北京出版社

主　　编：王燕春
副　主　编：康　杰
本册编写人员：张晓东　彭　林　王玉起　吕占福

义务教育教科书
数学　教师用书
八年级　下册
SHUXUE　JIAOSHI YONGSHU
BA NIANJI　XIACE
北京教育科学研究院　编
*
北京出版集团公司
北　京　出　版　社　出版
（北京北三环中路6号）
邮政编码：100120
网　　址：www.bph.com.cn
北京出版集团公司总发行
天津海顺印业包装有限公司印刷
*
787毫米×1092毫米　16开本　12.25印张　236.9千字
2015年1月第1版　2015年1月第1次印刷
印数1—1 320
ISBN 978-7-200-11124-8
定价：27.00元
质量监督电话：010-58572293　58572393

北京出版社

目 录

第十四章 一次函数 …… 1
教学目标 …… 1
教材分析和教学建议 …… 2
教材及其参考信息 …… 7
一 函数和函数的图象 …… 8
14.1 函数 …… 8
14.2 函数的表示法 …… 12
14.3 函数图象的画法 …… 16
习题 14－1 …… 21
二 一次函数 …… 25
14.4 一次函数 …… 25
14.5 一次函数的图象 …… 27
14.6 一次函数的性质 …… 30
14.7 一次函数的应用 …… 33
习题 14－2 …… 35
阅读理解 揭开一幅算图的奥秘 …… 38
回顾与整理 …… 40
复习题 …… 41
部分习题答案或提示 …… 45
第十五章 四边形 …… 49
教学目标 …… 49
教材分析和教学建议 …… 49
教材及其参考信息 …… 55
一 多边形 …… 56
15.1 多边形 …… 56

习题 15－1 …… 63
阅读理解　换个角度看问题 …… 64
二　平行四边形 …… 65
15.2　平行四边形和特殊的平行四边形 …… 65
15.3　平行四边形的性质与判定 …… 68
习题 15－2 …… 76
15.4　特殊的平行四边形的性质与判定 …… 78
15.5　三角形中位线定理 …… 88
探究学习　“中点四边形” …… 90
习题 15－3 …… 91
阅读理解　完美正方形 …… 93
三　中心对称图形 …… 94
15.6　中心对称图形 …… 94
习题 15－4 …… 97
阅读理解　对称的世界 …… 99
回顾与整理 …… 100
复习题 …… 102
部分习题答案或提示 …… 105
第十六章　一元二次方程 …… 109
教学目标 …… 109
教材分析和教学建议 …… 109
教材及其参考信息 …… 113
一　一元二次方程和它的解法 …… 114
16.1　一元二次方程 …… 114
16.2　一元二次方程的解法 …… 116
习题 16－1 …… 130
二　一元二次方程的应用 …… 132
16.3　列方程解应用问题 …… 132
习题 16－2 …… 135
阅读理解　古代数学家对一元二次方程的贡献 …… 136
回顾与整理 …… 138
复习题 …… 140
部分习题答案或提示 …… 143

第十七章　方差与频数分布 …… 147
教学目标 …… 147
教材分析和教学建议 …… 148
教材及其参考信息 …… 151
一　数据的波动 …… 152
17.1　方差 …… 152
17.2　用科学计算器计算方差 …… 156
习题 17－1 …… 158
二　数据的分布 …… 160
17.3　频数分布表与频数分布图 …… 160
习题 17－2 …… 165
综合与实践　空气质量状况调查 …… 168
探究学习　本班同学主要学科学习分化的调查与分析 …… 168
阅读理解　平均数趣谈 …… 170
回顾与整理 …… 171
复习题 …… 174
部分习题答案或提示 …… 177
附录　图形计算器支持案例 …… 181

北京出版社



第十四章
一次函数

教学目标

1. 以探索实际问题中的数量关系和变化规律为背景，使学生感受并了解常量、变量的意义.

2. 结合实例，了解函数的概念，能举出函数的实例，体会“变化与对应”的思想；能确定简单实际问题中函数自变量的取值范围，并会求出函数值.

3. 加深对平面直角坐标系的认识，掌握坐标系中点和点的坐标的对应关系，熟悉点的坐标的符号规律，熟悉坐标轴上的点的坐标的特征，熟悉关于坐标轴成轴对称的点的坐标的关系.

4. 了解函数关系的解析法、图象法和列表法等三种表示方法，能用适当的函数表示法刻画简单实际问题中变量之间的关系.

5. 掌握根据函数的表达式列表、描点、连线画出函数图象的方法，会从图象曲线的走向获取信息，从而了解图象表示问题的实际意义并进行相关问题的分析.

6. 结合具体情景体会一次函数的意义，理解一次函数和正比例函数的概念，会利用待定系数法确定一次函数的表达式.

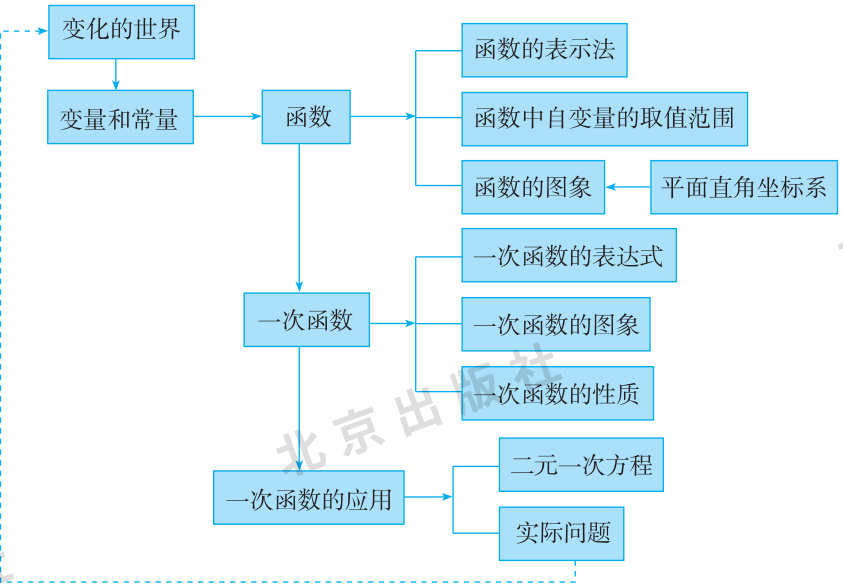
7. 熟练掌握一次函数图象的画法，能根据一次函数的图象和表达式 $y = kx + b$ $(k \neq 0)$ 讨论并概括出一次函数的基本性质，并会运用这些性质解决问题.

8. 通过探究活动，讨论一次函数与二元一次方程（组）及一元一次不等式的关系，从运动变化的角度，用函数的思想加深对二元一次方程（组）及不等式的认识，构建有机的知识体系，为后续学习奠定基础.

9. 能用一次函数分析和解决简单的实际问题，增强应用意识，提高实践能力.

教材分析和教学建议

1. 主要内容及其地位作用.



本章的内容包括：变量、常量和函数的概念，函数的三种表示法，一次函数（和正比例函数）的概念、图象、性质以及应用举例.

有关函数的知识是初中数学的重要内容之一，由于它是从生活中广泛的实际问题中抽象出来的数学知识，所以它又是解决实际问题时被广泛应用的工具. 因此，这部分知识的教学，无论是对提高学生在生活中应用函数知识的意识，还是对掌握运用函数知识的方法，都是能够培养学生应用数学知识能力的具有重要意义的教学阶段.

在中学阶段，有关函数的知识的学习是从八年级下学期开始的，它贯穿始终，逐步深入，广泛渗入各个数学知识中的主干内容. 所以，在初中阶段对函数知识的学习仅仅是开始，只能是初步了解，不能期望一蹴而就. 所以应注意控制知识范围，控制难度，例题和习题都应是基本的、简单的、易于接受的.

本章对一次函数的图象和性质的学习，给出了研究函数的基本模式，所以，搞好一次函数图象和性质的教学，对今后函数的学习有重要的示范意义. 在教学中，不仅要注意一次函数本身知识技能的落实，更要注意研究函数的方法的渗透. 对把实际问

题向一次函数问题的化归、一次函数图象的画法和读法、一次函数的主要性质（特别是增减性）、一次函数的应用等，都作为学习反比例函数、二次函数的准备，而学习反比例函数、二次函数，又是学习函数方法的进一步丰富和发展.

2. 本章编写特点.

加强联系生活实际，重视学生应用意识的培养. 不论是概念的形成，还是知识的应用，教材都力图与学生熟悉的生活问题建立联系，使学生感受到数学来源于生活，又是解决实际问题的强大武器.

重视知识的形成过程，切实提升学生的数学思维能力. 教材通过“实践”、“探索”、“思考”和“交流”等栏目，让学生经历观察、实验、猜测、归纳、概括等数学思维过程，发展学生的合情推理和演绎推理的能力，以及数学表述的能力.

以学生的认知经验为出发点，使知识的生成自然、流畅，同时，在新知识的学习过程中，强调基本活动经验的积累. 如通过对学生已学过的代数式的回顾，自然地引出函数自变量的取值范围；在探索一次函数的系数对图象位置的影响时，采用了“控制变量法”等.

教材中各栏目设问开放，给学生较大的思维空间，既能让每个学生有话可说，又能培养学生思维的灵活性. 如“在你的身边是否有这样的事物，它涉及变化的量和不变的量”等.

发挥信息技术在学习中的作用，提高学习效率. 教材重视信息技术与课程的整合，以利于学生认识数学本质为目的安排实践活动，如在计算机（或图形计算器）中拖动平面直角坐标系中的动点，观察动点关于坐标轴对称点的坐标变化规律，使学生可以通过大量的实验，概括出本质的规律.

习题、复习题的设计面向全体学生，体现个性发展的需要. 习题的设计分基础题、提升题和拓展题三个层次，满足不同层次学生学习的需求，期待不同层次的学生通过自己的努力均能获得一定的成就感，从而激发学生学习的持久兴趣.

3. 教学重点、难点.

（1）本章的重点包括函数的概念，一次函数的图象和性质，以及一次函数的应用.

函数的概念是理解并掌握一次函数（包括其他各类函数）的基础，也是关系全局的基础知识，教学中应充分重视.

一次函数的图象和性质是本章的核心内容，具有广泛的应用价值，学生对这部分知识的理解和掌握程度，直接决定了他们的应用能力和灵活运用数学知识解决问题的水平. 所以，必须认真落实对一次函数的图象和性质的教学.

函数在实际生活中的应用是学习函数的终极目的，应注意培养学生在解决实际问

题时建立函数模型的意识，并掌握建立函数模型的技能.

（2）本章的难点是函数概念的建立和一次函数的应用.

函数的概念，由于它是动态的，并具有抽象性而形成教学的难点，为更好地突破这一教学难点，要善于引导学生联系身边的实际，从具体到抽象、从特殊到一般地建立变量、常量、对应等观念，理解函数的意义. 在本章中，更重要的是要培养学生能初步用数学的眼光观察分析要解决的问题，会把有关的非数学问题归结为一次函数问题，用一次函数的知识加以解决的能力.

4. 教学建议.

（1）让学生随时联系生活实际，感受“变量”、“常量”和“对应关系”的存在，亲身经历函数概念的形成过程，才能让学生在积极思维和互动学习的启发下，认识得到飞跃的提升，数学抽象的思维能力得到坚实的发展.

（2）要善于安排“实践”的活动，让学生在亲自实践中体验知识的内在意义，发现规律，并在实际操作中落实操作技能. 例如，“平面直角坐标系中点的坐标的符号规律”、“函数图象的画法”和“一次函数图象的画法”等知识与技能教学，都适合采取这样的教学方法.

（3）倡导“探索式”学习，适时安排“实践、探索”的学习活动，让学生在探索知识的规律、发现知识间的联系的过程中，在深入了解知识内容的内在本质的同时，培养学生自主地经历由未知寻求已知的探索过程，锻炼顽强钻研、锲而不舍的探索精神.

在一次函数图象的教学中，表达式 $y=kx+b$（$k\neq0$）中 k 和 b 对图象位置和走向的影响，教材主张组织学生在实践探索中归纳出来.

（4）教材落实“用问题驱动认识发展”和“通过学生参与解决问题来培养能力”的理念，提出了很多“问题”，设置了很多“思考”的栏目，让学生在理性思考中发展科学思维的能力.

一次函数的性质就是安排由学生观察图象的走向，深入思考而归纳出来的. 在一次函数的应用中，把“文字叙述”归结为“数学问题”、“寻求解法的切入点”、“设计解题全过程”等，都应让学生独立思考，在生生互动、师生互动中，认真反复深入思考而获得解决.

（5）重视数学思想方法的渗透. 本章主要涉及函数与方程、数形结合、分类讨论、特殊与一般、模型等数学思想，以及归纳、类比、抽象概括等探索研究问题的一般方法. 如图象法是函数的一种重要的表示方法，通过坐标系中曲线上的点的坐标反映变量之间的对应关系，将数量关系形象直观化，提供了数形结合的重要研究方法. 教学中不能仅仅关注具体问题的解题过程，应不断加深对相关数学思想方法的提炼和

领会，不断认识方法的本质.

世界是处于运动变化中的，函数是研究运动变化的重要数学模型. 函数的实质就是运动变化和联系对应. 作为函数的起始教学，应有意识地体现函数的本质. 在教学中也应该逐步地对这一思想进行渗透，逐步深化，要从具体到抽象、从特殊到一般地引导学生去认识它.

5. 课时安排.

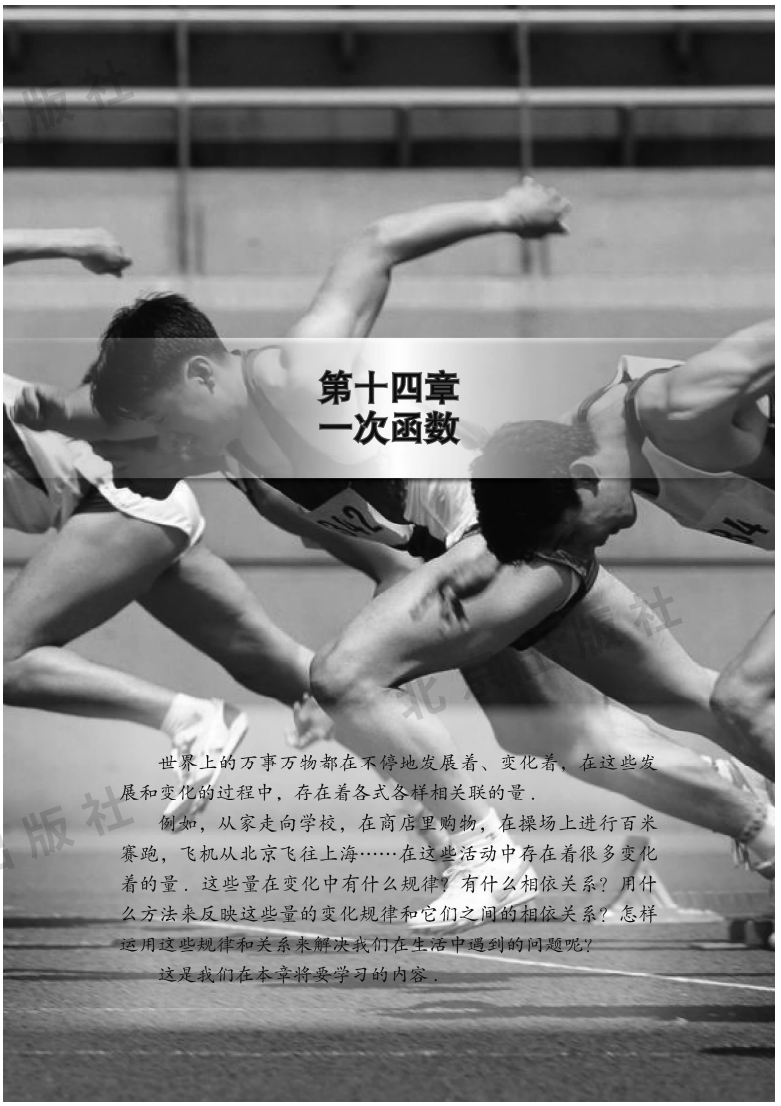
本章教学约需 19 课时，具体分配如下（仅供参考）：

14.1	函数	约 3 课时
14.2	函数的表示法	约 2 课时
14.3	函数图象的画法	约 3 课时
14.4	一次函数	约 1 课时
14.5	一次函数的图象	约 2 课时
14.6	一次函数的性质	约 2 课时
14.7	一次函数的应用	约 3 课时
总结与复习		约 3 课时

北京出版社

北京出版社

教材及其参考信息



本页内容是本章的引言，目的是引导学生用数学的眼光观察身边事物，逐步建立函数观点，提出问题，导入主题.

一 函数和函数的图象

14.1 函数

1. 变量和常量

交流

1. 在章前页所列举的每一项活动中，都存在着哪些互相关联的量？这些量中，哪些量是在不断变化的？哪些量是保持不变的？

2. 在你的身边是否有这样的事物，它涉及变化的量和不变的量？

从北京到上海的飞机在飞行过程中，涉及的量有：飞行时间、飞行里程、乘客的总人数、行李的总质量、油箱内的剩余油量……其中，飞行时间、飞行里程、剩余油量等都是不断变化的量；乘客的总人数、行李的总质量都是不变的量……

一般地，在一个变化的过程中，可以取不同数值的量叫做变量，只取同一数值的量叫做常量.

例 1 判断下面各题中，哪些是常量，哪些是变量：

(1) 用公式 $S=\pi r^2$ 计算圆的面积；

(2) 用公式 $s=vt$ 计算汽车以每小时 80 千米匀速行驶的路程；

(3) 一个容积是 10 万升的储油罐内储满了汽油，如果每天运出 4 000 升，计算储油罐内的剩余油量.

解：(1) 在 $S=\pi r^2$ 中，π 是常量，r 和 S 都是变量；

(2) 在 $s=80t$ 中，80 是常量，s 和 t 都是变量；

(3) “10 万升”和“4 000 升”是常量，“供油的天数”和储油罐内的“剩余油量”都是变量.

在本节的教学中，应让学生在对身边事物观察、思考的基础上，敞开思想，建立对变量和常量的认识，并提高到对已知的计算公式从变量和常量的角度进行分析以提高认识.

练习

电度表内存入了 1 000 度[①]电，每度电收费 0.48 元，计算每月的电费．在此计算过程中存在着哪些量？哪些是变量？哪些是常量？



2. 函数

在事物的变化过程中，存在着变量和常量．这些量之间有什么关系呢？

例如，在飞机飞行的过程中，起飞后的飞行里程和油箱内的剩余油量与起飞后的飞行时间分别有什么关系呢？

探索[1]

1. 已知飞机的平均航速是 14 km/min，请填写下表：

飞行时间 /min	5	15	20	30	45	60	70	80	100
飞行里程 /km									

2. 已知这架飞机起飞时油箱内的油量为 13 t，飞行时每分钟耗油 0.12 t，请填写下表：

飞行时间 /min	5	15	20	30	45	60	70	80	100
剩余油量 /t									

3. 飞行里程和油箱内的剩余油量是怎样受到飞行时间的影响和制约的？

在填表的过程中我们发现，“飞行里程”、油箱内的“剩余油量”是受到“飞行时间”的影响和制约的．对于“飞行时间”的每一个值，“飞行里程”和“剩余油量”都有唯一确定的值和它对应．

一般地，在一个变化过程中，有两个变量 x 和 y，对于变量 x 的每一个值，变量 y 都有唯一确定的值和它对应，我们就把 x 称为自变量，y 称为因变量，y

① 1 度 = 1 千瓦时．

练习答案：“1 000 度电”、“0.48 元”都是常量，“月用电量”、“月电费”等都是变量．

［1］让学生在填表的过程中，感受变量和变量间的对应关系，认识到“飞行里程”和“剩余油量”都随“飞行时间”的确定而确定，为树立函数观念作铺垫．

“探索”答案：

1. 略．
2. 略．
3. 飞行时间越长，飞行里程越长；飞行时间越长，耗油量越多，油箱内的剩余油量越少．

引导学生注意，变量和变量间的对应关系常是在常量存在的条件下发生的，而且一个量在一定的条件下可能是变量，在另一条件下又可能是常量．可让学生举例说明．

[1] 例2是让学生在运用中进一步理解函数的定义. 切记不要直接讲解，而应组织学生参与辨析，在学生难以判断时，应让他们回到（包括阅读）函数定义，在辨析中逐步加深理解.

练习答案：

1. 略.
2. 略.
3. （1）是；
（2）不是.

是 x 的函数.

例2[1] 下面每题都给出了某个变化过程中的两个变量 x 和 y，判断 y 是不是 x 的函数：

（1）y：正方形的面积. x：这个正方形的周长.

（2）y：长方形的面积. x：这个长方形一边的长.

（3）y：一个正数的平方根. x：这个正数.

（4）y：一个正数的算术平方根. x：这个正数.

解：（1）对于正方形周长的每一个值，这个正方形的面积都有唯一确定的值和它对应，所以 y 是 x 的函数；

（2）对于长方形一边长的每一个值，这个长方形的面积是不确定的，它没有唯一确定的值和它对应，所以 y 不是 x 的函数；

（3）对于正数的每一个值，都有两个互为相反数的平方根和它对应，由于和它对应的值不是唯一的，所以 y 不是 x 的函数；

（4）对于正数的每一个值，都有唯一确定的算术平方根和它对应，所以 y 是 x 的函数.

练习

1. 学校组织同学们看电影，人数和总票款之间存在函数关系吗？如果存在，指出其中的自变量和因变量，描述一下它的因变量是怎样受到自变量的影响和制约的.
2. 举出可以看做函数的例子，指出其中的自变量、因变量和常量，描述一下它的因变量是怎样受到自变量的影响和制约的.
3. 下面每题都给出了某个变化过程中的两个变量 x 和 y，判断 y 是不是 x 的函数：
（1）y：等边三角形的面积. x：这个等边三角形的边长.
（2）y：三角形的周长. x：这个三角形的面积.

我们解答过一些求代数式的值的题目，例如根据字母 x 的一些值，求出如

$$3x^2-2x+4,\ \frac{x+1}{3x-2},\ \sqrt{5-3x},\ \cdots$$

这样一些代数式的值. 例如当 x 的值分别取 -5，0，1，…时，$3x^2-2x+4$ 的

函数的定义是本节的重要内容之一. 学生对它的理解，首先要建立在对有关情景和教材第3页“探索”的基础上，重点认真掌握以下三点：

（1）“对于 x 的每一个确定的值”实际上是指在自变量的取值范围内的每一个确定的值；

（2）“唯一”和“确定”是定义中的关键词，它是判断是否是函数的主要依据；

（3）“对应”是定义中的另一个关键词，这是对两个变量各值的相互关系的一种描述.

值分别为 89，4，5，…；$\frac{x+1}{3x-2}$ 的值分别为 $\frac{4}{17}$，$-\frac{1}{2}$，2，…；$\sqrt{5-3x}$ 的值分别为 $2\sqrt{5}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{2}$，….

1. 根据函数的意义，可以把 x 看做自变量，把代数式的值 y 看做因变量，那么 y 是 x 的函数吗？为什么？

2. 自变量 x 的取值范围有限制吗？如果有，这些限制是什么？

思考 [1]

一般地，对于 x（使代数式有意义）的每一个值，各代数式都有唯一确定的值和它对应，所以可以把 x 看做自变量，把各代数式的值 y 看做因变量，y 就是 x 的函数．这些函数可以写成

$$y=3x^2-2x+4,\ y=\frac{x+1}{3x-2},\ y=\sqrt{5-3x}\ ,\cdots$$

对于函数 $y=3x^2-2x+4$，x 可以取任意实数；对于函数 $y=\frac{x+1}{3x-2}$，x 可以取不等于 $\frac{2}{3}$ 的任意实数，也可以表示为 $x\neq\frac{2}{3}$；对于函数 $y=\sqrt{5-3x}$，x 可以取不大于 $\frac{5}{3}$ 的任意实数，也可以表示为 $x\leqslant\frac{5}{3}$．

想一想，为什么？

思考

圆的周长公式 $C=2\pi r$ 中，自变量 r 的取值范围是什么？[2]

对于周长公式 $C=2\pi r$，自变量 r 的值不仅要使式子 $2\pi r$ 的值存在，而且还要有实际意义，所以 r 的取值范围不是一切实数，而是一切正实数．

一般地，研究函数时应考虑函数的自变量的取值范围．

［1］从学生的经验出发，既加深了对“求代数式的值”的认识，又引入了“自变量的取值范围”的概念.

［2］引导学生把对函数的自变量的取值范围的思考引向全面，把“代数式中字母的取值范围”和“使实际问题有意义”结合起来并加以区别.

这里是引导学生用函数的观点重新认识“求代数式的值”，并由保证“代数式的值”的存在引出函数“自变量的取值范围”的概念.

对于“含分式的函数”和“含根式的函数”自变量的取值范围的求法，教材并未归纳，可在适当的时候让学生加以归纳，但不必加大难度，更不宜引入烦琐的题目.

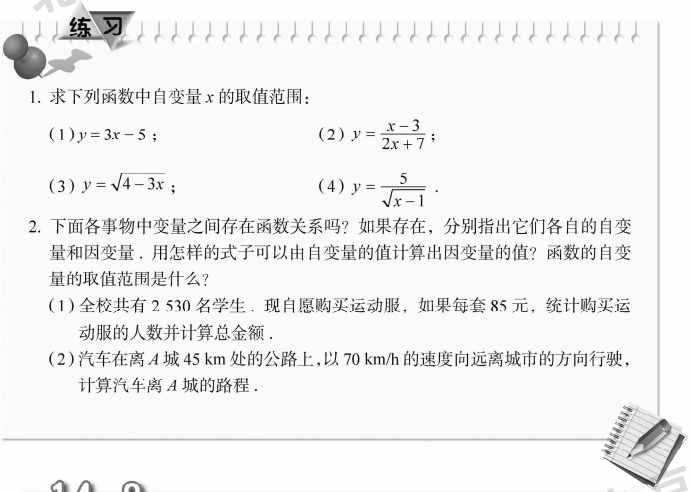
练习答案：

1. （1）x 可以取任意实数；（2）x 可以取 $-\frac{7}{2}$ 以外的任意实数；（3）x 可以取不大于 $\frac{4}{3}$ 的任意实数；（4）x 可以取大于 1 的任意实数.

2. （1）存在. 自愿购买运动服的人数是自变量，设人数为 x 人，购买运动服的总金额为 y 元. $y=85x$. 自变量 x 的取值范围是 $0\leqslant x\leqslant 2\ 530$，$x$ 是整数.

（2）存在. 时间是自变量，设汽车行驶的时间为 x h，汽车离 A 城的距离为 y km. $y=70x+45$. 自变量 x 的取值范围是 $x\geqslant 0$.

[1] 引导学生深入认识函数表达式的结构特征，即“用关于表示自变量的字母的式子表示函数的等式”.



练习

1. 求下列函数中自变量 x 的取值范围：

（1）$y=3x-5$；　　（2）$y=\frac{x-3}{2x+7}$；

（3）$y=\sqrt{4-3x}$；　　（4）$y=\frac{5}{\sqrt{x-1}}$.

2. 下面各事物中变量之间存在函数关系吗？如果存在，分别指出它们各自的自变量和因变量. 用怎样的式子可以由自变量的值计算出因变量的值？函数的自变量的取值范围是什么？

（1）全校共有 2 530 名学生. 现自愿购买运动服. 如果每套 85 元，统计购买运动服的人数并计算总金额.

（2）汽车在离 A 城 45 km 处的公路上，以 70 km/h 的速度向远离城市的方向行驶，计算汽车离 A 城的路程.

14.2 函数的表示法

思考

在前面，我们曾用 $s=80t$，$y=3x^2-2x+4$，$y=\frac{x+1}{3x-2}$，…来表示函数关系，其中：t，x，…都表示自变量；s，y，…都表示因变量. 那么这些表示函数的式子有什么共同的特征？[1]

它们都是用关于自变量的代数式来表示因变量的式子，应用它们可以由自变量的每一个值，计算出相对应的因变量的值.

像这样，用含有表示自变量的字母的代数式表示因变量的式子叫做函数的表达式. 这种表示函数关系的方法称为解析法.

利用函数的表达式，既可以由函数的任意一个自变量的值求出相应

在本节，让学生认识函数表达式的结构特征是“函数表达式是用关于表示自变量的字母的式子表示函数的等式”，实际上为学生在高中接受符号 $f(x)$ 和抽象函数 $y=f(x)$ 作准备.

的函数的值(简称函数值),也可以由某一个确定的函数值求出相应的自变量的值.

例[1] 已知两个函数的表达式分别为

$$y=2x-5 \quad 和 \quad y=\frac{1}{2}x^2.$$

(1)当 $x=-4$ 时,分别求出这两个函数的函数值;

(2)当这两个函数的函数值都为 18 时,自变量 x 分别取什么值?

解:(1)把 $x=-4$ 分别代入这两个函数的表达式,得

$$y=2x-5=2\times(-4)-5=-8-5=-13.$$

$$y=\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{2}\times(-4)^2=\frac{1}{2}\times16=8.$$

所以,当 $x=-4$ 时,函数 $y=2x-5$ 的函数值为 -13,函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的函数值为 8.

(2)把函数值 $y=18$ 代入函数的表达式 $y=2x-5$,得

$$18=2x-5.$$

解这个方程,得

$$2x=23.$$

所以

$$x=\frac{23}{2}.$$

把函数值 $y=18$ 代入函数的表达式 $y=\frac{1}{2}x^2$,得

$$18=\frac{1}{2}x^2.$$

于是,得

$$x^2=36.$$

因为 x 是 36 的平方根,所以

$$x=6 \quad 或 \quad x=-6.$$

所以,当这两个函数的函数值都为 18 时,函数 $y=2x-5$ 的自变量 x 的值为 $\frac{23}{2}$,函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的自变量 x 的值为 6 或 -6.

[1] 解答完题目后,教师可引导学生初步感知函数概念中自变量与因变量之间通过函数表达式的对应关系,为高中学习函数概念作铺垫.

[1] 要注意以下几个方面：

（1）首先让学生判断乘公共汽车的“票价”和乘公共汽车的“站数”为什么可以看成函数关系；

（2）再让学生考虑到表示这个函数若用解析法却难以实现；

（3）最后引出“列表法”.

[2] 让学生进一步巩固从图象中获得信息的能力. 在组织课堂讨论时，应集思广益，互相启发，互相评价，共同提高“读图”的能力.

探索 [1]

某城市有一路全程共 22 站的公共汽车，其票价是这样规定的：1 ~ 4 站，1.00 元；5 ~ 8 站，1.50 元；9 ~ 14 站，2.00 元；15 ~ 22 站，2.50 元.

在这里，票价是乘车站数的函数吗？如果是，怎样表示这个函数呢？

在这种乘车收费的规定下，对于乘车的每一个站数，都有一个唯一确定的票价和这个站数相对应，所以票价与乘车站数也存在着函数关系. 由于这个函数的自变量只有 22 个值，所以用列表的方法就可以表示出它们的对应关系：

乘车站数	1 ~ 4	5 ~ 8	9 ~ 14	15 ~ 22
票价 / 元	1.00	1.50	2.00	2.50

像这样用列表来表示函数关系的方法称为列表法.

交流

洞庭湖地区连日遭受暴雨袭击，导致湖水的水位猛涨，图 14 – 1 是涨水期 22 日至 27 日的水位记录. 观察这个图形，你能从中获得什么信息？[2]

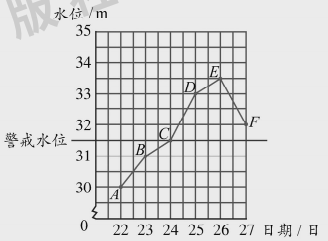


图 14 – 1

应当注意，在这个公共汽车票价的函数问题中，虽然对于自变量的不同的值（如 1，2，3，4）因变量都有同一个值（这个值是 1.00 元）和它们对应，它仍然满足函数的定义中“唯一确定”的要求，只是一种“多对一”的对应. 这一点应引导学生认真思考，使他们不仅能对公共汽车票价问题有深入的认识，而且还能进一步加深对函数定义的理解.

观察这个图形．

(1)填下表，得：

日期/日	22	23	24	25	26	27
水位/m	30	31	31.5	33	33.5	32

(2)这几天中的每一时刻，都有唯一确定的水位和它对应，所以可以认为水位是时间的函数；

(3)从22日起，水位开始上涨，26日水位达到最高；

(4)从24日起，水位开始超过警戒水位，全天水位上涨了1.5 m；

(5)从26日起，水位开始回落；

……

由此可见，用这样的图形表现一个函数关系的变化状态，可以做到直观、简洁和一目了然．我们把这样的图形叫做这个函数的图象．用画图象表示函数关系的方法称为图象法．

归纳起来，表示函数关系的主要方法有解析法、列表法和图象法．

练习

1. 某文具店促销一种圆珠笔，它的单价随购买量的增加而降低．具体方案如下：
   1～5支，每支1.00元；
   6～10支，每支0.90元；
   11～20支，每支0.80元；
   21支及以上，每支0.70元．
   顾客购买这种圆珠笔时，他的付款总额(元)与他购买的数量(支)是函数关系吗？如果是，用适当的方法表示这个函数关系．
2. 已知城市轻轨列车的平均速度约是1 330 m/min．廖欣同学每天上学时，须先步行850 m到达轻轨车站．当他上车后，离家的总路程s是他上车后的时间t的函数吗？如果是，请写出这个函数的表达式．
3. 请你找一个用图象法表示函数的实例，说出你从中获得的信息．

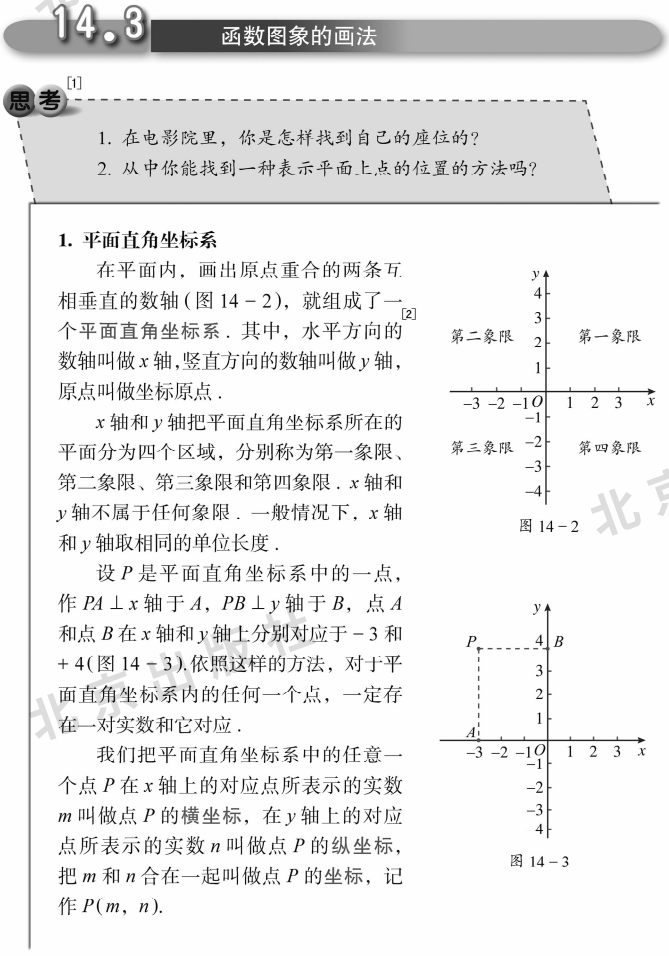
练习答案：

1. 略．
2. 是；$s=1\ 330t+850$.
3. 略.

在这种课堂讨论中，要注意组织不同水平的学生参与，鼓励他们展开思维．学生的发言不要全否定，要注意发挥集体智慧，互相补充，互相启发，互相评价，创造生动活泼的研讨氛围，不必要求学生从图象中获得的信息有统一的答案.

[1] 引导学生把生活中的经验归结为数学问题，用数学的观点、方法解释生活中的一些问题，提高把生活实际和数学知识紧密联系的能力.

[2] 此处是针对教材图14－2而言，“水平方向”和“竖直方向”不是本质的，也有其他情况，只是习惯上将 x 轴画成水平的，y 轴画成竖直的.



14.3 函数图象的画法

思考[1]

1. 在电影院里，你是怎样找到自己的座位的？
2. 从中你能找到一种表示平面上点的位置的方法吗？

1. 平面直角坐标系

在平面内，画出原点重合的两条互相垂直的数轴（图 14－2），就组成了一个平面直角坐标系[2]. 其中，水平方向的数轴叫做 x 轴，竖直方向的数轴叫做 y 轴，原点叫做坐标原点.

x 轴和 y 轴把平面直角坐标系所在的平面分为四个区域，分别称为第一象限、第二象限、第三象限和第四象限. x 轴和 y 轴不属于任何象限. 一般情况下，x 轴和 y 轴取相同的单位长度.

设 P 是平面直角坐标系中的一点，作 $PA \perp x$ 轴于 A，$PB \perp y$ 轴于 B，点 A 和点 B 在 x 轴和 y 轴上分别对应于 -3 和 $+4$（图 14－3）. 依照这样的方法，对于平面直角坐标系内的任何一个点，一定存在一对实数和它对应.

我们把平面直角坐标系中的任意一个点 P 在 x 轴上的对应点所表示的实数 m 叫做点 P 的横坐标，在 y 轴上的对应点所表示的实数 n 叫做点 P 的纵坐标，把 m 和 n 合在一起叫做点 P 的坐标，记作 $P(m, n)$.

图 14－2

图 14－3

要让学生明白：

（1）平面直角坐标系是由两条数轴组成的，所以数轴上的原点（两原点重合）就转化为平面直角坐标系的原点；原来数轴上的点只对应于一个实数，平面直角坐标系所在平面上的点就对应于一对实数了.

（2）平面直角坐标系所在平面上不同的点对应于不同的实数对，它们是一一对应的；学生不仅要会在平面直角坐标系上由点的位置确定它的坐标，还要会由点的坐标在平面直角坐标系上确定点的位置. 应注意这两方面的训练.

对于平面直角坐标系的引入，教师也可引导学生从一维空间的数轴类比到二维空间的平面直角坐标系，为高中学习空间直角坐标系奠定思维基础.

实践[1]

1. 在平面直角坐标系中的各个象限内和两条坐标轴上作出一些点，并确定这些点的坐标，同时注意各点坐标的符号变化．

2. 利用计算机或图形计算器，在平面直角坐标系中拖动动点，观察动点坐标的变化，看看点的位置和点的坐标有什么关系（图 14－4）．并回答：

（1）在各个象限内点的横坐标和纵坐标的符号有什么特点？

（2）在两坐标轴上点的坐标有什么特点？

（3）如果直线 a 和 y 轴平行，并且经过点（3，0），那么直线 a 上的点的坐标有什么特点？

（4）如果直线 b 和 x 轴平行，并且经过点（0，－3），那么直线 b 上的点的坐标有什么特点？

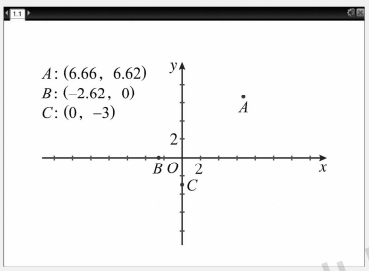


图 14－4

例 1[2] （1）在平面直角坐标系中，作出下列各点：

$A(-1,-1)$，$B(-1,1)$，$C(1,1)$，$D(1,-1)$．

顺次连接点 A，B，C，D 所得的图形是哪种特殊的四边形？

（2）在平面直角坐标系中，已知点 M 的坐标是（－5，3），点 P 和点 M 关于 x 轴成轴对称，点 N 和点 M 关于 y 轴成轴对称．分别作出点 N 和点 P，并求出点 N，P 的坐标．

［1］让学生亲自画图或操作计算机并观察发现坐标平面上的点的符号有什么规律，两坐标轴上的点的坐标有什么特点．教学中要让学生充分实践，并在此基础上归纳、概括规律，促进学生思维能力的发展．

［2］例题的安排，一方面是巩固坐标平面上点的标注方法，另一方面也是经历作轴对称点的过程．

例 1 的教学过程同样要组织学生参与，不宜完全由教师讲授．建议按照先由学生操作、学生板演，再由大家评价，最后教师示范的顺序进行．

[1] 此例题为今后处理有关“长度”的几何问题奠定基础.

[2] 再一次让学生亲自画图或操作计算机，观察发现坐标平面上关于坐标轴对称的点的坐标有什么规律. 这是再一次对学生观察发现能力的培养.

解：(1) 如图 14－5(1)，四边形 $ABCD$ 是正方形.

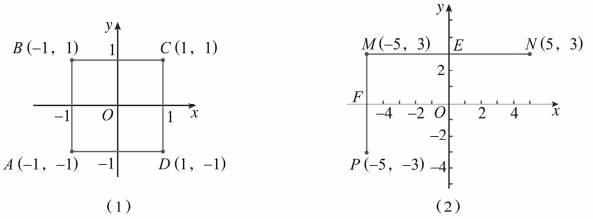


图 14－5

(2) 如图 14－5(2)，作 ME 垂直 y 轴于点 E，并延长 ME 至点 N，使 $EN = ME$，点 N 就是点 M 关于 y 轴的对称点；作 MF 垂直 x 轴于点 F，并延长 MF 至点 P，使 $FP = MF$，点 P 就是点 M 关于 x 轴的对称点. 点 N 的坐标为 (5，3)；点 P 的坐标为 (－5，－3).

例 2 [1] 分别求出下列各点到 x 轴、y 轴的距离：

(1) (－5，3)；　　(2) (－3，－4).

解：(1) 点 (－5，3) 到 x 轴的距离为 $|3| = 3$，到 y 轴的距离为 $|-5| = 5$.

(2) 点 (－3，－4) 到 x 轴的距离为 $|-4| = 4$，到 y 轴的距离为 $|-3| = 3$.

实践 [2]

1. 在平面直角坐标系的各个象限内确定一些点，并作出这些点关于 x 轴对称的点，再作出这些点关于 y 轴对称的点.

2. 如图 14－6，利用计算机或图形计算器，拖动平面直角坐标系中的动点，观察动点关于坐标轴对称点的坐标的变化. 并回答：

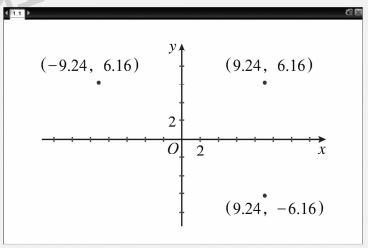


图 14－6

概括出坐标平面上关于坐标轴对称的点的坐标有什么共同的特点，是对观察发现能力的进一步要求，是思维能力培养的一部分. 所以“实践”这个教学措施，不仅着眼于知识的传授，更着眼于人的全面素质的提高，不可忽视.

(1) 关于 x 轴对称的两个点的坐标有什么关系？

(2) 关于 y 轴对称的两个点的坐标有什么关系？

不难发现，关于 x 轴对称的两个点的横坐标相同，纵坐标互为相反数；关于 y 轴对称的两个点的纵坐标相同，横坐标互为相反数.

练习

1. 点 $A(-3, 4)$ 和点 $B(3, 4)$ 关于_____轴对称.
2. 点 $P(2, -3)$ 关于 x 轴对称的点的坐标是_____；关于 y 轴对称的点的坐标是_____.
3. 在平面直角坐标系中，描出下列各点：$A(-2, 1)$ 和它关于 y 轴的对称点 B；$C(0.5, -2)$ 和它关于 y 轴的对称点 D；顺次连接 A，B，C，D，看看得到什么图形.

2. 函数图象的画法

把一个函数的一个自变量的值，和它所对应的因变量的值分别作为一个点的横坐标和纵坐标，就能在平面直角坐标系中描出相应的一个点，由所有这样的点组成的图形，就是这个函数的图象.[1]

实践[2]

在平面直角坐标系中，分别画出下面三个函数的图象：

(1) $y=2x$；　(2) $y=x^2$；　(3) $y=x^3$.

在动手之前，请想一想：

(1) 这三个函数的自变量 x 的取值范围分别是什么？是否可以把每一个点都画在坐标纸上？

练习答案：

1. y.
2. $(2, 3)$；$(-2, -3)$.
3. $B(2, 1)$，$D(-0.5, -2)$；一组对边平行且另一组对边不平行的四边形.

[1] 这段文字实际上给出了函数图象的作法，应组织学生认真阅读，为下面的“实践”作准备.

[2] 是把“做”和“想”结合起来，具有探索性，也是对独立学习能力的一种培养.

这里的“实践”应在课堂上组织学生独立操作，但教师应随时针对发生的问题给予指导，在师生互动中展开. 如何选择适合的点应是讨论的重点，应引导学生就图象的“位置”和“变化趋势”先进行估计，再选点作图.

(2) 如果不能，是否能选择一些合适的点，使我们通过一定数量的点的位置，估计出这个函数图象的形状和变化趋势？你怎样选取这些合适的点？

由于这三个函数的自变量 x 的取值范围都是全体实数，我们可以选取和原点对称的又便于计算的一些自变量的值，从而得出各自对应的因变量的值.

填写下表：[1]

函数 y \ x	…	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	…
$y=2x$	…								…
$y=x^2$	…								…
$y=x^3$	…								…

我们把每个函数的 7 个点从左到右用平滑的曲线依次连接起来，[2] 就得到这三个函数的图象，如图 14－7 所示.

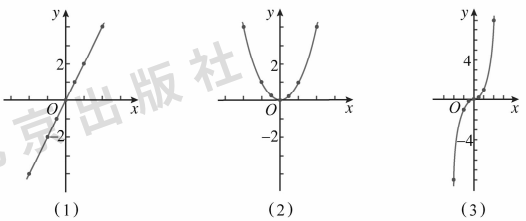


图 14－7

在画图时，由于每两个点之间还存在无数多个符合条件的点，所以我们总可以根据需要作出更多的点，以便更准确地看出曲线的走势，画出更精确的图象.有时所得的图象是一条直线 [图 14－7(1)]，有时所得的图象是一条弯曲、平滑的曲线 [图 14－7(2)、(3)].

[1] 由学生亲手计算因变量的对应值来填表是有意义的活动.他们可以亲身感受可选点的无穷和选出点的有限，体会特殊点的价值，了解选点的疏密和图象曲线走向的关系，等等.

[2] 描点的要求是要及时判断图象是直线还是曲线，是曲线时连线要平滑，改变方向时要自然过渡，必要时选的点的个数可增加，达到曲线面貌清晰为止.

实践

利用计算机或图形计算器[1]可以快速准确地得到函数的图象，如图 14－8.

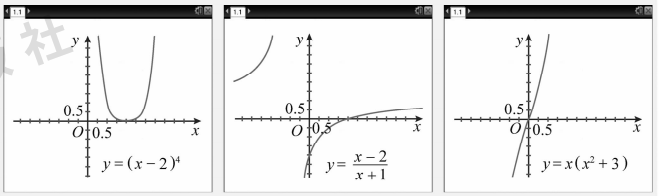


图 14－8

练习

1. 在同一坐标系中画出下列函数的图象：

(1) $y=-x$；　(2) $y=x+2$；　(3) $y=-\frac{1}{2}x^2$.

2. 写出在函数 $y=\frac{1}{2}x-2$ 的图象上的五个点的坐标：_____，_____，_____，_____，_____.

3. 利用计算机或图形计算器，画出任意几个简单函数的图象.

习　题　14－1

★基础★

1. 根据点所在的象限用“＋”、“－”填表：

	横坐标符号	纵坐标符号
第一象限		
第二象限		
第三象限		
第四象限		

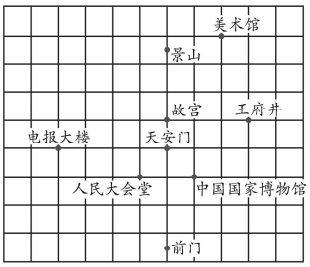
[1] 为扩大学生的视野，教材安排使用图形计算器或计算机课件演示较复杂函数的图象，如有可能，可以辅导学生自己操作，欣赏更复杂美丽的图象.

练习答案：

1. 略.
2. 略.
3. 略.

北京出版社

2. 下图是天安门广场周围的景点分布示意图．试建立平面直角坐标系，用坐标表示各个景点的位置．



（第 2 题）

3. 求下列函数的自变量 x 的取值范围：

（1）$y=-4x$；　（2）$y=\dfrac{3x+1}{2}$；　（3）$y=\dfrac{8}{x+5}$；

（4）$y=\sqrt{2x-5}$；　（5）$y=\dfrac{\sqrt{x-2}}{x-3}$．

4. 选择题：

（1）点 P 的坐标为 $(a,\ b)$，其中 $a<0$，$b<0$，那么点 P 在（　　）．

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

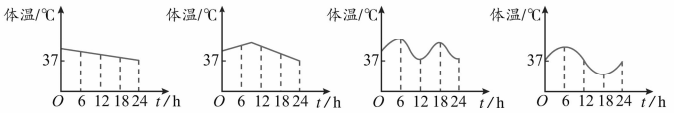
（2）点 $(a,\ b)$ 关于 y 轴对称的点的坐标是（　　）．

A. $(-a,\ -b)$　　B. $(b,\ a)$　　C. $(-a,\ b)$　　D. $(a,\ -b)$

（3）当 $x=0$ 时，点 $A(x,\ y)$ 一定在（　　）．

A. 第一象限　　B. 坐标原点　　C. x 轴上　　D. y 轴上

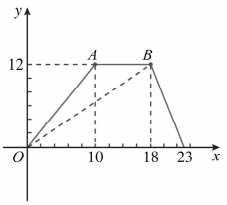
（4）一天，肖亮发烧了．早晨他烧得很厉害，吃过药后感觉好多了．中午时他的体温基本正常，但是下午他的体温又开始上升，直到半夜肖亮才感觉身上不那么发烫了．下面能基本反映出肖亮这一天体温变化情况的图象是（　　）．



［第 4(4) 题］

5. 写出下列函数关系的表达式，并指出它的自变量与因变量．
（1）三角形的面积 S 为定值时，它的底边长 a 与这条边上的高 h 之间的函数关系．
（2）气体质量 m 一定时，它的体积 V 与它的密度 ρ 之间的函数关系．
（3）0 ℃时声音在空气中的传播速度是 332 m/s，写出此时声音传播的路程 s(m) 与传播的时间 t(s) 的函数表达式．
（4）设地面气温是 30 ℃．在不高于 12 km 时，如果高度每升高 1 km，气温就下降 6 ℃，写出气温 T(℃) 与高度 h(km) 之间的函数表达式．
（5）一种可推拉的长方形塑钢窗，长为 862 mm，打开时的最大宽度为 475 mm．若设打开的宽度为 x mm，写出打开部分的面积 S(mm²) 与打开的宽度 x(mm) 的函数表达式，并写出自变量 x 的取值范围．

6. 一个函数的图象如图所示，根据图象回答下列问题：
（1）写出函数的自变量 x 的取值范围．
（2）当 x 的值逐渐变大时，函数值 y 怎样变化？
（3）求线段 AB 的长．
（4）求 $\triangle AOB$ 的面积．



（第 6 题）

★★提升★★

1. 求下列函数的自变量 x 的取值范围：
（1）$y=\dfrac{3-\sqrt{x-2}}{x-2}$；　　（2）$y=\dfrac{3x+1}{x^2+1}$；
（3）$y=\dfrac{1}{3x-5}+\sqrt{5-x}$；　　（4）$y=\sqrt{2x+4}-\sqrt{3-2x}$．

2. 选择题：
（1）如果点 $P(a,\ b)$ 在第三象限，那么点 $Q(-2a+3,\ b-1)$ 在（　　）．
A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限
（2）点 P 的坐标为 $(2-a,\ 3a+6)$，且点 P 到两坐标轴的距离相等，那么点 P 的坐标是（　　）．
A. (3，3)　　B. (3，−3)　　C. (6，−6)　　D. (3，3) 或 (6，−6)

3. 点 $P(a+3,\ 2b-1)$ 和点 $Q(3b-2,\ 1-a)$ 关于 x 轴对称，求点 $M(a,\ b)$ 的坐标．

4. 如果一个等边三角形 ABC 的一边 AB 在 y 轴上，其顶点 A 在坐标原点．已知 $AB=1$，求第三个顶点 C 的坐标．

5. 下表是五年中全国高考报名人数和招生人数统计(单位：万人)：

年　份	报名人数	招生人数
2006	950	540
2007	1 010	567
2008	1 050	596
2009	1 020	630
2010	957	627

根据统计表，和同学交流你所得到的信息．

6. 恩格尔系数 η 表示在一定时期内家庭日常食品支出 W(元)占家庭消费总支出 y(元)的比例，它反映了居民家庭的实际生活水平．各种家庭类型的恩格尔系数如下表所示：

家庭类型	贫困家庭	温饱家庭	小康家庭	富裕家庭	最富裕家庭
恩格尔系数 η	60% 以上	50% ~ 60%	40% ~ 50%	20% ~ 40%	不到 20%

(1) 如果某类家庭的恩格尔系数 η 是定值，那么这类家庭的日常食品支出 W(元)是否是消费总支出 y(元)的函数？如果是，写出这个函数的表达式．

(2) 请估算一下你家的恩格尔系数，判断你的家庭属于什么生活水平．

(3) 如果某温饱家庭、小康家庭、富裕家庭的消费总支出分别为 3 000 元、6 000 元和 12 000 元，那么，这三个家庭的日常食品支出各在什么范围内？

★★★拓展★★★

1. 搭 1 个正方形需要 4 根火柴棍．

(1) 按照图中的方式，搭 2 个正方形需要几根火柴棍？搭 3 个正方形呢？



(第 1 题)

(2) 搭 10 个这样的正方形需要多少根火柴棍？

(3) 如果用 x 表示所搭正方形的个数，搭 x 个这样的正方形需要 y 根火柴棍，那么 y 与 x 之间存在函数关系吗？如果存在，请你写出函数的表达式．

(4) 用 100 根火柴棍可以搭多少个这样的正方形？

2. 摄氏温度(℃)和华氏温度(°F)是表示温度的两种方法，它们的关系如下表：

摄氏温度/℃	0	10	20	30	40	50
华氏温度/°F	32	50	68	86	104	122

在平面直角坐标系中，通过描点的方法观察各点的分布情况，并回答：

(1)顺次连接各点，判断各点是否在同一条直线上；

(2)试着写出华氏温度 y(°F)和摄氏温度 x(℃)之间的函数表达式.

二 一次函数

14.4 一次函数

交流[1]

1. 判断下列每个问题中的两个变量是否构成函数关系. 如果是，指出哪一个是自变量，哪一个是因变量，并分别写出每一个函数表达式：

(1)等腰三角形顶角的度数 α 和它的一个底角的度数 β 对应；

(2)一个长方形的一边的长是 3 cm，它的面积 S(cm^2)和另一边的长 m(cm)对应；

(3)某种最大量程为 5 N 的弹簧测力计，弹簧的原长度是 15 cm，挂物每增加 1 N 时，弹簧伸长 0.5 cm，这时，伸长后弹簧的总长度 L(cm)和所称物重 p(N)对应.

2. 根据写出的函数表达式，观察含有自变量的代数式的结构有什么共同的特征.

不难看到，它们都可以看做函数关系，而且它们的表达式分别是：

(1) $\alpha = 180 - 2\beta\ (0 < \beta < 90)$；　　(2) $S = 3m\ (m > 0)$；

(3) $L = 0.5p + 15\ (0 \leqslant p \leqslant 5)$.

[1] 在教学中，应当在学生独立思考、动笔试求的基础上进行. 在讨论中，首先应说明每个问题是否构成函数关系，然后列出函数表达式，最后观察表达式构成的共同特征，从而认识一次函数. 它应是一个师生互动、生生互动的交流研讨过程.

由于函数表达式结构相同的一类函数应有类似的性质，所以，根据一类函数表达式结构的共同特点定义函数是常用的方法，以后还会反复应用，应当注意对这种能力的培养. 一次函数的定义方法就是由特殊到一般的过程；反过来，只要研究了一般的一次函数的性质，就能把它应用在任何特殊的一次函数上去，这也是由一般到特殊的过程，是本章知识发展的主要线索.

[1] 应当引导学生注意，在这种定义下，正比例函数是特殊的一次函数.

[2] 列出函数表达式，再根据函数表达式的结构来判定函数的类型，是运用函数的性质的前提. 例 1 和例 2 就是结合实际问题经历这一过程的例子.

$180-2\beta$，$3m$，$0.5p+15$ 都可以归结为 $kx+b$ 的形式.

一般地，我们把形如

为什么 $180-2\beta$ 可以看做 $kx+b$ 的形式?

$$y=kx+b\ (k,\ b\text{ 为常数，且 }k\neq 0)$$

的函数叫做一次函数，其中 x 是自变量. 当 $b=0$ 时，一次函数 $y=kx\ (k\neq 0)$ 又叫做正比例函数.[1]

例 1[2] 一个游泳池有甲、乙两个相同的注水口，每个注水口每分钟注水 7 米^3.

(1) 将游泳池的存水排净，打开甲注水口注入新水，试写出游泳池内的水量 N(米^3) 与注水时间 t_1(分) 的函数表达式和自变量 t_1 的取值范围；

(2) 为了加快注水速度，在打开甲注水口 20 分钟时，又打开乙注水口，写出游泳池内的总水量 P(米^3) 与两注水口同时注水时间 t_2(分) 的函数表达式和自变量 t_2 的取值范围.

解：(1) 设注入游泳池内的水量为 N 米^3，注水时间为 t_1 分. 根据题意，得

$$N=7t_1,$$

自变量 t_1 的取值范围是 $t_1>0$.

(2) 设游泳池内的总水量为 P 米^3，两注水口同时注水时间为 t_2 分，这时，游泳池内已存水 140 米^3，每分钟注水 14 米^3. 根据题意，得

$$P=14t_2+140,$$

自变量 t_2 的取值范围是 $t_2>0$.

例 2 八年级 (1) 班学生接受了在公路的一边植 50 棵树的任务，树苗堆放在公路边的 M 处. 现规定，第一棵树种在离点 M 3 米远的 A 处，而且在 MA 的方向上每隔 5 米种一棵树. 那么，每种一棵树苗时，送树苗所走的路程 s(米) 是所种树苗的序号 n 的函数. 求出它的表达式，并求出它的自变量的取值范围.

分析：

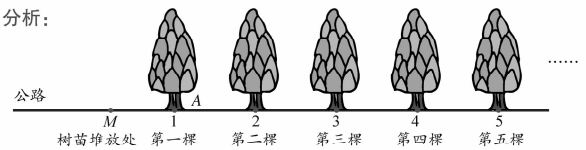


图 14－9

在例 1 和例 2 的教学中，应注意让学生自己读题，而不应由教师替代学生，否则会使学生无法直接对问题进行剖析，也使学生通过阅读可获得的了解实际问题、分析实际问题的能力无法得到应有的提高.

送树苗所走的路程 s（米）和所种树苗的序号 n 的对应关系可列表如下：

n	1	2	3	4	5	6	…
s/米	3	$3+5\times1$	$3+5\times2$	$3+5\times3$	$3+5\times4$	$3+5\times5$	…

从上表中可以发现 s（米）和 n 的函数关系．

解：根据题意，得

$$s=3+5\times(n-1).$$

整理，得函数的表达式

$$s=5n-2.$$

自变量 n 的取值范围是：$1\leqslant n\leqslant 50$，n 是整数．

练习

1. 下列函数中，哪些是一次函数，哪些不是一次函数？在一次函数中，哪些又是正比例函数？

（1）$y=-x+4$；　（2）$y=\frac{2}{5}x$；　（3）$y=-\frac{2+x}{3}$；

（4）$y=-6x^2+7$；　（5）$y=\frac{1}{2}-3x$；　（6）$y=\frac{1}{3x+5}$．

2. 一个长方形的一边比另一边长 3 cm，那么，周长 L（cm）是短边长 a（cm）的函数吗？如果是，写出它的表达式，并求出它的自变量的取值范围．想一想，面积 S（cm²）是短边长 a（cm）的一次函数吗？

3. 北京到天津的路程约为 120 km，刘海涛和同学一起骑自行车从北京去天津旅游．如果他们骑车的速度是 15 km/h，出发 t 时后，距天津还有 s km 的路程，求 s（km）与 t（h）的函数表达式，并求出 t 的取值范围．

14.5 一次函数的图象

我们知道，$y=2x$ 的图象是一条直线，那么任何一个一次函数的图象也是一条直线吗？

练习答案：

1. 是一次函数的有（1）（2）（3）（5）；不是一次函数的有（4）（6）；是正比例函数的有（2）．
2. 是，$L=4a+6$，a 是一切正数；不是．
3. $s=120-15t$（$0\leqslant t\leqslant 8$）．

[1] 让学生在亲自操作中体验一下“一次函数 $y=kx+b$（$k\neq 0$）的图象是一条直线”的结论，并在研讨中，明确一次函数图象的简捷画法.

[2] 这是描述一次函数 $y=kx+b$（$b\neq 0$）的图象是怎样的一条直线. 一般地，采用通过和坐标轴的交点的坐标来描述直线的位置，但并不是唯一的选择. 在教学中，应启发学生参与选择，并说出直线和坐标轴的交点的坐标都是什么.

实践[1]

1. 在平面直角坐标系中分别作出下列函数的图象：

(1) $y=-x$；　(2) $y=-2x+3$；　(3) $y=2x-3$.

2. 观察所得的图象，你认为一次函数 $y=kx+b(k\neq 0)$ 的图象也是一条直线吗？如果是，可以怎样快捷地画出它的图象？

列表：

函数 \ x	…	−3	−2	−1	0	1	2	3	…
$y=-x$	…	3	2	1	0	−1	−2	−3	…
$y=-2x+3$	…	9	7	5	3	1	−1	−3	…
$y=2x-3$	…	−9	−7	−5	−3	−1	1	3	…

描点，作出图象（图 14－10）：

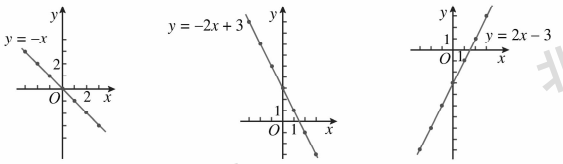


图 14－10

通过描点连线可以发现，函数 $y=-x$，$y=-2x+3$ 和 $y=2x-3$ 的图象也都是一条直线.

所以，我们常把这些函数的图象称为直线 $y=-x$，直线 $y=-2x+3$，直线 $y=2x-3$，等等.

由于两点可以确定一条直线，所以，我们可以说：[2]

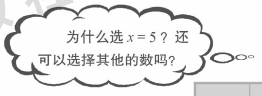
1. 正比例函数 $y=kx$ 的图象是经过原点 $(0,\ 0)$ 和点 $(1,\ k)$ 的一条直线；
2. 一次函数 $y=kx+b(b\neq 0)$ 的图象是经过点 $(0,\ b)$ 和点 $\left(-\frac{b}{k},\ 0\right)$ 的一条直线.

在“函数图象的画法”一节中，学生曾画过函数 $y=2x$ 的图象，并且感受到它的图象是一条直线. 由于教材对“$y=2x$ 的图象是一条直线”并不要求证明，所以对“一次函数的图象是一条直线”也不要求证明，但可以告诉学生这是可以证明的，这里只是省略了.

例 1[1] 作出一次函数 $y=-\frac{3}{5}x+2$ 的图象.

分析：只需确定两个点的坐标，就能作出这个函数的图象.

解：列表如下.



x	0	5
y	2	−1

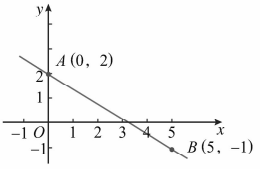


图 14 − 11

描点画图，如图 14 − 11.

例 2[2] 一个一次函数的图象经过 (− 3，5) 和 (5，9) 两点，求它和坐标轴交点的坐标.

分析：求出这个一次函数的表达式，就能求出它和坐标轴交点的坐标.

解：设这个一次函数的表达式为

$$y=kx+b\ (k\neq 0),$$

由于点 (− 3，5) 和 (5，9) 在这个一次函数的图象上，所以有

$$\begin{cases}-3k+b=5,\\5k+b=9.\end{cases}$$

解这个二元一次方程组，得

$$\begin{cases}k=\frac{1}{2},\\b=\frac{13}{2}.\end{cases}$$

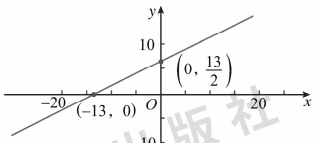


图 14 − 12

于是，得到这个一次函数的表达式为

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{13}{2}.$$

令 $x=0$，得 $y=\frac{13}{2}$；令 $y=0$，得 $x=-13$. 所以这个一次函数的图象和 y 轴的交点坐标为 $\left(0,\frac{13}{2}\right)$，和 x 轴的交点坐标为 (− 13，0) (图 14 − 12).

应当注意，确定一个函数的表达式，就是要确定表达式中各项系数的值. 对于一次函数 $y=kx+b$ 来说，就是确定 k 和 b 的值. 像例 2 那样，先把

[1] 在进行例 1 的教学时，不仅应当知道应用“两点确定一条直线”，而且应当知道并不一定都选择和坐标轴的交点的坐标来画出它的图象或求出函数的表达式. 因为当直线和坐标轴的交点十分接近原点时，两点距离过近，不好作图，计算时数值的绝对值过小，都不容易操作. 取 $x=5$ 就是使得计算和作图都方便的选择.

[2] 安排例 2 的目的是让学生理解和掌握一次函数的表达式与它的图象的关系，并介绍待定系数法. 在今后的教学中，将逐步反复应用这种方法，所以在这里应让学生有较深的印象. 安排例 2 的另一个目的是让学生理解掌握一次函数的表达式常是解决一次函数问题的必由之路，这种认识是很有意义的.

在作一次函数的图象时，取哪两个点较为适合应让学生讨论，比较优劣后再决定，而且并不要求有统一的结论. 完全可以有不同于教材上给出的两点的思路，必须建立民主平等、生动活泼的课堂氛围.

练习答案：

1. 略.

2. $y=x+3$.

[1] 这个练习是为下一节的教学准备的实践活动，应让学生带着探索和发现的任务来进行练习，为掌握 b 和 k 的值对一次函数图象的影响作准备.

[2] 是让学生带着问题观察画出的图象，或主动利用计算机观察运动中的图象，研究 b，k 的值对图象位置的影响，是一种对学生探究能力的培养，切不可用教师的讲解替代.

所求的系数设成未知数，再根据所给的条件确定这些系数的方法，叫做待定系数法，它是确定函数表达式时一种常用的方法.

练习

1. 分别在同一坐标系内作出下列各组一次函数的图象：[1]

(1) $y=-\frac{1}{2}x+6$，$y=-\frac{1}{2}x$，$y=-\frac{1}{2}x-2$；

(2) $y=\frac{1}{2}x+2$，$y=x+2$，$y=4x+2$；

(3) $y=-\frac{1}{2}x+2$，$y=-x+2$，$y=-4x+2$.

2. 一次函数的图象经过点 $A(2,5)$ 和 x 轴上一点 B，且点 B 的横坐标为 -3，求这个一次函数的表达式.

14.6 一次函数的性质

交流 [2]

1. 观察前面练习的第 1(1) 题的 3 个函数的图象，你认为一次函数 $y=kx+b$ 中，b 值的变化对图象的位置有什么影响？

2. 分别观察前面练习第 1(2) 题和 (3) 题中的 3 个函数的图象，你认为一次函数 $y=kx+b$ 中，k 值的变化对图象的位置有什么影响？

3. 如图 14－13，利用计算机或图形计算器，观察一下你概括的结论是否正确.

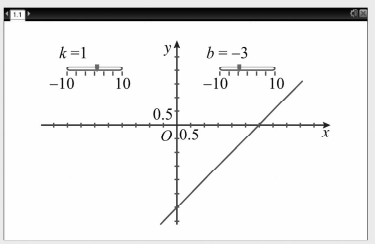
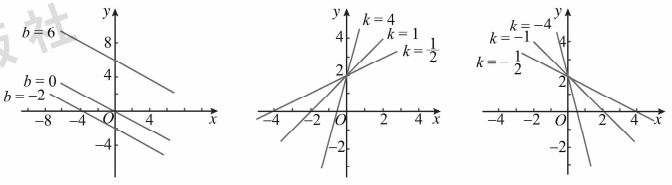


图 14－13

根据前面练习第 1 题的(1)、(2)、(3)题，我们画出了以下三组一次函数的图象：



(1)　(2)　(3)

图 14 − 14

如图 14 − 14(1)，在一次函数 $y = kx + b(k \neq 0)$ 中，如果 k 的值相同，而对于 b 的不同值，对应的图象是一组互相平行的直线．

观察图 14 − 14(2)、(3)可以发现，如果 b 的值相同，而对于 k 的不同值，一次函数 $y = kx + b(k \neq 0)$ 的图象是通过点 $(0, b)$ 的一组直线．当 $k > 0$ 时，直线呈现出“左低右高”的变化趋势；当 $k < 0$ 时，直线呈现出“左高右低”的变化趋势．[1]

1. 当一个函数的图象呈现出“左低右高”或“左高右低”的变化趋势时，说说这个函数的自变量增大时，因变量是怎样变化的．

2. 观察图 14 − 14(2)、(3)，在 k 值的影响下，一次函数因变量的变化有什么规律？可以概括出一次函数什么样的性质？

思考[2]

从这里，可以概括出一次函数 $y = kx + b(k \neq 0)$ 的一个重要的性质：[3]

➲ 当 $k > 0$ 时，y 随 x 的增大而增大；当 $k < 0$ 时，y 随 x 的增大而减小．

[1] 对于 b，k 的值对图象位置的影响的归纳只要求学生作直观的说明，而不作证明，重点是对 k 的作用的归纳．

[2] 让学生通过思考，深刻认识一次函数图象（直线）“左低右高”和“左高右低”的态势的意义，从而深刻理解函数增减性的意义．

[3] 对于 k 的值对图象位置的影响的归纳要求学生根据自己的了解，用自己的语言说出，经过大家的修正润色，确定出一次函数的性质．这是一种对整理思维、语言文字表达能力的培养．

认识一次函数图象“左低右高”和“左高右低”的态势的意义，难点在于当图象上的点处于 x 轴下方时，对它的纵坐标大小的判断．另一方面，可以让学生了解，从直观看，当图象上的点从左到右向上运动时，就标志着因变量随着自变量的增大而增大，反之，图象上的点从左到右向下运动时，就标志着因变量随着自变量的增大而减小．

[1] 例1和例2都是一次函数性质的应用. 举出例1的目的是让学生画出图形，由图形直观印证根据一次函数性质的判断是否正确.

练习答案：

1. (1) y 随 x 的增大而增大.

(2) y 随 x 的增大而增大.

(3) 当 $m>0$ 时，y 随 x 的增大而增大；当 $m<0$ 时，y 随 x 的增大而减小.

2. 由 $2=-7a+5$ 得 $a=\frac{3}{7}>0$，所以，y 随 x 的增大而增大.

例1[1] 已知点 $A(-\sqrt{5}, y_1)$ 和点 $B(-2, y_2)$ 是一次函数 $y=-4x+7$ 图象上的点，比较 y_1 和 y_2 的大小.

分析：根据一次函数的性质，就能由自变量的大小来比较函数值的大小.

解：因为 $k=-4<0$，

所以 $y=-4x+7$ 的函数值将随 x 的增大而减小.

因为 $-\sqrt{5}<-2$，

所以 $y_1>y_2$.

怎样用图象来分析呢?

例2 一次函数 $y=(m-3)x+5$ 的函数值随 x 的增大而减小，且一次函数 $y=(3+2m)x-3$ 的函数值随 x 的增大而增大，求同时满足上述条件时，m 的取值范围.

解：根据一次函数的性质，有

$$\begin{cases} m-3<0, \\ 3+2m>0. \end{cases}$$

解这个不等式组，得

$$-\frac{3}{2}<m<3.$$

所以，m 的取值范围是 $-\frac{3}{2}<m<3$.

练习

1. 在下列条件下，确定一次函数中因变量随自变量的增大而变化的情况：

(1) $y=x$；　(2) $y=(a^2+1)x+4$；　(3) $y=\sqrt{5}+mx$.

2. 已知一次函数 $y=ax+5$ 的图象经过点 $P(-7, 2)$，随着自变量的增大，函数值是增大还是减小？为什么？

14.7 一次函数的应用[1]

生活中很多问题都可以归结为一次函数的问题，并可以用一次函数的知识加以解决.

例 1 某生产资料门市部出售化肥，每袋售价 80 元.为了促进销售，规定了优惠办法：买 3 袋按售价计算，从第 4 袋开始每袋优惠 5%.

(1) 写出购买这种化肥的总金额 M(元) 与购买袋数 n 的函数表达式，并指出它的自变量的取值范围；

(2) 为了快速得到购买这种化肥的总金额，请你利用这个函数的表达式制作一个购买 1 ~ 10 袋化肥的总金额的对照表.

解：(1) 根据题意，可以知道：

当 $0 \leqslant n \leqslant 3$ 时，可得函数的表达式为

$$M = 80n.$$

自变量 n 的取值范围是 $0 \leqslant n \leqslant 3$ (n 是整数).

当 $n \geqslant 4$ 时，可得函数的表达式为

$$M = 80 \times 3 + 80 \times (1 - 5\%)(n - 3).$$

整理，得

$$M = 76n + 12.$$

自变量 n 的取值范围是 $n \geqslant 4$ (n 是整数).

(2) 当 n 依次取 1 ~ 10 时，分别计算出函数的值，得出下表：

n/袋	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
M/元	80	160	240	316	392	468	544	620	696	772

例 2[2] 甲、乙两个通信公司分别制定了一种移动电话的收费办法.甲公司规定：每月收取月租费 50 元，每通话 1 分钟再收费 0.4 元；乙公司规定：不收取月租费，每通话 1 分钟收费 0.6 元.那么，应当怎样选择通信公司才能节省电话费？(通话不到 1 分钟按 1 分钟收费)

分析：据题意，可写出通话费与通话时间的函数关系，在同一坐标系中画出它们的图象，观察图象并通过计算可以得到答案.

[1] 本节的教学是学习一次函数的终极目的，也是对学生应用意识和应用能力的培养的重要阶段.

[2] 应当注意，这个函数的自变量的取值范围为正整数.

对例题的教学，要求学生有较强的阅读能力和分析问题能力.一般不应由教师作详细周到的剖析，而应由教师安排学生有足够的时间认真阅读，向其他同学说明自己的理解和分析，展开讨论，在互动中确立正确合理的解法.

练习答案：

1. ＜，＞.

2. （1）$W = 10 - 0.02t$（图象略）；

（2）$0 \leqslant t \leqslant 500$；

（3）9.4 kg；

（4）7.5 h.

3. （1）100 m；

解：设按照甲、乙两个通信公司的收费标准通话 t 分钟的话费分别为 y_1 元和 y_2 元，则这两个函数的表达式分别为

$$y_1 = 0.4t + 50 \quad (t \geqslant 0，t \text{ 为整数})$$

和

$$y_2 = 0.6t \quad (t \geqslant 0，t \text{ 为整数}).$$

在同一坐标系中画出它们图象的示意图（图 14－15），两图象的交点为 A，交点处有相同的纵坐标，意味着此时两公司的收费相同.

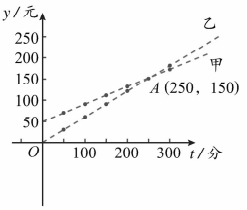


图 14－15

令 $y_1 = y_2$，有

$$0.4t + 50 = 0.6t.$$

解这个方程，得

$$t = 250.$$

由此可以得到如下结论：

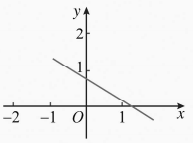
（1）当每月通话时间为 4 小时 10 分时，两公司的收费相同；

（2）当每月通话时间少于 4 小时 10 分时，应选择乙公司；

（3）当每月通话时间多于 4 小时 10 分时，应选择甲公司.

练习

1. 一次函数 $y = kx + b$ 的图象如图所示，那么 k_____0，b_____0.



（第 1 题）

2. 某种液化石油气罐储存液态石油气 10 kg，点燃石油气炉后，每分钟消耗 0.02 kg 石油气，那么液化石油气罐内剩余石油气的质量 W(kg) 是点燃时间 t(min) 的函数.

（1）请写出函数的表达式，画出它的图象.

（2）这个函数的自变量 t 的取值范围是什么？

（3）点燃半小时时，罐内剩余液态石油气的质量为多少千克？

（4）点燃几小时后，罐内剩余液态石油气的质量正好是原质量的十分之一？

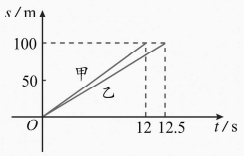
3. 甲、乙两人赛跑时，路程 s(m) 和时间 t(s) 的关系如图所示，请你观察图象并回答：

（1）这次赛跑的总路程有多少米？

(2) 甲、乙两人中谁最先到达终点?

(3) 计算出甲、乙两人在这次比赛中的速度.

(4) 写出甲、乙两人赛跑时路程 s(m) 和时间 t(s) 的函数表达式及自变量 t 的取值范围.



(第 3 题)



探索 [1]

1. 回忆一次函数的作图过程,说明二元一次方程 $2x-y+3=0$ 的解与一次函数 $y=2x+3$ 及其图象的关系.

2. 利用上面的关系,判断下列方程组的解的个数.

$$\begin{cases} x+2y=0, \\ x+2y+4=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y-2=0, \\ 3x-y+1=0. \end{cases}$$

3. 根据上面的经验,探索一元一次方程 $2x+3=0$ 的解,一元一次不等式 $2x+3>0$ 的解与一次函数 $y=2x+3$ 之间的关系.

由此我们发现一次函数与二元一次方程的联系:每个二元一次方程都对应一个一次函数,且以它的每一个解为坐标的点均在相应的一次函数图象上;反之,任意一个一次函数图象上的每一个点的坐标均是相应的二元一次方程的解.

习 题 14-2

★基础★

1. 在同一坐标系内画出下列函数的图象:

(1) $y=2x+5$; (2) $y=-\frac{1}{2}x+4$; (3) $y=3-\frac{1}{2}x$.

2. 在同一坐标系内画出下列函数的图象,并回答问题.

(1) $y=3x-5$; (2) $y=-2x+3$; (3) $y=\frac{3}{2}x$.

(2) 甲;

(3) 甲的速度为 $\frac{25}{3}$ m/s,乙的速度为 8 m/s;

(4) $s_{甲}=\frac{25}{3}t$ $(0\leqslant t\leqslant 12)$, $s_{乙}=8t$ $(0\leqslant t\leqslant 12.5)$.

[1] 这是为开拓学生的视野和培养锻炼学生的自学能力而安排的,应选适当时机在教师指导下进行.

应当注意,实际上,一般地说,二元一次方程 $ax+by+c=0$ 仅当 $a\neq 0$ 且 $b\neq 0$ 时,才可以看做一次函数.

对于每一个函数：

①图象与 x 轴、y 轴的交点坐标是什么？

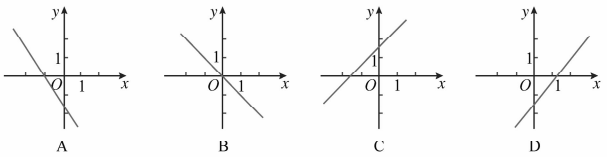
②图象经过哪几个象限？

③随着 x 值的增大，y 的值是增大还是减小？

④分别求出 $y<-2$，$y\geqslant 3$ 时 x 的取值范围．

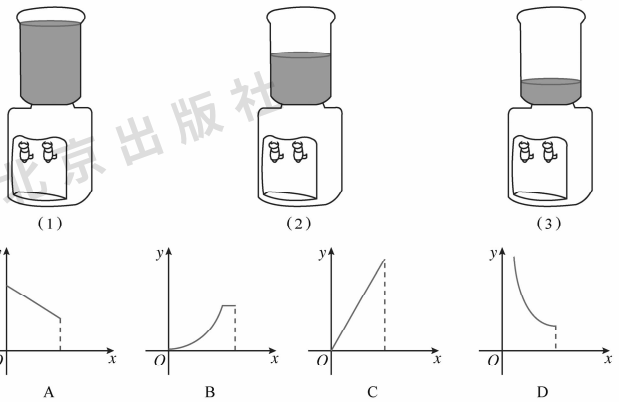
3. 函数 $y=(2k+6)x-k$ 是关于 x 的一次函数，且 y 随 x 的增大而减小，求 k 的取值范围，并指出图象经过哪几个象限．

4. 在一次函数 $y=kx+b$ 中，已知 $k\cdot b<0$，那么在下面它的图象的示意图中，正确的是(　　).



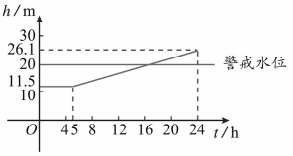
（第 4 题）

5. 图(1)是饮水机的图片．打开出水口，饮水桶中水面由图(1)的位置下降到图(3)的位置的过程中，如果水减少的体积是 y，水面下降的高度是 x，那么能够表示 y 与 x 之间函数关系的图象可能是(　　).



（第 5 题）

6. 如果一次函数 $y=(m-1)x+2n-3$ 的图象经过原点，请确定 m，n 应满足的条件．
7. 一次函数 $y=kx+b(k\neq 0)$，当 $x=3$ 时，$y=-7$；当 $x=-5$ 时，$y=1$．求当 $x=-12$ 时 y 的值．
8. $A(1,3)$，$B(-2,0)$，$C(-4,-2)$ 三点是否在同一条直线上？为什么？
9. 如图所示是某水库一天的水位记录示意图．观察图象，回答下列问题：
   (1) 在哪一段时间内，水位不变？在哪一段时间内，水位不断上升？
   (2) 在哪一段时间内，水位处于警戒水位 (20 m) 之上？
   (3) 水位为 22 m 时，约是在几时？
   (4) 晚上 12 时的水位是多少？



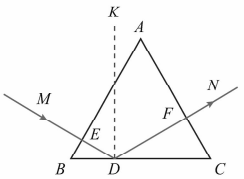
(第 9 题)

★★提升★★

1. 在下列条件下，求出一次函数的表达式，并画出图象：
   (1) 图象和 y 轴的交点的纵坐标为 -3，和 x 轴的交点的横坐标为 -1；
   (2) 图象经过点 $(3,-1)$，和 x 轴正半轴相交成 $45°$ 角．
2. 已知一次函数 $y=k_1x-4$ 与正比例函数 $y=k_2x$ 的图象都经过点 $(2,1)$．
   (1) 分别求出这两个函数的表达式；
   (2) 求这两个函数的图象与 x 轴围成的三角形的面积．
3. 已知在平面直角坐标系中，点 Q 的坐标为 $(4,0)$，点 P 是直线 $y=-\frac{1}{2}x+3$ 上在第一象限内的一点．设 $\triangle OPQ$ 的面积为 S．
   (1) 设点 P 的坐标为 (x,y)，用含 y 的代数式表示 S，并写出 y 的取值范围．
   (2) 设点 P 的坐标为 (x,y)，用含 x 的代数式表示 S，并写出 x 的取值范围．
   (3) 当点 P 的坐标为何值时，$\triangle OPQ$ 的面积等于直线 $y=-\frac{1}{2}x+3$ 与坐标轴围成的三角形面积的一半？
4. 一个一次函数的图象经过点 $A(-3,0)$，且和 y 轴相交于点 B．当函数图象与坐标轴围成的三角形的面积为 6 时，求这个一次函数的表达式．
5. 如果两条直线 $y=ax+2$ 与 $y=bx-3$ 都经过 x 轴上的同一点，求 $\frac{a}{b}$ 的值．

★★★拓展★★★

1. 如图所示，边长为 2 的等边△ABC 是三棱镜的一个横截面．一束光线 ME 沿着与 AB 边垂直的方向射入到 BC 边上的点 D 处（点 D 与 B，C 两点不重合），反射光线沿 DF 的方向射出去，DK 和 BC 垂直，且入射光线和反射光线使∠MDK = ∠FDK．设 BE 的长为 x，AF 的长为 y.



（第 1 题）

（1）求 y 和 x 之间的函数关系，并写出自变量 x 的取值范围；

（2）在平面直角坐标系中画出该函数的图象．

2. 我们都见过测量体温的水银温度计．测量体温时，温度计的水银柱的长短会随体温的高低变化．设体温为 x ℃时，水银柱长为 y cm．请你通过观察实验，求出 y 与 x 之间的函数表达式．

阅读理解

揭开一幅算图的奥秘

某个学校规定，取学生期中测评成绩的 40% 与期末测评成绩的 60% 的和，作为这个学生的学期总成绩．

为了迅速算出学生学期的总成绩，一位同学创造了一幅奇妙的算图（图 14－16）.

这张算图是这样应用的：学生的期中测评成绩用 y 轴上的点的纵坐标表示，期末测评成绩用直线 AB 上的点的纵坐标表示，学期总成绩用直线 PQ 上的点的纵坐标表示．

如果一位学生的期中测评成绩

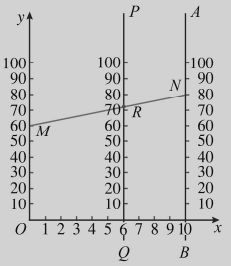


图 14－16

是 60 分，我们就用 y 轴上的点 $M(0,\ 60)$ 表示；期末测评成绩是 80 分，我们就用直线 AB 上的点 $N(10,\ 80)$ 表示．连接 MN，MN 与直线 PQ 相交于点 R（图 14－16），那么点 R 的纵坐标“72”就是这位学生的学期总成绩．你来算一算，的确是这样吗？

如此简单实用的算图，它的奥秘在哪里呢？

事实上，算图上过 M，N 两点的直线可以看做是一个一次函数的图象（图 14－17）．设这个一次函数的表达式为

$$y=kx+b\ (k\neq 0).$$

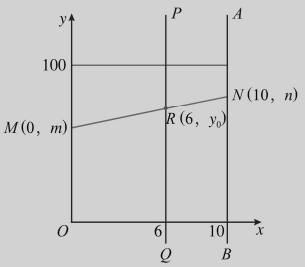


图 14－17

如果某学生期中测评成绩为 m，期末测评成绩为 n，那么，学期总成绩 A 应为

$$A=m\times 40\%+n\times 60\%=0.4m+0.6n.$$

那么，利用算图所得到的结果和它相同吗？

不难知道，M，N 的坐标分别是 $(0,\ m)$ 和 $(10,\ n)$，由于 M，N 都在函数 $y=kx+b\ (k\neq 0)$ 的图象上，所以有

$$\begin{cases} m=k\times 0+b, \\ n=k\times 10+b. \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} b=m, \\ k=\dfrac{n-m}{10}. \end{cases}$$

所以，函数的表达式为

$$y=\frac{n-m}{10}x+m.$$

由于所取的期末成绩和期中成绩的比是 6∶4，应取 $x=6$，这时，

点 R 的纵坐标 y_0 为

$$y_0=\frac{n-m}{10}\times 6+m=0.4m+0.6n.$$

不难看到，这个结果与前面用算术方法计算的结果是一致的，证明了利用算图方法的正确性．一次函数的知识帮助我们揭开了这张算图的奥秘！

同学们不妨想一想，这张算图在哪里还可以得到更实际的应用？

回顾与整理

知识要点

1. 常量和变量、自变量和因变量以及函数的概念．

2. 函数的主要表示方法：解析法、列表法和图象法．

3. 平面直角坐标系、函数图象的意义和函数图象的画法．

4. 一次函数（包括正比例函数）的意义、表达式的确定方法、图象的画法和函数的性质．

（1）形如 $y=kx+b$（k，b 是常数，$k\neq 0$）的函数是一次函数，当 $b=0$ 时是正比例函数．

（2）一次函数 $y=kx+b$ 的图象是通过 $(0,\ b)$ 和 $\left(-\frac{b}{k},0\right)$ 的一条直线，正比例函数 $y=kx$ 的图象是通过 $(0,\ 0)$ 和 $(1,\ k)$ 的一条直线．

（3）一次函数 $y=kx+b$ 中，当 $k>0$ 时，y 随 x 的增大而增大；当 $k<0$ 时，y 随 x 的增大而减小．

5. 利用待定系数法确定一次函数的表达式．

6. 一次函数与二元一次方程（组）的联系．

7. 应用一次函数、正比例函数的知识解决实际生活中的一些问题．

北京出版社

学习指导

1. 要学会联系生活实际，感受变量、函数的概念，理解函数和函数的自变量取值范围的意义．

2. 平面直角坐标系的建立和函数图象的画法是学习函数的基础，也是数形结合思想的体现，要学会画图、读图、用图．

3. 应该在广泛联系生活实际的事例中理解函数的一般概念，理解一次函数、正比例函数的意义．

4. 应认真掌握一次函数、正比例函数的表达式的确定方法，以及表达式和函数图象的关系，熟悉表达式中的系数对图象位置、变化趋势的影响，能根据表达式正确画出函数的示意图，会通过观察图象归纳出函数的性质．

5. 借助计算机或图形计算器等信息技术，通过对动态图形的观察、归纳、抽象、概括，研究函数的图象，发现函数的性质．

6. 学会把某些生活实际问题归结为一次函数、正比例函数问题，借助于一次函数的图象和性质解决．

7. 学习函数可以使我们进一步体会辩证唯物主义的基本思想，进一步运用转化、数形结合、待定系数法等数学方法，不断提高思维能力．

复 习 题

★基础★

1. 选择题：

(1) 点 P 的坐标为 (a, b)，其中 $a<0$，$b>0$，那么点 P 在(　　).

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

(2) 点 (a, b) 关于 y 轴对称的点的坐标是 (　　).

A. $(-a, -b)$　　B. (b, a)

C. $(-a, b)$　　D. $(a, -b)$

2. 在平面直角坐标系内分别作出下列函数的图象：

(1) $y=-3x+2$；　　(2) $y=\frac{1}{3}x+4$.

3. 在同一坐标系内作出下列一次函数的图象，并回答问题：

(1) $y=2x-3$；　　(2) $y=-2x+3$.

对于每一个函数：

①图象经过原点吗？为什么？

②图象和 x，y 轴有没有交点，交点坐标是什么？

③图象经过哪几个象限？随着 x 的增大，y 是增大还是减小？

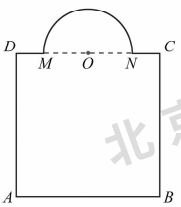
④根据图象写出 $y>1$，$y<-3$，$0<y\leqslant 3$ 时 x 的取值范围，并在坐标系内表示出这些范围.

4. 判断下列每两个变量间是否构成函数关系. 如果是，写出函数的表达式和它的自变量的取值范围.

(1) 菱形的边长 a 和它的周长 C.

(2) 三角形一边的长 m 不变，这边上的高 h 和三角形的面积 S.

(3) 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 10 cm，半圆 O 的直径 MN 在边 DC 上，O 是 DC 的中点. 设半圆 O 的半径为 r cm，图形的周长为 P cm，变量 r 和变量 P.



[第 4(3) 题]

5. 画出下列两组一次函数的图象，并求出每组中两图象的交点坐标：

(1) $y=2x-1$ 和 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$；

(2) $y=-\frac{3}{2}x+2$ 和 $y=\frac{3}{2}x+5$.

6. 在下列条件下，求出一次函数的表达式，并画出图象：

(1) 图象经过点 $(-5, 1)$ 和 $(2, 4)$；

(2) 图象经过点 $(2\sqrt{3}, -3\sqrt{2})$ 的正比例函数；

(3) 图象和 x 轴的交点的横坐标为 5，和 y 轴的交点的纵坐标为 $-\sqrt{3}$；

(4) 图象经过点 $(1, 2)$ 和 x 轴相交成 45° 角.

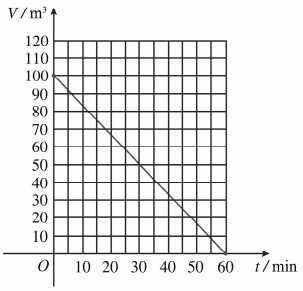
7. 已知一次函数和正比例函数的图象交点为 $(2, -1)$，一次函数的图象还经过点 $(0, 5)$，回答下列问题：

(1) 画出图象，求出这两个函数的表达式；

(2) 求出使一次函数的值比正比例函数的值大时，x 的取值范围；

(3) 求出当 $-25 \leqslant x < -1$ 时，两函数对应因变量 y 的取值范围.

8. 如图，是用图象反映储油罐内的油量 V 与输油管开启时间 t 的函数关系. 观察这个图象，回答：



(第 8 题)

(1) 随着输油管开启时间的增加，储油罐内的油量是增加还是减少？

(2) 输油管开启 25 min 时，储油罐内的油量约是多少立方米？

(3) 如果储油罐内至少存油 40 m^3，那么输油管最多可以开启多少分钟？

(4) 输油管开启几分钟后，储油罐内的油量只有原油量的一半？

9. 甲、乙两辆卡车匀速行驶在某公路上.

(1) 如果甲车以 60 km/h 的速度从某地出发，写出它行驶的路程 s_1(km) 和它的行驶时间 t(h) 之间的函数表达式，并画出它的图象；

(2) 如果乙车在甲车出发 2 h 后从同一地点出发，沿同一方向以 80 km/h 的速度行驶，它行驶的路程 s_2(km) 也是甲车出发后的行驶时间 t(h) 的函数，写出它的表达式，并在前一个坐标系中画出它的图象；

(3) 求出两图象交点的坐标，并说明交点坐标的实际意义.

★★提升★★

1. 选择题：

(1) 如果点 $M(2a+4, a-1)$ 在 y 轴上，那么点 M 的坐标是(　　).

A. $(-2, -3)$　　B. $(0, -3)$

C. $(-3, 0)$　　D. $(0, 1)$

(2) 点 $N(x, y)$ 在第三象限内，且 $|x|=1$，$|y|=2$，那么点 N 关于 x 轴的对称点的坐标是(　　).

A. $(-1, 2)$　　B. $(-2, 1)$

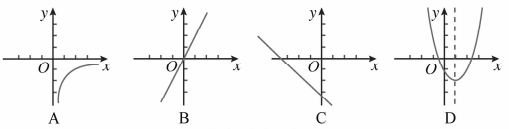
C. $(2, -1)$　　D. $(-1, -2)$

(3) 点 $A(x, y)$ 的坐标满足 $xy>0$，$x+y<0$，那么点 A 在(　　).

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

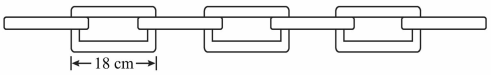
(4) 在如图所示的四个函数图象中，y 的值随 x 的增大而减小的是(　　).



[第 1(4) 题]

2. 一个一次函数的图象经过点 (−3，7)，当与坐标轴围成的直角三角形有两边相等时，求这个一次函数的表达式.

3. 建造铁索桥用的铁链是由许多个直径为 16 mm 的铁条制成的环形圈 (如图) 套接而成的. 如果每一个环形圈的长度为 18 cm，那么，铁链的总长度 y (cm) 是环形圈的个数 x 的函数吗？若是，求出这个函数的表达式，并求出铁链长 100 m 时，需要制作多少个环形圈.



(第 3 题)

4. 某电脑公司经营 A，B 两种台式电脑. 分析过去的销售记录可以知道：
(1) 每台 A 型电脑可盈利 200 元，每台 B 型电脑可盈利 300 元；
(2) 在同一时期内，A 型电脑的销售量不小于 B 型电脑销售量的 4 倍.
这个公司的库房最多可存放这两种电脑 (它们的包装箱尺寸相同) 共 210 台，那么要使公司总利润最大，进货时两种电脑应各购进多少台？

★★★ 拓展 ★★★

甲、乙两个体育用品商店都销售同种乒乓球拍和乒乓球，乒乓球拍每副 38 元，乒乓球每盒 18 元. 由于商业竞争，甲、乙两个体育用品商店都搞促销活动. 甲店规定：每买一副乒乓球拍，都赠送乒乓球半盒；乙店规定：购买乒乓球和乒乓球拍一律 9 折. 现八年级要买乒乓球拍 4 副，乒乓球 4 盒.

(1) 在哪个体育用品商店购买比较省钱？

(2) 如果八年级要买乒乓球拍 n 副，乒乓球 n 盒，你能运用有关函数的知识探求出一个一般的结论吗？

(3) 如果体育设备科要买乒乓球拍 8 副，那么买多少盒乒乓球时，在甲店购买比较省钱？

北京出版社

部分习题答案或提示

习题 14－1

基础

1.

	横坐标符号	纵坐标符号
第一象限	+	+
第二象限	－	+
第三象限	－	－
第四象限	+	－

2. 随所选坐标系的位置不同有不同的答案，请组织学生讨论，不求统一结果.

3. （1）任意实数；（2）任意实数；（3）$x\neq -5$；（4）$x\geqslant\frac{5}{2}$；（5）$x\geqslant 2$ 且 $x\neq 3$.

4. （1）C；（2）C；（3）D；（4）C.

5. （1）函数表达式为 $a=\frac{2S}{h}$，其中 h 为自变量，a 为因变量；

（2）函数表达式为 $V=\frac{m}{\rho}$，其中 ρ 是自变量，V 是因变量；

（3）函数表达式为 $s=332t$，其中 t 是自变量，s 是因变量；

（4）函数表达式为 $T=30-6h$，其中 h 是自变量，T 是因变量；

（5）函数表达式为 $S=862x$，其中 x 是自变量，S 是因变量，$0\leqslant x\leqslant 475$.

6. （1）$0\leqslant x\leqslant 23$.

（2）当 $0\leqslant x\leqslant 10$ 时，y 的值逐渐增大；当 $10\leqslant x\leqslant 18$ 时，y 的值不变；当 $18\leqslant x\leqslant 23$ 时，y 的值逐渐减小.

（3）8.

（4）48.

提升

1. （1）$x>2$；（2）任意实数；（3）$x\leqslant 5$ 且 $x\neq\frac{5}{3}$；（4）$-2\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}$.

2. （1）D；（2）D.

3. $M(10,\ 5)$.

4. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$，$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$，$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$或$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$.

5. 略.

6. （1）W 可以看做是 y 的函数，$W=\eta y$；（2）略；（3）温饱家庭、小康家庭和富裕家庭的日常食品支出分别是 1 500～1 800 元，2 400～3 000 元，2 400～4 800 元.

拓展

1. （1）7，10；（2）31；（3）$y=3x+1$；（4）33.

2. （1）是；（2）$y=32+1.8x$.

习题 14－2

基础

1. 略.

2. 图略. （1）①$\left(\frac{5}{3},0\right)$，$(0,-5)$；②一、三、四；③增大；④$x<1$，$x\geqslant\frac{8}{3}$.

（2）①$\left(\frac{3}{2},0\right)$，$(0,3)$；②一、二、四；③减小；④$x>\frac{5}{2}$，$x\leqslant 0$. （3）①$(0,0)$；②一、三；③增大；④$x<-\frac{4}{3}$，$x\geqslant 2$.

3. $k<-3$，一、二、四.

4. D.

5. C.

6. $m\neq 1$，$n=\frac{3}{2}$.

7. $y=8$.

8. 在同一直线上. 先求过 A，B 两点的直线，得函数的表达式为 $y=x+2$，当 $x=-4$ 时，$y=-2$，所以点 $C(-4,-2)$ 在过 A，B 两点的直线上.

9. （1）0～5 时，水位高度不变；5～24 时，水位高度不断上升.

（2）约 16～24 时，水位高度处于警戒水位之上.

（3）约在 19 时.

（4）约 26.1 m.

提升

1. 图略. （1）$y=-3x-3$；（2）$y=x-4$ 或 $y=2-x$.

2. （1）$y=\frac{5}{2}x-4$，$y=\frac{1}{2}x$；（2）$S=\frac{4}{5}$.

3. （1）$S=2y$；$0<y<3$.

（2）$S=-x+6$；$0<x<6$.

（3）$P(1.5, 2.25)$.

4. $y=\frac{4}{3}x+4$ 或 $y=-\frac{4}{3}x-4$.

5. $\frac{a}{b}=-\frac{2}{3}$.

拓展

1. （1）$y=x+1$，$0<x<1$；

（2）略.

2. 略.

复习题

基础

1. （1）B；（2）C.

2. 略.

3. （1）①当 $x=0$ 时，$y\neq 0$，图象不经过原点；②与 x 轴、y 轴有交点，交点坐标分别为 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$，$(0, -3)$；③一、三、四；增大；④$x>2$；$x<0$；$\frac{3}{2}<x\leqslant 3$. 图略.

（2）①当 $x=0$ 时，$y\neq 0$，图象不经过原点；②与 x 轴、y 轴有交点，交点坐标分别为 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$，$(0, 3)$；③一、二、四；减小；④$x<1$；$x>3$；$0\leqslant x<\frac{3}{2}$. 图略.

4. （1）$C=4a$（$a>0$）；

（2）$S=\frac{1}{2}mh$（$h>0$）；

（3）$P=(\pi-2)r+40$（$0<r\leqslant 5$）.

5. （1）图略. 交点坐标是 $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

（2）图略. 交点坐标是 $\left(-1, \frac{7}{2}\right)$.

6. 图略. （1）$y=\frac{3}{7}x+\frac{22}{7}$；（2）$y=-\frac{\sqrt{6}}{2}x$；

（3）$y=\frac{\sqrt{3}}{5}x-\sqrt{3}$；（4）$y=x+1$ 或 $y=-x+3$.

7. （1）图略. $y=-\frac{1}{2}x$，$y=-3x+5$；（2）$x<2$；（3）$\frac{1}{2}<y\leqslant\frac{25}{2}$；$8<y\leqslant 80$.

8. （1）减少；（2）$\frac{175}{3}$ m^3；（3）36 min；（4）30 min.

9. （1）$s_1=60t$，图略；

（2）$s_2=80t-160$，图略；

（3）交点坐标是（8，480），表明乙车出发 $8-2=6$ 小时后，在 480 km 处追上甲车.

提升

1. （1）B；（2）A；（3）C；（4）C.

2. $y=-x+4$ 或 $y=x+10$.

3. 据题意，有 $y=(18-1.6\times2)(x-1)+18$，也就是有 $y=14.8x+3.2$，所以 y 是 x 的函数；当 $y=14.8x+3.2=10\ 000$ 时，有 $x\approx676$.

4. 设公司购进 A 型电脑 x 台，总利润共 y 元，根据题意，有 $y=200x+300(210-x)$，整理，得 $y=-100x+63\ 000$. 由于 A 型电脑的销售量不小于 B 型电脑销售量的 4 倍，所以有 $x\geqslant4(210-x)$，也就是 $x\geqslant168$（台）. 又由于函数 $y=-100x+63\ 000$ 的值随 x 值的减小而增大，所以当 x 取 168 时，总利润最大，此时购进 B 型电脑 42 台.

拓展

提示：（1）在甲店购买需付 188 元，在乙店购买需付 201.6 元，所以在甲店购买较省钱.

（2）（甲）$47n<$（乙）$50.4n$.

（3）$y_{甲}-y_{乙}=[38\times8+18(m-4)]-[(38\times8+18m)\times0.9]=1.8m-41.6<0$.

解得 $m<23.11$，所以当乒乓球的盒数不大于 23 时，在甲店购买比较省钱.



第十五章
四边形

北京出版社

教学目标

1. 了解多边形的有关概念，探索并掌握多边形内角和与外角和公式.

2. 探索并掌握平行四边形、矩形、菱形、正方形的定义、性质、判定，以及它们之间的联系和区别.

3. 探索并掌握三角形的中位线定理.

4. 通过具体实例认识中心对称图形.

5. 在观察、操作、推理、归纳等探索过程中，发展学生的合情推理能力，进一步培养学生的逻辑思维能力和推理论证的表达能力.

教材分析和教学建议

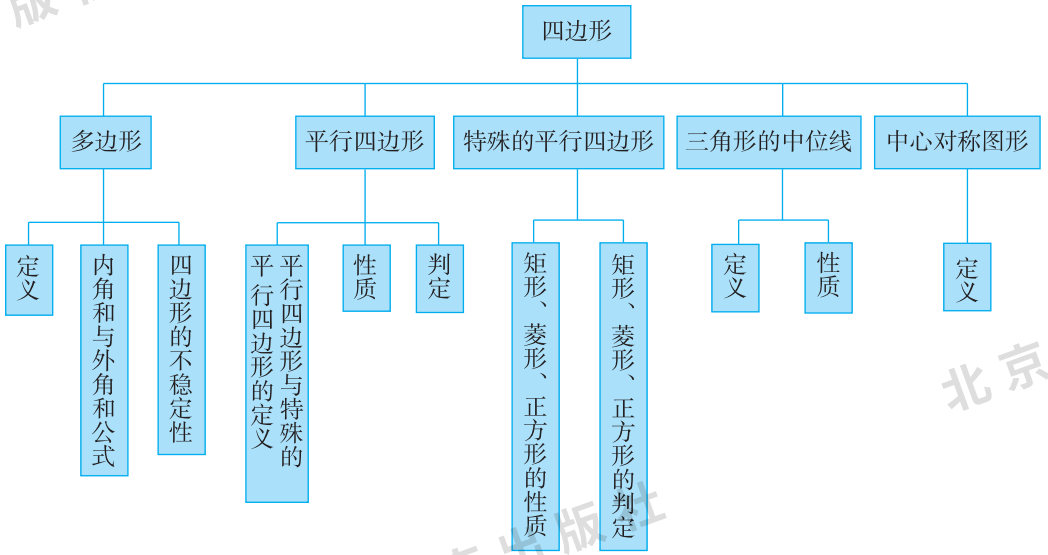
1. 主要内容及其地位作用.

（1）主要内容.

教材在保持相对稳定的前提下，进行了避繁就简的改革. 这里要明确一个基本观点，我们今天讲平面几何，当然不能照搬《几何原本》那套体系，但也不要把平面几何最基本的内容和体系打乱，伤筋动骨，使其失去平面几何的“原汁原味”.

本章内容包括多边形、平行四边形、中心对称图形三大节. 第一大节介绍多边形

的概念和性质，为学习特殊四边形和以后学习正多边形作准备. 第二大节先介绍平行四边形和特殊的平行四边形的定义，然后介绍平行四边形的性质与判定，以及特殊的平行四边形的性质与判定，最后介绍三角形中位线定理，这是本章教材的重点内容. 第三大节介绍中心对称图形.



（2）地位作用.

四边形和三角形一样，也是基本的平面图形. 本章内容是在学生小学学过的四边形知识、中学学过的平行线和三角形等知识的基础上学习的，也可以说是在已有知识的基础上作进一步较系统的整理和研究，而且本章内容的学习反复地运用了平行线和三角形的知识. 从这个角度上来看，本章内容可以说是平行线和三角形知识的应用和深化.

四边形的研究，是通过作四边形的对角线把它分成三角形，并应用三角形的知识来进行的. 多边形的问题也是通过添加辅助线的方法，把它转化为三角形或特殊四边形，并通过三角形或特殊四边形的知识加以解决. 通过本章教学，可以使学生学会处理复杂问题时常采用的普遍实用的方法，就是把复杂问题化为简单问题，把未知转化为已知，用已知的知识研究解决新问题. 学生掌握了这种思想方法，就会提高分析问题、解决问题的能力. 所以，从培养学生解决问题的能力方面来看，这一章是很重要的.

本章对培养和发展学生的推理能力也是很重要的，教学中应予以重视. 推理能力主要表现在，能通过观察、实验、归纳、类比等获得数学猜想，并进一步寻求证据，给出证明或举出反例. 这就是说，学生获得数学证明应当经历合情推理到演绎推理的

过程. 合情推理的实质是“发现”，因而关注合情推理能力的培养有助于培养学生的创新精神. 当然，由合情推理得到的猜想常常需要证实，这就要通过演绎推理给出证明或举出反例，能清晰、有条理地表达自己的思考过程，做到言之有理，落笔有据，用数学语言合乎逻辑地表达.

教材七年级下册的“观察、猜想与证明”一章是推理训练的渗透与准备阶段，教材八年级上册的“三角形”一章是推理证明的正式训练阶段，本章是推理证明训练的巩固和提高阶段.

2. 本章编写特点.

（1）充分利用现实世界中的实物原型进行教学，展示丰富多彩的几何世界.

人们生活在三维空间中，丰富多彩的图形世界给四边形的学习提供了大量现实有趣的素材. 在本章内容的呈现中，一方面充分利用了现实世界的物体，通过让学生观察大量丰富的立体、平面图形，加强对图形的直观认识和感受，从中“发现”四边形，归纳出其基本特征；另一方面，在介绍新知识时，都尽量利用这些知识的实际应用背景来引入.

（2）强调学生的动手操作和主动参与，让他们在观察、操作、想象、交流等活动中学习四边形的知识.

学习方式的转变是课程改革的一个重要目标，与其他教学内容相比，“图形与几何”的教学更容易激起学生学习数学的热情. 在本章的编写中，注意通过千方百计提问题、提好问题、给学生示范提问等方式，体现“问题性”，引导学生更加主动、有兴趣地学，富有探索性地学，使学生学习方式的改进得到落实.

为调动学生思维的积极性，激发学生的创造性，教材在较多地方设置了“思考”、“交流”、“实践”、“探索”等栏目以及恰当的留白，并安排了富有趣味又有思考价值的“探究学习”栏目，以引起学生讨论. 这样做的目的是增加学生参与教学实践的比重，把刚入几何之门仅凭直觉兴趣的学生早日引导到理性认识、理性思考的阶段，从根本上提高学生的素质.

（3）对传统的习题进行了筛选、比较，补充了一批更有利于掌握基本概念、基本理论、基本方法的新题，克服了传统习题形式过于单一的状态，增加了选择题、判断题、作图题以及讨论型问题、研究型问题、开放题.

这些新题型的出现给教学带来了丰富的变化. 选择题中的不同选项的正误研究提供了比较情境，对帮助学生进行辨误研究、深入理解概念有促进作用，同时也给有不同观点的学生提供了讨论、辩论的机会.

研究型问题使学生有了更多的参与研究、动手实践与动脑相结合的机会，使数学研究、数学交流成为现实.

数学教学中的开放性问题能够引起学生探索问题的兴趣，提高学生的深层次的思维能力，培养学生在解决问题中的开放性与创造性思维，而且，重要的一点是，开放性问题有助于学生学习态度与情感的培养，即开放性问题有助于培养学生独立思考的意识，以及敢于探索真理、敢于改造、敢于发明、敢于发展、不墨守成规的勇气. 在这个过程中，也会潜移默化地培养学生的主动参与精神与交流合作等能力.

此外，习题有了更明显的层次性，同时也更注重与社会、生活的联系，强化了对应用意识的培养.

（4）在信息技术的支持下，研究几何图形的性质.

数学课程应当尽可能地使用计算器和计算机. 目前许多发达国家都已这样去做，全美数学教师协会（NCTM）早在 1980 年就建议：在所有年级中，都应充分发挥计算机的作用，并注重将计算机与数学课程整合为一体. 在其 2000 年的《学校数学的原则和标准》中更是新增了一条技术原则，强调计算器和计算机的应用.《义务教育数学课程标准（2011 年版）》中，也提倡数学课程的设计与实施应根据实际情况合理地运用现代信息技术，要注意信息技术与课程内容的整合，注重实效.

基于信息技术在数学教学中的应用，我们认为这样的立体教材有三种模式：利用信息技术展示问题发生、发展过程的演示模式，学生利用信息技术进行自主学习的探究模式和以学生使用计算机软件为主的研究性学习模式.

在第一种模式下，在引入概念、陈述定理时，我们可以利用多媒体技术的特点，向学生展示难以用语言或一般教具阐明的事实，帮助学生建立直观表象，理解新知识. 例如，本章教材中的平行四边形和特殊平行四边形的定义、性质.

在高一层次的模式上，信息技术所提供的不仅仅是演示功能，而且是利用信息技术来做“数学实验”. 利用信息技术的测量、绘图、变换、运动等特殊功能，通过观察、比较、分类、类比、归纳、数据处理，发现规律. 例如，本章教材中对于连接四边形各边中点所得的四边形的形状问题的探究.

3. 教学重点、难点.

本章内容的重点是平行四边形的定义、性质和判定. 矩形、菱形、正方形都是特殊的平行四边形，它们的性质都是在平行四边形的基础上扩充的. 三角形中位线定理的推证是以平行四边形的有关定理为依据的，实际上是平行四边形知识的综合应用. 平行四边形的有关定理，常常也是证明两线段相等、两角相等、两直线平行或垂直的重要依据. 所以掌握平行四边形的概念、性质和判定，并能应用这些知识，是学好本章的关键.

本章教学内容思路比较简单，推理论证难度不大，相对来说，平行四边形与各种特殊平行四边形之间的联系和区别，则是本章教学的难点. 因为各种平行四边形概念

交错，容易混淆，常会出现“张冠李戴”的现象，也常常出现用错或多用或少用条件的错误. 教学中要注意用“集合”思想，结合教材中的关系图，分清这些四边形的从属关系，抓好概念教学，是克服这一难点的关键.

中心对称是本章的第二个难点，因为它渗透了旋转变换的概念，学生不容易想象和掌握. 但这一节的概念只要求学生了解.

4. 教学建议.

（1）立足于学生的生活经验和已有的数学活动经验（尤其是操作经验），创设恰当的问题情境，呈现四边形性质、判定的探索过程.

（2）注意直观操作与推理证明的有机结合.

在教学中，不论是探索各种四边形的性质和判定，还是发现多边形内角和与外角和公式，都是通过直观操作得出的. 同时，应把推理证明作为探索活动的自然延续和必然发展，问题在于要正确处理形象思维与抽象思维的辩证关系. 教学中运用大量图形与直观的例子，有助于培养学生学习兴趣，有助于对知识的理解，但直观不是最终的目的，应该从直观进一步发展形象思维，培养学生的直觉能力，再过渡到抽象思维、理性认识，这样认识才完整.

（3）关注学生多样化的学习需求.

在探索四边形有关性质和判定的过程中，鼓励学生探索方式、结果、表述方式的多样化以及学生学习方式的个性化，同时教师在教学时也应注意教学策略的多样化，以满足学生多样化的学习需求.

（4）重视现代信息技术的应用.

现代信息技术的广泛应用对数学课程内容、数学教学、数学学习等方面已产生深刻的影响，信息技术工具的使用能为学生的数学学习和发展提供丰富多彩的教育环境和有力的学习工具，重视现代化信息技术的使用也正是本套教材的特点之一.

在这一章，利用信息技术工具，可以给我们展现丰富多彩的图形世界，丰富学习资源，有助于学生从中抽象出几何图形；可以帮助学生在动态变化的图形中寻找不变的位置关系和数量关系，从而发现图形的性质. 因此，有条件的地方应尽可能地使用信息技术工具，帮助学生学习数学.

（5）用好章前页和阅读材料，激发学生的学习兴趣.

教材实现了从主要为教师而写改变为主要为学生而写的目标，结合学生的心理特点，在每一章的引言部分和阅读材料部分或提出问题激发学生渴求新知的求知欲，或配以直观形象的照片，或以一则引人入胜的故事，创设问题情境. 这些生动有趣的文字、美丽而富有启发性的照片和图画，以及精心选择的有利于扩展视野的阅读材料，可能会使学生的学习兴趣保持长久不衰.

（6）从揭示联系的角度、从深化认识的角度引导学生学习“回顾与整理”.

与正文单个知识点的研究不同的是，在全章结束后的“回顾与整理”是站在全章整体高度进行的，因而就更便于从整体与联系的角度进行阐述. 让学生学习“回顾与整理”，也就要求从中发现这样的联系，提示这样的联系. 如本章“回顾与整理”将特殊四边形的性质与判定用两张表格简捷地显示了出来，我们就应该要求对全章内容进行综合、概括，让学生尽量通过自己的努力去发现这样的联系. 哪怕不那么全面、准确，但进行这样的尝试、训练对其素质的提高是有好处的. 当然，这种能力的培养需要一个过程，刚开始可以在探索过程中参看“回顾与整理”，以后逐步过渡到独立进行.

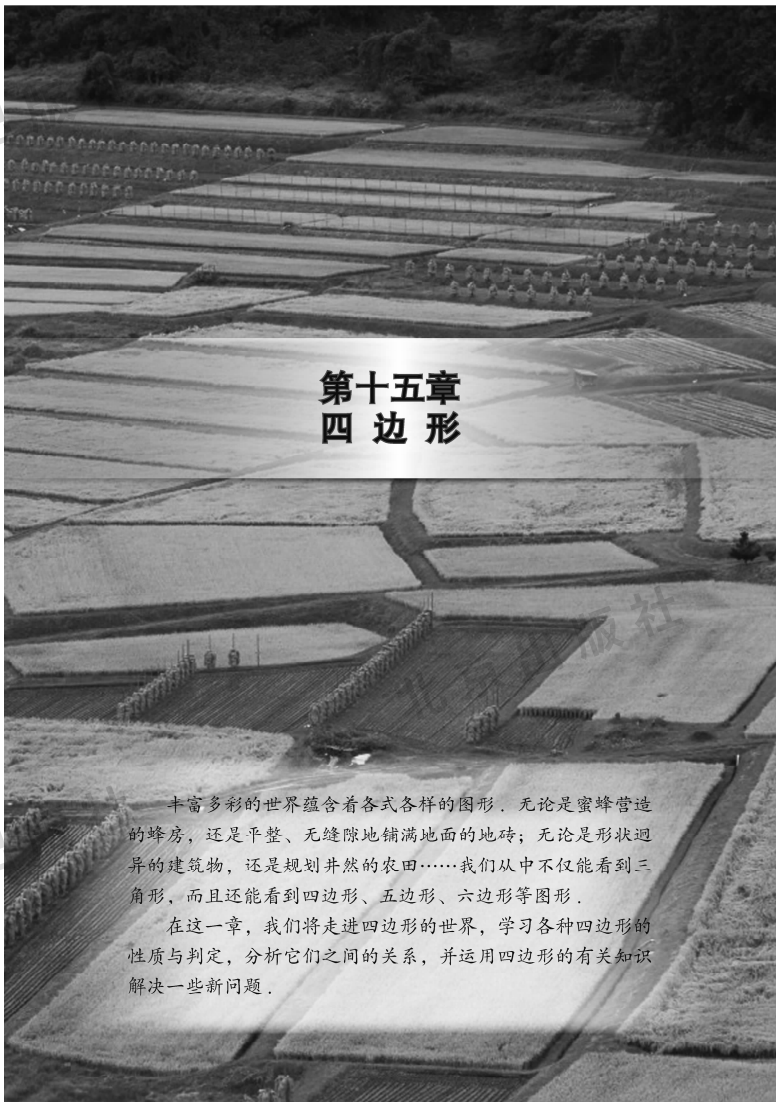
由于“回顾与整理”是全章学习内容的概括和总结，是在知识系统基础上的提高与升华，所以，认真研究和学习“回顾与整理”对透彻理解和深化认识都是十分有益的，“回顾与整理”中的“学习指导”，对于学生更深入地理解全章知识是很有帮助的.

5. 课时安排.

本章教学约需 26 课时，具体分配如下（仅供参考）：

15.1 多边形	约 3 课时
15.2 平行四边形和特殊的平行四边形	约 2 课时
15.3 平行四边形的性质与判定	约 6 课时
15.4 特殊的平行四边形的性质与判定	约 8 课时
15.5 三角形中位线定理	约 3 课时
15.6 中心对称图形	约 3 课时
总结与复习	约 1 课时

教材及其参考信息



章前页说明本章的主要内容是：各种四边形的性质与判定；分析各种四边形之间的联系与区别，并应用四边形的知识解决一些新问题.

教学时，教师可利用章前页图或展现一些贴近学生生活实际的有关图案，引导学生进行细致的观察，培养学生从具体的事物中抽象出几何图形的能力. 体会四边形是我们常见的一种图形，研究它们的实际应用意义，从而激发学生的学习兴趣.

[1] 在建立多边形的概念时，应强调“平面图形”这一条件，否则它们的顶点就可能出现不共面的情况.

[2] 要使学生明确，表示四边形时顶点必须按顺时针或逆时针的顺序写. 结合练习第1、2题，让学生掌握多边形的记法.

一、多边形

15.1 多边形

探索

我们已经知道什么叫三角形，你能说出什么叫四边形、五边形、六边形吗？

交流

1. 图 15－1 中各实物的哪些部分呈现出四边形、五边形、六边形的形状？



图 15－1

2. 这些图形从构成来看有什么共同特点？

一般地，由 n 条线段首尾顺次相接组成的平面图形称为 n 边形，又称为多边形.[1]

我们常把表示多边形各个顶点的字母顺次排列在一起，来表示这个多边形. 如图 15－2 中的四边形、五边形可分别记作四边形 $ABCD$[2]五边形 $ABCDE$ 等.

本节的主要内容是多边形的概念、内角和与外角和公式、四边形的不稳定性.

1. 通过类比的方法建立多边形的有关概念，如多边形的边、顶点、内角、外角、内角和、外角和等都可用三角形类比.

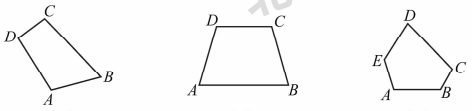


图 15－2

把多边形的任何一边向两个方向延长，如果其他各边都在延长所得直线的同一旁，这样的多边形叫凸多边形，[1] 如图 15－3(1)，而图 15－3(2) 就不是凸多边形．现在我们只研究凸多边形．

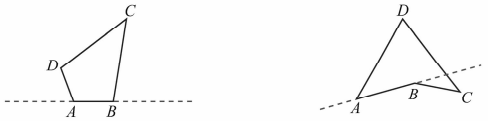


图 15－3

如图 15－4，四边形 $ABCD$ 的四条边分别是 AB，BC，CD，DA，四个顶点分别是点 A，B，C，D，四个内角（简称角）分别是 $\angle A$，$\angle B$，$\angle DCB$，$\angle D$；$\angle DCE$ 和 $\angle BCF$ 都是与 $\angle DCB$ 相邻的外角，两者互为对顶角．

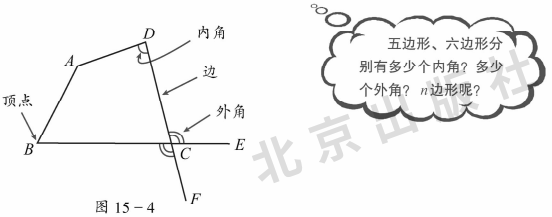


图 15－4

连接多边形不相邻的两个顶点的线段叫做多边形的对角线．[2] 如图 15－5 中的 AC，AD 就是五边形 $ABCDE$ 的两条对角线．

三角形可以看成是边数最少的多边形．

我们知道，正方形的各个角都相等，各条边都相

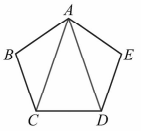


图 15－5

[1] 延长任意一边，都有相同的结论，教学时可让学生延长其他的边来验证．

[2] 这是一个新概念，它的重要意义在于它的应用，它是解决多边形问题时常用的辅助线，通过它可以把多边形的问题转化为三角形的问题来解决．

2. 对于多边形的边、顶点、内角、外角等概念，教学中只要结合图形加以说明，让学生了解，并在图形中能辨认就行了，不要再补充这些概念，让学生记忆．

3. 多边形分凹凸两类，因为我们现在只研究凸多边形，所以教材中只定义了凸多边形．要求学生能根据定义辨认一个多边形是不是凸多边形．教材中没有给出凹多边形概念，教学中也不必对学生讲．

练习答案：

1. 图中有6个四边形，表示方法略.
2. 不可以.
3. 略.
4. 四边形的一条对角线将四边形分成2个三角形；从五边形一个顶点出发，可以画出2条对角线，它们将五边形分成了3个三角形；从六边形一个顶点出发，可以画3条对角线，它们将六边形分成4个三角形……从 n 边形（$n>3$）的一个顶点出发，可以画（$n-3$）条对角线，它们将 n 边形分成（$n-2$）个三角形.

等．像正方形这样，各个角都相等，各条边都相等的多边形叫做正多边形．

在生活中我们经常见到正多边形，你能找出图15－6中的正多边形吗？它们各是正几边形？你还能举出正多边形的例子吗？

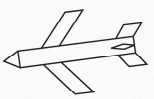


图15－6

思考

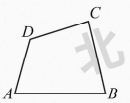
练习

1. 观察图中有几个四边形．在其中一个四边形的顶点处标上字母，并用字母把这个四边形表示出来．



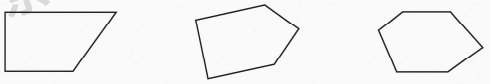
（第1题）

2. 图中的四边形可以记作四边形 $ADBC$ 吗？



（第2题）

3. 用字母标注出下列多边形的全部顶点，写出它们的各边和各内角，并画出每个多边形的全部对角线；任意延长一个多边形的一条边，标注出字母，写出它的一个外角．



（第3题）

4. 四边形的一条对角线将四边形分成几个三角形？从五边形的一个顶点出发，可以画出几条对角线？它们将五边形分成几个三角形？六边形呢？七边形呢？……

不难发现，四边形的一条对角线把四边形分割成为两个三角形[图 15－7(1)]. 由于三角形内角和等于 180°，所以可知，四边形的内角和是 360°.

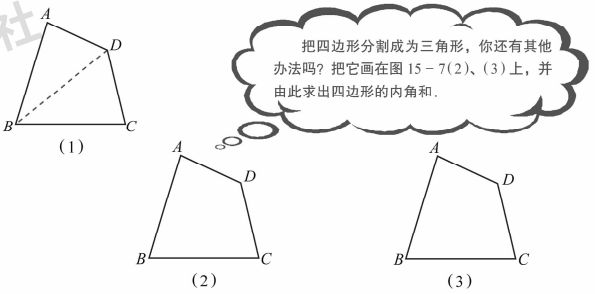


图 15－7

探索

设计一个实验(如剪纸、拼图)，说明四边形的内角和是 360°.[1]

思考

四边形的内角可能都是锐角吗？可能都是直角吗？最多有几个钝角？[2]

交流

如图 15－8，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle 1$，$\angle 2$，$\angle 3$，$\angle 4$ 是四个外角，怎样求出它们的和呢？

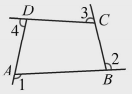


图 15－8

[1] 方法不唯一. 如，可以这样验证：分别撕下四边形纸片的每个内角，将它们的顶点拼在一起(顶点重合)，即可得到一个周角.

[2] 不可以，因为四个内角如果都是锐角，那么它们的和小于 360°，而四边形的内角和等于 360°；可以，因为四个直角的和等于 360°，等于四边形的内角和；最多有 3 个钝角.

容易看出：

$$\begin{aligned}&\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4\\&=(180^\circ-\angle BAD)+(180^\circ-\angle ABC)+(180^\circ-\angle BCD)+(180^\circ-\angle CDA)\\&=720^\circ-(\angle BAD+\angle ABC+\angle BCD+\angle CDA)\\&=720^\circ-360^\circ\\&=360^\circ.\end{aligned}$$

所以，四边形的外角和等于 360°.

在多边形的每个顶点处取多边形的一个外角，它们的和叫做多边形的外角和 [1]

交流

1. 你能利用把多边形分割为三角形的办法，推导出五边形、六边形……的内角和吗？

2. 把一个多边形分割为若干个三角形来求多边形的内角和，有几种分割方法？分割出的三角形的个数与多边形的边数有什么关系？

3. 多边形的内角和与多边形的边数有什么关系？你能写出由多边形的边数 n 来计算多边形的内角和的计算公式吗？

4. 你能根据“n 边形的每一个内角与和它相邻的外角互为补角”这一关系，推导出 n 边形的外角和是多少吗？

由此得到：

n 边形的内角和为 $(n-2)\cdot 180^\circ$，外角和为 360°.

如图 15－9，设想多边形 $A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$ 向 A_1 “收缩”，图形虽然越来越小，但各个外角均保持不变，你能用这个方法探索出多边形的外角和吗？[2]

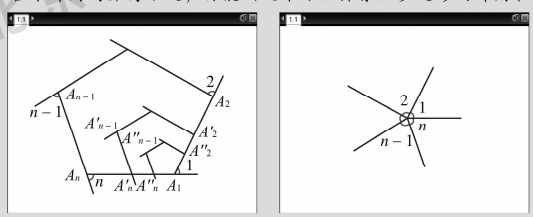


图 15－9

思考

[1] 在多边形中，与同一内角相邻的两个外角相等，但 n 边形的外角和是指在 n 边形的 n 个顶点处各取一个外角相加而得，这一点要让学生注意到.

[2] 渗透了变化的观点，当多边形逐渐变小时，外角和与周角无限接近，由此可以加深对“n 边形外角和总是 360°”的认识. 用运动的观点看几何图形，对进一步研究平面图形有益.

4. 多边形内角和公式的推证，关键在于将多边形的所有内角转化成一些三角形的内角. 分割的办法可以像证明四边形内角和公式那样有三种：一是从多边形的一个顶点引对角线；二是在多边形某一边上任取一点，把这点与多边形的各顶点连接起来；三是在多边形内任取一点，把这点与多边形的各顶点连接起来.

例 如果一个多边形的每个内角都相等，它的一个外角等于一个内角的三分之二，这个多边形是几边形？

解：设这个多边形的边数为 n. 由多边形的内角和与外角和公式，得出这个多边形的

$$\text{一个内角} = \frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n},$$

$$\text{一个外角} = \frac{360^\circ}{n}.$$

由已知，得 $\frac{360^\circ}{n} = \frac{2}{3}\cdot\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$.

解得

$$n = 5.$$

答：这个多边形是五边形.

交流

多边形的内角和 Q 可以看做是这个多边形的边数 n 的函数吗？为什么？

要学会从不同角度看问题.

实践

如图 15－10，用四根木条做一个四边形，使两根木条的连接处可以转动[1]！做好之后，用手轻轻推拉，你发现了什么？[2]

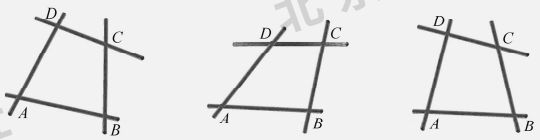


图 15－10

[1] 按图做成教具，在课堂上给学生演示. 最好能和三角形作对比，使学生对这个性质有更深刻的印象.

[2] 让学生注意观察：四边形的形状改变时，哪些是变化的，哪些是不变的.

5. 利用多边形内角和反求边数，学生不大容易掌握，教学时可与代数中解方程联系起来，帮助学生掌握计算方法.

6. 关于四边形的不稳定性，在小学学过；在“三角形”一章讲三角形的稳定性时，也曾利用四边形不稳定性作对比. 这里为什么还要讲呢？因为这一章是比较系统地学习四边形，“不稳定性”是四边形的一个重要性质，在生产和生活中常常遇到这方面的问题. 除教材中的例子外，教学时还可以启发学生再举些实例，以引起对这个问题的重视.

练习答案：

1. （1）540°；
   （2）1 080°；
   （3）1 440°.
2. 10.
3. 60°，90°，108°，120°，135°.

从操作中可以发现，虽然四边形的边长不变，但它的形状却不断改变，这说明四边形具有不稳定性.

四边形的不稳定性在生活中有广泛的应用. 观察如图 15－11 所示的电动伸缩门，你会发现电动伸缩门就是由许许多多小四边形组成的，它就是利用了四边形的不稳定性.



图 15－11

探索

以 $AB=20$ mm，$BC=30$ mm，$CD=18$ mm，$DA=21$ mm 为边，画出四边形 $ABCD$. 和同学们比较一下，大家画出的四边形的形状一样吗？如果使 $\angle ABC=60°$，再画这个四边形，大家画的形状一样吗？

练习

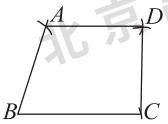
1. 计算下列多边形的内角和：
   （1）五边形；　　（2）八边形；　　（3）十边形.
2. 已知一个多边形的每一个外角都为 36°，求这个多边形的边数.
3. 正三角形、正四边形（正方形）、正五边形、正六边形、正八边形的每个内角分别是多少度？

7. 已知四边画四边形，教材没有给出画法，学生可能一时不知从何下手，可让学生回忆已知三边是怎样作三角形的，在这个基础上启发学生自己画出符合条件的四边形. 如果学生确实有困难，可以提示画法：

（1）画任意小于平角的 $\angle B$.

（2）在 $\angle B$ 的两边上分别截取 $AB=20$ mm，$BC=30$ mm.

（3）分别以点 A，C 为圆心，以 21 mm、18 mm 为半径画弧，两弧交于点 D.



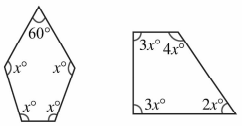
（4）连接 AD，CD. 四边形 $ABCD$ 是所要画的四边形.

因为 $\angle B$ 的大小不固定，所以四边形的形状不确定. 同学们画出的四边形可以有多种形状.

习 题 15-1

★基础★

1. 求出各图中 x 的值.
2. (1) 一个多边形的内角和是外角和的一半，它是几边形?
   (2) 一个多边形的内角和是外角和的 2 倍，它是几边形?
3. 一个多边形的每个内角都等于与它相邻的外角，这个多边形是几边形? 你能确定它的每个外角的度数吗?

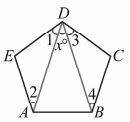


(1) (2)
(第 1 题)

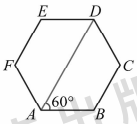
4. 是否存在一个多边形，它的每个外角都等于相邻内角的 $\frac{1}{5}$? 简述你的理由.
5. 如果两个多边形的边数相差 1，那么它们的内角和、外角和分别有什么异同?

★★提升★★

1. 如图，五边形 $ABCDE$ 的内角都相等，且 $\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，求 x 的值.



(第 1 题)

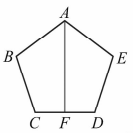


(第 2 题)

2. 如图，六边形 $ABCDEF$ 的内角都相等，$\angle DAB=60°$. AB 与 DE 有什么关系? BC 与 EF 有这种关系吗? 这些结论是怎么得出的?

★★★拓展★★★

如图，$AB=AE$，$\angle ABC=\angle AED$，$BC=ED$，点 F 是 CD 的中点.
(1) 求证: $AF\perp CD$.
(2) 在你连接 BE 后，还能得到什么新的结论? 请写出三个.



如果使 $\angle ABC=60°$，四边形的画法是：(1) 画 $\angle B=60°$. 其余步骤同上.

可见当四边形中有一个角的度数确定了，这个四边形的形状就确定了，所以大家画出的四边形是全等的. 这个“探索”可以帮助学生认识四边形的不稳定性.

[1] 陈省身，美籍华人，1911 年生于浙江嘉兴. 他童年时只上了一天初级小学，便待在家里读书. 1926 年夏，他未经预科班学习直接考入南开大学. 1927 年进入数学系，该系的姜立夫教授对陈省身影响很大. 1930 年毕业于南开大学，1931 年考入清华研究院，成为中国国内最早的数学研究生之一. 在孙光远博士指导下，发表了第一篇研讨论文，内容是关于射影微分几何的. 1932 年 4 月应邀来华讲学的汉堡大学教授布拉希克对陈省身影响也不小，使他确定了以微分几何为今后的研究方向. 1934 年，他毕业于清华研究院，同年，得到汉堡大学的奖学金，赴布拉希克所在的汉堡大学数学系留学. 1936 年获得博士学位.

陈省身是美国科学院院士，并曾任美国国家数学研究所所长.

陈省身对数学有重大贡献，尤其是在几何学方面. 他的成就对现代数学的许多分支都产生了深远的影响. 他被誉为现代微分几何学的奠基人之一.

陈省身还是一位数学教育家，退休后还在伯克莱分校授课三年. 1982 年，他回到南开大学，捐款在数学系设立数学奖学金. 1984 年，他辞去美国国家数学研究所所长的职务，正式应聘到南开大学担任南开数学研究所所长. 他还担任了中美科技交流协会主席以及北京大学、南开大学和暨南大学等校的名誉教授.

陈省身 1984 年获得沃尔夫数学奖.

阅读理解

换个角度看问题



美籍华人数学家陈省身教授(1911—2004)[1]是当代举世闻名的数学家. 他十分关心我国数学科学的发展，人们称赞他是“中国青年数学学子的总教练”.

1980 年，陈教授在北京大学的一次讲学中语惊四座：“人们常说，三角形内角和等于 180°，但是，这是不对的！”

大家愕然！怎么回事？三角形内角和是 180°，这不是数学常识吗？

接着，这位老教授对大家的疑问作了精辟的解答：“‘三角形内角和为 180°’不对，不是说这个事实不对，而是说这种看问题的方法不对，应当说‘三角形外角和是 360°’！”

把眼光盯住内角，只能看到：三角形内角和是 180°，四边形内角和是 360°，五边形内角和是 540°……n 边形内角和是 $(n-2)\times 180°$. 这就找到了一个计算内角和的公式，公式里出现了边数 n.

如果看外角呢？

三角形的外角和是 360°，四边形的外角和是 360°，五边形的外角和是 360°……任意 n 边形的外角和都是 360°. 这就把多种情形用一个十分简单的结论概括出来了，用一个与 n 无关的常数代替了与 n 有关的公式，找到了更一般的规律.

探求问题的本质，寻找事物的规律，用最简单的形式表达，是数学家的追求！

北京出版社

二、平行四边形

15.2 平行四边形和特殊的平行四边形

平行四边形是随处可见的图形，如图 15－12 中的篱笆、道闸、衣帽架等，都具有平行四边形的形象．





图 15－12

两组对边[1]分别平行的四边形叫做平行四边形．

平行四边形是特殊的四边形．如图 15－13，在四边形 $ABCD$ 中，$AB \parallel DC$，$AD \parallel BC$，那么四边形 $ABCD$ 就是平行四边形．平行四边形用符号“$\square$”表示，“平行四边形 $ABCD$”可以记作“$\square ABCD$”，读作“平行四边形 $ABCD$”．

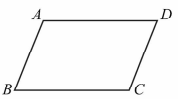


图 15－13

如果改变平行四边形内角的大小或边的长短，就能得到一些特殊的平行四边形．

交流

如图 15－14，用计算机或图形计算器画一个平行四边形 $ABCD$，[2]拖动点 A，使其在线段 AD 所在的直线上运动，度量$\angle DAB$ 的大小，你发现平行四边形 $ABCD$ 的形状有什么变化？

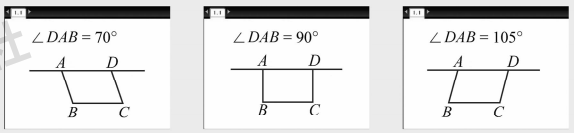
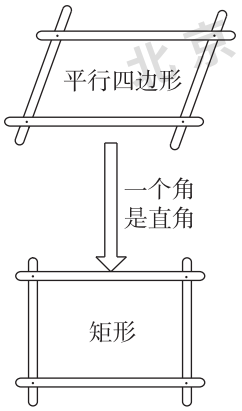


图 15－14

[1] 四边形中不相邻的边也就是没有公共顶点的边叫对边．与三角形中所说的对边不同，三角形中是指角对的边．教学时要结合图形，让学生认识清楚．

[2] 也可以使用四根木条制成如图那样一个能活动的平行四边形教具．



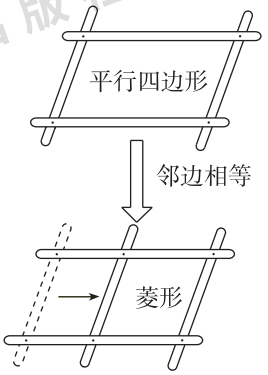
本节的主要内容是平行四边形和特殊的平行四边形的概念．学好本节可为学好本章打下基础．

1．平行四边形的定义在小学里学过，学生是不生疏的，但对于概念的本质属性的理解并不深刻，所以这里并不是要复习巩固，而是要加深理解，要防止学生把平行四边形概念当作已知，而不重视对它本质属性的掌握．教学中要重视把学生对平行四边形的感性认识，进一步提高到理性认识上来．

为了有助于学生对平行四边形本质属性的理解，在讲平行四边形定义前，要把平行四边形的对边、对角让学生认识清楚．

讲定义时要强调“四边形”和“两组对边分别平行”这两个条件，一个“四边形”必须具备有“两组对边分别平行”才是平行四边形；反之，平行四边形就一定是有“两组对边分别平行”的一个“四边形”．要指出，定义既是平行四边形的一个判定方法，又是平行四边形的一个性质．

[1] 也可以按图做成教具（注意教具要有刻槽，使较短的边可以沿槽平行移动）.



[2] 正方形是在平行四边形的前提下定义的，它包含两层含义：

（1）有一组邻边相等的平行四边形（菱形）
（2）并且有一个角是直角的平行四边形（矩形）

⇨ 正方形

可以发现，随着点 A 的运动，它仍然保持平行四边形的形状，但 $\angle DAB$ 的大小却在不断地改变，它的变化范围是 $0°\sim180°$. 当 $\angle DAB$ 是直角时，就得到一种特殊的平行四边形——矩形 .



有一个角是直角的平行四边形叫做矩形 .

交流

如图 15－15，用计算机或图形计算器画一个平行四边形 $ABCD$,[1] 拖动 AB，使点 A、点 B 分别在线段 AD、线段 BC 所在直线上运动，度量一组邻边 AB，BC 的长，你发现平行四边形 $ABCD$ 的形状有什么变化?

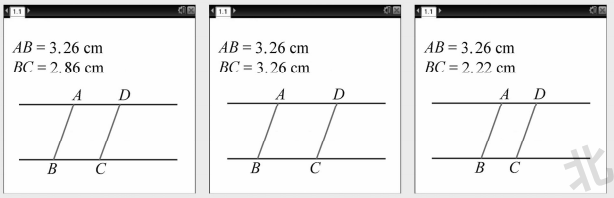
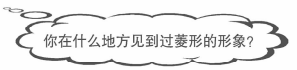


图 15－15

可以发现，随着 AB 的运动，它仍然保持平行四边形的形状，但 BC 的长度却在不断地改变，当 BC 恰好与 AB 相等时，就得到一种特殊的平行四边形——菱形 .

有一组邻边相等的平行四边形叫做菱形 .



思考

平行四边形是否可能有一组邻边相等并且有一个角是直角呢？这时，平行四边形演变成什么图形?

有一组邻边相等并且有一个角是直角的平行四边形叫做正方形 .[2]

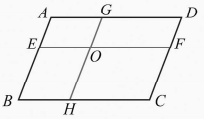
2. 特殊的平行四边形的定义是属种式的定义方式，是以平行四边形的概念再加上一些特殊条件给出的. 这种定义本身就是一种很重要的逻辑思维方法，通过特殊平行四边形定义的给出，应让学生能区分平行四边形与特殊平行四边形之间、特殊平行四边形之间的联系与区别. 为此，教学中可采用现代化教学手段或通过对教具的演示，使学生观察当平行四边形的角、边变化时，图形的变化情况，目睹形成特殊平行四边形的直观形象，进而分析它们之间的联系与区别.

探索

正方形、矩形、菱形和平行四边形之间存在“特殊”和“一般”的关系，矩形、菱形和正方形之间也存在“特殊”和“一般”的关系，你能用一张图来表示它们之间的这种关系吗？把你设计的图和同学讨论，并把你认为最好的设计方案写在下面的空白处：[1]

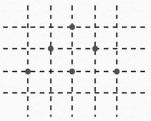
练习

1. 如图，在▱*ABCD*中，*EF* // *BC*，*GH* // *AB*，*EF*，*GH*相交于点*O*. 试找出图中的平行四边形，与你的同伴比一比，看看谁找出的多.

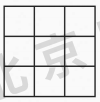


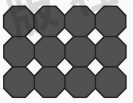
（第1题）

2. 矩形、菱形各是怎样特殊的平行四边形？
3. 填空题：
   （1）正方形是_____的四边形；
   （2）正方形是_____的平行四边形；
   （3）正方形是_____的矩形；
   （4）正方形是_____的菱形.
4. 如图，以红色格点为顶点，你能画出多少个平行四边形？


（第4题）


（1）

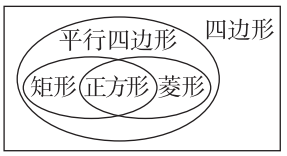

（2）
（第5题）


（第6题）

5. 图中分别有多少个正方形？有多少个矩形？
6. 如图，是以正八边形为主构成的一种图案. 图中的空白部分所形成的图形的轮廓是怎样的四边形？

[1] 渗透集合思想，分清概念之间的从属关系，进一步理解和掌握概念.

教学中，让学生去研究，可小组讨论，教师归纳. 如下图：



练习答案：

1. ▱*AGOE*、▱*GOFD*、▱*OFCH*、▱*EOHB*、▱*AGHB*、▱*GDCH*、▱*ADFE*、▱*EFCB*、▱*ABCD*.
2. 略.
3. （1）四边相等且四个角都是直角；
   （2）有一组邻边相等并且有一个角是直角；
   （3）有一组邻边相等；
   （4）有一个角是直角.
4. 3个.
5. （1）5个正方形，9个矩形；
   （2）14个正方形，36个矩形.
6. 正方形.

3. 概念引入之后，还应进一步剖析它们之间的关系. 如导入矩形概念后，观察图形，抽象本质属性. 首先肯定矩形是平行四边形，这是给矩形下定义的前提（即矩形概念的种概念），然后找出这个图形与一般平行四边形不同之处，就是有一个角是直角（属差）. 于是得到：有一个角是直角的平行四边形叫做矩形. 给出定义后，剖析定义内涵，即满足：①是平行四边形；②有一个角是直角. 这两条缺一不可. 然后提出问题让学生思考：如果把“平行四边形”换成“四边形”或“去掉有一个角是直角”，能保证是矩形吗？再提出问题：增加条件行不行？如“有四个角是直角的平行四边形叫做矩形”可以吗？实际上，用“一个角是直角”可以推出其余三个角是直角，不需要多余条件.

[1] 四边形的对角指四边形中没有公共边的两个角，也就是相对着的两个角. 它与三角形中常说的边所对的对角不同. 教学中要结合图形，让学生分辨清楚.

15.3 平行四边形的性质与判定

1. 平行四边形的性质

平行四边形是一种特殊的四边形，它除具有四边形的性质外，还有一些特殊的性质.

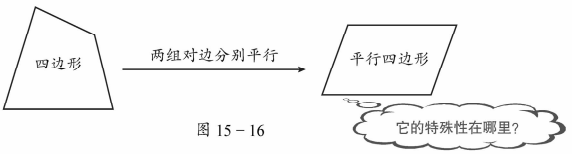


图 15－16

交流

如图 15－17，用计算机或图形计算器画平行四边形，研究一下：

(1) 平行四边形的对边在长短上有什么关系？为什么？

(2) 平行四边形的对角在大小上有什么关系？为什么？[1]

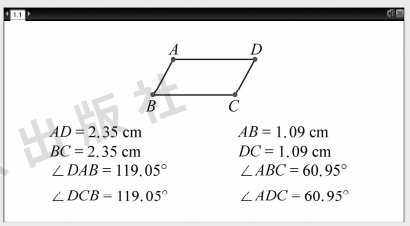


图 15－17

可以发现并能证明：

平行四边形性质定理 1　平行四边形的对边相等.

平行四边形性质定理 2　平行四边形的对角相等.

下面给出性质定理 1 的证明，性质定理 2 由同学们自己证明.

本节的主要内容是平行四边形的性质和判定.

1. 教材给出了平行四边形的三条性质，应该指出的是，平行四边形的定义及其对称性也是平行四边形的性质. 即平行四边形具有以下性质：对边平行（定义），对边相等（性质定理 1），对角相等（性质定理 2），对角线互相平分（性质定理 3），是中心对称图形（对称性）.

已知：如图 15－18，$\square ABCD$.

求证：$AB=CD$，$AD=BC$.

证明：连接 AC，AC 把 $\square ABCD$ 分成 $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDA$.

∵ $AB \parallel CD$，$AD \parallel BC$，

∴ $\angle BAC=\angle DCA$，$\angle BCA=\angle DAC$.

又∵ $AC=CA$，

∴ $\triangle ABC \cong \triangle CDA$.

∴ $AB=CD$，$AD=BC$.

你会运用全等三角形的知识证明吗？

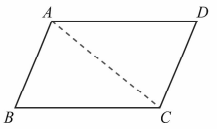


图 15－18

交流

1. 如图 15－19(1)，$l_1 \parallel l_2$，AB 和 CD 是夹在 l_1，l_2 之间的平行线段，AB 和 CD 的长度有什么关系？为什么？

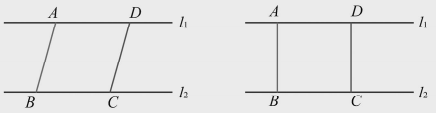


图 15－19

2. 如图 15－19(2)，$l_1 \parallel l_2$，A，D 是 l_1 上不同的两点，线段 AB 和 CD 的长度分别是点 A，D 到 l_2 的距离，AB 与 CD 的长度有什么关系？为什么？

于是得到：

夹在两条平行线间的平行线段相等.

两条平行线中，一条直线上任意一点到另一条直线的距离叫做这两条平行线间的距离.由此可得：

平行直线间的距离处处相等.

2. 把平行四边形转化为三角形问题来解决，常用的方法是作它的对角线为辅助线，把平行四边形分割为两个全等三角形. 这也是证明平行四边形性质定理的关键所在.

3. “夹在两条平行线间的平行线段相等”，实际上是“平行四边形的对边相等”的应用，把它作为结论，证题时往往可以节省步骤，可以省掉根据定义判定是平行四边形这一步，应用这个结论可直接得到两条线段相等. 教学时应强调是“平行线段”才相等，不是“线段”相等.

“两条平行线间的距离”的概念是在这个结论的基础上提出的. 要让学生弄清这个距离的概念与以前学过的“两点间的距离”、“点到直线的距离”两个距离概念的异同. 同时，还应强调：(1) 距离是正值，是指线段的长度；(2) 两平行线的位置确定之后，其距离就为定值.

[1] 夹在铁轨之间的枕木一样长. 这是因为“平行线间的距离处处相等”.

练习答案：

1. 108°，72°，108°.
2. 12，18.



图 15－20

想一想，夹在两根笔直的铁轨之间的枕木是否一样长？为什么？[1]

例 1 如图 15－21，E，F 是$\square ABCD$ 的对角线 AC 上两点，且 $AE=CF$. 请你写出图中的一对全等三角形，并对此加以证明.

解：$\triangle ABE \cong \triangle CDF$.

证明如下：∵ 在$\square ABCD$ 中，$AB \parallel CD$，

∴ $\angle BAE=\angle DCF$.

又∵ $AB=CD$，$AE=CF$，

∴ $\triangle ABE \cong \triangle CDF$.

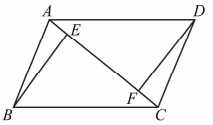


图 15－21

你发现图中有几对全等三角形？

思考

如果已知平行四边形一个内角的度数，你能确定其他三个内角的度数吗？说说理由.

练习

1. 在$\square ABCD$ 中，$\angle A=72°$，那么$\angle B=$_____，$\angle C=$_____，$\angle D=$_____.
2. 已知$\square ABCD$ 的周长为 60 cm，$AB=12$ cm，那么 $CD=$_____ cm，$BC=$_____ cm.

探索

如图 15－22，如果直线 $l_1 // l_2$，那么 $\triangle ABC$ 的面积和 $\triangle DBC$ 的面积是相等的．你能说出理由吗？你还能在这两条平行线 l_1，l_2 之间画出其他与 $\triangle ABC$ 面积相等的三角形吗？[1]

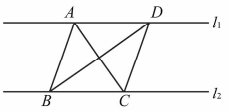


图 15－22

交流

如图 15－23，用计算机或图形计算器画出□ $ABCD$，它的两条对角线 AC，BD 相交于点 O．观察图形，你能发现并猜想出平行四边形的两条对角线有什么性质吗？能证明你的猜想吗？

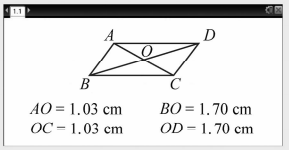


图 15－23

可以发现并能证明：

平行四边形性质定理 3　平行四边形的对角线互相平分．

例 2 如图 15－24，在□ $ABCD$ 中，已知对角线 AC 和 BD 相交于点 O，$\triangle AOB$ 的周长为 15，$AB = 6$，那么对角线 AC 与 BD 的和是多少？

解：∵　$AO + BO + AB = 15$，$AB = 6$，

∴　$AO + BO = 15 - 6 = 9$.

在□ $ABCD$ 中，

∵　$AO = OC$，$BO = OD$，

∴　$AC + BD = 2AO + 2BO = 2(AO + BO) = 2 \times 9 = 18$.

即□ $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 的和为 18.

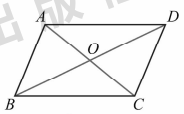


图 15－24

练习

1. □ $ABCD$ 的两条对角线相交于点 O，OA，OB，AB 的长度分别为 3 cm，4 cm，

[1] 因为平行线之间的距离处处相等，所以 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DBC$ 是同底（BC）等高的三角形，所以它们的面积是相等的．在直线 l_1 上任取不同于 A，D 的点，与 B，C 连接组成的三角形的面积都等于 $\triangle ABC$ 的面积．

4. 学完“平行四边形的性质”这一小节之后，归纳总结一下平行四边形比一般四边形多哪些性质，平行四边形有哪些性质，可以按边、角、对角线进行总结．通过复习总结，使学生掌握这些知识，培养学生随时复习总结的习惯，并提高他们归纳总结的能力．

练习答案：

1. 其他各边长均为5 cm，对角线长度分别为6 cm、8 cm.
2. 相等. 原因略.

5 cm. 求其他各边以及两条对角线的长度.

2. 如果平行四边形的两条对角线互相垂直，那么这个平行四边形的两条邻边有什么关系？为什么？

2. 平行四边形的判定

交流

为了制作平行四边形木框，小亮找了长度依次为30 cm，40 cm，30 cm，40 cm的四根木条，并按这个顺序将其固定为一个四边形.

你能说出这样做的道理吗？

已知：如图15－25，在四边形$ABCD$中，$AB=CD$，$BC=AD$.

求证：四边形$ABCD$是平行四边形.

分析：连接AC，把四边形分成△ABC和△CDA.

证明：如图15－25，连接AC.

$\because$ $AB=CD$，$BC=AD$，$AC=AC$，

$\therefore$ △ABC≌△CDA.

$\therefore$ $\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$.

$\therefore$ $AB\parallel CD$，$BC\parallel AD$.

$\therefore$ 四边形$ABCD$是平行四边形.

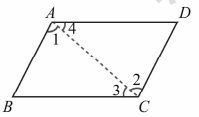


图15－25

于是得到：

平行四边形判定定理1　两组对边分别相等的四边形是平行四边形.

交流

小亮的爸爸在制作平行四边形木框时，将两根木条AC，BD的中点重叠，并用钉子固定，然后连接AB，BC，CD，AD，那么四边形$ABCD$就是平行四边形(图15－26).

你能说出这样做的道理吗？

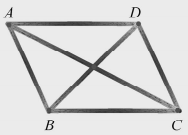


图15－26

5. 教材创设了做平行四边形框架这一情境，便于学生发现和探究平行四边形的常用判定方法.

6. 平行线和全等三角形的有关知识，仍然是平行四边形判定定理证明的基础；在证明第一个判定定理时，只能用“定义”，即想办法证明四边形的两组对边分别平行.“两组对边分别相等的四边形是平行四边形”就只能用“定义”证明.

因为教材中的判定定理都可以用“定义”证明，所以判定定理的顺序并不是固定不变的.

通过证明，可以得到：

平行四边形判定定理 2　对角线互相平分的四边形是平行四边形．

例 3[1] 已知：如图 15－27，在▱*ABCD* 中，对角线 *AC* 与 *BD* 相交于点 *O*，点 *E*，*F* 分别是 *AO*，*OC* 的中点．

求证：四边形 *BFDE* 是平行四边形．

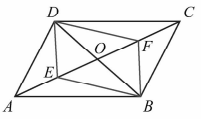


图 15－27

证明：∵　四边形 *ABCD* 是平行四边形，

∴　$OA = OC$，$OB = OD$.

又∵　*E*，*F* 分别是 *AO*，*OC* 的中点，

∴　$OE = \frac{1}{2}AO$，$OF = \frac{1}{2}CO$.

∴　$OE = OF$.

∴　四边形 *BFDE* 是平行四边形．

实践

如图 15－28，已知▱*ABCD* 的两条对角线相交于点 *O*，*E*，*F*，*G*，*H* 分别是 *AO*，*BO*，*CO*，*DO* 的中点．以图中标有字母的点为顶点，你能画出几个平行四边形？并说明理由．[2]

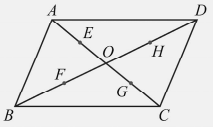
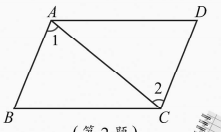


图 15－28

练习

1. 把两个不等边的全等三角形，按不同方法拼成四边形，最多可以拼成几个不同的四边形？它们都是平行四边形吗？为什么？
2. 已知：如图，四边形 *ABCD* 中，$\angle B = \angle D$，$\angle 1 = \angle 2$，四边形 *ABCD* 是平行四边形吗？为什么？
3. 延长△*ABC* 的中线 *AD* 至 *E*，使 $DE = AD$，四边形 *ABEC* 是平行四边形吗？为什么？



（第 2 题）

［1］教学中可根据学生实际，适当将此例题进行变化与拓展，如 *E*，*F* 不是中点而是满足 $AE = CF$，能否得到 *BFDE* 为平行四边形？还可以将此题与下面“实践”结合起来，让学生能举一反三，发展学生的发散思维能力．

［2］可画出▱*EFGH*，▱*AFCH*，▱*BGDE*.

练习答案：

1. 6 个，其中有 3 个平行四边形．
2. 是．根据判定定理 1.
3. 是．根据判定定理 2.

7. 从本节开始，就应强调让学生直接运用平行四边形的性质和判定定理去解决问题，凡是可以用平行四边形知识证明的问题，不要再回到用三角形全等来证明．应该对学生提出这个要求．

交流

两组对边分别相等的四边形是平行四边形，这是根据两组对边的关系来判定一个四边形是平行四边形．你能否只根据一组对边的关系来判定一个四边形是平行四边形呢？它应满足什么条件？

怎样证明你的猜想？

已知：在四边形 $ABCD$ 中，$AB \fallingdotseq DC$．（$AB \parallel DC$ 且 $AB = DC$ 可简记为 $AB \fallingdotseq DC$．）

求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形．

分析：通过连接 AC，把四边形 $ABCD$ 分成△ABC 和△CDA．

证明：连接 AC，如图 15－29．

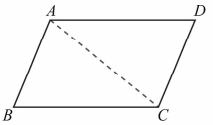


图 15－29

$\because$ $AB \parallel DC$，

$\therefore$ $\angle BAC = \angle DCA$．

又 $\because$ $AB = CD$，$AC = CA$，

$\therefore$ $\triangle ABC \cong \triangle CDA$．

$\therefore$ $\angle ACB = \angle CAD$．

$\therefore$ $AD \parallel BC$．

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形．

（你还有其他的证明方法吗？）

可以得到：

平行四边形判定定理 3　一组对边平行且相等的四边形是平行四边形．

例 4 已知：如图 15－30，$\square ABCD$ 中，E，F 分别是边 AD，BC 的中点．

求证：$EB = DF$．

证明：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore$ $AD \fallingdotseq BC$．

又 $\because$ E，F 分别是边 AD，BC 的中点，

$\therefore$ $ED = \frac{1}{2}AD$，$BF = \frac{1}{2}BC$．

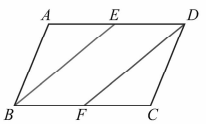


图 15－30

$\therefore$ $ED \fallingdotseq BF$．

$\therefore$ 四边形 $EBFD$ 是平行四边形．

$\therefore$ $EB = DF$．

8．教材中给出了三个判定定理，应该指出的是，平行四边形的定义也可用来判定一个四边形是不是平行四边形．这些判定方法可以作如下归纳：

（1）从边考虑：两组对边分别平行（定义），两组对边分别相等（判定定理 1），一组对边平行且相等（判定定理 3）．

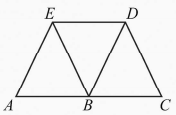
（2）从对角线考虑：对角线互相平分（判定定理 2）．

思考

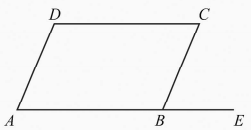
根据对角之间的关系能否判定一个四边形是平行四边形？[1]

练习

1. 如图，$AC \parallel ED$，点 B 在 AC 上，且 $AB = ED = BC$. 找出图中的平行四边形，并说说你的理由.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，A，B，E 在一条直线上，$AB = DC$，$\angle C = \angle CBE$，四边形 $ABCD$ 是平行四边形吗？说说你的理由.

3. 画一个$\square ABCD$，使 $AB = 2$ cm，$BC = 3$ cm，$AC = 4$ cm.

交流[2]

1. 一组对边平行，另一组对边相等的四边形是平行四边形吗？为什么？

2. 一组对边平行，一组对角相等的四边形是平行四边形吗？为什么？

3. 一组对边相等，一组对角相等的四边形是平行四边形吗？为什么？

［1］教学时应给予学生充足的时间进行探究，并说明理由.

练习答案：

1. $\square EDBA$ 和$\square EDCB$.

2. 是. 根据判定定理 3.

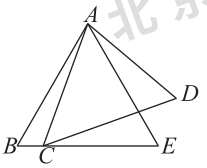
3. 提示：先画出 $\triangle ABC$，然后根据平行四边形的定义或判定定理求作顶点 D.

［2］1. 不一定是平行四边形，例如可以是等腰梯形.

2. 是. 根据判定定理 3.

3. 不是，可以构造如下一个反例.

$\triangle ABE$ 是等边三角形，点 C 在 BE 上，$\angle ACE = 70°$，$\angle EAD = 20°$，$AD = CE$（如图）.



容易得出：

$\angle CAD = \angle CAE + \angle EAD = [60° - (70° - 60°)] + 20° = 70° = \angle ACE$，

$\therefore \triangle ACE \cong \triangle CAD$.

$\therefore AE = CD$，

$\angle D = \angle E$.

四边形 $ABCD$ 中，

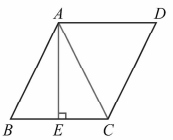
$\angle B = \angle D = 60°$，$AB = CD$，显然四边形 $ABCD$ 不是平行四边形.

9. 在教学中，增加“反思和质疑”环节的教学，给学生一个宽松、民主的思维空间. 例如，教授“平行四边形的判定定理”之后，教师可引导学生思考，除了讲过的平行四边形的判定方法之外，还有没有其他判定方法.

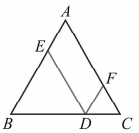
习 题 15－2

★基础★

1. 填空：
(1) 在▱$ABCD$中，$\angle A-\angle B=60°$，那么$\angle A=$_____，$\angle B=$_____；
(2) 在▱$ABCD$中，$\angle A+\angle C=120°$，那么$\angle A=$_____，$\angle B=$_____；
(3) 如果▱$ABCD$的周长为35 cm，$AB:BC=3:4$，那么$AB=$_____cm，$BC=$_____cm；
(4) 在▱$ABCD$中，对角线AC，BD相交于点O，那么其中相等的线段有_____对.
2. 如图，在▱$ABCD$中，$AE\perp BC$于E，且$BE=CE$，▱$ABCD$的周长为3.6 cm，△ABC的周长为2.8 cm，求▱$ABCD$的各边长及AE的长.

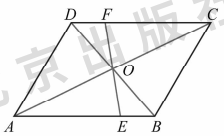


（第2题）

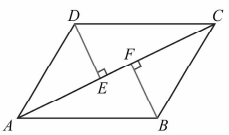


（第3题）

3. 如图，在△ABC中，$AB=AC$，$DE\parallel AC$，$DF\parallel AB$，求证：$DE+DF=AB$.
4. 如图，在▱$ABCD$中，对角线AC，BD相交于点O，过点O的直线EF分别交AB，CD于点E，F. 请写出图中三对全等的三角形，并任选其中的一对加以证明.

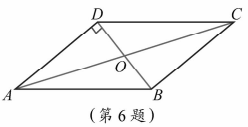


（第4题）



（第5题）

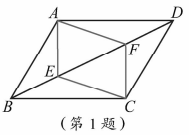
5. 如图，在四边形$ABCD$中，$AD=BC$，$DE\perp AC$于E，$BF\perp AC$于F，且$AF=CE$.
求证：四边形$ABCD$为平行四边形.
6. 在四边形$ABCD$中，对角线AC，BD相交于点O，$AD=12$，$DO-OB=5$，$AC=26$，$\angle ADB=90°$，求BC的长和四边形$ABCD$的面积.



（第6题）

★★提升★★

1. 如图，E，F 是$\square ABCD$ 对角线 BD 上的两点，请你添加一个适当的条件：_____，使四边形 $AECF$ 是平行四边形．



（第 1 题）

2. 在四边形 $ABCD$ 中，AC 与 BD 相交于点 O，如果只给出条件“$AB \parallel CD$”是不能判定四边形 $ABCD$ 为平行四边形的．给出以下六个说法：

① 如果再加上条件“$AD \parallel BC$”，那么就能判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形；

② 如果再加上条件“$AB = CD$”，那么就能判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形；

③ 如果再加上条件“$\angle DAB = \angle DCB$”，那么就能判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形；

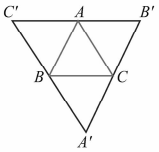
④ 如果再加上条件“$BC = AD$”，那么就能判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形；

⑤ 如果再加上条件“$AO = CO$”，那么就能判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形；

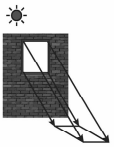
⑥ 如果再加上条件“$\angle DBA = \angle CAB$”，那么就能判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形．

其中正确的说法有 _____ 个，它们是 _____．

3. 如图，$A'B' \parallel BA$，$B'C' \parallel CB$，$C'A' \parallel AC$，$\angle ABC$ 与 $\angle B'$ 有什么关系？线段 AB' 与线段 AC' 呢？为什么？



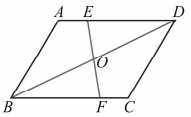
（第 3 题）


（第 4 题）

4. 如图，阳光透过矩形玻璃窗投射到地面上，地面上出现了一个明亮的四边形．小明用量角器量出这个四边形的一个锐角恰好是 45°，又用直尺量出一组邻边的长分别是 40 cm 和 55 cm．小明说：“用这三个数据，就能够计算出地面上的四边形的面积和周长．”你知道小明是如何计算的吗？这样计算的根据是什么？

★★★拓展★★★

如图，在$\square ABCD$ 中，E 为 AD 上一点，F 为 BC 上一点，EF 与对角线 BD 交于点 O．有以下三个条件：① $AE = CF$；② $EO = OF$；③ O 为 BD 中点．从中选取一个作为题设，余下的两个作为结论，组成一个正确的命题，并加以证明．



[1] 也可以用活动平行四边形教具演示.

15.4 特殊的平行四边形的性质与判定

1. 特殊的平行四边形的性质

我们知道，矩形、菱形、正方形都是特殊的平行四边形，它们不仅具有平行四边形的性质，而且还具有各自的特殊性质.

交流 [1]

如图 15－31，用计算机或图形计算器画一个□ABCD.

1. 拖动点 A，使其在线段 AD 所在的直线上运动，当□$ABCD$ 变为矩形时，它的四个角和两条对角线有什么变化?

2. 当矩形的大小不断变化时，前面发现的结论是否仍然成立? 猜想矩形具有什么特殊的性质，怎样证明你的猜想?

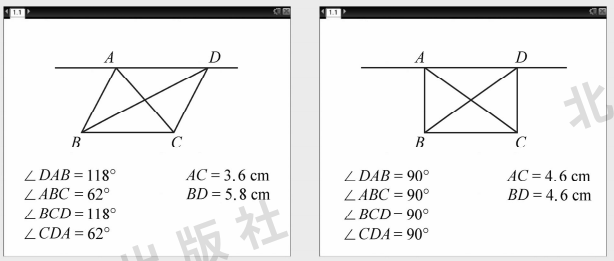


图 15－31

可以发现，矩形还有下面的性质：

矩形性质定理 1　矩形的四个角都是直角.

矩形性质定理 2　矩形的对角线相等.

请你证明这两个性质定理.

思考

如图 15－32，在矩形 $ABCD$ 中，找出相等的线段与相等的角，并说明理由.

本节的主要内容是矩形、菱形和正方形的性质和判定定理.

1. 矩形、菱形是平行四边形，且是具有一个直角或一组相等的邻边的特殊平行四边形；正方形不仅是特殊的平行四边形，并且是特殊的矩形，又是特殊的菱形. 按性质、判定三种图形一起讲授，可以把它们的联系与区别对比得清楚些.

2. 矩形比平行四边形多了“有一个角是直角”的条件，它增加了一些特殊的性质. 仍然可以先用课件演示，当平行四边形变成矩形后，可以看出它的四个角是相等的，都是直角，它的对角线也相等. 然后再进行证明.

例 1 如图 15－32，在矩形 $ABCD$ 中，两条对角线 AC，BD 相交于点 O，$AB = OA = 4$ cm. 求 BD 与 AD 的长.

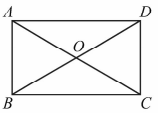


图 15－32

解：∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴ $BD = AC$，$\angle BAD = 90°$.

又∵ $AC = 2OA$，

∴ $BD = 2OA = 2 \times 4 = 8$(cm).

在 Rt $\triangle BAD$ 中，

$AD = \sqrt{BD^2 - AB^2} = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}$ (cm).

交流

1. 如图 15－32，矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O，那么 BO 是 Rt $\triangle ABC$ 中一条怎样的特殊线段？它与 AC 有怎样的大小关系？为什么有这样的大小关系？

2. 在这里，我们可以从矩形对角线的性质得到关于直角三角形的一个性质，应当怎样叙述这个性质？

利用矩形的性质定理 2，可以证明直角三角形的一个性质：

定理 直角三角形斜边的中线等于斜边的一半.[1]

练习

1. 判断题：

(1) 矩形的四个角都相等；（ ）

(2) 矩形的四条边都相等；（ ）

(3) 矩形的对角线相等，且互相垂直；（ ）

(4) 矩形的两条对角线不一定互相平分.（ ）

2. 已知矩形的一条对角线长为 8 cm，两条对角线的一个夹角为 60°，求矩形的长和宽.

[1] 实际上是直角三角形的一个重要性质，在求线段长或求线段倍分关系时，常用到这个性质.

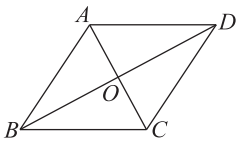
练习答案：

1. (1) ✓；(2) ×；(3) ×；(4) ×.

2. 长为 $4\sqrt{3}$ cm，宽为 4 cm.

[1] 也可以用活动平行四边形教具演示.

[2] 已知：菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC 和 BD 相交于点 O.



求证：$AC \perp BD$；AC 平分 $\angle BAD$ 和 $\angle BCD$；BD 平分 $\angle ABC$ 和 $\angle ADC$.

证明：∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

∴ $AB = AD$.

在等腰 $\triangle ABD$ 中，

∵ $BO = OD$，

∴ $AC \perp BD$，AC 平分 $\angle BAD$.

同理，

AC 平分 $\angle BCD$；BD 平分 $\angle ABC$ 和 $\angle ADC$.

交流 [1]

如图 15－33，用计算机或图形计算器画一个 $\square ABCD$.

1. 拖动线段 AB，使点 A、点 B 分别在线段 AD、线段 BC 所在的直线上运动，当 $\square ABCD$ 变为菱形时，它的四条边和两条对角线的夹角有什么变化？由此你还能发现什么？

2. 当菱形的形状、大小不断变化时，前面发现的结论是否仍然成立？这说明菱形还有什么特殊的性质，怎样证明你的猜想？

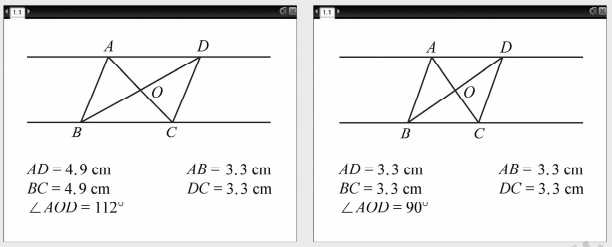


图 15－33

可以发现，菱形还有下面的性质：

请你证明这两个性质定理.

菱形性质定理 1　菱形的四条边都相等.

菱形性质定理 2　菱形的对角线互相垂直，并且每一条对角线平分一组对角 [2]

例 2 已知菱形的两条对角线的长分别为 l_1，l_2，求该菱形的面积.

解：如图 15－34，菱形 $ABCD$ 的两条对角线 AC，BD 相交于点 O，且 $AC = l_1$，$BD = l_2$.

∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

∴ $AC \perp BD$.

∴ $S_{\text{菱形}ABCD} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle CBD}$

$$= \frac{1}{2} BD \cdot AO + \frac{1}{2} BD \cdot CO$$

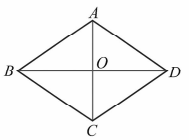


图 15－34

3. 菱形比平行四边形多了“一组邻边相等”的条件，和矩形类似，菱形比平行四边形多了一些性质. 性质定理 1，用菱形定义和平行四边形的性质很容易推导；性质定理 2 的证明过程中，用到等腰三角形底边上的中线、底边上的高、顶角的平分线三线合一的性质，证明时可引导学生回忆等腰三角形的这个性质.

4. 根据菱形性质定理 2，应用三角形面积计算公式和图形面积性质（图形的面积等于它的各部分面积的和），推导出计算菱形面积的一个特殊公式，所以计算菱形面积除应用平行四边形的一般计算方法外，还可以根据菱形的对角线来计算面积.

$$= \frac{1}{2} BD \cdot (AO + CO)$$

$$= \frac{1}{2} BD \cdot AC$$

$$= \frac{1}{2} l_1 l_2.$$

例 3 如图 15－35，在平面直角坐标系中，四边形 $ABCD$ 是菱形，$\angle ABC = 60°$，点 A 坐标为 $(0, 2)$. 求 B，C，D 各点的坐标.

解：∵ 四边形 $ABCD$ 为菱形，

∴ $OC - OA - 2$.

∴ 点 C 的坐标为 $(0, -2)$.

又∵ $\angle ABC = 60°$，

∴ $AB = BC = AC = 4$.

∴ $OD = OB = \sqrt{AB^2 - OA^2}$

$= \sqrt{4^2 - 2^2}$

$= 2\sqrt{3}$.

∴ 点 B 的坐标为 $(-2\sqrt{3}, 0)$，点 D 的坐标为 $(2\sqrt{3}, 0)$.

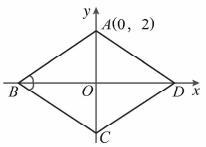


图 15－35

练习

1. 菱形 $ABCD$ 中，$AB = 4$ cm，$\angle ABC = 60°$，求菱形 $ABCD$ 的面积.
2. 已知一个菱形的两条对角线的长分别为 5 cm 和 12 cm，求该菱形的周长和面积.

交流

1. 我们知道，有一组邻边相等，且有一个角是直角的平行四边形叫做正方形. 有的同学说，“有一组邻边相等的矩形是正方形”、“有一个角是直角的菱形是正方形”. 这些说法正确吗？为什么？

2. 你认为正方形具有什么性质？它为什么具有这些性质？

练习答案：

1. $8\sqrt{3}$ cm^2.
2. 周长为 26 cm，面积为 30 cm^2.

[1] 可以将正方形的性质总结如下：

边——对边平行，四边相等；

角——四个角都是直角；

对角线——对角线相等，互相垂直平分，每条对角线平分一组对角.

还要让学生注意到：正方形的一条对角线把正方形分成两个全等的等腰直角三角形，对角线与边的夹角是45°；正方形的两条对角线把它分成四个全等的等腰直角三角形. 这些都是正方形的特殊性质，要使学生熟悉这些最基本的内容.

练习答案：

1. 周长为8 cm，对角线长为$2\sqrt{2}$ cm，面积为4 cm^2.
2. 边长为$2\sqrt{2}$ cm，面积为8 cm^2.

探索

请归纳正方形的全部性质，有条理地加以叙述，并写在下面的空白处：[1]

例4 如图15－36，四边形$ABCD$是正方形，两条对角线相交于点O，求$\angle AOB$，$\angle OAB$的度数.

解：∵ 正方形$ABCD$也是菱形，

∴ $AC \perp BD$.

∴ $\angle AOB = 90°$.

∵ 正方形$ABCD$既是矩形，又是菱形，

∴ $\angle BAD = 90°$，且$\angle BAC = \angle DAC$.

∴ $\angle OAB = 45°$.

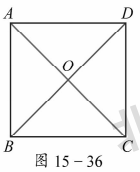


图15－36

你还有其他解法吗？

思考

图15－36中有多少个等腰直角三角形？说说你的理由.

练习

1. 已知正方形的一条边长为2 cm，求它的周长、对角线长和面积.
2. 已知正方形的一条对角线长为4 cm，求它的边长和面积.

5. 因为正方形既是平行四边形、矩形，又是菱形，所以它的性质是它们性质的综合，即不仅有平行四边形的所有性质，还有矩形和菱形的特殊性质，所以讲正方形性质的关键是在复习矩形、菱形的基础上进行总结.

探索

要用 200 m 长的篱笆围成一个矩形花园，当矩形的长和宽各是多少米时，花园面积最大？[1]

2. 特殊的平行四边形的判定

思考

木工师傅在做门窗框架、桌面、椅面等物件时，需要检测做出的物件是否为矩形．这时，木工师傅通常不仅要测量它们的两组对边的长度是否分别相等，而且还要测量它们的两条对角线是否相等．你能说出其中的道理吗？

已知：如图 15－37，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=CD$，$AD=BC$，$AC=BD$.

求证：四边形 $ABCD$ 是矩形．

分析：要证明一个四边形是矩形，可以依据矩形的定义，证明所给的四边形是平行四边形且有一个角是直角．

证明：∵ $AB=CD$，$AD=BC$，

∴ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形．

又∵ $AC=BD$，$AD=BC$，$DC=CD$，

∴ $\triangle ADC \cong \triangle BCD$.

∴ $\angle ADC=\angle BCD$.

又∵ 在$\square ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，

∴ $\angle ADC+\angle BCD=180°$.

∴ $\angle ADC=90°$.

∴ 四边形 $ABCD$ 为矩形．

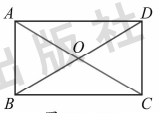


图 15－37

由此得到：

矩形判定定理 1　对角线相等的平行四边形是矩形．[2]

［1］可以发现，矩形的长与宽越接近时，它的面积越大，当长与宽相等时，面积最大．

［2］在证明完判定定理后，要着重说明这个定理包括两个条件：

（1）是平行四边形；

（2）两条对角线相等．

为了加深印象，可以举反例，如：两条对角线相等的四边形不一定是矩形．

6. 判定一个特殊平行四边形的最基本、最重要的方法是用它的“定义”去判定，其他的判定方法都是以定义为基础推导出来的．

练习答案：

1. 是. 理由略.

2. 90°.

思考

如图 15－38，用直尺、三角尺按“边—直角、边—直角、边—直角、边”这样四步画出一个四边形，这个四边形是矩形吗？为什么？

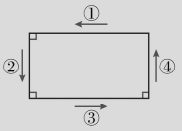


图 15－38

通过证明，可以得到：

矩形判定定理 2　有三个角是直角的四边形是矩形.

例 5 已知：如图 15－39，$\square ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，$\triangle AOB$ 是等边三角形，$AB=4$ cm，求这个平行四边形的面积.

解：∵　四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

∴　$AO=\frac{1}{2}AC$，$BO=\frac{1}{2}BD$.

∵　$\triangle AOB$ 是等边三角形，

∴　$AO=BO$.

∴　$AC=BD$.

∴　$\square ABCD$ 是矩形.

在 Rt $\triangle ABC$ 中，

∵　$AB=4$，$AC=8$，

∴　$BC=\sqrt{8^2-4^2}=4\sqrt{3}$.

∴　$S_{\square ABCD}=AB\cdot BC=4\times 4\sqrt{3}=16\sqrt{3}\,(\text{cm}^2)$.

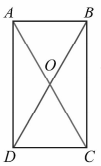


图 15－39

练习

1. 四个角都相等的四边形是矩形吗？为什么？
2. 已知：$\square ABCD$ 的两条对角线 AC，BD 相交于点 O，$\triangle AOB$ 是等边三角形，求 $\angle ADC$ 的度数.

思考

木工师傅在做菱形的窗格时，只要保证窗格的四条边框一样长就行了．你能说出其中的道理吗？

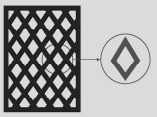


图 15－40

通过证明，可以得到：

菱形判定定理 1　四条边都相等的四边形是菱形．

交流

根据对角线之间的关系能否判定一个平行四边形是菱形？[1]

菱形判定定理 2　对角线互相垂直的平行四边形是菱形．[2]

请你给出证明．

例 6 已知：如图 15－41，$\square ABCD$ 的对角线 AC 的垂直平分线与边 AD，BC 分别交于点 E，F，四边形 $AECF$ 是菱形吗？为什么？

解：四边形 $AECF$ 是菱形．

理由如下：

$\because$　四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore$　$AE \parallel FC$.

$\therefore$　$\angle EAO = \angle FCO$.

又 $\because$　$\angle AOE = \angle COF$，$AO = CO$，

$\therefore$　$\triangle AOE \cong \triangle COF$.

$\therefore$　$EO = FO$.

$\therefore$　四边形 $AECF$ 是平行四边形．

又 $\because$　$EF \perp AC$，

$\therefore$　$\square AECF$ 是菱形．

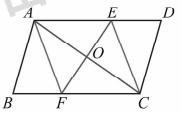
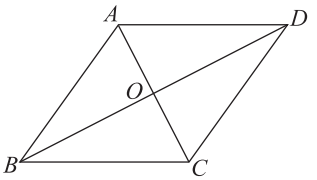


图 15－41

［1］对角线互相垂直的平行四边形是菱形．



已知：$\square ABCD$ 中，对角线 $AC \perp BD$.

求证：$\square ABCD$ 是菱形．

证明：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore$ $OB = OD$.

又 $AC \perp BD$，垂足为 O，

$\therefore$ $AB = AD$.

$\therefore$ $\square ABCD$ 是菱形．

［2］应用菱形判定定理 2 时，要注意定理包括两个条件：（1）是平行四边形；（2）两条对角线互相垂直．为了加深印象，也可以举反例提问学生，如：对角线互相垂直的四边形是菱形吗？

练习答案：

1. 先画一条 6 cm 长的线段，再画一条 8 cm 长的线段，使其垂直于 6 cm 长的线段且互相平分，顺次连接两条线段的各个端点，所得的封闭图形为所要画的菱形.

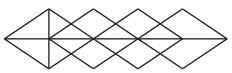
2. （1）垂直.

$\because 2^2+1^2=(\sqrt{5})^2$，

$\therefore \angle AOB=90°$.

（2）是. 因为对角线互相垂直的平行四边形是菱形.

[1] 画一条 15 cm 长的线段为菱形花边的对称轴. 以 6 cm、4 cm 为对角线长顺次画菱形，如下图.



探索

将一张矩形的纸对折，旋转 90° 后再对折，然后沿着图 15－42 中的虚线剪下，打开，你发现这是一个什么样的图形呢？说说你的理由，并与同伴交流.

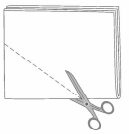
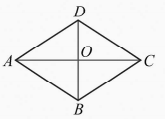


图 15－42

练习

1. 画一个菱形，使它的两条对角线长分别为 6 cm 和 8 cm.
2. 如图，$\square ABCD$ 的两条对角线 AC，BD 相交于点 O，$AB=\sqrt{5}$，$AO=2$，$OB=1$.
（1）AC，BD 互相垂直吗？为什么？
（2）四边形 $ABCD$ 是菱形吗？为什么？



（第 2 题）

实践

设计一个由菱形组成的花边图案，花边的长为 15 cm，宽为 4 cm. 这个花边图案由有一条对角线在同一条直线上的四个菱形组成，前一个菱形的对角线的交点是后一个菱形的一个顶点.[1]

交流

怎样判定一个四边形或一个平行四边形是正方形呢？它可以有几种不同的途径？

从正方形与平行四边形、矩形、菱形的关系可以看出，要判断一个四边形是正方形可以有以下几种思路：

7. 对于怎样判定一个四边形是正方形，因为层次比较多，不必分析得太具体，只要强调能判定一个四边形是矩形，又能判定这个矩形也是菱形，或者先判定一个四边形是菱形，再判定这个菱形也是矩形，就可以判定这个四边形是正方形，实际上就是根据正方形定义来判定.

(1) 先判定四边形是菱形，再确定这个菱形有一个角是直角；

(2) 先判定四边形是矩形，再确定这个矩形有一组邻边相等；

(3) 先判定四边形是平行四边形，再确定这个平行四边形有一个角是直角，并且有一组邻边相等；

(4) 判定一个四边形的对角线相等，并且互相垂直平分．

例 7 如图 15－43，在平面直角坐标系中，顺次连接点 $A(-2, 0)$，$B(0, -2)$，$C(2, 0)$，$D(0, 2)$ 所得到的四边形 $ABCD$ 是怎样的四边形？并说明理由．

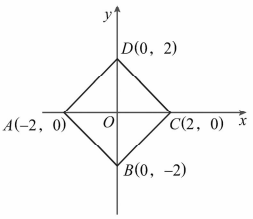


图 15－43

解：四边形 $ABCD$ 是正方形．

理由如下：

∵ $A(-2, 0)$，$B(0, -2)$，$C(2, 0)$，$D(0, 2)$，

∴ $OA = OB = OC = OD = 2$.

∴ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形．

又∵ $AC = BD$，且 $AC \perp BD$，

∴ 四边形 $ABCD$ 是正方形．

实践

如图 15－44，将一张菱形纸片，沿两条对角线剪开，得到四个全等的直角三角形，将这四个直角三角形按图中所示的方法就能拼成正方形．想一想这是为什么．

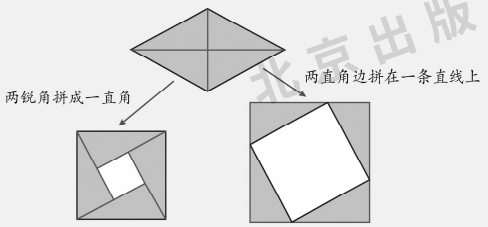


图 15－44

练习答案：

1. （1）是. 对角线互相垂直的平行四边形是菱形，对角线相等的菱形是正方形.

（2）是. 对角线互相垂直的平行四边形是菱形，故该矩形具有菱形的图形特征：有一组邻边相等. 所以该四边形是正方形.

（3）是. 对角线相等的平行四边形是矩形，故该菱形具有矩形的图形特征：有一个角是直角. 所以该四边形是正方形.

（4）是. 对角线互相垂直平分的四边形是菱形，对角线相等的菱形是正方形.

2. （1）画 $\angle O=90°$，在它的两边上截取 $OA=OB=2$ cm，以 OA，OB 为邻边画平行四边形.

（2）画互相垂直平分的两条线段，使它们的长都等于 4 cm，然后顺次连接线段的端点.

练习

1. 判断满足下列条件的四边形是否为正方形，并说明理由：
   （1）对角线互相垂直且相等的平行四边形；
   （2）对角线互相垂直的矩形；
   （3）对角线相等的菱形；
   （4）对角线互相垂直平分且相等的四边形.
2. （1）以 2 cm 长的线段为边，画一个正方形；
   （2）以 4 cm 长的线段为对角线，画一个正方形.

15.5 三角形中位线定理

在三角形的基础上，我们研究了平行四边形的性质. 现在，我们利用平行四边形的性质进一步研究三角形的性质.

在 $\triangle ABC$ 中，D，E 分别是 AB，AC 的中点，如图 15－45，试研究线段 DE 具有什么性质.

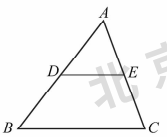


图 15－45

交流

如图 15－46，用计算机或图形计算器画几个连接各类三角形两边中点的图形，观察图中连接二角形两边中点的线段，与第二边在长度、位置上有怎样的关系，说出你的猜想.

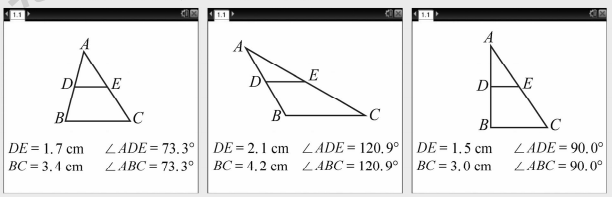
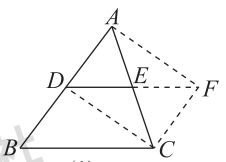


图 15－46

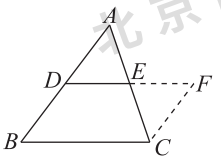
本节主要内容是三角形中位线概念及其性质定理.

1. 三角形中位线定理的证明方法，关键在于添加辅助线，证明的方法很多，下面再举出几种方法作为参考.

（1）如图（1），延长中位线 DE 到 F，使 $EF=DE$，连接 CF，AF，DC. 根据对角线互相平分判定四边形 $ADCF$ 是平行四边形，得到 AD 平行且等于 CF. 以下步骤同教材.



(1)



(2)

（2）如图（2），作 $CF/\!/AB$，与 DE 的延长线交于点 F，通过证明 $\triangle ADE\cong\triangle CFE$，得 AD 平行且等于 FC，以下步骤同教材.

我们猜想：

连接三角形两边中点的线段平行于第三边，并且等于第三边的一半．也就是说：$DE \parallel BC$ 且 $DE = \frac{1}{2}BC$.

分析：要证明 $DE = \frac{1}{2}BC$，可以证明 $2DE = BC$，所以，延长 DE 到 F，使 $DF = 2DE$，证明它与 BC 相等；要证明 $DE \parallel BC$，只要证明四边形 $BCFD$ 是平行四边形．

证明：如图 15－47，延长 DE 到点 F，使 $EF = DE$，连接 FC.

又∵ $AE = CE$，$\angle AED = \angle CEF$，

∴ $\triangle ADE \cong \triangle CFE$.

∴ $\angle F = \angle ADE$，$CF = DA$.

∴ $CF \parallel DA$.

又∵ $BD = DA$，

∴ $CF \fallingdotseq BD$.

∴ 四边形 $BCFD$ 是平行四边形．

∴ $DF \fallingdotseq BC$.

∴ $DE \parallel BC$，且 $DE = \frac{1}{2}BC$.

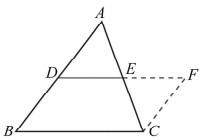


图 15－47

连接三角形两边中点的线段，叫做三角形的中位线．

三角形中位线定理　三角形的中位线平行于第三边，并且等于第三边的一半．

思考

如图 15－48，A，B 两地被池塘隔开，在没有任何测量工具的情况下，小明通过下面的方法估测出 A，B 间的距离：先在 AB 外选一点 C，然后步测出 AC，BC 的中点 M，N，并测出 MN 的长，由此他就知道了 A，B 间的距离．你能说说其中的道理吗？[1]

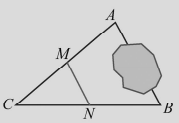


图 15－48

[1] 根据三角形中位线定理，$AB = 2MN$.

教学中可以向学生提示这些证明思路，以活跃学生的思维．但要指出，当一个命题有几种证明方法时，要选用比较简捷的方法进行证明．

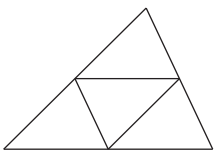
2. 三角形的中位线定理是三角形的一个重要性质定理．这个定理有一个特点是：在同一个题设下，有两个结论，一个结论是表明位置关系的，另一个结论是表明数量关系的．在应用这个定理时，不一定同时需要两个结论，有时需要平行关系，有时需要数量关系，可以根据具体情况，按需选用．

练习答案：

1. 画图略. 三角形的中线是指三角形一个顶点到对边中点所连接的线段，三角形的中位线是指连接三角形两边中点的线段.

2. 12 cm.

［1］连接每两边的中点，就得到了四个全等三角形.



引导学生利用三角形中位线定理证明上述作法的正确性.

例 已知：如图 15－49，在△ABC 中，$AD=DB$，$BE=EC$，$AF=FC$.

求证：AE，DF 互相平分.

证明：连接 DE，EF.

∵ $AD=DB$，$BE=EC$，

∴ $DE \parallel AC$.

同理 $FE \parallel AB$.

∴ 四边形 $ADEF$ 是平行四边形.

∴ AE，DF 互相平分.

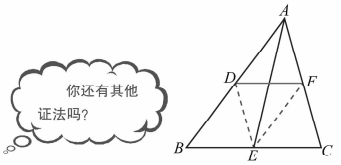


图 15－49

练习

1. 画出△ABC 的中线、中位线，并说出它们的区别.
2. 已知三角形的各边长分别是 6 cm，8 cm 和 10 cm，求连接各边中点所成的三角形的周长.

探索

你能将任意一个三角形分成四个全等的三角形吗？[1]

探究学习

“中点四边形”

用计算机或图形计算器画一个任意四边形 $ABCD$（图 15－50），顺次连接各边中点 E，F，G，H，所得到的新四边形 $EFGH$ 称为中点四边形. 拖动原四边形中的一个顶点，改变原四边形的形状，观察图形的变化，你有什么发现？并说明理由.

74 数学 八年级 下册

3. 利用三角形中位线定理，可判定顺次连接各种不同类型的四边形各边中点所得四边形的形状，它取决于原四边形的两条对角线的位置与长短，一般可归结为：

原四边形两条对角线	中点四边形
互相垂直	矩形
相等	菱形
互相垂直且相等	正方形
既不互相垂直也不相等	平行四边形

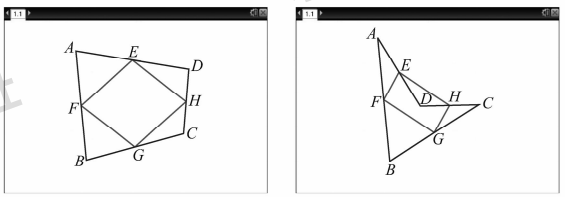


图 15－50

随着原四边形一个顶点的移动，原四边形的形状会发生相应的变化，将有可能不再是我们常见的凸四边形，此时你发现的结论是否还成立？并说明理由．

我们发现，不论四边形 $ABCD$ 怎样变化，其中点四边形 $EFGH$ 都是平行四边形．但是四边形 $EFGH$ 有没有可能是一些特殊的平行四边形呢？现在请你探索下列问题：

当原四边形 $ABCD$ 是什么形状时，中点四边形 $EFGH$ 会变成：

(1) 一个矩形？

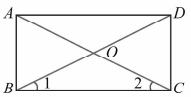
(2) 一个菱形？

(3) 一个正方形？

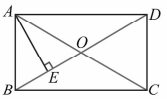
习 题 15－3

★基础★

1. 如图，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，AC，BD 相交于点 O，$\angle 1=\angle 2$．它是一个矩形吗？为什么？

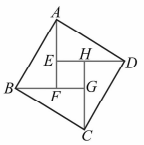


(第 1 题)

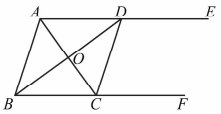


(第 2 题)

2. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AE \perp BD$ 于点 E，$\angle DAE = 2\angle BAE$，求 $\angle EAC$ 的大小．
3. 从菱形的钝角顶点向对边引垂线，如果垂线平分对边，求菱形的钝角度数．
4. 如图，是 2002 年 8 月在北京召开的第 24 届国际数学家大会会标中的图案，其中四边形 $ABCD$ 和 $EFGH$ 都是正方形．求证：$\triangle ABF \cong \triangle DAE$.



（第 4 题）

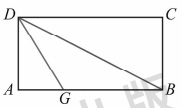


（第 5 题）

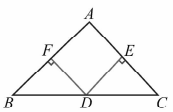
5. 如图，$AE /\!/ BF$，AC 平分 $\angle BAD$，交 BF 于点 C，BD 平分 $\angle ABC$，交 AE 于点 D，连接 CD. 求证：四边形 $ABCD$ 是菱形．
6. 求证：连接四边形对边中点的两条线段互相平分．

★★提升★★

1. 如果四边形 $ABCD$ 满足条件（1）_____，或（2）_____，或（3）_____时，这个四边形的对角线 AC 和 BD 互相垂直．
2. 如图，折叠矩形纸片 $ABCD$，先折出折痕（对角线 BD），再折叠使 AD 与对角线 BD 重合，得折痕 DG. 已知 $AB = 2$，$BC = 1$，求 AG 的长．



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 已知：如图，D 是 $\triangle ABC$ 的 BC 边上的中点，$DE \perp AC$，$DF \perp AB$，垂足分别是 E，F，且 $BF = CE$.
（1）求证：$\triangle ABC$ 是等腰三角形；
（2）当 $\angle A = 90°$ 时，试判断四边形 $AFDE$ 是怎样的四边形，证明你的结论．

★★★拓展★★★

在正方形 $ABCD$ 中，点 F 是 AB 上一点，点 E 是 AD 延长线上一点．对于
① $CE \perp CF$；② $CE = CF$；③ $DE = BF$.
把其中一个作为条件，另外两个是否成立？为什么？

阅读理解

完美正方形

20世纪30年代，在英国剑桥大学的一间学生宿舍里，塔特、斯东、史密斯、布鲁克斯四名大学生聚在一起，共同研究一个有趣的数学问题——完美正方形.

什么是完美正方形呢？如果一个大的正方形是由若干个大大小小各不相同的正方形构成，最外面这个大的正方形就叫做完美正方形.

许多人认为，这样的正方形是根本不存在的，假如有，为什么没有人把它画出来呢？可是，这四名大学生相信，完美正方形是存在的. 这次聚会虽然没讨论出一个结果，但他们下定决心要突破这个难题.

几年后，四个人再一次相聚，每一个人都有收获. 其中，布鲁克斯发现了一种“完美正方形”，史密斯和斯东发现了另一种，而塔特找到了进一步研究的途径.

又过了几年，他们又发现了一个由39个大小不等的正方形组成的完美正方形. 重要的是，这个完美正方形不是碰运气找到的，而是在理论指导下完成的.

接下来，数学家又提出了一个新问题：是否存在由最少数目的正方形组成的完美正方形呢？1978年，借助于计算机，人们找到了这个由最少数目正方形组成的完美正方形(图15－51). 它的边长为112个单位长，由21个小正方形组成，这些小正方形的边长依次为：2，4，6，7，8，9，11，15，16，17，18，19，

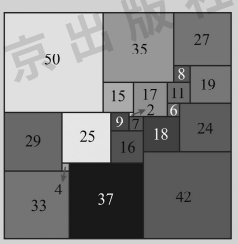


图15－51

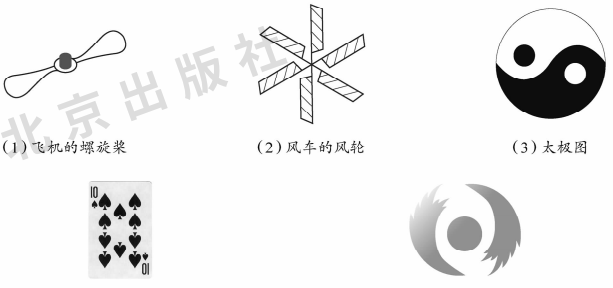
24，25，27，29，33，35，37，42，50 个单位长．

当年四名研究完美正方形的大学生，后来都成了组合数学和图论专家．他们的研究成果被应用到物理、化学、计算机技术、运筹学、语言学、建筑学等许多领域．

三 中心对称图形

15.6 中心对称图形

我们曾学习过轴对称图形，下面我们学习另外一类对称图形——中心对称图形．



（1）飞机的螺旋桨　（2）风车的风轮　（3）太极图

（4）扑克牌中的黑桃 10　（5）《东方时空》标志

图 15－52

本节的主要内容是中心对称图形的概念，并介绍了一些中心对称图形．

1. 教学中，应注意让学生自己通过丰富的具体图形认识中心对称图形．

实践

在图 15－52 中的图形有怎样的共同特点呢？以风车的风轮为例，如图 15－53，绕点 O 旋转风轮，使得 A_1 移动到 A_2 的位置．思考下面的问题：

（1）旋转后的风轮与原来位置上的风轮是否重合？

（2）旋转中心在哪里？旋转角的度数是多少？

对于图 15－52 中的其他四个图形，请你也像这样进行研究．

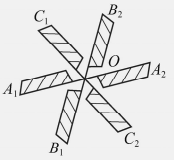
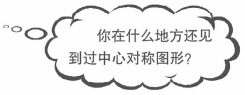


图 15－53

一般地，在同一平面内，一个图形绕某一个点旋转 180°，如果旋转前、后的图形相互重合，那么这个图形叫做中心对称图形，这个点叫做它的对称中心．



思考

在我们学习过的图形中，如线段、圆、等边三角形、平行四边形（图 15－54）等，哪些是中心对称图形？哪些不是中心对称图形？



图 15－54

例如，图 15－55 中的线段绕它的中点旋转 180° 后，它的两个端点互换了位置，旋转后的线段和原线段重合．因此，线段是中心对称图形，线段的中点是它的对称中心．

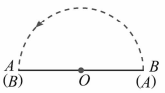


图 15－55

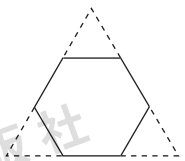
2. 教学中应向学生指出，对称性是平行四边形和特殊平行四边形的一个重要性质，而三个特殊平行四边形既是轴对称图形又是中心对称图形，它们的对称中心就是两条对称轴的交点. 同时还可启发学生得出：中心对称图形的对称中心只有一个，而轴对称图形的对称轴可以不止一条.

[1]（1）直线 AD，BE，CF 以及 AB，BC，CD 的垂直平分线等都是这个正六边形的对称轴.

（2）60°或其整数倍. 一般地，绕正 n 边形的中心旋转 $\frac{360°}{n}$ 或其整数倍都能与原来的图形重合.

可进一步启发学生得出：边数为偶数的正多边形都是中心对称图形.

[2] 如图，此时面积为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$.



练习答案：

1. 不是. 理由略.
2. 不是. 理由略.

又如，图 15－56 中的▱$ABCD$，点 O 是对角线的交点，因为 $OA = OC$，$OB = OD$，所以图形绕点 O 旋转 180° 后，点 A 与点 C、点 B 与点 D 分别互换了位置，旋转后的图形和原来的图形重合. 因此，平行四边形是中心对称图形，对角线的交点是它的对称中心.

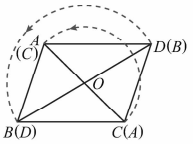


图 15－56

交流 [1]

如图 15－57，点 O 是正六边形 $ABCDEF$ 的中心.

（1）指出这个轴对称图形的全部对称轴.

（2）这个正六边形绕点 O 旋转多少度后能和原来的图形重合？对于其他的正多边形能得到什么类似的结论？

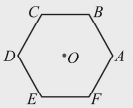


图 15－57

探索

如图 15－58 所示为等边三角形 ABC，你能从该三角形中剪去一部分，使它剩余的部分成为一个中心对称图形吗？如果原三角形的边长是 1，那么你得到的中心对称图形的面积是多少？[2]

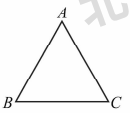


图 15－58

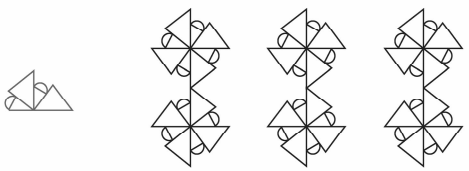
练习

1. 射线是不是中心对称图形？为什么？
2. 五角星是不是中心对称图形？为什么？

问题解决

简单的图案设计

已知图 15－59(1)，怎样作出图 15－59(2)？
通过观察，你发现图 15－59(1)与(2)之间有何关系？
由图 15－59(1)，你还能设计出其他图案吗？



(1)　　(2)

图 15－59

习　题　15－4

★基础★

1. 正方形是中心对称图形吗？正方形绕两条对角线的交点旋转多少度后能与原来的图形重合？能由此验证正方形的一些特殊性质吗？
2. 下图中，哪个“风轮”是中心对称图形？

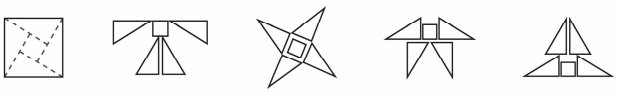


(1)　　(2)　　(3)

(第 2 题)

3. 通过“问题解决”，使学生了解对称在图案设计中的作用，以及这类图形的美术价值.

3. 如图，将一张正方形纸片沿图中虚线剪开后，能拼成下列四个图形．是中心对称图形的是(　　).



(第 3 题)

4. 我国一些银行的行标设计都融入了中国古代钱币的图案．下图所示是我国四大银行的行标图案，其中是轴对称图形而不是中心对称图形的是(　　).

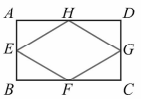


(第 4 题)

★★提升★★

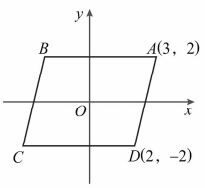
1. 如图，顺次连接矩形 $ABCD$ 各边中点，得到菱形 $EFGH$，这个由矩形和菱形组成的图形(　　).

A. 是轴对称图形但不是中心对称图形
B. 是中心对称图形但不是轴对称图形
C. 既是轴对称图形又是中心对称图形
D. 没有对称性



(第 1 题)

2. 如果一个四边形是中心对称图形，那么这个四边形一定是平行四边形吗？为什么？
3. 如图，平行四边形 $ABCD$ 的中心在原点 O，顶点 $A(3, 2)$，$D(2, -2)$，求点 B，C 的坐标．

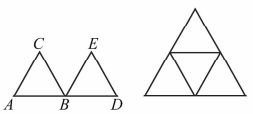


(第 3 题)

★★★ 拓展 ★★★

(1) 用 6 根一样长的小棒搭成如图 (1) 所示的图形．试移动 AC，BC 这两根小棒，使 6 根小棒成为中心对称图形．如果移动 AC、DE 这两根小棒，能否达到要求？请画出图形．

(2) 如果用 9 根一样长的小棒搭成如图 (2) 所示的图形．移动两根小棒，使这 9 根小棒搭成的图形成为中心对称图形，你能做到吗？请画出图形．



(1)

(2)

阅读理解

对称的世界

自然界中动物、植物的形状千姿百态，各不相同．然而，如果仔细观察一下，你会惊奇地发现，它们往往具有一个共同的特点，那就是——对称．

首先，人体自身就是一个高度的对称体．人体的大部分器官都是以脊柱所在的这条线为轴左右对称的．例如，左手和右手、左脚和右脚、左眼和右眼、左耳和右耳……鼻子虽然只有一个，但是两个鼻孔却是左右对称的．

再看看我们周围的花草树木、鸟类，水中的海星、鱼、龟背上的花纹，不胜枚举，大多具有类似的对称特征 (图 15－60)．



图 15－60

在建筑方面，对称更是随处可见：雄伟的天安门，壮丽的天坛，

辉煌的故宫，古老的河南登封观星台（图 15－61）……

古代美学家曾研究过拉丁字母，发现它们也具有对称性．例如，A，H，M，B，E 是轴对称图形，N，S，Z 是中心对称图形．

人类及其创造的建筑物、文化艺术作品，以及动物、植物这些生命体都具有对称性，那么无生命的自然世界又如何呢？



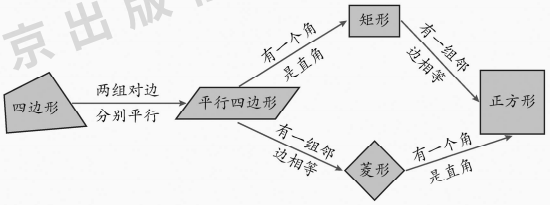
图 15－61

雪花具有惊人的对称性．晶体都有规则的几何外形，尽管不同的晶体形状不同，但有一点是相同的，即它们都呈对称分布．

回顾与整理

知识要点

1．四边形和各种特殊四边形之间的关系．



从中，我们可以清楚地看到任意四边形向特殊四边形的化归过程和化归条件．

“回顾与整理”是对全章的归纳和总结，应注意引导学生从“知识”和“方法”两个方面进行.

第一部分是对知识要点的总结. 此处采用了画系统图与列表的形式，这样加强了图形之间的对比，有助于学生搞清图形之间的区别，并使各种四边形的概念形成一个完整的体系，能使学生对本章所学的内容系统化，对本章内容形成全面的、系统的认识.

第二部分是学习指导，在回顾知识的基础上，这里侧重“怎样学好知识”的方法. 教学时，应结合具体的知识点，让学生体会、领悟这些方法.

知识要点

2. 几种特殊四边形的性质.

	边	角	对角线	对称性
平行四边形	对边平行且相等	对角相等	对角线互相平分	中心对称
矩　形	对边平行且相等	四个角都是直角	两条对角线互相平分且相等	轴对称，中心对称
菱　形	对边平行，四边都相等	对角相等	两条对角线互相垂直平分，每条对角线平分一组对角	轴对称，中心对称
正方形	对边平行，四边都相等	四个角都是直角	两条对角线互相垂直平分且相等，每条对角线平分一组对角	轴对称，中心对称

3. 几种特殊四边形的常用判定方法.

平行四边形	(1)两组对边分别平行；(2)两组对边分别相等；(3)两条对角线互相平分；(4)一组对边平行且相等
矩　形	(1)是平行四边形，并且有一个角是直角；(2)是平行四边形，并且两条对角线相等；(3)有三个角是直角
菱　形	(1)是平行四边形，并且有一组邻边相等；(2)四条边都相等；(3)是平行四边形，并且两条对角线互相垂直
正方形	(1)是矩形，并且有一组邻边相等；(2)是菱形，并且有一个角是直角

4. 中心对称图形.

在同一平面内，一个图形绕某一个点旋转180°，如果旋转前、后的图形相互重合，那么这个图形叫做中心对称图形，这个点叫做它的对称中心.

5. 多边形的内角和与外角和.

n边形的内角和为$(n-2)\cdot 180°$，外角和为360°.

6. 三角形中位线定理.

三角形的中位线平行于第三边，并且等于第三边的一半.

学习指导

1. 抓住特殊与一般的对立统一关系，把握不同几何图形的共性和特性．

2. 学会运用转化的数学方法．例如，把四边形问题转化为三角形问题．

3. 学会运用运动的观点看问题．例如，改变菱形的角，当有一个角是直角时，菱形就成为正方形；改变矩形的边，当矩形的邻边相等时，矩形就成为正方形．因此，正方形既有菱形的性质，又有矩形的性质．

4. 四边形在日常生活和生产中应用很广，学习中要注意联系实际，借助实例理解所学的知识，注意所学知识的实际运用．学习中要勤于动手画图、实际测量和观察，要把知识学活．

复习题

★基础★

1. 选择题：

(1) 一个四边形的内角中，锐角的个数(　　).

A. 最少有一个　　B. 最少有两个

C. 最多有四个　　D. 可能没有

(2) 在下列条件中，能判定一个四边形是平行四边形的是(　　).

A. 一组对边平行，另一组对边相等

B. 一组对边平行，一组对角相等

C. 一组对边平行，一组邻角互补

D. 一组对边相等，一组对角相等

(3) 菱形具有而一般平行四边形所没有的性质是(　　).

A. 两组对边分别相等　　B. 两条对角线相等

北京出版社

C. 四个内角都是直角　　D. 对角线平分对角

(4) 下列所说的图形中，是中心对称图形的是(　　).

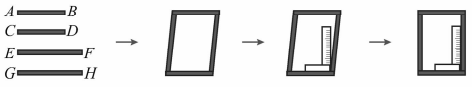
A. 线段　　B. 射线

C. 三角形　　D. 等边三角形

2. 工人师傅做铝合金窗框时，分下面三个步骤进行：

(1) 先截出两对符合规格的铝合金窗料 [图 (1)]，使 $AB=CD$，$EF=GH$；

(2) 摆成如图 (2) 所示的四边形，这时窗框的形状是 _____ 形，依据的数学原理是 _____；



(第 2 题)

(3) 将直角尺紧靠窗框的一个角 [图 (3)]，调整窗框的边框，当直角尺的两条直角边与窗框无缝隙时 [图 (4)]，说明窗框合格，这时窗框是 _____ 形，依据的数学原理是 _____.

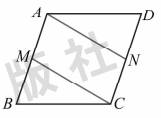
3. 等边三角形的边长为 8 cm，由一边上的任意一点引另两边的平行线，求所得的平行四边形的周长.

4. (1) 如图，在 $\square ABCD$ 中，$AM=\frac{1}{2}AB$，$CN=\frac{1}{2}CD$. 求证：四边形 $AMCN$ 是平行四边形.

(2) 当 $AM=\frac{1}{3}AB$，$CN=\frac{1}{3}CD$ 时，四边形 $AMCN$ 是平行四边形吗?

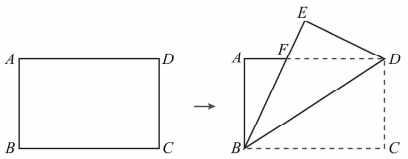
(3) 如果 $AM=\frac{1}{m}AB$，$CN=\frac{1}{m}CD$ 呢?

你能得出一个一般性的结论吗?



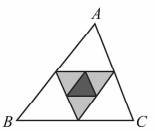
(第 4 题)

5. 如图，把一张矩形纸片沿对角线折叠，重合部分是什么图形? 试说明理由.

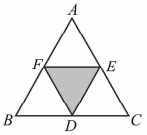


(第 5 题)

6. 如图，△ABC 的三边长分别是 a，b，c，以它的三边中点为顶点组成一个新三角形，以这个新三角形三边中点为顶点又组成一个小三角形．求这个小三角形的周长．



（第 6 题）



（第 7 题）

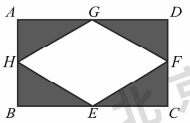
7. 如图，在等边三角形 ABC 中，D，E，F 分别是三边 BC，CA，AB 的中点，看一看，数一数，在整个图形中，有多少个等边三角形？多少个平行四边形？多少个菱形？

★★提升★★

如图，是一种长 30 cm、宽 20 cm 的矩形瓷砖，E，F，G，H 分别是矩形的边 BC，CD，DA，AB 的中点．现有一面长 4.2 m、高 2.8 m 的墙壁准备贴这种瓷砖．试问：

（1）这面墙壁最少要贴这种瓷砖多少块？

（2）全部贴满瓷砖后，这面墙壁最多会出现多少个面积相等的菱形？其中绿色的菱形有多少个？

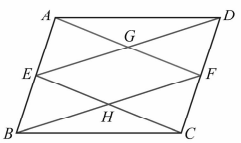


★★★拓展★★★

如图，在▱$ABCD$ 中，E，F 分别是 AB，CD 的中点，AF 与 DE 相交于点 G，CE 与 BF 相交于点 H．

（1）证明：四边形 $EHFG$ 是平行四边形；

（2）想一想，什么情况下四边形 $EHFG$ 会成为一个菱形．



部分习题答案或提示

习题 15－1

基础

1. （1）120；（2）30.
2. （1）三角形；（2）六边形.
3. 四边形，它的每个外角都等于 90°.
4. 存在. 理由：设多边形的一个外角度数为 x，则与它相邻的内角度数为 $5x$. 所以：$x+5x=180°$，解得 $x=30°$. 故该多边形每一个外角度数均为 30°，该多边形为十二边形.
5. 内角和相差 180°，外角和相同.

提升

1. 36°.
2. $AB/\!/DE$，$BC/\!/EF$. 提示：利用该六边形各内角均为 120°和 $\angle DAB=60°$，可证明 $BC/\!/AD$，$AB/\!/DE$，$EF/\!/AD$.

拓展

（1）提示：连接 AC，AD，证明 $\triangle ABC\cong\triangle AED$.

（2）如：$AF\perp BE$，AF 平分 BE，$\angle ABE=\angle AEB$，$\angle CBE=\angle DEB$，$BE/\!/CD$ 等.

习题 15－2

基础

1. （1）120°，60°；（2）60°，120°；（3）7.5，10；（4）4.
2. $\square ABCD$ 的各边长依次为 1 cm，0.8 cm，1 cm，0.8 cm；AE 的长为 $\frac{\sqrt{21}}{5}$ cm.
3. 略.
4. $\triangle DOF\cong\triangle BOE$，$\triangle COF\cong\triangle AOE$，$\triangle DOC\cong\triangle BOA$，$\triangle ADO\cong\triangle CBO$，$\triangle ADC\cong\triangle CBA$，$\triangle DCB\cong\triangle BAD$. 证明略.
5. 略.
6. 12 cm，120 cm^2.

提升

1. 如 $BE=DF$.
2. 4，①②③⑤.
3. $\angle ABC=\angle B'$，$AB'=AC'$.

4. 略.

拓展

不论以①②③中哪一个作为题设，其余两个作为结论，都可以组成一个正确的命题. 证明方法都是证明△EOD ≌△FOB.

习题 15－3

基础

1. 是，证明略.
2. 30°.
3. 120°.
4. 提示：∠BAF 与∠EAD 互余，∠EDA 与∠EAD 互余，故∠BAF = ∠EDA. 用 AAS 证明△ABF ≌△DAE.
5. 略.
6. 略.

提升

1. 本题为开放题型，答案较多. 如：四边相等；一组邻边相等的平行四边形……
2. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
3. 提示：（1）由 HL 证明△FBD ≌△ECD，得∠B = ∠C，故△ABC 是等腰三角形；（2）正方形，证明略.

拓展

成立. 不论以其中哪一个作为条件，均可证明△CDE ≌△CBF，从而得到相应的结论.

习题 15－4

基础

1. 是，90°的倍数，可以验证正方形的对角线互相垂直平分且相等.
2. （1）和（3）.
3. B. 4. C.

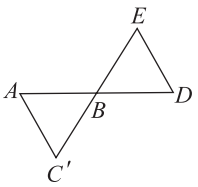
提升

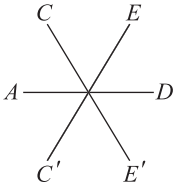
1. C.
2. 是. 由中心对称性，这个四边形相对的每对顶点分别是中心对称图形上的一对对应点，它们的连线被对称中心平分，即两条对角线互相平分，这个四边形必定是平行四边形.

3. $B(-2, 2)$，$C(-3, -2)$.

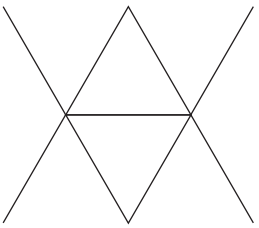
拓展

（1）如图.





（2）如图.



复习题

基础

1. （1）D；（2）B；（3）D；（4）A.

2. （2）平行四边，两组对边分别相等的四边形是平行四边形；

（3）矩，有一个角是直角的平行四边形是矩形.

3. 16 cm.

4. （1）提示：利用一组对边平行且相等的四边形是平行四边形这一判定方法来证明；

（2）是，理由同（1）；

（3）四边形 $AMCN$ 是平行四边形.

5. 等腰三角形，因为△BED 为△BCD 沿对角线对折后图形，$\angle EBD = \angle CBD$，又因为 $AD /\!/ BC$，则 $\angle ADB = \angle CBD$，故 $\angle EBD = \angle ADB$. 利用等角对等边可说明△BFD 为等腰三角形.

6. $\frac{1}{4}(a+b+c)$.

7. 5 个等边三角形，3 个平行四边形，3 个菱形.

提升

（1）196 块；（2）365 个，169 个.

拓展

（1）证明：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，∴ $AB = CD$.

又∵ E，F 分别是 AB，CD 的中点，

$\therefore\ AE=\frac{1}{2}AB$，$CF=\frac{1}{2}CD$，

$\therefore\ AE=CF$.

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形（有一组对边平行且相等的四边形是平行四边形）.

$\therefore\ AF/\!/EC$，即 $GF/\!/EH$.

同理 $EG/\!/HF$.

$\therefore$ 四边形 $EHFG$ 是平行四边形（两组对边分别平行的四边形是平行四边形）.

（2）当 $\square ABCD$ 是矩形时，四边形 $EHFG$ 会成为一个菱形.



第十六章 一元二次方程

教学目标

1. 使学生了解一元二次方程的意义，会判断一个方程是否是一元二次方程，熟练掌握一元二次方程的一般形式，会准确确定一元二次方程各项的系数.

2. 经历一元二次方程解法的探求，理解一元二次方程求根公式的推导过程的意义和求根公式产生的根据.

3. 掌握一元二次方程解法中的开平方法、配方再开平方法、公式法和因式分解法等四种方法，会根据一元二次方程的不同特点选择适当的解法.

4. 继续发展学生应用方程解决实际问题的意识，继续提高学生阅读文字材料、获取信息、建立方程模型的能力.

教材分析和教学建议

1. 主要内容及其地位作用.

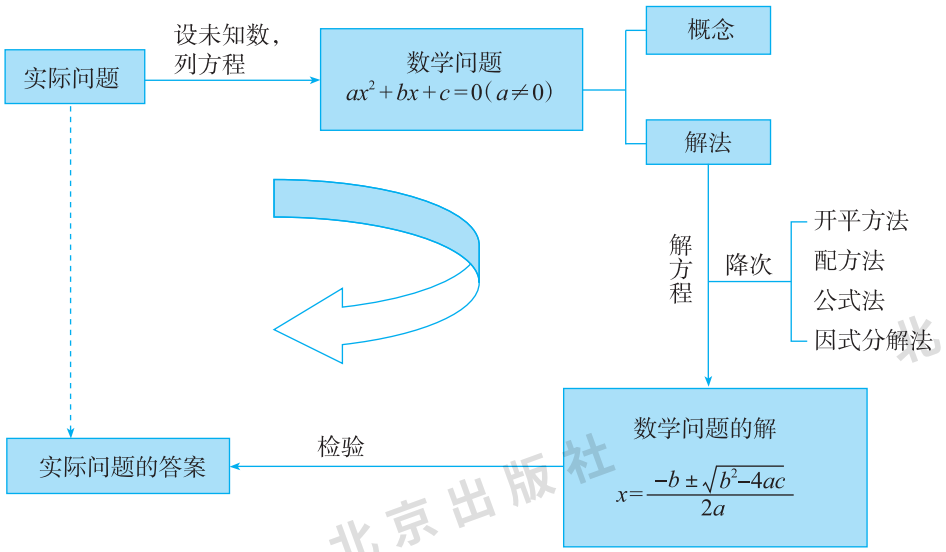
本章的内容包括一元二次方程的一般概念和一元二次方程的解法.

一元二次方程和它的解法是中学方程教学的重要环节. 在代数学中，很多有关“二次”问题的解决都可以归结为通过一元二次方程来解决，同时，它又是解决实际问题时被广泛应用的工具. 无论是在生活中应用方程思想的意识，还是探求一元二次

北京出版社

方程的解法，都是对学生应用数学知识能力的培养有重要意义的教学阶段.

有关方程、方程组知识的学习是从七年级开始的，它逐步发展成为解决实际问题的重要工具. 所以，应注意体现方程知识的丰富与解决实际问题能力的同步发展，通过一元二次方程解法的探索，继续提高学生观察、转化等探究能力，提高学生利用一元二次方程模型解决实际问题的意识和能力.



2. 本章编写特点.

（1）注重实际问题与数学问题的联系.

本章贯穿了由实际问题出发，将其抽象概括为数学问题，探索得到数学问题的解，从而使实际问题得到解决这样一种学习、活动的主线. 使学生认识到，一元二次方程是解决实际问题及数学问题的重要数学模型. 培养学生的数学应用意识和解决实际问题的能力.

（2）注重一元二次方程解法的探究.

本章在一元二次方程解法的探究过程中，引导学生观察方程的结构特点，在“降次”的指导思想下，对比回顾与之相近的解方程的方法，由特殊到一般地探索归纳，得出一元二次方程的各种解法. 培养学生观察、比较、分析、归纳等探究能力.

（3）注重数学活动经验的积累.

本章在知识的发生、发展过程中编排了一些“实践”、“思考”、“探索”、“交流”的栏目，在这些栏目中，设置了一些问题，引导学生深入思考、相互交流、归纳总结，使学生在这些活动中积累经验，培养学生思维的广泛性和深刻性.

3. 教学重点、难点.

（1）本章的重点包括一元二次方程的一般概念，一元二次方程的解法，以及一元

二次方程的应用.

（2）本章的难点是先配方再开平方思路的产生和配方变形技能的落实.

（3）更重要的难点是要培养学生能再一次运用数学的眼光观察分析要解决的问题，会把非数学问题归结为数学问题并用数学方法加以解决的能力. 即把一些非数学问题归结为用一元二次方程来解决的方程问题，并用一元二次方程的知识加以解决的能力.

（4）本章教学的关键是一元二次方程解法的落实和化归思想的运用.

4. 教学建议.

（1）让学生联系生活实际中的一元二次方程问题，感受一元二次方程的存在，了解一元二次方程的意义，掌握一元二次方程的定义.

（2）要设计适合的情景，引导学生发现运用开平方法解一元二次方程的求解途径，引导学生运用降次的指导思想、换元思想、化归思想探求一般的一元二次方程如何用开平方法来解，提高探究能力.

（3）组织学生进行实际操作，在实际操作活动中，寻求、思考、概括并归纳出配方法变形过程的规律和步骤. 在一元二次方程的学习中体验知识的内在意义，发现规律，并在实际操作中落实操作技能.

（4）倡导“探索式学习”，适时安排“探索式学习”，让学生在探索知识的规律、发现知识间的联系的过程中深入了解知识内容的内在本质，使学生自主地经历由未知寻求已知的探索过程，培养学生顽强钻研的探索精神，丰富学生的数学活动经验.

在一元二次方程的教学中，开平方法和配方法都是安排学生在探索活动中主动发现的，教师应精心组织、参与学生的探索活动.

（5）通过一元二次方程应用的教学，培养学生数学建模的能力，提高数学知识的应用意识和运用方程知识解决实际问题的能力.

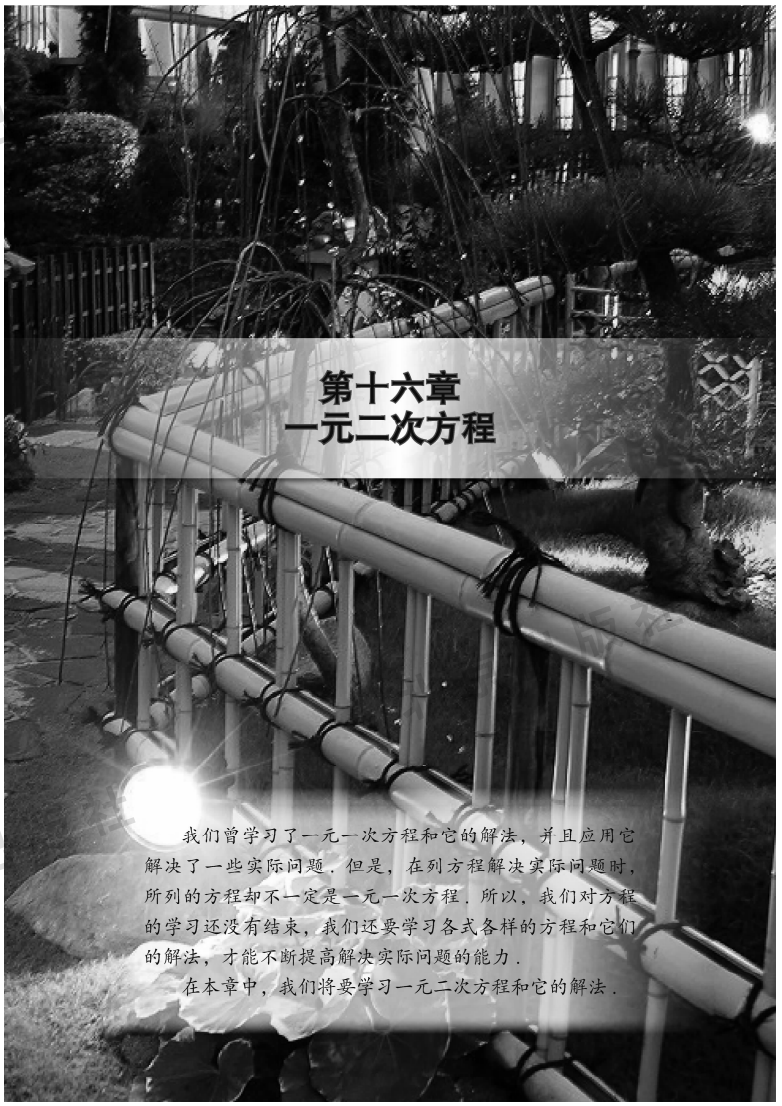
5. 课时安排.

本章教学约需 16 课时，具体分配如下（仅供参考）：

16.1 一元二次方程	约 1 课时
16.2 一元二次方程的解法	约 9 课时
16.3 列方程解应用问题	约 3 课时
总结与复习	约 3 课时

北京出版社

教材及其参考信息



章前页目的是引导学生回顾关于方程的学习，“所列方程不一定是一元一次方程”是本章引入的原因，“不断提高解决实际问题的能力”是学习本章的重要目的.

[1] 这里通过面积问题、数字问题、体积问题进行列方程，引出了一元二次方程的概念.

把方程（3）整理后，其系数的特殊性增强了与方程（1）、（2）的对比，便于发现三个方程的共同特点. 教师也可以再补充几个有代表性的方程，引导学生观察、归纳、概括，引出一元二次方程的概念.

一 一元二次方程和它的解法

16.1 一元二次方程

实践 [1]

根据下面的问题，设一个未知数，列出方程：

（1）如图 16－1，要使一个边长为 8 米的正方形花坛的面积增加 80 平方米后仍为正方形，边长应延长多少米？

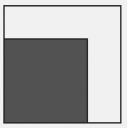


图 16－1

（2）小亮、小明、小刚三名同学中，小亮的年龄比小明的年龄小 7 岁，小刚的年龄比小明的年龄大 5 岁，并且小亮与小刚的年龄的乘积是 160. 你知道这三名同学的年龄各是多少岁吗？

（3）给木质器具表面刷油漆时，每平方米需用油漆 100 克. 当我们把一个正方体表面刷满油漆时，恰好用掉油漆 2 400 克，那么这个正方体的棱长是多少呢？

我们把问题（1）中边长应延长的部分设为 m 米，根据题意，得方程

$$(m+8)^2=8^2+80;$$

对于问题（2），设小明的年龄为 x 岁，根据题意，得方程

$$(x-7)(x+5)=160;$$

对于问题（3），设正方体的棱长为 a 米，根据题意，得方程

$$6a^2=\frac{2\,400}{100}.$$

经过整理，这些方程可以分别写成

$$m^2+16m-80=0,\qquad x^2-2x-195=0,\qquad a^2-4=0.$$

它们都是只含有一个未知数，而且未知数的最高次数是 2 的方程. 一般地，这样的方程都能整理成形如

让学生用通常的方法列出方程，使学生感受到从实际问题列出的一元二次方程也是一种方程模型. 如果学生对列方程的过程和方法已经淡忘，可以由教师引导学生回忆在学习一元一次方程时，曾经使用过列方程解实际问题的方法，再引导学生按“设未知数”、“寻求相等关系”、“列出含未知数的等式”的步骤进行.

建立一元二次方程的概念必须有一个抽象概括的过程，不必操之过急. 可以提出“（这些方程）经过整理，是关于未知数字母的几项式?”，“（这些方程）在等式的结构上有什么共同的特点?”，“（这些方程）有几个未知数，未知数的次数最高是几?”等补充问题，引导学生发现这些方程的共同特征，剔除非本质特征，归纳得出一元二次方程的概念，以培养学生观察发现能力.

$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$

为什么 a 必须不为零，而 b 和 c 却可以为零？

的一般形式，我们把这样的方程叫做一元二次方程．其中 ax^2，bx，c 分别叫做一元二次方程的二次项、一次项和常数项，a，b 分别是二次项和一次项的系数．

例 [1] 判断下列方程是不是一元二次方程，如果是，分别指出它们的各项系数和常数项：

(1) $2x(x-3)=10$；　(2) $3m^2+2=2(2m+1)$；

(3) $x(3+x^2)+1=5$；　(4) $3y-5=4(2-y)$；

(5) $(2k-3)(k+5)=7k$；　(6) $2x(x+3)=6x$.

解：方程分别整理为

(1) $x^2-3x-5=0$；　(2) $3m^2-4m=0$；

(3) $x^3+3x-4=0$；　(4) $7y-13=0$；

(5) $2k^2-15=0$；　(6) $x^2=0$.

其中，(1)、(2)、(5)、(6) 都是一元二次方程，它们的二次项系数、一次项系数和常数项分别为：(1) 1，−3，−5；(2) 3，−4，0；(5) 2，0，−15；(6) 1，0，0. 而 (3) 的最高次项的次数是 3，(4) 的最高次项的次数是 1，它们都不是一元二次方程．

交流 [2]

方程 $(a-1)x^2+ax-5=0$ 中，x 是未知数，a 表示一个已知的实数，那么，可以认为它是一元二次方程吗？为什么？怎样判断这个方程的类型？

练习

1. 判断下列方程是不是一元二次方程，如果是，指出它们的各项系数和常数项：

(1) $3y=4y(2-y)$；　(2) $2a(a+5)=10$；

(3) $x^2(3+x)+1=5x$；　(4) $3+2m^2=2(2m-3)$.

[1] 例题分析时要引导学生思考，判断一元二次方程的依据，得出需先将题目中的方程化为“一般形式”，再根据一元二次方程的概念进行判断的思维顺序.

[2] “交流”栏目中，使学生理解“字母常数”与“字母未知数”的关系，认清方程的结构特征，运用“整体”的概念去分析方程的类型.

练习答案：

1. (1) 是；(2) 是；(3) 不是；(4) 是. 二次项系数，一次项系数和常数项分别是：(1) 4，−5，0；(2) 1，5，−5；(4) 2，−4，9.

对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 中系数 a，b，c 的取值范围，应通过讨论让学生深入思考，理解 $a\neq 0$ 的意义，对 b，c 为什么可以取零，和对 b，c 取零时产生的各种情况，也应了然于胸，为认识各种情况下的一元二次方程作好准备. 判断一个方程是不是一元二次方程是学习一元二次方程的基础，应在讨论、交流中引导学生认识到，做出判断的重要条件是：整理后的方程是否是形如 $ax^2+bx+c=0$ 的方程，并且满足条件 $a\neq 0$. 而仅依据“只有一个未知数，且未知数的最高次数是 2”来判断是不可靠的，例如方程 $2x^2+3x=x(5+2x)+1$ 实际上就不是一个一元二次方程，而是一个一元一次方程.

2. （1）整理，得 $4x-3=0$，方程为一元一次方程，系数依次为 4，−3.

（2）整理，得 $ax^2-7x+23=0$，由于 $a\neq 0$，方程为一元二次方程，系数依次为 a，−7，23.

（3）整理，得 $(m-3)x^2-5x+5=0$，由于 m 表示任意实数，所以，当 $m\neq 3$ 时，方程为一元二次方程，系数依次为 $m-3$，-5，5；当 $m=3$ 时，方程为 $x-1=0$，是一元一次方程，系数依次为 1，−1.

2. 判断下列关于 x 的方程的类型，确定方程的各项系数和常数项：

（1）$2x(3x-2)=3(2x^2-1)$；　　（2）$23-5x=x(2-ax)(a\neq 0)$；

（3）$3x^2-5=x(mx-7)+2x$.

16.2 一元二次方程的解法

1. 开平方法

在 16.1 节的“实践”中，我们得到了三个一元二次方程．把它们分别整理为

$$(m+8)^2=144,\quad (x-7)(x+5)=160,\quad a^2-4=0.$$

现在我们研究怎样去求这些方程的解．

思考

在这些方程中，你认为哪几个方程根据曾经学习过的知识就可以求出解来？说说你的解法．

可以看到，方程 $a^2-4=0$ 可以转化为 $a^2=4$，方程的解就是 4 的平方根；对于方程 $(m+8)^2=144$，如果把 $m+8$ 看做一个整体，它就是 144 的平方根．所以只需直接开平方，就能求出这两个方程的解．如：

（1）解方程 $a^2-4=0$.

解：方程化为

$$a^2=4.$$

开平方，得

$$a=\pm 2.$$

所以，这个方程的解是

$$a=2 \quad 或 \quad a=-2.$$

（2）解方程 $(m+8)^2=144$.

解：开平方，得

关于 16.1 节“实践”中的方程 $(x-7)(x+5)=160$，学生可能有各种解法的猜测，可明示在今后的学习中会学到，暂且不必深入探究.

“思考”栏目是让学生在已经学习过的知识范围中，寻求哪些知识可以去解一元二次方程，从而引入“开平方法”．还应当让学生认识到，“整体思想”和“换元法”在这里又一次得到应用，以提高学生运用这些方法的自觉性和主动性.

研究一元二次方程的解法是由研究本章开头列出的方程怎样求解开始的．教学的重心应是引导学生对解法的“探求”，而不是对解法的“接受”．在这里，将一元二次方程进行“降次”是探求解法的核心思想，对问题的讨论应是“有远见的”，在总结“开平方法”时，应向学生渗透，这是一元二次方程的基本解法，一元二次方程的其他解法都是围绕实现这种解法而展开的.

$$m+8=\pm 12.$$

由 $m+8=+12$ 得

$$m=4.$$

由 $m+8=-12$ 得

$$m=-20.$$

所以，这个方程的解为

$$m=4 \quad 或 \quad m=-20.$$

由此可见，凡是形如 $x^2=m(m\geqslant 0)$ 的方程都可以用开平方的方法求出它的解，这种解法称为开平方法.

练习

1. 用开平方法解下列方程：

(1) $x^2=121$；　(2) $9y^2=25$；　(3) $3a^2-27=0$.

2. 用开平方法解下列方程：

(1) $(x-3)^2=16$；　(2) $4(t+4)^2=9$；　(3) $2\left(n-\frac{1}{2}\right)^2-1=0$.

2. 配方法

探索[1]

我们来研究方程 $x^2+4x-2=0$ 的解法.

(1) 这个方程能用开平方法求解吗？

(2) 这个方程能转化为形如 $(x+n)^2=m(m\geqslant 0)$ 的方程而用开平方法求解吗？如果能，怎样确定 n 的值？

(3) 试用这种设想去求这个方程的解.

通过对方程的变形，完成 $x^2+4x-2=0$ 向形如 $(x+n)^2=m(m\geqslant 0)$ 的方

练习答案：

1. (1) ± 11；

(2) $\pm\frac{5}{3}$；

(3) ± 3.

2. (1) 7 或 -1；

(2) $-\frac{5}{2}$ 或 $-\frac{11}{2}$；

(3) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

[1] 要利用“探究”栏目中的问题，引导学生观察、比较新方程与会解方程（开平方法）的结构特点，尝试将方程进行转化.

“探索”栏目以 $x^2+4x-2=0$ 为例，引导学生探求将它转化为 $(x+n)^2=m$（$m\geqslant 0$）的形式是本节教学的核心内容. 探求活动应围绕以下两点进行：

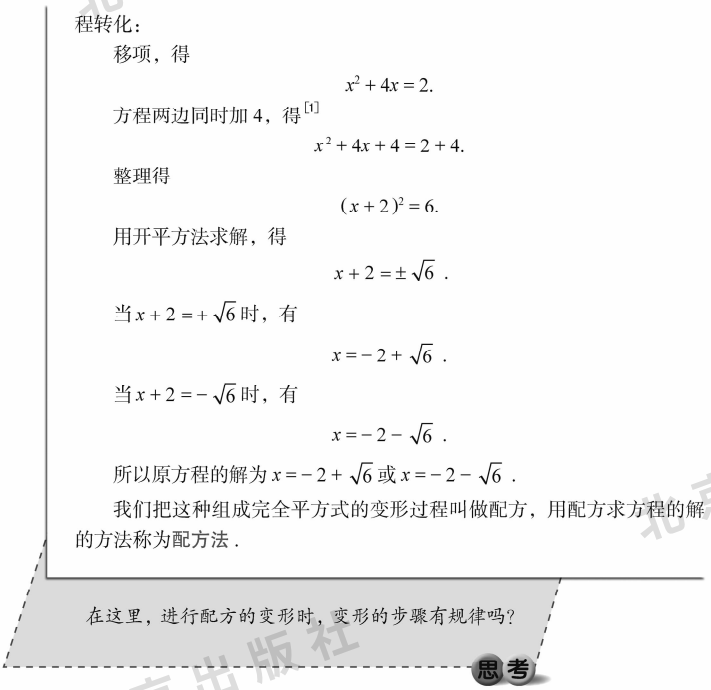
（1）怎样确定 $(x+n)^2=m$（$m\geqslant 0$）中 n 的值；

（2）在作方程变形时，怎样才能保持方程的等价关系.

用配方法解一元二次方程是本节的主要内容. 学生对它的探求，要先建立在对“开平方法”的感受和理解的基础上. 首先，应再一次复习形如 $x^2=m$（$m\geqslant 0$）或 $(x+n)^2=m$（$m\geqslant 0$）的解法，再启发引导学生，并把学生的思维引向如何把形如 $ax^2+bx+c=0$ 的方程化归为 $(x+n)^2=m$（$m\geqslant 0$）的形式，从而引入“配方法”.

[1] 在解法探究过程中，可引导学生回忆完全平方公式，对比公式的结构探索方程两边应加的常数.

[2] 这个问题是学生在配方过程中容易出现错误的内容之一，通过思考，可找到规律，减少失误.



程转化：

移项，得

$$x^2+4x=2.$$

方程两边同时加 4，得[1]

$$x^2+4x+4=2+4.$$

整理得

$$(x+2)^2=6.$$

用开平方法求解，得

$$x+2=\pm\sqrt{6}\ .$$

当 $x+2=+\sqrt{6}$ 时，有

$$x=-2+\sqrt{6}\ .$$

当 $x+2=-\sqrt{6}$ 时，有

$$x=-2-\sqrt{6}\ .$$

所以原方程的解为 $x=-2+\sqrt{6}$ 或 $x=-2-\sqrt{6}$.

我们把这种组成完全平方式的变形过程叫做配方，用配方求方程的解的方法称为配方法 .

在这里，进行配方的变形时，变形的步骤有规律吗？

思考

我们知道，在对形如 x^2+px 的式子进行配方时，加上的一项应是 $\left(\frac{p}{2}\right)^2$，也就是加上的一项应是“原式一次项系数的一半的平方”.

想一想，一次项系数的符号对配方的结果有影响吗？[2]

引导学生归纳“配方”过程的一般规律. “配方”的步骤应是：（1）把待解的一元二次方程整理为一般式（二次项系数是 1）；（2）把常数项移到等号的另一边；（3）在等号的两边都加上“一次项系数一半的平方”；（4）整理成 $(x+n)^2=m$ 的形式. 通过这样四步就完成了配方的过程.

练习

用配方法解下列方程：

(1) $x^2-2x-2=0$；　(2) $a^2-5a-2=0$；　(3) $x^2-\frac{3}{4}x=0$.

下面我们来研究方程 $2x^2-12x+7=0$ 的解法.

探索

1. 当二次项的系数不是 1 时，配方法应当怎样进行呢？
2. 用配方法求出方程 $2x^2-12x+7=0$ 的解.

事实上，对于这个方程，我们只需在方程两边同时除以二次项的系数 2，就能把二次项的系数转化为 1，得

$$x^2-6x+\frac{7}{2}=0.$$

配方时，应加上的项是 3^2，得

$$x^2-6x+3^2=-\frac{7}{2}+3^2.$$

$$(x-3)^2=\frac{11}{2}.$$

开平方，得

$$x-3=\pm\sqrt{\frac{11}{2}}=\pm\frac{\sqrt{22}}{2}.$$

所以，方程的解为

$$x_1=\frac{6+\sqrt{22}}{2},\quad x_2=\frac{6-\sqrt{22}}{2}.$$ [1]

例 1 用配方法解方程 $3x^2+2x-9=0$.

解：方程两边同时除以 3，得

练习答案：

(1) $1+\sqrt{3}$ 或 $1-\sqrt{3}$；

(2) $\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{33}}{2}$ 或 $\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{33}}{2}$；

(3) $\frac{3}{4}$ 或 0.

[1] 方程 $2x^2-12x+7=0$ 的解也可以表示为：$3+\frac{\sqrt{22}}{2}$ 或 $3-\frac{\sqrt{22}}{2}$.

教材首先解决二次项系数是 1 的一元二次方程的配方，再引导学生运用转化的思想解决二次项系数不是 1 的一元二次方程的配方. 这里的“探索”是希望学生独立探索转化的途径，而不是由教师讲解.

教材的内容集中在对方程配方变形的一般规律的总结归纳上，应让学生在实践操作以后再进行归纳，所以在课堂上应安排一定数量的练习，让学生边操作边归纳.

引入一些练习题，但不必加大难度，更不宜引入计算烦琐的题目.

练习答案：

1. （1） $-1+\frac{\sqrt{21}}{3}$ 或 $-1-\frac{\sqrt{21}}{3}$；

（2） $\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{10}$或 $\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{10}$.

2. （1） $\sqrt{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}$或 $\sqrt{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}$；

（2） $\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{10}}{3}$或 $\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{10}}{3}$.

$$x^2+\frac{2}{3}x-3=0\ .$$

配方，得

$$x^2+\frac{2}{3}x+\left(\frac{1}{3}\right)^2=3+\left(\frac{1}{3}\right)^2\ .$$

$$\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{28}{9}.$$

开平方，得

$$x+\frac{1}{3}=\pm\frac{2}{3}\sqrt{7}.$$

所以，方程的解为

$$x_1=-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\sqrt{7}\ ,\quad x_2=-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{7}.$$

练 习

1. 用配方法解下列一元二次方程：

（1）$3x^2+6x-4=0$；　　（2）$5x^2-15x+11=0$.

2. 解下列一元二次方程：

（1）$2x^2-4\sqrt{3}x+5=0$；　　（2）$\frac{3}{4}x^2-x-\frac{1}{2}=0$.

3. 公式法

交 流

1. 用配方法解一元二次方程时，主要的步骤是什么？

2. 能按照这个步骤，推导出一个用来求一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$$

的根的公式吗？

“交流”栏目是引导学生把配方法引向求根公式，并让学生亲自参与推演公式的过程，使学生感受到，当某类运算具有步骤上的一致性时，可尝试总结运算的公式，这样可以免去运算过程，直接由公式得到运算的结果，体现数学的简捷性. 同时在推演公式的过程中提升自己的运算能力. 由于公式的推导过程均为字母间的运算，因此，对学生来说是个难点，不可操之过急.

对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$，由于 $a\neq 0$，可以在方程两边同时除以 a，得

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

移项，配方，得

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2.$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

由于 $a\neq 0$，有 $4a^2>0$，所以，当 $b^2-4ac\geqslant 0$ 时，可以用开平方法，得

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}.$$

当 $b^2-4ac\geqslant 0$ 时，原方程的解为

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

由此，我们得到了一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的求根公式：

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\ (b^2-4ac\geqslant 0).$$

运用这个公式求一元二次方程的解时，首先要把方程整理为一般形式，以便正确地确定方程中的各项系数和常数项.

例 2 [1] 利用求根公式解方程 $2x^2-8x+3=0$.

解：由于 $a=2$，$b=-8$，$c=3$，所以

$$b^2-4ac=(-8)^2-4\times 2\times 3=40>0.$$

代入公式，得

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-8)\pm\sqrt{40}}{2\times 2}=\frac{4\pm\sqrt{10}}{2}.$$

所以，方程的根是

$$x_1=\frac{4+\sqrt{10}}{2},\quad x_2=\frac{4-\sqrt{10}}{2}.$$

[1] 在确定方程中各项系数时，还要强调系数中的符号问题，这是学生的易错点.

在推演求根公式的过程中，当推演到$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$时，要引导学生对开平方的步骤是否能任意进行作认真的讨论，这样做，一方面是数学推导严密性本身的需要，另一方面也为以后引入一元二次方程实根的判别式作好铺垫.

例 2 后的思考，让学生回顾求解过程，归纳出应用公式解一元二次方程的操作步骤.

引导学生概括出应用公式解一元二次方程的操作步骤时，应注意两个方面的问题：

（1）把方程整理为一般形式，确定各项系数，这是正确求根的前提；

（2）先求出判别式的值，才能决定“代入公式”的步骤是否继续进行.

[1] 例 3 中（1）的求解需注意两点：

（1）在计算判别式的值时，要注意符号问题，尤其当方程中的“c”为负数时，学生计算 b^2-4ac 最容易出错.

（2）$b=2\sqrt{3}$，因此，学生对 b^2 的计算也是易错点.

利用求根公式求一元二次方程的解的方法称为公式法.

用公式法求一元二次方程的解时，应按照怎样的步骤进行？

思考

正确使用求根公式求解，应按照以下的步骤进行：

（1）把方程整理为一般形式 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$，确定 a，b，c 的值；

（2）计算式子 b^2-4ac 的值；

（3）当 $b^2-4ac\geqslant 0$ 时，把 a，b 和 b^2-4ac 的值代入求根公式计算，就可以求出方程的解.

例 3 用公式法解下列方程：[1]

（1）$x(x+2\sqrt{3})=4$；　　（2）$2\left(x^2-\frac{3}{2}\right)=2(\sqrt{2}x-2)$.

解：（1）整理原方程，得

$$x^2+2\sqrt{3}x-4=0.$$

因为　$a=1$，　$b=2\sqrt{3}$，　$c=-4$，

所以　$b^2-4ac=(2\sqrt{3})^2-4\times 1\times(-4)=28>0$.

代入求根公式，得

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2\sqrt{3}\pm\sqrt{28}}{2\times 1}=-\sqrt{3}\pm\sqrt{7}.$$

所以，方程的解为

$$x_1=-\sqrt{3}+\sqrt{7},\quad x_2=-\sqrt{3}-\sqrt{7}.$$

（2）原方程整理为

$$2x^2-2\sqrt{2}x+1=0.$$

因为　$a=2$，　$b=-2\sqrt{2}$，　$c=1$，

所以　$b^2-4ac=(-2\sqrt{2})^2-4\times 2\times 1=0$.

98 数学 八年级 下册

通过例 3 的求解，让学生进一步感受到，用公式法解一元二次方程可以免去配方法解方程中烦琐的配方过程. 例 3 中（2）方程的解为：$x_1=x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$，这里出现“有等根”的情形，我们称此一元二次方程有两个相等的实数根，而学生容易出现“此方程有一个根”的错误认识. 这是初中阶段解方程时特有的现象. 对于为什么不说“一个根”而说“有等根”，目前不宜深入讨论. 因为，目前对这个问题说清楚的条件尚不成熟，在学习了二次函数以后，才能对此有进一步的了解，那时再“旧事重提”，以加深认识.

代入求根公式，得

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-2\sqrt{2})\pm\sqrt{0}}{2\times 2}=\frac{2\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

所以，方程的解为

$$x_1=x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

应当注意，如果求出的一元二次方程的两个实数根相等，我们就说，这个一元二次方程有两个相等的实数根．

练习

1. 用公式法解下列方程：
   （1）$x^2-x-1=0$；　　（2）$2x^2+2x-1=0$.
2. 用公式法解下列方程：
   （1）$2(x^2-1)-1=4x$；　　（2）$y(y-3)=2+y(1-3y)$.

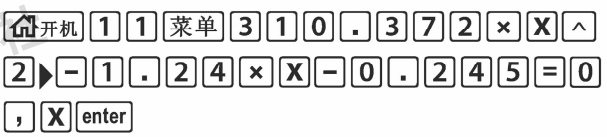
利用图形计算器求方程 $0.372x^2-1.24x-0.245=0$ 的近似解（精确到 0.001）．

解：因为 $a=0.372$，$b=-1.24$，$c=-0.245$，所以

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-(-1.24)\pm\sqrt{(-1.24)^2-4\times 0.372\times(-0.245)}}{2\times 0.372}.$$

用图形计算器的操作过程如下：



练习答案：

1. （1）$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$或$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$；

   （2）$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$或$\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$.

2. （1）$\frac{2+\sqrt{10}}{2}$或$\frac{2-\sqrt{10}}{2}$；

   （2）$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$或$\frac{1-\sqrt{3}}{2}$.

这是对使用计算器或图形计算器的训练．有条件的学校应介绍两种计算工具的使用方法．

练习答案：

1. $\frac{5+2\sqrt{10}}{3}$或$\frac{5-2\sqrt{10}}{3}$.

2. 略.

如图 16－2(答略).

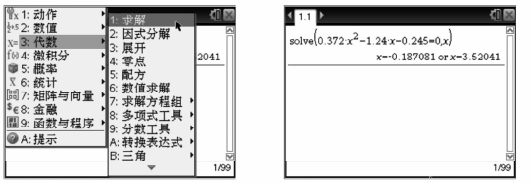


图 16－2

练习

1. 用公式法解方程：$3x^2-10x-5=0$.
2. 用计算器解方程：$3.25x^2-6.79x+0.832=0$(精确到 0.01).

思考

能否不解方程而判断出一元二次方程是否有实数解？怎样做出这种判断？

我们在用公式法求一元二次方程的解时知道，当 $b^2-4ac\geqslant 0$ 时，才能求得方程的实数根，当 $b^2-4ac<0$ 时方程没有实数根．所以，我们把 b^2-4ac 叫做一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 是否有实数根的判别式，记作

$$\Delta=b^2-4ac.$$

思考

当一个一元二次方程有实数根时，这两个实数根在什么情况下相等，在什么情况下不相等？

观察一元二次方程的求根公式可以知道，当判别式 $\Delta=b^2-4ac=0$ 时，有

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a},$$

这两个实数根相等；当判别式 $\Delta=b^2-4ac>0$ 时，这两个实数根不相等．

100 数学 八年级 下册

“思考”栏目是把学生引向一元二次方程实数根存在性的讨论，应引导学生回忆公式法解方程的过程，以引导判别式的出现.

可以设计以下问题，组织学生参与实数根判别的探究过程：

（1）任意一个一元二次方程一定有实数根吗？为什么？

（2）是否能不解方程，就能判定一个一元二次方程是否有实数根？怎样做就能判定？

（3）判别式的值是正数或零有什么不同的意义？

要使学生注意到，一元二次方程有实数根的含义：“有两个不相等的实数根”或者“有两个相等的实数根”，在具体问题中，审题时要注意区别.

例 4[1] 判断下列方程是否有实数根．有实数根时，两个实数根是否相等？

(1) $x^2-5x-12=0$；　　(2) $8y(2y-5)=-25$；

(3) $3x(x-3)+7=5(1-x)$.

解：(1) 因为　$b^2-4ac=(-5)^2-4\times1\times(-12)=73>0$，

所以方程 $x^2-5x-12=0$ 有两个不相等的实数根．

(2) 原方程整理为

$$16y^2-40y+25=0.$$

因为　$b^2-4ac=(-40)^2-4\times16\times25=0$，

所以方程 $8y(2y-5)=-25$ 有两个相等的实数根．

(3) 原方程整理为

$$3x^2-4x+2=0.$$

因为　$b^2-4ac=(-4)^2-4\times3\times2=16-24<0$，

所以方程 $3x(x-3)+7=5(1-x)$ 没有实数根．

思考

如果 x_1，x_2 是一元二次方程 $2x^2+3x-7=0$ 的两个实数根，那么不解方程你能知道 x_1+x_2，x_1x_2 的值吗？

如果一元二次方程有两个实数根，那么这两个实数根的和及这两个实数根的积与此方程的系数之间有怎样的关系呢？

当 $b^2-4ac\geqslant0$ 时，设 x_1，x_2 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个实数根，由求根公式得 $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，$x_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

所以　$x_1+x_2=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\dfrac{b}{a}$.

$$x_1x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\times\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{c}{a}.$$

因此，对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$，当 $b^2-4ac\geqslant0$ 时，它的两个实数根 x_1，x_2 满足

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\quad x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

我们称这两个等式为一元二次方程的根与系数的关系．

[1] 由于根的判别式中的字母 a，b，c 是一元二次方程一般式中各项的系数，因此，用判别式判断一元二次方程根的情况时，要先将方程整理为一般式，认清各项系数，准确计算，根据判别式的值（正、负、零）判断方程根的情况．

方程的根与方程的系数之间的关系，是方程理论中的重要内容之一，由于一元二次方程根与系数的关系在初中是选学内容，因此，只需让学生了解一元二次方程根与系数的关系即可．教学中可让学生作为探究学习的素材，引导学生由特殊到一般发现“根系关系”，提高学生归纳概括能力．

练习答案：

1. （1）原方程有两个不相等的实数根；

（2）原方程没有实数根；

（3）原方程有两个相等的实数根；

（4）原方程没有实数根.

*2. （1）$\frac{76}{3}$；

（2）$-\frac{4}{9}$.

[1]“思考”栏目是对因式分解法的理论根据的研究，是正确理解因式分解法的关键.

练习

1. 不解方程，判断下列方程是否有实数根．如果有实数根，请判断两个实数根是否相等．

（1）$4x^2-5x-7=0$；　　（2）$2y(y-3)=-5$；

（3）$k^2+5=2\sqrt{5}k$；　　（4）$4m(m-1)=m-2$.

*2. 设 x_1，x_2 是一元二次方程 $3x^2-x-4=0$ 的两个根，不解方程，求下列代数式的值．

（1）$(x_1+5)(x_2+5)$；　　（2）$x_1^2x_2+x_1x_2^2$.

4. 因式分解法

我们知道，配方法和公式法是一元二次方程的一般解法，但是，某些特殊的一元二次方程除了可以用这些方法求解外，还存在更简捷的特殊解法．

交流

观察、分析下列一元二次方程的特点，有什么其他的方法能求出它们的解？

（1）$x^2-3x=0$；　　（2）$(y-1)^2+3(y-1)=0$.

我们发现，这两个一元二次方程都是等号右边为零，左边的代数式都可以作因式分解的方程．因而，可以根据“使两个数的乘积为零”的条件来求方程的解．

思考[1]

“使两个数的乘积为零”的条件是什么？怎样用简洁的语言来表述这个条件？怎样用这个条件求方程的解？

“使两个数的乘积为零”的条件可以表述为“只需两个数中有一个数为零”，由此可以得到某些一元二次方程的另一种解法．

“交流”、“思考”栏目是让学生发挥联想能力，发现一元二次方程的特殊解法——因式分解法．这是对运用知识的能力和观察发现能力的培养.

因式分解法是对一些特殊形式的一元二次方程的一种简便解法，因此，要注意方程的变形要求，即：方程等号右边是零，方程左边的代数式进行因式分解.

教学过程要给学生足够的参与时间，不宜完全由教师讲授．建议让学生按设想作演算，大家评价，说明根据，论证正误，由教师启发指点，最后概括总结.

例如，方程 $x^2-3x=0$ 可以化为

$$x(x-3)=0.$$

由于 x 和 $(x-3)$ 的乘积为零时，只需 x 为零或 $(x-3)$ 为零，也就是

$$x=0 \quad 或 \quad x-3=0.$$

于是，可得方程的解为

$$x_1=0,\quad x_2=3.$$

又如，方程 $(y-1)^2+3(y-1)=0$ 可以化为

$$(y-1)[(y-1)+3]=0.$$

所以，有

$$(y-1)(y+2)=0.$$

$$y-1=0 \quad 或 \quad y+2=0.$$

于是，可得方程的解为

$$y_1=1,\quad y_2=-2.$$

这就是说，对于某些等号一边为零、另一边的代数式可以作因式分解的一元二次方程，都可以用这种方法来求解，这种方法称为因式分解法 .

例 5 用因式分解法解下列方程：

(1) $(x-3)^2=5(x-3)$；　　(2) $(y-7)^2-3y(7-y)=0$.

解：(1) 移项，得

$$(x-3)^2-5(x-3)=0.$$

因式分解，得

$$(x-3)[(x-3)-5]=0.$$

$$(x-3)(x-8)=0.$$

所以

$$x_1=3,\quad x_2=8.$$

(2) 原方程可以化为

$$(y-7)^2+3y(y-7)=0.$$

提取公因式，得

$$(y-7)[(y-7)+3y]=0.$$

$$(y-7)(4y-7)=0.$$

所以

$$y_1=7,\quad y_2=\frac{7}{4}.$$

[1] 例 5 中的 (2)，$y-7$ 与 $7-y$ 经过调整可以成为公因式.

因式分解法是将一元二次方程进行降次的又一种方法. 虽然它是一种特殊解法，但是它简便易行，使用方便，所以又是一种一旦可以应用，就应及时采用的方法. 应让学生真正理解“只需一个因式为零”和解与解之间用“或”字的意义.

［1］例6中的（1），尽管方程左边是两个一次式的乘积，但等号右边不是零，因此，不能直接用因式分解法求解.

练习答案：

（1）0，$-\frac{2}{3}$；

（2）$\frac{1}{2}$，$-\frac{4}{3}$；

（3）5，$\frac{25}{4}$；

*（4）2，4；

*（5）10，-1.

例6[1] 用因式分解法解下列方程：

（1）$(t-3)(t+5)=-15$；　　（2）$(y-4)^2=(y-4)(3y-1)$；

*（3）$x^2-2x-24=0$.

解：（1）去括号，整理，得

$$t^2+2t=0.$$

因式分解，得

$$t(t+2)=0.$$

所以

$$t_1=0,\quad t_2=-2.$$

（2）移项，作因式分解，得

$$(y-4)^2-(y-4)(3y-1)=0.$$

$$(y-4)[(y-4)-(3y-1)]=0.$$

$$(y-4)(-2y-3)=0.$$

所以

$$y_1=4,\quad y_2=-\frac{3}{2}.$$

*（3）运用公式 $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$，原方程可以变形为

$$(x-6)(x+4)=0.$$

所以

$$x_1=6,\quad x_2=-4.$$

练习

用因式分解法解下列方程：

（1）$3x^2+2x=0$；　　（2）$4(2x-1)+3x(2x-1)=0$；

（3）$4(x-5)^2=5(x-5)$；　　*（4）$x^2-6x+8=0$；

*（5）$x^2-9x-10=0$.

“十字相乘法”是选学内容，在例6（3）题中是用“公式”作“十字相乘”的变形，是因式分解法的另一个思考途径.

对于例6（2）题学生可能产生这样的解法：$(y-4)^2=(y-4)(3y-1)$ 的两边同除以 $y-4$，得 $y-4=3y-1$，于是得解 $y=-\frac{3}{2}$. 在教学时，最好能让这种解法首先出现，然后组织研讨：

（1）这个解法对吗？

（2）$y=4$ 是这个方程的解吗？为什么这个解法却不包含这个解？

（3）怎样做才能不丢掉这个解？

从而引入教材中的解法，以使学生留下深刻的印象.

思考

在解一元二次方程时，应当按照怎样的思路来选择解法？

例 7[1] 选择适当的方法解下列方程：

(1) $x^2+2x=3x(x+1)$；

(2) $y(y-4)=4(y-1)$；

(3) $2x^2-2\sqrt{6}x+3=0$.

解：(1) 整理，得

$$2x^2+x=0.$$

因式分解，得

$$x(2x+1)=0.$$

所以

$$x_1=0,\quad x_2=-\frac{1}{2}.$$

(2) 整理，得

$$y^2-8y+4=0.$$

配方，得

$$y^2-8y+4^2=-4+4^2.$$

$$(y-4)^2=12.$$

开平方，得

$$y-4=+2\sqrt{3}\quad 或\quad y-4=-2\sqrt{3}\ .$$

所以

$$y_1=4+2\sqrt{3},\quad y_2=4-2\sqrt{3}.$$

(3) 用公式法求解 .

因为 $a=2,\ b=-2\sqrt{6},\ c=3,$

所以

$$b^2-4ac=\left(-2\sqrt{6}\right)^2-4\times2\times3=0.$$

[1] 当方程表面没有突出特征时，可先将其整理为一般式，再根据方程的特征进行方法的选择. 如：例 7 中的 (1)、(2).

根据方程的特征，恰当地选择解法，可使解题简便、快捷，在教学中，应让学生在独立思考的基础上对一元二次方程的解法进行全面的审视. 讨论中，首先应全面回顾一元二次方程的各种解法，再考虑说明各种解法适用于哪类方程，最后再确定选择合理的解法顺序.

例 7 的教学，应在和学生共同研讨中寻求各题的解法，并让学生阐述方程的特点和选择这种解法的理由.

练习答案：

（1）用因式分解法，3，3.

（2）用开平方法，$\frac{4\pm\sqrt{5}}{3}$.

（3）用配方法，$\frac{1\pm\sqrt{2}}{2}$.

（4）用公式法，$2a\pm2\sqrt{2}a$.

代入，得

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}=-\frac{-2\sqrt{6}}{2\times2}=\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

所以

$$x_1=x_2=\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

练习

选择适当的方法解下列方程：

（1）$x(x-3)=3x-9$；

（2）$(3x-4)^2-5=0$；

（3）$4x^2-4x-1=0$；

（4）$x^2-4ax-4a^2=0(a>0)$.

习 题 16－1

★基础★

1. 用开平方法解下列方程：

（1）$x^2-289=0$；

（2）$3x^2-75=0$；

（3）$3(a-1)^2-2=0$；

（4）$121-25\left(y+\frac{4}{5}\right)^2=0$.

2. 用配方法解下列方程：

（1）$x^2-2x-4=0$；

（2）$t^2-3t-1=0$；

（3）$2a^2+8a-5=0$；

（4）$2p^2+3p-4=0$.

3. 用公式法解下列方程：

（1）$2x^2-3x+1=0$；

（2）$x(3x-4)=2+x$；

（3）$\sqrt{2}x^2+3x-\sqrt{2}=0$.

4. 用公式法解下列方程（利用计算器，结果精确到0.01）：

（1）$2x^2-\sqrt{5}x-2=0$；

（2）$3x^2+4\sqrt{3}x=2$.

5. 用因式分解法解下列方程：

(1) $x^2=3x$；　　(2) $4(3x-1)^2=3(3x-1)$；

*(3) $p(p-8)-3p+24=0$；　　*(4) $m^2+7m+6=0$；

*(5) $5p^2-12p-9=0$.

6. 选择适当的方法解下列方程：

(1) $2x^2=5x$；　　(2) $x(x+7)=60$；

(3) $x^2-4x-2=0$；　　(4) $3(x-7)^2=24$；

(5) $x(x+3)=1$；　　(6) $2(x^2-5)=x(1-x)$；

(7) $x^2-2nx+n^2=m^2$(x 是未知数).

7. 不解方程，判断下列方程是否有实数根．如果有实数根，请判断两个实数根是否相等．

(1) $x^2-4x+5=0$；　　(2) $3x^2+5x+2=-1$；

(3) $x(x+3)=7$；　　(4) $2(x^2-5)=x(1-x)$；

(5) $\sqrt{5}x^2-(4-\sqrt{2})x+\sqrt{10}=0$.

8. 解方程 $(x-5)(x+2)=18$ 时，下面的解法正确吗？如果不正确，错误在哪里？正确的解法是什么？

解：原方程化为 $(x-5)(x+2)=3\times6$，那么由 $x-5=3$，得

$$x=8.$$

由 $x+2=6$，得

$$x=4.$$

所以，原方程的根为

$$x_1=8,\ x_2=4.$$

★★提升★★

1. 解下列关于 x 的方程：

(1) $x^2-\sqrt{m}x-n^2=0$；　　(2) $x^2-mx-1=0$.

2. 是否存在 x 的实数值，使代数式 $\frac{3x^2-5x+1}{4}$ 与 $\frac{x^2-x-1}{2}$ 的值相等？

3. 解关于 x 的方程 $nx^2-(m-2n)x-m+n=0(n\neq0)$.

4. 已知关于 x 的方程 $ax^2-(2a+b)x+2b=0$ 的根是实数，解这个方程．

5. 关于 x 的一元二次方程 $mx^2+2x-1=0$ 有两个不相等的实数根，求 m 的取值范围．

6. 关于 x 的一元二次方程 $(m-2)x^2-3x-2=0$ 有实数根，求 m 的取值范围．

[1] 此题有些学生可能用列方程组求解，可引导学生用同一个未知数分别表示矩形的长和宽，列一元二次方程求解.

★★★拓展★★★

1. 有人说："当一元二次方程的二次项和常数项的系数之积是负数时，这个方程一定有两个不相等的实数根."这个说法正确吗？如果你认为不正确，请举出反例；如果你认为正确，请加以证明.
2. 像 $\sqrt{2x^2+7x}-x=2$ 这样的二次根号下含有未知数的方程叫做无理方程.你能根据二次根式的意义和方程解法的一般思路来求这个方程的解吗？你求出的解确实是原方程的解吗？
3. 解下列方程：
(1) $2(x^2-7x)^2-21(x^2-7x)+10=0$；
(2) $(2x^2+3x)^2-4(2x^2+3x)-5=0$.

二 一元二次方程的应用

16.3 列方程解应用问题

我们已经学习了用列方程的方法解一些应用问题，现在又学习了一元二次方程，使得更多的应用问题可以用列方程来求解.

例 1[1] 用 80 m 长的篱笆在墙边围一个矩形的草坪（图 16－3），当矩形面积是 750 m^2 时，它的长和宽应是多少？

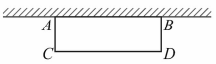


图 16－3

解：设矩形的宽 AC 为 x m，那么长 CD 为 $(80-2x)$ m. 据题意，可得方程

$$x(80-2x)=750.$$

整理，得

$$x^2-40x+375=0.$$

本节的安排是加强方程在现实生活中的应用，特别是在生产活动和经济生活中的应用. 教学的重点应放在对学生的应用意识、分析问题和阅读理解能力的培养上. 切不要由教师讲解分析过多，否则使学生仅仅处于理解接受的被动状态，而实际能力得不到提高.

用配方法，得

$$(x-20)^2=25.$$

开平方，得

$$x-20=\pm 5.$$

于是，方程的解为

$$x_1=25,\quad x_2=15.$$

所以，矩形草坪的长为 30 m 或 50 m.

答：矩形草坪的宽 AC 为 25 m、长 CD 为 30 m，或宽 AC 为 15 m、长 CD 为 50 m.

例 2 有一块长 25 cm、宽 15 cm 的长方形铁皮，如果在铁皮的四个角上截去四个相同的小正方形，然后把四边折起来，做成一个底面面积为 231 cm^2 的无盖的盒子，求这个盒子的容积.

分析：如图 16－4，要求盒子的容积，只需求出盒子的高，而小正方形的边长和盒子的高相等.

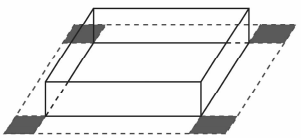


图 16－4

解：设盒子的高为 x cm. 根据题意列方程，得

$$(25-2x)(15-2x)=231.$$

整理，得

$$x^2-20x+36=0.$$

解得

$$x_1=18,\quad x_2=2.$$

这里，虽然 $x-18$ 是方程的解，但小正方形的边长必须小于 $\frac{15}{2}$ cm 才有意义，[1] 所以 $x=18$ 不合题意，应舍去，那么符合题意的解为

$$x=2.$$

［1］学生对验根及答题的语言描述都是难点，可引导学生进行语言描述.

例 2，此题不要轻易由教师提出检验的问题，要让学生思考、发现问题，从而增强学生检验方程的根是否有实际意义的意识. 可引导学生思考几个问题：

（1）立体图形（盒子）的各棱长与平面图形中各折痕长有怎样的联系？

（2）求盒子的容积，还可通过什么途径来解决？

北京出版社

练习答案：

（1） －16 和 －11；11 和 16.

于是可知，当盒子的高为 2 cm 时，盒子的容积是

$$2 \times 231 = 462(\text{cm}^3).$$

答：这个盒子的容积为 462 cm^3.

例 3 某工厂由于管理水平提高，生产成本逐月下降．原来每件产品的成本是 1 600 元，两个月后，降至 900 元．求产品成本的月平均降低率．

分析：如果原每件成本为 a 元，每月成本的平均降低率为 x，那么一个月后的每件成本就是

$$a - ax = a(1 - x).$$

两个月后的每件成本是

$$\begin{aligned} &a(1-x) - a(1-x)\cdot x \\ =\ &a(1-x)(1-x) \\ =\ &a(1-x)^2. \end{aligned}$$

解：设产品成本的月平均降低率为 x．根据题意，得

$$1\,600 \times (1-x)^2 = 900.$$

$$(1-x)^2 = \frac{9}{16}.$$

解这个方程，得

$$1 - x = \frac{3}{4} \quad 或 \quad 1 - x = -\frac{3}{4}.$$

$$x_1 = \frac{1}{4}, \quad x_2 = \frac{7}{4}.$$

其中 $x_2 = \frac{7}{4}$ 不合题意，舍去，所以

$$x = \frac{1}{4} = 25\%.$$

答：产品成本的月平均降低率为 25%.

练习

列方程解下列应用题：

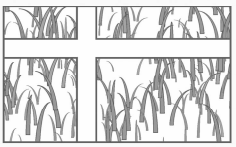
（1）两个数的差是 5，积是 176．求这两个数．

一元二次方程是增长率（降低率）问题的重要数学模型，要引导学生通过数量关系的分析，理解所列方程的思维过程.

列方程时，要按题意将每次降低后的成本用代数式表示出来，分解、展示出最终所列方程的思维过程.

要提高学生验根的意识.

(2) 在宽为 20 m、长为 32 m 的长方形地面上铺 540 m² 的草坪，并留出如图所示的宽度相同的甬道．求甬道的宽度是多少．



[第(2)题]

(3) 某产粮大户今年产粮 20 万千克，计划后年产粮达到 28.8 万千克．如果每年粮食增产的百分数相同，求平均每年增产的百分数．

习 题 16-2

★基础★

列方程或方程组解下列应用问题：

(1) 已知两个数的差是 7，积为 228. 求这两个数．

(2) 在有理数中，能被 2 整除的负数也叫做偶数．那么，有 5 个连续偶数，如果第 1 个与第 5 个偶数的乘积是 308，求这 5 个偶数．

(3) 一个圆形花坛的周围铺了一条宽为 2 m 的圆环形甬路．甬路和花坛的总面积为 200 m²，那么甬路的中心线的周长是多少米(π取 3.14，计算结果精确到 0.1 m)？

(4) 某工厂一月份生产塑料颗粒 5 000 t，三月份增加到 7 200 t，求这个工厂的月平均增长率．

(5) 某印刷厂第一季度共印了 182 万册书，一月份印了 50 万册，那么这个印刷厂印数的月平均增长率是多少？

(2) 2 m.

(3) 20%.

★★提升★★

列方程或方程组解下列应用问题：

(1) 在长是 10 cm 的矩形上，以此矩形的宽为边长，截出一个正方形，使矩形的剩余面积为 16 cm^2，求此矩形的宽．

(2) 直角三角形的面积为 96 cm^2，两直角边的和为 28 cm．求它各边的长．

★★★拓展★★★

某校组织 360 名学生去看足球比赛，如果租用 n 辆中型客车（每辆租金 400 元），刚好坐满．已知大型客车比中型客车多 20 个座位，如果要租用大型客车（每辆租金 480 元），虽然可以少租一辆，但有 40 个空位．请你设计一种租金最少的租车方案，并说明理由．

阅读理解

古代数学家对一元二次方程的贡献

关于一元二次方程的知识，最早出现在公元前两千年左右古巴比伦人的泥板文书中．它记载了这样的问题："求一个数，使它与它的倒数之和等于一个已知数．"列出的方程就是

$$x^2-bx+1=0(b\text{ 是已知数}),$$

并给出了它的解是

$$\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-1}\quad\text{或}\quad\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-1}\ .$$

虽然他们当时还不能接受负数，但这也足以说明古巴比伦人已开始接触一元二次方程，并致力于研究一元二次方程的求根公式．

古埃及的"纸草文书"中也涉及如 $ax^2=b$ 这样的最简单的一元二次方程．

希腊的丢番图(246—330)只承认一元二次方程的一个正根，即使两根都是正的他也只取一个.

公元628年，印度的婆罗摩笈多写成的《婆罗摩修正体系》中，给出了一元二次方程

$$x^2+px-q=0$$

的一个求根公式

$$x=\frac{\sqrt{p^2+4q}-p}{2}.$$

阿拉伯的花拉子米(约783—850)的《代数学》中讨论了方程的解法，解出了一元一次、一元二次方程，其中包含一元二次方程的几种不同的形式：$ax^2=bx$，$ax^2=c$，$ax^2+c=bx$，$ax^2+bx=c$，$ax^2=bx+c$，但他限定了a，b，c总是正数.他的伟大贡献在于第一次给出一元二次方程的一般解法，并且承认方程有两个根，还允许有无理根的存在，这在当时已是巨大的进步了!

我国对一元二次方程的研究历史悠久，约公元1世纪成书的《九章算术》“勾股”一章中的第20题，就是相当于求方程

$$x^2+34x-71\,000=0$$

的正根的问题.

我国南北朝时期的《张丘建算经》(大约成书于466—485)中，提出了一个用文字写出的，相当于

$$x^2+cx=c^2-36\frac{a}{b}$$

的一元二次方程.

近代法国数学家韦达(1540—1603)指出一元二次方程在实数范围内无解时，实际上在复数(复数的知识将在高中阶段学习)范围内有解，并且给出了根与系数的关系.

回顾与整理

知识要点

1. 形如 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的方程叫做一元二次方程.

2. 一元二次方程的解法主要包括：

(1) 某些一次项系数为零的一元二次方程可以用开平方法求解；

(2) 某些易于作配方变形的一元二次方程可以通过配方，再用开平方法求解；

(3) 任何一个一元二次方程都可以用求根公式法求解，对于作配方变形时计算烦琐的，更宜于应用求根公式法求解；

(4) 某些等号一边为零、另一边可以作因式分解的一元二次方程，可以通过因式分解，把一元二次方程转化为两个一元一次方程来求解，这种特殊的解法由于方便快捷，可以在求解时优先选择；

(5) 在解一元二次方程时可以使用计算器作计算，有条件的也可以用图形计算器直接求解.

3. 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 是否有实数根可以由判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 来判定：

(1) 当 $\Delta=b^2-4ac>0$ 时，方程有两个不相等的实数根；

(2) 当 $\Delta=b^2-4ac=0$ 时，方程有两个相等的实数根；

(3) 当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，方程没有实数根.

4. 在掌握了一元二次方程的解法以后，就可以在已掌握多种类型的方程和方程组的解法的基础上，解决更多类型的实际问题.

学习指导

1. 学好一元二次方程首先应做到的是：

(1) 会把方程整理成一元二次方程的一般形式 $ax^2+bx+c=0$；

(2) 正确识别一元二次方程，掌握方程 $ax^2+bx+c=0$ 是一元二次方程的条件是 $a\neq 0$；

本章的“回顾与整理”主要分成两大部分，一部分是对本章知识要点的整理，另一部分是对本章学习要求、方法、技能技巧的整理.

本章知识主要有：一元二次方程的概念，一元二次方程的解法，一元二次方程是否有实根的判别方法，一元二次方程的应用.

本章的学习中要会将一元二次方程整理为一般形式，能正确地得出一元二次方程一般式中各项的系数，会根据一元二次方程的结构特点选择较简单的解方程的方法，并能正确地求出方程的解.

要会判断一元二次方程根的状况.

能运用一元二次方程解决一些实际问题，增强运用方程解决实际问题的意识和能力.

学习指导

(3) 正确确定一元二次方程各项的系数和常数项.

2. 应注意学会合理地选择一元二次方程的解法. 其思路顺序应当是认真观察方程的特点, 考虑:

(1) 是否能用开平方法求解;

(2) 是否能用因式分解法求解;

(3) 是否适宜用配方法求解;

(4) 用公式法求解.

3. 应认真掌握方程合理的变形和正确的计算技能. 合理的变形就要注意保持方程的相等关系; 正确的计算则依赖于算法的准确和认真的态度. 所以, 一元二次方程的求解既需要对有关知识有正确的理解, 还需要有熟练的运算技能, 除了深化理解、掌握知识外, 认真练习是必不可少的.

4. 和一元一次方程不同, 一元二次方程并不一定有实数解. 利用判别式 b^2-4ac 就可以在不解方程的情况下, 确定方程是否有实数解. 在有实数解的条件下, 还能判定两个实数解是否相等. 应当注意, 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ 有实数解的条件是

$$b^2-4ac\geqslant 0.$$

5. 应注意继续加强方程的应用意识, 不断提高用方程思想分析实际问题和运用方程的知识解决实际问题的能力.

复 习 题

★基础★

1. 把下列一元二次方程化成一般形式：
(1) $(3x-2)^2-3x=x(x+4)$；　(2) $(2t-3)(t+2)=4t-5$.

2. 写出下列各个方程的二次项系数、一次项系数和常数项：
(1) $3x(x-2)=4x-1$；　(2) $(y-3)(2y+5)=2-y$；
(3) $5x^2-2=2(x-1)$；　(4) $5a(a-2)=10a$.

3. 下列方程中哪些是一元二次方程？哪些不是一元二次方程？
(1) $(p-3)^2=(p-1)(p+1)$；　(2) $2x^2-3x=x(x-3)$；
(3) $(4z-3)(z+1)=5z^2-3$；　(4) $2x(3+x^2)=2x(3x-5)$.

4. 把一元二次方程 $3x^2+5x-7=0$ 改写成 $3x^2-5x+7=0$，可以吗？为什么？

5. 把下列方程化为最简整系数，并且二次项的系数是正数的一元二次方程：
(1) $\frac{1}{5}x^2-\frac{2}{3}x+1=0$；　(2) $0.25x^2-1.6x-2=0$.

6. 解下列方程：
(1) $9x^2-121=0$；　(2) $4(x-3)^2-169=0$；
(3) $18(a-5)^2-169=2(a-5)^2-25$；　(4) $4(p-\sqrt{3})^2-48=0$.

7. 解下列方程：
(1) $x^2-6x+6=0$；　(2) $y^2+12y-62=0$；
(3) $x^2-5x-2=0$；　(4) $x^2-11x+5=0$.

8. 解下列方程：
(1) $x^2-4x+3=0$；　(2) $3y^2+5y-2=0$.

9. 用公式法解下列方程：
(1) $x^2-5x+2=0$；　(2) $2p^2-4p-3=0$；
(3) $3t^2-4t-5=0$；　(4) $2.4x^2-4.2x-2.3=0$(结果精确到0.01).

10. 解下列方程：
(1) $x^2-8x+12=0$；　(2) $x^2-6x-16=0$；
(3) $a^2-29a-30=0$；　(4) $m^2-38m+361=0$.

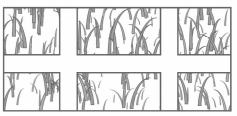
11. 解下列方程：
(1) $3r^2-r-10=0$；　(2) $6x^2-5x-21=0$；
(3) $4p^2=5p$；　(4) $5m(m+2)-2(m+2)=0$.

12. 填空题：
(1) 如果某两位数的十位数字是方程 $x^2-8x=0$ 的解，那么它的十位数字是_____；如果某两位数的个位数字是方程 $x^2-8x=0$ 的解，那么其个位数字是_____.
(2) 两个数的和为 12，积为 32，那么这两个数是_____.
(3) 如果两个连续正整数的平方和是 313，那么这两个连续正整数是_____.
(4) 三个连续正整数中，前两个数的平方和等于第三个数的平方，那么这三个数从小到大依次是_____.
(5) 为了绿化学校，需移植草皮到操场．如果矩形操场的长比宽长 14 m，面积是 3 200 m^2，那么操场的长为_____m，宽为_____m.

13. 要在一个 8 cm × 12 cm 相片外侧的四周镶上宽度相同的银边，并且要使银边的面积和相片的面积相等，那么银边的宽应该是多少？

14. 一间会议厅的地面是矩形，面积为 224 m^2. 其左面墙壁的面积为 126 m^2，后面墙壁的面积为 144 m^2. 求该会议厅的长和宽各是多少米．

15. 在一块长为 32 m、宽为 20 m 的长方形草坪上，要修筑宽度相同的 3 条甬道（如图）. 若要保证剩余的草坪面积为 570 m^2，甬道的宽度应是多少米？


（第 15 题）

16. 生产某电器，原来每件的成本是 300 元，由于技术革新，连续两次降低成本，现在的成本是 192 元．每次降低成本时，成本的平均降低率是多少？

17. 某钢厂今年一月份钢产量为 4 万吨，第一季度共生产 13.24 万吨，二、三月份平均每月的增长率是多少？

★★提升★★

1. 指出下列关于 x 的方程在什么条件下才是一元二次方程．
(1) $(m-3)x^2+3mx+2-m=0$；　(2) $(a^2-3)x^2-5ax+3a=0$.

2. 解下列方程：
(1) $4(2x+1)^2+1=6(2x+1)^2-5$；　(2) $\frac{(3-2x)^2}{12}+1=\frac{2(3-2x)^2}{15}$.

3. 用配方法解下列关于 x 的方程：
(1) $4x^2-4ax-3a^2=1-4a$；　(2) $(5x-3)^2-2(5x-3)-3=0$.

4. 用公式法解下列方程：
(1) $y(y-3)=2+y(1-3y)$；　(2) $ax^2-2bx-a=0(a\neq 0)$.

5. 解下列方程：
(1) $2x^2-3x=\frac{1}{2}(x^2-6x)$；　(2) $(x-7)^2+(x+7)^2=4x(x-7)+196$.

6. 有四个连续整数，已知它们的和等于其中最大的与最小的两个数的积，求这四个数．
7. 某工厂计划用两年的时间把上缴利税提高 44%，如果每年比前一年提高的百分数相同，求这个百分数．
8. 某厂有甲、乙两个车间，一月份的产值分别为 70 万元和 80 万元，到三月份甲车间比乙车间的产值多 4 万元．已知甲车间这两个月的平均增长率是乙车间这两个月的平均增长率的 2 倍，求甲、乙两车间这两个月的平均增长率各是多少．
9. 矩形的面积是 120 cm^2，对角线的长是 17 cm．求矩形的长和宽．

★★★拓展★★★

1. 桶内盛满酒精 40 L，第一次倒出若干升后，注满水；第二次倒出同样多的酒精溶液，再注满水，这时桶内纯酒精为 10 L．求每次倒出的液体是多少升．
2. 为了合理利用水资源，某城市对一工厂的生产用水做出限额，超过限额则要加价收费（办法见表）．现该厂用水 160 万吨，需缴水费 175 万元，求限额单价 M.

用水量 / 万吨	1 ~ 100	101 ~ 150	151 以上
吨单价 / 元	M	$\frac{1.2}{M}$	$\frac{1.5}{M}$

如果答案不是唯一的，就会有不同的实施方案，请分析每个实施方案的优劣，说说你的观点．

部分习题答案或提示

习题 16－1

基础

1. （1） ± 17；（2） ± 5；（3） $1 \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$；（4） $\frac{7}{5}$或 -3.

2. （1） $1 \pm \sqrt{5}$；（2） $\frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$；（3） $\frac{-4 \pm \sqrt{26}}{2}$；（4） $\frac{-3 \pm \sqrt{41}}{4}$.

3. （1） 1 或 $\frac{1}{2}$；（2） 2 或 $-\frac{1}{3}$；（3） $\frac{-3\sqrt{2} \pm \sqrt{34}}{4}$.

4. （1） $x_1 \approx 1.70$，$x_2 \approx -0.59$；（2） $x_1 \approx 0.26$，$x_2 \approx -2.57$.

5. （1） 0，3；（2） 3，8；*（3） -1，-6；*（4） $\frac{1}{3}$，$\frac{7}{12}$；*（5） $-\frac{3}{5}$，3.

6. （1） 0，$\frac{5}{2}$；（2） -12，5；（3） $2 \pm \sqrt{6}$；（4） $7 \pm 2\sqrt{2}$；（5） $\frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$；（6） 2，$-\frac{5}{3}$；（7） $m+n$，$n-m$.

7. （1） 无实数根；（2） 无实数根；（3） 有两个不相等的实数根；（4） 有两个不相等的实数根；（5） 无实数根.

8. 由于方程中 $x-5=3$ 和 $x+2=6$ 没有根据，原方程的根应为 -4 或 7.

提升

1. （1） $\frac{\sqrt{m} \pm \sqrt{m+4n^2}}{2}$；（2） $\frac{m \pm \sqrt{m^2+4}}{2}$.

2. 不存在.

3. -1，$\frac{m-n}{n}$.

4. 当 $a=0$，$b \neq 0$ 时，$x=2$；当 $a=0$，$b=0$ 时，x 为任意实数；当 $a \neq 0$ 时，$x=2$ 或 $x=\frac{b}{a}$.

5. $m > -1$ 且 $m \neq 0$.

6. $m \geqslant \frac{7}{8}$且 $m \neq 2$.

拓展

1. 说法正确.

证明：由已知条件可知，在一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）中，有 $ac<0$，所以 $-4ac>0$；又 $b^2\geqslant0$，则有 $b^2-4ac>0$. 可知，满足条件的方程一定有两个不相等的实数根.

2. 去掉根号，转化为普通方程. 把方程 $\sqrt{2x^2+7x}=x+2$ 两边平方，得一元二次方程 $x^2+3x-4=0$，解得 $x_1=-4$，$x_2=1$，代入原方程检验，可知只有 $x_2=1$ 是原方程的根.

3. （1）$\frac{7\pm\sqrt{89}}{2}$或$\frac{7\pm\sqrt{51}}{2}$；（2）1，$-\frac{5}{2}$或-1，$-\frac{1}{2}$.

习题 16－2

基础

（1）这两个数分别是 -19，-12 或 12，19.

（2）14，16，18，20，22 或 -22，-20，-18，-16，-14.

（3）43.8 m.

（4）这个工厂的月平均增长率为 20%.

（5）20%.

提升

（1）2 cm 或 8 cm.

（2）12 cm，16 cm，20 cm.

拓展

设中型客车有 a 个座位，依题意，有 $an=360$，且 $(a+20)(n-1)-40=360$，消去 n，得 $a^2+60a-7\,200=0$，解得 $a=60$，所以中型客车有 60 个座位，大型客车有 80 个座位. 经测算各种方案后可知，当租用 2 辆中型客车，3 辆大型客车时，没有空位，租金最少.

复习题

基础

1. （1）$8x^2-19x+4=0$；（2）$2t^2-3t-1=0$.

2. （1）3，-10，1；（2）2，0，-17；（3）5，-2，0；（4）1，-4，0.

3. （1）不是；（2）是；（3）是；（4）不是.

4. 可以. 方程两边都乘 -1.

5. （1）$3x^2-10x+15=0$；（2）$5x^2-32x-40=0$.

6. （1）$\pm\frac{11}{3}$；（2）$-\frac{7}{2}$，$\frac{19}{2}$；（3）2，8；（4）$-\sqrt{3}$，$3\sqrt{3}$.

7. （1）$3\pm\sqrt{3}$；（2）$-6\pm7\sqrt{2}$；（3）$\frac{5\pm\sqrt{33}}{2}$；（4）$\frac{11\pm\sqrt{101}}{2}$.

8. （1）1，3；（2）$\frac{1}{3}$，-2.

9. （1）$\frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$；（2）$\frac{2\pm\sqrt{10}}{2}$；（3）$\frac{2\pm\sqrt{19}}{3}$；（4）$x\approx2.19$，$x\approx-0.44$.

10. （1）2，6；（2）-2，8；（3）-1，30；（4）19，19.

11. （1）$-\frac{5}{3}$，2；（2）$-\frac{3}{2}$，$\frac{7}{3}$；（3）0，$\frac{5}{4}$；（4）-2，$\frac{2}{5}$.

12. （1）8，0 或 8；（2）4，8；（3）12，13；（4）3，4，5；（5）64，50.

13. 2 cm.

14. 16 m，14 m.

15. 1 m

16. 20%.

17. 10%.

提升

1. （1）$m\neq3$；（2）$a\neq\pm\sqrt{3}$.

2. （1）$\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$；（2）$\frac{3\pm2\sqrt{5}}{2}$.

3. （1）$\frac{-a+1}{2}$，$\frac{3a-1}{2}$；（2）$\frac{6}{5}$，$\frac{2}{5}$.

4. （1）$\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$；（2）$\frac{b\pm\sqrt{a^2+b^2}}{a}$.

5. （1）0，0；（2）7，7.

6. 3，4，5，6 或 -2，-1，0，1.

7. 20%.

8. 20%，10%.

9. 8 cm 和 15 cm.

拓展

1. 设每次倒出的液体是 x(L). 据题意，有 $(40-x)-x\cdot\frac{40-x}{40}=10$，解之，得 $x=20$. 所以每次倒出的液体是 20 L.

2. 据题意，有 $100M+\frac{1.2\times50}{M}+\frac{1.5\times10}{M}=175$，解得 $M=1$ 或 $M=0.75$. 其余略.

北京出版社



第十七章
方差与频数分布

教学目标

1. 通过对实际问题的解决，探索如何表示一组数据的离散程度，了解方差的统计含义；掌握方差的计算方法，会用计算器计算方差，会用方差表示数据的离散程度；能比较两组数据变化范围和波动的大小，能通过两个样本的方差大小的比较来估计相应总体的整齐性、稳定性的差异；能用样本的方差估计总体的方差.

2. 通过实例，了解数据分组整理的统计含义，会根据指定的分组方法对数据分组整理；理解频数、频率的统计含义，掌握频率的计算方法；了解频数分布的意义和作用，会列频数分布表、画频数分布直方图和频数折线图，用以表示一组数据的分布；能从频数分布表和分布图中观察数据分布的特征；能从样本数据的分布特征估计总体的分布.

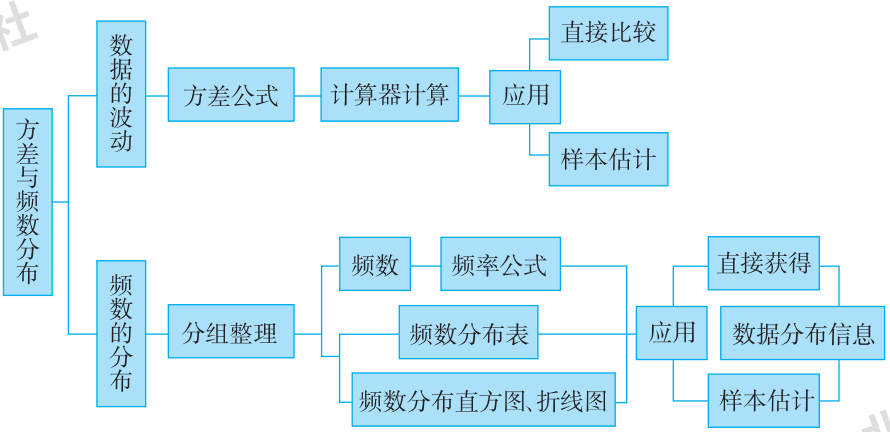
3. 通过实例，体会用样本估计总体的思想，通过统计实践活动，了解统计应用的广泛性和统计工作的基本步骤，能根据统计结果做出合理的判断和预测，并进行交流. 初步学会用统计知识解决一些简单的实际问题，体会统计在社会生活及科学领域中的作用和价值.

4. 通过本章的教学，逐步培养认真细致的学习态度和用数据说话的求实精神，培养与数据打交道的情感，并体验数学与生活的联系.

北京出版社

教材分析和教学建议

1. 主要内容及其地位作用.



本章的主要内容是：方差、数据的分组整理、频数和频率、频数分布表、频数分布直方图和折线图，以及本章知识的实际应用和反映统计推断的思想方法.

一组数据，主要描述它的集中趋势和离散程度. 在前面学过描述集中趋势的特征数（平均数、中位数和众数）的基础上，继续学习描述离散程度的特征数.

方差是描述一组数据离散程度的重要的特征数，它全面地平均地表示了这组数据的离散程度. 方差是统计分析中的重要的参考数据.

方差，在社会生产、日常生活和统计研究中有广泛应用，常用它比较实际事物的整齐性、均匀性和过程的稳定性、均衡性；还用它衡量平均数的代表性和可靠性，方差越小，平均数的代表性越大，可靠程度越高. 以平均数为基础，结合运用方差进行分析，是统计研究中的一个重要方法.

对于收集的一组数据，要根据需要进行整理和表示，在前面学过分类、汇总、排列整理以及用表格和统计图（扇形图、条形图、折线图）表示整理结果的基础上，继续学习数据按数值的大小分组整理.

数据的分组整理，是统计整理中的基本方法，在统计研究中占有重要的地位，是一切统计研究的基础，应用于统计工作的全过程. 频率是学习概率的基础，频数分布直方图和折线图为以后学习概率的总体分布奠定基础. 在社会生产和学习生活中，常用数据分组整理的频数分布表与频数分布图来分析和研究现状与过程.

2. 本章编写特点.

在本章教材编写中，从学生熟悉的生产实际、学习实际和生活实际的问题入手，建立方差、频数和频率的概念，了解方差、频数和频率的意义. 通过“思考”、“实

践”、“交流”等栏目让学生参与数据分组整理和用图、表表示的过程与方法，使学生体会并能解释频数直方图中蕴含的信息.

由于本章数据的计算、图表的编制较为复杂，常常需要借助于计算机或计算器来处理. 因此，本章教材介绍了用计算器计算平均数和方差的方法，以提高学生兴趣，提高数据处理的效率，感受现代信息技术的广泛应用.

另外，在本章最后还安排了“综合与实践”、“探究学习”和“阅读理解”等栏目，意图是使学生经历一次统计的全过程，学会调查分析方法，开阔视野，体会统计在实际中的应用价值.

3. 教学重点、难点.

本章的重点是：方差的概念和方差的计算方法；频数分布的意义与作用，列频数分布表与画频数分布图；本章知识的应用和统计推断的思想方法.

方差的概念，包含算法和统计含义，关键在于知道算法，从算法中体会它的统计含义：全面地平均地描述一组数据偏离平均数的波动大小，也就是离散程度. 方差数值的大小表示了一组数据的离散程度的大小. 重点是体会方差的统计含义.

方差的计算方法，包括根据概念的公式计算方法和按程序操作的计算器计算方法. 掌握用公式计算的方法的关键是熟悉方差的概念；掌握用计算器计算的方法的关键是熟记按键程序，并要经常使用计算器，反复练习才能熟练地掌握计算技能. 重点掌握用计算器计算的方法.

频数分布表和频数分布图，表示了数据分组整理的结果. 从频数分布表中可以获得数据分布的信息和分布的特征，直接体现了数据整理的作用. 画出频数分布图的关键是列出频数分布表，列出频数分布表的关键是准确累计各组的频数. 要切实掌握按给出的分组累计各组频数的方法和步骤.

应用数学知识解决实际问题，是数学教学的重点. 要结合生产、生活的实际，提出问题，引导学生用统计知识去解决，经历解决实际问题的过程，并根据统计结果做出合理的判断或估计，从中体会用样本估计总体的统计推断的思想方法.

本章的难点是：体会方差的形成和离散程度的含义，数据分组的方法和频数的累计过程，解决实际问题时的计算过程.

方差的形成过程，是如何表示一组数据离散程度的探索过程. 教材通过实际问题的解决展现了这个过程. 要通过提出问题、解决问题、逐步探索的方法分解难点，从而突破难点. 离散程度比较抽象，难于体会，先用波动大小的通俗说法作铺垫，从“波动”定性体会“离散”，从“大小”定量体会“程度”.

数据分组的方法，《义务教育数学课程标准（2011 年版）》中没有提出要求，教材中提供的是现成的分组，或分组的方法. 怎样分组，没有统一的方法，也不要求学

生掌握. 在解决实际问题时，应给出分组或分组的方法. 频数的累计，难在麻烦，容易重复或遗漏. 准确累计频数的关键是按数据给出的顺序进行，用选举唱票画“正”字的方法逐一累计.

在解决实际问题时，数据较多，较复杂，难在正确计算. 要用计算器计算，交流结果. 计算准确的关键是熟悉计算器的按键程序，认真细致地输入数据.

4. 教学建议.

（1）通过实际问题，讲清统计知识和方法的统计含义和作用.

（2）不要把统计内容的课当作代数内容来教学. 要抓住统计背景（要解决的问题）、统计思考（用数据说话）、统计过程（统计方法）、统计认识（统计含义）、统计思想（抽样推断）和统计应用（统计的作用）进行教学.

（3）要经常使用计算器，熟练掌握用计算器计算方差的计算技能，所需要的数据由学生用计算器计算得出.

5. 课时安排.

本章教学约需 8 课时，具体分配如下（仅供参考）：

17.1 方差	约 2 课时
17.2 用科学计算器计算方差	约 2 课时
17.3 频数分布表与频数分布图	约 3 课时
总结与复习	约 1 课时

教材及其参考信息



小明、小华两位同学在射击选拔比赛中，各射击 10 次．他们两个人的最高成绩、平均数、中位数都相同，那么，还可以从哪些方面分析，从而判断选派谁参加比赛更为合适呢？

期中测验的数学成绩公布了，应从哪些方面对全班的成绩做出分析和评估呢？

在这一章，我们将进一步学习数据的描述和整理，从而获得更多的统计信息，帮助我们更深刻地认识一组数据．

[1] 这里的平均水平是指平均数、中位数表示的水平相同.

[2] 两组数据主要比较集中趋势和离散程度. 在集中趋势相同(考虑平均数、中位数,不考虑众数)时,就比较离散程度.

[3] 变化范围的大小即变化的幅度大小.

[4] 极差,又称全距(不给学生介绍).

一 数据的波动

17.1 方差

在章前页的问题中,小明和小华的10次射击成绩如下表所示:

小明和小华的射击成绩表

环数 顺序 / 参赛人员	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
小 明	7	4	9	8	10	7	8	7	8	7
小 华	7	6	10	5	9	8	10	9	5	6

可以发现,他们两个人的最高成绩都是10环,中位数都是7.5环,经过计算,平均成绩都是7.5环,也就是说,他们的最高水平和平均水平[1]都相同.

思考

还可以从哪些方面分析,来说明这两个人射击成绩的差异?[2]从而判断究竟选派哪位同学参加比赛更合适呢?

首先,从两个人10次射击成绩变化范围的大小[3]看.

小明的成绩变化范围是

最高成绩 − 最低成绩 = 10 − 4 = 6(环);

小华的成绩变化范围是

最高成绩 − 最低成绩 = 10 − 5 = 5(环).

这说明,小华的成绩变化范围比较小,如果只从成绩的变化范围看,选派小华参加比赛较合适.

通常,我们称一组数据中的最大值减去最小值所得的差为极差[4].极差表示了一组数据变化范围的大小,但由于只考虑了它的两个极端数据

本节从解决实际问题的过程中,探索如何比较平均数相同的两组数据的差异,并探索如何表示一组数据的离散程度.

的变化，因此用它来表示一组数据的波动还比较粗略.[1]

为了更合理地确定派谁参加比赛，我们还要全面深入地分析他们的成绩.[2]

实践

分别画出两个人 10 次射击成绩的折线图，再作出一条表示平均数(7.5)的水平直线[3](图 17－1).

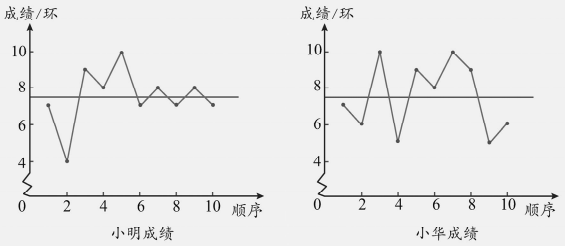


图 17－1

观察折线图，你能发现两个人射击成绩波动的差异吗？谁的成绩中偏离平均数较大的次数较少？

不难看到，在 10 次射击中，小明的成绩中偏离平均数较大的次数较少，更多的成绩接近于平均数.

我们分别计算两个人的成绩偏离平均数的平均距离，来比较成绩波动的大小. 由于每个数据与平均数的差有正有负，它们的平均值是零.[4][5]因此，要计算每个数据与平均数的差的绝对值[6]的平均值，得



$$\text{小明：}\frac{1}{10}(|7-7.5|+|4-7.5|+\cdots+|7-7.5|)=1.1;$$

$$\text{小华：}\frac{1}{10}(|7-7.5|+|6-7.5|+\cdots+|6-7.5|)=1.7.$$

由于 $1.1<1.7$，说明小明的成绩偏离平均数的平均距离较小，波动较小，成绩更稳定.

[1] 只考虑了两个极端数据的波动，而没有考虑其他数据的波动，因此比较粗略.

[2] 全面，是指分析每个成绩的波动.

[3] 因为平均数相同，因此要考查每个成绩偏离平均数上下波动的差异. 所以，画折线图和表示平均数的水平直线.

[4] 又称与平均数据的离差.

[5] 通过实例说明或证明. 证明：设 x_1，x_2，…，x_n 的平均数是 $\bar{x}$，那么

$$\frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})+(x_2-\bar{x})+\cdots+(x_n-\bar{x})]=\frac{1}{n}[(x_1+x_2+\cdots+x_n)-n\bar{x}]=\bar{x}-\bar{x}=0.$$

[6] 距离是非负数，要用绝对值表示.

1. 直观比较. 通过画出两人成绩的折线图和表示平均数的水平直线直观比较，引出每个数据与平均数比较波动的差异，也就是偏离平均数的距离大小的差异. 直观看出偏离平均数距离较大的数据个数有明显的差异，但是还不能准确表示两组数据的差异.

2. 计算平均值比较. 计算每个数据与平均数的差的平方数的平均值，它与平均距离有相同的作用，方便代数运算和变形. 这里已经引出特殊数据的方差，但不给名称，用它来比较两组数据波动的大小. 这是常用的方法.

通过逐步探索，找到了比较平均数相同的两组数据波动差异的方法，从而把问题解决，从中也找到了如何表示一组特殊数据的波动大小的方法.

3. 由特殊到一般引出方差的概念.

偏离平均数的平均距离[1]比极差更全面地反映了一组数据波动的大小，但是在计算时要取绝对值，使用不便，统计中很少应用．因此，我们通常先取每个数据与平均数的差的平方数，[2]再求平均值．从而有

小明：$\frac{1}{10}[(7-7.5)^2+(4-7.5)^2+\cdots+(7-7.5)^2]=2.25$；

小华：$\frac{1}{10}[(7-7.5)^2+(6-7.5)^2+\cdots+(6-7.5)^2]=3.45$.

这里，由于 $2.25<3.45$，也说明了小明的成绩偏离平均数的平均波动较小，成绩更稳定．

虽然小华的 10 次成绩变化范围较小，但是从成绩波动情况看，小明的成绩波动较小，更稳定，选派小明参加比赛更为合适．

实践

如果用 x_1，x_2，x_3，…，x_n 表示一组数据，用 $\bar{x}$ 表示这组数据的平均数，用 s^2 表示每个数据与平均数的差的平方数的平均值．你能写出 s^2 的计算公式吗？

s^2 的计算公式是：

$$\Rightarrow s^2=\frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2].$$

我们把 s^2 叫做这组数据 x_1，x_2，x_3，…，x_n 的方差．它描述了一组数据波动的大小．[3]方差的值越小，数据波动越小、越整齐．因此，常用方差来比较平均数相同的两组数据波动的大小，[4]也用它描述数据的离散程度．

例 某地区某年 12 月中旬前、后 5 天的最高气温记录如下（单位：℃）：

前 5 天	5	5	0	0	0
后 5 天	−1	2	2	2	5

比较哪 5 天中最高气温的变化范围较小，哪 5 天中最高气温的波动较小．

[1] 偏离平均数的平均距离，又叫做平均差，在统计里不常用．

[2] 保持了非负的性质，又方便代数运算和公式变形．

[3] 用通俗的波动大小作铺垫，来体会离散程度的含义，由“波动”定性体会“离散”，由“大小”定量体会“程度”．

[4] 当平均数相差很小、近似相等时，也可以用方差来比较．当平均数相差较大时，参考“探究学习”中的方法．

解：要比较最高气温变化范围的大小，只需计算并比较它们的极差．

前 5 天：极差$_1 = 5 - 0 = 5$；

后 5 天：极差$_2 = 5 - (-1) = 6$.

因为极差$_1$ < 极差$_2$，所以前 5 天中最高气温的变化范围较小．

要比较最高气温波动的大小，只需计算并比较它们的方差的大小．计算方差步骤如下：

(1) 先求这两组数据的平均数．

$$\bar{x}_1 = 2, \quad \bar{x}_2 = 2.$$

(2) 再把数据代入方差计算公式计算．

前 5 天：$s_1^2 = \frac{1}{5}[(5-2)^2 + (5-2)^2 + (0-2)^2 + (0-2)^2 + (0-2)^2] = 6$；

后 5 天：$s_2^2 = \frac{1}{5}[(-1-2)^2 + (2-2)^2 + (2-2)^2 + (2-2)^2 + (5-2)^2] = 3.6$.

因为 $s_2^2 < s_1^2$，所以后 5 天中最高气温的波动较小，比较稳定．[1]

练习

1. 比较下列两组数据，哪组数据的变化范围较小，哪组数据的波动较小、比较整齐．[2]

甲 组	1	3	5	7	9
乙 组	−1	2	9	10	—

2. 某工厂招聘技工，甲、乙两个人应聘．在两个人其他条件相同的情况下，考核他们各加工 5 个零件的加工质量．他们加工零件的实际长度与设计长度的误差如下表所示（精确到 1 mm）：

编 号	1	2	3	4	5
甲的误差 /mm	−3	2	1	−4	5
乙的误差 /mm	1	2	−1	−2	1

试问：

(1) 就加工零件的误差而言，谁的变化范围较小，谁的波动较小？

(2) 如果你是厂长，会聘谁，为什么？

［1］这里，反映了最高气温在一段时间内变化过程中稳定性的差异．

［2］两组数据个数不同，只要平均数相同，就可以比较．

练习答案：

1. 甲的极差是 8，乙的极差是 11. $\bar{x}_{甲} = 5$，$\bar{x}_{乙} = 5$. $s_{甲}^2 = 8$，$s_{乙}^2 = 21.5$.

甲组数据变化范围较小、波动也较小，比较整齐．

2. (1) 甲的极差是 9，乙的极差是 4.

(2) $\bar{x}_{甲} = 0.2$，$\bar{x}_{乙} = 0.2$. $s_{甲}^2 = 10.96$，$s_{乙}^2 = 2.16$.

乙的变化范围较小，波动也较小，会聘乙，因为乙加工的零件较整齐，技术较稳定．

[1] 计算后，引导学生观察例 1 中（1）和（2）的两组数据：

（1）比较对应数据的关系——相差同一个常数 3 000；

（2）方差的关系——相同.

（3）引出“思考”.

[2] 用例 1 中（1）这组数据启发学生，由此解答“思考”中的问题.

17.2 用科学计算器计算方差

用公式求方差时，通常计算量很大，而用科学计算器计算，就很简便了.

例 1 用科学计算器分别计算下列两组数据的平均数和方差：

（1）3 005，3 005，3 003，3 000，2 994；

（2）5，5，3，0，−6.

解：（1）

	具体操作	结　果
A 型计算器	2nd data enter data 3005 enter 3005 enter 3003 enter 3000 enter 2994 enter ↓ 2nd data enter ↓ ↓ enter	5
	2 enter	3 001.4
	2nd data 34 x^2 enter	17.04
B 型计算器	MODE 21 3005 = 3005 = 3003 = 3000 = 2994 = AC SHIFT 142 =	$\bar{x}$ 3 001.4
	SHIFT 143 x^2 =	σx^2 17.04

所以，平均数 $\bar{x}=3\,001.4$，方差 $s^2=17.04$.

（2）计算过程略.

平均数 $\bar{x}=1.4$，方差 $s^2=17.04$.[1]

请你完成计算过程！

思考[2]

1. 例 1 中（1）和（2）两组数据之间的关系是什么？为什么这两组数据的平均数不相等而方差却相等？

2. 当一组数据的每个数都在某个常数附近波动时，能简化计算方差的过程吗？应怎样简化？

124 数学 八年级 下册

本节学习用计算器计算方差的操作程序和应用.

1. 用计算器计算方差的操作程序.

通过实例的计算说明操作程序，即按键程序，再举实例巩固掌握操作程序. 使学生经历用计算器计算的过程.

当一组数据的每个数都在某一个常数附近波动时，可以将这组数据的每个数都减去这个常数，得到一组简化的数据，再计算简化数据的方差，从而简化输入数据的过程．

例 2 用科学计算器计算 501，503，498，500 这组数据的方差．

分析：这组数据的每个数都在常数 500 附近波动，每个数都减去 500，就得到一组简化的数据．

解：简化原来的数据，得 1，3，−2，0. 用科学计算器计算可得

$$s^2 = 3.25.$$

即原来这组数据的方差为 3.25.

请你完成计算过程！

练习

1. 用科学计算器分别计算下列各组数据的方差：
   (1) 1，2，3，4，5，6；
   (2) −2，−2，0，0，0，6.
2. 先简化数据，再用科学计算器分别计算下列各组数据的方差：
   (1) 8 241，8 250，8 248，8 253，8 245；
   (2) 12 341，12 340，12 349，12 349，12 344.

思考

怎样比较两块地里的西瓜大小的均匀程度？

例 3 从甲、乙两块良种西瓜地中，随机各摘取 20 个成熟的西瓜一一过秤，数据如下表（精确到 0.01 kg）：

西瓜质量 /kg	5.50	5.40	5.00	4.90	4.60	4.30
甲地的西瓜个数	2	3	6	5	2	2
乙地的西瓜个数	1	6	7	2	2	2

请估计哪块地里成熟的西瓜大小比较均匀．

练习答案：

1. (1) $s^2 = 2.92$；
   (2) $s^2 = 7.22$.
2. (1) $s^2 = 17.04$；
   (2) $s^2 = 14.64$.

2. 简化数据，从而简化输入数据过程.

可以证明：如果数据 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的平均数是 $\bar{x}$，方差是 s_x^2，那么数据 $x_1 - a, x_2 - a, \cdots, x_n - a$（$a$ 为常数）的平均数就是 $\bar{x} - a$. 那么它的方差：

$$s_{x-a}^2 = \frac{1}{n}\{[(x_1 - a) - (\bar{x} - a)]^2 + [(x_2 - a) - (\bar{x} - a)]^2 + \cdots + [(x_n - a) - (\bar{x} - a)]^2\}$$

$$= \frac{1}{n}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2] = s_x^2.$$

练习答案：

$\bar{x}_{东}=13.30$，

$\bar{x}_{西}=13.26$.

$s_{东}^2=3.13$.

$s_{西}^2=2.75$.

因为 $\bar{x}_{东}\approx\bar{x}_{西}$，且 $s_{西}^2<s_{东}^2$，所以西块地的麦苗长势较整齐均匀.

分析：只需分别计算从甲、乙两块地中所摘取西瓜质量的平均数和方差，由此来估计哪块地里的西瓜大小比较均匀.

解：用科学计算器分别计算这两组数据的平均数和方差，得

$\bar{x}_{甲}=4.975$，$s_{甲}^2=0.116$；

$\bar{x}_{乙}=5.025$，$s_{乙}^2=0.126$.

由于 $\bar{x}_{甲}\approx\bar{x}_{乙}$，而 $s_{甲}^2<s_{乙}^2$，所以甲地里的西瓜大小比较均匀.

请你完成计算过程！

练习

为了考查东、西两块小麦地中麦苗的长势，分别从两块地的麦苗中随意抽出 50 株苗，测得麦苗株高数据，整理如下表：

东块地的麦苗株高/cm	11	12	13	14	15	16	17	18
东块地的麦苗数/株	7	10	16	7	4	2	2	2
西块地的麦苗株高/cm	9	10	11	12	13	14	15	16
西块地的麦苗数/株	2	2	3	4	17	11	7	4

试估计这两块麦地的小麦中，哪块地的麦苗长势较整齐均匀.

习 题 17-1

★基础★

1. 选择题：

(1) 方差是表示一组数据的(　　).

A. 变化范围　　B. 平均水平

C. 波动大小　　D. 数据个数

(2) 方差的统计含义：表示一组数据的每个数(　　).

A. 偏离它的平均数的差的平均值

B. 偏离它的平均数的差的绝对值的平均值

C. 偏离它的中位数的差的平方数的平均值

D. 偏离它的平均数的差的平方数的平均值

126 数学 八年级 下册

3. 方差的应用.

方差的应用有以下几个方面：

（1）直接用方差的大小比较两个总体特征的差异，如 17.1 节中的例题；

（2）用两个样本的方差的大小估计相应两个总体特征的差异，如本节例 3.

(3) 某少年军校准备从甲、乙、丙三位同学中选拔一人参加全市射击比赛. 在选拔比赛中，三个人 10 次射击成绩的统计结果如下表.

同　学	最高水平 / 环	平均数 / 环	中位数 / 环	方　差
甲	10	8.3	8.5	1.5
乙	10	8.3	8.5	2.8
丙	10	8.3	8.5	3.2

经比较，推荐甲参加比赛，理由是甲的(　　).

A. 最高水平较高　　B. 平均水平较高

C. 成绩好的次数较多　　D. 射击技术稳定

(4) 甲、乙两个患者在 10 天中测量每天体温的统计结果是 $\overline{x}_{甲}=36.1℃$，$s_{甲}^2=0.50$；$\overline{x}_{乙}=36.1℃$，$s_{乙}^2=1.00$. 那么 10 天中甲、乙的体温稳定情况是(　　).

A. 甲较为稳定　　B. 乙较为稳定

C. 两个人一样稳定　　D. 不能确定

2. 填空题：

在一次外语测验中，同年级人数相同的甲、乙两个班的成绩统计如下表：

班　级	平均分	中位数	方　差
甲　班	82.5	85.5	40.25
乙　班	82.5	80.5	35.06

一位同学对此做出如下评估：

① 这次外语测验成绩甲、乙两个班的平均水平相同；

② 甲班学生中成绩优秀(85 分及以上)的多；

③ 乙班学生的成绩比较整齐，分化较小.

上述评估，正确的是_____(填序号).

3. 用公式计算方差：

(1) −1，0，1，4；

(2) −3，−2，−1，1，4.

★★提升★★

小华在一次运动员集训前、后的各 5 次百米跑中，测验成绩如下表(单位：s)：

集训前	11.3	11.2	11.4	11.5	11.7
集训后	11.6	11.3	11.4	11.2	11.3

请你用数据说明，这次集训对小华的百米跑成绩的提高是否有效果，如果有效果，效果表现在哪些方面.

★★★拓展★★★

用科学计算器分别计算下面各组数据的平均数和方差：

甲　组	1	2	3	4	5
乙　组	100	200	300	400	500

(1) 比较这两组数据，它们的对应关系是什么？它们的平均数和方差各有什么关系？

(2) 如果用科学计算器计算 0.01，0.02，0.03，0.04，0.05 的平均数和方差，你能根据 (1) 的结论，用简化数据的方法计算吗？请你试一试．

二、数据的分布

17.3 频数分布表与频数分布图

在章前页中的另一个问题是分析评价某班学生的数学测验成绩．下面登录的是他们的成绩（单位：分）．

87，77，68，92，67，77，74，84，98，84，
59，77，80，77，76，94，82，65，60，56，
87，82，70，74，68，90，95，92，82，70，
70，82，80，82，89，82，85，85，58，78．

思考

对这次数学测验成绩，你已经能够用哪些数据进行分析和评估？你还希望知道哪些数据，以便对这次数学测验成绩作更深入的分析和评估？

本节通过对学生身边实际问题的解决，使学生经历统计的过程，从中学习统计的知识和方法，体会统计与学习生活的联系．

1．数据的分组整理．

通常收集的数据是分散的，不系统的，难以获得数据分布的信息，这就需要对一组数据进行适当的整理．统计整理的基本方法有两种：一是按数据的类型、性质分类整理；二是按数值的大小分组整理．数据的分组整理又分为等距分组与不等距分组，这节只学习等距分组整理．

对这次数学测验成绩，我们能够统计出的数据如下：[1]

最高分：_____；最低分：_____；平均分：_____；及格率：_____；优秀率（85 分及以上）：_____；方差：_____.

我们还希望知道这次成绩更具体的分布．例如，哪个分数段的人数最多，哪个分数段的人数最少，分别占总人数的百分比是多少，等等．

1. 数据的分组整理

要解决这个问题，就需要统计各分数段的人数，先画出分数段，再统计各分数段的分数个数．

实践

以 10 分为一段，画出如下表左列的分数段．

各分数段中的分数，通常包括分数段的最低分，不包括最高分．累计时，可以按选举唱票的方法画“正”字．

某班数学成绩分段统计表

分数段	分数个数累计	分数个数	与总个数的比值
50 ~ 60[2]			
60 ~ 70			
70 ~ 80			
80 ~ 90			
90 ~ 100[3]			
合　计			

请你累计各分数段中分数的个数，并计算它与分数总个数的比值，将结果填在上表中．

分数分段统计就是数据的分组整理[4]．它是按数值的大小，把一组数据分成若干个小组[5]，累计各小组的数据个数．其中每个分数段是一个“组区间”，分数段两端的数值是“组限”，分数段的最大值与最小值的差是“组距”，分数段的个数是“组数”．

［1］最高分是 98；
最低分是 56；
平均分是 78. 38；
及格率是 92. 5%；
优秀率是 27. 5%；
方差是 108. 08.

［2］若 50 分以下还有个别分数，改为“60 分以下”.

［3］若有 100 分，改为“90 分以上”.

［4］由“实践”归纳分组整理的方法和步骤为：

（1）确定分组的方法并分组（如表左列）；

（2）累计各组的数据个数（频数），有时要计算频率（如表右 3 列）；

（3）用频数分布表和频数分布图表示整理结果.

［5］分成若干个小组按下面方法和步骤进行.

（1）计算数据的变化范围（即极差）是 42.

（2）确定组距（10）和组数（5）. 组距、组数和数据变化范围（即极差）的关系是：

组数（5）≈ $\frac{\text{数据变化范围（42）}}{\text{组距（10）}}$，取大于商的最小整数 5.

（3）决定组限并分组. 最小组下限（50）不大于分数中最小数据（56）. 最大组上限（100）大于分数中最大数据（98）.

分组整理的关键是确定分组方法. 《义务教育数学课程标准（2011 年版）》对分组方法没有要求，本节只对已给出分组或分组方法的条件的数据学习如何进行分组整理.

2. 频数、频率与频数分布表.

由各个小组内数据的个数引出频数概念，由频数与数据总个数的比值，引出频率概念和计算方法.

由列表表示分组整理的结果引出频数分布表，从中体会频数分布的意义，频数分布反映数据在各组分布的具体个数和所占的比值，反映了数据分布的特征.

[1] 提示，在一个组两端的数值中，最小的数值称为下限，最大的数值称为上限.

“交流”答案：

（1）组数是5；例如“50～60”，“60～70”，…，“90～100”是组区间.

（2）组限分别为80，90，其中80是下限，90是上限，组距是10，频数是15，频率是0.375.

（3）补上：频率 $=\frac{\text{频数}}{\text{数据总个数}}=\frac{11}{40}=0.275$.

补上：频数 = 数据总个数 × 频率 $=40\times0.275=11$.

先补：频数 = 数据总个数 − 其余各组频数之和 $=40-(3+5+15+6)=11$；再补：频率 $=\frac{11}{40}=0.275$. 也可先补频率再补频数.

2. 频数、频率与频数分布表

回顾上面的统计结果，累计出每个小组的数据的个数（在这里也就是每个分数段的分数的个数），称为这组的频数；这组的频数与数据总个数的比值称为这组的频率. 频率的计算公式是：

$$\text{每组的频率}=\frac{\text{这组的频数}}{\text{数据的总个数}}.$$

数据分组整理的结果通常用频数分布表表示.

某班数学成绩频数分布表

分组 / 分	频数累计	频　数	频　率
50～60	下	3	0.075
60～70	正	5	0.125
70～80	正正一	11	0.275
80～90	正正正	15	0.375
90～100	正一	6	0.150
合　计		40	1.000

交流

在上表中：

（1）组数是多少？举例说明组区间是什么？

（2）在“80～90”这一组中，组限各是什么？哪个是下限，哪个是上限？[1] 组距是多少？频数是多少？频率有多大？

（3）假设在“70～80”这一组中，如果频数已知，频率漏掉，怎样补上？如果频率已知，频数漏掉，怎样补上？如果频数、频率都漏掉，又怎样补上？

观察上表，我们可以看出：

“80～90”这组的频数（15）最大，数据最集中；“50～60”这组的频数（3）最小，数据分布最少. 由此可知，这次测验的成绩在80～90（分）这个分数段的人数最多，最集中；成绩在50～60（分）这个分数段的人数最少.

观察频数分布表，可以获得如下数据分布的信息.

（1）数据在哪个组分布最多最集中（称该组为众数组），在哪个组分布最少，各占总数的比值（或百分比）是多少.

（2）各组数据分布的数量变化趋势是什么.

（3）测算中位数在哪个组（该组称为中位数组），获得数据分布状态的信息.

（4）测算平均数 = 各组组中值与该组频率乘积的和$\left(\text{组中值}=\frac{\text{上限}+\text{下限}}{2}\right)$，从中体会频数分布的作用.

从“50 ~ 60”组到“80 ~ 90”组，随着组区间中数值增大，频数增加；从“80 ~ 90”组到“90 ~ 100”组，随着组区间中数值增大，频数减少．由此可知，这次测验的成绩呈现出“两头少中间多”的分布．

80 分以上各组（含“80 ~ 90”组）的频数之和是 21，80 分以下各组的频数之和是 19，而平均分数（78.38）在 80 分以下．由此可知，这次测验的成绩高于平均分的人数多，低于平均分的人数少，成绩属偏高分布．

练 习

某班级 30 名男生身高数据如下（单位：cm）：

155，158，161，162，164，165，170，171，167，164，
163，161，159，156，161，163，166，168，172，166，
164，160，156，160，165，168，174，175，165，178.

（1）以 5（cm）为组距，第 1 组为“155 ~ 160”，分 5 组整理身高数据；

（2）列出频数分布表，表示分组整理的结果．

3. 频数分布图

我们根据上页“某班数学成绩频数分布表”，以每小组的组距为宽，频数为高，画出各小组的频数条形图，从而画出一个频数分布直方图（图 17－2）.

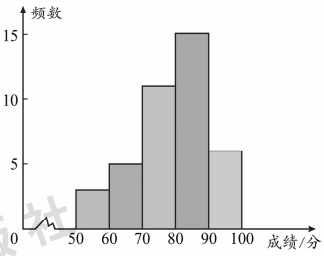


图 17－2 频数分布直方图

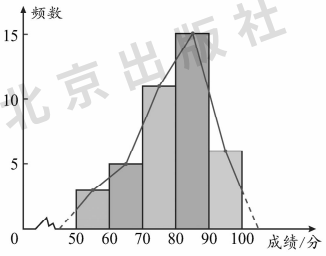


图 17－3 频数分布折线图

把“频数分布直方图”中的每个条形图的上边中点依次连接成折线段，就画成了频数分布折线图（图 17－3）.

练习答案：

（1）略.

（2）表略. 分组依次为：155 ~ 160，160 ~ 165，165 ~ 170，170 ~ 175，175 ~ 180；频数累计略；频数依次为：5，11，8，4，2；频率依次为：0.167，0.367，0.267，0.133，0.067.

3. 频数分布图.

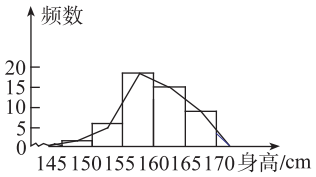
频数分布图分为直方图和折线图. 以组距为宽画出各组频数的条形图，引出频数分布直方图，连接每个条形图上边中点的线段，引出频数分布折线图. 频数分布图直观形象地提供了数据分布的信息、分布特征和变化趋势. 从中进一步体会频数分布的意义和作用.

结合实际，补充实例，对一组数据按指定的分组或分组方法的条件进行整理. 经历分组整理、列频数分布表和画频数分布图的过程，从中学会列频数分布表和画频数分布图（直方图和折线图）. 并能用频数分布的知识解决实际问题，用样本的分布估计

练习答案：

（1）频数累计略；频数依次为：1，6，19，15，9；频率依次为：0.02，0.12，0.38，0.30，0.18.

（2）频数分布图：



（3）①155 ~ 160 这段最多，占 0.38；

145 ~ 150 这段最少，占 0.02.

②比平均身高高的人数较少.

频数分布直方图直观形象地表示了一组数据在各小组分布的多少；频数分布折线图直观形象地表示了一组数据在各小组分布的变化趋势和整体分布形态.

也可以用计算机编制频数分布表和绘制频数分布图.[1]

练习

下表是某年级 50 名同龄女生身高数据：

身高/cm	146	151	153	154	156	157	158	159	160
人　数	1	2	2	2	3	4	8	4	4
身高/cm	161	162	163	164	165	166	167	169	
人　数	2	4	3	2	3	4	1	1	

（1）按下表左列的分组方法整理，列出频数分布表.

分组/cm	频数累计	频　数	频　率
145 ~ 150			
150 ~ 155			
155 ~ 160			
160 ~ 165			
165 ~ 170			
合　计			

（2）根据频数分布表画出频数分布直方图和折线图.

（3）观察频数分布表和频数分布直方图，并回答问题：

① 身高在哪段高度的人数最多、最集中，在哪段高度的人数最少？各占总人数的比值是多少？

② 这 50 人的平均身高是 159.6 cm，比平均身高高的人数较多还是较少？

总体的分布特征，进一步体会统计推断的思想方法.

4. 关于频数分布折线图的画法.

为了便于观察频数分布折线图两边的变化趋势，有时也用线段连接直方图最左边条形图上边中点和它外边等距区间的中点（条形图外用虚线），以及直方图最右边条形图上边中点和它外边等距区间的中点（条形图外用虚线）.

5. 用计算机编制频数分布表和绘制频数分布图.

根据学校、教师和学生的实际条件灵活选择教学方式，或演示或学生做.

习 题 17－2

★基础★

1. 选择题：

(1) 把一组数据分组整理，就是(　　).

A. 把数据按大小排成一列

B. 把数据写在各个小组里

C. 把数据按大小分成若干个小组，累计各小组的数据个数

D. 把数据的平均数、中位数和方差求出来

(2) 频数 m、频率 p 和数据总个数 n 的关系是(　　).

A. $n=mp$　　B. $p=mn$

C. $n=m+p$　　D. $m=np$

(3) 对频数分布直方图的下列认识，不正确的是(　　).

A. 每小组条形图的横宽等于这组的组距

B. 每小组条形图的纵高等于这组的频数

C. 每小组条形图的面积等于这组的频率

D. 所有小组条形图的个数等于数据分组整理的组数

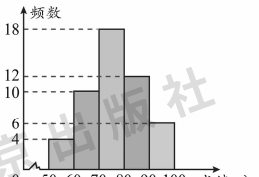
2. 填空题：

某班的一次数学测验成绩，经分组整理后，各分数段的人数如图所示(满分 100 分). 请观察统计图，填空并回答下列问题：

(1) 这个班有_____名学生；

(2) 成绩在_____分数段的人数最多、最集中，占全班总人数的比值是_____；

(3) 成绩在 60 分以上(含 60 分)为及格，这次测验全班的及格率是_____.



(第 2 题)

3. 某班 20 名男生在一次投掷标枪测验中，测验的成绩由甲、乙两人合作进行分组整理．现已完成前 15 个数据的整理，还有后 5 个数据尚未累计(单位：m)：

26.0，29.0，25.4，26.0，28.3.

请你将剩余的 5 个数据累计在下表中，填上各组的频数与频率，并画出频数分布直方图．

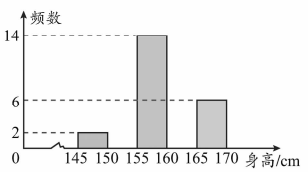
6. 综合与实践.

组织学生经历一次统计实践的全过程. 听广播、看电视、查阅报刊或上网查询，收集一段时间内当地空气质量的某项数据. 综合应用所学的统计知识，解决实际问题.

分组/m	频数累计	频　数	频　率
20.0 ~ 22.0	一		
22.0 ~ 24.0	丅		
24.0 ~ 26.0	正		
26.0 ~ 28.0	丆		
28.0 ~ 30.0	下		
合　计		20	1.00

4. 从某年级随意抽出 40 名同龄女生的身高数据，经分组整理后的频数分布表与频数分布直方图如下所示：

分组/m	频　数	频　率
145 ~ 150	2	0.05
150 ~ 155	A	0.15
155 ~ 160	14	0.35
160 ~ 165	B	C
165 ~ 170	6	0.15
合　计	40	1.00



（第 4 题）

但在列表和画图时，遗漏了频数分布表中 A，B，C 三处的数据和频数分布直方图中的相应的条形图．

（1）请你补全表中的 A，B，C 数据：A = _____，B = _____，C = _____．

（2）请你补全图中相应的条形图．

（3）如果小丽的身高在 160 ~ 165(cm) 这组中，她的身高可能是多高（精确到 1 cm，列出所有可能的身高数据）？

（4）估计该年级同龄女生的身高在_____高度范围内的人数最多、最集中．

★★提升★★

1. 红星养猪场准备出售 500 头猪，从中随意抽出若干头一一过秤，数据经分组整理，由频数分布表表示如下，其中有许多数据漏填．

分组/kg	45.5 ~ 50.5	50.5 ~ 55.5	55.5 ~ 60.5	60.5 ~ 65.5	65.5 ~ 70.5	70.5 ~ 75.5	合　计
频　数		8	16	8			
频　率	0.100			0.200	0.075		1.000

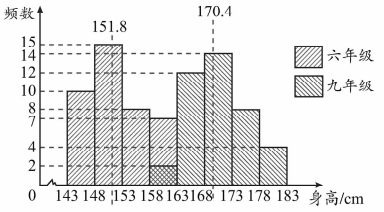
（1）请你补填表中漏填的数据．

（2）根据补填后的频数分布表，画出频数分布直方图．

(3) 根据频数分布表或频数分布直方图回答：随意抽出的这些猪的质量在什么范围内的头数最多、最集中，在什么范围内的头数最少？

(4) 根据 (3) 的结论，估计这批出售的 500 头猪的质量，在什么范围内的头数最多、最集中，占这批出售猪总数的百分比约为多少？

2. 某地区在六年级和九年级的男生中分别随机抽取 40 名学生测量他们的身高，经数据分组整理后，绘制的频数分布直方图如下：



(第 2 题)

其中两条纵向虚线上端的数值分别是每个年级抽出的 40 名男生身高的平均数．观察频数分布直方图回答：

(1) 六年级和九年级被抽取的 40 名男生身高的中位数分别各在哪个高度组？

(2) 估计这个地区九年级男生的平均身高比六年级男生的平均身高高出多少．

(3) 估计这个地区六年级、九年级这两个年级的全体男生中，身高不低于 153 cm 但低于 163 cm 的男生所占的百分比各约为多大．

★★★ 拓展 ★★★

小明在分组整理某班 50 人的一次数学测验成绩时，不小心把整理结果丢失了．经回忆他想起了分组如下表，且自左至右 5 个小组的频数比依次为 1 : 3 : 7 : 9 : 5.

分组 / 分	50 ~ 60	60 ~ 70	70 ~ 80	80 ~ 90	90 ~ 100	合　计
频　数						
频　率						

请你根据小明想起的 5 个小组的频数比，解答下列问题：

(1) 求出上表中各组的频数和频率 (填在表中)；

(2) 根据填上的频数分布表，指出这次测验成绩最集中的组是哪个分数段，中位数在哪个分数段；

(3) 如果从该班中随意找出一名学生，他的成绩在哪个分数段的可能性最小，可能性是多大？

综合与实践

空气质量状况调查

调查你所在城市某段时期内空气质量的状况，经历一次统计实践的全过程．

(1) 抽样调查，收集数据．

(2) 分组整理，用计算机或手工绘制频数分布表和频数分布图．

(3) 计算出平均数、中位数和方差．

(4) 做出统计分析和评估．

探究学习

本班同学主要学科学习分化的调查与分析

在数据统计时，常用方差的算术平方根 σ 来表示一组数据的波动大小．

$$\sigma=\sqrt{\frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2]}\ .$$

我们把 σ 叫做一组数据 x_1，x_2，x_3，…，x_n 的标准差．

方差和标准差适用于比较平均数相等的两组数据波动的大小．当两组数据的平均数相差较大，或单位不同时，就要消除平均数的影响，计算变异系数：

$$V_\sigma=\frac{\sigma}{\bar{x}}\times 100\%.$$

用比较变异系数 V_σ 的大小，来比较两组数据相对波动的大小．变异系数 V_σ 越小，数据相对波动就越小．

下面，运用变异系数作比较，来探究学习成绩分化的大小．变异系数越小，成绩分化越小．

一、探究目的

了解本班同学主要学科(语文、数学、外语)的八年级学习成绩和七年级同期的成绩，进行各学科成绩的比较，探究哪些学科成绩分化较小、比较稳定，哪些学科成绩分化较大.

二、活动方式

从任课教师或从班主任教师那里收集七年级、八年级第一学期期末考试全班同学的语文、数学和外语成绩.将全班同学分成三个小组，分别作语文、数学、外语的成绩统计，再分别计算两次考试成绩的平均分、标准差和变异系数，填在下面的表中，并在各组交流.

各科成绩平均分、标准差和变异系数统计表(精确到0.01)

	七年级第一学期			八年级第一学期		
	平均分	标准差	变异系数(%)	平均分	标准差	变异系数(%)
语　文						
数　学						
外　语						

三、探究方法

每位同学根据表中的数据进行探究：

1. 比较同一学科不同学期成绩的变异系数的大小，探究八年级比七年级各学科成绩分化的情况；

2. 比较同一学期不同学科成绩的变异系数的大小，探究七年级、八年级各学科成绩分化的情况.

四、探究结果

将探究结果分别填在下表中：

各学科成绩分化情况比较(七、八年级)

学　科	变异系数的大小关系	做出结论
语　文	八年级＿＿＿＿七年级	
数　学	八年级＿＿＿＿七年级	
外　语	八年级＿＿＿＿七年级	

各学科成绩分化情况比较（同时期）

学　期	各学科成绩变异系数大小关系	分化最大的学科
七年级第一学期	_____ < _____ < _____	
八年级第一学期	_____ < _____ < _____	

将上述探究结果在全班交流，并提供给教师参考．

阅读理解

平均数趣谈

在日常生活中，大家爱关心平均数——平均工资、平均年龄、平均亩产、平均收入，等等．不过，有时平均数也会骗人的．比如，由5人组成的家庭篮球队，平均年龄23岁，该是一帮生龙活虎的小伙子吧？上场一看，原来是一位七旬老人领着4个十一二岁的娃娃！又如，某公司招聘员工，招聘广告说，“本公司员工月平均工资2 500元”，收入很不错吧？详细一打听，原来是经理、副经理月工资七八千元，其他6位员工才八九百元！

可见，平均数不一定能代表一般的情况．知道了平均年龄是23岁，还应当看这几个人的年龄是不是接近平均年龄；广告说月平均工资2 500元，还要看全体员工的月工资是否接近于平均工资．也就是要考查它们与平均数的偏离程度．

标准差的大小，反映了数据与平均数的偏离程度．在上面的例子中，如果5个人的年龄分别是70，12，11，11，11(岁)，平均年龄是23岁，经计算，标准差是23.5岁，比平均数本身还大！假如另一支球队5个人的年龄分别是30，25，24，19，17(岁)，平均年

龄也是 23 岁，经计算，标准差是 4.6 岁．根据平均数 23 与标准差 4.6，我们就知道这的确是一支年轻力壮的队伍！

如果那个公司 8 个人的月工资分别是 8 000，7 000，900，900，800，800，800，800(元)，平均工资是 2 500 元，经计算，标准差是 2 897.8 元，比平均工资大得多！假如另一个公司 8 个人的月工资分别是 3 500，3 000，2 500，2 500，2 200，2 200，2 100，2 000(元)，平均工资也是 2 500 元，经计算，标准差是 479.6 元．根据平均数 2 500 与标准差 479.6，我们可以确信第二个公司的员工月收入的确还不错．

根据标准差还可以判断测量数据的可靠程度．设甲、乙两人用一根米尺测量同一段距离，各测 4 次，测得数据(单位：m)如下．

甲：105.20，106.05，104.90，105.85；

乙：104.10，107.25，103.85，106.80.

两组数据的平均数都是 105.50 m，但是甲测得的数据的标准差为 0.47 m，而乙测得的数据的标准差为 1.54 m，这表明甲的测量技术较好．如果两组数的平均值不同的话，甲测得的数据更为可信．

回顾与整理

知识要点

本章主要内容是：方差与频数分布，以及由本章内容反映的用样本估计总体的统计推断思想方法．

1. 数据的波动．

数据的波动大小，也就是数据的离散程度．

(1) 方差．方差全面地、平均地反映了一组数据偏离它的平

知识要点

均数的波动大小，计算公式是：

$$s^2=\frac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2].$$

(2) 用科学计算器计算方差．

当一组数据在某个常数附近波动时，可以减去这个常数用简化数据计算方差．

(3) 比较事物的整齐性、均匀性或稳定性、均衡性，就是比较事物的数据的方差．还常用样本的方差来估计总体的方差．

2. 数据的分布．

频数分布表和频数分布图，分别以表和图的形式表示数据分布的情况．

(1) 数据的分组整理．就是把一组数据按数值的大小分成若干个小组，同时累计各小组的数据个数．

(2) 频数与频率．每个小组的数据个数，称为频数；频数与数据总个数的比值，称为频率．频率的计算公式是：

$$\text{频率}=\frac{\text{频数}}{\text{数据总个数}}.$$

(3) 频数分布表．用列表的方式表示数据分组整理的结果．

(4) 频数分布图．用条形图表示每个小组的频数，各小组频数的条形图组合成一个图，就是频数分布直方图；用线段把频数分布直方图中各条形图的上边中点连接起来，就得到频数分布折线图．

(5) 用计算机绘制频数分布表和频数分布图．

(6) 统计实践活动．

学习指导

1. 本章学习数据的分布．对一组数据的分布可以从两个方面认识：一是大范围概括的认识；二是小范围内具体的认识．

北京出版社

学习指导

2. 一组数据分布的范围有多大，可以用极差表示．

一组数据偏离它的平均数的波动有多大，可以用计算每个数据与平均数的差的平方数的平均值得到的方差加以表示，在此过程中获得方差的统计方法和知识．

掌握用计算器计算方差的技能．

用样本的方差估计对应总体的特征，从中感受用样本估计总体的统计推断的思想方法．

3. 数据分组整理的方法和知识．由每个小组的数据个数，获得频数知识；由数据的个数（频数）占数据总个数的比值有多大，获得频率的计算方法和知识．

从分组整理的结果用列表或画图表示的方法中，获得频数分布表与频数分布图的绘制方法和知识，并从中获得数据分布的信息．

用样本数据的分布估计相应总体的分布特征，进一步体验统计推断的思想方法．

4. 从统计实践活动的实例中，经历统计实践的全过程，体会统计的作用．

5. 通过本章的学习，逐步养成用数据说话的求实作风，体会统计在解决实际问题中的作用和价值．

复 习 题

★基础★

1. 填空题：

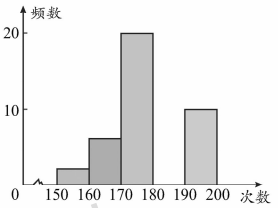
为了了解学生的体能情况，某校从八年级学生中抽取 50 名学生进行了一分钟跳绳测试．将测试数据分组整理后，画出部分组的频数条形图，如图所示．已知条形图的组的频率自左向右分别为 0.04，0.12，0.40，x，0.16．根据已知条件填空、补图：

(1) 未画出频数条形图的组的频率 $x=$ _____；

(2) 直方图中，从左向右各组的频数依次是_____，_____，_____，_____，_____；

(3) 补齐频数分布直方图；

(4) 这次跳绳测试中，跳绳次数的中位数所在组的次数范围是_____．



(第 1 题)

2. 甲、乙两个企业，连续六年每年向国家上缴的利税如下表：

年　份	2006	2007	2008	2009	2010	2011
甲上缴利税 / 万元	450	460	450	425	455	460
乙上缴利税 / 万元	445	480	475	425	430	445

试问，六年来：

(1) 哪个企业上缴的利税变化范围较大？

(2) 哪个企业上缴利税的波动更小？

北京出版社

3. 在一次学生演讲比赛中，五名评委对两名学生演讲的评分如下表：

评委代号	A	B	C	D	E
甲的评分 / 分	79	90	91	60	60
乙的评分 / 分	62	62	81	83	92

请回答：

(1) 五位评委对谁的演讲评分变化范围较小？

(2) 五位评委对谁的演讲评价比较一致？

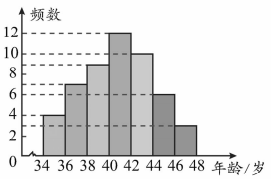
4. 下面的频数分布直方图表示的是某单位全部职工年龄（取整岁数）分组整理的结果．根据频数分布直方图提供的信息，回答下列问题：

(1) 该单位职工共有多少人？

(2) 不小于 38 岁但小于 44 岁的职工人数占职工总人数的百分比是多少？

(3) 哪个年龄段的职工最多，占职工总人数的百分比是多少？

(4) 如果 42 岁的职工有 4 人，那么年龄在 42 岁以上的职工有多少人？



（第 4 题）

5. 某鱼塘里放养了 500 尾草鱼，经过一段时间饲养后未流失．现从鱼塘里随机捞出 20 尾草鱼一一过秤，数据按尾数乘鱼的质量的形式表示，初步整理如下（单位：kg）：

1×0.90，1×0.95，2×1.00，1×1.05，3×1.10，
4×1.15，2×1.20，3×1.25，2×1.30，1×1.35.

(1) 以 0.90 ~ 1.00 kg 为第 1 组，以 0.10 kg 为组距分 5 组整理，列出频数分布表，并画出频数分布直方图；

(2) 根据频数分布表和分布直方图指出，捞出的 20 尾草鱼在哪个组的数量最多，与捞出总鱼数的比值有多大；

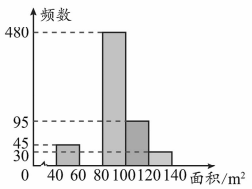
(3) 以捞出的 20 尾草鱼质量为样本，估计该鱼塘放养的草鱼在哪个质量范围内的数量最多，大约为多少，约占所放养草鱼总数的百分比有多大．

★★提升★★

随着人民生活水平的提高，购房者对住房面积的要求有了新的变化．现对从某地区随机抽取的 1 000 户近期购房居民进行调查，不同户型（购房面积）的购房户数资料分组整理如图所示．

（1）购买面积为 60 ~ 80 m^2 住房的有多少户？补齐条形图．

（2）购买面积在哪个范围内住房的户数最多、最集中？估计约占全部购房户数的比值是多大．



★★★拓展★★★

下表列举的是历史上的科学家蒲丰等人做过的成千上万次掷一枚钱币的实验记录：

掷币次数	2 048	4 040	4 092	10 000	12 000	24 000	80 640
“正面朝上”的频率	0.518 1	0.506 9	0.500 5	0.497 9	0.501 6	0.500 5	0.492 3

（1）分别求掷币次数在 1 万次以内（不含 1 万次，即前 3 组）和 1 万次以上（含 1 万次，即后 4 组）时，“正面朝上”的频率的平均值和方差．

（2）比较掷币 1 万次以内和 1 万次以上时，“正面朝上”频率的方差的大小；说明哪部分的频率更稳定在平均值附近．

北京出版社

部分习题答案或提示

习题 17－1

基础

1. （1）C；（2）D；（3）D；（4）A.

2. ①②③.

3. （1）$s^2=3.5$；（2）$s^2=6.16$.

提升

因为 $\bar{x}_{前}=11.42>\bar{x}_{后}=11.36$，但 $\bar{x}_{前}\approx\bar{x}_{后}$，且 $s_{前}^2=0.029\ 6>s_{后}^2=0.018\ 4$，所以，这次集训对成绩的提高有效果，表现在百米跑平均时间缩短了 0.06 秒，成绩比训练前更稳定.

拓展

（1）计算得 $\bar{x}_{甲}=3$，$s_{甲}^2=2$，$\bar{x}_{乙}=300$，$s_{乙}^2=20\ 000$. 乙组的对应数据、平均数是甲组的 100 倍，而乙组的方差是甲组的 10 000 倍.

（2）能，只需计算 1，2，3，4，5 的平均数和方差，分别依次缩小到百分之一和万分之一，即 $\bar{x}=3\div100=0.03$，$s^2=2\div10\ 000=0.000\ 2$.

习题 17－2

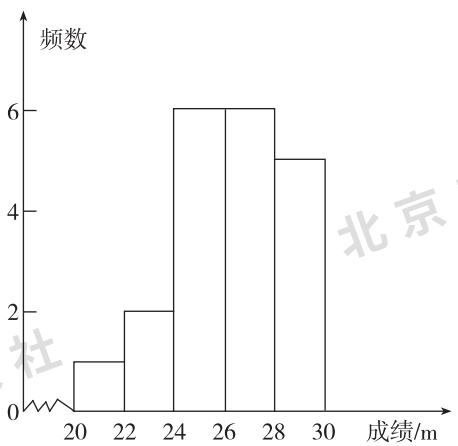
基础

1. （1）C；（2）D；（3）C.

2. （1）50；（2）70～80，0.36；（3）92%.

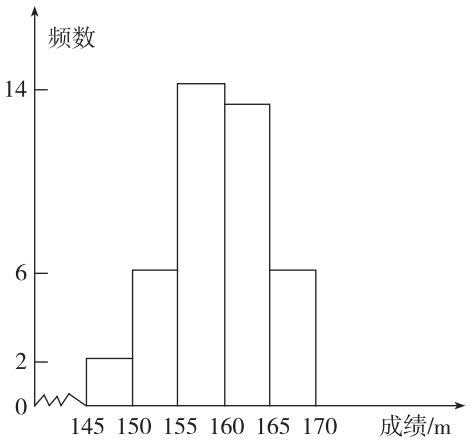
3.

分组/m	频数累计	频数	频率
20.0～22.0	一	1	0.05
22.0～24.0	丅	2	0.10
24.0～26.0	正一	6	0.30
26.0～28.0	正一	6	0.30
28.0～30.0	正	5	0.25
合计		20	1.00



4. （1）6，12，0.30.

（2）如图.



（3）可能是160，161，162，163，164（单位：cm）.

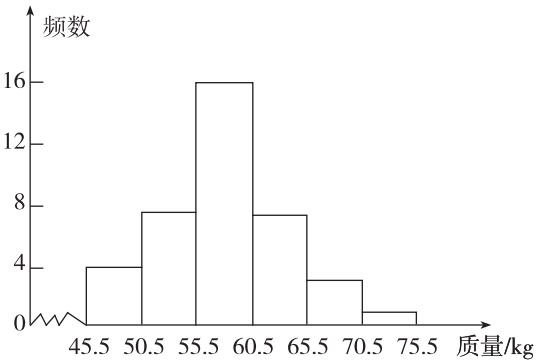
（4）155～160.

提升

1. （1）补填（表头略）.

频数	4			3	1	40
频率		0.200	0.400		0.025	

（2）如图.



（3）在55.5～60.5（kg）范围内头数最多，最集中，在70.5～75.5（kg）范围内头数最少.

（4）这500头猪中估计在55.5～60.5（kg）范围内头数最多，最集中，约占百分比为40%.

2. （1）六年级的中位数在148～153（cm）组；九年级的中位数在168～173（cm）组.

（2）高出：170.4 − 151.8 = 18.6（cm）.

估计这个地区这两个年级全体男生中身高在 153 ~ 163（cm）之间（含 153 cm，不含 163 cm）的男生所占百分比各约为 37.5% 和 5%.

拓展

（1）填表如下（表头略）.

频数	2	6	14	18	10	50
频率	0.04	0.12	0.28	0.36	0.20	1.00

（2）测验成绩最集中的组是 80 ~ 90（分）这个分数段，中位数在 80 ~ 90（分）这个分数段.

（3）在 50 ~ 60（分）这个分数段的可能性最小，可能性是$\frac{2}{50}=\frac{1}{25}$.

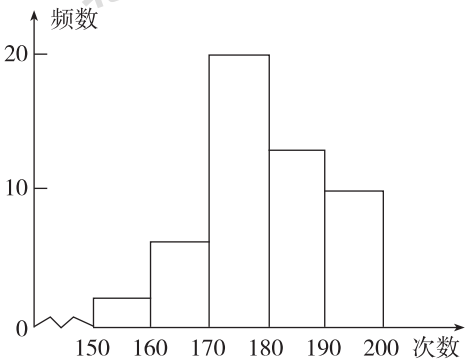
复习题

基础

1. （1）0.28.

（2）2，6，20，14，8.

（3）如图.



（4）170 ~ 180.

2. 甲的利润变化范围是 35，乙的利润变化范围是 55；$\bar{x}_{甲}=450$，$\bar{x}_{乙}=450$；$s_{甲}^2=141.67$，$s_{乙}^2=433.33$.

（1）乙企业上缴的利税变化范围较大.

（2）因为 $\bar{x}_{甲}=\bar{x}_{乙}$，$s_{甲}^2<s_{乙}^2$，甲企业上缴利税更稳定.

3. 对甲的评分变化范围是 31，对乙的评分变化范围是 30；$\bar{x}_{甲}=\bar{x}_{乙}=76$；$s_{甲}^2=$

188.4，$s_{乙}^2=144.4$.

（1）对乙的评分变化范围较小.

（2）因为 $\bar{x}_{甲}=\bar{x}_{乙}=76$，$s_{乙}^2=144.4<s_{甲}^2=188.4$，对乙的评价比较一致.

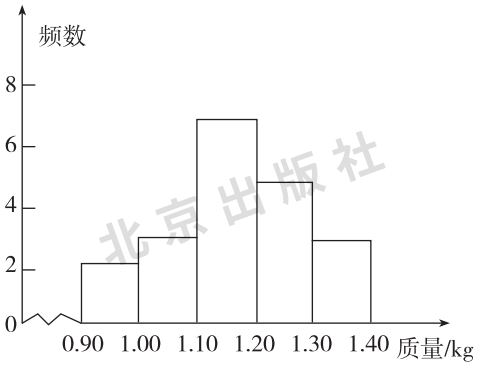
4.（1）51 人；（2）$\frac{31}{51}\approx60.78\%$；（3）40～42（岁）年龄段，约为 23.53%；

（4）有（10+6+3）−4=15 人.

5.（1）如下表.

分组/kg	0.90～1.00	1.00～1.10	1.10～1.20	1.20～1.30	1.30～1.40	合计
频数	2	3	7	5	3	20
频率	0.10	0.15	0.35	0.25	0.15	1.00

频数分布直方图，如图.



（2）在 1.10～1.20（kg）范围内数量最多，比值为 0.35；

（3）估计在 1.10～1.20（kg）范围内该鱼塘放养的草鱼数量最多；大约为 500×0.35=175（尾），约占总数的 35%.

提升

（1）有 1 000−（480+95+45+30）=350（户）；图略.

（2）购买面积在 80～100（m^2）范围内住房的户数最多、最集中，比值为 0.48.

拓展

（1）掷币 1 万次以内的频率的平均值为 0.508 500，方差为 $5.290\,666\,6\times10^{-5}$；掷币 1 万次以上的频率的平均值为 0.498 075，方差为 $1.292\,187\,5\times10^{-5}$.

（2）掷币 1 万次以上的频率更稳定在平均值附近.



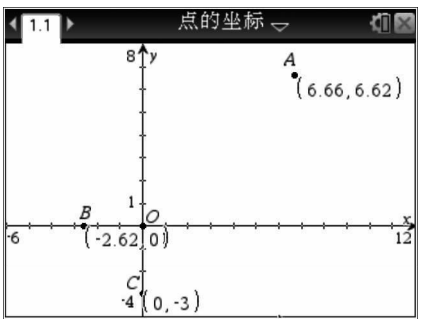
附录

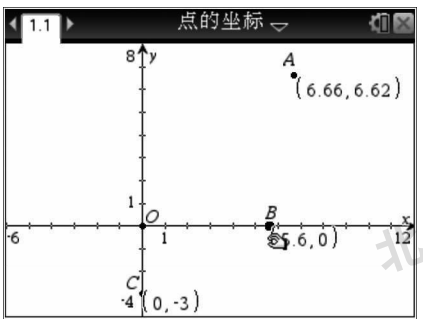
图形计算器支持案例[①]

案例 1　点的坐标. 以教材第 11 页的“实践”第 2 题为例.

按 [开机] 1 2，添加图形页面. 按 [菜单] 8 1 1，移动指针，在空白处单击或按 [enter]，画动点 A，按 [菜单] 1 8，单击点 A，得到 A 的坐标. 然后拖动点 A，观察动点坐标的变化，看看在各个象限内点的横坐标和纵坐标的符号有什么特点.

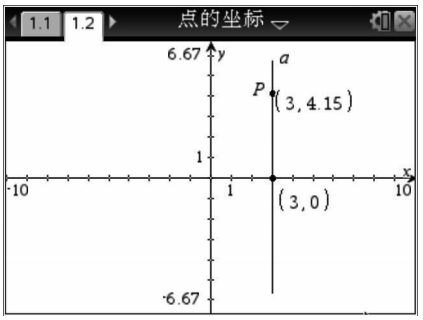
按 [菜单] 8 1 2，单击 x 轴，再按 [enter]，画 x 轴上的点 B. 接着单击 y 轴，再按 [enter]，画 y 轴上的点 C. 按 [菜单] 1 8，单击点 B，C，得到 B，C 的坐标. 拖动点 B 或 C，观察在坐标轴上点的坐标有什么特点.

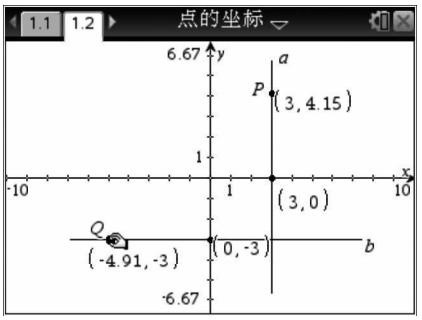




① 关于图形计算器的基本操作，之前已有介绍，此处不再赘述.

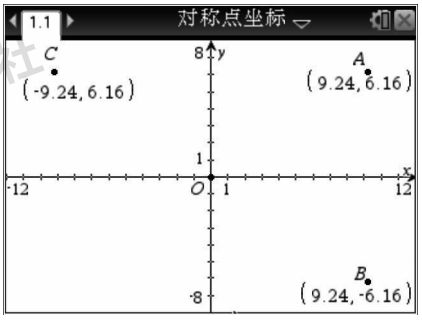
按 ctrl 文档 2，新加一个图形页面. 按 菜单 8 1 2，单击 x 轴，移动指针到表示 3 的点，再按 enter，画点（3，0）. 按 菜单 8 4 2，依次单击 y 轴，点（3，0），画与 y 轴平行的直线 a. 然后在直线 a 上画一个对象点 P，并测量其坐标，拖动点 P，观察直线 a 上的点的坐标有什么特点. 再画与 x 轴平行且过点（0，−3）的直线 b，在直线 b 上画一个对象点 Q，测量其坐标，拖动点 Q，观察直线 b 上的点的坐标有什么特点.

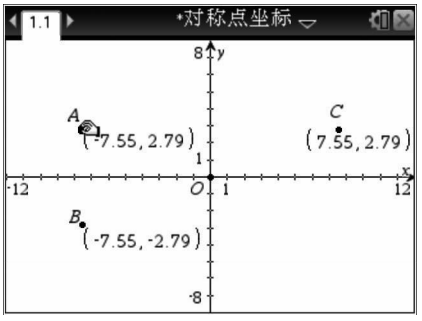




案例 2 对称点的坐标. 以教材第 12 页的“实践”为例.

按 开机 1 2，添加图形页面. 按 菜单 8 1 1，在空白处画点 A，按 菜单 1 8，测量点 A 的坐标. 按 菜单 8 5 2，依次单击点 A、x 轴，得到点 A 关于 x 轴对称的点 B，再依次单击点 A、y 轴，得到点 A 关于 y 轴对称的点 C. 按 菜单 1 8，分别测量点 B，C 的坐标. 拖动点 A，观察点 A 关于坐标轴对称点的坐标的变化.



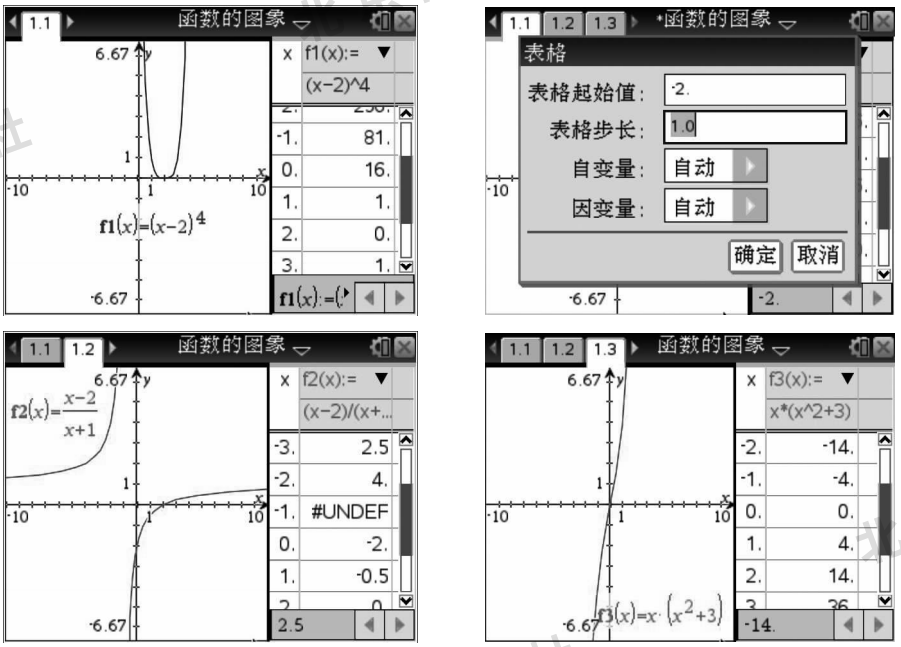


案例 3 函数的图象. 以教材第 15 页的“实践”为例.

按 开机 1 2，添加图形页面. 在输入行中输入函数的表达式“$(x-2)^4$”，然后按 enter，得到函数的图象（如果输入行隐藏不见，按 tab 键可以显示）. 按 菜单 7 1，分屏显示这个函数的列表. 此时当前屏幕为右屏，按 菜单 2 5，可以对表格设置进行编辑. 按 ctrl tab，可以左右切换屏幕.

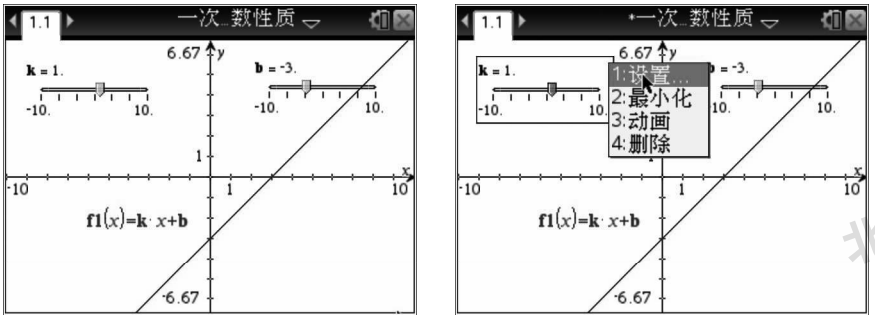
按 ctrl 文档 2，新加一个图形页面. 输入第二个函数表达式“$\dfrac{x-2}{x+1}$”，画第二个函

数图象，并分屏显示其列表. 同样得到第三个函数“$x(x^2+3)$”的图象及列表.



案例 4 一次函数的性质. 以教材第 24 页的“交流”为例.

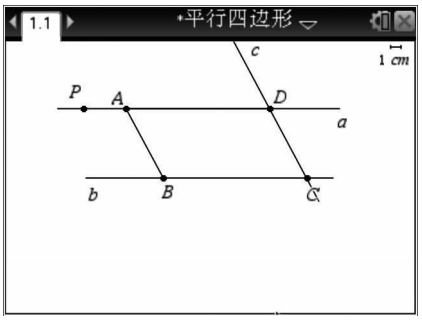
按 开机 1 2，添加图形页面. 在输入行中输入函数的表达式“$kx+b$”，按 enter 确认（在变量 k 与 b 没有定义之前，函数图象不能绘制）. 按 菜单 1 B 插入游标，删除原来的变量名，改为 k. 同样插入游标 b. 这样就绘制出一次函数 $y=kx+b$ 的图象. 用指针长按游标中央的滑块，此时指针变成“小手”，再移动指针可以改变参数 k 或 b 的大小，函数图象也跟着发生变化. 如果想对参数的设置进行调整，先按 退出，直到指针状态自由，再移动指针到边框附近并点击出现的“小手”，按 ctrl 菜单 1 进行设置.

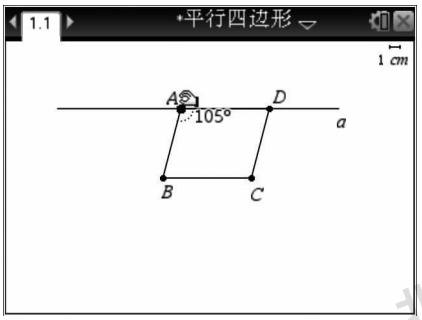


案例 5 平行四边形的形状. 以教材第 49 页的“交流”为例.

按 开机 1 3，添加几何页面. 按 菜单 4 4，画直线 a（过点 P）. 接着按

菜单 4 5，在该直线 a 上画线段 AD. 再画线段 AB，其中 B 点在 A 点下方. 按 菜单 7 2，依次单击点 B、线段 AD，画与 AD 平行的直线 b，接着单击点 D、线段 AB，画与 AB 平行的直线 c. 按 菜单 4 3，单击直线 b，c，画 b 与 c 的交点 C. 按 菜单 1 3，依次单击需要隐藏的对象：直线 b、直线 c、点 P. 然后画线段 BC，DC. 按 菜单 6 4，依次单击点 D，A，B，测量 $\angle DAB$ 的大小. 拖动点 A，使其在直线 a 上运动，观察平行四边形 $ABCD$ 的形状有什么变化.

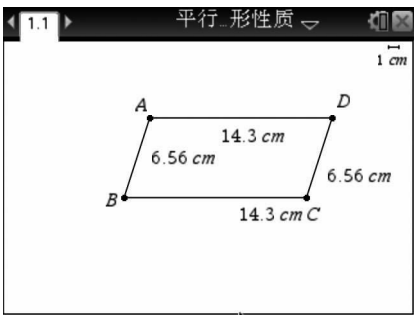


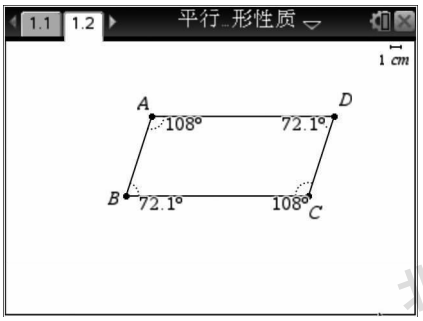


案例 6 平行四边形的性质. 以教材第 52 页的“交流”为例.

按 开机 1 3，添加几何页面. 按 菜单 4 5，画线段 AB，AD. 按 菜单 7 2，分别过点 B，D，画与 AD，AB 平行的直线，并画它们的交点 C. 隐藏这些直线，然后画线段 BC，DC，得到平行四边形 $ABCD$. 按 菜单 6 1，分别测量 AB，BC，CD，DA 的长度. 拖动点 A，观察平行四边形的对边在长短上有什么关系.

按 ctrl 文档 3，新加一个几何页面. 同样画一个平行四边形 $ABCD$，然后按 菜单 6 4，测量平行四边形四个内角的大小. 拖动点 A，观察平行四边形的对角在大小上有什么关系.

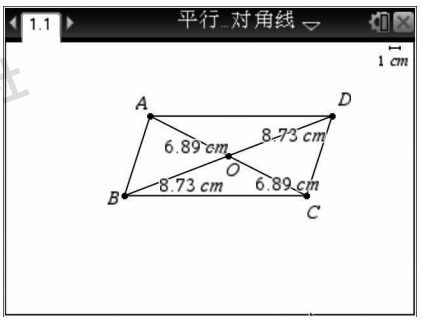


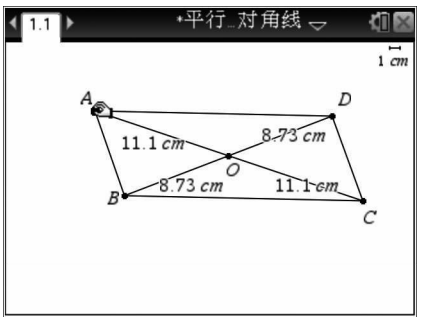


案例 7 平行四边形的对角线. 以教材第 55 页的“交流”为例.

按 开机 1 3，添加几何页面. 画平行四边形 $ABCD$、线段 AC、线段 BD，并画 AC 与 BD 的交点 O. 按 菜单 6 1，单击点 A，O，得到 A，O 两点的距离（即 AO 的长度）.

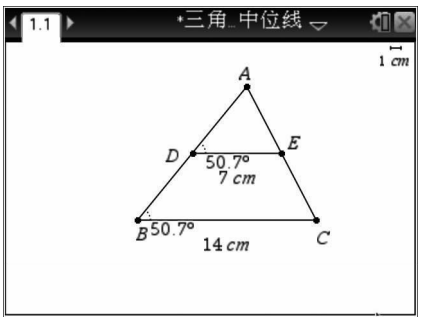
同样测量 BO，CO，DO 的长度. 拖动点 A，观察平行四边形的两条对角线有什么性质.

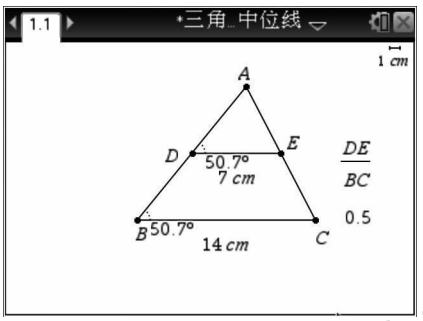




案例 8 三角形的中位线. 以教材第 72 页的“交流”为例.

按 [开机][1][3]，添加几何页面. 按 [菜单][5][2]，画 $\triangle ABC$. 按 [菜单][7][5]，单击 AB，AC，画 AB，AC 的中点 D，E. 画线段 DE. 分别测量 DE 与 BC 的长度（其中 BC 的长度需要测量 B，C 两点的距离）、$\angle ADE$ 与 $\angle ABC$ 的大小. 拖动点 A，观察图中连接三角形两边中点的线段，与第三边在长度、位置上有怎样的关系. 按 [菜单][1][7]，移动指针到空白处，按 [enter]，输入“$\frac{DE}{BC}$”后按 [enter]，再移动指针靠近这个文本，按 [ctrl][菜单][4]，按照提示，依次单击 BC，DE 的长度数值，计算 $\frac{DE}{BC}$ 的比值. 当拖动点 A 时，可以发现这个比值始终等于 $\frac{1}{2}$.

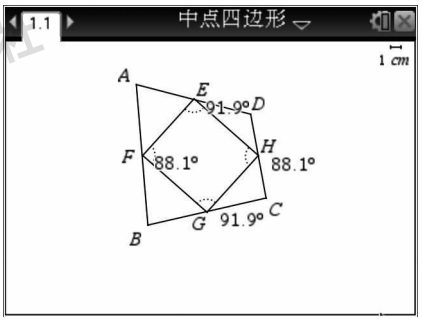


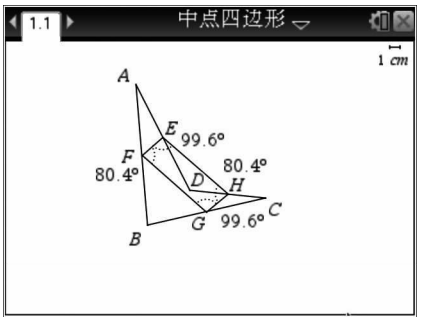


案例 9 中点四边形. 以教材第 74 页的“探究学习”为例.

按 [开机][1][3]，添加几何页面. 按 [菜单][5][4]，画四边形 $ABCD$（最后一个顶点需要双击，或者单击再 [enter] 确认），按 [菜单][7][5]，分别画四边形 $ABCD$ 四边的中点 F，G，H，E，然后画四边形 $EFGH$. 拖动原四边形的一个顶点，改变原四边形的形状，观察

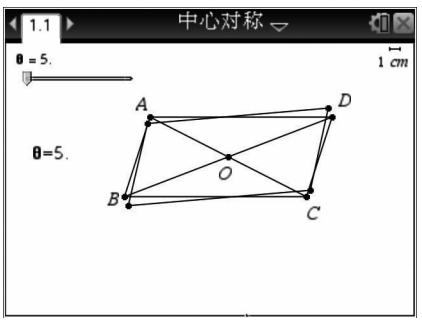
图形的变化. 按 菜单 6 4，测量四边形 *EFGH* 的四个内角大小，可以发现不论四边形 *ABCD* 怎样变化，其中点四边形 *EFGH* 都是平行四边形. 进一步，可以探究，当原四边形 *ABCD* 是什么形状时，中点四边形 *EFGH* 会变成矩形、菱形、正方形.

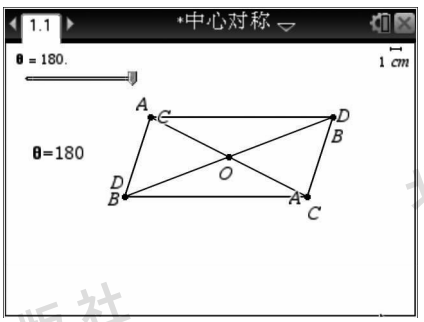




案例 10 中心对称图形. 以教材第 80 页的“图 15－56”为例，发现平行四边形是中心对称图形.

按 开机 1 3，添加几何页面. 画平行四边形 *ABCD*，然后隐藏四边（顶点不隐藏），按 菜单 5 4，再画四边形 *ABCD*（此时得到的平行四边形 *ABCD* 是一个整体，可以整体进行旋转）. 画线段 *AC*，*BD*，及其交点 *O*. 按 菜单 1 A，插入一个游标，按 enter 之后，利用鼠标右键功能（ctrl 菜单）修改游标设置，其中变量：θ，最小值：0，最大值：180，步长：5，按 enter 确认. 按 菜单 1 7，在空白处插入文本“1”（随便一个数字即可），按 enter 确认，然后对这个数字按 ctrl 菜单 6 2，将其链接至变量 θ（链接之后，该数字作为旋转角度 θ. 当游标变化时，这个数字也同步变化）. 按 菜单 8 4，依次单击平行四边形 *ABCD*、点 *O*、旋转角度 θ，将平行四边形 *ABCD* 绕点 *O* 旋转 θ. 按◀或▶可以改变游标变量，旋转角 θ 也同步改变. 可以发现，当 $\theta=180°$ 时，点 *A* 与点 *C*、点 *B* 与点 *D* 分别互换了位置，旋转后的图形与原来的图形重合，因此，平行四边形是中心对称图形，对角线的交点是对称中心.

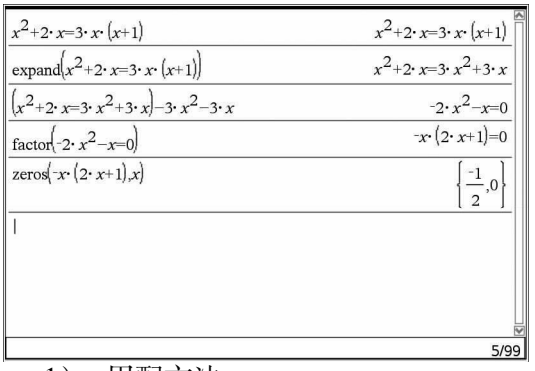




案例 11 解方程. 以教材第 105 页的例 7 为例.

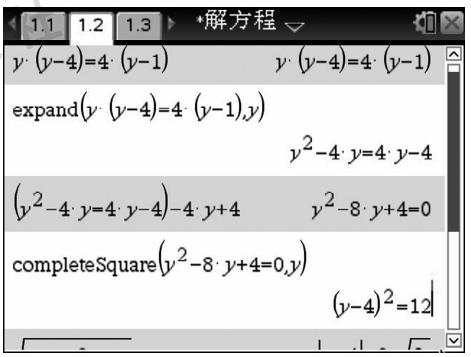
(1) $x^2+2x=3x(x+1)$，用因式分解法.

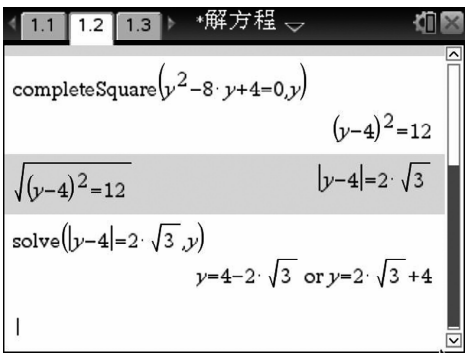
按 开机 1 1，添加计算器页面. 输入方程“$x^2+2x=3x(x+1)$”后按 enter. 按 菜单 3 3 ▲ enter enter，去括号. 按 (▲ enter) − 3 X x² − 3 X enter，移项. 按 菜单 3 2 ▲ enter enter，因式分解. 按 菜单 3 4 ▲ enter del del , X enter，求零点，即方程的解.



(2) $y(y-4)=4(y-1)$，用配方法.

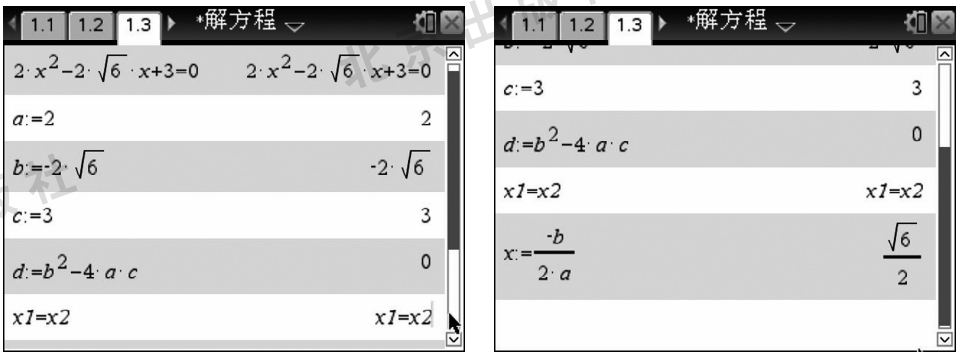
按 ctrl 文档 1，新加一个计算器页面. 输入方程“$y(y-4)=4(y-1)$”后按 enter. 按 菜单 3 3 ▲ enter , Y enter，去括号. 按 (▲ enter) −4 Y +4 enter，移项. 按 菜单 3 5 ▲ enter , Y enter，配方. 按 ctrl x² ▲ enter enter，开平方. 按 菜单 3 1 ▲ enter , Y enter，求得 $y=4\pm2\sqrt{3}$.





(3) $2x^2-2\sqrt{6}x+3=0$，用公式法.

按 ctrl 文档 1，新加一个计算器页面. 输入方程“$2x^2-2\sqrt{6}x+3=0$”后按 enter. 依次按 A ctrl {} 2 enter，B ctrl {} − 2 ctrl x² 6 enter，C ctrl {} 3 enter，分别对变量 a，b，c 进行赋值. 按 D ctrl {} B x² − 4 A × C enter，对判别式变量 d 进行赋值. 因为 $d=0$，所以 $x_1=x_2$. 依次按 X 1 = X 2 enter，X ctrl {} {}，输入 $-\dfrac{b}{2a}$，按 enter. 求得 $x_1=x_2=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

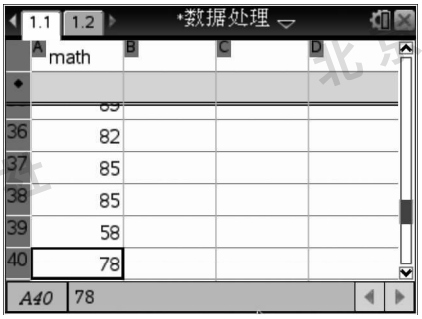


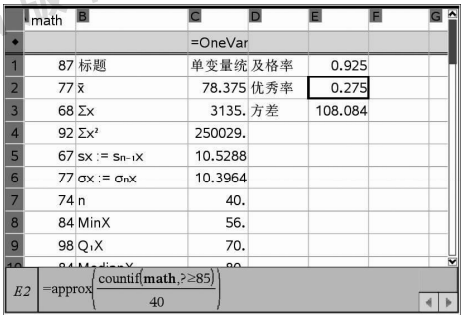
案例 12 处理数据. 以教材第 128 页的“某班数学成绩的分析和评估”为例.

按 [开机] 1 4，新建一个列表与电子表格页面. 在表头中输入变量“math”，在单元格中依次输入某班的数学成绩，每输入一个成绩，按 [enter] 确认. 按 [菜单] 4 1 1 [enter]，进行单变量统计. 其中 $x1$ 数组是 $a[\,]$，或者按▶键，选择变量“′math”，然后按 [enter] 即可. 各个量都代表统计中的一个基本量，具体意义如下表：

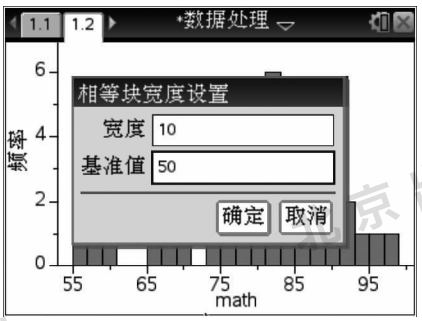
$\bar{x}$	x 值的平均值	σx	x 的总体标准差	Median x	x 的中位数
$\sum x$	x 值之和	n	数据点的数量	Q_3x	x 第 3 个四分位数
$\sum x^2$	x^2 值之和	min x	x 值的最小值	max x	x 值的最大值
sx	x 的样本标准差	Q_1x	x 第 1 个四分位数	SSX	x 平均值的方差和

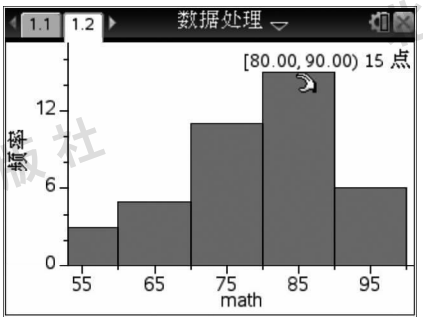
为了得到及格率、优秀率、方差，需要在单元格中利用公式来计算. 在空白单元格中输入“$=\text{approx}(\frac{\text{countif}(\text{math},?\ \geq 60)}{40})$”按 [enter]（按 [ctrl] [书]，在符号模板中可以找到“?”），计算及格率. 在空白单元格中输入“$=\text{approx}(\frac{\text{countif}(\text{math},?\ \geq 85)}{40})$”按 [enter]，计算优秀率. 在空白单元格中输入“ [=] [C] [6] [x²] ”按 [enter]，得到方差（本案例中 C6 是存放总体标准差 σx 的单元格，以 σx 实际存放的单元格为准，其平方就是方差）. 注：其中 approx( ) 是计算表达式的近似值的函数命令，countif( ) 是统计满足条件的数据个数的函数命令，这两个函数命令都可以直接键盘输入，或者按 [书] 1，然后按 [A]（或 [C]）找到字母 a（或 c）开头的命令，再按▲或▼翻找，找到命令后按 [enter] 即可调用.





按 ctrl 文档 5，新加一个数据与统计页面. 单击页面正下方的“单击添加变量”处，添加变量“math”. 按 菜单 1 3，把圆点图变为柱状图. 按 菜单 2 2 1，调整比例尺为频数（图中纵轴上显示的是频率，实际为频数）. 再按 菜单 2 2 2，对块宽度进行设置，其中宽度：10（组距），基准值：50（最小值），按 enter 确认，最后画出数据的频数分布直方图.





更多案例及参考内容，请登录网站：http://education.ti.com/china/training/bph.