目 录

第二十三章 图形的变换 …… 1
教学目标 …… 1
教材分析和教学建议 …… 2
教材及其参考信息 …… 13
23.1 平移变换 …… 14
习题 23－1 …… 20
23.2 旋转变换 …… 22
综合与实践 图案设计 …… 27
习题 23－2 …… 28
23.3 轴对称变换 …… 30
习题 23－3 …… 34
23.4 位似变换 …… 36
习题 23－4 …… 40
阅读理解 绝妙的证明 …… 42
回顾与整理 …… 43
复习题 …… 44
部分习题答案或提示 …… 49
第二十四章 投影、视图与展开图 …… 53
教学目标 …… 53
教材分析和教学建议 …… 54
教材及其参考信息 …… 57
24.1 中心投影与平行投影 …… 58
习题 24－1 …… 61
24.2 基本几何体的三视图 …… 63
24.3 基本几何体的平面展开图 …… 68
习题 24－2 …… 72

阅读理解　视点、视线和盲区 …… 75
回顾与整理 …… 76
复习题 …… 77
部分习题答案或提示 …… 81
第二十五章　概率的求法与应用 …… 87
教学目标 …… 87
教材分析和教学建议 …… 88
教材及其参考信息 …… 91
25.1　求概率的方法 …… 92
习题 25－1 …… 100
25.2　概率的简单应用 …… 102
习题 25－2 …… 105
探究学习　模拟彩票中奖实验 …… 107
阅读理解　历史上科学家掷币实验的记录 …… 108
回顾与整理 …… 109
复习题 …… 110
部分习题答案或提示 …… 113
第二十六章　综合运用数学知识解决实际问题 …… 117
教学目标 …… 117
教材分析和教学建议 …… 117
教材及其参考信息 …… 121
26.1　解决实际问题的一般思路 …… 122
习题 26－1 …… 129
26.2　应用举例 …… 131
习题 26－2 …… 139
综合与实践　复印纸和包装箱中的数学问题 …… 141
阅读理解　哥尼斯堡七桥问题 …… 142
回顾与整理 …… 144
复习题 …… 145
部分习题答案或提示 …… 148
附录　图形计算器支持案例 …… 155

第二十三章
图形的变换

教学目标

1. 通过具体实例认识图形的平移变换，探索它的基本特征，理解“对应点所连的线段相等且平行（或在同一条直线上）”以及“对应线段相等且平行（或在同一条直线上），对应角相等”等基本性质.

2. 能按要求作出简单平面图形平移后的图形.

3. 通过具体的实例认识图形的旋转变换，探索它的基本特征，理解“对应点到旋转中心的距离相等”以及“对应线段相等，对应角相等”等基本性质.

4. 认识旋转对称图形，并能够按要求作出简单平面图形旋转后的图形.

5. 通过具体的实例认识图形的轴对称变换.

6. 了解图形的位似，能够利用作位似图形等方法将一个图形放大或缩小.

7. 了解同一坐标系中，图形变换后点的坐标的变化.

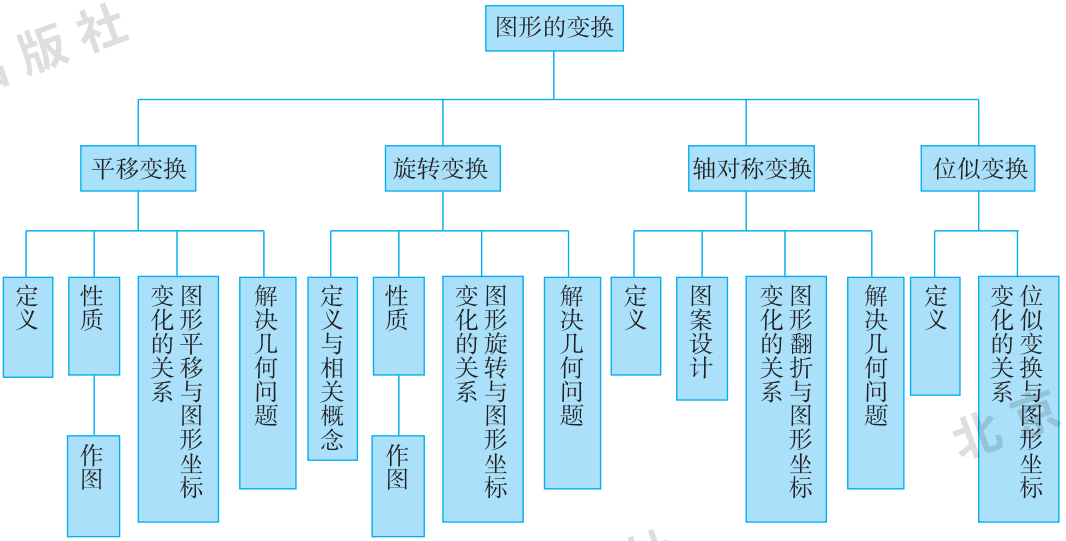
8. 对运用图形变换的观点学习几何有所感受.

9. 灵活运用轴对称、平移与旋转或它们的组合进行图案设计，认识和欣赏这些图形的变换在现实生活中的应用.

北京出版社

教材分析和教学建议

1. 主要内容及其地位作用.



将几何图形按照某种法则或规律变换成另一种几何图形的过程叫做几何变换. 研究几何变换的基本问题是，讨论各种几何变换的不变性与不变量，并应用于证明几何问题. 已知图形在某个变换下变成一个新图形，有些表示图形特征的数量在这个变换下不变，这个数量叫做几何变换的不变量；有些表示图形的特征在这个变换下不变，这些性质叫做几何变换的不变性.

1872 年德国数学家克莱因（Klein）提出了著名的变换群的理论. 他认为，每一种几何应该有一个主变换群，图形在该变换群的变换下保持不变的性质，就是几何所研究的对象. 这就为几何研究的目标、对象提出了一个新颖的观点.

利用几何变换的理论与方法讨论初等几何，是用现代数学的思想方法处理综合几何的一种重要途径. 一个几何图形，可以看作是一个点集，讨论图形间的位置或数量关系，可以用映射、变换的观点讨论在某种映射、变换下的特殊规律. 20 余年来，包括我国在内的世界各国的中等学校几何课程内容的改革，都不同程度地反映了加强几何变换的趋势. 本教材是渗透变换思想，而不是用变换群的观点而编写.

本章包括两方面的内容：

（1）四种图形变换的概念：平移变换、旋转变换、轴对称变换（反射变换）、位似变换.

（2）四种图形变换的性质和简单应用. 这些内容都是可以采用直观的、实验的方法来学习的，学习图形的变换使学生在解决几何问题时又多了一种途径.

例 1　求证：斜边和一条直角边对应相等的两个直角三角形全等.

已知：如图 1，在△ABC 和△$A'B'C'$中，$\angle C=\angle C'=90°$，$AB=A'B'$，$AC=A'C'$.

求证：Rt△ACB≌Rt△$A'C'B'$.

证明：不管 Rt△ACB 与 Rt△$A'C'B'$的位置如何，我们总可以通过旋转、轴对称和平移这三种变换，得到图 2 所示的图形，即 $A'C'$与 AC 重合，点 B'与点 B 分别在 AC 的两侧.

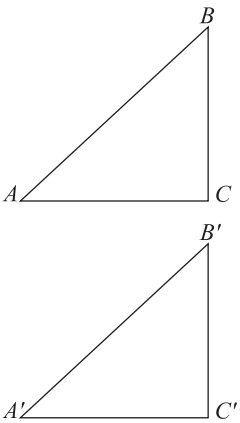


图 1

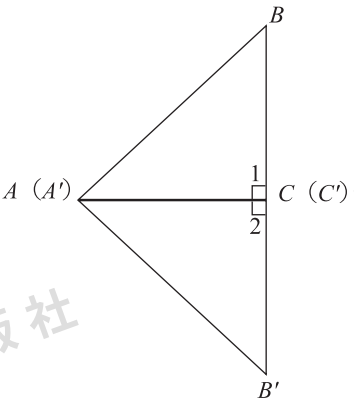


图 2

∵　$\angle 1=\angle 2=90°$，

∴　B，C，B'在同一条直线上，且 $AC\perp BB'$.

∵　$AB=A'B'$，

∴　$BC=B'C'$（等腰三角形三线合一）.

∵　$AC=A'C'$，

∴　Rt△ACB≌Rt△ACB'≌Rt△$A'C'B'$.

图形变换的学习也有助于培养学生的空间想象能力. 通过利用图形的变换论证几何命题、计算图形的周长和面积、设计美丽的图案等，还能增强学生的实践能力与创新意识.

2. 本章编写特点.

（1）本章教材注意突出学生的自主探索. 通过一些日常生活中学生所熟悉的图形与现象，引出平移、旋转、轴对称、位似变换的概念，并在学生参与的探索活动中，得到平移、旋转、轴对称、位似变换的基本特征与性质.

（2）注意培养学生的动手能力，以及利用轴对称、平移与旋转进行图案设计的能

力. 教材利用“思考”、“交流”、“实践”等栏目，尽可能多地让学生主动参与、亲自动手操作，拓展学生的思考与探索的空间.

（3）本章既不同于“几何变换”中的平移、旋转、轴对称、位似变换，也不是单纯的平移、旋转、轴对称、位似现象的欣赏，而是先通过观察具体的平移、旋转、轴对称、位似现象，分析、归纳并概括出平移、旋转、轴对称、位似的整体规律和基本性质，然后在平移、旋转、轴对称、位似的图案设计、欣赏和简单应用中，进一步深化对四种图形变换的理解与认识.

3. 教学重点、难点.

本章的教学重点是图形的轴对称、平移、旋转的概念以及性质.

本章的教学难点是运用图形的轴对称、平移、旋转解决有关几何与图形问题.

4. 教学建议.

（1）以运动的观点讲清图形变换的概念和性质.

图形变换是对物体运动的数学抽象. 要讲清各种图形变换的概念，还得从物体的运动变化入手，运用实际案例，是学生认识各种图形变换的基本途径.

例如，让学生观察传送带上行李箱的运动，找出运动规律，从而认识图形的平移是这样一种图形变换：原图形上的所有点都沿同一个方向运动，且运动相等的距离. 有了上述认识，就不难理解平移变换的如下性质：

连接对应点的线段平行且相等；

平移变换不改变图形的形状和大小.

又如，可让学生观察电风扇的叶片的转动等实例，找出运动规律，从而认识图形的旋转是这样一种图形变换：原图形上的所有点都绕一个固定的点，按同一个方向，旋转同一个角度. 有了上述认识就能理解旋转变换的如下性质：

旋转变换不改变图形的形状和大小；

对应点到旋转中心的距离相等，对应点与旋转中心连线所成的角度都等于旋转角度.

另外，学生还容易把轴对称图形和轴对称变换混淆起来，把旋转对称图形和旋转变换混淆起来，教学中应当强调前者指的是具有某种性质的图形，后者指的是从一个图形到另一个图形的改变. 为了使学生对变换的意义认识得更深刻，根据学生的实际情况，可以引入像的概念，即把由原图形从某个变换得到的新图形叫做原图形的像. 例如图 3，等腰$\triangle ABC$是以顶角平分线所在直线AD为对称轴的轴对称图形. 如果把$\mathrm{Rt}\triangle ABD$看作原图形，那么$\mathrm{Rt}\triangle ACD$就是原图形以AD为对称轴，作轴对称变换所得的像. 如图 4，如果把正$\triangle ABC$绕它的中心按逆时针方向旋转 60°，就得正$\triangle A_1B_1C_1$，正$\triangle A_1B_1C_1$就是这个旋转变换所得的像.

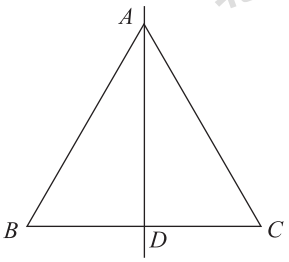


图 3

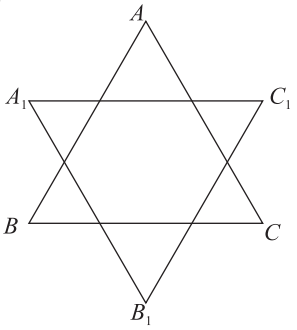


图 4

如果把正△ABC绕它的中心旋转 120°，所得的像就和原图形重合，正三角形就是旋转对称图形. 平行四边形等中心对称图形则是旋转对称图形的一种特例，旋转 180°后才能使像和原图形重合.

（2）必须加强应用和实践.

图形与变换是实践性很强的内容，而且各种变换之间容易混淆，需要经过一定数量的基本训练才能搞清它们的联系和区别，掌握各种变换的性质，学会运用图形变换解决问题的策略、思想和方法，发展学生的创新意识，增强学习图形变换的兴趣.

①图形变换的辨识.

例 2　如图 5，已知△ABC和两条平行的对称轴 m，n，△$A'B'C'$是△ABC关于直线 m 对称的三角形，△$A''B''C''$是△$A'B'C'$关于直线 n 对称的三角形. 那么△$A''B''C''$是否可由△ABC经过平移后得到?

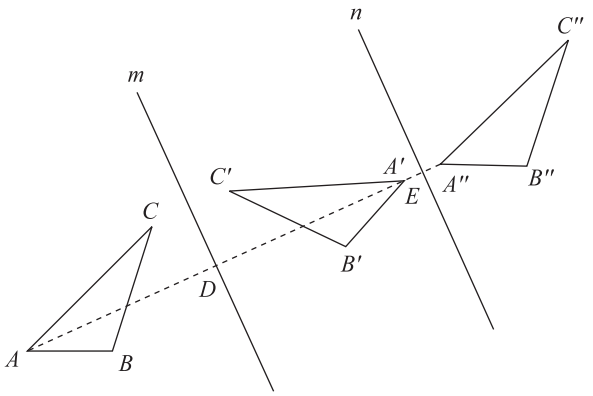


图 5

解：△$A''B''C''$可以由△ABC经过平移后得到. 连接 AA''，可以看到 $AA''\perp m$. 设 AA''与 m，n 分别交于 D，E，则 $AA''=2DE$. 因此平移的方向是与直线 m 垂直的方向，平

移的距离为直线 m，n 之间的距离的 2 倍.

例 3　如图 6，$\triangle ABC$ 绕着点 O 旋转 180°后成为 $\triangle A'B'C'$，直线 m 经过点 O，$\triangle ABC$ 与 $\triangle A''B''C''$ 关于直线 m 对称. 是否存在这样的直线，使得 $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle A''B''C''$ 关于该直线对称？如果存在，请指出该直线具有何特征.

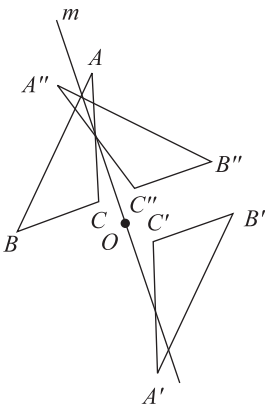


图 6

解：这样的直线是存在的，即存在直线 n，使得 $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle A''B''C''$ 关于直线 n 对称. 直线 n 经过点 O，且直线 n 垂直于直线 m.

说明：图形经过两次翻折（对称轴互相垂直），得到的图形与原图形关于两条对称轴的交点成中心对称；而图形经过两次翻折（对称轴相交），得到的图形可以看作是原图形绕着两条对称轴的交点旋转得到的，旋转角为两条对称轴夹角的 2 倍.

②运用图形变换的观点学习几何.

平移、旋转、轴对称都是“保距变换”，即一个几何图形运动到一个新的位置时，这个图形上任意两点的距离保持不变，这个性质在解决众多几何问题时，有较广泛的应用.

例 4　在六边形 $ABCDEF$ 中，$AB \parallel ED$，$BC \parallel FE$，$CD \parallel AF$，且对边之差 $BC - FE = DE - BA = FA - DC > 0$.

求证：六边形 $ABCDEF$ 的各内角都相等.

分析：六边形内角和为 720°，要证各内角都相等，即证每个内角都等于 120°. 只要有了 60°角就会产生 120°的角，而 60°角来自等边三角形的内角，条件中三组对边之差相等，且三组对边分别平行，这就启发我们，可以通过平移将三组对边之差集中在一个三角形中.

证明：如图 7，过点 A 作 FE 的平行线，过点 C 作 BA 的平行线，过点 E 作 DC 的平行线，这三条平行线两两相交于点 P，Q，R.

易知四边形 $ABCQ$，$CDER$，$EFAP$ 均为平行四边形.

$\therefore$　$AQ \fallingdotseq BC$，$CR \fallingdotseq DE$，$EP \fallingdotseq FA$，

$AP \fallingdotseq FE$，$CQ \fallingdotseq BA$，$ER \fallingdotseq DC$.

$\therefore$　$PQ = AQ - AP = BC - FE$，

$QR = CR - CQ = DE - BA$，

$RP = EP - ER = FA - DC$.

$\because$　$BC - FE = DE - BA = FA - DC$，

$\therefore$　$PQ = QR = RP$.

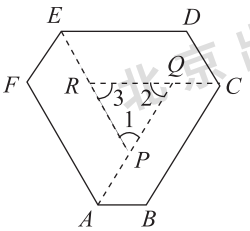


图 7

∴ $\triangle PQR$ 是等边三角形.

∴ $\angle 1=\angle 2=\angle 3=60°$.

∴ $\angle BCD=\angle DCR+\angle RCB=\angle 3+\angle 2=120°$,

$\angle CDE=\angle ERC=\angle 180°-\angle 3=120°$.

同理可证，$\angle ABC=\angle DEF=\angle EFA=\angle FAB=120°$.

例 5　如图 8，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=DC$，又 E，F 分别是 BC，AD 的中点，延长 BA，EF，CD 相交于 S，K.

求证：$\angle 1=\angle 2$.

分析：由于条件中的 AB，DC 分散在四边形的对边上，而结论中的 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 也不是过同一顶点的两个角，所以它们相互间的关系不易察觉，可以通过图形的平移变换，使它们相对集中起来. 于是把四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 连接起来，把它分成两个三角形. 由于题设 E，F 分别是 BC，AD 的中点，所以可取 AC 中点 M，并连接 EM，FM.

由三角形中位线定理知，$EM\parallel\!=\frac{1}{2}AB$，$FM\parallel\!=\frac{1}{2}CD$. 这样，就把 AB 与 CD 以其$\frac{1}{2}$的大小通过平移集中到 $\triangle MEF$ 之中. 与此同时，

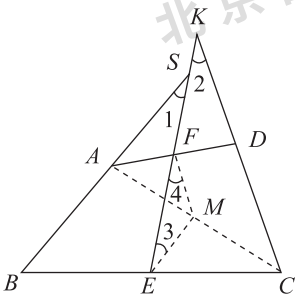


图 8

∵ $SB/\!/EM$,

∴ $\angle 1=\angle 3$.

∵ $KC/\!/FM$.

∴ $\angle 2=\angle 4$.

这就是说，把分散的 $\angle 1$，$\angle 2$ 也由平移而集中到 $\triangle MEF$ 之中.

证明：连接 AC，并取 AC 的中点 M，连接 ME，MF.

又∵ E，F 分别是 BC，AD 的中点，

∴ $EM\parallel\!=\frac{1}{2}AB$，$FM\parallel\!=\frac{1}{2}CD$.

又∵ $AB=CD$,

∴ $EM=FM$.

∴ $\angle 3=\angle 4$.

又∵ $\angle 1=\angle 3$，$\angle 2=\angle 4$,

∴ $\angle 1=\angle 2$.

例 6　如图 9，正方形 $ABCD$ 中，E 为 DC 上的任意一点，$\angle BAE$ 的平分线交 BC 于 F. 求证：$AE=DE+BF$.

分析：若能把 DE 和 BF 接成一条线段，且与 AE 同在一个三角形中，就便于比较，因此想到把 $\triangle ABF$ 进行旋转.

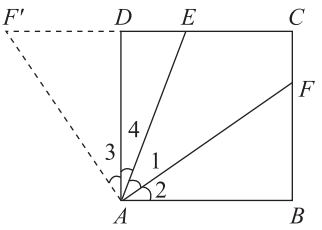


图 9

证明：将 $\triangle ABF$ 绕着点 A 逆时针旋转 $90°$. 由正方形的性质，AB 转到 AD. 设 AF，BF 分别旋转到 AF'，DF'，则 $\angle ADF' = \angle B = 90°$，于是 E，D，F' 共线，且 $EF' = DE + BF$.

$\because$ $\angle 1 = \angle 2$，$\angle 3 = \angle 2$，

$\therefore$ $\angle F'AE = \angle 3 + \angle 4 = \angle 2 + \angle 4 = \angle 1 + \angle 4 = \angle DAF = \angle AFB = \angle F'$.

$\therefore$ $AE = F'E$，即 $AE = DE + BF$.

例 7　如图 10，P 是等边三角形 ABC 内一点，$PB = 2$，$PC = 1$，$\angle BPC = 150°$，求 PA 的长.

分析：由于 PA，PB，PC 由点 P 向外呈放射状，条件十分分散，不易直接求出 PA 的长，如何将 PA，PB，PC 集中到同一个三角形内是解决本题的关键.

解：将 $\triangle APC$ 绕点 C 按逆时针方向旋转 $60°$，则 CA 与 CB 重合，PC 旋转到 $P'C$，PA 旋转到 $P'B$，则 $\angle PCP' = 60°$.

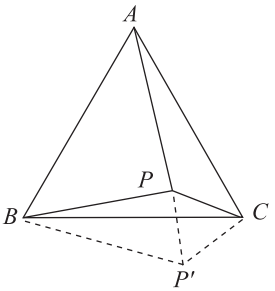


图 10

$\therefore$ $\triangle PCP'$ 是等边三角形.

$\therefore$ $\angle P'PC = 60°$，

$\therefore$ $\angle BPP' = 90°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BPP'$ 中，$BP = 2$，$PP' = PC = 1$.

由勾股定理，$P'B = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.

$\therefore$ $PA = \sqrt{5}$.

旋转变换的目的与平移变换相同，都是为了把题设中的已知线段或角以及待研究的线段或角适当集中起来，便于联系.

例 8　如图 11，在 $\triangle ABC$ 中，$AB > AC$，AD 为 $\angle A$ 的平分线，P 为 AD 上一点.

求证：$AB - AC > PB - PC$.

分析：由于角平分线是角的对称轴，且 $AB > AC$，易知点 C 关于 AD 的对称点 C' 在 AB 边上，$AC' = AC$. 此时 $PC' = PC$，$BC' = AB - AC$. 于是将 $AB - AC$ 以 BC' 的“身份”、PC 以 PC' 的“身份”及 PB 集中在 $\triangle PBC'$ 中，而 $BC' > PB - PC'$，也就是 $AB - AC > PB - PC$.

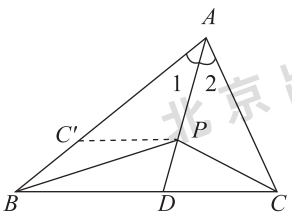


图 11

证明：$\because$ AD 为 $\angle A$ 的平分线，

$\therefore$ $\angle 1 = \angle 2$.

以 AD 为轴，则点 C 的对称点为 C'.

$\therefore\quad PC=PC'$，$AC=AC'$.

$\therefore\quad AB-AC=AB-AC'=BC'$.

又$\because\quad PB-PC=PB-PC'<BC'$，

$\therefore\quad AB-AC>PB-PC$.

很明显，本题的证明充分应用了轴对称的性质，一个角的平分线的出现往往为应用轴对称变换提供了很好的条件.

例 9　已知：如图 12，在$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$CH\perp AB$，AT 平分$\angle CAB$ 交 CH 于点 D，交 BC 于点 T，作 $DE/\!/AB$ 交 BC 于点 E.

求证：$BE=CT$.

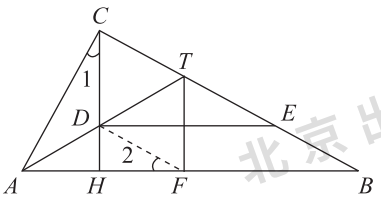


图 12

证明：$\because\quad AT$ 是$\angle CAB$ 的角平分线，

$\therefore\quad$ 在 AB 上取一点 F，使 $AF=AC$（即点 F 是以 AT 为对称轴，点 C 的对称点），连接 TF.

由轴对称性质可知，$DC=DF$，$\angle 1=\angle 2$，$TC=TF$，$\angle ACB=\angle AFT=90°$.

$\because\quad \triangle ABC$ 是直角三角形，且 CH 是斜边 AB 上的高，

$\therefore\quad \angle 1=\angle B$.

$\therefore\quad \angle 2=\angle B$.

$\therefore\quad DF/\!/BC$.

$\because\quad CH\perp AB$，$TF\perp AB$，

$\therefore\quad CD/\!/TF$.

$\therefore\quad DFTC$ 是平行四边形.

$\therefore\quad DF=CT$.

又$\because\quad DE/\!/AB$，$DF/\!/BC$，

$\therefore\quad DFBE$ 是平行四边形.

$\therefore\quad DF=BE$.

$\therefore\quad BE=CT$.

位似是一种“保角变换”，即一个几何图形在运动前后的对应线段之比总为定值，而角的大小则不变.

例 10　如图 13，过梯形 $ABCD$ 的对角线的交点 M 作底 AB 的平行线，交两腰于点 P 和点 Q.

求证：$PM=MQ$.

分析：从位似变换的观点看，我们可以把点 D 作为位似中心，将 PM 放大为 AB，

然后以点 C 为位似中心，把 AB 缩成 MQ，在一放一缩的过程中，也就是证明放缩的倍数相同，即$\frac{PM}{AB}=\frac{MQ}{AB}$，这样也就得到了 $PM=MQ$. 图中包含了三条互相平行的直线 AB，CD 和 PQ，为构成位似图形创造了条件. 实际上，梯形的四个顶点和对角线的交点都可以作为位似中心.

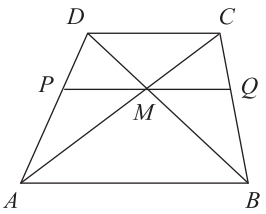


图 13

证明：$\because$ $PQ/\!/DC/\!/AB$，

由 $\triangle DPM\backsim\triangle DAB$，得

$$\frac{PM}{AB}=\frac{DM}{DB}.$$

由 $\triangle CMQ\backsim\triangle CAB$，得

$$\frac{MQ}{AB}=\frac{CM}{CA}.$$

由 $\triangle MCD\backsim\triangle MAB$，得

$$\frac{DM}{BM}=\frac{CM}{AM}.$$

$$\therefore\quad\frac{DM}{BM+DM}=\frac{CM}{CM+AM}.$$

即 $$\frac{DM}{BD}=\frac{CM}{AC}.$$

$$\therefore\quad\frac{PM}{AB}=\frac{MQ}{AB}.$$

$$\therefore\quad PM=MQ.$$

应用位似变换的关键是选择好位似中心.

例 11　如图 14，$ABCD$ 为任意四边形，E，F，G，H 分别为 AB，BC，CD，DA 的中点，M，N 分别为对角线 BD，AC 的中点.

求证：EG，HF 同过 MN 的中点.

分析：欲证的三条线段在图中关系不很“密切”，我们试图把它们联系在一起，由于题中很多中点，任意选择一个顶点（比如点 A）作位似中心，按相似比 $k=\frac{AE}{AB}=\frac{1}{2}$把边 BC 缩小，自然就要连接 EN，得到 $EN/\!/\!=\frac{1}{2}BC$，用相同的方法可以得到 $MG/\!/\!=\frac{1}{2}BC$，这样就得到了$\square EMGN$.

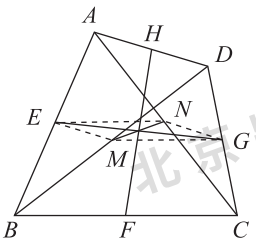


图 14

证明：连接 EN，MG，NG，EM.

$\because$ $AE=EB$，$AN=NC$，

$\therefore$ $EN/\!/\frac{1}{2}BC$.

$\because$ $DM=MB$，$DG=GC$，

$\therefore$ $MG/\!/\frac{1}{2}BC$.

$\therefore$ $EN/\!/MG$.

$\therefore$ 四边形 $EMGN$ 是平行四边形.

$\therefore$ EG 与 MN 互相平分.

同理可证 EG 与 HF 互相平分.

$\therefore$ EG，HF 同过 MN 的中点.

事实上，我们可以把中位线 $A'B'$ 看成是由线段 AB 位似变换得到的. 很明显，$A'B'$ 是由 AB 缩小 $\frac{1}{2}$ 而得到的；当然，也可以把 AB 看成是由 $A'B'$ 位似变换而得到的，这时 AB 是由 $A'B'$ 扩大 2 倍而得到的（如图 15）.

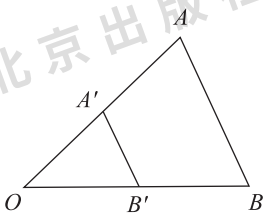


图 15

需要说明的是，以上所举例题仅供教师参考，不作教学要求.

③设计图案.

让学生欣赏如图 16 的精美图案. 当然，让学生制作这类复杂的图案要求未免过高，但可以引导学生分析这类图案设计中的图形变换思想.

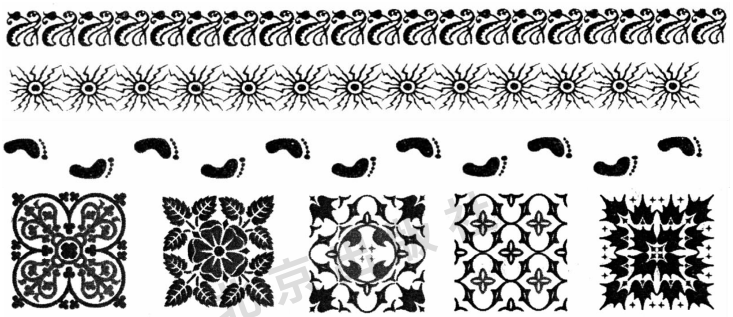


图 16

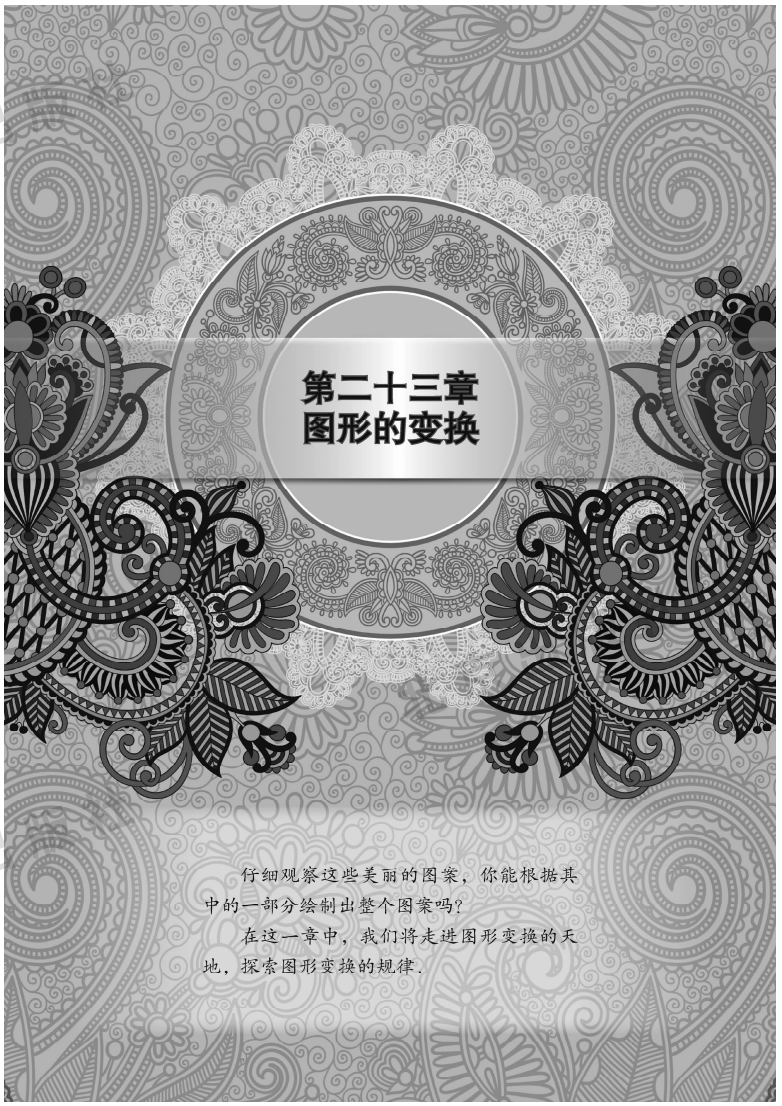
5. 课时安排.

本章教学约需 10 课时，具体分配如下（仅供参考）：

23.1 平移变换	约 2 课时
23.2 旋转变换	约 2 课时
23.3 轴对称变换	约 2 课时
23.4 位似变换	约 2 课时
总结与复习	约 2 课时

北京出版社

教材及其参考信息



本章的导图和导语，说明本章所要研究的主要问题，使学生在学习之前，对这一章要学习的内容有所了解.

教学中应充分利用导图和导语激发学生学习本章的兴趣.

[1] 教学中，应努力通过生活中各种实例让学生体会这一现象.

[2] 在前面曾经把三角尺沿着直尺的方向由原来的位置移到另一个位置. 本小节在这样的平行移动的基础上对平移的概念做了探索归纳.

[3] “将一个图形沿某个方向移动一定的距离”意味着“图形上的每一点都沿着同一个方向移动了相同的距离”. 同时，“平移不改变图形的形状与大小”作为“定义”的补充内容，也从平移的结果上刻画了平移的特征.

23.1 平移变换

如图 23－1，手扶电梯的运动、飞机的滑行等，都给我们带来平行移动的形象.[1]




图 23－1

思考

还记得利用直尺和三角尺画平行线的方法吗（图 23－2）？三角尺的移动过程有什么特征？[2]

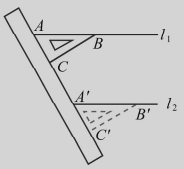


图 23－2

像这样，在平面内，将一个图形沿某个方向移动一定的距离，得到一个新的图形，这样的图形运动称为平移变换，简称平移.[3]

平移不改变图形的形状和大小.

在图 23－2 中，$\triangle ABC$ 平移到 $\triangle A'B'C'$，点 A，B，C 分别平移到了点 A'，B'，C'. A 与 A'，B 与 B'，C 与 C' 分别是对应点；AB 与 $A'B'$ 是对应线段；$\angle A$ 与 $\angle A'$ 是对应角.

你还能举出图 23－2 中其他的对应线段、对应角吗？

2 数学 九年级 下册

23.1 节的教学目标：

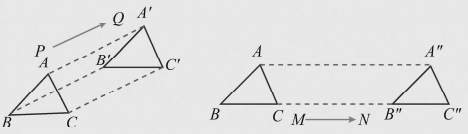
1. 经历观察、分析、操作、欣赏以及抽象、概括等过程，经历探索图形平移基本性质的过程以及与他人合作交流的过程，进一步发展空间观念，增强审美意识.

2. 通过具体实例认识平移、理解平移的基本内涵，理解平移前后两个图形对应线段相等且平行（或在同一条直线上）；对应角相等；对应点所连的线段相等且平行（或在同一条直线上）.

交流 [1]

1. 在图 23－2 中，对应线段、对应角之间有怎样的关系？

2. 在图 23－3(1) 中，如果△ABC 沿着 PQ 方向移动到△$A'B'C'$ 的位置，对应点所连的线段有怎样的关系？在图 23－3(2) 中，如果△ABC 沿着 MN 方向移动到△$A''B''C''$ 的位置呢？



(1)　　(2)

图 23－3

可以得到：

经过平移，图形的对应线段相等且平行（或在一条直线上）；对应角相等；对应点所连的线段相等且平行（或在同一条直线上）.

例 1 [2] 如图 23－4，平移△ABC，使点 A 移动到点 A'，作出平移后的△$A'B'C'$.

分析：利用图形平移后对应点的特征，作出点 B，C 的对应点 B'，C'.

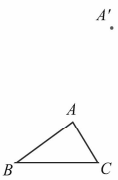


图 23　4

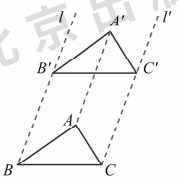


图 23　5

解：如图 23－5，连接 AA'，过点 B 与点 C 分别作 AA' 的平行线 l，l'，在 l，l' 上分别截取 $BB' = AA'$，$CC' = AA'$，则点 B' 就是点 B 的对应点，点 C' 就

[1] 通过两个问题引导学生进一步分析图 23－3 中对应线段、对应角、对应点所连的线段的关系. 对此，学生可以采取多种方式（如实物演示、度量等）探究其中的规律.

[2] 线段、角、三角形的平移是最简单的平移问题之一，其中，关键的是平移的方向和距离. 在本例中，点 A、点 A' 的位置实际上确定了平移的方向和距离.

是点 C 的对应点．连接 $A'B'$，$B'C'$，$C'A'$，$\triangle A'B'C'$ 就是 $\triangle ABC$ 平移后的图形．

交流

1. 除例 1 的方法外，你还有其他方法作出 $\triangle A'B'C'$ 吗？[1]
2. 确定一个图形平移后的位置，需要什么条件？

例 2[2] 如图 23－6，将 N 状的图形按箭头所指的方向平移 3 cm，作出平移后的图形．



图 23－6

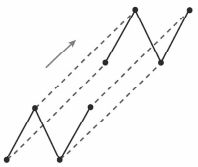


图 23－7

解：在图形上，找出关键的 4 个点，分别过这 4 个点按箭头所指的方向作 4 条长为 3 cm 的线段，将所作线段的另 4 个端点按原来的顺序连接，即可得到平移后的图形（图 23－7）．

实践[3]

如图 23－8，在方格纸中，画出将图中的 $\triangle ABC$ 向右平移 3 格后的 $\triangle A'B'C'$，然后再画出将 $\triangle A'B'C'$ 向上平移 2 格后的 $\triangle A''B''C''$．$\triangle A''B''C''$ 是否可以看成是 $\triangle ABC$ 经过一次平移后得到的呢？

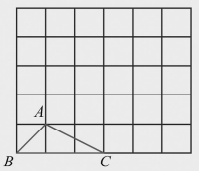


图 23－8

4 数学 九年级 下册

［1］还可以这样作出图中的 $\triangle A'B'C'$：过点 A' 分别作出与 AB，AC 平行且相等的线段 $A'B'$，$A'C'$，连接 $B'C'$，$\triangle A'B'C'$ 就是所要作出的三角形．

［2］本例通过作出字母“N”平移后的图形，一是为了体现平移素材的丰富多彩；二是为了体现平移性质的直接应用．

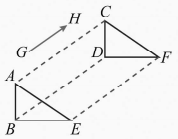
在本题的解题过程中，通过几个关键点确定平移后的位置，得到字母“N”平移后的图形，这种“以局部带整体”的平移作图方法，应当向学生交待清楚．

［3］可以让学生通过动手实践，体会“经过几次平移后得到的图形，可以看成是原图形经过一次平移得到的”，也就是说，多次平移相当于一次平移．

3. 能按要求作出简单平面图形平移后的图形，能够探索图形之间的平移关系．

练习

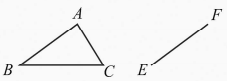
1. 如图所示，△*ABE* 沿 *GH* 的方向平移一定距离后记为△*CDF*. 找出图中平行且相等的线段和全等三角形 .



（第 1 题）

2. 如图，经过平移，△*ABC* 的边 *AB* 移到了 *EF*，作出平移后的三角形，你能给出几种作法？

3. 如图，将 A 状的图形沿水平方向向右平移 2 cm，作出平移后的图形 .

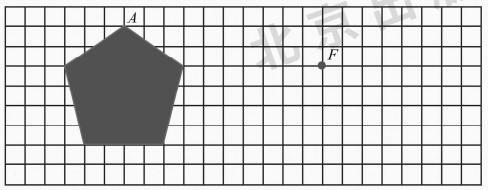


（第 2 题）



（第 3 题）

4. 如图，在方格纸上，经过平移，五边形的顶点 *A* 移到了点 *F* 处，作出平移后的五边形 .



（第 4 题）

练习答案：

1. 平行且相等的线段有：

   AB 与 *CD*，

   AE 与 *CF*，

   BE 与 *DF*，

   AC 与 *BD*，

   AC 与 *EF*，

   BD 与 *EF*.

   全等三角形有：

   △*ABE*≌△*CDF*.

2. 略.

3. 略.

4. 略.

［1］在直角坐标系中，将图形进行平移后，对应点的坐标会发生一些变化，让学生通过测量或操作，发现和总结其变化规律，加深对图形变换的认识，体会数形结合的思想.

实践[1]

1. 如图 23－9，将点 $A(2, 3)$ 向左平移 4 个单位长度，得到点 A'，在图上标出这个点，并写出它的坐标；把点 A 向下平移 3 个单位长度呢？把点 A 向右或向上平移呢？再找几个点，对它们进行平移，观察它们坐标的变化，你能从中发现什么规律？

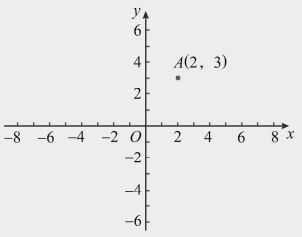


图 23－9

2. 如图 23－10，利用计算机或图形计算器在平面直角坐标系中画一个△ABC．任选平移方向和距离作平移变换，得到△$A'B'C'$．度量点 A，A' 的坐标，观察它们的坐标之间有什么关系；再分别度量点 B，B' 与点 C，C' 的坐标，观察它们的坐标之间有什么关系．任意改变△ABC 的位置，上面得出的结论是否仍然成立？

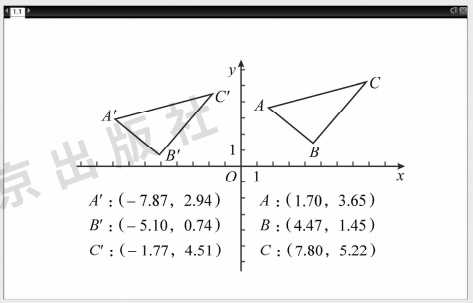


图 23－10

4. 经历图形坐标变化与图形平移之间关系的探索过程，发展学生的形象思维能力和数形结合意识.

5. 在同一直角坐标系中，感受图形上点的坐标变化与图形平移之间的关系.

实际上，可以得到下面的结论：

在平面直角坐标系中，将点 (x, y) 向右（或向左）平移 $a(a>0)$ 个单位长度，可以得到对应点 $(x+a, y)$ [或 $(x-a, y)$]；将点 (x, y) 向上（或向下）平移 $b(b>0)$ 个单位长度，可以得到对应点 $(x, y+b)$ [或 $(x, y-b)$].

探索

在平面直角坐标系中，将点 $(-4, 3)$ 按下列要求移动：

(1) 向右平移 6 个单位长度；

(2) 再向下平移 3 个单位长度；

(3) 再向左平移 6 个单位长度；

(4) 再向下平移 3 个单位长度；

(5) 最后，向右平移 6 个单位长度.

写出平移过程中各点的坐标，并画出移动路线图，看一看它像一个什么数字.[1]

在解答某些几何题时，经常把几何图形中的某一部分平移，形成新的图形，使已知与求解的线段或角建立联系，从而发现解题思路.

例 3[2] 已知：如图 23－11，在梯形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，对角线 AC，BD 交于点 O，$AC=BD$，且 $\angle AOD=60°$.

求证：$BC+AD=AC$.

证明：过点 D 作 AC 的平行线，交 BC 的延长线于点 E，得四边形 $ACED$.

又∵ $AD \parallel CE$，

∴ 四边形 $ACED$ 是平行四边形.

∴ $AC=DE$，$AD=CE$.

又∵ $AC=BD$，

∴ $BD=DE$.

∵ $DE \parallel AC$，$\angle AOD=60°$，

∴ $\angle BDE=60°$.

∴ $\triangle BDE$ 是等边三角形.

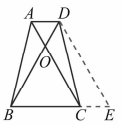
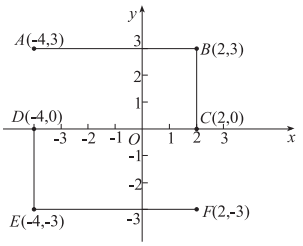


图 23－11

[1] 其移动路线图如图，像数字“2”.



[2] 旨在指导学生学会运用图形变换的观点学习几何.

注意：此类问题要求不宜过高.

6. 对应用平移变换解决几何问题有所感受.

练习答案：

1. $A'(2,5)$，
$B'(1,1)$，
$C'(7,1)$，
$D'(6,5)$.

2. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$.

$\therefore\ BE=DE=AC$.

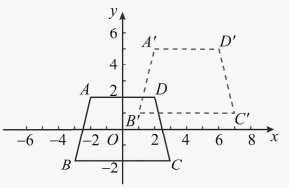
$\because\ BC+CE=AC$,

$\therefore\ BC+AD=AC$.

我们看到，解决本题的关键在于把线段 AC 平移到 DE 的位置，使已知与求证所隐含的内在联系充分显示出来．

练 习

1. 如图，四边形 $ABCD$ 的各顶点在平面直角坐标系中的坐标分别为 $A(-2,2)$，$B(-3,-2)$，$C(3,-2)$，$D(2,2)$．把这个四边形向上平移 3 个单位长度，再向右平移 4 个单位长度后，得到四边形 $A'B'C'D'$，请你写出它的顶点坐标．



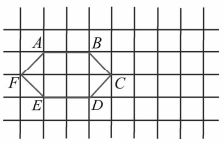
（第 1 题）

2. 在梯形 $ABCD$ 中，$AB\ /\!/\ DC$，已知 $AC=2$，$BD=\sqrt{5}$，$AB+DC=3$，求梯形的高．

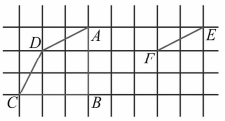
习 题 23－1

★基础★

1. 在图中画出六边形 $ABCDEF$ 沿从 A 到 B 的方向平移距离等于线段 AB 的长度后的图形．
2. 如图，EF 是四边形 $ABCD$ 平移后一边所在的位置．试画出四边形 $ABCD$ 平移后的图形．



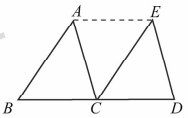
（第 1 题）



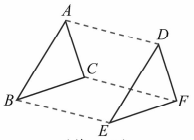
（第 2 题）

北京出版社

3. 如图，△ECD 是由△ABC 怎样平移后得到的？指出图中相等的线段和角．
4. 如图，△ABC 平移后得到△DEF，指出图中的平行线段和相等线段．

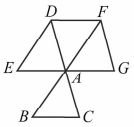


（第 3 题）

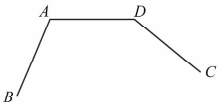


（第 4 题）

5. 如图，△DEA 和△FAG 都是由△ABC 平移后得到的．试说明 $DF \parallel EA \parallel BC$．
6. 如图，$AB = DC$，画出线段 AB 平移后的线段 DE，其平移方向为从 A 到 D，平移的距离为线段 AD 的长．平移后所得的∠DEC 与∠DCE 相等吗？试说明理由．

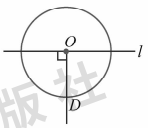


（第 5 题）



（第 6 题）

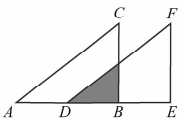
7. 如图，⊙ O 的半径 OD 为 5 cm，直线 $l \perp OD$，垂足为 O，那么直线 l 沿射线 OD 方向平移多少厘米时与⊙ O 相切？为什么？
8. 在平面直角坐标系中：
   (1) 描出 $A(-2, 1)$，$B(-3, -5)$，$C(0, 4)$ 三点，依次连接各点，得到△ABC．
   (2) 将△ABC 平移，使其顶点 A 移到点 $(1, 1)$．画出平移后的三角形，并写出 B，C 两点平移后的坐标．



（第 7 题）

★★提升★★

1. 如图，将 Rt△ABC 沿直角边 AB 向右平移 2 个单位长度至△DEF．如果 $AB = 4$，∠$ABC = 90°$，且△ABC 的面积为 6，求图中蓝色部分的面积．
2. 在梯形 $ABCD$ 中，$AB \parallel DC$，对角线 $AC = 20$，$BD = 15$，$CH \perp AB$ 于点 H，且 $CH = 12$，求梯形的面积．



（第 1 题）

[1] 旋转也是图形的一种基本变换. 本小节仍然是通过学生在实际生活中经常看到的一些现象，给出图形旋转的大致形象. 教学中可让学生多举一些生活中旋转的实例，加深学生对有关旋转概念的理解.

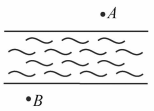
[2] “将一个图形绕一个定点沿顺时针或逆时针转动一个角度”，意味着图形上的每个点同时沿顺时针或逆时针转动相同的角度.

[3] 与平移情况相同，“旋转不改变图形的形状和大小”也是对定义的补充.

[4] 旋转 5 次得到，旋转角度分别为 60°，120°，180°，240°，300°.

★★★拓展★★★

如图，A，B 两地在一条河的两岸，现要在河上建造一座桥 MN. 桥建造在何处才能使从 A 到 B 的路径 $AMNB$ 最短？（假定河的两岸是平行的直线，桥要与河岸垂直）



23.2 旋转变换

在日常生活中，除了物体的平移外，我们还可以看到许多物体的旋转现象.[1]





图 23－12

我们可以把图 23－12 中的扇叶、指针等看做图形. 像这样，在平面内，将一个图形绕一个定点沿顺时针或逆时针方向转动一个角度,[2] 得到一个新的图形，这样的图形运动称为旋转变换，简称旋转，这个定点称为旋转中心，转动的角称为旋转角. 如果图形上的点 P 经过旋转到点 P'，那么这两个点叫做旋转的对应点. 例如，在图 23－13 中，把 $\triangle OAB$ 以点 O 为旋转中心，逆时针旋转 45°，得到 $\triangle OA'B'$，则点 A 与 A'，点 B 与 B' 分别是对应点.

旋转不改变图形的形状和大小.[3]

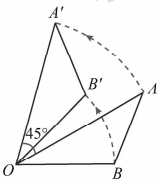


图 23－13

思考

图 23－14 可以看做是一个菱形通过几次旋转得到的？每次旋转了多少度？[4]



图 23－14

23.2 节的教学目标：

1. 经历对生活中与旋转现象有关的图形进行观察、分析、欣赏，以及动手操作、画图等过程，掌握有关画图的操作技能，发展初步的审美能力，增强对图形欣赏的意识.

2. 通过具体实例认识旋转，理解旋转前后两个图形对应点到旋转中心的距离相等、对应点与旋转中心的连线所成的角都是旋转角.

例 1 如图 23 – 15，△*ABC* 是等边三角形，*D* 是 *BC* 上一点，△*ABD* 经过旋转后到达△*ACE* 的位置．请回答：

(1) 旋转中心是哪一点？

(2) 逆时针旋转了多少度？

(3) 如果 *M* 是 *AB* 的中点，那么经过上述旋转后，点 *M* 旋转到了什么位置？

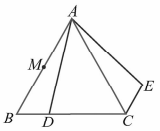


图 23 – 15

解：(1) 旋转中心是点 *A*；

(2) 逆时针旋转了 60°；

(3) 点 *M* 旋转到了 *AC* 的中点位置上．

实践[1]

如图 23 – 16，利用计算机或图形计算器画一个三角形，作出这个三角形绕某一点 *O* 旋转一定角度后的图形．观察图中对应点与旋转中心所连线段之间有什么关系，对应点与旋转中心连线所成的角之间有什么关系．

改变点 *O* 的位置，再对这个图形作旋转变换，上述结论是否仍然成立？

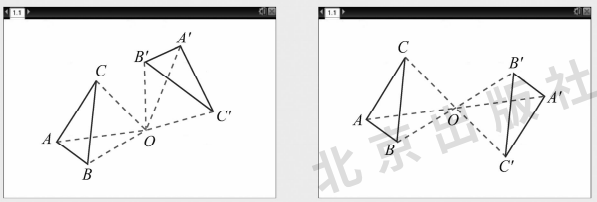


图 23 – 16

可以得到：

任意一对对应点与旋转中心的连线所成的角都是旋转角，对应点到旋转中心的距离相等．

[1] 要引导学生探索发现原图形经过旋转后的对应点、对应线段、对应角之间的位置关系与数量关系．

[1] 要重视对“分析”的处理，这是使学生明确“作图”道理的重要途径.

本例的解法实际上是比较严格的尺规作法，教学中此类要求仅限于作三角形等基本图形.

练习答案：

1. 点 A 为旋转中心，旋转角度为 45°.
2. 能看作是一条边（如线段 AB）绕 O 点、按照同一方向连续旋转 60°，120°，180°，240°，300°形成的.
3. 略.
4. 略.

例 2 如图 23－17，$\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转后，顶点 A 的对应点为点 D. 试确定顶点 B 的对应点的位置，并画出旋转后的三角形.

分析：假设顶点 B 的对应点为 E，则 $\angle BCE$，$\angle ACD$ 都是旋转角，且 $\angle BCE=\angle ACD$，$CE=CB$，$CD=CA$.[1]

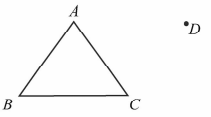


图 23－17

作法：(1) 如图 23－18，连接 CD；

(2) 以 BC 为一边作 $\angle BCF$，使 $\angle BCF=\angle ACD$；

(3) 在射线 CF 上截取 $CE=CB$；

(4) 连接 DE.

$\triangle DEC$ 就是 $\triangle ABC$ 绕点 C 按顺时针旋转后的图形.

你还能用其他方法作出 $\triangle DEC$ 吗？

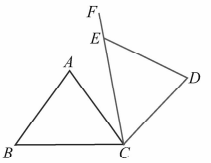
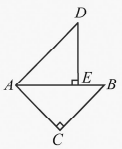


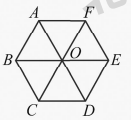
图 23－18

练习

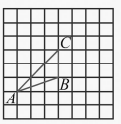
1. 如图，$\triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 都是等腰直角三角形，$\angle C$ 和 $\angle AED$ 都是直角，点 E 在 AB 上. 如果 $\triangle ABC$ 经逆时针旋转后能与 $\triangle ADE$ 重合，那么请指出其旋转中心与旋转角度.
2. 如图，O 是六个正三角形的公共顶点. 正六边形 $ABCDEF$ 能否看做某条线段绕 O 点连续旋转所形成的图形？
3. 如图，画出 $\triangle ABC$ 绕点 C 逆时针旋转 90° 后的图形.
4. 如图，E 是正方形 $ABCD$ 中 CD 边上任意一点，以点 A 为中心，把 $\triangle ADE$ 顺时针旋转 90°，画出旋转后的图形.



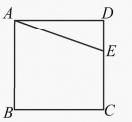
（第 1 题）



（第 2 题）



（第 3 题）



（第 4 题）

3. 能够按要求作出简单平面图形旋转后的图形.

思考

中心对称图形与旋转变换图形有什么关系？

实践[1]

1. 如图 23－19，在平面直角坐标系中，作出下列已知点关于原点 O 的对称点，并写出它们的坐标．这些对称点坐标与已知点的坐标有什么关系？

$A(3, 0)$，$B(0, -2)$，$C(2, 1)$，$D(-1, 3)$.

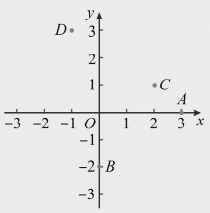


图 23－19

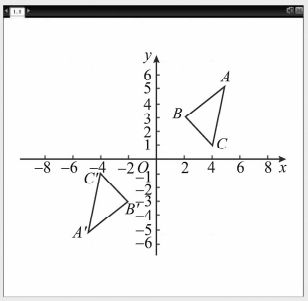


图 23－20

2. 如图 23－20，利用计算机或图形计算器在平面直角坐标系中画一个 $\triangle ABC$．以原点 O 为中心作旋转角为 180° 的旋转变换，得到 $\triangle A'B'C'$．度量点 A，A' 的坐标，观察它们的坐标有什么关系．再度量点 B，B' 与点 C，C' 的坐标，观察它们的坐标有什么关系．

任意改变 $\triangle ABC$ 的位置，上面得出的结论是否仍然成立？

实际上，可以得到如下结论：

点 $P(x, y)$ 关于原点的对称点为 $P'(-x, -y)$.

[1] 在直角坐标系中，将图形进行旋转后，对应点的坐标会发生一些变化，让学生通过测量或操作，发现和总结其变化规律，加深对图形变换的认识，体会数形结合的思想.

4. 经历图形坐标变化与图形旋转之间关系的探索过程，发展学生的形象思维能力和数形结合意识.

5. 在同一直角坐标系中，感受图形上点的坐标与图形旋转之间的关系.

[1] 旨在引导学生运用图形变换的观点学习几何.

注意：此类问题要求不宜过高.

例 3 如图 23－21，△ABC 的三个顶点的坐标分别为 $A(-3,1)$，$B(-1,-1)$，$C(-2,3)$，利用关于原点对称的点的坐标的特点，作出与△ABC 关于原点对称的图形.

解：点 $P(x,y)$ 关于原点的对称点为 $P'(-x,-y)$，因此△ABC 的三个顶点 $A(-3,1)$，$B(-1,-1)$，$C(-2,3)$ 关于原点的对称点分别为 $A'(3,-1)$，$B'(1,1)$，$C'(2,-3)$. 依次连接 $A'B'$，$B'C'$，$C'A'$ 就可以得到与△ABC 关于原点对称的△$A'B'C'$.

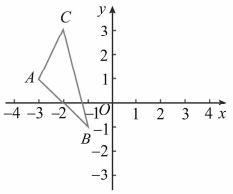
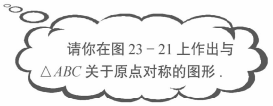


图 23－21



例 4[1] 如图 23－22，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle ADC=\angle ABC=90°$，$AD=CD$，$DP\perp AB$ 于 P. 如果四边形 $ABCD$ 的面积是 18，求 DP 的长.

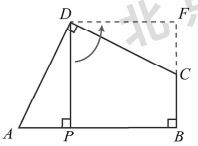


图 23－22

分析：这个问题看似条件不足，但仔细想一想，如果将△ADP 剪下来，补到△CDF 处，可证得四边形 $DPBF$ 恰为一个正方形，DP 的长就可求得. 这里的图形割补，相当于△ADP 绕点 D 逆时针旋转 90° 到△CDF 的位置.

解：将△ADP 绕点 D 逆时针旋转 90°，使 AD 与 CD 重合，得△DCF. 因为 $\angle A+\angle DCB=180°$，所以旋转后 F，C，B 在同一条直线上.

∵ $\angle DPB=\angle DFB=\angle PDF=90°$，$DP=DF$，

∴ 四边形 $DPBF$ 是正方形.

∵ 四边形 $ABCD$ 的面积是 18，

∴ 正方形 $DPBF$ 的面积是 18.

∴ $DP^2=18$.

∴ $DP=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$.

6. 对应用旋转变换解决几何问题有所感受.

练习

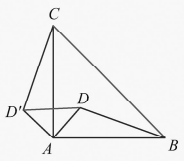
1. 下列各点中，哪两个点关于原点 O 对称？

$A(-5, 0)$；　$B(0, 2)$；　$C(2, -1)$；　$D(2, 0)$；

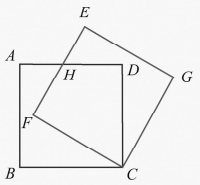
$E(0, 5)$；　$F(-2, 1)$；　$G(-2, -1)$.

2. 如图，D 是等腰 Rt $\triangle ABC$ 内一点，BC 是斜边．如果将 $\triangle ABD$ 绕点 A 按逆时针方向旋转到 $\triangle ACD'$ 的位置，求 $\angle ADD'$ 的大小．

3. 如图，边长为 3 的正方形 $ABCD$ 绕点 C 按顺时针方向旋转 30° 后得到正方形 $EFCG$，EF 交 AD 于 H．求 DH 的长．



（第 2 题）



（第 3 题）

综合与实践

图案设计

许多美丽的图案都是用平移、旋转的方法绘制而成的．如图 23－23，观察它们的变化规律，你能设计一些类似的图案吗？[1]试试看！



图 23－23

练习答案：

1. 点 C 与点 F 关于原点 O 对称.

2. 由旋转的性质，得 $AD = AD'$，$\angle DAB = \angle CAD'$，又 $\angle CAB = 90°$，

$\therefore \quad \angle DAD' = 90°.$

$\therefore \quad \angle ADD' = 45°.$

3. $\sqrt{3}$.

［1］利用图形的平移、旋转可以进行图案设计．让学生从生活中收集更多的实例.

7. 经历探索图形之间的变换关系（平移、旋转及其组合）的过程，发展图形分析能力、化归意识和综合运用变换解决有关问题的能力.

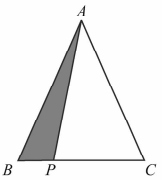
[1] 旨在通过相对活泼的问题，向学生展示图形之间的变换关系.

习 题 23－2

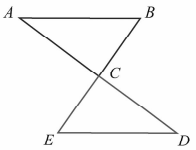
★基础★

1. 任意画一个△ABC，作下列旋转：
(1) 以 A 为中心，把这个三角形逆时针旋转 40°；
(2) 以 B 为中心，把这个三角形顺时针旋转 60°；
(3) 在三角形外任取一点为中心，把这个三角形顺时针旋转 120°；
(4) 以 AC 中点为中心，把这个三角形旋转 180°.

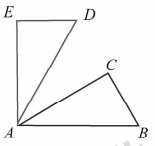
2. 如图，在△ABC 中，$AB=AC$，P 是 BC 边上任意一点．以点 A 为中心，取旋转角等于 $\angle BAC$，把△ABP 逆时针旋转，画出旋转后的图形．



（第 2 题）



（第 3 题）

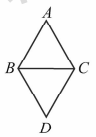


（第 4 题）

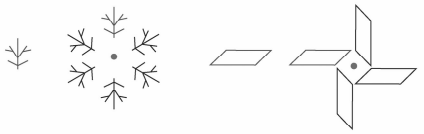
3. 如图，△ABC 是直角三角形，$\angle ACB=90°$．△ABC 旋转后能与△DEC 重合，如果点 B，C，E 三点在同一直线上，那么：
(1) 旋转中心是哪一点？(2) 旋转角的度数是多少？(3) DE 和 AB 的位置关系怎样？

4. 如图，在△ABC 中，$\angle C=90°$，$\angle B=60°$，$AC=1$．如果将△ABC 绕点 A 逆时针旋转 60° 到△ADE 的位置，求 EC 的长．

5. 如图，如果等边三角形 ABC 旋转后能与等边三角形 DCB 重合，那么在图形所在的平面上可以作为旋转中心的点有几个？分别说明其旋转的方向．



（第 5 题）

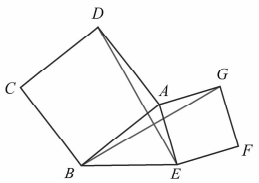

（第 6 题）

6. 如图，其中的图形都是由一个基本图形经过旋转得到的，分别指出旋转中心和旋转角的大小.[1]

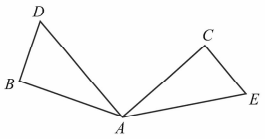
7. 四边形 $ABCD$ 各顶点的坐标分别为 $A(5,0)$，$B(-2,3)$，$C(-1,0)$，$D(-1,-5)$，作出与四边形 $ABCD$ 关于原点 O 对称的图形．

★★提升★★

1. 如图，如果四边形 $ABCD$ 和四边形 $AEFG$ 都是正方形，那么将△ADE 旋转某一角度后，能不能与△ABG 重合？如果能重合，那么旋转中心是什么，旋转角的度数是多少？

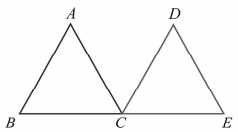


（第 1 题）

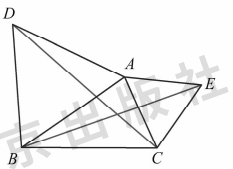


（第 2 题）

2. 如图，如果△BAD 与△CAE 是能够重合的图形，其中∠BAD = ∠CAE = 30°，$AB = AC$，$AD = AE$，且∠DAC = 90°．那么旋转中心是什么？旋转角的度数是多少？
3. 如图，△ABC，△DCE 是能够重合的等边三角形，且 B，C，E 三点在同一条直线上．如果将△ABC 绕点 C 旋转，那么旋转角最小是多少度时能与△DCE 重合？



（第 3 题）



（第 4 题）

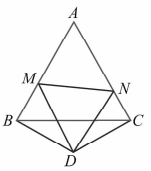
4. 如图，△ABD，△AEC 都是等边三角形．BE 与 DC 有什么关系？你能用旋转的性质说明上述关系成立的理由吗？

★★★拓展★★★

1. 直线 $y = 2x + 2$ 与 x 轴，y 轴分别交于 A，B 两点，将△AOB 绕点 O 顺时针旋转 90° 得到△A_1OB_1，求经过 A，A_1，B_1 三点的抛物线的表达式．

[1] 引导学生复习所学知识.

2. 如图，D 是等边三角形 ABC 外一点，且满足 $DB = DC$，$\angle BDC = 120°$. M，N 分别是 AB，AC 上的点，且 $\angle MDN = 60°$. 当 $\angle MDN$ 绕点 D 旋转时，MN、BM、CN 的关系是否发生变化？请简述理由.



（第 2 题）

23.3 轴对称变换

思考

1. 什么叫轴对称图形？轴对称图形有什么性质？你能举出学习过的轴对称图形吗？

2. 观察以下两组图案，你能分别说出最后图案的形成过程吗？[1]

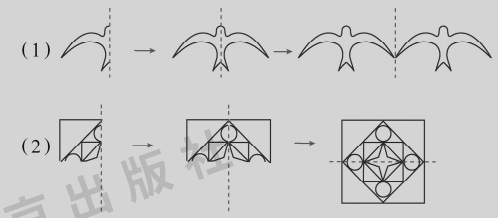


图 23－24

实践

1. 图 23－25 给出了某图形的一部分，请你先画出这部分图形关于直线 l_1 对称的图形，再画出所得到的对称图形关于直线 l_2 对称的图形.

2. 请你在图 23－26 的正方形内填充适当图案，使它们和正方形内

23.3 节的教学目标：

1. 通过实例加深对轴对称变换的认识.

的已知图案关于虚线所在直线对称，然后和同学们交流．

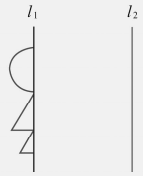


图 23－25

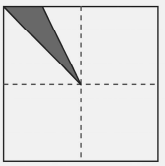


图 23－26

像这样，由一个平面图形得到它的轴对称图形的图形运动称为轴对称变换．

利用轴对称变换，可以设计出美丽的图案．在许多美术作品中，都可以看到轴对称的例子（图 23－27）．[1]

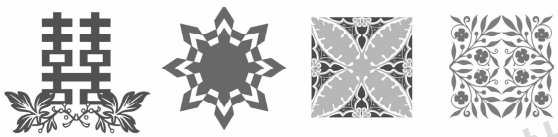


图 23－27

有时，将平移、旋转和轴对称结合起来，可以设计出更美丽的图案．许多镶边和背景图案就是这样设计出来的（图 23－28）．

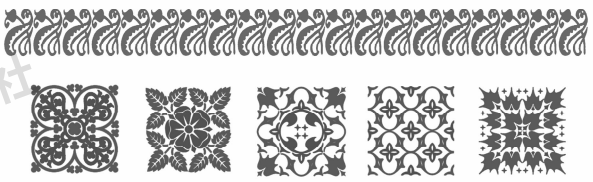


图 23－28

［1］建议教学中关注对图案进行分析、欣赏的过程．在教学中，也可以更换其他类型的图案，但必须运用平移、旋转、轴对称分析其形成过程．

2．认识和欣赏轴对称在现实生活中的应用，能够灵活运用平移、旋转与轴对称组合进行一些简单的图案设计．

成轴对称的两个图形中的任何一个可以看做由另一个图形经过轴对称变换后得到，一个轴对称图形也可以看做以它的一部分为基础，经轴对称变换而成．

在平面直角坐标系中，关于 x 轴对称的两个点的坐标有什么关系？关于 y 轴对称的两个点的坐标有什么关系？

思考

实际上，可以得到下列结论：

- 点 $P(x, y)$ 关于 x 轴的对称点为 $P_1(x, -y)$；
- 点 $P(x, y)$ 关于 y 轴的对称点为 $P_2(-x, y)$．

例 1 如图 23－29，四边形 $ABCD$ 的顶点坐标为 $A(-5, 1)$，$B(-2, 1)$，$C(-2, 5)$，$D(-5, 4)$．请作出与四边形 $ABCD$ 关于 y 轴对称的图形．

解：点 $P(x, y)$ 关于 y 轴对称的点坐标为 $P'(-x, y)$，因此，四边形 $ABCD$ 的顶点 A，B，C，D 关于 y 轴对称的点分别为 $A'(5, 1)$，$B'(2, 1)$，$C'(2, 5)$，$D'(5, 4)$．依次连接 $A'B'$，$B'C'$，$C'D'$，$D'A'$，就可得到与四边形 $ABCD$ 关于 y 轴对称的四边形 $A'B'C'D'$．

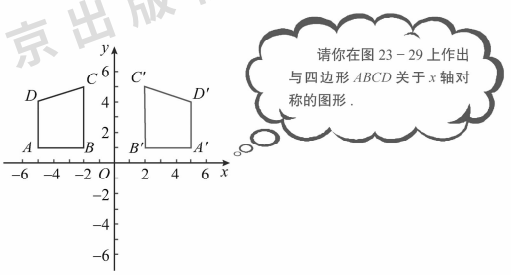


图 23－29

3. 在同一直角坐标系中，感受图形上点的坐标与轴对称变换之间的关系．
4. 对应用轴对称变换解决几何问题有所感受．

例 2[1] 如图 23－30，矩形纸片 $ABCD$ 中，$AB=3$，$BC=4$．现将点 A，C 重合，使纸片折叠压平，设折痕为 EF，请计算重叠部分△AEF 的面积．

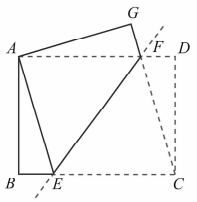


图 23－30

分析：通过折叠，直角梯形 $ECDF$ 变为直角梯形 $EAGF$，△CEF 变为△AEF．EF 所在直线是它们的对称轴．折叠实际上是图形的轴对称变换．

解：将矩形纸片 $ABCD$ 沿直线 EF 折叠，点 A，C 重合，

$\therefore$ △CEF ≌△AEF.

$\therefore$ $AE=CE$.

设 $CE=x$，则 $AE=CE=x$，$BE=4-x$.

在 Rt△ABE 中，$AE^2=AB^2+BE^2$，

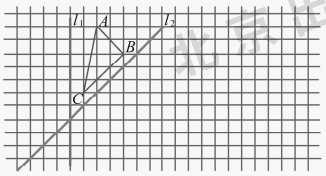
$\therefore$ $x^2=3^2+(4-x)^2$.

解得 $x=\frac{25}{8}$.

$\therefore$ $S_{\triangle AEF}-S_{\triangle CEF}-\frac{1}{2}CE\cdot AB=\frac{1}{2}\times\frac{25}{8}\times3=\frac{75}{16}$.

练习

1. 先画出△ABC 关于直线 l_1 对称的图形△$A_1B_1C_1$，再画出△$A_1B_1C_1$ 关于直线 l_2 对称的图形△$A_2B_2C_2$.



（第 1 题）

2. 如图，利用关于坐标轴对称的点的坐标的特点，分别画出△ABC 关于 x 轴和 y 轴对称的图形．

[1] 旨在引导学生运用图形变换的观点来学习几何.

注意：此类问题要求不宜过高.

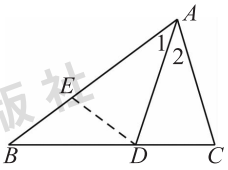
练习答案：

1. 略.

2. △ABC 关于 x 轴对称的图形为△$A'B'C'$，其中 A'，B'，C' 的坐标分别为：$A'(2,-1)$，$B'(3,1)$，$C'(1,3)$；图略.

△ABC 关于 y 轴对称的图形为△$A''B''C''$，其中 A''，B''，C'' 的坐标分别为：$A''(-2,1)$，$B''(-3,-1)$，$C''(-1,-3)$；图略.

3. 证明：在 AB 上截取 $AE=AC$，连接 ED.



∵ AD 是 $\angle BAC$ 的角平分线，

∴ $\angle 1=\angle 2$.

∵ 在 $\triangle EAD$ 和 $\triangle CAD$ 中，

$$\begin{cases} AE=AC, \\ \angle 1=\angle 2, \\ AD=AD. \end{cases}$$

∴ $\triangle EAD\cong\triangle CAD$ (SAS).

∴ $\angle AED=\angle C$，$ED=CD$.

∵ $AB=AC+CD$，

∴ $AB=AE+ED$.

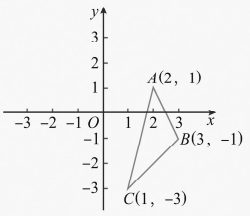
∴ $BE=ED$.

∴ $\angle B=\angle EDB$.

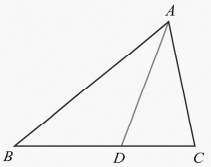
∴ $\angle AED=\angle B+\angle EDB=2\angle B$.

∴ $\angle C=2\angle B$.

3. 如图，在$\triangle ABC$中，AD是$\angle BAC$的角平分线，$AB-AC=CD$. 求证：$\angle C-2\angle B$.



（第 2 题）



（第 3 题）

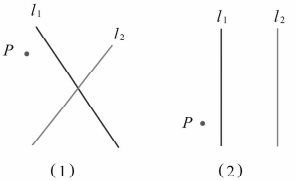
习 题 23－3

★基础★

1. 把下列各图形补成关于直线 l 对称的图形.



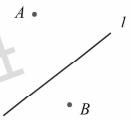
（第 1 题）



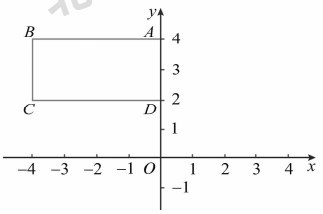
（第 2 题）

2. 请你分别在图(1)、图(2)中画出点 P 关于直线 l_1 对称的点 P'，再画出点 P' 关于直线 l_2 对称的点 P''.

3. 如图所示，村庄 A，B 分别在笔直公路 l 的两侧. 一辆汽车在公路 l 上行驶，汽车在什么位置时到 A，B 两村庄的距离相等？请找出这个点，并说明理由.



（第 3 题）



（第 4 题）

4. 如图，矩形 $ABCD$ 中，$A(0, 4)$，$B(-4, 4)$，$C(-4, 2)$.
（1）请写出 D 点坐标；
（2）作出矩形 $ABCD$ 关于 y 轴对称的图形 .

★★提升★★

1. 在平面直角坐标系中，直线 l 过点 $M(3, 0)$，且平行于 y 轴 . 如果 $\triangle ABC$ 三个顶点的坐标分别是 $A(-2, 0)$，$B(-1, 0)$，$C(-1, 2)$，$\triangle ABC$ 关于 y 轴的对称图形是 $\triangle A_1B_1C_1$，$\triangle A_1B_1C_1$ 关于直线 l 的对称图形是 $\triangle A_2B_2C_2$，写出 $\triangle A_2B_2C_2$ 的三个顶点的坐标 .
2. 如图，要在燃气管道 l 上修建一个泵站，分别向 A，B 两城镇供气 . 泵站修在管道的什么位置，可使所用的输气管线最短？



（第 2 题）

★★★拓展★★★

直线 $y=-\frac{4}{3}x+8$ 与 x 轴、y 轴分别交于点 A 和点 B，M 是 OB 上的一点 . 如果将 $\triangle ABM$ 沿 AM 折叠，点 B 恰好落在 x 轴上的点 B' 处，求直线 AM 的表达式 .

[1] 旨在引出位似图形的概念.

[2] 引导学生利用所学的相似形的知识完成证明.

[3] 引导学生利用所学的相似形的知识得到结论.

23.4 位似变换

在日常生活中，我们经常见到下面一类相似的图形（图 23－31）：通过幻灯机，把图片上的图形放大到屏幕上；摄影师通过照相机，把景物的影像缩小在底片上.

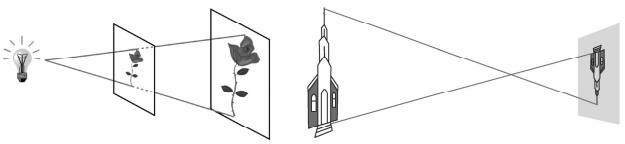


图 23－31

这样的放大或缩小，没有改变图形形状，经过放大或缩小的图形与原图形是相似的. 因此，我们可以得到真实的图片和照片.[1]

探索

首先，我们来证明如下的命题：

如图 23－32，O 是 $\triangle ABC$ 外的一点，作射线 OA，OB，OC，在射线 OA，OB，OC 上分别取三点 A'，B'，C'，使 $\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=\frac{OC'}{OC}$，那么 $\triangle A'B'C'\backsim\triangle ABC$.[2]

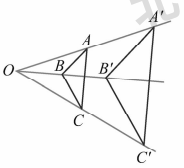


图 23－32

其次，我们研究上面命题是否可以推广到多边形的情况：

如图 23－33，O 是四边形 $ABCD$ 外的一点，作射线 OA，OB，OC，OD，在射线 OA，OB，OC，OD 上分别取四点 A'，B'，C'，D'，使 $\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=\frac{OC'}{OC}=\frac{OD'}{OD}$，那么四边形 $A'B'C'D'$ 与四边形 $ABCD$ 相似吗？[3]

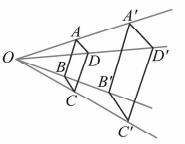


图 23－33

23.4 节的教学目标：

1. 了解位似图形及其有关概念.

图 23 – 32、图 23 – 33 中的两个多边形不仅相似，而且对应点的连线相交于一点，对应边互相平行，像这样的两个图形叫做位似图形.[1] 其中交点 O 叫做位似中心.

利用位似的方法，可以把一个多边形放大或缩小.

例 1 任意画一个四边形，不改变图形的形状，把它的各边长缩小为原来的 $\frac{1}{2}$.

解：如图 23 – 34，在四边形 $ABCD$ 外任意取一点 O，作射线 OA，OB，OC，OD，然后分别在射线 OA，OB，OC，OD 上取点 A'，B'，C'，D'，使得 $\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=\frac{OC'}{OC}=\frac{OD'}{OD}=\frac{1}{2}$，顺次连接点 A'，B'，C'，D'，四边形 $A'B'C'D'$ 就是所要求作的图形.

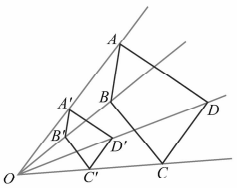
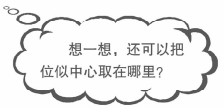


图 23 – 34



像这样，由一个平面图形得到它的位似图形的图形运动称为位似变换.

实践

利用下面的方法可以将一个图形放大：

如图 23 – 35，用螺钉把四根直尺在 A，B，C，D 四处互相连接起来，使连接处可以转动，并使四边形 $ABCD$ 形成一个平行四边形. 在 CB 尺上选一点 O，使 B 介于 C，O 之间. 在 O 处装上一根针，这根针的作用在于能把 O

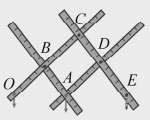


图 23 – 35

[1] 位似图形是一种特殊的相似图形，而相似图形未必都能构成位似图形.

2. 能够利用作位似图形的方法将一个图形放大或缩小.

[1] 在直角坐标系中，将图形进行放大或缩小后，对应点的坐标会发生一些变化，让学生通过测量或操作，发现和总结变化规律，加深对图形变换的认识，体会数形结合的思想.

固定在图板上的某一点；再在 CD 尺上选一点 E，使 O，A，E 三点共线；最后在 A 处装上一根针，E 处装上一支铅笔.

使用的时候，将 O 点固定，让 A 处的针描画已知图形，那么 E 处的铅笔便会随着画出相似的图形来.

实践 [1]

1. 如图 23－36，$\triangle ABC$ 的顶点坐标分别为 $A(1, 3)$，$B(1, 1)$，$C(6, 2)$，以点 O 为位似中心，相似比为 2，将 $\triangle ABC$ 放大. 观察对应顶点坐标的变化，你有什么发现？

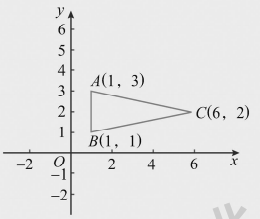


图 23－36

2. 如图 23－37，利用计算机或图形计算器在平面直角坐标系中画一个 $\triangle ABC$，以点 O 为位似中心，自选相似比为 k，进行位似变换，得到 $\triangle A'B'C'$ 和 $\triangle A''B''C''$.

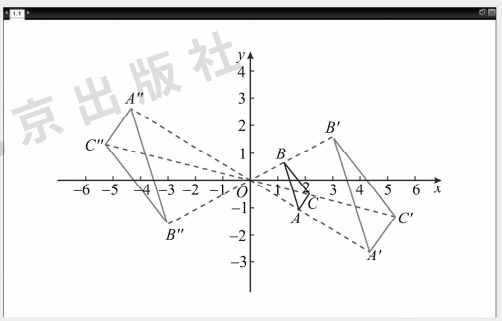


图 23－37

3. 在同一直角坐标系中，感受图形上点的坐标与位似变换之间的关系.

(1) 分别度量点 A，A' 的横坐标，并计算比值．

(2) 分别度量点 A，A' 的纵坐标，并计算比值．观察比值与 k 有什么关系．其他对应点呢？

任意改变△ABC 的位置，上面得出的结论是否仍然成立？

可以得到：

在平面直角坐标系中，如果位似变换是以原点为位似中心，相似比为 k，那么位似图形对应点的对应坐标的比等于 k 或 $-k$.[1]

例 2 已知：△ABC 的顶点坐标分别为 $A(2, 4)$，$B(4, 0)$，$C(6, 0)$．在第一象限内画出它的一个以原点 O 为位似中心，相似比为 $\frac{1}{2}$ 的位似图形．

作法：如图 23－38，利用位似变换中对应点的坐标的变化规律，点 A 的对应点 A' 的坐标为 $\left(2\times\frac{1}{2}, 4\times\frac{1}{2}\right)$，即 $(1, 2)$．类似的，可以确定点 B'，C' 的坐标分别为 $(2, 0)$，$(3, 0)$．依次连接点 A'，B'，C'，△$A'B'C'$ 就是所要求作的△ABC 的位似图形．

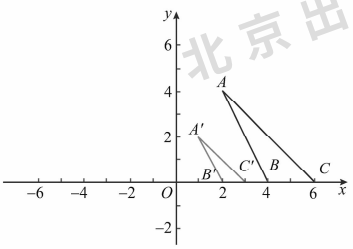


图 23－38

[1] 在平面直角坐标系中，以原点为位似中心，将一个图形按照相似比 k 放大或缩小，有两种方法：一种得到的新图形与原图形在原点同侧，这时新旧图形上对应点的坐标比为 k；另一种得到的新图形与原图形在原点两侧，这时新旧图形上对应点的坐标比为 $-k$.

练习答案：

1. 平行.

∵ $\triangle OCD$ 与 $\triangle OAB$ 是位似图形，

∴ $\triangle OCD \backsim \triangle OAB$.

∴ $\angle OCD = \angle A$.

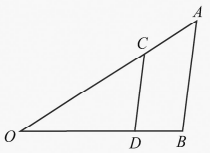
∴ $AB /\!/ CD$.

2. 略.

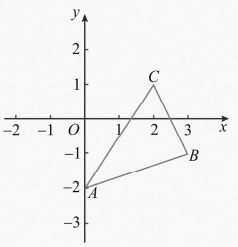
3. 略.

练习

1. 如图，$\triangle OCD$ 与 $\triangle OAB$ 是位似图形，AB 与 CD 平行吗？请说明理由.
2. 任意画一个五边形，不改变图形的形状，再把它的各边长放大为原来的 3 倍.
3. 如图，$\triangle ABC$ 的顶点坐标分别为 $A(0, -2)$，$B(3, -1)$，$C(2, 1)$. 以原点 O 为位似中心，将这个三角形放大为原来的 2 倍.



（第 1 题）

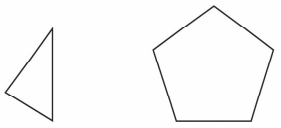


（第 3 题）

习 题 23－4

★基础★

1. 如图，将三角形放大，使放大后的三角形与原三角形对应边的比为 2 : 1.



（第 1 题）

（第 2 题）



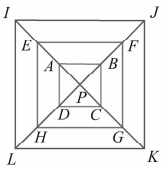
（第 3 题）

2. 如图，将五边形缩小，使缩小后的五边形与原五边形对应线段的比是 1 : 3.

3. 如图，以点 P 为位似中心，将五角星缩小为原来的 $\frac{1}{2}$.

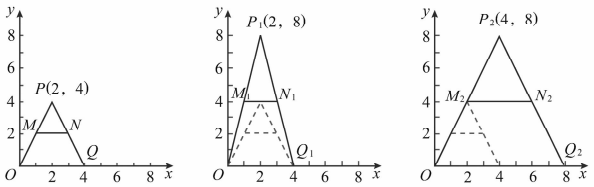
★★提升★★

1. 如图，正方形 $EFGH$，$IJKL$ 是由正方形 $ABCD$ 经过位似变换得到的，点 P 是位似中心，其中 $PA=AE=EI$.
(1) 如果相似比为 3，正方形 $ABCD$ 的位似图形是哪个正方形？
(2) 如果由正方形 $ABCD$ 得到它的位似图形正方形 $EFGH$，求其相似比.



（第 1 题）

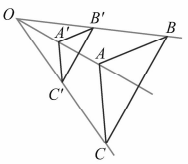
2. 如图所示，在平面直角坐标系中，图 (1) 中的 A 状图案经过变换后分别变成图 (2)、图 (3) 中的图案 (虚线对应于原图案)，请写出相应点的坐标，并指出对应点坐标之间的关系.



(1)　(2)　(3)
（第 2 题）

★★★拓展★★★

如图，利用直尺、计算机或图形计算器任意画一个△ABC，以点 O 为位似中心，自选相似比 k，进行位似变换，得到△$A'B'C'$. 度量线段 OA，OA'，OB，OB'，OC，OC' 的长，你有什么发现？任意改变△ABC 的位置，得出的结论是否仍然成立？



阅读理解

绝妙的证明

有这样一道几何证明题：

如图 23－39，$ABCD$ 为任意给定的四边形，AB，BC，CD，DA 边的中点分别是 E，F，G，H．连接 EG 和 HF．

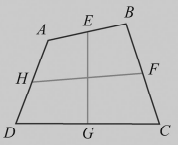


图 23－39

证明：$S_{四边形\ ABCD} \leqslant EG \cdot HF \leqslant \frac{1}{2}(AB+CD)\cdot\frac{1}{2}(AD+BC)$．

我国数学家华罗庚对这道题有一个绝妙的证明：

如图 23－40，他把四边形沿对边中点连线划分为四个小四边形，分别记作“改、造、山、河”．然后，他让“改”字块不动，挪动其余三块：将“造”字块绕点 H 旋转 180°；再将“河”字块绕点 E 旋转 180°；最后将“山”字块平移，让点 C 与点 D 重合．有趣的是，这样挪动后的新图形竟然是一个平行四边形（图 23－41）！它的两条邻边就是原四边形对边中点的连线．我们知道，一个平行四边形的面积总是不大于两条邻边边长的乘积，这就证明了前一个不等式．

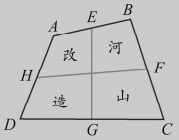


图 23－40



图 23－41

如图 23－42，再将原图绕 F 点旋转 180°，利用三角形两边之和大于第三边，就得到上、下边长之和的一半大于左、右对边中点连线的长．同理可证，左、右边长之和的一半大于上、下对边中点连线的长．这就证明了后一个不等式．



图 23－42

北京出版社

回顾与整理

知识要点

1. 在平面内，将一个图形沿某个方向移动一定的距离，得到一个新的图形，这样的图形运动称为平移变换.

2. 在平面内，将一个图形绕一个定点沿顺时针或逆时针方向转动一个角度，得到一个新的图形，这样的图形运动称为旋转变换.

3. 由一个平面图形得到它的轴对称图形的图形运动称为轴对称变换.

4. 由一个平面图形得到它的位似图形的图形运动称为位似变换.

平移变换、旋转变换、轴对称变换都不改变图形的形状和大小；位似变换不改变图形的形状，可以改变图形的大小.

学习指导

1. 图形变换是对物体运动的数学抽象. 理解各种图形变换的概念，要从物体的运动变化入手，这是认识各种图形变换的重要途径.

例如，通过观察跑道上滑行的飞机的运动，找出运动规律，从而认识图形的平移变换.

又如，通过观察电风扇的扇叶和钟的指针转动等实例，找出运动规律，从而认识图形的旋转变换.

2. 要注意几种图形变换的相同点和不同点. 平移、旋转与轴对称变换是--个几何图形运动到--个新的位置后，这个图形上任意两点的距离保持不变(即保距变换)；位似变换是一个几何图形在运动前、后的对应线段之比总为定值，而角的大小则保持不变(即保角变换).

复习题

★基础★

1. 选择题：

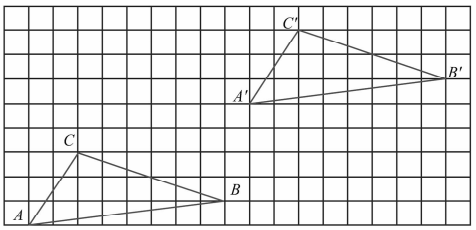
(1) 如图，△$A'B'C'$ 是由△ABC 平移得到的，下列说法错误的是(　　).

A. 将△ABC 先向右平移 9 个单位长度，再向上平移 5 个单位长度就得到△$A'B'C'$

B. 将△ABC 先向上平移 5 个单位长度，再向右平移 9 个单位长度就得到△$A'B'C'$

C. 将△ABC 沿着 CC' 的方向，平移的距离等于线段 CC' 的长，就得到△$A'B'C'$

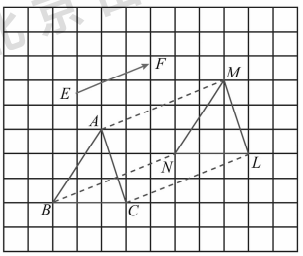
D. 将△ABC 沿着 $C'C$ 的方向，平移的距离等于线段 CC' 的长，就得到△$A'B'C'$



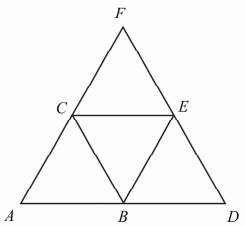
[第 1(1)题]

(2) 如图，将△ABC 沿着 EF 方向平移一定的距离到△MNL. 现有下列四个结论：① $AM \parallel BN$；② $AM = BN$；③ $BC = NL$；④ $\angle ACB = \angle MNL$. 其中正确的有(　　).

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个



[第 1(2)题]



[第 1(3)题]

北京出版社

(3) 如图，△ABC，△BDE，△CEF，△BEC 是四个等边三角形．下列说法正确的是(　　).

A. 将△ABC 平移可得到其余的三个等边三角形

B. 将△ABC 绕点 B 旋转可得到其余的三个等边三角形

C. 将△ABC 绕点 C 旋转可得到其余的三个等边三角形

D. 将△ABC 旋转可得到其余的三个等边三角形，而不必平移

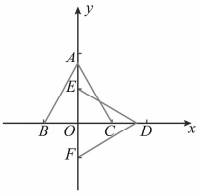
(4) 如图，在平面直角坐标系中，△ABC 各顶点的坐标分别为 $A(0, \sqrt{3})$，$B(-1, 0)$，$C(1, 0)$．如果△DEF 各顶点的坐标分别为 $D(\sqrt{3}, 0)$，$E(0, 1)$，$F(0, -1)$，则下列判断正确的是(　　).

A. △DEF 由△ABC 绕点 O 顺时针旋转 90° 得到

B. △DEF 由△ABC 绕点 O 逆时针旋转 90° 得到

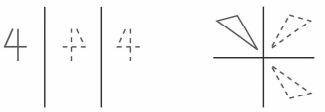
C. △DEF 由△ABC 绕点 O 顺时针旋转 60° 得到

D. △DEF 由△ABC 绕点 O 顺时针旋转 120° 得到



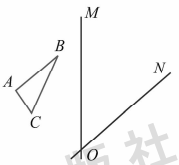
[第 1(4) 题]

2. 如图，图 (1)、图 (2) 都是一个图形经过两次轴对称变换之后得到的图形，图 (1) 中的两条对称轴是平行的，图 (2) 中的两条对称轴是垂直的．图 (1) 中的图形除了经过两次轴对称变换得到之外，还可以通过我们学习过的_____得到；图 (2) 中的图形可以通过_____得到．



(1)　　(2)

(第 2 题)



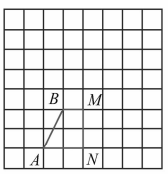
(第 3 题)

3. 如图，画出△ABC 关于直线 OM 对称的△$A'B'C'$，再画出△$A'B'C'$ 关于直线 ON 对称的△$A''B''C''$．观察△ABC 与△$A''B''C''$，你能发现这两个三角形之间有什么关系吗？△$A''B''C''$ 能否由△ABC 旋转得到？

4. 如图，梯形 $ABMN$ 是直角梯形．

(1) 请在图中补上一个直角梯形，使它与梯形 $ABMN$ 构成一个等腰梯形；

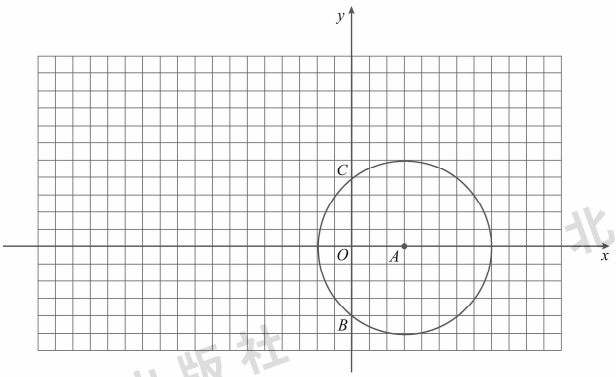
(2) 将补上的直角梯形以点 M 为旋转中心，逆时针旋转 180°，再向上平移一格，画出这个直角梯形．



(第 4 题)

5. 根据下列点坐标的变化，判断它们进行了怎样的变换：
(1)(−1，3)→(−1，−3)；　(2)(−5，−6)→(−5，−1)；
(3)(3，4)→(−3，4)；　(4)(−2，3)→(2，−3)；
(5)(4，8)→(2，4).

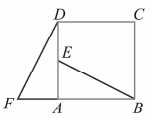
6. 如图，正方形网格中，每个小正方形的边长为 1 个单位长度，以 O 为原点建立平面直角坐标系．圆心为 $A(3，0)$ 的⊙A 被 y 轴截得的弦长 $BC=8$．解答下列问题：
(1)⊙A 的半径为_____.
(2)请在图中将⊙A 先向上平移 6 个单位长度，再向左平移 8 个单位长度得到⊙D，观察你所画的图形．⊙D 的圆心 D 的坐标是_____；⊙D 与 x 轴的位置关系是_____；⊙D 与 y 轴的位置关系是_____.



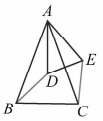
(第 6 题)

★★提升★★

1. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，E 是 AD 的中点，F 是 BA 延长线上的一点，$AF=\frac{1}{2}AB$.
(1)证明：△ABE ≌△ADF；
(2)在图中，可以通过平移、轴对称、旋转中的哪一种变换，使△ABE 变换到△ADF 的位置？



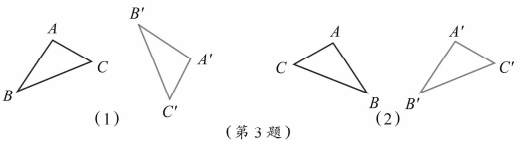
（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，△*ABC*，△*ADE* 均是顶角为 42° 的等腰三角形，*BC*，*DE* 分别是底边．图中的哪两个三角形可以通过怎样的旋转而相互得到？

3. 用硬纸板剪出两个同样大小的三角形，按照下列两种情况将△*ABC* 和△*A′B′C′* 放在桌面上．

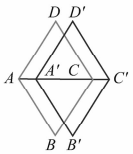


（第 3 题）

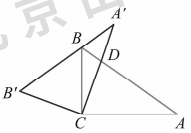
请你动手试一试，如何通过平移、旋转与轴对称将△*ABC* 运动到△*A′B′C′*，使两者互相重合．再与你的伙伴们交流一下，看看谁的方法多．

★★★ 拓展 ★★★

1. 如图，把菱形 *ABCD* 沿着对角线 *AC* 的方向移动到菱形 *A′B′C′D′* 的位置，它们的重叠部分的面积是菱形 *ABCD* 的面积的一半，如果 $AC=\sqrt{2}$，求菱形平行移动的距离 *AA′*．



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，在 Rt △*ABC* 中，∠*ACB* = 90°，∠*A* = 35°，将△*ABC* 绕点 *C* 旋转到△*A′B′C* 的位置，其中 *A′*，*B′* 分别是 *A*，*B* 的对应点，且点 *B* 在斜边 *A′B′* 上，直线 *CA′* 交 *AB* 于 *D*，这时∠*BDC* 的度数是多少？

3. 如图，先阅读图形的操作过程（本题中四个矩形的水平方向的边长均为 a 个单位长度，竖直方向的边长均为 b 个单位长度），再解答问题．

在图（1）中，将线段 A_1A_2 向右平移 1 个单位长度到 B_1B_2，得到封闭图形 $A_1A_2B_2B_1$（即蓝色部分）；

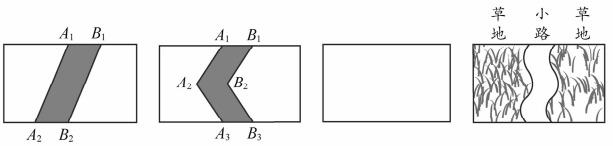
在图（2）中，将折线 $A_1A_2A_3$ 向右平移 1 个单位长度到 $B_1B_2B_3$，得到封闭图形 $A_1A_2A_3B_3B_2B_1$（即蓝色部分）．

（1）类似的，在图（3）中，请你画一条有两个折点的折线，同样向右平移 1 个单位长度，从而得到一个封闭图形，并填充颜色．

（2）请你分别写出上述 3 个图形中除去填充颜色部分后剩余部分的面积：

$S_1=$ _____，$S_2=$ _____，$S_3=$ _____．

（3）如图（4），在一块矩形草地上，有一条弯曲的柏油路（小路任何地方的水平宽度都是 1 个单位长度）．请你猜想草地面积是多少，并说明你的猜想是正确的．



（1） （2） （3） （4）

（第 3 题）

部分习题答案或提示

习题 23－1

基础

1. 略.

2. 略.

3. $\triangle ECD$ 是由 $\triangle ABC$ 沿 BC 方向平移距离为线段 BC 的长度得到的. 图中相等的线段有：$AB = EC$，$AC = ED$，$BC = CD = AE$；图中相等的角有：$\angle BAC = \angle ACE = \angle CED$，$\angle B = \angle ECD = \angle AEC$，$\angle ACB = \angle EAC = \angle EDC$.

4. $AB \parallel\!\!= DE$，$AC \parallel\!\!= DF$，$BC \parallel\!\!= EF$，$AD \parallel\!\!= CF$，$AD \parallel\!\!= BE$，$CF \parallel\!\!= BE$.

5. $\because$ $\triangle DEA$ 和 $\triangle FAG$ 都是由 $\triangle ABC$ 平移得到的，

   $\therefore$ 点 B，A，F 三点在同一直线上，

   点 D，A，C 三点在同一直线上，

   $EA /\!/ BC$，$AC = AD$，$AB = AF$.

   又 $\angle DAF = \angle BAC$，

   $\therefore$ $\triangle DFA \backsimeq \triangle CBA$.

   $\therefore$ $\angle ABC = \angle DFA$.

   $\therefore$ $DF /\!/ BC$.

   $\therefore$ $DF /\!/ EA /\!/ BC$.

6. 如图，平移后 $DE = DC$，$\angle DEC = \angle DCE$.

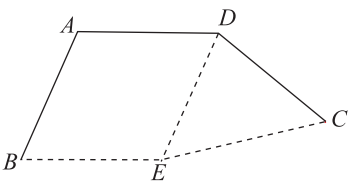
   理由：$\because$ AB 沿 A 到 D 的方向平移 AD 线段长得线段 DE，

   $\therefore$ $AB \parallel\!\!= DE$.

   $\because$ $AB = DC$，

   $\therefore$ $DE = DC$.

   $\therefore$ $\angle DEC = \angle DCE$.



（第 6 题）

7. 直线 l 沿射线 OD 方向平移 5 cm 时与 $\odot O$ 相切. 理由略.

8. （1）略；

   （2）B，C 两点平移后的坐标分别为（0，－5），（3，4）.

提升

1. $\frac{3}{2}$.

2. 150.

拓展

略.

习题 23－2

基础

1. 略.
2. 略.
3. （1）点 C；（2）180°；（3）平行.
4. $EC=1$. 提示：$\triangle AEC$ 为等边三角形.
5. 3 个. 分别是：$\triangle ABC$ 绕 B 点顺时针旋转 60°可与 $\triangle DCB$ 重合；$\triangle ABC$ 绕 C 点逆时针旋转 60°可与 $\triangle DCB$ 重合；$\triangle ABC$ 绕 BC 边中点顺时针（或逆时针）旋转 180°后可与 $\triangle DCB$ 重合.
6. 中心绿点为旋转中心；旋转角分别为 60°，120°，180°，240°，300°；90°，180°，270°.
7. 与四边形 $ABCD$ 关于原点 O 对称的四边形 $A'B'C'D'$ 的各顶点坐标分别为 $A'(-5,0)$，$B'(2,-3)$，$C'(1,0)$，$D'(1,5)$. 图略.

提升

1. 能. 将 $\triangle ADE$ 绕点 A 逆时针旋转 90°后与 $\triangle ABG$ 重合. 故旋转中心是点 A，旋转角度数是 90°.
2. 旋转中心是点 A，旋转角度数是 120°.
3. 120°.
4. 相等. 将 $\triangle ADC$ 绕点 A 逆时针旋转 60°后，由 $\triangle ABD$，$\triangle AEC$ 均是等边三角形可知，D 与 B 重合，C 与 E 重合，故 $\triangle ADC$ 与 $\triangle ABE$ 重合，所以 $BE=DC$.

拓展

1. $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+1$. 提示：$A(-1,0)$，$B(0,2)$，$A_1(0,1)$，$B_1(2,0)$.
2. 当 $\angle MDN$ 绕 D 点转动时，MN，BM，CN 之间满足 $MN=BM+CN$ 的关系不变.
理由：由 $\angle BDC=120°$，$\angle MDN=60°$，可知 $\angle BDM+\angle NDC=60°$. 因为 $DB=DC$，故将 $\triangle DCN$ 绕点 D 逆时针旋转 120°得 $\triangle DBE$. 由 $\angle MBD=\angle NCD=90°$ 可证 M，B，E 三点共线. 利用“SAS”证 $\triangle EDM\cong\triangle NDM$. 所以 $MN=ME=BM+BE=BM+CN$.

习题 23－3

基础

1. 略.
2. 略.
3. 连接 AB，作线段 AB 的垂直平分线交直线 l 于点 P，则点 P 为所求点. 理由：线段垂直平分线上的点到线段两端点的距离相等.
4. （1）$D(0, 2)$；
   （2）略.

提升

1. $A_2(4, 0)$，$B_2(5, 0)$，$C_2(5, 2)$.
2. 作点 A 关于直线 l 的对称点 A'，连接 $A'B$ 交直线 l 于点 P. 泵站修在管道 P 点处时，可使所用输气管线最短.

拓展

$y = -\frac{1}{2}x + 3$.

习题 23－4

基础

1. 略.
2. 略.
3. 略.

提升

1. （1）正方形 $IJKL$；
   （2）正方形 $EFGH$ 与正方形 $ABCD$ 的相似比是 $2:1$.
2. 图(1)中点 $O(0, 0)$，$M(1, 2)$，$P(2, 4)$，$N(3, 2)$，$Q(4, 0)$.
   图(2)中的对应点坐标分别为 $O(0, 0)$，$M_1(1, 4)$，$P_1(2, 8)$，$N_1(3, 4)$，$Q_1(4, 0)$. 对应点横坐标不变，纵坐标为原纵坐标的 2 倍.
   图(3)中的对应点坐标分别为 $O(0, 0)$，$M_2(2, 4)$，$P_2(4, 8)$，$N_2(6, 4)$，$Q_2(8, 0)$. 对应点横坐标为原横坐标的 2 倍，纵坐标也为原纵坐标的 2 倍.

拓展

$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = k$（相似比）；任意改变△$ABC$ 的位置，上述结论仍成立.

复习题

基础

1. （1）D；（2）C；（3）D；（4）A.

2. （1）平移；（2）旋转.

3. $\triangle ABC \backsimeq \triangle A''B''C''$. $\triangle A''B''C''$可由$\triangle ABC$绕点O顺时针旋转$2\angle MON$的大小得到.

4. 略.

5. 答案不唯一. 参考答案如下：（1）关于x轴作轴对称变换；（2）沿直线$x=-5$作平移变换；（3）关于y轴作轴对称变换；（4）关于原点作中心对称；（5）图形以原点为位似中心作相似比为$\frac{1}{2}$的位似变换.

6. （1）5；（2）（-5，6），相离，相切.

提升

1. （1）利用SAS证明；

   （2）$\triangle ADF$可由$\triangle ABE$绕点A逆时针旋转$90°$得到.

2. $\triangle ABD$可由$\triangle ACE$绕点A顺时针旋转$42°$得到，$\triangle ACE$可由$\triangle ABD$绕点A逆时针旋转$42°$得到.

3. 略.

拓展

1. $\sqrt{2}-1$. 提示：重叠部分的菱形与菱形$ABCD$相似，相似比为$\frac{A'C}{AC}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故$A'C=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot AC=1$，$AA'=AC-A'C=\sqrt{2}-1$.

2. 105°. 提示：由题意可得$\angle B'=\angle CBA=55°$，$B'C=BC$. 故$\angle B'BC=\angle B'=\angle CBA=55°$，$\angle A'BD=180°-55°-55°=70°$，$\angle BDC=\angle A'+\angle A'BD=105°$.

3. （1）略；

   （2）$ab-b$，$ab-b$，$ab-b$；

   （3）猜想草地的面积仍然是$ab-b$.

   方案：①将小路沿着左右两个边界“剪去”；②将左侧草地向右平移一个单位；③得到一个新矩形.



第二十四章
投影、视图与展开图

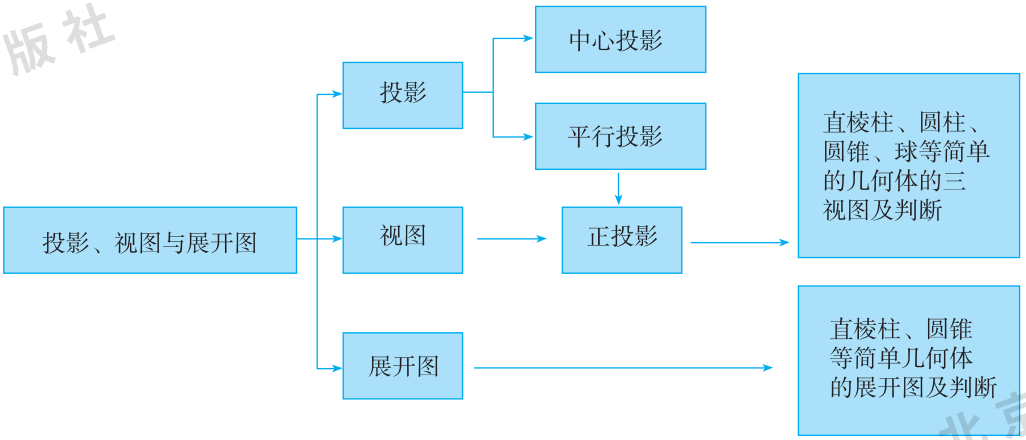
教学目标

1. 通过丰富的实例，使学生了解中心投影和平行投影的概念.
2. 会画直棱柱、圆柱、圆锥、球的主视图、左视图、俯视图，能判断简单物体的视图，并会根据视图描述简单的几何体.
3. 了解直棱柱、圆锥的侧面展开图，能根据展开图想象和制作实物模型.
4. 通过实例，了解上述视图与展开图在现实生活中的应用.

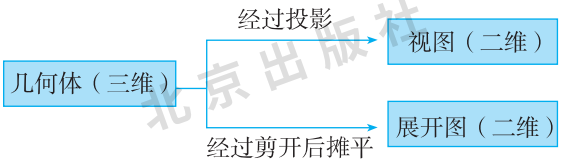
北京出版社

教材分析和教学建议

1. 主要内容及其地位作用.



三维与二维之间的转换：



本章首先从学生所熟悉的生活中的影子出发，引出中心投影和平行投影以及正投影的概念；然后以一个长方体在三个相互垂直平面中的正投影为例，引出了三视图的概念及其应用；进而又研究了将一个几何体反映在平面上的另一种方法——平面展开图，以及它们在生活中的应用.

发展学生的空间观念是初中数学课程的重要目标之一，也是学生应该具备的基本数学素养. 本章是学生在小学学习从不同方向观察物体，建立初步的空间观念基础上，进一步将不同方向观察到的简单物体形状表达在平面上，由简单几何图形想象出实物的形状. 这是一个包括观察、想象、比较、综合、抽象、分析，不断由低到高向前发展认识客观事物的过程，是建立在对周围环境直接感知上的、对空间与平面相互关系的理解和把握的过程. 同时也是进一步学好高中的立体几何，发展空间想象力的重要基础.

2. 本章编写特点.

本章的编写特点主要有 3 个. （1）紧密联系学生的生活实际，引导学生从熟悉的生活情景中抽象出投影等数学概念，使学生经历观察、想象、抽象、实践探索等学习过程. （2）紧密联系学生的学习经验，在学生初步建立起来的空间观念基础之上，利

用投影建立空间物体与平面图形之间的联系，让学生进一步体会比较、分析、转换等数学思想方法.（3）强调学生的动手操作和主动参与，让学生在观察、操作、想象、交流等大量活动中，促进学生对知识的理解和掌握，积累学习经验.

3. 教学重点、难点.

本章重点是通过所学的知识培养学生的空间观念和动手操作能力. 主要落实在：

（1）会画长方体、圆柱、圆锥、球的三视图，能根据三视图想象出简单物体的原型.

（2）根据直棱柱（主要是长方体）、圆柱、圆锥的平面展开图，想象并制作简单物体的立体模型.

本章的难点：

（1）简单组合体的三视图的画法及判别.

（2）在面与体的转换中，发展空间观念.

处理好本章重点和难点的关键是在教学中要紧密联系生产生活实际，开展多种形式的动手、动脑活动. 在活动中，积极引导学生进行合理的想象，促进对知识的理解和掌握，培养学生的空间观念.

4. 教学建议.

在中心投影与平行投影的教学中，通过实际体验等方式，使学生体会物体在阳光下和在灯光下形成的影子不同. 借助实物，观察影子的大小和方向变化的特征，了解线段及四边形的正投影的一般规律，为学习视图做必要的准备.

在视图这部分的教学中，要多联系现实生活中的实物，培养学生的空间想象能力. 画实物视图时，必须先对实物进行合理的想象，即把实物抽象成相应的几何体，在此基础上，再画其视图. 比如茶叶筒、茶杯盖与基本几何体的圆柱、圆锥、球是有区别的，但我们可以合理地把它们想象成圆柱、圆锥和球，进而画出它们的视图.

在基本几何体的平面展开图的教学中，也要充分利用现实情境以及大量实物进行教学. 学生在做几何体与其平面展开图之间的相互转化时，不仅是一个思考的过程，也是一个实际操作的过程. 在这一教学过程中应有意识地满足学生多样化的需求，通过实际操作把直观的印象、联想和特征实实在在地表示出来，提高学生的空间想象力.

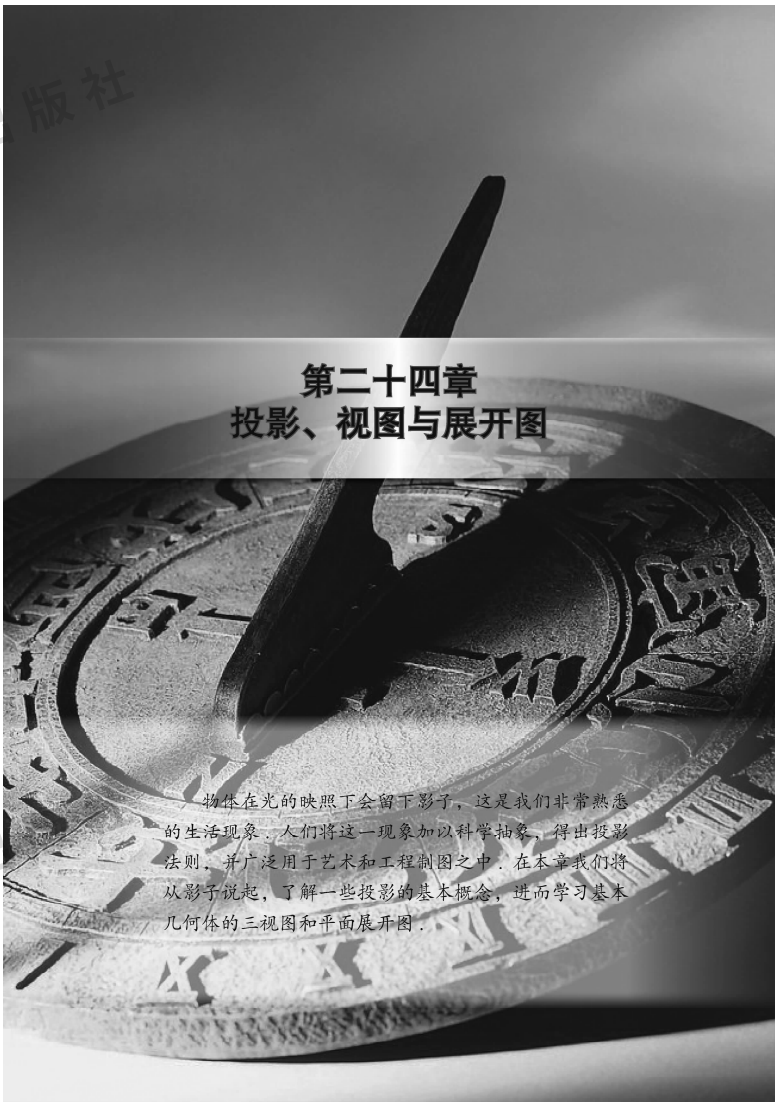
5. 课时安排.

本章教学约需 5 课时，具体分配如下（仅供参考）：

24.1 中心投影与平行投影	约 1 课时
24.2 基本几何体的三视图	约 1 课时
24.3 基本几何体的平面展开图	约 1 课时
总结与复习	约 1 课时
机动	约 1 课时

北京出版社

教材及其参考信息



物体在光的映照下会留下影子，这是我们非常熟悉的生活现象．人们将这一现象加以科学抽象，得出投影法则，并广泛用于艺术和工程制图之中．在本章我们将从影子说起，了解一些投影的基本概念，进而学习基本几何体的三视图和平面展开图．

北京出版社

[1] 教学中还可以用手电筒或投影仪等作为投影源，用书本、三角尺或手等作为投影物体，将黑板或幕布作为投影面，改变投影物体至光源的距离，观察投影的变化情况.

24.1 中心投影与平行投影

如图 24－1，物体在灯光或日光的照射下会在某个平面（屏幕、墙壁、地面等）留下影子，而且影子与物体本身的形状有密切的几何关系，这就是生活中常见的投影现象，这个影子就是我们所说的物体的投影，照射光线叫做投影线，投影所在的平面叫做投影面.



（1） （2）

图 24－1

图 24－2 是三角尺在灯光照射下形成的投影示意图. 灯的光线可以看做是从一点发出的，我们把这种投影称为中心投影. 这个点称为投影中心.[1]

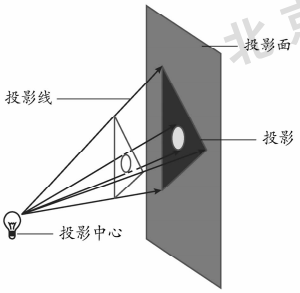


图 24－2

由于太阳离我们很远，它的光线可以看做是平行的，我们把在太阳光照射下形成的这种投影称为平行投影. 如图 24－3，在平行投影中，如果投影线与投影面垂直，那么这种投影称为正投影.

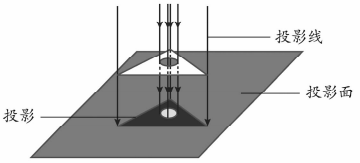


图 24－3

在 24. 1 节的教学时：

1. 投影中，光源、投影物体和投影面是三个主要元素. 在讲解中心投影和平行投影时，应让学生对比它们的异同点：中心投影是由点光源产生的投影，它的光线是由一个定点光源发出的呈放射状的射线，物体与光源的距离不同则物体的影长不同；而平行投影是由平行光产生的投影. 如果物体固定在某一个地点，太阳光线平行地照射在物体上，光线随时间的变化与地平面所成的角的大小不一样，则物体的影长也随着发生变化.

如下页图所示：若太阳光线与地平面的夹角小于 45°时，物体的影长 BC 大于物体的高度 AB；若太阳光线与地平面的夹角等于 45°时，$\triangle ABC$ 为一个等腰直角三角形，物

思考

1. 在图 24－2 中，把三角尺向投影面平行移动，它的投影的形状和大小是否发生变化？

2. 在图 24－3 中，把三角尺向投影面平行移动，它的投影的形状和大小是否发生变化？

可以看出，在图 24－2 的中心投影中，当我们固定灯泡和投影面的位置，平行移动三角尺时，它的投影会随着三角尺靠近投影面而缩小，远离投影面而放大，但形状不变．在图 24－3 中，当平行移动三角尺时，它的投影形状、大小都不变．由于正投影能够反映物体的真实形状和大小，因此，在工程技术上常采用正投影的方法绘制图纸．

例 1 如图 24－4 和图 24－5 分别是在同一时刻木杆的影子，辨认哪幅图所示的投影是中心投影，哪幅图所示的投影是平行投影．

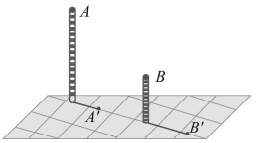


图 24－4

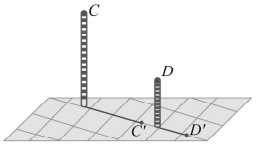


图 24－5

解：如图 24－6，分别连接 $A'A$ 和 $B'B$，并延长 $A'A$，$B'B$，可以发现 $A'A$ 与 $B'B$ 交于点 P，即光是从点 P 发出的，因此图 24－4 所示的投影是中心投影．

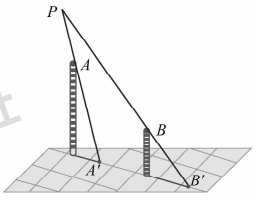


图 24－6

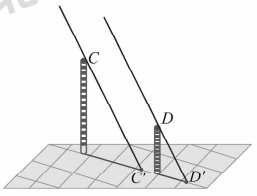
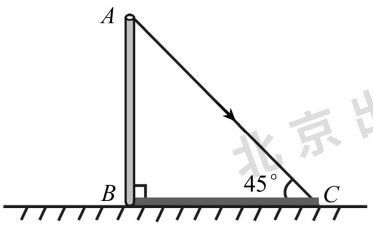


图 24－7

体的影长 BC 等于物体的高度 AB；若太阳光线与地平面的夹角大于 45°时，物体的影长 BC 小于物体的高度 AB.



当太阳的光线与地面的夹角正好是 90°时，这种投影为正投影．此时物体的影长为零，C 点与 B 点重合.

2. 让学生学习一些正投影的规律，可以为后面学习几何体的三视图做必要的准备，不宜再加深难度，通过画图、实际操作或课件演示让学生理解这种投影现象即可.

[1] 此例题意在为学生学画三视图做准备. 可通过实验操作，让学生理解线段的正投影的规律：平行长不变，倾斜长缩短，垂直成一点.

如图 24－7，分别连接 $C'C$ 和 $D'D$，并延长 $C'C$，$D'D$，可以发现 $C'C \parallel D'D$，即光线平行，因此图 24－5 所示的投影是平行投影.

例 2 如图 24－8，分别画出线段 AB 与投影面平行、倾斜和垂直时的正投影，并比较线段 AB 与其投影的大小.[1]

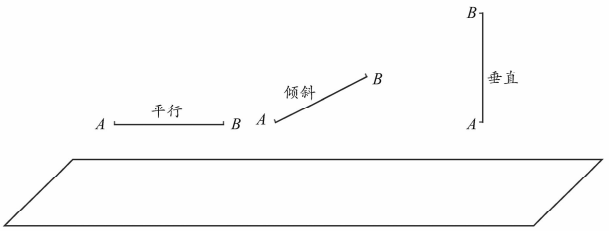


图 24－8

解：可将点 A 的投影点记作 A'，点 B 的投影点记作 B'，则线段 AB 的投影可记作 $A'B'$.

如图 24－9，当 AB 与投影面平行时，线段 AB 与其投影 $A'B'$ 相等，即 $A'B' = AB$.

当 AB 与投影面倾斜时，它的投影缩短，即 $A'B' < AB$.

当 AB 与投影面垂直时，它的投影缩成一点，即点 A' 与点 B' 重合.

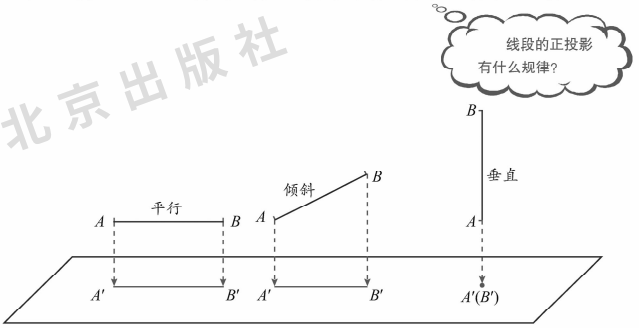


图 24－9

交流

把一张矩形硬纸片置于桌面的上方，按平行、倾斜、垂直于桌面放置时，它的正投影可能是怎样的图形？[1]

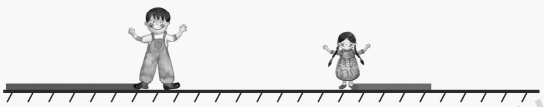
练习

1. 观察图 24－1，辨别哪个是中心投影，哪个是平行投影．
2. 如图，用线段表示同一时刻另一棵树在阳光照射下的影长．



（第 2 题）

3. 小华和小明在同一盏路灯下的影长如图所示，请找出路灯的位置．



（第 3 题）

习 题 24－1

★基础★

1. 甲、乙两人同时在太阳光下，他们的身高与其影长的关系是_____．已知甲的身高为 1.7 m，影长为 2.5 m；乙的身高为 1.65 m，那么乙的影长为_____m（精确到 0.01）．

［1］答案：矩形、平行四边形、线段．

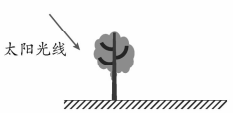
此题也是为学生学习三视图做准备．可以将此题做成课件，也可让学生进行实验操作，以帮助学生理解平面图形正投影的规律：平行形不变，倾斜形改变，垂直成线段．

练习答案：

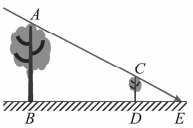
1. 略．
2. 略．
3. 略．

北京出版社

2. 操场上有甲、乙两棵树，甲树高 2.1 m，在阳光下甲树影长为 1.2 m，乙树影长为 1.02 m，求乙树高．
3. 如图所示，请在图中用线段表示出树的影长．
4. 如图，某一时刻一缕阳光照在大树梢 A，又照到小树梢 C，落到地面 E 处，测得 $BD = 11$ m，$CD = 2$ m，$DE = 2.5$ m，试求大树 AB 的高．



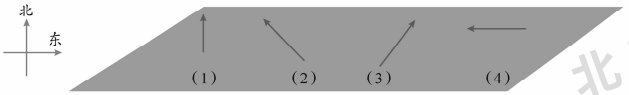
（第 3 题）



（第 4 题）

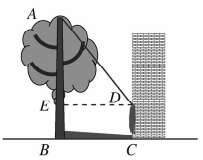
★★提升★★

1. 下图记录的是一棵大树在一天中的四个时刻里因阳光照射而在地面上形成的影子的方向，请你按时间先后顺序进行排序，并说明理由．



（第 1 题）

2. 数学兴趣小组的同学们想测量校园里一棵大树 AB 的高度．他们发现大树的影子恰好落在院墙 CD 和地面 BC 上（如图所示）．测得 $CD = 1.2$ m，$BC = 2.4$ m，此时测得垂直于地面的 1 m 杆的影长为 0.6 m，求大树 AB 的高度．



（第 2 题）

★★★拓展★★★

1. 甲在阳光下走了 1 分钟，乙在路灯下也走了 1 分钟，分析一下他们的影长是如何变化的．
2. 如图所示，灯塔后面有一片小树林，小丽沿着小路正对着灯塔方向走去．她看到的小树是愈来愈多，还是愈来愈少？为什么？


（第 2 题）

24.2 基本几何体的三视图

思考

长方体按图 24－10 摆放．在平行光线下，它分别在 X，Y，Z 三个相互垂直平面上的正投影是什么图形？

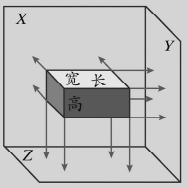


图 24－10

我们把物体的正投影称为视图．如图 24－11，长方体在 X，Y，Z 三个平面上的视图都是矩形．在 X 平面上的矩形一边是长方体的长，另一边是长方体的高；在 Y 平面上的矩形一边是长方体的宽，另一边是长方体的高；在 Z 平面上的矩形一边是长方体的长，另一边是长方体的宽．

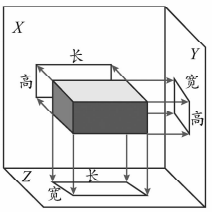


图 24－11

一般地，我们把从物体正面得到的视图称为主视图，从物体的左侧面得到的视图称为左视图，从物体上面得到的视图称为俯视图，把它们统称为三视图．

在图 24－11 中，如果把三个两两互相垂直的平面都展开在同一平面上，即分别把投影面 Y 向右旋转 90°、投影面 Z 向下旋转 90°，就可以得到长方体在同一平面上的三视图，如图 24－12 所示．[1]

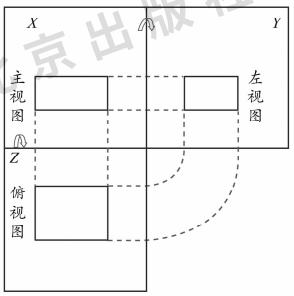


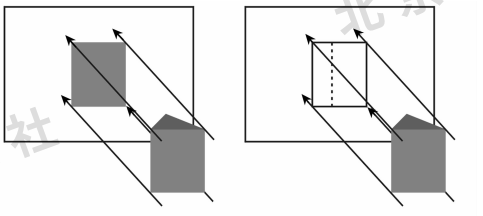
图 24－12

［1］可用课件演示.

在 24. 2 节的教学时：

1. 视图在生产实际中有着广泛的应用，它是培养学生空间想象能力和动手操作能力的很好素材.

视图是利用正投影的原理画出的，物体的正投影就是视图，它与光线下的“影子”是有区别的，“影子”是黑的阴影，只反映物体看得见部分的轮廓线，而视图是通过规定的线型来表现的，无论是看得见，或看不见的轮廓线，



一般地，我们把俯视图画在主视图的下面，左视图画在主视图的右面．由于主视图反映物体的长和高，左视图反映物体的高和宽，俯视图反映物体的长和宽．因此画三视图时，应该使得：

- 主视图与俯视图的长度相等，且相互对正，即“长对正”；
- 主视图与左视图的高度相等，且相互平齐，即“高平齐”；
- 俯视图与左视图的宽度相等，即“宽相等”．

三个视图中长度、高度和宽度之间的这种关系简称为“三等规则”．

例 1 把圆柱和直三棱柱分别按图 24－13 和图 24－14 摆放，试分别画出它们的三视图的示意图．

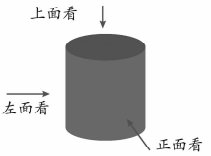


图 24－13

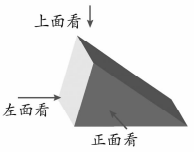


图 24－14

解：(1) 圆柱的主视图和左视图是相同的矩形，俯视图是圆，如图 24－15 所示．

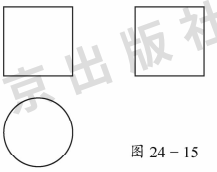


图 24－15

(2) 直三棱柱的二视图如图 24－16 所示．

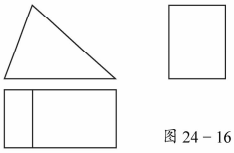
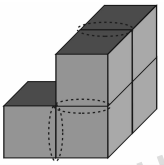
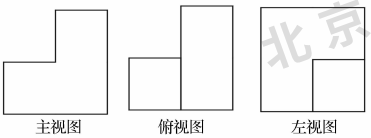


图 24－16

都要在图上反映出来．比如上页图中，左边是一般的“影子”，右边是正投影．

画组合体的三视图时，要注意把物体拼接中的缝和轮廓线区别开．如左图是由 5 块相同的小正方体搭成的组合体，图中用虚线标出的部分是拼缝，不能当成轮廓线在视图中画出．它的三视图如右图所示．





交流

1. 如果把例 1 中的两个物体分别按图 24 – 17 的样子摆放，画出它们的三视图的示意图．



图 24 – 17

2. 画出正方体、球的三视图的示意图．

画三视图时，如果一个几何体的三个视图都相同，就可以用一个视图来表示这个几何体．比如球就可用一个视图——圆来表示，正方体可用一个视图——正方形来表示．如果一个几何体有两个视图相同，可以省略其中的一个视图．比如，圆柱的三个视图是由两个相同的矩形和一个圆组成的，可以只画出矩形和圆两个视图．

画视图时，一般将看得见的轮廓线画成实线，看不见的轮廓线画成虚线．

例 2 根据图 24 – 18 和图 24 – 19 所给的视图，说出它们所表示的几何体的名称．

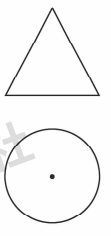


图 24 – 18

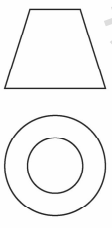


图 24 – 19

注意，它们都只有二视图，这说明它们的左视图与主视图相同．

2. 本章重点是通过所学的内容培养学生的空间观念和动手操作能力. 因此，在本节教学中让学生能够根据正投影的简单道理画出长方体、圆柱、圆锥、球及其简单组合体的三视图就行了，不要再增加难度.

[1] 为帮助学生更好地理解题意，可让学生预先准备些相应的立体模型，在课堂上进行操作实验.

解：图 24－18 所表示的几何体是圆锥，如图 24－20 所示.

图 24－19 所表示的几何体是圆台，如图 24－21 所示.


图 24－20


图 24－21

探索

将图 24－22 至图 24－25 所示的 4 个基本几何体，按图 24－26 至图 24－29 所给的三视图摆出相应的立体模型.[1]


图 24－22


图 24－23


图 24－24


图 24－25

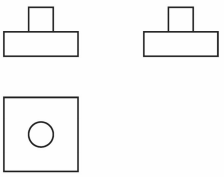


图 24－26

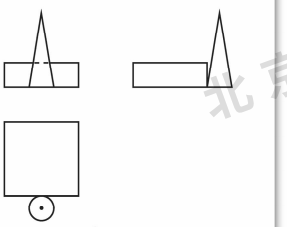


图 24－27

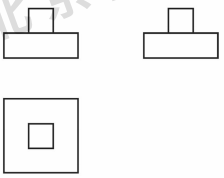


图 24－28

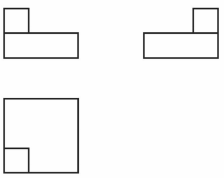
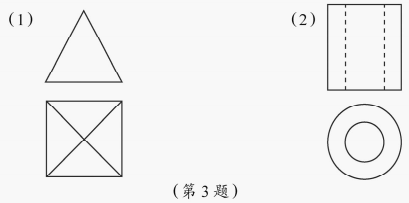


图 24－29

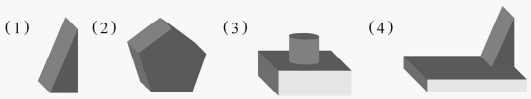
练习

1. 画出底面半径为 1 cm，高为 3 cm 的圆锥的三视图的示意图．
2. 说出 3 个俯视图为圆的几何体的名称．
3. 如图，根据所给视图，说出它们所表示的几何体的名称．

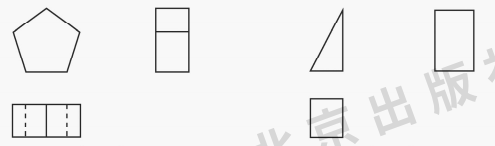


（第 3 题）

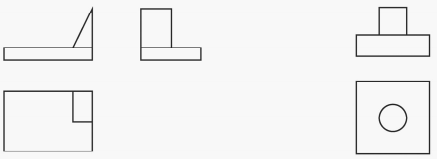
4. 找出与下列几何体相对应的视图，并在视图下面的括号中填上相应的序号．



（第 4 题）



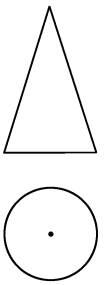
(　　)　　(　　)



(　　)　　(　　)

练习答案：

1.

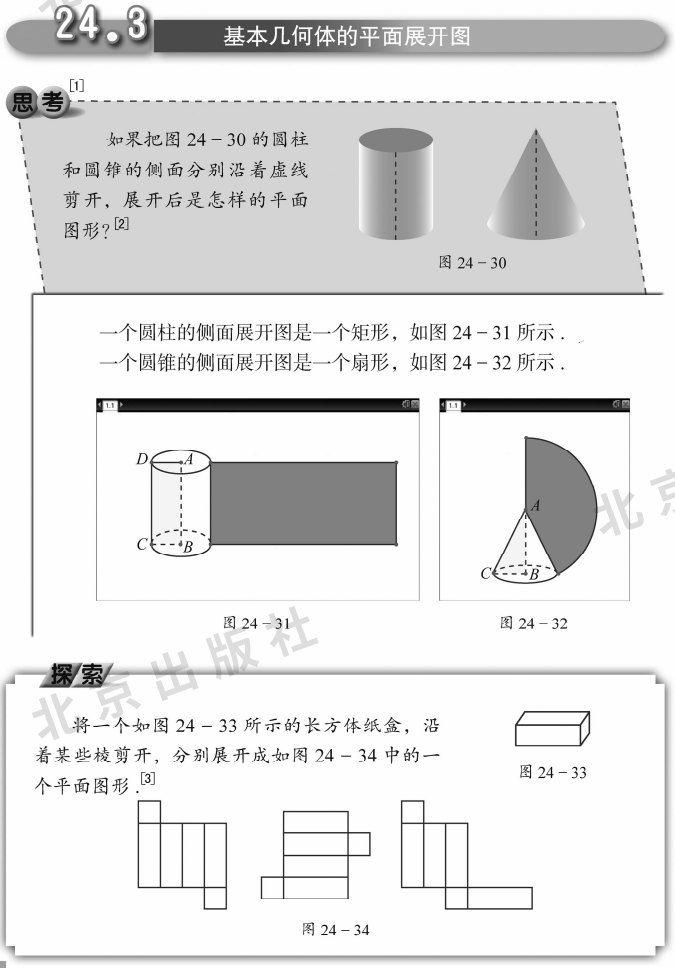


2. 圆柱、球、半球.
3. (1) 正四棱锥；
   (2) 空心圆柱.
4. (2)、(1)、(4)、(3).

[1] 注意引导学生先想象，再动手操作.

[2] 可用课件演示.

[3] 注意引导学生先想象，再动手试一试.



24.3 基本几何体的平面展开图

思考[1]

如果把图 24－30 的圆柱和圆锥的侧面分别沿着虚线剪开，展开后是怎样的平面图形？[2]

图 24－30

一个圆柱的侧面展开图是一个矩形，如图 24－31 所示.
一个圆锥的侧面展开图是一个扇形，如图 24－32 所示.

图 24－31

图 24－32

探索

将一个如图 24－33 所示的长方体纸盒，沿着某些棱剪开，分别展开成如图 24－34 中的一个平面图形.[3]

图 24－33

图 24－34

在 24.3 节教学时：

一个几何体的三视图是通过正面、左侧面和上面不同方向的正投影得到的，而它的展开图是沿着某些棱剪开、摊平后得到的，它们都可将一个三维的几何体转化在二维的平面当中；有了三视图可以比较直观地想象出物体的整体形状，有了展开图则可以直接制作出物体的立体模型，它们都是培养学生空间观念和动手操作能力的很好素材.

因此，在本章教学中应强调学生的动手操作和主动参与，让学生在观察、操作、想象、交流等大量活动中，积累有关的学习经验.

我们看到，图 24－34 所示的都是由长方体的表面沿着一些棱剪开后，展开而成的平面图形．显然，对同一个长方体的表面，按照不同的方式展开可以得到不同的平面展开图．

交流 [1]

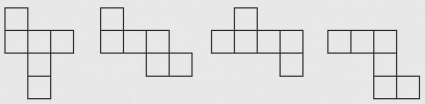
1. 一个正三棱锥的表面可以展开成如图 24－35 中的哪个平面图形？



（1）　（2）　（3）

图 24－35

2．图 24－36 所示的平面图形中，哪些能围成一个正方体？



（1）　（2）　（3）　（4）

图 24　36

例 某灯具厂要制作一批灯具，设计师给出了如图 24－37 所示的灯具三视图的示意图，试按照三视图确定制作每个灯具所需材料的面积（精确到 0.1 m^2）．

分析：在本题中，如果知道每个灯具的侧面积和底面积，就可知道制作每个灯具所需材料的总面积．因此，解决本题的思路是先由三视图判断出灯具的立体模型，然后再由立体模型画出它的一个平面展开图，从而计算出它的总面积．

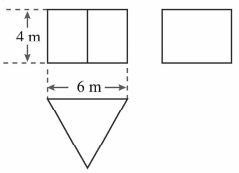


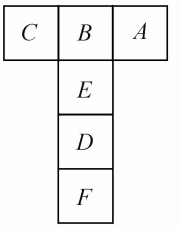
图 24－37

［1］答案：

1. （1）、（2）．
2. （1）、（2）、（3）．

[1] 答案：*C*.

还是要让学生先想象，再验证. 在解决此问题的基础上，还可以将题目的展开图变为如下图等方式让学生再思考.



解：由图 24－37 可知，灯具是正三棱柱形状. 如图 24－38 所示，其上、下底是相同的等边三角形，三个侧面是相同的矩形，而且矩形的长为 6 m、宽为 4 m，等边三角形的边长为 6 m，所以可得到这个正三棱柱灯具的一个平面展开图，如图 24－39.



图 24－38

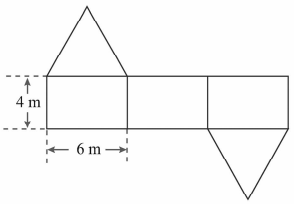
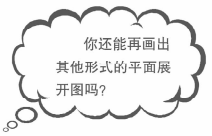


图 24－39



由展开图可知，制作一个灯具所需材料的面积为

$$\left(\frac{1}{2}\times 6\times 6\sin 60°\right)\times 2+(4\times 6)\times 3$$

$$\approx 103.2(\mathrm{m}^2).$$

答：制作每个灯具所需材料的面积约为 103.2 m^2.

思考

图 24－40 是一个正方体的平面展开图，如果使字母 *A* 出现在顶面，那么它的底面应该出现什么字母？[1]

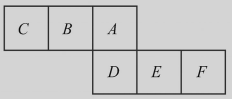
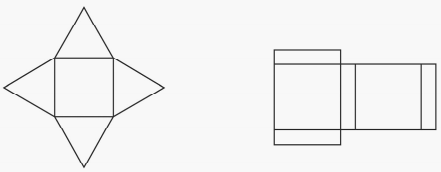


图 24－40

北京出版社

练习

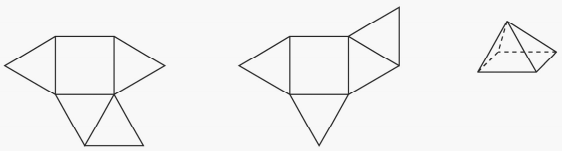
1. 下列图形(1)、(2)是某些简单几何体表面的平面展开图，说出它们各自所表示的几何体的名称.



(1)　　(2)

(第1题)

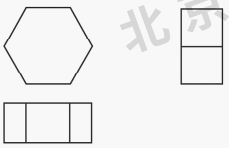
2. 判断图(1)、(2)中哪一个可围成图(3)所示的几何体.



(1)　　(2)　　(3)

(第2题)

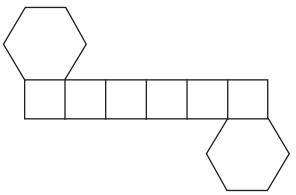
3. 根据下面的三视图，画出这个几何体的平面展开图.



(第3题)

练习答案：

1. (1) 正四棱锥；
   (2) 长方体.
2. (2) 可以.
3.



习 题 24－2

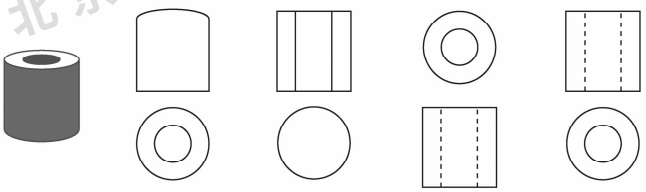
★基础★

1. 把相应的三个视图画在下表中.

几何体	主视图	左视图	俯视图
			
			
			
			

2. “一个圆柱的主视图总是矩形，俯视图总是圆”这种说法对吗？举例说明.

3. 如图，(1)、(2)、(3)、(4)是四位同学画出的空心圆柱的主视图和俯视图，哪组有错误？为什么？

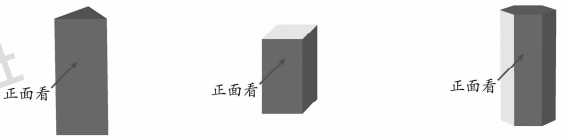


(1) (2) (3) (4)

(第3题)

北京出版社

4. 画出如图所示的正三棱柱、正四棱柱、正六棱柱的三视图的示意图.

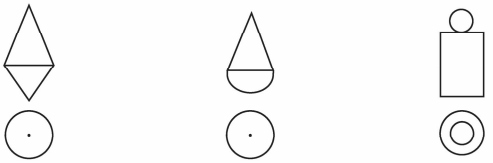


(第 4 题)

5. 找出与下列几何体相对应的视图，在视图下面的括号中填上相应的序号.



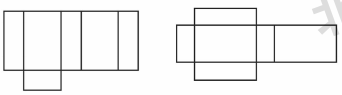
(1) (2) (3)



( ) ( ) ( )

(第 5 题)

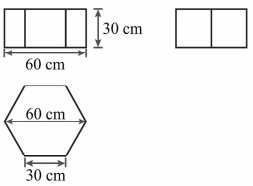
6. 下面两个平面展开图中，哪一个可以围成一个长方体?



(第 6 题)

7. 画出正三棱柱和正四棱柱的一种平面展开图.

8. 某工厂要加工一批包装盒，设计师给出了如图所示的三视图，请按照三视图确定制作每个包装盒所需纸板的面积.



(第 8 题)

★★提升★★

1. 判断题：
   (1) 三视图都是圆的几何体一定是球；（　　）
   (2) 有两个视图都是矩形的几何体一定是圆柱；（　　）
   (3) 圆锥形物体的三视图都是三角形；（　　）
   (4) 圆台状物体的三视图都是梯形．（　　）
2. 根据下面的主视图和俯视图，补上几何体的左视图．



（第 2 题）

★★★拓展★★★

1. 如图是一个高为 2 cm 的直四棱柱的俯视图，试补上它的主视图和左视图．



（第 1 题）

（第 2 题）

2. 如图，是一个几何体的视图，先画出它的平面展开图，然后再扩大 2 倍做出它的立体模型．
3. 做出一个你喜欢的立体模型．

阅读理解

视点、视线和盲区

当你乘车沿着一条平直的马路向前行驶时，会看到图 24－41 所示的情境．虽然建筑物 A 比建筑物 B 矮，但当小轿车从位置①向位置②行驶时，你从车里向外看，建筑物 A 好像越来越大，建筑物 B 逐渐被建筑物 A 遮挡，直至完全消失．这是为什么呢？

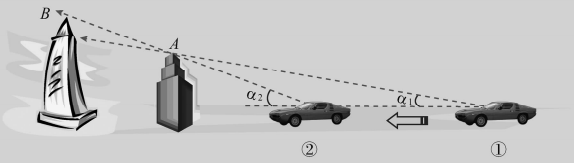


图 24－41

这与视点、视线和盲区的知识有关．我们把人眼睛的位置称为视点，由视点出发的线称为视线，人眼睛看不到的地方称为盲区．

被视物体看上去的高矮是由视角 α（视线与水平线的夹角）决定的，而视角的大小又依赖于被视物体的高度及视点与被视物体之间的距离．对于同一物体，距离越近，视角 α 越大；距离越远，视角 α 越小．当汽车向前行驶时，人的眼睛（视点）与前方建筑物的距离越来越近，视角 α 逐渐变大，被前面矮一些的建筑物遮挡的盲区也就越来越大，直到远处高大的建筑物完全在你眼前消失．

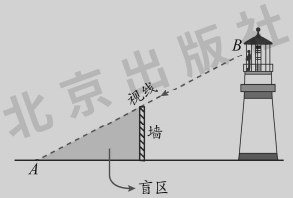


图 24－42

反过来，如图 24－42 所示，当 A 处于什么位置时，在 B 点就看不到它了呢？

图 24－42 中的灰色区域为盲区．在这里可以躲开 B 点的观察．盲区是一个空间，在不同的情况下，可以发挥不同的作用．

视点、视线和盲区在人们的生活中有着广泛的应用，你能再举出几个这方面的例子吗？

回顾与整理

知识要点

本章学习了投影、基本几何体的视图和平面展开图等内容．

1. 投影可分为中心投影和平行投影．

在平行投影中，如果投影线与投影面垂直，那么这种投影称为正投影．

2. 物体的正投影就是物体的视图．从物体正面得到的视图称为主视图，从左侧面得到的视图称为左视图，从上面得到的视图称为俯视图，把它们统称为三视图．

平面图形的正投影是画基本几何体视图的基础．

画几何体三视图时，要注意“长对正，高平齐，宽相等”，用实线表示看得见的轮廓线，用虚线表示看不见的轮廓线．

3. 将几何体的表面展开在同一个平面上的图形就是这个几何体的平面展开图．

学习指导

1. 中心投影与平行投影的最大区别在于中心投影的光线是由一点发出的，它是呈放射状的射线；而平行投影中没有投影中心，它的光线是平行的．投影线与投影面垂直的平行投影就是物体的正投影．在本章中，如果没有特别说明，我们一般所指的投影都是正投影．

学习指导

2. 视图是根据正投影的原理得到的，它将一个几何体反映在平面上．学习中要注意通过视图和几何体的联系和转换，发展空间观念．

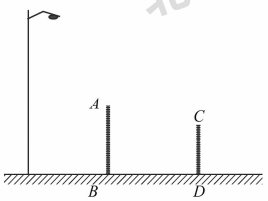
3. 视图是物体的正投影．它不是简单的影子．在画视图时要注意，无论是看得见，或看不见部分的轮廓线，都要在平面图上反映出来．

4. 平面展开图是将几何体反映在平面上的另一种方法．学习时要注意展开图与三视图之间的区别和联系，要会画和会判断基本几何体的平面展开图，并能根据展开图想象和制作实物模型．

复 习 题

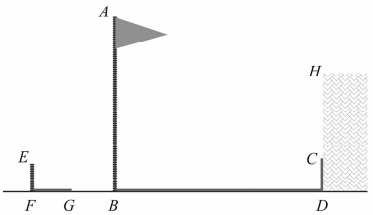
★基础★

1. 回答下列问题：
   (1) 同一时刻，两个身高相同的同学站在阳光下的操场上，他们的影长有什么关系？
   (2) 清晨、上午 9 时、中午 12 时，同一个旗杆在阳光下的影长有什么变化？
   (3) 在同一时刻，两个身高相同的人，一个在北纬 20°，另一个在北纬 60°，他们的影长相同吗？
2. 如图，在路灯下有 AB，CD 两根长短不同的木棒，请画出木棒 AB，CD 的影长．



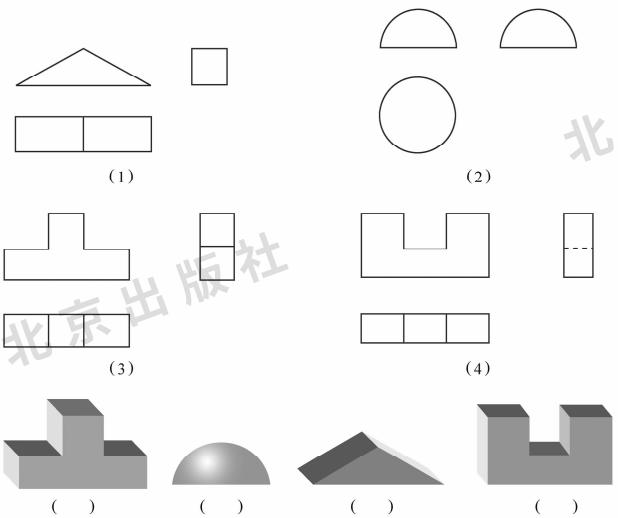
(第 2 题)

3. 如图，一根长 2 m 的木棒 EF 在地面上的影子 FG 为 3 m，此时 14 m 高的旗杆 AB 的影子有一部分落在距离旗杆 15 m 的墙 DII 上，求旗杆的影子落在墙上的高度 CD.



（第 3 题）

4. 下列各三视图分别表示什么形状的立体图形？请把三视图的序号填入相应的立体图形下的括号内.



（第 4 题）

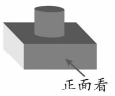
5. 画出如图所示几何体的三视图.

6. 如图，直三棱柱的三视图是(　　).

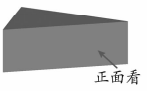
A. 三个三角形

B. 一个三角形和两个矩形

C. 一个三角形和两个矩形，两个矩形内有一条连接对边两点的虚线，这条虚线与另一组对边平行



(第 5 题)



(第 6 题)

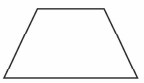
★★提升★★

1. 如图，圆桌正上方的灯泡发出的光线照射桌面后，在地面上形成阴影(圆形).已知桌面的直径为 1 m，桌面距离地面 0.8 m，如果灯泡距地面 2.8 m，求地面上的阴影的面积(精确到 0.1 m^2).

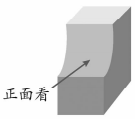
2. 高为 1 cm 的直四棱柱的俯视图如图所示，请补上它的主视图和左视图.

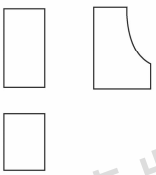
3. 添线补全下面物体的三视图.


(第 1 题)


(第 2 题)

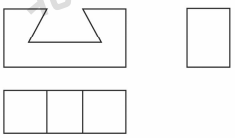
(1)





(2)

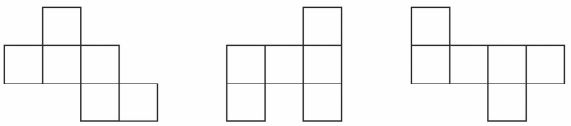




(第 3 题)

★★★拓展★★★

1. 图(1)、(2)、(3)都是正方体的平面展开图吗？请把3，−1，4，−2，7，−5这六个数字分别填入正方体的平面展开图的小正方形格内，使它围成正方体后，正方体相对面的数字之和都等于2.



(1)　　(2)　　(3)

(第1题)

2. 做出一个正六棱柱的立体模型，并画出它的三视图的示意图.

北京出版社

部分习题答案或提示

习题 24－1

基础

1. 比值相等，2.43.
2. 1.785 m.
3. 略.
4. 10.8 m.

提升

1. （4）、（2）、（1）、（3）.
2. 5.2 m.

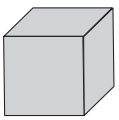
拓展

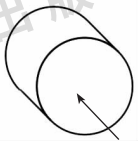
1. 甲的影长不变，乙的影长改变（走近路灯的过程中，影长由长变短；反之影长由短变长）.
2. 小丽往前走，她眼睛的视线与灯塔两侧的夹角愈来愈大，盲区也就愈来愈大，所以她看到的小树也就愈来愈少.

习题 24－2

基础

1.

几何体	主视图	左视图	俯视图
			
			
			
			

2. 这种说法不对. 如果把圆柱这样摆放：主视图是圆，俯视图是矩形.

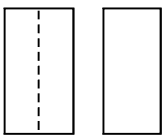
3. （1）、（2）、（3）有错误.

（1）主视图上边界线不应该是弧形.

（2）主视图中的两条线应该画成虚线，俯视图应是圆环.

（3）主视图与俯视图画颠倒了.

4. （1）正三棱柱；



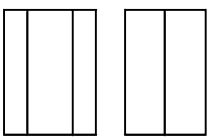


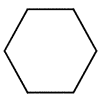
（2）正四棱柱；





（3）正六棱柱.

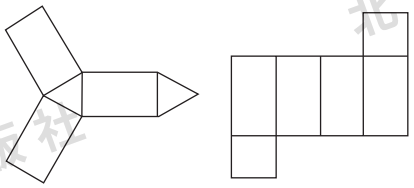




5. （3）、（1）、（2）.

6. （2）可以折叠成一个长方体.

7. （1）正三棱柱；（2）正四棱柱.

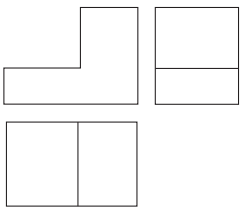


8. 10 076 cm^2.

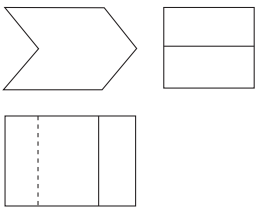
提升

1. （1）√；（2）×；（3）×；（4）×.

2. （1）

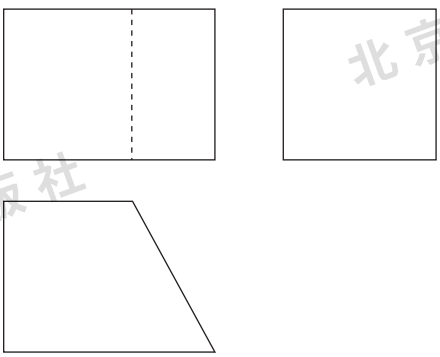


（2）

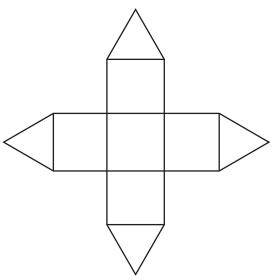


拓展

1.



2.



3. 略.

复习题

基础

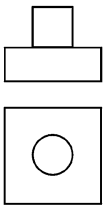
1. （1）相等. （2）逐渐变短. （3）不同.

2. 略.

3. 4 m.

4. （3）、（2）、（1）、（4）.

5.

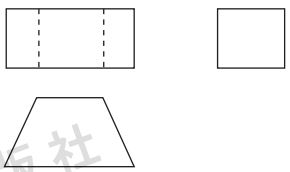


6. C.

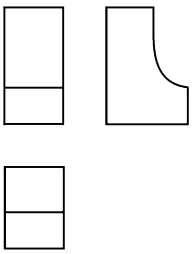
提升

1. 1.5 m^2.

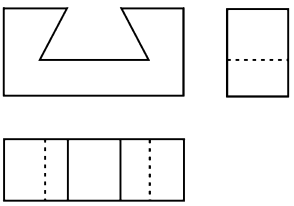
2.



3. （1）

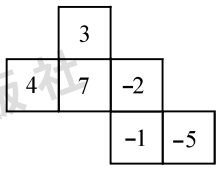


（2）



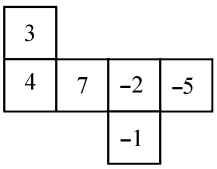
拓展

1. （1）



（2）不是正方体的展开图.

（3）



2. 略.

北京出版社

北京出版社



第二十五章
概率的求法与应用

教学目标

1. 了解随机事件的含义，在具体情境中了解概率的意义；会解释具体事件概率的含义.

2. 经历列举事件可能发生的结果的过程，掌握用列举法（包括列表、画树状图）计算简单事件的概率的方法；能运用列表、画树状图的方法列出简单事件的所有可能发生的结果，并判断每个结果发生的可能性是否都相等，从而能用概率公式计算所求事件的概率.

3. 经历实验过程，获得事件发生的频率；知道大量重复实验时，如果频率总是在某个常数附近波动，可以用这个常数作为事件发生的概率，能用频率估计概率.

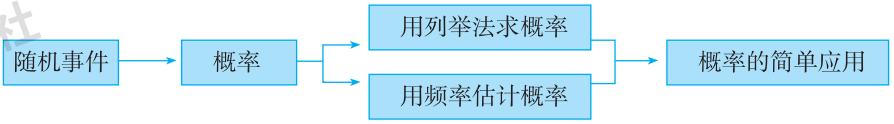
4. 通过对简单实际问题的解决，进一步丰富对概率的认识；能初步运用概率的知识解决一些简单的实际问题. 提高应用数学的意识以及分析问题、解决问题的能力.

5. 通过对本章的学习，进一步认识客观世界中的不确定现象，体会其中蕴含的随机思想；在合作实验、交流结果、探索规律中提高与人合作交流、形成共识的能力；在判断游戏公平性的过程中形成公平、公正的态度；在对事件概率的刻画中养成作出合理决策的习惯.

北京出版社

教材分析和教学建议

1. 主要内容及其地位作用.



本章教材是在学生学习了事件与可能性的基础上，进一步学习概率的求法与应用.

教材首先回顾随机事件，然后从事件发生的可能性可以用数值表示，引出事件概率的意义. 从熟知的抛掷一枚硬币，求落地后“正面朝上”的概率，归纳出用列举法求概率的一般步骤. 从探索抛掷两枚硬币实验的结果，引出用列表、画树状图列举事件所有可能发生的结果的方法.

当每个结果发生的可能性不相等时，引出了通过实验获得事件发生的频率，用大量重复实验时的频率估计事件发生概率的估值法.

教材通过日常生活中的简单实例，学习概率的应用，从而初步学会用概率的知识解决一些简单的实际问题.

本章教材是前面“事件与可能性”教材内容的延伸和深入，又为今后进一步学习概率及其相关知识打下基础，并且在日常生活中也会用到.

2. 本章编写特点.

虽然概率与统计的概念不多，但有些概念给出定义是困难的，所以教材没有追求严格定义，而将重点放在理解概念的意义上来. 例如概率的概念，在中学阶段给出严格的定义是不可能的，也是没有必要的，因此在编写时，通过大量的例子来进行了说明. 让学生感受到概率是对随机现象中规律性的一种刻画，是对事件发生可能性大小的一种估计就可以了.

根据课标要求和教学实际情况，在“用频率估计”中，删掉了“一组数据在它的平均值附近波动，标准差越小，波动就越小”和“直接用事件发生的频率或者频率的平均值作为其概率的估计值”两句. 练习和习题中，求标准差的题目也调整为求相应的方差.

3. 教学重点、难点.

本章教学的重点是：了解概率的意义，会运用列举法（包括列表、画树状图）求概率和概率的简单应用.

概率是刻画随机现象发生的数量规律. 通过了解概率的意义，来理解现实世界中随机现象的特点，从而认识现实生活中常见的概率的具体含义（如购买一张彩票中特

等奖的概率的具体含义).

列举法是求简单事件概率的基本方法. 其中的列表、画树状图是常用的方法，要根据事件的特征选择恰当方法列出可能发生的结果，并注意不重、不漏地列出所有的结果，判断每个结果发生的可能性是否都相等. 列举法中的概率计算公式，也是以后学习用排列、组合数计算较复杂事件的概率的依据，要切实掌握，重点理解其中的思想方法.

概率的简单应用，是学习这部分内容的一种极好动力，借助学生对现实社会环境中的问题的强烈兴趣，通过实例学习运用概率知识解决一些实际问题，进一步丰富对概率的认识，体会概率在实际中的应用，培养应用意识和实践能力.

本章的教学难点是：体会概率的数值含义和概率的应用.

随机事件会出现哪些结果事先无法预料，一些习惯性错误干扰着对具体事件发生的可能性认识. 可能性很抽象，对学生来说难于想到可以用数值表示，进而抽象为概率，就更难体会. 要经历“猜测结果 — 进行实验 — 分析实验结果”的过程，建立正确的概率直觉，从频率与概率的关系、频率的稳定性（总是在某个常数附近波动）体会概率的数值含义.

现实生活中的概率问题，情境复杂，千变万化，难于用统一的概率模型求解，要根据实际问题的特点，类比抛掷、摸球、转盘等典型实验模型，突破难点.

了解概率的意义的关键在于从具体情境中体会概率的含义；运用列举法求概率的关键是掌握列表、画树状图的方法，列出所有可能发生的结果，并判定每个结果发生的可能性都相等；用频率估计概率的关键是通过实验获得事件发生的频率；用概率知识解决简单实际问题的关键是认识问题的特征，类比相应的三大经典实验建立相应的概率模型.

4. 教学建议.

在学习用列举法求概率的过程中，列举法的给出是逐步深入、逐步提高的，让学生体会到科学方法的意义，理解并比较两种方便的列举方法——列表法和画树状图法，列表法适合在两步的实验中，每一步出现的结果较多的情况. 画树状图法是一种适应性比较广泛的方法，能够用列表法解决的问题当然也能用画树状图方法来解决.

在学习用频率估计概率的过程中，让学生了解到通过实验，获得事件发生的频率；知道大量重复实验时频率可作为事件发生概率的估计值，理解频率与概率的区别与联系.

概率是刻画事件发生可能性大小的量. 统计是通过处理数据，利用分析数据的结果进行预测或决策的过程. 从统计学内在的知识体系看，概率是统计学的有机组成部分，在数据的分析阶段，可以利用概率进行统计分析，从数据中得出结论，再根据结

论进行预测或判断. 因此，在初中阶段，可以把概率看成是统计过程的一个阶段. 初学概率与统计的学生往往无法理解概率与频率的内在区别与联系，有时会把两者相混淆，教师可以向学生指出，统计与概率这两个学科是互为依存、相互作用的. 概率这一概念是建立在频率这一统计量的稳定性基础之上的，而统计也离不开概率的理论支持. 相同条件下，一个事件发生的概率是一个常数，是由事件固有的属性决定的，但是如果用频率估计概率的方法，频率会随着样本空间的变化而变化，但随着样本的增加，频率会越来越集中于一个常数，这个数就是概率（统计概率的定义）. 所以用频率估计出来的概率有时是不精确的，会有误差. 让学生们理解，在遇到任何计算概率问题时，如果能够用理论计算，首先就应该采用理论计算的方式，这样的计算结果是概率的精确值（古典概率的定义）. 用频率估计概率通常会出现误差，得到的可能是概率的近似值.

5. 课时安排.

本章教学约需 7 课时，具体分配如下（仅供参考）：

25.1 求概率的方法	约 4 课时
25.2 概率的简单应用	约 2 课时
总结与复习	约 1 课时

教材及其参考信息



第二十五章
概率的求法与应用

在日常生活中，我们会遇到很多概率问题．

北京气象台天气预报："明天白天，阴转小雨，降水概率 60%……"

瓶盖掉在地上，盖面朝上的概率有多大？

在商场购物得到一张抽奖券，中奖的概率有多大？

水平相当的甲、乙两队进行排球比赛，规定五局三胜，甲队以 3∶0 战胜乙队的概率有多大？

……

这一章，我们要学习求概率的方法，并学会解决生活中一些简单事件的概率问题．

北京出版社

[1] 引导学生回忆八年级上册“事件与可能性”中学过的内容.

[2] 为了便于观察不同的结果，可用大小不同的硬币，大硬币设为 A，小硬币设为 B，也不影响实验的结果.

这个实验可以用计算机模拟，教师可设计制作这样的课件.

25.1 求概率的方法

前面我们已经学习过[1]，事件可以分为必然事件、不可能事件和随机事件. 还知道，事件发生的可能性可以用数值表示，如 P(必然事件)=1，P(不可能事件)=0.

表示一个事件发生的可能性大小的数值，称为这个事件的概率，记作 P(事件). 例如，降水概率是 60%，是指降水的可能性是 60%.

现在，我们来学习求概率的方法.

1. 列举法

我们曾做过抛掷一枚硬币的实验，硬币落地后，所有可能出现的结果有 2 个，如图 25－1 所示.



正面朝上　　反面朝上

图 25－1

由于硬币是均匀的，每个结果发生的可能性都相等，其中“正面朝上”的结果只有 1 个，所以“正面朝上”的概率是：

$$P(\text{正面朝上})=\frac{1}{2}.$$

（分子：所求事件出现的结果个数；分母：所有可能出现的结果个数.）

探索

每位同学同时抛掷两枚硬币，观察两枚硬币落地后的情况：[2]

(1) 两枚硬币落地后，可能出现的结果有几种？

(2) 两枚硬币落地后，正面都朝上的概率有多大？

25.1 节主要学习求概率的方法.

由于事件的特征不同，求概率的方法也不同. 本节根据概率的两种定义学习求概率的方法.

1. 列举法.

根据概率的古典定义：(1) 所有可能发生的结果只有有限的 n 个（有限性）；(2) 如果每个结果发生的可能性都相等（等可能性），其中事件 A 出现的结果有 m 个，则事件 A 的概率为：

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

假设抛掷的分别是 A，B 两枚硬币，落地后硬币 A 所有可能出现的结果如下表的左列所示，硬币 B 所有可能出现的结果如下表的上行所示，两枚硬币所有可能同时出现的结果如下表所示：

同时可能出现：硬币 A 可能出现 \ 硬币 B 可能出现	正面朝上	反面朝上
正面朝上	（正，正）	（正，反）
反面朝上	（反，正）	（反，反）

上面是用列表的方法列举所有可能出现的结果，有下面 4 个：

（正，正）；（正，反）；（反，正）；（反，反）.

由于两枚硬币都是均匀的，每个结果发生的可能性都相等，[1] 其中出现“两枚正面都朝上”的结果有 1 个 . 所以

$$P(\text{两枚正面都朝上})=\frac{1}{4}.$$ [2]

这样计算的根据是什么？

我们也可以先列举硬币 A 所有可能出现的结果，在它的每个结果后面再分别列举硬币 B 所有可能出现的结果，由此得到 A，B 两枚硬币所有可能同时出现的结果，如图 25－2 所示：

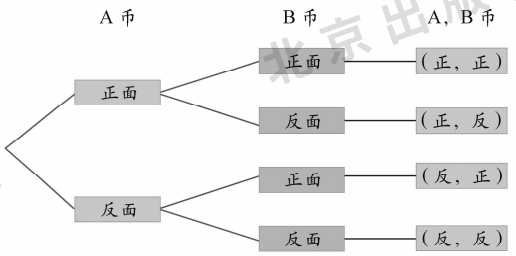


图 25－2

[1] 这里的均匀性也包含对称性，因此两枚硬币可能出现的 4 个结果有均等的机会，要注意（正，反）与（反，正）是两个结果.

[2] 根据列举法的概率公式：

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

（1）列表的方法，适用于两个有序因素构成的事件，列出所有可能发生的结果. 如掷 A，B 两枚（或一枚掷两次）正多面体；有放回的摸两次，每次摸一个球；转动 A，B 两个（或一个转动两次）等分的转盘；或类似于上述实验的事件.

例如，从数字 0，1，2，3 中任取一个数作为横坐标值，放回后再从这四个数字中任取一个数作为纵坐标值，列出所有可能出现在平面直角坐标系中点的坐标. 这个事件类似于掷两次各面分别标有这些数字的正四面体；或分别从标有这些数字的四个球中任取一个，有放回的取两次球；或两次转动分别标有这些数字的四等分转盘.

[1] 引导学生回忆求可能性的方法和步骤，并由学生归纳.

[2] 可图示如下：

左边　　右边

1 2　　0 1 2

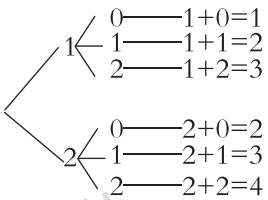
数字朝上

□□　　□□□

数字朝下

可用实物实验，也可以设计课件用计算机模拟演示.

[3] 也可以画树状图列举如下：



上面是用画树状图的方法列举所有可能出现的结果.

由此可知，用列举法求概率的一般步骤是：[1]

(1) 列举 (列表、画树状图) 事件所有可能出现的结果，并判断每个结果发生的可能性是否都相等；

(2) 如果都相等，再确定所有可能出现的结果个数 n 和其中出现所求事件 A 的结果个数 m；

(3) 用公式计算所求事件 A 发生的概率. 即

$$\Rightarrow P(A)=\frac{m}{n}.$$

例 1 在五张大小相同的卡片上，分别写有数字 0，1，1，2，2，把写有 1，2 的两张卡片放在左边，把另外写有 0，1，2 的三张卡片放在右边，并且写有数字的面都朝下.

(1) 分别从左、右两边随机各取出一张卡片，求这两张卡片上的数字之和为奇数的概率；

(2) 将右边的三张卡片随机排成一行，求翻开后组成一个三位数的概率.

分析：只需列举所有可能发生的结果[2]，并确定每个结果发生的可能性都相等.

(1) 将取出的左、右两边两张卡片上的数字求和，所有可能出现的结果如下表所示：[3]

两个数字求和 / 右边取出的数字 / 左边取出的数字	0	1	2
1	1+0=1	1+1=2	1+2=3
2	2+0=2	2+1=3	2+2=4

(2) 右边二张卡片随机排成一行，翻开后，所有可能出现的结果如图 25－3 右列所示：

(2) 画树状图的方法，适用于两个或两个以上因素（不论有序或无序）构成的事件，列出所有可能发生的结果. 如掷三枚（或三次）正多面体，摸三个（或每次摸一个，有放回的摸三次）球，转三个（或三次）等分转盘，或类似于上述实验的事件.

例如，本节中例 1 的第(2)个问题，因为不存在正三面体，只能类似于从分别标有 0，1，2 数字的三个球中，有放回的取三次，每次都从这三个球中任取一个，球上的数字依次记在百位、十位、个位上；或转动三次分别标有 0，1，2 数字的一个三等分转盘，每次转出的数字依次记在百位、十位、个位上.

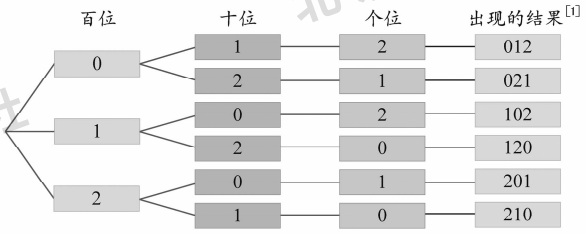


图 25－3

解：（1）这两张卡片的数字之和所有可能出现的结果有 6 个：

1，2，3，2，3，4.

为什么每个结果发生的可能性都相等？

每个结果发生的可能性都相等，其中出现和为奇数的结果有 3 个．所以

$$P(\text{数字之和为奇数})=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

（2）翻开后所有可能出现的结果有 6 个：

012，021，102，120，201，210．

其中出现三位数的结果有 4 个．所以

$$P(\text{组成一个三位数})=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

要确定每个结果发生的可能性相等！

练习

1. 甲、乙两人的口袋里都装有 5 元、10 元的两张人民币，两人分别从口袋里随机掏出一张．
（1）列出这两张币值之和所有可能出现的结果；
（2）求这两张币值之和是偶数的概率．
2. 把 A，K，Q 三张扑克牌背面朝上，随机排成一行，求 A 牌恰好排在中间的概率．

例 2 口袋里有四枚除颜色外都相同的棋子，其中有三枚是红色的，一枚是黑色的．从中随机同时摸出两枚，求摸出的两枚棋子颜色不同的概率．

［1］难于用列表法列举．

练习答案：

1.（1）

乙＼甲	5	10
5	10	15
10	15	20

所有可能出现的结果：

10，15，15，20.

（2）$P(\text{币值之和是偶数})=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

2．所有可能的结果：

（A，K，Q）；

（A，Q，K）；

（K，A，Q）；

（K，Q，A）；

（Q，A，K）；

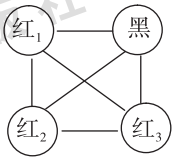
（Q，K，A）.

$P(\text{A 牌在中间})=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

例 2 中的问题，也可以看作不放回两次摸棋子．第一次从中随机摸出一枚记下颜色不放回；第二次再从剩余的棋子中随机摸出一枚记下颜色，求两次摸出不同颜色棋子的概率．列表如下：

第一次＼两次	第二次			
	红$_1$	红$_2$	红$_3$	黑
红$_1$		（红$_1$，红$_2$）	（红$_1$，红$_3$）	（红$_1$，黑）
红$_2$	（红$_2$，红$_1$）		（红$_2$，红$_3$）	（红$_2$，黑）
红$_3$	（红$_3$，红$_1$）	（红$_3$，红$_2$）		（红$_3$，黑）
黑	（黑，红$_1$）	（黑，红$_2$）	（黑，红$_3$）	

[1] 也可以类比于平面上的四点，任意三点不在一条直线上，连接两点的所有可能的线段（如图）.



[2] 因为同时摸出两枚棋子的事件与两枚棋子的顺序无关，所以（红$_2$，红$_1$）与（红$_1$，红$_2$）是同一个结果，已经列出（红$_1$，红$_2$），不再列出（红$_2$，红$_1$），同理，不再列出（红$_3$，红$_2$）……

[3] “有放回”与“不放回”是两种不同的摸出方式，“有放回”如题目所述；“不放回”指第一次从中随机摸出一枚，不放回，第二次再从剩余的棋子中随机摸出一枚.

[4] （红$_1$，红$_2$）是第一次摸出的1号红子，而（红$_2$，红$_1$）是第二次摸出的1号红子，所以不一样.

分析：只需列举同时摸出两枚棋子的所有可能结果. 为防止遗漏或重复，给三枚红色棋子编号为红$_1$、红$_2$、红$_3$. 结果如图 25－4 所示：[1]

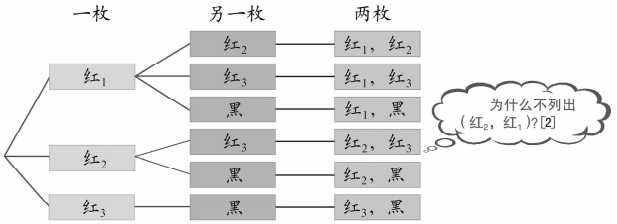


图 25－4

解：同时摸出两枚棋子的所有可能结果有 6 个：

（红$_1$，红$_2$）；（红$_1$，红$_3$）；（红$_1$，黑）；（红$_2$，红$_3$）；（红$_2$，黑）；（红$_3$，黑）.

每个结果发生的可能性都相同，其中出现颜色不同的结果有 3 个. 所以

$$P(\text{摸出两枚棋子颜色不同}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

例 3 口袋里有三枚除颜色外都相同的棋子，其中有两枚是红色的，一枚是黑色的. 从中随机摸出一枚记下颜色，放回口袋搅匀，再从中随机摸出一枚记下颜色. 求两次摸出棋子颜色不同的概率.

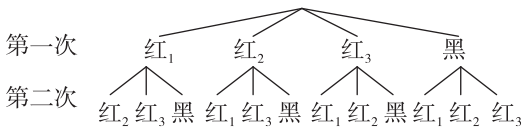
分析：这是有放回的两次摸出棋子的问题，[3]也就是每次都是从三枚棋子中随机摸出一枚. 列举两次摸出棋子的所有可能结果，如下表所示：

两次可能摸出的结果 / 第一次可能摸出的结果 \ 第二次可能摸出的结果	红$_1$	红$_2$	黑
红$_1$	（红$_1$，红$_1$）	（红$_1$，红$_2$）	（红$_1$，黑）
红$_2$	（红$_2$，红$_1$）	（红$_2$，红$_2$）	（红$_2$，黑）
黑	（黑，红$_1$）	（黑，红$_2$）	（黑，黑）

这里的（红$_2$，红$_1$）与（红$_1$，红$_2$）为什么不一样？[4]

$$P(\text{两次摸出棋子颜色不同}) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$

例 2 按上述思路也可以画树状图列举如下：



所有可能的结果有 12 个，其中颜色不同的结果有 6 个，所以 $P = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$. 上面每个结果都重复出现（2 个），删掉重复的就是教材中的树状图.

解：两次摸出棋子所有可能出现的结果有 9 个：

（红$_1$，红$_1$）；（红$_1$，红$_2$）；（红$_1$，黑）；

（红$_2$，红$_1$）；（红$_2$，红$_2$）；（红$_2$，黑）；

（黑，红$_1$）；（黑，红$_2$）；（黑，黑）.

每个结果发生的可能性都相等，其中颜色不同的结果有 4 个，所以

$$P(\text{两次摸出棋子颜色不同})=\frac{4}{9}.$$

探索

请你用画树状图的方法，列举例 3 中两次摸出棋子所有可能的结果.[1]

练习

1. 将一副扑克牌中的两张牌分别从中间剪开，分成大小一样的四片，背面朝上放在桌面上洗匀，从中随机同时取出两片.
   （1）列举取出两片的所有可能的结果；
   （2）求取出的两片恰好是同一张扑克牌的概率.
2. 三张一样的卡片，分别写上数字 0，1，2，放进抽屉里洗匀. 从中随机取一张，把卡片上的数字记在十位上，然后放回抽屉里洗匀；再从中随机取一张，把卡片上的数字记在个位上. 求：
   （1）组成的是一个两位数的概率；
   （2）组成的是一个两位奇数的概率.

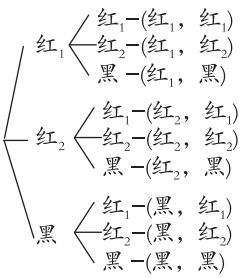
2. 用频率估计

抛掷一枚硬币时，我们可以通过列举法求得硬币落地后“正面朝上”的概率. 如果把硬币换成瓶盖（图 25－5），怎样求瓶盖掉在地上后，盖面朝上的概率呢？



图 25－5

[1] 画树状图如下：



练习答案：

1. （1）类似例 2. 所有可能的结果：
   （A$_上$，A$_下$）；（A$_上$，B$_上$）；
   （A$_上$，B$_下$）；（A$_下$，B$_上$）；
   （A$_下$，B$_下$）；（B$_上$，B$_下$）.
   （2）$P(\text{同一张牌})=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.
2. 类似例 3. 所有可能的结果：
   00，01，02，
   10，11，12，
   20，21，22.
   （1）$P(\text{两位数})=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$；
   （2）$P(\text{两位的奇数})=\frac{2}{9}$.

2. 用频率估计. 概率的统计定义：在大量重复进行同一实验时，如果事件 A 发生的频率$\frac{m}{n}$总是接近于某个常数，在它附近摆动，这时就把这个常数定义为事件 A 的概率. 通常，称这个常数为频率的稳定值.

根据概率的统计定义，求一个事件的概率可以通过大量的重复实验，用它发生的频率作为它的概率的近似值.

[1] 每小组抛掷50次的实验，可以在课前布置给学生当作业完成.

[2] 教师先给学生分好组和序号，课前各组先统计好本组的实验结果.

交流

抛掷一枚瓶盖，落地后会出现哪些结果，每个结果发生的可能性相等吗？为什么？还能用前面的公式计算概率吗？如果不能，怎样求盖面朝上的概率？

我们设计一个重复抛掷的实验来探索解决问题的方法.

实践

全班同学分成两大组.第一大组的同学都抛掷同一型号的一枚瓶盖，第二大组的同学都抛掷同一面额的硬币，以2人为一小组各抛掷50次，记下落地后盖（正）面朝上的次数,[1]统计本小组50次实验中盖（正）面朝上的次数和频率,[2]各大组依次累计各小组的实验结果，填在下表中（频率精确到0.000 1）.

累计顺序	1组	1~2组	1~3组	1~4组	1~5组	1~6组	1~7组	1~8组	1~9组	1~10组	…
累计实验次数	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500	…
盖（正）面朝上次数											…
盖（正）面朝上频率											…

在图25－6中画出上表中盖（正）面朝上的频率折线图.

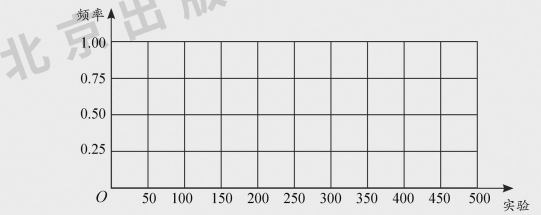


图25－6

68 数学 九年级 下册

这个实验要经历以下过程：自主实验——每小组同学独立抛掷50次；交流合作——先小组交流，合作统计本组的盖面朝上的次数和频率，再全班大组交流，依次累计各小组的实验结果；共同探究——每位同学都画出频率的折线图，观察频率总是在哪个常数附近（上、下）波动，大家猜测这个常数是什么；得出结论——用计算器计算表中这组频率的平均值与方差，验证猜想，得出结论.

从实验中知道，瓶盖或硬币落地后，所有可能出现的结果有 2 个：“盖（正）面朝上”和“盖（正）面朝下”.

由于瓶盖不均匀，每个结果发生的可能性不相等，因此，不能用前面的公式计算盖面朝上的概率.

观察两个大组完成的频率折线图，我们发现，重复实验的次数不同，盖（正）面朝上的频率也可能不同，但总是在某个常数附近波动，我们就把这个常数作为盖（正）面朝上的概率.

一般地，在做大量重复实验时，如果一个事件发生的频率总是在某个常数附近波动，就把这个常数作为这个事件发生的概率.

练习

1. 某数学兴趣小组在课外活动时，三人合作做抛掷同一型号的一枚图钉的实验，大量重复实验的结果统计如下表：

累计实验次数	甲：150	甲、乙：350	甲、乙、丙：550
钉尖朝上次数	80	185	296
钉尖朝上频率	0.533 3	0.528 6	0.538 2

根据表格中的信息，估计掷一枚这样的图钉落地后钉尖朝上的概率（精确到 0.01）.

2. 每位同学做一个抛掷一只大小相同的纸杯实验. 掷 10 次，记下落地后杯腰触地的次数，计算相应的频率. 用你和相邻同学 10 人的重复实验的频率的平均值，估计抛掷一只这样的纸杯落地后杯腰触地的概率.



（第 2 题）

练习答案：

1. 估计概率约为 0.53.
2. 略.

习 题 25－1

★基础★

1. 填空题：

（1）某班将要转来甲、乙两名同学，这两名同学的性别可能性相等．这两名同学所有可能出现的性别的结果是_____，这两名同学都是男生的概率为_____，是不同性别的概率为_____．

（2）有A，B两枚币值相同的硬币，A币两面分别贴红色、黄色标签，B币两面分别贴红色、绿色标签．任意抛掷这两枚硬币，落地后两枚硬币面朝上标签颜色所有可能出现的结果是_____，两枚朝上标签都是红色的概率为_____，朝上标签的颜色不同的概率为_____．

2. 甲、乙两人玩“剪刀、锤子、布”游戏．规定：剪刀胜布，布胜锤子，锤子胜剪刀，两人同时随机出示一种手势．

（1）列出两人出示手势的所有可能出现的结果，如甲、乙分别出示剪刀、布，结果记为（刀，布）；

（2）分别求甲胜和乙胜的概率．

3. 同时随机抛掷1角、5角、1元三枚硬币，分别求落地后“三枚正面都朝上”和“两枚正面、一枚反面朝上”的概率．

4. 两张大小相同的画有动物图案的卡片，分别从中间剪开，分成全等的四片，洗匀后放在口袋里，从中随机同时取出两片．

（1）如果两张卡片上的动物图案完全相同，求取出的两片能拼成动物图案的概率；

（2）如果两张卡片上的动物图案不同，求取出的两片能拼成动物图案的概率．

5. 抽屉里有一副扑克牌中的三张牌，从中随机取出一张记下牌花，放回抽屉洗匀；再从中随机取出一张记下牌花．

（1）如果三张牌花各不相同，求两次取出的是相同牌花的概率；

（2）如果其中两张牌花相同，另一张牌花不同，求两次取出的是相同牌花的概率．

6. 某中学九年级有6个班，要从中选出2个班代表学校参加某项活动．（1）班必须参加，另外再从（2）班至（6）班中选出1个班．有学生建议用如下的方法：从装有编号为1，2，3的三个白球的A袋中摸出一个球，再从装有编号为1，2，3的三个红球的B袋中摸出1个球（两袋中球的大小、形状与质量完全一样），摸出的两个球上的数字之和是几，就选几班．你认为这种方法公平吗？请说明理由．

*7. 在一张边长为 a 的正方形纸板中间有一个面积最大的圆，在圆内涂满了粘苍蝇的药物．如果一只苍蝇飞到正方形纸板上，落在每个点的可能性都相等，求下列事件的概率：

(1) 苍蝇被粘住；

(2) 苍蝇未被粘住．

8. 某班级学生分组做抛掷瓶盖实验，各组实验结果如下表：

累计抛掷次数	100	200	300	400	500
盖面朝上次数	54	105	158	212	264
盖面朝上频率	0.540 0	0.525 0	0.526 7	0.530 0	0.528 0

根据表格中的信息，估计掷一枚这样的瓶盖，落地后盖面朝上的概率(精确到 0.01)．

★★提升★★

1. 甲、乙两人玩掷骰子游戏，每人各掷一枚，同时掷出，计算两枚骰子朝上的点数的和，通过约定点数的和的情况来论胜负．

(1) 若规定：点数之和如果是 2，3，4，10，11，12 时，那么甲胜；如果是 5，6，7，8，9 时，那么乙胜．各方胜的概率分别为多大？哪方胜的概率较大？

(2) 若规定：点数之和如果是奇数时，那么甲胜；如果是偶数时，那么乙胜．这个游戏规则公平吗？请用概率的知识说明．

2. 从 3 名男生和 2 名女生中抽签，随机挑出 2 名学生去参观，求挑出的 2 名学生中：

(1) 同是男生的概率；

(2) 是 1 名男生和 1 名女生的概率．

★★★拓展★★★

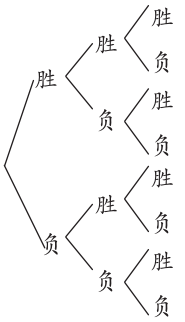
有三枚币值相同的硬币，两面分别贴上不同颜色的标签，其中 A 币贴的是红色、黄色，B 币贴的是黄色、绿色，C 币贴的是绿色、红色．同时抛掷这三枚硬币，求：

(1) 落地后朝上标签颜色各不相同的概率；

(2) 落地后朝上标签至少有一个是红色的概率．

[1] 类比掷一枚硬币，每局掷一次，掷三局，正面为胜，反面为负，画树状图如下：

第一局　第二局　第三局



25.2 概率的简单应用

学习了求概率的方法后，我们就可以来解决一些简单的实际问题．

例 1 水平相当的甲、乙两队进行排球比赛，规定五局三胜，求甲队以 3 : 0 战胜乙队的概率．

分析：根据规定，只有比赛满三局，甲队才有可能以 3 : 0 战胜乙队．只需求前三局比赛中甲队连胜三局的概率，所以需要列出前三局比赛甲队所有可能出现胜负的结果．[1]

请你画出树状图．

解：前三局比赛中，甲队所有可能出现胜负的结果有 8 个，即

（胜，胜，胜）；（胜，胜，负）；（胜，负，胜）；（胜，负，负）；

（负，胜，胜）；（负，胜，负）；（负，负，胜）；（负，负，负）．

其中出现连胜三局的结果只有 1 个．所以

$P(\text{甲队连胜前三局}) = \frac{1}{8}$．

每个结果发生的可能性都相等吗？

答：甲队以 3 : 0 战胜乙队的概率是 $\frac{1}{8}$．

在实际比赛中，3 : 0 的结果时有出现．可见，概率很小的事件也可能发生．

例 2 某商场为促销商品，每期发行 1 000 张编号为 000 ~ 999 的购物奖券，当奖券发完后，从 0 ~ 9 中分别摇出三个数字组成一个中奖号．奖券号码与中奖号完全相同时，为一等奖；后两位号码相同时，为二等奖；最后一位号码相同时，为三等奖．

（1）小华购物得到 3 张奖券，求他中一等奖的概率；

（2）小明购物得到 1 张奖券，求他中二等奖的概率；

（3）如果购物得到 1 张奖券，求这张奖券的中奖概率．

分析：只需确定所有可能中奖的号码个数和其中各种奖的号码个数．1 000 张奖券，每张都可能中奖，有 1 000 个号码，一等奖只有 1 个号码，比如 258；那么，二等奖的中奖号就是 $x58$（其中“x”可能是除 2 以外的 9 个数字），有 9 个号码；三等奖的中奖号就是 $xy8$（其中“y”可能是除 5 以外的 9 个数字，而这时的 x 可能是 0 ~ 9 中的 10 个数字），则有 $9 \times 10 = 90$ 个号码．所有中奖的号码有 100 个．

25.2 节通过实例学习运用概率知识解决简单的实际问题.

实际问题类型多样，要根据问题的特征，类比典型实验，选择求概率的方法.

例 1 类比掷一枚硬币实验，掷三次，画树状图列举法求解.

例 2 类比转动三次分别标有 0 ~ 9 的十等分的转盘，画树状图很复杂，分析如下：

转动三次，分别转出三个数字，依次填在百位、十位、个位上，可能转出的是 000 ~ 999 的 $10 \times 10 \times 10 = 1\,000$ 个号码，每个号码都有可能中奖. 当三个数字依次与中奖号相同时，中一等奖，只有一个号码；当后两个数字依次与中奖号后两位相同时，中二等以上奖，前一位有 10 个不同数字，中二等以上奖的号码有 10 个，除去一个一

解：所有可能中奖的号码有 1 000 个，其中，中一等奖的号码有 1 个；中二等奖的号码有 9 个；中三等奖的号码有 90 个．所有中奖的号码有 100 个．每个号码中奖的可能性都相等．

（1）小华得到 3 张奖券，有 3 个可能中一等奖的机会．所以

$$P(\text{小华中一等奖}) = \frac{3}{1\,000};$$

（2）小明得到 1 张奖券，有 9 个可能中二等奖的机会．所以

$$P(\text{小明中二等奖}) = \frac{9}{1\,000};$$

（3）得到 1 张奖券，有 100 个可能中奖的机会．所以

$$P(\text{得到 1 张奖券中奖}) = \frac{100}{1\,000} = \frac{1}{10}.$$

答：小华中一等奖的概率是 $\frac{3}{1\,000}$；小明中二等奖的概率是 $\frac{9}{1\,000}$；1 张奖券中奖的概率是 $\frac{1}{10}$．

思考

在例 2 中，每期购物奖券的中奖率是多少？中奖率与随意得到一张奖券的中奖概率的区别是什么？

在例 2 中，每期购物奖券的中奖率，是指中奖奖券数占全部奖券数的百分比，也就是：

$$\text{中奖率}(\%) = \frac{100}{1\,000} \times 100\% = 10\%.$$

中奖概率，是指中奖可能性的大小，因此它们的含义不同．

练习

1. 水平相当的甲、乙两人进行乒乓球对抗赛，规定七局四胜．求乙以 4 : 0 获胜的概率．
2. 如图，是一把由三组 0 ~ 9 的数字组成的号码锁，当三组中的某个数字都分别对齐密码后，锁才能打开，求下列情况下试开一次能打开锁的概率：
（1）忘记开锁密码的最后一个数字；
（2）开锁密码的三个数字全忘记．



（第 2 题）



练习答案：

1. $\frac{1}{16}$.

2. （1）$\frac{1}{10}$；

（2）$\frac{1}{1\,000}$.

等奖，中二等奖号码有 9 个；当最后一个数字与中奖号最后一位相同时，中三等以上奖，前两位各有 10 个不同数字，中三等以上奖（也就是中奖）的号码有 $10 \times 10 = 100$ 个，除去 10 个二等以上奖的号码，中三等奖的号码有 90 个．用框图表示如下：

奖券（可能中奖）			一等奖号码			二等及以上奖号码			三等及以上奖号码		
0 ~ 9	0 ~ 9	0 ~ 9	2	5	8	0 ~ 9	5	8	0 ~ 9	0 ~ 9	8
$10 \times 10 \times 10 = 1\,000$（个）			1 个			10 个（含一等奖）			$10 \times 10 = 100$（含一、二等奖）		

[1] 500 粒麦种的一个实验，看作 500 次重复实验的一个实验.

交流

在气温和水分都适宜的土壤里，种下一粒麦种会出现发芽或不发芽两种情况．每种情况发生的可能性都相等吗？怎样估计一粒麦种发芽的概率？

由于麦种的品种与质量不同，在气温和水分都适宜的土壤里，种下的一粒麦种可能发芽，也可能不发芽．品种与质量好的麦种发芽的可能性大，不发芽的可能性小．换麦种时，通常要做发芽实验以测定麦种的发芽率，从而估算每亩①地播种的麦种数量，也可以用发芽率来估计一粒麦种发芽的概率．

例 3 某农场引进一批新麦种，在播种前做了五次发芽实验，每次任取 500 粒麦种进行实验．实验结果如下表所示（发芽率精确到 0.000 1）：

实验的麦种数 / 粒	500	500	500	500	500
发芽的麦种数 / 粒	492	487	491	493	489
发芽率 / %	98.40	97.40	98.20	98.60	97.80

其中，

$$\text{发芽率} = \frac{\text{发芽的麦种数}}{\text{实验的麦种数}} \times 100\%.$$

试估计：在与实验条件相同的情况下，[1] 种一粒这样的麦种发芽的概率（精确到 0.01）．

分析：500 粒麦种的一次实验，把其中发芽的麦种粒数看做频数，那么，发芽率就是频率．用五次实验中发芽率的平均值估计一粒麦种发芽的概率．

解：用计算器计算，发芽率的平均值 $\bar{x} \approx 98.08\% = 0.980\,8$，方差 $s = 1.856 \times 10^{-5}$.

由于方差很小，即发芽率在平均值 0.980 8 附近波动很小．所以，估计一粒麦种发芽的概率约为 0.98.

答：在与实验条件相同的情况下，种一粒麦种发芽的概率约为 0.98.

① 1 亩≈667 平方米．

例 3 通过实验获得事件发生的频率，用频率作为概率的近似值——用频率估计概率，这也是求概率的基本方法.

思考

在例 3 中，麦种发芽率的平均值与随意种一粒麦种发芽的概率的含义分别是什么？它们的数值有什么关系？[1]

练习

1. 检验员检测了一台机床前三天正常生产的全部零件的质量，检测结果如下表（合格率精确到 0.000 1）：

零件生产时间	第一天	第二天	第三天
零件的合格率 / %	97.75	98.05	97.95

其中，合格率 $=\dfrac{\text{合格的零件数}}{\text{检测的零件数}}\times 100\%$.

从这台机床第四天正常生产的零件中随机抽取一个，估计这个零件是合格品的概率.

2. 某灯泡厂生产的灯泡，经抽样实验，被抽取的灯泡 98% 能使用 2 500 h 以上. 你买了一只该厂生产的灯泡，这只灯泡能使用 2 500 h 以上的概率是多少？

习 题 25－2

★基础★

1. 在学校田径运动会 4×100 米接力比赛时，用抽签的方法安排跑道，九年级（1）、（2）、（3）三个班恰好分在一组. 求下列事件的概率：
（1）九年级（1）班恰好排在第　道的概率；
（2）九年级（1）、（2）班恰好依次排在第一、第二道的概率.
2. 有 5 张电影票，其中有 3 张是第 10 排的，2 张是第 1 排的. 5 人抓阄分配.
（1）小华从 5 个阄中随机抓 1 张，求抓到的是第 10 排的概率；

[1] 麦种发芽率是指发芽的麦种数占投入实验的麦种总数的百分比；麦种发芽率的平均值是指这五个实验的发芽率的平均值；麦种的发芽概率，是指一粒麦种发芽可能性的大小. 它们的关系是近似相等的关系.

练习答案：

1. $\bar{x}\approx 97.92\%$
$=0.979\,2$,
$s\approx 0.015\,56$.
约 0.98.
2. 约 0.98.

(2) 小华已经抓去 1 张第 10 排的电影票，小芳、小明再从剩下的阄中同时随机各取一张，求两人抓到的都是第 10 排的概率 .

3. 水平相当的小明和小华进行一场羽毛球比赛，规定三局两胜 . 求小明以 2 : 0 获胜的概率 .
4. 某邮局发行 1 万张有奖明信片，当明信片售完后从 0 ~ 9 中分别摇出四个数字组成一个中奖号 . 明信片号码与中奖号码相同时，为特等奖；后三个号码相同时，为一等奖；后两个号码相同时，为二等奖；最后一个号码相同时，为三等奖 .
   (1) 小芳购买了 5 张明信片，求她中特等奖的概率；
   (2) 小丽购买了 1 张明信片，求她中一等奖的概率；
   (3) 求购买 1 张明信片的中奖概率 .
5. 小兰去银行取款时，忘记了她的教育储蓄存折密码的最后两个数字，只记住了后两个数字都比 5 大 . 当她按对前面的数字后，随机按了后面两个比 5 大的数字 . 求她按对密码的概率 .
6. 射击运动员小强在以往的 5 次比赛中，射中 9 环以上的命中率 (%) 依次是 ：97.45，98.04，97.85，97.63，98.10.
   (1) 估计他射击 1 次射中 9 环以上的概率；
   (2) 说明这里的命中率与概率的含义各是什么 .

★★提升★★

1. 小华的抽屉里，左边只放有大小厚薄差不多的 5 科不同的课本，右边只放有大小厚薄一样的这 5 科的作业本 . 上自习课时，小华从抽屉的左边随机摸出一本课本，又从右边随机摸出一本作业本 . 求他摸出的两本恰好是同一科的概率 .
2. 从甲班乒乓球队的 5 名选手中，随机抽选 3 名组队参加乒乓球团体赛 . 求抽选的 3 名恰好是前 3 号选手的概率 .

★★★拓展★★★

甲、乙两人进行射击比赛，规定每人各射击 10 次，抽签决定先后，轮流射击一次 .

(1) 写出甲抽得先射击的概率；

(2) 抽签结果是甲先射击 . 甲射击 10 次，总成绩是 91 环；乙射击 9 次后，总成绩是 82 环，按乙的射击水平他必然能射中 8 环以上，而且射中 8 环以内每个点的可能性都相等，求乙最后一次射击能胜甲的概率 (提示：分别计算所有可能射中 8 环以内区域的面积和能胜甲的环数区域的面积).

北京出版社

探 究 学 习

模拟彩票中奖实验

某种“15选5”的彩票规定：从1~15这15个号码中选择5个（可以重复），如果选择的号码与摇出的5个中奖号码（比如中奖号码为1，2，9，11，11）至少有两个相同，就可以中奖．请模拟彩票中奖实验，用实验的结果估计购买一张这种彩票中奖的概率．

一、实验方法

方法1：用科学计算器模拟彩票中奖实验．

（1）按键操作如下：

	具体操作	结　果
A型计算器	prb ▷ 21 2nd . 15)	randint (1,15)
B型计算器	ALPHA . 1 SHIFT) 15)	RanInt# (1,15)

按“enter”或“=”键，产生第一个号码，记作（x_1，…），依次按5次，产生5个号码的结果，记作（x_1，x_2，x_3，x_4，x_5）．比如第一次实验出现：（1，11，3，5，14），与中奖号码比对不中奖，继续实验．

（2）重复实验，直至出现与中奖号码至少有两个相同时，结束这个实验．比如第六次实验出现：（2，8，7，11，13），其中与中奖号码（1，2，9，11，11）至少有2，11相同，结束这个实验．

（3）以5人为一组，统计本组每人实验的结果，将每人重复实验的次数和其中出现中奖的次数填在下表中．

实验者序号	（1）	（2）	（3）	（4）	（5）
每人实验的次数					
出现中奖的次数					
出现中奖的频率					

方法2：摸球模拟彩票中奖实验．

（1）选用大小和质量都一样的15个小球，每个小球分别写上1，2，…，15等号码，放进口袋里搅匀．依次有放回地随机摸出5次号码（小球）作为一次实验．

随机从口袋里摸出1个小球，记下小球的号码为（x_1，…），放回口袋里再搅匀．依次有放回地随机摸出5次小球，得到5个号码的结果，记作（x_1，x_2，x_3，x_4，x_5）．比如第一次实验出现：（2，15，10，4，7），与中奖号码比对不中奖，继续实验．

（2）、（3）同方法1．

二、探究结果

1. 计算上页表中的中奖频率．

2. 计算重复实验的频率的平均值和方差．

3. 用5人模拟实验中奖的频率的平均值估计购买一张这种彩票中奖的概率．

4. 与其他组交流，比较哪个组的实验中奖频率的方差最小．

阅读理解

历史上科学家掷币实验的记录

历史上，法国科学家蒲丰、皮尔逊等人做过成千上万次掷一枚钱币的实验．下页表中列举的就是蒲丰、皮尔逊等人做过的掷币实验的记录．

实验者	掷币次数	出现“正面朝上”的次数	频 率
德·摩根	2 048	1 061	0.518 1
蒲丰	4 040	2 048	0.506 9
德·摩根	4 092	2 048	0.500 5
费勒	10 000	4 979	0.497 9
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5
罗曼诺夫斯基	80 640	39 699	0.492 3

根据上述蒲丰、皮尔逊等人的掷币实验数据，“正面朝上”发生的频率在数值 0.50 附近摆动．那么，“正面朝上”的概率就是 0.50.

根据上述结论，可以通过大量的重复实验，用事件发生的频率作为它的概率．

回顾与整理

知识要点

本章主要内容是：概率的求法与应用．

1. 求概率的方法．

(1) 列举法．

列举（列表、画树状图）事件所有可能出现的结果，并判断每个结果发生的可能性都相等．则事件 A 发生的概率为

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

其中，n 是所有可能出现的结果个数，m 是所求事件 A 出现的结果个数．

知识要点

（2）用频率估计．

在大量重复实验时，如果一个事件发生的频率在某个常数附近波动，就把这个常数作为这个事件的概率．

2. 概率的简单应用．

运用求概率的方法，解决生产、生活中一些简单事件的概率问题．

学习指导

1. 掌握求概率的方法．

重点掌握列举法，熟练运用列表和画树状图，列举所有可能发生的结果：当每个结果发生的可能性都相等时，可以运用公式 $P(A)=\frac{m}{n}$ 求概率；当每个结果发生的可能性不相等时，运用重复实验的频率估计概率．

2. 体会随机思想．

要从具体实例中了解事件发生的不确定性，在分析问题、解决问题的过程中体会其中蕴含的随机思想．

3. 学会运用概率知识解决简单实际问题．

分析实际问题的特征，选择求概率的方法，类比三个典型应用问题，建立实验模型，来求解生产、生活中的一些简单事件的概率问题．提高运用数学知识的意识和分析问题及解决问题的能力．

复习题

★基础★

1. 填空题：

（1）必然事件的概率 P=_____，不可能事件的概率 P=_____，随机事件的概率 P 的取值范围是_____；

北京出版社

(2) 事件 A 发生的概率为 P，那么，事件 A 不发生的概率为_____；

(3) 从 1，2，3 这三个数字中随机取两个相加，所有可能的和是_____，和为偶数的概率是_____；

(4) 从 0，1，3 这三个数字中随机取两个相减，所有可能的差是_____，差为负数的概率是_____；

(5) 甲、乙、丙三人随机站成一排，所有可能的站法有_____，甲不站在中间的概率是_____.

2. 选择题：

(1) 下列说法中正确的是(　　).

A. 随机事件发生的概率是不能确定的

B. 明天，降水概率 70%，是指明天 70% 的时间下雨

C. 事件 A 发生的概率与事件 A 不发生的概率可能相等

D. 概率为 0 的事件不存在

(2) 随机从三男一女四名学生的学号中抽取两人的学号，被抽中的两人性别不同的概率为(　　).

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{3}{4}$

3. 从长度分别是 2，3，4，5 的四条线段中随机取出三条，求：

(1) 三条线段能组成三角形的概率；

(2) 三条线段能组成直角三角形的概率.

4. 在 A 盒中有两张卡片，分别写有 3，-2；B 盒中有四张卡片，分别写有 2，4，0，-1. 随机从这两个盒子中各取出一张卡片，求取出的两张卡片上的数的积：

(1) 是负数的概率；

(2) 是正数的概率；

(3) 是零的概率.

5. 九年级 (1)、(2)、(3) 三个班教室门锁的钥匙都差不多，未贴标签摆放在一个盒子里，各班学生同时随机各取出一把去开教室门. 求：

(1) 只有一个班能打开教室门的概率；

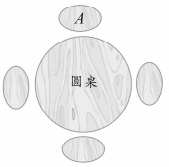
(2) 三个班都能打开教室门的概率；

(3) 三个班都不能打开教室门的概率.

★★提升★★

1. 听说学校聘来二位新教师，四位同学都在猜测他们的性别. 甲猜二位都是男教师；乙猜三位都是女教师；丙猜两位是男教师、另一位是女教师；丁猜一位是男教师、另两位是女教师. 假设每位教师是男教师或女教师的可能性相等，请你分别求四位同学猜对的概率.

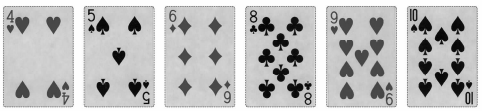
2. 一张圆桌旁有四个座位，A 先坐在如图所示的座位上，B，C，D 三人随机坐到其他三个座位上，求 A 与 B 相邻而坐的概率．



（第 2 题）

★★★ 拓展 ★★★

1. 如图，有 6 张纸牌，从中任意抽取两张，点数之和是奇数的概率是_____．



（第 1 题）

2. 甲、乙两人要去某风景区游玩，每天某一时段开往该风景区的汽车有三辆（舒适程度不同，票价相同），但他们不知道这些车开过来的顺序．两人采用了不同的乘车方案：甲无论如何总是上开来的第一辆车，而乙则是先观察后上车．当第一辆车开来时，乙不上车，而是仔细观察车的舒适状况．如果第二辆车的舒适状况比第一辆车好，他就上第二辆车；如果第二辆不比第一辆好，他就上第三辆车．

如果把这三辆车的舒适程度分为上、中、下三等，请尝试着解决下面的问题：

（1）三辆车按出现的先后顺序，其舒适程度共有哪几种不同的可能？

（2）你认为甲、乙两人采用的方案，哪个人的方案能使自己乘坐舒适程度上等的车的可能性大？为什么？

部分习题答案或提示

习题 25－1

基础

1. （1）（男$_{甲}$，男$_{乙}$），（男$_{甲}$，女$_{乙}$），（女$_{甲}$，男$_{乙}$），（女$_{甲}$，女$_{乙}$），$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{2}$；（2）略，$\frac{1}{4}$，$\frac{3}{4}$.

2. （1）（甲，乙）：（刀，刀），（刀，锤），（刀，布），（锤，刀），（锤，锤），（锤，布），（布，刀），（布，锤），（布，布）；

   （2）P（甲胜）＝P（乙胜）＝$\frac{1}{3}$，游戏公平.

3. 提示：画树状图列出所有可能结果. $\frac{1}{8}$，$\frac{3}{8}$.

4. 提示：用 $A_{上}$，$A_{下}$，$B_{上}$，$B_{下}$表示四片卡片，列出所有可能结果（6 个）.

   （1）A，B 图案完全相同，有 $A_{上}A_{下}$，$A_{上}B_{下}$，$B_{上}A_{下}$，$B_{上}B_{下}$分别拼成动物图案，$\frac{2}{3}$；

   （2）A，B 图案不同，只有 $A_{上}A_{下}$或 $B_{上}B_{下}$分别拼成动物图案，$\frac{1}{3}$.

5. （1）提示：设三张牌分别为 A（红桃），B（梅花），C（方块），列表列出所有可能结果（9 个）. $\frac{1}{3}$.

   （2）提示：设三张牌分别为 A_1（红桃$_1$），A_2（红桃$_2$），B（梅花），列表列出所有可能结果（9 个）. $\frac{5}{9}$.

6. 提示：所有可能的数字和（9 个）：2，3，4，3，4，5，4，5，6.

   不公平，因为选上各班的概率不相等，分别为：

   （2）、（6）班：P＝$\frac{1}{9}$；

   （3）、（5）班：P＝$\frac{2}{9}$；

   （4）班：P＝$\frac{1}{3}$.

*7. （1）$\frac{\pi}{4}$；（2）$1-\frac{\pi}{4}$.

8. 约为 0.53.

提升

1. 提示：列表列出所有可能的和(36 个).

(1) 和为 2，3，4，10，11，12 共 12 个；和为 5，6，7，8，9 共 24 个.

P(甲胜) = $\frac{1}{3}$，P(乙胜) = $\frac{2}{3}$，乙方胜的概率比较大.

(2) 和为奇数的 18 个，和为偶数的 18 个，P(甲胜) = P(乙胜) = $\frac{1}{2}$，游戏公平.

2. 提示：类比连接五点线段，列出所有可能结果(10 个).

(1) $\frac{3}{10}$；(2) $\frac{3}{5}$.

拓展

提示：画树状图列出所有可能结果(8 个).

(1) P(颜色各不相同) = $\frac{1}{4}$；(2) P(至少一枚红色) = $\frac{3}{4}$.

习题 25－2

基础

1. 提示：画树状图列出(第一道，第二道，第三道)所有可能结果(6 个).

(1) $\frac{1}{3}$；(2) $\frac{1}{6}$.

2. (1) $\frac{3}{5}$；(2) 提示：画树状图列出所有可能结果(6 个). $\frac{1}{6}$.

3. 提示：画树状图列出小明前两局胜、负的所有可能结果(4 个). P(小明 2∶0 胜) = $\frac{1}{4}$.

4. 提示：所有可能获奖号 10 000 个，特等奖号 1 个，一等奖号 9 个，二等奖号 90 个，三等奖号 900 个，中奖号共 1 000 个.

(1) $\frac{1}{2\,000}$；(2) $\frac{9}{10\,000}$；(3) $\frac{1}{10}$.

5. 提示：后两位比 5 大的数字可能组成的号码有 4 × 4 = 16 个. $\frac{1}{16}$.

6. (1) $\bar{x} \approx 97.81\% = 0.978\,1$，$s \approx 6.010\,4 \times 10^{-6}$；约为 0.98.

(2) 命中率，指命中 9 环以上的次数占射击总次数的百分比；概率，指射击一次命中 9 环以上的可能性大小.

提升

1. 提示：用 A，B，C，D，E 分别表示五科课本和作业本，列表列出所有可能结果（25 个）. $\frac{1}{5}$.

2. 提示：求留下的两名恰好是 4，5 号选手的概率. 画树状图或类比连接五点的线段列出留下后两名的所有可能结果（10 个）. $\frac{1}{10}$.

拓展

（1）$\frac{1}{2}$；（2）提示：乙必须射中 10（$>91-82=9$）环才能胜甲. 乙射中 8 环以内区域面积 $G=9\pi r^2$，可能射中 10 环区域面积 $g=\pi r^2$，P（乙能胜甲）$=\frac{1}{9}$.

复习题

基础

1. （1）1，0，$0<P<1$；

（2）$1-P$；

（3）3，4，5，$\frac{1}{3}$；

（4）1，-1，3，-3，2，-2，$\frac{1}{2}$；

（5）提示：画树状图列举（略）. $\frac{2}{3}$.

2. （1）C；（2）C.

3. （1）$\frac{3}{4}$；（2）$\frac{1}{4}$.

4. 提示：列表列出所有可能的积（8 个）.

（1）$\frac{3}{8}$；（2）$\frac{3}{8}$；（3）$\frac{1}{4}$.

5. 提示：画树状图列出各班取到钥匙的所有可能结果（6 个）.

（1）$\frac{1}{2}$；（2）$\frac{1}{6}$；（3）$\frac{1}{3}$.

提升

1. 提示：画出树状图列出三位老师性别的所有可能结果（8 个）：

P（甲猜对）= P（乙猜对）$=\frac{1}{8}$；P（丙猜对）= P（丁猜对）$=\frac{3}{8}$.

2. 提示：画树状图列出 B，C，D 排成一列的所有可能结果(6 个)，求 B 在两头(必与 A 相邻)的概率为$\frac{2}{3}$.

拓展

1. 提示：列出所有可能的点数和：9，10，12，13，14，11，13，14，15，14，15，16，17，18，19.

P(点数和是奇数) = $\frac{8}{15}$.

2. (1) 共有 6 种不同可能：

(上，中，下)；(上，下，中)；(中，上，下)；(中，下，上)；(下，上，中)；(下，中，上).

(2) 乙采用的方案乘坐舒适程度上等车的可能性大，P(乙乘坐上等车) = $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$，

而 P(甲乘坐上等车) = $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.



第二十六章
综合运用数学知识解决实际问题

教学目标

1. 让学生认识到现实生活中蕴含着大量与数量和图形有关的问题，这些问题可以抽象成数学问题，用数学的方法予以解决；能初步结合具体情境发现和提出数学问题.

2. 让学生在面对实际问题时，学会能够主动尝试从数学的角度，运用所学知识和方法去寻求问题的解决；初步了解运用数学知识解决实际问题的一般思路和策略.

3. 让学生在解决问题的过程中，认识数学具有抽象、严谨和应用广泛的特点，体会数学的价值.

4. 通过综合、灵活地运用所学知识解决实际问题，让学生体验解决问题方法的多样性，掌握分析问题和解决问题的一些基本方法，提高分析问题和解决问题的能力.

5. 通过数学应用的教学，使学生在与他人合作和交流过程中，能较好地理解他人的思考方法和结论，能针对他人所提的问题进行反思，初步形成评价与反思的意识.

教材分析和教学建议

1. 主要内容及其地位作用.

突出建立模型、求解模型的过程.

本章学习的主要内容是“综合运用数学知识解决实际问题”，首先以提出问题为切入点，在解决实际问题的过程中，提升出用数学知识解决实际应用问题的一般思路. 进而通过应用举例，让学生进一步体验数学应用的一般思路. 以本章内容为载体，有助于学生进一步理解有关知识，发展应用意识，达到提高发现和提出问题的能力、分析和解决问题的能力. 从教材内容来看，题目具有一定的综合性和应用性，可以起到综合复习的作用.

2. 本章编写特点.

本套教材把“综合运用数学知识解决实际问题”设为一章，是在整体教材注意到具体内容采用“问题情境—建立模型—解释、应用与拓广”的模式展开的基础上，在九年级教材中，进一步归纳、提升这种思路的一种设计.

教材设计为两个部分，第一部分“解决实际问题的一般思路”，通过已经学习过的典型应用问题，归纳、提升出用数学知识解决应用问题的一般思路；第二部分“应用举例”，从七到九年级的教学内容出发，通过具体的实际应用问题，让学生进一步体验数学应用的一般思路，提高应用意识，培养分析问题和解决问题的能力.

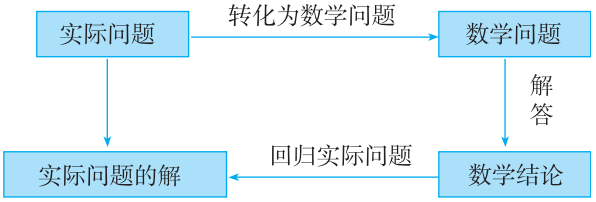
3. 教学重点、难点.

本章的重点是了解运用数学知识解决实际问题的一般思路. 本章的难点是，从实际应用问题的情境阅读理解题意，收集、分析、处理数据，联想、选择相关的数学知识，使之转化为一个数学问题.

4. 教学建议.

在本章教学中，要注意落实教材设计的基本思路，即从已经学习过的典型应用问题出发，引导学生归纳、总结出解决实际问题的一般思路，再应用这个思路去解决简单的实际应用问题. 这里蕴含着“实践—理论—实践”的认识规律.

在本章教学中，要以解决实际问题的一般思路为中心，这个思路用下面的框图来表示：



通过这个思路可以把解答应用性问题分解为四个步骤：理解问题、建立模型、模型求解、回归实际.

理解问题即认真阅读题目，理解题意，收集、分析处理数据，联想相关的数学知识，为解决问题做好准备.

建立模型即针对题意，完成由实际应用性问题向数学问题的转化，选择所要用到的数学知识，通过抽象、概括，转化为一个纯粹的数学问题.

模型求解即运用我们所具备的数学知识、技能和能力，完成对所建数学模型的解答.

回归实际，由于数学模型的解答并不一定完全符合问题的实际意义，所以要针对应用问题的实际，对模型解答进行反思，得出实际问题的正确解答.

本章教学具有从七到九年级的知识综合应用的特点，对学生全面掌握基础知识、具备基本技能和能力的要求较高. 在教学中需要及时复习，帮助学生查漏补缺，克服在知识、技能等方面的缺陷，并注意基础知识的落实. 另外，因为应用问题多数文字较长，内容较多，需要注意培养学生的阅读能力.

在本章教学中，要根据问题的实际，引导学生动手、动脑. 对于比较复杂的运算，要注意科学计算器的使用，要逐步引导学生走出学校，了解社会，在学习中学会独立思考、与人合作，培养勇于探究的精神，初步形成评价与反思的意识.

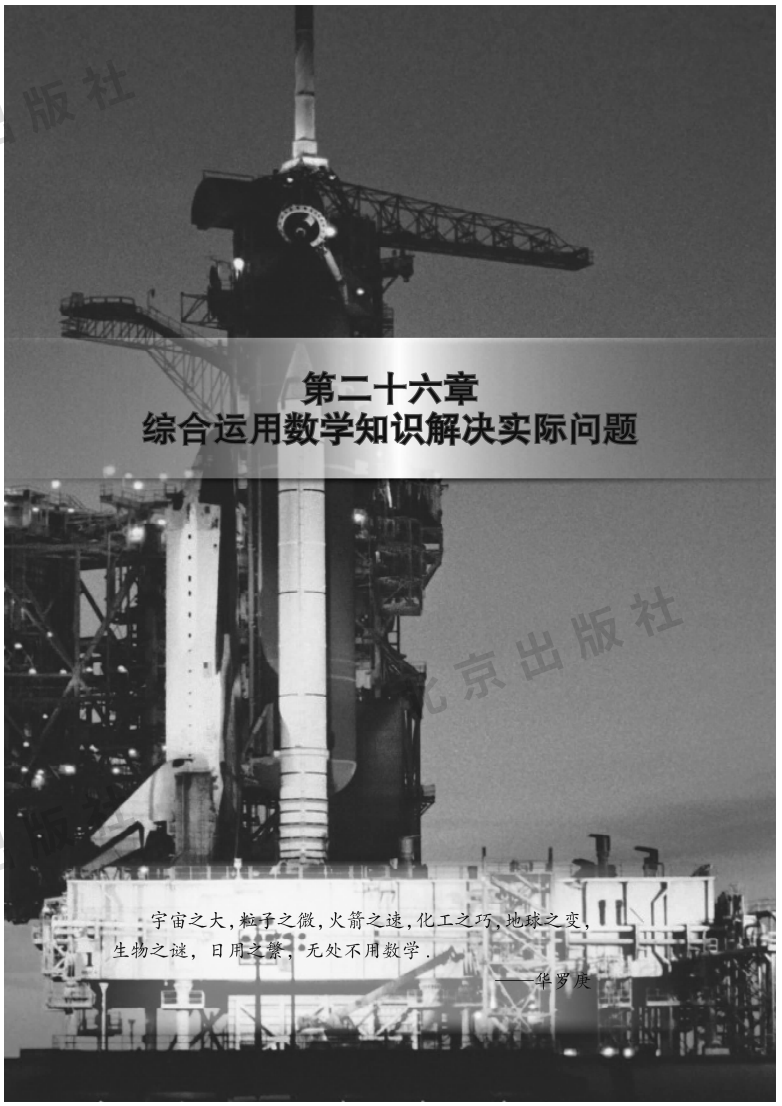
5. 课时安排.

本章教学约需 11 课时，具体分配如下（仅供参考）：

26.1 解决实际问题的一般思路	约 5 课时
26.2 应用举例	约 4 课时
总结与复习	约 2 课时

北京出版社

教材及其参考信息



教学之前可以要求学生调查数学的实际应用，课上进行交流，结合本章首页，教师进行归纳、提升，激发学生的学习兴趣. 结合华罗庚的语录，可以简单介绍华罗庚的生平事迹，普及数学史的知识.

26.1 解决实际问题的一般思路

在人们的生活、学习和生产中，无处不用数学．对于生活和生产中的数学问题，应当怎样去解决呢？一般的思路和方法是什么呢？下面我们来研究这些问题．

交流

某商店出售一种商品，经营者提出了以下三种调价方案：

(1) 先提价 10%，再降价 10%；

(2) 先降价 10%，再提价 10%；

(3) 先提价 25%，再降价 25%．

根据以上方案，请你思考下面几个问题：

(1) 执行这三种调价方案以后，调价后的价格与原来的价格是否相同？

(2) 比较这三种调价方案，调价后的价格是否相同？如果不相同，哪一种比较低些？

(3) 推广到一般情况，如果先提价 $a\%$，再降价 $a\%$，可以得到什么结论？

为了比较这三种调价方案，需要列出它们各自调价后价格的数学表达式．设这种商品原价为 m 元：

按方案 (1) 调价后的价格为

$$m(1+10\%)(1-10\%)=0.99m(\text{元})；$$

按方案 (2) 调价后的价格为

$$m(1-10\%)(1+10\%)=0.99m(\text{元})；$$

按方案 (3) 调价后的价格为

$$m(1+25\%)(1-25\%)=0.937\,5m(\text{元}).$$

从以上三式可知，调价后的价格都与原来的价格不相同．方案 (1) 与方案 (2) 调价后的价格相同，而方案 (3) 调价后的价格比方案 (1) 与方案 (2) 调价后的价格低．

26.1 节的教学，是要通过典型例题，进一步引导学生认识运用数学知识解决实际应用问题的常用方法，归纳、提升出用数学知识解决实际应用问题的一般思路.

1. 在以前的各章教学中，学生已经接触了数学应用问题，对于解法和思路有了初步的认识. 本小节的几个应用问题更加具有典型性、综合性，实际应用的背景更强，所以难度也稍大一些.

2. 本小节第一个“交流”实际上也是一个例题，它从生活中的实际问题引入，这个问题乍一看，感觉三种调价方案都一样，但是当转化为数学式子以后，问题就变得清晰了，体现了数学化的作用. 在教学中，要注意给学生必要的时间，让学生认真

推广到一般情况，设某种商品原价为 m 元，那么无论是先提价 $a\%$，再降价 $a\%$；还是先降价 $a\%$，再提价 $a\%$，调价后的价格都是

$$m[1-(a\%)^2](\text{元}).$$

转化为数学表达式，可以作一般性的研究.

不难发现，$m[1-(a\%)^2]<m$. 当 $0<a<100$ 时，a 越大，调价后的商品价格越低.

例 1 某电脑公司有 A，B，C 三种型号的电脑，其中 A 型每台 6 000 元，B 型每台 4 000 元，C 型每台 2 500 元. 学校计划从该公司购进两种不同型号的电脑共 36 台，恰好花费 100 500 元，请你设计不同的购买方案供学校选择.

分析：由于要求在这三种电脑中选购两种，因此需要分类讨论，利用计划需购进电脑台数和购进电脑共用钱数这两个等量关系，列方程组来求解.

解：按要求有三种情况：

(1) 当只购进 A，B 型电脑时，设购进 A 型电脑 x 台，B 型电脑 y 台. 根据题意，得

$$\begin{cases}6\,000x+4\,000y=100\,500,\\ x+y=36.\end{cases}$$

利用方程组的知识来解决.

解得

$$\begin{cases}x=-21.75,\\ y=57.75.\end{cases}$$

不合题意，舍去.

(2) 当只购进 A，C 型电脑时，设购进 A 型电脑 x 台，C 型电脑 z 台. 根据题意，得

$$\begin{cases}6\,000x+2\,500z=100\,500,\\ x+z=36.\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}x=3,\\ z=33.\end{cases}$$

(3) 当只购进 B，C 型电脑时，设购进 B 型电脑 y 台，C 型电脑 z 台. 根据题意，得

$$\begin{cases}4\,000y+2\,500z=100\,500,\\ y+z=36.\end{cases}$$

审题，弄懂题意，真正地思考，体验数学的应用. 解决了这个问题，还可以提出更高层次的问题，让学有余力的学生在课下解决.

比如，设原价为 m，提价 $a\%$ 以后，到底应降价多少才能恢复到原价呢？设应降价 $x\%$，则 $m(1+a\%)(1-x\%)=m$，解得 $x=\dfrac{100a}{100+a}$. 类似的，如果先降价 $a\%$，那么再应提价多少才能恢复到原价呢？设应提价 $y\%$，则 $m(1-a\%)(1+y\%)=m$，解得 $y=\dfrac{100a}{100-a}$. 显然 $x\neq y$，可见先提价 $a\%$ 与先降价 $a\%$，要恢复原价，相应再降价或

练习答案：

1. 赔了 83 元.
2. 这支足球队胜了 6 场，平了 4 场.

解得

$$\begin{cases} y = 7, \\ z = 29. \end{cases}$$

所以，有两种方案可供学校选择，第一种方案是购进 A 型电脑 3 台和 C 型电脑 33 台；第二种方案是购进 B 型电脑 7 台和 C 型电脑 29 台 .

我们看到，对于上述实际问题需要先把它转化为代数式或方程的数学问题，再利用已学过的数学知识去解决 .

练习

1. 某商场同时售出两台电子琴，每台售价均为 1 000 元 . 以成本计算，一台盈利 20%，另一台亏本 20%. 在本次出售中，试判断该商场是赔了还是赚了 .
2. 在某校举办的足球比赛中规定：胜一场得 3 分，平一场得 1 分，负一场得 0 分 . 某班足球队参加了 12 场比赛，共得 22 分 . 已知这个队只输了 2 场，那么此队胜几场？平几场？

实际问题是多种多样的，它们有着不同的背景，在解决这些实际问题时，需要综合应用数学的有关知识 .

例 2 学校举办摄影展览，要求在长、宽分别为 15 cm，10 cm 的长方形相片四周，镶上一圈等宽的彩色纸条 (如图 26 – 1)，并使纸条的面积与相片的面积之比为 2∶3. 如果王英同学镶上的纸条宽度为 1.6 cm，那么是否符合要求？如果不符合，请你帮助她确定纸条的宽度 (精确到 0.1 cm).

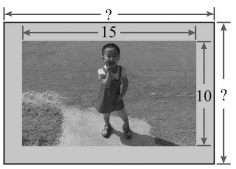


图 26 – 1

分析：此问题与图形有关，需要结合图形寻找蕴含其中的数量关系，由已知两个长方形的面积之比，联想到利用方程的知识来解决 .

解：设纸条的宽度为 x cm，根据题意，得

再提价的幅度并不相同.

3. 例 1 是一个方案选择问题，需要转化成的基础知识是二元一次方程组. 这与常规的应用题的区别是，在三种电脑中要求选择两种，因此需要分类讨论. 在教学中，学生审题以后，要引导学生首先运用分类讨论的思想考虑选择的几种情况，再转化为二元一次方程组来解决.

4. 例 2 立足于几何图形的面积，需要转化成的基础知识是一元二次方程. 在教学中要注意数形结合，从图形分析入手，抓住题目中“纸条的面积与相片的面积之比为 2∶3”这个等量关系，帮助学生理解题意，突破难点，找到解决问题的思路.

$$(15+2x)(10+2x)=15\times10\times\frac{5}{3}.$$

整理得

$$2x^2+25x-50=0.$$

转化为一元二次方程的问题.

解方程得

$$x_1\approx1.8,\ x_2\approx-14.3.$$

根据题意，取 $x\approx1.8$.

因为 $1.6<1.8$，误差超过要求范围，所以王英同学镶上的纸条不符合要求.

答：王英同学镶上的纸条不符合要求，纸条的宽度应约为 1.8 cm.

例 3 小明去商店买灯泡. 商店柜台里现有功率为 100 W 的白炽灯泡和 40 W 的节能灯泡，它们的单价分别为 2 元和 32 元. 经了解这两种灯泡的照明效果和使用寿命都一样，但是节能灯泡省电. 已知小明家所在地的电价为每度 0.5 元，请问：当这两种灯泡的使用寿命超过多少时间时，小明选择节能灯泡才合算？ [用电量 (kW·h) = 功率 (kW) × 时间 (h)，1 度 = 1 kW·h]

分析：选择最优方案，需要对两种灯泡的用电量进行比较，结合题意联想用不等式的知识求解. 要注意题目所给数量的实际意义及其单位的换算.

解：设使用寿命超过 x 小时，选择节能灯泡才合算. 根据题意，得

$$2+0.5\times\frac{100}{1\,000}x>32+0.5\times\frac{40}{1\,000}x.$$

转化为不等式的问题.

解得

$$x>1\,000.$$

答：这两种灯泡的使用寿命超过 1 000 小时，选择节能灯泡才合算.

练习

1. 磁悬浮列车是一种新型交通工具，具有速度快、能耗低等优点. 它每个座位的平均能耗仅为飞机每个座位平均能耗的 $\frac{1}{3}$，是汽车每个座位平均能耗的 70%. 那么，汽车每个座位的平均能耗是飞机每个座位平均能耗的 (　　).

A. $\frac{3}{7}$　　B. $\frac{7}{3}$　　C. $\frac{10}{21}$　　D. $\frac{21}{10}$

练习答案：

1. C.

5. 例 3 结合了物理知识，立足于节能问题，需要转化为一元一次不等式. 在教学中要注意多学科知识的综合应用，从问题的物理意义出发，正确地找到不等关系，列出不等式. 同时可以结合此例题对学生进行节能和环保教育.

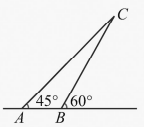
2. 47.3（m）. 提示：作 $CD \perp AB$，垂足为 D. 设气球离地面的高度是 x m，可得

$AD = CD = x$，

$BD = \frac{\sqrt{3}}{3}x$.

所以 $x - \frac{\sqrt{3}}{3}x = 20$.

2. 如图，天空中有一个静止的广告气球 C，从地面上的一点 A 测得点 C 的仰角为 45°，从地面上的另一点 B 测得点 C 的仰角为 60°. 已知 $AB = 20$ m，点 C 和直线 AB 在同一铅垂平面上，求气球离地面的高度（精确到 0.1 m）.



（第 2 题）

在解决实际问题时，怎样先把它转化为数学问题，然后通过对数学问题的解答，来完成对应用问题的解答呢？我们看下面的例题.

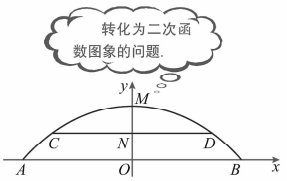
例 4 如图 26－2，一座抛物线形拱桥，已知水位在 AB 位置时，水面宽 9.80 m；水位再上升 3 m 就达到警戒线 CD，这时水面宽 6.92 m. 如果洪水到来时，水位以每小时 0.25 m 的速度上升，求洪水经过警戒线以后几个小时将到达拱桥的洞顶.



图 26－2

分析：由于拱桥为抛物线形，联想利用二次函数图象的知识来解决. 为了便于研究，需要建立适当的平面直角坐标系.

解：以 AB 所在直线为 x 轴，AB 中点为原点，建立平面直角坐标系，则抛物线顶点 M 在 y 轴上，且 A，B 两点的坐标分别为（－4.90，0），（4.90，0），C，D 两点的坐标分别为（－3.46，3），（3.46，3），如图 26－3.



设抛物线的表达式为

$y = ax^2 + k$. ①

把 B，D 两点的坐标（4.90，0），（3.46，3）分别代入①得

$$\begin{cases} 24.01a + k = 0, \\ 11.97a + k = 3. \end{cases}$$

解得 $a \approx -0.25$，$k \approx 6.00$.

∴ 抛物线的表达式为 $y = -0.25x^2 + 6$.

顶点 M 的坐标为（0，6）.

设 CD 与 y 轴交点为 N，则 $ON = 3$.

6. 例 4 结合洪水的警戒线问题设置情境，需要转化为二次函数的表达式和图象的知识来解决. 在教学中要注意依实际问题建立适当的平面直角坐标系. 这是问题转化和计算简便的基础，学生往往对此感觉比较困难. 在确定 A，B，C，D 四个点的坐标时，要渗透数形结合的思想，确定函数的表达式要进一步落实待定系数法.

∵ $OM=6$,

∴ $MN=OM-ON=3$.

$3\div 0.25-12$(h).

答：洪水经过警戒线以后 12 小时将到达拱桥的洞顶.

探索[1]

服装厂有大量形状为等腰直角三角形的边角布料，如图 26－4. 图中∠ $C=90°$, $AC=BC=4$. 现在要从这些布料中剪出扇形，做成不同形状的玩具，且使构成扇形的两条半径恰好都落在△ ABC 的边上，扇形的弧与△ ABC 的其他边相切. 请设计出所有符合要求的方案示意图，并求出扇形的半径.

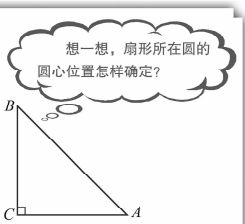


图 26－4

例 5 如图 26－5 所示，边长为 800 m 的正方形 $ABCD$ 是个货场，从 A 处有一条平直铁路通过，与 BC 边交于点 E，$CE=200$ m. 点 D 是货运汽车入口. 现要在铁路线 AE 上修一个卸货站，使得点 D 到卸货站的距离最短，求这个最短距离是多少.

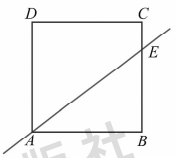


图 26－5

分析：在这个问题中，要求出点 D 到铁路 AE 的最短距离，首先要在图形中作出点 D 到 AE 的最短距离，再寻求计算的方法.

解：作 $DF\perp AE$，垂足为 F，连接 DE，如图 26－6.

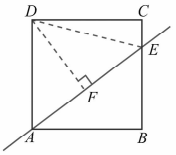


图 26－6

∵ $S_{\triangle ADE}=S_{正方形ABCD}-S_{\triangle ABE}-S_{\triangle DCE}$

$=800^2-\frac{1}{2}\times 800\times 600-\frac{1}{2}\times 800\times 200$

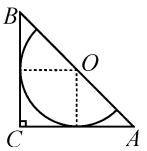
$=320\,000$.

在 Rt△ ABE 中，$AE=\sqrt{800^2+600^2}=1\,000$,

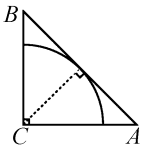
∴ $DF=\frac{2\times 320\,000}{1\,000}=640$.

答：点 D 到卸货站的最短距离是 640 m.

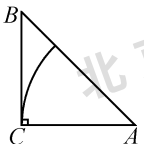
[1] 不同的情况有四种.



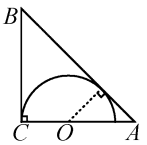
$R_1=2$



$R_2=2\sqrt{2}$



$R_3=4$



$R_4=4\sqrt{2}-4$

7. 例 5 是点到直线的距离最短问题，需要利用“垂线段最短”的概念. 关于△ ADE 面积的计算，除了利用例题的解法外，还可以利用三角形 ADE 的面积等于正方形 $ABCD$ 面积的一半进行计算. 解决了这个问题，还可以提出更高层次的问题，让学有余力的学生在课下解决.

练习答案：

1. C.

2. 24 s.

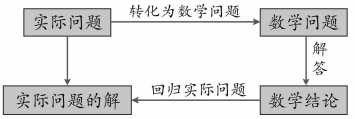
提示：作 $AB \perp MN$，B 为垂足，求得 $AB = 80$ m. 以点 A 为圆心，100 m 为半径画圆，与直线 PN 有两个交点 C，D. 利用勾股定理和垂径定理，求得 $CD = 120$ m.

因为 18 000 m/h = 5 m/s，所以 $t = 120 \div 5 = 24$（s）.

交流

解决实际问题的一般思路是什么？

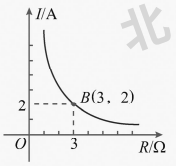
一般地，解决实际问题时都有一个转化的过程．首先分析实际问题，将它转化为相关的数学问题；然后运用相应的数学知识、方法去解答它；再把问题的解答回归到实际问题中进行考察，经过检验得到实际问题的解．这个思路可以用下面的框图来表示：



练习

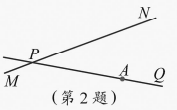
1. 在某闭合电路中，电压为定值，电流 I(A) 与电阻 R(Ω) 成反比例．如图表示的是该电路中电流 I 与电阻 R 之间关系的图象，则用电阻 R 表示电流 I 的函数表达式为（　　）.

A. $I = \frac{2}{R}$　　B. $I = \frac{3}{R}$　　C. $I = \frac{6}{R}$　　D. $I = -\frac{6}{R}$



（第 1 题）

2. 如图，公路 MN 和公路 PQ 在点 P 处交汇，且 $\angle QPN = 30°$，点 A 处有一所中学，$AP = 160$ m．假设拖拉机在公路上行驶时，周围 100 m 以内会受到噪声的影响，那么拖拉机在公路 MN 上沿 PN 方向行驶时，学校是否会受到噪声影响？请说明理由．如果受影响，已知拖拉机的速度为 18 km/h，那么学校受影响的时间为多少？



（第 2 题）

8. 为了引导学生从典型例题出发，参与归纳总结出解决实际问题的一般思路，教材首先安排了一个“交流”的学习活动，通过独立思考，合作交流，训练学生分析、综合、归纳、抽象、概括和语言表述的能力.

对于探究解决实际问题思路的教学，需要进行分解，按理解问题、建立模型、模型求解、回归实际的四个步骤进行讲解，加深学生的认识，使他们学会探究解决实际问题的思路.

习 题 26-1

★基础★

1. 据北京市水务局统计，北京市城区每年可利用的雨水量达 $2.3\times10^{9}\,m^{3}$，相当于 110 个昆明湖的水量，但北京市每年收集利用的雨水却只有 $10^{6}\,m^{3}$，约为 1 个昆明湖水量的(　　).

A. 4.78%　　B. 4.8 倍　　C. 47.8 倍　　D. 2.1×10^{12} 倍

2. 商场在促销活动中，将标价为 200 元的商品在打 8 折的基础上再打 8 折销售，则该商品现在的售价是(　　).

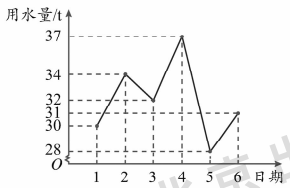
A. 160 元　　B. 128 元　　C. 120 元　　D. 118 元

3. 已知小明同学身高 1.5 m，在太阳光下的地面影长为 2 m. 如果此时测得一塔在同一地面的影长为 60 m，那么此塔的高应为(　　).

A. 90 m　　B. 80 m　　C. 45 m　　D. 40 m

4. 某住宅小区 6 月份 1 日至 6 日每天用水量的变化情况如图所示，那么这 6 天的平均用水量是(　　).

A. 30 t　　B. 31 t　　C. 32 t　　D. 33 t



(第 4 题)

5. 已知甲、乙两种商品原来单价的和为 100 元. 因为市场变化，甲种商品降价 10%，乙种商品提价 5%. 调价以后，甲、乙两种商品单价的和比原来单价的和提高了 2%. 求甲、乙两种商品原来的单价各是多少元.

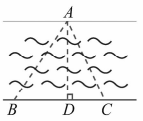
6. 3 月 12 日是植树节，某中学九年级(2)班计划组织部分同学义务植树 180 棵. 由于同学们参与的积极性很高，实际参加植树活动的人数比原计划增加了 50%，结果每人比原计划少栽了 2 棵树. 求实际有多少人参加了这次植树活动.



(第 6 题)

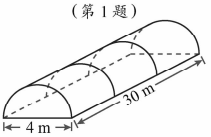
★★提升★★

1. 为了测量某段河面的宽度，王海同学设计了如图所示的测量方案：先在河的北岸选一定点 A，再在河的南岸选定相距 a m 的两点 B，C，分别测得 $\angle ABC=\alpha$，$\angle ACB=\beta$. 请你根据王海同学测得的数据，计算出河宽 AD（结果用含 a 和 α、β 的三角函数表示）.



（第 1 题）

2. 农村常需要搭建截面为半圆形的全封闭蔬菜塑料大棚. 有一种大棚如图所示，如果不考虑塑料薄膜接头重合及埋在土里的部分，那么搭建一个这样的塑料大棚需用塑料薄膜的面积是多少？



（第 2 题）

3. 某学校足球队参加全市足球联赛，在这个赛季中共需要比赛 14 场，现在已经比赛了 8 场，输了一场，得到 17 分. 联赛的记分规则是：胜一场得 3 分，平一场得 1 分，输一场得 0 分. 试求：

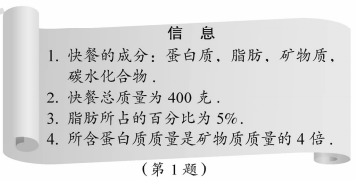
（1）在前 8 场比赛中，该队共胜了多少场；

（2）如果该队打满 14 场比赛，最高能得多少分；

（3）如果预期目标是打满 14 场比赛，得分不低于 29 分，那么在后面的 6 场比赛中，该队至少还要胜几场.

★★★拓展★★★

1. 5 月 20 日是中国学生营养日. 某校社会实践小组在这天开展活动，调查快餐营养情况. 他们从食品安全监督部门获取了一份快餐的信息（如图），根据信息，解答下列问题：



（第 1 题）

（1）这份快餐中所含的脂肪质量；

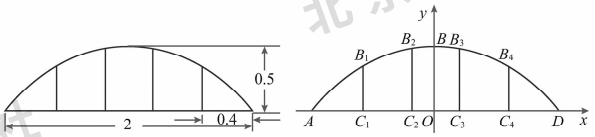
（2）如果碳水化合物占快餐总质量的 40%，求这份快餐所含蛋白质的质量；

（3）如果这份快餐中蛋白质和碳水化合物所占百分比的和不高于 85%，求其中所含碳水化合物质量的最大值.

2. 某公园草坪的护栏是由 50 段形状相同的抛物线形组成的，为牢固起见，每段护栏需按间距 0.4 m 加设不锈钢管立柱. 利用如图所示数据及坐标系（单位：m），求：

（1）该抛物线的表达式；

（2）所需不锈钢管立柱的总长度.



（第 2 题）

26.2 应用举例

生活和生产中的数学应用问题，背景往往比较复杂，数学关系比较隐蔽．因此需要认真阅读问题，抓住问题中的关键词语，理解题意，收集、分析、处理数据，联系有关的数学知识，把握其中的数、形关系，将其转化为相应的数学问题．比如转化为方程、不等式、函数、几何图形和统计概率等数学问题．

例 1 为了保护环境，某企业决定购买 10 台污水处理设备．现有 A，B 两种型号的污水处理设备，且它们的单价分别为 15 万元和 12 万元，又知该企业购买污水处理设备的预算资金不超过 130 万元．

(1) 请你设计出该企业的购买方案．

(2) 已知每台 A，B 型设备一个月处理的污水量分别为 250 吨，220 吨．如果该企业每月产生的污水量为 2 260 吨，为了尽可能节省资金，应选择哪种购买方案？

分析：由企业购买设备的资金有限，联想到需要转化为不等式的问题；要选择尽可能节省资金的方案，需要少购买价格较高的型号设备且使购买的两种设备处理污水的能力能满足企业处理污水的要求．

解：(1) 设购买 A 型设备 x 台，则购买 B 型设备 $(10-x)$ 台．根据题意，得

$$15x+12(10-x)\leqslant 130.$$

解不等式，得 $x\leqslant \frac{10}{3}$．

∵ x 为非负整数，

∴ x 只能取 1，2，3，0，相应的 $(10-x)$ 的值为 9，8，7，10.

∴ 该企业有四种购买方案．

方案一：购买 A 型设备 1 台，B 型设备 9 台；

26.2 节的教学，是要通过六个典型例题，引导学生用解决数学应用问题的一般思路去解决实际问题，从而加深对解决数学应用问题的一般思路的认识，提高分析问题和解决问题的能力．这六个例题注意了知识的覆盖面，对学生基础知识和能力提出了比较高的要求．

1．例 1 是一个经济生活中的方案选择问题，需要转化为一元一次不等式．教学时要注意引导学生弄清企业购买污水处理设备的制约条件，即“预算资金不超过 130 万元，企业每月产生污水 2 260 吨，尽可能地节省资金”，从而找到用一元一次不等式解决问题的方法．教学时要注意引导学生对知识的综合运用．

方案二：购买 A 型设备 2 台，B 型设备 8 台；
方案三：购买 A 型设备 3 台，B 型设备 7 台；
方案四：只购买 B 型设备 10 台.

(2) 设购买 A 型设备 x 台，则购买 B 型 $(10-x)$ 台. 根据题意，得

$$250x+220(10-x)\geqslant 2\,260.$$

解不等式，得 $x\geqslant 2$.

由 (1) 知，$x\leqslant \frac{10}{3}$，且 x 为非负整数，

∴ x 只能取 2，3，相应的 $(10-x)$ 的值为 8，7.

当 $x=2$ 时，购买资金为：$15\times 2+12\times 8=126$ (万元).

当 $x=3$ 时，购买资金为：$15\times 3+12\times 7=129$ (万元).

∴ 选择方案二，即购买 A 型设备 2 台，B 型设备 8 台，可节省资金.

可以看到，在由数学问题回归到实际问题时，数学问题的解答不一定完全符合实际意义，所以还要根据应用问题的实际意义，确定正确的答案.

例 2 为了避免浪费水的现象，某城市计划出台阶梯水价政策，以家庭为单位分月计算：基本用水量 12 m^3 以下为第一级，水价为每立方米 3.7 元；12 m^3 到 16 m^3 为第二级，水价为第一级的 2 倍；16 m^3 以上为第三级，将按第一级水价的 5 倍收费.

不同等级的用水量，水价是不相同的.

(1) 按阶梯水价计算以下各家庭 4 月份应缴的水费，并填入下表：

	4 月份总用水量 /m^3	水费 / 元
小刚家	8	
小丽家	11	
小平家	14	
小华家	26	

(2) 设一户家庭某月用水量为 x m^3，按阶梯水价，试写出该户此月应缴水费 y(元) 与用水量 x(m^3) 之间的函数关系式，并画出图象；

(3) 如果 5 月份小平家缴了 92.5 元的水费，小刚家缴了 40.7 元的水费，问这两家 5 月份的用水量各是多少.

解：(1) 略 (请自己完成填表).

(2) 该户此月应缴水费 y(元) 与用水量 x(m^3) 之间的函数关系式是

2. 例 2 是一个解决生活中的节约用水问题，需要转化为分段函数，利用函数的图象来解决. 分段函数学生以前虽有接触，但对于这种表示方法还是第一次见到，需要教师讲授. 另外，计算水费是一个生活中的数学问题，要通过例题中的计算以及例题后的“探索”等，培养学生的节水意识，提高学生的数学应用能力.

$$y=\begin{cases}3.7x,\ (0\leqslant x\leqslant 12)\\ 3.7\times 12+3.7\times 2\times(x-12),\ (12<x\leqslant 16)\\ 3.7\times 12+3.7\times 2\times 4+3.7\times 5\times(x-16).\ (x>16)\end{cases}$$

函数图象如图 26－7 所示．

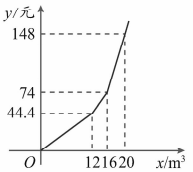


图 26－7

（3）设小平家 5 月份用水 x_1 m³，因为缴水费 92.5 元，由图象可知，$x_1>16$.

所以　$92.5=3.7\times 12+3.7\times 2\times 4+3.7\times 5\times(x_1-16)$.

解得　$x_1=17$.

设小刚家 5 月份用水 x_2 m³，因为缴水费 40.7 元，由图象可知，$x_2<12$，

所以　$40.7=3.7\times x_2$.

解得　$x_2=11$.

答：5 月份小平家的用水量是 17 m³，小刚家的用水量是 11 m³.

探索

根据例 2 的资料，请你设计一个月用水量与水费之间的关系对应表，供收水费的工作人员使用．

练习

1. 如图是某商品价格标签的一部分，那么它的原价是（　　）．

A. 25 元　　B. 24 元　　C. 26 元　　D. 27 元



（第 1 题）

2. 王明同学节日到商场购物．商场开展购物返券促销活动，规定“满 100，送 50”，即购物满 100 元，赠送 50 元购物券．王明同学想，如果正好消费 100 元，50 元购物券也用完，相当于几折优惠？如果消费 199 元，还是赠送 50 元购物券，相当于几折优惠？你能帮助他解决这些问题吗？

练习答案：

1. A.

2. 约 6.7 折，约 8 折.

提示：利用返券的计算公式：折扣 $=\dfrac{\text{实际消费金额}}{\text{实际消费金额}+\text{返券金额}}$.

数学的应用需要根据实际问题，联系有关的数学知识，完成由实际问题向数学问题的转化．在应用的过程中既要善于联想，必要时还需要动手操作，灵活运用所学知识．

例 3 已知：如图 26－8，C 城市在 B 城市的正北方向，两城市相距 100 km．计划在两城市间修筑一条高速公路（即线段 BC）．经测量，森林保护区 A 既在 B 城市的北偏东 40° 的方向上，又在 C 城市的南偏东 56° 的方向上．已知森林保护区 A 的范围是以 A 为圆心，半径为 50 km 的圆形区域．计划修筑的这条高速公路会不会穿越保护区？为什么？

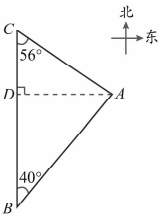


图 26－8

分析：本题是一个涉及环保的应用问题，需要我们把实际问题抽象为三角形中的数量关系，转化为解直角三角形的数学问题．

解：过点 A 作 $AD \perp BC$，垂足为 D，如图 26－8．

转化为三角函数的数学问题．

在 Rt $\triangle ADC$ 中，$CD = \dfrac{AD}{\tan 56°}$．

在 Rt $\triangle ADB$ 中，$BD = \dfrac{AD}{\tan 40°}$．

根据题意，$CD + DB = CB = 100$，得

$$\frac{AD}{\tan 56°} + \frac{AD}{\tan 40°} = 100,$$

$$\therefore \quad AD = \frac{100 \cdot \tan 56° \cdot \tan 40°}{\tan 56° + \tan 40°} \approx 53.58.$$

$\therefore$ $AD > 50$.

答：计划修筑的这条高速公路不会穿越森林保护区．

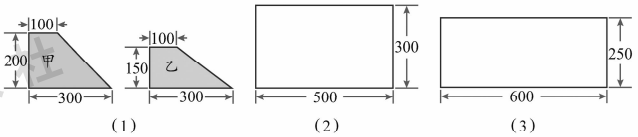
例 4 要剪切如图 26－9(1) 所示的甲、乙两种直角梯形零件（单位：mm），且使两种零件数量相等．有两种面积相等的矩形铝板可供选用，第一种长 500 mm，宽 300 mm [图 26－9(2)]；第二种长 600 mm，宽 250 mm [图 26－9(3)].

(1) 为了充分利用材料，应当选用第几种铝板？这时一块铝板最多能剪甲、乙两种零件共多少个？剪下零件以后，剩余的边角料面积是多少？

3. 例 3 是一个结合环保的应用问题，需要转化为三角函数的数学知识来解决．在这个问题中，所给的角度联系实际，不是特殊角，需要引导学生利用计算器进行计算．

4. 例 4 是一个几何下料问题，需要的基础知识比较简单，但所给问题条件和解法都比较开放，需要引导学生动手操作、开展实验、探索问题的解决办法．

(2) 按你设计的剪切方案，画出示意图，并把边角余料用斜线表示出来.



(1) (2) (3)

图 26－9

分析：按照条件选择铝板，要动手操作，摆一摆、画一画、拼一拼，关键要打破直角梯形常规的摆放方法，灵活地去拼接，寻找最佳的剪切方案.

解：(1) 应选用第一种铝板，可剪甲、乙两种零件共 4 个.

$\because \quad 300\times500-2\left[\frac{1}{2}(100+300)\times200+\frac{1}{2}(100+300)\times150\right]$

$=150\,000-140\,000=10\,000,$

$\therefore$ 剩余的边角料面积是 $10\,000\ \text{mm}^2$.

(2) 画出的图形如图 26－10 所示.

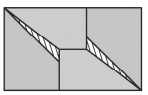


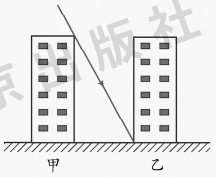
图 26－10

练习

根据国家有关规定，高层建筑物之间要留有一定的距离. 已知甲、乙两楼在同一平面内的位置如图所示，甲楼高 33 m，上午太阳光线与地面的最小夹角为 60°.

(1) 为保证乙楼能受到阳光照射，甲、乙两楼间的距离至少应为多少?

(2) 如果甲、乙两楼之间的实际距离只有 15.6 m，那么乙楼的哪个部分上午有时不能享受阳光?



在解决数学应用问题时，往往要综合应用相关的数学知识.

练习答案：

(1) 约为 19 m；

(2) 乙楼最下面6 m不能整个上午享受阳光.

[1] 解法一：拉出卷纸直接度量.

解法二：$20\pi + 19.96\pi + 19.92\pi + \cdots + 10.04\pi = (20 + 19.96 + 19.92 + \cdots + 10.04)\pi = 3\,755\pi \approx 11\,790.7\,(\text{cm}) \approx 118\,(\text{m})$.

解法三：圆环面积为 $100\pi - 25\pi = 75\pi$.

设纸长为 x cm.

$75\pi = 0.02x$，

$x = 3\,750\pi$，

$x \approx 11\,775\ (\text{cm}) \approx 118\ (\text{m})$.

交流 [1]

如图 26－11(单位：cm)，将厚度为 0.02 cm 的卷筒纸，在直径为 10 cm 的卷筒上卷成直径为 20 cm 的纸卷. 怎样求出卷纸的总长度？请你找出最优的计算方法.

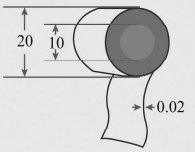


图 26－11

例 5 在一次科技知识竞赛活动中，两组同学的成绩统计如下：

成绩 / 分	50	60	70	80	90	100
甲组人数 / 人	2	5	10	13	14	6
乙组人数 / 人	4	4	16	2	12	12

根据这些统计数据，试从不同的角度分析哪组同学的成绩更好一些.

分析：通过观察、分析数据，可以联想到用统计中的平均数、中位数、方差等知识去解决.

解：(1) 甲、乙两组成绩的中位数、平均数都是 80 分. 甲组成绩在 80 分(含 80 分)以上的有 33 人，乙组成绩在 80 分(含 80 分)以上的有 26 人，从这一角度看，甲组的成绩总体较好.

(2) $s_{甲}^2 = \frac{1}{2+5+10+13+14+6}[2(50-80)^2 + 5(60-80)^2 + 10(70-80)^2 + 13(80-80)^2 + 14(90-80)^2 + 6(100-80)^2]$

$= \frac{1}{50}(2\times 900 + 5\times 400 + 10\times 100 + 13\times 0 + 14\times 100 + 6\times 400)$

$= 172.$

$s_{乙}^2 = \frac{1}{50}(4\times 900 + 4\times 400 + 16\times 100 + 2\times 0 + 12\times 100 + 12\times 400)$

$= 256.$

$\because\ s_{甲}^2 < s_{乙}^2$,

$\therefore$ 甲组成绩比乙组成绩波动要小，从这一角度看，甲组的成绩较好.

(3) 从成绩统计表看，甲组成绩在 90 分(含 90 分)以上的人数为 14 + 6 =

5. 例 5 是一个统计知识的综合应用，问题设计开放，需要学生比较熟练地掌握有关统计的基础知识. 在教学中，需要引导学生复习有关统计的基础知识.

20(人)，乙组成绩在90分(含90分)以上的人数为12 + 12 = 24(人)，乙组成绩集中在高分段的人数多，同时乙组得满分的人数比甲组多6人，从这一角度看，乙组的成绩较好.

例6 某市要在一块地上(图26－12中的矩形$ABCD$)规划建造一个矩形街心花园$GHCK$，为了使文物保护区$\triangle AEF$不被破坏，矩形街心花园的顶点G不能在文物保护区内. 已知AB－200 m，AD－160 m，AE－60 m，AF－40 m. 求：

(1) 当矩形街心花园的顶点G恰是EF的中点时，花园的面积；

(2) 当点G在EF上的什么位置时，花园的面积最大.

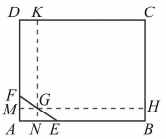


图26－12

分析：当点G为EF的中点时，求矩形$GHCK$的面积，实际上已经转化成为一个数学问题. 由三角形中位线的性质，易求MG，NG的长，从而计算出花园的面积. 对于第(2)问，由于随着点G在EF上的变动，矩形花园$GHCK$的面积也在不断地变化，因此，要求何时花园的面积最大，就联想到要将其转化为函数问题. 可以利用计算机或图形计算器探究，如图26－13.



图26－13

解：如图26－12，延长HG，KG分别交AD，AB于点M，N.

(1) 当点G是EF的中点时，由三角形中位线定理，得

$$MG = \frac{1}{2}AE = 30,\quad GN = \frac{1}{2}AF = 20.$$

$$\therefore\ S_{矩形\,GHCK} = HG \cdot KG$$
$$= (200 - 30)(160 - 20)$$
$$= 23\,800(\mathrm{m}^2).$$

(2) 设$MG = x$，则$HG = 200 - x$.

$\because$ $MG \parallel AE$，

6. 例6是一个几何图形中的“最值”问题，由于图形是运动变化的，需要综合应用几何与函数的知识，综合性比较强，学生可能会感到比较困难. 在教学中，可以应用课件进行动态演示，帮助学生理解题意.

练习答案：

（1）平均数为 320，中位数为 210，众数为 210.

（2）不合理．320 虽然是这组数的平均数，却不能反映营销人员的一般水平，因为 15 人中有 13 人达不到 320 件．营销额定为 210 件比较合适，因为它既是中位数又是众数，大部分人可以达到.

$\therefore\ \triangle FMG \backsim \triangle FAE.$

$\therefore\ \dfrac{FM}{FA}=\dfrac{MG}{AE}.$

$$FM=\frac{FA\cdot MG}{AE}=\frac{40x}{60}=\frac{2}{3}x.$$

$$MA=FA-FM$$

$$=40-\frac{2}{3}x\ (0\leqslant x\leqslant 60).$$

$\therefore\ S_{矩形\,GHCK}=HG\cdot KG$

$$=(200-x)\left[160-\left(40-\frac{2}{3}x\right)\right]$$

$$=-\frac{2}{3}x^2+\frac{40}{3}x+24\,000$$

$$=-\frac{2}{3}(x-10)^2+\frac{72\,200}{3}.$$

$\therefore$ 当 $x=10$（m）时，$S_{矩形\,GHCK}$ 最大．

此时 $\dfrac{FG}{FE}=\dfrac{MG}{AE}=\dfrac{10}{60}=\dfrac{1}{6}$，即 $FG:GE=1:5.$

答：当点 G 恰是 EF 的中点时，花园的面积为 23 800 m²；当点 G 的位置在 EF 上，且满足 $FG:GE=1:5$ 时，花园的面积最大．

练习

某公司销售部有营销人员 15 人，销售部为了制订某种商品的月销售定额，统计了这 15 人某月的销售量如下：

每人销售量／件	1 800	510	250	210	150	120
人数／人	1	1	3	5	3	2

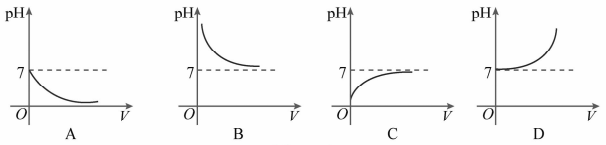
（1）求这 15 位营销人员该月销售量的平均数、中位数和众数．

（2）假设销售部负责人把每位销售员的月销售量定为 320 件，你认为是否合理？如不合理，请你制订一个比较合理的销售定额，并说明理由．

习 题 26－2

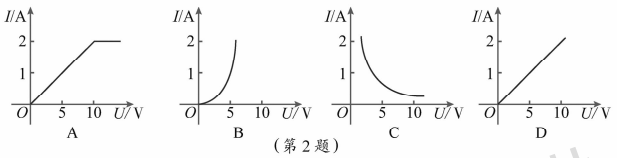
★基础★

1. 我们知道，溶液的酸碱度由 pH 确定．当 pH > 7 时，溶液呈碱性；当 pH < 7 时，溶液呈酸性．如果将给定的 HCl 溶液加水稀释，那么在下列图象中，能反映 HCl 溶液的 pH 与所加水的体积 V 的变化关系的是(　　).



(第 1 题)

2. 如果一定值电阻 R 两端所加电压为 5 V 时，通过它的电流为 1 A，那么通过这一电阻的电流 I 随它两端电压 U 变化的图象是(　　).



(第 2 题)

3. 如图，要把角钢(1)变成 120° 的钢架(2)，则在角钢(1)上截去的缺口的度数是_____.



(1)　　(2)

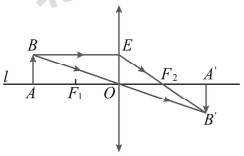
(第 3 题)



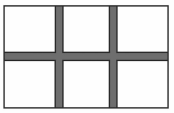
(第 4 题)

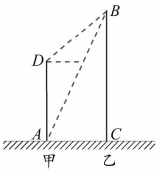
4. 要把北京 2008 年奥运会的 5 个吉祥物“福娃”放在展台上，有 2 个位置已定(如图)，其他 3 个“福娃”在各种不同位置放置的情况下，“迎迎”和“贝贝”的位置不相邻这一事件发生的概率为_____.

5. 如图，是凸透镜成像的光路图．已知 $AB \perp l$, $A'B' \perp l$, $EO \perp l$, 它们的垂足分别是 A, A', O. $BE \parallel l$, $AF_1 = F_1O = f = OF_2$(f 为凸透镜的焦距)．利用数学知识证明：$A'B' = AB$.



（第 5 题）


（第 6 题）

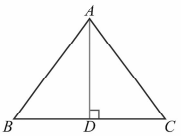


（第 7 题）

6. 如图，在宽为 20 m、长为 32 m 的矩形耕地上，修筑同样宽的三条道路（两条纵向，一条横向；横向与纵向互相垂直），把耕地分成大小相等的六块试验田．要使试验田面积为 570 m^2，请问道路应为多宽？
7. 如图，有甲、乙两楼，甲楼高 AD 是 23 m，现在想测乙楼的高度 CB．某人在甲楼的楼底 A 和楼顶 D 分别测得乙楼的楼顶 B 的仰角为 65°13′ 和 40°．请利用这些数据求乙楼的高度（精确到 0.01 m）．

★★提升★★

1. 某同学在 A，B 两家超市发现他看中的随身听的单价相同，书包单价也相同．随身听和书包的单价之和是 452 元，且随身听的单价比书包单价的 4 倍少 8 元．
   （1）该同学看中的随身听和书包的单价各是多少元？
   （2）某一天该同学上街，恰好赶上商家促销，超市 A 所有商品打 8 折销售，超市 B 全场购物满 100 元返购物券 30 元（不足 100 元不返券，购物券全场通用）．但他只带了 400 元钱，如果他只在一家超市购买这两样物品，请问在哪一家购买更省钱？
2. 在生产中，为了节约原材料，加工某些零件时经常利用一些边角废料．如图，△ABC 为锐角三角形废料板，其中 BC = 12 cm，BC 边上的高 AD = 8 cm．在△ABC 上截取矩形 $PQMN$，使 QM 边与 BC 边重合，请画草图说明 P，N 两点落在什么位置上，才可能使它的面积最大？求出它的最大值，并求出此时矩形的长和宽．



（第 2 题）

3. 某班共有 50 名学生，老师安排每人制作一件 A 型或 B 型的陶艺品．学校现有甲种制作材料 36 kg，乙种制作材料 29 kg．制作一件陶艺品的用料情况如下表：

陶艺品类型	所需的甲种材料 /kg	所需的乙种材料 /kg
A　型	0.9	0.3
B　型	0.4	1

(1) 设制作B型陶艺品 x 件，求 x 的取值范围；

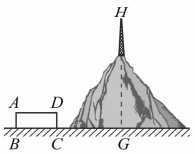
(2) 请你根据学校现有材料，分别写出这个班制作A型和B型陶艺品的件数.

★★★ 拓展 ★★★

如图，山顶有一座铁塔，山脚下有一个矩形建筑物 $ABCD$，且建筑物周围没有开阔平整地带. 该建筑物顶端宽度 AD 和高度 DC 都可以直接测得，从 A，D，C 三点可看到塔顶端 H. 可供使用的测量工具有皮尺、测角器.

(1) 请你根据现有条件，充分利用矩形建筑物，设计一个测量塔顶端到地面高度的方案. 具体要求如下：测量数据尽可能少；在所给图形上，画出你设计的测量平面图，并将应测数据标记在图形上.

(2) 根据你上述标记的数据，计算塔顶端到地面的高度 HG.



综合与实践

复印纸和包装箱中的数学问题

1. 在复印资料的过程中，同学们发现复印纸的尺寸规格如下表(单位：mm)：

型　号	A1	A2	A3	A4	A5	A6
尺　寸	841×594	594×420	420×297	297×210	210×148	148×105

试研究各种型号纸张之间、每种型号纸张的长与宽之间存在什么关系，想一想这样规定的实际意义是什么.

2. 某厂生产长方体形状的肥皂，它的长、宽、高分别是10 cm，7 cm，3 cm. 请你为这个肥皂厂设计一种符合下列要求的包装箱，并使包装箱所用材料最少(只计算包装箱的表面积).

(1) 包装箱是一个长方体；

(2) 肥皂装箱时，以相同面积的面相对接；

(3) 一箱肥皂为30块，装上肥皂后不留空隙.

7. “综合与实践”的教学，可以结合学生实际，从中选择一个或两个问题. (1) 一般地，每下一个型号的长都和上一个型号的宽相等，每下一个型号的宽都是上一型号的长的一半，所以每下一个型号的面积都是上一个型号面积的一半，只需在上一型号纸的长边中间切上一刀，就得到两张下一个型号的纸. 这给复印纸的生产带来方便. 可以发现，矩形纸的形状是相似的，矩形纸长和宽的比近似为$\sqrt{2}$.

比如：$\frac{594}{420}\approx1.414\cdots$，$\frac{420}{297}\approx1.414\cdots$，$\frac{297}{210}\approx1.414\cdots$. 这是由于，若设任意一种型号矩形纸的长和宽是 a 和 b，那么$\frac{a}{b}=\frac{b}{\frac{a}{2}}$，所以$\frac{a^2}{b^2}=2$，得$\frac{a}{b}=\sqrt{2}$.

阅读理解

哥尼斯堡七桥问题

18世纪，在东普鲁士的哥尼斯堡，有一条普莱格尔河从城中穿过，河中的两个小岛与两岸由七座小桥相连，如图26－14所示．当地居民有一个传统，在假日里沿着小岛与河岸散步．他们试图找到一条这样的路线：一个人一次走遍七座桥，每座桥只能走过一次，最后仍能回到出发点．虽然，大多数人都把它当成有趣的娱乐，但是一直也未能解决这个问题，这就是有名的七桥问题．这个问题引起了当时著名的瑞士数学家欧拉的注意．

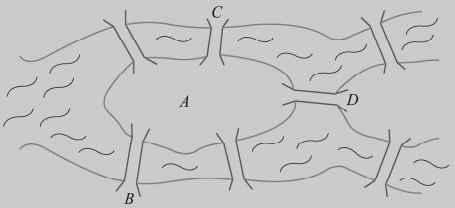


图26－14

欧拉为了解决这个问题，他并没有亲自去哥尼斯堡，而是把这个问题作了数学化的处理：他把两岸和小岛都抽象成点，把桥看做连接两点的线，这样著名的七桥问题便转化为能否用一支笔不离开纸而一笔画出图26－15的问题了．若可以画出来，则图形中必有起点和终点，并且起点和终点应该是同一点．欧拉对这个问题进行了一般性的研究，发现了一笔画的规律．他认为，能一笔画的图形首先必须是连通图（简单地说，如果一个图中，任两个顶点之间都

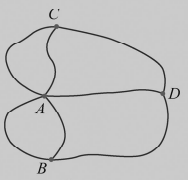


图26－15

（2）要使包装箱所用材料最少，肥皂互相对接的面要尽可能最大．

$30=1\times30=2\times15=3\times10=5\times6=2\times3\times5$.

①以$30=1\times30$，即30块放成一排时，对接面宜取10×7，这时总的表面积为：

$2\times(10\times7+10\times3\times30+7\times3\times30)=3\ 200\ (\mathrm{cm}^2)$；

②以$30=2\times15$，即30块放成长15块，宽2块时，对接面宜取10×7和10×3，总的表面积为：

$2\times(10\times7\times2+7\times3\times2\times15+10\times3\times15)=2\ 440\ (\mathrm{cm}^2)$；

③以$30=3\times10$，即30块放成长10块，宽3块时，对接面宜取10×7和10×3，总的表面积为：

$2\times(10\times7\times3+7\times3\times3\times10+10\times3\times10)=2\ 280\ (\mathrm{cm}^2)$；

有连接它们的线，那么这样的图便可称为连通图）.连通图中，与奇数条线相连的顶点叫做奇点，与偶数条线相连的顶点叫做偶点．七桥问题中的图就是连通图，其中的点 A，B，C，D 都是奇点．但是，不是所有的连通图都可以一笔画的，能否一笔画是由图中的奇、偶点的数目决定的：

（1）凡是只有两个奇点的连通图（其余都为偶点），一定可以一笔画成．画时必须把一个奇点作为起点，另一个奇点作为终点．例如图 26－16 的线路可以是：$A\to B\to C\to A\to D\to C$.

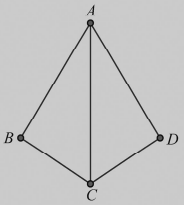


图 26－16

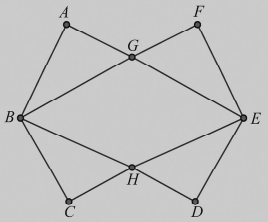


图 26－17

（2）凡是由偶点组成的连通图，一定可以一笔画成．画时可以把任一偶点作为起点，最后一定能以这个点为终点画完此图．例如图 26－17 中的各点都是偶点，画的线路可以是：$A\to B\to C\to H\to E\to G\to B\to H\to D\to E\to F\to G\to A$.

（3）其他情况的连通图都不能一笔画出．

把上面所说的归纳起来，就是一个连通图若能一笔画出，有且只有两种情况：一种是所有的点都是偶点，另一种是只有两个奇点．

在七桥问题中，由于奇点的个数是 4，所以它不能一笔画出，从而解决了这个问题．后来欧拉利用解决这个问题的思路和方法，继续开展深入的研究，他也因此而成为新的数学分支——“图论”的先驱．

④以 $30=5\times6$，即 30 块放成长 6 块，宽 5 块时，对接面宜取 10×7 和 10×3，总的表面积为：

$2\times(10\times7\times5+7\times3\times5\times6+10\times3\times6)=2\,320\ (\mathrm{cm}^2)$；

⑤以 $30=2\times3\times5$，即 30 块放成长 5 块、宽 3 块、高 2 块时，对接面宜取 10×7、10×3 和 7×3，总的表面积为：

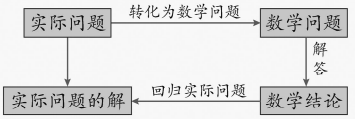
$2\times(10\times7\times2\times3+7\times3\times3\times5+10\times3\times2\times5)=2\,070\ (\mathrm{cm}^2)$.

所以，当 30 块肥皂放成⑤的样式时，包装箱所用材料最少.

回顾与整理

知识要点

本章主要学习了综合运用数学知识解决实际问题．一般地，解决实际问题有一个转化的过程，首先分析实际问题，将它转化为相应的数学问题，然后运用数学知识和方法来解答它，再把数学结论回归到实际问题中去检验，以确定实际问题的解答．这个思路用框图表示如下：



学习指导

1. 学习数学重在应用，要注意数学与生活、生产实际及其相关学科知识间的相互联系，发现其中的数学问题，运用所学知识去解决，努力培养应用数学的意识．

2. 在解决实际问题时，首先要认真分析问题，注意收集、处理信息，透彻理解题意，然后联想相关的数学知识，通过抽象、概括，向数学问题转化．实际问题往往背景复杂，文字叙述较长，需要认真阅读，抓住关键词语，正确理解题意，认清事物之间的联系，找到解决问题的关键．

3. 在实际问题转化为数学问题以后，要运用所掌握的数学知识、技能和方法，完成对数学问题的解答．有时数学问题的解答并不一定符合问题的实际意义，这时就要针对问题的实际，对解答进行分析、选择，得到实际问题的正确答案．实际问题往往带有更强的综合性，解决它们需要具备扎实的数学基础知识和基本技能、较高的分析问题与解决问题的能力及勇于探索的精神．

“回顾与整理”的教学，需要围绕综合运用数学知识解决实际问题的一般思路，引导学生进一步掌握思路的形成过程，分解其中的各个环节，初步学会运用这个思路去解决一些简单的实际问题，同时培养应用意识和分析问题与解决问题的能力．在总结时需要尽量让学生自主参与、积极思维，通过独立思考和合作交流完成总结过程.

复 习 题

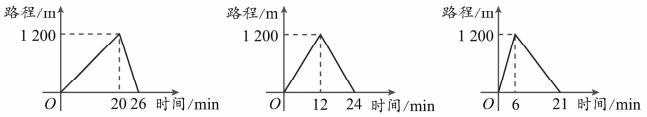
★基础★

1. 甲对乙说："你任意想一个数，把这个数乘 2，结果加上 8，再除以 2，最后减去所想的数，此时我就知道结果．"请你解释甲为什么能知道结果．

2. 某人到瓷砖商店去购买一种多边形形状的瓷砖，用来密铺地面，他购买的瓷砖形状不可以是(　　).

A. 正三角形　　B. 矩形　　C. 正八边形　　D. 正六边形

3. 小明、爸爸、爷爷同时从家里出发到达同一目的地后立即返回．小明去时骑自行车，返回时步行；爷爷去时步行，返回时骑自行车；爸爸往返都是步行．三个人步行的速度不等，小明和爷爷骑自行车的速度相等，每个人的行走路程与时间的关系是下面三个图象中的一个．请问完成一次往返，小明、爸爸、爷爷各用多少分钟?



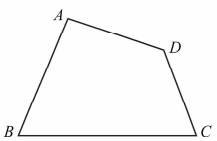
(1)　　(2)　　(3)

(第 3 题)

4. 用白铁皮做罐头盒，每张铁皮可以制作盒身 16 个或盒底 43 个，一个盒身与两个盒底配成一套罐头盒．现有 150 张白铁皮，用几张制盒身、几张制盒底，可以正好制成整套的罐头盒?

5. 华氏温度和摄氏温度之间满足关系 $y = ax + b$，其中 x 表示摄氏温度，y 表示华氏温度．已知标准大气压下水的冰点为 0 ℃或 32 °F，沸点为 100 ℃或 212 °F．试确定 y 和 x 的函数关系，并分别求出当摄氏温度分别为 -40 ℃，30 ℃时，相应的华氏温度是多少．

6. 草原上的四口油井，位于四边形 $ABCD$ 的 4 个顶点，如图所示．现在要建立一个维修站 H，试问 H 建在何处，才能使它到四口油井的距离之和 $HA + HB + HC + HD$ 为最小?并说明理由．



(第 6 题)

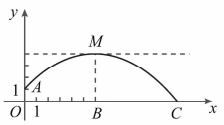
★★提升★★

1. 为了加快教学手段的现代化，某中学计划购置一批电脑．已知甲公司的报价为每台 5 800 元，优惠条件是购买 10 台以上，则从第 11 台开始，可按报价的 70% 付款；乙公司的报价也是每台 5 800 元，但优惠条件是每台均按报价的 85% 付款．假如你是学校负责人，在电脑品牌、质量、售后服务等完全相同的前提下，你如何选择？请说明理由．

2. 如图，足球场上守门员在 O 处开出一高球，球从离地面 1 米的 A 处飞出（A 在 y 轴上），运动员甲在距 O 点 6 米的 B 处发现球在自己头的正上方达到最高点 M，距地面约 4 米高．

（1）求足球开始飞出到落地时，该抛物线的表达式．

（2）足球落地点 C 距守门员大约多少米？



（第 2 题）

3. 张强到某水果批发市场进货，市场中香蕉的价格如下表：

购买香蕉的质量 /kg	不超过 20	20 以上，但不超过 40	40 以上
每千克价格 / 元	6	5	4

张强两次共购买香蕉 50 kg(第二次多于第一次)，共付出 264 元．请问张强第一次、第二次分别购买香蕉多少千克?

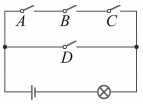
4. 某市的 A 县和 B 县春季育苗，急需化肥分别为 90 吨和 60 吨，该市的 C 县和 D 县分别储存化肥 100 吨和 50 吨．全部调配给 A 县和 B 县．已知 C，D 两县运化肥到 A、B 两县的运费（元 / 吨）如下表示：

运费 出发地 / 目的地	C	D
A	35	40
B	30	45

（1）设 C 县运到 A 县的化肥为 x 吨，求总运费 W（元）与 x（吨）的函数关系式，并写出自变量 x 的取值范围；

（2）求最低总运费，并说明总运费最低时的运送方案．

5. 如图，电路图上有四个开关 A，B，C，D 和一个小灯泡，各元器件均能正常工作．



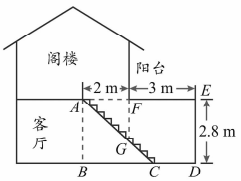
（第 5 题）

（1）任意闭合其中一个开关，则小灯泡发光的概率等于多少？

（2）任意闭合其中两个开关，请用画树状图或列表的方法求出小灯泡发光的概率．

★★★ 拓展 ★★★

1. 李老师要装修带阁楼的新居（如图所示为新居剖面图），在建造客厅到阁楼的楼梯 AC 时，为避免上楼时墙角 F 碰头，设计墙角 F 到楼梯的竖直距离 FG 为 1.75 m．他量得客厅高 $AB = 2.8$ m，楼梯洞口宽 $AF = 2$ m，阁楼阳台宽 $EF = 3$ m．请你帮助李老师解决下列问题：



（第 1 题）

（1）要使墙角 F 到楼梯的竖直距离 FG 为 1.75 m，楼梯底端 C 到墙角 D 的距离 CD 是多少米？

（2）在（1）的条件下，为保证上楼时的舒适性，楼梯的每个台阶的高要小于 20 cm，每个台阶的宽要大于 20 cm，问楼梯应该设计多少个台阶？

2. 某电脑公司现有 A，B，C 三种型号的甲品牌电脑和 D，E 两种型号的乙品牌电脑．某中学要从甲、乙两种品牌电脑中各选购一种型号的电脑．

（1）写出所有选购方案（利用树状图或列表方法表示）；

（2）如果（1）中各种选购方案被选中的可能性相同，那么 A 型电脑被选中的概率是多少？

（3）现知该中学购买甲、乙两种品牌电脑共 36 台（价格如图所示），恰好用了 10 万元人民币，其中选购的甲品牌电脑为 A 型电脑，求购买的 A 型电脑有几台．



（第 2 题）

部分习题答案或提示

习题 26－1

基础

1. A.

2. B.

3. C.

4. C.

5. 甲种商品单价为 20 元，乙种商品单价为 80 元.

6. 实际有 45 人参加了植树活动. 提示：设原计划有 x 人参加植树活动，则实际有 $1.5x$ 人参加植树活动. 由题意得 $\frac{180}{x}-\frac{180}{1.5x}=2$. 解得 $x=30$，$1.5x=45$.

提升

1. 解法：

$\because \quad \tan\alpha=\frac{AD}{BD}$，$\therefore \quad BD=\frac{AD}{\tan\alpha}$. 同理 $CD=\frac{AD}{\tan\beta}$.

$\therefore \quad \frac{AD}{\tan\alpha}+\frac{AD}{\tan\beta}=a$.

$\therefore \quad AD=\frac{a\cdot\tan\alpha\cdot\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}$（m）.

2. $64\pi\ \text{m}^2$.

3. （1）在前 8 场比赛中，校队共胜了 5 场. 提示：设这个球队胜 x 场，则平了（$8-1-x$）场. 根据题意，得 $3x+(8-1-x)=17$. 解得 $x=5$.

（2）打满 14 场比赛，最高能得到 35 分. 提示：打满 14 场比赛，最高能得到 $17+(14-8)\times3=35$（分）.

（3）在以后的比赛中，这个球队至少要胜 3 场. 提示：由题意知，以后的 6 场比赛中，只要得分不低于 12 分即可. 所以，胜 4 场以上，一定能达到预期目标；而胜 3 场，平 3 场，正好达到预期目标.

拓展

1. （1）$400\times5\%=20$（克）.

（2）176 克. 提示：设所含矿物质的质量为 x 克.

根据题意，得 $x+4x+20+400\times40\%=400$. 解得 $x=44$，$4x=176$.

（3）180 克. 提示：设所含矿物质的质量为 y 克，则所含碳水化合物的质量为（$380-5y$）克.

∴ $4y+(380-5y)\leqslant 400\times 85\%$. 解得 $y\geqslant 40$，$380-5y\leqslant 180$.

∴ 所含碳水化合物质量的最大值为 180 克.

2. （1）$y=-0.5x^2+0.5$；（2）80 m.

提示：设抛物线表达式为 $y=ax^2+c$，代入坐标求出 a，c.

习题 26－2

基础

1. C.

2. D.

3. 60°.

4. $\frac{1}{3}$.

5. 提示：四边形 $AOEB$ 是矩形，$\mathrm{Rt}\triangle B'OA'\cong \mathrm{Rt}\triangle BOA$.

6. 1 m. 提示：设道路宽为 x m，得 $x^2-36x+35=0$.

7. 37.54 m.

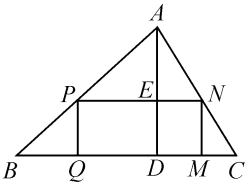
提升

1. （1）360 元，92 元；（2）在超市 A 购买更省钱.

提示：（1）设书包单价为 x 元，则有 $4x-8+x=452$. （2）在 A 超市购买花费 361.6 元，在 B 超市购买花费 362 元，$361.6<362<400$，所以选择在超市 A 购买.

2. 解：如图，设 PN 交 AD 于 E，$PQ=x$ cm，$PN=y$ cm，

则 $AE=(8-x)$ cm.



（第 2 题）

∵ $PN/\!/BC$，

∴ $\triangle APN\backsim\triangle ABC$，$\frac{PN}{BC}=\frac{AE}{AD}$，即 $\frac{y}{12}=\frac{8-x}{8}$.

∴ $y=\frac{3}{2}(8-x)$.

∵ $S_{矩形PQMN}=PN\cdot PQ=-\frac{3}{2}x^2+12x$ $(0<x<8)$，

∵ $a=-\frac{3}{2}<0$，

∴ $S_{矩形PQMN}$有最大值.

∴ 当 $x=4$，$y=6$ 时，$S_{最大值}=24$ (cm^2).

3. （1）由题意得 $\begin{cases}0.9(50-x)+0.4x\leqslant 36, & ①\\ 0.3(50-x)+x\leqslant 29. & ②\end{cases}$

由①得 $x \geqslant 18$，由②得 $x \leqslant 20$，所以 x 的取值范围是 $18 \leqslant x \leqslant 20$（$x$ 为整数）.

（2）制作 A 型和 B 型陶艺品的件数为：

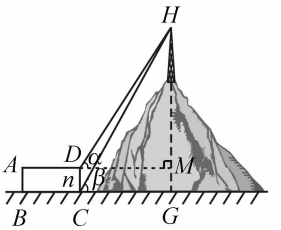
①制作 A 型陶艺品 32 件，制作 B 型陶艺品 18 件；

②制作 A 型陶艺品 31 件，制作 B 型陶艺品 19 件；

③制作 A 型陶艺品 30 件，制作 B 型陶艺品 20 件.

拓展

方案一：（1）如图 1，测三个数据 n，α，β.



（第 3 题图 1）

（2）解：设 $HG=x$，在 $\mathrm{Rt}\triangle CHG$ 中，$CG=\dfrac{x}{\tan\beta}$

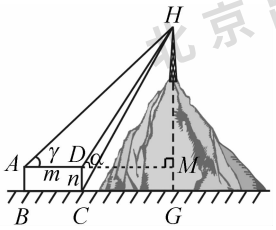
在 $\mathrm{Rt}\triangle DHM$ 中，

$DM=\dfrac{x-n}{\tan\alpha}$，

$\therefore \quad \dfrac{x}{\tan\beta}=\dfrac{x-n}{\tan\alpha}$.

$\therefore \quad x=\dfrac{n\cdot\tan\beta}{\tan\beta-\tan\alpha}$.

方案二：（1）如图 2，测四个数据 m，n，α，γ.



（第 3 题图 2）

（2）解：设 $HG=x$，在 $\mathrm{Rt}\triangle AHM$ 中，$AM=\dfrac{x-n}{\tan\gamma}$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle DHM$ 中，$DM=\dfrac{x-n}{\tan\alpha}$，

$\therefore \quad \dfrac{x-n}{\tan\gamma}=\dfrac{x-n}{\tan\alpha}+m$.

$\therefore \quad x=n+\dfrac{m\cdot\tan\alpha\cdot\tan\gamma}{\tan\alpha-\tan\gamma}$.

复习题

基础

1. 设这个数为 x，则 $\dfrac{2x+8}{2}-x=4$.

2. C.

3. 21，24，26.

4. 86 张制盒身，64 张制盒底.

5. $y=\dfrac{9}{5}x+32$.　-40，86.

6. 建在两条对角线交点处. 提示：另取一点与四个顶点连接，利用两边之和大于第三边.

提升

1. 当购买电脑 10 台或 10 台以下时，应选择乙公司，当购买 11 台至 19 台时，也应选择乙公司；当购买 20 台时，甲、乙两公司可以任选；当购买 20 台以上时，应选择甲公司.

提示：设购买 x 台电脑，需向甲、乙两个公司付款分别为 $y_{甲}$，$y_{乙}$. 显然，当 $0<x\leqslant 10$ 时，$y_{甲}>y_{乙}$.

当 $x>10$ 时，$y_{甲}=5\ 800\times 10+5\ 800(x-10)\cdot 70\%$，$y_{乙}=5\ 800x\cdot 85\%$.

令 $y_{甲}=y_{乙}$，则 $5\ 800\times 10+5\ 800(x-10)\cdot 70\%=5\ 800x\cdot 85\%$.

解得 $x=20$.

推理分析可以得出，当 $x<20$ 时，$y_{甲}>y_{乙}$；当 $x>20$ 时，$y_{甲}<y_{乙}$.

2. （1）抛物线的表达式为 $y=a(x-6)^2+4$.

将 $A(0,\ 1)$ 代入，得 $a=-\dfrac{1}{12}$.

∴ 表达式为 $y=-\dfrac{1}{12}(x-6)^2+4$.（或 $y=-\dfrac{1}{12}x^2+x+1$）

（2）令 $y=0$，$-\dfrac{1}{12}(x-6)^2+4=0$.

∴ $(x-6)^2=48$. $x_1=4\sqrt{3}+6\approx 13$，$x_2=-4\sqrt{3}+6<0$（舍去）.

∴ 足球落地点距守门员约 13 米.

3. 解：设张强第一次购买香蕉 x kg，第二次购买香蕉 y kg，

由题意可得 $0<x<25$.

当 $0<x\leqslant 20$，$y\leqslant 40$ 时，由题意得 $\begin{cases}x+y=50,\\6x+5y=264.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=14,\\y=36.\end{cases}$

当 $0<x\leqslant 20$，$y>40$ 时，由题意得 $\begin{cases}x+y=50,\\6x+4y=264.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=32,\\y=18.\end{cases}$（不合题意，舍去）

当 $20<x<25$ 时，$25<y<30$.

此时 $5x+5y=5(x+y)=250<264$，不合题意，舍去.

综上所述，张强第一次购买香蕉 14 kg，第二次购买香蕉 36 kg.

4. 解：（1）设 C 县运往 A 县的化肥为 x t，则 C 县运往 B 县的化肥为（$100-x$）t. D 县运往 A 县的化肥为（$90-x$）t，D 县运往 B 县的化肥为 $50-(90-x)=(x-40)$ t.

依题意 $W=35x+40(90-x)+30(100-x)+45(x-40)=10x+4\ 800(40\leqslant x\leqslant 90)$.

（2）∵ W 随着 x 的减小而减小，

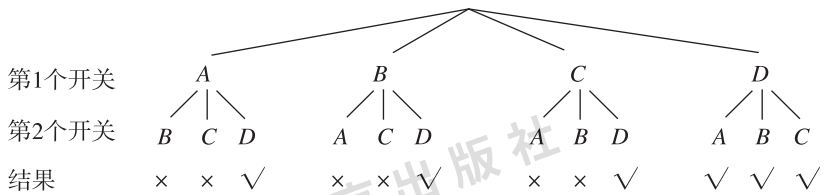
∴ 当 $x=40$ 时，$W_{最小}=10\times 40+4\ 800=5\ 200$（元）.

这时 $100-x=60$，$90-x=50$，$x-40=0$.

运费方案为把 C 县的 40 t 化肥运往 A 县，60 t 化肥运往 B 县，把 D 县的 50 t 化肥全部运往 A 县.

5. 解：（1）$\frac{1}{4}$.

（2）树状图如下：



∴ 任意闭合其中两个开关的情况共有 12 种，其中能使小灯泡发光的情况有 6 种，故小灯泡发光的概率是$\frac{1}{2}$.

拓展

1. 解：（1）根据题意，$AF/\!/BC$，

∴ $\angle ACB=\angle GAF$.

又 $\angle ABC=\angle GFA=90°$，

∴ $\triangle ABC\backsim\triangle GFA$.

∴ $\frac{BC}{AF}=\frac{AB}{FG}$，得 $BC=3.2$（m）.

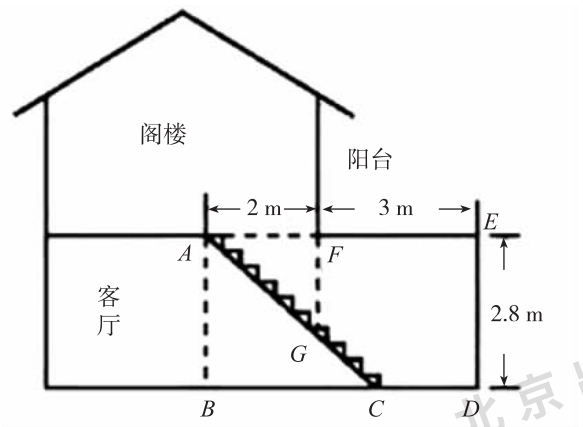
$CD=(2+3)-3.2=1.8$（m）.

（2）设楼梯应建 n 个台阶，则

$$\begin{cases}0.2n>2.8,\\0.2n<3.2.\end{cases}$$

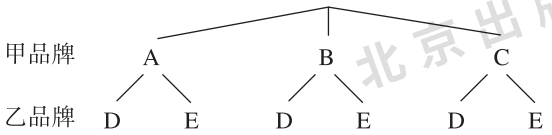
解得 $14<n<16$.

∴ 楼梯应建 15 个台阶.



（第 1 题）

2. 解：（1）树状图如下：



列表如下：

乙＼甲	A	B	C
D	(A，D)	(B，D)	(C，D)
E	(A，E)	(B，E)	(C，E)

有 6 种可能结果：(A，D)，(A，E)，(B，D)，(B，E)，(C，D)，(C，E).

(2) 因为选中 A 型号电脑有 2 种方案，即(A，D)，(A，E)，所以 A 型号电脑被选中的概率是$\frac{1}{3}$.

(3) 由(2)可知，当选用方案(A，D)时，设购买 A 型号、D 型号电脑分别为 x，y 台，根据题意，得

$$\begin{cases} x+y=36, \\ 6\,000x+5\,000y=100\,000. \end{cases}$$

解得$\begin{cases} x=-80, \\ y=116. \end{cases}$ 经检验不符合题意，舍去.

当选用方案(A，E)时，设购买 A 型号、E 型号电脑分别为 x，y 台，根据题意，得

$$\begin{cases} x+y=36, \\ 6\,000x+2\,000y=100\,000. \end{cases}$$

解得$\begin{cases} x=7, \\ y=29. \end{cases}$ 所以该中学购买了 7 台 A 型号电脑.

北京出版社



附录

图形计算器支持案例[①]

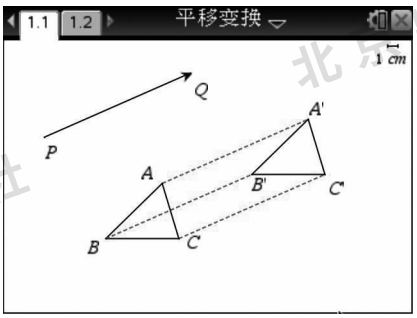
案例 1　平移变换. 以教材第 3 页的“交流”为例.

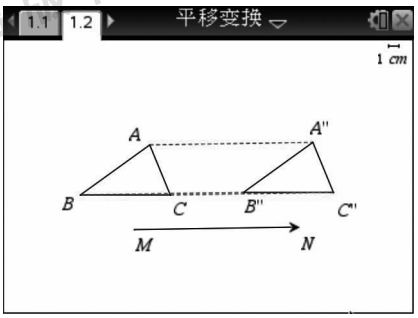
按 [开机][1][3]，添加几何页面. 按 [菜单][5][2]，作△ABC（为保持边 BC 水平放置，在作 BC 的时候，按住 [shift] 直到作好）. 按 [菜单][4][8]，作向量 $\overrightarrow{PQ}$. 按 [菜单][8][3]，依次单击△ABC，$\overrightarrow{PQ}$，得到平移之后的 △$A'B'C'$（按[ctrl][书]或者按[π]可以找到单引号符号）. 按 [菜单][4][5]，作线段 AA'，BB'，CC'. 移动指针靠近并单击线段 AA'，按[ctrl][菜单][3] ▼▶▶，修改线段线型为虚线. 同样方法修改线段 BB'，CC' 的线型为虚线. 拖动点 Q，改变向量 $\overrightarrow{PQ}$，观察平移变换中对应线段与对应角之间的关系.

按[ctrl][文档·][3]，新加一个几何页面. 同上方法，作△ABC（边 BC 水平放置），向量 $\overrightarrow{MN}$（水平放置），平移之后的 △$A''B''C''$，虚线段 AA''，BB''，CC''. 拖动点 N（按住 [shift] 移动点 N，可以保持向量水平），观察平移变换中对应线段与对应角之间的关系.

说明：图形计算器中的平移变换要求图形是整体图形，即用形状模板作出. 在几何页面中，是按 [菜单][5]；在图形页面中，是按 [菜单][8][2]. 单独的点、线除外.

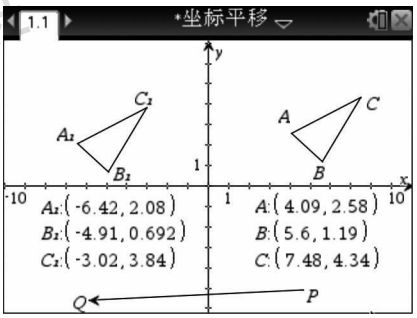
① 关于图形计算器的基本操作，之前已有介绍，此处不再赘述.

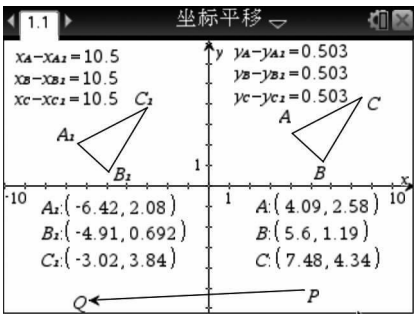




案例 2 坐标平移. 以教材第 6 页“实践”的第 2 题为例.

按 [开机][1][2]，添加图形页面. 按 [菜单][8][2][2] 作 $\triangle ABC$. 按 [菜单][8][1][8]，作向量 $\overrightarrow{PQ}$. 按 [菜单][8][5][3]，依次单击 $\triangle ABC$，作向量 $\overrightarrow{PQ}$，得到平移之后的 $\triangle A_1B_1C_1$（按 [ctrl]，可以调用公式编辑模板，选择下标符号即可输入下标. 带下标的变量可以参与计算，带引号的变量则不可以参与计算）. 按 [菜单][1][8]，单击三角形的各个顶点，得到它们的坐标. 拖动这些坐标到空白处，并在旁边输入对应顶点字母，以示区别. 在空白处按 [ctrl][菜单][5]，输入表达式“$x_A - x_{A1}$”，然后指针靠近这个表达式，此时指针变为张开的小手状，按 [ctrl][菜单][4]，按照提示依次单击对应点的坐标（x 则单击横坐标，y 则单击纵坐标），得到“$x_A - x_{A1}$”的计算值. 同样输入并计算“$x_B - x_{B1}$”，“$x_C - x_{C1}$”，“$y_A - y_{A1}$”，“$y_B - y_{B1}$”，“$y_C - y_{C1}$”的值. 拖动点 Q 或 P，改变平移方向和距离，观察它们的坐标之间的关系. 拖动 $\triangle ABC$ 的某个顶点，任意改变 $\triangle ABC$ 的位置，观察它们的坐标之间的关系.

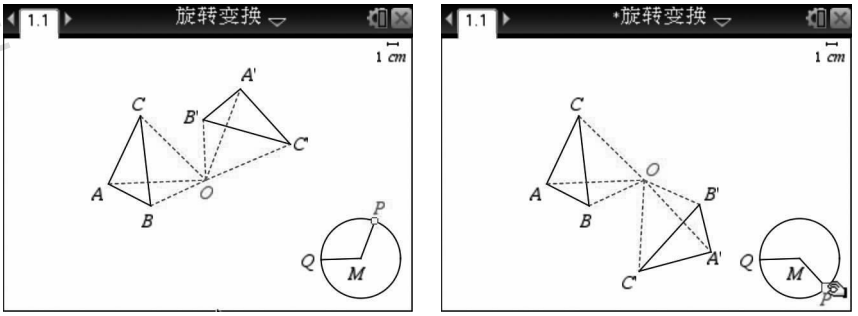




案例 3 旋转变换. 以教材第 11 页的“实践”为例.

按 [开机][1][3]，添加几何页面. 按 [菜单][5][2]，作 $\triangle ABC$，按 [菜单][4][1]，作点 O，再按 [菜单][5][1]，作 $\odot M$. 按 [菜单][4][5]，作线段 OA，OB，OC，MP，MQ，其中点 P，Q 在 $\odot M$ 上. 按 [菜单][8][4]，按照提示依次单击 $\triangle ABC$，点 O（旋转中心），及点 Q，M，P（旋转角度，按照这个顺序选择旋转角的顶点，该角及圆将成为一个控制三角形旋转的方向盘，方向盘与三角形的旋转方向将会保持一致），得到旋转之后的 $\triangle A'B'C'$. 作线段 OB'，OA'，OC'，并把所有与点 O 相连的线段属性改为虚线.

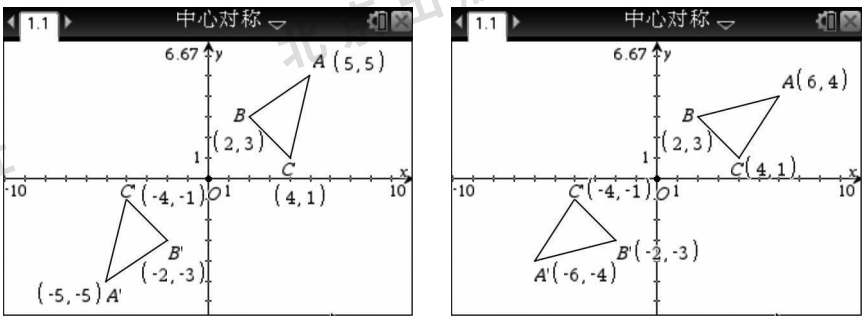
拖动点 P，改变旋转角度，观察图中对应点与旋转中心所连线段之间的关系，对应点与旋转中心连线所成的角之间的关系．改变点 O 的位置，再对这个图形作旋转变换，观察上述的关系是否还存在．



案例 4　中心对称．以教材第 13 页“实践”的第 2 题为例．

按 开机 1 2，添加图形页面．按 菜单 8 2 2，作 $\triangle ABC$．按 菜单 8 1 3，作两坐标轴的交点 O．按 菜单 8 5 1，按照提示依次单击 $\triangle ABC$，点 O，得到对称之后的 $\triangle A'B'C'$．按 菜单 1 8，单击三角形的顶点，得到它们的坐标．

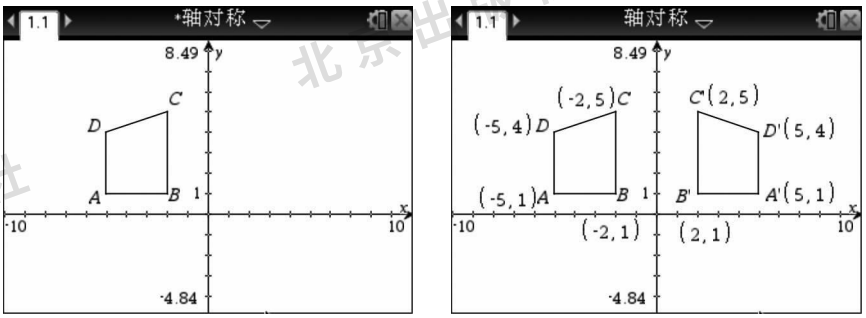
拖动 $\triangle ABC$ 的某个顶点，观察两个关于原点中心对称的三角形对应顶点的坐标之间的关系．



案例 5　轴对称．以教材第 20 页的例 1 为例．

按 开机 1 2，添加图形页面．按 菜单 8 1 1，按 (− 5 enter 1 enter，作点 $A(-5,1)$，再按 (− 2 enter 1 enter，作点 $B(-2,1)$，同样作点 $C(-2,5)$，$D(-5,4)$．按 菜单 8 2 4，依次单击点 A，B，C，D，再按 enter，作四边形 $ABCD$．按 菜单 8 5 2，依次单击四边形，y 轴，得到轴对称之后的四边形 $A'B'C'D'$．

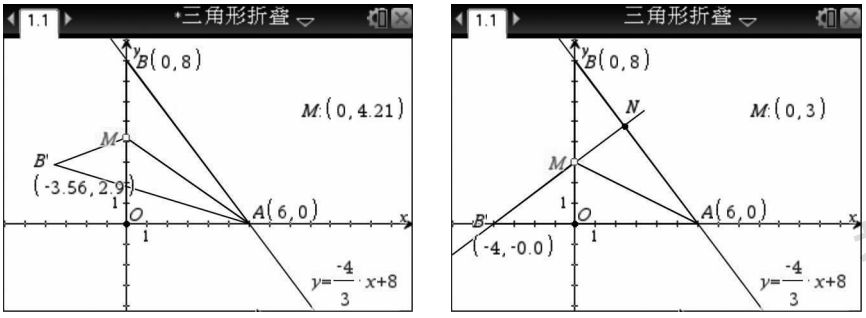
按 菜单 1 8，单击两个四边形的各个顶点，得到它们的坐标．



案例 6　三角形折叠．以教材第 23 页的“拓展”为例．

按 [开机][1][2]，添加图形页面．在输入行中（如果输入行隐藏，按[ctrl][G]显示）输入表达式“$-\frac{4}{3}\times x+8$”，按[enter]，得到直线 $y=-\frac{4}{3}x+8$，再按 [菜单][8][1][3]，作该直线与 x 轴，y 轴的交点 A，B，两坐标轴的交点 O．按 [菜单][8][1][5]，作线段 OB，再按 [菜单][8][1][2]，在线段 OB 上作点 M．按 [菜单][8][2][2]，作 $\triangle ABM$．按 [菜单][8][5][2]，依次单击 $\triangle ABM$，边 AM，得到轴对称之后的三角形 $A'M'B'$，其中 A' 与 A，M' 与 M 重合．按 [菜单][1][3]，单击点 M'，A′（两个点重合，单击时先选择的是后出现的点），隐藏这些点（方便拖动点 M）．按 [菜单][1][8]，单击三角形的顶点，得到点 A，B，M，B' 的坐标．

拖动点 M（或者双击点 M 的纵坐标，直接加以修改，以便得到点 M 的精确坐标定位），观察在此过程中，$\triangle ABM$ 沿 AM 折叠的情况，猜想出点 M 运动到（0，3）时，B'恰好落在 x 轴上，坐标为（-4，0）（此时点 B'的纵坐标由于计算精度的原因显示的并不是0，只要指针靠近这个纵坐标，按[ctrl][菜单][2] ◀◀，修改精度为 1 即可）．按 [菜单][8][1][4]，作直线 $B'M$，按 [菜单][8][1][3]，作 $B'M$ 与 AB 的交点 N，得到一条辅助线 BN，帮助学生理解．

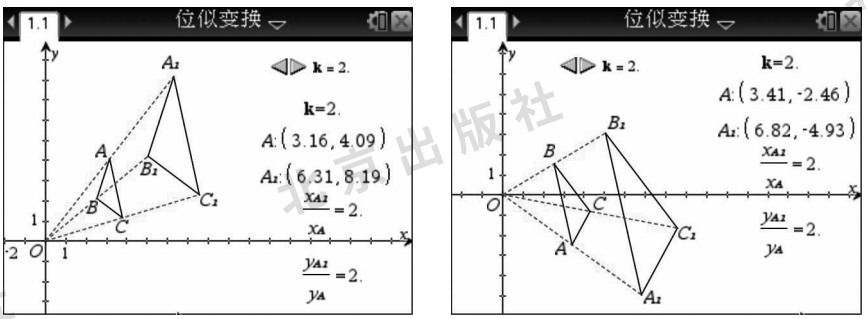


案例 7　位似变换．以教材第 26 页“实践”的第 2 题为例．

按 [开机][1][2]，添加图形页面．按 [菜单][8][2][2]，作 $\triangle ABC$．按 [菜单][1][B]，插入游标变量 k．指针靠近游标边角部，此时指针变为张开的小手状，按[ctrl][菜单][1]，修改游标

设置：最小值0.25，最大值3，步长0.25，并单击选项“最小化”，然后按enter．页面空白处按ctrl 菜单5，随便输入一个数字，按enter，指针靠近这个数字，此时指针变为张开的小手状，按ctrl 菜单6 2 enter，把该数字文本链接至变量 k（此数字文本作为缩放的倍数 k，即相似比），此时按方向键▶或◀可以改变变量 k 的大小．按 菜单8 5，依次单击△ABC，O，相似比 k，得到△$A_1B_1C_1$．如果图形超出窗口范围，可以移动指针到页面空白处，长按 ⚲，此时指针变为抓紧的小手，滑动触摸板，可以直接移动窗口，直到满足图形显示的要求．

按 菜单1 8，测出 A，A_1的坐标．在空白处按ctrl 菜单5，输入表达式“$\frac{x_{A1}}{x_A}$”，按enter，然后移动指针靠近表达式，按ctrl 菜单4，按照提示单击对应点的横坐标，得到该表达式的计算值．同样，输入并计算“$\frac{y_{A1}}{y_A}$”的值．拖动 △ABC 的某一个顶点，任意改变 △ABC 的位置，观察位似变换中对应点的坐标比值与相似比 k 之间的关系．



案例 8 模拟概率．以教材第 65 页的例 2，第 66 页的例 3 为例．

（1）例 2．此例题的模拟的关键在于实现随机同时摸出两枚，即不重复或不放回摸取．

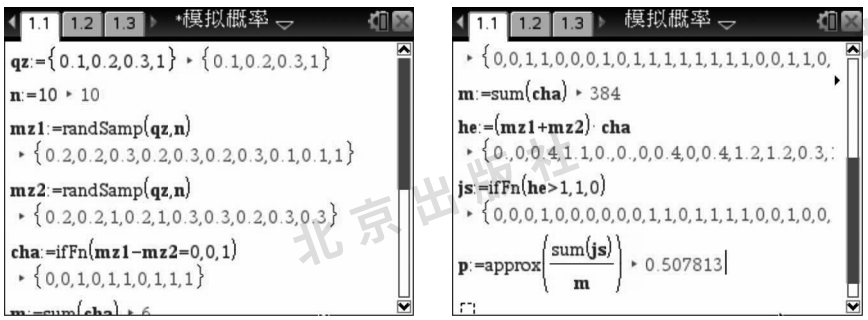
按 开机1 6，添加记事本．按ctrl M（或按 菜单3 1）插入数学框，按 Q Z ctrl ⁄ ctrl)，然后在大括号里输入“0.1，0.2，0.3，1”，按enter，定义棋子变量，这里的0.1代表红1，0.2代表红2，0.3代表红3，1代表黑．每次按enter结束一个数学框，会自动生成下一个的数学框，如果没有自动生成，再按ctrl M．数学框里按 N ctrl ⁄ 1 0 enter，定义摸取的次数变量 n，并赋值 10．

数学框里按 M Z 1 ctrl ⁄ 1 R（这里 1 指翻到书本的第一页，R 指查找字母 r 开头的函数命令），按▼或▲，直到找到命令“**randSamp**”，按enter调用（以下函数命令用粗体字标注，不再详述调用过程），再按 Q Z , N enter，定义数组 $mz1$：由 n 次摸取实验中的第一个棋子的代表数字组成．数学框里，同样的方法，输入“mz2：=**randSamp**（qz，n）”，再按enter，定义数组 $mz2$：由 n 次摸取实验中的第二个棋子的代

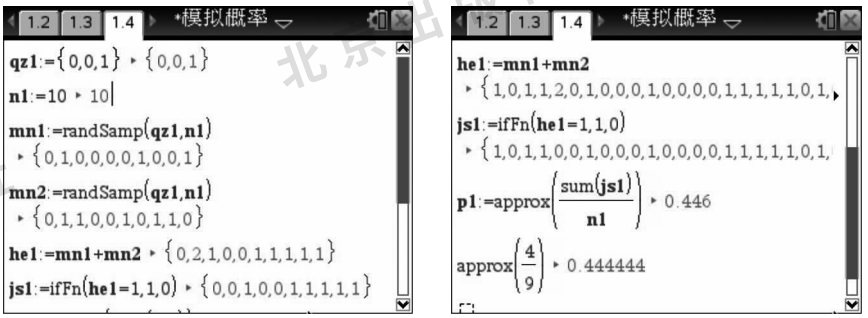
表数字组成.

数学框里输入“cha：＝**ifFn**（mz1－mz2＝0，0，1）”，按enter，数组 *cha* 的作用是：如果重复摸取了，则记为 0，否则记为 1. 数学框里输入“m：＝**sum**（cha）”，按enter，这里 *m* 表示 *n* 次实验中不重复的次数. 数学框里输入“he：＝（mz1＋mz2）×cha”，按enter，这里“×*cha*”的目的是用 0 替换掉所有重复摸取实验.

数学框里输入“js：＝**ifFn**（he＞1，1，0）”，这里数组 *js* 是统计在 *m* 次不重复摸取实验中取到颜色不同的棋子的次数. 数学框里输入“p：＝**approx**（$\frac{\text{sum（js）}}{\text{m}}$）”，求出比值的近似值，估计概率. 按方向键，移动指针到变量 *n* 处，修改 *n* 的赋值，可以改变实验次数. 移动指针到数组变量 *mz*1 或 *mz*2 处，按enter可以实现一次“随机 *n* 次（其中 *m* 次不重复）摸取实验”. 为了得到比较理想的数据，可以修改 *n* 为一个较大的数，如 *n*＝500. 但是尽量不要超过 1 000，避免耗尽图形计算器的内存.



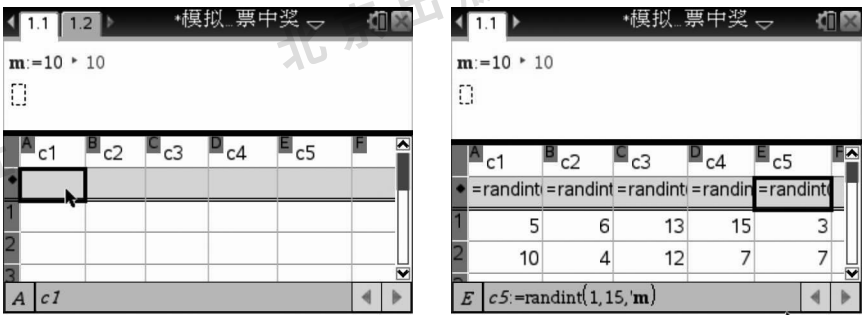
（2）例 3. 此例题的概率模拟与例 2 不同，一次实验是有放回摸取两枚，可以重复. 按ctrl 文档· 6，新加一个记事本页面. 按ctrl M，插入一个数学框，输入“qz1：＝｛0，0，1｝”，其中 0 代表红色，1 代表黑色，按enter. 以下各个数学框里分别输入“n1：＝10”（实验次数 *n*1 赋值 10），“mn1：＝**randSamp**（qz1，n1）”（数组 *mn*1 由一次实验中第一个棋子的数字组成），“mn2：＝**randSamp**（qz1，n1）”（数组 *mn*2 由一次实验中第二个棋子的数字组成），“he1：＝mn1＋mn2”，“js1：＝**ifFn**（he1＝1，1，0）”（摸取的棋子颜色不同，即两个棋子数字之和是 1），“p1：＝**approx**（$\frac{\text{sum（js1）}}{\text{n1}}$）”. 修改变量 *n*1，可以改变实验次数，对数组变量 *mz*1 或 *mz*2 按enter可以实现一次“随机 *n*1 次摸取实验”，如 *n*＝500. 数学框里输入“**approx**$\left(\frac{4}{9}\right)$”，比较 *p*1 与 $\frac{4}{9}$ 之间的差距.



案例 9 模拟彩票中奖. 以教材第 77 页的“探究学习”为例.

按 开机 1 6，添加记事本. 按 ctrl M，数学框里按 M ctrl 1 0 enter，定义实验次数 m 并赋值 10.

按 文档 5 2 3，选择上下布局. 按 ctrl tab，切换屏幕到下屏，再按 菜单 4，添加列表与电子表格页面. 前 5 列即从 A 列到 E 列，表头分别输入 $c1$，$c2$，$c3$，$c4$，$c5$，分别代表彩票的 5 个号码. 指针移到◆行（灰色单元格，可定义本列的计算公式），按 =，输入“**randint**（1，15，′m）”，按 enter，则 A 列即 $c1$ 将产生 m 个从 1 到 15 的随机整数，其中 m 前加单引号，表示变量引用，而非列引用. 后面的 4 列也同样操作，随机整数产生公式相同.



从 F 列到 I 列，表头分别输入 $j1$，$j2$，$j9$，$j11$，分别统计彩票的中奖号码（1，2，9，11，11）的数量，其中 1，2，9 三个号码只要个数不小于 1，计数为 1，否则为 0，而 11 这个号码，个数不小于 2 的，计数为 2，个数小于 2 的，按 11 的实际个数计数. 因此，这四列的公式的输入，分别如下操作.

（1）移动指针到 $j1$ 数组的◆行，按 =，输入公式

seq（**when**（**countif**（{c1 [n]，c2 [n]，c3 [n]，c4 [n]，c5 [n]}，1）≥1，1，0），n，1，′m，1），其中：

countif 指令是统计这组彩票号码 {$c1$ [n]，$c2$ [n]，$c3$ [n]，$c4$ [n]，$c5$ [n]} 中出现 1 的个数；

when 指令是满足条件（彩票号码中 1 的个数不小于 1）时输出 1，否则输出 0；

seq 指令是按照表达式逐步填充本列的单元格，它的参数分别是：表达式 **when**（**countif**（{c1［n］，c2［n］，c3［n］，c4［n］，c5［n］}，1）≥1，1，0），变量 *n*，下限 1，上限′*m*，步长 1.

（2）*j*2 或 *j*9 两列◆行中的公式，与 *j*1 基本相同，只需要把数组 {*c*1［*n*］，*c*2［*n*］，*c*3［*n*］，*c*4［*n*］，*c*5［*n*］} 后面的 1 改为 2 或 9 即可. 为了输入方便，先移动指针到 *j*1 的◆行，按 ctrl C 复制，再移动指针到 *j*2 或 *j*9 的◆行，按 ctrl V 粘贴，然后按 enter，进到公式单元格里进行修改即可，按 enter 确认.

（3）*j*11 列◆行中的公式与前三个的区别较大：

seq（**when**（**countif**（{c1［n］，c2［n］，c3［n］，c4［n］，c5［n］}，11）≥2，2，countif（{c1［n］，c2［n］，c3［n］，c4［n］，c5［n］}，11）），n，1，′m，1），其中：

countif 指令中，是把中奖号码修改为 11，统计 11 的个数；

when 指令中，当满足条件“11 的个数不小于 2”时，输出 2，否则，输出“11 的实际个数”，即 **countif**（{c1［n］，c2［n］，c3［n］，c4［n］，c5［n］}，11）的计算值.

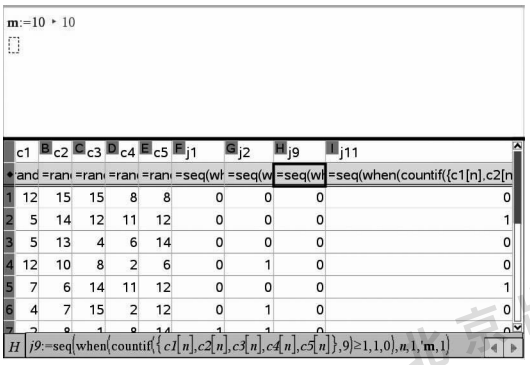
seq 指令除了表达式有变化，其他不变.

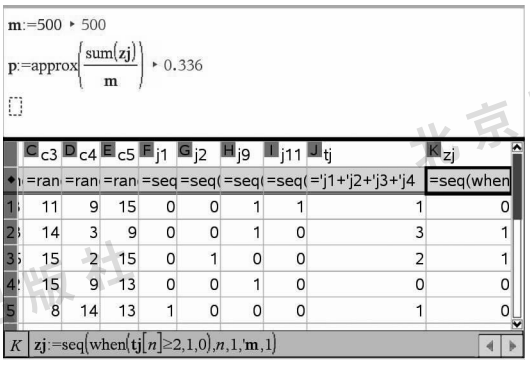
从 *J* 列到 *K* 列，表头分别输入 *tj*，*zj*，分别代表统计中奖号码的个数，是否中奖（中奖号码个数不小于 2 即为中奖）. 其中，公式分别如下输入：

tj 列中的公式，输入“′*j*1 + ′*j*2 + ′*j*3 + ′*j*4”；

zj 列中的公式，输入“**seq**（**when**（tj［n］≥2，1，0），n，1，′m，1）”.

按 ctrl tab 切换屏幕到记事本页面，在空白数学框里输入“p：= **approx**（$\frac{\text{sum（zj）}}{\text{m}}$）”，按 enter，得到这 *m* 次实验中，中奖次数的频率. 修改 *m* 的值，比如 500，改变实验次数（不能超过 2 500，表格只能处理 2 500 行），观察中奖次数的频率的波动情况，猜想这种彩票中奖的概率.

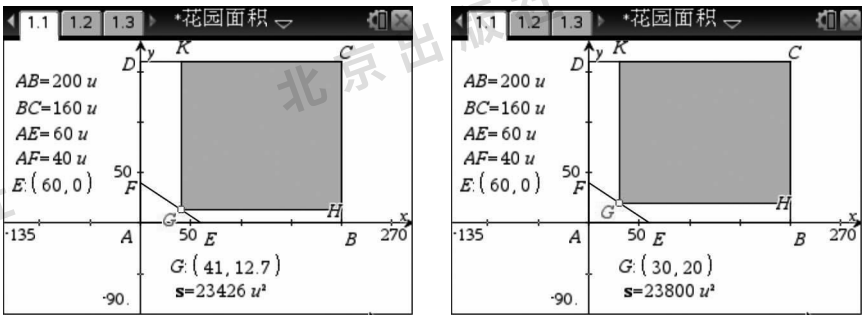




案例 10 花园面积. 以教材第 99 页的例 6 为例.

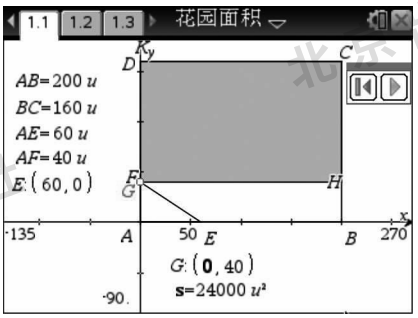
按 [开机][1][2]，添加图形页面. 按 [菜单][4][1]，把窗口设置调整为：x 最小值 -135，x 最大值 270，x 比例尺 50，y 最小值 -90，y 最大值 180，y 比例尺 50，[enter]确认. 按 [菜单][8][2][3]，作矩形 $ABCD$，其中先作点 A（即原点），再作点 B（点 B 在 x 轴的正半轴上），然后作点 C. 按 [菜单][8][3][1]，单击 AB（BC）的两个端点，得到 AB（BC）的长度. 双击（按 [ctrl] 两次）AB（BC）的长度值，修改为 200（160），按[enter]确认. 按 [菜单][8][1][5]，在 AB 上作线段 AE，AD 上作线段 AF，测量并分别修改其长度为 60，40，然后再作线段 EF. 按 [菜单][8][1][2]，在 EF 上作点 G. 按 [菜单][8][4][1]，依次单击点 G，x 轴，过点 G 作 x 轴的垂线，再单击点 G，y 轴，过点 G 作 y 轴的垂线. 按 [菜单][8][1][3]，作垂足 K，H. 按 [菜单][8][2][4]，依次单击点 G，H，C，K，再按[enter]确认，作矩形 $GHCK$. 按 [菜单][1][8]，单击点 G 得其坐标. 按 [菜单][8][3][2]，单击矩形 $GHCK$，得其面积. 由于面积数值较大，默认采用科学记数法显示，可以移动指针靠近面积值，按[ctrl][菜单][2]◀[enter]，修改“自定义精度”为 2 即可.

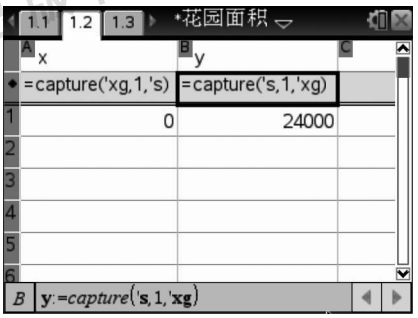
双击点 G 的横坐标，修改其为 30，此时点 G 为 EF 的中点，得到矩形 $GHCK$ 的面积为 23 800（平方单位），此即例 6 的第 1 问答案.



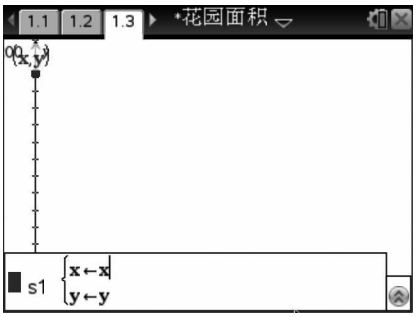
指针靠近点 G 的横坐标，此时指针变为张开的小手状，按[ctrl][菜单][5]，把 var 修改为 xg，这样点 G 的横坐标保存为变量 xg. 同样把矩形 $GHCK$ 的面积保存为变量 s. 指针靠近点 G，按[ctrl][菜单][3] ▼ [1][enter][enter]，制作点 G 在 EF 上动作，速度为 1. 单击动作按钮的播放键，可以观看动作过程，再单击按钮的暂停键可以暂停动作. 如果需要删除动作按钮，只需要重复动作制作的过程，把速度 1 修改成 0 即可. 双击点 G 的横坐标，修改其为 0，初始化点 G 的状态.

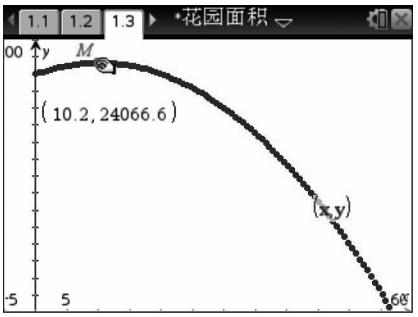
按[ctrl][文档·][4]，新加一个列表与电子表格页面. A 列表头输入 x，按[enter]，然后指针移到◆行，按[ctrl][菜单][8][1]，把 var 修改为′xg，然后，在 1 的后面输入“,′s”. 同样，B 列表头输入 y，在◆行按[ctrl][菜单][8][1]，把 var 修改为′s，然后，在 1 的后面输入“,′xg”.





按 ctrl 文档 2，新加一个图形页面．按 菜单 4 1，调整窗口设置为：x 最小值 -5，x 最大值 60，x 比例尺 5，y 最小值 22 600，y 最大值 24 200，其他不变．按 菜单 3 5，按 X ▼ Y enter，作散点图（x，y）．如果之前窗口没有设置好，还可以按 菜单 4 A，得到一个适合窗口，或者按 菜单 4 9，根据数据自动调整窗口．按 ctrl ◀◀，或者移动指针单击页面上方的标签 1.1，切换屏幕到 1.1 页的图形页面（矩形花园），单击动作播放按钮，然后迅速按 ctrl ▶▶，或单击页面标签 1.3，切换屏幕到 1.3 页的图形页面（散点图），观察由数对（xg，s）逐点描出的散点图．等散点图作好时，猜想其轨迹为开口向下的抛物线．切换页面到 1.1 页，单击动作按钮的暂停键，再切换页面到 1.3 页，按 菜单 8 1 2，在散点图上作一点 M，并测出其坐标．拖动点 M，观察点 M 运动到最高点（近似值）时的坐标，猜想 $xg \approx 10$ 时，矩形 $GHCK$ 面积最大，然后思考其中的数学原理．如果需要重新观察描点过程，先切换页面到 1.1 页，修改点 G 的横坐标为 0，然后切换到 1.2 页，移动指针到 x 列的◆行，按两次 enter 清除之前数据，同样清除 y 列的数据，再切换到 1.1 页，单击动作播放按钮，最后切换到 1.3 页观察描点过程．

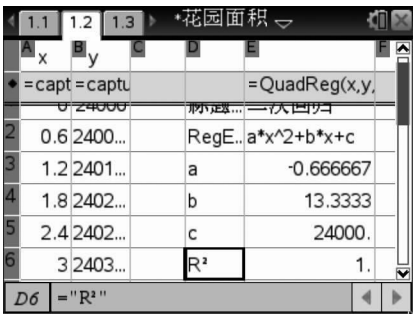


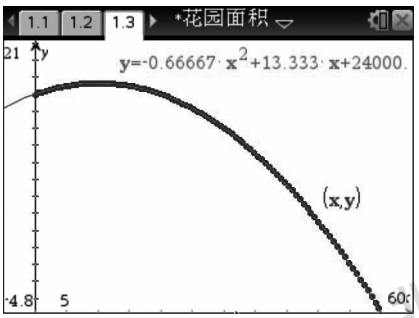


学生利用所学知识，求出面积关于 MG 长度的函数关系：$y = -\frac{2}{3}(x-10)^2 + \frac{72\,200}{3}$，其中 $0 \leqslant x \leqslant 60$，所以当 $x=10$ 时，矩形面积最大．接下来，教师可以安排学生利用图形计算器进行验证活动．

单击页面标签 1.2，指针移到空白的单元格，按 菜单 4 1 6，选择二次回归，然

后在弹出的窗口中进行设置，其中 x 数组：x，y 数组：y，将回归方程保存至：$f1$，按 enter，得到二次回归的各项参数，其中 R^2 为相关系数，如下图，R^2 等于 1，说明 y 与 x 之间就是二次函数关系．切换页面到 1.3 页，按 菜单 3 1，再按 ▲，找到 $f1(x)$ 的表达式，然后按 enter，观察该二次函数图象与散点图的关系，直观分析回归效果，并对比该表达式与标准答案，进行机器验证．按 菜单 9，设定显示数位为 5，可以使得表达式的小数显示位数增加．





更多案例及参考内容，请登录网站：http://education.ti.com/china/training/bph.