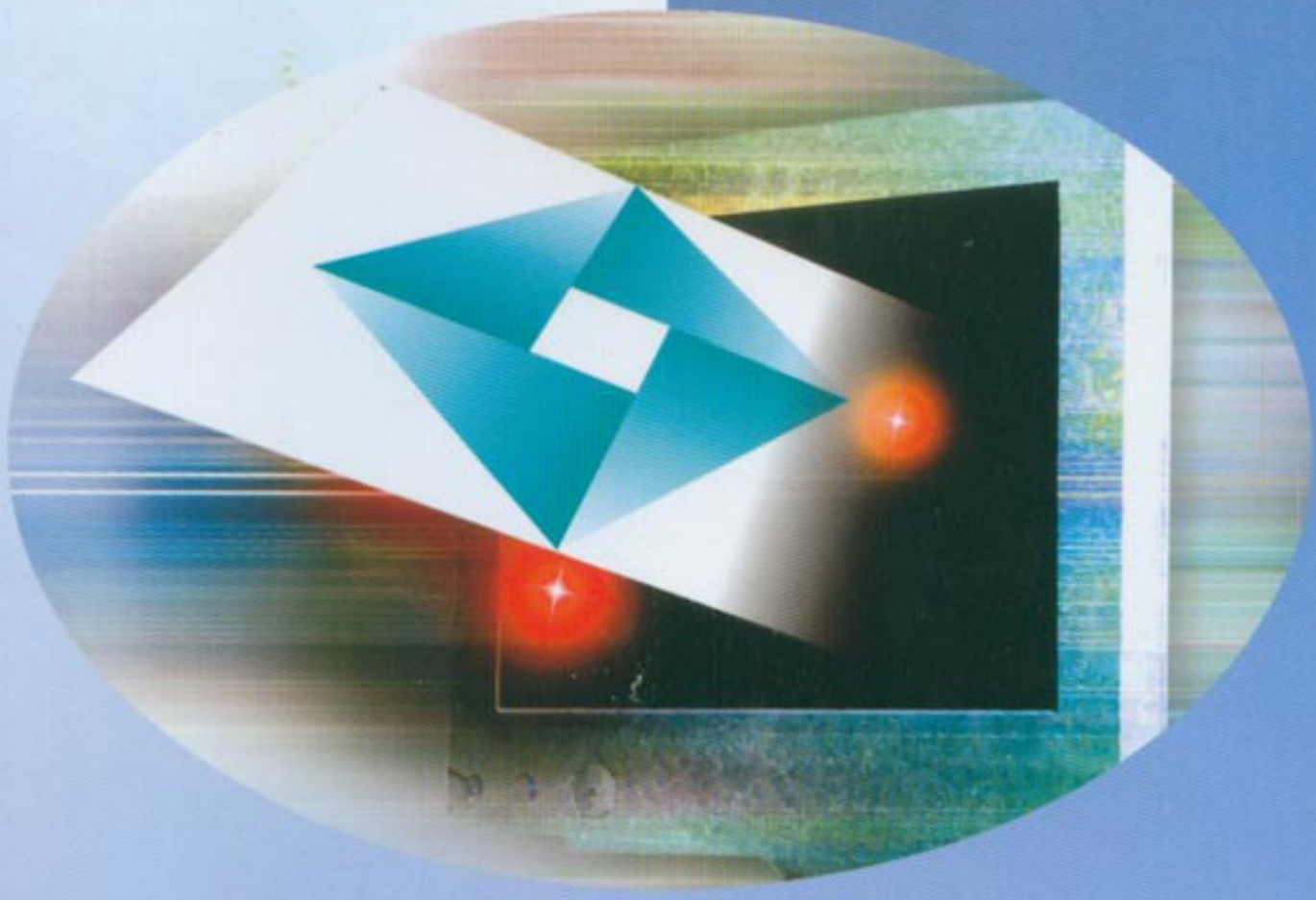


义务教育课程标准实验教科书

数学 九年级 上册

教师教学用书

课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心 编著

人民教育出版社

主　　编：林　群
副 主 编：田载今　薛　彬

本册主编：薛　彬　李果民　刘金英
主要编者：左怀玲　田载今　薛　彬　李海东　林立军
　　李果民　刘金英　刘静波　李　庆　张　维
　　付　剑　周　越　言承璎
责任编辑：李海东

义务教育课程标准实验教科书
数学　九年级　上册
教师教学用书
课 程 教 材 研 究 所
中学数学课程教材研究开发中心　编著

*

人民教育出版社出版发行
网址：http://www.pep.com.cn
北京人卫印刷厂印装　　全国新华书店经销

*

开本：787 毫米×1 092 毫米　1/16　印张：19　字数：407 000
2006 年 4 月第 1 版　2008 年 5 月第 4 次印刷
ISBN 978-7-107-19487-0
G·12577（课）　定价：24.80 元

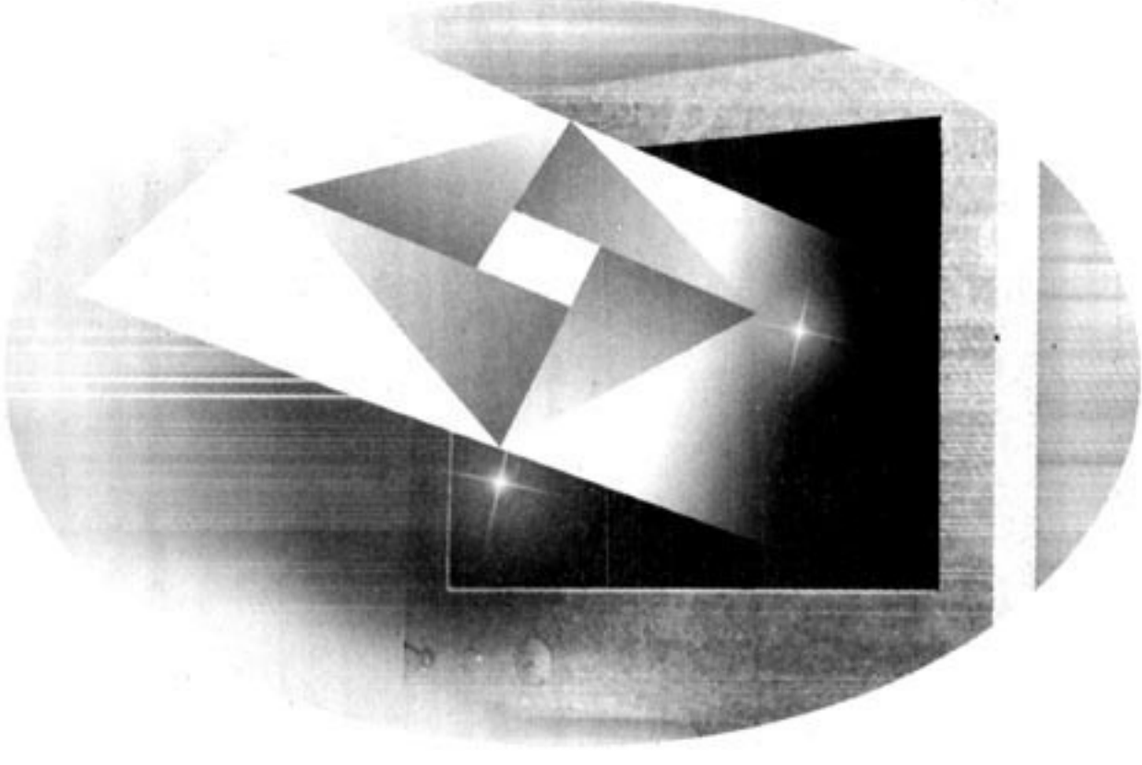
如发现印、装质量问题，影响阅读，请与本社出版科联系调换。
（联系地址：北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼　邮编：100081）

义务教育课程标准实验教科书

数学　九年级　上册

教师教学用书

课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心　编著



人民教育出版社

说 明

人教版义务教育课程标准实验教材数学（七～九年级），是以教科书为基础的系列化教材，包括基本教材和配套教学资源. 基本教材是教科书和教师教学用书；配套教学资源包括同步解析与测评、自读课本、素质教育新学案、教学设计与案例、教学投影片等.

人教版《义务教育课程标准实验教科书·数学（七～九年级）》是根据教育部制订的《全日制义务教育数学课程标准（实验稿）》编写的，全套书分为六册，每学期一册，内容包括“数与代数”“空间与图形”“统计与概率”“实践与综合应用”四个领域，在体系结构的设计上力求反映这些内容之间的联系与综合，使它们成为一个有机的整体，其中对于“实践与综合应用”领域的内容，以“课题学习”和“数学活动”等形式分散地编排于各章之中.

本套教科书在体例安排上有如下特点：

1. 每章开始均配有反映本章主要内容的章前图和引言，可供学生预习用，也可作为教师导入新课的材料.

2. 正文中设置了“观察”“思考”“探究”“讨论”“归纳”等栏目，栏目中以问题、留白或填空等形式为学生提供思维发展、合作交流的空间.

3. 适当安排了“观察与猜想”“实验与探究”“阅读与思考”“信息技术应用”等选学栏目，为加深对相关内容的认识，扩大学生的知识面，运用现代信息技术手段学习等提供资源.

4. 正文的边空设有“小贴示”和“云朵”，“小贴示”介绍与正文内容相关的背景知识，“云朵”中是一些有助于理解正文的问题.

5. 每章安排了几个有一定综合性、实践性、开放性的“数学活动”，学生可以结合相关知识的学习或全章的复习有选择地进行活动，不同的学生可以达到不同层次的结果；“数学活动”也可供教师教学选用.

6. 每章安排了“小结”，包括本章的知识结构图和对本章内容的回顾与思考.

7. 本书的习题分为练习、习题、复习题三类. 练习供课上使用，有些练习是对所学内容的巩固，有些练习是相关内容的延伸；习题供课内或课外作业时选用；复习题供复习全章时选用. 其中习题、复习题按照习题的功能分为“复习巩固”“综合应用”“拓广探索”三类.

这套教师教学用书与《义务教育课程标准实验教科书·数学（七～九年级）》相对应，供教师教学参考使用. 全套书分为六册，每册书按章编排，每章内容与相应教科书内容对应. 教师教学用书的每一章主要包括以下六部分：

第一部分是总体设计，包括本章的课程学习目标、知识结构框图、内容安排、课时安排、学法教法建议等内容.

第二部分印有教科书的相应章节正文，正文旁印有教科书正文的注释及教科书中练习的答案和说明，正文下部按小节分条阐述各小节编写意图、学生学习过程中

可能出现的困难和问题、教学建议等.

第三部分是本章习题的参考答案.

第四部分提供了几个教学案例，供教师教学时参考. 每一个教学案例是一个课时的课堂教学设计，内容包括教学任务分析、教学流程安排、教学过程设计、教学设计说明等几方面.

第五部分是拓展资源. 根据每章的教学内容，为教师提供相应的拓展资料，包括知识内容的拓广延伸和相关史料、拓展性问题、数学活动等.

第六部分是评价建议和测试题. 评价建议从知识技能、数学能力、情感态度等几方面为教师提出本章评价建议，并提供了一套测试题供参考，并说明了每道测试题的设计意图、评分标准等.

本书是九年级上册的教师教学用书，内容包括“二次根式”“一元二次方程”“旋转”“圆”“概率初步”五章，各章授课时间大致分配如下（仅供参考）：

第二十一章　二次根式	9 课时
第二十二章　一元二次方程	13 课时
第二十三章　旋转	8 课时
第二十四章　圆	17 课时
第二十五章　概率初步	14 课时

除已列出的主要编写者外，参加本册教师教学用书编写、讨论的还有申铁、王烁、朱小凌、杨靖、班春虹等.

本书在编写过程中征求了全国各地部分教师和教研人员的意见，在此表示衷心感谢.

课　程　教　材　研　究　所

中学数学课程教材研究开发中心

2006 年 3 月

目 录

第二十一章 二次根式 …… 1
Ⅰ 总体设计 …… 1
Ⅱ 教材分析 …… 4
21.1 二次根式 …… 6
21.2 二次根式的乘除 …… 12
21.3 二次根式的加减 …… 19
数学活动 …… 26
小结 …… 27
复习题 21 …… 28
Ⅲ 习题解答 …… 30
Ⅳ 教学设计参考案例 …… 31
21.1 二次根式（第 1 课时） …… 31
21.3 二次根式的加减（第 1 课时） …… 35
Ⅴ 拓展资源 …… 38
Ⅵ 评价建议与测试题 …… 44
第二十二章 一元二次方程 …… 48
Ⅰ 总体设计 …… 48
Ⅱ 教材分析 …… 52
22.1 一元二次方程 …… 54
22.2 降次——解一元二次方程 …… 59
22.3 实际问题与一元二次方程 …… 72
数学活动 …… 80
小结 …… 81
复习题 22 …… 82
Ⅲ 习题解答 …… 84
Ⅳ 教学设计参考案例 …… 86
22.2 降次——解一元二次方程（第 2 课时） …… 86
22.3 实际问题与一元二次方程（第 2 课时） …… 90
Ⅴ 拓展资源 …… 93
Ⅵ 评价建议与测试题 …… 101
第二十三章 旋转 …… 104
Ⅰ 总体设计 …… 104
Ⅱ 教材分析 …… 106
23.1 图形的旋转 …… 108

23.2 中心对称 …… 114
23.3 课题学习 图案设计 …… 123
数学活动 …… 124
小结 …… 125
复习题 23 …… 126
Ⅲ 习题解答 …… 128
Ⅳ 教学设计参考案例 …… 129
23.1 图形的旋转（第 1 课时） …… 129
23.3 课题学习 图案设计（第 1 课时） …… 132
Ⅴ 拓展资源 …… 134
Ⅵ 评价建议与测试题 …… 143
第二十四章 圆 …… 149
Ⅰ 总体设计 …… 149
Ⅱ 教材分析 …… 154
24.1 圆 …… 156
24.2 与圆有关的位置关系 …… 169
24.3 正多边形和圆 …… 185
24.4 弧长和扇形面积 …… 192
数学活动 …… 199
小结 …… 201
复习题 24 …… 202
Ⅲ 习题解答 …… 206
Ⅳ 教学设计参考案例 …… 209
24.1.4 圆周角 …… 209
24.2.3 圆和圆的位置关系 …… 213
24.3 正多边形和圆（第 1 课时） …… 217
Ⅴ 拓展资源 …… 220
Ⅵ 评价建议与测试题 …… 226
第二十五章 概率初步 …… 230
Ⅰ 总体设计 …… 230
Ⅱ 教材分析 …… 236
25.1 概率 …… 238
25.2 用列举法求概率 …… 248
25.3 利用频率估计概率 …… 259
25.4 课题学习 键盘上字母的排列规律 …… 267
数学活动 …… 270
小结 …… 272
复习题 25 …… 273

Ⅲ 习题解答 …… 275
Ⅳ 教学设计参考案例 …… 276
25.1.1 随机事件（第1课时） …… 276
25.1.2 概率的意义（第1课时） …… 279
25.2 用列举法求概率（第3课时） …… 283
Ⅴ 拓展资源 …… 287
Ⅵ 评价建议与测试题 …… 294

第二十一章　二次根式

Ⅰ　总体设计

一、课程学习目标

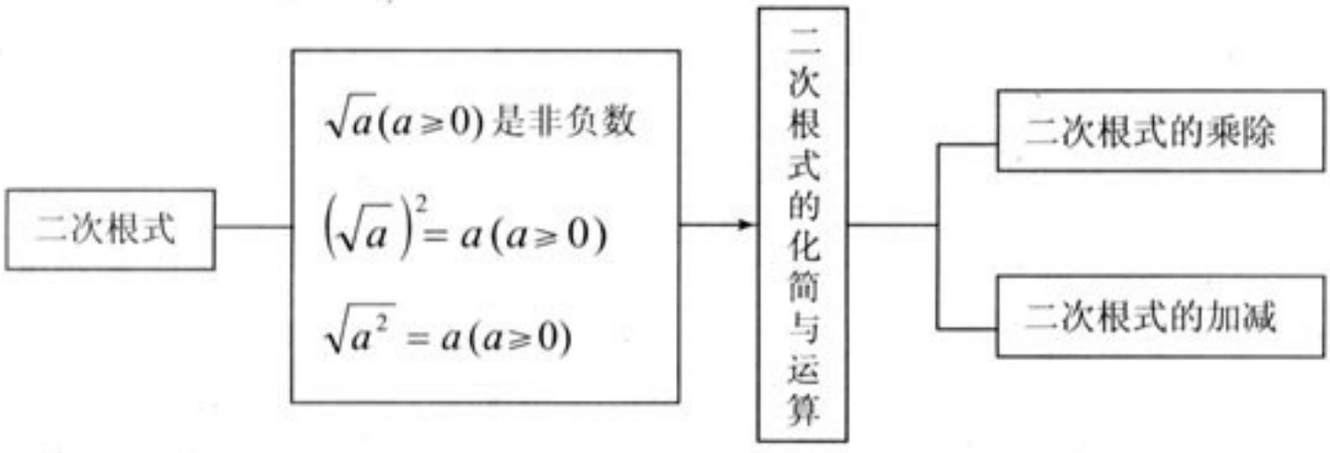
1. 理解二次根式的概念，了解被开方数必须是非负数的理由；
2. 了解最简二次根式的概念；
3. 理解二次根式的性质：

(1) $\sqrt{a}(a\geqslant 0)$ 是非负数；(2) $(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant 0)$；(3) $\sqrt{a^2}=a(a\geqslant 0)$；

4. 掌握二次根式的加、减、乘、除运算法则，会用它们进行有关实数的简单四则运算；
5. 了解代数式的概念，进一步体会代数式在表示数量关系方面的作用.

二、本章知识结构框图

本章知识结构框图如下：



三、内容安排

在第10章“实数”中，我们学习了平方根、算术平方根的概念，以及利用平方运算与开平方运算的互逆关系求非负数的平方根和算术平方根的方法. 本章是在第10章的基础上，进一步研究二次根式的概念、性质和运算. 本章重点是二次根式的化简和运算，难点是正确理解二次根式的性质和运算法则的合理性，学习本章的关键是理解二次根式的概念和性质，它们是学习二次根式的化简与运算的依据.

全章分为三节，第一节研究了二次根式的概念和性质. 教科书首先给出四个实际问题，要求学生根据已学的平方根和算术平方根的知识写出这四个问题的答案，并分析所得结果在表达式上的特点，由此引出二次根式的概念. 在二次根式的概念中，重要的一点是理解被开方数是非负数的要求，教科书结合例题对此进行了较详细的分析，并从算术平方根的定义出发，探讨了结论$\sqrt{a}(a\geqslant 0)$是非负数. 接下去，教科书采用由特殊到一般的方法，归纳给出了结论$(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant 0)$，并根据算术平方根的定义对这条结论进行了分析，对于结论$\sqrt{a^2}=a(a\geqslant 0)$，教科书同样采用了让学生通过具体

计算，分析运算过程和运算结果，最后归纳得出一般结论的方法进行研究. 第一节的内容是学习后面两节内容的直接基础.

对于二次根式的运算，教科书首先研究了乘除运算，这是第二节的内容. 本节首先研究了二次根式的乘法运算，教科书通过设置探究栏目，要求学生利用二次根式的性质和计算器等进行一些具体运算，发现$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$与$\sqrt{a\cdot b}$之间的关系，从而由特殊到一般地归纳得出二次根式乘法的运算法则，继而得到积的算术平方根的性质，引出化简二次根式的方法. 对于二次根式的除法运算，类似于乘法运算，教科书也采用了由特殊到一般的方法，通过归纳得出二次根式除法的运算法则，继而得到商的二次根式的性质，进一步完善化简二次根式的方法. 本节最后，教科书结合本节例题，给出了最简二次根式的概念，明确了化简二次根式的方向，并为下一节学习二次根式的加减运算作好铺垫.

第三节是二次根式的加减运算. 在实际生活中会遇到二次根式的加减运算，因此教科书首先结合一个实际问题引出二次根式的加法，然后结合第 10 章学过的结论“在有理数范围内成立的运算律在实数范围内仍然成立”，并利用分配律得出了二次根式的加减运算法则. 本节最后，在二次根式的加、减、乘、除运算的基础上，教科书通过几个例题研究了二次根式的混合运算，突出了二次根式与整式之间的关系，体现了整式的运算性质、公式和法则与二次根式相关内容的一致性.

本章内容与已学内容“实数”“整式”“勾股定理”联系紧密，同时也是以后将要学习的“解直角三角形”“一元二次方程”和“二次函数”等内容的重要基础，并为学习高中数学中的不等式、函数以及解析几何等的大部分知识作好准备.

四、课时安排

本章教学时间约需 9 课时，具体分配如下（仅供参考）：

21.1　二次根式	约 2 课时
21.2　二次根式的乘除	约 2 课时
21.3　二次根式的加减	约 3 课时
数学活动	
小结	约 2 课时

五、学法教法建议

1. 注意加强知识间的纵向联系

本章内容属于“数与代数”这个领域，对于实数的内容，本套教科书主要分为两章学习，分别是七年级下册的第 10 章“实数”和本章“二次根式”. 在“实数”一章中，主要研究了平方根、立方根的概念和求法，实数的有关概念和运算. 通过第 10 章的学习，学生对数的认识已经由有理数的范围扩大到实数范围，并对实数的运算性质和运算法则有了初步的感受，这些为本章的学习打下了基础. 因此，教学时要注意与已有经验的联系，要在“实数”一章的基础上进行教学. 例如，对于二次根式的加减运算，在“实数”一章中，为了让学生对“有理数的运算律和运算法则在实数的范围内仍然成立”有所体验，教科书以二次根式的加减运算为例对这个结论进行了说明，这样实际上在“实数”一章中，学生对二次根式的加减运算已经有所接触，本章在此基础上利用分配律给出了加减法的运算法则，使学生进一步体会运算律在数的扩充过程中的一致性.

本章教学时，还要注意与第 15 章“整式”的联系. 由于数式通性，当将二次根式中的实数看成字母时，二次根式的运算实际上就是整式的运算，因此整式的运算法则和公式在二次根式的运算中继续适用，教科书编写时充分体现了这两者之间的联系. 例如，教科书在介绍二次根式的混合运

算时，强调了利用多项式的乘法法则和乘法公式进行运算，突出了二次根式运算的本质. 因此，教学中要注意本章内容与“整式”中相关内容的联系，使学生的学习形成正迁移.

2. 加大学生探索空间，体现由具体到抽象的认识过程

根据本章内容的特点，对于一些重要结论，编写时注意了让学生通过观察、思考、讨论等探究活动归纳得出结论的过程. 例如，对于二次根式的乘法法则，教科书首先让学生利用二次根式的概念和性质进行几个具体的计算，其中有两个二次根式相乘的问题，也有积的算术平方根的问题，学生通过具体计算，并观察所得结果发现二次根式相乘与积的算术平方根之间的关系，并利用发现的规律进行计算，然后利用计算器进行验证，最后归纳得出二次根式的乘法运算法则，这个过程实际上让学生通过探究活动经历了一个由具体到抽象的认识过程；再如，二次根式的除法运算法则也是采用通过学生的探索活动，由具体到抽象地归纳得出结论的方法. 由于本章内容与以前所学的实数内容有较多联系，在思考问题的方法上与整式的内容又有很多相通之处，因此，教学中，可以结合具体内容，给学生尽可能多地留出探索交流的空间，例如，对于第三节中的例 6，可以让学生自己探索，发现整式的平方差公式在二次根式的运算中也成立. 通过这样的探究活动发展学生的思维能力，有效改变学生的学习方式，掌握认识事物的一般规律.

3. 适当加强练习，为后续学习打好基础

本章内容属于“数与代数”领域中较基础的内容，尤其是二次根式的加、减、乘、除运算是后续学习解直角三角形、一元二次方程和二次函数的重要基础. 例如在“解直角三角形”一章中，会遇到很多实际问题，在解决实际问题的过程中，要遇到将二次根式化成最简二次根式以及二次根式的加减运算；在“一元二次方程”中，利用公式法解方程时，会用到二次根式的性质；在“二次函数”一章中，判断二次函数的图象与 x 轴是否有交点时，会遇到根的判别式中被开方数小于 0 的情形，这些都需要深刻理解二次根式的意义.

再有，本章主要内容是二次根式的化简和运算，掌握化简的方法和运算规律需要一定的训练. 因此，教学中可以适当增加练习，使学生较好地理解二次根式的意义，较好地掌握二次根式的性质和运算，为后续的学习打下良好的基础，也为学习高中数学中不等式、函数以及解析几何等的大部分知识作好准备.

另外，本章内容与“整式”“勾股定理”等联系紧密，在加强练习的过程中，要注意强调知识之间的相互联系，进一步加深对整式和勾股定理等内容的理解，使学生养成以联系和发展的观点学习数学的习惯.

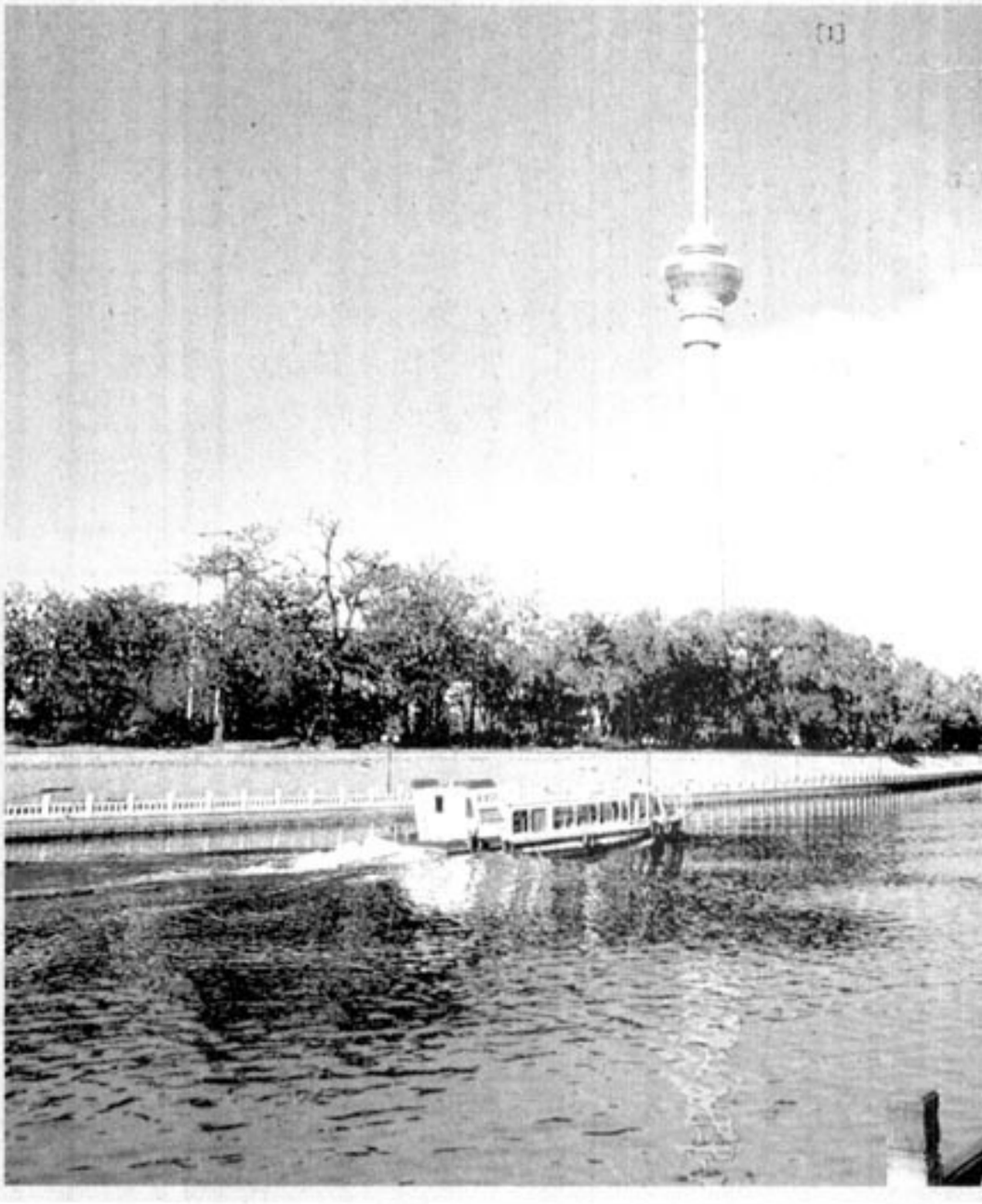
4. 引导学生理解数学的本质

本章的重点是让学生理解二次根式的概念和性质，并会熟练运用法则进行运算. 本章编写时，注重说明性质和法则成立的合理性，突出了它们的数学本质. 例如，教科书在介绍二次根式的结论 $(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant 0)$ 时，首先让学生通过探究活动感受这条结论，然后再从算术平方根的意义出发，结合具体例子对这条结论进行分析，最后由特殊到一般地得到这条结论，这样就可以使学生对这条结论的数学实质有了较深刻的认识. 另外，对于概念，本章编写时遵循淡化概念名词，突出概念实质的原则. 例如，本章在介绍二次根式的乘除运算时，没有给出分母有理化的概念，而是结合具体例子说明了分母有理化的要求，再如，对于二次根式的加减运算，教科书回避了同类二次根式的概念，突出强调了运算时先将二次根式化成最简二次根式再进行合并的方法. 这样处理内容的目的是使学生将学习的重点放在理解数学的本质上来. 因此，教学中注意体会教科书的编写意图，培养学生的数学能力.

Ⅱ 教材分析

[1] 章前图是一张北京中央电视塔的照片，这张照片是本章章前引言的背景图.

第二十一章 二次根式



1. 本章内容“二次根式”是《课程标准》“数与代数”的重要内容. 对于实数，本套教科书主要安排在七年级下册的第 10 章和本章. 在第 10 章中，学生已经学习了平方根、算术平方根、立方根的概念，会用根号表示数的平方根、立方根；知道开方与乘方互为逆运算，会用平方运算和立方运算求某些非负数的平方根以及某些数的立方根，会用计算器求平方根和立方根；了解无理数和实数的概念，知道实数与数轴上的点一一对应，并对有理数的运算性质和运算法则在实数的运算中仍然成立这一点有所体验. 通过本章的学习，学生将对二次根式的概念有更深刻的认识，通过学习二次根式的加、减、乘、除运算法则，对实数的简单四则运算有进一步的了解. 因此，本章教学时应充分注意在第 10 章的基础上进行，同时应注意进一步加深对第 10 章有关概念和性质的理解，如平方根、算术平方根的概念，无理数和实数的概念以及运算等.

21



21.1 二次根式[1]

21.2 二次根式的乘除

21.3 二次根式的加减

电视塔越高，从塔顶发射出的电磁波传播得越远，从而能收看到电视节目的区域就越广．如果电视塔高h km，电视节目信号的传播半径为r km，则它们之间存在近似关系$r=\sqrt{2Rh}$，其中R是地球半径，$R\approx 6400$ km．如果两个电视塔的高分别是h_1 km，h_2 km，那么它们的传播半径的比为$\frac{\sqrt{2Rh_1}}{\sqrt{2Rh_2}}$，你能将这个式子化简吗？这要用到本章将要学习的二次根式的运算与化简．

如何进行二次根式的运算？如何将二次根式化简？这是本章所要研究的主要内容．通过本章学习可为后面一元二次方程等内容的学习打下基础．

[1] 本节包括二次根式的概念和性质．

2. 本章分为三节，第一节主要学习二次根式的概念和性质，本节既是第 10 章相关内容的发展，同时又是后面两节内容的基础，因此本节起承上启下的作用；第二节是二次根式的乘除运算，主要研究二次根式的运算法则和二次根式的化简；第三节是二次根式的加减，主要研究二次根式的加减运算法则和进一步完善二次根式的化简．本章内容是后面几章将要学习的解直角三角形、一元二次方程、二次函数等内容的重要基础．

3. 章前引言选用了与电视节目传播区域有关的实际问题，这个问题涉及电视塔的高度与电视节目信号的传播半径之间的关系，而这个关系可以用二次根式表示，这样教科书就由实际问题引出本章所要讨论的问题，这样引入可以使学生感到研究本章内容是实际的需要．

章前引言也明确指出二次根式的化简和运算是本章所要研究的主要内容，以及本章在数学学习中所处的地位．

[1] 这里指出“在实数范围内”是从科学性角度叙述的，在学生未学习实数以外的数时，对这句话不可能有较深的理解，因此教学中不必在这句话上多做文章.

21.1 二次根式

思考

用带有根号的式子填空，看看写出的结果有什么特点：

(1) 如图 21.1-1，要做一个两条直角边的长分别是 7 cm 和 4 cm 的三角尺，斜边的长应为 _____ cm；

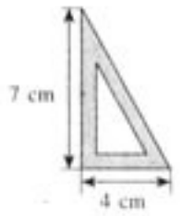


图 21.1-1

(2) 面积为 S 的正方形的边长为 _____；

(3) 要修建一个面积为 6.28 m^2 的圆形喷水池，它的半径为 _____ m (π 取 3.14)；

(4) 一个物体从高处自由落下，落到地面所用的时间 t (单位：s) 与开始落下时的高度 h (单位：m) 满足关系 $h=5t^2$，如果用含有 h 的式子表示 t，则 $t=$ _____.

在上面的问题中，结果分别是 $\sqrt{65}$，$\sqrt{S}$，$\sqrt{2}$，$\sqrt{\frac{h}{5}}$，它们都表示一些正数的算术平方根.

我们知道，一个正数有两个平方根；0 的平方根为 0；在实数范围内，[1] 负数没有平方根. 因此，开平方时，被开方数只能是正数和 0.

一般地，我们把形如 $\sqrt{a}$ ($a\geqslant 0$) 的式子叫做**二次根式**，“$\sqrt{\ }$”称为二次根号.

1. 本节主要内容是二次根式的定义和性质，教科书先给出二次根式的定义，然后讨论了简单的二次根式的性质：$\sqrt{a}(a\geqslant 0)$ 是一个非负数；

$$(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant 0);\quad \sqrt{a^2}=a(a\geqslant 0).$$

通过本节的学习，应该使学生对二次根式的定义以及性质有较深刻的认识，为下两节的学习打下基础.

2. 本节开始，首先设置四个实际问题，这些实际问题的结果都可以表示成二次根式的形式，教科书由此引出二次根式的定义. 在这四个实际问题中，前三个是几何问题，最后一个是物理问题，设置这些实际问题的目的是让学生感受到研究二次根式是实际的需要，二次根式与实际生活联系紧密. 教学时，也可以根据学生的实际情况，选择其他有趣的实际问题引入，以调动学生的学习兴趣.

3. 对于二次根式的定义，应侧重让学生理解

例 1 当 x 是怎样的实数时，$\sqrt{x-2}$ 在实数范围内有意义？[1]

解：由 $x-2\geqslant 0$，得

$$x\geqslant 2.$$

当 $x\geqslant 2$ 时，$\sqrt{x-2}$ 在实数范围内有意义.

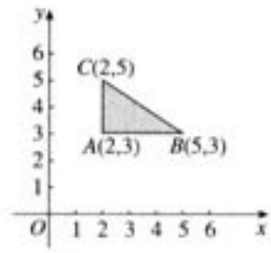
思考

当 x 是怎样的实数时，$\sqrt{x^2}$ 在实数范围内有意义？$\sqrt{x^3}$ 呢？[2]

练习

1. 要画一个面积为 18 cm² 的矩形，使它的长宽之比为 2∶3，它的长宽应取多少？
2. 如图，在平面直角坐标系中，$A(2,3)$、$B(5,3)$、$C(2,5)$ 是三角形的三个顶点，求 BC 的长.
3. 当 a 是怎样的实数时，下列各式在实数范围内有意义？

   (1) $\sqrt{a-1}$；　　(2) $\sqrt{2a+3}$.



（第 2 题）

当 $a>0$ 时，$\sqrt{a}$ 表示 a 的算术平方根，因此 $\sqrt{a}>0$；当 $a=0$ 时，$\sqrt{a}$ 表示 0 的算术平方根，因此 $\sqrt{a}=0$. 这就是说，

$\sqrt{a}(a\geqslant 0)$ 是一个非负数.

[1] “$\sqrt{x-2}$ 在实数范围内有意义”就是指当 x 是什么数时，式子 $\sqrt{x-2}$ 有意义，这里不必过多强调在实数范围内，理由同前.

[2] x 为任意实数，$\sqrt{x^2}$ 都有意义；当 $x\geqslant 0$ 时，$\sqrt{x^3}$ 有意义.

练习答案

1. $3\sqrt{3}$，$2\sqrt{3}$；
2. $\sqrt{13}$；
3. (1) $a\geqslant 1$；

   (2) $a\geqslant -\frac{3}{2}$.

开方数是非负数的要求，教学时注意引导学生回忆在“实数”一章所学习的有关平方根的意义和特征，帮助学生理解这一要求，而不必深究怎样判断一个式子是不是二次根式，特别是一些含有二次根式的式子是否也可叫做二次根式等问题.

4. 本节通过例 1 讨论了二次根式的被开方数中的字母取值范围的问题，这类问题可以加深学生对二次根式的定义的理解. 对于这类问题，本节中只限于可以用一元一次不等式解决的范围内，不宜扩充到较复杂的情况.

5. “$\sqrt{a}(a\geqslant 0)$ 是非负数”是二次根式的一条简单性质，其中 $\sqrt{a}(a\geqslant 0)$ 是指非负数的算术平方根，这一性质可以根据平方根和算术平方根的意义得到，教学时要注意及时复习“实数”的内容. 理解“$\sqrt{a}(a\geqslant 0)$ 是非负数”这一点并不难，关键是要记住，并在以后的学习中灵活运用.

[1] 计算$(\sqrt{4})^2$可以利用算术平方根的意义，也可以直接计算，但对于$(\sqrt{2})^2$、$\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2$只能根据算术平方根的意义来说明.

[2] 这里运用的是整式乘除中学习的积的幂的运算性质，这里可以向学生指出整式的运算性质在实数范围内都适用.

探究

根据算术平方根的意义填空：[1]

$(\sqrt{4})^2=$_____；$(\sqrt{2})^2=$_____；

$\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2=$_____；$(\sqrt{0})^2=$_____.

$\sqrt{4}$是4的算术平方根，根据算术平方根的意义，$\sqrt{4}$是一个平方等于4的非负数. 因此有$(\sqrt{4})^2=4$.

同理，$\sqrt{2}$，$\sqrt{\frac{1}{3}}$，0分别是2，$\frac{1}{3}$，0的算术平方根，因此有$(\sqrt{2})^2=2$，$\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2=\frac{1}{3}$，$(\sqrt{0})^2=0$.

一般地，

$$(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant 0).$$

例2 计算：

(1) $(\sqrt{1.5})^2$；　　(2) $(2\sqrt{5})^2$.

解：(1) $(\sqrt{1.5})^2=1.5$；

(2) $(2\sqrt{5})^2=2^2\times(\sqrt{5})^2=4\times5=20$.

这里用到了$(ab)^2=a^2b^2$这个结论.[2]

探究

填空：

$\sqrt{2^2}=$_____；$\sqrt{0.1^2}=$_____；

$\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2}=$_____；$\sqrt{0^2}=$_____.

6. 对于性质$(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant 0)$，教科书没有直接从算术平方根的意义得到，而是考虑到学生的年龄特征，先在“探究”栏目中给出四个具体问题，让学生根据算术平方根的意义，就具体数字进行分析得出结果，然后再分析这些结果的共同特征，由特殊到一般地归纳得出结论. 教学中也可以结合学生的实际情况，先让学生通过“探究”栏目的研究得到猜想，即这条性质，然后再利用算术平方根的意义对这条性质进行分析，培养学生利用代数语言进行推理的能力.

性质$(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant 0)$在后面的学习中经常用到，因此教学中要注意让学生在理解的基础上加以记忆，并灵活应用.

7. 对于性质$\sqrt{a^2}=a(a\geqslant 0)$，教科书也是采用由特殊到一般地归纳得出结论的方法. 对于这条性质可以利用非负数的算术平方根的意义进行分析，教学中，可以根据学生的实际情况，既可

可以得到

$\sqrt{2^2}=2$，$\sqrt{0.1^2}=0.1$，$\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{2}{3}$，$\sqrt{0^2}=0$.

一般地，根据算术平方根的意义，

$$\sqrt{a^2}=a(a\geqslant 0).^{[1]}$$

例 3 化简：

(1) $\sqrt{16}$；　　(2) $\sqrt{(-5)^2}$.

解：(1) $\sqrt{16}=\sqrt{4^2}=4$；

(2) $\sqrt{(-5)^2}=\sqrt{5^2}=5$.

回顾我们学过的式子，如 5，a，$a+b$，ab，$\frac{s}{t}$，x^3，$\sqrt{3}$，$\sqrt{a}$ ($a\geqslant 0$)，它们都是用基本运算符号（基本运算包括加、减、乘、除、乘方和开方）把数和表示数的字母连接起来的式子，我们称这样的式子为**代数式** (algebraic expression).

练习

1. 计算：

(1) $(\sqrt{3})^2$；　　(2) $(3\sqrt{2})^2$.

2. 说出下列各式的值：

(1) $\sqrt{0.3^2}$；　　(2) $\sqrt{\left(-\frac{1}{7}\right)^2}$；

(3) $-\sqrt{(-\pi)^2}$；　　(4) $\sqrt{10^{-2}}$.

[1] 注意这里只考虑 $a\geqslant 0$ 的情形，教学中不必增加 $a<0$ 的情形.

练习答案

1. (1) 3；(2) 18.

2. (1) 0.3；(2) $\frac{1}{7}$；

(3) $-\pi$；(4) 10^{-1}.

以结合具体数字分析，也可以就一般情况进行分析.

这条性质在后面两节会经常用到，应让学生熟练掌握和灵活应用.

8. 教科书仅考虑了当 $a\geqslant 0$ 时，$\sqrt{a^2}=a(a\geqslant 0)$ 的情形，而没有考虑当 $a<0$ 时，$\sqrt{a^2}=-a$ 的情形，教学中不必增加这种情形.

9. 本节最后，教科书通过回顾已经学过的各种式子的共同特点，给出了代数式的概念，这个概念是对已学各种式子的概括总结，让学生对所学知识有一个整体认识，教学中只要让学生有所体会就可以了，不必深究这个概念，类似于判断一个式子是否是代数式等这样的问题不必要出.

[1] 在圆形钢板上所截面积最大的正方形是顶点在圆周上的正方形.

习题21.1

复习巩固 ▶▶

1. 当 a 是怎样的实数时，下列各式在实数范围内有意义？

(1) $\sqrt{a+2}$；　　(2) $\sqrt{3-a}$；

(3) $\sqrt{5a}$；　　(4) $\sqrt{-a}$.

2. 计算：

(1) $(\sqrt{5})^2$；　　(2) $(-\sqrt{0.2})^2$；

(3) $\sqrt{0.6^2}$；　　(4) $\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2}$.

3. 用代数式表示：

(1) 面积为 S 的圆的半径；

(2) 面积为 S 且两条邻边的比为 2∶3 的矩形的边长.

4. 已知直角三角形的两条直角边为 a 和 b，斜边为 c.

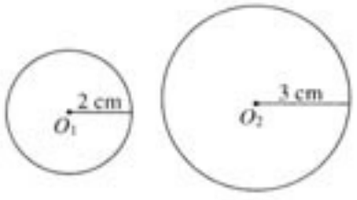
(1) 如果 $a=12$，$b=5$，求 c；

(2) 如果 $a=3$，$c=4$，求 b；

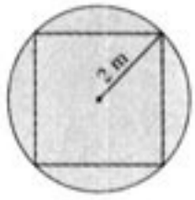
(3) 如果 $c=10$，$b=9$，求 a.

综合运用 ▶▶

5. 已知半径为 r cm 的圆的面积是半径为 2 cm 和 3 cm 的两个圆的面积的和，求 r 的值.



(第5题)



(第6题)

6. 要在一个半径为 2 m 的圆形钢板上，截出一块面积最大的正方形，正方形的边长是多少？[1]

习题 21.1

1. 习题 21.1 对本节内容以及以前所学有关实数内容进行了复习、整理和提高. “复习巩固”的 4 道题目对本节所讲二次根式的定义和性质进行复习. 第 1 题通过确定字母 a 的取值范围来复习二次根式的意义，注意第 (4) 小题中被开方数是以负数的形式给出的. 第 2 题的前两道题是复习性质 $(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant 0)$，后两道小题是复习性质 $\sqrt{a^2}=a(a\geqslant 0)$，在第 2 (2) 小题中要提醒学生注意前面的负号，让学生理解 $(-\sqrt{0.2})^2$ 可以看成 $[(-1)\times\sqrt{0.2}]^2$，然后再利用整式中积的乘方的运算性质进行运算. 第 3 题是两道简单的用代数式表示结果的几何题. 第 4 题是利用勾股定理求边长，结果是用二次根式表示出来的.

2. “综合运用”的两道题目是几何应用题，最后结果用二次根式来表示，这类问题在“实

拓广探索 ▶▶

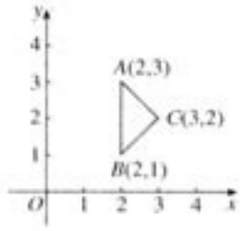
7. (1) $\sqrt{18-n}$是整数，求自然数 n 的值；

(2) $\sqrt{24n}$是整数，求正整数 n 的最小值.[1]

8. 如图，在平面直角坐标系中，$\triangle ABC$ 的三个顶点的坐标分别是A(2，3)，B(2，1)，C(3，2).

(1) 判断$\triangle ABC$的形状；

(2) 如果将$\triangle ABC$沿着边 AC 旋转，求所得旋转体的体积.



(第8题)

[1] 因为 $24n = 2^2 \times 6 \times n$，因此，使得$\sqrt{24n}$为整数的最小的正整数 n 是 6.

数”一章有所涉及，教学时注意让学生复习“实数”的内容，将相关内容联系在一起.

3. “拓广探索”是根据二次根式的定义和性质确定字母的取值的问题. 解第 7(1) 题时要注意根据被开方数是非负数的要求，先确定 n 的取值范围，然后再根据 n 是自然数的要求求解. 第 8(1) 小题要用到勾股定理的逆定理来确定三角形的形状，其中三角形的边长 AC 和 BC 要用勾股定理来确定，第 8(2) 小题是求旋转体的面积，这个旋转体是直角三角形绕着一条直角边旋转而成的圆锥体，因此可以利用圆锥体的体积公式求解.

1. 本节主要内容是二次根式的乘除运算和二次根式的化简. 通过本节学习应使学生掌握二次根式的乘除运算法则和化简二次根式的常用方法.

2. 本节首先介绍二次根式的乘法运算. 教科书从具体例子出发，由特殊到一般地归纳给出

[1] 这里的计算是进行比较简单的二次根式的乘法，因为二次根式的化简还没有学.

[2] 这样的规定是为了降低难度，教学时要注意防止学生产生字母只表示正数的片面认识.

21.2 二次根式的乘除

探究

1. 计算下列各式，观察计算结果，你发现什么规律？

(1) $\sqrt{4}\times\sqrt{9}=$_____，$\sqrt{4\times9}=$_____；

(2) $\sqrt{16}\times\sqrt{25}=$_____，$\sqrt{16\times25}=$_____.

2. 用你发现的规律填空，并用计算器进行验算.

(1) $\sqrt{2}\times\sqrt{3}$____$\sqrt{6}$；　(2) $\sqrt{2}\times\sqrt{5}$____$\sqrt{10}$.

一般地，对二次根式的乘法规定

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}\ (a\geqslant0,\ b\geqslant0).$$

例 1 计算：[1]

(1) $\sqrt{3}\times\sqrt{5}$；　(2) $\sqrt{\frac{1}{3}}\times\sqrt{27}$.

解：(1) $\sqrt{3}\times\sqrt{5}=\sqrt{15}$；

(2) $\sqrt{\frac{1}{3}}\times\sqrt{27}=\sqrt{\frac{1}{3}\times27}=\sqrt{9}=3$.

在本章中，如果没有特别说明，所有的字母都表示正数.[2]

把$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$反过来，就得到

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b},$$

利用它可以进行二次根式的化简.

例 2 化简：

(1) $\sqrt{16\times81}$；　(2) $\sqrt{4a^2b^3}$.

解：(1) $\sqrt{16\times81}=\sqrt{16}\times\sqrt{81}=4\times9=36$；

二次根式的乘法法则. “探究”栏目中的两个问题是两个不同层次的探究活动. 第一步是让学生通过计算发现规律，第二步是让学生对发现的规律进行验证，因此第一步中的被开方数都是完全平方数，这样有助于学生发现规律，第二步中的被开方数不是完全平方数，要求用计算器进行验算，以验证规律是否正确.

二次根式的乘法法则是利用由特殊到一般的方法归纳给出的，考虑到学生的年龄特征和知识水平，对法则的合理性没有给出一般的说明.

3. 例 1 是利用二次根式的乘法法则进行具体运算，通过例 1 的第 (2) 小题，可以让学生看到两个无理数相乘的结果是有理数的情况，这也为后面学习二次根式的化简作了铺垫.

4. 如果将二次根式的乘法法则$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$反过来，就得到积的算术平方根的性质，利用这条性质可以对二次根式进行化简. 例 2 是利用积的算术平方根的性质对二次根式进行化简.

(2) $\sqrt{4a^2b^3}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{b^3}$

$=2\cdot a\cdot\sqrt{b^2\cdot b}$

$=2a\sqrt{b^2}\cdot\sqrt{b}=2ab\sqrt{b}$.

被开方数 $4a^2b^3$ 含 4，a^2，b^2 这样的因数或因式，它们可以开方后移到根号外，它们是开得尽的因数或因式.

例 3 计算：

(1) $\sqrt{14}\times\sqrt{7}$；　　(2) $3\sqrt{5}\times2\sqrt{10}$；

(3) $\sqrt{3x}\cdot\sqrt{\frac{1}{3}xy}$.

解：

(1) $\sqrt{14}\times\sqrt{7}=\sqrt{14\times7}=\sqrt{7^2\times2}$

$=\sqrt{7^2}\times\sqrt{2}=7\sqrt{2}$；

你还有其他解法吗？[1]

(2) $3\sqrt{5}\times2\sqrt{10}=3\times2\sqrt{5\times10}$

$=6\sqrt{5^2\times2}=6\sqrt{5^2}\times\sqrt{2}$

$=6\times5\sqrt{2}=30\sqrt{2}$；

(3) $\sqrt{3x}\cdot\sqrt{\frac{1}{3}xy}=\sqrt{3x\cdot\frac{1}{3}xy}$

$=\sqrt{3\cdot\frac{1}{3}x^2y}=\sqrt{x^2y}=\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{y}$

$=x\sqrt{y}$.

练习

1. 计算：

(1) $\sqrt{2}\times\sqrt{5}$；　　(2) $\sqrt{3}\times\sqrt{12}$；

(3) $2\sqrt{xy}\cdot\sqrt{\frac{1}{x}}$；　　(4) $\sqrt{288}\times\sqrt{\frac{1}{72}}$.

2. 化简：

(1) $\sqrt{49\times121}$；　　(2) $\sqrt{225}$；

(3) $\sqrt{4y}$；　　(4) $\sqrt{16ab^2c^3}$.

3. 一个矩形的长和宽分别是 $\sqrt{10}$ cm 和 $2\sqrt{2}$ cm，求这个矩形的面积.

[1] 对于 $\sqrt{14}\times\sqrt{7}$ 这道题，可以让学生尝试把它变成 $\sqrt{98}$ 以后再计算，让学生比较两种方法的优劣，从而掌握较好的方法.

练习答案

1. (1) $\sqrt{10}$；
   (2) 6；
   (3) $2\sqrt{y}$；
   (4) 2.
2. (1) 77；
   (2) 15；
   (3) $2\sqrt{y}$；
   (4) $4bc\sqrt{ac}$.
3. $4\sqrt{5}\text{cm}^2$.

通过例 2 的学习，应该使学生对化简二次根式的基本要求有所认识，即在化简时，一般先将被开方数进行因数分解或因式分解，然后再将能开得尽方的因数或因式开出来，这一点教科书利用了一个旁注加以说明.

5. 例 3 是进行二次根式的乘法运算，在计算的过程中既要用到二次根式的乘法法则，又要用到积的算术平方根的性质进行化简，因此例 3 是例 1 和例 2 的综合. 在学习例 3 的第 (1) 小题时，可以提醒学生注意，在被开方数相乘的时候，就可以考虑因数分解或因式分解，如由 $\sqrt{14}\times\sqrt{7}$ 直接可得 $\sqrt{7^2\times2}$，而不必先写成 $\sqrt{98}$ 再分解.

6. 对于二次根式的除法运算，教科书的处理方式类似于乘法，也是采用由特殊到一般归纳给出除法法则的方式. 教科书首先设置一个“探

[1] $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}=\frac{2}{3}$，$\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$；

$\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}}=\frac{4}{5}$，$\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$.

[2] 注意这里 $b>0$，因为 $b=0$ 时分母为 0，没意义.

探究

1. 计算下列各式，观察计算结果，你发现什么规律？[1]

(1) $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}=$(　　)，$\sqrt{\frac{4}{9}}=$(　　)；

(2) $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}}=$(　　)，$\sqrt{\frac{16}{25}}=$(　　).

2. 用你发现的规律填空，并用计算器进行验算：

(1) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$——$\sqrt{\frac{2}{3}}$；　　(2) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$——$\sqrt{\frac{2}{5}}$.

一般地，对二次根式的除法规定

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}\ (a\geqslant 0,\ b>0).$$[2]

例 4 计算：

(1) $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{3}}$；　　(2) $\sqrt{\frac{3}{2}}\div\sqrt{\frac{1}{18}}$.

解：(1) $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{24}{3}}=\sqrt{8}=\sqrt{4\times 2}=2\sqrt{2}$；

(2) $\sqrt{\frac{3}{2}}\div\sqrt{\frac{1}{18}}=\sqrt{\frac{3}{2}\div\frac{1}{18}}=\sqrt{\frac{3}{2}\times 18}=\sqrt{3\times 9}=3\sqrt{3}$.

把 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$ 反过来，就得到

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\ (a\geqslant 0,\ b>0),$$

利用它可以进行二次根式的化简.

例 5 化简：

(1) $\sqrt{\frac{3}{100}}$；　　(2) $\sqrt{\frac{25y}{9x^2}}$.

究”的栏目，栏目中的两个问题是探究活动的两个不同的方面. 第一个问题是要求学生通过计算发现规律，因此二次根式中的被开方数都是完全平方数，这样有助于规律的发现；第二个问题是要求学生验证所发现的规律，因此二次根式中的被开方数选择了不是完全平方数的情况. 这样，对于二次根式的除法法则，实际上是根据被开方数的不同情况而得到的规律.

7. 例 4 是应用二次根式的除法运算法则进行计算，教学中要注意提醒学生结果中应不含能开得尽方的因数或因式.

8. 把二次根式的除法法则反过来就得到商的算术平方根的性质，利用这条性质可以对二次根式进行化简，这样就在利用积的算术平方根的性质进行化简的基础上，又学习了一种化简二次根式的方法.

解：(1) $\sqrt{\frac{3}{100}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{100}}=\frac{\sqrt{3}}{10}$；

(2) $\sqrt{\frac{25y}{9x^2}}=\frac{\sqrt{25y}}{\sqrt{9x^2}}=\frac{5\sqrt{y}}{3x}$.

在解法二中，式子变形 $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}$ 是为了去掉分母中的根号.

例 6 计算：

(1) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$；　(2) $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{27}}$；　(3) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2a}}$.

解：(1)

解法一：$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{3}{5}}=\sqrt{\frac{3\times5}{5\times5}}=\sqrt{\frac{15}{5^2}}=\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5^2}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$.[1]

解法二：$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{15}}{(\sqrt{5})^2}=\frac{\sqrt{15}}{5}$.

在二次根式的运算中，最后结果一般要求分母中不含二次根式.

(2) $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{27}}=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3^2\times3}}=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3^2}\times\sqrt{3}}$

$=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

(3) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2a}}=\frac{\sqrt{8}\cdot\sqrt{2a}}{\sqrt{2a}\cdot\sqrt{2a}}=\frac{4\sqrt{a}}{2a}=\frac{2\sqrt{a}}{a}$.

观察上面例 4、例 5、例 6 中各小题的最后结果，比如 $2\sqrt{2}$、$\frac{\sqrt{3}}{10}$、$\frac{2\sqrt{a}}{a}$ 等，可以发现这些式子中的二次根式有如下两个特点：

(1) 被开方数不含分母；

(2) 被开方数中不含能开得尽方的因数或因式.

我们把满足上述两个条件的二次根式，叫做**最简二次根式**.

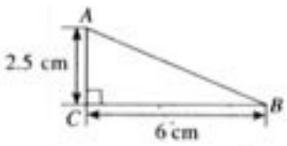


图 21.2-1

例 7 如图 21.2-1，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$AC=2.5$ cm，$BC=6$ cm，求 AB 的长.

解：因为 $AB^2=AC^2+BC^2$，

[1] 解法一是将二次根式的除法转化为商的算术平方根的形式进行计算，方法二是利用分母有理化的方法进行计算的.

9. 例 6 是进行二次根式的除法运算，本例题实际上给出了两种去掉分母中的根号的方法，第二种方法就是分母有理化（把分母中的根号化去就是分母有理化），教科书没有给出这个名词，教学中也不必增加，只要让学生掌握这种方法就可以了.

10. 在例 6 之后，教科书结合例 4、例 5 和例 6 的结果，给出了最简二次根式的概念，这实际上也就指明了二次根式乘除运算的结果要写成最简二次根式的形式，将一个二次根式化简实际上就是将它化成最简二次根式的形式.

把一个二次根式化成最简二次根式，不外乎有以下两种情况：

(1) 如果被开方数是分数或分式（包括小数），可以采用例 6 中的第一种方法进行化简，也可以先利用商的算术平方根的性质把它写成分式的形式，然后再利用例 6 的第二种方法化简；

(2) 如果被开方数不含分母，可以先将它分

所以 $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}$

$=\sqrt{2.5^2+6^2}=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+36}$

$=\sqrt{\frac{169}{4}}=\frac{\sqrt{169}}{\sqrt{4}}=\frac{13}{2}=6.5(\text{cm})$.

因此 AB 的长为 6.5 cm.



现在我们来看本章引言中的问题.

如果两个电视塔的高分别是 $h_1$km，$h_2$km，那么它们的传播半径的比为 $\frac{\sqrt{2Rh_1}}{\sqrt{2Rh_2}}$. 这个式子还可以化简：

$$\frac{\sqrt{2Rh_1}}{\sqrt{2Rh_2}}=\frac{\sqrt{2R}\cdot\sqrt{h_1}}{\sqrt{2R}\cdot\sqrt{h_2}}=\frac{\sqrt{h_1}}{\sqrt{h_2}}=\frac{\sqrt{h_1h_2}}{h_2}.$$

练习

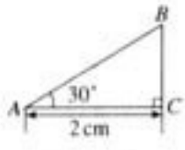
1. 计算：

(1) $\sqrt{18}\div\sqrt{2}$；(2) $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{6}}$；(3) $\sqrt{2a}\div\sqrt{6a}$；(4) $\sqrt{\frac{b}{5}}\div\sqrt{\frac{b}{20a^2}}$.

2. 把下列二次根式化成最简二次根式：

(1) $\sqrt{32}$；(2) $\sqrt{40}$；(3) $\sqrt{1.5}$；(4) $\sqrt{\frac{4}{3}}$.

3. 如图，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$\angle A=30°$，$AC=2$ cm，求斜边 AB 的长.



(第3题)

练习答案

1. (1) 3；(2) $2\sqrt{3}$；(3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$；(4) $2a$.

2. (1) $4\sqrt{2}$；(2) $2\sqrt{10}$；(3) $\frac{\sqrt{6}}{2}$；(4) $\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

3. $\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

解因式或分解因数，然后把开得尽方的因式或因数开出来，从而将式子化简.

最简二次根式的概念在这里出现也为下一节学习二次根式的加减打下基础.

例 7 是利用勾股定理解决实际问题，在求解的过程中遇到将结果化成最简二次根式的问题.

11. 本节最后，解决了章前引言中提出的问题，这里遇到了二次根式相除的问题.

习题21.2

复习巩固 ▶▶

1. 计算：

(1) $\sqrt{24}\times\sqrt{27}$；　　(2) $\sqrt{6}\times(-\sqrt{15})$；

(3) $\sqrt{18}\times\sqrt{20}\times\sqrt{75}$；　　(4) $\sqrt{3^2\times4^3\times5}$.

2. 计算：

(1) $\sqrt{18}\div\sqrt{8}$；　　(2) $\dfrac{4\sqrt{15}}{2\sqrt{5}}$；

(3) $\sqrt{1\dfrac{2}{3}}\div\sqrt{\dfrac{5}{6}}$；　　(4) $\dfrac{2\sqrt{x^3y}}{3\sqrt{xy}}$.

3. 化简：

(1) $\sqrt{4\times49}$；　　(2) $\sqrt{300}$；

(3) $\sqrt{\dfrac{9}{49}}$；　　(4) $\sqrt{\dfrac{a^3b}{4c^2}}$.

综合运用 ▶▶

4. 设矩形的长与宽分别为 a、b，根据下列条件求面积 S：[1]

(1) $a=\sqrt{8}$，$b=\sqrt{12}$；

(2) $a=2\sqrt{50}$，$b=3\sqrt{32}$.

5. 已知正方形的边长为 a，面积为 S.[2]

(1) 如果 $S=50\ \text{cm}^2$，求 a；

(2) 如果 $S=242\ \text{cm}^2$，求 a.

6. 计算：

(1) $\sqrt{0.4}\times\sqrt{3.6}$；　　(2) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}\times\sqrt{\dfrac{27}{8}}$；

(3) $\dfrac{\sqrt{2}}{3\sqrt{40}}$；　　(4) $\sqrt{27}\times\sqrt{50}\div\sqrt{6}$.

7. 已知$\sqrt{2}\approx1.414$，求$\sqrt{\dfrac{1}{2}}$与$\sqrt{8}$的近似值.

[1] 计算结果可以用二次根式表示.

[2] 同 [1].

习题 21.2

1. 习题 21.2 中“复习巩固”的三个题目，对本节所学的二次根式的乘法法则、除法法则以及二次根式的化简进行了复习.

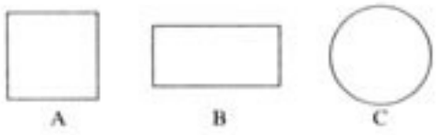
第 1 题是复习二次根式的乘法法则和利用积的算术平方根的性质进行化简. 对于本题的前三个小题，教学时要注意鼓励学生用不同的方法进行计算，例如既可以先用二次根式的乘法法则进行计算，然后再利用积的算术平方根的性质进行化简，也可以先利用积的算术平方根的性质将二次根式化成最简二次根式，然后再利用二次根式的乘法法则进行运算. 以第 1(1) 小题为例，可以先将$\sqrt{24}\times\sqrt{27}$写成

$\sqrt{24\times27}=\sqrt{2^2\times6\times3^2\times3}=\sqrt{2^2\times3^2\times3^2\times2}$，

然后再根据积的算术平方根的性质化简，也可以先将$\sqrt{24}\times\sqrt{27}$化成 $2\sqrt{6}\times3\sqrt{3}$，然后再利用二次根式的乘法运算法则进行计算.

拓广探索 ▶▶

8. 已知正方形 A、矩形 B、圆 C 的面积均为 628 cm^2，其中矩形 B 的长是宽的 2 倍，如果 π 取 3.14，试比较它们的周长 L_A、L_B、L_C 的大小. 解完本题后，你能得到什么启示？



（第 8 题）

9. 用长 3 cm、宽 2.5 cm 的邮票 30 枚摆成一个正方形，这个正方形的边长是多少？



10. 用计算器计算：

(1) $\sqrt{9\times9+19}$；　(2) $\sqrt{99\times99+199}$；

(3) $\sqrt{999\times999+1\,999}$；　(4) $\sqrt{9\,999\times9\,999+19\,999}$.

观察上面几题的结果，你能发现什么规律？用你发现的规律直接写出下题的结果：

$\sqrt{\underbrace{99\cdots9}_{n个9}\times\underbrace{99\cdots9}_{n个9}+1\underbrace{99\cdots9}_{n个9}}=$_____.

第 2 题是二次根式的除法，第 3 题是二次根式的化简，教学时应注意让学生灵活运用法则和性质进行运算和化简.

2. “综合运用”中的第 4、5 题是几何问题，在求解的过程中要用到二次根式的乘除以及化简等知识.

3. “拓广探索”的第 8、9 题有一定的探索性，教学中不仅要注意通过探索得到的结论，更要注意探索的过程，在这个探索过程中培养学生的逻辑思维能力和探究能力.

21.3 二次根式的加减

问题 现有一块长 7.5 dm、宽 5 dm 的木板，能否采用如图 21.3-1 的方式，在这块木板上截出两个面积分别是 8 dm^2 和 18 dm^2 的正方形木板？

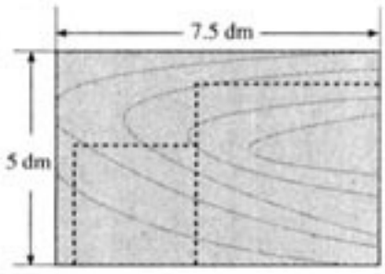


图 21.3-1

因为大、小正方形木板的边长分别为$\sqrt{18}$ dm和$\sqrt{8}$ dm，显然木板够宽．下面考虑木板是否够长．

由于两个正方形的边长的和为$(\sqrt{8}+\sqrt{18})$dm．这实际上是求$\sqrt{8}$、$\sqrt{18}$这两个二次根式的和，我们可以这样来计算：

$$\begin{aligned}&\sqrt{8}+\sqrt{18}^{[1]}\\&=2\sqrt{2}+3\sqrt{2}\quad\text{（化成最简二次根式）}\\&=(2+3)\sqrt{2}\quad\text{（分配律）}\\&=5\sqrt{2}.\end{aligned}$$

在有理数范围内成立的运算律，在实数范围内仍然成立．

由$\sqrt{2}<1.5$可知$5\sqrt{2}<7.5$，即两个正方形的边长的和小于木板的长，因此可以用这块木材按要求截出两个面积分别是 8 dm^2 和 18 dm^2 的正方形木板．

分析上面计算$\sqrt{8}+\sqrt{18}$的过程，可以看到，把$\sqrt{8}$

[1] 在第 10 章“实数”中，曾以例题的方式出现了计算

$$2\sqrt{2}+3\sqrt{2}$$

的问题，当时设计这个问题的目的是要说明在有理数范围内成立的运算律在实数范围内仍然成立．

1. 本小节的主要内容是二次根式的加减运算和二次根式的加、减、乘、除混合运算．本小节的基础是学生已经掌握了把一个二次根式化简成最简二次根式的方法，本小节重点是二次根式的加减运算方法，通过本小节学习应使学生熟练进行二次根式的加减运算以及加、减、乘、除混合运算．

2. 本小节首先通过一个实际问题引出二次根式的加法运算，使学生感到研究二次根式的加减运算是实际的需要．这个实际问题是要在一块长方形木板上截出两块面积不同的正方形木板，当然解决这个实际问题的方法可能不同，除了教科书提供的方法外，还可以先分别估计两个正方形的边长，再把它们的和与木板的长比较，即可以这样解决：

因为 $\sqrt{8}=2\sqrt{2}<2\times1.5=3$，

$\sqrt{18}=3\sqrt{2}<3\times1.5=4.5$，

[1] 实际教学中，学生可能会出现$\sqrt{3}+\sqrt{5}=\sqrt{8}$的错误.

和$\sqrt{18}$化成最简二次根式$2\sqrt{2}$和$3\sqrt{2}$后，由于被开方数相同（都是2），可以利用分配律将$2\sqrt{2}$和$3\sqrt{2}$进行合并.

二次根式加减时，可以先将二次根式化成最简二次根式，再将被开方数相同的二次根式进行合并.

例1 计算：

(1) $\sqrt{9a}+\sqrt{25a}$；　　(2) $\sqrt{80}-\sqrt{45}$.

解：

(1) $\sqrt{9a}+\sqrt{25a}=3\sqrt{a}+5\sqrt{a}=(3+5)\sqrt{a}=8\sqrt{a}$；

(2) $\sqrt{80}-\sqrt{45}=4\sqrt{5}-3\sqrt{5}=(4-3)\sqrt{5}=\sqrt{5}$.

比较二次根式的加减与整式的加减，你能得出什么结论？

例2 计算：

(1) $2\sqrt{12}-6\sqrt{\frac{1}{3}}+3\sqrt{48}$；

(2) $(\sqrt{12}+\sqrt{20})+(\sqrt{3}-\sqrt{5})$.

$\sqrt{3}$与$\sqrt{5}$能合并吗？[1]

解： (1) $2\sqrt{12}-6\sqrt{\frac{1}{3}}+3\sqrt{48}$

$=4\sqrt{3}-2\sqrt{3}+12\sqrt{3}$

$=14\sqrt{3}$；

(2) $(\sqrt{12}+\sqrt{20})+(\sqrt{3}-\sqrt{5})$

$=2\sqrt{3}+2\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{5}$

$=3\sqrt{3}+\sqrt{5}$.

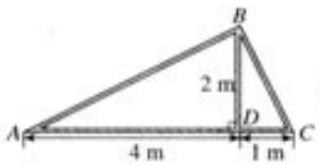


图 21.3-2

例3 要焊接一个如图21.3-2所示的钢架，大约需要多少米钢材（结果保留小数点后两位）？

解： 根据图中尺寸可得

$AB=\sqrt{AD^2+BD^2}=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$,

所以$\sqrt{8}+\sqrt{18}<7.5$，即两个正方形边长的和小于木板的长，因此可以用这块木板截出符合要求的两个正方形木板.

教科书所采用的先求和、化简，再估计大小的方法是为了引出二次根式的加法运算.

2. 进行二次根式加减运算的基础是将二次根式化成最简二次根式，之后就可以将被开方数相同的二次根式进行合并，合并的依据是分配律，关于这一点，在“实数”一章已经有所涉及，教科书也在边空给出说明，教学中应使学生在复习的基础上进一步加深认识.

3. 合并被开方数相同的二次根式实际上就是合并同类二次根式. 所谓同类二次根式就是指几个二次根式化成最简二次根式后，如果被开方数相同，这几个二次根式就叫做同类二次根式. 教科书没有给出这个概念，目的是淡化概念，避免教学中在判断几个二次根式是不是二次根式上下太多的工夫，而将教学重点集中在二次根式的

$$BC=\sqrt{BD^2+CD^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}.$$

所需钢材的长度为

$$\begin{aligned}&AB+BC+AC+BD\\&=2\sqrt{5}+\sqrt{5}+5+2\\&=3\sqrt{5}+7\\&\approx 3\times 2.236+7\\&\approx 13.71(\text{m}).\end{aligned}$$

答：要焊接一个如图所示的钢架，大约需要13.71 m的钢材.

练习

1. 下列计算是否正确？为什么？

(1) $\sqrt{8}-\sqrt{3}=\sqrt{8-3}$；　(2) $\sqrt{4}+\sqrt{9}=\sqrt{4+9}$；　(3) $3\sqrt{2}-\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.

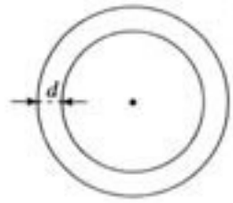
2. 计算：

(1) $2\sqrt{7}-6\sqrt{7}$；　(2) $\sqrt{80}-\sqrt{20}+\sqrt{5}$；

(3) $\sqrt{18}+(\sqrt{98}-\sqrt{27})$；

(4) $(\sqrt{24}+\sqrt{0.5})-\left(\sqrt{\frac{1}{8}}-\sqrt{6}\right)$.

3. 如图，两个圆的圆心相同，它们的面积分别是12.56 cm² 和 25.12 cm²，求圆环的宽度 d（π 取3.14，结果保留小数点后两位）.



（第3题）

例4　计算：

(1) $(\sqrt{8}+\sqrt{3})\times\sqrt{6}$；　(2) $(4\sqrt{2}-3\sqrt{6})\div 2\sqrt{2}$.

解：(1) $(\sqrt{8}+\sqrt{3})\times\sqrt{6}$

$$\begin{aligned}&=\sqrt{8}\times\sqrt{6}+\sqrt{3}\times\sqrt{6}\\&=\sqrt{8\times 6}+\sqrt{3\times 6}\\&=4\sqrt{3}+3\sqrt{2};\end{aligned}$$

练习答案

1. (1) 不正确，不能化简；
   (2) 不正确，不能化简；
   (3) 正确.
2. (1) $-4\sqrt{7}$；
   (2) $2\sqrt{5}+5$；
   (3) $10\sqrt{2}-3\sqrt{3}$；
   (4) $3\sqrt{6}+\frac{1}{4}\sqrt{2}$.
3. 0.83 cm.

加减运算上. 因此，教学中不必增加这个概念.

4. 二次根式的加减首先是化简，在化简之后就是类似于整式的加减运算了. 整式加减无非是去括号与合并同类项，二次根式在化简之后也是如此，合并被开方数相同的二次根式（合并同类二次根式）实际上相当于合并同类项.

教科书在总结给出二次根式的加减运算方法之后，给出五个例题. 例1是进行二次根式的加减运算，例2是二次根式的加减混合运算. 在学习这两个例题的过程中，要注意让学生体会有理数的运算、二次根式的运算以及整式的运算之间的联系，感受数的扩充过程中运算性质和运算律的一致性以及数式通性等.

例3是利用勾股定理解决实际问题，在计算过程中用到了本节所学习的二次根式的加法运算，教学中要注意提醒学生应在计算的最后一步取近似值，这样会更精确.

例4是关于二次根式的加、减、乘、除混合

(2) $(4\sqrt{2}-3\sqrt{6})\div 2\sqrt{2}$

$=4\sqrt{2}\div 2\sqrt{2}-3\sqrt{6}\div 2\sqrt{2}$

$=2-\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

例 5 计算：

(1) $(\sqrt{2}+3)(\sqrt{2}-5)$； (2) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})$.

解：(1) $(\sqrt{2}+3)(\sqrt{2}-5)$

$=(\sqrt{2})^2+3\sqrt{2}-5\sqrt{2}-15$

$=2-2\sqrt{2}-15$

$=-13-2\sqrt{2}$；

(2) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})$

$=(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2$

$=5-3$

$=2$.

例5第 (1) (2) 小题分别利用了多项式乘法法则和公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

在二次根式的运算中，多项式乘法法则和乘法公式仍然适用.

练习

1. 计算：

(1) $\sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{5})$； (2) $(\sqrt{80}+\sqrt{40})\div\sqrt{5}$；

(3) $(\sqrt{5}+3)(\sqrt{5}+2)$； (4) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(3\sqrt{a}-\sqrt{b})$.

2. 计算：

(1) $(4+\sqrt{7})(4-\sqrt{7})$； (2) $(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})$；

(3) $(\sqrt{3}+2)^2$； (4) $(2\sqrt{5}-\sqrt{2})^2$.

练习答案

1. (1) $\sqrt{6}+\sqrt{10}$；

(2) $4+2\sqrt{2}$；

(3) $11+5\sqrt{5}$；

(4) $3a+2\sqrt{ab}-b$.

2. (1) 9；(2) 4；

(3) $7+4\sqrt{3}$；

(4) $22-4\sqrt{10}$.

运算的例子，计算过程中都用到分配律. 例 5 也是二次根式的混合运算，在运算过程中用到多项式的乘法法则和整式的乘法公式，教学中要注意让学生体会二次根式的运算与整式运算的联系. 这一点教科书在旁注中给出提示.

5. 二次根式的混合运算可以说是本章所学内容的综合运用，通过检查学生能否准确熟练地进行二次根式的混合运算，可以估计本章教学的基本要求是否达到.

习题21.3

复习巩固 ▶▶

1. 下列计算是否正确？为什么？

(1) $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{5}$；　(2) $2+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$；

(3) $3\sqrt{2}-\sqrt{2}=3$；　(4) $\dfrac{\sqrt{18}-\sqrt{8}}{2}=\sqrt{9}-\sqrt{4}=3-2=1$.

2. 计算：

(1) $2\sqrt{12}+\sqrt{27}$；　(2) $\sqrt{18}-\sqrt{\dfrac{9}{2}}$；

(3) $\dfrac{2}{3}\sqrt{9x}+6\sqrt{\dfrac{x}{4}}$；　(4) $a^2\sqrt{8a}+3a\sqrt{50a^3}$.

3. 计算：

(1) $\sqrt{18}-\sqrt{32}+\sqrt{2}$；　(2) $\sqrt{75}-\sqrt{54}+\sqrt{96}-\sqrt{108}$；

(3) $(\sqrt{45}+\sqrt{18})-(\sqrt{8}-\sqrt{125})$；　(4) $\dfrac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\dfrac{3}{4}(\sqrt{2}+\sqrt{27})$.

4. 计算：

(1) $(\sqrt{12}+5\sqrt{8})\sqrt{3}$；　(2) $(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})$；

(3) $(5\sqrt{3}+2\sqrt{5})^2$；　(4) $(\sqrt{48}+\dfrac{1}{4}\sqrt{6})\div\sqrt{27}$.

综合运用 ▶▶

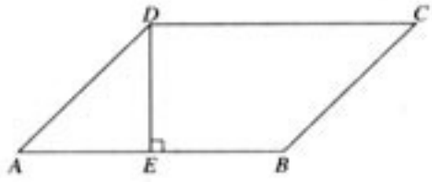
5. 已知$\sqrt{5}\approx2.236$，求$5\sqrt{\dfrac{1}{5}}-\dfrac{5}{4}\sqrt{\dfrac{4}{5}}+\sqrt{45}$的近似值（精确到0.01）.

6. 已知$x=\sqrt{3}+1$，$y=\sqrt{3}-1$，求下列各式的值：

(1) $x^2+2xy+y^2$；

(2) x^2-y^2.

7. 如图，在$\square ABCD$中，$DE\perp AB$，E点在AB上，$DE=AE=EB=a$. 求$\square ABCD$的周长.



（第7题）

习题 21.3

1. 习题21.3对本节所学的二次根式的加减运算以及二次根式的加、减、乘、除混合运算进行了全面复习. 第1题是针对学生容易出现的错误而设计的判断题，第2题分别是加法运算或减法运算，第3题是加减混合运算，第4题是加、减、乘、除的混合运算.

2. 在进行二次根式的运算时，要引导学生采用多种方法进行运算，以求熟悉二次根式的运算方法. 例如，对于第4（1）小题，可以这样做：

$$\begin{aligned}(\sqrt{12}+5\sqrt{8})\sqrt{3}&=\sqrt{12\times3}+5\sqrt{8\times3}\\&=\sqrt{3^2\times2^2}+5\sqrt{2^2\times2\times3}\\&=6+10\sqrt{6}.\end{aligned}$$

也可以这样做：

$$\begin{aligned}(\sqrt{12}+5\sqrt{8})\sqrt{3}&=(2\sqrt{3}+10\sqrt{2})\sqrt{3}\\&=6+10\sqrt{6}.\end{aligned}$$

[1] 提示：

$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=a^2+2+\frac{1}{a^2}$，

$\left(a-\frac{1}{a}\right)^2=a^2-2+\frac{1}{a^2}$.

拓广探索 ▶▶

8. 已知 $a+\frac{1}{a}=\sqrt{10}$，求 $a-\frac{1}{a}$ 的值.[1]

9. 在下列各方程后面的括号内分别给出了一组数，从中找出方程的解：

(1) $2x^2-6=0$，$(\sqrt{3}, \sqrt{6}, -\sqrt{3}, -\sqrt{6})$；

(2) $2(x+5)^2=24$，$(5+2\sqrt{3}, 5-2\sqrt{3}, -5+2\sqrt{3}, -5-2\sqrt{3})$.



阅读与思考 选学

海伦—秦九韶公式

如果一个三角形的三边长分别为 a，b，c，设 $p=\frac{a+b+c}{2}$，则三角形的面积为

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \quad ①$$

古希腊的几何学家海伦（Heron，约公元 50 年），在数学史上以解决几何测量问题而闻名. 在他的著作《度量》一书中，给出了这一公式和它的证明.

我国南宋时期数学家秦九韶（约 1202—1261），曾提出利用三角形的三边求面积的“秦九韶公式”

$$S=\sqrt{\frac{1}{4}\left[a^2b^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2\right]}. \quad ②$$

下面我们对公式②进行变形.

$$\sqrt{\frac{1}{4}\left[a^2b^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2\right]}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}ab\right)^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{4}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{1}{2}ab+\frac{a^2+b^2-c^2}{4}\right)\left(\frac{1}{2}ab-\frac{a^2+b^2-c^2}{4}\right)}$$

$$=\sqrt{\frac{2ab+a^2+b^2-c^2}{4}\cdot\frac{2ab-a^2-b^2+c^2}{4}}$$

$$=\sqrt{\frac{(a+b)^2-c^2}{4}\cdot\frac{c^2-(a-b)^2}{4}}$$

此外，教学中还要注意引导学生注意观察，分析运算式子的特点，选择一种简洁的方法进行运算.

3. “综合运用”的第 5 题是求近似值的问题，计算过程中要用到二次根式的加减运算. 第 6 题是求代数式的值，其中要利用整式的乘法公式，先将多项式进行因式分解，然后再代入求值. 第 7 题是几何题，其中要用勾股定理求边长.

4. “拓广探索”的第 8 题有一定的技巧，教学中可以给出提示，第 9 题是关于一元二次方程的解的问题，其中方程的解是用二次根式的形式表示的无理数，这为后面学习一元二次方程作铺垫.

阅读与思考

1. 当三角形的三条边长确定后，三角形的形状就确定了下来，自然三角形的面积也就确定

$$=\sqrt{\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}\cdot\frac{a+c-b}{2}\cdot\frac{b+c-a}{2}}$$

$$=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

这说明“海伦公式”与“秦九韶公式”实质上是同一个公式，所以我们也称①为“海伦—秦九韶公式”.

如图1，在$\triangle ABC$中，$BC=4$，$AC=5$，$AB=6$，请你用“海伦—秦九韶公式”求$\triangle ABC$的面积.[1]

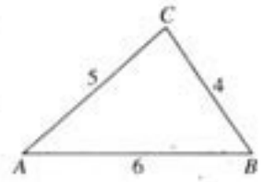


图1

[1] $\triangle ABC$的面积为$\frac{15\sqrt{7}}{4}$.

了下来，海伦—秦九韶公式实际上给出了已知三角形的三条边的长度求三角形的面积的方法. 在海伦公式和秦九韶公式中都用到了二次根式的表达形式，海伦公式更加简洁一些，将秦九韶公式进行化简后就可以化成海伦公式，因此它们本质上是一致的.

教学中，可以引导学生阅读有关方面的史料，让学生了解海伦公式和秦九韶公式的历史，提高学生的数学修养，并注意对学生进行爱国主义教育.

[1] 各种纸张的长与宽的比约为$\sqrt{2}$∶1.

[2] 这个长方体的长、宽、高分别是$4\sqrt{3}$、$2\sqrt{3}$、$\sqrt{3}$.

[3] 这个长方体的表面积是84 cm^2.

[4] 这个长方体的体积$24\sqrt{3}$.

数学活动

活动1　纸张规格与$\sqrt{2}$的关系

书籍和纸张的长与宽都有固定的尺寸，常用纸张的规格由下列两个表给出：

A型	mm×mm
A7	74×105
A6	105×148
A5	148×210
A4	210×297
A3	297×420
A2	420×594
A1	594×841

B型	mm×mm
B8	64×91
B7	91×128
B6	128×182
B5	182×257
B4	257×364
B3	364×515

(1) 测量教科书与课外读物的长与宽，看看它们属于哪种规格？

(2) 使用计算器求出各类纸张长与宽的比，你有什么发现？各类纸张的长与宽有什么关系？[1]

活动2　做长方体纸盒

做一个底面积为24 cm^2，长、宽、高的比为4∶2∶1的长方体，并回答下列问题：



(1) 这个长方体的长、宽、高分别是多少？[2]

(2) 长方体的表面积是多少？[3]

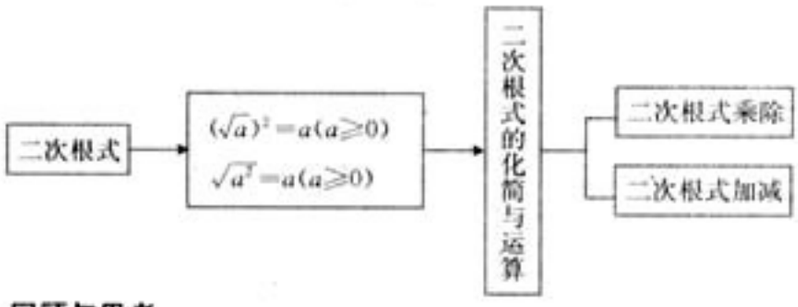
(3) 长方体的体积是多少？[4]

1. 本章设计两个数学活动. 在“活动1”中，要求学生通过测量和计算发现书籍和纸张的长与宽之间的关系，即它们的比与$\sqrt{2}$有关，通过这个活动可以使学生感受二次根式在生活实际中的应用. 教学中，可以鼓励学生查阅资料，了解有关纸张规格设计方面的信息，发现更多的数学在生活中应用的实例.

2. “活动2”要求作出一个长方形纸盒，这个纸盒的长、宽、高都是用二次根式表示的无理数. 要做这样的纸盒，会遇到如何作出长度为$\sqrt{3}$的线段的问题，这个问题在“实数”和“勾股定理”两章中都涉及过，教学中注意复习，并注意将新旧知识加以联系.

小　结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

1. 对于二次根式，要明确被开方数必须是非负数，也就是说，对于$\sqrt{a}$，只有当$a\geqslant 0$时才有意义.

2. 二次根式的运算中，一般要先把式子中的二次根式适当化简[1]. 举例说明什么是最简二次根式?

3. 结合例子说明二次根式的加、减、乘、除运算法则.

4. 结合本章内容，进一步体会代数式在表示数量关系方面的作用.

[1] 这里只是指在通常情况下的做法. 当然，在具体运算中，要根据题目的具体情况来选择适当的方法进行计算.

1. 小结中的“知识结构图”刻画了本章知识的内在结构. 本章是在“实数”一章的基础上，比较系统地学习二次根式的概念、性质和运算. 本章主要内容是二次根式的运算与化简，二次根式的概念和性质是为二次根式的运算与化简做准备的.

2. 小结中的“回顾与思考”对本章的主要内容进行了回顾或思考. 本章的主要概念有两个，一个是二次根式的概念，一个是最简二次根式的概念. 二次根式这个起始概念，从运算角度看，应主要从算术平方根的意义上去认识；最简二次根式是二次根式的化简和运算的基础.

本章的重点是二次根式的运算，复习二次根式的运算，首先应掌握二次根式的运算方法，既要注意到它与有理数、整式之间的关系，又要注意其自身的特点.

本章复习要注意与实际的联系，注意让学生体会代数式在表示数量关系中的作用.

[1] 如果学生对这个物理公式的背景不了解，教学时可以适当进行解释.

复习题21

复习巩固 ▶▶

1. 当 x 是什么值时，下列各式在实数范围内有意义？

(1) $\sqrt{3-x}$；　　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$.

2. 化简：

(1) $\sqrt{500}$；　　(2) $\sqrt{12x}$；

(3) $\sqrt{4\dfrac{2}{3}}$；　　(4) $\sqrt{\dfrac{2}{3a^2}}$.

3. 计算：

(1) $\left(\sqrt{24}-\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right)-\left(\sqrt{\dfrac{1}{8}}+\sqrt{6}\right)$；　(2) $2\sqrt{12}\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}\div 5\sqrt{2}$；

(3) $(2\sqrt{3}+\sqrt{6})(2\sqrt{3}-\sqrt{6})$；　　(4) $(2\sqrt{48}-3\sqrt{27})\div\sqrt{6}$.

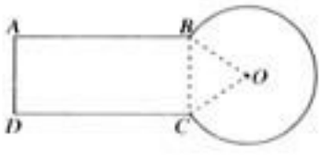
4. 如果正方形的边长为 a，它的面积与长为 96 cm，宽为 12 cm 的矩形的面积相等，求 a 的值.

5. 如果直角三角形的两条直角边的长分别为 $2\sqrt{3}+1$ 和 $2\sqrt{3}-1$，求斜边 c 的长.

综合运用 ▶▶

6. 当 $x=\sqrt{5}-1$ 时，求代数式 x^2+5x-6 的值.

7. 如图，一种零件的横截面是由矩形、三角形和扇形组成，$AB=25$ mm，$\angle BOC=60°$，半径 $OB=10$ mm，求这种零件的横截面面积（精确到 0.01 mm^2，π 取 3.142，$\sqrt{3}\approx 1.732$）.



（第 7 题）

8. 电流通过导线时会产生热量，设电流是 I（安培），导线电阻为 R（欧姆），t 秒产生的热量为 Q（焦），根据物理公式，$Q=I^2Rt$. 如果导线的电阻为 5 欧姆，1 秒时间导线产生 30 焦的热量，求电流 I 的值（精确到 0.01 安培）.[1]

1. “复习巩固”中的 5 道习题对本章所学内容进行全面复习.

第 1 题是复习二次根式的概念.

第 2 题是对二次根式进行化简，对于本题，教学时要注意提醒学生灵活运用所学内容，采用不同方法进行化简，例如，对于第 2(3) 小题，可以这样做：

$$\sqrt{4\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{14}{3}}=\sqrt{\frac{14\times 3}{3\times 3}}=\frac{\sqrt{42}}{3},$$

也可以这样做：

$$\sqrt{4\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{14}{3}}=\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{14}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{42}}{3}.$$

第 3 题是二次根式的加、减、乘、除混合运算，教学时提醒学生注意观察，选择最简洁的方法进行运算.

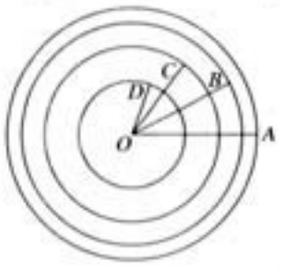
第 4 题结合实际求代数式的值，在求值的过程中用到二次根式的化简和运算.

第 5 题是利用勾股定理解决几何问题，求解

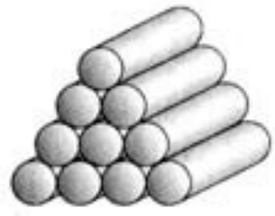
拓广探索 ▶▶

9. 已知 n 是正整数，$\sqrt{189n}$ 是整数，求 n 的最小值.

10. 把一个圆心为点 O，半径为 r 的圆的面积四等分，请你尽可能多地设想各种分割方法. 如图，如果圆心也是点 O 的三个圆把大圆 O 的面积四等分. 求这三个圆的半径 OB、OC、OD 的长.



（第 10 题）



（第 11 题）

11. 10 个外径为 1 m 的钢管以如图方式堆放，为了防雨，需要搭建防雨棚，这个防雨棚的高度最低应为多少米（结果保留小数点后一位）?

过程中用到二次根式的运算.

2. “综合运用”的第 6 题是求代数式的值，第 7 题是一个几何问题，第 8 题是一个物理问题，在解决这些问题的过程中，要综合运用本章所学有关二次根式的概念、性质和运算的方法.

3. “拓广探索”中的第 9 题要用到积的算术平方根的性质，因为

$$\sqrt{189n}=\sqrt{3^2\times3\times7n}=3\sqrt{21n},$$

所以使 $\sqrt{189n}$ 是整数的 n 的最小值是 21.

第 10 题是一个几何问题，在解决问题的过程中用到二次根式的化简和运算.

第 11 题是一个实际问题，这个实际问题可以利用勾股定理来解决，在具体求解的过程中要用到本章有关二次根式的知识和方法.

Ⅲ 习题解答

习题 21.1

1. (1) $a\geqslant -2$；(2) $a\leqslant 3$；(3) $a\geqslant 0$；(4) $a\leqslant 0$.

2. (1) 5；(2) 0.2；(3) 0.6；(4) $\frac{2}{3}$.

3. (1) $\sqrt{\frac{S}{2\pi}}$；(2) $\sqrt{\frac{2S}{3}}$.

4. (1) 13；(2) $\sqrt{7}$；(3) $\sqrt{19}$.

5. $\sqrt{13}$.

6. $2\sqrt{2}$.

7. (1) 自然数 n 可以取 2、9、14、17、18；

(2) 正整数 n 的最小值是 6.

8. (1) 三角形 ABC 是直角三角形，$\angle ACB$ 等于 90°；

(2) $\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$.

习题 21.2

1. (1) $18\sqrt{2}$；(2) $-3\sqrt{10}$；(3) $30\sqrt{30}$；(4) $24\sqrt{5}$.

2. (1) $\frac{3}{2}$；(2) $2\sqrt{3}$；(3) $\sqrt{2}$；(4) $\frac{2}{3}\sqrt{x}$.

3. (1) 14；(2) $10\sqrt{3}$；(3) $\frac{3}{7}$；(4) $\frac{a}{2c}\sqrt{b}$.

4. (1) $4\sqrt{6}$；(2) 240.

5. (1) $5\sqrt{2}$；(2) $11\sqrt{2}$.

6. (1) 1.2；(2) $\frac{3}{2}$；(3) $\frac{\sqrt{5}}{30}$；(4) 15.

7. 0.707，2.828.

8. $L_C\leqslant L_A\leqslant L_B$，在面积相同的正方形、长方形和圆中，圆的周长最小.

9. 15 cm.

10. (1) 10；(2) 100；(3) 1 000；(4) 10 000；

$$\sqrt{\underbrace{99\cdots9}_{n\text{个}9}\times\underbrace{99\cdots9}_{n\text{个}9}+1\underbrace{99\cdots9}_{n\text{个}9}}=1\underbrace{00\cdots0}_{n\text{个}0}.$$

习题 21.3

1. (1) 不正确，$\sqrt{2}$ 与 $\sqrt{3}$ 不能合并；(2) 不正确，2 与 $\sqrt{2}$ 不能合并；

(3) 不正确，$3\sqrt{2}-\sqrt{2}=2\sqrt{2}$；(4) 不正确，$\frac{\sqrt{18}-\sqrt{8}}{2}=\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. (1) $7\sqrt{3}$；(2) $\frac{3}{2}\sqrt{3}$；(3) $5\sqrt{x}$；(4) $17a^2\sqrt{2a}$.

3. (1) 0；(2) $\sqrt{6}-\sqrt{3}$；(3) $8\sqrt{5}+\sqrt{2}$；(4) $-\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{7}{4}\sqrt{3}$.

4. (1) $6+10\sqrt{6}$；(2) -6；(3) $95+20\sqrt{15}$；(4) $\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{2}}{12}$.

5. 7.83.

6. (1) 12；(2) $4\sqrt{3}$.

7. $(2\sqrt{2}+4)a$.

8. $\pm 4\sqrt{6}$.

9. (1) $\pm\sqrt{3}$；(2) $\pm 2\sqrt{3}-5$.

复习题 21

1. (1) $x\leqslant 3$；(2) $x>\frac{1}{2}$.

2. (1) $10\sqrt{5}$；(2) $2\sqrt{3x}$；(3) $\frac{\sqrt{42}}{3}$；(4) $\frac{\sqrt{6}}{3a}$.

3. (1) $\sqrt{6}-\frac{3}{4}\sqrt{2}$；(2) $\frac{3}{10}\sqrt{2}$；(3) 6；(4) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. $24\sqrt{2}$.

5. $\sqrt{26}$.

6. $15-7\sqrt{5}$.

7. 554.97 $(\text{mm})^2$.

8. 2.45 安培.

9. n 的最小值为 21.

10. $OD=\frac{1}{2}r$，$OC=\frac{\sqrt{2}}{2}r$，$OB=\frac{\sqrt{3}}{2}r$.

11. 3.6 m.

Ⅳ 教学设计参考案例

21.1 二次根式（第 1 课时）

教学任务分析

教学目标	知识技能	1. 了解二次根式的概念. 2. 了解二次根式的基本性质.
	数学思考	经历观察、比较、总结二次根式的基本性质的过程，发展学生的归纳概括能力.
	解决问题	通过对二次根式的概念和性质的探究，提高数学探究能力和归纳表达能力.
	情感态度	学生经历观察、比较、总结和应用等数学活动，感受数学活动充满了探索性与创造性，体验发现的快乐，并提高应用的意识.
重点	二次根式的概念和基本性质.	
难点	二次根式的基本性质的灵活运用.	

教学流程安排

活动流程图	活动内容和目的
活动 1　二次根式的概念	由一组式子观察、归纳二次根式的概念.
活动 2　探究$\sqrt{a}(a\geqslant 0)$是一个非负数	通过实例，抽象、概括得出二次根式的基本性质.
活动 3　探究 $(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant 0)$	
活动 4　探究$\sqrt{a^2}=a(a\geqslant 0)$	
活动 5　小结，课后作业	回顾梳理，进一步认识理解二次根式的概念和基本性质. 学生巩固、提高、发展.

教学过程设计

问题与情境	师生行为	设计意图
「**活动 1**」 问题 用带根号的式子填空，看看写出的结果有什么特点：（题目见教科书第 4 页“思考”栏目） (1) 所填的结果有什么特点？ (2) 平方根的性质是什么？ (3) 如果把上面所填式子叫做二次根式，那么你能用数学符号表示二次根式吗？ 例 1　当 x 是怎样的实数时，$\sqrt{x-2}$在实数范围内有意义？ 例 2　当 x 是怎样的实数时，$\sqrt{x^2}$ 在实数范围内有意义？$\sqrt{x^3}$呢？	教师演示课件，给出题目. 学生根据所学知识回答问题. 教师提出问题 (1)，注意学生是否能深入地观察，并发现和总结这组式子的特点； 教师提出问题 (2)，检查学生对所学知识的掌握情况，并引导学生将所学知识与新知识相联系； 教师提出问题 (3)，不同层次的学生会有不同的回答，学生可能遇到的困难：是否能够想到用字母表示数；是否能总结出 $a\geqslant 0$ 这一条件. 教师要注意帮助学生解决这些困难. 学生总结出二次根式的概念. 在本次活动中，教师应重点关注： (1) 学生是否掌握了二次根式有意义的条件； (2) 学生是否能将二次根式有意义的条件应用到问题的解决过程中，并注意到被开方数整体大于等于零决不能等同于被开方数的某一项或某一部分大于等于零.	由实际问题入手，设置情境问题，激发学生的兴趣，让学生从不同的式子中探寻规律，为二次根式的引入作好铺垫. 注重新旧知识的连贯性，使学生有一个由浅入深的学习过程，并体会到学习的内容是融会贯通的. 为学生提供练习的时间和空间，调动学生的主观能动性，激发好奇心和求知欲. 通过题目的练习，使学生加深对所学知识的理解，避免一些常见错误.

续表

问题与情境	师生行为	设计意图
「**活动 2**」 问题 请比较$\sqrt{a}$与 0 的大小.	学生可能马上反映到$\sqrt{a}>0$，部分学生能得出$\sqrt{a}\geqslant 0$这一正确结论. 本次活动中，教师应重点关注： (1) 学生是否联想到刚刚学习过的二次根式有意义的条件，本题中即要满足$a\geqslant 0$； (2) 学生是否能分$a>0$和$a=0$这两种情况进行讨论. 在教师的引导下，学生很容易得到如下结论： $\sqrt{a}(a\geqslant 0)$是一个非负数.	通过这一活动的设计，提高学生对所学知识的迁移能力和应用意识；培养学生的分类讨论的思想和归纳概括的能力.
「**活动 3**」 问题 根据算术平方根的意义填空： $(\sqrt{4})^2=$____； $(\sqrt{2})^2=$____； $\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2=$____； $(\sqrt{0})^2=$____. 一般地，你能得到什么结论？ 例 2　计算： (1) $(\sqrt{1.5})^2$；(2) $(2\sqrt{5})^2$.	学生首先总结这组题目的特点. 本次活动中，教师应重点关注： (1) 学生是否观察出被开方数的特点； (2) 学生是否注意到先开平方，再平方这一运算顺序； (3) 学生是否发现计算结果与被开方数的关系. 学生在教师的引导下，得出一般性的结论： $(\sqrt{a})^2=a\ (a\geqslant 0)$. 学生自己总结过程中容易忽略括号中的内容，教师要加以补充并强调它的必要性. 对于例 2 的第 (2) 题，形式上与$(\sqrt{a})^2$不一样，教师要关注学生是否联想到以前学习过的积的乘方运算，即$(ab)^2=a^2b^2$，有了对这一知识的复习，学生就会知道本题需要先进行积的乘方运算，再运用新学的二次根式的性质，分这样两步来计算问题就迎刃而解了.	本次活动中，由具体的正数和零入手来研究二次根式的一个性质，再引导学生由具体到抽象，得出一般性的结论，并发现开平方运算与平方运算的关系. 培养学生由特殊到一般的认识过程，提高归纳、总结的能力. 通过这组题目的练习，加深对$(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant 0)$这一性质的理解和应用. 对于复杂的题目，要学会分解，化难为易.

续表

问题与情境	师生行为	设计意图
「**活动 4**」 问题 (1) 填空： $\sqrt{2^2}=$____；$\sqrt{0.1^2}=$____； $\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2}=$____；$\sqrt{0^2}=$____. (2) 思考：当 $a\geqslant 0$ 时，$\sqrt{a^2}=$____? (3) $\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2$ 与 $\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2}$ 相等吗? 例 3　化简： (1) $\sqrt{16}$；(2) $\sqrt{(-5)^2}$.	教师首先引导学生比较活动 3 与活动 4 中两组题目的不同之处，注意学生是否观察出：活动 3 中的题目是对非负数先进行开平方运算，再进行平方运算；而活动 4 中的题目正好相反，是先进行平方运算，再进行开平方运算. 学生由这组题目能得到下面的结论：$\sqrt{a^2}=a(a\geqslant 0)$. 通过问题 (3)，教师引导学生得出一般性的结论.	有了活动 3 的学习经验，学生具备了一定的观察、归纳和总结的能力，能够轻松地得出二次根式的又一个性质，体会到了学以致用，不断探求新知的乐趣. 同时，通过对活动 3 和活动 4 两组题目的学习，培养了学生观察、对比的能力和意识，体会到了平方运算与开平方运算的内在联系.
「**活动 5**」 问题 本节课你学到了什么知识? 你有什么认识? 课后作业： 教科书习题 21.1 第 1、2、3、4 题.	教师引导，学生小结. 本次活动中教师应重点关注： (1) 理清本节课的知识脉络，突出学习重点； (2) 引导学生谈一谈对 $(\sqrt{a})^2$ 与 $\sqrt{a^2}$ 的认识； (3) 让学生认识到当 $a\geqslant 0$ 时，$(\sqrt{a})^2=\sqrt{a^2}$； 学生课后独立完成作业. 教师批改，作好教学情况记录. 本次活动中教师应重点关注： (1) 是否理解二次根式有意义的条件； (2) 是否深入理解平方运算与开平方运算的互为逆运算的关系，并熟练地运用到解题过程中去； (3) 学生对所学知识的实际应用能力.	学生共同总结，调动他们的主动参与意识，互相取长补短，再一次突出本节课的学习重点，掌握解题方法. 学生通过独立思考，完成课后作业，教师能够及时发现问题并反馈学生的学习情况，以便于查漏补缺，优化课堂教学.

教学设计说明

本节课是二次根式的第一课时，是在学习了数的开方后的一节课. 学习了数的开方后我们将有理数拓展到了实数，通过本节课的学习又将有理式拓展到了代数式.

根据教材内容的特点，将二次根式划分为两课时，第 1 课时主要学习二次根式的概念和性质，第 2 课时是进行应用和深化练习.

本节课先由问题情境带领学生去复习数的开方的有关知识，并通过对一组代数式的观察，引出二次根式的概念. 接下来是探究二次根式的性质：在探究$\sqrt{a}(a\geqslant 0)$是一个非负数这一性质的过程中，不仅复习了二次根式的有意义的条件，而且使学生有了分类讨论的意识和能力；在探究$(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant 0)$和$\sqrt{a^2}=a(a\geqslant 0)$这两个性质时，学生经历了观察、对比、归纳、总结以及由具体到抽象、由特殊到一般的学习过程，体会到了研究问题、解决问题的方法，加深了对所学知识的理解. 在处理这段教材时，没有刻意地增加难度，而是立足教材，吃透教材，循序渐进地引导学生去学习新知，使学生能准确地把握学习重点，突破学习难点.

21.3 二次根式的加减（第 1 课时）

教学任务分析

教学目标	知识技能	会进行二次根式的加减法运算.
	数学思考	学生经历由实际问题引入数学问题的过程，发展学生的抽象概括能力.
	解决问题	通过加减法运算解决生活实际问题.
	情感态度	培养学生善于思考，认真细致、一丝不苟的科学精神.
重点	合并被开方数相同的二次根式.	
难点	二次根式加减法的实际应用.	

教学流程安排

活动流程图	活动内容和目的
活动 1　实际问题的引入	通过实际问题，引入二次根式加减法的计算问题.
活动 2　二次根式的加减法	熟练掌握二次根式的加减法的运算法则.
活动 3　二次根式加减法的实际应用	培养学生对数学知识的实际应用能力.
活动 4　小结，课后作业	掌握解题方法，提高熟练性和准确性.

教学过程设计

问题与情境	师生行为	设计意图
「活动1」 问题： (1) 现有一块长 7.5 dm、宽 5 dm的木板，能否采用如教科书图 21.3.1 所示的方式，在这块木板上截出两个面积分别是 8 dm^2 和 18 dm^2的正方形木板？ (2) 分析 $\sqrt{8}+\sqrt{18}$ 的计算过程. (3) 下列计算是否正确？为什么？ ① $\sqrt{8}-\sqrt{3}=\sqrt{8-3}$； ② $\sqrt{4}+\sqrt{9}=\sqrt{4+9}$； ③ $\sqrt{9}\times\sqrt{16}=\sqrt{9\times16}$； ④ $3\sqrt{2}-\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.	这是一道解决实际问题的题目，学生分组讨论，探求方案. 教师倾听学生的交流，指导学生探究. 对于问题 (1)，教师应重点关注： (1) 学生是否能设计出解决问题的正确方案； (2) 如何比较$\sqrt{8}+\sqrt{18}$与 7.5 的大小. 在总结计算过程中，教师应重点关注： (1) 是否能准确地将$\sqrt{8}$和 $\sqrt{18}$化成最简二次根式； (2) 是否能将分配律运用到此题的计算当中去. 最后学生在小组讨论的基础上总结计算过程：二次根式加减时，可以先将二次根式化成最简二次根式，再将被开方数相同的二次根式进行合并. 学生在计算过程中容易出现①②两题的类似错误，在做这组练习时，教师着重强调什么样的二次根式能进行加减运算，运算到哪一步为止. 由此也可以看到二次根式的加减与乘除的不同，只有通过找出被开方数相同的二次根式的途径，才能进行加减运算.	此问题贴近学生生活，易激发学生的学习兴趣. 采用分组讨论，自主探究的方式来解决问题，提高学生自主学习的能力. 学生在自主探究的过程中发现问题，解决问题，总结规律，加深对所学知识的理解. 并向学生传递这样一个信息：二次根式的加减运算并不是孤立的全新的知识，可以将二次根式的加减与整式的加减进行比较学习. 使学生掌握被开方数相同的二次根式合并的方法，注意二次根式加减运算与乘除运算的联系与区别，避免一些常见错误，提高解题的准确程度.
「活动2」 例1 计算： (1) $\sqrt{9a}+\sqrt{25a}$； (2) $\sqrt{80}-\sqrt{45}$. 例2 计算： (1) $2\sqrt{12}-6\sqrt{\frac{1}{3}}+3\sqrt{48}$； (2) $(\sqrt{12}+\sqrt{20})+(\sqrt{3}-\sqrt{5})$. 练习： (1) $2\sqrt{7}-6\sqrt{7}$；	学生在计算过程中可能会出现如下的错误： (1) $\sqrt{9a}=3a$； (2) $6\sqrt{\frac{1}{3}}=\sqrt{6\times\frac{1}{3}}=\sqrt{2}$. 因此，本次活动中，教师应重点关注：	为学生提供实际演练的机会，加强对已学知识的复习并检查对新知识的掌握情况，教师可对学生当堂出现的问题进行及时反馈，使学生熟练掌握二次根式加减法的运算方法，综合运用新旧知识，使知识能融会贯通，从而提高了课堂效率，也培养了学生及时发现问题并解决问题的习惯，调动了学生的主观能动性.

续表

问题与情境	师生行为	设计意图
(2) $\sqrt{80}-\sqrt{20}+\sqrt{5}$； (3) $\sqrt{18}+(\sqrt{98}-\sqrt{27})$； (4)$(\sqrt{24}+\sqrt{0.5})-\left(\sqrt{\frac{1}{8}}-\sqrt{6}\right)$.	(1) 对$\sqrt{\frac{1}{a}}$的化简是否正确； (2) 当题目中含有字母时，是否能正确处理； (3) 运算法则的运用是否正确. 计算过程中，教师提示学生将二次根式的加减与整式的加减进行比较，并再次强调哪些二次根式可以合并，哪些不可以合并.	
「**活动 3**」 问题 要焊接一个如教科书图 21.3-2 所示的钢架，大约需要多少米钢材(精确到 0.1 m)?	此题是与实际相联系的题目，需要学生先列式，再计算，并将结果精确到 0.1 m. 学生考虑问题要全面，不能漏掉任何一段钢材. 本次活动中，教师应重点关注： (1) 学生解决问题的方案是否得当； (2) 考虑问题是否全面； (3) 计算是否准确.	将二次根式的加减运算融入到了实际问题中去，提高了学生的学习兴趣和对数学知识的应用意识和能力.
「**活动 4**」 问题 本节课你学到了什么知识? 你有什么认识?	学生反思本节课中学到的知识，总结活动中的经验和教训，并谈谈活动中的感受. 小结时，教师应重点关注： (1) 学生是否能抓住本节课的学习重点； (2) 对于常见的计算错误是否有充分的认识； (3) 对学生的小结和感受应注意倾听和肯定.	小结和反思，不同的学生会有不同的体会，要尊重学生的个体差异，激发学生主动参与意识，为每个学生都创造了在数学活动中获得活动经验的机会.
课后作业： 教科书第 19 页第 3 题；习题 21.3 第 2、3 题.	学生独立完成作业，教师批改、总结. 对于学生的作业，教师应重点关注： (1) 不同层次的学生对二次根式加减法运算的掌握程度，对新的运算错误，应有针对性地分析和点评； (2) 学生对作业中的实际应用问题的理解情况.	教师能够及时了解学生进行二次根式加减法运算的熟练性、准确性，便于调整教学安排.

教学设计说明

本节课是二次根式加减的第1节课，它是在二次根式乘除的基础上的进一步学习．通过这节课的学习，学生将掌握二次根式加减法的运算法则，并发现二次根式加减法的实质就是合并被开方数相同的二次根式，这正如整式加减法的实质就是合并同类项一样，为了确认哪些被开方数完全相同，需要将二次根式化成最简二次根式，这时一定要认真细心，避免出错．

在本节课的活动1中，先通过对实际问题的解决来引入二次根式的加减运算，再由学生自主讨论并总结二次根式的加减运算的法则．通过一组判断题的练习，使学生理解当化成最简二次根式后被开方数不同的二次根式不能合并，所以$\sqrt{8}-\sqrt{3}\neq\sqrt{8-3}$，$\sqrt{4}+\sqrt{9}\neq\sqrt{4+9}$等，这也说明二次根式的加减与乘除的方法是不同的．在活动2中，通过练习，使学生熟练掌握运算法则，掌握解题的方法，教师针对同学们出现的问题及时解决、及时反馈，使学生掌握所学知识．活动3的安排是对前面所学知识的复习和巩固的过程，意在让学生练习应用所学知识解决实际问题，让学生对所学知识掌握得更加熟练、准确，起到强化并加深理解的作用．

Ⅴ 拓展资源

一、知识的拓广延伸及相关史料

1. 挖掘二次根式中的隐含条件

一般地，我们把形如$\sqrt{a}(a\geqslant0)$的式子叫做二次根式，其中$a\geqslant0$，$\sqrt{a}\geqslant0$.

根据二次根式$\sqrt{a}$的定义，我们知道：被开方式a的取值范围是$a\geqslant0$，由此我们判断下列式子有意义的条件：(1) $\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x}+\frac{1}{2}$；(2) $\sqrt{\frac{-x-1}{x^2}}$.

(1) 由定义可知被开方式大于等于零，即$\begin{cases}x-1\geqslant0\\1-x\geqslant0\end{cases}$，解不等式得$x-1=0$，所以当$x=1$时式子$\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x}+\frac{1}{2}$成立；

(2) 由定义可知$\frac{-x-1}{x^2}\geqslant0$，因为分式的分母不为零且分母$x^2$是非负数，可得$x\neq0$，进而可得$-x-1>0$，即$x<-1$，所以当$x<-1$时，式子$\sqrt{\frac{-x-1}{x^2}}$成立.

2. $\sqrt{a^2}$的化简

教科书中给出：一般地，根据算术平方根的意义可得：$\sqrt{a^2}=a(a\geqslant0)$，在此我们可将其拓展为：

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a(a\geqslant0),\\-a(a<0).\end{cases}$$

(1) 根据二次根式的这个性质进行化简

例如，数轴上表示数a的点在原点的左边，化简$\left|2a+\sqrt{a^2}\right|$.

我们已学过，数轴上原点左边的点表示小于零的数，即$a<0$．那么由上述性质可得：$\sqrt{a^2}=-a$，

所以$|2a+\sqrt{a^2}|=|2a+|a||=|2a-a|=|a|$，又因为$a<0$，$|2a+\sqrt{a^2}|=-a$.

(2) 根据二次根式的这个性质求m的取值范围

例如：若$m-\sqrt{1-2m+m^2}=1$，求m的取值范围.

在此我们可以很容易得到左式$=m-|1-m|$，下面我们要对m的取值范围进行讨论.

① 当$m\geqslant 1$时，左式$=m-(m-1)=1$；

② 当$m<1$时，左式$=m-(1-m)=2m-1<1$.

根据题意$m-\sqrt{1-2m+m^2}=1$，得$m\geqslant 1$.

3. 如何把根号外的式子移入根号内

我们在化简某些二次根式时，有时会用到将根号外的式子移入根号内的知识. 在此我们要特别注意先判断根号外的式子的符号，如果根号外的式子为非负值，可将其平方后移入根号内，如果根号外的式子为负值，那么就要先取其相反数，进行恒等变形，再将其平方后移入根号内.

根据上述法则，我们试着把①$-a\sqrt{\frac{1}{a}}$，②$(a-1)\sqrt{\frac{1}{1-a}}$根号外的式子移入根号内.

① 先判断根号外式子a的符号，根据二次根式的定义$\frac{1}{a}\geqslant 0$可得：$a>0$，所以我们可以将a直接平方移入根号内，即$-a\sqrt{\frac{1}{a}}=-\sqrt{a^2\cdot\frac{1}{a}}=-\sqrt{a}$；

② 先判断根号外式子$a-1$的符号，根据二次根式的定义$\frac{1}{1-a}\geqslant 0$可得：$1-a>0$，即$a-1<0$，所以我们要先取$a-1$的相反数，进行恒等变形，再将其平方后移入根号内.

即$(a-1)\sqrt{\frac{1}{1-a}}=-(1-a)\sqrt{\frac{1}{1-a}}=-\sqrt{(1-a)^2\cdot\frac{1}{1-a}}=-\sqrt{1-a}$.

4. 南宋数学家——秦九韶

秦九韶（1202—1261），字道古，秦九韶的父亲在南宋朝廷里当官，他跟随父亲居住在杭州，因而有机会向太史学习天文、历法，又同隐君子学习数学. 18岁那年，他返回故乡，举义抗元，为义兵的首领，后来，他又到四川当过县尉. 淳佑四年（公元1244年）为建康通判，不久母丧，还家守孝服丧，在这期间他把历年积累下来的数学研究成果加以整理，于淳佑七年（公元1247年）九月，写出《数书九章》十八卷.

《数书九章》是一部划时代的数学巨著. 全书共81道题，分为九大类：大衍类、天时类、田域类、测望类、赋役类、钱谷类、营建类、军旅类、市易类. 全书实用性强，所设问题复杂，解题步骤详细. 其中对“大衍求一术”（一次同余组解法）和“正负开方术”（高次方程的数值解法）等有十分深入的研究. 关于一次同余式问题，最早是在成书于公元四、五世纪的《孙子算经》“物不知数”中出现，但对此问题给以理论上的说明，是由秦九韶给出. 西方则到18、19世纪时，才由欧拉（Euler，1707—1783）、高斯（Gauss，1777—1855）获得与“大衍求一术”相同的定理. 至于求高次方程的数值解法，是秦九韶在贾宪、刘益的基础上推广而来的. 英国数学家霍纳（Willian George Horner，1786—1837）在1819年才发表与“正负开方术”一样的霍纳法.

宋代是中国古代数学的最繁盛时期，在此期间涌现了许多杰出的数学家. 南宋杰出的数学家秦九韶，公元1247年在《数书九章》中将“增乘开方法”加以推广，论述了高次方程的数值解法，并且列举20多个取材于实践的高次方程的解法（最高为十次方程）. 16世纪意大利人菲尔洛才提出三次方程的解法. 另外，秦九韶还对一次同余式理论进行过研究. 秦九韶还推广了孙子定理，他

的“大衍求一术”将孙子定理的方法从较小的数和较少的同余式个数推广到一般解法. 秦九韶还得出了与希腊海伦公式等价的从三角形三边求面积的公式.

5. 测量大师——海伦

海伦(Heron of Alexandria,约1世纪)生于埃及,是古希腊数学家、力学家、机械学家和测量家,曾在罗马帝国的著名学术研究城市亚历山大教授数学、物理学等. 海伦十分看重数学的实际应用,这可以从他的著作《测地术》《几何》《体积求法》中略知一二. 《测地术》更被古代的人们采用了数百年之久. 除此之外,他曾替欧几里得(Euclid,约公元前330—公元前275)的《几何原本》作注释及补充.

海伦以解决几何测量问题而闻名. 他给出了很多平面图形的面积公式和立体的体积计算公式,例如正三边形至正十二边形的面积计算方法. 在《测地术》中,他更给出著名的三角形的面积公式——海伦公式.

此外,海伦还把他的理论应用于机械设计,并著有《机械学》《投石炮》《枪炮设计》等著作,同时他亦是水钟、测量仪、起重机等的设计者. 可见他是一位把数学应用于生活的天才.

已知三角形的三条边长分别是 a、b、c,则三角形的面积为

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$,其中 $p=\dfrac{a+b+c}{2}$,这个公式叫海伦公式.

海伦公式出现在海伦的《测地术》一书中,海伦用文字在《经纬仪》和《度量》两书中都叙述了这一公式的证明,虽然现已公认此公式实际上是阿基米德发现的,但是这个名称已成为习惯用法,我们仍称这个公式为海伦—秦九韶公式.

6. 海伦公式的证明及其推广

(1) 海伦公式的证明

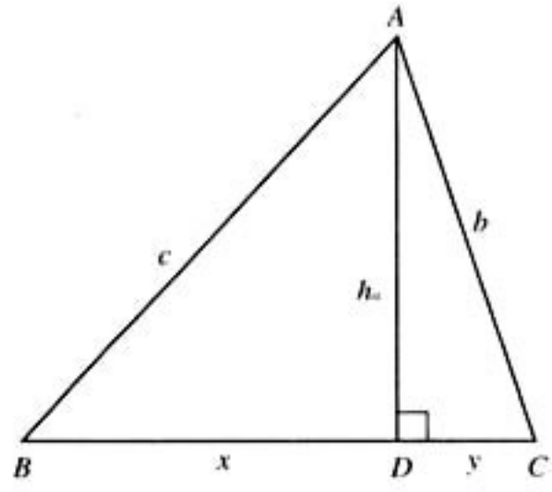
分析:先从三角形最基本的计算公式 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ah_a$ 入手,运用勾股定理推导出海伦公式.

证明:如图,设 $BC=a$,$AC=b$,$AB=c$,$BD=x$,$CD=y$,$h_a\perp BC$,$p=\dfrac{a+b+c}{2}$.

根据勾股定理,得

$$\begin{cases} x=a-y, \\ h_a^2=b^2-y^2, \\ h_a^2=c^2-x^2. \end{cases}$$

解方程组得 $x=\dfrac{a^2-b^2+c^2}{2a}$,$y=\dfrac{a^2-c^2+b^2}{2a}$.



所以 $$h_a=\sqrt{b^2-y^2}=\sqrt{b^2-\frac{(a^2-c^2+b^2)^2}{4a^2}}=\frac{\sqrt{4a^2b^2-(a^2-c^2+b^2)^2}}{2a}.$$

则 $$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}a\times\frac{\sqrt{4a^2b^2-(a^2-c^2+b^2)^2}}{2a}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{(2ab+a^2+b^2-c^2)[2ab-(a^2+b^2-c^2)]}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{[(a+b)^2-c^2][c^2-(a-b)^2]}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}$$

$$=\sqrt{\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{b+c-a}{2}\cdot\frac{a-b+c}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}}$$

$$=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

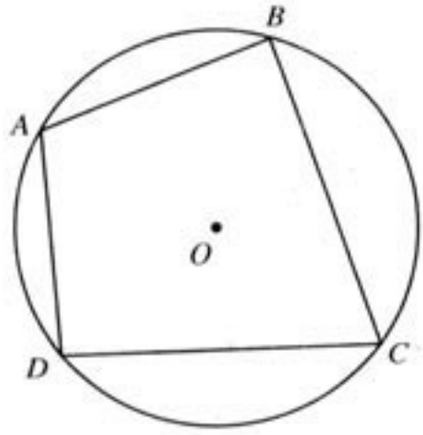
(2) 海伦公式的推广

海伦公式推广为：在任意内接于圆的四边形 $ABCD$ 中，四边形 $ABCD$ 的四条边分别为 a，b，c，d，设 $p=\frac{a+b+c+d}{2}$，则 $S_{四边形}=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$.

海伦公式的推广在实际解题中有着广泛的应用，特别是在有关圆内接四边形的各种综合题中，直接运用海伦公式的推广往往事半功倍.

例如：如图，四边形 $ABCD$ 内接于⊙O 中，$S_{ABCD}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$，$AD=1$，$AB=1$，$CD=2$.

求证：四边形可能为等腰梯形.



证明：设 $BC=x$，

由海伦公式的推广，得：

$$\sqrt{\left(\frac{1+1+2+x}{2}-1\right)\left(\frac{1+1+2+x}{2}-1\right)\left(\frac{1+1+2+x}{2}-2\right)\left(\frac{1+1+2+x}{2}-x\right)}=\frac{3\sqrt{3}}{4},$$

$$\frac{1}{4}\sqrt{(1+1+x)(1+1+x)(1+1+x-2)(1+1+2-x)}=\frac{3\sqrt{3}}{4},$$

$$x(4-x)(2+x)^2=27,$$

$$x^4-12x^2-16x+27=0,$$

$$x^2(x^2-1)-11x(x-1)-27(x-1)=0,$$

$$(x-1)(x^3+x^2-11x-27)=0,$$

$$x=1 \text{ 或 } x^3+x^2-11x-27=0,$$

$$\text{当 } x=1 \text{ 时，} AD=BC=1.$$

此时四边形为等腰梯形，所以四边形可能为等腰梯形.

二、拓展性问题

1. 整数部分与小数部分

要判断一个实数的整数部分与小数部分，应先判断已知实数的取值范围，从而确定其整数部分，再由小数部分=原数-整数部分，确定其小数部分.

(1) 已知$\sqrt{6}+1$的整数部分为a，小数部分为b，求a、b的值.

【答案与提示】∵ $2<\sqrt{6}<3$，

∴ $3<\sqrt{6}+1<4$.

∴ $a=3$，$b=\sqrt{6}+1-3=\sqrt{6}-2$.

(2) 若x、y分别是$8-\sqrt{11}$整数部分与小数部分，求$2xy-y^2$的值.

【答案与提示】∵ $3<\sqrt{11}<4$，

∴ $4<8-\sqrt{11}<5$.

∴ $x=4$，$y=8-\sqrt{11}-4=4-\sqrt{11}$.

∴ $2xy-y^2=y(2x-y)=(4-\sqrt{11})(4+\sqrt{11})=5$.

(3) 已知$\dfrac{4}{\sqrt{5}-1}$的整数部分为a，小数部分为b，求a^2+b^2的值.

【答案与提示】∵ $\dfrac{4}{\sqrt{5}-1}=\dfrac{4(\sqrt{5}+1)}{4}=\sqrt{5}+1$，

又 $2<\sqrt{5}<3$，

∴ $3<\sqrt{5}+1<4$.

∴ $a=3$，$b=\sqrt{5}+1-3=\sqrt{5}-2$.

∴ $a^2+b^2=9+(\sqrt{5}-2)^2=18-4\sqrt{5}$.

2. 巧变已知，求多项式的值

(1) 已知$x=\dfrac{1}{2-\sqrt{5}}$，求x^3+3x^2-5x+1的值.

【答案与提示】∵ $x=\dfrac{1}{2-\sqrt{5}}=-2-\sqrt{5}$，

∴ $x+2=-\sqrt{5}$.

∴ $(x+2)^2=5$.

∴ $x^2+4x-1=0$.

∴ x^3+3x^2-5x+1

$=(x^2+4x-1)(x-1)$　　(此处可用竖式除法或用因式分解法)

$=0$.

(2) 已知 $x-y=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$，$y-z=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$，求 $x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz$ 的值.

【答案与提示】∵ $x-y=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$，

$y-z=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$，

∴ $x-z=x-y+y-z=4$.

∴ $x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz$

$=\dfrac{1}{2}[(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2]=15$.

3. 用归纳法化简求值

(1) 化简 $\dfrac{1}{2\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\dfrac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}+\cdots+\dfrac{1}{10\sqrt{9}+9\sqrt{10}}$.

【答案与提示】当 n 为整数时，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}\\&=\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{(n+1)^2n-n^2(n+1)}\\&=\frac{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{n(n+1)}\\&=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n}}\\&=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}.\end{aligned}$$

∴ 原式 $=\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{9}}-\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

$=1-\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

$=\dfrac{10-\sqrt{10}}{10}$.

(2) 求与 $A=\sqrt{1+\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}}+\cdots+\sqrt{1+\dfrac{1}{2\,005^2}+\dfrac{1}{2\,006^2}}$ 最接近的整数是多少?

【答案与提示】当 n 为整数时，

$$\begin{aligned}&\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}\\&=\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2-\frac{2}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}}\\&=\sqrt{\left(\frac{n+1}{n}\right)^2-2\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}}\\&=\sqrt{\left(\frac{n+1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)^2}\end{aligned}$$

$$=\left|\frac{n+1}{n}-\frac{1}{n+1}\right|$$

$$=\left|1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right|.$$

∵ n 为整数，

∴ $n+1>n$.

∴ $\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}$.

∴ $\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}<0$.

∴ $\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.

∴ $A=1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+1+\frac{1}{2\,005}-\frac{1}{2\,006}$

$=2\,005+1-\frac{1}{2\,006}$

$=2\,006-\frac{1}{2\,006}$.

∴ 与 A 最接近的整数是 2 006.

4. 应用海伦—秦九韶公式

在△ABC 中，$BC=4$，$AC=5$，$AB=6$，利用海伦—秦九韶公式，求△ABC 的面积.

【答案与提示】∵ $p=\frac{4+5+6}{2}=\frac{15}{2}$，

∴ $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$=\sqrt{\frac{15}{2}\left(\frac{15}{2}-4\right)\left(\frac{15}{2}-5\right)\left(\frac{15}{2}-6\right)}$

$=\sqrt{\frac{15}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}}$

$=\frac{15\sqrt{7}}{4}$.

Ⅵ 评价建议与测试题

一、评价建议

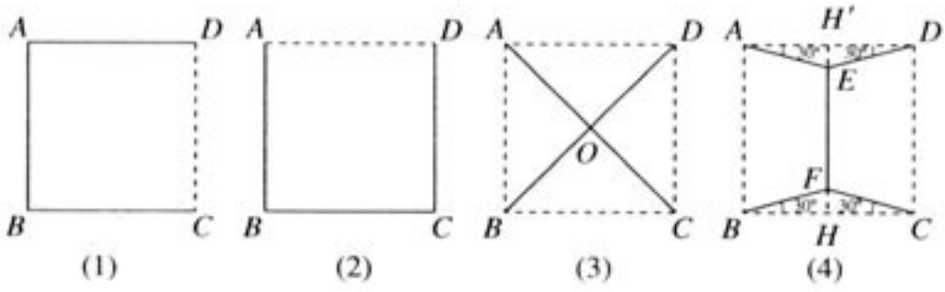
1. 本章的主要内容包括二次根式的概念、代数式的概念、最简二次根式的概念，二次根式的乘法、除法、加法、减法的计算法则及二次根式的性质$(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant 0)$，$\sqrt{a^2}=a(a\geqslant 0)$. 其中二次根式的化简与计算是本章的重点. 因此，在确定评价内容时，应关注对这个环节的评价. 通过设计恰当的情景问题，观察出已知条件和所求式子的特征，结合所学过的运算律与运算法则，探求简便的运算方法. 关注学生能否积极主动地思考与尝试，利用所学知识解决现实生活中的实际问题.

2. 在设计测试题时，要注重培养学生的数感和符号感，注重实际问题的设计，要以问题情景——数学模型——求解模型为主要线索呈现二次根式及其运算的内容，注重从问题情景中寻求数量关系，运用二次根式表示数量之间的关系、表达运算过程，注重利用数形结合的思想探究问题中包含的规律.

二、测试题（时间：45 分　满分：100 分）

内　容	设计意图
一、**选择题**（每小题 4 分，共 20 分）： **1.** 使式子$\frac{\sqrt{1-x}}{2+x}$有意义的 x 的取值范围是（　　） (A) $x\leqslant 1$. (B) $x\leqslant 1$ 且 $x\neq -2$. (C) $x\neq -2$. (D) $x<1$ 且 $x\neq -2$.	本题考查学生对二次根式有意义条件的理解，并要求学生联系以前学习的分式的知识，加深学生对问题的全面理解.
2. 下列各式中计算正确的是（　　） (A) $\sqrt{(-4)(-16)}=\sqrt{-4}\sqrt{-16}=(-2)(-4)=8$. (B) $\sqrt{8a^2}=4a(a>0)$. (C) $\sqrt{3^2+4^2}=3+4=7$. (D) $\sqrt{41^2-40^2}=\sqrt{41+40}\cdot\sqrt{41-40}=9\times 1=9$.	本题考查二次根式的性质和运算法则.
3. 已知直角三角形的一条直角边为 9，斜边长为 10，则另一条直角边长为（　　） (A) 1. (B) $\sqrt{19}$. (C) 19. (D) $\sqrt{29}$.	本题考查二次根式在直角三角形勾股定理中的应用与计算.
4. 若 $x=-3$，则$\left\lvert 1-\sqrt{(1+x)^2}\right\rvert$等于（　　） (A) 1. (B) -1. (C) 3. (D) -3.	本题考查学生对$\sqrt{a^2}$的化简及对绝对值的理解.
5. $\sqrt{24n}$是整数，则正整数 n 的最小值是（　　） (A) 4. (B) 5. (C) 6. (D) 7.	本题考查学生分解被开方数和二次根式化简的能力.
二、**填空题**（每小题 4 分，共 20 分）： **6.** 使式子$\sqrt{4-x}$无意义的 x 取值是_____.	本题考查学生理解二次根式的定义.
7. 已知 $x=\frac{5}{2}$，化简$\sqrt{(x-2)^2}+\lvert x-4\rvert$的结果是_____.	本题考查学生对$\sqrt{a^2}$的化简及对绝对值的理解.
8. $\sqrt{10xy}\cdot\sqrt{30xy}(x>0,\ y>0)=$_____.	本题考查二次根式的乘法运算.
9. $5\sqrt{\frac{1}{5}}+\frac{1}{2}\sqrt{20}-\frac{5}{4}\sqrt{\frac{4}{5}}+\sqrt{45}=$_____.	本题考查二次根式的加减法运算.
10. 三角形的三边长分别为$\sqrt{20}$ cm，$\sqrt{40}$ cm，$\sqrt{45}$ cm，则这个三角形的周长为_____.	本题考查学生二次根式的化简及二次根式的加法运算.
三、**算一算**（每小题 10 分，共 20 分）： **11.** $\frac{3}{2}\sqrt{20}\cdot(-15)\cdot\left(-\frac{1}{3}\sqrt{48}\right)$.	本题考查学生二次根式的乘除运算.
12. $\frac{2}{3}\sqrt{9x}+6\sqrt{\frac{x}{4}}-2x\sqrt{\frac{1}{x}}$.	本题考查学生二次根式的加减乘除的综合运算.

续表

内　容	设计意图
四、**比一比**（本题 10 分）： **13.** 已知 $a=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$，$b=2-\sqrt{3}$，比较 a 与 b 的大小关系. 五、**试一试**（本题 10 分）： **14.** 试用代数式表示面积为 S 的圆的半径 r. 六、**想一想**（本题 10 分）： **15.** 已知：$x=2-\sqrt{10}$，想一想代数式 x^2-4x-6 的值为多少? 七、**实际应用**（本题 10 分）： **16.** 某电力公司为了改善农村用电电费过高的问题，准备在各地农村进行电网改造，富康乡有四个村庄 A、B、C、D 正好位于一个正方形的四个顶点，现计划在四个村庄联合架设一条线路，他们设计了四种架设方案，如图中的实线部分，请你帮助计算一下，哪种架设方案最省电线. （以下数据可供参考：$\sqrt{2}=1.414$，$\sqrt{3}=1.732$，$\sqrt{5}=2.236$）  （第 16 题）	本题考查学生二次根式的化简. 本题考查圆的面积公式及代数式的恒等变形能力. 本题考查学生灵活运用已知条件，利用平方差公式求代数式的值. 本题考查学生注重实际问题的设计. 要以问题情景——数学模型——求解模型为主要线索，呈现二次根式、正方形及含 30° 角的直角三角形的内容，注重从问题情景中寻求数量关系，运用数学符号进行表示的过程，注重利用数形结合的思想探究问题中包含的规律.

测试题答案

1. B.

2. D.

3. B.

4. A.

5. C.

6. $x>4$.

7. 2.

8. $10\sqrt{3}xy$.

9. $\dfrac{9\sqrt{5}}{2}$.

10. $(5\sqrt{5}+2\sqrt{10})$cm.

11. $60\sqrt{15}$.

12. $3\sqrt{x}$.

13. $a=b$.

14. $r=\frac{\sqrt{\pi S}}{\pi}$.

15. 0.

16. 方案 4 最省线.

提示：方案 1、2 均用电线 $3a$，方案 3 用电线 $2\sqrt{2}a$，方案 4 用电线 $(\sqrt{3}+1)a$.

第二十二章　一元二次方程

Ⅰ　总体设计

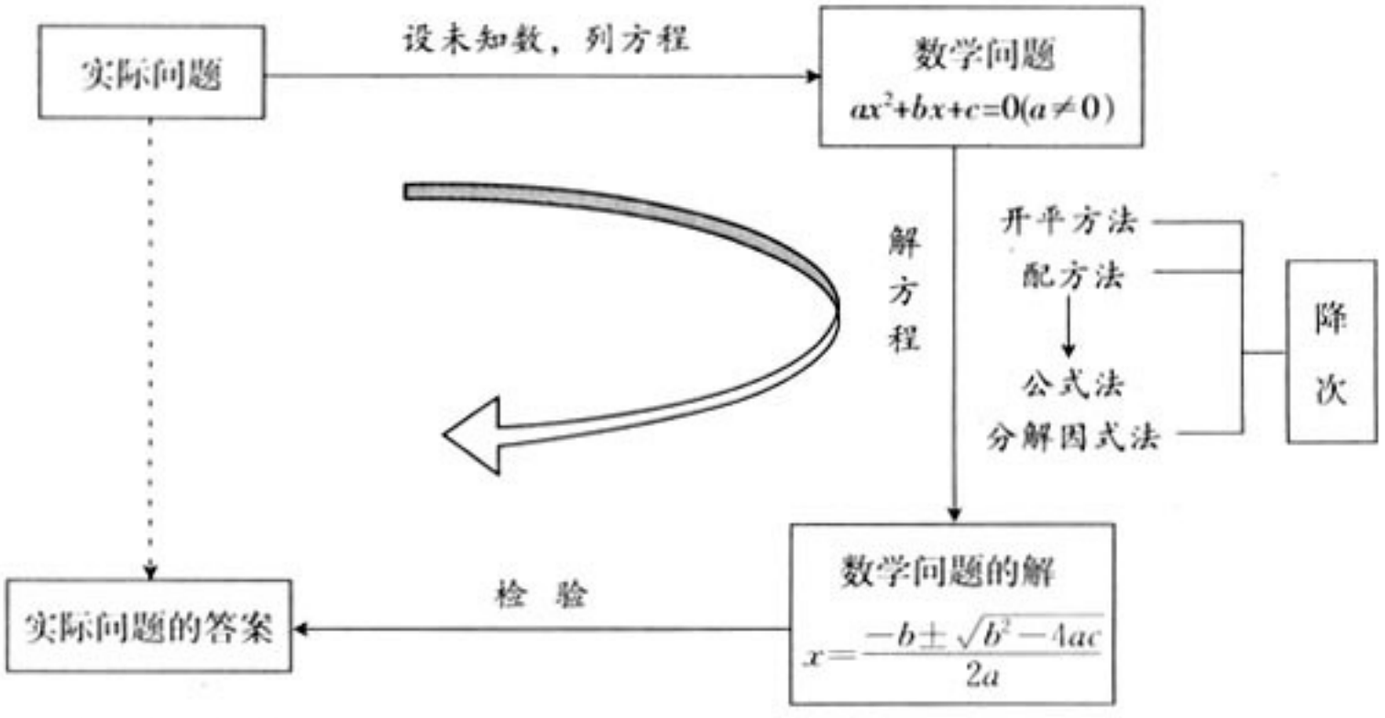
一、课程学习目标

1. 以分析实际问题中的等量关系并求解其中的未知数为背景，认识一元二次方程及其有关概念.

2. 根据化归的思想，抓住“降次”这一基本策略，掌握配方法、公式法和因式分解法等一元二次方程的基本解法.

3. 经历分析和解决实际问题的过程，体会一元二次方程的数学模型作用，进一步提高在实际问题中运用方程这种重要数学工具的基本能力.

二、本章知识结构框图



三、内容安排

本章的主要内容包括：一元二次方程及其有关概念，一元二次方程的解法（配方法、公式法、因式分解法），运用一元二次方程分析和解决实际问题.

全章共包括三节：

22.1　一元二次方程

22.2　降次

22.3　实际问题与一元二次方程

22.1 节以实际问题为背景，引出一元二次方程的概念，归纳出一元二次方程的一般形式，给出一元二次方程的根的概念，并提出一元二次方程的根不唯一. 这些概念是全章后续内容的基础.

22.2 节讨论一元二次方程的基本解法，其中包括配方法、公式法和因式分解法等，这一节是全章的重点内容之一. 本套教科书在本章之前的方程都是一次方程或可化为一次方程的分式方程，一元二次方程是首次出现的高于一次的方程. 解二次方程的基本策略是将其转化为一次方程，这就是“降次”. 22.2 节首先通过解比较简单的一元二次方程，引导学生认识直接开平方法解方程；然后讨论比较复杂的一元二次方程，通过对比一边为完全平方形式的方程，使学生认识配方法的基本原理并掌握其具体方法；有了配方法作基础，再讨论如何用配方法解一元二次方程的一般形式 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$，就得到的一元二次方程的求根公式，于是有了直接利用公式的公式法. 本节最后讨论因式分解法解一元二次方程，这种解法要使方程的一边为两个一次因式相乘，另一边为 0，再分别令每个一次因式为 0. 这几种解法都是依降次的思想，将二次方程转化为一次方程，只是具体的降次手段有所不同.

22.3 节安排了 4 个探究内容，结合实际问题，分别讨论传播问题、增长率问题、几何图形面积问题和匀变速运动问题. 一元二次方程与许多实际问题都有联系，本节不是按照实际问题的类型分类和选材的，而是选取几个具有一定代表性的实际问题来进一步讨论如何建立和利用方程模型，重点是分析实际问题中的数量关系并以方程形式进行表示，这种数学建模思想的体现与前面有关方程各章是一致的，只是在问题中数量关系的复杂程度上又有新的发展，数学模型由一次方程或可以化为一次方程的分式方程变为一元二次方程.

本章从引言到小结始终保持贴近实际、贴近生活. 这样安排的主要目的是：

1. 反映客观世界与数学的密切联系；

2. 加强对应用数学知识分析和解决实际问题的意识和能力的培养.

课程标准没有将一元二次方程的根与系数的关系（韦达定理）列为必学内容，因此本章也未在课文中安排有关内容. 考虑到部分学有余力的学生可以进一步扩大对一元二次方程的认识，以及这个内容是比较重要的数学知识，教科书在选学栏目“观察与猜想”中安排了有关内容，希望能提供一些问题给部分学生去探究.

在本章小结中，教科书通过本章知识结构图和思考题，再次强调解一元二次方程与实际问题之间的联系，突出解一元二次方程的基本思路以及具体方法，这是本章的重点内容.

一元二次方程是本套初中数学教科书中所学习的最后一种方程，从某种意义上说，学习本章也具有对方程的学习进行总结的作用.

四、课时安排

本章教学时间约需 13 课时，具体分配如下（仅供参考）：

22.1　一元二次方程	2 课时
22.2　降次	6 课时
22.3　实际问题与一元二次方程	3 课时
数学活动	
小结	2 课时

五、学法教法建议

1. 重视一元二次方程与实际的联系，体现数学建模思想

数学是以数量关系和空间形式为主要研究对象的科学，数量关系和空间形式是从现实世界中抽象出来的，这样的抽象是一个逐步深入的过程. 方程是含有未知数的等式，它们表达了数量之间的相等关系. 正如前面所学习过的其他方程，一元二次方程可以表达许多实际问题中包含的数量相等关系，因而也可以作为分析和解决这些问题的重要数学模型.

如前所述，本章从引言到小结始终保持贴近实际、贴近生活. 引言中的雕像问题是典型的黄金分割问题，本章由它说起引出一个具体的一元二次方程，接着在 22.1 节又利用面积问题和体育比赛中的组合问题补充两个一元二次方程的具体例子，在这三个具体例子的基础上归纳出一元二次方程的定义及一般形式. 这样编排可以反映一元二次方程及其有关概念是来源于现实世界的. 在 22.2 节讨论一元二次方程的解法时，教科书安排了问题 1～3，它们都是比较简单的实际问题. 这样编排可以反映讨论一元二次方程的解法是解决现实世界实际问题的客观需要. 在 22.3 节，教科书安排了探究 1～4，它们是比前面问题更复杂的实际问题. 这样编排可以结合本章内容体现数学建模思想，进一步加强利用一元二次方程分析解决实际问题能力的培养训练，提高学生应用数学知识于实际问题的兴趣和意识，从长远看这将有助于培养学生理论联系实际的意识和开拓创新精神.

在本章的教学和学习中，应重视相关内容与实际的联系，可以选择一些适合一元二次方程内容而又接近本班学生生活的实际问题，结合这些问题展开教学的内容. 要注意避免脱离任何实际问题单纯地讲述一元二次方程的内容，虽然这种纯数学的处理方法在数学体系内部并无问题，但是从教学角度看，它具有局限性，不适合初中学生接受，也不利于全面地提高学生素质. 总之，要充分注意有关现实背景，通过它们反映出一元二次方程来自实际又服务于实际，加强对一元二次方程是解决现实问题的一种数学模型的认识.

对于把实际问题转化为有关一元二次方程的问题，分析和解决它们的关键是找出问题中相关数量之间的相等关系，并把这样的关系“翻译”为一元二次方程，而正确地理解问题情境是完成这一工作的基础. 在本章的教学和学习中，可以从多种角度思考实际问题，例如借助图象、表格、式子等进行分析，发现其中的等量关系，并注意检验所列方程及其根的实际意义，找出合乎实际的结果.

2. 重视一元二次方程的特殊性，突出解一元二次方程的基本策略以及解法中的关键步骤

在学习本章之前，学生已经分两次学习过整式方程（一元一次方程、二元一次方程组），并且学习了可以化为一元一次方程的分式方程，他们对于解方程的基本思路（使方程逐步化为 $x=a$ 的形式）已经比较熟悉，按照这种思路可以继续考虑一元二次方程的解法，一元二次方程与前面的方程相比，特点在于二次. 新的问题是如何将一元二次方程转化为已经会解的方程. 从这个新问题入手，可以自然地引出解一元二次方程的基本策略和关键步骤. 教科书注意了在这里体现出“降次”是很自然、很合理地产生的，这是在原来已经认识了的解方程的基本思路基础上，结合一元二次方程的实际而得到的解决问题的策略. 这样处理既突出了一元二次方程解法上的特点及其算理，又反映了一元二次方程与一元一次方程在解法上的内在联系. 各种解法中能够创造条件实现降次的步骤就是这种解法的关键步骤，它们是落实降次的具体措施.

本章所讨论的对象是一元二次方程，它的特殊性是其未知数为二次，这是前所未见的. 正因如此，学习一元二次方程的解法时要特别关注以下两点：

（1）用配方法、因式分解法等解一元二次方程时，要通过适当的变形先使方程转化为一元一次

方程，也就是使未知数从二次变为一次. 注意这里的降次变形，是由一个二次方程得到两个一次方程.

(2) 配方法是公式法的基础，通过配方法得出了求根公式；公式法是直接利用求根公式，它省略了具体的配方过程.

在本章的教学和学习中，应重视对比以前所学方程来分析一元二次方程的特殊性，并根据它认识解一元二次方程的基本策略——降次，明白这样做的道理，再次体会化归思想在解方程时的指导作用. 如果抓住一元二次方程的特殊性，那么就能感悟到解一元二次方程的基本策略的合理性，进而能够理解解一元二次方程的关键步骤及其算理，在已有的对解方程的认识的基础上再认识一种新方程的解法.

本章的主要内容包括一元二次方程的基本概念、基本解法、应用举例等，这些都是重要的基础知识，打好这些基础很重要，因此教学中应注意通过必要的练习使学生切实掌握它们.

Ⅱ 教材分析

第二十二章 一元二次方程

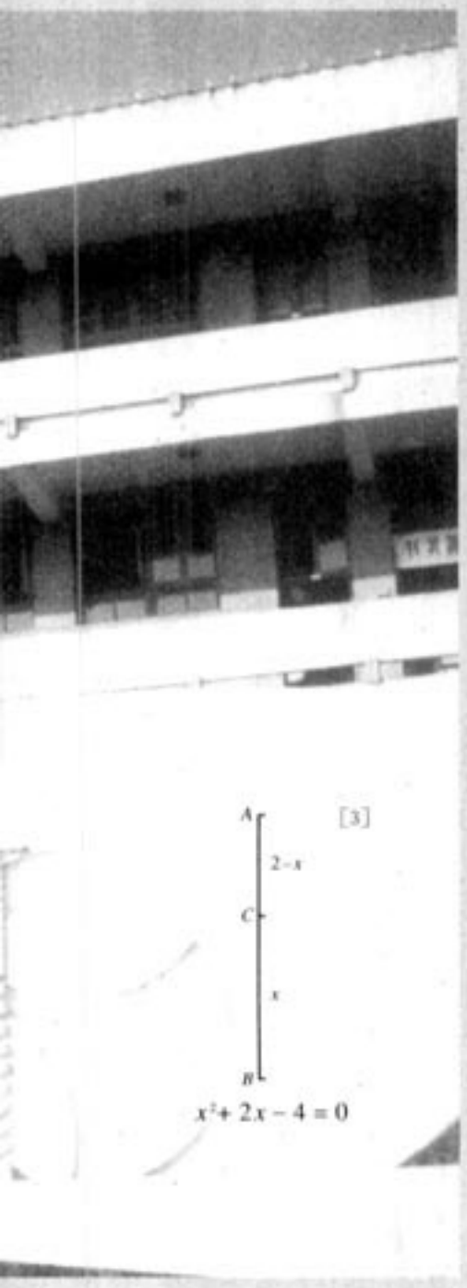


[1] 这幅章前图的画面选用了辽宁省抚顺市的雷锋纪念馆前的雷锋雕像. 它配合引言中的人体雕像上下高度比问题，本章由这个问题引出一元二次方程.

1. 方程是应用广泛的数学工具，它在义务教育初中阶段的数学课程中占重要地位. 在本套教科书中有关方程的内容出现的先后顺序是：一元一次方程（七年级上），二元一次方程组（七年级下），分式方程（八年级下），一元二次方程（九年级上）.

2. 整式方程一般按照其中未知数（元）的个数和未知数的最高次数分类，一元二次方程与前面所学整式方程相比，变化在于未知数的最高次数由一次升为二次，由此带来了方程解法上的新变化. 一般地，解任何一个代数方程（组）时最终都要化归为一元一次方程来解，所以把方程由二次降为一次是解一元二次方程的基本策略.

3. 本章始终保持在分析解决实际问题的情境中讨论问题，开篇的引入问题是人体雕像上下高度比问题，这是几何中确定线段的内外比分点的问题，也称为黄金分割问题. 本章在第 22.2 节后安排了选学材料“阅读与思考　黄金分割数”，



22

22.1 一元二次方程

22.2 降次——解一元二次方程

22.3 实际问题与一元二次方程

我们来看一个问题.

要设计一座2 m高的人体雕像，使雕像的上部（腰以上）与下部（腰以下）的高度比，等于下部与全部的高度比，雕像的下部应设计为多高？[1]

雕像上部的高度AC，下部的高度BC应有如下关系：

$$\frac{AC}{BC}=\frac{BC}{2} \quad 即 \quad BC^2=2AC.$$

设雕像下部高x m，于是得方程

$$x^2=2(2-x).$$

整理得

$$x^2+2x-4=0.$$[2]

[3]

$x^2+2x-4=0$

你会发现这个方程与以前学习过的一次方程不同，其中未知数x的最高次数是2.[4]怎样解这样的方程从而得到问题的答案呢？

本章中，你将认识一种新方程——一元二次方程，讨论解这种方程的方法，并运用这种方程解决一些实际问题. 通过本章的学习，你对方程的认识将从一次方程扩展到二次方程.

[1] 这个问题中以腰部作为人体上部和下部的分界.

[2] 关于这个方程的几何解释可以参看左边的图示.

[3] 这个图是对引言中的方程$x^2+2x-4=0$的几何意义的解释.

[4] 整式方程的次数由其中未知数的最高次数决定.

对引言中的问题作了更一般的拓展.

4. 本章是在已经学习过的一元一次方程、二元一次方程组以及可以化为一元一次方程的分式方程的基础上进一步讨论方程，因此教学之前应先了解学生过去已学习过有关方程的哪些具体知识，学习中存在哪些问题等，这样的调查有助于加强本章教学的针对性.

5. 本章教学的起点也可以用与学生联系密切的、学生感兴趣的其他实际问题引入. 作为引入一元二次方程的实际问题，列方程的难度不宜过大.

[1] 为了制作无盖方盒，铁皮各角切去的正方形应大小相同.

[2] 化简是使方程的形式变简单，同时必须保证新方程与原方程的解相同. 这里是在前面方程的两边都除以未知数的系数 4，所得方程比原方程简单，而且两方程同解.

[3] 这种比赛形式也叫做单循环比赛，其特点是任何两队之间都要比赛一场，而且只比赛一场.

22.1 一元二次方程

引言中的方程

$$x^2+2x-4=0 \qquad ①$$

有一个未知数 x，x 的最高次数是 2. 像这样的方程有广泛的应用，请看下面的问题.

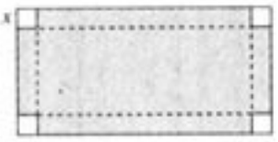


图 22.1-1

问题 1 如图 22.1-1，有一块矩形铁皮，长 100 cm，宽 50 cm，在它的四角各切去一个同样的正方形，然后将四周突出部分折起，就能制作一个无盖方盒. 如果要制作的无盖方盒的底面积为3 600 cm^2，那么铁皮各角应切去多大的正方形？[1]

设切去的正方形的边长为 x cm，则盒底的长为 $(100-2x)$cm，宽为$(50-2x)$cm. 根据方盒的底面积为3 600 cm^2，得

$$(100-2x)(50-2x)=3\,600.$$

整理，得

$$4x^2-300x+1400=0.$$

化简，[2]得

$$x^2-75x+350=0. \qquad ②$$

由方程②可以得出所切正方形的具体尺寸.

方程②中未知数的个数和次数各是多少？



问题 2 要组织一次排球邀请赛，参赛的每两个队之间都要比赛一场.[3]根据场地和时间等条件，赛程计划安排 7 天，每天安排 4 场比赛，比赛组织者应邀请多少个队参赛？

全部比赛共 $4\times7=28$ 场.

设应邀请 x 个队参赛，每个队要与其他 $(x-1)$

1. 本节在引言中方程的基础上，首先通过两个实际问题（面积问题，比赛问题），进一步引出一元二次方程的具体例子，然后再引导学生观察列出的这三个具体方程，并发现它们在形式上的共同点，给出一元二次方程的定义. 这样安排的目的在于，突出一元二次方程的根本特征，强调概念的一般性与具体例子之间的联系，并使学生认识到一元二次方程有广泛的实际背景，它可以作为许多实际问题的数学模型.

2. 教科书中一元二次方程的定义，是以未知数的个数和次数为标准，用文字叙述形式给出的. 一般地，一元二次方程都可以整理为

$$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$$

的形式，即一元二次方程的一般形式. 掌握这一形式，对学习一元二次方程很重要. 这种从形式上认识数学概念的方法，在今后学习基本初等函数时也要使用.

3. 本节始终都有列方程的内容，这样安排

个队各赛 1 场，由于甲队对乙队的比赛和乙队对甲队的比赛是同一场比赛，所以全部比赛共$\frac{1}{2}x(x-1)$场.[1]

列方程

$$\frac{1}{2}x(x-1)=28.$$

整理，得

$$\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x=28.$$

化简，得

$$x^2-x=56. \qquad ③$$

由方程③可以得出参赛队数.

方程③中未知数的个数和次数各是多少?

观察[2]

方程①②③有什么共同点?

可以发现，这些方程的两边都是整式，方程中只含有一个未知数，未知数的最高次数是 2. 同样地，方程 $4x^2=9$，$x^2+3x=0$，$3y^2-5y=7$ 等也是这样的方程. 像这样的等号两边都是整式，只含有一个未知数（一元），并且未知数的最高次数是 2（二次）的方程，叫做**一元二次方程**（quadratic equation in one unknown).

一般地，任何一个关于 x 的一元二次方程，经过整理，都能化成如下形式

$$ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0).$$[3]

这种形式叫做一元二次方程的一般形式. 其中 ax^2 是二次项，a 是二次项系数；bx 是一次项，b 是一次项系数；c 是常数项.

为什么规定 $a\neq 0$?

例 将方程 $3x(x-1)=5(x+2)$ 化成一元二次方

[1] 注意学生容易误认为共比赛 $x(x-1)$ 场，这样就把每一场比赛都重复计算了一次.

[2] 在给出一元二次方程定义之前，设置这个“观察”栏目，是按照从特殊到一般的认识规律安排的.

[3] 用字母 a，b，c 表示具体的常数，这些字母可以取不同的值，但 $a\neq 0$，否则方程就不是二次的了.

一方面是要分散列方程这一教学难点，化整为零地培养由实际问题抽象出方程模型的能力；另一方面是为由一些具体的方程归纳出一元二次方程的概念. 本节的重点是对于一元二次方程及其有关概念的认识，虽然涉及一元二次方程的根的概念，但是对于解方程还未正式涉及，教学中不要过早地把学生的注意力引向解方程.

4. 一元二次方程的解也称为一元二次方程的根. 方程的解，就是能使方程左右两边相等的未知数的值. 从这个意义上说，一元二次方程的解（根）与一元一次方程的解是一致的. 一元一次方程的解不会多于一个，但是一元二次方程有两个解，它们可能是两个不等的实数，可能是两个相等的实数，也可能是一对共轭复数. 这是一元二次方程的解与一元一次方程的解的不同之处. 本节中通过具体例子使学生了解一元二次方程会有两个解，进一步的理由要在 22.2 节出现一元二次方程的求根公式后再加以解释. 本节的

练习答案

1. (1) $5x^2-4x-1=0$，
   5，-4，-1；
   (2) $4x^2-81=0$，
   4，0，-81；
   (3) $4x^2+8x-25=0$，
   4，8，-25；
   (4) $3x^2-7x+1=0$，
   3，-7，1.
2. (1) $4x^2-25=0$；
   (2) $x^2-2x-100=0$；
   (3) $x^2-3x+1=0$；
   (4) $x^2-2x-48=0$.

[1] 根据问题的实际背景，x 只能取正整数，所以这里从

$x=1$，$x=2$，…

进行讨论.

程的一般形式，并写出其中的二次项系数、一次项系数及常数项.

解：去括号，得

$$3x^2-3x=5x+10.$$

移项，合并同类项，得一元二次方程的一般形式

$$3x^2-8x-10=0.$$

其中二次项系数为 3，一次项系数为 -8，常数项为 -10.

练习

1. 将下列方程化成一元二次方程的一般形式，并写出其中的二次项系数、一次项系数及常数项：
   (1) $5x^2-1=4x$；　　(2) $4x^2=81$；
   (3) $4x(x+2)=25$；　　(4) $(3x-2)(x+1)=8x-3$.
2. 根据下列问题，列出关于 x 的方程，并将其化成一元二次方程的一般形式：
   (1) 4 个完全相同的正方形的面积之和是 25，求正方形的边长 x；
   (2) 一个矩形的长比宽多 2，面积是 100，求矩形的长 x；
   (3) 把长为 1 的木条分成两段，使较短一段的长与全长的积，等于较长一段的长的平方，求较短一段的长 x；
   (4) 一个直角三角形的斜边长为 10，两条直角边相差 2，求较长的直角边长 x.

前面有关排球邀请赛的问题中，我们列出方程③

$$x^2-x=56.$$

当 $x=1$ 时，$x^2-x=0$；当 $x=2$ 时，$x^2-x=2$……我们可以得出下表：[1]

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
x^2-x	0	2	6	12	20	30	42	56	72	90	…

练习中安排了判断、写出具体的一元二次方程的根的题目，目的是使学生加强对一元二次方程的根的了解.

5. 一般地，要检验某个值是不是方程的解，可以用这个值代替未知数代入方程，看方程左右两边的值是否相等，这一点学生应已经掌握. 要通过观察一元二次方程写出它的根，则又有一定难度. 例如，练习中有一题要写出方程

$$x^2-x=0$$

的根，这就需要先想到什么数的平方等于这个数本身，进而想到这样的数只能是 0 或 1.

6. 能使方程左右两边的值相等的未知数的值，叫做方程的解. 求方程的解的过程，叫做解方程. 由实际问题列出一元二次方程后，这个方程的根可能是两个不相等的实数，它们有可能不全是实际问题的答案，因此需要按照问题的实际意义对这些根再进行检验. 教科书是通过对比赛问题的具体分析说明这一问题的.

可以发现，当 $x=8$ 时，$x^2-x=56$，所以 $x=8$ 是方程 $x^2-x=56$ 的解. 一元二次方程的解也叫做一元二次方程的**根**（root）.

是否只有 $x=8$ 是方程 $x^2-x=56$ 的根呢?

将 $x=-7$ 代入方程 $x^2-x=56$，左边$=(-7)^2-(-7)=56=$右边，所以 $x=-7$ 也是方程 $x^2-x=56$ 的根.

通过对后面 22.2 节的学习，我们将能说明除 8 和 -7 外，方程 $x^2-x=56$ 没有其他的根.[1]

虽然方程 $x^2-x=56$ 有两个根（8 和 -7），但是排球邀请赛问题的答案只有一个，即应邀请 8 个队参赛.[2]

你能说出这是为什么吗?

这就是说，由实际问题列出方程并得出方程的解后，还要考虑这些解是否确实是实际问题的解.

思考

你能想出下列方程的根吗?[3]

(1) $x^2-36=0$；　　(2) $4x^2-9=0$.

练习

1. 下面哪些数是方程 $x^2-x-6=0$ 的根?

-4，-3，-2，-1，0，1，2，3，4.

2. 试写出方程 $x^2-x=0$ 的根，你能写出几个?

[1] 22.2 节中，将结合一元二次方程的求根公式，对这个问题进一步加以解释.

[2] 实际问题的答案必须是方程

$$x^2-x=56$$

的根，并且要符合实际问题的情境，不可能邀请 -7 个队参加比赛，所以只有 8 是这个问题的答案.

[3] 思考这些问题时，可以先将方程化为 $x^2=a$ 的形式，再考虑平方根.

练习答案

1. 3，-2.

2. 0，1.

7. 估算很实用，对于某些比较简单的一元二次方程可以通过估算得到方程的解. 但是对于比较复杂的一元二次方程用估算求解就比较困难了. 教科书中安排了一些直接估算求方程解的内容，既可以巩固方程的解的概念，又可以锻炼估算能力，还可以让学生体验用估算求某些方程的解有一定难度，从而为后面的 22.2 节进一步讨论方程的解法作准备.

[1] 本题可以设长为 x cm，宽为 $(x-1)$cm；也可以设宽为 x cm，长为 $(x+1)$cm. 虽然两种设法列出的方程不同，但都可以解出长和宽.

如果分别设长为 x cm，宽为 y cm，则会列出二元二次方程组，虽也可以再转化为一元二次方程，但过程较繁琐.

[2] 本题为衔接后面第 22.2 节的内容而设计，有承上启下的作用.

[3] 本题可以巩固对一元二次方程的根的概念的理解，也有连接将学习的一元二次方程解法的作用.

习题22.1

复习巩固 ▸▸

1. 将下列方程化成一元二次方程的一般形式，并写出它们的二次项系数、一次项系数及常数项：

(1) $3x^2+1=6x$；　(2) $4x^2+5x=81$；

(3) $x(x+5)=0$；　(4) $(2x-2)(x-1)=0$；

(5) $x(x+5)=5x-10$；　(6) $(3x-2)(x+1)=x(2x-1)$.

2. 根据下列问题列方程，并将其化成一元二次方程的一般形式：

(1) 一个圆的面积是 6.28 m^2，求半径 ($\pi\approx3.14$)；

(2) 一个直角三角形的两条直角边相差 3 cm，面积是 9 cm^2，求较长的直角边的长.

3. 下列哪些数是方程 $x^2+x-12=0$ 的根？

-4，-3，-2，-1，0，1，2，3，4.

4. 写出下列方程的根：

(1) $9x^2=1$；　(2) $25x^2-4=0$；　(3) $4x^2=2$.

综合运用 ▸▸

根据下列问题列方程，并将其化成一元二次方程的一般形式（第 5～7 题）：

5. 一个矩形的长比宽多 1 cm，对角线长 5 cm，矩形的长和宽各是多少？[1]

6. 有一根 1 m 长的铁丝，怎样用它围成一个面积为 0.06 m^2 的矩形？

7. 参加一次聚会的每两人都握了一次手，所有人共握手 10 次，有多少人参加聚会？

拓广探索 ▸▸

8. 你能想出下列方程的根吗？如果能，写出方程的根，并说出你是怎样想出的.[2]

(1) $(x-2)^2=1$；　(2) $9(x-2)^2=1$；

(3) $x^2+2x+1=4$；　(4) $x^2-6x+9=0$.

9. 如果 2 是方程 $x^2-c=0$ 的一个根，那么常数 c 是几？你能得出这个方程的其他根吗？[3]

习题 22.1

1. 习题 22.1 中“复习巩固”的题目有两类：

(1) 巩固对一元二次方程的一般形式的认识，为后面讨论一元二次方程的解法进行准备；

(2) 巩固对一元二次方程的根的概念的认识，用开平方法解简单方程，为后面进一步讨论更复杂的方程的解法进行铺垫.

这些内容应使学生切实掌握.

2. 习题 22.1 中“综合运用”的题目内容为列方程并化为一元二次方程的一般形式. 它们除复习巩固一元二次方程的一般形式外，还可以培养学生分析实际问题列出相应方程的能力. 这种能力是本章重点培养的能力之一.

3. 习题 22.1 中“拓广探索”的题目有两道，它们都有衔接后面 22.2 节的内容的作用. 本章中没有单独明确提出直接开平方法，但在 22.2 节的起始部分安排了这样的问题，并由这些问题引出配方法等内容.

22.2 降次——解一元二次方程

22.2.1 配方法



问题 1[1] 一桶某种油漆可刷的面积为1 500 dm²，李林用这桶油漆恰好刷完 10 个同样的正方体形状的盒子的全部外表面，[2]你能算出盒子的棱长吗？

设正方体的棱长为 x dm，则一个正方体的表面积为 $6x^2$ dm²．根据一桶油漆可刷的面积，列出方程

$$10\times 6x^2=1\,500. \qquad ①$$

由此可得

$$x^2=25.$$

根据平方根的意义，得

$$x=\pm 5,$$

即

$$x_1=5,\ x_2=-5.$$

可以验证，5 和 −5 是方程①的两根，但是棱长不能是负值，所以正方体的棱长为 5 dm.[3]

思考[4]

对照上面解方程①的过程，你认为应怎样解方程 $(2x-1)^2=5$ 及方程 $x^2+6x+9=2$？

在解方程①时，由方程 $x^2=25$ 得 $x=\pm 5$，由此容易想到：由方程

$$(2x-1)^2=5, \qquad ②$$

得

[1] 问题 1 是一个比较简单的实际问题，由它可以列出能用开平方法解的一元二次方程.

[2] 正方体的全部外表面即正方体的表面展开图，由 6 个正方形组成.

[3] 方程①的根不一定全是问题 1 的解，但是问题 1 的解必须是方程①的根.

[4] 这里对照解方程①的过程很重要，由此可以想到用直接开平方法解给出的两个方程.

1. 本节仍然结合一些实际问题展开，重点讨论配方法解一元二次方程.

问题 1 是引例，由这个问题列出一元二次方程并不困难，列出的方程①可以化为：一边是未知数的平方，另一边是常数的方程. 对这种形式的方程，容易想到用直接开平方法来解. 问题 1 的作用主要是引出直接开平方法.

2. 问题 1 后面安排的“思考”主要起承上启下的衔接作用，即强化直接开平方法，并为配方法进行铺垫. 对照解方程①的过程，可以进一步想到方程 $(2x-1)^2=5$ 也可以用直接开平方法来解；再进一步考虑，容易看出方程 $x^2+6x+9=2$ 可以化为一边是含未知数的完全平方式，另一边是常数的形式，因此也可以用直接开平方法来解. 教学中，也可以在这两个方程之间增加一个方程 $4x^2-4x+1=5$，考虑它的解法，以减小思考的坡度.

3. 数的开方是学生已有的知识，在它的基

$2x-1=\pm\sqrt{5}$，

即

$$2x-1=\sqrt{5},\ 2x-1=-\sqrt{5}. \quad ③$$

方程的两根为

$$x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$[1]

上面的解法中，由方程②得到③，实质上是把一个一元二次方程“**降次**”，转化为两个一元一次方程，这样问题就容易解决了.

方程 $x^2+6x+9=2$ 的左边是完全平方形式，这个方程可以化成 $(x+3)^2=2$，进行降次，得 _____[2]，方程的根为 $x_1=$ _____[3]，$x_2=$ _____[4].

归纳

如果方程能化成 $x^2=p$ 或 $(mx+n)^2=p(p\geqslant 0)$ 的形式，那么可得 $x=\pm\sqrt{p}$ 或 $mx+n=\pm\sqrt{p}$.[5]

练习

解下列方程：

(1) $2x^2-8=0$；　(2) $9x^2-5=3$；

(3) $(x+6)^2-9=0$；　(4) $3(x-1)^2-6=0$；

(5) $x^2-4x+4=5$；　(6) $9x^2+6x+1=4$.

问题 2[6] 要使一块矩形场地的长比宽多 6 m，并且面积为 16 m²，场地的长和宽应各是多少？

设场地宽 x m，长 $(x+6)$ m. 根据矩形面积为 16 m²，列方程

$$x(x+6)=16,$$

[1] x_1，x_2 表示方程的两根，下标与根的大小无关.

[2] $x+3=\pm\sqrt{2}$.

[3] $-3+\sqrt{2}$.

[4] $-3-\sqrt{2}$.

[5] 这类方程的形式为：一边是含有未知数的完全平方形式，另一边是非负常数. 这类方程可以用直接开平方法来解.

练习答案

(1) $x=\pm 2$；

(2) $x=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$；

(3) $x_1=-3$，$x_2=-9$；

(4) $x=1\pm\sqrt{2}$；

(5) $x=2\pm\sqrt{5}$；

(6) $x_1=\frac{1}{3}$，$x_2=-1$.

[6] 问题 2 是实际问题，方程②是讨论配方法时所用的一个具体方程.

础上能够很自然地想到直接开平方法. 教科书在讨论直接开平方法时，由浅入深地安排了三类方程，即

$$x^2=p,$$

$$(mx+n)^2=p,$$

$$m^2x^2+2mnx+n^2=p.$$

其中，m，n，p 是常数，且 $p\geqslant 0$. 教学中，应注意循序渐进地让学生掌握直接开平方法的做法，并且理解开方是“降次”，即将一个一元二次方程转化为两个一元一次方程. 例如，

$$(mx+n)^2=p\Rightarrow mx+n=\sqrt{p},\ mx+n=-\sqrt{p}.$$

4. 问题 2 以矩形面积为背景，引出方程

$$x^2+6x-16=0.$$

教科书结合这个方程讨论配方法，在讨论过程中首先用这个方程与方程 $x^2+6x+9=2$ 进行对比，使将方程一边配成完全平方形式成为对比的结果. 于是产生后面的“移项”“方程两边加一

即

$$x^2+6x-16=0. \quad ②$$

思考

怎样解方程 $x^2+6x-16=0$?

对比这个方程与前面讨论过的方程 $x^2+6x+9=2$，可以发现方程 $x^2+6x+9=2$ 的左边是含有 x 的完全平方形式，右边是非负数，可以直接降次解方程；而方程 $x^2+6x-16=0$ 不具有上述形式，直接降次有困难. 能设法把 $x^2+6x-16=0$ 化为具有上述形式的方程吗?[1]

请看下面的框图:[2]



[1] 通过考虑这个问题，可以引导学生认识到配方的必要性.

[2] 这里用框图形式给出了配方法解一个具体方程的全过程.

次项系数一半的平方”“方程一边写成完全平方形式”等具体做法. 教学中，应引导学生认识到这些做法是根据解方程的需要有依据地产生的，并在理解的基础上记忆这些做法. 当二次项系数是 1 时，“方程两边加一次项系数一半的平方”是配方的关键做法.

教科书结合具体方程 $x^2+6x-16=0$，以框图形式表示了用配方法解方程的全过程. 它突出了如何具体配方、如何具体降次，配合后面的讨论题“为什么在方程 $x^2+6x-16=0$ 两边加 9? 加其他数行吗?”，就能使人对配方法有了具体的初步认识. 在此基础上，教科书正式提出“配方法”一词，点出它是通过“配成完全平方形式来解一元二次方程的方法”.

5. 安排例 1 的目的是进一步讨论配方法. 例 1 包括了两类一元二次方程：

(1) 二次项系数是 1 的类型

$$x^2+px+q=0;$$

[1] 通过讨论这个问题，可以使学生认识到：当二次项系数是 1 时，“方程两边加一次项系数一半的平方”是配方的关键做法.

[2] 这里给出了配方法的基本思想.

[3] 例 1 的三个方程中，第一个是二次项系数是 1 的类型，后两个是二次项系数不是 1 的类型. 后一类型比较复杂，一般需先化为前一类型再配方.

[4] 方程 $x^2-8x=-1$ 中，右边二次项系数是 1，一次项系数是 -8，$\left(\frac{-8}{2}\right)^2=4^2$，所以要加 4^2，才能使右边配成完全平方形式 $(x-4)^2$.

[5] 这里给出二次项系数不是 1 的一元二次方程配方的第一步骤.

可以验证，2 和 -8 是方程②的两根，但是场地的宽不能是负值，所以场地的宽为 2 m，长为 8(即 2+6)m.



以上解法中，为什么在方程 $x^2+6x=16$ 两边加 9？加其他数行吗？[1]

像上面那样，通过配成完全平方形式来解一元二次方程的方法，叫做**配方法**. 可以看出，配方是为了降次，把一个一元二次方程转化成两个一元一次方程来解.[2]

为什么方程两边都加 4^2？加其他数行吗？[4]

例 1 解下列方程：[3]

(1) $x^2-8x+1=0$；　(2) $2x^2+1=3x$；

(3) $3x^2-6x+4=0$.

解：(1) 移项，得

$$x^2-8x=-1.$$

配方

$$x^2-8x+4^2=-1+4^2,$$

$$(x-4)^2=15.$$

由此可得

$$x-4=\pm\sqrt{15},$$

$$x_1=4+\sqrt{15},\ x_2=4-\sqrt{15}.$$

方程的二次项系数不是 1 时，为使于配方，可以让方程的各项除以二次项系数.[5]

(2) 移项，得

$$2x^2-3x=-1.$$

二次项系数化为 1，得

$$x^2-\frac{3}{2}x=-\frac{1}{2}.$$

配方

(2) 二次项系数不是 1 的类型

$$ax^2+bx+c=0(a\neq0,\ a\neq1).$$

前一类型在问题 1 中已经讨论过，其配方的关键步骤是“方程两边加一次项系数一半的平方”；后一类型更复杂，一般需先通过“方程两边除以二次项系数”，将方程化为二次项系数是 1 的类型，然后在方程两边加一次项系数一半的平方，配成完全平方形式. 例 1 的第 (2) (3) 题，可以说明如何用配方法解二次项系数不是 1 的一元二次方程. 在第一类型方程解法的基础上认识第二类型方程解法，是由简单到复杂的过程. 两种类型的方程合起来，就能对配方法形成全面的了解.

例 1 的第 (3) 题还有另一个作用，即具体说明某些一元二次方程无实数解. 其理由是在实数范围，任何平方都不会是负数. 虽然本章正文中不提及判别式，但是还会涉及一元二次方程的实数根的存在性，说明某些一元二次方程无实数根.

$$x^2-\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{4}\right)^2=-\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{4}\right)^2,$$

$$\left(x-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{1}{16}.$$

为什么方程两边都加$\left(\frac{3}{4}\right)^2$?

由此可得

$$x-\frac{3}{4}=\pm\frac{1}{4},$$

$$x_1=1,\ x_2=\frac{1}{2}.$$

(3) 移项，得

$$3x^2-6x=-4.$$

为什么方程两边都加1^2?

二次项系数化为1，得

$$x^2-2x=-\frac{4}{3}.$$

配方

$$x^2-2x+1^2=-\frac{4}{3}+1^2,$$

$$(x-1)^2=-\frac{1}{3}.$$

因为实数的平方不会是负数，所以x取任何实数时，$(x-1)^2$都是非负数，上式都不成立，即原方程无实数根.[1]

练习

1. 填空：

(1) $x^2+10x+____=(x+\quad)^2$；　(2) $x^2-12x+____=(x-\quad)^2$；

(3) $x^2+5x+____=(x+\quad)^2$；　(4) $x^2-\frac{2}{3}x+____=(x-\quad)^2$.

2. 解下列方程：

(1) $x^2+10x+9=0$；　(2) $x^2-x-\frac{7}{4}=0$；

(3) $3x^2+6x-4=0$；　(4) $4x^2-6x-3=0$；

(5) $x^2+4x-9=2x-11$；　(6) $x(x+4)=8x+12$.

[1] 这里由实数平方的非负性，给出了一元二次方程$3x^2-6x+4=0$无实数根的理由.

练习答案

1. (1) 25，5；

(2) 36，6；

(3) $\frac{25}{4}$，$\frac{5}{2}$；

(4) $\frac{1}{9}$，$\frac{1}{3}$.

2. (1) $x=-9$，$x=-1$；

(2) $x=\frac{1}{2}\pm\sqrt{2}$；

(3) $x=-1\pm\frac{\sqrt{21}}{3}$；

(4) $x=\frac{3}{4}\pm\frac{\sqrt{21}}{4}$；

(5) 无实数根；

(6) $x_1=-2$，$x_2=6$.

6. 配方法不仅是解一元二次方程的一种基本方法，而且在以后讨论二次函数等其他数学概念时也离不开配方法. 因此，配方法在数学中成为一种很重要的式子变形. 它的背后隐含了创造条件实现化归的思想，这种思想对培养学生的数学能力影响很大. 教学中，对配方法及化归思想应充分重视. 应引导学生理解这种方法的道理，结合道理去记忆配方的具体步骤.

7. 由配方法可以进一步推导出一元二次方程的求根公式，从而得出一元二次方程的另一种解法 —— 公式法. 因此，配方法是理解公式法的基础. 如果不懂配方法，那么只能死记硬背求根公式，套公式解一元二次方程，而不知公式从何而来.

前面讨论如何用配方法解具体的数字系数的一元二次方程，认识过程往往是由具体到抽象的，如果把讨论对象由数字系数的一元二次方程，换为一元二次方程的一般形式

[1] 方程

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

左边的二次项系数是 1，一次项系数是 $\frac{b}{a}$，配方的关键步骤是两边加 $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$. 这样配出的平方式为 $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$.

[2] 由于 $a\neq0$，$4a^2>0$ 是显然的. 要使 $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ 非负，就需有 $\frac{b^2-4ac}{4a^2}\geqslant0$. 这里设定条件

$$b^2-4ac\geqslant0,$$

这时有

$$\frac{b^2-4ac}{4a^2}\geqslant0.$$

[3] 这个式子含 ± 号，表示两个值.

22.2.2 公式法

任何一元二次方程都可以写成一般形式

$$ax^2+bx+c=0\ (a\neq0).\qquad①$$

能否也用配方法得出①的解呢?

移项，得

$$ax^2+bx=-c.$$

二次项系数化为 1，得

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}.$$

配方[1]

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2,$$

即

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.\qquad②$$

因为 $a\neq0$，$4a^2>0$. 当 $b^2-4ac\geqslant0$ 时，[2] $\frac{b^2-4ac}{4a^2}\geqslant0$，由②式得

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.\qquad③$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

注意由②到③的条件.

由上可知，一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$$

的根由方程的系数 a，b，c 确定. 因此，解一元二次方程时，可以先将方程化为一般形式 $ax^2+bx+c=0$，当 $b^2-4ac\geqslant0$ 时，将 a，b，c 代入式子

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ [3]

$$ax^2+bx+c=0(a\neq0),$$

讨论用配方法解它会得到怎样的结果，就得到一元二次方程的求根公式.

教学中，应使学生认识到：抽象的、一般的形式具有广泛的应用价值，一元二次方程的一般形式代表了所有的一元二次方程，因此它的求根公式可适用于所有的一元二次方程，于是有了直接利用求根公式的公式法. 公式法的优点是操作简单，直接计算，它利用了配方法解一元二次方程的一般形式 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的结果，省去了对每个要解的一元二次方程进行配方的过程.

8. 教学中应注意：即使学生已经熟悉了用配方法解数字系数的一元二次方程，用配方法解字母系数的一般形式一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$$

仍是难点. 因此，需要重点分析方程

就得到方程的根. 这个式子叫做一元二次方程的**求根公式**，利用它解一元二次方程的方法叫做**公式法**. 由求根公式可知，一元二次方程最多有两个实数根.[1]

例 2 解下列方程：

(1) $2x^2-x-1=0$；　　(2) $x^2+1.5=-3x$；

(3) $x^2-\sqrt{2}x+\frac{1}{2}=0$；　　(4) $4x^2-3x+2=0$.

确定 a，b，c 的值时要注意符号.

解：(1) $a=2$，$b=-1$，$c=-1$.

$$b^2-4ac=(-1)^2-4\times2\times(-1)=9>0.$$

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{9}}{2\times2}=\frac{1\pm3}{4},$$

$$x_1=1,\ x_2=-\frac{1}{2}.$$

(2) 将方程化为一般形式

$$x^2+3x+1.5=0.$$

$a=1$，$b=3$，$c=1.5$.

$$b^2-4ac=3^2-4\times1\times1.5=3>0.$$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3}}{2\times1}=\frac{-3\pm\sqrt{3}}{2},$$

$$x_1=\frac{-3+\sqrt{3}}{2},\ x_2=\frac{-3-\sqrt{3}}{2}.$$

(3) $a=1$，$b=-\sqrt{2}$，$c=\frac{1}{2}$.

$$b^2-4ac=(-\sqrt{2})^2-4\times1\times\frac{1}{2}=0.$$

当 $b^2-4ac=0$ 时，$x_1=x_2$，即方程的两根相等.

$$x=\frac{-(-\sqrt{2})\pm\sqrt{0}}{2\times1}=\frac{\sqrt{2}\pm0}{2}.$$

$$x_1=x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$[2]

(4) $a=4$，$b=-3$，$c=2$.

$$b^2-4ac=(-3)^2-4\times4\times2=9-32=-23<0.$$

因为在实数范围负数不能开平方，所以方程无实数根.[3]

[1] 由求根公式可知，当方程

$$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$$

有实数根时，它的根必然是

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

或$\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

[2] 当 $b^2-4ac=0$ 时，

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=-\frac{b}{2a},$$

这时我们说方程有两个相等的实数根，而不说方程只有一个实数根.

[3] 当 $b^2-4ac<0$ 时，$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$在实数范围无意义.

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

的左边，由二次项系数是 1，一次项系数是$\frac{b}{a}$，得出配方的关键步骤是两边加$\left(\frac{b}{2a}\right)^2$. 这样配出的平方式为 $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$.

9. 推导求根公式时，特别给出条件“当 $b^2-4ac\geqslant0$时”. 教学中，应使学生认识到这一条件是根据$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$非负而产生的，如果 $b^2-4ac<0$，就有$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2<0$. 这在实数范围是不可能的. 因此，这里要约定 $b^2-4ac\geqslant0$.

10. 得出求根公式

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

后，可知方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$的根是由系

[1] 这里归纳了 b^2-4ac 的值的三种情形，与之对应的是一元二次方程根的三种情形.

练习答案

1. (1) $x_1=-3$，$x_2=2$；

(2) $x=\dfrac{\sqrt{3}\pm 2}{2}$；

(3) $x=1\pm\dfrac{\sqrt{15}}{3}$；

(4) $x_1=0$，$x_2=\dfrac{3}{2}$；

(5) $x=\pm\sqrt{3}$；

(6) $x=-1\pm\dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

2. 切去边长为 5 cm 的正方形.

归纳[1]

(1) 当 $b^2-4ac>0$ 时，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 有实数根

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$$

(2) 当 $b^2-4ac=0$ 时，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 有实数根

$$x_1=x_2=\frac{-b}{2a};$$

(3) 当 $b^2-4ac<0$ 时，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 没有实数根.

回到本章引言中的问题，雕像下部高度 x(m) 满足方程

$$x^2+2x-4=0. \qquad ①$$

解这个方程，得

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\times 1\times(-4)}}{2\times 1}=\frac{-2\pm\sqrt{20}}{2}=-1\pm\sqrt{5},$$

$x_1=-1+\sqrt{5}$，$x_2=-1-\sqrt{5}$.

精确到 0.001，$x_1\approx 1.236$，$x_2\approx -3.236$.

虽然方程①有两个根，但是其中只有 $x_1\approx 1.236$ 符合问题的实际意义，所以雕像下部高度应设计为约 1.236 m.

练习

1. 解下列方程：

(1) $x^2+x-6=0$；　　(2) $x^2-\sqrt{3}x-\dfrac{1}{4}=0$；

(3) $3x^2-6x-2=0$；　　(4) $4x^2-6x=0$；

(5) $x^2+4x+8=4x+11$；　　(6) $x(2x-4)=5-8x$.

2. 求 22.1 节中问题 1 的答案.

数 a，b，c 所确定的. 公式中含有二次根式，被开方式为 b^2-4ac，它的值与 0 的大小关系，直接影响 x 的值是否在实数范围内，以及 x 的两个取值（在公式中分别取＋、－号）是否相等. 因此，b^2-4ac 是考察一元二次方程根的情形的依据. 按照课程标准规定的内容，教科书中没有正式提出判别式的名称，但在公式法之后进行了归纳，总结了 b^2-4ac 的值的三种情形和与它们对应的一元二次方程根的三种情形. 三种情形中，(1) 有两个不等实数根；(2) 有两个相等实数根，(1) (2) 又合称有实数根. 第 (3) 种情形没有实数根，但不能说没有根，这时方程的根是虚数.

11. 与配方法一样，公式法是适合于任何一个一元二次方程的解法. 教学中，应提醒学生注意：使用公式法时，要先将方程整理为一般形式，并正确代入 a，b，c 的值，不要忽略系数的符号.

22.2.3 因式分解法



问题 3 根据物理学规律，如果把一个物体从地面以 10 m/s 的速度竖直上抛，那么经过 x s 物体离地面的高度（单位：m）为

$$10x-4.9x^2.$$[1]

你能根据上述规律求出物体经过多少秒落回地面吗（精确到 0.01 s）？

设物体经过 x s 落回地面，这时它离地面的高度为 0，即

$$10x-4.9x^2=0. \qquad ①$$

思考

除配方法或公式法以外，能否找到更简单的方法解方程①？

如果 $a\cdot b=0$，那么 $a=0$ 或 $b=0$.[3]

方程①的右边为 0，左边可以因式分解，得

$$x(10-4.9x)=0.$$[2]

于是得

$$x=0 \text{ 或 } 10-4.9x=0, \qquad ②$$

$$x_1=0,\ x_2=\frac{100}{49}\approx 2.04.$$

上述解中，$x_2\approx 2.04$ 表示物体约在 2.04 s 时落回地面，而 $x_1=0$ 表示物体被上抛离开地面的时刻，即在 0 s 时物体被抛出，此刻物体的高度是 0 m.



以上解方程①的方法是如何使二次方程降为一次的？[4]

[1] 竖直上抛运动中物体离上抛点的距离为

$$h=v_0t-\frac{1}{2}gt^2,$$

其中，v_0 为初速度，t 为时间，g 为重力加速度. $g\approx 9.8$ 米/秒^2.

[2] 由方程①左边提公因式可得此式.

[3] 在实数范围内，两个因式的积等于 0 时，这两个因式中必有等于 0 的. 反之，不论哪个因式等于 0，积都等于 0.

[4] 通过因式分解，使原方程转化为每个一次因式等于 0，得到两个一次方程.

12. 对于某些一元二次方程，虽然用配方法或公式法可以解，但是用因式分解的方法解起来更简便.

因式分解法解一元二次方程，是将方程先分解为两个一次因式，分别令每个因式等于 0，得到两个一次方程，解这两个方程，得到一元二次方程的两个根. 这种化二次方程为一次方程的降次方法，不同于配方法的开平方，而是依据两个实数的积等于 0 的充要条件，即这两个实数中必有等于 0 的.

教科书中所用的因式分解方法包括：提公因式法和运用乘法公式法，这与以前学习过的因式分解方法是一致的.

13. 教科书在例 3 后面的“归纳”栏目中，对于配方法、公式法和因式分解法进行了综合归纳，指出了各种方法的特点，提出了“降次”是各种方法共同的基本思路. 教学中，应及时归纳总结，加强相关内容之间的联系，引导学生不断

[1] 这里用提公因式$x-2$的方法分解因式.

[2] 这里用平方差公式分解因式.

[3] 也可以用配方法或公式法解例3中的方程.

[4] “降次”是本节的标题，也是解一元二次方程的基本思路.

可以发现，上述解法中，由①到②的过程，不是用开平方降次，而是先因式分解使方程化为两个一次式的乘积等于0的形式，再使这两个一次式分别等于0，从而实现降次. 这种解法叫做**因式分解法**.

例3 解下列方程：

(1) $x(x-2)+x-2=0$；

(2) $5x^2-2x-\frac{1}{4}=x^2-2x+\frac{3}{4}$.

解：(1) 因式分解，得

$$(x-2)(x+1)=0.$$[1]

于是得

$$x-2=0 \text{ 或 } x+1=0,$$

$$x_1=2,\ x_2=-1.$$

(2) 移项、合并同类项，得

$$4x^2-1=0.$$

因式分解，得

$$(2x+1)(2x-1)=0.$$[2]

于是得

$$2x+1=0 \text{ 或 } 2x-1=0,$$

$$x_1=-\frac{1}{2},\ x_2=\frac{1}{2}.$$

可以试用多种方法解本例中的两个方程.[3]

归纳

配方法要先配方，再降次；通过配方法可以推出求根公式，公式法直接利用求根公式；因式分解法要先使方程一边为两个一次因式相乘，另一边为0，再分别使各一次因式等于0. 配方法、公式法适用于所有一元二次方程，因式分解法用于某些一元二次方程. 总之，解一元二次方程的基本思路是：将二次方程化为一次方程，即降次.[4]

扩充和完善对知识体系的认识.

练习

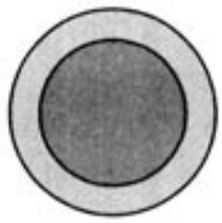
1. 解下列方程：

(1) $x^2+x=0$；　(2) $x^2-2\sqrt{3}x=0$；

(3) $3x^2-6x=-3$；　(4) $4x^2-121=0$；

(5) $3x(2x+1)=4x+2$；　(6) $(x-4)^2=(5-2x)^2$.

2. 把小圆形场地的半径增加 5 m 得到大圆形场地，场地面积增加了一倍，求小圆形场地的半径.



(第 2 题)

习题22.2

复习巩固 ▶▶

1. 解下列方程：

(1) $36x^2-1=0$；　(2) $4x^2=81$；

(3) $(x+5)^2=25$；　(4) $x^2+2x+1=4$.

2. 填空：[1]

(1) x^2+6x+_____$=(x+\quad)^2$；

(2) x^2-x+_____$=(x-\quad)^2$；

(3) $4x^2+4x+$_____$=(2x+\quad)^2$；

(4) $x^2-\frac{2}{5}x+$_____$=(x-\quad)^2$.

3. 用配方法解下列方程：

(1) $x^2+10x+16=0$；　(2) $x^2-x-\frac{3}{4}=0$；

(3) $3x^2+6x-5=0$；　(4) $4x^2-x-9=0$.

4. 用公式法解下列方程：

(1) $x^2+x-12=0$；　(2) $x^2-\sqrt{2}x-\frac{1}{4}=0$；

(3) $x^2+4x+8=2x+11$；　(4) $x(x-4)=2-8x$；

(5) $x^2+2x=0$；　(6) $x^2+2\sqrt{5}x+10=0$.

练习答案

1. (1) $x_1=0$，$x_2=-1$；

(2) $x_1=0$，$x_2=2\sqrt{3}$；

(3) $x_1=x_2=1$；

(4) $x_1=\frac{11}{2}$，$x_2=-\frac{11}{2}$；

(5) $x_1=\frac{2}{3}$，$x_2=-\frac{1}{2}$；

(6) $x_1=1$，$x_2=3$.

2. $5(1+\sqrt{2})$m.

[1] 本题是为配方法作准备的.

习题 22.2

1. 习题 22.2 中“复习巩固”的题目有两类：

(1) 第 1～5 题是为巩固一元二次方程的解法而设计的.

(2) 第 6、7 题是与正文中出现过的问题有近似实际背景的题目，它们既有巩固一元二次方程的解法的作用，又有使学生更熟悉列一元二次方程解决实际问题的作用，为后面进一步讨论更复杂的实际问题进行铺垫.

“复习巩固”的题目应使学生切实掌握.

2. 习题 22.2 中“综合运用”的题目有 3 道.

第 8 题用公式法需先将方程化为一元二次方程的一般形式，较复杂；用平方差公式进行因式分解更简单.

第 9 题设长或宽为 x 都可以，两种设法所得方程不同，但在解方程的难度上无差别.

[1] 凸 n 边形对角线数为

$$\frac{1}{2}n(n-3),$$

每个顶点与除它本身及相邻两点之外的 $n-3$ 个顶点的连线，都是对角线.

[2] 从方程

$$ax^2+bx+c=0$$

中 b^2-4ac 与根的对应关系分析问题.

5. 用因式分解法解下列方程：

(1) $3x^2-12x=-12$；　　(2) $4x^2-144=0$；

(3) $3x(x-1)=2(x-1)$；　　(4) $(2x-1)^2=(3-x)^2$.

6. 一个直角三角形的两条直角边相差 5 cm，面积是 7 cm^2，求斜边的长（结果保留小数点后一位）.



7. 参加一次商品交易会的每两家公司之间都签订了一份合同，所有公司共签订了 45 份合同，共有多少家公司参加商品交易会？

综合运用 ▸▸

8. 用公式法和因式分解法解方程

$$x^2-6x+9=(5-2x)^2.$$

9. 有一根 20 m 长的绳，怎样用它围成一个面积为 24 m^2 的矩形？

10. 向阳村 2001 年的人均收入为 1 200 元，2003 年的人均收入为 1 452 元，求人均收入的年平均增长率.

拓广探索 ▸▸

11. 一个凸多边形共有 20 条对角线，它是几边形？是否存在有 18 条对角线的多边形？如果存在，它是几边形？如果不存在，说明得出结论的道理.[1]

12. 无论 p 取何值，方程 $(x-3)(x-2)-p^2=0$ 总有两个不等的实数根吗？给出答案并说明理由.[2]



阅读与思考 选学

黄金分割数

本章引言中有一个关于人体雕塑的问题，要使雕像的上部（腰以上）与下部（腰以下）的高度比，等于下部与全部的高度比，这个高度比应是多少？

把上面的问题一般化，如图 1，在线段 AB 上找一个点 C，使 $AC:CB=CB:AB$，

第 10 题是增长率问题，其基本等量关系为

增长后数量＝增长前数量×(1＋增长率)^n，

本题中 $n=2$.

3. 习题 22.2 中“拓广探索”的题目有两道.

第 11 题中基本等量关系为

凸 n 边形对角线数$=\frac{1}{2}n(n-3)$.

应使学生明白这个式子的道理.

第 12 题的设计目的为加强对 b^2-4ac 与一元二次方程的根的对应关系的认识.

阅读与思考

这是一篇作为选学材料的短文，文章从本章引言中的雕像问题说起，从线段的内外比分点的角度给出了$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$这个黄金分割数，接着又结合五角星进一步对黄金分割数进行了几何解释，最后介绍了关于黄金分割数的应用的一些情况.

即 $CB^2=AC\cdot AB$. 为简单起见，设 $AB=1$，[1] $CB=x$，则 $AC=1-x$. 列方程

$$x^2=1-x，即$$

$$x^2+x-1=0.$$

解方程，得

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$



图 1

根据问题的实际意义，取 $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx0.618$，这个值就是上面问题中的高度比.

人们把 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 这个数叫做黄金分割数. 如果把一条线段分为两部分，使其中较长一段与整个线段的比是黄金分割数，那么较短一段与较长一段的比也是黄金分割数.

五角星是常见的图案. 如图 2，在正五角星中存在黄金分割数，可以证明[2]其中

$$\frac{MN}{NB}=\frac{BN}{BM}=\frac{BM}{BE}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

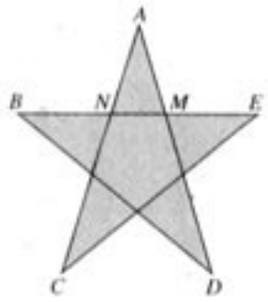


图 2



图 3

长期以来，很多人认为黄金分割数是一个很特别的数. 一些美术家认为：如果人的上、下身长之比是黄金分割数，那么可以增加美感. 据说，一些名画和雕塑（如图 3 的维纳斯像）都符合这个比. 一位科学家曾提出：在一棵树的生长过程中，$\frac{n\text{年后的树枝数目}}{n+1\text{年后的树枝数目}}$ 约是黄金分割数.

优选法是一种具有广泛应用价值的数学方法，著名数学家华罗庚曾为普及它作出重要贡献. 优选法中有一种 0.618 法应用了黄金分割数.[3]例如，在一种试验中，温度的变化范围是 0 ℃～10 ℃，我们要寻找在哪个温度时试验效果最佳. 为此，可以先找出温度变化范围的黄金分割点，考察 $10\times0.618=6.18$ ℃时的试验效果，再考察 $10\times(1-0.618)=3.82$ ℃时的试验效果，比较两者，选优去劣. 然后在缩小的温度变化范围继续这样寻找，直至选出最佳温度.



图 4

著名数学家华罗庚在普及优选法

[1] 设 $AB=1$ 可以使方程简单，且不失一般性. 如果设 $AB=a$，则对应的结果为

$$x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a.$$

[2] 证明中考虑正五角星内角的度数及相应三角函数的值.

[3] 这种优选法叫做黄金分割法，也叫做 0.618 法.

这篇短文可以帮助学生简要地了解黄金分割数.

[1] 这里的一轮指一个传染周期. 例如，开始有一人（不妨记为 a）患流感，第一轮中 a 传染给 b，c，d，这时有 a，b，c，d 共 4 人患流感；第二轮中这 4 人每人又传染给 3 人，这时患流感者总数为 $3\times4+4=16$（人）.

[2] $1+x$.

[3] $1+x+x(1+x)$.

[4] 10.

[5] 12.

[6] 10.

22.3 实际问题与一元二次方程

同一元一次方程、二元一次方程（组）等一样，一元二次方程也可以作为反映某些实际问题中数量关系的数学模型，本节继续讨论如何利用一元二次方程分析解决实际问题.

探究1



有一人患了流感，经过两轮[1]传染后共有 121 人患了流感，每轮传染中平均一个人传染了几个人？

分析：设每轮传染中平均一个人传染了 x 个人.

开始有一人患了流感，第一轮的传染源就是这个人，他传染了 x 个人，用代数式表示，第一轮后共有_____[2]人患了流感；第二轮传染中，这些人中的每个人又传染了 x 个人，用代数式表示，第二轮后共有_____[3]人患了流感.

列方程

$$1+x+x(1+x)=121.$$

解方程，得

$x_1=$_____[4]，$x_2=$_____[5].

平均一个人传染了_____[6]个人.

通过对这个问题的探究，你对类似的传播问题中的数量关系有新认识吗？

1. 本节之前已经讨论过解一元二次方程的几种方法，并且已有由实际问题列出一元二次方程的内容. 在此基础上，本节进一步以“探究”的形式更深入地讨论如何用一元二次方程解决实际问题. 本节要探究的四个问题，比前面出现的实际问题在分析数量关系方面更复杂些，问题情境与实际情况也更接近.

本节的重点是，进一步反映一元二次方程与实际问题的密切联系，再次体现数学建模思想，加强培养运用一元二次方程分析和解决实际问题的能力. 列一元二次方程是中心内容，解一元二次方程已属于巩固性内容.

由于本节问题的背景和表达都比较贴近实际，其中的有些数量关系比较隐蔽，所以在探究过程中正确地建立一元二次方程是主要难点. 突破难点的关键是弄清问题背景，把有关数量关系分析透彻，特别是找出可以作为列方程依据的主要相等关系.

思考

如果按照这样的传染速度，三轮传染后有多少人患流感？[1]

探究2

两年前生产1吨甲种药品的成本是5 000元，生产1吨乙种药品的成本是6 000元，随着生产技术的进步，现在生产1吨甲种药品的成本是3 000元，生产1吨乙种药品的成本是3 600元．哪种药品成本的年平均下降率[2]较大？

分析：容易求出，甲种药品成本的年平均下降额[3]为 $(5\,000-3\,000)\div 2=1\,000$(元)，乙种药品成本的年平均下降额为 $(6\,000-3\,600)\div 2=1\,200$(元)，显然，乙种药品成本的年平均下降额较大．但是，年平均下降额（元）不等同于年平均下降率（百分数）．

设甲种药品成本的年平均下降率为 x，则一年后甲种药品成本为 $5\,000(1-x)$元，两年后甲种药品成本为 $5\,000(1-x)^2$ 元，于是有

$$5\,000(1-x)^2=3\,000.$$

解方程，得

$$x_1\approx 0.225,\quad x_2\approx 1.775.$$

根据问题的实际意义，甲种药品成本的年平均下降率约为22.5%．

乙种药品成本的年平均下降率是多少？[5]请比较两种药品成本的年平均下降率．[6]

根据问题的实际意义，应选择哪个根？为什么？[4]

[1] $121+10\times 121=1\,331$.

[2] 成本的年下降率等于

$$\frac{\text{前一年成本}-\text{本年成本}}{\text{前一年成本}}$$

[3] 成本的年下降额等于

前一年成本 − 本年成本.

[4] 根据问题的实际意义，成本的年下降率应是小于1的正数，所以应选取0.225.

[5] 类似于甲种药品成本年平均下降率的计算，由方程

$6\,000(1-x)^2=3\,600$，

得乙种药品成本年平均下降率为0.225.

[6] 两种药品成本的年平均下降率相等.

本节内容适合于在独立思考的基础上进行合作讨论，在分析解决问题的过程中逐步深入地体会一元二次方程的应用价值.

2. 探究1以流感为问题情景，讨论按一定传播速度逐步传播的问题．这类问题在现实世界中有许多原型，例如细胞分裂、信息传播、传染病扩散等．当传播速度是定值时，这类问题与等比数列有联系．本节中讨论的是两轮的传播，它可以用一元二次方程作为数学模型.

教学中，应引导学生注意本问题中第一轮的传染源有1人，第二轮的传染源有 $x+1$ 人，即假设最早的患者仍在继续传染别人．这有些类似讨论菲波那契数列时的原型兔子繁殖问题．虽然实际问题与此不一定完全一致，但这样假设便于用一元二次方程作为实际问题的近似数学模型.

这类问题还可以进一步推广到两轮以上的传播问题，其基本数量关系是一致的，只是如果用方程作数学模型时会涉及更高次的方程．探究1

[1] 成本下降额较大的产品，其成本下降率不一定较大. 成本下降额表示绝对变化量，成本下降率表示相对变化量，两者兼顾才能全面比较对象的变化状况.

[2] 设封面的长、宽分别为 $9a$，$7a$，中央矩形的长、宽分别为 $9b$，$7b$，则上下边衬和左右边衬分别为 $\frac{9a-9b}{2}$，$\frac{7a-7b}{2}$，即 $\frac{9}{2}(a-b)$，$\frac{7}{2}(a-b)$，它们的比为 $9:7$.

[3] $21-14x$.

思考

经过计算，你能得出什么结论？成本下降额较大的药品，它的成本下降率一定也较大吗？应怎样全面地比较几个对象的变化状况？[1]

探究3

如图 22.3-1，要设计一本书的封面，封面长27 cm，宽 21 cm，正中央是一个与整个封面长宽比例相同的矩形. 如果要使四周的彩色边衬所占面积是封面面积的四分之一，上、下边衬等宽，左、右边衬等宽，应如何设计四周边衬的宽度（精确到 0.1 cm）？



22.3-1

分析：封面的长宽之比为 $27:21=9:7$，中央矩形的长宽之比也应是 $9:7$，由此判断上下边衬与左右边衬的宽度之比也是 $9:7$.[2]

设上、下边衬的宽均为 $9x$ cm，左、右边衬的宽均为 $7x$ cm，则中央矩形的长为 $(27-18x)$cm，宽为 _____[3]cm.

要使四周的彩色边衬所占面积是封面面积的四分之一，则中央矩形的面积是封面面积的四分之三. 于是可列出方程

$$(27-18x)(21-14x)=\frac{3}{4}\times 27\times 21.$$

后面的思考问题虽然涉及三轮传播，但只是求值问题，不需要用方程解决.

3. 探究 2 以成本下降为问题情景，讨论平均变化率的问题. 这类问题在现实世界中有许多原型，例如经济增长率、人口增长率等. 本节中讨论的是两轮（即两个时间段）的平均变化率，它可以用一元二次方程作为数学模型，设平均变化率为 x，则有下列关系

变化前数量$\times(1+x)^2$=变化后数量.

探究 2 的成本下降问题中，涉及成本下降额和成本下降率这两个接近而不同的概念，前者表示绝对变化量，单位是元；后者表示相对变化量，是表示比率的数字. 通过这个问题，可以使学生认识到分析问题时应对变化额与变化率两者兼顾，这样才能全面比较对象的变化状况.

4. 探究 3 以封面设计为问题情景，讨论边衬的宽度. 在现实世界中，有许多可以用一元二次方程作为数学模型分析解决几何图形的问题原型.

整理，得

$$16x^2-48x+9=0.$$

解方程，得

$$x=\frac{6\pm3\sqrt{3}}{4}.$$

方程的哪个根合乎实际意义？为什么？[1]

上、下边衬的宽均为_____[2]cm，左、右边衬的宽均为_____[3]cm.

思考

如果换一种设未知数的方法，是否可以更简单地解决上面的问题？请你试试.[4]

探究4

一辆汽车以 20 m/s 的速度行驶，司机发现前方路面有情况，紧急刹车后汽车又滑行 25 m 后停车. (1) 从刹车到停车用了多少时间？(2) 从刹车到停车平均每秒车速减少多少？(3) 刹车后汽车滑行到 15 m 时约用了多少时间（结果保留小数点后一位）？



分析：(1) 已知刹车后滑行路程为 25 m，如果知道滑行的平均速度，则根据路程、速度、时间三者的

[1] 根据问题的已知条件，$x=\frac{6-3\sqrt{3}}{4}$ 合乎实际. 否则，取另一个根

$$x=\frac{6+3\sqrt{3}}{4},$$

上、下边衬的宽度之和会超过封面的长度.

[2] 1.8.

[3] 1.4.

[4] 可以考虑其他解法. 例如，设中央矩形的长、宽分别为 $9x$ cm，$7x$ cm. 列方程

$$9x\cdot7x=\frac{3}{4}\times27\times21.$$

解得 $x\approx2.6$. 进而得上、下边衬的宽度

$(27-9\times2.6)\times0.5=1.8$，

左、右边衬的宽度

$(21-7\times2.6)\times0.5=1.4$.

探究 3 的问题中，已知封面及正中央矩形的长宽比都是 9∶7，由此可以推出上下、左右边衬宽度之比也是 9∶7. 这一关系在解决问题中是必需的，根据它可以合理地设未知数.

探究 3 的问题中，方程的两个根都是正数，但它们并不都适合问题的解. 必须根据它们的值的大小，来确定哪个合乎实际. 这种取舍选择更多地要考虑问题的实际意义，教学中应注意培养学生将数学知识与实际问题相结合的能力.

5. 探究 4 以汽车刹车为问题情景，讨论匀变速运动的问题. 这类问题在现实世界中有许多原型，它是物理中运动学的基础问题.

探究 4 的讨论中，平均速度是很重要的概念，假设讨论的是匀变速运动的问题，平均速度应是速度的最大值与最小值的算术平均数. 有了平均速度，匀变速运动可以转化为匀速运动来考虑.

匀变速运动的问题中，单位时间内速度的变

关系，可求出滑行时间. 为使问题简单化，不妨假设车速从 20 m/s 到 0 m/s 是随时间均匀变化的. 这段时间内的平均车速等于最大速度与最小速度的平均值，即$\frac{20+0}{2}=10(\text{m/s})$，[1]于是从刹车到停车的时间为

行驶路程÷平均车速，

即

$$25\div 10=2.5(\text{s}).$$

(2) 从刹车到停车平均每秒车速减少值为

(初速度－末速度)÷车速变化时间，

即

$$\frac{20-0}{2.5}=8(\text{m/s}).$$

(3) 设刹车后汽车行驶到 15 m 用了 x s，由 (2) 可知，这时车速为 $(20-8x)$m/s. 这段路程内的平均车速为$\frac{20+(20-8x)}{2}$ m/s，即 $(20-4x)$ m/s.[2]由

速度×时间＝路程，

得

$$(20-4x)x=15.$$

解方程，得

$$x=\frac{5\pm\sqrt{10}}{2}.$$

刹车后汽车行驶到 15 m 时约用了_____[4]s.

根据问题的实际意义，应如何选择正确答案？[3]

思考

刹车后汽车行驶到 20 m 时约用了多少时间(结果保留小数点后一位)？[5]

[1] 刹车前车速为 20 m/s，停车后车速为 0 m/s，它们分别是最大速度和最小速度.

[2] 这段时间有 x s，开始时的车速 20 m/s 为最大车速，x s 后的车速 $(20-8x)$m/s 为最小车速，它们的平均值为平均车速.

[3] 应选择 $x=\frac{5-\sqrt{10}}{2}$，因为从刹车到停车共用 2.5 s，而另一个根 $x=\frac{5+\sqrt{10}}{2}$大于 2.5，取它不合乎题目所给条件.

[4] 0.9.

[5] 类似于(3)的讨论，解方程

$$(20-4x)x=20,$$

得

$$x=\frac{5-\sqrt{5}}{2}\approx 1.4(\text{s}).$$

化量是定值，这个值也叫做加速度. 设加速度是 a (常量)，初速度是 v_0 (常量)，运动时间是 x (变量)，路程是 S，则平均速度为

$$\frac{v_0+v_0+ax}{2}=v_0+\frac{1}{2}ax,$$

路程为

$$S=v_0x+\frac{1}{2}ax^2.$$

当路程 S 为已知量时，由上式就能得到以 x 为未知数的一元二次方程.

探究 4 的教学中，应先介绍匀变速运动中有关物理量及它们之间的关系，特别是平均速度、时间、路程三者的基本关系，即

$$\text{平均速度}=\frac{1}{2}\times(\text{最大速度}+\text{最小速度}),$$

路程＝平均速度×时间.

在理解这些量及其关系的基础上，才能分析汽车刹车问题.

习题22.3

复习巩固 ▸▸

1. 解下列方程：

(1) $x^2+10x+21=0$；　　(2) $x^2-x-1=0$；

(3) $3x^2+6x-4=0$；　　(4) $3x(x+1)=3x+3$；

(5) $4x^2-4x+1=x^2+6x+9$；　　(6) $7x^2-\sqrt{6}x-5=0$.

2. 两个相邻偶数[1]的积是 168，求这两个偶数.

3. 一个直角三角形的两条直角边的和是 14 cm，面积是 24 cm^2，求斜边的长.

综合运用 ▸▸

4. 某种植物的主干长出若干数目的支干，每个支干又长出同样数目的小分支[2]，主干、支干和小分支的总数是 91，每个支干长出多少小分支？



5. 一个菱形两条对角线的和是 10 cm，面积是 12 cm^2，求菱形的周长（结果保留小数点后一位）.

6. 参加一次足球联赛的每两队之间都进行两次比赛[3]，共要比赛 90 场，共有多少个队参加比赛？

7. 青山村种的水稻 2001 年平均每公顷产 7 200 kg，2003 年平均每公顷产 8 450 kg，求水稻每公顷产量的年平均增长率.

8. 要为一幅长 29 cm，宽 22 cm 的照片配一个镜框，要求镜框的四条边宽度相等，且镜框所占面积为照片面积的四分之一，镜框边的宽度应是多少（精确到 0.1 cm）？

9. 一个小球以 5 m/s 的速度开始向前滚动，并且均匀减速，滚动 10 m 后小球停下来. (1) 小球滚动了多少时间？(2) 平均每秒小球的运动速度减少多少？(3) 小球滚动到5 m时约用了多少时间（结果保留小数点后一位）？

拓广探索 ▸▸

10. 如图，要设计一幅宽 20 cm、长 30 cm 的图案，其中有两横两竖的彩条，横、竖

[1] 设其中较小的偶数为 x，则另一偶数为 $x+2$.

[2] 设有 x 个支干，每个支干有 x 个小分支.

[3] 这样的比赛叫做双循环比赛，设有 x 个队参赛，则共比赛 $x(x-1)$ 场.

习题 22.3

1. 习题 22.3 中“复习巩固”的题目有两类：

(1) 第 1 题是为复习巩固一元二次方程的解法而安排的直接解方程的题目.

(2) 第 2、3 题有比较简单的问题情境，需要列、解一元二次方程，从而能复习巩固应用一元二次方程解决实际问题的基本步骤.

2. 习题 22.3 中“综合运用”的题目有 6 道，其中第 4、6 题是关系到组合计数的问题；第 5、8 题要结合几何图形的知识解决；第 7 题是关于平均变化率的问题；第 9 题是关于匀减速运动的问题. 有些题目与课文中的探究问题类似，有些题目是新问题.

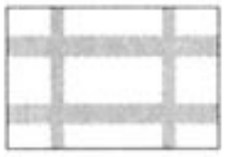
做这些题目时，首先要正确地设未知数并列出方程，然后正确地解方程. 教科书的课文和习题都没有按照问题类型划分题型，教学中可以根据需要对问题类型进行适当归纳，但不要搞成偏重死记硬背题型的教学方式.

[1] 当运动员到达最高点时，他的运动速度为0 m/s.

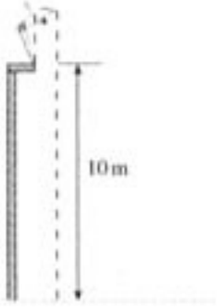
[2] 运动员从最高点到入水，这个下降过程中他的运动速度从0 m/s增加到14 m/s.

[3] 从最高点到离水面5 m时，下降高度（路程）为5.8 m.

彩条的宽度比为3∶2，如果要使彩条所占面积是图案面积的四分之一，应如何设计彩条的宽度（结果保留小数点后一位）？



（第10题）



（第11题）

11. 一个跳水运动员从距水面10 m高的跳台向上跳起0.8 m，最后以14 m/s的向下运动速度入水.

（1）运动员从起跳后的最高点[1]到入水用了多少时间？

（2）平均每秒运动员下落速度的变化量[2]是多少（结果保留小数点后一位）？

（3）运动员从起跳后的最高点到离水面5 m时[3]用了多少时间（结果保留小数点后一位）？



观察与猜想 选学

发现一元二次方程根与系数的关系

解方程$x^2+6x-16=0$，得它的两个根$x_1=2$，$x_2=-8$，你能看出这两个根与方程的系数6，-16有什么关系吗？

你会发现，$x_1+x_2=-6$，这个和是方程中一次项系数6的相反数；$x_1x_2=-16$，这个积是方程中的常数项. 由此能发现一般规律吗？

不妨再对几个二次项系数是1的一元二次方程进行观察，例如解方程$x^2-3x+2=0$，得出根$x_1=1$，$x_2=2$后，计算$x_1+x_2=3$，$x_1x_2=2$，观察所得结果与相应方程的系数，你有什么发现？

通过上面的观察可以猜想：对任意一元二次方程$x^2+mx+n=0$（m，n是系数），方程的两个根x_1，x_2和系数m，n可能有如下关系

3. 习题22.3中“拓广探索”的题目有两道.

第10题中应注意表示彩条所占面积时不要将横、竖彩条交叉部分的面积重复计算.

第11题与探究4的问题都属于匀变速运动问题，只是探究4的问题是匀减速运动，第11题是匀加速运动，这个匀加速运动过程是运动员从最高点到入水的过程，运动路程为10.8 m.

观察与猜想

发现一元二次方程根与系数的关系

这是一个选学内容，它引导学生从观察入手，进而发现：二次项系数为1的一元二次方程的两根之和等于一次项系数的相反数；两根之积等于常数项. 这是一元二次方程根与系数的关系在二次项系数为1时的情况. 这个发现是否具有一般规律呢？利用一元二次方程的求根公式可以进行一般性证明.

$$x_1+x_2=-m,$$

$$x_1x_2=n.$$

上述猜想是否正确呢？利用求根公式可知，当 $m^2-4n\geqslant 0$ 时，[1]方程 $x^2+mx+n=0$ 的两根为

$$x_1=\frac{-m+\sqrt{m^2-4n}}{2},\ x_2=\frac{-m-\sqrt{m^2-4n}}{2}.$$

于是有

$$x_1+x_2=\frac{-m+\sqrt{m^2-4n}}{2}+\frac{-m-\sqrt{m^2-4n}}{2}=\frac{-2m}{2}=-m,$$

$$x_1x_2=\frac{-m+\sqrt{m^2-4n}}{2}\cdot\frac{-m-\sqrt{m^2-4n}}{2}$$

$$=\frac{(-m)^2-(\sqrt{m^2-4n})^2}{4}=\frac{4n}{4}=n.$$

这证明上述猜想正确. 这里发现的关系对研究一元二次方程很有用.

如果一元二次方程的二次项系数不是 1，你又能发现什么规律？你可以利用求根公式，探索任意一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的两根与系数 a，b，c 有什么关系.[2]

[1] 这个条件可以保证方程有实数根，其实即使这个条件不成立，方程的根是虚数，根与系数仍有文中所述的关系.

[2] $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$.

当学生经历了上述“观察——发现——猜想——证明”的过程后，他们对于如何进行数学研究将有进一步的实际体会.

对于更一般的情形，即二次项系数不一定为 1 的一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$$

中，根与系数的关系

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\ x_1x_2=\frac{c}{a}$$

留待学生进一步发现.

[1] 设圆柱底面半径为 x cm，

$2\pi x^2+10\times 2\pi x=48\pi$，

$x=2$，$x=-12$(舍).

[2] 设矩形长为 x cm，宽为 $(60-x)$ cm. 分别列方程

$x(60-x)=500$，

$x(60-x)=675$，

$x(60-x)=900$.

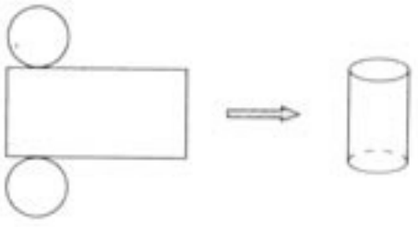
不能围出面积大于 900 cm^2 的矩形，这时对应的方程无实数根.

数学活动

活动 1　作圆柱[1]

作一个圆柱，使它的高等于 10 cm，表面积等于 48π cm^2.

[提示：先作出符合要求的圆柱展开图，再将展开图围成圆柱.]



活动 2　围矩形[2]

用一根 120 cm 的细绳分别围出满足下列条件的矩形：

(1) 面积为 500 cm^2；

(2) 面积为 675 cm^2；

(3) 面积为900 cm^2.

试一试，能围出面积大于 900 cm^2 的矩形吗？你能解释你的结论吗？

活动 3　计算变化率

查阅有关资料（报刊杂志、统计年鉴、网络等），根据某两个时间段（例如两年、两月等）前后的某项指标（例如国内生产总值、森林面积等）的统计数据，计算平均每个时间段内这项指标的变化率.

数学活动

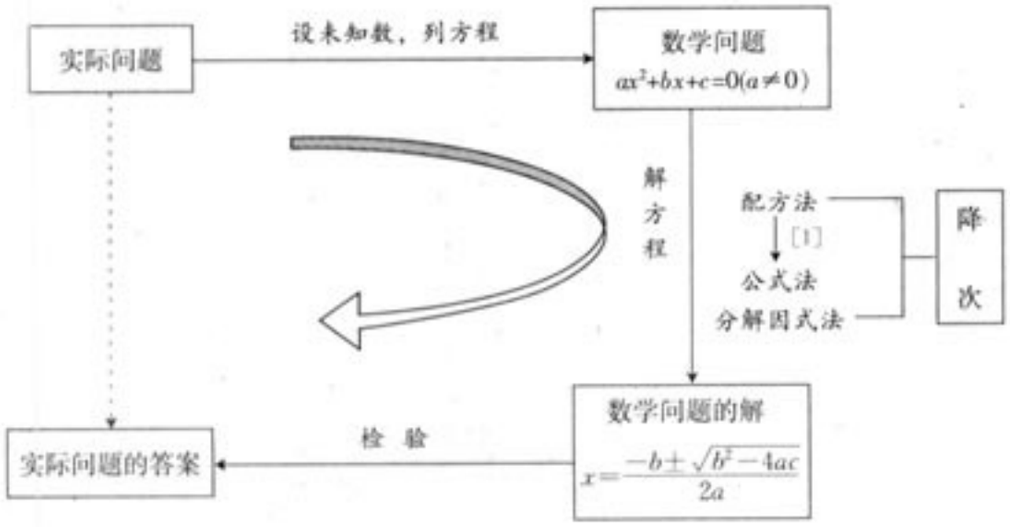
1. 设计活动 1 的意图，是让学生在分析题意的基础上，列出一元二次方程，计算圆柱底面半径，然后动手制作立体模型. 这有助于感受一元二次方程在解决实际问题时的作用，也有加强数形结合认识数学内容的效果.

2. 设计活动 2 的意图，是让学生通过简单实验，感受一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根与 b^2-4ac 的值（正、负、0）之间的联系，并发现周长为定值 $4a$ 的矩形中面积最大值为 a^2，此时对应的矩形是正方形.

3. 设计活动 3 的意图，是让学生通过查阅资料、计算平均变化率，感受实际问题中存在的数量关系：变化前数量$\times(1+x)^n$=变化后数量，其中 n 为变化时间段的数值，活动 3 的问题中 $n=2$.

小　结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

1. 比较你所学过的各种整式方程，说明它们的未知数的个数与次数．你能写出各种方程的一般形式吗？[2]

2. 一元二次方程有哪些解法？各种解法在什么情况下最适用？体会降次在解一元二次方程中的作用．

3. 求根公式与配方法有什么关系？什么情况下一元二次方程有实数根？

4. 举例说明以一元二次方程为数学模型解决实际问题的过程．

[1] 图中的箭头表示配方法是公式法的基础，由配方法可以得出公式法．

[2] 一元一次方程

$ax+b=0(a\neq0)$

二元一次方程

$ax+by+c=0(a\neq0,\ b\neq0)$

一元二次方程

$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$

1. 教学中可以引导学生结合某具体问题为例认识本章知识结构图，使学生对数学建模思想和列、解一元二次方程的基本过程进行概括，这样可能会加深对知识结构图的理解，取得较好的复习效果．

2. 解一元二次方程中的降次思想，即使方程转化为一元一次的形式，是解一元二次方程的基本指导思想．通过小结不仅要使学生更牢固地掌握一元二次方程的解法，而且应使他们加深对上述思想的认识体会．

3. 小结中以一元二次方程为重点，还包括了回顾与比较前面已经学习过的其他整式方程，这里有总结初中阶段所学方程的主要内容的含义．教学中应注意加强知识的前后联系，帮助学生认识有关方程的知识体系．

解方程中的化归思想，即逐步使方程变形为 $x=a$ 的形式，是解方程的基本指导思想，它对各种方程都适用，应继续强调这一思想．

[1] 以墙作为这个矩形的一条边，矩形的其他三条边用篱笆围成.

[2] 降息前年利率为2.25%，经过两次降息年利率变为1.98%，假设两次降息的变化率一样，这个变化率就是平均每次降息的百分率. 注意本题中年利率与利息变化率不同，(2.25%−1.98%)÷2=0.135% 是年利率的平均下降量，而不是平均降息的百分率（变化率）.

复习题22

复习巩固 ▶▶

1. 解下列方程：

(1) $196x^2-1=0$；　　(2) $4x^2+12x+9=81$；

(3) $x^2-7x-1=0$；　　(4) $2x^2+3x=3$；

(5) $x^2-2x+1=25$；　　(6) $x(2x-5)=4x-10$；

(7) $x^2+5x+7=3x+11$；　　(8) $1-8x+16x^2=2-8x$.

2. 两个数的和为8，积为9.75，求这两个数.

3. 一个矩形的两条邻边相差3 cm，面积是4 cm^2，求对角线的长（结果保留小数点后一位）.

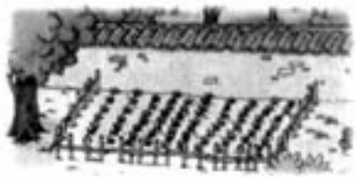
综合运用 ▶▶

4. 一个直角梯形的下底比上底大2 cm，高比上底小1 cm，面积等于8 cm^2. 画出这个梯形.

5. 一个长方体的长与宽的比为5∶2，高为5 cm，表面积为40 cm^2. 画出这个长方体的展开图.

6. 要组织一次篮球联赛，赛制为单循环形式（每两队之间都赛一场），计划安排15场比赛，应邀请多少个球队参加比赛？

7. 如图，利用一面墙（墙的长度不限），用20 m长的篱笆，怎样围成一个面积为50 m^2的矩形场地？[1]



（第7题）

8. 某银行经过最近的两次降息，使一年期存款的年利率由2.25%降至1.98%，平均每次降息的百分率是多少[2]（结果写成 $a\%$ 的形式，其中 a 保留小数点后两位）？

9. 一物体以10 m/s的速度开始在冰面上滑动，并且均匀减速，滑动10 m后物体停下来. (1) 物体滑动了多少时间？(2) 物体滑动到8 m时约用了多少时间（结果

复习题22

1. 复习题22中“复习巩固”的题目有两类：(1) 解一元二次方程；(2) 列、解一元二次方程，解决有简单实际情境背景的问题.

这些题目虽然简单，但是基础性强，学生应能很熟练地掌握完成它们.

2. 复习题22中“综合运用”的题目有6道.

第4、5、7题都与几何图形相关，第6题是与例题类似的组合计数问题，第8题的问题情境中年利率是百分比，但不是问题中待求的降息百分率，两者容易混淆. 第9题与探究4的问题类似. 这些题目的复习重点首先在列方程，其次在解方程.

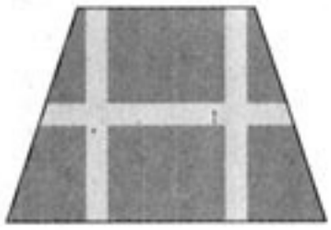
3. 复习题22中“拓广探索”的题目有2道.

分析第10题时，需要确定横向甬道的位置及其面积的计算方法. 除此之外本题与探究3的问题基本类似.

保留小数点后一位)?

拓广探索 ▶▶

10. 如图，要设计一个等腰梯形的花坛，花坛上底长100 m，下底长180 m，上下底相距80 m，在两腰中点连线处有一条横向甬道，[1]上下底之间有两条纵向甬道，各甬道的宽度相等，甬道的面积是梯形面积的六分之一．甬道的宽应是多少（结果保留小数点后两位)?



（第10题）

11. 某村为增加蔬菜的种植面积，一年中修建了一些蔬菜大棚．平均修建每公顷大棚要用的支架、塑料膜等材料的费用为27 000元，此外还要购置喷灌设备，这项费用（元）与大棚面积（公顷）的平方成正比，比例系数为9 000.[2]每公顷大棚的年平均经济收益为75 000元，这个村一年中由于修建蔬菜大棚而增加的收益（扣除修建费用后）为60 000元.

（1）一年中这个村修建了多少公顷蔬菜大棚?

（2）一年中修建2公顷大棚与修建$\frac{10}{3}$公顷大棚的效益有什么差别?

（3）如果修建3公顷大棚收益如何?

（4）修建大棚的面积越大收益也一定越大吗?



[1] 横向甬道的形状是等腰梯形，它的中位线就是梯形花坛的中位线.

[2] 购置喷灌设备的费用为$9\ 000x^2$（元），其中x是大棚面积（公顷）的数值.

第11题的实际问题情境略显复杂，要解的问题也较多，其中第（4）题还有一定开放性．对于这样的综合性较强的问题，应更加仔细地分析题意，逐步解决．本题对于提高综合运用数学知识分析解决实际问题的能力具有明显的作用.

4．教学中可以根据学生对本章内容的实际掌握状况，有针对性地补充一些复习题.

Ⅲ 习题解答

习题 22.1

1. (1) $3x^2-6x+1=0$，3，-6，1；

(2) $4x^2+5x-81=0$，4，5，-81；

(3) $x^2+5x=0$，1，5，0；

(4) $x^2-2x+1=0$，1，-2，1；

(5) $x^2+10=0$，1，0，10；

(6) $x^2+2x-2=0$，1，2，-2.

2. (1) 设半径为 x m，$x^2-2=0$.

(2) 设长直角边为 x cm，$x^2-3x-18=0$.

3. -4，3.

4. (1) $\frac{1}{3}$，$-\frac{1}{3}$；　(2) $\frac{2}{5}$，$-\frac{2}{5}$；　(3) $\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{2}$.

5. 设长为 x cm，宽为$(x-1)$cm，$x^2-x-12=0$.

6. 设长为 x m，宽为$(0.5-x)$cm，$x^2-0.5x+0.06=0$.

7. 设有 x 人，$\frac{1}{2}x(x-1)=10$，即 $x^2-x-20=0$.

8. (1) $x-2=1\Rightarrow x=3$，$x-2=-1\Rightarrow x=1$；

(2) $x-2=\frac{1}{3}\Rightarrow x=\frac{7}{3}$，$x-2=-\frac{1}{3}\Rightarrow x=\frac{5}{3}$；

(3) $(x+1)^2=4$，$x+1=\pm 2$，$x=1$，$x=-3$；

(4) $(x-3)^2=0$，$x-3=0$，$x=3$.

9. $c=4$，$x=\pm 2$.

习题 22.2

1. (1) $x_1=\frac{1}{6}$，$x_2=-\frac{1}{6}$；　(2) $x_1=\frac{9}{2}$，$x_2=-\frac{9}{2}$；

(3) $x_1=0$，$x_2=-10$；　(4) $x_1=1$，$x_2=-3$.

2. (1) 9，3；　(2) $\frac{1}{4}$，$\frac{1}{2}$；　(3) 1，1；　(4) $\frac{1}{25}$，$\frac{1}{5}$.

3. (1) $x_1=-2$，$x_2=-8$；　(2) $x_1=\frac{3}{2}$，$x_2=-\frac{1}{2}$；

(3) $x_1=-1+\frac{2\sqrt{6}}{3}$，$x_2=-1-\frac{2\sqrt{6}}{3}$；　(4) $x_1=\frac{1+\sqrt{145}}{8}$，$x_2=\frac{1-\sqrt{145}}{8}$.

4. (1) $x_1=-4$，$x_2=3$；　(2) $x_1=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$，$x_2=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$；

(3) $x_1=1$，$x_2=-3$；　(4) $x_1=-2+\sqrt{6}$，$x_2=-2-\sqrt{6}$；

(5) $x_1=0$，$x_2=-2$；　(6) 无实数解.

5. (1) $x_1=x_2=2$；　(2) $x_1=6$，$x_2=-6$；

(3) $x_1=1$，$x_2=\frac{2}{3}$；　　(4) $x_1=-2$，$x_2=\frac{4}{3}$.

6. 7.3 cm.

7. 10.

8. $x_1=2$，$x_2=\frac{8}{3}$.

9. 矩形长 6 m，宽 4 m.

10. 10%.

11. 8 边形；不存在，因为方程 $\frac{1}{2}n(n-2)=18$ 无正整数解.

12. 总有两个不等实数根，因为 $b^2-4ac=1+4p^2>0$.

习题 22.3

1. (1) $x_1=-3$，$x_2=-7$；　　(2) $x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，$x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$；

(3) $x_1=-1+\frac{\sqrt{21}}{3}$，$x_2=-1-\frac{\sqrt{21}}{3}$；　　(4) $x_1=1$，$x_2=-1$；

(5) $x_1=4$，$x_2=-\frac{2}{3}$；　　(6) $x_1=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{146}}{14}$，$x_2=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{146}}{14}$.

2. 12，14 或 -12，-14.

3. 10 cm.

4. 9.

5. $4\sqrt{13}\approx14.4$ cm.

6. 10.

7. $\frac{1}{12}$.

8. 1.5 cm.

9. (1) 4 s；　(2) 1.25 m/s^2；　(3) 1.2 s.

10. 横向彩条宽 1.2 cm，竖向彩条宽 1.8 cm.

11. (1) $\frac{54}{35}\approx1.54$ s；　(2) 9.1 m/s；　(3) 1.0 s.

复习题 22

1. (1) $x_1=\frac{1}{14}$，$x_2=-\frac{1}{14}$；　　(2) $x_1=3$，$x_2=-6$；

(3) $x_1=\frac{7+\sqrt{53}}{2}$，$x_2=\frac{7-\sqrt{53}}{2}$；　　(4) $x_1=\frac{-3+\sqrt{33}}{4}$，$x_2=\frac{-3-\sqrt{33}}{4}$；

(5) $x_1=-4$，$x_2=6$；　　(6) $x_1=2$，$x_2=\frac{5}{2}$；

(7) $x_1=-1+\sqrt{5}$，$x_2=-1-\sqrt{5}$；　　(8) $x_1=\frac{1}{4}$，$x_2=-\frac{1}{4}$.

2. 6.5，1.5.

3. $\sqrt{17}\approx4.1$ cm.

4. 梯形上底 3 cm，下底 5 cm，高 2 cm. 图略.

5. 长方体长 2.5 cm，宽 1 cm，高 5 cm，图略.

6. 6.

7. 矩形长 10 m，宽 5 m.

8. 6.19%.

9. (1) 2 s；(2) 1.1 s.

10. 6.50 m.

11. (1) 2 或$\frac{10}{3}$；　(2) 收益无差别，但修$\frac{10}{3}$公顷占地多、投入大；

(3) 63 000 元；　(4) 不一定.

Ⅳ　教学设计参考案例

22.2　降次——解一元二次方程（第 2 课时）

教学任务分析

教学目标	知识技能	理解配方法，会利用配方法对一元二次式进行配方.
	数学思考	1. 通过对比、转化、总结得出配方法的一般过程，提高推理能力. 2. 通过对一元二次方程二次项系数是否为 1 的分类处理，锻炼学生的抽象概括能力.
	解决问题	1. 会用配方法解简单的数字系数的一元二次方程. 2. 发现不同方程的转化方式，运用已有知识解决新问题.
	情感态度	通过配方法的探究活动，培养学生勇于探索的良好学习习惯. 感受数学的严谨性以及数学结论的确定性.
重点	用配方法解数字系数的一元二次方程.	
难点	配方.	

教学流程安排

活动流程图	活动内容和目的
活动 1　以思考题引入，设置情境	对比思考题所列方程与上一课所解方程的区别，引导学生探究，发现利用配方法实现降次的目标，从而解方程.
活动 2　进一步探究配方规律	重点讨论配方时两边同加的数与方程系数的关系.
活动 3　完善配方法解方程的一般步骤	独立练习，体会配方时需注意的一些环节.
活动 4　小结，布置作业	回顾全课内容，总结配方法的基本步骤.

教学过程设计

问题与情境	师生行为	设计意图
「**活动1**」 问题 要使一块矩形场地的长比宽多6 m，并且面积为16 m^2，场地的长和宽应各是多少？ （1）如何设未知数？并根据题目的等量关系列出方程？	上节课我们借助一元二次方程解决了用油漆刷盒子的问题，今天我们再来看一个新问题. （课件展示场地的图形） 教师提出问题（1）. 这是一个比较简单的几何问题，学生经过思考，不难得出答案. 请一两位同学回答，教师演示答案，即 ①设场地的宽为 x 米，长为（$x+6$）米； ②所列方程为 $x^2+6x-16=0$. 教师提出：那么如何解这个方程呢？	问题（1）中选择以解决问题作为本课的开端，有益于培养学生的应用意识. 通过对比，发现问题，设置矛盾冲突，可以激发学生的探究欲.
（2）所列方程和上节课我们学习的方程 $x^2+6x+9=2$ 有何联系与区别？	教师提出问题（2）. 学生观察，找到联系与区别，请三到四名同学回答，教师注意其观察能力和语言的准确性，并引导其得出： ①方程 $x^2+6x+9=2$ 的等号左边是一个完全平方式，可用直接开平方法解决； （学生解答并演示） ②方程 $x^2+6x-16=0$ 的等号左边不是一个完全平方式，但其二次项与一次项和方程 $x^2+6x+9=2$ 中相应部分完全相同.	问题（2）中两个方程的对比才是本课真正的导入. 通过对比学生很容易发现两个方程之间的一些联系与区别，进而引发联想，促使学生继续探究.
（3）你能由方程①$x^2+6x+9=2$ 的解法联想到怎样解方程②$x^2+6x-16=0$吗？	教师提出问题（3） 学生思考、讨论，发表意见； 教师组织学生讨论，并引导学生发现问题的关键：若要解方程②只要将其等号左边转化为一个完全平方式——配方. 而配方的关键是常数项的选择. 学生找出常数项，教师演示配方过程，完成方程由不可解到可解的转化. 师生共同完成后续步骤. （逐步给出教科书中的框图） 请一两位学生总结基本步骤. 在本次活动中，教师应重点关注： （1）简单应用题中分析等量关系能力； （2）学生能否通过对比，发现①和②联系； （3）对完全平方式中各项的系数关系的掌握程度.	在问题（3）中，学生利用问题（2）中两个方程的对比去联想、去总结、去尝试，在教师设计的问题情境的引导下，解决了一个新的数学问题. 这个过程既激发了学生的学习热情，也锻炼了学生的思维能力.

问题与情境	师生行为	设计意图
「活动2」 问题（1） 填上适当的数，使等式成立： $x^2+12x+____=(x+6)^2$； $x^2-4x+____=(x-____)^2$； $x^2+8x+____=(x+____)^2$. 问题（2） 在上面等式的左边，常数项和一次项系数有什么关系？	通过活动（1）的研究，我们发现对不具备直接开平方形式的一元二次方程我们要用配方来解决，这种方法就叫作——配方法. 它的基本思路是将方程转化成： $(x+m)^2=n$ 的形式，两边开平方便可以将方程化为两个一次方程求解，而配方的关键是常数项的选择. 教师提问：大家如何选择常数项呢？请大家做问题（1）. 教师展示课件题目. 学生练习，教师巡视，适当辅导. 由学生回答，师生一起纠正. 教师提出问题（2）. 学生分组讨论，总结. 教师在学生回答基础上，予以归纳： 对二次项系数为1的一元二次方程配方时，一般在方程两边各加上一次项系数一半的平方. 在本次活动中，教师应重点关注： （1）活动1的学习效果； （2）充分发挥学生的主体作用，引导要适当； （3）学生的归纳、概括能力，合作交流能力； （4）学生语言表述的准确性.	在学生获取了一种新的解题手段的基础上，教师首先解释配方法的意义，继而配合练习和问题熟悉配方的过程，巩固知识，并进一步去探究规律. 配方法的关键在于如何配方，随着解题的不断深入，学生必然不满足于单纯表面的发现，或者是凭经验去寻找答案，而更希望是通过理性的思维去推理. 问题（2）的给出就是提醒和引导学生去做进一步的探究. 配方法的使用在中学数学中是非常广泛的，在此研究配方规律有利于学生在今后学习中熟练使用配方法. 这种教学过程对提高学生的探究能力起到了很好的促进作用.
「活动3」 问题（1） 解方程 $2x^2+1=3x$， 你有什么新发现？如何处理？ 问题（2） 解方程 $3x^2-6x+4=0$， 你有什么新的发现？如何处理？	教师提出问题（1）. 学生分组解答，会发现：①本题需要将一次项移项到等号左边；②单纯应用在方程两边各加上一次项系数一半的平方的方法，不能达到使方程的等号左边是一个完全平方式的目的. 教师引导学生回到活动2去观察特征. 学生讨论总结，得出活动2的结论是针对二次项系数为1的方程的，那么，二次项系数不为1的方程如何处理？ 学生继续讨论，并发表见解. 学生在教师的引导下归纳出：需要利用等式的性质将二次项系数化1. 教师提出问题（2）. 学生分组解答，会发现：配方后出现完全平方式等于负数的情况.	在活动2中学生对配方法有了进一步的认识，但实际上这种认识还很片面，不具有普遍性和完整性. 要将配方法应用于一般性的题目中，针对不同的条件，不同的环境，会出现很多新的问题：如二次项系数不为1的方程如何配方；配方后的方程无意义如何处理等. 在这种情况下，教师给出问题（1）（2），实际上是给学生设置两个疑问. 而学生伴随着不断的质疑、解疑，不但完善了学生的思维，也锻炼了学生的能力. 使学生

续表

问题与情境	师生行为	设计意图
	教师提示：这种情况是存在的，它说明这个一元二次方程无实数根. 在本次活动中，教师应重点关注： (1) 学生对待解问题和已解问题的对比、分析能力； (2) 给予学生一定的时间去思考，充分讨论，争取让学生自主得出结论； (3) 鼓励学生大胆猜想，勇于发表见解.	注意到数学的严谨性，熟悉了一种数学方法的学习过程，也激发了学生对数学学习的兴趣.
「活动4」 问题 用你的语言描述一下配方法解一元二次方程的基本步骤和需注意的问题？ 布置作业： 教科书习题 22.2 第 2、3 题.	教师提出问题. 学生回顾本课内容，归纳并回答. 教师板书协助总结，特别强调：配方前的移项整理、二次项系数化 1；配方后的分情况处理等步骤. 并添加于活动 1 的框图中，使之完善. 在小结时，教师应重点关注： (1) 学生是否积极参与总结，能否明确用配方法解数字系数的一元二次方程的基本步骤. 养成对知识归纳、总结、整理的习惯； (2) 学生对整堂课所研究问题的理解程度和联结能力； (3) 使学生逐步养成对知识归纳、总结、整理的习惯. 学生独立完成作业，教师批改后应重点关注： (1) 解题思路是否清晰，解题过程是否规范； (2) 能否熟练运用配方法解决不同特征的一元二次方程.	前面讨论的例题和习题，是分别对配方法的解题原理、如何配方、配方法解题中需要注意的几种情况作了探究，但都是分离的. 在本课的最后一个活动中，教师引导学生对配方法的完整过程做一个回顾. 学生可以在回忆和思考中加深对课堂知识的理解，加强记忆和应用能力. 学生巩固、提高.

教学设计说明

本课的活动的主要内容是：以降次解一元二次方程为中心，以直接开平方解一元二次方程为基础的一次深入探究，是由特殊到一般的一个拓展过程. 本课的活动直接影响着学生对公式法解一元二次方程及相关知识的理解. 本课的活动涉及了直接开平方解一元二次方程、配方、等式变形、列方程解应用问题等知识. 学习方式为教师引导，学生自主发现.

本课首先以解决实际问题引入，创设一个“出现不会解的方程”的问题情境，激发学生的探究欲. 通过与会解方程的比较，引导学生观察方程形式的区别，进一步联想：要利用已知解决未知，就需要将式子变形，从而确定探究方向——配方. 在研究配方的过程中，着重引导学生就配方规

律、配方的形式要求、配方后的分类处理三个方面进行探究，使学生对配方法解一元二次方程有一个完整的了解. 本课的重点环节均应以学生发现为主，教师不要过分提示，喧宾夺主.

22.3 实际问题与一元二次方程（第2课时）

教学任务分析

教学目标	知识技能	1. 能根据具体问题中的数量关系，列出一元二次方程，体会方程是刻画现实世界某些问题的一个有效的数学模型. 2. 能根据具体问题的实际意义，检验结果是否合理.
	数学思考	经历将实际问题抽象为数学问题的过程，探索问题中的数量关系，并能运用一元二次方程对之进行描述.
	解决问题	通过解决封面设计与草坪规划的实际问题，学会将实际应用问题转化为数学问题，体验解决问题策略的多样性，发展实践应用意识.
	情感态度	通过用一元二次方程解决身边的问题，体会数学知识应用的价值，提高学生学习数学的兴趣，了解数学对促进社会进步和发展人类理性精神的作用.
重点	列一元二次方程解应用题.	
难点	发现问题中的等量关系.	

教学流程安排

活动流程图	活动内容和目的
活动1　复习解应用题的一般步骤	回顾解应用题的一般步骤及注意问题.
活动2　封面设计问题	对比几种方案，探究问题中的数量关系及其变化规律，提高解题能力.
活动3　草坪规划问题	认识图形变换对解题思路的影响，熟悉分析、解决面积问题应用题的基本思路和方法.
活动4　小结，布置作业	回顾，总结，提高对知识的系统性的认识.

教学过程设计

问题与情境	师生行为	设计意图
「**活动1**」 问题 通过上节课的学习，大家学到了哪些知识和方法?	教师提出问题，学生回忆，选一位同学作答，其他同学补充. 在本次活动中，教师应重点关注： (1) 学生对列方程解应用问题的步骤是否清楚； (2) 学生能否说出每一步骤的关键和应注意问题.	活动1为学生创设了一个回忆、思考的情境，又是本课一种很自然的引入，为本课的探究活动做好铺垫.

续表

问题与情境	师生行为	设计意图
「活动2」 问题 要设计一本书的封面，封面长27 cm，宽21 cm，正中央是一个与整个封面长宽比例相同的矩形，如果要使四周的彩色边衬所占面积是封面面积的四分之一，上下边衬等宽，左右边衬等宽，应如何设计四周边衬的宽度（精确到0.1 cm）.	教师展示课件（或展示图片，如教科书图22.3-1）. 请一位同学朗读题目.	
（1）本题中有哪些数量关系？	教师提出问题（1）. 学生分析，请一位同学回答，教师进行引导.	问题（1）（2）都能帮助学生更好地理解题意，为后面的解题进行铺垫.
（2）如何理解正中央是一个与整个封面长宽比例相同的矩形？	教师提出问题（2）. 学生思考，请一位同学回答，可举简单例子说明，最后教师引导学生得出正中央矩形的长宽比是9∶7.	
（3）如何利用已知的数量关系选取未知数并列出方程？	教师提出问题（3）. 学生分组讨论，选代表上台演示、回答，每位同学要着重分析对题目中的数量关系的处理方法. 其中，设左右边衬和上下边衬分别为$7x$和$9x$的方法是重点，教师要配合图形加以解释.	问题（3）是活动2的中心环节，通过学生充分的讨论，得出多种不同的方法，激发学生的学习热情，使学生体会解决问题方法的多样性. 在某些解法中，利用图形变换简化数量关系是解决图形有关问题的一种重要手段，为活动3埋下一个伏笔.
（4）解方程并得出结论，对比几种方法各有什么特点？	教师提出问题（4）. 学生分组，分别按问题列方程来解答，选代表展示解答过程，并讲解解题过程和应注意问题. 在本次活动中，教师应重点关注： （1）学生对几何图形的分析能力； （2）学生在未知数的选择上，能否根据情况，灵活处理； （3）学生在讨论中能否互相合作； （4）学生解一元二次方程的能力. （5）学生回答问题时语言表达是否准确.	问题（4）可以使学生体会列方程与解方程的完整结合，通过多种方法解得相同结论，验证多种方法的正确性；通过解题过程的对比，体会对已知数量关系的适当变形对解题的影响，丰富解题经验.
「活动3」 问题 如图，某中学为方便师生活动，准备在长30 m，宽20 m的矩形草坪上修筑两横两纵，四条小	教师展示课件（或展示图片） 请一位同学朗读题目.	在活动2中，学生通过探究与讨论，感受了对题目中的数量关系进行适当的转变对解

续表

问题与情境	师生行为	设计意图
路，横纵路的宽度之比为3∶2，若使余下的草坪面积是原来草坪面积的四分之三，则路宽应为多少？（见教科书习题22.3第10题图） （1）本题中有哪些数量关系？ （2）由这些数量关系还能得到什么新的结论？你想如何利用这些数量关系？为什么？如何列方程？ （3）对比教科书图22.3-1和习题22.3第10题图，它们有什么联系与区别？ （4）有什么方法使本题易于解决？	教师提出问题（1）. 学生回答，教师在题目中指出. 教师提出问题（2）. 学生思考. 因为有活动2的基础，选一位同学回答这一组问题的前3问即可，如有不完全的地方，教师适当补充. 第4问让大家适当思考，请同学回答，教师做屏幕演示，特别提醒学生：剩余草坪的面积，是否就是原草坪的面积减去四条路的面积？以引导学生注意道路重叠部分的处理. 教师提出问题（3）. 学生分组讨论，教师指导. 引领学生讨论后请一位同学回答. 教师引领学生发现两个图形都存在两横两纵四个矩形，并都有四处重叠部分，除此之外的剩余部分，第一个图是一个完整的矩形，易于表示；而第二个图中分为9块，所以不容易表示. 教师提出问题（4）. 学生分组讨论，画图，上台演示. 教师与学生一起评价，总结图形变换的基本原则. 在本次活动中，教师应重点关注： （1）学生在活动1中的学习效果； （2）使学生充分体会图形变换的灵活性； （3）学生对图形的观察、联想能力； （4）教师要强调图形变换中图形改变、位置改变、而有些数量不变.	题的影响，活跃了解题思路. 活动3的设计就是基于这个前提，首先使同学熟悉活动2中的解题思想，在数量关系中做进一步的分析，然后引导学生针对图形作进一步的探究. 问题（1）（2）是针对活动2的巩固性练习. 问题3是活动3的中心环节，以图形对比的问题为引导，通过对比两个图形的联系与区别，启发学生以活动2中的封面问题为模型，构建活动3中草坪问题的解题思路. 在充分的思考之后，学生会自然产生动手实践的欲望，教师可以给学生一定的空间去发挥想象，同时也要注意对图形变换的指导，可以对部分不太合适的答案也进行一下点评.
「**活动4**」 问题 通过本课的学习，大家有什么新的收获和体会？	教师提出问题，学生回答. 教师总结. 在小结时，教师应重点关注： （1）学生对知识的归纳，总结，整理能力；	点明本课主题和中心环节，使学生巩固知识，加深印象，对知识脉络有更清晰的认识.

续表

问题与情境	师生行为	设计意图
布置作业： 教科书习题 22.3 第 5、8 题；复习题 22 第 7、10 题.	（2）学生对知识的横向联结能力、数学语言表达能力. 学生独立完成作业，教师批改后应关注： （1）学生能否正确分析等量关系； （2）学生能否有效变换图形，简化题意； （3）学生解题思路是否完整，解题过程是否规范.	学生巩固，提高.

教学设计说明

本课的主要内容是：以列一元二次方程解应用问题为中心，深入探究图形问题中的数量关系. 本课的活动侧重点是列方程解应用题，提高学生应用方程分析解决问题的能力. 本课的活动涉及了一元二次方程解法，列方程解应用问题的一般规律，初等几何知识等. 学习方式为教师引导，学生探究，小组合作.

本课以一个封面设计问题引入，随后探究一个草坪规划的问题，强调图形变换在解题中的应用. 在这两个活动中，通过设置对比情境，首先使学生体会解题方法的多样性，开阔解题思路，优化解题方法，并增强择优能力. 本课力求让学生在自主探索和合作交流的过程中进行学习，获得数学活动经验，教师应注意引导.

V 拓展资源

一、知识的拓广延伸及相关史料

1. 一元二次方程几种解法之间的关系

解一元二次方程有下列几种常用方法：

（1）配方法，如 $x^2+6x+7=0$，经配方得 $(x+3)^2=2$，再用直接开平方法；

（2）公式法；

（3）因式分解法.

这三种方法并不是孤立的. 直接开平方法，实际也是因式分解法. 解方程 $x^2+6x+7=0$，只要变形为 $(x+3)^2-(\sqrt{2})^2=0$ 即可. 或原方程 $x^2+6x+7=0$ 经配方化为 $(x+3)^2=2$，再求解时，还是归到用平方差公式的因式分解法，所以配方法归为用因式分解法的手段. 公式法在推导公式过程中用的是配方法和直接开平方法，因此，它还是归到因式分解法. 所不同的是，公式法用一元二次方程的系数来表示根，因而可以作为公式. 由此可见，对因式分解法应予以足够的重视. 因式分解法还可推广到高次方程.

2. 我国古代的一元二次方程

提起代数，人们自然就把它和方程联系起来. 事实上，过去代数的中心问题就是对方程的研究. 我国古代对代数的研究，特别是对方程解法的研究有着优良的传统，并取得了重要成果.

我国古代数学家研究过二次方程的解法. 当时的解法虽然与现在的解法不同，但已与现在的解法相似.

下面是我国南宋数学家杨辉在 1275 年提出的一个问题："直田积（矩形面积）八百六十四步（平方步），只云阔（宽）不及长一十二步（宽比长少一十二步）. 问阔及长各几步?" 答："阔二十四步，长三十六步." 这里，我们不谈杨辉的解法，只用已学过的知识解决上面的问题.

设阔（宽）为 x 步，则长为 $(x+12)$ 步.

根据题意，列出方程

$$x(x+12)=864.$$

展开，整理，得

$$x^2+12x-864=0.$$

解这个方程，得

$$x=\frac{-12\pm\sqrt{12^2-4\times1\times(-864)}}{2}$$

$$=\frac{-12\pm\sqrt{3\ 600}}{2}$$

$$=\frac{-12\pm60}{2}.$$

$$x_1=24,\ x_2=-36\ (\text{舍去}),$$

$$x_1+12=36.$$

答：矩形的阔（宽）为 24 步，长为 36 步.

上面的问题选自杨辉所著《田亩比类乘除算法》. 原题另一个提法是："直田积八百六十四步，只云阔与长共六十步，问阔及长各几步? 答：阔二十四步，长三十六步." 这个问题同样可以类似求解.

3. 掌握数学思想方法，以不变应万变

本章内容蕴涵了丰富的数学思想方法，主要有转化思想、类比思想、降次法、配方法等.

(1) 转化思想

我们知道，解方程的过程就是不断地通过变形把原方程转化为与它等价的最简单方程的过程. 因此，转化思想是解方程过程中思维活动的主导思想. 在本章，转化无所不在，无处不有，可以说这是本章的精髓和特色之一，其表现主要有以下方面：

① 未知转化为已知，这是解方程的基本思路；

② 一元二次方程转化为一元一次方程，这是通过将原方程降次达到的；

③ 特殊转化为一般，一般转化为特殊.

例如，通过用配方法解数字系数的一元二次方程 $x^2+6x+7=0$ 归纳出用配方法解一般形式的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的方法，进而得出一元二次方程的求根公式. 而用公式法又可以解各种具体形式的一元二次方程，推导出一元二次方程根与系数的关系. 又如，通过设未知数，找出等量关系，列方程，解方程，把实际问题转化为解方程问题，等等.

掌握转化思想并举一反三，还可以解决很多其他方程问题. 如高次方程转化为一元一次或一元

二次方程，分式方程转化为整式方程，无理方程转化为有理方程，二元二次方程组转化为二元一次方程组. 总之，本章学习的关键之一是学会如何“转化”.

(2) 类比思想

本章多次运用类比找出新旧知识的联系，在新旧知识间进行对比，以利于更快更好地掌握新知识.

如用配方法解一元二次方程时，可类比平方根的概念和意义. 列一元二次方程解应用题，可类比列一元一次方程解应用题的思路和一般步骤.

类比思想是新旧知识联系的纽带，有利于帮助我们开阔思路，研究解题途径和方法，有利于掌握新知识、巩固旧知识，学习时应特别重视起来.

掌握了类比和转化这两大数学思想，举一反三，还可解决许多方程的相关问题. 我们来看下面两个例子.

例 1 解分式方程 $\frac{1}{x+2}+\frac{4x}{x^2-4}+\frac{2}{2-x}=1$.

这是一个可化为一元二次方程的分式方程，可类比解可化为一元一次方程的分式方程的方法和步骤，通过去分母，将分式方程转化为整式方程来解.

解：原方程两边同乘 x^2-4，得

$$x-2+4x-2(x+2)=(x+2)(x-2).$$

整理得 $x^2-3x+2=0$.

解得 $x_1=1$，$x_2=2$.

检验：把 $x=1$ 代入 $(x+2)(x-2)\neq 0$；

把 $x=2$ 代入 $(x+2)(x-2)=0$.

所以 $x=2$ 是原方程的增根，原方程解为 $x=1$.

例 2 解方程组 $\begin{cases} x+y=7 & ①, \\ xy=12 & ②. \end{cases}$

这是一个二元二次方程组，可类比解二元一次方程组的方法，通过消元、降次，把二元二次方程转化为一元二次方程或一元一次方程.

解 由①得 $x=7-y$. ③

把③代入②，得 $y^2-7y+12=0$.

解得 $y_1=3$，$y_2=4$.

把 $y_1=3$ 代入③，得 $x_1=4$；

把 $y_2=4$ 代入③，得 $x_2=3$.

所以原方程组的解是 $\begin{cases} x_1=4, \\ y_1=3, \end{cases}\begin{cases} x_2=3, \\ y_2=4. \end{cases}$

4. 配方法的妙用

所谓配方，就是把一个多项式经过适当变形配成完全平方式. 配方法除一元二次方程求根公式推导这一典型应用外，在因式分解、化简二次根式、证明恒等式、解方程、求代数式最值等问题中都有广泛应用，是一种很重要、很基本的数学方法.

例 1 分解因式 $x^2-120x+3\,456$.

分析： 由于常数项的数值较大，如果运用十字相乘法分解，需要试验多次，因此可采用配方法.

解：
$$\begin{aligned}\text{原式}&=x^2-120x+3\,600+3\,456-3\,600\\&=(x^2-60)^2-144\\&=(x-60+12)(x-60-12)\\&=(x-48)(x-72)\end{aligned}$$

例 2 化简$\sqrt{7-2\sqrt{10}}$.

解： 原式$=\sqrt{5-2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}+2}$

$=\sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2}$

$=\sqrt{5}-\sqrt{2}$.

例 3 解方程$x^4-15x^2+10x+24=0$.

分析： 这是一个四次方程，应设法降次后来解，为此先将方程的左端利用配方法分解因式．将及 24 适当拆项后可达到分解因式的目的.

解： 原方程可变形为$x^4+10x^2+25-25x^2+10x-1=0$.

即 $(x^2+5)^2-(5x-1)^2=0$.

所以 $(x^2+5+5x-1)(x^2+5-5x+1)=0$.

即 $x^2+5x+4=0$ 或 $x^2-5x+6=0$.

由 $x^2+5x+4=0$，得$x_1=-1$，$x_2=-4$.

由 $x^2-5x+6=0$，得$x_3=2$，$x_4=3$.

故原方程的解为$x_1=-1$，$x_2=-4$，$x_3=2$，$x_4=3$.

例 4 求$4x^2+y^2-2y-4x+15$的最小值.

解： 可将原式配方，得$(2x-1)^2+(y-1)^2+13\geqslant 13$.

所以当$x=\frac{1}{2}$，$y=1$时，原式有最小值 13.

5. 一元二次方程根的判别式

我们知道，对任何一个一元二次方程$ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$用配方法可将其变形为$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$.

因为$a\neq 0$，所以$4a^2>0$．这样，我们有：

(1) 当$b^2-4ac>0$时，方程有$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$两个不相等的实数根；

(2) 当$b^2-4ac=0$时，方程有$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$两个相等的实数根；

(3) 当$b^2-4ac<0$时，因为$\sqrt{b^2-4ac}$在实数范围内没有意义，所以方程没有实数根.

由此可知，一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$的根的情况可由b^2-4ac的值来判定．因此我们把b^2-4ac叫做一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$的根的判别式，通常用符号“Δ”来表示.

综上所述，一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$，当$\Delta>0$时，有两个不相等的实数根；当$\Delta=0$时，有两个相等的实数根；当$\Delta<0$时，没有实数根．反过来也成立．有了一元二次方程根的判别式，我们在解方程时，就可以用它先来判定该方程是否有实数根，如果没有，就不必解了.

例 不解方程，判别下列方程根的情况：

(1) $2x^2+3x-4=0$；(2) $16y^2-24y+9=0$；(3) $5x^2-7x+5=0$.

解：(1) 因为 $\Delta=3^2-4\times2\times(-4)=9+32>0$，

所以原方程有两个不相等的实数根；

(2) 因为 $\Delta=(-24)^2-4\times16\times9=0$，

所以原方程有两个相等的实数根；

(3) 因为 $\Delta=(-7)^2-4\times5\times5=49-100<0$，

所以原方程没有实数根.

6. 一元二次方程根与系数的关系

我们知道，一元二次方程的求根公式是由系数表达的. 下面我们来揭示一元二次方程的根与系数的关系.

观察一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的两个根

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\ x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

可以发现，这两个根的和

$$x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a},$$

两个根的积

$$x_1\cdot x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}.$$

把上面所揭示出的规律加以总结，可以得出一元二次方程的根与系数的下列关系：

如果 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的两个根是 x_1，x_2，那么 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$；$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$.

如果把方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 变形为 $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$，我们就可以把它写成 $x^2+px+q=0$ 的形式，其中 $p=\frac{b}{a}$，$q=\frac{c}{a}$. 从而得出：

如果方程 $x^2+px+q=0$ 的两个根是 x_1，x_2，那么 $x_1+x_2=-p$，$x_1\cdot x_2=q$.

由 $x_1+x_2=-p$，$x_1\cdot x_2=q$ 可知，$p=-(x_1+x_2)$，$q=x_1\cdot x_2$.

所以方程 $x^2+px+q=0$ 就是 $x^2-(x_1+x_2)x+x_1\cdot x_2=0$.

这就是说，以两个数 x_1，x_2 为根的一元二次方程（二次项系数为 1）是 $x^2-(x_1+x_2)x+x_1\cdot x_2=0$.

7. 伟大的韦达

一元二次方程的根与系数的关系，常常也称作韦达定理，这是因为这个定理是 16 世纪法国杰出的数学家韦达发现的.

韦达 1540 年出生在法国东部的普瓦图的韦特奈. 他早年学习法律，曾以律师身份在法国议会里工作，韦达不是专职数学家，但他非常喜欢在政治生涯的间隙和工作余暇研究数学，并做出了很多重要贡献，成为那个时代最伟大的数学家. 韦达是第一个有意识地和系统地使用字母表示数的人，并且对数学符号进行了很多改进. 他在 1591 年所写的《分析术引论》是最早的符号代数著作. 他确定了符号代数的原理与方法，使当时的代数学系统化并且把代数学作为解析的方法使用. 因此，他获得了“代数学之父”之称. 他还写下了《数学典则》(1579 年)、《应用于三角形的数学定律》(1579 年) 等不少数学论著. 韦达的著作，以独特形式包含了文艺复兴时期的数学内容. 只可

惜韦达著作的文字比较晦涩难懂，在当时不能得到广泛传播. 韦达逝世后，由别人汇集整理并编成的《韦达文集》于1646年出版. 韦达1603年死于巴黎，享年63岁. 下面是关于韦达的两则趣事：

(1) 与罗门的较量

比利时的数学家罗门曾提出一个45次方程的问题向各国数学家挑战. 法国国王便把这个问题交给了韦达，韦达当时就得出一解，回家后一鼓作气，很快又得出了22解. 答案公布，震惊了数学界. 韦达又回敬了罗门一个问题. 罗门苦思冥想数日方才解出，而韦达却轻而易举地做了出来，为祖国争得了荣誉，他的数学造诣由此可见一斑.

(2) 韦达的“魔法”

在法国和西班牙的战争中，法国人对于西班牙的军事动态总是了如指掌，在军事上总能先发制人，因而不到两年功夫就打败了西班牙. 西班牙的国王对法国人在战争中的“未卜先知”十分恼火又无法理解，认为是法国人使用了“魔法”. 原来，韦达利用自己精湛的数学方法，成功地破译了西班牙的军事密码，为他的祖国赢得了战争的主动权. 另外，韦达还设计并改进了历法. 所有这些都体现了韦达作为大数学家的深厚功底.

8. 怎样巧用韦达定理解“看错数”问题

小明和小红一起做作业，在解一道一元二次方程时，由于粗心大意小明在简化过程中写错了常数项，因而得方程的两个根是8和2；小红在简化过程中写错了一次项的系数，因而得到方程的两个根是-9和-1. 你知道原来的方程是什么吗?

我们可以设这个方程是$x^2+px+q=0$.

则由题意知小明把方程错写成$x^2+px+q'=0$，

小红把方程错写成$x^2+p'x+q=0$.

8和2是方程$x^2+px+q'=0$的两个根，

-9和-1是方程$x^2+p'x+q=0$的两个根，

由韦达定理可知：$p=-(8+2)=-10$，$q=(-9)\times(-1)=9$.

故原来的方程是$x^2-10x+9=0$.

9. 二次三项式的因式分解

我们把形如$ax^2+bx+c(a\neq0)$的多项式叫做x的二次三项式. 在了解了形如$x^2+(p+q)x+pq$的二次三项式分解因式的方法的基础上，现在介绍利用求出一元二次方程的根的方法，将一般的二次三项式分解因式.

观察二次三项式的因式分解和解一元二次方程可以发现，在解一元二次方程$2x^2-6x+4=0$时，可以先把左边的二次三项式分解因式，得

$$2(x^2-3x+2)=0,$$

即

$$2(x-1)(x-2)=0.$$

这样，就可以得到方程的两个根：$x_1=1$，$x_2=2$.

反过来，我们也可以利用求出一元二次方程的两个根的方法，来把二次三项式分解因式.

事实上，我们令二次三项式$ax^2+bx+c(a\neq0)$为零，得一元二次方程$ax^2+bx+c=0$. 再用求根公式求得这个一元二次方程的两个根的和，那么由计算可知$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$；$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$，就是

$\frac{b}{a}=-(x_1+x_2)$，$\frac{c}{a}=x_1\cdot x_2$.

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

$$=a[x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2]$$
$$=a(x-x_1)(x-x_2).$$

这就是说，在分解二次三项式 ax^2+bx+c 的因式时，可先求出方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根 x_1，x_2，然后写成 $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

二、拓展性问题

1. 回答下列问题：

(1) 若方程 $(m^2-2)x^2-1=0$ 有一个根是 1，则 m 的值是多少?

(2) 已知 2 和 -1 是方程 $2x^2+mx+n=0$ 的两个根，求 m 和 n 的值；

(3) 若方程 $3x^2-5x-2=0$ 有一个根是 a，则 $6a^2-10a$ 的值是多少?

(4) 已知方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的一个根是 1，那么 $a+b+c$ 的值是多少?

【答案与提示】

以上各题均体现了方程根的意义，方程的根是使等式成立的未知数的值，将这个值代入方程求解参数即可. 其中第 (2) 题应用韦达定理更简单.

(1) $m=\pm\sqrt{3}$；(2) $m=-2$，$n=-4$；(3) 4；(4) 0.

2. 解方程 (1) $(3y^2-y)^2=3(3y^2-y)-2$；(2) $(t^2+t-1)(t^2+t+2)=4$.

【答案与提示】

两个方程均为高次方程，观察方程结构，可通过换元法达到降次的目的.

(1) 设 $3y^2-y=x$，则原方程变为 $x^2=3x-2$. 解得 $y_1=\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}$，$y_2=\dfrac{1-\sqrt{13}}{6}$，$y_3=1$，$y_4=-\dfrac{2}{3}$. (2) 设 $t^2+t=x$，则原方程变为 $(x-1)(x+2)=4$. 解得 $t_1=-2$，$t_2=1$.

3. 已知 m，n 是二次方程 $x^2+1\,999x+7=0$ 的两个根，求 $(m^2+1\,998m+6)(n^2+2\,000n+8)$ 的值.

【答案与提示】

根据方程根的意义，将原式整理为 $-(m+1)(n+1)$，应用韦达定理，$m+n=-1\,999$，$m\cdot n=7$ 可求得原式的值为 1 991.

4. 已知关于 x 的方程 $(a-2)x^2-2(a-1)x+(a+1)=0$，a 为何非负整数时 (1) 方程只有一个实数根? (2) 方程有两个相等的实数根? (3) 方程有两个不相等的实数根?

【答案与提示】

原方程形式上为二次，但二次项系数为字母参数，需讨论. 如方程只有一个根，应为一次方程，故二次项系数为 0. 如方程有两个根，则 $a-2\neq0$. 对 (2) (3)，分别令根的判别式等于 0，大于 0. 可得，(1) $a=2$；(2) $a=3$；(3) $a=0$ 或 $a=1$.

5. 在实数范围内分解因式：(1) $-2x^2-4x+3$；(2) $4x^2-4x-1$.

【答案与提示】

(1) $-2\left(x-\dfrac{-2+\sqrt{10}}{2}\right)\left(x-\dfrac{-2-\sqrt{10}}{2}\right)$；(2) $(2x-1-\sqrt{2})(2x-1+\sqrt{2})$.

6. 对于向上抛的物体，在没有空气阻力的条件下，有这样的关系式：$h=vt-\dfrac{1}{2}gt^2$，其中 h 是上升高度，v 是初速，g 是重力加速度 (为方便起见，本题目 g 中取 10 m/s^2)，t 是抛出后所经历的时间. 如果将一物体以 $v=25$ m/s 的初速度向上抛，物体何时处在离抛出点 20 m 高的地方?

【答案与提示】

由 $h=vt-\frac{1}{2}gt^2$，得 $20=25t-\frac{10}{2}t^2$. 整理得 $t^2-5t+4=0$，解得 $t_1=1$，$t_2=4$. 所以物体抛出后经过 1 秒钟和 4 秒钟，两次处在离抛出点 20 m 高的地方.

说明 对以上结论你或许会觉得难以相信，并且很可能不假思索地将 $t_2=4$ 舍去，但第二解恰也是有意义的，物体实际上的确两次到达 20 m 的地方，一次是在上升的时候，而另一次则是在下降的时候.

可以算出，物体以每秒 25 米的初速上抛时经过 1 秒到达离抛出点 20 米高的地方后，还要再经过 1.5 秒到达最高点 31.25 米处，然后过 1.5 秒回落到离抛出点 20 米高的地方，又过 1 秒回到原来抛出的地方.

7. 某零售商购进一批单价为 16 元的玩具，销售一段时间后，为了获得更多利润，商店决定提高销售价格，经过试验发现，若按每件 20 元的价格销售时每月能卖 360 件，若按每件 25 元的价格销售时，每月能卖 210 件，假定每月销售件数为 y（件）是价格 x（元/件）的一次函数.

(1) 试求 y 与 x 之间的关系式；

(2) 在商品不积压且不考虑其他因素的条件下，问销售价格定为多少时，才能使每月获得最大利润？每月的最大利润是多少？

【答案与提示】

(1) 设此一次函数为 $y=ax+b$. 根据已知条件，当 $x=20$ 时，$y=360$；当 $x=25$ 时，$y=210$.

将 x、y 代入 $y=ax+b$ 得

$$\begin{cases}360=20a+b, & ①\\ 210=25a+b. & ②\end{cases}$$

①－②得 $150=-5a$.

所以 $a=-30$，代入②得

$$\begin{aligned}b&=210-25a\\&=210-25\times(-30)\\&=210+750=960.\end{aligned}$$

所以此一次函数为 $y=-30x+960(16\leqslant x\leqslant 32)$.

(2) 已知这种商品以每件 20 元的价格销售时，每月能卖 360 件；若以每件 25 元的价格销售时，每月能卖 210 件. 可知每件涨价 5 元销售量减少 360－210＝150（件），平均每件涨价 1 元，销售量就要减少 30 件.

又已知每件进货价为 16 元，当以每件 20 元价格销售时每件可赚 20－16＝4（元）. 再提高售出价. 设每件再涨价 x 元，则销售量就要减少 $30x$ 件，并设每月获得利润为 y 元. 按题意得

$$\begin{aligned}y&=(4+x)(360-30x)\\&=-30(x-4)^2+1\,920.\end{aligned}$$

$x=4$ 时，$y_{最大}=1\,920$.

此时每件可赚 $4+x=4+4=8$(元).

16 元＋8 元＝24 元，可知销售价格定为每件 24 元时，才能使每月获得最大利润，每月最大利润是 1 920 元.

三、数学活动

小明有5张人民币，面值合计20元.

(1) 小明的5张人民币的面值分别是_____元，_____元，_____元，_____元，_____元.

(2) 小明到水果店，称了x千克苹果（x是整数），按标价应付y元，正好等于小明那5张人民币中的两张面值之和，这时果筐里还剩6千克苹果，店主便对小明说："如果你把这剩下的也都买去，那么连同刚才你称的，一共就付10元吧."小明一算，这样相当于每千克比标价减少了0.5元，本着互利的原则，小明便答应了. 试求x和y.

【答案与提示】

(1) 小明的5张人民币的面值分别是1元，2元，2元，5元，10元.

易知，在5张人民币中，面值最小的1张不可能低于1元. 例如，假若面值最小的1张为1角，至少还需3张（2角，2角，5角）才能凑足整1元，而余下的1张不可能为19元.

最小的面值为2角或5角的情况也容易排除，所以面值最小的1张不可能低于1元.

而最小面额为2元或5元的情况也容易排除，所以5张人民币的面值只能是1元，2元，2元，5元，10元.

(2) 由(1)知y的值只能是3，4，6，7.

若$y=3$，有$\frac{10}{x+6}=\frac{3}{x}-0.5$. 整理得$x^2+18x-48=0$，无整数解；

若$y=6$，可得$x^2+14x-72=0$，解得$x_1=4$，$x_2=-18$（舍去）.

若$y=7$，可得$x^2+12x-84=0$，无整数解.

故$x=4$，$y=6$.

Ⅵ 评价建议与测试题

一、评价建议

1. 本章的主要内容包括：一元二次方程及其有关概念，一元二次方程的解法（配方法、公式法、因式分解法），运用一元二次方程分析和解决实际问题. 其中，22.1节"一元二次方程"是全章的基础概念部分；22.2节"降次——解一元二次方程"讨论一元二次方程的各种解法，是全章的一个重点内容；22.3节"实际问题与一元二次方程"探究如何用一元二次方程分析解决实际问题，是全章的另一重点内容.

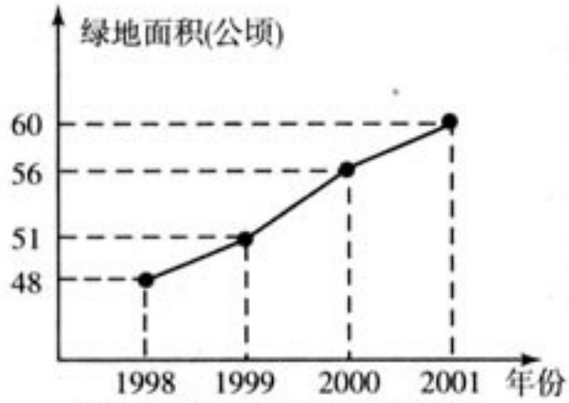
应使学生理解一元二次方程的基本概念，比较熟练地掌握一元二次方程的解法，能够用一元二次方程分析和解决某些实际问题，并应引导学生体会与本章内容相关的数学思想方法（降次、化归、建模）. 确定评价内容时，应注意考虑本章的重点内容，有单纯解一元二次方程的题目，同时有列、解一元二次方程解决实际问题的题目，实际问题的难度应适度，要注意与教科书内容的联系.

2. 除传统的让学生在规定时间内完成书面测试题外，应积极探索新的评价方式，例如测试题目中适当增加探究性、开放性的问题等，通过评价的改革，倡导学习方式和内容方面的改革.

二、测试题（时间：60 分　满分：100 分）

内　容	设计意图
一、**选择题**（每小题 5 分，共 25 分）：	
1. 关于 x 的方程 $ax^2-3x+2=0$ 是一元二次方程，则（　　） (A) $a>0$.　(B) $a\neq 0$.　(C) $a=1$.　(D) $a\geqslant 0$.	本题考查学生对一元二次方程定义的理解.
2. 用配方法解下列方程，其中应在左右两边同时加上 4 的是（　　） (A) $x^2-2x=5$.　(B) $2x^2-4x=5$. (C) $x^2+4x=5$.　(D) $x^2+2x=5$.	本题考查学生对配方法的掌握程度.
3. 方程 $x(x-1)=x$ 的根是（　　） (A) $x=2$.　(B) $x=-2$. (C) $x_1=-2$，$x_2=0$.　(D) $x_1=2$，$x_2=0$.	本题考查学生解一元二次方程的能力.
4. 县化肥厂第一季度增产 a 吨化肥，以后每季度比上一季度增产 $x\%$，则第三季度化肥增产的吨数为（　　） (A) $a(1+x)^2$.　(B) $a(1+x\%)^2$. (C) $(1+x\%)^2$　(D) $a+a(x\%)^2$.	本题考查学生对未知数量关系的分析能力.
5. 一个多边形有 9 条对角线，则这个多边形有多少条边（　　） (A) 6.　(B) 7.　(C) 8.　(D) 9.	本题考查学生对几何图形的分析理解.
二、**填空题**（每小题 5 分，共 25 分）：	
6. 方程 $x^2-x=0$ 的一次项系数是_____，常数项是_____.	本题考查学生掌握一元二次方程系数的能力.
7. 方程 $x^2-x-6=0$ 的解是_____.	本题考查学生解方程.
8. 关于 x 的方程 $x^2-3x+1=0$ _____实根.（注：填写“有”或“没有”）	本题考查学生对一元二次方程根的判别能力.
9. 一个两位数，个位数字比十位数字大 3，个位数字的平方刚好等于这个两位数，则这个两位数是_____.	本题考查学生对未知数量关系的分析能力.
10. 若一个三角形的三边长均满足方程 $x^2-6x+8=0$，则此三角形的周长为_____.	本题考查学生解方程能力和综合能力.
三、**解答题**：	
11. 解方程（每小题 5 分，共 10 分）： (1) $x^2-4x-3=0$;　(2) $(x-3)^2+2x(x-3)=0$.	本题考查学生解方程能力.
12.（本题满分 10 分）阅读下面的例题：请参照例题解方程 $x^2-|x-1|-1=0$. 解方程 $x^2-|x|-2=0$. 解：(1) 当 $x\geqslant 0$ 时，原方程化为 $x^2-x-2=0$， 解得：$x_1=2$，$x_2=-1$（不合题意，舍去）. (2) 当 $x<0$ 时，原方程化为 $x^2+x-2=0$， 解得：$x_1=1$（不合题意，舍去），$x_2=-2$. ∴ 原方程的根是 $x_1=2$，$x_2=-2$.	本题考查学生的阅读水平；对新知识的理解以及类比解题的能力. 使学生提高自主学习的能力.
13.（本题满分 10 分）百货商店服装柜在销售中发现：某品牌童装平均每天可售出 20 件，每件盈利 40 元. 为了迎接“六一”国际儿童节，商场决定采取适当的降价措施，扩大销售量，增加盈利，减少库存. 经市场调查发现：如果每件童装降价 1 元，那么平均每天就可多售出 2 件. 要想平均每天销售这种童装盈利 1 200 元，那么每件童装应降价多少元?	本题考查学生对等量关系的分析能力、计算能力.

续表

内　容	设计意图
14.（本题满分 10 分）一张桌子的桌面长为 6 米，宽为 4 米，台布面积是桌面面积的 2 倍，如果将台布铺在桌子上，各边垂下的长度相同，求这块台布的长和宽. **15.**（本题满分 10 分）美化城市，改善人们的居住环境已成为城市建设的一项重要内容. 某市城区近几年来，通过拆迁旧房，植草，栽树，修建公园等措施，使城区绿地面积不断增加（如图所示）. （1）根据图中所提供的信息，回答下列问题：2001 年的绿地面积为____公顷，比 2000 年增加了_____公顷. 在 1999 年，2000 年，2001 年这三年中，绿地面积增加最多的是_____年.  城区每年年底绿地面积统计图 （2）为满足城市发展的需要，计划到 2003 年使城区绿地总面积达到 72.6 公顷，试求这两年（2001～2003）绿地面积的年平均增长率.	本题考查学生对等量关系的分析能力、计算能力，提高学生对数学的应用意识. 本题考查学生对知识综合应用的能力，识图能力，分析能力，发展学生的逻辑思维能力.

测试题答案

1. B.　**2.** C.　**3.** D.　**4.** B.　**5.** A.

6. -1，0.

7. $x_1=-2$，$x_2=3$.

8. 有.

9. 25 或 36.

10. 6，10，12.

11.（1）$x_1=2+\sqrt{7}$，$x_2=2-\sqrt{7}$；　（2）$x_1=1$，$x_2=3$.

12.（1）当 $x\geqslant 1$ 时，原方程化为 $x^2-x=0$，

解得：$x_1=1$，$x_2=0$（不合题意，舍去）.

（2）当 $x<1$ 时，原方程化为 $x^2+x-2=0$，

解得：$x_1=1$（不合题意，舍去），$x_2=-2$.

∴ 原方程的根是 $x_1=1$，$x_2=-2$.

13. 每件降价 10 元或 20 元.

14. 台布的长为 8 m，宽为 6 m.

15. 60，4，2000，2001～2003 年的年平均增长率为 10%.

第二十三章 旋 转

Ⅰ 总体设计

一、课程学习目标

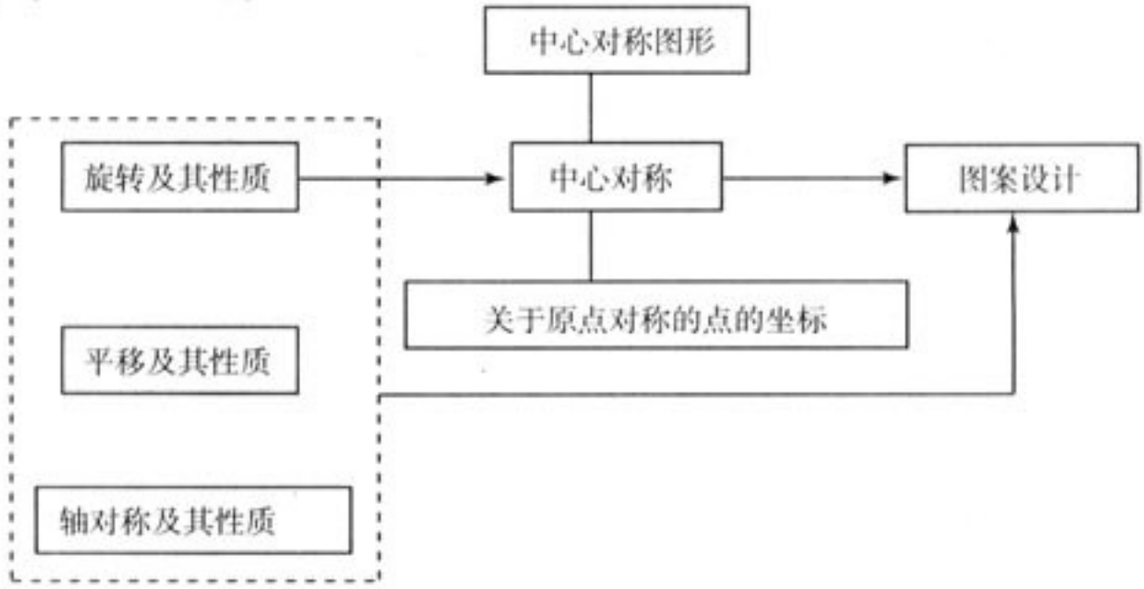
1. 通过具体实例认识旋转，探索它的基本性质，理解对应点到旋转中心的距离相等、对应点与旋转中心连线所成的角彼此相等的性质.

2. 能够按要求作出简单平面图形旋转后的图形，欣赏旋转在现实生活中的应用.

3. 通过具体实例认识中心对称，探索它的基本性质，理解对应点所连线段被对称中心平分的性质. 了解平行四边形、圆是中心对称图形.

4. 探索图形之间的变换关系（轴对称、平移、旋转及其组合），灵活运用轴对称、平移、旋转的组合进行图案设计.

二、本章知识结构框图



三、内容安排

按照全套教科书的内容安排，本章学习第三种图形变换——旋转. 此前，学生已经学习了平移与轴对称两种图形变换. 本章第一节学习旋转的有关内容. 在此基础上，第二节学习特殊的旋转——中心对称. 第三节则是平移、轴对称、旋转的综合运用.

在第一节中，首先通过时针、风车叶片等实例引出旋转的概念. 然后设置了一个“探究”栏目，让学生探索对应点到旋转中心的距离相等、对应点与旋转中心连线所成的角彼此相等等性质. 接下来，安排了一个按要求作出简单平面图形旋转后的图形的例题. 最后说明利用旋转进行简单的图案设计的内容. 在本节中，旋转的概念、性质以及有关作图的内容环环相扣：由概念得出性质；由性质得出有关作图的方法. 应关注这些内容之间的联系，使前一部分内容为后一部分内容作好准备，使后一部分内容复习巩固前一部分内容.

第二节有三部分内容：中心对称的概念、性质和有关作图；中心对称图形的概念；关于原点对称的点的坐标的关系. 关于中心对称，首先通过具体例子给出中心对称的概念，然后探究中心对称的性质，最后说明作与已知图形中心对称的图形的方法. 关于中心对称图形，主要让学生通过线段、平行四边形加以认识，并了解中心对称与中心对称图形的联系与区别. 关于原点对称的点的坐标的关系可以由学生探究得出，由此得到利用这一关系作与已知图形关于原点对称的图形的方法.

第三节是“课题学习”的内容，要求学生探索图形之间的变换关系（轴对称、平移、旋转及其组合），灵活运用轴对称、平移、旋转的组合进行图案设计. 在本节中，首先通过一个例子让学生对课题有所了解，然后让学生搜集图案，设计图案. 搜集图案并加以分析，了解图形之间的变换关系有助于学生自己进行图案设计. 设计图案的过程中，应关注学生构思、实施、合作交流等环节.

四、课时安排

本章教学时间约需 8 课时，具体分配如下（仅供参考）：

23.1　图形的旋转	2 课时
23.2　中心对称	3 课时
23.3　课题学习　图案设计	2 课时
数学活动	
小结	1 课时

五、学法教法建议

1. 注重联系实际

旋转与现实生活联系紧密. 为此，章前引言中列举了旋转的大量实例. 应通过实例认识和感受旋转. 中心对称图形在现实生活中也比较常见. 也可以通过具体实例加深学生对中心对称图形的认识.

许多美丽的图案可以由旋转设计而成. 让学生利用旋转进行图案设计，可以复习巩固所学的知识，调动学生学习的积极性. 让学生运用轴对称、平移、旋转的组合进行图案设计，可以进一步深化学生所学知识，加强图形变换与现实生活的联系.

2. 注重探索结论

教科书图 23.1-3 中，$\triangle A'B'C'$ 由 $\triangle ABC$ 旋转而成，可结合此图探究旋转的性质. 图 23.2-3 中，$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 关于点 O 对称. 学生已经知道，成轴对称的两点所连线段被对称轴垂直平分. 可以类比这一点，让学生发现成中心对称的两点所连线段与对称中心有什么关系.

许多图形可以由基本图形旋转而成. 为了更好地认识图形，就要探索和发现图形之间的变换关系. 探索和发现图形之间的变换关系也有助于学生运用轴对称、平移、旋转的组合进行图案设计.

3. 注重与已学图形变换的联系

同平移、轴对称一样，已知图形经过旋转得到一个新图形. 平移、轴对称不改变图形的形状和大小，旋转也具有这样的性质. 因此，平移、轴对称和旋转都是全等变换. 以后所学的相似变换则不具有这个性质.

在作已知图形平移后的图形或作与已知图形成轴对称的图形时，只要确定已知图形中的一些特殊点（如多边形的顶点）的对应点，这种处理对于作已知图形旋转后的图形也适用.

中心对称与轴对称类比着来学习，对学生掌握新知识有帮助. 本章的第 2 个活动还从坐标的角度揭示了中心对称与轴对称的关系.

综合运用所学图形变换进行图案设计，可以加强它们之间的联系，深化学生对图形变换的认识.

Ⅱ 教材分析

[1] 学生可以从水车图片得到旋转的印象. 也可以展示其他图片让学生观看，感受旋转与实际生活的联系.

第二十三章 旋 转[1]



1. 学生已经学习了平移与轴对称，对于图形变换已经有所认识. 从平移与轴对称的学习来看，学习一种图形变换大致包括以下内容：

(1) 通过具体实例认识这种图形变换；

(2) 探索这种图形变换的性质；

(3) 作出一个图形经过这种图形变换后的图形；

(4) 利用这种图形变换进行图案设计；

(5) 用坐标表示这种图形变换.

本章“旋转”的学习也是从以上几个方面展开的. 关于(5)，本章只涉及用坐标表示中心对称.

2. 在本章中，旋转的概念是得出旋转的性质，认识中心对称和中心对称图形的基础. 掌握旋转的性质，一方面可以加深对旋转的认识，另一方面又可以得出作一个图形经过旋转后的图形的方法.

3. 学生已经学习了轴对称和轴对称图形，本章再来学习中心对称和中心对称图形，新旧两部分内容可以类比着来学习. 另一方面，中心对

23

23.1 图形的旋转
23.2 中心对称
23.3 课题学习 图案设计



同学们都见过风车吧，小小的风车在风的吹动下不停地转动.

能够转动的物体有很多，例如车轮、水车、风力发电机、飞机的螺旋桨、时钟的指针、游乐园的大转盘……它们把我们带进了一个旋转的世界.[1]

旋转有什么性质？

哪些图形旋转 180° 后和它自身重合？

如何利用旋转等图形变换设计图案？

让我们走进这个旋转的世界，探索其中的奥秘吧！

[1] 可以让学生自己举出旋转的实际例子.

称变换是一种特殊的旋转，因此应在第一节“旋转”内容的基础上把握第二节“中心对称”的内容.

4. 学生学完前两节内容后，已经掌握了平移、轴对称、旋转三种图形变换. 在学习每种图形变换时，教科书都安排了用单一图形变换进行图案设计的内容. 可以在此基础上，让学生运用平移、轴对称、旋转的组合进行图案设计，这就是本章第三节的内容. 本节是“课题学习”的内容，应注意体现学生学习的自主性，让学生通过图案设计活动发展思维能力，加深理解相关的数学知识.

[1] 时针转动了 60°.

[2] 以上现象的共同特点是：物体绕定点转动.

[3] 在图形和点所在的平面内旋转.

23.1 图形的旋转

观察

钟表的指针在不停地转动，如图 23.1-1，从 3 时到 5 时，时针转动了多少度？[1]



图 23.1-1



图 23.1-2

如图 23.1-2，风车风轮的每个叶片在风的吹动下转动到新的位置. 以上这些现象有什么共同特点呢？[2]

我们可以把上面问题中的指针、叶片等看作图形. 像这样，把一个图形绕着某一点 O 转动一个角度的图形变换叫做**旋转**（rotation）.[3] 点 O 叫做**旋转中心**，转动的角叫做**旋转角**，如果图形上的点 P 经过旋转变为点 P'，那么这两个点叫做这个旋转的对应点. 例如，图 23.1-1 中，时针在旋转，表盘的中心是旋转中心，旋转角是 60°，时针的端点在 3 时的位置 P 与在 5 时的位置 P' 是对应点.

1. 本节的主要内容是旋转的概念和性质. 通过本节的学习，应使学生理解对应点到旋转中心的距离相等、对应点与旋转中心连线所成的角彼此相等的性质，能够按要求作出简单平面图形旋转后的图形，能利用旋转进行简单的图案设计等.

2. 关于图形变换，学生已经学习了平移与轴对称，对于图形变换有了一定的了解. 同平移与轴对称一样，旋转与实际生活联系紧密. 钟表指针的转动，风车车轮叶片的转动等都是旋转的例子. 可以由此引出旋转的概念. 可以结合时针的例子帮助学生理解旋转中心、旋转角和对应点的概念. 学生由时针旋转的例子，容易产生旋转只是顺时针旋转的误解. 应向学生说明，把一个图形绕某一点旋转，既可以按顺时针旋转，也可以按逆时针旋转. 关于这一点，可参看教科书图 23.1-6. 在图 23.1-6 中，第一个图是把一个图案逆时针旋转，第二个图是把一个图案顺时针旋转.

练习

1. 举出一些现实生活中旋转的实例，并指出旋转中心和旋转角.

2. 时钟的时针在不停地旋转，从上午 6 时到上午 9 时，时针旋转的旋转角是多少度？从上午 9 时到上午 10 时呢？

3. 如图，杠杆绕支点转动撬起重物，杠杆的旋转中心在哪里？旋转角是哪个角？



（第 3 题）

探究

如图 23.1-3，在硬纸板上，挖一个三角形洞，再挖一个小洞 O 作为旋转中心，硬纸板下面放一张白纸. 先在纸上描出这个挖掉的三角形图案（$\triangle ABC$），然后围绕旋转中心转动硬纸板，再描出这个挖掉的三角形（$\triangle A'B'C'$），移开硬纸板.

线段 OA 与 OA' 有什么关系？[1] $\angle AOA'$ 与 $\angle BOB'$ 有什么关系？[2] $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 形状和大小有什么关系？[3]

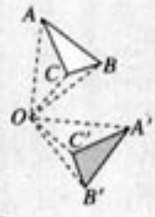


图 23.1-3

归纳

对应点到旋转中心的距离相等.

对应点与旋转中心所连线段的夹角等于旋转角.

旋转前、后的图形全等.

练习答案

1. 略.

2. 90°. 30°.

3. 点 O. $\angle AOA'$.

[1] $OA = OA'$.

[2] $\angle AOA' = \angle BOB'$.

[3] $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

3. 图 23.1-3 是将 $\triangle ABC$ 旋转一个角度得到 $\triangle A'B'C'$，可结合此图探究旋转的性质.

（1）在图 23.1-3 中，点 A 经过旋转与点 A' 重合，因而 $OA = OA'$. 同理 $OB = OB'$，$OC = OC'$.

（2）在图 23.1-3 中，$\angle AOA'$ 等于这个旋转的旋转角，$\angle BOB'$ 也等于这个旋转的旋转角，因而 $\angle AOA' = \angle BOB'$.

（3）$\triangle ABC$ 经过旋转与 $\triangle A'B'C'$ 重合，因而 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

4. 一般地，可以根据定义得出旋转的以下性质：

（1）对应点到旋转中心的距离相等.

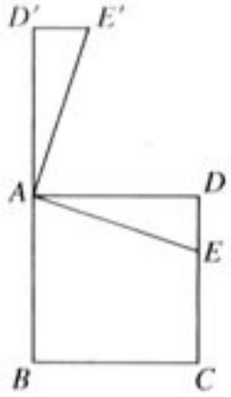
（2）对应点与旋转中心所连线段的夹角等于旋转角.

（3）旋转前、后的图形全等.

其中的（2）也表明对应点与旋转中心连线所成的角彼此相等.

由（1）、（2）可如下确定点 P 绕点 O 旋转后的对应点 P'：

[1] 这里指明了旋转的方向. 如果把$\triangle ADE$逆时针旋转 90°，那么旋转后的图形是$\triangle AD'E'$：



可以在解完本例后，让学生画出把$\triangle ADE$逆时针旋转 90°后的图形，体会规定旋转方向的意义.

练习答案略.

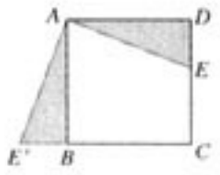


图 23.1-4

例 如图 23.1-4，E 是正方形 $ABCD$ 中 CD 边上任意一点，以点 A 为中心，把$\triangle ADE$顺时针旋转 90°[1]画出旋转后的图形.

分析：关键是确定$\triangle ADE$三个顶点的对应点，即它们旋转后的位置.

解：因为点 A 是旋转中心，所以它的对应点是它本身.

正方形 $ABCD$ 中，$AD=AB$，$\angle DAB=90°$，所以旋转后点 D 与点 B 重合.

设点 E 的对应点为点 E'. 因为旋转后的图形与旋转前的图形全等，所以

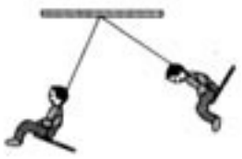
$\angle ABE'=\angle ADE=90°$，$BE'=DE$.

因此，在 CB 的延长线上取点 E'，使 $BE'=DE$，则$\triangle ABE'$为旋转后的图形.

还有别的方法吗?

练习

1. 如图，小明坐在秋千上，秋千旋转了 80°. 请在图中小明身上任意选一点 P，利用旋转性质，标出点 P 的对应点.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，用左面的三角形经过怎样的旋转，可以得到右面的图形?

3. 找出图中扳手拧螺母时的旋转中心和旋转角.



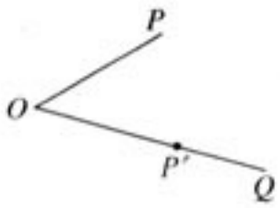
（第 3 题）



图 23.1-5

把一个图案（如图 23.1-5）进行旋转，选择不同

连接 OP，画$\angle POQ$等于旋转角（注意旋转方向，这里假设是顺时针旋转），在射线 OQ 上取$OP'=OP$，则点 P'就是点 P 绕点 O 旋转后的对应点.



5. 本节的例是画出$\triangle ADE$旋转后的图形. 由旋转的性质可知：旋转后的图形是与$\triangle ADE$全等的三角形. 分别作出$\triangle ADE$的三个顶点旋转后的对应点，旋转后的图形就确定下来了.

在本例中，容易确定点 A 的对应点是点 A，点 D 的对应点是点 B，关键是确定点 E 的对应点 E'. 由$\angle ABE'=90°$可知点 E'在 CB 的延长线上，再由 $BE'=DE$ 即可确定点 E'.

还可以用如下方法确定点 E'：

的旋转中心、不同的旋转角，会出现不同的效果.

旋转中心不变，改变旋转角（图 23.1-6）.

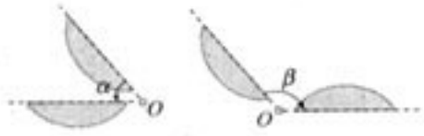


图 23.1-6

旋转角不变，改变旋转中心（图 23.1-7）.

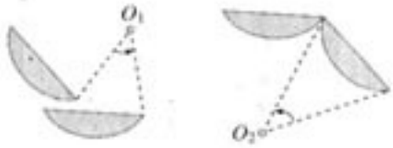


图 23.1-7

我们可以经过旋转设计出美丽的图案（图 23.1-8）.[1]



图 23.1-8

练习

把一个三角形进行旋转：

(1) 选择不同的旋转中心、不同旋转角，看看旋转的效果；

(2) 改变三角形的形状，看看旋转的效果.

[1] 图 23.1-8 中的图案都是由图 23.1-5 中的图案经过旋转多次得到的.

练习答案略.

方法 1：由 $\angle EAE'=90°$，$AE'=AE$ 确定点 E'.

方法 2：由 $\angle ABE'=90°$，$AE'=AE$ 可知，以点 A 为圆心，AE 为半径画弧，与 CB 的延长线的交点即是点 E'.

方法 3：由 $\angle ABE'=90°$，$\angle EAE'=90°$ 可知，过点 A 与 AE 垂直的直线与 CB 的延长线的交点即是点 E'.

可以让学生探讨确定点 E' 的不同方法，调动学生学习的积极性.

6. 让学生观察图 23.1-6，图 23.1-7，体会把一个图案进行旋转，选择不同的旋转中心，不同的旋转角，会出现不同的效果. 图 23.1-8 是通过旋转设计图案的例子，可以让学生利用旋转进行简单的图案设计. 在设计过程中，可以让学生充分发挥自己的想象力，并注意运用所学的旋转的知识.

[1] 这里是把一个图形旋转 180°，这个内容我们在下节专门研究.

习题23.1

复习巩固 ▶▶

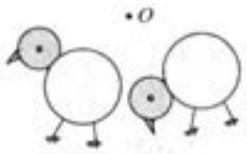
1. 任意画一个△ABC，作下列旋转：
   (1) 以 A 为中心，把这个三角形逆时针旋转 40°；
   (2) 以 B 为中心，把这个三角形顺时针旋转 60°；
   (3) 在三角形外任取一点为中心，把这个三角形顺时针旋转 120°；
   (4) 以 AC 中点为中心，把这个三角形旋转 180°.[1]



(第 2 题)

2. 说出压水机压水时的旋转中心和旋转角.

3. 如图，吃米的小鸡是站立的小鸡经过旋转得到的，旋转中心是 O. 从图上量一量旋转角是多少度.



(第 3 题)

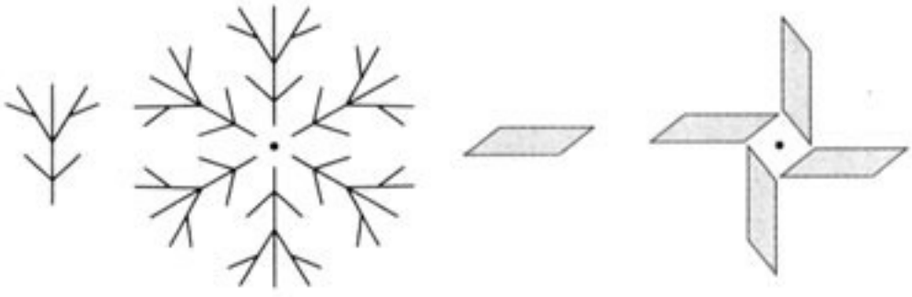


(第 4 题)

4. △ABC 中，$AB=AC$，P 是 BC 边上任意一点. 以点 A 为中心，取旋转角等于 $\angle BAC$，把△ABP 逆时针旋转，画出旋转后的图形.

综合运用 ▶▶

5. 下面的图形是由一个基本的图形经过旋转得到的，分别指出旋转中心和旋转角.



(第 5 题)

6. 把图中的五角星图案，绕着它的中心点 O 旋转，旋转角为多少度时，旋转后的五

习题 23.1

1. 第 1 题是画出△ABC 旋转后的图形，关键是分别作出点 A、B、C 旋转后的对应点，运用旋转的性质即可解决.

在第 3 题中，在站立的小鸡身上任取一点 P，再在吃米的小鸡身上找到点 P 的对应点 P'，则$\angle POP'$就是旋转角.

在第 4 题中，容易确定点 A 的对应点是点 A，点 B 的对应点是点 C，关键是确定点 P 的对应点 P'. 可以用如下方法确定点 P'：

方法 1：由$\angle PAP'=\angle BAC$，$AP'=AP$ 确定点 P'；

方法 2：由 $\triangle CAP' \cong \triangle BAP$ 可知，$\angle CAP'=\angle BAP$. 由$\angle CAP'=\angle BAP$，$AP'=AP$ 确定点 P'.

2. 在第 5 题中，其中的图案都是由一个基本图形经过旋转多次得到的. 观察图案中相邻两个基本图形，从而确定旋转中心和旋转角.

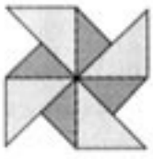
角星能与自身重合？对等边三角形进行类似的讨论.[1]





（第 6 题）

7. 图中的风车图案，可以由哪个基本的图形、经过什么样的旋转得到？



（第 7 题）

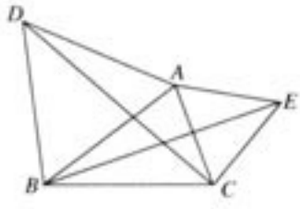


（第 8 题）

8. 如图，用一个等腰三角形，经过旋转，制作一个五角星图案（提示：选择旋转中心，计算旋转角）.

拓广探索 ▶▶

9. 如图，$\triangle ABD$、$\triangle AEC$ 都是等边三角形，BE 与 DC 有什么关系？你能用旋转的性质说明上述关系成立的理由吗？



（第 9 题）

[1] 如果一个图形绕某一点旋转 180°后的图形与自身重合，那么这个图形就是下节要研究的中心对称图形.

第 6 题涉及的图案经过旋转能够与自身重合，可以根据这一特点确定所需的旋转.

第 7 题中的风车图案是由一个基本图形经过旋转多次得到的. 可以先确定这个基本图形，再观察风车图案中相邻两个基本图形，从而确定旋转中心和旋转角.

在第 8 题中，关键是根据五角星图案的特点算出旋转角.

3. 第 9 题是利用旋转的性质证明三角形全等，从而证明线段相等.

[1] 点 D 和点 B 是关于点 O 的对称点.

23.2 中心对称

23.2.1 中心对称

观察

(1) 如图 23.2-1，把其中一个图案绕点 O 旋转 180°，你有什么发现?



图 23.2-1



图 23.2-2

(2) 如图 23.2-2，线段 AC，BD 相交于点 O，$OA=OC$，$OB=OD$. 把 $\triangle OCD$ 绕点 O 旋转 180°，你有什么发现?

你还能指出其他的对称点吗?[1]

可以发现，两个图案重合：$\triangle OCD$ 与 $\triangle OAB$ 重合. 像这样，把一个图形绕着某一个点旋转 180°，如果它能够与另一个图形重合，那么就说这两个图形**关于这个点对称**或**中心对称** (central symmetry)，这个点叫做**对称中心**. 这两个图形中的对应点叫做关于中心的**对称点**. 例如，图 23.2-2 中 $\triangle OCD$ 和 $\triangle OAB$ 关于点 O 对称，点 C 与点 A 是关于点 O 的对称点.

1. 本节的主要内容是中心对称和中心对称图形的概念、中心对称的性质、关于原点对称的点的坐标的关系. 重点是中心对称的概念和性质. 掌握中心对称定义是学好本节的关键.

2. 本节从旋转变换引入中心对称的概念. 先让学生从旋转的角度分别观察图 23.2-1 和图 23.2-2 中两个图形之间的关系（有条件的学校可以用多媒体技术加以演示，加深学生的印象），进而引出中心对称的定义.

关于中心对称的定义，学生应能体会到以下两层意思：

(1) 有两个图形，能够完全重合，即形状大小都相同.

(2) 对重合的方式有限制，也就是它们的位置关系必须满足一个条件：将其中一个图形绕某点旋转 180°后能够与另一个图形重合.

也就是说，全等的图形不一定是中心对称的，而中心对称的两个图形一定是全等的.

探究

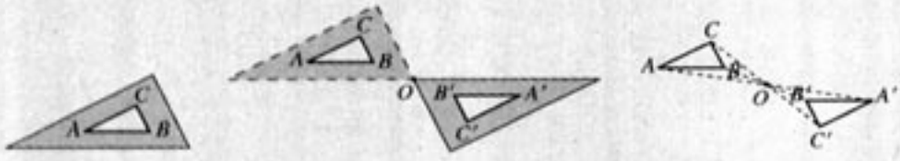
如图 23.2-3，旋转三角板，画关于点 O 对称的两个三角形：

第一步，画出△ABC；

第二步，以三角板的一个顶点 O 为中心，把三角板旋转 180°，画出△$A'B'C'$；

第三步，移开三角板.

这样画出的△ABC 与△$A'B'C'$ 关于点 O 对称. 分别连接对称点 AA'、BB'、CC'. 点 O 在线段 AA' 上吗？如果在，在什么位置？[1] △ABC 与△$A'B'C'$ 有什么关系？



(1)　(2)　(3)

图 23.2-3

我们可以发现：（1）点 O 是线段 AA' 的中点；（2）△ABC≌△$A'B'C'$. 上述发现可以证明如下.

（1）点 A' 是点 A 绕点 O 旋转 180°后得到的，即线段 OA 绕点 O 旋转 180°得到线段 OA'，所以点 O 在线段 AA' 上，且 $OA=OA'$，即点 O 是线段 AA' 的中点.

同样地，点 O 也是线段 BB' 和 CC' 的中点.

（2）在△AOB 与△$A'O'B'$ 中，

$OA=OA'$，$OB=OB'$，$\angle AOB=\angle A'OB'$，

∴ △AOB≌△$A'OB'$.

∴ $AB=A'B'$.

同理 $BC=B'C'$，$AC=A'C'$.

∴ △ABC≌△$A'B'C'$.

[1] 点 A、O、A' 在同一条直线上，且 $OA=OA'$，所以点 O 是线段 AA' 的中点.

3. 可以将中心对称与轴对称进行对比：

	中心对称	轴对称
1.	有一个对称中心——点	有一条对称轴——直线
2.	图形绕中心旋转 180°	图形沿轴折叠
3.	旋转后与另一图形重合	折叠后与另一图形重合

4. 教科书结合图 23.2-3（3）让学生探究中心对称的性质. 此图中，△ABC 与△$A'B'C'$ 关于点 O 对称. 学生通过观察可以发现有关结论并加以证明. 一般地，由中心对称的定义可以直接得到中心对称的两个性质. 第一个性质很重要，要使学生明确关于中心对称的两个图形中：

（1）对称中心在两对称点的连线上；

（2）对称中心到两对称点的距离相等.

5. 例 1 是画出与已知图形关于已知点的对称图形. 一般地，要画一个多边形关于已知点的对称图形，只要画出这个多边形的各个顶点关于

练习答案略.

归纳

关于中心对称的两个图形，对称点所连线段都经过对称中心，而且被对称中心所平分.

关于中心对称的两个图形是全等图形.

例 1 (1) 如图 23.2-4，选择点 O 为对称中心，画出点 A 关于点 O 的对称点 A'；

(2) 如图 23.2-5，选择点 O 为对称中心，画出与 $\triangle ABC$ 关于点 O 对称的 $\triangle A'B'C'$.

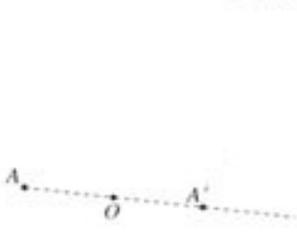


图 23.2-4

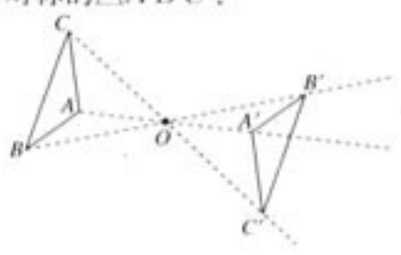


图 23.2-5

解：(1) 如图 23.2-4，连接 AO，在 AO 的延长线上截取 $OA'=OA$，即可以求得点 A 关于点 O 的对称点 A'.

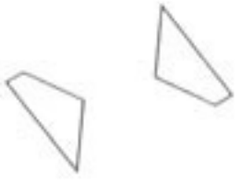
(2) 如图 23.2-5，作出点 A，点 B，点 C 关于点 O 的对称点 A'，B'，C'，依次连接 $A'B'$，$B'C'$，$C'A'$，就可得到与 $\triangle ABC$ 关于点 O 对称的 $\triangle A'B'C'$.

练习

1. 分别画出下列图形关于点 O 对称的图形.



(第 1 题)



(第 2 题)

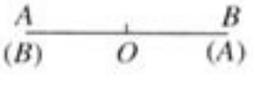
2. 图中的两个四边形关于某点对称，找出它们的对称中心.

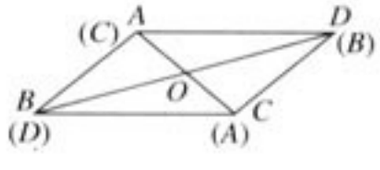
已知点的对称点，再顺次连接各点即可.

6. 关于中心对称图形的概念，教科书先让学生从旋转的角度分别观察图 23.2-6 和图 23.2-7中的线段和平行四边形.

在图 23.2-6 中，线段绕它的中点旋转 180° 后，它的两个端点互换了位置，旋转后的线段与原线段重合.

在图 23.2-7 中，因为 $OA=OC$，$OB=OD$，所以图形绕点 O 旋转 180°后，点 A 与点 C，点 B 与点 D 分别互换了位置，旋转后的图形与原来的图形重合.





可以结合上图做成教具或用多媒体技术加以演示，加深学生的印象，进而引出中心对称图形的定义.

23.2.2 中心对称图形

观察

(1) 如图 23.2-6，将线段 AB 绕它的中点旋转 180°，你有什么发现？



图 23.2-6

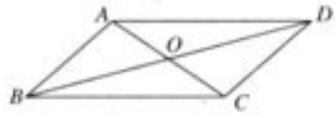


图 23.2-7

(2) 如图 23.2-7，将□$ABCD$ 绕它的两条对角线的交点 O 旋转 180°，你有什么发现？

可以发现：线段 AB 绕它的中点旋转 180°后与它本身重合；□$ABCD$ 绕它的两条对角线交点 O 旋转 180°后与它本身重合. 像这样，把一个图形绕着某一个点旋转 180°，如果旋转后的图形能够与原来的图形重合，那么这个图形叫做**中心对称图形**（central symmetry figure），[1] 这个点就是它的对称中心.

它们的对称中心分别是什么？[2]

由上面的观察可以得到，线段、平行四边形是中心对称图形.

中心对称图形形状匀称美观，很多建筑物和工艺品上常采用这种图形作装饰图案（图 23.2-8(1)）. 另外，具有中心对称图形形状的物体，能够在所在的平面内绕对称中心平稳地旋转，在生产中旋转的零部件的形状常设计成中心对称图形，如水泵叶轮等（图 23.2-8(2)）.



(1)



(2)

图 23.2-8

[1] 教学时可以与轴对称对比. 轴对称图形是对称轴两侧的部分互相重合，图形的一半折叠在另一半上. 中心对称图形旋转 180°后，仍然是原来图形.

[2] 线段的对称中心是它的中点. 平行四边形的对称中心是它的对角线的交点.

7. 在日常生活和生产中，经常遇到中心对称图形. 例如，风车的车轮，飞机的螺旋桨等，就是中心对称图形的实例. 可让学生自己举出一些中心对称图形的实例.

8. 中心对称和中心对称图形是两个不同而又紧密联系的概念. 它们的区别是：中心对称是指两个全等图形之间的相互位置关系，成中心对称的两个图形中，其中一个图形上所有点关于对称中心的对称点都在另一个图形上，反之，另一个图形上所有点关于对称中心的对称点又都在这个图形上；而中心对称图形是指一个图形本身成中心对称，中心图形上所有点关于对称中心的对称点都在这个图形本身上. 中心对称和中心对称图形的联系是：如果将中心对称的两个图形看成一个整体（一个图形），那么这个图形就是中心对称图形；一个中心对称图形，如果把对称的部分看成是两个图形，那么它们又是关于中心对称.

练习答案略.

[1] 点 A、B、C、D、E 关于原点 O 的对称点的坐标分别是 $(-4, 0)$，$(0, 3)$，$(-2, -1)$，$(1, -2)$，$(3, 4)$，这些点的坐标与已知点的坐标符号相反.

练习

1. 回忆我们学过的图形，你能说出一些中心对称图形吗？

2. 如图的汽车标志中，哪些是中心对称图形？再举出几个中心对称图形的实例.



（第 2 题）

23.2.3 关于原点对称的点的坐标

探究

如图 23.2-9，在直角坐标系中，作出下列已知点关于原点 O 的对称点，并写出它们的坐标. 这些坐标与已知点的坐标有什么关系？[1]

$A(4, 0)$，$B(0, -3)$，$C(2, 1)$，$D(-1, 2)$，$E(-3, -4)$.

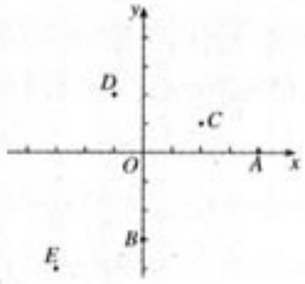
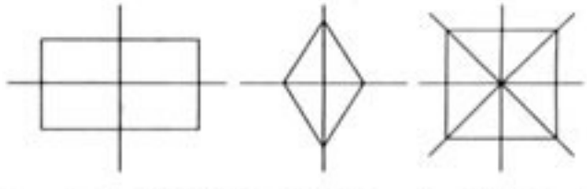


图 23.2-9

归纳

两个点关于原点对称时，它们的坐标符号相反，即点 $P(x, y)$ 关于原点的对称点为 $P'(-x, -y)$.

9. 矩形、菱形、正方形是平行四边形，所以它们也是中心对称图形，对角线的交点是它们的对称中心. 矩形、菱形、正方形还是轴对称图形，矩形、菱形各有两条互相垂直的对称轴，对称轴的交点是对称中心. 而正方形有四条对称轴，既有矩形的对称轴，又有菱形的对称轴. 从对称性看，正方形的性质也是矩形、菱形性质的综合.



10. 在平面直角坐标系中，如果两个点关于原点对称，那么这两个点的坐标有什么关系，这一点可以让学生结合图 23.2-9 进行探究.

例 2 如图 23.2-10，利用关于原点对称的点的坐标的特点，作出与△ABC 关于原点对称的图形.

解：点 $P(x, y)$ 关于原点的对称点为 $P'(-x, -y)$，因此△ABC 的三个顶点 $A(-4, 1)$、$B(-1, -1)$、$C(-3, 2)$ 关于原点的对称点分别为 A'(____, ____)、B'(____, ____)、C'(____, ____)[1]，依次连接 $A'B'$，$B'C'$，$C'A'$，就可得到与△ABC 关于原点对称的△$A'B'C'$.

请你画出△$A'B'C'$.

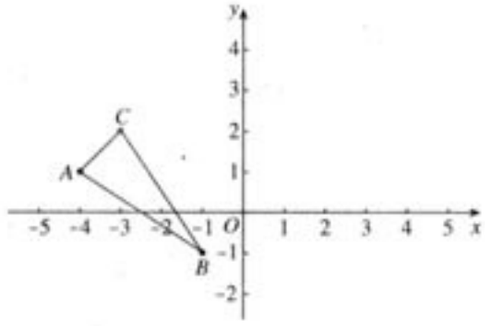


图 23.2-10

练习

下列各点中哪两个点关于原点 O 对称？

$A(-5, 0)$，$B(0, 2)$，$C(2, -1)$，$D(2, 0)$，$E(0, 5)$，$F(-2, 1)$，$G(-2, -1)$.

[1] 点 A、B、C 关于原点 O 的对称点的坐标分别是(4，−1)，(1，1)，(3，−2).

练习答案

$C(2, -1)$ 与 $F(-2, 1)$ 关于原点 O 对称.

探究得出的结论可以利用三角形全等加以证明.

对于不在坐标轴上的任一点 $P(x, y)$，作出点 P 关于原点的对称点 P'(连接 PO，在 PO 的延长线上截取 $OP'=OP$)．分别过点 P、P' 作 x 轴的垂线，垂足分别是 Q、Q'.

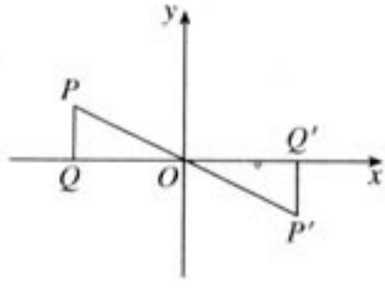
在 Rt△OPQ 和 Rt△$OP'Q'$ 中，

$$\angle OQP=\angle OQ'P'=90°,$$

$$\angle POQ=\angle P'OQ',$$

$$OP=OP',$$

$$\therefore \quad \mathrm{Rt}\triangle OPQ\cong\mathrm{Rt}\triangle OP'Q'.$$



$$\therefore \quad OQ=OQ',\ PQ=P'Q'.$$

[1] 前两个图形是中心对称图形，可在图中标注字母表示对称中心. 第三个图形不是中心对称图形.

正方形是中心对称图形，对称中心是它的对角线的交点. 正六边形是中心对称图形，对称中心是它的对角线的交点. 正三角形不是中心对称图形.

习题23.2

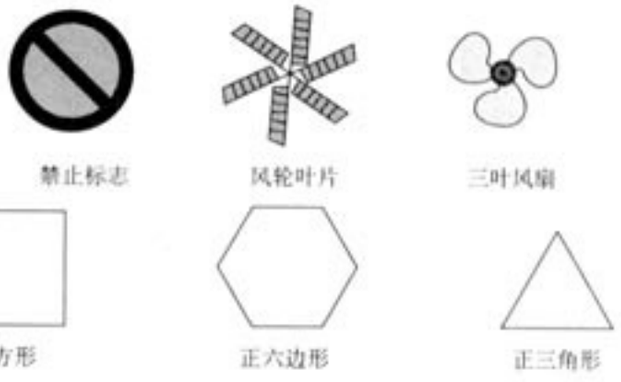
复习巩固 ▸▸

1. 分别画出下列图形关于点 O 的对称图形：



（第 1 题）

2. 下列图形是中心对称图形吗？如果是中心对称图形，指出其对称中心：[1]



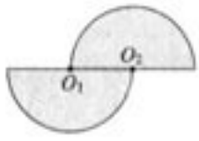
（第 2 题）

3. 四边形 $ABCD$ 各顶点坐标分别为 $A(5, 0)$，$B(-2, 3)$，$C(-1, 0)$，$D(-1, -5)$，作出与四边形 $ABCD$ 关于原点 O 对称的图形.

4. 已知点 $A(a, 1)$ 与点 $A'(5, b)$ 是关于原点 O 的对称点，求 a、b 的值.

综合运用 ▸▸

5. 如图，O_1、O_2 分别是两个半圆的圆心，这个图形是中心对称图形吗？如果不是，请说明理由；如果是，请指出对称中心.



（第 5 题）

也就是说，点 P 的坐标与点 P' 的坐标绝对值相等.

由点 P 与点 P' 在 y 轴两侧可知，点 P 的横坐标与点 P' 的横坐标符号不同. 同理，点 P 的纵坐标与点 P' 的纵坐标符号不同.

因此，点 P' 的坐标是 $(-x, -y)$.

当点 $P(x, y)$ 在坐标轴上时，上述结论仍然成立.

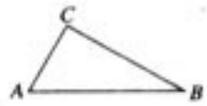
所以，点 $P(x, y)$ 关于原点的对称点是 $P'(-x, -y)$.

11. 例 2 是利用关于原点对称的点的坐标的关系画出与已知图形关于原点对称的图形. 在本例中，根据坐标关系，可以直接描出已知三角形三个顶点的对称点. 在例 2 中，让学生完成填空、画图，体会这种方法.

习题 23.2

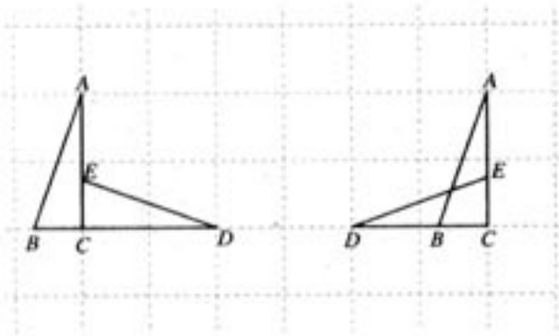
1. 第 1 题是根据中心对称的性质作对称图

6. 已知△ABC，试设计一种变换，得到另一个三角形，使得这两个三角形能够拼成一个以 AC、AB 为一组邻边的平行四边形.



（第 6 题）

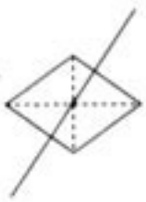
7. 图中△DCE 是由△ACB 经一次或两次变换得到的，你能指出用的是什么变换吗？



（第 7 题）

拓广探索 ▶▶

8. 过菱形对角线交点的一条直线，把菱形分成了两个梯形，这两个梯形是全等的吗？为什么？



（第 8 题）



（第 9 题）

9. 由两个全等的梯形可以拼成一个菱形吗？符合什么条件的两个全等梯形可以拼成一个菱形？

形. 第 2 题是识别中心对称图形. 第 3～4 题要运用关于原点对称的点的坐标的关系.

2. 在第 5 题中，这个图形绕线段 O_1O_2 的中点旋转 180°后与自身重合，是中心对称图形. 在第 6 题中，作△ABC 关于 BC 中点对称的△DCB，这两个三角形拼成一个四边形，这个四边形的对角线互相平分，所以它是一个平行四边形，并且以 AC、AB 为邻边. 第 7 题是观察两个图形之间的变换关系.

3. 在第 8 题中，由两个图形对称得出两个图形全等. 在第 9 题中，由菱形的邻边相等得出，梯形的一腰等于上底与下底的和.

[1] 可以在这个探索的基础上，探索中心对称的性质：任意画一个图形，作出这个图形绕某一点 O 旋转 180°后的图形，观察点 O 与对称点所连线段有什么关系.



信息技术应用 选学

探索旋转的性质

利用计算机中的画图软件可以探索以下问题.

探索旋转的性质[1]

任意画一个图形，作出这个图形绕某一点 O 旋转某个角度后的图形（图 1），改变点 O 的位置，或者改变其中一个图形的位置，再对这个图形作旋转变换，观察每组图形中对应点与旋转中心所连线段有什么关系，以及对应点与旋转中心连线所成的角有什么关系.

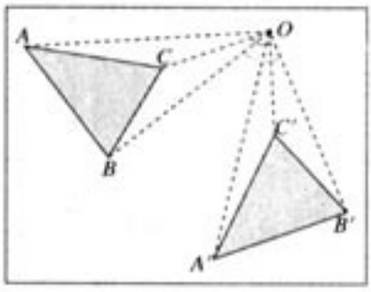


图 1

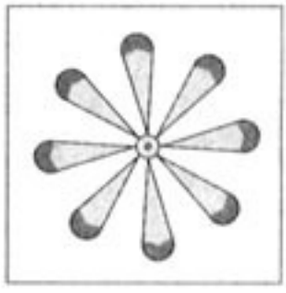


图 2

利用旋转设计图案

例如，利用旋转画一朵花（如图 2）.

第一步　先画出一个花瓣和花心，双击花心点（标记旋转中心）；

第二步　执行变换菜单中的旋转命令，输入适当的角度，进行旋转；

第三步　重复第二步作出多个花瓣.

探索关于原点对称的点的坐标的关系

画一个△ABC，以原点为中心作对称变换，得到△$A'B'C'$（图 3），度量点 A、A'的坐标，观察它们的坐标有什么关系；再度量点 B、B'的坐标，观察它们的坐标有什么关系.

改变三角形的位置，度量点 A、A'的坐标，观察它们的坐标有什么关系；再度量点 B、B'的坐标，观察它们的坐标有什么关系.

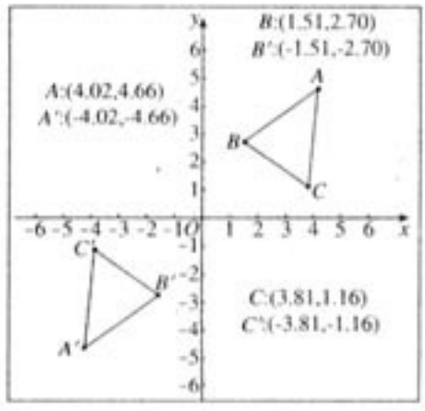


图 3

1. 利用计算机中的画图软件可以方便地作出一个图形绕某一点 O 旋转某个角度后的图形（如图 1）. 在图 1 中，可以利用软件的度量功能量出 OA、OB、OC、OA'、OB'、OC'、$\angle AOA'$、$\angle BOB'$、$\angle COC'$，从而发现对应点到旋转中心的距离相等；对应点与旋转中心所连线段的夹角等于旋转角. 改变点 O 的位置或改变这个图形的位置，再对这个图形作旋转变换，仍然可以得出上述结论.

2. 利用旋转变换可以进行图案设计，借助计算机则更加方便. 有条件的话，可以让学生充分发挥自己的想象力，进行这方面的尝试.

3. 利用计算机中的画图软件可以方便地作出一个图形关于原点 O 的对称图形（如图 3）. 在图 3 中，利用软件的度量功能得出 A、B、C、A'、B'、C'的坐标，从而发现：两个点关于原点对称时，它们的坐标符号相反. 改变这个图形的位置，仍然可以得出上述结论.

23.3 课题学习　图案设计

我们学过平移、轴对称和旋转. 我们可以利用这些图形变换中的一种进行图案设计，还可以利用这些图形变换的组合进行图案设计. 例如，图 23.3-1 中的图案就是由  经过旋转、轴对称和平移得到的.

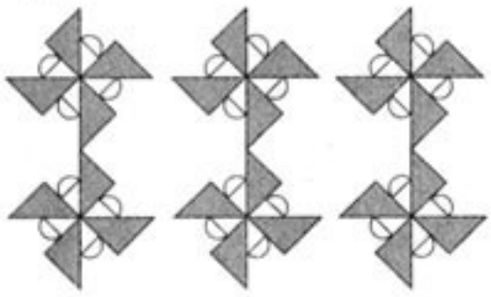


图 23.3-1

以点 O 为旋转中心将  逆时针旋转 90°三次作出图 23.3-2，[1]然后以 l 为对称轴作出图 23.3-3. 平移图 23.3-3 就可以作出图 23.3-1 中的图案.[2]



图 23.3-2

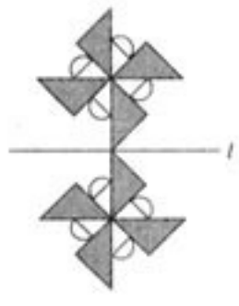


图 23.3-3

你能搜集一些利用平移、轴对称和旋转的组合设计的图案吗？你能利用这些图形变换的组合自己设计一些图案吗？[3]试试看，并与同学互相交流.

[1] 也可以顺时针旋转.

[2] 作出图 23.3-2 后也可以先平移这个图案，再作轴对称变换，得到图 23.3-1 中的图案.

[3] 有条件的地区，可以让学生尝试用计算机进行设计.

1. 教科书在七年级下册第五章“相交线与平行线”安排了平移以及利用平移进行图案设计的内容；在八年级上册第十四章“轴对称”安排了轴对称以及利用轴对称进行图案设计的内容，并指出“将平移和轴对称结合起来，可以设计出更美丽的图案”. 通过平移与轴对称的学习，学生已经具备了一定的用图形变换进行图案设计的知识与经验，这些是学生运用平移、轴对称、旋转的组合进行图案设计的基础.

2. 学生可以通过本节的例子体会用图形变换的组合进行图案设计，还可以搜集一些用图形变换的组合设计的图案加以欣赏并分析出其中用到的图形变换. 在此基础上，学生可以利用图形变换的组合自己设计出一些图案.

教师应鼓励学生积极思考本课题涉及的内容，大胆想象设计并实施设计方案. 应在本课题的学习过程中让学生开展合作交流，相互协作、共享成果.

[1] 旋转角是72°.

[2] 在活动2中，先作点A关于x轴的对称点B，再作点B关于y轴的对称点C，则点A与点C关于原点对称. 如果先作点A关于y轴的对称点B，再作点B关于x轴的对称点C，也有点A与点C关于原点对称.

数学活动

活动1

如图1，先准备一个花瓣模板，再选一点作为花心，然后围绕花心旋转花瓣模板，每次画出一个花瓣，重复几次就可以画出一朵花（图2）.

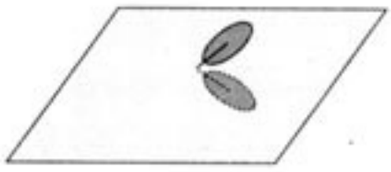


图1



图2

你画的是几瓣花？经过了几次旋转？量一量每次旋转的旋转角是多少度.[1]

看看谁的花瓣分布得均匀，向同学介绍一下经验.

活动2

在平面直角坐标系中选一点$A(-3, 2)$，作点A关于x轴的对称点，得到点B，作点B关于y轴的对称点，得到点C. 点A与点C有什么关系？把点A的坐标换成其他数，再试一试. 你能利用对称点坐标的关系说明你发现的规律吗？[2]

1. 活动1是用花瓣模板画花的活动，它涉及旋转中心与旋转角的确定. 可以让学生通过活动复习巩固所学知识.

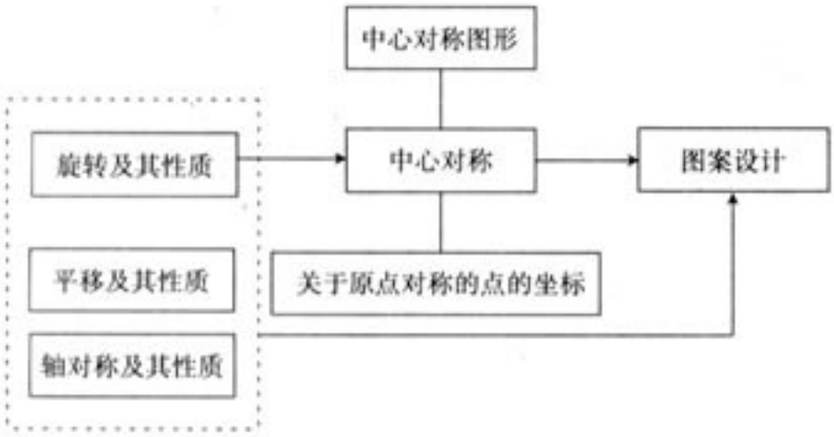
2. 活动2从坐标的角度揭示了中心对称与轴对称的关系. 在这个活动中，点$A(-3, 2)$关于x轴的对称点B的坐标是$(-3, -2)$，点$B$$(-3, -2)$关于$y$轴的对称点$C$的坐标是$(3, -2)$. 由此发现，点$A(-3, 2)$与点$C(3, -2)$关于原点对称. 把点$A$的坐标换成其他的数，点$A$与点$C$仍有上述关系.

一般地，点$A(x, y)$关于x轴的对称点B的坐标是$(x, -y)$，点$B(x, -y)$关于y轴的对称点C的坐标是$(-x, -y)$. 因为点A的坐标是(x, y)，点C的坐标是$(-x, -y)$，所以点A与点C关于原点对称.

由此可知，将一点作上述两次轴对称变换相当于作出这个点关于原点的对称点.

小　结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

1. 你能举出旋转的实例吗？旋转有哪些性质？

2. 在现实世界中，存在着大量的中心对称现象，你能举出一些例子吗？成中心对称的图形有什么特点？

3. 在我们学过的图形中，哪些是中心对称图形？

4. 在平面直角坐标系中，关于原点对称的点的坐标有什么关系？请结合例子说明.

5. 用平移、轴对称和旋转的组合设计一个图案.

6. 结合本章内容，进一步体会图形变换的作用.

1. 可以结合实例复习巩固旋转的概念和性质. 在此基础上，复习巩固作简单平面图形旋转后的图形，利用旋转进行简单的图案设计等内容.

2. 可以类比轴对称复习巩固中心对称的概念和性质，以及作与简单平面图形成中心对称的图形的方法.

3. 可以结合线段、平行四边形复习巩固中心对称图形的概念. 中心对称图形的概念也可以与轴对称图形的概念进行类比.

4. 根据关于原点对称的点的坐标的关系，可以方便地在平面直角坐标系中作与原点成中心对称的图形. 可以通过这样的例子对这一关系加以复习巩固.

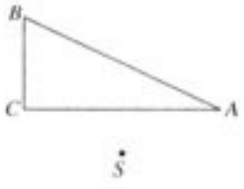
5. 用平移、轴对称、旋转的组合进行图案设计可以复习巩固已学图形变换的内容，并体会图形变换的作用. 这一点在小结时应予以关注，使本章小结起到对已学图形变换进行阶段性小结的作用.

[1] 可以进一步得出，第 2 题中的图案绕正方形对角线交点顺时针（或逆时针）旋转 90°与自身重合.

复习题23

复习巩固 ▸▸

1. 把直角三角形 ABC 以 S 为中心顺时针旋转 30°，画出一个新的图形.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 上面的图案是由什么基本图案经怎样的旋转得到的？[1]

3. 在艺术字中，有些汉字或字母是中心对称图形. 下面的汉字或字母，是中心对称图形吗？如果是，请标出它们的对称中心.



（第 3 题）

综合运用 ▸▸

4. 已知线段 AB，用已经学过的图形变换完成以下各题：

（1）画出一个以这条线段为一边的正方形；

（2）画出一个以这条线段为一边的等边三角形；

（3）画出一个以这条线段为一边，一个内角是 30°的菱形.



（第 4 题）

5. 如图，$\triangle ABC$ 和 $\triangle ECD$ 都是等边三角形，$\triangle EBC$ 可以看作是 $\triangle DAC$ 经过什么图形变换得到的？说明理由.

1. 第 1～3 题复习巩固旋转的和性质，以及中心对称图形的概念. 第 2 题中的图案可以看作由四个直角三角形组成的. 把其中一个直角三角形当作基本图案，绕正方形对角线交点顺时针（或逆时针）旋转 90°三次就得到第 2 题中的图案.

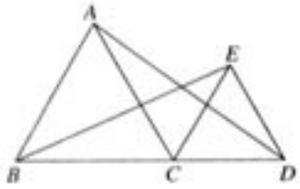
2. 完成第 4 题有多种方法. 例如，可以用多种方法完成其中的第（1）题.

方法 1：AB 绕点 B 顺时针旋转 90°，得到线段 BC. BC 绕点 C 顺时针旋转 90°，得到线段 BD. CD 绕点 D 顺时针旋转 90°，得到线段 DA.

方法 2：过 AB 的中点 P 作 OP，使 $OP=AP$. AB 绕点顺时针（或逆时针）旋转 90°三次.

方法 3：AB 绕点 B 顺时针旋转 90°，得到线段 BC. 以 AC 为对称轴，作与由线段 AB、BC 组成的图形对称的图形.

方法 4：AB 绕点 B 顺时针旋转 90°，得到线段 BC. 平移 AB，得到线段 CD. 平移 BC，得到线段 AD.



（第5题）

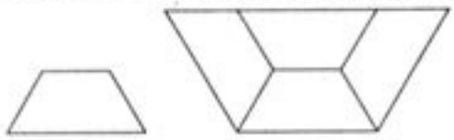


（第6题）

6. 经过什么样的图形变换可以把右边倾斜的树放在左边直立的位置？[1]

拓广探索 ▶▶

7. （1）中的梯形符合什么条件时，可以经过旋转和轴对称形成（2）中的图案？



（1）　　（2）

（第7题）

[1] 本题要用到图形变换的组合.

第5题是发现两个三角形的变换关系，这只要分析出顶点间的变换关系.

第6题是探索两个图形的变换关系.

3. 可以由（2）中图案的特点分析出（1）中梯形应符合的条件.

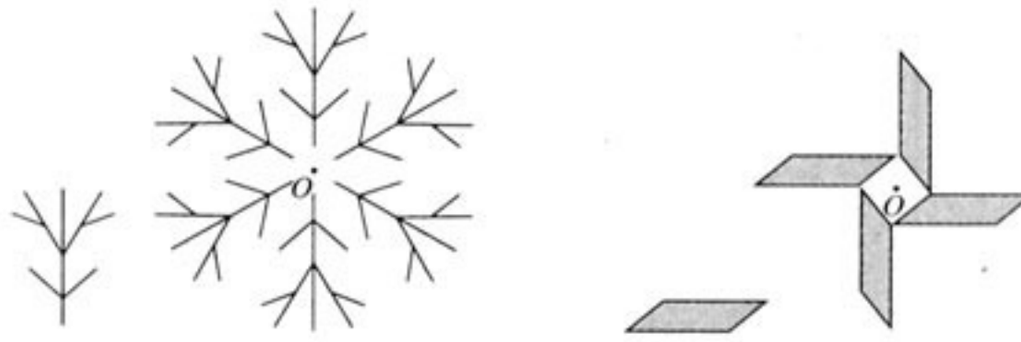
Ⅲ 习题解答

习题 23.1

第 1～4 题略.

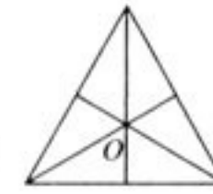
5. 左图中，点 O 为旋转中心，旋转角为 $60°$.

右图中，点 O 为旋转中心，旋转角为 $90°$.



（第 5 题）

6. 五角星图案，绕着点 O 旋转，旋转角为 $72°$ 时，旋转后的五角星能与自身重合. 如图，等边三角形绕着点 O 旋转，旋转角为 $120°$ 时，旋转后的等边三角形能与自身重合.



（第 6 题）

7. 如图，以点 O 为旋转中心将逆时针旋转 $90°$ 三次得到风车图案.



（第 7 题）

8. 旋转角是 $72°$.

9. ∵ $\triangle AEC$ 是等边三角形，

∴ $AE=AC$，$\angle EAC=60°$.

同理 $AB=AD$，$\angle BAD=60°$.

∴ 以点 A 为旋转中心将 $\triangle EAB$ 顺时针旋转 $60°$ 就得到 $\triangle CAD$.

∴ $\triangle EAB\cong\triangle CAD$.

∴ $BE=DC$.

习题 23.2

第 1～3 题略.

4. $a=-5$，$b=-1$.

5. 这个图形是中心对称图形. 对称中心是线段 O_1O_2 的中点.

6. 作出与 $\triangle ABC$ 关于 BC 的中点对称的 $\triangle DCB$，则 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DCB$ 能够拼成一个以 AC、AB 为一组邻边的平行四边形.

7. 左图中，以点 C 为旋转中心，顺时针旋转 $90°$.

右图中，以点 C 为旋转中心，顺时针旋转 $90°$，再以 CE 所在直线为对称轴作轴对称.

8. 这两个梯形全等. 这两个梯形关于菱形的对角线交点对称.

9. 两个全等的梯形不一定能拼成一个菱形. 上底加下底等于一腰的两个梯形可以拼成一个菱形.

复习题 23

第 1～4 题略.

5. ∵ $\triangle ECD$ 是等边三角形，

∴ $CD=CE$，$\angle DCE=60^\circ$.

同理 $CA=CB$，$\angle ACB=60^\circ$.

∴ 以点 C 为旋转中心将$\triangle DAC$ 逆时针旋转 60°就得到$\triangle EBC$.

6. 以两树底端的垂直平分线为对称轴作轴对称变换，再作旋转变换.

7. (1) 中梯形是底角为 60°的等腰梯形时，可以经过旋转和轴对称形成 (2) 中的图案.

Ⅳ 教学设计参考案例

23.1 图形的旋转（第 1 课时）

教学任务分析

教学目标	知识技能	通过观察具体实例认识旋转，探索它的基本性质.
	数学思考	在发现、探究的过程中完成对旋转这一图形变化从直观到抽象、从感性认识到理性认识的转变，发展学生直观想象能力，分析、归纳、抽象概括的思维能力.
	解决问题	在了解图形旋转的特征，并进一步应用所掌握的这些特征进行旋转变化的学习过程中，让学生从数学的角度认识现实生活中的现象，增强数学的应用意识.
	情感态度	学生在经历了实验探究、知识应用及内化等数学活动中，体验数学的具体、生动、灵活，调动学生学习数学的主动性.
重点	归纳图形旋转的特征，并能根据这些特征绘制旋转后的几何图形.	
难点	对图形进行旋转变换	

教学流程安排

活动流程图	活动内容和目的
活动 1　感受旋转	观察、发现现实生活中一些旋转现象的共同特点.
活动 2　实验探究图形旋转的特征	对几何图形进行旋转变换（手工绘图或几何画板绘图），探究图形旋转的特征.
活动 3　知识应用	解决蕴含旋转变换的实际问题和数学问题.
活动 4　内化小结	对比轴对称、平移变换进行学习反思，在思辨中完成知识内化，完善原有认知结构.

教学过程设计

问题与情境	师生行为	设计意图
「活动 1」 问题 （1）观察实例（教科书图 23.1-1，23.1-2），回答问题： ①钟表的指针在不停地旋转，从 3 点到 5 点，时针转动了多少度？ ②风车风轮的每个叶片在风的吹动下转动到新的位置. 这些现象有哪些共同特点？ （2）巩固练习：教科书第 63 页练习 1，2，3.	教师演示课件（或展示图片），提出问题①②. 学生观察、思考、回答问题. 教师引导学生归纳出旋转的定义：把一个图形绕着某一点 O 转动一个角度的图形变换叫做旋转，点 O 叫做旋转中心，转动的角叫做旋转角. 在本次活动中，教师应重点关注： （1）学生观察实例的角度； （2）在学生发现实例现象的共同特点后，要求学生试着描述出旋转的定义.	在普通、熟悉的现象中探求数学概念、定理，易使学生产生亲切感，容易较快进入学习角色，避免了由于教学内容脱离现实而引发的学习兴趣不高，被动学习的现象. 由于学生在生活中或多或少地感受到过旋转，所以回答出教师所展示的实例中的共同特点并不困难，也能较顺利地归纳出旋转的数学定义，所以在活动 1 中不仅获得了知识，同时也可感受到数学可以是具体的、生动的. 活动 1 中设置巩固练习的目的是让学生从数学的角度认识现实生活，从而内化旋转的定义，为活动 2 的顺利进行打好基础.
「活动 2」 将一个已知三角形 $\triangle ABC$ 围绕一旋转中心转动后，得到三角形 $\triangle A'B'C'$（教科书图 23.1-3）. （1）线段 OA 与线段 OA' 间有什么关系？ （2）$\angle AOA'$ 与 $\angle BOB'$ 有什么关系？ （3）$\triangle ABC$ 形状和 $\triangle A'B'C'$ 大小有什么关系？	教师设计数学探究实验，在让学生动手绘制图形的旋转变换或用几何画板操作图形的旋转变换后，指出进一步探究的方向（问题 1，2，3），组织学生交流，得出正确结论. 学生独立进行数学实验，按照教师提出的探究方向度量、分析、归纳、抽象概括出图形旋转的特征. 在活动 2 中教师应关注学生通过动手实验后发现的“新大陆”，即图中所存在的其余线段、角的相等关系，并对其中正确的发现予以肯定，鼓励学生课后进行论证. 同时还应明确指出问题（1）、（2）、（3）中涉及的是旋转变换的本质特征，应重点掌握.	通过设置数学实验让学生进行独立的探究学习，促使学生主动参与数学知识的“再发现”，培养学生动手实践能力，观察、分析、比较、抽象、概括的思维能力.

续表

问题与情境	师生行为	设计意图
「**活动 3**」 1. 巩固练习：教科书第 64 页练习 1，2，3. 2. 如教科书图 23.1-4，E 是正方形 $ABCD$ 中 CD 边上任意一点，以点 A 为中心，把△ADE 顺时针旋转 90°，画出旋转后的图形.	在学生归纳出图形旋转的特征后，教师提出相关的数学问题. 学生独立思考、分析、解答问题. 在本次活动中，教师应重点关注： (1) 学生在画出图形后，能否准确地运用旋转的基本特征表达出作图的理论依据； (2) 学生中作图的不同方法.	活动 3 是所学知识的应用过程. 通过让学生解决蕴含所学知识的实际问题和数学问题将新知识内化入学生已有的认知结构中.
「**活动 4**」 小结 对比平移、轴对称两种图形变换，旋转变换与另两种变换有哪些共性与区别? 2. 课后作业： 教科书习题 23.1 第 1～4、9 题.	教师引导学生对比已学过的平移、轴对称、旋转变换进行知识梳理. 学生进行对比、分析、归纳、小结. 本次活动中，教师应重点关注： (1) 学生能否抓住三种图形变换的本质共性，即它们都是全等变换； (2) 学生对三种图形变换特性的理解.	让学生通过反思已学过的有关图形变换的知识，深入理解旋转变换的本质特征. 同时为以后进行图案设计活动作知识储备.

教学设计说明

本节课是九年级上册第二十三章“23.1　图形的旋转”的第一课时，是一节概念课. 在此之前，学生已经学习了轴对称、平移两种图形变换，对图形变换已具有一定的认识，通过本节课的学习，学生对图形变换的认识会更完整.

美国数学教育家波利亚指出：“学习任何东西，最好的途径是自己去发现”，为了有效地学习，学生应在教师设计的实验情境中，尽量多地自己去发现学习的知识、方法. 所以，本节课的教学以观察、分析现实生活中的实例为切入点，以探究活动为主线设计了四个数学活动. 让学生通过具体实例认识旋转，通过动手进行数学实验探索旋转的基本性质，通过解决实际问题、数学问题掌握旋转变换中对应点到旋转中心的距离相等、对应点与旋转中心连线所成的角彼此相等的性质.

值得注意的是，数学实验与数学问题在数学的起始课中应是相辅相成的、缺一不可的. 如果课堂中一味地侧重动手实验而忽视了必要的问题解决，那课堂会显得浮躁、缺乏数学内涵. 反之，一节课中如果充斥着各类的习题，那课堂会沉闷、缺乏数学的灵性与生动.

23.3 图案设计（第1课时）

教学任务分析

教学目标	知识技能	利用图形的平移、轴对称、旋转变换设计组合图案.
	数学思考	学生应用各种图形变换的特征设计属于自己的图案，在对所学数学知识进行“再认识”的同时进行着独立的数学创造，发展了形象思维和创造性思维能力.
	解决问题	在应用图形变换进行图案设计的过程中，体会数学知识在创造性活动中的应用价值，增强学生数学的应用意识.
	情感态度	在经历应用数学知识进行独立的图案设计的活动中，感受到数学美与创造的同时获得自我创造的成就感，激发创造性地应用数学知识的热情.
重点	利用各种图形变换设计组合图案.	
难点	将基本图形创造性地应用平移、轴对称、旋转等变换设计出和谐、丰富、美观的组合图案.	

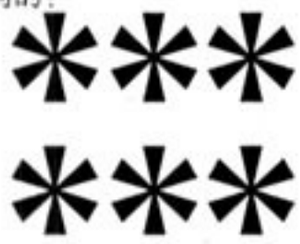
教学流程安排

活动流程图	活动内容和目的
活动1　知识回顾	回忆三种变换的基本特征，归纳其共同特征.
活动2　图案辨析	从图形变换的角度观察、认识组合图案，总结出图案设计的步骤.
活动3　图案搜索	展示学生搜集的图案，继续图案辨析.
活动4　图案设计	分组进行图案设计.
活动5　成果展示	各组展示设计出的组合图案.
活动6　反思小结	归纳图案设计中蕴含的数学基础知识、基本思想方法.

教学过程设计

问题与情境	师生行为	设计意图
「**活动1**」 1. 观察三种图形变换的过程. 2. 回答问题： （1）平移、旋转和轴对称变换的基本特征； （2）归纳三种图形变换的共性.	教师演示一个三角形分别经过平移、旋转和轴对称变换后得到其对应图形的变换过程，学生观察图形，回忆三种图形变换的基本特征，并归纳出三种变换的共性.	活动1中教师将平移、旋转和轴对称变换的全过程通过电脑逐一演示，帮助学生回顾图形变换的基本特征，为进一步从图形变换的角度辨析组合图案奠定知识基础.

续表

问题与情境	师生行为	设计意图
「活动2」 1. 观察下面的图形（教科书图23.3-1），分析它是将哪种基本图形经过了哪些变换后得到的？ 2. 观察下面的图形，分析它是将哪种基本图形经过了哪些变换后得到的？  3. 继续观察上述图案，感受简单图案的丰富变换.	学生观察图形，将基本图形从组合图案中分离出来，并再现此基本图形的变换过程. 教师演示课件，突出基本图形经过不同的图形变换后得到组合图案的过程. 在本次活动中，教师应当重点关注： （1）学生能否准确地运用数学语言表述基本图形进行平移、旋转和轴对称变换的过程； （2）让学生感受到简单的基本图形可以通过不同的变换组合出丰富多彩的图案.	通过让学生在组合图案中辨析出基本图形经过了哪些图形变换，再现了组合图案的设计过程，使学生认识到数学是图形变换的根本，数学意义下图形变换的本质是“简单图形的复杂变换”. 图案2是利用《几何画板》设计的，借助几何画板的功能可以演示出简单的等腰三角形可以组合出丰富的、富于变换的美丽图案. 直观的图形旋转演示出图形变换的奇妙与美丽，这是让学生感受数学的生动、灵活、美妙的切入点，也是调动学生“创造热情”的好时机.
「活动3」 展示学生课前搜集到的利用平移、旋转和轴对称变换设计的组合图案. （1）剪纸中的三种变换； （2）艺术图案中的三种变换； （3）电脑设计出的图形变换. 教师提出问题：“进行图案设计的步骤是什么？”	学生展示其搜集到的组合图案，继续进行图案辨析. 在本次活动中，教师应当重点关注学生搜集到的图案应是数学意义下的组合图案而非美术中的组合图案，以便于学生辨析出其中的基本图形及其作出的不同变换.	随着新课程的不断推广，在教学中注重让学生主动参与、勤于动手，培养学生搜集和处理信息的能力逐渐成为教师关注的重点. 活动3便是基于此点而设计的，它体现了学生的自主学习，同时，也体现出数学源于生活，引导学生善于用数学的眼光审视生活.
「活动4」 分组进行组合图案的设计.	教师指导学生选择简单的基本图形，进行不同的图形变换，组合出美丽的图案. 在本次活动中，教师应当重点关注： （1）学生选取的基本图形不要过于复杂； （2）指导学生依据对应图形全等这一图形变换的共性剪出多个基本图形，然后再依据各种变换的基本特征拼出组合图案.	对学生进行创新意识的培养一直是教师在教学中追求的最高目标，这一宗旨具体体现在对学生创造性思维的训练中. 活动4进行的图案设计，即是让学生创造性地应用数学知识的实践过程. 分组合作在活动4中为学生创造了与人合作的机会. 让学生在合作中学习与人交流，集思广益.

续表

问题与情境	师生行为	设计意图
「**活动5**」 1. 展示确定的基本图形及变换出的组合图案. 2. 简单说明你的图案设计中运用了哪些图形变换?	教师组织学生将各组的作品在全班展示. 各组学生派代表展示设计成果. 在本次活动中，教师应当重点关注学生能否准确地用语言表述组合图案的设计过程及设计中运用了哪些图形变换.	以学生为主展示其创作成果，在促进学生进行数学交流的基础上增强学生表达与交流的意识.
「**活动6**」 1. 归纳提升. 2. 欣赏变换所产生的美.	教师引导学生反思图案设计的关键，即选取简单的基本几何图形，通过不同的变换组合出丰富的图案. 突出图案设计是创造性地运用数学知识的实践过程，让学生感受到创造的快乐，欣赏生活中由变换而产生的美.	数学是文化的一部分，活动6中通过反思图案设计的过程和欣赏变换产生的美，展现了数学的应用价值和美学价值. 帮助学生了解数学是图形变换的根本，了解数学在人类文明发展中的作用，促进其形成正确的数学观.

教学设计说明

课题学习是新教材中新增加的内容，与传统的教学课程相比，它更注重学生培养学生的实践能力与探究精神. 在新课程的教育理念指导下，学生的数学活动不应只局限于接收、记忆与模仿，应加强自主探索、动手实践、合作交流等多种学习方式. 这些方式有助于调动学生主动学习的热情. 这节课的设计中教师正是以引导学生动手实践，创造性地运用数学知识进行图案设计为主线而展开的，意在促进学生形成数学应用意识，提高实践能力.

现代信息技术的应用也为这节课注入了活力，通过计算机演示使学生认识到数学意义下的图形变换可以创造出奇妙与美丽的图案，让学生感受数学的文化价值与美学价值.

V 拓展资源

一、知识的拓广延伸及相关史料

1. 中心对称在生活中的应用

数学是自然科学的基础，作为数学图形的一种特殊的位置关系的中心对称，当然不会脱离自然而孤立存在. 如果我们能时常留心观察我们的日常生活，就不难发现，在我们的身边存在着各种各样的中心对称图形.

中心对称应用于广告商标的设计制作，往往能以简单的色彩、线条，勾画出生动、富于创意和内涵的作品. 例如图1中的商标图案，图2中的车标图案.



图 1



图 2

旋转的物体必须具有稳定性，而中心对称的设计恰恰满足了旋转物体的这一需求. 因而在工农业生产制作转动工具时，都不可避免地考虑应用中心对称的设计，小的如日常生活中单车、闹钟内的齿轮；大的如推动飞机、轮船的轮桨，风力发电用的风车等等.

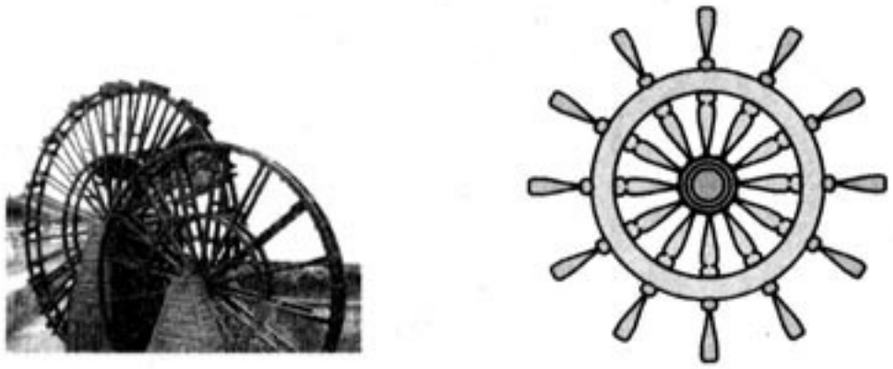


图 3

在日常使用的一些生活工艺品（如：地毯、挂毯），也不难发现中心对称的影子.



图 4

中心对称不仅在商标、汽车标志、工艺品等设计中备受青睐，在世界各地的银行标志中也很受欢迎. 例如我国的中国银行和工商银行的标志.



图 5

2. 中心对称与数学美

说到美，中心对称的美是公认的，从古到今以中心对称设计的图形不胜枚举. 六角形亮晶晶的雪花，不正是自然对中心对称的美的概括吗?

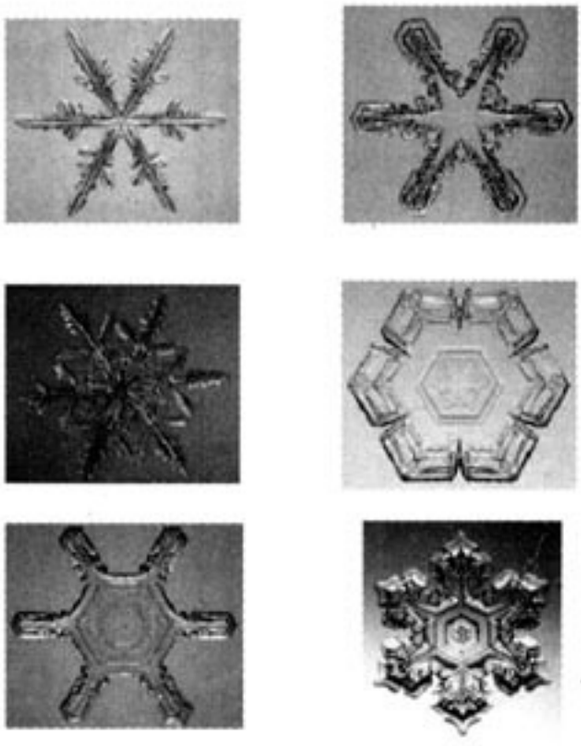


图 6

另外，还会发现中国古代的太极图也是中心对称美的充分体现，同时有许多图案又是以太极图为基础进行加工而得来的，因此也体现出中心对称的美. 请看下面一组图案.



图 7



图 8



图 9

3. 圆的对称性的启示

在具有对称性的平面图形中，圆虽然简单，却很神奇. 它是唯一具有无穷多条对称轴的轴对称图形，它又是特殊的中心对称图形. 我们都知道，中心对称图形绕其对称中心旋转 180°后所得到的图形与原图形重合，而将圆绕其中心旋转任意一个角度后所得的图形与原图形重合，这就是圆所独有的旋转不变性.

我们曾经见过这样一道智力游戏题：设有数量足够多的各种面值的硬币，让两个人轮流在圆形桌面上摆硬币，每次摆一个，个个不能互相重叠，也不能有一部分落在桌面的边缘外. 这样，经过多次以后，谁先摆不下硬币就算输. 试证：先摆的人有办法使对方一定输. 先摆的人为什么能稳操胜券呢？就因为圆形桌面是中心对称图形！“先手”只要把第一个硬币摆在桌面的中心，以后不管“后手”把硬币摆在哪里，“先手”总可以把相同面值的硬币摆在与“后手”所摆硬币（关于中心）对称的地方. 这样，只要“后手”有地方摆得下，“先手”也总可以摆得下. 因此“后手”准输.

这里仅仅利用了圆的中心对称性质. 因此，本题中把圆形桌面改成矩形桌面、椭圆形桌面或其他具有中心对称性的图形的桌面，问题的结论仍然不变.

图 10 是中国著名的“太极图”，实际上，它是把一个圆分成阴阳两个部分，因而具有“阴”和“阳”对立统一的深刻含义. 我们用图 11 说明太极图画法：在一个大圆内以其半径为直径，做两个

相外切且都内切于大圆的小圆，然后擦掉虚线所示的两个半圆，就画成一个太极图.



图 10

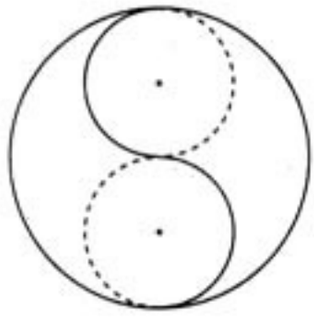


图 11

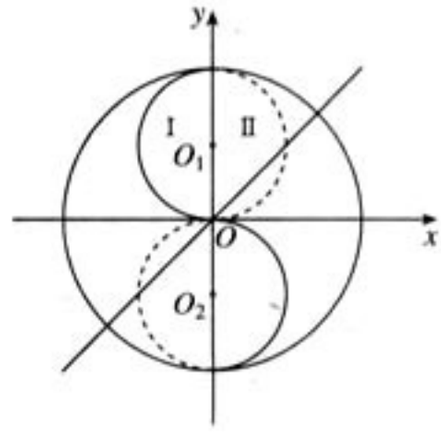


图 12

面对着这个神奇的图案，试想想，我们能够引一条直线把太极图上阴阳两个部分的面积都平分吗？这个问题的解也跟对称性有关. 为了叙述的方便，我们以大圆中心 O 为原点，两小圆的连心线 O_1O_2 为 y 轴，建立一个直角坐标系（图 12）. 设大圆的面积为 4，则阴阳两部分的面积都是 2，两个小圆的面积都是 1. 大圆在第一象限部分的面积也是 1，小圆在第二象限部分 I 的面积为 $\frac{1}{2}$. 图形的对称性告诉我们，所作的直线必须通过大圆中心 O（即原点），它应该把大圆在第一象限的部分分割出面积等于 $\frac{1}{2}$ 的部分 II，II 跟 I 即拼成面积等于 1 的图形. 因此，所作的直线必定是第一象限的两坐标轴夹角的平分线. 同样第三象限的两坐标轴夹角的平分线也平分太极图的另一部分的面积. 因此，第一、第三象限的两坐标轴夹角的平分线就是所求的直线. 可以证明，这是唯一符合条件的直线.

4. *旋转对称与分形*

分形是数学中新近崛起的一个分支，现在分形理论已经被应用到许多领域，特别是艺术领域. 目前所知第一个分形例子是由文艺复兴时期德国著名画家丢勒给出的.

1471 年 5 月 21 日丢勒生于德国纽伦堡（Nuremberg）. 其父精于金银细工，丢勒自幼随父学艺，除金银细工外兼习绘画. 丢勒在木版画、铜版画、油画、绘画理论方面多有建树，他各个时期的自画像是最全的也是最细致准确的.

丢勒热爱数学，仔细研究过“比例”问题，并把它们用于绘画艺术. 他说：“美究竟是什么，我不知道.”“我不知道美的最后尺度是什么.”但他认为这个问题可以用数学来解决. 他说：“如果通过数学方式，我们就可以把原已存在的美找出来，从而更接近完美这个目的.”这与当时意大利艺术界对于美具有普遍性、规律性的看法是一致的，也表明他对于自然科学和数学的信心.

下面我们来看一看丢勒构造的第一个分形实例（仅限于目前的资料）. 他首先画出一个正五边形，然后沿每边向外再作 5 个正五边形，这样又构成了另一个更大的正五边形轮廓. 原边长 BD 与新边长 CD 之比为：$r=\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{1}{2+2\cos 72^\circ}$.

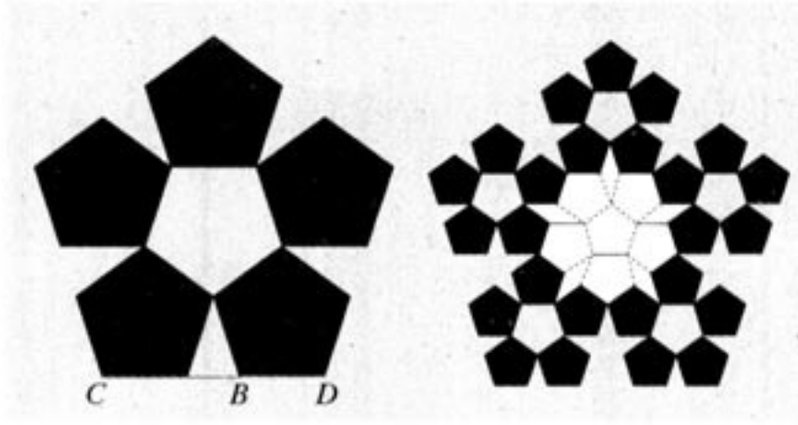


图 13

现在反过来操作，给定一个很大的正五边形，设边长为 CD，由 CD 计算出内嵌的 5 个小正五边形的边长 BD，画出这 5 个小正五边形（如果算上中间的一个小正五边形，则正好是 6 个）. 不断重复此过程，确实可以得到有无穷自相似结构的分形对象. 丢勒正五边形分形显然有五次旋转对称性.

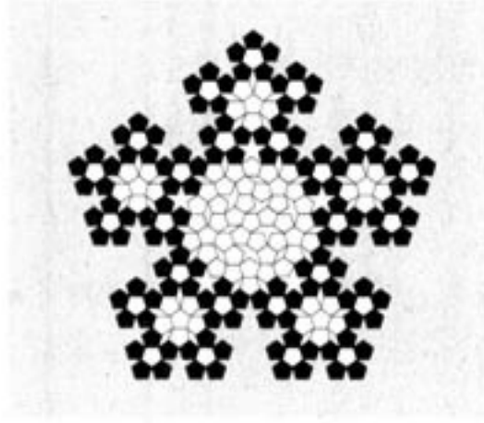


图 14　按照著名画家丢勒的想法构造的正五边形分形

5. 旋转变换

将平面图形 F_1 绕平面内的一个定点 O 按一定方向旋转一个定角 θ，得到平面图形 F_2，这样的变换称为旋转变换. O 叫做旋转中心，θ 叫做旋转角. 旋转角为 180° 的旋转变换是中心对称变换.

旋转变换前后的图形具有如下性质：

（1）对应线段相等，对应角相等；

（2）对应点位置的排列次序相同；

（3）任意两条对应线段所在直线的夹角都等于旋转角 θ；

（4）旋转中心 O 是旋转变换下的不动点.

通过图 15 看到，点 A 逆时针旋转 θ 到 A_1，点 B 逆时针旋转 θ 到 B_1，则直线 AB 在逆时针旋转 θ 的变换下变为直线 A_1B_1. 设直线 AB 与直线 A_1B_1 的交点为 P，则可以证明 $\triangle OAB \backsimeq \triangle OA_1B_1$. 推得线段 $AB=A_1B_1$，$\angle BPB_1=\theta$，即从直线 AB 到直线 A_1B_1 所夹的角等于旋转角 θ.

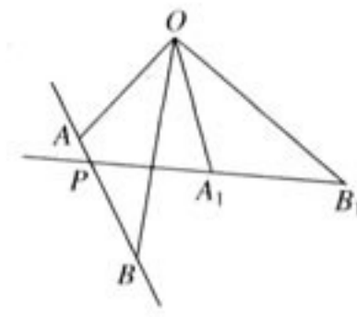


图 15

旋转变换在平面几何中有着广泛的应用，特别是在解（证）有关等腰三角形、正三角形、正方形等问题时，更是经常用到的思维方法.

6. 利用旋转变换作图

尺规作图是平面几何的重要内容，掌握好尺规作图有助于我们探索

解题思路，有助于加深我们对平面几何的理解与认识. 有些作图问题，如果仅从基本作图方法考虑，问题解决起来比较困难，但如果我们从旋转变换的角度出发，问题就变得容易思考了.

例 1 已知三条互相平行的直线 a，b，c，试作等边三角形，使其三个顶点分别在 a，b，c 上.

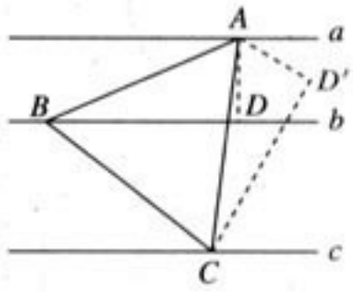


图 16

分析：假设$\triangle ABC$ 已经作出来，如图 16. 作 $AD\perp b$，交 b 于 D 点. 当我们将$\triangle ABC$ 绕 A 点顺时针旋转 60°时，Rt$\triangle ADB$ 跟着旋转到$\triangle AD'C$ 处，因此，可以确定点 C.

作法：在直线 a 上取点 A，作 $AD\perp b$，D 为垂足，再作 $AD'=AD$，且$\angle DAD'=60°$，过 D' 作 $D'C\perp AD'$，交直线 c 于点 C，则 AC 为正三角形的边长. 以 AC 为半径，A 点为圆心画弧，交直线 b 于点 B，$\triangle ABC$ 即为所求.

注意，AD'可以在 AD 的右侧，也可以在 AD 的左侧，确定的 A 点就有两解.

例 2 已知定点 P 到正$\triangle ABC$ 三个顶点的距离分别为 4，5，6，求作正$\triangle ABC$.

分析：本题的含义就是要从 $PA=4$，$PB=5$，$PC=6$ 出发，求出正$\triangle ABC$ 的边长. 我们假设正$\triangle ABC$ 已经作出，如图 17，将$\triangle APC$ 绕 A 点顺时针旋转 60°，到$\triangle AP'B$ 处，连接 $P'P$，即可得到$\triangle AP'P$ 为正三角形，而 $P'B=6$，$P'P=4$，于是得到下面的作法.

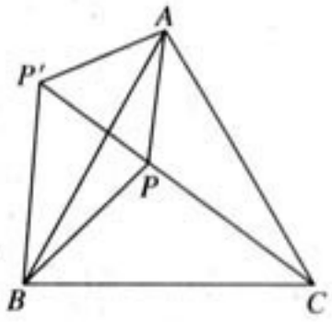


图 17

作法：作以 4，5，6 为边的$\triangle BP'P$（其中 $P'B=6$，$P'P=4$，$PB=5$），在形外作正$\triangle AP'P$，连接 AB，则 AB 为正三角形的边长，再以 AB 为边作出正$\triangle ABC$（使点 P 在$\triangle ABC$ 内部）.

例 3 已知$\angle MON$ 内有一定点 P，试在 OM、ON 上分别找一点 A 和 B，使$\triangle APB$ 为等腰直角三角形.

分析：使$\triangle APB$ 为等腰直角三角形，也就是要求$\triangle APB$ 中，$PA=PB$. $PA\perp PB$. 我们假设等腰直角三角形 APB 已经作出，作 $PC\perp OB$. 若将 PB 顺时针旋转 90°时，PB 就到了 PA 处，此时直角三角形 PCB 就到了$\triangle PDA$ 处. 于是得到下面的作法.

作法：如图 18，作 $PC\perp ON$，C 为垂足，作 $PD\perp PC$ 且 $PD=PC$，再过 D 作 ON 的垂线交 OM 于 A 点，再作 $PB\perp PA$，B 在 ON 上，则等腰直角三角形 PAB 即为所求.

注意：如图 19，也可以在 PC 的另一侧取 $PD'=PC$，且 $PD'\perp PC$，过 D' 作 $D'A'\perp ON$，A' 在 OM 上，确定 PA'后，也可以作出等腰直角三角形 $A'B'P$.

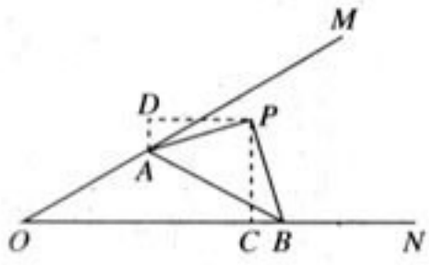


图 18

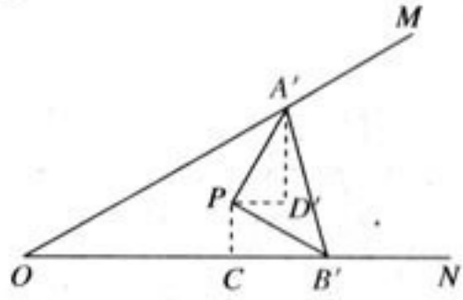


图 19

二、拓展性问题

1. 遗产分割问题

如图 20，一财主有一块平行四边形的土地，地里有一个圆形池塘. 财主立下遗嘱：要把这块

土地平分给他的两个儿子，中间的池塘也平分，但不知怎么做，你能想个办法吗？

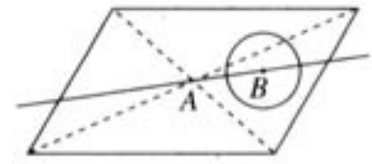


图 20

【答案与提示】

这道题实际上是两个中心对称图形的组合图形，要想将其面积等分，只要能找到一条直线，使其既等分平行四边形的面积，又等分圆的面积即可.

连接平行四边形的两条对角线，其交点 A 就是平行四边形的中心，找出圆的圆心 B，过 A、B 作一条直线，这条直线就将地与池塘的面积平分了.

2. 在边长为 1 的正方形 $ABCD$ 的边 AB 上取点 P，边 BC 上取点 Q，边 CD 上取点 M，边 AD 上取点 N. 如果 $AP+AN+CQ+CM=2$，求证 $PM\perp QN$.

【答案与提示】

直接证明 $PM\perp QN$ 有困难，可设想将 QN 旋转 90° 成一新的直线 Q_1N_1，只需证明 $PM/\!/Q_1N_1$ 即可.

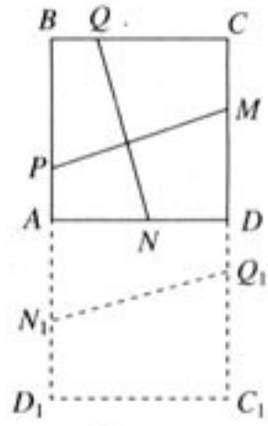


图 21

证明：如图 21，将正方形 $ABCD$ 绕点 A 顺时针旋转 90°，则正方形 $ABCD$ 变到正方形 ADC_1D_1 的位置. 其中 A 不变，B 变到 D，Q 变到 Q_1，C 变到 C_1，D 变到 D_1，N 变到 N_1，直线 QN 变到 Q_1N_1. 因此，$QN\perp Q_1N_1$. 因为 $AN=AN_1$，$CQ=C_1Q_1$，所以 $PN_1=AP+AN_1=AP+AN=2-(CM+CQ)=CC_1-(CM+C_1Q_1)=MQ_1$.

又 $PN_1/\!/MQ_1$，所以四边形 PMQ_1N_1 是平行四边形. 故 $PM/\!/Q_1N_1$.

因此，$PM\perp QN$.

3. 已知 P 为正$\triangle ABC$ 内一点，$\angle APB=113^\circ$，$\angle APC=123^\circ$. 求证以 AP，BP，CP 为边可以构成一个三角形，并确定所构成的三角形的各个内角的度数.

【答案与提示】

要判断线段 AP，BP，CP 是否可以构成一个三角形的三边，通常采用判定其中任两条线段之和大于另外一条线段的方法. 然而，如何求所构成的三角形三个内角的度数，又会使你感到束手无策. 怎么办？如果以点 C 为中心，将$\triangle APC$ 逆时针旋转 60°，点 A 变到点 B，线段 CA 变到 CB，点 P 变到点 P_1，奇妙的事情发生了.

证明：如图 22，以点 C 为中心，将$\triangle APC$ 逆时针旋转 60°. 因为 $AC=BC$，$\angle ACP=\angle BCP_1=60^\circ-\angle PCB$，$CP=CP_1$，且 $\angle PCP_1=60^\circ$. 所以，$\triangle APC\cong\triangle BP_1C$.

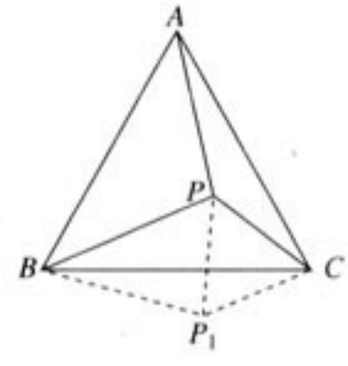


图 22

故 $AP=BP_1$，$\angle BP_1C=\angle APC=123^\circ$.

由 $CP=CP_1$，$\angle PCP_1=60^\circ$，知$\triangle PCP_1$ 为等边三角形.

所以 $PP_1=CP$，$\angle CPP_1=\angle CP_1P=60^\circ$.

这时，$\triangle BPP_1$ 就是以 BP，AP（$=BP_1$），CP（$=PP_1$）为三边构成的三角形. 可知$\angle BP_1P=\angle BP_1C-\angle CP_1P=\angle APC-60^\circ=63^\circ$.

又 $\angle BPC=360^\circ-113^\circ-123^\circ=124^\circ$，

所以 $\angle BPP_1=\angle BPC-\angle CPP_1=64^\circ$.

因此 $\angle PBP_1=180^\circ-63^\circ-64^\circ=53^\circ$.

说明：通过绕定点 C 将$\triangle APC$ 逆时针旋转 60°形成新的构图，将线段 AP，BP，CP 相对集中，直观地证明了以这三条线段为边的三角形（$\triangle BPP_1$）是存在的，且易算出其三个内角的度数

分别是 63°，64°，53°.

4. 如图 23，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=30°$，$\angle ADC=60°$，$AD=DC$. 证明 $BD^2=AB^2+BC^2$.

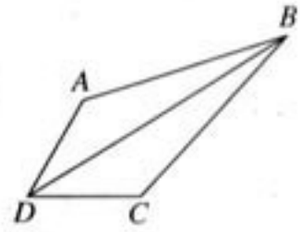


图 23

【答案与提示】

要证 $BD^2=AB^2+BC^2$，想到用勾股定理. 由于 BD，AB，BC 不在一个三角形中，所以，应设法通过图形变换，使其集中到一个三角形中，且这个三角形是直角三角形.

证明：如图 24，连接 AC. 因为 $AD=DC$，$\angle ADC=60°$，所以，$\triangle ADC$ 是正三角形. 于是，有 $DC=CA=AD$.

将 $\triangle DCB$ 绕点 C 顺时针旋转 60°到 $\triangle ACE$ 的位置，连接 EB. 这时，$DB=AE$，$CB=CE$，$\angle BCE=\angle ACE-\angle ACB=\angle BCD-\angle ACB=\angle ACD=60°$，所以 $\triangle CBE$ 为正三角形.

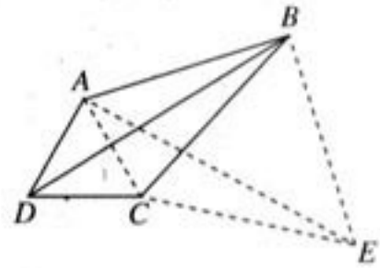


图 24

所以 $BE=BC$，$\angle CBE=60°$. 因此，$\angle ABE=\angle ABC+\angle CBE=90°$.

在 Rt$\triangle ABE$ 中，由勾股定理，得 $AE^2=AB^2+BC^2$.

所以 $BD^2=AB^2+BC^2$.

5. 如图 25，$\triangle ABC$ 中，$AB=3$，$AC=2$，以 BC 为边的 $\triangle BCP$ 是等边三角形，求 AP 的最大、最小值.

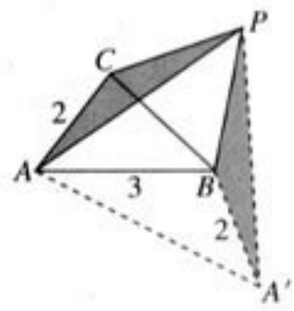


图 25

【答案与提示】

已知条件 $AB=3$，$AC=2$ 与所求的 AP 比较分散. 考虑到 $\triangle BCP$ 是等边三角形，若 $\triangle ACP$ 绕点 P 逆时针旋转 60°到 $\triangle A'BP$，则 $A'B=AC$，$A'P=AP$，$\angle APA'=60°$，可得 $\triangle AA'P$ 是等边三角形，$AP=AA'$，则 $AB=3$，$A'B=2$ 与所求 AA' 就集中到 $\triangle AA'B$ 中（特殊情况 A，A'，B 三点在同一直线）. 由于 $AB-A'B\leqslant AA'\leqslant AB+A'B$，所以 $1\leqslant AA'\leqslant 5$.

即 AP 的最大值为 5，最小值为 1.

6. 已知：$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，在 $\triangle ABC$ 内有一点 P，使 $\angle APB>\angle APC$，求证 $PC>PB$.

【答案与提示】

如图 26，将 $\triangle APB$ 绕点 A 旋转 $\angle BAC$ 至 $\triangle AP'C$，连接 PP'，则 $AP'=AP$，$\angle APB=\angle AP'C$.

因为 $\angle APB>\angle APC$，所以 $\angle AP'C>\angle APC$.

因为 $\angle APP'=\angle AP'P$，所以 $\angle PP'C>\angle P'PC$.

所以 $PC>P'C$，而 $PB=P'C$，

所以 $PC>PB$.

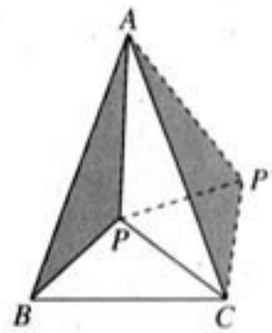


图 26

7. 如图 27，已知 $\triangle ABC$，直线 PQ、PR，作 $\triangle ABC$ 关于 PQ 的对称图形 $\triangle A'B'C'$，再作 $\triangle A'B'C'$ 关于 PR 的对称图形 $\triangle A''B''C''$，探索 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A''B''C''$ 的关系.

【答案与提示】

连接 PA，PA'，PA''，根据轴对称性质，可知 $\angle APQ=\angle A'PQ$，$\angle A'PR=\angle A''PR$，

所以 $\angle APQ+\angle A''PR=\angle A'PQ+\angle A'PR=\angle QPR$.

$\angle APA''=2\angle QPR$.

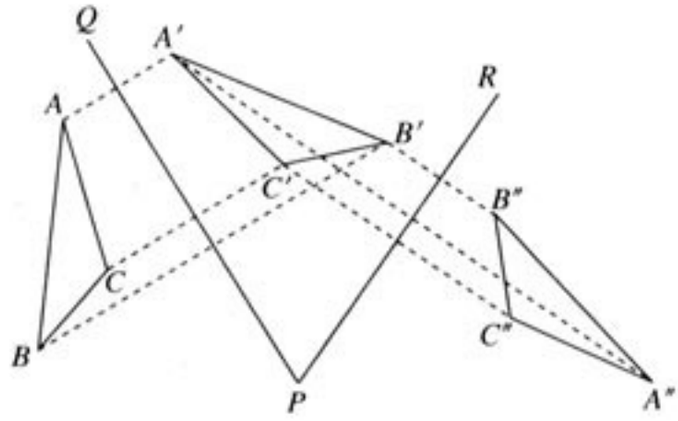


图 27

同理 $\angle BPB''=2\angle QPR$，$\angle CPC''=2\angle QPR$.

因此，以点 P 为中心将$\triangle ABC$ 旋转 $2\angle QPR$ 得到$\triangle A''B''C''$.

三、数学活动

1. 四边形的剪拼问题

我们已经知道，利用四边形的内角和等于 360°的道理，可以把一批形状、大小完全相同的任意四边形边脚余料无空隙地铺满地面. 那么我们能将任意的四边形拼成平行四边形吗?

如图 28，E、F、G、H 分别是任意四边形 $ABCD$ 各边 AB、BC、CD、DA 的中点，沿 EG 和 FH 把四边形 $ABCD$ 剪成四小块，试试看，你能将这四小块拼成一个平行四边形吗?

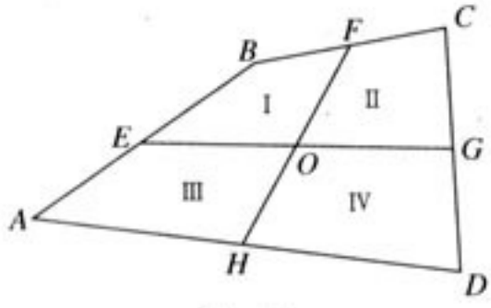


图 28

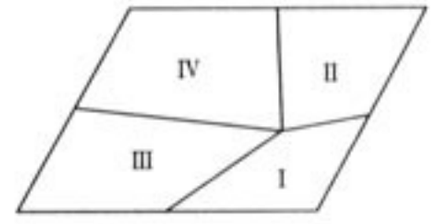


图 29

【答案与提示】

可以. 如图 29.

实际上，这个剪拼过程相当于下面的图形变换. 如图 30，把四边形 $OFCG$ 绕点 F 旋转 180°到四边形 O_1FBG'的位置，把四边形 $OHAE$ 绕点 E 旋转 180°到四边形 O_2EBH'的位置，再把四边形

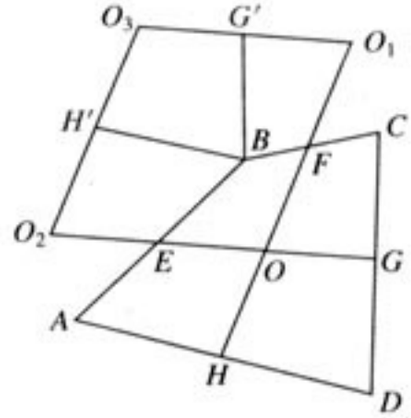


图 30

$OGDH$ 平移到$O_3G'BH'$的位置. 由于$OO_1=O_2O_3=HF$，$O_1O_3=OO_2=EG$，可知四边形$OO_1O_3O_2$为平行四边形.

2. 高变中线

一条直线，在一个三角形中是高，转眼之间摇身一变，成为另一个三角形的中线. 你能想办法实现吗?

如图 31，在锐角三角形 ABC 中，AH 是 BC 边上的高，分别以 AB、AC 为一边，向形外作正方形 $ABDE$ 和 $ACFG$，连接 EG，与 HA 的延长线交于点 M，那么 AM 是△AEG 的中线.

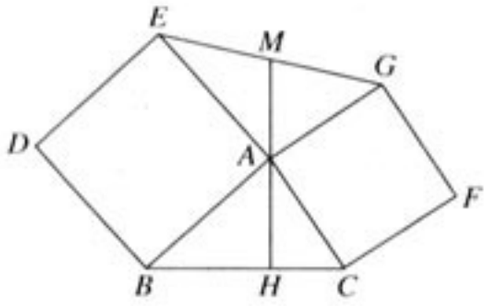


图 31

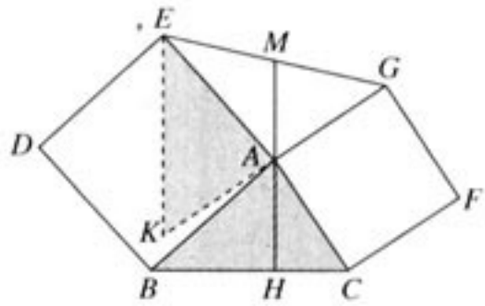


图 32

【答案与提示】

因为条件中蕴涵了许多直角和相等的线段，可利用旋转法证明. 如图 32，将△ABC 绕 A 点旋转 90°，使 AB 落到 AE 的位置，设这时 C 点的新位置为 K.

将 AG 旋转 90°变为 AC，再旋转 90°变为 AK，所以 G、A、K 在一条直线上，并且 $GA=AK$. 因为 $EK\perp BC$，$AH\perp BC$，所以 $AH\parallel EK$. 在△GKE 中，过一边 GK 的中点 A，平行于第二边 EK 的直线，必过第三边的中点，所以 M 是 EG 的中点，即 AM 是△EAG 的中线.

通过旋转，实现了“高变中线”.

Ⅵ 评价建议与测试题

一、评价建议

1. 要关注对学生探索图形性质的过程的评价

在本章的学习中，大量图形的相关性质都需要通过学生自主探究、思考、交流得到，因此，在教学过程中，应当关注对学生学习过程的评价. 具体应当关注学生能否在活动中积极主动地思考，能否通过独立思考探索得出图形的主要性质，能够积极主动地投入到各项活动中来，并积极地与同学进行交流，解释自己的想法，认真地听取他们的意见和建议等.

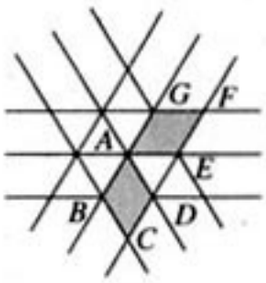
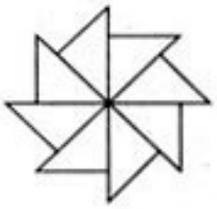
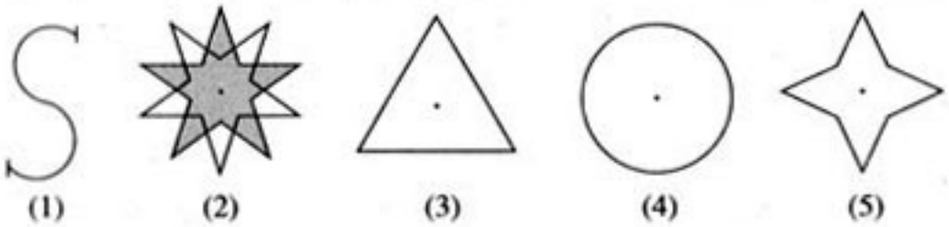
2. 恰当地评价学生说理、推理的水平

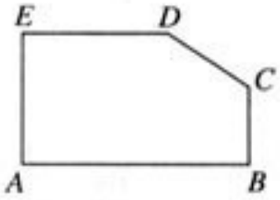
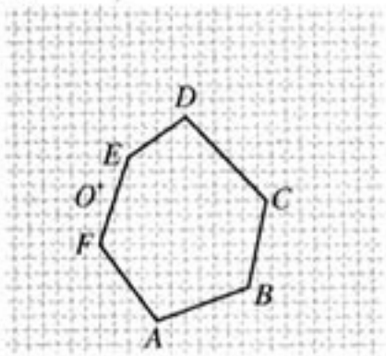
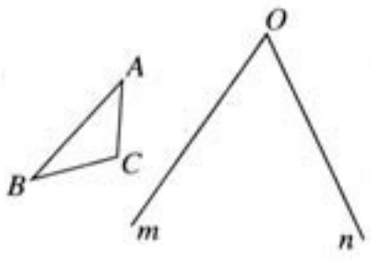
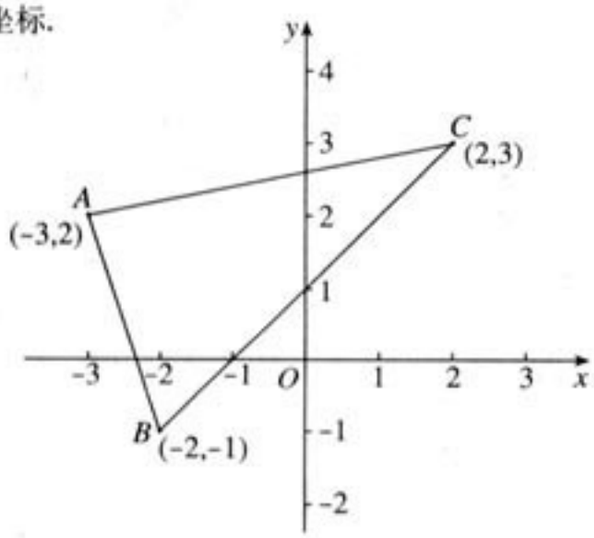
对学生说理、推理的过程进行评价时，要注意难度把握在教科书的要求之内. 评价时，要关注学生能否有条理地表达自己的思考过程和结果，可以用口头表达. 书面表达时，要关注学生逻辑思维能力的养成，书写格式要求规范简洁.

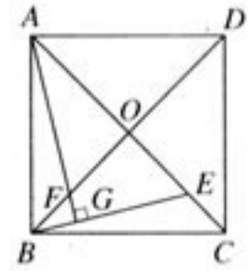
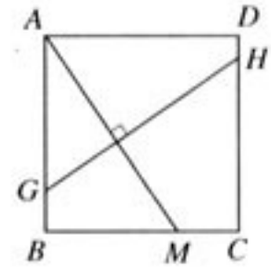
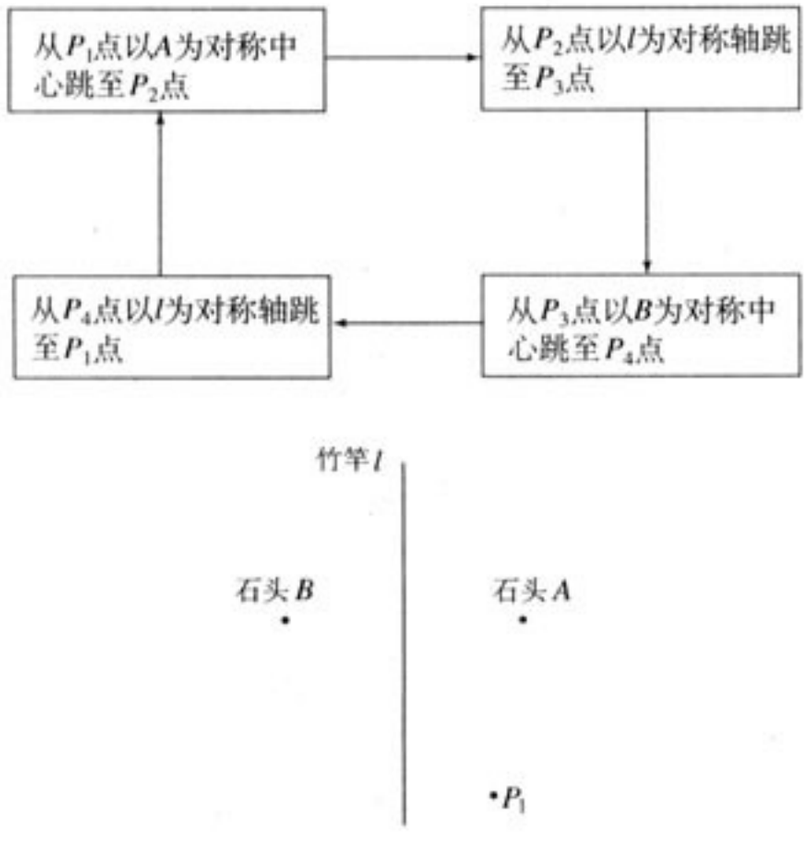
3. 关注学生对于知识的理解和应用

对于本章知识技能的评价不应当在于能否背诵出相关的概念或性质，而应注意考察学生的理解和在新情境中的应用，能否利用所学知识解释现实生活中的一些现象和实际问题等等.

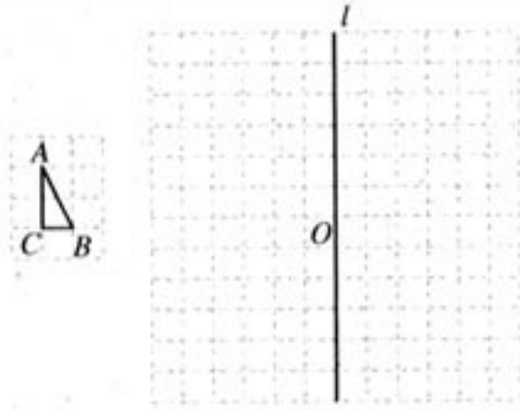
二、测试题（时间：45 分　满分：100 分）

内　容	设计意图
一、选择题（每题 4 分，共 20 分）：	
1. 时钟上的分针匀速旋转一周需要 60 min，则经过 10 min，分针旋转了（　　） (A) 10°.　(B) 20°.　(C) 30°.　(D) 60°.	本题考查学生对旋转角度的概念的理解.
2. 平面直角坐标系内一点 $P(-2, 3)$ 关于原点对称点的坐标是（　　） (A)(3, −2).　(B)(2, 3). (C)(−2, −3).　(D)(2, −3).	本题考查学生对关于原点对称的点的特点的掌握情况.
3. 如图所示的图案绕旋转中心旋转后能够与自身重合，那么它的旋转角可能是（　　）  (第 3 题) (A) 60°.　(B) 90°.　(C) 72°.　(D) 120°.	本题考查学生对旋转中心和旋转角的理解.
4. 同学们曾玩过万花筒，它是由三块等宽等长的玻璃片围成的. 如图所示是看到的万花筒的一个图案，图中所有小三角形均是全等的等边三角形，其中的菱形 $AEFG$ 可以看成是把菱形 $ABCD$ 以 A 为中心（　　） (A) 顺时针旋转 60°得到. (B) 顺时针旋转 120°得到. (C) 逆时针旋转 60°得到. (D) 逆时针旋转 120°得到.  (第 4 题)	本题考查学生在实际生活中应用数学知识的意识和能力.
5. 右图可以看作是一个等腰直角三角形旋转若干次而生成的，则每次旋转的度数可以是（　　） (A) 90°.　(B) 60°. (C) 45°.　(D) 30°.  (第 5 题)	本题考查学生对图形变换知识的理解.
二、填空题（每题 4 分，共 16 分）：	
6. 已知 $a<0$，则点 $P(-a^2-1, -a+3)$ 关于原点的对称点 P_1 在第_____象限.	本题考查学生对关于原点对称的点的特点的掌握.
7. 如图所示，下列各图中，_____绕一点旋转 180°后能与原来位置重合.  (1)　(2)　(3)　(4)　(5) (第 7 题)	本题考查学生对中心对称的理解和识图的能力.

内　容	设计意图
8. 写出两个既是中心对称，又是轴对称的图形：_____.	本题是开放性试题，考查学生对中心对称图形和轴对称图形的掌握情况以及思维能力.
9. 如图，已知五边形 $ABCDE$ 中，$AB//ED$，$\angle A=\angle B=90^\circ$，则可以将该五边形 $ABCDE$ 分成面积相等的两部分的直线有_____条，满足条件的直线可以这样确定：_____.  （第 9 题）	本题是说理性试题，考查学生的逻辑思维能力和使用数学知识有条理地表达思考过程的能力.
三、**做一做：**	
10.（8 分）如图，不用量角器，在方格纸中画出六边形 $ABCDEF$ 绕 O 点逆时针旋转 90° 后的六边形 $A'B'C'D'E'F'$.  （第 10 题）	本题考查学生对旋转作图的掌握情况，提高学生动手动脑能力.
11.（10 分）如图，已知 $\triangle ABC$ 和两条相交于 O 点且夹角为 60° 的直线 m，n，画出 $\triangle ABC$ 关于直线 m 的对称 $\triangle A'B'C'$，再画出 $\triangle A'B'C'$ 关于直线 n 的对称 $\triangle A''B''C''$，则 $\triangle A''B''C''$ 可视为由 $\triangle ABC$ 旋转得到的图形，则其旋转中心是哪一点？旋转角是多少度？  （第 11 题）	本题考查学生对中心对称与轴对称关系的理解情况，以及对旋转角、旋转中心概念的深刻理解.
12.（10 分）如图，画出 $\triangle ABC$ 关于原点 O 对称的 $\triangle A_1B_1C_1$，并求出点 A_1、B_1、C_1 的坐标.  （第 12 题）	本题考查学生对关于原点对称的点的特点的掌握情况，以及对中心对称作图掌握的情况.

内　容	设计意图
四、证一证 **13.**（10 分）如图，正方形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 相交于 O，E 是 AC 上一点，过点 A 作 $AG \perp EB$，垂足为 G，AG 交 BD 于点 F，求证 $OE=OF$.  （第 13 题）	本题考查学生利用旋转变换解决问题的能力，以及逻辑推理能力，数学符号语言表达能力.
五、算一算 **14.**（10 分）如图，在正方形 $ABCD$，M 是 BC 上一点，连接 AM，作 AM 的垂直平分线 GH 交 AB 于 G 点，交 CD 于 H 点，已知 $AM=10$ cm，求 GH 的长.  （第 14 题）	本题考查学生利用旋转变换解决问题的能力，以及逻辑推理能力，数学符号语言表达能力和计算能力.
六、想一想 **15.**（10 分）如图，石头 A 和石头 B 相距 80 cm，且关于竹竿 l 对称，一只电动青蛙在距竹竿 30 cm，距石头 A 为 60 cm 的 P_1 处，按如下顺序循环跳跃：  （第 15 题） （1）请你画出青蛙跳跃的路径（画图工具不作限制）； （2）青蛙跳跃 25 次后停下，此时它与石头 A 相距_____ cm，与竹竿 l 相距_____ cm.	本题意在引导学生体会数学知识之间的联系，感受数学的整体性，不断丰富解决问题的策略，提高解题能力.

续表

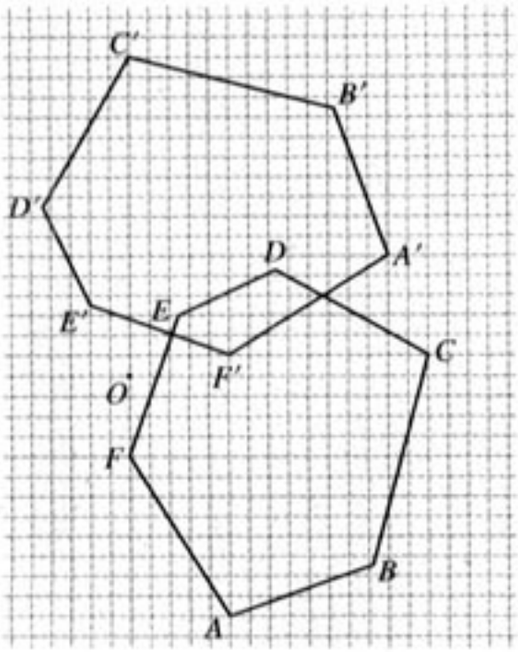
内　容	设计意图
16.（6 分）如图，在△ABC 中，$BC=1$，$AC=2$，$\angle C=90°$. 将△ABC 称为“基本图形”，请你利用“基本图形”，借助旋转、平移或轴对称变换，在另一张方格纸中设计一个以点 O 为对称中心，并且以直线 l 为对称轴的图案.  （第 16 题）	设置探索题与开放题，可以暴露学生的思维过程，能深化学生的思维品质，发展学生的创造性思维能力.

测试题答案

1. D.　**2.** D.　**3.** C.　**4.** D.　**5.** C.　**6.** 四.　**7.**（1）（4）（5）.　**8.** 正方形、圆.

9. 无数. 例如，过点 C 作与 AB 平行的直线将该五边形分割为一个矩形和一个梯形，经过梯形中位线的中点及矩形对角线的交点的直线可将该五边形的面积均分；设该直线与边 DE、AB 的交点分别为 P、Q，线段 PQ 的中点为 O，则经过点 O 且与 DE、AB 相交的任意一条直线均可将该五边形的面积均分.

10. 如图.



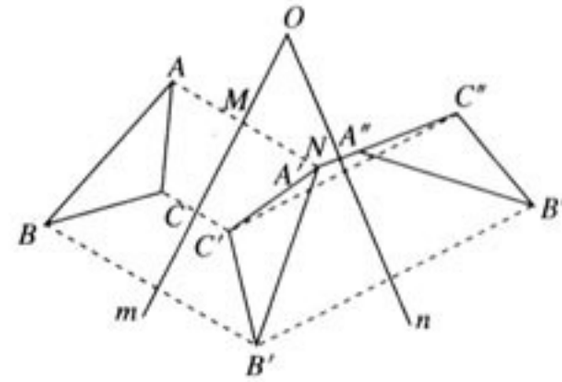
（第 10 题）

11. 如图.

解：点 O 为旋转中心，

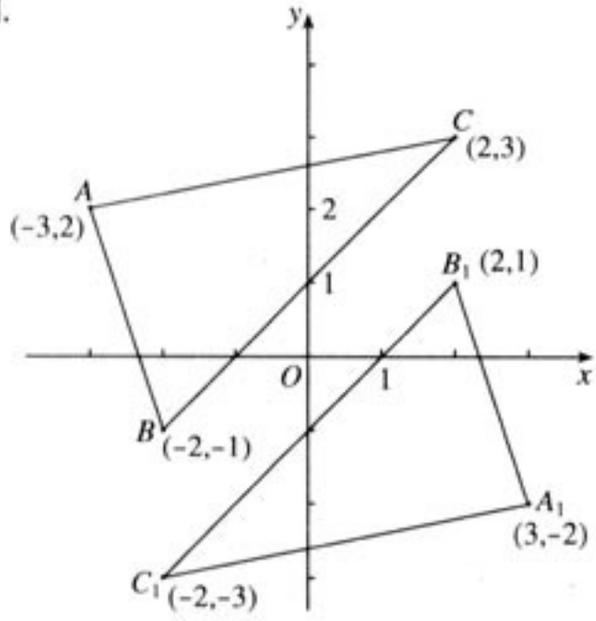
∵ $\angle AOM=\angle A'OM$，$\angle A'ON=\angle A''ON$，

∴ 由$\triangle ABC$ 旋转到$\triangle A''B''C''$的旋转角是 $120°$.



（第 11 题）

12. 如图.



（第 12 题）

13. 证明：∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴ $AC\perp BD$ 且 $OA=OB$，

∵ $AG\perp BE$，

∴ $\angle AGE=90°$.

∴ $\angle BEA+\angle EAG=\angle AFO+\angle EAG=90°$，

∴ $\angle BEA=\angle AFO$，故可以点 O 为旋转中心，旋转角为 $90°$，使 Rt$\triangle OAF$ 重合于 Rt$\triangle OBE$，

∴ $OE=OF$.

也可以利用三角形全等证明.

14. **解**：把线段 GH 向下平移到 BN，则 $BN=GH$，且 $BN\perp AM$.

∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

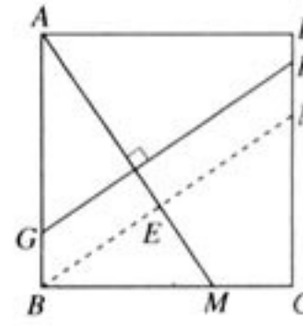
∴ $AB=BC$，$\angle ABC=\angle BCD=\angle BEM=90°$，

∴ $\angle BAM=\angle CBN=90°-\angle AMB$.

故可以正方形 $ABCD$ 的中心为旋转中心，旋转 $90°$，使 Rt$\triangle ABM$ 与 Rt$\triangle BCN$ 重合.

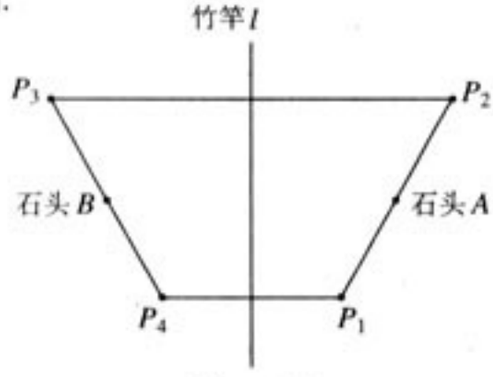
∴ $GH=BN=AM=10$.

也可以利用三角形全等来解.



（第 14 题）

15. （1）如图.



（第 15 题）

（2）60，50.

16. 图形不唯一，只要符合题目要求即可.

第二十四章　圆

Ⅰ　总体设计

一、课程学习目标

1. 理解圆及其有关概念，理解弧、弦、圆心角的关系，探索并了解点与圆、直线与圆、圆与圆的位置关系，探索并掌握圆周角与圆心角的关系、直径所对的圆周角的特征.

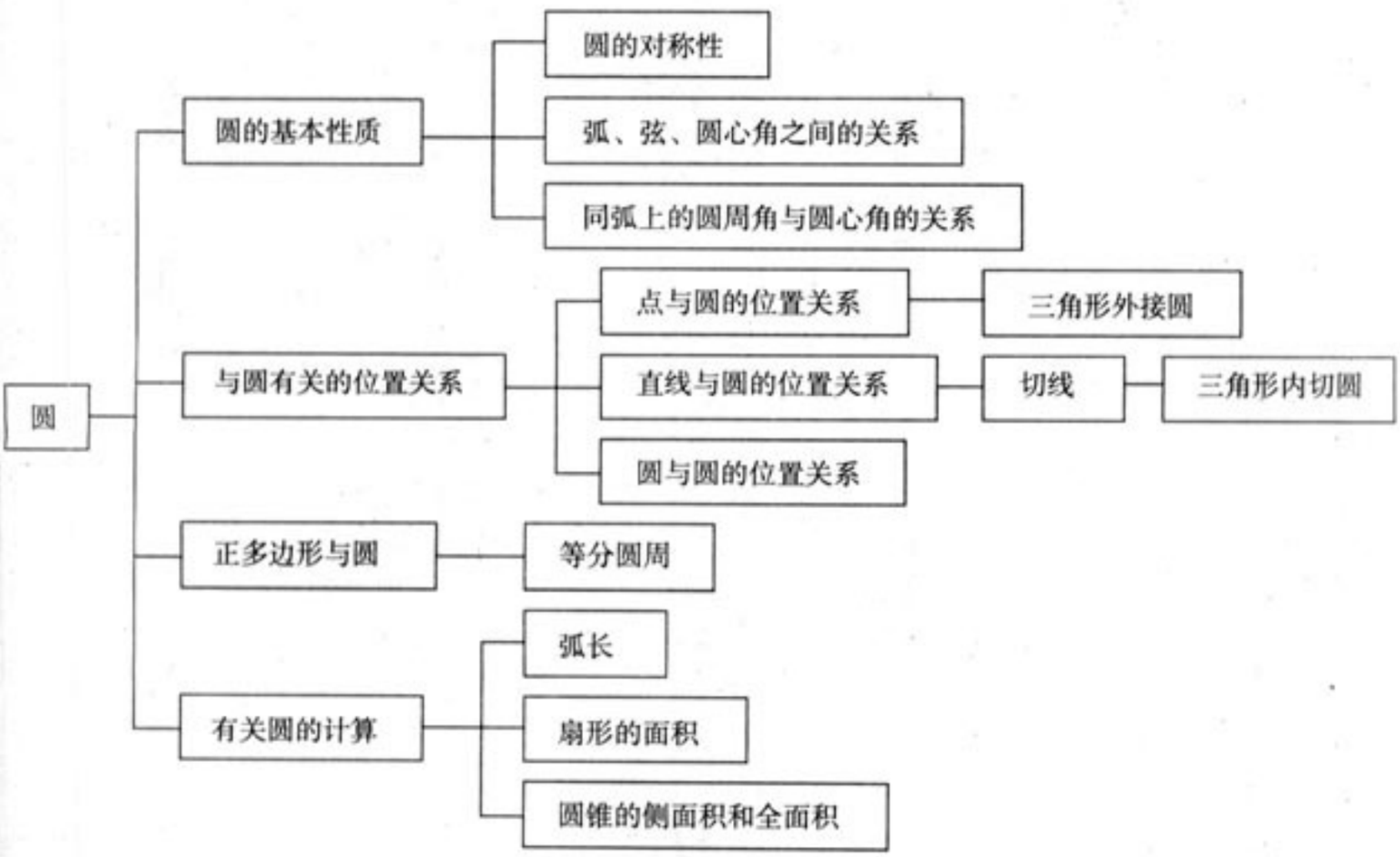
2. 了解切线的概念，探索并掌握切线与过切点的半径之间的位置关系，能判定一条直线是否为圆的切线，会过圆上一点画圆的切线.

3. 了解三角形的内心和外心，探索如何过一点、两点和不在同一直线上的三点作圆.

4. 了解正多边形的概念，掌握用等分圆周画圆的内接正多边形的方法；会计算弧长及扇形的面积、圆锥的侧面积及全面积.

5. 结合相关图形性质的探索和证明，进一步培养学生的合情推理能力，发展学生的逻辑思维能力和推理论证的表达能力；通过这一章的教学，进一步培养学生综合运用知识的能力，运用学过的知识解决问题的能力，同时对学生进行辩证唯物主义世界观的教育.

二、本章知识结构框图



三、内容安排

本章是在学习了直线图形的有关性质的基础上，来研究一种特殊的曲线图形——圆的有关性质. 圆也是常见的几何图形之一，不仅日常生活中的许多物体是圆形的，而且在工农业生产、交通运输、土木建筑等方面都可以看到圆，圆的有关性质，也被广泛的应用. 圆也是平面几何中最基本的图形之一，它不仅在几何中有重要地位，而且是进一步学习数学以及其他科学的重要的基础. 圆的许多性质，比较集中地反映了事物内部量变与质变的关系、一般与特殊的关系、矛盾的对立统一关系等等. 结合圆的有关知识，可以对学生进行辩证唯物主义世界观的教育. 所以这一章的教学，在初中的学习中也占有重要地位.

本章是在小学学过的一些圆的知识的基础上，系统的研究圆的概念、性质、圆中有关的角、点与圆、直线与圆、圆与圆、圆与正多边形之间的位置、数量关系. 本章共分为四个小节，第1小节是“圆”，主要是圆的有关概念和性质，圆的概念和性质是进一步研究圆与其他图形位置、数量关系的主要依据，是全章的基础. 这一节包括“圆”“垂直于圆的直径”“弧、弦、圆心角”“圆周角”四个部分. “24.1.1 圆”的主要内容是圆的定义和圆中的一些相关概念. 圆的定义是研究圆的有关性质的基础，在小学，学生接触过圆，对它有一定的认识. 教科书首先结合生活中一些圆的实际例子，在学生小学学过的画圆的基础上，通过设置一个观察栏目，用“发生法”给出了圆的定义. 进一步的教科书又分析了圆上每一个点与圆心的距离都等于定长，同时到定点的距离等于定长的点都在圆上，这样实际上从点和集合的角度进一步认识圆，这样再认识之后，学生对圆的认识就加深了. 接下来，是与圆有关的一些概念，如半径、直径、弦、弧等，对于这些概念要让学生结合图形进行认识，并多进行比较，以搞清它们的异同.

在接下来的几部分，教科书探究并证明了垂径定理，弧、弦、圆心角的关系定理，圆周角定理. 垂径定理及其推论反映了圆的重要性质，是圆的轴对称性的具体化，也是证明线段相等、角相等、垂直关系的重要依据，同时也为进行圆的计算和作图提供了方法和依据；圆周角定理及其推论对于角的计算、证明角相等、弧、弦相等等问题提供了十分简便的方法，所以垂径定理及其推论、圆周角定理及其推论是本小节的重点，也是本章的重点内容. 而垂径定理及其推论的条件和结论比较复杂，容易混淆，圆周角定理的证明要用到完全归纳法，学生对于分类证明的必要性不易理解，所以这两部分内容也是本节的难点.

“24.2 与圆有关的位置关系”包括三部分内容，点与圆的位置关系、直线与圆的位置关系、圆与圆的位置关系. 在“点与圆的位置关系”中，教科书首先结合射击问题，给出了点与圆的三种不同位置关系，接下来讨论了过三点的圆，并结合“过同一直线上的三点不能作圆”介绍了反证法. 在“直线与圆的位置关系”中，教科书首先讨论了直线与圆的三种位置关系，然后重点研究了直线与圆相切的情况，给出了直线与圆相切的判定定理、性质定理、切线长定理，在此基础上介绍了三角形的内切圆. 在“圆与圆的位置关系”中，重点是讨论圆与圆的不同位置关系. 本小节中，直线与圆的位置关系是中心内容，切线的判定定理、性质定理、切线长定理等则是研究直线与圆的有关问题时常用的定理，是本节的重点内容. 反证法的思想在前面章节有所渗透，在这一小节正式提出，它是一种间接证法，学生接受还是有一定的困难，对于反证法的教学是本节的一个难点；另外切线的判定定理和性质定理的题设和结论容易混淆，证明性质定理又要用到反证法，因此这两个定理的教学也是本节的难点，这些也同时是本章的难点.

正多边形是一种特殊的多边形，它有一些类似于圆的性质. 例如，圆有独特的对称性，它不仅是轴对称图形、中心对称图形，而且它的任意一条直径所在直线都是它的对称轴，绕圆心旋转任意

一个角度都能和原来的图形重合. 正多边形也是轴对称图形，正 n 边形就有 n 条对称轴，当 n 为偶数时，它也是中心对称图形，而且绕中心每旋转 $\frac{360^\circ}{n}$，都能和原来的图形重合. 可见正多边形和圆有很多内在的联系，正多边形也在生产和生活中有着广泛的应用. 教科书回顾学生已经了解的正多边形概念的基础上，以正五边形为例，证明了利用等分圆周等到正五边形的方法，接下来介绍了正多边形的有关概念如中心、半径、中心角、边心距等，并进一步介绍了画正多边形的方法. 正多边形的有关计算是本节的重点内容，这些计算都是几何中的基础知识，正确掌握它们也要综合运用以前所学的知识，这些知识在生产和生活中也常要用到. 本节的教学难点在学生对正 n 边形中“n”的接受和理解上. 学生对三角形、四边形、圆等这些具体图形比较习惯，对于泛指的 n 边形不习惯. 为了降低难度，教科书涉及的证明、计算等问题都是结合具体的多边形为例的，教学时要注意把这种针对具体图形的结论和方法推广，使学生实现由具体到抽象，特殊到一般的认识上的飞跃，提高学生的思维能力.

教科书接下来的 24.4 节的主要内容是一些与圆有关的计算，包括两部分“弧长和扇形的面积”“圆锥的侧面积和全面积”. “弧长和扇形的面积”是在小学学过的圆周长、面积公式的基础上推导出来的，应用这些公式，就可以计算一些与圆有关的简单组合图形的周长和面积. 由于圆锥的侧面展开图是扇形，所以教科书接下来介绍了圆锥的侧面积和全面积的计算. 这些计算不仅是几何中基本的计算，也是日常生活中经常要用到的，运用这些知识也可以解决一些简单的实际问题. 圆锥的侧面积的计算还可以培养学生的空间观念，因此对这部分内容的教学也要重视.

四、课时安排

本章教学时间大约需要 17 课时，具体安排如下（仅供参考）：

24.1 圆	5 课时
24.2 与圆有关的位置关系	6 课时
24.3 正多边形和圆	2 课时
24.4 弧长和扇形的面积	2 课时
数学活动	
小结	2 课时

五、学法教法建议

1. 突出图形性质的探索过程，重视直观操作和逻辑推理的有机结合

圆是日常生活中常见的图形之一，也是平面几何中的基本图形，本章重点研究了与圆有关的一些性质. 教学时，要注意突出图形性质的探索过程，重视直观操作和逻辑推理的有机结合，通过多种手段，如观察度量、实验操作、图形变换、逻辑推理等来探索图形的性质.

例如结合圆的轴对称性，发现垂径定理及其推论；利用圆的旋转对称性，发现圆中弧、弦、圆心角之间的关系；通过观察、度量，发现同弧所对的圆心角与圆周角、同弧所对的圆周角之间的数量关系；利用直观操作，发现点与圆、直线与圆、圆与圆之间的位置关系等等. 在学生通过观察、操作、变换探究出图形的性质后，还要求学生能对发现的性质进行证明，使直观操作和逻辑推理有机的整合在一起，使推理论证成为学生观察、实验、探究得出结论的自然延续.

2. 注意联系实际

圆是人们日常生活和生产中应用较广的一种几何图形，不仅日常生活中许多物体是圆形的，而

且在工农业生产、交通运输、土木建筑等方面都可以见到圆. 这部分内容与实际联系比较紧密. 在教科书编写时，也充分注意到这一点. 例如，在引入圆、正多边形等概念时，举出了大量的实际生活中的例子；在介绍点与圆、直线与圆、圆与圆的位置关系时，也是注意从它们在实际生活中的应用引入；利用垂径定理解决求赵州桥的主桥拱半径的问题；根据海洋馆中人们视野的关系引出研究圆周角与圆心角、圆周角之间的关系；利用正多边形的有关计算求亭子的地基；实际问题中有关弧长、扇形的面积、圆锥的侧面积和全面积的计算问题等等. 教科书的例、习题中也有一些实际应用的例子等等. 这些材料都是从实际中提炼出来的，要通过这些知识的教学，帮助学生从实际生活中发现数学问题、运用所学知识解决实际问题. 还可以根据本地区的实际，选择一些实际问题，引导学生加以解决，提高他们应用知识解决问题的能力.

3. 重视渗透数学思想方法

教学中不仅要教知识，更重要的是教方法，本章重涉及的数学思想方法也比较多. 例如，圆周角定理证明中的通过分类讨论，把一般问题转化为特殊情况来证明；研究点与圆、直线与圆、圆与圆的位置关系时的分类的思想；研究正多边形的有关问题是通过把问题转化为解直角三角形来解决的；正多边形的画图是通过等分圆来完成的；等等. 通过这些知识的教学，使学生学会化未知为已知、化复杂为简单、化一般为特殊或化特殊为一般的思考方法，提高学生分析问题和解决问题的能力.

另外，在本章，通过理论联系实际，对学生进行唯物论认识论的教育；通过圆的许多性质之间的内在联系，圆与其他图形之间量变与质变的关系，一般与特殊之间的关系等，对学生进行辩证唯物主义观点的教育；使学生增强民族的自豪感和振兴中华的使命感，对他们进行学习目的的教育，培养他们良好的个性品质.

4. 进一步培养推理论证能力

从培养学生的逻辑思维能力来说，“圆”这一阶段处于学生初步掌握了推理论证方法的基础上进一步巩固和提高的阶段，不仅要求学生能熟练地用综合法证明命题，熟悉探索法的推理过程，而且要求了解反证法. 教学中要重视推理论证的教学，进一步提高学生的思维能力. 教科书在这方面也还是很重视的. 在推理与证明的要求方面，除了要求学生对经过观察、实验、探究得出的结论进行证明以外，有一些图形的性质是直接由已有的结论经过推理论证得出的. 另外，为了巩固并提高学生的推理论证能力，本章的定理证明中，除了采用了规范的证明方法外，还有一些采用了探索式的证明方法. 这种方法不是先有了定理再去证明它，而是根据题设和已有知识，经过推理，得出结论. 这些对激发学生的学习兴趣，活跃学生的思维，对发展学生的思维能力有好处. 教学中要注意启发和引导，使学生在熟悉“规范证明”的基础上，推理论证能力有所提高和发展.

另外，这部分内容所涉及的图形很多是圆和直线形的组合，而且题目也相对以前比较复杂，教学时应注意多帮助学生复习有关直线形的知识，做到以新带旧、新旧结合. 要加强解题思路的分析，帮助学生树立已知与未知、简单与复杂、特殊与一般在一定条件下可以转化的思想，使学生学会把未知化为已知，把复杂问题化为简单问题，把一般问题化为特殊问题的思考方法. 如对于圆周角定理的证明，可以先从最简单的情况——角的一边经过圆心时入手，再推广到一般情形. 通过这样的训练，可以提高学生逻辑思维能力和分析解决实际问题的能力.

5. 重视知识间的联系与综合

圆是学生学习的第一个曲线形. 学生由学习直线形到曲线形，在认识上是一个飞跃. 在教学时，应注意充分利用学生在小学学过的圆的知识，搞好衔接. 同时要注意加强圆和直线形的联系，把圆和直线形的有关问题对照讲解. 如在讲“不在同一直线上的三个点确定一个圆”时，可以和

“两点确定一条直线”相对照，这样可以加深学生对与知识的理解. 教科书在编写时，也注意从学生学习的规律出发，加强新旧知识的联系，发挥知识的迁移作用. 例如，在讲圆的定义时，先回顾小学学过的定义，在分析圆上的点的特征的基础上，用集合语言重新给出描述；在学习圆及正多边形的计算时，注意将新知识与解直角三角形的知识、小学学过的圆的周长与面积的知识联系起来，使新知识在学生眼里不陌生，容易接受.

圆是一种特殊曲线，它有独特的对称性. 它不仅是轴对称图形、中心对称图形，而且它的任何一条直径所在直线都是它的对称轴. 绕圆心旋转任意一个角度都能与原来的图形重合（旋转对称性）. 圆的对称性在日常生活和生产中也有着广泛的应用，因此应当让学生很好的掌握. 在研究圆的有关性质时，充分利用圆的对称性也是本章编写的一个特点. 如垂径定理，弧、弦、圆心角的关系，切线长定理等，都是让学生充分利用圆的这些对称性，通过观察、实验、探究出性质，再进行证明，体现图形的认识，图形的变换，图形的证明的有机结合. 这些也是教学时应当重点注意的.

6. 注意把握好教学要求

本章教学内容与以往教材内容相比，删减幅度比较大（原义教大纲教材 51 课时，现在 17 课时），教学时要注意把握好教学要求. 教学内容应当限制在课标和教材所出现的范围，按照课标要求删减的内容，教学中不要再拣回，以免影响学生对与基础知识的学习. 对于推理论证的要求，课程标准中在本章没有明确规定. 教科书中是按照整套教科书对于推理证明的要求来处理的. 在本章，要求学生对于一些圆的有关性质进行证明，并利用这些性质去证明一些相关的结论. 但要注意，这里的证明也要控制难度，对于一般学生，控制在教科书“综合应用”的题目难度内，对于学有余力的学生，可以要求他们完成“拓广探索”栏目的习题.

反证法的思想在七年级上册教科书代数部分就有涉及，在后续的相关章节也有应用. 但当时只是渗透反证法的思想，没有作为一种方法提出. 在本章，结合“过同一直线上的三点不能作圆”，正式提出了反证法，并且在后续内容，如“圆的切线垂直于过切点的半径”的证明时也有应用. 由于反证法是一种间接证法，学生接受起来有一定困难. 因此，教科书主要是要求让学生理解反证法的思想，后续习题也没有安排相应的习题. 这里也要注意把握好对反证法的要求，不要让学生作过多过难的关于反证法的习题.

另外，圆有许多重要性质，其中最主要的是圆的对称性（轴对称和旋转不变性），教科书在证明圆的许多重要性质时，都运用了它的对称性. 但是，因为用对称的定义证明问题，对学生来说比较困难，所以在本章的教学中，一方面要重视利用圆的对称性（教科书中在使用圆的对称性）；另一方面又不应要求学生严格地利用对称性写出证明过程. 教学中要把握好这个要求.

7. 重视信息技术的应用

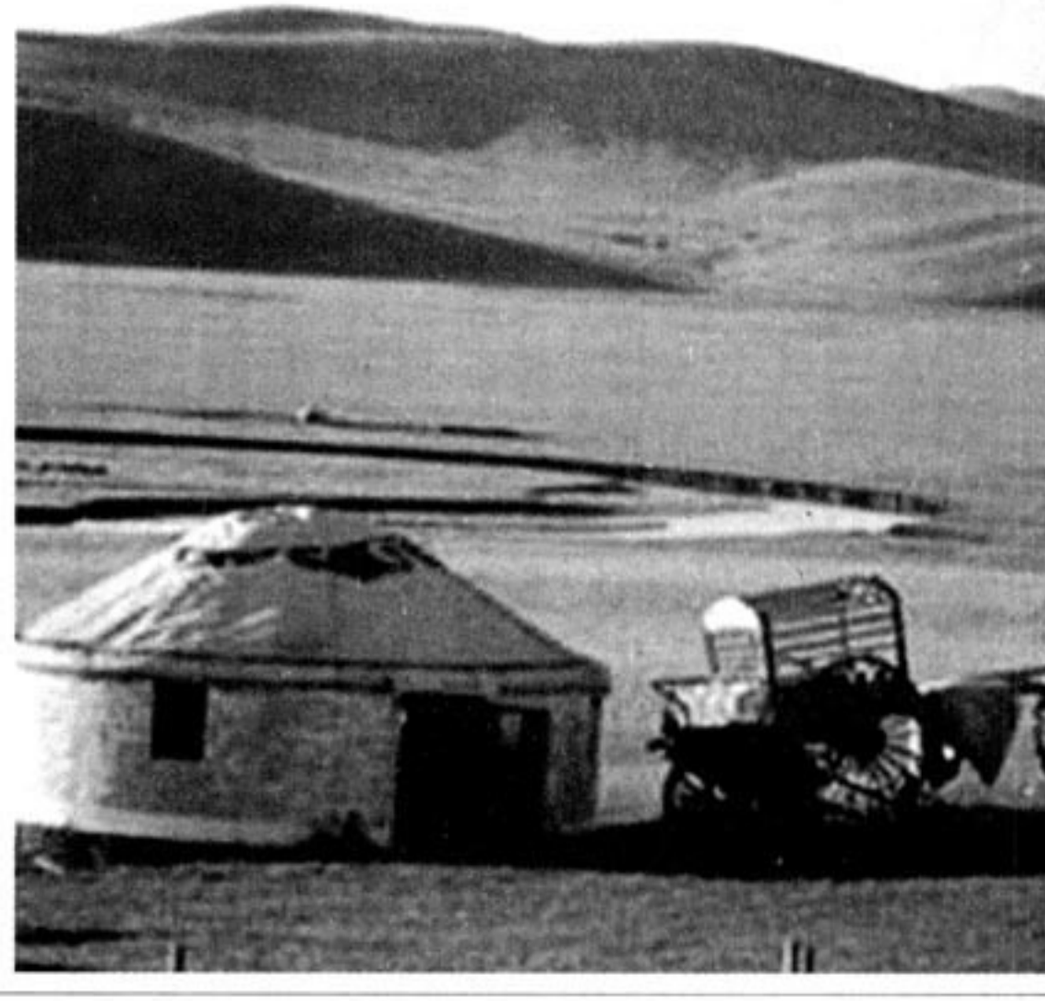
在本章的教学中，有条件的学校还是要重视信息技术工具的使用. 利用信息技术工具，可以很方便地制作图形，可以很方便地让图形动起来. 许多计算机软件还具有测量功能，这也有利于我们在图形的运动变化的过程中去发现其中的不变的位置关系和数量关系，有利于发现图形的性质.

例如，本章许多图形的性质都可以利用计算机软件设置一些探究活动，让图形动起来，在这种运动变化中发现图形的性质. 如弧、弦、圆心角之间的关系. 有许多计算机软件具有测量功能，可以方便的测出角的大小和线段的长度，这也有利于在运动变化中观察它们的关系，发现图形的性质. 如圆周角定理. 另外还可以通过计算机软件让图形动起来，在动态变化过程中去发现点与圆、直线与圆、圆与圆的位置关系，还可以通过测量，去发现这种位置关系所对应的数量关系，如直线与圆的位置关系中直线到圆心的距离与圆的半径的关系，两圆位置关系中圆心距与圆半径的关系等.

Ⅱ 教材分析

[1] 章前图选用的是草原的图片，上面有蒙古包和圆形车轮的形象，这些都是和本章内容相关的.

第二十四章 圆



1. 圆是常见的几何图形之一，也是平面几何中最基本的图形之一. 圆的许多性质，比较集中地反映了事物内部量变与质变之间的关系，一般与特殊的关系，矛盾的对立统一关系等等. 这一章的教学，在初中“空间与图形”中占有重要的地位.

本章是在小学学过的圆的知识的基础上，比较系统的研究圆的概念、性质，点与圆、直线与圆、圆与圆的位置关系，正多边形和圆的位置、数量关系，以及一些与圆有关的计算问题.

全章所学的主要内容，在理论和实践中都有广泛的应用，这些都是每个学生应该掌握的. 重点要求学生应该掌握圆的有关性质，直线与圆、圆与圆的重要位置关系，以及与圆有关的计算问题. 其中，圆的有关性质，是全章的基础，也是学好本章的关键.

学习本章知识，经常要用到前面学过的几何知识，综合性较强. 因此学生学习时，经常会因



24

- 24.1 圆
- 24.2 与圆有关的位置关系
- 24.3 正多边形和圆
- 24.4 弧长和扇形面积

圆是一种基本的几何图形，圆形物体在生活中随处可见，你能举出一些例子吗？[1]

圆也是一种和谐、美丽的图形，无论从哪个角度看，它都具有同一形状．十五的满月、圆圆的月饼都象征着圆满、团圆、和谐．古希腊的数学家毕达哥拉斯认为："一切立体图形中最美的是球，一切平面图形中最美的是圆"．[2]

圆有哪些性质？为什么车轮做成圆形的？怎样设计一个运动场的跑道？怎样计算蒙古包的用料？[3] 在这一章，我们将进一步认识圆，用图形变换等方法研究它，并用圆的知识解决一些实际问题．

[1] 圆是生活中常见的几何图形，可以让学生结合小学学过的圆的概念，多举一些例子．

[2] 圆的完美来自它的对称性．它是轴对称图形，任何一条直径所在直线都是它的对称轴；它又是中心对称图形，无论处于哪个位置，都具有同一形状．它最谐调，最匀称．

[3] 这些问题在本章都要解决．

为以前的知识掌握不牢造成学习困难，这是本章的难点．

2．本章章前图选用了草原的图片，上面有圆形的车轮，蒙古包等．车轮是常见的圆形物体，教科书后面也说明了为什么车轮要做成圆形的；制作蒙古包，要涉及与圆有关的圆柱、圆锥的侧面积的计算问题，这些也是本章后面要解决的．

由于圆是学生熟悉的、生活中常见的几何图形．因此在章前引言的教学中，可以多让学生举出一些生活中的圆形物体，让学生感受圆的无处不在，圆中蕴含的数学美．同时也可以向学生提出一些问题，激发学生的求知欲，提高他们学习的兴趣．

[1] 圆是生活中常见的图形，学生小学时对它也已经有了初步接触，这里可以让学生举出一些例子，回忆圆的知识，让学生思考它的特征，为后面给出圆的定义作准备.

[2] 这里用这种画圆的过程揭示圆的特征：圆上的点到圆心的距离相等.

24.1 圆

24.1.1 圆

圆是生活中常见的图形，许多物体都给我们以圆的形象（图 24.1-1）.[1]

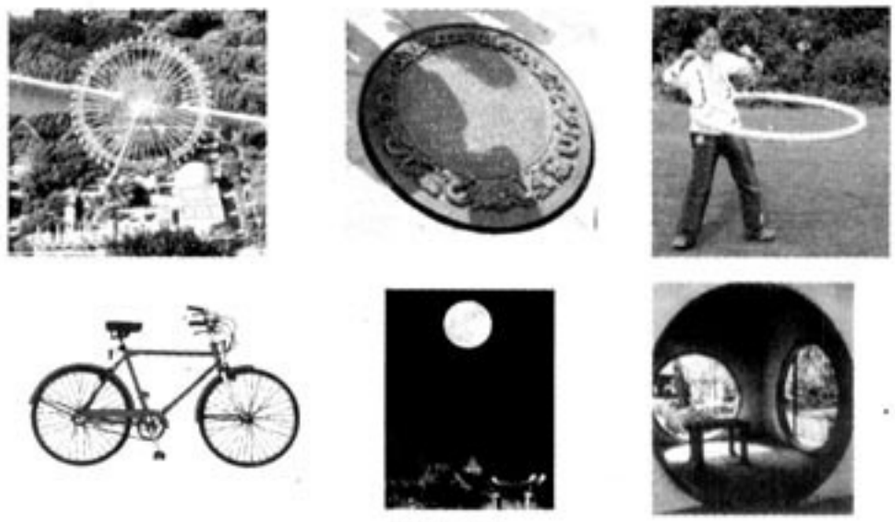


图 24.1-1

观 察

如图 24.1-2，观察画圆的过程，你能由此说出圆的形成过程吗？[2]



图 24.1-2

1. 本节内容是圆的概念以及与圆有关的一些性质，是今后进一步学习圆的相关内容的基础.

第一小节的主要内容是圆的定义以及一些相关概念. 通过这一小节的教学，应使学生理解圆的定义，理解弧、弦、半圆、直径等有关概念. 教科书首先举出了一些生活中常见的圆的形象，接下来，让学生观察用绳子和用圆规画圆的过程给出圆的描述性定义. 进一步的，结合画圆的过程，从集合的角度对圆进一步的刻画. 关于把一个几何图形，看成是满足某种条件的点的集合的思想，教科书在前面已经有所渗透，教科书曾经指出："角的平分线上的点到角的两边距离相等""到角的两边距离相等的点在角的平分线上""线段的垂直平分线可以看做是和线段两个端点距离相等的点的集合"，在本节又进行了进一步的渗透. 在这里，可以向学生介绍"圆是到定点的距离等于定长的点的集合". 同时要让学生认识到，

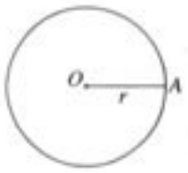


图 24.1-3

如图 24.1-3，在一个平面内，线段 OA 绕它固定的一个端点 O 旋转一周，另一个端点 A 所形成的图形叫做**圆**[1]（circle）．固定的端点 O 叫做**圆心**（center of a circle），线段 OA 叫做**半径**[2]（radius）．

以点 O 为圆心的圆，记作“$\odot O$”，读作“圆 O”．

从图 24.1-2 画圆的过程可以看出：

（1）圆上各点到定点（圆心 O）的距离都等于定长（半径 r）；

（2）到定点的距离等于定长的点都在同一个圆上．

因此，圆心为 O、半径为 r 的圆可以看成是所有到定点 O 的距离等于定长 r 的点的集合．

我国古人很早对圆就有这样的认识了，战国时的《墨经》就有“圆，一中同长也”的记载．它的意思是圆上各点到圆心的距离都等于半径．

把车轮做成圆形，车轮上各点到车轮中心（圆心）的距离都等于车轮的半径，当车轮在平面上滚动时，车轮中心与平面的距离保持不变（如图 24.1-4）．因此，当车辆在平坦的路上行驶时，坐车的人会感觉到非常平稳，这也是车轮都做成圆形的数学道理．

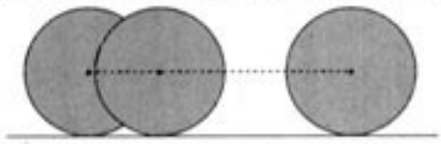


图 24.1-4

试想一下，如果车轮不是圆的（比如椭圆或正方形的），坐车的人会是什么感觉？[3]

连接圆上任意两点的线段（如图 24.1-5 中的线段 AB，AC）叫做**弦**（chord），经过圆心的弦（如图 24.1-5 中的 AB）叫做**直径**（diameter）．

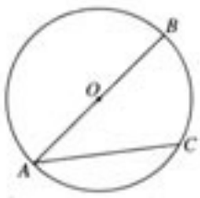


图 24.1-5

大于半圆的弧（用三个点表示，如图 24.1-4 中的 $\overset{\frown}{ABC}$）叫做优弧；[4] 小于半圆的弧（如图 24.1-4 中的 $\overset{\frown}{BC}$）叫做劣弧．

圆上任意两点间的部分叫做**圆弧**，简称**弧**（arc）．以 A、B 为端点的弧记作 $\overset{\frown}{AB}$，读作“圆弧 AB”或“弧 AB”．圆的任意一条直径的两个端点把圆分成两条弧，每一条弧都叫做**半圆**（semi-circle）．

[1] 根据圆的定义可以知道：“圆”指的是“圆周”，而不是“圆面”．

[2] 这里的半径指的是线段，为了方便，通常我们把半径的长也称为半径．

[3] 利用信息技术工具，可以模拟圆形车轮行进的过程，也可以模拟其他形状的车轮（如椭圆形、正方形等）行进过程中中心运动的曲线，让学生感受一下．

[4] 类似的，大于平角（小于周角）的角叫做优角．

把一个图形看成是满足某种条件的点的集合，必须符合：（1）图形上的每一点都满足某个条件；（2）满足某种条件的每一个点，都在这个图形上，两方面的条件缺一不可．

2．接下来，教科书回答了章前引言中提出的一个问题．车轮要做成圆形，实际上就是根据圆的特征：圆上各点到圆心的距离都相等．这样，当车轮滚动时，圆心的轨迹才会在一条平行于地面的直线上，因此坐车的人才会感到平稳．实际上利用信息技术工具，可以模拟实现这个过程，还可以模拟其他形状的车轮（如椭圆形、正方形等等），让学生看一看这时中心的轨迹是一个什么图形，感觉一下这时坐车的感觉．有条件的学校可以试一试．

3．本小节与圆有关的概念比较多，对于这些概念，教学时要引导学生分析它们之间的区别与联系．如直径和弦——直径是弦，是经过圆心的特殊弦，但弦不一定是直径；又如弧与优弧、

练习答案

1. 可以定一个圆心，取一根 5 m 长的绳子，用类似教科书图 24.1-2 作图的方式来画.

2. $\frac{23}{40}$cm.

[1] 它是一个轴对称图形，对称轴是直径 CD 所在直线.

[2] 利用圆的轴对称性和等腰三角形的轴对称性来观察.

练习

1. 如何在操场上画一个半径是 5 m 的圆？说出你的理由.
2. 你见过树木的年轮吗？从树木的年轮，可以很清楚的看出树生长的年龄. 如果一棵 20 年树龄的红杉树的树干直径是 23 cm，这棵红杉树的半径平均每年增加多少？



24.1.2 垂直于弦的直径



图 24.1-6

问题 你知道赵州桥（图 24.1-6）吗？它是 1 300 多年前我国隋代建造的石拱桥，是我国古代人民勤劳与智慧的结晶. 它的主桥拱是圆弧形，它的跨度（弧所对的弦的长）为 37.4 m，拱高（弧的中点到弦的距离）为 7.2 m，你能求出赵州桥主桥拱的半径吗？

探究

用纸剪一个圆，沿着圆的任意一条直径对折，重复做几次，你发现了什么？由此你能得到什么结论？

可以发现：

圆是轴对称图形，任何一条直径所在直线都是它的对称轴.

思考

如图 24.1-7，AB 是 $\odot O$ 的一条弦，作直径 CD，使 $CD \perp AB$，垂足为 E.

(1) 图 24.1-7 是轴对称图形吗？如果是，它的对称轴是什么？[1]

(2) 你能发现图中有哪些相等的线段和弧？为什么？[2]

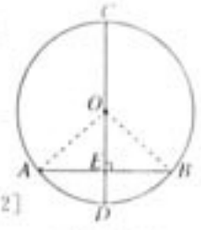


图 24.1-7

劣弧——优弧、劣弧都是弧，但优弧大于半圆，劣弧小于半圆. 另外，有的概念学生在小学已经学过（如半径、直径、弧等），也有些是新的，教学中应区别对待，从学生的实际出发进行说明.

4. 教科书第二小节结合研究圆的轴对称性，得到了垂径定理及有关的结论. 通过这一小节的教学，应使学生理解圆的轴对称性，掌握垂径定理及其他结论，并学会运用这些结论解决一些有关证明、计算和作图问题.

垂径定理及其推论反映了圆的重要性质，是证明线段、角相等、垂直关系的重要依据，同时也为进行一些圆的计算和作图问题提供了方法和依据，所以这部分内容是教材的重点. 另外，这部分内容的题设和结论比较复杂，容易混淆，所以也是难点.

5. 教科书在本小节开始，首先提出了求赵州桥主拱半径的实际问题，解决这个问题，需要用到本节后面的知识. 接下来，通过一个探究栏

在图 24.1-7 中连接 OA、OB，垂直于弦 AB 的直径 CD 既是等腰三角形 OAB 的对称轴，又是⊙O 的对称轴.

把圆沿着直径 CD 折叠时，CD 两侧的两个半圆重合，点 A 与点 B 重合，AE 与 BE 重合，$\overset{\frown}{AC}$、$\overset{\frown}{AD}$分别与$\overset{\frown}{BC}$、$\overset{\frown}{BD}$重合.

因此 $AE=BE$，$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$，$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$，即直径 CD 平分弦 AB，并且平分$\overset{\frown}{AB}$及$\overset{\frown}{ACB}$.

这样，我们就得到下面的定理：

这个定理也叫垂径定理. 利用这个定理，你能平分一条弧吗?

垂直于弦的直径平分弦，并且平分弦所对的两条弧.[1]

进一步，我们还可以得到结论：

平分弦（不是直径）的直径垂直于弦，并且平分弦所对的两条弧.

现在我们解决求赵州桥主桥拱半径的问题.[2]

如图 24.1-8，用$\overset{\frown}{AB}$表示主桥拱，设$\overset{\frown}{AB}$所在圆的圆心为 O，半径为 R.

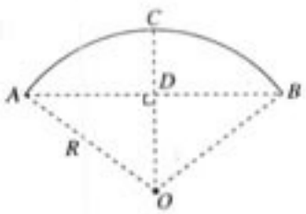


图 24.1-8

经过圆心 O 作弦 AB 的垂线 OC，[3] D 为垂足，OC 与$\overset{\frown}{AB}$相交于点 C，根据前面的结论，D 是 AB 的中点，C 是$\overset{\frown}{AB}$的中点，CD 就是拱高.

在图 24.1-8 中，

$AB=37.4$，$CD=7.2$，

$$AD=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 37.4=18.7,$$

$$OD=OC-CD=R-7.2.$$

在 Rt△OAD 中，由勾股定理，得

$$OA^2=AD^2+OD^2,$$

即

$$R^2=18.7^2+(R-7.2)^2.$$

解得

$$R\approx 27.9(\text{m}).$$

因此，赵州桥的主桥拱半径约为 27.9 m.

[1] 注意这里所平分的弧既包括劣弧，也包括优弧.

[2] 解决这个问题的关键是要根据赵州石拱桥的实物图画出几何图形，把实际问题转化为数学问题.

[3] 在圆中，解决有关弦的问题时，常常需要作“垂直于弦的直径”作为辅助线. 实际上，往往只需从圆心作一条与弦垂直的线段（如图 24.1-8 中的 OD）即可。这样，把垂径定理和勾股定理结合起来，容易得到圆的半径 r，圆心到弦的距离 d，弦长 a 之间的关系式

$$r^2=d^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

这种添加辅助线的方法很重要，要求学生掌握.

目，给出圆是轴对称图形的结论. 把圆沿它的任意一条直径对折，直径两边的两个半圆就会重合在一起，很直观. 因此学生对“圆是轴对称图形，任何一条直径所在直线都是它的对称轴”不难理解，对于这一点学生能直观判断就可以了.

6. 对于垂径定理，教科书充分利用了轴对称性. 首先安排了一个“思考”栏目，结合圆的轴对称性和等腰三角形的轴对称性以及线段垂直平分线的性质，引导学生去发现图 24.1-7 中相等的线段和弧. 接下来利用叠合法推证出垂径定理. 得到定理后，还可进一步帮助学生分析定理的题设和结论，并可将定理改述为：一条直线若满足：(1) 过圆心；(2) 垂直于弦，则可以推出：(3) 平分弦；(4) 平分弦所对的优弧；(5) 平分弦所对的劣弧. 这样可以加深学生对定理的理解，同时也为学习进一步的结论作好准备.

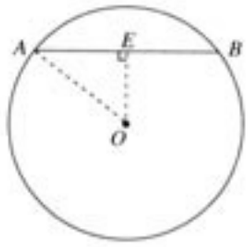
对于接下来的结论，可以按条件画出图形，让学生观察、思考，得出结论. 这个结论和垂径

练习答案

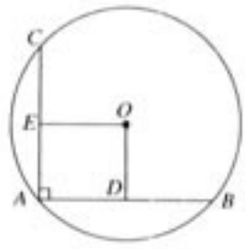
1. 由 $AE=4$ cm，$OE=3$ cm，利用勾股定理可得 $\odot O$ 的半径 AO 为 5 cm.
2. 四边形 $ADOE$ 有三个角是直角，它是矩形；又由 $AB=CD$ 可得 $OE=OD$，所以四边形 $ADOE$ 是正方形.

练习

1. 如图，在$\odot O$中，弦 AB 的长为 8 cm，圆心 O 到 AB 的距离为 3 cm，求$\odot O$的半径.



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 如图，在$\odot O$中，AB、AC 为互相垂直且相等的两条弦，$OD\perp AB$ 于 D，$OE\perp AC$ 于 E，求证四边形 $ADOE$ 是正方形.

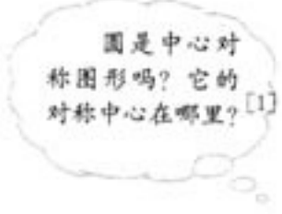
24.1.3 弧、弦、圆心角

[1] 圆是中心对称图形，圆心就是它的对称中心. 实际上，它还是旋转对称的，圆绕圆心旋转任意一个角度，都能与原来的图形重合.

[2] 可以借助教具，或者作成多媒体课件，向学生直观演示，有助于帮助学生发现结论.

探究

我们把顶点在圆心的角叫做**圆心角**（central angle），如图 24.1-9，将圆心角$\angle AOB$绕圆心 O 旋转到$\angle A'OB'$的位置，你能发现哪些等量关系？为什么？[2]



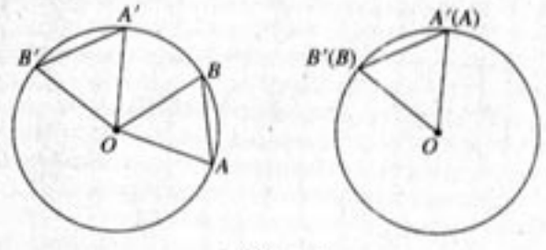


图 24.1-9

根据旋转的性质，将圆心角$\angle AOB$绕圆心 O 旋转

定理类似，要注意让学生区分它们的题设和结论. 另外，一定要强调“弦不是直径”的条件. 因为一个圆的任意两条直径总是互相平分的，但是它们未必垂直，所以一定不能忽视这个条件.

结合教科书的赵州桥的例题以及后面的相关练习、习题，应使学生明确弦长 a、弦心距 d、半径 r 以及弓形高 h（图 24-1）之间的关系，这样可以利用垂径定理和勾股定理由其中任意两个求其他两个.

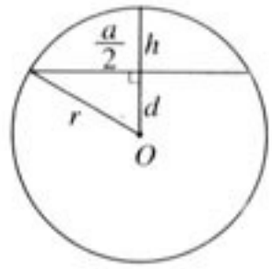


图 24-1

7. 24.1.3 小节从圆的旋转不变性出发，推出了弧、弦、圆心角之间的相等关系. 通过本小节的教学，应当使学生理解圆的旋转不变性，掌

到$\angle A'OB'$的位置时，显然$\angle AOB=\angle A'OB'$，射线OA与OA'重合，OB与OB'重合．而同圆的半径相等，$OA=OA'$，$OB=OB'$，从而点A与A'重合，B与B'重合．

在等圆（能够重合的圆）中，是否也能得出类似的结论呢？[1]

因此，$\overset{\frown}{AB}$与$\overset{\frown}{A'B'}$重合，AB与$A'B'$重合．即

$$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'},\quad AB=A'B'.$$

这样，我们就得到下面的定理：

在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弧相等，所对的弦也相等．[2]

同圆或等圆中，两个圆心角、两条弧、两条弦中有一组量相等，它们所对应的其余各组量也相等．

同样，还可以得到：[3]

在同圆或等圆中，如果两条弧相等，那么它们所对的圆心角_____，所对的弦_____；

在同圆或等圆中，如果两条弦相等，那么它们所对的圆心角_____，所对的弧_____．

例 1　如图 24.1-10，在$\odot O$中，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$，$\angle ACB=60°$，求证$\angle AOB=\angle BOC=\angle AOC$．

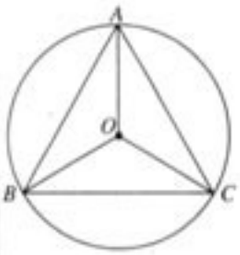


图 24.1-10

证明：∵　$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$，

∴　$AB=AC$，$\triangle ABC$是等腰三角形．

又　$\angle ACB=60°$，

∴　$\triangle ABC$是等边三角形，$AB=BC=CA$．

∴　$\angle AOB=\angle BOC=\angle AOC$．

练习

1. 如图，AB、CD是$\odot O$的两条弦．

（1）如果$AB=CD$，那么_____，_____．

（2）如果$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，那么_____，_____．

（3）如果$\angle AOB=\angle COD$，那么_____，_____．

（4）如果$AB=CD$，$OE\perp AB$于E，$OF\perp CD$于F，OE与OF相等吗？为什么？

［1］有关等圆的问题可以叠合成一个圆加以说明．

［2］注意定理不能丢掉“同圆或等圆”这个前提．

［3］在“同圆或等圆”这个前提下，将题设和结论的任何一项交换都是正确的，于是可得到下面的结论．

练习答案

1.（1）$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，$\angle AOB=\angle COD$；

（2）$AB=CD$，$\angle AOB=\angle COD$；

（3）$AB=CD$，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$；

（4）相等，证明略．

握圆心角的概念以及弧、弦、圆心角之间的相等关系，并能运用这些关系解决有关的证明、计算问题．

弧、弦、圆心角之间的相等关系是论证同圆或等圆中弧相等、角相等、线段相等的主要依据，这个关系也是本节的重点内容．

8. 教科书在本小节开始，首先设置了一个“探究”栏目，给出了圆心角的概念的基础上，结合圆的旋转不变性，让学生探究一个圆心角旋转后，有哪些等量关系．教学时，应首先使学生明确圆是中心对称图形，即圆绕其对称中心（圆心）旋转180°后与原来的图形重合．进而指出圆绕其圆心旋转任意角度都能够与原来的图形重合的特点．这样就把圆与一般的中心对称图形区别开来，圆不仅是中心对称图形，并且由它特有的性质：圆绕圆心旋转任意角度，都能与原来的图形重合．

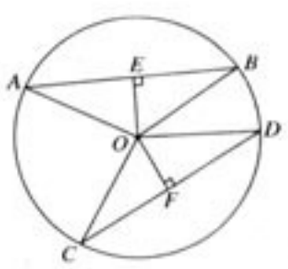
在推导定理时，应首先使学生明确圆心角、圆心角所对的弧、圆心角所对的弦的概念．对于

练习答案

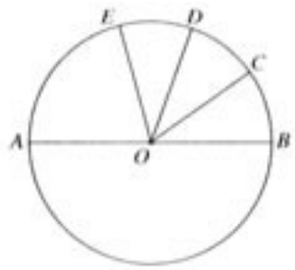
2. $\angle AOE=75°$.

[1] 这实际上就是同弧所对的圆周角与圆心角之间的关系.

[2] 这实际上就是同弧所对的圆周角之间的关系.



(第1题)



(第2题)

2. 如图，AB 是 $\odot O$ 的直径，$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}$，$\angle COD=35°$，求 $\angle AOE$ 的度数.

24.1.4 圆周角

观察

图 24.1-11 是一个圆柱形的海洋馆的横截面示意图，人们可以通过其中的圆弧形玻璃窗 $\overset{\frown}{AB}$ 观看窗内的海洋动物，同学甲站在圆心 O 的位置，同学乙站在正对着玻璃窗的靠墙的位置 C，他们的视角（$\angle AOB$ 和 $\angle ACB$）有什么关系？[1] 如果同学丙、丁分别站在其他靠墙的位置 D 和 E，他们的视角（$\angle ADB$ 和 $\angle AEB$）和同学乙的视角相同吗？[2]



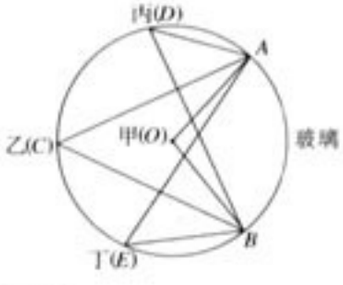


图 24.1-11

弦相等，学生容易想到借助于全等三角形对应边、对应高相等来证明. 但是这解决不了证明弧相等的问题. 应使学生认识到要证明弧相等，至今为止有两条路：(1) 根据定义，证明弧重合；(2) 利用垂径定理. 分析已知条件，可知根据定义证明比较方便.

证明中，要明确每一步的理论依据. 例如由点 A 与点 A' 重合，点 B 与点 B' 重合得到 $\overset{\frown}{AB}$ 与 $\overset{\frown}{A'B'}$ 重合，根据的是圆的旋转不变性；弦 AB 与 $A'B'$ 重合，根据的是两点确定一条直线等.

为了便于学生理解定理的证明过程，教学时可以借助教具，有条件的地方也可以利用信息技术工具，制成动画，向学生展示旋转的过程.

最后，应使学生明确，同圆或等圆中，两个圆心角、两条弧、两条弦中有一组量相等，它们对应的其余各组量也相等. 并适时引导学生小结在证明圆心角相等、弧相等、弦相等时经常依据的定理，常用的辅助线以及这些辅助线所起的作用等.

我们把像图 24.1-11 中$\angle ACB$、$\angle ADB$、$\angle AEB$这样的顶点在圆上，并且两边都与圆相交的角叫做**圆周角**[1]（angle in a circular segment）. 上面的问题就是要研究同弧（$\overset{\frown}{AB}$）所对的圆心角（$\angle AOB$）与圆周角（$\angle ACB$）、同弧所对的圆周角（$\angle ACB$、$\angle ADB$、$\angle AEB$等）之间的大小关系.

探究[2]

分别量一下图 24.1-12 中$\overset{\frown}{AB}$所对的两个圆周角的度数，比较一下. 再变动点 C 在圆周上的位置，圆周角的度数有没有变化？你能发现什么规律吗？

再分别量出图中$\overset{\frown}{AB}$所对的圆周角和圆心角的度数，比较一下，你有什么发现？

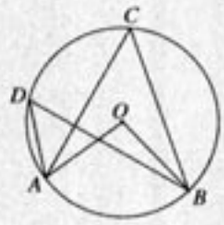


图 24.1-12

利用一些计算机软件，可以很方便地度量圆周角、圆心角，有条件的同学可以试一下.[3]

可以发现，同弧所对的圆周角的度数没有变化，并且它的度数恰好等于这条弧所对的圆心角的度数的一半.

为了进一步探究上面的发现，如图 24.1-13，在$\odot O$任取一个圆周角$\angle BAC$，将圆对折，使折痕经过圆心 O 和$\angle BAC$的顶点 A. 由于点 A 的位置的取法可

由于点 A 的位置的取法不同，折痕与圆周角$\angle BAC$的位置关系有哪几种情况？[4]

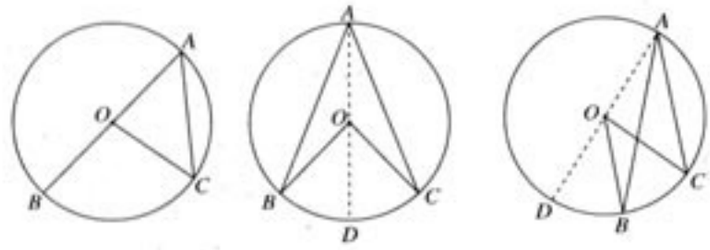


图 24.1-13

[1] 要注意强调圆周角定义中的两个特征，并与圆心角的定义相比较. 指出它们的定义中都提出了角的顶点的位置，但因为以圆内的任意一点为端点的射线必然与圆相交，因此圆心角的定义中未提与圆相交. 但在圆周角的定义中，两边与圆相交的条件不能省略.

[2] 通过这个“探究”栏目，让学生通过度量，自己发现同弧所对的圆周角之间、圆周角和圆心角之间的大小关系.

[3] 当前，许多计算机软件都具有测量的功能，这样可以让学生在圆周角或圆心角的动态变化过程中去发现它们之间的不变的数量关系.

[4] 圆周角与圆心角之间的三种位置关系是一个教学难点，应当引起教学注意.

9. 24.1.4 主要介绍圆周角的概念、圆周角定理及其推论. 通过本小节的教学应使学生理解圆周角的概念，掌握圆周角定理及其推论，并运用它们进行论证和计算. 通过圆周角定理的证明，使学生了解分情况证明命题的思想和方法.

圆周角的概念、圆周角定理及其推论在推理论证和计算中应用比较广泛，是本章的重点内容之一. 圆周角定理的分情况证明则是本章难点.

10. 教科书在本小节开始，首先设置了一个“观察”栏目，涉及在海洋馆观察海洋动物的视角的问题，引出本节课题. 实际上，不同同学所站的不同位置的视角就是同弧所对的圆周角，同弧所对的圆周角与圆心角之间的关系. 接下来，教科书给出了圆周角的概念，并证明了圆周角定理.

圆周角有两个特征：(1) 角的顶点在圆上；(2) 角的两边都与圆相交，二者缺一不可. 由于直线与圆的位置关系要在下一节才引入，这里所

能不同，这时折痕可能会：

(1) 在圆周角的一条边上；

(2) 在圆周角的内部；

(3) 在圆周角的外部.

我们来分析第 (1) 种情况. 如图 24.1-13(1)，

$\because$ $OA=OC$，

$\therefore$ $\angle A=\angle C$.

又 $\angle BOC=\angle A+\angle C$，

$\therefore$ $\angle BOC=2\angle A$，

即 $\angle A=\frac{1}{2}\angle BOC$.

对于情形 (2)、(3)，你能证明它们吗（结合图 24.1-13）?

对于第 (2)、(3) 种情况，也可以得出类似的结论. 由此得到有关圆周角的定理：[1]

在同圆或等圆中，同弧或等弧所对的圆周角相等，都等于这条弧所对的圆心角的一半.[2]

进一步，我们还可以得到下面的推论：

半圆（或直径）所对的圆周角是直角，$90°$的圆周角所对的弦是直径（图 24.1-14）.[3]

请你自己证明这个推论.

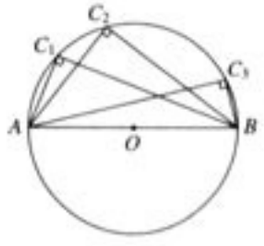


图 24.1-14

思考

在同圆或等圆中，如果两个圆周角相等，它们所对的弧一定相等吗？为什么？[4]

[1] 这个定理的证明实际上使用了完全归纳法. 完全归纳法是把要研究的某类事物的所有情况，逐一加以讨论，再概括得出一般结论. 有时也可以把所有情况分成几类，对每类加以讨论，再概括出一般情况.

应使学生明确，应不应该分情况证明，主要是看各种情况的证明方法是否相同，如果不同，必须分情况证明，而且情况要分得准确，要不重不漏.

[2] “同弧或等弧”改为“同弦或等弦”结论就不成立了. 因为一条弧所对的圆周角有两个，它们一般不相等.

[3] 这个推论，为在圆中确定直角，构成垂直关系，创造了条件，这也是圆中很重要的一个性质.

[4] 在同圆或等圆中，相等的圆周角所对弧也相等，这也是圆周角定理的一个推论.

说的角的两边都与圆相交，可以理解为除角的顶点外，角的各边与圆还有另一个公共点即交点.

11. 教科书中的圆周角定理，直接揭示了同弧所对的圆周角，圆周角与圆心角之间的大小关系. 对于圆周角定理，教科书设置了一个“探究”栏目，让学生通过度量发现这种关系. 目前，许多计算机软件都具有测量功能，有利于帮助学生在角的动态变化过程中发现这种规律，有条件的学校可以用一下.

圆周角定理的证明，分三种情况进行讨论. 在这三种情况中，第一种情况是特殊情况，是证明的基础，其他两种情况都可以转化为第一种情况来解决，转化的条件是添加以角的顶点为端点的直径为辅助线. 这种由特殊到一般的思想方法，应当让学生注意和掌握.

定理的证明要分三种情况讨论，对学生来说是一个难点，在教学中应注意引导和分析. 首先可以通过画图和观察，使学生明确，以圆上任意

例 2　如图 24.1-15，⊙O 的直径 AB 为 10 cm，弦 AC 为 6 cm，$\angle ACB$ 的平分线交⊙O 于 D，求 BC、AD、BD 的长.

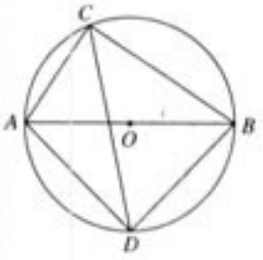


图 24.1-15

解：∵　AB 是直径，

∴　$\angle ACB=\angle ADB=90°$.

在 Rt△ABC 中，

$$BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8.$$

∵　CD 平分 $\angle ACB$，

∴　$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$.

∴　$AD=BD$.

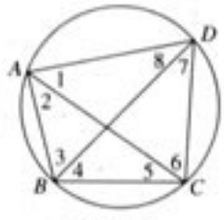
又　在 Rt△ABD 中，

$$AD^2+BD^2=AB^2,$$

∴　$$AD=BD=\frac{\sqrt{2}}{2}AB=\frac{\sqrt{2}}{2}\times 10=5\sqrt{2}(\text{cm}).$$

练习

1. 如图，点 A、B、C、D 在同一个圆上，四边形 $ABCD$ 的对角线把4 个内角分成 8 个角，这些角中哪些是相等的角？



（第 1 题）


（第 2 题）

2. 如图，你能设法确定一个圆形纸片的圆心吗？你有多少种方法？与同学交流一下.

3. 求证：如果三角形一边上的中线等于这边的一半，那么这个三角形是直角三角形.（提示：作出以这条边为直径的圆.）[1]

练习答案

1. $\angle 1=\angle 4$，$\angle 2=\angle 7$，$\angle 3=\angle 6$，$\angle 5=\angle 8$.

2. 方法有多种，如对折两次，找到直径的交点；利用“90°的圆周角所对的弦是直径”来找到直径，进而确定圆心；作任意一条弦的中垂线来作出直径进而确定圆心；等等.

3. 作出以这条边为直径的圆，则另一个顶点也在这个圆上，利用“直径所对的圆周角是直角”的推论.

[1] 这是直角三角形中斜边中线的性质定理的逆定理，也是判定一个三角形是直角三角形的重要方法，应让学生掌握.

一点为顶点的圆周角虽然有无数多个，但它们与圆心的位置关系，归纳起来只有三种情况：（1）圆心在角的一边上；（2）圆心在角的内部；（3）圆心在角的外部. 然后再让学生结合第一种情况进行证明. 为了便于对照，可把第一种情况的证明写出来，让学生分析这种证明是否符合第二、三种情况. 由于不适用，再引导学生考虑其他两种情况如何证明.

12. 接下来，教科书给出了圆周角定理的一个推论. 实际上，教科书接下来的“思考”栏目，练习的第 3 题（直角三角形斜边上的中线的性质定理的逆定理），都可以看成是圆周角定理的推论. 这些结论在今后的证明和计算中经常要用到，要注意让学生理解和掌握.

本节安排的例题 2，是利用圆周角定理的推论，同圆中弧、弦之间的相等关系以及勾股定理解的计算题. 教学时可引导学生根据 AB 是直径的条件，分析△ABC、△ABD 都是直角三角形.

[1] 这是工人常用的一种工具，它是由两根直尺组成的直角，每根尺上有刻度，可以测量，也可以画图.

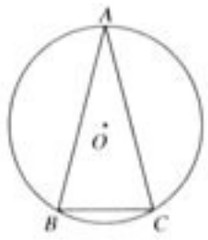
习题 24.1

复习巩固 ▶▶

1. 在半径为 50 mm 的⊙O 中，弦 AB 长 50 mm，求∠AOB 的度数并计算点 O 到 AB 的距离.



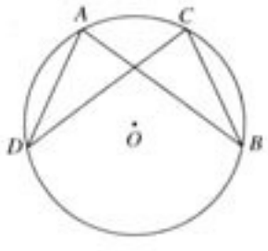
（第 1 题）



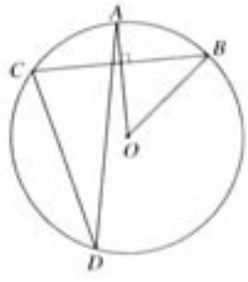
（第 2 题）

2. 如图，⊙O 中，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$，$\angle C=75^\circ$，求∠$A$ 的度数.

3. 如图，$AD=BC$，比较 $\overset{\frown}{AB}$ 与 $\overset{\frown}{CD}$ 的长度，并证明你的结论.



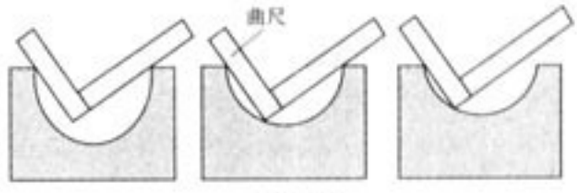
（第 3 题）



（第 4 题）

4. 如图，$OA\perp BC$，$\angle AOB=50^\circ$，试确定∠ADC 的大小.

5. 如图，用直角曲尺检查半圆形的工件，哪个是合格的？为什么？[1]



（第 5 题）

由于在 Rt△ABC 中，AB、AC 已知，所以根据勾股定理便可求出 BC. 然后进一步分析，因为 CD 平分∠ACB，根据同圆中相等的圆周角所对的弧也相等，可知 $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$，容易得到 $AD=BD$. 这样在等腰直角三角形 ABD 内便可求出 AD 和 BD 的长. 通过这个例题，可以使学生初步学会运用圆周角定理及其推论，同时也复习了一些旧知识.

习题 24.1

1. “复习巩固”的问题都是围绕本节的一些基本知识展开的. 其中第 1 题主要是圆的半径相等；第 2、3 题是复习弧、弦之间的相等关系；第 4 题是复习圆周角定理，第 5 题是直接应用圆周角定理的推论，90°的圆周角所对的弦的特征.

2. 综合运用的第 6 题要用到矩形对角线相等且互相平分的性质，再结合圆上各点到圆心的距离相等，可知矩形的四个点都在同一个圆上.

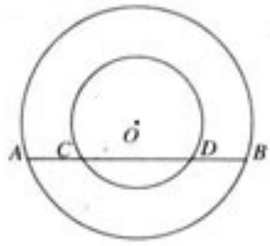
综合运用 ▶▶

6. 如果四边形 $ABCD$ 是矩形，它的四个顶点在同一个圆上吗？如果在，这个圆的圆心在哪里？

7. 如图，两个圆都以点 O 为圆心，求证 $AC=BD$.[1]

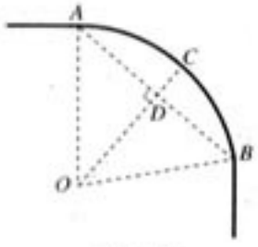
8. $\odot O$ 的半径为 13 cm，弦 $AB\parallel CD$，$AB=24$ cm，$CD=10$ cm，求 AB 和 CD 的距离.

9. 如图，一条公路的转弯处是一段圆弧（图中的 $\overset{\frown}{AB}$），点 O 是这段弧的圆心，$AB=300$ m，C 是 $\overset{\frown}{AB}$ 上一点，$OC\perp AB$，垂足为 D，$CD=45$ m，求这段弯路的半径.[2]

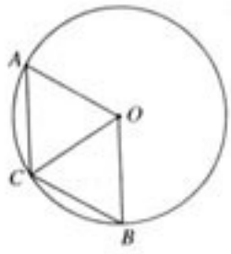


（第 7 题）

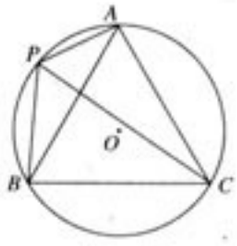
10. 如图，A、B 是 $\odot O$ 上的两点，$\angle AOB=120^\circ$，C 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点，求证四边形 $OACB$ 是菱形.



（第 9 题）



（第 10 题）



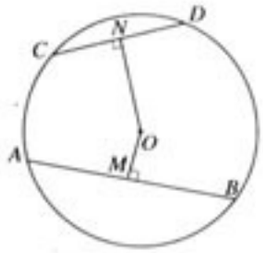
（第 11 题）

11. 如图，A、P、B、C 是 $\odot O$ 上的四点，$\angle APC=\angle CPB=60^\circ$，判断 $\triangle ABC$ 的形状并证明你的结论.

拓广探索 ▶▶

12. AB 和 CD 分别是 $\odot O$ 上的两条弦，圆心 O 到它们的距离分别是 OM 和 ON，如果 $AB>CD$，OM 和 ON 的大小有什么关系？为什么？[3]

13. 如图，铁路 MN 和公路 PQ 在点 O 处交汇，$\angle QON=30^\circ$，在点 A 处有一栋居民楼，$AO=200$ m，如果火车行驶时，周围 200 m 以内会受到噪音的影响，那么火车在铁路 MN 上沿 ON 方向行驶时，居民楼是否会受到噪音的影响？如果火车行驶的速度为 72 km/h，居民楼受噪音影响的时间约为多少秒（精确到 0.1 s）？



（第 12 题）

[1] 需要添加辅助线：过圆心 O 作 $OE\perp AB$. 这种添加辅助线的方法很重要，要求学生掌握.

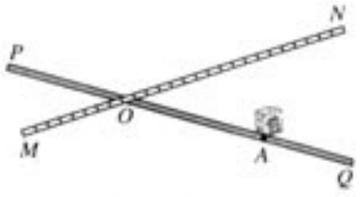
[2] 这个问题和解决赵州桥的问题类似. 教学时可以参考.

[3] 实际上，大弦所对应的弦心距较小，小弦所对应的弦心距较大.

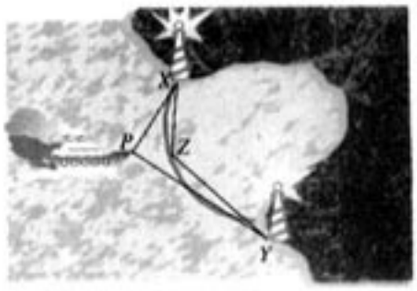
解决第 7 题需要添加辅助线，这也是解决这类问题时添加辅助线的常用方法，要注意让学生掌握. 第 8 题主要是应用垂径定理和勾股定理. 第 9 题的图形和例题中解决赵州桥的图形类似，所不同的是给出的条件和要求的结论不同. 第 10 题要用到等弧所对的圆心角相等的结论和等边三角形的判定方法. 第 11 题主要是应用圆周角定理.

3. “拓广探索”的三个问题稍有难度. 第 12 题实际上是寻找不等的弦所对的弦心距的大小关系，较长的弦所对的弦心距较短，较短的弦所对的弦心距较长，利用垂径定理和勾股定理，可以把弦心距用弧长和半径表示出来，这样也就容易判断了. 第 13 题实际上是一个求弦长的问题. 第 14 题中的危险角 $\angle XZY$ 就是 $\overset{\frown}{XY}$ 所对的圆周角，$\angle XPY$ 是圆外角，由于圆外角小于圆周角，所以航行只要保持 $\angle XPY<\angle XZY$，就可以保证船只不进入浅滩区域.

[1] 这里$\angle XPY$实际上是圆外角，同弧所对的圆外角要小于圆周角.



（第 13 题）



（第 14 题）

14. 如图，一个海港在$\overset{\frown}{XY}$范围内是浅滩，为了使深水船只不进入浅滩，需要测量船所在的位置与两个灯塔的视角$\angle XPY$，把它与已知的危险角（$\overset{\frown}{XY}$上任意一点Z与两个灯塔所成的角$\angle XZY$）相比较，航行中保持$\angle XPY<\angle XZY$. 你知道这样做的道理吗？[1]

24.2 与圆有关的位置关系

24.2.1 点和圆的位置关系

观察

我国射击运动员在奥运会上屡获金牌，为我国赢得荣誉. 图 24.2-1 是射击靶的示意图，它是由许多同心圆（圆心相同、半径不等的圆）构成的，你知道击中靶上不同位置的成绩是如何计算的吗？



图 24.2-1

解决这个问题要研究点和圆的位置关系.

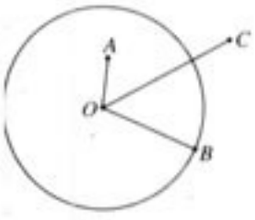


图 24.2-2

我们知道，圆上所有的点到圆心的距离都等于半径. 如图 24.2-2，设⊙O 的半径为 r，点 A 在圆内，点 B 在圆上，点 C 在圆外. 容易看出：

$$OA<r,\ OB=r,\ OC>r.$$ [1]

反过来，已知点到圆心的距离和圆的半径，就可以判断点和圆的位置关系.

设⊙O 的半径为 r，点 P 到圆心的距离 $OP=d$，则有：

点 P 在圆外$\Leftrightarrow d>r$；

点 P 在圆上$\Leftrightarrow d=r$；

点 P 在圆内$\Leftrightarrow d<r$.

符号⇔读作“等价于”，它表示从符号⇔的左端可以得到右端，从右端也可以得到左端.[2]

射击靶图上，有一组以靶心为圆心的大小不同的

[1] 可以引导学生用集合语言表示圆上的点、圆内的点、圆外的点.

[2] 这个符号可以用于推理证明.

1. 24.2 节是与圆有关的位置关系，包括三部分内容：点与圆的位置关系，直线与圆的位置关系，圆与圆的位置关系. 其中，有关直线与圆的位置关系以及切线的内容是本节的重点内容.

在讨论点与圆的位置关系时，教科书首先引入了一个射击问题，通过一个“观察”栏目，让学生观察射击时弹着点在靶上的不同位置，从而引入点与圆的位置关系的课题. 实际上，由圆的定义，圆上的点到圆心的距离都等于圆的半径. 容易得到，圆内的点到圆心的距离小于半径，圆的内部可以看成是到圆心的距离小于半径的点的集合；圆外的点到圆心的距离大于半径，圆的外部可以看成是到圆心的距离大于半径的点的集合. 反过来，到圆心的距离等于半径的点在圆上，到圆心的距离小于半径的点在圆内，到圆心的距离大于半径的点在圆外. 平面上的一个圆，把平面上的点分成三类，即圆上的点，圆内的点和圆外的点. 这三类的点各具有相同的性质. 点

圆，它们把靶图由内到外分成几个区域，这些区域用由高到低的环数来表示，射击成绩用弹着点位置对应的环数表示．弹着点与靶心的距离决定了它在哪个圆内，弹着点离靶心越近，它所在的区域就越靠内，对应的环数也就越高，射击成绩越好．

探究[1]

(1) 如图 24.2-3(1)，作经过已知点 A 的圆，这样的圆你能作出多少个？[2]

(2) 如图 24.2-3(2)，作经过已知点 A、B 的圆，这样的圆你能作出多少个？它们的圆心分布有什么特点？[3]

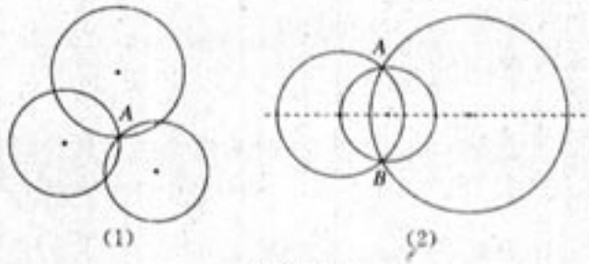


图 24.2-3

思考

要经过不在同一直线上的三点作一个圆，如何确定这个圆的圆心？[4]

如图 24.2-4，三点 A、B、C 不在同一条直线上，因为所求的圆要经过 A、B、C 三点，所以圆心到这三点的距离要相等．因此，这个点既要在线段 AB 的垂直平分线上，又要在线段 BC 的垂直平分线上．我们

[1] 教学时，可以先复习“两点确定一条直线”的基本事实，在此基础上对照提出，两点确定一条直线，对于圆来说，是否也有几点确定的问题呢？引出下面的课题．

[2] 经过一点作圆，只要以点 A 以外任意一点为圆心，这点与点 A 的距离为半径就可以作出，这样的圆有无数多个．

[3] 经过两点作圆，那么就要以与这两点距离相等的点为圆心．因此，以线段 AB 的垂直平分线上任意一点为圆心，以这一点与点 A 或点 B 的距离为半径就可以作出．这样的圆有无数多个．

[4] 应当结合上面的“探究”栏目，使学生明确作圆的关键是确定圆心的位置和半径的大小．而过已知点作圆的问题，圆心确定后，半径也就确定了．因此作圆的问题又转化为找圆心的问题．

和圆的位置关系和点到圆心的距离的数量关系是互相对应的，即知道位置关系可以确定数量关系，知道数量关系可以确定位置关系．教科书接下来也用等价符号给出这种对应关系，应当让学生掌握．

2. 接下来，教科书研究经过不在同一直线上的三点作圆的问题，得出“不在同一直线上的三点确定一个圆”的重要结论，又结合证明过同一直线上的三点不能作圆正式提出了反证法．

由于过一点作圆、过两点作圆相对比较简单，对于过已知点作圆的问题，教科书首先设置了一个“探究”栏目，从过一点、过两点开始．完成这个探究活动时，要注意帮助学生分析过已知点作圆时，要紧紧抓住对圆心和半径的探讨上．已知圆心和半径就可以作一个圆，这是从圆的定义出发的．由于作圆要经过已知点，因此圆心确定了，半径也就确定了，因此作圆的问题关键还是找圆心的问题．至于能作多少个圆，也取

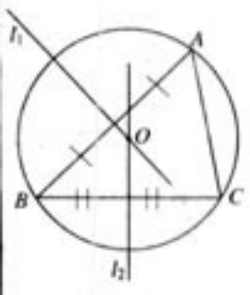


图 24.2-4

分别作出线段 AB 的垂直平分线 l_1 和线段 BC 的垂直平分线 l_2，设它们的交点为 O，则 $OA=OB=OC$. 于是以点 O 为圆心，OA（或 OB、OC）为半径作圆，便可作出经过 A、B、C 三点的圆. 由于过 A，B，C 三点的圆的圆心只能是点 O，半径等于 OA，所以这样的圆只有一个，即

不在同一直线上的三个点确定一个圆.[1][2]

由图 24.2-4 我们可以看出，经过三角形的三个顶点可以做一个圆，这个圆叫做三角形的**外接圆**[3]（circumcircle），外接圆的圆心是三角形三条边垂直平分线的交点，叫做这个三角形的**外心**（circumcenter）.

思考

经过同一条直线上的三个点能作出一个圆吗？[4]

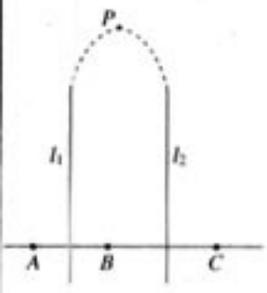


图 24.2-5

如图 24.2-5，假设过同一直线 l 上的 A、B、C 三点可以作一个圆，设这个圆的圆心为 P.[5] 那么点 P 既在线段 AB 的垂直平分线 l_1 上，又在线段 BC 的垂直平分线 l_2 上，即点 P 为 l_1 与 l_2 的交点，而 $l_1 \perp l$，$l_2 \perp l$，这与我们以前学过的“过一点有且只有一条直线与已知直线垂直”矛盾. 所以，过同一直线上的三点不能作圆.

上面的证明“过同一直线上的三点不能作圆”的方法与我们以前学过的证明不同，它不是直接从命题的已知得出结论，而是假设命题的结论不成立（即假设过同一直线上的三点可以作一个圆），由此经过推理得出矛盾，由矛盾断定所作假设不正确，从而得到原命题成立. 这种方法叫做**反证法**. 在某些情形下，反证法是很有效的证明方法.

[1]“不在同一直线上”这个条件不能省略.

[2]“确定”可以理解为“有且仅有”的意思.

[3]“接”是说明三角形的顶点与圆的关系.“内”“外”是相对的概念，是以一个图形为准，说另一个图形是在它的里面或外面. 一个圆是某个三角形的外接圆，这个三角形就是这个圆的内接三角形. 实际上，只要学生明确“接”的含义，结合图形来考虑，“内”“外”关系即可自明.

[4] 学生容易想到过同一直线上的三点不能作圆，那么如何证明呢？从而引出反证法.

[5] 实际上点 P 是不存在的，这里是根据假设画出来的，学生很不习惯，教学时要注意向学生说明这一点.

决于圆心的位置和圆心的个数. 这样，也为后面过三点作圆作准备.

对于经过三点作圆的问题，关键在于能否找到这样一个圆心，使它与三个已知点的距离相等. 把这个问题与前面过两点作圆的问题联系起来，与线段垂直平分线联系起来，问题也就迎刃而解了. 这里要提醒学生注意，过已知三点是否存在一个圆，要看这三点的位置关系，只有当三个点不在同一直线上时，才能确定一个圆.

3. 接下来，教科书结合证明“经过同一直线上三点不能作圆”，正式提出了反证法. 在反证法的教学中，要使学生了解反证法的基本思路和一般步骤. 对于一个命题，当使用直接证法比较困难时，可以采取间接证法，反证法就是一个间接证法. 并结合教科书的问题，向学生明确反证法的一般步骤. 应向学生指出，用反证法证明命题时，由于要假设待证命题的结论不成立，必须考虑结论的反面的所有可能情况. 如果只有

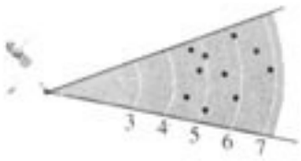
练习答案

1. 图略.
2. 略.
3. 因为 A、B 两点在圆上，所以圆心必与 A、B 两点的距离相等，所以圆心在 CD 所在的直线上. 因此使用这样的工具可以作出圆形工件的任意两条直径，它们的交点就是圆心.
4. 不一定. 要想过四个点作一个圆，应先作出经过不在同一直线上的三点的圆，而第四个点到该圆圆心的距离不一定等于半径，因此过任意四点不一定能作出一个圆.

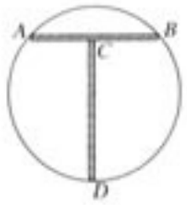
[1] 可以再举出生活中直线和圆的不同位置关系的实例，帮助学生加深理解.

练习

1. 画出由所有到已知点 O 的距离大于或等于 2 cm 并且小于或等于 3 cm 的点组成的图形.
2. 体育课上，小明和小丽的铅球成绩分别是 6.4 m 和 5.1 m，他们投出的铅球分别落在图中哪个区域内?



(第 2 题)



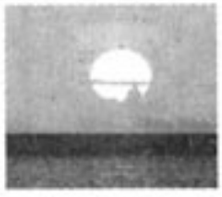
(第 3 题)

3. 如图，CD 所在的直线垂直平分线段 AB，怎样用这样的工具找到圆形工件的圆心?
4. 过任意四个点是不是一定可以画一个圆? 请举例说明.

24.2.2 直线和圆的位置关系

观察

(1) 如图 24.2-6 (1)，在太阳升起的过程中，太阳和地平线会有几种位置关系? 如果我们把太阳看作一个圆，把地平线看作是一条直线，由此你能得出直线和圆的位置关系吗?[1]



(1)



(2)

图 24.2-6

(2) 如图 24.2-6 (2)，在纸上画一条直线 l，把钥匙环看作一个圆，在纸上移动钥匙环，你能发现在钥匙环移动的过程中，它与直线 l 的公共点个数的变化情况吗?

一种，那么否定这一种就可以了；如果有多种情况，则必须一一否定.

在分析“由假设出发，经过推理论证得出矛盾”时，要注意推理的严密性，必须步步有据，并且一定要真正理解矛盾在哪里，这也是学生最感到困难的地方，教学时要帮助学生克服这个难点.

对于反证法的教学，教科书只是让学生结合一些具体例子了解，后面介绍切线的判定时还要涉及，也并没有安排关于反证法的练习、习题，要注意这个教学要求.

4. 本节的第 2 小节是直线和圆的位置关系，在本小节，重点研究了直线和圆的不同位置关系以及切线的判定和性质、切线长定理等. 其中，切线的判定和性质是本节也是本章的重点内容，要注意让学生掌握.

本小节开始，教科书首先通过一个“观察”栏目，从太阳升起的过程和移动钥匙环，观察它与纸面上一条直线的位置关系出发，从直线与圆

可以发现，直线和圆有三种位置关系（图 24.2-7）：

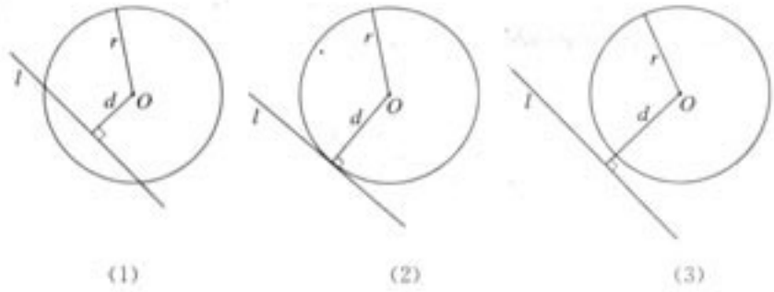


图 24.2-7

如图 24.2-7(1)，直线和圆有两个公共点，这时我们说这条直线和圆**相交**，这条直线叫做圆的**割线**.

如图 24.2-7(2)，直线和圆只有一个公共点，这时我们说这条直线和圆**相切**，这条直线叫做圆的**切线**(tangent line)，这个点叫做**切点**.

如图 24.2-7(3)，直线和圆没有公共点，这时我们说这条直线和圆**相离**.

利用信息技术工具，可以画出动态的图形，方便研究圆和圆的位置关系. 有条件的同学可以试一试.[1]

思考

图 24.2-7 中，设⊙O 的半径为 r，直线 l 到圆心 O 的距离为 d，在直线和圆的不同位置关系中，d 与 r 具有怎样的大小关系？反过来，你能根据 d 与 r 的大小关系来确定直线和圆的位置关系吗？

根据直线和圆相交、相切、相离的定义，容易得到：

直线 l 和⊙O 相交⇔$d<r$；

直线 l 和⊙O 相切⇔$d=r$；

直线 l 和⊙O 相离⇔$d>r$.[2]

[1] 可以利用软件的测量功能，同时测量圆的半径 r，直线到圆心的距离 d 之间的数量关系，在图形动态变化中帮助学生认识规律.

[2] “⇔”符号左边反映的是两个图形（直线和圆）的位置关系，右边反映的是两个图形的大小关系. 研究直线和圆的位置关系，可以转化为直线和点（圆心）的位置关系，又可以转化为点（圆心）和直线的距离与半径的大小关系. 另外，还要向学生指出，这三种情况有且仅有一种情况是成立的.

的相对运动引出直线与圆的三种位置关系. 教学时，可以先复习点与圆的不同位置关系以及各种位置关系的数量表示. 同时，要注意引导学生从运动的观点以及量变到质变的观点来理解直线和圆相交、相切、相离的概念.

对于直线和圆相切，要向学生指出，这时的公共点是唯一的，是有一个并且只有一个公共点.

由直线和圆的三种位置关系，教科书通过一个“思考”栏目，直观地得到圆心到直线的距离 d 与圆的半径 r 之间的数量关系. 这三个结论，学生通过观察很容易认识到. 应当使学生明确，它们既可以作为各种位置的判定，也可以作为性质.

讲到这里，可以进一步指出，直线和圆的位置关系可以用它们交点的个数来区分，也可以用圆心到直线的距离和半径的大小来区分，它们是一致的.

[1] 这是靠眼睛观察. 画已知圆的切线时，使直尺（或三角尺）在纸上移动，当它与圆只有一个公共点时，画出直线.

练习答案

1. 略.
2. (1) 相交，有两个公共点；(2) 相切，有一个公共点；(3) 相离，没有公共点.

[2] 结合切线的定义以及“如过圆心到直线的距离等于半径，那么直线和圆相切”，引导学生自己得出结论.

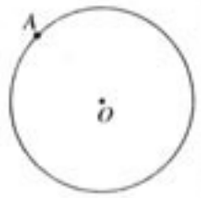
[3] 注意定理中的两个条件“经过半径外端”“垂直于半径”缺一不可. 否则可以举出反例如图.



[4] 这是画切线的准确方法.

练习

1. 根据直线和圆相切的定义，过点 A 用直尺近似地画出 $\odot O$ 的切线.[1]
2. 圆的直径是 13 cm，如果直线与圆心的距离分别是
   (1) 4.5 cm；　(2) 6.5 cm；　(3) 8 cm，
   那么直线和圆分别是什么位置关系？有几个公共点？



（第 1 题）

思考

如图 24.2-8，在 $\odot O$ 中，经过半径 OA 的外端点 A 作直线 $l \perp OA$，则圆心 O 到直线 l 的距离是多少？直线 l 和 $\odot O$ 有什么位置关系？[2]

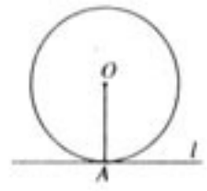


图 24.2-8

已知一个圆和圆上的一点，如何过这个点画出圆的切线？动手试一试![4]

可以看出，这时圆心 O 到直线 l 的距离就是 $\odot O$ 的半径，由上页倒数第 2 行的结论可以得出，直线 l 是 $\odot O$ 的切线. 这样，我们得到切线的判定定理：

经过半径的外端并且垂直于这条半径的直线是圆的切线.[3]

不知你注意没有，下雨天当你快速转动雨伞时飞出的水珠，在砂轮上打磨工件时飞出的火星，都是沿着圆的切线的方向飞出的（图 24.2-9）.

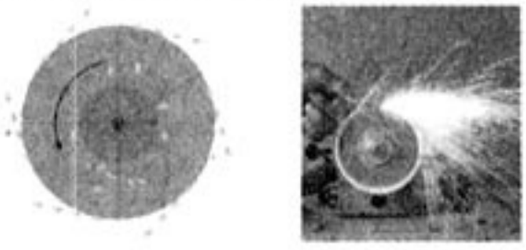


图 24.2-9

直线和圆的位置	相交	相切	相离
公共点个数	2	1	0
圆心到直线的距离与半径的关系	$d<r$	$d=r$	$d>r$
公共点名称	交点	切点	无
直线名称	割线	切线	无

5. 接下来，教科书讨论了切线的判定定理和性质定理，这也是全章的重点内容.

对于切线的判定定理，应要注意让学生分清定理的题设和结论. 教学时应特别强调“经过半径外端”和“垂直于这条半径”这两个条件缺一不可，否则就不是圆的切线. 另外，这个定理实际上是从前一节所讲的“圆心到直线的距离等于半径时直线和圆相切”这个结论直接得出来的，只是为了便于应用，把它改写成“经过半径外端并且垂直于这条半径的直线是圆的切线”这样一种形式. 因此定理不必另加证明.

切线的性质定理的证明要用到反证法，对于

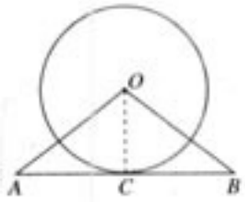


图 24.2-10

例 1 如图 24.2-10，直线 AB 经过⊙O 上的点 C，并且 $OA=OB$，$CA=CB$，求证直线 AB 是⊙O 的切线.[1]

证明：连接 OC.

∵ $OA=OB$，$CA=CB$，

∴ $\triangle OAB$ 是等腰三角形，OC 是底边 AB 上的中线.

∴ $OC\perp AB$.

∴ AB 是⊙O 的切线.

思考

将上页思考中的问题反过来，如图 24.2-8，如果直线 l 是⊙O 的切线，切点为 A，那么半径 OA 与直线 l 是不是一定垂直呢？[2]

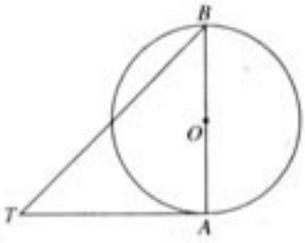
可以利用反证法证明这个结论.[3]

实际上，我们有切线的性质定理：

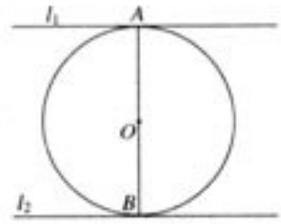
圆的切线垂直于过切点的半径.

练习

1. 如图，AB 是⊙O 的直径，$\angle ABT=45°$，$AT=AB$，求证 AT 是⊙O 的切线.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，AB 是⊙O 的直径，直线 l_1、l_2 是⊙O 的切线，A、B 是切点，l_1、l_2 有怎样的位置关系？证明你的结论.

[1] 引导学生分析，由于 AB 过⊙O 上的点 C，所以连接 OC，只要证明 $AB\perp OC$ 就可以了.

[2] 引导学生分析，这时直接证明比较困难，可以运用反证法.

[3] 假设 OA 与 l 不垂直，过点 O 作 $OM\perp l$，垂足为 M，根据垂线段最短的性质，有 $OM<OA$，这说明圆心 O 到直线 l 的距离小于半径 OA，于是直线 l 就要与圆相交，而这与直线 l 是⊙O 的切线矛盾. 因此，OA 与直线 l 垂直.

练习答案

1. 由 $\angle ABT=45°$ 和 $AT=AB$ 可知 $\angle T=45°$，从而 $\angle BAT=90°$，因此 AT 是⊙O 的切线.
2. 由题意可知 $l_1\perp AB$，$l_2\perp AB$，因此 $l_1\parallel l_2$.

全体学生而言，这个证明不作要求，学生认识到这个定理，并能加以应用就可以了. 由性质定理以及“过一点有且只有一条直线与已知直线垂直”，很容易得到，经过圆心垂直于切线的直线一定经过切点，反过来，经过切点垂直于切线的直线必经过圆心，这也经常用到.

在运用切线的判定定理和性质定理时，往往需要添加辅助线. 当已知一条直线是某圆的切线时，切点的位置是确定的，辅助线常常是连接圆心和切点，得到半径，那么半径垂直于切线. 当要证明某直线是圆的切线时，如果已知直线过圆上一点，则作出过这一点的半径，证明直线垂直于半径；如果直线与圆的公共点没有确定，则应过圆心作直线的垂线，证明圆心到直线的距离等于半径.

6. 切线的判定定理和性质定理容易混淆，要使学生分清判定定理和性质定理的题设和结论，注意在什么情况下可以用切线的判定定理，什么情况下用切线的性质定理. 最后，还应帮助

[1] 利用圆的轴对称性可知，OB 也是 $\odot O$ 的半径，PB 也是切线，PA 与 PB，$\angle APO$ 与 $\angle BPO$ 相等.

[2] 要注意切线和切线长的区别：切线是直线，不可度量，而切线长是切线上一条线段的长，即圆外一点与切点之间的距离，可以度量.

[3] 注意让学生分清题设和结论.

[4] 通过这个问题，使学生认识学习三角形内切圆的意义.

探究

如图 24.2-11，纸上有一 $\odot O$，PA 为 $\odot O$ 的一条切线，沿着直线 PO 将纸对折，设圆上与点 A 重合的点为 B，这时，OB 是 $\odot O$ 的一条半径吗？PB 是 $\odot O$ 的切线吗？利用图形的轴对称性，说明图中的 PA 与 PB，$\angle APO$ 与 $\angle BPO$ 有什么关系？[1]

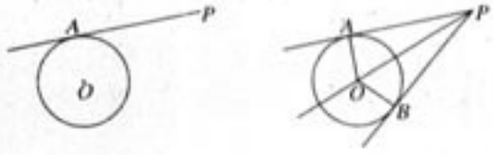


图 24.2-11

经过圆外一点作圆的切线，这点和切点之间的线段的长，叫做这点到圆的**切线长**.[2]

图 24.2-11 中，PA、PB 是 $\odot O$ 的两条切线，

$\therefore$ $OA\perp AP$，$OB\perp BP$.

又 $OA=OB$，$OP=OP$，

$\therefore$ $\mathrm{Rt}\triangle AOP\cong\mathrm{Rt}\triangle BOP$.

$\therefore$ $PA=PB$，$\angle OPA=\angle OPB$.

由此我们得到切线长定理：

从圆外一点可以引圆的两条切线，它们的切线长相等，这一点和圆心的连线平分两条切线的夹角.[3]

思考

图 24.2-12 是一张三角形的铁皮，如何在它上面截下一块圆形的用料，并且使圆的面积尽可能大呢？[4]

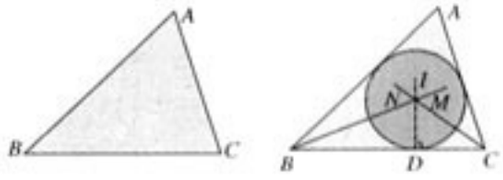


图 24.2-12

学生总结切线的判定方法和切线的性质. 判定切线有三种方法：(1) 和圆只有一个公共点的直线是圆的切线；(2) 和圆心的距离等于半径的直线是圆的切线；(3) 经过半径外端且垂直于半径的直线是圆的切线. 应根据题目的特点选择合适的判定方法. 关于切线的性质有如下几个：(1) 切线和圆只有一个公共点；(2) 切线和圆心的距离等于圆的半径；(3) 切线垂直于过切点的半径；(4) 经过圆心且垂直于切线的直线必过切点；(5) 经过切点垂直于切线的直线必过圆心.

7. 接下来，教科书研究了切线长的问题，给出了切线长的概念和切线长定理，并结合一个作图问题，给出了三角形的内切圆问题.

切线是直线，它是无限长的，为了研究切线的一些特性，需要定义切线长. 切线长是用线段的长来定义的，要让学生明确这个线段的端点是哪两个点.

教科书是利用圆的轴对称性帮助学生探索切

假设符合条件的圆已经做出，那么它应当与三角形的三条边都相切，这个圆的圆心到三角形的三条边的距离都等于半径．如何找到这个圆心呢？[1]

我们以前学过，三角形的三条角平分线交于一点，并且这个点到三条边的距离相等．因此，如图 24.2-12，分别作出$\angle B$、$\angle C$的平分线 BM 和 CN，设它们相交于点 I，那么点 I 到 AB、BC、CA 的距离都相等．以点 I 为圆心，点 I 到 BC 的距离 ID 为半径作圆，则$\odot I$与$\triangle ABC$的三条边都相切．

与三角形各边都相切的圆叫做三角形的**内切圆**[2] (inscribed circle)，内切圆的圆心是三角形三条角平分线的交点，叫做三角形的**内心** (incenter)．

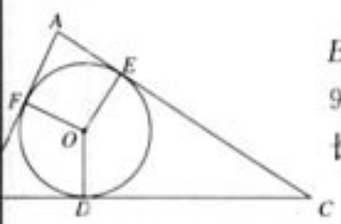


图 24.2-13

例 2　如图 24.2-13，$\triangle ABC$ 的内切圆$\odot O$与 BC、CA、AB 分别相切于点 D、E、F，且 $AB=9$ cm，$BC=14$ cm，$CA=13$ cm，求 AF、BD、CE 的长．

解：设 $AF=x$(cm)，则

$$AE=x,$$
$$CD=CE=AC-AE=13-x,$$
$$BD=BF=AB-AF=9-x.$$

由　$BD+CD=BC$ 可得

$$(13-x)+(9-x)=14.$$

解得

$$x=4.$$

因此

$$AF=4(\text{cm}),$$
$$BD=5(\text{cm}),$$
$$CE=9(\text{cm}).$$

[1] 引导学生分析作图的关键．假设圆已经作出，圆心应满足什么条件，怎样根据这些条件确定圆心？圆心确定后，如何确定半径？

[2] 要让学生对照图形理解三角形的内切圆的概念，并与三角形的外接圆进行比较．“接”和“切”是说明多边形的顶点和边与圆的关系：多边形的顶点都在圆上叫“接”，多边形的边都与圆相切叫“切”．

线长的特征的．切线长定理再次体现了圆的轴对称性，它为证明线段相等、角相等、弧相等、垂直关系等提供了理论依据，它也是本节的重点内容．

上面讲到，已知一条切线时，常有 5 个性质可用．若已知两条切线相交，又多了切线长相等这个性质．实际上，若两条切线平行，则连接两个切点的线段是直径．经过圆外一点引圆的两条切线，连接两条切点可以得到一个等腰三角形，利用等腰三角形的性质和垂径定理等，又可以得出一些结论．实际上，上述图形都是一些基本图形，其中的一些关系应让学生理解．

8. 接下来，教科书结合一个求作三角形内面积最大的圆的问题，给出了三角形的内切圆和内心的概念．分析如何作三角形的内切圆时，要抓住“确定圆心的位置和半径”这个关键，这样学生就会根据圆与三边均相切这个条件分析得出，圆心到三边距离必相等，并且这个距离就是半径．而如何确定圆心的位置，则可引导复习平

练习答案

1. $\angle BOC=180°-\frac{1}{2}\angle ABC-\frac{1}{2}\angle ACB=117.5°$.

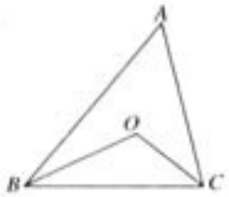
2. $\frac{1}{2}rl$.

[1] 这些都是反映两圆之间位置关系的一些实例，教学时，可以让学生再举出一些例子，加强直观感受.

练习

1. 如图，$\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=50°$，$\angle ACB=75°$，点 O 是内心，求 $\angle BOC$ 的度数.

2. $\triangle ABC$ 的内切圆半径为 r，$\triangle ABC$ 的周长为 l，求 $\triangle ABC$ 的面积.（提示：设内心为 O，连接 OA、OB、OC.）



（第 1 题）

24.2.3 圆和圆的位置关系

观察

图 24.2-14 是反映圆和圆的位置关系的一些生活中的实例，你还能再举出其他一些例子吗？[1]

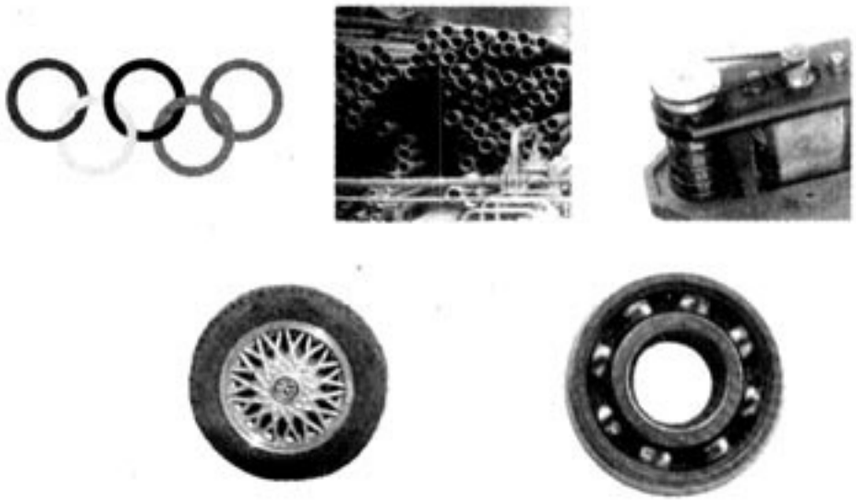


图 24.2-14

分线的性质得出.

教科书是用“三角形内切圆的圆心”来定义三角形的内心的. 因为三角形的内心就是三角形的三条角平分线的交点，所以如果三角形的内心已知时，过三角形顶点和内心的射线平分三角形的内角，这一点应向学生说明.

应注意把三角形的内心和三角形的外心，内切圆和外接圆进行比较，让学生明确“接”和“切”的含义，在对比中加深理解.

9. 24.2.3 小节重点研究了两圆之间的位置关系. 给出了两圆的位置与两圆的半径、圆心距之间的关系.

两圆位置关系的实例在生活中也是很常见的，教科书首先给出了一些生活中常见的实例，包括两圆外离、内含、相交、外切、内切、同心圆等不同情况，让学生对于两圆的位置关系有直观感受. 接下来，教科书设置了一个“探究”栏目，通过移动两圆，去发现两圆存在的不同位置

探究

分别在两张透明的纸上画两个半径不同的$\odot O_1$和$\odot O_2$，把两张纸叠合在一起，固定其中一张而移动另一张，你能发现$\odot O_1$和$\odot O_2$有几种不同的位置关系？每种位置关系中两圆有多少个公共点？

利用信息技术工具，可以画出动态的图形，方便研究直线和圆的位置关系，有条件的同学可以试一试.[1]

可以发现，可能会出现以下几种情况（图 24.2-15）：[2]

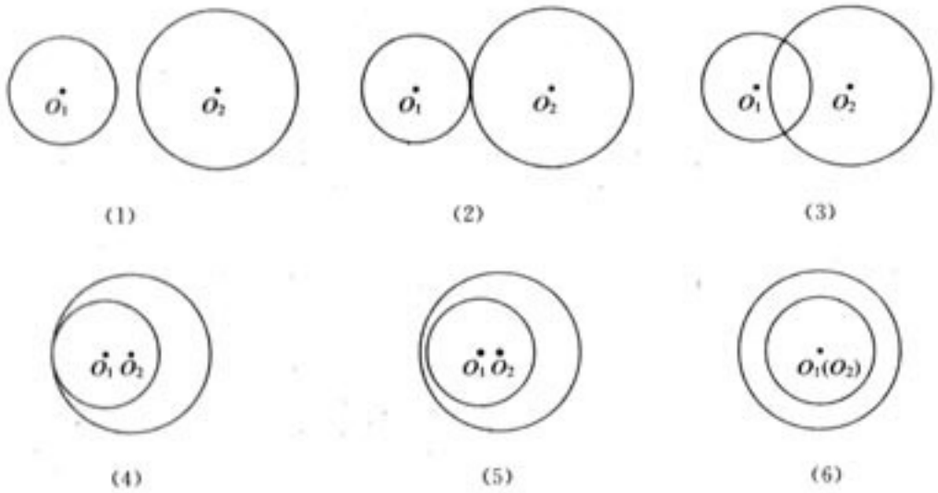


图 24.2-15

如果两个圆没有公共点，那么就说这两个圆**相离**，如图 24.2-15(1)、(5)、(6)所示. 其中(1)又叫做**外离**. (5)、(6)叫做**内含**. (6) 中两圆同心是两圆内含的一种特殊情况.

请你说出图 24.2-14 中的实例所反映的圆和圆的不同位置关系.

如果两个圆只有一个公共点，那么就说这两个圆**相切**，如图 24.2-15(2)、(4)所示. 其中(2)叫做**外切**，(4) 叫做**内切**.

如果两个圆有两个公共点，那么就说这两个圆**相交**，如图 24.2-15(3)所示.

[1] 鼓励学生利用信息技术工具，在图形的动态变化过程中去发现其中不变的位置关系.

[2] 这种分类可以表示为：

(1) 相离{外离 / 内含

(2) 相交

(3) 相切{外切 / 内切

关系. 在此基础上，总结抽象出各种位置关系的定义. 在这里，可以利用计算机软件，制成动态的图形，让学生在圆的动态变化中去发现它们之间的不同位置关系. 还可以利用软件的测量功能，测出圆心距和两圆的半径，去发现其中的数量关系. 这对于增强直观性，帮助学生发现数学规律是很有帮助的.

接下来，教科书设置了一个“讨论”栏目，让学生去讨论、探究图形的位置关系（图形的几何特性）与圆的半径、圆心距大小（数量关系）有关，并让学生自己完成表格. 实际上，两圆的半径、圆心距在它们的不同位置关系时具有以下的数量关系：

(1) 两圆相离$\Leftrightarrow d>r_1+r_2$；

(2) 两圆相切$\Leftrightarrow d=r_1+r_2$；

(3) 两圆相交$\Leftrightarrow r_1-r_2<d<r_1+r_2$ $(r_1\geqslant r_2)$；

(4) 两圆相切$\Leftrightarrow d=r_1-r_2$ $(r_1>r_2)$；

(5) 两圆内含$\Leftrightarrow d<r_1-r_2$ $(r_1>r_2)$.

[1] 对于圆心距，教学时不必给出定义，学生理解为两圆圆心的距离即可.

如果两圆的半径分别为 r_1 和 r_2（$r_1<r_2$），圆心距[1]（两圆圆心的距离）为 d，当两圆外切时，d 与 r_1 和 r_2 有怎样的关系？反过来，当 d 与 r_1 和 r_2 满足这样的关系时，两圆一定外切吗？

进一步，利用 d 与 r_1 和 r_2 之间的关系讨论两圆的位置关系，并完成下表：

两圆的位置关系	d 与 r_1 和 r_2 之间的关系
外离	$d>r_1+r_2$
外切	
相交	
内切	
内含	

连接图 24.2-15 中各图的两个圆心，可以帮助你得出所需的数量关系.

例 3 如图 24.2-16，⊙O 的半径为 5 cm，点 P 是⊙O 外一点，$OP=8$ cm. 以 P 为圆心作一个圆与⊙O 外切，这个圆的半径应是多少？以 P 为圆心作一个圆与⊙O 内切呢？

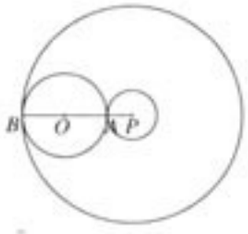


图 24.2-16

解：(1) 设⊙P_1 与⊙O 外切于点 A，则

$$\begin{aligned} PA &= OP-OA \\ &= 8-5 \\ &= 3(\text{cm}). \end{aligned}$$

所以⊙P_1 的半径是 3 cm.

(2) 设⊙P_2 与⊙O 内切于点 B，则

$$\begin{aligned} PB &= OP+OB \\ &= 8+5 \\ &= 13(\text{cm}). \end{aligned}$$

所以⊙P_2 的半径是 13 cm.

利用这个结论可以把形的问题转化为数的问题来解决，也可以根据数量关系确定两圆的位置关系. 因此这个结论对于解决两圆的位置关系的问题特别方便，应当通过练习让学生切实掌握.

对于两圆的位置关系与两圆的半径、圆心距的数量关系的结论，教科书是由图形直观得出的，没有加以证明，学生掌握了这个结论就可以了.

两圆的位置与两圆的圆心距、半径的数量之间的关系，既是两圆不同位置的判定，又是它们的性质，因此要向学生说明这个结论可以两面用，其中判定两圆相交时，必须具备 $r_1-r_2<d<r_1+r_2$ 的条件. 为了引起学生注意，可以提问：当只知道 $r_1-r_2<d$ 或 $d<r_1+r_2$ 时，两圆是否一定相交？让学生从图形的位置观察到当只具备 $r_1-r_2<d$ 时，两圆还可能外切或外离，而当只具备 $d<r_1+r_2$ 时，两圆还可能内切或内含，这说明只有具备 $r_1-r_2<d<r_1+r_2$ 时，才能判断两圆相交.

思考

如图 24.2-17，$\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 相切，这个图是轴对称图形吗？如果是，它的对称轴是什么？切点与对称轴有什么位置关系？[1]



图 24.2-17

练习

1. $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 的半径分别为 3 cm 和 4 cm，如果 O_1O_2 满足下列条件，$\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 各有什么位置关系？
   (1) $O_1O_2=8$ cm；　(2) $O_1O_2=7$ cm；
   (3) $O_1O_2=5$ cm；　(4) $O_1O_2=1$ cm；
   (5) $O_1O_2=0.5$ cm；　(6) O_1 和 O_2 重合.
2. 定圆 O 的半径是 4 cm，动圆 P 的半径是 1 cm.
   (1) 设 $\odot O$ 和 $\odot P$ 相外切，点 P 与点 O 的距离是多少？点 P 可以在什么样的线上移动？
   (2) 设 $\odot O$ 和 $\odot P$ 相内切，情况又怎样？
3. 分别以 1 cm、2 cm、4 cm 为半径画圆，使它们两两外切.
4. 两个半径相等的圆的位置关系有几种？

[1] 这个图形是轴对称图形，对称轴就是经过两圆圆心的直线，切点在对称轴上.

练习答案

1. (1) 相离；　(2) 外切；　(3) 相交；　(4) 内切；　(5) 内含；　(6) 内含(同心).
2. (1) 点 P 与点 O 的距离是 5 cm，点 P 可以在以 O 为圆心，半径为 5 cm 的圆上移动；(2) 点 P 与点 O 的距离是 3 cm，点 P 可以在以 O 为圆心，半径为 3 cm 的圆上移动.
3. 提示，作 $\triangle ABC$，使 $AB=3$ cm，$BC=6$ cm，$CA=5$ cm，再分别以 A、B、C 为圆心，1 cm、2 cm、4 cm 为半径画圆.
4. 4 种. 相离，外切，相交，重合.

10. 接下来，教科书安排了应用两圆位置关系作图的一个例题. 后面紧接着的“思考”栏目是对两圆相切时的情况的一个拓展. 实际上，通过两圆圆心的直线（我们也称它为连心线）就是它们的对称轴，当两圆相切时，由于切点是它们的唯一公共点，所以切点一定在对称轴上，也就是在连心线上. 这个结论的证明需要用到反证法，这里不要求学生掌握.

11. 学到这里，学生已经学习了点与圆、直线与圆、圆与圆之间的位置关系. 应当适时进行一个小结. 特别应当让学生总结不同位置关系时对应的不同数量关系，从数和形的两方面去对它们加以认识，在对比和类比中加深对这三种不同位置关系的理解.

[1] 需要连接圆心与切点，再应用切线的性质和垂径定理，这种作辅助线的方法很常见.

[2] 画出来的图形类似一个太极图案. 利用圆与圆相切，可以画出许多精美的图案.

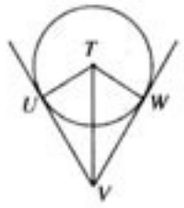
习题 24.2

复习巩固 ▶▶

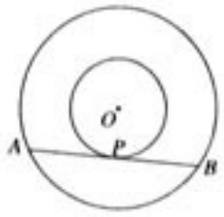
1. ⊙O的半径为 10 cm，根据下列点 P 到圆心 O 的距离，判断点 P 和⊙O的位置关系：
(1) 8 cm；　(2) 10 cm；　(3) 12 cm.

2. Rt△ABC中，$\angle C=90^\circ$，$AC=3$ cm，$BC=4$ cm，以 C 为圆心，下列 r 为半径的圆与 AB 有怎样的位置关系？
(1) $r=2$ cm；　(2) $r=2.4$ cm；　(3) $r=3$ cm.

3. 如图，一个钢管放在 V 形架内，钢管的半径是 25 cm. (1) 如果量得 $UV=28$ cm，VT 是多少？(2) 如果$\angle UVW=60^\circ$，VT 是多少？



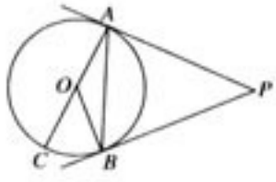
(第 3 题)



(第 4 题)

4. 如图，以 O 为圆心的两个同心圆中，大圆的弦 AB 是小圆的切线，点 P 为切点，求证 $AP=BP$.[1]

5. 如图，PA、PB 是⊙O的切线，A、B 为切点，AC 是⊙O的直径，$\angle BAC=25^\circ$，求 $\angle P$ 的度数.



(第 5 题)


(第 6 题)

6. 如图，画一个图案，先做一个大的圆，以大圆的半径为直径作两个和大圆都内切的小圆，然后，分别在这两个小圆内作两个同心圆，再把它涂上颜色或阴影.[2]

7. 三角形三边长为 5 cm，12 cm，13 cm，以这个三角形三个顶点为圆心的三个圆两两外切，则这三个圆的半径分别是多少？

习题 24.2

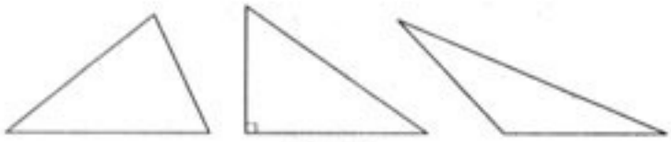
1. “复习巩固”中的 7 个问题都是围绕本节的重点内容设计的. 其中第 1 题是判断点与圆的位置关系，直接应用点到圆心的距离与圆的半径的关系；第 2 题是在一个直角三角形中，判断斜边与圆的位置关系；第 3 题是应用切线的性质定理和勾股定理的计算题；第 4 题是一个应用切线的性质的问题，需要连接圆心与切点，应用切线的性质与垂径定理；第 5 题要应用切线长定理和圆周角定理；第 6 题是一个作图问题，实际上是一个太极图案，涉及圆与圆的位置关系；第 7 题也是圆与圆相切的问题.

2. “综合运用”的 5 个问题，也都是围绕本节的重点内容而设计的. 其中第 8 题是一个作图题，要利用垂径定理和勾股定理来确定圆心和半径；第 9 题是分别作锐角三角形、直角三角形、钝角三角形的外接圆，锐角三角形的外心在三角形内部，直角三角形的外心在斜边上，钝角三角

综合运用 ▶▶

8. 已知 $AB=6$ cm，画半径为 4 cm 的圆，使它经过 A、B 两点，这样的圆能做出多少个？如果半径为 3 cm，2 cm 呢？[1]

9. 如图，分别做出锐角三角形、直角三角形、钝角三角形的外接圆，它们外心的位置有什么特点？

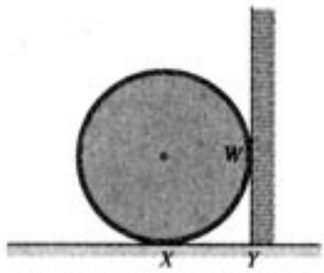


（第 9 题）

10. 一名考古学家发现一块古代车轮的碎片，你能帮他找出这个轮子的半径吗？说出你的理由.[2]



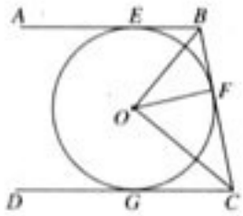
（第 10 题）



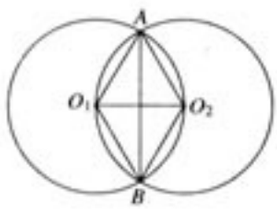
（第 11 题）

11. 如图，一个油桶靠在墙边，量得 $WY=1.65$ m，并且 $XY\perp WY$，这个油桶的底面半径是多少？

12. 如图，AB、BC、CD 分别与⊙O 相切于 E、F、G，且 $AB/\!/CD$，$BO=6$ cm，$CO=8$ cm，求 BC 的长.



（第 12 题）



（第 13 题）

13. 如图，等圆⊙O_1 和⊙O_2 相交于 A、B 两点，⊙O_1 经过⊙O_2 的圆心 O_2，求 $\angle O_1AB$ 的度数.[3]

[1] 要作出一个圆，关键是要确定圆心和半径.

[2] 类似于计算赵州桥的桥拱半径的方法，利用垂径定理和勾股定理.

[3] 四边形 AO_1BO_2 构成了一个由两个等边三角形组成的菱形.

形的外心在三角形的外部；第 10 题是要确定一个残缺车轮的半径，可以应用垂径定理和勾股定理来计算，类似于计算赵州桥的桥拱半径的方法；第 11 题是应用切线的性质的应用问题，第 12 题是要利用切线的性质和切线长定理. 首先判断出△BOC 是直角三角形，再利用勾股定理计算，这也是相切的问题中常见的图形，要求学生好好掌握；第 13 题也是研究两圆相交时常见的问题，这样相交的两个等圆实际上构成了两个等边三角形，可以得出许多线段和角相等.

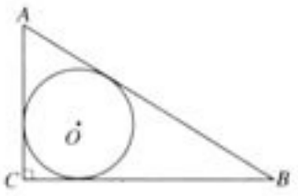
3. “拓广探索”的三个问题略有难度. 其中第 14 题是求三角形内切圆的半径，可以连接圆心与切点，把三角形分成三个三角形，利用三角形的面积的两种计算方法，列出方程，从而解出半径来；对于第 15 题，可以按照提示中的作法，将两个圆变成同心圆，再利用勾股定理，通过等量代换，将问题解决（具体解法参考后面的习题解答）；第 16 题也是一个作图题，满足题目条件

[1] 通过移小圆，使它们成为同心圆，问题的解决就变得简单了.

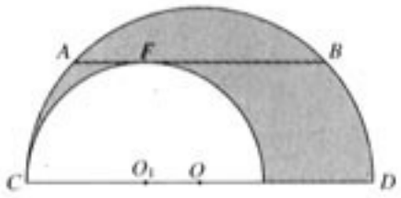
[2] 这样的圆可以作出无数个，它们的圆心实际上在一条双曲线上.

拓广探索 ▶▶

14. 如图，Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，AB、BC、CA 的长分别为 c、a、b. 求△ABC 的内切圆半径 r.



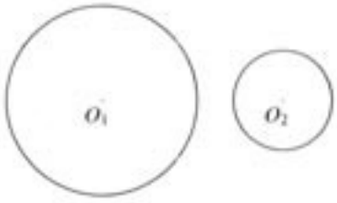
（第 14 题）



（第 15 题）

15. 如图，大半圆 O 与小半圆 O_1 相切于点 C，大半圆的弦 AB 与小半圆相切于 F，且 $AB/\!/CD$，$AB=4$ cm，求阴影部分的面积（提示：将两个圆变为同心圆）.[1]

16. 如图，已知⊙O_1、⊙O_2，作一个圆，使它与这两个圆都相切. 你能作出多少个这样的圆？与同学交流一下.[2]



（第 16 题）

的圆可以作出无数个，实际上，如果设要作圆的圆心为 P，则点 P 到两个已知圆的圆心的距离的差应当为两圆的半径的差，是一个常数. 因此所要求作的圆的圆心应当在一条双曲线上. 这一点，教师应当明白，但不必要求学生理解.

24.3 正多边形和圆

我们知道，各边相等，各角也相等的多边形是正多边形. 日常生活中，我们经常能看到正多边形形状的物体，利用正多边形，我们也可以得到许多美丽的图案（如图 24.3-1），你还能再举出一些这样的例子吗？[1]

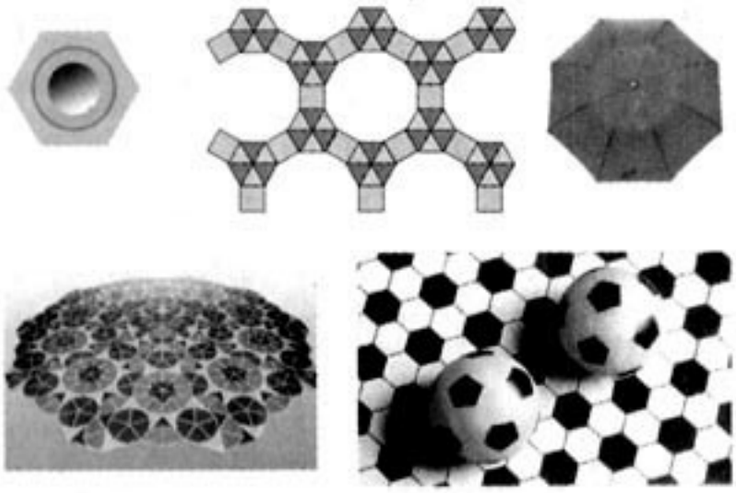


图 24.3-1

正多边形和圆的关系非常密切，只要把一个圆分成相等的一些弧，就可以作出这个圆的内接正多边形，这个圆就是这个正多边形的外接圆.

我们以圆内接正五边形为例证明.

如图 24.3-2，把⊙O 分成相等的 5 段弧，依次连接各分点得到五边形 $ABCDE$.

∵ $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{EA}$，

∴ $AB=BC=CD=DE=EA$，

$\overset{\frown}{BCE}=\overset{\frown}{CDA}=3\overset{\frown}{AB}$.[2]

∴ $\angle A=\angle B$.

[1] 正多边形的概念学生前面已经学过，可以多举一些例子，包括正多边形的，以及用正多边形镶嵌的，加深学生对正多边形概念的理解.

[2] 这里是证明的关键，要结合图形，让学生理解. 还可以让学生说出，当 $n=6$，7，…时，这里应作什么改动.

1. 正多边形与圆的关系密切，因此教科书接下来安排了正多边形的内容. 本节的主要内容是正多边形的有关概念，正多边形的有关计算，以及正多边形的有关画法等内容.

正多边形的概念学生前面已经学过，教科书首先复习了正多边形的概念，然后根据正多边形的概念和圆的有关性质说明了正多边形和圆的关系，并以正五边形为例进行了证明. 接下来又根据这种关系给出了正多边形中心、半径、边心距、中心角等概念. 接下来教科书以正六边形为例，研究了正多边形的有关计算问题，并结合正六边形的画法，研究了等分圆周和正多边形的画法.

掌握正多边形的定义是学习好有关正多边形的问题的关键. 正多边形的定义中“各边相等”“各角相等”是正多边形的两个特征. 由于三角形具有稳定性，所以三角形可以由“各边相等”推出“各角相等”，也可以由“各角相等”推出

[1] 教学时，可以画出其他一些正多边形，让学生找出它的中心、画出它的半径、边心距、中心角，以加深对概念的理解.

[2] 结合图，让学生明确哪一部分是地基，让学生知道要计算的是哪一部分.

同理 $\angle B=\angle C=\angle D=\angle E$.

又 五边形 $ABCDE$ 的顶点都在$\odot O$上，

∴ 五边形 $ABCDE$ 是$\odot O$的内接正五边形，$\odot O$是五边形 $ABCDE$ 的外接圆.

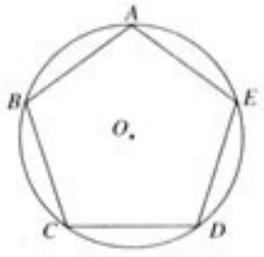


图 24.3-2



图 24.3-3

我们把一个正多边形的外接圆的圆心叫做这个正多边形的**中心**，外接圆的半径叫做正多边形的**半径**，正多边形每一边所对的圆心角叫做正多边形的**中心角**，中心到正多边形的一边的距离叫做正多边形的**边心距**（如图 24.3-3）.[1]

例 有一个亭子（图 24.3-4），它的地基是半径为 4 m 的正六边形，求地基的周长和面积（结果保留小数点后一位）.[2]



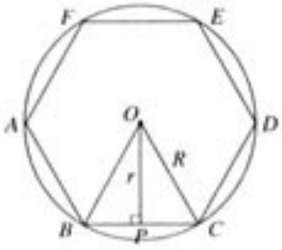


图 24.3-4

解：如图 24.3-4，由于 $ABCDEF$ 是正六边形，所以它的中心角等于$\frac{360^\circ}{6}=60^\circ$，$\triangle OBC$ 是等边三角形，从而正六边形的边长等于它的半径.

“各边相等”. 对于边数大于 3 的正多边形，这两个条件是互相独立的，应当让学生注意.

2. 对于正多边形和圆的关系，教科书以正五边形为例进行了证明. 这个证明，对于学生理解起来应该不困难. 在理解和应用它时，要注意“依次连接”等条件，结合图形，明确证明的思路：弧相等→弦相等、圆周角相等→多边形各边相等、各角相等→多边形是正多边形. 另外，教科书是以正五边形为例进行证明的，还要让学生明确，这个结论对于任意的正 n 边形都成立.

只要把圆分成相等的一些弧，就可以做出这个圆的内接正多边形. 这也是画正多边形和正多边形的计算的理论依据，而且它揭示了正多边形与圆的内在联系，从而可以应用圆的有关知识来研究正多边形的问题，又可以利用正多边形的有关计算解决圆的有关计算. 例如对圆周率 π 的研究，就是通过圆内接正多边形的计算进行.

一般地，正 n 边形的一个内角的度数是多少？中心角呢？正多边形的中心角与外角的大小有什么关系？[1]

因此，亭子地基的周长

$$l=6\times4=24(\text{m}).$$

在 $\text{Rt}\triangle OPC$ 中，$OC=4$，$PC=\frac{BC}{2}=\frac{4}{2}=2$，

利用勾股定理，可得边心距

$$r=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}.$$

亭子地基的面积

$$S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}\times24\times2\sqrt{3}\approx41.6(\text{m}^2).$$

练习

1. 矩形是正多边形吗？菱形呢？正方形呢？为什么？
2. 各边相等的圆内接多边形是正多边形吗？各角相等的圆内接多边形呢？如果是，说明为什么；如果不是，举出反例.
3. 分别求半径为 R 的圆内接正三角形、正方形的边长、边心距和面积.

实际生活中，经常会遇到画正多边形的问题，比如画一个六角螺帽的平面图，画一个五角星等，这些问题都与等分圆周有关. 要制造如图 24.3-5 中的零件，也需要等分圆周.

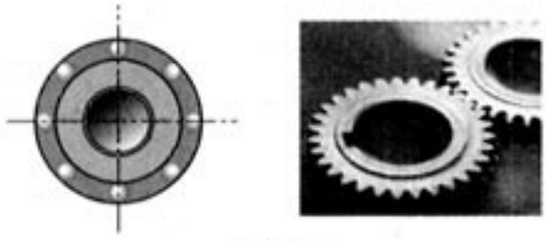


图 24.3-5

例如，我们可以这样来画一个边长为 2 cm 的正六边形.

第一种方法，如图 24.3-6(1)，以 2 cm 为半径作一个$\odot O$，用量角器画一个等于$\frac{360^\circ}{6}=60^\circ$的圆心角，

[1] 正 n 边形每一个内角都等于$\frac{(n-2)\cdot180^\circ}{n}$，每一个中心角和外角都等于$\frac{360^\circ}{n}$，中心角和外角相等.

练习答案

1. 矩形各角相等，但各边不相等，它不是正多边形；菱形各边相等，但各角不相等，也不是正多边形；正方形四边、四角都相等，是正多边形.
2. 各边相等的圆内接多边形的各个角也相等，它是正多边形；各角相等的圆内接多边形不是正多边形，例如矩形.
3. 半径为 R 的圆内接正三角形边长为$\sqrt{3}R$，边心距为$\frac{1}{2}R$，面积为$\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$；内接正方形边长为$\sqrt{2}R$，边心距为$\frac{\sqrt{2}}{2}R$，面积为 $2R^2$.

由于正多边形和圆有密切的关系，所以正多边形和圆有一些类似的性质，例如圆与正多边形都是轴对称图形，当边数为偶数时，正多边形也是中心对称图形，这些也应让学生了解.

3. 教科书接下来给出了正多边形的其他一些有关概念，并结合这个解决求亭子地基的周长和面积的问题研究了正多边形的有关计算. 在解决正多边形的有关计算时，通过作正 n 边形的半径和边心距，把正 n 边形划分为 $2n$ 个直角三角形，再利用勾股定理，即可完成一些特殊的正多边形的计算问题. 对于一般的正 n 边形，可以通过计算锐角三角函数，解直角三角形来完成问题的解决，这在后面学习了相关知识后才可以进行，这里不作要求.

应当明确，如果正 n 边形的边数给定，已知它的边长、周长、半径、边心距、面积中的任意一项，都可以求出其他各项. 教科书后面也安排了这样的习题，对一些特殊正多边形进行了有关

[1] 在七年级上册第3章，我们就是用这种方法画五角星的，用这种方法可以画出任意正多边形.

[2] 用尺规作图的方法，可以画出一些特殊的正多边形，如正四、八，正六、三、十二边形等.

[3] 对于正十二边形，除了可以在正六边形基础上逐次平分各边所对的弧得到以外，还可以以圆的4等分点为圆心，以圆的半径为半径画4条弧与圆相交，就可以把圆12等分.

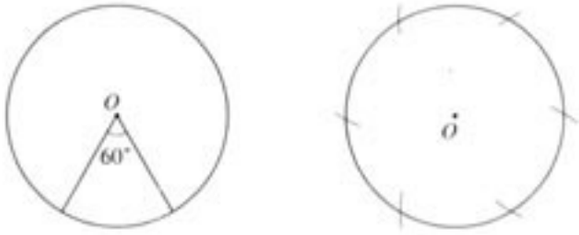
练习答案

提示：(1) 以圆的三等分点为圆心，圆的半径为半径作三条弧；(2) 以正六边形的中点为圆心，正六边形的边长为直径向圆外画半圆；(3) 作圆的内接正五边形，再以正五边形的各个顶点为圆心，边长为半径画十条弧.

利用这种方法，可以画出任意的正n边形.[1]

由此，你能进一步画出正三角形，正十二边形吗?[3]

它对着一段弧，然后在圆上依次截取与这条弧相等的弧，就得到圆的6个等分点，顺次连接各分点，即可得出正六边形.



(1) (2)

图 24.3-6

第二种方法，如图24.3-6(2)，以2 cm为半径作一个⊙O，由于正六边形的半径等于边长，所以在圆上依次截取等于2 cm的弦，就可以将圆六等分，顺次连接各分点即可.[2]

探究

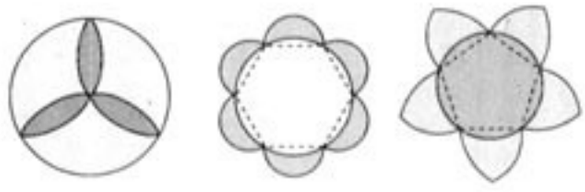
参照24.3-7，按照一定比例，画一个停车让行的交通标志的外缘.



图 24.3-7

练习

用等分圆周的方法画出下列图案：



计算，这些计算在后面也常用到，应当让学生熟练掌握.

4. 接下来，教科书介绍了正多边形的画法. 这在实际生活中也是经常遇到的. 画正多边形的关键是等分圆周，教科书以画正六边形为例，介绍了两种等分圆周的方法，即用量角器等分圆周和用尺规等分圆周.

用量角器等分圆周是一种简单而常用的方法. 在七年级时，学生曾经用这种方法画过五角星，因此比较熟悉. 用量角器等分圆周有两种方法，一是依次作相等的圆心角来等分圆，二是先画一个$\frac{360^\circ}{n}$的圆心角，然后在圆上依次截取这个圆心角所对的弧的等弧，也可以得到圆的n等分点. 两种方法比较，第2种相对简单，教学时应重点介绍它的画法依据，然后让学生自己练习.

尺规方法，理论上讲是精确的，但不是任意等分圆都能用这种方法，而且作图时也存在误差，

习题 24.3

复习巩固 ▸▸

1. 完成下表中有关正多边形的计算：

正多边形边数	内角	中心角	半径	边长	边心距	周长	面积
3	60°			$2\sqrt{3}$			
4					1		
6					$\sqrt{3}$		

2. 画一个正五边形，再作出它的对角线，得到如图所示的五角星.[1]



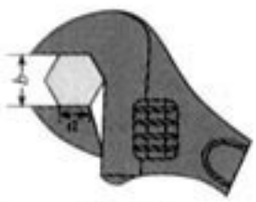
（第 2 题）

3. 要用圆形铁片截出边长为 a 的正方形铁片，选用的圆形铁片的半径至少是多少？

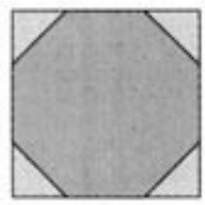
4. 正多边形都是轴对称图形吗？如果是，它的对称轴在哪里？正多边形都是中心对称图形吗？如果是，它的对称中心在哪里？

综合运用 ▸▸

5. 如图，要拧开一个边长 $a=12$ mm 的六角形螺帽，扳手张开的开口 b 至少要多少？



（第 5 题）



（第 6 题）

6. 如图，正方形的边长为 4 cm，剪去四个角后成为一个正八边形，求这个正八边形的边长和面积.

7. 用 48 m 长的篱笆在空地上围成一个绿化场地，现有几种设计方案，正三角形、正方形、正六边形、圆，哪种场地的面积最大（可以利用计算器计算）？[2]

[1] 这里不能应用尺规作图，只能利用量角器.

[2] 当周长一定时，随着边数的增加，正多边形的面积也随之增加，当正多边形变为圆时，面积最大.

因此教科书只是就正六边形的情况进行了研究. 在此基础上，可以 3 等分和 12 等分圆周. 教学时，还可以向学生介绍正四边形和正八边形的画法，进而可以画出它们的倍分的份数的等分圆.

习题 24.3

1. 习题 24.3 共安排了 8 个问题，都是围绕本节重点内容设计的. 其中“复习巩固”的第 1 题是正多边形的有关计算，已知中心角、半径、边长、边心距、周长、面积中的一个量，可以求出其余的量，借此问题，复习正多边形的基本计算；第 2 题是通过画正多边形得到一个五角星；第 3 题是已知正四边形的边长求它的半径；由于正多边形与圆有密切关系，它们也有一些类似性质，对称性就是一种，第 4 题就是有关正多边形对称性的问题.

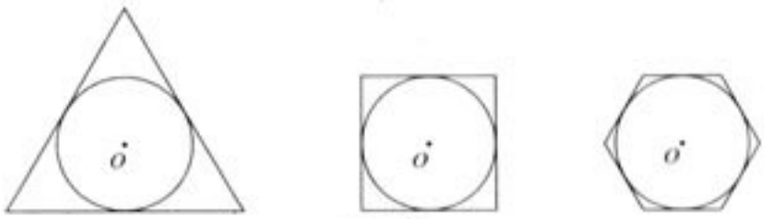
2. “综合运用”的第 5 题也是关于正多边形的计算，实质上是求已知边长的正六边形，求它

[1] 任何正多边形都有一个外接圆和内切圆，它们是同心圆.

[2] 可以让学生利用计算器，算出一些正多边形的周长，看它们逼近圆周率的情况.

拓广探索 ▶▶

8. 把圆分成 $n(n\geqslant 3)$ 等份，经过各分点作圆的切线，以相邻切线的交点为顶点的多边形是这个圆的外切正 n 边形. 如图，圆 O 的半径是 R，分别求它的外切正三角形，外切正方形，外切正六边形的边长.[1]



(第 8 题)



阅读与思考 选学

圆周率 π

我们知道，圆的周长 $C=2\pi R$，面积 $S=\pi R^2$，你知道公式中的 π 是怎么计算出来的吗？学过了正多边形和圆，就可以说出其中的道理了.



圆被 n 等分后，顺次连接各分点，使得到一个正 n 边形. 再把这 n 段弧的中点取出，连同前面的 n 个分点得到 $2n$ 个点，顺次连接这 $2n$ 个点，使得到正 $2n$ 边形. 继续这样做下去，圆内接正多边形的边数就是 $4n$，$8n$，$16n$，$32n$，…. 随着边数的成倍增多，它们的周长 p_n 越来越接近于圆的周长 C，$\frac{p_n}{2R}$ 也越来越接近于圆的周长与直径的比值 $\frac{C}{2R}$（圆周率 π）.[2]



π 是一个无理数，$\pi=3.141\,592\,653\,589\,793\cdots$. 对于圆周率 π 的讨论是古代数学一个经久不衰的热门话题. 在我国，东汉初年的《周髀算经》里就有“径一周三”的古率（直径为 1 的圆，它的周长为 3）. 公元前 2 世纪，古希腊数学家阿基米德（Archimedes）利用圆内接和外切正多边形逼近圆周的方法得到圆周率介于 $3\frac{10}{71}$ 和 $3\frac{1}{7}$ 之间.

的边心距的问题；第 6 题实质上是已知正八边形的边心距，求它的周长和面积；第 7 题是一个最值问题，求周长相等的正多边形，随着边数增加，面积也随之增加，变为圆时，面积最大.

3. 教科书正文中研究的都是关于圆的内接正多边形和多边形的外接圆的问题，实际上，还有圆的外切正多边形和多边形的内切圆. “拓广探索”的第 8 题就是求圆的外切正三角形、外切正方形、外切正六边形的边长的问题，这也是关于“切”的问题的基本计算，可以扩充学生的知识面.

阅读与思考

1. 这个阅读与思考，主要是向学生介绍圆周率的计算，借此也能说明圆周长和面积公式的来源. 另外，结合数学史的知识，还可以对学生进行爱祖国、爱科学的教育.

2. 由于正多边形和圆的关系密切，因此圆

我国魏晋时期的数学家刘徽首创“割圆术”，利用内接正多边形来计算圆周率，指出在圆的内接正多边形加倍的过程中“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体，而无所失矣”. 他计算出 $\pi \approx \frac{157}{50} \approx 3.14$. 在刘徽后对推算圆周率作出卓越贡献的是南朝的祖冲之（429—500），他给出圆周率的两个近似分数，即约率 $\frac{22}{7}$ 和密率 $\frac{355}{113}$，还推算出 π 的值在3.141 592 6和3.141 592 7之间，是第一个将圆周率准确计算到小数点后 7 位的人.



我国发行的祖冲之纪念邮票

随着时代的发展，人们利用高等数学来计算 π 的值，先后得出了许多计算 π 的公式，π 的近似值的位数也迅速增长.

电子计算机问世以后，圆周率近似值小数点后的位数突飞猛进. 50 年代得到千位以上，60 年代则达到 50 万位，80 年代得到 10 亿位. 到了 20 世纪末，已经计算出圆周率小数点后一兆二千四百一十一亿位数.

当今时代，π 的计算成为测试超级计算机的各项性能的方法之一，运算速度与计算过程的稳定性对计算机至关重要，这正是超高精度的 π 计算直到今天仍然有重要意义的原因之一.[1]

[1] 利用高等数学的方法，包括微积分的方法、概率的方法等等. 对于圆周率的计算的探求，实际上还发展了高等数学中关于计算方法的内容.

的有关问题的计算也与正多边形关系密切，圆周率 π 的计算就是一例. 本文借助几何直观，用正多边形的边长去逼近圆的周长，用到了求极限的思想，由于内容比较浅显，学生是不难理解的.

在历史上，我国许多数学家对圆周率的计算的研究作出过很大的贡献. 在公元前一世纪的《周髀算经》里，已谈到“径一周三”，称之为古率. 三国时刘徽始创“割圆求周”的方法，也就是本文介绍的方法，算到这个正 192 边形，他取 3.14 作为圆周率，称为徽率. 到南朝祖冲之又算出了约率和密律，称为祖率. 他的结果是当时世界上最好的结果，比欧洲要早一千多年.

3. 当今，由于计算方法的发展和计算机的发展，圆周率的计算突飞猛进. 反过来，对圆周率计算的研究也促进了高等数学中计算方法的发展，圆周率的计算也成了检验计算机计算速度的重要方法之一，这也是当今对圆周率计算研究的重要意义所在.

[1] 圆的周长 C 与半径 R 之间存在关系 $C=2\pi R$，也就是 360° 的圆心角所对的弧长，因此，1° 的圆心角所对的弧长就是 $\frac{2\pi R}{360}$，n° 的圆心角所对的弧长是 $\frac{n\pi R}{180}$.

[2] 教学时要向学生说明，这里的 180、n 在弧长计算公式中表示倍分关系，没有单位.

24.4 弧长和扇形面积

24.4.1 弧长和扇形面积

制造弯形管道时，经常要先按中心线计算“展直长度”（图 24.4-1 中虚线的长度），再下料，这就涉及到计算**弧长**的问题.

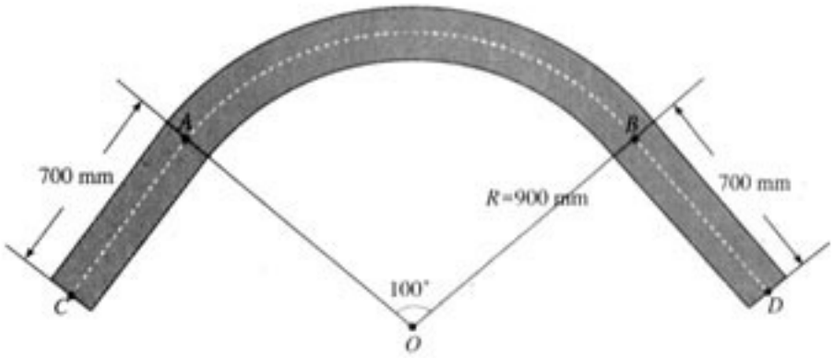


图 24.4-1

思考

你还记得圆周长的计算公式吗？圆的周长可以看作是多少度的圆心角所对的弧长？由此出发，1° 的圆心角所对的弧长是多少？n° 的圆心角呢？[1]

在半径是 R 的圆中，因为 360° 的圆心角所对的弧长就是圆周长 $C=2\pi R$，所以 n° 的圆心角所对的弧长为

$$l=\frac{n\pi R}{180}.$$ [2]

1. 本节的主要内容是在复习小学学过的圆周长和面积公式的基础上，推导出弧长和扇形面积的计算公式. 在此基础上，进一步求圆锥的侧面积和全面积.

对于弧长问题，教科书首先给出了一个实际问题，求弧形弯道的展直长度，由此引出本节的课题. 接下来，教科书通过一个“思考”栏目，引导学生分析弧长与圆周长之间的关系，推导出 n° 的圆心角所对的弧长的计算公式. 并进一步利用这个公式解决了开始引言中的问题.

在讲解弧长公式时，必须使学生理解，圆心角是 1° 的弧长等于圆周长的 $\frac{1}{360}$，是建立弧长公式的关键. 在应用弧长公式进行计算时，要注意公式中 n 的意义. n 表示 1° 的圆心角的倍数，它不是带单位的，公式中，180 也不是带单位的. 例如，解决弯道展直长度的问题时，计算 100° 的圆心角所对的弧长，学生往往写成 $\frac{100^\circ\times 900\times\pi}{180}$.

也可以用 $\overset{\frown}{AB}^1$ 表示圆弧 AB 的长.

对于本节开头提出的问题，根据图 24.4-1 中所给的数据，由上面的弧长公式，可得$\overset{\frown}{AB}$的长

$$l=\frac{100\times 900\times \pi}{180}=500\pi\approx 1\ 570(\text{mm}).$$

因此所要求的展直长度

$$L=2\times 700+1\ 570=2\ 970(\text{mm}).$$

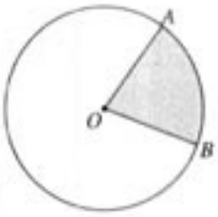


图 24.4-2

如图 24.4-2，由组成圆心角的两条半径和圆心角所对的弧所围成的图形叫做**扇形**. 可以发现，扇形面积与组成扇形的圆心角的大小有关. 圆心角越大，扇形面积也就越大. 怎样计算圆半径为 R，圆心角为 n° 的扇形面积呢?

思考

你还记得圆面积公式吗? 圆面积可以看作是多少度的圆心角所对的扇形的面积? 1°的圆心角所对的扇形面积是多少? n°的圆心角呢?

比较扇形面积公式与弧长公式，可以用弧长表示扇形面积：

$S_{扇形}=\frac{1}{2}lR$，[3]

其中 l 为扇形的弧长，R 为半径.

在半径是 R 的圆中，因为 360°的圆心角所对的扇形的面积就是圆面积 $S=\pi R^2$，所以圆心角为 n°的扇形面积是

$$S_{扇形}=\frac{n\pi R^2}{360}.\ [1]$$

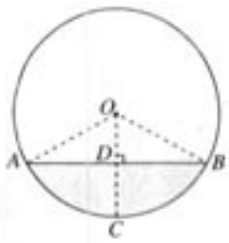


图 24.4-3

例 1 如图 24.4-3，水平放置的圆柱形排水管道的截面半径是 0.6 m，其中水面高 0.3 m. 求截面上有水部分的面积[2]（结果保留小数点后两位）.

解：如图 24.4-3，连接 OA、OB，作弦 AB 的垂直平分线，垂足为 D，交$\overset{\frown}{AB}$于点 C.

∵ $OC=0.6$，$DC=0.3$，

∴ $OD=OC-DC=0.3$.

[1] 公式中的 n 与弧长公式中的 n 一样，应该理解为 1°的倍数，不带单位.

[2] 解题前，要求的面积，可以通过哪些图形面积的和或差求得.

[3] 这个公式也是常用的扇形面积计算公式，应当要求学生掌握.

为了纠正这种错误，应使学生弄清楚，1°的圆心角所对的弧长是圆周角的$\frac{1}{360}$，100°的圆心角所对的弧长是 1°的圆心角所对弧长的 100 倍，所以应该写成$\frac{100\times 900\times \pi}{180}$. 如果使用度数符号，则应该分子分母同时使用. 在教学时，不必让学生使用度数符号.

2. 对于扇形的面积公式，教科书也是首先设计了一个“思考”栏目，让学生联系小学学过的圆面积公式，分析推导出扇形的面积公式. 在讲扇形的面积公式时，要使学生理解：圆心角是 1°的扇形面积等于圆面积的$\frac{1}{360}$，圆心角是 n°的扇形面积是圆面积的$\frac{n}{360}$，明白了这个道理，有助于学生记住计算公式.

扇形的面积的另一个计算公式$\frac{1}{2}lR$与三角形

[1] 有水的部分实际上是一个弓形，弓形的面积可以通过扇形的面积和三角形的面积的和或差求得.

[2] 要让学生明确，圆锥的母线长都相等.

练习答案

1. $R=\dfrac{12\times180}{81\times\pi}\approx8.5$ m.

2. $S_{阴影}=S_{\triangle ABC}-3S_{扇形AFE}$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2-3\times\frac{60\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2}{360}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}-\pi}{8}a^2.$$

在 $\mathrm{Rt}\triangle OAD$ 中，$OA=0.6$，利用勾股定理可得，

$$AD=0.3\sqrt{3}.$$

在 $\mathrm{Rt}\triangle AOD$ 中，$OD=\frac{1}{2}OA$，

$\therefore\ \angle OAD=30°$.

$\therefore\ \angle AOD=60°$，$\angle AOB=120°$.

有水部分的面积[1]

$$S=S_{扇形OAB}-S_{\triangle OAB}$$

$$=\frac{120\pi}{360}\times0.6^2-\frac{1}{2}AB\cdot OD$$

$$=0.12\pi-\frac{1}{2}\times0.6\sqrt{3}\times0.3$$

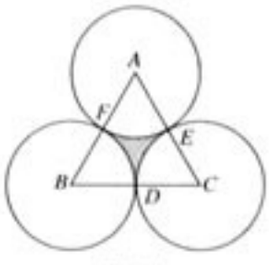
$$\approx0.22(\mathrm{m}^2).$$

练习

1. 有一段弯道是圆弧形的，道长是 12 m，弧所对的圆心角是 81°，求这段圆弧的半径 R（精确到 0.1 m）.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，正三角形 ABC 的边长为 a，分别以 A、B、C 为圆心，以 $\frac{a}{2}$ 为半径的圆相切于点 D、E、F，求图中阴影部分的面积.

24.4.2 圆锥的侧面积和全面积

我们知道，圆锥是由一个底面和一个侧面围成的，如图 24.4-4，我们把连接圆锥顶点和底面圆周上任意一点的线段叫做圆锥的**母线**.[2]

的面积公式类似，只要把扇形看做是一个曲边三角形，把弧长 l 看成是底，半径 R 看成是高就可以了. 这样对比，有助于学生记忆公式. 实际上，把扇形的弧分的越来越小，作经过各分点的半径，并顺次连接各分点，得到越来越多的小等腰三角形，扇形的面积就是这些等腰三角形面积和的极限，在这里还可以渗透极限的思想.

对于弓形的面积，教科书并没有单独介绍，而是通过一个例题，结合具体例子进行了介绍. 实际上，弓形的面积就是扇形的面积与三角形的面积的和或差. 因此，掌握了扇形面积的计算公式，弓形的面积就迎刃而解了. 后面，教科书安排的练习、习题，还涉及一些组合图形的面积的计算问题，要让学生学会分析问题，分析这些图形是由哪些图形组成的，进而正确计算出它们的面积来.

3. 接下来，教科书研究了圆锥的侧面积和全面积. 由于圆锥的侧面展开图是一个扇形，因

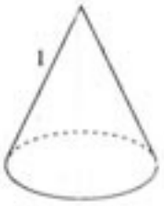


图 24.4-4

思考

圆锥的侧面展开图是什么图形？如何计算圆锥的侧面积？如何计算圆锥的全面积？

如图 24.4-5，沿一条母线将圆锥侧面剪开并展平，容易得到，圆锥的侧面展开图是一个扇形. 设圆锥的母线长为 l，底面圆的半径为 r，那么这个扇形的半径为_____，扇形的弧长为_____，因此圆锥的侧面积为_____，圆锥的全面积为_____. [1]

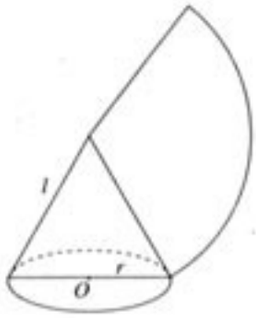


图 24.4-5

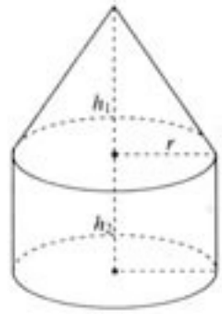


图 24.4-6



例 2 蒙古包可以近似地看作由圆锥和圆柱组成，如果想用毛毡搭建 20 个底面积为 35 m^2，高为 3.5 m，外围高 1.5 m 的蒙古包，至少需要多少平方米的毛毡 [2] (结果取整数)?

解：图 24.4-6 是一个蒙古包的示意图.

根据题意，下部圆柱的底面积为 35 m^2，高为 1.5 m；上部圆锥的高为 3.5−1.5=2(m).

圆柱的底面半径为 $\sqrt{\frac{35}{\pi}}$ m≈3.34 m，侧面积为 $2\pi\times3.34\times1.5\approx31.45(m^2)$.

圆锥的母线长为 $\sqrt{3.34^2+2^2}\approx3.89$(m)，侧面展开扇形的弧长为 $2\pi\times3.34\approx20.98$(m)，圆锥的侧面积

[1] 如果圆锥的母线长为 l，底面圆的半径为 r，那么这个扇形的半径为 l，扇形的弧长为 $2\pi r$，由此即可求出展开的扇形的面积，进而得到圆锥的侧面积和全面积.

[2] 这也是弧长、扇形面积公式在圆锥中的应用.

此，利用前面所学的弧长和扇形面积公式即可通过计算它的展开图的面积求得.

计算扇形面积时，学生常常把圆锥底面半径当做是扇形的半径. 所以在教学时，要注意讲清楚这个扇形中各个元素与圆锥各个元素之间的关系，即扇形的半径是圆锥的母线，扇形的弧长是圆锥底面圆的周长.

圆锥的表面展开图不仅用于表面积的计算，而且在画图上，钣金制作各种圆锥形工件时，都要根据工件尺寸，通过计算，在铁板上画出下料图. 所以在实际生产中，展开图的知识也是常用的，应要求学生掌握. 教科书接下来安排了一个计算蒙古包的用料的例子，在后面的练习、习题中，教科书也安排了一些这方面的例子，这也可以让学生看到它的应用.

[1] 烟囱帽没有底，只是圆锥的侧面.

练习答案

1. 圆心角为 160°，全面积为 $5\ 200\pi\ \text{cm}^2$.
2. 一个这样的烟囱冒的面积约为 $6\ 280\ \text{cm}^2$，制作 100 个这样的烟囱帽约需要 $628\ \text{m}^2$ 的铁皮.

为 $\frac{1}{2}\times 3.89\times 20.98\approx 40.81(\text{m}^2)$.

因此，搭建 20 个这样的蒙古包至少需要毛毡 $20\times(31.45+40.81)\approx 1\ 445(\text{m}^2)$.

练习

1. 圆锥的底面直径是 80 cm，母线长 90 cm，求它的侧面展开图的圆心角和圆锥的全面积.
2. 圆锥形的烟囱帽的底面直径是 80 cm，母线长是 50 cm，制作 100 个这样的烟囱帽至少需要多少平方米的铁皮？[1]

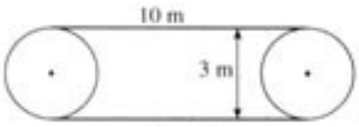


（第 2 题）

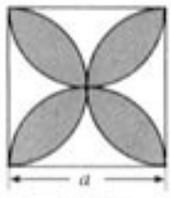
习题 24.4

复习巩固 ▶▶

1. 填空：
   （1）75°的圆心角所对的弧长是 2.5π cm，则此弧所在圆的半径是_____ cm；
   （2）一个扇形的弧长是 20π cm，面积是 $240\pi\ \text{cm}^2$，则扇形的圆心角是_____；
   （3）用一个圆心角为 120°，半径为 4 的扇形作一个圆锥的侧面，这个圆锥的底面圆的半径为_____.
2. 如图，两个大小一样的传送轮连接着一条传送带，求这条传送带的长.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 正方形的边长为 a，以各边为直径在正方形内画半圆，求图中阴影部分的面积.
4. $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=3$，$BC=4$，把它分别沿三边所在直线旋转一周，求所得的三个几何体的全面积.

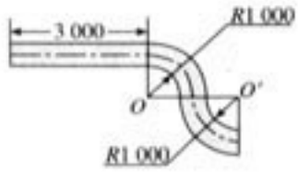
习题 24.4

1. “复习巩固”中的习题都是本节的基础知识. 第 1 题是一个填空题，包括 3 个小题，分别是 3 个计算弧长、扇形面积、圆锥侧面积的习题；第 2 题也是关于弧长计算的，传送带除了平的部分外，还包括两个半圆；第 3 题是计算一个花形图案的面积，要学生仔细分析它的构成，通过正方形和半圆面积的加减计算求得；第 4 题要注意计算旋转体的全面积，不要忘了除侧面以外的部分.

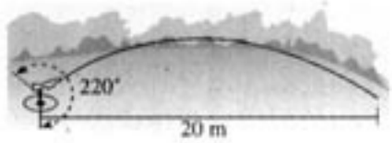
2. “综合运用”的几个问题都是实际问题. 其中第 5 题也是计算一段弯道的展直长度，这段弯道包括一段直道和两个四分之一圆；第 6 题是求喷水装置能喷射的面积，实际上是求一个圆心角为 220°，半径为 20 m 的扇形的面积；第 7 题是求纸扇的贴纸部分面积，是计算两个扇形面积的差；第 8 题是计算一个粮仓的顶部的面积，实际上就是计算圆锥的侧面积. 从这几个习题，也

综合运用 ▶▶

5. 如图是一段弯形管道，其中，$\angle O=\angle O'=90°$，中心线的两条圆弧半径都为 1 000 mm，求图中管道的展直长度.



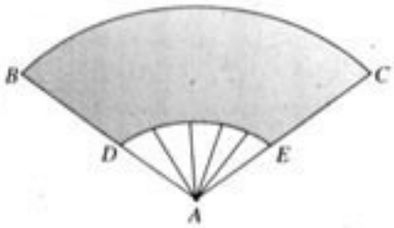
（第 5 题）



（第 6 题）

6. 如图，草坪上的自动喷水装置能旋转 220°，如果它的喷射半径是 20 m，求它能喷灌的草坪的面积.

7. 如图，扇形纸扇完全打开后，外侧两竹条 AB、AC 夹角为 120°，AB 的长为 30 cm，贴纸部分 BD 的长为 20 cm，求贴纸部分的面积. [1]



（第 7 题）

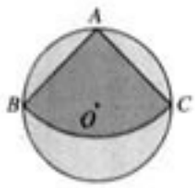


（第 8 题）

8. 如图，粮仓的顶部是圆锥形，这个圆锥的底面周长为 32 m，母线长 7 m，为了防雨，需要在它的顶部铺上油毡，所需油毡的面积至少是多少？[2]

拓广探索 ▶▶

9. 如图，从一个直径是 1 m 的圆形铁皮中剪出一个圆心角为 90°的扇形，求被剪掉的部分的面积；如果将剪下来的扇形围成一个圆锥，圆锥的底面圆的半径是多少？



（第 9 题）



（第 10 题）

10. 如图，有一个圆形花坛，要把它分成面积相等的四部分，以种植不同的花卉，请你提供设计方案. [3]

[1] 这是两个扇形面积的差.

[2] 不计接头重合部分.

[3] 利用本节所学的知识，可以有不同的方法，鼓励学生想出不同方法.

能看出本节所学知识在生产和生活的应用.

3. 本节“拓广探索”有两个习题，第 9 题是关于扇形和圆锥侧面积的计算问题；第 10 题是一个四等分圆的问题，有很多种不同的方法，应当鼓励学生大胆实践，探索出不同的方法.

[1] 为了回答前两个问题，可以以圆形跑段为例，例如对4圈的圆形跑道，内层跑道半径为50 m，跑道宽度为1 m，则外层跑道的起跑点应比相邻的内层跑道超前2π m。如果内层跑道半径变为65 m，则超前起跑点仍为2π m；而如果跑道宽度为1.5 m，则超前起跑点应为3π.

[2] 每一条跑道比相邻内侧跑道长2π米.

[3] 直道长171.92米，宽度为1米.



实验与探究 选学

设计跑道



我们都有参加运动会的经历，我们知道，在进行400 m赛跑时，运动员的起跑点并不处在同一条线上，为什么这样呢？

如果赛跑的起点和终点同在一条直线上，显然，在内层跑道上的运动员较为有利．原因是内层的跑道的路程最短．因此，为了公平比赛，在外层的跑道的运动员的起跑点必须提前．

这里，你的任务是设计一个8道的400 m跑道，每条跑道由两条直的跑道和两端是半圆形的跑道组成，每条跑道宽1 m，内层的跑道长度为400 m．画出每条跑道内的起跑点，使得运动员经过400 m赛跑后到达同一终点线．

为了设计这样的跑道，你需要思考：[1]

(1) 圆的半径对确定超前起跑点有什么作用？

(2) 跑道的宽度对确定超前起跑点有什么作用？

(3) 直的跑道的长度对确定超前起跑点有什么作用？

试完成下面的表1，并计算图1中每一条跑道的全长L.

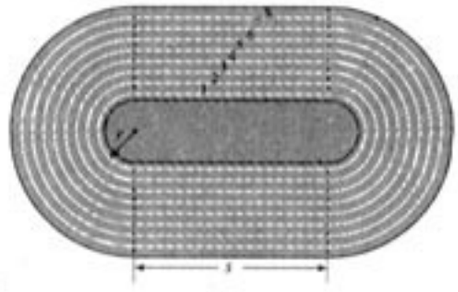


图1

表1 宽1 m，内圈半径为r m的跑道[2]

跑道1	跑道2	跑道3	跑道4	跑道5	跑道6	跑道7	跑道8
$r_1=?$	$r_2=r_1+1$	$r_3=?$	$r_4=?$	$r_5=?$	$r_6=?$	$r_7=?$	$r_8=?$
$s=100$	$s=100$	$s=100$	$s=100$	$s=100$	$s=100$	$s=100$	$s=100$
$L=200+2\pi r_1$ $=400(\text{m})$	$L=?$	$L=?$	$L=?$	$L=?$	$L=?$	$L=?$	$L=?$

从表1，你就可以回答前面的三个问题了，现在，开始设计你的跑道吧！

查一下资料，一个标准田径场的400 m跑道直道长多少米？跑道宽度呢？[3] 由此，为了进行400 m赛跑，你能帮助体育老师画起跑线吗？

各就各位，预备！跑！

实验与探究

1. 本“实验与探究”安排了设计跑道的内容，这也是计算弧长的一个应用．实际上，在进行一些体育比赛时，常常会看到运动员的起跑点并不在同一条直线上，这样是为了使运动员所跑的距离一样．如果起跑线相同，显然对内侧的跑道上的运动员有利．教科书安排这个活动的目的就是要让学生通过运用本节所学的知识，学会计算如何计算超前起跑点．

2. 在教科书介绍一些背景后，向学生提出了三个问题，分别是圆半径、跑道宽度、直道长对确定超前起跑点的影响．教学时，可以利用教科书提出的表1，变换内层跑道的半径、跑道宽度、直道长度等，让学生通过计算，发现它们之间的关系．通过计算，学生不难发现，只有跑道宽度对确定超前起跑点有影响，而内侧跑道中圆形部分的半径、直道长都没有影响．这样，学生就对设置超前起跑点的问题有所了解了．

数学活动

活动 1　设计图案

许多图案设计都和圆有关，图 1 就是一些利用等分圆周设计出的图案，图 2 展示了设计一个雏菊图案的过程.



图 1[1]

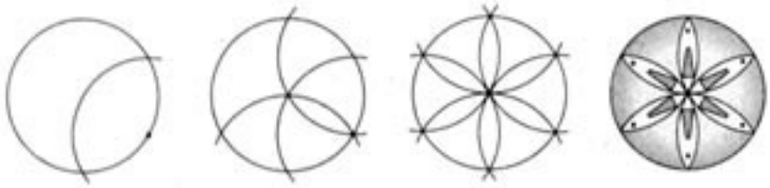


图 2

利用正多边形可以镶嵌整个平面的性质，[2]还可以设计出一些美丽的图案，如图 3.

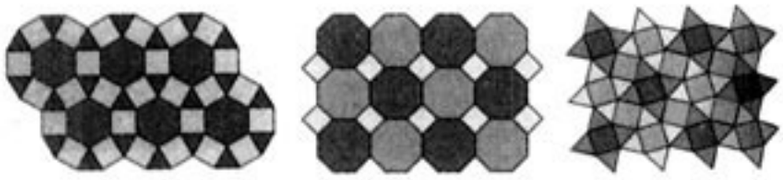


图 3

你能画出其中的一些图案吗？请你再利用圆或正多边形设计一些图案，并与同学交流.

[1] 第 1 个图需要两次三等分圆周；第 2 个图需要 12 等分圆周；第 3、4 个图都要六等分圆周.

[2] 至于为什么使用这样的正多边形可以镶嵌平面，学生前面已经学到，可以举一两个让学生说明理由.

1. 本章安排了两个数学活动. 第 1 个活动是设计图案，主要是利用等分圆周和正多边形镶嵌平面的性质. 教科书首先给出了一些利用等分圆周设计的图案的例子，并给出了一个设计雏菊图案的过程. 这些设计中，首先要利用等分圆周，将圆弧分成相等的几部分，再连接其中的一些分点，得到一些基本的线条图形，再对这些图形着色，就可以得到这些精美的图案. 教学时，可以充分发挥学生的积极性，让他们利用所学的知识，发挥想象力，自己设计一些图案，并与其他学生进行交流.

接下来，教科书给出了一些利用正多边形镶嵌平面的性质，设计的美丽的图案. 教学时，还可以结合学生学过的镶嵌的知识，说出其中一些能够镶嵌平面的理由，并自己设计一些图案，和同学交流.

2. 教科书安排的第 2 个数学活动是探究四点共圆的条件. 首先，教科书从经过四边形的四

[1] 过第 1、3 个四边形的四个顶点可以作一个圆，第 2 个图形不能.

[2] 对角互补. 可以利用圆周角定理来证明. 证明略.

[3] 利用圆周角与其所对的弧的大小关系，可以发现图 5 的第 1 个图中$\angle B+\angle D<180^\circ$，第 2 个图中$\angle B+\angle D>180^\circ$. 它们的对角不互补，因此过它们的四个顶点不能作作一个圆.

活动 2　探究四点共圆的条件

我们知道：过任意一个三角形的三个顶点能作一个圆. 过四边形的四个顶点能作一个圆吗?

图 4 给出了一些四边形，能否过它们的四个顶点作一个圆? 试一试![1]

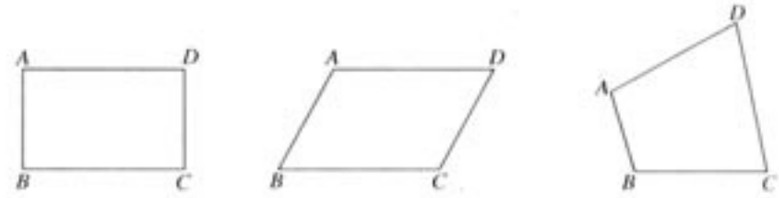


图 4

分别测量上面各四边形的内角，如果过某个四边形的四个顶点能作一个圆，那么其相对的两个内角之间有什么关系? 证明你的发现.[2]

如果过某个四边形的四个顶点不能作一个圆，那么其两个相对的内角之间有上面的关系吗? 试结合图 5 说明其中的道理.[3] (提示：利用圆周角与其所对弧的大小关系，考虑$\angle B+\angle D$与180°之间的关系.)

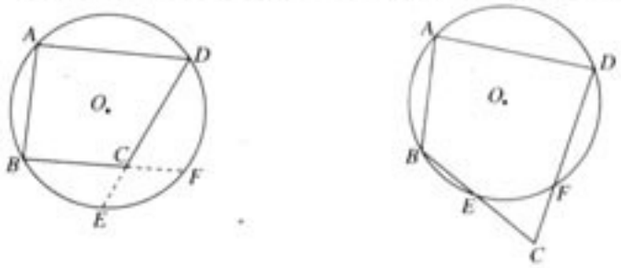


图 5

由上面的探究，试归纳出判定过某个四边形的四个顶点能作一个圆的条件.

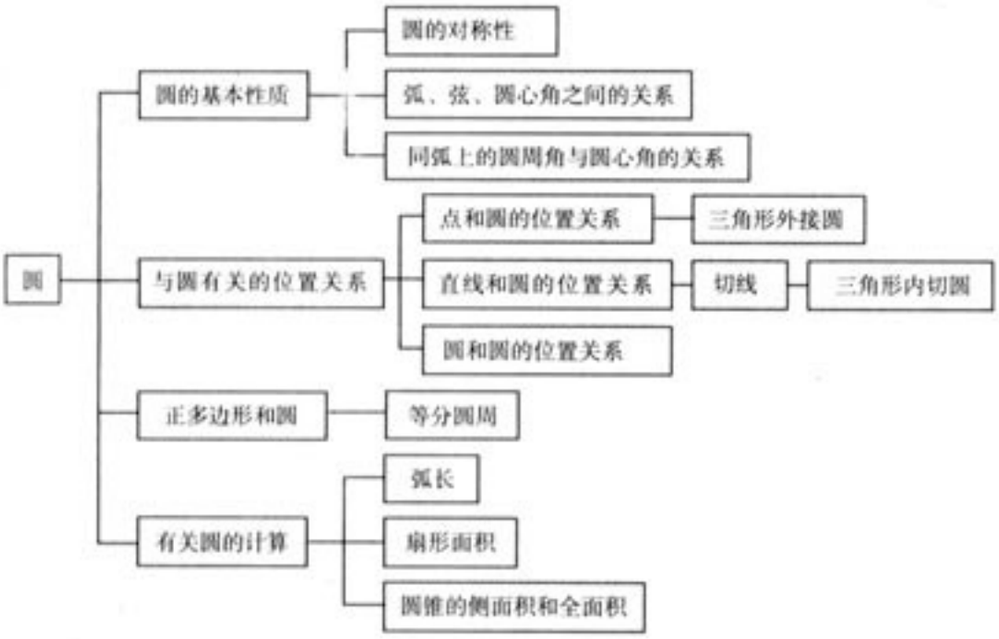
个顶点能不能作一个圆的问题出发，给出了几个特殊的四边形，一个矩形（经过四个定点可以作一个圆），一个一般的平行四边形（经过它的顶点不能作一个圆）和一个经过四个顶点能作一个圆的一般四边形. 并通过让学生度量它们四个内角的度数，让学生自己探究发现其相对的内角之间的关系，并让学生自己证明.

对于圆内接四边形对角互补的性质，证明起来并不难，要引导学生利用圆周角定理，圆内接四边形的一组内对角都是圆周角，它们的和等于所对应的弧所对的圆心角的和，是 180°，因此它们互补.

对于不能过四个顶点作圆的四边形，我们可以经过其中的三点作一个圆，利用圆周角所对的弧的大小关系，可以发现：如果另一个点在圆的内部，则与这个顶点相临两个顶点处的内角和小于 180°，反之则大于 180°. 由此可以发现，要经过某个四边形的四个顶点作一个圆，则这个四边形的对角必须互补.

小　结

一、本章知识结构图[1]



二、回顾与思考[2]

1. 在本章，我们利用圆的对称性，探索了圆的一些重要性质；通过图形的运动，研究了点和圆、直线和圆、圆和圆的位置关系；研究了圆中的有关计算问题.

2. 在同圆或等圆中的弧、弦、圆心角有什么关系？垂直于弦的直径有什么性质？一条弧所对的圆周角和它所对的圆心角有什么关系？你能举出这些关系的实际应用吗？

3. 点和圆有怎样的位置关系？直线和圆呢？圆和圆呢？怎样判断这些位置关系？你能举出这些位置关系的一些实例吗？

4. 圆的切线有什么性质？如何判断一条直线是圆的切线？

5. 正多边形和圆有什么关系？你能用正多边形和等分圆周设计一些图案吗？

6. 举例说明如何计算弧长、扇形面积、圆锥的侧面积和全面积.

7. 结合本章内容，进一步体会数学来源于现实，服务于现实.

[1] 可以结合本章知识内容的复习，帮助学生梳理本章的知识内容，归纳总结出本章的知识结构图.

[2] 回顾与思考提出了一些问题，这些问题基本覆盖了全章的主要内容，可以把这些问题与上面的知识结构图结合起来使用，帮助学生复习本章知识.

1. 本章小结包括本章知识结构图与回顾与思考两部分. 通过小结，要使学生对本章所学的知识条理化、系统化. 在复习巩固所学知识的同时，还要查漏补缺，把应知应会的知识真正学到手.

圆的这一章内容比较多，应当结合本章知识结构图和回顾与思考中的问题，按照各小节对主要的知识进行全面系统的归纳整理. 复习时可以按照“圆的基本性质”“与圆有关的位置关系”“正多边形和圆”“弧长和扇形面积”等几个方面把平时所学的零散知识结构化，以便于更好地掌握知识，并提高分析问题、归纳总结问题的能力.

2. 学习这一章的知识，要用到许多以前所学的知识，因此复习时，对有关知识也可以进行复习. 另外，对于本章常用的辅助线，也可以引导学生进行总结，从归纳圆中常用的辅助线中，使学生明确每一类辅助线所起的作用，由这些辅助线可以得到哪些特殊的线段、角、三角形或四边形，以及它们与圆的关系，从中找出解决问题的途径.

[1] 需要连接OA、OB作为辅助线，再应用切线的性质，求出圆心角$\angle AOB$，进而得出$\angle C$的值.

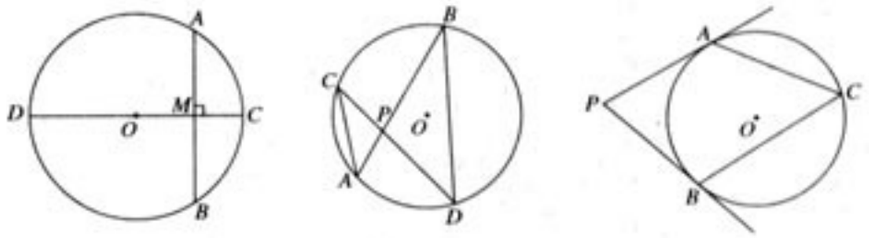
复习题 24

复习巩固 ▶▶

1. 选择题：

(1) 如图，⊙O的直径$CD=10$ cm，AB是⊙O的弦，$AB\perp CD$，垂足为M，$OM:OC=3:5$，则AB的长为（　　）

(A) 8 cm.　　(B) $\sqrt{91}$ cm.　　(C) 6 cm.　　(D) 2 cm.



(1)　　(2)　　(3)

(第 1 题)

(2) 如图，⊙O中，弦AB、CD相交于点P，$\angle A=40^\circ$，$\angle APD=75^\circ$，则$\angle B=$（　　）

(A) 15°.　　(B) 40°.　　(C) 75°.　　(D) 35°.

(3) 如图，PA、PB分别切⊙O于点A、B，$\angle P=70^\circ$，则$\angle C=$（　　）[1]

(A) 70°.　　(B) 55°.　　(C) 110°.　　(D) 140°.

(4) 以半径为 1 的圆内接正三角形、正方形、正六边形的边心距为三边作三角形，则（　　）

(A) 不能构成三角形.　　(B) 这个三角形是等腰三角形.

(C) 这个三角形是直角三角形.　　(D) 这个三角形是钝角三角形.

(5) 一个圆锥的侧面积是底面积的 2 倍，则圆锥侧面展开图的扇形圆心角是（　　）

(A) 120°.　　(B) 180°.　　(C) 240°.　　(D) 300°.

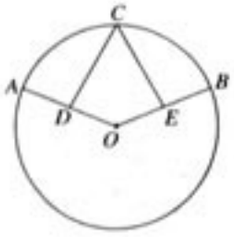
2. 如图，$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CB}$，$D$、$E$分别是半径$OA$、$OB$的中点，求证$CD=CE$.

3. 如图，AB是⊙O的弦，半径$OA=20$ cm，$\angle AOB=120^\circ$，求$\triangle AOB$的面积.

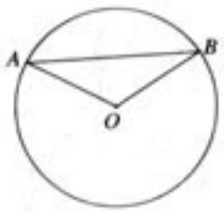
复习题 24

1. 复习题 24 中的问题基本上是按本章的顺序编排的，后面的题目比前面的综合性强一些，复习时可以根据学生的情况选择使用，不一定让学生全做. 平时教学，如果前面的习题不够用，也可以从中选择一部分使用.

2. “复习巩固”中的第 1 题是一个选择题，它包括 5 个小题. 第（1）小题是求弦长的问题；第（2）小题求角的度数要用到圆周角定理和三角形外角定理；第（3）小题主要是应用切线的性质和四边形内角和定理，完成这个问题，需要连接切点和圆心作辅助线；第 4 小题主要是复习本章所学的有关正多边形的计算；第（5）小题则是对本章最后一节“弧长和扇形的面积”的复习. 第 2 题需要先连接CO作为辅助线，再应用 30°角的直角三角形的性质和勾股定理的计算题. 第 3 题与第 2 题类似，也是要应用 30°角的直角三角形的性质和勾股定理. 完成第 4 题的计算也

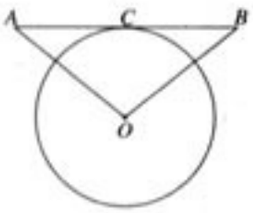


（第 2 题）

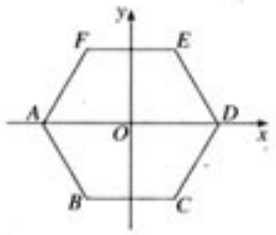


（第 3 题）

4. 如图，AB 与⊙O 相切于点 C，$OA=OB$，⊙O 的直径为 8 cm，$AB=10$ cm，求 OA 的长.[1]



（第 4 题）



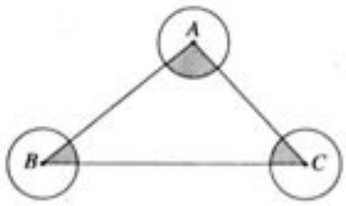
（第 5 题）

5. 如图，求中心为原点 O，顶点 A、D 在 x 轴上，半径为 2 cm 的正六边形 $ABCDEF$ 的各个顶点的坐标.

6. 如图，大半圆中有 n 个小半圆，大半圆弧长为 L_1，n 个小半圆的弧长和为 L_2，找出 L_1 和 L_2 的关系并证明你的结论.[2]



（第 6 题）



（第 7 题）

7. 如图，⊙A、⊙B、⊙C 两两不相交，且半径都是 0.5 cm，求图中的三个扇形（即阴影部分）的面积之和.[3]

综合运用 ▶▶

8. 估计图中三段弧的半径的大小关系，再用圆规检验你的结论.

9. 如图，菱形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 相交于点 O，E、F、G、H 分别是它的四条边 AB、BC、CD、DA 的中点，E、F、G、H 四个点共圆吗？圆心在哪里？[4]

[1] 连接 OC 作为辅助线，这也是遇到相切问题时常用的辅助线.

[2] 利用弧长公式.

[3] 由图可知，三个小扇形的半径相等，圆心角的和为 180°，所以阴影部分的面积和应为一个小半圆的面积.

[4] 要证明四点共圆，只要能找到一点，证明这四个点到找到的这点（圆心）的距离相等即可.

需要连接切点和圆心作为辅助线，这实际上也是解决相切问题时常用的作辅助线的方法，要注意让学生掌握. 第 5 题把正六边形放在了平面直角坐标系中，实际上也是复习有关正多边形的计算问题，计算中也要多次用到勾股定理. 第 6 题是考察学生对于弧长公式的理解，小半圆的弧长的总和实际上就是大半圆的弧长. 第 7 题是求三个阴影扇形的面积，把它们联系在一起，利用三角形内角和定理可知三个扇形圆心角之和是 180°，从而三个扇形面积和是一个小半圆的面积.

3. “综合运用”中共安排了 6 个题目. 其中第 8 题是估计三段圆弧的半径的大小关系，考察学生的估计能力. 第 9 题是证明四点共圆的问题，利用菱形的性质，很容易得到四点 E、F、G、H 到菱形中心 O 的距离相等，从而它们四点在以点 O 为圆心的圆上. 第 10 题是关于弓形中的计算问题，主要要用到垂径定理. 第 11 题是足球射门中的角度问题，与前面习题 24.1 最后

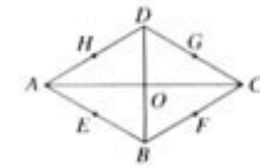
[1] 这是一个实际问题，要用到圆外角小于圆周角的结论.

[2] 注意，接缝部分可以忽略不计.

[3] 如图作出辅助线，利用勾股定理，建立 y 与 x 之间的函数关系.

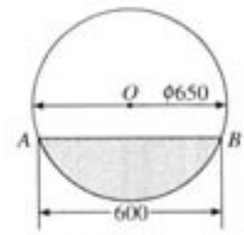


（第 8 题）

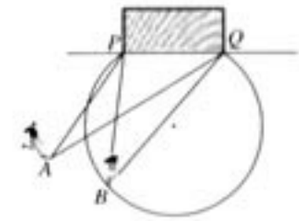


（第 9 题）

10. 在直径为 650 mm 的圆柱形油槽内装入一些油以后，截面如图所示，若油面宽 $AB=600$ mm，求油的最大深度.



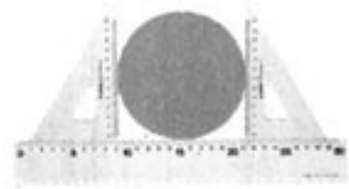
（第 10 题）



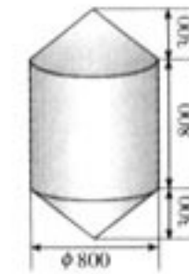
（第 11 题）

11. 如图，在足球比赛中，甲带球向对方球门 PQ 进攻，当他带球冲到 A 点时，同伴乙已经助攻冲到 B 点，此时甲是直接射门好，还是将球传给乙，让乙射门好？（仅从射门角度考虑）[1]

12. 如图，利用刻度尺和三角尺可以测量圆形工件的直径，说明其中的道理.



（第 12 题）



（第 13 题）

13. 锚标浮筒是打捞作业中用来标记锚或沉船位置的，它的上下两部分是圆锥，中间是一个圆柱（如图，单位：mm）. 电镀时，如果每平方米用锌 0.11 kg，要电镀 100 个这样的锚标浮筒，需要用多少锌？[2]

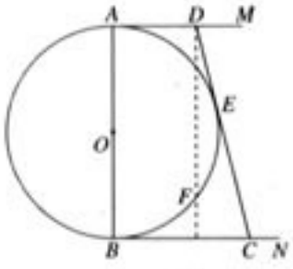
拓广探索 ▶▶

14. 如图，$\odot O$ 的直径 $AB=12$ cm，AM 和 BN 是它的两条切线，DE 切 $\odot O$ 于 E，交 AM 于 D，交 BN 于 C，设 $AD=x$，$BC=y$，求 y 与 x 的函数关系式，画出它的图象.[3]

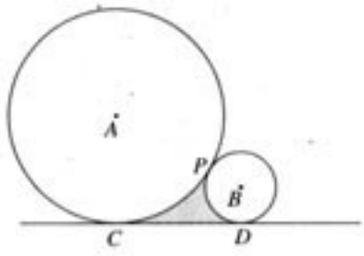
一题类似，要用到圆外角小于圆周角的结论. 利用第 12 题的工具可以测量圆形工件的直径，道理在于“如果圆的两条切线互相平行，则连接切点的线段是直径”. 第 13 题是一个计算圆锥侧面积和圆柱的侧面积的问题.

4. “拓广探索”有两个问题. 第 14 题是一个关于三条切线的问题，利用切线的性质，可知图中 AM 和 BN 是互相平行的，且都垂直于直径 AB，进而添加如图所示的辅助线，再利用勾股定理，就可以得到 y 与 x 的函数关系，这是一个反比例函数. 第 15 题是一个计算题，通过连接 AC、BD、AB，可以把阴影部分的面积转化为一个直角梯形的面积与两个扇形面积的差，从而使问题变得容易解决.

5. 在本章的复习中，不仅要用到本章的一些知识，还要综合应用前面学过的一些知识，综合性比较强. 有些问题不能直接解决，还需要添加适当的辅助线，进行一些转化等等. 教学时对



（第 14 题）



（第 15 题）

15. 如图，⊙A 和⊙B 外切于点 P，它们的半径分别为 0.6 m 和 0.2 m，直线 CD 与它们都相切，切点分别为 C、D，求图中阴影部分的面积[1]（结果保留小数点后三位）.

[1] 连接 AC、BD、AB，则点 P 在线段 AB 上，阴影部分的面积等于一个直角梯形的面积减去两个扇形的面积.

于一些相对比较难的问题，要注意帮助学生分析问题的已知条件，将问题进行转化，最终得到问题的解决.

Ⅲ 习题解答

习题 24.1

1. $\angle AOB=60^\circ$，O 到 AB 的距离是 $25\sqrt{3}$ mm.

2. 由已知可知 $\angle B=75^\circ$，所以 $\angle A=180^\circ-\angle B-\angle C=30^\circ$.

3. $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$.

4. $\angle ADC=\frac{1}{2}\angle AOB=25^\circ$.

5. 中间的工件是合格的，根据是“90°的圆周角所对的弦是直径”.

6. 如果四边形是矩形，根据“90°的圆周角所对的弦是直径”，它的四个顶点在同一个圆上，这个圆的圆心是矩形对角线的交点.

7. 作 $OO_1\perp AB$，则 $AO_1=BO_1$，$CO_1=DO_1$，因此 $AC=BD$.

8. 7 cm 或 17 cm（注意有两种情况）.

9. 设这段圆弧的半径为 r，利用 $\triangle AOD$ 是直角三角形以及已知条件可以列出方程 $r^2=(r-45)^2+150^2$，解得 $r=272.5$（m）.

10. 由 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$，$\angle AOB=120^\circ$，可知 $\angle AOC=\angle BOC=60^\circ$，从而 $\triangle AOC$、$\triangle BOC$ 都是等边三角形，从而四边形 $OACB$ 四边都相等，它是菱形.

11. $\angle BAC=\angle BPC=60^\circ$，$\angle ABC=\angle APC=60^\circ$，$\triangle ABC$ 是等边三角形.

12. 设 $\odot O$ 的半径为 R，则 $OM^2=R^2-\left(\frac{AB}{2}\right)^2$，$ON^2=R^2-\left(\frac{CD}{2}\right)^2$，因为 $AB>CD$，所以 $OM<ON$.

13. 居民楼会受到噪音的影响. 如果设以点 A 为圆心，OA 为半径的圆与 ON 相交于点 B，则居民楼受影响的时间就是火车经过 OB 所用的时间. 设 $AC\perp OB$ 于 C，则 $AC=\frac{OA}{2}=100$，$OC=\sqrt{OA^2-AC^2}=100\sqrt{3}$，$OB=2OC=200\sqrt{3}$. 又火车的行驶速度为 72 km/h=20 m/s，因此居民楼受影响的时间为 $\frac{200\sqrt{3}}{20}\approx 17.3$（s）.

14. 同弧所对的圆外角小于圆周角，因此只要航行中保持 $\angle XPY<\angle XZY$，就能保证点 P 在 $\overset{\frown}{XY}$ 所在的圆外，也就保证船只不进入浅滩.

习题 24.2

1. （1）在圆内；（2）在圆上；（3）在圆外.

2. 由题意，利用勾股定理可得 $AB=5$ cm，由此可得（1）相离；（2）相切；（3）相交.

3. （1）由勾股定理，可得 $VT=\sqrt{1\,409}$ cm；（2）由 $\angle UVW=60^\circ$，可得 $\angle UVT=30^\circ$，从而 $VT=2UT=50$ cm.

4. 连接 OP，则 $OP\perp AB$，所以 $AP=PB$.

5. 由 $\angle BAC=25^\circ$，可得 $\angle BOC=50^\circ$，从而 $\angle AOB=130^\circ$，$\angle P=360^\circ-90^\circ-90^\circ-130^\circ=50^\circ$.

6. 略.

7. 这三个圆的半径分别是 2 cm，3 cm，10 cm.

8. 半径为 4 cm 的圆可以作两个，半径为 3 cm 的圆只能作一个，不能作出过 A、B 两点，半径为 2 cm的圆.

9. 图略. 锐角三角形的外心在三角形内，直角三角形的外心在斜边上，钝角三角形的外心在三角形外.

10. 可以在车轮上任意取两点，作出它的中垂线，重复一次，则这两条中垂线的交点即为圆心，从而能确定它的半径.

11. 1.65 m.

12. 由 AB、BC、CD 与圆相切可知 $\angle ABO=\angle CBO$，$\angle BCO=\angle DCO$，再由 $AB\parallel CD$，可知 $\angle BOF+\angle COF=90^\circ$，从而利用勾股定理可得 $BC=10$ cm.

13. 由题意可知 $\triangle AO_1O_2$ 和 $\triangle AO_1O_2$ 都是等边三角形，从而可得 $\angle O_1AB=30^\circ$.

14. 连接 OA、OB、OC，利用三角形面积公式可得 $r=\dfrac{ab}{a+b+c}$.

15. 将这两个圆变成同心圆，设大圆和小圆的半径分别为 R、r，则有 $R^2-r^2=\left(\dfrac{AB}{2}\right)^2=4$，因此阴影部分的面积为 $\dfrac{1}{2}\pi(R^2-r^2)=2\pi$ (cm^2).

16. 这样的圆可以作出无穷多个.

习题 24.3

1.

正多边形边数	内角	中心角	半径	边长	边心距	周长	面积
3	60°	120°	2	$2\sqrt{3}$	1	$6\sqrt{3}$	$3\sqrt{3}$
4	90°	90°	$\sqrt{2}$	2	1	8	4
6	120°	60°	2	2	$\sqrt{3}$	12	$6\sqrt{3}$

2. 略.

3. 至少是 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$.

4. 正多边形是轴对称图形. 奇数边的正多边形的对称轴是各个顶点和它的对边中点的连线，偶数边的正多边形的对称轴是对边中点的连线. 当正多边形的边数为奇数时，它不是中心对称图形，当边数为偶数时，它是中心对称图形，对称中心就是这个正多边形的中心.

5. 至少要是 $12\sqrt{3}$ mm.

6. 边长为 $4(\sqrt{2}-1)$ cm，面积为 $32(\sqrt{2}-1)$ cm^2.

7. 可以算出，当周长是 48 时，正三角形的面积是 $64\sqrt{3}\approx110.8$，正方形的面积是 144，正六边形的面积是 $96\sqrt{3}\approx166.3$，圆的面积是 $\dfrac{576}{\pi}\approx183.3$，因此这时圆形场地的面积最大.

8. 半径为 R 的圆的外切正三角形，正方形，正六边形的边长分别为 $2\sqrt{3}R$，$2R$，$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}R$.

习题 24.4

1. (1) 6；(2) 150°；(3) $\dfrac{4}{3}$.

2. $20+3\pi$ (m).

3. $\left[\left(\frac{\pi}{2}-1\right)a^2\right]$.

提示：正方形的面积减去两个半圆的面积等于两个空隙的面积，所以阴影部分的面积为 $a^2-\left[a^2\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2\right]\times 2$，还可以利用四个半圆的面积减去正方形的面积来计算.

4. 沿 BC 边旋转时，得到一个底面半径为 3，高为 4 的圆锥，它的全面积为 24π；沿 AC 边旋转时，得到一个底面半径为 4，高为 3 的圆锥. 它的全面积为 36π；沿 AB 边旋转时，得到两个圆锥的组合体，它的全面积为 $\frac{84}{5}\pi$.

5. 约 6 142 mm. 提示：$3000+2\times\frac{\pi\times 1\,000}{2}\approx 6\,142$ (mm).

6. $\frac{2\,200\pi}{9}$ (m^2).

7. 贴纸部分的面积就是两个扇形面积的差，为 $\frac{800}{3}\pi$ (cm^2).

8. 112 (m^2).

9. 被剪掉部分的面积为 $\frac{\pi}{8}$ (m^2)，剪下来的扇形能围成的圆锥的底面半径是 $\frac{\sqrt{2}}{8}$ (m).

10. 有不同的方案，如分成四个扇形，分成一个圆和三个圆环等等.

复习题 24

1. (1) A；(2) D；(3) B；(4) C；(5) B.

2. 提示：连接 CO，证明 $\triangle CDO\cong\triangle CEO$.

3. 由 $\angle AOB=120°$ 可知 $\angle A=30°$，因此 $\triangle AOB$ 的高为 10，$AB=20\sqrt{3}$，$\triangle AOB$ 的面积为 $100\sqrt{3}$ (cm^2).

4. 连接 OC，利用勾股定理可得 $OA=\sqrt{41}$ (cm).

5. $A(-2,\ 0)$；$B(-1,\ -\sqrt{3})$；$C(1,\ -\sqrt{3})$；$D(2,\ 0)$；$E(1,\ \sqrt{3})$；$F(-1,\ \sqrt{3})$.

6. 利用弧长公式可得 $L_1=L_2$.

7. 图中阴影部分面积的和应为小圆面积的一半，即 $\frac{\pi}{8}$ cm^2.

8. 略.

9. 可以证明 E、F、G、H 到点 O 的距离都相等，因此这四点共圆，圆心为 O.

10. 作 $OC\perp AB$ 于 C 并延长交 $\odot O$ 于 D，利用勾股定理可得 $OC=125$ mm，由此得 $CD=200$ mm.

11. 从 B 点射门比较好，因为这时角度比较大.

12. 可以证明，如果圆的两条切线互相平行，则连接切点的线段是直径，这也是利用如图所示的方法可以测量圆的直径的道理.

13. 这个浮标浮筒由一个圆柱和两个圆锥组成，可以算出它的表面积约为 3.267 3 m^2，电镀 100 个这样的浮筒，约需用锌 35.94 kg.

14. 利用勾股定理，可知 $12^2+(y-x)^2=(y+x)^2$，整理可得 $y=\frac{36}{x}x$. 图象略.

15. 阴影部分的面积约为 0.047 m^2. 提示：作半径 AC、BD，作 $BE\perp AC$ 于 E，连接 AB，则点 P 在 AB 上. 阴影部分的面积等于直角梯形 $ABCD$ 的面积减去扇形 ACO 的面积与扇形 BDP 的面积.

Ⅳ 教学设计参考案例

24.1.4 圆周角

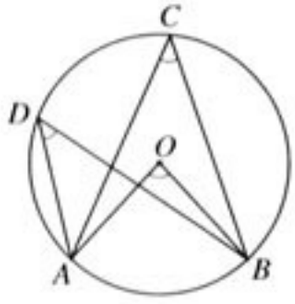
教学任务分析

教学目标	知识技能	1. 了解圆周角与圆心角的关系. 2. 掌握圆周角的性质和直径所对圆周角的特征. 3. 能运用圆周角的性质解决问题.
	数学思考	1. 通过观察、比较、分析圆周角与圆心角的关系，发展学生合情推理能力和演绎推理能力. 2. 通过观察图形，提高学生的识图能力. 3. 通过引导学生添加合理的辅助线，培养学生的创造力.
	解决问题	在探索圆周角与圆心角的关系的过程中，学会运用分类讨论的数学思想，转化的数学思想解决问题.
	情感态度	引导学生对图形的观察，激发学生的好奇心和求知欲，并在运用数学知识解答问题的活动中获取成功的体验，建立学习的自信心.
重点	圆周角与圆心角的关系，圆周角的性质和直径所对圆周角的特征.	
难点	发现并论证圆周角定理.	

教学流程安排

活动流程图	活动内容和目的
活动 1　创设情景，提出问题	从实例提出问题，给出圆周角的定义.
活动 2　探索同弧所对的圆心角与圆周角的关系，同弧所对的圆周角之间的关系	通过实例观察、发现圆周角的特点，利用度量工具，探索同弧所对的圆心角与圆周角的关系，同弧所对的圆周角之间的关系.
活动 3　发现并证明圆周角定理	探索圆心角与圆周角的位置关系，利用分类讨论的数学思想证明圆周角定理.
活动 4　圆周角定理应用	反馈练习，加深对圆周角定理的理解和应用.
活动 5　小结，布置作业	回顾梳理，从知识和能力方面总结本节课所学到的内容.

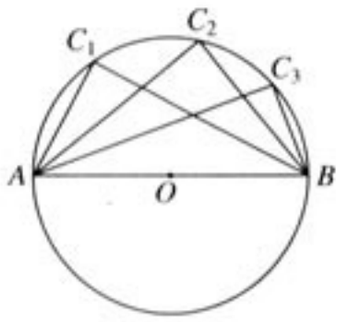
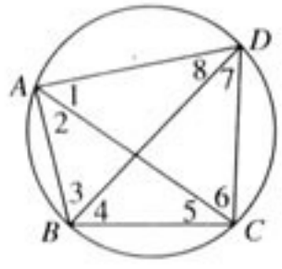
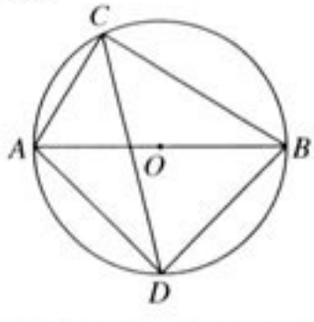
教学过程设计

问题与情境	师生行为	设计意图
「**活动 1**」 问题 演示课件或图片（教科书图 24.1-11）： （1）如图：同学甲站在圆心 O 的位置，同学乙站在正对着玻璃窗的靠墙的位置 C，他们的视角（$\angle AOB$ 和 $\angle ACB$）有什么关系？ （2）如果同学丙、丁分别站在其他靠墙的位置 D 和 E，他们的视角（$\angle ADB$ 和 $\angle AEB$）和同学乙的视角相同吗？	教师演示课件或图片：展示一个圆柱形的海洋馆. 教师解释：在这个海洋馆里，人们可以通过其中的圆弧形玻璃窗 $\overset{\frown}{AB}$ 观看窗内的海洋动物. 教师出示海洋馆的横截面示意图，提出问题. 教师结合示意图，给出圆周角的定义. 利用几何画板演示，让学生辨析圆周角，并引导学生将问题（1）、问题（2）中的实际问题转化成数学问题：即研究同弧（$\overset{\frown}{AB}$）所对的圆心角（$\angle AOB$）与圆周角（$\angle ACB$）、同弧所对的圆周角（$\angle ACB$、$\angle ADB$、$\angle AEB$ 等）之间的大小关系. 教师引导学生进行探究. 本次活动中，教师应当重点关注： （1）问题的提出是否引起了学生的兴趣； （2）学生是否理解了示意图； （3）学生是否理解了圆周角的定义； （4）学生是否清楚了要研究的数学问题.	从生活中的实际问题入手，使学生认识到数学总是与现实问题密不可分，人们的需要产生了数学. 将实际问题数学化，让学生从一些简单的实例中，不断体会从现实世界中寻找数学模型、建立数学关系的方法. 引导学生对图形的观察，发现，激发学生的好奇心和求知欲，并在运用数学知识解答问题的活动中获取成功的体验，建立学习的自信心.
「**活动 2**」 问题 （1）同弧（弧 AB）所对的圆心角 $\angle AOB$ 与圆周角 $\angle ACB$ 的大小关系是怎样的？ （2）同弧（弧 AB）所对的圆周角 $\angle ACB$ 与圆周角 $\angle ADB$ 的大小关系是怎样的？  	教师提出问题，引导学生利用度量工具（量角器或几何画板）动手实验，进行度量，发现结论. 由学生总结发现的规律：同弧所对的圆周角的度数没有变化，并且它的度数恰好等于这条弧所对的圆心角的度数的一半. 教师再利用几何画板从动态的角度进行演示，验证学生的发现. 教师可从以下几个方面演示，让学生观察圆周角的度数是否发生改变，同弧所对的圆周角与圆心角的关系有无变化： （1）拖动圆周角的顶点使其在圆周上运动；	活动 2 的设计是为引导学生发现. 让学生亲自动手，利用度量工具（如量角器、几何画板）进行实验、探究，得出结论. 激发学生的求知欲望，调动学生学习的积极性. 教师利用几何画板从动态的角度进行演示，目的是用运动变化的观点来研究问题，从运动变化的过程中寻找不变的关系.

续表

问题与情境	师生行为	设计意图
	（2）改变圆心角的度数； （3）改变圆的半径大小. 本次活动中，教师应当重点关注： （1）学生是否积极参与活动； （2）学生是否度量准确，观察、发现的结论是否正确.	
「**活动 3**」 问题 （1）在圆上任取一个圆周角，观察圆心角与圆周角的位置关系有几种情况？ （2）当圆心在圆周角的一边上时，如何证明活动 2 中所发现的结论？ （3）另外两种情况如何证明，可否转化成第一种情况呢？	教师引导学生，采取小组合作的学习方式，前后四人一组，分组讨论. 教师巡视，请学生回答问题．回答不全面时，请其他同学给予补充. 教师演示圆心与圆周角的三种位置关系. 对于问题（1），教师应当重点关注： （1）学生是否会与人合作，并能与他人交流思维的过程和结果； （2）学生能否发现圆心与圆周角的三种位置关系．学生是否积极参与活动. 教师引导学生从特殊情况入手证明所发现的结论. 学生写出已知、求证，完成证明. 学生采取小组合作的学习方式进行探索发现，教师观察指导小组活动．启发并引导学生，通过添加辅助线，将问题进行转化．教师讲评学生的证明，板书圆周角定理. 对于问题（3），教师应当重点关注： （1）学生是否会想到添加辅助线，将另外两种情况进行转化； （2）学生添加辅助线的合理性； （3）学生是否会利用问题（2）的结论进行证明.	数学教学是在教师的引导下，进行的再创造、再发现的教学．通过数学活动，教给学生一种科学研究的方法．学会发现问题，提出问题，分析问题，并能解决问题．活动 3 的安排是让学生对所发现的结论进行证明．培养学生严谨的治学态度. 问题（1）的设计是让学生通过合作探索，学会运用分类讨论的数学思想研究问题．培养学生思维的深刻性. 问题（2）（3）的提出是让学生学会一种分析问题、解决问题的方式方法：从特殊到一般．学会运用化归思想将问题转化．并启发培养学生创造性的解决问题.
「**活动 4**」 问题 （1）半圆（或直径）所对的圆周角是多少度？	学生独立思考，回答问题，教师讲评. 对于问题（1），教师应重点关注学生是否能由半圆（或直径）所对的圆心角的度数得出圆周角的度数.	活动 4 的设计是圆周角定理的应用．通过 4 个问题层层深入，考察学生对定理的理解和应用．问题（1）（2）是定理的推论，也是定理在特殊条件下得出的结论．问题（3）的设计目的是通过举反例，让学生

续表

问题与情境	师生行为	设计意图
		明确定理使用的条件. 问题(4)是定理的引申，将本节课的内容与所学过的知识紧密的结合起来，使学生很好地进行知识的迁移. 问题(5)(6)是定理的应用. 即时反馈有助于记忆，让学生在练习中加深对本节知识的理解. 教师通过学生练习，及时发现问题，评价教学效果.
(2) 90°的圆周角所对的弦是什么?	对于问题(2)，教师应重点关注学生是否能由90°的圆周角推出同弧所对的圆心角的度数是180°，从而得出所对的弦是直径.	
(3) 在半径不等的圆中，相等的两个圆周角所对的弧相等吗?	对于问题(3)，教师应重点关注学生能否得出正确的结论，并能说明理由. 教师提醒学生：在使用圆周角定理时一定要注意定理的条件.	
(4) 在同圆或等圆中，如果两个圆周角相等，它们所对的弧一定相等吗? 为什么?	对于问题(4)，教师应重点关注学生能否利用定理得出与圆周角对同弧的圆心角相等，再由圆心角相等得到它们所对的弧相等.	
(5) 如图，点 A、B、C、D 在同一个圆上，四边形 $ABCD$ 的对角线把4个内角分成8个角，这些角中哪些是相等的角?	对于问题(5)，教师应重点关注学生是否准确找出同弧上所对的圆周角.	
		
(6) 如图，⊙O 的直径 AB 为10 cm，弦 AC 为6 cm，$\angle ACB$ 的平分线交⊙O 于 D，求 BC、AD、BD 的长.	对于问题(6)，教师应重点关注： (1) 学生是否能由已知条件得出直角三角形 ABC、ABD； (2) 学生能否将要求的线段放到三角形里求解； (3) 学生能否利用问题(4)的结论得出弧 AD 与弧 BD 相等，进而推出 $AD=BD$.	
		

续表

问题与情境	师生行为	设计意图
「活动5」 小结 通过本节课的学习你有哪些收获? 布置作业. (1) 阅读作业：阅读教科书90～93页的内容. (2) 教科书习题24.1第2、3、4、5题.	教师带领学生从知识、方法、数学思想等方面小结本节课所学内容. 教师关注不同层次的学生对所学内容的理解和掌握. 教师布置作业.	通过小结使学生归纳、梳理总结本节的知识、技能、方法，将本课所学的知识与以前所学的知识进行紧密联结，有利于培养学生数学思想、数学方法、数学能力和对数学的积极情感. 增加阅读作业目的是让学生养成看书的习惯，并通过看书加深对所学内容的理解. 课后巩固作业是对课堂所学知识的检验，是让学生巩固、提高、发展.

教学设计说明

本节课是24.1.4圆周角第一节课，学生在了解了圆心角的基础上，进一步学习另一个圆中重要的角——圆周角.

本节课的引入，是从生活中的实际问题入手，通过创设问题情景，将所要研究的同弧所对的圆周角与圆心角的关系、同弧所对的圆周角的关系问题很好地集中在一起研究，为学生提供了学习的空间和时间．学生通过观察、实验、度量，发现结论．在教师的引导下，运用分类讨论的数学思想证明所发现的结论的正确性．让学生体验数学活动充满着探索与创造，感受数学的严谨性以及数学结论的确定性．使数学教学成为再创造再发现的教学.

24.2.3 圆和圆的位置关系

教学任务分析

教学目标	知识技能	1. 探索并了解圆和圆的位置关系. 2. 探索圆和圆的位置关系中两圆圆心距与两圆半径间的数量关系. 3. 能够利用圆和圆的位置关系和数量关系解题.
	数学思考	1. 学生经历操作、探究、归纳、总结圆和圆的位置关系的过程，培养学生观察、比较、概括的逻辑思维能力. 2. 学生经历探索圆和圆的位置关系中两圆圆心距与两圆半径间的数量关系的过程，培养学生运用数学语言表述问题的能力.
	解决问题	1. 学生在探索圆和圆的位置关系的过程中，学会运用数形结合的思想解决问题. 2. 学生通过运用圆和圆的位置关系的性质与判定解题，提高运用知识和技能解决问题的能力，发展应用意识.
	情感态度	学生经过操作、实验、发现、确认等数学活动，从探索两圆位置关系的过程中，体会运动变化的观点，量变到质变的辩证唯物主义观点，感受数学中的美感.

重点	探索并了解圆和圆的位置关系.
难点	探索圆和圆的位置关系中两圆圆心距与两圆半径间的数量关系.

教学流程安排

活动流程图	活动内容和目的
活动 1　观察图片，引入课题	从实例入手，引入课题.
活动 2　探索圆和圆的几种位置关系	观察、发现两圆的几种位置关系，根据两圆公共点的情况定义两圆的位置关系.
活动 3　探索圆和圆的位置关系中两圆圆心距与两圆半径之间的数量关系	从数量关系角度研究两圆的位置关系.
活动 4　反馈练习	利用两圆位置关系的判定和性质解题，及时巩固所学知识.
活动 5　小结，布置作业	回顾梳理本节知识，巩固、提高、发展.

教学过程设计

问题与情境	师生行为	设计意图
「**活动 1**」 问题 观看下列图片（教科书图 24.2-14），描述出图片中的圆和圆的位置关系.	教师演示图片，提出问题. 学生观察、思考. 教师找学生回答问题. 在本次活动中，教师应重点关注： (1) 学生能否用自己的语言描述清楚图片中圆和圆的位置关系； (2) 学生能否把图片中圆和圆的位置关系的几种情况都看出来.	通过问题的提出，引导学生观察图片，联想现实生活中的例子，引起学生对圆和圆的几种位置关系的注意，激起学生对探索两圆位置关系的兴趣. 也许学生不能准确地用数学语言表述圆和圆的位置关系，但通过本节课的学习目的就是让学生能够掌握圆和圆的位置关系.
「**活动 2**」 画出两个半径不同的圆 $\odot O_1$、$\odot O_2$，固定其中一个而移动另一个. (1) 你能画出 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 的几种不同的位置关系吗？每种位置关系中两圆有多少个公共点？	教师指导学生分别在两张透明的纸上画两个半径不同的 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$，把两张纸叠合在一起，固定其中一张而移动另一张. 让学生观察、发现，并画出两圆的不同位置关系图形（有条件的可以让学生利用几何画板画图观察）.	活动 2 的设计，是让学生亲自动手实验，参与数学活动. 用运动变化的观点观察两圆的位置关系的变化及两圆公共点个数的变化情况.

续表

问题与情境	师生行为	设计意图
(2) 你能否根据两圆公共点的个数类比直线和圆的位置关系定义，给出两圆位置关系的定义？ (3) 请你指出［活动 1］展示的图片中圆和圆的位置关系.	教师展示学生们发现的两圆不同位置关系的图形. 对于问题 (1)，教师应当重点关注： (1) 学生能否根据自己手中两张纸叠合在一起出现的两圆的位置关系，画出相应的图形来； (2) 学生能否把两圆的几种位置关系全部发现出来. 师生共同讨论给出两圆的几种位置关系定义. 对于问题 (2)，教师应重点关注学生能否用规范清晰的数学语言说出两圆的位置关系.	问题 (2) 的提出是为了让学生学会用类比的方法研究两圆的位置关系. 问题 (3) 的设计是让学生学会用数学语言表述问题，体会数学来源于生活，并服务于生活. 增强应用意识.
「活动 3」 问题： 请你根据圆和圆的位置关系，猜测出两圆的圆心距与两圆半径之间的数量关系. 利用刻度尺或几何画板进行测量，验证你的猜想.	教师提出问题，让学生根据自己所画出的两圆的位置关系图形进一步观察、思考、猜想、测量，发表见解. 教师利用几何画板演示固定一个圆，移动另一个圆，两圆位置关系的变化情况，利用几何画板的计算功能，观察随着两圆位置关系的变化，两圆圆心距与两圆半径之和或之差之间的数量关系. 教师总结活动 3 讨论出的结论，说明此结论既可作为两圆位置关系的判定又可作为两圆位置关系的性质. 在本次活动中，教师应重点关注学生对两圆相交时的情况的讨论是否深入（不仅考察两圆的半径和，同时也要考察两圆的半径差）.	活动 3 的设计是从数量关系的角度来探讨两圆的位置关系，是让学生学会运用数形结合的数学思想解题. 通过这一活动，培养学生学会探究的方法，形成良好的科学研究习惯，培养学生思维的深刻性.
「活动 4」 问题 1： (1) 如教科书图 24.2-16，⊙O 的半径为 5 cm，点 P 是⊙O 外一点，$OP=8$ cm，以 P 为圆心做一个圆与⊙O 外切，这个圆的半径应是多少？以 P 点为圆心做一个圆与⊙O 内切呢？	师生共同完成例题的求解. 对于问题 (1)，教师应重点关注学生能否会利用两圆外切或内切时，圆心距与两圆的半径和与差的关系来解题.	例题的安排是为了利用已讨论出来的两圆位置关系与圆心距和半径之间的数量关系的结论来解决问题. 使学生学会发现问题，分析问题并解决问题. 培养学生正确应用所学知识的应用能

续表

问题与情境	师生行为	设计意图
(2) $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 的半径分别为 3 cm 和 4 cm，如果 O_1O_2 满足下列条件，$\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 各有什么位置关系？ (1) $O_1O_2=8$ cm； (2) $O_1O_2=7$ cm； (3) $O_1O_2=5$ cm； (4) $O_1O_2=1$ cm； (5) $O_1O_2=0.5$ cm； (6) O_1 和 O_2 重合.	对于问题 (2)，教师应当重点关注学生能否会利用两圆的圆心距与两圆的半径的关系，判断两圆的位置关系.	力，巩固所学的两圆位置关系的性质和判定.
「**活动 5**」 小结 这节课我们主要研究了圆与圆的位置关系，你有哪些收获？ 布置作业 教科书习题 24.3 第 1、4、6 题.	学生自己总结. 教师应当重点关注： (1) 学生对圆与圆的位置关系的性质和判定的总结是否全面； (2) 是否有学生能从这节课的学习中，体会到分类讨论的数学思想和数形结合的数学思想在研究问题中的重要性. 教师布置作业. 教师批改作业，及时发现作业中的问题给予分析. 学生通过作业，回顾、梳理知识，反思提高.	总结回顾学习内容，帮助学生学会归纳，反思. 通过课后学生独立思考，自我评价，使学习效果达到最佳.

教学设计说明

本小节是 24.2.3 圆和圆的位置关系的第一节. 学生亲自动手实践，自主探究圆和圆的位置关系，观察分析，猜想证明，完成从感性到理性的知识发生发展的认知过程，最后动用所学知识解决问题，突现应用意识. 教师引导学生从“数”和“形”两方面研究圆和圆的位置关系，帮助他们在自主探索和合作交流的过程中真正理解和掌握基本的数学知识与技能、数学思想和方法，获得广泛的数学活动经验.

在教学过程中，强调学生形成积极主动的学习态度，关注学生的学习兴趣和体验，充分体现“数学教学主要是数学活动的教学”的这一教育思想.

24.3 正多边形和圆（第1课时）

教学任务分析

教学目标	知识技能	1. 了解正多边形与圆的关系，了解正多边形的中心、半径、边心距、中心角等概念. 2. 能运用正多边形的知识解决圆的有关计算问题.
	数学思考	学生在探讨正多边形和圆的关系的学习过程中，体会到要善于发现问题，解决问题，发展学生的观察、比较、分析、概括及归纳的逻辑思维能力.
	解决问题	在探索正多边形与圆的关系的过程中，学生体会化归思想在解决问题中的重要性，能综合运用所学的知识和技能解决问题.
	情感态度	学生经历观察、发现、探究等数学活动，感受到数学来源于生活，又服务于生活，体会到事物之间是相互联系，相互作用的.
重点	探索正多边形与圆的关系，了解正多边形的有关概念，并能进行计算.	
难点	探索正多边形与圆的关系.	

教学流程安排

活动流程图	活动内容和目的
活动1　观察图案，提出问题	观察正多边形形状的图案，发现正多边形与圆的关系.
活动2　探索正多边形与圆的关系	应用圆的有关知识探索将圆 n 等份，顺次连接 n 个分点，所得到的多边形是正 n 边形.（以圆内接正五边形为例）.
活动3　了解概念，巩固练习	解决正多边形与圆的有关计算问题.
活动4　归纳总结，布置作业	巩固知识，深化提高.

教学过程设计

问题与情境	师生行为	设计意图
「**活动1**」 问题 观看下列美丽图案（教科书图24.3-1）回答问题： (1) 这些美丽的图案，都是在日常生活中我们经常能看到的利用正多边形得到的物体. 你能从这些图案中找出正多边形来吗？ (2) 你知道正多边形和圆有什么关系吗？怎样就能作出一个正多边形来？	教师演示课件（或展示图片），提出问题（1）. 学生观察图案，思考并指出找到的正多边形. 在问题（1）中，教师应当重点关注： (1) 学生能否从这些图案中找到正多边形； (2) 学生能否从这些图案中发现正多边形和圆的关系； 教师提出问题（2），引导学生观察、思考. 学生讨论、交流，发表各自见解.	学生通过观看美丽的图案，欣赏生活中正多边形形状的物体，让学生感受到数学来源于生活，并从中感受到数学美. 问题（2）的提出是为了创设一个问题情境，激起学生主动将所学圆的知识与正多边形联系起来，激发学生积极探索，研究的热情，调动学生学习的积

续表

问题与情境	师生行为	设计意图
	在问题（2）中，教师应当重点关注学生能否会联想到等分圆周作出正多边形来.	极性，并有意将注意力集中在正多边形与圆的关系上.
「活动2」 问题（1） 将一个圆分成五等份，依次连接各分点得到一个五边形，这五边形一定是正五边形吗？如果是请你证明这个结论.	教师演示作图：把圆分成相等的5段弧，依次连接各个分点得到五边形. 教师引导学生从正多边形的定义入手证明（即证明多边形各边都相等，各角都相等），引导学生观察、分析，教师带领学生完成证明过程. 在问题（1）中，教师应当重点关注： （1）学生能否看出：将圆分成五等份，可以得到5段相等的弧，这些弧所对的弦也是相等的，这些弦就是五边形的各边，进而证明五边形的各边相等； （2）学生能否观察发现圆内接五边形的各内角都是圆周角； （3）学生能否发现每一个圆周角所对弧都是三等分的弧； （4）学生能否利用这些圆周角所对的弧都相等，证明五边形的各内角相等. 从而证明圆内接五边形是正五边形.	在活动1中学生们发现了正多边形与圆有着密切的关系，只要把一个圆分成相等的一些弧，就可以做出这个圆的内接正多边形. 活动2的设计就是要学生在教师的指导下进行逻辑推理论证所发现的结论的正确性. 从而培养学生科学严谨的治学态度，和运用所学知识解决问题的能力.
问题（2） 如果将圆 n 等份，依次连接各分点得到一个 n 边形，这 n 边形一定是正 n 边形吗？	教师提出问题（2），学生思考，同学间交流，回答问题. 教师根据学生的回答给以总结. 在问题（2）中，教师应当重点关注学生是否会仿照证明圆内接正五边形的方法证明圆内接正 n 边形.	问题（2）的设计是将结论由特殊推广到一般. 这符合学生的认知规律. 并教给学生一种研究问题的方法：由特殊到一般.
问题（3） 各边相等的圆内接多边形是正多边形吗？各角相等的圆内接正多边形呢？如果是，说明为什么. 如果不是，举出反例.	教师提出问题（3），学生讨论，思考回答，教师讲评. 在问题（3）中，教师应当重点关注： （1）学生能否利用正多边形定义进行判断； （2）学生能否由圆内接多边形各边相等，得到弦相等及弦所对的	问题（3）的提出是为了巩固所学知识，使学生明确判定圆内接多边形是正多边形，必须满足各边都相等，且各内角都相等，这两个条件缺一不可. 同时教给学生学会举反例，培养学生思维的批判性.

续表

问题与情境	师生行为	设计意图
	弧相等，进而证明圆内接多边形的各内角相等； (3) 学生能否举出反例说明各角相等的圆内接多边形不一定是正多边形.	
「活动3」 学生看图（教科书图 24.3-3），理解概念. 例1 有一个亭子（如教科书图 24.3-4）它的地基是半径为 4 m 的正六边形，求地基的周长和面积（精确到 0.1 m） 例2 完成下表中有关正多边形的计算： 正多边形数 | 内角 | 中心角 | 半径 | 边长 | 边心距 | 周长 | 面积 3 | | | | | | | | 4 | | | | | 1 | | | 6 | | | | | | | |	教师演示课件，给出正多边形的中心，半径，中心角，边心距等概念. 教师引导学生画出正六边形图形，进行分析，完成例题 1 的解答. 总结这一类问题的求解方法. 对于例 1，教师应当重点关注： (1) 学生能否知道欲求地基的周长和面积，需要先求正六边形的边长和边心距； (2) 学生能否将正六边形的边长、半径和边心距集中在一个三角形中来研究； (3) 学生能否将正六边形的中心与顶点连接起来，将正六边形分割成 6 个全等的等腰三角形，去发现每个等腰三角形的顶角就是中心角，腰是半径，底边是边长，底边上的高是边心距，从而可以利用勾股定理进行计算. 进而能够求得正多边形的周长和面积. 教师让学生独立完成例题 2，教师巡视，个别辅导. 给出正确答案.	例题 1、2 是有关正多边形计算的具体应用，目的是让学生在了解有关正多边形的概念后，通过例题的练习，巩固所学到的知识. 学生在教师的引导下，将正多边形的中心，半径，中心角，边心距等一些量集中在一个三角形中来研究，即将正多边形的中心与顶点连接起来，将正多边形分割成 n 个全等的等腰三角形，让学生们发现每个等腰三角形的顶角为中心角，腰为半径，底边为边长，底边上的高为边心距，可以利用勾股定理进行计算. 进而能够求得正多边形的周长和面积. 教师引导学生将实际问题转化成数学问题，将多边形化归成三角形来解决. 体现了化归思想在解题中的应用.
「活动4」 小结 学完这节课你有哪些收获？ 布置作业 1. 教科书习题 24.3 第 3、5、6 题. 2. 思考题： (1) 正 n 边形的一个内角的度数是多少？中心角呢？正多边形的中心角与外角的大小有什么关系？ (2) 正 n 边形的半径，边心距，边长又有什么关系？	学生自己总结，不全面的由其他学生补充完善，教师重点关注不同层次学生对本节知识的理解、掌握程度. 学生独立完成，教师批改、总结，教师重点关注： (1) 对学生在练习中反应出的问题，有针对性的给予分析； (2) 学生面对探究性问题的解决方法.	了解教学效果，及时调整教学. 通过对实际问题的探究，完成从具体→抽象→具体的思维螺旋上升过程，形成应用数学的意识，加深对本节知识的理解.

教学设计说明

本课时是24.3正多边形和圆的第1小节，是在学生掌握了圆的有关知识的基础上的进一步拓展.

本小节的开始，学生通过观看美丽的图案，欣赏生活中正多边形形状的物体. 让学生感受到数学来源于生活，并从中感受到数学美的同时，提出本节课所要研究的问题：正多边形与圆有什么关系？激发学生的好奇心和求知欲，并在运用已有的圆的知识解决问题的活动中获得成功的体验，建立学习的自信心. 在研究正多边形和圆的关系时，是按照由特殊到一般的认知规律，以正五边形为例进行探索和证明的，并将结论推广到正n边形. 教师在本节课的教学中应关注：学生能否体会到化归思想在研究问题中的重要性，并在今后的学习中有意识的运用数学思想解决问题.

Ⅴ 拓展资源

一、知识的拓广延伸及相关史料

1. 金字塔里的π

埃及的金字塔是世界七大奇迹之一. 胡夫金字塔是保存最好的一座，它由270万块经过加工的大石块构成，全部花费折合成现在的人民币大约是3 600亿元. 胡夫金字塔的南北中心线与地球的子午线相差仅是3′6″，考虑地球子午线历经了几千年的变迁，两者相差只不过是0.6″，即零点六秒!

英国一家杂志的主编约翰，曾对胡夫金字塔各部分尺寸进行过仔细计算，胡夫金字塔的底座是一个正方形，边长为230米36厘米4毫米. 金字塔高为146米60厘米. 他把正方形相邻两边的长度相加，除以金字塔高，得

$$\frac{1\text{条边长}+1\text{条边长}}{\text{高}}=\frac{230.36+230.36}{146.6}$$

$$=\frac{460.72}{146.6}$$

$$=3.142.$$

这个数值与π很相近.

金字塔里会藏有π，简直是不可思议！约翰百思不得其解，最后竟导致神经错乱了.

日本科学工作者对胡夫金字塔进行了长时期的研究，他们提出了一种解释：

修金字塔时，先定塔高为2个单位长，取高的一半为直径，在中心处做一个大圆，让大圆向两侧各滚动半周，这样就定出了金字塔的一条底边长（图1）. 其长度为

$$2\times\frac{1}{2}\times\pi=\pi.$$

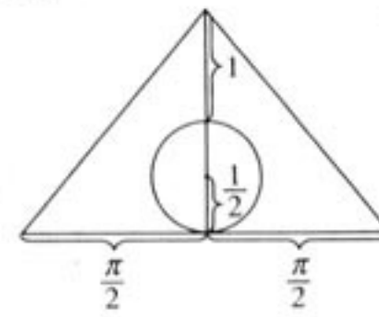


图1

这时再用上面算式算一下，有

$$\frac{1\text{条边长}+1\text{条边长}}{\text{高}}=\frac{\pi+\pi}{2}=\pi$$

这种想法的根据是：据考古学家发现，古埃及丈量长度常使用测轮. 当轮子半径一定时，轮子

转动一周所丈量的长度，恰好等于圆周长. 看来，π会出现在金字塔中，实际是测轮起了作用.

2. 拿破仑的作图题

拿破仑曾经是法国的一位皇帝，有不少电影和小说以他为主角，有描写辉煌战绩的，也有描写缠绵爱情的. 其实，这位皇帝还非常喜欢数学. 据说他想出一种作图方法，可以只用一把圆规，将已知圆周四等分.

对于四等分圆周，通常第一步是画直径，要用到直尺，而现在的规则却是只许使用圆规. 任何利用直尺的画法都是犯规的.

我们来看看，拿破仑是怎样画的呢?

如图 2，设圆心是 O，半径是 r. 在圆周上任取一点 A. 以 r 为半径，从 O 点开始，在圆周上连续截取，顺次得到点 B、C、D，那么 $\overset{\frown}{AD}$是半圆，因而 A 和 D 是一条直径的两个端点，而且$\overset{\frown}{AC}$等于圆周的$\frac{1}{3}$，所以 $AC=\sqrt{3}r$.

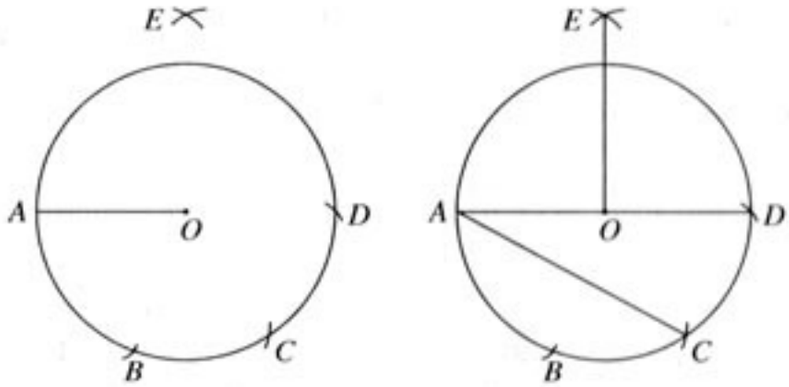


图 2

分别以 A 和 D 为圆心，AC 长为半径，画弧相交于点 E，则

$$OE=\sqrt{(\sqrt{3}r)^2-r^2}=\sqrt{2}r.$$

最后，以 OE 长为半径，从 A 点开始，在圆周上连续截取，就将圆周分成四个相等的部分了.

3. 趣谈圆周角

先来做个智力游戏：

有五个同学站在操场上，其中没有三个人在一条直线上，也没有四个人站在同一个圆周上. 找来一条长绳，请找出三个同学用绳子围成一个圆周，使得剩下的两个同学，一个在圆圈内，一个在圆圈外.

这件事可以这样来完成：

如图 3，设五个同学分别站在 A、B、C、D、E 五点. 先找到这两个同学 A、B，使得位于 C、D、E 的三个同学在 AB 线的同一侧，这是很好找的.

把 C、D、E 分别和 A、B 连接，形成三个角：$\angle ACB$、$\angle ADB$、$\angle AEB$. 这三个角必然都不相等，不然的话，角相等的两点必然在以 AB 为弦的同一个圆弧上，这样就出现了四个点在同一个圆周上，不符合“没有四个人站在同一个圆周上”的条件.

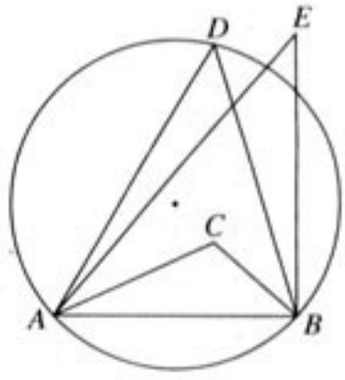


图 3

在三个不相等的角中，选中间那个角，图中画的就是$\angle ADB$. 因为平面内过不共线的三点一定可以作一个圆. 因此可以过 A、B、D 三点作圆. 由于$\angle AEB$ 小于$\angle ADB$，所以 E 点必在圆外；由于$\angle ACB$ 大于$\angle ADB$，所以 C 点必在圆内. 因此，这样做的圆符合要求.

这个智力游戏好像并不难，只是利用了圆周角的性质. 可是下面一道数学竞赛题，却难倒了不少同学. 题目是这样的：

“已知平面上有 $2n+3$（$n\geqslant 1$）个点，其中没有三个点共线，也没有四个点共圆. 能不能通过它们之中的某三个点作一个圆，使得其余的 $2n$ 个点一半在圆内，一半在圆外？证明你的结论.”

一看这道题就会觉得与上面的智力游戏非常类似，无非是更复杂一些，解题思路应该完全一样.

首先肯定这样的圆是一定可以作出来的.

如图 4，在 $2n+3$ 个点中一定可以找到 A、B 两点，使得其余 $2n+1$ 个点都在直线 AB 的同一侧.

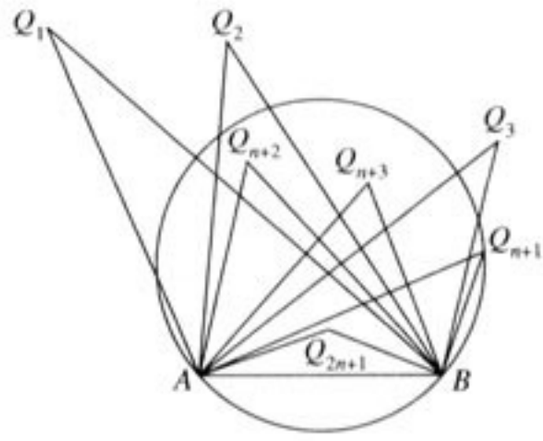


图 4

线段 AB 对其余 $2n+1$ 个点张开的角必然各不相同（否则又会导致四个点共圆，不符合题目条件了）. 将这 $2n+1$ 个角的顶点按角的大小排列起来：

$$Q_1<Q_2<\cdots<Q_n<Q_{n+1}<Q_{n+2}<\cdots<Q_{2n}<Q_{2n+1}$$

过 A、B、Q_{n+1} 三点作圆，由于 Q_1，Q_2，…，Q_n 对 AB 的张角小于 $\angle AQ_{n+1}B$，所以 Q_1，Q_2，…，Q_n 点必在圆外；而 Q_{n+2}，Q_{n+3}，…，Q_{2n+1} 对 AB 的张角大于 $\angle AQ_{n+1}B$，所以它们必在圆内. 这样圆内、圆外各有 n 个点.

从一个简单的游戏到一到复杂的数学竞赛题，其间跨度好像很大. 先简单后复杂是研究问题的一般方法，这就是一个例证.

4. 三个半圆的定理

如图 5，把直角三角形的每一边作为直径画三个半圆，三个半圆之间有何关系？

这是勾股定理的应用问题.

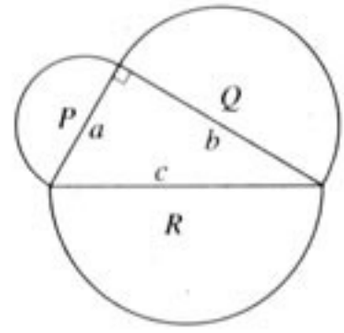


图 5

半圆 P 的面积＋半圆 Q 的面积

$$=\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}+\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}$$

$$=\pi\left(\frac{a^2+b^2}{4}\right)\times\frac{1}{2}$$

$$=\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}$$

＝半圆 R 的面积.

答：半圆 P 的面积＋半圆 Q 的面积＝半圆 R 的面积.

即使不是正方形、半圆形，只要是以直角三角形的各边作为图形一部分的各种图形都是相似的. 即图形 P 的面积＋图形 Q 的面积＝图形 R 的面积的公式是永远成立的.

5. 希波克拉底的定理

希波克拉底（公元前 450 年左右）是古希腊的哲学家.

如图 6 所示，以直角三角形的各边作为直径画圆时，证明斜线部分的面积的和等于直角三角形的面积.

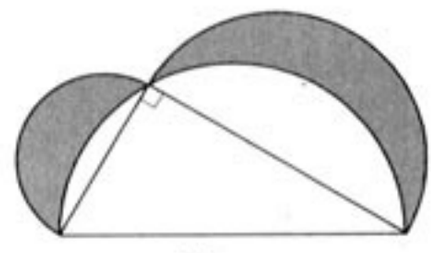


图 6

这和三个半圆的定理很相似.

三个半圆的定理是：

$(P_1+P_2)+(Q_1+Q_2)=R$.

R 是以 c 为直径的半圆的面积.

就图 7 来讲，

R＝直角三角形的面积＋(P_2+Q_2)

因此，

$(P_1+P_2)+(Q_1+Q_2)=$直角三角形的面积$+(P_2+Q_2)$.

所以，$P_1+Q_1=$直角三角形的面积.

还有一个希波克拉底定理.

如图 8，以直角三角形的直角为中心，一直角边为半径画四分之一圆；以三角形的斜边为直径画半圆，得到一月牙儿状图形. 因此，此月牙儿面积等于三角形面积.

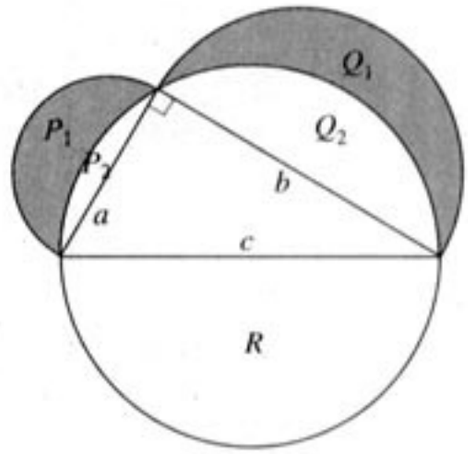


图 7

四分圆的面积$=4\pi a^2\div 4=\pi a^2$，

半圆的面积$=2\pi a^2\div 2=\pi a^2$.

因此，四分之一圆的面积＝半圆的面积

两边同时减去三角形和斜线部分之间的弓形的面积，那么

直角三角形的面积＝月牙儿状面积.

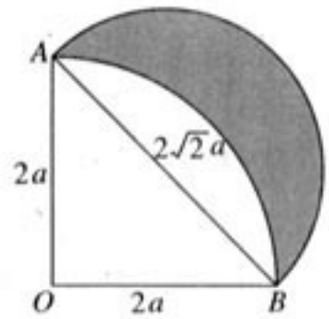


图 8

6. 双心四边形

每个三角形都有一个外心和一个内心，它们分别是外接圆和内切圆的圆心.

四边形就不同了. 通过画图可以知道，圆内接四边形通常没有内切圆，圆外切四边形往往又没有外接圆，很难两全其美.

既有外接圆、又有内切圆的四边形叫做双心四边形.

正方形是最常见的双心四边形. 除此以外，有没有其他的双心四边形呢？

答案是：有，而且很多很多. 下面介绍一种画双心四边形的简便方法.

如图 9，先任意画一个圆，设圆心为 O，然后在圆 O 中任意作两条互相垂直相交的弦 EF 和 GH. 再通过这些弦的端点作圆 O 的切线，所得切线围成一个四边形 $ABCD$，它的四个顶点 A、B、C、D 一定在同一个圆周上.

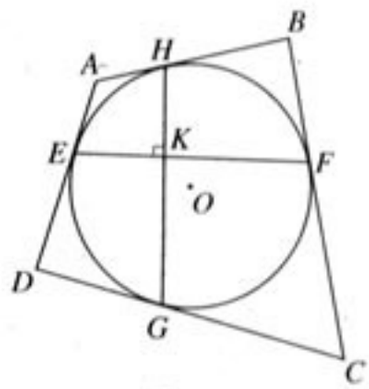


图 9

照这方法画几幅图试试，果然灵验.

什么道理呢？为什么四边形 $ABCD$ 的四个顶点一定共圆？

如图 10，连接 EH、OE、OG、OF、OH，并设 EF 与 GH 的交点为 K.

直角三角形 EHK 中，

$$\angle KEH+\angle KHE=90^\circ.$$

因为圆周角等于圆弧所对圆心角的一半，所以

$$\angle FOH+\angle GOE=180^\circ.$$

再看四边形 $OFBH$. 因为切线垂直于过切点的半径，所以

$$\angle OFB=\angle OHB=90^\circ.$$

四边形的内角和为 360°，所以

$$\angle FOH+\angle B=180^\circ.$$

同理从四边形 $OEDG$ 得

$$\angle GOE+\angle D=180^\circ.$$

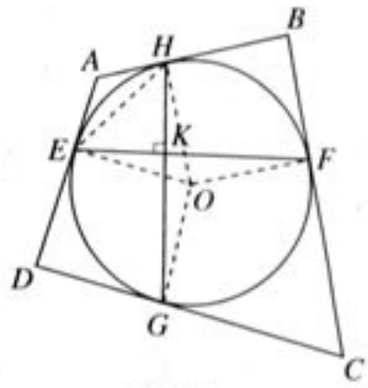


图 10.

由以上各式推出

$$\angle B+\angle D=180^\circ.$$

我们知道，圆内接四边形对角互补；反过来，对角互补的四边形内接于圆. 所以，从$\angle B$与$\angle D$互补，知道$ABCD$是圆内接四边形. 这正是所要证明的.

二、拓展性问题

1. 垂心与圆

如图 11，$\triangle ABC$是锐角三角形，H是它的垂心. 延长AH、BH、CH，分别与$\triangle ABC$的外接圆相交于点X、Y、Z.

巧得很，从图中看出，三点X、Y、Z恰好分别是H关于三边BC、CA和AB的对称点.

怎么会有这等巧事呢?

【答案与提示】

仔细观察图 11，可以看出，因为H是垂心，所以$AH\perp BC$，$BH\perp CA$. 因而

$$\angle 1=90^\circ-\angle BCA=\angle 2.$$

另一方面，利用同弧上的圆周角相等，得到

$$\angle 2=\angle 3.$$

$$\therefore\quad \angle 1=\angle 3.$$

由此知道直线BX和BH关于BC对称，因而点X和H关于BC对称.

同理可证点Y与H关于CA对称，点Z和H关于AB对称.

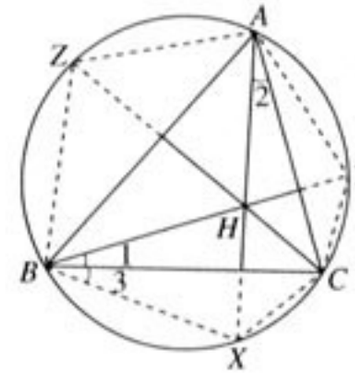


图 11

2. 三叶花

图 12 是由六段圆弧组成的三叶花，每段圆弧都是四分之一圆周，叶片两端的弦长为 2. 那么这朵三叶花的面积是多少?

【答案与提示】

如图 13，设$\overset{\frown}{AB}$是四分之一圆周，其圆心为O，半径为r，则由弦长为 2，圆心角为 90°，得到$r=\sqrt{2}$.

用S表示圆弧与弦之间的弓形面积，那么

$$S=\frac{1}{4}\pi r^2-\frac{1}{2}(\sqrt{2})^2=\frac{\pi}{2}-1.$$

三叶花的面积是弓形面积的 6 倍，因而等于$3\pi-6$.

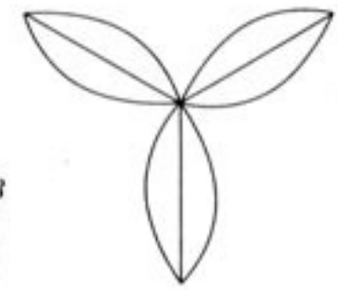


图 12

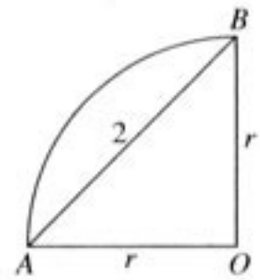


图 13

3. 花坛分区

如图 14，一个圆形花坛分成了三区，四个小圆两两相交的公共部分是中心区，四个小圆以外的部分是外围区. 中心区栽花，外围区种草. 栽花区域与种草区域的面积之比是多少?

【答案与提示】

因为图中大圆的半径等于小圆半径的 2 倍，所以大圆面积等于 4 个小圆面积的和.

四个小圆放在大圆里面，假如能够既无重叠又无间隙，应该刚好铺满大

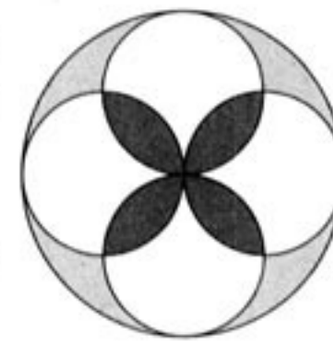


图 14

圆. 但是实际上既有重叠又有间隙. 在外围空出若干面积，是由于在里面重叠了同样大小的面积.

所以外围区和中心区面积相等. 换句话说，栽花区域与种草区域的面积之比是 1∶1.

4. 求斜线部分的面积

如图 15，在半径为 6 cm 的圆内画一个正六角形，请问斜线部分的面积是多少 cm^2？

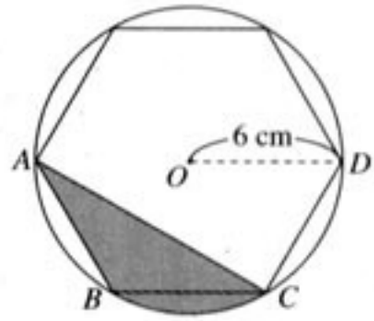


图 15

【答案与提示】

如图 16 所示，三角形 ABC 和三角形 OBC 由于底边和高相等，所以面积相同. 因此，斜线部分的面积也就等于扇形 OBC 的面积. 我们把所求的面积设为 S，则

$$S=6^2\pi\times\frac{60^\circ}{360^\circ}$$

$$=6\pi\ (cm^2).$$

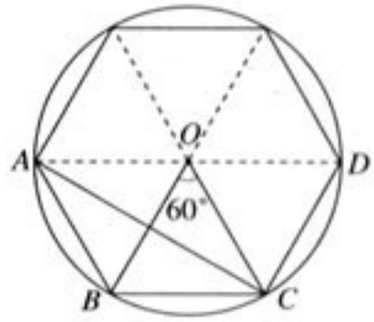


图 16

三、数学活动

1. 花样射箭

菲菲喜欢出奇制胜，就连玩射箭游戏也要玩出各种稀奇古怪的花样来.

这一次他连发三箭，不偏不倚，正好落在靶环的三个不同的圆周上. 这还算不了什么，最奇怪的是，落在靶上的三支箭，刚好三足鼎立，形成一个正三角形（如图 17）.

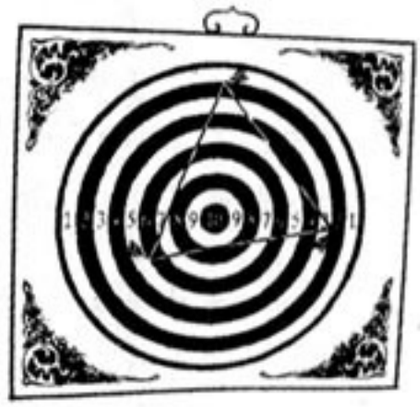


图 17

不要说射箭，就是在纸上用圆规和直尺画一个这样的图形都不大容易. 让我们来试试看.

我们的作图问题可以叙述成：已知三个同心圆，圆心是 O，半径分别是 r_1、r_2 和 r_3，求作一个正三角形，使它的三个顶点恰好分别在三个已知圆周上.

如图 18，设△ABC 就是所求的正三角形. 那么这个三角形的三条边都相等，三个角都等于 60°.

连接 OA、OB、OC，那么

$OA=r_1$，$OB=r_2$，$OC=r_3$.

首先，因为整个图形可以绕圆心 O 任意旋转，所以 A 可取为半径 r_1 圆周上的任一定点. 取定 A 点以后，将△AOB 绕 A 点旋转 60°，可使 B 点落到 C 点位置. 这时 O 点的新位置记为 D，那么 D 是定点. 因为线段 OB 落到 DC 的位置，所以

$DC=OB=r_2$.

以定点 D 为圆心，r_2 为半径作圆，与半径 r_3 的圆相交，就可以得到 C 点. 有了 A 和 C，第三个顶点 B 也就容易得到了.

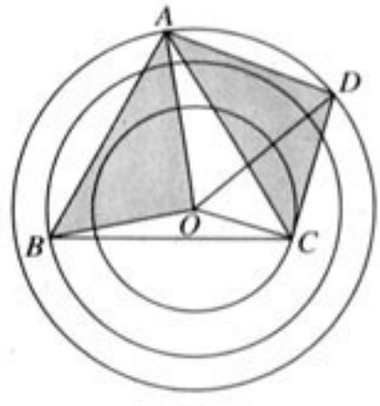


图 18

一个看上去很难的几何作图问题，作了一个旋转，轻轻松松得到解决. 这样的解题方法，叫做旋转法.

2. 三等分角的阿基米德纸条

阿基米德想出了一个绝招，用一个纸条即可三等分任意给定的角，先介绍如下.

任给一角 Φ，以此角顶点 O 为圆心，以 r 为半径作⊙O，⊙O 与此角两边分别交于 A，B 两点（如图 19）.

取一矩形纸条，在其边缘上标出相距为 r 的两点 C，D；令纸条的边缘过 B 点，且使 C 落在⊙O 上，D 点落在 AO 的延长线上，则

$$\angle BDA=\varphi=\frac{1}{3}\Phi.$$

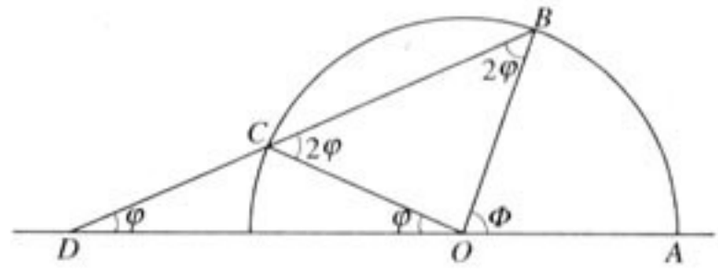


图 19

事实上，$CD=OC=OB=r$，$\angle OCB=\angle OBC=2\angle CDO=2\varphi$. 于是△$OBD$ 的外角 $\Phi=\angle OBC+\angle CDO=2\varphi+\varphi=3\varphi$. 即 $\angle BDA$ 是已知角 Φ 的 $\frac{1}{3}$.

Ⅵ 评价建议与测试题

一、评价建议

1. 要关注学生对概念的理解，定理掌握水平的评价

本章圆的有关概念多、定理多，在圆的重要性质中，要特别关注圆的对称性（轴对称性和旋转不变性）在评价中一方面要重视用圆的对称性，另一方面又不要求学生严格使用对称的性质写出证明，可以用口头表达.

2. 要注意学生运用学过的知识解决实际问题的能力水平

本章知识在实践中应用较多，要关注学生将实际问题转化为数学问题的水平，还可以有学生自由选择一些与本章知识相关的问题相互交流.

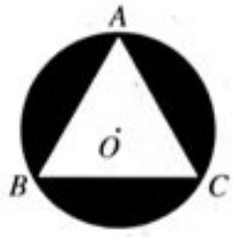
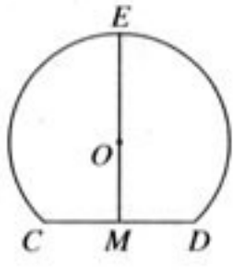
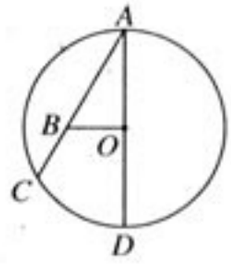
3. 关注学生对知识的综合应用

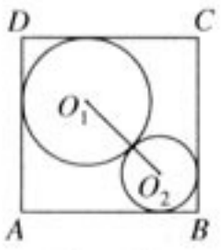
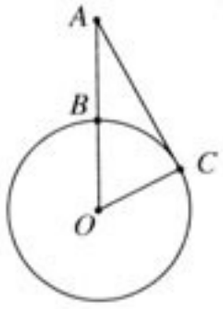
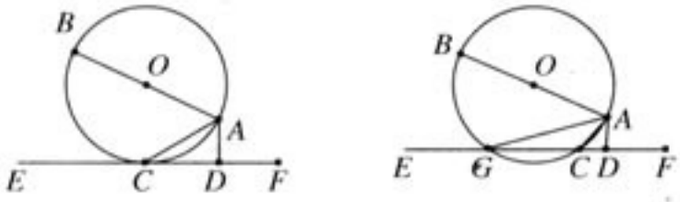
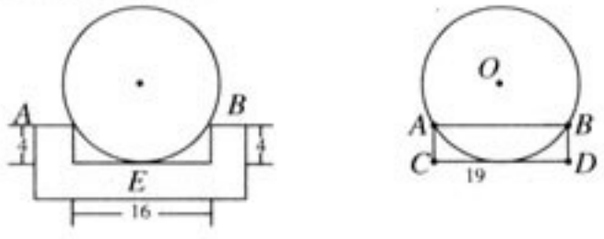
要求学生能综合运用学过的平面几何知识去解决一些简单问题，具体应关注学生用探索的方法探讨几何命题的能力，让学生用自己的思维，根据已知条件，寻求探索方向，找出反映图形特征的结论，培养学生的数学思维能力.

二、测试题（时间：45 分，满分：100 分）

内　　容	设计意图
一、**选择题**（每小题 6 分，共 30 分）： **1.** 半径等于 12 的圆中，垂直平分半径的弦长为（　　） (A) $3\sqrt{6}$.　(B) $12\sqrt{3}$.　(C) $6\sqrt{3}$.　(D) $18\sqrt{3}$.	本题考查学生对垂径定理的理解、应用，加深学生对基本图形的认识.

续表

内　容	设计意图
2. PA、PB、CD 是⊙O 的切线，A、B、E 是切点，CD 分别交 PA、PB 于 C、D 两点，若∠APB=40°，则∠COD 的度数为（　　） (A) 50°.　(B) 60°.　(C) 70°.　(D) 75°.	本题考查学生对切线长定理的图形对称性的理解及形象思维的能力.
3. 已知 OA 平分∠BOC，P 是 OA 上任意一点，如果以 P 为圆心的圆与 OC 相离，那么⊙P 与 OB 的位置关系是（　　） (A) 相离.　(B) 相切.　(C) 相交.　(D) 不能确定.	本题考查直线与圆的位置关系.
4. 已知一弧长为 m 的弧所对的圆周角为 120°，那么它所对的弦长为（　　） (A) $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}m$.　(B) $\frac{3\sqrt{2}}{4\pi}m$.　(C) $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}m$.　(D) $\frac{3\sqrt{2}}{2\pi}m$.	本题考查对弧长公式的理解应用，提高学生运用基础知识解决问题的能力.
5. 如图，正△ABC 内接于半径是 1 的圆，则阴影部分的面积是(　　) (A) $\pi-\frac{3\sqrt{3}}{4}$.　(B) $\pi-\frac{\sqrt{3}}{4}$. (C) $\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$.　(D) $\pi-\frac{3\sqrt{3}}{2}$.  (第 5 题)	本题考查观察图形的能力及弓形面积的求法.
二、**填空题**（每小题 6 分，共 24 分）： **6.** 如图，M 是 CD 的中点，$EM\perp CD$，若 CD=4 cm，EM=6 cm，则$\overset{\frown}{CED}$所在圆的半径为_____ cm.  (第 6 题)  (第 7 题)	本题考查圆的对称性的理解和思维的深刻性.
7. 如图，AD 和 AC 分别是⊙O 的直径和弦，且∠CAD=30°，$OB\perp AD$，交 AC 于点 B，若 OB=5，则 BC 等于_____.	本题考查学生的计算能力.
8. 一条弧所对的圆心角为 135°，弧长等于半径为 5 cm 的圆的周长的 3 倍，则这条弧的半径为_____.	本题考查学生对圆心角、弦、弧之间关系的应用.

内　容	设计意图
9. 如图，在边长为 3 cm 的正方形 $ABCD$ 中，$\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相外切，且 $\odot O_1$ 分别与 DA、DC 边相切，$\odot O_2$ 分别与 BA、BC 边相切，则圆心距 O_1O_2 为_____.  （第 9 题）  （第 10 题）	本题考查观察图形的能力及计算能力，提高思维灵活性.
三、**解答题**： **10.**（15 分）如图，已知 $\odot O$ 半径为 8 cm，点 A 为半径 OB 延长线上一点，射线 AC 切 $\odot O$ 于点 C，弧 BC 的长为 $\frac{20}{9}\pi$ cm，求线段 AB 的长（精确到 0.01 cm）.	本题考查对图形的认识、弧长公式的应用及近似计算，提高解题能力.
11.（15 分）如图（1），AB 是 $\odot O$ 的直径，AC 是弦，直线 EF 和 $\odot O$ 相切于点 C，$AD\perp EF$，垂足为 D. （1）求证：$\angle DAC=\angle BAC$； （2）若把直线 EF 向上平行移动，如图（2），EF 交 $\odot O$ 于 G、C 两点，若题中的其他条件不变，这时与 $\angle DAC$ 相等的角是哪一个？为什么？  （1）　（2） （第 11 题）	本题意在引导学生体会数学知识之间的联系，感受数学的整体性，不断丰富解决问题的策略，提高解题能力.
12.（16 分）工人师傅为检测该厂生产的一种铁球的大小是否符合要求，设计了一个如图（2）所示的工件槽，其中工件槽的两个底角均为 90°，尺寸如图（单位：cm）. 将形状规则的铁球放入槽内时，若同时具有图（1）所示的 A、B、E 三个接触点，该球的大小就符合要求. 图（2）是过球心及 A、B、E 三点的截面示意图. 已知 $\odot O$ 的直径就是铁球的直径，AB 是 $\odot O$ 的弦，CD 切 $\odot O$ 于点 E，$AC\perp CD$，$BD\perp CD$. 请你结合图中的数据，计算这种铁球的直径.  （1）　（2） （第 12 题）	本题意在提高学生应用数学的意识，体会数学的价值.

测试题答案

1. B.

2. C.

3. A.

4. A.

5. A.

6. $\frac{10}{3}$.

7. 5.

8. 40 cm.

9. $6-3\sqrt{2}$.

10. AB 的长为 4.45 cm.

11. 与$\angle DAC$ 相等的角是$\angle BAG$.

12. 铁球的直径是 20 cm.

第二十五章　概率初步

Ⅰ　总体设计

一、课程学习目标

本章教科书的设计与编写以下列目标为出发点.

1. 理解什么是必然发生的事件、不可能发生的事件，什么是随机事件.

2. 在具体情境中了解概率的意义，体会概率是描述不确定现象发生可能性大小的数学概念，理解概率的取值范围的意义.

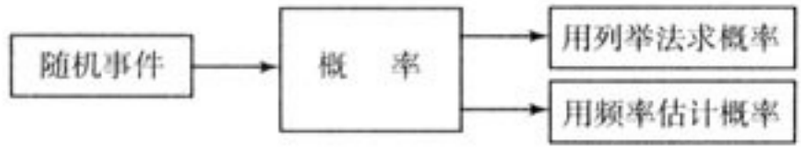
3. 能够运用列举法（包括列表、画树形图）计算简单事件发生的概率.

4. 能够通过试验，获得事件发生的频率；知道大量重复试验时频率可作为事件发生概率的估计值，理解频率与概率的区别与联系.

5. 通过实例进一步丰富对概率的认识，并能解决一些实际问题.

6. 了解进行模拟试验的必要性，能根据问题的实际背景设计合理的模拟试验.

二、本章知识结构框图



三、内容安排

从《数学课程标准》看，本章属于“统计与概率”领域，对于该领域的内容，本套教科书共安排了四章，这四章采用统计和概率分开编排的方式，前三章是统计，最后一章是概率. 一方面，概率与统计相对独立，另一方面概率又以统计为依托. 本章概率知识的学习要以前三章的统计部分的知识为基础.

本章的主要内容是随机事件的定义，概率的定义，计算简单事件概率的方法，主要是列举法（包括列表法和画数形图法），利用频率估计概率. 中心内容是体会随机观念和概率思想.

全章共包括 3 节：

25.1　概率

学生在前两个学段已经接触到了一些与可能性有关的初步知识，在本节将学习更加数学化和抽象化地描述可能性的知识——概率初步知识.

在 25.1.1 节中，教科书通过设置的问题 1 的抽签问题和问题 2 的掷骰子问题，让学生来感受到，在一定条件下重复进行试验时，有些事件是必然发生的，有些事件是不可能发生的，有些事件是有可能发生也有可能不发生的. 教科书为了避免出现太多的概念，所以没有给出必然事件和不可能事件的概念，只给出了随机事件的概念. 在学习了问题 1 和问题 2 后，学生就能够判断一个事件

是必然会发生的事件、不可能发生的事件还是随机事件. 问题 3 是一个摸球问题，通过这个问题要使学生在前两个学段知识的基础上进一步认识随机事件发生的可能性，即一般地，随机事件发生的可能性有大有小，不同的随机事件发生的可能性大小有可能不同. 通过问题 3 的学习，使学生能够初步判断几个事件发生的可能性的相对大小.

在学习了 25.1.1 节的随机事件以及随机发生的可能性大小的基础上，25.1.2 节给出了对事件发生可能性的更加抽象和更加数学化的描述——用频率来定义的概率. 教科书设置了一个投币试验，一方面让学生亲自动手试验获得数据，另一方面还给出投币试验的历史数据，为学生发现规律提供帮助. 通过学生的亲手试验和历史数据，学生能够用自己在“统计”中学过的频率知识来研究投掷一枚硬币时“正面向上”的频率的大小. 可以发现，在重复投掷一枚硬币时，“正面向上”的频率在 0.5 的左右摆动，随着投掷次数的增加，一般地，频率会呈现出一定的稳定性：在 0.5 的左右摆动的幅度会越来越小. 由于“正面向上”的频率呈现出上述的稳定性，我们就用 0.5 这个常数来表示“正面向上”发生的可能性到大小.

随机事件发生的频率逐渐稳定到的常数可以刻画随机事件发生的可能性的大小. 从这一点出发，教科书引出了概率的定义：一般地，在大量重复试验中，如果事件 A 发生的频率 $\frac{m}{n}$ 会稳定在某个常数 p 附近，那么这个常数 p 就叫做事件 A 发生的概率，记为 $P(A)=p$. 则根据概率的定义可知，当 A 是不可能发生的事件时，$P(A)=0$；当 A 是必然发生的事件时，$P(A)=1$；当 A 是随机事件时，$0<P(A)<1$；概率的值越大则事件发生的可能性越大.

从概率定义可知，概率是通过大量重复试验中频率的稳定性得到的一个 0～1 的常数，它反映了事件发生的可能性的大小. 需要注意，概率是针对大量重复试验而言的，大量重复试验反映的规律并非意味着在每一次试验中一定能体现. 从这个意义上说，即使某事件发生的概率非常大，在一次试验中它也有可能不发生；即使某事件发生的概率非常小，在一次试验中它也可能发生.

25.2　用列举法求概率

在本节的开始，教科书设计了两个试验：抽签试验和掷骰子试验. 通过这两个试验可以发现如下的规律：一般地，如果在一次试验中，共有 n 种可能的结果，并且它们发生的可能性都相等，事件 A 包含其中的 m 种结果，那么事件 A 发生的概率为 $P(A)=\frac{m}{n}$. 事实上，这个规律也可以看作从另一角度出发给出的等可能事件的概率定义，即概率的古典定义.

根据概率的古典定义，我们采用列举的方法计算一些简单事件的概率. 例 1～3 都是通过列举的方法得到在一次试验中所有可能的结果数 n，以及所求事件包含的结果数 m，即而计算出所求事件的概率.

例 4 与前三个例题有所不同，这个事件在试验时包含了两步，这就要求把两步可能的结果都列举出来，再利用概率的古典定义来计算概率. 例 4 的试验中每一步可能的结果只有两个，两步的所有可能结果也只有 $2\times2=4$ 个.

与例 4 类似，例 5 的每次试验也是包含两步，但每一步可能产生的结果数却远较例 4 为多，有 6 个. 这样，用例 4 那样简单的列举法就有些捉襟见肘了，这时教科书给出了一种比较方便的列举方法——列表法，这种方法适合在两步的试验中，每一步出现的结果较多的情况. 采用这种方法可以一目了然地看出投掷两个骰子可能出现的所有结果为 $6\times6=36$ 个.

与例 5 相比，例 6 的难度又有进一步的提高，所提问的两个事件对应的试验都包含了 3 步，对于包含 3 步的试验，是一个三维的问题，用例 5 中列表的方法来列举出所有可能的结果已经不可能. 为此，教科书在例题中给出了一种新的列举方法——树形图法. 树形图法是一种适应性比较广

泛的方法，能够用列表法解决的问题当然也能用树形图方法来解决，应该说，这种方法是第三学段的学生在尚未掌握概率乘法的情况下，用处最广泛的方法.

25.3　利用频率估计概率

由 25.1 节的概率定义可知，在同样条件下，大量重复试验时，根据一个随机事件发生的频率所逐渐稳定到的常数可以估计这个事件发生的概率，教科书在第 25.3 节就结合具体情境研究了如何用频率估计概率.

问题 1 考查了某种幼树移植的成活率，幼树的成活率实际上就是一种概率. 这个实际问题中的移植试验不属于各种结果可能性相等的类型，因而也就不能用 25.2 节中概率的古典定义去计算概率，只能用频率去估计.

在同样条件下，大量移植这种幼树并统计成活情况（制成统计表的形式），计算成活频率，随着移植棵数的增加，成活频率会越来越稳定于某个常数，这个常数就是这种幼树的移植成活率，在这个移植成活率问题中，事实上应用了“用样本估计总体”的统计思想.

问题 1 的目的比较单纯，而问题 2 则略显复杂：除了确定柑橘损坏的概率外，还要在去掉损坏柑橘后保证利润的前提下，确定柑橘的零售价格. 这里一方面要应用“用样本估计总体”的统计思想以及用频率估计概率的思想计算出柑橘的损坏率，另一方面还要根据已知的损坏率为达到盈利的目的采取定价决策.

问题 3 指出，在解决某些实际的概率问题时，有时考查实际的对象是不方便的，这样就提出了模拟试验的必要性与合理性. 设置这个问题的目的不在于让学生获得最后的精确结果，而是让学生根据具体的问题情境设计合适的模拟试验.

最后，在本节中教科书还介绍了如何用计算器产生随机数，如何用计算器进行模拟试验.

25.4　课题学习　键盘上字母的排列规律

教科书在最后一节安排了一个具有一定综合性和活动性的“课题学习”，这个“课题学习”选用了与学生生活联系密切的键盘上字母的排列规律问题. 由于本章是本套教科书“统计与概率”部分的最后一章，因此这个课题学习的综合性比前面三章统计中的课题学习更强. 为了便于教学操作，教科书没有像以前那样要求学生进行收集数据、用统计表图整理和描述数据的整个统计过程，而是把需要的数据——字母使用频率以表格的形式直接提供给他们，仅要求他们根据频率的大小把键盘上的字母排列出来，最后估计每个字母出现的概率，从而解释为什么键盘上的字母如此排列.

完成这个课题学习，要求学生综合运用本章及以前所学的统计与概率的知识和方法，通过经历从大到小地排列各字母使用频率的过程，感受概率在现实生活中的重要作用. 在这个过程中，让学生进一步感受用样本估计总体的统计思想及概率思想，进一步体验概率在进行决策时的重要作用.

四、课时安排

本章教学时间约需 14 课时，具体分配如下（仅供参考）：

25.1　概　率	约 4 课时
25.2　用列举法求概率	约 4 课时
25.3　利用频率估计概率	约 2 课时
25.4　课题学习	约 2 课时
数学活动 小结	约 2 课时

五、学法教法建议

1. 注重随机观念的渗透

本章是第三学段“统计与概率”的最后一章，主要内容是理解随机观念及概率的思想方法. 在现实世界中，有许多现象我们是可以事先预言其成立的，如下雨必有云；同性电荷相斥；在$\triangle ABC$中，若$AB=AC$，则$\angle B=\angle C$；因为$x+1\geqslant 3$，所以$x\geqslant 2$. 以上事实的反面，下雨而无云；同性电荷相吸；$x+1\geqslant 3$，而$x<2$等，是必然不成立的. 这种在一定条件下必然发生或必然不发生的现象称为确定性事件（或现象）. 确定性事件的特点是：当条件给定时，其结果可以事先确切地预言或推算. 一般说，代数、几何中研究的大量问题都具有确定性.

然而，在现实世界中还存在着许多现象，我们无法事先断定其结果. 例如，向上抛出一枚硬币，落地时其结果是正面向上，还是背面向上？事先是无法准确断言的. 又如新生儿的体重，在出生之前也无法准确断言是多少. 某一路段，在一定时间段内有多少车辆通过，往往是无法事先断定的. 这类事件很多. 它们的共同特点是：在相同的条件下，重复同一实验（或观察）时，会得到不同的结果，就一次或少数几次实验来看，其发生与否是不确定的，这种事件就是随机事件. 但当大量重复实验（或观察）时，事件发生的可能性就整体来说呈现出某种固有规律性. 例如，将上述的抛硬币实验大量重复时，就可以发现正面朝上或反面朝上的次数总是大致相等的. 通过大量统计新生婴儿的体重时，也会发现这些数字绝大多数集中在某一点附近，离开这点越远数字越少，呈现出一种确定的分布. 这种大量重复实验（或观察）时所呈现出的集体规律性，称为统计规律. 这类在个别实验中呈现出不确定性，而在大量重复实验中，又具有某种统计规律的现象，就是研究随机事件时要讨论的问题.

随机事件在现实世界中是普遍存在的，教师应该努力培养学生的随机观念，并让学生知道，研究随机事件掌握其规律进而利用其规律是有实际意义的. 概率论就是研究和揭示随机现象统计规律的数学工具. 教师应举出大量事件，让学生判断，这些事件是确定性事件还是随机事件. 教师应该注意，所举的事例一定要在学生的知识范围和生活经验之内，超出这个范围，对培养学生的随机观念是无益的.

2. 突出概率思想的内涵

在前两个学段，学生对事件发生的可能性的大小已经有了初步的认识，在本章，他们将学习一种研究不确定现象的模型——概率. 对于随机事件及其概率的认识，学生需要一个较长时期的认知过程. 学生对概率思想的理解和掌握会随着自身年龄的增长以及知识面和生活经验的延伸而发展.

本章的概率定义是以频率为基础给出的. 对于等可能事件概率的计算，则用古典概型更为方便，比如说本章25.2节“用列举法求概率”中的概率，事实上采用的就是利用$P(A)=\frac{m}{n}$形式的概率定义进行计算. 还有一些事件的概率无法用理论计算来解决，就只能通过概率试验，用频率来估算. 比如25.3节“利用频率估计概率”中的概率估算. 还有一类事件的概率（比如投硬币或投骰子某一面朝上），既可以用理论来计算也可以用频率来估算，从理论上说，硬币两个面是对称的，两个面分别朝上的可能性是相等的，所以两个面朝上的概率都为0.5，通过大量的重复试验也可以估算出硬币正面朝上的概率为0.5；投骰子的道理相同. 应该让学生们理解，在遇到任何计算概率的问题时，如果能够用理论计算首先就应该采用理论计算的方式，这样的计算结果是概率的精确值，用频率估计概率通常会出现误差，得到的可能是概率的近似值.

教学中应注意让学生逐步理解概率的内涵，概率是针对大量重复试验而言的，大量重复试验反

映的规律并非在每一次试验中一定反映出来. 从这个意义上说，即使某一事件发生的概率非常大，在一次试验中它也有可能不发生；即使一事件发生的概率非常小，在一次试验中它也可能发生，比如买奖券中奖.

3. 注意揭示概率与频率的联系与区别

初学统计与概率的学生常常无法理解概率与频率的内在联系与区别，有时会把两者相混淆. 教师应该向学生指明，统计与概率这两个学科是互为依托，相互作用的. 概率这一概念是建立在频率这一统计量的稳定性基础之上的，而统计也离不开概率的理论支撑. 相同条件下，一个事件发生的概率是一个常数，是由事件固有的属性决定的，但是如果用概率试验的方法，频率会随着样本空间的变化而变化，但随着样本的增加，频率会越来越集中于一个常数，这个数就是概率. 所以用频率估计出来的概率有时是不精确的，会有误差.

4. 深刻领会概率概念中蕴涵的辩证思想

人们在长期的实践中发现，在随机现象的研究中，每次试验得的结果虽不尽相同（具有偶然性），但大量重复试验的结果却往往能反映客观规律，这种现象称为大数法则，亦称大数定律，是证明大量随机现象统计规律的一组定理的总称. 正如革命导师恩格斯所说："在表面上是偶然性在起作用的地方，这种偶然性始终是受内部的隐藏着的规律支配的，而问题只是在于发现这些规律."在理解概率的定义时，有一点必须注意：即使某事件发生的概率是$\frac{1}{m}$，也并不意味 m 次随机试验，事件必然会发生 1 次，尽管概率值本身是精确的. 这个事实说明：必然性与偶然性（即随机性）是对立统一的概念，偶然性中蕴涵内在必然的规律；反过来，被断定为必然的东西，有在于大量的偶然现象中.

5. 鼓励学生动手实验，注意现代信息技术的应用

为了首先让学生通过具体的实验操作获得一定的活动经验，促进对概率意义的理解与掌握，教科书在 25.1.2 节给出概率定义之前，设置了一个投掷硬币的实验，为学生提供一个体验概率试验的机会. 由于在这个试验中需要获得的投掷次数相对较多，所以这里就需要发动全体学生积极参与，动手实验，靠集体的力量快速地获得实验频率，圆满地完成试验.

在学习用频率估计概率这部分内容时，一方面要鼓励学生亲自动手，集体合作，这主要是针对一些比较简单的试验，比如说投币试验，投图钉试验以及像阅读与理解短文中的布丰投针试验等. 另一方面也鼓励学生采用模拟方法进行试验，特别是利用计算机或计算器进行模拟试验. 我们知道，为了使由频率估计的概率尽可能地准确，就需要进行大量的重复试验. 这样的试验是极其费时费力的，所以应该鼓励学生使用现代信息技术，比如教科书就给出了用计算器产生随机数的例子. 在学生掌握模拟试验时，重要的不是获得最终的结果，而是针对一个现实问题，让学生提出一种切实可行的进行模拟试验的策略，教科书 25.3 节的问题 3 就是这样.

6. 注意把握好教学难度

必须注意的是，本学段的概率内容还处在一个比较初级的水平，就《数学课程标准》来看，这个阶段的学生并没有学习概率中的乘法，所以他们还只能用列表法和树形图法计算一些简单的概率问题. 因此，如果问题超过 3 步试验的难度，学生完成起来就会非常吃力. 所以一般来说，教学中不宜将问题的难度超过 3 步试验.

7. 注意选取的素材要丰富、科学且真实，充分体现概率与生活的密切联系

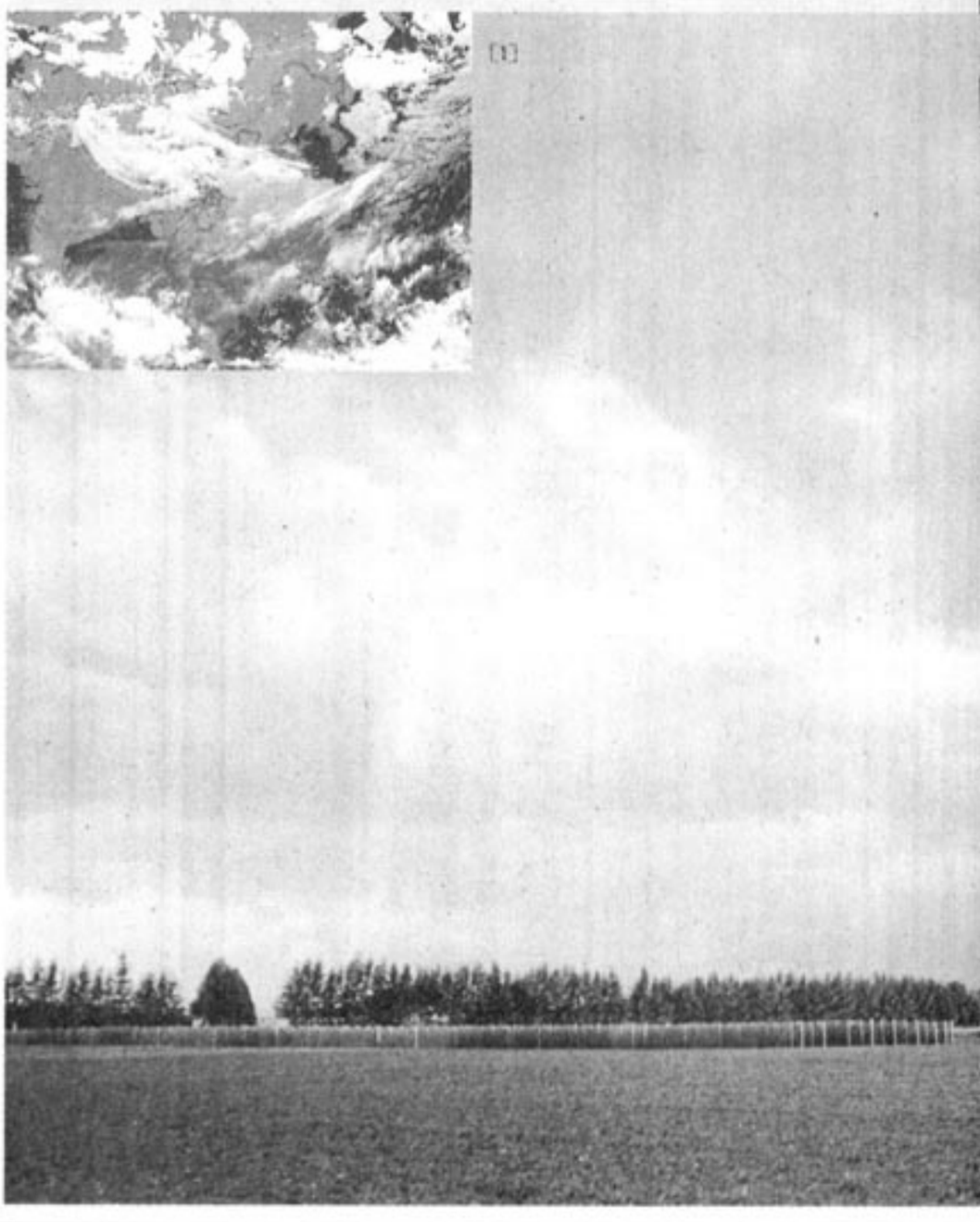
概率与现实生活的联系越来越紧密，这一领域的内容对学生来说应该是充满趣味性和吸引力的，本套教科书编写时特别注意将概率的学习与实际问题紧密结合，选择典型的、学生感兴趣的和

富有时代气息的现实问题作为例子，在解决这些实际问题的过程中学习计算概率的方法，掌握概率的概念、理解概率的意义，本章亦是如此. 例如，在第 25.1 节中，教科书借助于“抽签问题”和“掷骰子问题”引出随机事件的概念；用“摸球问题”来引出事件发生的可能性的大小；用“投币试验”引出概率的统计学定义；又如 25.2 节中的例 3，这是一个“扫雷游戏题”，相信使用过电脑的学生对其一定不会陌生，没有用过电脑的学生在阅读本题的背景后，对本题也一定会很感兴趣的. 再如，在第 25.4 节中，教科书选择了一个与学生生活密切联系的“键盘上字母的排列规律”作为“课题学习”，使学生综合运用本章知识和方法来体会概率在现实中的应用. 因此，教学时要注意联系实际问题，可以和学生一起挖掘身边的素材进行教学，使学生在解决实际问题的过程中，体会随机的思想，培养概率思维，同时也使学生感受到概率与实际生活的密切联系，体会概率在采取决策解决现实问题中的作用，调动学生学习统计概率知识的积极性.

Ⅱ 教材分析

[1] 章前图是雨后彩虹图与一张卫星云图的合成图片，这张图片是本章章前引言的背景图.

第二十五章 概率初步



1. 概率是一个事件发生、一种情况出现的可能性大小的数量指标，界于0与1之间. 这个概念形成于16世纪的西欧，与投掷骰子进行赌博的活动有密切关系.

1651年夏天，有人向法国数学家帕斯卡(Pascal，1623—1662)请教了一个有关“掷骰子”的问题：甲、乙两人“掷骰子”赌博，他们约定，若甲首先掷出三次“6点”，或乙首先掷出三次“4点”就算赢了对方，赢家可获得全部赌金. 当甲已经掷出了两次“6点”，乙已经掷出一次“4点”时，赌博因故中断，那么两人应该如何分配这些赌金?

一种意见认为，甲只需要再掷出一次“6点”就能赢，而乙还需要再掷出两次“4点”才能赢. 因此，甲、乙二人所分赌金的数额之比应该是2∶1，即甲应分得全部赌金的$\frac{2}{3}$，乙应分得全部赌金的$\frac{1}{3}$.



25

25.1 概　率

25.2 用列举法求概率

25.3 利用频率估计概率

25.4 课题学习　键盘上字母的排列规律

同学们都听说过“天有不测风云”这句话吧！它的原意是指刮风、下雨、阴天、晴天这些天气状况很难事先准确预料；后来它被引申为：世界上有很多事情具有偶然性，人们不能事先判定这些事情是否会发生.[1]

人们果真对这类偶然性事件完全无法把握、束手无策吗？不是！随着对事件发生的可能性的深入研究，人们发现许多偶然性事件的发生也是有规律可循的. 概率这个重要的数学概念，正是在研究这些规律中产生的，人们用它描述事件发生的可能性的大小. 例如，天气预报说明天的降水概率为90%，就意味着明天有很大可能下雨（雪）. 现在概率的应用日益广泛. 本章中，我们将学习一些概率初步知识，从而提高对偶然性事件发生规律的认识.

[1] 在我国有许多关于天气的谚语，例如，朝霞不出门，晚霞行千里，八月十五云遮月，正月十五雪打灯，等等. 其实，这样的谚语中蕴涵了概率的思想：当具备某条件时，某结果出现的概率就会非常大. 但不管后者出现的概率有多大，也并不意味着它一定会出现.

另一种意见则认为，假设两人再各掷一次骰子，对甲来说只有两种可能的结果：一种是甲未掷出“6点”，这时即使乙掷出“4点”，两人也只是打了个平手，可以各自得全部赌金的1/2；另一种可能是甲掷出“6点”，那么他可获得全部赌金. 因此，甲分得全部赌金的$\frac{1}{2}$和全部赌金的可能性各占一半，他应该分得全部赌金的$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)$，即甲应分得全部赌金的$\frac{3}{4}$，乙应分得全部赌金的$\frac{1}{4}$.

谁的分配方案合理？应该怎样分配赌金？这个问题在三年的时间里一直困扰着帕斯卡.

1654年，帕斯卡将自己的心得告诉自己的好友，著名数学家费马（Fermat，1601－1665），从此一场热烈的讨论在两人之间展开了，后来荷兰数学家惠更斯（C. Huygens，1629－1695）也加入了他们的行列.

[1] 之所以采用这种方式，是因为这样的方式在同等条件下，每一方的机会是均等的. 在球类比赛分组时，通常采用这种方式，这种方式俗称为“抓阄”.

[2] 骰子俗称色子，标准的现代骰子都是正方体，每一面上都有若干个点，其点数分别为 1、2、3、4、5 和 6. 相对两面上的点数之和均为 7，这样骰子的 6 个面可以分为三对，即 1 与 6，2 与 5，3 与 4. 目前，西方制造的骰子几乎都是这样的：点数为 1、2、3 的三个面沿着逆时针方向围绕着其公共顶点排列.

25.1 概 率

25.1.1 随机事件

抽签是一种古老但很实用的决定顺序的方法. [1]

问题 1 5 名同学参加讲演比赛，以抽签方式决定每个人的出场顺序. 签筒中有 5 根形状、大小相同的纸签，上面分别标有出场的序号 1，2，3，4，5. 小军首先抽签，他在看不到纸签上的数字的情况下从签筒中随机（任意）地取一根纸签. 请考虑以下问题：

(1) 抽到的序号有几种可能的结果？

(2) 抽到的序号小于 6 吗？

(3) 抽到的序号会是 0 吗？

(4) 抽到的序号会是 1 吗？

为回答上面的问题，我们可以在同样条件下重复进行抽签试验. 从试验结果可以发现：

(1) 每次抽签的结果不一定相同，序号 1，2，3，4，5 都有可能抽到，共有 5 种可能的结果，但是事先不能预料一次抽签会出现哪一种结果；

(2) 抽到的序号一定小于 6；

(3) 抽到的序号不会是 0；

(4) 抽到的序号可能是 1，也可能不是 1，事先无法确定.



问题 2 小伟掷一个质地均匀的正方体骰(tóu)子，骰子的六个面上分别刻有 1 到 6 的点数. 请考虑以下问题：掷一次骰子，在骰子向上的一面上，

(1) 可能出现哪些点数？

(2) 出现的点数大于 0 吗？

在这些数学家的研究过程中，创立并运用了古典概型的概率、概率的加法定理和乘法定理等，正是通过研究掷骰子这样的问题才逐步形成了最初的概率论.

1. 本节的主要内容是随机事件的概念和概率定义，对概率定义的初步理解是本节课的重点和难点. 根据《课程标准》的要求，对于可能性大小的知识，学生已经在前两个学段有所接触并有相当认识.

2. 在回答问题 1 时，教师可以向学生提出这样的问题：这种抽签方式对 5 位同学公平吗？为什么？通过这个问题让学生理解什么是“等可能性”.

3. 最古老的骰子至少要追溯到古埃及，那时就有人使用动物后跟骨制作的四面体“骰子”赌博，现代的骰子流行于中世纪. 在中国，传说骰子的发明人是三国时代的文学家曹植. 最初用做占卜工具，后来才演变成游戏工具，掷骰子点

(3) 出现的点数会是 7 吗?

(4) 出现的点数会是 4 吗?

为回答上面的问题，我们可以在同样条件下重复进行掷骰子试验. 从试验结果可以发现：

(1) 每次掷骰子的结果不一定相同，从 1 到 6 的每一个点数都有可能出现，所有可能的点数共有 6 种，但是事先不能预料掷一次骰子会出现哪一种结果；

(2) 出现的点数肯定大于 0；

(3) 出现的点数绝对不会是 7；

(4) 出现的点数可能是 4，也可能不是 4，事先无法确定.

有些事件发生与否是可以事先确定的，而有些事件发生与否，则是不能事先确定的.

在一定条件下重复进行试验时，有的事件在每次试验中必然会发生. 例如，问题 1 中“抽到的序号小于 6”，问题 2 中“出现的点数大于 0”，这两个事件是必然发生的事件.[1] 相反地，有的事件在每次试验中都不会发生. 例如，问题 1 中“抽到的序号是 0”，问题 2 中“出现的点数是 7”，这两个事件是不可能发生的事件.[2]

在一定条件下，某些事件有可能发生，也有可能不发生，事先无法确定. 例如，问题 1 中“抽到的序号是 1”，问题 2 中“出现的点数是 4”，这两个事件是否发生不能确定. 在一定条件下，可能发生也可能不发生的事件，称为**随机事件** (random event).[3]

你能举出一些随机事件的例子吗?

在现实世界中存在着大量的随机事件，例如，任意抛掷一枚硬币，“正面向上”是随机事件，它可能发生，也可能不发生（出现“反面向上”）；在8：00时拨打查号台（114），“线路接通”是随机事件，它可能发生，也可能不发生（出现“占线”等情况）.

[1] 这样的事件称为必然事件.

[2] 这样的事件称为不可能事件.

必然事件和不可能事件统称为确定性事件. 有时也把事件称为现象，如确定性现象.

[3] 这一类事件也可称为偶然性事件，初时人们把这种事件称为“偶然事件”是指它是“不正常的”、“出乎意料的”或者“原因不明的”.

数赌酒或赌丝绸香袋等物. 当时骰子的点穴上涂的是黑色，到唐代才描红.

骰子常常是成对掷出的，以便得到一个期望的总点数.

4. 事件有“可重复”和“一次性”之分. 前者是指那种在同样或基本同样的条件下，原则上可以无限次重复的事件. 例如“掷骰子”这个动作，原则上可以在相同的条件下无限次重复，所以任何一个与此相联的事件，如“掷出偶数点”，也是可重复的. 必须注意到：这里实际所指的是试验（掷骰子）的可重复性. “一次性事件”顾名思义是“不可重复”的，如“2020 年 1 月 1 日下雪”“某人死亡”都是一次性事件.

5. 一定条件下就是指相同条件下，这一点非常重要. 比如投掷一个均匀的骰子，每个点数出现的机会是相同的，在各次投掷时均应保持骰子是均匀的这一条件，如果改变了骰子的均匀性，那么再次投掷的时候，6 个点数的出现机会

练习答案

(1) 必然发生；
(2) 随机事件；
(3) 随机事件；
(4) 不可能发生；
(5) 随机事件；
(6) 随机事件.

[1] 本题考察学生对必然发生事件、不可能发生事件和随机事件的理解与判断.

[2] 这个条件是为了保证每一个球有相等的机会被摸到.

练习

指出下列事件中，哪些是必然发生的，哪些是不可能发生的，哪些是随机事件：[1]

(1) 通常加热到 100 ℃时，水沸腾；
(2) 篮球队员在罚球线上投篮一次，未投中；
(3) 掷一次骰子，向上的一面是 6 点；
(4) 度量三角形的内角和，结果是 360°；
(5) 经过城市中某一有交通信号灯的路口，遇到红灯；
(6) 某射击运动员射击一次，命中靶心.



问题 3 袋子中装有 4 个黑球 2 个白球，这些球的形状、大小、质地等完全相同. 在看不到球的条件下，[2] 随机地从袋子中摸出一个球.

(1) 这个球是白球还是黑球?

(2) 如果两种球都有可能被摸出，那么摸出黑球和摸出白球的可能性一样大吗?

为了验证你的想法，动手摸一下吧! 每名同学随机地从袋子中摸出一个球，记下球的颜色，然后把球重新放回袋子. 汇总全班同学摸球的结果并把结果填在下表中.

表 25-1

球的颜色	黑球	白球
摸取次数		

比较表中记录的数字的大小，结果与你原先的判断一致吗?

在上面的摸球活动中，“摸出黑球”和“摸出白球”是两个随机事件. 一次摸球可能发生“摸出黑球”，也可能发生“摸出白球”，事先不能确定哪个事件发生. 但是，由于两种球的数量不等，所以事实上

就不同了. 为保证试验的科学性，在重复试验时应注意保持试验条件的一致性.

6. 设置问题 3 的目的在于，让学生经历“猜测——试验并收集数据——分析试验结果”的活动过程. 在试验开始之前，教师可以提出这样的问题：每一个球被摸到的机会均等吗? 为什么?

7. 教学时应该让所有的学生分组试验，最后将所有数据汇总. 回答问题 3 并不需要太多的试验数据，只要从得到的最终数据能够得出“摸出黑球”的可能性大于“摸出白球”的可能性这个结论即可. 在得出这个结论后，可以问学生为什么会有这个结论.

8. 从理论上讲，问题 3 中摸出的黑球和白球的比例应为 2∶1，但在试验中可能不会出现这么精确的结果. 但要让学生感受到“摸出黑球”的可能性大于“摸出白球”的可能性是由于袋子中黑球比白球多.

9. 确定某事件的概率的一种方式，是用该事

“摸出黑球”与“摸出白球”的可能性的大小是不一样的，“摸出黑球”的可能性大于“摸出白球”的可能性. 你们的试验结果能说明这种规律吗?

归纳

一般地，随机事件发生的可能性是有大小的，不同的随机事件发生的可能性的大小有可能不同.

思考

能否通过改变袋子中某种颜色的球的数量，使“摸出黑球”和“摸出白球”的可能性大小相同?[1]

练习

1. 已知地球表面陆地面积与海洋面积的比约为 3∶7. 如果宇宙中飞来一块陨石落在地球上，“落在海洋里”与“落在陆地上”哪个可能性更大?
2. 你能列举一些生活中的随机事件的例子吗? 你能列举一些在同样条件下重复进行试验时，不可能发生或必然发生的事件吗?

5.1.2 概率的意义

在同样条件下，随机事件可能发生也可能不发生，那么，它发生的可能性究竟有多大? 这是我们下面要讨论的问题.

[1] 设置这个思考题的目的是：让学生领会“摸出黑球”的可能性大于“摸出白球”的可能性的原因在于袋子里的黑球比白球多. 如果想使摸出两种球的可能性相同，只要使袋子中的两种球的个数相同即可.

练习答案

1. 落在海洋里的可能性更大.
2. 略.

件在大量重复试验中出现的频率来估计概率，尽管这种方法有失精确，但客观性不容置疑. 教科书 25.1 节中的概率定义就是从这个角度给出的.

10. 概率的另一种定义方式是：试验的可能结果只有有限个，且根据对称性的考虑，任一种可能结果都没有比另外结果占优势的地方，于是只能认为各结果有同等出现的机会，即等可能性. 若总的可能结果有 n 个，而某一事件包含其中的 m 个结果，则该事件的概率为 $\frac{m}{n}$. 例如投掷一枚匀质骰子，6 种可能的结果的可能性是相同的. “掷出 2 的倍数”这个事件包含 3 个结果：2、4 和 6，故此事件的概率为 $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

这种方式定义的概率叫做古典概率（或古典概型），与此相对的，第一种方式定义的概率现在叫做统计概率. 古典概率可以用简单明确的方

[1] 我们把对某种自然现象作一次观察或进行一次科学实验，统称为一个试验. 如果这个试验“在相同条件下可以重复进行”，而且每次试验的结果事先不可预言，我们就称其为一个随机试验.

[2] 分组是为了减少劳动强度加快试验速度. 当然，如果条件允许，组数分得越多，则获得的数据就会越多，就更容易观察出规律.

[3] 让学生再次经历数据的收集、整理、描述与分析的过程，进一步发展学生的统计意识，发现数据中隐藏的规律.

我们从抛掷硬币这个简单问题说起.

对这个问题，你的直觉是两个可能性相等吗?

抛掷一枚质地均匀的硬币时，尽管事先不能确定结果是“正面向上”还是“反面向上”，但是直觉容易告诉我们这两个随机事件发生的可能性各占一半. 这种猜想是否正确? 不妨用试验来检验.

试验[1]把全班同学分成10组，[2]每组同学掷一枚硬币50次，整理同学们获得的试验数据，并记录在表25-2中.[3]

第一组的数据填在第一列，第一、二组的数据之和填在第二列，…，10个组的数据之和填在第10列.

表 25-2

抛掷次数 n	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500
“正面向上”的频数 m										
“正面向上”的频率 $\frac{m}{n}$										

根据上表中的数据，在图25.1-1中标注出对应的点.

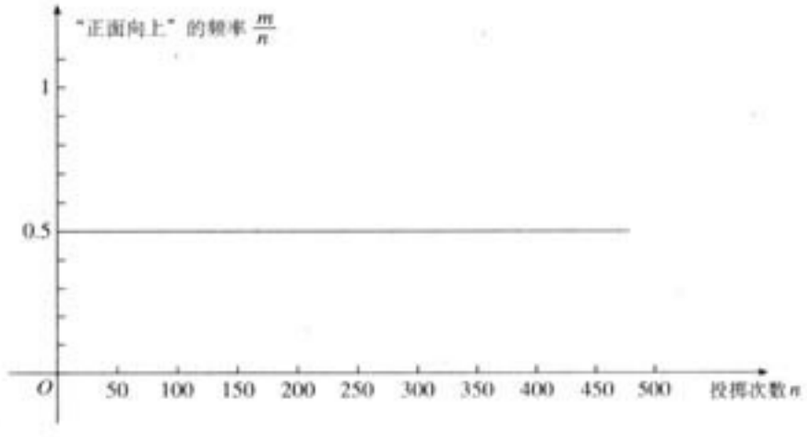


图 25.1-1

请同学们根据试验所得数据想一想：“正面向上的频率有什么规律?

历史上，有些人曾做过成千上万次抛掷硬币的实验，他们的试验结果见表25-3.

式去定义并给出有效的计算方法.

11. 尽管教科书25.1节给出的是统计概率，但在25.2节的例题中，从本质上说，使用的是古典概率的定义. 教科书并没有明确指出什么是统计概率，什么是古典概率，但教师是应该了解的.

12. 古典概率适用的一个典型场合，就是以投掷骰子为代表的机遇性赌博，所以概率论萌发于这样活动就不足为奇了.

13. 不管是统计概率还是古典概率，在各有其理论和应用上的价值外，同时也各有欠缺，因此都无法作为现代概率理论的思想基础. 在现代的概率论中是采取抽象化的方法，利用概率的本质属性给出概率定义的，就是概率的公理化定义.

概率的公理化定义是1933年前苏联数学家柯尔莫哥洛夫（1903—1987）给出的. 采用公理化的方法把概率的基本概念严格地建立起来，奠

表 25-3

试验者	抛掷次数 (n)	“正面向上”次数 (m)	“正面向上”频率 $\left(\frac{m}{n}\right)$
棣莫弗	2.048	1 061	0.518
布丰	4 040	2 048	0.506 9
费勒	10 000	4 979	0.497 9
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

观察

随着抛掷次数的增加，“正面向上”的频率的变化趋势有何规律？[1]

表25-3 中的数据与这种规律相符吗？

可以发现，在重复抛掷一枚硬币时，“正面向上”的频率在 0.5 的左右摆动. 随着抛掷次数的增加，一般地，频率就呈现出一定的稳定性；[2]在 0.5 的左右摆动的幅度会越来越小. 由于“正面向上”的频率呈现出上述稳定性，我们就用 0.5 这个常数表示“正面向上”发生的可能性的大小.

在抛掷一枚硬币时，结果不是“正面向上”就是“反面向上”. 因此，从上面提到的试验中也能得到相应的“反面向上”的频率. 当“正面向上”的频率逐渐稳定到 0.5 时，“反面向上”的频率呈现什么规律呢？容易看出，“反面向上”的频率也相应地稳定到 0.5. 于是我们也用 0.5 这个常数表示“反面向上”发生的可能性的大小. 至此，试验验证了我们的猜想：抛掷一枚质地均匀的硬币时，“正面向上”与“反面向上”的可能性相等（各占一半）.

[1] 学生观察自己试验得到的数据以及表 25-3 后，期望他们能够发现这样的规律：正面向上的频率在 0.5 左右波动.

[2] 频率稳定性说明随机事件发生的可能性大小是这个随机事件本身所固有的规律. 频率稳定性不仅为人类的实践不断证明，而且由瑞士数学家雅各布·伯努利（1654—1705）于 1713 年给出了严格的证明，并总结为频率稳定性定理.

定了现代概率论坚实的数学基础，从而使概率论成为一门结构严谨、内容充实、应用广泛、发展迅速的学科.

14. 投币试验是一种最简单的随机试验，投币所有的结果只有两个. 投币试验是最常用的一个说明随机事件或随机现象的例子.

15. 概率的性质公理：

(1) $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$；

(2) P(必然事件)$=P(S)=1$；

(3) 若 A_1，A_2，…，A_n 两两互斥，则

$$P(\bigcup A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

其中公理(3)在本学段不要求学生掌握，但是要掌握性质(1)和(2)及由其推出的两个性质：

(1) $P(\overline{A})=1-P(A)$；

(2) P（不可能事件）$=P(\varnothing)=0$. 其中，事件 $\overline{A}$ 为事件 A 的否定（事件 A 不发生）.

在本学段不要求学生掌握概率的乘法定理.

[1] 显然 m 和 n 都是非负整数，且 $n\neq 0$.

[2] 在概率论发展的早期，概率（probability）与机会（chance）两词的用法有区别，直到 18 世纪初才归于统一.

概率在刚刚传入我国的时候，译名很乱. 1896 年，在傅兰雅、华衡芳合译概率论的著作时，定名为《决疑数学》. 后来“probability”一词又被译成不下十余种名词，直到 20 世纪 60 年代以后才统一称为概率.

[3] 从图上可以直观地看出，概率的值越接近 0，则事件发生的可能性就越小. 反之，概率的值越接近 1，事件发生的可能性则越大.

从上面的试验你对频率有新的认识吗?

上面我们用随机事件发生的频率逐渐稳定到的常数刻画了随机事件发生的可能性的大小.

一般地，在大量重复试验中，如果事件 A 发生的频率[1] $\frac{m}{n}$ 会稳定在某个常数 p 附近，那么这个常数 p 就叫做事件 A 的**概率**[2]（probability），记为 $P(A)=p$.

事件一般用大写英文字母 A，B，C…表示.

因为在 n 次试验中，事件 A 发生的频数 m 满足 $0\leqslant m\leqslant n$，所以 $0\leqslant\frac{m}{n}\leqslant 1$，进而可知频率 $\frac{m}{n}$ 所稳定到的常数 p 满足 $0\leqslant p\leqslant 1$. 因此，

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1.$$

思考

当 A 是必然发生的事件时，$P(A)$ 是多少?
当 A 是不可能发生的事件时，$P(A)$ 是多少?

当 A 是必然发生的事件时，在 n 次试验中，事件 A 发生的频数 $m=n$，相应的频率 $\frac{m}{n}=\frac{n}{n}=1$，随着 n 的增加频率始终稳定地为 1，因此 $P(A)=1$.

当 A 是不可能发生的事件时，m 的值是多少? 你能说出 $P(A)=0$ 的道理吗?

事件发生的可能性越大，则它的概率越接近 1；反之，事件发生的可能性越小，则它的概率越接近 0（图 25.1-2）.

概率从数量上刻画了一个随机事件发生的可能性的大小.



图 25.1-2

16. 概率接近于 0 的事件叫做小概率事件，通常把概率不超过 0.05 的事件看作小概率事件. 经验告诉我们：“小概率事件在一次试验中，实际上可以认为是不可能发生的”. 这个论断叫做小概率事件原理，亦称实际推断原理，它是概率统计学中的一条重要原理. 那么这一重要原理有什么用处呢?

比如，有一批产品，厂方声称这批产品的次品率不超过 5%. 可是用户从中随机地抽验一件产品，结果发现是件次品. 根据小概率事件原理，用户有理由认为厂方的声明——“次品率不超过 5%”是不真实的，从而拒绝接受这批产品.

小概率事件不是不可能事件，因此不能忽视它. 例如飞机的故障率即使是 0.05 也是不允许的. 不论每次事件发生的概率有多小，但只要独立重复试验的次数足够多，这事件的发生几乎是必然的. 如有些福利彩票或体育彩票的中奖率是极小的（远远小于 0.05），但由于买彩票的人是

概率反映可能性大小的一般规律.

从上面可知，概率是通过大量重复试验中频率的稳定性得到的一个 0～1 的常数，它反映了事件发生的可能性的大小. 需要注意，概率是针对大量试验而言的，大量试验反映的规律并非在每次试验中一定存在. 例如，掷硬币时“正面向上”概率是$\frac{1}{2}$，这是从大量试验中产生的. 某人连掷硬币 50 次，结果只有 10 次正面向上，这种情况完全正常. 因为概率是$\frac{1}{2}$并不保证掷 $2n$ 次硬币一定有 n 次左右为正面向上，只是当 n 越来越大时，正面向上的频率会越来越接近$\frac{1}{2}$.[1] 又如，天气预报说某天降水概率为 90%，而这天并未降水，这件事并不奇怪. 因为预报的降水概率是根据大量统计记录得出的，是符合大多数同等气象条件下的实际情况的，某些例外情况是可能发生的.

练习

1. 下表记录了一名球员在罚球线上投篮的结果.

投篮次数（n）	50	100	150	200	250	300	500
投中次数（m）	28	60	78	104	123	152	251
投中频率$\left(\frac{m}{n}\right)$							

(1) 计算表中的投中频率（精确到 0.01）；

(2) 这名球员投篮一次，投中的概率约是多少（精确到 0.1）?

2. 用前面掷硬币的试验方法，全班同学分组做掷骰子的试验，估计掷一次骰子时“点数是 1”的概率.

[1] 对于投币试验来说，如果只投掷 10 次，这 10 次投掷连续出现正面的可能性极小. 但是，如果投掷 10 000 次，结果其中出现了 10 次连续的正面，这是完全可能的.

练习答案

1. (1) 0.56，0.60，0.52，0.52，0.49，0.51，0.50.

(2) 0.52.

2. 0.17.

够多，所以最后总是有人中奖.

17. 在理解概率的定义时，有一点必须注意：即使某事件发生的概率是$\frac{1}{m}$，也并不意味做 m 次随机试验，事件必然会发生 1 次，尽管概率值本身是精确的.

18. 必然性与偶然性（即随机性）是对立统一的概念，偶然性中蕴涵必然的规律；反过来被断定为必然的东西，是存在于大量的偶然性事件之中的.

习题 25.1

1. 第 1～3 题复习巩固学生对各类事件的理解和掌握，其中，第 3 题是一个具有较强开放性的题目，可以充分发挥学生的主观能动性.

2. 综合运用中的两道题难度不高，是复习“用频率估计概率”的基本题目.

3. 第 6 (1) 题：无法确定.

第 6 (2) 题：取出红球、绿球和蓝球的概率

[1] 所谓通常情况下就是指一般情况下，它是相对于特殊情况而言的. 比如，如果在水中加入盐，那么，即使温度降至零下，也可能不会结冰.

[2] 这里当然指在地球上测量温度.

习题 25.1

复习巩固 ▸▸

1. 请指出在下列事件中，哪些是随机事件，哪些事件是必然发生的，哪些事件是不可能发生的：
   (1) 通常温度降到 0 ℃以下，纯净的水结冰；[1]
   (2) 随意翻到一本书的某页，这页的页码是奇数；
   (3) 地面发射 1 枚导弹，未击中空中目标；
   (4) 测量某天的最低气温，结果为 −150 ℃；[2]
   (5) 汽车累积行驶 1 万千米，从未出现故障；
   (6) 购买 1 张彩票，中奖.



2. 足球比赛前，由裁判员掷一枚硬币，如果正面向上则由甲队首先开球，如果反面向上则由乙队首先开球. 这种确定首先开球一方的做法对参赛的甲、乙两队公平吗？为什么？
3. 请举出一些随机事件的例子，对这些事件怎样考查它们发生的频率？这些频率与事件发生的概率有什么关系？

综合运用 ▸▸

4. 从一大批种子中抽取若干批，在同一条件下进行发芽试验，有关数据如下：

种子粒数	50	100	200	500	1 000	3 000	5 000
发芽种子粒数	45	93	185	459	912	2731	4508
发芽频率							

   (1) 计算各批种子发芽频率（精确到 0.01）；
   (2) 根据频率的稳定性估计种子的发芽概率（精确到 0.1）.

5. 某射击运动员在同一条件下的射击成绩记录如下：

射击次数	20	40	100	200	400	1 000
射中 9 环以上次数	15	33	78	158	321	801
射中 9 环以上频率						

   (1) 计算表中相应的“射中 9 环以上”的频率（精确到 0.01）；

分别为 $\frac{2}{9}$、$\frac{3}{9}$ 和 $\frac{4}{9}$，概率不同.

第 6 (4) 题具有一定的开放性，学生只要做到将三种颜色的球的数目改成相同即可. 比如，最简单的方法就是加入一个红球，减掉一个蓝球，等等.

(2) 这些频率具有什么样的稳定性?

(3) 根据频率的稳定性，估计这名运动员射击一次时“射中 9 环以上”的概率(精确到 0.1).

拓广探索 ▶▶

6. 袋子中有 2 个红球，3 个绿球和 4 个蓝球，它们只有颜色上的区别.从袋子中随机地取出一个球.

(1) 能够事先确定取出的球是哪种颜色的吗?

(2) 取出每种颜色的球的概率会相等吗?

(3) 你认为取出哪种颜色的球的概率最大?

(4) 怎样改变各色球的数目可以使抽出每种颜色的球的概率都相等(提出一种方法即可)?



(第 6 题)

7. 重复地掷骰子，通过统计频率估计“点数为 2”和“点数为 6”的概率，并把所得两个结果作比较，从中你能感悟到什么?

[1] 这是在应用概率的古典定义计算事件的概率时的两个前提条件.

25.2 用列举法求概率

前面我们用随机事件发生的频率所逐渐稳定到的常数来作为这个事件发生的概率，这种方式具有一般性. 然而，对于某些特殊类型的试验，实际上不需要做大量重复的试验，而通过列举法进行分析就能得到随机事件的概率.

请看下面两个试验.

1. 从分别标有 1，2，3，4，5 号的 5 根纸签中随机地抽取一根，抽出的签上的号码有 5 种可能，即

1，2，3，4，5.

由于纸签的形状、大小相同，又是随机抽取的，所以我们可以认为：每个号被抽到的可能性相等，都是$\frac{1}{5}$.

2. 掷一个骰子，向上的一面的点数有 6 种可能，即

1，2，3，4，5，6.

由于骰子的构造相同、质地均匀，又是随机掷出的，所以我们可以断言：每种结果的可能性相等，都是$\frac{1}{6}$.

以上两个试验有两个共同的特点：[1]

1. 一次试验中，可能出现的结果有限多个；

2. 一次试验中，各种结果发生的可能性相等.

对于具有上述特点的试验，我们可以从事件所包含的各种可能的结果在全部可能的试验结果中所占的比分析出事件的概率. 例如，在上面的抽签试验中，

具有这些特点的试验称为古典概型.

1. 教科书在前一节给出的概率定义是从统计的角度给出的，即统计概率. 在本章，为了避免引起学生的理解混乱，教科书没有明确给出概率的古典定义. 但是，全章所使用的思想方法却是从概率的古典定义出发的，要注意让学生顺其自然地过渡过来.

2. 概率的古典定义是法国数学家拉普拉斯（Laplace，1749 — 1827）在其 1812 年出版的《分析概率论》一书中最先明确给出的.

3. 如果随机试验 E 具有下列性质：

（1）E 的所有可能结果（基本事件），只有有限多个；

（2）E 的每一个可能结果（基本事件）发生的可能性大小相等，

则称 E 为有限等可能型随机试验或等可能概型. 因为它是概率论发展初期的主要研究对象，所以它被称为古典概型.

对于古典概型 E，设它的所有可能结果是 n

“抽到1号”的可能性是$\frac{1}{5}$，即它在5种可能的结果中占1种. 于是这个事件的概率

$$P(\text{抽到1号})=\frac{1}{5}.$$

“抽到偶数号”这个事件包括抽到2，4这两种可能结果，在全部5种可能的结果中所占的比为$\frac{2}{5}$，于是这个事件的概率

$$P(\text{抽到偶数号})=\frac{2}{5}.$$

归纳

一般地，如果在一次试验中，有n种可能的结果，并且它们发生的可能性都相等，事件A包含其中的m种结果，那么事件A发生的概率为$P(A)=\frac{m}{n}$.[1]

思考

在$P(A)=\frac{m}{n}$中，分子m和分母n都表示结果的数目，两者有何区别，它们之间有怎样的数量关系？$P(A)$可能小于0吗？可能大于1吗？[2]

例1 掷一个骰子，观察向上的一面的点数，求下列事件的概率：

(1) 点数为2；

(2) 点数为奇数；

(3) 点数大于2且小于5.

解：掷一个骰子时，向上一面的点数可能为1，

[1] 事实上，这就是古典概率的定义，但是没有以明确的形式给出.

[2] n是在一次试验中所有等可能的结果数（与A无关），而m是事件A所包含的所有等可能的结果数. $m\leqslant n$，$P(A)$不会小于0也不会大于1.

个等可能的情形，事件A包含其中的m个情形，则定义事件A的概率$P(A)$为

$$P(A)=\frac{m}{n},$$

这个定义叫做概率的古典定义. 在这个定义出现之前，人们已经知道，有一些随机试验并不具备有限与等可能性质，对于这类随机试验，概率的古典定义不能适用.

4. 在应用概率的古典定义计算事件的概率时，正确鉴别试验的所有可能结果是否具备有限与等可能两个条件是非常重要的.

例如，将一枚硬币抛两次，求恰好出现一次正面的概率. 如果把试验的所有可能结果分成以下三种情形：“两次皆正面”“两次皆反面”和“一次正面，一次反面”，从而得所求概率为$\frac{1}{3}$，这就错了. 问题在于，上述三种情况出现的可能性不相等，不能直接套用概率的古典定义.

[1] 我们常常在商场或电视的娱乐节目中看到这种转盘，但在实际中，转盘通常要比这个复杂，以获得各种级别的概率.

[2] 尽管出现这种情况属于小概率事件，但为了排除不必要的干扰，以免影响分析过程，故作此规定，这个规定对每一个扇形是平等的.

[3] 在计算概率的问题时，很多时候给所研究的对象根据不同的情形适当加编号，这会使分析过程更方便更顺利.

2，3，4，5，6，共 6 种. 这些点数出现的可能性相等.

(1) $P(\text{点数为 } 2)=\frac{1}{6}$；

(2) 点数为奇数有 3 种可能，即点数为 1，3，5，

$$P(\text{点数为奇数})=\frac{3}{6}=\frac{1}{2};$$

(3) 点数大于 2 且小于 5 有 2 种可能，即点数为 3，4，

$$P(\text{点数大于 2 且小于 5})=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

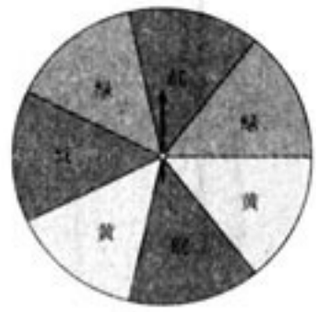


图 25.2-1

例 2 图 25.2-1 是一个转盘，[1]转盘分成 7 个相同的扇形，颜色分为红、绿、黄三种颜色. 指针的位置固定，转动转盘后任其自由停止，其中的某个扇形会恰好停在指针所指的位置（指针指向两个扇形的交线时，当作指向右边的扇形）.[2]求下列事件的概率：

(1) 指针指向红色；

(2) 指针指向红色或黄色；

(3) 指针不指向红色.

分析：问题中可能出现的结果有 7 个，即指针可能指向 7 个扇形中的任何一个. 由于这是 7 个相同的扇形，转动的转盘又是自由停止的，所以指针指向每个扇形的可能性相等. 因此可以通过列举法求出概率.

解：按颜色把 7 个扇形分别记为：红$_1$，红$_2$，红$_3$，绿$_1$，绿$_2$，黄$_1$，黄$_2$.[3]所有可能结果的总数为 7.

(1) 指针指向红色(记为事件 A)的结果有 3 个，即红$_1$，红$_2$，红$_3$，因此

$$P(A)=\frac{3}{7};$$

(2) 指针指向红色或黄色(记为事件 B)的结果有 5 个，即红$_1$，红$_2$，红$_3$，黄$_1$，黄$_2$，因此

把例 2 中的(1)(3)两问及答案联系起来，你有什么发现？

5. 不论统计概率还是古典概率，$P(A)=\frac{m}{n}$ 中的 m 和 n 都必须是整数，并且试验的结果只有有限多个. 如果我们将 m 和 n 的取值范围推广到实数，将试验结果推广到无限次，那将会如何呢？

如果随机试验 E 是向一个可求面积的平面有界区域 S 内随意投掷一点 M，这时 S 中的每一落点 e 是一个基本事件“M 落在 e 处”，设点落在 S 内的任何一个位置上的可能性大小均等，并且点 M 落在任何一个可求面积的区域 A（A 包含在 S 中）内的可能性大小，只与 A 的面积成正比，而与 A 的形状以及 A 在 S 内的位置无关，则称实验 E 为几何概型. 由于 S 内有无限多个点，点 M 落在 S 内任意一点处的可能性都是相同的，因而几何概型是一种具有无限、等可能性质的随机试验. 这时定义点 M 落在 A 内的概率

$$P(B)=\frac{5}{7};$$

(3) 指针不指向红色(记为事件 C)的结果有 4 个，即绿$_1$，绿$_2$，黄$_1$，黄$_2$，因此

$$P(C)=\frac{4}{7}.$$



图 25.2-2

例 3 图 25.2-2 是计算机中“扫雷”游戏的画面. 在一个有 9×9 个小方格的正方形雷区中，随机埋藏着 10 颗地雷，每个小方格内最多只能藏 1 颗地雷.

小王在游戏开始时随机地踩中一个方格，[1]踩中后出现了如图所示的情况. 我们把与标号 3 的方格相临的方格记为 A 区域（画线部分）[2]，A 区域外的部分记为 B 区域. 数字 3 表示在 A 区域中有 3 颗地雷. 那么第二步应该踩在 A 区域还是 B 区域?

分析：第二步应该怎样走取决于踩在哪部分遇到地雷的概率小，只要分别计算在两区域的任一方格内踩中地雷的概率并加以比较就可以了.

解：(1) A 区域的方格共有 8 个，标号 3 表示在这 8 个方格中有 3 个方格各藏有 1 颗地雷. 因此，踩 A 区域的任一方格，遇到地雷的概率是 $\frac{3}{8}$.

(2) B 区域中共有

$$9\times9-9=72$$

个小方格，其中有

$$10-3=7$$

个方格内各藏有 1 颗地雷. 因此，踩 B 区域的任一方格，遇到地雷的概率是 $\frac{7}{72}$.

由于 $\frac{3}{8}>\frac{7}{72}$，所以踩 A 区域遇到地雷的可能性大于踩 B 区域遇到地雷的可能性，因而第二步应该踩 B 区域.

游戏开始时，随机踩中一个小方格，如这个方格下有地雷，雷就会爆炸；如果没地雷，方格上就会出一个标号，该标号表与这个方格相临的方（绿线部分）内有与号相同个数的地雷.[3]

[1] 在游戏开始时，哪一个格子下面有雷的可能性更大是无法确定的，所以只能随机地踩下去.

[2] 在电脑上玩游戏时是不会出现这个绿线的，教科书在图中画上绿线是为了叙述方便明了.

[3] 这个小帖示可以给那些没有玩过扫雷游戏的同学更多的信息，使他们了解这个游戏的规则.

$$P(A)=\frac{A\text{ 的面积}}{S\text{ 的面积}}.$$

这个定义叫做概率的几何定义，它可以看作概率古典概率的推广，它是法国数学家布丰在其 1777 年的《随机算术实验》这篇论文中首先提出来的.

在教科书中，没有明确给出几何概率的定义，但本章的数学活动 3 事实上是一个几何概率的问题，阅读与思考“布丰投针试验”中也是几何概率问题. 教师可适当安排这方面的习题，加深学生对概率意义的理解.

6.《课程标准》在本学段不要求学生掌握概率的乘法公式（这是高中的内容），所以学生利用概率的古典定义时就只能采用列举的方式，这种方法针对的主要是试验结果不是特别多的情况，在教学过程中教师要适当把握，试验结果不要太多.

7. 古典概率适用的一个典型场合，就是以投掷骰子为代表的赌博或游戏，概率论恰是萌发

练习答案

1. 2 种，相等，

$$\frac{\text{正面向上结果数}}{\text{所有结果数}}=\frac{1}{2}.$$

2. 一样.

A，B 两区域中遇雷的概率都是$\frac{1}{8}$.

[1] 就本例题的三个问题而言，试验的最后结果与两枚硬币的顺序无关.

练习

1. 掷一枚质地均匀的硬币的试验有几种可能的结果？它们的可能性相等吗？由此怎样确定“正面向上”的概率.
2. 回顾例 3，如果小王在游戏开始时踩中的第一个格上出现了标号 1，则下一步踩在哪一区域比较安全？

例 4 掷两枚硬币，求下列事件的概率：[1]

(1) 两枚硬币全部正面朝上；

(2) 两枚硬币全部反面朝上；

(3) 一枚硬币正面朝上，一枚硬币反面朝上.

“同时掷两枚硬币”，与“先后两次掷一枚硬币”，这两种试验的所有可能结果一样吗？

解：我们把掷两枚硬币所能产生的结果全部列举出来，它们是：

正正，　正反，　反正，　反反.

所有的结果共有 4 个，并且这 4 个结果出现的可能性相等.

(1) 所有的结果中，满足两枚硬币全部正面朝上（记为事件 A）的结果只有一个，即“正正”，所以

$$P(A)=\frac{1}{4};$$

(2) 满足两枚硬币全部反面朝上（记为事件 B）的结果也只有 1 个，即“反反”，所以

$$P(B)=\frac{1}{4};$$

(3) 满足一枚硬币正面朝上，一枚硬币反面朝上（记为事件 C）的结果共有 2 个，即“反正”“正反”，所以

$$P(C)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

于这样的活动. 现在所有讲授概率论的书籍中，骰子（和硬币）都几乎是不可缺少的、最简单明了的典型事例.

8. 例 1 和例 2 从本质上说难度是一样的，两者有一定的区别在于：例 1 中每一次试验的结果是明确的，就是 1～6 中的某个数，但在例 2 中，指针指向的颜色虽然是明确的，但是指向哪块扇形却并不明确. 所以为了分析的方便，可以给同一颜色的扇形编号.

9. 在这种转盘游戏中，从表面看是扇形的面积决定了指向某个扇形的概率，但在本质上概率是由扇形所在的圆心角的度数决定的. 就像教科书中的转盘，如果转盘边缘有所损坏，指针指向某种颜色的概率是不变的.

10. 例 3 是一个以电脑中“扫雷游戏”为背景的问题，这个问题背景能够充分说明，概率在解决现实问题时决策中所起的重要作用.

11. 这个“扫雷游戏”对于经常接触电脑的

练习

盒子中装有红、绿各一个小球，随机摸出1个小球后放回，再随机摸出一个．求下列事件的概率：

(1) 第一次摸到红球，第二次摸到绿球．

(2) 两次都摸到相同颜色的小球；

(3) 两次摸到的球中有一个绿球和一个红球．

例5 同时掷两个质地均匀的骰子，计算下列事件的概率：

(1) 两个骰子的点数相同；

(2) 两个骰子点数的和是9；

(3) 至少有一个骰子的点数为2．

分析：当一次试验要涉及两个因素（例如掷两个骰子）并且可能出现的结果数目较多时，为不重不漏地列出所有可能的结果，通常采用**列表法**．我们不妨把两个骰子分别记为第1个和第2个，这样就可以用下面的方形表格列举出所有可能出现的结果．

结合表25-4，体会列表法对列举所有可能的结果所起的作用．

表25-4

第2个 \ 第1个	1	2	3	4	5	6
6	(1, 6)	(2, 6)	(3, 6)	(4, 6)	(5, 6)	(6, 6)
5	(1, 5)	(2, 5)	(3, 5)	(4, 5)	(5, 5)	(6, 5)
4	(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 4)	(5, 4)	(6, 4)
3	(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)	(5, 3)	(6, 3)
2	(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)	(5, 2)	(6, 2)
1	(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)	(5, 1)	(6, 1)

解：由表25-4可以看出，同时投掷两个骰子，可能出现的结果有36个，它们出现的可能性相等．

(1) 满足两个骰子点数相同（记为事件A）的结果有6个，即(1, 1)，(2, 2)，(3, 3)，(4, 4)，(5, 5)，(6, 6)，所以

练习答案

(1) $\frac{1}{4}$；

(2) $\frac{1}{2}$；

(3) $\frac{1}{2}$．

同学来说不会陌生．电脑中的扫雷游戏有初级、中级和高级三个级别，等级越高，雷区的面积越大，埋设的地雷也越多．教科书引用的只是初级的情形．

12. 例4中的试验结果数比较少，所以可以把所有可能的结果全部列举出来，再用古典定义求概率．

13. 同时投掷两枚硬币与先后两次投掷一枚硬币有时候是有区别的．比如在先后投掷的时候，就会这样的问题：先出现正面后出现反面的概率是多少？这与先后顺序有关．同时投掷两枚硬币时就不会出现这样的问题．

14. 例4也可以用列表的方式解决，不妨设其中一枚硬币为A，另一枚为B，则所有可能结果如表所示．

A \ B	正	反
正	正正	反正
反	正反	反反

[1] 例5中的3个问题都与试验中两步的顺序无关，因此作此改动对所得结果没有影响.

$$P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6};$$

(2) 满足两个骰子点数和为9（记为事件B）的结果有4个，即(3，6)，(4，5)，(5，4)，(6，3)，所以

$$P(B)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9};$$

(3) 满足至少有一个骰子的点数为2（记为事件C）的结果有11个，所以

$$P(C)=\frac{11}{36}.$$

思考

如果把例5中的“同时掷两个骰子”改为“把一个骰子掷两次”，所得到的结果有变化吗？[1]

本题中，A，E，I是元音字母. B，C，D，H是辅音字母.

例6 甲口袋中装有2个相同的小球，它们分别写有字母A和B；乙口袋中装有3个相同的小球，它们分别写有字母C、D和E；丙口袋中装有2个相同的小球，它们分别写有字母H和I. 从3个口袋中各随机地取出1个小球.

(1) 取出的3个小球上恰好有1个、2个和3个元音字母的概率分别是多少？

(2) 取出的3个小球上全是辅音字母的概率是多少？

分析：当一次试验要涉及3个或更多的因素（例如从3个口袋中取球）时，列方形表就不方便了，为不重不漏地列出所有可能的结果，通常采用**树形图**(tree diagram).

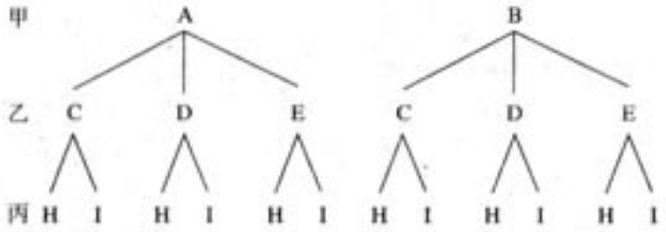
解：根据题意，我们可以画出如下的“树形图”：

15. 无论在东方还是西方，使用骰子作为赌博和娱乐工具起源都很早，直到18世纪初，纸牌才取代骰子成为主要的赌博和娱乐工具. 据记载，公元960年左右，怀特尔德大主教计算出投掷三个骰子时，不记骰子次序所能出现的不同组合数共有56种，其中，3颗全同6种，2同1异30种，3颗全异20种.

16. 表25-4实际上是第1个骰子的点数作为横坐标，第2个骰子的点数作为纵坐标，这样就组成了平面直角坐标系的第一象限的一部分. 如果在试验中包含两步，并且每一步的结果为有限多个的情形，就可以用这种列表法求概率. 即使涉及两步顺序的概率问题，这个表也好用.

17. 例6中的试验包含3步，这时用列表法已经无能为力，事实上，这时候如果用列表法的思想会得到一个三维的立体，这样的立体在二维平面上表现出来需要很强的空间想象力，所以我们不采用这种方法，转而寻求一种既能写在二维





从树形图可以看出，所有可能出现的结果共有 12 个，即：

A	A	A	A	A	A	B	B	B	B	B	B
C	C	D	D	E	E	C	C	D	D	E	E
H	I	H	I	H	I	H	I	H	I	H	I

这些结果出现的可能性相等.

(1) 只有一个元音字母的结果有 5 个，即 ACH，ADH，BCI，BDI，BEH，所以

$$P(\text{一个元音})=\frac{5}{12};$$

有两个元音字母的结果有 4 个，即 ACI，ADI，AEH，BEI，所以

$$P(\text{两个元音})=\frac{4}{12}=\frac{1}{3};$$

全部为元音字母的结果只有 1 个，即 AEI，所以

$$P(\text{三个元音})=\frac{1}{12}.$$

(2) 全是辅音字母的结果共有 2 个：BCH，BDH，所以

$$P(\text{三个辅音})=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}.$$

用树形图列举出的结果看起来一目了然，当事件要经过多次步骤 (三步以上) 完成时，用这种“树形图”的方法求事件的概率很有效.

思考

想一想，什么时候使用“列表法”方便，什么时候使用“树形图法”方便？[1]

[1] 当试验包含两步时，列表法比较方便，当然此时也可用树形图法. 当试验在三步或三步以上时用树形图法方便，此时，难以列表.

平面上又能把三步试验清晰地呈现出来的方法.

18. 树形图是一种很好的解决多步试验问题的方法，尤其在解决 3 步以上问题时，这种方法比列表法更优越. 从理论上说，该方法可以应付很多步的试验. 教学中应该注意的是，学生在高中学段还要学习概率乘法，所以教科书中没有出现超过 3 步试验的问题，教师也无须提出超过 3 步试验的问题.

19. 以例 6 为例，在应用树形图时，通常采取如下的步骤：

第一步可能产生的结果为 A 和 B，两者出现的可能性相同且不分先后，写在第一行.

第二步可能产生的结果有 C、D 和 E，三者出现的可能性相同且不分先后，从 A 和 B 分别画出三个分支，在分支下的第二行分别写上 C、D 和 E.

第三步可能产生的结果有两个 H 和 I，两者出现的可能性相同且不分先后，从 C、D 和 E 分

练习答案

1. $\frac{7}{18}$.

2. (1) $\frac{1}{27}$;

(2) $\frac{1}{9}$;

(3) $\frac{7}{27}$.

练习

1. 在6张卡片上分别写有1～6的整数. 随机地抽取一张后放回，再随机地抽取一张. 那么第二次取出的数字能够整除第一次取出的数字的概率是多少?

2. 经过某十字路口的汽车，它可能继续直行，也可能向左转或向右转，如果这三种可能性大小相同. 三辆汽车经过这个十字路口，求下列事件的概率：

(1) 三辆车全部继续直行；

(2) 两辆车向右转，一辆车向左转；

(3) 至少有两辆车向左转.

习题 25.2

复习巩固 ▶▶

1. 把一副普通扑克牌中的13张黑桃牌洗匀后正面向下放在桌子上，从中任意抽取一张，求下列事件发生的概率;[1]

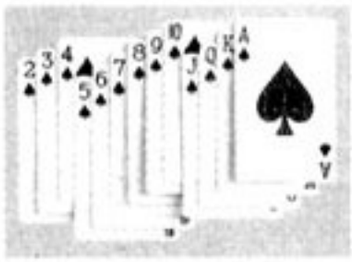
(1) 抽出的牌的点数是6；

(2) 抽出的牌的点数是10；

(3) 抽出的牌带有人像；

(4) 抽出的牌点数小于5；

(5) 抽出的牌的花色是黑桃.

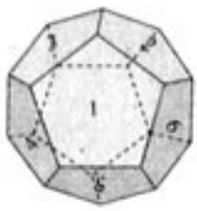


(第1题)

2. 有一个正12面体，[2] 12个面上分别写有1～12这12个整数. 投掷这个正12面体一次，求下列事件的概率：

(1) 向上一面的数字是2或3；

(2) 向上一面的数字是2的倍数或3的倍数.



(第2题)

3. 在一个口袋中有4个完全相同的小球，把它们分别标号为1、2、3、4，随机地摸取一个小球然后放回，再随机地摸出一个小球. 求下列事件的概率：

(1) 两次取的小球的标号相同；

(2) 两次取的小球的标号的和等于4.

[1] 注意13张牌分别对应1～13的点数.

[2] 只有正多面体才能制成骰子，因为只有这些正多面体才具有对称性，才能使得每一个面向上出现是等可能的. 正多面体只有5种：正四、六、八、十二、二十面体.

别画出两个分支，在分支下的第三行分别写上H和I.

如果有更多的步骤可依上继续，最后，在树形图下面对应着写出所有可能的结果.

习题 25.2

1. “复习巩固”的第1、2题是基本的概率计算题，直接利用概率的古典定义即可求出.

第3题用列表法最为简洁，可以很方便地做出答案.

2. “综合运用”中的前两题都是难度不大的两步实验题. 第4题可以根据题图分析得出结果为$\frac{1}{3}$.

第5题可像例5一样列表如下（B代表白，H代表黄）：

综合运用 ▸▸

4. 一只蚂蚁在如图所示的树枝上寻觅食物，假定蚂蚁在每个岔路口都会随机地选择一条路径，它获得食物的概率是多少？



（第 4 题）

5. 第一盒乒乓球中有 4 个白球 2 个黄球，第二盒乒乓球中有 3 个白球 3 个黄球，分别从每个盒中随机地取出 1 个球，求下列事件的概率：
   (1) 取出的两个球都是黄球；
   (2) 取出的两个球中有一个白球一个黄球.

6. 假定鸟卵孵化后，雏鸟为雌与为雄的概率相同. 如果三枚卵全部成功孵化，则三只雏鸟中恰有两只雄鸟的概率是多少？

拓广探索 ▸▸

7. 有两把不同的锁和三把钥匙，其中两把钥匙恰好分别能打开这两把锁，第三把钥匙不能打开这两把锁. 任意取出一把钥匙去开任意的一把锁，一次打开锁的概率是多少？

8. 如图所示的两张图片形状完全相同，把两张图片全部从中间剪断，再把 4 张形状相同的小图片混合在一起. 从 4 张图片中随机地摸取一张，接着再随机地摸取一张. 则两张小图片恰好合成一张完整图片的概率是多少？


（第 8 题）

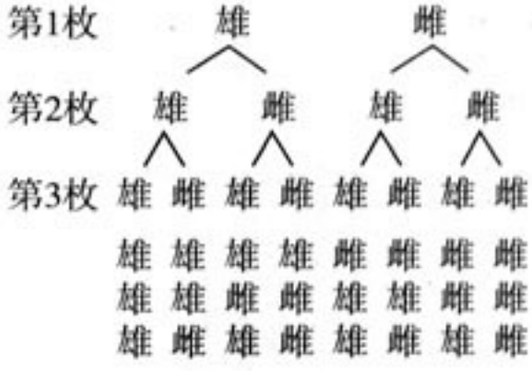
9. 在围棋盒中有 x 颗黑色棋子和 y 颗白色棋子，从盒中随机地取出一个棋子，如果它是黑色棋子的概率是 $\frac{3}{8}$，写出表示 x 和 y 关系的表达式. 如果往盒中再放进 10 颗黑色棋子，则取得黑色棋子的概率变为 $\frac{1}{2}$，求 x 和 y 的值.



[1] 有两只与恰有两只不同，有两只是有两只或两只以上.

第二盒 \ 第一盒	B	B	B	B	H	H
B	B B	B B	B B	B B	H B	H B
B	B B	B B	B B	B B	H B	H B
B	B B	B B	B B	B B	H B	H B
H	B H	B H	B H	B H	H H	H H
H	B H	B H	B H	B H	H H	H H
H	B H	B H	B H	B H	H H	H H

第 6 题是一个 3 步实验题，可画树形图如下：



概率与中奖

同学们，你们都知道彩票吧，我们不是常常看见彩票摇奖的电视画面吗！现在请同学们思考一下，如果某一彩票的中奖概率是$\frac{1}{1\,000}$，那么买1 000张彩票就一定能够中奖吗？有的同学可能认为，中奖概率为$\frac{1}{1\,000}$，当然买1 000张彩票一定能中奖，事实并非如此．我们不妨举个可能的情况：如果发行的1 000万张彩票中有1万张能够中奖，就是说中奖率是$\frac{1}{1\,000}$，那么即使买1 000张彩票，这1 000张彩票也可能全部来自那些不能中奖的999万张彩票．

事实上，买1 000张彩票相当于做1 000次试验，可能1 000张彩票中一张中奖的也没有，也可能有一张中奖，也可能有两张中奖……通过计算可以得知，1 000张彩票中至少有一张彩票中奖的概率约为0.632 3，一张中奖的也没有的概率近似为0.367 7．

为了发展公益事业，我国发行了多种彩票，有些彩票的最高奖高达数百万元，但是，在有限的几次试验中中最高奖这种事件几乎是不可能发生的．买一张彩票就能中最高奖的概率近似为0．我们通常把这种几乎不可能的事件称为小概率事件．

尽管中最高奖的概率微乎其微，但有一点是肯定的，买的彩票越多则中奖的机会就越大．这时，有些同学可能会问，如果把发行的所有彩票全部买断不就能保证肯定中奖了吗？是的，在这种情况下，当然可以保证中奖，但是买断所有的彩票需要的资金要远远超过中奖获得的奖金．

我们在买彩票的时候一定要怀着造福社会奉献爱心的态度，中奖当然是好事，不中也应该泰然处之．

3．“拓广探索”中的3道题有一定难度，考查学生灵活运用知识的能力．

第7题不妨用A和B分别代表两把锁，相应地，三把钥匙分别用a、b和c来表示，则可列表如下：

	a	b	c
A	A a	A b	A c
B	B a	B b	B c

则可见一次打开锁的概率为$\frac{1}{3}$．

第8题是一个两步试验题，但必须注意的是，第二步是不放回取样．不妨用A和a、B和b表示两副图，则可列树形图．

一次合成完整图片的概率为$\frac{1}{3}$．

25.3 利用频率估计概率

当试验的可能结果有限多并且各种结果发生的可能性相等时，我们可以用 $P(A)=\frac{m}{n}$ 的方式得出概率.

当试验的所有可能结果不是有限个，或各种可能结果发生的可能性不相等时，我们一般还要通过统计频率来估计概率.

在同样条件下，大量重复试验时，根据一个随机事件发生的频率所逐渐稳定到的常数，[1] 可以估计这个事件发生的概率.



由频率可以估计概率是由瑞士数学家雅各布·伯努利（1654—1705）最早阐明的，因而他被公认为是概率论的先驱之一.

考虑下面的问题：

问题 1 某林业部门要考查某种幼树在一定条件的移植成活率，应采用什么具体做法？

幼树移植成活率是实际问题中的一种概率. 这个实际问题中的移植试验不属于各种结果可能性相等的类型，所以成活率要由频率去估计.



在同样条件下，大量地对这种幼树进行移植，并统计成活情况，计算成活的频率. 如果随着移植棵数 n 的越来越大，频率 $\frac{m}{n}$ 越来越稳定于某个常数，那么这个常数就可以被当作成活率的近似值.

表 25-5 是一张模拟的统计表，请补出表中的空缺，并完成表后的填空.

[1] 这个规律称为频率稳定性定理.



阅读与思考

通过本文使学生对小概率事件与中奖的关系有一定的了解，进而促使学生对购买彩票持正确的态度，不要以功利的心态而是以一种为社会献爱心的心态对待彩票.

1. 在第 25.1 节，教科书给出了概率的统计学定义，在第 25.2 节学习了古典概率，在本节将研究如何用统计概率求一些现实生活中的概率问题，这些概率都是不能用古典概率来解决的. 此外，还要学习什么是模拟试验以及如何设计模拟试验.

[1] 表中横线上的空白处依次填 0.940；0.923；0.883；0.905；0.897.

[2] 0.9，这个值可根据表中的频率的稳定趋势判断.

表 25-5 [1]

移植总数（n）	成活数（m）	成活的频率$\left(\frac{m}{n}\right)$
10	8	0.80
50	47	_____
270	235	0.871
400	369	_____
750	662	_____
1 500	1 335	0.890
3 500	3 203	0.915
7 000	6 335	_____
9 000	8 073	_____
14 000	12 628	0.902

从表 25-5 可以发现，幼树移植成活的频率在_____左右摆动，并且随着统计数据的增加，这种规律愈加明显，所以估计幼树移植成活的概率为_____.[2]

问题 2 某水果公司以 2 元/千克的成本新进了 10 000 千克柑橘，如果公司希望这些柑橘能够获得利润5 000 元，那么在出售柑橘（已去掉损坏的柑橘）时，每千克大约定价为多少元比较合适？

柑橘在运输中会有些损坏，公司必须估算出可能损坏的柑橘总数，以便将损坏的柑橘的成本折算到没有损坏的柑橘的售价中.

销售人员首先从所有的柑橘中随机地抽取若干柑橘，进行了“柑橘损坏率”统计，并把获得的数据记录在表 25-6 中. 请你帮忙完成此表.

表 25-6

柑橘总质量(n)/千克	损坏柑橘质量(m)/千克	柑橘损坏的频率$\left(\frac{m}{n}\right)$
50	5.50	0.110
100	10.50	0.105
150	15.15	_____
200	19.42	_____

2. 人们在长期的实践中发现，在随机试验中，由于众多微小的偶然因素的影响，每次测得的结果虽不尽相同（具有偶然性），但大量重复试验所得结果却能反映客观规律. 这称为大数法则，亦称大数定律.

3. 历史上最早给提出大数定律思想的是意大利数学家卡尔达诺（Cardano，1501—1576），他在 1663 年的《论赌博》一书中曾断言，在抛掷硬币的试验中，每次出现正面或反面虽属偶然，但在大量重复试验时，出现正面的频率却必然地接近于定数 0.5.

4. 雅各布·伯努利在其 1713 年的著作《猜度术》中首次提出大数定律的一个定理——伯努利定理（频率稳定性定理），并给出了证明. 布丰在其 1760 年的著作《或然算术实验》中，做了大量试验，验证了大数定律.

5. 问题 1 是一个确定某种树木移植成活率的问题，事实上，这是一个概率问题，但无法用

续表 [1]

柑橘总质量(n)/千克	损坏柑橘质量(m)/千克	柑橘损坏的频率$\left(\frac{m}{n}\right)$
250	24.25	
300	30.93	
350	35.32	
400	39.24	
450	44.57	
500	51.54	



填完表后，如果从表 25-6 可以看出，柑橘损坏的频率在某个常数（例如 0.1）左右摆动，并且随统计量的增加这种规律逐渐明显，那么可以把柑橘损坏的概率估计为这个常数. 如果估计这个概率为 0.1，则柑橘完好的概率为 0.9.

根据估计的概率可以知道，在 10 000 千克柑橘中完好柑橘的质量为 $10\,000\times0.9=9\,000$ 千克，完好柑橘的实际成本为

$$\frac{2\times10\,000}{9\,000}=\frac{2}{0.9}\approx2.22\text{（元/千克）}.$$

设每千克柑橘的销价为 x 元，则应有

$$(x-2.22)\times9\,000=5\,000.$$

解得 $x\approx2.8$.

因此，出售柑橘时每千克大约定价为 2.8 元可获利润5 000元.

思考

为简单起见，我们能否直接把表 25-6 中 500 千克柑橘对应的柑橘损坏的频率看作柑橘损坏的概率？[2]

[1] 表中横线上空白处依次填：0.097，0.103，0.101，0.098，0.099，0.103.

[2] 可以.

概率的古典定义获得，只能通过做大量重复实验；用频率估计概率. 这个问题是为了培养学生根据频率的稳定性估计概率的能力.

6. 问题 2 首先要估计出柑橘的损坏率，这与问题 1 的要求相同，此外还要求根据柑橘损坏率及希望获得的利润来确定柑橘的销售价格. 设置这个问题的目的在于让学生感受到概率在问题决策中的重要作用. 培养学生学数学用数学的精神.

7. 当大量重复试验时，事件发生的频率在某个固定的数值左右摆动，并且摆动的幅度越来越小，根据这个频率稳定性定理，可以用频率的集中趋势估计概率. 从表 25-5 和表 25-6 可以看出，用频率的集中趋势来估计概率劳动量是比较大的，为了简化计算过程，在要求精度不是很高的情况下，不妨用两表中最后一行数据中的频率来近似地代替概率.

8. 在做大量重复试验时，可事先根据概率

[1] 注意：可重复抽取与不能重复抽取产生的结果是迥然不同的.

问题 3 一个学习小组有 6 名男生 3 名女生. 老师要从小组的学生中先后随机地抽取 3 人参加几项测试，并且每名学生都可被重复抽取.[1] 你能设计一种试验来估计“被抽取的 3 人中有 2 名男生 1 名女生”的概率吗?

为了使估计的结果尽可能精确，我们要做尽可能多的重复试验. 但是如果按照实际情况的要求由 9 名同学充当试验对象，则试验进行起来就会既费时又费力，那么我们能否用一种简便的方法进行这个试验呢?

我们不妨取 9 张形状完全相同的卡片，在 6 张卡片上分别写上 1～6 的整数表示男生，在其余的 3 张卡上分别写上 7～9 的整数表示女生，把 9 张卡片混合起来并洗均匀.

从卡片中随机抽取 1 张放回，再抽取 1 张放回，然后第三次抽取 1 张，并记录抽取的结果. 经重复大量试验，就能够计算相关频率，估计出三人中两男一女的概率.

这种方法是用摸取卡片代替了实际的抽取学生，这样的实验称为模拟实验. 你认为上述的模拟实验有道理吗?

当我们抽取一张卡片时，1～9 的某个数字会随机地出现，大量重复实验就会产生一串数，这样的一串数称为“随机数”.



用计算器也能产生你指定的两个整数之间（包括这两个整数）的随机整数. 例如，要产生 1 到 9 之间的随机整数，要先使计算器进入产生随机数的模式（参阅计算器使用说明书）；再输入需要产生随机数的范围（1～9）；反复按动有关键，计算器就可以不断产生所需随机数.

计算器产生的随机数是用数学方法得到的一串数，

要达到的精度来确定数据表中频率保留的数位，比如在问题 1 和问题 2 中，我们要求的概率精度达到一位小数就可以了，根据这个要求，我们在计算频率时可以保留两位或三位小数. 通常我们们用频率估计出来的概率要比数据表中的频率保留的数位要少.

9. 问题 3 用古典概率是可以计算出来的，但现学段的学生因为知识不足尚不能用古典概率来计算，这样就需要大量重复试验来解决. 但是如果使用真正的问题背景，即由学生充当试验对象，则试验进行起来不方便. 正是为了采取一种相对简化的方法来解决这种求概率的问题，产生了模拟试验.

10. 教科书在问题 3 中给出了模拟试验的一个事例，并没有给出问题 3 的确切结果，这是为了使学生感受模拟试验的合理性，事实上，即使是这样的模拟试验真正做起来也是需要大量的时间和气力的. 所以，在本学段不要求学生真正地

它们具有类似随机数的性质，实际上，骰子就是一种最早的能够产生 1～6 这六个随机数的“机器”.

在由频率估计概率的模拟试验中，计算机具有更大的优越性. 产生随机数后，要得出相应频率仍需大量计算. 而计算机可以按设定程序自行产生随机数并自行统计计算.[1]

练习

某农科所在相同条件下做了某作物种子发芽率的试验，结果如下表所示：

种子个数	发芽种子个数	发芽种子频率
100	94	
200	187	
300	282	
400	338	
500	435	
600	530	
700	624	
800	718	
900	814	
1000	981	

一般地，1 000 千克种子中大约有多少是不能发芽的？

[1] 计算机产生的随机数还不是完全意义上的随机数.

练习答案

0.940，0.935，0.940，0.845，0.870，0.883，0.891，0.898，0.904，0.981.

发芽概率估计为 0.9，1 000 千克种子中大约有 100 千克不能发芽.

进行模拟试验（简单的除外），只要学生能够根据概率问题的实际背景设计出合理的模拟试验就可以了，不要求获得真正的结果.

11. 教科书引进了“随机数”概念，并介绍了用计算器生成随机数的方法，有些学生可能感觉疑惑，随机数有什么用呢？下面就是应用随机数的实例.

英文书面语言的一个重要特征就是单个的字母不是以同样的频率出现的. 例如，在通常的英文文章中，出现字母“E”的概率为 10.5%，而出现“T”的概率为 7.1%，而“Z”出现的概率远小于 1%. 通过对用密码写的电文中字母出现频率的分析，很容易来破译普通的密码. 出现概率最高的字母大概表示“E”，出现最小的字母大概是“Z”，等等.

现代保密系统采用了能确保每个字母出现在密码中的概率都相等的技术. 一种理论上不可破译的密码是（用后即销毁的）“一次性密码本”.

习题 25.3

复习巩固 ▸▸

1. 在做重复试验时，随着试验次数的增多，事件发生的频率一般会有什么变化趋势？

2. 从一定高度落下的图钉，落地后可能图钉尖着地，也可能图钉尖不着地. 估计一下哪种事件的概率更大. 与同学们合作，通过做试验来验证一下你事先的估计是否正确.



（第 2 题）

综合运用 ▸▸

3. 投针实验

(1) 在一个平面上画一组间距为 $d=4$ cm 的平行线，将一根长度为 $l=3$ cm 的针任意投掷在这个平面上，针可能与某一直线相交，也可能与任一直线都不相交. 根据记录在下表中的投针试验数据，估计针与任一直线相交的概率.



（第 3 题）

实验次数 n	25	50	75	100	125	150	175	200	225	250	…
相交频数 m											…
相交频率 $\frac{m}{n}$											…

(2) 在投针试验中，如果间距 $d=4$ cm、针长 $l=3$ cm 时针与任一直线相交的概率为 p，则当 d 不变 l 减小时概率 p 会如何变化？当 l 不变 d 减小时概率 p 会如何变化？（在试验中始终保持 $l<d$）

4. 为了估计水塘中的鱼数，养鱼者首先从鱼塘中捕获 n 条鱼，在每一条鱼身上做好记号后把这些鱼放归鱼塘. 再从鱼塘中打捞 a 条鱼，如果在这 a 条鱼中有 b 条鱼是有记号的，则鱼塘中鱼的条数可估计为 $\frac{an}{b}$. 你认为这种估计方法有道理吗？为什么？



这种密码本是一长串的随机数，每个都在 1 和 26 之间.

这样的一种密码本可能是从以下数开始的：19，7，12，1，3，8，…，如“ELEVEN”这个词，你用按字母排列的 E 后面第 19 个字母表示 E，而用 L 后面第 7 个字母表示 L，等等. 这样，ELEVEN 就变成了 XSQWHV. 注意，尽管字母“E”在“明码电文”中出现了 3 次，但是在“密码电文”XSQWHV 中却被三个不同的字母替换了.

习题 25.3

1. 第 1 题考查学生对频率稳定性的认识. 第 2 题需要学生亲手做试验来解决.

2. 投针试验的背景可让学生参考本习题后“阅读与思考”栏目中的短文“布丰投针试验”. 在投针试验中，针与线相交的概率 p 只与针长 l 和线距 d 有关. 从直觉上可知，当 d 不变时，显

拓广探索 ▶▶

5. 动物学家通过大量的调查估计出，某种动物活到 20 岁的概率为 0.8，活到 25 岁的概率为 0.5，活到 30 岁的概率是 0.3.[1] 现年 20 岁的这种动物活到 25 岁的概率为多少？现年 25 岁的这种动物活到 30 岁的概率为多少？

6. 请你设计一个模拟试验，估计一下任意 5 个人中有两个人所属生肖相同的概率（不必求出最终结果）.[2]



阅读与思考 选学

布丰投针试验



布丰

18 世纪，法国数学家布丰和勒可莱尔提出的“投针问题”，记载于布丰 1777 年出版的著作中：“在平面上画有一组间距为 d 的平行线，将一根长度为 l（$l<d$）的针任意投掷在这个平面上，求此针与平行线中任一条相交的概率.”布丰本人证明了，这个概率为

$$p=\frac{2l}{\pi d}.$$

利用这个公式，可以用概率的方法得到圆周率 π 的近似值. 具体做法是，将这一试验重复进行多次，并记下相交的频数，从而得到 p 的经验值，代入上面的概率公式，由 p，d，l 即可算出 π 的近似值. 下表是有关投针试验的一些资料，其中意大利人拉泽里尼在 1901 年得到的 π 的近似值最接近 π 的准确值.

实验者	年代	投掷次数	相交次数	π 的估计值
沃尔夫	1850	5 000	2 531	3.159 6
史密斯	1855	3 204	1 218.5	3.155 4
德摩根	1860	600	382.5	3.137
福克斯	1884	1 030	489	3.159 5
拉泽里尼	1901	3 408	1 808	3.141 592 9

[1] 此句话的含义为：从出生活到 20 岁的概率为 0.8；从出生活到 25 岁的概率为 0.5；从出生活到 30 岁的概率为 0.3.

而不能作如下理解：从出生活到 20 岁的概率为 0.8；从 20 岁活到 25 岁的概率为 0.5；从 25 岁活到 30 岁的概率为 0.3.

这个问题意在考察学生对用频率估计概率的内涵的理解.

[2] 此题意在考察学生对模拟试验的理解、掌握与活学活用. 不必求出最后的精确值. 因为这个试验做起来是非常费时费力的.

有两个即两个或两个以上.

然 l 越长（短），p 越大（小）；当 l 不变时，显然 d 越长（短），p 越小（大）.

3. 第 4 题中的方法合理. 不妨设水塘中共有鱼 x 条，则根据题意可列方程：

$$\frac{n}{x}=\frac{b}{a},$$

解得

$$x=\frac{an}{b}.$$

4. 第 5 题有一定难度，需要学生对用频率估计概率有更深层次的理解.

根据题意，不妨设刚出生时共有这种动物 a 只，则 20 年后存活的还有 $0.8a$ 只，又过了 5 年还存活 $0.5a$ 只，再过 5 年还剩 $0.3a$ 只存活.

因此，现年 20 岁的这种动物活到 25 岁的概率为 $\frac{0.5a}{0.8a}=\frac{5}{8}$，从 25 岁活到 30 岁的概率为 $\frac{0.3a}{0.5a}=\frac{3}{5}$.

[1] 蒙特卡罗是美国的一个城市名.

蒙特卡罗方法，又称随机抽样或统计试验方法，属于计算数学的一个分支，它是在20世纪40年代中期为了适应当时原子能事业的发展而发展起来的.

传统的经验方法由于不能逼近真实的物理过程，很难得到满意的结果，而蒙特卡罗方法由于能够真实地模拟实际物理过程，故解决问题与实际非常符合，可以得到很圆满的结果. 这也是采用这种方法的原因.

蒙特卡罗方法的基本原理及思想如下：

当所要求解的问题是某种事件出现的概率，或者是某个随机变量的期望值时，它们可以通过某种“试验”的方法，得到这种事件出现的频率，或者这个随机变数的平均值，并用它们作为问题的解. 这就是蒙特卡罗方法的基本思想.

赖纳	1925	2 520	859	3.179 5

布丰投针试验是第一个用几何形式表达概率问题的例子，它首次使用随机试验处理确定性数学问题，为概率论的发展起到了一定的推动作用. 这个试验还为人们提供了一个史无前例的计算圆周率π的方法.

像投针试验一样，用通过概率试验所求的概率来估计我们感兴趣的一个量（如π），这样的方法称为蒙特卡罗方法[1] (Monte Carlo method). 蒙特卡罗方法是在第二次世界大战期间随着计算机的诞生而兴起和发展起来的. 这种方法在应用物理、原子能、固体物理、化学、生物、生态学、社会学以及经济行为等领域中得到广泛的应用.

5. 第6题是一个设计模拟试验的问题，可参考问题3解决. 尽管我们周围的人很多，但是生肖却只有12个，因此不妨取12个形状完全相同的卡片，相应地把12个生肖的名字分别写在12个卡片上，然后取出一个，放回，再取，再放回……取5次作为一次试验，如果这5次取出的卡片上有两个或两个数字相同以上，则记频数1次.

阅读与思考

1. 法国数学家布丰（Buffon，1707—1788）在数学上以设计“布丰投针问题”而著称，这个设计发表于《随机算术实验》（1777）中. 其中首先提出并解决下列问题：把一个小薄圆片随机地投入被分为若干个小正方形的区域中，求使小圆片完全落入某一个小正方形内的概率是多少？接着讨论投掷正方形薄片和针形物时相应的概率，这些问题都被称为“布丰问题”，由于投针

25.4 课题学习　键盘上字母的排列规律

生活中许多问题都与概率有密切的关系，下面我们通过对计算机或打字机的键盘上英文字母的排列规律的研究，体会概率的广泛应用.

问题 1　计算机或打字机的键盘上英文字母是如何排列的？是按照字母表顺序从 A，B 依次排列一直到 Z 吗？

为回答这个问题，让我们去观察实际的键盘. 可以发现，键盘一般是按照如图 25.4-1 的方式排列英文字母的，并不是按照字母表顺序.



图 25.4-1

问题 2　为什么键盘上的字母不按照字母表的顺序排列呢？如果那样排列不是更便于记忆各字母的位置吗？

为回答这个问题，我们会想到字母的主要作用是用于书面表达. 英文有 26 个字母，在通常的书面表达中，这些字母一样重要吗？由此我们容易想到下面的问题.

问题 3　在通常的英文书面表达中，各个字母出现的概率各是多少？哪些字母出现的概率较大？

为回答这个问题，请同学们采用合作学习的形式，

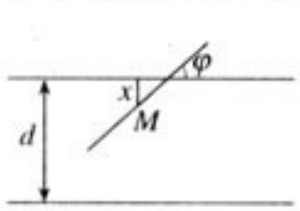
问题的结果可以用来计算圆周率 π 的近似值，故特别受到重视，成为几何概率的典型例子.

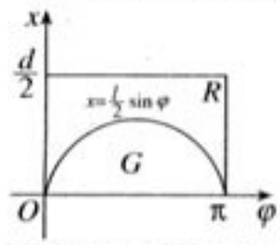
2. 推导过程：

以 M 表示落下后针的中点，x 表示 M 与最近一条平行线的距离，φ 表示针与此线的交角（如图），易见 $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$，$0\leqslant\varphi\leqslant\pi$. 此二式决定 $x\varphi$ 平面上一矩形 R，其次，针与一平行线相交的充要条件是

$$x\leqslant\frac{l}{2}\sin\varphi,$$

这个不等式确定了 R 中的一个子集 G（如下图）.





因此，这个问题等价于向 R 中随机地掷点而求点落于 G 中的概率. 由几何概率定义得

[1] 取教科书的一部分即可.

[2] 字母 E.

[3] 给出小贴示为学生对字母排序提供参考.

适当分工，对英语教科书[1]进行统计，计算各字母在书中出现的频率（书中所有字母出现的总次数为 n，某个字母出现的次数为 m，则 $\frac{m}{n}$ 为这个字母在书中出现的频率），并由频率估计这些字母出现的概率各是多少. 你们发现哪个字母的出现概率最大?[2]

为回答上面的问题，很多人曾进行了大量的统计调查. 人们发现在英文的书面表达中，各字母出现的频率具有一定的稳定性，表 25-7 是一份有关这些频率的统计表.

表 25-7

字母	A	B	C	D	E	F	G	H	I
频率	0.063	0.010 5	0.023	0.035	0.105	0.022 1	0.011	0.047	0.054
字母	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
频率	0.001	0.003	0.029	0.021	0.059	0.064 4	0.017 5	0.001	0.053
字母	S	T	U	V	W	X	Y	Z	空格
频率	0.052	0.071	0.021 5	0.008	0.012	0.002	0.012	0.001	0.2

请根据上表把这些字母和空格键按出现频率由大到小列出.

从这些统计结果你能估计出各字母及空格的使用概率的大小顺序了吗? 这与前面你们自己统计后得出的结论一致吗?

请你根据以上统计说明“空格”键为什么设计在键盘的下方中央的位置.

设计键盘时，既要考虑手指打字的一般规律，又要考虑各个键的使用概率的大小，由于“空格”键的使用概率最大，所以将这个键设计得最大，并且放在

你写出的顺序是下面这样吗?[3]

空格，E，T，O，A，N，I，R，S，H，D，L，C，F，U，M，P，Y，W，G，B，V，K，X，J，Q，Z.

$$P(\text{针与线相交})=\frac{G\text{ 的面积}}{R\text{ 的面积}}$$

$$=\frac{\int_0^{\pi}\frac{l}{2}\sin\varphi d\varphi}{\frac{d}{2}\cdot\pi}=\frac{2l}{\pi d}.$$

1. 本章的“课题学习”具有一定的综合性和活动性. “键盘上字母的排列规律”这个主题与实际联系紧密，是学生熟悉和感兴趣的. 在学习本节之前，也许很少有学生提到本节中的问题，学习本课题学习之后，学生对概率与现实应用的关系是如此紧密，一定会感到非常惊讶.

2. 本章的课题学习是本套教科书“统计概率”部分最后的课题学习，要求学生以小组合作的方式，综合运用所学的统计与概率的知识和方法进行统计调查活动，经历收集、整理、描述和分析数据得出结论的过程. 使学生对概率在现实中的应用有了进一步的认识.

3. 问题 1 和问题 2 用来引出本课题学习的



最便于使用的位置，这样它就被放在键盘的下方中央. 其他字母键也按其使用概率的大小，配合手指在键盘上的操作规律，被放在通常操作中它们应在的位置，设计者认为这对多数人是最合理的. 于是，键盘就设计成图 25.4-1 的样子. 你如果希望进一步了解这方面的内容，可以继续请教熟悉这方面知识的人.

只要我们留心身边的事物，一定能发现很多与概率有关的问题，例如不同汉字的使用概率问题等. 在计算机上使用汉语拼音输入法时，输入同样的拼音，会显示一系列同音的汉字. 例如输入 tian，会显示“1：天 2：田 3：添 4：填 5：甜……”. 这些同音字的排列顺序是根据什么道理呢？这与汉字的使用概率有关吗？[1]

请对上面的问题进行分析，并通过统计方法加以检验.

通过对本节的学习你有什么收获？请写出心得体会并和同学们进行交流.

[1] 这些汉字的使用概率从前往后顺次降低.

主要内容.

4. 在回答问题 3 时，首先将英语教科书（或其一部分）分成几份，然后把全班同学分成几个小组分别进行教科书的统计调查活动：记录自己负责的部分各字母的出现频率，根据本组所得数据推测各字母的使用概率. 完成这个统计活动要用到本章所学的用频率估计概率的知识.

5. 为了使课堂更加丰富多彩，除了本课题学习中的“键盘上字母的排列规律”，教师在教学中应努力查阅一些其他资料，尽可能收集一些现实生活中与概率应用有密切关系的素材，使学生进一步了解概率与生活的紧密联系.

6. 让学生撰写一个课题学习报告，可以不拘形式，谈谈自己的收获，写出心得体会与同学交流. 鼓励学生进一步查找现实生活中应用概率的事例.

[1] 查找本地一周的报纸即可.

[2] 区域 A 和 B 都是环形，区域 C 是圆形.

[3] $P(A)=\dfrac{\pi 2^2}{\pi 6^2}=\dfrac{1}{9}$.

数学活动

活动 1

(1) 统计本周每天本地的实际降水情况，作出相应记录；

(2) 查阅本周每天本地天气预报的资料，对所报降水概率作出记录；

(3) 对比两个记录[1]，天气预报中降水概率较大的日子确实降水了吗？有没有例外的情形发生？怎样认识这种例外的存在？

活动 2



在如图所示的图形中随机地撒一把豆子，计算落在 A，B，C 三个区域中的豆子数的比. 多次重复这个试验，你能否发现上述比与 A，B，C 的面积有什么关系？[2] 把“在图形中随机撒豆子”作为试验，把“豆子落在 C 中”记作事件 A，估计 A 的概率 $P(A)$ 的值.[3]

168 第二十五章 概率初步

1. 本章的“数学活动”安排了三个小活动. 这些活动都没有现成的原始数据，需要学生自己首先从事收集数据的活动，然后对数据进行处理，最后应用本章所学的概率知识分析这些数据. 这几个活动都有较强的实践性和综合性.

2. 现在广播中的天气预报大多以概率的形式来预报降水的可能性，这个活动的目的就是让学生对天气预报的准确率做一下调查，使学生进一步感受偶然事件中蕴涵确定的规律性，而确定的规律中存在于大量偶然事件之中，偶然与必然是辩证统一的.

3. 活动 2 中蕴涵了一个几何概率问题. 豆子落在区域 C 中的概率就是区域 C 的面积与大圆的面积之比.

4. 活动 3 实际上是让学生根据问题背景设计一个模拟试验.

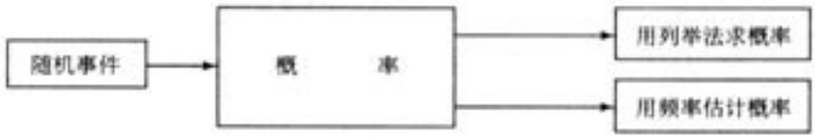
活动 3

有 4 名男同学和 2 名女同学，老师要随机地、两两一对地为他们排座位，用计算器产生随机数的方法进行模拟试验，估计这两名女同学排在一起的概率.



小　结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

1. 请举例说明什么是随机事件.
2. 事件发生的概率与事件发生的频率有什么联系和区别?
3. 在什么条件下适合用 $P(A)=\frac{m}{n}$ 得到事件的概率?
4. 如何用列举法求概率?
5. 简单叙述用频率估计概率的一般做法.
6. 结合本章内容，体会概率的意义及其在实践中的作用.

1. “本章知识结构图”展示出了本章知识的内在结构，教学时可以以这个结构图为线索对本章内容进行小结.

2. 在“回顾与思考”中，教科书以问题形式梳理了本章的主要内容：随机事件，概率的统计定义与古典定义，列举法，概率在实践中的作用. “回顾与思考”中有一点是最重要的，就是对概率定义的理解，本章内容的复习，应该围绕对概率定义的理解展开.

教学时，可结合一些具体的实例，使学生在解决问题的过程中复习本章知识.

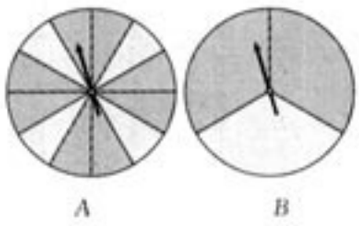
复习题 25

复习巩固 ▸▸

1. 在单词 Probability（概率）中任意选择一个字母，求下列事件的概率：
   (1) 字母为“b”；
   (2) 字母为“i”；
   (3) 字母为“元音”字母；
   (4) 字母为“辅音”字母.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 两个全等的转盘 A 和 B，A 盘被平均分为 12 份，颜色顺次为红、绿、蓝. B 盘被平均分为红、绿和蓝 3 份. 分别自由转动 A 盘和 B 盘，那么，A 盘停止时指针指向红色的概率与 B 盘停止时指针指向红色的概率哪个大，为什么？
3. 从一副扑克牌中任意抽取一张. (1) 它是王牌的概率是多少？(2) 它是 Q 的概率是多少？(3) 它是草花的概率是多少？
4. 一天晚上小伟帮助妈妈清洗两个只有颜色不同的有盖茶杯，此时突然停电了，小伟只好把杯盖和茶杯随机地搭配在一起，求颜色搭配正确和颜色搭配错误的概率各是多少.

综合运用 ▸▸

5. 同时投掷两个骰子，求点数的和小于 5 的概率.
6. 一个批发商从某服装制造公司购进了 50 包型号为 L 的衬衫，由于包装工人的疏忽，在包裹中混进了型号为 M 的衬衫，每一包中混入的 M 号衬衫数见下表：



M 号衬衫数	0	1	4	5	7	9	10	11
包　数	7	3	10	15	5	4	3	3

复习题 25

1. “复习巩固”的前 4 个题通过列举法应用概率的古典定义可直接求出. 其中第 4 题包含两步，不妨用 Aa 和 Bb 代表两套杯子，则可列表：

	a	b
A	A a	A b
B	B a	B b

可以问学生：如果是三套茶杯会怎样？

2. 在“综合运用”中，第 5 题可参考 25.2 节例 5 的列表法解决.

第 6 (1) 题：没有混入 M 号衬衫的共有 7 包，概率为$\frac{7}{50}$；第 6 (2) 题：混入 M 号衬衫不超过 7 的包数为 7+3+10+15+5=40，概率为$\frac{4}{5}$；第 6 (2) 题：混入 M 号衬衫超过 10 的包数为 3，概率为$\frac{3}{50}$.

一位零售商从50包中任意选取了一包，求下列事件的概率：

(1) 包中没有混入的M号衬衫；

(2) 包中混入的M号衬衫数不超过7；

(3) 包中混入的M号衬衫数超过10.



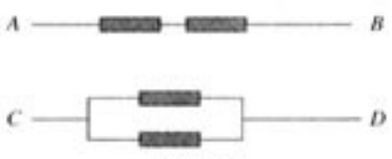
7. 同学们，你们都知道猜“石头、剪子、布”的游戏吧！如果两个人做这个游戏，随机出手一次，两个人获胜的概率各是多少？

拓广探索 ▶▶

8. 把三张形状、大小相同但画面不同的风景图片都平均剪成三段，然后将上、中、下三段分别混合洗匀. 从三堆图片中随机地各抽出一张，求这三张图片恰好组成一张完整风景图片的概率.



9. 已知电流在一定时间段内正常通过电子元件 ▭ 的概率是0.5，分别求在一定时间段内，A、B之间和C、D之间电流能够正常通过的概率.

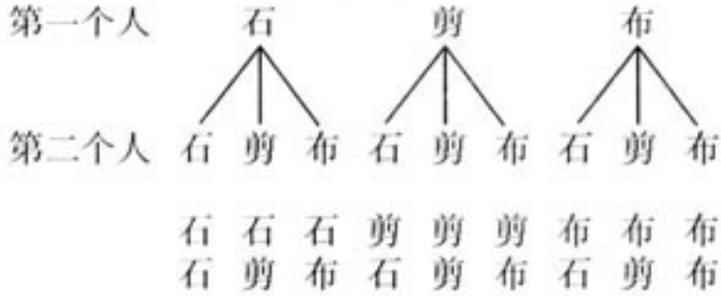


(第9题)

(提示：在一次试验中，每个电子元件的状态有两个可能（通电，断开），并且这两种状态的可能性相等. 用列举的方法可以得出电路的4种可能状态.)

10. 鸟类学家要估计一下某森林公园内鸟的数量. 你能为鸟类学家提出一种估计鸟的数量的方法吗（在一定的时期内，森林公园可以近似地看作与外部环境是相对封闭的）?

第7题可列树形图如下：



可以看出，两个人每次随机出手，每人获胜的概率都为$\frac{1}{3}$.

3. 拓广探索中的第8题是一个三步试验问题，考查学生对用树形图求概率的掌握程度.

第9题考查学生应用概率知识解决实际问题的能力. 从题干可知，电子元件正常工作与不正常工作的可能性相同，则有



考虑串联与并联的不同情况，则可求解.

Ⅲ 习题解答

习题 25.1

1. (1) 必然发生的；(2) 随机事件；(3) 随机事件；
(4) 不可能发生；(5) 随机事件；(6) 随机事件.

2. 公平，投掷一次硬币，因为正面向上和反面向上的机会均等.

3. 举例略. 频率在概率附近摆动，当大量重复试验时，频率越来越稳定于概率.

4. (1) 0.90，0.93，0.93，0.92，0.91，0.91，0.90；
(2) 0.9.

5. (1) 0.75，0.83，0.78，0.79，0.80，0.80；
(2) 在 0.8 上下摆动；
(3) 0.8.

6. (1) 不能；　　(2) 不会；　　(3) 蓝色的；
(4) 减少一个篮球，增加一个红球（答案不唯一）.

7. 均为$\frac{1}{6}$.

习题 25.2

1. (1) $\frac{1}{13}$；(2) $\frac{1}{13}$；(3) $\frac{3}{13}$；(4) $\frac{4}{13}$；(5) 1.

2. (1) $\frac{1}{6}$；(2) $\frac{2}{3}$.

3. (1) $\frac{1}{4}$；(2) $\frac{3}{16}$.

4. $\frac{1}{3}$.

5. (1) $\frac{1}{6}$；(2) $\frac{1}{2}$.

6. $\frac{3}{8}$.

7. $\frac{1}{3}$.

8. $\frac{1}{3}$.

9. $\frac{x}{x+y}=\frac{3}{8}$，$\frac{x+10}{x+y+10}=\frac{1}{2}$；$x=15$，$y=25$.

习题 25.3

1. 会稳定在某个常数附近.

2. 略.

3. (1) 略；

(2) 当 d 不变 l 减小时概率 p 减小；当 l 不变 d 减小时概率 p 增大.

4. 有道理，设有鱼 x 条，则有 $\frac{n}{x}=\frac{b}{a}$.

5. $\frac{5}{8}$，$\frac{3}{5}$.

6. 略.

复习题 25

1. (1) $\frac{2}{11}$；(2) $\frac{2}{11}$；(3) $\frac{4}{11}$；(4) $\frac{7}{11}$.

2. 一样大，因为两个转盘是全等的，并且两个转盘上红色面积与转盘总面积的比例相同.

3. (1) $\frac{1}{27}$；(2) $\frac{2}{27}$；(3) $\frac{13}{54}$.

4. 各为 $\frac{1}{2}$.

5. $\frac{1}{6}$.

6. (1) $\frac{7}{50}$；(2) $\frac{4}{5}$；(3) $\frac{3}{50}$.

7. 各为 $\frac{1}{3}$.

8. $\frac{1}{9}$.

9. 0.25，0.75.

10. 略.

Ⅳ 教学设计参考案例

25.1.1 随机事件（第 1 课时）

教学任务分析

教学目标	知识技能	了解必然发生的事件、不可能发生的事件、随机事件的特点.
	数学思考	学生经历体验、操作、观察、归纳、总结的过程，发展学生从纷繁复杂的表象中，提炼出本质特征并加以抽象概括的能力.
	解决问题	能根据随机事件的特点，辨别哪些事件是随机事件.
	情感态度	学生通过亲身体验，亲自演示，感受数学就在身边，促进学生乐于亲近数学，感受数学，喜欢数学.
重点	随机事件的特点.	
难点	判断现实生活中哪些事件是随机事件.	

教学流程安排

活动流程图	活动内容和目的
活动 1　必然发生的事件和不可能发生的事件	通过几个具体的例子理解哪些事件是必然发生的事件，哪些事件是不可能发生的事件.
活动 2　接触一个含有随机事件的例子	初步感受随机事件.
活动 3　再接触一个含有随机事件的例子	进一步感受随机事件的特点.
活动 4　总结随机事件的特点，给出随机事件的定义	通过探究与讨论，形成对随机事件的特点及定义的理性认识.
活动 5　课堂练习	从不同的侧面，不同的视角进一步深化对随机事件的理解.
活动 6　小结及布置作业	回顾梳理随机事件的特点.

教学过程设计

问题与情境	师生行为	设计意图
「**活动 1**」 问题 下列现象哪些是必然发生的，哪些是不可能发生的? (1) 将一小勺绵白糖放入一杯温水中，并用筷子不断地搅拌，白糖溶解; (2) 测量某天的最低气温，结果为−150 ℃; (3) 物体（比如一小段粉笔或石块）在重力作用下自由下落; (4) 两个正实数相加，（在运算正确的前提下）结果是负实数.	这些现象的结果是确定的吗? 进而教师提出问题. 对于其中一些问题，教师（或学生）进行实物演示. 学生需阅读、观察、思考、回答问题. 本次活动中，教师应重点关注学生的表情变化，学生的参与程度，学生是否细心观察、认真阅读、勤于思考.	首先通过实际生活中几个生动、鲜活的实例，自然而然地引出必然事件和不可能事件. 必然事件和不可能事件，相对于随机事件而言，学生容易接受和理解. 本节有大量的学生活动，教师应注意调动尽可能多的学生的积极性，使尽可能多的同学积极地参与到课堂中来. 避免少数几个同学反复发言的现象.
「**活动 2**」 问题 5 名同学参加讲演比赛，以抽签方式决定每个人的出场顺序. 签筒中有 5 根形状，大小相同的纸签，上面分别标有出场的序号 1，2，3，4，5. 小军首先抽签，他在看不到纸签上的数字的情况下从签筒中随机（任意）地取一根纸签. 考虑以下问题: (1) 抽到的号有几种可能的结果? (2) 抽到的号小于 6 吗? (3) 抽到的号会是 0 吗? (4) 抽到的号会是 1 吗?	教师拿出事先准备好的纸签，请 5 名同学到讲台前面，进行演示试验. 本次活动中，教师应重点关注: (1) 学生是否细心观察、认真思考. (2) 同学把问题 (2) (3) 的情形与［活动 1］的情形进行类比. (3) 问题 (4) 的结果是否是确定的?	在活动 1 的基础上，引导学生理解在我们的现实生活中，除了一些必然发生的事件（如本活动中的 (2)），和一些不可能发生的事件外（如本活动中的 (3)），还有一些事件既可能发生，也可能不发生（如本活动中的 (4)).

续表

问题与情境	师生行为	设计意图
「**活动 3**」 问题 小伟掷一个质地均匀的正方体骰子，骰子的六个面上分别刻有 1 到 6 的点数. 请考虑以下问题：掷一次骰子，在骰子向上的一面上， (1) 可能出现哪些点数? (2) 出现的点数大于 0 吗? (3) 出现的点数会是 7 吗? (4) 出现的点数会是 4 吗?	请 3 名同学到讲台前面，进行演示试验. 教师再次提醒同学把问题 (2) (3) 的情形与 [活动 1] 的情形进行类比 教师再次提醒同学注意：问题 (4) 的结果是否是确定的?	相对于学生以前学习过的传统的数学知识，做为概率论的第一节课，对随机事件的提法与描述，学生是会感到陌生而且困难的，因此，再举一个例子加深学生对随机事件及其特点的理解与认识.
「**活动 4**」 问题 活动 2 中问题 (4) 的结果与活动 3 中问题 (4) 的结果有什么共同特点?	如果学生感到困难，教师可再举几个随机事件的经典例子. 例如任意抛掷一枚硬币，正面朝上. 以引导学生独立地总结，归纳出随机事件的共同特点：在一定条件下，这些事件可能发生，也可能不发生. 教师应允许学生充分发表意见，学生相互合作，相互交流，尝试着给出随机事件的定义. 教师引导学生建构，总结出随机事件的定义.	我们以往研究的各种问题，其结果都是确定的. 而随机事件不同，因此，这里应留出一些时间，让同学们充分思考，讨论.
「**活动 5**」 练习 指出下列事件中，哪些是必然发生的事件，哪些是不可能发生的事件? (1) 通常加热到 100 ℃时，水沸腾. (2) 篮球运动员在罚球线上投篮一次，未命中. (3) 掷一次骰子，向上的一面是 6 点. (4) 度量三角形的内角和，结果是 360°. (5) 经过城市中某一有交通信号灯的路口，遇到红灯. (6) 某射击运动员射击一次，命中靶心. 请同学举出现实生活中随机事件的例子.	同学之间通过充分交流、讨论、探究，热烈发言，教师应注意保护同学的积极性.	随机事件在现实世界中广泛存在. 通过大量丰富多彩的实例，激发学生的学习热情，调动学生的学习兴趣，使学生对随机事件有比较充分的感知，从不同的侧面，不同的视角进一步深化对随机事件的理解与认识.
「**活动 6**」 小结及布置作业： 教科书习题 25.1 第 1 题.	教师引导学生归纳本节课所学的主要知识，重点关注学生对于随机事件的理解和掌握.	通过小结和课后作业，加深对本节课所学内容的理解.

教学设计说明

本节是“概率初步”一章的第一节课. 教学中，首先列举了学生在实际生活中所熟悉的、生动的、鲜活的实例，引出必然事件和不可能事件. 然后，进一步通过实例，让学生初步感受随机事件的意义. 最后，通过演示试验、小组讨论、大组交流，逐步形成对随机事件的特点及定义的理性认识. 这样从易到难，从简单到复杂，逐渐深入地引入随机事件的概念的安排，显得自然而又流畅.

本节课，没有纠缠在概念的具体文字上，而是通过经典的随机事件的例子，使学生准确的理解和把握随机事件的有关概念.

教学过程中，教师设计了一系列的教学活动，并注意调动学生的积极性，引导学生积极参与教学活动.

25.1.2 概率的意义（第1课时）

教学任务分析

教学目标	知识技能	从频率稳定性的角度，了解概率的意义.
	数学思考	学生经历试验、统计、分析、归纳、总结，进而了解并感受概率的定义的过程，引导学生从数学的视角，观察客观世界；用数学的思维，思考客观世界；以数学的语言，描述客观世界.
	解决问题	怎样从数量上刻画一个随机事件发生的可能性的大小.
	情感态度	学生经历试验、整理、分析、归纳、确认等数学活动，感受数学活动充满了探索性与创造性，感受量变与质变的对立统一规律，同时为概率的精准、新颖、独特的思维方式所震撼.
重点	对概率意义的正确理解.	
难点	对随机现象的统计规律性的深刻认识.	

教学流程安排

活动流程图	活动内容和目的
活动1　复习与回顾	回顾上一节学习过的一些概念，承上启下.
活动2　硬币抛掷试验	学生通过亲身试验，深刻感受随机现象的统计规律性. 同时通过回望历史，感受数学规律的真实的发现过程.
活动3　概率的定义	给出概率的定义，分析频率与概率的区别与联系.
活动4　练习以及想一想，议一议	通过练习，思考，讨论进一步加深对概率意义的理解和认识.
活动5　小结与布置作业	梳理知识，学生获得巩固和发展.

教学过程设计

问题与情境	师生行为	设计意图
「**活动 1**」 问题 什么是必然事件？什么是不可能事件？什么是随机事件？ 你如何理解随机事件？	教师提出问题. 学生独立回忆，思考并回答问题. 学生应从以下三个方面理解随机事件： (1) 试验是在相同条件下； (2) 可以大量重复试验； (3) 每一次试验结果不一定相同，且无法预测下一次试验结果.	承上启下. 充分理解学习过的一些概念（特别是随机事件这一概念），是准确把握概率定义的基础和前提.
「**活动 2**」 把全班同学分成 10 组，每组同学掷一枚硬币 100 次，整理同学们获得的试验数据，并记录在表（见教科书表 25-2）和图中（见教科书图 25.1-1）. 问题 (1) 随着抛掷次数的增加，“正面向上”的频率在哪个数字的左右摆动？ 问题 (2) 随着抛掷次数的增加，“正面向上”的频率在 0.5 的左右摆动幅度有何规律？	教师应安排全体同学参与试验，每名同学都要亲自感受随机事件的统计规律性的发现过程. 活动中教师应要求全体同学态度端正，认真记录试验数据，以培养学生一丝不苟，严谨求实的科学精神. 活动中教师应注意培养同学之间相互合作、相互沟通的能力. 第一组的数据填在第一列；第一、二组的数据之和填在第二列……10 个组的数据之和填在第 10 列. 学生独立观察试验数据，思考并回答问题. 教师提出问题 (2). 建议教师安排学生，先根据教科书中给出的历史上部分数学家的试验数据，绘制散点图，学生仔细观察，思考问题 (2). 然后根据学生分组试验数据，绘制散点图，学生重新观察，思考问题 (2). 此时可安排学生交流，讨论：这两个散点图反映出的规律是否相同？如果不同，为什么？ 根据学生分组试验数据，绘制而成的散点图，有可能不能反映出这一规律. 这时教师应指出：本次试验不能称为严格意义上的大量重复试验. 教师可引导学生，课后继续进行分组抛掷硬币试验，获得大量数据，重新绘制散点图，继续观察随着抛掷次数的增加，“正面向上”的频率在 0.5 的左右摆动幅度是否越来越小.	让全体学生动手参与试验，使学生了解概率这一重要概念的实际背景，感受并相信随机事件的发生中存在着统计规律性. 说明：活动 2 中全班同学的分组可根据实际班额酌情调整. 通过逐步深入的一系列问题的提出，使学生加深对随机事件的统计规律性的认识. 对于问题 (1)，学生相对容易理解. 由于问题 (2) 不易理解，这样做可使学生首先获得正确的认识. 这两个散点图反映出的规律有可能是相同的，也可能是不同的. 这是由于试验数据太少（仅有 1000 个），有可能随着抛掷次数的增加，“正面向上”的频率在 0.5 的左右摆动幅度不完全是越来越小. 此时学生容易产生困惑，可能会提出一些疑问. 教师应给出有针对性的、具体的指导与帮助.

续表

问题与情境	师生行为	设计意图
		同时教师还应帮助学生理解，在一个试验中，无论试验次数多么大，我们都无法保证事件的频率值充分地接近事件的概率值. 事实上，频率值“远离”概率值的可能性永远存在，但这种可能性随试验次数增大，确实会越来越小. 频率由量变到达质变成为概率，反映了量变与质变的对立统一.
问题（3） 当“正面向上”的频率逐渐稳定到0.5时，“反面向上”的频率呈现什么规律？	教师提出问题（3）. 学生独立思考并回答.	对于问题（3），同学们不难理解. 问题（3）的设置，为后面的学习做好铺垫.
「活动3」 给出事件 A 的概率的定义. 问题 （1）频率与概率有什么区别与联系？	教师给出事件 A 的概率定义. 教师提出问题（1）. 学生思考、讨论、相互交流. 教师应帮助学生理解： （1）一般地，频率是随着试验次数的改变而变化的； （2）概率是一个客观常数； （3）频率是概率的近似值，概率是频率的稳定值. 它是频率的科学抽象. 当试验次数越来越多时，频率围绕概率摆动的平均幅度越来越小，即频率靠近概率. 教师应指出：随机现象虽然对于个别试验来说无法预知其结果，但在相同条件下，进行大量重复试验时，却又呈现出一种规律性.	概率对于学生是一个较难理解的概念. 教师应帮助学生从不同方面、不同角度、不同层次去理解概率的意义. 例如，通过比较频率与概率的区别与联系来认识概率. 学生通过充分交流、讨论、探究，深化了对事件 A 的概率定义的理解，发展了学生的数学能力.
（2）当 A 是必然发生的事件时，$P(A)$ 是多少？当 A 是不可能发生的事件时，$P(A)$ 是多少？当 A 是随机事件时，$P(A)$ 是多少？	教师提出问题（2）. 学生独立思考，回答. 教师应帮助学生理解：任何事件的发生都可以用概率来描述. 其中必然事件的概率为1，不可能事件的概率为0，随机事件的概率大于0而小于1.	必然事件和不可能事件可以看作是随机事件的两种极端情形.

续表

问题与情境	师生行为	设计意图
「**活动4**」 问题 (1) 天气预报说下星期一降水概率是90%，下星期三降水概率是10%，于是有位同学说：下星期一肯定下雨，下星期三肯定不下雨. 你认为他说的对吗? (2) 你能谈谈概率的定义与你原先想象的一样吗? 有什么区别吗? (3) 概率并不提供确定无误的结论，这是由随机现象的本质所确定的. 那么，学习概率有用吗?	教师提出问题. 学生思考回答. 对于问题(1)，教师应指出：预报的降水概率是根据大量统计记录得出的，是符合大多数同等气象条件下的实际情况的，某些例外情况是可能发生的. 对于问题(2)和问题(3)，可要求同学根据自己的理解，有感而发，选择回答. 应允许学生尽可能充分地发表意见，或互相辩论. 教师应根据学生的回答，有针对性地点评，对回答出色的学生及时地给予表扬和鼓励. 对一些错误的提法和概念及时地给予纠正.	问题(1)比较具体、直观. 从不同方面、不同视角进一步加深对概率意义的理解和认识，培养了同学对于数学的兴趣. 学生可能发表各种想法、意见，或正确，或错误，或正确与错误混在一起，教师应有充分准备.
「**活动5**」 小结 你如何理解概率的意义? 布置作业： 教科书25.1.2节练习2，习题25.1第5题.	引导学生总结： (1) 从频率稳定性的角度，了解概率的意义； (2) 概率从数量上刻画了一个随机事件发生的可能性的大小. 教师布置作业. 学生记录作业.	梳理知识，使概念进一步清晰、明确，本节课的学习内容得到巩固和发展.

教学设计说明

相对于传统的代数和几何而言，概率论的形成较晚，相对于学生以前学习过的一些数学概念，概率定义的思考方式也是新颖而又独特的. 说明从数学的视角，如何定量地刻画一个随机事件发生的可能性的大小，是比较困难的. 虽然对于个别试验来说，无法预知其结果，但在相同条件下，进行大量重复试验时，却又呈现出一种统计规律性. 因此，本节课设计了学生的分组试验，期望通过学生亲身的、大量的重复试验活动，使他们深刻感受随机事件的这种特点，深刻感受概率定义的发展过程. 有关的数据统计、分析、整理活动，在教师的引导与帮助下，留给学生们自己完成，并引导他们获得对概率这个概念的深刻认识. 这种处理方式，深化了学生对概率的意义的理解，发展了学生的数学能力，培养了同学对于数学的积极感情.

本节课容量较大，教师可根据具体情况，酌情删减内容，或增加课时.

25.2 用列举法求概率（第3课时）

教学任务分析

教学目标	知识技能	1. 使学生在具体情境中了解概率的意义，能够运用列举法（包括列表、画树形图）计算简单事件发生的概率，并阐明理由. 2. 使学生能够从实际需要出发判断何时选用列表法或画树形图法求概率更方便.
	数学思考	通过对“应用一般的列举法求概率”与“应用列表法、树形图法求概率”这两种不同方法的比较和探究，进一步发展学生抽象概括的能力.
	解决问题	1. 通过观察列举法的结果是否重复和遗漏，总结列举不重复不遗漏的方法，培养学生观察、归纳、分析问题的能力. 2. 通过应用列表法或画树形图法解决实际问题，提高学生解决问题的能力，发展应用意识.
	情感态度	引导学生对问题观察、质疑，激发学生的好奇心和求知欲，使学生在运用数学知识解决问题的活动中获得成功的体验，建立学习的自信心.
重点	能够运用列表法和树形图法计算简单事件发生的概率，并阐明理由.	
难点	判断何时选用列表法或画树形图法求概率更方便.	

教学流程安排

活动流程图	活动内容和目的
活动1　回顾上节用列举法求概率的基础知识	帮助学生回忆上节课所学的知识，为本节课的学习准备好知识基础.
活动2　用列举法解决一个简单的概率问题	使学生进一步在具体情境中了解概率的意义，能阐明运用列举法计算简单事件发生的概率的理由，为本节课探索列表法和树形图法求概率奠定基础.
活动3　通过解决问题学习列表法求概率	通过对例5的讨论研究，学习列表法求概率.
活动4　通过解决问题学习画树形图法求概率	通过对例6的讨论研究，学习画树形图法求概率.
活动5　用列表法和树形图法各做一个练习题	通过两个练习，巩固并比较、总结两种方法.
活动6　小结与作业	回顾本节知识和解决问题的方法，巩固、提高、发展.

教学过程设计

问题与情境	师生行为	设计意图
「**活动 1**」 问题 (1) 具有何种特点的试验称为古典概型? (2) 对于古典概型的试验,如何求事件的概率?	学生回答: (1) 一次试验中,可能出现的结果是有限多个;各种结果发生的可能性相等. 具有以上特点的试验称为古典概型. (2) 对于古典概型的试验,我们可以从事件所包含的各种可能的结果在全部可能的试验结果中所占的比分析出事件的概率. 一般地,如果在一次试验中,有 n 种可能的结果,并且它们发生的可能性都相等,事件 A 包含其中的 m 种结果,那么事件 A 发生的概率为 $P(A)=\frac{m}{n}$.	通过问答的方式,帮助学生回忆上节课所学的知识,为本节课的学习准备好知识基础.
「**活动 2**」 问题 掷一颗普通的正方形骰子,求: (1) "点数为 1" 的概率; (2) "点数为 1 或 3" 的概率; (3) "点数为偶数" 的概率; (4) "点数大于 2" 的概率.	学生思考后解答: 掷一个骰子时,向上一面的点数可能为 1,2,3,4,5,6,共 6 种. 这些点数出现的可能性相等. (1) P(点数为 1)$=\frac{1}{6}$; (2) P(点数为 1 或 3)$=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$; (3) 点数为偶数有 3 种可能,即点数为 2,4,6,P(点数为偶数)$=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$; (4) 点数大于 2 有 4 种可能,即点数为 3,4,5,6,P(点数大于 2)$=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.	通过简单的回顾练习,使学生进一步在具体情境中了解概率的意义,能阐明运用列举法计算简单事件发生的概率的理由,为本节课探索列表法和树形图法求概率奠定基础.
「**活动 3**」 问题 1. 同时掷两个质地均匀的骰子,计算下列事件的概率: (1) 两个骰子的点数相同; (2) 两个骰子点数的和是 9; (3) 至少有一个骰子的点数为 2. 2. 列举时如何才能避免重复和遗漏?	学生思考、解答、发言. 由于本题用列举法求解,所列内容较多,教师应组织学生重点观察解答中列举的内容有无遗漏、有无重复. 教师组织学生讨论. 学生经过讨论发言,最后由教师总结分析:当一次试验要涉及两个因素(例如掷两个骰子)并且可能出现的结果数目较多时,为不重不漏地列出所有可能的结果,通常采用列表法. 我们不妨把两个骰子分别记为第 1 个和第 2 个,这样就可以用下面的方形表格列举出所有可能出现的结果.	通过对较为复杂的概率问题的探索,激发学生找到新解法的学习欲望. 通过学生自主探求列表法,使学生对何时应用列表法,如何应用列表法有更深的理解.

问题与情境	师生行为	设计意图
3. 重新用列表法解决上题. 4. 如果把例 5 中的“同时掷两个骰子”改为“把一个骰子掷两次”，所得到的结果有变化吗？	教师结合教科书表 25-4，指导学生体会列表法对列举所有可能的结果所起的作用，总结并解答. 教师提问. 学生思考、回答.	指导学生如何规范的应用列表法解决概率问题. 使学生在不同的情境下体会列表法的特点.
「**活动 4**」 问题 1. 甲口袋中装有 2 个相同的小球，它们分别写有字母 A 和 B；乙口袋中装有 3 个相同的小球，它们分别写有字母 C、D 和 E；丙口袋中装有 2 个相同的小球，它们分别写有字母 H 和 I. 从3 个口袋中各随机地取出 1 个小球. (1) 取出的 3 个小球上恰好有1 个、2 个和 3 个元音字母的概率分别是多少？ (2) 取出的 3 个小球上全是辅音字母的概率是多少？ 2. 总结何种概率问题适合用树形图法解决.	教师组织学生分析本问题如何应用列举法和列表的可行性. 教师介绍树形图法：当一次试验要涉及 3 个或更多的因素（例如从 3 个口袋中取球）时，列方形表就不方便了，为不重不漏地列出所有可能的结果，通常采用树形图. 解法参见教科书. 用树形图列举出的结果看起来一目了然，当事件要经过多次步骤（三步以上）完成时，用这种“树形图”的方法求事件的概率很有效.	通过对本题解法的分析，激发学生学习新方法的学习欲望. 通过示范树形图解法，加深学生对此种解法的理解，使学生初步掌握用树形图法解决概率问题的技能. 加深学生对树形图解法的理解.
「**活动 5**」 想一想，什么时候使用“列表法”方便，什么时候使用“树形图法”方便？ 练习一：在 6 张卡片上分别写有 1～6 的整数. 随机地抽取一张后放回，再随机地抽取一张. 那么第一次取出的数字能够整除第二次取出的数字的概率是多少？ 练习二：经过某十字路口的汽车，它可能继续直行，也可能向左转或向右转. 如果这三种可能性大小相同，三辆汽车经过这个十字路口，求下列事件的概率： (1) 三辆车全部继续直行； (2) 两辆车向右转，一辆车向左转； (3) 至少有两辆车向左转.	学生思考，做练习一. 由附表一可以看出，可能出现的结果有 36 个，它们出现的可能性相等. 满足条件（记为事件 A）的结果有 14 个（表中的阴影部分），即 (1，1)，(1，2)，(1，3)，(1，4)，(1，5)，(1，6)，(2，2)，(2，4)，(2，6)，(3，3)，(3，6)，(4，4)，(5，5)，(6，6)，所以 $P(A)=\frac{14}{36}=\frac{7}{18}$. 学生思考，做练习二. 由附图一可以看出，可能出现的结果有 27 个，它们出现的可能性相等. (1) 三辆车全部继续直行的结果只有一个； $P(\text{三辆车全部继续直行})=\frac{1}{27}$. (2) 两辆车向右转，一辆车向左转结果有 3 个；	巩固学生对列表法和树形图法的理解和认识. 使学生能够从实际需要出发判断何时选用列表法或画树形图法求概率更方便，巩固学生使用列表法和树形图法求概率的技能.

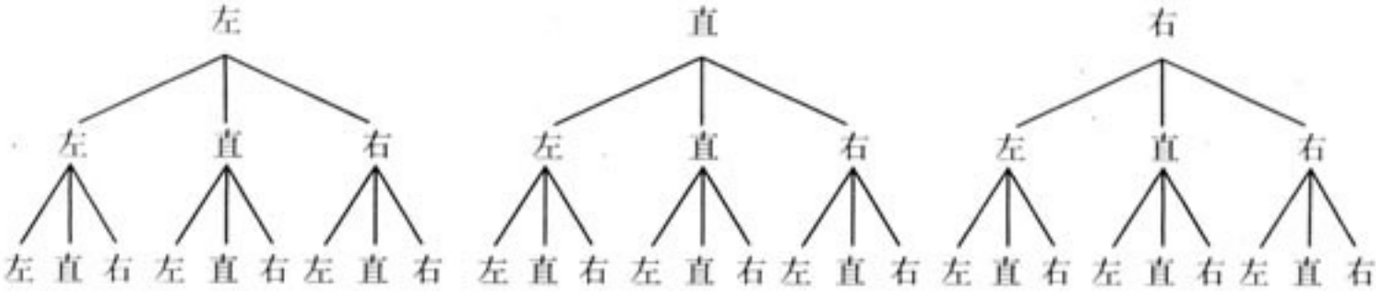
续表

问题与情境	师生行为	设计意图
	P（两辆车向右转，一辆车向左转）$=\frac{3}{27}=\frac{1}{9}$. （3）至少有两辆车向左转结果有 7 个， P（至少有两辆车向左转）$=\frac{7}{27}$.	
「活动 6」 小结与作业 这节课我们学习了哪些内容，有什么收获？ 教科书 155 页习题 25.2 第 4 至 6 题.	学生自己总结发言，不足之处由其他学生补充完善，教师重点关注不同层次的学生对本节知识的理解、掌握程度. 学生独立完成，教师批改总结.	提炼对列举法中的列表法和树形图法的认识. 了解教学效果，及时调整教学.

附表一

第 1 次 第 2 次	1	2	3	4	5	6
6	(1, 6)	(2, 6)	(3, 6)	(4, 6)	(5, 6)	(6, 6)
5	(1, 5)	(2, 5)	(3, 5)	(4, 5)	(5, 5)	(6, 5)
4	(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 4)	(5, 4)	(6, 4)
3	(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)	(5, 3)	(6, 3)
2	(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)	(5, 2)	(6, 2)
1	(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)	(5, 1)	(6, 1)

附图一



教学设计说明

本节内容是第二十五章第二节“用列举法求概率”的第 3 课时，主要介绍用列表法和树形图法求概率. 从上节课所学用列举法求概率出发，以探寻快捷准确的新方法为目标，以两个实际问题为载体，通过学生动手解决问题、观察、分析、评价解题方法获得新知.

本节课设计了 6 个教学活动，难易程度由浅入深，层层递进，解决问题以学生为主，发挥学生的集体智慧，教师从中指导、总结，示范. 在教学过程中，强调学生形成积极主动的学习态度，关注学生的学习兴趣和体验，充分体现“数学教学主要是数学活动的教学”这一教育思想.

V 拓展资源

一、知识的拓广延伸及相关史料

1. 基本结果

随机试验观察的是随机事件发生与否. 基本结果是随机试验各种可能的结果. 样本空间是所有基本结果的集合或汇集. 例如，如果抛硬币，那么随机试验就是记录其结果. 其基本结果是正面和背面，样本空间记作集合{正面，背面}. 掷一个骰子，其样本空间含6个基本结果，记作{1，2，3，4，5，6}. 掷一对骰子，样本空间为：

(1，1)	(1，2)	(1，3)	(1，4)	(1，5)	(1，6)
(2，1)	(2，2)	(2，3)	(2，4)	(2，5)	(2，6)
(3，1)	(3，2)	(3，3)	(3，4)	(3，5)	(3，6)
(4，1)	(4，2)	(4，3)	(4，4)	(4，5)	(4，6)
(5，1)	(5，2)	(5，3)	(5，4)	(5，5)	(5，6)
(6，1)	(6，2)	(6，3)	(6，4)	(6，5)	(6，6)

这个样本空间有36个(6×6)基本结果. 若三个骰子，样本空间就有6×6×6=216个基本结果……

设某一随机试验有A_1，A_2，…，A_n个基本结果. 我们把A_i的概率记作$P(A_i)$. 例如机会均等的掷硬币时，正面和背面出现的可能性相同，则$P(\text{正面})=P(\text{背面})=0.5$. 掷两个骰子时，有36种基本结果，且其概率都相同，均为$\frac{1}{36}$. 有下列结论成立：

(1) $P(A_i)\geqslant 0$；(2) $P(A_1)+P(A_2)+\cdots\cdots+P(A_n)=1$.

2. 基本运算

一个事件可能有一系列基本结果，某个事件的概率为该事件基本结果集合中各结果的概率之和. 例如，在投掷两个骰子的过程中，有一些事件如下：

事件描述	事件的基本结果	概率
A：点数之和为3	{(1，2)，(2，1)}	$P(A)=\frac{2}{36}$
B：点数之和为6	{(1，5)，(2，4)，(3，3)，(4，2)，(5，1)}	$P(B)=\frac{5}{36}$
C：第一个骰子点数为1	{(1，1)，(1，2)，(1，3)，(1，4)，(1，5)，(1，6)}	$P(C)=\frac{6}{36}$
D：第二个骰子点数为1	{(1，1)，(2，1)，(3，1)，(4，1)，(5，1)，(6，1)}	$P(D)=\frac{6}{36}$

使用“事件”而不是“基本结果”，优点在于我们能够运用逻辑方法把不同的事件结合起来，形成另外的事件. 关联词有“交”“并”“补”. 即已知事件E和F，我们能组成新事件：(1) $E\cap F$，事件E和F同时发生；(2) $E\cup F$，事件E发生或F发生（包括事件E和F同时发生）；(3) $\overline{E}$，事件E未发生.

运用逻辑知识再结合概率的基本定义，会得到处理概率问题的公式.

我们再来看一下掷骰子的例子. 如果 C 表示第一个骰子点数为 1 的事件，D 表示第二个骰子点数为 1 的事件，那么，$C\cup D$ 是全部的阴影区域（两个骰子中至少有一个点数为 1），$C\cap D$ 是阴影区域的重叠处（两个骰子的点数都为 1）.

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

概率的加法法则：对于任意事件 E 和 F，$P(E\cup F)=P(E)+P(F)-P(E\cap F)$. $P(E)$加上 $P(F)$重复计算了 E 和 F 共有的基本结果，所以要减去多余量 $P(E\cap F)$. 在上例中，$P(C\cup D)=\frac{11}{36}$，$P(C\cap D)=\frac{1}{36}$，恰好验证了上述公式.

有时，E 和 F 的交集是空集，两个事件没有相同的基本结果，此时我们称 E 和 F 互相排斥，记作 $P(E\cap F)=0$. 例如在刚才掷骰子的例子中，事件 A 和 B 是互相排斥的.

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

对于互相排斥的事件，我们得到特殊的加法法则：如果 E 和 F 互相排斥，那么

$$P(E\cup F)=P(E)+P(F).$$

另外，对于任意事件 E，若 $P(\overline{E})$比 $P(E)$更容易计算，则可应用减法法则：

$$P(E)=1-P(\overline{E}).$$

3. 概率论的产生和发展

概率论产生于 17 世纪，其产生背景与保险事业的发展有关.

早在 1654 年，有一个赌徒梅雷爵士向当时的法国数学家帕斯卡（Blaise Pasacl 1623－1662）提出一个使他苦恼了很久的问题：“两个赌徒相约赌若干局，谁先赢 m 局就算赢，全部赌本就归谁. 但是当其中一个人赢了 a（$a<m$）局，另一个人赢了 b（$b<m$）局的时候，赌博中止. 问赌本应该如何分法才合理?”这是最早的引发概率研究的一个著名问题.

三年后，也就是 1657 年，荷兰著名的天文、物理兼数学家惠更斯（Huygens 1629－1695），出版了《论赌博中的机会》（Deratiociniis in ludo aleae）一书，这就是最早的概率论著作. 使概率论成为数学的一个分支的奠基人之一是瑞士数学家雅各布·贝努利（Jacob Bernoulli 1654－1705).

1713 年，雅格布·伯努利的遗著《猜度术》(Ars conjectandi) 出版，书中表明他经过多次反复的试验，证明在一定范围内存在着预期的概率，即试验测得的有关频率会稳定于某个常数附近. 因此雅格布·伯努利指出："无限地连续进行试验，我们终能正确地计算任何事物的概率，并从偶然现象之中看到事物的秩序."但是，他并未表述出这种偶然现象中的秩序. 这一工作是由法国数学家棣莫弗 (De Moiver·Abraham 1667—1754) 完成的.

棣莫弗在雅格布·伯努利的《猜度术》出版之前，就对概率论进行了广泛而深入的研究. 1711 年，他在英国皇家学会的《哲学学报》(Philosophical Transactions) 上发表了"论抽签的原理" (De mensure sortis)，此文于 1718 年用英文出版时翻译成《机会的学说》 (The doctrine of chances)，并扩充成一本书. 棣莫弗在《机会的学说》(1738 年版) 中称，在 1725 年左右，他就考虑过多次反复试验中的预期概率问题.

近几十年来，随着科技的蓬勃发展，概率论大量应用到国民经济、工农业生产及各学科领域. 许多兴起的应用数学，如信息论、对策论、排队论、控制论等，都是以概率论作为基础的.

概率论——是根据大量同类随机现象的统计规律，对随机现象出现某一结果的可能性做出一种客观的科学判断，对这种结果出现的可能性大小做出数量上的描述；比较各种结果出现的可能性的大小、研究它们之间的联系，从而形成一整套数学理论和方法.

应该指出，概率统计在研究方法上有它的特殊性，和其他数学学科的主要不同点有：

第一、由于随机现象的统计规律是一种集体规律，必须在大量同类随机现象中才能呈现出来，所以，观察、试验、调查就是概率统计这门学科研究方法的基石. 但是，作为数学学科的一个分支，它依然具有本学科的定义、公理、定理，这些定义、公理、定理来源于自然界的随机规律，但这些定义、公理、定理是确定的，不存在任何随机性.

第二、在研究概率统计中，使用的是"由部分推断全体"的统计推断方法. 这是因为它研究的对象——随机现象的范围是很大的，在进行试验、观测的时候，往往不可能也不必要对于全部对象进行考察. 但是对于由部分资料所得出的一些结论，要在全体范围内推断这些结论的可靠性.

第三、随机现象的随机性，是指试验、调查之前来说的. 而真正得出结果后，对于每一次试验，它只可能得到这些不确定结果中的某一种确定结果. 我们在研究这一现象时，应当注意在试验前能不能对这一现象找出它本身的内在规律.

概率论作为一门数学分支，它所研究的内容一般包括随机事件的概率、统计独立性和更深层次上的规律性.

概率是随机事件发生的可能性的数量指标. 在独立随机事件中，如果某一事件在全部事件中出现的频率，在更大的范围内比较明显的稳定在某一固定常数附近. 就可以认为这个事件发生的概率为这个常数. 任何事件的概率值一定介于 0 和 1 之间.

有一类随机事件，它具有两个特点：第一，只有有限个可能的结果；第二，各个结果发生的可能性相同. 具有这两个特点的随机现象叫做"古典概型".

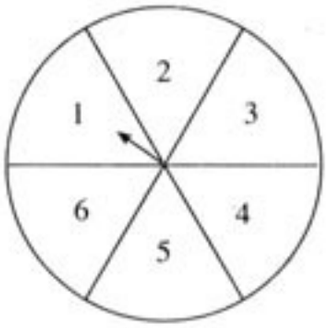
在客观世界中，存在大量的随机现象，随机现象产生的结果构成了随机事件. 如果用变量来描述随机现象的各个结果，就叫做随机变量.

随机变量有有限和无限的区分，一般又根据变量的取值情况分成离散型随机变量和非离散型随机变量. 一切可能的取值能够按一定次序一一列举的随机变量，叫做离散型随机变量；如果可能的取值充满了一个区间，无法按次序一一列举，那么，这种随机变量就叫做非离散型随机变量.

二、拓展性问题

1. 有时可以看到这样的转盘游戏：如图 1，你只要出 1 元钱就可以随意地转动转盘，转盘停止

时指针落在哪个区域，你就按照这个区域所示的数字相应地顺时针跳过几格，然后按照下图所示的说明确定你的奖金是多少. 例如，当指针指向“2”区域的时候，你就向前跳过两个格到“5”，按奖金说明，“5”所示的奖金为 0.2 元，你就可得 0.2 元.



恭喜发财

“1” 0.1 元　“2” 0.3 元　“3” 0.1 元

“4” 10 元　“5” 0.2 元　“6” 5 元

图 1

请问这个游戏公平吗？能否用你所学的知识揭示其中的秘密？

【答案与提示】

这个游戏不公平. 我们可以用列举法求每种情况的概率.

指针指向的数字	最后跳到的数字
1	3
2	5
3	1
4	3
5	5
6	1

因为转盘是 6 等分的，因此指针指向每个数字的机会均等，但最后跳到的数字只有 1、3、5. 因此，本问题中，最终得到“1”“3”“5”奖的概率各为$\frac{1}{3}$，而最终得到“2”“4”“6”奖的概率全部为 0. “1”“3”“5”奖都是低于 1 元的低额奖金，“4”“6”奖金额数高，但根本无法得到. 因此这是一个骗局.

2. 同学们是否做过下面的游戏？如图 2，一个同学手中握着 4 根同样颜色、长短的细绳，只露出他们的头和尾，请另一个同学把 4 个头分成两组，把每组的两个头相接，4 个尾也分成两组，把每组的两个尾相接. 放开手后，如果 4 根细绳连成一个圆环，就算接绳子的同学获胜，否则，就算握绳子的同学获胜. 如果你做这个游戏，你会选择哪个角色呢？这个游戏公平吗？

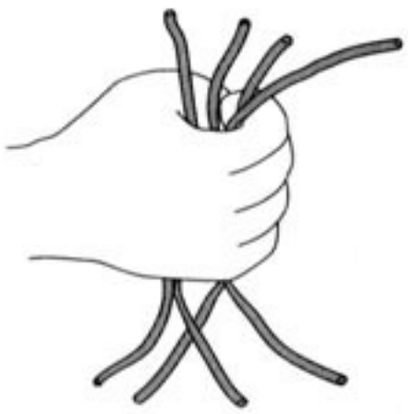


图 2

【答案与提示】

我会充当接绳子的角色. 因为接绳子的同学获胜的概率比较大. 我们可以用列举法求两人获胜的概率. 接绳子会均等地出现下面三种可能（图 3），后两种都能连成一个圆环.



(1)　　(2)　　(3)

图 3

因此接绳子的同学获胜的概率是$\frac{2}{3}$，而握绳子的同学获胜的概率是$\frac{1}{3}$. 这个游戏不公平.

3. 深夜，发生了一起出租车交通肇事逃逸事件. 该地区有两种出租车——绿色出租车和蓝色出租车，它们分别占整个地区出租车的 85%和 15%. 据现场目击证人说，肇事出租车为蓝色. 警方对证人的辨别能力做了测试，测得他的正确辨别率是 80%. 警方认为蓝色出租车涉嫌肇事的可能性大，你同意这一观点吗？请你帮助交警判断哪种出租车涉嫌肇事的可能性大，并说明理由.

【答案与提示】

绿色出租车涉嫌肇事的可能性大一些. 假设该地区有出租汽车 a 辆，则有 $0.85a$ 辆绿色车，$0.15a$ 辆蓝色车. 证人可能将 $0.17a$（即 $0.85a\times0.2$）辆绿色车看成蓝色车，证人能将 $0.12a$（即 $0.15a\times0.8$）辆蓝色车看准. 所以证人可能将 $0.29a$（即 $0.17a+0.12a$）辆车说成是蓝色车. 证人所说的蓝色肇事车，有 $0.17a\div0.29a=58.62\%$的可能是绿色车，有 $0.12a\div0.29a=41.38\%$的可能是蓝色车.

4. 三个球迷甲、乙、丙决定通过抓阄来决定谁得到仅有的一张球票. 他们准备了三张纸片，其中一张上画了个五星，另两张空白，团成外观一致的三个纸团. 抓中画有五星纸片的人才能得到球票. 刚要抓阄，甲问："谁先抓？先抓的人会不会抓中的机会比别人大？"你认为他的怀疑有没有道理？谈谈你的想法和原因.

【答案与提示】

甲的怀疑没有道理，先抓后抓抓中的机会是一样的. 我们用树形图来列举结果.

甲	乙	丙	得票者
五星纸片	空白纸片一	空白纸片二	甲
	空白纸片二	空白纸片一	甲
空白纸片一	五星纸片	空白纸片二	乙
	空白纸片二	五星纸片	丙
空白纸片二	空白纸片一	五星纸片	丙
	五星纸片	空白纸片一	乙

从图中发现，无论三个人谁先抓阄，抓到五星纸片的概率都是一样的，各为$\frac{1}{3}$.

5. 有两个白炽灯泡，能否通电发光的概率都是 50%. 如果要求至少有一个灯泡发亮，你认为图 4 中的两种连接电路的方式哪一种更保险？

【答案与提示】

并联方式更保险.

因为在串联方式中会出现以下四种情况，

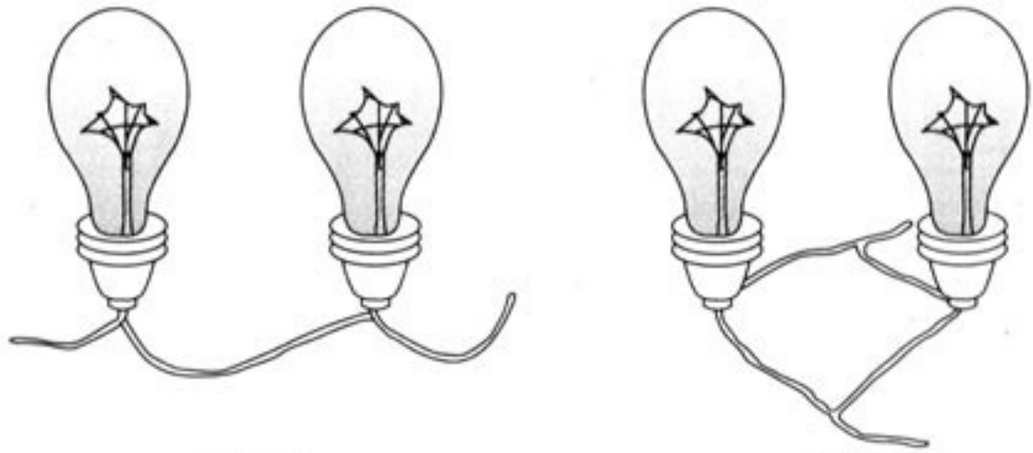
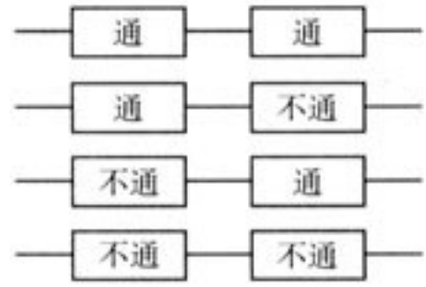
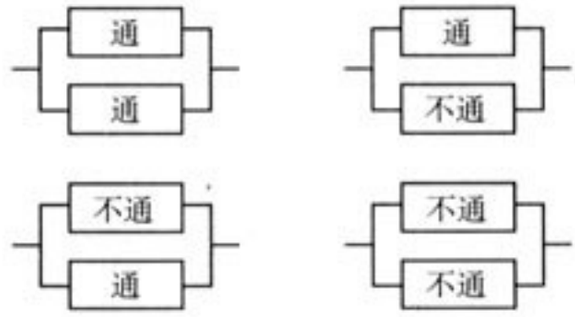


图 4



其中只有第一种两个灯泡都亮，第二、三两种情况因为有一个灯泡不通电，因此整个电路不通，另一个灯泡也不会亮. 因此在串联方式中电灯亮的概率是$\frac{1}{4}$.

在并联电路中会出现以下四种情况，



其中只有第四种两个灯泡都不亮，因此在并联方式中至少一个电灯亮的概率是$\frac{3}{4}$.

6. 有一种袋装食品的有奖销售办法是：每袋食品中装有一张小卡片，每张卡片上写着一个字，分别是“幸”“运”“星”，如能集齐这不同的三个字，则可领取奖品一份. 假设厂商在包装食品时放入袋中每种卡片的总张数相同，试估计一次购买四袋这种食品的中奖概率.

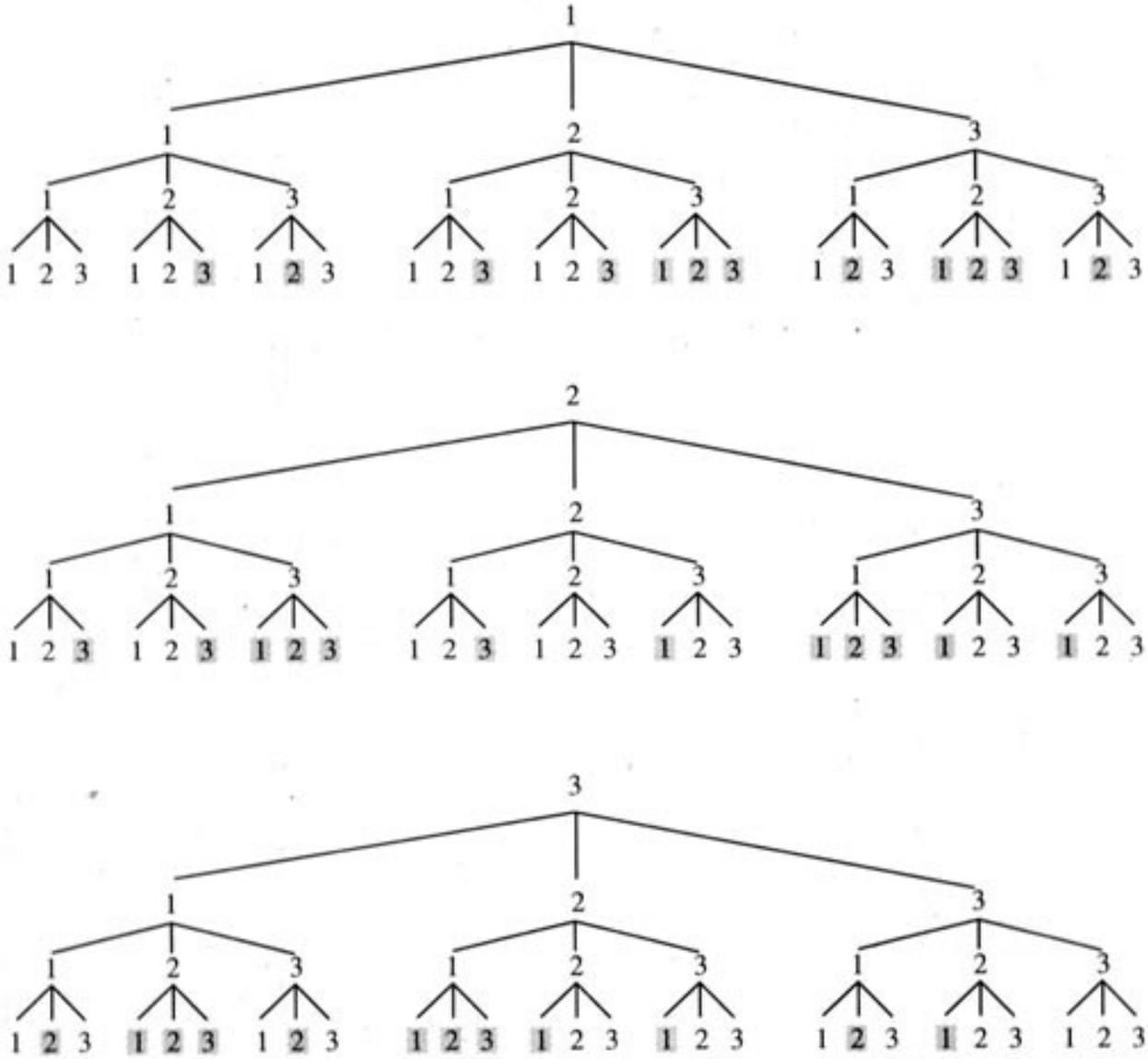
【答案与提示】

一次购买四袋这种食品的中奖概率为$\frac{4}{9}$.

我们用树形图来列举结果，其中数字 1，2，3 分别表示“幸”“运”“星”三个字.

其中有阴影的是中奖的部分.

7. 姐弟俩分别想看不同频道的电视节目，争执不下. 正巧父亲下班，为他们调解说：“我拿两个骰子，各掷一次. 点数和为 5 的倍数时，听姐姐的；点数和为 4 的倍数时，听弟弟的.”请问父亲的调解公平吗？他更偏袒谁呢？



（第 6 题）

【答案与提示】

父亲的调解不公平. 他更偏袒弟弟.

我们用表格来列举结果：

下图阴影部分为 4 的倍数

(1, 1)	(1, 2)	**(1, 3)**	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2, 1)	**(2, 2)**	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	**(2, 6)**
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	**(3, 5)**	(3, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	**(4, 4)**	(4, 5)	(4, 6)
(5, 1)	(5, 2)	**(5, 3)**	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 1)	**(6, 2)**	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	**(6, 6)**

可知“点数和为 4 的倍数”的概率为$\frac{1}{4}$.

下图阴影部分为 5 的倍数

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

可知“点数和为5的倍数”的概率为$\frac{7}{36}$，$\frac{7}{36}<\frac{1}{4}$.

Ⅵ 评价建议与测试题

一、评价建议

1. 要关注学生的概率应用意识

在本章的学习中，会遇到很多与日常生活密切相关的问题. 要关注学生能否主动应用所学知识去解决问题，切忌仅仅应用以往的生活经验或直觉去估计问题.

2. 要关注学生求解概率问题的过程

在求解概率问题的过程中，要注意评价学生解决问题的方法是否带有普遍性，解决问题的过程中思路是否正确、清晰、明了，要防止只猜得数忽略过程的解答方式.

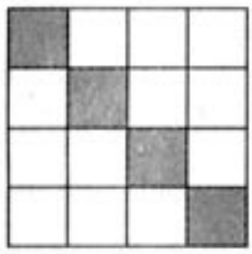
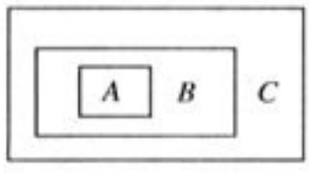
3. 要关注学生对于知识的理解和应用

对于掌握本章知识技能的评价不应当在于能否背诵出相关的概念或性质，而应注意考查学生的理解水平，特别要通过应用知识分析解决问题来考查，看他们能否利用所学知识解释现实生活中的一些实际问题等等.

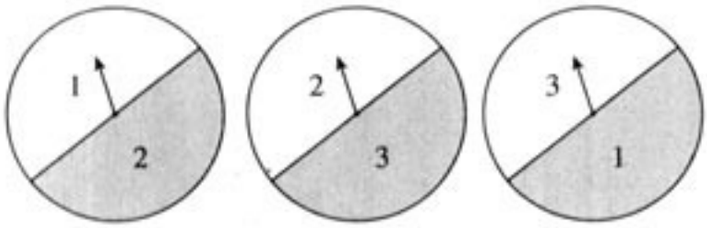
二、测试题（时间：45分　满分：100分）

内　容	设计意图
一、**选择题**（每小题5分，共25分）： 1. 下列事件中是必然发生的事件是（　　） (A) 平移后的图形与原来图形对应线段相等. (B) 在一个等式两边同时除以同一个数，结果仍是等式. (C) 一个不透明的袋子中有6个红球1个黑球，每次摸出1个球然后放回搅匀，摸7次时一定会摸出一个黑球. (D) 任意一个五边形外角和等于540°. 2. 下列说法错误的是（　　） (A) 必然发生的事件发生的概率为1. (B) 不可能发生的事件发生的概率为0. (C) 不确定事件发生的概率为0.	本题考查学生对“必然发生的事件”的理解. 本题考查学生对概率概念的认识和理解.

续表

内　容	设计意图
(D) 随机事件发生的概率介于0和1之间.	
3. 向空中随意抛掷两枚硬币，则下列事件发生的概率大的是（　　） (A) 两正面都朝上. (B) 两背面都朝上. (C) 一个正面朝上，另一个背面朝上. (D) 三种情况的可能性一样大.	本题考查学生计算简单事件发生的概率，加深学生对掷硬币问题的认识.
4. 假如一个儿童走在如图所示的地板上，当他随意停下时，他最终停在地板上阴影部分的概率是（　　）  (第4题) (A) $\frac{1}{2}$. (B) $\frac{1}{8}$. (C) $\frac{1}{5}$. (D) $\frac{1}{4}$.	本题考查学生计算简单事件发生的概率及分析问题的能力. 本题考查学生在具体情境中了解概率的意义，运用列举法计算简单事件发生的概率.
5. 袋中装有 a 个白球，b 个红球，c 个黄球，则任意摸出一个球是红球的概率是（　　） (A) $\frac{b}{a+c}$. (B) $\frac{b}{a+b+c}$. (C) $\frac{a+c}{a+b+c}$. (D) 无法确定.	
二、填空题（每小题5分，共25分）： 6. 某班级中有男生和女生各若干，若随机抽取1人，抽到男生的概率是 $\frac{4}{5}$，则抽到女生的概率是_____.	本题考查学生对对应事件的概率的理解和应用.
7. 用计算器模拟“投骰子”试验，研究出现“2”的倍数的概率，则要在1到6的范围内产生随机数，那么产生的随机数是_____时，代表出现了“2”的倍数，否则不是.	本题考查学生会通过试验，获得事件发生的概率，知道大量重复实验时频率可作为事件发生概率的估计值.
8. 如图，一点随机地落在A，B，C三个区域中的某一个之中，你认为这个点所落在的区域可能性最大的是_____.  (第8题)	本题考查学生计算简单事件发生的概率及分析涉及几何图形的概率问题的能力.
9. 从一副没有“大小王”的扑克牌中随机地抽取一张，点数为“5”的概率是_____.	本题考查学生用列举法求概率的能力.
10. 在□a^2□4a□4的空格中，任意填上“+”或“−”，共得到_____种不同的代数式，能够构成完全平方式的概率是_____.	本题考查学生在具体情境中了解概率的意义，运用列举法计算简单事件发生的概率的能力.
三、解答题： 11.（本题24分）投掷两颗普通的正方体骰子，求： (1) 点数之和为“11”的概率； (2) 点数之和为“7”的概率； (3) 点数之和为“3的倍数”的概率.	本题考查学生在具体情境中体会概率的意义，能计算简单事件发生的概率.

续表

内　容	设计意图
12.（本题 18 分）布袋中有红、黄、蓝三种颜色的球各一个， （1）从中先摸出一个球，记录下它的颜色，将它放回布袋，搅匀，再摸出一个球，记录下颜色．求得到的两个颜色中有“一红一黄”的概率； （2）如果摸出第一个球之后不放回布袋，再摸第二个球，这时得到的两个颜色中有“一红一黄”的概率是多少？	本题考查学生用列举法求概率的能力，加深学生对“有无放回”问题的认识．
13.（本题 18 分）这是一个两人转盘游戏，准备如图三个可以自由转动的转盘，甲、乙两人中甲转动转盘，乙记录指针停下时所指的数字，当三个数字中有数字是相同的时，就算甲赢，否则就算乙赢．请判断这个游戏是否公平．  （第 13 题）	本题考查学生用树形图的方法求概率，会运用概率的知识，判断游戏规则是否公平的能力．

参考答案

1. A.

2. C.

3. C.

4. D.

5. B.

6. $\frac{1}{5}$.

7. 2、4、6.

8. C.

9. $\frac{1}{13}$.

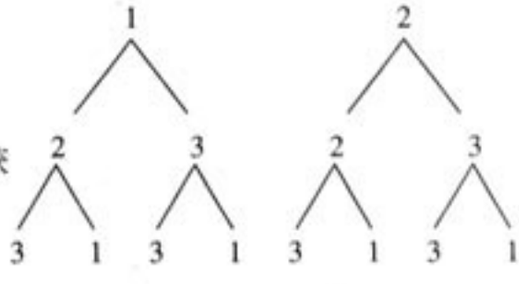
10. 8，$\frac{1}{4}$.

11.（1）$\frac{1}{18}$；（2）$\frac{1}{6}$；（3）$\frac{1}{3}$.

12.（1）$\frac{2}{9}$；（2）$\frac{1}{3}$.

13. 不公平．由树形图可知：

8 种结果中，6 种含有相同数字，因此甲获胜的概率是$\frac{2}{3}$，乙获胜的概率是$\frac{1}{3}$．这个游戏不公平．



（第 13 题）