义务教育教科书

数学 八年级 下册

教师教学用书

杨裕前　董林伟　主编

江苏凤凰科学技术出版社

微信公众号：电子课本大全

微信公众号：电子课本大全

第7章　数据的收集、整理、描述

【课标要求】

1. 经历收集、整理、描述数据的活动，了解数据分析的过程；能用计算器处理较为复杂的数据．

2. 会制作扇形统计图，能用统计图直观、有效地描述数据．

3. 了解普查与抽样调查，通过丰富的实例，感受抽样的必要性，能指出总体、个体、样本和样本容量．

4. 通过实例，理解频数、频率的概念，了解频数分布的意义和作用，能画频数分布直方图，能利用频数分布直方图解释数据中蕴涵的信息．

5. 通过实例，体会用样本估计总体的思想．

6. 根据统计结果做出合理的判断和预测，体会统计对决策的作用，能比较清晰地表达自己的观点，并进行交流．

此外，在收集、整理、描述数据，做出判断和预测活动的过程中，培养和发展统计观念．

【设计思路】

本章为《标准》中“统计与概率”的内容．对于“统计”的教学内容，整套教材分为3章，分别安排在八(下)、九(上)和九(下)．其中，“八(下)”为本章教学内容；“九(上)”为“数据的集中趋势和离散程度”；“九(下)”为“统计和概率的简单应用”．

本章由3个单元组成．

第一单元：通过实例，介绍数据收集的方式，学习如何通过问卷调查、查阅资料等方法收集数据，并使学生知道统计调查一般有普查和抽样调查两种方式，知道普查和抽样调查的区别，感受抽样的必要性，并在此基础上了解总体、个体、样本和样本容量等概念．

第二单元：介绍几种常见的统计图表．本单元在小学已经学过的条形统计图、折线统计图和扇形统计图的基础上，进一步认识这几种常见的统计图表，并重点学习扇形统计图的制作，研究这几种常见统计图表在描述数据方面的各自的特点，并学会选择适合的统计图表对数据进行整理、描述和分析．

第三单元：介绍频数、频率、频数分布表和频数分布直方图．对频数、频率、频数分布表、频数分布直方图，学生在小学阶段没有接触过，是本章重点需要研究的新问题．在本单元，课本首先通过实例介绍频数、频率、频数分布表，介绍频数分布直方图的构成，研究如何读出频数分布直方图中的信息，在此基础上，引导学生绘制频数分布直方图描述、分析数据，初步感悟生活中许多数据的分布所呈现出的特征．

【教学建议】

1. 注意知识的前后联系．

对数据的收集、整理、描述，可分为3个层次．第1层次：要求学生“运用自己的方式(文字、统计图表等)呈现整理、描述数据的结果”；第2层次：要求学生“认识条形统计图、扇形统计图、折线统计图，能根据描述问题的需要，选择适合的统计图”；第3层次：要求学生“会制作扇形统计图，能用统计图直观、有效地描述数据”、“能画频数分布直方图，能利用频数分布直方图解释数据中蕴涵的信息”等．教学时，要注意与前两个层次相关内容的联系，并在已有的基础上有所提高．根据《标准》，本章的教学重点是：认识扇形统计图的特点和制作扇形统计图；利用统计表、条形统计图、折线统计图、扇形统计图、频数分布表、频数分布直方图整理、描述数据；比较条形统计图、折线统计图、扇形统计图、频数分布直方图的特征，在数据的收集、整理、描述的大环境下学习统计图表的运用．

2. 引导学生经历数据处理的全过程．

随着科学技术的发展，数据日益成为一种重要的信息．数据能够帮助人们了解情况、发现规律、做出判断和预测，收集、整理、描述、分析数据的能力已成为信息时代每一位公民基本素养的一部分．

统计的学习，本质上是统计活动的学习，使学生形成统计观念最有效的方法是经历统计活动的全过程：

微信公众号：电子课本大全

提出问题→收集数据→整理、描述数据→分析数据→解决问题.

统计活动主要涉及两大类问题:一是如何收集数据;二是如何对收集到的数据进行整理、描述、分析.

对数据的收集,课本主要介绍了普查和抽样调查.教学时,要强化与生活实际的联系,通过生活中常见的问题引导学生认识普查和抽样调查,使学生对抽样的必要性和样本的代表性有一个初步的认识,并初步感悟用"局部"估计"整体"的统计思想.教学时,要注意控制教学要求,不要拓展,因为后续学习中还会有专门的介绍.

对数据的整理、描述、分析,学生的学习一般应经历如下3个过程:一是会读出统计图表中的相关信息;二是会利用统计图表整理数据;三是会根据实际问题的需要选择不同的统计图表来描述、分析数据.同"数据的收集"一样,这一过程同样是从实际问题出发,引导学生从事统计活动,通过对数据的整理、描述,做出合理的判断和预测.

动手收集数据,对数据进行整理、描述并展示自己的学习成果是一个活动性很强,且充满乐趣的过程.教学时,要以学生合作探究为主,鼓励学生根据调查目的,在充分讨论的基础上,自己设计调查问卷收集数据,自己设计表格整理数据,并在教师的指导下,完成对数据的描述、分析,促进学生学习方式的改变.

3. 引导学生感悟统计思想.

用样本估计总体是统计的基本思想.统计中,通常采用从总体中抽取样本,通过分析样本数据来估计、推测总体情况.教学时,要注意结合实例介绍利用抽样调查收集数据的内容;要突出几种常见的统计图表在整理、描述数据中的意义和作用,避免将统计图表的教学变成单纯的绘制图表的操作技巧;要通过实例和活动来理解频数、频率的概念,了解频数分布的意义、作用,将统计图表的学习放在解决问题的情境中.教学时,要注意引导学生感受统计的基本思想,并对不同的抽样有可能得到不同的结果(结论的"不确定性")有所体会.

此外,要重视现代信息技术在数据处理与分析中的作用,鼓励学生使用计算机或计算器处理较复杂的数据.

【评价建议】

1. 知识技能的评价.

主要评价学生能否在实际情境中了解总体、个体、样本、样本容量等概念;能否从统计图表中获取尽可能多的信息;能否根据具体问题的需要制作合适的统计图表来整理、描述数据,并做出估计和推断;能否理解频数、频率的概念,理解频数分布的意义和作用;能否绘制几种常见的统计图表,并利用它们解决一些简单的实际问题,对数据处理的结果做出自己的评价.

2. 参与程度的评价.

主要评价学生在学习中遇到困难时的表现及克服困难的办法;评价学生在活动中表现出来的思维、表达水平;评价学生能否与他人合作交流以及对问题的质疑能力.

3. 统计观念的评价.

主要评价学生能否感悟统计的基本思想;能否根据实际问题的需要对数据进行整理、描述,并做出估计和推断;能否对数据的呈现方式及由此得出的结论进行合理的质疑等.

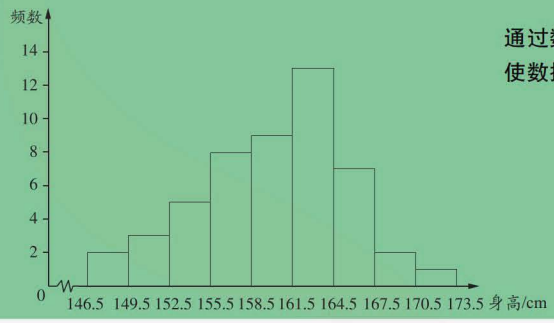
【课时安排】

本章教学大约需要9课时,分配如下:

7.1	普查与抽样调查	2课时
7.2	统计图的选用	3课时
7.3	频数和频率	1课时
7.4	频数分布表和频数分布直方图	1课时
	数学活动	1课时
	小结与思考	1课时

微信公众号:电子课本大全

第7章 数据的收集、整理、描述



通过数据的收集、整理、描述，使数据提供的信息更清晰、更直观.



【内容解读】

章头图以班级选举统计票数为主图，以某校八年级50名学生身高频数分布直方图为辅图，展示实际生活中的统计数据、统计图表，说明数据就在我们周围.

班级中的选举是学生十分熟悉的，通过这个活动可以使学生认识到统计调查是收集数据的一种常用方法，体会数据与生活实际的紧密联系. 同时，通过展示班级选举统计票数的过程，使学生更好地理解频数、频率等概念，并感悟到数据有助于我们做出民主的决策.

微信公众号：电子课本大全

为了解全校同学的课外体育活动情况，需要开展调查．



设计一张调查表，调查你所在班级的同学最喜爱的课外体育活动项目，将调查的数据填入表中，并用适当的统计图来描述这些数据．

最喜爱的课外体育活动项目	学生人数	占全班人数的百分比

本章将学习通过普查和抽样调查收集数据，利用扇形统计图、条形统计图、折线统计图、频数分布表和频数分布直方图整理、描述数据．

【内容解读】

通过“调查你所在班级的同学最喜爱的课外体育活动项目”的活动，引导学生经历数据的收集、整理和描述的过程，感受统计调查和对调查所获得的数据进行整理、描述的必要性．

对班级同学进行调查，收集数据的方法较多．教学时，要鼓励学生采用多种不同的方法收集数据并填写表格，引导学生经历收集数据和对数据进行整理、描述的过程．

本章我们将学习通过普查和抽样调查收集数据，利用扇形统计图、条形统计图、折线统计图、频数分布表和频数分布直方图整理、描述数据．通过本章学习，我们将感受到数据蕴涵着信息，可以帮助我们了解周围的世界，做出正确的推断和合理的决策．

微信公众号：电子课本大全

【情境说明】

生活中，数据是一种重要的信息资源．收集、整理、描述数据是数据处理的一个基本过程，而通过调查收集数据是数据处理的前提．

【内容解读】

统计调查有普查和抽样调查两种方式．普查的结果比较精确，但要花费大量的人力、物力和时间，而且有些调查没有必要做普查，有些调查也不可能做普查．在本节学习中，要通过具体实例引导学生认识普查的局限性和抽样的必要性．例如：对“你校学生身高的调查”可以做普查；对“一批灯泡使用寿命的调查”适合做抽样调查，因为该调查对调查对象的考察带有破坏性；对“‘新闻联播’收视率的调查”适合做抽样调查，因为调查对象很多，不可能一一加以考察．

7.1　普查与抽样调查

数据可以帮助我们了解周围的世界，做出正确的判断和合理的决策．

调查是收集数据的一种重要方法．



如何进行下列各项调查？你认为做这些调查有什么作用？


你校学生身高的调查


一批灯泡使用寿命的调查



“新闻联播”收视率的调查

新学年开始时，某校对每一位学生的身高进行测量．像这样，为一特定目的而对所有考察对象所做的调查叫做**普查**（thorough survey）．

【教学目标】

1. 经历调查、收集数据的过程，知道统计调查有普查和抽样调查两种方式．

2. 了解普查、抽样调查、总体、个体、样本、样本容量等概念．

3. 了解普查和抽样调查的应用，体会普查与抽样调查的区别，感受抽样的必要性．

4. 能选择适合的调查方式，解决相关问题，初步感受统计思想．

5. 能运用自己的方式（文字、统计图表等）呈现整理、描述数据的结果．

【教学过程设计建议（第 1 课时）】

1. 情境创设

生活中，我们经常碰到各种数据，这些数据蕴涵着许多信息，可以帮助我们了解周围的世界，做出正确的推断和合理的决策．

同学们在小学已学习了统计的有关内容，知道统计一般包括两方面的问题：一是收集数据（抽取样本）；二是对收集的数据（所抽取的样本）进行整理、描述，做出推断和合理的决策．调查是收集数据的一种重要方法．

2. 探索活动

活动一　通过对具体实例的讨论，引入普查和抽样调查的概念．

课本通过对 3 个具体实例的讨论，引入普查和抽样

微信公众号：电子课本大全

某校为了解全校学生做家务的情况，对该校的部分学生(例如100名学生)进行“每周做家务的时间”的问卷调查．像这样，为一特定目的而对部分考察对象所做的调查叫做**抽样调查**(简称抽样)(sampling survey)．

我们把所考察对象的全体叫做**总体**(population)，把组成总体的每一个考察对象叫做**个体**(element)，从总体中所抽取的一部分个体叫做总体的一个**样本**(sample)，样本中个体的数目叫做**样本容量**(size of a sample)．

例如，为了解某市八年级学生的体重情况，对该市八年级全体学生的体重进行调查就是普查，而对其中的部分学生(例如1 000名学生)的体重进行调查就是抽样调查．该市八年级学生体重的全体是总体，每个八年级学生的体重是个体，从中抽测的1 000名学生的体重是总体的一个样本，样本容量是1 000.



1. 下列调查是用普查好，还是用抽样调查好？说说你的理由．

(1) 全班学生家庭1周内收看“新闻联播”的次数；

(2) 某品牌灯泡的使用寿命；

(3) 长江中现有鱼的种类．

2. 你认为普查和抽样调查各有什么优、缺点？举例说明．

普查通过调查总体中每个个体来收集数据，调查的结果准确，但往往花费多，工作量大，而且有些调查也不宜使用普查．抽样调查通过调查样本中每个个体来收集数据，花费较少，工作量较小，便于进行，但样本的抽取是否得当，直接关系到对总体的估计．为了获得较为准确的调查结果，抽样时要注意所选样本的代表性．

【内容解读】

普查和抽样调查概念中所说的“考察对象”是指事物的某一特征的数量指标．

【内容解读】

(1) 调查“全班学生家庭1周内收看‘新闻联播’的次数”适合做普查；如果调查“全校学生家庭1周内收看‘新闻联播’的次数”可以做普查，也可以做抽样调查；如果调查“全市学生家庭1周内收看‘新闻联播’的次数”只适合做抽样调查．

(2) 对“某品牌灯泡使用寿命”的调查带有破坏性，因而调查对象不允许过多，只适合做抽样调查．

(3) 由于长江中的鱼无法逐一调查，因此只适合做抽样调查．

【内容解读】

抽样调查是实际生活中应用较为广泛的一种调查方式，它是从总体中抽取样本进行调查，然后通过对样本数据的整理、描述，根据样本的某种特性来估计总体的相应特性．为提高估计、推断的精确程度，抽样时要注意所选样本的代表性．

调查的概念．

教学时，要通过实例使学生认识到：

(1) 普查的结果虽然相对比较精确，但存在一定的局限性．一是在很多情况下，所调查的对象往往很多，是不可能一一加以考察的(如“新闻联播收视率”的调查)；二是有时对调查对象的考察带有破坏性(如“一批灯泡使用寿命”的调查)，抽取的调查对象不允许过多．教学时，要通过对实例的分析，感悟普查的局限性和抽样的必要性．

(2) 抽样调查只对部分考察对象进行调查，调查范围相对较小，可以节省时间和人力、物力，但所抽取的考察对象是否具有代表性对调查结果的准确性有影响．

活动二　在认识普查和抽样调查的基础上，引入总体、个体、样本和样本容量的概念．

教学时，要多引用实例说明它们的意义，引导学生根据所考察的具体问题加以表述，不要死记硬背．要引导学生认识到“考察对象”是具体问题中的某一特征的数量指标(“考察对象”是指“数”而不是“物”)．例如，考察某市八年级学生的身高(体重)情况，总体是指该市八年级全体学生的身高(体重)，而不是八年级全体学生；考察一批灯泡的使用寿命，总体是指这批灯泡的使用寿命，而不是这批灯泡．

活动三　通过交流活动，进一步认识普查和抽样调查，比较普查和抽样调查各自的优、缺点．

活动中，可以设计如下问题引导学生思考：

(1) 你能用普查的方式调查全班学生家庭1周内丢弃塑料袋的数量吗？全校学生家庭呢？全市学生家庭呢？说说你的理由．

(2) 你能用普查的方式得到全市所有八年级学生

微信公众号：电子课本大全

【练习解答】

(1)普查.

(2)抽样调查.这批洗衣机的使用寿命的全体是总体,这批洗衣机中每台洗衣机的使用寿命是个体,从中抽取的5台洗衣机的使用寿命是总体的一个样本,样本容量是5.

(3)普查.

(4)抽样调查.这批袋装食品中防腐剂含量的全体是总体,这批食品中每袋食品的防腐剂含量是个体,从中抽取的10袋食品的防腐剂含量是总体的一个样本,样本容量是10.

【情境说明】

学生在小学已学习了条形统计图、折线统计图和扇形统计图,能画出条形统计图、折线统计图来描述数据,能从扇形统计图中读出相关的信息.教学时,要注意前后知识间的联系,做好衔接工作.要引导学生关注电视、报刊以及互联网上的一些统计图表,并说明它们的意义,体会统计图表与现实生活的联系.

【内容解读】

(1)对全校学生做“你最喜爱的一个学生社团”的调查,一般采用抽样调查的方式.例如,课本中,小明在全校学生中随机抽取50名同学进行调查.



下列各项调查是普查,还是抽样调查?如果是抽样调查,请指出总体、个体、样本和样本容量.

(1) 调查你班每位同学所穿鞋子的尺码;

(2) 从一批洗衣机中抽取5台,调查这批洗衣机的使用寿命;

(3) 调查一个社区所有家庭的年收入;

(4) 从一批袋装食品中抽取10袋,调查这批食品中防腐剂的含量.



某校计划成立下列学生社团:

社团名称	文学社	英语俱乐部	动漫创作社	合唱团	航模工作室	生物实验小组	健美协会
社团代号	A	B	C	D	E	F	G

为了解同学们对上述学生社团的喜爱情况,应开展调查,收集数据.

(1) 你准备采用普查还是抽样调查?

(2) 怎样通过调查获得数据?

调查一般采用“书面问卷”的形式进行.

小明设计了如下调查问卷,并抽取了50名同学进行调查.

调查问卷　　_____年_____月_____日

班级	你最喜爱的一个学生社团(只写代号)

调查结果:

E C F D A B D A C D
A D B A E B C A D C
G B B G C D C D C C
B D F A E D D C D F
B C A B C E C A D F

的平均身高吗?你准备如何得到这个数据?

(3) 你愿意用普查的方式了解一批灯泡或某种型号电视机的使用寿命吗?为什么?

对“交流”活动的教学,目的有两个:一是引导学生体会普查的应用与局限性,感受抽样的必要性;二是引导学生学会选择适合的调查方式,明确哪些调查适合做普查,哪些调查适合做抽样调查.

3. 小结

(1) 举例说明,哪些调查适合做普查,哪些调查适合做抽样调查.

(2) 举例说明总体、个体、样本、样本容量的意义.

【教学过程设计建议(第2课时)】

1. 情境创设

生活中,我们经常会看到各种数据和统计图表.想一想,在小学里,我们学习过哪些统计图表?

2. 探索活动

活动一　通过调查收集数据.

课本通过生活实例,较为详实地介绍了通过调查收集数据,并对数据进行整理、描述的方法.本节课的教学,既从一个较高的层面系统回顾小学阶段的相关内容,又为后续学习数据分析奠定了基础.

在“某校计划成立学生社团,需要了解同学们对这些社团的喜爱情况”的调查活动中,课本设计了2个问题引导学生讨论、思考.

微信公众号:电子课本大全

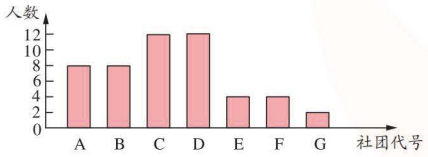
我们可以用统计表对调查结果进行整理.

喜爱各社团的学生人数统计表

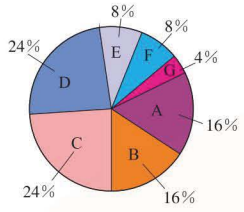
社团代号	A	B	C	D	E	F	G
划　记	正下	正下	正正丁	正正丁	丌	丌	丁
人　数	8	8	12	12	4	4	2
百分比	16%	16%	24%	24%	8%	8%	4%

根据上面的统计数据，可以画出如下的条形统计图和扇形统计图：

喜爱各社团的学生人数条形统计图



喜爱各社团的学生人数分布扇形统计图



交流　从上面的条形统计图、扇形统计图中你能获得哪些信息?

练习　设计一份调查问卷，在本班开展“每天用于课外阅读的时间”的调查，并整理调查结果，列出统计表，画出条形统计图.

(2)课本采用了设计调查问卷的方式来获取调查数据,这是调查活动中通常采用的一种收集数据的方式.

【内容解读】

从“喜爱各社团的学生人数统计表”及相应的条形统计图、扇形统计图中,可以看出喜爱“动漫创作社”、“合唱团”的人数最多,各有12人,分别占被调查人数的24%;喜爱“文学社”、“英语俱乐部”的人数排在第二位,各有8人,分别占被调查人数的16%;喜爱“健美协会”的人数最少,只有2人,占被调查人数的4%等.

除了上述从条形统计图、扇形统计图中获得的信息外,“交流”活动中,还应引导学生根据样本信息,对总体做出估计、推断,渗透统计思想.

【练习解答】

设计下列调查问卷供参考:

调差问卷　　年　　月　　日

姓名	学号	每天用于课外阅读的时间(以下选项中只选一个)			
		①基本不读	②不到30 min	③30~60 min	④60 min以上

对调查活动,课本采用了设计调查问卷的方式来收集数据.

“调查问卷”是收集数据的一种工具,是调查者根据调查目的所设计的由问题、备选答案和说明等组成的一种调查形式.在生活中,调查通常采用设计调查问卷的方式进行.教学时,要引导学生感悟为了获得真实的数据,设计调查问卷时应注意的问题,如调查目的是什么、调查对象是什么、问卷应包括哪些内容、如何提出问题、如何设计选择答案等.

通过调查收集数据的过程,是一个有意义的活动过程,教学时,教师可以选取一个调查项目,例如,了解班级每个学生家庭电话拥有情况,引导学生动手设计调查问卷并收集数据.

活动二　对收集到的数据进行处理.

收集到的数据往往需要加以处理才能发现数据的分布规律.课本对数据的处理分为2个层次.

第1层次:用表格整理数据.

课本中“喜爱各社团的学生人数统计表”是用“划记”的方法来统计的,从统计表中可以清楚地看出学生喜爱的社团的情况.

“喜爱各社团的学生人数统计表”实际上是一个频数分布表,在学习了频数概念后我们可以知道这里的人数就是频数.

第2层次:用条形统计图、扇形统计图描述数据.

课本中的条形统计图、扇形统计图是根据“喜爱各社团的学生人数统计表”画出的.教学时,要引导学生“读图”,从统计图表中获取相关的信息,这是统计学习中的一个基本功.

微信公众号：电子课本大全

7.1 习题

1. 下列调查是用普查好，还是用抽样调查好？说说你的理由．
   (1) 一批电视机的使用寿命；
   (2) 全校学生最喜爱的体育运动项目；
   (3) 全市学生的家庭 1 周内丢弃塑料袋的数量．
2. 指出下列调查中的总体、个体、样本和样本容量．
   (1) 为了解某市八年级学生每天做家庭作业所用的时间，从该市八年级学生中抽取 100 名学生进行调查；
   (2) 为了解一批零件的尺寸与标准尺寸的误差，从这批零件中抽取 10 件进行调查．
3. 举例说明哪些调查适合普查，哪些调查适合抽样调查．
4. 利用下面的调查问卷对全班同学去学校的方式进行调查，并整理调查结果，列出统计表，画出条形统计图．

调查问卷　　年　月　日

去学校的方式（代号）	乘公共汽车（A）	骑自行车（B）	步行（C）	乘私人汽车（D）	其他（E）

【习题解答】

1. (1)对“一批电视机使用寿命”的调查带有破坏性，因而调查对象不允许过多，只适合做抽样调查；

(2)对“全校学生最喜爱的体育运动项目”的调查，可以做普查，也可以做抽样调查，只要学生讲得有道理都应给予肯定；

(3)对“全市学生家庭1周内丢弃塑料袋数量”的调查，只适合做抽样调查．

2. (1)该市八年级学生每天做家庭作业所用时间的全体是总体，该市八年级每名学生每天做家庭作业所用时间是个体，从中抽取的100名学生每天做家庭作业所用时间是总体的一个样本，样本容量为100．

(2)这批零件的尺寸与标准尺寸误差的全体是总体，这批零件中每个零件的尺寸与标准尺寸的误差是个体，从中抽取的10个零件的尺寸与标准尺寸的误差是总体的一个样本，样本容量为10．

3. 略．

4. 可采用合作学习的方式，分组对组内的同学进行调查，然后汇总全班数据，列出统计表，画出条形统计图．

对于条形统计图、扇形统计图，学生在小学阶段已经学过，能画出条形统计图来描述数据，但对扇形统计图只能从中读出相关信息，还不能画出扇形统计图来描述数据．

用表格对数据进行整理，并根据表格画出相应的统计图来描述数据，既是对小学所学习的统计表、统计图的回顾和总结，又是引导学生进行数据分析的开始，更渗透了统计中用样本估计总体的思想．教学时，要注意前后知识间的联系，做好衔接工作．

3. 小结

(1)举例说明，如何对收集到的数据进行整理、描述．

(2)从“喜爱各社团的学生人数统计表”及相应的条形统计图、扇形统计图中你能获得哪些信息？

【课程资源】

要使抽样调查的结果真实、可靠，调查时要注意如下几点：

(1)样本要按照随机的原则抽取，总体中的每一个个体被抽取的可能性应是相等的．因此，抽样时要保证总体中个体的分布是均匀的，不出现倾向性误差，确保样本的代表性．

(2)抽取的全部样本作为一个“代表团”，用整个“代表团”来估计总体，而不是用少数个体来估计总体．

(3)抽取的样本数量要根据调查误差的要求，经过科学计算确定．

微信公众号：电子课本大全

7.2 统计图的选用

中华人民共和国从1953年到2010年共进行了6次全国人口普查．根据第2次到第6次全国人口普查结果，我国人口总数及每10万人中具有各类文化程度的人数情况如下：



第2次全国人口普查

1964年全国人口总数723 070 269人．我国每10万人中，具有大学文化程度的416人，具有高中文化程度的1 319人，具有初中文化程度的4 680人，具有小学文化程度的28 330人．

第3次全国人口普查

1982年全国人口总数1 031 882 511人．我国每10万人中，具有大学文化程度的615人，具有高中文化程度的6 779人，具有初中文化程度的17 892人，具有小学文化程度的35 237人．

第4次全国人口普查

1990年全国人口总数1 160 017 381人．我国每10万人中，具有大学文化程度的1 422人，具有高中文化程度的8 039人，具有初中文化程度的23 344人，具有小学文化程度的37 057人．

【情境说明】

课本从“我国第2~6次人口普查全国人口总数及每10万人中具有各类文化程度的人数情况”引入课题．

用统计表的形式对数据进行整理，是数据处理的开始，也是制作统计图描述数据的基础．

本节课，我们将在研究统计表的基础上，学习如何制作扇形统计图，为进一步研究几种常用统计图的特点以及根据具体问题情境选用合适的统计图来描述数据做准备．

【教学目标】

1. 会运用统计表对数据进行整理，会制作扇形统计图，知道3种统计图的各自特点．

2. 能根据具体问题情境选择合适的统计图来描述数据，体会统计图表的选取对更好地反映数据特征的作用．

3. 体会数据对判断、决策的作用，培养统计观念．

【教学过程设计建议(第1课时)】

1. 情境创设

课本从“我国第2~6次人口普查全国人口总数及每10万人中具有各类文化程度的人数情况”引入课题．

收集、整理、描述数据是数据处理的一个基本过程．通过调查收集到的数据需要进行加工整理，使其条理化、系统化，以便更好地获取数据信息，做出决策．统计中，常用统计表对数据进行整理，用统计图从不同的角度来直观地描述数据．本节课，我们将在研究统计表的基础上，学习如何制作扇形统计图，为进一步研究几种常用统计图的特点以及根据具体问题情境选用合适的统计图来描述数据做准备．

2. 探索活动

活动一　阅读统计图表，提取数据信息．

活动中，可以设计如下问题引导学生思考：

(1)“1964~2010年我国人口总数统计表”所反映的调查项目是什么？从中你能获得哪些信息？

(2)“1964~2010年我国每10万人中具有各类文化程度的人数统计表”中，把文化程度分成几类？1964年、

微信公众号：电子课本大全

第 5 次全国人口普查

2000 年全国人口总数 1 295 330 000 人．我国每 10 万人中，具有大学文化程度的 3 611 人，具有高中文化程度的 11 146 人，具有初中文化程度的 33 961 人，具有小学文化程度的 35 701 人．

第 6 次全国人口普查

2010 年全国人口总数 1 370 536 875 人．我国每 10 万人中，具有大学文化程度的 8 930 人，具有高中文化程度的 14 032 人，具有初中文化程度的 38 788 人，具有小学文化程度的 26 779 人．

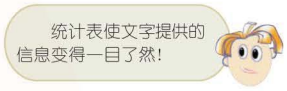
根据第 2～6 次全国人口普查的数据，可以列出统计表、绘制统计图，使数据信息显示得更直观、更清晰．

我国人口总数统计表

年份	全国人口总数
1964 年	723 070 269
1982 年	1 031 882 511
1990 年	1 160 017 381
2000 年	1 295 330 000
2010 年	1 370 536 875

数据来源：第 2～6 次全国人口普查

从上面的统计表中，可以清楚地看出全国人口总数及人口增加情况．



【内容解读】

用统计表整理数据可以使文字信息变得一目了然．

统计表的设计主要包含两大部分：一是调查的项目栏，二是记录数据的数据栏．统计表的格式不要求统一，总的原则是简单明了，有利于突出数据的内在规律．

1982 年、1990 年、2000 年、2010 年我国每 10 万人中具有各类文化程度的人数分别是多少？

(3)比较 1964~2010 年我国每 10 万人中具有各类文化程度的人数，你获得哪些信息？谈谈你的感受．

(4)从“1982 年我国每 10 万人中具有各类文化程度人数分布的扇形统计图”中，你获得哪些信息？

活动二　制作扇形统计图．

小学里，学生已认识扇形统计图，并能从扇形统计图中获取相关的信息，扇形统计图的制作是对小学已有知识的延伸．

活动分为 3 个层次．

第 1 层次：通过“读图”，使学生认识扇形统计图的结构(在扇形统计图中，以整个圆代表统计项目的总体；每一统计项目分别用圆中不同的扇形来表示；扇形面积占圆面积的百分比与各统计项目占总体的百分比相同)．

第 2 层次：通过“思考”活动，探索各统计项目占总体的百分比与相应扇形圆心角大小之间的关系(扇形面积占圆面积的百分比与各统计项目占总体的百分比相同；在同圆中，扇形面积是由扇形圆心角的大小决定的；在扇形统计图中，扇形圆心角=该统计项目占总体的百分比 ×360°)．

第 3 层次：根据表格所提供的信息，制作扇形统计图．

设计“尝试”活动的目的是明晰制作扇形统计图的主要步骤．教学时，教师要引导学生通过“尝试”活动自己归纳制作扇形统计图的一般步骤，而不是根据教师给出的步骤加以模仿．同时，在制作扇形统计图时，教师要引导学生注意写上统计图的名称，注明数据来源．

微信公众号：电子课本大全

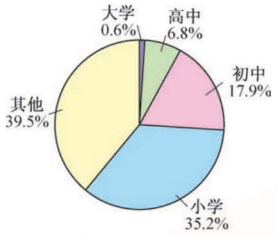
我国每 10 万人中具有各类文化程度人数的统计表

人数 / 文化程度 / 年份	大 学	高 中	初 中	小 学	其 他
1964 年	416	1 319	4 680	28 330	65 255
1982 年	615	6 779	17 892	35 237	39 477
1990 年	1 422	8 039	23 344	37 057	30 138
2000 年	3 611	11 146	33 961	35 701	15 581
2010 年	8 930	14 032	38 788	26 779	11 471

数据来源：第 2～6 次全国人口普查

从上面的统计表中，可以清楚地看出我国公民具有各类文化程度的人数及变化情况．

1982 年我国每 10 万人中具有各类文化程度人数分布的扇形统计图



数据来源：第 3 次全国人口普查

图 7－1

图 7－1 清楚地反映了 1982 年我国具有各类文化程度的人数在总人数中所占的百分比．

扇形统计图中，整个圆表示统计项目的总体，每一统计项目分别用圆中不同的扇形来表示，扇形面积占圆面积的百分比与各统计项目占总体的百分比相同．

【内容解读】

课本用扇形统计图呈现1982年我国每10万人中具有各类文化程度人数分布的情况，目的是引导学生感受用扇形统计图描述数据的特征，体会扇形统计图能直观、形象地显示各个量在总量中所占份额这一特点．

3. 小结

(1)扇形统计图有哪些特点？

(2)制作扇形统计图的关键是什么？

(3)举例说明制作扇形统计图的一般步骤．

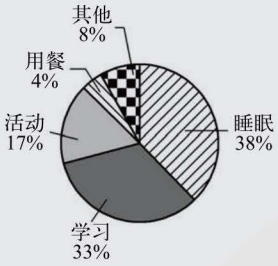
微信公众号：电子课本大全

【内容解读】

计算各统计项目占总体的百分比及相应扇形圆心角度数：

项目	占全天时间的百分比	扇形的圆心角
学习	33%	120°
睡眠	38%	135°
活动	17%	60°
用餐	4%	15°
其他	8%	30°
合计	100%	360°

画出扇形统计图：



【内容解读】

画扇形统计图时，一般要写出扇形统计图简洁的标题，注明数据来源．例如，在课本中要写出“小明一天时间安排扇形统计图”和“数据由小明同学提供”．

思考

在图 7－1 中，各统计项目占总体的百分比与相应扇形的圆心角（顶点在圆心的角）的大小有怎样的关系？

在扇形统计图中，扇形圆心角＝该统计项目占总体的百分比×360°.

尝试

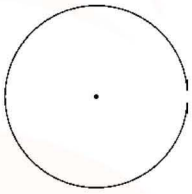
小明平均每天用于学习、睡眠、参加班级的各类活动、用餐及其他的时间如下：

项　目	时间/h	占全天时间的百分比（精确到 1%）	扇形的圆心角
学　习	8	$\frac{8}{24}\times100\%\approx33\%$	$360°\times\frac{8}{24}=120°$
睡　眠	9		
活　动	4		
用　餐	1		
其　他	2		
合　计	24		

（1）填写上面的统计表；

（2）根据统计表中的数据，用量角器在圆中画出各个扇形；

_____统计图



数据来源：_____

（3）在各个扇形上，标明相应名称和百分比；

（4）写出扇形统计图简明的标题，并注明数据来源．

微信公众号：电子课本大全

练习

1. 某市各类学校占该市学校总数的百分比如下：

幼儿园	小学	中学	高等院校	其他
40%	30%	20%	5%	5%

(1) 画扇形统计图表示表中的信息；

(2) 如果该市高等院校有 40 所，那么该市共有学校多少所？中学有多少所？

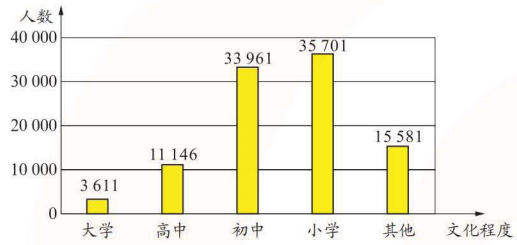
2. 根据下列统计表制作扇形统计图，表示各大洲陆地面积占地球陆地总面积的百分比．

世界七大洲陆地面积统计表

洲　名	面积/万平方千米	占地球陆地总面积的百分比（精确到 0.1%）
亚　洲	4 400	
非　洲	3 020	
北美洲	2 422.8	
南美洲	1 797	
南极洲	1 400	
欧　洲	1 016	
大洋洲	897	

条形统计图、扇形统计图、折线统计图可以把数据表示得非常直观．

2000 年我国每 10 万人中具有各类文化程度人数的条形统计图

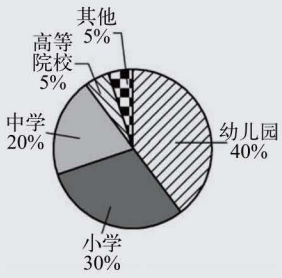


数据来源：第 5 次全国人口普查

图 7-2

【练习解答】

1. (1)某市各类学校分布扇形统计图



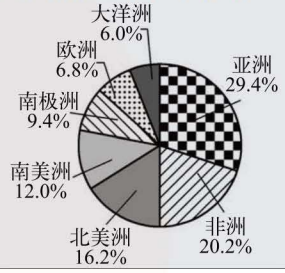
数据由该市教育部门提供

(2)该市共有 800 所学校．其中，中学有 160 所．

2. 学生完成此练习应使用计算器．在计算百分比及相应圆心角时可采用四舍五入的方法取近似值．

洲名	各大洲陆地面积占地球陆地面积的百分比	各大洲相应的扇形圆心角（精确到度）
亚洲	29.4%	106°
非洲	20.2%	73°
北美洲	16.2%	58°
南美洲	12.0%	43°
南极洲	9.4%	34°
欧洲	6.8%	24°
大洋洲	6.0%	22°
合计	100%	360°

七大洲陆地面积分布扇形统计图



【教学过程设计建议(第 2 课时)】

1. 情境创设

课本分别用条形统计图、扇形统计图、折线统计图表示 2000 年我国每 10 万人中具有各类文化程度的人数及人数分布、1964~2010 年我国每 10 万人中具有大学文化程度人数的情况，引导学生体会条形统计图、扇形统计图、折线统计图可以把数据直观地表示出来，感受这 3 种统计图各自的特点，从而能根据具体的问题情境选用合适的统计图来描述数据．

2. 探索活动

活动一　“读图”，从条形统计图、扇形统计图、折线统计图中获取相关信息．

教学时，可设计如下问题引导学生思考：

(1)从图 7-2、图 7-3、图 7-4 中，你能获取哪些信息？

(2)图 7-2、图 7-3 都是描述 2000 年我国每 10 万人中具有各类文化程度的统计图，它们分别凸显出数据所反映的哪一方面的信息？

(3)图 7-2、图 7-3、图 7-4 在描述数据方面各有什么特点？

(4)能用扇形统计图描述图 7-4 中的数据吗？

活动二　通过“讨论、交流”，探索条形统计图、扇形统计图、折线统计图各自的特点．

在引导学生“读图”的基础上，课本明晰了这 3 个统计图各自的特点，这些特点应在充分讨论、交流的基础上，引导学生用自己的语言加以归纳，并要求学生通过举例来加深理解．

活动三　通过“尝试、交流”，研究“复合条形统计

微信公众号：电子课本大全

【情境说明】

课本分别用条形统计图、扇形统计图、折线统计图表示2000年我国每10万人中具有各类文化程度的人数及人数分布、1964~2010年我国每10万人中具有大学文化程度人数的情况，引导学生体会条形统计图、扇形统计图、折线统计图可以把数据直观地表示出来，感受这3种统计图各自的特点．

3种统计图的比较、选用是本节课教学的重点．

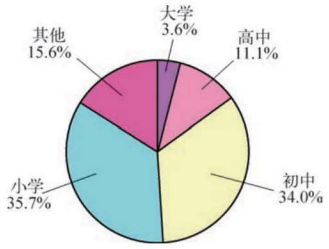
【内容解读】

(1)从图7-2中可以看出2000年我国每10万人中分别具有大学、高中、初中、小学及其他文化程度的人数情况；从图7-3中可以看出2000年我国每10万人中具有大学、高中、初中、小学及其他文化程度的人数分布情况(每10万人中具有各类文化程度的人数占总人数的百分比)；从图7-4中可以看出1964~2010年我国每10万人中具有大学文化程度的人数及变化趋势．

(2)图7-2凸显数据的变动情况；图7-3凸显总体中各组成部分所占的百分比．

(3)图7-3主要用于表示总体中各组成部分所占的百分比，对研究结构性问题很有用；图7-4所描述的数据与时间序列有关，用于反映事物的变化过程和趋势．

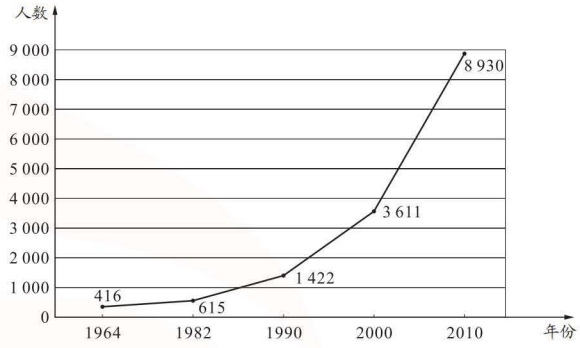
2000年我国每10万人中具有各类文化程度人数分布的扇形统计图



数据来源：第5次全国人口普查

图7-3

1964～2010年我国每10万人中具有大学文化程度人数的折线统计图



数据来源：第2～6次全国人口普查

图7-4



条形统计图、扇形统计图、折线统计图各有怎样的特点？

条形统计图用宽度相同的“条形”的高度描述各统计项目的数据；扇形统计图用圆中各扇形的面积描述各统计项目占总体的百分比；折线统计图用折线描述数据的变化过程和趋势．

在解决实际问题时，应根据实际需要选用合适的统计图．

我们还可以在同一个条形统计图中描述两组数据的变化情况．

图”、“复合折线统计图”．

“条形统计图”、“折线统计图”有单式、复式等形式，复式的条形统计图、折线统计图称为“复合条形统计图”、“复合折线统计图”．

生活中，有时在一个问题中会涉及两组数据，如何对这两组数据进行比较或描述它们的变化趋势，一种常用的方法是将它们画在同一个平面坐标系中．图7-5是等宽的长方形并排的复合条形统计图，从图中不仅可以看出2000年、2010年我国每10万人中具有各类文化程度的人数情况，而且能清楚地显示这两组数据比较的结果．

课本要求学生在认识“复合条形统计图”的基础上，尝试“用一个条形统计图来描述1982年和1990年我国每10万人中具有各类文化程度的人数情况”、“用一个折线统计图来描述1964年~2010年我国每10万人中具有大学、高中文化程度的人数情况”，这是对前面学习的3种统计图的选用的拓展．

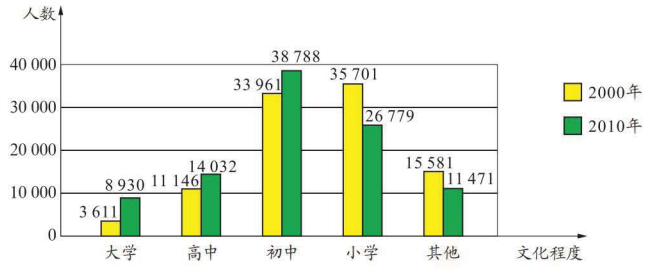
3. 小结

(1)举例说明条形统计图、扇形统计图、折线统计图各自的特点．

(2)通过“尝试”活动，你对复合条形统计图、复合折线统计图有哪些认识？

微信公众号：电子课本大全

2000 年、2010 年我国每 10 万人中具有各类文化程度人数的条形统计图



数据来源：第 5 次、第 6 次全国人口普查

图 7-5

从图 7-5 中，不仅可以看出 2000 年、2010 年我国每 10 万人中具有各类文化程度的人数变化情况，而且便于对这两组数据进行比较．



(1) 用同一个条形统计图描述 1982 年和 1990 年我国每 10 万人中具有各类文化程度的人数变化情况，并对这两组数据进行比较；

(2) 根据第 2～6 次全国人口普查的数据，用同一个折线统计图描述我国每 10 万人中具有大学、高中文化程度的人数的变化过程和趋势，并对这两组数据进行比较．



1. 用合适的统计图表示下列信息：

(1) 2000 年某市平均每人每月消费性支出中，食品占 40.6%，衣着占 12.2%，家庭设备用品及服务占 7.0%，医疗保健占 5.9%，交通和通信占 8.7%，娱乐、教育、文化服务占 12.7%，居住占 8.6%，其他占 4.3%；

(2) 鸡、鸭、鹅、鸽子的孵化期分别为 21 天、30 天、30 天、16 天；

(3) 我国不同年份的国内生产总值如下：

年　份	1952 年	1962 年	1970 年	1980 年	1990 年	2000 年
国内生产总值/亿元	679	1 149.3	2 252.7	4 517.8	18 547.9	89 468

(4) 扇形统计图主要用于研究结构性问题，用来表示总体中各组成部分所占的百分比，折线统计图主要用于表示数据的变化特征，反映事物的变化过程和趋势．一般说来，用扇形统计图不能描述图 7-4 中的数据．

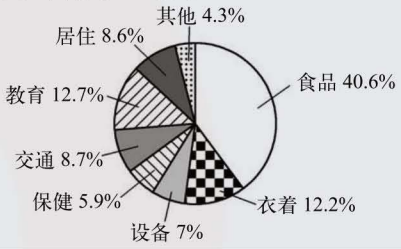
【内容解读】

教学时，要充分展开对“复合条形统计图”、“复合折线统计图”的认识过程．例如，教学时，可以先用两个条形统计图分别描述 2000 年、2010 年我国每 10 万人中具有各类文化程度的人数情况，并对这两组数据进行比较，然后再用一个条形统计图加以描述，并进行比较．通过展开过程，引导学生感悟到，当一个问题涉及两组数据时，一种常用的方法是将它们画在同一个平面坐标系中，这样不仅能清楚地显示数据的变动情况和变化趋势，而且能清楚地显示这两组数据比较的结果．

【练习解答】

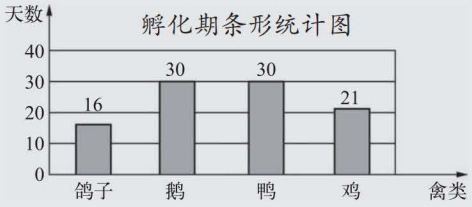
1. (1)选用扇形统计图．

2000 年某市平均每人每月消费支出分布扇形统计图



微信公众号：电子课本大全

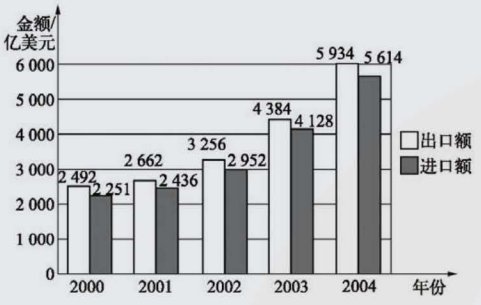
(2)选用条形统计图.



(3)选用折线统计图.



2. 我国 2000~2004 年进出口额条形统计图



2. 我国 2000～2004 年进出口额如下：

年　份	2000 年	2001 年	2002 年	2003 年	2004 年
出口额/亿美元	2 492	2 662	3 256	4 384	5 934
进口额/亿美元	2 251	2 436	2 952	4 128	5 614

分别用同一个条形统计图和同一个折线统计图描述这两组数据，并进行比较.



用计算机画统计图

利用 Microsoft Office 软件中的 Excel(电子表格程序)可以方便地画统计图.

试以下面“小明某星期在校体育活动时间统计表”中的数据为例，用 Excel 工作表画出统计图.

小明某星期在校体育活动时间统计表(单位：min)

星期一	星期二	星期三	星期四	星期五
25	30	45	20	50

1. 打开计算机，在 Windows 桌面上点击屏幕左下角的“开始”菜单，在“程序”行，点击子菜单“Microsoft Office”中“Excel 2003”程序(图 1)，启动电子表格程序打开工作簿(图 2).



图 1

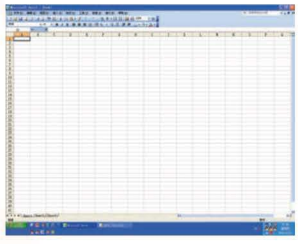


图 2

2. 在 Excel 工作表中，移动光标选择某一个单元格作为表格的起始单元格，输入小明某星期在校体育活动时间统计表及其中的所有数据(图 3).

【教学过程设计建议(第 3 课时)】

具备条件的学校，应积极安排教学，条件暂不具备的学校，该内容可暂不安排教学.

本节课的内容以“数学实验室”的方式呈现.

1. 边学边用

(1)按照课本示例的程序，画出小明某星期在校体育活动时间的扇形统计图；

(2)按照课本示例的程序，画出小明某星期在校体育活动时间的条形统计图；

(3)按照课本示例的程序，画出小明某星期在校体育活动时间的折线统计图；

(4)将本章学习过的统计图，再用 Excel 画一画；

(5)大胆尝试其他功能，遇到困难，点击“帮助”按钮.

2. 探索活动

掌握了用 Excel 制图技能后，可利用这一技能解决 1~2 个实际问题.

【课程资源】

中国国家统计局

National Bureau of Statistics of China

http://www.stats.gov.cn

中国国家统计局每年都进行大量的统计工作，为政府在经济、交通、教育、住房等方面的规划工作提供参考资料.

微信公众号：电子课本大全

3. 拖动鼠标，选中输入表中的所有数据(如本例图中的C3到G4)，点击工作表第2行工具栏中的“图表向导”(或点击“插入”菜单打开“图表”对话框)，显示“图表向导”(图4).

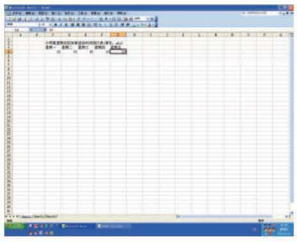


图3

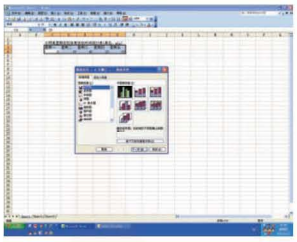


图4

4. 在“图表向导”左侧的“图表类型”中选择“饼图”、右侧的“子图表类型”中选择“饼图”，点击“下一步”按钮(图5).

5. 点击“下一步”，按照图表向导的提示和指引，在“图表标题”中输入标题“小明某星期在校体育活动时间统计表(单位：min)”(图6).

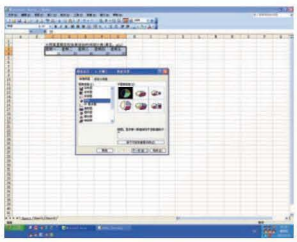


图5

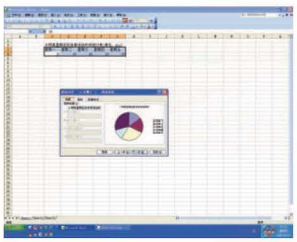
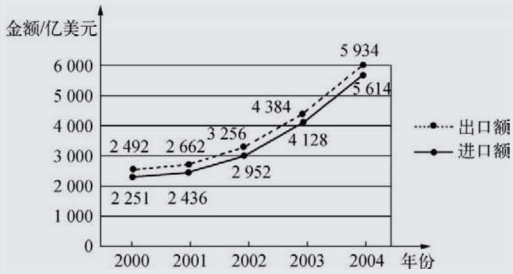


图6

6. 点击“完成”按钮，则所画的扇形统计图出现在电子表格的工作表中，移动光标到表格的空白单元格位置，如单元格P24，点击鼠标左键，即可把所画统计图在工作表中的位置确定下来(图7).

我国2000~2004年进出口额折线统计图



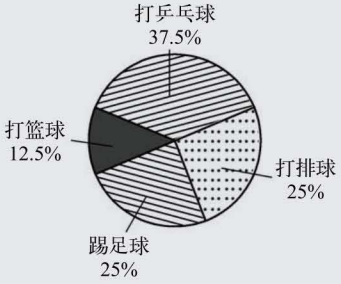
条形统计图清楚地显示了我国2000~2004年进出口额的变动情况；折线统计图清楚地显示了我国2000~2004年进出口额的变化过程和趋势.根据条形统计图和折线统计图可以发现：我国2000~2004年的进出口额都在发生变化，但总体上出口额大于进口额.

微信公众号：电子课本大全

【习题解答】

1. 题目中未给出总体的具体数据，因而不能判断出哪一所学校的男生人数多.扇形统计图凸显的是总体中各组成部分所占的百分比，仅根据扇形统计图一般不能直接得到具体数据.

2. (1)全班同学最喜受的体育活动人数分布扇形统计图.

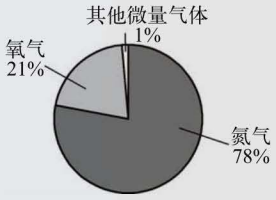


(2)“全年级同学最喜受的体育活动人数分布扇形统计图”与“全班同学最喜爱的体育活动人数分布扇形统计图”相同.

由于扇形统计图主要用于表示总体中各组成部分所占的百分比，与总体数据无关，因此两个扇形统计图基本相同.

3. (1)选择扇形统计图.

空气主要成分分布扇形统计图



7. 把光标移动到饼图的某一色块上，如黄色，这时会出现与该色块对应的数据和解释(图 8).

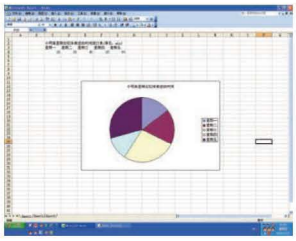


图 7

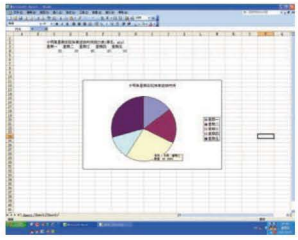
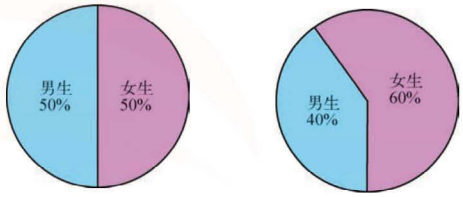


图 8

试按以上示范步骤，画出小明某星期在校体育活动时间的条形统计图和折线统计图.

7.2 习题

1. 根据下列两个扇形统计图，能否判断哪一所学校的男生人数多？为什么？



A 校　　B 校

(第 1 题)

2. 用扇形统计图表示下列信息：

(1) 全班 48 名同学中，6 人最喜欢打篮球，18 人最喜欢打乒乓球，12 人最喜欢踢足球，12 人最喜欢打排球；

(2) 全年级 384 名同学中，48 人最喜欢打篮球，144 人最喜欢打乒乓球，96 人最喜欢踢足球，96 人最喜欢打排球.

观察所画的扇形统计图，你发现了什么？

微信公众号：电子课本大全

3. 用合适的统计图表示下列信息：

(1) 空气的成分(除去水汽、杂质等)是：氮气约占78%，氧气约占21%，其他微量气体(如氩气、氖气、氦气、二氧化碳等)约占1%；

(2) 某中学有1 500名学生，他们去学校的方式为：步行300人，骑自行车950人，乘公共汽车200人，其他50人；

(3) 2003～2007年我国粮食产量如下(数据来源：中国国家统计局)：

年　份	2003年	2004年	2005年	2006年	2007年
粮食产量/万吨	43 070	46 947	48 402	49 800	50 150

4. 在2008年北京奥运会上，我国体育健儿取得了辉煌的成绩．

2008年北京奥运会金牌榜

国　家	中国	美国	俄罗斯	英国	德国	澳大利亚	其他
金牌数/枚	51	36	23	19	16	14	143

分别画出上述国家和地区在2008年北京奥运会上所获金牌数的条形统计图和扇形统计图(所计算的百分数精确到0.1%)．

5. 两支篮球队进行4场对抗赛的结果如下(单位：分)：

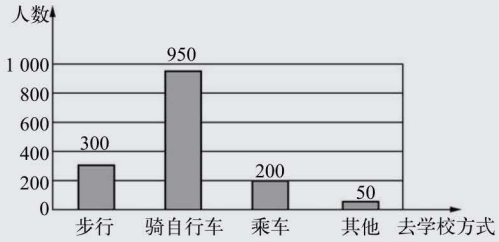
得分 场次 / 球队	第1场	第2场	第3场	第4场
球队1	66	72	88	90
球队2	95	90	89	80

(1) 你认为用哪种统计图反映这两支篮球队4场对抗赛的结果比较合适？画出你选用的统计图；

(2) 你是怎样评价这两支球队的？如果再进行一场比赛，你预测结果会如何？

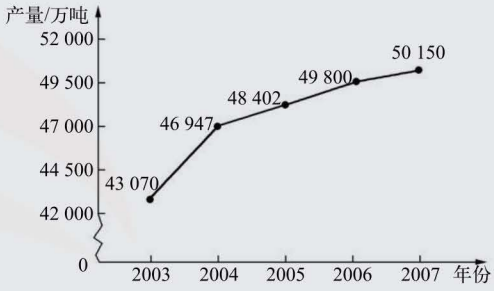
(2)选用条形统计图．

某中学学生去学校方式人数的条形统计图

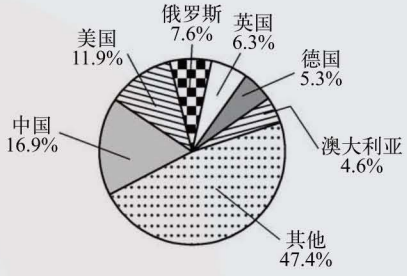


(3)选用折线统计图．

2003~2007年我国粮食产量折线统计图

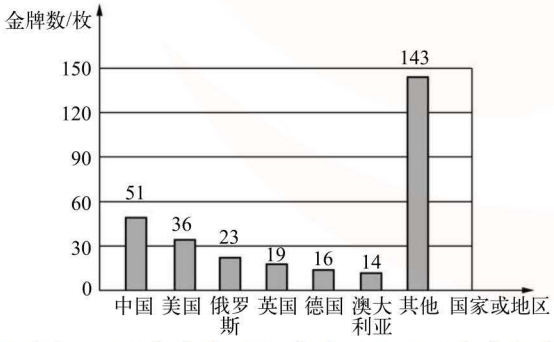


4. 2008年北京奥运会金牌分布扇形统计图



(其余解答见本页下方)

2008年北京奥运会金牌榜条形统计图



5. (1)可以画复合条形统计图，也可以画复合折线统计图来反映这两支篮球队4场对抗赛的结果．

(2)球队1的场次得分在不断增加，而球队2的场次得分在逐渐减少，从发展趋势看，如果再进行一场比赛预计球队1取胜的可能性较大．

学生对两支球队的评价及预测，只要有道理都应给予肯定，例如：球队1对抗赛的平均得分为79分，球队2的平均得分为88.5分，说明球队2的整体实力较强等．

微信公众号：电子课本大全

【情境说明】

课本设计了选举“环保卫士”的活动，教学时，教师要做好指导、协调工作，通过活动引导学生亲身经历数据的收集、整理、描述的过程，进一步体会对数据进行整理、描述的必要性．

结合具体情境引入频数、频率的概念，易于学生理解频数、频率的意义．

教学时，也可以根据所在班级学生的生活实际选择另外的主题开展调查活动．

【内容解读】

按城市空气质量级别填表：

空气污染指数	Ⅰ级	Ⅱ级	Ⅲ级	Ⅳ级
频　数	1	34	11	1
频　率	0.021	0.724	0.234	0.021

对城市空气质量级别中的频数可以用条形统计图来表示；对城市空气质量级别中的频率可以用扇形统计图来表示．

7.3　频数和频率



为了增强环保意识，学校规定每个班级选举 1 名学生当“环保卫士”．八年级(1)班有 4 名学生参加竞选，由全班学生投票选出“环保卫士”，办法如下：

(1) 每人在选票上写 1 名自己认为最合适的候选人姓名，并将选票投入票箱；

(2) 由全班推选的 3 位同学分别唱票、监票、记录；

(3) 填写表格，得票最多的学生当选“环保卫士”．



候选人	唱票记录	得票数	得票率

在统计数据时，各个对象出现的次数有多有少，或者说出现的频繁程度不同，某个对象出现的次数称为该对象的**频数**(absolute frequency)，频数与总次数的比值称为**频率**(relative frequency)．

例如，在选举“环保卫士”活动中，每名候选人的得票数是该候选人得票的频数；每名候选人的得票率是该候选人得票的频率．



国家环保总局公布的 47 个重点城市某日的空气质量如下：

城市	郑州	武汉	长沙	广州	深圳	珠海	汕头	湛江	南宁	桂林	北海
污染指数	85	99	107	119	94	78	67	51	111	52	62

【教学目标】

1. 理解频数、频率的意义，并能根据数据处理的结果做出判断．

2. 经历数据的收集、整理和描述的过程，在活动中发展学生的统计意识和数据处理能力．

【教学过程设计建议】

1. 情境创设

课本设计了“数学实验室”，通过选举“环保卫士”活动，引导学生亲身经历数据的收集、整理、描述的过程，并在活动中进一步发展学生的数据处理能力，理解频数、频率的意义．

在“某校计划成立学生社团，需要了解学生对相关社团的喜爱情况”的调查活动中，实际上已涉及到频数与频率，但课本没有“顺便”给出频数、频率的概念．这样处理是基于两方面的考虑：一是在中学阶段学生刚接触到统计知识，不希望在一个课时中出现的概念过多；二是频数、频率是统计中的两个重要概念，将“频数与频率”单独安排成一节，有利于引导学生亲身经历数据处理的过程，并将感性认识上升到理性认识．

教学时，不要用教师给出的数据替代学生的实践活动(也可以根据所在班级学生的生活实际选择另外的主题开展调查活动)．

2. 探索活动

活动一　利用统计表对收集到的数据进行整理、描述，并在数据处理过程中理解频数、频率的意义．

微信公众号：电子课本大全

海口	成都	重庆	贵阳	昆明	拉萨	西安	兰州	西宁	银川	乌鲁木齐	北京
49	114	174	96	74	76	128	128	97	65	205	64

天津	石家庄	秦皇岛	太原	呼和浩特	沈阳	大连	长春	哈尔滨	上海	南京
81	98	73	125	124	138	68	90	98	86	74

苏州	南通	连云港	杭州	宁波	温州	合肥	福州	厦门	南昌	济南	青岛	烟台
89	79	71	92	80	82	81	79	66	101	93	73	53

国家环保总局规定：空气污染指数 1～50 为Ⅰ级，51～ 100 为Ⅱ级，101～200 为Ⅲ级，201～300 为Ⅳ级．请按城市空气质量级别填表，并用合适的统计图表示．

空气污染指数	Ⅰ级	Ⅱ级	Ⅲ级	Ⅳ级
划　记				
频　数				
频　率（精确到 0.001）				



1. 国际奥委会确定奥运会举办城市的投票规则是：参与投票的国际奥委会委员每轮投票只能选择候选城市中的一个城市；投票后，只要某个申办城市获得超过 50% 的选票，即被确定为举办城市；如果没有一个城市得到超过 50% 的选票，那么进行第二轮投票……在多轮投票的情况下，每一轮淘汰一个得票最少的城市，直到最终确定一个举办城市．

   国际奥委会于 2001 年 7 月 13 日在莫斯科举行会议，通过投票确定 2008 年奥运会举办城市．在第 2 轮投票中，北京获得总计 105 张选票中的 56 票，得票率超过 50%，取得了 2008 年奥运会举办权．在第 2 轮投票中，北京得票的频数是多少？频率是多少（精确到0.001）？

2. 从全班学生中抽取 20 名学生，测量了他们 800 m 赛跑后 1 min的脉搏次数，结果如下（单位：次）：

   144　150　156　165　141　149　162　160　135　159
   150　164　168　153　158　142　161　157　154　147

【内容解读】

将一组数据分成若干组，各组的频数是指落在该组中的数据的个数；各组的频率是指该组的频数与数据总数的比值．

【练习解答】

1. 北京在国际奥委会关于2008年奥运会举办城市的第2轮投票中，得票的频数为56，得票的频率约为53.3%（0.533）．

课本介绍“国际奥委会确定奥运会举办城市的投票规则”和“北京取得2008年奥运会举办权的投票过程”的目的有2个：(1)说明随着改革开放的深入，我国的综合国力和在国际上的地位都得到了极大的提升；(2)引导学生在具体的问题情境中理解频数、频率的意义．

2.

脉搏次数 x（次/分）	$130 \leqslant x < 140$	$140 \leqslant x < 150$	$150 \leqslant x < 160$	$160 \leqslant x < 170$
频　数	1	5	8	6
频　率	0.05	0.25	0.40	0.30

活动分为2个层次．

第1层次：通过选举“环保卫士”的活动，进一步引导学生经历数据的收集、整理、描述的过程．

课本中，选举“环保卫士”活动经历了如下过程：明确调查目的；确定调查对象；选择调查方法；展开调查；记录、处理数据；得出结论．

第2层次：在数据处理过程中理解频数、频率的意义．

对频数、频率的意义，要引导学生在具体的问题情境中加以理解．例如，在选举“环保卫士”的活动中，频数是指统计数据时，某个对象出现的次数；在本节“尝试”活动中，频数也可以理解为落在某个组别中数据的个数．

对频数、频率等概念，教学时不应要求学生死记，只要学生能结合具体问题情境体会其含义即可．

活动二　通过“尝试、交流”，加深对频数、频率的理解．

课本设计了“统计城市空气质量级别”的问题情境，引导学生对问题进行分类，并在分类统计过程中进一步理解频数、频率的意义：在统计中，频数也可以理解为落在某个组别中的数据的个数；频率也可以理解为频数与数据总数的比值，各个组别的频率的和为1．

对频率的概念，本节是结合“比值”给出的，对频率的更进一步的理解，将在“认识概率”一章中展开．

3. 小结

举例说明频数、频率的意义．

微信公众号：电子课本大全

填写表格：

脉搏次数 x（次/分）	$130\leqslant x<140$	$140\leqslant x<150$	$150\leqslant x<160$	$160\leqslant x<170$
划　记				
频　数				
频　率				

7.3 习题

1. 某射手在一次射击训练中，共射了 40 发子弹，结果如下（单位：环）：

8　7　7　8　9　8　7　7　7　8
8　9　7　8　8　8　9　8　9　8
10　9　9　8　9　8　10　10　9　8
8　9　9　10　9　9　10　10　9　9

填写表格：

环　数	7	8	9	10
频　数				
频　率				

2. 小丽调查了全班 50 名同学的身高，结果如下（单位：cm）：

141　154　149　154　162　165　168　150　155　163
144　168　150　157　155　171　155　160　145　163
145　155　152　160　148　145　169　152　160　163
158　157　159　160　168　150　157　152　158　155
157　157　159　162　145　150　158　144　155　172

填写表格：

身高/cm	145.5 以下	145.5～150.5	150.5～155.5	155.5～160.5	160.5～165.5	165.5～170.5	170.5 以上
频　数							
频　率							

【习题解答】

1. 填表：

环　数	7	8	9	10
频　数	6	14	14	6
频　率	0.15	0.35	0.35	0.15

2. 填表：

身高/cm	145.5 以下	145.5～150.5	150.5～155.5	155.5～160.5	160.5～165.5	165.5～170.5	170.5 以上
频数	7	6	11	14	6	4	2
频率	0.14	0.12	0.22	0.28	0.12	0.08	0.04

该题为在下一节研究“频数分布表和频数分布直方图”做铺垫．

微信公众号：电子课本大全

7.4 频数分布表和频数分布直方图

某校为了解八年级学生身高的范围和整体分布情况，抽样调查了八年级50名学生的身高，结果如下(单位：cm)：

150	148	159	156	157	163	156	164	156	159
169	163	170	162	163	164	155	162	153	155
160	165	160	161	166	159	161	157	155	167
162	165	159	147	163	172	156	165	157	164
152	156	153	164	165	162	167	151	161	162



怎样描述这50名学生身高的分布情况？



这50个数据中，最小值是147，最大值是172，它们相差25．由此可知，这50个数据分布在147～172的范围内．

为了更精确地描述这些数据的整体分布情况，我们采用如下的方法：

首先，把这些数据分成若干组．例如，把相差不超过3的数据分为一组，$\frac{25}{3}=8\frac{1}{3}$，于是把这些数据分为9组，组距为3．为使每个数据都能分到某一组内，我们取比“147”小其末位半个单位的数，即146.5作为分组的最小值，这样分成的9组为：

146.5～149.5	149.5～152.5	152.5～155.5
155.5～158.5	158.5～161.5	161.5～164.5
164.5～167.5	167.5～170.5	170.5～173.5

其次，把这50个数据分别“划记”到相应的组中，统计每组中相

【情境说明】

通过前面的教学，学生经历了利用统计表和条形统计图、扇形统计图、折线统计图整理、描述数据的过程．但对于连续型的统计量，学生根据已有的经验就不能绘制出相应的统计图来清楚地呈现数据的分布特征和规律．

对连续型的统计量，要了解数据的分布情况，就要对数据适当分组，以便于观察数据的分布情况．对此，课本设计了多个问题情境引导学生讨论、交流，感悟分组的必要性和分组的意义、作用．

对分组的必要性和分组的意义、作用，教学时，还可以适当补充一些学生熟悉的例子．例如，为了解全班学生某次数学考试情况，不仅需要知道全班学生此次考试的平均成绩，还要对考试成绩进行分组，知道90分以上占多少，80分~90分占多少，…，60分以下占多少等．

【内容解读】

获得一组数据的频数分布的一般步骤是：计算最大值与最小值的差；确定组距与组数；决定分点；列频数分布表；画频数分布直方图．课本在呈现相关内容时，并没有按这5个步骤分步表述，目的是防止学生死记硬背，生搬硬套．教学时，要通过具体实例呈现相应内容，一般不要列出这5个步骤．

【教学目标】

1. 经历数据的收集、整理、描述的过程，在活动中发展学生的统计意识和数据处理能力．

2. 了解频数分布的意义，会列出频数分布表、绘制频数分布直方图．

3. 能根据统计结果做出合理的判断和预测，在解决实际问题的过程中，体会统计对决策的作用．

【教学过程设计建议】

1. 情境创设

课本以“为了解某校八年级学生身高的范围和整体分布情况，需要对抽取的样本数据进行整理、描述”为问题情境，引入本节课教学内容．

身高数据具有连续性，为了解这组数据的分布特征和变化规律，需要先对数据适当分组，以便于观察数据分布的特征和规律.对此，课本做了2次铺垫：

(1)在“7.3 频数和频率”中，设置了“尝试”活动，通过引导学生求相应分组的频数和频率，感受分组的意义和作用．

(2)在“7.3 频数和频率”的“练习”中，对1min脉搏的次数进行分组，并求相应范围的频数和频率；在“习题”中，对同学的身高进行分组，并求相应范围的频数和频率，进一步引导学生体会“对数据适当分组可以清楚地了解数据的分布情况”，感受分组的必要性．

2. 探索活动

活动一 通过“讨论”，引导学生感受分组的必要性．

微信公众号：电子课本大全

【内容解读】

列频数分布表，关键是确定分点．一般地，确定分点有2种方法：

(1)数据不落在分点上(例如课本中确定分点的方法)．

(2)允许数据落在分点上，但需要对每个分组区间的端点值属于哪个组做出规定．例如，“7.3　频数和频率”中的练习第2题采用的是“上限不在内”的方法：如，140 不在“$130 \leqslant x < 140$”内，而在“$140 \leqslant x < 150$”内．

应数据出现的频数(如下表)：

身高分组	划　记	频　数
146.5～149.5	丅	2
149.5～152.5	下	3
152.5～155.5	正	5
155.5～158.5	正下	8
158.5～161.5	正正	9
161.5～164.5	正正下	13
164.5～167.5	正丅	7
167.5～170.5	丅	2
170.5～173.5	一	1
合　计		50

像这样的表格称为**频数分布表**(frequency distribution table)．

最后，根据频数分布表，用横轴表示各分组数据，用纵轴表示各组数据的频数，绘制条形统计图(如图7-6)．

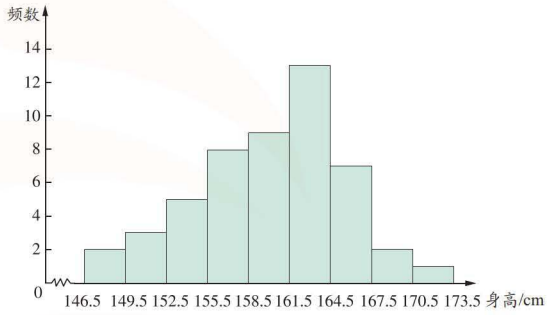


图 7-6

像图 7-6 这样的条形统计图，直观地呈现了频数的分布特征和变化规律，称为**频数分布直方图**(frequency distribution histogram)．

思考

根据上面的频数分布表、频数分布直方图，你能对该校八年级学生身高的整体分布情况做出怎样的估计？

【内容解读】

这是在引导学生用样本推断总体．通过对样本数据的整理、描述，可以估计：该校八年级学生的身高总体上呈现“中间高，两头低”的分布；身高在 146.5 cm~152.5 cm、167.5 cm~173.5 cm 范围内的人数较少；身高在 155.5 cm~167.5 cm 范围内的人数较多，其中身高在 161.5 cm~164.5 cm 范围内的人数最多等．

“体会对数据适当分组可以清楚地了解数据的分布特征和变化规律，感受分组的必要性”是本节教学的关键．教学时，教师要引导学生通过“讨论”，充分感悟分组的必要性，为“用频数分布直方图描述数据”做好铺垫．

活动二　用频数分布直方图描述数据．

频数分布表、频数分布直方图虽然是新内容，但学生已经具有了较好的知识基础．例如，在此之前，学生已经会列统计表，会绘制条形统计图、折线统计图，这为进一步学习“频数分布表”、“频数分布直方图”做好了铺垫．

获得一组数据的频数分布的一般步骤是：计算最大值与最小值的差；确定组距与组数；决定分点；列频数分布表；画频数分布直方图．

一组数据的最大值与最小值的差描述了这组数据的变化范围．为了控制教学要求，避免概念过多，课本没有出极差的概念(极差的概念将在“数据的集中趋势与离散程度”中介绍)，教学时也不必补充．

“确定组距与组数”是教学难点．组数的确定不是唯一的，一般 100 个以内的数据大概分为 5~12 组，数据越多分组数也相应越多．在实际分组中，决定组数时常常有一个尝试的过程．例如，可以先尝试确定一个组距，算出相应的组数，根据组数对数据进行分组整理，看看这样分组是否能够较好地反映数据的分布特征和变化规律，通过比较从中选择一个合适的组数．

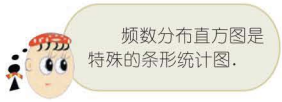
对数据分组时，为了使数据“不重不漏”，通常取比数据多一位小数来分组，并把第 1 组的起点略微减小一点(例如取比最小值小其末位半个单位的数)，有时也采用“上限不在内”或“下限不在内”的方法对数据进行分组．

将数据分组后就可以列出频数分布表，从频数分布

微信公众号：电子课本大全

交流

条形统计图、频数分布直方图，能从不同的角度直观、形象地描述数据．试比较它们各自的特点，并与同学交流．



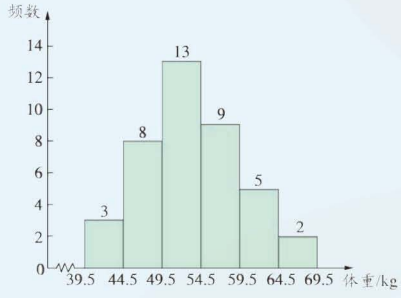
在条形统计图中，横轴表示考察对象的类别，纵轴表示各类对象的数量．在频数分布直方图中，横轴表示考察对象数据的变化范围，纵轴表示相应范围内数据的频数．

练习

1. 根据某班 40 名学生体重的频数分布直方图，回答下列问题：

(1) 体重在哪个范围内的人数最多？

(2) 体重超过 59.5 kg 的学生占全班学生的百分之几？



(第 1 题)

2. 100 个数据的分组及各组的频数如下：

数据分组	59.5～61.5	61.5～63.5	63.5～65.5	65.5～67.5	67.5～69.5	69.5～71.5	71.5～73.5	73.5～75.5	75.5～77.5	77.5～79.5
频数	2	5	9	15	21	19	13	9	5	2

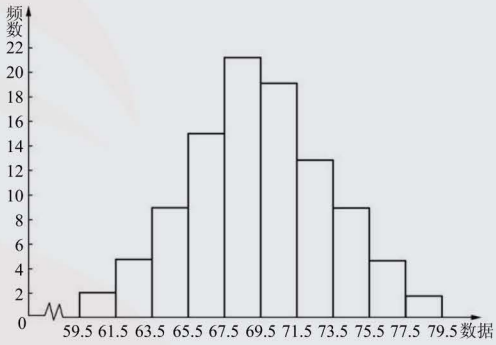
画出这组数据的频数分布直方图．

【练习解答】

1. (1)体重在 49.5 kg~54.5 kg 范围内的人数最多；

(2)体重超过 59.5 kg 的学生占全班学生的 17.5%．

2. 该组数据的频数分布直方图：



表中可以初步看出数据分布的一些特征和变化规律．

频数分布直方图描述的是连续型统计量的频数分布情况，因此各个“条形”之间应是连续的，通常不应有间隔，且当各组的组距相等时，所画“条形”的宽度也应相同．通过频数分布直方图可以直观、形象地看出一组数据的分布特征和变化规律，例如，从课本的图 7-6 可以清楚地看出身高在 161.5 cm~164.5 cm 范围的学生人数最多等．

活动三　阅读统计图表，获取相关信息，并对总体做出估计．

活动分为 2 个层次．

第 1 层次：阅读统计图表，获取相关信息．

频数分布表、频数分布直方图清楚地显示了各组数据的频数分布情况，反映出各组数据频数之间的差别．例如，抽取的 50 名学生的身高总体上呈现“中间高，两头低”的分布；身高在 146.5 cm~152.5 cm、167.5 cm~173.5 cm 范围内的人数较少；身高在 155.5 cm~167.5 cm 范围内的人数较多，其中身高在 161.5 cm~164.5 cm 范围内的人数最多，有 13 人等．

第 2 层次：对总体做出估计．

“思考”活动渗透了“用样本替代总体进行分析”的统计的基本思想．教学时，要引导学生感悟到通过样本的频数分布去估计总体的分布情况，是“进一步的统计推断”，是对统计结果做出合理的判断和预测．

活动四　通过“交流”，比较条形统计图与频数分布直方图各自的特点．

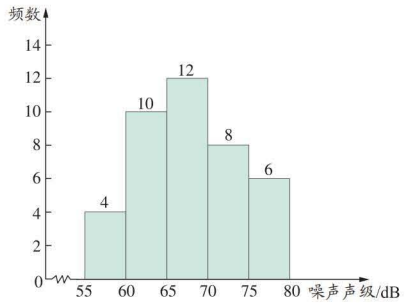
条形统计图、频数分布直方图各自的特点：

(1)条形统计图有 2 个指标，一个反映考察对象的类别(横向指标)，另一个反映考察对象的数量特征(纵向

微信公众号：电子课本大全

7.4 习题

1. 为了调查某市噪声污染情况，该市环保局抽样调查了 40 个噪声测量点的噪声声级，结果如下（每组含起点值，不含终点值）：



（第 1 题）

（1）在噪声最高的测量点，其噪声声级在哪个范围？

（2）噪声声级低于 65 dB 的测量点有多少个？

2. 为了研究 400 m 赛跑后学生心率的分布情况，测量了全班 45 名学生赛跑后 1 min 的脉搏次数，结果如下：

132　136　138　141　143　144　144　146　146　147　148　149

149　151　151　152　153　153　154　154　154　156　156　157

157　157　158　158　158　159　159　161　161　162　162　163

163　164　164　164　164　166　168　159　159

（1）按组距为 5 将上述数据分组，并列出频数分布表，绘制频数分布直方图；

（2）根据频数分布表、频数分布直方图，你能获得哪些信息？

【习题解答】

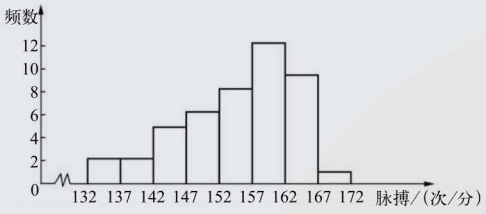
1. （1）噪声声级在 75 dB~80 dB（含起点值 75 dB，不含终点值 80 dB）范围内；

（2）噪音声级低于 65 dB 的测量点有 14 个．

2. （1）频数分布表（分组方法不唯一）

脉搏次数 x（次/分）	频数/学生人数
$132 \leqslant x < 137$	2
$137 \leqslant x < 142$	2
$142 \leqslant x < 147$	5
$147 \leqslant x < 152$	6
$152 \leqslant x < 157$	8
$157 \leqslant x < 162$	12
$162 \leqslant x < 167$	9
$167 \leqslant x < 172$	1

频数分布直方图



（2）频数分布表、频数分布直方图清楚地显示了各组数据的频数分布情况，反映出各组数据频数之间的差别．例如，全班 45 名学生赛跑后 1min 脉搏的次数总体上呈现“中间高，两头低”的分布；脉搏次数在 $132 \leqslant x < 142$、$167 \leqslant x < 172$ 范围内的人数较少；脉搏次数在 $152 \leqslant x < 167$ 指标）；频数分布直方图用横向指标表示考察对象数据的变化范围，用纵向指标表示相应范围内数据的频数．

（2）条形统计图的横向指标多为离散的，因而条形统计图各个“条形”之间有间隙；频数分布直方图的横向指标是连续的，因而频数分布直方图各个“条形”之间通常没有间隙；频数分布直方图是特殊的条形统计图．

3. 小结

（1）举例说明如何运用频数分布表、频数分布直方图整理、描述数据，从总体上认识数据的分布情况．

（2）条形统计图、折线统计图、扇形统计图、频数分布直方图各有什么特点？

微信公众号：电子课本大全

阅读

学会读统计图

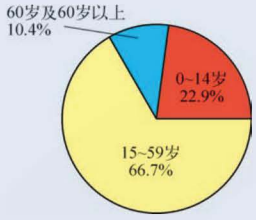
人们在日常生活中经常看到各种统计图，我们要学会从“图”中获取有价值的信息．例如，图(1)、图(2)是某家媒体公布的中国人口发展情况预测图和2000年中国人口年龄结构扇形统计图，你能从中获得哪些信息？你能根据这些信息描述中国人口的变化情况吗？

中国人口发展情况预测图



图(1)

2000年中国人口年龄结构扇形统计图



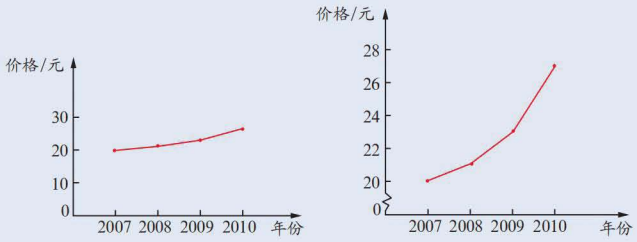
图(2)

我们还要学会分析数据信息．例如，图(3)中的两幅折线统计图表示的是同一个公司股票价格的变化情况，由于选取的单位长度不同，给人以增长幅度差异很大的误导．

范围内的人数较多，其中脉搏次数在$157 \leqslant x < 162$范围内的人数最多，有12人等．

微信公众号：电子课本大全

年　份	2007 年	2008 年	2009 年	2010 年
股票最高价格/元	20	21	23	27



图(3)

因此，生活中，我们不仅要能从数据、图表中获取尽可能多的信息，而且要能对数据的来源、描述数据的方法、得出的结论等进行合理的分析．

数学活动

丢弃了多少塑料袋

在我们丢弃的塑料袋中，有些即使经过几十年也不会被分解成无害物质，因此大量的塑料袋垃圾会造成环境污染．

1. 记录自己家庭 1 周内丢弃的塑料袋数量．

2. 设计一个调查问卷，调查全班每个同学的家庭 1 周内丢弃的塑料袋数量，并根据收集的数据制作统计图．

3. 全班同学的家庭 1 年内丢弃的塑料袋数量有多少？全校同学的家庭呢？

4. 如果将全班同学的家庭 1 周内丢弃的塑料袋铺开，大约占多大面积？1 年呢？

如果将全校同学的家庭 1 年内丢弃的塑料袋铺开，大约占多大面积？

【教学目标】

1. 通过统计丢弃塑料袋数量的活动，引导学生再次经历数据的收集、整理、描述的过程，并在活动中感受丢弃塑料袋的危害性，进一步提升环保意识．

2. 进一步培养学生应用所学知识和方法解决实际问题的能力，增强“用数学”的意识．

【教学过程设计建议】

“丢弃了多少塑料袋”的数学活动是一个与生态环境有关的统计活动，是学生所熟悉和感兴趣的．活动中，建议以小组合作学习的方式，引导学生经历数据的收集、整理、描述的过程，使学生对“丢弃塑料袋”会造成环境污染有一个定量的认识，从而增强环保意识．

活动一　设计调查问卷，经历数据的收集、整理、描述的统计活动过程．

(1)提前 1 周将活动内容布置为家庭作业．

(2)在每个学生统计自己家庭 1 周内丢弃塑料袋数量的基础上，以小组合作学习的方式，设计调查问卷，调查全班每个学生家庭 1 周内丢弃的塑料袋的数量，并利用统计表、统计图对收集的数据进行整理、描述．

(3)对数学活动中的“问题 3”、“问题 4”展开讨论，并做出估计，强化对“丢弃塑料袋”会造成环境污染的定量的认识．

(4)引导学生填写课本附录中的“数学活动评价表”．

对“丢弃了多少塑料袋”的数学活动，应侧重评价：学生是否积极参与活动；是否能正确地设计调查表；是否能绘制出合适的统计表和统计图；是否能比较准确地

微信公众号：电子课本大全

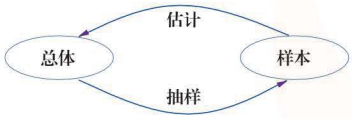
小结与思考

1. 数据可以帮助我们了解世界，收集、整理、描述数据可以使我们获取更多的信息，有助于研究、解决问题．其过程如下：

提出问题——收集数据——整理、描述数据

2. 调查有普查和抽样调查两种方式．普查通过调查总体中每个个体来收集数据，抽样调查通过调查样本中每个个体来收集数据．普查和抽样调查的优、缺点各是什么？

3. 在统计里，我们通常从总体中抽取样本，并根据样本的某种特性去估计总体的相应特性：



为了使对总体特性的估计、推断更加准确，抽样时要注意样本的代表性．

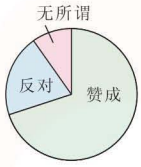
4. 利用统计图表对收集到的数据加以整理、描述，可以使我们了解数据的整体分布情况．常见的统计图表有哪些？它们各有什么特点？

5. 频数是指统计数据时，某个对象出现的次数或落在某个组别中的数据的个数；频率是指频数与总次数（数据总数）的比值．我们把各个组别中相应的频数分布用表格的形式表示出来就得到频数分布表．根据频数分布表绘制成的条形统计图称为频数分布直方图，它直观地呈现了频数的整体分布情况．

6. 统计与生活息息相关，打开报纸、杂志或互联网常常会看到一些统计图表．选择一些统计图表，对其中的数据来源、描述数据的方法、得出的结论等进行分析．

复习巩固

1. 下列调查是用普查好，还是用抽样调查好？说说你的理由．
   （1）夏季冷饮市场上冰淇淋的质量；
   （2）某本书中的印刷错误；
   （3）对学校建立英语角的看法；
   （4）公民保护环境的意识．
2. 为了鼓励学生课外阅读，学校公布了“阅读奖励”方案，征求了所有学生的意见，赞成、反对、无所谓三种意见的人数之比为 7∶2∶1，并画出扇形统计图．



（第 2 题）

【复习题解答】

（复习巩固）

1.（1）采用抽样调查的方式，因为冰淇淋的质量不可能逐一加以调查；

（2）调查一本书中的印刷错误，工作量不是很大，为确保出版质量，一般应采用普查的方式；

（3）可以采用普查的方式，也可以采用抽样调查的方式；

（4）对公民保护环境的意识，不可能逐一加以调查，应采用抽样调查的方式．

收集数据，并对数据进行整理、描述；是否能采用比较合理的估算策略；是否对“丢弃塑料袋”会造成环境污染有了定量的认识等．

活动二　撰写活动报告

结合收集、整理的数据，绘制的统计图表，写一篇活动报告，说明丢弃塑料袋的危害性和保护环境的紧迫性，并提出可行的解决方案．

【教学目标】

1. 回顾、交流本章所学的知识，并能用自己喜欢的方式进行梳理，使所学知识系统化．

2. 回顾、思考本章所渗透的数学思想方法，初步培养学生的统计意识和统计推断能力．

3. 通过“小结与思考”的教学，培养学生归纳、反思的意识．

【教学过程设计建议】

本节课教学应以学生活动为主，引导学生在交流、反思过程中回顾本章知识，梳理所学内容，体会数学思想方法．

1. 探索活动

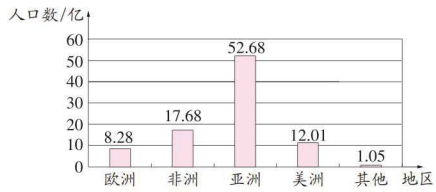
活动分为 2 个层次：

微信公众号：电子课本大全

(1) 如果持反对意见的有 240 人，那么这个学校共有多少名学生？

(2) 求图中各个扇形的圆心角的度数．

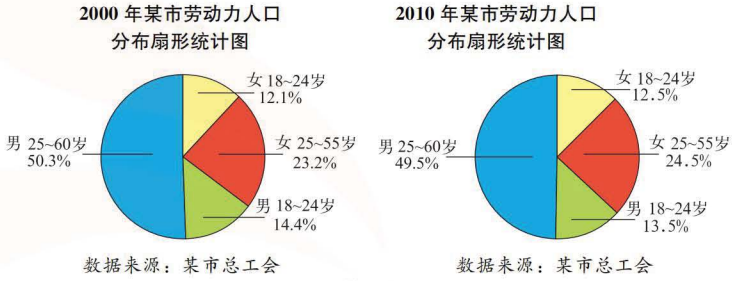
3. 预测 2050 年世界人口数的条形统计图如下：



(第 3 题)

根据图中的数据绘制扇形统计图，并比较扇形统计图与条形统计图的区别．

4. 某市 2000 年有劳动力 2 400 000 人，2010 年有劳动力 2 800 000 人．该市 2000 年和 2010 年劳动力人口分布情况如图：



(第 4 题)

(1) 该市 2010 年劳动力人口比 2000 年增加了百分之几？

(2) 该市 2000 年和 2010 年男性劳动力人口各占百分之几？

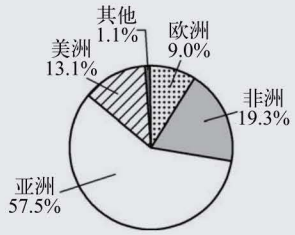
(3) 该市 2010 年男性劳动力人口比 2000 年增加了多少？该市男性劳动力人口的百分数也增加了吗？

5. 某校八年级 640 名学生在“计算机应用”培训前、后各参加了一次水平相同的测试，并以同一标准分成“不合格”、“合格”、“优秀”3 个等级．为了解培训效果，用抽样调查的方式从中抽取 32 名学生的 2 次测试等级，并绘制成条形统计图：

2. (1)该校共有 1 200 名学生；

(2)扇形统计图中相应各扇形的圆心角的度数分别为 252°、72°和 36°．

3. (1)2050 年世界人口分布预测扇形统计图



(2)条形统计图用宽度相同的“条形”的高度描述数据的变动情况；扇形统计图用圆中各扇形的面积描述各统计项目占总体的百分比．

4. (1)该市 2010 年劳动力人口比 2000 年约增加了 16.7%；

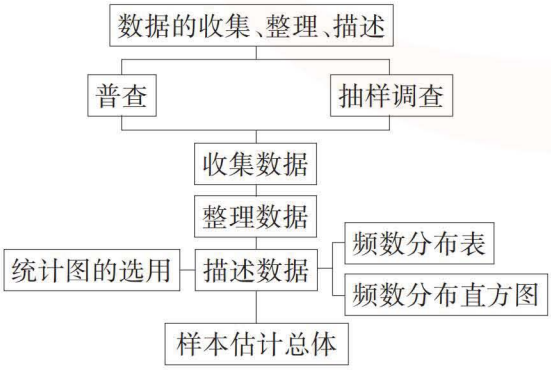
(2)2000 年该市男性劳动力人口占 64.7%，2010 年该市男性劳动力人口占 63.0%；

(3)2010 年该市男性劳动力人口比 2000 年增加了 211 200 人，但不能说该市男性劳动力人口的百分数也增加了．

第 1 层次：回顾本章知识，梳理所学内容．

教学时，应引导学生用自己喜欢的方式梳理本章内容，使所学知识系统化．

如，可引导学生建立如下知识框图，对本章的知识进行梳理：



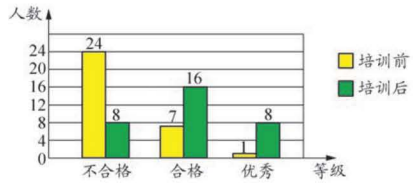
第 2 层次：回顾、思考本章所渗透的数学思想方法，初步感受统计推理．

(1)通过具体问题情境，反思普查和抽样调查的应用，进一步体会普查与抽样调查的优、缺点和抽样的必要性，感受统计思想．

(2)根据具体问题情境，反思几种常见的统计图表在整理、描述数据中的意义和作用，将统计学习放在解决问题的情境中．

(3)用样本估计总体是统计的一个基本思想．在统计里，我们通常是从总体中抽取样本，并对样本数据进行整理、描述，目的是获得样本的某种特性，从而根据样本特性估计总体的相应特性．为了使估计、推断的总体特性更加准确，抽样时要注意样本的代表性．

微信公众号：电子课本大全



（第5题）

（1）这32名学生经过培训，测试等级“不合格”的百分比比培训前减少了多少？

（2）估计该校八年级学生中，培训前、后测试等级为“合格”与“优秀”的学生各有多少名？

6. 小明统计了他家5月份打电话的次数及通话时间，并列出频数分布表：

通话时间 x/min	频数(通话次数)
$0<x\leqslant 5$	24
$5<x\leqslant 10$	16
$10<x\leqslant 15$	8
$15<x\leqslant 20$	10
$20<x\leqslant 25$	16

（1）小明家5月份一共打了多少次电话？

（2）求通话时间不超过15 min的频数和频率．

7. 据报道：2011年中国科学院新增院士51名．其中，年龄最大的75岁，最小的41岁，平均年龄52.69岁，60岁(含60岁)以下50岁以上14人，50岁(含50岁)以下29人．

（1）填写表中的空格：

年龄/岁	60岁以上	50～60岁(含60岁)	50岁以下(含50岁)
院士人数			
百分比(精确到0.1%)			

（2）你认为用哪种统计图反映新增院士的年龄分布情况比较合适？画出你选用的统计图．

5.（1）这32名学生培训后测试等级“不合格”的百分比比培训前减少了50%；

（2）估计该校八年级学生中，培训前测试等级为“合格”与“优秀”的学生约有160人；培训后测试等级为“合格”与“优秀”的学生约有480人．

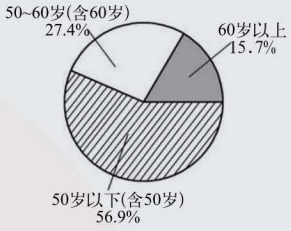
6.（1）小明家5月份一共打了74次电话(数据总数为74)；

（2）其中，通话时间不超过15 min的有48次，约占所打电话的64.9%，即通话时间不超过15 min的频数为48，频率约为0.649．

7.（1）填表：

年龄/岁	60岁以上	50~60岁(含60岁)	50岁以下(含50岁)
人　数	8	14	29
百分比	15.7%	27.4%	56.9%

（2）用扇形统计图反映新增院士的年龄分布情况比较合适，其扇形统计图如下：



2. 例题教学

（1）教学时，教师可根据教学实际，选择课本“复习题”中的相关习题引导学生思考、交流，进一步巩固所学知识，体会思想方法．

（2）统计与生活息息相关．教学时，可引导学生查阅报纸、杂志或互联网，选择一些统计图表，对其中的数据来源、描述数据的方法、得出的结论等进行分析．

微信公众号：电子课本大全

8. 小明在某长途汽车站抽样调查了部分旅客的等车时间，并列出频数分布表如下：

等车时间 t/min	$0<t\leqslant5$	$5<t\leqslant10$	$10<t\leqslant15$	$15<t\leqslant20$	$20<t\leqslant25$	$25<t\leqslant30$
频数	5	6	9	10	13	7

(1) 小明共抽样调查了多少名旅客？

(2) 绘制相应的频数分布直方图．

灵活运用

9. 农业科研人员在试验田里种植了新品种大麦，为了考察麦穗长度的分布情况，抽取了 100 个麦穗，量得长度如下(单位：cm)：

6.3	5.8	5.5	5.3	6.0	6.4	6.8	6.2	5.8	6.5
5.7	5.3	6.2	6.4	5.4	5.8	6.0	5.4	5.5	6.4
6.8	7.0	6.1	5.7	6.5	5.9	6.3	5.0	6.0	6.7
6.1	6.0	5.3	6.7	6.0	5.7	5.5	5.0	6.5	5.8
4.5	6.0	6.2	6.2	6.8	6.8	5.0	6.8	5.1	5.9
5.6	5.9	6.8	5.6	5.8	6.6	6.3	6.0	6.5	5.9
6.3	5.4	6.6	6.0	6.3	6.0	5.2	5.0	5.3	5.2
6.0	6.0	4.7	6.7	6.0	6.4	5.7	5.9	4.0	6.0
5.8	5.2	5.7	6.7	6.3	5.7	7.0	6.0	5.5	5.4
6.3	6.0	5.7	6.0	5.6	7.4	6.4	5.5	5.8	4.6

(1) 指出这次调查的总体、个体、样本和样本容量；

(2) 列出样本的频数分布表，绘制频数分布直方图；

(3) 根据样本的频数分布表、频数分布直方图，你能获得哪些信息？对该品种大麦麦穗长度的分布情况做出怎样的估计？

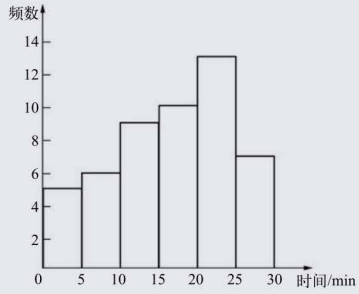
10. 某人 1～6 月的收入和支出情况如下：

月份	1 月	2 月	3 月	4 月	5 月	6 月
收入/元	2 000	1 700	1 950	2 400	2 100	2 050
支出/元	1 400	1 250	1 100	1 650	1 500	1 350

分别用同一个条形统计图和同一个折线统计图描述这两组数据，并进行比较．

8. (1)共抽样调查了 50 名旅客；

(2)旅客等车时间频数分布直方图

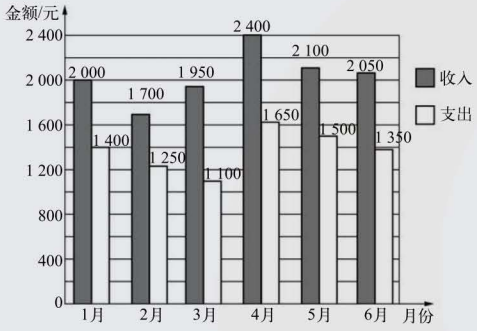


(灵活运用)

9. 该试验田种植的新品种大麦麦穗长度的全体是总体；该试验田种植的新品种大麦的每一个麦穗的长度是个体；从中抽取的 100 个麦穗的长度是总体的一个样本；样本容量为 100．

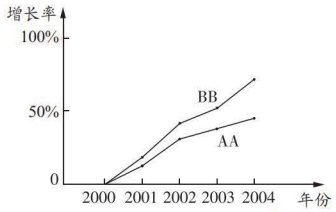
列频数分布表、绘制频数分布直方图等(略)．

10. 该人 1~6 月份每月的收入和支出条形统计图



微信公众号：电子课本大全

11. 两种品牌方便面销售增长率折线统计图如下：



（第 11 题）

（1）BB 牌方便面的销售量比 AA 牌多吗？为什么？你认为要做出这样的推断还需要什么信息？

（2）从折线统计图中你能获得哪些信息？

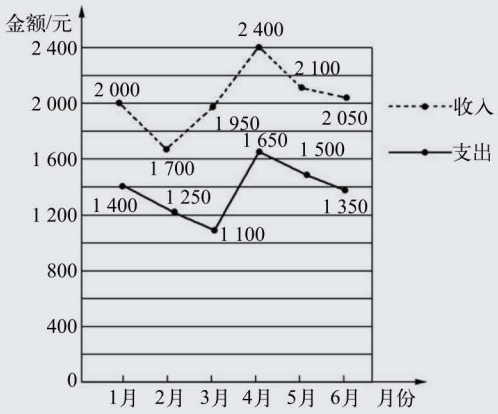
探索研究

12.（1）调查全班每位同学 1 min 的跳绳次数（3 人 1 组，1 人跳绳，1 人计时，1 人记录），然后全班汇总；

（2）将全班同学 1 min 的跳绳次数适当分组、整理，列出频数分布表，绘制频数分布直方图；

（3）分析全班同学 1 min 的跳绳次数的总体分布情况．

该人 1~6 月份每月的收入和支出折线统计图



条形统计图清楚地显示了该人 1~6 月份每月的收入和支出的变动情况，折线统计图清楚地显示了该人 1~6 月份每月的收入和支出的变化过程和趋势.根据条形统计图和折线统计图可以发现：该人 1~6 月份每月的收入和支出都在发生变化，但总体上每月的收入均大于支出，月月有结余.其中，结余最多的是 3 月，为 850 元；最少的是 2 月，为 450 元等．

11.（1）BB 牌方便面的销售量不一定比 AA 牌方便面多.要做出这样的推断还需要知道 2000 年 BB 牌和 AA 牌方便面各自的销售量.

（2）2001~2004 年 BB 牌方便面在销售的增长率方面领先于 AA 牌方便面．

（探索研究）

（其余解答见本页下方）

12. 该题为学生提供了“收集数据—整理、描述数据”的活动过程，使学生在活动中再次感悟到：对收集到的数据运用统计图表加以整理、描述，可以帮助我们分析数据的分布特征和变化规律，从中获得相应的信息，做出合理的推断、决策．

微信公众号：电子课本大全

第8章　认识概率

【课标要求】

1. 在具体情境中了解概率的意义，体会概率是描述随机现象的数学模型．

2. 知道通过大量的重复试验，可以用频率来估计概率．

此外，通过试验，并分析试验结果的活动过程，了解随机现象，培养和发展随机观念．

【设计思路】

本章为《标准》中“统计与概率”的内容．对于“概率”的教学内容，整套教材分为3章，分别安排在八(下)、九(上)和九(下)．其中，“八(下)”为本章教学内容；“九(上)”为“等可能条件下的概率”；“九(下)”为“统计和概率的简单应用”．

在自然界和人类社会中，严格确定的现象十分有限，不确定的现象(随机现象)却是大量存在的，概率是对随机现象的一种数学描述，刻画随机现象和事件发生的可能性的大小．概率可以帮助人们对一些随机现象做出预测和判断，为人们合理、理性地制定决策提供依据．

学生在前2个学段(小学阶段)已接触到与概率有关的初步知识．《标准》对前2个学段的相关的教学要求是：结合具体情境，了解简单的随机现象，能列出简单随机现象中所有可能发生的结果；通过实验、游戏等活动，感受随机现象发生的可能性是有大小的．在第3学段(初中阶段)，我们将在小学学习的基础上，进一步抽象化、数学化地研究随机事件发生的可能性的大小——认识概率、等可能条件下的概率．

本章意在“认识”．在本章，课本通过大量的生活实例及试验，引导学生感悟概率与以往学习过的许多确定性科学不同，感悟概率的思维方式与确定性思维的差异，发展学生的随机观念．

本章安排了丰富的试验，引导学生经历观察想象、操作记录、分析交流等活动过程，在主动参与认识概率的活动中，丰富对概率背景的认识，积累数学活动经验．

本章共分为3节．在第1节，课本以学生熟悉的实例为情境，引导学生感悟到，生活中有些事件的发生是确定的，有些事件的发生是不确定的，并学会区分身边的必然事件、不可能事件和随机事件，进而对随机事件发生的可能性有一个定性的认识．

在第2节，课本设计了2个试验活动，目的是引导学生从不同的角度(“抛掷质地均匀的小立方体试验”从概率的角度看为“古典概型”，为九年级学习“等可能条件下的概率(一)”做铺垫；“转盘试验”从概率的角度看为“几何概型”，为在九年级学习“等可能条件下的概率(二)”做铺垫)认识到随机事件发生的可能性有大有小，并能对一些随机事件发生的可能性做出描述．

在第3节，在学生充分经历了“猜想—试验并收集数据—分析试验结果”的活动过程，认识到随机事件发生的可能性有大有小的基础上，给出对事件发生可能性的抽象化、数学化的描述——概率的定义，并通过丰富的实例，引导学生感悟概率与频率的关系(一方面，概率与统计是相对独立的，另一方面，概率又以统计为依托)，引导学生从频率稳定值的角度去理解概率(在实际生活中，人们常把试验次数很大时事件发生的频率作为其概率的估计值)．

【教学建议】

1. 鼓励学生动手试验，在活动中理解概率的意义．

本章的知识内容决定了本章的教学应以学生活动与思考为主．教学时，要注重引导学生积极参与试验活动，亲自动手获取试验数据，并与同学交流．

课本在给出概率的统计定义之前，设计了多个试验活动，由于概率是定义在“在一定条件下大量重复进行同一试验时，事件发生的频率会接近于某一个常数，并在其附近摆动”基础上的，因此，同一试验的次数相对较多，这就要求发动全体学生动手试验，依靠集体力量较快地获取试验数据，积累数学活动经验．

微信公众号：电子课本大全

2. 关注随机观念的渗透.

在自然界和人类社会中存在着许多我们事先无法判断其结果的现象.例如,抛掷一枚质地均匀的骰子,会出现1~6点中的哪一点,事先是无法确定的,这类事件是随机事件.同时,这类事件有一个共同的特点:在相同条件下,大量重复试验时,事件发生的可能性就整体而言会呈现出某种固有的规律性.教学时,教师应引导学生观察生活中的随机现象,感悟随机事件发生的规律性和探索、研究其规律性的实际意义,培养学生的随机观念.

3. 引导学生感悟概率与频率的联系与区别.

教学时,教师要通过实例,引导学生感悟到:概率是建立在频率的稳定性的基础之上的,在一定条件下大量重复进行同一试验时,事件发生的频率会接近于某一个常数,并在它附近摆动;随机事件发生的概率是客观存在的,在实际生活中,人们常把试验次数很大时事件发生的频率作为其概率的估计值;频率与概率虽然分属于不同的学科,但它们之间的联系说明了统计与概率这两个学科是相互联系、相互作用的.

此外,在教学时,要注意把握教学要求.本章意在"认识",中心是体会随机观念和概率思想,重点是引导学生经历试验的过程,感受生活中的随机现象和随机事件发生的可能性是有大有小的,并会用频率估计概率,对如何计算概率并不做要求(后续内容有专门的介绍).

【评价建议】

1. 知识技能的评价.

主要评价学生能否在实际情境中了解确定事件与随机事件,能否认识到事件发生的可能性是有大有小的,能否通过具体实例理解概率的意义,体会概率与频率之间的联系与区别.

2. 参与程度的评价.

主要评价学生能否积极参与试验活动,能否自己动手获取试验数据;评价学生在活动中表现出来的思维水平和实事求是的科学态度;评价学生能否与他人合作交流以及对问题的质疑能力.

3. 随机观念的评价.

主要评价学生能否结合具体情境了解简单的随机现象,能否列出简单随机现象中所有可能发生的结果,能否对一些简单随机事件发生的可能性的大小做出定量的描述.

【课时安排】

本章教学大约需要6课时,分配如下:

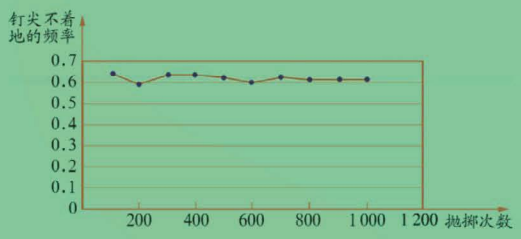
8.1	确定事件与随机事件	1课时
8.2	可能性的大小	1课时
8.3	频率与概率	2课时
	数学活动	1课时
	小结与思考	1课时

微信公众号:电子课本大全

第8章　认识概率

【内容解读】

“章头图”以足球比赛中，裁判员通过抛掷质地均匀的硬币来确定比赛双方谁先开球、谁先选边的活动为主图，以“掷图钉试验”中，钉尖不着地的频率折线统计图为辅图，意在激发学生学习本章知识的兴趣，同时也预示着本章的学习需要学生的积极参与，并在活动中了解随机现象，理解概率的意义．

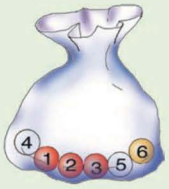


事件发生的可能性有大有小．
概率度量事件发生可能性的大小．



微信公众号：电子课本大全

如图，一只不透明的袋子中装有 3 个红球、2 个白球和 1 个黄球，这些球除颜色外都相同．



(1) 从袋子中任意摸出 1 个球，摸到的球可能是什么颜色？

(2) 从袋子中任意摸出 1 个球，摸到哪种颜色的球的可能性最大？

(3) 如果将每个球都编上号码，分别记为 1 号(红)、2 号(红)、3 号(红)、4 号(白)、5 号(白)、6 号(黄)，那么摸到 1～6 号球的可能性一样吗？

本章将研究事件发生的可能性大小，并通过大量重复试验，用事件发生的频率来估计概率．

【内容解读】

本章的“章头活动”为“摸球试验”．从不透明的袋子中摸出 1 个球，所摸到的球的颜色是不确定的，即无法事先预测摸球的结果．但结合生活经验，学生又不难体会到：摸到 3 种颜色球的可能性是有大有小的，可能性的大小与袋子中该颜色球的数目有关．如果将袋子中每个球编上号码，那么此时摸到 1~6 号球的可能性是相同的．

设计“章头活动”的目的在于激发学生的学习兴趣，并引导学生感悟到：生活中存在着大量的随机现象，而概率正是对随机现象的数学描述，它刻画了随机事件发生的可能性的大小；概率可以帮助人们对一些随机现象做出预测和判断，为人们合理、理性地制定决策提供依据．

微信公众号：电子课本大全

【情境说明】

课本以“预测某次国际乒乓球单打决赛结果”为问题情境，引导学生体会到生活中有些事件的发生是确定的，有些事件的发生是不确定的，感受必然事件、不可能事件和随机事件的意义．

课本提供的情境源于生活实际，学生运用已有的生活经验，能够确定：

(1)冠军一定属于中国选手，因为进入决赛的都是中国选手(从中感悟“必然事件”)；

(2)冠军一定不属于外国选手，因为进入决赛的没有外国选手(从中感悟“不可能事件”)；

(3)冠军不一定属于中国选手甲，因为比赛没有结束，所以冠军是谁还不能确定(从中感悟“随机事件”)．

【内容解读】

如果将课本中的问题情境改为：最后进入决赛的是两名外国选手，那么“冠军属于中国选手”是不可能事件，“冠军属于外国选手”是必然事件；如果将课本中的问题情境改为：最后进入决赛的是一名中国选手和一名外国选手，那么“冠军属于中国选手”是随机事件．

8.1　确定事件与随机事件

在某次国际乒乓球单打比赛中，甲、乙两名中国选手进入最后决赛．

(1) 该项比赛的冠军属于中国选手吗？

(2) 该项比赛的冠军属于外国选手吗？

(3) 该项比赛的冠军属于中国选手甲吗？



在一定条件下，有些事情我们事先能肯定它一定不会发生，这样的事情是**不可能事件**(impossible event)．例如，“上述比赛中，冠军属于外国选手”以及“明天太阳从西方升起”等都是不可能事件．在一定条件下，有些事情我们事先能肯定它一定会发生，这样的事情是**必然事件**(certain event)．例如，“上述比赛中，冠军属于中国选手”以及“抛出的篮球会下落”等都是必然事件．必然事件和不可能事件都是确定事件．



太阳从东方升起



抛掷硬币

在一定条件下，很多事情我们事先无法确定它会不会发生，这样的事情是**随机事件**(random event)．例如，“上述比赛中，冠军属于中国选手甲”以及“抛掷 1 枚质地均匀的硬币正面朝上”等都是随机事件．

【教学目标】

1. 通过具体实例感受生活中有些事件的发生是确定的，有些事件的发生是不确定的．

2. 通过具体实例体会必然事件、不可能事件和随机事件的意义．

【教学过程设计建议】

1. 情境创设

课本以“预测某次国际乒乓球单打决赛结果”为问题情境，引导学生体会到生活中有些事件的发生是确定的，有些事件的发生是不确定的，感受必然事件、不可能事件和随机事件的意义．

课本提供的情境源于生活实际，学生运用已有的生活经验，一般能感悟到必然事件、不可能事件和随机事件的意义．教学时，还可以再设计一些情境，引导学生进一步加深对问题的感悟．例如：

甲袋中装有 10 个红球，乙袋中装有 10 个白球，丙袋中装有 5 个红球和 5 个白球，这些球除颜色外都相同，分别从这 3 个袋子中任意摸出 1 个球，你认为从哪个袋中一定能摸到红球，从哪个袋中不可能摸到红球，从哪个袋中事先无法确定是否一定能摸到红球？

2. 探索活动

活动一　根据课本提供的问题情境，引入必然事件、不可能事件、随机事件的概念．

对于必然事件、不可能事件、随机事件的概念，应注重通过具体实例引导学生加以理解．

教学时，根据课本中的例子，还可以提出如下问题：

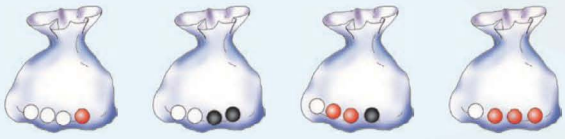
微信公众号：电子课本大全

交流

举出一些生活中的必然事件、不可能事件和随机事件.

练习

1. 判断下列事件是必然事件、不可能事件，还是随机事件：
   (1) 没有水分，种子发芽；
   (2) 367 人中至少有 2 人的生日相同；
   (3) 小丽到达公共汽车站时，12 路公交车正在驶来；
   (4) 打开电视，正在播广告；
   (5) 小明家买彩票将获得 500 万元大奖；
   (6) 3 天内将下雨；
   (7) 在某妇幼保健医院里，下一个出生的婴儿是女孩；
   (8) 你最喜爱的篮球队将夺得 CBA 冠军.
2. 4 只不透明的袋子中都装有一些球，这些球除颜色外都相同，将球摇匀. 判断下列事件是必然事件、不可能事件，还是随机事件，并说明理由.



(第 2 题)

   (1) 从第①只袋子中任意摸出 1 个球，该球是红球；
   (2) 从第②只袋子中任意摸出 1 个球，该球是红球；
   (3) 从第③只袋子中任意摸出 1 个球，该球是红球；
   (4) 从第④只袋子中任意摸出 1 个球，该球不是黑球；
   (5) 从这 4 只袋子中各摸出 1 个球，其中有 2 个红球、1 个白球、1 个黑球.

【练习解答】

1. “(2)”是必然事件；“(1)”是不可能事件；“(3)”、“(4)”、“(5)”、“(6)”、“(7)”、“(8)”是随机事件.

2. “(1)”、“(3)”、“(5)”是随机事件；“(2)”是不可能事件；“(4)”是必然事件.

(1)如果最后进入决赛的是两名外国选手，那么该项比赛的冠军属于中国选手吗？属于外国选手吗？属于外国选手甲吗？

(2)如果最后进入决赛的是一名中国选手和一名外国选手呢？

课本在给出必然事件、不可能事件和随机事件的定义时，都强调了“在一定条件下”(也就是“在相同条件下”)，这点是很重要的. 例如，抛掷 1 枚质地均匀的骰子，每个点数出现的机会是相同的，但如果改变了骰子的均匀性，再抛掷时，每个点数出现的机会就不相同了.

课本中“随机”的含义是“事件是否在某次试验中发生，人们事先无法确定”. 随机事件一般分为两种：一是可以大量重复的，如抛掷 1 枚质地均匀的硬币、掷 1 枚质地均匀的骰子等；二是不可以重复的，如某场篮球比赛的输赢，明天的天气情况等. 这两种随机事件都是概率研究的对象.

本课时的教学内容相对较为宽松，教学时，建议适当补充一些问题，引导学生加深对必然事件、不可能事件和随机事件的理解. 例如：

不透明的袋子中装有 5 个红球和 5 个白球，每个球除颜色外都相同，将球摇均，从中任意摸出 2 个球.

(1)摸到的球有哪几种可能的结果？动手摸一摸，验证你的猜想.

(2)根据题设条件，自己设计一些事件，使它们分别为必然事件、不可能事件和随机事件.

根据提供的问题情境，由学生设计必然事件、不可能事件和随机事件，是对问题的进一步的拓展，教学时应在学生充分讨论、交流的基础上展开.

微信公众号：电子课本大全

8.1 习题

1. 判断下列事件是必然事件、不可能事件，还是随机事件：

(1) 在标准大气压下，温度低于 0 ℃时冰融化；

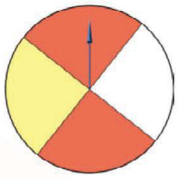
(2) 一只不透明的袋子中装有红球、白球、黑球，这些球除颜色外都相同，从中任意摸出的 1 个球是红球；

(3) 转动如图所示的转盘(转盘中各个扇形的面积都相等)，当转盘停止转动时指针落在红色区域(若指针落在交界线上，则重转一次)；

(4) 一只不透明的袋子中装有 2 个红球和 1 个白球，这些球除颜色外都相同，从中任意摸出 2 个球，其中有红球；

(5) 买一张电影票，座位号是奇数号；

(6) 在同一年出生的 13 名学生中，至少有 2 人出生在同一个月．



(第1(3)题)



(第2题)

2. 一枚质地均匀的骰子的 6 个面上分别刻有 1～6 的点数，抛掷这枚骰子：

(1) 向上一面的点数可能是 6 吗？可能是 0 或 8 吗？

(2) 向上一面可能出现哪些点数？能事先确定出现哪一种结果吗？

【习题解答】

1. “(1)”是不可能事件；“(4)”、“(6)”是必然事件；“(2)”、“(3)”、“(5)”是随机事件．

2. (1)骰子向上一面的点数有可能是6，但不可能是0或8；

(2)骰子向上一面的点数可以是1、2、3、4、5、6中的任意一个数，但不能事先确定会出现哪一种结果．

活动二　举例说明生活中的一些必然事件、不可能事件和随机事件．

教学时，可以以小组讨论、全班交流的形式展开活动：每4人组成1个小组，分别举出1个生活中的必然事件、不可能事件和随机事件，然后派代表进行全班交流．通过讨论、交流活动，引导学生进一步感悟必然事件、不可能事件和随机事件的意义．

3. 小结

举例说明生活中的必然事件、不可能事件和随机事件．

微信公众号：电子课本大全

8.2 可能性的大小

数学实验室

1. 如图 8－1，质地均匀的小立方体的 2 个面上标有数字 1，4 个面上标有数字 2．

(1) 抛掷这个小立方体 1 次，猜想“向上一面的数字为 1”与“向上一面的数字为 2”这两个事件中，哪一个发生的可能性大？

(2) 全班同学每人抛掷这个小立方体 1 次，记录向上一面的数字，并将试验结果填入下表：



图 8－1

试验结果	划　记	频　数	频　率
向上一面的数字为 1			
向上一面的数字为 2			

(3) 你做出的猜想与试验结果一致吗？

2. 转动如图 8－2 的转盘(转盘中各个扇形的面积都相等)．

(1) 猜一猜，当转盘停止转动时指针落在哪种颜色区域的可能性最大？落在哪种颜色区域的可能性最小？

(2) 全班同学每人转动转盘 1 次，当转盘停止转动时，记录指针所落区域的颜色，并将试验结果填入下表：

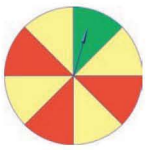


图 8－2

试验结果	划　记	频　数	频　率
指针落在红色区域			
指针落在黄色区域			
指针落在绿色区域			

(3) 你做出的猜想与试验结果一致吗？

在上面的抛掷质地均匀小立方体的试验中，“向上一面的数字为 1”与“向上一面的数字为 2”都是随机事件．由于小立方体上标有数字 1 或 2 的面数不等，所以“向上一面的数字为 1”与“向上一面的

【情境说明】

课本以“抛掷质地均匀的小立方体试验”、“转盘试验”为问题情境，引导学生经历“猜想—试验并收集、整理、描述数据—分析试验结果”的活动过程，并在活动中体验随机事件发生的可能性是有大有小的．

在试验中，教师要关注整个试验过程，确保试验的随机性．汇总填表后，要引导学生对试验数据发表意见，感悟到频率体现了随机事件发生的可能性的大小，从而认识到随机事件发生的可能性是有大有小的．

【教学目标】

经历“猜想—试验并收集、整理、描述数据—分析试验结果”的活动过程，并在活动中体验随机事件发生的可能性是有大有小的．

【教学过程设计建议】

1. 情境创设

课本以“抛掷质地均匀的小立方体试验”、“转盘试验”为问题情境，引导学生经历“猜想—试验并收集、整理、描述数据—分析试验结果”的活动过程，并在活动中体验随机事件发生的可能性是有大有小的．

教学时，除了课本提供的问题情境外，教师可以创设一些类似的情境，激发学生的兴趣，引导学生思考．例如，安排做“找朋友”游戏，让一名学生蒙起双眼，其他同学站在他的周围，并在游戏开始前让他猜一猜：他一定能找到他的同桌吗？一定能找到同一小组的同学吗？如果不能确定，那么这两种可能性哪一个更大一些？

2. 探索活动

活动一　经历“数学实验”过程，体验随机事件发生的可能性是有大有小的．

课本设计“抛掷质地均匀的小立方体试验”、“转盘试验”的目的，是引导学生从不同的角度(“抛掷质地均匀的小立方体试验”从概率的角度看为“古典概型”，为在九年级学习“等可能条件下的概率(一)”做铺垫；“转盘试验”从概率的角度看为“几何概型”，为在九年级学习“等可能条件下的概率(二)”做铺垫)认识到随机事件发生的可能性是有大有小的．

在“抛掷质地均匀的小立方体试验”前，教师可以提出以下问题，引导学生根据已有的生活经验思考：

微信公众号：电子课本大全

数字为 2”发生的可能性是不一样的．

在上面的转动转盘的试验中，当转盘停止转动时，指针落在不同颜色区域是随机的．由于不同颜色区域的面积不等，所以指针落在不同颜色区域的可能性也不一样．

一般地，随机事件发生的可能性有大有小．



如图 8－3，5 只不透明的袋子中各装有 10 个球，这些球除颜色外都相同．

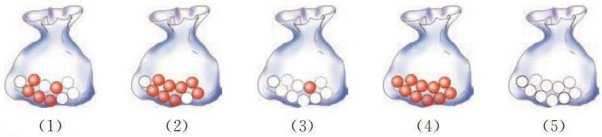


图 8－3

(1) 将球搅匀，分别从每只袋子中任意摸出 1 个球，摸到白球的可能性一样大吗？为什么？

(2) 将袋子的序号按摸到白球的可能性从小到大的顺序排列．



1. 估计下列事件发生的可能性的大小，将这些事件的序号按发生的可能性从小到大的顺序排列：
   (1) 一只不透明的袋子中装有 1 个红球和 2 个黄球，这些球除颜色外都相同，从中任意摸出的 1 个球是白球；
   (2) 抛掷 1 枚质地均匀的骰子，向上一面的点数是偶数；
   (3) 随意调查商场中的 1 位顾客，他是闰年出生的；
   (4) 随意调查 1 位青年，他接受过九年制义务教育；
   (5) 在地面上抛掷 1 个小石块，石块会下落．
2. (1) 转动如图①的转盘(转盘中各个扇形的面积都相等)，当转盘停止转动时，指针落在标有字母的区域有哪几种不同的结果？哪种结果出现的可能性最大？

【内容解读】

对“尝试”活动中的第 2 个问题，学生根据“抛掷质地均匀的小立方体试验”、“转盘试验”所获得的数学活动经验，可以确定按摸到白球的可能性从小到大的顺序排列依次为(4)、(2)、(1)、(3)、(5)．理由是，在各袋子中小球数相同的情况下，袋中的白球数越多，摸到白球的可能性就越大．

从(4)号袋子中摸到白球是不可能事件；从(5)号袋子中摸到白球是必然事件．由于必然事件和不可能事件都是确定事件，今后我们主要研究随机事件发生的可能性的大小问题，并将必然事件和不可能事件视为随机事件的特例．

【练习解答】

1. 按事件发生的可能性从小到大的顺序排列为：(1)、(3)、(2)、(4)、(5)．

2. (1)转盘停止转动时，共有 3 种可能的结果：指针落在 E 区域、指针落在 M 区域、指针落在 X 区域．其中，“指针落在 X 区域”的可能性最大．

(2)共有 3 种可能的结果：向上一面的数字为 1、向上一面的数字为 2、向上一面的数字为 3．其中，“向上一面的数字为 3”的可能性最大．

(1)如果小立方体的 6 个面上分别标有数字 1、2、3、4、5、6，你认为抛掷这个小立方体 1 次，向上一面的数字会出现哪些不同的结果？每一种结果出现的机会均等吗？你能事先确定出现哪一种结果吗？

(2)抛掷课本中图 8-1 的小立方体 1 次，在出现“向上一面的数字为 1”与“向上一面的数字为 2”的事件中，你认为哪个事件发生的可能性大？说说你的理由．

其中，“问题(1)”是让学生明确“抛掷质地均匀的小立方体”是一个随机事件，1~6 中每个数字出现的机会是均等的，但我们事先无法预知试验的确切结果；“问题(2)”是让学生体会到随机现象中蕴涵着规律：虽然我们事先无法确定出现向上一面的数字是“1”还是“2”，但由于小立方体 6 个面中标有数字 2 的面数比标有数字 1 的面数多，因此出现“向上一面的数字为 2”的可能性会大．

同样，对“转盘试验”，教师也可以在试验前提出类似的问题，引导学生根据已有的生活经验思考．

对“抛掷质地均匀的小立方体试验”、“转盘试验”，教师要关注整个试验过程，确保试验的随机性．汇总填表后，要引导学生对试验数据发表意见，体会到频率体现了随机事件发生的可能性的大小，从而感悟到随机事件发生的可能性是有大有小的．

设计“抛掷质地均匀的小立方体试验”、“转盘试验”的目的，是引导学生得到课本中给出的结论：一般地，随机事件发生的可能性有大有小(这是对随机事件发生的可能性的定性的描述)，而要得出这一结论并不需要充分多的试验数据．一般说来，全班同学轮流试验一次，最终得到“向上一面的数字为 2”出现的可能性比“向上一面的数字为 1”的可能性大、“指针落在黄色区域”的可能性最大而“指针落在绿色区域”的可能性最小的结论就可以了(从理论上讲，出现“向上一面的数字为 2”与“向上一面的

微信公众号：电子课本大全

(2) 如图②，质地均匀的小立方体的 3 个面上标有数字 3，2 个面上标有数字 2，1 个面上标有数字 1. 抛掷这个小立方体，向上一面的数字有哪几种不同的结果？哪种结果出现的可能性最大？



①



②

（第 2 题）

8.2 习题

1. 从一副扑克牌中任意抽取 1 张.

(1) 这张牌是“A”；

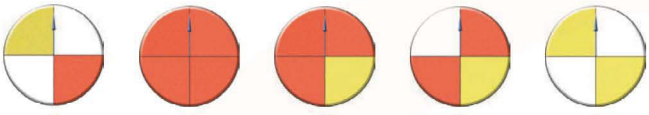
(2) 这张牌是“红心”；

(3) 这张牌是“大王”；

(4) 这张牌是“红色的”.

估计上述事件发生的可能性的大小，将这些事件的序号按发生的可能性从小到大的顺序排列.

2. 转动如图所示的各个转盘(转盘中各个扇形的面积都相等)，当转盘停止转动时，估计“指针落在红色区域”的可能性的大小，并将转盘的序号按事件发生的可能性从小到大的顺序排列.


① ② ③ ④ ⑤

（第 2 题）

【习题解答】

1. 抽到的牌是“红色的”可能性最大，抽到的牌是“大王”可能性最小；按发生的可能性从小到大的顺序排列为：(3)、(1)、(2)、(4).

2. 按“指针落在红色区域”的可能性从小到大的顺序排列为：⑤、①、④、③、②.

数字为 1”的可能性的比应为 2:1，指针落在黄色区域、落在红色区域与落在绿色区域的可能性的比应为 4:3:1，但由于试验次数不是足够多，一般得不到精确结果，这里只要学生能认识到“随机事件发生的可能性有大有小”就可以了).

活动二　组织“尝试”活动，进一步体验随机事件发生的可能性有大有小，并对一些随机事件发生的可能性做出描述.

通过“抛掷质地均匀的小立方体试验”、“转盘试验”，学生已获得了相关的数学活动经验，在此基础上，解决“尝试”活动中提出的问题，学生一般不会感到困难.

对“尝试”活动中的“问题 1”，学生容易认识到，分别从每只袋子中摸出 1 个球，摸到白球的可能性是不一样的，因为这 5 只袋子中的白球数不相同.

活动中的“问题 2”是对“问题 1”的提升，要求学生对随机事件发生的可能性做出定性的描述(这里还不能说成定量的描述，因为学生还没有学习“古典概型”).

教学时，如时间允许，可补充一些问题引导学生思考，如：

某班有 50 名学生，其中男生 26 名，女生 24 名，用学号抽签的方式从班级中抽取 1 名学生，参加学校组织的暑期社会实践活动.

问题 1：你认为是抽到奇数号学生的可能性大，还是抽到偶数号学生的可能性大？为什么？

问题 2：你认为是抽到男生的可能性大，还是抽到女生的可能性大？为什么？

问题 3：你认为是抽到学号为 2 的倍数的学生的可能性大，还是抽到学号为 3 的倍数的学生的可能性大？为什么？

3. 小结

举例说明随机事件发生的可能性是有大有小的.

微信公众号：电子课本大全

8.3　频率与概率

飞机失事会给旅客造成意外伤害．一家保险公司要为购买机票的旅客进行保险，应该向旅客收取多少保险费呢？为此，保险公司必须计算飞机失事的可能性有多大．

日常生活中也有许多类似这样的问题，例如：

明天下雨的可能性有多大？

买一张彩票中奖的可能性有多大？

抛掷 1 枚质地均匀的硬币，正面朝上的可能性有多大？

从装有若干个彩球(这些球除颜色外都相同)的袋子中，任意摸出的 1 个球是红球的可能性有多大？

抛掷 1 枚质地均匀的骰子，向上一面的点数是 6 的可能性有多大？

⋮

随机事件发生的可能性有大有小．一个事件发生的可能性大小的数值，称为这个事件发生的**概率**(probability)．如果用字母 A 表示一个事件，那么 $P(A)$表示事件 A 发生的概率．

通常规定，必然事件 A 发生的概率是 1，记作 $P(A)=1$；不可能事件 A 发生的概率是 0，记作 $P(A)=0$；随机事件 A 发生的概率$P(A)$是 0 和 1 之间的一个数．

一个随机事件发生的概率是由这个随机事件自身决定的，并且是客观存在的．概率是随机事件自身的属性，它反映这个随机事件发生的可能性大小．



做“抛掷质地均匀的硬币试验”，每人 10 次．

(1) 分别汇总 5 人、10 人、15 人……的试验结果，并将获得的数据填入下表：

抛掷次数 n	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500	…
正面朝上的频数 m											
正面朝上的频率$\frac{m}{n}$											

【情境说明】

通过探索课本列举的一些随机事件发生的可能性的大小，引导学生认识到仅定性地了解随机事件发生的可能性有大有小是不够的，还需要定量地研究随机事件发生的可能性的大小．本节课通过“抛掷质地均匀的硬币试验”、“某批足球产品质量检验获得的数据”等活动，引导学生经历“收集数据—整理、描述数据—分析试验结果”的过程，并在多次重复试验中探索随机事件发生的频率的变化规律，从而用随机事件发生的频率的稳定值来估计其发生的可能性大小(概率)．

【内容解读】

概率是随机事件自身的属性，是对随机事件发生的可能性大小的度量．事件 A 发生的概率记作 $P(A)$，P 是英文单词 Probability 的首字母．

【内容解读】

做“抛掷质地均匀的硬币试验”，每人 10 次，然后汇总全班的试验结果，这样既减少了试验的劳动强度，节省了时间，又保证了试验次数相对较多．但由于试验要在相同的条件下进行(多次重复)，因此试验时教师要提出统一的抛掷要求，尽量减少人为因素．

【教学目标】

1. 通过具体实例了解概率的意义，认识到概率是对随机现象的一种数学描述，刻画随机事件发生的可能性的大小．

2. 通过试验活动体会频率与概率之间的联系，知道在一定条件下大量重复进行试验时，事件发生的频率可以作为其概率的估计值．

【教学过程设计建议(第 1 课时)】

1. 情境创设

通过前一节课的教学，学生已经认识到随机事件发生的可能性有大有小．同时，通过“抛掷质地均匀的小立方体试验”和“转盘试验”中对试验数据的分析，学生初步认识到频率体现了随机事件发生的可能性的大小．在此基础上，通过探索课本列举的一些随机事件发生的可能性的大小，引导学生意识到仅定性地了解随机事件发生的可能性有大有小是不够的，还需要定量地研究随机事件发生的可能性的大小，从而引入本节课的教学内容．

2. 探索活动

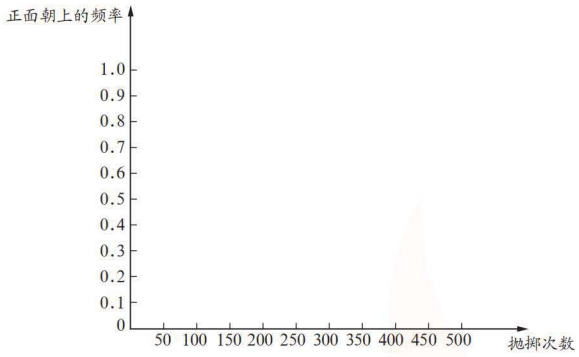
活动一　通过具体问题情境理解概率的意义．

教学时，除了课本列举的一系列随机事件外，教师可以补充一些事例，强化对问题的认识过程．例如：

甲袋中有 8 个红球和 2 个白球，乙袋中有 5 个红球和 5 个白球，这些球除颜色外都相同．我们知道，由于甲袋与乙袋中的红球数量不相同，因此“从甲袋中摸到红球”与“从乙袋中摸到红球”的可能性是不相同的．这 2 个随机事件发生的可能性到底有多大，这就需要寻找一个量来刻画随机事件发生的可能性的大小．

微信公众号：电子课本大全

（2）根据上表，画出折线统计图：



（3）观察所画的折线统计图，你发现了什么？与同学交流．

下面是小明和同学做“抛掷质地均匀的硬币试验”获得的数据及绘制的折线统计图．

抛掷次数 n	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500
正面朝上的频数 m	20	53	70	98	115	156	169	202	219	244
正面朝上的频率 $\frac{m}{n}$	0.40	0.53	0.47	0.49	0.46	0.52	0.48	0.51	0.49	0.49

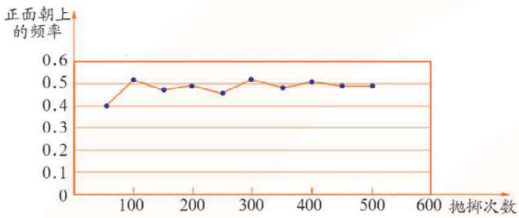


表1是自18世纪以来一些统计学家做“抛掷质地均匀的硬币试验”获得的数据．

【内容解读】

做抛掷质地均匀的硬币试验时，要确保试验的随机性．制作折线统计图时，应先画出表示不同抛掷次数的频率值的点，再将这些点顺次连接成折线．

频率折线统计图直观地显示出，在一定条件下大量重复试验时，随机事件发生的频率会在某个常数附近摆动．

概率是对随机现象的一种数学描述，它刻画了随机事件发生的可能性的大小．

对于“必然事件发生的概率是1”，教学时，可引导学生这样理解：由于必然事件在每次试验中一定会发生，就是说它发生的可能性是百分之百，因此必然事件发生的概率是1；对于“不可能事件发生的概率是0”，教学时，可引导学生这样理解：事先能肯定它一定不会发生的事件是不可能事件，就是说不可能事件发生的可能性是0，因此不可能事件发生的概率是0．

这里要强调的是：课本中“随机事件 A 发生的概率 $P(A)$ 是0和1之间的一个数”，实际是指“$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$”，课本没有做这样表述的原因是考虑到目前学生的认识能力.事实上，不可能事件发生的概率是0，但概率是0的事件未必是不可能事件；同样，必然事件发生的概率是1，但概率是1的事件未必是必然事件（在“几何概型”中，这方面的例子是比较多的，在九（上）“等可能条件下的概率”的“阅读”材料中举出了一个例子，这里再举一个简单的例子：在“转盘试验”中，指针落在区域的交界处是一个随机事件，但由“几何概型”可知，这一事件发生的概率是0）．由于目前学生对概率的学习还处于初步认识阶段，因此上述表述不必向学生做介绍，但教师应该了解．

活动二　通过尝试、探索活动，感受“频率的稳定性”．

活动分为2个层次．

第1层次：组织学生做“抛掷质地均匀的硬币试验”．

通过做“抛掷质地均匀的硬币试验”，引导学生经历“试验并收集、整理、描述数据—分析试验结果（在多次重复试验中探索随机事件发生的频率的变化规律）”的活动过程．

微信公众号：电子课本大全

【内容解读】

“抽到优等品”的频率依次为：0.92，0.93，0.96，0.944，0.953，0.951．

当抽取的足球数很大时，抽到的足球是优等品的频率在常数 0.95 附近摆动，并且趋于稳定．

【练习解答】

（1）

新生婴儿数 n	55 440	96 070	135 200	171 900	211 030
男婴出生的频数 m	28 830	49 700	69 940	88 920	109 160
男婴出生的频率 $\frac{m}{n}$	0.520	0.517	0.517	0.517	0.517

（2）该地区男婴出生频率的折线统计图（略）．

（3）当调查获取的数据很大时，该地区男婴出生的频率在常数 0.517 附近摆动，频率具有稳定性．

表 1　统计学家历次做“抛掷质地均匀的硬币试验”的结果

试验者	试验次数 n	正面朝上的频数 m	正面朝上的频率 $\frac{m}{n}$
布丰	4 040	2 048	0.506 9
德·摩根	4 092	2 048	0.500 5
费勒	10 000	4 979	0.497 9
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5
罗曼诺夫斯基	80 640	39 699	0.492 3

从表 1 可以看出，当试验次数很大时，“正面朝上”的频率在 0.5 附近摆动．



表 2 是某批足球质量检验获得的数据．

表 2　某批足球质量检验结果

抽取的足球数 n	50	100	200	500	1 000	2 000
优等品的频数 m	46	93	192	472	953	1 902
优等品的频率 $\frac{m}{n}$						

（1）填写表中的空格；

（2）画出优等品频率的折线统计图；

（3）当抽取的足球数很大时，你认为优等品的频率会在哪个常数附近摆动？

通常，在多次重复试验中，一个随机事件发生的频率会在某一个常数附近摆动，并且趋于稳定．这个性质称为频率的稳定性．



某地区从某年起几十年内的新生婴儿数及其中的男婴数如下：

时间范围	10 年内	20 年内	30 年内	40 年内	50 年内
新生婴儿数 n	55 440	96 070	135 200	171 900	211 030
男婴出生的频数 m	28 830	49 700	69 940	88 920	109 160
男婴出生的频率 $\frac{m}{n}$（精确到 0.001）					

试验前，教师可以引导学生做如下猜想：

根据生活经验，你认为抛掷一枚质地均匀的硬币时出现“正面朝上”与“反面朝上”的频率之间应有怎样的关系？由此，你能预测抛掷一枚质地均匀的硬币时，出现“正面朝上”的频率有多大吗？（试验结束后再引导学生将试验得到的结论与所作的猜想作比较）

课本在学生试验的基础上，呈现了小明和同学做“抛掷质地均匀的硬币试验”获得的数据及绘制的折线统计图、统计学家历次做“抛掷质地均匀的硬币试验”的结果，意在进一步引导学生感悟在“抛掷质地均匀的硬币试验”中出现“正面朝上”的频率的变化规律：通常，在多次重复进行的“抛掷质地均匀的硬币试验”中，出现“正面朝上”的频率会在一个常数（0.5）附近摆动，并且趋于稳定．

第 2 层次：组织探索活动．

课本以“某批足球产品质量检验获得的数据”为问题情境，引导学生再次经历数据的整理、描述与分析过程，感悟到：当抽取的足球数很大时，“抽到优等品”的频率是稳定的，并在一个常数（0.95）附近摆动．

课本创设“抛掷质地均匀的硬币试验”及“对某批足球产品质量检验获得数据的整理、描述、分析”，意在充分展开对“频率稳定性”的认识过程，为用随机事件发生的频率的稳定值刻画事件发生的可能性大小（概率）做好铺垫．

3. 小结

（1）如何理解随机事件发生的概率？必然事件、不可能事件发生的概率分别是什么？

（2）在多次重复试验中，一个随机事件发生的频率有怎样的变化规律？

微信公众号：电子课本大全

(1) 填写表中的空格；
(2) 画出男婴出生频率的折线统计图；
(3) 你认为该地区男婴出生的频率稳定吗？它会在哪个常数附近摆动？

数学实验室

在硬地上抛掷1枚图钉，通常会出现两种情况：


钉尖着地

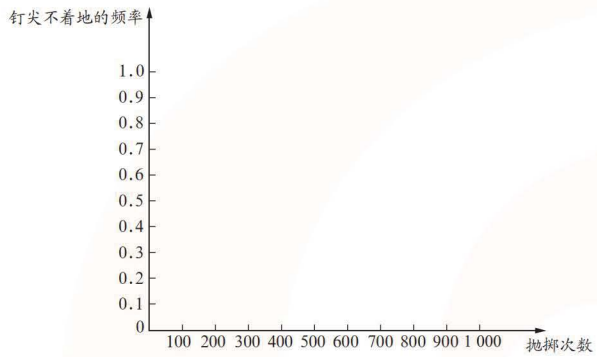

钉尖不着地

(1) 任意抛掷1枚图钉，你认为是“钉尖着地”的可能性大，还是“钉尖不着地”的可能性大？

(2) 做抛掷图钉试验，每人抛掷1枚图钉20次，分别汇总5人、10人、15人……的试验结果，并将获得的数据填入下表：

抛掷次数 n	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1 000	…
钉尖不着地的频数 m											
钉尖不着地的频率 $\frac{m}{n}$											

(3) 根据上表，画出折线统计图：



(4) 观察所画的折线统计图，你发现了什么？与同学交流．

【情境说明】

课本创设的问题情境意在渗透“统计概率”的应用价值．对于“抛掷质地均匀的硬币试验”，我们通过分析，容易做出猜想：抛掷一枚质地均匀的硬币时，由于物体具有均匀性，因此“正面朝上”与“反面朝上”出现的可能性是相同的(各占一半)，频率都稳定在常数0.5附近．但对于质地不均匀的物体，通过分析一般不能猜想出其发生的可能性大小，必需通过多次重复试验探索这类随机事件发生的频率的变化规律，从而用频率的稳定值估计其发生的概率．

【教学过程设计建议(第2课时)】

1. 情境创设

课本以“在硬地上抛掷图钉试验”为问题情境．课本创设该试验的意图是：

(1)通过试验活动，引导学生又一次经历“猜想—试验并收集、整理、描述数据—分析试验结果(在多次重复试验中探索随机事件发生的频率的变化规律)”的活动过程，强化随机观念，进一步认识频率的稳定性．

(2)在抛掷一枚质地均匀的硬币时，会出现2种可能的结果：硬币的正面朝上、硬币的反面朝上．由于硬币是均匀的，因此出现“正面朝上”与“反面朝上”的频率所稳定到的常数应是相同的．这样，容易做出猜想：抛掷一枚质地均匀的硬币时，“正面朝上”与“反面朝上”出现的可能性是相同的(各占一半)，频率都稳定在常数0.5附近．但对于质地不均匀的物体，通过分析一般不可能猜想出随机事件发生的可能性大小，必需通过多次重复试验探索其发生的频率的变化规律．课本通过“在硬地上抛掷图钉试验”强化了“统计概率”的应用价值．

2. 探索活动

活动一　组织“抛掷图钉试验”．

活动分为3个层次．

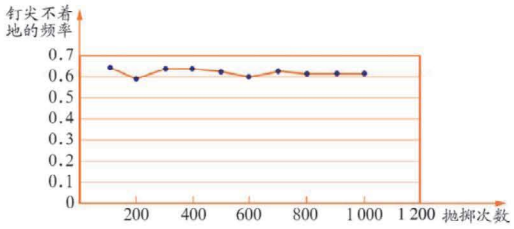
第1层次：引导学生根据已有的生活经验，做出猜想．

在活动中，一些学生可能会借鉴“抛掷质地均匀的硬币试验”的经验，猜想“钉尖着地”与“钉尖不着地”的可能性是相同的(各占一半)，频率都会稳定在常数0.5附近．如果出现这种情况，教师要引导学生分析：在“抛掷质地均匀的硬币试验”中，由于硬币是均匀的，因此试

微信公众号：电子课本大全

下面是小明和同学做“抛掷图钉试验”获得的数据及绘制的折线统计图.

抛掷次数 n	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1 000
钉尖不着地的频数 m	64	118	189	252	310	360	434	488	549	610
钉尖不着地的频率 $\frac{m}{n}$	0.64	0.59	0.63	0.63	0.62	0.60	0.62	0.61	0.61	0.61



从上表可以看出，当试验次数很大时，“钉尖不着地”的频率在 0.61 附近摆动.

一般地，在一定条件下大量重复进行同一试验时，随机事件发生的频率会在某一个常数附近摆动. 在实际生活中，人们常把这个常数作为该随机事件发生的概率的估计值. 例如，根据统计学家历次做“抛掷质地均匀的硬币试验”的结果，可以估计“正面朝上”的概率为 0.5；根据“某批足球质量检验”的结果，可以估计“从这批足球中，任意抽取的一只足球是优等品”的概率为 0.95；根据“抛掷图钉试验”的结果，可以估计“钉尖不着地”的概率为 0.61.

事实上，在抛掷硬币试验中，假设硬币的质地是均匀的，“正面朝上”与“反面朝上”出现的机会均等，试验的结果就具有等可能性；在抛掷图钉试验中，显然钉帽的质量较大，因而“钉尖着地”与“钉尖不着地”出现的机会不均等，试验的结果不具有等可能性.

【内容解读】

“绿豆发芽”的频率依次为：1.000，0.800，0.900，0.880，0.920，0.926，0.928，0.931，0.933，0.931；这种绿豆发芽的概率的估计值为 0.93.

探索

某种绿豆在相同条件下发芽试验的结果如下：

每批粒数 n	2	5	10	50	100	500	1 000	1 500	2 000	3 000
发芽的频数 m	2	4	9	44	92	463	928	1 396	1 866	2 794
发芽的频率 $\frac{m}{n}$（精确到 0.001）										

验中出现“正面朝上”与“反面朝上”的频率的稳定值各约为0.5；在“抛掷图钉试验”中，由于图钉是不均匀的（很明显，钉尖小、钉帽大，“钉尖不着地”的可能性要大一些），因此猜想“钉尖着地”与“钉尖不着地”的频率的稳定值各约为0.5是不准确的.

第2层次：收集、整理、描述数据，分析试验结果.

课本通过收集数据，绘制频率分布表和频率折线统计图，引导学生探索在一定条件下大量重复试验（抛掷图钉）时，事件发生的频率的变化规律.

第3层次：用大量重复试验中，随机事件发生的频率作为其概率的估计值.

教学时，通过实例（如“抛掷质地均匀的硬币试验”等）引导学生认识如下两点：

（1）一个随机事件的发生虽然具有随机性，有一定的偶然性，但其存在着统计规律：在大量重复试验中，随机事件发生的频率具有稳定性，而这个“稳定性”是必然的，这就是偶然性与必然性的对立统一.

（2）频率与概率之间的关系：概率的统计意义是建立在频率稳定性的基础上的，在一定条件下大量重复试验时，事件发生的频率会在一个常数附近摆动，并且随着试验次数增多，摆动的幅度会减小，这个常数就是其概率的估计值；频率与概率虽然分属于不同的学科，但它们之间的联系说明统计与概率这两个学科是相互联系、相互作用的.

活动二　组织探索活动.

作为“用随机事件发生的频率的稳定值估计其概率”的应用，课本以“某种绿豆在相同条件下发芽试验结果”为问题情境，引导学生再次经历数据的整理、描述与

微信公众号：电子课本大全

(1) 填写表中的空格；
(2) 画出这种绿豆发芽频率的折线统计图；
(3) 这种绿豆发芽的概率的估计值是多少？



某种油菜籽在相同条件下发芽试验的结果如下：

每批粒数 n	100	300	400	600	1 000	2 020	3 000
发芽的频数 m	96	283	380	571	948	1 912	2 848
发芽的频率 $\frac{m}{n}$（精确到 0.001）							

(1) 填写表中的空格；
(2) 画出这种油菜籽发芽频率的折线统计图；
(3) 这种油菜籽发芽的概率的估计值是多少？



1. 某射手在相同条件下进行射击训练，结果如下：

射击次数 n	10	20	40	50	100	200	500	1 000
击中靶心的频数 m	9	19	36	44	91	179	454	905
击中靶心的频率 $\frac{m}{n}$								

(1) 填写表中的空格；
(2) 画出该射手击中靶心频率的折线统计图；
(3) 当射击次数很大时，你认为该射手击中靶心的频率稳定吗？它会在哪个常数附近摆动？

2. 某批篮球的质量检验结果如下：

抽取的篮球数 n	100	200	400	600	800	1 000	1 200
优等品的频数 m	93	192	380	561	752	941	1 128
优等品的频率 $\frac{m}{n}$							

(1) 填写表中的空格；
(2) 画出优等品频率的折线统计图；
(3) 从这批篮球中，任意抽取的一只篮球是优等品的概率的估计值是多少？

【练习解答】

(1)

每批粒数 n	100	300	400	600	1 000	2 020	3 000
发芽的频数 m	96	283	380	571	948	1 912	2 848
发芽的频率 $\frac{m}{n}$	0.960	0.943	0.950	0.952	0.948	0.947	0.949

(2)这种油菜籽发芽频率的折线统计图(略).

(3)这种油菜籽发芽的概率的估计值为0.95.

【习题解答】

1.(1)

射击次数 n	10	20	40	50	100	200	500	1 000
击中靶心的频数 m	9	19	36	44	91	179	454	905
击中靶心的频率 $\frac{m}{n}$	0.900	0.950	0.900	0.880	0.910	0.895	0.908	0.905

(2)该射手击中靶心频率的折线统计图(略).

(3)当射击次数很大时,该射手击中靶心的频率在常数0.90附近摆动,频率具有稳定性.

分析过程,探索这种绿豆发芽的概率的估计值,再次强化“统计概率”的应用价值.

3. 小结

举例说明频率与概率之间的关系.

微信公众号：电子课本大全

2.（1）

抽取的篮球数 n	100	200	400	600	800	1 000	1 200
优等品的频数 m	93	192	380	561	752	941	1 128
优等品的频率 $\frac{m}{n}$	0.930	0.960	0.950	0.935	0.940	0.941	0.940

（2）这批篮球优等品频率的折线统计图（略）.

（3）抽到的篮球是优等品的概率的估计值为 0.94 .

阅读

概率小故事

概率主要研究不确定现象，是随着保险业的发展而产生的，但引起数学家思考概率问题的却是一个赌博的输赢问题.

传说，17 世纪中叶，法国贵族公子梅雷参加赌博，和赌友各押赌注 32 枚金币. 双方约定：抛掷 1 枚质地均匀的硬币，正面朝上，梅雷得 1 分；反面朝上，赌友得 1 分，先积满 10 分者赢全部赌注. 赌博进行了一段时间，梅雷已得 8 分，赌友得 7 分. 这时，梅雷接到通知，要他马上陪国王接见外宾，赌局只好中断. 于是，就产生了一个问题：应该怎样分配这 64 枚金币才算公平合理？梅雷为这个问题苦恼多时，最后不得不请求法国数学家帕斯卡帮助做出公正的裁判，这就是历史上著名的“分赌注”问题.

为了解决这类问题，人们对不确定现象进行了大量的研究，从而产生了概率论这门学科. 人们在生产和生活实践中经常会遇到“某事件发生的可能性大小”的问题，概率论在实践中不断发展并得到了广泛的应用.

【内容解读】

对于“分赌注”的传说，我们可以这样来思考：

假设在梅雷已积 9 分，赌友已积 8 分的情况下赌局中止. 这样，如果赌局继续，那么最多再赌 2 局，就可以分出输赢. 我们用“m”表示梅雷积 1 分，用“d”表示赌友积 1 分，此时有 4 种等可能出现的结果：(m, m)、(m, d)、(d, m)、(d, d). 其中，梅雷先积 10 分有 3 种，赌友先积 10 分有 1 种，于是梅雷应分得金币 $64\times\frac{3}{4}=48$（枚），赌友应分得金币 $64\times\frac{1}{4}=16$（枚）.

假设在梅雷已积 8 分，赌友已积 7 分的情况下赌局中止. 这样，如果赌局继续，那么最多再赌 4 局，就可以分出

数学活动

摸球试验

一只不透明的袋子中装有 3 个白球和 1 个红球，这些球除颜色外都相同，从中任意摸出 1 个球，记录颜色后将球放回袋中并摇匀.

（1）猜想：从袋子中任意摸出 1 个球，是“摸到白球”的可能性大，还是“摸到红球”的可能性大？“摸到白球”与“摸到红球”的概率各是多少？

（2）做试验：每人摸球 30 次，把试验结果填入下表.

摸球次数	“摸到白球”的频数	“摸到红球”的频数
30		

（3）汇总全班同学的试验结果，估计“摸到白球”与“摸到红球”的概率.

你做出的猜想与试验结果一致吗？

【教学目标】

1. 经历“猜想—试验并收集、整理、描述数据—分析试验结果（在多次重复试验中探索随机事件发生的频率的变化规律）—做出估计”的活动过程，培养学生的随机观念.

2. 在活动中进一步认识频率与概率之间的关系，会用频率的稳定值估计概率.

【教学过程设计建议】

“摸球试验”意在引导学生运用“统计与概率”的相关知识经历解决问题的全过程：猜想—试验并收集、整理、描述数据—分析试验结果（在多次重复试验中探索随机事件发生的频率的变化规律）—做出估计.

这里要说明的是：课本在“8.2　可能性的大小”一节中，安排了“抛掷质地均匀的小立方体试验”和“转盘试验”，这 2 个数学实验与数学活动中的“摸球试验”的要求是不相同的：前者只要求得出结论—随机事件发生的可能性有大有小，而要得出这一结论并不需要充分多的试验数据；后者则需要充分经历“猜想—试验并收集、整理、描述数据—分析试验结果（在多次重复试验中探索随机事件发生的频率的变化规律）—做出估计”的过程，也就是说，前者是定性的，后者是定量的.

“摸球试验”与一般的做习题不同，它是完成一项有实际应用价值的数学活动，要求数据来源于实际，且记录、计算准确无误，整理、描述、分析数据的方法科学合理，以确保“估计”的精确性. 因此，在试验中，要加强学生的责任心，关注学生在活动中情感、态度、价值观方面的

微信公众号：电子课本大全

小结与思考

1. 必然事件和不可能事件都是确定事件．举例说明什么是不可能事件，什么是必然事件．

2. 在日常生活中，有很多事情我们事先无法确定它会不会发生，这样的事情是随机事件．随机事件发生的可能性有大有小．一个事件发生的可能性大小的数值，称为这个事件发生的概率．列举生活中的一些随机事件，并指出这些事件发生的可能性哪个较大？哪个较小？

3. 通常，在多次重复试验中，一个随机事件发生的频率会在某一个常数附近摆动，并且趋于稳定，这个性质称为频率的稳定性．在实际生活中，人们常把这个常数作为该随机事件发生的概率的估计值．

4. 用频率估计一个随机事件发生的概率，通常要经历“试验并收集、整理、描述数据—计算频率—做出估计”的过程．应当注意，这里的“试验”，必须在相同条件下进行，并且试验的次数要足够多．

复习巩固

1. 判断下列事件是必然事件、不可能事件，还是随机事件：

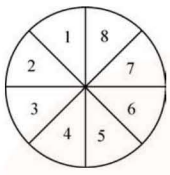
(1) 如果 a、b 都是实数，那么 $a+b=b+a$；

(2) 10 张相同的小标签分别标有数字 1～10，从中任意抽取 1 张，抽到 8 号签；

(3) 同时抛掷两枚质地均匀的骰子，向上一面的点数之和为 13；

(4) 射击 1 次，中靶．

2. 如图，转盘中 8 个扇形的面积都相等，任意转动转盘 1 次，当转盘停止转动时，估计下列事件发生的可能性的大小，并将这些事件的序号按发生的可能性从小到大的顺序排列：



（第2题）

(1) 指针落在标有 5 的区域内；

(2) 指针落在标有 10 的区域内；

(3) 指针落在标有偶数或奇数的区域内；

(4) 指针落在标有奇数的区域内．

输赢，此时有16种等可能出现的结果：(m, m, m, m)、(d, m, m, m)、(m, d, m, m)、(m, m, d, m)、(m, m, m, d)、(d, d, m, m)、(m, m, d, d)、(d, m, d, m)、(m, d, m, d)、(d, m, m, d)、(m, d, d, m)、(d, d, d, m)、(d, d, m, d)、(d, m, d, d)、(m, d, d, d)、(d, d, d, d)．其中，梅雷先积 10 分有 11 种，赌友先积 10 分有 5 种，于是梅雷应分得金币 $64\times\frac{11}{16}=44$（枚），赌友应分得金币 $64\times\frac{5}{16}=20$（枚）．

【复习题解答】

（复习巩固）

1. “(1)”是必然事件；“(2)”、“(4)”是随机事件；“(3)”是不可能事件．

2. 将事件的序号按发生的可能性从小到大的顺序排列为(2)、(1)、(4)、(3)．

发展．

“摸球试验”包括4个步骤．

步骤一　做出猜想．

通过“8.2　可能性的大小”的学习，学生一般会认识到：

(1)“摸球”是一个随机事件，摸到每一个球的机会是均等的，但每次试验前无法预知试验的确切结果；

(2)试验蕴涵着规律：虽然每次摸球的结果不确定，但由于白球的数量比红球多，因此摸到白球的可能性较大．

通过“8.3　频率与概率”的学习，借助于“抛掷质地均匀的硬币试验”的活动经验，学生可能会认识到，由于每个球除颜色外都相同，一般说来，每次“摸到白球”与“摸到红球”的可能性大小的比约为 3∶1，也就是说“摸到白球”的概率的估计值为0.75，“摸到红球”的概率的估计值为0.25．

步骤二　试验并收集、整理、描述数据．

活动分为2个层次．

第1层次：每位同学各摸球30次（每次从袋中摸出1个球，记录颜色后将球放回袋中并摇匀），统计“摸到白球”与“摸到红球”的频数（“用随机事件发生的频率的稳定值作为其概率的估计值”的前提是“在一定条件下大量重复试验”．由于“摸球30次”的试验次数相对较少，因此此时做出“估计”是不精确的）．

第2层次：汇总全班同学试验结果，统计全班同学“摸到白球”与“摸到红球”的频数．

设计这一层次的目的是为了确保试验的次数足够多，提高“用随机事件发生的频率的稳定值估计其概率”的精确程度．

步骤三　分析试验结果，做出估计．

微信公众号：电子课本大全

3. 0.5——(C)；0.1——(B)；0.9——(A).

4. 这种说法不正确.因为事件发生的可能性最小为0,最大为1.

5. (1)

抽取的乒乓球数 n	50	100	200	500	1 000	1 500	2 000
优等品的频数 m	48	95	188	471	946	1 426	1 898
优等品的频率 $\frac{m}{n}$	0.960	0.950	0.940	0.942	0.946	0.951	0.949

(2)这批乒乓球优等品频率的折线统计图(略).

(3)抽到的乒乓球是优等品的概率的估计值为0.95.

(灵活运用)

6. (1)在这个小立方体的6个面中,只要标有数字"1"的面数比标有数字"8"的面数多即可;

(2)在设计的转盘中,使红色区域的扇形面积与白色区域的扇形面积相等.

7. (1)不能事先确定摸到的球是哪一种颜色;

(2)摸到红球的概率最大;

(3)只要使袋子中的白球、黄球、红球的个数相等即可.

3. 甲、乙、丙三个事件发生的概率分别为 0.5、0.1、0.9. 下面的三句话分别描述哪个事件?

(A) 发生的可能性很大，但不一定发生;

(B) 发生的可能性很小;

(C) 发生与不发生的可能性一样大.

4. 生活中，为了强调某件事情一定会发生，有人会说"这件事百分之二百会发生". 这句话正确吗?

5. 某批乒乓球的质量检验结果如下:

抽取的乒乓球数 n	50	100	200	500	1 000	1 500	2 000
优等品的频数 m	48	95	188	471	946	1 426	1 898
优等品的频率 $\frac{m}{n}$ (精确到 0.001)							

(1) 填写表中的空格;

(2) 画出优等品频率的折线统计图;

(3) 从这批乒乓球中，任意抽取的一只乒乓球是优等品的概率的估计值是多少?

灵活运用

6. (1) 在一个小立方体的 6 个面上分别写上数字. 抛掷这个小立方体，使"向上一面的数字为 1"比"向上一面的数字为 8"出现的可能性大;

(2) 设计一个转盘，使转盘停止转动时，"指针落在红色区域"与"指针落在白色区域"出现的可能性一样大.

7. 一只不透明的袋子中装有 1 个白球、2 个黄球和 3 个红球，这些球除颜色外都相同，将球摇匀，从中任意摸出 1 个球.

(1) 能事先确定摸到的这个球的颜色吗?

(2) 你认为摸到哪种颜色的球的概率最大?

(3) 怎样改变袋子中白球、黄球、红球的个数，使摸到这三种颜色的球的概率相等?

根据全班同学获取的数据信息,绘制频率分布表和频率分布折线统计图,直观地显示在多次重复试验中事件发生的频率所稳定到的常数,从而估计"摸到白球"与"摸到红球"的概率.

步骤四　填写"数学活动评价表",组织试验成果交流、展示活动.

对活动的评价应侧重于:学生是否积极参加活动;是否能准确无误地收集、记录、计算、分析试验数据;是否能绘制相应的频率分布表和频率分布折线统计图;是否能根据绘制的频率分布表和频率分布折线统计图对事件发生的概率做出准确的估计.

【教学目标】

1. 回顾、交流本章所学的知识,并能用自己喜欢的方式进行梳理,使所学知识系统化.

2. 回顾、思考本章所体现的数学思想,培养学生的随机观念.

3. 通过"小结与思考"的教学,培养学生归纳、反思的意识.

【教学过程设计建议】

本节课教学应以学生活动为主,引导学生在反思与交流的过程中回顾本章知识,梳理所学内容,体会数学思想.

1. 探索活动

活动分为3个层次.

微信公众号：电子课本大全

8. 通常，选择题有 4 个选择支，其中有且只有 1 个选择支是正确的．现有 20 道选择题，小明认为只要在每道题中任选 1 个选择支，就必有 5 题的选择结果是正确的．你认为小明的说法正确吗？说说你的理由．

探索研究

9. 与同伴合作，做抛掷 2 枚质地均匀的硬币的试验．

(1) 同时抛掷 2 枚质地均匀的硬币，记录试验结果并填表；

抛掷次数 n	40	80	120	160	200	240	280	320	360	400	500
2 枚硬币的正面都朝上的频数 m											
2 枚硬币的正面都朝上的频率 $\frac{m}{n}$											

(2) 画出“2 枚硬币的正面都朝上”的频率的折线统计图；

(3) 估计“2 枚硬币的正面都朝上”的概率．

8. 小明的说法不正确．因为 20 题的题量较小，只有当题量很大时，在每道选择题中任选 1 个选择支，其选择结果正确的频率才能在常数 0.25 附近摆动，由此才可以估计其选择结果正确的概率为 0.25.这样，我们可以推断，当题量很大时，在每道选择题中任选 1 个选择支，其中选择结果正确的题量通常约占全部题量的 $\frac{1}{4}$．或者，也可以说，当题量很大时，在 20 题一组的选择题中，在每题中任选 1 个选择支，平均会有 20×0.25，即 5 题选择结果正确．

(探索研究)

9. 本题意在引导学生再次经历“试验并收集、整理、描述数据—分析试验结果(在多次重复试验中探索随机事件发生的频率的变化规律)—做出估计”的活动过程，进一步培养学生的随机观念．

出现“2 枚硬币的正面都朝上”的概率的估计值为 0.25．

第 1 层次：回顾、反思本章知识，梳理所学内容．

“小结与思考”中的“问题 1”、“问题 2”是对本章涉及的基础知识的回顾、反思．

为引导学生体会随机事件发生的可能性是有大有小的，课本充分展开了“猜想—试验并收集、整理、描述数据—分析试验结果”的活动过程，并在此基础上揭示概率的意义，明确概率是对随机现象的一种数学描述，刻画了随机事件发生的可能性的大小．

第 2 层次：回顾、思考本章所渗透的数学思想，培养学生的随机观念．

“小结与思考”中的“问题 3”、“问题 4”是引导学生在回顾、反思“试验并收集、整理、描述数据—分析试验结果”活动过程的基础上，认识到，仅定性地了解随机事件发生的可能性有大有小是不够的，需要定量地研究随机事件发生的可能性大小，达成两个目标：

(1)探索随机事件发生的频率的变化规律：在一定条件下大量重复试验时，事件发生的频率会在一个常数附近摆动，并且趋于稳定．这样，根据频率的稳定性，可以把试验次数很大时事件发生的频率作为其概率的估计值．

(2)感受频率与概率之间的关系：概率的统计意义是建立在频率稳定性的基础上的，在实际生活中，常把试验次数很大时事件发生的频率的稳定值作为其概率的估计值；频率与概率虽然分属于不同的学科，但它们之间的联系说明统计与概率这两个学科是相互联系，相互作用的．

2. 例题教学

教学时，教师可根据教学实际，选择课本“复习题”中的相关习题引导学生思考、交流．

微信公众号：电子课本大全

第9章　中心对称图形——平行四边形

【课标要求】

1. 通过具体实例认识平面图形关于旋转中心的旋转，探索它的基本性质：一个图形和它经过旋转所得到的图形中，对应点到旋转中心距离相等，两组对应点分别与旋转中心连线所成的角相等．

2. 了解中心对称、中心对称图形的概念，探索它的基本性质：成中心对称的两个图形中，对应点的连线经过对称中心，且被对称中心平分．

3. 探索线段、平行四边形的中心对称性质．

4. 认识并欣赏自然界和现实生活中的中心对称图形．

5. 运用图形的轴对称、旋转进行图案设计．

6. 理解平行四边形、矩形、菱形、正方形的概念，以及它们之间的关系；了解四边形的不稳定性．

7. 探索并证明平行四边形的性质定理：平行四边形的对边相等、对角相等、对角线互相平分；探索并证明平行四边形的判定定理：一组对边平行且相等的四边形是平行四边形；两组对边分别相等的四边形是平行四边形；对角线互相平分的四边形是平行四边形．

8. 了解两条平行线之间距离的意义，能度量两条平行线之间的距离．

9. 探索并证明矩形、菱形、正方形的性质定理：矩形的四个角都是直角，对角线相等；菱形的四条边相等，对角线互相垂直；以及它们的判定定理：三个角是直角的四边形是矩形，对角线相等的平行四边形是矩形；四边相等的四边形是菱形，对角线互相垂直的平行四边形是菱形．正方形具有矩形和菱形的一切性质．

10. 探索并证明三角形的中位线定理．

11. 通过实例体会反证法的含义．

此外，在研究图形性质和运动的过程中，进一步发展空间观念；体会通过合情推理探索数学结论，运用演绎推理加以证明的过程，在多种形式的数学活动中，发展合情推理与演绎推理的能力．

【设计思路】

本章是在学生小学数学学习中已认识了平行四边形的基础上，从中心对称的角度引导他们对平行四边形认识的进一步深化．

本章由3个单元组成．

第一单元：探索图形的旋转、中心对称与中心对称图形的性质；

第二单元：探索、确认平行四边形的中心对称性，探索并证明平行四边形的性质定理和判定定理，在此基础上探索并证明矩形、菱形、正方形的性质定理和判定定理；

第三单元：利用图形的旋转，研究三角形中位线．

旋转是现实生活中广泛存在的现象，它不仅是探索一些图形性质的手段，也是解决现实生活中的具体问题和进行数学交流的工具．探索旋转的基本性质，认识和欣赏旋转在现实生活中的广泛应用，是本章的学习目标之一．

在此之前，学生已学习了“图形的平移”、“轴对称和轴对称图形”，初步积累了一定的图形运动变化的数学活动经验，课本在此基础上，立足于学生已有的生活经验和初步的数学活动经验，从观察生活中的旋转现象开始，直观地认识旋转，然后引导学生经历观察、操作、画图等数学活动，分析旋转现象的共同规律，得到旋转的基本性质，丰富对图形运动变化的认识．

课本从图形旋转的特殊情形——旋转角为180°入手，展开对中心对称性质的探索，并在此基础上进行简单的中心对称画图．

课本以中心对称为主线，展开对平行四边形、矩形、菱形、正方形以及三角形中位线的研究．

在呈现具体内容时，课本为学生提供了生动的现实情境，通过操作、实验、观察、思考、交流等数学活动，引导学生

微信公众号：电子课本大全

经历探索特殊四边形性质的过程，经历探索四边形是特殊四边形的条件的过程．

在呈现形式上，课本突出图形的运动变化，引导学生在自主探索中学习思考，在不断的探索中学习表达形式多样化的证明，把合情推理和演绎推理有机的融合在各个数学活动中．

【教学建议】

1. 教学中，要充分运用课本提供的情境和活动材料，展开操作、实验、观察、思考、交流等数学活动的过程，丰富学生的数学活动经验，有意识地培养学生积极的情感态度．

2. 教学中，要注重合情推理与演绎推理的有机融合，引导学生不断理解合情推理和演绎推理都是获得数学结论的重要途径，进一步体会证明的必要性，激发学生对数学证明的兴趣和掌握综合法证明的信心．

3. 图形的概念揭示了图形的本质属性．教学中，要引导学生理解：图形的概念具有两方面的含义，它既是判别图形的条件，又是图形的一个性质．

4. 本章内容渗透了特殊与一般的关系．教学中要引导学生在把握图形本质属性的基础上，帮助他们理解：在图形不断特殊化的过程中，图形的性质越来越多，而判定它的要求则越来越高，加深学生对特殊与一般关系的认识，领会特殊事物的本质属性与特殊性质的关系．

5. 在探索平行四边形、矩形、菱形、正方形的性质和判别四边形是特殊四边形的条件的过程中，应鼓励学生探究方式、表述方式的多样化，为学生提供个性化学习的时间和空间．

6. 教学中，要充分运用现代化信息技术手段，丰富学生的学习资源，生动活泼地展示图形．

【评价建议】

1. 考查学生对基础知识的理解和掌握程度．例如，要求学生分类表述各种平行四边形的共性和特性、各种平行四边形的判定条件，在学生讨论、思考和解决问题的过程中，不断调整和完善自己的理解．

2. 通过思考、交流、尝试等方式考查学生能否合乎逻辑的思考和有条理的表达，仔细倾听学生的口头表达，及时评价，及时纠正．使学生的说理能力有较快的提高．

3. 本章中较多的合情推理结合演绎推理研究图形的性质和判定，因此不仅要关注学生参与操作、探索、归纳活动的程度，而且要关注学生能否通过独立思考获得证明的思路；能否尝试用不同的方法证明同一个命题；能否运用规范的数学语言表述论证的过程．

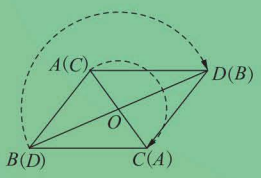
【课时安排】

本章教学大约需要16课时，分配如下：

第1节	图形的旋转	1课时
第2节	中心对称与中心对称图形	2课时
第3节	平行四边形	3课时
第4节	矩形、菱形、正方形	5课时
第5节	三角形的中位线	2课时
	数学活动	1课时
	小结与思考	2课时

微信公众号：电子课本大全

第9章 中心对称图形——平行四边形



$OA = OC$，$OB = OD$

雪花、风车……展示着中心对称的美；
利用中心对称，可以探索并证明图形的性质.



【内容解读】

章头图主图是风车，辅图是平行四边形，将本章的主要内容呈现出来.

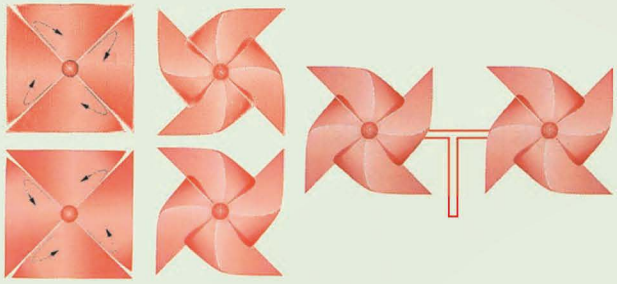
引导学生研读章头图，感受图形的旋转和对称，感受数学与生活的联系.

微信公众号：电子课本大全



香港特别行政区区旗中央的紫荆花图案由5个相同的花瓣组成．怎样改变其中一瓣的位置，使它先后与其余四瓣完全重合？

让我们一起来做风车．



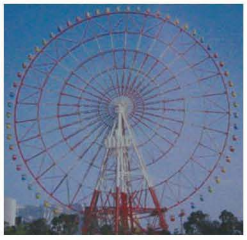
本章将学习图形的旋转、中心对称图形及其性质，研究平行四边形、矩形、菱形、正方形等图形的性质和判定方法，探索三角形中位线的性质．

【内容解读】

把一瓣绕这个图案的中心按顺(或逆)时针方向旋转4次，每次旋转72°，就能使它先后与其余4瓣完全整合．

微信公众号：电子课本大全

9.1　图形的旋转





上述情境中的旋转现象，生活中还有类似的例子吗？



将三角尺 ABC 绕点 C 按逆时针方向旋转到 DEC 的位置（图 9－1）．

$\angle ACD$ 与 $\angle BCE$ 相等吗？

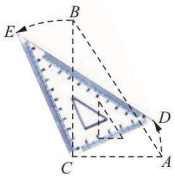


图 9－1

将图形绕一个定点转动一定的角度，这样的图形运动称为图形的**旋转**(circumgyration)．旋转不改变图形的形状、大小．

在图 9－1 中，点 A 绕点 C 旋转到点 D，点 C 称为旋转中心，点 A 与点 D 称为对应点，$\angle ACD$ 是旋转角．类似的，点 B 与点 E 是对应点，$\angle BCE$ 是旋转角．



如图 9－2，$\triangle ABC$ 绕点 O 按顺时针方向旋转到 $\triangle A'B'C'$ 的过程中，它的形状、大小没有改变．图 9－2 中还有哪些相等的线段、相等的角？

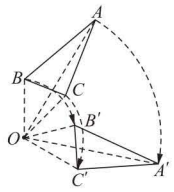
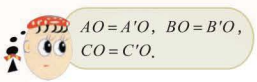
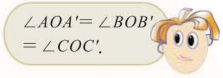


图 9－2





【教学目标】

1. 通过具体实例认识平面图形关于旋转中心的旋转．

2. 经历对旋转现象的观察、分析的过程，探索旋转的基本性质．

3. 能画出简单图形关于给定旋转中心经过旋转所得到的图形．

【教学过程设计建议】

1. 情境创设

课本提供了 2 个生活中的旋转现象，实际教学时，教师可以展示生活中更多旋转现象，丰富学生对旋转现象的感性认识．

2. 探索活动

活动一　即课本 56 页的尝试活动．

设计这个活动，实质是帮助学生理解旋转的概念，并为探索旋转的基本性质做铺垫．

教学中，应通过学生实际度量相关角的度数，帮助学生认识旋转、理解旋转的涵义，在此基础上引入旋转的概念．

对旋转概念的教学，应帮助学生理解：

(1)“将图形绕一个定点转动一定的角度”意味着图形上的每一个点同时都按相同的方式旋转相同的角度；

(2)与平移的情况相同，“图形的旋转不改变图形的形状、大小”．

活动二　即课本 56 页的讨论活动．

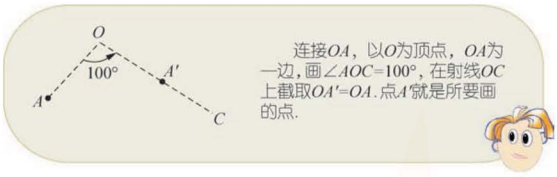
为探索旋转的基本性质，课本安排了这个讨论活

微信公众号：电子课本大全

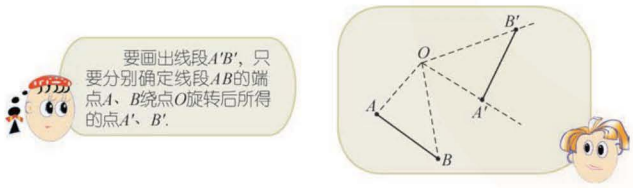
一个图形和它经过旋转所得到的图形中，对应点到旋转中心距离相等，两组对应点分别与旋转中心连线所成的角相等．

尝试

1. 画出点 A 绕点 O 按逆时针方向旋转 100°所得到的点 A'；



2. 画出线段 AB 绕点 O 按逆时针方向旋转 100°所得到的线段 $A'B'$．



画一个图形绕一个点旋转后所得的图形，关键是确定某些点绕这个点旋转后所得到的对应点．

操作

在图 9－3 中，画出将△ABC 绕点 C 按顺时针方向旋转 120°后所得到的三角形．

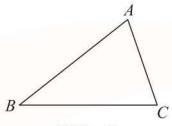
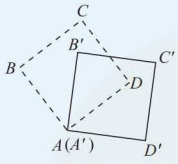


图 9－3

练习

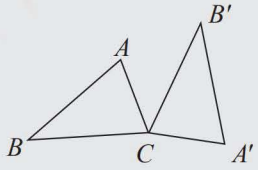
1. 如图，正方形 $A'B'C'D'$ 是正方形 $ABCD$ 按顺时针方向旋转一定的角度而得到的．请指出图中的哪一点是旋转中心，并度量旋转角的度数．



（第 1 题）

【内容解读】

画出将△ABC 绕点 C 按顺时针方向旋转 120°所得的图形如下：



【练习解答】

1. 图中点 A 是旋转中心，旋转的角度为 45°．

动，它是活动一的继续．应引导学生从旋转的概念出发，理解在课本图9–2的旋转过程中，旋转中心是什么？图中的每一对对应点分别是什么？旋转角是什么？

活动三　画旋转图形．

课本安排了两个画图活动：(1) 画已知点绕给定点旋转所得到的点；(2) 画已知线段绕给定点旋转所得到的线段．

课本设计用卡通语给出了如何画一个已知点按问题要求旋转所得到的对应点的画法，然后尝试画已知线段按问题要求旋转所得到的线段．

这样设计的实质是引导学生理解“画旋转所得图形的关键是确定某些点按要求旋转所得到的对应点的位置”，从而使学生可以顺利地画出已知三角形按要求旋转所得到的三角形、画出已知四边形按要求旋转所得到的四边形……

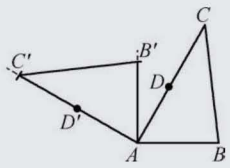
3. 小结

(1) 画旋转所得图形的实质就是画已知图形某些点的对应点．

(2) “图形的旋转”给我们提供了认识、探索、研究图形的又一种重要方法．

微信公众号：电子课本大全

2. 所画图形如下：

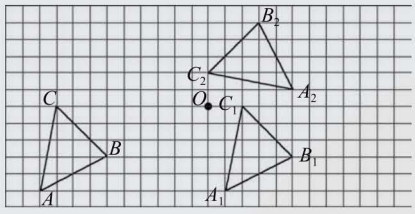


【习题解答】

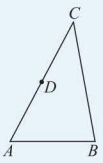
1. 菊花图案，绕旋转中心旋转45°或45°的整数倍后能与原来的图案互相重合.

2. (1) 点 A 为旋转中心；(2) 旋转角为90°或270°；(3) 略.

3. 所画图形如下：



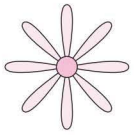
2. 如图，D 是 AC 的中点，画出△ABC 绕点 A 按逆时针方向旋转 90°所得到的三角形，以及点 D 的对应点 D'.

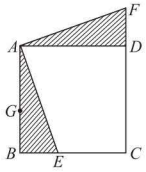


（第 2 题）

9.1 习题

1. 图中的菊花图案，绕旋转中心旋转多少度后能与原来的图案互相重合？

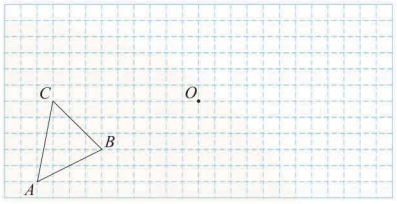

（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 E、G 分别在 BC、AB 上，△ABE 经过旋转后得到△ADF.
(1) 旋转中心是哪一点？
(2) 旋转角为多少度？
(3) 在图中画出点 G 的对应点 G'.

3. 按下列要求在方格纸中画图：
△ABC 向右平移 11 格所得到的△$A_1B_1C_1$；△$A_1B_1C_1$ 绕点 O 按逆时针方向旋转 90°所得到的△$A_2B_2C_2$.



（第 3 题）

微信公众号：电子课本大全

9.2 中心对称与中心对称图形

“双鱼”剪纸作品是由两个形状、大小完全相同的图案组成的，这两个图案的位置有怎样的特殊关系？怎样改变其中一个图案的位置，可以使它与另一个图案重合？



操作

1. 用透明纸覆盖在图 9－4 上，描出四边形 $ABCD$.

2. 用大头针钉在点 O 处，把四边形 $ABCD$ 绕点 O 旋转 180°，你发现了什么？

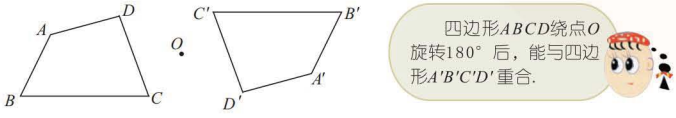


图 9－4

一个图形绕着某一点旋转 180°，如果它能够与另一个图形重合，那么称这两个图形关于这点对称，也称这两个图形成**中心对称**(central symmetry)．这个点叫做**对称中心**(symmetric centre)．

如图 9－4，四边形 $ABCD$ 与四边形 $A'B'C'D'$ 关于点 O 对称，点 O 是对称中心．

一个图形绕着某一点旋转 180°是一种特殊的旋转，成中心对称的两个图形具有图形旋转的一切性质．

59

【内容解读】

提供“双鱼”剪纸作品，目的是让学生能直观地理解中心对称是特殊的图形旋转．

【教学目标】

1. 经历观察、操作、思考、讨论等数学活动，通过具体实例认识中心对称，探索中心对称的性质．

2. 认识中心对称图形，探索中心对称图形的性质．

【教学过程设计建议】

1. 情境创设

(1) 观察“双鱼”剪纸作品，思考、讨论课本提供的问题；

(2) 进行课本 59 页提供的操作活动．

通过具体实例的观察和操作，引导学生感悟中心对称，在感悟的基础上揭示中心对称的概念．

关于中心对称的概念，应引导学生理解：中心对称是对两个图形而言，它表示两个图形之间的对称关系；中心对称是一种特殊的旋转．

2. 探索活动

活动一　探索中心对称的基本性质(即课本 60 页“思考”活动)．

课本的这个活动设计了两个层次：首先探索成中心对称的两个点与对称中心的关系，并用图形的运动来确认；然后探索成中心对称的两个四边形中各对应点与对称中心的关系．引导学生从简单到复杂的探索、发现成中心对称的两个图形具有旋转的一切性质，且具有特殊的性质——对应点连线经过对称中心，且被对称中心平分．

活动二　利用中心对称的基本性质画图(即课本 60 页“操作”活动)．

第 1 个操作活动，课本给出了画图的方法．教学时，

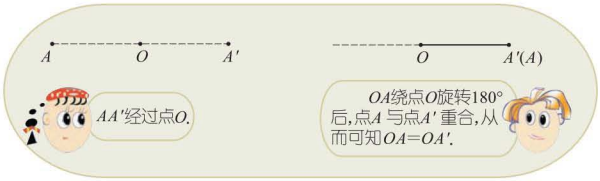
微信公众号：电子课本大全

思考

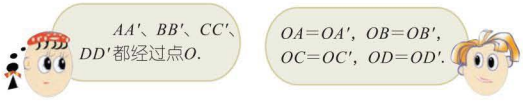
1. 如图 9－5，点 A 与点 A' 关于点 O 对称．如果连接 AA'，你能发现什么？



图 9－5



2. 在图 9－4 中，分别连接 AA'、BB'、CC'、DD'，你发现了什么？



成中心对称的两个图形中，对应点的连线经过对称中心，且被对称中心平分．

操作

1. 在图 9－6 中，画点 A 关于点 O 对称的点．

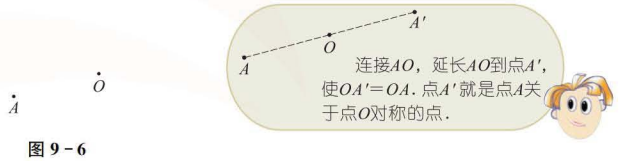


图 9－6

2. 在图 9－7 中，画线段 AB 关于点 O 对称的线段．

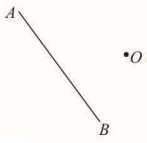


图 9－7

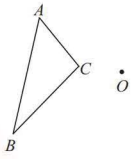
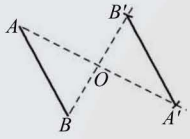


图 9－8

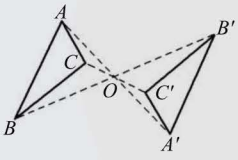
3. 在图 9－8 中，画△ABC 关于点 O 对称的三角形．

【内容解读】

画出线段 AB 关于点 O 成中心对称的图形如下：



画出△ABC 关于点 O 成中心对称的图形如下：



应先进行分析(假设点 A 的对称点为点 A'，则点 A、点 O、点 A' 在一条直线上，且点 O 为线段 AA' 的中点)，在弄清画法的道理的基础上再画图．第2、第3个操作活动的教学，要引导学生自己对问题进行分析、思考，有助于不断提高学生分析问题的能力．

活动三　认识中心对称图形．

课本通过思考“轴对称与轴对称图形既有联系又有区别．类似地，中心对称与中心对称图形有怎样的联系和区别呢?”引导学生类比轴对称与轴对称图形的关系，认识中心对称图形．

中心对称图形概念的教学中，要帮助学生理解：

(1) 中心对称图形有一个对称中心，把这个图形绕对称中心旋转 180°，旋转所得到的图形能够与原来的图形互相重合；

(2) 中心对称图形是对一个图形而言，是一个图形所具有的性质；

(3) 中心对称与中心对称图形既有区别又有联系．如果把成中心对称的两个图形看成一个整体，那么这个整体就是一个中心对称图形；如果把一个中心对称图形位于过对称中心的任一条直线两旁的部分看成两个图形，那么这两部分就成中心对称．

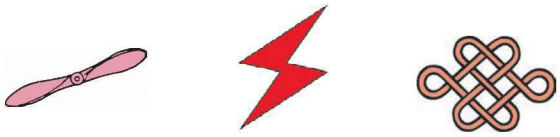
小结：中心对称和轴对称都是两个图形按某种规则运动互相重合的特殊位置关系：

轴对称	中心对称
有 1 条对称轴——直线	有 1 个对称中心——点
一个图形沿对称轴翻折能够与另一个图形重合	一个图形绕对称中心旋转 180° 能够与另一个图形重合
对应点的连线被对称轴垂直平分	对应点的连线经过对称中心，且被对称中心平分

微信公众号：电子课本大全

讨论

下列图案有什么共同特征？



(1)　(2)　(3)

图 9-9

在日常生活中，你还见到过具有这种特征的图案吗？试举例说明．

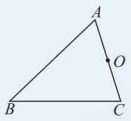
把一个图形绕某一点旋转 180°，如果旋转后的图形能够与原来的图形互相重合，那么这个图形叫做**中心对称图形**(central symmetric figure)．这个点就是它的对称中心．

思考

我们已经知道，轴对称与轴对称图形既有联系又有区别．类似的，中心对称与中心对称图形有怎样的联系和区别呢？

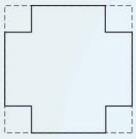
练习

1. 如图，在△ABC 中，O 是 AC 的中点，画△ABC 关于点 O 对称的△$A'B'C'$.



(第 1 题)

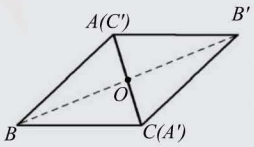
2. 线段是中心对称图形吗？如果是，说出它的对称中心．
3. 在正方形的 4 个角上剪去 4 个相同的小正方形(如图)，剩余部分是中心对称图形吗？如果是，画出它的对称中心．



(第 3 题)

【练习解答】

1. 画△ABC 关于点 O 对称的△$A'B'C'$ 的图形如下：



2. 线段是中心对称图形，中点是它的对称中心．

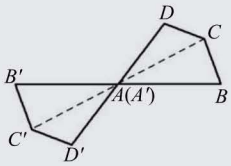
3. 是中心对称图形，图略．

微信公众号：电子课本大全

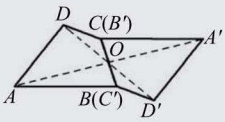
【习题解答】

1. 图①、②、③、④、⑤是中心对称图形，图①、②、③是轴对称图形，图略．

2. (1) 以顶点 A 为对称中心：

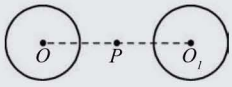


(2) 以 BC 的中点 O 为对称中心：

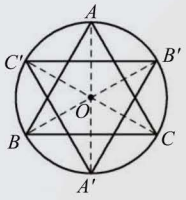


3. (1) 圆是中心对称图形，圆心是它的对称中心；

(2)



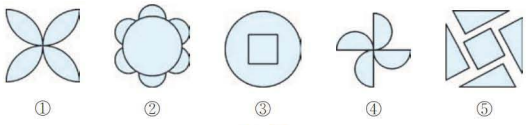
4.



5. 点 A_1 与点 A_2 关于点 O 成中心对称．如下图，由点 A_1 与点 A 关于直线 l_1 对称知：$OA_1=OA$，$\angle A_1OA=2\angle 1$；同样可知：$OA_2=OA$，$\angle A_2OA=2\angle 2$，这样 $OA_1=OA_2$，$\angle A_1OA+\angle A_2OA=$

9.2 习题

1. 下列图形中，哪些是中心对称图形？哪些是轴对称图形？请画出它们的对称中心或对称轴．

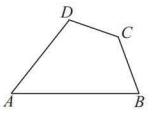


(第 1 题)

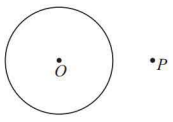
2. 按下列要求分别画出与四边形 $ABCD$ 成中心对称的四边形：

(1) 以顶点 A 为对称中心；

(2) 以 BC 的中点 O 为对称中心．



(第 2 题)

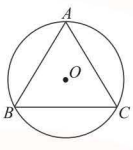


(第 3 题)

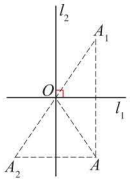
3. (1) 圆是中心对称图形吗？如果是，说出它的对称中心；

(2) 如图，P 是圆 O 外的一个定点，画圆 O 关于点 P 对称的圆 O_1．

4. 如图，等边三角形 ABC 的 3 个顶点都在圆 O 上，这个图形是中心对称图形吗？如果是，指出它的对称中心；如果不是，试把它补成一个中心对称图形．



(第 4 题)



(第 5 题)

5. 如图，直线 $l_1\perp l_2$，垂足为 O，点 A_1 与点 A 关于直线 l_1 对称，点 A_2 与点 A 关于直线 l_2 对称．点 A_1 与点 A_2 有怎样的对称关系？你能说明理由吗？

微信公众号：电子课本大全

读一读

分形与中心对称图形

画1个等边三角形(如图(1)),将它的3条边三等分,各取中间的一段,并以此为边分别在原三角形外作3个小等边三角形,得图(2).同样地,分别将图(2)中6个小等边三角形的2条边三等分,并以中间的一段为边向形外分别作12个更小的等边三角形,得图(3).



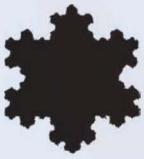
图(1)



图(2)



图(3)



图(4)

依照上述方法不断画下去,这个图形外缘曲线的构造越来越精细,好像一片理想的雪花(如图(4)),所以被称为雪花曲线.

像雪花曲线这样,局部与整体的形状相同的图形,数学家芒德勃罗(B. B. Mandelbrot)称之为“分形”(fractal).雪花曲线是分形中的中心对称图形.

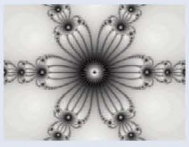
欣赏一组中心对称的分形图案.



图(5) 稳定的固态型



图(6) 树枝状

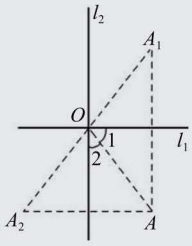


图(7) Newton分形



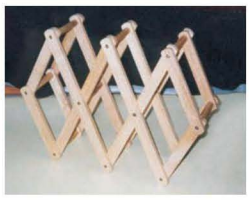
图(8) Nova分形

$2(\angle 1+\angle 2)=2\times 90^\circ=180^\circ$,即点$A_1$、$A_2$的连线经过点$O$,且$OA_1=OA_2$.



微信公众号：电子课本大全

9.3　平行四边形

上面的图片中有你熟悉的图形吗？

两组对边分别平行的四边形叫做**平行四边形**(parallelogram)．

图 9－10 中的四边形 $ABCD$ 是平行四边形，记作“$\square ABCD$”，读作“平行四边形 $ABCD$”．



图 9－10



如图 9－11，O 是 $\square ABCD$ 对角线 AC 的中点．用透明纸覆盖在图 9－11 上，描出 $\square ABCD$，再用大头针钉在点 O 处，将透明纸上的 $\square ABCD$ 旋转 180°．你有什么发现？

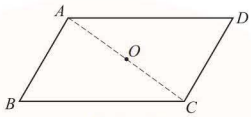


图 9－11



下面，我们来证实 $\square ABCD$ 是中心对称图形．

把图 9－12（1）中的 $\square ABCD$ 绕点 O 旋转 180°：

因为 O 是 AC 的中点，所以点 A 与点 C 重合，点 C 与点 A 重合；

【内容解读】

小学数学中，学生通过观察、操作，已认识平行四边形、长方形、菱形、正方形和梯形．

【教学目标】

1. 以中心对称为主线，探索并证明平行四边形的性质定理和判定定理．

2. 经历探索、猜想、证明的过程，从中体会探索结论的思考方法，理解对猜想进行证明的必要性，不断感受合情推理和演绎推理都是人们正确认识事物的重要途径．

3. 逐步学会分析和综合的思考方法，发展演绎推理的能力．

4. 从简单的数学例子中体会反证法的含义．

【教学过程设计建议(第一课时)】

1. 情境创设

利用课本提供的两幅实物图片，引导学生观察、探索：图片中有你熟悉的图形吗？这些图形有什么特征？

在小学认识平行四边形的基础上给出平行四边形的定义．

2. 探索活动

本节是以中心对称为主线，利用中心对称图形的性质，研究平行四边形的性质，为此，课本安排了“尝试、交流”活动，展开对平行四边形性质的研究．实际教学中，活动可以分以下四个层次进行：

(1) 操作：描出 $\square ABCD$ 及其对角线 AC，并将 $\square ABCD$ 绕 AC 的中点 O 旋转 180°．

教学中通过学生实际操作，有利于学生发现平行四边形是中心对称图形，并加深学生对中心对称图形的理解．

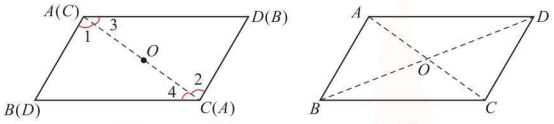
(2) 探索：平行四边形的中心对称性．

微信公众号：电子课本大全

因为 $AB \parallel CD$，可知$\angle 1=\angle 2$，所以 AB 落在射线 CD 上；同样的，因为 $AD \parallel BC$，可知$\angle 3=\angle 4$，所以 CB 落在射线 AD 上．由两条直线相交只有一个交点，可知 AB 和CB 的交点B 与CD 和AD 的交点 D 重合．同理，点 D 与点 B 重合．

$\square ABCD$ 是中心对称图形．

连接 BD，因为点 B 与点 D 关于点 O 对称，所以 BD 经过点 O，且被点 O 平分(如图 9－12（2）)．



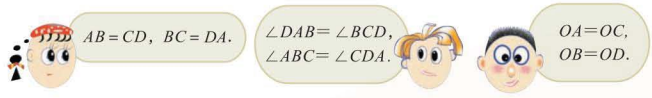
(1)　　(2)

图 9－12

由此可知，平行四边形是中心对称图形，对角线的交点是它的对称中心．

交流

从证实$\square ABCD$ 是中心对称图形的过程中，你发现平行四边形还有哪些性质？



于是，我们得到如下定理：

平行四边形的对边相等，对角相等，对角线互相平分．

例 1　已知：如图 9－13，点 A、B、C 分别在$\triangle EFD$ 的各边上，且 $AB \parallel DE$，$BC \parallel EF$，$CA \parallel FD$.

求证：A、B、C 分别是$\triangle DEF$ 各边的中点．

证明： ∵ $AB \parallel DE$，$BC \parallel EF$，

∴ 四边形 $ABCE$ 是平行四边形(两组对边分别平行的四边形是平行四边形)．

∴ $AE=BC$(平行四边形的对边相等)．

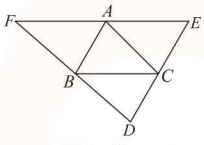


图 9－13

教学中应引导、鼓励学生表述纸片 $\square ABCD$ 绕 AC 的中点 O 旋转 180°确认结论的过程．用对称语言表达确认结论的过程，学生会有一定困难，教师可以给予帮助，目的是引导学生不断感受证明过程可以有不同的表达形式，并有利于从中不断培养学生的几何直观能力．

(3) 交流：利用中心对称图形的性质，可以发现平行四边形有哪些性质？

教学中，应引导学生围绕“图形绕点 O 旋转 180°后，点 A 与点 C 重合，点 C 与点 A 重合；点 B 与点 D 重合，点 D 与点 B 重合”探索平行四边形的性质．

教学中，还应引导学生理解：图形的概念既是判别图形的条件，又是图形的一个性质．四边形只要具备“两组对边分别平行”的条件，它就是平行四边形；反过来，如果四边形是平行四边形，那么它必定有“两组对边分别平行”．

(4) 证明：平行四边形的性质定理．

平行四边形性质的证明，可以通过图形的运动变化来确认，也可以通过演绎证明．用对称语言确认图形的性质，不作教学要求．

对平行四边形的性质，教学中，应引导学生根据图形，用数学语言加以表述：

∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AB=DC$，$BC=AD$．

∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $\angle ABC=\angle ADC$，$\angle BAD=\angle BCD$．

∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $OA=OC$，$OB=OD$．

3. 例题教学

例 1 的教学，可以设计成 2 个层次：

微信公众号：电子课本大全

【内容解读】

设置“证明的途径”栏目，目的是引导学生学会综合的思考方法．

∵ $CA \parallel FD$，$BC \parallel EF$，

∴ 四边形 $AFBC$ 是平行四边形（两组对边分别平行的四边形是平行四边形）．

∴ $AF = BC$（平行四边形的对边相等）．

∴ $AE = AF$．

同理　$BD = BF$，$CD = CE$．

∴ A、B、C 分别是 $\triangle DEF$ 各边的中点．

证明的途径

由 $AB \parallel DE$、$BC \parallel EF$、$CA \parallel FD$，可知四边形 $ABCE$、$AFBC$ 都是平行四边形．

所以 $AE = BC$、$AF = BC$．

从而 $AE = AF$．



在图 9－13 中，$\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的内角分别相等吗？为什么？你还能得到哪些结论？证明你的结论．

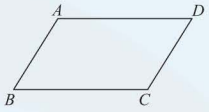
【练习解答】

1. $\angle D = \angle B = 50°$，$\angle A = \angle C = 130°$．

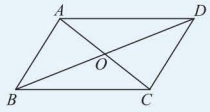
2. $AD = BC = 7$ cm，$OA = \frac{1}{2}AC = 3$ cm，$OD = \frac{1}{2}BD = 5$ cm，$\triangle AOD$ 的周长为 15 cm．



1. 如图，在□$ABCD$ 中，$\angle B = 50°$．求这个四边形的其他内角的度数．



（第 1 题）



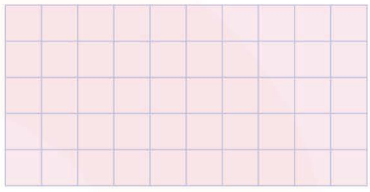
（第 2 题）

2. 如图，□$ABCD$ 的对角线相交于点 O，$BC = 7$ cm，$BD = 10$ cm，$AC = 6$ cm．求 $\triangle AOD$ 的周长．



在方格纸上画两条互相平行并且相等的线段 AD、BC，连接 AB、DC．

你能证明所画四边形 $ABCD$ 是平行四边形吗？



如图9-13，$AB \parallel DE$，$BC \parallel EF$，$CA \parallel FD$．

（1）你发现这个图形有哪些性质？

（2）A、B、C 分别是 $\triangle EFD$ 各边的中点吗？

说说你的证明思路．

设计第一层次，实质是引导学生不断地学会从多个角度观察、认识图形，主动地发现和获得较多的数学结论．实际教学中，学生从位置、形状、大小等不同的角度观察，可能会有以下的一些发现：① 图中有 3 组平行线的同位角相等、内错角相等、同旁内角互补；② 图中有 3 个平行四边形；③ 图中有 6 对相等线段；④ 图中的 4 个小三角形是全等三角形；等等．

4. 小结

（1）我们从平行四边形具有中心对称性出发，探索、研究了平行四边形的性质；

（2）利用三角形全等，证明了平行四边形的性质定理，这是研究四边形问题中常用的一种思考方法——把四边形问题转化为三角形问题．

【教学过程设计建议（第二课时）】

1. 情境创设

课本以问题“在方格纸上画两条互相平行并且相等的线段 AD、BC，连接 AB、DC．你能说明四边形 $ABCD$ 是平行四边形吗？”作为本节课的情境，目的是引导学生经历合情推理发现结论和演绎推理证明结论的全过程，不断感受合情推理和演绎推理相辅相成、密不可分．

2. 探索活动（即课本 67 页的“交流”活动）

由于学生经历了“一组对边平行并且相等的四边形是平行四边形”的探索、证明过程，因此本活动结论的证

微信公众号：电子课本大全

已知：如图 9－14，在四边形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$AD = BC$.

求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

证明：连接 AC.

$\because AD \parallel BC$，

$\therefore \angle BCA = \angle DAC$.

在$\triangle BCA$ 和$\triangle DAC$ 中，

$$\begin{cases} CB = AD, \\ \angle BCA = \angle DAC, \\ CA = AC, \end{cases}$$

$\therefore \triangle BCA \cong \triangle DAC$.

$\therefore \angle BAC = \angle DCA$.

$\therefore AB \parallel CD$.

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形（两组对边分别平行的四边形是平行四边形）.

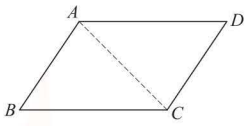


图 9－14

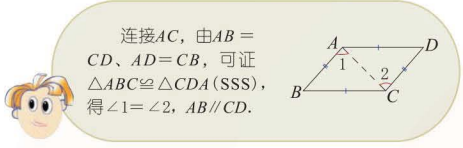
于是，我们得到如下定理：

一组对边平行且相等的四边形是平行四边形.

交流

在四边形 $ABCD$ 中，$AB=CD$，$AD=BC$.

四边形 $ABCD$ 是平行四边形吗？证明你的结论.



于是，我们得到如下定理：

两组对边分别相等的四边形是平行四边形.

明，学生一般不会有困难．对于“一组对边平行并且相等的四边形是平行四边形”的证明，其说理依据只能是平行四边形的定义；对于“两组对边分别相等的四边形是平行四边形”的证明，其说理依据除了平行四边形的定义外，还有一组对边平行并且相等的四边形是平行四边形，因此教学中要鼓励学生进行不同证明思路的交流和讨论，不断发展学生的有条理的思考和有条理的表达能力．

3. 例题教学

在例2的教学中，部分学生可能仍习惯“通过三角形全等证明几何命题”．比如：

（1）$\left.\begin{array}{l} \triangle ABE \cong \triangle CDF \Rightarrow BE = DF \\ AD = CB,\ AE = CF \Rightarrow DE = BF \end{array}\right\} \Rightarrow \square BFDE$；

（2）$\triangle ABE \cong \triangle CDF \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} \angle BED = \angle BFD \\ \angle BED + \angle EBF = 180° \end{array}\right\} \Rightarrow \angle BFD + \angle EBF = 180°$

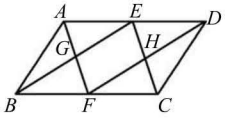
$\Rightarrow BE \parallel DF$

$DE \parallel BF$ $\Rightarrow \square BFDE$.

显然，课本提供的证明思路优于上述两种证明思路．教学中，既要鼓励学生进行不同思路的交流和讨论，也要从多种证明方法的比较中进行“多解择优”．

4. 小结

（1）如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$AD = BC$，且 E、F 分别是 AD、BC 的中点，图中有哪些四边形是平行四边形？说说你的理由．



（2）平行四边形的判定定理“两组对边分别相等的四边形是平行四边形”与平行四边形的性质定理“平行四边形的对边相等”有什么联系？有什么区别？

微信公众号：电子课本大全

例 2　已知：如图 9－15，在□*ABCD* 中，点 *E*、*F* 分别在 *AD*、*BC* 上，且 *AE*=*CF*.

求证：四边形 *BFDE* 是平行四边形．

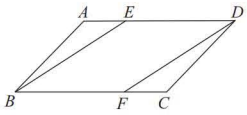


图 9－15

证明： ∵ 四边形 *ABCD* 是平行四边形，

∴ *AD* = *BC*，*AD* // *BC*（平行四边形的对边平行且相等）．

∵ *AE* = *CF*，

∴ *AD* − *AE* = *BC* − *CF*，

即　*DE* = *BF*.

∴ 四边形 *BFDE* 是平行四边形（一组对边平行且相等的四边形是平行四边形）．

证明的途径

由□*ABCD*、*AE* = *CF*，可证 *DE* = *BF*，*DE* // *BF*，于是四边形 *BFDE* 是平行四边形．



还有其他方法证明例 2 的结论吗？

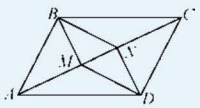


1. 在四边形 *ABCD* 中，*AB* // *DC*，∠*A*=∠*C*．四边形 *ABCD* 是平行四边形吗？证明你的结论．

2. 一组对边平行，另一组对边相等的四边形是平行四边形吗？如果是，加以证明；如果不是，举出反例．

3. 已知：如图，在□*ABCD* 中，∠*ABC*、∠*ADC* 的平分线分别交对角线 *AC* 于点 *M*、*N*.

求证：四边形 *BMDN* 是平行四边形．



（第 3 题）



1. 画两条相交直线 *a*、*b*，设交点为 *O*.

2. 在直线 *a* 上截取 *OA* = *OC*，在直线 *b* 上截取 *OB* = *OD*，连接 *AB*、*BC*、*CD*、*DA*.

你能证明所画四边形 *ABCD* 是平行四边形吗？

已知：如图 9－16，直线 *AC*、*BD* 相交于点 *O*，*OA* = *OC*，*OB* = *OD*.

求证：四边形 *ABCD* 是平行四边形．

证明：在△*AOB* 和△*COD* 中，

【练习解答】

1. 四边形 *ABCD* 是平行四边形，证明如下：

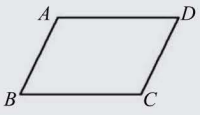
如图，∵ *AB* // *DC*，

∴ ∠*B*+∠*C*=180°.

∵ ∠*A*=∠*C*，

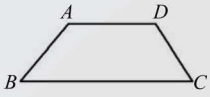
∴ ∠*A*+∠*B*=180°.

∴ *AD* // *BC*．



∴ 四边形 *ABCD* 是平行四边形（两组对边分别平行的四边形是平行四边形）．

2. 不是．例如，在四边形 *ABCD* 中，*AD* // *BC*，*AB*=*DC*．



3. 本题有多种解答．例如，由四边形 *ABCD* 是平行四边形，得 ∠*ABC*=∠*ADC*，*AB* // *DC*．所以 $\angle ABM=\frac{1}{2}\angle ABC=\angle CDN=\frac{1}{2}\angle ADC$，∠*BAM*=∠*DCN*．可得△*ABM* ≌ △*DCN*，*BM*=*DN*，∠*BMA*=∠*DNC*．于是∠*BMN*=∠*DNM*，*BM* // *DN*．所以四边形 *BMDN* 是平行四边形．

【教学过程设计建议（第三课时）】

1. 情境创设

课本以“尝试、操作、思考所画两条对角线互相平分的四边形是不是平行四边形？”作为本节课的情境，目的是引导学生经历合情推理发现结论和演绎推理证明结论的全过程，不断感受合情推理和演绎推理相辅相成、密不可分．

教学时也可以在回顾上一课时小结（2）的基础上，引导学生进一步猜想，激发学生主动构造平行四边形性质定理的逆命题，并尝试探索这些逆命题的真假．

2. 探索活动

问题一　你有与课本不同的方法证明“对角线互相平分的四边形是平行四边形”吗？

对于问题一，除演绎推理还可以用图形运动的方式来确认：图 9-16 中，*AC*、*BD* 相交于点 *O*，*OA*=*OC*，*OB*=*OD*，△*BOC* 可以看成是由△*DOA* 绕点 *O* 旋转 180° 得到；△*COD* 可以看成由△*AOB* 绕点 *O* 旋转 180° 得到．所以 ∠*OBC*=∠*ODA*，∠*OCD*=∠*OAB*．于是 *AD* // *BC*，*AB* // *DC*．从而四边形 *ABCD* 是平行四边形．

问题二　即课本 69 页的“讨论”活动．

学生通过观察，容易发现图 9-18 中的四边形 *ABCD* 不是平行四边形．这里要求学生不仅能借助图形的直观判断四边形 *ABCD* 不是平行四边形，而且要求证明，实质是引导学生通过具体的数学例子体会“反证法”的含义．

问题 3 回顾上一课时 68 页练习 2 的解题方法，并与“反证法”比较，说说你的看法．

课本 68 页练习 2，是用“举反例”的方法说明命题是

微信公众号：电子课本大全

$$\begin{cases} OA = OC, \\ \angle AOB = \angle COD, \\ OB = OD, \end{cases}$$

$\therefore \triangle AOB \cong \triangle COD.$

$\therefore AB = CD.$

同理 $AD = CB.$

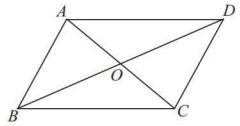


图 9-16

∴ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形(两组对边分别相等的四边形是平行四边形).

于是,我们得到如下定理:

对角线互相平分的四边形是平行四边形.

例 3 已知:如图 9-17,在□$ABCD$ 中,点 E、F 在 AC 上,且 $AE=CF$.

求证:四边形 $EBFD$ 是平行四边形.

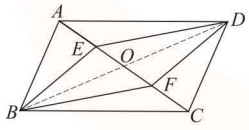


图 9-17

证明: 连接 BD,BD 交 AC 于点 O.

∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴ $OA = OC$,$OB = OD$(平行四边形的对角线互相平分).

∵ $AE = CF$,

∴ $OA - AE = OC - CF$,

即 $OE = OF$.

∴ 四边形 $EBFD$ 是平行四边形(对角线互相平分的四边形是平行四边形).

证明的途径

由 □$ABCD$、$AE = CF$,可证 $OB = OD$,$OE = OF$,于是四边形 $EBFD$ 是平行四边形.



还有其他方法证明例 3 的结论吗?



如图 9-18,如果 $OA = OC$,$OB \neq OD$,那么四边形 $ABCD$ 不是平行四边形. 试证明这个结论.

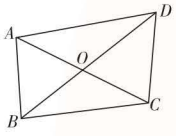
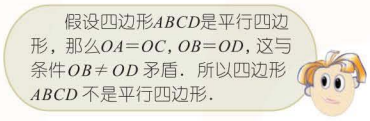


图 9-18



假命题.这里在介绍"反证法"后,设计进行两种解题方法的比较,目的是在比较中引导学生进一步体会反证法的含义.

3. 例题教学

(1) 例 3 需要综合运用平行四边形的性质定理和判定定理.教学中,应进一步引导学生理解平行四边形的性质定理和判定定理的区别,防止混淆.

(2) 教学中,要较多地关注学生思维能力的培养,关注学生证明的思路和方法,不断发展学生有条理思考和表达的能力.

(3) 例 3 的教学中,可能仍有部分学生习惯"通过三角形全等证明几何命题".教学中,要鼓励学生进行不同思路的交流和讨论,从中体验解决问题方法的多样性.

4. 小结

(1) 平行四边形的性质定理与判定定理如下表:

平行四边形	性　质	判　定
边的关系	对边平行 对边相等	两组对边分别平行的四边形 两组对边分别相等的四边形 一组对边平行且相等的四边形
角的关系	对角相等	
对角线的关系	对角线互相平分	对角线互相平分的四边形

(2) 在一个三角形中,如果两条边不相等,那么这两条边所对的角相等吗?证明你的结论.

微信公众号:电子课本大全

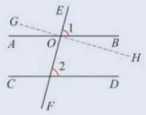
小明在证明时，不是从已知条件出发直接证明命题的结论成立，而是先提出与结论相反的假设，然后由这个“假设”出发推导出矛盾的结果，说明假设是错误的，因而命题的结论成立．这种证明的方法称为**反证法**(reduction to absurdity)．

在七年级下册第 7 章“平面图形的认识（二）”中，课本曾编写了“读一读”——怎样证实“两直线平行，同位角相等”（影印如下），其中使用的证法就是反证法．

怎样证实“两直线平行，同位角相等”

本节中，我们用叠合的方法发现了“两直线平行，同位角相等”．事实上，这个结论可以运用已有的基本事实，通过说理加以证实．

如图，直线 AB、CD 被直线 EF 所截，$AB \parallel CD$，$\angle 1$ 与 $\angle 2$ 是同位角．



假设 $\angle 1 \neq \angle 2$，那么可以过直线 AB 与 EF 的交点 O 作直线 GH，使 $\angle EOH = \angle 2$，直线 GH 与直线 AB 是两条直线．

根据基本事实“同位角相等，两直线平行”，由 $\angle EOH = \angle 2$，可以得到 $GH \parallel CD$．

这样，过点 O 就有两条直线 AB、GH 都与 CD 平行．这与基本事实“过直线外一点，有且只有一条直线与这条直线平行”矛盾．

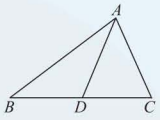
这说明 $\angle 1 \neq \angle 2$ 的假设不正确，于是 $\angle 1 = \angle 2$．



1. 如图，AD 是 $\triangle ABC$ 的中线．

(1) 画图：延长 AD 到点 E，使 $DE=AD$，连接 BE、CE；

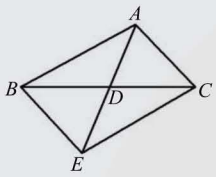
(2) 四边形 $ABEC$ 是平行四边形吗？证明你的结论．



（第 1 题）

【练习解答】

1.(1) 如图：



(2) 证明如下：

∵ AD 是 $\triangle ABC$ 的中线，

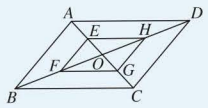
∴ $BD=CD$．

∵ $ED=AD$，

∴ 四边形 $ABEC$ 是平行四边形（对角线互相平分的四边形是平行四边形）．

微信公众号：电子课本大全

2. 已知：如图，在□$ABCD$中，对角线AC、BD相交于点O，E、F、G、H分别是OA、OB、OC、OD的中点．
求证：四边形$EFGH$是平行四边形．



（第2题）

阅读

趣谈“反证法”

日常生活中，人们常常运用反证法进行判断和推理．

例如，某一天早晨起床，如果发现屋顶和地面上都是潮的，那么你会做出“昨晚下过雨”的判断．这个判断是这样得到的：假设昨晚没下雨，那么屋顶和地面上是干的．但这与事实不相符合，因而“昨晚没下雨”的假设是错误的，所以“昨晚下过雨”．

又如，李老师把2个红球和1个黄球分别装进3个相同的纸盒里(每盒装1个)，然后将装有红球的两个纸盒分别给小明、小丽，要求他们打开各自的纸盒后，判断对方纸盒里的球是什么颜色．小明和小丽打开纸盒后，没有立即做出判断，稍作思考便异口同声地说出对方纸盒里的球是红色的！小明、小丽的思考过程如下：假设对方的纸盒里装的是黄球，那么双方都可以立即断定对方纸盒里装的是红球，这与他们“没有立即做出判断”不相符合，说明“对方纸盒里装的是黄球”的假设不成立，所以各人纸盒里装的都是红球．

应当指出：日常生活中这样的推理有时不够严谨．在数学中，运用反证法证明命题时，从“假设”出发推出“矛盾”的过程必须合乎逻辑，步步有据．

例如，用反证法证明“同位角不相等，两直线不平行”的过程如下：

假设两直线平行，那么根据平行线性质，可知“同位角相等”，这与已知“同位角不相等”矛盾，所以两直线不平行．

又如，用反证法证明“一个三角形中最多有一个钝角”的过程如下：

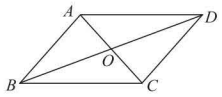
假设一个三角形中有两个（或三个）钝角，那么这两个（或三个）钝角的和大于180°，这与“三角形的三内角和等于180°”矛盾，所以“一个三角形中最多有一个钝角”．

2. 由四边形$ABCD$是平行四边形，得$OA=OC$，$OB=OD$．又$OE=\frac{1}{2}OA$，$OG=\frac{1}{2}OC$，$OF=\frac{1}{2}OB$，$OH=\frac{1}{2}OD$，可得$OE=OG$，$OF=OH$．所以四边形$EFGH$是平行四边形．

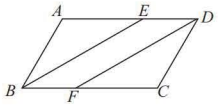
微信公众号：电子课本大全

9.3 习题

1. 如图，□ABCD 的对角线 AC、BD 相交于点 O. 你能在图中找出几对全等的三角形？证明你的结论.



（第 1 题）



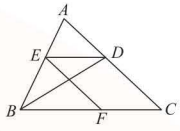
（第 2 题）

2. 已知：如图，在□ABCD 中，∠ABC、∠ADC 的平分线分别交 AD、BC 于点 E、F.

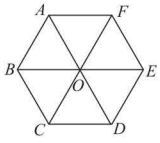
求证：BE∥DF.

3. 已知：如图，BD 是△ABC 的角平分线，点 E、F 分别在 AB、BC 上，且 ED ∥ BC，EF ∥ AC.

求证：BE=CF.



（第 3 题）



（第 4 题）

4. 如图，用 6 个全等的等边三角形可以拼成 1 个六边形.

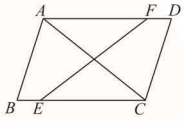
（1）你能在图中找出多少个平行四边形？

（2）证明四边形 ABCO 是平行四边形.

5. 在四边形 ABCD 中，∠A = ∠C，∠B = ∠D. 四边形 ABCD 是平行四边形吗？证明你的结论.

6. 已知：如图，在□ABCD 中，点 E、F 分别在 BC、AD 上，且 BE=DF.

求证：AC、EF 互相平分.



（第 6 题）

【习题解答】

1. 4对全等三角形：△AOB ≌ △COD，△AOD ≌ △COB，△ABD ≌ △CDB，△ABC ≌ △CDA. 证明略.

2. 由四边形 ABCD 是平行四边形，得 AD ∥ BC，∠ABC = ∠ADC. 又 ∠EBC = $\frac{1}{2}$∠ABC，∠ADF = $\frac{1}{2}$∠ADC，得 ∠EBC = ∠ADF. 又 AD ∥ BC，得 ∠ADF = ∠DFC. 所以 ∠EBC = ∠DFC，BE ∥ DF.

3. 由 ED ∥ BC，EF ∥ AC，得四边形 CDEF 是平行四边形，DE = CF. 由 ED ∥ BC，得 ∠EDB = ∠DBF. 又 ∠DBF = ∠EBD，所以 ∠EDB = ∠EBD. 于是 BE = DE = CF.

4. (1) 有6个平行四边形：□ABCO，□BCDO，□CDEO，□DEFO，□EFAO，□FABO. (2) 略.

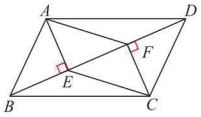
5. 由 ∠A = ∠C，∠B = ∠D，∠A + ∠B + ∠C + ∠D = 360°，得 ∠A + ∠B = 180°，AD ∥ BC. 同理 AB ∥ CD 所以四边形 ABCD 是平行四边形.

6. 连接 AE、CF. 由四边形 ABCD 是平行四边形，得 BC ∥ AD，BC = AD. 又 BE = DF，得 BC − BE = AD − DF，即 EC = AF. 所以四边形 AECF 是平行四边形. 所以 AC、EF 互相平分.

微信公众号：电子课本大全

7. 已知：如图，在□$ABCD$中，$AE \perp BD$，$CF \perp BD$，垂足分别为E、F.

求证：四边形$AECF$是平行四边形.

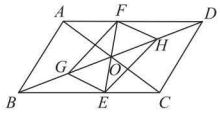


（第7题）

8. 画□$ABCD$，使$AB=2$ cm，$BC=3$ cm，$AC=4$ cm. 想一想，在画出△ABC后，你能用哪些方法确定点D的位置？并说明理由.

9. 已知：如图，在□$ABCD$中，对角线AC、BD相交于点O，G、H分别是OB、OD的中点，过点O的直线分别交BC、AD于点E、F.

求证：四边形$GEHF$是平行四边形.



（第9题）

7. 本题有多种解答. 例如，由△ABE≌△CDF，得$AE=CF$. 又由$AE \perp BD$，$CF \perp BD$，得$AE \parallel CF$. 所以四边形$AECF$是平行四边形.

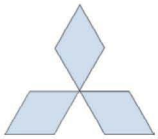
8. 本题有多种方法确定点D的位置. 例如，由$AB=2$cm，$BC=3$cm，$AC=4$cm，先画出△ABC，再利用对角线互相平分的四边形是平行四边形来确定点D的位置.

9. 由四边形$ABCD$是平行四边形，得$AD \parallel BC$，$OA=OC$，$OB=OD$. 又$OG=\frac{1}{2}OB$，$OH=\frac{1}{2}OD$，于是$OG=OH$. 证△COE≌△AOF，得$OE=OF$. 所以四边形$GEHF$是平行四边形.

微信公众号：电子课本大全

9.4　矩形、菱形、正方形





上面的图片中有你熟悉的图形吗？

有一个角是直角的平行四边形叫做**矩形**(rectangle)．矩形也叫长方形．



矩形是特殊的平行四边形，它除了具有平行四边形的一切性质外，还具有哪些特殊性质？

如图 9－19，一个平行四边形的活动框架，对角线是两根橡皮筋．如果扭动这个框架，那么□$ABCD$ 的边、内角、对角线都随着变化．

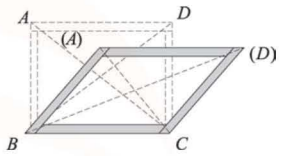
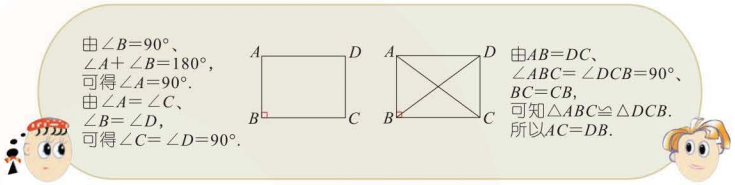


图 9－19

当扭动这个框架，使∠ABC 为直角时：

(1) □$ABCD$ 的其他三个内角为多少度？

(2) 对角线 AC、BD 的大小有什么关系？



【教学目标】

1. 理解矩形、菱形、正方形的概念，以及平行四边形、矩形、菱形、正方形之间的关系．

2. 探索并证明矩形、菱形、正方形的性质定理，以及它们的判定定理．

3. 了解两条平行线之间距离的意义，能度量两条平行线之间的距离．

4. 经历探索、猜想、证明的过程，进一步理解对猜想进行证明的必要性，不断感受合情推理和演绎推理是人们正确认识事物的重要途径，并逐步学会分析和综合的思考方法，发展演绎推理的能力．

5. 在对矩形、菱形、正方形特殊性质的探索过程中，理解特殊与一般的关系，领会特殊事物的本质属性与其特殊性质的关系．

【教学过程设计建议(第一课时)】

1. 情境创设

利用课本提供的2幅实物图片，引导学生观察图片中有你熟悉的图形吗？这些图形有什么特征？

小学数学中，学生学习了辨认长方形、正方形；通过观察、操作，初步认识长方形、正方形的特征；会用长方形、正方形、三角形、平行四边形或圆拼图；探索并掌握长方形、正方形的周长和面积公式．

教学中还可以展示一些含有矩形的图片，利用实例引入矩形的定义．

2. 探索活动(即课本74“思考”活动)．

活动可分为4个层次：

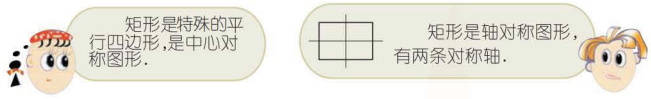
微信公众号：电子课本大全

于是，我们得到如下定理：

矩形的四个角都是直角，对角线相等．



矩形是中心对称图形吗？是轴对称图形吗？



例 1 已知：如图 9－20，矩形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 相交于点 O，且 $AC = 2AB$.

求证：$\triangle AOB$ 是等边三角形．

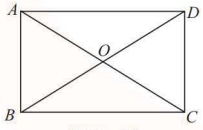


图 9－20

证明： ∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴ $AC = BD$（矩形的对角线相等），

$AO = \frac{1}{2}AC$，$BO = \frac{1}{2}BD$（矩形的对角线互相平分）．

∵ $AC = 2AB$，即 $AB = \frac{1}{2}AC$，

∴ $AO = BO = AB$.

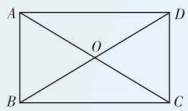
∴ $\triangle AOB$ 是等边三角形．

证明的途径

由矩形 $ABCD$，可知 $AO = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}BD = BO$. 又 $AC = 2AB$，于是 $AO = BO = AB$.



1. 已知：如图，矩形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 相交于点 O，$\angle AOD = 120°$，$AB = 4$ cm. 求矩形对角线的长．



（第 1 题）

【练习解答】

1. 8 cm．

（1）演示改变平行四边形活动框架的一个角的大小，引导学生观察这个变化过程．

通过观察，使学生理解矩形是特殊的平行四边形，因此矩形具有平行四边形的一切性质．

（2）演示改变平行四边形活动框架的形状，使它成为矩形，引导学生观察平行四边形的边、角有没有变化？如果有变化，有什么变化？

通过观察，学生容易发现当平行四边形有一个角是直角时，平行四边形变成了矩形．使学生理解矩形比平行四边形多了一个条件：有一个角是直角．

（3）拉 2 根橡皮筋作为平行四边形活动框架的对角线，演示改变平行四边形活动框架的形状为矩形，你有什么发现？

实际教学中，不同的学生从不同的角度观察，可能会有以下的发现：① 两条对角线把矩形分成 4 对全等三角形，其中有 2 对全等的直角三角形，2 对全等的等腰三角形；② 矩形的对角线不仅互相平分且相等；③ 两条对角线把矩形分成的 4 个等腰三角形的腰长相等，面积相等；④ 矩形不仅是中心对称图形，而且是轴对称图形；等等．

引导学生通过多角度观察、认识图形，主动建立平行四边形与矩形的联系与区别．

（4）你发现矩形除了有平行四边形的一切性质外，还具有哪些特殊性质？能证明你的结论吗？

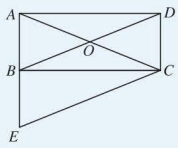
3. 例题教学

设置例 1 的意图：（1）熟悉和应用矩形的有关性质；（2）引导学生在讨论、交流中体会分析和综合的思考方法；（3）感受有关矩形的问题常常与等腰三角形或直角三角形的问题有关．

微信公众号：电子课本大全

2. 由四边形 $ABCD$ 是矩形，得 $AC=BD$，$AB\parallel DC$．又 $CE\parallel DB$，所以四边形 $BECD$ 是平行四边形．所以 $BD=EC$．所以 $AC=EC$．

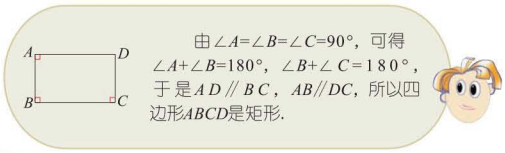
2. 已知：如图，矩形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 相交于点 O，$CE\parallel DB$，交 AB 的延长线于点 E．
求证：$AC=EC$．



（第 2 题）

探索

1. 我们知道，矩形的四个角都是直角．反过来，四个角（或三个角）都是直角的四边形是矩形吗？



2. 我们知道，当一个平行四边形框架扭动成矩形时，它的两条对角线相等．反过来，对角线相等的平行四边形是矩形吗？

如图 9－21，在$\square ABCD$ 中，$AC=DB$．由 $AB=DC$，$BC=CB$，$AC=DB$，可证 $\triangle ABC\cong\triangle DCB$，于是 $\angle ABC=\angle DCB$．又由 $\angle ABC+\angle DCB=180°$，可知 $\angle ABC=90°$．

$\square ABCD$ 是矩形．

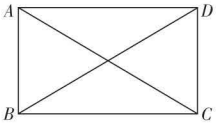


图 9－21

于是，我们得到如下定理：

三个角是直角的四边形是矩形．
对角线相等的平行四边形是矩形．

教学中可根据学生的实际情况，设计这个例题的拓展延伸．比如，在矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC、BD 相交于点 O，$\angle BOC=120°$，由此你能获得有关这个矩形的哪些结论？

4. 小结

（1）四边形、平行四边形、矩形之间的关系如图：



（2）请你说说矩形与平行四边形的联系和区别．

【教学过程设计建议（第二课时）】

1. 情境创设

怎样检验木工做成的窗框是不是矩形？说说你的想法．

2．探索活动（即课本 76 页“探索”活动）

（1）对于这个活动中提出的两个问题，教学中，要引导学生从矩形的定义出发进行探索和证明；

（2）四边形只要有 3 个角是直角，那么根据多边形内角和性质，第四个角也一定是直角，在定理“三个角是直角的四边形是矩形”中，给出“有 3 个角是直角”的条件，是因为数学结论的表述中一般不给出多余条件；

（3）在“问题 2”中，除课本提供的一种思路外，还可以：（设 AC、BD 的交点为 O）由 $OA=OB=OC$，得 $\angle OAB=\angle OBA$，$\angle OBC=\angle OCB$，又由 $\angle OAB+\angle OBA+\angle OBC+\angle OCB=180°$，于是 $\angle ABC=90°$．

（4）问题 1 探索“四边形”是矩形的条件；问题 2 探索“平行四边形”是矩形的条件．教学中，要引导学生从四边形、平行四边形、矩形之间的从属关系来思考：前者的条

微信公众号：电子课本大全

例 2 已知：如图 9－22，在△ABC 中，$\angle ACB = 90°$，D 是 AB 的中点，DE、DF 分别是△BDC、△ADC 的角平分线.

求证：四边形 $DECF$ 是矩形.

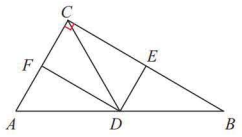


图 9－22

证明： ∵ $\angle ACB = 90°$，D 是 AB 的中点，

$\therefore DC = \frac{1}{2}AB = DA = DB$.

∵ $DC = DA$，DF 平分 $\angle ADC$，

$\therefore DF \perp AC$，

即 $\angle DFC = 90°$.

同理 $\angle DEC = 90°$.

∴ 四边形 $DECF$ 是矩形(三个角是直角的四边形是矩形).

证明的途径

由 DC 是 Rt△ABC 斜边上的中线，可知 $DC = DA = DB$. 又 DE、DF 分别平分 $\angle BDC$、$\angle ADC$，于是 $DF \perp AC$，$DE \perp BC$.



如图 9－23，直线 $l_1 // l_2$，A、C 是直线 l_1 上的任意两点，$AB \perp l_2$，$CD \perp l_2$，垂足分别为 B、D. 线段 AB、CD 相等吗？为什么？

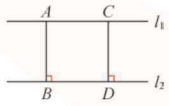
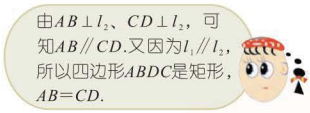


图 9－23

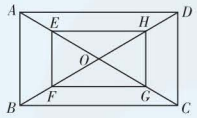


两条平行线中，一条直线上任意一点到另一条直线的距离，叫做**两条平行线之间的距离**. 两条平行线之间的距离处处相等.



1. 已知：如图，矩形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 相交于点 O，点 E、F、G、H 分别在 OA、OB、OC、OD 上，且 $AE = BF = CG = DH$.

求证：四边形 $EFGH$ 是矩形.



(第 1 题)

【练习解答】

1. 由四边形 $ABCD$ 是矩形，得 $AC = BD$，$OA = OC = \frac{1}{2}AC$，$OB = OD = \frac{1}{2}BD$，所以 $OA = OB = OC = OD$. 又由 $AE = BF = CG = DH$ 得 $OE = OF = OG = OH$. 于是四边形 $EFGH$ 是平行四边形，$OE + OG = OF + OH$，即 $EG = FH$. 所以 $\square EFGH$ 是矩形(对角线相等的平行四边形是矩形).

件中，除了“有3个角是直角”外，只要求是“四边形”，而后者的条件却包括“平行四边形”和“2条对角线相等”两个方面.

3. 例题教学

例2的教学要关注发展学生合乎逻辑的思考能力，引导学生在讨论、交流中体会分析和综合的思考方法. 比如，在学生交流的基础上，小结如下的两种思路，并讨论如何“衔接”：

要证明四边形是矩形，则需要证四边形是平行四边形，且有一个角是直角；或四边形有3个角是直角.

由 $\angle ACB = 90°$，D 是 AB 的中点，可知 $CD = AD = BD$；由 DE、DF 分别平分 $\angle BDC$、$\angle ADC$，可知 $DF \perp AC$，$DE \perp BC$. 从而引导学生主动发现证明的思路.

4. 小结

(1) 矩形的性质定理与判定定理如下表：

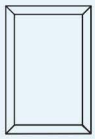
矩　形	性　质	判　定
边的关系	对边平行 对边相等	
角的关系	四个角都是直角	有一个角是直角的平行四边形；有3个角是直角的四边形
对角线的关系	对角线互相平分且相等	对角线相等的平行四边形

(2) 进行推理论证，常常需要从两个方向思考：“证明结论需要什么条件？”“从已知条件可以推出哪些证明结论所需的事项？”有利于探索并获得证明的思路.

微信公众号：电子课本大全

2. 本题有多种解答．例如，依据“三个角是直角的四边形是矩形”，检测窗框的3个角是不是直角．

2. 怎样判断四边形的窗框(如图)是不是矩形？说说你的理由．



(第2题)

有一组邻边相等的平行四边形叫做**菱形**(rhombus)．



菱形是特殊的平行四边形，它除了具有平行四边形的一切性质外，还具有哪些特殊性质？

如图9－24，一个平行四边形的活动框架，对角线是两根橡皮筋．如果把DC沿CB方向平行移动，那么$\square ABCD$的边、内角、对角线都随着变化．

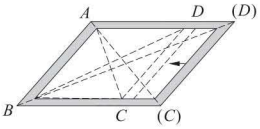
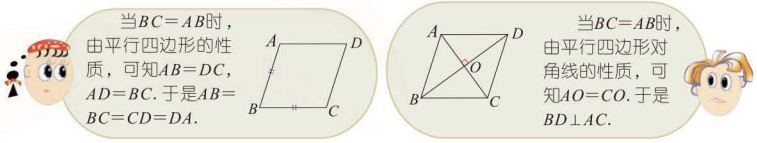


图9－24

当平移DC使$BC = AB$时：

(1) $\square ABCD$四条边的大小有什么关系？

(2) 对角线AC、BD的位置有什么关系？

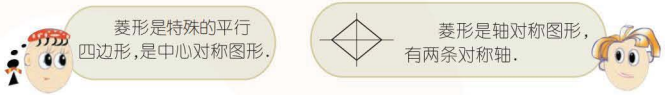


于是，我们得到如下定理：

菱形的四条边相等，对角线互相垂直．



菱形是中心对称图形吗？是轴对称图形吗？



【教学过程设计建议(第三课时)】

1. 情境创设

(1) 展示含有菱形的图片，引导学生观察、探索图形的特征；

(2) 演示改变平行四边形活动框架的一组邻边的长度，引导学生观察这个变化过程．

通过观察，引入菱形的定义，并使学生理解菱形是特殊的平行四边形，因此菱形具有平行四边形的一切性质．

2. 探索活动

活动一　演示改变平行四边形活动框架的形状为菱形，引导学生观察平行四边形的边、角有没有变化？如果有变化，有什么变化？

通过观察，学生容易发现当平行四边形有一组邻边相等时，平行四边形变成了菱形，使学生理解菱形比平行四边形多了一个条件：有一组邻边相等．

活动二　拉2根橡皮筋作为平行四边形活动框架的对角线，演示改变平行四边形活动框架的形状为菱形，你有什么发现？

实际教学中，不同的学生从不同的角度观察，可能会有以下的发现：① 菱形的对角线把菱形分成2对全等的等腰三角形和4个全等的直角三角形；② 菱形可以看成是由4个全等的直角三角形拼合而成，所以可以通过计算直角三角形面积求得菱形的面积；③ 菱形既是中心对称图形又是轴对称图形；等等．

引导学生通过多角度观察、认识图形，主动建立平行四边形与菱形的联系与区别．

活动三　你发现菱形除了有平行四边形的一切性质

微信公众号：电子课本大全

例 3 如图 9－25，木制活动衣帽架由 3 个全等的菱形构成，在 A、E、F、C、G、H 处安装上、下两排挂钩，可以根据需要改变挂钩间的距离，并在 B、M 处固定．已知菱形 $ABCD$ 的边长为 13 cm，要使两排挂钩间的距离 AC 为 24 cm，求 B、M 之间的距离．

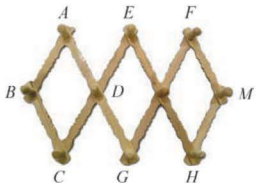


图 9－25

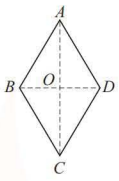


图 9－26

解： 如图 9－26，连接 AC、BD，AC 与 BD 相交于点 O．

∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

∴ $\angle AOB = 90°$，

$AO = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \times 24 = 12$（菱形的对角线互相垂直平分）．

∴ $BO = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$．

∴ $BD = 2BO = 10$（菱形的对角线互相平分）．

$BM = 3BD = 30$．

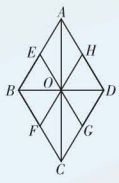
B、M 之间的距离是30 cm.



1. 已知：如图，在菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC、BD 相交于点 O，E、F、G、H 分别是菱形 $ABCD$ 各边的中点．

求证：$OE = OF = OG = OH$.

2. 证明：菱形的面积等于它的两条对角线长的乘积的一半．



（第 1 题）



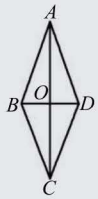
1. 我们知道，菱形的四条边相等．反过来，四边相等的四边形是菱形吗？

【练习解答】

1. 由四边形 $ABCD$ 是菱形，得 $AB=BC=CD=DA$，$AC \perp BD$．又由 E、F、G、H 分别是 AB、BC、CD、DA 的中点，得 $OE=\frac{1}{2}AB$、$OF=\frac{1}{2}BC$、$OG=\frac{1}{2}CD$、$OH=\frac{1}{2}AD$．所以 $OE=OF=OG=OH$．

2. 已知：如图，在菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC、BD 相交于点 O．

求证：菱形 $ABCD$ 的面积 $S=\frac{1}{2}AC \cdot BD$．



证明：∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

∴ $AC \perp BD$，$AO=CO$，$BO=DO$（菱形的对角线互相垂直平分）．

∴ $\triangle AOB \fallingdotseq \triangle BOC \fallingdotseq \triangle COD \fallingdotseq \triangle AOD$．

∴ 菱形 $ABCD$ 的面积 $S=4S_{\triangle AOB}=4\times\frac{1}{2}AO \cdot BO=\frac{1}{2}AC \cdot BD$．

外，还具有哪些特殊性质？能证明你的结论吗？

3. 例题教学

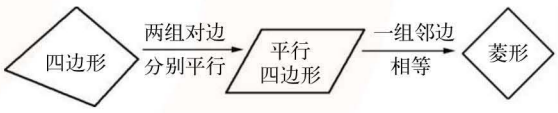
（1）在例 3 教学前，可以先引导学生讨论："如果已知菱形的两条对角线的长分别为 6 和 8，由此你能获得有关这个菱形的哪些结论？"为例 3 教学做铺垫．

（2）例 3 是一个实际问题，设计这个问题的目的是引导学生应用菱形和直角三角形的有关性质进行求解，培养学生的应用意识，不断发展学生用数学的眼光观察客观世界的能力．教学中要适当帮助学生理解题意，并提供学生充分讨论和交流的时间，以利于学生主动地把实际问题转化为数学问题．

4. 小结

（1）请你说说菱形与平行四边形的联系与区别．

（2）四边形、平行四边形、菱形之间的关系如图：

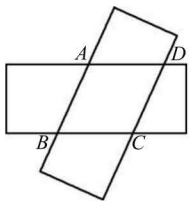


（3）菱形的对角线把菱形分成等腰三角形和直角三角形，所以解决菱形的问题，常常可以转化为等腰三角形或直角三角形问题．

【教学过程设计建议（第四课时）】

1. 情境创设

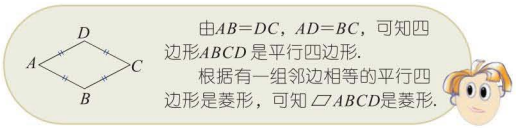
将 2 张宽相等的矩形纸片叠合在一起得到四边形 $ABCD$（如右图），你认为它是什么特殊的四边形？



请动手叠一叠，检验你的猜想．

能证明你的结论吗？

微信公众号：电子课本大全



2. 我们知道，当平移一个平行四边形活动框架的一边，使这个平行四边形成菱形时，它的两条对角线互相垂直．反过来，对角线互相垂直的平行四边形是菱形吗？

如图 9－27，在□$ABCD$ 中，$AC \perp BD$，垂足为 O．由 $BO = DO$，$AC \perp BD$，可知 $AB = AD$．

□$ABCD$ 是菱形．

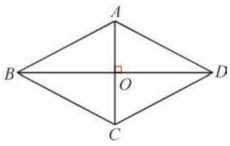


图 9－27

于是，我们得到如下定理：

四边相等的四边形是菱形．

对角线互相垂直的平行四边形是菱形．

例 4　已知：如图 9－28，在四边形$ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，对角线 AC 的垂直平分线与边 AD、BC 分别相交于点 E、F．

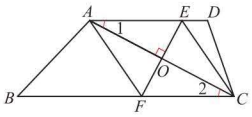


图 9－28

求证：四边形 $AFCE$ 是菱形．

证明： ∵ $AD \parallel BC$，

∴ $\angle 1 = \angle 2$.

∵ EF 垂直平分 AC，

∴ $OA = OC$，$\angle AOE = \angle COF$．

∴ $\triangle AOE \cong \triangle COF$.

∴ $OE = OF$.

∴ 四边形 $AFCE$ 是平行四边形（对角线互相平分的四边形是平行四边形）．

证明的途径

先证 $\triangle AOE \cong \triangle COF$，得 $OE = OF$．又由 $OA = OC$，可知四边形 $AFCE$ 是平行四边形；再由 $EF \perp AC$，于是□$AFCE$ 是菱形．

2. 探索活动(即课本 79 页“探索”活动)

(1) 对于这个活动中提出的两个问题，教学中，要引导学生从菱形的定义出发进行探索和证明；

(2) 对于“问题 2”，部分学生仍习惯通过证三角形全等来证平行四边形的一组邻边相等．教学中，要鼓励学生进行不同思路的交流，学会多角度的认识图形；

(3) 问题 1 探索“四边形”是菱形的条件；问题 2 探索“平行四边形”是菱形的条件．教学中，要引导学生从四边形、平行四边形、菱形之间的从属关系来思考：前者的条件中，除了“四边都相等”外，只要求是“四边形”，而后者的条件却包括“平行四边形”和“对角线互相垂直”两个方面．

3．例题教学

(1) 例 4 的教学中，应注重引导学生从不同的角度研究问题的过程中学会分析和综合的思考方法．

(2) 实际教学中，学生可能有多种证明思路．例如：① 由已知可证四边形 $AFCE$ 是平行四边形，再由 EF 垂直平分 AC，得 $EA = EC$，所以四边形 $AFCE$ 是菱形；② 由 $\triangle AOE \cong \triangle COF$，得 $AE = CF$，由 EF 垂直平分 AC，得 $EA = EC$，$FA = FC$，于是 $EA = EC = FA = FC$，所以四边形 $AFCE$ 是菱形．教学中，要为学生提供交流的空间，体验解决问题方法的多样性．

4．小结

(1) 菱形的性质定理与判定定理如下表：

菱　形	性　质	判　定
边的关系	对边平行 四条边相等	四边都相等的四边形
角的关系	对角相等	
对角线的关系	互相垂直平分	对角线互相垂直的平行四边形

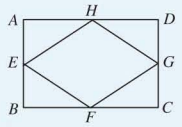
微信公众号：电子课本大全

又∵ $EF \perp AC$，

∴ □$AFCE$ 是菱形（对角线互相垂直的平行四边形是菱形）.

练习

1. 如图，E、F、G、H 分别是矩形 $ABCD$ 各边的中点，四边形 $EFGH$ 是怎样的特殊四边形？证明你的结论.
2. 用直尺和圆规作一个菱形，并说明你作图的道理.



（第 1 题）

有一组邻边相等并且有一个角是直角的平行四边形叫做**正方形**（square）.

于是，我们得到如下定理：

有一组邻边相等的矩形是正方形.
有一个角是直角的菱形是正方形.

平行四边形、矩形、菱形、正方形的关系如图 9－29.

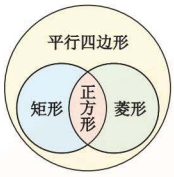


图 9－29

正方形具有矩形的性质，同时又具有菱形的性质.

讨论

正方形的边、角和对角线各具有什么性质？



【练习解答】

1. 四边形 $EFGH$ 是菱形. 证明如下：由四边形 $ABCD$ 是矩形，得 $AD=BC$，$AB=DC$，$\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90°$. 又 E、F、G、H 分别是矩形各边的中点，得 $AH=DH=BF=CF$，$AE=BE=DG=CG$. 于是 $\triangle AEH \cong \triangle BEF \cong \triangle CGF \cong \triangle DGH$，$HE=FE=FG=HG$. 所以四边形 $EFGH$ 是菱形（四边相等的四边形是菱形）.

2. 本题有多种解答. 例如，作 AC、BD 相互垂直平分，连接 AB、BC、CD、DA 得菱形 $ABCD$.

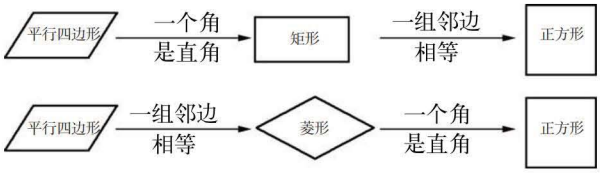
（2）将一张长方形纸片既快又准确地剪出一个菱形. 说说你剪纸的依据.

【教学过程设计建议（第五课时）】

1. 情境创设

如何改变平行四边形活动框架的形状为正方形？请你演示把平行四边形变成正方形的全过程.

通过演示实践，学生容易发现并清楚的看到平行四边形变成正方形的两种过程：



在演示实践的基础上引入正方形的定义.

2. 探索活动

活动一　回忆我们已经知道的平行四边形、矩形、菱形的性质，在下表相应的空格内打“√”：

	平行四边形	矩形	菱形	正方形
对边平行				
对边相等				
四边相等				
对角相等				
四个角是直角				
对角线互相平分				
对角线相等				
对角线互相垂直				

微信公众号：电子课本大全

例 5　已知：如图 9－30，在正方形 $ABCD$ 中，点 A'、B'、C'、D' 分别在 AB、BC、CD、DA 上，且 $AA'=BB'=CC'=DD'$.

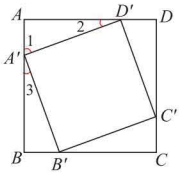


图 9－30

求证：四边形 $A'B'C'D'$ 是正方形.

证明： ∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴ $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90°$，

$AB=BC=CD=DA$（正方形的四个角都是直角，四条边相等）.

∵ $AA'=BB'=CC'=DD'$，

∴ $D'A=A'B=B'C=C'D$.

∴ $\triangle AA'D'\cong\triangle BB'A'\cong\triangle CC'B'\cong\triangle DD'C'$.

∴ $D'A'=A'B'=B'C'=C'D'$.

四边形 $A'B'C'D'$ 是菱形（四边相等的四边形是菱形）.

由 $\triangle AA'D'\cong\triangle BB'A'$，可得 $\angle 2=\angle 3$.

∵ $\angle A=90°$，

∴ $\angle 1+\angle 2=90°$.

∴ $\angle 1+\angle 3=90°$.

∴ $\angle D'A'B'=90°$.

菱形 $A'B'C'D'$ 是正方形（有一个角是直角的菱形是正方形）.

证明的途径

先证 $\triangle AA'D'\cong\triangle BB'A'\cong\triangle CC'B'\cong\triangle DD'C'$，得 $D'A'=A'B'=B'C'=C'D'$，于是四边形 $A'B'C'D'$ 是菱形；再证 $\angle D'A'B'=90°$，从而四边形 $A'B'C'D'$ 是正方形.



还有其他方法证明例 5 的结论吗？



1. 根据图形所具有的性质，在下表相应的空格中打“√”.

	平行四边形	矩　形	菱　形	正方形
对边平行且相等				
四边相等				
四个角都是直角				
对角线互相平分				
对角线互相垂直				
对角线相等				

【练习解答】

1. 略.

活动二　你认为正方形具有什么性质？在正方形一栏的相应空格内打“√”，并说明理由.

这个活动中，应注意引导学生理解特殊与一般的关系，领会特殊事物的本质属性与其特殊性质的关系.

活动三　具备什么条件的平行四边形是正方形？

由于学生经历了改变平行四边形活动框架的形状为正方形的演示实践，所以不难归纳出课本揭示的两种思路.

活动四　下面的说法正确吗？为什么？

（1）四条边都相等且有一个角是直角的四边形是正方形；

（2）有三个角是直角且有一组邻边相等的四边形是正方形；

（3）有三个角是直角且对角线互相垂直的四边形是正方形；

（4）对角线互相垂直平分且相等的四边形是正方形.

通过分析条件、结论判断和说明理由，进一步理解四边形、平行四边形、矩形、菱形和正方形之间的关系，并为例题教学做铺垫.

3. 例题教学

例 5 是正方形性质和判定的综合运用. 教学中，应较多的关注引导学生独立思考如何证明四边形 $A'B'C'D'$ 是正方形，在合作交流中有条理的、清晰的表达自己的思路.

4. 小结

（1）说说四边形、平行四边形、矩形、菱形和正方形之间的关系.

（2）特殊的图形具有一般图形的性质和它的特殊性.

（3）一个图形的形状越特殊，它的判定需要的条件就越多.

微信公众号：电子课本大全

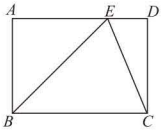
2. 一个矩形的两条对角线互相垂直，证明这个矩形是正方形.
3. 一个菱形的两条对角线相等，证明这个菱形是正方形.

9.4 习题

1. 下列判断是否正确：
(1) 对角线相等的四边形是矩形；
(2) 对角线相等且互相平分的四边形是矩形；
(3) 对角线互相垂直的四边形是菱形；
(4) 对角线互相垂直平分的四边形是菱形.

2. 矩形的面积为 48，一条边长为 6，求矩形的对角线长.

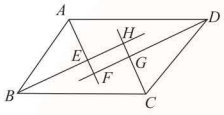
3. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，点 E 在 AD 上，且 EC 平分 $\angle BED$.
(1) $\triangle BEC$ 是否为等腰三角形？证明你的结论.
(2) $AB=1$，$\angle ABE=45°$，求 BC 的长.



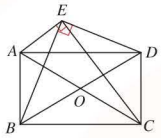
(第 3 题)

4. 利用矩形的性质，证明“直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半”.

5. 如图，$\square ABCD$ 的四个内角的平分线分别相交于点 E、F、G、H，四边形 $EFGH$ 是怎样的特殊四边形？证明你的结论.



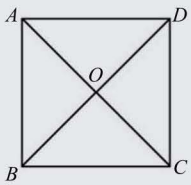
(第 5 题)



(第 6 题)

6. 已知：如图，AC、BD 相交于点 O，且 O 是 AC、BD 的中点，点 E 在四边形 $ABCD$ 外，且 $\angle AEC=\angle BED=90°$.
求证：四边形 $ABCD$ 是矩形.

2. 已知：如图，矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC、BD 相交于点 O，且 $AC\perp BD$.
求证：矩形 $ABCD$ 是正方形.
证明：∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，
∴ $BO=DO$（矩形的对角线互相平分）.
又∵ $AC\perp BD$，
∴ $AB=AD$
∴ 矩形 $ABCD$ 是正方形（有一组邻边相等的矩形是正方形）.



3. 略

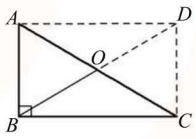
【习题解答】

1. (1) 不正确；(2) 正确；(3) 不正确；(4) 正确.

2. 10.

3. (1) $\triangle BEC$ 是等腰三角形. 证明如下：由四边形 $ABCD$ 是矩形，得 $AD\parallel BC$，$\angle DEC=\angle BCE$. 又 $\angle DEC=\angle BEC$，得 $\angle BCE=\angle BEC$，$BE=BC$. 所以 $\triangle BEC$ 是等腰三角形.
(2) 在 $\triangle ABE$ 中，$\angle A=90°$，$\angle ABE=45°$，得 $\angle AEB=\angle ABE$，$AE=AB=1$，$BE=\sqrt{2}$. 所以 $BC=BE=\sqrt{2}$.
(其余解答见本页下方)

4. 已知：如图，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=90°$，BO 是中线.
求证：$BO=\frac{1}{2}AC$.



证明：延长 BO 到点 D，使 $DO=BO$，连接 AD、CD.
∵ $AO=CO$，$BO=DO$，
∴ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形（对角线互相平分的四边形是平行四边形）.
∵ $\angle ABC=90°$，
∴ $\square ABCD$ 是矩形（有一个角是直角的平行四边形是矩形）.
∴ $AC=BD$，$BO=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}AC$（矩形的对角线相等）.

5. 四边形 $EFGH$ 是矩形. 证明如下：由四边形 $ABCD$ 是平行四边形，得 $AD\parallel BC$，$\angle BAD+\angle ABC=180°$. 又 AE 平分 $\angle BAD$，BE 平分 $\angle ABC$，可知 $\angle BAE+\angle ABE=90°$. 于是 $\angle HEF=\angle AEB=90°$. 同理 $\angle EFG=\angle FGH=90°$. 所以四边形 $EFGH$ 是矩形.

6. 连接 OE. 由 O 是 AC、BD 的中点，得四边形 $ABCD$ 是平行四边形. 在 $\mathrm{Rt}\triangle AEC$ 中，$EO=\frac{1}{2}AC$，在 $\mathrm{Rt}\triangle BED$ 中，$EO=\frac{1}{2}BD$，可知 $AC=BD$. 所以 $\square ABCD$ 是矩形.

微信公众号：电子课本大全

7. $2\sqrt{3}$.

8. 由四边形 $ABCD$ 是菱形，得 $AD \parallel BC$ ，$\angle A+\angle B=180°$ ，$AB=AD=CB=CD$. 又 $AE=AH=CF=CG$ ，得 $BE=DH=BF=DG$. 于是 $\angle AEH=\frac{1}{2}(180°-\angle A)$，$\angle BEF=\frac{1}{2}(180°-\angle B)$，$\angle AEH+\angle BEF=90°$ ，$\angle HEF=90°$. 同理，$\angle EFG=\angle FGH=90°$. 所以四边形 $EFGH$ 是矩形 .

9. 由 $BE \parallel AC$ ，$CE \parallel DB$ ，得四边形 $OBEC$ 是平行四边形 . 由四边形 $ABCD$ 是矩形，得 $BD=AC$ ，$OB=\frac{1}{2}BD=OC=\frac{1}{2}AC$. 所以 $\square OBEC$ 是菱形 .

10. 由四边形 $ABCD$ 是平行四边形，得 $AD \parallel BC$，$\angle AFB=\angle EBF$，$\angle BAD+\angle ABC=180°$ 又 $\angle BAE=\frac{1}{2}\angle BAD$，$\angle ABF=\angle EBF=\frac{1}{2}\angle ABC$，得 $\angle BAE+\angle ABF=90°$，$AE \perp BF$，$\angle AFB=\angle ABF$，所以 $AB=AF$. 同理，$AB=BE$. 于是 $AF=BE$. 所以四边形 $ABEF$ 是平行四边形 . 又 $AE \perp BF$，所以四边形 $ABEF$ 是菱形 .

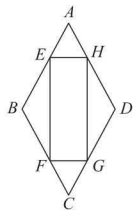
11. $\angle E=22.5°$.

12. 连接 BF . 由四边形 $ABCD$ 是正方形，得 $\angle C=90°$ ，$BC=DC$ ，$\angle BDC=45°$. 在 $\triangle DEF$ 中，$\angle FED=90°$，$\angle BDC=45°$ ，$\angle EFD=45°$ ，$EF=DE$. 又由 $\triangle BEF \cong \triangle BCF$，得 $EF=CF$，所以 $DE=CF$.

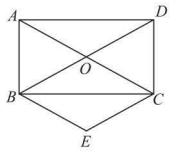
7. 菱形的边长为 2，一个内角等于 120°. 求这个菱形的面积 .

8. 已知：如图，点 E、F、G、H 分别在菱形 $ABCD$ 的各边上，且 $AE=AH=CF=CG$.

求证：四边形 $EFGH$ 是矩形 .



（第 8 题）



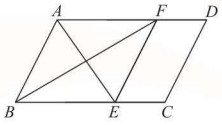
（第 9 题）

9. 已知：如图，矩形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 相交于点 O，$BE \parallel AC$，$CE \parallel DB$.

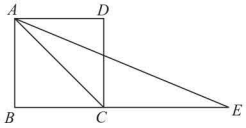
求证：四边形 $OBEC$ 是菱形 .

10. 已知：如图，在 $\square ABCD$ 中，$\angle BAD$ 的平分线交 BC 于点 E，$\angle ABC$ 的平分线交 AD 于点 F .

求证：四边形 $ABEF$ 是菱形 .



（第 10 题）

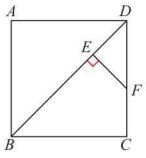


（第 11 题）

11. 如图，E 是正方形 $ABCD$ 边 BC 延长线上的一点，且 $CE=AC$. 求 $\angle E$ 的度数 .

12. 已知：如图，E 是正方形 $ABCD$ 对角线 BD 上的一点，且 $BE=BC$，$EF \perp BD$，交 DC 于点 F.

求证：$DE=CF$.

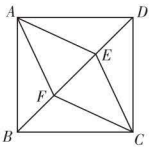


（第 12 题）

微信公众号：电子课本大全

13. 已知：如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 E、F 在 BD 上，且 $BF = DE$.

求证：四边形 $AECF$ 是菱形.



（第 13 题）

14. 在 $\triangle ABC$ 中，点 D、E、F 分别在 BC、AB、AC 上，且 $DE \parallel AC$，$DF \parallel AB$. 根据下列条件，分别判断四边形 $AEDF$ 是怎样的特殊平行四边形？证明你的结论.

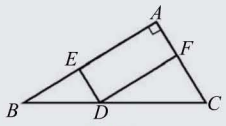
(1) $\angle BAC = 90°$；

(2) AD 平分 $\angle BAC$；

(3) $\angle BAC = 90°$，AD 平分 $\angle BAC$.

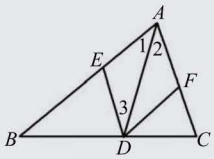
13. 连接 AC，AC 交 BD 于点 O. 由四边形 $ABCD$ 是正方形，得 $AC \perp BD$，$OA = OC$，$OB = OD$. 又 $BF = DE$，于是 $OF = OE$. 所以四边形 $AECF$ 是平行四边形. 又 $AC \perp BD$，所以 $\square AECF$ 是菱形.

14. (1) 四边形 $AEDF$ 是矩形. 证明如下：如图①，由 $DE \parallel AC$，$DF \parallel AB$，得四边形 $AEDF$ 是平行四边形. 又，$\angle A = 90°$，所以 $\square AEDF$ 是矩形.



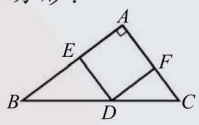
图①

(2) 四边形 $AEDF$ 是菱形. 证明如下：如图②，由 $DE \parallel AC$，$DF \parallel AB$，得四边形 $AEDF$ 是平行四边形，$\angle 2 = \angle 3$. 又 $\angle 1 = \angle 2$，于是 $\angle 1 = \angle 3$，$EA = ED$. 所以 $\square AEDF$ 是菱形.



图②

(3) 四边形 $AEDF$ 是正方形. 证明如下：如图③，由(1)得，四边形 $AEDF$ 是矩形. 由(2)得，$EA = ED$. 所以矩形 $AEDF$ 是正方形.



图③

微信公众号：电子课本大全

9.5　三角形的中位线

怎样将一张三角形纸片剪成两部分，使这两部分能拼成一个平行四边形？



（1）剪一张三角形纸片，记为△ABC；

（2）分别取 AB、AC 的中点 D、E，连接 DE；

（3）沿 DE 将△ABC 剪成两部分，并将△ADE 绕点 E 按顺时针方向旋转 180°到△CFE 的位置（如图 9－31）.

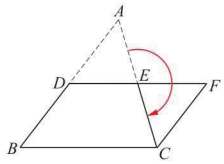


图 9－31



在图 9－31 中，点 E 在线段 DF 上吗？四边形 $BCFD$ 是平行四边形吗？如果是，那么 DE 与 BC 有怎样的位置关系和数量关系？

如图 9－32，点 D、E 分别是 AB、AC 的中点，延长 DE 到点 F，使 $EF = DE$，连接 CF.

在△ADE 和△CFE 中，由 $ED = EF$，$\angle AED = \angle CEF$，$AE = CE$，可证 △ADE ≌ △CFE. 可知，$AD = CF$，$\angle ADE = \angle F$，于是 $BD \parallel CF$.

由 $BD = AD = CF$，$BD \parallel CF$，可知四边形 $DBCF$ 是平行四边形. 从而 $DF \parallel BC$，$DE = \frac{1}{2}DF = \frac{1}{2}BC$.

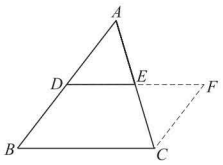


图 9－32

连接三角形两边中点的线段叫做**三角形的中位线**.

于是，我们得到如下定理：

三角形的中位线平行于第三边，并且等于第三边的一半.

【教学目标】

1. 探索并证明三角形中位线定理.

2. 会利用三角形中位线定理解决有关问题.

2. 经历探索三角形中位线定理的过程，感受转化的思想方法.

【教学过程设计建议】

1. 情境创设

怎样将一张三角形纸片剪成两部分，使这两部分能拼成一个平行四边形？

设置这个情境，实质是引导学生主动将三角形与平行四边形建立联系，为三角形中位线定理的探索和证明做铺垫.

课本中的操作活动是对这个情境的解读.

2. 探索活动

问题一　操作活动中，将△ADE 绕点 E 旋转 180°，得到四边形 $BCFD$ 是平行四边形吗？为什么？

“将△ADE 绕点 E 旋转 180°到△CEF ”的位置，所以 DEF 是一条直线. 因为图形的旋转不改变图形的大小，所以 $FC = AD = BD$，$\angle DAC = \angle FCA$，于是 $FC \parallel AD$，可知四边形 $BCFD$ 是平行四边形.

问题二　图 9–31 中，DE 与 BC 有怎样的位置关系和数量关系？

设置这个问题，目的是引导学生主动发现连接三角形两边中点的线段是一条特殊的线段，它不仅与第三边有特殊的位置关系，还有特殊的数量关系. 于是引入三角形中位线的概念以及三角形中位线的性质.

微信公众号：电子课本大全

例 已知：如图 9－33，在四边形 $ABCD$ 中，$AC=BD$，E、F、G、H 分别是 AB、BC、CD、DA 的中点．

求证：四边形 $EFGH$ 是菱形．

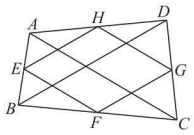


图 9－33

证明： 在△BAC 中，

∵ $BE=EA$，$BF=FC$，

∴ $EF=\frac{1}{2}AC$（三角形的中位线等于第三边的一半）．

同理 $FG=\frac{1}{2}BD$，$GH=\frac{1}{2}AC$，$HE=\frac{1}{2}BD$．

∵ $AC=BD$，

∴ $EF=FG=GH=HE$．

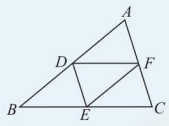
∴ 四边形 $EFGH$ 是菱形（四边相等的四边形是菱形）．



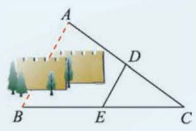
如果一个四边形的对角线互相垂直，那么依次连接它的各边中点能得到什么图形？



1. 如图，D、E、F 是△ABC 各边的中点，△DEF 与△ABC 的周长、面积分别有怎样的数量关系？证明你的结论．



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，A、B 两地被建筑物阻隔，为测量 A、B 两地的距离，在地面上选一点 C，连接 CA、CB，分别取 CA、CB 的中点 D、E．

（1）若 DE 的长为 36 m，求 A、B 两地的距离；

（2）若 D、E 两点之间还有阻隔，你有什么解决办法？

【练习解答】

1. △DEF 的周长等于△ABC 的周长的一半，△DEF 的面积等于△ABC 的面积的四分之一．证明如下：由三角形中位线定理，得 $DE=\frac{1}{2}AC$，$EF=\frac{1}{2}AB$，$DF=\frac{1}{2}BC$，$DE+EF+DF=\frac{1}{2}(AC+AB+BC)$，即△$DEF$ 的周长等于△ABC 的周长的一半；由 $DF=\frac{1}{2}BC=EB$，$EF=\frac{1}{2}AB=DB$，$DE=ED$，得△DEF ≌ △EDB．同理，△DEF ≌ △FAD，△DEF ≌ △CFE．所以△DEF 的面积等于△ABC 的面积的四分之一．

2.（1）72 m；（2）分别取 CD、CE 的中点 F、G．测得 FG 的长，就可以求得 A、B 两地的距离．

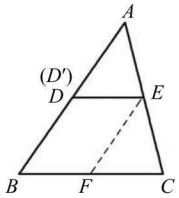
对于“三角形的中线”与“三角形的中位线”，学生容易混淆．教学中．可以让学生画出相应的图形，并说出它们的区别．

问题三　你有其他方法证明三角形中位线定理吗？说说你的证明思路．

设计这个问题，目的是引导学生在讨论和交流中，感受转化的思想方法——把对三角形中位线性质的研究转化为用平行四边形的性质来证明；感受演绎推理的思路源于图形的运动．

证明三角形中位线定理有多种证明方法．例如：

（1）如图，过点 E 作 $ED'\parallel BC$，$EF\parallel AB$，所以 $D'B=EF$，$D'E=BF$．又由△$AD'E$ ≌ △EFC，得 $AD'=EF$，$D'E=FC$，所以 $AD'=D'B$，即 D' 是 AB 的中点，$D'E$ 与 DE 重合，于是 $DE=\frac{1}{2}BC$，$DE\parallel BC$．



（2）如图，过点 A、B、C 分别作 DE 的垂线，垂足分别为 F、G、H，所以 $BG\parallel CH$．

由△ADF ≌ △BDG，可得 $DF=DG$，$BG=AF$．

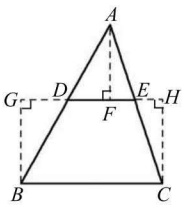
由△AEF ≌ △CEH，可得 $EF=EH$，$CH=AF$．

所以 $GH=2DE$，$BG=CH$．

所以四边形 $GBCH$ 是矩形，

所以 $GH\parallel BC$，$GH=BC$．

于是 $DE\parallel\frac{1}{2}BC$．



3. 例题教学

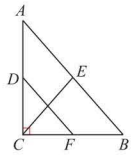
（1）本例实质是证明命题“如果一个四边形的对角线相等，那么依次连接它的各边中点得到的四边形是菱形”

微信公众号：电子课本大全

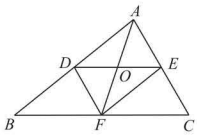
9.5 习题

1. 已知：如图，在△ABC 中，$\angle ACB = 90°$，D、E、F 分别是 AC、AB、BC 的中点．

求证：$CE = DF$.



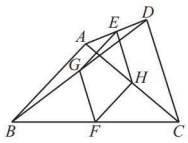
（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，△ABC 的中线 AF 与中位线 DE 相交于点 O．AF 与 DE 有怎样的关系？证明你的结论．

3. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB = DC$，E、F、G、H 分别是 AD、BC、BD、AC 的中点．四边形 $EGFH$ 是怎样的四边形？证明你的结论．



（第 3 题）

数学活动

设计对称图案

生活中，我们经常见到一些美丽的对称图案，请你欣赏下面的图案．






交流：

1. 下面的图案是几种汽车品牌的标志，在这些图案中，哪些是轴对称图形？哪些是中心对称图形？



【习题解答】

1. 由三角形中位线定理，得 $DF=\frac{1}{2}AB$；由定理“直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半”，得 $CE=\frac{1}{2}AB$．所以 $CE=DF$．

2. AF、DE 互相平分．证明如下：

由 $BD=DA$，$BF=FC$，$AE=EC$，得 $DF \parallel AC$，$EF \parallel AB$，四边形 $ADFE$ 是平行四边形．所以 AF、DE 互相平分．

3. 四边形 $EGFH$ 是菱形．证明如下：由 $DE=EA$，$DG=GB$，得 $EG=\frac{1}{2}AB$．

由 $CF=FB$，$CH=HA$，得 $FH=\frac{1}{2}AB$．

由 $AE=ED$，$AH=HC$，得 $EH=\frac{1}{2}DC$．

由 $BG=GD$，$BF=FC$，得 $GF=\frac{1}{2}DC$．

又 $AB=DC$，所以 $EG=FH=EH=GF$，四边形 $EGFH$ 是菱形．

是真命题；

（2）课本在例题后又设置了一个结论开放的“讨论”活动，实质是例题的延伸．教学时，可以根据教学的实际情况进一步延伸：如果一个四边形的对角线互相垂直平分，那么依次连接它的各边中点能得到什么图形？提供学生更多的这类探索活动，以利于学生更好地感受图形的位置关系、数量关系从“一般”到“特殊”的变化中，常常有着图形从一般到特殊的变化．

4. 小结

我们在将一张三角形纸片剪成两部分，使这两部分拼成一个平行四边形的活动中，发现了三角形中位线的性质，并且我们又借助了剪纸活动的拼图方法，把三角形中位线性质的研究转化为用平行四边形的性质来证明．

三角形中位线定理也是我们证明两直线平行和线段之间数量关系的一种重要途径．

微信公众号：电子课本大全

2. 把 26 个英文大写字母看成图案：

A B C D E F G H I J K L M N
O P Q R S T U V W X Y Z

哪些英文大写字母是轴对称图案？哪些是中心对称图案？

3. “方块 K”和“梅花 10”是中心对称图案. 扑克牌中还能找出其他的对称图案吗？




操作：

1. 4 个全等的正方形拼成图 9 - 34，按下列要求画图：

（1）在图 9 - 34 中再画 1 个正方形，使它成为轴对称图形；

（2）在图 9 - 34 中再画 1 个正方形，使它成为中心对称图形；

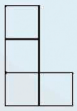


图 9 - 34

（3）在图 9 - 34 中改变 1 个正方形的位置，使它既是中心对称图形，又是轴对称图形.

2. 图 9 - 35 是一个中心对称图案（包括颜色的“对称”）. 试在图 9 - 36 的网格中涂色，设计一个中心对称图案.

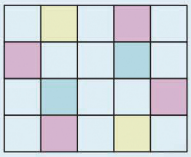
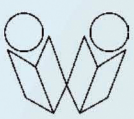


图 9 - 35

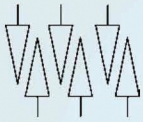


图 9 - 36

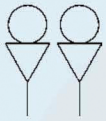
3. 用等腰三角形、平行四边形、圆等图形可以设计对称图案. 例如，



阅读



植树造林



两杯冰淇凌

请你设计一幅对称图案，并加以命名.

4. 为校园艺术节设计一个对称的会徽.

【教学目标】

1. 运用图形的轴对称、旋转进行图案设计.

2. 积极参与数学活动，对数学有好奇心和求知欲.

3. 在图案设计的过程中，丰富对图形的轴对称、旋转的认识，发展空间观念，增强审美意识.

【教学过程设计建议】

1. 图案欣赏.

教学中，除了课本提供的图案外，可以再补充一些图案供学生赏析.

2. 分小组进行课本提供的交流、操作活动.

教学中，应组织学生分组（3～5 人为一组）充分讨论和交流，使学生通过这些实例进一步丰富对平面图形的轴对称、旋转的认识. 在学生讨论、交流的基础上，教师可以制作教具演示“基本单元”的运动过程，以利于发展学生的空间观念.

3. 小组成员共同设计一个富有创意的校园艺术节会徽.

4. 展示学生创作的优秀作品，并由学生做出评价.

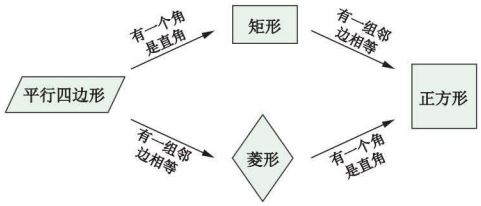
5. 组织学生填写“数学活动评价表”.

微信公众号：电子课本大全



1. 本章以中心对称为主线，通过操作实践等活动，探索图形旋转的性质、中心对称与中心对称图形的性质；利用中心对称的性质，研究了平行四边形以及特殊平行四边形的性质；利用中心对称，研究了三角形中位线的性质．

2. 平行四边形与矩形、菱形、正方形之间的关系：



这些图形之间具有特殊与一般的关系．在图形不断特殊化的过程中，图形的性质越来越多，判定它需要的条件也越来越多．

3. 认识一个图形，既要研究它的性质，又要研究判定它的条件．你能区分本章中的定理哪些是平行四边形的判定定理，哪些是平行四边形的性质定理吗？

4. 通过本章学习，可以进一步体会到：通过观察、操作等活动可以丰富对图形的认识和感受，能探索发现图形可能具有的性质；通过证明可以证实图形的性质，并帮助我们逐步学会有条理地思考和表达．

5. 本章中的“证明的途径”，体现了“从已知想可知”的思路，这是证明命题常用的一种思考方法；“轴对称图形”一章中的“思考与表述”，体现了“由未知想需知”的思路，这是证明命题的另一种思考方法．证明命题，有时需要联合运用“从已知想可知”和“由未知想需知”这两种方法进行分析和思考．

6. 依次连接任意四边形各边的中点，能得到什么图形？

依次连接矩形各边的中点，得到的四边形是菱形．如果依次连接一个四边形各边的中点得到菱形，那么原来的四边形一定是矩形吗？

7. 通过本章的学习，我们还了解了反证法，你能举出用反证法证明命题的例子吗？



复习巩固

1. 在下列四个标志中，哪些标志是轴对称图形？哪些标志是中心对称图形？



（第 1 题）

【复习题解答】

（复习巩固）

1. 轴对称图形：中国工商银行标志，中国农业银行标志，中国银行标志；

中心对称图形：中国工商银行标志，中国银行标志．

【教学目标】

1. 回顾本章所学内容，能从不同的角度进行归纳，对本章知识有全面、系统的认识．

2. 进一步掌握综合法的证明格式以及分析和综合的思考方法．

3. 经历图形运动变化中认识平面图形性质的过程，进一步发展空间观念．

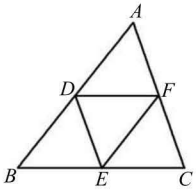
【教学过程设计建议】

问题一　回顾本章所学内容，请你对本章内容进行小结．

本章的内容较多，教学中，要引导学生用自己的方式梳理本章的知识，以利于提高学生从不同的角度归纳、总结的能力．

问题二　（由课本复习题第 12 题改编）

（1）如图，D、E、F 分别是 $\triangle ABC$ 各边的中点，由此你得到什么结论？证明你的结论．



教学中，学生可能得到的结论有：$\triangle ADF \cong \triangle DBE \cong \triangle FEC \cong \triangle EFD$；这 4 个三角形的面积是 $\triangle ABC$ 面积的 $\frac{1}{4}$、周长是 $\triangle ABC$ 周长的 $\frac{1}{2}$；四边形 $ADEF$、四边形 $DBEF$、四边形 $DECF$ 是平行四边形；四边形 $DBCF$、四边形 $DECA$、四边形 $FABE$ 是梯形；等等．

（2）在 $\triangle ABC$ 中，如果 $AB=AC$，（1）中的结论有变化吗？如果有，有什么变化？

微信公众号：电子课本大全

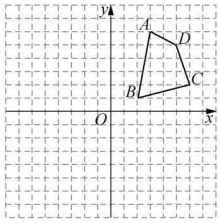
2. 在平行四边形、矩形、菱形、正方形中，哪些是轴对称图形，哪些是中心对称图形？

3. 按下列要求在平面直角坐标系中画图，并回答问题：

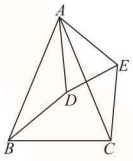
(1) 画出四边形 $ABCD$ 关于 y 轴对称的四边形 $A'B'C'D'$；

(2) 画出四边形 $ABCD$ 关于 x 轴对称的四边形 $A''B''C''D''$；

(3) 四边形 $A'B'C'D'$ 与四边形 $A''B''C''D''$ 有怎样的位置关系？它们对应顶点的坐标之间有怎样的关系？



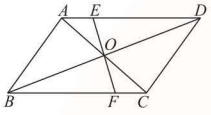
（第 3 题）



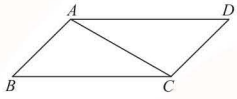
（第 4 题）

4. 如图，$\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 都是顶角为 $45°$ 的等腰三角形，BC、DE 分别是这两个等腰三角形的底边．图中的 $\triangle ACE$ 可以看成由哪个三角形通过怎样的旋转得到的？证明 $\triangle ACE$ 与这个三角形全等．

5. 如图，$\square ABCD$ 的对角线 AC、BD 相交于点 O，过点 O 的直线分别与 AD、BC 相交于点 E、F．写出图中关于点 O 成中心对称的三角形、四边形．



（第 5 题）



（第 6 题）

6. 如图，在 $\square ABCD$ 中，$\angle D = 45°$，$\angle CAD = 30°$．求 $\angle B$ 和 $\angle BAC$ 的度数．

2. 轴对称图形：矩形、菱形、正方形；

中心对称图形：平行四边形、矩形、菱形、正方形．

3. (1) 图略；(2) 图略；(3) 四边形 $A'B'C'D'$ 与四边形 $A''B''C''D''$ 关于点 O 成中心对称，它们的对应顶点的横坐标、纵坐标都互为相反数．

4. $\triangle ACE$ 可以看成由 $\triangle ABD$ 绕点 A 按逆时针方向旋转 $45°$ 得到．证明略．

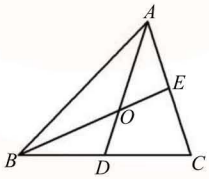
5. $\triangle AOB$ 与 $\triangle COD$、$\triangle AOE$ 与 $\triangle COF$、$\triangle DOE$ 与 $\triangle BOF$、$\triangle AOD$ 与 $\triangle COB$、$\triangle ABD$ 与 $\triangle CDB$、$\triangle ABC$ 与 $\triangle CDA$、四边形 $ABFE$ 与四边形 $CDEF$、四边形 $ABFO$ 与四边形 $CDEO$、四边形 $ABOE$ 与四边形 $CDOF$ 都关于点 O 成中心对称．

6. $\angle B = 45°$，$\angle BAC = 105°$．

(3) 在 $\triangle ABC$ 中，如果 $\angle A = 90°$ 呢？

(4) 在 $\triangle ABC$ 中，如果 $AB = AC$ 且 $\angle A = 90°$ 呢？

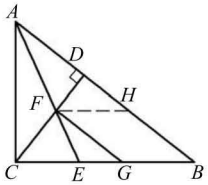
问题三　如图，画 $\triangle ABC$ 的中线 AD、BE，AD、BE 相交于点 O，度量 AO 与 OD、BO 与 OE，它们有怎样的数量关系？能证明你的结论吗？



分别取 AO、BO 的中点 G、H，连接 GH、HD、DE、GE，由三角形中位线定理，得 $DE \parallel GH$，所以四边形 $DEGH$ 是平行四边形，所以 $OD = OG$，$OE = OH$，从而 $BO = 2OE$，$AO = 2OD$．

问题四　已知：如图，CD 是 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 斜边 AB 上的高，AE 平分 $\angle BAC$ 交 CD 于点 F，点 G 在 BC 上，且 $FG \parallel AB$．

求证：$CF = GB$．



本章中较多的内容运用图形的运动变化进行思考和分析，实质是不断发展学生对图形直观把握的能力，逐步形成一种审视、处理问题的方式．问题四的教学中，可以从学生的实际出发，设计用图形运动变化的方法解决问题．比如：

思路一：利用 $FG \parallel AB$ 的条件，可将 GB 平移到 FH 的位置，由 $\angle ACF = \angle B = \angle AHF$，易证 $\triangle AHF \cong \triangle ACF$，从而得 $GB = FH = CF$．

思路二：利用角平分线 AE 所在的直线是 $\angle BAC$ 的对称轴，将 $\triangle AFC$ 沿 AE 翻折到 $\triangle AHF$ 的位置，于是 $\angle AHF = \angle ACF = \angle B$，所以 $FH \parallel BC$，从而 $CF = FH = GB$．

微信公众号：电子课本大全

7. 易证△ABE是等腰三角形，得$AE=AB=4$．所以$DE=AD-AE=BC-AE=2$．

8. $\angle BAE=62°$，$\angle D=56°$．

9. 本题有多种证法．例如，由△ABC、△$D_1B_1C_1$是等边三角形，得$\angle ABC=\angle D_1C_1B_1=60°$，$AB\parallel D_1C_1$，又$AB=D_1C_1$，所以四边形$ABD_1C_1$是平行四边形．

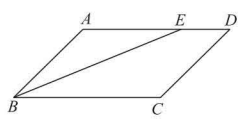
10. 由四边形$ABCD$是菱形，得$\angle D=\angle B=60°$，$AB=BC=CD=DA$，△ABC、△ADC是等边三角形，$AC=BC$，$\angle ACB=\angle CAF=\angle B=60°$．又$AF=BE$，所以△$CAF\cong$△$CBE$，$CE=CF$，$\angle ACF=\angle BCE$．于是$\angle ECF=\angle ECA+\angle ACF=\angle ECA+\angle BCE=\angle ACB=60°$．所以△$ECF$是等边三角形．

11. ① 由四边形$ABCD$是平行四边形，得$AD\parallel BC$，$AD=BC$．又$AH=\frac{1}{2}AD$，$FC=\frac{1}{2}BC$，于是$AH=FC$．所以四边形$AFCH$是平行四边形，于是$AF\parallel HC$．

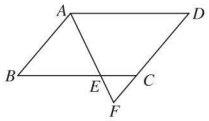
同理，四边形$AECG$是平行四边形，于是$AG\parallel EC$．所以四边形$AMCN$是平行四边形．

② 连接BD．由$AE=EB$，$AH=HD$，得$EH\parallel BD$，$EH=\frac{1}{2}BD$．由$CF=FB$，$CG=GD$，得$FG\parallel BD$，$FG=\frac{1}{2}BD$．于是$EH\parallel FG$，$EH=FG$．所以四边形$EFGH$是平行四边形．

7. 如图，在□$ABCD$中，$\angle ABC$的平分线交AD于点E，$AB=4$，$BC=6$．求DE的长．



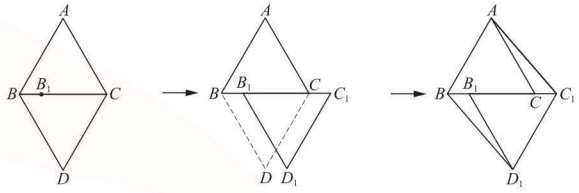
（第 7 题）



（第 8 题）

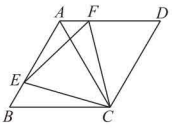
8. 如图，在□$ABCD$中，E是BC上的一点，且$AB=BE$，AE、DC的延长线相交于点F，$\angle F=62°$．求$\angle BAE$和$\angle D$的度数．

9. 如图，△ABC和△DBC都是等边三角形，点B_1在BC上，将△DBC沿BC方向平移到△$D_1B_1C_1$的位置．此时，四边形ABD_1C_1是平行四边形吗？证明你的结论．



（第 9 题）

10. 已知：如图，在菱形$ABCD$中，$\angle B=60°$，点E、F分别在AB、AD上，且$BE=AF$．求证：△ECF是等边三角形．



（第 10 题）

11. 如图，E、F、G、H分别是□$ABCD$各边的中点，证明图中阴影部分是平行四边形．



（第 11 题）

【教学茶座】

● 为什么平行四边形的性质不是用演绎推理进行证明，而是通过图形的运动来确认？

▲ 借助图形的运动来学习图形的性质，不仅仅是为了趣味性，也不仅仅是为了体现数学文化，重要的是在图形的运动中，可以让学生感悟图形是动态的，感悟图形运动中不变的量，从而自己感悟图形的性质．

通过图形的运动来确认图形的性质，可以让学生了解“证明”的方式是多样的．

事实上，一些对图形性质的演绎推理的思路，源于图形的运动．比如，对于等腰三角形“三线合一”性质的探究和证明；“三角形中位线定理”的探究和证明等．可以看出，图形运动往往是演绎推理的思路的“源”，演绎推理是它的“流”．

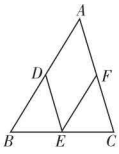
微信公众号：电子课本大全

12. 如图，D、E、F 分别是△ABC 各边的中点．

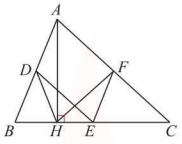
(1) 四边形 $ADEF$ 是怎样的四边形？证明你的结论．

(2) 根据下列条件，分别判断四边形 $ADEF$ 是怎样的四边形？证明你的结论．

① $\angle A=90°$；② $AB=AC$；③ $\angle A=90°$，且 $AB=AC$．



（第 12 题）



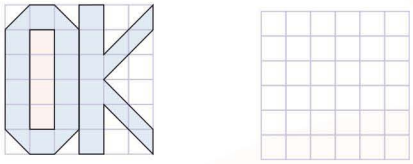
（第 13 题）

13. 已知：如图，在△ABC 中，D、E、F 分别是各边的中点，AH 是高．

求证：$\angle DHF=\angle DEF$．

灵活运用

14. 如图，方格纸中每一个小方格的面积为 1 个平方单位．



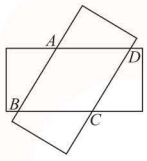
①　　②

（第 14 题）

(1) 图①中的“OK”可以看成是一个轴对称图形，你能求出图①中“OK”部分的面积吗？

(2) 请在图②的方格纸上设计一个中心对称图形，并计算它的面积．

15. 如图，由两个等宽的矩形叠合而得到的四边形 $ABCD$ 是菱形吗？证明你的结论．



（第 15 题）

12. (1)四边形 $ADEF$ 是平行四边形．

证明略；

(2)① 当 $\angle A=90°$ 时，$\square ADEF$ 是矩形；②当 $AB=AC$ 时，$\square ADEF$ 是菱形；③当 $\angle A=90°$、$AB=AC$ 时，$\square ADEF$ 是正方形．

证明略．

13. 本题有多种解法．例如，连接 DF．由定理“直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半”，得 $HD=\frac{1}{2}AB$，$HF=\frac{1}{2}AC$．由三角形中位线定理，得 $EF=\frac{1}{2}AB$，$DE=\frac{1}{2}AC$．于是 $HD=EF$，$HF=ED$．又 $DF=FD$，所以△DHF ≌ △FED，$\angle DHF=\angle DEF$．

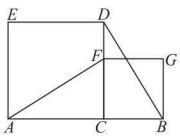
（灵活运用）

14. (1) 图中“OK”部分面积为 22 个平方单位；(2) 略．

15. 四边形 $ABCD$ 是菱形．证明如下：作 $CE\perp AB$，$CF\perp AD$，垂足分别为 E、F．由题意，$CE=CF$，$AB\parallel DC$，$AD\parallel BC$，得四边形 $ABCD$ 是平行四边形．$\square ABCD$ 的面积 $=AB\cdot CE=AD\cdot CF$，又 $CE=CF$，所以 $AB=AD$．所以 $\square ABCD$ 是菱形．

微信公众号：电子课本大全

16. 如图，点 C 在线段 AB 上，分别以 AC、BC 为边在线段 AB 的同侧作正方形 $ACDE$ 和 $BCFG$，连接 AF、BD.



（第 16 题）

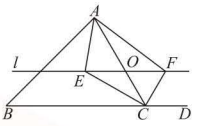
(1) AF 与 BD 是否相等？证明你的结论.

(2) 如果点 C 在线段 AB 的延长线上，(1)中所得的结论是否成立？请画出图形并证明.

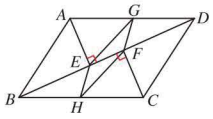
17. 如图，在△ABC 中，O 是 AC 上的任意一点(不与点 A、C 重合)，过点 O 平行于 BC 的直线 l 分别与∠BCA、△ABC 的外角∠DCA 的平分线交于点 E、F.

(1) OE 与 OF 相等吗？证明你的结论.

(2) 试确定点 O 的位置，使四边形 $AECF$ 是矩形，并加以证明.



（第 17 题）



（第 18 题）

18. 已知：如图，在□$ABCD$ 中，G、H 分别是 AD、BC 的中点，$AE\perp BD$，$CF\perp BD$，垂足分别为 E、F.

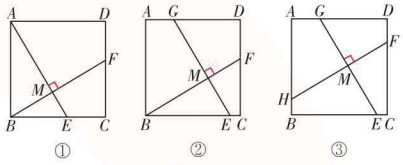
求证：四边形 $GEHF$ 是平行四边形.

19. 在正方形 $ABCD$ 中：

(1) 如图①，如果点 E、F 分别在 BC、CD 上，且 $AE\perp BF$，垂足为 M，那么 AE 与 BF 相等吗？证明你的结论.

(2) 如图②，如果点 E、F、G 分别在 BC、CD、DA 上，且 $GE\perp BF$，垂足为 M，那么 GE 与 BF 相等吗？证明你的结论.

(3) 如图③，如果点 E、F、G、H 分别在 BC、CD、DA、AB 上，且 $GE\perp HF$，垂足为 M，那么 GE 与 HF 相等吗？证明你的结论.



（第 19 题）

16. (1) 由正方形 $ACDE$ 和 $BCFG$，得 $AC=DC$，$FC=BC$，$\angle ACF=\angle DCB=90°$，于是△ $ACF\cong$△ DCB，所以 $AF=BD$.

(2) 如果点 C 在线段 AB 的延长线上，(1)中的结论仍然成立. 图、证明略.

17. (1) $OE=OF$. 由 $l\parallel BC$，CE 平分 $\angle ACB$，得 $\angle OEC=\angle OCE$，$OE=OC$. 同理，$OF=OC$. 所以 $OE=OF$.

(2) 当 O 是 AC 的中点时，四边形 $AECF$ 是矩形. 由 $OA=OC$，$OE=OF$，得四边形 $AECF$ 是平行四边形，又 $\angle ECF=\frac{1}{2}(\angle ACB+\angle ACD)=90°$. 所以□$AECF$ 是矩形.

18. 由□$ABCD$，得 $AD=BC$，$AD\parallel BC$，$\angle ADB=\angle DBC$. 由定理“直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半”，得 $EG=GD=\frac{1}{2}AD$，$FH=HB=\frac{1}{2}BC$. 于是 $EG=FH$，$\angle GED=\angle GDE$，$\angle HFB=\angle HBF$. 又 $\angle GDE=\angle HBF$，所以 $\angle GED=\angle HFB$，$EG\parallel FH$. 所以四边形 $GEHF$ 是平行四边形.

19. (1) 由正方形 $ABCD$，得 $AB=BC$，$\angle ABC=\angle C=90°$，$\angle BAE+\angle AEB=90°$. 又 $AE\perp BF$，$\angle FBC+\angle AEB=90°$. 所以 $\angle BAE=\angle FBC$. 所以△ $ABE\cong$△ BCF，$AE=BF$.

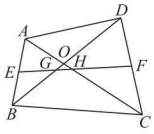
(2) 提示：过点 A 作 $AH\parallel GE$ 交 BC 于点 H，即把问题(2)转化为问题(1).

(3) 提示：把问题(3)转化为问题(1).

微信公众号：电子课本大全

20. 已知：如图，在四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC、BD 相交于点 O，且 $AC=BD$，E、F 分别是 AB、CD 的中点，EF 分别交 BD、AC 于点 G、H.

求证：$OG=OH$.



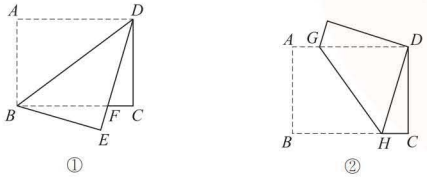
（第 20 题）

探索研究

21. 在矩形纸片 $ABCD$ 中，$AB=6$，$BC=8$.

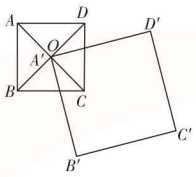
(1) 将矩形纸片沿 BD 折叠，点 A 落在点 E 处(如图①)，设 DE 与 BC 相交于点 F，求 BF 的长；

(2) 将矩形纸片折叠，使点 B 与点 D 重合(如图②)，求折痕 GH 的长.



（第 21 题）

22. 如图，正方形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 相交于点 O，正方形 $A'B'C'D'$ 的顶点 A' 与点 O 重合. 将正方形 $A'B'C'D'$ 绕点 A' 旋转，在这个过程中，这两个正方形重合部分的面积会发生变化吗？证明你的结论.



（第 22 题）

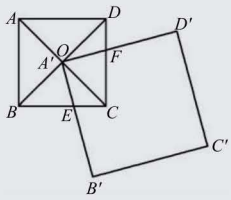
20. 提示：取 BC 的中点 M，连接 ME、MF.

（探索研究）

21. (1) 设 $BF=x$. 由题意，得 $\angle FDB=\angle ADB=\angle DBF$. 于是 $DF=BF$，$FC=BC-BF=8-x$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle DFC$ 中，由勾股定理得 $6^2+(8-x)^2=x^2$，$x=6.25$.

(2) 连接 BD 交 GH 于点 O. 由题意，得 $BD=10$，GH 垂直平分 BD，$HD=HB$. 于是，在 $\mathrm{Rt}\triangle DHC$ 中，由勾股定理得 $6^2+(8-DH)^2=DH^2$，$DH=\frac{25}{4}$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle BOH$ 中，$OB=5$，$HB=\frac{25}{4}$，由勾股定理，得 $OH=\frac{15}{4}$，$GH=2OH=\frac{15}{2}$.

22. 正方形 $A'B'C'D'$ 绕点 A' 旋转，这个过程中，这两个正方形重合部分的面积不会变化，等于正方形 $ABCD$ 面积的四分之一. 证明如下：如图，设 OB' 交 BC 于点 E，OD' 交 CD 于点 F. 由四边形 $ABCD$、$A'B'C'D'$ 是正方形，得 $AC\perp BD$，$AC=BD$，$OB=OC=OD$，$\angle B'OD'=90°$，$\angle OBE=\angle OCF=45°$，$\angle BOC-\angle EOC=\angle B'OD'-\angle EOC$，即 $\angle BOE=\angle COF$. 所以 $\triangle BOE\cong\triangle COF$，$S_{\triangle BOE}=S_{\triangle COF}$，$S_{四边形OECF}=S_{\triangle COF}+S_{\triangle COE}=S_{\triangle BOE}+S_{\triangle COE}=S_{\triangle BOC}=\frac{1}{4}S_{正方形ABCD}$.



微信公众号：电子课本大全

第10章　分　式

【课标要求】

1. 了解分式和最简分式的概念.

2. 能利用分式的基本性质进行约分和通分 .

3. 能进行简单的分式加、减、乘、除运算.

4. 能解可化为一元一次方程的分式方程.

5. 能够根据具体问题中的数量关系列出可化为一元一次方程的分式方程,体会方程是刻画现实世界数量关系的有效模型.能根据具体问题的实际意义,检验方程的解是否合理.

此外,通过观察、比较等活动,感受分式与分数一样都能描述现实世界中的数量关系;分式方程与其他方程一样,是刻画现实世界数量关系的有效模型;体验“类比”、“转化”是探索新知、处理和解决实际问题的数学思想方法.

【设计思路】

1. 考虑到分式与分数的形式相同、性质相通,所以课本采用“用字母表示分数的分子、分母”的方法引入分式的概念,通过与分数的运算类比引入分式的变形和运算.这种设计既符合知识的产生和发展的过程,也符合学生的认知规律;既渗透数学思想方法,也易于学生理解和掌握.

2. 本章共有5节内容.

两数相除可以用分数表示,用字母分别表示分数的分子与分母,分数便成了分式;给分式中的字母赋值,分式就成了分数.实际上,分式与分数是一般与特殊、抽象与具体的关系.第1节分式的概念正是从这里引入,并用以描述实际问题中的数量关系,让学生从中体会“分式也是刻画现实世界中数量关系”的一类代数式.

第2节类比分数的基本性质,给出分式的基本性质;类比分数的约分与通分,给出分式的约分和通分及相关概念,并给出最简分式的概念.

第3节类比分数的加、减运算,给出分式的加、减运算法则.

第4节类比分数的乘、除运算,给出分式的乘、除运算及混合运算法则.

第5节给出分式方程的概念及可化为一元一次方程的分式方程的解法,说明检验是解分式方程必不可少的步骤,并指出用分式方程解决实际应用问题时,还要注意考察方程的解在实际问题中的合理性.

3. 本章的“阅读”,介绍了“类比”这一重要的数学思想,旨在介绍类比在探索新知过程中的作用,并让学生通过阅读了解“类比”的迁移性与变异性,提升和完善学生对类比思想的认识.

4. 与有理数中的整数和分数的关系类似,分式是不同于整式的另一类有理式,是代数式的重要组成部分.课本在小结与思考中,给出了有理式的概念,以完善学生对“式”的认识.

【教学建议】

1. 通过用字母表示数,沟通分式和分数的横向联系,渗透具体与抽象、特殊与一般的辨证思想.要重视分式与现实生活的联系,注意选用贴近生活的实例,帮助学生正确建立分式的概念,让学生再次感受数学知识发生、发展来自于人类实践活动的需要.

2. 分式的分母不为0与分数的分母不为0是一脉相承的,是学习和研究分式基本性质的前提和基础,同时也是课本在第5节中说明解分式方程必须检验的原因,以此突出分式方程的特殊性,教学时要给予足够的重视.

3. 分式四则运算是本章的重点,重要的是会进行基本的运算,同时要控制计算中的繁难程度.教学时,可以根据学生的具体情况,适当增加例题、习题,让学生熟练掌握分式的运算法则.但与整式、分数运算相比,分式运算的步骤多,符号变化复杂,所以在增补例题、习题时,依然要注意控制难度,特别是不要在分子、分母的因式分解上增加难度.

4. 教学设计应注意渗透数学思想与方法,充分发挥学生的主体作用,引导学生用类比的思想思考问题,用对比

微信公众号：电子课本大全

的眼光观察问题，用转化的方法解决问题．

5. 注意在要求学生掌握基础知识和基本技能的同时，培养学生耐心、细心、严谨等良好心理素质和个性品质．

【评价建议】

1. 要恰当评价学生对基础知识和基本技能的掌握情况．

(1) 多用表格、图像或语言提供贴近学生生活的素材，让学生描述其中的数量关系．例如：

若在 500 g 含盐为 80% 的盐水溶液中，加入水 m g，则这时盐水中含盐的百分率为_____；

若在 120 kg 含盐为 40% 的盐水溶液中，加入盐 n kg，则这时盐水中含盐的百分率为_____．

(2) 对于分式的有关运算，应着重考查学生运算是否准确，步骤是否完整，表述是否清晰．

2. 要注重对学生应用知识解决问题的能力的评价．例如：

某车间有甲、乙两个小组，甲组的工作效率比乙组的工作效率高 25%，因此甲组加工 2 000 个零件所用的时间比乙组加工 1 800 个零件所用的时间少 0.5 h．问甲、乙两组每小时各加工多少个零件？

3. 要适度评价学生判断正误和说理能力．例如：

小明由条件“$x=y$，且 $x\neq 0$，$y\neq 0$”，推出了“2=1”的荒谬结论．请说明以下推导过程中哪些步骤是正确的？哪些步骤是错误的？

因为 $x=y$，且 $x\neq 0$，

所以等式两边同乘 x，得 $x^2=xy$．　①

① 式两边都减去 y^2，得 $x^2-y^2=xy-y^2$．　②

② 式两边都分解因式，得 $(x+y)(x-y)=y(x-y)$．　③

③ 式两边都除以 $x-y$，得 $x+y=y$．　④

将 $x=y$ 代入④式，得 $2y=y$．　⑤

因为 $y\neq 0$，所以⑤式两边都除以 y，得 2=1．　⑥

此外，同其他各章一样，要注重对学生数学学习过程的评价，包括完成课内外作业的主动性，独立思考的习惯，数学活动的参与程度及评价表的填写等．

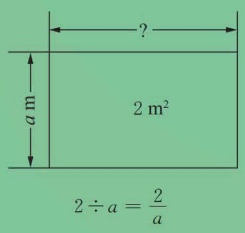
【课时安排】

本章教学大约需要 13 课时，分配如下：

第 1 节	分式	1 课时
第 2 节	分式的基本性质	3 课时
第 3 节	分式的加减运算	1 课时
第 4 节	分式的乘除运算	2 课时
第 5 节	分式方程	3 课时
	数学活动	1 课时
	小结与思考	2 课时

微信公众号：电子课本大全

第10章 分 式



$2 \div a = \frac{2}{a}$

实际问题中的一些数量关系，可用分式来表示；
通过与分数进行类比，探索分式的性质和运算法则．



【内容解读】

知道矩形的长和宽，根据乘法，不难求出它的面积．如果知道矩形的面积为 $2\ \text{m}^2$、宽为 $a\ \text{m}$，那么根据除法，矩形的长为 $(2 \div a)\ \text{m}$，但图上却标为 $\frac{2}{a}\ \text{m}$．

$\frac{2}{a}$ 具有分数的形式，它们是否也称为分数？它们是否具有与分数类似的性质？它们能否像分数那样进行加、减、乘、除运算？

微信公众号：电子课本大全



京沪铁路是我国东部沿海地区纵贯南北的交通大动脉，全长 1 462 km，是我国最繁忙的铁路干线之一．

如果货车的速度为 a km/h，客车的速度是货车的 2 倍，那么

(1) 货车从北京到上海需要多少时间?

(2) 客车从北京到上海需要多少时间?

(3) 已知从北京到上海的客车比货车少用 6 h，你能用方程描述其中的数量关系吗?

本章将学习分式、分式运算以及分式方程．

【内容解读】

某人要走完一段道路，如果行走速度快，那么所用的时间短，这是生活常识．

以繁忙的京沪铁路为背景，在已知全长为 1 462 km 的前提下，探讨如何用车速 a km/h 表示所需的行驶时间，进而用所得的代数式描述某些量．这些都是学生力所能及的．

通过学生的自主探究，感受本章将要学习和研究的内容——分式、分式运算及分式方程．

【课程资源】

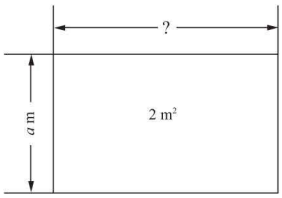
京沪铁路：从北京经天津、济南、徐州、南京到上海，全长 1 462 km，是将京哈铁路的京津段和津浦铁路、沪宁铁路连接而成．对沟通华北与华东，直接联系京、沪的往来起重要作用．是中国东部沿海地区纵贯南北的交通大动脉、中国最繁忙的铁路干线之一．

微信公众号：电子课本大全

10.1 分 式

如果某市人口总数为 a 人，绿地面积为 b m²，那么该市人均拥有绿地 $\frac{b}{a}$ m².

如果一块长方形玻璃板的面积为 2 m²，这块玻璃板的宽是 a m，那么它的长是 $\frac{2}{a}$ m.

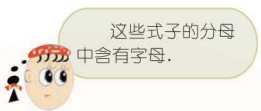


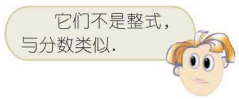
如果面积为 a 公顷、b 公顷的两块棉田分别产棉花 m 千克、n 千克，那么这两块棉田平均每公顷产棉花 $\frac{m+n}{a+b}$ 千克.





像 $\frac{b}{a}$、$\frac{2}{a}$、$\frac{m+n}{a+b}$ ……这样的式子有什么共同特征？它们与整式有什么区别？





一般地，如果 A、B 表示两个整式，并且 B 中含有字母，那么代数式 $\frac{A}{B}$ 叫做**分式**(fraction)，其中 A 是分式的分子，B 是分式的分母.

【内容解读】

用字母表示数，沟通分式 $\frac{a}{b}$ 与分数的联系，揭示了分数与分式的辨证关系——具体与抽象、特殊与一般的关系. 从运动变化的观点看，分式 $\frac{a}{b}$ 以统一的形式可以表示任何一个具体分数；以问题的方式，提出字母的取值问题，通过思考与交流，加深学生对分母不为0的认识.

【内容解读】

这里是让学生讨论3个式子的共同特征：

(1) 从整体而言，它们都具有 $\frac{A}{B}$ 的形式；

(2) 从分子、分母而言，分子、分母分别是一个整体，并且分母中都含有字母.

【教学目标】

1. 了解分式的概念，会判断一个代数式是否是分式.

2. 能用分式表示简单问题中数量之间的关系，能解释简单分式的实际背景和几何意义.

3. 会判断一个分式何时有意义.

4. 会根据已知条件求分式的值.

【教学过程设计建议】

1. 情境创设

教学中可以创设一些问题情境引入“分式”. 例如：

(1) 某制衣厂3 h生产100套服装，那么平均每小时生产_____套服装；

(2) 某人 a h加工100个零件，那么平均每小时加工_____个零件；

(3) 橘子的单价为 a 元/千克，苹果的单价比橘子的单价贵2元，用 b 元可以买橘子_____千克，或买苹果_____千克；

(4) A、B两地之间的路程是 s km，甲、乙两人分别从A、B两地同时出发，相向而行，甲的速度是 x km/h，乙的速度是 y km/h，那么经过_____h两人相遇.

设计这组问题，首先帮助学生回顾两数不能整除，我们用分数来表示；然后过渡到用字母表示数，引导学生主动地用“$\frac{A}{B}$”的形式表示两个整式相除.

2. 探索活动

问题一 $\frac{10}{a}$、$\frac{b}{a}$、$\frac{b}{a+2}$、$\frac{s}{x+y}$ ……这样的式子有

微信公众号：电子课本大全

交流

分式可以表示现实生活中的一些数量关系．例如，如果某种水果的售价为每千克 b 元，那么 $\frac{a}{b}$ 表示用 a 元可以购买这种水果的千克数；如果这种水果的售价每千克降价 1 元，那么 $\frac{a}{b-1}$ 表示用 a 元可以购买降价后这种水果的千克数．

分式 $\frac{a}{b}$、$\frac{a}{b-1}$ 可以表示不同的实际意义，试举例说明．

分式的值随分式中字母取值的变化而变化．用具体的数值代替分式中的字母，按照式子中的运算关系计算，就能得到相应的分式的值．

例如，在分式 $\frac{a-3}{a+2}$ 中，若 $a=3$，则它的值为 $\frac{3-3}{3+2}=\frac{0}{5}=0$；若 $a=-\frac{2}{5}$，则它的值为 $\frac{-\frac{2}{5}-3}{-\frac{2}{5}+2}=\frac{-\frac{17}{5}}{\frac{8}{5}}=-\frac{17}{5}\times\frac{5}{8}=-\frac{17}{8}$．

思考

在分式 $\frac{a-3}{a+2}$ 中，a 的值可以是 -2 吗？为什么？



分式的分母不能为 0．如果分式中字母所取的值使分母的值为 0，那么分式无意义．

例 当 x 取什么值时，(1) 分式 $\frac{x-2}{2x-3}$ 无意义、有意义？(2) 分式 $\frac{x-2}{2x-3}$ 的值为零？

解： (1) 由 $2x-3=0$，得 $x=\frac{3}{2}$．

当 $x=\frac{3}{2}$ 时，分式 $\frac{x-2}{2x-3}$ 无意义．

当 $x\neq\frac{3}{2}$ 时，分式 $\frac{x-2}{2x-3}$ 有意义．

【内容解读】

《标准》要求：能解释一些简单代数式的实际背景或几何意义．“交流”就是为落实这一要求而设计，可以根据学生学习的实际情况，要求学生用生活中的实例，对分式 $\frac{a}{b-1}$ 的意义再给出一些解释．

【内容解读】

探讨分式何时有意义，常常从分式何时没有意义着手，这是常用的数学方法，要帮助学生理清思路，明确这样做的道理所在．

当分式中字母所取的值使分子的值为零，且分母的值不为零时，分式的值为零．

什么共同点？

设计这个问题，目的是引导学生认识这样的式子：① 都具有分数的形式；② 分母中都含有字母．

问题二 $\frac{10}{a}$、$\frac{b}{a}$、$\frac{b}{a+2}$、$\frac{s}{x+y}$ ……这样的式子与分数有什么不同？

通过与分数的类比，可以引导学生理解：① 分式的分母中字母的取值必须使分母不为 0；② 分式的分数线不仅有除号的功能还有括号的功能．在此基础上引入分式的概念，有利于学生正确认识分式．

问题三 $\frac{10}{a}$、$\frac{b}{a}$、$\frac{b}{a+2}$、$\frac{s}{x+y}$ ……可以表示不同的实际意义吗？你能举例说明吗？

设计这个问题可以引导学生不断体会“同一个分式可以有不同的实际背景；不同实际背景问题中的相同数量关系常常可以用同一个分式来表达”，以利于学生不断感悟数学模型是数学与外部世界联系的桥梁．

3. 例题教学

例题教学前，先引导学生理解什么是分式的值和能根据已知条件求分式的值；知道什么是分式的值为 0 和何时分式的值为 0；感受分式的值随分式中字母取值的变化而变化；分式中的字母取值确定，分式的值也确定．

通过例题教学，引导学生学会判断一个分式何时有意义．

例题给出了判断方法．值得注意的是，要帮助学生弄清楚为什么探索分式何时有意义，但却从分式无意义着手？这是因为使分母不等于 0 的值有无数个，而使分母等于 0 的值只有有限个，而且很容易解得．这种从问

微信公众号：电子课本大全

(2) 由分子 $x-2=0$，得 $x=2$；且 $x=2$ 时，分母 $2x-3$ 的值为 $2\times2-3=1$，不为零．当 $x=2$ 时，分式 $\frac{x-2}{2x-3}$ 的值为零．



1. 填空：
   (1) 某校八年级有 m 个学生，排成长方形队伍．如果排成 20 排，那么平均每排有_____个学生；如果排成 a 排，那么平均每排有_____个学生．
   (2) 30 名工人 x h 加工了 1 800 个零件，平均每人每小时加工零件_____个．
2. 填表：

x	…	−3	−2	−1	0	1	2	3	…
$\frac{x}{1-x}$	…								…

3. 当 x 取什么值时，下列分式有意义？下列分式的值为零？
   (1) $\frac{2+x}{x}$；　　(2) $\frac{x}{4-3x}$．



1. 当 x 取什么值时，下列分式有意义？下列分式的值为零？
   (1) $\frac{2x+1}{6x-5}$；　　(2) $\frac{2x-1}{x^2+1}$．
2. 某玩具厂要生产 a 只吉祥物“欢欢”，原计划每天生产 b 只，实际每天生产了 $(b+c)$ 只．
   (1) 该厂原计划多少天完成生产任务？
   (2) 该厂实际多少天完成了生产任务？
3. x 千克橘子糖、y 千克椰子糖、z 千克奶糖混合成“什锦糖”．已知这 3 种糖的单价分别为 28 元/千克、32 元/千克、48 元/千克．求这种“什锦糖”的单价．
4. 当 a 的值分别为 0.01、0.1、1、10、100 时，求分式 $\frac{1}{a}$ 的值．随 a 的值变化，$\frac{1}{a}$ 的值是如何变化的？

【练习解答】

1. (1) $\frac{m}{20}$，$\frac{m}{a}$；
   (2) $\frac{1\,800}{30x}$．

2. $-\frac{3}{4}$，$-\frac{2}{3}$，$-\frac{1}{2}$，0，无意义，−2，$-\frac{3}{2}$．

3. (1) $x\neq0$，$x=-2$；(2) $x\neq\frac{4}{3}$，$x=0$．

【习题解答】

1. (1) $x\neq\frac{5}{6}$，$x=-\frac{1}{2}$；(2) x 可取一切实数，$x=\frac{1}{2}$．

2. (1) $\frac{a}{b}$；(2) $\frac{a}{b+c}$．

3. $\frac{28x+32y+48z}{x+y+z}$．

4. 100，10，1，$\frac{1}{10}$，$\frac{1}{100}$．

   $\frac{1}{a}$ 的值随 a 的值的增大而减小．

题的反面入手，解决问题的思想方法是数学中一种很有价值的方法，例题教学的重点应是这种思想方法的渗透，而不是方法的操作．

可以根据学生的情况适当补充例题、习题，以帮助学生明确“分式的值为0”与“分式无意义”的区别，例如：当 x 是什么数时，分式 $\frac{x^2-4}{x+2}$ 的值是0？

4. 思维拓展

根据需要可以在课本例2后补充例题：

(1) 小李打一份 8 000 字的文件，上午她打了 a h，下午又用 b h 才打完，小李打字的速度是多少？

(2) 小王打一份 10 000 字的文件，上午她录入文件 2 h，录入速度为 a 字/时，下午她录完这份文件，录入速度比上午快了100字/时，下午她录入用了多少时间？

(答案：(1) $\frac{800}{a+b}$ 字/时；(2) $\frac{1\,000-2a}{a+100}$ 时．)

5. 小结．

说一说分式与分数的异同．

微信公众号：电子课本大全

10.2 分式的基本性质

我们知道，如果分数的分子和分母都乘(或除以)同一个不等于 0 的数，那么分数的值不变．

分式也有类似的性质吗？



一列匀速行驶的火车，如果 t h 行驶 s km、$2t$ h 行驶 $2s$ km、$3t$ h 行驶 $3s$ km、…、nt h 行驶 ns km，那么 $\frac{s}{t}$ km/h、$\frac{2s}{2t}$ km/h、$\frac{3s}{3t}$ km/h、…、$\frac{ns}{nt}$ km/h 都表示这列火车的速度，由此你发现了什么？

分式的基本性质 分式的分子和分母都乘(或除以)同一个不等于 0 的整式，分式的值不变．

$$\frac{A}{B}=\frac{A\times C}{B\times C},\quad \frac{A}{B}=\frac{A\div C}{B\div C},$$

其中 C 是不等于 0 的整式．

例 1 下列等式的右边是怎样从左边得到的？

(1) $\frac{b}{a}=\frac{ab}{a^2}$；　　(2) $\frac{a^3}{ab}=\frac{a^2}{b}$．

解： (1) $\because a\neq 0$，$\therefore \frac{b}{a}=\frac{b\cdot a}{a\cdot a}=\frac{ab}{a^2}$；

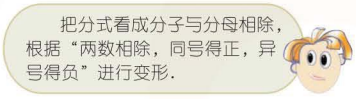
(2) $\because a\neq 0$，$\therefore \frac{a^3}{ab}=\frac{a^3\div a}{ab\div a}=\frac{a^2}{b}$．

例 2 不改变分式的值，使下列分式的分子与分母都不含“−”号：

(1) $\frac{-2a}{-3b}$；　　(2) $\frac{-n}{m}$．

解： (1) $\frac{-2a}{-3b}=\frac{2a}{3b}$；

(2) $\frac{-n}{m}=-\frac{n}{m}$．



【教学目标】

1. 了解分式的基本性质，能利用分式的基本性质进行约分和通分．

2. 了解最简分式的概念，会通过约分将分式化为最简分式．

3. 了解最简公分母的概念，会将异分母分式通分为同分母分式．

4. 在通过观察、类比获得结论中，进一步培养学生合情推理能力．

【教学过程设计建议】

1．情境创设

除课本提供的实际情境外，还可以通过回顾具体的分数约分的依据，引导学生主动地把分式与分数进行类比．例如：

① $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$、$\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$，从左到右的依据是什么？

② $\frac{1}{2}$ 与分式 $\frac{2a}{4a}$ 相等吗？分式 $\frac{8(x+y)}{12(x+y)}$ 与 $\frac{2}{3}$ 相等吗？

2．探索活动

问题一　从 $\frac{s}{t}=\frac{2s}{2t}=\frac{3s}{3t}=\cdots=\frac{ns}{nt}$，$\frac{1}{2}$ 与分式 $\frac{2a}{4a}$ 相等，分式 $\frac{8(x+y)}{12(x+y)}$ 与 $\frac{2}{3}$ 相等中，你有什么发现？

交流问题一，类比分数的基本性质获得分式的基本性质；从中还可以发现：由于字母可以表示任何数，所以分式的基本性质是分数的基本性质的一般化．

微信公众号：电子课本大全

例3 不改变分式的值，使下列分式的分子与分母的最高次项的系数是正数．

(1) $\frac{x}{1-x^2}$；　　(2) $\frac{y-y^2}{y+y^2}$.

解： (1) $\frac{x}{1-x^2}=\frac{x}{-(x^2-1)}=-\frac{x}{x^2-1}$；

(2) $\frac{y-y^2}{y+y^2}=\frac{-(y^2-y)}{y^2+y}=-\frac{y^2-y}{y^2+y}$.



1. 填空：

(1) $\frac{a}{2ab}=\frac{1}{(\quad)}$；　　(2) $\frac{3a}{4b}=\frac{(\quad)}{4bc}(c\neq 0)$；

(3) $\frac{(a-b)^2}{a^2-b^2}=\frac{(\quad)}{a+b}$；　　(4) $\frac{a^2-b^2}{a+b}=\frac{a-b}{(\quad)}$.

2. 不改变分式的值，使 $\frac{\frac{1}{2}a^2+b^2}{a+b}$ 的分子中不含分数．



填空，并说明理由：

(1) $\frac{2b}{2a}=\frac{(\quad)}{a}$；　　(2) $\frac{ac}{a^2}=\frac{c}{(\quad)}$；　　(3) $\frac{x}{6x^2y^2}=\frac{1}{(\quad)}$.

根据分数的基本性质，可以对分数进行约分．与分数的约分相类似，根据分式的基本性质，把一个分式的分子和分母分别除以它们的公因式，叫做**分式的约分**(reduction of a fraction).

例4 约分：

(1) $\frac{36ab^3c}{6abc^2}$；　　(2) $\frac{(a+b)^3}{(a+b)(a-b)}$.

解： (1) $\frac{36ab^3c}{6abc^2}=\frac{6abc\cdot 6b^2}{6abc\cdot c}=\frac{6b^2}{c}$；

(2) $\frac{(a+b)^3}{(a+b)(a-b)}=\frac{(a+b)(a+b)^2}{(a+b)(a-b)}=\frac{(a+b)^2}{a-b}$.

【内容解读】

分式变形的依据是分式的基本性质，“不改变分式的值”是分式变形的前提．例3既是分式基本性质的直接应用，又是处理分式符号变化的示范．

【练习解答】

1. (1) $2b$；(2) $3ac$；(3) $a-b$；(4) 1.

2. $\frac{a^2+2b^2}{2a+2b}$.

【内容解读】

(1) b；(2) a；(3) $6xy^2$.

【内容解读】

若把 $(a+b)$、$(a-b)$ 分别看做一个“字母”，则例4可视为分子、分母是单项式的分式约分问题．约去分子、分母中相同字母(或含字母的式子)的最低次幂，并约去系数的最大公约数即可．

问题二　你能用数学式子表示分式的基本性质吗?

教学中应有意识的让学生经历运用数学符号表示数学结论，不断培养学生的符号意识．

问题三　下列等式从左到右成立吗?为什么?

① $\frac{a}{b}=\frac{a+c}{b+c}$；② $\frac{a}{b}=\frac{a^2}{b^2}$；③ $\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}$；④ $\frac{ax}{bx}=\frac{a}{b}$.

讨论问题三，帮助学生正确理解分式的基本性质．①式、②式不成立，可以通过举反例加以说明；③式从左到右需有 $m\neq 0$ 的条件，所以不成立；④式中左边已有 $x\neq 0$ 隐含条件，所以这个等式从左到右成立．

3. 例题教学

例1是分式基本性质的简单应用．教学时，应紧扣分式的基本性质，深化学生对分式基本性质的理解．

例2、例3既是分式基本性质的直接应用，也是处理分式符号变化的示例．通过此例，让学生感受分式的分子、分母的符号及分式本身的符号，有时可根据需要改变，教学时无需补充符号法则，可让学生自行归纳．

4. 思维拓展

根据教学需要，可在例3后，选择以下讨论题：

(1)分式 $\frac{-a}{b}$ 与 $\frac{a}{-b}$ 相等吗?

(2) 分式 $\frac{a(b-1)}{b(1-b)}$ 与 $\frac{-a}{b}$ 相等吗?(答案：(1) 相等；(2) 相等．)

5. 小结

分式基本性质与分数基本性质有何异同?

【教学过程设计建议(第二课时)】

1. 情境创设

教学中可创设一些问题情境引入分式的“约分”．例如：

微信公众号：电子课本大全

例 5 约分：

(1) $\dfrac{ma+mb-mc}{a+b-c}$；　　(2) $\dfrac{a^2-2a+1}{1-a^2}$.

分析： 当分式的分子、分母为多项式时，先将分式的分子、分母分解因式，然后找出它们的公因式，再约分.

解： (1) $\dfrac{ma+mb-mc}{a+b-c}=\dfrac{m(a+b-c)}{a+b-c}=m$；

(2) $\dfrac{a^2-2a+1}{1-a^2}=-\dfrac{a^2-2a+1}{a^2-1}=-\dfrac{(a-1)^2}{(a-1)(a+1)}=-\dfrac{a-1}{a+1}$.

通过约分可以把分式化简.

如果一个分式的分子与分母只有公因式 1，那么这样的分式叫做**最简分式**(simplest fraction). 约分通常要把分式化成最简分式或整式.



1. 约分：

(1) $\dfrac{3a^2b}{6ab}$；　　(2) $\dfrac{2a(a-1)}{8ab^2(1-a)}$；

(3) $\dfrac{18(b-a)^2}{24(a-b)}$.

2. 约分：

(1) $\dfrac{a^2-4ab+4b^2}{a^2-4b^2}$；　　(2) $\dfrac{a^4-1}{a^2+2a+1}$；

(3) $\dfrac{(x+y)^2-10(x+y)+25}{(x+y)^2-25}$.



填空，并说明理由：

(1) $\dfrac{m}{4x^2}=\dfrac{3my}{(\quad)}$，$\dfrac{5}{6xy}=\dfrac{10x}{(\quad)}$；

(2) $\dfrac{1}{2a^2}=\dfrac{6b^2}{(\quad)}$，$\dfrac{x}{4b^2}=\dfrac{3a^2x}{(\quad)}$，$\dfrac{y}{3ab}=\dfrac{4aby}{(\quad)}$.

与分数的通分相类似，根据分式的基本性质，把几个异分母的分式变形成同分母的分式，叫做**分式的通分**(reduction of fractions to a denominator)，变形后的分母叫做这几个分式的公分母.

【内容解读】

例 5 中分子、分母都是多项式，要先将分子或分母因式分解，再将其转化为因式乘积的形式，然后进行约分.

【练习解答】

1. (1) $\dfrac{a}{2}$；(2) $-\dfrac{1}{4b^2}$；(3) $\dfrac{3(a-b)}{4}$.

2. (1) $\dfrac{a-2b}{a+2b}$；(2) $\dfrac{(a-1)(a^2+1)}{a+1}$；(3) $\dfrac{x+y-5}{x+y+5}$.

【内容解读】

(1) $12x^2y$，$12x^2y$；

(2) $12a^2b^2$，$12a^2b^2$，$12a^2b^2$.

(1) 列举分数的约分，并说明分数约分的根据.

(2) 下列分数的约分正确吗？为什么？

① $\dfrac{18}{54}=\dfrac{2}{6}$；② $\dfrac{48}{36}=\dfrac{8}{6}$.

(3) 尝试填空，并说出填空的根据：

① $\dfrac{2b}{2a}=\dfrac{(\quad)}{a}$；② $\dfrac{ac}{a^2}=\dfrac{c}{(\quad)}$；

③ $\dfrac{x}{6x^2y^2}=\dfrac{1}{(\quad)}$；④ $\dfrac{x^3y}{6x^2y^2}=\dfrac{(\quad)}{(\quad)}$.

设计问题(1)，引导学生回顾分数的约分和分数约分的依据是分数的基本性质；设计问题(2)，进一步回顾分数约分的关键是确定分数中分子、分母的最大公约数；通过尝试填空，与分数类比引入分式的约分.

2. 探索活动

问题一　填空“$\dfrac{x^3y}{6x^2y^2}=\dfrac{(\quad)}{(\quad)}$”，与分数的约分类比，你认为正确的解答应是什么？

问题二　分式 $\dfrac{36ab^2c}{6abc^2}$ 的分子和分母的公因式是什么？

问题三　分式 $\dfrac{(x+y)^2}{(x+y)(x-y)}$ 的分子和分母的公因式是什么？

问题四　你能确定分式 $\dfrac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}$ 的分子和分母的公因式吗？

问题五　你认为如何确定分式的分子和分母的公因式？

4. 思维拓展

可以选择补充以下讨论题：

微信公众号：电子课本大全

交流

试找出分式$\frac{1}{2x^2y}$与$\frac{1}{6xy^2}$的公分母.



如果几个分式的分母都是单项式，那么各分母系数（都是整数）的最小公倍数与所有字母的最高次幂的积叫做这几个分式的**最简公分母**.

通分的关键是确定几个分式的公分母. 分式通分时，通常取最简公分母.

例6 通分：

(1) $\frac{b}{3a}$, $-\frac{ab}{\frac{2}{3}c}$; (2) $\frac{2a}{a-b}$, $\frac{3b}{a+b}$.

解： (1) $-\frac{ab}{\frac{2}{3}c}=-\frac{3ab}{2c}$，分母$3a$、$2c$的最简公分母是$6ac$，

$\frac{b}{3a}=\frac{b\cdot 2c}{3a\cdot 2c}=\frac{2bc}{6ac}$, $-\frac{ab}{\frac{2}{3}c}=-\frac{3ab}{2c}=-\frac{3ab\cdot 3a}{2c\cdot 3a}=-\frac{9a^2b}{6ac}$;

(2) 分母$a-b$、$a+b$的最简公分母是$(a+b)(a-b)$，

$\frac{2a}{a-b}=\frac{2a(a+b)}{(a+b)(a-b)}$, $\frac{3b}{a+b}=\frac{3b(a-b)}{(a+b)(a-b)}$.

例7 通分：

(1) $\frac{1}{m^2-9}$, $\frac{1}{2m+6}$; (2) $\frac{x}{xy-y}$, $\frac{y}{xy+x}$.

分析： 当分式的分母是多项式时，先将它们分解因式，再确定最简公分母.

解： (1) 分母$m^2-9=(m+3)(m-3)$，$2m+6=2(m+3)$，它们的最简公分母是$2(m+3)(m-3)$，

$\frac{1}{m^2-9}=\frac{2}{2(m+3)(m-3)}$, $\frac{1}{2m+6}=\frac{m-3}{2(m+3)(m-3)}$;

(2) 分母$xy-y=y(x-1)$，$xy+x=x(y+1)$，它们的最简公分母是$xy(x-1)(y+1)$，

$\frac{x}{xy-y}=\frac{x^2(y+1)}{xy(x-1)(y+1)}$, $\frac{y}{xy+x}=\frac{y^2(x-1)}{xy(x-1)(y+1)}$.

【内容解读】

关于“最简公分母”，一要强调“公共”，二要强调“最简”.

【内容解读】

通分的难点是确定最简公分母，例题以给出“分析”的方式化解难点. 通过例6、例7的分析、求解，引导学生归纳出求最简公分母的一般步骤：

(1) 取各分母系数的最小公倍数；

(2) 取所有不同底的幂的因式；

(3) 相同底的幂的因式取指数最大的；

(4) 将以上所取的因式相乘.

下列分式中，哪些是相等的？用等号连接它们：

$\frac{2xy}{(x-1)y}$, $\frac{2x}{1-x}$, $\frac{2x}{x-1}$, $\frac{2x^2+2x}{1-x^2}$, $\frac{2x^2+2x}{x^2-1}$.

(答案：$\frac{2xy}{(x-1)y}=\frac{2x}{x-1}=\frac{2x^2+2x}{x^2-1}$, $\frac{2x}{1-x}=\frac{2x^2+2x}{1-x^2}$.)

5. 小结

分式的约分与分数的约分有哪些异同？

【教学过程设计建议(第三课时)】

1. 情境创设

教学中可创设一些问题情境引入分式的“通分”. 例如：

(1) 列举分数的通分，并说明分数通分的依据.

(2) 下列分数的通分正确吗？为什么？

① $\frac{1}{2}+\frac{5}{4}=\frac{4}{8}+\frac{10}{8}$;

② $\frac{1}{2^3\times 3^2}+\frac{1}{2^2\times 3^3}=\frac{2^2\times 3^3}{2^5\times 3^5}+\frac{2^3\times 3^2}{2^5\times 3^5}$.

(3) 填空，并说明填空的依据(即课本第103页“尝试”).

设计问题(1)，引导学生回顾分数的通分和分数通分的依据是分数的基本性质；设计问题(2)，进一步回顾分数通分的关键是确定几个分数的分母的最小公倍数，其中②的讨论为确定几个分式的公分母做铺垫；通过尝试填空，与分数的通分类比引入分式的通分.

2. 探索活动

问题一 找下列各组分式分母的公分母：

① $\frac{1}{xy}$, $\frac{1}{2x}$; ② $\frac{1}{x^2y}$, $\frac{1}{2x^3}$; ③ $\frac{1}{6x^2y^2}$, $\frac{1}{2x^3y}$.

问题二 下列各组分式之间有内在联系吗？有怎样

微信公众号：电子课本大全

练习

1. 通分：

(1) $\frac{2}{ac}$，$\frac{1}{ab}$；　　(2) $\frac{2b}{3a^2}$，$\frac{a}{bc}$.

2. 通分：

(1) $\frac{a}{a-b}$，$\frac{3b}{2a-2b}$；　　(2) $\frac{5}{2(x-1)}$，$\frac{2x}{3(1-x)^2}$；

(3) $\frac{m}{m+n}$，$\frac{1}{m^2n-mn^2}$；　　(4) $\frac{2}{4-9m^2}$，$\frac{3m}{9m^2-12m+4}$.

10.2 习题

1. 填空：

(1) $\frac{ax^2}{ay}=\frac{(\quad)}{y}$；　　(2) $\frac{1}{a+2}=\frac{a}{(\quad)}$；

(3) $\frac{3a}{a+b}=\frac{(\quad)}{4(a+b)}$；　　(4) $\frac{(\quad)}{a-b}=a+b$.

2. 不改变分式的值，使下列分式的分子与分母的最高次项的系数是正整数：

(1) $\frac{1-\frac{1}{2}a}{a+1}$；　　(2) $\frac{a^2-0.2a}{a^2-0.3a^3}$.

3. 约分：

(1) $\frac{6ab^2}{-2b}$；　　(2) $\frac{-4a^2b^2}{-8a^3b}$；

(3) $\frac{a^2+2ab}{a^2b+2ab^2}$；　　(4) $\frac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2}$.

4. 求值：

(1) $\frac{a+3b}{a^2-9b^2}$，其中 $a=\frac{5}{3}$、$b=\frac{2}{9}$；

(2) $\frac{a^3-4ab^2}{a^3-4a^2b+4ab^2}$，其中 $a=-2$、$b=-0.5$.

5. 通分：

(1) $\frac{a}{xy}$，$\frac{b}{yz}$；　　(2) $\frac{1}{2a}$，$\frac{1}{5a^2b}$；

(3) $\frac{c}{a-b}$，$\frac{1}{(b-a)^2}$；　　(4) $\frac{b}{a(b+1)}$，$\frac{a}{b(b+1)}$；

(5) $\frac{2a}{2a+1}$，$\frac{4(2a-1)}{4a^2-4a+1}$；　　(6) $\frac{a-1}{(a+1)^2-4}$，$\frac{1-a}{2-4a+2a^2}$.

【练习解答】

(1) $\frac{2b}{abc}$，$\frac{c}{abc}$；(2) $\frac{2b^2c}{3a^2bc}$，$\frac{3a^3}{3a^2bc}$；

2. (1) $\frac{2a}{2a-2b}$，$\frac{3b}{2a-2b}$；

(2) $\frac{15(x-1)}{6(x-1)^2}$，$\frac{4x}{6(x-1)^2}$；

(3) $\frac{m^2n(m-n)}{mn(m+n)(m-n)}$，$\frac{m+n}{mn(m+n)(m-n)}$；

(4) $\frac{2(2-3m)}{(2+3m)(2-3m)^2}$，$\frac{3m(2+3m)}{(2+3m)(2-3m)^2}$.

【习题解答】

1. (1) x^2；(2) $a(a+2)$；(3) $12a$；(4) a^2-b^2.

2. (1) $-\frac{a-2}{2a+2}$；(2) $-\frac{10a^2-2a}{3a^3-10a^2}$.

3. (1) $-3ab$；(2) $\frac{b}{2a}$；(3) $\frac{1}{b}$；(4) $\frac{a-b}{a+b}$.

4. (1) 1；(2) 3.

5. (1) $\frac{az}{xyz}$，$\frac{bx}{xyz}$；(2) $\frac{5ab}{10a^2b}$，$\frac{2}{10a^2b}$；

(3) $\frac{c(a-b)}{(a-b)^2}$，$\frac{1}{(a-b)^2}$；

(4) $\frac{b^2}{ab(b+1)}$，$\frac{a^2}{ab(b+1)}$；

(5) $\frac{2a(2a-1)}{4a^2-1}$，$\frac{4(2a+1)}{4a^2-1}$；

(6) $\frac{2(1-a)}{2(a+3)(1-a)}$，$\frac{a+3}{2(a+3)(1-a)}$.

的内在联系？

① $\frac{1}{xy}$，$\frac{1}{2x}$；

② $\frac{1}{(a+b)(a-b)}$，$\frac{1}{2(a+b)}$；

③ $\frac{1}{a^2-b^2}$，$\frac{1}{2a+2b}$.

问题三　你认为如何确定几个分式的公分母？

通过问题一讨论，引导学生确定几个分母是单项式的分式的公分母；通过问题二讨论，引导学生从3组分式的内在联系中，主动发现当分式的分母是多项式时，先将它们分解因式，再确定公分母，于是引导学生自行归纳确定几个分式的公分母的方法，并建立最简公分母的概念.

3. 例题教学

实际教学中，可根据教学情况补充一些通分的例题，为分式的加减运算做铺垫. 例如，

通分：(1) $\frac{m}{m-n}$，$\frac{n}{2n-2m}$；

(2) $\frac{x}{(x-y)^2}$，$\frac{y}{(y-x)^3}$；

(3) $\frac{1}{9-a^2}$，$\frac{1}{a+3}$，$\frac{1}{3-a}$.

4. 思维拓展

以下问题可以作为讨论题：

写出三个分式，使它们的最简公分母是 $12x^2yz$.

(答案：答案不唯一，例如 $\frac{1}{4x^2}$，$\frac{1}{3xy}$，$\frac{1}{2xyz}$.)

5. 小结

分数通分与分式通分有什么共同点？它们的依据分别是什么？

微信公众号：电子课本大全

10.3 分式的加减



怎样计算 $\frac{b}{a}+\frac{c}{a}$、$\frac{b}{a}-\frac{c}{a}$？

与同分母分数加减运算的法则类似，同分母分式加减运算的法则是：

同分母的分式相加减，分母不变，把分子相加减．

$$\frac{b}{a}\pm\frac{c}{a}=\frac{b\pm c}{a}.$$

例 1 计算：

(1) $\frac{1}{a}+\frac{3}{a}$；　　(2) $\frac{2a-3}{a+1}-\frac{a-2}{a+1}$.

解： (1) $\frac{1}{a}+\frac{3}{a}$

$=\frac{4}{a}$；

(2) $\frac{2a-3}{a+1}-\frac{a-2}{a+1}$

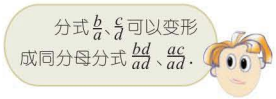
$=\frac{(2a-3)-(a-2)}{a+1}$

$=\frac{2a-3-a+2}{a+1}$

$=\frac{a-1}{a+1}$.



怎样计算 $\frac{b}{a}+\frac{c}{d}$、$\frac{b}{a}-\frac{c}{d}$？



与异分母分数加减运算的法则类似，异分母分式加减运算的法则是：

异分母的分式相加减，先通分，再加减．

$$\frac{b}{a}\pm\frac{c}{d}=\frac{bd\pm ac}{ad}.$$

【内容解读】

分式的加、减运算与分数的加、减运算本质上是相同的．引导学生按同分母与异分母两种情况，用类比的方法，探索分式的加、减运算的法则．

【内容解读】

类比同分母分数的加、减运算，可得 $\frac{b}{a}+\frac{c}{a}=\frac{b+c}{a}$，$\frac{b}{a}-\frac{c}{a}=\frac{b-c}{a}$．

【内容解读】

类比异分母分数的加、减运算，可得 $\frac{b}{a}+\frac{c}{d}=\frac{bd}{ad}+\frac{ac}{ad}=\frac{bd+ac}{ad}$，

$\frac{b}{a}-\frac{c}{d}=\frac{bd}{ad}-\frac{ac}{ad}=\frac{bd-ac}{ad}$．

【教学目标】

1. 知道分式加、减运算的法则，能熟练进行简单的分式加、减运算．

2. 在与分数加、减运算相类比的探索中，增强用类比思想研究问题的意识，提高化归的能力．

【教学过程设计建议】

1. 情境创设

(1) 计算：① $\frac{1}{5}+\frac{3}{5}$；② $\frac{5}{8}-\frac{1}{8}$．

(2) 思考如何计算：① $\frac{b}{a}+\frac{c}{a}$；② $\frac{a^2}{a+b}-\frac{b^2}{a+b}$

创设这个情境，目的是通过类比获得同分母分式加减运算法则．

2. 探索活动

问题一　用同分母分式加减运算法则计算上述思考1(2)，并与上述计算1(1)进行比较，有何异同？

上述计算(1)②的结果应通过约分化为最简分数，类似地，思考(2)②的结果也应通过约分化为最简形式；思考(2)②分子相减得到一个多项式，约分时需要先分解因式．

问题二　如何计算下列分式的加减？

$\frac{x}{x-1}+\frac{x+1}{1-x}$；$\frac{a}{(a-b)^2}-\frac{b}{(b-a)^2}$．

问题三　如何计算下列分式的加减？

$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$；$\frac{m}{m+n}-\frac{n}{m-n}$．

问题四　异分母分式加减时为什么首先进行“通分”？

微信公众号：电子课本大全

例 2 计算：

(1) $\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}$；　　(2) $\frac{a+1}{a-1}-\frac{a-1}{a+1}$.

解： (1) $\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}$

$=\frac{2x}{x^2}-\frac{5}{x^2}$

$=\frac{2x-5}{x^2}$；

(2) $\frac{a+1}{a-1}-\frac{a-1}{a+1}$

$=\frac{(a+1)^2}{(a+1)(a-1)}-\frac{(a-1)^2}{(a+1)(a-1)}$

$=\frac{(a+1)^2-(a-1)^2}{(a+1)(a-1)}$

$=\frac{(a^2+2a+1)-(a^2-2a+1)}{(a+1)(a-1)}$

$=\frac{4a}{(a+1)(a-1)}$.

例 3 计算：$\frac{x}{x^2-4}-\frac{1}{2x-4}$.

解： $\frac{x}{x^2-4}-\frac{1}{2x-4}$

$=\frac{x}{(x+2)(x-2)}-\frac{1}{2(x-2)}$

$=\frac{2x}{2(x+2)(x-2)}-\frac{x+2}{2(x+2)(x-2)}$

$=\frac{2x-(x+2)}{2(x+2)(x-2)}$

$=\frac{x-2}{2(x+2)(x-2)}$

$=\frac{1}{2(x+2)}$.

通常，分式相加减所得的结果应化为最简分式或整式.

107

通过问题四讨论，使学生清楚：异分母分式加减时，“通分”的实质是把异分母分式的加减“转化”为同分母分式的加减，从而把新问题转化为用已有的知识来解决.

3. 例题教学

(1) 例 1 是同分母分式的加减. 教学时，可以采取先由学生独立解答再交流的方式. 通过交流不同的解答，使学生知道：同分母分式的加减与同分母分数的加减，虽然有相同点，但它们也有不同. 例如例 1(2)，同分母分式加减时，分子是多项式，应添上括号.

(2) 例 2、例 3 是异分母分式的加减，虽然学生已有通分的基础，但由于求解过程需要综合许多相关的知识(单项式乘多项式、乘法公式、因式分解、去括号、整式的加减)，所以教学中要注意给有困难的学生适当的帮助.

(3) 建议根据教学的实际情况把习题 10.3 第 1(4) 题“$a-b+\frac{2b^2}{a+b}$”(整式与分式的加减)作为补充例题.

4. 思维拓展

教学中可以选择以下问题作为讨论题：

并联电路的总电阻 R 与两个支路电阻 R_1，R_2 的关系为 $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$，试用含有 R_1、R_2 的式子表示总电阻 R.

(答案：$R=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$.)

5. 小结

举例说明进行分式加减运算时要注意什么？

微信公众号：电子课本大全



1. 计算：

(1) $\frac{c}{ab^2}+\frac{bc}{ab^2}$；　(2) $\frac{3}{a}+\frac{a-15}{5a}$；

(3) $\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$；　(4) $\frac{b}{a+b}+\frac{ab}{b^2-a^2}$.

2. 货车的速度为 a km/h，客车的速度为 b km/h($b>a$)．行驶 300 km 客车比货车少用多少时间？



1. 计算：

(1) $\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a-b}$；　(2) $\frac{a^2}{(a-b)^2}-\frac{b^2}{(b-a)^2}$；

(3) $\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$；　(4) $a-b+\frac{2b^2}{a+b}$.

2. 用漫灌方式给绿地浇水，a 天用水 10 t，改用喷灌方式后，10 t 水可以比原来多用 5 天．喷灌比漫灌平均每天节约用水多少？

3. 甲、乙两港口分别位于长江的上、下游，相距 s km，若一艘游轮在静水中航行的速度为 a km/h，水流速度为 b km/h ($b<a$)，则该游轮往返两港口所需的时间相差多少？

【练习解答】

1. (1) $\frac{c+bc}{ab^2}$；(2) $\frac{1}{5}$；(3) $\frac{R_1+R_2}{R_1R_2}$；(4) $\frac{b^2}{b^2-a^2}$.

2. $\frac{300}{a}-\frac{300}{b}=\frac{300(b-a)}{ab}$.

客车比货车少用 $\frac{300(b-a)}{ab}$ h.

【习题解答】

1. (1) 1；(2) $\frac{a+b}{a-b}$；(3) $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$；(4) $\frac{a^2+b^2}{a+b}$.

2. $\frac{10}{a}-\frac{10}{a+5}=\frac{50}{a^2+5a}$.

喷灌比漫灌平均每天节约用水 $\frac{50}{a^2+5a}$ t.

3. $\frac{s}{a-b}-\frac{s}{a+b}=\frac{2sb}{a^2-b^2}$.

该游轮往返甲、乙两港的时间之差为 $\frac{2sb}{a^2-b^2}$ h.

【课程资源】

沪宁高速公路东起上海，经苏州、无锡、常州、镇江，西至南京，全长274 km，其中上海段26 km，江苏段248 km．1993年动工，1996年9月15日全线筑成．路基宽26 m，双向四车道，中央设3 m宽分隔带，全封闭，设计时速为120 km．

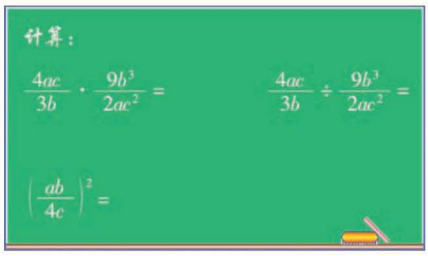
为适应经济发展的需要，沪宁高速公路拓宽改造工程于2003年10月正式启动，2006年1月通车，将双向四车道(路基宽26 m)扩建为双向八车道(路基宽42.5 m)．

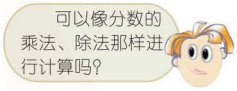
微信公众号：电子课本大全

10.4 分式的乘除



如何进行分式的乘法和除法运算？





与分数乘法和除法的运算法则类似，分式乘法、除法的运算法则是：

分式乘分式，用分子的积做积的分子，分母的积做积的分母；
分式除以分式，把除式的分子、分母颠倒位置后，与被除式相乘．

$$\frac{b}{a}\cdot\frac{d}{c}=\frac{bd}{ac};\quad \frac{b}{a}\div\frac{d}{c}=\frac{b}{a}\times\frac{c}{d}=\frac{bc}{ad}.$$

根据分式乘法和除法的运算法则，

$$\frac{4ac}{3b}\cdot\frac{9b^3}{2ac^2}=\frac{4ac\cdot 9b^3}{3b\cdot 2ac^2}=\frac{36ab^3c}{6abc^2}=\frac{6b^2}{c};$$

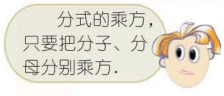
$$\frac{4ac}{3b}\div\frac{9b^3}{2ac^2}=\frac{4ac}{3b}\cdot\frac{2ac^2}{9b^3}=\frac{8a^2c^3}{27b^4}.$$

例 1 计算：

(1) $\frac{ab^2}{6c^2}\cdot\frac{-4c}{3a^2b^2}$；　　(2) $\left(\frac{ab}{4c}\right)^2$.

解： (1) $\frac{ab^2}{6c^2}\cdot\frac{-4c}{3a^2b^2}=-\frac{ab^2\cdot 4c}{6c^2\cdot 3a^2b^2}=-\frac{2}{9ac}$；

(2) $\left(\frac{ab}{4c}\right)^2=\frac{ab}{4c}\cdot\frac{ab}{4c}=\frac{ab\cdot ab}{4c\cdot 4c}=\frac{a^2b^2}{16c^2}$.



【内容解读】

有了学习分式加、减运算的经验，面对情境中所展示的分式乘、除运算，自然会联想分数的乘、除运算．卡通人的想法，就是引导学生用类比的方法探索分式乘法、除法的运算法则．

【内容解读】

进行乘法运算时，先把分子、分母分别相乘，然后再进行约分．

进行除法运算时，先交换除式的分子、分母的位置，将除法运算转化为乘法运算来进行．

【教学目标】

1. 知道分式乘、除运算的法则，能熟练进行简单的分式乘、除运算．

2. 能正确进行分式加、减、乘、除混合运算．

3. 在与分数乘、除运算相类比的探索中，增强用类比思想研究问题的意识，提高化归的能力．

【教学过程设计建议(第一课时)】

1. 情境创设

(1) 计算：① $\frac{4}{5}\times\frac{5}{6}$；② $\frac{5}{8}\div\frac{1}{4}$．

(2) 思考如何计算：① $\frac{b}{a}\cdot\frac{d}{c}$；② $\frac{b}{a}\div\frac{d}{c}$．

创设这个情境，目的是通过类比获得同分母分式乘法、除法运算法则；理解分式除以分式，把分式的分子、分母颠倒位置后与被除式相乘的实质是把分式的除法运算“转化”为乘法运算．

2. 例题教学

(1) 由于学生已有约分的基础，教学时可根据实际情况采用由学生独立解答再交流的方式进行例题教学．组织学生交流，既要引导学生关注分式的乘除与分数的乘除的相同点，还要更多地引导学生重视分式的乘除与分数的乘除的不同．例如，例 1(1)中分子、分母的乘积约分时，需要同时关注数字因数、字母因式的公因式；例 2(2)中分子、分母都是多项式，需要先把分子、分母分别分解因式变为积的形式后再约分．

(2)《标准》要求“能进行简单的分数加、减、乘、除运算”．按照《标准》的要求，课本在例 1(2)中，以分式乘法

微信公众号：电子课本大全

例 2 计算：

(1) $\frac{y^2}{6x} \div \frac{1}{3x^2}$；　　(2) $\frac{a^2-6a+9}{1+4a+4a^2} \div \frac{12-4a}{2a+1}$.

解： (1) $\frac{y^2}{6x} \div \frac{1}{3x^2} = \frac{y^2}{6x} \cdot \frac{3x^2}{1} = \frac{xy^2}{2}$；

(2) $\frac{a^2-6a+9}{1+4a+4a^2} \div \frac{12-4a}{2a+1} = \frac{(a-3)^2}{(2a+1)^2} \cdot \frac{2a+1}{-4(a-3)}$

$= -\frac{a-3}{4(2a+1)}$.



1. 计算：

(1) $4ab^3 \cdot \frac{-3a}{2b^3}$；　　(2) $\frac{8}{x^3} \div \frac{36}{x^2}$；

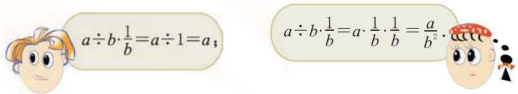
(3) $\frac{a^2-4b^2}{4ab^2} \cdot \frac{ab}{a+2b}$；　　(4) $\frac{a^2-b^2}{2ab} \div (a+b)$.

2. 计算：

(1) $(a-4) \cdot \frac{16-a^2}{a^2-8a+16}$；　　(2) $\frac{a^2-a+\frac{1}{4}}{a-3} \div \frac{2a-1}{a^2-3a}$.



怎样计算 $a \div b \cdot \frac{1}{b}$？



谁的算法正确？请说明理由.

分式的乘、除混合运算，要按从左到右的顺序进行.

例 3 求值：$\frac{a^2+ab-ac}{a^2-ab} \cdot \frac{a-b-c}{2ab+a^2+b^2} \div \frac{a+b-c}{a^2-b^2}$，其中 $a=10$、$b=5$、$c=-4$.

解： $\frac{a^2+ab-ac}{a^2-ab} \cdot \frac{a-b-c}{2ab+a^2+b^2} \div \frac{a+b-c}{a^2-b^2}$

$= \frac{a^2+ab-ac}{a^2-ab} \cdot \frac{a-b-c}{2ab+a^2+b^2} \cdot \frac{a^2-b^2}{a+b-c}$

【内容解读】

根据乘法法则，应先把分子、分母分别相乘，化成一个分式后再进行约分．实际计算时，也可以先约分，再相乘，以简化计算过程．如，例1(1)中先约去因式 ab^2 和 $2c$，例2(1)中先约去因式 $3x$，例2(2)中先约去因式 $(3-a)$ 和 $(2a+1)$，然后再进行乘法运算．

【练习解答】

1. (1) $-6a^2$；(2) $\frac{2}{9x}$；(3) $\frac{a-2b}{4b}$；(4) $\frac{a-b}{2ab}$.

2. (1) $-4-a$；(2) $\frac{a(2a-1)}{4}$.

【内容解读】

可以用给字母赋值的方法，判断小丽的做法正确．也可以借鉴有理数乘除混合运算的顺序，判断小丽的做法正确．

【内容解读】

求分式的值，若分式的分子、分母是多项式时，应先将它们分解因式，然后将除法运算统一为乘法运算，约分后再代入数值计算．

的特例形式，进行分式的乘方运算，并用卡通语的方式给出分式乘方运算法则．教学时注意不要再把分式的乘方运算引申和拓展．

(3) 建议根据教学的实际情况，补充例题：

计算：$\frac{2x-6}{4x+8} \div (3-x)$；$\frac{2x-6}{4x+8} + (3-x)$.

3. 思维拓展

下列计算正确吗？

(1) $\frac{1}{a} \cdot (a+b) = \frac{1}{a} \cdot a + \frac{1}{a} \cdot b = 1 + \frac{1}{a}$；

(2) $\frac{1}{a} \div (a+b) = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} + \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{ab}$.

4. 小结

分式的乘除运算与分式的加减运算有哪些不同？

微信公众号：电子课本大全

$$=\frac{a(a+b-c)}{a(a-b)}\cdot\frac{a-b-c}{(a+b)^2}\cdot\frac{(a+b)(a-b)}{a+b-c}$$

$$=\frac{a-b-c}{a+b}.$$

当 $a=10$、$b=5$、$c=-4$ 时，原式 $=\frac{10-5-(-4)}{10+5}=\frac{3}{5}$.

与分数混合运算类似，分式的加、减、乘、除混合运算的顺序是：先乘除，后加减，如果有括号，先进行括号内的运算．

例 4 计算：$1-\frac{a-2}{a}\div\frac{a^2-4}{a^2+a}$.

解： $1-\frac{a-2}{a}\div\frac{a^2-4}{a^2+a}$

$$=1-\frac{a-2}{a}\cdot\frac{a^2+a}{a^2-4}$$

$$=1-\frac{a-2}{a}\cdot\frac{a(a+1)}{(a+2)(a-2)}$$

$$=1-\frac{a+1}{a+2}$$

$$=\frac{(a+2)-(a+1)}{a+2}$$

$$=\frac{1}{a+2}.$$



计算：

(1) $\left(1+\frac{1}{a-1}\right)\left(\frac{1}{a^2}-1\right)$；

(2) $\frac{x-2}{x^2}\div\left(1-\frac{2}{x}\right)$；

(3) $\left(\frac{x+2}{x^2-2x}-\frac{x-1}{x^2-4x+4}\right)\div\frac{x-4}{x}$；

(4) $\frac{1}{x-1}-\frac{x-3}{x^2-1}\cdot\frac{x^2+2x+1}{x^2-6x+9}$.

【内容解读】

分式混合运算的顺序与分数混合运算顺序类似，在教学这部分内容初期，要强调先不要过多地跳步，以免出错，同时也易于检查．

【练习解答】

(1) $-\frac{a+1}{a}$；(2) $\frac{1}{x}$；(3) $\frac{1}{(x-2)^2}$；

(4) $-\frac{4}{(x-1)(x-3)}$.

【教学过程设计建议（第二课时）】

1. 情境创设

以小明和小丽讨论 $a\div b\cdot\frac{1}{b}$ 的运算顺序为情境，引入分式的混合运算——从乘、除混合运算到加、减、乘、除混合运算．

2. 探索活动

(1) 你怎样判断是小明的做法对，还是小丽的做法正确？

(2) 你会计算 $\frac{n}{m}\div\frac{p}{q}\cdot\frac{q}{p}$ 吗？

(3) 怎样进行分式的乘、除混合运算？分式的加、减、乘、除混合运算呢？

3 例题教学

例 3 的设计意图为运用探索所得的结论，将乘、除混合运算统一为乘法进行运算，并化简算式．

例 4 是分式四则运算的例题，要注意运算顺序和书写格式．

可以根据学生的实际情况，适当补充例题、习题，帮助学生掌握分式运算的基本技能．

4. 思维拓展

例 4 后可以选用以下问题：

计算：(1) $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}$；

(2) $\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

（答案：(1) $\frac{n-1}{n}$；(2) $\frac{n}{2n+1}$.）

5. 小结

举例说明分式混合运算的注意点．

微信公众号：电子课本大全

10.4 习题

1. 计算：

(1) $\frac{a^2}{b^2c}\cdot\left(-\frac{bc^2}{2a}\right)$；

(2) $\frac{a-b}{a+b}\div(b-a)$；

(3) $\frac{5x+2}{25-10x+x^2}\cdot\frac{x^2-25}{25x^2-4}$；

(4) $\frac{2x-6}{4-4x+x^2}\div\frac{3-x}{(x-2)(x+3)}$.

2. 计算：

(1) $\frac{-3a}{b}\cdot\frac{ab^2}{-a^3b^2}\div\left(-\frac{6b}{a^2}\right)$；

(2) $-\frac{a^2-25}{a^2+10a+25}\div\frac{a^2-1}{a+5}\cdot\frac{a^2+2a+1}{a-5}$.

3. 计算：

(1) $\frac{x-3}{x-2}\div\left(x+2-\frac{5}{x-2}\right)$；

(2) $1-\frac{a-b}{a-2b}\div\frac{a^2-b^2}{a^2-4ab+4b^2}$.

4. 求值：

(1) $\frac{1}{x-1}+\frac{x^2-3x}{x^2-1}$，其中 $x=\frac{1}{2}$；

(2) $1-\frac{(x^2-x+1)^2}{(x-1)^2}\div\frac{x^2-x+1}{x^2-2x+1}$，其中 $x=-\frac{1}{3}$；

(3) $\frac{2-x}{x^2+x}\div\frac{x^2-3x}{x^2+2x+1}\cdot\frac{9-x^2}{4-2x}$，其中 $x=-2$.

【习题解答】

1. (1) $-\frac{ac}{2b}$；(2) $-\frac{1}{a+b}$；(3) $\frac{x+5}{(x-5)(5x-2)}$；(4) $\frac{2(x+3)}{2-x}$.

2. (1) $-\frac{a}{2b^2}$；(2) $-\frac{a+1}{a-1}$.

3. (1) $\frac{1}{x+3}$；(3) $\frac{3b}{a+b}$.

4. (1) $-\frac{1}{3}$；(2) $-\frac{4}{9}$；(3) $\frac{1}{8}$.

【教学茶座】

●在分式恒等变形中，常会出现符号变更错误，为什么课本要淡化符号法则？

▲分式恒等变形时，符号是个不可忽视的问题，其重要性并不亚于有理数运算中的符号．但它与本章的通分、约分和分式运算等主体内容相比，毕竟处于次要位置．实际上，它只不过是分式基本性质的一个简单应用，即分子、分母同乘(除以)“-1”，再根据有理数乘法法则进行运算，因此也可以说它是约分的一种简单情况．为突出分式基本性质及其重要应用——约分与通分，课本淡化了法则，但并不是说明它不重要．事实上，通过学生练习、研究、归纳，并自主得出符号变化规律的结论，有助于学生对符号变化的理解与认识．

微信公众号：电子课本大全

10.5 分式方程



问题 1 甲、乙两人加工同一种服装，乙每天比甲多加工 1 件，乙加工服装 24 件所用时间与甲加工服装 20 件所用时间相同．怎样用方程来描述其中数量之间的相等关系？



设甲每天加工服装 x 件，可得方程

$$\frac{20}{x}=\frac{24}{x+1}.$$

问题 2 一个两位数的个位数字是 4，如果把个位数字与十位数字互换，那么所得的两位数与原两位数的比值是 $\frac{7}{4}$．怎样用方程来描述其中数量之间的相等关系？



设这个两位数的十位数字是 x，可得方程

$$\frac{4\times10+x}{10x+4}=\frac{7}{4}.$$

问题 3 某校学生到离学校 15 km 处植树，部分学生骑自行车出发40 min后，其余学生乘汽车出发，汽车速度是自行车速度的 3 倍，全体学生同时到达．怎样用方程来描述其中数量之间的相等关系？



【内容解读】

本节起始部分三个实例都贴近学生生活，通常学生能运用以往数学活动中获得的经验，分析各个具体问题中的相等关系，建立一类未知数出现在分母中的新方程——分式方程．其中卡通人的对话都展示了问题的分析过程．

【教学目标】

1. 知道分式方程的意义，会解可化为一元一次方程的分式方程．

2. 了解分式方程产生增根的原因，会判断所求得的根是否是分式方程的增根．

3. 会列出可化为一元一次方程的分式方程解决实际问题，并能根据具体问题的实际意义检验方程的解是否合理．

此外，通过经历“实际问题—建立数学模型（方程）—解释、应用与拓展”的过程，体验解决问题的基本策略，发展应用意识和解决问题的技能．

【教学过程设计建议（第一课时）】

1. 情境创设

问题是数学的心脏，遵循《标准》关于“方程是刻画现实世界的一种有效的数学模型”的理念，同以往一样，我们仍然从问题开始，让学生从实际问题数量关系的探索中，发现一类未知数出现在分母中的新方程——分式方程．

除课本提供的 3 个实例外，教师可以根据学生的实际情况，补充一些与学生生活相关的实际问题，激发学生学习分式方程的兴趣．

2. 探索活动

探索活动一：可以采用不同的方式，探寻各个实际问题中的相等关系．例如：

微信公众号：电子课本大全

设自行车的速度为 x km/h，可得方程

$$\frac{15}{x}=\frac{15}{3x}+\frac{40}{60}.$$



上面所得方程与一元一次方程有什么区别？

方程 $\frac{20}{x}=\frac{24}{x+1}$、$\frac{40+x}{10x+4}=\frac{7}{4}$、$\frac{15}{x}=\frac{15}{3x}+\frac{40}{60}$，分母中都含有未知数，像这样的方程叫做**分式方程**(fractional equation).



如何解分式方程 $\frac{20}{x}=\frac{24}{x+1}$？



这个分式方程的两边同乘各分式的最简公分母 $x(x+1)$，可以得到一元一次方程

$$20(x+1)=24x.$$

解这个一元一次方程，得

$$x=5.$$

为了判断 $x=5$ 是不是原分式方程的解，我们把 $x=5$ 代入原方程：左边$=\frac{20}{5}=4$，右边$=\frac{24}{5+1}=4$，左边＝右边.

$x=5$ 是原方程的解.

解分式方程时，在方程的两边同乘各分式的最简公分母，有时可以转化为解一元一次方程.

例 1 解方程：$\frac{3}{x}-\frac{2}{x-2}=0$.

解： 方程两边同乘 $x(x-2)$，得

$$3(x-2)-2x=0.$$

【内容解读】

这里是探索解分式方程的基本思路，而不是给出解分式方程的规范书面表达形式，所以课本以陈述的方式，呈现探索过程.

要告诉学生，由于通过较多的变形和运算才得到了方程的解，所以检验时如果发现方程两边的值不等，那么首先要仔细检查运算是否出错，在运算正确无误的前提下再做其他判断.

对于问题1，可以用表格揭示服装加工中的工作总量与工作时间、个人工作效率之间的数量关系：

	工作效率(件/天)	工作总量/件	工作时间/天
甲	x	20	$\frac{20}{x}$
乙	$x+1$	24	$\frac{24}{x+1}$

根据问题中的相等关系，得 $\frac{24}{x+1}=\frac{20}{x}$.

对于问题2，可以用数位填空的方式表示两位数的构成：

原两位数

x	4

$10x+4$

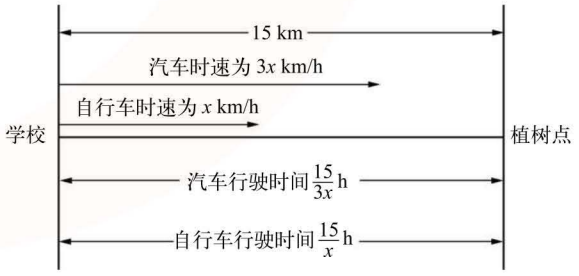
改变后的两位数

4	x

$4\times10+x$

于是，可得方程 $\frac{4\times10+x}{10x+4}=\frac{7}{4}$.

对于问题3，可以用线段示意图表示行程问题：



由于自行车早出发40 min，但与汽车同时到达，多行驶了40 min，所以可得方程 $\frac{15}{x}-\frac{15}{3x}=\frac{40}{60}$.

微信公众号：电子课本大全

解这个一元一次方程，得

$$x=6.$$

把 $x=6$ 代入原方程：左边 $=\frac{3}{6}-\frac{2}{6-2}=0$，右边 $=0$，左边=右边．

$x=6$ 是原方程的解．

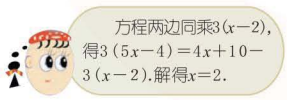


解下列方程：

(1) $\frac{40+x}{10x+4}=\frac{7}{4}$；　(2) $\frac{9}{x}=\frac{8}{x-1}$；

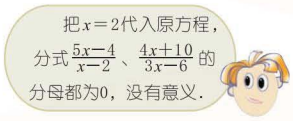
(3) $\frac{15}{x}-\frac{15}{3x}=\frac{2}{3}$；　(4) $\frac{x}{2x-5}+\frac{5}{5-2x}=1$.

解分式方程 $\frac{5x-4}{x-2}=\frac{4x+10}{3x-6}-1$.





$x=2$ 是不是这个分式方程的解？



在分式方程 $\frac{5x-4}{x-2}=\frac{4x+10}{3x-6}-1$ 的两边同乘 $3(x-2)$ 后，解得的 $x=2$ 使所乘整式 $3(x-2)$ 的值为 0，$x=2$ 不是原分式方程的根[注]，原方程无解．像这样的根叫做原分式方程的增根．

由于解分式方程可能产生增根，因此解分式方程必须对解得的根进行检验．

[注] 只含有一个未知数的方程的解也称为方程的根．

【练习解答】

1. (1) $x=2$；(2) $x=9$；(3) $x=15$；(4) $x=0$．

【内容解读】

给出分式方程无解的例子，诱发学生好奇，激发学生探索原委．

原分式方程无解的原因是：由变形后的方程求得的解，恰使原分式方程中的分母的值为0，从而使原分式方程失去意义．

【内容解读】

产生增根的原因是：方程两边同乘值为0的代数式．

探索活动二：探索分式方程的解法．

仍以问题为先导，发动学生研究如何解分式方程 $\frac{24}{x+1}=\frac{20}{x}$．

学生可能会出现多种思路，例如：

其一，解分式方程先去分母，把不熟悉的方程转化为熟悉的方程来解决．

其二，移项进行减法运算，化简，得 $\frac{4x-20}{x(x+1)}=0$，由分式的值为0的概念，得 $4x-20=0$，从而得解 $x=5$．

其三，利用分式的基本性质，使方程两边的分式的分子为它们的最小公倍数，如 $\frac{120}{5x+5}=\frac{120}{6x}$，由分式相等的概念，得 $5x+5=6x$，从而得 $x=5$．

应注意的是，如果学生提出后两种解决问题的思路，那么教师要在给予充分肯定后，引导学生继续探讨，得出解分式方程的一般方法．

3. 例题教学

例1给出了解分式方程的一般过程及完整的书写格式，若有必要，教师可增补例题，让学生学会求解并规范表述．

4. 思维拓展

探索活动二中的后两种解法就是思维拓展材料．

5. 小结

分式方程的特征是什么？如何解分式方程？

微信公众号：电子课本大全

例 2　解下列方程：

(1) $\frac{30}{x}=\frac{20}{x+1}$；　　(2) $\frac{x-2}{x+2}-\frac{x+2}{x-2}=\frac{16}{x^2-4}$.

解：(1) 方程两边同乘 $x(x+1)$，得

$$30(x+1)=20x.$$

解这个一元一次方程，得

$$x=-3.$$

检验：当 $x=-3$ 时，$x(x+1)=6\neq 0$，$x=-3$ 是原方程的解．

(2) 方程两边同乘 $(x+2)(x-2)$，得

$$(x-2)^2-(x+2)^2=16.$$

解这个一元一次方程，得

$$x=-2.$$

检验：当 $x=-2$ 时，$(x+2)(x-2)=0$，$x=-2$ 是增根，原方程无解．



解下列方程：

(1) $\frac{4+x}{x-1}-5=\frac{2x}{x-1}$；　　(2) $\frac{1}{x-2}=\frac{1-x}{2-x}-3$；

(3) $\frac{3}{x+1}=\frac{6}{x^2-1}$.

例 3　某校为迎接市中学生田径运动会，计划由八年级(1)班的 3 个小组制作 240 面彩旗，后因 1 个小组另有任务，其余 2 个小组的每名学生要比原计划多做 4 面彩旗才能完成任务．如果这 3 个小组的人数相等，那么每个小组有学生多少名？

解：设每个小组有学生 x 名．

根据题意，得

$$\frac{240}{2x}-\frac{240}{3x}=4.$$

【练习解答】

1. (1) $x=\frac{3}{2}$；

(2) $x=2$(增根)，原方程无解；

(3) $x=3$．

【教学过程设计建议(第二课时)】

1. 情境创设

创设问题情境：给出分式方程无解的例题，让学生感受，即使遵循解分式方程的规范操作过程，也可能出现所求得的解并不适合原分式方程的现象，激发学生探索的欲望．

2. 探索活动

以课本上的问题“为什么所求得的根不适合原分式方程?”，引导学生探索解分式方程产生增根的现象，并讨论出现增根的原因及检验方法．例如可按以下问题串展开探索活动：

(1) 你能说出为什么用同样的方法求解，例 1 有解，而例 2 却无解吗?

(2) 你认为在解分式方程的过程中，哪一步变形可能引起增根?

(3) 你用什么方法检验解分式方程产生的增根?

为使学生领悟“方程两边同乘值为 0 的代数式，便会产生增根”的道理，教师可以用例子说明．例如，在方程 $x-6=0$ 的两边同乘 x，则得 $x(x-6)=0$．若 $x\neq 0$，则方程的解仍然是 $x=6$；若 $x=0$，则方程 $x(x-6)=0$ 的解增加为两个：$x=6$ 和 $x=0$，扩大了方程的解的范围，产生了增根．

3. 例题教学

通过以上探索活动，学生对解分式方程的步骤和规范表述应该有进一步的认识．例 2 给出了分式方程有解与无解的两种常见情况及简洁而规范的书写格式，要求学生通过练习与作业认真落实．

微信公众号：电子课本大全

解这个方程，得

$$x = 10.$$

经检验，$x = 10$ 是所列方程的解．

答： 每个小组有学生 10 名．

例 4 甲、乙两公司为“见义勇为基金会”各捐款 30 000 元．已知甲公司的人数比乙公司的人数多 20%，乙公司比甲公司人均多捐 20 元．甲、乙两公司各有多少人？

解： 设乙公司有 x 人，则甲公司有$(1+20\%)x$ 人．

根据题意，得

$$\frac{30\,000}{x} - \frac{30\,000}{(1+20\%)x} = 20.$$

解这个方程，得

$$x = 250.$$

经检验，$x = 250$ 是所列方程的解．

$$(1+20\%)x = 300.$$

答： 甲公司有 300 人，乙公司有 250 人．

例 5 小明用 12 元买软面笔记本，小丽用 21 元买硬面笔记本．已知每本硬面笔记本比软面笔记本贵 1.2 元，小明和小丽能买到相同数量的笔记本吗？

解： 设软面笔记本每本 x 元，则硬面笔记本每本$(x+1.2)$元．

若小明和小丽能买到相同数量的笔记本，则

$$\frac{12}{x} = \frac{21}{x+1.2}.$$

解这个方程，得

$$x = 1.6.$$

经检验，$x = 1.6$ 是所列方程的解．

但按此价格，他们都买了 7.5 本笔记本，不符合实际意义．

答： 小明和小丽不能买到相同数量的笔记本．

4. 思维拓展

教学中可以选用以下问题：

写出一个可化为一元一次方程的分式方程，使它有一个根为 1．

（答案不唯一，例如：$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$．）

5. 小结

举例说明解分式方程的步骤及根的情况．

【教学过程设计建议（第三课时）】

1. 情境创设

课本以 3 个实际问题，引导学生学习用分式方程解决实际问题的基本方法，进一步感受“实际问题—建立方程—求解并解释”的过程．

2. 探索活动

采用“个人思考—小组交流—汇报方案”的方式，尝试从不同角度寻求解决问题的方法，并能用文字、图表等手段清楚地表达解决问题的过程，并会解释结果的合理性．例如：

对于例 3，有以下两种解决方案可供选择：

假设每小组有 x 名学生，可得分式方程：$\frac{240}{2x} - \frac{240}{3x} = 4$，解得 $x = 10$，即每小组有 10 名学生；

假设原来每人平均做 x 面彩旗，可得分式方程：$\frac{240}{2(x+4)} = \frac{240}{3x}$，解得 $x = 8$，从而确定每个小组有 10 名学生．

例 4 可以用表格进行分析，找出数量之间的相等关系，从而得到方程．如：

微信公众号：电子课本大全

有时，根据实际问题列出的分式方程虽然有解，但方程的解不符合实际意义，这个实际问题仍无解．



1. 一个分数的分母比它的分子大5，如果将这个分数的分子加上14，分母减去1，那么所得分数是原分数的倒数．求原分数．
2. 甲、乙两个机器人检测零件，甲比乙每小时多检测10个，甲检测300个与乙检测200个所用的时间相等．甲、乙两个机器人每小时各检测零件多少个？



1. 解下列方程：

(1) $\frac{3-x}{4+x}=\frac{1}{2}$；　(2) $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}=0$；

(3) $\frac{2x-3}{x-1}=\frac{4x-1}{2x+3}$；　(4) $\frac{x}{2x-1}=2-\frac{3}{1-2x}$.

2. 解下列方程：

(1) $\frac{3x+2}{x-1}=\frac{5}{x-1}$；　(2) $\frac{x-8}{x-7}-\frac{1}{7-x}=8$；

(3) $\frac{2x-5}{x-2}=\frac{3x-3}{x-2}-3$；　(4) $\frac{x+1}{x-1}-\frac{4}{x^2-1}=1$.

3. 小丽与小明为艺术节做小红花，小明比小丽每小时多做2朵．已知小明做100朵与小丽做90朵所用时间相等，小明、小丽每小时各做小红花多少朵？
4. 为了改善生态环境，防止水土流失，某村计划在荒坡上种树960棵．由于青年志愿者支援，实际每天种树的棵数是原计划的$\frac{4}{3}$倍，结果提前4天完成任务．原计划每天种树多少棵？
5. 某市为了构建城市立体道路网络，决定修建一条轻轨铁路，为使工程提前半年完成，需将工作效率提高25%．原计划完成这项工程需要多少个月？

【练习解答】

1. 设分子为x，则分母为$x+5$．根据题意，得$\frac{x+14}{(x+5)-1}=\frac{x+5}{x}$．解得$x=4$．原分数为$\frac{4}{9}$．

2. 设甲机器人每小时检测零件x个，则$\frac{300}{x}=\frac{200}{x-10}$．解得$x=30$．甲、乙机器人每小时检测零件分别为30个、20个．

【习题解答】

1. (1) $x=\frac{2}{3}$；(2) $x=0$；(3) $x=2$；(4) $x=-\frac{1}{3}$．

2. (1) $x=1$(增根)，原方程无解；(2) $x=7$(增根)，原方程无解；(3) $x=4$；(4) $x=1$(增根)，原方程无解．

3. 设小丽每小时做x朵，则$\frac{100}{x+2}=\frac{90}{x}$．解得$x=18$．小明每小时做20朵，小丽每小时做18朵．

4. 设原计划每天种树x棵，则$\frac{960}{x}-\frac{960}{\frac{4}{3}x}=4$．解得$x=60$．原计划每天种树60棵．

5. 设计划完成这项任务需要x个月，则$\frac{1}{x-6}=\frac{1}{x}\times(1+25\%)$．解得$x=30$．原计划30个月完成这项工程．

	捐款额/元	员工人数/名	人均捐款/元
甲公司	30 000	x	$\frac{30\,000}{x}$
乙公司	30 000	$(1+20\%)x$	$\frac{30\,000}{(1+20\%)x}$

根据“乙公司比甲公司人均多捐20元”，得方程$\frac{30\,000}{x}-\frac{30\,000}{(1+20\%)x}=20$．

通过例5的探索和求解，让学生感受在解决实际问题时，存在这样的现象：所列方程以及求得的根虽然正确，但不符合问题的实际意义，所以原实际问题仍然无解．检验是解分式方程不可缺少的步骤．通过检验可以知道解得的解是否为原方程的增根．用分式方程解决实际问题时，还要检查所得的解是否符合实际意义．

4. 思维拓展

教学中可以选用以下问题：

一辆汽车从甲地开往相距90 km的乙地，出发后第一个小时按原计划的速度匀速行驶，一小时后以原来速度的1.5倍匀速行驶，并比原计划提前20分钟到达乙地．求前一个小时的行驶速度．(答案：45 km/h.)

5. 小结

列分式方程解决实际问题要注意什么？

微信公众号：电子课本大全

阅读

类 比

光和声，这两类现象具有许多相同的性质，如它们都是直线传播、都有折射与反射现象等．荷兰物理学家、数学家、天文学家惠更斯(Christiaan Huygens 1629～1695 年)，在当时已经知道“声具有波动性质”的基础上，通过光与声的类比提出“光可能有波动性质”的猜想．后来，光的波动性质通过实验得到了证实．像这样，由两个对象具有某些相同的性质，推出它们的其他性质也可能相同的思想方法，称为类比．

在数学中，我们也经常采用类比的思想方法研究问题，探索未知．例如，把分式与分数进行类比，我们得到了分式的基本性质，分式的通分、约分以及分式的加、减、乘、除运算法则．

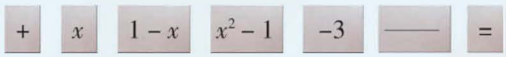
运用类比的思想方法研究问题时，不仅要关注两类事物的相同点，而且要关注它们的不同点．例如，将一元一次不等式的解法与一元一次方程的解法类比时，应当注意它们的不同点：方程两边同乘(除以)一个不为 0 的数时，不必考虑这个数是正数，还是负数；但不等式的两边同乘(除以)一个不为 0 的数时，必须注意这个数是正数，还是负数，当这个数是负数时，所得不等式的不等号的方向要改变．

在我们的生活、学习和科学研究等方面，类比常常发挥独特的作用．

数学活动

分 式 游 戏

每人制作几张卡片，在卡片上写一个简单的整式或运算符号，如



游戏一　将其中两张卡片分别放在分子、分母上，它们组成的式子是分式吗？如果是分式，它什么时候有意义？它的值能为 0 吗？

游戏二　用卡片组成一个分式方程，并求出它的解．

设计游戏规则，与同学一起做这个分式游戏．

【教学目标】

1. 引导学生通过数学活动，加深对分式有关概念的理解，熟练分式的简单运算，提高解分式方程的能力．

2. 通过游戏，体现“寓教于乐”，激发兴趣．

【活动指导】

1. 要求每位学生，在本活动课前按课本要求制作若干卡片，每张卡片上的内容自定，但大小形状可统一要求，例如，长 6cm，宽 3cm 的矩形．

2. 为营造游戏气氛，便于合作交流，可按 4 人一组、分甲乙两方、每方两人进行．

3. 为激发学生的兴趣，可让各小组根据活动要求自行设计游戏规则，然后进行游戏．例如：

游戏 1：

① 甲、乙两方轮流拿出己方手中的两张卡片，让对方组成分式，并按要求回答问题，每答对一问记 1 分，每答错一问扣 1 分，并要把错误情况记录在《数学活动记录表》上；

② 对方出示卡片后，每轮回答的时间不得超过 1 min，否则不得分；

③ 10 轮结束，并把积分带入游戏 2．

游戏 2：

① 甲、乙两方轮流拿出己方手中的、可组成一个分式方程的卡片若干张，让对方组成分式方程，并要求解答．方程正确(经出卡方确认)记 3 分，答案正确(经出卡方确认)再记 3 分，并要求把正确的方程和解答过程记录在《数学活动记录表》上；若出示的卡片，经双方公认无

微信公众号：电子课本大全

【复习题解答】

（复习巩固）

1.（1）$x\neq -\frac{1}{2}$；（2）x 可取一切实数．

2.（1）$\frac{1+a}{1-a}$；（2）$\frac{2a+b}{2b-4a}$．

3.（1）1；（2）$\frac{m^2}{4-m^2}$；（3）$2(a-2)$；（4）$\frac{a(a-3)}{6}$；（5）$\frac{2(a+b)}{a}$；（6）$\frac{a^2-b^2}{b}$．

4.（1）$x+1$；（2）$\frac{1}{a+1}$．

5. 推迟 $\frac{ac}{b(b-c)}$ 天．

6.（1）$x=-10$；（2）$x=-1$；

（3）$x=4$（增根），原方程无解；

（4）$x=3$（增根），原方程无解．

7. 设甲每小时做 x 个，则 $\frac{160}{x}=\frac{120}{35-x}$．解得 $x=20$．答：甲每小时做20个，乙每小时做15个．

8. 设大队的速度为 x km/h，则 $\frac{15}{x}-\frac{15}{1.2x}=0.5$．解得 $x=5$．答：大队的速度为5 km/h，先遣队的速度为6 km/h．

小结与思考

1. 如果 A、B 表示两个整式，并且 B 中含有字母，那么代数式 $\frac{A}{B}$ 叫做分式．

整式和分式统称为有理式，即有理式 $\begin{cases}\text{整式}\begin{cases}\text{单项式}\\\text{多项式}\end{cases}\\\text{分式}\end{cases}$

2. 分式的基本性质是通分、约分和分式运算的依据．

3. 本章中的分式方程都是可化为一元一次方程的分式方程，解这类方程的一般步骤是：

可化为一元一次方程的分式方程 →（去分母）一元一次方程 → 解一元一次方程 → 检验

4. 解分式方程时，为什么必须检验？如何检验？

5. 你能举出本章中通过类比探索新知识的例子吗？

复习巩固

1. x 取什么值时，下列分式有意义？

（1）$\frac{x+2}{2x+1}$；（2）$\frac{2x-2}{4x^2+3}$．

2. 化简：（1）$\frac{1-a^2}{a^2-2a+1}$；（2）$\frac{4a^2b+4ab^2+b^3}{2b^3-8a^2b}$．

3. 计算：

（1）$\frac{a-c}{a-b}-\frac{c-b}{b-a}$；（2）$\frac{2m}{m^2-4}-\frac{m}{m-2}$；

（3）$\frac{a^2-4}{2ab}\cdot\frac{4a^2b+8ab}{a^2+4a+4}$；（4）$\frac{a^2}{a+3}\div\frac{6a}{a^2-9}$；

（5）$\frac{a^2-b^2}{a+b}\div\frac{a^2-ab}{2a+2b}$；（6）$(a^2-2ab+b^2)\div\frac{ab-b^2}{a+b}$．

4. 计算：

（1）$\left(1+\frac{1}{x-1}\right)\cdot\frac{x^2-1}{x}$；（2）$\frac{a-1}{a}\div\left(a-\frac{1}{a}\right)$．

5. 某工程队要修路 a m，原计划平均每天修 b m．因天气原因，平均每天少修 c m（$c<b$）．因此，实际完成工程的时间比原计划推迟多少天？

6. 解下列方程：

（1）$\frac{2}{x+2}=\frac{3}{x-2}$；（2）$\frac{x}{2x-1}=1-\frac{2}{1-2x}$；

法组成分式方程，则应扣除出卡方2分；

② 对方出示卡片后，每轮回答的时间不得超过2 min，否则不得分；回答这方的判断时间不得超过1 min，否则扣3分；

③ 5轮结束，计算总分，总分高者为胜．

5. 完成《数学活动评价表》上的所有项目．

【教学目标】

1. 能把本章基础知识条理化、系统化，熟练掌握本章有关运算技能．

2. 归纳小结用分式方程解决实际问题的基本方法和经验，发展分析问题和解决问题能力．

3. 认识“类比”和“转化”这两种数学思想的作用和价值．

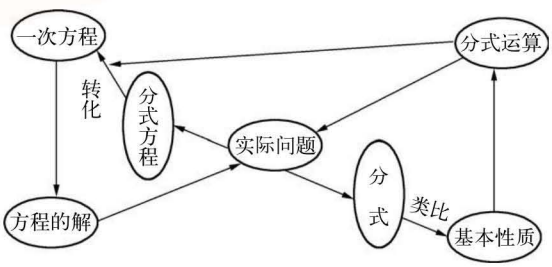
【教学过程设计建议】

1. 情境创设

可将学生在数学活动中出现的错误作为问题情境，展开复习小结．也可以围绕“小结与思考”设计问题串，让学生举例，展开复习．

2. 探索活动

由问题引导学生构建本章知识网络．例如：



微信公众号：电子课本大全

(3) $\frac{3}{4-x}+2=\frac{1-x}{x-4}$；　　(4) $\frac{2x+9}{3x-9}=\frac{4x-7}{x-3}+2$.

7. 甲、乙两人每小时共做 35 个零件，甲做 160 个零件所用的时间与乙做 120 个零件所用的时间相等．甲、乙两人每小时各做多少个零件？

8. 某中学组织学生去离学校 15 km 的东山农场，先遣队与大队同时出发，先遣队的速度是大队的速度的 1.2 倍，结果先遣队比大队早到 0.5 h. 先遣队和大队的速度各是多少？

灵活运用

9. 当 m 取哪些整数时，分式 $\frac{4}{m-1}$ 的值是整数？

10. 求 $\frac{3-a}{2a-4}\div\left(a+2-\frac{5}{a-2}\right)$ 的值，其中 $a=-\frac{1}{2}$.

11. 已知 $\frac{a}{b}=\frac{3}{2}$，求 $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}-\frac{b^2}{a^2-b^2}$ 的值．

12. 当 x、y 满足什么条件时，分式 $\frac{x-y}{1+x}$ 的值为 0？

探索研究

13. (1) 已知 $\frac{3x-2}{x+1}=3+\frac{m}{x+1}$，求 m；

(2) 已知 $\frac{ax+b}{x+c}=a+\frac{m}{x+c}$（其中 a、b、c 为常数），求 m.

14. 观察下列式子，并探索它们的规律：

$\frac{1}{1\times2}=1-\frac{1}{2}$,

$\frac{1}{2\times3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$,

$\frac{1}{3\times4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$,

……

试用正整数 n 表示这个规律，并加以证明．

15. (1) 分式方程 $\frac{1-x}{x-2}+2=\frac{1}{2-x}$ 有解吗？为什么？

(2) 化简分式 $\frac{1-x}{x-2}+2-\frac{1}{2-x}$，结果可能为 0 吗？

(3) 问题(1)与(2)有什么联系？谈谈你的想法．

(灵活运用)

9. 若 $\frac{4}{m-1}$ 的值是整数，则 $m-1=\pm1$，±2，±4，即 $m=-3$，-1，0，2，3，5.

10. $-\frac{1}{5}$.

11. $\frac{9}{5}$.

12. $x=y$，且 $x\neq-1$.

(探索研究)

13. (1) $m=-5$；(2) $m=b-ac$.

14. $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$（$n$ 为正整数）.

$$右边=\frac{n+1}{n(n+1)}-\frac{n}{n(n+1)}$$
$$=\frac{n+1-n}{n(n+1)}=\frac{1}{n(n+1)},$$

∵左边＝右边，

∴等式成立.

15. (1) $x=2$(增根)，原方程无解.

(2) $\frac{1-x}{x-2}+2-\frac{1}{2-x}=\frac{2-x}{2-x}$. 当 $x\neq2$ 时，$\frac{2-x}{2-x}=1$；当 $x=2$ 时，$\frac{2-x}{2-x}$ 无意义．所以原式不可能为 0.

(3) 将(1)中方程的右边移到左边，即成为(2)中的等式．而由(2)知，当 $x=2$ 时，虽有分子为 0，但分母也为 0，分式失去了意义．所以 $x=2$ 不是原方程的根，而是增根.

3. 例题教学

以下问题可供选取：

(1)化简 $\left(a^2+3a\right)\div\frac{a^2-9}{a-3}$；

(2)先化简，再求值：$\left(\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right)\cdot\left(x^2-1\right)$，其中 $x=-\frac{1}{3}$；

(3)解下列方程：①$\frac{5}{x+2}=\frac{3}{x}$，②$\frac{2}{x-1}-1=\frac{3-x}{1-x}$；

(4)某漆器厂接到制作480件漆器的订单，为了尽快完成任务，该厂实际每天制作的件数比原来每天多50%，结果提前10天完成任务，原来每天制作多少件？

(答案：(1) a；(2) 0；(3) ①$x=3$；②$x=3$；(4)16件.)

4. 思维拓展

已知：$ab\neq0$，$a^2+3ab+b^2=0$，求代数式 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$ 的值．(答案：-3.)

5. 小结

举例说明“类比”与“转化”的数学思想方法的应用.

微信公众号：电子课本大全

第11章　反比例函数

【课标要求】

1. 结合具体情境体会反比例函数的意义，能根据已知条件确定反比例函数表达式．

2. 能画出反比例函数的图像，根据图像和函数表达式 $y=\frac{k}{x}(k\neq 0)$ 探索并理解 $k>0$ 和 $k<0$ 时图像的变化情况．

3. 能用反比例函数解决简单实际问题．

此外，通过用反比例函数表述数量关系感受数学模型思想，建立符号意识．初步学会从具体问题情境中发现和提出问题，在分析问题和解决问题的过程中感受数形结合的思想和方法，增强应用意识，体会数学的价值．

【设计思路】

反比例函数是最基本的函数之一，也是学生后续学习的重要基础．本章安排在八下，一是考虑到教材在八上安排了“平面直角坐标系”和“一次函数”，本章内容可以比较自然地衔接“一次函数”中的“正比例函数”，引导学生进一步理解函数的内涵和感受数学模型思想．二是考虑不同内容之间的编排联系，“反比例函数”与“分式”内容有着密切的联系，因此将“反比例函数”安排在八下“分式”内容之后．

本章内容的设计与编排，关注引导学生经历知识的形成与应用的过程，同时力求体现本套教材在“函数”、“方程”、“不等式”等内容设计的“由外而内—内部研究—由内而外”的编写特色．本章内容设计为以下三节：

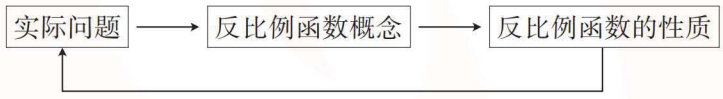
第1节，反比例函数．通过生活实例，让学生感受反比例函数是刻画实际问题中数量关系的一种数学模型．

第2节，反比例函数的图像与性质．通过填表、描点、连线等操作，让学生从局部到整体感知反比例函数的图像，并在这个过程中了解和掌握反比例函数图像的有关性质．

第3节，用反比例函数解决问题．利用反比例函数模型分析解决一些简单的实际问题．

课本在具体内容呈现上试图体现以下几个特点：

1. 体现数学与现实世界的联系．反比例函数是一种反映现实世界特定数量关系的数学模型，为了突出反比例函数与现实世界的密切联系，课本对本章内容的安排采取了如下的步骤：



本章的“阅读”等栏目提供了学生身边的反比例函数的生活实例，让学生进一步体验函数模型的重要性，提高发现和提出问题、分析和解决问题的能力．

2. 结合相关内容渗透数学思想．结合一次函数，在反比例函数概念的形成过程中，进一步突出变化与对应的数学思想．其内涵主要有两个：首先，两个变量互相联系，一个变量变化时另一个变量也发生变化；其次，函数与自变量之间是单值对应关系，自变量的值确定后，函数的值是唯一确定的．在展开具体内容的过程中，结合具体问题的分析及求解过程，渗透数学思想．如结合反比例函数性质的研究及应用过程，渗透数形结合的思想，在本章的全过程渗透数学模型思想等．

3. 恰当使用技术体现教材弹性．课本设计了“数学实验室”——用计算机探索反比例函数图像随着常数 k 的变化而变化的情况．一方面，这是对反比例函数图像与性质的认识的一次深化，从中感受常数 k 对函数图像的影响，为将来的函数学习提供一次直观的感受，获得相关的经验；另一方面，也是为有条件的学校以及有这方面特长和需求的学生的个性化的学习提供机会．

4. 充分展现数学的探究过程．本章第2节“反比例函数的图像与性质”中，课本共安排3个课时来展开探究过程，这是因为学生虽然有了“一次函数的图像与性质”的学习基础，但是面对第一次出现的“分支曲线”，学生在认识上还是存在比较大的困难．同时，通过本节课的学习，也有助于学生全面了解一般函数的图像与性质的研究方法，为今后学习其他函数做好铺垫．

微信公众号：电子课本大全

【教学建议】

1. 关注与学生已有知识的衔接．课本在“一次函数”已经给出了函数的一般概念以及自变量、函数值等概念，学生对函数已经形成了初步的认识．反比例函数的教学，一方面要以前面所学的函数概念及相关知识为基础，另一方面可以反过来进一步深化对函数内涵的理解和掌握．因此在引进反比例函数概念时，要适当复习反比例、函数、自变量、函数值、正比例函数、一次函数等定义或概念，为反比例函数的学习做好铺垫．

2. 加强反比例函数概念的教学．要关注概念的实际背景与形成过程，帮助学生改变机械记忆概念的学习方式．应选取具体实例，使学生体会反比例函数能够反映实际事物的变化规律．要加强反比例函数与正比例函数的对比，加强对反比例函数的概念、图像与性质的认识与掌握．可以从如下几方面进行：

函数的表达式有何相同与不同？函数的图像的特征有何区别？

在常数相同的情况下，当自变量变化时函数的函数值的变化趋势有什么区别？

函数中变量的取值范围有何不同？常数 k 的符号改变对两种函数图像所处象限的影响如何？

鼓励学生自主探索与合作交流．在教学过程中应该让学生充分地经历探索事物的数量关系、变化规律的过程．

3. 充分运用现代信息技术展示学生的成果（如函数模型、自主研究的反比例函数图像等），利用计算机展示反比例函数图像及其变化过程并研究其性质等．

【评价建议】

1. 恰当评价学生的知识和技能．应关注学生能否用反比例函数模型表示生活实例中的数量关系，能否充分利用数形结合的思想方法理解、掌握和灵活运用反比例函数的图像及其性质．

2. 鼓励与提倡解决问题策略的多样化，尊重学生在解决问题过程中所表现出的不同水平．问题情境的设计、教学过程的展开、练习的安排等要尽可能地让所有学生都能主动参与，提出各自解决问题的策略，并引导学生在与他人的交流中选择合适的策略，丰富数学活动的经验，提高思维水平．

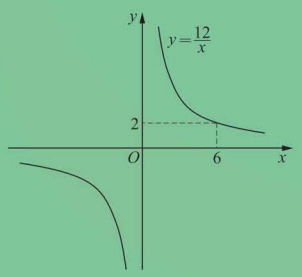
【课时安排】

本章教学大约需要 8 课时，分配如下：

第 1 节	反比例函数	1 课时
第 2 节	反比例函数的图像与性质	3 课时
第 3 节	用反比例函数解决问题	2 课时
	数学活动	1 课时
	小结与思考	1 课时

微信公众号：电子课本大全

第11章　反比例函数



从成反比例的量到反比例函数，
反比例函数揭示成反比例的两个量变化的关系．



【内容解读】

主图以上海浦东新城以及高速运行的列车，让学生直观感受现实世界所发生的日新月异的变化，借助图形直观，感受列车在两个城市之间运行的过程中速度与时间的反比例关系，让学生回忆起小学已学过的反比例的相关知识，结合章头语，自然引入本章的内容．

辅图是成反比例关系的两个量 x 和 y 的图像，让学生初步感受本章学习的内容．

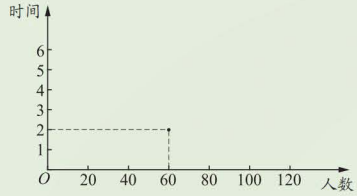
微信公众号：电子课本大全



校绿色行动小组组织 60 人参加植树活动，计划植树 480 棵，2 h 可以完成任务．
如果植树人数增加到 80 人、100 人、120 人，那么各需多少时间才能完成任务？
如果植树人数减少到 40 人、20 人呢？
填表：

人数	…	20	40	60	80	100	120	…
完成时间/h	…			2				

为了能在 1.5 h 内完成任务，至少需要多少人？
根据表中数据，在平面直角坐标系中描出相应的点．



完成任务的时间 t 与人数 n 是什么关系？t 是 n 的函数吗？

本章将学习反比例函数的概念、图像、性质和应用．

【情境说明】

章头活动是学生熟悉的植树活动．学生通过具体的计算，感受在工作量一定的情形下，参与人数与完成工作的时间成反比例关系，并通过描点画图，让学生直观感受其变化关系．

微信公众号：电子课本大全

11.1　反比例函数

在小学里，我们已经知道，如果两个量的乘积一定，那么这两个量成反比例．

成反比例的两个量之间的关系，怎样用函数表达式来描述呢？



南京与上海相距约 300 km．一辆汽车从南京出发，以速度 v(km/h) 开往上海，全程所用时间为 t(h)．写出 t、v 的函数表达式，并填写下表：

v	60	70	80	90	100
t					

随着速度的变化，全程所用的时间发生怎样的变化？时间 t 是速度 v 的函数吗？



用函数表达式表示下列问题中两个变量之间的关系：

(1) 计划修建一条长为 500 km 的高速公路，完成该项目的天数 y(天)随日完成量 x(km)的变化而变化；

(2) 一家银行为某社会福利厂提供了 20 万元的无息贷款，该厂的平均年还款额 y(万元)随还款年限 x(年)的变化而变化；

(3) 游泳池的容积为 5 000 m^3，向池内注水，注满水池所需时间 t(h) 随注水速度 v(m^3/h)的变化而变化；

(4) 实数 m 与 n 的积为 -200，m 随 n 的变化而变化．



函数表达式 $y=\frac{500}{x}$、$y=\frac{20}{x}$、$t=\frac{5\,000}{v}$、$m=-\frac{200}{n}$ 具有什么共同特征？你还能举出类似的实例吗？

一般地，形如 $y=\frac{k}{x}$(k 为常数，$k\neq 0$) 的函数叫做**反比例函数** (inverse proportional function)，其中 x 是自变量，y 是 x 的函数．

124

【情境说明】

反比例函数所揭示的是两个变量之间的反比例关系，所以课本从学生已有的小学反比例知识出发引入本章内容．

【情境说明】

反比例函数是继正比例函数和一次函数后学生学习的一种新的函数，设置本情境是让学生回顾函数的有关知识，为引入反比例函数的概念做好准备．

【内容解读】

通过对“思考”所提供的 4 个实际问题的求解过程，让学生了解到生活中存在着丰富的具有反比例关系的函数关系的事例．

【内容解读】

通过引导学生在正比例函数和一次函数的比较中，理解反比例函数的意义．

【内容解读】

反比例函数也可以表示为 $y=kx^{-1}$（k 为常数，$k\neq 0$）的形式．

【教学目标】

1. 理解反比例函数的概念．
2. 能根据实际问题中的条件确定反比例函数的表达式．
3. 能判断一个给定函数是否为反比例函数．
4. 通过探索现实生活中数量间的反比例关系，体会和认识反比例函数是刻画现实世界中特定数量关系的一种数学模型；进一步理解常量与变量的辨证关系和反映在函数概念中的运动变化观点．

【教学过程设计建议】

1. 情境创设

从学生的已有生活经验和学习基础出发创设问题情境：

(1)回顾反比例关系、函数的相关概念；

(2)给出一组问题情境，写出函数表达式(各例情境应该简单些，出现的函数表达式包括一次函数、正比例函数、反比例函数，甚至可以出现少量的二次函数)．

2. 探索活动

在反比例函数概念形成的过程中，要让学生通过观察、比较、归纳等活动，形成结论．可以提出以下问题：

问题一　写出的函数表达式中，哪些是我们已经熟悉的函数？这些函数表达式有什么特征？

问题二　其他函数的表达式有什么特征？

问题三　给出反比例函数的定义．

微信公众号：电子课本大全

反比例函数的自变量 x 的取值范围是不等于 0 的一切实数.

例 写出下列问题中两个变量之间关系的函数表达式，并判断它们是否为反比例函数.

(1) 面积是 50 cm^2 的矩形，一边长 y(cm)随另一边长 x(cm)的变化而变化；

(2) 体积是 100 cm^3 的圆锥，高 h(cm)随底面面积 S(cm^2)的变化而变化.

解：(1) 根据题意，得 $xy=50$，即

$$y=\frac{50}{x},$$

y 是 x 的反比例函数；

(2) 根据题意，得 $\frac{1}{3}Sh=100$，即

$$h=\frac{300}{S},$$

h 是 S 的反比例函数.



1. 用函数表达式表示下列问题中两个变量之间的关系，并判断所列函数表达式是否为反比例函数：

(1) 一边长 5 cm 的三角形，面积 y(cm^2)随这边上的高 x(cm)的变化而变化；

(2) 某村有耕地 200 公顷，人均占有耕地面积 y(公顷)随人口数量 x(人)的变化而变化；

(3) 一个物体重 120 N[注]，该物体对地面的压强 p(N/m^2)随它与地面的接触面积 S(m^2)的变化而变化.

[注] 在国际单位制中，压力的单位为牛(N)，压强为单位面积上所受到的压力，单位为帕斯卡(Pascal)，简称帕 (Pa)，1 Pa=1 N/m^2.

【内容解读】

本例题是让学生学会用反比例函数的定义(即一般形式)判断一个函数是否为反比例函数的一般方法，并明确确定常数 k 的方法．可以利用其中的(2)进一步理解反比例的含义．

【练习解答】

1. (1) $y=\frac{5}{2}x$，不是反比例函数；

(2) $y=\frac{200}{x}$，是反比例函数，$k=200$；

(3) $p=\frac{120}{S}$，是反比例函数，$k=120$.

3. 例题教学

本节课安排了1个例题，主要是为了加强学生对反比例函数概念及表达式的认识．在教学时可作如下引导：

(1)由于在引入反比例函数概念时，所给出的现实问题都有一定的局限性，如自变量的取值范围的限制、常数 k 的符号等；

(2)了解函数表达式的变形，会确认反比例函数的常数 k 的值；

(3)与一次函数的表达式进行比较．

4. 小结

问题一　怎样判断函数是否为反比例函数?

问题二　反比例关系与反比例函数有怎样的区别和联系?

问题三　比较反比例函数与一次函数的联系与区别．

微信公众号：电子课本大全

2. 下列函数表达式中的 y 是 x 的反比例函数吗？如果是，把它写成 $y=\frac{k}{x}$ 的形式，并指出 k 的值．

(1) $y=\frac{2}{3}x$；　　(2) $xy+2=0$.



1. 用函数表达式表示下列问题中两个变量之间的关系，并指出其中哪些是反比例函数．

(1) 一个长方体的体积为 10 m^3，这个长方体的高 h(m)随底面积 $S(m^2)$的变化而变化；

(2) 汽车行驶了 1 000 m，车轮旋转的周数 n 随车轮直径 D(m)的变化而变化；

(3) 甲、乙两地相距 300 km，从甲地到乙地所需时间 t(h)随速度 v(km/h)的变化而变化．

2. 下列函数表达式中的 y 是 x 的反比例函数吗？如果是，把它写成 $y=\frac{k}{x}$ 的形式，并指出 k 的值．

(1) $xy=4$；　　(2) $x=-\frac{5}{y}$.

126

2. (1) 不是；(2) 是，$y=-\frac{2}{x}$，$k=-2$．

【习题解答】

1. (1) $h=\frac{10}{S}$，是反比例函数；

(2) $n=\frac{1\,000}{\pi D}$，是反比例函数；$y=\frac{500}{x}$，$k=500$；

(3) $t=\frac{300}{v}$，是反比例函数．

2. (1) $y=\frac{4}{x}$，是反比例函数，$k=4$；

(2) $y=-\frac{5}{x}$，是反比例函数，$k=-5$．

微信公众号：电子课本大全

11.2 反比例函数的图像与性质

我们已经知道，一次函数 $y=kx+b$(k、b 为常数，$k\neq 0$) 的图像是一条直线．反比例函数 $y=\frac{k}{x}$(k 为常数，$k\neq 0$) 的图像是怎样的图形呢？



根据反比例函数表达式 $y=\frac{6}{x}$，可以描述这个函数的图像具有的一些特征．试回答下列问题：

(1) x、y 的值可以为 0 吗？

这个函数的图像与 x 轴、y 轴有交点吗？

(2) x、y 所取值的符号有什么关系？

这个函数的图像会在哪几个象限？

(3) 当 $x>0$ 时，随着 x 的增大（减小），y 怎样变化？当 $x<0$ 时，随着 x 的增大（减小），y 怎样变化？

这个函数的图像与 x 轴、y 轴的位置关系有什么特征？



画反比例函数 $y=\frac{6}{x}$ 的图像．

列表：恰当地选取自变量 x 的几个值，计算函数 y 对应的值．

x	…	−6	−4	−3	−2	−1	1	2	3	4	6	…
$y=\frac{6}{x}$	…											…

描点：以表中各对 x、y 的值为点的坐标，在平面直角坐标系中描出相应的点．

连线：用平滑的曲线顺次连接第一象限内的各点，得到图像的一支；顺次连接第三象限内的各点，得到图像的另一支．两支合在一起就是反比例函数 $y=\frac{6}{x}$ 的图像（如图 11－1）．

【内容解读】

本问题的目的是引导学生从已有的经验出发探究未知问题，为学生提供探究的思路．一次函数 $y=kx+b$（k、b 为常数，$k\neq 0$）的图像是过点（0，b）和点（$-\frac{b}{k}$，0）的直线．

【内容解读】

由于反比例函数 $y=\frac{6}{x}$ 的图像是曲线型的，又分成两支，学生第一次接触有一定的难度．因此课本设置了“由数想形”的思考活动：根据函数表达式中 x、y 的取值范围及相互关系，初步估计图形的基本概貌——例如：位置（象限、与坐标轴的交点等）、趋势（上升、下降等）及对称性等．

可以引导学生将来在自主探究未知函数的性质与图像时采用类似的方法．

【操作指导】

画函数图像的一般步骤是：(1)列表；(2)描点；(3)连线．

列表时，自变量 x 的取值要注意：(1)在取值范围内取值（x 不等于 0）；(2)一定要有代表性（兼顾正、负数）；(3)大小要适度（描点时好操作）；(4)要尽量多取一些数值．

连线时要按照从左到右的顺序连接各点并延伸，连线必须是光滑的．注意曲线的两支是分开的，延伸部分有逐渐靠近坐标轴的趋势，但不会与坐标轴相交．

【教学目标】

1. 能描点画出反比例函数的图像．

2. 会用待定系数法求反比例函数的表达式．

3. 进一步理解函数的 3 种表示方法（即列表法、解析式法和图像法）及其各自的特点．

4. 掌握反比例函数的性质，能借助图像分析解决一些反比例函数的问题，进一步感受数形结合的思想方法．

【教学过程设计建议（第一课时）】

1. 情境创设

可以从复习一次函数的图像开始：你还记得一次函数的图像吗？在回忆与交流中，进一步认识函数的图像的直观有助于理解函数的性质．

转而导入关注新的函数——反比例函数的图像研究：反比例函数的图像又会是什么样子呢？

2. 探索活动

探索活动一　从特殊情形开始，先研究反比例函数 $y=\frac{6}{x}$ 的图像与性质．

由于反比例函数 $y=\frac{6}{x}$ 的图像是曲线型的，又分成两支．对此，学生第一次接触有一定的难度，因此需要分多个层次来探究：

(1)由数想形——先根据表达式中 x、y 的数量关系，感受变量之间的变化关系，初步估计图形的基本概貌．例如：位置（象限、与坐标轴的交点等）、趋势（上升、下降等）．

(2)描点画图——根据已有的函数画图的经验，利用

微信公众号：电子课本大全

【内容解读】

反比例函数 $y=\frac{6}{x}$ 的图像是曲线，且由位于第一、三象限的两支曲线构成．

引导学生关注 $y=\frac{6}{x}$ 的几何直观特征，如：曲线、分为两支、分布区域、趋势、与坐标轴交点等，为后续的“尝试”和“思考”做好铺垫．

【内容解读】

可以利用反比例函数 $y=-\frac{6}{x}$ 与 $y=\frac{6}{x}$ 的图像之间对称关系进行猜想、分析．也可以从函数变量之间的对应关系以及平面直角坐标系中的点的位置进行分析：当 x 为正时，y 的值为负；x 为负时，y 的值为正．因此其图像位于第二、四象限．

对照 $y=\frac{6}{x}$ 的图像的画法进行；也可以根据 $y=-\frac{6}{x}$ 与 $y=\frac{6}{x}$ 的对称性画图．

【练习解答】

略．

【内容解读】

主要引导学生从图像所在的区域以及升降的趋势等不同特征进行讨论．

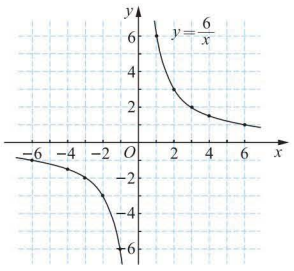


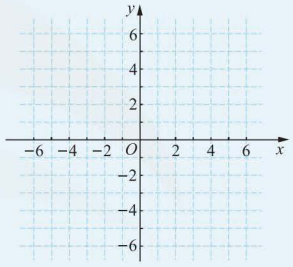
图 11－1



根据反比例函数表达式 $y=-\frac{6}{x}$，说出它的图像具有的特征，并在图 11－1 中画出它的图像．

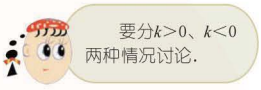


画出反比例函数 $y=\frac{4}{x}$、$y=-\frac{4}{x}$ 的图像：





反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（k 为常数，$k\neq0$）的图像有什么特征？



描点画图．在画图的过程中需要关注几点：

列表：取自变量 x 的哪些值？

描点：依据什么（数据、方法）找点？

连线：怎样连线？

（3）计算机辅助——由于课本所给出的“描点”的点数较少，学生可能从这些点还不能够感受“曲线”的形状，为此可以再多描一些点，利用计算机展示“点”的“加密”的过程，从而让学生对反比例函数的图像的认识逐渐清晰．

探索活动二　根据探索活动一的经验和结果，尝试对反比例函数 $y=-\frac{6}{x}$ 的图像的研究．

可以引导学生采用多种方式进行自主探索活动：仿照画反比例函数 $y=\frac{6}{x}$ 的图像的方式与步骤进行；也可以通过探索函数 $y=-\frac{6}{x}$ 与 $y=\frac{6}{x}$ 之间的关系，画出 $y=-\frac{6}{x}$ 图像．

【教学过程设计建议（第二课时）】

1. 情境创设

结合第一课时中的 $y=\frac{6}{x}$、$y=-\frac{6}{x}$ 以及学生作业中的反比例函数 $y=\frac{4}{x}$、$y=-\frac{4}{x}$ 的图像，引导学生进行分类并说明分类的依据．

2. 探索活动

（1）先探索图像的特征；

（2）再用函数的观点分析反比例函数的特征．

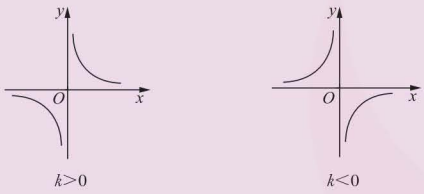
（3）引导学生从对一次函数的图像的对比中感受反比例函数图像“曲线”及“两支”的特征．

微信公众号：电子课本大全

反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（k 为常数，$k\neq 0$）的图像是双曲线．

当 $k>0$ 时，双曲线的两支分别在第一、三象限，在每一个象限内，y 随 x 的增大而减小；

当 $k<0$ 时，双曲线的两支分别在第二、四象限，在每一个象限内，y 随 x 的增大而增大．



例 1 已知反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图像经过点 $A(2,-4)$．

(1) 求 k 的值；

(2) 函数的图像在哪几个象限？y 随 x 的增大怎样变化？

(3) 画出函数的图像；

(4) 点 $B\left(\frac{1}{2},-16\right)$、$C(-3,5)$ 在这个函数的图像上吗？

解： (1) 因为函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图像经过点 $A(2,-4)$，把 $x=2$、$y=-4$ 代入 $y=\frac{k}{x}$，得 $-4=\frac{k}{2}$，解得 $k=-8$；

(2) 因为 $k=-8<0$，由反比例函数的性质可知，函数 $y=-\frac{8}{x}$ 的图像在第二、四象限，在每一个象限内，y 随 x 的增大而增大；

(3) 函数 $y=-\frac{8}{x}$ 的图像如图 11-2；

【内容解读】

学习反比例函数图像的性质与学习其他函数一样．要善于数形结合，由表达式联想到图像的位置及其性质，由图像和性质联想到常数 k 的符号．

性质中“在每一个象限内”容易被忽略，而它不可缺少，否则将出现错误．例如，反比例函数 $y=\frac{6}{x}$，当 $x=-1$ 时，$y=-6$；当 $x=1$ 时，$y=6$．y 的值随 x 的增大而增大，这与性质不符，原因就是 $(-1,-6)$和$(1,6)$不在同一象限内．

【内容解读】

例 1 是引导学生掌握利用待定系数法求反比例函数表达式的方法，引导学生根据常数 k 的符号判断反比例函数图像的位置以及相关性质，引导学生掌握依据函数的有关性质描点画图的方法，进一步感受数形结合的思想方法．

3. 例题教学

例 1 是为了引导学生认识到：由于在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 中，只要常数 k 确定，反比例函数就确定了．因此要确定一个反比例函数，只需要一对对应值或图像上一个点的坐标即可．

课本将例题进行了拓展，通过探索活动，让学生感受反比例函数的图像关于原点对称的几何特征．

微信公众号：电子课本大全

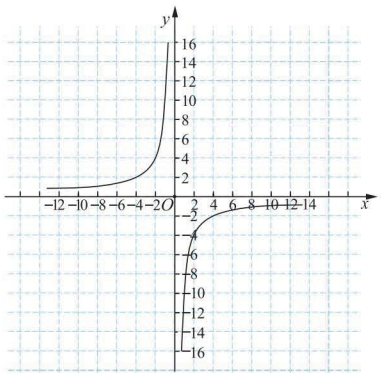


图 11－2

(4) 把 $x=\frac{1}{2}$ 代入 $y=-\frac{8}{x}$，得 $y=-16$，点 $B\left(\frac{1}{2},-16\right)$ 在函数 $y=-\frac{8}{x}$ 的图像上；把 $x=-3$ 代入 $y=-\frac{8}{x}$，得 $y=\frac{8}{3}$，点 $C(-3,5)$ 不在函数 $y=-\frac{8}{x}$ 的图像上．



在图 11－2 中，画点 $A(4,-2)$，点 A 在函数 $y=-\frac{8}{x}$ 的图像上吗？写出点 A 关于原点 O 对称的点 A' 的坐标，点 A' 在函数 $y=-\frac{8}{x}$ 的图像上吗？在函数 $y=-\frac{8}{x}$ 的图像上任取一点 B，点 B 关于原点 O 的对称点 B' 在这个图像上吗？

反比例函数的两支图像关于原点对称．



1. 反比例函数① $y=\frac{2}{x}$、② $y=\frac{1}{3x}$、③ $7y=-\frac{10}{x}$、④ $y=\frac{3}{100x}$ 的图像中：

(1) 在第一、三象限的是_____，在第二、四象限的是_____；

(2) 在其所在各个象限内，y 随 x 的增大而增大的是_____．

【内容解读】

先利用特殊的反比例函数 $y=-\frac{8}{x}$ 图像上特殊的点的对称关系了解反比例函数图像的对称性，然后再通过第二个问题知道反比例函数 $y=-\frac{8}{x}$ 图像上任意一点关于原点的对称点都在这个函数的图像上，从而得到反比例函数的图像关于原点对称的结论．

【练习解答】

1. (1)①、②、④，③；(2)③．

微信公众号：电子课本大全

2. 已知反比例函数的图像经过点 $A(-6, -3)$.

(1) 确定这个反比例函数的表达式；

(2) 函数的图像在哪几个象限？y 随 x 的增大怎样变化？

(3) 点 $B\left(4, \frac{9}{2}\right)$、$C(2, -5)$ 在这个函数的图像上吗？

例 2 设菱形的面积是 5 cm^2，两条对角线的长分别是 x cm、y cm.

(1) 确定 y 与 x 的函数表达式；

(2) 画出这个函数的图像.

解：(1) 由“菱形的面积等于它的两条对角线长的乘积的一半”，得

$$\frac{1}{2}xy=5.$$

y 与 x 的函数表达式为 $y=\frac{10}{x}$，y 是 x 的反比例函数.

(2) 根据题意，可知 $x>0$.

反比例函数 $y=\frac{10}{x}$ $(x>0)$ 的图像如图 11-3.

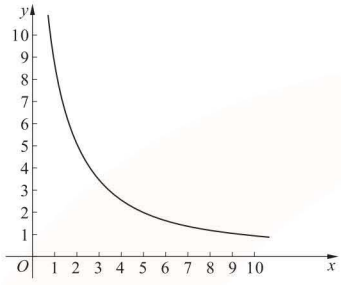


图 11-3

例 3 已知反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图像与一次函数 $y=x+1$ 的图像的一个交点的横坐标是 -3.

(1) 求 k 的值，并画出这个反比例函数的图像；

(2) 根据反比例函数的图像，指出当 $x<-1$ 时，y 的取值范围.

2. (1) $y=\frac{18}{x}$；(2) 第一、三象限，在每一个象限内，y 值随 x 的值增大而减小；(3) 点 B 在这个函数的图像上，点 C 不在这个函数的图像上.

【内容解读】

例 2 主要是引导学生用反比例函数及其图像描述实际问题中的数量关系. 这里特别要注意实际问题中变量的取值范围.

【内容解读】

例 3 主要是引导学生根据反比例函数的图像的某种特征，分析反比例函数的类型，进而根据具体条件确定函数表达式，画出其图像. 结合图像，利用数形结合的方法求解.

【教学过程设计建议(第三课时)】

例 2 主要是引导学生如何用反比例函数及其图像描述实际问题中的数量关系.

例 3 主要是引导学生根据反比例函数的图像的某种特征，分析反比例函数的图像和性质. 教学时可以引导学生从以下两个方面进行探索：

(1) 引导学生根据条件确定函数的类型，明确函数图像所在象限及有关性质；

(2) 引导学生根据已知 3 点的横坐标，确定 3 点所在的象限，从而在它们各自所在的象限内比较大小.

微信公众号：电子课本大全

解：(1) 把 $x=-3$ 代入 $y=x+1$，得 $y=-2$.

根据题意，可得反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图像与一次函数 $y=x+1$ 的图像的一个交点的坐标是$(-3,-2)$.

把 $x=-3$、$y=-2$ 代入 $y=\frac{k}{x}$，得 $-2=\frac{k}{-3}$，即 $k=6$.

函数 $y=\frac{6}{x}$ 的图像如图 11－4.

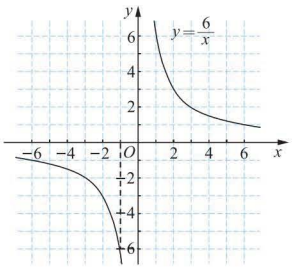


图 11－4

(2) 由函数图像知，当 $x<-1$ 时，$-6<y<0$.

练习

1. 已知反比例函数 $y=\frac{n+3}{x}$ 的图像在同一象限内，y 随 x 的增大而增大，求 n 的取值范围.
2. 已知点 $A(2,y_1)$、$B(1,y_2)$都在反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k<0)$ 的图像上，比较 y_1、y_2 的大小.

数学实验室

用计算机探索函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图像随 k 值的变化情况[注]

1. 在“绘图”菜单中利用“定义坐标系”命令建立平面直角坐标系(如图 1).



图 1

[注] 文中使用的软件是几何画板 5.06 版(中文版).

【练习解答】

1. $n<-3$.
2. $y_1>y_2$.

【内容解读】

数学实验室是供有兴趣的、学有余力的学生选用的.

本实验也可在几何画板以外的其他软件平台上进行.

微信公众号：电子课本大全

2. 在“数据”菜单中点击“新建参数”对话框(如图 2)，在弹出的对话框中的“名称”栏中键入“k”，点击“确定”按钮(如图 3)．



图 2



图 3

此时，屏幕上出现一个变量 k(如图 4)．

3. 在横轴上任取一点 A，在“度量”菜单中点击“横坐标”命令得到点 A 的横坐标(如图 5)．



图 4

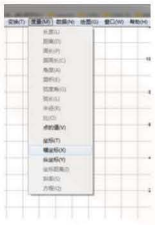


图 5

4. 在“数据”菜单中点击“计算”命令，在对话框中输入式子 $\frac{k}{x_A}$，再点击“确定”按钮，即算得 $y=\frac{k}{x_A}$．

5. 按顺序选中点 A 的横坐标和计算得到的 y 值，在“绘图”菜单中点击“绘制点(x, y)(P)”按钮，在平面直角坐标系中绘制一个点 B．

6. 选中点 A 和点 B(与顺序无关)，在“构造”菜单中点击“轨迹”按钮，作出点 B 的轨迹，这个轨迹就是所求作的反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图像——双曲线(如图 6)．

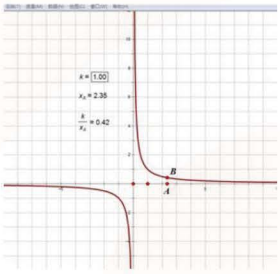


图 6

微信公众号：电子课本大全

7. 选中变量 k，同时按住“Shift”和“+”键，就可以使变量 k 增大，相对应的图像也就发生了变化；按“−”键，就可以使变量 k 减小，相对应的图像也就发生了变化．系统设定的变量 k 变化的步长为 0.01，我们还可以用如下方法改变变化的步长：选中变量 k，并将光标放在“变量 k”上，点击鼠标右键，点击“属性”对话框(如图 7)，在弹出的对话框中，在“参数”下的“键盘调节”中输入你想要的步长(如图 8)，点击“确定”按钮，这样变量 k 变化的步长就改成你所设定的，不妨试一下．

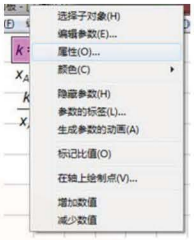


图 7



图 8

8. 选中变量 k，并将光标放在变量 k 上，点击鼠标右键，点击“生成参数的动画(A)”命令，观察函数的图像是怎样随着变量 k 的变化而变化的(k 增大时，图像如何变化？k 减小时，图像又如何变化？k 取正值时，图像情况如何？k 取负值时，图像情况又如何？)．

11.2 习题

1. 在同一平面直角坐标系中，画出下列函数的图像：

(1) $y=\frac{7}{x}$；　　(2) $y=-\frac{7}{x}$．

2. 已知 y 是 x 的反比例函数，根据下表确定这个反比例函数的表达式，并填写表中的空格．

x	−3	−2	−1	2		6
y		6			−3	

【习题解答】

1. 略．

2. $y=-\frac{12}{x}$．

微信公众号：电子课本大全

3. 设矩形的面积是 24 cm^2，相邻两边的长分别是 x cm、y cm.
   (1) 确定 y 与 x 的函数表达式；
   (2) 画出这个函数的图像.

4. 已知函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图像经过点(2，−6).
   (1) 求 k 的值，并画出这个函数的图像；
   (2) 当 x 取什么值时，函数的值小于 0?

5. 正比例函数 $y=2x$ 的图像与反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图像有一个交点的横坐标是 2.
   (1) 求 k 的值，并画出这个反比例函数的图像；
   (2) 根据反比例函数的图像，指出当 $-4<x<-1$ 时，y 的取值范围.

3. (1) $y=\frac{24}{x}$；(2)略.
4. (1) $k=-12$，图像略；(2) $x>0$.
5. (1) $k=8$，图像略；(2) $-8<y<-2$.

微信公众号：电子课本大全

11.3　用反比例函数解决问题

反比例函数是刻画现实世界数量关系的一种数学模型．生活、生产实际中的一些问题，可以利用反比例函数的有关性质解决．

问题 1　小明要把一篇 24 000 字的社会调查报告录入电脑．

(1) 完成录入的时间 t(分)与录入文字的速度 v(字/分)有怎样的函数关系？

(2) 要在 3 h 内完成录入任务，小明每分钟至少应录入多少个字？



解：(1) 由 $v \cdot t=24\,000$，得

$$t=\frac{24\,000}{v}.$$

完成录入的时间 t 是录入文字的速度 v 的反比例函数．

(2) 把 $t=180$ 代入 $v \cdot t=24\,000$，得

$$v=\frac{24\,000}{180}=\frac{400}{3}\approx 133.3.$$

根据反比例函数的性质，t 随 v 的增大而减小，因此，小明每分钟至少应录入 134 字，才能在 3 h 内完成录入任务．

问题 2　某厂计划建造一个容积为 4×10^4 m^3 的长方体蓄水池．

(1) 蓄水池的底面积 S(m^2)与其深度 h(m)有怎样的函数关系？

(2) 如果蓄水池的深度设计为 5 m，那么它的底面积应为多少？

(3) 如果考虑绿化以及辅助用地的需要，蓄水池的长和宽最多只能分别设计为 100 m 和 60 m，那么它的深度至少应为多少米(精确到 0.01)？

【内容解读】

问题 1 是生活中常见的关于速度与时间的实际问题．在解决问题的过程中应考虑实际问题中变量的取值范围与要求，借助反比例函数的性质加以解决．

【内容解读】

问题 2 是生活中常见的几何体的面积与体积问题．可以结合平面图形中类似的问题类比到空间问题．

【教学目标】

1. 能利用反比例函数的相关知识分析和解决一些简单的实际问题．

2. 在解决实际问题的过程中，进一步体会和认识反比例函数是刻画现实世界中数量关系的一种数学模型．

【教学过程设计建议(第一课时)】

1. 情境创设

在一个实际问题中，两个变量 x、y 满足表达式 $y=\frac{k}{x}$（k 为常数，$k\neq0$），则 y 就是 x 的反比例函数．由已知表达式和所给的 x 值(或 y 值)可以求出对应值．

本节课侧重于体现反比例函数在实际生活中的应用．因此，教师可以结合本章的章头图及章头问题，提出相关的生活实例引入本节课．

2. 例题教学

课本提供了两类问题作为例题：一类是速度与时间问题；另一类是几何体的面积与体积问题．

生活中有许多反比例函数模型的实际问题，教师可以根据实际情况创设更加贴近学生生活的实际问题情境．

微信公众号：电子课本大全

解：(1) 由 $Sh = 4 \times 10^4$，得

$$S = \frac{40\,000}{h}.$$

蓄水池的底面积 S 是其深度 h 的反比例函数．

(2) 把 $h=5$ 代入 $S=\frac{40\,000}{h}$，得

$$S = \frac{40\,000}{5} = 8\,000.$$

当蓄水池的深度设计为 5 m 时，它的底面积应为 8 000 m^2.

(3) 根据题意，得

$$S = 100 \times 60 = 6\,000.$$

把 $S=6\,000$ 代入 $S = \frac{40\,000}{h}$，得

$$h = \frac{40\,000}{6\,000} \approx 6.667.$$

根据反比例函数的性质，S 随 h 的增大而减小，因此，蓄水池的深度至少应为 6.67 m．



1. A、B 两地相距 300 km，汽车以 x km/h 的速度从 A 地到达 B 地需 y h，写出 y 与 x 的函数表达式．如果汽车的速度不超过 100 km/h，那么汽车从 A 地到 B 地至少需要多少时间？
2. 在本节的问题 2 中，建造蓄水池需要运送的土石方总量为 4×10^4 立方米，某运输公司承担了该项工程的运送土石方任务．
   (1) 运输公司平均每天运送的土石方 V(立方米/天)与完成任务所需要的时间 t(天)之间有怎样的函数关系？
   (2) 运输公司共派出 20 辆卡车，每辆卡车每天可运送土石方 100 立方米，需要多少天才能完成该任务？工程进行了 8 天后，如果需要提前 4 天完成任务，那么该运输公司至少需要增派多少辆同样的卡车才能按时完成任务？

【练习解答】

1. $y=\frac{300}{x}$，3 h．
2. (1) $t=\frac{40\,000}{V}$；(2)20 天，10 辆．

微信公众号：电子课本大全

问题 3　某报报道：一村民在清理鱼塘时被困淤泥中，消防队员以门板作船，泥沼中救人．

如果人和门板对淤泥地面的压力合计 900 N，而淤泥承受的压强不能超过 600 Pa，那么门板面积至少要多大？

分析：根据物理学知识，人和门板对淤泥的压力 F(N)确定时，人和门板对淤泥的压强 p(Pa) 与门板面积 S(m^2)成反比例函数关系：$p=\frac{F}{S}$.

解：设人和门板对淤泥的压强为 p(Pa)，门板面积为 S(m^2)，则 $p=\frac{900}{S}$.

把 p=600 代入 $p=\frac{900}{S}$，得

$$\frac{900}{S}=600.$$

解得

$$S=1.5.$$

根据反比例函数的性质，p 随 S 的增大而减小，因此门板面积至少要 1.5 m^2.

问题 4　某气球内充满了一定质量的气体，在温度不变的条件下，气球内气体的压强 p(Pa)是气球体积 V(m^3)的反比例函数，且当 $V=1.5\ m^3$ 时，$p=16\ 000$ Pa.

(1) 当 V=1.2 m^3 时，求 p 的值；

(2) 当气球内的气压大于 40 000 Pa 时，气球将爆炸，为确保气球不爆炸，气球的体积应不小于多少？

解：(1) 设 p 与 V 的函数表达式为 $p=\frac{k}{V}$(k 为常数，$k\neq 0$).

把 p=16 000、V=1.5 代入 $p=\frac{k}{V}$，得

【内容解读】

问题 3 和问题 4 都是有关压力与压强关系的实际问题．学生可以借助八年级物理课程所学过的力学知识加以理解和解决．

【教学过程设计建议(第二课时)】

本节课侧重于体现反比例函数在相关学科，特别是物理学科中的应用．

1. 情境创设

考虑到学生进入八年级已经开始接触到相关的物理知识，因此，教师也可以从学生更加熟悉的生活实例引入课题：

生活中常用的刀具，使用一段时间后就会变钝，用起来很费劲，如果把刀刃磨细，刀具就会锋利起来，你知道为什么吗？

充满气体的气球能够用脚踩爆，超载的汽车容易爆胎……这是为什么？

2. 例题教学

课本提供了两类问题作为例题：一类是面积类的压力与压强问题；另一类是体积类的压力与压强问题．

生活中有许多反比例函数模型的实际问题，教师可以根据实际情况创设更加贴近学生生活的实际问题情境．

微信公众号：电子课本大全

$$16\,000 = \frac{k}{1.5}.$$

解得

$$k = 24\,000.$$

p 与 V 的函数表达式为 $p = \frac{24\,000}{V}$.

当 $V = 1.2$ 时，$p = \frac{24\,000}{1.2} = 20\,000$.

(2) 把 p=40 000 代入 p=$\frac{24\,000}{V}$，得

$$40\,000 = \frac{24\,000}{V}.$$

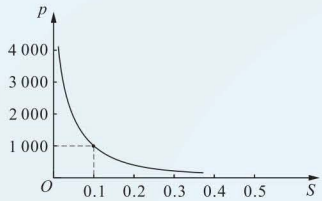
解得

$$V = 0.6.$$

根据反比例函数的性质，p 随 V 的增大而减小，因此为确保气球不爆炸，气球的体积应不小于 0.6 m^3.

练习

1. 在压力不变的情况下，某物体所受到的压强 p(Pa)与它的受力面积 S(m^2)之间成反比例函数关系，其图像如图所示.
(1) 求 p 与 S 之间的函数表达式；
(2) 当 S=0.4 m^2 时，求该物体所受到的压强 p.



(第 1 题)

【练习解答】

1. (1) $p=\frac{100}{S}$；(2) p=250 Pa.

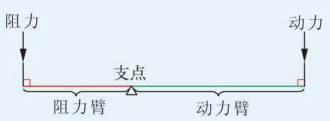
微信公众号：电子课本大全

2. (1) $F=\frac{800}{l}$；1.6 m；

(2) 略.

2. 公元前 3 世纪，古希腊学者阿基米德发现了著名的“杠杆原理”. 杠杆平衡时，

阻力 × 阻力臂 = 动力 × 动力臂.





(第 2 题)

(1) 几位同学玩撬石头游戏，已知阻力（石头重量）和阻力臂分别为 1600 N 和 0.5 m，设动力臂为 l，动力为 F，写出 F 与 l 的函数表达式. 小明只有 500 N 的力量，他该选择动力臂为多少的撬棍才能撬动这块大石头呢？

(2) 阿基米德曾豪言：给我一个支点，我能撬动地球. 你能解释其中的道理吗？

11.3 习题

1. 以 12 m^3/h 的速度向水池注水，8 h 可以注满水池.

(1) 设注水速度为 $Q(m^3/h)$，注满水池所需要的时间为 t(h)，写出 t 与 Q 之间的函数表达式；

(2) 要在 5 h 内注满水池，注水速度至少应为多少？

2. 一列货车从北京开往乌鲁木齐，以 58 km/h 的平均速度行驶需要 65 h. 为实施西部大开发，京乌线决定全线提速.

(1) 如果提速后的平均速度为 v km/h，全程运行时间为 t h，写出 t 与 v 之间的函数表达式.

(2) 如果提速后的平均速度为 78 km/h，那么提速后全程运行时间为多少？

(3) 如果全程运行时间控制在 40 h 内，那么提速后的平均速度至少应为多少？

3. 某沼泽地能承受的压强为 2×10^4 Pa，一名学生的体重为 600 N，他与沼泽地的接触面积多大时，才不至于陷入沼泽地？

【习题解答】

1. (1) $t=\frac{96}{Q}$；(2)19.2 m^3/h.

2. (1) $t=\frac{3\,770}{v}$；(2)48 h 20 min；(3)94.25 km/h.

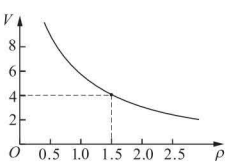
3. 0.03 m^2.

微信公众号：电子课本大全

4. 一定质量的二氧化碳，它的体积$V(m^3)$与它的密度$\rho(kg/m^3)$之间成反比例函数关系，其图像如图所示．

(1) 试确定V与ρ之间的函数表达式；

(2) 当$\rho=2.5\ kg/m^3$时，求V的值．



（第4题）

阅读

生活中的反比例函数

在日常生活、生产活动中，反比例函数有着广泛的应用．如果你注意观察，会发现身边的许多现象，其本质都与反比例函数有着联系．

1. 为什么使劲踩气球，气球会爆炸？

我们知道，在温度不变的情况下，气球内气体的压强与它的体积成反比例函数关系．如果使劲踩气球，气球内气体的体积变小，压强增大到足够大时气球就会爆炸．

2. 为什么有的台灯的亮度可以调节？

有些电器的功率P与电阻R之间成反比例函数关系：$PR=U^2$(U表示电压，我国生活用电的电压一般为220 V)．在电压U保持不变的情况下，调节台灯的电阻，台灯的功率随之发生变化，于是亮度也发生变化．

你能否解释为什么打针用的针头是尖的、推土机的轮子要安装又宽又长的履带吗？

你还能举出生活中可以用反比例函数解释的现象吗？

数学活动

反比例函数实例调查

1. 函数表达式$y=\frac{1\,200}{x}$可以表示实际问题中数量之间的关系．例如，

小明的家离学校1.2 km，早晨小明骑自行车上学需x min，那么小明骑车的速度y(m/min)可以表示为$y=\frac{1\,200}{x}$；

4. (1) $V=\frac{6}{\rho}$；(2) $V=2.4\ m^3$．

【数学活动指导】

学生在“代数式”一章中已经知道不同的实际问题可以用同一个代数式表示，而同一个代数式可以表示不同实际意义；在“一元一次方程”中，再一次感受了不同的实际问题中的相等关系可以用同一个方程表示，而同一个一元一次方程可以表示不同实际问题中的相等关系；在“一元一次函数”、“分式”等章节中也有类似的内容．在课本中反复出现这样的内容，是为了让学生充分感受到数学的两个重要特征：高度的抽象性和广泛的应用性．

本节活动包含两个方面的内容：

1. “函数表达式$y=\frac{1\,200}{x}$表示什么？”主要是要求学生结合生活经验和对反比例函数的理解与认识，构造符合条件的实例；

2. “调查生活中的反比例函数的实例子，并运用反比例函数的有关知识解决问题”，要求学生深入生活，进行实地调查．调查可以是分组的，也可以的单独的，但都应该因地制宜的选择调查部门和对象．

微信公众号：电子课本大全

某校八年级为“爱心工程”捐款 1 200 元，平均每人捐款 x 元，那么该年级的学生数 y(人)可以表示为 $y=\frac{1\,200}{x}$；

体积为 1 200 cm^3 的圆柱的底面积为 x cm^2，那么圆柱的高 y（cm）可以表示为 $y=\frac{1\,200}{x}$；

⋮

函数表达式 $y=\frac{1\,200}{x}$ 可以表示许多实际问题中数量之间的关系，你还能举出这样的实际例子吗？

2. 调查生活中的反比例函数的实例，并运用反比例函数的有关知识解决问题．



1. 形如 $y=\frac{k}{x}$（k 为常数，$k\neq 0$）的函数叫做反比例函数．反比例函数是刻画现实世界数量关系的一种数学模型．

2. 反比例函数的图像是由两支曲线构成的双曲线．当 $k>0$ 时，双曲线的两支分别在第一、三象限，在每一个象限内，y 随 x 的增大而减小；当 $k<0$ 时，双曲线的两支分别在第二、四象限，在每一个象限内，y 随 x 的增大而增大．双曲线的两支都无限接近 x 轴和 y 轴，但与 x 轴、y 轴不相交．

3. 如果 z 是 y 的反比例函数，y 是 x 的反比例函数，那么 z 与 x 有怎样的函数关系？

4. 观察下表中的数据，你发现这些数据有什么规律？按照这种规律，n 所对应的值应该是多少？

1	2	3	4	…	n	…
144	72	48	36	…		…

你能举出一个实际问题符合你所发现的规律吗？

【教学目标】

1. 回顾反比例函数的概念，通过实际问题，进一步感受用反比例函数解决实际问题的过程与方法，体会反比例函数是分析、解决实际问题的一种有效的数学模型．

2. 归纳总结反比例函数的图像和性质，进一步体会数形结合的数学思想方法．

【教学过程设计建议】

1. 回顾、梳理本章的知识：

如同已经学过的有关方程、函数的内容一样，本章内容分为三块：

(1)从生活到数学：从问题到反比例函数，即建构实际问题的数学模型；

(2)数学研究：反比例函数的图像与性质；

(3)用数学解决问题：用反比例函数解决问题．

2. 可以设计一组问题，重点归纳、整理反比例函数的图像与性质，帮助学生进一步感受数形结合的数学思想方法．

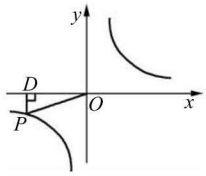
例如：

(1)由形到数——用待定系数法求反比例函数的表达式；由图像的位置或图像的部分确定函数的特征；

(2)由数到形——根据反比例函数表达式或反比例函数的性质，确定图像的位置、变化趋势等；

(3)数形结合——函数的图像与性质的综合应用．

例如：如图，点 P 在反比例函数



微信公众号：电子课本大全

复习巩固

1. 用函数表达式表示下列问题中两个变量之间的关系，并指出其中哪些是反比例函数．

（1）长 100 m 的绳子剪下 x m 后，还剩 y m；

（2）买单价为 8 元的笔记本 x 本，共用了 y 元；

（3）以 x L/min 的速度向容积为 20 L 的水池中注水，注满水池需 y min；

（4）面积为 24 的等腰三角形的底边长为 x，高为 y．

2. 近视眼镜镜片的度数 y（度）与镜片焦距 x（m）成反比例．已知 400 度近视眼镜镜片的焦距为 0.25 m，求 y 与 x 的函数表达式．

3. 在温度不变的条件下，一定量的气体的压强 p（Pa）与它的体积 V（m^3）成反比例．已知当 $V=200\ m^3$ 时，$p=50$ Pa．

（1）写出 V 与 p 的函数表达式．

（2）当 $V=100\ m^3$ 时，求 p 的值．

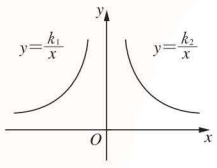
4. 在平面直角坐标系中分别画出函数 $y=\frac{5}{x}$、$y=-\frac{5}{x}$ 的图像．

5. 已知反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图像经过点（−2，1）．

（1）试确定该函数表达式；

（2）当 $x=3$ 时，求 y 的值．

6. 根据反比例函数 $y=\frac{k_1}{x}$、$y=\frac{k_2}{x}$ 在 x 轴上方的图像（如图），比较 k_1、k_2 的大小．



（第 6 题）

【复习题解答】

（复习巩固）

1.（1）$y=100-x$，不是反比例函数；（2）$y=8x$，不是反比例函数；（3）$y=\frac{20}{x}$，是反比例函数；（4）$h=\frac{48}{x}$，是反比例函数．

2. $y=\frac{100}{x}$．

3.（1）$p=\frac{10\,000}{V}$；（2）$p=100$．

4. 略．

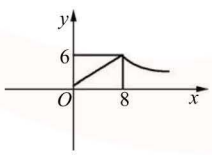
5.（1）$y=-\frac{2}{x}$；（2）$y=-\frac{2}{3}$．

6. $k_2>k_1$．

$y=\frac{2}{x}$ 的图像上，PD 垂直 x 轴，垂足为 D，则 $\triangle POD$ 的面积为_____．

3. 设计一个实际问题，让学生经历“问题情境—建立模型—求解—解释与应用”的基本过程．

例如：为了预防流行感冒，某学校对教室采用药薰法进行消毒．已知药物燃烧时，室内每立方米空气中的含药量 y（mg）与时间 x（min）成正比，药物燃烧后，y 与 x 成反比（如图）．现测得药物 8 min 燃毕，此时室内空气中每立方米含药量为 6 mg．



（1）写出药物燃烧前后 y 与 x 之间的函数表达式；

（2）研究表明，当空气中每立方米的含药量低于 1.6 mg 时，人方可进入，从消毒开始，至少需要多少时间，学生方能进入教室？

（3）研究表明，当空气中每立方米的含药量不低于 3 mg 且时间不少于 10 min 时，才能有效杀灭空气中的病菌，那么这次消毒是否有效？

微信公众号：电子课本大全

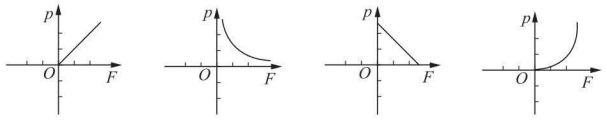
7. B.

8. (1)600 t;(2) $y=\frac{600}{x}$;(3)2 h.

(灵活运用)

9. D.

7. 当物体的受力面积 $S(m^2)$一定时，这个物体所受的压强 $p(Pa)$与作用于它的压力 $F(N)$的函数关系式为 $p=\frac{F}{S}(S\neq 0)$，这个函数的图像是下列 4 个图像中的哪一个？为什么？



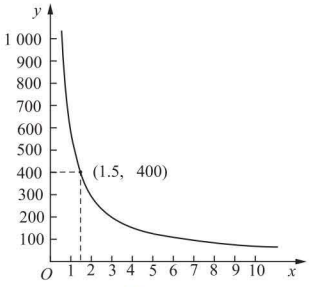
(A)　(B)　(C)　(D)

8. 码头工人往一艘轮船上装载货物，装完货物所需时间 $y(min)$与装载速度 $x(t/min)$之间的函数关系如图.

(1) 这批货物的质量是多少？

(2) 写出 y 与 x 之间的函数表达式；

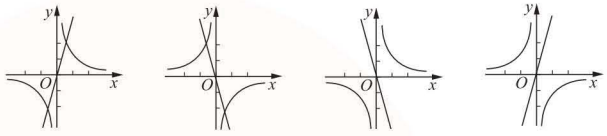
(3) 轮船到达目的地后开始卸货，如果以 5 t/min 的速度卸货，那么需要多少时间才能卸完货物？



(第 8 题)

灵活运用

9. 在平面直角坐标系中，函数 $y=3x$ 与 $y=-\frac{1}{x}$ 的图像是下列 4 个图像中的哪一个？为什么？



(A)　(B)　(C)　(D)

微信公众号：电子课本大全

10. y 是 x 的反比例函数，且当 $x=4$ 时，$y=3$.

(1) 写出 y 与 x 之间的函数表达式；

(2) 画出函数的图像，并根据图像说出当 $2\leqslant x\leqslant 3$ 时 y 的取值范围.

11. 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（k 为常数，$k\neq 0$）的图像上取一点 P，分别向两条坐标轴画垂线，求这两条垂线与坐标轴所围成的矩形面积. 再取另一点 P' 试试看，你发现了什么？请说明理由.

探索研究

12. 已知点 $P(x_1, y_1)$、$Q(x_2, y_2)$ 在反比例函数 $y=-\frac{2}{x}$ 的图像上，且 $x_1 < x_2$. 试比较 y_1 与 y_2 的大小.

13. 我们知道，一次函数 $y=x-1$ 的图像可以由正比例函数 $y=x$ 的图像向下平移 1 个长度单位得到.

函数 $y=\frac{2}{x+1}$ 的图像与反比例函数 $y=\frac{2}{x}$ 的图像有什么关系？

10. (1) $y=\frac{12}{x}$；(2) 图像略；$4\leqslant y\leqslant 6$.

11. 矩形面积为 $|k|$. 面积为定值，因为反比例函数图像上任意一点的横坐标与纵坐标之积的绝对值为常数 $|k|$.

（探索研究）

12. 若 $x_1<x_2<0$ 或 $0<x_1<x_2$，则 $y_1<y_2$；若 $x_1<0<x_2$，则 $y_2<y_1$.

13. 如果将函数 $y=\frac{2}{x}$ 的图像向左平移 1 个单位长度，得到的图像就是函数 $y=\frac{2}{x+1}$ 的图像.

微信公众号：电子课本大全

第12章　二次根式

【课标要求】

1. 了解二次根式、最简二次根式的概念.

2. 了解二次根式(根号内仅限于数)加、减、乘、除运算法则.

3. 会用运算法则进行有关的简单四则运算.

此外,通过观察、尝试、归纳、类比等活动,体验二次根式运算法则的产生过程,发展学生思维能力,培养学生探究能力与创新意识.

【设计思路】

1. 学生在前面已经学习了平方根、算术平方根等概念.本章从已知正方形面积求正方形的边长等入手,引入二次根式概念.

2. 本章的主要内容为二次根式的四则运算,安排顺序是先乘除运算,然后加减运算,而二次根式乘除运算涉及到结果的化简,结果的化简又涉及到二次根式的基本性质.二次根式加减运算涉及到最简二次根式、同类二次根式等概念.

3. 课本在处理二次根式的性质 $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$、$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ 以及二次根式运算这部分内容时,主要思路为:

先从平方根出发介绍二次根式的概念,并给出两个重要性质:

当 $a\geqslant 0$ 时,$\left(\sqrt{a}\right)^2=a$,$\sqrt{a^2}=|a|$.

关于二次根式乘除运算的处理:通过"实践与探索"活动,让学生猜测、归纳出 $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$,$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$,然后通过演绎推理证明,分别给出简单的例子,让学生通过事物熟悉二次根式乘除运算法则.为了进行一般的二次根式乘除运算,需要进行相关的化简,课本给出二次根式乘除运算公式的逆用 $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$,$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

关于运算结果的处理,原则上可以保留各种形式,但考虑到数学结果的简单性,课本最后给出了最简二次根式的概念.

怎样才能使二次根式化简为最简二次根式呢?课本通过两个"探索"给出方法:$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{ab}}{b}$,$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{ab}}{b}$,这些地方将传统的二次根式化简方法进行简化,但教学时不要让学生背诵结论,关键还是方法本身.

4. 本章内容与已学内容"代数式"、"勾股定理"、"实数"紧密联系,同时也是以后将要学习的"锐角三角函数"、"一元二次方程"、"二次函数"等内容的基础,并为学习高中数学相关内容做好准备.

【教学建议】

根据上述设计,在教学时应注意以下问题:

1. 在教学时要抓住主要内容、理解本质.抓住二次根式四则运算的核心内容,理解二次根式乘、除、加、减运算的本质,不要过分强调"二次根式、最简二次根式、同类二次根式、分母有理化"等概念,把学生的注意力集中到二次根式的运算上.

2. 本章有关结论是先通过归纳或类比得到,再通过演绎推理确认,接着运用这些结论进行运算.教学时要通过大量的例子让学生得到结论并运用运算法则进行运算.

3. 本章中有关习题的运算结果的形式,可以适当放宽,允许分母中含有根号.但随着学习的深入,应使学生逐步规范.

微信公众号:电子课本大全

4. 关于分母有理化的相关内容，课本是通过阅读形式让学生有所了解，不必再做扩充．

5. 本章的例题、习题选择应特别谨慎．因为传统课本对此内容阐述较多，计算量也较大，而本章的重点是二次根式的四则运算，其他内容应尽量减少．因此，运算应尽可能简单．

【评价建议】

1. 评价学生能否了解本章的有关概念．本章的几个基本概念应通过具体的例子来反映，因此，学生只要能识别、判别就足够了，不要在概念上进行过多的挖掘．

2. 评价学生对运算法则的掌握情况．本章的运算法则是学生学习的核心内容，对学生的学习水平的评价应通过具体的运算来进行，而不是让学生简单背诵、复述有关运算法则和公式．

3. 评价学生学习过程与方法．本章蕴涵大量的探究过程，在探究过程中，学生要多次使用观察、归纳、概括、抽象、类比、说理论证等数学思想方法．在教学过程中，除了评价学生是否获得相关知识、技能外，还应及时地对学生在这些过程中的表现给予评价．

【课时安排】

本章教学大约需要10课时，分配如下：

第1节	二次根式	2课时
第2节	二次根式的乘除	4课时
第3节	二次根式的加减	2课时
	数学活动	1课时
	小结与思考	1课时

微信公众号：电子课本大全

第12章　二次根式

$t=\sqrt{\frac{h}{5}}$

二次根式表示实际问题中的一些数量关系，整式的运算法则，启迪我们探索根式的运算．

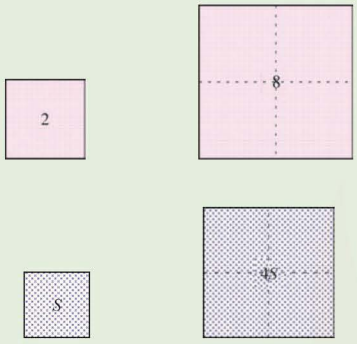


【内容解读】

在树上的苹果离地面的高度已知时，如何计算苹果落到地面所需要的时间？

设计此内容的目的，是让学生感受二次根式与我们生活息息相关．

微信公众号：电子课本大全



面积为 2 cm² 的正方形的边长为$\sqrt{2}$ cm；

面积为 8 cm² 的正方形的边长为$\sqrt{8}$ cm .

如果把面积为 8 cm² 的正方形分为 4 个面积为 2 cm² 的小正方形，可以得到大正方形的边长为 $2\sqrt{2}$ cm，那么 $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

对于面积为 S cm²、$4S$ cm² 的两个正方形，它们的边长之间有什么关系？

本章将探索二次根式的基本性质与运算法则 .

【内容解读】

如何求面积为 $2\ \text{cm}^2$ 的正方形的边长？如何求面积为 $8\ \text{cm}^2$ 的正方形的边长？

这两个问题对于学过开平方的学生来说，是很容易的 . 进一步引导学生观察、分析，可以发现 $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$. 将 2 换成其他数字也有类似结论，换成一般的字母 a（$a>0$），也有这样的结论 . 由此引出研究一般的形如 $\sqrt{a}$ 的式子的必要性 . 同时，由此也暗示，不同的二次根式之间可能存在一些特殊的关系 .

微信公众号：电子课本大全

12.1　二次根式



用带有根号的式子表示下列问题中的数量：

(1) 边长为 1 的正方形的对角线的长；

(2) 面积为 S 的圆的半径；

(3) 直角边长分别为 a、b 的直角三角形斜边的长；

(4) 一个物体从静止状态自由下落的高度 h(m)与所需的时间 t(s)满足关系式 $h=\frac{1}{2}gt^2$，试用 h 表示 t（g 的值取 10 m/s²）.

一般地，式子 $\sqrt{a}(a\geqslant 0)$ 叫做**二次根式**(quadratic radical)，a 叫做**被开方数**.

【内容解读】

通过回顾平方根的意义，说明带有根号的式子的实际意义，观察这些式子，尝试提出一般的概念．从而回答问题："这些式子有什么共同特征？"



当 $a<0$ 时，$\sqrt{a}$ 有意义吗？为什么？

当 $a\geqslant 0$ 时，$\sqrt{a}$ 可能为负数吗？为什么？

【内容解读】

这里主要给出 3 个内容：

(1) 二次根式的含义；

(2) 二次根式中被开方数的取值范围；

(3) 当 $a\geqslant 0$ 时，$\left(\sqrt{a}\right)^2=a$.

对于例 1，教学时要注意，不要过分强调充要条件，在具体解决问题时，要让学生明白使二次根式有意义，其中被开方数应满足的条件．

例 1　要使下列各式有意义，x 应是怎样的实数？

(1) $\sqrt{x-5}$；　　(2) $\sqrt{x^2+1}$.

解：(1) 要使 $\sqrt{x-5}$ 有意义，必须 $x-5\geqslant 0$，即 $x\geqslant 5$；

(2) 不论 x 取何实数，总有 $x^2\geqslant 0$，$x^2+1\geqslant 1$，二次根式 $\sqrt{x^2+1}$ 在实数范围内总有意义.



$\sqrt{2}$ 的意义是什么？$(\sqrt{2})^2$ 等于几？



类似地，$(\sqrt{4})^2=4$，$(\sqrt{5})^2=5$，$(\sqrt{7})^2=7$ ……

【教学目标】

1. 了解二次根式的概念，初步理解二次根式有意义的条件.

2. 通过具体问题探求并掌握二次根式的性质：当 $a\geqslant 0$ 时，$\left(\sqrt{a}\right)^2=a$；$\sqrt{a^2}=|a|$. 能运用这两个性质进行一些简单的计算.

3. 通过观察一些特殊的情形，获得一般结论，使学生感受归纳的思想方法.

【教学过程设计建议(第一课时)】

1. 情境创设

首先通过前面已经学过的平方根的概念，引导学生理解课本中所给的一些式子的实际意义，从而给出二次根式的概念.

2. 探索活动

进一步通过"交流"引导学生，通过具体例子归纳出二次根式的性质：当 $a\geqslant 0$ 时，$\left(\sqrt{a}\right)^2=a$. 在教学时，可以根据学生的情况，结合算术平方根的概念，多给一些具体的例子，特别是被开方数不是完全平方数的情形.

3. 例题教学

例 1 主要是对二次根式概念的理解，要求掌握二次根式有意义的条件．教学时，不要过分地强调充分性与完备性，但要学生养成语言严谨的习惯，尽量采用课本上的语言.

例 2 是直接运用公式 $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$，由于课本不要求讨

微信公众号：电子课本大全

事实上，$\sqrt{a}(a\geqslant 0)$ 是 a 的算术平方根，根据算术平方根的意义，可知：

当 $a\geqslant 0$ 时，$(\sqrt{a})^2=a$.

例 2 计算：

(1) $(\sqrt{3})^2$；　　(2) $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2$；

(3) $(\sqrt{a+b})^2(a+b\geqslant 0)$.

解： (1) $(\sqrt{3})^2=3$；

(2) $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2=\frac{2}{3}$；

(3) 当 $a+b\geqslant 0$ 时，$(\sqrt{a+b})^2=a+b$.

练习

1. 要使下列各式有意义，x 应是怎样的实数？

(1) $\sqrt{x+5}$；　　(2) $\sqrt{3x-4}$；

(3) $\sqrt{5x+1}$；　　(4) $\sqrt{1-10x}$；

(5) $\sqrt{x^2}$；　　(6) $\sqrt{-x^2}$.

2. 计算：

(1) $(\sqrt{13})^2$；　　(2) $\left(\sqrt{\frac{3}{7}}\right)^2$；

(3) $(\sqrt{8})^2+(\sqrt{2})^2$；　　(4) $(\sqrt{a^2+b^2})^2$.

尝试

填空：

$\sqrt{2^2}=$_____，　$\sqrt{5^2}=$_____，　$\sqrt{10^2}=$_____，

$\sqrt{(-2)^2}=$_____，$\sqrt{(-5)^2}=$_____，$\sqrt{(-10)^2}=$_____，

$\sqrt{0^2}=$_____.

你有什么发现？请与同学交流.

【内容解读】

对于例 2，教学时要注意，应用公式的前提是被开方数大于或等于 0，但在刚开始学习时不要出现需要讨论的情况.

【练习解答】

1. (1) $x\geqslant -5$；(2) $x\geqslant \frac{4}{3}$；

(3) $x\geqslant -\frac{1}{5}$；(4) $x\leqslant \frac{1}{10}$；

(5) x 为一切实数；(6) $x=0$.

2. (1) 13；　(2) $\frac{3}{7}$；

(3) 10；　(4) a^2+b^2.

论被开方数字母的取值范围，所以教学时也不要把问题复杂化，学生能够直接运用就足够了.

4. 思维拓展

根据需要可以对练习第 1 题的(5)、(6)小题进行一些讲解.

还可以判断下列运算的正误，并说明理由.

(1) $\left(\sqrt{-3}\right)^2=-3$；(2) $\sqrt{(-3)^2}=-3$.

5. 小结

什么叫二次根式？当 $a\geqslant 0$ 时，化简 $\left(\sqrt{a}\right)^2$.

【教学过程设计建议(第二课时)】

1. 情境创设

通过“交流”活动，引导学生观察、归纳出二次根式的另一重要性质：$\sqrt{a^2}=|a|$，并在运用中将这个性质与前面的性质进行比较.

2. 探索活动

课本共给出 7 个具体例子，分别涉及 $a>0$、$a<0$、$a=0$ 三种情形. 教学时可以分别让学生探索、归纳出相应的结论. 如果学生归纳有困难，可以通过下述问题形式让学生进行回答：

$\sqrt{2^2}=$____，$\sqrt{5^2}=$____，$\sqrt{10^2}=$____.

当 $a>0$ 时，$\sqrt{a^2}=$____.

对于 $a<0$、$a=0$ 的情形，可以设计同样的问题，让学生进行回答.

3. 例题教学

课本上例 3 中的 3 个题目均直接运用二次根式性质

微信公众号：电子课本大全

当 $a \geqslant 0$ 时，$\sqrt{a^2} = a$；

当 $a < 0$ 时，$\sqrt{a^2} = -a$.

根据绝对值的意义，

当 $a \geqslant 0$ 时，$|a| = a$；

当 $a < 0$ 时，$|a| = -a$.

由此可知，$\sqrt{a^2} = |a|$.

例 3　计算：

(1) $\sqrt{(-1.5)^2}$；　　(2) $\sqrt{(\pi-1)^2}$；

(3) $\sqrt{(x-1)^2}\,(x \leqslant 1)$.

解：(1) $\sqrt{(-1.5)^2} = |-1.5| = 1.5$；

(2) $\sqrt{(\pi-1)^2} = |\pi-1| = \pi-1$；

(3) 当 $x \leqslant 1$ 时，$\sqrt{(x-1)^2} = |x-1| = -(x-1) = 1-x$.



(1) 二次根式 $\sqrt{a}$ 与 $\sqrt{a^2}$ 中，a 应是怎样的实数？

(2) $(\sqrt{a})^2$ 与 $\sqrt{a^2}$ 是否相等？



1. 下列各式是否成立？

(1) $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$；　　(2) $\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{1}{2}$；

(3) $\sqrt{(3+4)^2} = 3+4$；　　(4) $\sqrt{3^2+4^2} = 3+4$.

2. 计算：

(1) $\sqrt{6^2}$；　　(2) $\sqrt{(-5)^2}$；

(3) $\sqrt{(a+1)^2}\,(a \geqslant -1)$；　　(4) $\sqrt{(x-2)^2}\,(x \leqslant 2)$.

【内容解读】

教学时还可以再列举一些式子，让学生通过观察、归纳，得到结论：

当 $a \geqslant 0$ 时，$\sqrt{a^2} = a$；

当 $a < 0$ 时，$\sqrt{a^2} = -a$.

进而得到 $\sqrt{a^2} = |a|$.

【内容解读】

在本章中，一般不要进行被开方数中的字母讨论，凡是涉及到字母的问题，都应给出明确的限制条件.

【练习解答】

1. (1) 正确；　(2) 错误；
   (3) 正确；　(4) 错误.
2. (1) 6；　(2) 5；
   (3) $a+1$；　(4) $2-x$.

求解. 由于《标准》对于绝对值内含字母问题的讨论不做要求，所以课本的例题、习题中，都给出了其中字母的取值范围，不必分类讨论. 教学时不要随意拓展，以免加重学生负担.

4. 思维拓展

在例 3 之后，可以补充：

(1) 求使等式 $\sqrt{(x-3)^2} = 3-x$ 成立的所有 x 的值；

(2) $\left(\sqrt{a}\right)^2 = \sqrt{a^2}$ 吗？

5. 小结

化简：$\sqrt{a^2}$.

【教学茶座】

● $\sqrt{4} = 2$. $\sqrt{4}$ 是二次根式吗？如果是，那么 2 也是二次根式了.

▲“二次根式”概念是形式定义（不是本质定义），只要具备 $\sqrt{a}$ 的形式就是二次根式，这里 a 可以是数，也可以是字母，还可以是完全平方形式. $\sqrt{4}$ 是二次根式，但 2 就不是二次根式了. 课本中未介绍无理式等概念，教学时不要节外生枝，过多地引入新的概念.

● $\left(\sqrt{-2}\right)^2 = -2$ 吗？

▲当 $a < 0$ 时，$\sqrt{a}$ 没有意义，因而 $\left(\sqrt{a}\right)^2$ 也是没有意义的，当然 $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ 也就没有意义了. 因此，我们讨论

微信公众号：电子课本大全

12.1 习题

1. 要使下列各式有意义，x 应是怎样的实数？

(1) $\sqrt{x-5}$；　(2) $\sqrt{2x+5}$；

(3) $\sqrt{1-3x}$；　(4) $\sqrt{x^2+2}$.

2. 计算：

(1) $\left(\sqrt{\frac{3}{19}}\right)^2$；　(2) $(2\times\sqrt{3})^2$；

(3) $(-2\times\sqrt{5})^2$；　(4) $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2$.

3. 计算：

(1) $\sqrt{25}$；　(2) $\sqrt{\frac{4}{9}}$；

(3) $\sqrt{(-7)^2}$；　(4) $\sqrt{x^2-4x+4}\,(x\geqslant 2)$.

4. 要使下列各式成立，a 应取什么值？

(1) $\sqrt{a^2}=(\sqrt{a})^2$；　(2) $\sqrt{a^2}=-a$.

5. 指出下列运算过程中的错误.

$\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left(-\frac{1}{2}\right)^2$，可以写成 $\left(\frac{5}{2}-2\right)^2=\left(2-\frac{5}{2}\right)^2$.

两边开平方，得 $\sqrt{\left(\frac{5}{2}-2\right)^2}=\sqrt{\left(2-\frac{5}{2}\right)^2}$.

所以 $\frac{5}{2}-2=2-\frac{5}{2}$，即 $\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$.

【习题解答】

1. (1) $x\geqslant 5$；(2) $x\geqslant -\frac{5}{2}$；(3) $x\leqslant \frac{1}{3}$；(4) x 取一切实数.

2. (1) $\frac{3}{19}$；(2) 12；(3) 20；(4) $\frac{2}{9}$.

3. (1) 5；(2) $\frac{2}{3}$；(3) 7；(4) $x-2$.

4. (1) $a\geqslant 0$；(2) $a\leqslant 0$.

5. 由第2行到第3行发生错误，原因是 $\sqrt{\left(2-\frac{5}{2}\right)^2}=-\left(2-\frac{5}{2}\right)$.

$\left(\sqrt{-2}\right)^2=-2$ 也是没有意义的.

● $\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a, & a\geqslant 0\text{时},\\ -a, & a<0\text{时}.\end{cases}$ 在运用这个性质时，$\sqrt{a^2}$ 到底是一个值，还是两个值？

▲在具体运用 $\sqrt{a^2}=|a|$ 这个性质时，可以通过具体的例子让学生感受到，对于具体给定的 a，$\sqrt{a^2}$ 是确定的且非负的. 可以结合算术平方根概念，追问学生有关理由.

微信公众号：电子课本大全

12.2　二次根式的乘除

【内容解读】

（1）求矩形 $ABCD$ 的面积可以采用以下方法：

① 将矩形分割成 6 个面积为 $\frac{1}{2}$ 的小三角形和 1 个面积为 1 的正方形；

② 矩形 $ABCD$ 的面积等于面积为 9 的大正方形，减去两个面积为 2 的三角形及两个面积为 $\frac{1}{2}$ 的三角形．

（2）矩形 $EFGH$ 的面积是 6．



（1）在图 12－1 中，小正方形的边长为 1．$AB=\sqrt{2}$，$BC=\sqrt{8}$，画出矩形 $ABCD$．矩形 $ABCD$ 的面积是多少？

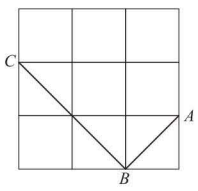
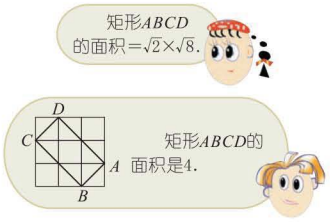


图 12－1



（2）在图 12－2 中，小正方形的边长为 1．画出矩形 $EFGH$，使 $EF=\sqrt{2}$，$FG=\sqrt{18}$．矩形 $EFGH$ 的面积是多少？

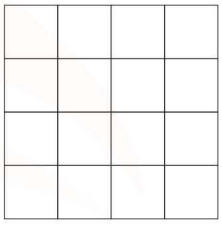


图 12－2

【内容解读】

通过求平方根，可以发现这里给出的每组中的两个式子均相等．由此，通过归纳、猜想可得：

$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}\,(a\geqslant 0,\ b\geqslant 0)$．



填空：

（1）$\sqrt{4}\times\sqrt{25}=$ _____，$\sqrt{4\times 25}=$ _____；

（2）$\sqrt{9}\times\sqrt{16}=$ _____，$\sqrt{9\times 16}=$ _____；

（3）$\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2}\times\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2}=$ _____，

$\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(\frac{3}{5}\right)^2}=$ _____．

你有什么发现？请与同学交流．

【教学目标】

1. 能进行二次根式的乘法、除法运算．

2. 了解最简二次根式的概念．能对有关运算结果进行化简，了解基本的化简原则与方法．

3. 能运用二次根式的乘除运算解决简单的实际问题．

【教学过程设计建议（第一课时）】

1. 情境创设

课本给出 3 组具体的计算问题，以便学生观察归纳出二次根式的乘法法则．教学时首先从算术平方根的计算入手，通过计算可以得到对于特殊的数字，均有 $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$，根据学生情况可以举更多的例子让学生观察．

2. 探索活动

在上述情境给出后，应引导学生计算，并进行比较，自觉得到结论．同时让学生自己列举更多的例子进行探索、归纳，提出猜想，然后再引导学生利用算术平方根的定义进行说理确认．当学生对二次根式乘法运算熟悉时，引导学生回顾过去整式的运算中的一些思想方法，逆用公式 $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$，可得 $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$，这个公式在处理一些计算时是十分有用的．

3. 例题教学

例 1 主要是二次根式乘法的简单运算，且结果为直接开方、不需要化简的情形．例 2 是逆用二次根式乘法运算法则进行化简的简单情形，用意是使学生感悟：二次根式运算中，对结果中被开方数含有开得尽方的二次根式如何处理．教学时，要注意不要让学生产生混淆．

微信公众号：电子课本大全

一般地，当 $a\geqslant 0$、$b\geqslant 0$ 时，$(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2\cdot(\sqrt{b})^2=ab$，$(\sqrt{ab})^2=ab$．由此可见，$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ 与 $\sqrt{ab}$ 都是 ab 的算术平方根．

于是，我们得到：

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}\ (a\geqslant 0,\ b\geqslant 0).$$

利用这个式子，可以进行二次根式的乘法运算．

例 1 计算：

(1) $\sqrt{\frac{1}{2}}\times\sqrt{8}$；　　(2) $\sqrt{56}\times\sqrt{14}$；

(3) $\sqrt{2a}\cdot\sqrt{8a}\ (a\geqslant 0)$．

解： (1) $\sqrt{\frac{1}{2}}\times\sqrt{8}=\sqrt{\frac{1}{2}\times 8}=\sqrt{4}=2$；

(2) $\sqrt{56}\times\sqrt{14}=\sqrt{56\times 14}=\sqrt{4\times 14\times 14}$

$=\sqrt{(2\times 14)^2}=2\times 14=28$；

(3) 当 $a\geqslant 0$ 时，$\sqrt{2a}\cdot\sqrt{8a}=\sqrt{2a\cdot 8a}=\sqrt{16a^2}=4a$．

把 $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}\ (a\geqslant 0,\ b\geqslant 0)$ 反过来，得

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\ (a\geqslant 0,\ b\geqslant 0).$$

利用这个式子可以化简一些二次根式．

例 2 化简：

(1) $\sqrt{12}$；　　(2) $\sqrt{a^3}\ (a\geqslant 0)$；

(3) $\sqrt{4a^2b^3}\ (a\geqslant 0,\ b\geqslant 0)$．

解： (1) $\sqrt{12}=\sqrt{3\times 4}=\sqrt{3}\times\sqrt{4}=\sqrt{3}\times 2=2\sqrt{3}$；

(2) 当 $a\geqslant 0$ 时，$\sqrt{a^3}=\sqrt{a^2\cdot a}=\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{a}=a\sqrt{a}$；

(3) 当 $a\geqslant 0$、$b\geqslant 0$ 时，

$\sqrt{4a^2b^3}=\sqrt{4a^2b^2\cdot b}=\sqrt{(2ab)^2\cdot b}=\sqrt{(2ab)^2}\cdot\sqrt{b}=2ab\sqrt{b}$．

二次根式运算的结果中，被开方数应不含能开得尽方的因数或因式．

【内容解读】

在归纳、猜想 $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$（$a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$）的基础上，再通过算术平方根的定义来说理确认，使学生深化对这一运算法则的理解．

【内容解读】

例 1 主要是直接运用二次根式乘法法则进行运算，而且结果不需要进行化简．为了化简被开方数中含有二次或二次以上的因数或因式的二次根式，这里给出二次根式乘法运算法则的逆用，而且对此公式不要求过多的讲解，只要能用，知道在什么情况下使用就可以了．

例 2 主要探索被开方数含有二次或高于二次的因数或因式的二次根式的化简方法．这里 3 个题目都是非常简单的，主要是让学生感受方法．通过这些题目，使学生体会到："一般地，二次根式运算的结果中，被开方数应不含有能开得尽方的因数或因式"的意义，而不要过多地引入名词、概念来说明二次根式化简的最后结果．

虽然这里处理有些机械，但考虑二次根式的内容要求比较简单，这样处理学生是可以接受的．因此教学时不要扩充，以免造成混乱．

4. 思维拓展

在教学时，如果可能，可以对二次根式的乘法向 3 个根式推广：$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\cdot\sqrt{c}=\sqrt{abc}$，并给出一些练习，如计算 $\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{6}$ 等等．对于二次根式乘法运算法则的逆用，也可以做相应的练习．

5. 小结

二次根式的乘法运算法则是什么？你能用语言叙述吗？如何进行二次根式的化简？

微信公众号：电子课本大全



1. 计算：

(1) $\sqrt{20}\times\sqrt{5}$；　(2) $\sqrt{8}\times\sqrt{18}$；

(3) $\sqrt{48}\times\sqrt{12}$；　(4) $\sqrt{6a^3}\cdot\sqrt{\frac{3a}{2}}(a\geqslant 0)$.

2. 化简：

(1) $\sqrt{16\times 25}$；　(2) $\sqrt{150}$；

(3) $\sqrt{45a}(a\geqslant 0)$；　(4) $\sqrt{9a^2b^3}(a\geqslant 0,\ b\geqslant 0)$；

(5) $\sqrt{26^2-10^2}$.

例 3　化简：

(1) $\sqrt{a^2(b+c)^2}(a\geqslant 0,\ b+c\geqslant 0)$；

(2) $\sqrt{x^3+x^2y}(x\geqslant 0,\ x+y\geqslant 0)$.

解： (1) 当 $a\geqslant 0$、$b+c\geqslant 0$ 时，

$\sqrt{a^2(b+c)^2}=\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{(b+c)^2}=a(b+c)$；

(2) 当 $x\geqslant 0$、$x+y\geqslant 0$ 时，

$\sqrt{x^3+x^2y}=\sqrt{x^2(x+y)}=\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{x+y}=x\sqrt{x+y}$.

例 4　计算：

(1) $\sqrt{6}\times\sqrt{15}$；　(2) $\sqrt{\frac{1}{2}}\times\sqrt{24}$；

(3) $3\sqrt{2}\times 2\sqrt{10}$；　(4) $\sqrt{a^3}\cdot\sqrt{ab}(a\geqslant 0,\ b\geqslant 0)$.

解： (1) $\sqrt{6}\times\sqrt{15}=\sqrt{6\times 15}=\sqrt{9\times 10}$

$=\sqrt{3^2}\times\sqrt{10}=3\sqrt{10}$；

(2) $\sqrt{\frac{1}{2}}\times\sqrt{24}=\sqrt{\frac{1}{2}\times 24}=\sqrt{4\times 3}=\sqrt{2^2}\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$；

(3) $3\sqrt{2}\times 2\sqrt{10}=3\times 2\times\sqrt{2\times 10}=6\times 2\sqrt{5}=12\sqrt{5}$；

(4) 当 $a\geqslant 0$、$b\geqslant 0$ 时，

$\sqrt{a^3}\cdot\sqrt{ab}=\sqrt{a^3\cdot ab}=\sqrt{a^4b}=\sqrt{a^4}\cdot\sqrt{b}=a^2\sqrt{b}$.

【练习解答】

1. (1) 10；　(2) 12；
   (3) 24；　(4) $3a^2$.
2. (1) 20；　(2) $5\sqrt{6}$；
   (3) $3\sqrt{5a}$；　(4) $3ab\sqrt{b}$；
   (5) 24.

【内容解读】

例 3 是被开方数稍微复杂的情形的二次根式化简，主要使学生对二次根式化简的基本情形有进一步的认识. 二次根式化简的内容比较复杂，课本在二次根式的乘、除、加、减运算等多处通过具体例子给出示范，使学生掌握二次根式化简的方法与结果的处理.

例 4 是二次根式乘法的综合运用，这里先要进行二次根式乘法运算，之后要逆用二次根式乘法运算法则进行化简. 通过例 4 的教学，学生应对二次根式乘法运算和结果处理有清晰的认识，这个过程也将迁移到二次根式除法和加减运算的学习过程中.

【教学过程设计建议(第二课时)】

1. 情境创设

这里的例 3、例 4 涉及到一些复杂和综合情形的处理，主要是进一步熟练二次根式的乘法运算及化简.

2. 探索活动

对于例题的教学，可以先让学生进行尝试性探索.

3. 例题教学

例 3 与例 2 相衔接，以进一步引导学生熟悉有关二次根式的化简，从而能处理稍为复杂的问题. 例 4 是关于二次根式乘法运算的综合运用. 教学时可以先用公式进行运算，再进行化简，也可以先化简再运用公式进行运算.

4. 思维拓展

根据教学需要，可以选择以下问题：

(1) 计算：$\sqrt{\frac{1}{6}}\times\sqrt{8}\times\sqrt{27}$；

(2) 将下列各式中根号外的数适当改变后移到根号内：$3\sqrt{2}$，$2\sqrt{3}$，$5\sqrt{5}$.

5. 小结

如何进行二次根式乘法运算？如何进行二次根式的化简？

微信公众号：电子课本大全

练习

1. 化简：

(1) $\sqrt{x^4+x^2}(x\geqslant 0)$；

(2) $\sqrt{x^3+2x^2y+xy^2}(x\geqslant 0, x+y\geqslant 0)$.

2. 计算：

(1) $\sqrt{3}\times\sqrt{18}$；　　(2) $\sqrt{\frac{2}{3}}\times\sqrt{12}$；

(3) $6\sqrt{2}\times 5\sqrt{6}$；　　(4) $\sqrt{a^5}\cdot\sqrt{ab}(a\geqslant 0, b\geqslant 0)$.

3. 已知矩形的长和宽分别为 40 cm、20 cm，求这个矩形的对角线的长.

4. 求下列根式的值：

(1) $\sqrt{a^2+b^2}$，其中 $a=2\sqrt{3}$、$b=3\sqrt{2}$；

(2) $\sqrt{a^2-b^2}$，其中 $a=3\sqrt{20}$、$b=-\sqrt{18}$.

已知平行四边形的面积为 $\sqrt{10}$，一边的长为 $\sqrt{5}$，求这边上的高.



尝试

填空：

(1) $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}}=$_____，$\sqrt{\frac{4}{25}}=\sqrt{(\quad)^2}=$_____；

(2) $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}}=$_____，$\sqrt{\frac{9}{16}}=\sqrt{(\quad)^2}=$_____；

(3) $\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{100}}=$_____，$\sqrt{\frac{49}{100}}=\sqrt{(\quad)^2}=$_____；

(4) $\frac{\sqrt{81}}{\sqrt{64}}=$_____，$\sqrt{\frac{81}{64}}=\sqrt{(\quad)^2}=$_____.

你有什么发现？请与同学交流.

一般地，当 $a\geqslant 0$、$b>0$ 时，$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2=\frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2}=\frac{a}{b}$，$\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2=\frac{a}{b}$，由此可见，$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ 与 $\sqrt{\frac{a}{b}}$ 都是 $\frac{a}{b}$ 的算术平方根.

【练习解答】

1. (1) $x\sqrt{x^2+1}$；(2) $(x+y)\sqrt{x}$.

2. (1) $3\sqrt{6}$；(2) $2\sqrt{2}$；(3) $60\sqrt{3}$；(4) $a^3\sqrt{b}$.

3. $20\sqrt{5}$ cm.

4. (1) $\sqrt{30}$；(2) $9\sqrt{2}$.

【内容解读】

通过求算术平方根，可以得到每组的两个式子均相等，由此通过归纳、猜想可以得到：

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}(a\geqslant 0, b>0).$$

【内容解读】

二次根式的除法运算法则的探索过程与乘法运算法则一样，要使学生经历观察、归纳、猜想、演绎推理确认这一过程.

【教学过程设计建议(第三课时)】

1. 情境创设

这里给出4组具体例子，让学生观察、归纳出二次根式除法的运算法则. 教学时可以根据需要多列举一些类似的例子让学生观察.

2. 探索活动

同二次根式乘法运算一样，在上述情境给出后，应引导学生计算，并进行比较，自觉得到结论. 同时，让学生自己列举更多的例子进行探索、归纳，提出自己的猜想. 然后利用算术平方根的定义，对猜想得到的除法运算法则进行演绎推理确认. 当学生对二次根式除法运算熟悉时，引导学生回顾过去整式的运算和二次根式乘法运算中的一些思想方法，逆用二次根式除法运算法则 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$，可得 $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$，这个公式在处理一些问题的计算时是十分有用的.

3. 例题教学

同二次根式乘法运算一样，这里的例5、例6也是为了让学生先熟悉二次根式除法运算法则，再逆用二次根式除法运算法则进行化简. 这里不要过分复杂化，避免学生混淆.

4. 思维拓展

根据学生情况，可以补充一些解决问题的方法. 例如：$\frac{\sqrt{60}}{\sqrt{15}}=\frac{\sqrt{4}\cdot\sqrt{15}}{\sqrt{15}}=\sqrt{4}=2$ 等. 还可以启发学生思考为什么在 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$ 中要求 $a\geqslant 0$，$b>0$.

微信公众号：电子课本大全

于是，我们得到：

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}\ (a\geqslant 0,\ b>0).$$

利用这个式子，可以进行二次根式的除法运算．

例 5　计算：

(1) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$；　　(2) $\frac{\sqrt{56}}{\sqrt{7}}$；

(3) $\sqrt{27}\div\sqrt{3}$；　　(4) $\sqrt{1\frac{2}{3}}\div\sqrt{\frac{1}{3}}$．

解： (1) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{12}{3}}=\sqrt{4}=2$；

(2) $\frac{\sqrt{56}}{\sqrt{7}}=\sqrt{\frac{56}{7}}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$；

(3) $\sqrt{27}\div\sqrt{3}=\sqrt{\frac{27}{3}}=\sqrt{9}=3$；

(4) $\sqrt{1\frac{2}{3}}\div\sqrt{\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{5}{3}\div\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{5}{3}\times 3}=\sqrt{5}$．

把 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}\ (a\geqslant 0,\ b>0)$ 反过来，得

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\ (a\geqslant 0,\ b>0).$$

利用这个式子可以化简一些二次根式．

例 6　化简：

(1) $\sqrt{\frac{16}{25}}$；　　(2) $\sqrt{\frac{3}{16}}$；

(3) $\sqrt{\frac{8}{9}}$；　　(4) $\sqrt{\frac{4b^2}{9a^2}}\ (a>0,\ b\geqslant 0)$．

解： (1) $\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}}=\frac{4}{5}$；

【内容解读】

二次根式除法运算的处理与二次根式乘法运算是相同的．例 5 是直接运用二次根式除法法则，运算结果不涉及分母中含根号或根号中含分母的情形，但涉及到被开方数中含有二次或高于二次的因数(或因式)的二次根式化简问题．

【内容解读】

例 6 是逆用二次根式除法法则进行二次根式化简的问题．其用意是让学生熟悉二次根式化简的方法以及在什么情形下逆用二次根式除法法则来进行二次根式的化简．

5. 小结

二次根式除法运算如何进行?对于简单的二次根式，如何逆用二次根式除法运算法则进行化简?

微信公众号：电子课本大全

(2) $\sqrt{\frac{3}{16}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{16}}=\frac{\sqrt{3}}{4}$；

(3) $\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$；

(4) 当 $a>0$、$b\geqslant 0$ 时，$\sqrt{\frac{4b^2}{9a^2}}=\frac{\sqrt{4b^2}}{\sqrt{9a^2}}=\frac{2b}{3a}$.



1. 计算：

(1) $\frac{\sqrt{60}}{\sqrt{15}}$；　(2) $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}$；

(3) $\sqrt{18}\div\sqrt{6}$；　(4) $\sqrt{8}\div\sqrt{1\frac{1}{3}}$.

2. 化简：

(1) $\sqrt{\frac{4}{9}}$；　(2) $\sqrt{3\frac{5}{9}}$；

(3) $\sqrt{\frac{3}{49}}$；　(4) $\sqrt{\frac{9a^2b^2}{16c^2}}(a\geqslant 0,\ b\geqslant 0,\ c>0)$.



填空：

(1) $\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{\ \ }}{\sqrt{\ \ }}=\frac{(\ \ )}{2}$；

(2) $\sqrt{\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{1\times(\ \ )}{3\times(\ \ )}}=\frac{\sqrt{1\times(\ \ )}}{\sqrt{3\times(\ \ )}}=\frac{(\ \ )}{3}$；

(3) 当 $a>0$ 时，$\sqrt{\frac{1}{a}}=\sqrt{\frac{1\times(\ \ )}{a\times(\ \ )}}=\frac{\sqrt{1\times(\ \ )}}{\sqrt{a\times(\ \ )}}=\frac{(\ \ )}{a}$.

当一个根式的被开方数是分数或分式时，只要分子、分母都乘适当的数或式，使分母成为开得尽方的因数或因式，就可以使被开方数中不含分母．例如，当 $a\geqslant 0$、$b>0$ 时，

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt{\frac{a\cdot b}{b\cdot b}}=\sqrt{\frac{ab}{b^2}}=\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{b^2}}=\frac{\sqrt{ab}}{b}.$$

【练习解答】

1. (1) 2；　(2) $\sqrt{2}$；
(3) $\sqrt{3}$；　(4) $\sqrt{6}$.

2. (1) $\frac{2}{3}$；　(2) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$；
(3) $\frac{\sqrt{3}}{7}$；　(4) $\frac{3ab}{4c}$.

【教学过程设计建议(第四课时)】

1. 情境创设

这里先给出两类二次根式化简的一般方法，然后通过具体例子加以进一步运用，目的是让学生通过具体操作，运用已经学过的方法与法则，学会处理两类常见二次根式的化简方法，而不要引入过多的概念与法则．

2. 探索活动

可以先通过具体例子提出问题：如何把被开方数中的分母化去呢？如何把分母中的根号去掉呢？结合具体问题，引导学生探索一般方法，再给出字母表达的式子．

3. 例题教学

例 7、例 8 的教学，应注意方法的使用，通过这两个例题的教学，让学生获得两类二次根式化简的一般方法，而不是简单获得结论，更不要为了得到结论而直接套用公式．

4. 思维拓展

具体教学时，可以把二次根式除法与化去分母中的根号相结合，以培养学生思维的灵活性．例如：

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{18}}=\frac{\sqrt{5}\times\sqrt{2}}{\sqrt{18}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{36}}=\frac{\sqrt{10}}{6}.$$

5. 小结

一般地，二次根式运算的结果中，要求分母中不含根号，被开方数中也不含分母．那么怎样进行这两类二次根式的化简呢？

微信公众号：电子课本大全

【内容解读】

在进行二次根式除法运算时，难免会遇到被开方数含有分母或分母中因式含有根号的情形．对于初学者可以允许出现下列结果：$\frac{1}{\sqrt{2}}$、$\frac{1}{\sqrt{3}}$等．在没有介绍分母有理化、最简二次根式等概念的情况下，如何处理这样的结果呢？

课本仍采取通过具体示例的方式，让学生学会处理的方法，而且限于两类问题的解决：

$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{ab}}{b}$，$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{ab}}{b}$（$a\geqslant 0$，$b>0$）．

至于分母中含有加减运算的二次根式化简，课本是通过阅读方式给出的．

例 7　化简下列各式，使被开方数中不含分母．

(1) $\sqrt{\frac{2}{3}}$；　　(2) $\sqrt{2\frac{1}{3}}$；

(3) $\sqrt{\frac{2y}{3x}}$（$x>0$，$y\geqslant 0$）．

解： (1) $\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{2\times 3}{3\times 3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$；

(2) $\sqrt{2\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{7}{3}}=\sqrt{\frac{7\times 3}{3\times 3}}=\frac{\sqrt{21}}{3}$；

(3) 当 $x>0$、$y\geqslant 0$ 时，$\sqrt{\frac{2y}{3x}}=\sqrt{\frac{2y\cdot 3x}{3x\cdot 3x}}=\frac{\sqrt{6xy}}{3x}$．

探索

填空：

(1) $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1\times(\quad)}{\sqrt{2}\times(\quad)}=\frac{(\quad)}{2}$；

(2) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}\times(\quad)}{\sqrt{3}\times(\quad)}=\frac{(\quad)}{3}$；

(3) 当 $a>0$ 时，$\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{1\times(\quad)}{\sqrt{a}\times(\quad)}=\frac{(\quad)}{a}$．

当一个式子的分母中有根号时，只要分子、分母都乘适当的数或式，就可以使分母中不含有根号．例如，当 $a\geqslant 0$、$b>0$ 时，

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{b}\cdot\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{ab}}{b}.$$

【内容解读】

例 7、例 8 的教学，主要是引导学生在解决具体问题的过程中，感受到“一般地，二次根式运算的结果中，要求分母不含有根号，被开方数中也不含有分母”的意义．不要过多地进行拓展与复杂运算．

例 8　化简下列各式，使分母中不含根号．

(1) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$；　　(2) $\frac{1}{\sqrt{5}}$；

(3) $\frac{\sqrt{5y}}{\sqrt{18x^3}}$（$x>0$，$y\geqslant 0$）．

158

【教学茶座】

●如何区分二次根式的乘法、除法运算法则与相应的性质？

▲二次根式的乘法、除法关键是运算，与之对应的性质在课本中主要用于运算结果的化简，当然在过程中可以灵活地运用，不要造成僵化的练习．

●本节教学中，与传统内容有较大区别，如何把握教学的尺度？

▲对于一些概念与法则，关键是如何区分运算法则与性质，课本做了大量的精简处理，教学时应把握编写意图，特别是运算法则的教学，是合情推理到演绎推理的典型素材．

微信公众号：电子课本大全

解：(1) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$；

(2) $\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$；

(3) 当 $x>0$、$y\geqslant 0$ 时，$\frac{\sqrt{5y}}{\sqrt{18x^3}}=\frac{\sqrt{5y}\cdot\sqrt{2x}}{\sqrt{18x^3}\cdot\sqrt{2x}}=\frac{\sqrt{10xy}}{6x^2}$.

二次根式运算的结果中，被开方数中应不含有分母，分母中应不含有根号.

一般地，化简二次根式就是使二次根式：

(1) 被开方数中不含能开得尽方的因数或因式；

(2) 被开方数中不含分母；

(3) 分母中不含有根号.

这样化简后得到的二次根式叫做**最简二次根式**(simplest quadratic radical).



1. 化简：

(1) $\sqrt{\frac{2}{5}}$；　　(2) $\sqrt{3\frac{1}{5}}$；

(3) $\sqrt{\frac{3b}{5a}}(a>0,b\geqslant 0)$.

2. 计算：

(1) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$；　　(2) $\frac{1}{\sqrt{8}}$；

(3) $\frac{\sqrt{5b}}{\sqrt{12a^3}}(a>0,b\geqslant 0)$.

【练习解答】

1. (1) $\frac{\sqrt{10}}{5}$；(2) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$；(3) $\frac{\sqrt{15ab}}{5a}$.

2. (1) $\frac{\sqrt{15}}{5}$；(2) $\frac{\sqrt{2}}{4}$；(3) $\frac{\sqrt{15ab}}{6a^2}$.

微信公众号：电子课本大全

12.2 习题

1. 计算：

(1) $\sqrt{3}\times\sqrt{27}$；　(2) $\sqrt{\frac{1}{5}}\times\sqrt{45}$；

(3) $\sqrt{18a}\cdot\sqrt{2a}(a\geqslant 0)$；　(4) $2\sqrt{3}\times\sqrt{\frac{1}{3}}$.

2. 化简：

(1) $\sqrt{125}$；　(2) $\sqrt{72}$；

(3) $\sqrt{25x^3}(x\geqslant 0)$；　(4) $\sqrt{16a^2b^5}(a\geqslant 0,\ b\geqslant 0)$.

3. 计算：

(1) $\sqrt{15}\times\sqrt{\frac{5}{3}}$；

(2) $\sqrt{14}\times\sqrt{35}$；

(3) $2\sqrt{5a}\cdot\sqrt{10a}(a\geqslant 0)$；

(4) $3a\sqrt{12ab}\cdot\left(-\frac{2}{3}\sqrt{6b}\right)(a\geqslant 0,\ b\geqslant 0)$.

4. 直角三角形的两条直角边长分别为 $\sqrt{2}$ cm、$\sqrt{10}$ cm，求这个直角三角形的面积.

5. 计算：

(1) $\frac{\sqrt{112}}{\sqrt{14}}$；　(2) $\frac{\sqrt{95}}{\sqrt{19}}$；

(3) $\sqrt{75}\div\sqrt{15}$；　(4) $\sqrt{4\frac{1}{2}}\div\sqrt{2\frac{1}{4}}$.

6. 已知矩形的面积为 $\sqrt{12}$ cm^2，宽为 $\sqrt{3}$ cm，求这个矩形的长.

7. 化简：

(1) $\sqrt{\frac{25}{81}}$；　(2) $\sqrt{3\frac{1}{16}}$；

(3) $\sqrt{\frac{3}{4}}$；　(4) $\sqrt{\frac{ab^5}{c^2}}(a\geqslant 0,\ b\geqslant 0,\ c>0)$.

8. 化简：

(1) $\sqrt{\frac{1}{5}}$；　(2) $\sqrt{8\frac{1}{6}}$；

(3) $\sqrt{\frac{1}{x}}(x>0)$；　(4) $\sqrt{\frac{3b}{2a}}(a>0,\ b\geqslant 0)$.

【习题解答】

1. (1) 9；　(2) 3；
   (3) $6a$；　(4) 2.
2. (1) $5\sqrt{5}$；(2) $6\sqrt{2}$；
   (3) $5x\sqrt{x}$；(4) $4ab^2\sqrt{b}$.
3. (1) 5；　(2) $7\sqrt{10}$；
   (3) $10\sqrt{2}a$；(4) $-12ab\sqrt{2a}$.
4. $\sqrt{5}$ cm^2.
5. (1) $2\sqrt{2}$；(2) $\sqrt{5}$；
   (3) $\sqrt{5}$；　(4) $\sqrt{2}$.
6. 2 cm.
7. (1) $\frac{5}{9}$；　(2) $\frac{7}{4}$；
   (3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$；　(4) $\frac{b^2\sqrt{ab}}{c}$.
8. (1) $\frac{\sqrt{5}}{5}$；　(2) $\frac{7\sqrt{6}}{6}$；
   (3) $\frac{\sqrt{x}}{x}$；　(4) $\frac{\sqrt{6ab}}{2a}$.

微信公众号：电子课本大全

9. 计算：

(1) $\frac{1}{\sqrt{29}}$；　　(2) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{72}}$；

(3) $\frac{1}{\sqrt{3ab^3}}(a>0, b>0)$；　　(4) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{50y}}(x\geqslant 0, y>0)$.

10. 若一个三角形的三边长分别为 a、b、c，设 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$，则这个三角形的面积 $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$（海伦-秦九韶公式）. 当 $a=4$、$b=5$、$c=6$ 时，求 S 的值.

9. (1) $\frac{\sqrt{29}}{29}$；　　(2) $\frac{\sqrt{14}}{12}$；

(3) $\frac{\sqrt{3ab}}{3ab^2}$；　　(4) $\frac{\sqrt{2xy}}{10y}$.

10. 因为 $a=4$，$b=5$，$c=6$，所以

$$p=\frac{1}{2}(a+b+c)=\frac{1}{2}(4+5+6)=\frac{15}{2}.$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$=\sqrt{\frac{15}{2}\left(\frac{15}{2}-4\right)\left(\frac{15}{2}-5\right)\left(\frac{15}{2}-6\right)}$$

$$=\frac{15\sqrt{7}}{4}.$$

微信公众号：电子课本大全

12.3　二次根式的加减

【内容解读】

这里所给出的3组二次根式，每组中的二次根式实际上都是同类二次根式．而第(3)组经过化简后，可以看到每个二次根式的被开方数是相同的．关于同类二次根式课本用描述性的语言给出了概念．教学时应集中在简单的二次根式(不需要进行过复杂化简)加减上．

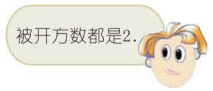
思考

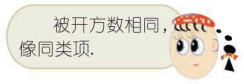
下列 3 组二次根式各有什么共同特征？

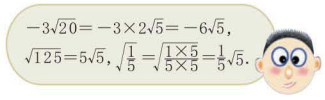
(1) $\sqrt{2}$，$3\sqrt{2}$，$-2\sqrt{2}$，$15\sqrt{2}$，$\frac{2}{3}\sqrt{2}$；

(2) $\sqrt{3}$，$-5\sqrt{3}$，$6\sqrt{3}$，$17\sqrt{3}$，$\frac{2}{13}\sqrt{3}$；

(3) $\sqrt{5}$，$-3\sqrt{20}$，$\sqrt{125}$，$\sqrt{\frac{1}{5}}$．







经过化简后，被开方数相同的二次根式，叫做同类二次根式．例如，上面的 3 组二次根式都是同类二次根式．

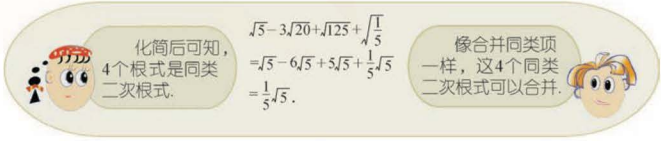
【内容解读】

二次根式的加减运算可以与整式加减运算类比进行．这里是通过具体问题，使学生感受到二次根式加减运算的方法："二次根式相加减，只需先将二次根式化简为最简二次根式，然后合并同类二次根式．"

化二次根式为最简二次根式主要有以下三种情形：被开方数中含有二次以上的因数(或因式)、被开方数中含有分母、分母中含有根号(单个根式的情形)．这些情形化简的方法，学生已经掌握了．

尝试

试计算 $\sqrt{5}-3\sqrt{20}+\sqrt{125}+\sqrt{\frac{1}{5}}$．



二次根式相加减，先化简每个二次根式，然后合并同类二次根式．

例 1　计算：

(1) $3\sqrt{2}+4\sqrt{3}-2\sqrt{2}+\sqrt{3}$；　(2) $\sqrt{12}+\sqrt{18}-\sqrt{8}-\sqrt{32}$；

(3) $\sqrt{40}-5\sqrt{\frac{1}{10}}+\sqrt{10}$．

【教学目标】

1. 了解同类二次根式的概念，掌握二次根式的加减运算．

2. 能进行二次根式简单的四则运算．

3. 能够运用二次根式的四则运算解决简单的实际问题．

【教学过程设计建议(第一课时)】

1. 情境创设

课本通过3组形式不同、特征相同的二次根式，引导学生进行观察、比较，最终归纳出各组的共同特征，从而得到同类二次根式的概念．同时，通过第(3)组二次根式，又告诉学生：在判断一组二次根式是否是同类二次根式时，首先要将二次根式化简为最简二次根式，然后再判断它们是否为同类二次根式．

2. 探索活动

本节课可以从两个角度引导学生进行探索，一方面是要通过观察、分析、归纳得到同类二次根式的概念，另一方面是让学生尝试计算 $3\sqrt{2}+2\sqrt{2}$、$5\sqrt{x}-2\sqrt{x}$ 等问题，引导学生将二次根式加减运算与整式加减运算进行类比，得到二次根式的加减运算的方法．

3. 例题教学

例 1 主要是二次根式加减运算的基本方法与步骤．教学时要通过具体过程，提醒学生在进行二次根式的运算时，首先要将每一个二次根式化简为最简二次根式，然后合并同类二次根式．例 2 是二次根式加减运算法则的简单运用．

微信公众号：电子课本大全

解：(1) $3\sqrt{2}+4\sqrt{3}-2\sqrt{2}+\sqrt{3}$

$=3\sqrt{2}-2\sqrt{2}+4\sqrt{3}+\sqrt{3}$

$=\sqrt{2}+5\sqrt{3}$；

(2) $\sqrt{12}+\sqrt{18}-\sqrt{8}-\sqrt{32}$

$=2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-2\sqrt{2}-4\sqrt{2}$

$=2\sqrt{3}-3\sqrt{2}$；

(3) $\sqrt{40}-5\sqrt{\frac{1}{10}}+\sqrt{10}$

$=2\sqrt{10}-5\times\frac{\sqrt{10}}{10}+\sqrt{10}$

$=\frac{5}{2}\sqrt{10}$.

例2 如图12-3，两个圆的圆心相同，半径分别为R、r，面积分别为18 cm²、8 cm²．求圆环的宽度(两圆半径之差)．

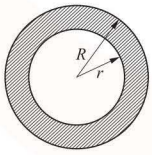


图12-3

解：根据题意，得

$R=\sqrt{\frac{18}{\pi}}$，$r=\sqrt{\frac{8}{\pi}}$.

$R-r=\sqrt{\frac{18}{\pi}}-\sqrt{\frac{8}{\pi}}=\frac{\sqrt{18\pi}}{\pi}-\frac{\sqrt{8\pi}}{\pi}$

$=\frac{3\sqrt{2\pi}}{\pi}-\frac{2\sqrt{2\pi}}{\pi}=\frac{1}{\pi}\sqrt{2\pi}$.

答：圆环的宽度为$\frac{1}{\pi}\sqrt{2\pi}$ cm.

练习

1. 计算：

(1) $3\sqrt{6}-\sqrt{5}-\frac{1}{2}\sqrt{6}+2\sqrt{5}+\sqrt{2}$；

(2) $\sqrt{27}-\sqrt{45}-\sqrt{20}+\sqrt{75}$；

(3) $4\sqrt{ab}+5\sqrt{ab}-\frac{3}{2}\sqrt{ab}-\sqrt{4ab}\ (a\geqslant 0,\ b\geqslant 0)$；

(4) $\left(2\sqrt{\frac{1}{27}}-\frac{2}{3}\sqrt{18}\right)-\left(\sqrt{\frac{4}{3}}-4\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$.

【练习解答】

1. (1) $\frac{5}{2}\sqrt{6}+\sqrt{5}+\sqrt{2}$；

(2) $8\sqrt{3}-5\sqrt{5}$；

(3) $\frac{11}{2}\sqrt{ab}$；

(4) $-\frac{4}{9}\sqrt{3}$.

4. 思维拓展

在教学时，可以引导学生对二次根式的加减运算与整式加减运算进行类比，发现两者的异同之处，还可以根据情况再举一些二次根式加减运算的简单应用问题．

5. 小结

举例说明什么是同类二次根式？如何进行二次根式的加减运算?在进行二次根式的加减运算时，应注意什么？

【教学过程设计建议(第二课时)】

1. 情境创设

本课时两个例题主要是关于二次根式的混合运算，尤其是利用整式乘法的有关公式进行二次根式的运算．一方面使学生熟练掌握二次根式的运算法则，另一方面引导学生感受并运用类比的方法，独立进行二次根式的运算．

2. 探索活动

对于两个例题的教学，不要直接让学生进行运算，而是先提出问题，引导学生观察、思考、探索，大胆地提出自己解决问题的方法，最终借助类比方法，获得运算结果．

3. 例题教学

例3是直接与单项式乘多项式、多项式乘多项式类比进行二次根式运算的，例4是与整式乘法公式类比进行二次根式运算的．在教学时，要注意先让学生对所给式子进行观察，根据式子的结构特征，提出思路，再进行计算．

4. 思维拓展

(1) 若教学条件允许，可以引导学生逆用二次根式

微信公众号：电子课本大全

2. (1) $3\sqrt{2}$ cm；

(2) $3\sqrt{s}$ cm .

2. (1) 两个正方形的面积分别为 2 cm²、8 cm²，求这两个正方形边长的和；

(2) 两个正方形的面积分别为 s cm²、$4s$ cm² ($s>0$)，求这两个正方形边长的和.

进行二次根式的混合运算时，整式运算的法则、公式和运算律仍然适用.

例 3　计算：

(1) $\left(\sqrt{\frac{5}{12}}+2\sqrt{3}\right)\times\sqrt{15}$；　　(2) $(3+\sqrt{10})(\sqrt{2}-\sqrt{5})$.

解：(1) $\left(\sqrt{\frac{5}{12}}+2\sqrt{3}\right)\times\sqrt{15}$

$=\sqrt{\frac{5}{12}}\times\sqrt{15}+2\sqrt{3}\times\sqrt{15}$

$=\sqrt{\frac{5}{4}\times5}+2\sqrt{9\times5}$

$=\frac{5}{2}+6\sqrt{5}$；

(2) $(3+\sqrt{10})(\sqrt{2}-\sqrt{5})$

$=3\sqrt{2}-3\sqrt{5}+\sqrt{10}\times\sqrt{2}-\sqrt{10}\times\sqrt{5}$

$=3\sqrt{2}-3\sqrt{5}+2\sqrt{5}-5\sqrt{2}$

$=-2\sqrt{2}-\sqrt{5}$.

例 4　计算：

(1) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})$；　　(2) $(3+2\sqrt{5})^2$.

解：(1) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

$=(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2$

$=3-2$

$=1$；

【内容解读】

例 3、例 4 的教学，实际上是类比整式的乘法运算进行的，特别是例 4 借助了乘法公式进行运算. 教学时，注意让学生观察二次根式的特点，直接运用整式的运算律或公式，而不要过于追求理论的推演.

运算的法则，解决下述问题：

在实数范围内因式分解：x^4-4，x^2-2x-2 等.

(2) 还可以通过示范解决下列问题：化去 $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ 分母中的根号.

5. 小结

在进行二次根式运算时，应注意什么？

【教学茶座】

●在教学中，怎样引导学生认识整式加减运算与二次根式加减运算之间的联系？

▲二次根式的加减运算与整式的加减运算是相类似的，如果将整式运算中的字母含义扩大，那么两者是统一的.

二次根式加减运算的关键是先将二次根式化为最简二次根式，再合并同类二次根式. 要培养学生这种解决问题的意识，先化简，再合并. 在整式运算时是这样，二次根式运算时也是这样，将来解决其他问题也应有这种思维.

●类比思想方法要不要明确告诉学生？

▲类比思想方法的教学只有经历过程，才能有感悟与体验，不宜简单告诉学生. 将来到高中阶段“推理与证明”一章的学习中，会专门来回顾整理这些思想方法.

微信公众号：电子课本大全

(2) $(3+2\sqrt{5})^2$

$=3^2+2\times3\times2\sqrt{5}+(2\sqrt{5})^2$

$=9+12\sqrt{5}+20$

$=29+12\sqrt{5}$.



1. 计算：

(1) $(\sqrt{3}+2\sqrt{2})\times\sqrt{6}$；　(2) $\sqrt{5}\times(\sqrt{10}-\sqrt{5})$；

(3) $(\sqrt{6}-\sqrt{3}+1)\times2\sqrt{3}$；　(4) $(5-\sqrt{6})(\sqrt{3}+\sqrt{2})$.

2. 计算：

(1) $(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)$；

(2) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ $(a\geqslant0,\ b\geqslant0)$；

(3) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$；

(4) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2(a\geqslant0,\ b\geqslant0)$.



1. 计算：

(1) $2\sqrt{3}-3\sqrt{5}-\sqrt{5}+5\sqrt{5}+7\sqrt{3}$；

(2) $\sqrt{12}-\sqrt{27}-\sqrt{20}+\sqrt{50}$；

(3) $\sqrt{4x}+2\sqrt{2x}-\frac{1}{2}\sqrt{8x}-4\sqrt{x}(x\geqslant0)$；

(4) $\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{8}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{8}}$.

2. 计算：

(1) $\left(\frac{1}{3}\sqrt{18}-\frac{1}{2}\sqrt{12}\right)-\left(3\sqrt{\frac{1}{3}}-2\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$；

(2) $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{2}$.

【练习解答】

1. (1) $3\sqrt{2}+4\sqrt{3}$；
(2) $5\sqrt{2}-5$；
(3) $6\sqrt{2}-6+2\sqrt{3}$；
(4) $3\sqrt{3}+2\sqrt{2}$.
2. (1) 4；
(2) $a-b$；
(3) $5-2\sqrt{6}$；
(4) $a+b+2\sqrt{ab}$.

【习题解答】

1. (1) $9\sqrt{3}+\sqrt{5}$；
(2) $-\sqrt{3}-2\sqrt{5}+5\sqrt{2}$；
(3) $\sqrt{2x}-2\sqrt{x}$；
(4) $-\frac{5}{4}\sqrt{2}$.
2. (1) $2\sqrt{2}-2\sqrt{3}$；
(2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}$.

微信公众号：电子课本大全

3. (1) $12-6\sqrt{2}$；

(2) $15\sqrt{5}+15\sqrt{2}$；

(3) $16\sqrt{3}-12\sqrt{2}$.

4. (1) $26-9\sqrt{6}$；

(2) $-\frac{5}{6}\sqrt{6}$；

(3) 3；

(4) 1.

5. (1) 答案不唯一，例如 $\sqrt{2}$，$\sqrt{8}$，$\sqrt{32}$ 等等；

(2) 答案不唯一，例如 $2-\sqrt{3}$，$4-2\sqrt{3}$ 等.

【内容解读】

这篇阅读的意图是让学生初步了解互为有理化因式的概念，并能进行简单的分母有理化. 教学时可以引导学生阅读，但没有必要提出分母有理化的概念，也不要做过多的补充.

3. 计算：

(1) $(2\sqrt{3}-\sqrt{6})\times\sqrt{12}$；　　(2) $5\sqrt{3}\times(\sqrt{15}+\sqrt{6})$；

(3) $(\sqrt{18}-\sqrt{12}+\sqrt{2})\times 2\sqrt{6}$.

4. 计算：

(1) $(2\sqrt{3}-5\sqrt{2})(\sqrt{3}-2\sqrt{2})$；　　(2) $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\sqrt{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{3}\right)$；

(3) $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$；　　(4) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

5. (1) 写出一个二次根式，使它与 $\sqrt{2}$ 的积是有理数；

(2) 写出一个含有二次根式的式子，使它与 $2+\sqrt{3}$ 的积不含有二次根式.

阅读

互为有理化因式

像 $(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})=3$，$\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=a$ $(a\geqslant 0)$，$(\sqrt{b}+1)(\sqrt{b}-1)=b-1$ $(b\geqslant 0)$ ……两个含有二次根式的代数式相乘，积不含有二次根式，我们称这两个代数式互为有理化因式.

例如，$\sqrt{3}$ 与 $\sqrt{3}$、$\sqrt{2}+1$ 与 $\sqrt{2}-1$、$2\sqrt{3}+3\sqrt{5}$ 与 $2\sqrt{3}-3\sqrt{5}$ 等都是互为有理化因式.

在进行二次根式计算时，利用有理化因式，可以化去分母中的根号.

例如：

$$\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6};$$

$$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\frac{2+2\sqrt{2}+1}{2-1}=3+2\sqrt{2};$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{2}-1}\\=&\frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}+\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}\\=&2-\sqrt{3}+\sqrt{2}+1\\=&3-\sqrt{3}+\sqrt{2}.\end{aligned}$$

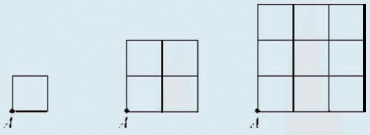
微信公众号：电子课本大全

数学活动

画画·算算

图 12－4（1）、（2）、（3）中，小正方形的边长为 1．在图中分别找出以 A 为一个顶点的所有矩形，并画出以 A 为一个端点的所有对角线．这 3 个图形中，这样的对角线各有多少条？它们的长度的和分别为多少？

自己再用若干个边长为 1 的小正方形拼一个矩形，仿上画出以 A 为一个端点的所有对角线，并计算这些对角线长度的和，试试看．



（1）　　（2）　　（3）

图 12－4

小结与思考

1. 本章主要学习了二次根式的概念、基本性质和运算法则．

2. 根据算术平方根的意义，我们得到：

（1）$(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant 0)$；　　（2）$\sqrt{a^2}=|a|$．

3. 根据 $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}(a\geqslant 0,b\geqslant 0)$，$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}(a\geqslant 0,b>0)$，可以进行二次根式的乘、除运算．

4. 化简二次根式就是使二次根式：

（1）被开方数中不含能开得尽方的因数或因式；

（2）被开方数中不含分母；

（3）分母中不含有根号．

这样化简后得到的二次根式叫做最简二次根式．

5. 二次根式相加、减，先将各个二次根式化简，再合并同类二次根式．

6. 把二次根式的运算与整式的运算进行比较，你能发现它们的相同点和不同点吗？

【教学目标】

1. 通过将矩形对角线长度转化为二次根式相关问题，使学生体验建立模型、解决问题的过程，并尝试发现和提出问题．

2. 了解数与形相关知识的联系，进一步理解矩形、二次根式的相关知识．

【活动建议】

建议活动分为三个部分：

1. 独立完成图 12–4 的相关问题．

2. 以 2 人为一组，每人自编一个问题，构造一个满足条件的矩形，请同伴计算对角线长度和．

3. 全班交流，填写课本附录中的数学活动评价表．

【教学过程设计建议】

1. 情境创设

可以创设纠错情境，将学生在平时学习中出现的易错问题，结合“小结与思考”的知识序列，设计成本课的问题情境．

2. 例题教学

以下问题可供选取：

（1）设 n 为正整数，且 $n<\sqrt{65}<n+1$，求 n 的值；

（2）设 m、n 为两个连续的整数，且 $m<\sqrt{11}<n$，求 $m+n$ 的值；

微信公众号：电子课本大全

复习巩固

1. 要使下列各式有意义，x 应是怎样的实数？

(1) $\sqrt{6+2x}$；　(2) $\sqrt{2-x}$；

(3) $\sqrt{(x-1)^2}$；　(4) $\dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$.

2. 下列等式中，字母应分别符合什么条件？

(1) $\sqrt{a^2}=a$；　(2) $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$；

(3) $\sqrt{x(x+1)}=\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+1}$；　(4) $\sqrt{x^2-6x+9}=3-x$.

3. 化简：

(1) $\sqrt{72}$；　(2) $\sqrt{25^2-24^2}$；

(3) $\sqrt{6\times12\times18}$；　(4) $\sqrt{75x^3y^2}\,(x\geqslant0,\ y\geqslant0)$.

4. 计算：

(1) $2\sqrt{3}+3\sqrt{12}-\sqrt{48}$；

(2) $\sqrt{8}+3\sqrt{\dfrac{1}{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；

(3) $\sqrt{50}-\dfrac{1}{\sqrt{5}}+2\sqrt{20}-\sqrt{45}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；

(4) $\sqrt{108}+\sqrt{\dfrac{3}{25}}+\sqrt{\dfrac{1}{2}}-\sqrt{32}$.

5. 计算：

(1) $\left(2\sqrt{12}-3\sqrt{\dfrac{1}{3}}\right)\times\sqrt{6}$；

(2) $\left(\dfrac{\sqrt{8}}{2}-\sqrt{\dfrac{2}{5}}\right)\left(5\sqrt{\dfrac{1}{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$；

(3) $(2\sqrt{5}+3\sqrt{2})(2\sqrt{5}-3\sqrt{2})$；

(4) $(\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5})(\sqrt{3}-\sqrt{2}-\sqrt{5})$.

6. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=\sqrt{10}$ cm，$AB=\sqrt{34}$ cm. 求 BC.

【复习题解答】

1. (1) $x\geqslant-3$；
(2) $x\leqslant2$；
(3) x 为一切实数；
(4) $x\geqslant-1$ 且 $x\neq0$.

2. (1) $a\geqslant0$；
(2) $a\geqslant0$，$b\geqslant0$；
(3) $x\geqslant0$；
(4) $x\leqslant3$.

3. (1) $6\sqrt{2}$；
(2) 7；
(3) 36；
(4) $5xy\sqrt{3x}$.

4. (1) $4\sqrt{3}$；
(2) $\dfrac{3}{2}\sqrt{2}+\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$；
(3) $\dfrac{11}{2}\sqrt{2}+\dfrac{4}{5}\sqrt{5}$；
(4) $\dfrac{31}{5}\sqrt{3}-\dfrac{7}{2}\sqrt{2}$.

5. (1) $9\sqrt{2}$；
(2) $5-\sqrt{5}-\dfrac{\sqrt{10}}{5}+\dfrac{\sqrt{2}}{5}$；
(3) 2；
(4) $-4-2\sqrt{10}$.

6. $2\sqrt{6}$ cm.

(3) 计算：① $\sqrt{48}-9\sqrt{\dfrac{1}{3}}$；② $\left(\sqrt{6}+\sqrt{10}\times\sqrt{15}\right)\times\sqrt{3}$；

(4) 已知：$x=1+\sqrt{2}$，$y=1-\sqrt{2}$，求 $x^2+y^2-xy-2x+2y$ 的值；

(5) 已知 $x=\sqrt{3}+\sqrt{2}$，$y=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，求 $\dfrac{1}{x^2-y^2}\div\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}\right)$ 的值.

(答案：(1) 8；(2) 7；(3) ① $\sqrt{3}$；② $18\sqrt{2}$；(4) $7-4\sqrt{2}$；(5) $\dfrac{\sqrt{3}}{48}$.)

3. 思维拓展

已知 x、y 为实数，且 $y=\sqrt{x^2-9}-\sqrt{9-x^2}+4$，求 $x-y$ 的值.

(答案：-1 或 -7.)

4. 小结

举例说明二次根式运算中的常见错误.

微信公众号：电子课本大全

灵活运用

7. 已知 $x=\sqrt{3}+1$，求 x^2-2x+1 的值.

8. 物体从静止状态自由下落的高度 h(m)与所需的时间 t(s)满足关系式 $h=\frac{1}{2}gt^2$，取 g 的值为 10 m/s²，这个关系式可以写成 $t=\sqrt{\frac{h}{5}}$. 如果 4 个苹果分别从离地面 2 m、2.5 m、3.2 m、3.6 m 处落下，求它们落到地面所用时间的总和.



9. 已知 $\sqrt{a-3}+\sqrt{2-b}=0$，求 $\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{b}}$ 的值.

探索研究

10. 已知 m 是 $\sqrt{2}$ 的小数部分，求 $\sqrt{m^2+\frac{1}{m^2}-2}$ 的值.

11. 在矩形 $ABCD$ 中，$AB=a$，$BC=b$，M 是 BC 的中点，$DE\perp AM$，垂足为 E. 用含 a、b 的代数式表示 DE 的长.

7. 因为 $x=\sqrt{3}+1$，

所以 $x-1=\sqrt{3}$.

所以 $x^2-2x+1=3$.

8. $t_1+t_2+t_3+t_4=\sqrt{\frac{2}{5}}+\sqrt{\frac{2.5}{5}}+\sqrt{\frac{3.2}{5}}+\sqrt{\frac{3.6}{5}}=\frac{\sqrt{10}}{5}+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{4}{5}+\frac{3\sqrt{2}}{5}=\frac{2\sqrt{10}+11\sqrt{2}+8}{10}$(s).

9. 由 $\sqrt{a-3}+\sqrt{2-b}=0$ 可知，$a=3$，$b=2$. 所以 $\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{b}}=\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}+\sqrt{3}=\frac{4}{3}\sqrt{3}$.

10. 因为 $1<2<4$，所以 $1<\sqrt{2}<2$. 因而 $\sqrt{2}$ 的整数部分为 1，而 m 是 $\sqrt{2}$ 的小数部分，故有 $\sqrt{2}=1+m$. 所以 $m=\sqrt{2}-1$，$\frac{1}{m}=\sqrt{2}+1$. 从而 $\sqrt{m^2+\frac{1}{m^2}-2}=\sqrt{\left(m-\frac{1}{m}\right)^2}=2$.

11. (1) 若垂足 E 在线段 AM 上，连接 DM，由 $\triangle ADM$ 的面积为矩形 $ABCD$ 面积的一半，可得 $DE=\frac{2ab\sqrt{4a^2+b^2}}{4a^2+b^2}$；

(2) 若垂足 E 在线段 AM 的延长线上，结论与(1)相同.

微信公众号：电子课本大全

课题学习

心率的调查

心率是指单位时间内心脏搏动的次数，一般指每分钟的心跳次数．正常的成年人安静时的心率为 60～100 次/分（平均心率在 75 次/分左右），新生儿的心率为 130～150 次/分，2～4 岁儿童的心率为 110～120 次/分，随着年龄增长儿童的心率逐年减少，14 岁以后逐渐接近成年人．



1. 测量并记录自己的心率．
2. 收集、整理全班同学的心率数据，并列出频数分布表、绘制频数分布直方图．



根据列出的频数分布表、绘制的频数分布直方图，分析全班同学心率的总体分布情况．

微信公众号：电子课本大全

《数学补充习题》八年级下册参考答案

第7章　数据的收集、整理、描述

7.1　普查与抽样调查(1)

1. (1) 为普查；(2) 为抽样调查，该批电视机的使用寿命的全体是总体，其中的每一台电视机的使用寿命是个体，从中抽取的5台电视机的使用寿命是总体的一个样本，样本容量为5；(3) 为抽样调查，我国公民的年龄的全体是总体，我国每一个公民的年龄是个体，北京市的所有公民的年龄是总体的一个样本，样本容量是北京市公民的人口数；(4) 为抽样调查，所在年级同学课外活动时间的全体是总体，其中的每位同学的课外活动的时间是个体，所在班级同学课外活动的时间是总体的一个样本，样本容量为所在班级的学生数.　**2.** (1) 用抽样调查方式；(2) 用普查方式；(3) 用普查方式；(4) 普查和抽样调查均可.

7.1　普查与抽样调查(2)

1. B品牌，E品牌.　**2.** 总支出约为2 000元，购买食品的支出约为620元，购买服装的支出约为460元.

3. (1) 50，30，40；(2) 略；(3) 估计约有80名学生是由家长接送上学的.

7.2　统计图的选用(1)

1. $360^\circ \times 40\% = 144^\circ$.　**2.** (1) 根据所在学校实际数据回答，扇形A约代表八年级学生人数的一半；(2) 约代表12 ha旱地；(3) 约代表9 t黄豆.　**3.** (1) 对应的扇形圆心角分别为198°、90°、72°；(2) 对应的扇形圆心角分别为252°、72°、36°.

7.2　统计图的选用(2)

1. (1) 抽样调查了40名学生；(2) 图略，对应的扇形圆心角分别为126°、90°、108°、36°　(3) 约有500人

2. (1) 选用扇形统计图，图略；(2) 选用折线统计图，图略；(3) 选用条形统计图，图略.

7.3　频数和频率

1. 2，0.04.

2.

身高/cm	145.5以下	145.5～150.5	150.5～155.5	155.5～160.5	160.5～165.5	165.5～170.5	170.5以上
频数	7	6	11	14	6	4	2
频率	0.14	0.12	0.22	0.28	0.12	0.08	0.04

3. (1)

身高/cm	163	165	166	170	172	173	174	178
频　数	1	1	1	4	1	1	2	5
频　率	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{16}$

(2) 身高超过170 cm的同学有9人，约占总人数的56%.

7.4　频数分布表和频数分布直方图

1. (1) 该班共有54名学生；(2) 心率在78～84(次/分)的学生最多，约占全班人数的26%.

2. (1)

分数段	49.5～59.5分	59.5～69.5分	69.5～79.5分	79.5～89.5分	89.5～99.5分
划记	丅	正正一	正正下	正正正丅	正
频数	2	11	13	17	5

(2) 频数分布直方图略.　(3) 由频数分布表、频数分布直方图可以发现，分数在79.5～89.5分范围内的学生最多，有17人；测试成绩主要分布在59.5～89.5分范围内，约占全班学生数的85.4%；分数在90分以上(含90分)的学生较

微信公众号：电子课本大全

少；不及格的学生最少；总体呈现“中间高两边低”的分布特征等.

小结与思考

1. 落在该组内的数据的个数，该组的频数与数据总数的比值. **2.** 5，8，0.4. **3.** 5，$\frac{5}{21}$. **4.** (1) 为抽样调查，所在年级同学每天学习时间的全体是总体，其中的每一位同学每天学习的时间是个体，所在班级同学每天学习的时间是总体的一个样本，样本容量为所在班级的学生数；(2) 为抽样调查，这批食品的该项指标的全体是总体，其中每件食品的该项指标是个体，从中抽取的 5 件食品的该项指标是总体的一个样本，样本容量为 5；(3) 为普查；(4) 为抽样调查，该市居民家庭藏书量的全体是总体，其中的每个家庭的藏书量是个体，该市该社区家庭的藏书量是总体的一个样本，样本容量为该市该社区家庭数. **5.** (1) 选用折线统计图，图略；(2) 选用条形统计图，图略；(3) 选用扇形统计图，图略.

6. (1)

身高/cm	147.5～150.5	150.5～153.5	153.5～156.5	156.5～159.5	159.5～162.5	162.5～165.5	165.5～168.5	168.5～171.5
划记	丅	丌	正丅	正丌	正正一	正正	丌	丅
频数	2	4	8	9	11	10	4	2

频数分布直方图略. (2) 如：身高在 159.5～162.5 cm 范围内的女生最多，有 11 人；该中学 50 名同龄女生的身高主要分布在 153.5～165.5 cm 范围内，占总人数的 76%；身高在 147.5～150.5 cm、168.5～171.5 cm 范围内的女生最少；总体上呈“中间高两边低”的分布特征等.

单元测试

1. 20，0.4. **2.** 60°，210°，90°. **3.** 频数分别为 6、14、14、6；频率分别为 0.15、0.35、0.35、0.15. **4.** (B). **5.** (A). **6.** (C). **7.** (B). **8.** (1) 应做抽样调查；(2) 应做普查；(3) 应做抽样调查. **9.** 应选用扇形统计图，图略.

10. (1)

居所与学校间的距离/km	0～3	3～6	6～9	9～12	12～15
频　数	250	200	120	80	50

(2) 居所与学校间的距离少于 6 km 的学生有 450 人；(3) 扇形统计图略.

11. (1) 选用扇形统计图；(2) 选用条形统计图；(3) 选用折线统计图.

12. (1)

脉搏的次数/(次/分)	129.5～134.5	134.5～139.5	139.5～144.5	144.5～149.5	149.5～154.5	154.5～159.5	159.5～164.5	164.5～169.5
频数/人	1	2	3	7	9	14	9	3

频数分布直方图略. (2) 如：赛跑后 1 min 脉搏的次数在 154.5～159.5 范围内的学生最多，有 14 人；该班级学生赛跑后 1 min 脉搏的次数主要分布在 144.5～164.5 范围内，约占全班学生数的 81%；赛跑后 1 min 脉搏的次数在 129.5～144.5、164.5～169.5 范围内的学生较少；总体上呈“中间高两边低”的分布特征等.

第 8 章　认识概率

8.1　确定事件与随机事件

1. “(1)”是不可能事件；“(2)”、“(4)”是必然事件；“(3)”、“(5)”、“(6)”是随机事件. **2.** (1) 抽到的数可以是 1，也可以是偶数，但不可能是 0 或 8；(2) 抽到的数可能是 1、2、3、4、5、6 中的任意一个数，但不能事先确定会出现其中的哪一个数.

微信公众号：电子课本大全

8.2 可能性的大小

1. 按事件发生的可能性从小到大的顺序排列为:(2)、(1)、(3). **2.** 按事件发生的可能性从小到大的顺序排列为:(4)、(3)、(2)、(1). **3.** "(3)"是不可能事件,"(1)"、"(2)"是随机事件,"(4)"是必然事件;按事件发生的可能性从小到大的顺序排列为:(3)、(1)、(2)、(4).

8.3 频率与概率(1)

1. (1)

投篮次数 n	100	200	300	400	500	600	700	800
投中的频数 m	48	106	153	196	254	302	349	401
投中的频率 $\frac{m}{n}$	0.48	0.53	0.51	0.49	0.51	0.50	0.50	0.50

(2) 图略; (3) 当投篮次数很大时,该篮球队员在罚球线上投篮投中的频率在 0.5 附近摆动.

2. (1)

每批粒数 n	50	100	200	500	1 000	2 000	3 000	5 000
发芽的频数 m	47	89	188	460	890	1 820	2 730	4 500
发芽的频率 $\frac{m}{n}$	0.94	0.89	0.94	0.92	0.89	0.91	0.91	0.90

(2) 图略; (3) 当试验次数很大时,该种子发芽的频率在 0.90 附近摆动.

8.3 频率与概率(2)

1. (1)

抽取的产品数 n	20	50	100	200	500	1 000	1 500	2 000
优等品的频数 m	18	48	96	193	473	953	1 422	1 902
优等品的频率 $\frac{m}{n}$	0.900	0.960	0.960	0.965	0.946	0.953	0.948	0.951

(2) 图略; (3) 优等品的概率的估计值为 0.95.

2. (1)

抛掷次数 n	100	200	300	400	500	600	700	800	1 000
正面朝上的频数 m	63	151	221	289	358	429	488	566	701
正面朝上的频率 $\frac{m}{n}$	0.630	0.755	0.737	0.723	0.716	0.715	0.697	0.708	0.701

(2) 图略; (3) 抛掷该枚硬币出现正面朝上的概率的估计值为 0.70.

小结与思考

1. "(8)"是不可能事件;"(1)"、"(7)"是必然事件;"(2)"、"(3)"、"(4)"、"(5)"、"(6)"是随机事件. **2.** 该城市 70 年内男婴出生的频率在 0.517 附近摆动,女婴出生的频率在 0.483 附近摆动;根据频率的稳定性,估计该城市男婴出生的概率为 0.517,女婴出生的概率为 0.483. **3.** "(1)"是必然事件,"(2)"是不可能事件,"(3)"、"(4)"是随机事件;按发生的可能性从小到大的顺序排列为:(2)、(3)、(4)、(1). **4.** (1) 不正确. 罚球投中的概率为 0.8,说明当罚球次数很大时,罚球投中的频率会在常数 0.8 附近摆动. 这样,我们可以认为,当罚球的次数很大时,在每 10 个一组的罚球中,平均会投中 10×0.8(个). (2) 不正确. 第 10 个病人治愈的概率仍为 10%. 同"(1)",可以认为,对于该种疾病,当医治的病人很多时,在每 10 人一组的治疗中,平均会有 1 人治愈.

单元测试

1. 略. **2.** "(2)"、"(3)"是必然事件;"(1)"、"(4)"是随机事件;"(5)"是不可能事件. **3.** 按事件发生的可能性从小到大的顺序排列为:(4)、(1)、(2)、(3). **4.** (D). **5.** (D). **6.** (C). **7.** (A). **8.** 一个事件发生的可能性只有万分之一,还是有可能发生的,只不过发生的可能性非常小而已;一个事件发生的可能性是 99.9%,它不是必然事件,只不过发生的可能性非常大而已. **9.** 当转盘停止转动时,"指针落在红色区域"的可能性从小到大的顺序排列为:⑤、①、②、③、④. **10.** (1) 从袋子中任意摸出 1 个球可能是红球,也可能是绿球或白球; (2) 不能事先确定一定能摸到红球; (3) 摸到白球的可能性最大,摸到红球的可能性最小; (4) 只要袋子中红球、绿球和白球的数量相等即可.

微信公众号:电子课本大全

11. (1) 该地区 2 月份的平均气温为 −4 ℃ 的年数最多；(2) 该地区 2 月份的平均气温在 −7 ℃～−1 ℃ 的频数为 121，频率约为 0.71；(3) 该地区 2 月份的平均气温在 −7 ℃～−1 ℃ 的概率估计值为 0.71.

12. (1)

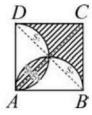
抛掷次数 n	100	200	300	400	500	600	700	800	1 000
2 枚硬币的正面都朝上的频数 m	30	43	81	109	131	155	174	201	251
2 枚硬币的正面都朝上的频率 $\frac{m}{n}$	0.300	0.215	0.270	0.273	0.262	0.258	0.249	0.251	0.251

(2) 图略；(3) 抛掷这 2 枚硬币出现 2 枚正面朝上的概率的估计值为 0.25.

第 9 章　中心对称图形——平行四边形

9.1　图形的旋转

1. (D). **2.** 120；60；顺，60，$O'AB$. **3.** 略. **4.** 如图，将图形 S_1 旋转到 S_2 的位置，S_3 旋转到 S_4 的位置，这样阴影部分的面积就是△DBC 的面积.



(第 4 题)

9.2　中心对称与中心对称图形

1. ①③；②③；③. **2.** (1) 180；(2) O；(3) OA'，OB'，$A'C'$. **3.** (B). **4.** (C). **5.** 略. **6.** (1) △CEF与△DEA；(2) 与△ABF 的面积相等；(3) $\angle DAF = 55°$. **7.** 略. **8.** 画图略，△ABC 与△$A''B''C''$关于点 O 成中心对称.

9.3　平行四边形(1)

1. 30，150，30. **2.** 11，5，11. **3.** (A). **4.** $AB = 6$ cm，$BC = 9$ cm. **5.** 45°. **6.** 由□$ABCD$，得 $AB \parallel DC$. 又 $DE \parallel BF$，所以四边形 $DEBF$ 是平行四边形，$OE = OF$.

9.3　平行四边形(2)

1. (1) //；(2) =. **2.** 4. **3.** (A). **4.** 由□$ABCD$，得 $AB \parallel\!= CD$. 又 $AE = CF$，所以 $BE \parallel\!= DF$. 所以四边形 $AECF$、$BEDF$ 是平行四边形. 于是，$AF \parallel EC$，$BF \parallel ED$. 所以四边形 $EHFG$ 是平行四边形. **5.** 提示：连接 EF、GH. 证△AEH≌△CGF，得 $EH = GF$. 同理 $GH = EF$. 从而四边形 $EFGH$ 是平行四边形，$EH \parallel GF$.

9.3　平行四边形(3)

1. (1) √；(2) √；(3) ×. **2.** (B). **3.** 连接 AF、EC. 由□$ABCD$，得 $AB \parallel\!= DC$，又 $BE = DF$，所以 $AE \parallel\!= CF$，四边形 $AECF$ 是平行四边形，AC、EF 互相平分. **4.** 连接 BD，交 AC 于点 O. 由□$ABCD$，得 $OB = OD$，$OA = OC$，又 $AE = CF$，所以 $OE = OF$，四边形 $BFDE$ 是平行四边形. **5.** 提示：证△AOE≌△COF，△BOG≌△DOH，得 $OE = OF$，$OG = OH$.

9.4　矩形、菱形、正方形(1)

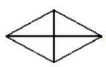
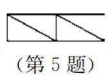
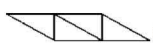
1. (B). **2.** 直角，等腰. **3.** $\sqrt{48}$，8. **4.** 4 802. **5.** 提示：证明 △APD ≌ △BPC.

9.4　矩形、菱形、正方形(2)

1. 如 $AC = BD$. **2.** (D). **3.** (B). **4.** 四边形 $AECF$ 是矩形. 提示：先证明 △AOF ≌ △COE，得四边形 $AECF$ 为平行四边形，再由 $AE \perp EC$ 得结论. **5.** 如：测出玻璃的两组对边是否相等且是否分别为 40 cm、30 cm，再测出玻璃的两条对角线是否相等.

9.4　矩形、菱形、正方形(3)

1. 5，20，24. **2.** (A). **3.** (A). **4.** $BD = 6$ cm，$S_{菱形ABCD} = 24$ cm^2. **5.** (答案不唯一)，如

(1) ；(2) ；(3) ；(4) 略.

(第 5 题)

微信公众号：电子课本大全

9.4 矩形、菱形、正方形(4)

1. ①②③. **2.** 如:AD 平分$\angle BAC$. **3.** (D). **4.** 是菱形. 因为剪下的纸片展开后所得的四边形的对角线互相垂直平分. **5.** 提示:证 $AD=AB$. **6.** 本题有多种证法. 例如,连接 EC,交 GD 于点 O. 由题意,得 $AD\perp EC$,$EO=CO$,$EG=CG$. 由 $EG/\!/BC$,得$\angle GEO=\angle DCO$,$\triangle GEO\cong\triangle DCO$,$EG=DC$. 所以四边形$EDCG$是菱形.

9.4 矩形、菱形、正方形(5)

1. (C). **2.** (D). **3.** (1) $AE=CE$. 由四边形 $ABCD$ 是正方形,易知 $\triangle ABE\cong\triangle CBE$. (2) $\angle DAE=22.5^\circ$ **4.** 作 $DG\perp AB$,垂足为 G. 由$\angle C=\angle DFC=\angle DEC=90^\circ$,得四边形 $CEDF$ 是矩形. 由角平分线性质,得 $DG=DE=DF$,所以矩形$CEDF$是正方形.

9.5 三角形的中位线

1. 26. **2.** (A). **3.** (D). **4.** $AG\perp CG$. 提示:先证$\angle FCG=\angle FGC$,得 $FG=FC$,又 $AF=FC$,所以 $AF=FG$,于是$\angle GAF=\angle AGF$,从而$\angle AGC=\angle AGF+\angle FGC=\frac{1}{2}(\angle GAF+\angle FCG+\angle AGF+\angle FGC)=\frac{1}{2}\times180^\circ=90^\circ$. **5.** 延长 CD 交 AB 于点 E,证$\triangle ADE\cong\triangle ADC$,得 $CD=DE$. 又 $CG=GB$,所以 $DG/\!/AB$.

小结与思考

1. 顺,60. **2.** 2. **3.** (B). **4.** 四边形 $EFGH$ 是菱形. 本题有多种证法. 例如,证$\triangle AEH\cong\triangle BEF\cong\triangle CGF\cong\triangle DGH$. 得 $HE=FE=FG=HG$. **5.** 提示:先证明四边形 $DEBF$ 为平行四边形,得 $DE/\!/\!=FB$,由 M、N 分别是 DE、FB 的中点,得 $ME/\!/\!=FN$,所以四边形 $ENFM$ 为平行四边形. **6.** 12 cm. **7.** 提示:连接 AC 交 BD 于点 O. 由题意,得 $AO=BO=4$,$EO=BE=2$. 又 $AE\perp BD$,所以 AE 垂直平分 BO,$AB=AO=4$. 由勾股定理,得 $AD=\sqrt{48}$. **8.** (1) $EF=AE$. 由题意,得$\angle C=\angle D=90^\circ$,$\angle EBC=45^\circ$,$\angle BEC=45^\circ$,$EC=BC=AD$. 又$\angle AED+\angle EAD=90^\circ$,$\angle AED+\angle FEC=90^\circ$,所以$\angle EAD=\angle FEC$. 从而$\triangle ADE\cong\triangle ECF$,$EF=AE$. (2) $FE\perp AE$. 证明略.

单元测试(1)

1. 60. **2.** 135. **3.** 直角,等腰,等腰直角. **4.** 如:$ED=DC$. **5.** 20. **6.** (D). **7.** (D). **8.** (C). **9.** 略. **10.** 略. **11.** 由 DE 是$\triangle ABC$ 的中位线,得 $DE/\!/\!=\frac{1}{2}BC$,又 $EF/\!/AB$,所以四边形 $DBFE$ 是平行四边形,$BF=DE=\frac{1}{2}BC$,即 F 是 BC 的中点. **12.** 本题有多种方法确定点 G. 例如,过点 B 作$BG\perp AE$,垂足为 G. 证明略. **13.** $BE=CF$;$BE\perp CF$. 提示:证$\triangle BOE\cong\triangle COF$,得 $BE=CF$;延长 CF 交 BE 于点 G,由$\triangle BOE\cong\triangle COF$,得$\angle GBF=\angle OCF$. 又$\angle BFG=\angle CFO$,所以$\angle BGF=\angle COF=90^\circ$,即$BE\perp CF$. **14.** 连接 GF. 由题意,得 $GE=\frac{1}{2}BC$,$GF=\frac{1}{2}AD$. 又 $AD=BC$,所以$GF=GE$,$\triangle GEF$ 是等腰三角形. 又 GH 是边 EF 上的中线,所以 $GH\perp EF$. **15.** $E(1,\ 2-\sqrt{2})$.

单元测试(2)

1. $\sqrt{200}$. **2.** (1) 平行四边; (2) $\angle BAC=90^\circ$; (3) AD 平分$\angle BAC$; (4) $\angle BAC=90^\circ$,AD 平分$\angle BAC$. **3.** (1) 矩形; (2) 梯形; (3) 平行四边形. **4.** ①③或①④或②④ **5.** (D) **6.** (C) **7.** (D) **8.** (B) **9.** 18. **10.** 不正确. 例如,菱形的台布,2 次拉起台布的一组对角也能对齐. **11.** 由正方形 $ABCD$,得 $AC\perp BD$. 又 $EG\perp AC$,$EF\perp BD$,所以四边形 $EFOG$ 是矩形,$EF=GO$. 又$\angle GAE=\angle AEG=45^\circ$,所以 $EG=AG$. 从而 $EG+EF=AO=\frac{1}{2}AC$. **12.** 本题有多种证法. 例如,连接 AC,由菱形 $ABCD$,得 $BA=BC$,AC、BD 互相垂直平分,所以 $EA=EC$,$\triangle ABE\cong\triangle CBE$,$\angle BCE=\angle BAE=90^\circ$. 又 $AD/\!/BC$,所以$\angle AFC+\angle BCF=180^\circ$,$\angle AFC=90^\circ$,$CF\perp AD$. **13.** (1) 提示:由$\angle ADC=90^\circ$,$DP\perp AQ$,得 $\angle DAQ=\angle CDP$. 可证 $\triangle ADQ\cong\triangle DCP$,所以$DQ=CP$. (2) 由 $OD=OC$,$\angle OCP=\angle ODQ=45^\circ$,$DQ=CP$,得 $\triangle OCP\cong\triangle ODQ$. 所以$\angle COP=\angle DOQ$,$\angle COP+\angle COQ$

微信公众号：电子课本大全

$=\angle DOQ+\angle COQ=\angle DOC=90°$，$OP\perp OQ$. **14.** (1) 提示：证 Rt$\triangle ABE\cong$Rt$\triangle DAF$，得 $AE=DF$，$BE=AF$. 所以 $BE=AE+EF=DF+EF$；(2) $BE=EF-DF$. 同(1)证 Rt$\triangle ABE\cong$Rt$\triangle DAF$.

期 中 测 试

1. 80°. **2.** 10. **3.** (1) 8；(2) 0.19. **4.** (4). **5.** 20°. **6.** 60°，5. **7.** 20. **8.** $\sqrt{10}$.（提示：作点 E 关于 AC 所在直线的对称点 E'.） **9.** (B). **10.** (A). **11.** (C). **12.** (D). **13.** (C). **14.** (C). **15.** (B).（提示：连接 BE，设 $BE=DE=x$.） **16.** (C).（提示：$S_{\text{阴影}}=\frac{1}{2}\times6\times12+\frac{1}{2}\times4\times12$.） **17.** 提示：证明$\triangle ABE\cong\triangle CDF$.

18. (1) 0.80，0.81，0.84，0.82，0.82，0.82；(2) 折线统计图略；(3) 概率的估计值为 0.82. **19.** (1) 20，32%；(2) 略；(3) 684 名. **20.** 证明 $AD/\!/BC$，且 $DE=BF$，得四边形 $EBFD$ 是平行四边形. **21.** (1) 设$\angle BAE=\alpha$，则$\angle EAD=\angle AEB=\angle ABE=2\alpha$，由此求得$\angle BAE=36°$；(2) 由$\angle ABF=\angle ADB=\angle CBF$，得$\angle ABF=\frac{1}{2}\angle ABE=36°$，这样 $BF=AF$. **22.** (1) 证明 $DA=DO$，又由 E 是 OA 的中点，得 $DE\perp AC$；(2) 由 $EF=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}CD$，$EG=\frac{1}{2}CD$，得 $EF=EG$. **23.** 提示：连接 CF，由题意，得 $CF\perp AE$，再证明$\triangle BCF\cong\triangle ADF$.

第 10 章 分 式

10.1 分式

1. (1) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$；(2) $\frac{48}{x}$；(3) $\frac{5}{x-0.2}$. **2.** (1) 1；(2) 5；(3) 0；(4) 3. **3.** (1) $x\neq0$；(2) $x\neq\frac{3}{7}$；(3) $x\neq-\frac{1}{2}$；(4) $x\neq1$，且 $x\neq-2$. **4.** (1) -5；(2) $\frac{1}{2}$；(3) ±2；(4) -1.

10.2 分式的基本性质(1)

1. (B). **2.** (C). **3.** (B). **4.** (1) $\frac{3a-2b}{3a+6b}$；(2) $\frac{2x+5}{6x-10}$. **5.** (1) $\frac{5b^2}{3a}$；(2) $-\frac{x+y}{5y}$. **6.** (1) $-\frac{a-2}{3a-2}$；(2) $\frac{x^2-2x-1}{3x^2-4x-5}$. **7.** (1) $\frac{1}{5}$；(2) 7.

10.2 分式的基本性质(2)

1. (A). **2.** (C). **3.** (C). **4.** (1) $\frac{b}{3}$；(2) $\frac{1}{x+1}$；(3) $\frac{x}{y-1}$；(4) $\frac{a+2b}{a-2b}$；(5) $\frac{x}{x+4}$；(6) $\frac{x-y}{3(x+y)}$.

5. (1) -3；(2) $-\frac{1}{3}$；(3) $\frac{3}{7}$.

10.2 分式的基本性质(3)

1. (1) abc；(2) $9a^2b^2$；(3) $ab(x+1)$；(4) $(m+3)(m-3)$. **2.** (1) $\frac{2}{x-1}$，$\frac{-3}{x-1}$；(2) $\frac{(a-2)^2}{(a-2)(a-3)}$，$\frac{a+1}{(a-2)(a-3)}$. **3.** (1) $\frac{4}{2xy}$，$\frac{x^2}{2xy}$；(2) $\frac{25a}{-20a^2b^2}$，$\frac{-16b}{-20a^2b^2}$；(3) $\frac{bx}{ab(x-y)}$，$\frac{-ay}{ab(x-y)}$；(4) $\frac{a(x+y)}{(x-y)^2(x+y)}$，$\frac{b(x-y)}{(x-y)^2(x+y)}$. **4.** (1) $\frac{3a}{2(a-b)}$，$-\frac{4a}{2(a-b)}$；(2) $\frac{2x+2}{x^2-1}$，$\frac{3x-3}{x^2-1}$；(3) $\frac{a-1}{(a+1)(a-1)}$，$-\frac{3(a+1)}{(a-1)(a+1)}$，$\frac{5}{(a+1)(a-1)}$；(4) $\frac{a(a-2)}{(a+2)(a-2)^2}$，$\frac{(a-1)(a+2)(a-2)}{(a+2)(a-2)^2}$，$\frac{(a+2)^2}{(a+2)(a-2)^2}$.

10.3 分式的加减法

1. (1) ×；(2) ×；(3) √；(4) ×. **2.** (1) $\frac{3}{a}$；(2) 1；(3) $\frac{1}{b}$；(4) 1. **3.** (1) (A)；(2) 不正确，丢掉分母；(3) $\frac{4x}{x^2-1}$. **4.** (1) 1；(2) $\frac{4b+a}{6ab^2}$；(3) $-\frac{1}{a+2}$；(4) $\frac{10a+8}{(a+2)^2}$；(5) $\frac{3(2a+9)}{(3+2a)(3-2a)}$；(6) $-\frac{1}{a+b}$.

微信公众号：电子课本大全

10.4　分式的乘除法(1)

1. (C).　**2.** (B).　**3.** (B).　**4.** (1) $\frac{2}{3a^2}$; (2) $\frac{1}{2}$; (3) $-\frac{2}{x}$; (4) $-\frac{x}{x+7}$; (5) $\frac{2m^2}{3}$; (6) -1.　**5.** (1) -1; (2) 8.

10.4　分式的乘除法(2)

1. (1) $-4y^2$; (2) $\frac{4y}{z}$; (3) $\frac{3}{4}(x-2)$; (4) $-x^2y$.　**2.** (1) $-\frac{a}{bc^3}$; (2) 2; (3) a; (4) $\frac{2a}{a+1}$; (5) $\frac{3x^3y^3+x^3}{4y^4}$; (6) $\frac{2}{(a+1)^2}$.　**3.** (1) 6; (2) 20.

10.5　分式方程(1)

1. (1) $(x+1)(x-1)$; (2) $x=5$; (3) $x=-3$; (4) -1; (5) -5.　**2.** (1) $x=7$; (2) $x=3$; (3) $x=9$; (4) $x=1$; (5) $x=-\frac{1}{2}$; (6) $x=\frac{4}{3}$.　**3.** (1) $x=3$; (2) $x=3$.

10.5　分式方程(2)

1. (1) $(x+1)(x-1)$, $3(x-1)+2(x+1)=-6$, 增根; (2) 3.　**2.** (1) $x=1$ 是增根, 原方程无解; (2) $x=-1$ 是增根, 原方程无解;　(3) $x=2$ 是增根, 原方程无解; (4) $x=0$; (5) $x=-2$ 是增根, 原方程无解; (6) $x=3$.　**3.** $x=-\frac{17}{2}$.

10.5　分式方程(3)

1. (B).　**2.** (B).　**3.** $\frac{3}{7}$.　**4.** 3 km/h.　**5.** 需加水 12 kg.　**6.** 甲每小时做 18 个零件, 乙每小时做 27 个零件.　**7.** 新款车的时速为 140 km/h.　**8.** 乙管单独注满水池的时间为 6 h.

小结与思考

1. (1) $x\neq-\frac{1}{3}$ 时, 分式有意义, $x=3$ 时, 分式的值为 0; (2) $x\neq\pm1$ 时, 分式有意义, $x=0$ 时, 分式的值为 0.

2. (1) $\frac{2(y-x)}{x}$; (2) $a+b$; (3) $-\frac{3b}{4}$; (4) $-2b^2$; (5) $\frac{1}{a-b}$.　**3.** 2.　**4.** (1) $x=-\frac{2}{5}$; (2) $x=3$.　**5.** 自行车的速度为15 km/h, 汽车的速度是 45 km/h.　**6.** 略.

单元测试

1. $\frac{a+b}{7}$、$3-\frac{x}{2}$、$\frac{7}{a}$、$\frac{x^2-y^2}{x+y}$.　**2.** $x=3$.　**3.** $x\neq-1$.　**4.** $a<3$ 且 $a\neq0$.　**5.** $\frac{a(x-2y)}{b}$.　**6.** $-2ab^2$.

7. 5.　**8.** (B).　**9.** (D).　**10.** (C).　**11.** (A).　**12.** (A).　**13.** (A).　**14.** (D).　**15.** (B).　**16.** (C).

17. (C).　**18.** (C).　**19.** (1) 0; (2) $\frac{b}{a+b}$;　(3) $\frac{x^2y^2}{(x+y)^2}$; (4) $\frac{a+b}{a-b}$.　**20.** -3.　**21.** (1) $x=\frac{15}{2}$; (2) $x=1$(增根), 原分式方程无解.　**22.** 这次秋游活动共有 20 人参加.　**23.** 规定的工期是 6 天.

第 11 章　反比例函数

11.1　反比例函数

1. $\frac{k}{q}$, q, 反, $\frac{k}{p}$, p, 反比例.　**2.** (1)和(3)是反比例函数, 其 k 的值分别为 2 和 $-\frac{1}{2}$.　**3.** v(或 t), s, t(或 v), s, t, v.　**4.** (1) $y=\frac{80}{x}$, 是反比例函数, $k=80$; (2) $y=0.8x$, 是正比例函数, $k=0.8$; (3) $y=30-x$, 既不是正比例函数, 也不是反比例函数;　(4) $a=\frac{24}{b}$, 是反比例函数, $k=24$.　**5.** (1) $y=\frac{16}{x}$; (2) 8, 4 或 5.　**6.** (1) $\frac{1\,000\,m}{x}$; (2) (D).

微信公众号：电子课本大全

11.2　反比例函数的图像与性质(1)

1. -2.　**2.** (D).　**3.** (D).　**4.** 异,反,二、四.　**5.** (1) 1、2、3、6;　(2) 略(学生选择不一定相同,如(4, 1.5)、(5, 1.2)、(1.5, 4)、(1.2, 5)等);　(3) 略.　**6.** 横,y, x.　**7.** (1) 略;　(2) 不会.

11.2　反比例函数的图像与性质(2)

1. $>$, $<$, 一, 三, $<$, $>$, 二, 二.　**2.** 一、三, 减小.　**3.** $<$,二、四,异.　**4.** 6, 2, -6.　**5.** $-\frac{1}{2}$, -2, 二, $(-2, 1)$.　**6.** (1)$>$,一;　(2) $<$,下.　**7.** (1) A, D, $-\frac{4}{x}$, B, C, $-\frac{2}{x}$;　(2) 略;　(3) 函数 $y=-\frac{4}{x}$ 的 y 值较大.

11.2　反比例函数的图像与性质(3)

1. (B).　**2.** (1) >3;　(2) 1、2.　**3.** -1, (1) 因为 $xy=1$, 所以点 P 一定在 $y=\frac{1}{x}$ 的图像上;　(2) 因为任何一对相反数的积都不会等于 1,所以点 Q 一定不在 $y=\frac{1}{x}$ 的图像上.　**4.** (1) $<$, $>$;　(2) a、m、b、d、n、c.

5. (1) 略;　(2) >2, 2, 2, 4.　**6.** (1) -12,图略;　(2) -4, -2, $y<-3$, 2, -2.

11.3　用反比例函数解决问题(1)

1. (1) $y=\frac{60}{x}$;(2) 6, 12.　**2.** (1) $t=\frac{600}{n}$;(2) 20;(3) 40.　**3.** (1) $y=\frac{20}{x}$;(2) $x>0$;(3) $\frac{20}{3}$.　**4.** (1) $y=\frac{300}{x}$;(2) 50;(3) 设要增加 z 名徒工,则有 $\frac{800}{6+\frac{6}{3}(5+z)}=40$. 解得 $z=2$. 该车间至少要增加 2 名徒工.　**5.** (1) 材料加热时, $y=9x+15$;停止加热时, $y=\frac{300}{x}$;　(2) 20 min.

11.3　用反比例函数解决问题(2)

1. (A).　**2.** (C).　**3.** 大.　**4.** (1) 设 $\rho=\frac{k}{V}$,求得 $k=14.3$,$\rho=\frac{14.3}{V}$;(2) $\rho=7.15\ \mathrm{kg/m^3}$.　**5.** (1) 36 V, $I=\frac{36}{R}$;(2) 表格中从左到右依次为 12、9、$\frac{36}{5}$、6、$\frac{36}{7}$、$\frac{9}{2}$、$\frac{18}{5}$;(3) 应控制在 $R\geqslant 3.6$ 这个范围.

小结与思考

1. $y=\frac{2}{x}(x>0)$.　**2.** (1) -1, -2;(2) 只有点 D 在该图像上.　**3.** (1) $>$, $<$,一,三;(2) $>$, $<$, $>$, $<$.

4. (1) 四;(2) $0<m<2$;(3) 1, $(-1, 1)$.　**5.** (1) 略;(2) 右下,左上,$-2<a<0$, $b<-3$, $c\leqslant -2$, $-3\leqslant d<0$.　**6.** (1) $t_1=\frac{60}{a}$;　(2) 水流停止即两池中水深相同,甲池满池水量为 60 $\mathrm{m^3}$,水流停止时的水深为 $\frac{60}{50}=1.2(\mathrm{m})$,这时乙池中的水量为 $35\times 1.2=42(\mathrm{m^3})$,所以$t_2=\frac{42}{a}$;　(3) 完成整个过程的时间为 $t=\frac{60}{a}+\frac{42}{a}=\frac{102}{a}$. 当 $t=15$ 时, $a=6.8$. 要使 $t<15$,应有 $a>6.8$,即要在 15 h 内完成所述过程,进水管和两池间的阀门每小时至少要通过超过 6.8 $\mathrm{m^3}$ 的水量.

单元测试

1. 反,正.　**2.** $h=\frac{12}{a}$, $a=\frac{12}{b}$, $m=\frac{6}{h}$, $r=\frac{3}{\pi h}$, $V=2h$. 余略.　**3.** 4, (1, 6)、(2, 3)、(3, 2)、(6, 1). 图略.　**4.** $\frac{2}{x}$, 2, $-\frac{1}{x}$; -1, 0.　**5.** (1) 1, 相同;(2) 0,不同;(3) 2, 不同;(4) 无,不同;(5) 一、三,二、四,相同;(6) <0,>0,不同.　**6.** (B).　**7.** (B).　**8.** (B).　**9.** (B).　**10.** (C).　**11.** (1) 12;(2) 略;(3) 2.4;(4) 由 $y>0$,得 $x>0$;由 $y=\frac{12}{x}<3$,得 $x>4$,即当 $x>4$ 时, y 是小于 3 的正数.　**12.** (1) 略;(2) 是轴对称图形,有 2 条对

微信公众号：电子课本大全

称轴. 图略. (3) 是成中心对称,对称中心是原点,余略. **13.** (1)$t=\frac{s}{v}$;(2) s, v, 反;(3)$(x+1)$,在$t=\frac{s}{v}$中,由已知,有$\begin{cases}50=\frac{s}{x},\\40=\frac{s}{x+1}.\end{cases}$解得 $x=4$, $s=200$. **14.** (1) $y=\frac{100}{x}(x>0)$;(2) $y=\frac{300}{x}(x>0)$;(3) 小明购物可享受7.5折优惠,所以购袋装食品的金额为 $12\times0.75\times50=450$(元),余额为 150 元. 此时的函数表达式为 $y=\frac{150}{0.75x}=\frac{200}{x}$. 当 $x=16$ 时,$y=\frac{200}{16}=12.5$(千克),即小明所购散装糖果为 12.5 千克.

第 12 章　二 次 根 式

12.1　二次根式(1)

1. (1) $x\geqslant1$; (2) $x\geqslant-5$; (3) $x\geqslant\frac{1}{5}$; (4) $x\geqslant\frac{6}{5}$; (5) $x\geqslant-\frac{2}{7}$; (6) $x\leqslant\frac{2}{7}$. **2.** (1) 5; (2) $\frac{3}{5}$; (3) $a+2$; (4) $\frac{b}{a}$. **3.** (1) x 为任意实数; (2) x 为任意实数; (3) $x=1$; (4) $x\leqslant0$. **4.** (1) 10; (2) $3a+2b$.

12.1　二次根式(2)

1. (1) a; (2) a; (3) $-a$. **2.** (1) √; (2) ×; (3) ×; (4) √. **3.** (1) 6; (2) 7; (3) $a-5$; (4) $a+1$. **4.** (1) $a\geqslant0$; (2) a 为任意实数; (3) $a\geqslant0$.

12.2　二次根式的乘除(1)

1. (1) 6,6; (2) 28,28; (3) $\frac{8}{15},\frac{8}{15}$. **2.** (1) 9; (2) 5; (3) 42; (4) a^2. **3.** (1) $3\sqrt{2}$; (2) $3\sqrt{3}$; (3) $4\sqrt{2}$; (4) $6\sqrt{2}$; (5) $2ab\sqrt{3b}$; (6) 5.

12.2　二次根式的乘除(2)

1. (1) $2\sqrt{30}$; (2) $10\sqrt{2}$; (3) $2x\sqrt{2xy}$; (4) $2xy^2\sqrt{3xy}$. **2.** (1) $x^2\sqrt{x+1}$; (2) $(a^2+b^2)\sqrt{a}$; (3) $2x\sqrt{3y(1+2y^2)}$. **3.** (1) $5\sqrt{21}$; (2) $12\sqrt{3}$; (3) 6; (4) $2\sqrt{2}$; (5) a^2b; (6) $a\sqrt{2a}$. **4.** $10\sqrt{5}$ cm.

12.2　二次根式的乘除(3)

1. (1) 3; (2) 4; (3) $\sqrt{5}$; (4) $3\sqrt{5}$; (5) $\sqrt{5}$; (6) $\sqrt{2}$. **2.** (1) $\frac{2}{7}\sqrt{3}$; (2) $\frac{7}{3}$; (3) $\frac{b}{2a}\sqrt{3}$; (4) $\frac{1}{3a}\times\sqrt{2b}$. **3.** (1) √; (2) √; (3) ×; (4) ×.

12.2　二次根式的乘除(4)

1. (1) $\frac{\sqrt{3}}{5}$; (2) $\frac{\sqrt{14}}{7}$; (3) $\frac{\sqrt{14}}{2}$; (4) $\frac{\sqrt{10ab}}{5a}$; (5) $\frac{\sqrt{10}}{6}$; (6) $\frac{\sqrt{15abc}}{6ab}$. **2.** (1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; (2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; (3) $\frac{\sqrt{10}}{5}$; (4) $\frac{\sqrt{30}}{6}$; (5) $\frac{\sqrt{6}}{4}$; (6) $\frac{\sqrt{3}}{6}$; (7) $\frac{\sqrt{14}}{6}$; (8) $\frac{\sqrt{15}}{9}$; (9) $\frac{\sqrt{2xy}}{2x}$.

12.3　二次根式的加减(1)

1. (1) $\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{3},-2\sqrt{2};\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{5},3\sqrt{3}$. (2) $\sqrt{6},\sqrt{24};\sqrt{18},\sqrt{32}$. (3) $\sqrt{5},\sqrt{\frac{1}{5}};-\sqrt{10},\frac{1}{\sqrt{10}},\sqrt{\frac{1}{40}}$.

2. (1) $2\sqrt{5}$; (2) $6\sqrt{7}$; (3) $\frac{10}{3}\sqrt{2}+\frac{23}{10}\sqrt{3}$; (4) $-\sqrt{6}-2\sqrt{3}-\sqrt{2}$; (5) $\frac{8}{5}\sqrt{5}-\frac{17}{20}\sqrt{10}$; (6) $-\frac{7}{2}\sqrt{2}$. **3.** (1) $-\frac{21}{4}\sqrt{2}$; (2) $3\sqrt{3}-5\sqrt{2}$; (3) $5\sqrt{a}-2a\sqrt{b}-\sqrt{ab}$.

微信公众号：电子课本大全

12.3 二次根式的加减(2)

1. (1) $\sqrt{3}+6\sqrt{2}$; (2) $2+\sqrt{3}-2\sqrt{2}-\sqrt{6}$; (3) $\sqrt{10}-\sqrt{6}+2$; (4) $6+2\sqrt{3}$. **2.** (1) $1+\sqrt{15}$; (2) $-\frac{\sqrt{6}}{12}$; (3) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$; (4) $5\sqrt{5}-2\sqrt{2}$. **3.** (1) 3; (2) 5; (3) $5+2\sqrt{6}$; (4) $a+b-2\sqrt{ab}$. **4.** (1) $\sqrt{5}$; (2) $\frac{b^2-2ac}{a^2}$.

小结与思考

1. (1)、(2)、(4)、(5)、(6)是二次根式. **2.** (1) $x\geqslant 0$; (2) $x\geqslant 1$; (3) $x\leqslant 2$. **3.** (1) √; (2) √; (3) ×; (4) √. **4.** (1) $2\sqrt{6}$; (2) $12\sqrt{3}$; (3) $\sqrt{6}$; (4) 1. **5.** (1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; (2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; (3) $\frac{\sqrt{a}}{a}$; (4) $\frac{\sqrt{b}}{b}$. **6.** (1) $2\sqrt{3}+3\sqrt{2}$; (2) $\frac{24}{5}\sqrt{5}$.

单元测试(1)

1. (B). **2.** (C). **3.** (D). **4.** (C). **5.** (C). **6.** $x\leqslant\frac{5}{2}$. **7.** $6\sqrt{3}$. **8.** 24. **9.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **10.** 11. **11.** 答案不唯一,例如 $\sqrt{20}$, $\sqrt{45}$, $\sqrt{80}$ 等. **12.** $14\sqrt{14}$. **13.** $10ab$. **14.** 0. **15.** 1. **16.** 2. **17.** (1) 12; (2) $4\sqrt{3}$. **18.** (1) $\frac{1}{\sqrt{5}-1}=\frac{\sqrt{5}+1}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$; (2) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$.

单元测试(2)

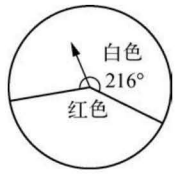
1. (D). **2.** (D). **3.** (C). **4.** (D). **5.** (B). **6.** (C). **7.** (D). **8.** (1) 14; (2) 28; (3) $\frac{3}{2}$; (4) $\frac{x\sqrt{2x}}{3y}$. **9.** $x\leqslant 1$. **10.** (1) $\frac{3}{2}\sqrt{2}$; (2) $30\sqrt{2}$; (3) 3; (4) $21-4\sqrt{5}$. **11.** $4\sqrt{5}+2\sqrt{10}$. **12.** $-3a$. **13.** $-\frac{\sqrt{5}}{2}$. **14.** 8 或 −8. **15.** (1) 6; (2) 6; (3) 1; (4) −6. **16.** (1) −2; (2) 1. **17.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **18.** $24\sqrt{2}$ cm. **19.** (1) ① √; ② √; ③ √; ④ √. (2) $\sqrt{n+\frac{n}{n^2-1}}=n\sqrt{\frac{n}{n^2-1}}$ (n 为大于 1 的自然数). **20.** ∵ $a=\sqrt{5}+2$, $b=\sqrt{5}-2$, $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(\sqrt{5}+2+\sqrt{5}-2)^2-2(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)=20-2=18$, ∴ $\sqrt{a^2+b^2+7}=\sqrt{18+7}=\sqrt{25}=5$. **21.** (1) $(\sqrt{n})^2+1=n+1$, $S_n=\frac{\sqrt{n}}{2}$. (2) ∵ $OA_1=1$, $OA_2=\sqrt{2}$, $OA_3=\sqrt{3}$…… ∴ $OA_{10}=\sqrt{10}$. (3) $S_1^2+S_2^2+S_3^2+\cdots+S_{10}^2=\left(\frac{\sqrt{1}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(1+2+3+\cdots+10)=\frac{55}{4}$.

期 末 测 试

1. (D). **2.** (D). **3.** (A). **4.** (A). **5.** (C). **6.** (B). **7.** $x\leqslant 3$. **8.** $x\neq -1$. **9.** 0.80. **10.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **11.** ①. **12.** >. **13.** 37.5. **14.** 52. **15.** $\left(\frac{5}{4},4\right)$. **16.** $\sqrt{2}+1$. **17.** (1) $-\sqrt{2}$; (2) $6a\sqrt{b}$. **18.** (1) $x=-3$; (2) 原方程无解. **19.** 解:原式$=\left[\frac{(a-2)(a+2)}{a(a+2)^2}-\frac{a(a-1)}{a(a+2)^2}\right]\times\frac{a+2}{a-4}=\frac{a-4}{a(a+2)^2}\times\frac{a+2}{a-4}=\frac{1}{a^2+2a}$. 由 $a^2+2a=3$ 得,原式$=\frac{1}{3}$. **20.** (1) 40,80; (2) 当 $v=60$ 时,$t=\frac{40}{60}=\frac{2}{3}$, ∵ $k=40>0$, ∴ 当 $v>0$ 时,t 随着 v 的增大而减小, ∴ 当

微信公众号:电子课本大全

$v \leqslant 60$ 时，$t \geqslant \frac{2}{3}$，∴ 该汽车经过该路段最少需 $\frac{2}{3}$ h. **21.** (1) 0.6；(2) 0.6；(3) 如右图.



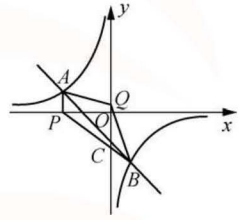
(第 21 题)

22. (1) 75，54；(2) 图略，60.5～70.5 分的频数是 60；(3) (1－25%－20%－10%)×2 000＝900. 答：该校成绩优秀的学生人数大约为 900 人. **23.** (1) 证明：∵ 四边形 $AEFD$ 是平行四边形，∴ $AD=EF$，∵ $AD \parallel BC$，E、F 两点在边 BC 上，∴ $AD \parallel BE$，又∵ $AB \parallel DE$，∴ 四边形 $ABED$ 是平行四边形. ∴ $AD=BE$，同理：四边形 $AFCD$ 是平行四边形. ∴ $AD=CF$. 又∵ $AD=EF$，∴ $BC=BE+EF+CF=3AD$；(2) ∵ 四边形 $ABED$ 是平行四边形，∴ $AB=DE$，∵ 四边形 $ADFC$ 是平行四边形，∴ $AF=DC$，∵ $AB=DC$，∴ $DE=AF$，又∵ 四边形 $AEFD$ 是平行四边形，∴ 四边形 $AEFD$ 是矩形.

24. (1) ＞；(2) 如图①；(3) 如图②，$\sqrt{17}-\sqrt{2}<\sqrt{13}$. **25.** (1) 将 $B(2,-4)$ 代入 $y=\frac{m}{x}$，得 $-4=\frac{m}{2}$，$m=-8$；所以反比例函数为 $y=-\frac{8}{x}$，将 $A(n,2)$ 代入，得 $n=-4$；(2) $-4<x<0$ 或 $x>2$；(3) ① $P(-4,0)$、$Q(0,1)$；② 设直线 PB 与 y 轴交于 C，直线 PB：$y=-\frac{2}{3}x-\frac{8}{3}$，$C\left(0,-\frac{8}{3}\right)$，$S_{四边形APBQ}=S_{梯形APCQ}+S_{\triangle BCQ}=\left(2+\frac{11}{3}\right)\times 4\div 2+\frac{11}{3}\times 2\div 2=15$.



(第 24 题)



(第 25 题)

微信公众号：电子课本大全

凤凰出版传媒股份有限公司
PHOENIX PUBLISHING & MEDIA, INC.

微信公众号：电子课本大全