义务教育教科书

数学

SHUXUE

教师用书

JIAOSHI YONGSHU

七年级 下册

北京教育科学研究院 编

北京出版集团公司
北 京 出 版 社

北京出版社

主　　编：王燕春
副　主　编：康　杰
本册编写人员：程　舟　徐晓阳　贺　捷　俞京宁
雷文虹　高　欣　冯　刚　朱　艳

义务教育教科书
数学　教师用书
七年级　下册
SHUXUE　JIAOSHI YONGSHU
QINIANJI　XIACE
北京教育科学研究院　编
*
北京出版集团公司
北　京　出　版　社　出版
（北京北三环中路6号）
邮政编码：100120
网　　址：www.bph.com.cn
北京出版集团公司总发行
北京市海淀区四季青印刷厂印刷
*
787毫米×1092毫米　16开本　16印张　312.5千字
2013年12月第1版　2015年1月第2次印刷
印数1—1 260
ISBN 978-7-200-10166-9
定价：34.00元
质量监督电话：010-58572293　58572393

目 录

第四章　一元一次不等式和一元一次不等式组 …… 1
教学目标 …… 1
教材分析和教学建议 …… 2
教材及其参考信息 …… 5
一　不等式与不等式的基本性质 …… 6
4.1　不等式 …… 6
4.2　不等式的基本性质 …… 8
习题 4－1 …… 11
二　一元一次不等式 …… 12
4.3　不等式的解集 …… 12
4.4　一元一次不等式及其解法 …… 15
习题 4－2 …… 18
三　一元一次不等式组 …… 20
4.5　一元一次不等式组及其解法 …… 20
习题 4－3 …… 23
综合与实践　如何上网最划算 …… 25
阅读理解　符号“＞”和“＜”的由来 …… 25
回顾与整理 …… 27
复习题 …… 29
部分习题答案或提示 …… 31
第五章　二元一次方程组 …… 35
教学目标 …… 35
教材分析和教学建议 …… 36
教材及其参考信息 …… 41
一　二元一次方程和二元一次方程组 …… 42

5.1 二元一次方程和它的解 …… 42
5.2 二元一次方程组和它的解 …… 44
习题5－1 …… 47
二 二元一次方程组的解法 …… 49
5.3 用代入消元法解二元一次方程组 …… 49
5.4 用加减消元法解二元一次方程组 …… 52
*5.5 三元一次方程组 …… 56
习题5－2 …… 59
5.6 二元一次方程组的应用 …… 61
习题5－3 …… 65
阅读理解 我国古代有趣的百鸡问题 …… 66
阅读理解 矩阵的简单介绍 …… 68
回顾与整理 …… 71
复习题 …… 73
部分习题答案或提示 …… 75
第六章 整式的运算 …… 83
教学目标 …… 83
教材分析和教学建议 …… 84
教材及其参考信息 …… 87
一 整式的加减法 …… 88
6.1 整式的加减法 …… 88
习题6－1 …… 91
二 整式的乘法 …… 92
6.2 幂的运算 …… 92
习题6－2 …… 98
6.3 整式的乘法 …… 99
习题6－3 …… 107
6.4 乘法公式 …… 110
习题6－4 …… 117
三 整式的除法 …… 119
6.5 整式的除法 …… 119
习题6－5 …… 125
阅读理解 杨辉三角 …… 126

回顾与整理 …… 128
复习题 …… 130
部分习题答案或提示 …… 133
第七章 观察、猜想与证明 …… 139
教学目标 …… 139
教材分析和教学建议 …… 140
教材及其参考信息 …… 145
一 观察与实验 …… 146
7.1 观察 …… 146
7.2 实验 …… 148
习题 7－1 …… 149
二 归纳与类比 …… 151
7.3 归纳 …… 151
7.4 类比 …… 155
习题 7－2 …… 156
三 猜想与证明 …… 158
7.5 猜想 …… 158
7.6 证明 …… 159
习题 7－3 …… 164
四 简单几何图形中的推理 …… 165
7.7 几种简单几何图形及其推理 …… 165
习题 7－4 …… 174
综合与实践 面积怎么丢失了 …… 176
阅读理解 从两架飞机相撞谈直觉思维 …… 177
阅读理解 从鲁班发明锯条谈类比推理 …… 178
回顾与整理 …… 179
复习题 …… 180
部分习题答案或提示 …… 183
第八章 因式分解 …… 191
教学目标 …… 191
教材分析和教学建议 …… 192
教材及其参考信息 …… 195
8.1 因式分解 …… 196

8.2 提公因式法 …… 197
习题 8－1 …… 200
8.3 公式法 …… 201
探究学习 对二次三项式因式分解的探究 …… 205
习题 8－2 …… 206
阅读理解 爱因斯坦的速算 …… 207
回顾与整理 …… 208
复习题 …… 209
部分习题答案或提示 …… 211
第九章 数据的收集与表示 …… 213
教学目标 …… 213
教材分析和教学建议 …… 214
教材及其参考信息 …… 217
一 数据的收集、整理与表示 …… 218
9.1 总体与样本 …… 218
9.2 数据的收集与整理 …… 219
综合与实践 运动会成绩整理 …… 221
9.3 数据的表示——扇形统计图 …… 223
9.4 用计算机绘制统计图 …… 225
习题 9－1 …… 226
二 平均数、众数和中位数 …… 227
9.5 平均数 …… 227
9.6 众数和中位数 …… 231
习题 9－2 …… 235
综合与实践 利用树叶的特征对树木分类 …… 236
阅读理解 谁的解法对 …… 236
回顾与整理 …… 238
复习题 …… 239
部分习题答案或提示 …… 241
附录 图形计算器支持案例 …… 245



第四章

一元一次不等式和一元一次不等式组

教学目标

1. 结合具体问题，了解不等式的意义，探索不等式的基本性质.

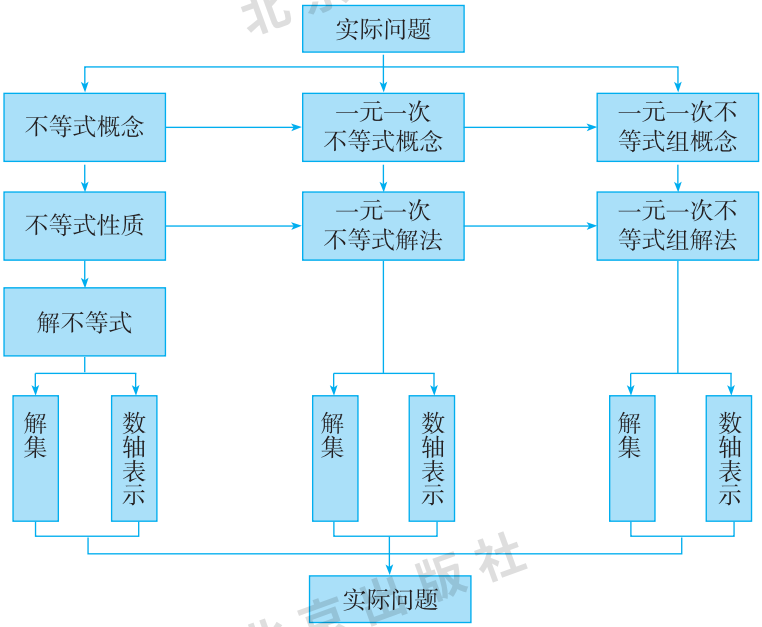
2. 能解数字系数的一元一次不等式，并能在数轴上表示出解集；会用数轴确定由两个一元一次不等式组成的不等式组的解集.

3. 能根据具体问题中的数量关系，列出一元一次不等式，解决简单的问题.

北京出版社

教材分析和教学建议

1. 主要内容及其地位作用.



本章首先以学生熟悉的生活实际为背景，让学生认识到不等关系和相等关系都是现实生活中重要的数量关系；然后在学生已有的等式性质等学习经验的基础上，探索不等式的基本性质；接着在与一元一次方程的类比中，研究了一元一次不等式的解法及其简单应用；最后在实际的问题情境中，抽象出一元一次不等式组的概念和解法.

本章的主要内容是一元一次不等式和一元一次不等式组的解法及其在简单实际问题中的应用. 这部分知识是学生在学习了有理数大小的比较、等式及其性质和解一元一次方程的基础上，进一步探索数量关系的重要内容. 应用不等式的基本性质解一元一次不等式是一项基本技能，是研究一元一次不等式组以及其他不等式的基础，也是以后学习一元二次方程、函数等内容的基础.

2. 本章编写特点.

本章教材注重和学生已有的学习经验及生活实际的联系，不论是在不等式相关概念的学习中，还是在用一元一次不等式解决问题中，都注重让学生经历和体会“从实际问题中抽象出数学模型，并回到实际问题中解释和检验”的过程，使学生掌握基本的基础知识与技能，激发学生进一步学习的兴趣与动机. 通过“思考”、“探索”、“交流”等栏目，为学生提供合作交流的机会，引导学生进行观察、实验、类比、猜测、验证等自主性的探究活动. 帮助学生初步掌握观察、归纳、类比等一般的学习方法，

进一步提高分析问题和解决问题的能力．本章知识结构与一元一次方程的相应部分类似，教材在各概念的引入、展开时注意了类比方程、等式的性质等来讨论不等式、不等式的性质等，反映了知识间的横向联系，突出了不等式的特点．

3．教学重点、难点．

本章的重点是一元一次不等式的解法．探索不等式的基本性质，研究不等式的解集及其在数轴上的表示法，都是为学习一元一次不等式的解法做准备．学会了一元一次不等式的解法，又可以进一步学习一元一次不等式组的解法，因此它还有着承上启下的作用．

本章的难点是理解不等式和不等式组的解集，不等式的基本性质 3 的应用，以及运用不等式或不等式组解决具体问题．难点的形成主要是由于不等式与方程这两部分内容的相同点较多，学生容易忽视它们的不同点．因而在解不等式时，当不等式的两边都乘或除以同一个负数时，常常忘记改变不等号的方向；对于求出的不等式的解集，也往往不能真正理解它的含义，在根据具体问题中的数量关系列一元一次不等式或一元一次不等式组时也常常简单套用方程的方法，忽视不等关系中的约束条件．因此，运用数学中归纳、类比等方法使学生弄清不等式与方程这两部分内容的相同点与不同点是本章教学的关键．

4．教学建议．

（1）注重课程目标的整体实现．

在教学中教师要重视数学与实际的关系，使学生在熟悉的实际问题中，在已有的学习经验的基础上，经历“尝试—猜想—验证”的探索过程，在学习和掌握不等式概念、一元一次不等式（组）的解法及解集的几何表示等基本知识和技能的同时引导学生通过独立思考或者合作交流感悟数学的价值，激发学生的兴趣，培养良好的习惯，促进知识技能、数学思考、问题解决、情感态度课程目标的整体实现．

（2）注重新旧知识的联系与对比．

由于不等式与等式、方程等旧知识的联系十分密切，学生在学习本章内容时比较容易将本章内容纳入到已经形成的数学认知结构中去．所以，教师在教学本章的有关内容时，应努力揭示不等式与等式、方程等知识的内在联系，类比等式、方程进行不等式教学．例如研究“不等式的基本性质”时，可以类比等式的基本性质并比较异同；进行“一元一次不等式”教学时可与一元一次方程进行类比．体会知识之间的内在联系，体会不等式与方程的联系与差异，进而从整体上把握知识，加强对知识的整体认识，不断完善和优化学生的认知结构，发展学生的辩证思维．

（3）注重体现数学的思想和方法．

本章内容中蕴含了大量的数学思想和方法．教学中要注重体现列不等式（组）中

蕴含的建模思想和解不等式（组）中蕴含的化归思想，渗透函数思想和数形结合的思想，使学生经历建立一元一次不等式（组）这样的数学模型并应用它解决实际问题的过程，体会不等式（组）的特点和作用，并从中积累基本经验，掌握运用它们解决问题的一般方法，提高分析问题、解决问题的能力，增强创新精神和应用数学的意识.

（4）注重发挥学生在学习活动中的主体作用.

教学中可以借助教材中提供的问题情境，根据学生的实际情况，努力把学习素材用最适合于学生进行观察、发现、探究的方式展开. 要尊重学生的个体差异，关注学生的学习情感和自信心的建立. 要给学生留有充足的时间和思考空间，不要急于求成，包办代替. 要适时引导学生主动地从事观察、试验、猜测、验证、推理与交流等数学活动，发展学生的分析问题、解决问题的能力，形成自己对数学知识的理解和有效的学习策略.

（5）注重对学习过程的评价.

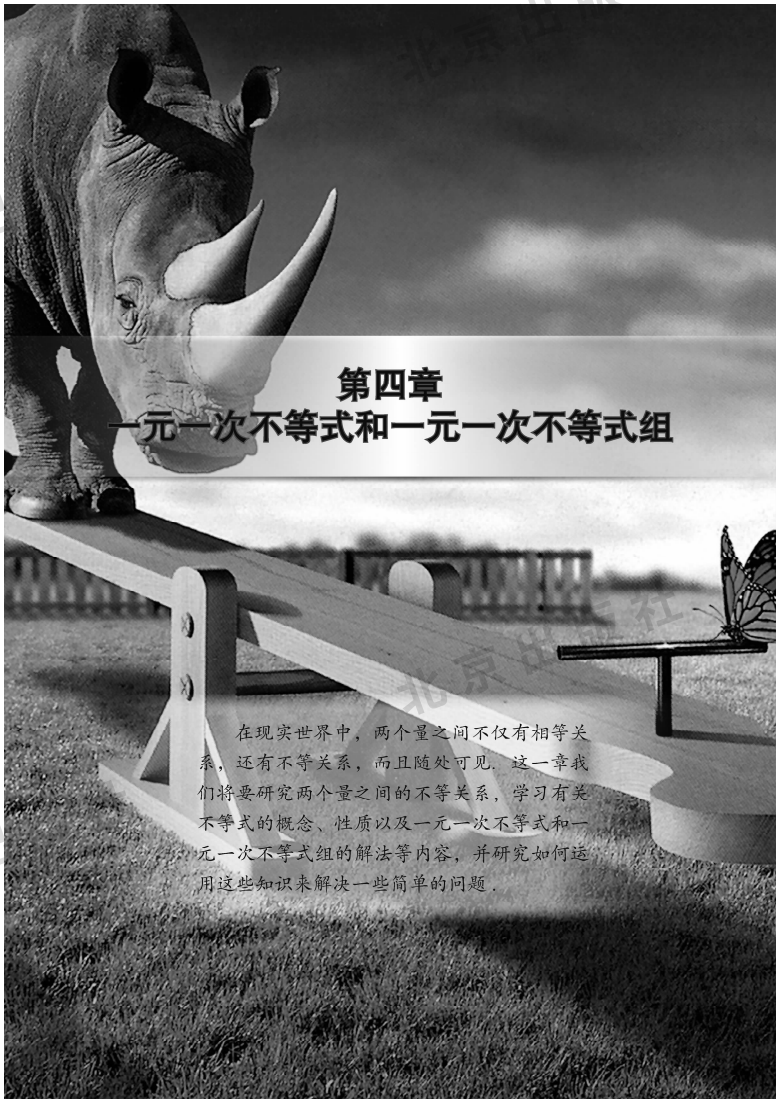
在教学过程中，教师应抓住重点，自始至终关注学生求解不等式（组）的基本训练，但不适宜进行大容量的训练. 在关注学生解题结果的同时更要关注学生将实际问题转化为不等式（组）模型的能力. 对学生在解答问题的过程中所表现出的各种能力教师都要给予充分的肯定，使他们体验到学习的快乐和成功，提高其学习数学的积极性和自觉性，让他们在快乐和成功中愉快地学习.

5. 课时安排.

本章教学约需 10 课时，具体分配如下（仅供参考）：

4.1　不等式	约 1 课时
4.2　不等式的基本性质	约 1 课时
4.3　不等式的解集	约 1 课时
4.4　一元一次不等式及其解法	约 2 课时
4.5　一元一次不等式组及其解法	约 1 课时
总结与复习	约 2 课时
机动	约 2 课时

教材及其参考信息


第四章
一元一次不等式和一元一次不等式组
在现实世界中，两个量之间不仅有相等关系，还有不等关系，而且随处可见．这一章我们将要研究两个量之间的不等关系，学习有关不等式的概念、性质以及一元一次不等式和一元一次不等式组的解法等内容，并研究如何运用这些知识来解决一些简单的问题．

[1] 这里应该强调用不等号既可以表示有理数之间的不等关系，又可以表示含有字母的代数式之间的不等关系.

一、不等式与不等式的基本性质

4.1 不等式

思考

1. 你能举出生活中一些表示不等关系的例子吗？
2. 你知道不等关系怎样用数学符号表示吗？

符号“$>$”、“$<$”、“$\neq$”都是不等号，用它们可以分别表示两个量或两个表达式之间大于、小于、不等于的数量关系．例如 $4>-1$，$2x>5$，$a\neq b$，$5-9<3+7$ 等．用不等号表示不等关系的式子叫做不等式.[1]

比如，太阳的体积比地球大，如果用 a，b 分别表示太阳、地球的体积，那么就可表示成：$a>b$.

又如，2011 年底北京地区注册博物馆数量已超过 159 家，如果用 n 表示博物馆数，那么就可表示成：$n>159$.

我们还经常把大于号“$>$”和等号“$=$”结合起来使用，写成“$\geqslant$”，读作“大于或等于”，也就是“不小于”；同样地，符号“$\leqslant$”读作“小于或等于”，也就是“不大于”．用符号“$\geqslant$”或“$\leqslant$”连接起来的式子也叫做不等式.

探索

1. 在电脑前连续工作不宜超过 1 小时，怎样用不等式表示？

2. 如图 4－1，高速公路上对机动车时速的限制怎样用不等式表示？



图 4－1

本节首先通过“思考”的栏目，让学生在讨论、交流的过程中引导学生对现实生活中存在大量不相等的数量关系进行认识；然后在已有知识的基础上，引出不等式的概念；接着通过“探索”及两个例题使学生初步学会把实际生活中的问题抽象为用数学不等式表示（建立数学模型）的方法，为后面运用一元一次不等式或一元一次不等式组解决实际问题做好一定的准备.

1．学生在以前的学习中，对于有理数之间的大小比较及用含有数字的不等式表示这些数量关系已经有所了解．但对于含有未知数的不等式，学生还是第一次接触，所以要让学生从生活中熟悉的问题去充分地感知.

例 1 用不等式表示下面的不等关系：

(1) 张平的年龄比杨洋大；

(2) 某种电梯标明“载客不超过 13 人”；

(3) 北京某一天的最低气温是 -3 ℃，最高气温是 12 ℃.

解：(1) 设张平的年龄为 a，杨洋的年龄为 b.

张平的年龄比杨洋大，用不等式表示为

$$a > b.$$

(2) 设电梯的载客人数为 x.

载客不超过 13 人，用不等式表示为

$$x \leqslant 13.$$

(3) 设北京某一天的气温为 x ℃.

最低气温是 -3 ℃，最高气温是 12 ℃，用不等式表示为

$$-3 \leqslant x \leqslant 12.$$

例 2 用不等式表示下列关系：

(1) a 的一半大于 3；　　(2) x 与 6 的差是负数；

(3) x 的 5 倍不小于 20；　　(4) b 的 $\frac{1}{5}$ 与 7 的和是非正数.

解：(1) $\frac{a}{2} > 3$；　　(2) $x - 6 < 0$；

(3) $5x \geqslant 20$；　　(4) $\frac{1}{5}b + 7 \leqslant 0$.

交流

空气质量指数（Air Quality Index 简称 AQI）是描述空气质量的一个标准. 当 AQI 的值在 0 和 50 之间时，空气质量状况为优，基本无空气污染，人们可正常活动. 某市去年空气质量为优的天数占全年天数的 60%，通过节能减排，今年要实现超过 80% 的目标，需要增加空气质量为优的天数设为 x 天，试用不等式表示这个关系.

练习

1. 用不等式表示下列关系：

(1) 哥哥存款 x 元，弟弟存款 y 元，兄弟二人的存款总数少于 1 000 元；

练习答案：

1. (1) $x + y < 1\,000$；

2. 要注意引导学生把实际问题中一些“大于”、“超过”、“不超过”等表示不等关系的词语和“非负数”、“不大于”等数学术语，准确“翻译”为数学符号.

3. 本节最后“交流”栏目中的内容，是学生熟悉并在日常生活中可能遇到的实际问题，学生会很感兴趣，意在让学生进一步感受生活中存在的不等关系，提高学生的应用意识.

（2）$40+x>13+x$.

2. （1）$a>0$；

（2）$b\geqslant 0$；

（3）$x+8<6$；

（4）$\frac{y}{2}>6$.

3. （1）$6+5<9+5$；

（2）$6+(-3)<9+(-3)$；

（3）$6\times 5<9\times 5$；

（4）$6\div 3<9\div 3$；

（5）$6\times(-5)>9\times(-5)$；

（6）$6\div(-3)>9\div(-3)$.

4. 略.

［1］此题为研究不等式的基本性质做准备.

（2）今年父亲的年龄是 40 岁，儿子的年龄是 13 岁，x 年后父亲的年龄与儿子的年龄的关系.

2. 用不等式表示：

（1）a 是正数；　　（2）b 不是负数；

（3）x 与 8 的和小于 6；　　（4）y 的一半大于 6.

3. 用“>”或“<”填空：[1]

（1）$6+5$____$9+5$；　　（2）$6+(-3)$____$9+(-3)$；

（3）6×5____9×5；　　（4）$6\div 3$____$9\div 3$；

（5）$6\times(-5)$____$9\times(-5)$；　　（6）$6\div(-3)$____$9\div(-3)$.

4. 举出生活中的两个不等关系，并用不等式表示.

4.2 不等式的基本性质

我们学习过等式的性质，不等式是否也有类似的性质呢？

在 4.1 节的练习中我们练习过用“>”或“<”填空：

（1）$6+5$____$9+5$；　　（2）$6+(-3)$____$9+(-3)$；

（3）6×5____9×5；　　（4）$6\div 3$____$9\div 3$；

（5）$6\times(-5)$____$9\times(-5)$；　　（6）$6\div(-3)$____$9\div(-3)$.

从中我们可以看到，对于不等式 $6<9$：

（1）当不等式两边同时加上 5 时，不等号的方向_____；

（2）当不等式两边同时加上 -3 时，不等号的方向_____；

（3）当不等式两边同时乘 5（即 $+5$）时，不等号的方向_____；

（4）当不等式两边同时除以 3（即 $+3$）时，不等号的方向_____；

（5）当不等式两边同时乘 -5 时，不等号的方向_____；

（6）当不等式两边同时除以 -3 时，不等号的方向_____.

探索

请你做一些类似的计算进行比较，并从中概括出不等式的性质.

不等式的基本性质是学生今后进一步学习的基础，是求解不等式的依据. 教学中要注意让学生自主探索，结合前面的练习做好适当的渗透和铺垫. 可根据学生的实际情况，联系等式的基本性质，采用在天平上做实验、计算、借助数轴观察等多种方法，让学生经历“尝试 — 猜想 — 验证”的探索过程. 比如：

方法一：

在一个天平的两端分别放上两个不同质量（$a>b$）的砝码，显然天平会倾斜. 现在请按照下面的步骤来操作：

（1）两边同时加上相同质量的砝码 c，则原来低的一端_____，原来高的一端_____，即 $a+c$ _____ $b+c$.

（2）两边同时减去相同质量的砝码 c，则原来低的一端_____，原来高的一端_____，即 $a-c$ _____ $b-c$.

一般地，不等式具有下面的基本性质：

不等式的基本性质

1. 不等式两边都加上（或减去）同一个数或同一个整式，不等号的方向不变；
2. 不等式两边都乘（或除以）同一个正数，不等号的方向不变；
3. 不等式两边都乘（或除以）同一个负数，不等号的方向改变.

思考

1. 不等式的基本性质和等式的基本性质有什么相同之处，有什么不同之处？
2. 怎样用数学式子表示不等式的这些性质？

不等式的基本性质可表示为：

1. 如果 $a>b$，那么 $a\pm c>b\pm c$；
2. 如果 $a>b$，且 $c>0$，那么 $ac>bc$（或 $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$）；
3. 如果 $a>b$，且 $c<0$，那么 $ac<bc$（或 $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$）.

例 1 设 $a>b$，用不等号连接下列各题中的两个式子，并说明理由：[1]

（1）$a-3$ 与 $b-3$；　（2）$2a$ 与 $2b$；　（3）$-\frac{1}{2}a$ 与 $-\frac{1}{2}b$.

解：（1）根据不等式的基本性质 1，在不等式 $a>b$ 的两边都加上 -3，不等号的方向不变，所以得

$$a-3>b-3.$$

（2）根据不等式的基本性质 2，在不等式 $a>b$ 的两边都乘 2，不等号的方向不变，所以得

$$2a>2b.$$

（3）根据不等式的基本性质 3，在不等式 $a>b$ 的两边都乘 $-\frac{1}{2}$，不等号的方向改变，所以得

$$-\frac{1}{2}a<-\frac{1}{2}b.$$

乘负数时别忘了改变不等号的方向！

[1] 例 1 中因为 a，b 是抽象的字母，并包含着推理，教学时要先引导学生观察不等式的两边 a 与 b 是通过什么运算变形为 $a-3$ 与 $b-3$，$2a$ 与 $2b$，$-\frac{1}{2}a$ 与 $-\frac{1}{2}b$ 的. 进而再问不等号的方向改变不改变，为什么？让学生明白不等式的变形一定要根据不等式的基本性质.

方法二：

（1）填写下表，比较大小并观察不等号方向的变化情况.

数　值			比较大小		
a	b	c	a 与 b	$a+c$ 与 $b+c$	$a-c$ 与 $b-c$
7	5	6	$7>5$	$13>11$	$1>-1$
7	5	-3			
7	5				
-0.5	6				
…	…	…			

［1］例2实际上就是运用不等式的基本性质求不等式的解集，但此时由于还没讲这些概念，所以只提运用不等式的基本性质将不等式变形．在变形中关键在于启发学生分辨情况，正确应用不等式的基本性质．

例2 根据不等式的基本性质，把下列不等式化成 $x<a$ 或 $x>a$ 的形式：[1]

（1）$x-1<1$；　　（2）$6x>5x-1$；

（3）$\frac{1}{3}x>5$；　　（4）$-2x<-3$．

解：（1）根据不等式的基本性质1，不等式的两边都加上1，不等号的方向不变，得

$$x<2.$$

（2）根据不等式的基本性质1，不等式的两边都减去 $5x$，不等号的方向不变，得

$$x>-1.$$

（3）根据不等式的基本性质2，不等式的两边都乘3，不等号的方向不变，得

$$x>15.$$

（4）根据不等式的基本性质3，不等式的两边都除以 -2，不等号的方向改变，得

$$x>\frac{3}{2}.$$

不等式的两边都除以 -2，不等号的方向要改变！

交流

如果 a，b，c 为有理数，其中 $c\neq 0$，而且 $a>b>c$，下列不等式中哪些正确？

（1）$ab>bc$；　　（2）$a+b>b+c$；　　（3）$\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$．

练习

1. 设 $a<b$，用“$<$”或“$>$”填空：

（1）$a+c$____$b+c$；　　（2）$4a$____$4b$；

（3）$-7a$____$-7b$；　　（4）$\frac{a}{6}$____$\frac{b}{6}$．

练习答案：

1. （1）$a+c<b+c$；

（2）$4a<4b$；

（3）$-7a>-7b$；

（4）$\frac{a}{6}<\frac{b}{6}$．

（2）填写下表，比较大小并观察不等号方向的变化情况．

数　值			比较大小		
a	b	c（$c\neq 0$）	a 与 b	ac 与 bc	$\frac{a}{c}$ 与 $\frac{b}{c}$
8	2	3	$8>2$	$24>6$	$\frac{8}{3}>\frac{2}{3}$
8	2	0.8			
8	2	$\frac{1}{9}$			
8	2	-3			
8	2	-0.05			
-9	-5	-2			
…	…	…			

2. 根据不等式的基本性质，把下列不等式化成 $x<a$ 或 $x>a$ 的形式：

（1）$x-2<3$；　　（2）$4x>3x-5$；

（3）$\frac{1}{10}x<\frac{7}{10}$；　　（4）$-8x<10$.

3. 当 $x=-3$，$x=0$，$x=2$，$x=7$，$x=8$ 时，不等式 $x-2<5$ 分别成立吗？[1]

习 题 4-1

★基础★

1. 根据下列数量关系，列出不等式：

（1）$5x$ 与 4 的和是负数；

（2）x 小于它的相反数；

（3）y 的 $\frac{1}{4}$ 与 x 的 $\frac{1}{3}$ 的和不大于 0；

（4）m 的 3 倍大于或等于 10；

（5）$2a$ 与 $3b$ 的差是非负数.

2. 用不等式表示下列不等关系：

（1）学生甲的身高是 a 厘米，学生乙的身高是 b 厘米，甲与乙身高的差是正数.

（2）姐姐每月上网 20 小时，妹妹每月上网 x 小时，妹妹每月上网的时间超过了姐姐上网时间的 2 倍.

（3）小明家每月的电话费 m 元在 150 元以内（不含 150 元）.

3. 设 $a>b$，用“$>$”或“$<$”填空：

（1）$a-\frac{5}{3}$ ____ $b-\frac{5}{3}$；　　（2）$a+c$ ____ $b+c$；

（3）$26a$ ____ $26b$；　　（4）$-\frac{2}{3}a$ ____ $-\frac{2}{3}b$.

4. 根据不等式的基本性质，把下列不等式化成 $x<a$ 或 $x>a$ 的形式：

（1）$x+2>1$；　　（2）$10+x<9$；

（3）$6-x>5$；　　（4）$2x>-3$.

5. 下列数值中哪些能使不等式 $x+3<6$ 成立？

0，-2.5，-4，3，π，4，4.5.

2. （1）$x<5$；

（2）$x>-5$；

（3）$x<7$；

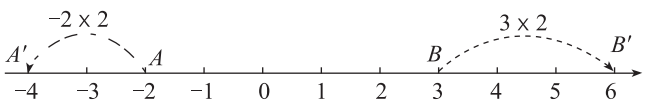
（4）$x>-\frac{5}{4}$.

3. 当 $x=-3$，$x=0$，$x=2$ 时成立，当 $x=7$，$x=8$ 时不成立.

[1] 此题意在为下节讲解不等式的解做好铺垫.

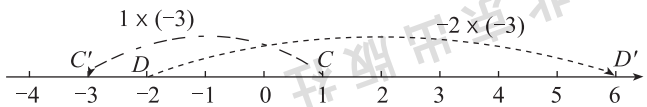
方法三：课件演示：

（1）



−2<3 —两边同乘2→ −4<6

（2）



1>−2 —两边同乘−3→ −3<6

[1] 事实上，(1) 如果 $a>b$，那么 $b<a$；如果 $b<a$，那么 $a>b$. (2) 如果 $a>b$，$b>c$，那么 $a>c$. 也是不等式的重要性质，都可由不等式的三条基本性质推出，但不要求所有学生掌握，只是在学习中渗透.

★★提升★★

1. 用“>”、“=”或“<”填空：
(1) 如果 $a-b<0$，那么 a____b；
(2) 如果 $a-b=0$，那么 a____b；
(3) 如果 $a-b>0$，那么 a____b；
(4) 如果 $b>0$，那么 $a+b$____a；
(5) 如果 $b=0$，那么 $a+b$____a；
(6) 如果 $b<0$，那么 $a+b$____a.

2. 用“<”或“>”填空：
(1) 当 $a>0$，b____0 时，$ab>0$；
(2) 当 $a>0$，b____0 时，$ab<0$；
(3) 当 $a<0$，b____0 时，$ab>0$；
(4) 当 $a<0$，b____0 时，$ab<0$.

3. 用“>”或“<”填空：[1]
(1) 如果 $a>b$，那么 b____a；
(2) 如果 $a>b$，$b>c$，那么 a____c.

★★★拓展★★★

判断以下各题的结论是否正确，并说明理由：

(1) 如果 $a>b$，那么 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$；

(2) 如果 $a>b$，$c=d$，那么 $ac>bd$；

(3) 如果 $ac^2>bc^2$，那么 $a>b$；

(4) 如果 $ax<b$，且 $a\neq 0$，那么 $x<\frac{b}{a}$；

(5) 如果 $ab>0$，那么 $\frac{a}{b}>0$；

(6) 如果 a，b，c 为有理数，其中 $c\neq 0$，而且 $a>b>c$，那么 $a-b>b-c$.

二 一元一次不等式

4.3 不等式的解集

由 4.2 节练习第 3 题的结果我们知道，当 $x=-3$，$x=0$，$x=2$ 时，不等式 $x-2<5$ 成立；当 $x=7$，$x=8$ 时，不等式 $x-2<5$ 不成立. 与方程类似，

由于受方程思想的影响，学生对不等式的解集的接受和理解是教学中的一个难点. 教学时要注意结合简单的不等式和实际问题让学生通过举例、相互交流等方式体会不等式的解可以是一个集合，充分认识到不等式的解和方程的解的异同点. 教材通过不等式 $x-2<5$，说明能使这个不等式成立的每一个未知数的值就是这个不等式的一个解，这一点和能使方程两边的值相等的未知数的值就是方程的解相同. 但是一元一次不等式会有无穷多个解；而一元一次方程的解一般只有一个.

另外，把不等式的解集在数轴上直观地表示出来，使学生形象地看到不等式有无穷多个解，这是学生继数轴学习之后，又一次接触到图形与数量的对应关系. 应让学生能理解在数轴上表示不等式的解集，让他们熟悉数形结合的思想. 可通过讨论和练习，让学生进一步感受它的作用，并注意在后续内容的学习中加以应用和强化.

我们把使不等式成立的未知数的值叫做不等式的解.

不等式 $x-2<5$ 还有其他的解吗？这个不等式有多少个解？

思考

可以发现，当 x 取小于 7 的任何一个数时，不等式 $x-2<5$ 都成立；而当 x 取大于或等于 7 的任何一个数时，不等式 $x-2<5$ 都不成立. 也就是说，任何一个小于 7 的数都是不等式 $x-2<5$ 的解，$x-2<5$ 有无穷多个解.

我们把不等式 $x-2<5$ 所有的解组成一个集合，称为不等式 $x-2<5$ 的解的集合，简称解集. $x<7$ 表示了不等式 $x-2<5$ 的解集.

一般来说，一个不等式的所有解组成的集合，简称为这个不等式的解集.

不等式的解集，可以在数轴上直观地表示出来.

例如，不等式 $x-2<5$ 的解集 $x<7$，可以用数轴上表示 7 的点的左边部分来表示，如图 4－2.

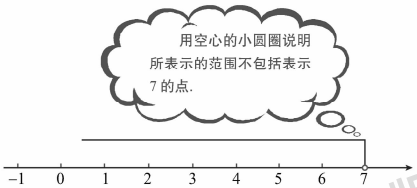


图 4－2

不等式 $x+5\geqslant 4$ 的解集 $x\geqslant -1$ 可以用数轴上表示 -1 的点和它的右边部分来表示，如图 4－3.

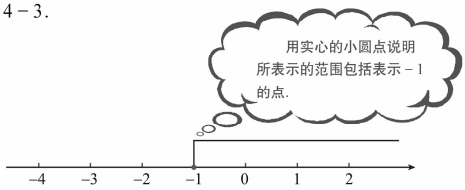
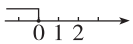
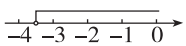


图 4－3

[1] 此处从另一个侧面来揭示不等式的解集与数轴上表示数的范围的一种对应关系，使学生进一步加深对不等式解集的理解，进一步领会数形结合的方法和优势.

练习答案：

1. (1) 

(2) 

2. (1) 不正确. 数轴上表示 $-\frac{3}{2}$ 的点的位置上应画空心圆圈.

(2) 不正确. $x \leqslant -5$ 的解集应用数轴上表示 -5 的点的左边部分来表示，并在 -5 的位置上画实心点.

3. (1) $x>0$；

(2) $x \leqslant 3$.

交流 [1]

如何用含 x 的不等式表示图 4－4 和图 4－5 中所表示的不等式的解集？表示 -5，-4.999，$-\frac{1}{\pi}$，0，0.5，2.999，3，$\frac{22}{7}$ 的点分别在哪个不等式的解集中？

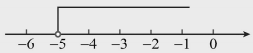


图 4－4

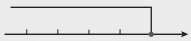


图 4－5

练习

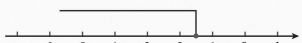
1. 在数轴上表示下列不等式的解集：

(1) $x \leqslant 0$；

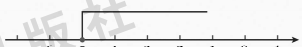
(2) $x>-3.5$.

2. 下列在数轴上表示的不等式的解集是否正确？如果不正确，该如何改正？

(1) $x<-\frac{3}{2}$；

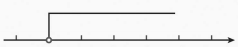


(2) $x \leqslant -5$.

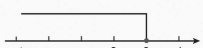


3. 分别用含 x 的不等式表示下列数轴中所表示的不等式的解集：

(1)



(2)





4.4 一元一次不等式及其解法

像 $x-2<5$，$x+5\geqslant 4$，$y-1<1$，$6x>5x-1$，$\frac{1}{3}x>5$，…的不等式，它们都只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 1，系数不等于 0，我们把这样的不等式叫做一元一次不等式．

求不等式的解集的过程，叫做解不等式．

同解一元一次方程类似，解一元一次不等式的过程，就是要利用不等式的基本性质将不等式变形成 $x<a$ 或 $x>a$ 的形式．

思考

在解方程时“移项要变号”的法则，在解不等式的变形中是否仍然成立？为什么？

例 1 解不等式 $2+5x>12$，并把它的解集在数轴上表示出来．

解：根据不等式的基本性质 1，两边都减去 2，得

$$5x>12-2.$$

这一过程是否相当于把 2 变号后移到了不等号的右边？

合并同类项，得

$$5x>10.$$

根据不等式的基本性质 2，两边都除以 5，把系数化为 1，得

$$x>2.$$

这个不等式的解集在数轴上表示，如图 4－6．

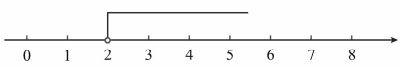


图 4－6

可以发现，解一元一次不等式与解一元一次方程类似，也可以“移项”，即把不等式一边的某项变号后移到另一边，而不改变不等号的方向．

本节的主要内容是根据不等式的性质探索一元一次不等式的一般解法及其在实际问题中的初步应用．

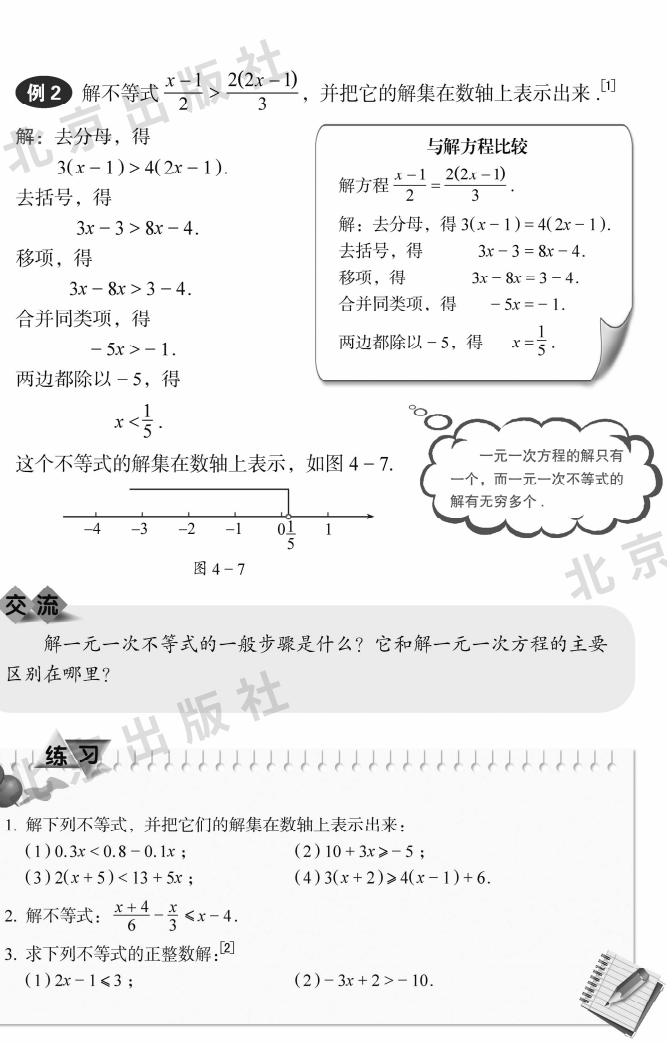
1．教学中要注意承接上一节的学习，让学生经历将所给的不等式转化为简单不等式的过程，体会数学学习中比较和转化的作用．并且应该启发学生将不等式的求解与一元一次方程的求解相联系、比较，对教材所设置的供学生讨论与交流的问题，要注意让不同的学生都能发表意见，也可让学生结合学习实践，交流自己的体会，纠正练习中的错误，使学生经历知识形成和巩固过程．

[1] 此题强调一下计算时应注意的问题，避免在去分母、去括号、移项、合并同类项中出现错误.

[2] 此题要让学生弄清正整数解的含义，为后面用不等式解决实际问题做准备.

练习答案：

1. (1) $x<2$；
   (2) $x\geqslant -5$；
   (3) $x>-1$；
   (4) $x\leqslant 4$.
2. $x\geqslant 4$.
3. (1) 1，2；
   (2) 1，2，3.



例 2 解不等式 $\frac{x-1}{2}>\frac{2(2x-1)}{3}$，并把它的解集在数轴上表示出来.[1]

解：去分母，得

$3(x-1)>4(2x-1)$.

去括号，得

$3x-3>8x-4$.

移项，得

$3x-8x>3-4$.

合并同类项，得

$-5x>-1$.

两边都除以 -5，得

$x<\frac{1}{5}$.

这个不等式的解集在数轴上表示，如图 4－7.

图 4－7

与解方程比较

解方程 $\frac{x-1}{2}=\frac{2(2x-1)}{3}$.

解：去分母，得 $3(x-1)=4(2x-1)$.

去括号，得 $3x-3=8x-4$.

移项，得 $3x-8x=3-4$.

合并同类项，得 $-5x=-1$.

两边都除以 -5，得 $x=\frac{1}{5}$.

一元一次方程的解只有一个，而一元一次不等式的解有无穷多个.

交流

解一元一次不等式的一般步骤是什么？它和解一元一次方程的主要区别在哪里？

练习

1. 解下列不等式，并把它们的解集在数轴上表示出来：
   (1) $0.3x<0.8-0.1x$；　(2) $10+3x\geqslant -5$；
   (3) $2(x+5)<13+5x$；　(4) $3(x+2)\geqslant 4(x-1)+6$.
2. 解不等式：$\frac{x+4}{6}-\frac{x}{3}\leqslant x-4$.
3. 求下列不等式的正整数解：[2]
   (1) $2x-1\leqslant 3$；　(2) $-3x+2>-10$.

12 数学 七年级 下册

2. 列不等式解决实际问题，可以参照列方程的基本思想，分析如何用代数式表示相关量，寻求已知量和未知量的关系，要注意题意中“至少”、“不少于”等语句所隐含的不等关系，从实际问题中抽象出数量关系，从列出代数式到不等式，转化为纯数学问题求解. 让学生通过实践，体会不等式和方程同样是刻画现实世界数量关系的重要模型.

例 3 当 x 取何值时，代数式 $\frac{1}{3}(2-x)$ 的值比代数式 $3x-1$ 的值小？

解：根据题意，得

$$\frac{1}{3}(2-x)<3x-1.$$

去分母，得 $2-x<3(3x-1)$.

去括号，得 $2-x<9x-3$.

移项，得 $-x-9x<-3-2$.

合并同类项，得 $-10x<-5$.

系数化为 1，得 $x>\frac{1}{2}$.

所以当 x 取大于 $\frac{1}{2}$ 的值时，代数式 $\frac{1}{3}(2-x)$ 的值小于代数式 $3x-1$ 的值.

例 4 两位搬运工人要将若干箱同样的货物用电梯运到楼上．已知一箱货物的质量是 55 千克，两位工人的体重之和是 160 千克，电梯的载重量是 1 600 千克，算一算两位工人一次最多能运多少箱货物．[1]



解：设两位工人一次最多能运 x 箱货物．

根据题意，得 $55x+160\leqslant 1\,600$.

解这个不等式，得

$55x\leqslant 1\,600-160$.

$55x\leqslant 1\,440$.

$x\leqslant 26\frac{2}{11}$.

解集在数轴上表示，如图 4－8.

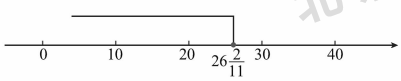


图 4－8

由于货物是按箱计算的，所以符合题意的解只能取整数 26.

答：两位工人一次最多能运 26 箱货物．

[1] 求得不等式的解集后，如何得到符合实际问题的答案，要让学生认真分析、理解题意，体会根据具体问题的实际意义，检验结果是否合理的重要性．如本例符合题意的解只能取正整数 26.

[1] 设神箭队答对 x 道题. 由题意：$8x-4(13-x)>90$，得 $x>11\frac{5}{6}$. 因为有2道题没答，所以 x 可取正整数12，13，所以神箭队至少答对12道题.

设飞艇队答对 y 道题，由题意：$8y-4(15-y)>90$，得 $y>12.5$. 取正整数时 $y=13$，$y=14$，$y=15$，故飞艇队至少答对13道题.

练习答案：

1. （1）$x<-1$；
（2）$x\geqslant -1$；
（3）$x<-\frac{7}{6}$；
（4）$x\geqslant -\frac{7}{6}$.

2. 设 x 个月后小力的邮票比小亮的2倍还多. $91+10x>2\cdot(53+4x)$，得 $x>7.5$，答：8个月后小力的邮票比小亮的2倍还多.

思考

一次知识竞赛共有15道题. 竞赛规则是：答对1题记8分，答错1题扣4分，不答记0分. 结果神箭队有2道题没答，飞艇队答了所有题，两队的成绩都超过了90分. 请你分析一下两队分别至少答对几道题.[1]

练习

1. 当 x 取何值时，代数式 $6x+7$ 的值：
（1）小于1；　（2）不小于1；　（3）是负数；　（4）是非负数.
2. 到6月份为止，小力集邮票91张，小亮集邮票53张. 从7月份开始，小力每月集邮票10张，小亮每月集邮票4张，那么至少从几个月后小力的邮票张数比小亮的2倍还多?

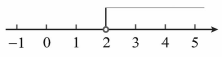
习 题 4-2

★基础★

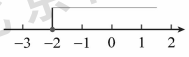
1. 下面不等式的两种解法对不对？如果不对，怎样改正？
解不等式 $-4x-3\geqslant 2x+6$.
解法1：$-4x-2x\geqslant 6+3$.
$-6x\geqslant 9$.
$\therefore\ x\geqslant -1.5$.
解法2：$-3-6\geqslant 2x+4x$.
$6x\leqslant -9$.
$\therefore\ x\leqslant -1.5$.

2. 选择题：

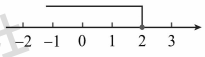
(1) 不等式 $x-3\leqslant 3x+1$ 的解集在数轴上表示如下，正确的是(　　).



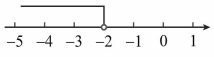
A



B



C



D

(2) 不等式 $3-7x<12-5(x-1)$ 的解集是(　　).

A. $x>7$　　B. $x<-7$

C. $x>-7$　　D. $x>-10$

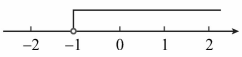
3. 在数轴上表示下列不等式的解集：

(1) $x>4$；　　(2) $x\geqslant 0$；

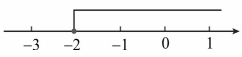
(3) $x\leqslant 2$；　　(4) $x<-\frac{3}{2}$.

4. 用含 x 的不等式表示下列数轴所表示的解集：

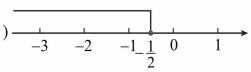
(1)



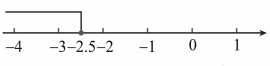
(2)



(3)



(4)



5. 解下列不等式，并把它们的解集在数轴上表示出来：

(1) $2(5-2x)\leqslant -3(x-2)$；　　(2) $2(x-1)-3(2x+1)\geqslant 0$；

(3) $\frac{1}{3}(1-2x)<\frac{3}{2}(2x-1)$；　　(4) $x-\frac{x}{2}+\frac{x+1}{3}<1+\frac{x+8}{6}$.

6. 当 x 在什么范围内取值时，代数式 $-2x+1$ 的值：

(1) 是负数；　　(2) 大于 -3；

(3) 小于 $-3x+5$；　　(4) 不大于 $4x-7$.

7. 求不等式 $3(x+1)\leqslant 5x+9$ 的负整数解，并在数轴上表示出来.

8. 一双鞋的成本是 50 元，那么定价至少是多少元，打 8 折后才不会亏本？

[1] 此题意在为下面学习一元一次不等式组做准备. 教师可视学生情况灵活处理.

[2] 这个问题作为一元一次不等式组的引入，其题意并不复杂，要引导学生注意“在……之间”的意义，体会其中隐含的两个约束条件，即两个不等关系.

★★提升★★

1. k 取什么值时，代数式 $\frac{1}{2}\left(1-5k-\frac{1}{3}k^2\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{k^2}{4}-k\right)$ 的值：

(1) 小于 0；　　(2) 等于 0；　　(3) 大于 0.

2. 王老师要用 1 000 元去买 60 元一套和 90 元一套的两种演出服装共 15 套，请问王老师最多能买 90 元一套的服装多少套?

3. 姐姐现有存款 300 元，每月存款 60 元；妹妹现有存款 200 元，每月存款 20 元. 几个月后，姐姐的存款是妹妹存款的 2 倍以上?

4. 某旅游公司规定，旅游大巴的个人零售票价是每人 10 元，20 人以上 (含 20 人) 的团体票价可以享受 8 折优惠. 蓝鸟小队参加活动的同学预计在 16 人左右，分析一下他们如何购票更实惠.

★★★拓展★★★

1. x 取哪些整数时，能使下面各题中的两个不等式都成立：[1]

(1) $x+1>3$ 与 $x-6<0$；　　(2) $2x\geqslant -4$ 与 $2x\leqslant 4$；

(3) $\frac{x}{2}>-3$ 与 $-x\geqslant 1$；　　(4) $2x\geqslant 7$ 与 $4x<23$.

2. 在进行矿山爆破时，为了确保安全，点燃引火线后要在爆破前转移到 300 米以外的安全地区. 已知引火线的燃烧速度是 0.8 厘米 / 秒，人离开的速度是 5 米 / 秒，算一算引火线至少需要多少厘米.

三 一元一次不等式组

4.5 一元一次不等式组及其解法

思考

从北京到天津某地，有几条可供选择的路线，它们的路程在 240 千米到 300 千米之间 (包括 240 千米和 300 千米)，如果汽车的平均速度是每小时 80 千米，那么从北京到天津某地所需的行驶时间大约在什么范围内?[2]

本节结合具体实例抽象出一元一次不等式组及其解集的概念，然后通过三个例题说明解一元一次不等式组的方法，最后通过“交流”对一元一次不等式组的解法步骤进行总结. 教学中要特别注意与一元一次不等式知识的联系，让学生经历知识的拓展过程，感受学习一元一次不等式组的必要性；强调利用数轴确定解集的公共部分的意义，进一步感受数形结合的作用，逐步熟悉和掌握这一重要的思想方法.

1. 教材主要研究的是由两个一元一次不等式合在一起的不等式组的解法，多于两个不等式组成的一元一次不等式组的情况是通过习题给出的，教学时教师可视学生的实际情况适当处理，主要是让学生体会求由两个以上不等式组成的一元一次不等式组

设汽车从北京到天津某地大约需要 x 小时，根据题意，汽车行驶的距离 $80x$ 千米应该在 240 千米到 300 千米之间．即行驶时间 x 应同时满足不等式

$$80x \geqslant 240 \quad ①$$

和

$$80x \leqslant 300. \quad ②$$

由于不等式①和②是同时存在的，我们可以把这两个不等式放在一起，写为 $\begin{cases} 80x \geqslant 240, \\ 80x \leqslant 300 \end{cases}$ 的形式，这样就组成一个一元一次不等式组．

不等式组中的各个不等式的解集的公共部分，就是不等式组中 x 的可取值的范围．

由不等式①解得 $x \geqslant 3$.

由不等式②解得 $x \leqslant 3.75$.

在同一数轴上表示不等式①、②的解集，如图 4－9.

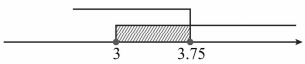


图 4－9

可以看出，使不等式①、②同时成立的 x 的值是 3 和 3.75 之间的所有数（包括 3 和 3.75），记作 $3 \leqslant x \leqslant 3.75$．它们是不等式①、②的解集的公共部分．不等式①、②的解集的公共部分，叫做由不等式①、②所组成的一元一次不等式组的解集．

这样，上面问题的答案应该是：从北京到天津某地大约需要 3 至 3.75 小时．

一般地，当两个或两个以上的含有同一个未知数的一元一次不等式合在一起时，就组成了一个一元一次不等式组．不等式组中的几个一元一次不等式的解集的公共部分，叫做由它们所组成的不等式组的解集．求不等式组的解集的过程叫做解不等式组．

解一元一次不等式组，通常可以先分别求出不等式组中每个不等式的解集，再确定这些解集的公共部分．利用数轴可以直观地确定出不等式组的解集．

例 1 解不等式组 $\begin{cases} 3x-2<2x-5, & ① \\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}<\dfrac{x-2}{3}. & ② \end{cases}$

解集的一般方法，难度要求并不高，不要再提高相应的要求.

2. 用几个一元一次不等式的解集的公共部分说明一元一次不等式组的解集，既有利于深刻理解一元一次不等式组的概念，又渗透了交集的思想（教学时不要提出“交集”的名称）.

3. 确定几个不等式解集的公共部分，关键是要引导学生重视数轴的作用，要能准确地找出数轴上对应解集的范围．它既是学习本章的工具，也是学生进一步学习和提高数学素养的需要.

解：解不等式①，得 $x<-3$.

解不等式②，得 $x<-1$.

在数轴上表示不等式①、②的解集，如图 4－10.

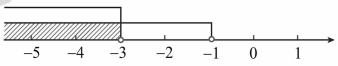


图 4－10

比 −3 还小的数一定都比 −1 小！

所以这个不等式组的解集是 $x<-3$.

例 2 解不等式组 $\begin{cases}5x-6\geqslant 2x+6, & ①\\ 3x-4>4(x-1). & ②\end{cases}$

解：解不等式①，得 $x\geqslant 4$.

解不等式②，得 $x<0$.

在数轴上表示不等式①、②的解集，如图 4－11.

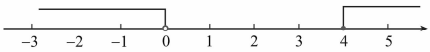


图 4－11

$x\geqslant 4$ 与 $x<0$ 这两个解集没有公共部分.

由图 4－11 可以看出，这两个不等式的解集没有公共部分，就说不等式组无解.

例 3 求适合不等式 $-11<-2a-5\leqslant 3$ 的 a 的整数解.

解：由 $-11<-2a-5\leqslant 3$，得

$$\begin{cases}-2a-5>-11,\\ -2a-5\leqslant 3.\end{cases}$$

解这个不等式组，得

$$\begin{cases}a<3,\\ a\geqslant -4.\end{cases}$$

所以原不等式的解集为 $-4\leqslant a<3$.

适合原不等式的整数解是 -4，-3，-2，-1，0，1，2.

交流

解一元一次不等式组的一般步骤是什么？一元一次不等式组一定有解吗？

练 习

1. 填表：[1]

不等式组	$\begin{cases}x>2,\\x>-1\end{cases}$	$\begin{cases}x<2,\\x<-1\end{cases}$	$\begin{cases}x>2,\\x<-1\end{cases}$	$\begin{cases}x<2,\\x>-1\end{cases}$
在数轴上表示不等式的解集				
不等式组的解集				

2. 解下列不等式组：

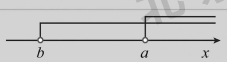
(1) $\begin{cases}3x+2<2x-3,\\2(x-1)>4x-7;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}3x+2>2(x-1),\\4x-3\leqslant 3x-2;\end{cases}$ (3) $\begin{cases}\frac{2x-1}{3}<1,\\\frac{3x-1}{2}>x+\frac{3}{2}.\end{cases}$

3. 求适合不等式 $10\leqslant 3x$ $7<8$ 的所有的整数解.

习 题 4-3

★基础★

1. 填表：

不等式组 ($a>b$)	在数轴上表示不等式的解集	不等式组的解集
$\begin{cases}x>a,\\x>b\end{cases}$		
$\begin{cases}x<a,\\x>b\end{cases}$		
$\begin{cases}x<a,\\x<b\end{cases}$		
$\begin{cases}x>a,\\x<b\end{cases}$		

[1] 视学生情况，可结合此题启发学生自主探索由两个一元一次不等式所组成的不等式组解集的各种情形，借助数轴归纳出一般规律.

练习答案：

1. 数轴表示略，解集依次为：$x>2$，$x<-1$，无解，$-1<x<2$.
2. (1) $x<-5$；
   (2) $-4<x\leqslant 1$；
   (3) 无解.
3. -1，0，1，2，3，4.

2. 解下列不等式组：

(1) $\begin{cases} 9-0.1x \geqslant -1, \\ 1-0.2x < -1; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2(x+1) < 0, \\ 2x-1 < 1; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \geqslant 1, \\ 3x-7 > -1; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{x}{3} < -1, \\ 2(x-3)-3(x-2) < 0. \end{cases}$

3. 求同时适合不等式 $6x+\frac{5}{7} > 4x+7$ 和不等式 $8x+3 < 4x+40$ 的 x 的整数解.

4. 求适合不等式 $-12 \leqslant 6x-10 < 23$ 的非正整数解.

★★提升★★

1. 长比宽多 8 米的长方形花坛，它的周长在 120 米和 180 米之间（包括 120 米和 180 米），那么它的宽可能在什么范围内？
2. 一个两位数，它的个位上的数字比十位上的数字大 3，并且这个两位数小于 44 且大于 25，求这个两位数.
3. 某校在一次课外活动中，需要抽调一部分学生并把他们平均编为 9 个组．如果每组比预定人数多 1 人，那么所需学生总数超过 200 人；如果每组比预定人数少 1 人，那么所需学生总数不到 190 人．求每组学生的预定人数是多少.

★★★拓展★★★

1. 试求下列不等式组的解集：

(1) $\begin{cases} x > -2, \\ x-3 > 0, \\ 6-x \geqslant 0; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 3x+2 \geqslant 2x, \\ x-4 < 5-2x, \\ \frac{x+3}{2} > 3x. \end{cases}$

2. k 取什么值时，解方程 $6x-k=0$ 得到的 x 的值：

(1) 都小于 1；　　(2) 都不小于 1.

3. 把若干颗花生分给若干只猴子．如果每只猴子分 3 颗，就剩下 8 颗；如果每只猴子分 5 颗，那么最后一只猴子虽分到了花生，但不足 5 颗．求猴子有多少只，花生有多少颗.

综合与实践

如何上网最划算

某地区家用电脑上网实行两种收费标准，包月制或计时制.

包月制：每月 50 元(限一部个人住宅电话上网).

计时制：每小时 3 元.

两种收费制都要缴纳话费 0.02 元 / 分.

请你根据上面上网收费的两种标准，分析一下在什么情况下选用哪种收费标准比较实惠.

也可了解你所居住地区的上网收费情况，解决类似问题.

阅读理解

符号“>”和“<”的由来

在符号“>”和“<”出现之前，人们用文字、缩写或象征性记号来表示不等关系.

1629 年，生于法国的荷兰数学家吉拉德(A.Girard，1595—1632)在他所著的《代数新发现》里，使用了下面象征性的记号表示不等式：

AffB 表示 $A>B$；BξA 表示 $B<A$.

显然，它书写起来比文字简洁许多，但是记起来并不方便，而且不能突出它们对称的特征. 因此，后人认为它更像繁体字的简化，并不是理想的不等号，使用者寥寥无几.

1631 年，创用乘号“×”的奥特雷德在一本广为流行的著作《数学入门》里，创用符号“⌒”表示“大于”，符号“⌒”表示

“小于”．这种符号具有明显的对称性、和谐性，到了18世纪还有人在使用，但书写起来，还是不及符号“＞”和“＜”来得干脆利落，最终还是被淘汰了．

同年，在英国数学家、天文学家托马斯·哈里奥特（T.Harriot，1560－1621）逝世10周年之际，人们为了纪念他在数学研究方面的丰功伟绩，出版了他的遗著《分析术实例》．该书内容之丰富，论述之深刻，曾被大数学家沃利斯赞美不绝，尤其是书中大于和小于符号的首次创立永载史册．书中写道：

大于的记号：$a>b$ 表示 a 量大于 b 量；
小于的记号：$a<b$ 表示 a 量小于 b 量．



托马斯·哈里奥特

这对符号一出现，立刻得到一些学者的赞许和使用．如果按照国际惯例，以出版时间作为诞生时间的话，不等号“＞”、“＜”是1631年诞生的，但若从作者创用的时间来看，还要提早10～20年，至少应该从1621年算起．

符号“＞”和“＜”始创于17世纪，直到18世纪初才被广泛应用，整整花了一个世纪的时间．

回顾与整理

知识要点

本章我们以熟悉的生活实际为背景，研究了两个量之间的不等关系，探讨了不等式和它的基本性质，一元一次不等式和一元一次不等式组的解法，以及应用一元一次不等式解决一些简单问题.

1. 用不等式可以表示两个量之间的不等关系. 不等式的基本性质与等式的基本性质很类似，主要区别是：在等式两边都乘(或除以)同一个不等于零的数时，所得结果仍是等式；在不等式两边都乘(或除以)同一个正数时，不等号的方向不变，而在不等式两边都乘(或除以)同一个负数时，不等号的方向要改变.

2. 解一元一次不等式和解一元一次方程也很类似，主要异同点对比如下：

标准形式	一元一次方程 $ax+b=0(a\neq 0)$	一元一次不等式 $ax+b>0$ 或 $ax+b<0(a\neq 0)$
解法步骤	①去分母 ②去括号 ③移项 ④合并同类项 ⑤系数化为 1	①去分母 ②去括号 ③移项 ④合并同类项 ⑤系数化为 1 注意：在步骤①和⑤中，如果乘数或除数是负数，要改变不等号的方向
解	只有一个解	有无数多个解

3. 一元一次不等式组的解集是这个不等式组中各个不等式的解集的公共部分. 解不等式组的一般步骤是：

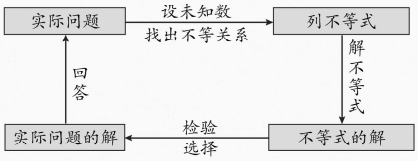
(1)求出不等式组中每个不等式的解集；

(2)借助数轴求出这些不等式的解集的公共部分，即求出了

知识要点

不等式组的解集.

4. 列一元一次不等式解实际问题的一般步骤如下：



学习指导

1. 现实生活中的数量关系既有相等的，也有不等的. 方程和不等式是我们研究相等与不等关系的两个重要工具. 一元一次不等式是研究不等关系的基本工具，也是学习其他不等式和其他知识的基础.

2. 一元一次不等式与一元一次方程，有许多类似之处，要特别注意它们之间的相同点和不同点. 这是学好本章内容很重要的学习方法.

3. 不等式的基本性质是解一元一次不等式和解一元一次不等式组的依据.

4. 在不等式两边都乘同一个数(正数、零、负数)，会出现三种不同的情形. 以不等式 $5<6$ 为例，在不等式 $5<6$ 两边都乘同一个数 a 时，有下面三种情形：

①$5a<6a(a>0)$；②$5a=6a(a=0)$；③$5a>6a(a<0)$.

请注意：如果在不等式的两边都乘零(情形②)，就改变了问题的性质，不能用它对不等式进行变形.

5. 借助数轴可以直观地表示不等式的解集，这有助于我们确定一元一次不等式组的解集. 在数轴上表示 $x>a$ 与 $x\geqslant a$(或 $x<a$ 与 $x\leqslant a$)这两个解集时，用空心圆圈还是用实心圆点是有区别的，空心圆圈表示不含 a，而实心圆点表示含有 a.

6. 把实际问题中的不等关系抽象为不等式，需要把实际问题中一些表示不等关系的词语准确地转化为数学符号. 比如，“大

学习指导

于”、“超过”等一般抽象为“$>$”；“小于”、“不足”等一般抽象为“$<$”；“不大于”、“不小于”一般抽象为“$\leqslant$”、“$\geqslant$”.

7. 借助不等式或不等式组解决实际问题时，在求出不等式或不等式组的解集以后，要认真地检验它是否符合实际问题.

复 习 题

★基础★

1. 判断题：

(1) 如果 $a<b$，那么 $-3a<-3b$；（　　）

(2) 如果 $a<b$，那么 $-5+a<-5+b$；（　　）

(3) 如果 $a>b$，那么 $-\frac{a}{3}<-\frac{b}{3}$.（　　）

2. 如果 $x>y$，试用不等号连接下列各对式子：

(1) $x+2$ 与 $y-2$；　　(2) $-(x-y)^2$ 与 0；

(3) $-5x$ 与 $-5y$；　　(4) $\frac{x}{5}$ 与 $\frac{y}{5}$.

3. 解下列不等式，并把解集表示在数轴上：

(1) $-\frac{2}{3}x<-1$；　　(2) $6x-3>2x+7$；

(3) $\frac{2}{3}(5-x)\geqslant 6$；　　(4) $\frac{2(x-1)}{5}\geqslant\frac{3(1-x)}{10}$.

4. x 取什么值时，代数式 $\frac{2x+7}{3}$ 的值：

(1) 是正数；　　(2) 是负数；　　(3) 是零.

5. 求下列不等式的正整数解：

(1) $2x-5<5-2x$；　　(2) $4x-6\geqslant 7x-15$.

6. 解下列不等式组：

(1) $\begin{cases}4x>3x-1,\\2x<4;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x+5>0,\\x+3>6;\end{cases}$

(3) $\begin{cases} 5x+1 \leqslant 3(x+1), \\ \dfrac{x-1}{2} \geqslant \dfrac{2x-1}{5}; \end{cases}$ (4) $\begin{cases} 2x-3 \leqslant x+2, \\ \dfrac{x-1}{6} - \dfrac{3x-1}{2} > 2 - \dfrac{x}{2}; \end{cases}$

(5) $\begin{cases} \dfrac{1}{3}x - 1 < \dfrac{1}{2}x, \\ \dfrac{x+2}{5} \leqslant \dfrac{x-1}{4}; \end{cases}$ (6) $\begin{cases} \dfrac{2x}{3} - 1 > 4 - \dfrac{x}{4}, \\ x - \dfrac{x-1}{2} \geqslant 2 - \dfrac{x+2}{3}. \end{cases}$

7. 解不等式：

(1) $-2 \leqslant \dfrac{3-x}{2} \leqslant 3$; (2) $-8 < -6 - \dfrac{3x-2}{4} < -5$.

8. (1) 一个两位数加上它的一半，所得的数大于 45 且小于 48，求这个两位数；
(2) 一个两位数，它的十位上的数字比个位上的数字小 3，已知它大于 36 且小于 68，求这个两位数.

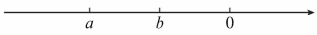
9. 某次数学竞赛中出了 10 道题，每答对 1 题得 5 分，每答错 1 题或不答扣 3 分. 问至少要答对几道题，得分才不低于 10 分.

★★提升★★

1. 求 x $\dfrac{x}{2}$ $\dfrac{x+8}{6} \leqslant 1$ $\dfrac{x-1}{3}$ 的非负整数解.

2. 有理数 a，b 在数轴上的位置如图所示，用“>”或“<”填空：

(1) $a-b$ ____ 0；
(2) $a+b$ ____ 0；
(3) $|a|$ ____ $|b|$.



（第 2 题）

3. 一个负整数的 45% 与 2 的和的 3 倍不小于这个数的 75%，求满足条件的所有负整数.

★★★拓展★★★

1. 求下列不等式组的整数解：

(1) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{4} > x - \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{4}x - \dfrac{1}{2}(3x-1) \leqslant 2 - \dfrac{1}{2}x; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2(x+2) < x+8, \\ x-3 \geqslant 3x-7, \\ 3(x-2)+8 > 2x. \end{cases}$

2. 学校图书馆准备购买定价分别为 8 元和 14 元的杂志和小说共 80 本，计划用钱在 750 元到 850 元之间（包括 750 元和 850 元），那么 14 元一本的小说最少可以买多少本？最多可以买多少本？

部分习题答案或提示

习题 4－1

基础

1. （1）$5x+4<0$；（2）$x<-x$；（3）$\frac{1}{4}y+\frac{1}{3}x\leqslant 0$；（4）$3m\geqslant 10$；（5）$2a-3b\geqslant 0$.

2. （1）$a-b>0$；（2）$x>40$；（3）$m<150$.

3. （1）$a-\frac{5}{3}>b-\frac{5}{3}$；（2）$a+c>b+c$；（3）$26a>26b$；（4）$-\frac{2}{3}a<-\frac{2}{3}b$.

4. （1）$x>-1$；（2）$x<-1$；（3）$x<1$；（4）$x>-\frac{3}{2}$.

5. 0，-2.5，-4.

提升

1. （1）$<$；（2）$=$；（3）$>$；（4）$>$；（5）$=$；（6）$<$.

2. （1）$>$；（2）$<$；（3）$<$；（4）$>$.

3. （1）$b<a$.（对称性）；（2）$a>c$（传递性）.

拓展

（1）不正确. 当 $ab=0$ 时，a 或 b 的倒数不存在.

（2）不正确. 当 $c=d=0$ 时，则有 $ac=bd$.

（3）正确. 如果 $ac^2>bc^2$，那么 $c^2>0$，由不等式的基本性质 2 可知 $a>b$.

（4）不正确. 当 $a<0$ 时，则有 $x>\frac{b}{a}$.

（5）正确. 如果 $ab>0$，那么 ab 同号，所以 $\frac{b}{a}>0$.

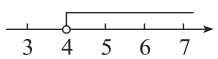
（6）不正确. 当 $a=3$，$b=2$，$c=1$ 时，$a-b=b-c=1$.

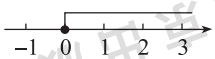
习题 4－2

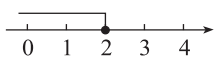
基础

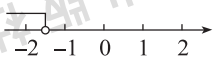
1. 解法 1 不正确，结果改为：$x\leqslant -1.5$；解法 2 正确.

2. （1）B；（2）C.

3. （1）

（2）

（3）

（4）

4. （1）$x>-1$；（2）$x\geqslant -2$；（3）$x\leqslant -\frac{1}{2}$；（4）$x\leqslant -2.5$.

5. （1）$x \geqslant 4$；（2）$x \leqslant -\frac{5}{4}$；（3）$x > \frac{1}{2}$；（4）$x < 3$.

6. （1）$x > \frac{1}{2}$；（2）$x < 2$；（3）$x < 4$；（4）$x \geqslant \frac{4}{3}$.

7. $x \geqslant -3$ 的负整数解是 -1，-2，-3.

8. 设定价至少是 x 元，$80\%x \geqslant 50$，$x = 62.5$，答：定价至少是 62.5 元.

提升

1. （1）$k > \frac{3}{19}$；（2）$k = \frac{3}{19}$；（3）$k < \frac{3}{19}$.

2. 设王老师最多能买 90 元一套的服装 x 套，$90x + 60(15 - x) \leqslant 1\,000$，$x \leqslant 3\frac{1}{3}$.

   答：王老师最多能买 90 元一套的服装 3 套.

3. 设 x 个月后姐姐的存款是妹妹存款的 2 倍以上，$60x + 300 > 2(20x + 200)$，$x > 5$.

   答：5 个月后姐姐的存款是妹妹存款的 2 倍以上.

4. 设有 x 人需要购票. 据题意 $x < 20$. 那么按实际人数购买个人票 x 张要付款：$10x$（元）；购买 20 人的团体票八折优惠需付款：$20 \times 10 \times 0.8 = 160$（元），显然购买 20 人的团体票比购买 20 人的个人票便宜，即 160（元）$<$200（元）；现在的问题是当人数是多少时购买团体票比购买个人票便宜，即当 x 取何数值时 $160 < 10x$ 成立. 经过计算可知只有当 x 超过 16 人时购买团体票合算.

拓展

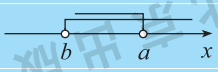
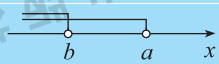
1. （1）3，4，5；（2）-2，-1，0，1，2；（3）-5，-4，-3，-2，-1；（4）4，5.

2. 设引火线至少需要 x 厘米，$\frac{x}{0.8} \geqslant \frac{300}{5}$，$x \geqslant 48$.

   答：引火线至少需要 48 厘米.

习题 4－3

1. 填表：

不等式组（$a > b$）	在数轴上表示不等式组的解集	不等式组的解集
$\begin{cases} x > a \\ x > b \end{cases}$		$x > a$
$\begin{cases} x < a \\ x > b \end{cases}$		$b < x < a$
$\begin{cases} x < a \\ x < b \end{cases}$		$x < b$
$\begin{cases} x > a \\ x < b \end{cases}$		无解

2. （1）$10 \leqslant x \leqslant 100$；（2）$x < -1$；（3）$x > 2$；（4）无解.

3. 所求整数解是 4，5，6，7，8，9.

4. 所求非正整数解是 0.

提升

1. 设宽为 x 米，据题意得不等式 $120 \leqslant 2(2x+8) \leqslant 180$，解得 $26 \leqslant x \leqslant 41$.

   答：花坛宽的范围在 26 米和 41 米之间.

2. 设十位数字为 x，则个位数字为 $x+3$，据题意得不等式 $25 < 10x + (x+3) < 44$. 所求两位数为 36.

3. 设每组学生的预定人数是 x，据题意得不等式 $\begin{cases} 9(x+1) > 200, \\ 9(x-1) < 190. \end{cases}$

   答：每组预定人数是 22.

拓展

1. （1）$3 < x \leqslant 6$；（2）$-2 \leqslant x < \frac{3}{5}$.

2. （1）$k < 6$；（2）$k \geqslant 6$.

3. 设有猴子 x 只，据题意得不等式 $0 < 5x - (3x+8) < 5$，解出 $4 < x < 6.5$. 整数解为 $x = 5$ 或 $x = 6$. 当 $x = 5$ 时，$3x + 8 = 23$；当 $x = 6$ 时，$3x + 8 = 26$.

   答：当猴子有 5 只时，花生有 23 颗；当猴子有 6 只时，花生有 26 颗.

复习题

基础

1. （1）×；（2）√；（3）√.

2. （1）>；（2）<；（3）<；（4）>.

3. （1）$x > \frac{3}{2}$；（2）$x > \frac{5}{2}$；（3）$x \leqslant -4$；（4）$x \geqslant 1$.

4. （1）$x > -\frac{7}{2}$；（2）$x < -\frac{7}{2}$；（3）$x = -\frac{7}{2}$.

5. （1）$x < 2\frac{1}{2}$，正整数解 1，2；（2）$x \leqslant 3$，正整数解 1，2，3.

6. （1）$-1 < x < 2$；（2）$x > 3$；（3）无解；（4）$x < -2$；（5）$x \geqslant 13$；（6）$x > \frac{60}{11}$.

7. （1）$-3 \leqslant x \leqslant 7$；（2）$-\frac{2}{3} < x < \frac{10}{3}$.

8. （1）31；（2）47 或 58.

9. 设至少答对 x 道题，据题意得 $5x-3(10-x)\geqslant 10$，解出 $x\geqslant 5$.

答：至少答对 5 道题，才能至少得 10 分.

提升

1. 0，1，2，3，4.

2. （1）<；（2）<；（3）>.

3. 设这个负整数为 x，据题意得 $3(45\%x+2)\geqslant 75\%x$，解出 $x\geqslant -10$. 满足条件的所有负整数是 -10，-9，-8，-7，-6，-5，-4，-3，-2，-1.

拓展

1. （1）-2，-1，0；（2）-1，0，1，2.

2. 设可买 14 元一本的小说 x 本，则买 8 元一本的杂志为 $(80-x)$ 本.

根据题意得 $750\leqslant 14x+8(80-x)\leqslant 850$，解出 $\frac{55}{3}\leqslant x\leqslant 35$.

答：购买 14 元一本的小说，最少可以买 19 本，最多可买 35 本.



第五章

二元一次方程组

教学目标

1. 以含有多个未知数的实际问题为背景，了解二元一次方程的概念，会识别二元一次方程，会把二元一次方程化为用含有一个未知数的代数式表示另一个未知数的形式，并了解二元一次方程的解的意义.

2. 了解二元一次方程组及其解等概念，会检验一对数值是不是某个二元一次方程组的解.

3. 体会“消元”思想，掌握二元一次方程组的解法，并能根据题目的具体情况灵活选用代入消元法或加减消元法解二元一次方程组.

* 类比二元一次方程组的解法，了解三元一次方程组的解法.

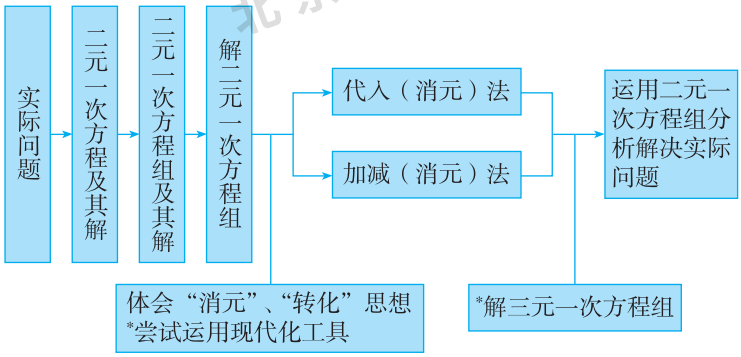
* 有条件的学校，尝试运用图形计算器等现代化工具来解二元一次方程组.

4. 了解解二元一次方程组的过程就是把“二元”转化为“一元”的过程，从而初步体会把“未知”转化为“已知”、把复杂问题转化为简单问题这种“转化”的思想方法.

5. 通过探究实际问题，经历“审题分析数量关系、设未知数、列方程组、解方程组、检验作答”的过程，能够列出二元一次方程组解决简单的实际问题，体会方程组等数学知识的应用价值，提高分析问题、解决问题的能力.

教材分析和教学建议

1. 主要内容及其地位作用.



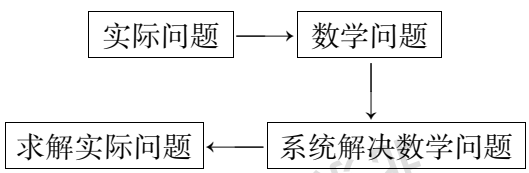
本章学习的主要内容是：二元一次方程及其解、二元一次方程组及其解等概念，二元一次方程组的两种解法——代入消元法和加减消元法，二元一次方程组的简单应用. 通过这些内容的学习，要使学生体会了解“消元”这种化未知为已知、化复杂为简单的转化思想，同时注意培养学生的运算能力和分析问题、解决问题的能力以及应用数学的意识.

方程组是刻画现实世界中含有多个未知数的问题的重要数学模型.

本章学习内容的安排是在考虑到了学生已掌握了有理数概念及运算、整式的加减、一元一次方程等基础知识后展开的. 从知识方法的层面讲，二元一次方程组是学生今后进一步学习线性方程组和二元二次方程组的基础，前后知识方法的核心思路都是转化化归思想. 在后面学生将要学习的一次函数、二次函数和平面解析几何等知识内容时，二元一次方程组的相关知识方法又是这些新内容的基础知识；此外，一些生产和生活中的实际问题，有了二元一次方程组的相关知识方法，可以轻松解决.

2. 本章编写特点.

（1）教材在编写过程中重视引导学生体会数学的应用价值，全章主线可概括为：



（2）我们在重视引导学生体会数学应用价值的同时，我们更充分地考虑到了数学知识方法虽然源于实际但又具有不受实际局限的高度抽象性的一面. 所以，在引导学生分析视认二元一次方程（组）以及求解二元一次方程（组）等部分的编写中，与一般的教材相比，不再穿插实际背景问题的分析探究，只在纯数学的范围内研究数学知

识、数学方法. 使学生在学习二元一次方程组解法的过程中尽可能地减少干扰，迅速达到掌握解法和进一步理解认识方程组的目的.

（3）渗透数学建模思想.

每一个数学模型的出现都是源自实际问题的解决，二元一次方程组相关知识的引入也是为了更有效地解决实际问题. 在此之前，学生已经学习过了一元一次方程的内容，所以在学习本章内容时，会有些学生下意识里排斥二元一次方程组，还会错误地认为引入二元一次方程组没有必要，所以在编写本章时，章前页给出的引例没有选学生熟知的简单背景，而是选了一个非常不易用一元一次方程方法来求解的问题，学生若想用一元一次方程来求解此问题，将非常难以“列方程”，而要是“设两个未知数”呢，可以迅速解决“列”的难点，从而使学生体会到二元一次方程（组）这一新数学模型引入的必要性和意义，同时也为将来学生从“二元”到引入“多元”未知数埋下伏笔.

方程组是解决含有多个未知数问题的重要数学工具. 使学生学会设未知数、列方程组解决简单的实际问题是本章的一个重要教学目标，换言之就是用数学模型表示解决实际问题，而达成此目标的关键步骤是正确地理解问题的情景并分析其中的多种等量关系. 本章在编写中充分考虑了这一点，在5.6节，从多种角度考虑选取了丰富的实际背景素材，引导学生充分借助图形、表格、式子等数学工具进行分析，寻找量与量之间的关系，进而建立方程组求解问题，凸显方程组在解决实际问题中的工具作用，实际上这就是渗透建立模型的思想.

（4）重视现代化工具的运用.

在本章展示了图形计算器解二元一次方程组、三元一次方程组的情况，仅仅是为了说明技术的进步会带来学习方式的改进，使学生能接触新的技术、新的方法，从而开阔视野. 教师可以在本书最后的附录中，找到有关对图形计算器的介绍.

3. 教学重点、难点.

本章的重点是二元一次方程组的解法——代入消元法和加减消元法，以及列出二元一次方程组解简单的实际问题. 后者同时又是难点. 熟练地解二元一次方程组，关键在于让学生了解消元的思想方法，设法消去方程中的一个未知数，把“二元”变成“一元”；同时也要让学生通过例题和习题的学习，学会灵活运用代入消元法、加减消元法解二元一次方程组. 正确地列出二元一次方程组解简单的实际问题，关键在于正确地找出实际问题中的两个独立的相等关系，并能把它们表示成两个方程，使这两个方程能表示实际问题的全部含义.

4. 教学建议.

（1）关注学生已有的知识、方法基础以及知识、方法、能力的发展，充分调动学

生学习的主动性，帮助学生形成良好的学习习惯，学会学习，成为学习的主体.

学生前面已经学习过一元一次方程的内容，对方程已经有一定的认识，已会用一元一次方程表示实际问题中的数量关系，会解一元一次方程，部分学生在列一元一次方程的过程中已有过引入另外的字母辅助思考的体验尝试.

在教会学生数学知识、数学方法的同时，更应该教会学生学会学习. 引导学生体会数学知识的发展线索和数学方法的发展线索就是一种很好的学法启迪. 章前页给出的引例虽然用一元一次方程的知识方法求解较难，但仍然会有学生运用已学的知识方法求解. 这里当教师引入二元一次方程组方法时，要关注学生的实际，引导他们认真对比体会两种方法，一元一次方程的方法难在“列”，二元一次方程组的方法难在“解”，前者易“解”，后者易“列”，不难使学生迅速认识到，当下认为解二元一次方程组较难是因为我们还没有系统学习，当学会这种方法后还会觉得难吗？还有这里“列”变得简单了，将来面对有更多未知数的问题时，完全可以采用同样的方法. 在这里可以充分调动学生思考体会数学新知识、新方法产生出现的必要性，在激发学生学习兴趣的同时也是一种学习方法的渗透.

二元一次方程组相关的知识方法仅仅是一系列方程组问题的开始，将来学生面对具体实际问题或物理背景时他们需要面对更为复杂的情形，处理问题的基本态度、基本方法都来自今天的学习. 教师在教学生运用代入消元法、加减消元法解方程组时，不能仅仅视作是简单操作程序步骤的熟练模仿，这里需要教师引导学生思考并想清楚：“我们为什么会这么想？”

教材中多处提供了一些富有挑战性的思考探究栏目和拓展阅读材料，教学过程中可以启发诱导、设置必要的铺垫，不要轻易告诉答案，充分激发学生积极思维，获得学习的体验.

（2）感悟数学思想，积累数学活动经验.

分析实际问题中的数量关系，并引入字母准确表达，对绝大多数同学来说都很困难，这里既有对现实问题的抽象、归纳，又有对问题的演绎、模型，有时还有分类. 可以说布列方程（组）解应用题的过程就是一个简单的实际问题建模过程. 教材在多处均体现“方程组是解决含有多个未知数的实际问题的重要工具”，教学中要充分调动学生积极参与，积累数学活动经验体会模型思想.

换个角度来看，求解二元一次方程组的各个步骤，就是运用等式性质将方程组进行一系列变形，最终使方程组变形为$\begin{cases}x=a,\\y=b\end{cases}$而已，这里的每一个步骤都蕴含转化化归的数学思想；从整体上来说呢，又是将陌生问题转化为熟悉问题，学生已熟悉一元一次方程，将二元方程组消去一个元就转化为一元方程，可以类比，将来面对更多元的

问题时，我们还可以用同样消元的思想，消元思想是今后解所有方程组的基本思想方法，务必要引导学生体验感悟.

（3）必要的练习，提高基本技能.

能熟练地布列方程（组），并准确求解方程（组）以及熟练进行等式变形都是学生今后进一步进行数理学习的重要基础，同时也是一种分析问题、解决问题的重要数学能力. 教学和学习中要注意打好基础，切实掌握基本方法，并力求能够灵活地运用它们，形成能力. 教材中章前页和 5.6 节关注学生阅读理解、分析提炼、归纳整理等分析解决实际问题能力的培养，5.3、5.4、5.5 节关注学生变形化归、解方程等代数运算，对代入消元法、加减消元法解方程组的基本步骤过程要通过适量的练习切实掌握，形成基本技能.

（4）关注相关的数学文化，注重对基础知识的掌握.

可以说所有数学知识方法都是人类在认识世界、征服世界的过程中逐步思考累积起来的，从它的发展过程中既可以看到许多震撼人心的创新思维火花，又可以看到精彩的人文故事. 二元一次方程组是解决许多实际问题的基本工具，其中所蕴含的数学科学性、创造性的一面和文化性、应用性的一面均很突出，引导学生关注这些文化知识一方面可以激发学生的学习兴趣，另一方面也是促进学生深入理解掌握基础知识和基本方法. 教材在习题、问题解决、阅读理解等处均设置了游戏、“鸡兔同笼”、“张邱建百鸡问题”、“矩阵思想”等内容，教师们还可视学生具体情况予以补充诸如《九章算术》中的一些有关方程组的内容，使学生受到数学文化的熏陶.

5. 课时安排.

本章教学时间约需 14 课时，具体分配如下（仅供参考）：

5.1 二元一次方程和它的解	约 1 课时
5.2 二元一次方程组和它的解	约 1 课时
5.3 用代入消元法解二元一次方程组	约 2 课时
5.4 用加减消元法解二元一次方程组	约 3 课时
*5.5 三元一次方程组	约 1 课时
5.6 二元一次方程组的应用	约 4 课时
总结与复习	约 1 课时
机动	约 1 课时

北京出版社

教材及其参考信息



在新年联欢会上，同学们组织了猜谜活动，并采取积分方法记分：每答对 1 题得分，每答错 1 题扣分．在猜谜活动中，王强答对了 7 道题，答错了 3 道题，共获得 50 分；李翔答对了 8 道题，答错了 1 道题，共获得 62 分．问答对 1 道题得多少分，答错 1 道题扣多少分．

解决这类问题要用到二元一次方程组的知识．本章我们将要学习二元一次方程组的解法，并研究如何利用它来解决一些实际问题．[1]

［1］实际问题中的未知数往往不止一个．一般说来，能够通过列出二元一次方程组来解决的实际问题，也都能够通过列出一元一次方程来解决．但是当问题中未知数个数越多时，用一元一次方程来解决就越困难、越烦琐．章前引例充分考虑了这点，用一元一次方程知识来解题，设元、列方程都会有一定的困难，用二元一次方程组的知识方法，设元、列方程将比较容易．引例可使学生体会学习二元一次方程组知识方法的必要性．

[1] 通过章前页提出的问题引起学生的学习兴趣后，在这里就要具体地研究问题了. 提出这两个问题，是希望在教师的引导下，让学生通过思考体会，增强分析解决实际应用问题的信心和得出列方程解应用问题的一般化方法.

[2] 通过“交流”，把列出的方程与已学过的一元一次方程进行比较，寻找它们的区别与联系. 可以从方程含有的未知数的个数、次数上进行比较，也可以试着从满足方程的未知数的值（即方程的解）的个数上比较. 由于在这里还没有讲到二元一次方程的解的问题，关于解的个数的比较教师心中要有数，暂时先不要求，在学习完本章后再进行补充完善.

一 二元一次方程和二元一次方程组

5.1 二元一次方程和它的解

现在我们来研究章前页提出的问题.

思考 [1]

1. 如果我们用方程的知识来解决上述问题，首先要想清楚问题中都涉及了哪些数量，这些数量中哪些是已知量，哪些是未知量.

2. 是否可以设两个未知数，列出含有这两个未知数的方程来求解呢？

如果设答对 1 题得 x 分，答错 1 题扣 y 分，那么根据 x，y 之间的关系，我们可以得到下面两个方程：

$$7x-3y=50;\quad 8x-y=62.$$

交流

这两个方程和我们已经学习过的一元一次方程有什么区别和联系？它们之间有什么相同点和不同点？[2]

上面的两个方程中，每一个方程都含有两个未知数 x，y，并且含未知数的项的次数都是 1，我们把这样的方程叫做二元一次方程.

使二元一次方程左右两边的值相等的一对未知数的值，叫做这个二元一次方程的一个解.

例如，当 $x=1$，$y=1$ 时，方程 $3x+8y=11$ 左右两边的值相等，我们就把

本节是利用章前页提出的问题，创设一个情境，教学中可以设计引导学生用已学的知识来解决，然后再提出解决问题的新途径——能不能设两个未知数来解决这个实际问题. 学生用列算式、一元一次方程来解决都应得到肯定，但一定要引导学生体会新旧方法各自的优势，体会引入新方法的意义.

这里的“思考”试图引导学生体会列方程解应用题的一般化方法.

本节没有急于提出二元一次方程组的概念，是希望在学生明确了二元一次方程和它的解后再提出方程组的问题，这样有利于分散难点，有利于学生理解问题，在“发展”的观点下使知识间的衔接更自然. 同时也使学生体会数学中解决问题的步骤程序化想法.

$x=1$，$y=1$ 叫做方程 $3x+8y=11$ 的一个解，记作[1]

$$\begin{cases} x=1, \\ y=1. \end{cases}$$

方程 $3x+8y=11$ 的解要这样联立在一起表示．

思考[2]

怎样确定二元一次方程 $ax+by=c$（其中 a，b，c 是已知数，且 $a\neq 0$，$b\neq 0$）的一个解？

只要我们给出 x（或 y）的一个值，把它代入方程中，就可以将方程转化为含有另一个未知数 y（或 x）的一元一次方程，从而求出相应的 y（或 x）的一个值．这样的一对 x，y 的值就是这个二元一次方程的一个解．

例 1 已知：$2x+5y=7$，用含 y 的代数式表示 x.[3]

解：由 $2x+5y=7$，得

$$2x=7-5y.$$

$$x=\frac{7-5y}{2}.$$

就是把 y 看做“已知数”，解关于 x 的方程．

例 2 求出二元一次方程 $3x+2y+4=0$ 的任意 3 个解．

解：由 $3x+2y+4=0$，得

$$2y=-3x-4.$$

$$y=-\frac{3x+4}{2}.$$

可以把 x 看做“已知数”，把原方程化为用 x 表示 y 的形式．

令 x 分别取 -1，0，2，代入 $y=-\frac{3x+4}{2}$ 中，得出的 y 的值分别为：$-\frac{1}{2}$，-2，-5.

所以 $\begin{cases} x=-1, \\ y=-\frac{1}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} x=0, \\ y=-2; \end{cases}$ $\begin{cases} x=2, \\ y=-5 \end{cases}$ 是二元一次方程 $3x+2y+4=0$ 的 3 个解．

一般地，一个二元一次方程有无数个解．[4]

[1] 二元一次方程的解要用大括号的形式联立起来表示．$\begin{cases} x=1, \\ y=1 \end{cases}$ 表示大括号内的两个条件要同时成立，这种表示形式要引导学生注意掌握．

[2] 教学时要先引导学生思考这个问题怎样解决．根据学生的情况，可以从具体到一般或直接从一般形式考虑，从而得到一般方法，即教材中“思考”后面所述的方法．

[3] 将二元一次方程用含有一个未知数的代数式表示另一个未知数是代数式变形中的一种基本方法，为后面运用代入法解二元一次方程组打下基础，同时也为将来学生学习理解一次函数等知识打下基础．教学中要指导学生切实掌握．

[4] 二元一次方程的解不确定，这也是它与一元一次方程的重要区别之一．

1．通过本节的“交流”，引导学生与一元一次方程进行对比学习，加深对二元一次方程的认识．明确二元一次方程解的表示方法，体会代数表达式中‘｛’的含义，这是学生常常容易出错的地方．

2．本节要使学生了解如何确定一个二元一次方程的解．这里介绍了两种方法，一是“只要我们给出 x（或 y）的一个值……从而求出相应的 y（或 x）的值”的方法，二是“用含有一个未知数的代数式表示另一个未知数，再赋值”的方法．注意使学生理解一个二元一次方程的解的不确定性，从中渗透“消元”的思想，即要求符合二元一次方程的一对 x，y 的值，就可以先给出一个 x（或 y）的值，转化为一元一次方程

［1］通过填表，使学生体验列表求代数式的值的方法.

使学生深入理解二元一次方程解的意义，一般地，尽管一个二元一次方程的解有无数个，但在具体情况下添加了适当的约束后，该方程的解会成为有限个或被确定.

渗透函数对应的思想，让学生领会 x 与 y 的对应关系.

［2］求二元一次方程整数解的问题在实际中很常见，视学生具体情况应适当渗透.

练习答案：

1. （1）$x=3y+13$ 或 $y=\dfrac{x-13}{3}$；

（2）$x=\dfrac{5-2y}{3}$ 或 $y=\dfrac{5-3x}{2}$；

（3）$x=\dfrac{8y-10}{3}$ 或 $y=\dfrac{3x+10}{8}$.

2. 第 1 行依次为 $-\dfrac{1}{2}$，13，$\dfrac{5}{8}$；第 2 行依次为 $-\dfrac{11}{3}$，$\dfrac{7}{3}$，-17，$-\dfrac{19}{9}$.

3. 是；不是.

实践[1]

请填写下表，并指出二元一次方程 $3x+2y=17$ 的所有正整数解.

$3x+2y=17$								
	x							…
	y							…

通过填表我们知道，二元一次方程 $3x+2y=17$ 的正整数解为：

$\begin{cases}x=1,\\y=7;\end{cases}$ $\begin{cases}x=3,\\y=4;\end{cases}$ $\begin{cases}x=5,\\y=1.\end{cases}$

通过“实践”，你能否体会求二元一次方程的正整数解的方法？[2]

练习

1. 把下列二元一次方程改写成用含有一个未知数的代数式表示另一个未知数的形式：

（1）$x-3y=13$；　（2）$3x+2y=5$；　（3）$4x-5y+6=x+3y-4$.

2. 填写下表，使表中的每一对 x，y 的值都是方程 $2x-3y=5$ 的一个解：

$2x-3y=5$								
	x	-3		6	-23		$-\frac{2}{3}$	
	y		-2			7		$-\frac{5}{4}$

3. $\begin{cases}x=-1,\\y=3\end{cases}$ 是不是方程 $3x+y=0$ 和 $x+3y=8$ 的公共解？$\begin{cases}x=1,\\y=1\end{cases}$ 是不是方程 $2x-y=1$ 和 $3x+y=5$ 的公共解？请你检验一下.

5.2 二元一次方程组和它的解

为了研究章前页提出的问题，我们在 5.1 节列出了两个二元一次方

求解，或用方法二，利用求代数式的值的方法解决.

3. 本节的重点是学习二元一次方程及其解的意义，使学生会检验一对数是否是二元一次方程的解，会用含一个未知数的代数式表示另一个未知数.

1. 本节以上节的学习为基础，关键是使学生理解二元一次方程组及其解的概念.

在一个问题中，为什么把符合题意的两个方程“合在一起”呢？就是因为设出两个未知数后，这两个未知数既要满足第一个方程，又要满足第二个方程，因此要同时满足这两个方程，所以用大括号的形式把它们联立在一起，“合在一起”就组成了二

程．由于在这个问题中，两位同学的得分情况是一起出现的，所以两个方程应同时成立．据此，我们把方程 $7x-3y=50$ 和 $8x-y=62$ 放在一起，写为 $\begin{cases}7x-3y=50,\\8x-y=62\end{cases}$ 的形式．这样就组成了一个二元一次方程组．

一般地，含有相同的未知数的两个二元一次方程合在一起，就组成了一个二元一次方程组．[1]使二元一次方程组中的两个方程左右两边的值都相等的两个未知数的值（即两个方程的公共解），叫做二元一次方程组的解．

实践

请你填写下表，并指出既是方程 $7x-3y=50$ 的解，又是方程 $8x-y=62$ 的解的一对 x，y 的值是什么？

$7x-3y=50$	x	…	-1	2	5	8	11	…
	y	…						…
$8x-y=62$	x	…	-1	2	5	8	11	…
	y	…						…

通过填表，我们知道 $\begin{cases}x=8,\\y=2\end{cases}$ 既是方程 $7x-3y=50$ 的解，又是方程 $8x-y=62$ 的解，即 $\begin{cases}x=8,\\y=2\end{cases}$ 是方程组 $\begin{cases}7x-3y=50,\\8x-y=62\end{cases}$ 的解．

例 1 判断 $\begin{cases}x=-2,\\y=1\end{cases}$ 是不是方程组 $\begin{cases}x+3y=1,\\2x-5y=-9\end{cases}$ 的解．

解：把 $\begin{cases}x=-2,\\y=1\end{cases}$ 代入方程 $x+3y=1$ 的左右两边，

左边 $=-2+3\times1=1$，右边 $=1$．

［1］对于“含有相同的未知数的两个二元一次方程合在一起，就组成一个二元一次方程组”要注意掌握三点：一是含有相同的未知数．如果所含的未知数不相同就不是二元一次方程组，如 $\begin{cases}x+y=5,\\x-z=7.\end{cases}$ 它是三元一次方程组．二是“合在一起”表示方程组中的未知数既要满足第一个方程，又要满足第二个方程．三是“合在一起”的意思是把两个方程用大括号联立起来，这是表示方程组上述意义的形式．教学中要通过具体的例子使学生理解．

元一次方程组．这个定义是描述性的，并不严格，重在使学生理解两个方程中所含的两个未知数是相同的就可以了．

如 $\begin{cases}x+5=0,\\x+y=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x+y=1,\\2x-y=5,\\3x+2y=3\end{cases}$ 等也都是一个二元一次方程组．但这些不必向学生说明．

同时应使学生明确：在同一个问题中，同一字母必须代表同一数量．这样的方程才能合在一起组成方程组．

∵ 左边 = 右边，

∴ $\begin{cases}x=-2,\\y=1\end{cases}$ 是方程 $x+3y=1$ 的解．

把 $\begin{cases}x=-2,\\y=1\end{cases}$ 代入方程 $2x-5y=-9$ 的左右两边，

左边 $=2\times(-2)-5\times1=-9$，右边 $=-9$.

∵ 左边 = 右边，

∴ $\begin{cases}x=-2,\\y=1\end{cases}$ 是方程 $2x-5y=-9$ 的解．

所以 $\begin{cases}x=-2,\\y=1\end{cases}$ 是方程组 $\begin{cases}x+3y=1,\\2x-5y=-9\end{cases}$ 的解．

例 2 已知 $\begin{cases}x=-1,\\y=2\end{cases}$ 是关于 x，y 的方程组 $\begin{cases}ax+3y=1,\\2x-by=4\end{cases}$ 的解，求 $a+b$ 的值．

解：∵ $\begin{cases}x=-1,\\y=2\end{cases}$ 是方程组 $\begin{cases}ax+3y=1,\\2x-by=4\end{cases}$ 的解，

∴ 把 $x=-1$，$y=2$ 分别代入两个方程，得

$$\begin{cases}-a+6=1,\\-2-2b=4.\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}a=5,\\b=-3.\end{cases}$$

∴ $a+b=5+(-3)=2$.

练习

1. 在 ① $\begin{cases}x=3,\\y=0;\end{cases}$ ② $\begin{cases}x=0,\\y=-1;\end{cases}$ ③ $\begin{cases}x=1,\\y=1\end{cases}$ 这三对数值中，_____ 是方程 $x+2y=3$ 的解，_____ 是方程 $x+y=2$ 的解，因此 _____ 是方程

练习答案：

1. ①和③，③，③.

2. 要使学生理解：二元一次方程组的解就是两个二元一次方程的公共解，就是既是第一个方程的解，也是第二个方程的解.

组 $\begin{cases} x+2y=3, \\ x+y=2 \end{cases}$ 的解.

2. 如果 $\begin{cases} x=-\frac{1}{2}, \\ y=1 \end{cases}$ 是方程组 $\begin{cases} ax+2y=1, \\ 3x-by=2 \end{cases}$ 的解，那么 a，b 的值是多少？



习 题 5-1

★基础★

1. 请判断下面给出的 x，y 的值是不是方程 $3x+2y=5$ 的解：

(1) $\begin{cases} x=2, \\ y=-\frac{1}{2}; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=-1, \\ y=4. \end{cases}$

2. 把下列方程写成用含 x 的代数式表示 y 的形式：

(1) $2x+3y=0$； (2) $x-2y+5=0$；

(3) $3x-2y=x+5y$； (4) $2x+4=3(2y-2)$.

3. 判断 $\begin{cases} x=2.15, \\ y=-4.24 \end{cases}$ 是不是方程 $4x+y=3.46$ 和方程 $x-3y=14.87$ 的公共解.（可以用计算器检验）

4. 在下面每一个二元一次方程组的后面给出了一对 x 和 y 的值，判断这对值是不是前面方程组的解：

(1) $\begin{cases} x-2y=5, \\ x+2y=1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=3, \\ y=-1. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 3x-4y=5, \\ 2x+y=\frac{3}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} x=1, \\ y=-\frac{1}{2}. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x-y=1, \\ 3x+2y=2. \end{cases}$ $\begin{cases} x=1, \\ y=1. \end{cases}$

2. $a=2$，$b=-\frac{7}{2}$.

问题解决：

1. 设前后两次心里想的整数分别为 x，y（$0<x$，$y<10$）.

$3(7x+5)+y-8=121$.

$21x+y=114$.

$\because 0<x<10$，$0<y<10$，

$\therefore x=5$，$y=9$.

2. 当把想的数改为“任意的正整数”时，由 $21x+y=114$ 得 $y=3(38-7x)$. 当 x，y 为正整数时，方程的解为 $\begin{cases}x=1,\\y=93;\end{cases}$ $\begin{cases}x=2,\\y=72;\end{cases}$ $\begin{cases}x=3,\\y=51;\end{cases}$ $\begin{cases}x=4,\\y=30;\end{cases}$ $\begin{cases}x=5,\\y=9.\end{cases}$ 共有五种可能.

★★提升★★

1. 根据下列关系列出二元一次方程，并写出它的 4 个解：
(1) x 的 3 倍比 y 大 7；
(2) 小明用 10 元买了 x 张 60 分的邮票和 y 张 80 分的邮票.
2. 求满足方程 $3x+y=5$ 的非负整数解.
3. 已知 $\begin{cases}x=1,\\y=-1\end{cases}$ 是二元一次方程组 $\begin{cases}ax+2y=b,\\4x-by=3\end{cases}$ 的解，求 a，b 的值.
4. 一个两位数，十位上的数字与个位上的数字的和是 13，请写出满足条件的所有的两位数.

★★★拓展★★★

已知二元一次方程 $3x-2y=5$：
(1) 方程 $3x-2y=5$ 的整数解有多少个？请写出其中的任意 3 个解.
(2) 写出使 $|x|+|y|$ 的值最小的整数解.
(3) $3x-2y=5$ 的整数解有规律吗？试写出它的规律.

问题解决

让我们和王晓、张磊一起做一个数学游戏.

王晓对张磊说：“请你想一个 0 与 10 之间的整数，将它乘 7，再加上 5，把得数乘 3，再加上你想的另一个 0 与 10 之间的整数，然后从这个得数中减去 8，说出你的最后计算结果.”

当张磊说出最后计算出的结果是 121 时，王晓很快就说出了张磊前后两次心里想的整数分别是 5 和 9.

请你思考：

1. 王晓为什么能很快地知道张磊两次想的整数分别是 5 和 9？请你写出解决这个问题的一般方法.

2. 如果王晓请张磊想的数不是“0 与 10 之间的整数”，而是“任意的正整数”，那么这个问题能否得到解决？为什么？

安排这个“问题解决”，要注意引导学生用数学式子表示王晓叙述的运算. 列表分析如下：

游戏过程	运算的结果用代数式表示
想一个 0 与 10 之间的整数	设张磊开始想的数为 x（x 是 $0<x<10$ 的整数）
将它乘 7	$7x$
再加上 5	$7x+5$
把这个得数乘 3	$3(7x+5)$
再加上另一个 0 与 10 之间的整数	设张磊想的第二个数为 y（y 是 $0<y<10$ 的整数），则有 $3(7x+5)+y$
从这个得数中减去 8	$3(7x+5)+y-8$
张磊说出以上运算的结果	121
王晓就能说出张磊想的那两个整数	$x=5$，$y=9$

二、二元一次方程组的解法

5.3 用代入消元法解二元一次方程组

怎样消去一个未知数，转化为一元一次方程去求解呢？

探索

怎样求出二元一次方程组 $\begin{cases} y = 5 - x, \\ x - 2y = 2 \end{cases}$ 的解？

能否通过我们已经学习过的一元一次方程的解法来求这个二元一次方程组的解？

由于有相等关系：$y = 5 - x$，所以 y 和 $5 - x$ 可以互相替代．如果我们把方程 $x - 2y = 2$ 中的 y 用 $5 - x$ 替代，就得到一个关于 x 的一元一次方程 $x - 2(5 - x) = 2$，从而可以求出 x 的值．化简方程得

$$3x = 12.$$

$$x = 4.$$

把 $x = 4$ 代入[1]方程 $y = 5 - x$ 中，得

$$y = 1.$$

所以原方程组的解是 $\begin{cases} x = 4, \\ y = 1. \end{cases}$

运用上节所学知识可以验证，当 $\begin{cases} x = 4, \\ y = 1 \end{cases}$ 时，方程组成立．

是否可以把上面的解法运用到下面例题的求解中？

思考[2]

［1］求出方程组中一个未知数的值后，再把它代入方程组中的任意一个方程中，都可以求出另一个未知数的值，但一般我们会思考选择形式上看起来较为简单的方程（如：系数是整数且绝对值较小等）．

［2］在“探索”给出的方程组中，第一个方程是用含有 x 的代数式表示 y 的形式，而例题的两个方程中均没有这种形式．要引导学生通过观察、对比，概括出它们形式上的不同，再思考怎样用“转化”的思想，对方程进行适当的变形——用含有一个未知数的代数式表示另一个未知数，从而把方程组转化成上面已经会解的方程组的形式．

本节重点学习代入消元法．学习的过程是：通过“探索”中的引例，给定其中一个方程表达形式较为特殊的方程组，探究发现可以直接代入消元得一元一次方程，求解一元一次方程，再回代求得另一未知数，运用二元一次方程组解的概念验证可知该方法正确；然后给出例题（不再有引例中表达形式特殊的方程），引导“思考”、“探索”中方法可否一般化，促使学生去思考例题的形式如何进行转化．

例题又呈现两个层次，一是移项后直接变形，得到 $y = x - 3$ 的形式，二是在移项的基础上还要把 y 的系数化为 1．变形时要注意引导学生选择系数较简单的方程进行变形．系数较简单是指系数是整数且绝对值较小．

[1] 检验时要把所求的一对未知数的值分别代入原方程组里的每一个方程中，看看方程左右两边的值是不是相等.

在学习了一种新的解决问题的方法后，要使学生养成一种习惯，就是要反思解法的正确性，我们就可以运用检验的方法进行确认，从而培养学生做事负责的精神.

例 解下列二元一次方程组：

(1) $\begin{cases} x-y=3, \\ 3x-2y=5; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 3x+2y=5, \\ 4x-3y=1. \end{cases}$

这个方程组与前面“探索”中给出的方程组在形式上有什么不同？怎样变形可以使它与前面的方程组有相同的形式？

解：(1) $\begin{cases} x-y=3, & ① \\ 3x-2y=5. & ② \end{cases}$

由①，得 $y=x-3.$ ③

把③代入②，得

$3x-2(x-3)=5.$

只要用含有 x 的代数式表示 y 就可以了.

解这个方程，得

$x=-1.$

把 $x=-1$ 代入③，得

$y=-4.$

所以原方程组的解是 $\begin{cases} x=-1, \\ y=-4. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 3x+2y=5, & ① \\ 4x-3y=1. & ② \end{cases}$

我们可以把方程①变形为用含有 x 的代数式表示 y，通过代换求解.

由①，得 $y=\dfrac{5-3x}{2}$. ③

把③代入②，得 $4x-3\times\dfrac{5-3x}{2}=1.$

解得 $x=1.$

把 $x=1$ 代入③，得 $y=1.$

所以原方程组的解是 $\begin{cases} x=1, \\ y=1. \end{cases}$

求出 x 的值后，要代入③，再求出 y 的值.

请你心算检验，$\begin{cases} x=1, \\ y=1 \end{cases}$ 是不是方程组 $\begin{cases} 3x+2y=5, \\ 4x-3y=1 \end{cases}$ 的解.[1]

本节要进一步使学生体会“转化”是解决问题的基本方法，引导学生自觉运用这一方法去解决问题，变被动接受式学习为主动探索研究式学习.

在引例后通过“云朵”给出了检验的步骤，例题学习之后，提出了检验的要求，是希望学生在探索出解决问题的新方法后，对这种解法是否可靠进行反思总结，从而进一步理解代入消元法是解方程组的基本方法，同时也使学生进一步理解二元一次方程组的解的意义，强调 $\begin{cases} x=1, \\ y=1 \end{cases}$ 这一对数值是原方程组的解.

在这样一个引导学生思考探求新方法的学习过程中，关注培养学生严谨、求实的学风和做事负责的精神.

交流[1]

1. 在上面例题的求解中是怎样消去 y 的？

2. 用消去 x 的方法能否解上面的例题？

3. 通过以上例题的解题过程，你能否总结出一种解二元一次方程组的一般方法．

把方程组中的一个方程进行变形，写出用一个未知数 x（或 y）表示另一个未知数 y（或 x）的代数式，然后把它代入另一个方程中，消去未知数 y（或 x），得到关于 x（或 y）的一元一次方程，通过解这个一元一次方程，再来求二元一次方程组的解．

我们把这种通过“代入”消去一个未知数，从而求出方程组的解的方法叫做代入消元法，简称代入法．

我们还可以用图形计算器求解二元一次方程组．以上面的例题（2）为例，按键步骤如下：[2]

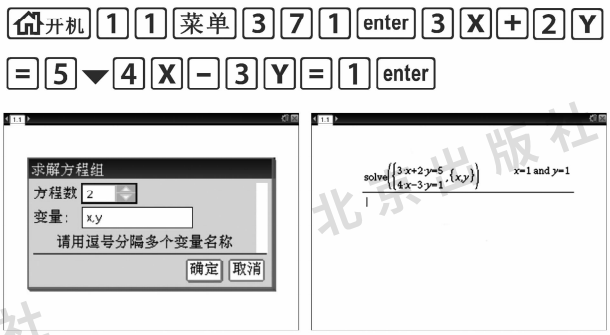


图 5－1

如图 5－1，得原方程组的解是 $\begin{cases} x=1, \\ y=1. \end{cases}$

［1］通过这个“交流”，使学生体会领悟解二元一次方程组的基本思想是消元，基本方法之一是代入消元法．

［2］介绍利用图形计算器解方程组，意在使学生理解技术的先进可以带来新的方法．没有图形计算器的学校，教师可以跟学生介绍这种方法——输入方程组，就可以得到方程组的解，使学生开阔眼界．关于图形计算器的介绍详见教参最后的附录．

在这里由于方程组的形式和方程组的解都比较简单，因此在例题后提出了心算检验的要求，培养学生的心算、口算的能力．

在学习了例题后，及时提出“交流”，是使学生及时体会解二元一次方程组的关键在于“消元”，即把“二元”转化为“一元”．在这里是通过等量代换的方法，消去一个未知数，从而求出原方程组的解．通过“议”的方式，使学生把思考中“悟”到的东西讲出来，促使知识的内化，也使学生在交流中互相学习提高．

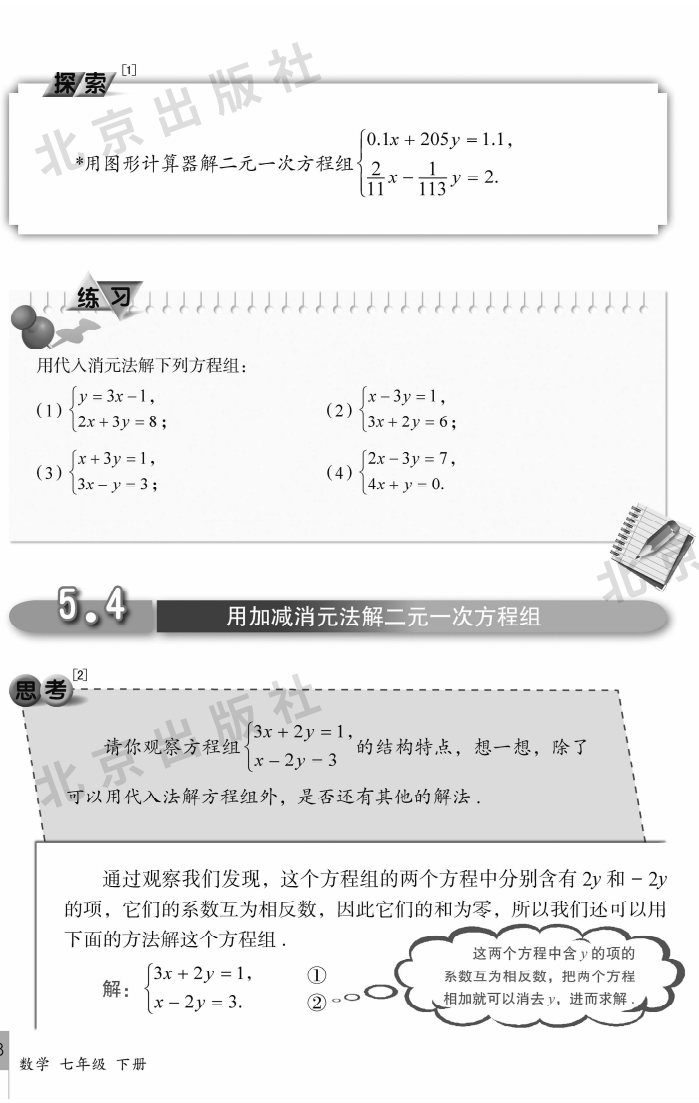
［1］图形计算器在解决系数比较复杂的方程组时更显示出其优越性. 本题的解为 $\begin{cases}x=11,\\y=0.\end{cases}$ 也可以请学生利用计算器计算.

练习答案：

(1) $\begin{cases}x=1,\\y=2;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=\dfrac{20}{11},\\y=\dfrac{3}{11};\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x=1,\\y=0;\end{cases}$ (4) $\begin{cases}x=\dfrac{1}{2},\\y=-2.\end{cases}$

［2］一要引导学生思考、明确解二元一次方程组的基本思想是消元，要将“二元问题”转化为“一元问题”，运用已学过的知识方法解决问题；二要引导学生分析观察待解方程组中两个方程对应项的系数具有什么特点，回顾面对一个等式我们可以进行的操作，从而引导学生直接运用等式性质将两个方程相加，探究得出解决这个方程组的简捷方法——加减消元法.



探索 [1]

*用图形计算器解二元一次方程组 $\begin{cases}0.1x+205y=1.1,\\\dfrac{2}{11}x-\dfrac{1}{113}y=2.\end{cases}$

练习

用代入消元法解下列方程组：

(1) $\begin{cases}y=3x-1,\\2x+3y=8;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x-3y=1,\\3x+2y=6;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x+3y=1,\\3x-y=3;\end{cases}$ (4) $\begin{cases}2x-3y=7,\\4x+y=0.\end{cases}$

5.4 用加减消元法解二元一次方程组

思考 [2]

请你观察方程组 $\begin{cases}3x+2y=1,\\x-2y-3\end{cases}$ 的结构特点，想一想，除了可以用代入法解方程组外，是否还有其他的解法.

通过观察我们发现，这个方程组的两个方程中分别含有 $2y$ 和 $-2y$ 的项，它们的系数互为相反数，因此它们的和为零，所以我们还可以用下面的方法解这个方程组.

解：$\begin{cases}3x+2y=1,\\x-2y=3.\end{cases}$ ①

②

这两个方程中含 y 的项的系数互为相反数，把两个方程相加就可以消去 y，进而求解.

38 数学 七年级 下册

本节重点学习加减消元法.

先请学生观察 $\begin{cases}3x+2y=1,\\x-2y=3\end{cases}$ 的结构特点，提出“除了可以用代入法解方程组外，是否还有更为简捷的解法”，激起学生思考的热情，使加减消元法的学习成为一种探索新方法的过程. 在这里观察出 $2y$ 与 $-2y$ 的关系是解决问题的突破口，“消元”仍是解决问题的基本方向. 在教学中要引导学生观察—思考—实践，然后再总结方法. 使学生能抓住运用加减消元法求解的特征——方程组的两个方程中同一个未知数的系数的绝对值相等.

①+②消去 y，得

$$4x=4.$$

$$x=1.$$

把 $x=1$ 代入①，得

$$2y=-2.$$

$$y=-1.$$

所以原方程组的解是 $\begin{cases}x=1,\\y=-1.\end{cases}$

请你检验，$\begin{cases}x=1,\\y=-1\end{cases}$ 是不是方程组 $\begin{cases}3x+2y=1,\\x-2y=3\end{cases}$ 的解.

例 1 解方程组 $\begin{cases}2x+3y=5,\\x+3y=1.\end{cases}$

解：$\begin{cases}2x+3y=5, & ①\\x+3y=1. & ②\end{cases}$

①−②，得

$$x=4.$$

把 $x=4$ 代入②，得

$$4+3y=1.$$

$$y=-1.$$

所以 $\begin{cases}x=4,\\y=-1\end{cases}$ 是原方程组的解.

交流[1]

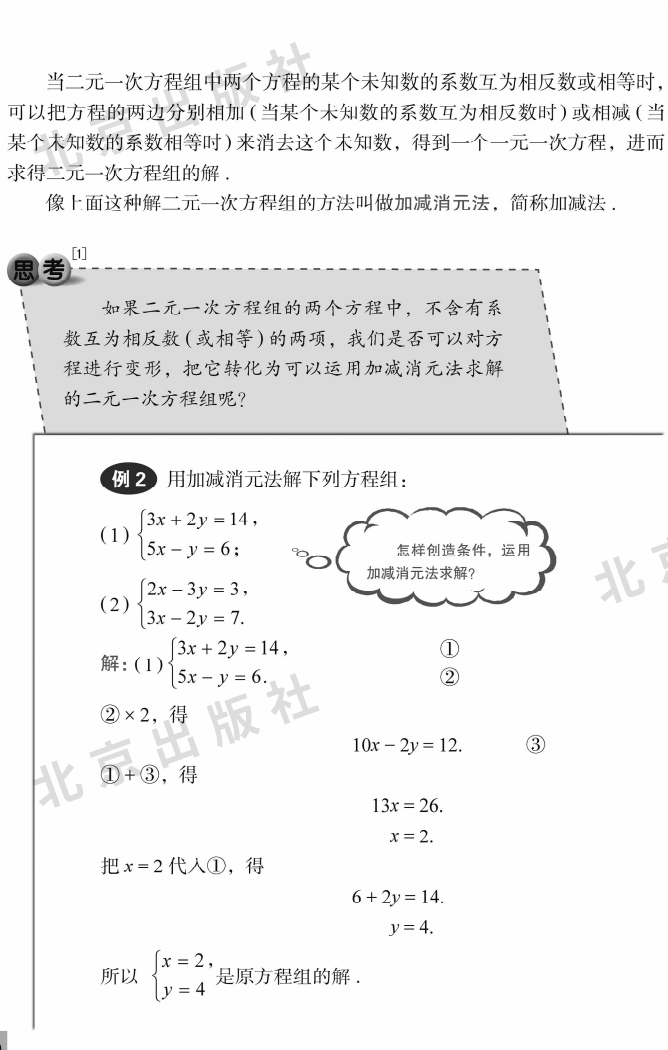
1. 分析上面的解题过程，请你总结一下这类方程组具有什么特点，可以运用怎样的方法求解.

2. 如果一个二元一次方程组中，两个方程的某个未知数的系数相同或互为相反数时，可以运用什么方法求解？

[1] 通过这个“交流”，使学生理解在解方程组时，首先要认真审题，若待解的方程组中两个方程中同一未知数的系数相等或互为相反数时，则可直接运用等式的性质将两个方程相加或相减，从而达到消元的目的.

在引例及例 1 的基础上提出新问题例 2：不具备引例特征的方程组怎么求解？例 2 的教学重点要放在比较例 2 与例 1 的方程组在结构上有什么不同，运用什么方法可以把例 2 的两个方程进行变形，使一个未知数的系数的绝对值相等. 要让学生自觉运用“转化”的思想去思考、去变形. 在这里要注意引导学生确定消元目标——选系数较为简单的未知数，如例 2（1）中宜选 y 进行消元. 同时要使学生注意在例 2（2）的方程组中消 x，y 均可，但是在变形时首先确定消元目标 x 后，两个方程中 x 的系数的最小公倍数 6 就是变形后两个方程中 x 的系数. 在进行变形时要提醒学生正确变形——方程两边同时乘（或除以）某一个数.

[1] 提出不具备例 1 形式的方程组，怎样通过方程变形完成转化这个问题. 教学时要给学生思考的时间，可以抽象地分析，也可以对具体的方程组进行剖析.



当二元一次方程组中两个方程的某个未知数的系数互为相反数或相等时，可以把方程的两边分别相加（当某个未知数的系数互为相反数时）或相减（当某个未知数的系数相等时）来消去这个未知数，得到一个一元一次方程，进而求得二元一次方程组的解.

像上面这种解二元一次方程组的方法叫做加减消元法，简称加减法.

思考[1]

如果二元一次方程组的两个方程中，不含有系数互为相反数（或相等）的两项，我们是否可以对方程进行变形，把它转化为可以运用加减消元法求解的二元一次方程组呢？

例 2 用加减消元法解下列方程组：

(1) $\begin{cases}3x+2y=14,\\5x-y=6;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}2x-3y=3,\\3x-2y=7.\end{cases}$

怎样创造条件，运用加减消元法求解？

解：(1) $\begin{cases}3x+2y=14,\\5x-y=6.\end{cases}$ ①
②

②×2，得

$10x-2y=12.$ ③

①+③，得

$13x=26.$

$x=2.$

把 $x=2$ 代入①，得

$6+2y=14.$

$y=4.$

所以 $\begin{cases}x=2,\\y=4\end{cases}$ 是原方程组的解.

学习例 1 后，及时提出“交流”，是希望学生及时进一步理解加减消元法.

例 2 后面的“交流”是希望学生能真正理解代入消元法、加减消元法是解二元一次方程组的两种基本方法，在具体解题时能抓住题目特征，具体分析，有选择地确定解法，从而克服盲目性，增强自觉性. 在这里也是希望学生对二元一次方程组的解法进行一个回顾与小结，比较代入消元法与加减消元法的区别与联系，进一步理解“消元”是解决问题的基本思想，“消元”是两种方法的共同实质，只不过实现“消元”的手段不同而已.

二元一次方程组 $\xrightarrow[\text{代入法或加减法（基本方法）}]{\text{消元转化（基本思路）}}$ 一元一次方程

(2) $\begin{cases}2x-3y=3, & ①\\ 3x-2y=7. & ②\end{cases}$

①×3，得

$$6x-9y=9. \quad ③$$

②×2，得

$$6x-4y=14. \quad ④$$

④－③，得

$$5y=5.$$
$$y=1.$$

把 $y=1$ 代入①，得

$$2x-3=3.$$
$$x=3.$$

所以 $\begin{cases}x=3,\\ y=1\end{cases}$ 是原方程组的解．

交流[1]

怎样根据方程组的特点选择恰当的方法，使求解的过程比较简捷？请你试举两例加以说明．

练习

1. 用加减消元法解下列方程组：

(1) $\begin{cases}4x-3y=5,\\ 2y-4x=1;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}3x+2y=1,\\ 2x-3y=18.\end{cases}$

2. 选择适当的方法解下列方程组：

(1) $\begin{cases}3x-5y=2,\\ 2x-y=3;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}4x-3y=18,\\ 2x-y=8;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x-2y=5,\\ x+3y=-5;\end{cases}$ (4) $\begin{cases}3x+y=7,\\ 2x+3y=7.\end{cases}$

[1] 通过这个“交流”，一方面使学生得到一个在解方程组时的策略认识，第一，“消元”转化是不变的基本思路；第二，面对具体方程组，要观察方程组中各方程的对应项系数的特点，选择恰当消元的对象和消元方法．（至于怎么选择才是恰当，不同的学生可以有不同的体会．）

另一方面关注培养学生阶段学习后总结概括的学习习惯，面对具体问题时冷静观察、认真思考、优化决策的良好解题习惯．

练习答案：

1. (1) $\begin{cases}x=-\dfrac{13}{4},\\ y=-6;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x=3,\\ y=-4.\end{cases}$

2. (1) $\begin{cases}x=\dfrac{13}{7},\\ y=\dfrac{5}{7};\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=3,\\ y=-2;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x=1,\\ y=-2;\end{cases}$ (4) $\begin{cases}x=2,\\ y=1.\end{cases}$

[1] 根据《义务教育数学课程标准(2011年版)》规定，本节为选学内容，不作考试要求.

[2] 这个“思考”是希望学生能把在二元一次方程组中学到的知识与方法迁移到三元一次方程组中去，提高学生拓展知识的能力，培养学生创新的意识.

教学中关注引导学生思考，“消元”将“二元”问题化为“一元”问题是解二元一次方程组的基本思路，这里又多了“一元”，可否消元将“三元”问题转化为“二元”或“一元”问题？该如何去消元？类似的认真观察方程组中三个方程系数的特点.

*5.5 三元一次方程组[1]

思考[2]

请你运用解二元一次方程组的经验，试解方程组 $\begin{cases} x+y+z=5, \\ x+y-z=3, \\ x-y+z=1. \end{cases}$

我们已经知道，解二元一次方程组思路的核心就是消元. 通过观察，我们可以发现方程组中第2个和第3个方程中分别有 y 和 $-y$，$-z$ 和 z，它们均互为相反数.

解：$\begin{cases} x+y+z=5, & ① \\ x+y-z=3, & ② \\ x-y+z=1. & ③ \end{cases}$

②+③，得

$$2x=4.$$
$$x=2.$$

把 $x=2$ 代入①，得

$$2+y+z=5.$$
$$y+z=3. \quad ④$$

把 $x=2$ 代入②，得

$$2+y-z=3.$$
$$y-z=1. \quad ⑤$$

④+⑤，得

$$2y=4.$$
$$y=2.$$

把 $y=2$ 代入④，得

$$2+z=3.$$
$$z=1.$$

所以，原方程组的解为 $\begin{cases} x=2, \\ y=2, \\ z=1. \end{cases}$

本节进行三元一次方程组及其解法的探究.

借助“思考”，首先引导学生概括求解二元一次方程组的方法经验，理解其核心思路就是“消元转化”，具体方法是根据方程组中对应项系数的特点选用代入消元法或加减消元法，再面对具体三元一次方程组思考如何消元转化，解决问题.

对这部分内容不作硬性要求，可以弹性处理，但引导学生自主去将所学知识方法发展拓宽的学习方法要适度渗透. 对学习基础比较好的学生，这一拓展要求是可以在教师的引导下实现的.

三元一次方程组在以后学习函数，运用待定系数法确定二次函数解析式时要经常

一般地，像上面方程组中的每个方程，都含有三个未知数，并且含有未知数的项的次数都是 1，我们把这样的方程叫做**三元一次方程**.

像上面的方程组这样，含有相同的未知数的三个三元一次方程合在一起，就组成一个**三元一次方程组**. 使三元一次方程组中三个方程左右两端的值都相等的三个未知数的值（即三个方程的公共解），叫做三元一次方程组的解.

对于三元一次方程组，我们仍然可以运用代入消元法或加减消元法，消去三元一次方程组中的一个或两个未知数，把它化成二元一次方程组或一元一次方程来解方程组.

例 解方程组：

(1) $\begin{cases} y = x + z, \\ 2x + 2y - 3z = 5, \\ x - y + 2z = 3; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 5x - 3y - z = 21, \\ 3x - 4y - z = 22, \\ 4x + 2y - 3z = -14. \end{cases}$

解：(1) $\begin{cases} y = x + z, & ① \\ 2x + 2y - 3z = 5, & ② \\ x - y + 2z = 3. & ③ \end{cases}$

这里根据方程组中方程的特点，选择运用了代入消元法[1]

把①代入②，得

$$2x + 2(x + z) - 3z = 5.$$

$$4x - z = 5. \quad ④$$

把①代入③，得

$$x - (x + z) + 2z = 3.$$

$$z = 3.$$

把 $z = 3$ 代入④，得

$$x = 2.$$

把 $x = 2$，$z = 3$ 代入①，得

$$y = 5.$$

所以，原方程组的解为 $\begin{cases} x = 2, \\ y = 5, \\ z = 3. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 5x - 3y - z = 21, & ① \\ 3x - 4y - z = 22, & ② \\ 4x + 2y - 3z = -14. & ③ \end{cases}$

根据方程组中各方程系数的特点，先消去哪个未知数?[2]

[1] 到底选择用代入消元法还是加减消元法，很少有哪种选择是绝对具有优势的. 这里要引导学生仔细观察方程组中对应项系数的特点，认真对比体会，最好能心算几步试试再决定. 比如此题，有的同学可能会马上发现，若由① + ③，则立即可得 $z = 3$，再将其代入①、②，同样很简捷.

[2] 可以引导学生思考，若你实在没有发现方程组中各对应项系数有什么特点，这里可以有 3 种选择，可以考虑先消去任意一个元，比如说就选消去 x，可以用：① × 3 − ② × 5 和 ① × 4 − ③ × 5 来消去 x……只不过上述操作的运算稍显烦琐，但只要执着坚持下去就肯定可行. 增强学生能正确解题的信心.

用到. 在这里可以试解一些比较简单的三元一次方程组，随着学习的深入，学生对二元一次方程组的解法日趋理解时，会逐渐理解和掌握三元一次方程组的解法.

［1］在这里仍是介绍技术对解决问题带来的变革，开阔学生眼界，鼓励学生努力学习，为今后的发展打下基础. 受条件的限制，技术可能暂时不能实现，但是介绍这种技术却可以激起学生探求的愿望.

①－②，得

$$2x+y=-1. \quad ④$$

①×3，得

$$15x-9y-3z=63. \quad ⑤$$

⑤－③，得

$$11x-11y=77.$$

同④消去的未知数一样.

$$x-y=7. \quad ⑥$$

④＋⑥，得

$$3x=6.$$

$$x=2.$$

把 $x=2$ 代入⑥，得

$$y=-5.$$

把 $x=2$，$y=-5$ 代入①，得

$$z=4.$$

所以，原方程组的解为 $\begin{cases}x=2,\\y=-5,\\z=4.\end{cases}$

我们也可以借助图形计算器解三元一次方程组．现在试用图形计算器解下面的三元一次方程组

$$\begin{cases}x+2y+z=5,\\2x-y+z=7,\\3x+y-z=-2.\end{cases}$$

按键步骤如下：[1]

开机 1 1 菜单 3 7 1 del 3 enter X + 2
Y + Z = 5 ▼ 2 X − Y + Z = 7 ▼ 3 X
+ Y − Z = (−) 2 enter

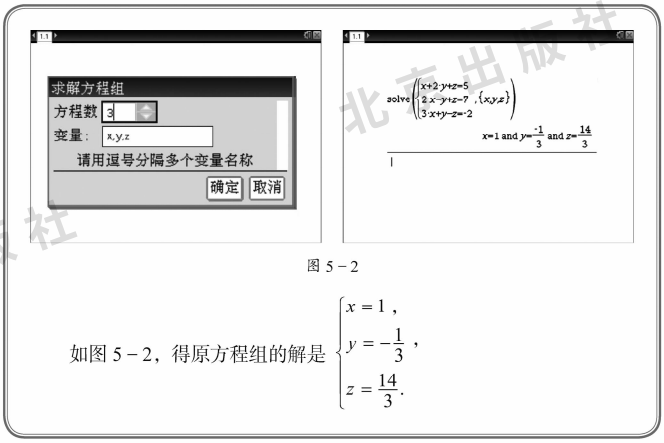


图 5－2

如图 5－2，得原方程组的解是 $\begin{cases} x=1, \\ y=-\dfrac{1}{3}, \\ z=\dfrac{14}{3}. \end{cases}$

练习

*解下列方程组：

(1) $\begin{cases} x+y-z=6, \\ x-y+2z=-7, \\ 3x+2y+z=7; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2a+b+c=0, \\ 4a+2b+c=5, \\ 2a-b+c=4; \end{cases}$ (3) $\begin{cases} x+y=8, \\ y+z=-3, \\ z+x=-1. \end{cases}$

习 题 5－2

★基础★

1. 用代入消元法解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 2x-y=5, \\ 3x+2y=-3; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x-2y=3, \\ 3x+y=2; \end{cases}$

练习答案：

(1) $\begin{cases} x=\dfrac{2}{5}, \\ y=\dfrac{19}{5}, \\ z=-\dfrac{9}{5}; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} a=\dfrac{7}{2}, \\ b=-2, \\ c=-5; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x=5, \\ y=3, \\ z=-6. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x-3y=7, \\ 4x-9y=22; \end{cases}$ (4) $\begin{cases} 5x-2y=3, \\ 10x-3y=4. \end{cases}$

2. 用加减消元法解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 2x+y=1, \\ 2x-y=3; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x-3y=5, \\ 3x-y=-1; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 4x-3y=4, \\ 2x-6y=11; \end{cases}$ (4) $\begin{cases} 3x-4y=9, \\ 2x-3y=7. \end{cases}$

3. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 3x=2y, \\ x-4y=5; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x-5y=1, \\ 5x+2y=17; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 3x+5y=3, \\ 3x-3y=11; \end{cases}$ (4) $\begin{cases} 2x+3y=7, \\ 3x+2y=8. \end{cases}$

4. 解方程组 $\begin{cases} \dfrac{x+y}{4}-\dfrac{2x-y}{3}=-1, \\ 6(x+y)-4(2x-y)=16. \end{cases}$

★★提升★★

1. 已知：当 $x=-3$ 和 $x=2$ 时，代数式 $kx+b$ 的值分别是 -4 和 11.

(1) 求 k，b 的值；

(2) 求 x 为何值时，代数式 $kx+b$ 的值为 $\frac{1}{2}$.

2. 如果关于 x，y 的方程组 $\begin{cases} 3ax-by=5, \\ 2bx-ay=1 \end{cases}$ 的解是 $\begin{cases} x=1, \\ y=2, \end{cases}$ 试求 a，b 的值.

*3. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases} x+y-2z=5, \\ 2x-y-z=4, \\ 3x+y-3z=10; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} a+b+c=0, \\ 4a+2b+c=5, \\ 4a-2b+c=-1. \end{cases}$

★★★拓展★★★

1. 已知关于 x，y 的二元一次方程组 $\begin{cases} 3x-y=a, \\ x-3y=5-4a \end{cases}$ 的解满足 $x<y$，试求 a 的取值范围.

2. 由于粗心，在解方程组 $\begin{cases}\square x-2y=5,\\ 7x-4y=\triangle\end{cases}$ 时，小明把系数□抄错了，得到的解是 $\begin{cases}x=-\frac{1}{3},\\ y=-\frac{10}{3};\end{cases}$ 小亮把常数△抄错了，得到的解是 $\begin{cases}x=-9,\\ y=-16.\end{cases}$ 请你帮助他们纠正解题中的错误，写出□，△所代表的数，并求原方程组的解.

5.6 二元一次方程组的应用[1]

例 1 李威喜欢集邮，他有中国邮票和外国邮票共 335 张，其中中国邮票的张数比外国邮票的张数的 3 倍少 17 张. 他有中国邮票和外国邮票各多少张?

分析：题目中含有两个未知数，中国邮票与外国邮票的张数. 根据题意，这两个未知数要同时满足以下两个关系：

(1) 中国邮票的张数 + 外国邮票的张数 = 335；

(2) 中国邮票的张数 = 3 × 外国邮票的张数 − 17.

解：设李威有中国邮票 x 张，外国邮票 y 张，根据题意列出方程组，得

$$\begin{cases}x+y=335, & ①\\ x=3y-17. & ②\end{cases}$$

把②代入①，得

$$3y-17+y=335.$$

解这个方程，得

$$y=88.$$

把 $y=88$ 代入②，得

$$x=3\times 88-17=247.$$

$$\therefore \begin{cases}x=247,\\ y=88.\end{cases}$$

答：李威有中国邮票 247 张，外国邮票 88 张.



[1] 运用所学的二元一次方程组的知识解决实际问题，是学生学以致用的机会，也是提高学生应用数学意识的实践，从中可以培养学生分析问题、解决问题的能力. 因此教学中要调动学生解决实际问题的积极性.

另外在教学中还要关注培养学生思维的发散，对不同解法要充分给予肯定，引导其思考对比各方法的优劣异同.

因为从解法上讲，这些问题均可运用列一元一次方程求解，基于这一点可以引导学生进行解法的比较，分析列二元一次方程组求解的优越性. 在处理较简单的实际问题时，通过列二元一次方程组求解，可以使“设”的环节变得简捷、明了.

本节安排了 4 个例题，通过列二元一次方程组来解决一些简单的实际问题，使学生进一步理解运用方程可以反映现实世界中的相等关系，体会运用方程组的方法解决实际问题的优越性——在列方程时比较容易，向学生渗透把未知转化为已知的辩证思想，培养学生应用数学的意识，提高学生分析问题、解决问题的能力.

1. 列二元一次方程组解决简单的实际问题是本节的教学重点. 列出方程组是本节的难点. 教学中要认真引导学生审题，分析问题中的数量关系，抓住问题中反映出来的两个相等关系，并把它们表示成方程组的形式，为解决问题奠定基础.

2. 在学生已经掌握了列一元一次方程解实际问题的基础上，进行本节的教学，要

［1］题目中信息量较大，可以引导学生通过列二维表来梳理题目中的条件，比如，此题可以列：

班级	篮球		羽毛球拍		总花费
	单价	数量	单价	数量	
七(1)					
七(2)					

也可以如此列：

班级	篮球花费	羽毛球拍花费	总花费
七(1)			
七(2)			

［2］此处也可引导学生列表分析，先使学生明确基本数量关系：路程（s）＝速度（v）×时间（t）.

	v(km/h)	t(h)	s(km)
张强	x	2.5	$2.5x$
		1	x
李毅	v	2	$2y$
		1	y

又由题设可得：

$$\begin{cases}2.5x+2y=20,\\ x+y=20-11.\end{cases}$$

例 2 某校七年级(1)、(2)两班的同学积极参加全民健身活动，为此两班到同一商店购买体育用品．已知七年级(1)班购买了 3 个篮球和 8 副羽毛球拍共用了 442 元，七年级(2)班购买了同样的 5 个篮球和 6 副羽毛球拍共用了 480 元，问每个篮球和每副羽毛球拍各多少元．

解：设每个篮球 x 元，每副羽毛球拍 y 元，根据题意列方程组，得[1]

$$\begin{cases}3x+8y=442, & ①\\ 5x+6y=480. & ②\end{cases}$$

①×5，得

$$15x+40y=2\,210. \quad ③$$

②×3，得

$$15x+18y=1\,440. \quad ④$$

③－④，得

$$22y=770.$$

$$y=35.$$

把 $y=35$ 代入①，得

$$x=54.$$

$$\therefore \begin{cases}x=54,\\ y=35.\end{cases}$$

答：每个篮球 54 元，每副羽毛球拍 35 元．

例 3 张强与李毅二人分别从相距 20 千米的 A，B 两地出发，相向而行．如果张强比李毅早出发 30 分钟，那么在李毅出发后 2 小时，他们相遇；如果他们同时出发，那么 1 小时后两人还相距 11 千米．求张强、李毅每小时各走多少千米．

分析：如果设张强、李毅每小时各走 x 千米、y 千米，那么根据题意画出示意图，如图 5－3.[2]

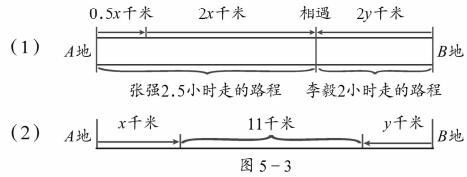
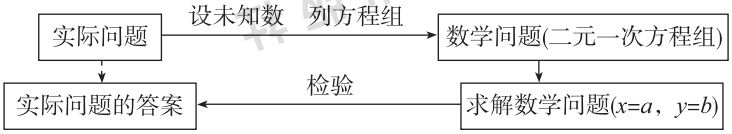


图 5－3

注意引导学生注意：设出两个未知数，就要找出两个相等的关系，列出二元一次方程组来表示问题中的全部含义.

3. 列二元一次方程组解决实际问题的主要步骤，从解题过程上讲是审题，设出未知数，列出方程组，解方程组，检验是否符合实际，作答；从思考问题、解决问题而言，是把实际问题转化为数学问题求解的过程，可以用下面的框图表示：



解：设张强每小时走 x 千米，李毅每小时走 y 千米，根据题意列方程组，得

$$\begin{cases}2.5x+2y=20,\\20-(x+y)=11.\end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases}x=4,\\y=5.\end{cases}$$

答：张强每小时走 4 千米，李毅每小时走 5 千米．

例 4 用一些长短相同的小木棍按图 5－4 所示的方式，连续摆正方形或六边形，要求相邻的图形只有一条公共边．已知摆放的正方形比六边形多 4 个，并且一共用了 110 根小木棍，问连续摆放的正方形和六边形各多少个．[1]

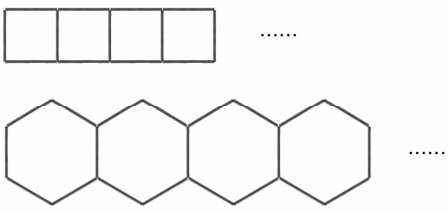


图 5－4

我们可以列表分析：

	连续摆放的个数 / 个	使用小木棍的根数 / 根
正方形	x	$4+3(x-1)=3x+1$
六边形	y	$6+5(y-1)=5y+1$
关　系	正方形比六边形多 4 个	共用了 110 根小木棍

解：设连续摆放了 x 个正方形和 y 个六边形，那么连续摆 x 个正方形用了 $(3x+1)$ 根小木棍，连续摆 y 个六边形用了 $(5y+1)$ 根小木棍，根据题意列方程组，得

$$\begin{cases}x=y+4, & ①\\(3x+1)+(5y+1)=110. & ②\end{cases}$$

［1］解决好例 4 的关键是引导学生观察、概括出连续摆正方形、六边形所用的小木棍的根数与图形个数之间的关系．观察有两种方法：第一种是“合”的方法．比如：在一个正方形上加上连续摆放的小棍，在 4 根小棍的基础上，每加一个正方形需加上 3 根，因此摆 n 个正方形需要 $[4+3(n-1)]$ 根．第二种方法是“拆”的方法．把正方形看成是由“匚”形（用 3 根拼成）连续摆放后，最后加 1 根封口，即摆 n 个正方形需用 $(3n+1)$ 根．

教材列表中的 $4+3(x-1)=3x+1$ 实际上也是想提示教师在教学中注意用这样两种方法进行分析．

4．在这里采用了“思考”的形式，是希望学生静心思考，通过概括 4 类例题的学习归纳总结，总结列二元一次方程组解实际问题的步骤．列二元一次方程组解决实际问题的主要步骤可归纳为：（1）弄清题意，找到题目中表达的相等关系，并设出未知数；（2）列出表示题目全部意义的两个方程，并组成方程组；（3）解这个方程组，求出未知数的值；（4）审查未知数的值是否符合题意，并作答（注意写明单位）．

同时也可以进一步与列一元一次方程解实际问题进行比较，从而提高学生解决实际问题的能力．

练习答案：

1. 设东方投资公司投资 x 万元，南方发展有限公司投资 y 万元，

则有 $\begin{cases} x+y=267, \\ x-y=17. \end{cases}$

解出 $\begin{cases} x=142, \\ y=125. \end{cases}$

答：东方投资公司投资 142 万元，南方发展有限公司投资 125 万元.

2. 设电话费为 x 元，上网费为 y 元，

则有 $\begin{cases} x+y=135.8, \\ y-x=35.6. \end{cases}$

解出 $\begin{cases} x=50.1, \\ y=85.7. \end{cases}$

答：电话费为 50.1 元，上网费为 85.7 元.

3. 设王盟每小时走 x 千米，李婷每小时走 y 千米，

则有 $\begin{cases} x-y=1, \\ 3x+3y=24. \end{cases}$

解出 $\begin{cases} x=4.5, \\ y=3.5. \end{cases}$

答：王盟每小时走 4.5 千米，李婷每小时走 3.5 千米.

把①代入②，整理，得

$$8y=96.$$

$$y=12.$$

把 $y=12$ 代入①，得

$$x=16.$$

$$\therefore \begin{cases} x=16, \\ y=12. \end{cases}$$

答：连续摆放了 16 个正方形和 12 个六边形.

列二元一次方程组解决实际问题的主要步骤是什么？

思考

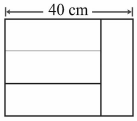
练习

1. 为支援西部开发，东方投资公司和南方发展有限公司共投资 267 万元. 已知东方投资公司比南方发展有限公司多投资 17 万元，这两个公司各投资多少万元？
2. 小明家某月共缴纳电话费和上网费 135.8 元，已知他家的电话费比上网费少 35.6 元，这个月小明家的电话费和上网费各多少元？
3. 学校和博物馆相距 24 千米. 已知王盟比李婷每小时多走 1 千米，他们分别从学校和博物馆同时出发相向而行，3 小时后相遇，王盟和李婷每小时各走多少千米？

习 题 5-3

★基础★

1. 一个长方形的周长是 100 厘米，当这个长方形的长减少 10 厘米、宽增加 10 厘米时，长方形恰好变为一个正方形，原来长方形的长和宽各是多少？
2. 在美化校园的劳动中，七年级（1）班比七年级（2）班多植树 12 棵，已知两个班共植树 50 棵，两班各植树多少棵？
3. 王洋家去年结余了 16 000 元．今年又增加了新的养殖项目，预计到年底可以结余 25 000 元，并且今年的收入比去年增加 20%，支出增加 10%．去年的收入和支出各是多少元？（结余 = 收入 − 支出）
4. 东、西两个车站相距 153 千米，甲、乙两车同时从东、西两个车站相向而行，3 小时后两车相遇，已知甲车比乙车多走 15 千米，甲、乙两车的速度各是多少？
5. 我国古代的数学著作《孙子算经》中有这样一道“鸡兔同笼”题：今有鸡兔同笼，上有三十五头，下有九十四足，问鸡兔各几何．你能列二元一次方程组解这道题吗？
6. 如图，用 4 块相同的小长方形木块拼成一个大长方形，小长方形木块的长和宽各是多少？



（第 6 题）

★★提升★★

1. 一个梯形上底的 2 倍比下底短 3 厘米，上底、下底的和的一半为 18 厘米，这个梯形的上底、下底的长各是多少厘米？
2. 已知代数式 $kx+b$，当 $x=-3$，$x=2$ 时，代数式的值分别是 4 和 -11，求当代数式的值为 -3 时，x 的值．
3. 已知 x，y 是有理数，求满足 $(2x-y+1)^2+|5x-2y-3|=0$ 的 x，y 的值．
4. 如果 $5a^{m+n}b^2$ 与 $-12a^3b^{m-n}$ 是同类项，求 m，n 的值．
5. 已知关于 x，y 的二元一次方程组 $\begin{cases}3x-4y=m,\\x+2y=2m+3\end{cases}$ 的解 x，y 是一对相反数，试求 m 的值．
6. 已知关于 x，y 的二元一次方程组 $\begin{cases}2x-y=2m,\\x+3y=m-1\end{cases}$ 的解满足 $x<y$，求 m 的取值范围．

[1] 这是我国古代《张丘建算经》中的一个问题. 张丘建是古代著名的数学家. 通过这个阅读材料，希望教师引导学生学习张丘建勤奋好学的精神，并用所学的二元一次方程组的知识解决百鸡问题，提高学生分析问题、解决问题的能力. 也希望能引导学生上网查询中国古代著名的数学著作，开阔眼界，拓展知识.

百鸡问题实际上是三元一次方程组求整数解的问题. 在这里可以引导学生运用二元一次方程组中学到的知识去探索求解，通过消元把这个问题转化为二元一次方程求整数解的问题.

7. 中学生百队足球杯赛规定，胜 1 场得 3 分，平 1 场得 1 分，负 1 场得 0 分. 在这次杯赛中红帆队共赛 8 场，一共得了 17 分，其中踢平的场数是所负场数的 2 倍. 试问该队胜、负各多少场.

★★★ 拓展 ★★★

在学校为七年级同学进行体检时，校医室的体重计出现了故障，只能称出 60 千克以上的质量，恰好参加体检的大多数同学的体重不足 60 千克. 要使体检顺利进行，你能利用方程组的知识，为校医设计一种称体重的方案吗?

阅读理解

我国古代有趣的百鸡问题[1]

我国古代有个广为流传的“百鸡问题”. 它的原文是这样叙述的：“今有鸡翁一，直①钱五；鸡母一，直钱三；鸡雏三，直钱一. 凡百钱买鸡百只，问鸡翁母雏几何.”它的意思是：五文钱可以买 1 只公鸡，三文钱可以买 1 只母鸡，一文钱可以买 3 只小鸡. 现在要用一百文钱买 100 只鸡，问可以买公鸡、母鸡、小鸡各多少只. 这个问题与我国南北朝时期的北魏数学家张丘建有关.

公元 5 世纪末，张丘建出生在一个贫苦的家庭里，父亲靠劳作辛辛苦苦挣钱养活全家.

张丘建从小聪明好学，特别喜欢看数学书，十二三岁就读完了中国古代三大数学名著《周髀算经》、《九章算术》和《孙子算经》. 邻居们有了难题都来问他，他都能很快地解决，因此，大家称他“张神童”.

民间的传说很快传到了宰相的耳朵里，他为了试试张丘建的本

① “直”同现代文中的“值”，指价值.

事，特地把他的父亲叫到府中，给了他父亲一百文钱，让他买公鸡、母鸡、小鸡共100只送来，鸡的价钱如前所述．

他的父亲闷闷不乐地回到家中，不住地唉声叹气．张丘建问清缘由后，叫父亲不要着急．第二天，张丘建让父亲带上4只公鸡、18只母鸡和78只小鸡去见宰相．宰相一看，这100只鸡正好值一百文钱．宰相心中暗喜，但他却不动声色地又给了张丘建父亲一百文钱，让他再送100只鸡来，但是不能和这次送的一样．

张丘建让父亲带上8只公鸡、11只母鸡和81只小鸡给宰相，宰相见后赞叹不已．宰相为了再考考张丘建，又给了张丘建父亲一百文钱，要他再送100只鸡来，但是不能和前两次送过的一样，张丘建思考片刻后，让父亲给宰相送去12只公鸡、4只母鸡和84只小鸡．

宰相真正认识到张丘建的才华，认为“张神童”果然名不虚传，于是把他招进府中加以培养．张丘建刻苦好学，在数学方面取得了很大的成就，他写出了著名的《张丘建算经》．这本著作是我国古代著名的十大“算经”之一，“百鸡问题”就收录在其中．

如果你想了解更多的我国古代数学问题，请上网或去图书馆查阅，用以开阔你的视野，增长你的学识．

探索

请你用列方程组的方法来表示“百鸡问题”，并求出它的解．[1]

[1] 设可以买公鸡x只，母鸡y只，小鸡z只，则有

$$\begin{cases} x+y+z=100, \\ 5x+3y+\dfrac{1}{3}z=100. \end{cases}$$

（x，y，z均为正整数）

消去z，得$7x+4y=100$，其中x，y，z为正整数．

由$y=25-\dfrac{7}{4}x$可知，原方程组的正整数解为：

$$\begin{cases} x=4, \\ y=18, \\ z=78; \end{cases} \begin{cases} x=8, \\ y=11, \\ z=81; \end{cases} \begin{cases} x=12, \\ y=4, \\ z=84. \end{cases}$$

[1] 在这里仅仅是对矩阵的一个极简单的介绍，使学生了解还有这样一种用矩形数表表示的方法就可以了.

阅读理解

矩阵的简单介绍[1]



这是中华人民共和国成立60周年国庆阅兵式中女民兵方阵的照片．在数学中也可以把一些数字排成一个方阵．

把下面日历中的某些数字框起来，可以研究它们之间的某种关系．

日	一	二	三	四	五	六
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23/30	24	25	26	27	28	29

我们可以把框起来的数用下面矩形①数表的形式表示：

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 11 & 12 & 13 \\ 18 & 19 & 20 \end{bmatrix} \quad (1)$$

又如，王宏君、李小明、张萍和李力四位同学某次考试的语文、数学、英语的成绩，也可以排列成一个矩形数表：

	语文	数学	英语
王宏君	85	93	95
李小明	97	82	93
张　萍	79	89	94
李　力	87	85	83

(2)

① 矩形即长方形．

经过44年的努力和拼搏，中国足球队终于在2001年冲出了亚洲，走向了世界．下面表格中的内容是亚洲十强赛B组的比赛结果：

队　名	胜	平	负
中　国	6	1	1
阿联酋	3	2	3
乌兹别克斯坦	3	1	4
卡塔尔	2	3	3
阿　曼	1	3	4

规定：胜一场得3分，平一场得1分，负一场得0分，你能计算一下各队的总积分吗？

表中的数据也可以排成一个矩形数表：

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \tag{3}$$

像(1)、(2)、(3)这样把几个数排列成一个矩形的数表，两边用括号括起来，就得到一个矩阵．像(1)中的矩形数表是正方形的，这样的矩阵也叫方阵．

在数学中常用一个大写字母表示矩阵，例如

$A=\begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$，　$B=\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$ 等．

对于二元一次方程组 $\begin{cases} 2x-5y=1, \\ x+y=3, \end{cases}$ 我们可以把 x，y 的系数分离出来组成一个矩阵：$\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$，这个矩阵叫做二元一次方程组的系数矩阵；如果把方程右边的常数也对应写进去，得到的矩阵叫做二元一

[1] 由于没有介绍矩阵变换，在这里只是希望学生能从左边的方程组的变形过程，去对比观察右边的矩阵发生的变化. 如果学生能联想到矩阵可以用来表示方程组的变形过程就更好了.

次方程组的增广矩阵. 矩阵在研究多元一次方程组中有广泛的应用.

用加减消元法解二元一次方程组的过程，就是对方程组中各方程中未知数的系数进行变换的过程.

下面我们把解方程组 $\begin{cases}x+y=7,\\3x+2y=18\end{cases}$ 的过程与相对应的矩阵放在一起，请你观察方程组的变形与对应的矩阵之间的变化有什么关系，各矩阵中的数是怎样得到的.[1]

$\begin{cases}x+y=7,\\3x+2y=18.\end{cases}$ ① ② $\begin{bmatrix}1&1&7\\3&2&18\end{bmatrix}$

① × 2，得

$\begin{cases}2x+2y=14,\\3x+2y=18.\end{cases}$ ③ ② $\begin{bmatrix}2&2&14\\3&2&18\end{bmatrix}$

② − ③，得

$\begin{cases}x+0y=4,\\3x+2y=18.\end{cases}$ ④ ② $\begin{bmatrix}1&0&4\\3&2&18\end{bmatrix}$

④ × (−3) + ②，得

$\begin{cases}x+0y=4,\\0x+2y=6.\end{cases}$ ④ ⑤ $\begin{bmatrix}1&0&4\\0&2&6\end{bmatrix}$

⑤ ÷ 2，得

$\begin{cases}x+0y=4,\\0x+y=3.\end{cases}$ ④ ⑥ $\begin{bmatrix}1&0&4\\0&1&3\end{bmatrix}$

$\therefore \begin{cases}x=4,\\y=3.\end{cases}$

解二元一次方程组与矩阵的对应非常有意思吧.

矩阵在数学和其他学科中还有许多的应用，有兴趣的同学可以从图书馆或互联网上查找、阅读这方面的材料.

回顾与整理

知识要点

本章学习的知识主要有：二元一次方程、二元一次方程的解、二元一次方程组及其解法、二元一次方程组的应用．

1. 二元一次方程和它的解．

一般地，经过整理后，[1]可化为 $ax+by=c$（其中 a，b，c 是已知数，且 $a\neq 0$，$b\neq 0$）的方程叫做二元一次方程．使二元一次方程的左右两边相等的一对 x 和 y 的值，叫做这个方程的一个解．我们把它们联立在一起，写成 $\begin{cases}x=m,\\y=n\end{cases}$ 的形式．

一般地，一个二元一次方程有无数个解．对于一个二元一次方程我们总可以把它改写为用含一个未知数的代数式表示另一个未知数的形式，[2]这种表示方法对今后的学习很有帮助．

2. 二元一次方程组和它的解法．

把含有相同未知数的两个二元一次方程联立在一起，就组成一个二元一次方程组．这两个二元一次方程的公共解叫做这个二元一次方程组的解．

解二元一次方程组的基本思想是通过消元把二元一次方程组转化为一元一次方程去求解．消元的方法有代入消元法和加减消元法．

二元一次方程组 —转化（代入消元或加减消元）→ 一元一次方程

3. 二元一次方程组的应用．

应用二元一次方程组可以解决许多实际问题．解决问题的关键是弄清问题中含有的两个独立的相等关系，进而通过设出两个未知数，列出由两个方程组成的方程组来求解．

注意：解后要对求出的解进行验证，看它是否符合实际问题．

［1］在这里是运用形式定义的方法给出二元一次方程组的概念．也可以用描述的方法定义：含有两个未知数，未知数的指数都是1且系数均不为零的方程叫二元一次方程．这样定义的前提仍是先将方程进行整理化简．

［2］在这里实际上可以把一个未知数看做已知数，写出求另一个未知数的结果．如 $ax+by=c$（$a\neq 0$ 且 $b\neq 0$），移项得 $ax=c-by$，则 $x=\dfrac{c-by}{a}$，同样的，有 $y=\dfrac{c-ax}{b}$．要求学生能对具体的二元一次方程进行变形，对这个一般形式不做要求．

[1]“转化”思想是重要的数学思想之一，在教学中要注意渗透，使学生理解它.“转化”也是人们在实际生活中常用的思想方法.

[2]引导学生在解决问题时，不要盲目，要注意观察、分析、比较，然后选择恰当的方法，从而提高解决问题的能力.使学生在思考问题时更注意理性分析，形成良好的思维习惯.这样可以提高学生的数学素养，使学生终身受益.

[3]在应用中培养学生的实践精神，提高学生的创新意识，是我们教学的重要目标之一.

从列算式、列一元一次方程到列二元一次方程组来解决问题，是思维方式的变化过程.各种方法都能培养学生的能力.通过不同方法的对比，可以提高学生灵活运用这些方法解决问题的能力，使学生的思维更具广阔性、灵活性.

学习指导

1. 转化、化归的方法是解决许多问题的基本方法.[1]

我们应注意运用转化、化归的方法学习二元一次方程组的解法.

世界上许多事物都是可以互相转化的.当我们遇到新问题或比较复杂的问题时，总是希望把问题化归为我们已经掌握的、熟悉的、较为简单的问题去解决，这是解决许多问题的基本思路.在探求二元一次方程组的解法时，则是通过具体的代入消元法和加减消元法来实现这种转化的.

2. 学会观察、分析和比较.

选择恰当的方法解二元一次方程组，可以使求解的过程简捷、明了，这就要在求解前认真观察二元一次方程组的特点，通过分析、比较来选择适当的方法.[2]

实际上，做任何事情，我们一般都要先观察思考，进行分析、比较，再决策实施.这是一种良好的思维习惯，也是今后处理问题所必需具有的素质.学习数学不仅仅使我们学到一些数学知识，更重要的是使我们学会用数学的眼光去分析问题和解决问题，养成良好的思维习惯，使我们变得更加聪明.

3. 注重应用，在解决问题中学会创造.[3]

应用一元一次方程和二元一次方程组解决实际问题，能使我们分析问题、解决问题的能力及应用数学的意识得到提高.

复 习 题

★基础★

1. 如果 $(m-3)x+2y^{|m-2|}+8=0$ 是关于 x，y 的二元一次方程，试求 m 的值．
2. 请判断下面的两对数是不是方程 $2x-y=5$ 的解：

(1) $\begin{cases} x=2, \\ y=-\dfrac{1}{2}; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x=-1, \\ y=4. \end{cases}$

3. 填空：

(1) 在方程 $2x-3y=-1$ 中，当 $x=-\dfrac{3}{2}$ 时，$y=$_____；当 $y=-3$ 时，$x=$_____．

(2) 已知方程 $3x+y-1=0$，如果用含 x 的代数式表示 y，那么 $y=$_____；
如果用含 y 的代数式表示 x，那么 $x=$_____．

4. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 3x-2y=1, \\ x-y=3; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x+3y=-5, \\ 3x-4y=-2; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} y-3x-2, \\ x-2y=6; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} 5x+3y-2, \\ 2x-y=3; \end{cases}$

(5) $\begin{cases} 3x-y=4, \\ 2x+y=6; \end{cases}$　　(6) $\begin{cases} 2x+3y=7, \\ 3x+2y=3. \end{cases}$

5. 一个正方体，其中有一对相对的面上的数的和是 29，差是 7，这两个数各是多少？
6. 实验中学到信息中心和图书馆的距离之和为 13.5 千米．已知实验中学到信息中心的距离比它到图书馆的距离远 4 千米，那么实验中学到信息中心和图书馆的距离各是多少千米？
7. 一个两位数，个位上的数字与十位上的数字的和是 11，如果个位上的数字比十位上的数字大 5，求这个两位数．
8. 有 60 公顷土地需要绿化，计划在上面种植经济植物和常绿植物．如果经济植物和常绿植物各占 50%，那么需要投资 42 万元；如果经济植物占 40%，常绿植物占 60%，那么需要投资 40.8 万元．种植每公顷经济植物和常绿植物各需要投资多少万元？
9. 每年的 3 月 12 日是植树节．某校七年级有 183 名学生参加植树节活动，在活动中男生平均每人挖 3 个树坑，女生平均每人种 6 棵树，这样恰好使挖好的树坑都能种上树．该年级参加植树的男、女生各有多少人？

★★提升★★

1. 某工厂车间生产甲、乙两种零部件，已知1个甲零部件和2个乙零部件配套成一个完整产品，每个工人每天可生产14个甲零部件或20个乙零部件．现有60名工人，问应安排多少个工人生产甲零部件，多少个工人生产乙零部件，才能使生产出来的两种零部件刚好配套．
2. 如图，用火柴棍连续搭建三角形和正方形，公共边只用一根火柴棍．如果搭建三角形和正方形共用了77根火柴棍，并且三角形的个数比正方形的个数少5个，那么一共能连续搭建三角形、正方形各多少个？



（第2题）

3. 一个梯形，如果两底之和是18，两底之差是10，且梯形的高恰好等于一底的长度，求这个梯形的面积．
4. 在学校合唱节上，七年级（1）班、（2）班共有80人参加歌咏比赛，两班合出1名指挥，如果（1）班比（2）班参加唱歌的人数多7人，两个班各有多少人参加这次歌咏比赛？

*5. 解下列方程组：

（1）$\begin{cases}2x+y=5,\\2y+z=-3,\\2z+x=7;\end{cases}$　　（2）$\begin{cases}3x-2y+z=1,\\x-y+z=4,\\x+2y-z=7.\end{cases}$

★★★拓展★★★

1. 已知关于x，y的二元一次方程组$\begin{cases}x-4y=10,\\x-my=5\end{cases}$和$\begin{cases}3x+y=4n,\\2x+my=1\end{cases}$的解相同，试求$m$，$n$的值．
2. 七年级（1）班计划用100元购买甲、乙、丙三种小礼品作为联欢会的奖品，它们的单价分别为4元、3元和1元．如果甲种礼品不得少于10件，乙种礼品比甲种礼品多3件，并且购买甲种礼品的总金额不得超过50元，那么适合以上要求的购买方案有几种？请你协助班委会制定购买礼品的方案．

部分习题答案或提示

习题 5－1

基础

1. （1）是；（2）是.

2. （1）$y=-\frac{2}{3}x$；（2）$y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$；（3）$y=\frac{2}{7}x$；（4）$y=\frac{x}{3}+\frac{5}{3}$.

3. 不是.

4. （1）是；（2）是；（3）不是.

提升

1. （1）$3x-y=7$. 如$\begin{cases}x=1,\\y=-4;\end{cases}\begin{cases}x=2,\\y=-1;\end{cases}\begin{cases}x=0,\\y=-7;\end{cases}\begin{cases}x=-1,\\y=-10.\end{cases}$

（2）$0.6x+0.8y=10$. 如$\begin{cases}x=2,\\y=11;\end{cases}\begin{cases}x=6,\\y=8;\end{cases}\begin{cases}x=10,\\y=5;\end{cases}\begin{cases}x=14,\\y=2.\end{cases}$

2. $\begin{cases}x=0,\\y=5;\end{cases}\begin{cases}x=1,\\y=2.\end{cases}$

3. $\begin{cases}a=1,\\b=-1.\end{cases}$

4. 49，58，67，76，85，94.

拓展

（1）$3x-2y=5$ 的整数解有无数多个，如$\begin{cases}x=-1,\\y=-4;\end{cases}\begin{cases}x=1,\\y=-1;\end{cases}\begin{cases}x=3,\\y=2;\end{cases}\begin{cases}x=5,\\y=5;\end{cases}\cdots$

（2）使$|x|+|y|$的值最小的整数解是$\begin{cases}x=1,\\y=-1.\end{cases}$

（3）满足 $3x-2y=5$ 的整数解有规律，其中 x 是奇数.

$\begin{cases}x=2n-1,\\y=3n-4.\end{cases}$（其中 n 为整数）

提示：因为 $y=\frac{3x-5}{2}$，且 x，y 为整数，所以 x 为奇数.

习题 5－2

基础

1. （1）$\begin{cases}x=1,\\y=-3;\end{cases}$（2）$\begin{cases}x=1,\\y=-1;\end{cases}$（3）$\begin{cases}x=1,\\y=-2;\end{cases}$（4）$\begin{cases}x=-\dfrac{1}{5},\\y=-2.\end{cases}$

2. （1）$\begin{cases}x=1,\\y=-1;\end{cases}$（2）$\begin{cases}x=-1,\\y=-2;\end{cases}$（3）$\begin{cases}x=-\dfrac{1}{2},\\y=-2;\end{cases}$（4）$\begin{cases}x=-1,\\y=-3.\end{cases}$

3. （1）$\begin{cases}x=-1,\\y=-\dfrac{3}{2};\end{cases}$（2）$\begin{cases}x=3,\\y=1;\end{cases}$（3）$\begin{cases}x=\dfrac{8}{3},\\y=-1;\end{cases}$（4）$\begin{cases}x=2,\\y=1.\end{cases}$

4. $\begin{cases}x=\dfrac{58}{9},\\y=\dfrac{26}{9}.\end{cases}$

提升

1. （1）$k=3$，$b=5$；（2）$x=-\dfrac{3}{2}$.

2. $a=6$，$b=\dfrac{13}{2}$.

3. （1）$\begin{cases}x=2,\\y=1,\\z=-1;\end{cases}$（2）$\begin{cases}a=\dfrac{7}{6},\\b=\dfrac{3}{2},\\c=-\dfrac{8}{3}.\end{cases}$

拓展

1. $a>\dfrac{5}{3}$. 提示：可以由原方程组先直接解出 x，y 的值（用含 a 的式子表示），再由 $x<y$ 转化为关于 a 的不等式，求解 a 的范围；但最好将两个方程相加可得 $4(x-y)=5-3a$，又 $x<y$，即 $x-y<0$，即 $5-3a<0$，$a>\dfrac{5}{3}$.

2. □$=3$，△$=11$，$\begin{cases}x=1,\\y=-1.\end{cases}$

习题 5－3

基础

1. 设原来长方形的长和宽分别为 x 厘米、y 厘米，则有

$$\begin{cases} x+y=50, \\ x-10=y+10. \end{cases} \text{ 解出 } \begin{cases} x=35, \\ y=15. \end{cases}$$

答：原来长方形的长和宽分别为 35 厘米和 15 厘米.

2. 设七年级（1）、（2）两班各植树 x 棵、y 棵，则有

$$\begin{cases} x-y=12, \\ x+y=50. \end{cases} \text{ 解出 } \begin{cases} x=31, \\ y=19. \end{cases}$$

答：七年级（1）班植树 31 棵，（2）班植树 19 棵.

3. 设去年收入 x 元，支出 y 元，则有

$$\begin{cases} x-y=16\ 000, \\ (1+20\%)x-(1+10\%)y=25\ 000. \end{cases} \text{ 解出 } \begin{cases} x=74\ 000, \\ y=58\ 000. \end{cases}$$

答：去年收入 74 000 元，支出 58 000 元.

4. 设甲车的速度是 x 千米/时，乙车的速度是 y 千米/时，则有

$$\begin{cases} 3x+3y=153, \\ 3x-3y=15. \end{cases} \text{ 解出 } \begin{cases} x=28, \\ y=23. \end{cases}$$

答：甲车的速度是 28 千米/时，乙车的速度是 23 千米/时.

5. 设笼中有鸡 x 只，有兔 y 只，则有

$$\begin{cases} x+y=35, \\ 2x+4y=94. \end{cases} \text{ 解出 } \begin{cases} x=23, \\ y=12. \end{cases}$$

答：笼中有鸡 23 只，有兔 12 只.

6. 设小长方形木块的长为 x cm，宽为 y cm，则有

$$\begin{cases} x=3y, \\ x+y=40. \end{cases} \text{ 解出 } \begin{cases} x=30, \\ y=10. \end{cases}$$

答：图中长方形木块的长为 30 cm，宽为 10 cm.

提升

1. 设上底长为 x 厘米，下底长为 y 厘米，则有

$$\begin{cases} 2x=y-3, \\ x+y=36. \end{cases} \text{ 解出 } \begin{cases} x=11, \\ y=25. \end{cases}$$

答：上底长为 11 厘米，下底长为 25 厘米.

2. 把 $x=-3$，$x=2$ 分别代入 $kx+b$ 中，得

$\begin{cases}-3k+b=4,\\2k+b=-11.\end{cases}$ 解出 $\begin{cases}k=-3,\\b=-5.\end{cases}$

∴ 代数式为 $-3x-5$.

当代数式的值为 -3 时，$-3x-5=-3$，解出 $x=-\frac{2}{3}$.

3. 由题意得 $\begin{cases}2x-y+1=0,\\5x-2y-3=0.\end{cases}$ 解出 $\begin{cases}x=5,\\y=11.\end{cases}$

4. 由题意得 $\begin{cases}m+n=3,\\m-n=2.\end{cases}$ 解出 $\begin{cases}m=\frac{5}{2},\\n=\frac{1}{2}.\end{cases}$

5. 把 $y=-x$ 代入方程组，得

$\begin{cases}3x-4(-x)=m,\\x+2(-x)=2m+3.\end{cases}$ 解出 $m=-\frac{7}{5}$.

6. 解方程组 $\begin{cases}2x-y=2m,\\x+3y=m-1\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=\frac{7m-1}{7},\\y=-\frac{2}{7}.\end{cases}$

由 $x<y$，得 $\frac{7m-1}{7}<\frac{-2}{7}$，解出 $m<-\frac{1}{7}$.

7. 设胜 x 场，平 $2y$ 场，负 y 场，则有

$\begin{cases}x+3y=8,\\3x+2y=17.\end{cases}$ 解出 $\begin{cases}x=5,\\y=1.\end{cases}$

答：胜 5 场，负 1 场.

拓展

提示：把不足 60 千克重的同学两两结合、称重，再计算出各位的体重.

如，设甲生重 x 千克，乙生重 y 千克，丙生重 z 千克，则有

$\begin{cases}x+y=m,\\x+z=n,\\y+z=p.\end{cases}$ 从中可以求出 x，y，z 的值.

复习题

基础

1. 由 $\begin{cases}m-3\neq0,\\|m-2|=1\end{cases}$ 得 $m=1$.

2. （1）不是；（2）不是.

3. （1）$-\frac{2}{3}$，-5；（2）$1-3x$，$\frac{1-y}{3}$.

4. （1）$\begin{cases}x=-5,\\y=-8;\end{cases}$（2）$\begin{cases}x=-2,\\y=-1;\end{cases}$（3）$\begin{cases}x=-2,\\y=-4;\end{cases}$（4）$\begin{cases}x=1,\\y=-1;\end{cases}$（5）$\begin{cases}x=2,\\y=2;\end{cases}$（6）$\begin{cases}x=-1,\\y=3.\end{cases}$

5. 设这两个数分别为 x，y，则有

$\begin{cases}x+y=29,\\x-y=7.\end{cases}$ 解出 $\begin{cases}x=18,\\y=11.\end{cases}$

答：这两个数是 18 和 11.

6. 设实验中学到信息中心的距离为 x 千米，到图书馆的距离为 y 千米，则有

$\begin{cases}x+y=13.5,\\x-y=4.\end{cases}$ 解出 $\begin{cases}x=8.75,\\y=4.75.\end{cases}$

答：实验中学到信息中心的距离为 8.75 千米，到图书馆的距离为 4.75 千米.

7. 设个位、十位上的数字分别为 x，y，则有

$\begin{cases}x+y=11,\\x-y=5.\end{cases}$ 解出 $\begin{cases}x=8,\\y=3.\end{cases}$

答：这个两位数是 38.

8. 设种植经济植物和常绿植物每公顷各需投资 x 万元、y 万元，则有

$\begin{cases}30x+30y=42,\\24x+36y=40.8.\end{cases}$ 解出 $\begin{cases}x=0.8,\\y=0.6.\end{cases}$

答：种植经济植物每公顷需投资 0.8 万元，种植常绿植物每公顷需投资 0.6 万元.

9. 设参加植树的男生有 x 人，女生有 y 人，则有

$\begin{cases}x+y=183,\\3x=6y.\end{cases}$ 解出 $\begin{cases}x=122,\\y=61.\end{cases}$

答：参加植树的男生有 122 人，女生有 61 人.

提升

1. 设安排 x 名工人生产甲种零部件，安排 y 名工人生产乙种零部件，则有

$\begin{cases}x+y=60,\\2\cdot14x=20y.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=25,\\y=35.\end{cases}$

答：安排 25 名工人生产甲种零部件，安排 35 名工人生产乙种零部件，才能使一天生产出来的零部件刚好配套.

2. 设一共能连续搭建三角形 x 个，正方形 y 个，则有

$\begin{cases}(2x+1)+(3y+1)=77,\\ x=y-5.\end{cases}$ 解出 $\begin{cases}x=12,\\ y=17.\end{cases}$

答：一共能连续搭建三角形 12 个，正方形 17 个.

3. 设两底分别为 x，y，则有

$\begin{cases}x+y=18,\\ x-y=10.\end{cases}$ 解出 $\begin{cases}x=14,\\ y=4.\end{cases}$

（1）当高为 14 时，$S=\frac{1}{2}\times 18\times 14=126.$

（2）当高为 4 时，$S=\frac{1}{2}\times 18\times 4=36.$

答：梯形面积为 126 或 36.

（此题要注意分类讨论求解）

4. 设七年级（1）班有 x 人参加，七年级（2）班有 y 人参加，则有以下两种情况：

（1）若指挥由七年级（1）班出，则有

$\begin{cases}x+y=80,\\ x-1-y=7.\end{cases}$ 解出 $\begin{cases}x=44,\\ y=36.\end{cases}$

（2）若指挥由七年级（2）班出，则有

$\begin{cases}x+y=80,\\ x-(y-1)=7.\end{cases}$ 解出 $\begin{cases}x=43,\\ y=37.\end{cases}$

答：当指挥由七年级（1）班出时，（1）、（2）两班参加的人数为 44 人、36 人；当指挥由七年级（2）班出时，（1）、（2）两班参加的人数为 43 人、37 人.

（此题要注意分类讨论求解）

*5. （1）$\begin{cases}x=\frac{11}{3},\\ y=-\frac{7}{3},\\ z=\frac{5}{3};\end{cases}$（2）$\begin{cases}x=2,\\ y=7,\\ z=9.\end{cases}$

拓展

1. $m=\frac{3}{2}$，$n=1.$

提示：由已知的两个方程组的解相同，得

$\begin{cases}x-my=5,\\ 2x+my=1,\end{cases}$ 解出 $x=2.$

把 $x=2$ 代入 $x-4y=10$ 中，得 $y=-2$.

把 $\begin{cases}x=2,\\y=-2\end{cases}$ 代入 $x-my=5$ 中，得 $m=\frac{3}{2}$；

把 $\begin{cases}x=2,\\y=-2\end{cases}$ 代入 $3x+y=4n$ 中，得 $n=1$.

2. 有三种方案：

方案 1：甲 10 件，乙 13 件，丙 21 件；

方案 2：甲 11 件，乙 14 件，丙 14 件；

方案 3：甲 12 件，乙 15 件，丙 7 件.

提示：设甲 x 件，乙 y 件，丙 z 件，根据题意得

$$\begin{cases}4x+3y+z=100,\\x\geqslant 10,\\4x\leqslant 50,\\y=x+3.\end{cases}$$

其中 x，y，z 为正整数.

北京出版社

第六章
整式的运算



教学目标

1. 使学生了解整数指数幂的意义和基本性质，会用科学记数法表示数. 在整数指数幂基本性质的推导过程中，培养学生观察、归纳、猜想、论证的能力，体验和学习研究问题的方法.

2. 使学生会进行整式加、减、乘、除运算，培养学生严谨认真的学习态度，提高运算能力，并能进行简单的应用.

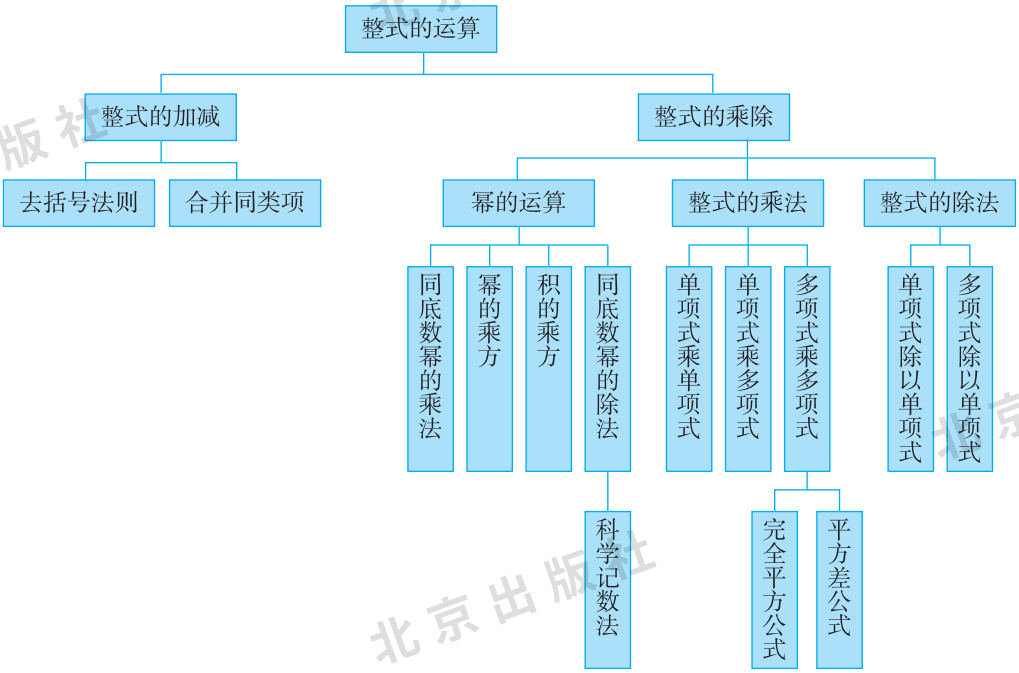
3. 使学生学会推导乘法公式：$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ 和 $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$，了解公式的几何背景，并能进行简单的计算和应用.

4. 通过运算的转化、整式乘法渗透数形结合、换元等数学方法和“转化”的数学思想.

5. 通过幂的运算性质、整式的运算法则等的形成和应用过程的教学，使学生了解和体会“特殊 — 一般 — 特殊”的认识规律.

教材分析和教学建议

1. 主要内容及其地位作用.



整式的运算属于《义务教育数学课程标准（2011 年版）》中的“数与代数”领域，是基本而重要的代数初步知识，在后续的数学学习中具有重要的意义.

本章内容建立在已经学习了有理数运算、列简单的代数式、一次方程及不等式等知识的基础上. 主要内容是整式的乘法运算和乘法公式. 这些知识是以后学习分式和根式的运算、函数等知识的基础，同时也是学习物理、化学等学科及其他科学技术不可或缺的数学工具.

2. 本章编写特点.

关于单项式、多项式、整式的概念，同类项以及合并同类项的方法、去括号法则等内容在七年级上学期已经作了介绍，只是接触的问题比较简单. 所以，本章在整式的加减法中，从复习提高开始，讲授了升幂、降幂排列，合并同类项的方法，引出整式的加减.

幂的运算分成了两个部分. 同底数幂乘法的运算性质、幂的乘方的运算性质、积的乘方的运算性质集中处理，而同底数幂除法的运算性质放在整式的除法部分处理.

整式的乘法中，把形如$(x+a)$和$(x+b)$的两个一次二项式相乘，即$(x+a)\cdot(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$在“思考”中作了介绍.

乘法公式中，根据先易后难的原则，先讲授完全平方公式，再讲授平方差公式.

整式的除法中，通过同底数幂除法的运算引出负整数指数幂，扩大了科学记数法的使用范围. 对单项式除以单项式、多项式除以单项式作了简单介绍.

3. 教学重点、难点.

本章的重点是整式的乘法，特别是乘法公式.

乘法公式的应用是本章的一个难点. 由于乘法公式具有各自的结构特点，公式中的字母的含义广泛，学生较难掌握. 在运用时学生不容易识别题目是否符合公式的结构特点，计算时容易混淆或错用公式. 在教学中，要引导学生，结合公式的结构特点分析乘式结构，运用“转化”的思想加以解决.

4. 教学建议.

在本章教学中，要注意知识形成过程的教学，充分运用“思考”、“交流”、“实践”等栏目的功能，调动学生思维，体现学生的主体地位. 比如，在整数指数幂的基本性质的推导过程中，要做好计划，精心设计教学过程. 引导学生深层次地参与，通过具体的题目，观察、归纳、猜想得出结论，并进行推理论证. 可以组织学生讨论，使他们在学习基础知识的过程中，学会研究问题的方法，了解和体会“特殊 — 一般 — 特殊”的认识规律.

在本章教学中，要注意基础知识的落实. 因为本章的基础知识在继续学习、生产实际中有着广泛的应用，所以要打好基础. 在运算中要严格要求，做到步步有据，格式规范，培养学生严谨认真的学习态度. 但是，在选择练习题时，要做到少而精，简而明，不要加重学生的课业负担.

在本章教学中，要注意数学思想方法的渗透，主要有数形结合、整体换元等数学方法和“转化”的数学思想.

在本章教学中，还要注意联系实际，培养应用意识. 在比较复杂的运算中，要注意科学计算器的使用，体现问题的实际意义.

5. 课时安排.

本章教学约需 21 课时，具体分配如下（仅供参考）：

6.1 整式的加减法	约 2 课时
6.2 幂的运算	约 4 课时
6.3 整式的乘法	约 5 课时
6.4 乘法公式	约 4 课时
6.5 整式的除法	约 3 课时
总结与复习	约 3 课时

北京出版社

教材及其参考信息



设计章前页的目的在于，用一个发现规律并用代数式表示的问题，让学生领会观察、分析、综合、抽象、概括的思维方法，并且把数和形有机地结合起来．在得到的代数式 $n(n+2)=(n+1)^2-1$ 中，又蕴含着本章要学习整式的乘法和乘法公式等内容，起到引言的作用．

[1] 升幂排列是指把一个多项式按某一个字母的指数从小到大的顺序排列起来. 在教学中要训练学生用语言叙述. 要强调：按某一个字母，一次只能按某一个字母，从大到小或从小到大的一种顺序排列各项.

一 整式的加减法

6.1 整式的加减法

我们已经学习过整式的概念，并会通过去括号、合并同类项把整式化简.

交流

1. 回忆一下什么叫单项式，什么叫多项式，什么叫同类项.
2. 合并同类项需要按怎样的法则进行?
3. 去括号法则是什么?

例 1 先用横线标出同类项，然后合并同类项：

(1) $3x^2-2xy+3y^2-3xy+2y^2-x^2$；

(2) $2a^2b+3ab^2+a^3-5-a^2b-3ab^2+8$.

解：(1) $3x^2-2xy+3y^2-3xy+2y^2-x^2$

$=(3-1)x^2+(-2-3)xy+(3+2)y^2$

$=2x^2-5xy+5y^2$；

(2) $2a^2b+3ab^2+a^3-5-a^2b-3ab^2+8$

$=(2-1)a^2b+(3-3)ab^2+a^3+(-5+8)$

$=a^3+a^2b+3$.

当同类项的系数互为相反数时，出现了什么特殊情况?

为了计算方便，把多项式的各项按照某一个字母的指数从大到小的顺序排列起来，叫做把多项式按这个字母降幂排列. 反之，叫做把多项式按这个字母升幂排列. 在例 1(1) 中，$2x^2-5xy+5y^2$ 就是按字母 x 的降幂排列，而对于字母 y 则是升幂排列.[1]

6.1 节的教学，要使学生能正确地运用去括号法则，并通过去括号、合并同类项作多项式的加减法运算.

1. 学生在七年级上册第二章一元一次方程中，已经学习过整式、多项式、同类项的概念，学习过合并同类项法则和去括号法则，但以前的学习只是为了解一元一次方程做铺垫，要求比较低，学生也多有遗忘. 因此，本节教学要从复习相应旧知识开始，可以引导学生开展交流、讨论，教师系统归纳，打好进一步学习的基础.

2. 合并同类项是本节的重点，正确运用合并同类项的法则，是学习好整式加减运算的关键. 要通过例子让学生明确同类项是指所含字母相同，并且相同字母的指数也

实践[1]

1. 把多项式 $2x^2-5xy+5y^2$ 按字母 y 降幂排列.
2. 把多项式 a^3+a^2b+3 按字母 a 升幂排列.

例 2 先去括号，再合并同类项:[2]

(1) $m^2n+mn+(3m^2n-2mn-5)$;

(2) $2x^2-3y^2+1-(x^2-2xy-y^2-4)$.

解: (1) $m^2n+mn+(3m^2n-2mn-5)$

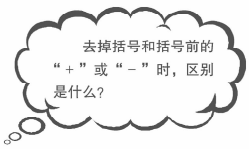
$=m^2n+mn+3m^2n-2mn-5$

$=4m^2n-mn-5$;

(2) $2x^2-3y^2+1-(x^2-2xy-y^2-4)$

$=2x^2-3y^2+1-x^2+2xy+y^2+4$

$=x^2+2xy-2y^2+5$.



练习

先去括号，再合并同类项:

(1) $5ab^2-2a^2b+(a^2b-6ab^2-2)$;

(2) $9-m^2+2n^2-(6n^2-3m^2-5)$;

(3) $2xy^2-3x^2y-5xy-(5xy-3x^2y-3xy^2)$.

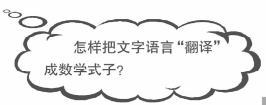
整式的加减就是单项式、多项式的加减. 利用去括号法则与合并同类项的方法，我们就可以进行整式的加减运算.

例 3 求 $3x^2-5xy+6y^2$ 与 $4x^2-4xy-7y^2$ 的和与差.[3]

解: $(3x^2-5xy+6y^2)+(4x^2-4xy-7y^2)$

$=3x^2-5xy+6y^2+4x^2-4xy-7y^2$

$=7x^2-9xy-y^2$;



[1] “实践”答案: $5y^2-5xy+2x^2$; $3+a^2b+a^3$. 教学中根据需要可以再安排必要的练习.

[2] 例 2 安排较复杂的多项式，提高去括号、合并同类项的综合运用能力. 教学中可以结合此例复习去括号法则，指出学生易犯的错误. 若括号前是“+”，把括号和它前面的“+”去掉，括号里各项都不变符号; 若括号前是“-”，把括号和它前面的“-”去掉，括号里各项都改变符号.

练习答案:

(1) $-ab^2-a^2b-2$.

(2) $2m^2-4n^2+14$.

(3) $5xy^2-10xy$.

[3] 把文字语言“翻译”成数学式子是一种基本的数学训练，要注意把多项式用括号括起来.

相同的项. 而合并同类项要注意两个问题，一是系数相加（合并），二是字母和字母的指数不变（保持同类项）.

3. 合并同类项，为了避免漏项与其他错误，开始可以先用横线标出同类项，然后再根据法则，合并各组同类项，熟练以后，可以省略中间步骤.

4. 多项式的降幂排列或升幂排列，根据加法交换律交换项的位置，没有改变多项式的值. 变更项的位置时，要让学生注意项前的符号，移动项时要同项前符号一起移动.

5. 去括号法则过去已经讲过，在巩固、提高的过程中，加深学生对法则的认识.

［1］整式加减的一般步骤是：（1）如果遇到括号，按去括号法则先去括号；（2）合并同类项.

练习答案：

1. （1）x^2-3xy.

（2）$-2a^2+2b^2$.

2. $3x^2-4xy-4y^2$；

$11x^2+2xy-6y^2$.

［2］在运算中使用了乘法对加法的分配律，加法的交换律和结合律. 要注意使用乘法对加法的分配律时，括号外面为负数的情况.

$$(3x^2-5xy+6y^2)-(4x^2-4xy-7y^2)$$
$$=3x^2-5xy+6y^2-4x^2+4xy+7y^2$$
$$=-x^2-xy+13y^2.$$

在上面例 3 的运算中，每步运算的根据是什么？你能说出做整式加减运算的步骤吗？[1]

思考

练习

1. 计算：

（1）$(3x^2-y^2-2xy)+(y^2-xy-2x^2)$；

（2）$(8ab-a^2+b^2)-(a^2-b^2+8ab)$.

2. 求 $7x^2-5y^2-xy$ 与 $-4x^2-3xy+y^2$ 的和与差.

例 4 计算：

（1）$3(a^2-4a+3)+5(-5a^2+a-2)$；

（2）$3m^2-4(2m^2-3mn+2n^2)+7n^2$.

解：（1）$3(a^2-4a+3)+5(-5a^2+a-2)$

$=3a^2-12a+9-25a^2+5a-10$

$=-22a^2-7a-1$；

（2）$3m^2-4(2m^2-3mn+2n^2)+7n^2$

$=3m^2-8m^2+12mn-8n^2+7n^2$

$=-5m^2+12mn-n^2$.

在运算中都使用了哪些运算律？应当注意什么问题？[2]

要注意把括号和括号前的符号一起去掉，而“改变”或“不改变”的只是括号里各项的符号. 要注意纠正学生在符号上产生的错误，认识到去括号只是改变了式子的形式，而不改变式子的值. 这是本节教学的难点.

6. 例 3 的教学，要使学生了解，在求几个整式的和或差时，需将文字语言转化为符号语言，通常用括号把每一个整式括起来，再用加减号连接.

7. 在整式运算的例题以后，通过“思考”，引导学生思考、交流、讨论，归纳出整式加减运算的一般步骤：（1）如果遇到括号，按去括号法则先去括号；（2）合并同类项. 此结论在归纳以后，可以让学生抄写在教材上.

练习

计算：

(1) $5(11x^3-2x^2)+2(x^3+x^2)$；

(2) $2\left(\frac{3}{2}x^3y-2y^3\right)-3(x^3y+2y^2)$.

习 题 6-1

★基础★

1. 把下列多项式按字母 x 先做降幂排列，再做升幂排列：

(1) $7x-12x^2+9$；　　(2) $6+4x^2-3x-x^3$.

2. 计算：

(1) $(5x^2+2-x)+(-x^2-5x-3)$；

(2) $(2x^2-3x+1)-(5-3x+x^2)$；

(3) $(4a+6b+3c)+(4c-2b-5a)$；

(4) $(x^3-3x^2y+3xy^2)-(x^3-3x^2y-3xy^2-y^3)$.

3. 计算：

(1) $\left(2a^2-\frac{1}{2}+3a\right)-4\left(a-a^2+\frac{1}{2}\right)$；

(2) $\frac{1}{2}(3x^2-4x-2)-\frac{3}{4}(x^2-2x-1)$.

★★提升★★

1. 长方形的宽为 $3a+2b$，长比宽多 $a-b$，求这个长方形的周长.
2. 三个连续奇数，中间一个是 $2n-1$，那么这三个数的和是多少？
3. 已知 $A=2x^2-5xy-3y^2$，$B=2x^2+3xy-4y^2$，且 $A+B-C=0$，求 C.

练习答案：

(1) $57x^3-8x^2$；

(2) $-6y^2-4y^3$.

8. 例 4 是一个比较复杂的整式加减运算，其中包括了数与多项式相乘. 当数与多项式相乘时，要把数与多项式的每一项相乘；去括号时，要注意括号前的符号.

[1] 为了解决一个一般化、抽象性的问题，我们往往采用由特殊到一般，由具体到抽象的研究问题的方法. 这种解决策略的指导，要通过多次实践，才能使学生领会，在教学中要有意识、有层次地进行.

[2] 让学生通过对具体和特殊情况的运算，发现规律，猜想一般的情况. 教学中可以引导学生发散思维，举出更多的运算实例，丰富猜想的依据.



★★★拓展★★★

对于有理数 x，y，定义新运算 $x * y = ax + by + c$，其中 a，b，c 是常数，等式右边是通常的加法与乘法运算. 已知 $3 * 5 = 15$，$4 * 7 = 28$，求 $1 * 1$ 的值.

二、整式的乘法

6.2 幂的运算

1. 同底数幂的乘法

有一种电子计算机，每秒可以做 10^8 次运算，那么 10^3 秒可以做多少次运算呢?

$a^m \cdot a^n$（m，n 都是正整数）等于什么?[1]

1. 10^3 秒可以做 $10^8 \times 10^3$ 次运算，那么 $10^8 \times 10^3 =$?
2. 怎样进行同底数幂的乘法运算呢?

思考

实践[2]

计算：$10^2 \times 10^3 =$ _____；

$10^3 \times 10^5 =$ _____；

$10^5 \times 10^4 =$ _____.

试说出每个运算步骤的根据，并观察条件与结论中指数的关系.

计算：$a^2 \cdot a^3 =$ _____；

$a^3 \cdot a^5 =$ _____；

$a^5 \cdot a^4 =$ _____.

66 数学 七年级 下册

6.2 节幂的运算，将集中学习同底数幂的乘法、幂的乘方和积的乘方的运算性质，而同底数幂的除法放到整式的除法内容中学习. 这些内容是整式乘除的基础，要注意从性质的形成过程、理解性质和应用性质几个方面提高教学的效果.

1. 幂的运算性质导出过程是一个由特殊到一般的认识过程，教材注意从特殊到一般，从具体到抽象，有层次地进行概括抽象，归纳推理，让学生亲自体验观察、归纳、猜想、推理证明的思维过程. 三个性质思路一致，反复训练，有利于学生领会和掌握. 在教学中，教师要有意识地引导学生参与教学活动，通过操作、思维，完成教学过程.

2. 这部分教材，多处安排了填空的形式，探索把“教材”与“学材”结合起来.

说出每个运算步骤的根据，并猜想：

$a^m \cdot a^n =$ _____.

你能写出运算步骤吗？

实际上，根据幂的意义，有

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{m\text{个}a} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n\text{个}a}$$
$$= \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{(m+n)\text{个}a}$$
$$= a^{m+n}.$$

这就是说，同底数的幂相乘，底数不变，指数相加．

同底数幂乘法的运算性质

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$（m，n 都是正整数）．

当三个或三个以上的同底数幂相乘时，是否也符合上述性质？请你把三个同底数幂相乘的性质用公式表示出来．[1]

思考

例 1 计算：

(1) $3^5 \times 3^6$；　　(2) $x^3 \cdot x^{12}$.

解：(1) $3^5 \times 3^6 = 3^{5+6} = 3^{11}$；

(2) $x^3 \cdot x^{12} = x^{3+12} = x^{15}$.

例 2 计算：

(1) $a^2 \cdot a^3 \cdot a^5$；　　(2) $x \cdot x^2 \cdot x^3 \cdot x^4$.

解：(1) $a^2 \cdot a^3 \cdot a^5 = a^{2+3+5} = a^{10}$；

(2) $x \cdot x^2 \cdot x^3 \cdot x^4 = x^{1+2+3+4} = x^{10}$.

注意：字母 x 的指数是 1，而不是 0！

例 3 计算：$x \cdot x^4 + x^3 \cdot x^2$

解：$x \cdot x^4 + x^3 \cdot x^2$

$= x^{1+4} + x^{3+2}$

$= x^5 + x^5$

$= 2x^5$.

[1] $a^m \cdot a^n \cdot a^p = a^{m+n+p}$（$m$，$n$，$p$ 都是正整数）．

注意提醒学生字母的取值范围．

教学中教师可让学生先用铅笔填写，讨论归纳以后，再用钢笔把正确内容填出，以便学生将来阅读教材时，保证内容的正确．

3. 对于同底数幂乘法的运算性质，要防止与整式加法相混淆．前者只要求同底就可以用性质计算，即“底数不变，指数相加”，而后者不仅要求底数相同，指数也必须相同，实际是合并同类项，“幂不变，系数相加”．

4. 要防止学生把幂的乘方与同底数幂的乘法、积的乘方相混淆，教材中安排辨析判断题，就是为了纠正这类错误．纠正的方法是在教学中强调每一个性质得来的根据不同．要引导学生在理解的基础上练习，培养学生的思维严谨性，不能让学生死记硬背．

练习答案：

1. （1）10^6；（2）5^{13}；
（3）x^7；（4）m^6；
（5）b^3；（6）y^{13}.

2. （1）错，x^5；
（2）错，a^6；
（3）对；
（4）错，y^4；
（5）错，x^4；
（6）错，n^6.

3. （1）$2a^4$；（2）0.

［1］让学生研究解决问题的思路，是让学生再一次领会由特殊到一般，由具体到抽象的研究问题的方法. 这部分教材给学生安排了更多的操作空间，教学中要引导学生充分参与.

练习

1. 口答：
（1）10×10^5；　（2）$5^3\times5^4\times5^6$；　（3）$x\cdot x^6$；
（4）$m^2\cdot m\cdot m^3$；　（5）$b\cdot b\cdot b$；　（6）$y^3\cdot y^5\cdot y^2\cdot y^3$.

2. 下面的计算对不对？如果不对，请改正过来.
（1）$x^3\cdot x^2=x^6$；　（2）$a^3\cdot a^3=2a^3$；　（3）$m^5\cdot m^5=m^{10}$；
（4）$y\cdot y^3=y^3$；　（5）$x^2\cdot x^2=2x^4$；　（6）$n^3\cdot n^3=2n^9$.

3. 计算：
（1）$a\cdot a^3+a^2\cdot a^2$；　（2）$x^3\cdot x^2-x\cdot x^4$.

2. 幂的乘方

现在我们来研究幂的乘方有什么运算性质.[1]
即 $(a^m)^n$ 等于什么？（m，n 都是正整数）

我们已经遇到过类似的问题，想一想应该按怎样的思路去研究.

实践

计算：$(10^3)^2=$_____；
$(5^2)^4=$_____；
$(a^2)^3=$_____.

说出每个运算步骤的根据，并猜想：
$(a^m)^n=$_____.

你能写出运算步骤吗？

实际上，根据幂的意义和同底数幂乘法的运算性质，有

$$(a^m)^n=\underbrace{a^m\cdot a^m\cdot\cdots\cdot a^m}_{n\text{ 个 }a^m}$$
$$=\text{_____}$$
$$=\text{_____}.$$

5. 本节的练习按由易到难、由简单到复杂、由单一到综合的顺序安排. 引导学生正确地把运算性质应用到解题中去，这是一个由一般到特殊的认识过程. 教学中要引导学生规范运算，做到步步有据，正确熟练，养成良好的学习习惯，提高运算能力.

这就是说，幂的乘方，底数不变，指数相乘．

幂的乘方的运算性质

$(a^m)^n = a^{mn}$（m，n 都是正整数）．

例 4 计算：

(1) $(10^5)^2$；　(2) $(x^5)^6$；

(3) $(x^2)^{10}$；　(4) $(y^2)^3 \cdot y$.

解：(1) $(10^5)^2 = 10^{5\times2} = 10^{10}$；

(2) $(x^5)^6 = x^{5\times6} = x^{30}$；

(3) $(x^2)^{10} = x^{2\times10} = x^{20}$；

(4) $(y^2)^3 \cdot y - y^{2\times3} \cdot y - y^{6+1} - y^7$.

练习

1. 计算：

(1) $(5^2)^6$；　(2) $(x^4)^3$；　(3) $(x^{100})^{20}$；

(4) $(a^5)^2 \cdot a^3$；　(5) $(x^3)^3 \cdot (x^2)^5$.

2. 下面的计算对不对？如果不对，请改正过来．

(1) $(x^2)^5 = x^7$；　(2) $x^4 + x^4 = x^8$；

(3) $x^2 \cdot x^3 = x^6$；　(4) $a^2 \cdot (a^3)^2 = a^8$；

(5) $(a^m)^n = (a^n)^m$（m，n 都是正整数）．

3. 积的乘方

下面我们用类似的方法，来研究积的乘方有什么运算性质．[1]

即：当 n 是正整数时，怎样计算 $(ab)^n$？

你能用已有的经验，设计出研究问题的思路吗？

练习答案：

1. (1) 5^{12}；(2) x^{12}；
   (3) $x^{2\,000}$；(4) a^{13}；
   (5) x^{19}.
2. (1) 错，x^{10}；
   (2) 错，$2x^4$；
   (3) 错，x^5；
   (4) 对；
   (5) 对.

[1] 这是本节中第三次让学生领会由特殊到一般，由具体到抽象的思维方法，通过反复渗透使学生形成初步的体验．教学中，教师要有意识地指导．

实践

计算：$(ab)^2=$_____；

$(ab)^3=$_____；

$(ab)^4=$_____.

说出每个运算步骤的根据，并猜想：

$(ab)^n=$_____.

实际上，根据幂的意义和乘法的交换律、结合律，有

$(ab)^n=$_____

$=$_____

$=$_____.

这就是说，积的乘方等于把积的每一个因式分别乘方，再把所得的幂相乘.

积的乘方的运算性质

$(ab)^n=a^nb^n$（n是正整数）.

上面的性质对于两个以上因式的积的乘方是否也适合？

比如，$(abc)^n=$_____（n是正整数）.

思考

例5 计算：

(1) $(-5y)^3$；　(2) $(2m^2n)^4$；　(3) $(-3x^2y^3)^2$.

解：(1) $(-5y)^3=(-5)^3\cdot y^3=-125y^3$；

(2) $(2m^2n)^4=2^4\cdot(m^2)^4\cdot n^4=16m^8n^4$；

(3) $(-3x^2y^3)^2=(-3)^2\cdot(x^2)^2\cdot(y^3)^2=9x^4y^6$.

练习

1. 计算：
(1) $(2m)^2$；　(2) $(a^2b^3)^4$；　(3) $(-a^3b^2)^2$；　(4) $(-2x^3y^4)^3$.
2. 下面的计算对不对？如果不对，请改正过来.
(1) $(xy^2)^3=xy^6$；　(2) $(3ab)^2=6a^2b^2$；
(3) $(-2m^2)^2=-4m^4$；　(4) $(-2x^2y^3)^3=8x^6y^9$.



思考

$-a^n$(n是正整数)表示的意义是什么？$(-a)^n$(n是正整数)表示的意义是什么？它们有什么不同？[1]

例6 计算：
(1) $-x^2\cdot x^4$；　(2) $(-m)\cdot(-m)^3$.
解：(1) $-x^2\cdot x^4=-(x^2\cdot x^4)=-x^{2+4}=-x^6$；
(2) $(-m)\cdot(-m)^3=(-m)^{1+3}=(-m)^4=m^4$.

例7 计算：
(1) $x\cdot x^2\cdot x^3+(x^2)^3+(-3x^3)^2$；
(2) $(-a^3)^2\cdot a^3-(3a^3)^3+a^2\cdot a^7$.
解：(1) $x\cdot x^2\cdot x^3+(x^2)^3+(-3x^3)^2$
$=x^6+x^6+9x^6$
$=11x^6$；
(2) $(-a^3)^2\cdot a^3-(3a^3)^3+a^2\cdot a^7$
$=a^6\cdot a^3-27a^9+a^9$
$=a^9-27a^9+a^9$
$=-25a^9$.

练习答案：

1. (1) $4m^2$；
(2) a^8b^{12}；
(3) a^6b^4；
(4) $-8x^9y^{12}$.
2. (1) 错，x^3y^6；
(2) 错，$9a^2b^2$；
(3) 错，$4m^4$；
(4) 错，$-8x^6y^9$.

[1] $-a^n$（n为正整数）表示a的n次幂的相反数，$(-a)^n$（n为正整数）表示a的相反数的n次幂，两者的底数不同. 而且，$(-a)^n$中的括号不能去掉，因为当n为偶数时，$(-a)^n=a^n$，当n为奇数时，$(-a)^n=-a^n$，需要分情况讨论.

[2] 幂的混合运算中，要注意运算顺序，先乘方，再乘除，最后再加减. 要注意三个幂的运算性质的区别与联系，防止相互混淆. 运算中尤其要防止由于符号产生的错误. 在教学中，可以引导学生结合实例进行归纳.

练习答案：

1. （1）x^{10}；
（2）$-a^4$；
（3）m^5；
（4）$-x^6$.

2. （1）0；（2）$8a^{15}$.

练习

1. 计算：
（1）$(-x)^4\cdot(-x)^6$；　　（2）$-a^3\cdot a$；
（3）$(-m)^2\cdot m^3$；　　（4）$-x\cdot x^2\cdot x^3$.

2. 计算：
（1）$(-m)^4\cdot m+m^2\cdot(-m)^3$；　　（2）$a^{10}\cdot a^5-(-2a^5)^3+(-a^3)^5$.

习 题 6-2

★基础★

1. 计算：
（1）$x^3\cdot x^3$；　　（2）$m^2\cdot m^3$；　　（3）a^3+a^3；
（4）$x^2\cdot x^2\cdot x^2$；　　（5）$10^2\cdot 10\cdot 10^5$；　　（6）$y^3\cdot y^2\cdot y^4$.

2. 计算：
（1）$x^2\cdot x^5-x^3\cdot x^4$；　　（2）$m^3\cdot m^3+m\cdot m^5$；
（3）$a\cdot a^3\cdot a^2+a^2\cdot a^4$；　　（4）$x^2\cdot x^4+x^3\cdot x^2\cdot x$.

3. 计算：
（1）$(x^4)^2$；　　（2）$(m^3)^6$；　　（3）$-(a^5)^2$；　　（4）$-(y^2)^3$.

4. 计算，并说明运算的依据.
（1）$(x^2)^4$；　　（2）$x^2\cdot x^4$；　　（3）$(m^5)^5$；　　（4）$m^5\cdot m^5$.

5. 计算，并说明运算的依据.
（1）x^3+x^3；　　（2）x^3-x^3；　　（3）$(x^3)^3$；　　（4）$(xy)^3$.

6. 计算：
（1）$(x^2y)^3$；　　（2）$(-mn^3)^2$；　　（3）$(-x^2y^3)^5$；　　（4）$-(-3xy^3)^3$.

7. 下面的运算对不对？如果不对，请改正过来.
（1）$(-x^5)^2=-x^7$；　　（2）$(xy^2)^5=xy^{10}$；
（3）$(2mn)^3-6m^3n^3$；　　（4）$(-2a^3)^2=-4a^5$.

8. 计算：
（1）$-x^3\cdot x^4$；　　（2）$-a\cdot(-a)^4$；
（3）$-y^3\cdot(-y)^2$；　　（4）$-(-a)^5\cdot(-a)$.

★★提升★★

1. 计算：
(1) $(-x)^5\cdot x^2\cdot(-x)^4$；　(2) $-a^2\cdot(-a)^4\cdot(-a)^3$；
(3) $-m^4\cdot m^6\cdot(-m)^8$；　(4) $-(-p)^5\cdot(-p)^3\cdot(-p)^2$.

2. 计算：
(1) $(-2)^5\cdot(-2)^7\cdot2^6$；　(2) $\left(-\frac{1}{2}\right)^5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^4$；
(3) $10^2\cdot10\cdot10^m$(m 是正整数)；　(4) $3^n\cdot(-3)^5\cdot3^n$(n 是正整数).

3. 把下列各式化成 $(x-y)^n$ 的形式：
(1) $(x\quad y)\cdot(x\quad y)^3\cdot(x\quad y)^2$；　(2) $(x\quad y)^3\cdot(y\quad x)^2\cdot(y\quad x)$；
(3) $(x-y)\cdot(x-y)^4\cdot(y-x)^4$；　(4) $(x-y)\cdot(y-x)^3\cdot(y-x)^4$.

4. 计算：(m，n 是正整数)
(1) $(-a)^m\cdot a^n$；　(2) $[-5^m\cdot(-5)^n]^2$.

5. 用简便方法计算：
(1) $\left[(-6)^8\times\left(\frac{1}{6}\right)^8\right]^5$；　(2) $(-8)^{2\,003}\times(-0.125)^{2\,000}$.

★★★拓展★★★

已知：$2^m=3$，$2^n=5$. 求 2^{3m+2n} 的值.

6.3 整式的乘法

1. 单项式与单项式相乘

实践

某颗人造地球卫星绕地球运行的速度是 7.9×10^3 米/秒，那么这颗卫星绕地球运行一年(一年以 3.2×10^7 秒计算)走过的路程是多少米？
你在运算中应用了什么运算律和运算性质？[1]

[1] 2.528×10^{11} 米. 运用了乘法的交换律、结合律，同底数幂的乘法性质.

6.3 节整式的乘法，安排了单项式与单项式相乘、单项式与多项式相乘、多项式与多项式相乘的内容. 这些内容在幂的运算性质基础上学习，是进一步学习数学的重要基础知识.

1. 在教学过程中，要充分利用“思考”、“实践”，采用启发式教学，探讨各个乘法性质的形成过程，引导学生研究如何经过具体到抽象、特殊到一般、归纳概括得到性质，一方面加深学生对性质的理解，另一方面提高学生的思维品质.

2. 本节内容充分体现了“转化”的数学思想方法. 整式的乘法实际上是运算的转化. 单项式与单项式相乘转化为幂的乘法运算，单项式乘多项式、多项式乘多项式

[1] 单项式与单项式相乘的法则是由三个具体题目归纳概括出来的，它们运用了同底数幂的乘法性质与乘法的交换律、结合律. 在演算过程中，要做到步步有据，并注重引导学生归纳、概括，且用文字语言准确表述. 抓住乘式里的系数、相同字母、不相同字母三个部分进行概括. 在教学中，三个具体题目可做板书供学生观察、归纳.

练习答案：

1. （1）$35x^5$；
（2）$-6m^3n^4$；
（3）$2a^5b$；
（4）$\frac{1}{2}x^3y^2$.

2. （1）错，$15x^5$；
（2）错，$6m^6$；
（3）错，$14a^4b^3c$；
（4）错，$6x^3y^2$.

根据单项式的概念、运算律和同底数幂的乘法性质，做下列计算：[1]

（1）$2x\cdot 3xy$；　（2）$3xy^2\cdot 4x^3y$；　（3）$3ab^2\cdot a^2b^3c$.

由计算的过程和结果，你能归纳出单项式与单项式相乘的运算方法吗？

一般地，单项式相乘，先把它们的系数相乘，作为积的系数；再把相同字母的幂相乘所得的积，分别作为积的因式，并把只在一个单项式里出现的字母的幂也作为积的因式.

例 1 计算：

（1）$(-3m^3n^2)\cdot(7mn^3)$；　（2）$\frac{4}{3}x^2y^3\cdot\left(-\frac{3}{2}x\right)$.

解：（1）$(-3m^3n^2)\cdot(7mn^3)$
$=[(-3)\times 7]\cdot(m^3\cdot m)\cdot(n^2\cdot n^3)$
$=-21m^4n^5$；

（2）$\frac{4}{3}x^2y^3\cdot\left(-\frac{3}{2}x\right)$
$=\left[\frac{4}{3}\times\left(-\frac{3}{2}\right)\right]\cdot(x^2\cdot x)\cdot y^3$
$=-2x^3y^3$.

练习

1. 计算：
（1）$7x^2\cdot 5x^3$；　（2）$3mn\cdot(-2m^2n^3)$；
（3）$-\frac{1}{2}a^2\cdot(-4a^3b)$；　（4）$(-3xy)\cdot\left(-\frac{1}{6}x^2y\right)$.

2. 下面的计算对不对？如果不对，请改正过来.
（1）$3x^2\cdot 5x^3=15x^6$；　（2）$3m^3\cdot 2m^3=6m^3$；
（3）$7a^3b^2\cdot 2abc=14a^4b^3$；　（4）$2xy\cdot 3x^2y=6x^3y$.

例 2 计算：

按照怎样的顺序进行运算？

（1）$2xy\cdot\left(-\frac{1}{2}x^2yz\right)\cdot(-3xz^2)$；

（2）$2x^6y^2\cdot x^3y+(-25x^8y^2)(-xy)$.

74 数学 七年级 下册

转化为单项式与单项式的乘法. 在教学中要让学生领会转化的思路，注意实现转化的条件、方法和转化后的结果. 本节内容还运用了“换元”的思想方法，在运算性质推导和运用过程中，往往需要把某个式子看做一个整体，从而把复杂的式子变得简单，使式子的结构特点明显显示出来.

3. 本节在单项式与多项式相乘、多项式与多项式相乘中，引导学生用几何图形拼图来解释运算性质，这样做既直观形象，又有利于渗透数形结合的思想方法.

4. 单项式的乘法是幂的运算性质的直接应用，教学中要复习单项式的意义，明确单项式的结构特点，从具体单项式乘法入手，根据乘法的交换律和结合律重新组合算

解：(1) $2xy\cdot\left(-\frac{1}{2}x^2yz\right)\cdot(-3xz^2)$

$=\left[2\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times(-3)\right]\cdot(x\cdot x^2\cdot x)\cdot(y\cdot y)\cdot(z\cdot z^2)$

$=3x^4y^2z^3$；

(2) $2x^6y^2\cdot x^3y+(-25x^8y^2)(-xy)$

$=2x^9y^3+25x^9y^3$

$=27x^9y^3$.

练习

1. 计算：

(1) $(6a^2b)\cdot(-2ab^2c)\cdot\left(-\frac{1}{4}b^2c^3\right)$；

(2) $(-0.2x^3y)\cdot(-0.3x^2y^3)\cdot(25xyz)$.

2. 计算：

(1) $\left(-\frac{1}{4}a^3b^3c\right)+\frac{5}{6}abc\cdot(ab)^2$；

(2) $(-2x^2)(xy^3)-2x^2y(-4xy^2)$.

3. 光的速度大约是 3×10^5 千米/秒，太阳光射到地球上约需 5×10^2 秒，那么地球和太阳之间的距离大约是多少米？（用科学记数法表示）

2. 单项式与多项式相乘

在学习了单项式乘法的基础上，我们来研究单项式与多项式的乘法.

思考

是否能把单项式与多项式相乘，转化为单项式与单项式相乘？转化的依据是什么？

练习答案：

1. (1) $3a^3b^5c^4$；

(2) $1.5x^6y^5z$.

2. (1) $\frac{7}{12}a^3b^3c$；

(2) $6x^3y^3$.

3. 1.5×10^{11} 米.

式，从而得到单项式相乘的积. 再引导学生分析积式中因式与乘式中各因式的关系，归纳出单项式相乘的法则.

5. 对于单项式乘法法则，教学时应注意：

(1) 积的系数等于各因式系数的积，这是有理数的乘法，应先确定符号，再计算绝对值.

(2) 相同字母相乘，是同底数幂的乘法，底数不变，指数相加.

(3) 只在一个单项式里含有的字母，要连同它的指数写在积里. 注意不要丢掉这个因式.

[1] 这里用到乘法对加法的分配律，但是这里的字母都表示单项式.

[2] 利用图形的直观，使学生加深对乘法对加法的分配律的理解，从而掌握单项式与多项式相乘的法则. 同时渗透数形结合的思想.

如果用字母 m 表示单项式，用 $a+b+c$ 表示多项式，单项式与多项式相乘就是进行形如

$m(a+b+c)$

这个运算可以依照哪个运算律来进行?

的运算.[1]

由于代数式中的字母都表示数，所以乘法对加法的分配律对于代数式仍然成立，从而有

$$m(a+b+c)=ma+mb+mc.$$

这个运算律可以用图 6－1 所示的几何图形加以说明.[2]

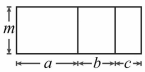


图 6－1

$m(a+b+c)=$_____.

所以，单项式与多项式相乘，就是用单项式分别乘多项式的每一项，再把所得的积相加.

例 3 计算：

(1) $-2xy\cdot(3x^2+2xy-y^2)$；　　(2) $(2ab^2-ab+4b)\cdot ab$.

解：(1) $-2xy\cdot(3x^2+2xy-y^2)$

$=(-2xy)\cdot(3x^2)+(-2xy)\cdot(2xy)+(-2xy)\cdot(-y^2)$

$=-6x^3y-4x^2y^2+2xy^3$；

(2) $(2ab^2-ab+4b)\cdot ab$

$=(2ab^2)\cdot(ab)-(ab)\cdot(ab)+(4b)\cdot(ab)$

$=2a^2b^3-a^2b^2+4ab^2$.

例 4 计算：$2x^2\cdot\left(\frac{1}{2}xy+y^2\right)-5x\cdot(x^2y-xy^2)$.

解：$2x^2\cdot\left(\frac{1}{2}xy+y^2\right)-5x\cdot(x^2y-xy^2)$

$=x^3y+2x^2y^2-5x^3y+5x^2y^2$

$=-4x^3y+7x^2y^2$.

要防止在运算中产生符号的错误!

（4）单项式乘法法则对于三个以上的单项式相乘同样适用.

6. 单项式与多项式相乘的法则，是根据数的乘法对加法的分配律推导出来的. 由于单项式中的字母表示数，因此单项式也表示数，多项式是单项式的代数和，所以单项式与多项式相乘表示的是数与数的代数和相乘，因而可以运用数的乘法对加法的分配律改变运算形式. 除此之外，在教学中还应注意运用图形的直观特点，加深学生对法则的理解.

7. 在运用单项式与多项式相乘的法则时，最容易发生符号的错误. 要注意单项式包括了前面的符号，多项式中的每一项也包括它前面的符号. 因此，单项式乘多项式

练 习

1. 计算：

(1) $2x(3x^2+1)$；　　(2) $-4\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{4}x\right)$；

(3) $-2y\left(3y^2-\frac{7}{2}y-1\right)$；　　(4) $\left(\frac{5}{3}x^2-2xy+y^2\right)\cdot 3x^2y$.

2. 计算：

(1) $-x^2(-2xy)+3x(x^2y-1)$；　　(2) $x-\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1}{3}(x^2-x+1)$.

例 5 如图 6－2，计算四边形 $AECF$ 的面积.[1]

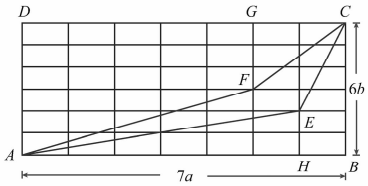


图 6－2

分析：四边形 $AECF$ 的面积即长方形 $ABCD$ 的面积减去梯形 $ADGF$、三角形 GCF、三角形 AHE、梯形 $HBCE$ 四个部分的面积.

解：四边形 $AECF$ 的面积为

$$7a\cdot 6b-\frac{1}{2}(3b+6b)\cdot 5a-\frac{1}{2}\cdot 3b\cdot 2a-\frac{1}{2}\cdot 6a\cdot 2b-\frac{1}{2}(2b+6b)\cdot a$$

$$=42ab-\frac{45}{2}ab-3ab-6ab-4ab$$

$$=\frac{13}{2}ab.$$

3. 多项式与多项式相乘

下面研究多项式与多项式的乘法．形如 $(m+n)(a+b+c)$ 的运算应当怎

练习答案：

1. (1) $6x^3+2x$；
   (2) $-6x^2+x$；
   (3) $-6y^3+7y^2+2y$；
   (4) $5x^4y-6x^3y^2+3x^2y^3$.
2. (1) $5x^3y-3x$；
   (2) $\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}$.

[1] 本题除去单项式与多项式相乘的运算以外，要注意培养学生观察、分解图形的能力，并把数与形结合起来.

的各项时，连带它的符号去乘多项式带符号的各项．另外，单项式与多项式相乘的结果是一个多项式，其项数与因式中多项式的项数相同.

8. 多项式与多项式相乘是本节的重点内容，也是对以前知识的综合运用，在教学中，对幂的运算性质、单项式乘法、单项式与多项式相乘法则进行适当的复习．在推导中运用了“换元”的数学思想方法，把其中的一个多项式看做一个单项式，运用单项式与多项式相乘的法则，得到这个多项式与另一个多项式各项乘积的和，再运用单项式相乘的法则得到单项式乘积的和，最后概括出多项式相乘的法则．同时利用图形直观演示，加深学生的理解.

[1] 这里用到“转化”的数学思想，把新知识转化为旧知识. 如果把 $(m+n)$ 看成一个单项式，那么两次运用单项式与多项式相乘的法则，就得到了多项式相乘的法则.

[2] 多项式乘多项式的几何意义，让学生亲自观察研究图形，通过面积关系，把数的表达式和形的表达式结合起来. 使学生直观理解法则的正确性，同时掌握多项式乘法的步骤. 教材留有空白，以备学生操作. 教学中可以引导学生把面积标出，直观认识，如图：

m	ma	mb	mc
n	na	nb	nc
	a	b	c

样进行?

思考

是否能够把多项式与多项式相乘转化为单项式与多项式相乘?

如果先把 $(m+n)$ 看做一个单项式，就可以把多项式与多项式相乘转化为单项式与多项式相乘. 利用我们已经学过的知识，可以知道[1]

$$\begin{aligned}&(m+n)(a+b+c)\\=&(m+n)a+(m+n)b+(m+n)c\\=&ma+na+mb+nb+mc+nc.\end{aligned}$$

探索

以上多项式与多项式乘法的意义，可以用图 6－3 解释吗? 请你试一试.[2]

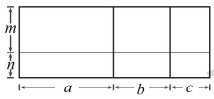


图 6－3

这就是说，多项式和多项式相乘可以这样进行：用其中一个多项式的每一项去乘另一个多项式的每一项，再把所得的积相加.

例 6 计算：

(1) $(x+3y)(5x+6y)$；　　(2) $(2a-3b)(a+4b)$.

解：(1) $(x+3y)(5x+6y)$

$=5x^2+6xy+15xy+18y^2$

$=5x^2+21xy+18y^2$；

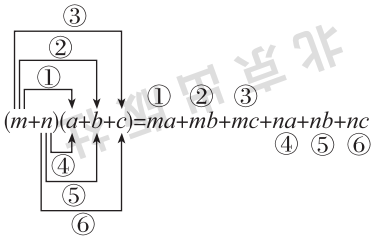
(2) $(2a-3b)(a+4b)$

$=2a^2+8ab-3ab-12b^2$

$=2a^2+5ab-12b^2$.

9. 在应用多项式与多项式相乘的法则时，要注意以下两点：

（1）防止出现漏乘与重复乘某一项的错误，在教学中可以确定一个从左到右的顺序依次去乘. 可以参考下图进行讲解.



例 7 计算：

(1) $(x+1)(x+4)$；　　(2) $(m-2)(m+3)$.

解：(1) $(x+1)(x+4)$

$=x^2+x+4x+4$

$=x^2+(1+4)x+4$

$=x^2+5x+4$；

(2) $(m-2)(m+3)$

$=m^2-2m+3m-6$

$=m^2+(-2+3)m-6$

$=m^2+m-6$.

思考

你能找到形如 $(x+a)$ 和 $(x+b)$ 的两个一次二项式相乘的规律吗？[1]

$(x+a)(x+b)=$_____.

例 8 计算：[2]

(1) $(3x-2)(x-1)+(x+1)(x+2)$；　　(2) $(a-b)(a^2+3ab+b^2)$.

解：(1) $(3x-2)(x-1)+(x+1)(x+2)$

$=3x^2-(3+2)x+2+x^2+(2+1)x+2$

$=4x^2-2x+4$；

(2) $(a-b)(a^2+3ab+b^2)$

$=a^3+3a^2b+ab^2-a^2b-3ab^2-b^3$

$=a^3+2a^2b-2ab^2-b^3$.

练习

1. 计算：

(1) $(x+4)(x+7)$；　　(2) $(a+5)(a-9)$；

(3) $(y-3)(y+10)$；　　(4) $(m-12)(m-11)$.

[1] 对于 $(x+a)\cdot(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ 的教学，要引导学生观察、归纳，可以采用合作学习、讨论的教学形式. 教材采用了留白的形式，订正后让学生用钢笔填写，以备后用.

[2] 这两个小题带有一定的综合性，要求学生按照法则严格运算，有的虽然符合乘法公式，但是目前仍要求按法则运算.

练习答案：

1. (1) $x^2+11x+28$；

(2) $a^2-4a-45$；

(3) $y^2+7y-30$；

(4) $m^2-23m+132$.

这样不仅有利于学生掌握法则，也有助于克服“漏乘”与“重复乘”. 另外，要及时检查，在运用法则计算之后，合并同类项之前，两个多项式相乘所得积的项数应是两个多项式项数之积.

(2) 要注意积中各项的符号. 多项式是单项式的和，每一项都要包括前面的符号.

10. $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ 是一种特殊形式的多项式乘法，教材中通过具体题目，引导在教学中利用“思考”，让学生自主地发现规律.

11. 掌握运算法则离不开必要的训练，本节教材安排了有层次的练习和习题，但

2. （1）$4a^2+8a-9b^2-12b$；

（2）$7a^2-6a-22$；

（3）$2x^2-8x$；

（4）x^3+y^3.

［1］把不规则的几何体转化为规则的几何体计算.

练习答案：

（1）$6x^3-10x^2$.

（2）$2\pi x^3+4\pi x^2$.

2. 计算：

（1）$(2a-3b)(2a+3b+4)$；

（2）$(3a-1)(a+1)+(2a+3)(2a-7)$；

（3）$(x-1)(3x-2)-(x+1)(x+2)$；

（4）$(x+y)(x^2-xy+y^2)$.

例 9 如图 6－4，用含有 x 的代数式表示槽型钢材的体积.

解：槽型钢材的体积为

$$\begin{aligned}V&=2x\cdot 3x\cdot(2x+7)-x\cdot x\cdot(2x+7)\\&=6x^2(2x+7)-x^2(2x+7)\\&=12x^3+42x^2-2x^3-7x^2\\&=10x^3+35x^2.\end{aligned}$$

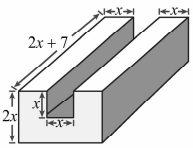
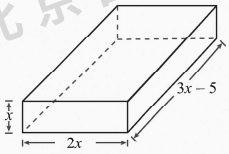


图 6－4

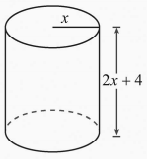
想一想，不规则几何体的体积常用什么方法计算.[1]

练习

如图，用代数式表示下面各图中几何体的体积.



（1）



（2）

与过去的教材相比，删减了繁难的题目，降低了题目的难度. 我们要通过这些必要的练习，巩固基础知识，培养学生的运算能力.

12. 教材中安排了一些联系实际的应用问题，教学中要注意培养学生的视图和空间想象能力，逐渐形成应用意识.

习 题 6-3

★基础★

1. 计算：

(1) $5x^3 \cdot 4xy$；　　(2) $(-3ab^2) \cdot (-2a^2b)$；

(3) $(-6xy^2z^3) \cdot 3x^2y^3$；　　(4) $(xy)^3 \cdot (-x^3y^2)$.

2. 计算：

(1) $(3x^4y) \cdot (-2xy^3)^4$；　　(2) $(-5m^2n^3)^2 \cdot (4m^4n)^2$；

(3) $\left(-\frac{3}{5}x^2y\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}xy^3\right)$；　　(4) $\left(-\frac{4}{7}ab^2\right) \cdot \left(\frac{1}{2}a^2b^3c\right)^3$.

3. 计算：

(1) $(2 \times 10^5) \times (6 \times 10^4)$；　　(2) $(2.4 \times 10^3) \times (3.2 \times 10^8)$；

(3) $(0.8 \times 10^8) \times (1.5 \times 10^6)^3$；　　(4) $\left(\frac{1}{2} \times 10^2\right)^5 \times (4 \times 10^3)^3$.

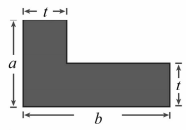
4. 计算：

(1) $-(a^2b)^3 + 2a^2b \cdot (-3a^2b)^2$；　　(2) $\left(-\frac{3}{4}a^3b^2c\right) + \frac{5}{6}abc \cdot (ab)^2$.

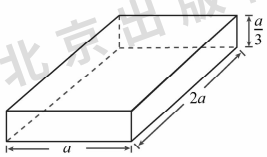
5. 如图所示是角钢的截面.

(1) 写出表示截面面积的代数式；

(2) 当 $a = 13.56$ mm，$b = 19.98$ mm，$t = 6.25$ mm 时，用计算器求出它的面积（精确到 1 mm²）.



（第 5 题）



（第 6 题）

6. 如图，计算长方体的表面积和体积.

7. 计算：

(1) $2x^2(x - y + 1)$；　　(2) $-4x\left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)$；

(3) $(3x^2y-3xy^2)(-xy)$；　　(4) $\left(5m^2-\frac{4}{9}m+1\right)(-3m^2n)$.

8. 计算：

(1) $(2x)^2\cdot\left(2x^2-\frac{5}{8}x-\frac{9}{16}\right)$；

(2) $-a^2(-2ab)+3a(a^2b-1)$；

(3) $(-2ab^2)^2\cdot(3a^2b-2ab-4b)$；

(4) $2ab(a^2b+ab-ab^2)-ab^2(a^2-3ab+2a)$.

9. 计算：

(1) $(3x-1)(x+5)$；　　(2) $(3x+4)(4x-9)$；

(3) $(5a-6b)(3a-2b)$；　　(4) $\left(\frac{1}{2}x-4\right)\left(2y-\frac{1}{4}\right)$.

10. 计算：

(1) $(x-3y)(x-6y-1)$；

(2) $(3a-b)(3a+b+5)$；

(3) $(2x-1)(x^2-x-1)$；

(4) $2x(x^2-2x+3)-(x+5)(2x-3)$；

(5) $3(2a+1)(2a-1)-4(3a-2)(3a+5)$.

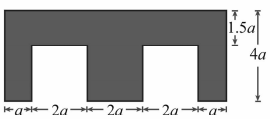
★★提升★★

1. 计算：

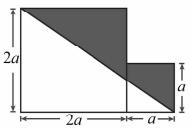
(1) $(-2a)^6-(-3a^3)^2-[-(2a)^2]^3$；　　(2) $(-3ab^3)^3\cdot(4a^2b)^2+5a^4b^5\cdot18a^3b^6$.

2. 光的速度大约是 3×10^5 千米/秒，从太阳系以外距离地球最近的一颗恒星（比邻星）发出的光，需要 4 年时间才能到达地球．如果 1 年以 3.2×10^7 秒计算，求这颗恒星与地球之间的距离．

3. 如图，计算变压器铁芯片截面的面积（长度单位：cm）.



（第 3 题）



（第 4 题）

4. 边长分别为 a 和 $2a$ 的两个正方形按如图的样式摆放，求图中绿色部分的面积．

5. 先化简，再求值：

(1) $6m^2-5m(-m+2n-1)+4m\left(-3m-\frac{5}{2}n-\frac{3}{4}\right)$，其中 $m=-1$，$n=\frac{1}{20}$；

(2) $3(-4x+y)(x-y)+2(3x-2y)(x+3y)$，其中 $x=-2$，$y=1$.

6. 解方程：

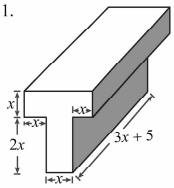
(1) $x(x+3)\quad x(1\quad 2x)=9+3x^2$；

(2) $6x^2-(2x+3)(3x-2)=0$.

7. 观察如图所示零件：

(1) 用含 x 的代数式表示零件的体积；

(2) 当 $x=206.56$ mm 时，求零件的体积．(利用计算器计算)

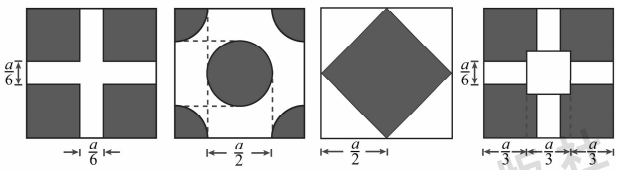


(第 7 题)

★★★拓展★★★

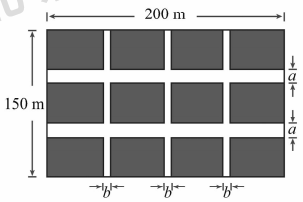
1. (1) 在一个边长为 a 的正方形地块上，开辟出一部分作为花坛．下面给了四种设计方案，请你分别写出花坛(图中绿色部分)面积 S 的表达式，并计算当 $a=10$ m 时的花坛面积．

(2) 请你再给出另外两种设计方案，并计算当 $a=10$ m 时的花坛面积．



(第 1 题)

2. 某农场有一块长方形耕地，尺寸如图所示．要在这块土地上沿东西方向挖 2 条主干水渠，宽均为 a 米；沿南北方向挖 3 条支水渠，宽均为 b 米．那么挖完水渠以后，余下的耕地面积为多少?



(第 2 题)

6.4 乘法公式

1. 完全平方公式

探索

学校操场中有一块边长为 108 m 的正方形空地，为购买草坪进行绿化，需要计算空地的面积，你能通过画图求得这块正方形空地的面积吗？

通过画图，我们发现可以将这个正方形分割成四部分（如图 6－5），即两个正方形和两个一模一样的长方形，分别口算四部分的面积就可以求得整个正方形的面积．

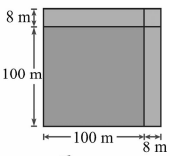


图 6－5

思考

如果这块正方形空地的边长是 $a+b$，那么它的面积是多少呢？你能用整式乘法的知识进行解释吗？

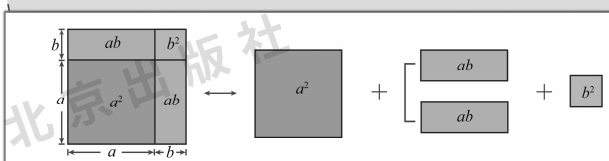


图 6－6

如图 6－6，我们发现 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$．可以利用多项式和多项式相乘的知识进行解释：

$$\begin{aligned}&(a+b)^2\\&=(a+b)(a+b)\\&=a^2+ab+ab+b^2\\&=a^2+2ab+b^2.\end{aligned}$$

6.4 节乘法公式主要有两数和（差）的完全平方公式、平方差公式．具有特殊形式的多项式相乘的式子及其结果写成公式的形式，就是乘法公式．这三个是最基本、最常用的乘法公式．

从多项式乘法到乘法公式是从一般到特殊的认识过程，对它的研究和学习，可以开阔学生视野，使他们进一步了解“特殊—一般—特殊”的认识规律．乘法公式应用广泛，是本章教学的重点．

1．两数和的完全平方公式的教学，可以利用教材安排的问题，引导学生“探索”如何通过画图求得正方形操场的面积，然后由特殊到一般，得到公式的几何意义，有

思考

这个规律用文字语言如何表述？怎样形式的整式乘法可以使用它简化运算？

两数和的平方，等于它们的平方和，加上它们的积的 2 倍．

我们把这个规律叫做两数和的完全平方公式．

两数和的完全平方公式

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

在公式中，字母 a 和 b 可以是含字母的代数式，也可以是单独的数．在运用公式进行运算时，应注意区分哪个是 a，哪个是 b.

例 1 运用两数和的完全平方公式计算：[1]

(1) $(x+3)^2$；　　(2) $(3m+4n)^2$.

解：(1) $(x+3)^2=x^2+2\cdot x\cdot 3+3^2=x^2+6x+9$；

$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2$

为了运用公式，需要将谁看成 a，将谁看成 b？

(2) $(3m+4n)^2=(3m)^2+2\cdot(3m)\cdot(4n)+(4n)^2=9m^2+24mn+16n^2$.

$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2$

练习

运用两数和的完全平方公式计算：

(1) $(x+2)^2$；　(2) $(7+m)^2$；　(3) $(5x+2y)^2$；　(4) $\left(2x+\frac{y}{2}\right)^2$.

例 2 运用两数和的完全平方公式计算：

(1) 107^2；　　(2) $(a+b+c)^2$. [2]

分析：(1) 将 107^2 写成 $(100+7)^2$，转化为可用两数和的完全平方公式的形式；(2) 把 $a+b$ 看成一个整体，将 $(a+b+c)^2$ 写成 $[(a+b)+c]^2$ 的形式，

[1] 通过例题要让学生掌握公式的结构特征和字母表示数的广泛意义．在教学中，用不用双箭头的方式，认识公式中字母的广泛意义，可以针对学生的实际情况处理．

练习答案：

(1) x^2+4x+4；

(2) $m^2+14m+49$；

(3) $25x^2+20xy+4y^2$；

(4) $4x^2+2xy+\frac{1}{4}y^2$.

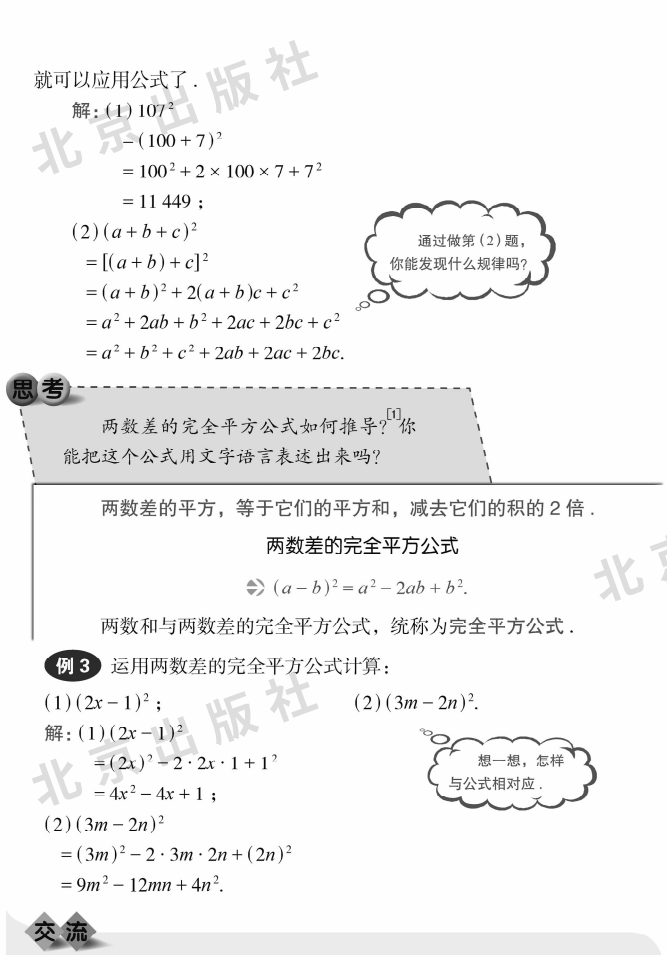
[2] 这是 $(a+b)^2$ 在字母个数扩大时的推广，可以引导学生观察 $(a+b)^2$，$(a+b+c)^2$ 的展开式，还可以让学生继续演算 $(a+b+c+d)^2$．通过观察、分析、综合，不难找到规律．找到规律后可以让学生直接写出 $(a+b+c+d+e)^2$ 的展开式．

利于学生对公式直观的理解．

2. 教学中要引导学生用文字语言表述公式，并使学生理解公式中字母的广泛含义，字母可以表示数（正数或负数），也可以表示式子．因此，在运用公式时也要注意“换元”思想方法的应用．

3. 对于两数差的完全平方公式，教材安排了“思考”，引导学生自己用两种方法推导的方式，一种是直接由 $(a-b)^2=(a-b)(a-b)$ 推导，另一种是作为 $(a+b)^2$ 的应用，由 $(a-b)^2=[a+(-b)]^2$ 而导出，再一次训练学生用文字语言表述公式．

[1] 一种是直接计算$(a-b)^2=(a-b)\cdot(a-b)=a^2-2ab+b^2$；另一种是作为$(a+b)^2$公式的应用，$(a-b)^2=[a+(-b)]^2=a^2+2a\cdot(-b)+(-b)^2=a^2-2ab+b^2$.



就可以应用公式了.

解：(1) 107^2

$=(100+7)^2$

$=100^2+2\times100\times7+7^2$

$=11\,449$；

(2) $(a+b+c)^2$

$=[(a+b)+c]^2$

$=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$

$=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$

$=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$

通过做第(2)题，你能发现什么规律吗？

思考

两数差的完全平方公式如何推导？[1]你能把这个公式用文字语言表述出来吗？

两数差的平方，等于它们的平方和，减去它们的积的2倍.

两数差的完全平方公式

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$

两数和与两数差的完全平方公式，统称为完全平方公式.

例3 运用两数差的完全平方公式计算：

(1) $(2x-1)^2$；　(2) $(3m-2n)^2$.

解：(1) $(2x-1)^2$

$=(2x)^2-2\cdot2x\cdot1+1^2$

$=4x^2-4x+1$；

(2) $(3m-2n)^2$

$=(3m)^2-2\cdot3m\cdot2n+(2n)^2$

$=9m^2-12mn+4n^2.$

想一想，怎样与公式相对应.

交流

仿照用正方形和长方形面积表示两数和的完全平方公式的方法，试解释两数差的完全平方公式，并与同学交流你的想法和结果.

4. 正确地使用公式的关键是确定题目是否符合使用公式的条件. 重要的是先确定两数，然后再看是否是两数的和（或差），最后按公式写出结果. 教材中开始的例题，利用箭头的方式，就是为了在学生还不熟悉的情况下，落实这种思维过程. 运算中要防止两个公式的混淆. 为了应用公式往往要运用“换元”的思想，有些题目还需要添加括号. 在教学中对于这些较困难的地方要引导学生积极思考，自主领会和掌握.

5. 平方差公式的教学，可以利用教材安排的一组符合公式的题目，让学生“实践”，然后引导学生去发现规律，并努力用文字语言把规律概括出来. 这是一个学生充分参与、发现规律的过程，教师要因材施教，设计好这个过程. 得到公式以后，要

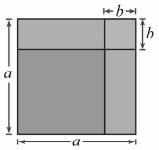


图 6－7

如图 6－7，ab 表示的是哪部分图形的面积？重复减去的面积怎么办？

练 习

1. 运用完全平方公式计算：
   (1) 102^2；　　(2) 199^2.
2. 运用完全平方公式计算：
   (1) $(x+3y)^2$；　　(2) $(4m-5n)^2$；
   (3) $(x-2y)^2-(2x+y)^2$；　　(4) $\left(\frac{1}{2}x^2-3y\right)^2$.

问题解决

发现和运用规律：[1]

(1) 观察 $15^2=225$，$25^2=625$，$35^2=1\,225$，$45^2=2\,025$，…，你能发现和猜想出什么规律吗？如果能，请证明这个规律.

(2) 运用已经证明的规律计算：55^2，75^2，85^2，95^2，105^2，195^2.

2. 平方差公式

思考

前面我们学习了两数和的平方、两数差的平方，它们的结果都是三项，如果用两数的和与两数的差相乘，结果如何呢？

练习答案：

1. (1) 10 404；
   (2) 39 601.
2. (1) $x^2+6xy+9y^2$；
   (2) $16m^2-40mn+25n^2$；
   (3) $-3x^2-8xy+3y^2$；
   (4) $\frac{1}{4}x^4-3x^2y+9y^2$.

[1] 观察个位上的数为 5 的两位数的平方可知，它的末两位是 25，前面的数 $2=1\times2$，$6=2\times3$，$12=3\times4$，$20=4\times5$. 猜想，对于形如 $10n+5$（n 为正整数）的整数，会有 $(10n+5)^2=[n(n+1)]\times100+25=100n\cdot(n+1)+25$.

证明：$(10n+5)^2=(10n)^2+2\cdot10n\cdot5+5^2=100n(n+1)+25$.

引导学生仔细观察、分析这个公式的特征：公式的左边是两个数的和与这两个数的差的积，而右边正好是这两个数的平方差.

6. 正确运用平方差公式的关键，除了要掌握公式的结构特征以外，还要理解公式中字母的广泛含义. 把因式中具体的某个数或式子看做 a，另一个数（或式子）看做 b，乘式的结构特点就显示出来，再与公式对照就可以确定可否利用公式了.

[1] 平方差公式是通过学生观察、归纳、概括得到的，目的在于培养学生研究问题的能力. 让学生用文字语言叙述公式，也是一个培养能力的过程.

[2] 这里采用了图形割、补的方法，这种解决问题的方法在几何中经常用到. 全等形的概念还未讲到，可以只说面积相等.

实践

计算下面各题：

(1) $(a+5)(a-5)=$_____；　(2) $(m+3)(m-3)=$_____；

(3) $(3x+7)(3x-7)=$_____；　(4) $(5a+b)(5a-b)=$_____；

(5) $(n+3m)(n-3m)=$_____；　(6) $(x+2y)(x-2y)=$_____.

通过计算你发现了什么规律？[1]

两个数的和与这两个数的差的积，等于这两个数的平方差.

思考

整式乘法具有怎样的特点时，可以用这个规律去简化计算？如何推导这个规律呢？

类似的，可以利用多项式和多项式相乘的知识进行解释：

$$\begin{aligned}&(a+b)(a-b)\\=&a^2-ab+ab-b^2\\=&a^2-b^2.\end{aligned}$$

我们把这个规律叫做平方差公式.

平方差公式

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

怎样用图 6－8 中图形的面积来解释平方差公式？[2]

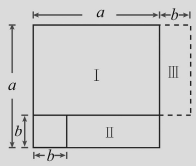


图 6－8

思考

例 4 运用平方差公式计算：

(1) $(m+8)(m-8)$；　　(2) $(2a+5b)(2a-5b)$.

解：(1) $(m+8)(m-8)=m^2-8^2=m^2-64$；

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

(2) $(2a+5b)(2a-5b)=(2a)^2-(5b)^2=4a^2-25b^2$.

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

注意：(1) 应用这个公式的条件是：两个因式中有一项完全相同，另一项互为相反数；

(2) 公式中的 a 和 b 可以表示数或代数式.

例 5 运用平方差公式计算：

(1) $(4y+3x)(3x-4y)$；　　(2) $(-4a-1)(4a-1)$.

解：(1) $(4y+3x)(3x-4y)$

$=(3x+4y)(3x-4y)$

$=(3x)^2-(4y)^2$

$=9x^2-16y^2$；

怎样转化为符合公式条件的形式？

(2) $(-4a-1)(4a-1)$

$=(-1-4a)(-1+4a)$

$=(-1)^2-(4a)^2$

$=1-16a^2$.

或

$(-4a-1)(4a-1)$

$=-(4a+1)(4a-1)$

$=-[(4a)^2-1^2]=-(16a^2-1)$

$=1-16a^2$.

练习

1. 运用平方差公式计算(口答)：

(1) $(x-y)(x+y)$；　　(2) $(x+3y)(x-3y)$；

(3) $(2+a)(2-a)$；　　(4) $(1-3m)(1+3m)$.

2. 运用平方差公式计算：

(1) $(x+2y)(-x+2y)$；　　(2) $(3m-5n)(5n+3m)$；

(3) $(-1+x)(-1-x)$；　　(4) $(-2b-5)(2b-5)$.

练习答案：

1. (1) x^2-y^2；
   (2) x^2-9y^2；
   (3) $4-a^2$；
   (4) $1-9m^2$.
2. (1) $4y^2-x^2$；
   (2) $9m^2-25n^2$；
   (3) $1-x^2$；
   (4) $25-4b^2$.

[1] 这是两个带有综合性的题目，要注意引导学生观察题目特征，符合公式要求的可以直接使用公式或转化为可以使用公式的形式，不符合公式要求的仍然按乘法法则进行.

练习答案：

(1) 9 991；

(2) 0.999 6；

(3) x^4-16；

(4) $-64a^4+244a^2b^2-225b^4$.

例 6 运用平方差公式计算：

(1) 59.8×60.2；　　(2) $(p+q)(p^2+q^2)(p-q)$.

解：(1) 59.8×60.2

$=(60-0.2)(60+0.2)$

$=60^2-(0.2)^2$

$=3\,600-0.04$

$=3\,599.96$；

(2) $(p+q)(p^2+q^2)(p-q)$

$=(p+q)(p-q)(p^2+q^2)$

$=(p^2-q^2)(p^2+q^2)$

$=p^4-q^4$.

例 7 计算：[1]

(1) $(2x+1)(2x-1)-(3-2x)(-2x-3)$；

(2) $(3a-4b)(4b+3a)-(2b-a)(2b+3a)$.

解：(1) $(2x+1)(2x-1)-(3-2x)(-2x-3)$

$=(2x+1)(2x-1)+(3-2x)(3+2x)$

$=[(2x)^2-1]+[3^2-(2x)^2]$

$-4x^2-1+9-4x^2$

$=8$；

不符合公式时，还要按一般的方法运算.

(2) $(3a-4b)(4b+3a)-(2b-a)(2b+3a)$

$=[(3a)^2-(4b)^2]-(4b^2+6ab-2ab-3a^2)$

$=9a^2-16b^2-4b^2-4ab+3a^2$

$=12a^2-4ab-20b^2$.

练习

运用平方差公式计算：

(1) 97×103；　　(2) 1.02×0.98；

(3) $(x-2)(x^2+4)(x+2)$；　　(4) $(2a+3b)(4a+5b)(2a-3b)(5b-4a)$.

例 8 运用乘法公式计算 $(2y+x)^2(x-2y)^2$.

分析：运用加法交换律，将 $2y+x$ 变形为 $x+2y$，这样 $(x+2y)(x-2y)$ 符合平方差公式，然后运用积的乘方公式将原式变形为 $[(x+2y)(x-2y)]^2$，再运用乘法公式计算.

解：$(2y+x)^2(x-2y)^2$

$=[(x+2y)(x-2y)]^2$

$=(x^2-4y^2)^2$

$=x^4-8x^2y^2+16y^4$.

例 9 有一个正方形花园，如果它的边长增加 3 米，那么花园面积将增加 39 平方米，求原来花园的面积.[1]

解：如图 6－9，设原正方形花园的边长为 x 米，那么增加后的边长为 $(x+3)$ 米.

由题意，得

$(x+3)^2-x^2=39$.

$x^2+6x+9-x^2=39$.

$x=5$.

$\therefore\quad x^2=25$.

答：原来花园的面积为 25 平方米.

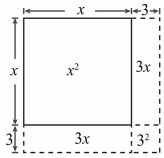


图 6－9

习 题 6－4

★基础★

1. 填空：

(1) $107^2=(\quad+\quad)^2=(\quad)^2+2(\quad)(\quad)+(\quad)^2=(\quad)$；

(2) $93^2=(\quad-\quad)^2=(\quad)^2-2(\quad)(\quad)+(\quad)^2=(\quad)$；

(3) $(x+2)(x-2)=(\quad)^2-(\quad)^2$.

2. 运用完全平方公式计算：

(1) $(a-2b)^2$；　(2) $(3x+2y)^2$；　(3) $(4a-3b)^2$；

(4) $(-2-x)^2$；　(5) $(1.5+2x)^2$；　(6) $\left(\frac{3}{2}a-\frac{2}{3}b\right)^2$.

3. 运用完全平方公式计算：

(1) 0.98^2；　(2) 895^2；　(3) 109^2；　(4) 14.5^2.

[1] 题图对题目给出了一个几何解释，目的在于渗透数形结合的思想方法，找到解题思路.

4. 运用平方差公式计算：
(1)$(x+2y)(x-2y)$；　(2)$(3a-2b)(3a+2b)$；　(3)$(-1+4x)(-1-4x)$；
(4)$(-4a-b)(b-4a)$；　(5)29.8×30.2；　(6)10.98×11.02.

5. 计算：
(1)$(x+4)(x^2+16)(x-4)$；
(2)$\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x^2+\frac{1}{9}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)$；
(3)$(x-3y)(x+3y)-(x+y)(x-y)$；
(4)$(2a-b)(b+2a)-(2b-3a)(2b+3a)$.

6. 运用乘法公式计算：
(1)$(x+y-1)^2$；　(2)$[(2a+b)(b-2a)]^2$；
(3)$(a+b-2c)(a-b+2c)$；　(4)$\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x^2-\frac{1}{4}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$.

★★提升★★

1. 填空：
(1)$(5a+2b)(\quad\quad)=25a^2-4b^2$；
(2)$(2x+y)(\quad\quad)=y^2-4x^2$；
(3)$(\quad\quad)(a-1)=1-a^2$.

2. 先化简，再求值：$(5y+1)(5y-1)-5(y+25y^2)$，其中$y=\frac{2}{5}$.

3. 解方程：$(x+1)(x-1)-(x+2)(x-3)=9$.

4. 解不等式：$(3x+4)(3x-4)<9(x-2)(x+3)$.

5. 你能再想出一种用几何图形演示的方法来说明平方差公式吗？

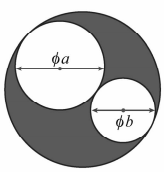
6. 化简求值：
(1)$(x+y)^2-(x-y)^2$，其中$x=\frac{2}{3}$，$y=\frac{3}{2}$；
(2)$5(a+b)(a-b)-[2(a+b)]^2-(a-b)^2$，其中$a-\frac{1}{3}$，$b=\frac{1}{2}$.

7. 解方程：$(4x+5)^2-(4x+5)(4x-5)=0$.

8. 解不等式：$2y(1+3y)\leqslant3(y-2)^2+3(y+2)^2$.

9. 现有一张正方形纸片，如果边长缩短3厘米，那么所得的正方形的面积就比原正方形的面积减少27厘米^2，求原正方形的边长.

10. 如图，一块直径为$a+b$的圆形钢板，从中挖去直径分别为a与b的两个圆，求剩下钢板的面积.（ϕ表示圆的直径）



（第10题）

11. 比较下面各算式结果的大小：(在横线上选填“>”、“<”或“=”)

4^2+3^2____$2\times4\times3$；$(-2)^2+1^2$____$2\times(-2)\times1$；

2^2+7^2____$2\times2\times7$；11^2+12^2____$2\times11\times12$.

通过观察归纳，写出反映这种规律的一般结论，并加以证明.

★★★ 拓展 ★★★

1. 计算：$\left(3+\frac{1}{3}\right)\left(3^2+\frac{1}{3^2}\right)\left(3^4+\frac{1}{3^4}\right)\left(3^8+\frac{1}{3^8}\right)\left(3^{16}+\frac{1}{3^{16}}\right)$.

2. 观察下列等式：

$9-1=8$，$16-4=12$，$25-9=16$，$36-16=20$，….

这些等式反映出正整数间的某种规律. 设 n 表示正整数，试写出第 n 个等式的表达式，并加以证明.

三 整式的除法

6.5 整式的除法

1. 同底数幂的除法

实践

$2^5\div2^3=\frac{2\times2\times2\times2\times2}{2\times2\times2}=$_____；

$10^6\div10^2=$_____；

$2^3\div2^3=$_____；

$2^3\div2^5=\frac{2\times2\times2}{2\times2\times2\times2\times2}=$_____；

$10^2\div10^6=\frac{10\times10}{10\times10\times10\times10\times10\times10}=$_____.

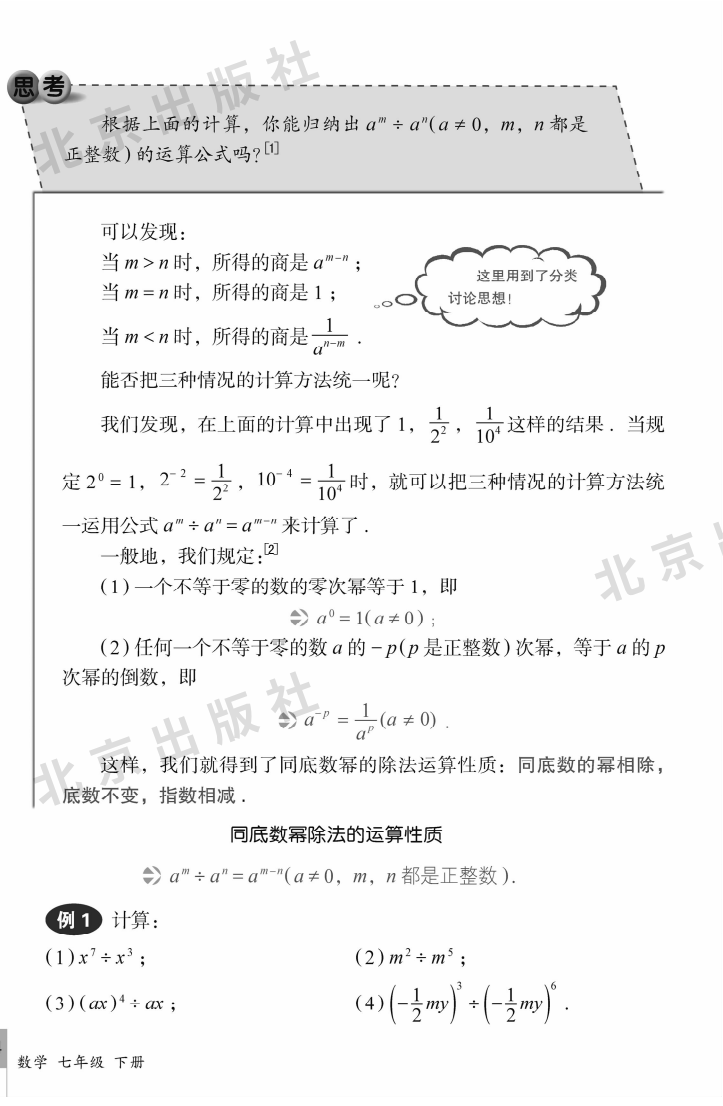
6.5 节整式的除法主要有以下内容：同底数幂的除法运算性质的推导，用科学记数法表示绝对值小于 1 的小数，整式的除法运算.

1. 同底数幂的除法的运算性质是由特殊的同底数幂相除，通过实际计算结果归纳得出的. 教材提供的实例较少，教学中可以让学生举出更多实例. 计算方法分三种情况给出：

$$a^m\div a^n=\begin{cases}a^{m-n} & (m>n),\\ 1 & (m=n),\\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & (m<n).\end{cases}$$ （其中 $a\neq0$，m，n 为正整数）

[1] 同底数幂除法的运算性质，归纳过程比前几个性质要困难得多. 教学中可以在教师引导下完成这个归纳过程. 通过特殊数字的同底数幂的除法，首先运用分类讨论思想抽象得到三种情况，为了统一为一个公式，就要对新出现的结果作出规定，然后得到统一的性质.

[2] 对于这两个规定学生不易接受，可以通过实例说明规定的必要性与合理性. 比如，$5^3 \div 5^3$，由数的除法性质有 $5^3 \div 5^3 = 1$，为了使 $5^3 \div 5^3$ 也能按 $5^3 \div 5^3 = 5^{3-3} = 5^0$ 这种算法计算，因此有必要规定 5^0 的意义. 而为使这种运算与数的除法运算结果保持一致，因此规定 $5^0 = 1$ 是合理的. 当把底数抽象为字母时，要注意字母的条件.



思考

根据上面的计算，你能归纳出 $a^m \div a^n (a \neq 0, m, n$ 都是正整数）的运算公式吗？[1]

可以发现：

当 $m > n$ 时，所得的商是 a^{m-n}；

当 $m = n$ 时，所得的商是 1；

当 $m < n$ 时，所得的商是 $\frac{1}{a^{n-m}}$.

这里用到了分类讨论思想！

能否把三种情况的计算方法统一呢？

我们发现，在上面的计算中出现了 1，$\frac{1}{2^2}$，$\frac{1}{10^4}$ 这样的结果. 当规定 $2^0 = 1$，$2^{-2} = \frac{1}{2^2}$，$10^{-4} = \frac{1}{10^4}$ 时，就可以把三种情况的计算方法统一运用公式 $a^m \div a^n = a^{m-n}$ 来计算了.

一般地，我们规定：[2]

（1）一个不等于零的数的零次幂等于 1，即

$a^0 = 1 (a \neq 0)$；

（2）任何一个不等于零的数 a 的 $-p$（p 是正整数）次幂，等于 a 的 p 次幂的倒数，即

$a^{-p} = \frac{1}{a^p} (a \neq 0)$.

这样，我们就得到了同底数幂的除法运算性质：同底数的幂相除，底数不变，指数相减.

同底数幂除法的运算性质

$a^m \div a^n = a^{m-n} (a \neq 0, m, n$ 都是正整数）.

例 1 计算：

（1）$x^7 \div x^3$；

（2）$m^2 \div m^5$；

（3）$(ax)^4 \div ax$；

（4）$\left(-\frac{1}{2}my\right)^3 \div \left(-\frac{1}{2}my\right)^6$.

为了把分三种情况计算的方法，统一为第一种计算方法，即不论 m，n 的大小如何，形成一个性质 $a^m \div a^n = a^{m-n}$，根据 $m - n$ 所得差为正整数、零、负整数从而出现零指数幂、负整数指数幂的情况，需要规定零指数幂和负整数指数幂的意义：$a^0 = 1$（$a \neq 0$），$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$（$a \neq 0$，p 为正整数），从而得到同底数幂的除法的运算性质.

在教学时，要引导学生逐步理解，明确每一步的必要性、依据和所得的结果. 这个过程也是一个由特殊到一般，由具体到抽象的归纳概括过程.

解：(1) $x^7 \div x^3 = x^{7-3} = x^4$；　(2) $m^2 \div m^5 = m^{2-5} = m^{-3} = \frac{1}{m^3}$；

(3) $(ax)^4 \div ax = (ax)^{4-1} = (ax)^3 = a^3x^3$；

(4) $\left(-\frac{1}{2}my\right)^3 \div \left(-\frac{1}{2}my\right)^6$

$= \left(-\frac{1}{2}my\right)^{3-6}$

$= \left(-\frac{1}{2}my\right)^{-3}$

$= \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}my\right)^3}$

$= -\frac{8}{m^3y^3}$.

关键是把 $-\frac{1}{2}my$ 看做一个整体！

练习

1. 计算：
   (1) $x^4 \div x^2$；　(2) $x^3 \div x^3$；
   (3) $(-3)^5 \div (-3)^2$；　(4) $(-2x)^3 \div (-2x)^2$；
   (5) $(-m^2n)^5 \div (-m^2n)^2$；　(6) $(-xy^3)^4 \div (-xy^3)^6$.
2. 下面的计算对不对？如果不对，请改正过来.
   (1) $x^6 \div x^2 = x^3$；　(2) $m^{3n} \div m^n = m^3$；
   (3) $(-x)^4 \div (-x)^2 = -x^2$；　(4) $(-a)^5 \div (-a)^2 = a^3$.

我们已经学过用科学记数法把绝对值大于 1 的数记作 $a \times 10^n$ 的形式，其中 a 是含有一位整数的小数，n 等于原数的整数部分的位数减去 1. 比如：

$$298\,000 = 2.98 \times 10^5,$$

$$-3\,245\,000 = -3.245 \times 10^6.$$

对于绝对值小于 1 的数，怎样用科学记数法表示呢？

$\because$ $0.1 = \frac{1}{10} = 10^{-1}$, $0.01 = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$, $0.001 = \frac{1}{1\,000} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3}$, …,

练习答案：

1. (1) x^2；
   (2) 1；
   (3) -27；
   (4) $-2x$；
   (5) $-m^6n^3$；
   (6) $\frac{1}{x^2y^6}$.
2. (1) 错，x^4；
   (2) 错，m^{2n}；
   (3) 错，x^2；
   (4) 错，$-a^3$.

2. 用科学记数法表示绝对值小于 1 的数，关键是探索 10^{-p}（p 为正整数）用小数表示后，小数中“0”的个数与正整数 p 的关系. 教学中也要通过从特殊到一般，从具体到抽象的归纳概括过程. 这样科学记数法可以统一表示为：

$$10^n = \begin{cases} 1\underbrace{000\cdots0}_{n\text{个}0} & (n \text{ 为正整数}), \\ 1 & (n = 0), \\ \underbrace{0.00\cdots0}_{|n|\text{ 个}0}1 & (n \text{ 为负整数}). \end{cases}$$

练习答案：

（1）2.503×10^{6}；

（2）5.056×10^{-2}；

（3）3.89×10^{-5}；

（4）-4.51×10^{-4}.

$\therefore\ \underbrace{0.00\cdots01}_{n\text{个}0}=10^{-n}$（$n$是正整数）.

你能发现零的个数与指数的关系吗？

这样，绝对值小于1的数也可以用科学记数法来表示.

例2 用科学记数法表示下列各数：

（1）0.000 04；　　（2）−0.000 007 18.

解：（1）$0.000\ 04=4\times10^{-5}$；

（2）$-0.000\ 007\ 18=-7.18\times10^{-6}$.

交流

当绝对值小于1的数记为$a\times10^{-n}$的形式时，其中a，n是怎样的数？

例3 已知1纳米$=\frac{1}{10^{9}}$米. 如果某种植物花粉的直径是35 000纳米，那么这种花粉的直径等于多少米？请用科学记数法表示.

解：$35\ 000\times\frac{1}{10^{9}}=3.5\times10^{4}\times10^{-9}=3.5\times10^{-5}$（米）.

答：这种花粉的直径等于3.5×10^{-5}米.

练习

用科学记数法表示下列各数：

（1）2 503 000；　　（2）0.050 56；

（3）0.000 038 9；　　（4）−0.000 451.

3. 单项式除以单项式，多项式除以单项式的运算法则，教材安排具体题目的运算，通过“交流”让学生自己归纳出来. 教师要在学生归纳的基础上，概括出规范结论. 单项式除以单项式的法则是：“单项式相除，把系数和同底数的幂分别相除，所得的商作为商的因式. 对于只在被除式中出现的字母，则连同它的指数作为商的一个因式.”多项式除以单项式的法则是：“用这个单项式去除多项式的每一项，再把所得的商相加.”

2. 单项式除以单项式

怎样做单项式与单项式的除法运算呢？比如，$6x^2yz^3 \div 3xz^2 = ?$[1]

思考

我们可以利用乘法与除法的关系来试一试.

交流

你能再举一个例子试一试，并观察、归纳出单项式除以单项式的运算法则吗？

一般地，单项式与单项式相除，把系数和同底数的幂分别相除，所得的商作为商的因式，对于只在被除式中出现的字母，连同它的指数作为商的因式.

例 4 计算：

(1) $36a^3b^4 \div 9a^2b$；　　(2) $-3x^2y^4m \div 12x^2y$.

解：(1) $36a^3b^4 \div 9a^2b$

$= \frac{36}{9}a^{3-2}b^{4-1}$

$= 4ab^3$；

(2) $-3x^2y^4m \div 12x^2y$

$= -\frac{3}{12}x^{2-2}y^{4-1}m$

$= -\frac{1}{4}y^3m$.

练习

计算：

(1) $6a^2b \div (-2ab)$；　　(2) $-10x^3y^3 \div 6xy^2$；

(3) $-21x^3y^4z \div (-7x^3y^3)$；　　(4) $-42a^7b^3 \div (-6a^2b^3)$.

[1] 计算 $6x^2yz^3 \div 3xz^2$，要根据除法是乘法的逆运算，得到商 $2xyz$. 进一步比较被除式 $6x^2yz^3$、除式 $3xz^2$ 和商式 $2xyz$ 的系数、字母及其指数，总结得出一般的单项式除以单项式的法则. 教学中可以多设计几例供学生观察、归纳.

练习答案：

(1) $-3a$；

(2) $-\frac{5}{3}x^2y$；

(3) $3yz$；

(4) $7a^5$.

[1] 多项式除以单项式的关键是转化为单项式除以单项式，它可以由除法法则和乘法对加法的分配律推导出来. $(a+b+c)\div m=(a+b+c)\cdot\frac{1}{m}=a\cdot\frac{1}{m}+b\cdot\frac{1}{m}+c\cdot\frac{1}{m}=a\div m+b\div m+c\div m$. 教学中可以要求说出每步的依据.

练习答案：

(1) $5a-4$；

(2) $\frac{3}{2}x-1$；

(3) $-2n+3m^2$；

(4) x^2+2x+1.

3. 多项式除以单项式

怎样做多项式除以单项式的运算呢？我们能不能把多项式除以单项式转化为单项式除以单项式呢？[1]

思考

交流

你能归纳出多项式除以单项式的运算法则吗？

可以发现，一般地，多项式除以单项式，就是用这个单项式去除多项式的每一项，再把所得的商相加.

例 5 计算：

(1) $(12x^3-18x^2+6x)\div(-6x)$；

(2) $(42a^3b^4+28a^2b^3-2ab^2)\div 7ab^2$.

要防止在运算中产生符号的错误！

解：(1) $(12x^3-18x^2+6x)\div(-6x)$

$=12x^3\div(-6x)-18x^2\div(-6x)+6x\div(-6x)$

$=-2x^2+3x-1$；

(2) $(42a^3b^4+28a^2b^3-2ab^2)\div 7ab^2$

$=42a^3b^4\div 7ab^2+28a^2b^3\div 7ab^2-2ab^2\div 7ab^2$

$=6a^2b^2+4ab-\frac{2}{7}$.

练习

计算：

(1) $(5a^2b-4ab)\div ab$；

(2) $(12x^2y-8xy)\div 8xy$；

(3) $(4mn^3-6m^3n^2)\div(-2mn^2)$；

(4) $(5x^3+10x^2+5x)\div 5x$.

习 题 6-5

★基础★

1. 计算：
(1) $x^{10} \div x^7$；　(2) $x^2 \div x^6$；
(3) $(ab)^6 \div (ab)^3$；　(4) $\left(-\frac{1}{3}a\right)^4 \div \left(-\frac{1}{3}a\right)$.

2. 计算：
(1) $(y^2)^8 \div y^8$；　(2) $(x^3)^5 \div (x^2)^6$；
(3) $-a^9 \div (a^2)^3$；　(4) $(x-y)^2 \div (x-y)^6$.

3. 用科学记数法表示下列各数：
(1) 0.000 25；　(2) −0.000 008 2；
(3) −34 650 000；　(4) −0.000 564 7.

4. 一个电子的静止质量 m_e 约为 $5.485\,8 \times 10^{-4}$ 原子质量单位，用小数把它表示出来.

5. 计算：
(1) $63x^3y^8 \div (-7x^2y^5)$；　(2) $-12a^6b^3 \div \frac{1}{2}a^2b^2$；
(3) $-\frac{3}{4}x^3y^2m^4 \div \left(-\frac{5}{8}xy^2\right)$；　(4) $\left(-\frac{2}{3}m^4n^2\right) \div \frac{1}{3}m^2n$.

6. 计算：
(1) $(8x^4 - 5x^3) \div (-2x^2)$；
(2) $(45a^3b^2 - 12a^2b^3) \div 3a^2b$；
(3) $(-28xy^3 + 77xy^2 - 84x) \div (-7x)$；
(4) $\left(-\frac{5}{12}xyz^2 - x^2yz + \frac{3}{4}xy^2z\right) \div \frac{1}{12}xyz$.

★★提升★★

1. 计算：
(1) $(x^2 \cdot x^3)^4 \div (x^3 \cdot x)^5$；　(2) $x^2 \cdot x^4 - x^3 \cdot x^4 \div x$.

2. 计算：
(1) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left(-\frac{1}{2}\right)^0$；　(2) $0.5^{-2} \times (-0.5)^0 + (-0.5)^2 \times 0.5^{-1}$.

3. 计算：

(1) $5r^4c^3 \div (-5r^2c)^2$；　　(2) $45(x^2y^3z)^2 \div (-3x^4y^5z^2)$.

4. 计算：

(1) $[(2x+y)^2 - y(y+4x) - 8x] \div 2x$；

(2) $[(a+b)(a-b) - (a-b)^2 + 2b(a-b)] \div 4b$.

5. 雷达发出的微波以 3×10^5 千米 / 秒的速度射向飞机，飞机再将微波反射回来，经过 12.6 微秒后雷达收到反射微波．试问飞机与雷达之间的距离是多少千米．(1 微秒 $= 10^{-6}$ 秒)

6. 请按下列流程：n → 平方 → $+n$ → $\div n$ → $-n$ → 结果，分别计算当 $n = 3$，5，7，9 等数时的结果．你能发现什么规律？请说明理由．

★★★ 拓展 ★★★

1. 观察下列各式，你会发现什么规律？

$1 \times 3 + 1 = 4 = 2^2$；

$2 \times 4 + 1 = 9 = 3^2$；

$3 \times 5 + 1 = 16 = 4^2$；

……

请写出第 n 行式子（n 是正整数）．

2. 已知 a 是一个正数，比较 $\left(\frac{1}{a}\right)^{-1}$，$\left(\frac{1}{a}\right)^{0}$，$\frac{1}{a}$ 的大小．

3. 已知：m，n 为正整数，$m + 3^n$ 能被 11 整除．求证：$m + 3^{n+5}$ 也能被 11 整除．

阅读理解

杨辉三角

在学习过两数和的完全平方公式 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 以后，不妨将公式从两个方面进行推广：一是从指数推广，研究 $(a+b)^3$，$(a+b)^4$，…，找出展开式的项、项数、次数和系数的规律；二是从项数推广，研究 $(a+b+c)^2$，$(a+b+c+d)^2$，…，找出展开式的项、项数、次数和系数的规律．

下面讨论第一方面的问题.

我们知道:

$$(a+b)^1=a+b;$$
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2;$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3;$$
$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4;$$
$$\cdots\cdots$$

借助图 6 – 10 所示的系数表，请你观察分析并概括展开式中项的组成、项数、次数和系数的规律.

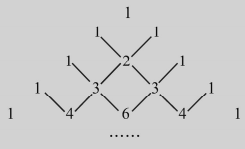


图 6 – 10

有了这样一个系数表，我们就能很容易地写出 $(a+b)^5$，$(a+b)^6$ 等展开式各项的系数，再研究项数与次数的规律，就不难写出各项了.

请同学们研究讨论展开式的项、项数与次数的规律，写出 $(a+b)^5$，$(a+b)^6$ 的展开式，并用多项式的乘法加以验证.

上面所列出的二项展开式的系数表，在我国宋朝数学家杨辉 1261 年所著的《详解九章算法》中就已经出现，人们称它为“杨辉三角”. 西方人认为这个表是法国数学家帕斯卡 1654 年发现的，称它为“帕斯卡三角形”，它比杨辉的发现晚了近 400 年. 实际上，在我国北宋数学家贾宪所著的《开方作法本源》中，已经出现了这个系数表，所以此表也称为“贾宪三角”，它比帕斯卡的发现早了近 600 年，这体现了中华民族古代灿烂的文化.

回顾与整理

知识要点

本章学习的主要内容是：整式的加减法运算和整式的乘除法运算，后者又包括幂的运算和乘法公式等．

1. 整式的加减法．

运用去括号法则，通过合并同类项进行整式的加减法运算．

2. 幂的运算．

(1) 同底数的幂相乘．

同底数的幂相乘，底数不变，指数相加．用式子表示为：

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}(m，n 都是正整数).$$

(2) 幂的乘方．

幂的乘方，底数不变，指数相乘．用式子表示为：

$$(a^m)^n = a^{mn}(m，n 都是正整数).$$

(3) 积的乘方．

积的乘方等于把积的每一个因式分别乘方，再把所得的幂相乘．用式子表示为：

$$(ab)^n = a^n b^n(n 是正整数).$$

(4) 同底数的幂相除．

同底数的幂相除，底数不变，指数相减．用式子表示为：

$$a^m \div a^n = a^{m-n}(a \neq 0，m，n 都是正整数).$$

(5) 规定 $a^0 = 1(a \neq 0)$；$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ $(a \neq 0，p 是正整数)$.

3. 整式的乘法．

(1) 单项式与单项式相乘．

单项式与单项式相乘，先把它们的系数相乘，再把相同字母的幂相乘所得的积，分别作为积的因式，并把只在一个单项式里出现的字母的幂也作为积的因式．

(2) 单项式与多项式相乘．

单项式与多项式相乘，就是用单项式分别乘多项式的每一项，

知识要点

再把所得的积相加.

(3) 多项式与多项式相乘.

多项式与多项式相乘，就是用其中一个多项式的每一项去乘另一个多项式的每一项，再把所得的积相加.

4. 乘法公式.

(1) 两数和(差)的完全平方公式.

两个数的和(差)的平方，等于它们的平方和，加上(减去)它们的积的2倍. 用式子表示为：

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2.$$

(2) 平方差公式.

两个数的和与这两个数的差的积，等于这两个数的平方差. 用式子表示为：

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

5. 整式的除法.

(1) 单项式除以单项式.

单项式除以单项式，把系数和同底数的幂分别相除，所得的商作为商的因式，对于只在被除式中出现的字母，则连同它的指数作为商的因式.

(2) 多项式除以单项式.

多项式除以单项式，用这个单项式去除多项式的每一项，再把所得的商相加.

学习指导

1. 学习整式的运算性质与法则，应注意运用类比的思想方法，通过与整数的运算性质和法则相比较，理解整式的运算性质和法则.

2. 在研究整式的运算性质和法则的过程中，多次运用了由具体到抽象，由特殊到一般的思维方法，体现了“特殊——一般—特殊”的认识规律. 我们需要深刻地领会和体验这些方法与规律.

学习指导

3. 在本章对问题的探究过程中，经常运用“转化”的思想方法．比如多项式与多项式相乘，首先要转化为多项式乘单项式，再转化为单项式乘单项式，最后转化为有理数的运算和幂的运算．转化思想是解决数学问题的一种常用方法，需要认真掌握．

复习题

★基础★

1. 下面运算中，结果正确的是(　　).

A. $a^2 \cdot a^4 = a^8$　　B. $x + x = 2x$

C. $(2xy)^3 = 6x^3y^3$　　D. $(-a^3)^4 = a^7$

2. 下面运算中，结果正确的是(　　).

A. $2a^2 + 3a^2 = 5a^4$　　B. $(2a^2)^3 = 8a^5$

C. $2a^3(-a^2) = -2a^5$　　D. $6a^{2m} \div 2a^m = 3a^2$

3. 下面运算中，结果正确的是(　　).

A. $(2a-3b)^2 = 4a^2 - 9b^2$　　B. $(a+b)^2 = a^2 + b^2$

C. $\left(\frac{1}{2}a+b\right)^2 = \frac{1}{4}a^2 + ab + b^2$　　D. $(0.3a-0.2b)^2 = \frac{9}{100}a^2 + \frac{3}{25}ab + \frac{1}{25}b^2$

4. 下面运算中，结果错误的是(　　).

A. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$　　B. $(a-b)^2 = a^2 - b^2$

C. $a^3 \cdot b \cdot b = a^3b^2$　　D. $(a^2)^3 = a^6$

5. 计算：

(1) $(-x)^3 \cdot x^2 \cdot (-x)^4$；　　(2) $-(-a)^2 \cdot (-a)^7 \cdot (-a)^4$；

(3) $(-b)^4 \cdot (-b)^2 - (-b)^5 \cdot (-b)$；　　(4) $(-x)^7 \cdot (-x)^2 - (-x)^4 \cdot x^5$.

6. 计算：

(1) $-(a^4)^2 \cdot (a^2)^3$；　　(2) $(-a^3)^2 \cdot (-a^2)^3$；

(3) $(ab^2)^2 \cdot (-a^3b)^3 \cdot (-5ab)$；　　(4) $(ab)^3 \cdot 2a^2 \cdot (2a^2b^3)^2$.

7. 计算：

(1) $(2x^4)\cdot(3x^3)$；　(2) $(-5ab^2)\cdot(-2bd^2)$；

(3) $\left(-\frac{1}{4}ab^2\right)\cdot\left(-2a^3bc\right)$；　(4) $-\frac{3}{2}ab^3c\cdot\frac{1}{3}a^2bc\cdot\left(-8abc^4\right)$.

8. 计算：

(1) $3(a-2b+c)-4(2a+b-c)+5(3a+b-2c)$；

(2) $4\left(\frac{1}{2}a+1\right)-\frac{3}{2}(2a-1)+\frac{1}{6}(3a+2)$；

(3) $-\frac{3}{2}x(2-3x+4x^2-6x^4)$；

(4) $6xy^2\left(2-\frac{1}{3}xy^4\right)+\left(-\frac{1}{2}xy^3\right)^2$.

9. 计算：

(1) $(3x+4y)(2x-y)$；　(2) $(2x-7y)(2x+4y)$；

(3) $(2x+y)(4x^2-2xy+y^2)$；　(4) $(x+1)(x+2)(x+3)$.

10. 计算：

(1) $\left(3x-\frac{1}{2}\right)^2$；　(2) $\left(-0.3x+\frac{1}{2}y\right)^2$；

(3) $(2y+3x)(-3x-2y)$；　(4) $(3a-b+c)(3a+b-c)$.

11. 计算：

(1) $\left(a-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}+a\right)$；　(2) $(-xy+0.5)(-xy-0.5)$；

(3) $(x^n+1)(x^n-1)$；　(4) $(2x+3y)(2x-3y)(4x^2+9y^2)$.

12. 计算：

(1) $(xy)^5\div(-xy)$；　(2) $(x^3)^2\cdot(x^4)^3\div(x^2)^4$；

(3) $(x^4)^3\div(x^3)^2\cdot(x^2)^4$；　(4) $(a^{x-1})^2\cdot a^{x+1}\div a^{2x-1}$.

13. 计算：

(1) $(-3ab^2)^3\div(-3ab^2)$；　(2) $48x^3y^6\div8x^3y$；

(3) $(8a^2b-4ab^2)\div(-4ab)$；　(4) $(25m^4n^3+15m^3n^2-10m^2n)\div5m^2n$.

★★提升★★

1. 解方程：

(1) $(2x+1)(x+5)=(x-2)(2x+5)$；

(2) $2(2y+1)^2-8(y+1)(y-1)=0$.

2. 解不等式：
(1) $2(x-2)(x+3)>(2x-1)(x+5)$；
(2) $(3x+4)(3x-4)<9(x-2)(x+3)$.

3. 如图，大圆的直径为 a，大圆和小圆的直径之差为 d.
(1) 求小圆的直径与绿色部分的面积 S；
(2) 当 $a=5.12$ cm，$d=2.24$ cm，π 取 3.14 时，求绿色部分的面积 S(用计算器计算，结果精确到 1 cm^2).


(第 3 题)

★★★ 拓展 ★★★

1. 如图，各正方形的图案中，每条边上有 $n(n\geqslant 2)$ 个圆点，每个图中圆点的总数是 S. 按此规律推测出 S 与 n 的关系式为 _____.



(第 1 题)

2. 当 x，y 为何值时，多项式 $x^2+y^2-4x+6y+28$ 有最小值？求出这个最小值.

3. 有一个同学发现了一个有趣的数学规律：
$3^2=2+2^2+3$，$4^2=3+3^2+4$，$5^2=4+4^2+5$，….
即一个正整数的平方等于它前面一个相邻数加上这个相邻数的平方，再加上这个数本身的和. 他试了许多数都对，但无法对所有的数都进行试验. 请你用学过的数学知识和方法帮助他解决这个问题，并说明这是怎样的一个规律.

4. 观察、归纳：
$(x-1)(x+1)=x^2-1$；
$(x-1)(x^2+x+1)=x^3-1$；
$(x-1)(x^3+x^2+x+1)=x^4-1$；
……
写出一般的表达式，并计算 $1+2+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{63}$.

部分习题答案或提示

习题 6－1

基础

1. （1）$-12x^2+7x+9$，$9+7x-12x^2$；（2）$-x^3+4x^2-3x+6$，$6-3x+4x^2-x^3$.

2. （1）$4x^2-6x-1$；（2）x^2-4；（3）$-a+4b+7c$；（4）$6xy^2+y^3$.

3. （1）$6a^2-a-\frac{5}{2}$；（2）$\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$.

提升

1. $14a+6b$.

2. $6n-3$.

3. $4x^2-2xy-7y^2$.

拓展

-11.

习题 6－2

基础

1. （1）x^6；（2）m^5；（3）$2a^3$；（4）x^6；（5）10^8；（6）y^9.

2. （1）0；（2）$2m^6$；（3）$2a^6$；（4）$2x^6$.

3. （1）x^8；（2）m^{18}；（3）$-a^{10}$；（4）$-y^6$.

4. （1）x^8；（2）x^6；（3）m^{25}；（4）m^{10}.

5. （1）$2x^3$；（2）0；（3）x^9；（4）x^3y^3.

6. （1）x^6y^3；（2）m^2n^6；（3）$-x^{10}y^{15}$；（4）$27x^3y^9$.

7. （1）错，x^{10}；（2）错，x^5y^{10}；（3）错，$8m^3n^3$；（4）错，$4a^6$.

8. （1）$-x^7$；（2）$-a^5$；（3）$-y^5$；（4）$-a^6$.

提升

1. （1）$-x^{11}$；（2）a^9；（3）$-m^{18}$；（4）$-p^{10}$.

2. （1）2^{18}；（2）$\left(\frac{1}{2}\right)^{12}$；（3）$10^{m+3}$；（4）$-3^{2n+5}$.

3. （1）$(x-y)^6$；（2）$-(x-y)^6$；（3）$(x-y)^9$；（4）$-(x-y)^8$.

4. （1）当 m 为正偶数时，$(-a)^m\cdot a^n=a^{m+n}$；当 m 为正奇数时，$(-a)^m\cdot a^n=-a^{m+n}$.
（2）5^{2m+2n}.

5. （1）1；（2）-512.

拓展

675.

习题 6－3

基础

1. （1）$20x^4y$；（2）$6a^3b^3$；（3）$-18x^3y^5z^3$；（4）$-x^6y^5$.

2. （1）$48x^8y^{13}$；（2）$400m^{12}n^8$；（3）$\frac{2}{5}x^3y^4$；（4）$-\frac{1}{14}a^7b^{11}c^3$.

3. （1）1.2×10^{10}；（2）7.68×10^{11}；（3）2.7×10^{26}；（4）2×10^{19}.

4. （1）$17a^6b^3$；（2）$-\frac{3}{4}a^3b^2c+\frac{5}{6}a^3b^3c$.

5. （1）$at+bt-t^2$；（2）171（mm^2）.

6. 表面积 $6a^2$，体积 $\frac{2}{3}a^3$.

7. （1）$2x^3-2x^2y+2x^2$；（2）$-4x^3+2x^2-x$；

（3）$-3x^3y^2+3x^2y^3$；（4）$-15m^4n+\frac{4}{3}m^3n-3m^2n$.

8. （1）$8x^4-\frac{5}{2}x^3-\frac{9}{4}x^2$；（2）$5a^3b-3a$；

（3）$12a^4b^5-8a^3b^5-16a^2b^5$；（4）$a^3b^2+a^2b^3$.

9. （1）$3x^2+14x-5$；（2）$12x^2-11x-36$；

（3）$15a^2-28ab+12b^2$；（4）$xy-\frac{1}{8}x-8y+1$.

10. （1）$x^2-9xy-x+18y^2+3y$；（2）$9a^2+15a-b^2-5b$；（3）$2x^3-3x^2-x+1$；

（4）$2x^3-6x^2-x+15$；（5）$-24a^2-36a+37$.

提升

1. （1）$119a^6$；（2）$-342a^7b^{11}$.

2. 3.84×10^{13}（千米）.

3. $22a^2$（cm^2）.

4. $2a^2$.

5. （1）$-m^2-20mn+2m$，-2；（2）$-6x^2+29xy-15y^2$，-97.

6. （1）$x=\frac{9}{2}$；（2）$x=\frac{6}{5}$.

7. （1）$15x^3+25x^2$；（2）133 266 212.7（mm^3）.

拓展

1. （1）$\frac{25}{36}a^2$，$\frac{625}{9}$（m^2）；$\frac{\pi}{8}a^2$，$\frac{25\pi}{2}$（m^2）；$\frac{a^2}{2}$，50（m^2）；$\frac{2}{3}a^2$，$\frac{200}{3}$（m^2）.

（2）略.

2. $30\,000-400a-450b+6ab$.

习题 6－4

基础

1. （1）100，7，100，100，7，7，11 449；（2）100，7，100，100，7，7，8 649；

（3）x，2.

2. （1）$a^2-4ab+4b^2$；（2）$9x^2+12xy+4y^2$；（3）$16a^2-24ab+9b^2$；

（4）$4+4x+x^2$；（5）$2.25+6x+4x^2$；（6）$\frac{9}{4}a^2-2ab+\frac{4}{9}b^2$.

3. （1）0.960 4；（2）801 025；（3）11 881；（4）210.25.

4. （1）x^2-4y^2；（2）$9a^2-4b^2$；（3）$1-16x^2$；

（4）$16a^2-b^2$；（5）899.96；（6）120.999 6.

5. （1）x^4-256；（2）$x^4-\frac{1}{81}$；（3）$-8y^2$；（4）$13a^2-5b^2$.

6. （1）$x^2+2xy-2x+y^2-2y+1$；（2）$b^4-8a^2b^2+16a^4$；

（3）$a^2-b^2+4bc-4c^2$；（4）$x^4-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{16}$.

提升

1. （1）$5a-2b$；（2）$y-2x$；（3）$-1-a$.

2. $-100y^2-5y-1$，-19.

3. $x=4$.

4. $x>\frac{38}{9}$.

5. 略.

6. （1）$4xy$，4；（2）$-6ab-10b^2$，$-\frac{7}{2}$.

7. $x=-\frac{5}{4}$.

8. $y\leqslant 12$.

9. 6（厘米）.

10. $\frac{\pi}{2}ab$.

11. $>$，$>$，$>$，$>$. $a^2+b^2\geqslant 2ab$.

拓展

1. $\frac{3^{33}}{8}-\frac{1}{8\times 3^{31}}$.

2. $(n+2)^2-n^2=4(n+1)$.　　证明：$(n+2)^2-n^2=n^2+4n+4-n^2=4(n+1)$.

习题 6－5

基础

1. （1）x^3；（2）$\frac{1}{x^4}$；（3）a^3b^3；（4）$-\frac{1}{27}a^3$.

2. （1）y^8；（2）x^3；（3）$-a^3$；（4）$\frac{1}{(x-y)^4}$.

3. （1）2.5×10^{-4}；（2）-8.2×10^{-6}；（3）-3.465×10^{7}；（4）-5.647×10^{-4}.

4. 0.000 548 58.

5. （1）$-9xy^3$；（2）$-24a^4b$；（3）$\frac{6}{5}x^2m^4$；（4）$-2m^2n$.

6. （1）$-4x^2+\frac{5}{2}x$；（2）$15ab-4b^2$；（3）$4y^3-11y^2+12$；（4）$-5z-12x+9y$.

提升

1. （1）1；（2）0.

2. （1）$-\frac{11}{4}$；（2）4.5.

3. （1）$\frac{1}{5}c$；（2）$-15y$.

4. （1）$2x-4$；（2）$a-b$.

5. 1.89（千米）.

6. $(n^2+n)\div n-n=n+1-n=1$.

拓展

1. $n(n+2)+1=n^2+2n+1=(n+1)^2$.

2. 当 $a>1$ 时，$\left(\frac{1}{a}\right)^{-1}>\left(\frac{1}{a}\right)^{0}>\frac{1}{a}$；当 $a=1$ 时，$\left(\frac{1}{a}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{a}\right)^{0}=\frac{1}{a}$；当 $0<a<1$ 时，$\left(\frac{1}{a}\right)^{-1}<\left(\frac{1}{a}\right)^{0}<\frac{1}{a}$.

3. $m+3^{n+5}=m+3^n\cdot 3^5=243\cdot 3^n+m=243(3^n+m)-243m+m=243(3^n+m)-242m$
$=243(3^n+m)-2\times 11^2 m.$
$\because 3^n+m$ 和 11 能被 11 整除，
$\therefore 243(3^n+m)-2\times 11^2 m$ 能被 11 整除.

复习题

基础

1. B. 2. C. 3. C. 4. B.

5. （1）$-x^9$；（2）a^{13}；（3）0；（4）$-2x^9$.

6. （1）$-a^{14}$；（2）$-a^{12}$；（3）$5a^{12}b^8$；（4）$8a^9b^9$.

7. （1）$6x^7$；（2）$10ab^3d^2$；（3）$\frac{1}{2}a^4b^3c$；（4）$4a^4b^5c^6$.

8. （1）$10a-5b-3c$；（2）$-\frac{1}{2}a+\frac{35}{6}$；
（3）$-3x+\frac{9}{2}x^2-6x^3+9x^5$；（4）$12xy^2-\frac{7}{4}x^2y^6$.

9. （1）$6x^2+5xy-4y^2$；（2）$4x^2-6xy-28y^2$；（3）$8x^3+y^3$；（4）$x^3+6x^2+11x+6$.

10. （1）$9x^2-3x+\frac{1}{4}$；（2）$0.09x^2-0.3xy+\frac{1}{4}y^2$；
（3）$-9x^2-12xy-4y^2$；（4）$9a^2-b^2+2bc-c^2$.

11. （1）$a^2-\frac{1}{36}$；（2）$x^2y^2-0.25$；（3）$x^{2n}-1$；（4）$16x^4-81y^4$.

12. （1）$-x^4y^4$；（2）x^{10}；（3）x^{14}；（4）a^x.

13. （1）$9a^2b^4$；（2）$6y^5$；（3）$-2a+b$；（4）$5m^2n^2+3mn-2$.

提升

1. （1）$x=-\frac{3}{2}$；（2）$y=-\frac{5}{4}$.

2. （1）$x<-1$；（2）$x>\frac{38}{9}$.

3. （1）$a-d$，$\frac{\pi}{2}ad-\frac{\pi}{4}d^2$；（2）$14(\text{cm}^2)$.

拓展

1. $S=4n-4$.
提示：当 $n=2$ 时，$S=2^2-(2-2)^2=4$，
当 $n=3$ 时，$S=3^2-(3-2)^2=8$，

当 $n=4$ 时，$S=4^2-(4-2)^2=12$，

……

$S=n^2-(n^2-4n+4)=4n-4$.

2. 当 $x=2$，$y=-3$ 时，多项式有最小值 15.

3. $(n+1)^2=n+n^2+(n+1)=n^2+2n+1$.

4. $(x-1)(x^n+x^{n-1}+\cdots+x+1)=x^{n+1}-1$（$n$ 为正整数）.

$(2-1)(2^{63}+2^{62}+\cdots+2+1)=2^{64}-1$.

北京出版社



第七章
观察、猜想与证明

教学目标

1. 初步学会通过观察、实验、归纳、类比、猜想认识事物之间的关系.

2. 初步学会运用说理的方法处理生活中、数学中的逻辑关系.

3. 了解定义、命题、定理的意义；了解反例的作用，知道利用反例可以判断一个命题是错误的.

4. 知道证明的意义和必要性，知道证明要合乎逻辑，知道证明的过程可以有不同的表达形式，初步学会综合法证明的格式.

5. 理解对顶角、余角、补角等概念，掌握对顶角相等、同角（或等角）的余角相等，同角（或等角）的补角相等的性质.

6. 能用三角尺和直尺过已知直线外一点画这条直线的平行线.

7. 了解同位角、内错角、同旁内角的概念.

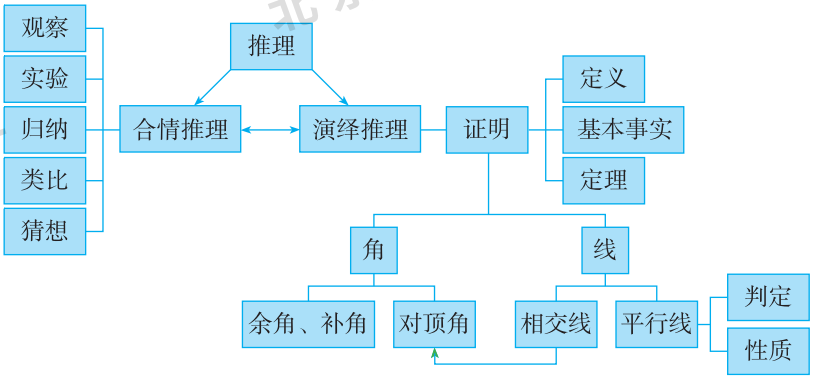
8. 掌握基本事实：（1）两条直线被第三条直线所截，如果同位角相等，那么两直线平行.（2）过直线外一点有且只有一条直线与这条直线平行.

9. 掌握平行线的判定定理和平行线的性质定理；了解平行线性质定理的证明；了解平行于同一条直线的两条直线平行.

10. 通过本章的学习，逻辑思维能力有一定的提高.

教材分析和教学建议

1. 主要内容及其地位作用.



推理是数学的基本思维方式，也是人们学习和生活中经常使用的思维方式. 本章在合情推理的基础上，引出演绎推理的必要性，然后以相交线、平行线为载体，学习演绎推理的一般方法，属于推理入门阶段.

平面内两条直线的位置关系是“图形与几何”所要研究的基本问题，这些内容在前两个学段学生已经有所接触，七年级上学期第三章也通过实例介绍了平面内两条直线的位置关系，本章在学生已有知识和经验的基础上，继续从定量的角度研究平面内两条直线的位置关系. 由知识角度看，平行线的性质与判定提供了线线关系与角度关系之间的转化，是后续研究三角形等多边形的基础；由方法角度看，本章是推理入门的基础，从本章起将逐步渗透综合分析法，为后续学习奠定基础.

2. 本章编写特点.

（1）内容丰富，贴近生活.

本章内容写法独特，富有新意，安排了观察与实验、归纳与类比、猜想与证明三节内容. 通过人们日常生活中和数学中的实例，使学生学会认识事物的方法，从而提高学生的思维能力和素质；同时，为后续知识的学习打下一定的基础. 采用学生熟悉的实例，会使学生感到亲切、有趣，容易激发学生的学习兴趣，引导他们主动地进行思考. 在教学中要注重教学内容的选取，并鼓励学生自己举出一些实际例子，使他们对数学知识的认识得到升华.

（2）由易到难，循序渐进.

本章从实验几何到论证几何，由易到难，逐步过渡. 教学中要注意合理安排教学过程，逐步培养学生观察、实验、比较、猜想、分析、综合、抽象和概括的能力，使学生掌握简单的推理方法，从而发展合情推理与演绎推理的能力，提高学生的思维能

力，这是《义务教育数学课程标准（2011 年版）》中对中学数学教学的要求.

此外，对证明部分要有思想准备，学生也许会感到不适应. 教学中不要急于求成，要由易到难，循序渐进，一步一个脚印，尽可能不要出现掉队的现象，更不能出现大规模掉队的现象. 教学中，可以结合学生的实际情况，适当搭些桥梁，给予他们适当的帮助，如安排一些填空的内容或模仿的内容，手把手地引导学生迈进“证明”的大门，然后再逐渐展开. 但总体难度务必不要加大，以免使学生失去信心.

3. 教学重点、难点.

观察与实验、归纳与类比、猜想与证明都是人们认识事物的方法，又是学习的重点，应设法使学生克服困难，积极、主动地去掌握这些内容.

从另外一个角度来看，由于这部分内容是全新的内容，是对创新的追求和尝试，因此有可能遇到一些困难，不能企图按“轻车熟路”的思维模式去套用旧的教学方法，那样很可能会使本章失去新意，达不到预期的效果.

学生在学习“归纳”、“猜想”等内容时会遇到一些困难，尤其是“证明”这部分内容的难度会更大一些，在这一点上教师应作好思想准备. 主要原因是“证明”是人们在感性认识的基础上，运用逻辑的方法使自己对事物的认识上升到理性认识. 它必须有一个熟悉的过程，不能操之过急，欲速则不达. 因此教材中把这部分内容分成几个层次，便于使学生从困惑中解脱出来.

第一个层次是生活中的说理. 列举的实例会使学生感到亲切、不陌生. 目的是让学生学会讲道理，以理服人.

第二个层次是数学中的说理. 通过代数中已学过的解方程等知识，运用逻辑的方法去重新加以认识，从而在复习旧知识的过程中，赋予它新的含义，为几何中的证明做好铺垫.

在介绍了定义、命题、基本事实、定理的基础上，进入第三个层次——推理实践，使学生参与到证明的过程中来，逐步接触并熟悉几何题目的证明思路、证明步骤和证明格式. 这是非常重要的一个阶段，务必从思想上予以重视. 这一章只是入门，到了三角形部分，再继续深化，达到过关. 如果在本章出现了“夹生饭”，让学生产生了畏难情绪，那么将会给后面的学习带来极大的负面影响. 因此希望教师一定要想办法渡过这一难关. 只要过了这一关，后面的教学将会比较顺利，而且学生也会逐渐体会到这部分内容对他们的思维方式和思维的品质所产生的影响，而这些也许会使他们终身受益.

解决这一困难的关键是循序渐进，从学生熟悉的实例出发，帮助学生克服思想上的困惑，增强他们的学习信心，使他们感到“我能学好证明，我必须学好证明，它会使我的头脑更聪明，使我思考问题的方式更严谨、更富有逻辑性”.

4. 教学建议.

（1）重视活动经验的积累.

教材中前一部分都是关于合情推理的内容，设计了大量的活动. 合情推理用于探索思路，发现结论，在培养人的直觉思维和创造性思维方面起着重要的作用. 对于几何中的结论，教材多数是先让学生通过度量或做实验等活动，探索发现几何结论，然后再对结论进行说明、解释或论证，在教学时应充分注意这一点，给学生动手实践的机会，积累活动经验.

（2）加强几何直观.

几何图形是从实际中抽象出来的，所以几何图形的定义、性质都是比较抽象的，这一点对于学生来说有一定的困难. 为了减少学生学习的困难，在教学时，应注意从实际问题出发，引导学生自己多观察、多动手、勤思考，大胆猜想，抽象出隐含在这些实际问题中的数学问题，通过对数学问题的研究，学习有关的数学概念和方法，并利用所学知识解决更多的实际问题，体现具体 — 抽象 — 具体的过程，提高学生学习数学的兴趣，培养他们应用所学知识解决问题的能力.

（3）有意识地逐步培养学生有条理的思考和表达.

本章对于推理的要求还处在初级阶段，从“生活中的说理”到“数学中的说理”，从“简单说理”到“简单推理”再到“用符号表示推理”分阶段逐步加深. 教学中要注意准确把握教学要求，对推理能力的培养要有一个循序渐进逐步提高的过程，要鼓励学生用自己的语言说明理由，在书写格式上不作统一要求，可以用自然语言，可以结合图形进行说明，可以用箭头等形式表明自己的思路，也可以用数学符号语言表示说理、简单推理的过程，等等. 总之，要注意逐步提高、不要急于要求学生用数学符号语言书写，不能操之过急.

另外，说理、推理的内容是本章的教学难点，教材中注意对学生循序渐进地进行训练. 由于学生的认知能力有差别，基础也不同，所以教学中一方面要按要求有计划地组织好教学，另一方面要注意因材施教. 对于学习有困难的学生，一定要一步一步地使每阶段的训练到位，不要急于求成；对于接受能力强的学生，要及时调整教学要求，保护他们学习的积极性，满足他们的求知欲，对于教材中的一些要求说明理由的习题，也可以要求他们把推理的过程用简单的符号化的语言表示出来.

5. 课时安排.

本章教学约需 16 课时，具体分配如下（仅供参考）：

7.1 观察	约 1 课时
7.2 实验	约 1 课时
7.3 归纳	约 1 课时

7.4 类比	约 1 课时
7.5 猜想	约 1 课时
7.6 证明	约 3 课时
7.7 几种简单几何图形及其推理	约 7 课时
总结与复习	约 1 课时

北京出版社

北京出版社

教材及其参考信息



[1] 一个大于 1 的整数，如果除了它本身和 1 以外，不能被其他正整数所整除，那么这样的数称为质数，质数又称为素数. 如 2，3，5，7，11，13，17 等都是素数. 其中 2 是偶素数，3，5，7 等是奇素数.

命题 1，如：$6=3+3$，$20=3+17$；

命题 2，如：$9=3+3+3$，$31=5+7+19$.

[1] 图 7－1 中的 7 个点代表大熊星座的 7 颗星，沿最右边两颗星向上延长约五倍的距离，便可找到北极星的位置.

一 观察与实验

认识来源于实践，观察与实验是我们认识事物的重要方法．学习数学同样如此，通过观察与实验，我们可以发现许多规律．

7.1 观察

历史上的很多发明创造源于观察．例如鲁班观察丝茅草，发明了锯条；瓦特观察水烧开后水壶盖被水蒸气顶开，发明了蒸汽机……



瓦特塑像



蒸汽机

交流

1. 在一个晴朗的夜晚，如果你在野外迷失了方向，你有办法确定朝北的方向吗？结合图 7－1 加以说明．[1]



图 7－1

7.1 节介绍了通过观察认识事物的方法.

1. 观察是人们认识事物的重要方法，在现实生活中以及数学中应用十分广泛.

2. 由于表面现象的干扰或视觉等因素，观察得出的结论有时会产生一些偏差. 因此，通过观察得到的判断还只是处于感性认识阶段.

3. 可以引导学生自己举出一些实例，认识观察的重要性，以及在某些情况下观察可能产生的偏差.

2. 在图 7－2 中，有一条直线 a，一条射线 b 和一条线段 c. 请观察它们的位置，并动脑筋思考一下，a，b，c 之间有没有交点．动手画一画，和你观察得出的结论进行比较．[1]

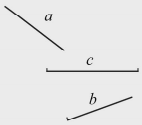


图 7－2

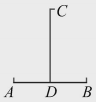


图 7－3

3. 在图 7－3 中，AB，CD 是两条线段．请观察 AB，CD 的长短一样吗？量一量，然后和你观察得出的结论进行比较．

4. 如图 7－4，请观察，图中的 4 条红色线条是直的吗？动手画一画，并和你观察的结论进行比较．

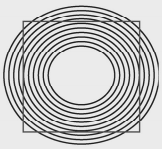


图 7－4

5. 在一个正方体模型的六个面上，分别标上数字 1，2，3，4，5，6. 图 7－5 是从三个不同方向看到的几个数字．观察图形中的数字特点，那么，“1”相对面上的数字是_____；“2”相对面上的数字是_____；“3”相对面上的数字是_____.[2]

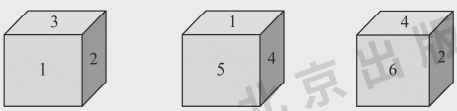


图 7－5

通过以上的问题，你认为只凭观察做出的判断可靠吗？

我们知道，观察是获得感性认识的重要途径，但观察得到的结果是否正确，还需要经过验证．正如恩格斯所说：“单凭观察所得的经验，是决不能充分证明必然性的．”

[1] 图 7－2 中的直线 a 画得长一些后，与线段 c 相交，也与射线 b 相交；把射线 b 沿射线方向画得长一些后，与线段 c 不相交.

因此 a，b，c 之间共有两个交点.

[2] 由图 7－5 中最左边的图确定数字 2，3 与数字 1 相邻，由中间的图确定数字 4，5 与数字 1 相邻，所以判断数字 1 相对面上的数字是 6，利用这个方法可以判断数字 2 相对面上的数字是 5，最后数字 3 和数字 4 相对.

练习答案：

1. 相等.

2. 5 个.

3. 前两个标志有对称性.

4. 略.

［1］方案 1：（1）将 12 个乒乓球分成两组，每组 6 个，分别放在天平的两边，这样可以判断出哪一组比较重.（2）将较重的一组的 6 个球再分成两组，每组 3 个，再分别放在天平的两边，这样可以判断出哪组较重.（3）从较重的一组的 3 个球中任意取出 2 个球，在天平上一边放一个，若天平平衡，则这一组中剩下的一个球最重；若天平不平衡，则天平上较重的球便是要找的乒乓球.

方案 2：（1）将 12 个乒乓球分成 3 组，每组 4 个.任取其中 2 组放在天平上，若天平平衡，说明剩下的一组球较重；若天平不平衡，则重的一边的一组球较重.（2）把较重的一组球再分成 2 组，每组 2 个，分别放在天平上，确定出哪组较重.（3）把较重的一组的 2 个球分别放在天平的两边，较重的一边的球便是要找的乒乓球.



练习

1. 观察图中的 $\angle AOB$ 和 $\angle CO'D$，你认为哪一个角大？用量角器量一量，并和你观察得出的结论进行比较.

2. 观察图中有多少个三角形.

3. 观察下列交通标志，看看它们是否具有对称性.

（第 1 题）

（第 2 题）

（第 3 题）

4. 观察树的年轮，你可以得到什么结论？

（第 4 题）

7.2 实验

实验是人们认识事物的一种有目的的探索过程，一般是为了检验某种猜想或理论而进行的操作或活动.

探索

1. 有 12 个乒乓球，它们的形状、大小和颜色都相同，其中有 11 个球的质量相等，有 1 个球略重一点.你能用最少的次数找出这个质量略重的乒乓球吗？可以用天平验证.[1]

7.2 节介绍了通过实验认识事物的方法.

1. 实验是人们认识事物的另一种重要方法，它是通过动手进行实践，从而得出判断.有的是物理方法，如用天平称质量；有的是化学方法，如氢和氧化合成水；有的是通过度量，数轴显示，不同组合方法等，得出结论.

2. “探索”中列举了几种实验的方法，还可以让学生自己列举一些实例，从而加深对实验的认识.

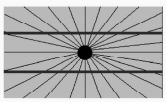
2. 用图 7－6 所示的两块形状、大小相同的三角尺，你能拼出多少个形状不同的三角形？能拼出多少个形状不同的四边形？[1]



图 7－6

练 习

1. 图中的两条紫色的线条是平行的吗？
2. 画一条直线、一条射线和一条线段，使它们一共有三个交点．

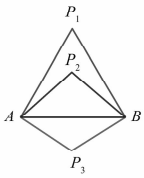


（第 1 题）

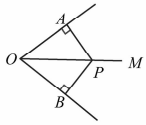
习 题 7-1

★基础★

1. 如图，AB 是一条线段，$P_1A = P_1B$，$P_2A = P_2B$，$P_3A = P_3B$，判断 P_1，P_2，P_3 三点的位置有什么特点．用直尺量量看．
2. 如图，OM 为 $\angle AOB$ 的平分线，点 P 是射线 OM 上的一点，$PA \perp OA$ 于点 A，$PB \perp OB$ 于点 B，分别度量 PA，PB 的长度，并判断它们的数量关系；如果在射线 OM 上再取几个不同位置的点 P，然后向角的两边作垂线段，刚才的数量关系还存在吗？



（第 1 题）



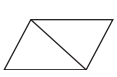
（第 2 题）

［1］2 个三角形，4 个四边形．

练习答案：

1. 平行．
2. 不唯一．

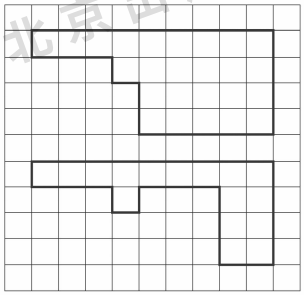
[1] 大数学家欧拉把“哥尼斯堡七桥问题”归结为一笔画的问题，他给出了一个判别法则：如果从一点引出的线有奇数条，这个点叫做奇点.

在一个图形中，当奇点数为 0 或 2 时，便可将此图形一笔画出，如：  奇点数为0，它们可以一笔画出；  奇点数为 2，它们也可以一笔画出.

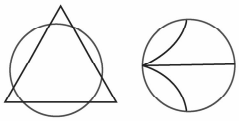
[2] 6 个.

黄面朝右的正方体有 3 个，黄面朝左的正方体有 3 个.

3. 观察下列网格中的图形，判断它们周长的大小.



（第 3 题）



（1） （2）

（第 4 题）



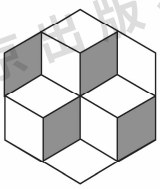
（第 5 题）

4. 观察给出的两个图形，你能分别用一笔画出来吗？试试看.（每部分既不能重复，也不能遗漏）[1]

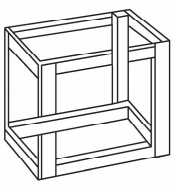
5. 用剪刀把长方形纸片剪成两部分，使剪得的两部分恰能拼接成一个三角形，并画出拼接后的示意图.

★★提升★★

1. 图中可以观察到的正方体共有多少个？说说你是怎样观察的.[2]



（第 1 题）



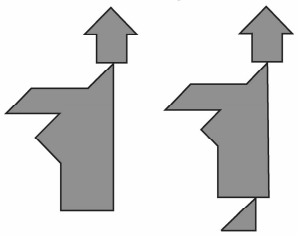
（第 2 题）

2. 观察这个立体图，你能发现图中有什么错误吗？

3. 手拿一枚硬币，向上抛出若干次（比如 50 次），统计一下硬币落地后正面朝上的次数. 计算它占抛出总次数的百分比是多少.

★★★拓展★★★

小明和小白分别用七巧板拼出一个人的形状，但是小明发现他拼出的人形少了一只脚，脚跑到哪里去了？拼拼看．



二 归纳与类比

归纳、类比是寻求规律与结论的两个重要的方法．

7.3 归纳

交流

1. 已知：如图 7－7(1)，在线段 AB 上取 1 个点 C，图中共有_____条线段；如图 7－7(2)，在线段 AB 上取 2 个点 C，D，图中共有_____条线段；如图 7－7(3)，在线段 AB 上取 3 个点 C，D，E，图中共有_____条线段（均包括线段 AB 在内）．如果在线段 AB 上取 9 个点，那么共有多少条线段？你能算得出来吗？如果在 AB 上取 99 个点呢？

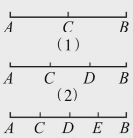


图 7－7

7.3 节介绍了用不完全归纳法找出规律去解决问题的方法.

1. 归纳的方法是人们认识事物的重要方法. 归纳法包括完全归纳法（又称枚举法）和不完全归纳法两类.

完全归纳法是将出现的情况完全无遗地一一加以研究，从而得出一般性的结论的推理方法. 比如，在推证圆周角定理时，把圆心所在的三种位置一一加以证明，从而归纳出圆周角的度数等于它所对的弧的度数的一半，这个证明过程便应用了完全归纳法. 应用完全归纳法时，在考虑各种情况时，应做到不重不漏.

不完全归纳法是从一个或几个（但不是全部）特殊情况作出一般性结论的归纳方

2. 我们曾学过三角形的 3 个内角的和等于 180°. 观察图 7－8，我们看到四边形可以被分成 2 个三角形，那么四边形 4 个内角的和等于多少度？五边形可以被分成 3 个三角形，那么五边形 5 个内角的和等于多少度？



图 7－8

你能归纳出六边形 6 个内角的和等于多少度吗？n 边形呢？

下面我们把同学们得出的结论归纳、整理如下：

1. 设在线段 AB 上取 1 个点时，得到线段的总数为 S_1；取 2 个点时，得到线段的总数为 S_2；取 3 个点时，得到线段的总数为 S_3……那么 $S_1=3$，$S_2=6$，$S_3=10$，….

我们把 3，6，10 分解成几个正整数的和，得

$$S_1=3=1+2,$$
$$S_2=6=1+2+3,$$
$$S_3=10=1+2+3+4.$$

我们发现得到的线段总数可以分解成若干个正整数的和，其中：

(1) 第一个加数是 1；

(2) 各个加数都是连续的整数；

(3) 最后一个加数比所取点的个数多 1.

于是

$$S_9=1+2+3+\cdots+8+9+10=55,$$
$$S_{99}=1+2+3+\cdots+99+100=5\,050.$$

2. 三角形的内角和等于 180°，即 $180°=(3-2)\times 180°$；

四边形的内角和等于 360°，即 $360°=(4-2)\times 180°$；

五边形的内角和等于 540°，即 $540°=(5-2)\times 180°$.

我们发现它们的内角和分别等于边数与 2 的差再乘 180°，因此，六边形的内角和 $=(6-2)\times 180°=720°$，n 边形的内角和 $=(n-2)\times 180°$.

以上规律是从几个特殊的情况中归纳出来的，我们可以根据这个规律去解

法. 因此有时得出的结论是不成立的.

2. 本节第一个“交流”中的两个问题都是应用了不完全归纳法而得出一般性的结论. 要引导学生参与归纳过程，逐步熟悉和掌握这种归纳方法.

3. 本节第二个“交流”及下面的内容是阐述不完全归纳法可能得出不正确结论的实例，尤其是欧拉举出的例子令人信服地看出不完全归纳法有时会得到不正确的结论. 这里安排“交流”，只是从另一个侧面认识不完全归纳法的局限性，并不是要否定不完全归纳法，因此要掌握好分寸，不要从一个极端走向另一个极端.

决类似的问题．这种根据一些(但不是全部)特殊情况归纳出一般性的结论的方法，叫做不完全归纳法．

探索[1]

一张薄圆饼，如果不许把饼折叠，只能用刀去切这张圆饼，请同学们共同探讨以下几个问题：

1. 切一刀，最多可以切成_____块；
2. 切两刀，最多可以切成_____块；
3. 切三刀，最多可以切成_____块．



把得出的结果分解成若干个正整数的和，你能归纳出什么规律？照此规律回答：如果切十刀，那么最多可以切成多少块？

练习

1. 一串有趣的图案按一定规律排列，请仔细观察，按此规律画出的第 10 个图案是_____；在前 16 个图案中有_____个“ ”，第 2012 个图案是_____．



(第 1 题)

2. 李祥用棋子摆出了四个不同的图案(如图)．请你仔细观察其中的规律，然后画出按此规律排列的第五个图案，看一看第五个图案中一共有多少个棋子．你能归纳出一个一般性的结论吗？



(第 2 题)

3. 探究 2^n 的结果的个位数字的规律，并说出 2^{1000} 的个位数字(n 是正整数)．

[1] 切一刀，最多得 2 块；切两刀，最多得 4 块；切三刀，最多得 7 块．



$S_1 = 2 = 1 + 1$；

$S_2 = 4 = 1 + 1 + 2$；

$S_3 = 7 = 1 + 1 + 2 + 3$；

……

$S_{10} = 1 + 1 + 2 + 3 + \cdots + 10 = 56$.

以上的规律是第 1 个加数是 1，从第 2 个加数开始是从 1 开始的连续的正整数，最后一个加数与切的刀数相同．

练习答案：

1. ；6；．

2. 图中的四个图案的围棋子数分别为 1，3，7，13．其中的规律是：

$1 = 1 + 0 \times 1$，

$3 = 1 + 1 \times 2$，

$7 = 1 + 2 \times 3$，

$13 = 1 + 3 \times 4$.

照此规律，第五个图案的围棋子数应是 $1 + 4 \times 5 = 21$.

所以，第 n 个图案的围棋子数应是 $1 + (n-1) \times n = n^2 - n + 1$.

3. $\because 2^1 = 2$，$2^2 = 4$，$2^3 = 8$，$2^4 = 16$，$2^5 = 32$，…，

$\therefore 2^n$ 的个位数字的规律是 2，4，8，6 循环，所以 2^{1000} 的个位数字是 6.

交流

利用不完全归纳法得到的结论都是正确的吗？

下面的问题也许会给我们一些启示：

刘丽同学在第一次、第二次、第三次、第四次能力检测中都得了第一名．同学们说：“下一次能力检测的第一名非她莫属．”你认为这种判断可靠吗？

关于不完全归纳法的可靠性问题，有人请教大数学家欧拉，他举出了下面的例子：

对于代数式 a^2+a+41，把其中的 a 分别用一些自然数代入：

当 $a=0$ 时，$a^2+a+41=41$；

当 $a=1$ 时，$a^2+a+41=43$；

当 $a=2$ 时，$a^2+a+41=47$；

当 $a=3$ 时，$a^2+a+41=53$.

人们发现 41，43，47，53 都是质数．

继续往下算，一直计算到：

当 $a=38$ 时，$a^2+a+41=1\,523$；

当 $a=39$ 时，$a^2+a+41=1\,601$.

由以上 40 次实验得到的值都是质数，这时有人就断定无论 a 取什么自然数，代数式 a^2+a+41 的值都是质数．

恰恰当 $a=40$ 时，
$$\begin{aligned}a^2+a+41&=40^2+40+41\\&=40(40+1)+41\\&=41\times 41\\&=41^2.\end{aligned}$$

当 $a=40$ 时，a^2+a+41 的值不是一个质数，而是一个合数．因此，上面用不完全归纳法得出的结论是错误的．

运用不完全归纳法可以由一些特殊性的前提，得出一般性的结论，帮助我们认识和发现事物的规律，在数学的学习过程中起着重要的作用．但同时我们也要注意它的局限性，因为借助不完全归纳法得到的结论有时可能是不正确的．

7.4 类比

在 7.3 节我们研究了这样一个问题：在一条线段上取若干个点，然后数线段的条数．我们运用不完全归纳法发现了其中的规律．

现在我们要研究另外一个问题：在一个角的内部，从顶点引出若干条射线，求图中共有多少个小于平角的角．

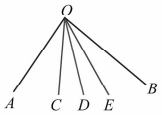


图 7－9

通过比较我们发现，这两个问题有类似之处，于是我们仿照数线段的方法去处理数角的问题，就能较快地找到思路．[1]

对照图 7－9，请你计算图中小于平角的角的个数：

$S_1=$_____；

$S_2=$_____；

$S_3=$_____；

……

那么 $S_9=$_____；

$S_{99}=$_____．

处理这类问题时运用了类比的方法．

通过对两个或两类研究对象进行比较，找出它们之间某些属性的相同点或相似点，以此为依据，推测它们的其他属性也可能有相同或相似的结论，这种推理方法称为类比．科学上不少重要的假设，都是通过类比提出来的；数学上不少重要的发现，也是由类比提供的线索．牛顿曾把地球上物体的运动，特别是自由落体运动与天体运动进行类比，提出了万有引力定律．德国著名的物理学家卢普勒曾说："我珍惜类比胜于任何别的东西，它是我最可信赖的老师，它能揭示自然界的秘密，在几何学中它应该是最不容忽视的．"

交流

小明在学习解不等式时，类比解方程的方法解不等式 $\frac{-2x+4}{-3}>0$，

[1] 从角的顶点引 1 条射线，得 3 个角，引 2 条射线得 6 个角，引 3 条射线得 10 个角．



$S_1=3=1+2$；

$S_2=6=1+2+3$；

$S_3=10=1+2+3+4$；

……

$S_9=1+2+3+\cdots+10=55$；

$S_{99}=1+2+3+\cdots+99+100=5\,050$．

7.4 节介绍了类比这种认识事物的方法．

1. 类比的方法是通过两类对象在某些属性上的相同或相似，从而推测其他属性也相同或相似的方法．教材中介绍了数线段条数的方法，它可以类比到数角的个数及数三角形的个数．

2. 关于类比的方法，由于学生知识面的限制，有些内容暂时还无法介绍，如由分数的性质及运算，可以类比到分式的性质及运算；由全等三角形类比到相似三角形．

3. 如有条件，可让学生列举一些实际中的例子，从而加深对类比的认识．

4. 类比如果只从形式进行，有时也可能出现一些错误．比如，如果把解方程的步骤不加区分地类比到解不等式中，那么当未知数的系数为负数时，便可能出现问题．

练习答案：

1. 15 个. 数三角形的问题可以和数线段的问题进行类比，也可以和数角的问题进行类比.

如图中的三角形一边上有四个点，则这边上共有 15 条线段，它们分别和三角形另一个顶点相连，则得到 15 个三角形.

2. 正确. 先数图中含有 1 个小正方形的个数，为 $3\times4=12$；再数含有 4 个小正方形的个数，共有 $2\times3=6$；再数含有 9 个小正方形的个数，共有 $1\times2=2$. 因此，图中正方形的个数为 20.

他的做法对吗？给你带来了什么启示？

解方程：$\frac{-2x+4}{-3}=0$.

去分母得 $-2x+4=0$.

移项得 $-2x=-4$.

系数化 1 得 $x=2$.

解不等式：$\frac{-2x+4}{-3}>0$.

去分母得 $-2x+4>0$.

移项得 $-2x>-4$.

系数化 1 得 $x>2$.

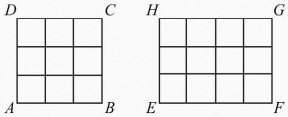
练习

1. 如图，在一个三角形的一条边上取四个点，把这些点与这条边所对的顶点连接起来. 问图中共有多少个三角形. 请你通过与数线段或数角的问题进行类比来思考.

2. 柳青同学通过学习已经知道：在如图所示的正方形 $ABCD$ 中，如果各边都被三等分，那么图中正方形的总数为 $3\times3+2\times2+1\times1=14$. 于是，他把这种计算方法类比到图中长方形 $EFGH$ 中，已知该长方形各边上最短的线段分别相等，于是得出图中正方形的总数为 $3\times4+2\times3+1\times2=20$. 你认为他得出的结论正确吗？



（第 1 题）



（第 2 题）

习 题 7-2

★基础★

1. 能被 3 整除的数有什么特点呢？先观察下面一组数：

21——由于 $2+1=3$，3 能被 3 整除，所以 21 也能被 3 整除；

504——由于 $5+0+4=9$，9 能被 3 整除，所以 504 也能被 3 整除；

3 762——由于 3 + 7 + 6 + 2 = 18，18 能被 3 整除，所以 3 762 也能被 3 整除．

请你按照上述方法判断 21 534 768 能否被 3 整除．

2. 从下面的关系中归纳出规律，然后进行计算：

$1 \times 3 = 3$，而 $3 = 2^2 - 1$；

$3 \times 5 = 15$，而 $15 = 4^2 - 1$；

$5 \times 7 = 35$，而 $35 = 6^2 - 1$；

……

将你归纳出的规律用只含一个字母的式子表示出来，第 n 行式子是：_____（n 是正整数），并按此规律计算：19×21 = _____．

★★提升★★

1. 观察下面三个等式：

$7^2 = 49$；

$67^2 = 4\,489$；

$667^2 = 444\,889$．

依据你归纳出来的规律回答：$6\,667^2$ = _____．

用计算器验算结果的正确性．

2. 刘虹用类比的方法，将解方程的方法运用到解不等式中．你认为她解不等式的方法正确吗？为什么？

解关于 x 的方程：$ax = b(a \neq 0)$．

解：$ax = b$．

∵ $a \neq 0$，

∴ $x = \frac{b}{a}$．

解关于 x 的不等式：$ax < b(a \neq 0)$．

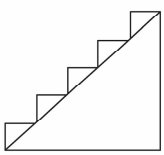
解：$ax < b$．

∵ $a \neq 0$，

∴ $x < \frac{b}{a}$．

★★★拓展★★★

如图，一段楼梯共有五个台阶．现在规定：上楼时，每次只能迈一个台阶或两个台阶．问从楼梯底部到楼梯顶部一共有多少种不同的迈法？试用不完全归纳的方法进行探求．



[1] 由于铁丝长为 12 厘米，所以用它围成的正方形的边长为 3 厘米，它的面积为 9 平方厘米.

设圆的半径为 R 厘米，因为它的周长为 12 厘米，所以 $2\pi R = 12$，$R = \frac{6}{\pi}$，所以圆面积为 $\pi R^2 = \pi\left(\frac{6}{\pi}\right)^2 = \frac{36}{\pi} \approx 11.46$（平方厘米）.

显然圆的面积大.

三 猜想与证明

7.5 猜想

科学家牛顿曾经说过："没有大胆的猜想就做不出伟大的发现."

我们借助于以往的经验或直觉思维，对某一命题做出猜测，这便是猜想. 其中最有代表性的猜想便是章前页提到的哥德巴赫猜想.

1742 年，德国数学家哥德巴赫在给大数学家欧拉的一封信中，提出了把一个整数表示成奇素数之和的猜测，这就是著名的"哥德巴赫猜想".

每一个大于 4 的偶数都可以表示为两个奇素数之和，如 $6 = 3 + 3$，$8 = 3 + 5$，$14 = 3 + 11 = 7 + 7$，….

每一个大于 7 的奇数都可以表示为三个奇素数之和，如 $9 = 3 + 3 + 3$，$11 = 3 + 3 + 5$，….

尽管这只是一种猜想，但屡经检验都没有被推翻. 有人甚至对 3.3×10^7 以下的每一个大于 4 的偶数一一进行检验，都表明它是正确的，随着计算机技术的发展，数学家们发现哥德巴赫猜想对于更大的数依然成立. 但是自然数是无限的，检验还不能代替证明. 200 多年来，众多的数学家为解决这一猜想付出了艰辛的劳动，但迄今为止，这一猜想尚未得到彻底的解决.

通过观察、实验、归纳、类比可以得出猜想，这是认识事物的有效途径之一.

交流 [1]

用两根长度都是 12 厘米的细铁丝，分别围成一个正方形和一个圆（图 7－10）. 猜想：这两个图形的面积哪一个大？并进行验证.



图 7－10

7.5 节介绍了通过猜想认识事物的方法.

1. 著名的哥德巴赫猜想是哥德巴赫在给欧拉的信中提出的一个猜测，虽然已经进行了大量的检验都说明它是正确的，但猜想在未经过理论上的证明之前，它还不能作为一个正确的结论. 世界上许多数学家对此猜测做出了研究，尤其是我国数学家陈景润更是作出了巨大的贡献，有关这方面的内容，教师可以上网查阅资料介绍给学生，激发他们的学习积极性.

2. 对于"交流"中提出的问题，可以先让学生进行猜想，然后引导学生进行计算，最后再将计算结果与猜想的结果进行比较. 猜想的结果可能与实际有出入，但大

思考[1]

观察下面的点阵图和相应的等式，做出猜想：



$n=1$，$n=2$，$n=3$，$n=4$，$n=5$，……

$1=1^2$；$1+3=2^2$；$1+3+5=3^2$；$1+3+5+7=4^2$；_____；

第 n 个点阵图相对应的等式是_____.

练习

1. 天安门广场的面积约为 4.4×10^5 平方米．估计一下，它的百万分之一大约相当于(　　).

A．教室地面的面积　　B．黑板的面积

C．课桌面的面积　　D．铅笔盒盖的面积

2. 观察下列等式，然后做出猜想，它的第 n 个等式怎样表示(n 是自然数)．

$9\times0+1=1$；　　$9\times1+2=11$；

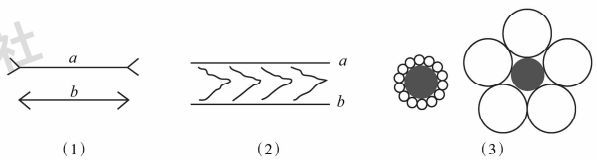
$9\times2+3=21$；　　$9\times3+4=31$；

$9\times4+5=41$；　　……

7.6 证明

用观察、实验、归纳、类比、猜想等方法，可以发现很多规律，但是，有时也可能出现一些偏差．

请你先仔细观看图 7－11 中的三个图，然后和同学一起讨论下面的问题．



(1)　　(2)　　(3)

图 7－11

[1] 要从给出的点阵图和相应的等式中寻找规律，可以从两个角度进行分析．

方法一：从点阵图入手观察，随着序号的增加，点数从 1 开始，总点数是连续奇数的和，而这些点正好构成与序号对应的点数为边长的正方形，所以当 $n=5$ 时，$1+3+5+7+9=5^2=25$；第 n 个点阵图对应的等式就应该是 $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$.

方法二：从等式入手观察，等式左边是连续奇数的和，右边是左边奇数个数的平方．所以当 $n=5$ 时，$1+3+5+7+9=5^2=25$；第 n 个点阵图对应的等式就应该是 $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$.

练习答案：

1. C. 因为 $440\,000\div1\,000\,000=0.44$（平方米）．同学们首先应对 1 平方米面积的大小有一个正确的理解.

2. 观察所给的 5 个等式，注意到它们当中的共同数是 9，等式的顺序与序号 1，2，3……有关，结果的个位数字均为 1．于是猜想：第 6 个等式应为 $9\times5+6=51$，第 7 个等式应为 $9\times6+7=61$……那么第 n 个等式应为 $9\times(n-1)+n=10\times(n-1)+1$，或 $9\times(n-1)+n=10n-9$.

胆而合理的猜想仍然是人们发现真理的前提．对此问题还可以引申，请学生思考许多器皿的开口都做成圆形的原因.

7.6 节介绍了证明的必要性，并通过“生活中的说理”、“数学中的说理”使学生认识到讲道理的必要性，它可以使人思维严谨，从而为证明做好铺垫．同样还介绍了定义、命题、基本事实、定理的概念，便于进行数学表达.

1．关于推理的必要性，是让学生观察图 7－11 中的三组图形，学生很容易由于视觉的原因造成判断失误．教材这样安排的目的是为了使学生认识到，观察尽管是认识

［1］注意题目中“至少”的含义.

由（1）可知，K右边的两张牌中，可能有一张是A，也可能两张都是A.

由（2）可知，A左边的两张牌中也有一张是A，显然这三张牌从左至右应是K，A，A.

由（3）可知，黑桃左边的两张牌中，可能有一张是梅花，也可能两张都是梅花.

由（4）可知，梅花右边的两张牌中也有一张是梅花，显然这三张牌从左至右应是梅花、梅花、黑桃.

于是，这三张牌从左至右分别为：梅花K、梅花A、黑桃A.

练习答案：

1. 丙和丁. 由甲说，可知乙、丙、丁三人中必有两个人同姓. 由乙说，可知丙、丁必同姓.

交流

1. 图7－11(1)中，a，b两条线段哪一条长一些？
2. 图7－11(2)中，a，b两条线段之间哪一端宽一些？
3. 图7－11(3)中，两个红色的圆哪一个大一些？

通过观察、实验、归纳、类比、猜想得出的结论还需要通过证明来确认它的正确性.

1. 生活中的说理

交流

同学们还记得“曹冲称象”的故事吗？叙述一下这个故事，并回答下面的问题：为什么石头的质量可以表示大象的质量？这里用到了一个大家公认的事实——等量代换.



探索[1]

请同学们用扑克牌做一个推理的游戏：桌面上有三张扑克牌，排成一排，已知：

“至少”的含义是什么？

（1）K右边的两张牌中至少有一张是A；

（2）A左边的两张牌中也有一张是A；

（3）黑桃左边的两张牌中至少有一张是梅花；

（4）梅花右边的两张牌中也有一张是梅花.



你能判断出这三张扑克牌各是什么吗？

练习

1. 甲、乙、丙、丁四个人共有三个姓. 甲说：“我和你们三人都不同姓.”乙说：“我

事物的重要手段，但也有可能造成一定的误差，从而为后面讲推理的必要性作好准备.

2. 关于生活中的推理，是通过学生熟知的“曹冲称象”的故事引入，使学生感到推理并不陌生，在日常生活中经常用到，教学中可以让学生讲述这个故事，并说出曹冲这样做的根据是什么，从而为后面的推理做好铺垫.

3. “探索”中扑克牌的游戏是运用推理作出判断，学生会很感兴趣，也能体会到推理的价值.

4. 练习中列举的日常生活中推理的例子，会引起学生浓厚的兴趣，另外还可以再举几个例子让学生进行练习. 这样做的目的是为了调动学生学习的积极性，使他们进

和丙、丁也不同姓.”那么，甲、乙、丙、丁四个人中，哪两个人同姓呢？你是怎样推断的？

2. 从前有一个国王，他企图谋杀一个大臣．国王对这个大臣说：“我已经写好了两个阄，一个写有‘杀’字，另一个写有‘赦’字．你从里面抓一个，抓到哪一个，我就按上面的方法处置你．”这位聪明的大臣已事先得知两个阄上写的都是“杀”字，无论他抓到哪一个，都逃脱不了死亡的命运，但这位大臣动用逻辑的方法想出了一个好主意，从而免去了杀身之祸．你知道这位大臣想出的是什么主意吗？他这样做的依据是什么？

2. 数学中的说理

交流 [1]

设●、▲、■分别表示三种不同的物体．现用天平称了两次，结果如图 7－12 所示．请你根据天平显示的情况判断这三种物体中，哪种物体最重，并说明理由．



(1)　　(2)

图 7－12

例 1 请在括号内填写解方程的根据．

$3x-2=x+4$.

$3x-x=4+2$　(　　).

$2x=6$　(　　).

$x=3$　(　　).

解：$3x-2=x+4$.

$3x-x=4+2$　(等式的基本性质 1).

$2x=6$　(逆用乘法对加法的分配律).

$x=3$　(等式的基本性质 2).

例 2 已知：如图 7－13，C，D 是线段 AB 上的两个点，且 $AC=BD$，试判断：AD 等于 BC 吗？为什么？[2]

2. 大臣将一个纸阄立即吞下，请国王看剩下的一个阄，它上面写的必是“杀”．根据“杀、赦两个阄中二者必居其一”，可知大臣吞到肚里的阄上写的必是“赦”．大臣就这样逃过一死．

[1] 由图(1)可知：■＋■＞■＋▲，

∴ ■＞▲.

由图（2）可知：●＋●＋●＝▲＋●，

∴ ●＋●＝▲.

∴ ●＜▲.

∴ ■＞●.

∴ ■最重.

[2] 此题还可以用 $AB-DB=AB-AC$ 来证明.

一步体会推理的用途.

5. 关于数学中的推理，先通过“交流”中天平称重，使学生了解推理的意义，从而对物体的轻重作出判断，这是一个“引子”，要利用好这部分内容.

6. 例 1 中解方程的过程必须做到有理有据，这里用到了等式的性质，在讲解时要和前几章学过的知识结合起来.

7. 由于学生进行推理的基础很薄弱，因此，要本着循序渐进的原则去安排教学，由浅入深，由易到难，不要急于求成，避免挫伤学生的积极性及出现“夹生饭”．可以先安排填空练习，再安排一两步推理的练习，注意控制练习的难度.

[1] 定理是命题，但命题不一定是定理，只有真命题才可能成为定理.

[2] 此处介绍命题的结构（题设和结论）、原命题与逆命题的关系，是考虑到概念的完整性；从学生的认知水平来讲此处不宜展开，后面会进一步学习.

解：$AD = BC$.

因为 $AC = BD$ （已知），

$CD = CD$ （已知），

所以 $AC + CD = BD + CD$ （等式的基本性质 1）.

即 $AD = BC$.



图 7－13

你还能用其他方法说明 AD 与 BC 相等吗？

3. 定义、命题、基本事实、定理

在数学中，进行运算或判断时都离不开推理．推理时经常要用到定义、命题、基本事实、定理等作为推理的依据，并用规范、简明的数学语言进行表达．下面先学习四个有关的概念．

（1）定义：对一个名词或术语的意义的说明叫做定义．

比如，含有未知数的等式叫做方程，就是方程的定义；

又如，直线上一点和它一旁的部分叫做射线，就是射线的定义．

（2）命题：判断某一件事情的语句叫做命题．[1]

例如："两条直线相交，有且只有一个交点"，"两个奇数的和是偶数"都是命题．

命题由题设和结论两部分组成．题设是已知事项，结论是由已知事项推出的事项．命题常可以写成"如果……，那么……"的形式，"如果"后面接的部分是题设，"那么"后面接的部分是结论．[2]

例如："两条直线相交，有且只有一个交点"，可以写成"如果两条直线相交，那么它们有且只有一个交点"．其中"两条直线相交"是题设，"有且只有一个交点"是结论．

上面所举出的两个命题都是正确的，也就是说，如果题设成立，那么结论一定成立，像这样的命题，称之为"真命题"．

还有一些命题，题设成立时，结论不一定成立．例如："两个锐角的和是钝角"，"有理数的绝对值是正数"，它们都是不正确的命题，称之为"假命题"．假命题可以通过举反例加以说明．例如利用"0 的绝对值是 0，而不是正数"，来说明"有理数的绝对值是正数"是一个假命题．

命题的题设和结论可以互换．例如："如果 $x = 1$，那么 $x^2 = 1$"，交换题设和结论后为"如果 $x^2 = 1$，那么 $x = 1$"．这两个命题称为互逆命题，其中一个叫做"原命题"，另一个叫做原命题的"逆命题"．原命题成立，逆命题不一定成立．

(3) 基本事实.

人们在长期实践中获得的一些真命题，可以直接作为推理依据的事实。如我们已经知道的“两点确定一条直线”，“两点之间线段最短”，“过一点有且只有一条直线与已知直线垂直”，它们都是基本事实.

在实际中还常用到一些事实：

① 等量加等量，和相等. 即：

如果 $a=b$，那么 $a+c=b+c$.

② 等量减等量，差相等. 即：

如果 $a=b$，那么 $a-c=b-c$.

③ 等量的同倍量相等. 即：

如果 $a=b$，那么 $ac=bc$.

④ 等量的同分量相等. 即：

如果 $a=b$，且 $c\neq 0$，那么 $\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$.

⑤ 等量代换. 即：

如果 $a=b$，$b=c$，那么 $a=c$.

(4) 定理：用逻辑的方法判断为正确，并作为推理依据的真命题叫做定理.

例 3 已知：如图 7－14，BE 是 $\angle ABC$ 的角平分线，$\angle 1=\angle C$.

求证：$\angle 2=\angle C$.

注意 $\angle 1$、$\angle 2$ 与 $\angle C$ 的关系.

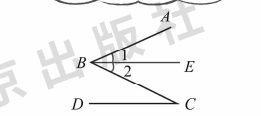


图 7－14

证明：∵ BE 是 $\angle ABC$ 的平分线 （已知），

∴ $\angle 1=\angle 2$ （角平分线的定义）.

∵ $\angle 1=\angle C$ （已知），

∴ $\angle 2=\angle C$ （等量代换）.

例 4 已知：如图 7－15，$\angle 1+\angle 2=90°$，$\angle 1+\angle 3=90°$. 试判断 $\angle 2$ 和 $\angle 3$ 的关系.[1]

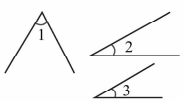


图 7－15

解：∵ $\angle 1+\angle 2=90°$ （已知），

∴ $\angle 2=90°-\angle 1$ （等量减等量，差相等）.

∵ $\angle 1+\angle 3=90°$ （已知），

∴ $\angle 3=90°-\angle 1$ （等量减等量，差相等）.

∴ $\angle 2=\angle 3$ （等量代换）.

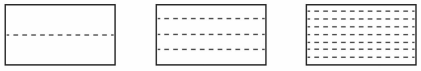
即 $\angle 2$ 与 $\angle 3$ 相等.

[1] 例 4 先不介绍余角的概念，留作下面再讲.

习 题 7-3

★基础★

1. 假期中小明和父母一起到甲、乙两个城市旅游，小明发现两个城市中使用的人民币的新旧程度不同：在甲城市中，面值 10 元、50 元和 100 元的三种人民币的新旧程度基本相同；在乙城市中，面值 10 元的人民币比较旧，而面值 50 元和 100 元的人民币比较新．你能通过这些信息判断两个城市的发展水平哪个更高吗？
2. 一张长方形的纸对折后出现一条折痕（如图）；继续对折出现三条折痕；再继续对折，出现七条折痕……那么，当对折四次后，一共出现多少条折痕？猜猜看．



（第 2 题）

3. 如图所示的大小相同的两个长方形中，各有若干个三角形，设第一个长方形中绿色部分的面积为 m，第二个长方形中绿色部分的面积为 n，试判断 m，n 的大小关系．



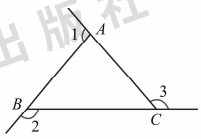
（第 3 题）

4. 指出下列命题的题设和结论，并判断它们是真命题还是假命题，如果是假命题，请举出一个反例．
   （1）三条边都相等的三角形是等边三角形；
   （2）一个负数与一个正数的和是负数；
   （3）平角的度数是 180°．
5. 判断命题 $|a|=a$ 的真假．

★★提升★★

1. 已知正数 a 比它的倒数小，那么 a 的取值范围是_____．
2. 试判断三个连续奇数的和是哪一个正整数的倍数，为什么？
3. 甲、乙、丙三人中一个是教师，一个是护士，一个是工人．现在只知道丙比工人年龄大，甲和护士不同岁，护士比乙年龄小．请你猜猜他们当中谁是教师，并说明理由．

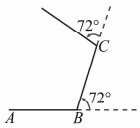
4. 我们知道，三角形的内角和为 180°，四边形的内角和为 360°，五边形的内角和为 540°……它们的内角和随着边数的增加而增加．图中的∠1，∠2，∠3 叫做三角形 ABC 的外角．猜想：当多边形的边数增加时，它们的外角的和有无变化？



（第 4 题）

★★★拓展★★★

如图，某人从 A 处出发，向东走 10 米到达 B 处，再向左转 72° 走 10 米到达 C 处……照此方法行走，拐过 4 次弯后再走 10 米，他在何处？



四 简单几何图形中的推理

7.7 几种简单几何图形及其推理

1. 余角、补角

如果两个角的和等于 90°，那么称这两个角互为余角．[1]

如图 7－16，在三角尺中，$\angle A = 30°$，$\angle B = 60°$，有 $\angle A + \angle B = 90°$，那么称 $\angle A$ 与 $\angle B$ 互为余角．

类似的，如果两个角的和等于 180°，那么称这两个角互为补角．

由第 125 页的例 4，不难总结出：

同角（或等角）的余角相等．

类似的，还可以总结出：

同角（或等角）的补角相等．

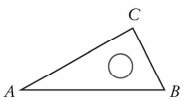


图 7－16

[1] 互为余角、互为补角的概念要抓住它们的本质属性，它们只和两个角的度数有关，而和两个角的位置无关．

7.7 节介绍了几个有关的概念，即余角、补角、对顶角和平行线，又通过介绍平行线的判定和性质，初步培养学生的推理能力，从而为以后研究图形的性质打下基础．

1. 互为余角、互为补角的概念应用很广泛，应明确区分它们的概念．不要只从字面上理解，更不要把 90°理解为只能由垂直得到．互为余角的两个角只和这两个角的度数之和有关，而与这两个角的位置无关．

2. 由例题总结出的“同角（或等角）的余角相等”、“同角（或等角）的补角相等”可以当定理使用，这样就方便了．

[1] 由 $OC \perp AB$，得出 $\angle 1 + \angle AOD = 90°$，$\angle 2 + \angle COE = 90°$；又由等量代换，得出 $\angle 2 + \angle AOD = 90°$，$\angle 1 + \angle COE = 90°$，于是得到四对互余的角.

[2] 由 AB 是直线知 $\angle 1 + \angle COB = 180°$，$\angle 2 + \angle AOD = 180°$；再由等量代换，得出 $\angle 2 + \angle COB = 180°$，$\angle 1 + \angle AOD = 180°$，因此应有四对互补的角，不要遗漏.

交流

1. 如图 7－17，$OC \perp AB$ 于点 O，$\angle 1 = \angle 2$，问：图中共有多少对互为余角的角？[1]

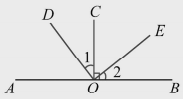


图 7－17

注意互为余角的两个角只和这两个角的度数有关，与这两个角的位置无关.

2. 如图 7－18，O 是直线 AB 上一点，$\angle 1 = \angle 2$. 问：图中共有多少对互为补角的角？[2]

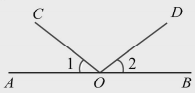


图 7－18

注意 $\angle 1 = \angle 2$ 这一条件！

2. 对顶角

如果两个角有共同的顶点，并且其中一个角的两边分别是另一个角的两边的反向延长线，那么称这两个角互为对顶角.

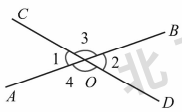


图 7－19

如图 7－19，直线 AB，CD 相交于点 O，我们称 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 为对顶角，$\angle 3$ 与 $\angle 4$ 也是对顶角.

实践

已知：如图 7－20，直线 AB，CD 相交于点 O，$\angle 1 = 65°$，你能求出 $\angle 2$ 的度数吗？改变 $\angle 1$ 的度数再试一试. 你从中发现了什么规律？

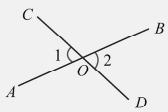


图 7－20

已知：如图 7－20，直线 AB，CD 相交于点 O.

求证：$\angle 1 = \angle 2$.

证明：$\because$ AOB 是直线，

$\therefore$ $\angle 1 + \angle COB = 180°$.

3. “对顶角相等”是应用十分广泛的一个定理，在归纳猜想这个定理时，可以通过由具体的度数入手进行猜想，也可以由一般情况推证，得到该结论.

4. 由画图引入的一个基本事实（平行公理），即过直线外一点有且只有一条直线与已知直线平行，以此为出发点探讨了判定两条直线平行的四种方法，一个基本事实和三个定理.

5. 平行线的判定方法是由“三线八角”产生的同位角、内错角和同旁内角之间的关系决定的，因此要分清它们的概念，不要产生只有平行线被第三条直线所截才会产生这三种角的错误认识.

∵ COD 是直线，

∴ $\angle 2+\angle COB=180°$.

∴ $\angle 1-\angle 2$ （同角的补角相等）.

由此得到对顶角的性质：

对顶角相等.

例 如图 7－21，直线 AB，CD 相交于点 O，$OE\perp AB$ 于点 O，$\angle COE=55°$，求 $\angle BOD$ 的度数.

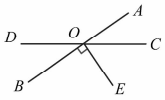


图 7－21

解：∵ $OE\perp AB$ 于点 O （已知），

∴ $\angle AOE=90°$ （垂直定义）.

∵ $\angle COE=55°$ （已知），

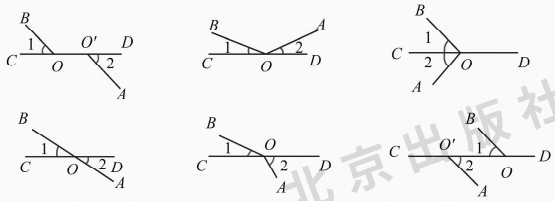
∴ $\angle AOC=\angle AOE-\angle COE=90°-55°=35°$.

∵ 直线 AB，CD 相交于点 O （已知），

∴ $\angle BOD=\angle AOC=35°$ （对顶角相等）.

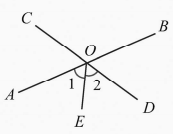
练习

1. 下面的图中∠1 与∠2 是对顶角吗？



（第 1 题）

2. 如图，AB，CD 相交于点 O，OE 是∠AOD 的角平分线，又∠$COB=120°$，求∠1 的度数.



（第 2 题）

练习答案：

1. 6 个图中只有第二行第一个图中的∠1 和 ∠2 是对顶角，其余的均不是.

2. ∵ $\angle COB=120°$，

∴ $\angle AOD=120°$.

又∵ $\angle 1=\angle 2$，

∴ $\angle 1=120°\times\frac{1}{2}$

$=60°$.

6. 关于平行线判定的基本事实，教材中通过计算机画图的演示来加以直观的说明，有条件的学校应尽可能地借助于多媒体等工具进行演示，以提高直观效果，加深学生对这个基本事实的印象.

7. 关于平行线的性质，教材中介绍了三个定理，其中第一个定理结论的得出最好由学生通过实践自己获得. 可先让学生用推三角板的方法画两条平行直线，然后再画一条与这两条平行线相交的直线，最后用量角器测量相应的角. 有条件的学校可以利用计算机演示，以动态的形式加深学生的认识. 对于第一个性质定理，教材上采用反证法进行证明，只要求学生体会反证法的含义，不要求学生独立证明.

[1] 画平行线的步骤可以概括为“一贴、二靠、三移、四画”.

[2] 两直线被第三条直线所截，得到八个角，我们称之为“三线八角”. 但应该注意的是，这里的两条直线并不一定是平行线，因此，由此产生的同位角、内错角、同旁内角并不一定有相等关系或互补关系. 不要使学生产生误解.

3. 平行线

我们在第三章中曾学过“在同一平面内不相交的两条直线叫做平行线”，平行线应用很广泛. 怎样准确地作平行线呢？可以利用三角尺与直尺，照图 7－22 的方法去做.

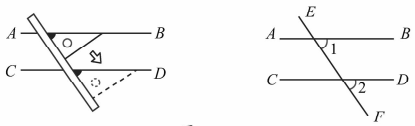


图 7－22

第一步：作直线 AB，并用三角尺的一条边贴住直线 AB；
第二步：用直尺紧靠三角尺的另一条边；
第三步：沿直尺下移三角尺；
第四步：沿三角尺的边作出直线 CD.[1]
这样，就得到 $AB \parallel CD$.

实践

请你动手作一条直线 AB，在直线 AB 外作一点 C，然后过点 C 作 AB 的平行线，你能作出几条？

通过作图，可以发现：

基本事实　过直线外一点有且只有一条直线与这条直线平行.

按上述方法作平行线的根据是什么呢？请你猜想它和图 7－22 中的 $\angle 1 = \angle 2$ 是否有关.

两条直线 AB，CD 被直线 EF 所截，得到八个角（图 7－23）.[2]其中 $\angle 1$ 与 $\angle 2$，$\angle 3$ 与 $\angle 4$，$\angle 5$ 与 $\angle 6$，$\angle 7$ 与 $\angle 8$ 分别叫做同位角；$\angle 3$ 与 $\angle 8$，$\angle 1$ 与 $\angle 6$ 分别叫做内错角；$\angle 1$ 与 $\angle 8$，$\angle 3$ 与 $\angle 6$ 分别叫做同旁内角.

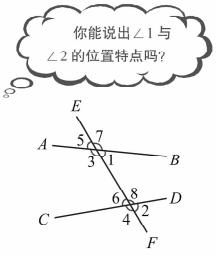
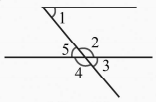


图 7－23

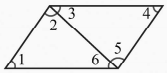
8. 平行线的性质与判定是互逆的，不可混淆，在初学阶段，应分开训练，等学生有了一定的基础后，再把它们结合起来，但要控制难度，不可急于求成. 要充分利用教材第 135 页的“交流”，使学生对判定与性质有一个清楚的区分.

练习

1. 指出图中的同位角、内错角和同旁内角.
2. 指出图中的内错角.



（第 1 题）

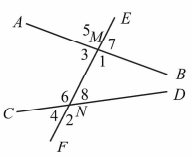


（第 2 题）

下面我们利用计算机演示当“三线八角”满足什么条件时，$AB \parallel CD$.

用计算机画出图 7－24，直线 AB，CD 被直线 EF 所截，EF 与 AB，CD 的交点分别为点 M，N. 分别显示八个角的测量值，然后让直线 AB 绕点 M 旋转，各个角的测量值就会发生变化. 观察图形的变化，当这八个角的测量值具有哪些关系时，AB 与 CD 平行？[1]

$\angle 1 = 96.10^\circ$
$\angle 2 = 124.07^\circ$
$\angle 3 = 83.90^\circ$
$\angle 4 = 55.93^\circ$
$\angle 5 = 96.10^\circ$
$\angle 6 = 124.07^\circ$
$\angle 7 = 83.90^\circ$
$\angle 8 = 55.93^\circ$



$\angle 1 = 116.80^\circ$
$\angle 2 = 116.80^\circ$
$\angle 3 = 63.20^\circ$
$\angle 4 = 63.20^\circ$
$\angle 5 = 116.80^\circ$
$\angle 6 = 116.80^\circ$
$\angle 7 = 63.20^\circ$
$\angle 8 = 63.20^\circ$

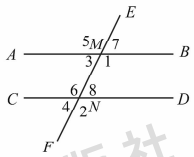


图 7－24

通过以上的计算机演示，我们发现，当 $\angle 1 = \angle 2$ 或 $\angle 3 = \angle 4$ 或 $\angle 5 = \angle 6$ 或 $\angle 7 = \angle 8$ 时，直线 AB 与 CD 平行. 用推三角尺作平行线的方法就是依据这个道理. 人们在长期实践中总结出判定两条直线平行的方法：

基本事实 两条直线被第三条直线所截，如果同位角相等，那么这两条直线平行（简记为：同位角相等，两直线平行）.

如图 7－25，用符号语言表示：

$\because \quad \angle 1 = \angle 2$,

$\therefore \quad AB \parallel CD$.

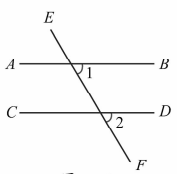


图 7－25

练习答案：

1. 同位角：$\angle 1$ 和 $\angle 3$.
   内错角：$\angle 1$ 和 $\angle 5$.
   同旁内角：$\angle 1$ 和 $\angle 2$.
2. 内错角：$\angle 2$ 和 $\angle 5$，$\angle 3$ 和 $\angle 6$.

[1] 由于计算机具有数字显示的功能，所以当角度变化时，可以直观地看出直线 AB，CD 是否平行. 当同位角或内错角的度数相等时，$AB \parallel CD$. 教材中的角度变化只是一种特殊的情况，教学中还要通过动态演示让学生进行观察.

练习答案：

1. 方法一：利用“同位角相等，两直线平行”可证，即证 $\angle AFE = \angle 2$.

方法二：利用“内错角相等，两直线平行”可证，即证 $\angle BFD = \angle 2$.

方法三：利用“同旁内角互补，两直线平行”可证，即证 $\angle AFD + \angle 2 = 180°$.

思考

如图 7－26，直线 AB，CD 被直线 EF 所截，当内错角 $\angle 1 = \angle 3$ 时，你能推出 $AB \parallel CD$ 吗？

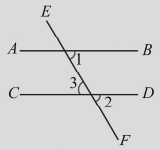


图 7－26

我们看到，∵ $\angle 2 = \angle 3$（对顶角相等），

且 $\angle 1 = \angle 3$（已知），

∴ $\angle 1 = \angle 2$（等量代换）.

这样由上面的基本事实不难推出 $AB \parallel CD$.

由此得到：

判定定理　两条直线被第三条直线所截，如果内错角相等，那么这两条直线平行（简记为：内错角相等，两直线平行）.

如图 7－26，用符号语言表示：

∵ $\angle 1 = \angle 3$，

∴ $AB \parallel CD$.

类似的，还可以推出：

判定定理　两条直线被第三条直线所截，如果同旁内角互补，那么这两条直线平行（简记为：同旁内角互补，两直线平行）.

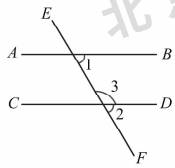


图 7－27

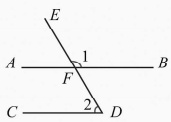
如图 7－27，用符号语言表示：

∵ $\angle 1 + \angle 3 = 180°$，

∴ $AB \parallel CD$.

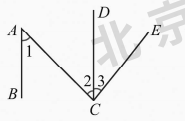
练习

1. 已知：如图，直线 AB，CD 被直线 ED 所截，$\angle 1 = 130°$，$\angle 2 = 50°$. 求证：$AB \parallel CD$.（请用三种方法证明）



（第 1 题）

2. 已知：如图，∠1 = ∠3，∠2 = ∠3. 求证：*AB* // *CD*.



（第 2 题）

平行线有什么性质呢？

实践

下面请同学们做一个实验：

每人在练习本上作两条平行线 *AB*，*CD*，再任意作一条直线 *EF*，使它和 *AB*，*CD* 分别相交，然后用量角器分别度量其中任意一组同位角，看看它们的度数之间有什么关系．

已知：如图 7－28，直线 *AB*，*CD* 被 *EF* 所截，*AB* // *CD*.

求证：∠1 = ∠2.

在此采用一种特殊的方法：假设∠1 ≠ ∠2，过点 *O* 作直线 *A'B'*，使∠*EOB'* = ∠2. 根据“同位角相等，两直线平行”，可得 *A'B'* // *CD*. 这样，过点 *O* 就有两条直线 *AB*，*A'B'* 平行于 *CD*，这与“过直线外一点有且仅有一条直线与这条直线平行”矛盾，说明∠1 ≠ ∠2 的假设是不对的，于是有∠1 = ∠2. 我们称这种方法为反证法．

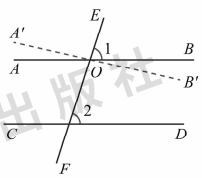


图 7－28

于是得到平行线的性质：

性质定理 两条平行线被第三条直线所截，得到的同位角相等（简记为：两直线平行，同位角相等）.

如图 7－29，用符号语言表示：

∵ *AB* // *CD*,

∴ ∠1 = ∠2.

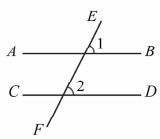


图 7－29

2. 由∠1 = ∠3，∠2 = ∠3，

得出∠1 = ∠2.

∴ *AB* // *CD*.

思考

如图 7－30，直线 $AB \parallel CD$，它们被直线 EF 所截．不经过度量，你能推出内错角 $\angle 2$ 和 $\angle 3$ 之间有什么关系吗？

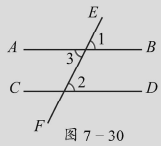


图 7－30

不难推出，因为 $AB \parallel CD$，由“两直线平行，同位角相等”得 $\angle 1 = \angle 2$，又因为 $\angle 1 = \angle 3$，所以 $\angle 2 = \angle 3$.

由此得到平行线的另一个性质：

性质定理 两条平行线被第三条直线所截，得到的内错角相等（简记为：两直线平行，内错角相等）.

如图 7－30，用符号语言表示为：

$\because$ $AB \parallel CD$，

$\therefore$ $\angle 2 = \angle 3$.

思考

如图 7－31，直线 $AB \parallel CD$，它们被直线 EF 所截，那么同旁内角 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 之间有什么关系？

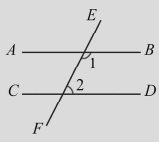


图 7－31

不难发现：

性质定理 两条平行线被第三条直线所截，得到的同旁内角互补（简记为：两直线平行，同旁内角互补）.

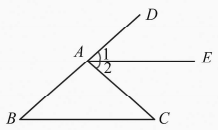
如图 7－31，用符号语言表示：

$\because$ $AB \parallel CD$，

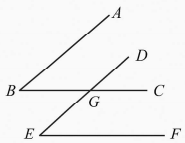
$\therefore$ $\angle 1 + \angle 2 = 180°$.

练习

1. 已知：如图，$AE \parallel BC$，$\angle 1 = \angle 2$. 求证：$\angle B = \angle C$.
2. 已知：如图，$AB \parallel DE$，$BC \parallel EF$. 求证：$\angle B = \angle E$.



（第 1 题）



（第 2 题）

交流

如图 7－32，AB，CD 相交于点 O，如果 $\angle A = \angle B$，那么 $\angle C$ 与 $\angle D$ 之间有什么关系？为什么？

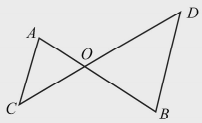


图 7－32

实践

用推三角尺作平行线的方法作直线 AB 的平行线 CD，再作直线 CD 的平行线 EF. 请你观察并判断直线 AB 与 EF 的位置关系，并尝试说明理由.

由此得出性质：平行于同一条直线的两条直线平行.

如图 7－33，用符号语言表示：

$\because$ $AB \parallel CD$，$EF \parallel CD$，

$\therefore$ $AB \parallel EF$.

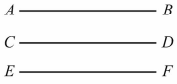


图 7－33

练习答案：

1. $\because AE \parallel BC$，

$\therefore \angle 2 = \angle C$，$\angle 1 = \angle B$.

又 $\angle 1 = \angle 2$，

$\therefore \angle B = \angle C$.

2. $\because AB \parallel DE$，

$\therefore \angle B = \angle DGC$.

$\because BC \parallel EF$，

$\therefore \angle DGC = \angle E$.

$\therefore \angle B = \angle E$.

还可以通过 $\angle B = \angle BGE$，$\angle BGE = \angle E$，得出 $\angle B = \angle E$.

或证 $\angle B + \angle BGD = 180°$，$\angle BGD = \angle CGE$，

$\therefore \angle B + \angle CGE = 180°$.

又

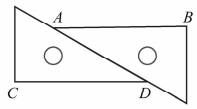
$\because \angle E + \angle CGE = 180°$，

$\therefore \angle B = \angle E$.

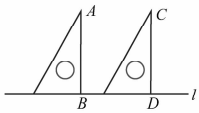
习 题 7-4

★基础★

1. 把两块形状、大小相同的三角尺按照如图所示的样子放置，图中 AB 与 CD 平行吗？请说明理由．

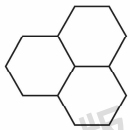


（第 1 题）

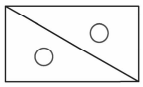


（第 2 题）

2. 如图，把一块三角尺的一条直角边贴在直线 l 上，沿它的另一条直角边作出直线 AB，再按照同样的方法作出直线 CD. AB 与 CD 平行吗？为什么？由此可总结出：垂直于同一条直线的两条直线平行．
3. 图中的三个六边形中，每个角都等于 120°. 图中有平行线吗？如果有，请指出来，并说明它们为什么平行．

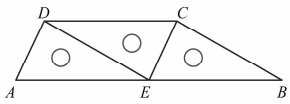


（第 3 题）

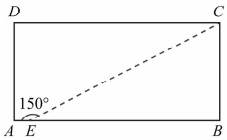


（第 4 题）

4. 用两块形状、大小相同的三角尺拼成如图所示的图形．图中有平行线吗？如果有，请指出来，并说明理由．
5. 用三块形状、大小相同的三角尺拼成如图所示的图形．图中有平行线吗？请说明理由．



（第 5 题）



（第 6 题）

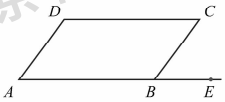
6. 如图，在长方形 $ABCD$ 中，欲从点 C 作一条线 CE 与 AB 边交于点 E，使 $\angle CEA = 150°$. 应该怎样作？

7. 已知：如图，四边形 $ABCD$，点 E 是 AB 的延长线上的一点．

(1) 如果 $\angle CBE = \angle A$，那么可以判定哪两条直线平行？根据是什么？

(2) 如果 $\angle CBE = \angle C$，那么可以判定哪两条直线平行？根据是什么？

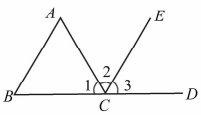
(3) 如果 $\angle C + \angle CBA = 180°$，那么可以判定哪两条直线平行？根据是什么？



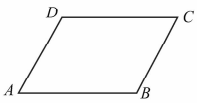
（第 7 题）

★★提升★★

1. 如图，$\angle A$，$\angle B$，$\angle 1$，$\angle 2$，$\angle 3$ 都等于 60°. 求证：$AB \parallel CE$.（用三种方法证明）



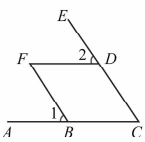
（第 1 题）



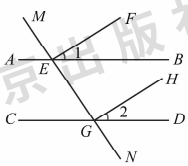
（第 2 题）

2. 已知：如图，$AB \parallel CD$，$AD \parallel BC$. 求证：$\angle A = \angle C$，$\angle B = \angle D$.

3. 已知：如图，CBA，CDE 都是射线，点 F 是 $\angle ACE$ 内一点，且 $\angle 1 = \angle C$，$\angle 1 = \angle 2$. 试判断 $FD \parallel AC$ 吗？为什么？



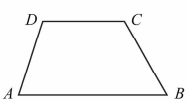
（第 3 题）



（第 4 题）

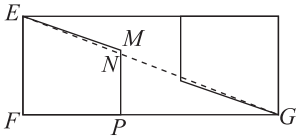
4. 已知：如图，$AB \parallel CD$，直线 MN 分别与 AB，CD 交于点 E 和点 G，$EF \parallel GH$. 求证：$\angle 1 = \angle 2$.

5. 已知：如图，$\angle A + \angle D = 180°$. 求证：$\angle B + \angle C = 180°$.



（第 5 题）

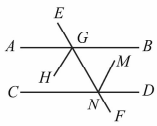
[1] 当把正方形 $ABCD$ 中的四个图形拼成一个长方形时，如下图，连接 EG，点 M 不在线段 EG 上，图形中间有重叠部分，因此面积减少了 1.



即 $\angle FEM$ 与 $\angle PNG$ 并不相等，因此 E，M，G 三点并不在一条直线上.

★★★ 拓展 ★★★

1. 一口井深 8 尺[1]，一只蜗牛从井底往上爬，白天爬 3 尺，夜里往下滑 2 尺. 如果蜗牛从某一天清晨往上爬，那么几天可以爬到地面？
2. 如图，直线 AB，CD 被直线 EF 所截，交点分别为 G，N，GH，NM 是两条射线. 问：图中共有多少对内错角？



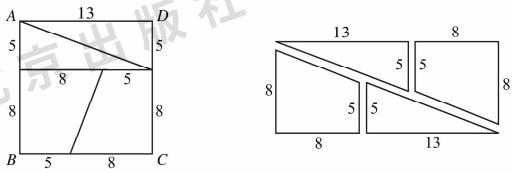
（第 2 题）

综合与实践 [1]

面积怎么丢失了

已知：如图 7－34(1)，有一个边长为 13 的正方形 $ABCD$，按图中所示的方法将它分割成两个直角三角形和两个梯形，再将这个正方形沿分割线剪开，得到四个小图形. 有位同学用如图 7－34(2) 的形式拼了一个长方形.

当计算它们的面积时，却发现正方形的面积为 $13 \times 13 = 169$，而长方形的面积为 $8 \times 21 = 168$. 想想看，丢失的面积跑到哪里去了？



(1)　　(2)

图 7－34

① 1 尺 = $\frac{1}{3}$ 米.

阅读理解

从两架飞机相撞谈直觉思维

1965 年 12 月 4 日，在美国纽约某机场上空，一架由螺旋桨推进的大型客机“LC1049”和一架波音 707 型喷气客机正一高一低相对飞行．由于机场上空云量多，在 10 000 多英尺[①]的高空出现了一条倾斜的白色云带．两架飞机的驾驶员都产生了一种错觉，以为对方就要和自己相撞．于是两架飞机的驾驶员都急忙采取措施，想避开对方，高的向下降，低的向上升，结果造成两机相撞．“LC1049”飞机在迫降时起火，造成四人死亡、多人受伤的悲剧．事后经过严密的调查，发现造成这次事故的元凶竟是“视错觉”．

我们知道，观察是人们认识事物的一种重要方法．靠人的眼睛观察事物，在很多情况下都能够得到正确的结论．但是，单凭眼睛观察，在某些情况下可能由于角度、视觉等原因，会造成错觉，出现偏差，也就是说眼睛有时也会欺骗人．



图 7－35

请看图 7－35，观察平面 M 左边的直线 a 和右边的直线 b，c，d 中的哪一条在一条直线上．也许你会认为 a 和 c 在一条直线上．其实，只要用直尺比一下，就会发现 a 和 b 在一条直线上．这是由于 a 和 b 之间有一个平面 M 干扰了我们的视觉，使我们产生了错觉．前面提到的两机相撞事件，就是因为两机之间有一条倾斜的白色云带，它的情况和图 7－35 中的情况类似．

以上的例子说明，有时候只凭眼睛观察做出的判断会出现一些误差甚至错误，虽然如此，但是观察仍然不失为人们认识事物的一种重要方法．

① 1 英尺 ≈ 0.304 8 米．

阅读理解

从鲁班发明锯条谈类比推理

春秋时期，鲁国有一位杰出的工匠叫鲁班．有一次，他负责承造一座大宫殿，需要很多木材．他吩咐徒弟们上山去砍伐大树，但当时还没有发明锯子，只能用斧头去砍，砍得很慢，木料供应不上．鲁班十分着急，他决定亲自上山看看．



山很陡，路很不好走．鲁班爬山时，用手拉着丝茅草，一用力，手就被草划破了，流了血．当时鲁班感到很惊奇，一棵小草竟会这么厉害．由于他急着上山，也没有仔细想．回来的路上，他拔下一棵丝茅草，决定带回去看个究竟．到家后，他左看右看，发现丝茅草的两边有许多小细齿．这些细齿虽小，却很锋利，往手上一拉，手就被划破了．这提醒了鲁班，他想：如果像丝茅草那样，把铁片打成带齿的形状，用它去锯树，不是同样锋利吗？于是，他和铁匠一起试制了一条带齿的铁片，拿去锯树，果然成功了．有了锯子，木料供应的速度问题得到解决，盖宫殿的任务如期完成．

鲁班发明锯子的过程，就是运用了类比推理的方法．鲁班根据丝茅草有锋利的小细齿可以划破手指的事实，进行类比推理，把铁片做成带细齿的形状去锯树，这样便发明了锯子．

在数学中，应用类比推理的地方也是很多的，我们以后还会经常接触到．

回顾与整理

知识要点

1. 观察、实验、归纳、类比、猜想是人们认识事物的重要方法，但是按这些方法得出的结论还需要上升到理性认识.

2. 推理是人们研究问题的一种重要方法. 定义、基本事实、定理都可以作为推理的依据.

3. 平行线的判定方法与平行线的性质是互逆的.

两直线平行 $\underset{\text{判定}}{\overset{\text{性质}}{\rightleftharpoons}}$ 同位角相等

两直线平行 $\underset{\text{判定}}{\overset{\text{性质}}{\rightleftharpoons}}$ 内错角相等

两直线平行 $\underset{\text{判定}}{\overset{\text{性质}}{\rightleftharpoons}}$ 同旁内角互补

另外，判定两条直线平行还有一种方法：

平行于同一条直线的两条直线平行.

学习指导

1. 认识从实践开始. 要善于观察周围的事物，利用观察、实验、归纳、类比、猜想等方法去发现事物的规律.

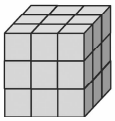
2. 数学是思维的体操. 要学会运用说理、推理的方法去处理问题，提高思维的严谨性.

3. 推理能力的培养是一个循序渐进的过程，要慢慢体会推理过程，逐步提高推理能力.

复 习 题

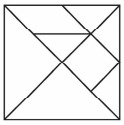
★基础★

1. 你能用 6 根火柴棍首尾相接拼出 4 个三角形吗？试试看 .
2. 将数学、物理、化学、英语四门课分配给四位教师，甲可以教物理、化学；乙可以教数学、英语；丙可以教数学、物理、化学；丁只能教化学 . 为了使他们都有工作，并且每人只教一门课，那么只能派_____教师教数学 .
3. 有一组数 5，8，13，21，34，…，照此规律，这组数的第 9 个数是_____.
4. 有一个正方体的木块，表面都涂上同样的颜色，将木块按如图所示的方法切成若干个小正方体，那么：
   (1) 只有一面有颜色的小正方体共有_____个；
   (2) 只有两面有颜色的小正方体共有_____个；
   (3) 只有三面有颜色的小正方体共有_____个；
   (4) 各面都没有颜色的小正方体共有_____个 .

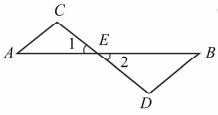


(第 4 题)

5. 画出如图所示的图案 .

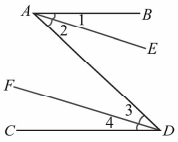


(第 5 题)

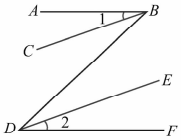


(第 6 题)

6. 已知：如图，AB，CD 相交于点 E，$\angle A=\angle 1$，$\angle B=\angle 2$. 求证：$AC \parallel BD$.
7. 已知：如图，$\angle 1=\angle 4$，$\angle 2=\angle 3$. 求证：$AB \parallel CD$.
8. 已知：如图，$AB \parallel DF$，$BC \parallel DE$. 求证：$\angle 1=\angle 2$.



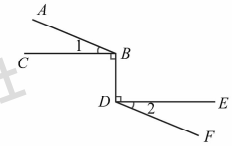
(第 7 题)



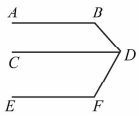
(第 8 题)

★★提升★★

1. 已知：如图，$CB \perp BD$ 于点 B，$BD \perp DE$ 于点 D，$\angle 1 = \angle 2$. 求证：$AB /\!/ DF$.



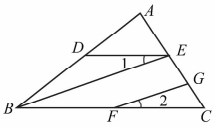
（第 1 题）



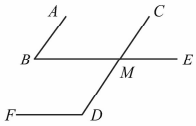
（第 2 题）

2. 已知：如图，$AB /\!/ CD$，$CD /\!/ EF$. 求证：$\angle B + \angle BDF + \angle F = 360°$.

3. 已知：如图，$DE /\!/ BC$，$BE /\!/ FG$. 求证：$\angle 1 = \angle 2$.



（第 3 题）

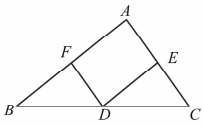


（第 4 题）

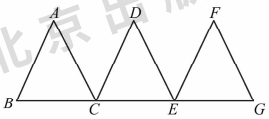
4. 已知：如图，$AB /\!/ CD$，$BE /\!/ FD$. 求证：$\angle B + \angle D = 180°$.

5. 已知：如图，$DE /\!/ AB$，$DF /\!/ AC$. 求证：$\angle A = \angle FDE$.

6. 已知：如图，$AB /\!/ CD$，$AC /\!/ DE$，$CD /\!/ EF$，$DE /\!/ FG$. 求证：$\angle A = \angle F$.



（第 5 题）



（第 6 题）

★★★拓展★★★

1. 图(1)是一个小正方体的侧面展开图，小正方体从图(2)所示的位置依次翻到第1格、第2格、第3格、第4格，这时小正方体朝上一面的字是(　　).

A. 北　　B. 京　　C. 精　　D. 神



(1)　　(2)

(第1题)

2. 符号“f”表示一种运算，它对一些数的运算如下：

$f(1)=1+\frac{2}{1}$，$f(2)=1+\frac{2}{2}$，$f(3)=1+\frac{2}{3}$，$f(4)=1+\frac{2}{4}$，…

(1)利用以上运算的规律写出$f(n)=$_____(n是正整数)；

(2)计算$f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot\cdots\cdot f(100)=$_____.

3. 有一个棋盘，共有64个小方格．如果在第1个方格内放1粒米，在第2个方格内放2粒米，在第3个方格内放4粒米，在第4个方格内放8粒米……以后每一个方格内放的数量都等于上一个方格内数量的2倍，那么，当64个方格都放满后，请你估计第64个方格内有多少粒米．

部分习题答案或提示

习题 7－1

基础

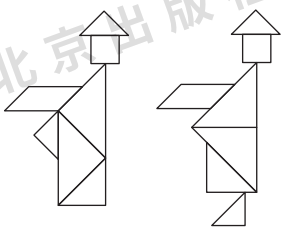
1. P_1，P_2，P_3 三点在一条直线上.
2. $PA=PB$；存在.
3. 上面图形的周长比下面图形的周长小，小两个正方形的边长.
4. （1）可以一笔画出；（2）不能一笔画出.
5. 图略（方法不唯一）.

提升

1. 6 个.
2. 两条横木条与竖木条交叉处应画成虚线或不画.
3. 略.

拓展

如图.



习题 7－2

基础

1. 由能被 3 整除的整数的特征，即如果各个数位上的数字之和能被 3 整除，那么这个整数也能被 3 整除.

   那么对于 21 534 768，

   $2+1+5+3+4+7+6+8=36$，由于 36 能被 3 整除，所以 21 534 768 也能被 3 整除.

   能被 3 整除的以上的规律证明如下：

   $$\begin{aligned}\overline{a_1a_2a_3}&=100a_1+10a_2+a_3\\&=99a_1+a_1+9a_2+a_2+a_3\\&=(a_1+a_2+a_3)+99a_1+9a_2\\&=(a_1+a_2+a_3)+9(11a_1+a_2).\end{aligned}$$

$\because a_1+a_2+a_3$ 能被 3 整除，且 $9(11a_1+a_2)$ 必能被 3 整除，

$\therefore \overline{a_1a_2a_3}$能被 3 整除.

2. $(2n-1)(2n+1)=(2n)^2-1$；

$19\times21=20^2-1=400-1=399$.

提升

1. $6\ 667^2=44\ 448\ 889$.

它的规律是个位数是 9，8 的个数与 6 的个数相同，4 的个数比 6 的个数多 1.

又如 $66\ 667^2=4\ 444\ 488\ 889$.

2. 错误. 应针对 a 的不同取值讨论.

这里只给出 $a\neq0$，所以解不等式 $ax<b$ 时，应分为 $a>0$ 和 $a<0$ 两种情况讨论.

当 $a>0$ 时，$x<\dfrac{b}{a}$；

当 $a<0$ 时，$x>\dfrac{b}{a}$.

拓展

如图.

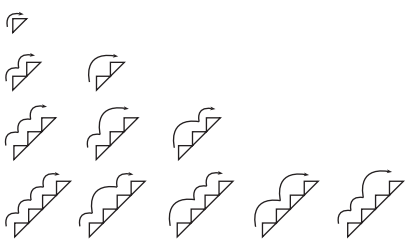
若楼梯只有一个台阶，则只有一种迈法；

若楼梯只有两个台阶，则有两种迈法；

若楼梯只有三个台阶，则有三种迈法；

若楼梯只有四个台阶，则有五种迈法；

若楼梯只有五个台阶，观察以上结论：



1　2　3　5

即 $1+2=3$，$2+3=5$，则下一种情况，应为 $3+5=8$.

故有八种迈法.

习题 7－3

基础

1. 甲.

2. 15.

3. $m=n$.

4. （1）题设：三条边都相等的三角形；结论：是等边三角形.　　真命题.

（2）题设：一个正数与一个负数的和；结论：是负数.　　假命题.

反例：1 与 -1 的和是 0，不是负数.

（3）题设：平角的度数；结论：是 180°.　　真命题.

5. 是假命题. 例如，当 $a=-1$ 时，$|a|=1$.

提升

1. $0<a<1$.

2. 3. 提示：$(2n-1)+(2n+1)+(2n+3)=6n+3=3(2n+1)$.

3. 乙. 由已知，丙不是工人，甲不是护士，乙不是护士，∴ 丙是护士.

又工人的年龄＜丙的年龄＜乙的年龄，∴ 甲是工人. 剩下的乙是教师.

4. 无变化. 提示：内、外角之和为 $n\cdot 180°$，内角和为 $(n-2)\cdot 180°$，

∴ 外角和为 $n\cdot 180°-(n-2)\cdot 180°=360°$.

拓展

在 A 处. 提示：∵ 外角和为 $360°$，所以 $\dfrac{360°}{72°}=5$，拐四个弯后又回到 A 点.

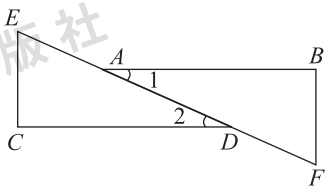
习题 7－4

基础

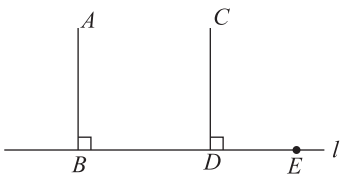
1. 平行.

∵ $\angle 1=\angle 2$,

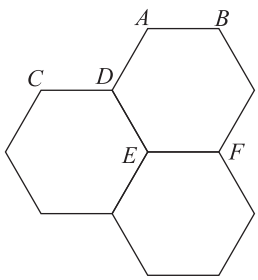
∴ $AB\parallel CD$.



（第 1 题）



（第 2 题）



（第 3 题）

2. 平行.

∵ $\angle ABD=\angle CDE$,

∴ $AB\parallel CD$.

或∵ $\angle ABD+\angle CDB=180°$,

∴ $AB\parallel CD$.

3. 图中有许多平行线，如 $AB\parallel CD$（内错角相等，两直线平行），$CD\parallel EF$（内错角相等，两直线平行）.

4. $AB\parallel CD$（内错角相等，两直线平行）；

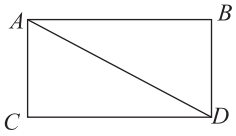
$AC \parallel BD$（内错角相等，两直线平行）.

5. $AE \parallel CD$（内错角相等，两直线平行）；

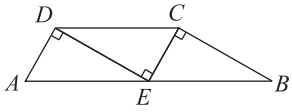
$DC \parallel EB$（内错角相等，两直线平行）；

$AD \parallel CE$（内错角相等，两直线平行）；

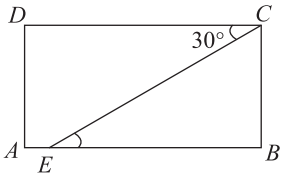
$DE \parallel CB$（内错角相等，两直线平行）.



（第 4 题）



（第 5 题）



（第 6 题）

6. 画 $\angle DCE = 30°$ 即可.

$\because AB \parallel CD$,

$\therefore \angle DCE = \angle CEB = 30°$.

$\therefore \angle CEA = 180° - 30° = 150°$.

7. （1）$AD \parallel BC$（同位角相等，两直线平行）；

（2）$DC \parallel AB$（内错角相等，两直线平行）；

（3）$DC \parallel AB$（同旁内角互补，两直线平行）.

提升

1. 证明一：

$\because \angle A = 60°$，$\angle 2 = 60°$,

$\therefore \angle A = \angle 2$.

$\therefore AB \parallel CE$（内错角相等，两直线平行）.

证明二：

$\because \angle B = 60°$，$\angle 3 = 60°$,

$\therefore \angle B = \angle 3$.

$\therefore AB \parallel CE$（同位角相等，两直线平行）.

证明三：

$\because \angle B = 60°$，$\angle 1 + \angle 2 = 120°$,

$\therefore \angle B + \angle BCE = 180°$.

$\therefore AB \parallel CE$（同旁内角互补，两直线平行）.

2. 证明一：

∵ $AB \parallel CD$，

∴ $\angle C + \angle B = 180°$（两直线平行，同旁内角互补）.

又∵ $AD \parallel BC$，

∴ $\angle A + \angle B = 180°$（两直线平行，同旁内角互补）.

∴ $\angle C = 180° - \angle B$，$\angle A = 180° - \angle B$.

∴ $\angle A = \angle C$.

同理 $\angle B = \angle D$.

证明二：

连接 AC.

∵ $AB \parallel CD$，

∴ $\angle 1 = \angle 2$（两直线平行，内错角相等）.

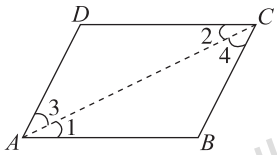
∵ $AD \parallel BC$，

∴ $\angle 3 = \angle 4$（两直线平行，内错角相等）.

∴ $\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4$.

即 $\angle BAD = \angle BCD$.

同理 $\angle B = \angle D$.



（第 2 题）

证明三：

延长 AB 到 E.

∵ $AD \parallel BC$，

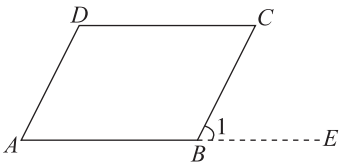
∴ $\angle A = \angle 1$.

∵ $AB \parallel CD$，

∴ $\angle C = \angle 1$.

∴ $\angle A = \angle C$.

同理 $\angle B = \angle D$.



（第 2 题）

3. 提示：利用 $\angle 1 = \angle C$，$\angle 1 = \angle 2$ 可知 $\angle 2 = \angle C$，从而得出 $FD \parallel AC$.

4. 提示：由 $AB \parallel CD$，得 $\angle MEB = \angle EGD$.

由 $EF \parallel GH$，得 $\angle MEF = \angle EGH$.

∴ $\angle MEB - \angle MEF = \angle EGD - \angle EGH$.

∴ $\angle 1 = \angle 2$.

5. 提示：由 $\angle A + \angle D = 180°$，得 $AB \parallel CD$.

∴ $\angle B + \angle C = 180°$.

拓展

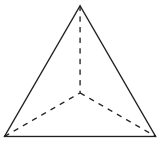
1. ∵ 白天爬 3 尺，夜里下滑 2 尺，∴ 一天爬 1 尺 . 5 天后爬上 5 尺，最后一天白天爬 3 尺，可以爬到地面. ∴ 需要 6 天.

2. 5 对. 即∠*AGN* 和∠*GND*，∠*HGN* 和∠*GNM*，∠*AGN* 和∠*GNM*，∠*HGN* 和∠*GND*，∠*BGN* 和∠*CNG*.

复习题

基础

1. 可以. 如图所示：



（第 1 题）

2. 丙.

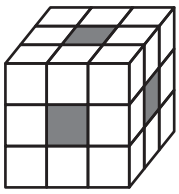
思路：甲<物理/化学>　乙<数学/英语>　丙<数学/物理/化学>　丁—化学

为了使每位教师都有工作，所以丁只能教化学，那么甲只能教物理，丙只能教数学，乙只能教英语.

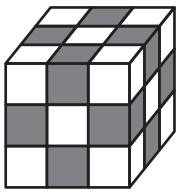
3. 233.

我们看到，从第三个数开始，每一个数等于前两个数之和，于是，接下去便得到一串数：5，8，13，21，34，55，89，144，233.

4. （1）6. 只有一面有颜色的小正方体是处于每面正中间的那一块，故有 6 块.



［第 4（1）题］



［第 4（2）题］

（2）12. 只有两面有颜色的每一层有 4 块，三层共 12 块.

（3）8. 顶点处的 8 块.

（4）1. 在中间那层正中间的一块（图中显示不出来）.

验证：一共有 27 块小正方体.

只有一面有颜色的有 6 块，只有两面有颜色的有 12 块，只有三面有颜色的有 8 块，

各面都没有颜色的有 1 块 . 6 + 12 + 8 + 1 = 27.

5. 略.

6. 提示：利用 $\angle A = \angle 1$，$\angle B = \angle 2$，$\angle 1 = \angle 2$，所以 $\angle A = \angle B$.

7. 提示：利用 $\angle 1 + \angle 2 = \angle 3 + \angle 4$，即 $\angle BAD = \angle CDA$.

8. 提示：利用 $\angle ABD = \angle FDB$，$\angle CBD = \angle EDB$，

所以 $\angle ABD - \angle CBD = \angle FDB - \angle EDB$.

即 $\angle 1 = \angle 2$.

提升

1. 提示：利用 $\angle 1 = \angle 2$，$\angle CBD = \angle BDE$，

所以 $\angle 1 + \angle CBD = \angle 2 + \angle BDE$.

即 $\angle ABD = \angle BDF$.

2. 提示：利用 $\angle B + \angle BDC = 180°$，$\angle F + \angle CDF = 180°$，

所以 $\angle B + \angle BDC + \angle CDF + \angle F = 360°$.

即 $\angle B + \angle BDF + \angle F = 360°$.

3. 提示：由 $DE // BC$，得 $\angle 1 = \angle EBC$.

由 $BE // FG$，得 $\angle 2 = \angle EBC$.

所以 $\angle 1 = \angle 2$.

4. 提示：由 $AB // CD$，得 $\angle B = \angle BMD$.

由 $BE // FD$，得 $\angle D + \angle BMD = 180°$.

所以 $\angle B + \angle D = 180°$.

5. 提示：由 $DE // AB$，得 $\angle A = \angle CED$.

由 $DF // AC$，得 $\angle FDE = \angle CED$.

所以 $\angle A = \angle FDE$.

6. 提示：$\angle A = \angle ACD$，$\angle ACD = \angle D$，$\angle D = \angle DEF$，$\angle DEF = \angle F$.

所以 $\angle A = \angle F$.

拓展

1. A.

2. （1）$1 + \frac{2}{n}$；（2）5 151.

3. 提示：1，2，4，8，16，32，…

即 2^0，2^1，2^2，2^3，2^4，2^5，…

所以第 64 个方格中米粒数为 2^{63}.

利用计算器得出 $2^{63} \approx 9 \times 10^{18}$.

北京出版社

第八章
因式分解



教学目标

1. 了解因式分解的概念，知道因式分解与整式乘法的关系.

2. 会用提公因式法、公式法（直接利用公式不超过二次）进行因式分解（指数是正整数），并能应用因式分解解决一些简单的数学问题，提高运算能力.

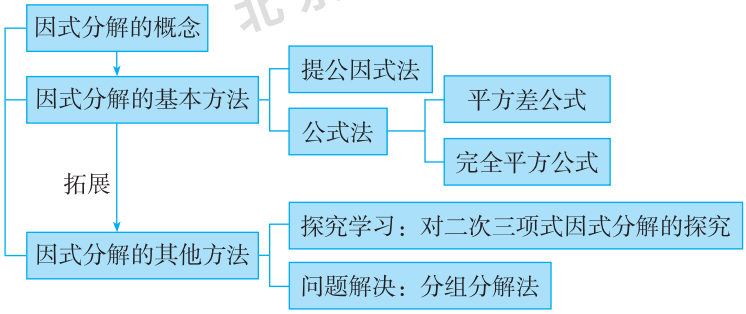
3. 通过公式的几何背景、运算的转化、因式分解与整式乘法的关系，渗透数形结合、转化思想以及换元法等.

4. 在学习的过程中形成认真勤奋、反思质疑的学习习惯和修正错误、严谨的学习态度.

北京出版社

教材分析和教学建议

1. 主要内容及其地位作用.



本章内容是在整式运算的基础上学习的，因式分解与整式的乘法为互逆的恒等变形，与整式的乘法运算有着密切的联系，因式分解在今后学习分式化简、分式的运算、解一元二次方程以及二次函数等知识时有着广泛的作用.

2. 本章编写特点.

按照《义务教育数学课程标准（2011 年版）》的要求，教材中介绍了基本的因式分解的方法，即提公因式法和公式法，在公式法中涉及了平方差公式、完全平方公式. 在教材编写中，注意知识之间的联系，如类比将整数分解为质因数的积的过程，引出因式分解的概念. 教材在概念引出和方法得出等过程中，通过“思考”、“交流”等栏目给学生留出观察、思考、分析、归纳的空间和时间，让学生体验转化的数学思想方法，鼓励学生在思考的基础上进行讨论和交流，这个过程有助于培养学生的能力.

另外，本教材在“探究学习”栏目中设计了数学探究活动，介绍了对二次三项式 x^2-5x+6，$3x^2-11x+10$ 等利用十字相乘法进行因式分解的探究过程，使学生经历、体验数学活动的过程，积累数学活动经验；在“问题解决”栏目中介绍了简单的分组分解法，以上两种方法供学有余力的学生学习，有助于学生根据教材所提供的问题情境，设法综合运用所学过的因式分解的基本方法解决问题，从中获得分析解决问题的一些基本方法，体验转化思想. 在“问题解决”栏目中介绍了利用图形计算器进行因式分解的内容，以提高学生的兴趣，开阔学生的眼界，感受现代信息技术的发展.

3. 教学重点、难点.

本章的教学重点是因式分解的提公因式法和公式法；教学难点是灵活运用各种方法进行因式分解.

4. 教学建议.

在因式分解概念的引入教学时，要注意因式分解与因数分解的对比，以利于学生

理解所学知识的内涵，更好地揭示数学知识之间的内在关联，从整体上理解数学，构建数学认知结构. 在因式分解的方法教学时注意因式分解与整式乘法的互逆关系，注意在因式分解过程中转化思想的应用. 在这一章的教学过程中，可以给学生设置一些问题情境，引导学生进行观察、分析，在此过程中体验和领会其中蕴含的整体思想和转化的数学思想方法，同时感受因式分解的应用，在这个过程中学会有条理地思考，学会交流和讨论，从整体和较高层次上把握本章的知识内容与方法，提高学习能力.

5. 课时安排.

本章教学约需 6 课时，具体分配如下（仅供参考）：

8.1 因式分解 8.2 提公因式法	约 2 课时
8.3 公式法	约 2 课时
探究学习	约 1 课时
总结与复习	约 1 课时

北京出版社

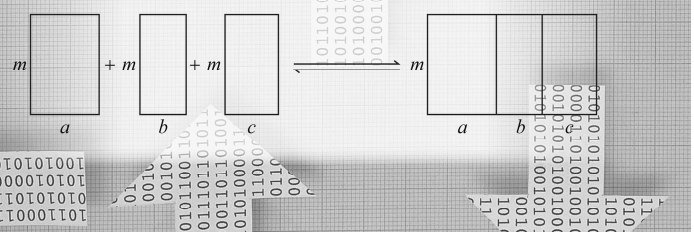
教材及其参考信息

第八章
因式分解

我们学习过整数的乘法运算，并且会把一个整数分解为几个质数的积的形式．

类似的，我们学习了整式的乘法运算．你是否也能把一个整式分解为几个整式的积的形式呢？

$$ma+mb+mc \underset{\text{整式乘法}}{\overset{\text{因式分解}}{\rightleftharpoons}} m(a+b+c)$$



8.1 因式分解

回忆整数的乘法运算，我们已经会求几个整数的积，并且可以把一个整数分解为几个质数的积的形式．例如：

$6=2\times3$；

$84=2^2\times3\times7$；

$360=2^3\times3^2\times5$.

其中，每一个质数都是原来整数的一个约数（或因数）.

类似的，我们也做过以下一些变形，把一些整式写成了几个整式的积的形式：

$36x^5y^6=(2xy)\cdot(3x^2y^2)\cdot(6x^2y^3)$；

$7.037\times(-14)+7.037\times(-10)+7.037\times(+24)=7.037\times(-14-10+24)$；

$6a^2b+10a^2b+15a^2b=(6+10+15)a^2b$.

又如：

$x^2-4=(x+2)(x-2)$；

$x^2+6x+9=(x+3)^2$；

……

你还能举出类似的例子吗？观察一下，等号两边的整式各有什么特征．

思考

这些等式都表示了一个整式化为几个整式的积的形式．其中，每一个分解后的整式称做原来整式的一个因式．

对其中的多项式所做的变形，我们定义如下：把一个多项式化为几个整式乘积的形式，叫做把这个多项式因式分解，也叫做将多项式分解因式．

可以看出，因式分解和整式乘法是相反方向的变形．如：

$$x^2-4 \underset{\text{整式乘法}}{\overset{\text{因式分解}}{\rightleftharpoons}} (x+2)(x-2)$$

8.1 节主要内容是因式分解的概念，因式分解是一种重要的恒等变形，将来经常用到.

1. 引入因式分解的概念时，先复习对比整数分解为质数的积，以及把一个整式写成几个整式的积的过程，与之进行对比，注意整式包含单项式和多项式，只有多项式化为几个整式的乘积才称为因式分解.

2. 因式分解与整式乘法是不同的，它们是互逆的恒等变形，要引导学生正确地认识它们的联系和区别.

练习

下列从左到右的变形，哪些是因式分解，哪些不是因式分解？

(1) $(x+5)(x-5)=x^2-25$；

(2) $x^2-9=(x+3)(x-3)$；

(3) $x^2+x+1=x(x+1)+1$；

(4) $m^2n+mn^2+m=m(mn+n^2+1)$.

8.2 提公因式法

思考

多项式 $ma+mb+mc$ 的各项分别由哪些因式组成？它们的相同的因式是什么？怎样将这个多项式因式分解？

把等式 $m(a+b+c)=ma+mb+mc$ 反过来，得到 $ma+mb+mc=m(a+b+c)$.

我们把各项都含有的因式叫多项式各项的公因式.[1]比如多项式 $ma+mb+mc$ 的公因式是 m，可以将它提取出来，得到公因式 m 与多项式 $a+b+c$ 的乘积，这种因式分解的方法就叫做提公因式法.

练习

1. 填空：

(1) $6x+14y-$_____$(3x+7y)$；

(2) $3xy+6xz=3x($_____$)$；

(3) $7m^3-49m^2=$_____$(m-7)$；

(4) $3x+6xy+12xz=3x($_____$)$.

练习答案：

(1) 不是；(2) 是；

(3) 不是；(4) 是.

[1] 对于公因式，在教学中要强调“各项都含有的因式”.

练习答案：

1. (1) 2；

(2) $y+2z$；

(3) $7m^2$；

(4) $1+2y+4z$.

8.2 节主要内容是提公因式法. 提公因式法是最基本，也是最重要的因式分解方法，应当很好地掌握.

1. 运用提公因式法时，要让学生理解提公因式法的依据是乘法对加法的分配律.

2. 运用提公因式法的步骤分为三步：一找公因式，二提公因式，三利用多项式的除法写出另一个因式. 这其中的关键步骤是找准各项的公因式.

3. 教材安排通过“思考”和“交流”引导学生归纳找公因式的方法和因式分解的注意事项，要注意结合实例让学生深刻体会.

2. (1) $m(x-y)$;
(2) $ac(b-d)$;
(3) $3x(3x^2-2x-6)$;
(4) $2m(n-2mn+1)$.

[1] 在确定公因式时，要把数字系数和字母分别考虑，如果是整数系数，要找最大公约数；如果是分数系数，一般使提公因式后的另一个因式的中系数为整数. 遇到公因式是字母时要考虑两点：一是取各项都含有的字母，二是各相同字母的指数取其次数最低的.

[2] 遇到首项系数是负数时，先要把负号提出. 提出负号时要强调括号内各项都要改变符号.

2. 把下列各式分解因式：
(1) $mx-my$；(2) $abc-acd$；
(3) $9x^3-6x^2-18x$；(4) $2mn-4m^2n+2m$.

思考

1. 怎样确定多项式各项的公因式？[1]
2. 遇到多项式的首项系数是负数该怎么办？[2]

例 1 把下列各式分解因式：

(1) $6x^4y^3-12x^2y^4z$；(2) $-3a^2x+6axy-3a$.

解：(1) $6x^4y^3-12x^2y^4z$
$=6x^2y^3\cdot x^2-6x^2y^3\cdot 2yz$
$=6x^2y^3(x^2-2yz)$；

(2) $-3a^2x+6axy-3a$
$=-(3a^2x-6axy+3a)$
$=-3a(ax-2xy+1)$.

首项系数的符号有什么特点？

结果中的“1”还用写吗？

交流

在多项式的因式分解中应当注意什么？

可以看到，多项式的各项的公因式可以这样组成：

(1) 公因式的系数，是多项式中各项系数的最大公约数；

(2) 公因式中字母的指数，是各项中都含有的字母的指数中次数最低的；

(3) 遇到多项式的首项系数为负时，要把负号提取出来，并把括号内各项都改变符号；

(4) 因式分解后要注意检查提取公因式后的另一个因式的项数与分解前是否一致，不要丢项.

练习

把下列各式分解因式：

(1) $6a^2b-10ab^2$；　(2) $3abc^2-15ab^2c+9a^2bc$；

(3) $-2m^3-7mn+14mn^3$；　(4) $56x^3yz+14x^2y^2z-21x^4y$.

例 2 把下列各式分解因式：

(1) $3a(x+y)-2b(x+y)$；

(2) $12(m-n)^3+18(n-m)^2$；

(3) $4p^2(a+3)-3p^2(a+3)^2$.

第(2)题有公因式吗？公因式是什么？

解：(1) $3a(x+y)-2b(x+y)$

$=(x+y)(3a-2b)$；

(2) $12(m-n)^3+18(n-m)^2$

$=12(m-n)^3+18(m-n)^2$

$=6(m-n)^2[2(m-n)+3]$

$=6(m-n)^2(2m-2n+3)$；

(3) $4p^2(a+3)-3p^2(a+3)^2$

$=p^2(a+3)[4-3(a+3)]$

$=p^2(a+3)(-3a-5)$

$=-p^2(a+3)(3a+5)$.

练习

把下列各式分解因式：

(1) $5x(a-b)-7y(a-b)$；　(2) $a(a+b)-5(a+b)$；

(3) $xy(x-y)-x(y-x)$；　(4) $5m(p^2-q)^3-4n(q-p^2)^2$.

练习答案：

(1) $2ab(3a-5b)$；

(2) $3abc(c-5b+3a)$；

(3) $-m(2m^2+7n-14n^3)$；

(4) $7x^2y(8xz+2yz-3x^2)$.

练习答案：

(1) $(a-b)(5x-7y)$；

(2) $(a+b)(a-5)$；

(3) $x(x-y)(y+1)$；

(4) $(p^2-q)^2(5mp^2-5mq-4n)$.

对于例 2 类型的题目，它的特点是公因式是多项式，如果学生理解上感到困难，可以借助“换元”的方法，通过设辅助元来完成. 如第（1）题设 $m=x+y$，将其转化为对 $3am-2bm$ 的因式分解，待学生理解后再省去换元的步骤，直接将 $x+y$ 看成一个整体.

习 题 8-1

★基础★

1. 把下列各式分解因式：
   (1) $6a^4b^3-12a^2b^4c$；
   (2) $8m^3n^2-mn^3p$；
   (3) $15x^3y^2-10x^2y$；
   (4) $-18a^2b^4+27a^3b^3$.
2. 把下列各式分解因式：
   (1) $-8a^2b-4ab+12b^2$；
   (2) $12x^3y^3-8x^2y^3+4x^2y^2$；
   (3) $-4x^3y^2+28x^2y-2xy$；
   (4) $-4a^3b^4+12a^2b^5-16ab^6$.

★★提升★★

1. 把下列各式分解因式：
   (1) $(2x+y)(2x-3y)-3x(2x+y)$；
   (2) $4a(m-n)-2b(n-m)$；
   (3) $7m(x-5)^3-2n(x-5)^2$.
2. 把下列各式分解因式：
   (1) $3p^2(a-x)-2p^2(x-a)$；
   (2) $a(x+y)+b(x+y)-c(x+y)$；
   (3) $3a^2b(2x-y)-6ab^2(y-2x)$.

★★★拓展★★★

用简便方法计算下列各题：

(1) $2.89\times3.51+3.11\times3.51-3.51\times4$；

(2) $\pi R_1^2+\pi R_2^2-\pi R_3^2$，其中 π 取 3.14，$R_1=8$，$R_2=15$，$R_3=16$.

8.3 公式法

1. 运用平方差公式分解因式

把平方差公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 反过来，就得到因式分解的公式：

平方差公式

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b).$$

也就是，两个数的平方差，等于这两个数的和与这两个数的差的积.

交流

具有怎样特征的多项式可以运用这个公式进行因式分解?

例 1 把下列各式分解因式：

(1) $4m^2-n^2$；　　(2) $1-25x^2y^2$.

分析：

(1) $4m^2-n^2=(2m)^2-(n)^2=(2m+n)(2m-n)$.

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

(2) 同理可找到本题中的 $a=1$，$b=5xy$.

解：(1) $4m^2-n^2$

$=(2m)^2-n^2$

$=(2m+n)(2m-n)$；

(2) $1-25x^2y^2$

$=1^2-(5xy)^2$

$=(1+5xy)(1-5xy)$.

思考

把 $4m^2$ 化为 $(2m)^2$，$25x^2y^2$ 化为 $(5xy)^2$ 的根据是什么?[1]

[1] 这里结合复习旧知识，使学生做到在变形中步步有据，防止错误.

8.3 节主要内容有运用平方差公式和完全平方公式分解因式.

1. 运用平方差公式作因式分解，在教材中通过平方差公式引入，逆向得到因式分解公式. 利用“交流”的形式，引导学生观察公式的形式和特点，熟练掌握公式，即两个数的平方差，等于这两个数的和与这两个数的差的积. 它可以把形式是平方差的多项式分解因式.

2. 运用完全平方公式作因式分解，教学引入的方法与平方差公式类似，也是利用“交流”，引导学生观察、研究公式的形式和特点. 即两个数的平方和，加上（或减去）这两个数的积的2倍，等于这两个数的和（或差）的平方. 运用这两个公式，可

练习答案：

1. （1） $\pm 2x$；（2） $\pm \frac{2}{3}y$；

（3） $\pm 7a^2$；

（4） $\pm 10m^2n$；

（5） $\pm 0.1xy^3$；

（6） $\pm \frac{3}{5}x^2y$.

2. （1） $(5+x)(5-x)$；

（2） $(3+y)(3-y)$；

（3） $(9x+8y)(9x-8y)$；

（4） $(0.5a+b)(0.5a-b)$.

［1］运用“整体代换”方法，把多项式 $2x+3y$ 和 $3x+2y$ 分别看做公式中的字母 a 和 b. 另外在因式分解时，要强调分解到不能再分解时为止.

练习答案：

（1） $(2x+m+n)(m-n)$；

（2） $(z+x+y)(z-x-y)$；

（3） $(7a+21b+c)(7a+21b-c)$；

（4） $(4m-n-3)(3n-2m-3)$.

练习

1. 填空：

（1） $4x^2-(\quad)^2$；

（2） $\frac{4}{9}y^2-(\quad)^2$；

（3） $49a^4=(\quad)^2$；

（4） $100m^4n^2=(\quad)^2$；

（5） $0.01x^2y^6=(\quad)^2$；

（6） $\frac{9}{25}x^4y^2=(\quad)^2$.

2. 把下列各式分解因式：

（1） $25-x^2$；

（2） $9-y^2$；

（3） $81x^2 \quad 64y^2$；

（4） $0.25a^2 \quad b^2$.

例 2 把 $(2x+3y)^2-(3x+2y)^2$ 分解因式.[1]

怎样才能运用平方差公式分解因式？

解：$(2x+3y)^2-(3x+2y)^2$

$=[(2x+3y)+(3x+2y)][(2x+3y)-(3x+2y)]$

$=(2x+3y+3x+2y)(2x+3y-3x-2y)$

$=5(x+y)(y-x)$.

练习

把下列各式分解因式：

（1） $(x+m)^2-(x+n)^2$；

（2） $z^2-(x+y)^2$；

（3） $49(a+3b)^2-c^2$；

（4） $(m+n-3)^2-(3m-2n)^2$.

2. 运用完全平方公式分解因式

把完全平方公式 $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$ 反过来，就得到因式分解的公式：

以把形式是完全平方式的多项式分解因式.

3. 因式分解公式中的字母可以表示任何数、单项式或多项式，只要符合公式特点，就可以运用公式分解因式. 在解题中，要提高学生的观察、分析能力，运用“转化”的数学思想方法.

4. 对二次三项式的十字相乘法以及四项式的分组分解法在《义务教育数学课程标准（2011 年版）》中没有要求，为今后进一步学习的需要，以及提高学生分析问题、解决问题的能力，在教材中分别以“探究学习”和“问题解决”的方式提出，供学有余力的学生学习和练习.

完全平方公式

$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$.

也就是，两个数的平方和，加上（或减去）这两个数的积的 2 倍，等于这两个数的和（或差）的平方.

交流

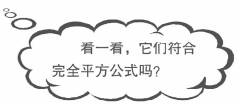
具有怎样特征的多项式可以运用这两个公式分解因式？

例 3 把下列各式分解因式：

（1）$x^2 + 6x + 9$；　　（2）$16m^2 - 40mn + 25n^2$；

（3）$x^4 - 2x^2y^3 + y^6$；

（4）$(m+n)^2 - 12(m+n) + 36$.



分析：对于复杂的题目，如第（2）小题，仍然可以用以下方式找到公式中的 a，b.

$16m^2 - 40mn + 25n^2 = (4m)^2 - 2 \cdot (4m) \cdot (5n) + (5n)^2 = (4m - 5n)^2$.

$a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a - b)^2$

解：（1）$x^2 + 6x + 9$

$= x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2$

$= (x+3)^2$；

（2）$16m^2 - 40mn + 25n^2$

$= (4m)^2 - 2 \cdot (4m) \cdot (5n) + (5n)^2$

$= (4m - 5n)^2$；

（3）$x^4 - 2x^2y^3 + y^6$

$= (x^2)^2 - 2x^2y^3 + (y^3)^2$

$= (x^2 - y^3)^2$；

（4）$(m+n)^2 - 12(m+n) + 36$

$= (m+n-6)^2$.

运用完全平方公式因式分解的关键是先判断所要因式分解的多项式是否符合完全平方公式的特征，由于完全平方公式结构比平方差公式复杂，它的项数为三项，除了检验两数的平方和，更要注意检验两数乘积的 2 倍项是否满足，运用完全平方公式的前提是找准公式中的字母 a 和 b，公式中的 a 和 b 既可以是单项式也可以是多项式.

[1] 运用完全平方公式分解因式时，要根据完全平方公式中“两数乘积的2倍”这项的符号，来选择运用哪一个公式.

练习答案：

1. (1) $(x+5)^2$；
   (2) $(3y-1)^2$；
   (3) $(1-10m)^2$；
   (4) $(m+2n)^2$.
2. (1) $(2x-7y)^2$；
   (2) $(2m^3+13n^2)^2$；
   (3) $-3m(2m-3)^2$；
   (4) $(8x^3+5y^2)^2$.

思考

运用完全平方公式分解因式时，结果是“和”的完全平方，还是“差”的完全平方，由什么决定？[1]

练习

1. 把下列各式分解因式：
   (1) $x^2+10x+25$；　(2) $9y^2-6y+1$；
   (3) $1-20m+100m^2$；　(4) $m^2+4mn+4n^2$.
2. 把下列各式分解因式：
   (1) $4x^2-28xy+49y^2$；　(2) $4m^6+52m^3n^2+169n^4$；
   (3) $36m^2-12m^3-27m$；　(4) $64x^6+80x^3y^2+25y^4$.

例4 把下列各式分解因式：

(1) $2x^2-18$；　(2) $256m^4-81n^4$；
(3) $16x^2-(x^2+4)^2$；　(4) $81a^4-72a^2b^2+16b^4$.

解：(1) $2x^2-18$
$=2(x^2-9)$
$=2(x+3)(x-3)$；

(2) $256m^4-81n^4$
$=(16m^2)^2-(9n^2)^2$
$=(16m^2+9n^2)(16m^2-9n^2)$
$=(16m^2+9n^2)(4m+3n)(4m-3n)$；

(3) $16x^2-(x^2+4)^2$
$=(4x)^2-(x^2+4)^2$
$=-(x^2+4x+4)(x^2-4x+4)$
$=-(x+2)^2(x-2)^2$；

例4和例5是因式分解多种方法的综合运用，一般先判断是否可用提公因式法，然后再检验是否符合平方差公式和完全平方公式的特征，有时需要反复使用公式，因此最后要注意检验是否分解彻底.

(4) $81a^4-72a^2b^2+16b^4$
$=(9a^2-4b^2)^2$
$=(3a+2b)^2(3a-2b)^2$.

例 5 把下列各式分解因式：

(1) $16x^2y-16x^3-4xy^2$；　　(2) $(x^2+1)^2-4x(x^2+1)+4x^2$.

解：(1) $16x^2y-16x^3-4xy^2$
$=4x(4xy-4x^2-y^2)$
$=-4x(4x^2-4xy+y^2)$
$=-4x(2x-y)^2$；

(2) $(x^2+1)^2-4x(x^2+1)+4x^2$
$=(x^2+1)^2-2\cdot(x^2+1)\cdot 2x+(2x)^2$
$=[(x^2+1)-2x]^2$
$=(x^2-2x+1)^2$
$=(x-1)^4$.

探 究 学 习

对二次三项式因式分解的探究

1. 我们学习过 $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$，请你由此探究一个将二次项系数是 1 的二次三项式进行因式分解的公式.

试用你得到的公式，将下列二次三项式分解因式：

(1) x^2-5x+6；

(2) x^2-x-12.

2. 对于二次项系数不为 1 的二次三项式，能用上面类似的方法进行因式分解吗？

试用你想到的方法，将下列二次三项式分解因式：

(1) $3x^2-11x+10$；

(2) $6x^2-11x-10$.

探究学习：

1. (1) $(x-2)(x-3)$；
(2) $(x-4)(x+3)$.
2. (1) $(3x-5)(x-2)$；
(2) $(2x-5)(3x+2)$.

1. 十字相乘法在以后一元二次方程的解法和二次函数的学习中有较为重要的作用，另外在使用它的过程中，分析二次三项式的各项系数特征，进行尝试解决问题的方法也有助于提高学生的分析问题、解决问题的能力，因此作为探究学习的选学内容，可以让学有余力的学生学习. 十字相乘法的重点是二次项系数是 1 的情况，在教学中要把握好难度，切实让学生理解和掌握十字相乘法的基本方法.

2. 运用十字相乘法对二次三项式进行因式分解，关键是理解公式 $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$，体会将常数项分解成 a 与 b 的乘积，同时能将一次项系数拆成 a 与 b 的和，然后写出两个因式 $x+a$ 与 $x+b$. 教学中，要理解并会应用.

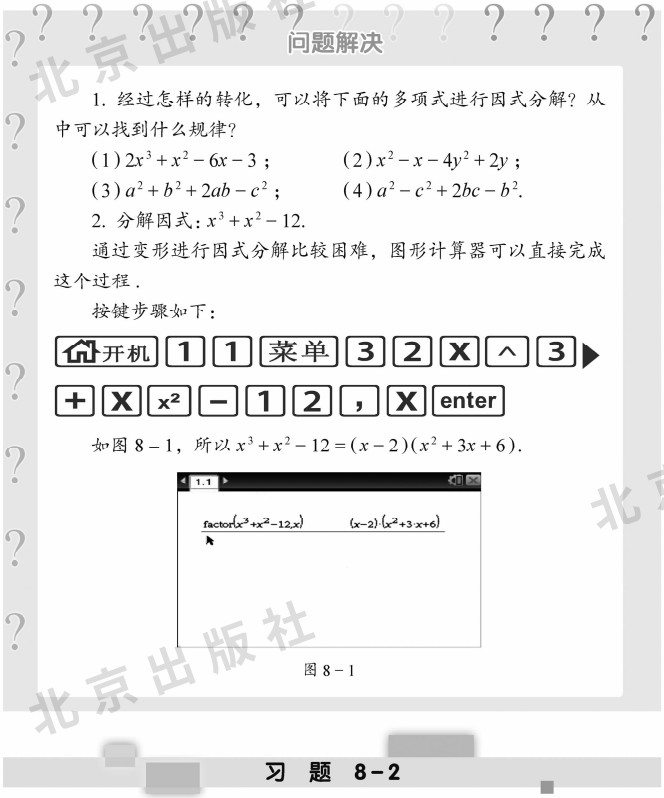
问题解决：

1. (1) $(2x+1)(x^2-3)$；

(2) $(x-2y)(x+2y-1)$；

(3) $(a+b+c)(a+b-c)$；

(4) $(a+b-c)(a-b+c)$.



问题解决

1. 经过怎样的转化，可以将下面的多项式进行因式分解？从中可以找到什么规律？

(1) $2x^3+x^2-6x-3$；　(2) x^2-x-4y^2+2y；

(3) $a^2+b^2+2ab-c^2$；　(4) $a^2-c^2+2bc-b^2$.

2. 分解因式：x^3+x^2-12.

通过变形进行因式分解比较困难，图形计算器可以直接完成这个过程.

按键步骤如下：

如图 8－1，所以 $x^3+x^2-12=(x-2)(x^2+3x+6)$.

图 8－1

习　题　8－2

★基础★

1. 把下列各式分解因式：

(1) $1-a^2$；　(2) $4x^2-25y^2$；

(3) $(2a+x)^2-(a-x)^2$；　(4) $4(a+2b)^2-25(a-b)^2$.

3. 把 x^2+px+q 分解因式时：如果常数项 q 是正数，那么把它分解成两个同号因数，它们的符号与一次项系数 p 的符号相同；如果常数项 q 是负数，那么把它分解成两个异号因数，其中绝对值较大的因数与一次项系数 p 的符号相同. 合理运用这个特征能减少十字相乘时尝试的次数.

1. “问题解决”的第 1 题是分组分解法的运用，关键是观察多项式的结构判断是两两项分组还是一三项分组，一三项分组的特征是能找到完全平方公式的结构. 能用分组分解法进行因式分解的关键是在两两项分组或一三项分组之后，两组之间能找到

2. 把下列各式分解因式：

(1) $-4+b^2$；　　(2) $\frac{16}{25}x^2-\frac{9}{49}y^2$；

(3) $-4+12x-9x^2$；　　(4) $x^2y^2-4xy+4$.

★★提升★★

1. 把下列各式分解因式：

(1) $4m(a-b)-2n(b-a)$；　　(2) $x(x-y)^2-xy(y-x)^2$；

(3) $81a^4-16b^4$；　　(4) $(a-b)-(a^2-b^2)$.

2. 把下列各式分解因式：

(1) a^2b-b^3；　　(2) $18m^2n^2-12mn+2$；

(3) $(n^2+1)^2+4n(n^2+1)+4n^2$.

3. 把下列各式分解因式：

(1) $(p+q)^2-2r(p+q)+r^2$；　　(2) $9(2x-y)^2-6(2x-y)+1$；

(3) $(x+2y)^2-10(x+2y)+25$；　　(4) $(x+a)^2-6(x+a)(x-b)+9(x-b)^2$.

★★★拓展★★★

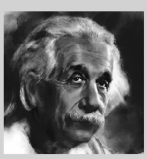
1. 两个连续奇数的平方差能被 8 整除吗？试说明理由.
2. 一块边长为 $a=82.4$ m 的正方形草坪，在四个角各修建一个边长为 $b=6.2$ m 的正方形花坛，问余下的草坪面积多大.

阅读理解

爱因斯坦的速算

爱因斯坦(1879 — 1955)是一位著名的物理学家，他在数学方面也有很高的造诣.

有一天，他生病在家.一位朋友前去探望，为了让爱因斯坦消遣，出了一道计算题：2 976 × 2 924. 题目刚刚出完，爱因斯坦就脱口而出“8 701 824”. 这位朋友十分惊讶，他请爱因



爱因斯坦

公因式使分解进行下去.

2. “问题解决”的第 2 题是让学生利用图形计算器进行因式分解，以开阔学生的眼界，学有余力的学生也可以尝试进行拆、添项，转化成可用学过的方法进行因式分解，对此不做要求.

阅读材料中介绍了爱因斯坦进行速算的知识，要引导学生边读边思考，边思考边计算，也可以思考自己是否也能运用所学过的知识想出一些速算的方法.

斯坦说出是怎样计算的．爱因斯坦说，他把 2 976 拆成 29 和 76，把 2 924 拆成 29 和 24，他发现前面两位数字都是 29，后面两位数字分别是 76 和 24，而它们的和是 100．分别计算 $29\times(29+1)=29\times30=870$，$76\times24=(50+26)(50-26)=50^2-26^2=1\,824$，然后将 870 和 1 824 连着写出来，就得到乘积 8 701 824．这位朋友对爱因斯坦善于观察数字特征、灵活运用数学知识的能力十分佩服．

那么，爱因斯坦速算的理论根据是什么呢？

设 $29=a$，$76=b$，$24=c$，

那么 $2\,976=100a+b$，$2\,924=100a+c$，且 $b+c=100$.

由 $\begin{aligned}(100a+b)(100a+c)&=10\,000a^2+100a(b+c)+bc\\&=10\,000a^2+100a\times100+bc\\&=10\,000a(a+1)+bc.\end{aligned}$

这样，$\begin{aligned}2\,976\times2\,924&=10\,000\times29\times(29+1)+76\times24\\&=870\times10\,000+1\,824\\&=8\,701\,824.\end{aligned}$

通过爱因斯坦速算的故事，你可以想到什么呢？

回顾与整理

知识要点

本章学习的主要内容是因式分解的概念和因式分解的基本方法．

1. 因式分解的概念．

把一个多项式化为几个整式乘积的形式，叫做把这个多项式因式分解，也叫做将多项式分解因式．

2. 因式分解的基本方法．

知识要点

(1) 提公因式法.

$$ma+mb+mc=m(a+b+c).$$

(2) 公式法.

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b);$$

$$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2.$$

学习指导

1. 学习多项式的因式分解，应当注意运用类比的思想方法，通过与整数的因数分解相比较，加深对因式分解概念的理解.

2. 注意提高观察式子结构特点的能力，加强把一个式子看做一个字母的换元思想的练习，为今后应用因式分解打好基础.

3. 要透彻理解多项式的乘法运算与因式分解变形的联系与区别. 它们都可以看做整式的恒等变形，但变形的方向正好相反.

复 习 题

★基础★

1. 把下列各式分解因式:

(1) $5m^2n-15mn^2$;　　(2) $a^4-a^3-a^2$;

(3) $-7x^3y^2-21x^2y^3$;　　(4) $-4a^3b^4+12a^2b^5-16ab^6$.

2. 把下列各式分解因式:

(1) $4ab^2-8a^2b$;　　(2) $-15xy-5x^2$;

(3) $x^3y^3+x^2y^2-xy$;　　(4) $-27x^2y+9xy^2-18xy$.

3. 把下列各式分解因式:

(1) $(x-y)^3-(y-x)^2$;　　(2) $5a^2(x-y)+10a(y-x)$;

(3) $(m-n)^2-10(n-m)+25$;　　(4) $(x+y)^2-2(x+y)(x-y)+(x-y)^2$.

4. 把下列各式分解因式：
(1) $x^2+12xy+36y^2$；　(2) $1-8xy^2+16x^2y^4$；
(3) x^4-8x^2+16；　(4) $4(x-y)^2-4(x-y)+1$.
5. 把下列各式分解因式：
(1) $18x^3-27x^4-3x^2$；　(2) x^4-18x^2+81；
(3) $16a^2b^4-8ab^2c^2+c^4$；　(4) $9(2x-y)^2-6(2x-y)+1$.

★★提升★★

1. 把下列各式分解因式：
(1) $a(x-3)(y-2)+b(3-x)(2-y)$；
(2) $6x(a^2-b^2)-18y(a-b)$.
2. 把下列各式分解因式：
(1) $x^2+\frac{y^2}{9}-\frac{2}{3}xy$；
(2) $16n^2(n-3)^2+72n(n-3)+81$.
3. 写出一个二项式，再把它分解因式.（要求：二项式含有字母 a 和 b，系数、次数不限，并能先用提公因式法再用公式法分解）
4. 如图，在半径为 R 的圆形钢板上，冲去半径为 r 的四个小圆，利用因式分解计算当 $R=7.8$ cm，$r=1.1$ cm 时剩余部分的面积.（π取 3.14）


（第 4 题）

★★★拓展★★★

1. 把下列各式分解因式，并从中归纳出新的因式分解方法.
(1) $8ax+12ay-10bx-15by$；
(2) $2ab-a^2-b^2+4$.
2. 把两个相同的三位数连续写在一起，就得到一个六位数，我们称它为“连续数”.比如 234 234，378 378，926 926，…，请你试说明任何一个连续数都可以被 7，11，13 整除.

部分习题答案或提示

习题 8－1

基础

1. （1）$6a^2b^3(a^2-2bc)$；（2）$mn^2(8m^2-np)$；
   （3）$5x^2y(3xy-2)$；（4）$-9a^2b^3(2b-3a)$.
2. （1）$-4b(2a^2+a-3b)$；（2）$4x^2y^2(3xy-2y+1)$；（3）$-2xy(2x^2y-14x+1)$；
   （4）$-4ab^4(a^2-3ab+4b^2)$.

提升

1. （1）$-(2x+y)(x+3y)$；（2）$2(m-n)(2a+b)$；
   （3）$(x-5)^2(7mx-35m-2n)$.
2. （1）$5p^2(a-x)$；（2）$(x+y)(a+b-c)$；（3）$3ab(2x-y)(a+2b)$.

拓展

（1）原式 $=3.51\times(2.89+3.11-4)=3.51\times2=7.02$；

（2）原式 $=\pi(R_1^2+R_2^2-R_3^2)=3.14\times(8^2+15^2-16^2)=3.14\times33=103.62$.

习题 8－2

基础

1. （1）$(1+a)(1-a)$；（2）$(2x+5y)(2x-5y)$；
   （3）$3a(a+2x)$；（4）$3(7a-b)(3b-a)$.
2. （1）$(b+2)(b-2)$；（2）$\left(\frac{4}{5}x+\frac{3}{7}y\right)\left(\frac{4}{5}x-\frac{3}{7}y\right)$；
   （3）$-(3x-2)^2$；（4）$(xy-2)^2$.

提升

1. （1）$2(a-b)(2m+n)$；（2）$x(x-y)^2(1-y)$；
   （3）$(9a^2+4b^2)(3a+2b)(3a-2b)$；（4）$(a-b)(1-a-b)$.
2. （1）$b(a+b)(a-b)$；（2）$2(3mn-1)^2$；（3）$(n+1)^4$.
3. （1）$(p+q-r)^2$；（2）$(6x-3y-1)^2$；（3）$(x+2y-5)^2$；（4）$(a+3b-2x)^2$.

拓展

1. 答：两个连续奇数的平方差能被 8 整除.
   理由如下：设这两个连续奇数分别为 $2m+1$，$2m+3$（m 为整数）.
   $(2m+3)^2-(2m+1)^2=(4m+4)\times2=8(m+1)$.
   所以两个连续奇数的平方差能被 8 整除.

2. 解：$82.4^2-4\times6.2^2=(82.4+2\times6.2)(82.4-2\times6.2)=94.8\times70=6\ 636$（$m^2$）.
答：余下的草坪面积为 6 636 平方米.

复习题

基础

1. （1）$5mn(m-3n)$；（2）$a^2(a^2-a-1)$；
（3）$-7x^2y^2(x+3y)$；（4）$-4ab^4(a^2-3ab+4b^2)$.
2. （1）$4ab(b-2a)$；（2）$-5x(3y+x)$；
（3）$xy(x^2y^2+xy-1)$；（4）$-9xy(3x-y+2)$.
3. （1）$(x-y)^2(x-y-1)$；（2）$5a(x-y)(a-2)$；（3）$(m-n+5)^2$；（4）$4y^2$.
4. （1）$(x+6y)^2$；（2）$(1-4xy^2)^2$；（3）$(x+2)^2(x-2)^2$；（4）$(2x-2y-1)^2$.
5. （1）$-3x^2(3x-1)^2$；（2）$(x+3)^2(x-3)^2$；
（3）$(4ab^2-c^2)^2$；（4）$(6x-3y-1)^2$.

提升

1. （1）$(x-3)(y-2)(a+b)$；（2）$6(a-b)(ax+bx-3y)$.
2. （1）$\frac{1}{9}(3x-y)^2$ 或写成$\left(x-\frac{y}{3}\right)^2$；
（2）原式$=[4n(n-3)]^2+2\times4n(n-3)\times9+9^2=[4n(n-3)+9]^2=(2n-3)^4$.
3. 答案不唯一，如：$2a^2-8b^4$.
$2a^2-8b^4=2(a^2-4b^4)=2(a+2b^2)(a-2b^2)$.
4. $\pi R^2-4\pi r^2=\pi(R^2-4r^2)=\pi(R+2r)(R-2r)=3.14\times10\times5.6=175.84$（$cm^2$）.

拓展

1. （1）$(2x+3y)(4a-5b)$；（2）$(2+a-b)(2-a+b)$.
2. 解：设一个三位数为 $100a+10b+c$，则由它得到的“连续数”为
$1\ 000(100a+10b+c)+(100a+10b+c)$.
整理得 $(100a+10b+c)\times(1\ 000+1)=1\ 001(100a+10b+c)=7\times11\times13\times(100a+10b+c)$.
所以任何一个“连续数”都可以被 7，11，13 整除.



第九章

数据的收集与表示

教学目标

1. 了解普查和抽样调查的区别，体会抽样的必要性，通过实例了解简单随机抽样.

2. 了解总体、个体、样本及样本容量，体会样本与总体的关系，知道可以通过样本平均数推断总体平均数.

3. 经历收集、整理、描述和分析数据的活动，了解数据处理的过程；能用计算器处理较为复杂的数据.

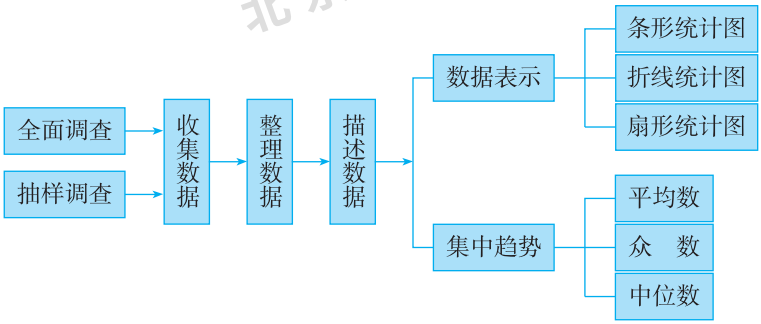
4. 会制作扇形统计图，能用统计图直观、有效地描述数据.

5. 理解平均数的意义，能计算中位数、众数、加权平均数，了解它们是数据集中趋势的描述.

北京出版社

教材分析和教学建议

1. 主要内容及其地位作用.



本章内容属于统计学的范畴，它与前面学习的数、式、方程等内容有着本质的区别. 统计的核心是数据分析，数据是信息的载体，这个载体包括数，也包括言语、信号、图象，凡是能够承载事物信息的东西都构成数据，而统计学就是通过这些载体来提取信息进行分析的科学和艺术. 数据分析可以分为描述性统计分析和推断性统计分析. 描述性统计分析是通过集中趋势、图形表示等来刻画数据；推断性统计分析是利用样本的数据去推断总体的情况.

本章包括两部分，第一部分是数据的收集、整理与表示，包括简单抽样、整理调查数据、绘制统计图表，以及通过计算机绘制统计图. 第二部分是平均数、众数、中位数的概念及计算方法.

本章内容是一些统计的初步知识，但对形成学生的数据分析观念起到至关重要的作用，并对后续学习统计的相关知识打下基础.

2. 本章编写特点.

为了让学生树立数据分析的观念，在本章教材编写中，尽可能地从学生熟悉的问题入手，安排大量的学生活动，通过“交流”、“实践”等栏目让学生参与数据的收集、整理、描述、分析的全过程，在此过程中，学生将不仅仅学习一些必要的知识和方法，同时还将体会数据中蕴含着信息，提高学生运用数据分析问题、解决问题的能力.

由于对较为复杂的数据进行处理时，常常需要用到计算机和计算器，因此，在本章介绍了用计算机绘制统计图和用科学计算器求平均数的方法，以提高学生的兴趣，开阔学生的眼界，感受现代信息技术的广泛应用.

另外，本教材还安排了“综合与实践”栏目，在本章最后的“综合与实践”栏目中，让学生利用树叶的特征对树木进行分类，这一学习活动有利于培养学生的数据分

析意识，体会有许多事情通过数据分析可以抓住本质.

3. 教学重点、难点.

本章的教学重点是数据的收集、整理的方法、步骤以及数据表示的方法，同时也应会平均数、众数及中位数的有关计算；教学难点是数据的收集、整理的步骤. 由于学生遇到的情况可能是各式各样的，对数据如何收集、如何加以整理、如何加以表示都要有一个熟悉的过程，因此初学阶段会有一定的困难.

4. 教学建议.

在数据的收集、整理与表示的教学时，要尽可能地从学生熟悉的实际问题入手，让学生了解在现实生活中有许多问题应当先做调查研究，收集数据，通过分析作出判断，体会数据中蕴含着信息. 对于抽样，要明确并非所有的问题都是抽样越多越好. 数据的来源有两种，一种是现成的数据，另一种是需要自己收集的数据，在进行这部分的教学时，要让学生投入到数据分析的全过程中去，鼓励学生运用所学习的方法，尽可能多地从数据中提取有用的数据.

在学习刻画数据集中趋势的统计量——平均数、众数和中位数时，要注意不是单纯地学习名词和计算方法，并且能够根据问题的背景选择合适的方法和统计量，要让学生了解对于同样的数据可以有多种分析的方法，还要让学生明确统计学对结果的判断标准是“好坏”，而不是“对错”.

数据分析是统计的核心，通过本章的学习，逐步引导学生形成数据分析观念.

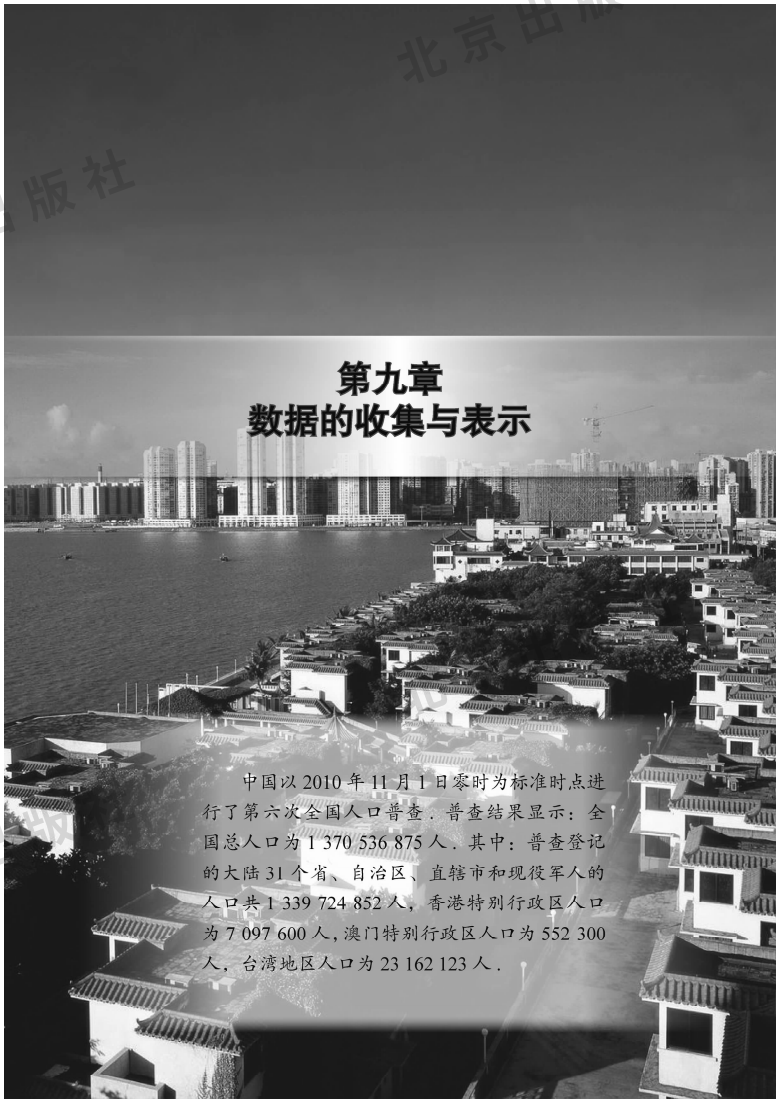
5. 课时安排.

本章教学约需 10 课时，具体分配如下（仅供参考）：

9.1 总体与样本	约 1 课时
9.2 数据的收集与整理	约 1 课时
9.3 数据的表示——扇形统计图	约 2 课时
9.4 用计算机绘制统计图	约 1 课时
9.5 平均数	约 2 课时
9.6 众数和中位数	约 2 课时
总结与复习	约 1 课时

北京出版社

教材及其参考信息


第九章
数据的收集与表示
中国以2010年11月1日零时为标准时点进行了第六次全国人口普查．普查结果显示：全国总人口为1 370 536 875人．其中：普查登记的大陆31个省、自治区、直辖市和现役军人的人口共1 339 724 852人，香港特别行政区人口为7 097 600人，澳门特别行政区人口为552 300人，台湾地区人口为23 162 123人．

一 数据的收集、整理与表示

9.1 总体与样本

当我们打开电视或浏览网页时，许多信息都是通过各种数据传递给我们的．比如，2010 年北京的空气质量优良天数占全年总天数的 88.4%，比 2005 年提高了 14.3 个百分点．又如，在 2010 年第六次全国人口普查中，同 2000 年第五次全国人口普查相比，每 10 万人中具有大学文化程度的由 3 611 人上升为 8 930 人．你知道它们都是怎么得到的吗？

交流

1. 某校七年级（1）班共有 40 名学生，现打算对他们每个人最喜欢的体育项目进行统计，你打算采用什么方法？

2. 要想了解某条河流的水质情况，你打算采用什么方法？

3. 某电器厂开发研制了一种新型节能灯，年产量 50 万只．现打算了解这种型号节能灯的使用寿命，可以采用什么方法？

在上面“交流”的第 1 题中，由于被调查的人数不是很多，我们可以对 40 个人逐一进行问卷调查，然后加以整理．这种方法叫做全面调查（也称为普查）．

在第 2 题中，由于河中水量很大，不可能对全部水质进行化验，所以可以采用抽样的方法对一部分水质进行化验，然后对整条河流的水质进行评估．这种方法叫做抽样调查．

在第 3 题中，要对灯泡的使用寿命进行统计，必须进行“破坏性试验”，当统计出某只灯泡的使用寿命时，它也就作废了，所以我们不可能对每一只灯泡都逐一试验，也只能采用抽样的方法进行调查．

9.1 节介绍了总体与样本的知识，以及对被调查对象采取的两种调查方法，即全面调查和抽样调查.

1. 当被调查的对象数量不太多时，可以对它们逐一进行调查，从而得出结论. 这种方法得出的结论比较真实、可靠. 这种调查的方法称为全面调查. 比如，对全班同学睡眠状况、饮食习惯、喜欢的电视节目等进行调查时均可以采取全面调查.

2. 当被调查的对象数量太多或必须进行“破坏性”试验时，只能采取抽样调查，然后由此评估整体结果. 比如，对全国人口中易患感冒的年龄段、我国土地沙化的变化趋势、大气污染状况、水质污染状况、灯泡的使用寿命、玻璃的耐压程度等进行调

练习

1. 举一个应用全面调查方法的例子.
2. 举一个应用抽样调查方法的例子.

在对数据进行统计时，我们把所要考察对象的全体叫做总体，其中的每一个考察对象叫做个体，从总体中所抽取的一部分个体叫做总体的一个样本，样本中个体的数量叫做样本的容量.

在前面讲到的节能灯的例子中，欲统计这种型号节能灯的平均使用寿命，我们可以随机抽取 500 只节能灯进行试验. 这 50 万只节能灯的使用寿命是总体，其中每只节能灯的使用寿命是个体，所抽取的 500 只节能灯的使用寿命是总体中的一个样本，样本的容量是 500.[1]

我国的杂交水稻育种专家袁隆平被誉为“杂交水稻之父”. 在一次育种试验中，为了测算一块 800 亩[①]试验田里新培育的杂交水稻的产量，随机对其中的 10 亩杂交水稻的产量进行了检测. 在这个例子中，请指出总体、个体、样本、样本的容量各是什么.[2]

思考

9.2 数据的收集与整理

问题　调查、分析某校七年级 (2) 班男生身高的状况.

调查目的　了解该班男生身高状况，并作为三年中跟踪调查的依据.

调查范围　七年级 (2) 班全体男生.

调查方法　由校医务室提供该班男生入学后体检的有关数据.

数据整理　根据调查目的，选择你认为合适的方法对数据加以整理.

① 1 亩 ≈ 666.7 平方米.

[1] 样本的容量只是指个体的数量，不要带上单位. 这里要向学生渗透像这样具有“破坏性”的试验，只能利用样本的数据去推断总体的情况，从而让学生体会样本与总体的关系.

[2] 这块 800 亩试验田的杂交水稻的产量是总体，每亩试验田杂交水稻的产量是个体，随机检测的 10 亩试验田杂交水稻的产量是样本，样本的容量是 10.

查时，都只能采取抽样调查的方法.

9.2 节介绍了数据收集的意义和方法，以及对数据加以整理的几个步骤.

1. 对数据加以收集和整理，是为了了解涉及国事、家事的方方面面的情况，从而为决策提供依据. 如为了有效地治理污染和减少沙化，合理地制定计划生育政策，更好地改善国人的饮食结构和交通状况时，就需要大量收集相关的数据.

2. 在对数据加以整理时，要让学生参与讨论，集思广益，使学生在参与中体会数据蕴含的信息. 教材中通过调查、分析男生身高的实例，介绍了几种对收集到的数据

[1] 表格 1 是对 20 个男生的身高从小到大进行排序，也可以从大到小进行排序，把一组数据进行有序排列以后，将有利于观察每个数据所在的位置.

[2] 表格 2 是对 20 个男生身高所属的范围作了统计，这样把身高分为四个范围以后，每个男生的身高便被限定在某一个范围内，从而便于看到它的大致趋势.

划记是为了便于统计数量，频数与它应一致.

校医务室提供的数据如下（单位：厘米）：

白　羽 166，曹利刚 165，冯小军 164，郭宏志 167，
高　枫 173，靳江川 161，金石开 163，康建军 158，
李立春 160，雷　鸣 164，柳叶宏 168，刘源源 170，
马　刚 165，苏　岩 171，田丰收 162，王风歧 165，
俞力平 169，朱　平 159，张欣欣 162，赵凯雨 168.

下面是甲、乙两个同学对以上数据进行的整理：

甲认为如果能对他们的身高从小到大进行排序，那么将有利于观察某个男生在所有男生中身高的位置，于是他设计了表格 1.

表格 1[1]

（单位：厘米）

1	康建军：158	6	田丰收：162	11	马　刚：165	16	赵凯雨：168
2	朱　平：159	7	金石开：163	12	曹利刚：165	17	俞力平：169
3	李立春：160	8	雷　鸣：164	13	白　羽：166	18	刘源源：170
4	靳江川：161	9	冯小军：164	14	郭宏志：167	19	苏　岩：171
5	张欣欣：162	10	王风歧：165	15	柳叶宏：168	20	高　枫：173

乙认为如果把身高按范围进行分类，那么将能了解该班男生身高的大致分布情况，于是他设计了表格 2.

表格 2[2]

（单位：厘米）

范　围	画　记	频　数
160 以下（含 160）	下	3
161 ~ 165（含 165）	正 丅	9
166 ~ 170（含 170）	正 一	6
170 以上	丅	2

其中频数是指在某个范围内数据的个数.

进行整理的方法. 由于数据的整理没有一个固定的模式，所以要按照所需要解决问题的目的性选取较为合理的整理方法.

3. 教学中要紧密结合学生身边的实例，使学生感到亲切，这样才能使他们更加积极地参与讨论和提出整理方案.

4. 教材中的“实践”活动是为了让学生尝试设计调查方法，主要学习简单随机抽样方法，这是收集数据中通用的方法，在一般情况下，我们都假定样本是通过随机的方法得到的.

教材中的“综合与实践”活动是为了使学生在所给数据的基础上进行操作实践，

交流[1]

甲、乙两个同学采取的整理方法各有什么特点？你认为他们整理数据的方法合理吗？你还有其他的整理方法吗？

实践[2]

请了解本班的同学是否喜欢某电视节目．

调查的结果适用于学校的全体同学吗？适用于本地区的电视观众吗？

如果不适用，应该如何改进调查方法？

综合与实践

运动会成绩整理

在某校秋季田径运动会上，学校规定了获得1～6名的得分标准如下：

名　次	1	2	3	4	5	6
得　分	7分	5分	4分	3分	2分	1分
接力比赛	成绩加倍					
破校纪录	成绩加倍					

大会公布的女生比赛成绩如下：

七年级(1)班：百米赛跑　第1名，第3名，第6名；
铅球比赛　第2名，第3名；
跳高比赛　第3名，第4名；
跳远比赛　第1名，第4名；
400米接力　第1名．

[1] 除了表格1、表格2的整理方法以外，将原始数据进行适当加工整理保存起来，也有利于与下一次体检的数据进行比较．

比如，可以按姓氏笔画的多少、姓氏的英文字母顺序将数据排列，要以方便查找为原则．

[2] 因为同一个班级的学生差异不大，所以不适用于学校的全体同学，更不适用于本地区的电视观众．改进方法：采取简单随机抽样的方法比较合适．可以在上学时在学校门口随机问讯，也可以按学号随机问讯．为了方便，需要把问题数字化，如喜欢这部电视剧的记为1，不喜欢的记为0．

对于本地区的电视观众，因为学生、成年人、老年人喜欢的电视剧往往不同，可以依据年龄分层抽样，或依据职业分层抽样等．

进一步熟悉数据的收集与整理的方法，并作出判断．

5．可以在学生实践的基础上，总结一下数据收集与整理的步骤，让学生各抒己见，畅所欲言；然后再结合“回顾与整理”中知识要点的第2条，总结出数据收集与整理的几个步骤．

七年级（2）班：百米赛跑　第 2 名，第 5 名；
铅球比赛　第 4 名，第 5 名；
跳高比赛　第 1 名，第 6 名；
跳远比赛　第 3 名，第 5 名；
400 米接力　第 2 名．

七年级（3）班：百米赛跑　第 4 名；
铅球比赛　第 1 名（破校纪录），第 6 名；
跳高比赛　第 2 名，第 5 名；
跳远比赛　第 2 名，第 6 名；
400 米接力　第 3 名．

请你根据以上的名次和规定，对各班所得的分数加以整理，并对其成绩加以排序．[1]以下的表格可供参考．

得分 班次 / 项目	七年级（1）班	七年级（2）班	七年级（3）班
百米赛跑			
铅球比赛			
跳高比赛			
跳远比赛			
400 米接力			

练习

1. 下列调查中，适合用普查方法的是（　　）．
A. 了解一批科学计算器的使用寿命
B. 了解北京电视台《北京新闻》栏目的收视率
C. 了解某种奶制品中蛋白质的含量
D. 了解某班学生对“北京精神”的知晓率

［1］七年级（1）班共得 52 分，七年级（2）班共得 36 分，七年级（3）班共得 39 分．

因此，七年级三个班的名次分别为七年级（1）班，七年级（3）班，七年级（2）班．

练习答案：

1. D.

2. 各小组分别搜集下列数据，并对数据加以整理．
（1）全班同学中姓氏分布情况；
（2）全班同学中订阅杂志数量情况；
（3）全班同学中最喜欢某种球类运动的人数；
（4）全班同学中最喜欢某部电视剧的人数．

9.3 数据的表示——扇形统计图

我们能用条形统计图和折线统计图直观且有效地表示收集、整理的数据，下面学习如何用扇形统计图来表示数据．

例 在某次数学测试中，满分为 100 分，测试内容及所占分值的分布情况如下．

一元一次不等式（组）：15 分；　　二元一次方程组：15 分；
整式的运算：25 分；　　观察、猜想与证明：20 分；
因式分解：10 分；　　数据的收集与表示：15 分．

试用扇形统计图表示本次测试内容所占分值的分布情况．

分析：如图 9－1，在圆中，点 O 是圆心，OA，OB 是半径，在圆周上 A，B 两点间的曲线称为圆弧．

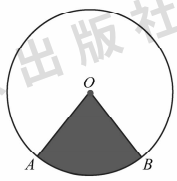


图 9－1

两条半径 OA，OB 与弧 AB 组成的图形叫做扇形，两条半径所夹的角叫做圆心角．

由于顶点在圆心的周角的度数为 360°，因此可以计算出扇形的圆心角的度数占周角的百分比．比如，当扇形的圆心角 $\angle AOB = 72°$ 时，这个扇形占圆面积的 20%，即 $\frac{72°}{360°} = \frac{1}{5} = 20\%$．[1]

解：先分别计算出各测试内容的分数占总分的百分比，再计算出表示每个百分比的扇形圆心角的度数，列出下表：

2. 略．

［1］扇形面积与圆的面积之间的关系，是由扇形的圆心角与周角的度数之比决定的．

9.3 节是数据的表示，将整理的数据借助扇形统计图直观地加以表示．

1. 扇形统计图是借助于图中扇形面积的大小来反映一组数据的关系，绘制的图形比较美观，但工作量较大．

2. 扇形的概念由于过去没有介绍过，因此在讲扇形统计图之前，先要介绍扇形的概念以及圆心角的计算方法．通过例题的表格可以反映出画图的准备过程．

[1] 图 9－3 中的扇形统计图富有立体感. 扇形统计图在很多地方都会见到，因此可以教给学生画这种图的方法.

测试内容	所占分值	百分比	圆心角度数
一元一次不等式（组）	15	15%	360° × 15% = 54°
二元一次方程组	15	15%	360° × 15% = 54°
整式的运算	25	25%	360° × 25% = 90°
观察、猜想与证明	20	20%	360° × 20% = 72°
因式分解	10	10%	360° × 10% = 36°
数据的收集与表示	15	15%	360° × 15% = 54°

然后用量角器画出这些扇形（如图 9－2）.

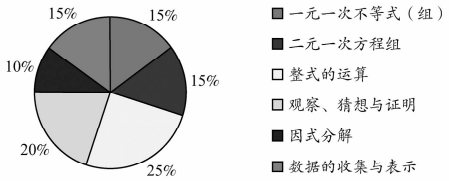


图 9－2

这种用扇形表示数据的方法，称为扇形统计图.

我们还可以把扇形统计图画成图 9－3 的形式.[1]

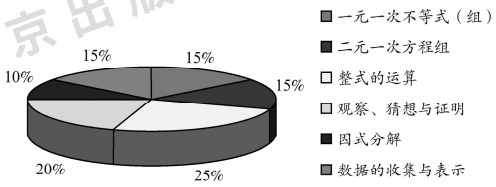


图 9－3

练习

七年级(3)班共有40名同学，骑自行车上学的有10人，乘公交车上学的有15人，步行的有10人，家长用车送的有5人．试用扇形统计图表示出该班同学采用不同方式上学的人数．



交流[1]

条形统计图、折线统计图和扇形统计图分别适用于哪一类的实际问题？

9.4 用计算机绘制统计图

用计算机软件 Microsoft Excel 2003 制作扇形统计图的方法如下：

打开 Microsoft Excel 2003，将需要制图的数据输入到单元格中(图 9－4)，选中需要制图的数据所在的单元格(图 9－5)，单击 插入 — 图表，此时会出现一个“图表向导－4 步骤之 1－图表类型”对话框，在“标准类型”中选择“饼图”(图 9－6)；单击 下一步，进入“图表向导－4 步骤之 2－图表源数据”；继续单击 下一步，进入“图表向导－4 步骤之 3－图表选项”，在“数据标志”中选择“百分比”(图 9－7)；最后单击 完成 即可，所得图表如图 9－2 所示．

条形统计图和折线统计图的制作方法与扇形统计图的制作方法类似，只是在出现“图表向导－4 步骤之 1－图表类型”对话框时，在“标准类型”中选择“条形图”或“折线图”即可．[2]

[1]“交流”中提出的问题不太好回答，要让学生进行讨论，各抒己见．

通常要表示某组数据的变化过程或变化趋势时，用折线统计图较好；当已知一组数据的总和及各部分的数据时，采取扇形统计图较好；要反映没有明显相关联系的各组数据时，用条形统计图较好．

但以上的情况也不是绝对的，要根据实际情况灵活选用不同的表示方法．

[2] 若教材中下一页的图例太小看不清，可利用大屏幕进行演示．

9.4 节介绍了用计算机绘制统计图的方法．

借助计算机绘制统计图，是利用现代化教学手段实现数据表示的一种方法，运用计算机绘制的统计图准确、精美．在有条件的学校应尽可能使用；若有的学校条件暂不具备，可先缓讲，以后再介绍，也可由教师进行演示．

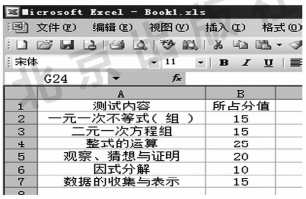


图 9－4

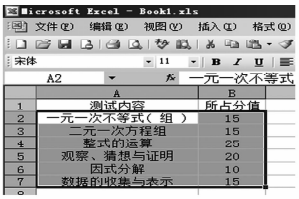


图 9－5



图 9－6

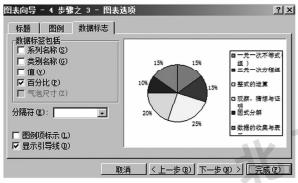


图 9－7

习 题 9－1

★基础★

1. 要统计全班同学登上八达岭长城的人数情况，你准备采取哪种方法进行调查？
2. 要想了解北京市市民习惯使用左手的人数占全市人口的比例，你认为应采用哪种调查方法？
3. 要想测算北京市市民拥有手机的人数占全市人口的比例，你认为应采取什么调查方法？
4. 某班在为西部地区儿童捐赠的图书中，文史类共 80 本，科普类共 60 本，教辅类共 120 本，其他共 140 本．试用扇形统计图反映出捐赠的各类图书的情况．

★★提升★★

对世界四大洋的面积取近似值，它们的面积如下所示．

北冰洋：1.3×10^7 千米^2；　　印度洋：7.5×10^7 千米^2；

大西洋：9.3×10^7 千米^2；　　太平洋：1.8×10^8 千米^2.

试用计算机绘制扇形统计图表示世界四大洋的面积．

★★★拓展★★★

查询有关资料，自编三道题目，分别用条形统计图、折线统计图和扇形统计图加以表示．

二 平均数、众数和中位数

9.5 平均数

问题一　小莉和小颖到射箭场练习射箭，教练让每人各射了 5 箭，她们的成绩如下（单位：环）．

小莉：4，6，5，10，3.

小颖：5，7，8，4，6.



教练问她们俩："你们认为谁的射箭成绩好一些？"

小莉说："我有一个满分 10 环，所以我的成绩好．"

小颖说："我的平均成绩比小莉的高，所以我的成绩好．"

你觉得小莉和小颖谁说得有道理呢？[1]

1. 算术平均数

把一组数据的和除以这组数据的总个数，得到的数值叫做这组数据的算术平均数，简称平均数．

［1］问题一中由于小莉和小颖是分别独立地射了 5 箭，因此不能只从某一箭环数的多少作出定论，而应以 5 箭的平均数作为依据．此问题可以让学生对算术平均数先有一个感性认识，然后再引入相关知识的教学．

9.5 节介绍了平均数的概念及求平均数的方法．

1. 平均数是一类经常用到的数据类型，它是由一组数据的和除以这组数据的总个数得到的，又称算术平均数．

2. 算术平均数的计算公式是根据定义来表示的，即用这组数据的和$(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n)$除以这组数据的总个数(n)．

3. 简化计算法是为了减少求平均数的计算量而采取的一种计算方法．使用这种方法应有一个条件，即这组数据的值都在某个常数左右波动，这样用这种方法才比较简捷．公式$\overline{x}=\overline{x}'+a$ 的推导过程如下：

［1］由于102，104，106，108，103，107这6个数据都接近常数100，因此可以用简化计算法求平均数.

实践

分别计算小莉和小颖5次射箭成绩的算术平均数.

小莉：$\frac{1}{5}(4+6+5+10+3)=\frac{1}{5}\times 28=5.6$(环).

小颖：$\frac{1}{5}(5+7+8+4+6)=\frac{1}{5}\times 30=6.0$(环).

显然小颖的平均成绩高于小莉的平均成绩，因此小颖的射箭成绩好一些.

探索[1]

求数据102，104，106，108，103，107的算术平均数. 用不同的计算方法试一试.

解法1：$\frac{1}{6}\times(102+104+106+108+103+107)$

$=\frac{1}{6}\times 630$

$=105$；

解法2：$\frac{1}{6}\times(102+104+106+108+103+107)$

$=\frac{1}{6}\times[(100+2)+(100+4)+(100+6)+(100+8)+(100+3)+(100+7)]$

$=\frac{1}{6}\times(600+30)$

$=100+5$

$=105.$

设接近平均数的常数为a，数据x_1，x_2，x_3，…，x_n与a的差分别为x_1-a，x_2-a，x_3-a，…，x_n-a，它们的平均数为$\bar{x}'$，则

$$\bar{x}'=\frac{1}{n}[(x_1-a)+(x_2-a)+\cdots+(x_n-a)]=\frac{1}{n}[(x_1+x_2+\cdots+x_n)-na]$$

$$=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)-a=\bar{x}-a.$$

$\therefore \bar{x}=\bar{x}'+a.$

4. 加权平均数可以简化计算，即把某些加法运算转化为乘法运算. 这里出现了

在解法 2 中，由于各数据都很接近 100，因此把 100 作为一个基数，再求出每个数据与 100 的差，求出差 2，4，6，8，3，7 的算术平均数，然后再加上 100 就可以了，这种求算术平均数的方法称为简化计算法．

练 习

求下列各组数据的算术平均数：

(1) 2 007，2 012，2 001，2 002，2 008，2 003，2 004；

(2) 991，993，995，992，990，997，999，998，1 000．

一组数据的算术平均数的计算公式如下：

设 n 个数据分别为 x_1，x_2，x_3，…，x_n，它们的算术平均数为 $\bar{x}$，那么

$$\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n).$$

简化计算法的计算公式如下：

设接近平均数的常数为 a，n 个数据与 a 的差分别为 x_1-a，x_2-a，x_3-a，…，x_n-a，这些数据的算术平均数为 $\bar{x}'$，那么 n 个数据的算术平均数 $\bar{x}$ 为：

$$\bar{x}=\bar{x}'+a.$$

交 流 [1]

在青年歌手大奖赛中，八位评委给选手甲的打分分别为：8.84，9.32，9.41，9.63，9.75，9.78，9.72，9.96．去掉一个最高分，去掉一个最低分，然后求出其余数据的平均值，以此作为这位选手的最后得分．为什么要去掉最高分和最低分呢？

2. 加权平均数

问题二　在一次有 20 人参加的数学竞赛中，其中得 90 分的有 3 人，得

练习答案

(1) $\bar{x}=\bar{x}'+2\,000.$

$\bar{x}'=\frac{1}{7}(7+12+1+2+8+3+4)$

$\approx 5.3.$

$\therefore \bar{x}\approx 5.3+2\,000$

$=2\,005.3.$

(2) $\bar{x}=\bar{x}'+1\,000.$

$\bar{x}'=\frac{1}{9}(-9-7-5-8-10-3-1-2+0)$

$=-5.$

$\therefore \bar{x}=\bar{x}'+1\,000$

$=995.$

[1] “交流”中去掉八个数据中的一个最高分和一个最低分，目的是尽可能减少人为因素的影响，这样得到的平均分能比较真实地反映歌手的实际水平.

“权”这个新概念，因此可以向学生简要的作一些介绍. “权”是“权数”的简称，在这一组数据中，数据重复出现的次数叫做这个数据的权数. 按这种方法求出的平均数叫做加权平均数.

5. 对于用科学计算器求平均数的方法，教材中介绍的步骤是对 A 型或 B 型计算器而言的，如果使用的是其他型号的计算器，则要参看计算器的使用说明.

练习答案：

$$\bar{x}=\frac{1}{19}(1\times2+2\times2+3\times3+5\times3+6\times3+7\times1+8\times5)$$
$$=\frac{1}{19}\times95$$
$$=5.$$

85 分的有 6 人，得 80 分的有 5 人，得 75 分的有 4 人，得 70 分的有 2 人．计算这些同学数学竞赛的平均成绩．

解：$\bar{x}=\dfrac{3\times90+6\times85+5\times80+4\times75+2\times70}{3+6+5+4+2}$

$=\dfrac{1620}{20}$

$=81$(分)．

即这些同学数学竞赛的平均成绩是 81 分．

在一组数据中，数据重复出现的次数 f 叫做这个数据的权数，简称为这个数据的权．按照这种方法求出的平均数，叫做加权平均数．

加权平均数的计算公式为：

如果数据 x_1 出现 f_1 次，x_2 出现 f_2 次，x_3 出现 f_3 次……x_k 出现 f_k 次，这组数据的平均数为 $\bar{x}$，那么

$$\bar{x}=\frac{1}{n}(f_1x_1+f_2x_2+f_3x_3+\cdots+f_kx_k).$$

(其中 $n=f_1+f_2+f_3+\cdots+f_k$)

练习

求下列数据的平均数：

1，1，2，2，3，3，3，5，5，5，6，6，6，7，8，8，8，8，8.

用科学计算器求平均数快捷、准确．

例 8 袋小麦的质量分别为(单位：千克)：

97，98，98，99，100，101，101，102.

求这 8 袋小麦质量的平均数．

解：步骤如下：

	具体操作	结 果
A 型计算器	(97 + 98 × 2) + 99 + 100 + 101 × 2 + 102) ÷ 8 enter	99.5
B 型计算器	(97 + 98 × 2) + 99 + 100 + 101 × 2 + 102) ÷ 8 = SHIFT	99.5

答：这 8 袋小麦质量的平均数为 99.5(千克).

实践 [1]

为了检查一批盒装牙签的数量，随机抽出 100 盒进行抽样检测，检测结果如下表所示：

根 数	71	72	73	74	75	76	77	78	79
盒 数	7	16	19	20	16	15	4	1	2

1. 试用科学计算器求出每盒牙签数量的平均数.
2. 如果这批盒装牙签有 10 000 盒，试估计这批牙签的总数量.

9.6 众数和中位数

思考

为了了解某班同学的睡眠状况，对全班 45 名同学一天的平均睡眠时间统计如下：

平均睡眠时间 / 时	7.5	8	8.5	9
人 数	12	26	6	1

你认为该班同学的睡眠状况合理吗?

我们看到:在全班 45 名同学中,一天平均睡眠为 8 小时的人数最多,

[1] 每盒牙签数量的平均数是 74；估计这批牙签的总数量是 740 000.

通过“实践”，体会样本与总体的关系，知道可以通过样本平均数估计总体平均数.

9.6 节介绍了众数和中位数的概念及求法.

1. 众数是指在一组数据中出现次数最多的那个数据，它反映了这组数据的集中趋势. 比如，在全班 50 名同学中，年龄为 13 岁的同学共有 42 人，说明全班同学的年龄集中在 13 岁. 如果一组数据中有两个数据出现的次数都是最多的，那么这两个数据都是这组数的众数. 如一组数据 3，1，4，5，7，3，8，4 的众数是 3 和 4.

2. 中位数是将一组数据按大小依次排列后，处于中间位置的数（或中间两数的平均数），它反映了这组数据的集中趋势. 在求中位数时，必须将这组数据从小到大（或从大到小）依次排列，否则无法求出中位数.

我们称 8 小时为这组数据的众数.

一组数据中出现次数最多的那个数据，叫做这组数据的众数.

交流

某城市 7 月份的日平均气温统计如下：

日平均气温/℃	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
天　数	1	2	2	3	3	4	5	6	4	1

在日平均气温这组数据中，众数是多少？

我们看到：在以上表示气温的数据中，29 ℃出现的频数最多，我们就说这组数据中的众数是 29 ℃.

将一组数据按大小依次排列，处于中间位置的那个数（或中间两数的平均数），叫做这组数据的中位数. 中位数可以刻画一组数据的集中趋势.



例 1 某校篮球队五名主力队员的身高分别为（单位：米）：1.68，1.80，1.76，1.75，1.70. 在这组数据中，中位数是多少？

解：将这组数据由小到大排列如下：

1.68，1.70，1.75，1.76，1.80.

由于这组数据的个数是奇数，所以这组数据的中位数为 1.75（米）.

例 2 李萍同学在八次跳绳中，每半分钟跳的次数分别为：20，31，26，34，37，28，29，32. 求这组数据的中位数.

解：将这组数据由小到大排列如下：

20，26，28，29，31，32，34，37.

由于这组数据的个数是偶数，处于中间位置的数据是 29 和 31，我们取这两个数的平均数作为这组数据的中位数，即

$$\frac{29+31}{2}=30.$$

所以这组数据的中位数是 30（次）.

3. 当一组数据的个数是奇数时，它的中位数是中间位置的数；当一组数据的个数是偶数时，它的中位数是中间两数的平均数. 学生对此要加以区分.

4. 在“思考”第 3 题中，中位数不会受到极端数值的影响. 比如，2，4，5，6，10，12，13 这七个数的中位数是 6，将两端的数 2 变成 3，13 变成 14，那么数据 3，4，5，6，10，12，14 的中位数仍是 6.

5. 在“交流”和例 3 中，平均数、中位数、众数都是刻画数据集中趋势的方法，因为方法不同，得到的结论也可能不同. 很难说哪一种方法是对的，哪一种方法是错的，我们只能说，能够更客观地反映实际背景的方法要更好一些. 在这组数据中有差异较

练习

1. 一组数据 5，4，4，3，4，3，2，3，5，3 的众数是多少？
2. 一组数据 11，3，4，4，6，11，10，11，5 的众数是多少？
3. 孙斌同学七次投掷铅球的成绩记录如下（单位：米）：
   5.1，5.3，5.8，5.9，5.0，5.2，5.8.
   指出这组数据的中位数．
4. 某班生物小组的八名同学各用 10 粒种子做发芽实验，几天后种子的出芽数分别为：
   8，7，10，6，5，4，9，6.
   求以上数据的众数和中位数．
5. 在某次数学能力测试中，七年级（1）班第 1 小组七名同学的成绩如下（单位：分）：
   50，80，72，95，63，78，100.
   求这组数据的中位数．

思考

1. 当一组数据的个数是奇数时，如何求它的中位数？
2. 当一组数据的个数是偶数时，如何求它的中位数？
3. 中位数是否会受到按大小顺序排列后极端数值的影响？

交流

某校为了合理地安排早自习的时间，随机地对该校 20 名同学从家到学校所用的时间进行了调查，数据如下（单位：分）：

15	35	50	10	60	80	40	30	20	120
30	45	15	35	25	30	45	30	55	60

用什么统计方法能比较科学地表示学生从家到学校所用的时间？

同学甲认为：采用求算术平均数的方法把 20 个数据全部用上了，因此以

练习答案：

1. 众数是 3.
2. 众数是 11.
3. 将这组数据由小到大排列为 5.0，5.1，5.2，5.3，5.8，5.8，5.9，所以它的中位数为 5.3.
4. 将这组数据由小到大排列为 4，5，6，6，7，8，9，10，所以众数为 6，中位数为 6.5.
5. 将这组数据由小到大排列为 50，63，72，78，80，95，100，所以中位数为 78.

大的数据，这会导致平均数较大，因此，用中位数或众数要比用平均数更客观一些．这正反映了统计学对结果的判断标准是“好坏”，而不是“对错”．

它作为根据比较科学．他得出的统计结果为：

$$\frac{1}{20}\times 830=41.5(\text{分}).$$

同学乙认为：采用众数的方法可以代表较多的人的实际情况，结果比较可靠．于是他先列了一个表，如下：

时间／分	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	80	120
频　数	1	2	1	1	4	2	1	2	1	1	2	1	1

从表中看出所用时间的众数是 30，于是他把 30(分) 作为统计结果．

同学丙认为：平均数法受到极端数值（比如 120 分）的影响比较大，而利用众数的方法只能反映出其中一部分的状况，也存在缺点，因此他认为中位数可以比较客观地反映出实际情况．所以他把这组数据由小到大排列如下：

10　15　15　20　25　30　30　30　30　35　35　40　45　45　50　55　60　60　80　120

处于最中间的两个数是 35，35．把它们的平均数 35(分) 作为统计结果简便、可靠．

在统计中，采用的方法不同，得到的结论也可能不同．[1]

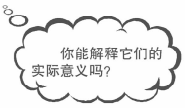
例 3 某公司共有 15 人，他们的月工资情况如下表．计算该公司的月工资的平均数、中位数和众数．

职　务	经　理	副经理	职　员
人　数	1	2	12
月工资／元	5 000	2 000	800

解：该公司月工资的中位数和众数均为 800 元，而月工资的平均数为

$$5\,000\times\frac{1}{15}+2\,000\times\frac{2}{15}+800\times\frac{12}{15}=1\,240(\text{元}).$$

所以，该公司的月工资的平均数、中位数和众数分别是 1 240 元，800 元，800 元．



［1］甲、乙、丙三个同学的方法各有各的道理．甲采用的方法容易受极端数据的影响，如所用时间为 120 分钟的只有一名同学，但这个极端数据却将平均数提高了许多，因此甲的方法不是很科学．

乙采用的是利用众数的方法，虽然众数反映了有四名同学所用的时间为 30 分钟，但他们在 20 名同学中所占的比例还是有限的，因此也不是很科学．

丙采用的是中位数法，它不受极端数据的影响．因此丙说的方法相对要好一些．

练习

为了了解某种灯泡的使用寿命，随机抽取 100 只进行使用寿命试验，数据如下：

寿命 / 时	450	550	650	750	850
只　数	20	19	30	21	10

分别求出灯泡使用寿命这组数据的平均数、众数和中位数．

练习答案：

平均数是 632 小时，众数是 650 小时，中位数是 650 小时．

习　题　9－2

★基础★

1. 一组数据 3，8，6，7，x 的平均数是 6，求 x 的值．
2. 在一次歌咏比赛中，六个评委给周小红打的分数分别为：8.1，7.5，8.3，8.4，9.0，8.0．为了尽可能减少人为因素的影响，去掉一个最高分，去掉一个最低分，那么，周小红的平均分是多少？
3. 已知数据 x_1，x_2，x_3 的平均数是 5，求数据 x_1+1，x_2+1，x_3+1 的平均数．
4. 5 个数的平均数是 8，其中 4 个数的和是 36，求另一个数的值．
5. 有 5 个数，前 3 个数的平均数是 6，后 2 个数的平均数是 8，求这 5 个数的平均数．

★★提升★★

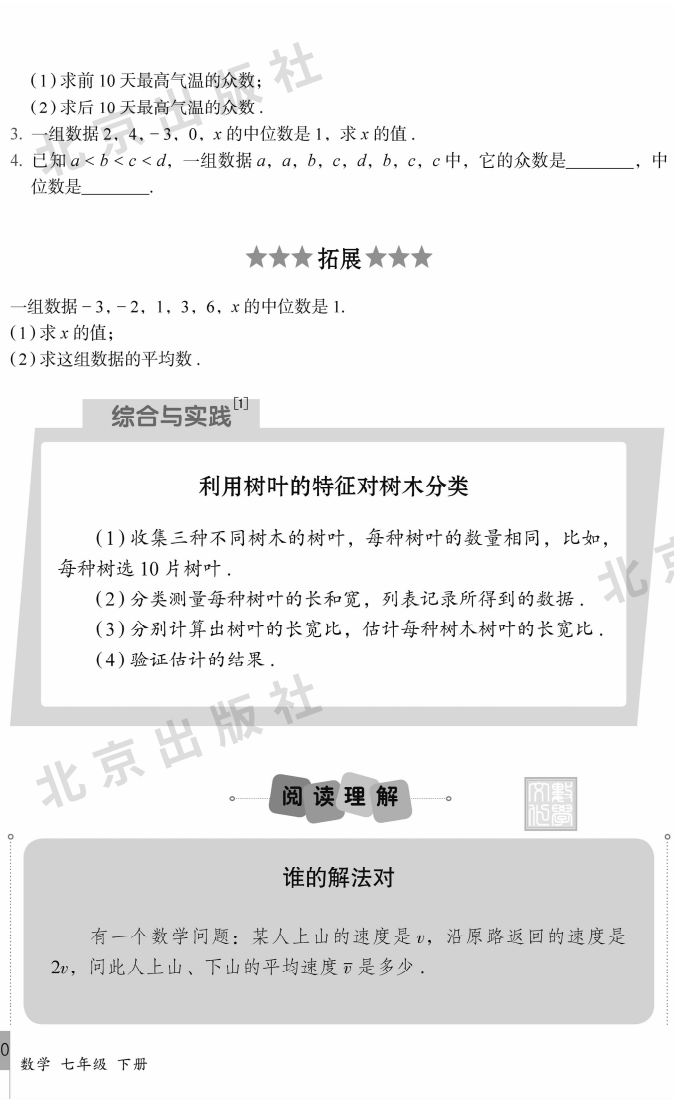
1. 春季运动会上 12 名男生的跳高成绩如下（单位：厘米）：

   158，157，161，158，158，165，160，164，158，166，165，164．

   这组数据的众数是多少？
2. 某同学在报纸上查阅了 5 月 1 日—5 月 15 日某地最高气温的一组数据，列成下表：

日　期	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
气温 /℃	20	24	23	26	23	21	18	19	22	23	26	27	26	28	29

［1］在“综合与实践”中，学生先通过数据收集和分析知道一些树的树叶的长与宽的比；对于新采集到的树叶，通过长与宽的比来判断这个树叶是属于哪种树. 这一学习活动有利于培养学生的数据分析意识，体会有许多事情通过数据分析可以抓住本质. 知道数据不仅仅是别人提供的，还可以自己收集；对于同一种树，树叶长与宽的比也可能是不一样的，进一步感受数据的随机性；体会只要有足够的数据，就能够分析出一些规律性的结论.



(1) 求前 10 天最高气温的众数；
(2) 求后 10 天最高气温的众数.

3. 一组数据 2，4，−3，0，x 的中位数是 1，求 x 的值.
4. 已知 $a<b<c<d$，一组数据 a，a，b，c，d，b，c，c 中，它的众数是_____，中位数是_____.

★★★拓展★★★

一组数据 −3，−2，1，3，6，x 的中位数是 1.
(1) 求 x 的值；
(2) 求这组数据的平均数.

综合与实践[1]

利用树叶的特征对树木分类

(1) 收集三种不同树木的树叶，每种树叶的数量相同，比如，每种树选 10 片树叶.
(2) 分类测量每种树叶的长和宽，列表记录所得到的数据.
(3) 分别计算出树叶的长宽比，估计每种树木树叶的长宽比.
(4) 验证估计的结果.

阅读理解

谁的解法对

有一个数学问题：某人上山的速度是 v，沿原路返回的速度是 $2v$，问此人上山、下山的平均速度 $\overline{v}$ 是多少.

180 数学 七年级 下册

“综合与实践”的说明：

我们可以抓住树的某些特征对树进行分类，本例是利用树叶的数据特征来对树进行分类. 教学中可以作如下设计：

（1）建议采用小组活动的形式，学生通过合作交流可以获得较多的数据和信息.

（2）为了使分析的结果更加明显，最好选择树叶区别较大的三种（或者更多）树，而每种树选择的树叶的大小要接近，即区别要小一些.

（3）“估计每种树树叶的长宽比”的方法可以是多样的，比如，对于每种树的 10 片树叶都测量了长和宽以后，可以用 10 个比值的众数，也可以用 10 个比值的中位数，

小明看完题目后，他联想到求两个数 x_1，x_2 的平均数的方法，即 $\overline{x}=\frac{x_1+x_2}{2}$，于是他很快便得出了这道题的答案：$\overline{v}=\frac{v+2v}{2}=\frac{3v}{2}$.

小军不同意小明的解法，他说："这个问题和学过的求平均数的问题不完全一样，它涉及路程、速度、时间之间的关系．由于下山速度是上山速度的 2 倍，所以当路程不变时，下山所用时间等于上山所用时间的一半．"于是他得出了下面的答案：

设上山时间为 t_1，下山时间为 t_2，由于下山速度是上山速度的 2 倍，所以下山时间为上山时间的一半，即 $t_2=\frac{1}{2}t_1$．

$$\therefore\quad \overline{v}=\frac{v+2v}{t_1+t_2}=\frac{3v}{t_1+\frac{t_1}{2}}=\frac{2v}{t_1}.$$

小刚说："速度的和除以时间的和不等于平均速度，平均速度应该等于路程的和除以时间的和，所以应该采用下面的方法求解．"小刚的解法是：

设单程的路程为 s，根据题意，得上山所用的时间为 $\frac{s}{v}$，下山所用的时间为 $\frac{s}{2v}$．那么往返所用的时间和为 $\frac{s}{v}+\frac{s}{2v}$．

$\therefore$ 往返的平均速度 $\overline{v}$ 为

$$\overline{v}=\frac{s+s}{\frac{s}{v}+\frac{s}{2v}}=\frac{2s}{\frac{3s}{2v}}=\frac{4v}{3}.$$

请你分析，小明、小军、小刚三位同学谁说得有道理．

还可以把长和宽各自相加后，取和的比值．针对这个问题，用后一种方法比较合适．

（4）取一片新的树叶，通过这片树叶的长宽之比，参照（3）的估计结果，来判断这片树叶属于哪种树．学生会发现，即使是同一棵树，叶子长与宽的比值恰好等于估计值的可能性也很小，这体现了数据的随机性．可以进一步启发学生考虑一个合理的方案：只要比值大概等于估计值，就可以认为是同一种树，也就是说，需要构造一个以估计值为中心的数值区间，当新取的树叶的长宽比值属于这个区间时就认为属于这个树种．如何合理地构造这个数值区间是重要的，区间太短则可能拒绝同类树种，区间太长则判断的精度就要差．可以考虑下面的方法：当估计值是中位数时，区间由

回顾与整理

知识要点

1. 为了对生活中的事物做出合理的决策或可靠的预测，必须掌握数据的收集、整理方法，并会对结果作科学的分析和恰当的描述．

2. 数据的收集和整理的步骤是：

(1) 明确收集数据的目的．

(2) 确定被调查对象的范围．

(3) 选择收集与整理的方法．

(4) 写出分析报告．

3. 采用绘制扇形统计图可以鲜明生动地表示数据的百分比．

4. 用平均数(或加权平均数)、众数和中位数可以描述一组数据的集中趋势．

(1) 平均数公式：$\overline{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n)$；

$$\overline{x}=\overline{x'}+a.$$

(2) 加权平均数公式：$\overline{x}=\frac{1}{n}(f_1x_1+f_2x_2+f_3x_3+\cdots+f_kx_k)$.

(其中 $n=f_1+f_2+f_3+\cdots+f_k$)

(3) 众数：一组数据中出现次数最多的那个数据，叫做这组数据的众数．

(4) 中位数：一组数据按大小顺序依次排列，处于中间位置的数(或中间两数的平均数)，叫做这组数据的中位数．

学习指导

1. 为了适应国民经济和科学技术的发展，收集与整理数据的意义显得更加重要，所以要认真学习统计的基础知识，加强统计观念，提高对事物的分析、决策和预测能力．

2. 正确掌握数据的收集、整理和表示的方法，养成认真、严谨的好习惯．

比中位数小两位的比值和比中位数大两位的比值构成；当估计值是平均数时，区间的长度为平均数 $\pm\sigma$，或者平均数 $\pm 2\sigma$，其中 σ 是样本标准差．让学生感悟决定数值区间的道理（可以告诉学生，进一步的学习，将会从理论上计算区间的长度）.

学习指导

3. 注意留心身边的各种问题，加强收集数据的意识，熟悉收集、整理和表示数据的方法．

4. 要学会选择合理、简捷的表示数据的方法，学会用计算机绘制统计图的方法．

5. 掌握用平均数、众数和中位数从各种不同的角度分析一组数据的集中趋势的方法，让平均数、众数和中位数等数据在解决实际问题中发挥应有的作用．

复习题

★基础★

1. 为了了解全班同学体重的状况，李新同学把一次体检中 25 名男同学的体重作了记录，整理如下（单位：千克）：

45 49 55 58 54 50 57 44 60 62 61 51 53
56 48 52 54 50 47 59 52 58 54 51 49

请你设计一种统计的方法，对该班男生的体重进行分类，并提出建议．

2. 对全班同学最喜欢的体育项目进行统计，并把统计的结果设计成统计表．这属于哪类调查？

3. 对 10 天的天气状况进行观测、记录，并设计一个统计表．

4. 全班同学每人分别投掷硬币两次，统计一下，正面朝上的次数共出现多少次，统计它占总投掷次数的百分比．

5. 统计一下全班同学家中收藏有中国古代四大名著《三国演义》、《水浒传》、《西游记》、《红楼梦》的数目，并分别用条形统计图和扇形统计图加以表示．

6. “众志成城，抗震救灾”．某小组 7 名同学积极捐出自己的零花钱支援灾区．他们捐款的数额分别是（单位：元）：50，20，50，30，50，25，135．分别求这组数据的众数和中位数．

7. 某校在“爱护地球，绿化祖国”的活动中，组织同学开展植树造林活动．为了解全校同学的植树情况，学校随机抽查了 100 名同学的植树情况，将调查数据整理如下表：

植树棵数 / 棵	4	5	6	8	10
人　数	30	22	25	15	8

那么这 100 名同学平均每人植树多少棵？如果该校共有 1 000 名同学，请根据以上调查结果估计该校同学共植树多少棵．

★★提升★★

1. 对于数据 2，2，3，2，5，2，10，2，5，2，3，有以下几种说法：
(1) 众数是 2；　　(2) 众数与中位数的数值不等；
(3) 中位数与平均数相等；　　(4) 平均数与众数的数值相等．
其中正确的结论有（　　）个．
A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4
2. 一组数据为 x，19，20，43，且 $20<x<28$，它们的平均数为一个整数，求这组数据的平均数．
3. 已知数据 x_1，x_2，x_3，x_4 的平均数为 10，求数据 x_1+1，x_2+2，x_3+3，x_4+4 的平均数．
4. 已知 m 个数据的平均数为 a，n 个数据的平均数为 b，那么这 $(m+n)$ 个数据的平均数是多少？
5. 在一次数学竞赛中，某班同学分成三组．甲组 16 人的平均分数为 75 分，乙组 10 人的平均分数为 76 分，丙组 14 人的平均分数为 80 分．求全班同学的平均成绩．
6. 数据 x_1，x_2，x_3，…，x_n 的平均数为 $\bar{x}$，数据 y_1，y_2，y_3，…，y_n 的平均数为 $\bar{y}$，那么数据 $2x_1-y_1$，$2x_2-y_2$，$2x_3-y_3$，…，$2x_n-y_n$ 的平均数是多少？
7. 在一次数学比赛中，七年级 (1) 班得 100 分的有 4 人，得 95 分的有 6 人，得 90 分的有 10 人，得 85 分的有 5 人，得 80 分的有 7 人，得 75 分的有 8 人，得 70 分的有 3 人，得 65 分的有 4 人，得 60 分的有 3 人．分别求出该班数学比赛成绩的平均分、众数和中位数．

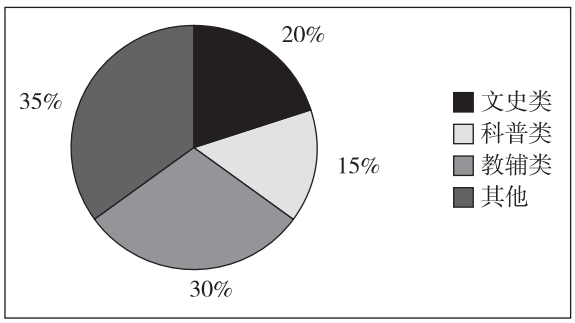
★★★拓展★★★

1. 现有 20 道选择题，评分标准为：答对 1 题得 3 分，答错 1 题扣 1 分，不答得 0 分．某学生答对 12 题，答错 5 题，3 题未答．求该学生的得分及平均每题的得分．(结果保留 1 位小数)
2. 有一组数据各不相等，那么将这组数据的平均数与这组数据中的数进行比较，正确的结论是（　　）．
A. 这组数据的平均数大于这组数据中的每一个数
B. 这组数据的平均数小于这组数据中的每一个数
C. 这组数据的平均数一定等于其中的某一个数
D. 这组数据的平均数至少大于其中的一个数，且至少小于其中的一个数
3. 已知数据 a_1，a_2，a_3，a_4，a_5 的平均数为 k_1；a_6，a_7，a_8，a_9，a_{10} 的平均数为 k_2．k_1 与 k_2 的平均数为 k，a_1，a_2，a_3，…，a_8，a_9，a_{10} 的平均数为 m，那么 k 与 m 的大小关系是（　　）．
A. $k>m$　　B. $k<m$　　C. $k=m$　　D. 不能确定

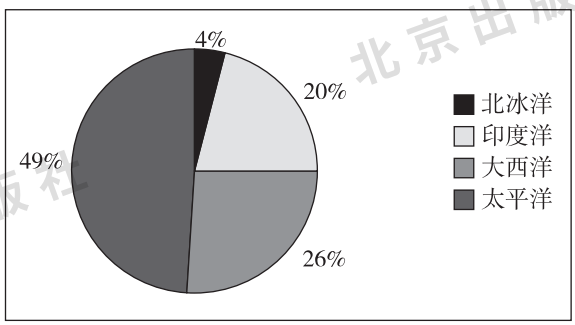
部分习题答案或提示

习题 9－1

基础

1. 全面调查.
2. 抽样调查.
3. 抽样调查.
4. 

提升



拓展

略.

习题 9－2

基础

1. 6.
2. 8. 2 分.
3. 6.
4. 4.
5. 6. 8.

提升

1. 158 厘米.

2. （1）23 ℃；（2）26 ℃.

3. 1.

4. 众数是 c，中位数是 $\frac{b+c}{2}$.

拓展

（1）1；（2）1.

复习题

基础

1. 略.

2. 全面调查.

3. 略.

4. 略.

5. 略.

6. 众数和中位数都是 50 元.

7. 平均每人植树 5.8 棵；估计该校同学共植树 5 800 棵.

提升

1. A.

2. 26 或 27.

3. 12.5.

4. $\frac{ma+nb}{m+n}$.

5. 77 分.

6. $2\bar{x}-\bar{y}$.

7. 平均分 $=\frac{1}{50}(100\times4+95\times6+90\times10+85\times5+80\times7+75\times8+70\times3+65\times4+60\times3)$

$=\frac{1}{50}\times4\ 105$

$=82.1$.

众数为 90（分），中位数为 $\frac{1}{2}(80+85)=82.5$（分）.

拓展

1. 得分为 31 分，平均每题得分为 1.6 分.

2. D.

3. C.

简解：$\because a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=5k_1$，$a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}=5k_2$，$k_1+k_2=2k$，

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=10m$，

$\therefore 5k_1+5k_2=10m$，$10k=10m$.

$\therefore k=m$.

北京出版社

北京出版社



附录

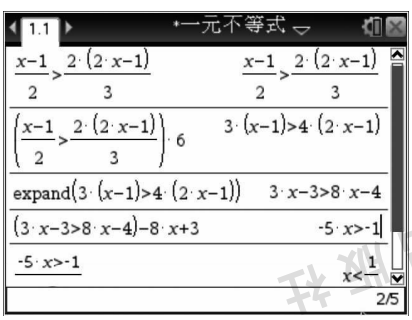
图形计算器支持案例[①]

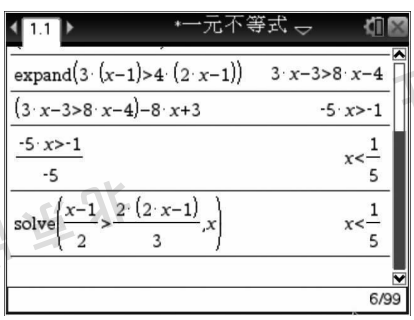
案例 1　解不等式. 以教材第 12 页的例 2 解不等式$\frac{x-1}{2}>\frac{2(2x-1)}{3}$为例.

按 开机 1 1，添加计算器页面.

方法 1　逐步求解.

先输入不等式$\frac{x-1}{2}>\frac{2(2x-1)}{3}$（按 ▫/▫，调用分式模板；按 ctrl =，输入不等号），enter 确认. 再按 (▲ enter) × 6 enter，去分母. 然后按 菜单 3 3 ▲ enter enter，去括号. 再按 (▲ enter) − 8 X + 3 enter，移项、合并同类项. 最后按 (▲ enter) ÷ (−) 5 enter，系数化 1，求出不等式的解集.





① 关于图形计算器的基本操作，之前已有介绍，此处不再赘述.

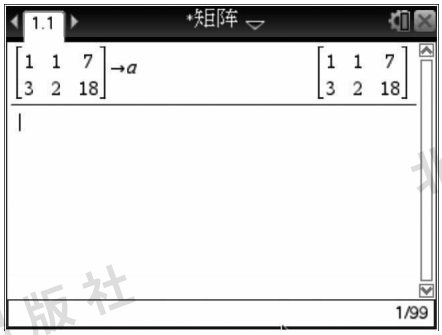
方法 2　直接求解.

按 菜单 3 1，调用求解命令，然后输入不等式 $\frac{x-1}{2}>\frac{2(2x-1)}{3}$，再按 , X enter，求出不等式的解集.

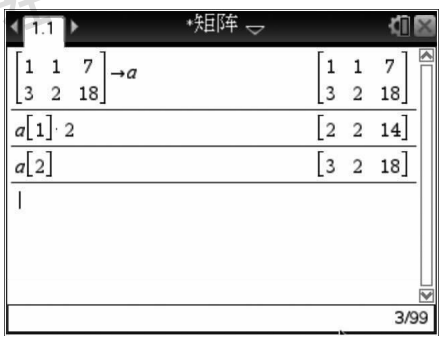
案例 2　矩阵. 以教材第 54 页的阅读理解“矩阵的简单介绍”为例.

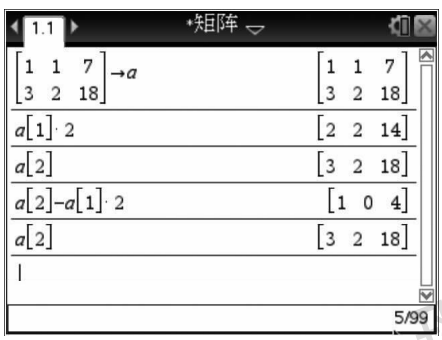
新建一个文档，添加计算器页面. 按 菜单 7 1 1，创建一个 2 行 3 列的矩阵 $\begin{bmatrix}1 & 1 & 7\\3 & 2 & 18\end{bmatrix}$，然后按 ctrl var A enter，把矩阵赋值给变量 a.



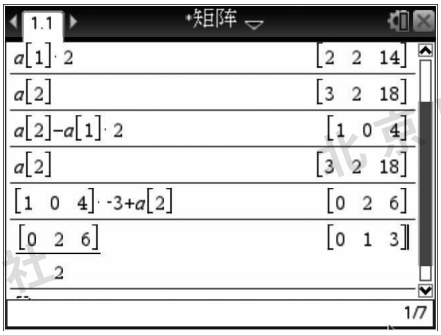


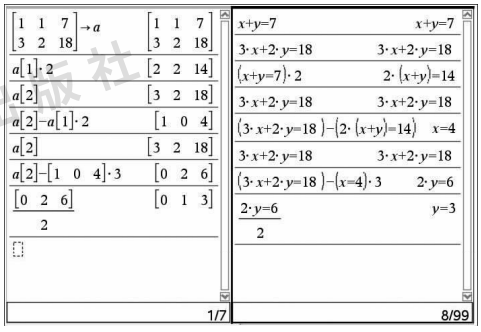
按 A ctrl (1 ▶ × 2 enter，对应“方程① × 2”，即方程③，接着按 A ctrl (2 enter，对应方程②. 然后按 ▲ ▲ enter − ▲ ▲ ▲ ▲ enter enter，对应“方程② − ③”，即方程④，再按 ▲ ▲ ▲ ▲ enter enter，对应方程②.





按 ▲ ▲ ▲ enter × (−) 3 + ▲ ▲ enter enter，对应“方程④ ×（ − 3）+ ②”，即⑤，然后按 ▲ enter ÷ 2 enter，对应“⑤ ÷ 2”，即方程⑥. 如果需要观察方程组的变形与对应的矩阵之间的变化关系，可以采取左右分屏的方式. 按 文档 5 2 2，实现左右分屏，再按 ctrl tab 菜单 1，然后在右屏逐步解方程组.

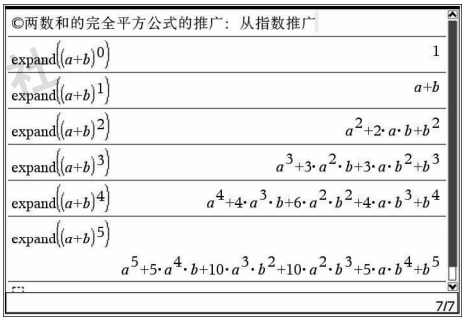


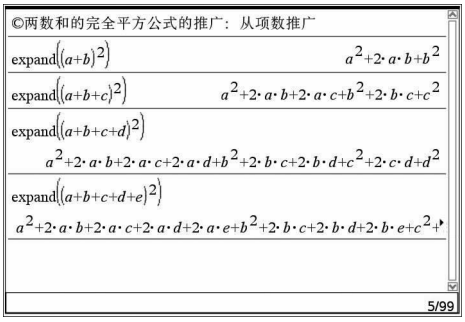


案例 3 展开式. 以教材第 100 页的阅读理解“杨辉三角”为例.

新建一个文档，添加计算器页面. 按 菜单 3 3 (A + B) ^ 1 enter，得到 $(a+b)^1$ 的展开式. 按 ▲ ▲ enter ◀◀ del 2 enter，把指数 1 替换成 2，可以得到 $(a+b)^2$ 的展开式. 依次类推，从指数推广的角度，研究 $(a+b)^3$，$(a+b)^4$，…，找出展开式的项、项数、次数和系数的规律.

按 ctrl 文档 1，新添加一个计算器页面. 按 菜单 3 3 (A + B) ^ 2 enter，得到 $(a+b)^2$ 的展开式. 按 ▲ ▲ enter ◀◀◀◀◀ + C enter，可以得到 $(a+b+c)^2$ 的展开式. 依次类推，从项数推广的角度，研究 $(a+b+c)^2$，$(a+b+c+d)^2$，…，找出展开式的项、项数、次数和系数的规律.



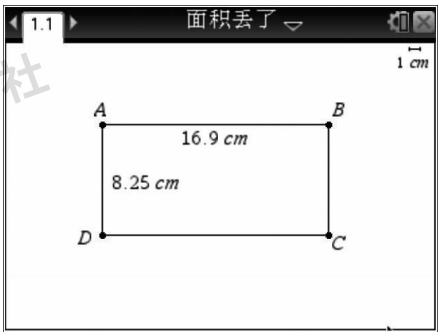


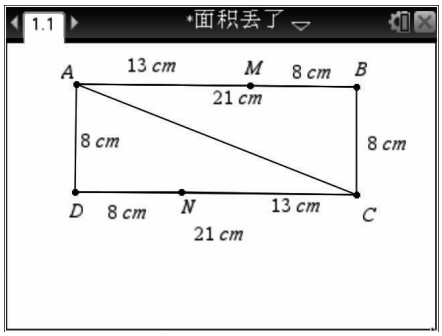
案例 4 几何测量. 以教材第 138 页的综合与实践“面积怎么丢失了”为例.

探索 1 发现错误.

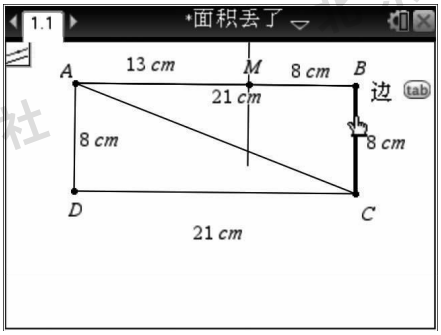
新建一个文档，添加几何页面. 按 菜单 5 3，作矩形 $ABCD$（作边 AB 的时候如果按着 shift，可以使得 AB 水平放置）. 按 菜单 6 1，分别单击 A，B 两点，测量出线段 AB 的长度，然后移动指针到适合位置，enter 确认，放置好显示线段 AB 长度的文本，接着测量线段 AD 的长度. 按 退出，然后移动指针到显示线段 AB 长度的文本处，单击两次（即双击）进入文本编辑状态，再按 del 2 1 enter，把线段 AB 的长度修改为

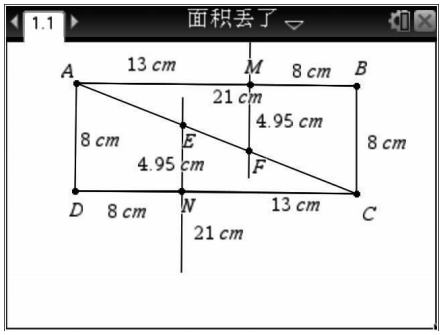
21，接着把线段 AD 的长度修改为 8（如果不小心拖动了某个点，导致有的线段长度发生变化，则直接修改它们的长度，直到符合要求为止）．在线段 AB，DC 上分别作线段 AM，MB，DN，NC，并测量出它们的长度，然后把线段 AM，DN 的长度分别修改为 13，8.





作线段 AC．按 菜单 7 2，单击点 M、线段 BC，过点 M 做直线 BC 的平行线．按 菜单 4 3，单击该平行线及线段 AC，作出它们的交点 F，然后测量线段 MF 的长度，得到 $MF=4.95$（在测量前按 菜单 9，更改显示数位，可以改变测量结果的精确度）．同理，过点 N 作直线 AD 的平行线，与直线 AC 相交于点 E，测量线段 EN 的长度也为 4.95.

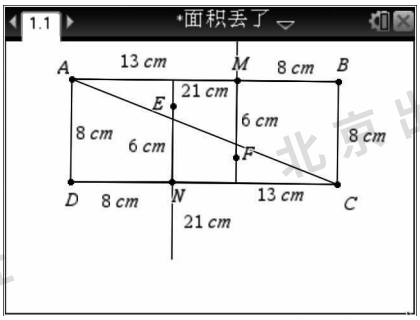


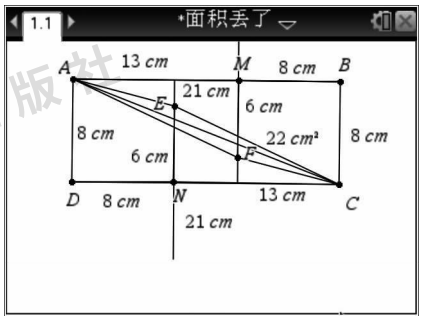


结论 1：四个小图形如果要恰好拼成一个 8×21 的长方形，那么线段 MF（NE）的长度不是 5，而是 $\frac{104}{21}$.

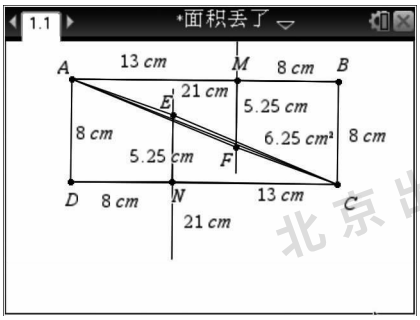
探索 2　找到丢失的面积.

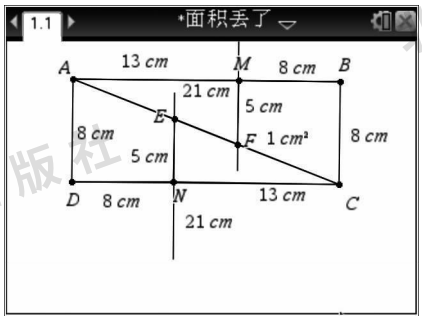
单击点 F，按 del 删掉点 F，同理删掉点 E．在过点 M 与 BC 平行的直线上作线段 MF，测量线段 MF 的长度，然后修改其长度为 6．同理，作出长度也为 6 的线段 NE．按 菜单 5 4，分别单击 A，E，C，F，再按 enter 退出，作四边形 $AECF$．按 菜单 6 2，测量出四边形 $AECF$ 的面积为 22．由两个三角形 AMF，CNE，两个梯形 $MBCF$，$NDAE$ 如下图拼出了一个长方形，重叠部分就是四边形 $AECF$.





修改线段 MF（EN）的长度为 5.25，四边形 $AECF$ 的面积变为 6.25. 修改线段 MF（EN）的长度为 5，发现四边形 $AECF$ 的面积变为 1，这个重叠部分的面积 1 恰好就是丢失了的面积 1. 可以发现线段 MF（EN）的长度越趋近$\dfrac{104}{21}$，则四边形的面积越趋近 0.





结论 2：丢失了的面积 = 四个小图形拼成长方形的时候重叠部分的面积 = 1.

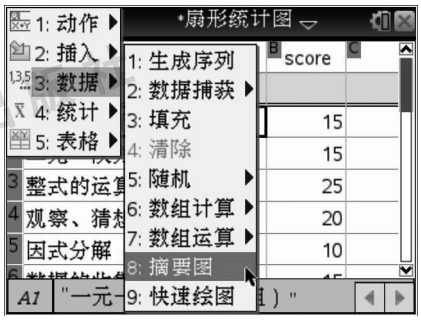
图形页面具有放大功能，可以更直观：当 $MF=5$ 时，点 F 不在线段 AC 上（按 ctrl 文档· 2，添加图形页面，按 菜单 4 1 调整窗口设置，x 最小值为 −15、最大值为 15，y 最小值为 −10、最大值为 10. 按 菜单 8，利用其中的点/线、形状、测量、作图等功能，作出与上述同样大小的矩形. 按 菜单 4 3，单击点 F，进行局部放大）.

案例 5 统计图. 以教材第 167 页的例题为例.

用图形计算器制作扇形统计图的方法如下：

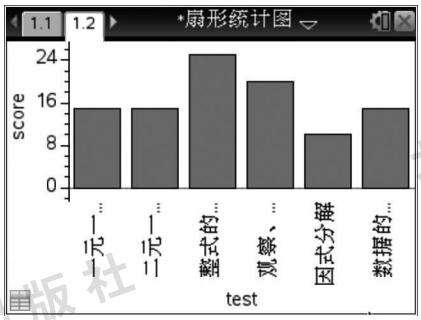
新建一个文档，添加列表与电子表格，将需要制图的数据输入到单元格中. A 列的表头中，输入变量 test，表示这一列是“测试内容”，B 列的表头则输入变量 score，表示这一列是“所占分值”. 在输入“测试内容”的时候，单元格中需要输入汉字（按 ⇧ 可以切换中、英文输入法），应该先按 ctrl × 输入双引号，然后在引号内输入汉字即可. 在输入“所占分值”的时候，单元格中直接输入数字即可. 数据输入完毕之后，按 菜单 3 8，选择绘制摘要图.



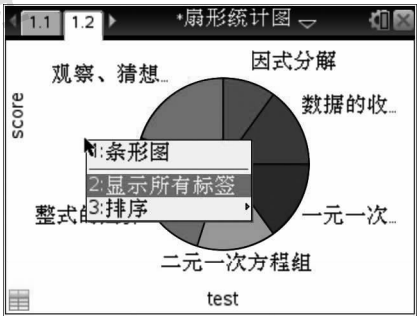


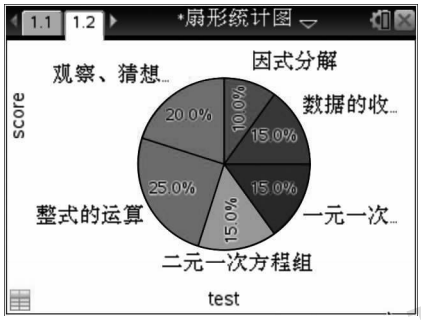
摘要图有三个选项需要设置：X 数组选择变量 test，摘要列表选择变量 score，显示方式选择新页．这样绘制出条形状的摘要图．





然后再按 菜单 1 9，改变绘图类型为饼图．接着，移动指针到扇形图处，按 ctrl 菜单（相当于鼠标右键）2，显示所有标签即显示“测试内容”所占的比例（按 ctrl◀ 可以返回表格窗口，或者单击屏幕左上角的页面标签）．





条形统计图和折线统计图的制作方法与扇形统计图的制作方法类似（注：绘制条形图、折线图时，单元格中不能有汉字），只是数据输入完毕之后，按 菜单 3 9，选择快速绘图，在“绘图类型”中选择“条形图”或“圆点图”即可．

更多案例及参考内容，请登录网站：http://education. ti. com/china/training/bph.