的一个因式.[3]

例4 计算:[4]

(1) $(-5a^2b)(-3a)$; (2) $(2x)^3(-5xy^2)$.

解: (1) $(-5a^2b)(-3a)$

$=[(-5)\times(-3)](a^2\cdot a)b=15a^3b.$

(2) $(2x)^3(-5xy^2)$

$=8x^3(-5xy^2)=[8\times(-5)](x^3\cdot x)y^2$

$=-40x^4y^2.$

[1] 乘法交换律、结合律及同底数幂的运算性质.

[2] 因为单项式是数字与字母的积, 所以, 幂的运算性质、乘法交换律、结合律可以作为单项式乘法的依据.

[3] 法则是由上面"讨论"中两个实例得到的. 每做一题, 与其说是用法则进行计算的, 还不如说是根据已有的知识进行计算后再进行概括得到的. 从这个意义上讲, 没有必要对法则死记硬背.

[4] 可以结合例题的讲解, 适当复习已经学过的, 特别是储存时间过长的知识, 如有理数的乘法等.

实际上, 只要把这三个性质真正理解并掌握了, 这类问题也就不难解决了.

10. 单项式的乘法法则的导出, 运用了同底数幂的乘法性质和乘法的交换律、结合律, 如

$$ac^3\cdot bc^2=(a\cdot b)\cdot(c^3\cdot c^2)$$

(根据乘法交换律、结合律)

$$=abc^5.$$

(根据有理数乘法法则、同底数幂乘法性质)

通过实例, 可以归纳得出单项式乘法法则. 其法则分成乘式里的系数、相同字母和不同字母三部分.

11. 务必要让学生能熟练地进行单项式乘法的运算. 这是学好多项式乘法的关键. 单项式的乘法综合用到了有理数的乘法、幂的运算性质, 而后续的多项式乘以单项式, 多项式乘以多项式, 都要转化为单项式乘法. 因此, 单项式乘法将起到承前启后的作用, 在整式乘法中占有独特地位.

[1] 该练习题是为了检验学生对单项式乘法法则的理解和掌握程度.

练习答案

1. (1) $15x^5$;
   (2) $-8xy^5$;
   (3) $-108x^7y^3$;
   (4) $-72a^5$.
2. (1) 不对；应为 $6a^5$;
   (2) 对;
   (3) 不对，应为 $12x^4$;
   (4) 不对，应为 $15y^8$.

[2] 这是乘法对加法的分配律，是学生早已熟知的. 我们指明 m，a，b，c 都是单项式，而单项式的和是多项式，从而借用这个运算律导出单项式与多项式相乘的法则.

练习[1]

1. 计算：
   (1) $3x^2 \cdot 5x^3$;　　(2) $4y \cdot (-2xy^2)$;
   (3) $(3x^2y)^3 \cdot (-4x)$;　　(4) $(-2a)^3 \cdot (-3a)^2$.
2. 下面计算的对不对？如果不对，应当怎样改正？
   (1) $3a^3 + 2a^2 = 6a^6$;　　(2) $2x^2 \cdot 3x^2 = 6x^4$;
   (3) $3x^2 \cdot 4x^2 = 12x^2$;　　(4) $5y^3 \cdot 3y^5 = 15y^{15}$.



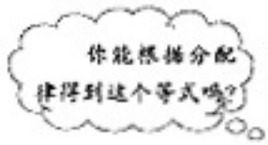
问题　三家连锁店以相同的价格 m（单位：元/瓶）销售某种商品，它们在一个月内的销售量（单位：瓶）分别是 a，b，c. 你能用不同的方法计算它们在这个月内销售这种商品的总收入吗？

一种方法是先求三家连锁店的总销量，再求总收入，即总收入（单位：元）为：

$$m(a+b+c). \qquad ①$$

另一种方法是先分别求三家连锁店的收入，再求它们的和，即总收入（单位：元）为：

$$ma+mb+mc. \qquad ②$$



由于①、②表示同一个量，所以

$$m(a+b+c)=ma+mb+mc.[2]$$

上面的等式提供了单项式与多项式相乘的方法.

单项式与多项式相乘，就是用单项式去乘多项式的每一项，再把所得的积相加.

例 5　计算：
(1) $(-4x^2) \cdot (3x+1)$;

12. 因为单项式与多项式相乘在实际中应用广泛，要求学生在会进行计算的基础上，达到熟练掌握的程度.

13. 多项式是单项式的和，单项式与多项式相乘，根据分配律，用单项式分别乘多项式的各项，从而归结为单项式的乘法. 因此，在法则的教学中，要根据学生的实际情况，适当复习分配律. 从教科书中可以看到，除了从运算律可以直接得到

$$m(a+b+c)=ma+mb+mc$$

外，还借助了一个现实的销售问题，也能得到上式. 这在直观上对上式加深了理解，从而得到单项式与多项式的乘法法则.

14. 在法则得出后，安排了一个例题，讲解时应注意如下几点：

(1) 关于积的符号. 我们已经多次指出过，符号问题是极易出错的问题. 在单项式与多项式的相乘中，这个问题依然存在.

把单项式与多项式相乘的问题转化为单项式与单项式相乘的问题.

(2) $\left(\frac{2}{3}ab^2-2ab\right)\cdot\frac{1}{2}ab$.

解：(1) $(-4x^2)\cdot(3x+1)$

$=(-4x^2)\cdot(3x)+(-4x^2)\cdot 1$

$=(-4\times 3)(x^2\cdot x)+(-4x^2)$

$=-12x^3-4x^2$.

(2) $\left(\frac{2}{3}ab^2-2ab\right)\cdot\frac{1}{2}ab$

$=\frac{2}{3}ab^2\cdot\frac{1}{2}ab+(-2ab)\cdot\frac{1}{2}ab$

$=\frac{1}{3}a^2b^3-a^2b^2$.

现在你能解决本章引言中绿地面积的问题了吗？[1]

练习

1. 计算：

(1) $3a(5a-2b)$； (2) $(x-3y)\cdot(-6x)$.

2. 化简 $x(x-1)+2x(x+1)-3x(2x-5)$.

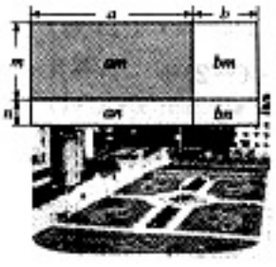


图 15.2-1

[2] **问题** 如图 15.2-1，为了扩大街心花园的绿地面积，把一块原长 a 米、宽 m 米的长方形绿地，增长了 b 米，加宽了 n 米. 你能用几种方法求出扩大后的绿地的面积？

扩大后的绿地可以看成长为 $(a+b)$ 米，宽为 $(m+n)$ 米的长方形，所以这块绿地的面积为

$(a+b)(m+n)$ 米^2. [3]

扩大后的绿地还可以看成由四个小长方形组成，所以这块绿地的面积为

$(am+an+bm+bn)$ 米^2.

因此 $(a+b)(m+n)=am+an+bm+bn$.

上面的等式提供了多项式与多项式相乘的方法.

[1] 内容与章引言相呼应，增长后的绿地面积的表达式有许多种，它们都是相等的.

练习答案

1. (1) $15a^2-6ab$；

(2) $-6x^2+18xy$.

2. 原式 $=-3x^2+16x$.

[2] 左侧的几何图形，可以直观地解释这两个多项式相乘结果的正确性.

[3] 这里 $(a+b)$ 与 $(m+n)$ 都是项数为 2 的多项式.

(2) 单项式与多项式相乘的结果是一个多项式，其项数与因式中的项数相同.

15. 多项式乘法是本章重点内容之一，也是前几节各种性质、法则的一个综合运用，应根据情况，适当对幂的运算性质、单项式的乘法及单项式与多项式的乘法进行小结、复习，这样既可巩固前面学过的知识，也为多项式乘法的学习打好基础.

16. 多项式的乘法法则，是两次运用单项式与多项式相乘的法则得到的. 计算

$(a+b)(m+n)$

时，先把 $m+n$ 看成一个单项式，$a+b$ 是一个多项式，这时，运用单项式与多项式相乘的法则，得到

$(a+b)(m+n)=a(m+n)+b(m+n)$,

然后再一次运用单项式与多项式相乘的法则，得到：

$(a+b)(m+n)=a(m+n)+b(m+n)$

把多项式相乘的问题转化为单项式与多项式相乘的问题.

计算$(a+b)(m+n)$，可以先把其中的一个多项式，如$m+n$，看成一个整体，[1]运用单项式与多项式相乘的法则，得

$$(a+b)(m+n)=a(m+n)+b(m+n).$$ [2]

再利用单项式与多项式相乘的法则，得

$$a(m+n)+b(m+n)=am+an+bm+bn.$$

总体上看，$(a+b)(m+n)$的结果可以看作由$a+b$的每一项乘$m+n$的每一项，[3]再把所得的积相加而得到的，即

$$(a+b)(m+n)=am+an+bm+bn.$$

多项式与多项式相乘，先用一个多项式的每一项乘另一个多项式的每一项，再把所得的积相加.

例6 计算：[4]

(1) $(3x+1)(x-2)$； (2) $(x-8y)(x-y)$.

解： (1) $(3x+1)(x-2)$

$=(3x)\cdot x+(3x)\cdot(-2)+1\cdot x+1\times(-2)$

$=3x^2-6x+x-2$

$=3x^2-5x-2$.

(2) $(x-8y)(x-y)$

$=x^2-xy-8xy+8y^2$

$=x^2-9xy+8y^2$.

[1] 把$(m+n)$看成一个单项式，因学生过去接触不多，可能不易理解. 实际上，这是一个很重要的思想和方法. 学习一种新的知识、方法，通常的做法是把它归结为已知的数学知识、方法，从而使学习能够进行. 在此，如果学生真正理解了把$(m+n)$看成一个单项式，那么，两次运用单项式与多项式相乘的法则，就得出多项式相乘的法则了.

[2] 算式中的箭头说明了这两个多项式相乘的步骤.

[3] 对于法则中的前后两个“每一项”，要使学生理解并掌握.

不难将该法则推广到三个以上多项式相乘的情况.

[4] 这两个题目都是项数为2的两个多项式相乘，按照法则的“语言叙述”，按部就班地来做这个例题.

$=am+an+bm+bn.$

借助图15.2-1中几何图形的直观，可以使学生更好地理解和掌握这一法则. 从图形中可以看到

$(a+b)(m+n)$

是一个长方形的面积，而这个长方形又可以分割成四小块，它们的面积和是

$am+an+bm+bn$,

因此，

$(a+b)(m+n)=am+an+bm+bn.$

17. 教学时，要注意以下几点：

(1) 要防止两个多项式相乘，直接写出结果时“漏项”. 检查的办法是：两个多项式相乘，在没有合并同类项之前，积的项数应该是这两个多项式项数的积. 如

$(a+b)(m+n)$,

积的项数是$2\times2=4$，即四项

$am+an+bm+bn.$

练习

1. 计算：

(1) $(2x+1)(x+3)$；　(2) $(m+2n)(m-3n)$；

(3) $(a-1)^2$；　(4) $(a+3b)(a-3b)$.

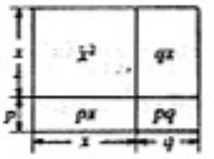
2. 计算：

(1) $(x+2)(x+3)$；　(2) $(x-4)(x+1)$；

(3) $(y+4)(y-2)$；　(4) $(y-5)(y-3)$.

3. 由上面第 2 题的结果找规律，观察右图，填空：

$(x+p)(x+q)=(\quad)^2+(\quad)x+(\quad)$.



(第 3 题)

习题 15.2

复习巩固 ▶▶

1. 下面的计算对不对？如果不对，应当怎样改正.

(1) $b^3 \cdot b^3 = 2b^3$；　(2) $x^4 \cdot x^4 = x^{16}$；　(3) $(a^2)^2 = a^2$；

(4) $(a^3)^2 \cdot a^4 = a^9$；　(5) $(ab^2)^3 = ab^6$；　(6) $(-2a)^2 = -4a^2$.

2. 计算：

(1) $x \cdot x^3 + x^2 \cdot x^2$；　(2) $(-pq)^2$；

(3) $-(-2a^2b)^4$；　(4) $a^3 \cdot a^4 \cdot a + (a^2)^4 + (-2a^4)^2$.

3. 计算：

(1) $6x^2 \cdot 3xy$；　(2) $2ab^2 \cdot (-3ab)$；

(3) $4x^2y \cdot (-xy^2)^2$；　(4) $(1.3\times10^5)(3.8\times10^3)$.

4. 计算：

(1) $(4a-b^2) \cdot (-2b)$；　(2) $2x^2\left(x-\frac{1}{2}\right)$；

(3) $5ab \cdot (2a-b+0.2)$；　(4) $\left(2a^2-\frac{2}{3}a-\frac{4}{9}\right) \cdot (-9a)$.

5. 计算：

(1) $(x-6) \cdot (x-3)$；　(2) $\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)$；

练习答案

1. (1) $2x^2+7x+3$；

(2) $m^2-mn-6n^2$；

(3) a^2-2a+1；

(4) a^2-9b^2.

第 1.(3)题和第 1.(4)题是一种特殊的乘法，它们就是后面要学习的两个乘法公式，但现在不做要求.

2. (1) x^2+5x+6；

(2) x^2-3x-4；

(3) y^2+2y-8；

(4) $y^2-8y+15$.

3. x^2，$p+q$，pq.

当然，如果有同类项，则应合并同类项，得出最简结果.

(2) 要不失时机地提醒学生：多项式是单项式的和，每一项都包括前面的符号，在计算时一定要注意确定积中各项的符号.

习题 15.2

1. 第 1 题～2 题是为了巩固学生对三个性质，及三个性质的混合运算的理解和掌握.

2. 第 3 题用于巩固学生计算单项式乘法的基本能力. 第 4 题用于巩固学生计算单项式乘以多项式的基本能力. 第 5 题中的题目都是多项式乘法，但多项式仅限两个，并且多项式的项数都是 2.

3. 第 6 题实际上是一个单项式乘以多项式的混合运算题，需要灵活进行数字与字母间熟练代换的能力. 第 7 题是两个多项式相乘的混合运算，需要的能力较第 6 题要高.

[1][2] 第6~7题都是混合运算，要特别注意运算顺序，同时要注意最后的结果有同类项时要合并，得出最简结果.

[3] 在计算机中，一个汉字所占的容量为2B.

(3) $(3x+2)(x+2)$;　　(4) $(4y-1)\cdot(y-5)$.

综合运用 ▶▶

6. 求值：[1]

$x^2(x-1)-x(x^2+x-1)$，其中 $x=\frac{1}{2}$.

7. 计算：[2]

(1) $(x-3)(x-3)-6(x^2+x-1)$;

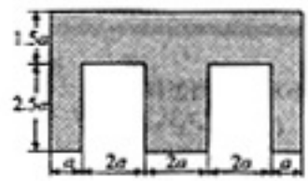
(2) $(2x+1)^2-(x+3)^2-(x-1)^2+1$.

8. 信息技术的存储设备常用B、K、M、G等作为存储量的单位. 例如，我们常说某计算机的硬盘容量是40 G，某移动存储器的容量是64 M，某个文件大小是156 K等，其中 $1\text{ G}=2^{10}\text{ M}$，$1\text{ M}=2^{10}\text{ K}$，$1\text{ K}=2^{10}\text{ B}$（字节）. 对于一个1.44 M的3.5寸软盘，其容量有多少个字节？[3]



9. 卫星绕地球运动的速度（即第一宇宙速度）是 7.9×10^3 米/秒，求卫星绕地球运行 2×10^2 秒走过的路程.

10. 计算图中阴影所示绿地面积（长度单位：m）.



（第10题）

拓广探索 ▶▶

11. 解方程与不等式：

(1) $(x-3)(x-2)+18=(x+9)(x+1)$;

(2) $(3x+4)(3x-4)<9(x-2)(x+3)$.

12. 确定下列各式中 m 的值：

(1) $(x+4)(x+9)=x^2+mx+36$;

(2) $(x-2)(x-18)=x^2+mx+36$;

(3) $(x+3)(x+p)=x^2+mx+36$;

(4) $(x-6)(x-p)=x^2+mx+36$;

(5) $(x+p)(x+q)=x^2+mx+36$，p，q 为正整数.

4. 第11题本质上考察的仍然是整式的加、减、乘的混合运算. 首先要简化等号（小于号）两侧的多项式，再经过移项、合并同类项等程序得到解.

5. 对于第12题，思路为：左侧两多项式相乘的结果可整理为一多项式，该多项式必与等号右侧的多项式相等，则两者的对应项的字母，指数，系数必然对应相等，据此则 m 可求.

15.3 乘法公式

某些特殊形式的多项式相乘，可以写成公式的形式，当遇到相同形式的多项式相乘时，就可以直接运用公式写出结果.

15.3.1 平方差公式[1]

探究[2]

计算下列多项式的积，你能发现什么规律？

(1) $(x+1)(x-1)=$_____；

(2) $(m+2)(m-2)=$_____；

(3) $(2x+1)(2x-1)=$_____.

我们再来计算$(a+b)(a-b)$，有

$$(a+b)(a-b)=a^2-ab+ab-b^2$$[3]
$$=a^2-b^2.$$

一般地，我们有

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

即两个数的和与这两个数的差的积，等于这两个数的平方差.

这个公式叫做（乘法的）平方差公式（formula for the difference of squares).

[1] 公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$，$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$都叫做平方差公式. 为了区别，我们把第一个公式叫做乘法的平方差公式.

[2] 运用上一节中多项式相乘的运算法则，学生很容易得出答案如下：

(1) x^2-1；

(2) m^2-4；

(3) $4x^2-1$.

[3] 这里有 $2\times2=4$ (项)，合并同类项后和得两项.

1. 把某些具有特殊形式的多项式相乘的式子及其结果写成公式的形式，就是乘法公式. 本节有选择地讲解两个最基本、用途最广泛的公式.

2. 从多项式乘法到乘法公式是从一般到特殊的认识过程的范例，对它的学习和研究，丰富了教学内容，也开阔了学生的视野. 乘法公式的应用十分广泛，是本章的重点内容之一. 教学时，要注意引导学生进行观察、分析，使他们掌握两个公式的结构特征，理解每一个公式的意义，并能正确地运用这些公式.

3. 平方差公式是由直接计算得出的：

$$(a+b)(a-b)$$
$$=a^2-ab+ab-b^2=a^2-b^2,$$

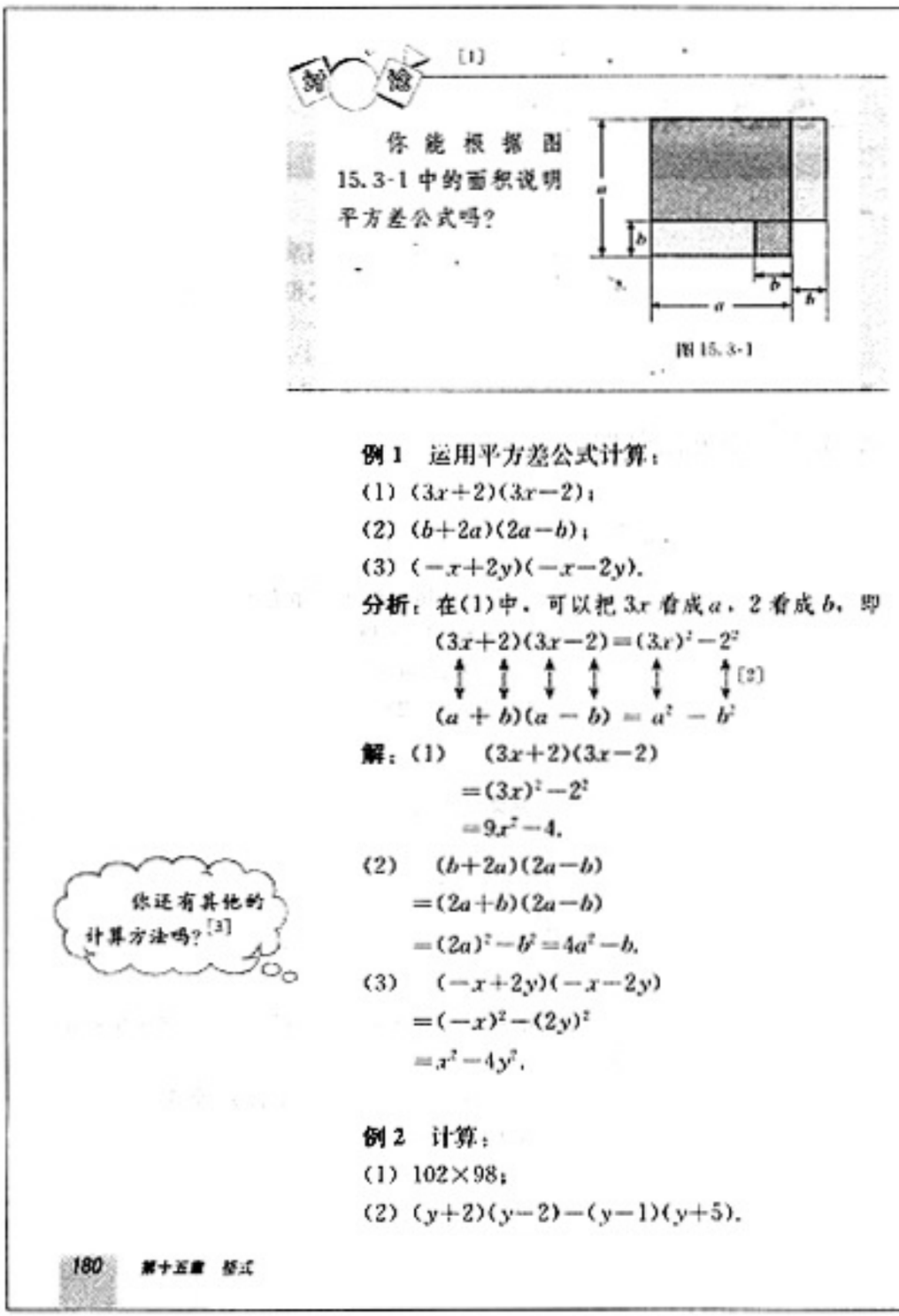
与一般多项式乘法一样，积的项数是多项式项数的积：即四项. 合并同类项后仅得两项.

4. 正确运用这一公式的关键，除了要掌握这一公式的结构特征外，还要理解公式中字母的

[1] 平方差公式具有直观的几何意义.

[2] 用“：”比较直观地指出公式中的字母 a、b 分别代表 $3x$ 和 2. 充分利用直观讲解，会取得较好效果，在教学中要予以足够的重视.

[3] 所有的可应用公式的乘法，都可以用一般的多项式乘法法则来计算.



广泛含义. 在目前，可以向学生说明公式中的字母可以表示具体的数（正数或负数），也可以表示单项式或多项式等式子. 只要符合公式的结构特征，就可以运用这一公式.

由于学生的能力有一个发展过程，理解字母的广泛含义也要结合公式的难易来逐步安排. 因此，教学时，要结合上述精神逐步进行，不要操之过急.

5. 在例题的学习中，可以让学生观察题目是否符合公式的条件，即两个数是什么，是不是这两个数的和与差相乘，然后再按公式计算. 如例 2 的第(1)小题 102×98，经过仔细观察，首先把原式变形：

$$102\times98=(100+2)(100-2),$$

才能确定 a，b 分别对应 100 换 98.

由此可见，通过观察识别两个数，这是运用平方差公式的关键. 如果是两个数的和与差相乘，就可以运用公式计算. 为了识别这两个数，

只有符合公式要求的乘法，才能运用公式简化运算，其余的运算仍按乘法法则进行.

解：(1) $102\times98=(100+2)(100-2)$
$=100^2-2^2=10\,000-4=9\,996.$

(2) $(y+2)(y-2)-(y-1)(y+5)$
$=y^2-2^2-(y^2+4y-5)$
$=y^2-4-y^2-4y+5$
$=-4y+1.$

练习

1. 下面各式的计算对不对？如果不对，应当怎样改正？
(1) $(x+2)(x-2)=x^2-2$；(2) $(-3a-2)(3a-2)=9a^2-4.$

2. 运用平方差公式计算：
(1) $(a+3b)(a-3b)$；(2) $(3+2a)(-3+2a)$；
(3) 51×49；(4) $(3x+4)(3x-4)-(2x+3)(3x-2).$

15.3.2 完全平方公式[1]

探究[2]

计算下列各式，你能发现什么规律？
(1) $(p+1)^2=(p+1)(p+1)=$_____；
(2) $(m+2)^2=$_____；
(3) $(p-1)^2=(p-1)(p-1)=$_____；
(4) $(m-2)^2=$_____.

我们再来计算$(a+b)^2$，$(a-b)^2$.

$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ab+b^2$[3]
$=a^2+2ab+b^2.$

$(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-ab-ab+b^2$
$=a^2-2ab+b^2.$

练习答案

1. (1) 不对，应为 x^2-4；
(2) 不对，应为 $4-9a^2$.

2. (1) a^2-9b^2；
(2) $4a^2-9$；
(3) 2 499；
(4) $3x^2-5x-10.$

[1] 公式 $(a\pm b)^2=a^2\pm2ab+b^2$，$a^2\pm2ab+b^2=(a\pm b)^2$ 都叫做完全平方公式，为了区别，我们可以把前两个公式叫做乘法的完全平方公式.

[2] (1) p^2+2p+1；
(2) m^2+4m+4；
(3) p^2-2p+1；
(4) $m^2-4m+4.$

[3] 可以看出，这里有 $2\times2=4$(项)，合并同类项后得三项.

有时需要变形. 如$(a+b+c)(a-b-c)$，变形为$[a+(b+c)][a-(b+c)]$，两个数就看清楚了.

6. 完全平方公式是继平方差公式之后的两个公式，一个是两个数和的平方，一个是两个数差的平方. 两者仅一个“符号”不同. 相乘（或平方）的结果是两数的平方和，加上（或减去）两数积的 2 倍，两结果也仅一个“符号”不同. 这一点可以给学习这两个公式带来方便，也可能使两者容易混淆，在教学中应注意这一点.

由于这两个公式是继平方差公式之后学习的，所以学生除理解、掌握并运用它们进行计算外，还要与平方差公式一起综合使用，从而使学习增加了难度，这是在教学中应注意的第二点.

7. 推导这两个公式的思路与推导平方差公式的思路是一样的. 根据乘方的意义与多项式的乘法法则得到完全平方公式，再用语言把这两个公式表述出来. 公式的语言表述也是对公式结构特征的说明. 要引导学生理解这两个公式的结

[1] 两图给出了完全平方公式正确的几何解释.

从$(a\pm b)^2$得到

$$a^2\pm 2ab+b^2,$$

到语言表述，再到图形直观解释，其目的只有一个：让学生更好地理解和掌握这一公式.

一般地，我们有

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

即两数和（或差）的平方，等于它们的平方和，加（或减）它们的积的2倍.

这两个公式叫做(乘法的)完全平方公式（formula for the square of the sum).

[1]



你能根据图15.3-2和图15.3-3中的面积说明完全平方公式吗?

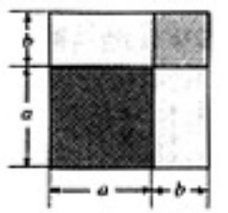


图15.3-2



图15.3-3

例3 运用完全平方公式计算：

(1) $(4m+n)^2$； (2) $\left(y-\frac{1}{2}\right)^2$.

解：(1) $(4m+n)^2=(4m)^2+2\cdot(4m)\cdot n+n^2$

$=16m^2+8mn+n^2$；

(2) $\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=y^2-2\cdot y\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$=y^2-y+\frac{1}{4}$.

构. 此外还要注意以下两点：

(1) 推导出

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

以后，作为它的一个直接应用可推导$(a-b)^2$.

$$\begin{aligned}&(a-b)^2\\&=[a+(-b)]^2\\&=a^2+2a\cdot(-b)+(-b)^2\\&=a^2-2ab+b^2.\end{aligned}$$

当然，具体推导应按教科书提供的方式进行，以免混淆. 这一点，在小结与复习中说明较好.

(2) 从图15.3-2可以比较清楚地看到

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$

而从图15.3-3看出结果则比较困难.

把$(a-b)^2$看作大正方形的面积a^2减去右侧和上面两个长a宽b的长方形的面积之和，即$2ab$，则此时多减掉了右上角那个正方形的面积b^2，再把它补上，就是

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

例 4 运用完全平方公式计算：[1]

(1) 102^2；　　(2) 99^2.

解：(1) $102^2=(100+2)^2=100^2+2\times100\times2+2^2$

$=10\,000+400+4=10\,404$.

(2) $99^2=(100-1)^2=100^2-2\times100\times1+1^2$

$=10\,000-200+1=9\,801$.

思考[2]

$(a+b)^2$ 与 $(-a-b)^2$ 相等吗？$(a-b)^2$ 与 $(b-a)^2$ 相等吗？$(a-b)^2$ 与 a^2-b^2 相等吗？为什么？

练习[3]

1. 运用完全平方公式计算：

(1) $(x+6)^2$；　　(2) $(y-5)^2$；

(3) $(-2x+5)^2$；　　(4) $\left(\frac{3}{4}x-\frac{2}{3}y\right)^2$.

2. 下面各式的计算错在哪里？应当怎样改正？

(1) $(a+b)^2=a^2+b^2$；　　(2) $(a-b)^2=a^2-b^2$.

运用乘法公式计算，有时要在式子中添括号. 在第二章中，我们已学过去括号法则，即

$a+(b+c)=a+b+c$；　　$a-(b+c)=a-b-c$.

反过来，就得到添括号法则：

$a+b+c=a+(b+c)$；　　$a-b-c=a-(b+c)$.

添括号时，如果括号前面是正号，括到括号里的各项都不变符号；如果括号前面是负号，括到括号里的各项都改变符号.

[1] 这类数字计算题，容易使学生体会到公式的用途，可以激发学生的好奇心和学习的积极性.

[2] 前两对都相等，至于最后一对，则稍有些难度. $(a-b)^2$ 与 a^2-b^2 作差，得

$(a-b)^2-(a^2-b^2)$

$=2b^2-2ab$

若两式相等，则有

$2b^2-2ab=0$,

$b^2=ab$.

因此，只有在 $a=b$ 或 $b=0$ 的情况下，两式才相等.

学生答对即可，无须给出上述的严格推导过程.

[3] 让学生自己练习，使之理解和掌握公式，并利用公式进行计算，要注意项的符号.

练习答案

1. (1) $x^2+12x+36$；

(2) $y^2-10y+25$；

(3) $4x^2-20x+25$；

(4) $\frac{9}{16}x^2-xy+\frac{4}{9}y^2$.

2. (1) $a^2+2ab+b^2$；

(2) $a^2-2ab+b^2$.

$(a-b)^2$ 的图形的辨认有一定难度，但介绍它的目的主要是帮助学生理解公式，达到这个目的就可以了.

8. 去括号法则出现在第二章，添括号是本章的一个难点. 今后学习因式分解，分式运算及解方程等内容，经常会遇到去括号或添括号的问题. 要重视去括号和添括号法则的教学，使学生掌握去、添括号法则，为后续的学习打好基础.

9. 添括号是在去括号的基础上引进的，把去括号的问题反过来，从

$a+(b-c)=a+b-c$,

反过来，得到

$a+b-c=a+(b-c)$；　　I

又从

$a-(b-c)=a-b+c$

反过来，得到

$a-b+c=a-(b-c)$　　II

分析 I、II 两等式，注意括号内的项与对应的项

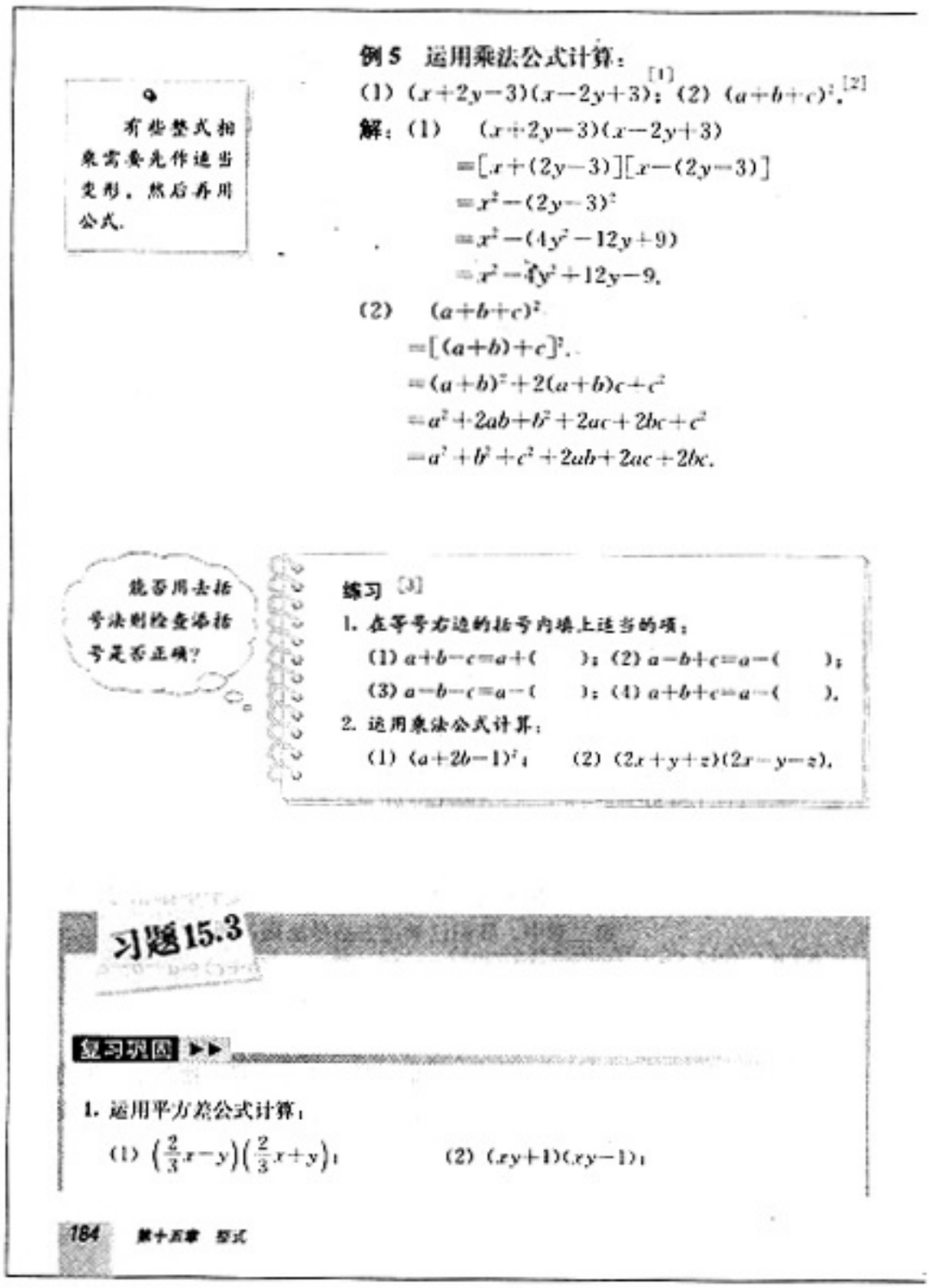
[1] 此例是完全平方公式和平方差公式的综合运用.

[2] 此例是完全平方公式的推广. 其结果的规律性和完全平方公式是一致的. 但在讲解时, 主要强调把其中的$(a+b)$看作一个数, 再进一步利用公式; 当然也可以把$(b+c)$看作一个数, 利用公式得到的结果是一样的.

[3] 让学生自己练习, 使之理解和掌握公式, 并利用公式进行计算. 要注意项的符号.

练习答案

1. (1) $b-c$;
   (2) $b-c$;
   (3) $b+c$;
   (4) $-b-c$.
2. (1) $a^2+4b^2+4ab-2a-4b+1$;
   (2) $4x^2-y^2-z^2-2yz$.



有些整式相乘需要先作适当变形, 然后再用公式.

例5 运用乘法公式计算:
(1) $(x+2y-3)(x-2y+3)$;[1] (2) $(a+b+c)^2$.[2]

解: (1) $(x+2y-3)(x-2y+3)$
$=[x+(2y-3)][x-(2y-3)]$
$=x^2-(2y-3)^2$
$=x^2-(4y^2-12y+9)$
$=x^2-4y^2+12y-9$.

(2) $(a+b+c)^2$
$=[(a+b)+c]^2$
$=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$
$=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$
$=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$.

能否用去括号法则检查添括号是否正确?

练习 [3]
1. 在等号右边的括号内填上适当的项:
(1) $a+b-c=a+(\quad)$; (2) $a-b+c=a-(\quad)$;
(3) $a-b-c=a-(\quad)$; (4) $a+b+c=a-(\quad)$.
2. 运用乘法公式计算:
(1) $(a+2b-1)^2$; (2) $(2x+y+z)(2x-y-z)$.

习题15.3

复习巩固 ▶▶

1. 运用平方差公式计算:
(1) $\left(\frac{2}{3}x-y\right)\left(\frac{2}{3}x+y\right)$; (2) $(xy+1)(xy-1)$;

的符号, 以及添上括号后, 括号内各项的改变与不变, 得到添括号的法则.

添括号的问题, 要提出一定的要求, 也就是要明确把哪些项放在括号内, 以及括号前用什么样的符号.

10. 学生在练习添括号时, 会感到添括号难于去括号, 括号前是"−"号, 难于括号前是"+"号. 教学时, 要在学生已经熟练掌握去括号法则的基础上, 再教授添括号的法则, 并要注意括号前面是"−"号的情况的教学.

11. 添括号与去括号正好相反, 添括号是否正确可以用去括号检验, 反之亦然.

习题15.3

1. "复习巩固"中第1题, 给出了6个利用平方差公式进行运算的题目; 第2题则给出了6个利用完全平方公式进行运算的题目. 这些题目虽然简单, 但基础性强, 主要考查学生最基本的

(3) $(2a-3b)(3b+2a)$；　　(4) $(-2b-5)\cdot(2b-5)$；

(5) $2\,001\times1\,999$；　　(6) $998\times1\,002$.

2. 运用完全平方公式计算：

(1) $(2a+5b)^2$；　　(2) $(4x-3y)^2$；

(3) $(-2m-1)^2$；　　(4) $\left(1.5a-\frac{2}{3}b\right)^2$；

(5) 63^2；　　(6) 98^2.

综合运用 ▶▶

3. 运用乘法公式计算：

(1) $(3x-5)^2-(2x+7)^2$；　　(2) $(x+y+1)(x+y-1)$；

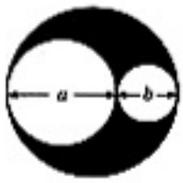
(3) $(2x-y-3)^2$；　　(4) $[(x+2)(x-2)]^2$.

4. 先化简，[1]再求值：

$(2x+3y)^2-(2x+y)(2x-y)$，其中 $x=\frac{1}{3}$，$y=-\frac{1}{2}$.

5. 一个正方形的边长增加 3 cm，它的面积就增加 39 cm²，这个正方形的边长是多少？[2]

6. 如图，一块直径为 $a+b$ 的圆形钢板，从中挖去直径分别为 a 与 b 的两个圆，求剩下的钢板的面积.[3]



(第 6 题)

拓广探索 ▶▶

7. 已知 $a+b=5$，$ab=3$，求 a^2+b^2 的值.（提示：利用公式 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$）[4]

8. 解不等式 $(2x-5)^2+(3x+1)^2>13(x^2-10)$.

9. 解方程组[5]

$$\begin{cases}(x+2)^2-(y-3)^2=(x+y)(x-y),\\ x-3y=2.\end{cases}$$

[1] 对于本题，化简就是去括号，把多项式的同类项合并.

[2] 本题的关键是根据题意列出方程，设正方形的边长为 x，则根据题意列方程为

$$(x+3)^2-x^2=39.$$

整理后得到一个关于 x 的一次方程，即可求得边长.

[3] 大圆面积减去两个小圆的面积即为所求. 根据题意可列代数式：

$$\pi\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2,$$

化简后即为所求.

[4] 解题关键是在等式 $a+b=5$ 的两侧取平方，再代入 $ab=3$.

[5] 原方程组可化简为

$$\begin{cases}4x+6y=5,\\ x-3y=2.\end{cases}$$

此方程易解.

知识和能力.

2. 要研究习题中的每一道题，特别是“综合应用”和“拓广探索”两部分中具有一定灵活性和探究性的题目. 要预见到学生可能出现的错误，也要注意个别学生可能灵活地，有创造性地解题，以便加强指导.

[1] 南宋人，生平不详，约在13世纪中叶至后半叶活动于苏、杭一带．字谦光，钱塘(今杭州)人．著有5部21卷数学书（其中就包括《详解九章算术》），对了解当时数学的发展情况具有重要意义．

杨辉在数学上以乘除捷法、纵横图（西方称为“幻方”）研究、级数求和等成就被列为宋元四大家之一，为中国古代数学的发展做出过重要贡献．

同时杨辉的先进的教育思想和数学方法对后世有深刻影响，在中国数学教育史上占有重要地位．

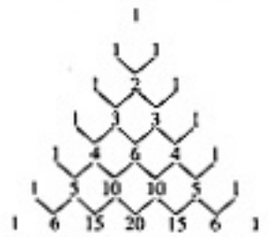
[2] B. Pascal（1623—1662），除了数学外，帕斯卡还有许多科学发现．1642年，他设计并制作了一台能自动进位的加减法计算装置，被称为是世界上第一台数字计算器，为以后的计算机设计提供了基本原理．1646年，他还制作了水银气压计，后来压强的单位就以他的名字命名．



阅读与思考　选学

杨辉三角

我国著名数学家华罗庚教授，曾在给青少年撰写的《数学是我国人民所擅长的学科》一文中谈到，我国古代数学的计多创新与发现都曾居世界前列．华老说：“实际上我们祖国伟大人民在人类史上，有过无比睿智的成就”，其中“杨辉三角”（见下表）就是一例．



这个三角形的构造法则是：两腰都是1，其余每个数为其上方左右两数之和，它给出了$(a+b)^n$（n是正整数）展开式（按a的次数由大到小的顺序排列）的系数规律．例如，在三角形中第三行的三个数1，2，1，恰好对应着$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$展开式中的系数；第四行的四个数1，3，3，1，恰好对应着$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$展开式中的系数等等．

根据上面的三角形，你能写出$(a+b)^4$、$(a+b)^5$的展开式吗？请利用多项式的乘法验证你的结果．



上面的三角形在我国宋朝数学家杨辉[1]所著的《详解九章算术》(1261年)一书中用过，杨辉在注释中提到，贾宪也用过上述方法．因此我们称这个三角形为“杨辉三角”或“贾宪三角”．

这个三角形被欧洲学者称为“帕斯卡三角”．这是因为法国数学家帕斯卡[2]于1654年发现了此表，他这一成果比杨辉晚了近400年，比贾宪晚了近600年．

阅读与思考

贾宪生活于11世纪，他在任意高次方程数值解法方面做出了卓越贡献．给出了“贾宪立成释锁平方法”、“增乘开平方法”、“贾宪立成释锁立方法”、“增乘开立方法”四种方法．“释锁”是宋元数学家开方或解数字方程的代用名词，“立成”是唐以后推算各种数据时所用的算法表的统称．“立成释锁平方法”、“立成释锁立方法”是指用某种算表进行开平方和开立方的方法．贾宪所给出的计算表就是指数为正整数的二项式展开系数表——$(a+b)^n$（$n=1$，2，…6）展开式各项系数的排列，称为“开方作法本源图”．这是一个具有世界意义的数学发现．

随着n的增大，$(a+b)^n$的展开式的每一项中a和b的指数之间有什么关系呢？它们的指数与正整数n有什么关系呢？

可请对此阅读材料感兴趣的，学有余力的学生来考虑这个问题．

15.4 整式的除法

15.4.1 同底数幂的除法[1]

由 $2^{16}\div2^{8}$

$=\dfrac{\overbrace{2\times2\times\cdots\times2}^{16\text{个}2}}{\underbrace{2\times2\times\cdots\times2}_{8\text{个}2}}$

$=\overbrace{2\times2\times\cdots\times2}^{8\text{个}2}.$

也可得

$2^{16}\div2^{8}=2^{8}.$

问题 一种数码照片的文件大小是 2^5K，一个存储量为 2^5M($1\text{M}=2^{10}\text{K}$)的移动存储器能存储多少张这样的数码照片？

这个移动存储器的容量为 $2^5\times2^{10}=2^{15}$K，它能存储这种数码照片的数量为 $2^{15}\div2^5$. 怎样计算 $2^{15}\div2^5$ 呢？

根据除法是乘法的逆运算，求 $2^{15}\div2^5$ 的商，就是要求一个数，使它与 2^5 的积等于 2^{15}.

∵ $2^5\times2^{10}=2^{15}$.

∴ $2^{15}\div2^5=2^{10}$.

探究[2]

根据除法的意义填空，看看计算结果有什么规律：

(1) $5^5\div5^3=5^{(\ )}$；

(2) $10^7\div10^5=10^{(\ )}$；

(3) $a^6\div a^3=a^{(\ )}$.

一般地，我们有

$a^m\div a^n=a^{m-n}$ ($a\neq0$，m，n 都是正整数，并且 $m>n$).[3]

为什么这里规定 $a\neq0$？

即同底数幂相除，底数不变，指数相减.

[1] 参照同底数幂的乘法的注释，注意由特殊到一般的归纳.

[2] (1) 2；

(2) 2；

(3) 3.

由于除式不能是 0，所以规定题(3)中的 $a\neq0$.

[3] 这里要特别注意

$$a^m\div a^n=a^{m-n}$$

($a\neq0$，m，n 都是正整数，并且 $m>n$) 中的括号内的条件.

1. 同底数幂的除法性质是幂的运算性质之一，是整式除法的基础，一定要打好这个基础.

2. 与同底数幂的乘法一样，同底数幂的除法性质的导出，也是一个由特殊到一般的归纳过程. 教科书中根据除法是乘法的逆运算，从计算 $2^{16}\div2^8=2^8$ 和“探究”栏目中的前两个题目这三个具体数字的同底数幂的除法，到计算底数具有一般性的 $a^6\div a^3=a^3$，逐步归纳出一般性质 $a^m\div a^n=a^{m-n}$ ($a\neq0$，m，n 都是正整数，并且 $m>n$).

3. 归纳得出性质后，要特别注意性质中的一些条件. 尤其要让学生知道，底数 a 是不等于零的，这是因为，若 a 为零，则除数为零，除法就没有意义了. 另外，这里不讲零指数与负指数的概念，所以性质中必须规定指数 m，n 都是正整数，并且 $m>n$，这些条件都应让学生在运用时予以注意.

4. 例 1 是同底数幂的除法性质的应用，教

[1] (1) 1;

(2) 1;

(3) 1.

[2] 这里要特别注意 $a^0=1$ $(a\neq0)$ 中的括号内的条件.

例 1 计算:

(1) $x^5\div x^2$; (2) $a^4\div a$; (3) $(ab)^5\div(ab)^2$.

解: (1) $x^5\div x^2=x^{5-2}=x^3$.

(2) $a^4\div a=a^{4-1}=a^3$.

(3) $(ab)^5\div(ab)^2=(ab)^{5-2}=(ab)^3=a^3b^3$.

探究[1]

分别根据除法的意义填空,你能得出什么结论?

(1) $3^2\div3^2=$(　　);

(2) $10^3\div10^3=$(　　);

(3) $a^m\div a^m=$(　　) $(a\neq0)$.

根据除法的意义,可知

$$a^m\div a^m=1.$$

如果依照同底数幂的除法 $a^m\div a^n=a^{m-n}$ $(m>n)$ 来处理 $a^m\div a^m$,又可得

$$a^m\div a^m=a^{m-m}=a^0.$$

于是规定:

$$a^0=1(a\neq0).$$[2]

即任何不等于 0 的数的 0 次幂都等于 1.

学时应注意分析清楚底数、指数,然后按照性质计算.

5. 由于这里还不讲零指数、负指数的概念,所以在性质中加上了指数 m, n 都是正整数,并且 $m>n$ 的条件,但在除法运算中会遇到 $a^m\div a^m$ 这种情况. 因此,教科书在"探究"中给出三个具体的题目,根据实数中不等于零的一个数除以本身其商为 1,直接得出商为 1;另一方面,不等于零的一个数,如 3^2,除以它本身,即

$$3^2\div3^2=3^{2-2}=3^0,$$

又如,

$$10^3\div10^3=10^{3-3}=10^0,$$

$$a^m\div a^m=a^{m-m}=a^0\ (a\neq0),$$

从而得出

$$3^0=1,\ 10^0=1,\ a^0=1\ (a\neq0).$$

6. 整式除法的内容包括两部分:单项式除以单项式和多项式除以单项式,而单项式除以多项式则属于分式的范畴,将在后续的教科书中安

练习[1]

1. 填空：

(1) $a^2\cdot(\quad)=a^5$；　(2) $m^3\cdot(\quad)=m^4$；

(3) $x^3\cdot x^2\cdot(\quad)=x^{12}$；　(4) $(-6)^3(\quad)=(-6)^5$.

2. 计算：

(1) $x^7\div x^5$；　(2) $m^8\div m^4$；

(3) $(-a)^{10}\div(-a)^7$；　(4) $(xy)^5\div(xy)^3$.

3. 下面的计算对不对？如果不对，应当怎样改正？

(1) $x^6\div x^2=x^3$；　(2) $6^3\div 6^2=6$；

(3) $a^3\div a=a^3$；　(4) $(-c)^5\div(-c)^3=-c^2$.

15.4.2　整式的除法



问题　木星的质量约是 1.90×10^{27} 吨，地球的质量约是 5.98×10^{24} 吨，你知道木星的质量约为地球质量的多少倍吗？

木星的质量约为地球质量的 $(1.90\times10^{27})\div(5.98\times10^{24})$ 倍.



[2]

(1) 计算 $(1.90\times10^{27})\div(5.98\times10^{24})$，说说你计算的根据是什么？

(2) 你能利用(1)中的方法计算下列各式吗？

$8a^3\div2a$；　$6x^3y\div3xy$；　$12a^3b^2x^3\div3ab^2$.

(3) 你能根据(2)说说单项式除以单项式的运算法则吗？

$8a^3\div2a$ 是 $(8a^3)\div(2a)$ 的意思.

[1] 练习第 3 题提出对或不对，不对应怎样改正. 并未提出“为什么”对或不对. 可根据具体情况处理这个问题. 我们的目的是纠正学生容易出现的一些错误，因此，可以根据实际情况，选编一些其他的习题.

对于第 1(4)、2(3)和 3(4)题，计算时还要注意所得结果的符号.

练习答案

1. (1) a^2；(2) m^5；
   (3) x^4；
   (4) $(-6)^2$ 或 6^2.
2. (1) x^2；(2) 1；
   (3) $-a^3$；
   (4) x^2y^2.
3. (1) 不对，应为 x^4；
   (2) 不对，应为 1；
   (3) 不对，应为 a^2；
   (4) 不对，应为 c^2.

[2] 通过讨论，初步感受整式除法的法则.

排. 单项式的除法是学好多项式的关键，因此，应要求学生能熟练地进行计算.

7. 对于“讨论”中的第(1)题，通常学生的做法是这样的：

$$\text{原式}=\frac{1.90}{5.89}\times\frac{10^{27}}{10^{24}}=\frac{1.90}{5.89}\times10^3=\frac{190}{589}\times10^3$$

其中，把系数相除的结果 $\frac{1.90}{5.89}\left(\text{即}\frac{190}{589}\right)$ 作为结果的一个因子；同底数幂相除得 $\frac{10^{27}}{10^{24}}=10^3$ 作为因子.

对于题(2)，可以使用解决题(1)的方法：

$$\frac{8a^3}{2a}=\frac{8}{2}\times\frac{a^3}{a}=4a^2;$$

$$\frac{6x^3y}{3xy}=\frac{6}{3}\times\frac{x^3}{x}\times\frac{y}{y}=2x^2;$$

$$\frac{12a^3b^2x^3}{3ab^2}=\frac{12}{3}\times\frac{a^3}{a}\times\frac{b^2}{b^2}\times\frac{x^3}{1}=4a^2x^3.$$

8. 教科书是根据乘、除的运算关系，在学习单项式乘法运算的基础上，通过具体实例的计算得出单项式的除法发展的. 这里，通过计算

[1] 讲解时，要结合演算重述法则，使之对法则熟悉，并会用它进行计算.

单项式相除，首先分清两式的系数、相同字母、被除式独有的字母，再进行运算.

计算 $12a^3b^2x^3\div3ab^2$，就是要求一个单项式，使它与 $3ab^2$ 的乘积等于 $12a^3b^2x^3$.

$\because\ 4a^2x^3\cdot3ab^2=12a^3b^2x^3$，

$\therefore\ 12a^3b^2x^3\div3ab^2=4a^2x^3$.

上面的商式 $4a^2x^3$ 的系数 $4=12\div3$，a 的指数 $2=3-1$，b 的指数 $0=2-2$，而 $b^0=1$，x 的指数 $3=3-0$.

单项式相除，把系数与同底数幂分别相除作为商的因式，对于只在被除式里含有的字母，则连同它的指数作为商的一个因式.

例 2 计算：[1]

(1) $28x^4y^2\div7x^3y$；　(2) $-5a^5b^3c\div15a^4b$.

解：(1) $28x^4y^2\div7x^3y$

$=(28\div7)\cdot x^{4-3}\cdot y^{2-1}$

$=4xy$.

(2) $-5a^5b^3c\div15a^4b$

$=[(-5)\div15]a^{5-4}b^{3-1}c$

$=-\frac{1}{3}ab^2c$.

$$12a^3b^2x^3\div3ab^2,$$

根据除法是乘法的逆运算，得到商 $4a^2x^3$. 再进一步比较被除式($12a^3b^2x^3$)、除式($3ab^2$) 与商式($4a^2x^3$)的系数、字母及其指数，总结得出一般的单项式除以单项式的法则.

9. 应当注意的是，这里只研究整除的情况，因此，在除式中所出现的一切字母，在被除式中不仅也要出现，而且其指数都分别要不小于除式中同一字母的指数. 在这个前提下，单项式相除，可以按系数、相同字母、被除式独有的字母这几个步骤进行.

10. 例 2 中的两个小题计算过程写得很完整，这有利于学生掌握和正确应用法则. 开始练习时，也应要求学生写清步骤，熟练后再酌情省略.

11. 多项式除以单项式是整式除法中的最后一项内容. 他的法则是由计算

$$(am+bm+cm)\div m$$

练习[1]

1. 计算：

(1) $10ab^2 \div (-5ab)$；　　(2) $-8a^2b^3 \div 6ab^2$；

(3) $-21x^2y^4 \div (-3x^2y^3)$；　　(4) $(6\times10^8) \div (3\times10^5)$.

2. 把图中左边括号里的每一个式子分别除以 $2x^2y$，然后把商式写在右边括号里.

$$\begin{pmatrix} 4x^3y \\ -12x^4y^3 \\ -16x^2yz \\ \frac{1}{2}x^2y \end{pmatrix} \xrightarrow{\div 2x^2y} \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \\ \quad \end{pmatrix}$$

(第2题)

[2]

计算下列各式，说说你是怎样计算的.

(1) $(am+bm) \div m$；

(2) $(a^2+ab) \div a$；

(3) $(4x^2y+2xy^2) \div 2xy$.

计算 $(am+bm) \div m$，就是要求一个多项式，使它与 m 的积是 $am+bm$.

∵ $(a+b)m = am+bm$，

∴ $(am+bm) \div m = a+b$.

又 $am \div m + bm \div m = a+b$，

∴ $(am+bm) \div m = am \div m + bm \div m$.

把多项式除以单项式问题转化为单项式除以单项式问题来解决.

[1] 练习的第 1 题，应要求学生按例 2 的形式写清运算步骤. 第 3 题渗透了集合、对应的思想，因此，只要把商求出填写在右侧的大括号里就可以了，不要引申讲集合、对应的问题.

练习答案

1. (1) $-2b^2$；

(2) $-\frac{4}{3}ab$；

(3) $7y$；

(4) 2×10^3 或 200.

2.

$$\begin{pmatrix} 2x \\ -6x^2y^2 \\ -8z \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

[2] (1) $a+b$；

(2) $a+b$；

(3) $2x+y$.

导出的，导出的原则是“转化”为单项式除法.

根据除法是乘法的逆运算可知，上式的计算，就是求一个多项式，使这个多项式与 m 的积是 $am+bm+cm$.

∵ $(a+b+c)\ m = am+bm+cm$；

∴ $(am+bm+cm) \div m = a+b+c$　　I

而 $am \div m + bm \div m + cm \div m = a+b+c$　　II

比较 I、II 两式可知，

$(am+bm+cm) \div m$

$= am \div m + bm \div m + cm \div m$.

这样，多项式除以单项式时，用单项式除多项式的各项，从而归结为单项式除以多项式，再归纳出多项式除以单项式的文字叙述的法则.

12. 例 3 的讲解主要为了说明法则的运用，应注意讲清每一步的根据. 第(3)小题实际上是先化简中括号中的式子，再做除法.

化简需要用到前面的知识. 教科书中结合新内容安排了前面的内容，目的是复习、巩固已经

[1] 把多项式除以单项式“转化”为单项式除以单项式，在这个转化过程中，要注意符号问题.

[2] 例 3 的讲解，要结合运算重述法则. 为了避免发生符号错误，不妨把多项式看成“代数和”的形式.

练习答案

(1) $6y+5$;

(2) $3x-2y$;

(3) $b-2a$.

(4) $-5x^2-3x+4$.

多项式除以单项式，先把这个多项式的每一项除以这个单项式，再把所得的商相加.[1]

例 3 计算：[2]

(1) $(12a^3-6a^2+3a)\div 3a$;

(2) $(21x^4y^3-35x^3y^2+7x^2y^2)\div(-7x^2y)$;

(3) $[(x+y)^2-y(2x+y)-8x]\div 2x$.

解： (1) $(12a^3-6a^2+3a)\div 3a$

$=12a^3\div 3a-6a^2\div 3a+3a\div 3a$

$=4a^2-2a+1$.

(2) $(21x^4y^3-35x^3y^2+7x^2y^2)\div(-7x^2y)$

$=-3x^2y^2+5xy-y$.

(3) $[(x+y)^2-y(2x+y)-8x]\div 2x$

$=(x^2+2xy+y^2-2xy-y^2-8x)\div 2x$

$=(x^2-8x)\div 2x$

$=\frac{1}{2}x-4$.

练习

计算：

(1) $(6xy+5x)\div x$;　　(2) $(15x^2y-10xy^2)\div 5xy$;

(3) $(8a^2-4ab)\div(-4a)$;　　(4) $(25x^3+15x^2-20x)\div(-5x)$.

学过的知识. 教学时应注意这一点.

习题15.4

复习巩固 ▶▶

1. 计算：

(1) $(ax)^5 \div (ax)^3$；　(2) $(x^2)^3 \div (x^2)^2$；

(3) $(a^3)^2 \div (a^2)^3$；　(4) $(ab^2)^3 \div (-ab)^2$.

2. 计算：

(1) $24x^2y \div (-6xy)$；　(2) $(-5r^2)^2 \div 5r^4$；

(3) $7m(4m^2p)^2 \div 7m^2$；　(4) $(-12s^3t^4) \div \left(\frac{1}{2}s^2t^3\right)^2$.

3. 计算：[1]

(1) $(6x^4-8x^3) \div (-2x^2)$；　(2) $(8a^3b-5a^2b^2) \div 4ab$；

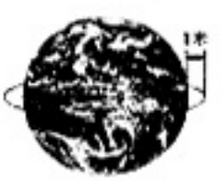
(3) $\left(\frac{2}{5}y^3-7y^2+\frac{2}{3}y\right) \div \frac{2}{3}y$；　(4) $\left(0.25a^2b-\frac{1}{2}a^3b^2-\frac{1}{6}a^4b^3\right) \div (-0.5a^2b)$.

综合运用 ▶▶

4. 一颗人造地球卫星的速度是 2.88×10^4 米/时，一架喷气飞机的速度是 1.8×10^3 米/时，这颗人造地球卫星的速度是这架喷气式飞机的速度的多少倍？

5. 已知1米$=10^9$纳米，某种病毒的直径为100纳米，多少个这种病毒能排成1毫米长？

6. 如图，在半径 R 为0.5米的地球仪的表面之外，距赤道1米拉一条绳子绕地球仪一周，这条绳长比地球仪的赤道的周长多几米？如果在地球赤道表面也同样做，情况又怎样（已知地球半径为6 370千米，π取3.14）？



（第6题）

拓广探索 ▶▶

7. 已知 $2^m=a$，$32^n=b$，求 2^{3m+10n}.

8. 已知 $2x-y=10$，求代数式 $[(x^2+y^2)-(x-y)^2+2y(x-y)] \div 4y$ 的值.

[1] 注意计算结果的符号.

习题15.4

1. “复习巩固”中的题目都是基本题，为了进一步巩固学生对整式除法的掌握，要求学生认真做题，要把演算步骤呈现出来，提高练习质量.

2. “综合运用”的题目都是以现实世界为背景的，但这些题目本身却并不难.

对于第5题，关键是统一长度单位. 因为1米$=10^3$毫米$=10^9$纳米，所以1毫米就等于$10^9 \div 10^3=10^6$纳米.

3. “拓广探索”中的两个题目，需要较高的数学能力. 其中第7题需要学生对幂的乘法和幂的乘方的性质有较好的灵活运用能力，特别是反向运用能力.

$$2^{3m+10n}=2^{3m}\cdot 2^{10n}=(2^m)^3\cdot(2^5)^{2n}$$
$$=(2^m)^3\cdot(2^5)^n\cdot(2^5)^n$$
$$=(2^m)^3\cdot 32^n\cdot 32^n=a^3\cdot b\cdot b=a^3b^2.$$

第8题的关键是把式子化简，则有

原式$=\frac{2x-y}{2}$，代入$2x-y=10$，则原式$=5$.

[1] 关键是找到 630 所有的质数因子.

[2] (1) $x(x+1)$;

(2) $(x+1)(x-1)$.

15.5 因式分解



630 能被哪些数整除？说说你是怎样想的.

在小学我们知道，要想解决这个问题，需要把 630 分解成质数的乘积的形式，即

$$630=2\times3^2\times5\times7.$$

类似地，在式的变形中，有时需要将一个多项式写成几个整式的乘积的形式.



请把下列多项式写成整式的乘积的形式：

(1) $x^2+x=$_____；

(2) $x^2-1=$_____.

$x(x+1)=x^2+x$,
$(x+1)(x-1)=x^2-1$.

我们根据整式的乘法，可以联想得到

$$x^2+x=x(x+1),$$

$$x^2-1=(x+1)(x-1).$$

上面我们把一个多项式化成了几个整式的积的形式，像这样的式子变形叫做把这个多项式**因式分解**(factoring)，也叫做把这个多项式**分解因式**.

1. 本小节首先通过观察两个多项式变形的的例子

$$x^2+x=x(x+1)$$

和

$$x^2-1=(x+1)(x-1),$$

给出多项式因式分解的概念.

要学生理解并掌握因式分解的概念，理解因式分解是式子的变形.

2. 什么叫因式分解，可多举些例子加以说明. 如

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

和

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2,$$

此两等式左边是多项式，右边是因式的积的形式，因此上述两个式子都是因式分解.

可以看出，因式分解与整式乘法是相反方向的变形，即

$$x^2-1 \xrightleftharpoons[\text{整式乘法}]{\text{因式分解}} (x+1)(x-1).$$ [1]

下面我们探讨因式分解的两种基本方法.

15.5.1 提公因式法

我们看多项式

$$ma+mb+mc,$$

它的各项都有一个公共的因式 m，我们把因式 m 叫做这个多项式各项的**公因式**[2]（common factor）.

由 $m(a+b+c)=ma+mb+mc$，可得

$$ma+mb+mc=m(a+b+c).$$ [3]

这样就把 $ma+mb+mc$ 分解成两个因式乘积的形式，其中一个因式是各项的公因式 m，另一个因式 $(a+b+c)$ 是 $ma+mb+mc$ 除以 m 所得的商. 像这种分解因式的方法叫做**提公因式法**.

下面我们看几个利用提公因式法分解因式的例子.

例 1 把 $8a^3b^2+12ab^3c$ 分解因式.[4]



分析：先找出 $8a^3b^2$ 与 $12ab^3c$ 的公因式，再提出公因式. 我们看这两项的系数 8 与 12，它们的最大公约数是 4；两项的字母部分 a^3b^2 与 ab^3c 都含有字母 a 和 b，其中 a 的最低次数是 1，b 的最低次数是 2，我们选定 $4ab^2$ 为要提出的公因式. 提出公因式 $4ab^2$ 后，另一个因式 $2a^2+3bc$ 就不再有公因式了.

解：
$$\begin{aligned}&8a^3b^2+12ab^3c\\&=4ab^2\cdot 2a^2+4ab^2\cdot 3bc\\&=4ab^2(2a^2+3bc).\end{aligned}$$

[1] 这是本章的理论基础，各种因式分解的方法都是以此作为基础而推导出来的. 教学中要紧紧抓住这一关键的关系式.

要注意让学生区分因式分解与多项式乘法的区别，防止学生出现在进行因式分解当中，半路又做乘法的错误.

[2] 多项式各项的公因式的概念是学习用提公因式法分解因式的关键. 教学时一定要强调多项式“各项都含有的公共的因式”，否则就不是多项式的公因式.

[3] 这里把公因式 m 提到括号外面，相当于用公因式 m 去除已知多项式，所得的商式就是另一个因式. 再把多项式写成这两个因式的积. 教学时，根据分配律与因式分解的互逆关系来说明把各项的公因式提到括号外面即可，不必说明用公因式去除各项的方法，这样学生接受起来容易些.

[4] 本题的关键是找出两项的公因式：$4ab^2$.

3. 通过观察多项式的例子，说明什么叫做多项式各项的公因式，然后回顾分配律，讲述什么叫做提公因式法及如何运用提公因式法分解因式.

4. 提公因式法是因式分解这一节讲授的第一种分解因式的方法，是最基本的也是最重要的因式分解方法. 要求学生能够运用提公因式法把多项式进行因式分解. 这里的多项式中的字母指数仅限于正整数的情况，不考虑多项式中字母的指数是字母的情况，例如把多项式

$$a^n-a^{n+1}+a^{n+2}\ (n\in\mathbf{N})$$

分解因式之类的题目一律不要求.

5. 本节的重点是提公因式法，理解提公因式法的依据，会用提公因式法分解因式. 关键是找出各项的公因式. 学生理解因式分解的意义有一定困难，这也是教学的难点. 可结合因数分解的意义及因式分解与整式乘法的关系说明它的含义.

6. 本小节共有两个例题，例 1 是说明提公因

[1] 本题的关键是找出两项的公因式 $b+c$.

[2] 检查是否漏项的方法是，在分解因式完成后，按照整式乘法把因式再乘回去，看结果是否与原式相等，如果相同就说明没有漏项，否则就漏项了.

练习答案

1. (1) $2mn(4m+1)$;
   (2) $3xy(4z-3xy)$;
   (3) $(2a+3b)(y-z)$;
   (4) $(a^2+b^2)(p-q)$.
2. $(x+7)(4a^2-3)$, 970.
3. 1 620.

[3] 都是两个数的平方的差.

[4] 这里“把乘法公式反过来”是指已经学过的乘法公式：

$(a+b)(a-b)=(a^2-b^2)$, $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$.

“反过来”指的是把公式左、右两边换过来，这样就可以利用这 3 个公式将某些多项式写成因式的积的形式，即进行因式分解. 这正是运用公式法的依据.

例 2 把 $2a(b+c)-3(b+c)$ 分解因式.[1]

分析：$(b+c)$ 是这两个式子的公因式，可以直接提出.

如何检查因式分解是否正确？[2]

解：$2a(b+c)-3(b+c)$
$=(b+c)(2a-3)$.

练习

1. 把下列各式分解因式：
   (1) $8m^2n+2mn$;　　(2) $12xyz-9x^2y^2$;
   (3) $2a(y-z)-3b(z-y)$;　　(4) $p(a^2+b^2)-q(a^2+b^2)$.
2. 先分解因式，再求值：
   $4a^2(x+7)-3(x+7)$，其中 $a=-5$，$x=3$.
3. 计算 $5\times 3^3+24\times 3^3+63\times 3^3$.

15.5.2 公式法

思考[3]

你能将多项式 x^2-4 与多项式 y^2-25 分解因式吗？这两个多项式有什么共同的特点？

这两个多项式都可以写成两个数的平方差的形式，对于这种形式的多项式，可以利用平方差公式来分解因式.

把整式乘法的平方差公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 反过来，[4] 就得到

式时，对数字系数和字母分别进行考虑. 如果是整数系数，就应该提最大公约数. 这里说的最大公约数就是指整数系数的情况. 以后可能还会遇到分数系数的情况，此时先不要引申和涉及. 字母考虑两条，一条是取各项相同的字母，一条是各相同字母的指数取其次数最低的. 为了讲清楚，教材中把公因式单独写出，以示醒目.

例 1 的公因式是单项式，例 2 的公因式是多项式.

7. 本小节介绍了什么叫做运用公式法. 把乘法公式反过来，就可以得到关于因式分解的公式. 教材依次介绍了 3 个公式：

平方差公式　$(a^2-b^2)=(a+b)(a-b)$,

完全平方公式　$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$,

并结合公式讲授如何运用公式进行多项式的因式分解.

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b).$$

即两个数的平方差，等于这两个数的和与这两个数的差的积.[1]

例 3 分解因式：[2]

(1) $4x^2-9$；　(2) $(x+p)^2-(x+q)^2$.

分析：在(1)中，$4x^2=(2x)^2$，$9=3^2$，$4x^2-9=(2x)^2-3^2$，即可用平方差公式分解因式.

把$(x+p)$和$(x+q)$各看成一个整体，设$x+p=m$，$x+q=n$，则原式化为m^2-n^2.

解：(1) $4x^2-9$

$=(2x)^2-3^2$

$=(2x+3)(2x-3)$.

(2) $(x+p)^2-(x+q)^2$

$=[(x+p)+(x+q)][(x+p)-(x+q)]$

$=(2x+p+q)(p-q)$.

例 4 分解因式：[3]

(1) x^4-y^4；　(2) a^3b-ab.

分析：(1) x^4-y^4 可以写成$(x^2)^2-(y^2)^2$的形式，这样就可以利用平方差公式进行因式分解了.

(2) a^3b-ab 有公因式ab，应先提出公因式，再进一步分解.

分解因式，必须进行到每一个多项式因式都不能再分解为止.[4]

解：(1) x^4-y^4

$=(x^2+y^2)(x^2-y^2)$

$=(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$.

(2) a^3b-ab

$=ab(a^2-1)$

$=ab(a+1)(a-1)$.

[1] 平方差公式前面已经学过，这里要提醒学生注意，语言叙述的顺序与乘法公式中的平方差公式不相同. 这里是："两个数的平方差，等于……"，而乘法公式中平方差公式的语言叙述为："两个数的和与这两个数的差的积等于这两个数的平方差.

[2] 第(1)题中两项字母的系数都不是 1，为使公式中的 a^2 和 b^2 分别相当于已给的多项式的两项，要经过简单变形. 为了能熟练运用这个公式，最好让学生熟记 1 到 20 这些正整数的平方.

[3] 此例中的两题，都不能一步分解到位，都要经过再分解才能结束.

[4] 这句话的含义是指在指定的系数范围内，不能再分解为止. 目前只在有理数范围内进行因式分解.

8. 本小节的教学要求是使学生理解每个公式的意义，掌握每个公式的特点，并能熟练运用公式将多项式进行因式分解，但是，直接用公式不要求超过两次，用公式中字母表示多项式时，不要求超过两项.

9. 运用公式法分解因式的关键是要弄清各个公式的形式和特点，熟练地掌握公式. 为此，教材在得出用式子表述的公式后，又分别给出对公式的语言表述，并给出了公式的名称. 这样便于理解公式的意义，使用时也比较方便.

10. 乘法公式中的字母可以表示任何数、单项式或多项式，因此，因式分解公式中的字母，也可以表示任何数、单项式或多项式. 只要符合公式的特点，也可以运用公式分解因式. 熟练运用公式正是本节的难点. 教材中安排例题的顺序是首先给出直接用公式的，再安排先提公因式再运用公式的，后面逐步给出公式中字母表示单项式或二项式的情况. 这种由浅入深，由简单到复

练习答案

1.

(1) 不能，这是平方和；

(2) 能；

$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$；

(3) 能；

$-x^2+y^2=(y+x)(y-x)$；

(4) 不能，这是平方和的相反数.

2.

(1) $\left(a+\frac{1}{5}b\right)\left(a-\frac{1}{5}b\right)$；

(2) $(3a+2b)(3a-2b)$；

(3) $y(x+2)(x-2)$；

(4) $(4+a^2)(2+a)(2-a)$.

[1] 两式的共同特点是，它们都是两个数的平方和加上或减去这两个数的积的2倍.

[2] 因式分解中的完全平方公式与乘法公式中的完全平方公式的区别在于，等号左右恰是相反的.

练习

1. 下列多项式能否用平方差公式来分解因式？为什么？

(1) x^2+y^2；　(2) x^2-y^2；

(3) $-x^2+y^2$；　(4) $-x^2-y^2$.

2. 分解因式：

(1) $a^2-\frac{1}{25}b^2$；　(2) $9a^2-4b^2$；

(3) x^2y-4y；　(4) $-a^4+16$.

思考 [1]

你能将多项式 $a^2+2ab+b^2$ 与 $a^2-2ab+b^2$ 分解因式吗？这两个多项式有什么特点？

这两个多项式是两个数的平方和加上或减去这两个数的积的2倍，这恰是两数和或差的平方，我们把 $a^2+2ab+b^2$ 和 $a^2-2ab+b^2$ 这样的式子叫做完全平方式，利用完全平方公式可以把形如完全平方式的多项式因式分解.

把整式乘法的完全平方公式

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

反过来，就得到

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2,$$
$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2.$$ [2]

即两个数的平方和加上（或减去）这两个数的积的2倍，等于这两个数的和（或差）的平方.

杂的安排易于被学生接受.

11. 教材中把分析例题的具体分析过程放在例题之后，解题之前，说明这是解题时必要的思考过程与方法，学生解题应按例题中“解”的格式书写，不要求书写分析过程.

12. 教材的三个公式中平方差较简单，以下是完全平方和公式与完全平方差公式：

$$a^2\pm2ab+b^2=(a\pm b)^2.$$

(1) 完全平方公式也是应用较多的一个公式，它的适用范围是分解完全平方式. 教材给出了完全平方式的定义，使学生在理解其意义与特点的基础上掌握一类三项式的因式分解.

(2) 完全平方公式的特点是首、末；秒年个项和是两个数的平方和的形式，而中间的一项是这两个数的积的2倍. 运用完全平方公式分解因式时，强调检验中间的一项是否符合公式.

(3) 教材首先引出完全平方公式，说明完全平方公式，语言叙述公式的特点，然后安排两个

例 5 分解因式：

(1) $16x^2+24x+9$；　　(2) $-x^2+4xy-4y^2$.

分析：在(1)中，$16x^2=(4x)^2$，$9=3^2$，$24x=2\cdot 4x\cdot 3$，所以 $16x^2+24x+9$ 是一个完全平方式，即

$$16x^2+24x+9=(4x)^2+2\cdot 4x\cdot 3+3^2.$$

$$\updownarrow\quad\updownarrow\quad\updownarrow\quad\updownarrow\quad\updownarrow\ [1]$$

$$a^2\ +\ 2\ \cdot a\ \cdot b+b^2.$$

解：(1) $16x^2+24x+9=(4x)^2+2\cdot 4x\cdot 3+3^2$

$=(4x+3)^2$.

(2) $-x^2+4xy-4y^2=-(x^2-4xy+4y^2)$ [2]

$=-[x^2-2\cdot x\cdot 2y+(2y)^2]$

$=-(x-2y)^2$.

例 6 分解因式：

(1) $3ax^2+6axy+3ay^2$；

(2) $(a+b)^2-12(a+b)+36$.

分析：在(1)中有公因式 $3a$，应先提出公因式，再进一步分解.

解：(1) $3ax^2+6axy+3ay^2$ [3]

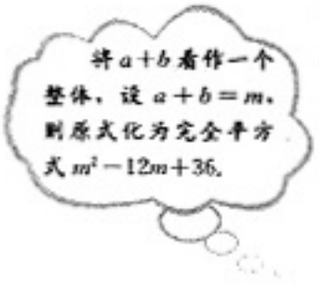
$=3a(x^2+2xy+y^2)$

$=3a(x+y)^2$.

(2) $(a+b)^2-12(a+b)+36$

$=(a+b)^2-2\cdot(a+b)\cdot 6+6^2$

$=(a+b-6)^2$.



[1] 这种图示对照的形式，是为了说明怎样运用完全平方公式来分解因式. 关键是让学生能够指明哪一项相当于公式中的 a^2，哪一项相当于公式中的 b^2，哪一项相当于公式中的 $2ab$. 为了让学生看起来更直观，这里采用这种对照的形式. 学生做作业时不必如此，但让学生练习几道类似的题目对掌握公式有好处.

[2] 把符号提出来是解该题目的关键.

[3] 关键是要先提出公因式 $3a$，之后才能运用完全平方公式分解因式.

例题. 例 5 第(1)题可以直接运用和的完全平方公式进行分解；第 (2) 题是把符号提出后即可化为运用差的完全平方公式分解；例 6 第(1)题则是综合提公因式法和公式法进行因式分解.

(4) 这里的重点是掌握公式的特点，牢固记住公式. 难点是灵活运用公式. 关键是分析清公式中两个数的积的 2 倍.

(5) 教学时要求学生通过充分地练习基本类型题来记忆和运用公式，不要让学生死记硬背.

10. 为了使学生掌握运用完全平方公式分解因式的基本思路和方法，教材在引出公式后，结合例题作了示范性分析，说明运用公式分解因式的思考过程. 首先进行观察，判断所要分解的多项式是否符合某个公式的特点；其次用箭头把所要分解的多项式的各项与相应的公式中的各项分别对应，认清所要分解的多项式中的各项如何用公式中的项分别表示，把这个多项式变为完全符

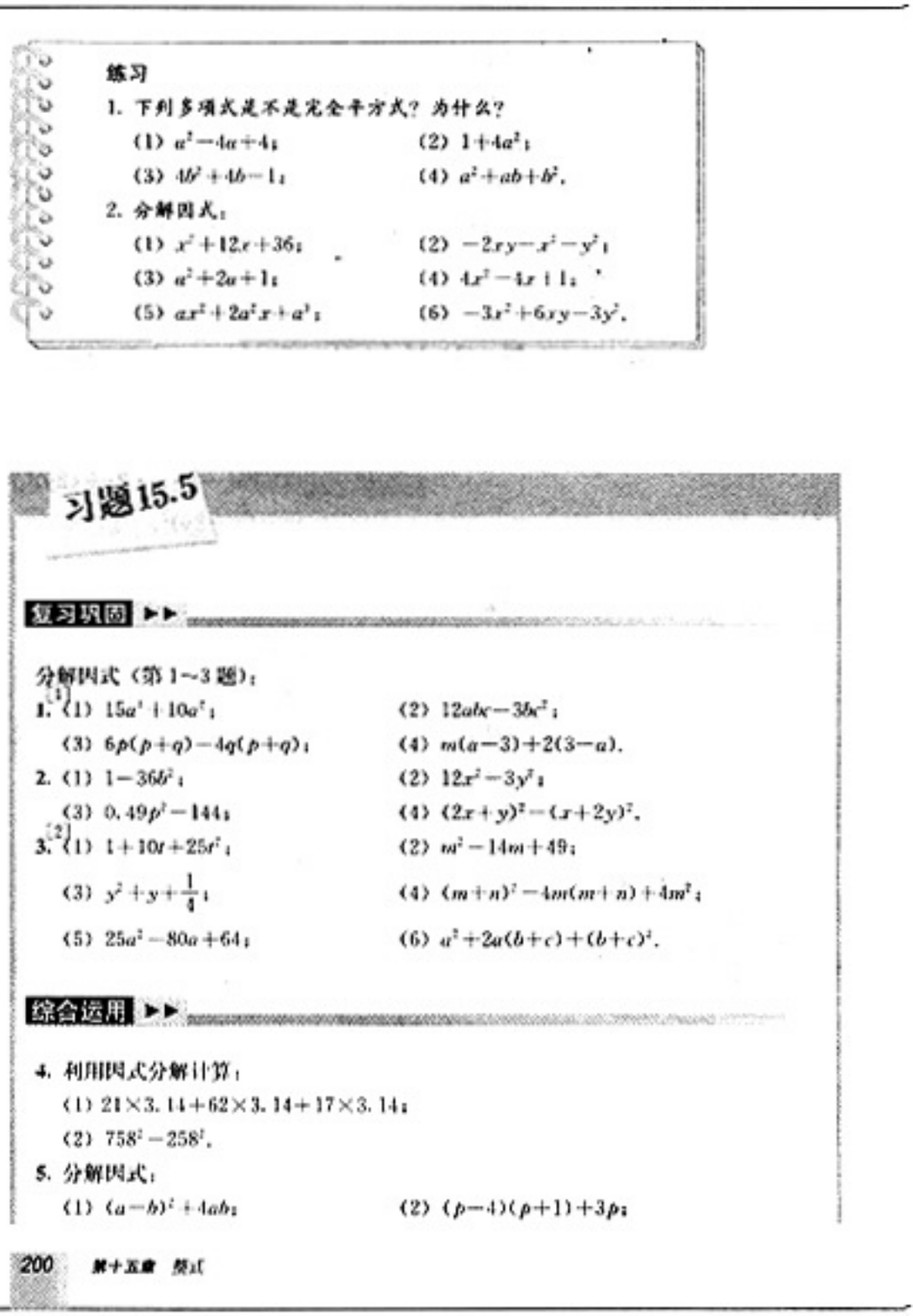
练习答案

1. (1) 是，
$a^2-4a+4=(a-2)^2$；
(2) 不是，缺少一次项；
(3) 不是，平方项符号不一致；
(4) 不，ab 项没有系数 2.

2. (1) $(x+6)^2$；
(2) $-(x+y)^2$；
(3) $(a+1)^2$；
(4) $(2x-1)^2$；
(5) $a(x+a)^2$；
(6) $-3(x-y)^2$.

[1] 注意第(4)题中符号的变换.

[2] 注意完全平方公式中 a 和 b 应该对应多项式中的哪一部分.



练习

1. 下列多项式是不是完全平方式？为什么？
(1) a^2-4a+4；　(2) $1+4a^2$；
(3) $4b^2+4b-1$；　(4) a^2+ab+b^2.

2. 分解因式：
(1) $x^2+12x+36$；　(2) $-2xy-x^2-y^2$；
(3) a^2+2a+1；　(4) $4x^2-4x+1$；
(5) $ax^2+2a^2x+a^3$；　(6) $-3x^2+6xy-3y^2$.

习题15.5

复习巩固 ▶▶

分解因式（第 1～3 题）：

1.[1] (1) $15a^3+10a^2$；　(2) $12abc-3bc^2$；
(3) $6p(p+q)-4q(p+q)$；　(4) $m(a-3)+2(3-a)$.

2. (1) $1-36b^2$；　(2) $12x^2-3y^2$；
(3) $0.49p^2-144$；　(4) $(2x+y)^2-(x+2y)^2$.

3.[2] (1) $1+10t+25t^2$；　(2) $m^2-14m+49$；
(3) $y^2+y+\frac{1}{4}$；　(4) $(m+n)^2-4m(m+n)+4m^2$；
(5) $25a^2-80a+64$；　(6) $a^2+2a(b+c)+(b+c)^2$.

综合运用 ▶▶

4. 利用因式分解计算：
(1) $21\times3.14+62\times3.14+17\times3.14$；
(2) 758^2-258^2.

5. 分解因式：
(1) $(a-b)^2+4ab$；　(2) $(p-4)(p+1)+3p$；

200　第十五章　整式

合完全平方公式的形式，然后再进行因式分解.

习题 15.5

1. “复习巩固”中的第 1 题是配合运用提公因式法分解因式的习题.

第 2 题是配合运用平方差公式分解因式的习题，注意第 2(3)题中 0.49 是 0.7 的平方. 学生对于小数的平方或分数的平方容易出错，要及时让学生适当做些练习. 第 2(4)题运用平方差公式分解时，要注意合并各式中的同类项.

第 3 题是配合运用完全平方公式分解因式的习题，都可以直接运用公式.

2. “综合运用”中的第 4 题，经过因式分解可以简化数字运算. 第 5 题也是用平方差公式分解因式，但不能直接运用公式. 第(1)和第(2)题要首先计算代数式中的乘法部分；第(3)和(4)题首先要提取公因式，再运用公式.

第 8 题是一个具有开放性的题目，方法不惟

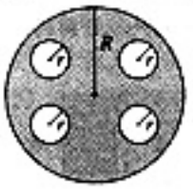
(3) $4xy^2-4x^2y-y^3$；　　(4) $3ax^2-3ay^2$.

6. 如图，把 R_1，R_2，R_3[1] 三个电阻串联起来，线路 AB 上的电流为 I，电压为 V，则 $V=IR_1+IR_2+IR_3$. 当 $R_1=19.7$，$R_2=32.4$，$R_3=35.9$，$I=2.5$ 时，求 V 的值.[2]

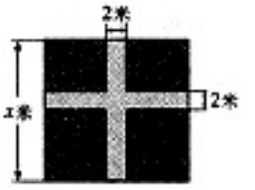


(第6题)

7. 如图，在半径为 R 的圆形钢板上，冲去半径为 r 的四个小圆，计算当 $R=7.8$ cm，$r=1.1$ cm 时剩余部分的面积（π 取 3.14）.[3]



(第7题)



(第8题)

8. 如图，某小区规划在边长为 x m 的正方形场地上，修建两条宽为 2 m 的甬道，其余部分种草，你能用几种方法计算甬道所占的面积？

拓广探索 ▶▶

9. 已知 $4y^2+my+9$ 是完全平方式，求 m 的值.

10. 观察下列式子：

$2\times4+1=9=3^2$；　$6\times8+1=49=7^2$；　$14\times16+1=225=15^2$.

你得出了什么结论？你能证明这个结论吗？

11. 在实数范围内分解因式：

(1) x^2-2；　　(2) $5x^2-3$.

（提示：根据平方根的意义把各式写成平方差的形式.）

[1] R_1，R_2，R_3 中的数字 1，2，3 称作下角标.

[2] 这一个物理题，也是一个分解因式题. 当把电阻和电流代入代数式时，可直接求得电压值. 如果将 $IR_1+IR_2+IR_3$ 因式分解为 $I(R_1+R_2+R_3)$，再代入电阻和电流的值，则可以把计算简化.

[3] 这是一个应用题，首先根据题意列出代数式再分解因式：

$$\pi R^2-4\pi r^2$$
$$=\pi(R^2-4r^2),$$

再代入 R 和 r 的值即可.

一. 方法一：矩形的面积减草坪的面积为

$$x^2-(x-2)^2=4(x-1).$$

方法二：直接计算甬道的面积为

$$2x+2x-2^2=4(x-1).$$

3. “拓广探索”中的题目对学生的数学能力要求较高.

第 9 题考查的是学生的逆向思维能力. 根据代数式 $4y^2+my+9$ 是完全平方式可知，与完全平方公式中字母 a，b 相对应的是 $2y$ 和 3. 从而与 my 相对应的是 $2\times2y\times3=12y$，则有 $12y=my$，即 $m=12$.

解决第 10 题需要学生有高度的抽象概括能力. 通过仔细观察会发现，如果把前一个代数式写成 $ab+1=c^2$，则下一个代数式可写成

$$(2a+2)\times2b+1=(2c+1)^2.$$

下一个数式是 $30\times32+1=31^2$.

第 11 题的关键把原式变形：

(1) $x^2-(\sqrt{2})^2$；(2) $(\sqrt{5}x)^2-(\sqrt{3})^2$.

[1] 这是一种非常重要的分解因式的方法，称为十字相乘法.

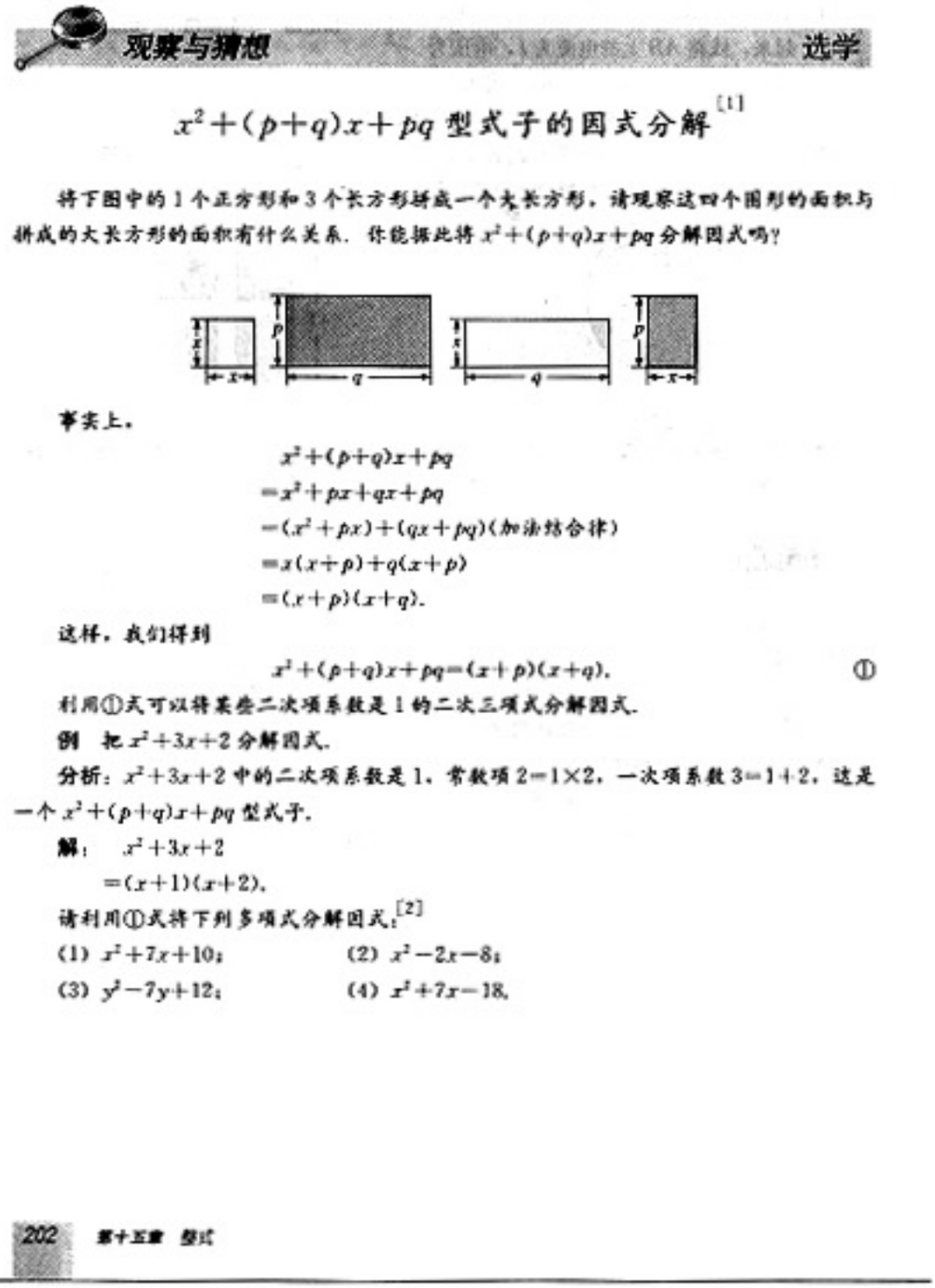
[2] 答案

(1) $(x+2)(x+5)$；

(2) $(x-4)(x+2)$；

(3) $(x-3)(x-4)$；

(4) $(x+9)(x-2)$.



观察与猜想　选学

$x^2+(p+q)x+pq$ 型式子的因式分解[1]

将下图中的1个正方形和3个长方形拼成一个大长方形，请观察这四个图形的面积与拼成的大长方形的面积有什么关系．你能据此将 $x^2+(p+q)x+pq$ 分解因式吗？

事实上，

$$\begin{aligned}&x^2+(p+q)x+pq\\=&x^2+px+qx+pq\\=&(x^2+px)+(qx+pq)\text{(加法结合律)}\\=&x(x+p)+q(x+p)\\=&(x+p)(x+q).\end{aligned}$$

这样，我们得到

$$x^2+(p+q)x+pq=(x+p)(x+q). \quad ①$$

利用①式可以将某些二次项系数是1的二次三项式分解因式.

例　把 x^2+3x+2 分解因式.

分析：x^2+3x+2 中的二次项系数是1，常数项 $2=1\times2$，一次项系数 $3=1+2$，这是一个 $x^2+(p+q)x+pq$ 型式子.

解：x^2+3x+2

$=(x+1)(x+2)$.

请利用①式将下列多项式分解因式：[2]

(1) $x^2+7x+10$；　(2) x^2-2x-8；

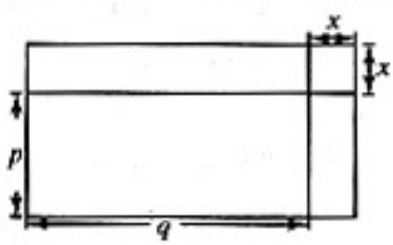
(3) $y^2-7y+12$；　(4) $x^2+7x-18$.

观察与猜想

1个正方形和三个长方形的面积和为

$x^2+px+qx+pq=x^2+(p+q)x+pq$.

可以将它们拼成如下的大长方形：

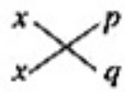


这个长方形的面积为 $(x+p)(x+q)$.

这就在几何上证明了

$$x^2+(p+q)x+pq=(x+p)(x+q)$$

的正确性．这是一种非常重要的分解因式的方法，称为十字相乘法.



数学活动

活动 1[1]

图 1 是某月的月历.

(1) 浅色方框中的 9 个数之和与方框正中心的数有什么关系?

(2) 如果将浅色方框移至图 2 的位置, 又如何?

(3) 不改变方框的大小, 将方框移动几个位置试一试, 你能得出什么结论? 你能证明这个结论吗?

(4) 这个结论对于任何一个月的月历都成立吗?

(5) 如图 3, 如果浅色方框里的数是 4 个, 你能得出什么结论?

(6) 如图 4, 对于浅色框中的 4 个数, 又能得出什么结论?



图 1



图 2



图 3



图 4

[1] 活动 1 是为了让学生探究日历中蕴涵的可以用整式来解释的数字现象.

数学活动

1. 活动 1

(1) 方框内数字的和为 144, 恰好是中间数字 16 的 9 倍. 因此, 16 恰好是方框中 9 个数的平均数.

(2) 移动后, 方框内的数字和为 99, 恰好是中间数字 11 的 9 倍. 因此, 11 是方框中 9 个数的平均数.

(3) 这是个普遍规律, 证明如下: 设中间的数为 x, 则方框中所有的数字规律如下:

$x-8$	$x-7$	$x-6$
$x-1$	x	$x+1$
$x+6$	$x+7$	$x+8$

其和为 $9x$.

(4) 这个规律对任何一月都成立.

(5) 对角线上两个数的和相等:

$15+23=16+22$; $11+19=18+12$.

(6) 对角线上两个数字的和相等:

活动 2

(1) 计算下列两个数的积，这两个数的十位上的数字相同，个位上的数字之和等于 10. 你发现结果有什么规律?

53×57，38×32，84×86，71×79.

(2) 你能用本章所学知识解释这个规律吗?

(提示：个位上的数字为 b，十位上的数字为 a 的两位数可以表示成 $10a+b$.)

(3) 利用你发现的规律计算：

58×52，63×67，75^2，95^2.

$$18+13=12+19.$$

2. 活动 2

根据提示，两数的积有如下规律：

$$(10a+b)(10a+10-b)$$
$$=100a(a+1)+b(10-b).$$

如 $53\times57=100\times5\times(5+1)+3\times(10-3)$
$=3\,021.$

还有更简便的表示方法：

前两个数字	后两个数字
$a(a+1)$	$b(10-b)$

(1) $58\times52=5\times(5+1)\,|\,8\times2=3\,016$;

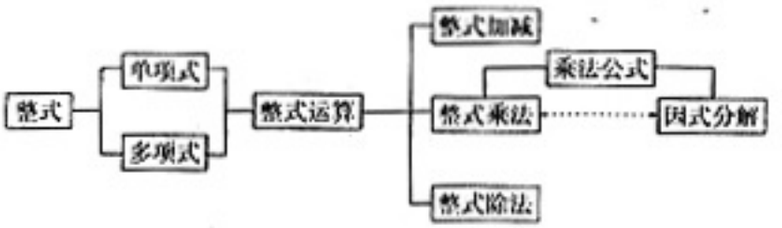
(2) $63\times67=6\times(6+1)\,|\,3\times7=4\,221$;

(3) $75\times75=7\times(7+1)\,|\,5\times5=5\,625$;

(4) $95\times95=9\times(9+1)\,|\,5\times5=9\,025$.

小　结

一、本章知识结构图[1]



二、回顾与思考

1. 整式中的字母表示数，整式运算建立在数的运算的基础之上，数的运算是整式运算的特殊情况．你能类比数的运算律与运算性质谈一谈整式的运算律与运算性质吗？

2. 合并同类项是整式加减的基础．举例说明怎样合并同类项以及这样做的依据是什么．

3. 幂的运算性质是整式乘除的基础，单项式的乘除是整式乘除的关键．举例说明怎样将多项式乘（除以）单项式、多项式乘多项式转化为单项式的乘除．

4. 把一些特殊形式的多项式乘法写成公式的形式，可以简化运算．本章学习了哪几个乘法公式？你能从图形的角度解释乘法公式的合理性吗？

5. 举例说明因式分解与整式乘法之间的关系．你学习了哪几种分解因式的方法？请举例说明．

[1] 为了便于学生从宏观上把握全章，这里用框图形式总结了本章的编写脉络．

小结

1. 小结时可引导学生结合具体问题为例认识本章的知识结构图，使学生对整式、整式的加减乘除运算法则、因式分解有较深刻的认识．

教学时还可以发挥学生的积极性，鼓励学生根据自己的理解为本章设计知识结构图．不要求学生设计的结构图与教材中的一致，只要学生有自己的合理理由就可以了．

以上述的方式讲解知识结构图可能比单纯的回顾这幅图的效果要好得多．

2. “回顾与思考”以问题的形式，概括了本章的主要内容，应以学生为主体，教师为主导，给学生留出适当的独立思考时间，再让他们独立回答．然后可以让学生之间互相评价．

这样做，一方面可以考查学生对本章重点知识的掌握情况，另一方面可以加深对所学知识的理解，还可以锻炼学生的数学语言表达能力．

最后，可以让学生写一个“总结报告”，总结这一章中所学的知识．

[1] 该题的关键是首先要去括号，再进行加减运算，注意去括号时符号的变化.

[2] 注意符号的变化.

[3] 此题关键是先做两等式左侧的乘法，然后把这两个等式看作一个方程组，再把这 xy 和 x^2+y^2 看作两个未知数.

复习题15

复习巩固 ▶▶

1. 计算：[1]

(1) $(4a^2b-3ab)+(-5a^2b+2ab)$；　(2) $(6m^2-4m-3)+(2m^2-4m+1)$；

(3) $(5a^2+2a-1)-4(3-8a+2a^2)$；　(4) $3x^2-\left[5x-\left(\frac{1}{2}x-3\right)+2x^2\right]$.

2. 计算：

(1) $(-2x^2y^3)^2\cdot(xy)^3$；　(2) $(2a+3b)(2a-b)$；

(3) $5x^2(x+1)(x-1)$；　(4) $(2x+y-1)^2$；

(5) 59.8×60.2；　(6) 198^2.

3. 计算：

(1) $(2a)^3\cdot b^5\div12a^3b^2$；　(2) $\left(-\frac{2}{3}a^2b^5\right)\div\frac{3}{2}a^2b^3$；

(3) $\left(\frac{6}{5}a^3x^4-0.9ax^3\right)\div\frac{3}{5}ax^3$；　(4) $(7x^2y^3-8x^3y^2z)\div8x^2y^2$；

(5) $12^{13}\div(3^{10}\cdot4^{11})$；　(6) $(5^4\times3^3-5^3\times3^2+5^2\times3)\div15$.

4. 分解因式：

(1) $25x^2-16y^2$；　(2) $(a-b)(x-y)-(b-a)(x+y)$；

(3) $a^2-4ab+4b^2$；　(4) $4+12(x-y)+9(x-y)^2$.

综合运用 ▶▶

5. 计算：[2]

(1) $4(x+1)^2-(2x+5)(2x-5)$；　(2) $2x\cdot\left(\frac{1}{2}x-1\right)-3x\left(\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\right)$；

(3) $3(y-z)^2-(2y+z)(-z+2y)$；

(4) $[x(x^2y^2-xy)-y(x^2-x^3y)]\div3x^2y$.

6. 分解因式：

(1) x^3-9x；　(2) $16x^4-1$；

(3) $6xy^2-9x^2y-y^3$；　(4) $(2a-b)^2+8ab$.

7. 已知 $(x+y)^2=25$，$(x-y)^2=9$，求 xy 与 x^2+y^2 的值.[3]

复习题15

1. “复习巩固”中的第1题到第3题分别对整式的加减法、整式的乘法和整式的除法进行了复习，第4题是对应用公式分解因式进行复习. 这4个题都是基本的题目.

2. “综合运用”中的第5题是整式的混合运算，第6题是因式分解，这两题需要较高的数学能力. 其中第6(1)和6(3)题首先要应用提公因式法再用公式法分解，而第6(2)题要用两次公式法来分解因式. 第6(4)题首先要计算乘法然后才能用公式法进行分解.

3. 对于第7题，先做两等式左侧的乘法，然后把这两个等式看作一个方程组：

$$\begin{cases}x^2+2xy+y^2=25,\\ x^2-2xy+y^2=9.\end{cases}$$

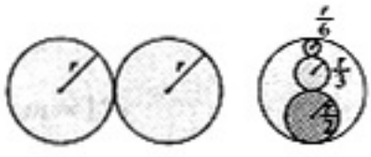
再把 xy 和 x^2+y^2 分别看作两个未知数，计算得

$$\begin{cases}x^2+y^2=17,\\ xy=4.\end{cases}$$

8. 我国陆地面积约是 9.6×10^6 平方千米，平均每平方千米的土地上，一年从太阳得到的能量相当于燃烧 1.3×10^5 吨煤所产生的能量．求在我国领土上，一年内从太阳得到的能量约相当于燃烧多少吨煤所产生的能量（保留两个有效数字）．[1]

9. 某公园计划砌一个形状如图(1)的喷水池．后来有人建议改为图(2)的形状，且外圆的直径不变，请你比较两种方案，确定哪一种方案砌各圆形水池的周边需用的材料多．

（提示：比较两种方案中各圆形水池周长的和．）



(1)　　(2)

（第 9 题）



（第 10 题）

10. 如图，水压机有四根空心钢立柱，每根高都是 18 米，外径 D 为 1 米，内径 d 为 0.4 米，每立方米钢的质量为 7.8 吨，求 4 根立柱的总质量（π 取 3.14）．[2]

拓广探索 ▶▶

11. 解方程[3]

$$(x+7)(x+5)-(x+1)(x+5)=42.$$

12. 解不等式组[4]

$$\begin{cases} x(2x-5)>2x^2-3x-4, \\ (x+1)(x+3)+8x>(x+5)(x-5)-2. \end{cases}$$

13. 求证：当 n 是整数时，两个连续奇数的平方差 $(2n+1)^2-(2n-1)^2$ 是 8 的倍数．[5]

14. 某种产品的原料提价，因而厂家决定对产品进行提价，现有三种方案：

方案 1：第一次提价 $p\%$，第二次提价 $q\%$．

方案 2：第一次提价 $q\%$，第二次提价 $p\%$．

方案 3：第一、二次提价均为 $\frac{p+q}{2}\%$．

其中 p、q 是不相等的正数．三种方案哪种提价最多？

（提示：因为 $p\neq q$，$(p-q)^2=p^2-2pq+q^2>0$，所以 $p^2+q^2>2pq$．）[6]

[1] 这是一个数字的同底数幂乘法题．

[2] 此题的关键是用大圆柱的体积减内圆柱的体积得到空心钢立柱的体积．

[3] 此题的关键是把等式左侧分解因式，化成一次式．

[4] 首先计算不等式两侧的乘法，再移项，最后得出结果．

[5] 用平方差公式分解因式即可．

[6] 这里尤其要注意括号中的提示．

4. 第 8 题考查学生对同底数幂乘法的掌握情况．第 9 题和第 10 题分别考查学生对整式加法和整式减法的实际应用能力．

5. 在第 11 题中，把等式左侧因式分解后可获得一个一次方程：$6(x+5)=42$．

在第 12 题中，经过整理可以得到不等式组如下：

$$\begin{cases} 2x<4, \\ 4x>-30. \end{cases}$$

6. 第 14 题考查学生对整式的混合运算和综合应用能力．

方案 1：$(1+p\%)(1+q\%)$．

方案 2：$(1+q\%)(1+p\%)$．

方案 3：$\left(1+\frac{p+q}{2}\%\right)^2$．

方案 1、2 结果相同，比较方案 2、3 如下：

$$\left(1+\frac{p+q}{2}\%\right)^2-(1+p\%)(1+q\%).$$

整理该式，注意括号中的提示．

Ⅲ 习题解答

习题 15.1

1.

系数	−15	4	$\frac{3}{5}$		
次数	2	4	3	2	4

2. (1) 不对，不是同类项，不能合并；
   (2) 不对，应是 $3y^2$；
   (3) 对；
   (4) 不对，不是同类项，不能合并.

3. (1) $-a+4b+9c$；
   (2) $2y^2-2x^2$；
   (3) $6x^2-x-\frac{5}{2}$；
   (4) $5x^2-3x-3$.

4. 原式 $=x^2+9x+1$，当 $x=-2$ 时，原式 $=-13$

5. (1) 第四条边长 $=48-a-(2a+3)-[a+(2a+3)]=42-6a$；
   (2) 当 $a=3$ cm 时，四条边的边长分别为 3，9，12，24(cm). 这实际上已经不是四边形了，因为 $3+9+12=24$.
   当 $a=7$ cm 时，四条边的边长分别为 7，17，24，0(cm). 显然不是四边形.

6. $(10a+b)(10b+a)=11a+11b$，能被 11 整除.

7. 三队共植树 $x+2x-25+\frac{x}{2}+42=\frac{7}{2}x+17$(棵).
   (1) 367 棵；
   (2) 857.

8. (1) $4a^2+\frac{\pi a^2}{2}=\frac{(8+\pi)}{2}a^2$；
   (2) $6a+\pi a=(6+\pi)a$.

9. $17a$，$20a$，$23a$，…，$(3n+2)a$.

10. $36a^2$.

习题 15.2

1. (1) 不对，应为 b^6；(2) 不对，应为 x^8；(3) 不对，应为 a^{10}；
   (4) 不对，应为 a^{10}；(5) 不对，应为 a^3b^6；(6) 不对，应为 $4a^2$.

2. (1) $2x^4$；(2) $-p^3q^3$；(3) $-16a^8b^4$；(4) $6a^8$.

3. (1) $18x^3y$；(2) $-6a^2b^3$；(3) $-4x^5y^7$；(4) 4.94×10^5.

4. (1) $-8ab+2b^3$；
   (2) $2x^3-x^2$；
   (3) $10a^2b-5ab^2+ab$；
   (4) $-18a^3+6a^2+4a$.

5. (1) $a^2-9x+18$；
   (2) $x^2+\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}$；

(3) $3x^2+8x+4$；　　(4) $-18a^3+6a^2+4a$.

6. 原式$=-2x^2+x$，将$x=\frac{1}{2}$代入得 0

7. (1) $-5x^2-12x+15$；　　(2) $2x^2-8$.

8. $1.44\times2^{10}\times2^{10}=1.44\times2^{20}$(字节).

9. $7.9\times10^3\times2\times10^2=1.58\times10^5$(米).

10. $22a^2$m.

11. (1) $x=1$；　　(2) $x>\frac{38}{9}$.

12. (1) $m=13$；　　(2) -20；

(3) $m=15$；　　(4) -12；

(5) $m=37$ 或 20 或 15 或 13 或 12.

习题 15.3

1. (1) $\frac{4}{9}x^2-y^2$；　　(2) x^2y^2-1；

(3) $4a^2-9b^2$；　　(4) $25-4b^2$；

(5) 3 999 999；　　(6) 999 996.

2. (1) $4a^2+20ab+25b^2$；　　(2) $16x^2-24xy+9y^2$；

(3) $4m^2+4m+1$；　　(4) $\frac{9}{4}a^2-2ab+\frac{4}{9}b^2$；

(5) 3 969；　　(6) 9 604.

3. (1) $5x^2-58x-24$；　　(2) $x^2+2xy+y^2-1$；

(3) $4x^2+y^2-4xy-12x+6y+9$；　　(4) x^4-8x^2+16；

4. 原式$=12xy+10y^2$，代入$x=\frac{1}{3}$，$y=-\frac{1}{2}$，得$\frac{1}{2}$.

5. 5 cm.

6. (1) $\pi\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2+\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2=\pi\frac{ab}{2}$.

7. $a^2+b^2=a^2+2ab+b^2-2ab=(a+b)^2-2ab=25-6=19$.

8. $x<\frac{78}{7}$.

9. $x=\frac{3}{2}$，$y=-\frac{1}{6}$.

习题 15.4

1. (1) a^2x^2；　　(2) x^6；

(3) 1；　　(4) ab^4.

2. (1) $-4x$；　　(2) 5；

(3) $16m^3p^2$；　　(4) -48.

3. (1) $-3x^2+4x$；　　(2) $2a^2-\frac{5}{4}ab$；

(3) $\frac{3}{5}y^2-\frac{21}{2}y+1$；　　(4) $\frac{1}{3}a^2b^2+ab-0.5$.

4. $2.88\times10^7\div1.8\times10^6=16$ 倍.

5. $10^9\div1\,000\div100=10^4$ 个.

6. 多 $2\pi(0.5+1)-2\pi\times0.5=2\pi\approx6.28$ 米，如果在地球上这么做，也只长出 6.28 米.

7. a^3b^2.

8. 原式$=\frac{2x-y}{2}$，代入后值为 5.

习题 15.5

1. (1) $5a^2(3a+2)$；　　(2) $3bc(4a-c)$；

(3) $2(p+q)(3p-2q)$；　　(4) $(a-3)(m-2)$.

2. (1) $(1+6b)(1-6b)$；　　(2) $3(2x+y)(2x-y)$；

(3) $(0.7p+12)(0.7p-12)$；　　(4) $3(x+y)(x-y)$.

3. (1) $(1+5t)^2$；　　(2) $(m-7)^2$；

(3) $\left(y+\frac{1}{2}\right)^2$；　　(4) $(m-n)^2$；

(5) $(5a-8)^2$；　　(6) $(a+b+c)^2$.

4. (1) 原式$=3.14(21+62+17)=314$；

(2) 原式$=(758+258)(758-258)=1\,016\times500=508\,000$.

5. (1) $(a+b)^2$；　　(2) $(p+2)(p-2)$；

(3) $-y(2x-y)^2$；　　(4) $3a(x+y)(x-y)$.

6. (1) $V=I(R_1+R_2+R_3)$，代入 R_1，R_2，R_3 的值，得 $V=220$.

7. 所求面积 $S=\pi R^2-4\pi r^2=\pi(R^2-4r^2)=\pi(R+2r)(R-2r)$，代入 R，r 的数值后得 $S=175.84\ \text{cm}^2$.

8. $2\times2x-2^2=4(x-1)$ 或 $x^2-(x-2)^2=4(x-1)$.

9. $m=12$.

10.
$$\begin{aligned}(2^n-1)\cdot2^{n+2}+1&=2^{2n+2}-2^{n+2}+1\\&=(2^{n+1})^2-2\cdot2^{n+1}+1\\&=(2^{n+1}-1)^2.\end{aligned}$$

11. (1) $x^2-2=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$；　　(2) $5x^2-3=(\sqrt{5}x+\sqrt{3})(\sqrt{5}x-\sqrt{3})$.

复习题 15

1. (1) $-a^2b-ab$；　　(2) $8m^2-8m-2$；

(3) $-3a^2+34a-13$；　　(4) $x^2-\frac{9}{2}x-3$.

2. (1) $4x^7y^9$；　　(2) $4a^2+4ab-3b^2$；

(3) $5x^4-5x^2$；　　(4) $4x^2+4xy+y^2-4x-2y+1$；

(5) $(60-0.2)(60+0.2)=60\times60-2\times60\times0.2-0.2\times0.2=3\,599.96$；

(6) $(200-2)^2=39\,204$.

3. (1) $\frac{2}{3}b^2$；　　(2) $-\frac{4}{9}a^5$；

(3) $2a^2x-1.5$；　　(4) $\frac{7}{8}y-xz$；

(5) 432；　　(6) 1 055.

4. (1) $(5x+4y)(5x-4y)$；　　(2) $2(a-b)x$.

(3) $(a-2b)^2$；　　(4) $[2+3(x-y)]^2$.

5. (1) $8x+29$；　　(2) $-4x$；

(3) $-y^2+4z^2-6yz$；　　(4) $\frac{2}{3}xy-\frac{2}{3}$.

6. (1) $x(x+3)(x-3)$；　　(2) $(4x^2+1)(2x+1)(2x-1)$；

(3) $-y(3x-y)^2$；　　(4) $(2a+b)^2$.

7. $x^2+y^2=17$，$xy=4$.

8. $9.6\times10^6\times1.3\times10^5=1.248\times10^{12}$.

9. $2\pi r\times2-\left(2\pi r+2\pi\cdot\frac{r}{2}+2\pi\cdot\frac{r}{3}+2\pi\cdot\frac{r}{6}\right)=0$，所需材料一样多.

10. $7.8\times\left[\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2h-\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2h\right]\times4\approx370.32$ 吨.

11. $x=2$.

12. $\begin{cases}2x<4,\\12x>-30.\end{cases}$ 得 $-2.5<x<2$.

13. 证明：$(2n+1)^2-(2n-1)^2$

$=[2n+1+(2n-1)][2n+1-(2n-1)]$

$=8n$

14. 方案 1：$(1+p\%)(1+q\%)$.

方案 2：$(1+q\%)(1+p\%)$.

方案 3：$\left(1+\frac{p+q}{2}\%\right)^2$.

方案 1、2 结果相同，比较方案 2、3 如下：

$\left(1+\frac{p+q}{2}\%\right)^2-(1+p\%)(1+q\%)$

$=1+(p+q)\%+(\frac{p+q}{2}\%)^2-1-(p+q)\%-p\%\cdot q\%$

$=\left(\frac{p+q}{2}\%\right)^2-p\%\cdot q\%$

要比较 $\left(\frac{p+q}{2}\%\right)^2$ 与 $p\%\cdot q\%$，即比较 $\left(\frac{p+q}{2}\right)^2$ 与 pq，

要比较 $\left(\frac{p+q}{2}\right)^2$ 与 pq，即比较 $(p+q)^2$ 与 $4pq$，

即比较 $p^2+2pq+q^2$ 与 $4pq$，

即比较 p^2+q^2 与 $2pq$，

因为 $p^2+q^2>2pq$，

所以方案 3 提价最多.

Ⅳ 教学设计参考案例

15.1.2 整式的加减（第1课时）

教学任务分析

教学目标	知识技能	1. 理解同类项的概念，并能辨别同类项. 2. 掌握合并同类项的方法. 3. 掌握整式加减的方法.
	数学思考	1. 通过活动的探究，使学生体验探究的过程，培养学生的创新能力. 2. 通过计算两个长方体纸盒的用料情况，发展学生的形象思维，初步培养学生的符号感. 3. 通过类比来理解整式的加减和有理数的加减之间的联系，发展学生的抽象概括能力.
	解决问题	通过计算两个长方体纸盒的用料情况，初步学会从实际问题入手，尝试从数学的角度提出问题、理解问题，并运用所学的知识和技能解决问题，进一步发展学生的应用意识.
	情感态度	通过分组探究，培养学生合作交流的意识和敢于探索未知问题的精神.
重点	整式加减的方法.	
难点	运用整式的加减进行有关的计算.	

教学流程安排

活动流程图	活动的内容和目的
活动1 通过实际问题理解合并的方法	由三年购买计算机总台数的计算结果入手，抽象出数学模型，探究出合并的一般方法.
活动2 理解同类项的概念，掌握同类项合并的方法	通过多媒体演示、学生观察、讨论，形成同类项的概念，再自己动手仿写同类项，最后讲授合并同类项的方法.
活动3 判断合并的结果是否正确	巩固合并同类项的方法.
活动4 通过实际问题学习整式的加减	由实际问题入手，建立数学模型，探究问题的解决方法，归纳整式的加减法则.
活动5 练习	在练习中强化整式加减的运算能力.
活动6 评价与反思、布置作业	小结本节内容，学生自我评价.

教学过程设计

问题与情境	师生行为	设计意图
「活动1」 问题 (1) 某学校前年、去年、今年购买的计算机台数分别是 x、$2x$、$4x$，那么这个学校这三年购买的计算机台数是 $7x$，即 $x+2x+4x=7x$ 说说这个结果是怎样得到的？ (2) 请根据得到结论的方法探究下面各式的结果： $3x^2+2x^2=(\quad)x^2$； $3ab^2-4ab^2=(\quad)ab^2$； $4x^2+2x+7+3x-8x^2-2$ $=(\quad)x^2+(\quad)x+(\quad)$.	学生独立思考，学生代表将得到问题(1)结果的方法在班内交流，再根据上述方法去探究问题(2)的括号内的结果. 教师倾听学生的交流，指导学生探究. 本次活动中，教师应重点关注： (1) 对问题(1)的结果是怎样得到的，应让学生自己来表述； (2) 学生会联想到探究问题(2)的方法和七年级(上)解方程中“合并(同类项)”的方法是一样的. 可以引导学生用解一元一次方程时常用的“合并(同类项)”的方法来完成任务.	由现实中的实际问题入手，设置情景问题，激发学生的兴趣，导出本课的主题. 通过探究，让学生寻求较复杂的多项式中相同的项系数之间的关系，为同类项和合并同类项的引入作好铺垫. 为学生提供参与活动的时间和空间，调动学生的主观能动性，激发好奇心和求知欲. 教师在活动中的引导在于寻求解一元一次方程时常用的“合并(同类项)”与整式中的合并同类项的内在关系.
「活动2」 问题 (1) 观察：$3x^2$ 与 $2x^2$；$3ab^2$ 与 $-4ab^2$ 在结构上有哪些相同点和不同点？ (2) 你能写出两个项是同类项的例子吗？ (3) 怎样合并同类项呢？	通过多媒体演示系数、字母、相同字母的指数的特征效果，学生归纳这两组单项式的特征，形成同类项的概念. 教师指出几个常数也是同类项，并指出“同类项”中的“项”指的是几个单项式. 学生自己动手，组内交流写出的项是否符合要求，教师参与指导. 教师示范：$4x^2+2x+7+3x-8x^2-2$ $=(4x^2-8x^2)+(2x+3x)+(7-2)$ $=(4-8)x^2+(2+3)x+(7-2)$ $=-4x^2+5x+5$ 教师指出合并同类项时可以运用交换律、结合律、分配律，明确合并的结果规范表示方法.	通过多媒体动画效果借助观察特征，使问题形象化而不枯燥，能有效地帮助学生理解同类项的含义，进一步培养学生归纳、抽象概括的能力. 通过设计开放性的问题，帮助加深理解同类项的含义，增强学生的数感和符号感，培养学生的抽象思维能力.

续表

问题与情境	师生行为	设计意图
	本次活动中，教师应重点关注： （1）借助多媒体的动画效果，学生独立思考和交流，能否找出两个项的相同点和不同点，从而归纳出同类项的含义； （2）学生能否独立地写出两个项是同类项； （3）学生是否掌握合并同类项的方法.	讲授合并同类项的格式，明确合并同类项的方法和表示结果的规范性，有助于学生的理解和掌握，突出了本节课的重点之一.
「**活动3**」 问题 下列各题计算的结果对不对？如果不对，指出错在哪里？ （1）$3a+2b=5ab$ （2）$5y^2-2y^2=3$ （3）$2ab-2ba=0$ （4）$3x^2y-5xy^2=-2x^2y$	学生判断，理解只有同类项才能合并. 教师加以指导，并让学生简单说说判断的理由. 本次活动中，教师应重点关注： （1）学生对同类项的概念是否混淆不清，能否正确辨别同类项； （2）是否在正确辨别后，只重视系数而忽略了字母和字母的指数； （3）对一些同类项的变式能否正确的辨别.	培养学生运用知识的能力，进一步巩固同类项的含义和合并同类项的方法，为本节课的应用作好铺垫.
「**活动4**」 问题 例1　做大小两个长方体纸盒，尺寸如下（单位：cm）： （1）做这两个纸盒共用料多少平方厘米？ （2）做大纸盒比做小纸盒多用料多少平方厘米？	学生小组讨论、交流，首先明确要解决什么问题？怎样解决这两个问题？并围绕这两个问题开展探究，寻找解决问题的方法. 教师引导学生观察，帮助学生展示大小两个长方体纸盒实物模型，并深入小组，倾听学生的交流，指导学生探究. 学生通过探究，明确问题(1)是求两个长方体的表面积的和，问题(2)是求两个长方体的表面积的差. 再借助多媒体动画展示长方体各个面的长宽，各小组完成列代数式，并合并同类项. 学生归纳整式加减的方法：几个整式相加减，通常用括号把每个整式括起来，再加减号连接；然后去括号，合并同类项. 本次活动中，教师应重点关注： （1）学生是否能根据实际问题（共用料多少、多用料多少）把它抽象到数学问题（求表面积的和、差）来解决；	学生在掌握同类项的概念和合并同类项的方法后，再通过解决一个实际问题，体现了“学数学、用数学”的基本理念，并让学生体会到数学是解决实际问题的重要工具，增强应用数学的意识. 本次活动归纳了整式加减的方法，很好的突破了本节课的重点和难点，同时丰富了学生对现实空间及图形的认识，建立了初步的空间观念，发展了形象思维.

	长	宽	高
小纸盒	a	b	c
大纸盒	$1.5a$	$2b$	$2c$

续表

问题与情境	师生行为	设计意图
	（2）在列出代数式后，在合并同类项之前，应引导学生如何去掉括号（特别括号前是负号的情况）.	
「活动5」 问题 计算： (1) $(5a+4c+7b)+(5c+3b+6a)$ (2) $(8xy-x^2+y^2)-(x^2-y^2+8xy)$ (3) $(2x^2-0.5+3x)-4(x-x^2+0.5)$ (4) $3x^2-[7x-(4x-3)-2x^2]$	独立完成整式加减的计算. 教师展示学生计算的成果，并对学生在计算过程中出现的错误给予点评. 本次活动教师应重点关注： （1）学生能否独立完成计算，并计算正确； （2）学生书写格式、结果是否规范.	强化整式的加减运算，培养学生的运算能力.
「活动6」 问题 本节课你学到了什么知识？有什么认识？ 课后作业： 教科书166页练习第1、2题；教科书167页第7题.	学生小结，教师倾听. 本次活动中教师应重点关注： （1）梳理本节课的知识框架； （2）引导学生谈谈整式加减与有理数加减之间的联系； （3）学生再谈认识是对不同方面的感受，教师应充分鼓励和肯定. 学生课后独立完成. 教师批改，作好教后记载. 本次活动中教师应重点关注： （1）不同层次的学生对知识掌握的程度； （2）学生对实际问题的解题能力.	调动学生的主动参与意识，让学生感受到集体合作的重要性，发言的学生为“出彩”，必定会吸收组内他人的意见，让学生学会了与人合作，并能与他人交流思维的过程和结果. 初步形成评价与反思的意识. 及时反馈学生学习的效果便于进行课堂教学的优化. 学生通过独立思考，完成课后作业，便于发现问题，及时查缺补漏.

教学设计说明

本节课的教学内容是整式的加减（第1课时），是在学习了整式的有关概念后的一节课. 整式的加减是整式的运算、因式分解、解一元二次方程以及函数的基础，是“数”向“式”的正式过渡，它具有十分重要的地位.

根据教材内容的特点，将整式的加减划分为两课时，第1课时主要学习整式的加减的方法，学生学会整式加减计算的基本技能；第2课时主要学习整式加减的初步应用.

本节课首先利用情景问题帮助学生复习七年级（上）在一元一次方程中“合并”的方法，通过猜想探究，形成同类项的概念和理解合并同类项的方法. 在这个教学活动中，为了让学生理解同类项的概念，设计了一个开放性的问题：“你能写出两个项是同类项的例子吗?”；为了让学生掌握

合并同类项的方法，设计了一个判断计算的结果是否正确的问题，让学生理解只有同类项才能合并．然后结合教材中例1的实际问题（求两个长方体用料的和、差），学生从实际问题中抽象出数量关系，通过解决问题，归纳整式加减的方法．最后设计了整式的加减的计算题，使学生熟练掌握去括号（特别是括号前是负号）的方法，培养了学生整式加减的运算能力．为了突出教学的重点、突破教学的难点，学生将采取合作探究的学习方式开展活动，通过观察学具和借助多媒体演示，让学生分析问题并解决问题．

15.5.2　公式法（第1课时）

教学任务分析

教学目标	知识技能	1. 掌握用平方差公式分解因式的方法． 2. 掌握提公因式法、平方差公式分解因式的综合运用．
	数学思考	1. 经历探究分解因式方法的过程，体会整式乘法与分解因式之间的联系． 2. 通过乘法公式：$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$的逆向变形，进一步发展观察、归纳、类比、概括等能力，发展有条理地思考及语言表达能力． 3. 通过活动4，将高次偶数指数向2次指数的转化，培养学生的化归思想．
	解决问题	1. 通过活动1，发现并归纳出因式分解的又一方法：逆用整式乘法的平方差公式，得到$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$． 2. 通过活动4，让学生自己发现问题，提出问题、然后解决问题，体会在解决问题的过程中与他人合作的重要性．
	情感态度	1. 通过探究平方差公式，让学生获得成功的体验，锻炼克服困难的意志，建立自信心． 2. 在探究平方差公式和运用平方差公式分解因式的活动中，敢于发表自己的观点，并尊重与理解他人的见解，能从交流中获益．
重点	运用平方差公式分解因式．	
难点	平方差公式的推导及高次指数的转化、两种因式分解方法（提公因式法、平方差公式）的灵活运用．	

教学流程安排

活动流程图	活动的内容和目的
活动1　探究分解因式的平方差公式：$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$	由实例出发，分析结构特征，寻求整式乘法公式$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$与实例的联系．通过逆用得到因式分解的平方差公式：$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$，再来解决实例．
活动2　认识用平方差公式分解因式的结构条件	通过练习，判断能否运用平方差公式分解因式，认识了平方差公式分解因式的结构条件．
活动3　运用平方差公式分解因式	通过观察，灵活地对具有平方差结构的变式分解因式．

续表

活动流程图	活动的内容和目的
活动4　进一步运用平方差公式、提公因式法分解因式.	通过观察、讨论、探究等环节，分解较复杂的多项式.
活动5　练习	在练习中强化因式分解的能力，提高因式分解的准确性、灵活性.
活动6　评价与反思、布置作业	反思、自我评价、总结.

教学过程设计

问题与情境	师生行为	设计意图
「活动1」 问题 (1) 你能将多项式 x^2-4 与多项式 y^2-25 分解因式吗?	学生尝试用提公因式的方法分解因式. 经过观察，发现每个多项式中没有公因式可提，不能用提公因式的方法分解因式.	通过设置情景问题，引导学生尝试用提公因式的方法分解因式，发现不能将其因式分解，这样就大大激发了学生的求知欲望和好奇心.
(2) 这两个多项式有什么共同的特点?	教师深入小组，倾听学生的交流，在学生经过交流明确不能用提公因式法分解因式后，引导学生观察这两个多项式的特征. 学生经过观察、类比，得到这两个多项式都可以写成两个数的平方差的形式.	让学生充分经历观察、类比、归纳、概括的过程，探究出将乘法公式逆用就能解决问题，再来归纳出分解因式的平方差公式. 发展了学生的逆向思维和分析能力和推理能力，增强了学生的符号感，发展了学生有条理地思考的能力.
(3) 能利用整式的乘法公式——平方差公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 来解决这个问题吗?	将 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 反过来就得到分解因式的平方差公式：$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$，这样就可以分解因式了.	
	本次活动中，教师应重点关注： (1) 让学生充分经历探究分解因式方法的过程，让学生感受整式乘法与因式分解之间的这种逆向恒等变形的价值； (2) 学生在观察 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 时，经过讨论、交流、探究，是否能将它逆用（反过来），并用符号将其表示成 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$. 这是这个活动的关键，应让学生有一个自主交流、探索的时间和空间.	让学生体会到了数学知识之间的整体（整式乘法与因式分解）联系，体现了“实践——理论——实践”的认知规律.
「活动2」 问题 下列多项式能否用平方差公式来分解因式? 为什么? (1) x^2+y^2	学生独立思考，自主完成练习. 教师给予评讲.	在学习了用平方差公式分解因式之后，再通过观察与平方差公式结构类似的几个变式，判断

续表

问题与情境	师生行为	设计意图
(2) x^2-y^2 (3) $-x^2+y^2$ (4) $-x^2-y^2$ (5) x^2-2	本次活动中，教师应重点关注： (1) 让学生注意观察每一个多项式是否具备了用平方差公式分解因式的特征； (2) 教师应组织学生归纳运用平方差公式进行因式分解的条件.	能否运用平方差公式进行分解因式，达到检验、巩固和学以致用的目的，培养了学生有条理思考及语言表达能力. 有助于让学生注意到运用平方差公式进行分解因式的前提条件，以便为下一步较灵活的因式分解作好准备.
「**探究3**」 问题 例3 分解因式 (1) $4y^2-9$ (2) $(x+p)^2-(x+q)^2$	学生尝试运用平方差公式 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ 分解因式. 教师组织学生观察多项式的结构特征，引导学生分析每一项的转化方法. 在(2)中，鼓励学生思考，尝试用多种方法来分解因式，如：可将 $(x+p)$ 和 $(x+q)$ 看作一个整体，运用平方差公式进行分解因式；也可以用换元的方法将多项式转化为 m^2-n^2，再分解因式为 $(m+n)(m-n)$，最后还原成 $(2x+p+q)(p-q)$. 教师作规范的分解因式的板书示例. 本次活动中，教师应重点关注： (1) 鼓励学生用多种方法分解因式； (2) 让学生学会因式分解的规范格式.	通过例3的教学，进一步巩固平方差公式分解因式的应用，培养学生符号运算的能力，进一步培养学生逆向思维和勤于观察的习惯，体现了本节课的重点. 在(2)中有意识地注重学生尝试从不同角度寻求因式分解的方法，并通过对因式分解方法的反思，评价两种方法的差异，获得因式分解的经验.
「**探究4**」 问题 例4 分解因式 (1) x^4-y^4 (2) a^3b-ab	学生开展分组活动，组内交流、讨论. 教师请各小组总结在每个小题分解因式的过程中遇到的问题. 教师设计下列三个问题供学生思考和讨论： (1) 如何处理指数为4次的二项式？ (2) 将 x^4-y^4 分解为 $(x^2+y^2)(x^2-y^2)$ 就可以了吗？ (3) 将 a^3b-ab 分解因式能直接运用平方差公式吗？ 围绕这些问题，教师有层次性的组织全班开展讨论，并请思考成熟的学生发言，阐述自己解决问题的方法. 教师及时给予	通过(1)小题的教学，意图是让学生探究出运用幂的乘方逆运算将4次指数“降”为2次指数，从而转化成两数平方差的形式，进一步培养了学生的数感，在进行了一次平方差公式因式分解后，还可以继续运用平方差公式进行二次因式分解. 此例很好的解决了“分解因式，必须进行到每一个多项式都不能再分解为止”的要求，也突破了本节课的难点之一.

续表

问题与情境	师生行为	设计意图
	鼓励和肯定，并最终形成解决上述问题的方法. 本次活动中，教师应重点关注： (1) 对一些变式应组织学生观察结构，找出其结构特征，再运用公式. 教师不能替代学生的观察，不能急于给出因式分解的结果，要让学生独立思考，通过自主探究、合作交流，从而寻找到分解因式的方法； (2) 学生在分组活动中，是否也有意识地提出上述三个问题，若不能提出，应适时引导； (3) 将例 4 解决好后，应组织学生谈谈本次活动的感受，做好评价和反思.	在(2)小题中，初步体现了将前面所学到的因式分解的方法和新学的方法有机的、灵活的运用，意在传递给学生这样一个信息：分解因式的方法不是孤立的，而是可以在一起综合应用的. 这样让学生初步意识到知识承上启下的关联作用.
「**活动 5**」 问题 分解因式： (1) $a^2-0.04b^2$ (2) $9a^2-4b^2$ (3) x^2y-4y (4) $-a^4+16$	学生独立完成计算. 教师加以指导，并展示学生成果. 本次活动中教师应重点关注： (1) 计算的准确性、熟练性、灵活性； (2) 分解因式表达、结果的规范的格式.	进一步的综合应用，让学生更加熟练、准确，起到强化、巩固的作用. 初步发展学生综合运用的能力.
「**活动 6**」 问题 本节课你学到了什么知识？有什么认识？ 课后作业： 教科书第 200 页复习巩固第 2 题、综合运用第 4 题(2)小题、教材 201 页第 7 题.	学生反思，教师倾听. 本次活动中，教师应重点关注： (1) 不同层次的学生对本节课的认识程度； (2) 学生再谈感受是对不同方面的总结和反思. 学生独立完成. 教师批改、总结. 本次活动中，教师应重点关注： (1) 考察不同层次的学生对因式分解的掌握程度，应有针对性地分析与点评； (2) 作业中的实际应用问题学生的解题情况.	及时反思，便于学生将数学知识体系化，同时从能力、情感态度等方面关注学生对课堂的整体感受. 及时了解学生用平方差公式分解因式的熟练性、准确性，便于调整教学安排. 通过独立作业，学生自我评价学习效果和及时反思. 发现问题可以通过阅读教材、上网查找资料或与教师探讨交流从而解决问题.

教学设计说明

本节课是运用提公因式法分解因式后公式法的第1课时——用平方差公式法分解因式. 它是整式乘法的平方差公式的逆用，它是解高次方程的基础，在教材中具有重要的地位.

本节课首先在情景问题中，学生尝试用提公因式法分解多项式 x^2-4 与 y^2-25，在遇到困难后，引导学生分析多项式的结构特征，通过观察、交流，学生探究出可以逆用整式的乘法公式——平方差公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 得到 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$，从而解决问题. 为了让学生理解用平方差因式分解的条件，设计了一个问题："下列多项式能否用平方差公式来分解因式？为什么？"，让学生理解等式的左边必须具备平方差的前提条件. 然后让学生运用平方差公式分解因式，在这里设计了两个例题和一次学生练习. 这两个例题在层次性上、涉及到的因式分解的方法上各有区别，第1个例题着重在 a，b 上的变式，第2个例题着重在字母指数上的变式，同时还涉及到了多种方法（提公因式法、平方差法）的综合运用以及因式分解的结果应注意到的问题等. 在处理这段教材时，没有特意的加深、加宽，努力遵循编者的意图，把握教材，吃透教材. 学生练习意在进一步的综合应用，让学生更加熟练、准确，起到强化、巩固的作用，初步发展学生综合运用的能力.

数学活动——计算中的规律

教学任务分析

教学目标	知识技能	1. 巩固有理数的运算，巩固整式的乘法和因式分解运算. 2. 通过对实际问题的探索，培养学生的计算能力、语言表达能力、探究能力. 3. 积累数学活动经验.
	数学思考	1. 通过计算、观察、猜想等环节，得到问题所反映的一般规律，培养学生的数感和符号感. 2. 通过利用数学知识论证猜想出的结论，培养学生合情推理能力和初步的演绎推理能力，并让学生能有条理地、清晰地阐述自己的观点.
	解决问题	1. 在探究的过程中能发现问题、并尝试运用整式的有关知识去解决问题. 2. 能用字母、代数式、等式等清楚地表达解决问题的过程，并解释结果的合理性.
	情感态度	1. 通过观察、探究5个等式所反映的规律，培养学生合作交流的意识和探索精神. 2. 通过解释猜想的规律，体验数学活动充满着探索性和创造性，感受证明的必要性、证明过程的严谨性以及结论的确定性.
重点	巩固因式分解和整式的乘法运算，积累数学活动经验.	
难点	根据结果得到数学猜想，并利用数学知识证明.	

教学流程安排

活动流程图	活动的内容和目的
活动 1　口算游戏	引入活动主题.
活动 2　计算、观察、猜想等式中存在的规律	由计算 5 个特定的算式出发，观察等式左右两边的特征，猜想结果的规律.
活动 3　运用学到的数学知识解释猜想的规律	运用从特殊到一般的方法，抽象出数学模型，从理论上解释规律形成的原因.
活动 4　运用探究出的规律应用	运用探究出的规律简便计算.
活动 5　小结、布置作业	评价与反思.

教学过程设计

问题与情境	师生行为	设计意图
「活动 1」 问题 游戏：你能口算出翻开的式子的结果吗？ $5^2=$　$53\times57=$ $15^2=$　$38\times32=$ $25^2=$　$84\times86=$ $65^2=$　$71\times79=$ （表中各数在没有翻开之前都是被遮住的）	教师组织游戏活动，学生口算. 本次活动中，教师应重点关注： 学生一般只会计算较小的数的平方（如：5，15，25），对于较大的数一般都不会口算.	创设情景问题，激发学生的好奇心和求知欲望.
「活动 2」 问题 （1）计算下列各式的值. 53×57 38×32 84×86 71×79 65^2 （2）观察下列各式： $53\times57=3\ 021$ $38\times32=1\ 216$ $84\times86=7\ 224$ $71\times79=5\ 609$ $65^2=65\times65=4\ 225$	学生计算（可以用计算器），并展示计算的结果. 学生独立观察，并在小组内交流各人观察的结果，并通过不同的学生逐步完善发现的规律. 教师深入小组，倾听学生交流，鼓励	通过计算，让学生经历求值的过程，目的是让学生对之有一个感性的认识，学生在后面找到规律后，会反思直接计算的烦琐、简便计算的便捷. 学生观察等式左边的结构特征是寻求规律的基础和前提. 让学生充分经历观察的过程，感受等式左边的结构特征，体验寻求结构特征的乐趣，便于学生及早发现规律，为后续规律的形成作

续表

问题与情境	师生行为	设计意图
①等式左边有什么特征？ ②每个等式右边的结果和左边的因数有什么联系？ （可以将你发现的规律用语言文字表示.） 左边：_____ _____. 右边：_____ _____. ③猜想：请根据小组观察的结果，猜想上述各式所反映的一般规律. _____ _____. （用数学的式子表示）	学生用自己的观点将发现的规律展示出来. 小组的中心发言人汇报各小组观察和猜想的结果. 本次活动中，教师应重点关注： (1) 学生观察 5 个等式左边的结构特征是整个活动的基础和前提，一定要让学生观察透彻，不能含糊不清； (2) 学生在观察等式右边的特征时，是否有意识、有计划地分两部分观察； (3) 学生应有一段宽松的时间，观察和猜想出的规律应让学生尝试用语言和数学的式子表达清楚； (4) 应注意总结各小组不同猜想的结果. 如有的小组猜想的规律是 $(10a+b)(10a+c)=100a(a+1)+bc$；有的小组猜想的规律是 $(10a+b)(10a+10-b)=100a(a+1)+b(10-b)$；有的小组猜想的规律是 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.	好准备. 等式右边的规律分两部分，通过类比、观察才能得到，这是有一定难度的，在活动的过程中，设计了让学生观察、类比、思考、组内交流等环节，体现了以学生为主体，尊重学生的认知规律的基本思想. 让学生有条理地、清晰地阐述了自己的观点，培养了学生的语言表达能力. 由观察的结果猜想一般的规律，是学生思维质的飞跃的过程，是学生再创造的过程. 让学生在活动中寻求猜想，大大激发了学生的好奇心和求知欲望.
「**活动 3**」 问题 你能用本章所学知识解释这个规律吗？	学生独立思考，尝试证明. 教师深入小组，解答学生疑问，指导学生探究. 组织学生展示解释的过程，并对学生不同的方法作简要点评. 本次活动中，教师应重点关注： (1) 活动 3 的问题比较开放，应在学生思考无果的情况下适当引导； (2) 不同学生有不同的解释规律的方法. 如有的小组从左边往右边证明，有的小组从右边往左边证明，教师应及时发现并作点评； (3) 学生克服困难的信心和勇气及和他人合作交流的意识.	首先明确猜想的规律只是一个猜想，还须运用数学知识进一步去验证，让学生感受到了数学的严谨性和证明的必要性. 在解释规律的知识储备上，学生要具有表示两位数的方法、多项式乘以多项式的乘法运算技能以及分解因式的技能，这需要学生具有一定的计算能力和分析能力. 学生在理论上解释猜想的规律后，会反思规律形成的条件和解释规律的方法，并感受到了证明的必要性、证明过程的严谨性以及结论的确定性. 在整个探究的过程中，学生始终围绕如何去解决问题开展探究，培养了学生克服困难的信心和勇气及与他人合作交流的精神.

续表

问题与情境	师生行为	设计意图
「**活动4**」 问题 （1）你能运用上述规律口算下列各式的结果吗？ 58×52　63×67 41×49　21×29 72×76　14×16 75^2　95^2 （2）小组挑战游戏. 游戏规则：两个小组各派一名代表，A出题，B口算，再B出题A口算，不能出题或口算错误为输.	学生运用探究出的规律口算. 教师组织学生开展口算比赛. 本次活动中，教师应重点关注： （1）学生是否能观察出要口算的每个式子都具备规律的结构前提，（如72×76就不具备结构特征）并熟练地运用规律直接说出结果； （2）让学生感受到口算的理论根据，体验运用规律计算的便捷.	进一步认识运用规律计算的正确性和便捷，起到了巩固和提高的作用，并通过口算和小组挑战游戏，使学生获得成功的体验. 设计14×16、21×29的意图是让学生考虑到一些特殊的情况（如：千位或十位上空0的情况）. 小组挑战游戏可以帮助学生理解运用规律的前提，加强对规律形成条件的认识，并灵活运用规律口算，同时调节了课堂气氛，形成活动的高潮.
「**活动5**」 问题 本节课你学到了什么知识？有什么感受？ 作业： 计算下列各式的值，你发现了什么规律？ 你能解释这个规律吗？（学有余力的学生完成） 102×108 203×207 305^2	学生反思本次活动中学到的知识，总结活动中的经验，并谈谈活动中的感受. 教师倾听学生小结本次活动中学到的知识和感受，及时给予肯定和鼓励. 本次活动中，教师应重点关注： （1）学生小结时，能否感受到本节课的学习目的并不是要学会速算，而是通过观察、猜想，学会发现问题，通过探究、合作，找到解决问题的方法； （2）学生的小结和感受应注意倾听和肯定. 学生独立完成，教师批改、总结. 本次活动中，教师应重点关注： （1）学生能否完成猜想和证明； （2）对学生在作业中存在的问题，应有针对性地评讲.	小结和反思，尊重学生的个体差异，激发了学生主动参与意识，为每个学生都创造了在数学活动中获得活动经验的机会. 及时了解学生学习的效果，通过课后作业，学生可以自我评价学习的效果，学会反思，学会总结，积累活动经验.

教学设计说明

这个数学活动的主要内容是通过计算，观察几个特殊等式的特征，猜想规律，然后再利用所学的数学知识解释发现的规律. 活动涵盖的数学知识有整式的加减、整式的乘法和因式分解等内容. 在活动形式上，采用了小组合作学习的方式，通过活动形式的整合，如小组合作学习和个别学习来贯穿整个活动. 在学生的学习方式上，采用了探究式学习来组织活动的开展.

在这节课的情景问题的创设上，设计了一个口算游戏来引入活动，激发学生的好奇心和求知欲望. 在猜想探究中设计了猜想等式所反映的一般规律的活动环节. 为了解决上述问题，设计了 3 个探究问题：①等式左边有什么特征？②每个等式右边的结果和左边的因数有什么联系？③猜想：请根据小组观察的结果，猜想上述各式所反映的一般规律. 在探究证明中设计了学生解释猜想的规律的活动环节. 解释猜想的规律涉及到代数的推理证明. 解释规律的方法很多，可以从左边往右边证，也可以从右边往左边证，教师要注重启发和引导. 猜想规律是本节课的重点，解释规律的过程是本节课的重点和难点，口算和计算（或用计算器）的环节不应作为活动的重点，他的作用应只是知识的一个载体.

V 拓展资源

一、知识的拓广延伸及相关史料

1. 关于代数的历史知识

“代数学”一词译自英文 algebra，它又源于同形式的拉丁文，是由阿拉伯文 al-jabr 演变而来的. 代数学现已是数学中的一个重要的、基础的分支. 随着人类社会的进步以及生产和科学技术的发展，这门历史悠久的数学分支在研究对象和方法上经历了重大变化，初等代数学（或古典代数学）是更为古老的算术问题的推广和发展，在初等的意义下，代数学是指通过用字母、而不是用数字来代表一般的数，以研究数的性质和运算的数学分支；抽象代数学（也称近世代数学）则是在初等代数学的基础上，于二十世纪形成的、以研究各种代数结构为中心的一门学问. 在我国中学里学习的代数，实际上是包括除立体几何、解析几何以外的其他知识的一个综合科目，其中除属于初等代数学范畴的数的运算、式的变形、解方程等以外，还包括函数、概率等内容.

早在距今约三千八百年前的古埃及和古巴比伦的数学史料中，已经有了代数的萌芽. 到了公元三世纪，代数在古希腊获得显著的发展，其代表人物是被誉为代数学鼻祖的丢番图. 他在其著作《算术》一书中，讲了数的理论，包括符号运算法则，二次方程、特殊三次方程和不定方程的解法等，其中只求整数解的整系数方程被后人称为“丢番图方程”.

在这之后，印度的代数有了很大发展. 从公元七世纪的数学家婆罗摩笈多创立表示量的概念和描述运算的一套符号，到 12 世纪婆什迦罗提出负平方根的概念、研究无理方程的解法和无理数的运算法则，把代数学的研究推向了新的阶段.

与此同时，阿拉伯地区的代数研究也在迅速崛起. 其中突出的代表作是著名学者花拉子米发表于公元 820 年左右的《代数学》，该书第一次提出了这门学科的名称，讨论了一元二次方程的一般解法，论述了解方程的具体过程及其几何解释. 另一数学家奥马·海亚姆在其约 1079 年发表的

《代数学》中，较详尽地讨论了三次方程的求解问题.

古代印度和阿拉伯的数学进展把代数提高到与几何并驾齐驱的地位，促进了数学的深入发展.

代数学在中国历史悠久，不仅在中国数学中占优势地位，在早期的世界数学中也独树一帜，我国最早在方程中引入负数概念，在约公元前一世纪的《九章算术》中即有负系数表示的方程，规定了负数表示的方法，指出了负数的实际意义. 相比之下，印度七世纪才认识到负数的存在，而欧洲直到十六世纪还未对负数作出正确解释. 在《九章算术》中，巧妙使用了“盈不足术”来解决一些特殊类型的方程难题，用欧洲十七世纪才提出的分离系数法和消元法解线性方程组，并提出了世界最早的不定方程问题——“五家共井”问题. 《孙子算经》创立的“孙子定理”，以及宋代形成的“大衍求一术”，被公认为“中国剩余定理”，是解决一次同余式问题的方法，这是世界数学史上的光辉成就. 北宋沈括（1031～1095）的“隙积术”与十三世纪杨辉、朱世杰等人的“垛积招差术”，给出了某类级数求和的一般法则，其中包括西方十七世纪才出现的“帕斯卡三角形”和“有限差分公式”. 十三世纪中叶数学家李冶（1192～1279 年）提出一种布列求解一元高次方程的一般方法“天元术”，后又被朱世杰在十四世纪推广到二元、三元和四元的高次联立方程组，名曰“四元术”，录于《四元玉鉴》（1303 年）之中. 这项惊人的成果，使中国的古代数学达到了新的高峰.

代数方程在理论上的进一步发展是在十六世纪初的意大利，一些数学家建立了虚数理论，并解决了二、三、四次代数方程的公式求解问题. 法国数学家韦达在 1591 年出版的《分析方法引论》中建立了抽象代数的符号，发现了方程的根与系数的关系. 在探讨高次方程的求解理论时，德国大数学家高斯提出并证明了代数基本定理，从而明确了一般 n 次方程 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0=0$ $(a_n\neq0)$有且仅有 n 个根. 法国的数学家伽罗瓦于 1831 年引入代换群，彻底解决了五次以上代数方程的根号解的条件问题，并开辟了一个崭新的研究领域——群论，这标志着代数学从研究方程理论转向研究代数结构本身，使以研究各种代数结构为中心的抽象代数学得到很大的发展. 现在，代数学的研究对象包括数、向量、矩阵等在内的各种代数系统，形成了群论、环论、伽罗瓦理论、线性代数等多个分支，并与其他数学分支结合，产生了代数几何、代数数论、代数拓扑等新的数学分支.

2. 用分离系数法进行整式加减

整式加减可以归结为合并同类项，而合并同类项实际上就是合并各同类项的系数. 如果把两个或几个整式按同一字母降幂排列，凡是缺项则留出空位或添零，同时各同类项对齐，就可以列竖式进行加减法运算了. 如计算：$(3y^3-5y^2-6)+(y-2+3y^2)$

$$\begin{array}{rr} & 3y^3-5y^2\quad\ -6 \\ +) & \quad 3y^2+y\ -2 \\ \hline & 3y^3-2y^2+y\ -8 \end{array}$$

参加加减运算的整式都按同一字母降幂排列后，各项排列的位置表示它们所含字母的幂的次数. 我们可以不再写出字母及其指数，只写出系数，计算出结果后，再把字母和相应的指数补上去，从而使计算过程简化，这种方法叫做分离系数法. 用分离系数法，上题的计算过程可以简化为：

$$\begin{array}{rr} & 3-5+0-6 \\ +) & \quad 0+3+1-2 \\ \hline & 3-2+1-8 \end{array}$$

所以$(3y^3-5y^2-6)+(y-2+3y^2)=3y^3-2y^2+y-8$.

3. 乘法公式与矩形面积的关系的探究

对于乘法公式和矩形（或正方形）的面积之间的关系，可以通过开展一个数学活动来探究. 如：准备多个长方形和正方形卡片（如图 1）.

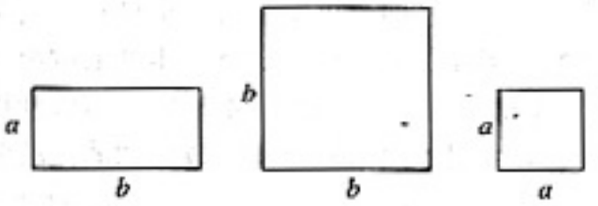


图 1

（1）教师任意写出一个关于 a 和 b 的二次式，此二次式需能分解成两个一次因式的乘积，且各项系数都是正整数，如 $a^2+2ab+b^2$，$a^2+4ab+4b^2$，b^2-a^2，$4b^2-a^2$ 等；

（2）学生根据教师给出的二次式，选取相应种类和数量的卡片，尝试拼成一个矩形；

（3）讨论该矩形的代数意义；

（4）由学生随意选取适当种类和数量的卡片，拼接成不同尺寸的矩形，回答该矩形表达的代数公式.（乘法公式除了课本上介绍的平方差公式、完全平方公式外，还有立方差(和)公式：$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$，$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$，在新教材中已经不要求学生掌握.）

4. 多项式除以多项式

多项式除以多项式的一般步骤：

多项式除以多项式，一般用竖式进行演算.

（1）把被除式、除式按某个字母作降幂排列，并把所缺的项用零补齐.

（2）用除式的第一项去除被除式的第一项，得商式的第一项.

（3）用商式的第一项去乘除式，把积写在被除式下面（同类项对齐），从被除式中减去这个积.

（4）把减得的差当作新的被除式，再按照上面的方法继续演算，直到余式为零或余式 的次数低于除式的次数时为止.

被除式＝除式×商式＋余式

如果一个多项式除以另一个多项式，余式为零，就说这个多项式能被另一个多项式整除.

例：计算$(4+3x^3-7x^2)\div(2+3x)$

$$
\begin{array}{r|l}
3x+2 & x^2-3x+2 \\
\hline
 & 3x^3-7x^2\quad +4 \\
 & 3x^3+2x^2 \\
\hline
 & -9x^2+0 \\
 & -9x^2-6x \\
\hline
 & 6x+4 \\
 & 6x+4 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

∴ $(4+3x^3-7x^2)\div(2+3x)=x^2-3x+2$

5. 我国古代著名的数学家杨辉和贾宪

杨辉，中国南宋时期杰出的数学家和数学教育家. 在 13 世纪中叶活动于苏杭一带，其著作甚多. 他著名的数学书共五种二十一卷. 著有《详解九章算法》十二卷（1261 年）、《日用算法》二卷（1262 年）、《乘除通变本末》三卷（1274 年）、《田亩比类乘除算法》二卷（1275 年）、《续古摘奇算法》二卷（1275 年）. 杨辉的数学研究与教育工作的重点是在计算技术方面，他对筹算乘除捷

算法进行总结和发展，有的还编成了歌诀，如九九口诀．他在《续古摘奇算法》中介绍了各种形式的“纵横图”及有关的构造方法，同时“垛积术”是杨辉继沈括“隙积术”后，关于高阶等差级数的研究．杨辉在“纂类”中，将《九章算术》246个题目按解题方法由浅入深的顺序，重新分为乘除、分率、合率、互换、二衰分、叠积、盈不足、方程、勾股等九类．他非常重视数学教育的普及和发展，在《算法通变本末》中，杨辉为初学者制订的“习算纲目”是中国数学教育史上的重要文献．



贾宪，中国古代北宋时期杰出的数学家．曾撰写的《黄帝九章算法细草》（九卷）和《算法敦古集》（二卷）（敦 xiào，意：数导）均已失传．他的主要贡献是创造了“贾宪三角”和增乘开方法，增乘开方法即求高次幂的正根法．目前中学数学中的混合除法，其原理和程序均与此相仿，增乘开方法比传统的方法整齐简捷、又更程序化，所以在开高次方时，尤其显出它的优越性，这个方法的提出要比欧洲数学家霍纳的结论早七百多年．贾宪最著名的数学成就，是他创制了一幅数字图式，即“开方作法本源图”．由于史书没有贾宪的传记，所以我们今天对这位数学家的生平事迹已经无法搞清楚了．只知道他曾经当过宋代“左班殿直”的小官，是当时天文数学家楚衍的学生．南宋数学家杨辉在他的书中引述了贾宪的许多数学思想资料，才使人们今天得以了解贾宪在数学上的重大贡献．

杨辉三角形是中国北宋数学家贾宪（约1050年）首先发现的．南宋数学家杨辉在《详解九章算法》（1261年）一书中对此曾有记载．法国数学家帕斯卡在1654年也发现了这个三角形，故西方称之为帕斯卡三角形．按最早发现的时间，实应称贾宪三角形．

参考资料

【1】刘健飞，张正齐．数学五千年，晓园出版社．

【2】http://www.mathsedu.net/shen/shiliao/stories/story12.htm

6．法国数学家帕斯卡

帕斯卡（1623—1662年）是法国数学家、物理学家和哲学家．16岁的时候就发现了著名的“帕斯卡定理”，即“圆锥曲线内接六边形的三组对边的交点共线”，对射影几何学作出了重要贡献．19岁时，发明了一种能做加法和减法运算的计算器，这是世界上第一台机械式的计算机．他对连续不可分量、微分三角形、面积和重心等问题的深入研究，对微积分学的建立起到了积极的作用．帕斯卡对数学的最大贡献是创立概率论，为了解决概率论和组合分析方面的问题，帕斯卡广泛应用了算术三角形（即二项式定理系数表，西方称帕斯卡三角，我国称贾宪三角或杨辉三角），并深入研究了二项展开式的系数规律以及这个三角形的构造及其许多有趣的性质．帕斯卡在物理学方面提出了重要的“帕斯卡定律”．他所著《思想录》和《致乡人书》对法国散文的发展产生了重要的影响．二项式定理：

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b^1 + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \cdots + C_n^r a^{n-r}b^r$$

$$+ \cdots + C_n^n b^n = \sum_{r=0}^{n} C_n^r a^{n-r}b^r (n \in \mathbf{N}^*)$$

参考资料

【1】http://vip.6to23.com/chinajunxiu/mathjgs.htm

7. 因式分解的概念

(1) 什么叫做一个多项式的因式？如果多项式 A 能被多项式 B 整除（$B\neq 0$），也就是说存在一个多项式 C，使等式 $A=B\times C$ 成立，那么多项式 B、C 就叫做多项式 A 的因式.

如果一个多项式 A 是在给定的数域上研究的，并且 d 是这个数域上的一个不等于零的数，那么 $A=d\left(\frac{1}{d}\times A\right)$. 这就是说，在给定的数域上，每个不等于零的数 d，以及每一个与给定的多项式 A 只差一个非零数字因数的多项式，都是多项式 A 的因式. 这些因式叫做多项式 A 的当然因式；多项式 A 的一切其他因式叫做非当然因式.

如果一个次数大于零的多项式在给定的数域上只有当然因式，就说这个多项式在这个数域上是既约的. 例如 $a+b$，$a-b$，a^2+b^2 等在有理数域上是既约的.

(2) 因式分解的定义. 把一个多项式化成几个既约多项式的积的形式，叫做因式分解. 因式分解要求达到以下两个标准：

①因式必须都是既约多项式，也就是当分解得到的因式还能分解时，就要继续分解下去，直到每一个因式都不能再分解为止.

这里，一个多项式是否既约，与在什么数域上讨论有关. 例如：在有理数范围内 a^2-3 多项式是既约的，而在实数范围内不是既约的，因为它能分解为 $(a+\sqrt{3})(a-\sqrt{3})$；a^2+3 在有理数、实数范围内都是既约的，但在复数范围内不是既约的，因为它能分解为 $(a+\mathrm{i}\sqrt{3})(a-\mathrm{i}\sqrt{3})$.

②各因式必须是多项式. 由于我们可以把单项式看成是多项式的特殊情况，所以有的因式也可以是单项式. 例如 $3x^2+6xy-12x=3x(x+2y-4)$，$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ 等都是符合要求的，但是像 $a^2-b^2=(a+b)^2\times\frac{a-b}{a+b}$ 或 $a^2-b^2=(a+b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ 等都不符合要求，因为上述二式中有的因式已经不是多项式了.

当我们把 $6x^2+13x+6$ 分解因式时，可以写成如下各种形式：

$$6x^2+13x+6=6\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)$$

$$6x^2+13x+6=(2x+3)(3x+2)$$

$$6x^2+13x+6=-3(-2x-3)\left(x+\frac{2}{3}\right)$$

……

这些等式右边的每一个因式都是既约多项式，但这些不同形式的因式分解中的既约多项式或者对应相等，或者只相差数字因数，一般认为这样的分解结果是相同的. 从这个意义上讲，尽管把一个多项式分解因式的方法不同，但在同一个数域上化为既约因式以后，结果是唯一的.

二、拓展性问题

1. 整式的乘法运算性质的逆用

在整式乘除运算中，有的运用幂的运算性质运算，有的运用乘除法公式运算，一般都是直接套用公式计算，但有一部分习题如果直接运用公式计算非常繁琐. 如果把公式反过来使用，就会化繁为简、化难为易. 能在幂的运算性质教学中培养学生的逆向思维. 如：$a^{m+n}=a^m a^n$，$a^{mn}=(a^m)^n=(a^n)^m$，$a^n b^n=(ab)^n$.

(1) 同底数幂乘法与同底数幂除法互为逆运算.

① $a^n b^2$ 的积为 $3a^{2n+1}b^{2n+1}$ 的单项式是____.

【答案与提示】 已知积和其中一个因式，求另一个因式，这时可利用乘法与除法的互逆来解答.

② 已知 $2^a=3$，$2^b=5$，求 2^{a+b}.

【答案与提示】 本题如果想先求出 a、b 的值，再代入 2^{a+b} 中求值，是很难办到的，八年级学生无法进行，但若将同底数幂乘法的性质反过来用，就得到 $2^{a+b}=2^a\cdot 2^b$，这样问题就迎刃而解了.

(2) 积的乘方与同底数幂的乘法性质的逆用. 计算：$(-3)^{2003}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{2004}$

【答案与提示】 观察两个幂的底数，它们互为负倒数关系，可以联想到将积的乘方的性质逆用. 因为幂指数不一样，可以逆用同底数幂乘法性质先将 $\left(\frac{1}{3}\right)^{2004}$ 转化为 $\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{2003}$，问题就解决了. 如 $(-3)^{2003}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{2004}=(-3)^{2003}\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{2003}=\left[(-3)^{2003}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{2003}\right]\times\frac{1}{3}=\left[(-3)\times\left(\frac{1}{3}\right)\right]^{2003}\times\frac{1}{3}=(-1)^{2003}\times\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$

(3) 幂的乘方性质逆用. ①比较大小：2^{33}____3^{22}. ②已知 $2^m=a$，$32^n=b$，求 2^{3m+10n}.

【答案与提示】 ①直接计算不太方便，逆用幂的乘方性质将 2^{33} 和 3^{22} 分别转化为 $(2^3)^{11}$ 和 $(3^2)^{11}$ 就很方便比较了. ②逆用同底数幂的乘法性质和幂的乘方的性质，将 2^{3m+10n} 化为 $2^{3m}\times 2^{10n}=(2^m)^3\times[(32)^n]^2=a^3b^2$.

2. 新婚夫妻买餐具

一对夫妻都喜欢吃西餐，所以他们决定去定购成套的西式餐具.

他们到了一家店里，发现身上所带的钱正好可以购买 21 把叉子和 21 把匙，或者 28 把小刀. 不言而喻，刀、叉和匙的个数必须相等，这样才能配套. 这对夫妻都是学数学的，所以，只要略施心算，便立即算出了应采购的刀、叉和匙的数目，并且正好用完了他们身上所带的钱，欢欢喜喜地回家去了.

【答案与提示】 假设 A 为一把叉子和一把匙加在一起的价钱，B 为一把小刀的价钱，C 为这对新婚夫妻身边所带的钱数，则按照题意，我们将得到两个等式：$21A=C$，$28B=C$，于是 $21A=28B$，所以 $3A=4B$. 再设这对夫妻要买 x 把刀，x 把叉和 x 把匙，则 $x(A+B)=C$. 将此式转换为 $x(A+B)=28B$，两端约去公因子 B 之后，便得到 $x=28\times\frac{3}{7}$，所以 $x=12$.

因此，这对夫妻在那家店里正好采购了一打餐具.

3. 用分组分解法分解因式

可以把多项式采用“先部分，后整体”的方法解决. 先分组，分别变形，再进行分解因式的方法叫做分组分解法. 分组分解法一般有两种情况：

等项分组，把多项式分成项数一样多的几组，先在每组中提公因式，再在各组间提公因式. 若多项式的各项系数不都是 1，则分组时项的分法可按系数成比例思考.

按公式或十字相乘分组（一般各组项数不一样多），把多项式按公式或十字相乘分组后分解各组，再提各组间的公因式或按其他方法分解因式.

例：把下列各式分解因式：

(1) $8ax+12ay-10bx-15by$；(2) $ad+bd-ax-ay-bx-by$；(3) $4xy+1-4x^2-y^2$.

【答案与提示】 (1) $8ax+12ay-10bx-15by=(8ax+12ay)-(10bx+15by)$

$=4a(2x+3y)-5b(2x+3y)=(2x+3y)(4a-5b)$.

(2) $ad+bd-ax-ay-bx-by=(ad+bd)-(ax+bx)-(ab+by)=d(a+b)-x(a+b)-y(a+b)$

$=(a+b)(d-x-y)$.

(3) $4xy+1-4x^2-y^2=1-(4x^2-4xy+y^2)=1-(2x+y)^2=(1+2x+y)(1-2x-y)$.

4. 用补项法和折项法分解因式

分解因式：

(1) x^4+4

分析：这是两项式，各项没有公因式，也不能直接运用公式分解因式. 但这个式子的特点是可以变形为平方和的形式，即变形为$(x^2)^2+2^2$，与完全平方式比较，如果添上一项$2\times2x^2$，那么它将变成完全平方式. 但在添上一项$2\times2x^2$后，还需要再减去一项，以保持与原式相等. 而减去的一项，正好是一个单项式的平方，这样就可以通过分组后运用平方差公式的方法进行因式分解.

【答案与提示】 $x^4+4=x^4+4x^2+4-4x^2=(x^4+4x^2+4)-4x^2=(x^2+2)^2-(2x)^2$

$=(x^2+2+2x)(x^2+2-2x)=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$.

(2) $3y^3-4y+1$

分析：把$-4y$这一项拆成$-3y$和$-y$的和，即变形为$-3y-y$的形式，那么就可以通过分组后提公因式的方法分解因式.

【答案与提示】 $3y^3-4y+1=3y^3-3y-y+1=3y(y+1)(y-1)-(y-1)$

$=(y-1)(3y^2+3y-1)$.

5. 用待定系数法分解因式

先设原多项式可以分解为两个多项相乘的形式，其中含备求的待定系数，再将两个多项式相乘，化成与原多项式含有对应项的形式. 然后列方程组，并解这个方程组求出待定系数的值，使问题得到分解的方法，叫做待定系数法分解因式.

例：分解因式 $x^2+xy-2y^2+2x+7y-3$

【答案与提示】 $x^2+xy-2y^2+2x+7y-3$

$=(x+2y+m)(x-y+n)=[(x+2y)+m][(x-y+n)]$

$=(x^2+xy-2y^2)+m(x-y)+n(x+2y)+mn$

$=(x^2+xy-2y^2)+mx-my+nx+2ny+mn$

$=(x^2+xy-2y^2)+(m+n)x+(-m+2n)y+mn$

由对应项的系数，得

$$\begin{cases} m+n=2, \\ -m+2n=7, \\ mn=-3. \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} m=-1, \\ n=3. \end{cases}$$

∴ 原式$=(x+2y-1)(x-y+3)$.

6. $x^2+(p+q)x+pq$ 型式子的因式分解

因为 $x^2+(p+q)x+pq=x^2+px+qx+pq=(x^2+px)+(qx+pq)$

$=x(p+q)+q(x+p)=(x+p)(x+q)$.

故 $x^2+(p+q)x+pq=(x+p)(x+q)$，对于具有类似结构的二次三项式可以运用分解因式.

如分解因式：$x^2+7x+10$；$x^2-10x+24$；$x^2-6x+y^2+6y-2xy+5$；

$x^2+7x+10=(x+2)(x+5)$；$x^2-10x+24=(x-4)(x-6)$.

对于 $x^2-6x+y^2+6y-2xy+5$，分解因式的方法应把它看成关于某一个字母的二次三项式，

再运用上述方法分解. 如：

$$\begin{aligned} x^2-6x+y^2+6y-2xy+5 &= x^2-(6+2y)x+(y^2+6y+5)\\ &= x^2-(6+2y)x+(y+1)(y+5)\\ &= [x-(y+1)][x-(y+5)]\\ &= (x-y-1)(x-y-5). \end{aligned}$$

当然此题也可以看成关于 y 的二次三项式对其进行分解因式，你试试看？

7. 如果多项式 $x^2-(a+5)x+5a-1$ 能分解成两个一次因式 $(x+b)$ 和 $(x+c)$ 的乘积（b、c 为整数），则 a 的值为多少？

【答案与提示】 由题意可知：$x^2-(a+5)x+5a-1=x^2+(b+c)x+bc$

$\therefore$ $b+c=-(a+5)$ ①

$bc=5a-1$ ②

①×5+②得：$bc+5(b+c)=-26$，

$\therefore$ $bc+5(b+c)+25=-1$.

$\therefore$ $(b+5)(c+5)=-1$.

$\because$ b、c 为整数，

$\therefore$ $b+5=1$，$c+5=-1$ 或 $b+5=-1$，$c+5=1$.

$\therefore$ $b=-4$，$c=-6$ 或 $b=-6$，$c=-4$.

代入②得，$a=5$.

8. 数形结合的问题

（1）观察图 2 并填表：

梯形个数	1	2	3	4	5	6	…	n
图形周长	$5a$	$8a$	$11a$				…	

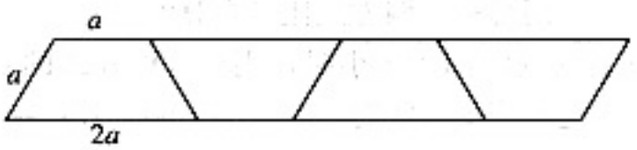


图 2

【答案与提示】 当梯形的个数是 n 时，图形周长计算的方法有三种：

① 第一种方法：从结果的规律分析：

梯形个数	图形周长
1	$5a$
2	$8a=5a+3a=5a+1\times3a=5a+(2-1)\times3a$
3	$11a=8a+3a=5a+3a+3a=5a+2\times3a=5a+(3-1)\times3a$
4	$14a=11a+3a=8a+3a+3a=5a+3\times3a=5a+(4-1)\times3a$
…	…
n	$5a+(n-1)\times3a=5a+3na-3a=(3n+2)a$

② 第二种方法：从图形的规律分析：

1 个梯形时的周长是 $5a$，以后每增加一个梯形，周长要减去重叠的两条腰长 $2a$，当 n 个梯形时，要减去 $(n-1)$ 个 $2a$，故周长是 $5a\times n-2a\times(n-1)=(3n+2)a$.

③ 第三种方法：从图形的规律分析：

当梯形的个数是 n 时，图形水平方向的长度和是 $(a+2a)\times n$，图形左右两边的长度和是 $(a+a)$，故周长是 $(a+2a)\times n+(a+a)=(3n+2)a$.

(2) 有若干张边长都是 2 的四边形纸片和三角形纸片，从中取一些纸片按如图 3 所示的顺序拼接起来（排在第一位的是四边形），可以组成一个大的平行四边形或一个大的梯形. 如果所取的四边形与三角形纸片数的和是 n，那么组成的大平行四边形或梯形的周长是多少？

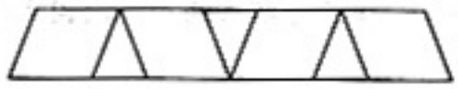


图 3

【答案与提示】 当 n 是偶数时，图形的周长是 $(8+6)\times\frac{n}{2}-4\times(n-1)=3n+4$.

当 n 是奇数时，图形的周长是 $\frac{n+1}{2}\times 8+\left(\frac{n+1}{2}-1\right)\times 6-4\times(n-1)=3n+5$.

9. 最佳方案问题

在现实生活中会有一些问题. 由于各方面的原因需要选择最佳的解决问题的方案. 例如：顾客在购买某种商品时有几种打折的方法，顾客要选择最佳的优惠方法；在各种工程招标中，要选择最佳方案，用较少的投资获得最佳的收益和质量. 下面三个实际问题说明最佳方案选择的数学内涵.

问题 1：

某地上网有两种收费方式，用户可以任选其一：

(A) 计时制：2.8 元/时

(B) 包月制：60 元/月

此外，每一种上网方式都加收通信费 1.2 元/时.

(1) 某用户某月上网的时间是 t 小时，请你分别写出两种收费方式下该用户应该支付的费用.

(2) 某用户上网 20 小时，选用哪种上网方式比较合算？

【答案与提示】 设用户上网的时间为 t 小时，则(A)种方式的费用为 $2.8t+1.2t=4t$(元)，(B)种方式的费用为 $60+1.2t$(元). 当 $t=20$ 时，$4t=80$，$60+1.2t=84$，因为 $80<84$，所以选择(A)种方式比较合算.

问题 2：

某种产品的原料提价，因而厂家决定对产品进行提价，现有三种方案：

方案 1：第一次提价 $p\%$，第二次提价 $q\%$.

方案 2：第一次提价 $q\%$，第二次提价 $p\%$.

方案 3：第一、二次提价均为 $\frac{p+q}{2}\%$.

其中，p、q 是不相等的正数，三种方案哪种提价最多？

【答案与提示】 可设该产品原价为 1，经过两次提价后，三种方案的价格分别是 W_1、W_2、W_3，依题意得：

$W_1=(1+p\%)(1+q\%)$，

$W_2=(1+q\%)(1+p\%)$，

$W_3=\left(1+\frac{p+q}{2}\%\right)\left(1+\frac{p+q}{2}\%\right)=\left(1+\frac{p+q}{2}\%\right)^2$.

$\because$ $W_1=(1+p\%)(1+q\%)=\dfrac{(100+p)(100+q)}{10\,000}$,

$W_2=(1+q\%)(1+p\%)=\dfrac{(100+q)(100+p)}{1\,000}$,

$W_3=(1+\dfrac{p+q}{2}\%)^2=\left[\dfrac{(200+p+q)}{200}\right]^2$,

$\therefore$ W_3-W_1

$=\dfrac{[(p^2+q^2+40\,000+400p+400q+2pq)-(4pq+400p+400q+40\,000)]}{40\,000}$

$=\dfrac{(p^2+q^2-2pq)}{40\,000}$

$=\dfrac{(p-q)^2}{40\,000}$.

$\because p\neq q$, $\therefore (p-q)^2>0$. $\therefore$ $W_3>W_1$.

$\because W_1=W_2$, $\therefore W_3>W_1=W_2$. $\therefore$第三种方案提价最多.

问题 3：

(1) 一条流水线上有 A_1、A_2 两台机床，它们的距离为 a，要设置一个原料供应站 P，使这两台机床到供应站的距离和最小，这个供应站 P 应设在何处呢?

(2) 若流水线上有 A_1、A_2、A_3 3 台机床，每相邻两台的距离为 a，要设置一个原料供应站 P，使这 3 台机床到供应站的距离和最小，这个供应站 P 应设在何处呢?

(3) 若流水线上有 A_1、A_2、A_3、A_4 4 台机床，每相邻两台的距离为 a，要设置一个原料供应站 P，使这 4 台机床到供应站的距离和最小，这个供应站 P 应设在何处呢?

(4) 若流水线上有 A_1、A_2、A_3、A_4、A_5 5 台机床，每相邻两台的距离为 a，要设置一个原料供应站 P，使这 5 台机床到供应站的距离和最小，这个供应站 P 应设在何处呢?

(5) 由上面四个小题的结果，你能得到什么规律？请把你发现的规律写出来. 若流水线上有 15 台机床，要设置一个原料供应站 P，使这 15 台机床到供应站的距离和最小，这个供应站 P 应设在何处呢?

【答案与提示】

(1) 流水线上有两台机床时：供应站 P 设在两台机床之间的任何位置都可以，此时最小距离和为 a.

(2) 流水线上有 3 台机床时：供应站 P 设在 A_2 处最合适. 此时最小距离和为 $2a$.

(3) 流水线上有 4 台机床时：供应站 P 设在 A_2 和 A_3 之间的任何位置都可以. 此时最小距离和为 $4a$.

(4) 流水线上有 5 台机床时：供应站 P 设在 A_3 处最合适. 此时最小距离和为 $6a$.

(5) 由上面四个小题的结果，得到的规律是：如果机床的台数 n 是奇数，P 可设在第 $\dfrac{n+1}{2}$ 台的位置；如果机床的台数 n 是偶数，P 可设在第 $\dfrac{n}{2}$ 台和第 $\dfrac{n}{2}+1$ 台之间的任何地方. 当 $n=15$ 时，P 应设在第 8 台机床的位置.

Ⅵ 评价建议与测试题

一、评价建议

1. 本章内容包括：整式及其相关概念，合并同类项和整式的加减，同底数幂的乘法，幂的乘方，积的乘方，整式的乘法（单项式乘以单项式、单项式乘以多项式、多项式乘以多项式），乘法公式（平方差公式、完全平方公式），整式的除法（单项式除以单项式、多项式除以单项式），因式分解（提公因式法、公式法）. 其中整式的四则运算、因式分解的两种基本方法是教学的重点；整式的四则运算的灵活计算，因式分解的方法多，变化技巧性较高是教学的难点. 确定评价内容时，应注意教学的主要内容，注意设计情景问题，使问题生活化，趣味化，便于发展学生的符号感和数感及观察几何图形的能力，并突出重点.

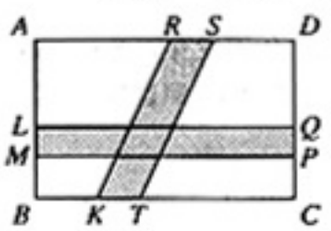
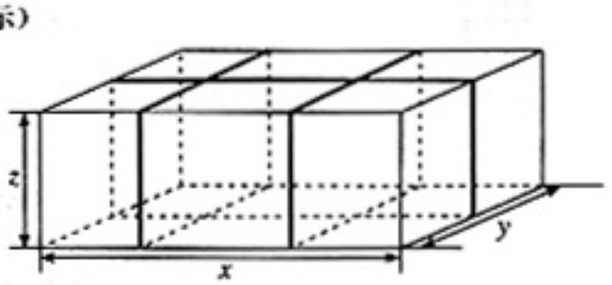
2. 在设计测试题时，要注重对学生整式四则运算和因式分解的基本计算技能的考察；要注重培养学生的数感和符号感及空间观念；要注重实际问题的设计，要以问题情境——数学模型——求解模型为主要线索呈现整式及其运算和因式分解的内容，注重从问题情境中寻求数量关系，运用符号进行表示的过程；要注重利用数形结合的思想探究问题中包含的规律；要注意渗透数形结合的思想和化归的思想.

3. 除了基本的试题测试以外，可以考虑设计形式多样的检测方式. 如：为了检测学生探究与合作能力，可设计一些开放性、探究性的问题，以小组合作学习的形式开展课内外调查、分析、探究和评价. 还可以开展教材中的“数学活动”，从而检测学生的分析、推理能力和开展数学活动的能力.

二、测试题（时间：45 分钟，满分：100 分）

内　容	设计意图
一、选择题（每小题 3 分，共 36 分） 1. 下列各单项式中，与 $2x^4y$ 是同类项的为（　　） (A) $2x^4$.　(B) $2xy$.　(C) x^4y.　(D) $2x^2y^3$.	能理解同类项的含义，并会辨别同类项.
2. $(x-a)(x^2+ax+a^2)$ 的计算结果是（　　） (A) $x^3+2ax^2-a^3$.　(B) x^3-a^3. (C) $x^3+2a^2x-a^3$.　(D) $x^2+2ax^2+2a^2-a^3$.	运用多项式乘以多项式的运算性质计算.
3. 下面是某同学在一次测验中的计算摘录： ① $3a+2b=5ab$； ② $4m^3n-5mn^3=-m^3n$； ③ $3x^3\cdot(-2x^2)=-6x^5$； ④ $4a^3b\div(-2a^2b)=-2a$； ⑤ $(a^3)^2=a^5$； ⑥ $(-a)^3\div(-a)=-a^2$. 其中正确的个数有（　　） (A) 1 个.　(B) 2 个.　(C) 3 个.　(D) 4 个.	整式的加、减、乘、除以及幂的乘方基本运算的综合考察，检测学生在整式的加减，同底数幂的乘法、除法，以及幂的乘方运算中对字母的指数变化是否混淆，以检验学生对基本运算性质的熟练掌握程度.

续表

内　容	设计意图
4. 小亮从一列火车的第 m 节车厢数起，一直数到第 $2m$ 节车厢，他数过的车厢节数是（　　） (A) $m+2m=3m$.　　(B) $2m-m=m$. (C) $2m-m-1=m-1$.　　(D) $2m-m+1=m+1$.	能根据生活中的实际问题转换为简单的数学模型，正确的列代数式运用整式的加法计算.
5. 下列分解因式正确的是（　　） (A) $x^3-x=x(x^2-1)$. (B) $m^2+m-6=(m+3)(m-2)$. (C) $(a+4)(a-4)=a^2-16$. (D) $x^2+y^2=(x+y)(x-y)$.	理解因式分解的意义，暴露在因式分解中容易出现的错误.
6. 如图：矩形花园 $ABCD$ 中，$AB=a$，$AD=b$，花园中建有一条矩形道路 $LMPQ$ 及一条平行四边形道路 $RSTK$. 若 $LM=RS=c$，则花园中可绿化部分的面积为（　　） (A) $bc-ab+ac+b^2$.　　(B) $a^2+ab+bc-ac$. (C) $ab-bc-ac+c^2$.　　(D) b^2-bc+a^2-ab.  （第 6 题）	在实际应用问题中，将问题转化为列代数式的数学模型，可以根据整体求值思想，利用多项式乘以多项式的运算性质解决问题，如：花园中可绿化部分的面积为 $(a-c)(b-c)=ab-bc-ac+c^2$，也可以运用面积的分割求和解决问题. 考察了用多种方法解决问题的思想.
二、**填空题**（每小题 4 分，共 28 分） 7. (1) 当 x ____时，$(x-4)^0$ 等于_____； (2) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2002}\times(1.5)^{2003}\div(-1)^{2004}=$_____.	学生对基本知识点的理解、对多项式的除法的计算以及逆用积的乘方的应用.
8. 分解因式：$a^2-1+b^2-2ab=$_____.	能运用完全平方公式和平方差公式分解因式.
9. 如图，要给这个长、宽、高分别为 x、y、z 的箱子打包，其打包方式如图所示，则打包带的长至少要_____（单位：mm）（用含 x、y、z 的代数式表示）  （第 9 题）	能将生活中的实际问题抽象到数学问题，体现数学与生活的紧密联系，正确的列代数式并运用整式的加法计算.

内　容	设计意图
10. 如果$(2a+2b+1)(2a+2b-1)=63$，那么$a+b$的值为_____.	运用平方差公式进行乘法的计算，并运用平方根的意义求解.
11. 下表为杨辉三角系数表的一部分，它的作用是指导读者按规律写出形如$(a+b)^n$(n为正整数)展开式的系数，请你仔细观察下表中的规律，填出$(a+b)^4$展开式中所缺的系数. $(a+b)=a+b$ $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ 则$(a+b)^4=a^4+$____ a^3b+____ a^2b^2+____ ab^3+b^4 1 1　1 1　2　1 1　3　3　1 ……	了解我国古代数学的优秀成果，学会利用观察图形得出结论，能根据图表提供的信息得到系数的规律.
12. 某些植物发芽有这样一种规律：当年所发新芽第二年不发芽，老芽在以后每年都发芽，发芽规律见下表（设第一年前的新芽数为a）照这样下去，第8年老芽数与总芽数的比值为____（精确到0.001） 第×年 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | … 老芽数 | a | a | $2a$ | $3a$ | $5a$ | … 新芽数 | 0 | a | a | $2a$ | $3a$ | … 总芽数 | a | $2a$ | $3a$ | $5a$ | $8a$ | …	能认真审清题意，借助实际问题，探索问题中隐含的规律，寻求解决问题简单的方法，培养学生读表、识表的能力，培养学生整理数据、处理数据的能力.
13. 某体育馆用大小相同的长方形木板镶嵌地面，第1次铺2块，如图（1）；第2次把第1次铺的完全围起来，如图（2）；第3次把第2次铺的完全围起来，如图（3）；…，依此方法，第n次铺完后，用字母n表示第n次镶嵌所使用的木板数_____ (1)　(2)　(3) （第13题）	能充分观察图形，在多个图形中探索镶嵌地面木板的记数方法，再由特殊抽象到一般，建立解决问题的模型，考查学生从观察几何图形转化到得到解决问题有效的方法，检测了学生数形结合的能力.
三、解答题 **14.**（10分） 计算：$[x(x^2y^2-xy)-y(x^2-x^3y)]\div 3x^2y$	能根据要求熟练地进行整式的加减计算和求值以及比较复杂的混合运算.

续表

内　容	设计意图
15.（18 分） 已知：$m^2=n+2$，$n^2=m+2$（$m\neq n$）， 求：$m^3-2mn+n^3$的值.	学生能运用转化的数学思想，利用整式的加减乘除运算，巧妙的“降次”，再利用平方差公式因式分解，结合整体运算的方法求值.
16.（18 分） 某商店积压了 100 件某种商品，为使这批货物尽快脱手，该商店采取了如下销售方案，将价格提高到原来的 2.5 倍，再作 3 次降价处理：第一次降价 30%，标出“亏本价”；第二次降价 30%，标出“破产价”；第三次降价 30%，标出“跳楼价”. 3 次降价处理销售结果如下表： （1）跳楼价占原价的百分比是多少？ （2）该商品按新销售方案销售，相比原价全部售完，哪种方案更盈利？	能根据商家的降价措施，将学到的数学知识加以运用，通过计算，最终判断商家的降价是否合理和盈利情况. 此题将生活中的常见事例转化为数学问题，再利用数学知识来解决问题. 体现了数学的价值，也体现了学数学、用数学的思想.

降价次数	一	二	三
销售件数	10	40	一抢而光

测试题答案

1. C.

2. B.

3. B.

4. D.

5. B.

6. C.

7.（1）$\neq 4$，1，（2）$\frac{3}{2}$.

8. $(a-b-1)(a-b+1)$.

9. $(2x+4y+6z)$mm.

10. ± 4.

11. 4，6，4.

12. 0.618.

提示：由题意易知，后一年的老芽数是前一年老芽数和新芽数的和，后一年的新芽数是前一年的老芽数. 所以第 8 年的老芽数为 $21a$，新芽数为 $13a$，总芽数为 $34a$，老芽数与总芽数的比值约为 0.618.

13. $(2n-1)2n=4n^2-2n$.

提示：

第 1 次铺有 $2=1\times 2$ 块；

第 2 次铺有 $12=3\times 4$ 块；

第3次铺有 $30=5\times6$ 块；

……

第 n 次铺完后共有 $(2n-1)2n=(4n^2-2n)$ 块.

14. 解：原式 $=\frac{2}{3}xy-\frac{2}{3}$

15. 解：∵ $m^2-2mn+n^2=m(n+2)-2mn+n(m+2)=2(m+n)$，

∵ $m^2-n^2=(n+2)-(m+2)=n-m$，

又∵ $m^2-n^2=(m+n)(m-n)$，

∴ $(m+n)(m-n)=n-m$，

∵ $m\neq n$，

∴ $m+n=-1$.

故原式 $=2\times(-1)=-2$.

16. 解：（1）设原价为 x，则跳楼价为 $2.5x\times0.7\times0.7\times0.7$ 所以跳楼价占原价的百分比为 $2.5\times0.7^3x\div x=85.75\%$.

（2）原价出售：销售金额 $=100x$

新价出售：

销售金额 $=2.5x\times0.7\times10+2.5x\times0.7\times0.7\times40+2.5x\times0.7^3\times50$

$=109.375x$

∵ $109.375x>100x$，

∴新方案销售更盈利.