义务教育教科书（五·四学制）

数学

八年级 下册

教师教学用书

山东教育出版社
山东教育出版社

山东教育出版社

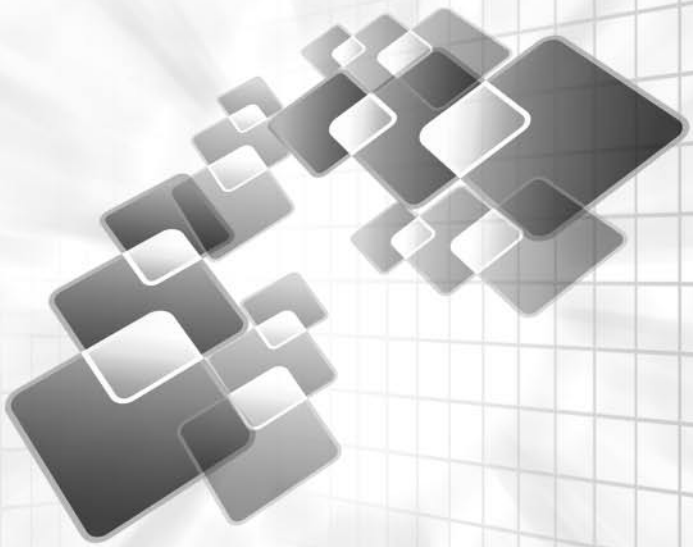
义务教育教科书（五·四学制）

数学

八年级 下册

教师教学用书

山东教育出版社



山东教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

五四数学教师教学用书. 八年级. 下册/《五四数学教师教学用书》编写组编. —济南：山东教育出版社，2014（2018 重印）

ISBN 978-7-5328-8581-7

Ⅰ. ①五… Ⅱ. ①五… Ⅲ. ①中学数学课—初中—教学参考资料 Ⅳ. ①G633.603

中国版本图书馆CIP数据核字（2014）第 232613号

山东教育出版社

义务教育教科书（五·四学制）

数 学

教师教学用书

八年级 下册

*

山东出版传媒股份有限公司

山东教育出版社出版

（济南市纬一路321号）

网址：www.sjs.com.cn

山东新华书店集团有限公司发行

山东金坐标印务有限公司印装

*

开本：787mm × 1092mm 1/16

印张：13.75 印张 字数：176 千字

定价：21.00 元（上光）

书号：ISBN 978-7-5328-8581-7

2015 年 1 月第 1 版 2018 年 1 月第 4 次印刷

著作权所有·请勿擅用本书制作各类出版物·违者必究

出 版 说 明

为了更好地满足义务教育教学的需求，山东教育出版社等单位受山东省教育厅委托，以教育部审查通过的义务教育教科书为基础，改编出版了一套适合五四分段教学使用的义务教育教科书。本书依据《义务教育数学课程标准（2011年版）》，配合山东教育出版社《义务教育教科书（五·四学制）·数学》（八年级下册）编写而成，供教师教学时参考使用。

本书力求体现义务教育课程标准精神和教科书的编写意图；从教师教学实际出发，既有利于教师更好地把握教科书的内容，解决备课中的实际困难，又留给教师一定独立发挥、独立钻研教科书的个性空间；根据素质教育的要求，在每一教学环节都注重体现对学生进行知识与能力、思想与方法、情感态度与价值观的培养；注意吸收数学教育教学的最新研究成果；符合五四分段教学实际，体现五四学制教育特色。

本书是在北京师范大学出版社出版的《义务教育教科书·数学教师教学用书》（九年级上册）的基础上改编而成的。参加本书改编的人员是韩际清、刘崇渭、王德刚、辛珍文、云鹏、陈杰、柳圣明、赵水祥，由马复、韩际清主编。

欢迎广大教师在使用过程中提出修改意见和建议，以利于本书的不断改进和完善。

山东教育出版社

山东教育出版社 山东教育出版社

山东教育出版社
山东教育出版社

目　录

第六章　特殊平行四边形

1　菱形的性质与判定　5（2）

2　矩形的性质与判定　16（12）

3　正方形的性质与判定　26（21）

回顾与思考　32（27）

复习题　35（27）

第七章　二次根式

1　二次根式　48（32）

2　二次根式的性质　50（34）

3　二次根式的加减　55（39）

4　二次根式的乘除　58（42）

回顾与思考　63（47）

复习题　63（47）

第八章　一元二次方程

1　一元二次方程　74（50）

义务教育教科书 SHUXUE

山东教育出版社

2　用配方法解一元二次方程　85（55）
3　用公式法解一元二次方程　91（61）
4　用因式分解法解一元二次方程　99（68）
*5　一元二次方程的根与系数的关系　102（70）
6　一元二次方程的应用　106（73）
回顾与思考　114（80）
复习题　114（80）

第九章　图形的相似

1　成比例线段　126（84）
2　平行线分线段成比例　133（90）
3　相似多边形　138（95）
4　探索三角形相似的条件　142（98）
*5　相似三角形判定定理的证明　152（106）
6　黄金分割　156（110）
7　利用相似三角形测高　159（113）
8　相似三角形的性质　163（117）
9　利用位似放缩图形　170（123）
回顾与思考　175（128）
复习题　177（129）

义务教育教科书 SHUXUE
山东教育出版社
山东教育出版社

综合与实践

◀制作视力表 189（134）

综合与实践

◀直觉的误导 199（137）

总复习题 204（141）

注：括号内页码系教科书的页码.

义务教育教科书 SHUXUE

山东教育出版社

山东教育出版社

第六章　特殊平行四边形

一、《标准》要求

1. 经历图形的抽象、分类、性质探讨的过程，掌握图形与几何的基础知识和基本技能.

2. 在参与观察、实验、猜想、证明等数学活动中，发展合情推理和演绎推理能力.

3. 探索并掌握直角三角形的性质定理：直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

4. 理解平行四边形、矩形、菱形、正方形的概念，以及它们之间的关系.

5. 探索并证明矩形、菱形、正方形的性质定理：矩形的四个角都是直角，对角线相等；菱形的四条边相等，对角线互相垂直;以及它们的判定定理:三个角是直角的四边形是矩形，对角线相等的平行四边形是矩形；四条边都相等的四边形是菱形，对角线互相垂直的平行四边形是菱形. 正方形具有矩形和菱形的一切性质.

二、教学目标

1. 经历菱形、矩形、正方形概念的抽象过程，以及它们的性质与判定的探索、猜测与证明的过程，丰富数学活动经验，进一步发展合情推理能力和演绎推理能力.

2. 理解菱形、矩形、正方形的概念，了解它们与平行四边形之间的关系，进一步体会从一般到特殊的思考问题的方法，增强发现问题和提出问题的能力.

3. 证明菱形、矩形、正方形的性质定理及判定定理，并能够证明其他相关结论.

4. 探索并掌握直角三角形的性质定理：直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

5. 提高自主探究的能力和与他人合作交流的意识、方法.

三、设计思路

与八年级上册“平行四边形”一章类似，本章仍将采用探究与证明相结合的方式展开相关内容.

从内容上讲，在已经掌握了平行四边形的性质与判定的基础上，对菱形、矩形、正方形的有关性质与常用判定方法进行探索与证明，可以丰富对平行四边形的认识. 从方法上来看，本章从多角度引导学生探索菱形、矩形、正方形的有关性质和常用判定方法，并对探索得到的结论进行证明. 呈现形式上，教科书力求尽可能创设一些问题情境，为学生提供自主探索发现的空间，让学生经历“探索—发现—猜想—证明”的过程，使证明成为探索活动的自然延续和必要发展，进一步发展学生的合情推理能力与演绎推理能力.

此外，本章的学习还有助于深化学生对平行四边形的理解，以及对识图、画图等操作技能的掌握；有助于丰富学生的数学活动经验和体验，促进其良好数学观的形成.

具体地，本章设计了3节内容，分别探索并证明菱形的性质定理与判定定理、矩形

山东教育出版社

的性质定理与判定定理、正方形的性质定理与判定定理. 对菱形、矩形，都设计了 3 个课时的内容：第1课时探索并证明图形的性质定理，第 2 课时探索并证明图形的判定定理，第 3 课时运用图形的性质定理与判定定理解决一些问题. 由于正方形既是特殊的菱形，又是特殊的矩形，因此对它的性质与判定方法的研究过程则要简略一些，主要通过分析它与菱形、矩形的关系获得相关结论.

整章设计注意渗透归纳、类比、转化等数学思想；注意通过引导探索过程来渗透与展现证明的思路. 此外，还注意引导学生探索证明的不同思路与方法，并进行适当的比较和讨论，提高学生分析、寻求证明思路的能力. 如常常在一种证明结束后提出“你还有其他证明方法吗？与同伴进行交流”.

四、课时安排建议

1　菱形的性质与判定	3 课时
2　矩形的性质与判定	3 课时
3　正方形的性质与判定	2 课时
回顾与思考	1 课时

五、教学建议

1. 让学生经历探索、猜测、证明的过程，体会合情推理与演绎推理各自的作用.

本章对菱形、矩形的性质与判定的研究，都需要学生先探索、猜想得到结论后再证明. 教学中，教师既可以利用教科书上已有的素材，也可以根据实际情况创设更现实、更贴近学生的问题情境，引导学生进行相关的探索、猜测活动. 例如，对矩形性质和判定条件的探索，既可以利用教科书上提供的“折纸活动”，也可以利用改变平行四边形邻边长短、角的大小的“活动框架”，还可以利用“几何画板”等软件制作课件. 教师要充分调动学生的积极性与主动性，引导学生探索、发现结论，体会探索结论的各种方法，理解获得猜想后还应予以证明的意义，感受合情推理与演绎推理的关系.

2. 注重合情推理与演绎推理的有机结合.

在前面的学习中，学生已初步掌握了几何证明的基本要求、基本步骤和基本方法. 本章中的大部分结论都是先通过合情推理进行探索，再用演绎推理加以证明. 在教学中，应把证明作为探索活动的自然延续与必要发展，让学生对发现的结论进行分析说明，然后按照几何证明的要求进行表达，实现合情推理与演绎推理的有机结合. 同时，教师应注意通过一定的练习进一步发展学生的几何证明能力，但要避免过分追求证明题的数量与证明技巧，应依据《标准》和教科书的要求，把握证明的难度.

3. 注重对证明思路的启发，提倡证明方法的多样性.

探索图形有关性质的过程，往往可以启发证明的思路. 比如，教科书中设计了一个折纸活动用来探究菱形的性质，同时这一活动也对后续证明的思路与方法带来了一定启示. 因此，在进行教学设计时，应充分考虑探索与证明的联系，为学生的积极思考创设条件. 同时，

山东教育出版社

要鼓励学生大胆探寻新颖独特的证明思路和证明方法，提倡证明方法的多样性，并引导学生在与他人的交流中比较证明方法的异同，提高演绎推理能力.

4. 注意让学生感悟数学思想方法.

对菱形、矩形、正方形的性质与常用判别方法的探索与证明过程，蕴含着一些数学思想方法，如归纳、类比、转化等. 教学中应有意识地让学生感悟、领会这些思想方法，并应用于解决相关问题的过程中.

六、评价建议

1. 关注学生探索结论、分析证明思路和证明方法的过程.

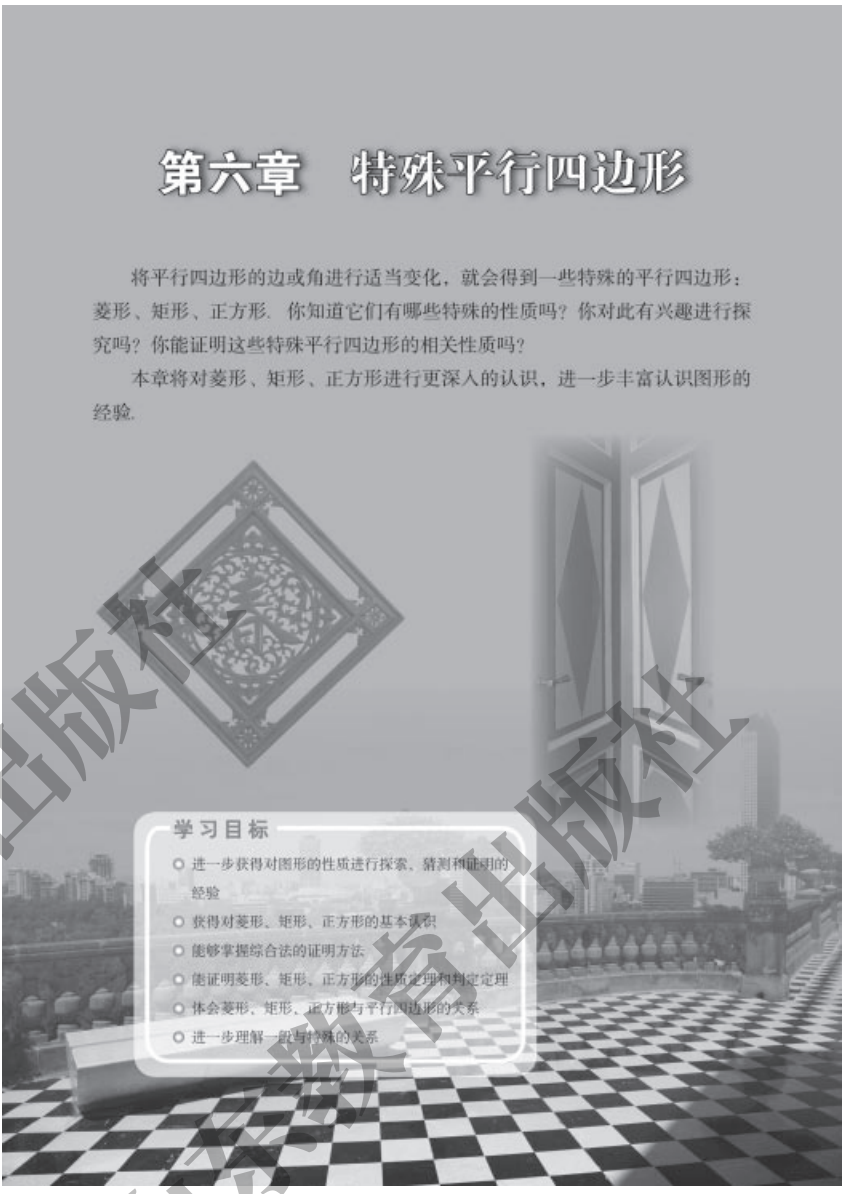
让学生经历菱形、矩形、正方形的性质与常用判定方法的探索过程，这是本章的教学目标之一，而几何结论的证明思路和证明方法的获得也需要学生经历一个探索、分析的过程. 因此，考查学生在这些活动中的表现是评价的一个重要方面. 一方面要关注学生是否积极主动参与探索、分析活动，是否积极主动与同伴进行交流；另一方面要关注学生能否通过独立思考找到解决问题的办法或者获得证明的思路，能否使用规范的数学语言表达自己分析与思考的过程，能否尝试用不同的方法证明同一个命题.

2. 关注学生合情推理能力与演绎推理能力的发展水平.

本章采用探索与证明相结合的方式展开相关内容，这有利于发展学生的合情推理能力与演绎推理能力. 因此，学生的合情推理能力与演绎推理能力的发展水平也是评价的重要内容. 要关注学生能否利用适当的合情推理方法猜想出有关结论，能否从探索过程中获得证明思路和证明方法的启示，能否对常用的证明思路和证明方法进行归纳总结，是否掌握命题证明各环节的要求等. 另外，教师在评价学生推理能力的发展水平时，要注意个体差异，要关注学生个体的变化和自身水平的提高，及时对学生推理能力的发展给予鼓励.

山东教育出版社 山东教育出版社

主题图以城市一角为背景，包含有菱形、矩形和正方形图案，暗示本章的主要研究对象；文字说明简明扼要地揭示了菱形、矩形、正方形这些特殊的平行四边形与一般平行四边形的关系，概括了本章的主要学习任务.

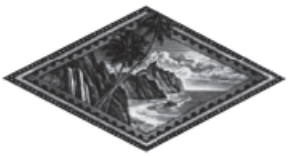


山东教育出版社
山东教育出版社

1 菱形的性质与判定

[1] 观察下面几幅图片，我们不难发现其中包含一些平行四边形，但这些平行四边形又有哪些共同的特征呢？





一组邻边相等的平行四边形叫做**菱形**（rhombus）.

想一想

（1）菱形是特殊的平行四边形，它具有一般平行四边形的所有性质. 你能列举一些这样的性质吗？

（2）你认为菱形还具有哪些特殊的性质？与同伴交流.

做一做

用菱形纸片折一折，回答下列问题：

（1）菱形是轴对称图形吗？如果是，它有几条对称轴？对称轴之间有什么位置关系？

（2）菱形中有哪些相等的线段？



[2] 通过上面的折纸活动，我们可以发现：菱形的四条边相等，对角线互相垂直. 下面我们证明这些结论.

教学目标

1. 理解菱形的概念，了解它与平行四边形之间的关系.

2. 经历菱形性质定理和判定定理的探索过程，进一步发展合情推理能力.

3. 能够用综合法证明菱形的性质定理和判定定理，进一步发展演绎推理能力.

4. 体会探索与证明过程中所蕴含的抽象、推理等数学思想.

本节安排3课时，第1课时是菱形性质定理的探索与证明，第2课时是菱形判定定理的探索与证明，第3课时是菱形性质定理和判定定理的综合应用. 当然，教学中也可以根据学生状况进行适当的调整.

[1] 教科书呈现的三幅图片中都含有菱形，其中第二幅图蕴含有正方形也是菱形的意图，第三幅图便于教学时通过测量比较，发现邻边相等的特征. 教学时也可以借助含有菱形的衣帽架、电动门，从观察变化中的不变性引入菱形的概念；还可以通过改变平行四边形一组邻边的长短，引导学生关注平行四边形形状的变化过程，从而引入菱形.

想一想

从菱形与平行四边形的关系入手，思考菱形的性质. 菱形是特殊的平行四边形，因此具有一般平行四边形的所有性质. 教科书首先让学生列举出这些性质，一方面是对平行四边形性质的回顾；另一方面在回顾这些性质的过程中，结合菱形的形状特征，学生有可能感悟到菱形的一些特殊性质，为接下来探索、证明菱形的特殊性质做好铺垫.

山东教育出版社

做一做

在上面“想一想”环节,学生可能已经感悟到菱形的某些特殊性质,这里通过折纸活动,让学生发现、验证菱形的特殊性质.

因为平行四边形是中心对称图形,因此菱形当然也是中心对称图形,所以这里不再提及.此外,菱形还是轴对称图形,菱形新增的性质本质上缘于其内在的轴对称性.

教学时应鼓励学生实际折一折,并在操作过程中进行观察与思考,从而获得有关结论.

(1)菱形是轴对称图形,有两条对称轴,两条对称轴互相垂直.

(2)菱形的四条边相等.

[2]通过上面的探索活动,发现了菱形的性质.其中的对称性只是通过合情推理加以认识,不证明;其他性质要进行严格的证明.

教学时,应鼓励学生先独立思考,自主分析证明思路,并与同学进行交流.在此基础上,由学生代表展示证明的书写过程,师生共同评议.

山东教育出版社
山东教育出版社

已知：如图 6–1，在菱形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，对角线 AC 与 BD 相交于点 O.

求证：（1）$AB=BC=CD=AD$；（2）$AC\perp BD$.

证明：（1）∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

∴ $AB=CD$，$AD=BC$（菱形的对边相等）.

又∵ $AB=AD$，

∴ $AB=BC=CD=AD$.

（2）∵ $AB=AD$，

∴ $\triangle ABD$ 是等腰三角形.

又∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

∴ $OB=OD$（菱形的对角线互相平分）.

在等腰三角形 ABD 中，

∵ $OB=OD$，

∴ $AO\perp BD$，

即 $AC\perp BD$.

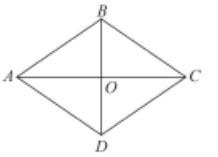


图 6–1

定理 菱形的四条边都相等.

定理 菱形的对角线互相垂直.

例 1 如图 6–2，在菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，$\angle BAD=60^\circ$，$BD=2$，求 AB 和 AC 的长.

解：∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

∴ $AB=AD$（菱形的四条边都相等），

$AC\perp BD$（菱形的对角线互相垂直），

$OB=OD=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}\times 2=1$（菱形的对角线互相平分）.

在等腰三角形 ABD 中，

∵ $\angle BAD=60^\circ$，

∴ $\triangle ABD$ 是等边三角形.

∴ $AB=BD=2$.

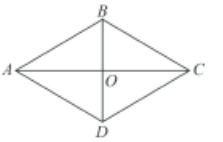


图 6–2

例 1

本例是利用菱形的性质求有关线段的长度，教师要引导学生将推理的过程写清楚，不能只关注计算结果.

山东教育出版社

随堂练习

1. $BD = 6$ cm.

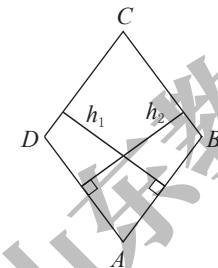
提示：根据菱形的对角线互相垂直，可知△AOB是直角三角形；由勾股定理可求得$BO = 3$ cm；根据菱形的对角线互相平分，可知$BD = 2BO$.

2. 相等.

如图，四边形$ABCD$是菱形，AB，CD之间的距离为h_1，AD，BC之间的距离为h_2，由于

$S_{菱形ABCD} = AB \cdot h_1 = AD \cdot h_2$，

$AB = AD$，所以$h_1 = h_2$.



习题6.1

1. 提示：根据菱形的四条边相等，可知△ABC是等腰三角形；由∠BAD与∠B互补，∠$BAD = 2$∠B，可得∠B=60°.

2. 周长是20.

3. 提示：分别证明△DAC≌△BAC，△ABD≌△CBD.

4. 有4个等腰三角形：△ABD，△CBD，△DAC，△BAC；

4个直角三角形：△ABO，△CBO，△DAO，△DCO.

在Rt△AOB中，由勾股定理，得

$OA^2 + OB^2 = AB^2$，

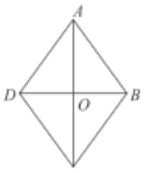
$\therefore OA = \sqrt{AB^2 - OB^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$.

$\therefore AC = 2OA = 2\sqrt{3}$.

随堂练习

1. 如图，在菱形$ABCD$中，对角线AC与BD相交于点O. 已知$AB = 5$ cm，$AO = 4$ cm，求BD的长.

2. 菱形的两组对边的距离相等吗？为什么？



（第1题）

习题 6.1

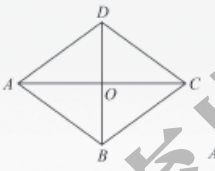
知识技能

1. 已知：如图，在菱形$ABCD$中，∠$BAD = 2$∠B. 求证：△ABC是等边三角形.

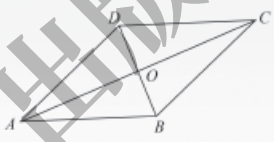
2. 如图，在菱形$ABCD$中，$BD = 6$，$AC = 8$，求菱形$ABCD$的周长.



（第1题）



（第2题）



（第3题）

3. 已知：如图，在菱形$ABCD$中，对角线AC与BD相交于点O.

求证：AC平分∠BAD和∠BCD，BD平分∠ABC和∠ADC.

数学理解

4. 如图，在菱形$ABCD$中，对角线AC与BD交于点O，图中有多少个等腰三角形和直角三角形？



（第4题）

山东教育出版社

根据菱形的定义，邻边相等的平行四边形是菱形. 除此之外，你认为还有什么条件可以判断一个平行四边形是菱形？先想一想，再与同伴交流.[1]



平行四边形的不少性质定理与判定定理都是互逆命题. 受此启发，我猜想：四边相等的平行四边形是菱形，对角线互相垂直的平行四边形是菱形.



我觉得，对角线互相垂直的平行四边形有可能是菱形. 但“四边相等的平行四边形是菱形”嘛……实际上与“邻边相等的平行四边形是菱形”一样.

你是怎么想的？你认为小明的想法如何？

已知：如图 6–3，在 $\square ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，$AC \perp BD$.

求证：$\square ABCD$ 是菱形.

证明：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $OA = OC$.

又∵ $AC \perp BD$，

∴ BD 所在的直线是线段 AC 的垂直平分线.

∴ $BA = BC$.[2]

∴ 四边形 $ABCD$ 是菱形（菱形的定义）.

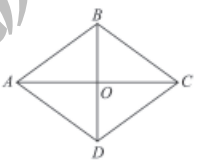


图 6–3

定理 对角线互相垂直的平行四边形是菱形.

议一议

已知线段 AC，你能用尺规作图的方法作一个菱形 $ABCD$，使 AC 为菱形的一条对角线吗？

第2课时接着研究菱形的判定方法. 菱形的定义当然是一个重要的判定方法，但本课时主要研究定义之外的判定方法.

[1] 探寻菱形的判定方法，可以有两个思考角度：一是着眼于要判定的图形所属的范围：是平行四边形还是四边形？二是着眼于要判定的图形的组成元素：考虑对角线还是考虑边？教科书首先引导学生考虑满足什么条件的平行四边形是菱形，教学时也可以根据实际情况进行适当的调整.

教科书提出的问题具有一定的开放性. 由于要判定的图形是平行四边形，因此若考虑边，则容易想到满足的条件是一组邻边相等，这就是定义；若考虑对角线，则可能受性质的启发，想到满足的条件是对角线互相垂直. 教学时应鼓励学生积极探索，大胆猜想. 在此基础上再进行严格的证明.

[2] 可能会有学生用证明三角形全等的方法证明 $BA = BC$. 对此，教师可引导学生对两种方法进行比较.

议一议

通过菱形作图，引导学生探索菱形的另一种判定方法. 教科书以小刚的身份提供了一种作法，教学时可鼓励学生独立寻求作法，并要求他们思考自己作法的正确性，进而得到菱形的另一种判定方法.

山东教育出版社



如图 6–4，分别以 A，C 为圆心，以大于 $\frac{1}{2}AC$ 的长为半径作弧，两条弧分别相交于点 B，D，依次连接 A，B，C，D，四边形 $ABCD$ 是菱形.

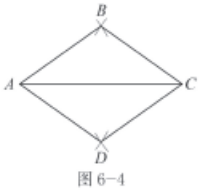


图 6–4

你是怎么做的？你认为小刚的做法正确吗？与同伴交流.

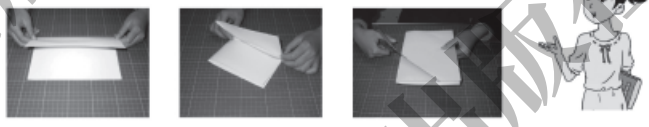
定理 四条边都相等的四边形是菱形.

请你完成这个定理的证明.[1]

做一做

你能用折纸等办法得到一个菱形吗？动手试一试！

先将一张长方形的纸对折，再对折，然后沿图中的虚线剪下一个角并展开，就得到了一个菱形.



你能说说小颖这样做的道理吗？

如果给你一张不规则的纸，你也能通过折纸等办法得到一个菱形吗？

例 2 已知：如图 6–5，在 $\square ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，$AB=\sqrt{5}$，$OA=2$，$OB=1$.

求证：$\square ABCD$ 是菱形.

证明：在 $\triangle AOB$ 中，

$\because AB=\sqrt{5}$，$OA=2$，$OB=1$，

[1] 证明思路是：先证明四边形是平行四边形，再证明它是菱形. 教学时应鼓励学生先独立完成，再进行展示交流.

做一做

目的是鼓励学生利用菱形的判定方法，设计制作菱形的方案，或说明已知制作菱形方案的正确性.

教学时不应局限于教科书给出的方法，而应放手让学生去思考、操作，鼓励学生展示自己的制作方法. 可能有学生会制作出正方形，对此也要予以肯定，同时让学生思考：能否制作出一个不是正方形的菱形？再增加怎样的环节可以变为非正方形的菱形？

小颖的方法是利用轴对称制作了一个四边相等的四边形，因此一定是菱形. 教学中，可以引导学生利用菱形的判定方法说明自己制作方法是正确的，从而巩固学生对菱形判定定理的理解.

例 2

这是菱形判定定理的直接应用. 教学时应关注证明思路的探寻与分析：已知四边形 $ABCD$ 是平行四边形，再具备什么条件就可以成为菱形呢？由已知条件可以证明邻边相等吗？可以证明对角线垂直吗？

山东教育出版社

$\therefore AB^2 = AO^2 + OB^2$.

$\therefore \triangle AOB$ 是直角三角形，$\angle AOB$ 是直角.

$\therefore AC \perp BD$.

$\therefore \square ABCD$ 是菱形（对角线互相垂直的平行四边形是菱形）.

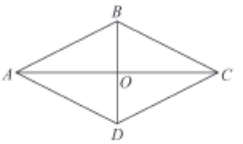


图 6-5

随堂练习

1. 画一个菱形，使它的两条对角线长分别为 4 cm，6 cm.

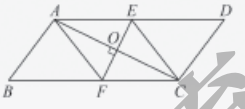
2. 证明：一条对角线平分一内角的平行四边形是菱形.

习题 6.2

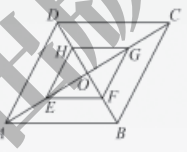
知识技能

1. 已知：如图，在 $\square ABCD$ 中，对角线 AC 的垂直平分线分别与 AD，AC，BC 相交于点 E，O，F.

求证：四边形 $AFCE$ 是菱形.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 已知：如图，在菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，点 E，F，G，H 分别是 OA，OB，OC，OD 的中点.

求证：四边形 $EFGH$ 是菱形.

数学理解

3. 如图，在四边形纸片 $ABCD$ 中，$AD /\!/ BC$，$AD > CD$，将纸片沿过点 D 的直线折叠，使点 C 落在 AD 上的点 C' 处，折痕 DE 交 BC 于点 E，连接 $C'E$. 你能确定四边形 $CDC'E$ 的形状吗？证明你的结论.



（第 3 题）

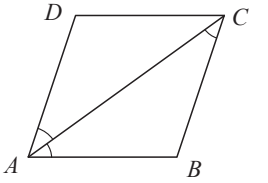
随堂练习

1. 图略.

提示：要想画出平行四边形，两条对角线必须互相平分；要想使画出的平行四边形成为菱形，两条对角线还必须互相垂直. 因此，画两条互相垂直平分的线段，使它们的长分别等于已知长度，然后再顺次连接四个端点，即可得到所要求的菱形.

学生完成后，可让学生证明自己画法的正确性. 通过此题，可以得到菱形的又一种判定方法：对角线互相垂直平分的四边形是菱形. 当然，根据《标准》的要求，教科书没有把这一结论作为定理.

2. 提示：如图，可证明 $AB = BC$.



习题6.2

1. 提示：证明 $\triangle AEO \cong \triangle CFO$，从而得到 $OE = OF$，再从对角线的角度即可证明结论.

此题是以已知、求证这种静态方式给出的，教学中也可以从动态的角度来看，即将 $\square ABCD$ 对折，使点 A 与点 C 重合，那么 EF 就是折痕.

2. 提示：利用菱形的对角线互相垂直平分的性质及已知条件，证明四边形 $EFGH$ 的对角线互相垂直平分；再从对角线的角度判定四边形 $EFGH$ 是菱形.

3. 四边形 $CDC'E$ 是菱形.

提示：由折叠可知 $\triangle C'DE \cong \triangle CDE$，再利用平行关系证明 $\angle C'DE = \angle CED$，然后既可以根据四边相等进行判定，也可以根据定义进行判定.

山东教育出版社

前两课时分别对菱形的性质与判定进行了研究，本课时运用菱形的性质定理和判定定理解决一些问题，一方面可以巩固对菱形的性质定理与判定定理的理解，另一方面在解决问题的过程中还可以使学生认识性质定理与判定定理的区别，正确应用有关定理.

例 3

本例是菱形性质的应用与菱形面积的计算.

一般来说，计算菱形的面积时除可以按平行四边形的面积计算方法计算外，还可以根据菱形的特殊性用特殊的方法计算，即菱形的面积等于其对角线乘积的一半. 本例实际推导了这一结论.

做一做

运用菱形的定义解决问题，同时也提供了一种制作菱形的方法.

例 3 如图 6-6，四边形 $ABCD$ 是边长为 13 cm 的菱形，其中对角线 BD 长 10 cm. 求：

（1）对角线 AC 的长度；

（2）菱形 $ABCD$ 的面积.

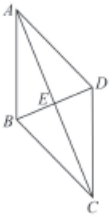


图 6-6

解：（1）∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形，AC 与 BD 相交于点 E，

∴ $\angle AED = 90°$（菱形的对角线互相垂直），

$DE = \frac{1}{2} BD = \frac{1}{2} \times 10 = 5$（cm）（菱形的对角线互相平分）.

∴ $AE = \sqrt{AD^2 - DE^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$（cm）.

∴ $AC = 2AE = 2 \times 12 = 24$（cm）（菱形的对角线互相平分）.

（2）菱形 $ABCD$ 的面积

= △ABD 的面积 + △CBD 的面积

= 2 × △ABD 的面积

= $2 \times \frac{1}{2} \times BD \times AE$

= $2 \times \frac{1}{2} \times 10 \times 12$

= 120（cm^2）.

做一做

如图 6-7，两张等宽的纸条交叉重叠在一起，重叠的部分 $ABCD$ 是菱形吗？为什么？



图 6-7

重叠的部分 $ABCD$ 是菱形. 说明理由时，首先要根据纸条的两长边互相平行说明 $ABCD$ 是平行四边形；然后由纸条等宽说明两条邻边上的高相等，进而利用平行四边形的面积说明两邻边相等.

山东教育出版社

随堂练习

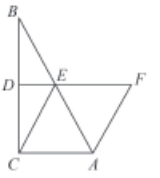
1. 菱形 $ABCD$ 的周长为 40 cm，它的一条对角线长 10 cm.

（1）求菱形的每一个内角的度数；

（2）求菱形另一条对角线的长.

2. 已知：如图，在 Rt△ABC 中，$\angle ACB = 90°$，$\angle BAC = 60°$，BC 的垂直平分线分别交 BC 和 AB 于点 D，E，点 F 在 DE 的延长线上，且 $AF = CE$.

求证：四边形 $ACEF$ 是菱形.



（第 2 题）

读一读

箏　形

一条对角线所在直线垂直平分另一条对角线的四边形叫做箏形.

箏形可以分为两类：凸箏形和凹箏形. 每个内角都小于平角的箏形叫做凸箏形（如图 6-8（1））；有一个内角大于平角的箏形叫做凹箏形（如图 6-8（2））.

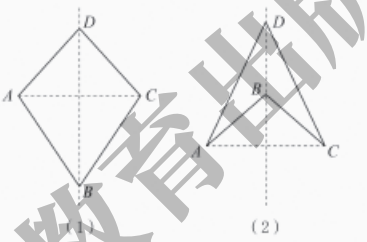


图 6-8

箏形有如下性质：

（1）箏形有两组邻边分别相等；

（2）箏形有一组对角相等；

（3）箏形是轴对称图形.

菱形是特殊的凸箏形.

随堂练习

本随堂练习提供了一个菱形性质的练习和一个菱形判定的练习. 第1题属于几何计算题，教学时要引导学生既关注结果是否正确，也要关注过程书写是否有条理、理由是否充分. 第2题的证明有一定的难度，学生解答时可能会出现想当然的情况，教学时要注意引导和纠正.

1.（1）60°，120°，60°，120°；

（2）$10\sqrt{3}$ cm.

2. 提示：可以先证明△AEC 是等边三角形，再证明△AEF 也是等边三角形，然后利用四条边相等的四边形是菱形证明结论.

读一读

平行四边形和梯形是我们常见的两种特殊的四边形，箏形是另一种常见的特殊的四边形，我们在很多几何图形中都能看到箏形.

箏形主要有如下性质：

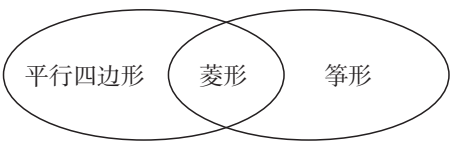
（1）有两组邻边分别相等；

（2）有一组对角相等；

（3）一条对角线所在直线垂直平分线另一条对角线；

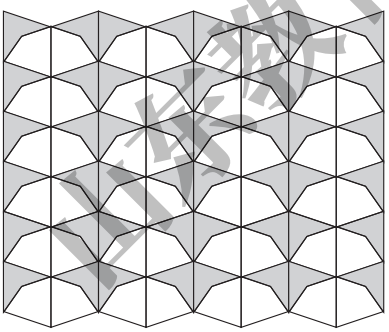
（4）是轴对称图形，有一条对角线所在直线是它的对称轴.

菱形是箏形的特殊情况. 菱形、平行四边形和箏形的关系如右图.

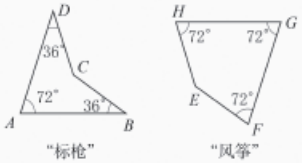


山东教育出版社

10 世纪 70 年代，英国数学物理学家罗杰·彭罗斯（Roger Penrose）发现了一对特殊的箏形：“标枪”和“风箏”（如图6−9）. “标枪”和“风箏”不仅可以拼凑成菱形（如图6−10），而且还可以拼凑成许多有趣的图案. 图6−11中的图案彭罗斯分别称它们为“国王”“王后”“星星”和“太阳”. 更重要的是，用“标枪”和“风箏”可以密铺平面，而且密铺方式有无限多种，下图就是密铺的三种方式.



一位英国数学家发现了一对特殊的箏形，他把它们称作“标枪”和“风箏”（如图6−9）.



“标枪” “风箏”

图6−9



图6−10

“标枪”和“风箏”的边长满足下面的关系：

$$AB = AD = GF = GH,$$

$$CB = CD = EF = EH.$$

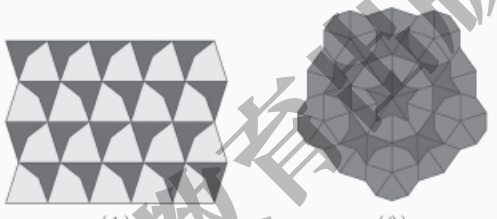
“标枪”和“风箏”不仅可以拼凑成菱形（如图6−10），而且还可以拼凑成许多有趣的图案（如图6−11）.



“国王” “王后” “星星” “太阳”

图6−11

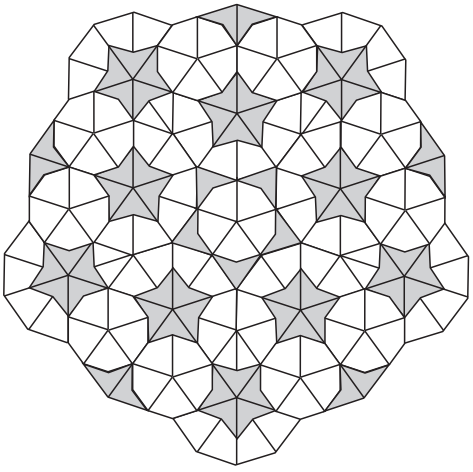
用这两种图形，可以镶嵌整个平面（如图6−12）.

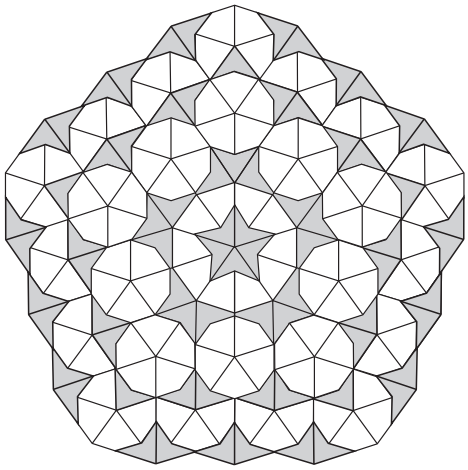


（1） （2）

图6−12

在图6−12（2）中，你能看到“国王”“王后”“星星”和“太阳”的图案吗？





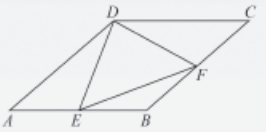
山东教育出版社 山东教育出版社

习题 6.3

知识技能

1. 已知：如图，在菱形 $ABCD$ 中，E，F 分别是 AB 和 BC 上的点，且 $BE=BF$.

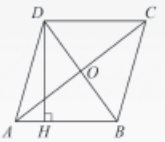
求证：（1）$\triangle ADE\cong\triangle CDF$；（2）$\angle DEF=\angle DFE$.



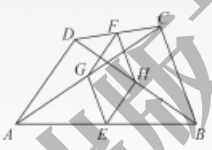
（第 1 题）

2. 证明：菱形的面积等于其对角线乘积的一半.

3. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，且 $AC=16$，$BD=12$，求菱形 $ABCD$ 的高 DH.



（第 3 题）



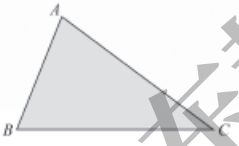
（第 4 题）

4. 已知：如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AD=BC$，点 E，F，G，H 分别是 AB，CD，AC，BD 的中点.

求证：四边形 $EGFH$ 是菱形.

数学理解

5. 请用一张如图所示的三角形纸片 ABC 折出一个菱形，使 $\angle A$ 为菱形的一个内角，且菱形的一个顶点在 BC 边上.



（第 5 题）

习题6.3

1. 略.

2. 提示：可参考教科书例 3（2）的解答过程.

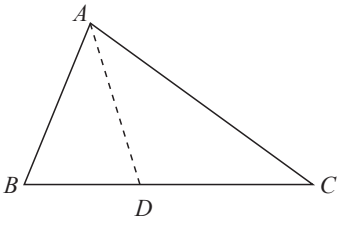
此题是以文字命题的形式给出，要求学生根据题意画出图形，并标上字母，进而根据图形写出已知、求证，再证明. 对于学有余力的学生，还可以启发他们进一步思考：怎样的四边形可以用对角线乘积的一半来求面积？

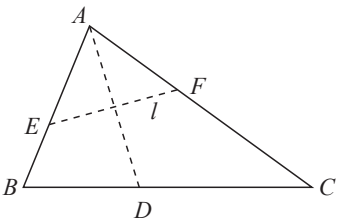
3. 9.6.

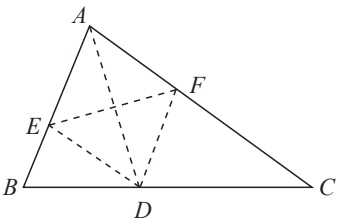
提示：利用上题的结论，可求出菱形的面积为 96；用勾股定理可求出菱形的边长为 10，进而可求出菱形的高.

4. 提示：利用三角形中位线定理证明.

5. 提示：先折出 $\triangle ABC$ 的角平分线 AD，再折出 AD 的垂直平分线 l，设 l 与 AB，AC 分别交于点 E，F. 最后沿 ED，FD 折叠，就得到满足条件的菱形 $AEDF$（如下图）.







本题有一定难度，教学时可鼓励学生思考、交流、探讨. 对于学生提出的不同方法，要予以鼓励，并要求学生证明自己方法的正确性.

本节教科书从不同角度、利用不同情境引导学生关注菱形的应用，让学生不仅能解决常规的证明问题，而且可以把证明与解决问题融为一体，在解决问题的过程中进一步体会有关内容的意义和作用.

山东教育出版社

教学目标

1. 理解矩形的概念，了解它与平行四边形之间的关系.

2. 经历矩形性质定理和判定定理的探索过程，进一步发展合情推理能力.

3. 能够用综合法证明矩形的性质定理和判定定理，以及其他相关结论，进一步发展演绎推理能力.

4. 探索并掌握直角三角形的性质定理：直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

5. 进一步体会探索与证明过程中所蕴含的抽象、推理等数学思想.

本节的设计思路与第 1 节的设计思路类似，仍然按“概念—性质—判定—应用”的线索展开. 本节安排 3 课时，第 1 课时是矩形性质定理的探索与证明，第 2 课时是矩形判定定理的探索与证明，第 3 课时是矩形性质定理和判定定理的综合应用. 当然，教学中也可以根据学生状况进行适当的调整.

2 矩形的性质与判定

[1] 观察下面的图片，我们能够发现其中包含了一些特殊的平行四边形，这些特殊的平行四边形有哪些共同的特征呢？



有一个角是直角的平行四边形叫做**矩形**（rectangle）.

矩形是生活中常见的图形，你还能举出一些生活中矩形的例子吗？与同伴交流.

想一想

（1）矩形是特殊的平行四边形，它具有一般平行四边形的所有性质. 你能列举一些这样的性质吗？

（2）你认为矩形还具有哪些特殊的性质？与同伴交流.

[2] 通过观察，可以发现矩形的四个角都是直角，对角线相等. 下面我们证明这些结论.

已知：如图 6-13，四边形 $ABCD$ 是矩形，$\angle ABC = 90^\circ$，对角线 AC 与 DB 相交于点 O.

求证：（1）$\angle ABC = \angle BCD = \angle CDA = \angle DAB = 90^\circ$；（2）$AC = DB$.

第 1 课时首先对矩形的性质进行探索. 由于矩形是学生比较熟悉的图形，因此教科书先引导学生进行理性思考，得到猜想后再进行证明. 之后，根据矩形的性质定理探索直角三角形的一个性质：直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

[1] 学生在小学已经学习过长方形和正方形，因此矩形对他们来说并不陌生. 教科书通过展示生活中的一些矩形图片，唤醒学生的记忆，并通过问题引导学生观察、思考这些图形的共同特征，从而抽象出矩形的定义.

山东教育出版社

想一想

（1）此处采用了和菱形类似的处理方式，从矩形与平行四边形的关系入手，思考矩形的性质. 矩形是特殊的平行四边形，因此具有一般平行四边形的所有性质. 教科书首先让学生列举出这些性质，一方面是对平行四边形性质的回顾；另一方面在回顾这些性质的过程中，结合矩形的形状特征，学生有可能感悟到矩形的一些特殊性质，为接下来发现并证明矩形的特殊性质做好铺垫.

（2）因为平行四边形是中心对称图形，因此矩形当然也是中心对称图形，所以这里不再提及. 此外，矩形还是轴对称图形，它有两条对称轴，两条对称轴互相垂直.

（3）由于矩形是学生比较熟悉的图形，因此可鼓励学生认真观察，积极探索，大胆猜想，并与同学进行交流.

[2] 通过上面的观察、思考、交流等活动，发现了矩形的性质. 其中的对称性只是通过合情推理加以认识，不证明；其他性质要进行严格的证明.

教学时，应鼓励学生先独立思考，自主分析证明思路，独自完成证明过程. 在此基础上，由学生代表展示证明的书写过程，师生共同评议.

山东教育出版社
山东教育出版社

证明：（1）∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴ $AB \parallel DC$（矩形的对边平行），

$\angle ABC = \angle CDA$，$\angle BCD = \angle DAB$（矩形的对角相等）.

∴ $\angle ABC + \angle BCD = 180°$.

又∵ $\angle ABC = 90°$，

∴ $\angle BCD = 90°$.

∴ $\angle ABC = \angle BCD = \angle CDA = \angle DAB = 90°$.

（2）∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴ $AB = DC$（矩形的对边相等）.

在△ABC 和△DCB 中，

∵ $AB = DC$，$\angle ABC = \angle DCB$，$BC = CB$，

∴ △ABC ≌ △DCB.

∴ $AC = DB$.

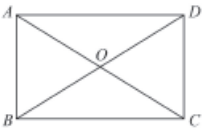


图 6–13

定理 矩形的四个角都是直角.

定理 矩形的对角线相等.

想一想

矩形是轴对称图形吗？如果是，它有几条对称轴？

矩形是轴对称图形.

议一议

如图 6–14，矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 E，那么 BE 是 Rt△ABC 中一条怎样的特殊线段？它与 AC 有什么大小关系？由此你能得到怎样的结论？

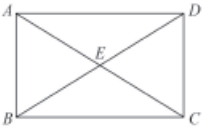


图 6–14

议一议

目的是通过一个问题情境让学生探索直角三角形斜边上的中线与斜边的关系. 在说明理由时，需要用到“矩形的对角线相等且互相平分”的性质，教师可结合这一点再次强调特殊平行四边形具有一般平行四边形的所有性质.

山东教育出版社

定理　直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

你能证明这个定理吗?

例 1　如图 6−15，在矩形 $ABCD$ 中，两条对角线相交于点 O，$\angle AOD = 120°$，$AB = 2.5$，求矩形对角线的长.

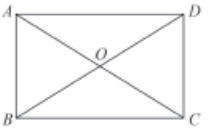


图 6−15

解：∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴ $AC = BD$（矩形的对角线相等），

$OA = OC = \frac{1}{2}AC$，$OB = OD = \frac{1}{2}BD$（矩形的对角线互相平分）.

∴ $OA = OD$.

∵ $\angle AOD = 120°$，

∴ $\angle ODA = \angle OAD = \frac{1}{2}(180° - 120°) = 30°$.

又∵ $\angle DAB = 90°$（矩形的四个角都是直角），

∴ $BD = 2AB = 2 \times 2.5 = 5$.

你还有其他解法吗?

随堂练习

1. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，两条对角线 AC 与 BD 相交于点 O，$AB = 6$，$OA = 5$. 求 BD 与 AD 的长.
2. 一个矩形的两条对角线的一个夹角为 60°，对角线长为 15，求矩形较短边的长.



（第 1 题）

习题 6.4

知识技能

1. 一个矩形的对角线长为 2，对角线与一边的夹角是 45°，求矩形的各边长.

在探索出结论之后，要求学生写出已知、求证，并进行证明. 需要注意的是，上面“议一议”中问题的条件和该定理的条件不尽相同. 证明这一定理的关键是构造辅助图形（矩形），构造矩形的方法不唯一. 比如，可以过点 A 作 BC 的平行线（如教科书图 6−14），与 BE 的延长线交于点 D，连接 CD. 然后证明 $\triangle BCE \cong \triangle DAE$，得到 $BC = AD$，进而证明四边形 $ABCD$ 是矩形. 再利用“矩形的对角线相等且互相平分”即可证明结论.

例 1

本例是运用矩形的性质求线段的长度. 教科书给出的解法，除用到矩形的一些性质外，还用到了定理：在直角三角形中，如果一个锐角等于 30°，那么它所对的直角边等于斜边的一半.

本例也可以按这样的思路解：由 $\angle AOD$=120°，得 $\angle AOB = 60°$，进而可证 $OA = AB = OB$，从而 $AC = 2OA = 2 \times 2.5 = 5$.

教学中要提倡解法的多样化，对学生的不同解法，教师应予以鼓励.

随堂练习

1. $BD = 10$，$AD = 8$.　2. 7.5.

习题6.4

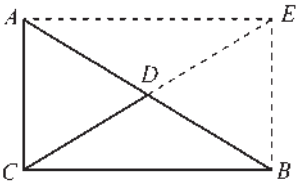
1. $\sqrt{2}$.

2. 四边形 $ADCE$ 是菱形.

提示：由 $AE \parallel CD$，$CE \parallel AB$，可知四边形 $ADCE$ 是平行四边形；再利用“直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半”可证 $AD = CD$.

山东教育出版社

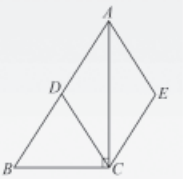
3. 这是定理“直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半”的逆命题，要求学生根据题意画出图形，并标好字母，然后分别写出已知、求证.



思路一：如图，延长 CD 至 E，使 $DE=CD$，连接 AE，BE. 由 $AD=BD$，$DE=CD$，可知四边形 $ACBE$ 是平行四边形；再证 $AB=CE$，所以 $\square ACBE$ 是矩形；所以 $\angle ACB=90^\circ$，即 $\triangle ABC$ 是直角三角形.

思路二：由 $AD=CD=BD$，可知 $\triangle ADC$ 与 $\triangle CDB$ 是等腰三角形，所以 $\angle DAC=\angle DCA$，$\angle DCB=\angle DBC$，进而可得 $\angle DCA+\angle DCB=\angle DAC+\angle DBC$，即 $\angle ACB=\angle DAC+\angle DBC$；再由 $\angle ACB+\angle DAC+\angle DBC=180^\circ$，可证 $\angle ACB=90^\circ$，即 $\triangle ABC$ 是直角三角形.

2. 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，D 为 AB 的中点，$AE/\!/CD$，$CE/\!/AB$，试判断四边形 $ADCE$ 的形状，并证明你的结论.



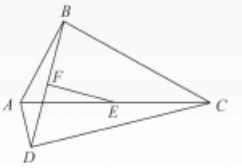
（第2题）

数学理解

3. 证明：如果一个三角形一边上的中线等于这边的一半，那么这个三角形是直角三角形.

4. 已知：如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=\angle ADC=90^\circ$，$E$，$F$ 分别是 AC，BD 的中点.

求证：$EF\perp BD$.



（第4题）

做一做

如图 6-16，在一个平行四边形活动框架上，用两根橡皮筋分别套在相对的两个顶点上，拉动一对不相邻的顶点时，平行四边形的形状会发生变化.



图 6-16

（1）随着 $\angle\alpha$ 的变化，两条对角线的长度将发生怎样的变化？

（2）当两条对角线的长度相等时，平行四边形有什么特征？由此你能得到一个怎样的猜想？

定理 对角线相等的平行四边形是矩形.

已知：如图 6-17，在 $\square ABCD$ 中，AC，DB 是它的两条对角线，$AC=DB$.

求证：$\square ABCD$ 是矩形.

4. 提示：连接 BE，DE，则 $BE=\frac{1}{2}AC$，$DE=\frac{1}{2}AC$，所以 $BE=DE$，从而 EF 是等腰三角形 BDE 底边上的中线.

第2课时研究矩形的判定定理. 教科书首先引导学生探索并证明“对角线相等的平行四边形是矩形”，接着再研究“有三个角是直角的四边形是矩形”. 教学时，根据实际情况，也可以先提出一个较为开放的问题，放手让学生探索矩形的各种判定方法，形成猜想，在此基础上再分别进行证明.

做一做

利用平行四边形活动框架，一方面体会四边形的不稳定性，另一方面引导学生观察：在平行四边形中，随着一个内角的变化，两条对角线的长度会发生变化，平行四边形的形状也在发生变化；当变化到两条对角线相等时，这个内角看上去是直角，此时平行四边形看上去是矩形. 由此得到一个猜想：对角线相等的平行四边形是矩形.

山东教育出版社

证明： ∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AB = DC$，$AB \parallel DC$.

又∵ $BC = CB$，$AC = DB$，

∴ $\triangle ABC \cong \triangle DCB$.

∴ $\angle ABC = \angle DCB$.

∵ $AB \parallel DC$，

∴ $\angle ABC + \angle DCB = 180°$.

∴ $\angle ABC = \angle DCB = 90°$.

∴ $\square ABCD$ 是矩形（矩形的定义）.



图 6-17

想一想

我们知道，矩形的四个角都是直角．反过来，一个四边形至少有几个角是直角时，这个四边形就是矩形呢？能证明你的结论吗？与同伴交流.

定理 有三个角是直角的四边形是矩形.

议一议

你有什么方法检查你家（或教室）刚安装的门框是不是矩形？如果仅有一根较长的绳子，你怎样检查？请说明检查方法的合理性，并与同伴交流.

例 2 如图 6-18，在 $\square ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，$\triangle ABO$ 是等边三角形，$AB = 1$，求 $\square ABCD$ 的面积.

解： ∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $OA = OC$，$OB = OD$.

又∵ $\triangle ABO$ 是等边三角形，

∴ $OA = OB = AB = 1$，$\angle BAC = 60°$.

∴ $OA = OB = OC = OD = 1$.

∴ $AC = BD = 2AB = 2 \times 1 = 2$.



图 6-18

本定理的证明思路是：利用全等三角形证明平行四边形的某两个相邻的角相等，而这两个角又互补，所以它们都是直角.

想一想

如果要判定的图形是四边形，那么怎么判定它是矩形呢？教科书引导学生通过逆向思考矩形的性质提出猜想，并进行证明. 教学时，应鼓励学生用自己的方式进行探究、思考.

证明的思路是：利用“同旁内角互补，两直线平行”证明四边形是平行四边形，然后利用矩形的定义进行判定.

议一议

利用矩形的判定定理解决问题.

检查的方法是：先用绳子测量门框的对边是否相等，若相等，则可判定其为平行四边形；然后再用绳子测量门框的对角线是否相等，若相等，则可肯定门框是矩形. 道理是：对角线相等的平行四边形是矩形.

例 2

本例是求 $\square ABCD$ 的面积，为此需要先判定 $\square ABCD$ 是矩形. 教学时，应鼓励学生积极思考，寻求解题思路.

可能会有学生没有证明 $\square ABCD$ 是矩形，却想当然地认为它是矩形而直接计算. 对此，教师应适时地加以启发引导.

也可能会有学生利用习题 6.4 第 4 题的结论“如果一个三角形一边上的中线等于这边的一半，那么这个三角形是直角三角形”进行证明. 对于这样的方法，教师首先应予以鼓励，但同时也要向学生说明，那个结论虽然是正确的，但教科书没有把它作为定理，所以不能直接以它为依据进行证明.

山东教育出版社

∴ □*ABCD* 是矩形（对角线相等的平行四边形是矩形）.

∴ ∠*ABC* = 90°（矩形的四个角都是直角）.

在 Rt△*ABC* 中，由勾股定理，得

$AB^2 + BC^2 = AC^2$,

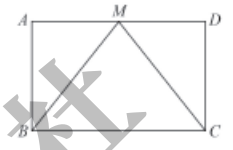
∴ $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$.

∴ $S_{□ABCD} = AB \cdot BC = 1 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}$.

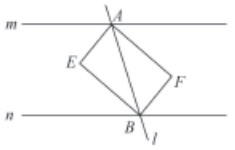
随堂练习

1. 已知：如图，在□*ABCD* 中，*M* 是 *AD* 边的中点，且 *MB* = *MC*.

求证：四边形 *ABCD* 是矩形.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 已知：如图，直线 *l* 与平行线 *m*，*n* 分别相交于点 *A*，*B*，两组同旁内角的平分线分别相交于点 *E*，*F*.

求证：四边形 *AEBF* 是矩形.

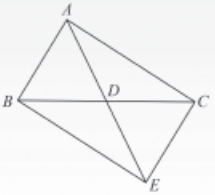
习题 6.5

知识技能

1. 如图，在△*ABC* 中，*AD* 为 *BC* 边上的中线，延长 *AD* 至 *E*，使 *DE* = *AD*，连接 *BE*，*CE*.

（1）试判断四边形 *ABEC* 的形状；

（2）当△*ABC* 满足什么条件时，四边形 *ABEC* 是矩形？



（第 1 题）

随堂练习

1. 提示：证明△*ABM* ≌ △*DCM*.

2. 提示：由平行线的内错角相等可以证得∠*EBA* = ∠*FAB*，∠*EAB* = ∠*ABF*，所以 *BE* // *AF*，*BF* // *AE*，从而四边形 *AEBF* 是平行四边形.

再由平行线的同旁内角互补可以证得∠*EAB* + ∠*EBA* = 90°，所以∠*E* = 90°，所以四边形 *AEBF* 是矩形.

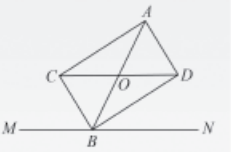
习题6.5

1.（1）四边形 *ABEC* 是平行四边形；

（2）当△*ABC* 的∠*BAC* 是直角时，四边形 *ABEC* 是矩形.

山东教育出版社

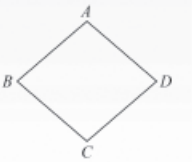
2. 如图，点 B 在直线 MN 上，过 AB 的中点 O 作 MN 的平行线，分别交 $\angle ABM$ 的平分线和 $\angle ABN$ 的平分线于点 C，D，连接 AC，AD. 试判断四边形 $ACBD$ 的形状，并证明你的结论.



（第 2 题）

问题解决

3. 如图，已知菱形 $ABCD$，作一个矩形，使得 A，B，C，D 四个点分别在矩形的四条边上，且矩形的面积为菱形 $ABCD$ 面积的 2 倍.



（第 3 题）

例 3　如图 6−19，在矩形 $ABCD$ 中，$AD=6$，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，$AE\perp BD$，垂足为点 E，$ED=3BE$. 求 AE 的长.

解： ∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴ $AO=BO=DO=\frac{1}{2}BD$（矩形的对角线相等且互相平分），

$\angle BAD=90^\circ$（矩形的四个角都是直角），

∵ $ED=3BE$，

∴ $BE=OE$.

又 ∵ $AE\perp BD$，

∴ $AB=AO$.

∴ $AB=AO=BO$，

即 $\triangle ABO$ 是等边三角形.

∴ $\angle ABO=60^\circ$.

∴ $\angle ADB=90^\circ-\angle ABO=30^\circ$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AED$ 中，

∵ $\angle ADE=30^\circ$，

∴ $AE=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}\times 6=3$.

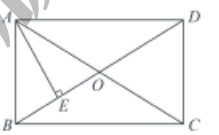
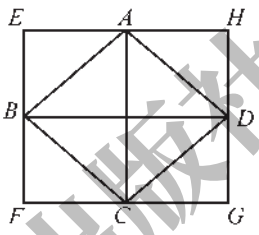


图 6−19

2. 四边形 $ACBD$ 是矩形.

提示：先证明 $OC=OB$，$OD=OB$，于是 $OC=OD$，从而四边形 $ACBD$ 是平行四边形；然后再证明 $\angle CBD$ 是直角.

3. 提示：如图，分别过点 A 和 C 作 BD 的平行线，分别过点 B 和 D 作 AC 的平行线. 可以证明，所得四边形 $EFGH$ 就是所要求的矩形.



本课时继续对矩形的性质定理和判定定理进行巩固应用，进一步提升学生的应用能力与证明能力. 教学中，要引导学生思考性质定理和判定定理的区别，正确使用定理.

例 3

本例是矩形性质定理的应用，有一定难度. 教学时，要给学生留出一定的思考时间，鼓励学生积极寻求解题思路.

山东教育出版社

例 4

本例是矩形判定定理的应用. 教学中，建议教师给予学生更多的思考空间，鼓励学生提出不同于教科书的证法.

想一想

对例 4 进行拓展. 教科书在这里提出了两个问题，要求学生自己进行判断. 教学中也可以让学生自己从图形中发现一些结论，提高他们发现问题和提出问题的能力.

（1）四边形 $ABDE$ 是平行四边形，证明略.

（2）$DF \parallel AB$，且 $DF = \frac{1}{2}AB$，证明略. 此问题要从位置和数量关系两方面来考虑.

例 4 已知：如图 6–20，在△ABC 中，$AB = AC$，AD 为∠BAC 的平分线，AN 为△ABC 的外角∠CAM 的平分线，$CE \perp AN$，垂足为点 E.

求证：四边形 $ADCE$ 是矩形.

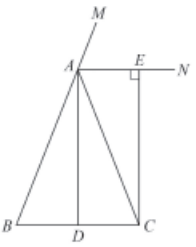


图 6–20

证明： ∵ AD 平分∠BAC，AN 平分∠CAM，

$\therefore \angle CAD = \frac{1}{2}\angle BAC$，$\angle CAN = \frac{1}{2}\angle CAM$.

$\therefore \angle DAE = \angle CAD + \angle CAN$

$= \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle CAM)$

$= \frac{1}{2} \times 180^\circ$

$= 90^\circ$.

在△ABC 中，

∵ $AB = AC$，AD 为∠BAC 的平分线，

$\therefore AD \perp BC$.

$\therefore \angle ADC = 90^\circ$.

又∵ $CE \perp AN$，

$\therefore \angle CEA = 90^\circ$.

∴ 四边形 $ADCE$ 是矩形（有三个角是直角的四边形是矩形）.

想一想

在例 4 中，连接 DE，交 AC 于点 F（如图 6–21）.

（1）试判断四边形 $ABDE$ 的形状，并证明你的结论.

（2）线段 DF 与 AB 有怎样的关系？请证明你的结论.

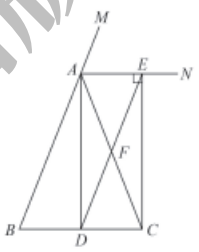


图 6–21

随堂练习

1. 已知：如图，四边形 $ABCD$ 是由两个全等的等边三角形 ABD 和 CBD 组成的，M，N 分别是 BC 和 AD 的中点.

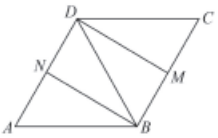
随堂练习

1. 提示：利用等腰三角形“三线合一”的性质. 教学中也可以利用此题，让学生提出一些问题，并进行证明. 比如，四边形 $ABCD$ 的形状问题；连接 MN 后，四边形 $DNMC$ 的形状问题；还可以从边的关系、角的关系提出一些问题.

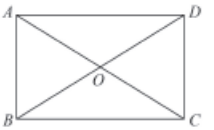
2. $4\sqrt{3}$.

山东教育出版社

求证：四边形 $BMDN$ 是矩形.



（第1题）



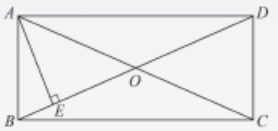
（第2题）

2. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，$\angle ACB = 30°$，$BD = 4$，求矩形 $ABCD$ 的面积.

习题 6.6

知识技能

1. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，过点 A 作 BD 的垂线，垂足为点 E. 已知 $\angle EAD = 3\angle BAE$，求 $\angle EAO$ 的度数.



（第1题）



（第2题）

2. 已知：如图，在△ABC 中，$AB = AC$，D 为 BC 的中点，四边形 $ABDE$ 是平行四边形.

求证：四边形 $ADCE$ 是矩形.

问题解决

※**3.** 如图，有一矩形纸片 $ABCD$，$AB = 6$ cm，$BC = 8$ cm，将矩形纸片折叠，使点 C 与点 A 重合，请在图中画出折痕，并求折痕的长.



（第3题）

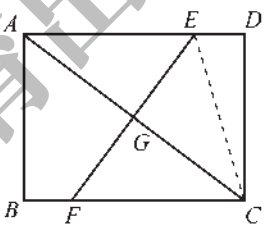
习题6.6

1. 45°.

2. 提示：利用等腰三角形的性质和平行四边形的性质.

3. 如图所示，EF 为折痕，$EF = 7.5$ cm.

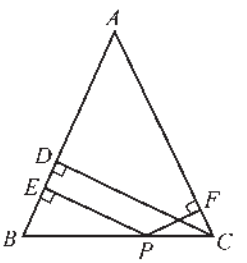
提示：可以求得 $AC = 10$ cm. 折痕 EF 垂直平分线段 AC，因此 $AE = CE$. 在 Rt△CDE 中应用勾股定理，即可列出以 AE 为未知数的方程，解方程可求得 AE. 在 Rt△AGE 中求 GE. 学习相似后还可以让学生用相似解此题，并进行方法比较.



4. $\frac{12}{5}$.

提示：连接 PO，则 △APO 与 △DPO 的面积之和等于矩形 $ABCD$ 面积的 $\frac{1}{4}$.

本题实际上就是求等腰三角形底边上的一点到两腰的距离之和. 可以证明，等腰三角形底边上的一点到两腰的距离之和，等于腰上的高（如图）.



山东教育出版社

教学目标

1. 理解正方形的概念，了解它与菱形、矩形、平行四边形之间的关系.

2. 探索并证明正方形的性质定理和判定定理，进一步发展推理能力.

3. 体会探索与证明过程中所蕴含的抽象、推理等数学思想.

本节安排2课时，分别研究正方形的性质定理与判定定理.

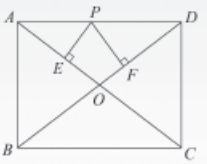
第1课时，教科书在引入正方形的概念后，通过“议一议”，明确正方形既是矩形，也是菱形，因此具有矩形、菱形的一切性质. 由此便可直接推得正方形的性质定理. 所以，正方形性质定理的获得过程比较简单，这方面与菱形、矩形有所不同.

[1]学生对正方形比较熟悉，因此教科书直接让学生观察一组矩形，从特殊的矩形中引入正方形的定义.

[2]教科书是用矩形来定义正方形的. 如果用菱形定义正方形，那么就是“有一个角是直角的菱形是正方形”；如果用平行四边形定义正方形，那么就是“有一组邻边相等，且有一个角是直角的平行四边形是正方形”. 教学中可以让学生进行讨论，并顺势转入下面的“议一议”环节.

联系拓广

※4. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=3$，$AD=4$，P 是 AD 上不与 A 和 D 重合的一个动点，过点 P 分别作 AC 和 BD 的垂线，垂足为点 E，F. 求 $PE+PF$ 的值.



（第4题）

3 正方形的性质与判定

[1]图 6-22 中的四边形都是矩形，但有些矩形比较特殊，你能说出这些特殊矩形的特征吗？

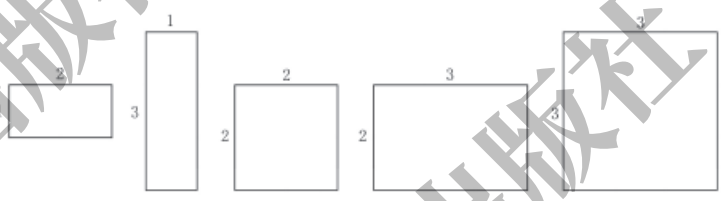


图 6-22

[2]有一组邻边相等的矩形叫做**正方形**（square）.

议一议

（1）正方形是菱形吗？

（2）你认为正方形具有哪些性质？与同伴交流.

正方形既是矩形，又是菱形，它具有矩形与菱形的所有性质.

议一议

引导学生思考正方形与矩形、菱形的关系，从而得出正方形具有的性质.

想一想（下页）

菱形是轴对称图形，其对称轴是两条对角线所在的直线；矩形也是轴对称图形，其对称轴是过对边中点的两条直线. 正方形既是菱形，也是矩形，所以正方形当然是轴对称图形，而且它有四条对称轴. 菱形、矩形、正方形的轴对称性也是它们特殊性的表现.

山东教育出版社

定理 正方形的四个角都是直角，四条边都相等.

定理 正方形的对角线相等且互相垂直平分.

想一想

正方形有几条对称轴?

例 1 如图 6–23，在正方形 $ABCD$ 中，E 为 CD 边上一点，F 为 BC 延长线上一点，且 $CE = CF$. BE 与 DF 之间有怎样的关系？请说明理由.

解：$BE = DF$，且 $BE \perp DF$. 理由如下：

（1）∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴ $BC = DC$，$\angle BCE = 90^\circ$（正方形的四条边都相等，四个角都是直角）.

∴ $\angle DCF = 180^\circ - \angle BCE = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

∴ $\angle BCE = \angle DCF$.

又∵ $CE = CF$，

∴ $\triangle BCE \cong \triangle DCF$.

∴ $BE = DF$.

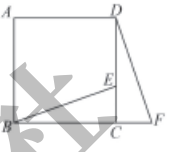


图 6–23

（2）延长 BE 交 DF 于点 M（如图 6–24）.

∵ $\triangle BCE \cong \triangle DCF$，

∴ $\angle CBE = \angle CDF$.

∵ $\angle DCF = 90^\circ$，

∴ $\angle CDF + \angle F = 90^\circ$.

∴ $\angle CBE + \angle F = 90^\circ$.

∴ $\angle BMF = 90^\circ$.

∴ $BE \perp DF$.

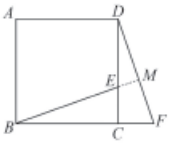


图 6–24

议一议

平行四边形、菱形、矩形、正方形之间有什么关系？你能用一个图直观地表示它们之间的关系吗？与同伴交流.

如果有学生在上面“议一议”环节提出正方形的对称性问题，那么也可以在“议一议”环节讨论该问题.

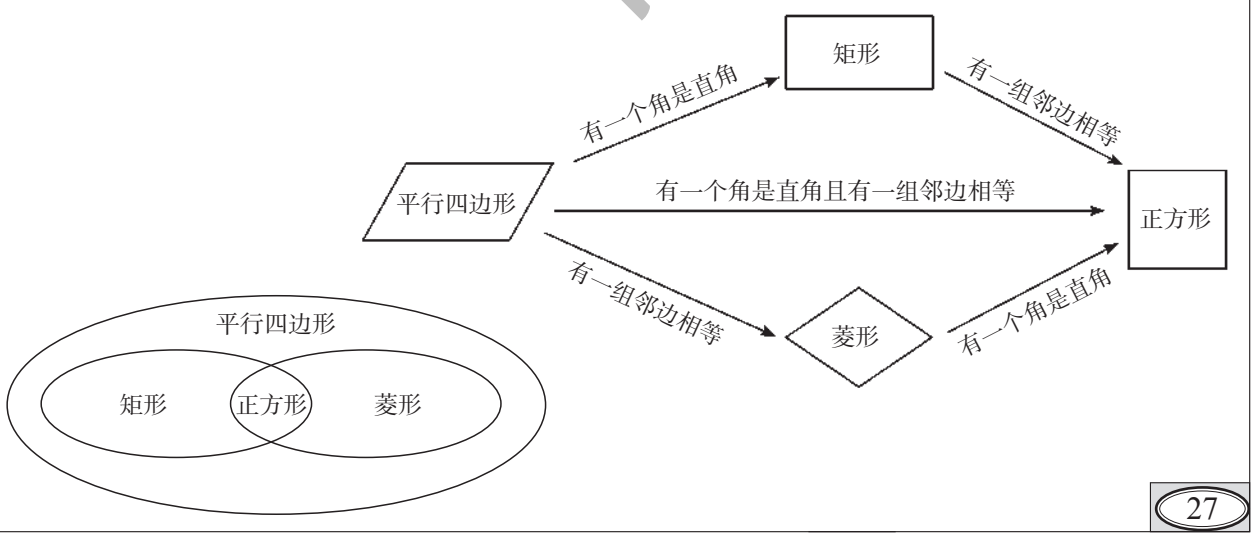
例 1

本例是利用正方形的性质判断两条线段之间的关系，这种关系包括数量关系和位置关系. 教学时，要先鼓励学生用自己的方式进行猜想. 比如，可以从旋转的角度来看，即 $\triangle DCF$ 可以看成是 $\triangle BCE$ 绕着点 C 按顺时针方向旋转 90° 形成的，从而猜想 $BE = DF$，$BE \perp DF$. 在学生猜想的基础上再展开证明.

议一议

引导学生整体地理解平行四边形、菱形、矩形、正方形之间的关系，并能直观地表示这种关系.

下面的关系图供参考：



山东教育出版社

随堂练习

1. 图中有8个等腰三角形，并且都是等腰直角三角形.

2. △CDF≌△CBF，
△FDA≌△FBA，
△CDA≌△CBA，证明略.
教学中可以引导学生从轴对称的角度去观察与思考.

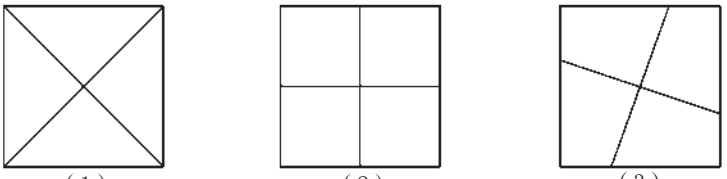
习题6.7

1. $\sqrt{2}$ cm.

2. $\angle AEB = 75^\circ$.
提示：△ADE是等腰三角形.
还可以对此题进行拓展：如果点E在正方形$ABCD$的外部，那么$\angle AEB$的度数是多少？它和本题中求得的度数有什么关系？

3. 提示：证明△PAB≌△QDA，得$BP=AQ$，$\angle PBA=\angle QAD$，而$\angle QAD+\angle BAQ=90^\circ$，所以$\angle PBA+\angle BAQ=90^\circ$，所以$BP\perp AQ$.
还可以对此题进行拓展：如果$BP=AQ$，那么$PD=QC$，$BP\perp AQ$成立吗？如果$BP\perp AQ$，那么$PD=QC$，$BP=AQ$成立吗？

4. 过正方形两条对角线的交点任意作两条互相垂直的直线，即可将正方形分成大小、形状完全相同的四部分，下面是其中的三种分法：

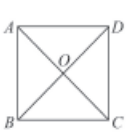


（1）　（2）　（3）

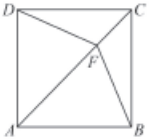
此题有助于学生更好地认识正方形的对称性. 实际上，过对称中心与正方形边上一点的任意一条线，绕对称中心分别旋转90°，180°，270°后，都将正方形分成大小、形状完全相同的四部分（如图（3））.

随堂练习

1. 如图，在正方形$ABCD$中，对角线AC与BD相交于点O，图中有多少个等腰三角形？



（第1题）



（第2题）

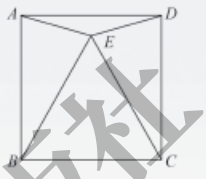
2. 如图，在正方形$ABCD$中，点F为对角线AC上一点，连接BF，DF. 你能找出图中的全等三角形吗？选择其中一对进行证明.

习题6.7

知识技能

1. 对角线长为2 cm的正方形，边长是多少？

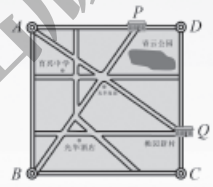
2. 如图，四边形$ABCD$是正方形，△CBE是等边三角形，求$\angle AEB$的度数.



（第2题）

数学理解

3. 如图，A，B，C，D四家工厂分别坐落在正方形城镇的四个角上，仓库P和Q分别位于AD和DC上，且$PD=QC$. 证明两条直路$BP=AQ$且$BP\perp AQ$.



（第3题）

问题解决

※**4.** 在一个正方形的花坛上，欲修建两条直的小路，使得两条直的小路将花坛分成面积相等的四部分（不考虑道路的宽度），你有几种方法？（至少说出三种）

山东教育出版社

[1] 如图 6–25，将一张长方形纸对折两次，然后剪下一个角并展开. 怎样剪才能剪出一个正方形？



图 6–25

议一议

满足什么条件的矩形是正方形呢？满足什么条件的菱形是正方形呢？说说你的理由，并与同伴交流.

定理　对角线相等的菱形是正方形.

定理　对角线垂直的矩形是正方形.

定理　有一个角是直角的菱形是正方形.

例 2　已知：如图 6–26，在矩形 $ABCD$ 中，BE 平分 $\angle ABC$，CE 平分 $\angle DCB$，$BF /\!/ CE$，$CF /\!/ BE$. 求证：四边形 $BECF$ 是正方形.

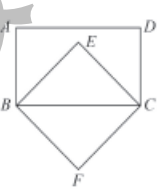


图 6–26

证明：∵ $BF /\!/ CE$，$CF /\!/ BE$，

∴ 四边形 $BECF$ 是平行四边形.

∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴ $\angle ABC = 90°$，$\angle DCB = 90°$.

又∵ BE 平分 $\angle ABC$，CE 平分 $\angle DCB$，

∴ $\angle EBC = \frac{1}{2}\angle ABC = 45°$，$\angle ECB = \frac{1}{2}\angle DCB = 45°$.

∴ $\angle EBC = \angle ECB$.

∴ $EB = EC$.

∴ $\square BECF$ 是菱形（菱形的定义）.

在 $\triangle EBC$ 中，

∵ $\angle EBC = 45°$，$\angle ECB = 45°$，

∴ $\angle BEC = 90°$.

∴ 菱形 $BECF$ 是正方形（有一个角是直角的菱形是正方形）.

第 2 课时研究正方形的判定定理. 教学时，不必要求学生死记结论，而是要引导学生明确这样一个思路：要判定一个四边形是正方形，只要判定它既是菱形又是矩形即可.

[1] 教科书提供了一个剪纸活动，意在引入正方形的判定问题.

这种剪法剪出的一定是菱形（因为四边相等），要想使剪出的菱形是正方形，就需要保证有一个角是直角. 因此，只要确保剪口线与折痕成 45° 角即可剪出一个正方形.

议一议

引导学生讨论正方形的判定方法. 重点并不在于得到几条判定定理，而是要形成判定正方形的基本思路：一个四边形既是矩形又是菱形，这个四边形就是正方形.

例 2

本例是正方形的判定问题. 证明的基本思路是：首先证明四边形 $BECF$ 是平行四边形，然后再证明 $\square BECF$ 是菱形，最后证明菱形 $BECF$ 是正方形. 教学中要给学生充分思考、交流的时间，明确思路，在此基础上再进行证明.

做一做（下页）

在学习完菱形、矩形、正方形的性质和判定之后，教科书设计本环节及下面的“议一议”环节，力图通过研究中点四边形的问题，综合应用菱形、矩形、正方形的性质定理和判定定理.

对于这个问题，学生容易由图形猜出结论，随后的证明也不太困难. 教学时教师也可以在此基

山东教育出版社

础上，引导学生类比地提出问题，即下面“议一议”的问题，以发展学生发现问题、提出问题的能力.

四边形$A_1B_1C_1D_1$是正方形. 可以证明四边形$A_1B_1C_1D_1$四边相等，且$\angle B_1A_1D_1=90°$.

议一议

利用类比的方法分别提出了以菱形、矩形以及平行四边形各边中点为顶点所组成图形的形状问题，除了让学生猜测、证明外，还希望学生能进一步分析、概括得到一个一般性的结论：所得的四边形的形状取决于原四边形两条对角线的位置关系和数量关系.

（1）矩形，菱形.

（2）新四边形的形状与原四边形的两条对角线有关. 当原四边形的两条对角线互相垂直时，新四边形是矩形；当原四边形的两条对角线相等时，新四边形是菱形；当原四边形的两条对角线互相垂直且相等时，新四边形是正方形.

随堂练习

证明略. 要求学生根据题意画出图形并写出已知、求证，最后再证明.

做一做

依次连接任意四边形各边的中点可以得到一个平行四边形，那么，依次连接正方形各边的中点（如图6-27）能得到一个怎样的图形呢？先猜一猜，再证明.

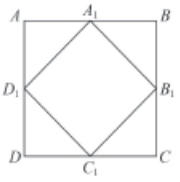


图6-27

议一议

（1）依次连接菱形或矩形各边的中点能得到一个什么图形？先猜一猜，再证明.

（2）依次连接平行四边形各边的中点呢？

依次连接四边形各边的中点所得到的新四边形的形状与哪些线段有关系？有怎样的关系？

随堂练习

证明：

（1）有一个角是直角的菱形是正方形；

（2）对角线垂直的矩形是正方形.

读一读

四边形的对称性

我们知道，一般的四边形既不一定是轴对称图形，也不一定是中心对称图形；平行四边形都是中心对称图形，却不一定是轴对称图形；等腰梯形是轴对称图形，但不是中心对称图形；等形是轴对称图形，但不一定是中心对称图形；所有的菱形和矩形既是中心对称图形，又是轴对称图形，而且它们至少都有两条对称轴.（如图6-28所示）请你想一想、画一画，什么情况下菱形和矩形只有两条对称轴？什么情况下它们有两条以上的对称轴？

山东教育出版社

通过想象或实际画图，可以发现，当菱形有一个角为直角时，它的对称轴的数量就增加了；当矩形有一组邻边相等时，它的对称轴的数量也增加了. 换句话说，当菱形或矩形成为正方形时，它的对称轴就不止两条了. 由此我们看到，当图形从一般情况向特殊情况变化时，它的对称性也可能随之发生了变化.



图 6-28

此外，我们还知道，如果把一个图形绕着某一点旋转一定角度（小于360°）后，能够与原来的图形重合，那么这个图形叫做旋转对称图形. 请你想一想、试一试，平行四边形是旋转对称图形吗？菱形呢？矩形呢？正方形呢？[1]

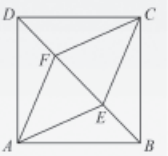
习题 6.8

知识技能

1. 证明：对角线相等的菱形是正方形.

2. 已知：如图，E，F 是正方形 $ABCD$ 的对角线 BD 上的两点，且 $BE = DF$.

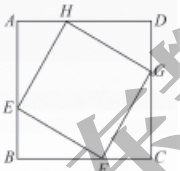
求证：四边形 $AECF$ 是菱形.



（第 2 题）

数学理解

3. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，E，F，G，H 分别在它的四条边上，且 $AE = BF = CG = DH$. 四边形 $EFGH$ 是什么特殊四边形？你是如何判断的？



（第 3 题）

[1] 一般的平行四边形、菱形、矩形都是以180° 为旋转角的旋转对称图形，而正方形则是以90° 为最小旋转角的旋转对称图形，它们的对称中心都是对角线的交点.

习题6.8

1. 证明略. 要求学生根据题意画出图形，并写出已知、求证，最后再证明.

2. 提示：可以考虑对角线——证明四边形 $AECF$ 的对角线互相垂直平分；也可以考虑边——利用全等三角形证明四边形 $AECF$ 的四条边相等.

3. 四边形 $EFGH$ 是正方形.

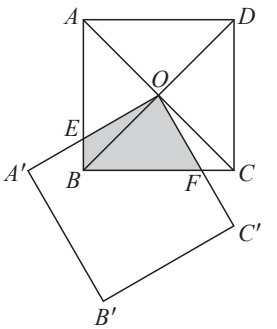
提示：可以证明四边形 $EFGH$ 四条边相等，再证明其中一个角为直角.

教学时还可以将本题与本课时“做一做”（教科书图6-27）加以对比，“做一做”实际上是本题的特殊情况.

4. 重叠部分的面积是正方形 $ABCD$ 面积的 $\frac{1}{4}$.

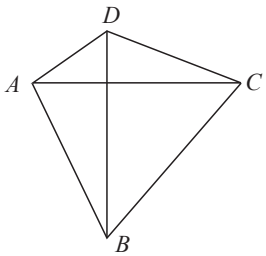
提示：如图，证明△ EBO ≌△ FCO 即可.

教学时，还可以引导学生进一步思考：重叠部分的面积与正方形 $A'B'C'O$ 的大小有关吗？将条件中的正方形 $A'B'C'O$ 改成等腰直角三角形 $OA'C'$，或者改成直角三角形 $OA'C'$，结论又如何？更进一步，只要 OA' 与 OC' 满足怎样的关系，结论就保持不变？



山东教育出版社

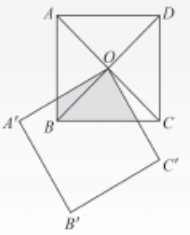
5. 不一定是正方形，四边形的两条对角线若不能互相平分，那么这个四边形就不是平行四边形，更不是正方形. 如图，虽然对角线 $AC = BD$，$AC \perp BD$，但四边形 $ABCD$ 不是正方形.



联系拓广

4. 如图，正方形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O，正方形 $A'B'C'O$ 与正方形 $ABCD$ 的边长相等. 在正方形 $A'B'C'O$ 绕点 O 旋转的过程中，两个正方形重叠部分的面积与正方形 $ABCD$ 的面积有什么关系？请证明你的结论.

5. 对角线互相垂直且相等的四边形一定是正方形吗？为什么？



（第 4 题）

回顾与思考

1. 说说平行四边形、菱形、矩形、正方形之间的关系，它们各有哪些性质？
2. 在菱形、矩形、正方形中，哪些图形是轴对称图形？哪些图形是中心对称图形？
3. 分别说说判定一个四边形是菱形、矩形、正方形的条件.
4. 用适当的方式梳理本章的知识，并与同伴进行交流.

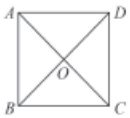
复习题

知识技能

1. 一个菱形的两条对角线的长分别为 4 cm 和 2 cm，求它的边长.

2. 如图，若四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O，且 $OA = OB = OC = OD = \frac{\sqrt{2}}{2}AB$，则四边形 $ABCD$ 是正方形吗？

3. 如果一个四边形是轴对称图形，而且有两条互相垂直的对称轴，那么这个四边形一定是菱形吗？为什么？



（第 2 题）

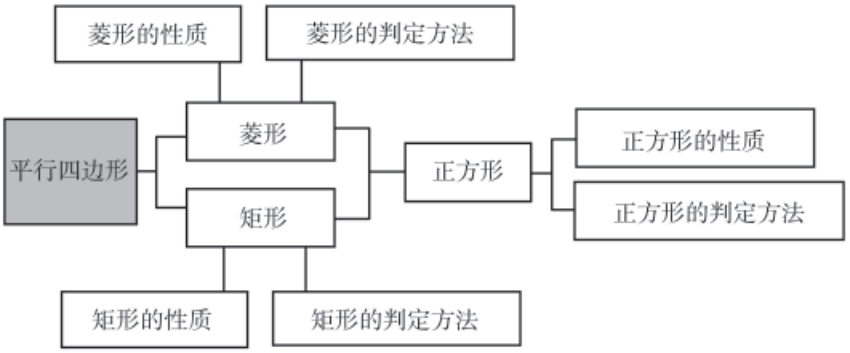
回顾与思考

教科书在“回顾与思考”中设立了几个问题，分别说明了本章要掌握和体会的重点内容及方法，希望学生通过对这几个问题的思考，梳理本章的知识内容，总结相关的数学思想方法. 教学时，应鼓励学生带着这些问题回顾所学内容. 在回答这些问题时，教师应关注学生对问题的理解，并开展小组交流和讨论，使学生在知识、技能、经验和思想方法等各方面都有一定程度的提升.

教学时，教师应首先鼓励学生独立思考，要求学生根据自己的理解梳理本章所学内容，然后再组织学生进行展示交流. 对于有困难的学生，教师可进行适当的指导，如以问题串的方式帮助学生总结本章内容，引导学生梳理本章的知识系统.

山东教育出版社 山东教育出版社

下面的框图供参考.



在梳理平行四边形与特殊平行四边形之间的关系，以及特殊平行四边形有关性质定理和判定定理的基础上，教师还应鼓励学生自主命制一些典型题目，运用相关知识和方法解决一些问题.

此外，“平行线的有关证明”“三角形的有关证明”“平行四边形”“特殊平行四边形”这四章内容是第三学段几何证明的主要部分. 因此，如有可能，还可以引导学生对这四章内容进行全面的回顾. 教师可以要求学生独立或小组合作完成一份小结，用自己的语言梳理有关内容，从知识、技能、经验、方法等方面总结自己的学习体会和收获，以及存在的问题和需要改进的地方. 教师可以据此了解每一个学生的学习状况，并适时调整自己的教学.

以下典型例题供参考.

例 1 如图 1，AD 是△ABC 的角平分线，线段 AD 的垂直平分线分别交 AB 和 AC 于点 E，F，连接 DE，DF.

（1）试判断四边形 $AEDF$ 的形状，并证明你的结论；

（2）若 $AE=5$，$AD=8$，求 EF 的长；

（3）△ABC 满足什么条件时，四边形 $AEDF$ 是正方形？请说明理由.

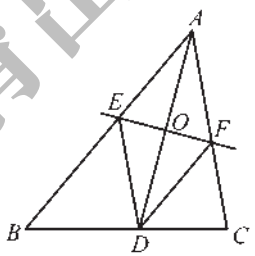


图 1

分析： 因为 AD，EF 是四边形 $AEDF$ 的对角线，所以可以考虑从对角线的角度去判断四边形 $AEDF$ 的形状. 可以证明四边形 $AEDF$ 的对角线互相垂直平分，因此四边形 $AEDF$ 是菱形. 在此基础上，根据正方形的判定方法可知，要想使四边形 $AEDF$ 是正方形，还需要∠BAC 是直角.

解：（1）四边形 $AEDF$ 是菱形. 证明如下：

∵ AD 平分∠BAC，

∴ ∠BAD = ∠CAD.

又∵ EF 垂直平分 AD，

∴ $AO=DO$，∠AOE = ∠AOF = 90°.

在△AOE 与△AOF 中，

∵ ∠BAD = ∠CAD，$AO=AO$，∠AOE = ∠AOF，

∴ △AOE ≌ △AOF.

山东教育出版社

$\therefore EO = FO$.

在四边形 $AEDF$ 中，

$\because AO = DO$，$EO = FO$，

$\therefore$ 四边形 $AEDF$ 是平行四边形.

又 $\because AD \perp EF$，

$\therefore$ 四边形 $AEDF$ 是菱形.

（2）在菱形 $AEDF$ 中，

$\because AD = 8$，

$\therefore AO = 4$.

在 Rt$\triangle AOE$ 中，$EO = \sqrt{AE^2 - AO^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.

$\therefore EF = 2EO = 6$.

（3）当$\triangle ABC$ 的$\angle BAC = 90^\circ$ 时，四边形 $AEDF$ 是正方形. 理由如下：

$\because$ 四边形 $AEDF$ 是菱形，且$\angle BAC = 90^\circ$，

$\therefore$ 菱形 $AEDF$ 是正方形.

例 2 如图 2，在矩形 $ABCD$ 中，$\angle BAD$ 的平分线交 BC 于点 E，交 DC 的延长线于点 F. 取 EF 的中点 G，连接 CG，BG.

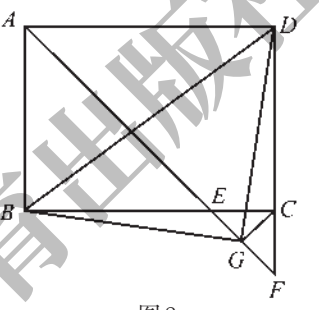


图 2

（1）求证：$\triangle DCG \cong \triangle BEG$；

（2）你能求出$\angle BDG$ 的度数吗？若能，请写出计算过程；若不能，请说明理由.

分析： 在矩形 $ABCD$ 中，由 $\angle BAD$ 的角平分线可以联想到 45° 的角，从而可以得到$\triangle ABE$，$\triangle ADF$，$\triangle ECF$ 等都是等腰直角三角形，从而为解决问题提供思路.

答案与提示：（1）可以证明 $\angle F = \angle BAF = 45^\circ$，于是 $\triangle ECF$ 是等腰直角三角形；而 CG 是 $\triangle ECF$ 斜边上的中线，所以 $CG = EG$. 在 $\triangle DCG$ 和 $\triangle BEG$ 中，$DC = AB = BE$，$\angle DCG = \angle BEG = 135^\circ$，$CG = EG$，所以$\triangle DCG \cong \triangle BEG$.

（2）由$\triangle DCG \cong \triangle BEG$，得 $DG = BG$，$\angle DGC = \angle BGE$，于是$\angle BGD = \angle EGC = 90^\circ$，所以$\triangle BGD$ 为等腰直角三角形，因此$\angle BDG = 45^\circ$.

例 3 如图3，在正方形 $ABCD$ 中，E，F 分别为 BC 和 CD 上的点，AE 与 BF 交于点 G. 现提供三个关系：① $BE = CF$；② $AE = BF$；③ $AE \perp BF$.

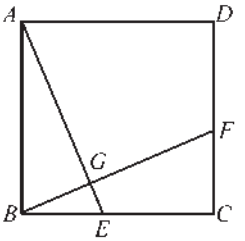


图 3

（1）从三个关系中选择一个作为条件，剩下的两个作为结论，形成一个真命题，要求写出所有的真命题；

（2）选择其中的一个真命题进行证明.

分析： 本例由常规问题改编而来. 在常规问题中，通常是已知 $BE = CF$，要求判断 AE 与 BF 的数量关系和位置关系. 本例实质上是考查$\triangle ABE$ 与$\triangle BCF$ 是否全等，而由正方形的性质可知，$AB = BC$，$\angle ABE = \angle C = 90^\circ$，因此要想使$\triangle ABE$ 与$\triangle BCF$ 全等，只需

山东教育出版社

要再增加一个条件即可. 这里给出的三个关系都可以作为条件：选择 ①，根据 SAS 可证全等；选择 ②，根据 HL 可证全等；选择 ③，根据 ASA 可证全等.

答案与提示：（1）命题一：若 ① $BE = CF$，则 ② $AE = BF$，③ $AE \perp BF$；

命题二：若 ② $AE = BF$，则 ① $BE = CF$，③ $AE \perp BF$；

命题三：若 ③ $AE \perp BF$，则 ① $BE = CF$，② $AE = BF$.

（2）命题一的证明思路：由正方形的性质，得 $AB = BC$，$\angle ABE = \angle C = 90^\circ$；又 $BE = CF$，所以 $\triangle ABE \cong \triangle BCF$（SAS），从而 $AE = BF$，$\angle BAE = \angle CBF$；由 $\angle BAE + \angle AEB = 90^\circ$，得 $\angle CBF + \angle AEB = 90^\circ$，于是 $\angle BGE = 90^\circ$，所以 $AE \perp BF$.

命题二的证明思路：由正方形的性质，得 $AB = BC$，$\angle ABE = \angle C = 90^\circ$；又 $AE = BF$，所以 $\triangle ABE \cong \triangle BCF$（HL），从而 $BE = CF$，$\angle BAE = \angle CBF$；由 $\angle BAE + \angle AEB = 90^\circ$，得 $\angle CBF + \angle AEB = 90^\circ$，于是 $\angle BGE = 90^\circ$，所以 $AE \perp BF$.

命题三的证明思路：由正方形的性质，得 $AB = BC$，$\angle ABE = \angle C = 90^\circ$；又 $AE \perp BF$，所以 $\angle BGE = 90^\circ$，于是 $\angle CBF + \angle AEB = 90^\circ$，而 $\angle BAE + \angle AEB = 90^\circ$，所以 $\angle BAE = \angle CBF$，因此 $\triangle ABE \cong \triangle BCF$（ASA），故 $AE = BF$，$BE = CF$.

复习题

1. 这个菱形的边长为 $\sqrt{5}$ cm.

   提示：根据菱形的性质可知，菱形的两条对角线将菱形分为四个全等的直角三角形；根据已知条件，每个直角三角形的两条直角边分别为 2 cm 和 4 cm. 利用勾股定理，可求得这个菱形的边长为 $2\sqrt{5}$ cm.

2. 四边形 $ABCD$ 是正方形.

   提示：由四边形 $ABCD$ 的对角线互相平分，可知它是平行四边形；由 $\square ABCD$ 的对角线相等，可知它是矩形；利用勾股定理的逆定理，可知 $\angle AOB = 90^\circ$，于是 $AC \perp BD$，所以矩形 $ABCD$ 是正方形.

3. 这个四边形不一定是菱形，也可以是矩形.

山东教育出版社

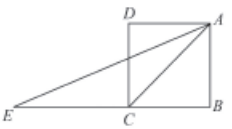
4. 一个菱形的周长是 200 cm，一条对角线长 60 cm，求：

（1）另一条对角线的长度；

（2）菱形的面积.

5. 证明：如果四边形两条对角线垂直且相等，那么依次连接它的四边中点得到一个正方形.

6. 如图，四边形 $ABCD$ 是一个正方形，E 是 BC 延长线上一点，且 $AC=EC$，求 $\angle DAE$ 的度数.



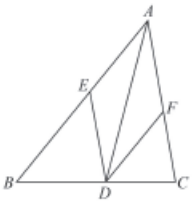
（第 6 题）

7.（1）如果一个菱形绕对角线的交点旋转 90° 后，所得图形与原来的图形重合，那么这个菱形是正方形吗？为什么？

（2）如果一个四边形绕对角线的交点旋转 90° 后，所得图形与原来的图形重合，那么这个四边形是正方形吗？为什么？

8. 已知：如图，AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，过点 D 分别作 AC 和 AB 的平行线，交 AB 于点 E，交 AC 于点 F.

求证：四边形 $AEDF$ 是菱形.



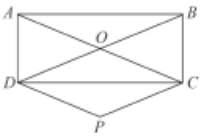
（第 8 题）

9. 已知：$\triangle ABC$ 的两条高分别为 BE，CF，点 M 为 BC 的中点.

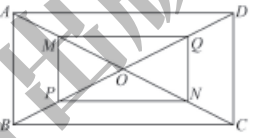
求证：$ME=MF$.

10. 已知：如图，在矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，过点 C 作 BD 的平行线，过点 D 作 AC 的平行线，两线相交于点 P.

求证：四边形 $CODP$ 是菱形.



（第 10 题）



（第 11 题）

11. 已知：如图，在矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，点 M，P，N，Q 分别在 AO，BO，CO，DO 上，且 $AM=BP=CN=DQ$.

求证：四边形 $MPNQ$ 是矩形.

12. 已知：如图，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，CD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，$DE\perp BC$，$DF\perp AC$，垂足分别为点 E，F.

求证：四边形 $CEDF$ 是正方形.

4.（1）80 cm；

（2）2 400 cm^2.

提示：菱形的两条对角线将菱形分为四个全等的直角三角形，根据已知条件，直角三角形的斜边长为 50 cm，一条直角边长为 30 cm，利用勾股定理可求得另一条直角边的长，从而求得菱形的另一条对角线；菱形的面积等于其对角线乘积的一半.

5. 提示：利用三角形中位线定理，由原四边形的两条对角线相等，可证新四边形的四条边相等；由原四边形的两条对角线互相垂直，可证新四边形的两邻边垂直.

6. $\angle DAE=22.5°$.

提示：可证 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，$\angle ACB=45°$；再证 $\triangle ACE$ 是等腰三角形，于是 $\angle AEC=22.5°$；由 $AD\parallel BC$，得 $\angle DAE=\angle AEC=22.5°$.

7.（1）是正方形，菱形的对角线互相平分且垂直，绕对角线的交点旋转 90° 后，所得图形与原来的图形重合，说明菱形的对角线相等；

（2）是正方形，对角线将四边形分成四部分，而满足条件的四边形这四个部分必然全等（因为可以相互旋转而得到），因此四边形的四条边相等，对角线互相垂直平分且相等.

8. 提示：先证明四边形 $AEDF$ 是平行四边形，再证明 $\angle EAD=\angle EDA$，于是 $EA=ED$.

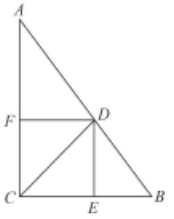
9. 提示：利用“直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半”可证 $ME=\frac{1}{2}BC$，$MF=\frac{1}{2}BC$.

10. 提示：先证明四边形 $CODP$ 是平行四边形，再由矩形的对角线相等且互相平分证明 $OC=OD$.

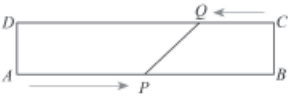
11. 提示：考虑对角线，证明四边形 $MPNQ$ 的对角线互相平分，而且相等.

12. 提示：先证明四边形 $CEDF$ 是矩形，再证明有一组邻边相等.

山东教育出版社



（第 12 题）

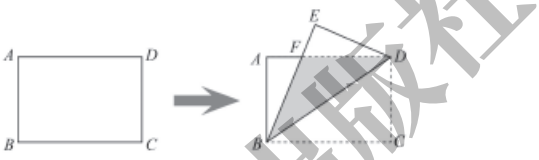


（第 13 题）

※**13.** 如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB = 20$ cm. 动点 P 从点 A 开始沿 AB 边以 4 cm/s 的速度运动，动点 Q 从点 C 开始沿 CD 边以 1 cm/s 的速度运动；点 P 和点 Q 同时出发，当其中一点到达终点时，另一点也随之停止运动. 设动点的运动时间为 t s，则当 t 为何值时，四边形 $APQD$ 是矩形？

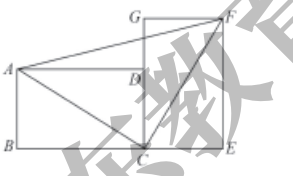
数学理解

14. 如图，把一张矩形纸片沿对角线折叠，重合部分是什么图形？试说明理由.

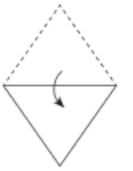


（第 14 题）

15. 如图，把两个大小完全相同的矩形拼成“L”形图案，求 $\angle ACF$，$\angle AFC$ 的度数.



（第 15 题）



（第 16 题）

16. 小颖在商店里看到一块漂亮的方纱巾，非常想买，但当她拿起来时，又感觉纱巾不是正方形. 商店老板看她犹豫的样子，马上过来将纱巾沿对角线对折，让小颖检验（如图）. 小颖还是有些疑惑，老板又将纱巾沿另一条对角线对折，让小颖检验. 小颖发现这两次对折后两个对角都能对齐，于是买下这块纱巾. 你认为小颖买的这块纱巾一定是正方形吗？你认为用什么方法可以检验纱巾是不是正方形？

13. $t = 4$ s 时，四边形 $APQD$ 是矩形.

14. 重合部分是等腰三角形.

提示：由折叠过程可知 $\triangle DCB \cong \triangle DEB$，于是 $\angle DBC = \angle DBF$；由 $AD \parallel BC$，得 $\angle ADB = \angle DBC$；所以 $\angle ADB = \angle DBF$，所以 $FB = FD$.

15. $\angle ACF = 90^\circ$，$\angle AFC = 45^\circ$.

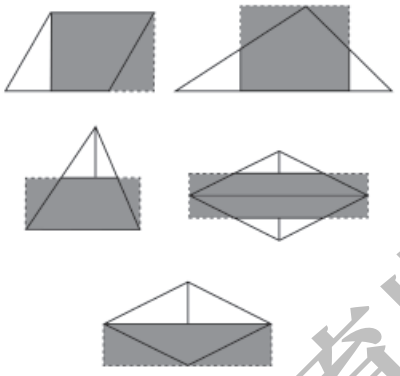
提示：证明 $\triangle ACF$ 是等腰直角三角形.

16. 不能认为小颖买的这块纱巾一定是正方形，实际上菱形也满足要求. 如要判断这块纱巾是否为正方形，还需要检验对角线是否相等.

山东教育出版社

17. 提示：可以证明四边形 $EFGH$ 的三个角是直角.

18. 本题以图形变化为题材，可以较好地考查学生对图形关系的把握能力，以及运用图形的变化解决问题的能力. 具体的剪拼方法不唯一，例如：



教学时，还可以让学有余力的学生思考一般四边形的剪拼方法. 学生如能连接对角线将其分解为两个三角形，问题就转化为三角形的问题了，因而这也可以考查学生的化归意识.

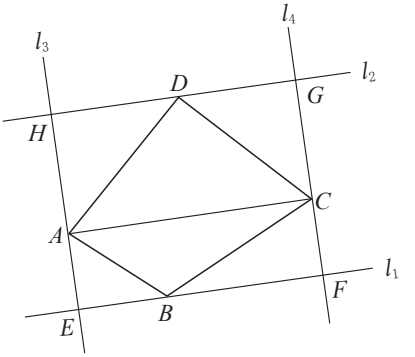
19. 略.

20. 提示：先作其中一条对角线，再作这条对角线的垂直平分线.

21. 画法如下：(1)连接 AC(或 BD)；

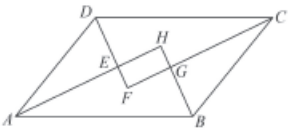
(2)分别过点 B，D 画 AC 的平行线 l_1，l_2；

(3)分别过点 A，C 画 l_1 的垂线 l_3，l_4，则 l_1，l_4，l_2，l_3 围成的四边形即是满足条件的矩形 $EFGH$.(如图)



17. 已知：如图，□$ABCD$ 各角的平分线分别相交于点 E，F，G，H.

求证：四边形 $EFGH$ 是矩形.



(第 17 题)

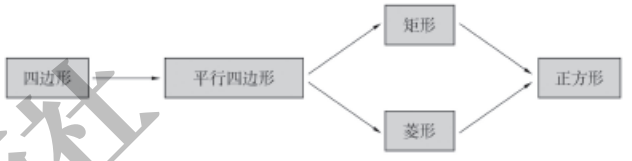
问题解决

18. 你能通过剪切和拼接下列图形得到一个矩形吗？在这些剪拼的过程中，剪下的图形是经过怎样的运动最后拼接在一起的？

(1)平行四边形；　　(2)三角形.

联系拓广

19. 将相应的条件填在相应的箭头上，使得下图能清楚地表达几种四边形之间的关系.



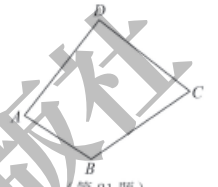
(第 19 题)

20. 已知两条对角线，利用尺规作一个菱形.

※**21.** 如图，画一个矩形 $EFGH$，并满足下列条件：

(1)点 A，B，C，D 分别在矩形 $EFGH$ 的四条边上；

(2)$S_{矩形\,EFGH}=2S_{四边形\,ABCD}$.



(第 21 题)

山东教育出版社

附录　典型案例评析

菱形的性质与判定（第 1 课时）

设计：江西省九江市同文中学　高　峻
评析：北京市第二中学亦庄分校　焦艳玲

一、教学内容分析

“特殊平行四边形”一章是在平行四边形的性质和判定的基础上，进一步对特殊平行四边形的性质和判定的探究与证明. 本章知识既是前面所学知识的延续和拓展，也为今后学习其他平面图形作必要的知识储备. 本章主要研究菱形、矩形、正方形的性质和判定，教科书的设计是先探究，再对探究得到的结论进行证明. 本节课是“菱形的性质与判定”的第 1 课时，主要研究菱形的性质.

二、学情分析

学生在此前已经探索并证明了平行四边形的性质定理和判定定理，因此学生已具备一定的研究经验，这是有利的一面. 菱形是特殊的平行四边形，所以具有平行四边形的一切性质，因此对菱形性质的学习，就要从已学过的平行四边形的性质和自身的特殊性入手. 由于平行四边形的学习是在八年级上册，而本章是八年级下册的第一节，学生经过一个假期的休息，对平行四边形的内容有一定的遗忘. 因而，通过预习与复习巩固已学习的平行四边形的性质，从而为本课时的学习打好基础.

由于八年级的学生对事物的感性认识丰富，且正在向抽象思维转型，所以本节课让学生在丰富的实践活动中，利用菱形的性质解决问题，促使学生从感性认识向理性思维发展，从形象思维向抽象思维转型.

三、教学目标

1. 经历研究菱形性质的探索、发现、猜想、证明的过程，进一步发展合情推理和演绎推理能力.

2. 认识菱形，掌握菱形的性质.

3. 能够用综合法证明菱形的性质定理.

4. 进一步体会证明的必要性，以及计算与证明在解决问题中的作用.

四、教学重点和难点分析

重点：菱形性质的探索与证明.

难点：引导学生探究菱形的性质,并利用菱形的性质解决实际问题.

山东教育出版社

五、教学策略分析

基于对教科书和学生认知规律的考虑，在讲授新课时，首先引导学生回顾平行四边形的性质，然后引导学生思考菱形与平行四边形的关系，从而得到菱形具有平行四边形的所有性质；通过活动观察菱形的特殊性，从轴对称性出发得到菱形的特殊性质，再进行演绎证明；最后利用性质解决问题，使学生对菱形性质有更深入的理解与掌握.

为了充分尊重学生，体现学生的主体地位，本节课将充分发挥自主学习与合作学习的优势，让每个学生都活动起来，参与到整个教学中去. 同时把时间留给学生，让他们有足够的思考时间和充分的表达机会.

六、教学过程

【第一环节】知识回顾——复习提问

在八年级上学期，我们学习了平行四边形，那么什么样的四边形是平行四边形呢？它有哪些性质呢？

引导学生从以下方面思考总结：

从对称性看：平行四边形是中心对称图形，对称中心是对角线的交点；

从边看：对边平行且相等；

从角看：对角相等，相邻的两个角互补；

从对角线看：对角线互相平分.

设计意图：本环节旨在通过提问，复习并梳理平行四边形的性质，为菱形性质的学习做铺垫：菱形是否具有这些性质？研究菱形的性质，是否也可以从这四个方面来探索？由于本环节内容比较容易，所以教学中可以提问基础相对比较薄弱的学生.

【第二环节】新课引入——认识菱形

给出一组含有菱形的生活图片，学生在欣赏图片的过程中发现特殊的平行四边形——菱形.





定义：有一组邻边相等的平行四边形叫做菱形.

想一想：举出一些生活中菱形的例子.

设计意图：此环节使用了教科书的引入，从观察入手，前两幅图中含有菱形，特别是第二幅图中含有正方形也是菱形的意图，可以利用第三幅图通过测量比较，发现邻边相等的特征，从而引出菱形的定义. 由于给出的图形是静态的，所以可以让学生列举出一些生活中的动态菱形的例子，如菱形衣帽架、电动门等.

山东教育出版社

【第三环节】重点探索——菱形的性质

想一想：菱形是特殊的平行四边形，它具有一般平行四边形的所有性质. 你能列举一些这样的性质吗?

从对称性看：是中心对称图形；

从边看：对边平行且相等；

从角看：对角相等，相邻的两个角互补；

从对角线看：对角线互相平分.

进一步思考：菱形还有哪些特殊性质?

设计意图：通过“想一想”，让学生复习回顾菱形所具有的平行四边形的性质，强化思考问题的四个角度. 在此基础上，引导学生重点思考菱形的特殊性.

做一做：用菱形纸片折一折，回答下列问题：

菱形是轴对称图形吗? 如果是，它有几条对称轴? 对称轴之间有什么位置关系?

通过对折，我们发现菱形是轴对称图形，两条对角线所在的直线就是它的对称轴.

如图 1，在菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O. 通过对折，你还发现了什么结论?

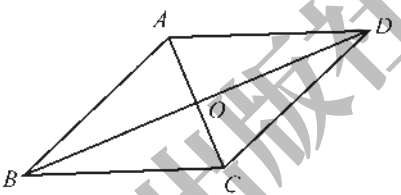


图1

从边看：四边相等，即 $AB = BC = CD = AD$；

从角看：对角线平分每对内角，即 $\angle ABD = \angle CBD = \angle ADB = \angle CDB$，$\angle BAC = \angle DAC = \angle BCA = \angle DCA$；

从对角线看：对角线垂直，即 $AC \perp BD$；

从三角形形状看：等腰三角形有 $\triangle ABC$，$\triangle ADC$，$\triangle BAD$，$\triangle BCD$；直角三角形有 $\triangle OAB$，$\triangle OCB$，$\triangle OCD$，$\triangle OAD$.

设计意图：平行四边形的许多性质都与它的中心对称性有关，而菱形不仅是中心对称图形，而且还是轴对称图形. 因此，菱形的特殊性质与它的轴对称性有关. 通过折纸活动，可以让学生发现邻边的关系、对角线的关系，甚至对角线与内角的关系，从而加深学生对菱形特性的认识.

【第四环节】演绎证明——菱形的性质定理

探索的结论“菱形的四条边相等，对角线互相垂直”是否正确呢? 我们必须加以证明，那么证明的环节有哪些? 如何证明这两个性质呢? 请同学们先思考.

在学生思考、交流的基础上，展示证明过程.

已知：如图2，在菱形 $ABCD$ 中，$AB = AD$，对角线 AC 与 BD 相交于点 O.

求证：(1) $AB = BC = CD = AD$；(2) $AC \perp BD$.

证明：(1) ∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

∴ $AB = CD$，$AD = BC$.

又∵ $AB = AD$，

∴ $AB = BC = CD = AD$.

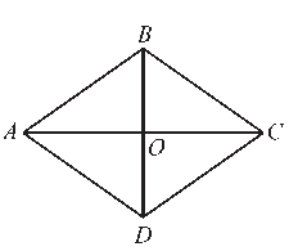


图2

山东教育出版社

（2）∵ $AB = AD$，

∴ △ABD 是等腰三角形.

∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

∴ $BO = OD$.

在等腰三角形 ABD 中，

∵ $BO = OD$，

∴ $AO \perp BD$，

即 $AC \perp BD$.

由此我们得到了菱形的两个性质定理：

定理：菱形的四条边都相等.

定理：菱形的对角线互相垂直.

设计意图：通过探究得到的猜想，只有通过严谨的证明，才能成为定理，才能用来解决其他问题. 教学中，定理的证明也可以让学生自己完成，再与教科书中的过程对比. 无论采用哪种方式，都应鼓励学生先独立思考、分析证明思路.

【第五环节】实践出真知——菱形性质的应用

例 如图 3，在菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，$\angle BAD = 60^\circ$，$BD = 6$. 求 AB 和 AC 的长.

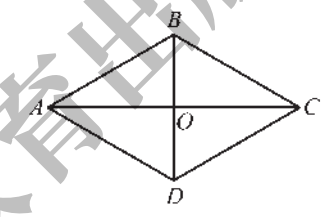


图3

解：∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

∴ $AB = AD$（菱形的四条边都相等），

$AC \perp BD$（菱形的对角线互相垂直），

$OB = OD = \frac{1}{2} BD = 3$（菱形的对角线互相平分）.

在等腰三角形 ABD 中，

∵ $\angle BAD = 60^\circ$，

∴ △ABD 为等边三角形.

∴ $AB = BD = 6$.

在 Rt△AOB 中，由勾股定理得

$OA^2 + OB^2 = AB^2$，

∴ $OA = \sqrt{AB^2 - OB^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$.

∴ $AC = 2OA = 6\sqrt{3}$（菱形的对角线互相平分）.

设计意图：对于菱形及其性质的学习，学生经历了认识概念、探究性质、证明结论、应用结论这几个环节. 在后面的学习中，学生将继续经历这样的过程. 因为初学性质的应用，所以选用的例题和练习不宜过难.

【第六环节】巩固练习

1. 菱形具有而平行四边形不一定具有的性质是_____和_____.

2. 教科书随堂练习.

山东教育出版社

【第七环节】复习与小结

本节课我们认识了特殊的平行四边形——菱形，它具有平行四边形的所有性质，同时我们一起探索了它的特殊性质，并对探索的性质进行了证明. 初步掌握了“菱形的四条边都相等”“菱形的对角线互相垂直”这两个定理.

【第八环节】课后作业——巩固练习

必做题：教科书习题 6.1.

选做题：如图 4，在边长为 6 的菱形 $ABCD$ 中，$\angle DAB = 60^\circ$，F 是 AD 上的动点，E 是 CD 上的动点，满足 $AF + CE = 6$. 求证：不论 E，F 怎样移动，$\triangle BEF$ 总是等边三角形.

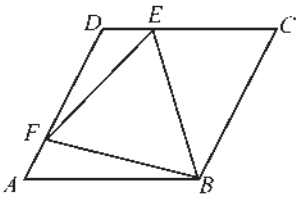


图 4

设计意图：通过必做题，可以让学生发现问题，及时查缺补漏；选做题的设计意图是巩固提高，使各层次的学生得到不同的发展.

七、案例评析

高老师的教学设计基于对教科书和学生认知规律的考虑，通过引导学生回顾平行四边形的性质，思考菱形与平行四边形的关系，从而得到菱形具有平行四边形的所有性质；通过活动观察菱形的特殊性，从轴对称性出发得到菱形的特殊性质，再进行演绎证明，最后利用性质解决问题，使学生对菱形性质有更深入的理解与掌握.

整个设计思路是在学生已有的知识体系中，借助特殊与一般、合情推理与演绎推理等逐渐将新知识构建在学生的知识网络中，通过知识间彼此的紧密联系达到对旧知识的再现及新知识的学习的目的. 教学设计从宏观的角度反映了教师既见树木又见森林的课程观及教学观.

本案例的另一个特点是设计了相对丰富的教学活动，如观察图片、折纸实验、推理证明、练习巩固等，多角度地调动学生学习的主动性，进而加深学生对菱形性质的认识. 教学设计中，教师注重证明的运用，体现了《标准》对发展学生演绎推理能力的要求.

山东教育出版社

第七章　二次根式

一、《标准》要求

了解二次根式、最简二次根式的概念，了解二次根式（根号下仅限于数）的加、减、乘、除运算法则，会用它们进行有关的简单四则运算.

二、教学目标

1. 经历探索二次根式的性质以及有关运算法则的过程，理解二次根式的有关运算的算理，进一步发展观察、操作、概括等能力，发展有条理的思考能力以及语言表达能力.

2. 了解二次根式、最简二次根式、同类二次根式的概念，会辨别最简二次根式和同类二次根式，理解二次根式的性质.

3. 能熟练地进行二次根式的化简和二次根式的加、减、乘、除四则运算.

4. 能利用二次根式的知识解决实际问题，在解决问题的过程中体会数学的应用价值.

三、设计思路

在六年级下册的学习中，学生已经掌握了整式的有关运算等内容；在七年级上册的学习中,学生掌握了勾股定理、平方根、立方根、实数的概念以及实数的简单运算与应用等内容. 本章在学生已有知识的基础上，对式进行扩张，引入二次根式，将整式扩充到根式，使学生对式有进一步的认识.

本章的主要内容是二次根式的性质与运算. 本章自始至终围绕着二次根式的化简与运算问题，由浅入深地讲解二次根式的有关概念及性质，从而帮助学生更好地掌握二次根式化简与运算的方法.

在学生已有知识的基础上，教科书首先通过观察、操作、归纳、类比等方法，给出了二次根式的概念. 接着介绍二次根式的性质，包括一个非负数的平方的算术平方根的性质、积的算术平方根和商的算术平方根的性质. 由这些知识引出简单的二次根式的化简方法，并归纳出最简二次根式的概念. 接下来，引入二次根式的加法和减法，由两个引例归纳出了同类二次根式的概念，给出了二次根式加减的方法. 然后，在积的算术平方根和商的算术平方根性质的基础上，引出了二次根式的乘法和除法. 最后，在二次根式四则运算的基础上，讲述二次根式的简单混合运算. 这样的设计思路符合学生的认知基础，也符合有关知识之间的内在联系.

本章在呈现方式上力求突出：二次根式及其运算产生的实际背景——使学生经历实际问题数学化的过程，初步培养学生的数学建模能力；有关运算法则的探索过程——为探索有关运算法则设置了观察、操作、思考等活动；对算理的理解和基本运算技能的掌握——

山东教育出版社

设置恰当数量和难度的运算题，同时使学生明确运算的依据. 本章的重点是二次根式的化简与运算方法，关键是正确了解与运用二次根式的概念与性质；学习二次根式的有关概念与性质,直接目的就是为了熟练地掌握二次根式的化简与运算. 二次根式在初中阶段的应用，也主要是它的化简与运算方法. 本章的难点主要是正确理解与运用二次根式的性质.

学习本章内容，应注意随时复习有理数及整式运算的有关内容，这是学好本章的关键之一.

四、课时安排建议

1 二次根式	1课时
2 二次根式的性质	2课时
3 二次根式的加减	1课时
4 二次根式的乘除	2课时
回顾与思考	1课时

五、教学建议

二次根式的概念及性质是建立在七年级上册“实数”的基础上的，而本章的重点——二次根式的运算，既与实数及二次根式的概念、性质有关，又与学生已经学过的整式、分式的基本运算有着紧密的联系. 整式、分式的运算是二次根式运算的重要基础；反过来，通过二次根式运算的学习，又复习和巩固了整式、分式运算的知识和技能. 这部分内容，一方面适当配合勾股定理及其应用的学习，另一方面为学习“一元二次方程”等后继内容打下必要的基础. 进一步，由二次根式的概念、性质和运算，不难推广到 n 次根式并派生出分数指数幂的有关知识. n 次根式的内容在初中不讲，将来在高中学习函数时再继续学习. 二次根式的有关内容无论在今后学习指数函数、对数函数、三角函数、立体几何、解析几何及微积分等数学内容中，还是在学习物理等其他课程中都有着广泛的应用.

1. 注重概念的形成过程，让学生在概念形成过程中，逐步理解所学的概念.

概念是由具体到抽象、由特殊到一般，经过分析、综合，去掉非本质特征，保持本质属性而形成的. 概念的形成过程是思维过程，加强概念形成过程的教学，对提高学生的思维水平是很有必要的. 如二次根式的引入，要让学生结合具体问题情境，亲身经历活动，感受引入的必要性. 教学时，教师可多提一些具体的问题，旨在引起学生的思考，让学生从具体的例子中抽象出初步的二次根式概念. 教师要不时鼓励学生动手、动脑、动口，与同伴进行合作，并充分展开交流.

2. 注重对二次根式的性质与运算法则的探索过程以及算理的理解，发展有条理的思考能力与表达能力.

本章为学生探索二次根式的性质与运算法则提供了较为丰富的素材，教学中不要简单地要求学生记忆二次根式的性质与四则运算法则，而要关注学生对性质、法则的探索过程. 同时要重视学生对算理的理解，有意识地培养学生有条理的思考能力和语言表达能力. 教

山东教育出版社 山东教育出版社

学中要让学生经历从具体问题到一般规律的探索过程，展开充分的探索与交流，并鼓励学生用自己的语言清楚地表达.

3. 注重发展学生的推理能力.

教学中，教师应有意识地培养学生的推理能力，鼓励学生通过合情推理进行大胆推测，利用所学知识猜测、验证有关结论，同时鼓励学生有条理地表达自己的思考过程. 例如教科书“复习题”数学理解中的第 9、10 题的教学，教师应鼓励学生经历根据特例进行归纳、建立猜想、用符号表示并加以证明这一重要的获得数学结论的过程.

4. 保证基本的运算技能，避免繁杂的运算.

掌握基本运算技能是学生学习本章内容的一个重要目标. 教学中，教师要适当地、分阶段地提供一些必要的练习让学生进行训练，使学生能准确地进行基本的符号运算，并能明白每一步的算理. 教学中要避免过多、繁琐的运算，如对于二次根式的加、减、乘、除运算，不要求学生进行复杂的混合运算，只要求能够利用有关的乘法公式进行运算即可.

六、 评价建议

1. 关注学生对简单二次根式运算的理解水平.

对计算的评价不能过分要求技巧，要遵循教科书的要求，避免繁杂的运算. 应关注学生对二次根式的性质与运算法则的理解：能否根据具体问题的特点选择合理、简便的算法，能否依据算理正确地进行运算，能否确认运算结果的合理性等.

2. 重视考查学生的分析、概括、交流的能力.

本章为学生提供了丰富的活动，如观察、操作、猜测、推理等，教师应在活动中注意观察学生的表现，如是否积极主动地参与活动，能否独立思考并与同伴交流，能否利用数学语言有条理地表达自己的思想过程，能否从具体问题中进行抽象、概括等，并将这些考查与书面考试结合起来.

山东教育出版社 山东教育出版社



章前图力图让学生认识到本章的学习内容与现实生活的密切联系. 同时，配以章前文字，旨在让学生了解本章内容，同时激发学生的学习兴趣.

山东教育出版社

教学目标

1. 了解二次根式的概念.

2. 理解 $\sqrt{a}\geqslant 0(a\geqslant 0)$，能利用 $\sqrt{a}\geqslant 0(a\geqslant 0)$ 解决关于二次根式中字母取值范围的问题.

3. 理解二次根式的性质 $(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant 0)$，能利用这一性质进行式子的化简.

[1] 由实际问题引出二次根式，教师要做适当的引导，并复习勾股定理.

[2] 这里二次根式是采用形式定义给出的，它有两个特征：从表示形式上看，它带有二次根号；被开方数必须是非负数. 教学时可以指出它的意义：二次根式 $\sqrt{a}$（$a\geqslant 0$），就是指非负数 a 的算术平方根.

[3] $\sqrt{a}$（$a\geqslant 0$）是一个非负数，理解并不困难，要提醒学生注意，这里的 a 和 $\sqrt{a}$ 都是非负数.

1 二次根式

议一议

（1）正方形的面积为 2，它的边长是多少？面积为 3 呢？面积为 S 呢？

（2）正方形的面积为 S，如果把它的面积增加 1，新正方形的边长是多少？

（3）观察问题（1）（2）所得到的式子，你发现它们有什么共同特点？[1]

式子 $\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{S}$，$\sqrt{S+1}$ 的共同特点是：它们都是形如 $\sqrt{a}$ 的式子，并且被开方数都是非负数.

一般地，形如 $\sqrt{a}(a\geqslant 0)$ 的式子叫做**二次根式**（quadratic radical），其中 a 叫做被开方数.[2]

我们知道，$\sqrt{a}(a\geqslant 0)$ 表示 a 的算术平方根，所以 $\sqrt{a}(a\geqslant 0)$ 是一个非负数，根据算术平方根的定义，它的平方等于 a. 用式子表示，就是

$$\sqrt{a}\geqslant 0\,(a\geqslant 0),\ [3]\quad (\sqrt{a})^2=a(a\geqslant 0).\ [4]$$

例 1 a 是怎样的实数时，下列各式在实数范围内有意义？

（1）$\sqrt{a+1}$；　　（2）$\sqrt{1-3a}$.

解：（1）如果 $\sqrt{a+1}$ 有意义，那么 $a+1\geqslant 0$.

解不等式 $a+1\geqslant 0$，得

$$a\geqslant -1.$$

所以，当 $a\geqslant -1$ 时，$\sqrt{a+1}$ 在实数范围内有意义.

（2）如果 $\sqrt{1-3a}$ 有意义，那么 $1-3a\geqslant 0$.

解不等式 $1-3a\geqslant 0$，得

[4] 二次根式的性质 $(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant 0)$，教科书由算术平方根的意义直接得出. 考虑到学生接受时的困难，在教学中，可举些特例，如 $(\sqrt{2})^2=2$，$\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2=\frac{1}{3}$ 等加以说明，并使学生理解这个性质的意义：二次根式的平方等于它的被开方数. 根据这一性质可以直接用来计算一个二次根式的平方. 这在后面的学习中，特别是乘法运算中也会经常用到.

例 1

这是关于二次根式中字母取值问题的讨论，目的在于巩固理解“被开方数必须是非负数”. 在本教科书中，只限于可以用简单的一元一次不等式解决的范围内.

山东教育出版社

$$a \leqslant \frac{1}{3}.$$

所以，当 $a \leqslant \frac{1}{3}$ 时，$\sqrt{1-3a}$ 在实数范围内有意义.

例 2 计算：

(1) $(\sqrt{2.1})^2$；

(2) $(2\sqrt{3})^2$.

解： (1) $(\sqrt{2.1})^2 = 2.1$；

(2) $(2\sqrt{3})^2 = 2^2 \times (\sqrt{3})^2 = 4 \times 3 = 12$.

式子 $b\sqrt{a}$ 也看做二次根式，$b\sqrt{a}$ 表示 $b \cdot \sqrt{a}$，如 $2\sqrt{3}$ 表示 $2 \times \sqrt{3}$.[1]



随堂练习

1. a 是怎样的实数时，下列各式在实数范围内有意义？

(1) $\sqrt{2a}$；　　(2) $\sqrt{5+a}$.

2. 计算：

(1) $(\sqrt{7})^2$；　　(2) $(4\sqrt{\frac{1}{5}})^2$.

读一读

方根符号

开方是最早产生的运算之一. 古埃及人以“⌉”表示平方根；7 世纪印度人婆罗摩笈多以“c”（即 carani（平方根）的首个字母）表示平方根；15 世纪阿拉伯人盖拉萨迪以“$\mathcal{J}$”表示平方根.

2 世纪罗马人尼昔萨斯以拉丁词语 latus（意即“正方形的边”）记平方根，该词的首个字母“*l*”后来成为欧洲重要的平方根符号之一. 法国数学家韦达也用过这个符号. 1624 年，英国人布里格斯分别以“*l*”“l_3”“*ll*”表示平方根、立方根及四次方根.

而另一个在欧洲被广泛采用的方根符号“R”，也是源自拉丁词语“radix”（意即“平方根”）. 这个符号最先出现于由阿拉伯文译成拉丁文的欧几里得《几何原本》第 10 卷中，其后斐波那契和帕乔利等人均采用这个符号. 16～17 世纪，许多数学家用“R”作为平方根符号.

[1] 这是对二次根式定义的补充，说明 b 与 $\sqrt{a}$ 是相乘关系，也就是 $b\sqrt{a} = b \times \sqrt{a}$，$b$ 可以取负数.

随堂练习

1. (1) $a \geqslant 0$；

(2) $a \geqslant -5$.

2. (1) 7；

(2) $\frac{16}{5}$.

读一读

此阅读材料的目的在于让学生了解关于方根符号的数学史知识，开拓学生的视野.

山东教育出版社

德国人鲁多尔夫是较早以“$\surd$”表示平方根的人之一，他在1557年引入“$\surd$”后，又分别以“$\sqrt{\ }$”及“$\sqrt{\ }$”表示三次方根及四次方根. 1637年，笛卡儿采用“$\sqrt{\ }$”作为平方根符号. 1647年，奥特雷德以“$\surd r$”表示平方根，以“$\surd[12]$”或“$\sqrt{12}$”表示十二次方根；1655年，沃利斯以“$\surd^3R^2$”表示$\sqrt[3]{R^2}$；1721年，哈顿分别以“$\sqrt[3]{\ }$”及“$\sqrt[4]{\ }$”表示三次方根及四次方根；1732年，卢贝尔以$\sqrt[3]{25}$表示25的三次方根，与现代符号相同. 其后，各次方根都逐渐用这种形式的符号来表示，开始了现代符号的使用.

习题7.1

1.（1）$a \leqslant 2$；　（2）$a \leqslant \frac{3}{5}$；

（3）$a \geqslant -2$；　（4）$a > -1$.

2.（1）16；　（2）$\frac{3}{2}$.

3.（1）$3a^3$；　（4）$20b + 4$.

习题 7.1

知识技能

1. a是怎样的实数时，下列各式在实数范围内有意义？

（1）$\sqrt{2-a}$；　（2）$\sqrt{3-5a}$；　（3）$\sqrt{1+\frac{1}{2}a}$；　（4）$\frac{1}{\sqrt{a+1}}$.

2. 计算：

（1）$(\sqrt{16})^2$；　（2）$(-3\sqrt{\frac{1}{6}})^2$.

数学理解

※**3.** 计算：

（1）$(\sqrt{3a^3})^2\ (a \geqslant 0)$；　（2）$(2\sqrt{5b+1})^2\ (b \geqslant -\frac{1}{5})$.

2 二次根式的性质

议一议

（1）计算：$\sqrt{2^2}$，$\sqrt{3^2}$，$\sqrt{(\frac{1}{5})^2}$，$\sqrt{0^2}$. 你发现了什么？

（2）猜一猜：当$a \geqslant 0$时，二次根式$\sqrt{a^2}$的值是什么？

教学目标

1. 经历探索二次根式性质的过程，发展观察、归纳、概括等能力，发展有条理的思考能力以及语言表达能力.

2. 掌握二次根式的性质，了解最简二次根式的概念，会辨别最简二次根式.

3. 能进行二次根式的化简.

议一议

要让学生通过观察、操作、概括等数学活动过程，自主探索，发现结论. 教学时，教师可做适当的引导.

山东教育出版社

当 $a \geqslant 0$ 时，$\sqrt{a^2} = a$.

利用二次根式的这一性质，我们可以计算、化简一些二次根式.

例 1 化简：

(1) $\sqrt{36}$；　　(2) $\sqrt{\frac{9}{4}}$.

解： (1) $\sqrt{36} = \sqrt{6^2} = 6$；　　(2) $\sqrt{\frac{9}{4}} = \sqrt{(\frac{3}{2})^2} = \frac{3}{2}$.

做一做

计算下面的算式：

(1) $\sqrt{4\times9}=$ _____，$\sqrt{4}\times\sqrt{9}=$ _____；

(2) $\sqrt{121\times64}=$ _____，$\sqrt{121}\times\sqrt{64}=$ _____；

(3) $\sqrt{2\times3}$ 与 $\sqrt{2}\times\sqrt{3}$ 相等吗？为什么？[1]

议一议

观察上面得到的运算结果，你发现了什么规律？你能用自己的语言表述吗？

一般地，

$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ ($a \geqslant 0$，$b \geqslant 0$).[2]

这就是说，积的算术平方根等于积中各因式的算术平方根的积.

利用上面的二次根式性质，可以化简一些二次根式.

例 2 化简：

(1) $\sqrt{9\times25}$；　　(2) $\sqrt{300}$.

[1] 对于 $\sqrt{2\times3}$ 与 $\sqrt{2}\times\sqrt{3}$ 的计算，可以应用正数算术平方根的唯一性：$\sqrt{2\times3}$ 与 $\sqrt{2}\times\sqrt{3}$ 都是 6 的算术平方根，而 6 的算术平方根只有一个，所以 $\sqrt{2\times3}=\sqrt{2}\times\sqrt{3}$. 上述证明可以推广到一般情形. 事实上，当 $a\geqslant0$，$b\geqslant0$ 时，$\sqrt{ab}\geqslant0$，$\sqrt{a}\geqslant0$，$\sqrt{b}\geqslant0$. 因为 $(\sqrt{ab})^2=ab$，所以 $\sqrt{ab}$ 是 ab 的算术平方根. 因为 $(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2\cdot(\sqrt{b})^2=ab$，所以 $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ 也是 ab 的算术平方根. 由于 ab 的算术平方根只有一个，因此 $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$. 也可以借助科学计算器验证.

[2] 应注意 $a\geqslant0$，$b\geqslant0$ 这个条件. 没有这个条件，$\sqrt{ab}$，$\sqrt{a}$ 或 $\sqrt{b}$ 可能没有意义. 如当 $a<0$，$b<0$ 时，虽然 $\sqrt{ab}$ 有意义，但 $\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$ 没有意义. 应使学生明确这个性质的作用是改变了运算的顺序，$\sqrt{ab}$ 规定的运算顺序是先算乘法，再算开方；$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ 是先算开方，再算乘法.

例 2

二次根式的化简，是本章的重点. 教科书通过例 2 说明了化简的方法. 例 2 第（1）题是两数之积的算术平方根. 第（2）题是被开方数开不尽方的二次根式. 要先将被开方数进行因数分解，再用积的算术平方根的性质将 100 和 3 分别开方，然后运用 $\sqrt{a^2}=a$（$a\geqslant0$）的性质，将 100 化为 10^2 后开方. 教学时应注意让学生说出每步的算理.

由例 2 应使学生明确以下三点：一是被开方数应是几个因式（因数）的积的形式，若不是积的形式，则需先化成积的形式；二是在这个乘积中有的因式是完全平方式；三是移到根号外的是这个因式的算术平方根. 要避免因式不开方便移到根号外或把被开方数的系数除以 2 移到根号外之类的错误.

山东教育出版社

解：(1) $\sqrt{9\times25}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{25}=3\times5=15$；

(2) $\sqrt{300}=\sqrt{100\times3}=\sqrt{100}\cdot\sqrt{3}=10\sqrt{3}$.

如果一个二次根式的被开方数中有的因式（或因数）能开得尽方，可以利用 $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$（$a\geqslant0$，$b\geqslant0$）将这些因式（或因数）开出来，从而将二次根式化简.

想一想

式子 $\sqrt{(-4)\times(-9)}$ 有意义吗？如果有意义，它应该等于多少？

随堂练习

1. 判断下列各式是否成立：

(1) $\sqrt{(-2)^2\times3}=-2\sqrt{3}$；　(2) $\sqrt{13^2-12^2}=5$.

2. 化简：

(1) $\sqrt{4\times81}$；　(2) $\sqrt{12\times21}$；　(3) $-\sqrt{27\times15}$；　(4) $\sqrt{8\times27\times6}$.

习题 7.2

知识技能

1. 化简：

(1) $\sqrt{3^2}$；　(2) $\sqrt{64}$；　(3) $\sqrt{20}$；　(4) $\sqrt{240}$.

2. 化简：

(1) $\sqrt{8\times18}$；　(2) $\sqrt{3\times25\times225}$.

数学理解

※**3.** 化简：

(1) $\sqrt{4a^2b^2}$[1]；　(2) $\sqrt{9(x+1)^2}$.

[1] 在本章中，如果没有特别说明，根号内的所有字母都表示正数.

随堂练习

1. (1) 不成立；
   (2) 成立.
2. (1) 18；
   (2) $6\sqrt{7}$；
   (3) $-9\sqrt{5}$；
   (4) 36.

习题7.2

1. (1) 3；　(2) 8；
   (3) $2\sqrt{5}$；　(4) $4\sqrt{15}$.
2. (1) 12；　(2) $75\sqrt{3}$.
3. (1) $2ab\sqrt{b}$；(2) $3(x+1)$.

山东教育出版社

联系拓广

※4.（1）当 $a<0$ 时，$\sqrt{a^2}=$_____；

（2）当 a 为任意实数时，$\sqrt{a^2}=$_____.

做一做

计算下面的算式：

（1）$\sqrt{\frac{4}{9}}=$_____，$\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}=$_____；

（2）$\sqrt{\frac{16}{25}}=$_____，$\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}}=$_____；

（3）$\sqrt{\frac{6}{7}}$ 与 $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$ 相等吗？为什么？[1]

议一议

观察上面得到的运算结果，你发现了什么规律？你能用自己的语言表述吗？

一般地，

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\ (a\geqslant 0,\ b>0).\ [2]$$

这就是说，商的算术平方根等于被除式的算术平方根除以除式的算术平方根.

利用上面的二次根式性质，可以化去根号内的分母.

例 3 化简：

（1）$\sqrt{\frac{3}{25}}$；　　（2）$\sqrt{\frac{45}{169}}$.

4. 本题供学有余力的学生思考.

（1）当 $a<0$ 时，$\sqrt{a^2}=-a$；

（2）当 a 为任意实数时，$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a & (a\geqslant 0),\\ -a & (a<0).\end{cases}$

[1] 可以利用正数的算术平方根的唯一性来说明，也可以借助科学计算器验证.

[2] 商的算术平方根的性质是二次根式化简和运算的基础. 该性质的条件 $a\geqslant 0$，$b>0$ 是为了保证式子有意义，特别是 b 与 a 不同，要求 $b>0$，因为 $b=0$ 时分母为 0，式子 $\sqrt{\frac{a}{b}}$ 没有意义. 应使学生明确，这个性质的作用是改变了运算顺序，$\sqrt{\frac{a}{b}}$ 的运算顺序是先求商，然后求算术平方根；而 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ 的运算顺序是先求算术平方根，再求商.

例 3

例 3 及相应的习题，只限于所得结果的式子中分母可以完全开得尽方的情况. 要让学生注意：根号内的分母移到根号外时，仍是分母，如 $\sqrt{\frac{3}{25}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{25}}=\frac{\sqrt{3}}{5}$，防止出现 $\sqrt{\frac{3}{25}}=5\sqrt{3}$ 的错误.

山东教育出版社

解：(1) $\sqrt{\frac{3}{25}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{25}}=\frac{\sqrt{3}}{5}$；　(2) $\sqrt{\frac{45}{169}}=\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{169}}=\frac{\sqrt{9\times5}}{\sqrt{13^2}}=\frac{3\sqrt{5}}{13}$.

议一议

如何化去 $\sqrt{\frac{1}{2}}$ 根号内的分母？与同伴进行交流.[1]

可以先利用分式的基本性质将 $\frac{1}{2}$ 的分子与分母同乘 2，使分母成为完全平方数，再利用商的算术平方根的性质化去根号内的分母，即

$$\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1\times2}{2\times2}}=\sqrt{\frac{2}{2^2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

例 4 化去下列各式根号内的分母：

(1) $\sqrt{\frac{2}{5}}$；　(2) $\sqrt{\frac{1}{7}}$.

解：(1) $\sqrt{\frac{2}{5}}=\sqrt{\frac{2\times5}{5\times5}}=\frac{\sqrt{2\times5}}{\sqrt{5^2}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$；

(2) $\sqrt{\frac{1}{7}}=\sqrt{\frac{7}{7^2}}=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7^2}}=\frac{\sqrt{7}}{7}$.

例 3、例 4 的结果中，被开方数都不含分母，也不含开得尽的因数或因式. 一般地，被开方数不含分母，也不含能开得尽的因数或因式，这样的二次根式叫做**最简二次根式**.[2]

一个二次根式如果不是最简二次根式，那么可以利用二次根式的性质，把它化成最简二次根式.

随堂练习

1. 化简：

(1) $\sqrt{\frac{1}{4}}$；　(2) $\sqrt{\frac{2}{25}}$.

[1] 这里可以利用分数（式）的基本性质，将被开方数的分子、分母同乘一个适当的式子，使分母变成一个完全平方数，再利用 $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ 进行化简.

例 4

例 4 化去根号内的分母的依据是分式的基本性质和根式的性质. 要使学生明白此类题的算理：被开方式中的分子、分母同乘一个不为零的数（或代数式），被开方式的值不变，同乘一个数（式）的目的在于使分母成为完全平方，然后应用商的算术平方根的性质；分母开得尽方，能达到化去根号内分母的目的. 将分母分解因式（数），可使分子和分母所乘的式子（数）为最简，从而使化简过程简单. 在解决这类问题时，要防止变化过程中只乘分母、不乘分子的错误.

[2] 对于最简二次根式的定义，应特别注意结合具体例子，向学生讲清其含义：(1) 被开方数都不含分母；(2) 被开方数中不含能开得尽方的因数或因式. 如 $\sqrt{12x}$ 不是最简二次根式，因为 $12=2^2\times3$，其中因式“2^2”能开方.

随堂练习

1. (1) $\frac{1}{2}$；　(2) $\frac{\sqrt{2}}{5}$.

山东教育出版社

2. 化去下列各式根号内的分母：

(1) $\sqrt{\frac{1}{3}}$；　(2) $\sqrt{\frac{2}{11}}$.

3. 把下列各式化成最简二次根式：

(1) $\sqrt{108}$；　(2) $\sqrt{\frac{45}{4}}$；　(3) $\sqrt{75}$；　(4) $\sqrt{(\frac{7}{2})^2+(\frac{1}{2})^2}$.

习题 7.3

知识技能

1. 化简：

(1) $\sqrt{\frac{144}{169}}$；　(2) $\sqrt{\frac{121}{49}}$；　(3) $\sqrt{\frac{9}{25}}$；　(4) $\sqrt{\frac{49}{16}\times\frac{64}{25}}$.

2. 把下列各式化成最简二次根式：

(1) $\sqrt{\frac{2}{27}}$；　(2) $\sqrt{\frac{11}{12}}$.

数学理解

3. (1) 已知直角三角形两条直角边的长分别为 3，6，求斜边的长；

(2) 已知直角三角形的斜边长为 13，一条直角边的长为 7，求另一条直角边的长.

3 二次根式的加减

议一议

(1) 如图 7—1，两个长方形的宽都是 $\sqrt{2}$ m，它们的长分别是 2 m 和 3 m，用不同方法求这两个长方形的面积的和. 你有什么发现？



图 7—1

2. (1) $\frac{\sqrt{3}}{3}$；　(2) $\frac{\sqrt{22}}{11}$.

3. (1) $6\sqrt{3}$；　(2) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$；

(3) $5\sqrt{3}$；　(4) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

习题7.3

1. (1) $\frac{12}{13}$；　(2) $\frac{11}{7}$；

(3) $\frac{3}{5}$；　(4) $\frac{14}{5}$.

2. (1) $\frac{\sqrt{6}}{9}$；　(2) $\frac{\sqrt{33}}{6}$.

3. (1) $3\sqrt{5}$；　(2) $2\sqrt{30}$.

教学目标

1. 了解同类二次根式的概念，会辨别同类二次根式.

2. 经历探索二次根式的加法和减法运算法则的过程，理解二次根式的加法和减法的算理，进一步发展学生的类比推理能力.

3. 能熟练地进行二次根式的加法和减法运算.

山东教育出版社

（2）如果两个正方形的面积分别是 18 和 8，那么大正方形的边长比小正方形的边长大多少？与同伴进行交流.[1]

对于（1），把两个长方形的面积相加，可求出它们的和为 $(2\sqrt{2}+3\sqrt{2})\text{m}^2$，也可以直接求出大长方形的面积：$(2+3)\sqrt{2}=5\sqrt{2}\ (\text{m}^2)$. 这说明 $2\sqrt{2}+3\sqrt{2}=(2+3)\sqrt{2}$. 这个结果也可由分配律得出：

$2\sqrt{2}+3\sqrt{2}=(2+3)\sqrt{2}=5\sqrt{2}$.

对于（2），需要计算 $\sqrt{18}-\sqrt{8}$，但由于 $\sqrt{18}$，$\sqrt{8}$ 不是最简二次根式，先把它们化简：$\sqrt{18}=\sqrt{9\times2}=3\sqrt{2}$，$\sqrt{8}=\sqrt{4\times2}=2\sqrt{2}$，再根据分配律，得

$\sqrt{18}-\sqrt{8}=3\sqrt{2}-2\sqrt{2}=(3-2)\sqrt{2}=\sqrt{2}$.

几个二次根式化简成最简二次根式后，如果它们的被开方数相同，那么这几个二次根式是同类二次根式.[2] 上面提到的 $2\sqrt{2}$ 与 $3\sqrt{2}$，$\sqrt{18}$ 与 $\sqrt{8}$ 都是同类二次根式. 同类二次根式可以像同类项那样进行合并.[3]

一般地，二次根式相加减，先把各个二次根式分别化成最简二次根式，然后再将同类二次根式分别合并. 有括号时，要先去括号.[4]

例 计算：

（1）$2\sqrt{12}-\sqrt{27}+\sqrt{18}$；　　（2）$\frac{1}{3}\sqrt{45}-(5\sqrt{\frac{1}{5}}+\sqrt{5})$.

解：（1）$2\sqrt{12}-\sqrt{27}+\sqrt{18}$

$=4\sqrt{3}-3\sqrt{3}+3\sqrt{2}$

$=\sqrt{3}+3\sqrt{2}$；



[1] 对于二次根式的加减法，教科书从实际问题和数学自身的发展两种不同的角度引入. 教师应领会教科书的意图.

[2] 同类二次根式是与同类项类似的一个概念. 与引入同类项的定义是为了进行整式的加减运算一样，引入同类二次根式的目的是为了进行二次根式的加减运算. 对于同类二次根式的定义，要使学生理解：一是几个二次根式都要先化为最简二次根式；二是同类二次根式只要求被开方数相同，根号前的数字或字母系数可以不同. “最简二次根式”是对某一个二次根式而言的，“同类二次根式”是对化简后的几个二次根式而言的，应引导学生弄清这两个概念的联系与区别.

[3] 二次根式的加减法，其实质是合并同类二次根式，它类似于整式加减法的合并同类项.

[4] 二次根式加减法的步骤是：把算式中的每一个二次根式都化为最简二次根式；判断哪些是同类二次根式；合并同类二次根式. 必须注意，不是同类二次根式的二次根式不能合并.

例

例（1）是不含分数的二次根式的加减运算，在把三项分别化成最简二次根式后，要注意判别它们是不是同类二次根式，还应提醒学生避免出现 $4\sqrt{3}-3\sqrt{3}=1$ 等错误. 例（2）是含分数的二次根式的加减运算并且带括号，运算步骤是去括号、化简、合并同类二次根式. 要注意去括号的法则与整式的加减法相同.

山东教育出版社

(2) $\frac{1}{3}\sqrt{45}-(5\sqrt{\frac{1}{5}}+\sqrt{5})$

$=\sqrt{5}-5\sqrt{\frac{1}{5}}-\sqrt{5}$

$=\sqrt{5}-\sqrt{5}-\sqrt{5}$

$=-\sqrt{5}$.

想一想

下列计算是否正确？为什么？

(1) $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{5}$；　(2) $3+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$；

(3) $a\sqrt{3}-b\sqrt{3}=\sqrt{3}(a-b)$；　(4) $\frac{\sqrt{8}+\sqrt{18}}{2}=\sqrt{4}+\sqrt{9}=2+3=5$.

随堂练习

1. 下列二次根式中，哪些是同类二次根式？

$\sqrt{2}$，$\sqrt{75}$，$\sqrt{\frac{1}{50}}$，$\sqrt{\frac{1}{27}}$.

2. 计算：

(1) $5\sqrt{2}+\sqrt{8}-7\sqrt{18}$；　(2) $\sqrt{6}-(\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{2}{3}})$.

习题 7.4

知识技能

1. 下列二次根式中，哪些与 $\sqrt{3}$ 是同类二次根式？

$\sqrt{18}$，$\sqrt{48}$，$\sqrt{\frac{2}{3}}$，$\sqrt{\frac{3}{4}}$.

2. 计算：

(1) $9\sqrt{3}+7\sqrt{12}-5\sqrt{48}$；　(2) $6\sqrt{\frac{3}{4}}-2\sqrt{27}$

想一想

这里集中给出了应用二次根式的加减法法则时可能出现的错误，应认真处理. 如第(4)题，分母2不能直接去除分子中的被开方数，应该将 $\sqrt{8}$ 与 $\sqrt{18}$ 都分别化为最简二次根式后再计算.

(1) 不正确；

(2) 不正确；

(3) 正确；

(4) 不正确.

随堂练习

1. $\sqrt{2}$ 与 $\sqrt{\frac{1}{50}}$，$\sqrt{75}$ 与 $\sqrt{\frac{1}{27}}$ 分别是同类二次根式.

2.(1) $-14\sqrt{2}$；

(2) $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

习题7.4

1. $\sqrt{48}$，$\sqrt{\frac{3}{4}}$ 与 $\sqrt{3}$ 是同类二次根式.

2.(1) $3\sqrt{3}$；(2) $-3\sqrt{3}$.

山东教育出版社

山东教育出版社

3.(1) $-\sqrt{2}-8\sqrt{5}$;

(2) $2\sqrt{2}$;

(3) $\dfrac{7\sqrt{6}}{30}$;

(4) $-5\sqrt{3}$.

4.(1) $-a^2\sqrt{2a}$;

(2) $\dfrac{3\sqrt{x}}{2}+4\sqrt{y}$.

3. 计算:

(1) $(\sqrt{8}-\sqrt{125})-(\sqrt{18}+\sqrt{45})$; (2) $7\sqrt{2}-(2\sqrt{\frac{1}{2}}+4\sqrt{2})$;

(3) $2\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{1}{6}}-\frac{1}{5}\sqrt{54}$; (4) $-\sqrt{48}-2\sqrt{3}+4\sqrt{\frac{3}{16}}$.

数学理解

※**4.** 计算:

(1) $a^2\sqrt{8a}-\frac{3a}{5}\sqrt{50a^3}$; (2) $2x\sqrt{\frac{1}{x}}+\sqrt{9y}-\frac{\sqrt{x}}{2}+y\sqrt{\frac{1}{y}}$.

4 二次根式的乘除

教学目标

1. 掌握二次根式的乘法和除法的运算法则.

2. 能熟练地进行二次根式的乘法和除法运算.

3. 在解决实际问题的过程中体会数学的应用价值.

把 $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\ (a\geqslant 0,\ b\geqslant 0)$, $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\ (a\geqslant 0,\ b>0)$ 反过来,就可以得到二次根式的乘法和除法法则.



$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}\ (a\geqslant 0,\ b\geqslant 0)$;[1]

$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}\ (a\geqslant 0,\ b>0)$.

利用上面的两个法则,可以进行二次根式的乘法和除法运算.

[1] 二次根式的乘法法则是二次根式的性质 $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\ (a\geqslant 0,\ b\geqslant 0)$ 的逆向应用,二次根式的运算结果,应该化为最简二次根式. 如例1(1)的结果不要写成 $\sqrt{50}$,应化简成 $5\sqrt{2}$. 要把二次根式的乘法法则与加法法则严格区别开来. 二次根式加减时,只有同类二次根式才能合并,合并时,只合并根号外的系数,被开方数不变. 而对于二次根式乘法,所有二次根式都能相乘,相乘时,不仅乘根号外的系数,被开方数也要相乘. 有关二次根式加减法的题目的解题步骤是先化简,后合并;有关二次根式乘法的题目的解题步骤是先相乘,后化简.

山东教育出版社

例 1 计算：

(1) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}$；　(2) $3\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{6}$；

(3) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$；　(4) $2\sqrt{6}\div 4\sqrt{3}$.

解： (1) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}=\sqrt{5\times 10}=\sqrt{5^2\times 2}=5\sqrt{2}$；

(2) $3\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{6}=3\times 2\times\sqrt{2\times 6}=6\sqrt{2^2\times 3}=12\sqrt{3}$；

(3) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{7}{3}}=\sqrt{\frac{21}{3^2}}=\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{3^2}}=\frac{\sqrt{21}}{3}$；

(4) $2\sqrt{6}\div 4\sqrt{3}=\frac{2\sqrt{6}}{4\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{6}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

想一想

(1) 你能说出例 1 中各题每步计算的依据吗?

(2) 例 1 (3) 题还有其他解法吗?

例 2 计算：$\sqrt{8}\cdot\sqrt{27}\div\sqrt{18}$.

解： $\sqrt{8}\cdot\sqrt{27}\div\sqrt{18}=\sqrt{8\times 27}\div\sqrt{18}=\sqrt{\frac{8\times 27}{18}}=\sqrt{4\times 3}=2\sqrt{3}$.

随堂练习

1. 计算：

(1) $\sqrt{96}\cdot\sqrt{\frac{1}{8}}$；　(2) $6\sqrt{27}\cdot(-2\sqrt{3})$；

(3) $\sqrt{6}\cdot\sqrt{18}$；　(4) $10\sqrt{10}\cdot\sqrt{\frac{1}{5}}$.

2. 计算：

(1) $\frac{\sqrt{24}}{2\sqrt{2}}$；　(2) $\sqrt{\frac{16}{5}}\div\sqrt{\frac{5}{8}}$；

(3) $2\div\sqrt{\frac{1}{3}}$；　(4) $\sqrt{3}\div\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}$.

例 1

(2) 是系数不是 1 的二次根式的乘法，相乘时，把系数相乘的积作为积的系数. (4) 是系数不是1的二次根式的除法，相除时，把被除式的系数除以除式的系数所得的商作为商的系数.

在进行二次根式的乘除运算时，一般是先按运算法则计算，再将运算结果化成最简二次根式. 也可以先适当变形后，再运用法则计算，以体现算法的多样性. 例如：

(1) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}$
$=\sqrt{5}\cdot\sqrt{5\times 2}$
$=\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}$
$=(\sqrt{5})^2\cdot\sqrt{2}$
$=5\sqrt{2}$;

(2) $3\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{6}$
$=3\sqrt{2}\cdot 2\cdot\sqrt{6}$
$=3\times 2\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}$
$=6\times(\sqrt{2})^2\times\sqrt{3}$
$=6\times 2\times\sqrt{3}$
$=12\sqrt{3}$.

例 2

本例是乘除混合运算，要按照由左至右的顺序进行.

随堂练习

1. (1) $2\sqrt{3}$;　(2) -108;　(3) $6\sqrt{3}$;　(4) $10\sqrt{2}$.

2. (1) $\sqrt{3}$;　(2) $\frac{8\sqrt{2}}{5}$;　(3) $2\sqrt{3}$;　(4) 3.

山东教育出版社

习题7.5

1.(1) -22；　(2) 2；
(3) 30；　(4) $\sqrt{2}$.

2.(1) 1；　(2) $\frac{5}{8}$；
(3) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$；　(4) $\frac{\sqrt{2}}{2}$；
(5) $\frac{\sqrt{3}}{3}$；　(6) $\sqrt{3}$.

3.(1) $4\sqrt{6}\ \mathrm{m}^2$；　(2) $3\ \mathrm{m}$.

4.(1) $\frac{\sqrt{xy}}{x}$；　(2) 1；
(3) $\sqrt{b}$.

习题 7.5

知识技能

1. 计算：

(1) $\sqrt{11}\cdot(-\sqrt{44})$；　(2) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{4}{3}}$；

(3) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{30}$；　(4) $\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{6}$.

2. 计算：

(1) $\frac{\sqrt{8}}{2\sqrt{2}}$；　(2) $5\sqrt{3}\div 4\sqrt{12}$；

(3) $\frac{-3}{\sqrt{27}}$；　(4) $\sqrt{5}\div\sqrt{10}$；

(5) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\div\sqrt{30}$；　(6) $\sqrt{\frac{1}{3}}\cdot(\sqrt{3}\div\sqrt{\frac{1}{3}})$.

3. 设长方形的面积是 S，长是 a，宽是 b.

(1) 已知 $a=\sqrt{8}\ \mathrm{m}$，$b=\sqrt{12}\ \mathrm{m}$，求 S；

(2) 已知 $a=2\sqrt{7}\ \mathrm{m}$，$S=3\sqrt{28}\ \mathrm{m}^2$，求 b.

数学理解

※4. 计算：

(1) $\frac{2y}{\sqrt{4xy}}$；　(2) $\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt{\frac{b}{c}}\cdot\sqrt{\frac{c}{a}}$；　(3) $\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot(\sqrt{\frac{b}{a}}\div\sqrt{\frac{1}{b}})$.

例 3　计算：

(1) $\sqrt{12}+\sqrt{8}\cdot\sqrt{6}$；　(2) $\sqrt{\frac{1}{2}}+\frac{5}{\sqrt{2}}$.

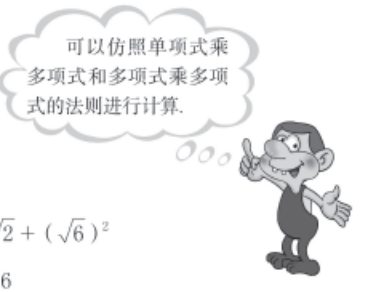
解： (1) $\sqrt{12}+\sqrt{8}\cdot\sqrt{6}=2\sqrt{3}+\sqrt{48}=2\sqrt{3}+4\sqrt{3}=6\sqrt{3}$.

(2) $\sqrt{\frac{1}{2}}+\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{5\sqrt{2}}{2}=\frac{6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$.

山东教育出版社

想一想

例 3 中的各题还有其他解法吗?



例 4 计算:

(1) $\sqrt{6}\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{6})$;

(2) $(5+\sqrt{6})(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})$.

解: (1) $\sqrt{6}\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{6})=\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}+(\sqrt{6})^2$

$=\sqrt{12}+6$

$=6+2\sqrt{3}$;[1]

(2) $(5+\sqrt{6})(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})=15\sqrt{2}-10\sqrt{3}+3\sqrt{12}-2\sqrt{18}$

$=15\sqrt{2}-10\sqrt{3}+6\sqrt{3}-6\sqrt{2}$

$=9\sqrt{2}-4\sqrt{3}$.

例 5 计算:

(1) $(2\sqrt{3}-1)^2$;　　(2) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})$.

解: (1) $(2\sqrt{3}-1)^2$

$=(2\sqrt{3})^2-4\sqrt{3}+1$

$=12-4\sqrt{3}+1$

$=13-4\sqrt{3}$;

(2) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

$=(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2$

$=3-2$

$=1$.

随堂练习

1. 计算:

(1) $\sqrt{3}\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{6})$;　　(2) $(2\sqrt{5}+3)(3\sqrt{5}-2)$.

2. 计算:

(1) $(2\sqrt{2}-\sqrt{6})^2$;　　(2) $(\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{2})^2$;

(3) $(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)$;　　(4) $(\sqrt{6}+2\sqrt{2})(2\sqrt{2}-\sqrt{6})$.

例 4

本例的运算依据是实数的运算律，通过本例，要沟通二次根式的运算与单项式乘多项式、多项式乘多项式之间的联系，总结出二次根式混合运算的一般运算法则.

[1] 习惯上把运算结果的有理数部分写在前面，无理数部分写在后面.

例 5

本例是借助乘法公式进行计算的，第(1)题是运用完全平方公式来进行，第(2)题是运用平方差公式来进行. 要防止出现 $(2\sqrt{3})^2=2(\sqrt{3})^2$ 一类的错误. 教学时，可让学生自己先做，使之切身体会到乘法公式在二次根式的运算中仍然适用. 在此基础上总结出：在二次根式运算中，加法的交换律、结合律，乘法的交换律、结合律、分配律以及乘法公式仍然适用.

随堂练习

1.(1) $3+3\sqrt{2}$;(2) $24+5\sqrt{5}$.

2.(1) $14-8\sqrt{3}$;(2) $\frac{9}{2}$;(3) 3;(4) 2.

山东教育出版社

读一读

秦九韶公式

秦九韶（约 1202—1261）是我国南宋著名数学家. 他知识渊博，精通星象、音律、算术等. 在数学方面，他注重搜集生产、生活、商贸以及战争中的数学问题，“设为问答以拟于用”，终于在 1247 年完成数学巨著《数书九章》.

《数书九章》全书共 18 卷，81 题，分为大衍、天时、田域、测望、赋役、钱谷、营建、军旅、市物九大类. 此书卷五第二题就是为了解决大面积沙田的地亩测量而提出的：

“问沙田一段，有三斜，其小斜一十三里，中斜一十四里，大斜一十五里，里法三百步，欲知为田几何.”秦九韶的解法是：“以小斜幂并大斜幂，减中斜幂，余，半之. 同乘于上，以小斜幂乘大斜幂，减上. 余，四约之为实，开平方，得积.”答案是：“三百十五顷.”

若把大斜记为 a，小斜记为 b，中斜记为 c，面积记为 S，则秦九韶的解法实质上便是下面的公式：

$$S=\sqrt{\frac{1}{4}\left[a^2b^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2\right]}. \quad ①$$

上述公式称为秦九韶公式.

如果设 $p=\frac{a+b+c}{2}$，那么将秦九韶公式加以整理、变形，可以得到

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad ②$$

这便是著名的海伦公式. 你能由①推导出②吗？试试看！

习题 7.6

知识技能

1. 计算：

(1) $\sqrt{6}\cdot(\sqrt{12}+5\sqrt{8})$；　(2) $(\sqrt{48}+\sqrt{27})\cdot\sqrt{3}$；

(3) $(\sqrt{2}-\sqrt{6}+\sqrt{\frac{1}{2}})\cdot\sqrt{3}$；　(4) $(2\sqrt{12}-4\sqrt{\frac{1}{8}})\cdot 3\sqrt{2}$；

(5) $(\sqrt{21}-2\sqrt{3})\div\sqrt{3}$；　(6) $(\sqrt{48}+\sqrt{3})\div\sqrt{27}$.

2. 计算：

(1) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$；　(2) $(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{3}-\sqrt{5})$.

习题7.6

1. (1) $6\sqrt{2}+20\sqrt{3}$；
   (2) 21；
   (3) $\frac{3\sqrt{6}}{2}-3\sqrt{2}$；
   (4) $-6+12\sqrt{6}$；
   (5) $-2+\sqrt{7}$；
   (6) $\frac{5}{3}$.
2. (1) $5+2\sqrt{6}$；
   (2) -2.

山东教育出版社

数学理解

3. 计算：

(1) $(2\sqrt{3}-2)(3\sqrt{6}+\sqrt{2})$；　(2) $(3\sqrt{2}+\sqrt{48})(\sqrt{18}+4\sqrt{3})$；

(3) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2+(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$；　(4) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2+(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$.

回顾与思考

1. 什么是二次根式？什么是最简二次根式？什么是同类二次根式？举例说明.
2. 二次根式有哪些主要的性质？
3. 二次根式加减运算的实质是什么？
4. 进行二次根式的加、减、乘、除以及简单的混合运算时，应当注意哪些问题？
5. 用适当的方式梳理本章的知识，并与同伴进行交流.

复习题

知识技能

1. x 取什么值时，下列各式在实数范围内有意义？

(1) $\sqrt{x-4}$；　(2) $\sqrt{1+x^2}$；　(3) $\sqrt{4-6x}$；　(4) $\dfrac{1}{\sqrt{2-3x}}$.

2. 把下列各式化成最简二次根式：

(1) $\sqrt{150}$；　(2) $\sqrt{\dfrac{14}{3}}$.

3. 计算：

(1) $\dfrac{\sqrt{20}+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}-2$；　(2) $\dfrac{\sqrt{12}+\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$；

(3) $(2\sqrt{3}+\sqrt{5})(2\sqrt{3}-\sqrt{5})$；　(4) $2\sqrt{12}+3\sqrt{48}$；

(5) $\sqrt{\dfrac{1}{7}}+\sqrt{28}-\sqrt{700}$；　(6) $\sqrt{32}-3\sqrt{\dfrac{1}{2}}+\sqrt{2}$.

4. 求代数式 $\sqrt{b^2-4ac}$ 的值.

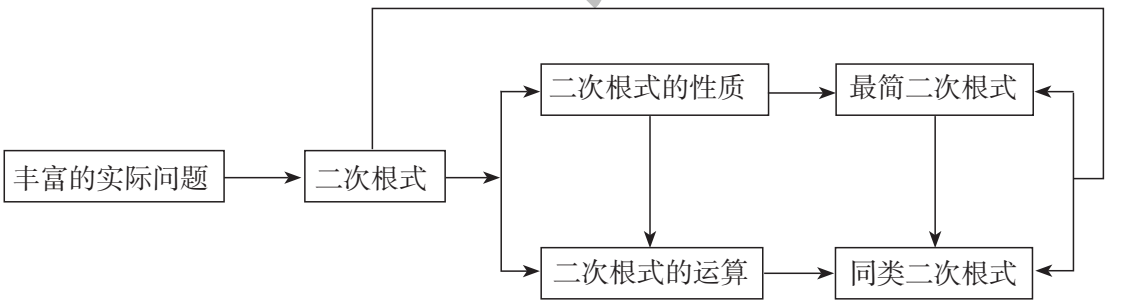
(1) $a=1$，$b=10$，$c=-15$；　(2) $a=2$，$b=-8$，$c=5$.

3. (1) $16\sqrt{2}-4\sqrt{6}$；
(2) $66+24\sqrt{6}$；
(3) 10；
(4) $2x+2y$.

回顾与思考

设立回顾与思考的目的是运用问题的形式帮助学生梳理本章所学的知识，建立一定的知识体系.

教学时，应首先鼓励学生独立思考，自己回顾所学的内容，并尝试回答教科书中提出的问题. 在对问题进行回答时，教师应关注学生运用自己的语言解释答案的过程，关注学生运用例子说明自己对有关知识的理解，而不是简单复述教科书上的结论. 再开展小组交流和全班交流，使学生在反思与交流的过程中逐渐建立知识体系. 在学生充分思考和交流的基础上，教师可引导学生共同建立以下的知识框架图.



在教学中，教师不仅要引导学生回顾本章的知识，同时应注重二次根式的性质的获得过程，体会在结论获得和验证过程中的数学思想.

“回顾与思考”也为学生的自评提供了机会. 教师可以要求学生在课后独立完成一份小结，用自

山东教育出版社

己的语言梳理本章内容，并回顾自己在本章学习中的收获、遇到的困难和需要改进的地方. 教师也可以据此了解每一个学生的学习状况，并适时调整教学.

复习题

1.（1）$x \geqslant 4$；（2）x 为任意实数；

（3）$x \leqslant \frac{2}{3}$；（4）$x < \frac{2}{3}$.

2.（1）$5\sqrt{6}$；　（2）$\frac{\sqrt{42}}{3}$.

3.（1）1；　（2）5；

（3）7；　（4）$16\sqrt{3}$；

（5）$-\frac{55\sqrt{7}}{7}$；　（6）$\frac{7\sqrt{2}}{2}$.

4.（1）$4\sqrt{10}$；　（2）$2\sqrt{6}$.

5. 15.

6.（1）$2\sqrt{2}$；（2）$2\sqrt{17}$，$8\sqrt{17}$.

7.（1）$\frac{3\sqrt{2}}{10}$；（2）$51+36\sqrt{2}$.

8. $\sqrt{2}-2\sqrt{3}$.

9. $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}=\sqrt{n^2+1}-n$.

10.（1）各式都成立；

（2）$\sqrt{n+\frac{n}{n^2-1}}=n\sqrt{\frac{n}{n^2-1}}$（$n \geqslant 2$，$n$ 是整数）；

（3）$\sqrt{n+\frac{n}{n^2-1}}=\sqrt{\frac{(n^3-n)+n}{n^2-1}}=\sqrt{\frac{n^3}{n^2-1}}=n\sqrt{\frac{n}{n^2-1}}$.

11.（1）$6\sqrt{6}$；（2）$\frac{\sqrt{26}}{2}$.

5. 已知 $x=2-\sqrt{3}$，$y=2+\sqrt{3}$，求 x^2+xy+y^2 的值.

6. 已知直角三角形的两条直角边分别是 a，b，斜边是 c.

（1）如果 $a=\sqrt{3}+1$，$b=\sqrt{3}-1$，求 c；

（2）如果 $a=8$，$c=2\sqrt{33}$，求 b 及直角三角形的面积.

7. 化简：

（1）$\frac{1}{4}\sqrt{3} \div 5\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{12}$；　（2）$(3\sqrt{3}+2\sqrt{6})^2$.

8. 当 $a=3$，$b=2$ 时，求 $\left(\sqrt{\frac{1}{a}}-\sqrt{b}\right)\sqrt{ab}$ 的值.

数学理解

9. 观察下面的运算，你能发现什么规律？

由 $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=1$，得 $\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$；

由 $(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)=1$，得 $\frac{1}{\sqrt{5}+2}=\sqrt{5}-2$；

由 $(\sqrt{10}+3)(\sqrt{10}-3)=1$，得 $\frac{1}{\sqrt{10}+3}=\sqrt{10}-3$；

……

请用含有自然数 n（$n \geqslant 1$）的式子将你发现的规律表示出来.

10.（1）判断下列各式是否成立：

$\sqrt{2+\frac{2}{3}}=2\sqrt{\frac{2}{3}}$；（　　）　$\sqrt{3+\frac{3}{8}}=3\sqrt{\frac{3}{8}}$；（　　）

$\sqrt{4+\frac{4}{15}}=4\sqrt{\frac{4}{15}}$；（　　）　$\sqrt{5+\frac{5}{24}}=5\sqrt{\frac{5}{24}}$.（　　）

（2）根据（1）中的结果，你能发现什么规律？请用含有自然数 n 的式子将你发现的规律表示出来，并注明 n 的取值范围；

※（3）请说明你所发现的规律的正确性.

问题解决

11. 如果一个三角形的三边的长分别为 a，b，c，设 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$，则有下列面积公式：

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$（海伦公式），

$S=\sqrt{\frac{1}{4}[a^2b^2-(\frac{a^2+b^2-c^2}{2})^2]}$（秦九韶公式）.

（1）如果一个三角形的三边的长依次为5，6，7，利用两个公式分别求三角形的面积；

（2）如果一个三角形的三边的长依次为 $\sqrt{5}$，$\sqrt{6}$，$\sqrt{7}$，利用两个公式分别求三角形的面积.

山东教育出版社

附录　典型案例评析

二次根式

设计者：胜利教育管理中心教研室　王德刚
山东省东营市胜利六中　王师森

一、学情分析

本节课是在七年级上册学过的“勾股定理”“实数”的基础上进行学习的.通过前面的学习，学生对平方根和算术平方根的知识比较熟悉，同时八年级的学生，已经具备了一定的合作交流与探究能力，所以新知识的接受较为容易.要注意把学生的已有经验作为认知基础，在学习过程中，把“理解被开方数是非负数的要求”作为重点，采用让学生观察、思考、探究的方法实现教学目标.

二、任务分析

“二次根式”是《标准》“数与代数”领域的重要内容之一.本章是在“实数”的基础上，进一步研究二次根式的概念、性质和运算. 本章内容与已学内容“实数”“整式”联系紧密，同时也是以后将要学习的“一元二次方程”和“锐角三角函数”等内容的重要基础. 二次根式的概念和性质是学习本章的关键，也是学习二次根式的化简和运算的依据，计划用两课时完成，第一课时主要学习二次根式的概念“$\sqrt{a}$（$a\geqslant 0$）”和性质“$(\sqrt{a})^2=a$（$a\geqslant 0$）”.

三、教学目标

1. 了解二次根式的概念，初步理解二次根式有意义的条件.

2. 通过具体问题探求并掌握二次根式的性质，能运用性质进行一些简单的运算.

3. 通过观察一些特殊的情形获得一般结论，使学生感受归纳的思想方法.

四、教学重难点

重点：

探求二次根式有意义的条件，掌握二次根式的性质，并能运用性质进行一些简单的运算.

难点：

1. 通过观察一些特殊的情形，运用从特殊到一般的数学思想归纳获得二次根式的性质；

2. 理解、掌握、运用二次根式的性质：$(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant 0)$.

山东教育出版社

五、教学过程

教学过程（教师）	学生活动	设计思路
情景引入： 情景一 如果正方形的面积为2，你知道该正方形的边长是多少吗？面积为3呢？面积为S呢？ 情景二 正方形的面积为S，如果把它的面积增加1，新的正方形的边长是多少？	观察图片，回答问题. 学生一：正方形的边长是$\sqrt{2}$； 学生二：正方形的边长是$\sqrt{3}$； 学生三：正方形的边长是$\sqrt{S}$； 学生三：新正方形的边长是$\sqrt{S+1}$.	给学生展现生活中常见的两张图片，让学生感受到数学知识来源于生活，激发学生学习的兴趣，避免知识的机械呈现.
课题引入：$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{S}$，$\sqrt{S+1}$，这些式子有什么共同的特征？你还能列举出符合这些特征的一些式子吗？	积极思考，回答问题. 1. 这些式子都含有根号； 2. 符合这些特征的式子有：$\sqrt{16}$，$\sqrt{2}$，$\sqrt{a}$……	从学生熟悉的情景入手得到式子，结合平方根的概念，引导学生理解所给的一些式子的实际意义，从而自然给出二次根式的意义.
思考探索一： 1. 下列哪些式子是二次根式？为什么？ （1）$\sqrt{35}$；（2）$\sqrt{\dfrac{-(-3)}{2}}$； （3）$\sqrt[3]{2}$；（4）$\sqrt{xy}$（x，y异号）. 2. 说一说，下列各式是二次根式吗？为什么？ （1）$\sqrt{32}$；（2）$\sqrt{-12}$； （3）$\sqrt{a^2+1}$；（4）$\sqrt{-m}$（$m\leqslant 0$） 3.（1）当$a<0$时，$\sqrt{a}$有意义吗？为什么？ （2）当$a\geqslant 0$时，$\sqrt{a}$可能为负数吗？为什么？ 4.（应用拓展） 若$\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}=0$，求$a^{2\,013}+b^{2\,014}$的值.	1. 互相讨论，踊跃回答： 参考答案：（1）、（2）是二次根式，（3）、（4）都不是. 2. 独立思考，直接回答： 参考答案：（1）、（3）、（4）是二次根式，（2）不是. 3. 集体讨论，代表解答： （1）没有意义，因为负数没有算术平方根； （2）不可能，即$\sqrt{a}$是非负数，当$a\geqslant 0$时，$\sqrt{a}\geqslant 0$. 4. 自主探究，合作提高： 答案：0.	通过学生相互讨论使学生主动参与到学习活动中来，培养学生合作交流的学习习惯. 问题设置的目的，是使学生充分理解二次根式的意义和二次根式的非负性.

山东教育出版社

续表

教学过程（教师）	学生活动	设计思路
思考探索二： 1. a 是怎样的实数时，下列各式在实数范围内有意义？ （1）$\sqrt{a+1}$；（2）$\sqrt{1-3a}$. 2. 练习：教科书 33 页第1题. 3.（应用拓展） 当 a 是怎样的实数时，下列各式在实数范围内有意义？ （1）$\sqrt{a^2+6}$；（2）$\sqrt{-(a-1)^2}$.	1. 小组讨论，代表回答： （1）解：如果$\sqrt{a+1}$有意义，那么 $a+1\geqslant 0$， 解不等式 $a+1\geqslant 0$， 得 $a\geqslant -1$， ∴ 当 $a\geqslant -1$ 时，式子 $\sqrt{a+1}$ 在实数范围内有意义. （2）解：如果 $\sqrt{1-3a}$ 有意义，那么 $1-3a\geqslant 0$， 解不等式 $1-3a\geqslant 0$， 得 $a\leqslant \frac{1}{3}$， ∴ 当 $a\leqslant \frac{1}{3}$ 时，式子 $\sqrt{1-3a}$ 在实数范围内有意义. 2. 独立思考，直接回答. 3. 自主探究，合作提高.	通过学生相互讨论设置的问题2，侧重巩固对二次根式意义的理解，提高学生分析问题的能力，培养学生善于思考、精益求精的良好思维习惯，以及缜密、严谨的逻辑推理能力.
思考探索三： 1. $\sqrt{2}$ 的意义是什么？你会计算 $(\sqrt{2})^2$ 吗？类似地，$(\sqrt{4})^2$，$(\sqrt{9})^2$，$(\sqrt{0.01})^2$，$(\sqrt{30})^2$ 的结果是什么？类比猜想：当 $a\geqslant 0$ 时，$(\sqrt{a})^2$ 的结果是什么？ 2. 计算： （1）$(\sqrt{2.1})^2$； （2）$(2\sqrt{3})^2$. 3. 练习：教科书 33 页第 2 题. 4.（应用拓展） （1）把下列非负数写成一个数的平方的形式： ① $5=$　　② $\frac{2}{5}=$ （2）在实数范围内分解因式： ① x^2-6；　② x^4-9.	1. 小组交流，代表回答： $\sqrt{2}$ 是 2 的算术平方根，根据算术平方根的意义，$(\sqrt{2})^2=2$. 同理：$(\sqrt{4})^2=4$，$(\sqrt{9})^2=9$，$(\sqrt{0.01})^2=0.01$，$(\sqrt{30})^2=30$. 事实上，$\sqrt{a}$（$a\geqslant 0$）是 a 的算术平方根，根据算术平方根的意义可知：当 $a\geqslant 0$ 时，$(\sqrt{a})^2=a$. 2. 解：（1）$(\sqrt{2.1})^2=2.1$； （2）$(2\sqrt{3})^2=2^2\times(\sqrt{3})^2$ $=4\times 3=12$. 3. 学生自主练习. 4. 自主探究，合作提高.	通过观察一些特殊的情形，运用从特殊到一般的数学思想归纳猜想二次根式的性质，再运用算术平方根的意义进行科学的说理验证. 通过问题2的设置，理解二次根式的性质，能直接运用其性质解决问题，同时说明 $b\sqrt{a}$ 也看做二次根式，$b\sqrt{a}$ 表示 $b\cdot\sqrt{a}$. 通过问题4的设计，培养学生的逆向思维能力，学会 $a=(\sqrt{a})^2(a\geqslant 0)$.
总结： 1. 二次根式的意义； 2. 二次根式有意义的条件； 3. 二次根式的基本性质.	讨论后共同小结.	师生互动，锻炼学生严谨的口头表达能力，培养学生有条理地梳理知识点、有目的地整合知识点的能力.
课后作业： 1. 教科书 34 页第 1，2，3 题. 2. 思考：a 是怎样的实数时，式子 $\frac{\sqrt{1-2a}}{\sqrt{1-a}}$ 在实数范围内有意义？	独立完成，自查反馈.	进一步理解二次根式的意义与二次根式基本性质的运用.

山东教育出版社

六、教学反思

1. 对“形如 $\sqrt{a}$（$a \geqslant 0$）的式子是二次根式”的理解，要让学生明白 $a \geqslant 0$ 是必不可少的先决条件，避免学生生搬硬套地应用.

2. 在二次根式概念归纳中，要潜移默化地培养学生从具体到一般的归纳能力，教师不要急于给出提示.

3. 在应用拓展部分培养学生利用二次根式的非负性和不等式准确计算的能力及逆向思维能力，培养学生一丝不苟的科学精神，老师要及时纠正学生不全面或不规范的解法.

七、案例评析

本节课的设计以学生已有的知识为切入点，以一切围绕学生的发展这一新课程理念展开，提供了较多而富有现实意义的教学内容，有利于学生主动地进行观察、猜想、交流.教学活动中，学生在独立思考、相互探讨、与人分享的氛围中重现数学学习的过程.本课以训练思维为主线，重视知识的形成、发展过程，重视解题思路的探索过程，重视知识的概括和总结，使学生在这些过程中展开思维，从而发展他们的科学精神和创新意识，以及用数学语言交流的能力，很大程度上改变了学习面貌，使学生真正成为学习的主人.

山东教育出版社 山东教育出版社

第八章　一元二次方程

一、《标准》要求

1. 体验从具体情境中抽象出数学符号的过程，理解方程；掌握必要的运算（包括估算）技能；探索具体问题中的数量关系和变化规律，掌握用方程进行表述的方法.

2. 通过用方程表述数量关系的过程，体会模型的思想，建立符号意识.

3. 能根据具体问题中的数量关系列出方程，体会方程是刻画现实世界数量关系的有效模型.

4. 经历估计方程解的过程.

5. 理解配方法，能用配方法、公式法、因式分解法解数字系数的一元二次方程.

6. 会用一元二次方程根的判别式判别方程是否有实根和两个实根是否相等.

7. * 了解一元二次方程的根与系数的关系.

8. 能根据具体问题的实际意义，检验方程的解是否合理.

二、教学目标

1. 经历从具体情境中抽象出一元二次方程的过程，进一步体会方程是刻画现实世界数量关系的有效模型，建立符号意识.

2. 理解一元二次方程及其相关概念，理解配方法，能用配方法、公式法、因式分解法解数字系数的一元二次方程，并在解一元二次方程的过程中体会转化等数学思想.

3. 经历估计一元二次方程解的过程，进一步培养估算意识和能力，发展数感.

4. 会用一元二次方程根的判别式判别方程是否有实数根和两个实数根是否相等.

5. * 了解一元二次方程的根与系数的关系.

6. 能利用一元二次方程解决有关实际问题，体会数学与现实生活的紧密联系；能根据具体问题的实际意义，检验方程的解是否合理，进一步培养分析问题、解决问题的意识和能力.

三、设计思路

方程是刻画现实世界中数量关系的一个有效数学模型. 随着数学应用的日趋广泛，方程的工具作用显得愈发重要. 在前几册中，学生已经学习了一元一次方程、二元一次方程组、可化为一元一次方程的分式方程等，初步感受了方程的模型作用，积累了利用方程解决实际问题的经验，并能解决相关的实际问题. 但生活中有关方程的模型并不都是线性的，另一种方程——一元二次方程，在现实生活中具有同样广泛的应用. 本章将研究一元二次方程的有关概念、解法和应用等.

山东教育出版社

在总体设计思路上，本章遵循了“问题情境—建立模型—拓展、应用”的模式，首先通过具体问题情境建立有关方程，并归纳出一元二次方程的有关概念，然后探索其各种解法，并在现实情境中加以应用，切实提高学生的应用意识和能力.

具体来讲，第1节通过丰富的实例，如“地毯四周有多宽”“梯子的底端滑动多少米”等问题，建立一元二次方程，让学生通过观察归纳出一元二次方程的有关概念，并从中体会方程的模型思想；第2～4节，通过具体方程逐步探索解一元二次方程的配方法、公式法、因式分解法；第5节在求根公式的基础上，探索一元二次方程的根与系数的关系；第6节再次通过几个问题情境加强一元二次方程的应用.

当然，列方程、解方程和方程应用并不是截然割裂的，而应该是同一个问题解决过程中的几个步骤. 为此，教科书注意加强它们之间的联系，力求将解方程的技能训练与实际问题的解决融为一体，在解决实际问题的过程中提高学生的解题技能. 如在第2～4节探索方程解法的过程中，并未单纯地进行解方程的训练，而是适当设计了一些应用题，并在三种解法之后又安排了有关的应用内容.

《标准》明确要求加强学生的估算意识和能力培养，为此教科书设计了一课时内容探索一元二次方程的近似解. 在建立了一元二次方程的模型之后，基于学生的学习心理规律，学生自然会产生探求其解的欲望，因此教科书引导学生尝试解决“地毯四周有多宽”和“梯子的底端滑动多少米”的问题，要求学生在这些具体情境中寻找方程的解，而这一过程恰好包含了估计近似解的过程. 对于近似解的讨论，一方面可以促进学生对方程解的理解，发展学生的估算意识和能力，另一方面又为方程精确解的研究做了铺垫. 不仅如此，估计方程解的过程涉及对参与运算的数与量的意义及关系的理解，可以反映对具体问题所涉及的数量关系的整体把握，是一种更为综合的数感.

一元二次方程的精确求解方法有因式分解法、配方法、公式法等，但由于《标准》中降低了因式分解的要求，根据学生已有的因式分解知识，学生主要用因式分解法求解形如“$x(x-a)=0$”和“$x^2-a^2=0$”的特殊一元二次方程，因此教科书先研究配方法、公式法，而将因式分解法作为解决特殊问题的特殊方法最后给出.

此外，本章的内容安排中还注意体现转化、归纳等数学思想. 解方程的过程就是一个沟通“未知”与“已知”的过程，其中所蕴含的主要思想是转化. 因而，教科书在解方程的探索中力图通过“未知”向“已知”、复杂问题向简单问题、特殊向一般的转化，体现转化的数学思想. 如在“配方法”一节中，首先回忆现在所能解决的方程的类型，然后引导学生将数字系数的一般一元二次方程逐步转化为熟悉的“$(x+m)^2=n$”的形式，从而得到配方法. 在此基础上，又进一步将其一般化，得到公式法；而在因式分解法中，则突出了降次的思想.

四、课时安排建议

1　一元二次方程　　2课时

2　用配方法解一元二次方程　　3课时

山东教育出版社 山东教育出版社

3	用公式法解一元二次方程	3 课时
4	用因式分解法解一元二次方程	1 课时
*5	一元二次方程的根与系数的关系	1 课时
6	一元二次方程的应用	4 课时
回顾与思考		2 课时

五、教学建议

1. 设置丰富的问题情境，让学生真正经历模型化的过程，从而更好地理解方程的意义和作用，激发学生的学习兴趣.

方程是刻画现实世界中数量关系的有效数学模型，因而方程教学首先应关注方程的建模过程. 教科书第1节第1课时的目的就是想通过对多个实际问题的分析，让学生感受方程是刻画现实世界数量关系的有效模型. 教学中应让学生从具体实例出发,经历模型化的过程，并在此基础上抽象出数学概念. 当然，教师应根据学生的生活实际和认知实际，创设更为丰富、贴近学生生活的现实情境，并引导学生分析其中的数量关系，建立方程模型. 此外，在方程应用中也应该关注学生建立方程的过程，提高学生的应用能力.

2. 重视学生的活动，鼓励学生进行探索和交流，鼓励与提倡解决问题策略的多样化.

本章为学生提供了许多活动，教学中应当让学生进行充分的探索和交流. 如对于一元二次方程的概念，教师应引导学生观察实例中得到的几个方程，分析它们与一元一次方程的差异，从而概括它们的共同特点，归纳出一元二次方程的概念；再如配方法的引入，教科书用层层递进的问题串，一步一步让学生找到解决问题的方法. 在教学中还应鼓励与提倡解决问题策略的多样化，如在“公式法”一节的第 2 课时中，不同的学生有不同的设计方案，应该让学生充分发挥他们的创造力，自行设计，只要合理就应予以肯定与鼓励.

3. 有意识地体现转化的思想.

转化是一种重要的数学思想. 在本章中，反映转化思想的内容十分广泛. 如配方法把方程化为 $(x+m)^2=n$ 的形式,体现了数学形式的转化;公式法直接利用公式把方程中的“未知”转化为“已知”;因式分解法通过“降次”,把一元二次方程转化为两个一元一次方程等. 在教学过程中，教师要有意识地突出体现转化的思想.

4. 注意引导学生寻求实际问题中所蕴含的等量关系，使学生进一步体会寻找等量关系是用方程解决问题的关键.

由于实际问题涉及的内容广泛,有的背景学生不太熟悉,有的问题数量关系繁多、复杂，因此教学中应引导学生整体地、系统地审清问题，分析问题中各个数量间的关系，并用代数式表示这些关系，从而找出解决问题的方法.

5. 恰当把握知识技能的要求.

掌握必要的运算（包括估算）技能是《标准》的要求，但教学过程中，应避免过多地求解没有实际背景的一元二次方程，进行单纯的、形式化的操练. 应注意将知识技能的培养寓于实际应用问题的解决过程中，运算也是解决问题的一个步骤. 练习和作业中解方程

山东教育出版社

的难度应控制在与教科书相当的水平上，不易过难过繁.

六、评价建议

1. 关注学生在学习过程中的表现，如能否积极地参与活动、能否从不同的角度去思考问题等，而不是仅局限于学生列方程、解方程的正确与否.

在本章中，无论是一元二次方程概念的抽象还是一元二次方程公式法的获得，无论是解的估算还是一元二次方程的具体应用，都需要学生参与活动，所以评价要关注学生是否能积极参与这些思维活动过程，以及在活动过程中的表现，如理解的程度、方法的多样性与灵活性等.

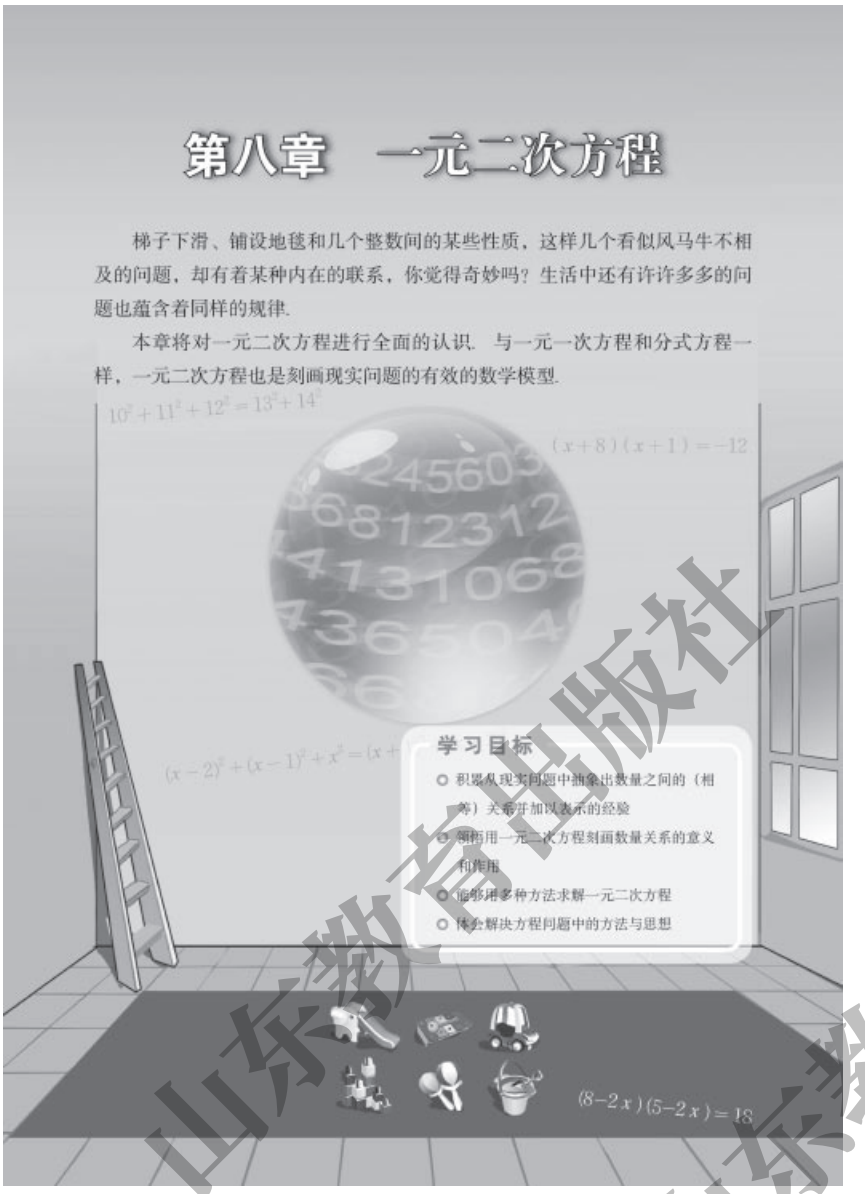
2. 不宜单纯考查学生解方程的速度和数量，应注意在解决实际问题的过程中考查学生能否正确地建立方程，以及能否根据方程的特征灵活运用一元二次方程的各种解法求解.

让学生在学习一元二次方程的过程中体会模型思想，这是一个非常重要的目标. 评价时要关注学生对方程作为数学模型的认识，关注学生能否自觉运用方程的思想分析问题、解决问题，在建立了方程之后能否根据方程的特征灵活运用一元二次方程的各种解法求解.

3. 重视对学生运用一元二次方程解决问题的能力的评价.

列一元二次方程解决实际问题，这是学生学习本章的重点和难点. 评价时要关注学生对实际问题所涉及的数量及数量关系的分析能力，关注学生能否将思考过程清晰而有条理地表达出来.

山东教育出版社



主题图以房间为背景，其中的梯子、地毯等元素与本章即将要研究的问题密切相关. 这些元素与相应的语言文字相配合，意在暗示本章内容，激发学生的学习欲望.

山东教育出版社
山东教育出版社

教学目标

1. 经历由具体问题抽象出一元二次方程的概念的过程，进一步体会方程是刻画现实世界中数量关系的一个有效数学模型.

2. 理解一元二次方程及其相关概念.

3. 经历估计一元二次方程解的过程，增进对方程解的认识，进一步培养估算意识和能力，发展数感.

本节共分 2 课时，第 1 课时通过丰富的实例，如“地毯四周有多宽”“梯子的底端滑动多少米”等问题，让学生通过观察、抽象，归纳出一元二次方程的有关概念，并从中体会方程的模型思想. 在建立了一元二次方程的模型之后，基于学生的学习心理规律，学生自然会产生探求其解的欲望，因此第 2 课时要求学生探索“梯子的底端滑动多少米”等问题的解或近似解. 这样，一方面可以促进学生对方程解的理解，发展学生的估算意识和能力；另一方面又为方程精确解的研究做了铺垫，因为学生可能不满足于所获得的近似解，会产生求精确解的内在要求，在此基础上自然引入下一节内容.

对于具体问题情境的选择，教科书既注意了力求贴近学生的生活实际，又关注了数学本身的要求，让学生体会到一元二次方程是数学内部发展和实际问题解决的必然结果. 为此，选择了两个生活问题和一个数学问题. 此外，教科书力图把一些具体问题及其解决贯串于整个教学过程，以给学生一个整体感觉，因此本节问题的解决一直延续到后面几节，教学中应注意加以体会. 当然，具体教学中，教师应根据学生的生活实际和认知实际，创设更为丰富、贴近学生生活的现实情境，并引导学生分析其中的数量关系，建立方程模型.

1 一元二次方程

幼儿园活动教室矩形地面的长为 8 m，宽为 5 m，现准备在地面正中间铺设一块面积为 18 m^2 的地毯（如图 8-1），四周未铺地毯的条形区域的宽度都相同，你能求出这个宽度吗？[1]

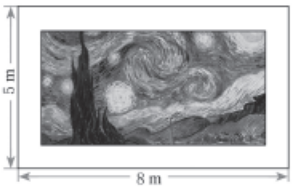


图 8-1

如果设所求的宽度为 x m，那么你能列出怎样的方程？

观察下面的等式：

$$10^2+11^2+12^2=13^2+14^2.$$

你还能找到五个连续整数，使前三个数的平方和等于后两个数的平方和吗？

如果将这五个连续整数中的第一个数设为 x，那么怎样用含 x 的代数式表示其余四个数？根据题意，你能列出怎样的方程？[2]

如图 8-2，一个长为 10 m 的梯子斜靠在墙上，梯子的顶端距地面的垂直距离为 8 m. 如果梯子的顶端下滑 1 m，那么梯子的底端向外滑动多少米？

你能计算出滑动前梯子底端距墙的距离吗？如果设梯子底端向外滑动 x m，那么你能列出怎样的方程？[3]

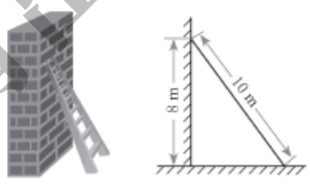


图 8-2

山东教育出版社

[1] 这里应引导学生回顾列一元一次方程解决实际问题的思路和方法，明确已知量、未知量以及问题所涉及的等量关系等. 下面两个问题的教学也是如此.

所列方程化成一般形式为 $2x^2-13x+11=0$. 学生在解决这个问题时可能会有不同的列方程的思路. 例如：

（1）如图1，将地面四周未铺地毯的条形区域的四个矩形面积相加后，再减去重复的四个小正方形的面积，即可得四周条形区域的面积，从而列出方程 $2\times5x+2\times8x-4x^2=5\times8-18$.

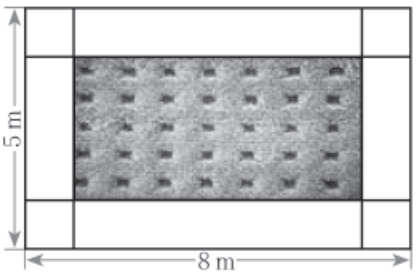


图1

（2）如图2，将地毯四周的一些条形适当平移，可列出方程 $(5-2x)(8-2x)=18$，或 $2\times5x+2\times(8-2x)=5\times8-18$，或 $2\times8x+2\times(5-2x)=5\times8-18$.

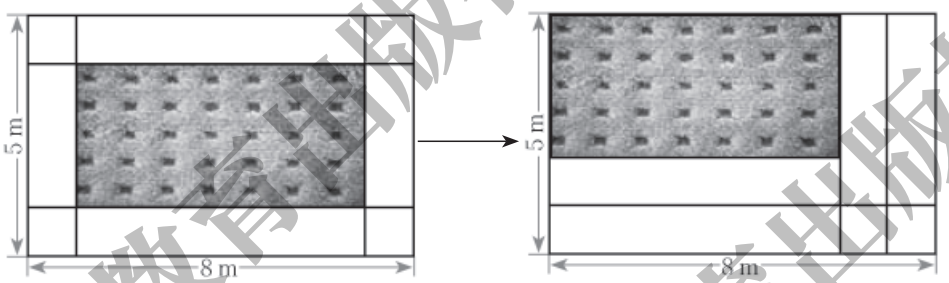


图2

教科书选择这个问题情境，旨在让学生感受到研究一元二次方程是来自现实生活的需要. 当然，根据学生的实际情况，教学时也可以选择其他贴近学生生活的问题情境. 例如：

（1）我校初三某毕业班的每一个同学都希望向全班其他同学赠送一张自己的毕业留念照，这样将互送 2 550 张照片，你知道这个班共有多少名同学吗？（设全班共有 x 名同学，则每个人要向别人送出（$x-1$）张，所以可列方程 $x(x-1)=2\,550$. ）

（2）某商场国庆节期间搞促销活动，一件 800 元的商品第一次降价后，销售较慢，于是又进行了第二次降价，第二次降价的百分率是第一次的 2 倍，结果以 476 元的价格迅速销售一空，那么每次降价的百分率各是多少？（设第一次降价的百分率为 x，则第二次降价的百分率为 $2x$，所以可列方程 $800(1-x)(1-2x)=476$. ）

通过此类问题的解决，使学生进一步体会，在实际生活中，当我们需要确定某些未知量的值时，往往可以从实际问题中抽象出等量关系，从而借助“方程”这一数学模型解决问题.

[2] 如果将这五个连续整数中的第一个数设为 x，那么其余四个数依次为 $x+1$，$x+2$，$x+3$，$x+4$，根据题意，列出方程 $x^2+(x+1)^2+(x+2)^2=(x+3)^2+(x+4)^2$. 化成一般形式为 $x^2-8x-20=0$.

这个问题可以有不同的设未知数的方法，如可设中间的那个数为 x，那么其余四个数依次为 $x-2$，$x-1$，$x+1$，$x+2$，因此得出的方程为 $(x-2)^2+(x-1)^2+x^2=(x+1)^2+(x+2)^2$，

山东教育出版社

化成一般形式为$x^2 - 12x = 0$. 教学中应鼓励学生灵活设未知数，但本节的重点是引导学生列出方程并抽象出一元二次方程的概念，因而不必花太多时间探索不同的解决方式，如学生提出其他设法，则应给予鼓励，而若学生未提出其他设法，则不必故意引导. 本课时的几个问题都应同样处理.

[3] 根据勾股定理，可以计算出滑动前梯子底端距墙 6 m. 设梯子顶端下滑 1 m 时，梯子底端滑动 x m，则可以列出方程 $(x + 6)^2 + 7^2 = 10^2$，化成一般形式为$x^2 + 12x - 15 = 0$.

根据学生的实际情况，教学时也可以用问题串的形式引导学生一步步地分析问题. 例如：

（1）直角三角形三边满足怎样的数量关系？这一数量关系在梯子滑动过程中是否保持不变？

（2）在梯子滑动过程中还有哪些量或关系保持不变？

（3）你能写出滑动前的直角三角形的三边长度吗？

……

教学过程中，可能会有学生利用勾股定理直接计算出梯子底端滑动的距离为 $(\sqrt{51} - 6)$ m，对此教师首先应给予肯定，然后可以启发学生：“你能用列方程的方法解决这个问题吗？”引导学生根据教科书所设未知数列出方程. 在这里，重要的是利用解决问题的过程中所得到的方程抽象出一元二次方程的概念，所以问题的结果并不是最重要的.

实际上，本课时教科书设置的三个情境问题对本章各个知识点的教学均有“作用”. 例如，对于前两个情境中的方程，学生可以“凑”出方程的解或部分解；但对第三个情境中的方程，“凑”解的方法不可行，从而体现了寻求一元二次方程的一般解法的必要性. 又如，情境二和情境三中的方程属于二次项系数为1的情形，而情境一中的方程属于二次项系数不为1的情形，在探索一元二次方程解法的过程中，它们可以分别作为引入相关内容时的情境. 此外，情境一和情境三中方程的两个实数根中有一个不符合题意，情境二中方程的两个实数根都符合题意，体现了方程的根与实际问题的解之间的关系. 教学过程中，教师可以根据学生和当地的实际情况选用不同的情境问题，同时希望能关注到问题的后续作用.

山东教育出版社

议一议

由上面三个问题，我们可以得到三个方程：

$(8-2x)(5-2x)=18$，

$x^2+(x+1)^2+(x+2)^2=(x+3)^2+(x+4)^2$，

$(x+6)^2+7^2=10^2$.

这三个方程有什么共同特点？

[1] 上面的方程都是只含有一个未知数 x 的整式方程❶，并且都可以化成 $ax^2+bx+c=0$（a，b，c 为常数，$a\neq 0$）的形式，这样的方程叫做**一元二次方程**（quadratic equation with one unknown）.

[2] 我们把 $ax^2+bx+c=0$（a，b，c 为常数，$a\neq 0$）称为一元二次方程的一般形式，其中 ax^2，bx，c 分别称为二次项、一次项和常数项，a，b 分别称为二次项系数和一次项系数.

随堂练习

1. 根据题意列出方程：已知直角三角形的三边长为连续整数，求它的三边长.
2. 把方程 $(3x+2)^2=4(x-3)^2$ 化成一元二次方程的一般形式，并写出它的二次项系数、一次项系数和常数项.

习题 8.1

知识技能

1. 根据题意，列出方程：
   （1）有一面积为 54 m² 的长方形，将它的一边剪短 5 m，另一边剪短 2 m，恰好变成一个正方形. 这个正方形的边长是多少？
   （2）三个连续整数两两相乘，再求和，结果为 242. 这三个整数分别是多少？

❶ 等号两边都是关于未知数的整式的方程，称为整式方程.

议一议

旨在通过对所列三个方程共性的分析，抽象出一元二次方程的概念. 教学中，应首先引导学生根据已有的方程知识和经验，将上述三个方程进行化简，并整理成一般形式；然后让学生对整理后的方程进行观察与思考，用自己的语言描述它们的共同特点；最后再组织全班学生进行交流.

[1] 这里出现整式方程的概念，意在排除分式方程和无理方程，因为某些分式方程和无理方程经变形后可化为一元二次方程，但它们并非一元二次方程. 当然，根据《标准》的要求，义务教育阶段不研究可化为一元二次方程的分式方程和无理方程，所以这里只需向学生介绍一下即可，也可以告诉学生以前学过的一元一次方程和二元一次方程都是整式方程，不必在概念上多作引申. 此外，这里所说的“可以化成”是指对整式方程进行去分母、去括号、移项、合并同类项等同解变形.

关于 x 的一元二次方程都可以化成 $ax^2+bx+c=0$ 的形式，其中条件“$a\neq 0$”是定义不可缺少的重要组成部分，否则就不一定是一元二次方程了，而对于一次项系数和常数项则没有这样的条件要求. 因此，如果明确指出 $ax^2+bx+c=0$ 是一元二次方程，那么就隐含了 $a\neq 0$ 的条件. 教学时，由于情境问题中所得到的方程都是各项系数均不为 0 的情况，因此在这里有必要引导学生对 $ax^2+bx+c=0$ 中 b 和 c 的取值范围进行讨论，可以结合具体方程进行辨析，如边长为 x 的正方形的面积为 8，可得方程 $x^2=8$，整理为 $x^2-8=0$，其中 $a=1$，$b=0$，$c=-8$. 有针对性地给出一些方程，让学生通过判断和比较，更好地抓住一元二次方程的本质特征，加强对定义的理解.

[2] 一元二次方程一般形式的特征是：等式左边是一个关于未知数的二次式，等式右边是零. 二

山东教育出版社

次项系数、一次项系数及常数项都是就一般形式而言的，所以确定一元二次方程的各项系数时，必须先将方程化为一般形式，并且应提醒学生：确定二次项系数、一次项系数及常数项时应注意符号. 另外，还要分清二次项与二次项系数、一次项与一次项系数，避免混淆.

教学中，可以结合前面情境中得到的方程巩固一元二次方程的相关概念.

随堂练习

1. 答案不唯一. 例如，可设三边长分别为 $x-1$，x，$x+1(x>1)$，根据题意，得 $(x-1)^2+x^2=(x+1)^2$，化成一般形式为 $x^2-4x=0$. 鼓励学生选定不同的量设为未知数，列出不同的方程.
2. 答案不唯一. 例如，原方程可以化为 $5x^2+36x-32=0$，这时二次项系数是 5，一次项系数是 36，常数项是 -32. 又如，原方程也可以化为 $-5x^2-36x+32=0$. 更一般地，$5kx^2+36kx-32k=0$（k 是不等于 0 的常数）都是原方程的一般形式.

习题8.1

1.（1）设这个正方形的边长是 x m$(x>0)$，根据题意，得 $(x+5)(x+2)=54$，即 $x^2+7x-44=0$；

（2）设三个连续整数依次为 x，$x+1$，$x+2$，根据题意，得 $x(x+1)+x(x+2)+(x+1)(x+2)=242$，即 $x^2+2x-80=0$.

允许学生选择不同量作为未知数，但要求列出一元二次方程.

2. 答案不唯一，下表给出一种答案.

方程	一般形式	二次项系数	一次项系数	常数项
$3x^2=5x-1$	$3x^2-5x+1=0$	3	-5	1
$(x+2)(x-1)=6$	$x^2+x-8=0$	1	1	-8
$4-7x^2=0$	$7x^2-4=0$	7	0	-4

山东教育出版社

2. 把下列方程化成一元二次方程的一般形式，并写出它的二次项系数、一次项系数和常数项：

方程	一般形式	二次项系数	一次项系数	常数项
$3x^2=5x-1$				
$(x+2)(x-1)=6$				
$4-7x^2=0$				

问题解决

3. 从前有一天，某人拿一竹竿对着大门比画：竹竿横着比门框宽 4 尺❶，竖着比门框高 2 尺，斜着与门框的对角线长度相等. 你知道竹竿有多长吗？请根据这一问题列出方程.



[1] 在前一课第一个问题中，四周未铺地毯部分的宽度 x（m）满足方程

$$(8-2x)(5-2x)=18,$$

也就是

$$2x^2-13x+11=0.$$

你能求出 x 吗？

（1）根据题目的已知条件，你能确定 x 的大致范围吗？

（2）x 可能小于 0 吗？可能大于 4 吗？可能大于 2.5 吗？说说你的理由.

（3）填写下表：

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5
$2x^2-13x+11$						

❶ “尺”是我国一种传统的长度单位，3 尺 = 1 米.

3. 设竹竿长为 x 尺，则门框宽为（$x-4$）尺，门框高为（$x-2$）尺，根据题意，得 $x^2=(x-4)^2+(x-2)^2$，即 $x^2-12x+20=0$.

第 2 课时延续上一课时的具体问题，引导学生估计一元二次方程的解，促进学生对方程解的理解，培养学生的估算意识和能力，发展学生的数感.

教科书首先解决上一课时提出的第 1 个问题“地面四周未铺地毯部分有多宽”，其解“恰”为整数；然后解决上一课时提出的第 3 个问题“梯子底端滑动多少米”，其解是一个无理数，学生自然无法求出其精确解，但用估计的方法可以求出其近似解，同时为下一节埋下伏笔；最后在随堂练习中完成上一课时提出的第 2 个问题，使得两课时浑然一体.

估计一元二次方程的解，应先确定方程解的大致范围，然后在这一范围内有规律地取一些未知数的值，如果把一个值代入方程使得左边的计算结果小于右边的计算结果，把另一个值代入方程使得左边的计算结果大于右边的计算结果，那么方程的解就在这两个值之间. 在教学中应让学生体会这种思想.

[1] 列出方程后，学生自然会产生求解的欲望，这里提出这样的问题，符合学生的学习心理.

估计一元二次方程的解时，既可以把方程化为一般形式，也可以不化为一般形式.

（1）通过几个提示性问题，引导学生估计 x 的大致范围. 因为 x 表示宽度，所以 x 不可能小于 0；根据题意，$8-2x$ 和 $5-2x$ 分别表示地毯的长和宽，所以 $8-2x>0$，$5-2x>0$，因此 x 不可能大于 4，也不可能大于 2.5. 鼓励学生依据自己的理解，用自己的语言表达思考过程，如学生可能这样回答：如果 x 大于 4，那么地毯的长度 $8-2x$ 就小于 0 了.

山东教育出版社

（2）通过上面的分析，可以得到 $0<x<2.5$.

（3）从 x 的取值范围内取值，并进行相应计算. 表格中第二行从左到右依次填写 11，5，0，-4，-7，-9.

（4）通过分析表格中的数值，估计方程的解. 对表格中所填数值的分析应至少包括以下两个方面：① 表格中，当 x 的值从小到大变化时，$2x^2-13x+11$ 的值逐渐减小，经历了从大于 0 到等于 0 再到小于 0 的过程. ② 由表格可知，当 $x=1$ 时，$2x^2-13x+11=0$，由方程的解的意义，可以得出“$x=1$ 是方程 $2x^2-13x+11=0$ 的解”的结论，从而所求宽度为 1 m.

当然，就这个方程而言，学生也可能从数的运算的角度思考 $(8-2x)(5-2x)=18$，将 18 分解因数为 6×3，然后凑出方程 $(8-2x)(5-2x)=18$ 的解 $x=1$. 对于这种方法，教师不应否定，但应使学生明白这种方法的局限性.

做一做（下页）

让学生再次经历估计方程解的过程.

在这里，教科书把方程化为一般形式进行估计. 教学时，既可以用方程 $(x+6)^2+7^2=10^2$ 进行估计，也可以用一般形式 $x^2+12x-15=0$ 进行估计.

（1）不正确，因为 $x=1$ 不满足方程.

（2）不可能是 2 m，也不可能是 3 m，因为 $x=2$ 和 $x=3$ 同样都不满足方程.

（3）在问题（1）（2）的判断过程中，学生可以得到下面的表格：

x	1	2	3
$x^2+12x-15$	-2	13	30

或

x	1	2	3
$(x+6)^2+7^2$	98	113	130

可以看出，$x=1$ 时 $x^2+12x-15<0$，$x=2$ 时 $x^2+12x-15>0$（或者 $x=1$ 时 $(x+6)^2+7^2<100$，$x=2$ 时 $(x+6)^2+7^2>100$），据此猜测 x 在 1 和 2 之间. 学生还可能会用其他方法猜测 x 的大致范围，如学生可能由 $(x+6)^2+7^2=10^2$，得 $(x+6)^2=51$，从而判断 $x+6$ 在 7 和 8 之间，即 x 在 1 和 2 之间. 对此，教师应予以鼓励.

（4）x 的整数部分是 1，十分位是 1. 学生可能会用多种方法进行估计. 比如，由 $x=1$ 时 $x^2+12x-15=-2$，$x=2$ 时 $x^2+12x-15=13$，学生容易猜测 x 的值在 1 和 2 之间，且更接近于 1，于是计算 $x=1.1$ 时 $x^2+12x-15=-0.59$，$x=1.2$ 时 $x^2+12x-15=0.84$，所以 $1.1<x<1.2$，即 x 的整数部分是 1，十分位是 1. 当然，如果需要求精确到 0.1 时的近似解，那么还需计算 $x=1.15$ 时 $x^2+12x-15=0.1225$，得到 $1.1<x<1.15$，从而确定 $x\approx1.1$.

需要说明的是，本课时的教学重点是让学生经历估计方程解的过程，体会其中的基本思想，因此对估算的精度不应提出过高要求. 此外，在计算过程中应提倡学生使用计算器.

山东教育出版社

（4）你知道所求宽度 x（m）是多少吗？还有其他求解方法吗？与同伴进行交流.

做一做

在前一课的问题中，梯子底端向外滑动的距离 x（m）满足方程

$$(x+6)^2+7^2=10^2,$$

也就是

$$x^2+12x-15=0.$$

（1）小明认为梯子底端也向外滑动了 1 m，他的说法正确吗？为什么？

（2）梯子底端向外滑动的距离可能是 2 m 吗？可能是 3 m 吗？为什么？

（3）你能猜出滑动距离 x（m）的大致范围吗？

（4）x 的整数部分是几？十分位是几？

[1]小亮把他的求解过程整理如下：

x	0	0.5	1	1.5	2
$x^2+12x-15$	−15	−8.75	−2	5.25	13

所以 $1<x<1.5$.

进一步计算：

x	1.1	1.2	1.3	1.4
$x^2+12x-15$	−0.59	0.84	2.29	3.76

所以 $1.1<x<1.2$.

因此 x 的整数部分是 1，十分位是 1.

你的结果怎样呢？

随堂练习

1. 五个连续整数，前三个数的平方和等于后两个数的平方和. 你能估算出这五个整数分别是多少吗？

2. 试估算方程 $x^2-3x-5=0$ 的根.

[1]在学生动手做的基础上，教科书呈现了小亮的求解过程，意在展示解题思路. 教学时，可以在“做一做”中引导学生整理解题思路，并与小亮的求解过程进行对比.

随堂练习

1. 本题是对上一课时情境中的问题的进一步解决. 将这五个连续整数中的第一个数设为 x，那么其余四个数依次为 $x+1$，$x+2$，$x+3$，$x+4$，根据题意，得 $x^2+(x+1)^2+(x+2)^2=(x+3)^2+(x+4)^2$，也就是 $x^2-8x-20=0$. 可列表如下：

x	−3	−2	−1	…	9	10	11
$x^2-8x-20$	13	0	−11	…	−11	0	13

所以 $x=-2$ 或 $x=10$. 因此这五个连续整数依次为 −2，−1，0，1，2；或 10，11，12，13，14. 这是一个数字问题，没有实际背景，因此学生在确定 x 的大致取值范围时会有一定困难. 教学时教师可根据学生的思考情况进行适当的引导. 例如，原方程可变形为 $x(x-8)=20$，据此可知 x 是 20 的两个整数因数中较大的因数，且两个因数相差 8，所以 x 可以在 10 或 −2 附近取值. 又如，可以先估算一下 x 取怎样的值时，$x^2-8x-20$ 接近于 0，从而确定 x 的大致取值范围.

当然，也可能有学生这样思考：把原方程变形为 $x(x-8)=20$，据此若能将 20 表示为两个整数的积，且两个因数相差 8，则 x 便是其中较大的那个因数；易知满足条件的两个整数因数是 2 和 10，或 −2 和 −10，所以 x 是 10 或 −2. 对此，教师也应给予鼓励.

山东教育出版社

2. 根据方程 $x^2-3x-5=0$ 可列表如下：

x	-3	-2	-1	…	4	5	6
x^2-3x-5	13	5	-1	…	-1	5	13

所以 $-2<x<-1$ 或 $4<x<5$.

进一步计算：

x	-1.2	-1.1	…	4.1	4.2
x^2-3x-5	0.04	-0.49	…	-0.49	0.04

因此方程 $x^2-3x-5=0$ 的根 x 满足 $-1.2<x<-1.1$ 或 $4.1<x<4.2$.

山东教育出版社
山东教育出版社

读一读

用二分法确定一元二次方程的近似解

本节课中，我们通过不断缩小范围得到了几个一元二次方程的近似解. 数学学习和生产生活中，有很多这样通过缩小范围确定结果的例子，例如，估计无理数 $\sqrt{2}$ 的近似值，在某段线路上找出发生故障的那个点，在一定的范围内找出某种钢材的最佳淬火温度……

缩小范围的常用方法是二分法，具体做法是：找出初始范围的中间点，判断解在中间点的哪一侧，得到一个新的范围，然后对这个新的范围进行类似操作，如此往复，直到最终的结果符合实际问题的精确度要求.

我们通过一个例子感受一下.

比如，一个具体问题中，x 满足方程 $(x-10)(x-20)=140$，其中 $x>20$.

第一步：估计 x 的大致范围. 根据题意，可知 $x>20$，且 x 越大，左边的值就越大. 不妨假设 $x=30$，可以算出此时左边的值是 200. $200>140$，因此，可以确定 x 的范围是 $20<x<30$.

第二步：缩小 x 的范围. 令 x 取 20 和 30 的中间值 25，此时左边的值是 75. $75<140$，因此，可以缩小范围为 $25<x<30$.

下面不断重复第二步的操作，不难依次得到 x 的范围：$27.5<x<30$，$27.5<x<28.75$，$27.5<x<28.125$……

最后按照实际需要确定近似解. 如果实际问题中要求 x 精确到个位，则可得近似解为 $x=28$. 如果需要精确度更高的结果，那么可以按照上面的方法继续做下去.

可以看出，二分法中缩小范围的时候，操作过程是完全类似的，因此，可以在计算机中借助程序进行“机械”操作.

习题 8.2

知识技能

1. 一个面积为 120 m^2 的矩形苗圃，它的长比宽多 2 m. 苗圃的长和宽各是多少？
2. 有一条长为 16 m 的绳子，你能否用它围出一个面积为 15 m^2 的矩形？若能，则矩形的长、宽各是多少？

读一读

这里介绍了用二分法估计一元二次方程解的方法. 教师可指导学有余力的学生进行阅读，让学生体会这种方法的优势所在.

习题8.2

1. 设苗圃的宽为 x m，则长为 $(x+2)$m，根据题意，得 $x(x+2)=120$，即 $x^2+2x-120=0$.

列表：

x	8	9	10	11	12
$x^2+2x-120$	-40	-21	0	23	48

所以，苗圃的宽为 10 m，长为 12 m.

2. 能. 设矩形的宽为 x m，则长为 $(\frac{16}{2}-x)$m，根据题意，得 $x(\frac{16}{2}-x)=15$，即 $x^2-8x+15=0$.

列表：

x	1	2	3	4
$x^2-8x+15$	8	3	0	-1

所以，矩形的宽为 3 m，长为 5 m.

山东教育出版社

3.（下页）根据题意，得$10+2.5t-5t^2=5$，即$2t^2-t-2=0$.

列表：

t	0	1	2	3
$2t^2-t-2$	-2	-1	4	13

所以，$1<t<2$.

进一步列表计算：

t	1.1	1.2	1.3	1.4
$2t^2-t-2$	-0.68	-0.32	0.08	0.52

所以，$1.2<t<1.3$.

因此他完成动作的时间最多不超过1.3 s.

山东教育出版社
山东教育出版社

数学理解

3. 一名跳水运动员进行 10 m 跳台跳水训练，在正常情况下，运动员必须在距水面 5 m 以前完成规定的翻腾动作，并且调整好入水姿势，否则就容易出现失误. 假设运动员起跳后的运动时间 t（s）和运动员距离水面的高度 h（m）满足关系：$h=10+2.5t-5t^2$，那么他最多有多长时间完成规定动作？

2 用配方法解一元二次方程

怎样解一元二次方程呢？比如，解一元二次方程

$$x^2-9=0.$$

如果将常数项 -9 移到方程的右边，可以得到

$$x^2=9.$$

根据平方根的意义，x 就是 9 的平方根，而 9 的平方根是 $+3$ 和 -3，因此应该有 $x=\pm 3$.

这就是说，$x=3$ 是方程 $x^2-9=0$ 的一个根；同样，$x=-3$ 也是方程 $x^2-9=0$ 的一个根. 这时，我们说方程 $x^2-9=0$ 有两个根 $x_1=3$，$x_2=-3$.

议一议

$x^2=9$ 可以直接开平方，这样的方程有什么特征？你能借助这个经验解下面的两个方程吗？

（1）$4x^2-7=0$；　　（2）$(x-2)^2=9$.

你是怎么做的？与同伴进行交流.

教学目标

1. 会用开平方法解形如 $(x+m)^2=n(n\geqslant 0)$ 的方程；理解配方法，会用配方法解简单的数字系数的一元二次方程.

2. 经历列方程解决实际问题的过程，体会一元二次方程是刻画现实世界中数量关系的一个有效数学模型，增强学生的数学应用意识和能力.

3. 体会转化的数学思想方法.

4. 能根据具体问题的实际意义检验结果的合理性.

本节共分为 3 课时. 第 1 课时根据平方根的意义，通过开平方求简单的一元二次方程的根. 第 2 课时进一步引导学生通过转化得到解一元二次方程的配方法，但为了降低难度，本课时主要研究二次项系数为 1、一次项系数为偶数的一元二次方程. 第 3 课时利用配方法解数字系数的一般一元二次方程. 同时，通过实际问题的解决，培养学生数学应用的意识和能力，进一步训练用配方法解题的技能.

议一议

教学时，要引导学生根据平方根的意义，通过开平方求解一元二次方程. 要让学生充分讨论、交流，为后面进一步学习配方法奠定基础.

（1）$x_1=\frac{\sqrt{7}}{2}$，$x_2=-\frac{\sqrt{7}}{2}$；（2）$x_1=5$，$x_2=-1$.

山东教育出版社

随堂练习

1.(1) $x_1=\frac{5}{7}$，$x_2=-\frac{5}{7}$；

(2) $x_1=5$，$x_2=-5$；

(3) $t_1=3\sqrt{10}$，$t_2=-3\sqrt{10}$；

(4) $x_1=\frac{\sqrt{10}}{2}$，$x_2=-\frac{\sqrt{10}}{2}$.

2.(1) $x_1=3$，$x_2=-5$；

(2) $x_1=2+\sqrt{5}$，$x_2=2-\sqrt{5}$；

(3) $x_1=3$，$x_2=-1$；

(4) $x_1=-4+\sqrt{3}$，

$x_2=-4-\sqrt{3}$.

习题8.3

1.(1) $y_1=\frac{\sqrt{10}}{2}$，$y_2=-\frac{\sqrt{10}}{2}$；

(2) $x_1=\sqrt{2}$，$x_2=-\sqrt{2}$；

(3) $a_1=\frac{4}{3}$，$a_2=-\frac{4}{3}$；

(4) $x_1=\frac{5\sqrt{2}}{2}$，$x_2=-\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

2.(1) $x_1=10+\sqrt{3}$，

$x_2=10-\sqrt{3}$；

(2) $x_1=-5+2\sqrt{2}$，

$x_2=-5-2\sqrt{2}$；

(3) $x_1=6$，$x_2=-4$；

(4) $x_1=-\frac{3}{2}$，$x_2=-\frac{9}{2}$.

如果一元二次方程的一边是一个含有未知数的一次式的完全平方式，而另一边是一个非负数，那么就可以根据平方根的意义，通过开平方求出这个方程的根.

例 1 解方程：$x^2+6x+9=25$.

解：原方程就是 $(x+3)^2=25$.

开平方，得

$$x+3=\pm 5,$$

所以 $x_1=2$，$x_2=-8$.

随堂练习

1. 解下列方程：

(1) $49x^2=25$；　(2) $0.01x^2-0.25=0$；

(3) $\frac{4}{9}t^2=45$；　(4) $1.5-\frac{3}{5}x^2=0$.

2. 解下列方程：

(1) $(x+1)^2=16$；　(2) $(x-2)^2=5$；

(3) $x^2-2x+1=4$；　(4) $x^2+8x+16=3$.

习题 8.3

知识技能

1. 解下列方程：

(1) $2y^2=5$；　(2) $3x^2-6=0$；

(3) $9a^2=16$；　(4) $2x^2-25=0$.

2. 解下列方程：

(1) $(x-10)^2=3$；　(2) $(x+5)^2=8$；

(3) $(x-1)^2=25$；　(4) $4(x+3)^2=9$.

山东教育出版社

[1]在上节中，我们已经求出了方程 $x^2+12x-15=0$ 的一个根的近似值，你能设法求出它的精确值吗？

议一议

解方程 $x^2+12x-15=0$ 的困难在哪里？你能将方程 $x^2+12x-15=0$ 转化成你会解的方程的形式吗？

[2]解这个一元二次方程，关键是要设法将其转化为左边是含有未知数的一次式的完全平方式，而右边是一个常数的形式. 为此，将方程两边同时加上 51，得

$$x^2+12x+36=51,$$

即

$$(x+6)^2=51.$$

两边开平方，得

$$x+6=\pm\sqrt{51}.$$

因此，方程 $x^2+12x-15=0$ 有两个根 $x_1=\sqrt{51}-6$，$x_2=-\sqrt{51}-6$.



[3]这里，解一元二次方程的基本思路是将方程转化成 $(x+m)^2=n$ 的形式，当 $n\geqslant 0$ 时，两边开平方便可求出它的根.

做一做

填上适当的数，使下列等式成立：

x^2+12x+_____$=(x+6)^2$；

x^2-4x+_____$=(x-$_____$)^2$；

x^2+8x+_____$=(x+$_____$)^2$.

在上面等式的左边，常数项和一次项系数有什么关系？

[1]承上节问题，引入本节内容.

[2]这一段通过明晰解方程 $x^2+12x-15=0$ 的过程，引导学生思考配方法的基本思路.

此外要提醒学生注意，虽然 x_1 和 x_2 都是原方程的根，但 x_2 并不是原问题的解，因为 $x_2<0$. 教学时应强调验证解的合理性.

[3]因为在实数范围内任何非负数都有平方根，所以当 $n\geqslant 0$ 时，方程有解. 当 $n<0$ 时，左边是一个完全平方式，右边是一个负数，因此方程在实数范围内无解.

做一做

配方法的关键是正确配方，而要正确配方就必须熟悉完全平方式的特征. 为此，教科书设计了该“做一做”. 通过填空，应要求学生能够用语言叙述并理解左边填写的是“一次项系数一半的平方”，右边填写的是“一次项系数的一半”，进一步复习巩固完全平方式中常数项和一次项系数之间的关系.

三个式子依次填：

36；

4，2；

16，4.

山东教育出版社 山东教育出版社

例 2

用配方法解一元二次方程的关键是将方程转化为 $(x+m)^2=n$ 的形式，转化过程本没有一定的程序，或者说不同的学生可能有不同的程序，但为了给学生一个规范，避免一些不必要的错误，教科书先把常数项移到方程的右边，然后两边都加上一次项系数一半的平方．在学生熟练掌握了配方法之后，不必要求学生一定按照某种程式解题．

随堂练习

1.（1）4，2；　（2）25，5；

（3）$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{2}$；　（4）$\frac{9}{4}$，$\frac{3}{2}$．

2.（1）$x_1=5+\sqrt{7}$，
$x_2=5-\sqrt{7}$；

（2）$x_1=-3+\sqrt{10}$，
$x_2=-3-\sqrt{10}$；

（3）$x_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$，
$x_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$；

（4）$x_1=\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$，
$x_2=\frac{-1-\sqrt{17}}{4}$．

习题8.4

1.（1）$x_1=-6+\sqrt{11}$，　（2）$x_1=-2+\sqrt{14}$，
$x_2=-6-\sqrt{11}$；　$x_2=-2-\sqrt{14}$；

（3）$x_1=3+2\sqrt{5}$，　（4）$x_1=1+\sqrt{5}$，
$x_2=3-2\sqrt{5}$；　$x_2=1-\sqrt{5}$．

例 2　解方程：$x^2+8x-9=0$.

解：可以把常数项移到方程的右边，得

$$x^2+8x=9.$$

两边都加上 4^2（一次项系数 8 的一半的平方），得

$$x^2+8x+4^2=9+4^2,$$

即
$$(x+4)^2=25.$$

开平方，得
$$x+4=\pm 5,$$

即
$$x+4=5，或 x+4=-5.$$

所以　$x_1=1$，$x_2=-9$.

在例 2 中，我们通过配成完全平方式的方法得到了一元二次方程的根，这种解一元二次方程的方法称为**配方法**（solving by completing the square）.

随堂练习

1. 填上适当的数，使下列等式成立：

（1）$x^2+4x+____=(x+____)^2$；

（2）$x^2-10x+____=(x-____)^2$；

（3）$x^2+x+____=(x+____)^2$；

（4）$x^2-3x+____=(x-____)^2$.

2. 解下列方程：

（1）$x^2-10x+25=7$；　（2）$x^2+6x=1$；

（3）$x^2-3x=-1$；　（4）$x^2+\frac{1}{2}x=1$.

习题 8.4

知识技能

1. 解下列方程：

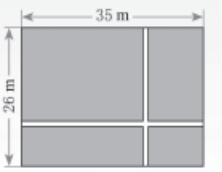
（1）$x^2+12x+25=0$；　（2）$x^2+4x=10$；

（3）$x^2-6x=11$；　（4）$x^2-2x-4=0$.

山东教育出版社

问题解决

2. 如图，在一块长 35 m、宽 26 m 的矩形地面上，修建同样宽的两条互相垂直的道路，剩余部分栽种花草，要使剩余部分的面积为 850 m^2，道路的宽应为多少？



（第 2 题）

例 3 解方程：$3x^2+8x-3=0$.

解：两边都除以 3，得

$$x^2+\frac{8}{3}x-1=0.$$



移项，得

$$x^2+\frac{8}{3}x=1.$$

配方，得

$$x^2+\frac{8}{3}x+(\frac{4}{3})^2=1+(\frac{4}{3})^2,$$

$$(x+\frac{4}{3})^2=(\frac{5}{3})^2,$$

即

$$x+\frac{4}{3}=\frac{5}{3}，或 x+\frac{4}{3}=-\frac{5}{3}.$$

所以

$$x_1=\frac{1}{3}，x_2=-3.$$

做一做

一个小球以 15 m/s 的初速度竖直向上弹出，它在空中的高度 h（m）与时间 t（s）满足关系式：

$$h=15t-5t^2,$$

小球的高度何时能达到 10 m？

2. 道路的宽应为 1 m.

提示：设道路的宽为 x m，根据题意，得 $(35-x)(26-x)=850$ 或 $850=35\times26-35x-26x+x^2$.

第 3 课时的主要内容是利用配方法解二次项系数不为 1 或者一次项系数不为偶数等较复杂的一元二次方程.

例 3

可以引导学生将这个方程与上一课时的方程进行对比，并思考如何实现两者之间的转化，自主获得解决问题的办法，然后再和教科书中的解法进行对比，掌握解题的一般步骤.

做一做

根据题意，可得 $15t-5t^2=10$. 解得 $t_1=2$，$t_2=1$.

所以在 1 s 时，小球的高度达到 10 m；至最高点后下落，在 2 s 时，其高度又为 10 m.

山东教育出版社

随堂练习

1.（1）$x_1=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$，

$x_2=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$；

（2）$x_1=2$，$x_2=\dfrac{3}{2}$；

（3）$x_1=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{6}\sqrt{57}$，

$x_2=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{6}\sqrt{57}$；

（4）$x_1=\dfrac{1}{2}$，$x_2=-2$.

2. 需要 $\dfrac{20}{3}$ s.

读一读

这里介绍了一元二次方程的两种几何解法，旨在开阔学生的视野. 其中，花拉子米的方法从“形”上反映了配方法的本质，而赵爽的方法和花拉子米的方法本质上是一样的，只是图 8−3 恰好可由 4 个图 8−4 拼成.

在学生阅读并理解其中的方法后，可以提出问题：你能学习一下两位大师的思路，构造适当的图形求出方程 $x^2+4x-5=0$ 的解吗？激发学生的学习兴趣，在构造图形的过程中进一步体会配方法的几何意义. 当然，用构造图形的方法不能求出方程的所有解，因为在图形中，x 表示的是线段长，只能为正数.

随堂练习

1. 解下列方程：

（1）$x^2-3x+1=0$；　　（2）$2x^2+6=7x$；

（3）$3x^2-9x+2=0$；　　（4）$2x^2+3x-2=0$.

2. 某辆汽车在公路上行驶，它行驶的路程 s（m）和时间 t（s）之间的关系为：$s=10t+3t^2$，那么行驶 200 m 需要多长时间？

读一读

一元二次方程的几何解法

你知道吗，对于一元二次方程，我国及其他一些国家的古代数学家还研究过其几何解法呢！

下面以方程 $x^2+2x-35=0$ 即 $x(x+2)=35$ 为例加以说明.

三国时期的数学家赵爽（公元 3～4 世纪）在其所著的《勾股圆方图注》中记载的方法是：构造图 8−3，图中大正方形的面积是 $(x+x+2)^2$，另一方面，它又等于四个矩形的面积加上中间小正方形的面积，即 $4\times35+2^2$. 据此易得 $x=5$.

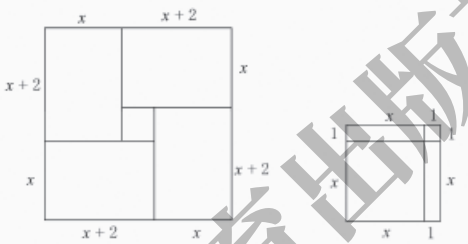


图 8−3

图 8−4

公元 9 世纪，阿拉伯数学家阿尔·花拉子米采用的方法是：构造图 8−4，一方面，正方形的面积为 $(x+1)^2$，另一方面，它又等于 $35+1$. 据此同样可得 $x=5$.

想一想，图 8−3 与图 8−4 有什么差别与联系？图 8−4 的方法与配方法又有什么联系？这样做，只得到了方程的一个根，为什么？

山东教育出版社

习题 8.5

知识技能

1. 解下列方程：

（1）$6x^2-7x+1=0$；　　（2）$5x^2-9x-18=0$；

（3）$4x^2-3x=52$；　　（4）$5x^2=4-2x$.

问题解决

2. 你能解决下面的问题吗？

印度古算书中有这样一首诗："一群猴子分两队，高高兴兴在游戏．八分之一再平方，蹦蹦跳跳树林里；其余十二叽喳喳，伶俐活泼又调皮．告我总数共多少，两队猴子在一起."

大意是说：一群猴子分成两队，一队猴子数是猴子总数的 $\frac{1}{8}$ 的平方，另一队猴子数是 12，那么猴子总数是多少？

3 用公式法解一元二次方程

我们发现，利用配方法解一元二次方程的基本步骤是相同的．因此，如果能用配方法解一般的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$），得到根的一般表达式，那么再解一元二次方程时，就会方便简捷得多．

做一做

你能用配方法解方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）吗？

习题8.5

1.（1）$x_1=\frac{1}{6}$，$x_2=1$；

（2）$x_1=-\frac{6}{5}$，$x_2=3$；

（3）$x_1=-\frac{13}{4}$，$x_2=4$；

（4）$x_1=\frac{-1+\sqrt{21}}{5}$，

$x_2=\frac{-1-\sqrt{21}}{5}$.

2. 共有 16 只或 48 只猴子.

提示：设总共有 x 只猴子，根据题意，得

$x=(\frac{1}{8}x)^2+12$.

教学目标

1. 经历用配方法推导一元二次方程求根公式的过程，理解求根公式和根的判别式.
2. 能用公式法解数字系数的一元二次方程.
3. 不解方程，会用一元二次方程根的判别式判别方程是否有实数根和两个实数根是否相等.
4. 经历列一元二次方程解决简单实际问题的过程，体会模型思想，增强应用意识和能力.
5. 在推导求根公式、判别方程根的情况的过程中，强化推理技能训练，进一步发展演绎推理能力.

本节主要研究一元二次方程的公式解法．一元二次方程的求根公式是用配方法得到的，可以说，公式法是配方法的一般化和程式化，利用求根公式可以更为便捷地解一元二次方程．本节分为 3 课时．第 1 课时承接上节内容，提出用配方法求解方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）的问题，进而推导求

山东教育出版社　山东教育出版社

根公式. 第 2 课时通过例题巩固公式法，并让学生感受解的不同情况. 第 3 课时在推导出求根公式后，通过对 $b^2 - 4ac$ 的讨论，得出根的判别式与方程根的情况之间的关系.

做一做

在复习配方法的基本步骤的基础上，对一元二次方程的一般形式进行配方. 由于学生已经具备用配方法解数字系数的一元二次方程的经验，因此教学中可以引导学生自主探索一元二次方程的求根公式. 当然，学生倘若有困难，教师则应适时地给予指导.

教学时，应首先鼓励学生独立思考，然后再进行交流，并明确相关结论.

山东教育出版社
山东教育出版社

因为二次项系数 $a \neq 0$，所以方程两边同除以 a，得

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

移项，得 $x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$.

配方，得 $x^2+\frac{b}{a}x+(\frac{b}{2a})^2=-\frac{c}{a}+(\frac{b}{2a})^2$,

即 $(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$.

因为 $a \neq 0$，所以 $4a^2>0$. 当 $b^2-4ac \geqslant 0$ 时，$\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ 是一个非负数.

开平方，得 $x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$,

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$[1]

所以 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

一般地，对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a \neq 0$），当 $b^2-4ac \geqslant 0$ 时，它的根是：

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

即 $x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.[2]

上面这个式子称为一元二次方程的求根公式. 用求根公式解一元二次方程的方法称为**公式法**（solving by formular）.

利用这一求根公式解方程，只需把一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a \neq 0$）的系数 a，b，c 的值代入到求根公式中进行计算即可. 这样就把方程的求解问题转化为代数式的值的计算问题，从而可以简化解一元二次方程的过程.

例 1 解方程：

（1）$x^2-7x-18=0$；　　（2）$2x^2+5x+2=0$.

[1] 当 $b^2-4ac \geqslant 0$ 时，$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2|a|}$. 因为有双重符号“±”，无论 $a>0$ 还是 $a<0$，都不影响最终结果 $\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. 对此，教学中可举例说明，不必进行一般性的分类讨论.

[2] 公式法的意义在于，对于任意的一元二次方程，只要将方程化成一般形式，就可以直接代入公式求解. 掌握求根公式的关键是掌握公式的推导过程，而掌握推导过程的关键又是掌握配方法. 教学中应先由学生配方，再开平方形成公式，并弄清推导过程中每一步的依据.

例 1

这里解题步骤写得较为详细. 先把方程化为一般形式，确定 a，b，c 的值，在 $b^2-4ac \geqslant 0$ 的前提下，将 a，b，c 的值代入求根公式求解. 当学生熟练后，可以简化求解步骤.

山东教育出版社

随堂练习

1.（1）$x_1=\dfrac{9+\sqrt{17}}{4}$，

$x_2=\dfrac{9-\sqrt{17}}{4}$；

（2）$x_1=x_2=-\dfrac{1}{3}$；

（3）$x_1=\dfrac{1}{4}$，$x_2=-\dfrac{3}{4}$.

当 $b^2-4ac>0$ 时，一元二次方程有两个不同的根；当 $b^2-4ac=0$ 时，方程有两个相等的根. 对于后一种情况，学生可能不易理解，同一个数为什么算两个根？这里可以作为一种约定告诉学生，不必进一步说明. 进一步学习一元 n 次方程在复数范围内有 n 个根（包括重根）的定理后，才能在理论上加以说明.

2. 三条边长分别为 6，8，10.

提示：设中间的数为 x，则另两个数为 $x-2$，$x+2$，根据题意，得

$(x+2)^2=x^2+(x-2)^2$.

解：（1）这里 $a=1$，$b=-7$，$c=-18$.

$\because b^2-4ac=(-7)^2-4\times1\times(-18)=121>0$，

$\therefore x=\dfrac{7\pm\sqrt{121}}{2\times1}=\dfrac{7\pm11}{2}$，

即 $x_1=9$，$x_2=-2$.

（2）这里 $a=2$，$b=5$，$c=2$.

$\because b^2-4ac=5^2-4\times2\times2=9>0$，

$\therefore x=\dfrac{-5\pm\sqrt{9}}{2\times2}=\dfrac{-5\pm3}{4}$，

即 $x_1=-\dfrac{1}{2}$，$x_2=-2$.

随堂练习

1. 用公式法解下列方程：

（1）$2x^2-9x+8=0$；（2）$9x^2+6x+1=0$；

（3）$16x^2+8x=3$.

2. 一个直角三角形三边的长为三个连续偶数，求这个三角形的三条边长.

习题 8.6

知识技能

1. 用公式法解下列方程：

（1）$2x^2-4x-1=0$；（2）$5x+2=3x^2$；

（3）$(x-2)(3x-5)=1$.

问题解决

2.《九章算术》“勾股”章有一题：“今有户高多于广六尺八寸，两隅相去适一丈. 问户高、广各几何.”

大意是说：已知矩形门的高比宽多 6 尺 8 寸，门的对角线长 1 丈，那么门的高和宽各是多少？（1 丈 = 10 尺，1 尺 = 10 寸）

习题8.6

1.（1）$x_1=1+\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，$x_2=1-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$；（2）$x_1=2$，$x_2=-\dfrac{1}{3}$；（3）$x_1=\dfrac{11+\sqrt{13}}{6}$，$x_2=\dfrac{11-\sqrt{13}}{6}$.

2. 门的高为 9 尺 6 寸，宽为 2 尺 8 寸.

提示：设门高 x 尺，则宽为（$x-6.8$）尺，根据题意，得

$10^2=x^2+(x-6.8)^2$.

山东教育出版社

例 2 解方程：

(1) $(x+1)(3x-1)=1$；　　(2) $x^2+3=2\sqrt{3}x$.

解：(1) 原方程经整理，得

$$3x^2+2x-2=0.$$

这里 $a=3$，$b=2$，$c=-2$.

$\because b^2-4ac=2^2-4\times3\times(-2)=28>0$，

$\therefore x=\dfrac{-2\pm\sqrt{28}}{2\times3}=\dfrac{-1\pm\sqrt{7}}{3}$，

即　$x_1=\dfrac{-1+\sqrt{7}}{3}$，$x_2=\dfrac{-1-\sqrt{7}}{3}$.

(2) 原方程经整理，得

$$x^2-2\sqrt{3}x+3=0.$$

这里 $a=1$，$b=-2\sqrt{3}$，$c=3$.

$\because b^2-4ac=(-2\sqrt{3})^2-4\times1\times3=0$，

$\therefore x=\dfrac{2\sqrt{3}\pm0}{2}$，

即　$x_1=x_2=\sqrt{3}$.

想一想

例 2 中，两个方程的解有什么不同？

随堂练习

1. 把下列方程化成 $ax^2+bx+c=0$ 的形式，写出其中 a，b，c 的值，并计算 b^2-4ac 的值：

(1) $x^2-3x=4$；　　(2) $4x^2+1=4x$；

(3) $(2x+1)(x+2)=3$.

想一想

第 (1) 个方程有两个不同的实数解.

第 (2) 个方程有两个相同的实数解.

随堂练习

1. (1) $x^2-3x-4=0$，

$a=1$，$b=-3$，$c=-4$，

$b^2-4ac=25$；

(2) $4x^2-4x+1=0$，

$a=4$，$b=-4$，$c=1$，

$b^2-4ac=0$；

(3) $2x^2+5x-1=0$，

$a=2$，$b=5$，$c=-1$，

$b^2-4ac=33$.

山东教育出版社

山东教育出版社

2.(1) $x_1=\dfrac{5+\sqrt{33}}{4}$,
$x_2=\dfrac{5-\sqrt{33}}{4}$;
(2) $y_1=8$, $y_2=2$;
(3) $t_1=t_2=-\sqrt{2}$;
(4) $x_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$,
$x_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

3. 这两个数是17和19，或−19，−17.

习题8.7

1.(1) $x_1=3\sqrt{2}$, $x_2=-3\sqrt{2}$;
(2) $x_1=2+2\sqrt{3}$,
$x_2=2-2\sqrt{3}$;
(3) $x_1=\dfrac{3+\sqrt{105}}{12}$,
$x_2=\dfrac{3-\sqrt{105}}{12}$;
(4) $x_1=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$,
$x_2=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.

2. 大正方形边长为16 cm，小正方形边长为12 cm.

提示：设大正方形边长为 x cm，则小正方形边长为 $(\dfrac{x}{2}+4)$ cm. 根据题意，可得 $2(\dfrac{x}{2}+4)^2-x^2=32$.

2. 用公式法解下列方程：

(1) $2x^2-5x-1=0$; (2) $y^2+16=10y$;
(3) $t(t+2\sqrt{2})=-2$; (4) $x^2-x-1=0$.

3. 若两个连续奇数的积是323，求这两个数.

习题 8.7

知识技能

1. 用适当的方法解下列方程：

(1) $3x^2=54$; (2) $x^2-4x=8$;
(3) $6x^2-4=3x$; (4) $x^2-\sqrt{6}x+1=0$.

问题解决

2. 两个正方形，小正方形的边长比大正方形边长的一半多4 cm，大正方形的面积比小正方形面积的2倍少32 cm^2，求这两个正方形的边长.

小明在解方程 $x^2-2x+3=0$ 时是这样做的：

> 将方程整理，得
> $x^2-2x=-3$.
> 两边同时加1，得
> $x^2-2x+1=-3+1$.
> 即 $(x-1)^2=-2$.



这个方程有实数根吗？为什么？[1]

[1]因为任何实数的平方都不能是负数，所以这个方程没有实数根.

这里从实例引入，学生较易理解，从而为下面字母系数配方后的分类讨论做好铺垫.

一元二次方程的根的判别式在解方程及其应用中有一定的实际意义，它可与配方法、求根公式法有机结合. 但教师应明确，对于这一内容不要由此再进行拓展，尤其不要把一些传统内容搬来让学生重复练习.

山东教育出版社 山东教育出版社

议一议

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）在什么情况下有实数根？在什么情况下没有实数根？与同伴进行交流.

我们知道，方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）经过配方可以变形为

$$(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

因为 $a\neq 0$，所以 $4a^2>0$，这样由 b^2-4ac 就可以确定 $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ 是正数、零还是负数.

（1）如果 $b^2-4ac>0$，这时方程有两个不相等的实数根：

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\ x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

（2）如果 $b^2-4ac=0$，则 $(x+\frac{b}{2a})^2=0$，这时方程有两个相等的实数根：

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}.$$

（3）如果 $b^2-4ac<0$，而 $(x+\frac{b}{2a})^2$ 不可能是负数，这时方程没有实数根.

以上三个结论反过来也是正确的.

我们把 b^2-4ac 叫做一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）的根的**判别式**（discriminant），通常用希腊字母“Δ”（读作 delta）表示.

例 3 利用一元二次方程的根的判别式，判断下列方程的根的情况：

（1）$2x^2+x-4=0$；　　（2）$4y^2+9=12y$；

（3）$5(t^2+1)-6t=0$.

解：（1）这里，$a=2$，$b=1$，$c=-4$.

$\because \Delta=b^2-4ac=1^2-4\times 2\times(-4)=33>0$，

$\therefore$ 方程有两个不相等的实数根.

（2）原方程化为一般形式，得

$$4y^2-12y+9=0.$$

山东教育出版社

随堂练习

1.(1) ∵ $b^2-4ac=49>0$,
∴方程有两个不相等的实数根.
(2) ∵ $b^2-4ac=-4<0$,
∴ 方程没有实数根.
(3) ∵ $b^2-4ac=0$,
∴ 方程有两个相等的实数根.

2. $a=-2$，或 $a=6$.

习题8.8

1.(1) ∵ $b^2-4ac=81>0$,
∴方程有两个不相等的实数根.
(2) ∵ $b^2-4ac=-7<0$,
∴方程没有实数根.
(3) ∵ $b^2-4ac=0$,
∴ 方程有两个相等的实数根.

2.(1) $m=1$，或 $m=5$；
(2) 当 $m=1$ 时，
$x_1=x_2=-1$；
当 $m=5$ 时，
$x_1=x_2=-3$.

这里，$a=4$，$b=-12$，$c=9$.
∵ $\Delta=b^2-4ac=(-12)^2-4\times4\times9=0$,
∴ 原方程有两个相等的实数根.
(3) 原方程化为一般形式，得

$$5t^2-6t+5=0.$$

这里，$a=5$，$b=-6$，$c=5$.
∵ $\Delta=b^2-4ac=(-6)^2-4\times5\times5=-64<0$,
∴ 原方程没有实数根.

随堂练习

1. 利用一元二次方程的根的判别式，判断下列方程的根的情况：
(1) $3x^2-5x-2=0$；　　(2) $t^2+3=2\sqrt{2}t$；
(3) $x^2=3(2x-3)$.

2. 已知关于 x 的方程 $x^2-ax+a+3=0$ 有两个相等的实数根，求 a 的值.

习题 8.8

知识技能

1. 利用一元二次方程的根的判别式，判断下列方程的根的情况：
(1) $2x^2+11x+5=0$；　　(2) $x(2x-5)=-4$；
(3) $y^2-4\sqrt{3}y=-12$.

数学理解

2. 已知关于 x 的方程 $x^2+(m+1)x+(m-2)^2=0$ 有两个相等的实数根.
(1) 求 m 的值；
(2) 求出这时方程的根.

山东教育出版社

4 用因式分解法解一元二次方程

一个数的平方与这个数的 3 倍有可能相等吗？如果相等，这个数是几？你是怎样求出来的？[1]

小颖、小明、小亮都设这个数为 x，根据题意，可得方程 $x^2=3x$. 但他们的解法各不相同.



由方程 $x^2=3x$，得

$x^2-3x=0$.

因此 $x=\frac{3\pm\sqrt{9}}{2}$，

$x_1=0$，$x_2=3$.

所以这个数是 0 或 3.



方程 $x^2=3x$ 两边同时约去 x，得

$x=3$.

所以这个数是 3.[2]



由方程 $x^2=3x$，得

$x^2-3x=0$，

即 $x(x-3)=0$.

于是 $x=0$，或 $x-3=0$.

因此 $x_1=0$，$x_2=3$.

所以这个数是 0 或 3.

[3] 如果 $a\cdot b=0$，那么 $a=0$ 或 $b=0$.



议一议

他们做得对吗？为什么？你是怎么做的？

教学目标

1. 能根据具体的一元二次方程的特征，灵活选择方程的解法，体会解决问题方法的多样性.

2. 会用因式分解法（提公因式法、公式法）解某些简单的数字系数的一元二次方程.

由于《标准》中降低了因式分解的要求，根据学生已有的因式分解知识，学生仅能解决形如“$x(x-a)=0$”和“$x^2-a^2=0$”的特殊一元二次方程，因此教科书将因式分解法作为解决特殊问题的特殊方法最后给出.

[1] 这个问题比较简单，学生未必选用配方法或公式法求解，部分学生可能会选用下面小明和小亮的方法. 该问意在引导学生思考其他求解方法，学生的解法可能是多种多样的.

教学时可以让学生先各自求解，然后进行交流，并对学生的方法进行比较与评析，发现因式分解是解某些一元二次方程较为简便的方法，从而引出因式分解法. 如果学生未使用小明和小亮的解法，教师也可以自行抛出这些解法，再要求学生进行方法的比较与评析. 通过方法的比较，力求使学生根据方程的具体特征，灵活选取适当的解法.

[2] 学生解题时很容易出现这种错误. 这种方法之所以错误，是因为进行了非同解变形，结果丢掉一根. 对此，教学时只能结合具体方程予以说明. 比如，方程 $x^2=3x$ 两边同时约去 x 时，必须确保 $x\neq 0$, 但这里 x 恰恰等于 0，所以这种变形是错误的.

山东教育出版社

[3](上页)这是因式分解法的根据，也是其基本思想. 对于这一点，现阶段不宜要求过高，讲解时可结合具体数字予以说明，只要学生承认这一事实即可.

另外，对于为什么用“或”而不用“且”，可以做些说明. “或”是“二者中至少有一个成立”的意思，包括两种情况：二者同时成立；二者不能同时成立. 如 $ab=0$ 时，$a=0$ 和 $b=0$ 可同时成立，但 $x(x-3)=0$ 时，$x=0$ 和 $x-3=0$ 就不能同时成立. “且”是“二者同时成立”的意思.

[1]因式分解法把一个一元二次方程化为两个一元一次方程来解，体现了一种“降次”的思想. 这种思想在以后处理高次方程时非常重要. 对于这一点，可以在教学中进行适当的渗透，但不可要求过高.

当一元二次方程的一边为0，而另一边易于分解成两个一次因式的乘积时，我们就可以用小亮的方法求解. 这种解一元二次方程的方法称为**因式分解法**.[1]

例 解下列方程：

(1) $5x^2=4x$；　　(2) $x-2=x(x-2)$.

解：(1) 原方程可变形为

$$5x^2-4x=0,$$
$$x(5x-4)=0.$$
$$x=0, \text{ 或 } 5x-4=0.$$

原来的一元二次方程转化成了两个一元一次方程.

$$\therefore \quad x_1=0,\ x_2=\frac{4}{5}.$$

(2) 原方程可变形为

$$x-2-x(x-2)=0,$$
$$(x-2)(1-x)=0.$$
$$x-2=0, \text{ 或 } 1-x=0.$$
$$\therefore \quad x_1=2,\ x_2=1.$$

想一想

你能用因式分解法解方程 $x^2-4=0$，$(x+1)^2-25=0$ 吗？

随堂练习

1. 用因式分解法解下列方程：
(1) $(x+2)(x-4)=0$；
(2) $4x(2x+1)=3(2x+1)$.

2. 一个数平方的2倍等于这个数的7倍，求这个数.

山东教育出版社

例

第(2)题移项后，将 $x-2$ 看做一个整体，直接提出 $x-2$，这样因式分解很简便，不必将原方程展开，再因式分解.

想一想

这种形式的方程在前面已经接触过，用开平方法即可. 这里是想让学生再用因式分解法去求解，提高学生灵活应用各种方法的能力.

(1) $x^2-4=0$，$(x+2)\cdot(x-2)=0$，所以 $x_1=2$，$x_2=-2$.

(2) $(x+1)^2-25=0$，$(x+6)(x-4)=0$，所以 $x_1=-6$，$x_2=4$.

随堂练习

1.（1）$x_1=-2$，$x_2=4$；（2）$x_1=-\frac{1}{2}$，$x_2=\frac{3}{4}$.

2. 这个数是 0 或 $\frac{7}{2}$.

提示：设该数为 x，根据题意，得 $2x^2=7x$.

山东教育出版社
山东教育出版社

习题8.9

1.（1）$x_1=-\frac{7}{5}$，$x_2=\frac{1}{4}$；

（2）$x_1=-\frac{2}{3}$，$x_2=1$；

（3）$x_1=-\frac{3}{2}$，$x_2=\frac{1}{2}$；

（4）$x_1=3$，$x_2=9$.

2.（1）$x_1=0$，$x_2=4$；

（2）$x_1=-5$，$x_2=-\frac{1}{3}$；

（3）$x_1=-1$，$x_2=6$；

（4）$x_1=-1$，$x_2=-3$；

（5）$y_1=-2$，$y_2=\frac{1}{2}$.

教学目标

1．了解一元二次方程的根与系数的关系.

2．利用一元二次方程的根与系数的关系解决简单问题.

根据《标准》的要求，一元二次方程的根与系数的关系为选学内容，不作考试要求.

教科书首先引导学生通过解几个具体的一元二次方程，思考方程的根与系数的关系问题；在此基础上，把问题一般化，得到一元二次方程的根与系数的关系；最后利用这一关系解决一些简单的问题.

做一做

让学生经历观察、猜想、验证的过程，从特殊到一般，得出两根之和与系数之间的关系、两根之积与系数之间的关系．同时，在这一过程中还可以复习巩固解一元二次方程的方法，并感受可以根据方程的特点选择适当的方法.

求出方程的解之后，先让学生观察这几个方程，并进行有关猜想；然后再引导学生考虑举出更多的例子检验自己的猜想；最后鼓励学生利用求根公式进行推导.

习题 8.9

知识技能

1. 用因式分解法解下列方程：

（1）$(4x-1)(5x+7)=0$；　（2）$3x(x-1)=2-2x$；

（3）$(2x+3)^2=4(2x+3)$；　（4）$2(x-3)^2=x^2-9$.

2. 解下列方程：

（1）$5(x^2-x)=3(x^2+x)$；　（2）$(x-2)^2=(2x+3)^2$；

（3）$(x-2)(x-3)=12$；　（4）$2x+6=(x+3)^2$；

（5）$2y^2+4y=y+2$.

*5 一元二次方程的根与系数的关系

做一做

填写下面的表：

一元二次方程	方程的两个根	x_1+x_2	$x_1\cdot x_2$
$x^2+5x+6=0$	$x_1=$　$x_2=$		
$x^2-4x+3=0$	$x_1=$　$x_2=$		
$2x^2-x-1=0$	$x_1=$　$x_2=$		

议一议

上表中，一元二次方程两个根的和、两个根的积分别与它的系数有什么关

山东教育出版社

系？与同伴交流.

我们知道，对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$，

当 $b^2-4ac\geqslant 0$时，它的两个根是

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\ x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

因此，两个根的和为

$$\begin{aligned}x_1+x_2&=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\&=\frac{-2b}{2a}\\&=-\frac{b}{a};\end{aligned}$$

两个根的积为

$$\begin{aligned}x_1\cdot x_2&=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\&=\frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2}\\&=\frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}\\&=\frac{c}{a}.\end{aligned}$$

于是得到

[1] 如果方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ 有两个实数根 x_1，x_2，那么

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\ x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

例 利用根与系数的关系，求下列方程的两根之和、两根之积：

（1）$x^2+7x+6=0$；　　（2）$2x^2-3x-2=0$.

解：（1）这里 $a=1$，$b=7$，$c=6$.

$\Delta=b^2-4ac=7^2-4\times 1\times 6=49-24=25>0$，

∴ 方程有两个实数根.

议一议（上页）

一元二次方程的求根公式和根的判别式已经揭示了一元二次方程的根与系数的关系. 本节所说的根与系数的关系实际指的是：一元二次方程的两根之和与系数的关系、两根之积与系数的关系. 教科书在这里提出该问题，意在引入本节内容.

[1] 教科书呈现了推导过程. 教学时要鼓励学生先独立思考并尝试完成这一推导过程，然后再与教科书的推导过程进行对比. 此外，从因式分解法的角度思考，若把方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ 的两个根分别记为 x_1，x_2，则有恒等式 $ax^2+bx+c=a(x-x_1)\cdot(x-x_2)$，即 $ax^2+bx+c=ax^2-a(x_1+x_2)x+ax_1x_2$，比较等式两边系数可得 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$.

这一结论习惯上称为“韦达定理”. 韦达（F.Viète,1540—1603）是法国数学家.

例

本例的解答分为两步：先判断方程的根的情况，再根据一元二次方程的根与系数的关系得出两根之和、两根之积.

山东教育出版社

设方程的两个实数根是 x_1，x_2，那么

$$x_1+x_2=-7,\ x_1x_2=6.$$

（2）这里 $a=2$，$b=-3$，$c=-2$.

$$\Delta=(-3)^2-4\times2\times(-2)=9+16=25>0,$$

∴ 方程有两个实数根.

设方程的两个实数根是 x_1，x_2，那么

$$x_1+x_2=\frac{3}{2},\ x_1x_2=-1.$$

做一做

以上例题中，你还能求出两根差的平方 $(x_1-x_2)^2$ 及两根的平方和 $x_1^2+x_2^2$ 的值吗？它们分别等于多少？

随堂练习

1. 利用根与系数的关系，求下列方程的两根之和、两根之积：

（1）$x^2-3x-1=0$；　　（2）$3x^2+2x-5=0$.

2. 小明、小华、小亮分别求出了方程 $9x^2+6x-1=0$ 的根.

小明：$x_1=x_2=-\frac{1}{3}$；

小华：$x_1=-3+3\sqrt{2}$，$x_2=-3-3\sqrt{2}$；

小亮：$x_1=\frac{-1+\sqrt{2}}{3}$，$x_2=\frac{-1-\sqrt{2}}{3}$.

谁的答案正确？说说你的判断方法.

3. 已知方程 $x^2-\frac{2}{3}x-7=0$ 的一个根是3，求它的另一个根.

习题 8.10

知识技能

1. 利用根与系数的关系，求下列方程的两根之和、两根之积：

（1）$x(3x-1)-1=0$；　　（2）$(2x+5)(x+1)=x+7$.

做一做

通过 $(x_1-x_2)^2$ 及 $x_1^2+x_2^2$ 的求值进一步熟练应用公式求值. $(x_1-x_2)^2$ 的值分别为 25 和 $\frac{25}{4}$，$x_1^2+x_2^2$ 的值分别为 37 和 $\frac{17}{4}$.

随堂练习

1.（1）$x_1+x_2=3$，

$x_1x_2=-1$；

（2）$x_1+x_2=-\frac{2}{3}$，

$x_1x_2=-\frac{5}{3}$.

2. 小明和小华的答案不正确，小亮的答案正确. 因为小明求出的两根之积 $x_1x_2=\frac{1}{9}\neq-\frac{1}{9}$，小华求出的两根之和 $x_1+x_2=-6\neq-\frac{2}{3}$. 需要说明的是，这种判断方法依据的是韦达定理的逆否命题（与韦达定理等价）. 实际上，韦达定理的逆命题也是正确的，也就是说，如果有两个数 x_1,x_2 满足 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$，那么 x_1 和 x_2 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根. 推导过程如下：

把 x_1 代入这一方程，

$$\begin{aligned}
\text{左边}&=ax_1^2+bx_1+c\\
&=ax_1\left(x_1+\frac{b}{a}\right)+c\\
&=ax_1(-x_2)+c\\
&=-ax_1x_2+c\\
&=-a\cdot\frac{c}{a}+c\\
&=0\\
&=\text{右边}.
\end{aligned}$$

山东教育出版社

这表明，x_1 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根.

同理，x_2 也是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根.

利用韦达定理及其逆定理，可以判断求出的一元二次方程的根是否正确.

3. 它的另一个根是 $-\frac{7}{3}$.

提示：设另一个根是x_1，则由根与系数的关系，得$x_1+3=\frac{2}{3}$ 或 $3x_1=-7$，解得 $x_1=-\frac{7}{3}$.

习题8.10

1.（1）$x_1+x_2=\frac{1}{3}$，

$x_1x_2=-\frac{1}{3}$；

（2）$x_1+x_2=-3$，

$x_1x_2=-1$.

山东教育出版社
山东教育出版社

2.（1）$x_1=-\frac{1}{3}$，$x_2=-\frac{1}{4}$；

（2）$x_1=-\frac{3}{2}$，$x_2=\frac{1}{4}$；

（3）$x_1=x_2=\frac{\sqrt{3}}{3}$；

（4）$x_1=2+2\sqrt{3}$，

$x_2=2-2\sqrt{3}$.

本题旨在巩固解方程的各种方法. 对求得的解，可以用根与系数的关系检验，这比直接代入方程检验要简便一些，尤其在方程的根为无理数的时候.

3. 另一个根是 $-\frac{3}{5}$，$k=-7$.

提示：解法不唯一. 例如，可以利用根与系数的关系先求出另一根，再求出 k 的值；也可以把 $x=2$ 代入原方程求出 k，再通过解方程得出另一个根. 教学时要允许学生用不同方法解决问题.

4. 不可能是 20.

提示：利用根与系数的关系可知方程的两根之和为 17，即这个三角形的两边长之和为 17，所以第三边长应小于 17.

2. 解下列方程：

（1）$12x^2+7x+1=0$；　　（2）$0.8x^2+x=0.3$；

（3）$3x^2+1=2\sqrt{3}x$；　　（4）$(x+1)(x-3)=2x+5$.

数学理解

3. 已知方程 $5x^2+kx-6=0$ 的一个根是 2，求它的另一个根及 k 的值.

问题解决

4. 如果一个三角形两边的长分别等于一元二次方程 $x^2-17x+66=0$ 的两个实数根，那么这个三角形的第三边的长可能是 20 吗？为什么？

6 一元二次方程的应用

[1] 在一块长 16 m、宽 12 m 的矩形土地上，要建造一个花园，并使花园所占面积为矩形土地面积的一半. 你能给出设计方案吗？

下面分别是小明和小亮的设计方案.



我的设计方案如图 8-5 所示，其中花园四周小路的宽度都相等. 通过解方程，我得到小路的宽为 2 m 或 12 m.

山东教育出版社

山东教育出版社

教学目标

1. 使学生能利用一元二次方程解决简单的实际问题，进一步渗透方程的模型思想.
2. 培养学生解决具体问题的实践能力和应用能力.

学生已经学习了求解一些一元二次方程的方法，但具体技能的培养应是一个长期的过程，继续进行一定的习题训练是十分必要的. 以往，对运算技能的训练，多习惯于理解为数学的“式”的训练，其实不然. 在学生初步具备了一定技能之后，将技能训练寓于问题的解决过程中不失为一种较好的做法.

[1] 本课时问题具有较大的开放性，教学时应尽可能给予学生较大的思维空间. 如在学生明白题意的基础上，可以以小组为单位设计具体方案，然后交流各组的设计思路，开展小组竞赛活动. 如果学生设计方案时有困难，也可以先提供一些实例，以给予学生一定的指导；如果学生列方程时有困难，也可以和学生一起回忆列一元一次方程解应用题的关键和有关步骤，从而引导学生正确地列出一元二次方程. 另外，在学生的设计方案中，有些可能不用列一元二次方程解决，对这类方案，也应予以肯定和鼓励.

（1）在解一元一次方程时，只要题目、方程及解法正确，那么得出的根便是所列方程的根，一般也就是所解应用题的解. 而一元二次方程有两个根，这些根虽然满足所列的一元二次方程，但未必符合实际问题. 因此，解完一元二次方程之后，要按题意检验这些根是不是实际问题的解. 小明的结果中，小路的宽 12 m 符合所列方程，但土地的宽为 12 m，小路的宽不可能为 12 m，因而它不是实际问题的解，应舍去. 因此小路的宽只能是 2 m.

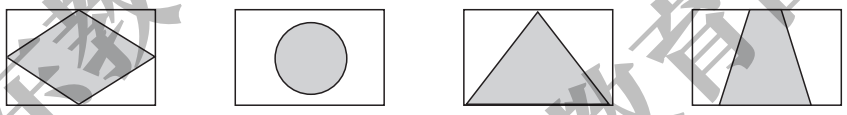
（2）图中的 4 个相同扇形的面积之和恰为一个圆的面积，且其半径为 x m，根据题意，得

$$\pi x^2 = \frac{1}{2} \times 12 \times 16.$$

解得 $x = \pm \sqrt{\frac{96}{\pi}} \approx \pm 5.5$.

所以图中的 x 约为 5.5.

（3）学生的设计方案可能多种多样，例如：



山东教育出版社

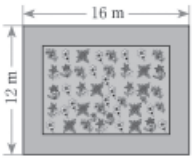


图 8-5

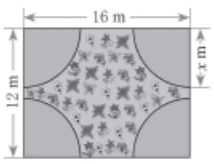
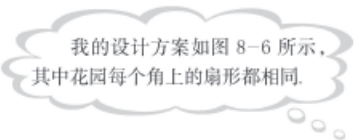


图 8-6





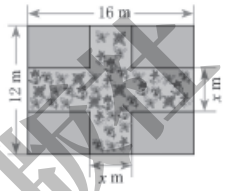
（1）你认为小明的结果对吗？为什么？

（2）你能帮小亮求出图 8-6 中的 x 吗？

（3）你还有其他设计方案吗？与同伴进行交流.

随堂练习

对于本节课的花园设计问题，小颖的设计方案如图所示，你能帮她求出图中的 x 吗？



习题 8.11

问题解决

1. 在一幅长 90 cm、宽 40 cm 的风景画的四周外围镶上一条宽度相同的金色纸边，制成一幅挂图，如果要求风景画的面积是整个挂图面积的 72%，那么金色纸边的宽应该是多少？

2. 某农场要建一个矩形养鸡场，鸡场的一边靠墙（墙长 25 m），另三边用木栏围成，木栏长 40 m.

（1）鸡场的面积能达到 180 m^2 吗？能达到 200 m^2 吗？

（2）鸡场的面积能达到 250 m^2 吗？

如果能，请你给出设计方案；如果不能，请说明理由.

随堂练习

$x=4$.

提示：根据题意，得 $(16-x)\cdot(12-x)=\frac{1}{2}\times16\times12$ 或 $16x+(12-x)x=\frac{1}{2}\times12\times16$.

习题8.11

1. 5 cm.

提示：设纸边的宽是 x cm，根据题意，得 $(90+2x)\cdot(40+2x)\times72\%=90\times40$.

2.（1）设鸡场的一边（靠墙的一边）为 x m，则另外两边均为 $\frac{40-x}{2}$ m.

当 $x\cdot\frac{40-x}{2}=180$ 时，解得 $x_1=20+2\sqrt{10}$，

$x_2=20-2\sqrt{10}$. 所以鸡场的面积能达到 180 m^2.

当 $x\cdot\frac{40-x}{2}=200$ 时，解得 $x_1=x_2=20$. 所以鸡场的面积能达到 200 m^2.

学习了二次函数之后，可以进一步说明，200 其实是函数 $y=x\cdot\frac{40-x}{2}$ 的最大值，这里先做一些铺垫.

（2）鸡场的面积不能达到 250 m^2.

山东教育出版社

例 1 机动车尾气污染是导致城市空气质量恶化的重要原因. 为解决这一问题，某市试验将现有部分汽车改装成液化石油气燃料汽车（称为环保汽车）. 按计划，该市将使全市的这种环保汽车由目前的 325 辆增加到两年后的 637 辆，求这种环保汽车的数量平均每年增长的百分率.

分析：如果设平均每年增长的百分率为 x，那么，一年后这种环保汽车的数量是 $(325+325x)$ 辆，就是 $325(1+x)$ 辆；两年后，其数量为 $[325(1+x)+325(1+x)x]$ 辆，就是 $325(1+x)^2$ 辆. 这样就可以根据题意列出方程.

解：设这种环保汽车的数量平均每年增长的百分率是 x，根据题意，得

$$325(1+x)^2=637,$$

就是 $(1+x)^2=1.96.$

于是 $1+x=\pm 1.4.$

解得 $x_1=0.4$，$x_2=-2.4.$

因为 $x=-2.4$ 不合题意，故舍去.

因此 $x=0.4=40\%.$

所以，这种环保汽车的数量平均每年增长的百分率是 40%.

做一做

小明家承包的土地前年的粮食产量是 50 t，前年、去年、今年的总产量是 175 t. 小明家去年、今年平均每年粮食产量的增长率是多少？（精确到 1%）

随堂练习

某种药品两次降价后，每盒售价从 6.4 元降到 4.9 元. 平均每次降价百分之几？

习题 8.12

问题解决

1. 某农场的粮食产量从 2012 年的 600 t 增加到 2014 年的 726 t，平均每年增长的百分率是多少？

例 1

本例是对增长率的计算，学生比较陌生. 教学时要从具体问题入手，引导学生分析题目中的各种数量关系，了解平均增长率的意义，进而用代数式去表示出这些关系，找出解题方法. 此外，要让学生结合实际问题检验方程的两个解是否符合题意，这一点很重要.

做一做

这是通过三年的总产量求增长率. 对于较复杂的方程，其结果也可借用计算器求近似值.

设增长率为 x，根据题意，得

$$17.5=5+5(1+x)+5(1+x)^2,$$

整理得 $x^2+3x-\frac{1}{2}=0.$

解得 $x_1=\frac{-3+\sqrt{11}}{2}$，

$x_2=\frac{-3-\sqrt{11}}{2}$（不合题意，舍去）

所以 $x\approx 16\%.$

随堂练习

12.5%.

提示：设平均每次降价的百分率是 x，根据题意，得 $6.4(1-x)^2=4.9.$

习题8.12

1. 10%.

提示：设平均每年增长的百分率为 x，根据题意，得 $600(1+x)^2=726.$

山东教育出版社

2. 20%.

提示：设每年比上一年增长的百分率为x，根据题意，得$200(1+x)^2=72+200(1+8\%)$.

3. 自然保护区面积的年均增长率大约是28.4%.

提示：设该市这两年自然保护区面积的年均增长率是x，根据题意，得

$4.85\%(1+x)^2=8\%$.

整理，得$(1+x)^2=\frac{160}{97}$.

例2

本例中涉及的数量关系较多，学生在思考时可能会有一定的难度. 教学时，在审清题意的前提下，应注重解题思路的分析，比如，可以用列表的形式分析其中的数量关系.

如果设每台冰箱降价x元，那么每台冰箱的定价应为_____元.

2. 某企业2011年底向银行贷款200万元用于生产某种新产品，约定2013年底到期时一次性还本付息，两年总利息为本金的8%. 由于产销对路，两年到期时，该企业除还清贷款的本金和利息外，还盈余72万元. 假定该企业在生产这种新产品期间，每年资金增长的百分率相同，则这个百分率是多少？

3. 某市2009年底自然保护区覆盖率（即自然保护区面积占全市国土面积的百分比）仅为4.85%，经过两年的努力，该市2011年底自然保护区覆盖率达到8%，求该市这两年自然保护区面积的年均增长率（结果精确到0.1%）.



例2 新华商场销售某种冰箱，每台进价为2 500元. 市场调研表明：当售价为2 900元时，平均每天能售出8台；而当售价每降低50元时，平均每天就能多售出4台. 商场要想使这种冰箱的销售利润平均每天达到5 000元，每台冰箱的定价应为多少元？

分析： 本题的主要等量关系是：

每台冰箱的销售利润 × 平均每天销售冰箱的数量 = 5 000元.

如果设每台冰箱降价x元，那么每台冰箱的定价就是$(2\,900-x)$元，每台冰箱的销售利润为$(2\,900-x-2\,500)$元，平均每天销售这种冰箱的数量为$(8+4\times\frac{x}{50})$台. 这样就可以列出一个方程，从而使问题得到解决.

解： 设每台冰箱降价x元，根据题意，得

$$(2\,900-x-2\,500)(8+4\times\frac{x}{50})=5\,000.$$

解这个方程，得

$$x_1=x_2=150.$$

$$2\,900-150=2\,750.$$

所以，每台冰箱的定价应为2 750元.

	每天的销售量/台	每台的销售利润/元	总销售利润/元
降价前			
降价后			

当然，解题思路也不应拘泥于这一种，可以鼓励学生自主探索.

山东教育出版社

做一做

某商场将进价为 30 元的台灯以 40 元售出，平均每月能售出 600 个. 调查表明：这种台灯的售价每上涨 1 元，其销售量就将减少 10 个. 为了实现平均每月 10 000 元的销售利润，这种台灯的售价应定为多少？这时商场每月能售出台灯多少个？

议一议

利用方程解决实际问题的关键是什么？

随堂练习

某商场礼品柜台春节期间购进大量贺年卡，一种贺年卡平均每天可售出 500 张，每张盈利 0.3 元. 为了尽快减少库存，商场决定采取适当的降价措施. 调查发现，如果这种贺年卡每张的售价每降价 0.1 元，那么商场平均每天可多售出 100 张. 商场要想通过销售这种贺年卡平均每天盈利 120 元，每张贺年卡应降价多少元？

习题 8.13

问题解决

1. 某种服装，平均每天可销售 20 件，每件盈利 44 元. 在每件降价幅度不超过 10 元的情况下，若每件降价 1 元，则每天可多销售 5 件. 如果每天要盈利 1 600 元，每件应降价多少元？
2. 一个农业合作社收获了某种农产品 80 吨，目前可以以 1 200 元/吨 的价格卖出. 如果储藏起来，每周会损失 2 吨，且每周需支付各种费用 1 600 元，但同时每周每吨的价格将上涨 200 元. 储藏多少个周出售这批农产品可获利 176 000元？

做一做

设每个台灯涨价 x 元，根据题意，得 $(40+x-30)(600-10x)=10\,000$.

解得 $x_1=10$，$x_2=40$.

所以，每个台灯的售价应定为 50 元或 80 元，进货量相应为 500 个或 200 个.

议一议

到现在为止，学生已经完成了义务教育阶段各种方程的学习，因此进行简单的回顾是极为必要的. 设计该“议一议”，简单回顾以前学过的有关利用方程(组)解决实际问题的关键，力图让学生进一步理解利用方程或方程组解决实际问题的关键是寻找等量关系.

随堂练习

每张贺年卡降价 0.1 元时，摊主平均每天可以盈利 120 元.

提示：设每张贺年卡降价 x 元时，摊主平均每天可以盈利 120 元，根据题意，得 $(0.3-x)\left(500+\frac{100x}{0.1}\right)=120$. 整理得 $100x^2+20x-3=0$，解得 $x_1=0.1$，$x_2=-0.3$(不合题意，舍去).

习题8.13

1. 每件应降价 4 元.

提示：设每件应降价 x 元，根据题意，得 $(44-x)(20+5x)=1\,600$. 整理，得 $x^2-40x+144=0$，解得 $x_1=4$，$x_2=36$(不合题意，舍去).

2. 储藏 10 个或 20 个周出售这批农产品可获利 176 000 元.

提示：设储藏 x 个周出售这批农产品可获利 176 000元，根据题意，得 $(80-2x)(1\,200+200x)-1\,600x=176\,000$.

山东教育出版社

整理，得 $x^2-30x+200=0$，

解得 $x_1=10$，$x_2=20$.

梯子下滑的问题从本章方程概念的引入、方程的解法，直至方程的应用，贯穿整章内容，清楚地呈现了问题的发现、解决的完整过程.

（1）设梯子顶端下滑 x m 时，梯子底端滑动的距离和它相等. 根据题意，得

$(8-x)^2+(6+x)^2=10^2$，

解得 $x_1=0$，$x_2=2$.

（2）设梯子顶端下滑 x m 时，梯子底端滑动的距离和它相等. 根据题意，得

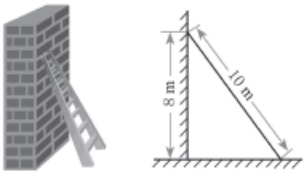
$(12-x)^2+(5+x)^2=13^2$，解得 $x_1=0$，$x_2=7$.

问题（1）延续了前面的情境，提出新的问题；而问题（2）在问题（1）的基础上，改变了数据条件，但等量关系不变.

还记得本章开始时梯子下滑的问题吗？

（1）如图 8-7，在这个问题中，梯子顶端下滑 1 m 时，梯子底端向外滑动的距离大于 1 m，那么梯子顶端下滑几米时，梯子底端向外滑动的距离和它相等呢？

（2）如果梯子的长度是 13 m，梯子顶端与地面的垂直距离为 12 m，那么梯子顶端下滑的距离与梯子底端向外滑动的距离可能相等吗？如果相等，那么这个距离是多少？



（1） （2）

图 8-7

例 3 如图 8-8，某海军基地位于 A 处，在其正南方向 200 n mile 处有一重要目标 B，在 B 的正东方向 200 n mile 处有一重要目标 C. 小岛 D 位于 AC 的中点，岛上有一个补给码头；小岛 F 位于 BC 的中点. 一艘军舰从 A 出发，经 B 到 C 匀速巡航，一艘补给船同时从 D 出发，沿南偏西方向匀速直线航行，欲将一批物品送达军舰.

已知军舰的速度是补给船的 2 倍，军舰在由 B 到 C 的途中与补给船相遇于 E 处，那么相遇时补给船航行了多少海里？（结果精确到 0.1 n mile）

解：连接 DF.

$\because AD=CD$，$BF=CF$，

$\therefore DF$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线.

$\therefore DF/\!/AB$，$DF=\frac{1}{2}AB$.

$\because AB\perp BC$，$AB=BC=200$ n mile，

$\therefore DF\perp BC$，$DF=100$ n mile，$BF=100$ n mile.

设相遇时补给船航行了 x n mile，那么

$DE=x$ n mile，$AB+BE=2x$ n mile，

$EF=AB+BF-(AB+BE)=(300-2x)$ n mile.

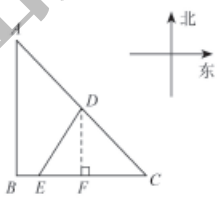


图 8-8

例 3

在例题的教学中，应关注列方程解应用题的三个重要环节：其一是整体地、系统地弄懂题意；其二是把握问题中的等量关系；其三是正确求解方程并检验解的合理性.

弄懂题意是解答本例的关键，因此教学过程中不能急于求成，要给学生充分的时间去分析、理解题目中的已知条件，搞明白图中各条线段所表示的含义. 教学时，也可以通过设置问题串来分解难点.

本题的实质是图形问题，隐含条件有 $AB+BE=2DE$，需要求 DE 的长度. 怎样添加辅助线构造图形是解决问题的难点. 教学时要积极引导、鼓励学生探索不同的解法.

山东教育出版社

在 Rt△*DEF* 中，根据勾股定理可得方程

$$x^2 = 100^2 + (300 - 2x)^2,$$

整理，得

$$3x^2 - 1\,200x + 100\,000 = 0.$$

解这个方程，得

$$x_1 = 200 - \frac{100\sqrt{6}}{3} \approx 118.4,$$

$$x_2 = 200 + \frac{100\sqrt{6}}{3}\ (\text{不合题意，舍去}).$$

所以，相遇时补给船大约航行了 118.4 n mile.

随堂练习

《九章算术》“勾股”章有一题：“今有二人同所立. 甲行率七，乙行率三. 乙东行，甲南行十步而斜东北与乙会. 问甲、乙行各几何.”

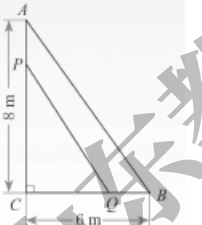
大意是说：已知甲、乙二人同时从同一地点出发，甲每单位时间走 7 步，乙每单位时间走 3 步. 乙一直向东走，甲先向南走 10 步，后又斜向北偏东方向走了一段后与乙相遇. 那么相遇时，甲、乙各走了多远？

习题 8.14

问题解决

1. 有这样一道阿拉伯古算题：有两笔钱，一多一少，其和等于 20，积等于 96，多的一笔被许诺赏给算对者，那么赛义德得到多少钱？

2. 如图，在 Rt△*ACB* 中，$\angle C = 90°$，点 *P*，*Q* 同时由 *A*，*B* 两点出发，分别沿 *AC*，*BC* 方向向点 *C* 匀速移动，它们的速度都是 1 m/s. 几秒后△*PCQ* 的面积为 Rt△*ACB* 面积的一半？



（第 2 题）

随堂练习

甲走了 24.5 步，乙走了 10.5 步.

习题8.14

1. 赛义德得到的钱数为 12.

提示：设赛义德得到的钱数为 x，则少的一笔钱数为 $20 - x$，根据题意，得 $x(20 - x) = 96$. 整理，得 $x^2 - 20x + 96 = 0$，解得 $x_1 = 12$，$x_2 = 8$（不合题意，舍去）.

2. 2 s后△*PCQ* 的面积为 Rt△*ACB* 面积的一半.

提示：设 x s 后△*PCQ* 的面积为 Rt△*ACB* 面积的一半，根据题意，得 $\frac{1}{2}(8 - x)(6 - x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 8 \times 6$. 整理，得 $x^2 - 14x + 24 = 0$，解得 $x_1 = 2$，$x_2 = 12$（不合题意，舍去）.

山东教育出版社

回顾与思考

教科书设计“回顾与思考”这一环节，目的是引导学生回顾本章内容，梳理知识结构，形成知识系统，养成回顾反思的习惯，获得知识系统的自主建构能力. 因此，在本章“回顾与思考”教学中，一般应完成两个任务：一元二次方程知识系统的建构，以及对典型例题的解析.

基于八年级学生的认知水平，以及前面几个学期的学习和经验积累，教学时教师应尽可能鼓励学生课前自主进行知识系统的建构. 如果学生梳理知识的经验和能力仍有不足，那么教师可给予适当的引导. 比如，教师可以选择以下教学措施：提前布置任务，让学生以小组合作的形式整理本章知识点；教师将本章知识点细化为几部分，让不同小组整理不同部分的内容，或利用“回顾与思考”中的问题进行分工，全班合作梳理全章知识；教师有目的地布置课前作业或课上例题，学生以题目中涉及的相关知识点为线索，完成全章的知识梳理……教学中，可以根据学生的实际情况，选择合适的教学方式. 此外，还可以要求学生对一些知识点配以适当的题目进行巩固运用.

回顾与思考

1. 一元二次方程在生活中有哪些应用？请举例说明.
2. 在解决实际问题的过程中，怎样判断求得的结果是否合理？请举例说明.
3. 举例说明解一元二次方程有哪些方法. 配方法的一般过程是怎样的？
4. 如何利用一元二次方程根的判别式判断方程根的情况？请举例说明.
*5. 一元二次方程的根与系数有怎样的关系？
6. 利用方程解决实际问题的关键是什么？
7. 用适当的方式梳理本章的知识，并与同伴进行交流.

复习题

知识技能

1. 两个数的差等于4，积等于45，求这两个数.

2. 解下列方程：

(1) $x(x-14)=0$；　(2) $x^2+12x+27=0$；

(3) $x^2=x+56$；　(4) $x(5x+4)=5x+4$；

(5) $4x^2-45=31x$；　(6) $-3x^2+22x-24=0$；

(7) $(x+8)(x+1)=-12$；　(8) $(3x+2)(x+3)=x+14$.

3. 解下列方程：

(1) $2(x+3)^2=x(x+3)$；　(2) $x^2-2\sqrt{5}x+2=0$；

(3) $(x+1)^2-3(x+1)+2=0$.

4. 不解方程，判断下列方程的根的情况：

(1) $2x^2+x-1=0$；　(2) $4(x^2-x)=-1$；

(3) $7x^2+2x+3=0$.

※**5.** 利用一元二次方程的根与系数的关系，求下列方程的两根之和、两根之积：

(1) $x^2-5x-6=0$；　(2) $3x^2+5x+1=0$.

6. (1) 当 x 为何值时，代数式 $x^2-13x+12$ 的值等于0？

(2) 当 x 为何值时，代数式 $x^2-13x+12$ 的值等于42？

(3) 当 x 为何值时，代数式 $x^2-13x+12$ 的值与代数式 $-4x^2+18$ 的值相等？

以下是知识梳理环节的教学建议，供参考.

1. 课前准备

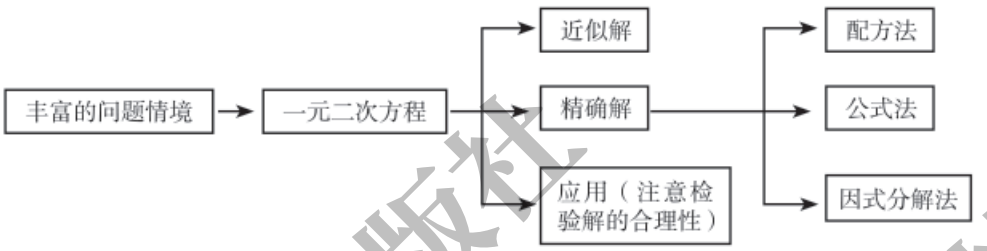
教师可提前1～2天布置任务，要求学生在复习本章内容的基础上，形成个性化的知识结构. 根据教学实际，可要求学生独立完成或分小组合作完成. 如果学生的能力允许，在梳理完本章内容的基础上，还可以引导学生建立本章所学知识与前面所学有关内容之间的联系，如一元二次方程与一元一次方程、二元一次方程（组）等内容的联系.

山东教育出版社

2．展示交流

对于学生知识梳理的成果，教师应在课堂汇报交流前加以审阅，从中有所选择．可以选择1~2组的成果进行课堂展示汇报，其余成果可利用教室内的空间在课后静态展示．学生汇报展示的过程中，教师最好不要随意打断；对需要进一步明晰的内容，教师应及时记录，同时鼓励其他学生进行补充、完善和修改．在学生充分交流的基础上，教师进行适当的点评，以正面肯定为主，同时指出需要改进的地方，帮助学生提高知识系统的自主建构能力．

下面是一个可供参考的知识结构框图．



以下例题仅供参考．

例 将一条长为56 cm的铁丝剪成两段，并把每一段铁丝做成一个正方形．

（1）要使这两个正方形的面积之和等于100 cm^2，该怎么剪？

（2）要使这两个正方形的面积之和等于196 cm^2，该怎么剪？

（3）这两个正方形的面积之和可能等于200 cm^2吗？

说明：为了体现方程的模型作用，这里选用教科书复习题第11题作为本章回顾与思考的例题，从对问题的分析解决过程中，再次感受用方程解决实际问题的一般步骤：设定适当的未知数，建立符合等量关系的方程，选择恰当的方法解方程，检验方程的解是否符合题意，最终得出实际问题的解．下面的解答过程给出了两种解法，目的是体现设不同未知数对解方程、检验方程解是否符合题意的影响．教学过程中，教师应给学生思考、求解的时间，对不同的解法进行比较，在动手动脑的过程中感受，获得实实在在的解题经验．根据教学的实际情况，也可以选择其他的能体现本章主要内容以及内容之间关系的问题情境，应尽可能在同一个问题情境下呈现列方程、解方程、用方程的完整过程．

解法一： 设两段长度分别为$4x$ cm，$(56-4x)$cm，其中$0\leqslant x\leqslant 14$，则两个正方形的面积之和$S=(\frac{4x}{4})^2+(\frac{56-4x}{4})^2=x^2+(14-x)^2$.

（1）当$S=100$，即$x^2+(14-x)^2=100$时，解得$x_1=6$，$x_2=8$，所以剪成的一段为24 cm，另一段为32 cm；

（2）当$S=196$，即$x^2+(14-x)^2=196$时，解得$x_1=0$，$x_2=14$，所以不需要剪，用56 cm长的铁丝直接围成；

（3）当$S=200$，即$x^2+(14-x)^2=200$时，解得$x_1=7+\sqrt{51}$，$x_2=7-\sqrt{51}$，由$\sqrt{51}>7$，得$7+\sqrt{51}>14$，$7-\sqrt{51}<0$，均不符合题意，所以不可能．

山东教育出版社

解法二：设两段长度分别为 x cm，$(56-x)$cm，其中 $0\leqslant x\leqslant 56$，则两个正方形的面积之和 $S=(\frac{x}{4})^2+(\frac{56-4x}{4})^2$.

（1）当 $S=100$，即 $(\frac{x}{4})^2+(\frac{56-x}{4})^2=100$ 时，解得 $x_1=32$，$x_2=24$，所以剪成的一段为 24 cm，另一段为 32 cm；

（2）当 $S=196$，即 $(\frac{x}{4})^2+(\frac{56-x}{4})^2=196$ 时，解得 $x_1=0$，$x_2=56$，所以不需要剪，用 56 cm 长的铁丝直接围成；

（3）当 $S=200$，即 $(\frac{x}{4})^2+(\frac{56-x}{4})^2=200$ 时，解得 $x_1=28+4\sqrt{51}$，$x_2=28-4\sqrt{51}$，由 $\sqrt{51}>7$，得 $28+4\sqrt{51}>56$，$28-4\sqrt{51}<0$，均不符合题意，所以不可能.

反思：在学生能力允许的条件下，可以引导学生对围成的正方形面积的范围进行讨论，提高学生的探究能力，渗透配方法在确定代数式的最值中的应用. 实际上，通过配方，解法一中 $S=(\frac{4x}{4})^2+(\frac{56-4x}{4})^2=x^2+(14-x)^2=2(x-7)^2+98$，又由 $0\leqslant x\leqslant 14$，得 $98\leqslant S\leqslant 196$；解法二中 $S=(\frac{x}{4})^2+(\frac{56-x}{4})^2=\frac{1}{8}(x-28)^2+98$，又由 $0\leqslant x\leqslant 56$，得 $98\leqslant S\leqslant 196$.

复习题

1. -9，-5；或 5，9.

2.（1）$x_1=0$，$x_2=14$；　（2）$x_1=-3$，$x_2=-9$；

（3）$x_1=8$，$x_2=-7$；　（4）$x_1=1$，$x_2=-\frac{4}{5}$；

（5）$x_1=-\frac{5}{4}$，$x_2=9$；　（6）$x_1=6$，$x_2=\frac{4}{3}$；

（7）$x_1=-5$，$x_2=-4$；　（8）$x_1=\frac{2}{3}$，$x_2=-4$.

3.（1）$x_1=-3$，$x_2=-6$；

（2）$x_1=\sqrt{5}+\sqrt{3}$，$\sqrt{5}-\sqrt{3}$；

（3）$x_1=0$，$x_2=1$.

4.（1）有两个不相等的实数根；

（2）有两个相等的实数根；

（3）没有实数根.

5.（1）$x_1+x_2=5$，$x_1x_2=-6$；

（2）$x_1+x_2=-\frac{5}{3}$，$x_1x_2=\frac{1}{3}$.

6.（1）$x_1=1$，$x_2=12$；

（2）$x_1=-2$，$x_2=15$；

（3）$x_1=3$，$x_2=-\frac{2}{5}$.

山东教育出版社

7. 某公司前年缴税 40 万元，今年缴税 48.4 万元. 该公司缴税的年平均增长率为多少？

8. 将一块正方形铁皮的四个角各剪去一个边长为 4 cm 的小正方形，做成一个无盖的盒子. 已知盒子的容积是 400 cm^3，求原正方形铁皮的边长.

9. 一块长方形草地的长和宽分别为 20 m 和 15 m，在它四周外围环绕着宽度相等的小路. 已知小路的面积为 246 m^2，求小路的宽度.

10. 某剧场共有 1 161 个座位，已知每行的座位数都相同，且每行的座位数比总行数少 16，求每行的座位数.

数学理解

11. 将一条长为 56 cm 的铁丝剪成两段，并把每一段铁丝做成一个正方形.

（1）要使这两个正方形的面积之和等于 100 cm^2，该怎么剪？

（2）要使这两个正方形的面积之和等于 196 cm^2，该怎么剪？

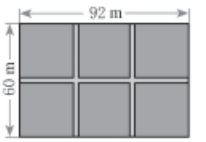
（3）正方形的面积之和可能等于 200 cm^2 吗？

12. 解方程 $(x-1)^2-5(x-1)+4=0$ 时，我们可以将 $x-1$ 看成一个整体，设 $x-1=y$，则原方程可化为 $y^2-5y+4=0$，解得 $y_1=1$，$y_2=4$. 当 $y=1$ 时，即 $x-1=1$，解得 $x=2$；当 $y=4$ 时，即 $x-1=4$，解得 $x=5$. 所以原方程的解为 $x_1=2$，$x_2=5$. 请利用这种方法解方程：$(3x+5)^2-4(3x+5)+3=0$.

13. 已知 $2+\sqrt{3}$ 是方程 $x^2-4x+c=0$ 的一个根，求方程的另一个根及 c 的值.

问题解决

14. 如图，在一块长 92 m、宽 60 m 的矩形耕地上挖三条水渠（水渠的宽都相等），水渠把耕地分成面积均为 885 m^2 的 6 个矩形小块，水渠应挖多宽？



（第 14 题）

15. 我国是世界上受沙漠化危害最严重的国家之一，沙化土地面积逐年增长. 2000 年初我国沙化土地面积约为 261.5 万平方千米，到 2002 年初沙化土地面积已达近 262 万平方千米. 假设沙化土地面积每年的增长率相同，那么年增长率大约是多少？

16. 某果园有 100 棵桃树，一棵桃树平均结 1 000 个桃子，现准备多种一些桃树以提高产量，试验发现，每多种一棵桃树，每棵桃树的产量就会减少 2 个，但多种的桃树不能超过 100 棵. 如果要使产量增加 15.2%，那么应多种多少棵桃树？（假设桃子大小不变）

7. 年平均增长率为 10%.

8. 边长为 18 cm.

9. 小路宽 3 m.

提示：设小路的宽为 x m，根据题意，得 $2x(15+2x)+2\times 20x=246$.

10. 每行有 27 个座位.

提示：设每行有 x 个座位，根据题意，得 $x(x+16)=1\,161$.

11.（1）一段为 24 cm，另一段为 32 cm；

（2）用 56 cm 长的铁丝围成（不剪）；

（3）不可能.

12. $x_1=-\frac{4}{3}$，$x_2=-\frac{2}{3}$.

13. 另一根为 $2-\sqrt{3}$，$c=1$.

14. 水渠宽 1 m.

15. 0.1%.

16. 多种 20 棵.

山东教育出版社

17. $\frac{\sqrt{97}-1}{2}$ cm，$\frac{\sqrt{97}+1}{2}$ cm.

18. 最早 2 h 后，能侦察到军舰.

提示：设从 A 处开始经过 x h 侦察船最早能侦察到军舰，根据题意，得 $(20x)^2+(90-30x)^2=50^2$.

19. 共12人.

提示：设到会 x 人，根据题意，得 $\frac{x(x-1)}{2}=66$.

20. 当 P 的坐标为（1，1）或（$\frac{1}{2}$，2）时，矩形 $OCPD$ 的面积为 1.

提示：设点 P 的坐标为（a，b），因为点 P 在线段 AB 上（不与点 A，B 重合），所以 $a>0$，$b>0$，$b=-2a+3$，所以 $PC=b=-2a+3$，$PD=a$，$S_{矩形OCPD}=PC\cdot PD=a(-2a+3)$. 根据题意，得 $a(-2a+3)=1$，解这个方程，得 $a_1=1$，$a_2=\frac{1}{2}$.

21.（1）轮船会进入台风影响区；

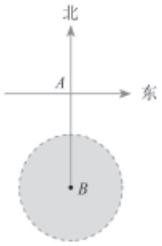
（2）经过大约 8.35 h 轮船就会进入台风影响区.

22. 该银行一年定期存款的年利率是5%.

提示：在利率问题中，“本金 × 利率 × 期数＝利息”是基本的等量关系，本息和＝本金＋利息. 设该银行一年定期存款的年利率是 x，根据题意，得 $(1\,000+2\,000x)+(1\,000+2\,000x)x=1\,155$，解得 $x_1=0.05$，$x_2=-1.55$（不合题意，舍去）.

17. 一个直角三角形的斜边长 7 cm，一条直角边比另一条直角边长 1 cm，求两条直角边的长度.

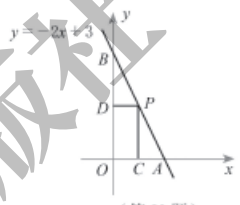
18. 某军舰以 20 n mile/h 的速度由西向东航行，一艘电子侦察船以 30 n mile/h 的速度由南向北航行，它能侦察出周围 50 n mile（包括 50 n mile）范围内的目标. 如图，当该军舰行至 A 处时，电子侦察船正位于 A 处正南方向的 B 处，且 $AB=90$ n mile. 如果军舰和侦察船仍按原速度沿原方向继续航行，那么航行途中侦察船能否侦察到这艘军舰？如果能，最早何时能侦察到？如果不能，请说明理由.



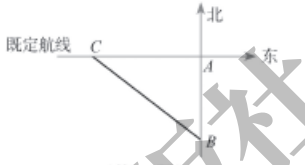
（第 18 题）

19. 一次会议上，每两个参加会议的人都相互握了一次手，有人统计一共握了 66 次手. 这次会议到会的人数是多少？

20. 如图，一次函数 $y=-2x+3$ 的图象交 x 轴于点 A，交 y 轴于点 B，点 P 在线段 AB 上（不与点 A，B 重合），过点 P 分别作 OA，OB 的垂线，垂足分别为点 C，D. 点 P 在何处时，矩形 $OCPD$ 的面积为 1？



（第 20 题）



（第 21 题）

21. 如图，一艘轮船以 30 km/h 的速度沿既定航线由西向东航行，途中接到台风警报，某台风中心正以 20 km/h 的速度由南向北移动，距台风中心 200 km 的圆形区域（包括边界）都属台风影响区. 当这艘轮船接到台风警报时，它与台风中心的距离 $BC=500$ km，此时台风中心与轮船既定航线的最近距离 $BA=300$ km.

（1）如果这艘轮船不改变航向，那么它会不会进入台风影响区？

（2）如果你认为这艘轮船会进入台风影响区，那么从接到警报开始，经过多长时间它就会进入台风影响区？

22. 某班级前年暑假将勤工俭学获得的班费中的 2 000 元按一年定期存入银行，去年暑假到期后取出了 1 000 元捐给“希望工程”，将剩下的 1 000 元与利息继续按一年定期存入该银行，今年暑假毕业时全部捐给了母校. 假设该银行年利率无变化，且今年暑假到期后取得本息和 1 155 元，那么该银行一年定期存款的年利率是多少？

山东教育出版社

第九章　图形的相似

一、《标准》要求

1. 了解比例的基本性质、线段的比、成比例的线段；通过建筑、艺术上的实例了解黄金分割.

2. 通过具体实例认识图形的相似，了解相似多边形和相似比.

3. 掌握基本事实：两条直线被一组平行线所截，所得的对应线段成比例.

4. 了解相似三角形的判定定理：两角分别相等的两个三角形相似；两边成比例且夹角相等的两个三角形相似；三边成比例的两个三角形相似. *了解相似三角形判定定理的证明.

5. 了解相似三角形的性质定理：相似三角形对应线段的比等于相似比；面积比等于相似比的平方.

6. 了解图形的位似，知道利用位似可以将一个图形放大或缩小.

7. 会利用图形的相似解决一些简单的实际问题.

8. 在直角坐标系中，探索并了解将一个多边形的顶点坐标（有一个顶点为原点、有一条边在横坐标轴上）分别扩大或缩小相同倍数时所对应的图形与原图形是位似的.

（注:《标准》在其“评价建议”中指出:对于相似三角形的判定定理、性质定理的考查，本标准的要求是“了解”，不要求用这些定理证明其他命题.）

二、教学目标

1. 在研究与图形相似有关的问题中，经历观察、操作、类比、归纳、交流等过程，进一步发展几何直观、空间观念和推理能力，发展发现问题、提出问题、解决问题的能力，积累数学活动经验.

2. 了解线段的比、成比例线段，掌握比例的性质及平行线分线段成比例的基本事实.

3. 了解相似多边形和相似比.

4. 探索并了解三角形相似的条件和性质.

*5. 了解相似三角形判定定理的证明.

6. 了解图形的位似，能够利用位似将一个图形放大或缩小.

7. 探索并了解多边形的顶点坐标（有一个顶点为原点、有一条边在横坐标轴上）分别扩大或缩小相同倍数时所对应的图形与原图形的位似关系.

8. 了解黄金分割，了解相似图形在现实生活中的应用；在探索问题、合作交流过程中，进一步体会数学与自然及人类社会的密切联系和数学的价值，增强应用意识.

三、设计思路

根据《标准》的要求，“图形与几何”部分的整体教学目标为：在探索、发现、确认、

山东教育出版社

证明图形性质的过程中，建立空间观念，培养几何直观，发展推理能力.

相似图形是现实生活中广泛存在的现象（全等图形其实就是它的一个特例）. 探索相似图形一些重要性质的过程，不仅可以使学生更好地认识、描述物体的形状，体会图形相似在刻画现实世界中的重要作用，进一步发展空间观念、几何直观与推理能力，而且可以通过解决现实世界中的具体问题，提高学生的应用意识和合作交流能力. 学生通过对相交线、平行线、三角形、四边形（主要是平行四边形）等图形性质与证明的学习，已经积累了较为丰富的数学活动经验，空间观念逐步增强，几何直观与推理能力都得到了一定的培养，为相似图形的学习打下了基础.

基于《标准》的要求和学生的基础，本章设计的总体思路是：以数形结合为基本方法，以合情推理能力与演绎推理能力的培养为主线，在生动的问题情境和丰富的数学活动中，了解比例的基本性质、线段的比、成比例的线段，掌握平行线分线段成比例的基本事实；类比三角形全等，探索三角形相似的条件，了解相似三角形的判定定理和性质定理；了解图形的位似，体会多边形的顶点坐标分别扩大或缩小相同倍数时所对应的图形与原图形的位似关系；会利用图形的相似解决一些简单的实际问题.

基于《标准》提出的发展空间观念、几何直观的要求，本章的创新设计是：从新的角度设计导入情境，突出以“形”为载体，研究线段的比和成比例线段问题. 教科书一开始从观察生活中的图案到观察几何图形，要求找出形状相同的图形，继而提出问题：这些形状相同的图形有什么不同？从而引出线段的比，体现了学习线段比的必要性. 接着，借助方格纸上形状相同的图形，探索对应线段的比，引出成比例线段；在此基础上，进而研究比例的性质. 这样，从一开始学习线段的比和成比例线段内容时，就以“形”为载体，努力克服就“数”论“数”的局限，既有利于学生通过“形”的直观感知，加深对“数”的认识，又进一步渗透了“数”与“形”相结合的数学思想. 同时，这也体现了《标准》所提出的“在呈现作为知识与技能的数学结果的同时，重视学生已有的经验，使学生体验从实际背景中抽象出数学问题、构建数学模型、寻求结果、解决问题的过程”的要求.

根据设计思路，教科书安排了 9 节内容.

第 1 节“成比例线段”、第 2 节“平行线分线段成比例”，教科书从观察生活中的图案到观察几何图形，要求找出形状相同的图形，通过引导学生思考如何描述形状相同图形的不同之处，引出学习线段的比的必要性和线段的比的概念；在此基础上，结合图形引出成比例线段、比例的性质，以及平行线分线段成比例等内容，从而为后面研究相似三角形做好准备.

第3节“相似多边形”，教科书结合具体的形状相同的图形，明确对应角、对应边的概念，继而给出相似多边形、相似比的概念；接着通过若干具体活动进一步巩固对相似多边形概念的理解.

第4节“探索三角形相似的条件”，根据相似多边形的定义，顺势引出相似三角形的概念；接着，类比三角形全等条件的探索，展开三角形相似条件的探索，明确给出相似三角形的三个判定定理.

山东教育出版社

考虑到相似三角形判定定理的证明是《标准》规定的选学内容，教科书在得出三角形相似的条件之后，设计了第5节“相似三角形判定定理的证明”. 将相似三角形判定定理的证明单独成节，是为了方便教师在教学中根据学情灵活安排.

第 6 节借助希腊古建筑，介绍了黄金分割、黄金比及其计算过程.

在相似三角形判定定理之后，设计了一节活动课，即第 7 节“利用相似三角形测高”，介绍了利用相似三角形测量旗杆高度的几种方法.

第 8 节“相似三角形的性质”，研究相似三角形对应高的比、对应中线的比、对应角平分线的比与相似比的关系，以及周长比、面积比与相似比的关系.

第 9 节“利用位似放缩图形”，介绍位似图形的概念，利用位似图形将一个图形放大或缩小，研究多边形的顶点坐标分别扩大或缩小相同倍数时所对应的图形与原图形的位似关系.

本章的设计综合考虑学生各方面情况，以及培养几何直观、推理能力的需要，努力为学生提供生动有趣的问题情境，积极引导学生综合运用以前所学过的研究图形的各种方法展开探究；坚持合情推理与演绎推理并重，先用合情推理方法探索解决问题的思路，发现结论，然后用演绎推理方法对所获得的结论进行严格证明，完整地展现探究结论、证明结论、应用结论的全过程，以期对学生数学思维能力的发展有一个较大的提升.

四、课时安排建议

1　成比例线段	2 课时
2　平行线分线段成比例	1 课时
3　相似多边形	1 课时
4　探索三角形相似的条件	3 课时
*5　相似三角形判定定理的证明	1 课时
6　黄金分割	1 课时
7　利用相似三角形测高	1 课时
8　相似三角形的性质	2 课时
9　利用位似放缩图形	2 课时
回顾与思考	2 课时

五、教学建议

1. 在观察、动手操作等实践活动中，培养学生的空间观念和几何直观，帮助学生进一步积累数学活动经验.

本章的许多内容都需要学生对图形进行观察、动手操作和直观发现，如利用方格纸画形状相同的图形、探索三角形相似的条件、画位似图形等. 教学中应充分利用这部分内容的特点，紧密结合教学内容安排观察、动手操作等实践活动. 学生通过亲身参与这些实践活动，不仅可以理解相关内容的数学内涵，掌握有关的基本知识，形成有关技能，而且还

山东教育出版社

可以发展思维能力，进一步积累数学活动经验.

需要注意的是，观察、动手操作等实践活动，不是目的，而是手段. 这些实践活动的目的是要培养学生的空间观念与几何直观，不能为活动而活动. 凡是能够通过想象得到的结论，要尽量让学生展开丰富的想象，在想象的基础上，有的结论可以通过动手操作进行验证，有的结论则可以通过演绎推理加以证明；对于想象不出的结论，鼓励学生通过动手操作，通过观察与思考，得到结论，并在此基础上及时帮助学生提升自己的空间观念水平.

2. 让学生经历知识的发生、发展过程，并在这一过程中感悟数学思想.

本章内容包括比例线段、相似多边形、相似三角形的判定与性质、相似三角形的应用，以及图形的位似等，不仅知识点比较多，而且其中蕴含的数学思想也比较丰富. 例如，在比例性质、图形的位似与坐标等内容中，蕴含、渗透了数形结合的思想；在探索三角形相似条件的过程中渗透了类比的思想、分类的思想.

数学思想只有通过经历知识的发生、发展过程，通过独立思考、合作交流，才能逐步感悟到. 因此,在教学过程中要利用一切机会,为学生感悟数学思想创造条件,为学生的“悟”提供足够的时间和空间，不要只盯着知识点而忽略了数学思想.

3. 设置丰富的问题情境，努力培养学生的应用意识与解决实际问题的能力.

教师要尽量从现实生活中的大量实例出发，呈现图形相似的有关内容，充分借助几何直观，引导学生经历探索图形相似基本概念、基本性质、判定条件的完整过程.

设置丰富的问题情境，有利于学生认识数学与现实生活的联系，有利于学生发现问题、提出问题，最终为分析问题、解决问题奠定基础. 学生在一定的问题情境中学习数学，有利于培养他们的应用意识，有利于提高他们解决实际问题的能力. 教科书在引入线段的比、相似图形以及黄金分割等概念时，都设置了一定的情境，教学中要利用好这些情境，发挥情境导入的作用.

通过设置丰富的问题情境导入新课，这是课程改革以来课堂教学设计中出现的新事物，是对以前“斩头去尾烧中段”的传统教学方法的重大改革. 当前要注意的倾向是：不能为设置而设置，为情境而情境，而要认识设置问题情境的目的，从实现教学目标的高度认识，从培养学生问题意识、应用意识的高度认识.

4. 注意把握合情推理与演绎推理的要求，全面提高学生的推理能力.

到目前为止，学生既经历了图形全等以及图形的平移、旋转、轴对称的学习，又经历了从佐证、说理，到简单的一步推理、两步推理的过程，研究图形的方式方法不断增多，推理能力不断增强. 本章教学中，要注意体现研究图形问题的多种方法，关注学生处理图形问题的思维发展水平，加强相关数学内容之间的联系和综合运用；要有意识地体现从直观发现到严格推理的过渡，合情推理与演绎推理并重，进一步提高学生的推理能力.

按照《标准》的规定，教科书将“平行线分线段成比例”的内容作为基本事实，它是证明相似三角形判定定理的基础. 教学时应引导学生通过探索、归纳，认可该结论，并运用这个结论解决一些简单问题.

相似三角形判定定理的证明是选学内容. 教学时，要根据学生的学习状况、学习能力

山东教育出版社

和学习兴趣，引导学生自主选择；要加强对选学内容的指导，使学有余力的学生得到不同的发展. 对于这一选学内容的指导，要重视证明思路的寻求和探索.

5. 重视学生的个性化差异和不同的学习需求.

随着学习内容的深化，学生的基础、能力和个性心理的差异，已经影响到其学习状况. 学生的学习水平不同，学习能力呈现一定程度的分化，这是正常的，教师在教学中应该充分关注学生的个性化差异，不要搞“一刀切”，不要搞“齐步走”，要尽量关注不同学生的不同要求，有意识地提出和满足学生多样化的学习需求，真正为学生提供个性化学习的时间和空间，充分调动学生学习的积极性，发挥学生的能动性，通过适当的交流、合作，使学生共同进步，尽量推迟分化发生的时间，尽量缩小分化的程度.

6. 努力体现图形相似的文化价值.

本章为了体现数学的文化价值，适时地介绍了一些有趣的数学史料，尽可能联系数学在许多领域的广泛应用. 教师教学时，应进一步发掘这方面的素材，以发展学生分析、欣赏相似图形的意识，提高学生的审美意识.

六、评价建议

1. 以《标准》的要求为准，把握基础知识与基本技能的评价.

《标准》对相似图形内容的要求既明确又具体，对相似三角形的判定定理、性质定理，《标准》的要求定位在“了解”的层面，并且明确指出：“不要求用这些定理证明其他命题.”对于判定定理的证明，《标准》定位在“选学”层面，“不作考试要求”. 因此，对有关相似三角形基础知识、基本技能的考查和评价，也应按照《标准》的要求执行，不应随意提高要求，更不应被各种各样的教辅资料牵着鼻子走，不合理、不恰当地增加训练难度，增加学生的学习负担.

2. 要注重学习结果的评价，也要关注学习过程的评价，关注学习态度、学习兴趣、学习方法的评价.

要关注学生参与观察、分析、画图、探究等数学活动的主动程度，以及对有关问题的好奇心和求知欲；关注学生能否在具体的图形相似情境中，根据问题需要进行恰当的操作，并用适当的语言表达和交流自己的学习体验、学习结果，如根据问题的需要画出适当的相似图形，向他人展示自己的“作品”，与同伴交流自己的体验，用适当的语言对自己在相似图形操作中的一些做法给出适当的解释和简单的推理等.

要关注学生能否从图形相似的角度识别现实生活中大量存在的有关现象和规律，能否对简单的图形作适当的分析. 同时，也要关注学生对有关操作技能的熟练程度，以及自觉的合作交流意识.

3. 关注学生个性化的学习需求，并对个性化学习进行恰当的评价.

到了八年级下学期，由于多种因素的缘故，学生的学习已经产生一定程度的分化，这是正常的. 但是，正因为如此，我们更要关注学生在解决问题过程中所表现出来的差异，关注学生个性化的学习需求，并对个性化学习进行恰当的评价，尽可能满足不同学习层次的

山东教育出版社 山东教育出版社

学生不同的学习需求，要允许他们用自己的方式去思考、表述自己的想法，并在这个前提下，适时、适度地引导他们前行，努力提高自己. 同时，还要恰当评价学生的创新意识和实践能力，注意发挥学生自我评价的功能和作用.

4. 合理设计、命制和实施书面单元测验.

书面单元测验是考查学生学习状况的重要方式，合理设计、命制和实施书面单元测验，有助于全面及时地了解学生的学习状况、学习水平，不断提高教学质量.

一份设计科学、合理的书面单元测验试卷，是体现和反映教师教学能力、教学水平的重要方面. 因此，做好这项工作，也有助于教师自己加深对《标准》的理解，有助于改进教学，提高自己的业务水平.

合理设计、命制一份好的单元测验试卷，必须准确把握《标准》对相似图形内容的要求，必须在注重基础知识、基本技能考查的同时，关注并体现对教学内容所蕴含的数学思想的考查，如数形结合的思想、分类的思想、类比的思想、模型的思想等；关注并体现对空间观念、几何直观、推理能力、运算能力（本章主要体现在比例式的变形、比例性质的应用上）、创新意识等《标准》提出的核心概念的考查.

合理设计、命制一份好的单元测验试卷，还必须充分考虑任教学生的整体状况与水平，充分兼顾不同层次学生的水平与能力，既要有基础题，也要有综合题；既要有常规题，也要努力创新；既不能挫伤大部分学生的学习积极性，也必须体现一定的区分度.

合理设计、命制一份好的单元测验试卷，还要实施好. 要注重试卷的讲评，引导学生学会自我总结、自我反思.

山东教育出版社 山东教育出版社

第九章　图形的相似

色彩斑斓的世界中有许多形状相同的图形，这就是相似图形. 你知道如何刻画图形的相似吗？你知道如何判定两个三角形相似吗？你知道如何将一个图形放大或缩小吗？

本章将研究图形的相似，探索三角形相似的条件，了解相似三角形的性质，并利用图形的相似解决一些简单的实际问题.









学习目标

- 认识图形的相似，进一步积累认识图形性质的经验
- 探索三角形相似的条件，了解相似三角形的性质，进一步发展推理能力
- 能够利用三角形的相似解决一些测量问题
- 了解图形的位似，能利用位似将一个图形放大或缩小

主题图以几幅典型的形状相同的图片为背景，配以简短的提示性文字，力图反映图形相似的基本特性和文化价值，激发学生学习本章内容的欲望. 教学时，教师也可以根据实际情况，选用其他的相关图案.

山东教育出版社
山东教育出版社

教学目标

1. 结合现实情境感受学习线段的比的必要性，借助几何直观了解线段的比和成比例线段.

2. 掌握比例的性质及其简单应用.

3. 通过现实情境，进一步发展从数学的角度发现问题、提出问题、解决问题的能力，培养数学应用意识，体会数学与自然、社会的密切联系.

本节安排 2 课时. 第 1 课时以形状相同的图形为大背景引出线段的比的概念，借助方格纸，通过计算相关线段的比引出成比例线段的概念，在此基础上研究比例的基本性质；第 2 课时仍然以图形为载体，从图形的线段比入手，研究等比性质.

为了引入线段的比，教科书从具体到抽象，从识别相同到寻找不同，设计的问题逐步深入：从生活中的图片（具体）到几何图形（抽象）；从欣赏形状相同的图形，到找图形中形状相同的，再到如何描述形状相同图形的不同.

1 成比例线段

[1] 在现实生活中，我们经常会看到许多形状相同的图形.



你能从下面这些图形中找出形状相同的图形吗？这些形状相同的图形有什么不同？

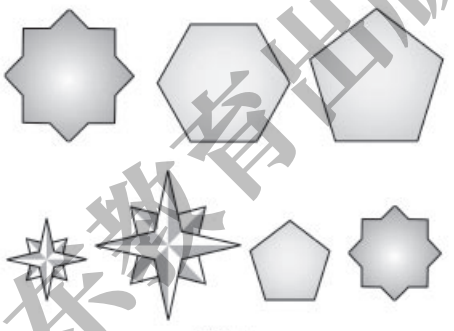


图 9-1

[1] 教科书首先呈现了生活中的 4 组图片，且每一组中图片的形状各自相同，突出“形状相同”. 然后呈现几幅几何图形，其形状，有的相同，有的不同，要求学生通过观察找出形状相同的图形. 接着提出问题：“这些形状相同的图形有什么不同？”开始进入主题：用什么刻画、描述形状相同图形的不同点呢？引出学习线段的比的必要性.

山东教育出版社 山东教育出版社

形状相同而大小不同的两个平面图形，较大的图形可以看成是由较小的图形“放大”得到的，较小的图形可以看成是由较大的图形“缩小”得到的. 在这个过程中，两个图形上的相应线段也被“放大”或“缩小”. 因此，对于形状相同而大小不同的两个图形，我们可以用相应线段长度的比来描述它们的大小关系.

[1]如果选用同一个长度单位量得两条线段 AB，CD 的长度分别是 m，n，那么这**两条线段的比**（ratio of two line segments）就是它们长度的比，即 $AB:CD=m:n$，或写成 $\frac{AB}{CD}=\frac{m}{n}$. 其中，线段 AB，CD 分别叫做这个线段比的前项和后项. 如果把 $\frac{m}{n}$ 表示成比值 k，那么 $\frac{AB}{CD}=k$，或 $AB=k\cdot CD$. 两条线段的比实际上就是两个数的比.[2]

[3]如图 9−2，五边形 $ABCDE$ 与五边形 $A'B'C'D'E'$ 形状相同，$AB=5$ cm，$A'B'=3$ cm，$AB:A'B'=5:3$，$\frac{5}{3}$ 就是线段 AB 与线段 $A'B'$ 的比，这个比值刻画了这两个五边形的大小关系.

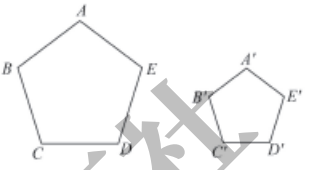


图 9−2

做一做

如图 9−3，设小方格的边长为 1，四边形 $ABCD$ 与四边形 $EFGH$ 的顶点都在格点上❶，那么 AB，AD，EF，EH 的长度分别是多少？

分别计算 $\frac{AB}{EF}$，$\frac{AD}{EH}$，$\frac{AB}{AD}$，$\frac{EF}{EH}$ 的值，你发现了什么？

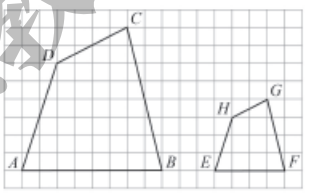


图 9−3

❶ 本章如无特别说明，方格纸上图形的顶点都在格点上.

[1]引入比值 k 的方法是解决比例问题的一种重要方法. 事实上，利用这种方法，可以很方便地推导出比例的性质.

[2]“两条线段的比实际上就是两个数的比”有两层含义：一是再次强调线段的比就是线段长度的比；二是借此将“形”（线段）的讨论转化为“数”（线段的长度）的讨论，从而可以引入数的运算进行推理、探究，为后面有关比例性质的证明做铺垫.

[3]通过两个五边形对应边的比，具体说明线段的比的意义，进一步巩固对概念的理解.

做一做

通过对方格纸上两个四边形对应边的比值的计算，引导学生发现这四组对应线段的比相等，进而引出比例线段的概念.

图中四边形的顶点都在小方格的格点上，因此四边形的四条边的长度都可以通过观察或通过勾股定理得出.

山东教育出版社

[1]四条线段 a，b，c，d 中，如果 a 与 b 的比等于 c 与 d 的比，即 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么这四条线段 a，b，c，d 叫做**成比例线段**，简称**比例线段**（proportional segments）. 在图 9-3 中，AB，EF，AD，EH 是成比例线段，AB，AD，EF，EH 也是成比例线段.

议一议

如果 a，b，c，d 四个数成比例，即 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么 $ad=bc$ 吗？反过来，如果 $ad=bc$，那么 a，b，c，d 四个数成比例吗？与同伴交流.

如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么 $ad=bc$.[2]

如果 $ad=bc$（a，b，c，d 都不等于 0），那么 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.[3]

例 1 如图 9-4，一个矩形的长 $AB=a$ m，宽 $AD=1$ m，按照图中所示的方式将它分割成相同的三个矩形，且使分割出的每个矩形的长与宽的比与原矩形的长与宽的比相同，即 $\frac{AE}{AD}=\frac{AD}{AB}$，那么 a 的值应当是多少？

解：根据题意可知，$AB=a$ m，$AE=\frac{1}{3}a$ m，$AD=1$ m.

$\because \frac{AE}{AD}=\frac{AD}{AB}$，

$\therefore \frac{\frac{1}{3}a}{1}=\frac{1}{a}$，

即 $\frac{1}{3}a^2=1$.

$\therefore a^2=3$.

开平方，得 $a=\sqrt{3}$（$a=-\sqrt{3}$ 舍去）.

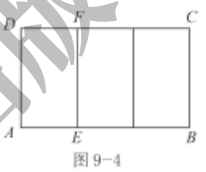


图 9-4

想一想

如果三个数 a，b，c（a，b，c 都不等于零）满足 $b^2=ac$，那么，a，b，b，c 是否成比例？

议一议

在引出成比例线段的概念之后，教科书进而研究比例的基本性质.

线段的比是线段长度的比，因此，可以从数的角度研究比例性质，进而实现对成比例线段的研究.

从用小写字母 a，b，c，d 表示线段，到用 a，b，c，d 表示数，完成从“形”到“数”的转换，进而为后面从数的角度讨论比例性质作准备.

第一个问题可以根据等式的基本性质，在 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 两边同时乘 bd，得到 $ad=bc$，这个方法学生熟悉，容易想到，教学中要给予肯定. 另外，从有助于今后学习的角度考虑，这里还可以介绍引入比值 k 的方法：设 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$，那么 $a=kb$，$c=kd$，因此 $ad=kb\cdot d=b\cdot kd=bc$.

对于第二个问题，要注意：由 $ad=bc$ 得出 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 是有条件的，即要求 $b\neq 0$，$d\neq 0$. 类似地，还可以得到 $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$，$\frac{c}{a}=\frac{d}{b}$ 等.

[1]从“做一做”中用大写字母表示具体的线段，到用小写字母 a，b，c，d 一般地表示四条线段，在得出成比例线段定义的同时，完成从特殊到一般的抽象.

教学中要引导学生注意，四条线段成比例与这四条线段的排列顺序有关.

[2]这一结论称为比例的基本性质. 教学时应引导学生理解性质的内容，而不必要求学生死记性质的名称.

山东教育出版社

[3]这一结论与比例的基本性质是互逆关系. 需要说明的是，由于本章主要研究线段的比，同时也为了方便变形，因此这里规定a，b，c，d都不等于0. 实际上，只就这一结论本身而言，a与c可以等于0.

例 1

本例提供了应用比例基本性质的一个具体情境，注意引导学生阅读、理解题意.

想一想

若三个不等于零的数a，b，c满足$b^2=ac$，可以得到$\frac{b}{c}=\frac{a}{b}$，或者$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$，因此a，b，b，c成比例，此时，称为b是a，c的比例中项. 教学时应引导学生理解比例中项的意义，而不必要求学生死记名称. 由$b^2=ac$，得到$b=\pm\sqrt{ac}$，这就是说，两个同号的数a，c的比例中项有互为相反数的两个，例如：4与9的比例中项为$\pm\sqrt{4\times9}=\pm6$，6和-6都是4与9的比例中项. 当a，b，c都限定为正数时（例如线段的长），a与c的比例中项只有一个.

山东教育出版社

随堂练习

1. 地图上，图上长度与实际长度的比通常称为比例尺，如1∶10 000，意为图上是1 cm，实际长度为10 000 cm. 举例略.
2. 5∶1.
3. $d = 4$ cm.

习题9.1

1. $AD = \frac{72}{11}$ cm.
   提示：设 $AD = x$ cm，则 $DB = (12 - x)$ cm，由 $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$，得 $\frac{x}{12-x} = \frac{6}{5}$，解得 $x = \frac{72}{11}$.
2. 是成比例线段.
3. 成立，将比例式 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 化为 $ad = bc$ 或 $bc = ad$，再经适当变形. 就可得到（1）、（2）、（3）式.
4. 原来矩形长边与短边的比为 $\sqrt{2}$ ∶ 1.
   提示：根据题意，得 $AE = \frac{1}{2}AB$，$\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AD}$. 将 $AE = \frac{1}{2}AB$ 代入 $\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AD}$，得 $\frac{AB^2}{AD^2} = 2$，开平方得 $\frac{AB}{AD} = \sqrt{2}$（$\frac{AB}{AD} = -\sqrt{2}$ 舍去）.

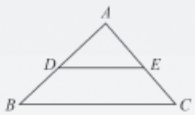
随堂练习

1. 你知道地图比例尺的含义吗？生活中还有哪些利用线段比的实例？
2. 一条线段的长度是另一条线段的5倍，求这两条线段的比.
3. a，b，c，d 是成比例线段，其中 $a = 3$ cm，$b = 2$ cm，$c = 6$ cm，求线段 d 的长.

习题 9.1

知识技能

1. 如图，在△ABC 中，$AB = 12$ cm，$AE = 6$ cm，$EC = 5$ cm，且 $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$，求 AD 的长.



（第1题）

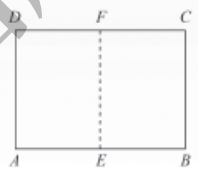
2. 已知线段 $a = 1$ cm，$b = 1.8$ cm，$c = 3.5$ cm，$d = 6.3$ cm，这四条线段是成比例线段吗？

数学理解

3. 如果 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$，$a$，$b$，$c$，$d$ 都不等于零，那么下列各式成立吗？为什么？
（1）$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$；　（2）$\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$；　（3）$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

问题解决

4. 如图，将一张矩形纸片沿它的长边对折（EF 为折痕），得到两个全等的小矩形. 如果小矩形长边与短边的比等于原来矩形长边与短边的比，那么原来矩形的长边与短边的比是多少？



（第4题）

观察图9-5和图9-6，回答下列问题：
（1）在图9-5中，已知 $\frac{BD}{AD} = \frac{CE}{AE} = \frac{1}{2}$，你能求出 $\frac{BD+AD}{AD}$ 与 $\frac{CE+AE}{AE}$

第2课时学习合比性质和等比性质. 教科书先从“形”到“数”，进而得出一般性结论.

除合比性质与等比性质外，比例的性质还有很多. 综合考虑《标准》对这部分内容的要求定位及在后续学习中的作用等因素，教科书在本课时只介绍了等比性质与合比性质，对其他性质则没有提及. 习题9.2 的第3题中的结论实际上就是比例的合比性质（或称合分比性质），教学时可根据学生的实际情况选择是否正式介绍.

山东教育出版社

的值吗？它们有怎样的关系？如果 $\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{CE}$，那么 $\frac{AB-BD}{BD}$ 与 $\frac{AC-CE}{CE}$ 有怎样的关系？在求解过程中，你有什么发现？

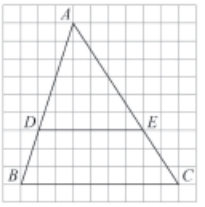


图 9-5

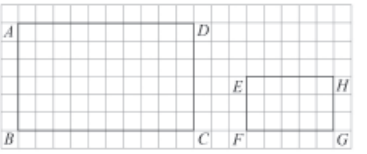


图 9-6

（2）在图 9-6 中，$\frac{AB}{EF}$，$\frac{BC}{FG}$，$\frac{CD}{GH}$，$\frac{AD}{EH}$ 的值相等吗？$\frac{AB+BC+CD+AD}{EF+FG+GH+EH}$ 的值又是多少？在求解过程中，你有什么发现？

议一议

已知 a，b，c，d，e，f 六个数.

（1）如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么 $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ 和 $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ 成立吗？为什么？

（2）如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$（$b+d+f\neq 0$），那么 $\frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{a}{b}$ 成立吗？为什么？



在问题（1）中，$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ 是成立的. 理由如下：

设 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$，则 $a=kb$，$c=kd$，

$\therefore \frac{a+b}{b}=\frac{kb+b}{b}=\frac{(k+1)b}{b}=k+1$，

$\frac{c+d}{d}=\frac{kd+d}{d}=\frac{(k+1)d}{d}=k+1$.

$\therefore \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$.

你是怎么想的？请你尝试完成其他问题的解答，并与同伴交流.

教科书首先以两个形状相同的三角形和两个形状相同的矩形为素材，从“形”的角度引导学生探究合比和等比性质. 同时，通过这一素材还可以帮助学生了解这两个性质的几何背景，认识学习这一性质的必要性.

议一议

此处明确 a，b，c，d，e，f 是六个数，由具体的“形”转入一般的“数”，继续研究合比和等比性质.

教学时可放手让学生自主探究，通过运算验证结论的正确性. 同时，要注意引导学生思考：为什么要求 $b+d+f\neq 0$？

需要说明的是，在推导比例的性质时，可能会有多种方法，但与一些技巧性较强的方法相比，引入比值 k 的方法可以说是一种通法. 教学时，一方面要突出这种通法，另一方面也可以鼓励学生思考其他推导方法.

山东教育出版社

[1]在讨论了 a，b，c，d，e，f 六个数的基础上，将结论推广至无限的情况，从有限到无限，得出等比性质.

例 2

本例是合比性质和等比性质的简单应用. 问题（2）的背景实际上是相似三角形的周长比与相似比的关系. 当然，此处不必、也不能提及相似三角形及其性质.

教科书呈现了推理的完整过程，教学时可根据学生的实际情况提出恰当的要求.

随堂练习

1. 解由 $\frac{a-b}{a}=\frac{1}{7}$，得
$7a-7b=a$，$6a=7b$，
$\frac{a}{b}=\frac{7}{6}$.

2. $\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$.

如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么 $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$，$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$.

如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\cdots=\frac{m}{n}$（$b+d+\cdots+n\neq 0$），那么 $\frac{a+c+\cdots+m}{b+d+\cdots+n}=\frac{a}{b}$.[1]

例 2 （1）已知 $\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$，求 $\frac{a+b}{b}$ 与 $\frac{a-b}{b}$ 的值；

（2）在△ABC 与△DEF 中，若 $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{CA}{FD}=\frac{3}{4}$，且△$ABC$ 的周长为 18 cm，求△DEF 的周长.

解：（1）$\because \frac{a}{b}=\frac{2}{3}$，

$\therefore \frac{a+b}{b}=\frac{2+3}{3}=\frac{5}{3}$，$\frac{a-b}{b}=\frac{2-3}{3}=-\frac{1}{3}$.

（2）$\because \frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{CA}{FD}=\frac{3}{4}$，

$\therefore \frac{AB+BC+CA}{DE+EF+FD}=\frac{AB}{DE}=\frac{3}{4}$.

$\therefore 4(AB+BC+CA)=3(DE+EF+FD)$，

即 $DE+EF+FD=\frac{4}{3}(AB+BC+CA)$.

又 $\because$ △ABC 的周长为 18 cm，即 $AB+BC+CA=18$ cm，

$\therefore DE+EF+FD=\frac{4}{3}(AB+BC+CA)=\frac{4}{3}\times 18=24$（cm），

即 △DEF 的周长为 24 cm.

随堂练习

1. 已知 $\frac{a-b}{a}=\frac{1}{7}$，求 $\frac{a}{b}$ 的值.

2. 已知 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{2}{3}$（$b+d\neq 0$），求 $\frac{a+c}{b+d}$ 的值.

山东教育出版社

习题 9.2

知识技能

1. (1) 已知 $\frac{a}{b}=2$，求 $\frac{a+b}{b}$ 与 $\frac{a-b}{b}$ 的值；

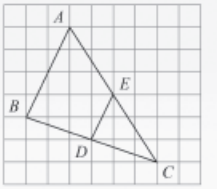
(2) 已知 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{3}{5}$ $(b+d+f\neq 0)$，求 $\frac{a+c+e}{b+d+f}$ 的值.

2. 如图，已知每个小方格的边长均为 1.

(1) 求 AB，DE，BC，DC，AC，EC 的长；

(2) 求 $\frac{AB}{DE}$，$\frac{BC}{DC}$，$\frac{AC}{EC}$ 的值；

(3) 计算 $\triangle ABC$ 与 $\triangle EDC$ 的周长比.



(第 2 题)

数学理解

3. 小明认为：

(1) 如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ $(a+b\neq 0,\ c+d\neq 0)$，那么 $\frac{a}{b+a}=\frac{c}{d+c}$；

(2) 如果 $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$，那么 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

这两个结论正确吗？为什么？

2 平行线分线段成比例

[1]在图 9-7 中，小方格的边长均为 1，直线 $l_1 // l_2 // l_3$，分别交直线 m，n 于格点 A_1，A_2，A_3，B_1，B_2，B_3.

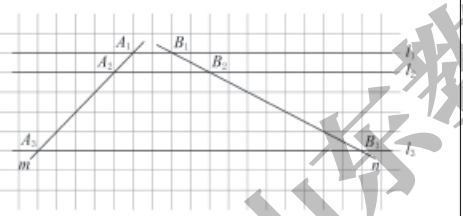


图 9-7

习题9.2

1. (1) $\frac{a+b}{b}=\frac{a}{b}+1=3$，

$\frac{a-b}{b}=\frac{a}{b}-1=1$；

(2) $\frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{a}{b}=\frac{3}{5}$.

2. (1) $AB=2\sqrt{5}$，$DE=\sqrt{5}$，

$BC=2\sqrt{10}$，$DC=\sqrt{10}$，

$AC=2\sqrt{13}$，$EC=\sqrt{13}$；

(2) $\frac{AB}{DE}=2$，$\frac{BC}{DC}=2$，$\frac{AC}{EC}=2$；

(3) $\triangle ABC$ 的周长 $=AB+BC+AC=2(\sqrt{5}+\sqrt{10}+\sqrt{13})$，$\triangle EDC$ 的周长 $=DE+DC+EC=\sqrt{5}+\sqrt{10}+\sqrt{13}$，所以 $\triangle ABC$ 与 $\triangle EDC$ 的周长比为 2 : 1.

3. 都正确. 有多种证明方法，如

(1) 可以设 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$，

(2) 可由 $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ 得到 $\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$.

从而 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

教学目标

1. 探索并掌握基本事实“两条直线被一组平行线所截，所得的对应线段成比例”及其推论.

2. 进一步体会由特殊到一般的归纳推理的思想和方法.

本节学习平行线分线段成比例，呈现的顺序是：特殊 → 一般 → 特殊. 具体来讲，教科书首先引导学生借助方格纸这一工具，通过观察、计算，由特殊到一般地逐步归纳、猜想，进而明确“平行线分线段成比例”的基本事实;然后把这一基本事实特殊化(应用在三角形中),得到它的一个推论，从而为后面证明相似三角形判定定理作准备.

[1]由特殊到一般，逐步归纳出平行线分线段成比例的基本事实.

山东教育出版社

问题（1）和问题（2）是两种特殊情况：平行线与两条直线的交点都在格点上，这样便于通过计算得出结论. 教学时，教师可以多呈现几种类似的情况，以便于学生进行归纳、猜想.

在此基础上，问题（3）则更一般化，学生无法通过计算得到结论，但可以根据上面的特殊情况进行大胆的归纳、猜想.

需要说明的是，在数学中，平行线分线段成比例的结论是一个定理，它是研究相似形的最重要、最基本的工具. 关于这一定理的证明，涉及无理数理论、极限思想等，初中学生一般难以接受. 因此，《标准》将它作为一个基本事实，不需要证明. 教科书在这里通过引导学生经历由特殊到一般的探索，一方面可以使学生认可这个基本事实，另一方面也有助于学生进一步积累数学活动经验. 教学中，要引导学生进一步认识到：归纳需要更多的特殊情况作为基础.

（1）计算 $\frac{A_1A_2}{A_2A_3}$，$\frac{B_1B_2}{B_2B_3}$ 的值，你有什么发现？

（2）将 l_2 向下平移到图 9−8 的位置，直线 m，n 与 l_2 的交点分别为 A_2，B_2，你在问题（1）中发现的结论还成立吗？如果将 l_2 平移到其他位置呢？

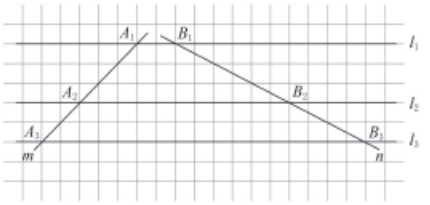


图 9−8

（3）在平面上任意作三条平行线，用它们截两条直线，截得的线段成比例吗？

两条直线被一组平行线所截，所得的对应线段成比例.

本教科书将上述结论作为基本事实.

做一做

如图 9−9，直线 $a\parallel b\parallel c$，分别交直线 m，n 于点 A_1，A_2，A_3，B_1，B_2，B_3. 过点 A_1 作直线 n 的平行线 l，分别交直线 b，c 于点 C_2，C_3（如图 9−10），图 9−10 中 m 与 l 上有哪些成比例线段？

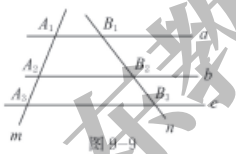


图 9−9

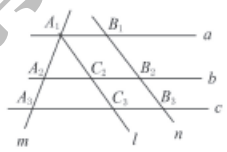


图 9−10

做一做

通过作平行线构造三角形，将平行线分线段成比例的基本事实特殊化，从而得到它的一个推论.

在图 9 − 10 中，运用平行线分线段成比例的基本事实及平行四边形两组对边分别相等的性质，即可得到 $\triangle A_1C_3A_3$ 中成比例的线段.

山东教育出版社

[1] **推论**　平行于三角形一边的直线与其他两边相交，截得的对应线段成比例.

例　如图 9−11，在△ABC 中，E，F 分别是 AB 和 AC 上的点，且 $EF/\!/BC$.

（1）如果 $AE=7$，$EB=5$，$FC=4$，那么 AF 的长是多少？

（2）如果 $AB=10$，$AE=6$，$AF=5$，那么 FC 的长是多少？

解：（1）$\because EF/\!/BC$，

$\therefore \dfrac{AE}{EB}=\dfrac{AF}{FC}$.

$\because AE=7$，$EB=5$，$FC=4$，

$\therefore AF=\dfrac{AE\cdot FC}{EB}=\dfrac{7\times 4}{5}=\dfrac{28}{5}$.

（2）$\because EF/\!/BC$，

$\therefore \dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AF}{AC}$.

$\because AB=10$，$AE=6$，$AF=5$，

$\therefore AC=\dfrac{AB\cdot AF}{AE}=\dfrac{10\times 5}{6}=\dfrac{25}{3}$.

$\therefore FC=AC-AF=\dfrac{25}{3}-5=\dfrac{10}{3}$.

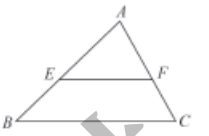
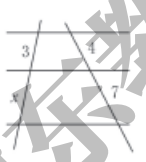


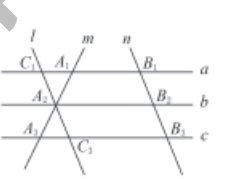
图 9−11

随堂练习

1. 已知两条直线被三条平行线所截，截得线段的长度如图所示，求 x 的值.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 在图 9−9 中，过点 A_2 作直线 n 的平行线 l，分别交直线 a，c 于点 C_1，C_2，如图，你发现 m 与 l 上有哪些成比例线段？

[1] 这个推论是后面证明相似三角形判定定理的基础. 教学时要注意对“截得的对应线段”中“截得”的理解，以教科书图 9−10 为例，“截得的对应线段”不必也不能涉及 A_2C_2 与 A_3C_3.

例

本例是平行线分线段成比例的推论的简单应用，一方面是为了巩固对推论的理解，另一方面也为后面证明相似三角形的判定定理做铺垫.

随堂练习

1. $\dfrac{3}{x}=\dfrac{4}{7}$，$x=\dfrac{21}{4}$.

2. $\dfrac{A_1A_2}{A_2A_3}=\dfrac{C_1A_2}{A_2C_3}$，$\dfrac{A_1A_2}{A_1A_3}=\dfrac{C_1A_2}{C_1C_3}$，$\dfrac{A_2A_3}{A_1A_3}=\dfrac{A_2C_3}{C_1C_3}$.

山东教育出版社

读一读

在计算机上可以清楚直观地验证“两条直线被一组平行线所截，所得到的对应线段成比例”这一基本事实.

读一读

计算机帮你做实验

我们知道，在方格纸上可以得出“两条直线被一组平行线所截，所得的对应线段成比例”的基本事实，但那只是在一些特殊情况下（平行线之间的距离为整数）得出的结论. 为了说明这一基本事实在任何情况下都正确，我们可以在计算机上做实验.

打开“几何画板”的绘图窗口，任意画三条平行线 a，b，c 和两条直线 m，n，使直线 m，n 分别与平行线 a，b，c 相交于点 A，B，C，D，E，F（如图 9-12），分别度量出线段 AB，BC，DE，EF 的长度，再计算出 $\frac{AB}{BC}$，$\frac{DE}{EF}$ 的值. 任意拖动平行线 a，b，c 和直线 m，n，我们发现 $\frac{AB}{BC}$ 与 $\frac{DE}{EF}$ 的值总是相等，即总有 $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$. 这就验证了任何情况下“两条直线被一组平行线所截，所得的对应线段成比例”都是正确的.

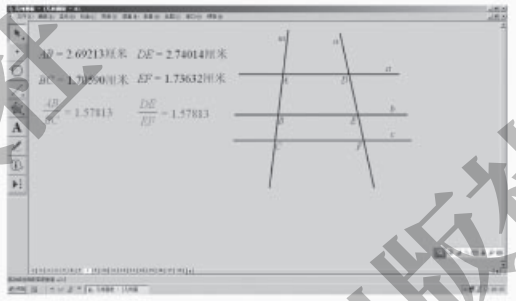


图 9-12

有兴趣的同学可以试一试！

习题9.3

1.（1）由已知得 $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$，即 $\frac{5}{7}=\frac{DE}{4}$，所以 $DE=\frac{20}{7}$.

（2）由已知得 $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$，即 $\frac{5}{BC}=\frac{6}{7}$，所以 $BC=\frac{35}{6}$，$AC=AB+BC=\frac{65}{6}$.

习题 9.3

知识技能

1. 如图，已知 $l_1 // l_2 // l_3$，

（1）在图（1）中，$AB=5$，$BC=7$，$EF=4$，求 DE 的长；

（2）在图（2）中，$DE=6$，$EF=7$，$AB=5$，求 AC 的长.

山东教育出版社

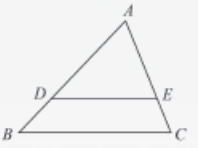


(第1题)

2. 如图，在△ABC中，D，E分别是AB和AC上的点，且$DE/\!/BC$.

(1) 如果$AD=3.2$ cm，$DB=1.2$ cm，$AE=2.4$ cm，那么EC的长是多少？

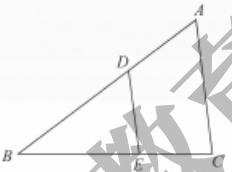
(2) 如果$AB=5$ cm，$AD=3$ cm，$AC=4$ cm，那么EC的长是多少？



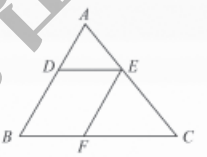
(第2题)

问题解决

3. 如图，在△ABC中，D，E分别是AB和BC上的点，且$DE/\!/AC$，$\frac{AB}{BE}=\frac{AC}{EC}$，$\frac{AB}{AC}=\frac{5}{3}$，求$\frac{AB}{BD}$.



(第3题)



(第4题)

4. 如图，在△ABC中，D，E，F分别是AB，AC，BC上的点，且$DE/\!/BC$，$EF/\!/AB$，$AD:DB=2:3$，$BC=20$ cm，求BF的长.

2.(1) 由已知得$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$，即$\frac{3.2}{1.2}=\frac{2.4}{EC}$，所以$EC=0.9$ cm；

(2) 由已知得$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$，即$\frac{3}{5}=\frac{AE}{4}$，所以$AE=\frac{12}{5}$ cm，$EC=AC-AE=\frac{8}{5}$ cm.

3. $\frac{AB}{BD}=\frac{8}{5}$.

提示：由$\frac{AB}{BE}=\frac{AC}{EC}$，

得$\frac{BE}{EC}=\frac{AB}{AC}=\frac{5}{3}$；

由$DE/\!/AC$，

得$\frac{AB}{BD}=\frac{BC}{BE}=\frac{5k+3k}{5k}=\frac{8}{5}$.

4. $BF=8$ cm.

提示：由$DE/\!/BC$，

得$\frac{AE}{EC}=\frac{AD}{DB}=\frac{2}{3}$，

所以$\frac{EC}{AE}=\frac{3}{2}$；

由$EF/\!/AB$，

得$\frac{FC}{BF}=\frac{EC}{AE}=\frac{3}{2}$，

所以$\frac{BC}{BF}=\frac{AC}{AE}=\frac{AE+EC}{AE}=\frac{3+2}{2}=\frac{5}{2}$.

所以$\frac{20}{BF}=\frac{5}{2}$，得$BF=8$ cm.

山东教育出版社

教学目标

1. 经历相似多边形概念的形成过程，了解相似多边形的含义.

2. 进一步发展归纳、类比、反思、交流等方面的能力，提高数学思维水平，体会反例的作用.

本节主要通过观察、操作、思考，使学生认识相似多边形的本质特征. 教科书呈现的顺序是：通过生活中的情境，引导学生观察两个形状相同的多边形的角、边的关系→相似多边形的定义、符号表示→相似比的定义→相似多边形定义的应用（判定相似多边形）.

[1]教科书以计算机显示屏上的多边形及其投射到银幕上的多边形为情境，让学生观察形状相同的两个多边形的形状. 在此基础上，通过两个问题，引导学生关注角和边，将思考引向深入，为后面概括出相似多边形的本质特征做铺垫.

3 相似多边形



[1]图 9−13 中的两个多边形分别是电脑屏幕上的多边形 $ABCDEF$ 和投射到银幕上的多边形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$，它们的形状相同吗？

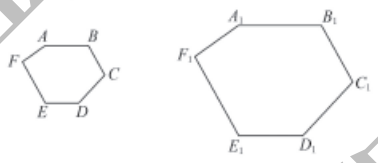


图 9−13

（1）在这两个多边形中，是否有相等的内角？设法验证你的猜测.

（2）在这两个多边形中，夹相等内角的两边是否成比例？

[2]图 9−13 中的六边形 $ABCDEF$ 与六边形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 是形状相同的多边形，其中 $\angle A$ 与 $\angle A_1$，$\angle B$ 与 $\angle B_1$，$\angle C$ 与 $\angle C_1$，$\angle D$ 与 $\angle D_1$，$\angle E$ 与 $\angle E_1$，$\angle F$ 与 $\angle F_1$ 分别对应相等，称为对应角；AB 与 A_1B_1，BC 与 B_1C_1，CD 与 C_1D_1，DE 与 D_1E_1，EF 与 E_1F_1，FA 与 F_1A_1 的比都相等，称为对应边.

[3]各角分别相等，各边成比例的两个多边形叫做**相似多边形**（similar polygons）. 例如，在图 9−13 中，六边形 $ABCDEF$ 与六边形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 相似，记作六边形 $ABCDEF \backsim$ 六边形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$，“$\backsim$”读作“相似于”. 在记两个多边形相似时，要把表示对应顶点的字母写在对应的位置上.

对于问题（1），学生根据生活经验和直观判断容易得出结论，应鼓励学生用自己的方法验证所得到的结论. 例如，可以用量角器度量；还可以把两个多边形画在透明纸上，然后剪下来把对应的角重叠在一起进行比较.

问题（2）的结论不如问题（1）的结论那样直观易得. 教学时，可以引导学生通过度量比较的方法获得结论. 当然，度量会有误差，因此若条件允许，可以在学生实际度量的基础上，用多媒体课件进行演示，使学生对有关结论确信不疑.

教学时，还可以再提供一些形状相同的多边形，引导学生观察、操作、思考.

[2]借助两个形状相同的具体多边形介绍对应角、对应边的含义.

山东教育出版社

[3]在对形状相同的多边形的形状特点进行观察与思考的基础上，引导学生概括出相似多边形的本质特征.

相似多边形的定义，既是最基本、最重要的相似多边形的判定方法，也是最本质、最重要的相似多边形的性质. 这一点，应使学生有充分认识，以便在学习相似三角形定义后，会将定义用于相似三角形的判定与性质的讨论.

相似符号“∽”读作“相似于”. 这里要提醒学生注意:在用相似符号记两个多边形相似时，之所以把表示对应角顶点的字母写在对应的位置上，是因为这样可以一目了然地知道它们的对应角和对应边（与全等形的记法类似）.

山东教育出版社
山东教育出版社

相似多边形对应边的比叫做**相似比**（similarity ratio）. 例如，五边形 $ABCDE \backsim$ 五边形 $A_1B_1C_1D_1E_1$，对应边 $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CD}{C_1D_1}=\frac{DE}{D_1E_1}=\frac{EA}{E_1A_1}=\frac{4}{5}$，因此五边形 $ABCDE$ 与五边形 $A_1B_1C_1D_1E_1$ 的相似比为 $k_1=\frac{4}{5}$，五边形 $A_1B_1C_1D_1E_1$ 与五边形 $ABCDE$ 的相似比为 $k_2=\frac{5}{4}$.

想一想

（1）任意两个等边三角形相似吗？任意两个正方形呢？任意两个正 n 边形呢？

（2）任意两个菱形相似吗？为什么？

（3）任意两个矩形相似吗？为什么？

做一做

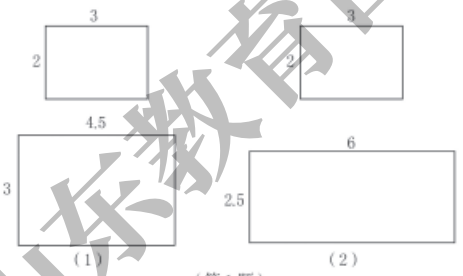
一块长 3 m、宽 1.5 m 的矩形黑板如图 9−14 所示，镶在其外围的木质边框宽 7.5 cm. 边框的内外边缘所围成的矩形相似吗？为什么？



图 9−14

随堂练习

1. 图中每组两个矩形相似吗？说说你的理由.



（第 1 题）

想一想

判断两个正多边形的相似性，以及两个菱形和两个矩形的相似性，巩固对相似多边形概念的理解.

问题（1）的设计，既是相似多边形定义的直接应用，同时从等边三角形到正方形，再到正 n 边形，又体现了从特殊到一般的归纳推理的过程.

问题（2）的设计，仍然是考查学生对相似多边形定义的理解. 任意两个菱形满足“各边成比例”，但不一定满足“各角分别相等”的条件. 因此，任意两个菱形不一定相似.

问题（3）中，任意两个矩形满足各角分别相等，但各边不一定成比例，因此不一定相似.

做一做

不相似，因为两个矩形的各边不成比例.

这是一个容易出错的问题，因为人们往往会凭直观认为这两个矩形形状相同. 这一问题可以使学生再次加深对相似多边形定义的理解，还可以使学生进一步体会：直观感知的结论有时候是不可靠的.

任意两个菱形“各边成比例”，但不一定“各角分别相等”；矩形则正好相反：任意两个矩形“各角分别相等”，但不一定“各边成比例”. 菱形和矩形从两个方面说明了，“各角分别相等”和“各边成比例”是刻画多边形相似的两个本质特征，二者缺一不可.

随堂练习

1. 第（1）组的两个矩形相似；第（2）组的两个矩形不相似. 可根据相似多边形定义判断并说明理由.

山东教育出版社

2. 小明说长与宽的比相等的矩形都相似. 他说的对吗?

3. 如图，一个矩形广场的长为 60 m，宽为 40 m，广场周围两条纵向小路的宽均为 1.5 m，如果设两条横向小路的宽都为 x m，那么当 x 为多少时，小路内外边缘所围成的两个矩形相似?



（第 3 题）

读一读

纸张的大小

如图 9-15，如果将一张长、宽之比等于 $\sqrt{2}$ 的矩形纸 $ABCD$ 依次不断对折，可以得到矩形纸 $BCFE$，$AEML$，$GMFH$，$LGPN$.

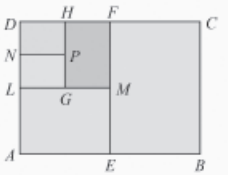


图 9-15

纸张尺寸表

规　格	尺寸（mm × mm）
A_0	841 × 1 189
A_1	594 × 841
A_2	420 × 594
A_3	297 × 420
A_4	210 × 297
A_5	148 × 210
A_6	105 × 148
A_7	74 × 105
A_8	52 × 74
A_9	37 × 52
A_{10}	26 × 37

（1）矩形 $ABCD$，$BCFE$，$AEML$，$GMFH$，$LGPN$ 的长与宽之比改变了吗?

（2）你认为这些大小不同的矩形相似吗?

事实上，这些矩形都是相似四边形，它们的长与宽之比始终保持不变. 有趣的是，印刷业经常提及的对开、4 开、8 开、16 开……的纸正是按照上面的方式，将一整张平板纸依次不断对折所得到的.

纸张的大小有国际公认的规格，即 A_0，A_1，…，A_{10}，A_1 的面积为 A_0 的一半，A_2 的面积又是 A_1 的一半，依次类推.

A_0 型纸的面积为 1 m^2，其尺寸为 841 mm × 1 189 mm. 这样，A_1，A_2，…，A_{10} 各种规格的尺寸就确定了（见上表）.

测量一种报纸或一本书的长与宽，计算出长与宽的比，看看是不是约等于 $\sqrt{2}$?

2. 小明说得对. 因为矩形的各个角都相等（90°），对边相等，只要一组邻边对应成比例就可以了. 设矩形 $ABCD$ 与 $A'B'C'D'$ 中，$\frac{AB}{AD}=\frac{A'B'}{A'D'}=k$，则 $AB=kAD$，$A'B'=kA'D'$，$\frac{AB}{A'B'}=\frac{kAD}{kA'D'}=\frac{AD}{A'D'}$，所以这两个矩形相似.

3. 当 $x=1$ 时，两个矩形相似. 提示：小路内边缘所围成的矩形的长为 $60-1.5\times2=57$（m），宽为 $(40-2x)$ m. 根据相似多边形的定义，当各边成比例时，这两个矩形相似，即 $\frac{60}{57}=\frac{40}{40-2x}$. 解得 $x=1$.

读一读

这里主要介绍一个有趣的事实，体现矩形相似的现实应用.

山东教育出版社

习题9.4

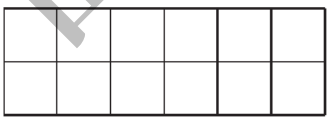
1. $EF=\frac{9}{2}$ cm，$FG=\frac{15}{2}$ cm.

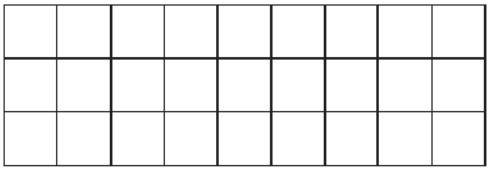
2. 菱形 $ABCD$ 与菱形 $EFGH$ 相似. 理由：菱形的四条边都相等，因此两个菱形的各边成比例；由 $\angle A=\angle E$，并根据菱形的性质，可知 $\angle A$ 的对角与 $\angle E$ 的对角相等，$\angle A$ 的邻角与 $\angle E$ 的邻角相等，即这两个菱形的四个角分别相等. 根据相似多边形的定义，可以确定菱形 $ABCD$ 与菱形 $EFGH$ 相似.

3. 新正方形与原正方形的相似比是 $\sqrt{2}$ ∶ 2.

4. 至少要用 12 张正方形纸片.

提示：因为小亮已经用了 3 张正方形纸片，还剩 27 张，因此有两种可能的拼法，如下图：

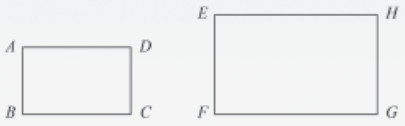




习题 9.4

知识技能

1. 如图，矩形 $ABCD\backsim$ 矩形 $EFGH$，它们的相似比是 2∶3，已知 $AB=3$ cm，$BC=5$ cm，求 EF，FG 的长.



（第 1 题）

2. 在菱形 $ABCD$ 与菱形 $EFGH$ 中，$\angle A=\angle E$，这两个菱形相似吗？为什么？

3. 顺次连接正方形各边中点，得到一个新正方形，求新正方形与原正方形的相似比.

问题解决

4. 现有大小相同的正方形纸片 30 张，小亮用其中 3 张拼成一个如图所示的长方形，小芳也想拼一个与它形状相同但比它大的长方形，则她至少要用几张正方形纸片（不得把每个正方形纸片剪开）？你知道她可能拼出什么样的图形吗？请你试着画一画.



（第 4 题）

4 探索三角形相似的条件

[1]根据相似多边形的定义，三角分别相等、三边成比例的两个三角形叫做**相似三角形**（simlar triangles）.

[2]那么，两个三角形至少满足哪些条件就相似呢？能否类比两个三角形全等的条件，寻找判定两个三角形相似的条件呢？

教学目标

1. 经历两个三角形相似条件的探索过程，增强发现问题、提出问题的意识，进一步体会类比、分类、归纳等思想与方法.

2. 了解相似三角形的判定定理.

3. 能够运用三角形相似的条件解决简单的问题，发展应用意识.

山东教育出版社

本节类比三角形全等条件的探究过程，借助几何直观分别探索三角形相似的判定条件，了解相似三角形的判定定理，并应用这些定理解决一些简单问题.

本节首先引导学生思考：判定两个三角形相似，是否一定需要相似三角形定义中的全部条件？接着类比全等三角形的条件，在分类的基础上由少到多逐步探索三角形相似的条件.

在探索三角形相似的条件时，从一开始就要高度重视引导学生对类比方法的应用，即类比三角形全等条件的探索，探索三角形相似的条件. 在探索三角形相似条件的过程中，还要让学生体会分类的思想.

本节的目的，不仅要探索出三角形相似的条件，而且还要在探索过程中让学生进一步感受相关数学思想和方法.

[1] 在上一节的基础上，本节由一般到特殊，即由相似多边形的概念顺势引出相似三角形的概念.

在得出相似三角形的概念后，要引导学生注意对概念的全面理解：两个三角形，若三角分别相等、三边成比例，则可以判定这两个三角形相似；反之，若两个三角形相似，则它们的三个角对应相等，三条边对应成比例.

[2] 这两个问题，提出了本节的主要探索任务，也提出了探索的方法或路径，即类比探索三角形全等的条件的方法，探索三角形相似的条件.

根据相似三角形的定义，具备三角分别相等、三边成比例的两个三角形是相似三角形. 那么，这些条件是否一个也不能少呢？如果能少，至少需要几个条件呢？一个条件可以吗？两个条件可以吗？……问题提出后，应给学生安排一定的思考时间，并引导学生类比探究三角形全等的条件的过程、方法，对需要探索的情况进行分类. 例如，一个条件（① 一个角相等，② 两边成比例），两个条件（③ 两角分别相等，④ 两边成比例且夹角相等，⑤ 两边成比例且其中一边的对角相等，⑥ 一边和另两边分别成比例）……从而为本节各课时的活动埋下伏笔.

想一想（下页）

承接前面的讨论，先考虑角. 从最少的条件（一个角相等）开始思考，再增加到有两角分别相等.

对于这两个问题，教师应安排学生先独立思考. 第一个问题，学生一般可以通过想象得出否定的结论；第二个问题，仅凭想象难以解决，教师可引导学生通过画图、动手操作，借助几何直观对结论进行初步猜测，然后转入下一环节进行验证.

需要指出的是，画图、动手操作不是目的，是解决问题的方法和手段，目的是发展学生的空间观念与几何直观.

山东教育出版社

做一做

意在引导学生通过探究发现“两角分别相等的两个三角形相似”的判定方法，对于这里的α，β，教学时可赋予具体的数值.

通过画图、度量、计算等，对所猜测的结论进行验证，这是用合情推理推测结论的一个重要环节. 当然,度量会有误差，因此若条件允许，可以在学生实际动手验证的基础上，用多媒体课件进行演示，使学生对这一结论确信不疑.

[1]这一结论可以视为“定理”，教学时可向学生说明：可以证明，这个结论是正确的，证明的过程在下一节介绍，是选学内容.

例 1

本例是上述判定定理的简单应用.

考虑到这个问题比较简单，教学时可用综合法分析解题思路，即从条件“$DE \parallel BC$”入手.

想一想

如果两个三角形只有一个角相等，它们一定相似吗？如果有两个角分别相等呢？

做一做

与同伴合作，两个人分别画$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$，使得$\angle A$和$\angle A'$都等于$\angle\alpha$，$\angle B$和$\angle B'$都等于$\angle\beta$，此时，$\angle C$与$\angle C'$相等吗？三边的比$\frac{AB}{A'B'}$，$\frac{AC}{A'C'}$，$\frac{BC}{B'C'}$相等吗？这样的两个三角形相似吗？

改变$\angle\alpha$，$\angle\beta$的大小，再试一试.

两角分别相等的两个三角形相似.[1]

例 1 如图 9-16，D，E分别是$\triangle ABC$的边AB，AC上的点，$DE \parallel BC$，$AB=7$，$AD=5$，$DE=10$，求BC的长.

解：$\because DE \parallel BC$，

$\therefore \angle ADE=\angle B$，$\angle AED=\angle C$.

$\therefore \triangle ADE \backsim \triangle ABC$（两角分别相等的两个三角形相似）.

$\therefore \frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}$.

$\therefore BC=\frac{AB\cdot DE}{AD}=\frac{7\times 10}{5}=14$.

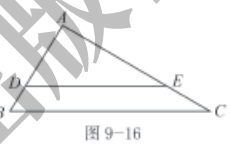


图 9-16

随堂练习

1. 有一个锐角相等的两个直角三角形是否相似？为什么？
2. 顶角相等的两个等腰三角形是否相似？为什么？

随堂练习

1. 相似. 理由是:直角相等,一锐角相等,即有两角分别相等,根据“两角分别相等的两个三角形相似”可知这两个三角形相似.

   可能有学生利用直角三角形的性质得出另一个锐角相等，从而由两个锐角相等说明这两个三角形相似. 对此，首先要肯定这种方法是正确的，但也要引导学生进一步思考、分析，简化解题过程.
2. 相似. 因为顶角相等，两个底角也分别相等.

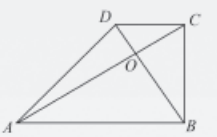
山东教育出版社

习题 9.5

知识技能

1. 在△*ABC*与△*DEF*中，∠*A*=∠*D*=70°，∠*B*=60°，∠*E*=50°，这两个三角形相似吗？为什么？

2. 如图，在梯形*ABCD*中，*AB*∥*CD*，对角线*AC*与*BD*相交于点*O*. 找出图中的相似三角形，并说明理由.



（第2题）

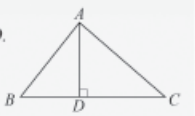
数学理解

3. 如图，在△*ABC*中，∠*BAC*=90°，*AD*⊥*BC*，垂足为点*D*.

（1）请指出图中所有的相似三角形；

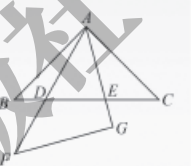
（2）你能得出$AD^2=BD\cdot DC$吗？

（3）你能得出$AB^2=BD\cdot BC$，$AC^2=DC\cdot BC$吗？



（第3题）

4. 将两个全等的等腰直角三角形摆成如图所示的样子（图中的所有点、线都在同一平面内），请在图中找出两对相似而不全等的三角形，并说明它们相似的理由.

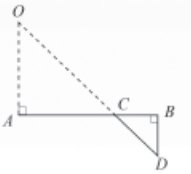


（第4题）

问题解决

5. 如图，为了测量一个大峡谷的宽度，地质勘探人员在对面的岩石上观察到一个特别明显的标志点*O*，再在他们所在的这一侧选点*A*，*B*，*D*，使得*AB*⊥*AO*，*DB*⊥*AB*，然后确定*DO*和*AB*的交点*C*. 测得*AC*=120 m，*CB*=60 m，*BD*=50 m. 你能帮助他们计算出峡谷的宽*AO*吗？





（第5题）

习题9.5

1. 相似. 根据三角形内角和定理，可得∠*C*=50°，即∠*C*=∠*E*，又已知∠*A*=∠*D*，所以△*ABC*∽△*DEF*.

2. △*ABO*∽△*CDO*. 理由是：

∵ *AB* // *CD*，

∴ ∠*OAB*=∠*OCD*，

∠*OBA*=∠*ODC*.

∴△*ABO*∽△*CDO*.

3.（1）△*ABC*∽△*DBA*，

△*ABC*∽△*DAC*，

△*DBA*∽△*DAC*.

（2）能得出$AD^2=BD\cdot DC$.

理由如下：

由（1）可知

△*DBA*∽△*DAC*，

∴ $\frac{AD}{DC}=\frac{BD}{AD}$，

即$AD^2=BD\cdot DC$.

（3）能得出，理由如下：

由（1）可知

△*ABC*∽△*DBA*

∴ $\frac{AB}{BD}=\frac{BC}{AB}$，即

$AB^2=BD\cdot BC$.

由（1）可知△*ABC*∽△*DAC*，∴ $\frac{AC}{DC}=\frac{BC}{AC}$，即$AC^2=DC\cdot BC$.

4. △*ABE*∽△*DAE*. 理由：∠*BEA*=∠*AED*，∠*B*=∠*DAE*=45°.

△*ADC*∽△*EDA*. 理由：∠*CDA*=∠*ADE*，∠*DCA*=∠*DAE*=45°.

5. *AO*=100 m.

提示：由*AB*⊥*AO*，*DB*⊥*AB*，得∠*OAC*=∠*DBC*=90°. 又∠*ACO*=∠*BCD*，所以△*ACO*∽△*BCD*. 所以$\frac{AC}{BC}=\frac{AO}{BD}$，$AO=\frac{AC\cdot BD}{BC}=\frac{120\times 50}{60}=100$(m).

山东教育出版社

第2课时继续研究三角形相似的判定方法. 前一课时讨论了角的情况，本课时进一步考虑边的情况. 教科书仍从最少条件（两边成比例）开始考虑. 只有两边成比例的两个三角形不一定相似，如两个等腰三角形就未必相似.

接下来，如果再增加一个条件，会有哪几种可能的情况呢？又是分类！教学时，可引导学生回顾上一课时一开始的分类情况，明确增加的条件可以是“一个角相等”，也可以是“另两边成比例”. 如果增加的条件是“一个角相等”，这个角既可以是成比例两边的夹角，也可以是其中一边的对角. 在此基础上，陆续展开后续的探索活动.

对于分类，建议教师不要直接给出结论，而应尽可能引导学生在独立思考的基础上，展开充分的讨论交流，让学生自主提出问题、解决问题. 这一过程既是渗透分类讨论思想方法的机会，也是积累数学活动经验的机会.

（1）两个三角形有两边成比例，它们一定相似吗？

（2）如果不相似，再增加一个条件使它们相似，可以增加哪一个？

我们先来考虑增加一个角相等的情况.

相等的角可以是其中一边的对角，也可以是两边的夹角.

做一做

（1）画$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$，使$\angle A=\angle A'$，$\frac{AB}{A'B'}$和$\frac{AC}{A'C'}$都等于给定的值k. 设法比较$\angle B$与$\angle B'$的大小（或$\angle C$和$\angle C'$）. $\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$相似吗？

（2）改变k值的大小，再试一试.

两边成比例且夹角相等的两个三角形相似.

例2 如图9−17，D，E分别是$\triangle ABC$的边AC，AB上的点，$AE=1.5$，$AC=2$，$BC=3$，且$\frac{AD}{AB}=\frac{3}{4}$，求$DE$的长.

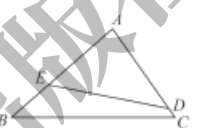


图9−17

解：$\because AE=1.5$，$AC=2$，

$\therefore \frac{AE}{AC}=\frac{3}{4}$.

$\because \frac{AD}{AB}=\frac{3}{4}$，

$\therefore \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$.

又$\because \angle EAD=\angle CAB$，

$\therefore \triangle EAD\backsim\triangle CAB$（两边成比例且夹角相等的两个三角形相似）.

$\therefore \frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB}=\frac{3}{4}$.

由$BC=3$，得

$DE=\frac{3}{4}BC=\frac{3}{4}\times 3=\frac{9}{4}$.

做一做

意在引导学生通过探究发现“两边成比例且夹角相等的两个三角形相似”的判定方法，对于这里的k，教学时可赋予具体的数值.

教科书仍然安排画图：画两个三角形，它们的两边成比例且夹角相等. 如何画才能使两边成比例？可引导学生先画一个三角形，然后分别取其中两边的$\frac{1}{k}$或k倍作为两边画三角形.

与上一课时不同时是，上一课时画图后是根据相似三角形的定义进行判断，而这时画出三角形

山东教育出版社

后，希望学生根据上一课时得到的判定定理进行判断，以达到巩固旧知、探索新知的目的.

改变k值，既可以增加可供归纳的例子，又是对所得猜想的进一步验证. 借此机会要使学生进一步明确：归纳推理不能仅仅依据一个例子，而应以尽可能多的例子为基础. 同时，对归纳得到的结论，应加以验证.

例 2

本例是对刚得到的相似三角形判定定理的一个应用，但是难度比例1稍大一些：先要证明两边成比例.

教学时要引导学生结合图形读题，弄清已知条件，特别是图形隐含的条件.

山东教育出版社
山东教育出版社

想一想

这是上面探索三角形相似的判定方法的继续，讨论“两边成比例，且其中一边的对角相等”时，两个三角形是否相似的问题.

对于这一问题，应首先鼓励学生类比探究三角形全等的条件时画“边边角”反例图的方法画图、比较，得出结论. 如果学生确有困难，教师可呈现教科书图9-18的反例.

随堂练习

（1）相似，因为两边成比例且夹角相等；

（2）不相似，因为虽有一个角相等，但夹该角的两边不成比例.

习题9.6

1. 相似，因为这两个三角形两边成比例且夹角相等.

2. 相似，因为AB ∶ $DF = BC$ ∶ $DE = 2$ ∶ 3，且$\angle B = \angle D$.

想一想

如果$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$的两边成比例，且其中一边所对的角相等，那么这两个三角形一定相似吗？

小明和小颖分别画出了如图9-18所示的三角形，由此你能得到什么结论？

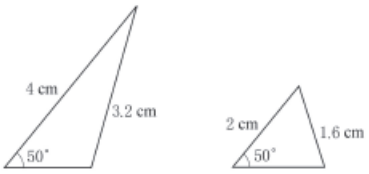


图9-18

随堂练习

如图，每组中的两个三角形是否相似？为什么？



（1） （2）

习题9.6

知识技能

1. 一个直角三角形两条直角边的长分别为6 cm，4 cm，另一个直角三角形两条直角边的长分别为9 cm，6 cm，这两个直角三角形是否相似？为什么？

2. 在$\triangle ABC$中，$\angle B = 39°$，$AB = 1.8$ cm，$BC = 2.4$ cm；在$\triangle DEF$中，$\angle D = 39°$，$DE = 3.6$ cm，$DF = 2.7$ cm. 这两个三角形相似吗？为什么？

山东教育出版社

数学理解

3. 如图，P 是△ABC 的边 AB 上的一点.

（1）如果 $\angle ACP=\angle B$，△ACP 与△ABC 是否相似？为什么？

（2）如果 $\frac{AP}{AC}=\frac{AC}{AB}$，△$ACP$ 与△ABC 是否相似？为什么？如果 $\frac{AC}{CP}=\frac{BC}{AC}$ 呢？



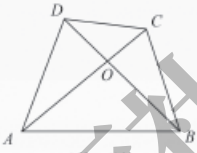
（第3题）

问题解决

4. 如图，画一个三角形，使它与△ABC 相似，且相似比为 2.



（第4题）



（第5题）

5. 如图，四边形 $ABCD$ 的两条对角线相交于点 O，$OA\cdot OC=OB\cdot OD$.

（1）找出图中的相似三角形；

（2）找出图中相等的角.

[1] 如果两个三角形的三边成比例，那么这两个三角形一定相似吗？

做一做

画△ABC 与△$A'B'C'$，使 $\frac{AB}{A'B'}$，$\frac{BC}{B'C'}$ 和 $\frac{AC}{A'C'}$ 都等于给定的值 k.

（1）设法比较 $\angle A$ 与 $\angle A'$ 的大小；

（2）△ABC 与△$A'B'C'$ 相似吗？说说你的理由.

改变 k 值的大小，再试一试.

3.（1）相似，因为 $\angle ACP=\angle B$，$\angle PAC=\angle CAB$；

（2）相似，因为 $\frac{AP}{AC}=\frac{AC}{AB}$，$\angle PAC=\angle CAB$；不相似，因为虽然两边成比例，但它们的夹角不相等.

4. 提示：画法不唯一. 例如，在 BA 的延长线、CA 的延长线上分别截取 $AD=2AB$，$AE=2AC$，连接 DE，则△ADE 与△ABC 相似，且相似比为 2.

5.（1）由 $OA\cdot OC=OB\cdot OD$ 得 $\frac{OA}{OB}=\frac{OD}{OC}$，$\frac{OA}{OD}=\frac{OB}{OC}$，又因为对顶角相等，

所以△$ABO\backsim$△DCO，

△$ADO\backsim$△BCO.

（2）$\angle BAO=\angle CDO$，

$\angle ABO=\angle DCO$，

$\angle ADO=\angle BCO$，

$\angle DAO=\angle CBO$.

[1] 通过上一课时的探究学生已经知道，只有两边成比例的两个三角形不一定相似；如果再增加一个条件，那么增加的条件可以是“一个角相等”，也可以是“另两边成比例”. 对于增加的条件是“一个角相等”的情况，上一课时已经解决. 本课时承接上一课时的内容，接着解决增加的条件是“另两边成比例”的问题. 两个三角形的两边成比例，另两边也成比例，实际上就相当于三边成比例. 因此，需要探究的问题可以表述为：如果两个三角形的三边成比例，那么这两个三角形一定相似吗？

做一做

教科书仍然安排画图：画两个三角形，它们的三边成比例. 根据条件画出三角形后，要求学生应用前面已经得出的相似三角形的判定定理进行判断，以达到巩固旧知、探索新知的目的.

同前面一样，改变 k 值，既可以增加可供归纳的例子，又是对所得猜想的进一步验证.

山东教育出版社

例 3

本例是对刚得到的相似三角形的判定定理的一个应用. 根据已知条件容易得到 $\triangle ABC \backsim \triangle ADE$，接着可引导学生观察图形，寻求 $\angle BAD$ 与 $\angle CAE$ 的关系.

议一议

以方格纸为背景呈现两个三角形，意在让学生运用不同的判定方法进行判断.

这两个三角形相似. 判断相似的方法有多种，教学时可鼓励学生用尽可能多的方法进行判断，并引导学生进行充分的交流，以帮助学生巩固所学内容，积累数学活动经验.

随堂练习

（1）不相似，因为三边不成比例；

（2）相似，因为三边成比例.

三边成比例的两个三角形相似.

例 3 如图 9–19，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 中，$\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{DE}=\frac{AC}{AE}$，$\angle BAD=20°$，求 $\angle CAE$ 的度数.

解： $\because \frac{AB}{AD}=\frac{BC}{DE}=\frac{AC}{AE}$，

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle ADE$（三边成比例的两个三角形相似）.

$\therefore \angle BAC=\angle DAE$.

$\therefore \angle BAC-\angle DAC=\angle DAE-\angle DAC$，

即 $\angle BAD=\angle CAE$.

$\because \angle BAD=20°$，

$\therefore \angle CAE=20°$.

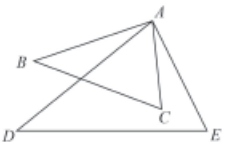


图 9–19

议一议

如图 9–20，$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 相似吗？你有哪些判断方法？

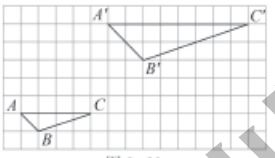
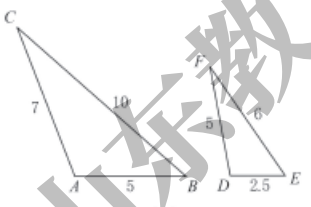


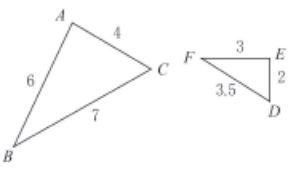
图 9–20

随堂练习

如图，每组中的两个三角形是否相似？为什么？



（1）



（2）

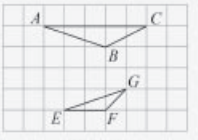
山东教育出版社

习题 9.7

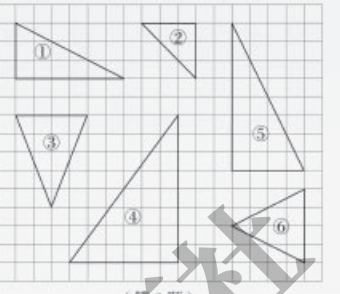
知识技能

1. 一个三角形三边的长分别为 6 cm，9 cm，7.5 cm，另一个三角形三边的长分别为 8 cm，10 cm，12 cm，这两个三角形相似吗？为什么？

2. 如图，$\triangle ABC$ 与 $\triangle EFG$ 相似吗？为什么？



（第 2 题）



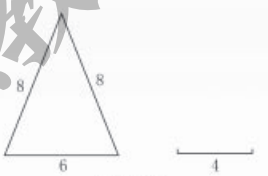
（第 3 题）

3. 如图所示的 6 个三角形中，哪些三角形相似？为什么？

数学理解

4. 在一张 8×8 的方格纸上连接三个格点，得到一个三角形．画出三对两两相似、大小不同的三角形，并指出它们的相似比．

5. 如图，已知一个等腰三角形和一条线段，以这条线段为边画三角形，使之与已知等腰三角形相似．你能画出几个形状不同的三角形？



（第 5 题）

习题9.7

1. 相似，因为这两个三角形的三边成比例：
   8 ∶ 6 = 12 ∶ 9 = 10 ∶ 7.5.
   本题的难点在于确定边的对应关系，否则容易得出错误的结论．
2. 相似．由勾股定理可得大三角形的三边长分别为5，$\sqrt{10}$，$\sqrt{5}$，小三角形的三边长分别为$\sqrt{10}$，2，$\sqrt{2}$，三边成比例：$5:\sqrt{10}=\sqrt{10}:2=\sqrt{5}:\sqrt{2}$．
3. ① 与 ⑤ 相似，因为三边成比例；其余三角形都不相似．
4. 略．
5. 能画两个（图略）：一个是以已知线段（长为 4）为底边，以长为 $\frac{16}{3}$ 的线段为腰的等腰三角形；另一个是以已知线段（长为 4）为腰，以长为 3 的线段为底边的等腰三角形．

山东教育出版社

教学目标

了解相似三角形判定定理的证明过程，发展推理能力.

本节介绍相似三角形三个判定定理的证明，属于选学内容.

[1] 本定理的证明思路是：首先在△*ABC* 的边 *AB*（或它的延长线）上截取 *AD* = *A'B'*，作 *DE* // *BC*，然后根据相似三角形的定义证明△*ADE* ∽ △*ABC*；接着证明△*ADE* ≌ △*A'B'C'*.

*5 相似三角形判定定理的证明

在上一节中，我们探索了三角形相似的条件，本节我们将对它们进行证明.

定理 两角分别相等的两个三角形相似.

已知：如图 9–21，在△*ABC* 和△*A'B'C'* 中，∠*A* = ∠*A'*，∠*B* = ∠*B'*.

求证：△*ABC* ∽ △*A'B'C'*.

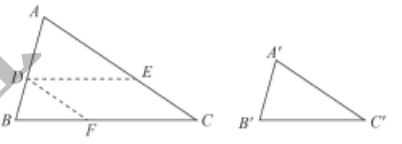


图 9–21

[1] **证明**：在△*ABC* 的边 *AB* 上截取 *AD* = *A'B'*，过点 *D* 作 *BC* 的平行线，交 *AC* 于点 *E*，则

∠*ADE* = ∠*B*，

∠*AED* = ∠*C*，

$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$（平行于三角形一边的直线与其他两边相交，截得的对应线段成比例）.

过点 *D* 作 *AC* 的平行线，交 *BC* 于点 *F*，则

$\frac{AD}{AB}=\frac{CF}{CB}$（平行于三角形一边的直线与其他两边相交，截得的对应线段成比例）.

$\therefore \frac{AE}{AC}=\frac{CF}{CB}$.

山东教育出版社

$\because DE \parallel BC$，$DF \parallel AC$，

$\therefore$ 四边形 $DFCE$ 是平行四边形.

$\therefore DE = CF$.

$\therefore \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{DE}{CB}$.

$\therefore \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{DE}{CB}$.

而 $\angle ADE = \angle B$，$\angle DAE = \angle BAC$，$\angle AED = \angle C$，

$\therefore \triangle ADE \backsim \triangle ABC$.

$\because \angle A = \angle A'$，$AD = A'B'$，$\angle ADE = \angle B = \angle B'$，

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$.

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

定理 两边成比例且夹角相等的两个三角形相似.

已知：如图 9-22，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中，$\angle A = \angle A'$，$\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'}$.

求证：$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

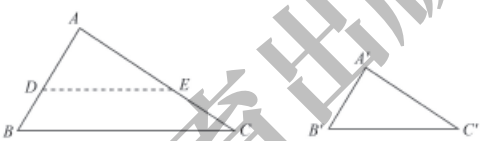


图 9-22

[1] **证明**：在 $\triangle ABC$ 的边 AB 上截取 $AD = A'B'$，过点 D 作 BC 的平行线，交 AC 于点 E，则

$\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{A'C'}$，

$\angle B = \angle ADE$，

$\angle C = \angle AED$，

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle ADE$（两角分别相等的两个三角形相似）.

$\therefore \dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AE}$.

[1] 本定理的证明思路是：首先在 $\triangle ABC$ 的边 AB（或它的延长线）上截取 $AD = A'B'$，作 $DE \parallel BC$，然后根据已经证明的定理“两角分别相等的两个三角形相似”证明 $\triangle ABC \backsim \triangle ADE$；接着证明 $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$.

本定理与前一个定理的证明过程有一些相似之处，有了前一个定理的证明作基础，证明本定理时可引导学生自主探索证明思路和证明方法.

在证明 $\triangle ABC \backsim \triangle ADE$ 时，要注意运用刚证明的判定定理，这也体现了化归、转化的思想.

山东教育出版社

$\therefore \frac{AC}{AE}=\frac{AC}{A'C'}$.

$\therefore AE=A'C'$.

又$\angle A=\angle A'$，$AD=A'B'$，

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$.

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

定理 三边成比例的两个三角形相似.

已知：如图 9−23，在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}$.

求证：$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

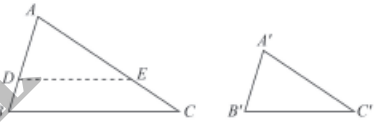


图 9−23

[1]**证明**：在$\triangle ABC$的边AB，AC上分别截取$AD=A'B'$，$AE=A'C'$，连接DE，则

$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$.

而$\angle BAC=\angle DAE$，

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle ADE$（两边成比例且夹角相等的两个三角形相似）.

$\therefore \frac{AB}{AD}=\frac{BC}{DE}$.

又$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}$，$AD=A'B'$，

$\therefore \frac{BC}{DE}=\frac{BC}{B'C'}$.

$\therefore DE=B'C'$.

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$.

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

[1]本定理的证明思路是：首先在$\triangle ABC$的边AB，AC（或它们的延长线）上截取$AD=A'B'$，$AE=A'C'$，连接DE，然后根据已经证明的定理“两边成比例且夹角相等的两个三角形相似”证明$\triangle ABC \backsim \triangle ADE$；接着证明$\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$.

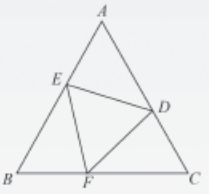
学习了前两个定理的证明之后，容易理解本定理的证明思路. 但在本定理的证明过程中，证明$\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$时要运用比例变换和等量代换，恒等变形的难度有所增加.

山东教育出版社

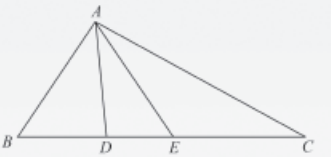
习题 9.8

知识技能

1. 如图，在等边三角形 ABC 中，D，E，F 分别是三边上的点，$AE=BF=CD$，那么 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 相似吗？请证明你的结论.



（第 1 题）



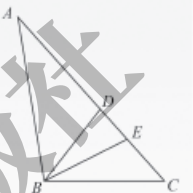
（第 2 题）

2. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中，D，E 是 BC 上的两点，$\frac{AD}{AC}=\frac{DE}{AB}=\frac{AE}{BC}$.

求证：$AB=AE$.

3. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中，D 是 AC 上的一点，$\angle CBD$ 的平分线交 AC 于点 E，且 $AE=AB$.

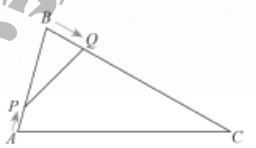
求证：$AE^2=AD\cdot AC$.



（第 3 题）

问题解决

4. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=8$ cm，$BC=16$ cm，动点 P 从点 A 开始沿 AB 边运动，速度为 2 cm/s；动点 Q 从点 B 开始沿 BC 边运动，速度为 4 cm/s. 如果 P，Q 两动点同时运动，那么何时由 P，B，Q 三点连成的三角形与 $\triangle ABC$ 相似？



（第 4 题）

习题9.8

1. 提示：由 $AE=BF=CD$，得 $BE=CF=AD$，可证 $\triangle ADE\cong\triangle BEF\cong\triangle CFD$，从而 $DE=EF=FD$，所以 $\triangle DEF$ 是等边三角形，因此 $\triangle ABC\backsim\triangle DEF$.

2. 提示：由 $\frac{AD}{AC}=\frac{DE}{AB}=\frac{AE}{BC}$，得 $\triangle ADE\backsim\triangle CAB$，

所以 $\angle B=\angle AED$，

因此 $AB=AE$.

3. 提示：由 $AE=AB$，得 $\angle ABE=\angle AEB$.

而 $\angle ABE=\angle ABD+\angle DBE$，$\angle AEB=\angle C+\angle EBC$，

由 $\angle DBE=\angle EBC$，

得 $\angle ABD=\angle C$. 于是 $\triangle ABD\backsim\triangle ACB$，所以 $\frac{AD}{AB}=\frac{AB}{AC}$，即 $AB^2=AD\cdot AC$. 由 $AE=AB$，得 $AE^2=AD\cdot AC$.

4. 0.8 s时，$\triangle QBP\backsim\triangle ABC$；2 s时，$\triangle PBQ\backsim\triangle ABC$.

提示：设同时运动 t s 时这两个三角形相似，此时 $BQ=4t$ cm，$BP=(8-2t)$ cm.

假设 $\triangle QBP\backsim\triangle ABC$，则 $\frac{BQ}{BA}=\frac{BP}{BC}$，即 $\frac{4t}{8}=\frac{8-2t}{16}$，解得 $t=0.8$；

假设 $\triangle PBQ\backsim\triangle ABC$，则 $\frac{BP}{BA}=\frac{BQ}{BC}$，即 $\frac{8-2t}{8}=\frac{4t}{16}$，解得 $t=2$.

山东教育出版社

教学目标

1. 经历探索黄金分割的过程.

2. 经历探索黄金数的过程，掌握计算黄金数的方法，感受方程思想应用的广泛性.

3. 通过黄金分割在建筑艺术等领域的应用，体会黄金分割的文化价值.

[1] 借助古希腊的建筑引出黄金分割的概念.

式子 $\frac{AC}{AB}=\frac{BC}{AC}$，又可以写成 $AC^2=AB\cdot BC$，即点 C 把线段 AB 分成的两条线段中，较长的线段 AC 是较短的线段 BC 及线段 AB 的比例中项.

例

本例是根据黄金分割、黄金比的概念，通过列一元二次方程、解一元二次方程，求黄金比的值. 本例难度不大，教学时可先鼓励学生自主求解，然后再进行交流.

6 黄金分割

[1] 图 9−24 是古希腊时期的巴台农神庙（Parthenom Temple），如果把图中用虚线表示的矩形画成图 9−25 所示的 $ABEF$，以矩形 $ABEF$ 的宽为边在其内部作正方形 $ACDF$，那么人们发现，$\frac{BE}{AB}=\frac{BC}{BE}$，也就是 $\frac{AC}{AB}=\frac{BC}{AC}$.



图 9−24

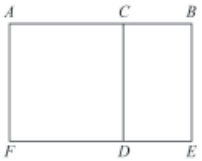


图 9−25

一般地，点 C 把线段 AB 分成两条线段 AC 和 BC（如图 9−26），如果 $\frac{AC}{AB}=\frac{BC}{AC}$，那么称线段 AB 被点 C **黄金分割**（golden section），点 C 叫做线段 AB 的黄金分割点，AC 与 AB 的比叫做黄金比.



图 9−26

例 计算黄金比.

解：由 $\frac{AC}{AB}=\frac{BC}{AC}$，得 $AC^2=AB\cdot BC$.

设 $AB=1$，$AC=x$，则 $BC=1-x$.

$\therefore x^2=1\times(1-x)$，

即 $x^2+x-1=0$.

解这个方程，得

山东教育出版社

$x_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$，$x_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$（不合题意，舍去）.

所以，黄金比 $\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$.[1]

[2]在图 9-25 中，点 C 就是线段 AB 的黄金分割点，矩形的宽 BE 与长 AB 的比等于黄金比 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

议一议

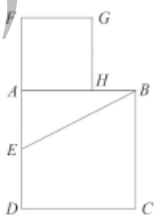
如图 9-27，在△ABC 中，$AB=AC$，$\angle BAC=108°$，D，E 在边 BC 上，AD，AE 将 $\angle BAC$ 三等分. 小明说，图中的点 D 是线段 BE 的黄金分割点，点 E 是线段 BC 的黄金分割点. 他说的对吗？为什么？与同伴交流.



图 9-27

随堂练习

采用如下方法也可以得到黄金分割点：如图，设 AB 是已知线段，在 AB 上作正方形 $ABCD$；取 AD 的中点 E，连接 EB；延长 DA 至 F，使 $EF=EB$；以线段 AF 为边作正方形 $AFGH$，点 H 就是 AB 的黄金分割点. 任意作一条线段，用上述方法作出这条线段的黄金分割点. 你能说说这种作法的道理吗？



随堂练习

作图原理如下：依题意 $EF=BE=\sqrt{AB^2+(\frac{1}{2}AB)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}AB$，

$AH=AF=EF-AE=\frac{\sqrt{5}}{2}AB-\frac{1}{2}AB=\frac{\sqrt{5}-1}{2}AB$.

故 $\frac{AH}{AB}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，所以点 H 是线段 AB 的黄金分割点.

[1]若 C 是线段 AB 上一点，且 $\frac{AC}{AB}=\frac{BC}{AC}$，或者 $AC^2=AB\cdot BC$，或者 $\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，则点 C 是线段 AB 的黄金分割点.

[2]宽与长之比等于黄金比的矩形称作黄金矩形.

议一议

这是一个十分典型的图形：通过角度计算可以发现，图中的 6 个三角形都是等腰三角形，并且△ABC∽△DBA∽△EAC，△ABE∽△DAE∽△ACD. $BD^2=BE\cdot DE$，$BE^2=BC\cdot CE$ 等. 所以 D 是线段 BE 的黄金分割点，E 是线段 BC 的黄金分割点.

山东教育出版社

读一读

目的在于展示黄金分割的典型史料，反映黄金分割的文化价值，以及在人类历史上的作用和影响.

[1] 依题意 $BD=\frac{1}{2}AB$，

$$AD=\sqrt{AB^2+BD^2}$$
$$=\sqrt{AB^2+(\frac{1}{2}AB)^2}$$
$$=\frac{\sqrt{5}}{2}AB;$$
$$AC=AE=AD-DE$$
$$=\frac{\sqrt{5}}{2}AB-\frac{1}{2}AB$$
$$=\frac{\sqrt{5}-1}{2}AB.$$

即 $\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

所以点 C 是线段 AB 的黄金分割点.

读一读

耐人寻味的 0.618

古希腊数学家、天文学家欧多克索斯（Eudoxus，约前 400—前 347）曾提出：能否将一条线段分成不相等的两部分，使较短线段与较长线段的比等于较长线段与原线段的比？这就是黄金分割问题，这个相等的比就是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0.618\,033\,988\,749\,89\cdots$. 天文学家开普勒（Johannes Kepler，1571—1630）把这种分割线段的方法称为神圣分割，并指出，毕达哥拉斯定理（勾股定理）和黄金分割“是几何中的双宝，前者好比黄金，后者堪称珠玉”. 历史上最早正式在书中使用“黄金分割”这个名称的是欧姆（Martin Ohm，1792—1872）. 19 世纪以后，“黄金分割”的说法逐渐流行起来.

在相当长的一段时期里，人们非常崇拜黄金分割. 比如，古希腊的许多矩形建筑中，宽与长的比都等于黄金比.

值得一提的是，优选法中的“0.618 法”与黄金分割紧密相关. 20 世纪 70 年代，这种方法经著名数学家华罗庚（1910—1985）的倡导在我国得到大规模推广，取得了很大的成果.

[1] 用下面的方法也可以作出一条已知线段 AB 的黄金分割点 C：

（1）经过点 B 作 $BD\perp AB$，使 $BD=\frac{1}{2}AB$；

（2）连接 AD，在 DA 上截取 $DE=DB$；

（3）在 AB 上截取 $AC=AE$.

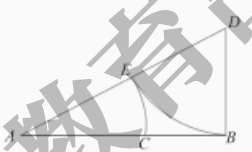


图 9-28

点 C 就是线段 AB 的黄金分割点. 你能说说其中的道理吗？

山东教育出版社

习题 9.9

问题解决

1. 如图，乐器上的一根弦 $AB = 80$ cm，两个端点 A，B 固定在乐器板面上，支撑点 C 是靠近点 B 的黄金分割点，支撑点 D 是靠近点 A 的黄金分割点. 试确定支撑点 C 到端点 B 的距离以及支撑点 D 到端点 A 的距离.



（第1题）

2. 宽与长的比等于黄金比的矩形也称为黄金矩形. 请设法作出一个黄金矩形.

3. 查阅有关黄金分割的资料，了解与之有关的意义.

习题9.9

1. 都是 $40(3-\sqrt{5})$ cm.

2. 提示：先作出一条线段的黄金分割点，然后以其中比值是黄金比的两条线段为相邻两边作一个矩形，这个矩形即为黄金矩形.

3. 略.

7 利用相似三角形测高

活动课题：利用相似三角形的有关知识测量旗杆（或路灯杆）的高度.

活动方式：分组活动、全班交流研讨.

活动工具：小镜子、标杆、皮尺等测量工具.

活动步骤：

[1] **方法 1：**利用阳光下的影子.

如图 9-29，每个小组选一名同学直立于旗杆影子的顶端处，其他人分为两部分，一部分同学测量该同学的影长，另一部分同学测量同一时刻旗杆的影长.

教学目标

1. 通过测量旗杆的高度，综合运用三角形相似的判定定理和相似三角形的定义解决问题，发展应用意识，加深对相似三角形的理解和认识.

2. 在分组合作活动及全班交流的过程中，进一步积累数学活动经验，增强数学学习的自信心.

测量某些不能直接度量的物体的高度，是综合运用相似知识的良好机会，同时，也可以很好地体现学生个性化的学习特征，实现学生之间的合作与交流.

本节内容属于活动课，建议采取活动课的形式，可以先讨论、设计方案，然后进行户外的实际测量. 当然，被测物体不一定是旗杆，路灯杆、楼房、树等其他物体也可以.

此外，在户外测量时，要指导观测者采取一定防护措施，注意保护眼睛，以免受到太阳光的伤害.

[1] 这是直接运用相似三角形的方法. 在说明两个直角三角形相似的理由时，要用到“太阳光是平行光线”的知识. 对此，可以向学生做些解释. 事实上，由于太阳离我们非常遥远，而且太阳的体积比地球大得多，因此可以把太阳光近似地看成平行光线. 另外，在计算时还要用到观测者的身高.

山东教育出版社

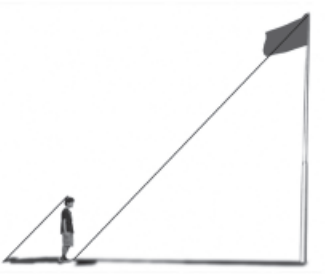


图 9-29

根据测量数据，你能求出旗杆的高度吗？说明你的理由.

[1] 使用这种方法时，观测者的眼睛必须与标杆的顶端和旗杆的顶端“三点共线”，标杆与地面要垂直. 另外，在计算时还要用到观测者的眼睛离地面的高度.

[1] **方法 2**：利用标杆.

如图 9-30，每个小组选一名同学作为观测者，在观测者与旗杆之间的地面上直立一根高度适当的标杆. 观测者适当调整自己所处的位置，当旗杆的顶端、标杆的顶端与眼睛恰好在一条直线上时，其他同学立即测出观测者的脚到旗杆底端的距离，以及观测者的脚到标杆底端的距离，然后测出标杆的高.

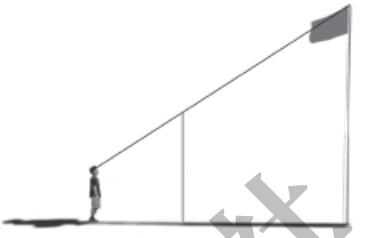


图 9-30

根据测量数据，你能求出旗杆的高度吗？说明你的理由.

[2] 在说明两个直角三角形相似的理由时，要用到光线的“反射角等于入射角”的知识. 这是物理中要学的内容，如果有必要，可以向学生做些解释和说明.

[2] **方法 3**：利用镜子的反射.

如图 9-31，每个小组选一名同学作为观测者，在观测者与旗杆之间的地面上平放一面镜子，在镜子上做一个标记，观测者看着镜子来回移动，直至看到旗杆顶端在镜子中的像与镜子上的标记重合.

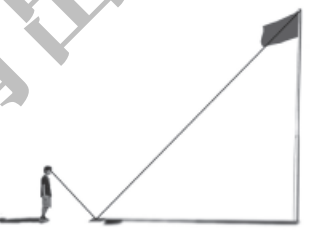


图 9-31

测量所需的数据，根据所测的结果你能求出旗杆的高度吗？说明你的理由.

山东教育出版社

想一想

你还有哪些测量旗杆高度的方法?

议一议

上述几种测量方法各有哪些优缺点?

读一读

刘徽与《海岛算经》

刘徽，公元3世纪人，是中国历史上最杰出的数学家之一.《九章算术注》和《海岛算经》是他留给后世最宝贵的数学遗产.



刘 徽

《海岛算经》最早附于《九章算术注》之后，唐初开始单行.刘徽在该书中精心选编了九个测量问题，都是利用测量的方法来计算高、深、广、远等问题的.其中第一个问题是测量海岛的高、远问题，因此得名.《海岛算经》是中国最早的一部测量数学专著，也是中国古代高度发达的地图学的数学基础.

[1]《海岛算经》第一个问题的大意是：如图9-32，要测量海岛上一座山峰A的高度AH，立两根高3丈的标杆BC和DE，两杆之间的距离$BD=1\,000$步，D，B，H成一线；从BC退行123步到F，人的眼睛贴着地面观察A点，A，C，F三点成一线；从DE退行127步到G，人的眼睛贴着地面观察A点，A，E，G三点也成一线.试计算山峰的高度AH及HB的长(古制1步=6尺，1里=180丈=1 800尺=300步，结果用里和步来表示).

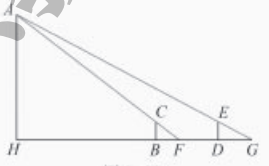


图9-32

怎样利用相似三角形求得线段AH及HB的长呢?请你试一试!

想一想

引导学生积极参与，在各人独立思考的基础上充分交流，集思广益.

议一议

引导学生比较各种方案的优劣，形成优化意识.

[1]在图9-32中，$CB=ED=3$ 丈$=30$尺，$BD=1\,000$ 步$=6\,000$ 尺，$BF=123$步$=738$尺，$DG=127$ 步$=762$ 尺.由$\triangle AHF\backsim\triangle CBF$，得$\frac{BF}{HF}=\frac{BC}{AH}$；由$\triangle AHG\backsim\triangle EDG$，得$\frac{DG}{HG}=\frac{DE}{AH}$.利用这两个比例式可以求得$HB=184\,500$尺$=18\,450$丈，$AH=7\,530$尺$=753$丈.

山东教育出版社

习题9.10

1. 16 m.

2. 4 m.

3. 窗户高 2 m.

提示：由于 $BN \parallel AM$，所以 $\angle CNB = \angle CMA$，$\angle CBN = \angle CAM$，所以 $\triangle CNB \backsim \triangle CMA$，所以 $\frac{CB}{CA} = \frac{CN}{CM}$，即 $\frac{1}{CA} = \frac{1.5}{4.5}$. 然后由 $AB = CA - BC$ 可求 AB.

4. 4.2 m.

提示：设树高为 x m，根据题意得 $\frac{x-1.2}{1} = \frac{2.7}{0.9}$，解得 $x = 4.2$（m）.

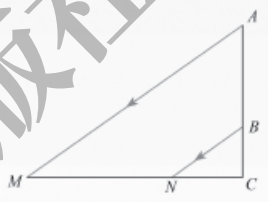
习题 9.10

问题解决

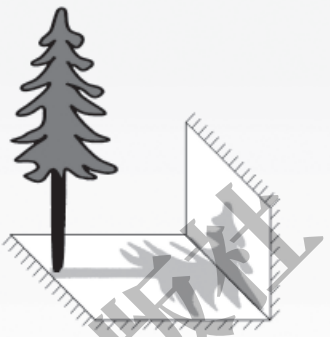
1. 高 4 m 的旗杆在水平地面上的影子长 6 m，此时测得附近一个建筑物的影子长 24 m，求该建筑物的高度.

2. 旗杆的影子长 6 m，同时测得旗杆顶端到其影子顶端的距离是 10 m，如果此时附近小树的影子长 3 m，那么小树有多高?

3. 如图，AB 表示一个窗户的高，AM 和 BN 表示射入室内的光线，窗户的下端到地面的距离 $BC = 1$ m. 已知某一时刻 BC 在地面的影长 $CN = 1.5$ m，AC 在地面的影长 $CM = 4.5$ m，求窗户的高度.



（第 3 题）


（第 4 题）

4. 教学楼旁边有一棵树，学习了相似三角形后，数学兴趣小组的同学们想利用树影测量树高. 课外活动时，他们在阳光下测得一根长 1 m 的竹竿的影长是 0.9 m，但当他们马上测量树高时，发现树的影子不全落在地面上，有一部分影子落在教学楼的墙壁上（如图）. 经过讨论，小组同学认为继续测量也可以求出树高. 他们测得落在地面上的影长是 2.7 m，落在墙壁上的影长是 1.2 m. 请你和他们一起算一下，树高为多少?

山东教育出版社

8 相似三角形的性质

[1]如图 9-33，小王依据图纸上的△ABC，以 1∶2 的比例建造了模型房的房梁△$A'B'C'$，CD 和 $C'D'$ 分别是它们的立柱.

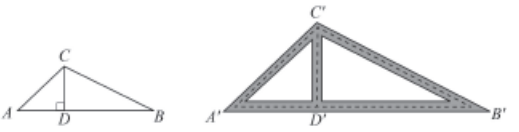


图 9-33

（1）△ACD 与△$A'C'D'$ 相似吗？为什么？如果相似，指出它们的相似比.

（2）如果 $CD=1.5$ cm，那么模型房的房梁立柱有多高？

想一想

已知△$ABC\backsim$△$A'B'C'$，△ABC 与△$A'B'C'$ 的相似比为 k，它们对应高的比是多少？对应角平分线的比是多少？对应中线的比呢？为什么？

定理 相似三角形对应高的比、对应角平分线的比、对应中线的比都等于相似比.

议一议

如图 9-34，已知△$ABC\backsim$△$A'B'C'$，△ABC 与△$A'B'C'$ 的相似比为 k.

（1）若 $\angle BAD=\frac{1}{3}\angle BAC$，$\angle B'A'D'=\frac{1}{3}\angle B'A'C'$，则 $\frac{AD}{A'D'}$ 等于多少？

（2）若 $BE=\frac{1}{3}BC$，$B'E'=\frac{1}{3}B'C'$，则 $\frac{AE}{A'E'}$ 等于多少？

教学目标

1. 经历探索相似三角形性质的过程，进一步体验由特殊到一般的归纳思想和方法，感悟化归转化的数学思想，积累数学活动经验.

2. 了解相似三角形的性质定理：相似三角形对应高的比、对应角平分线的比、对应中线的比都等于相似比；相似三角形的周长比等于相似比，面积比等于相似比的平方.

本节研究相似三角形的性质，教科书首先设置了房梁这一情境，引导学生探索相似三角形对应高、中线、角平分线的比等于相似比；接着在“议一议”中通过两个相似三角形对应线段的比的讨论，引导学生感受“相似三角形对应线段的比等于相似比”；最后探索相似三角形的周长比等于相似比，面积比等于相似比的平方.

本节安排 2 课时. 第 1 课时主要探索相似三角形中对应高的比、对应角平分线的比、对应中线的比与相似比的关系；第 2 课时探索相似三角形的周长比、面积比与相似比的关系.

[1]从具体、特殊的相似三角形入手，研究相似三角形对应高的比与相似比的关系.

在这一情境中，△ABC 与△$A'B'C'$ 相似，因为三边成比例；而且相似比是一个具体数值 1∶2.

（1）△$ACD\backsim$△$A'C'D'$. 理由是：$\angle A=\angle A'$，$\angle ADC=\angle A'D'C'=90°$. 相似比是 1∶2.

（2）由 CD∶$C'D'=1$∶2，得 $C'D'=2CD=3$ cm，即模型房的房梁立柱高 3 cm.

山东教育出版社

想一想

把问题由具体推广到一般，由研究三角形的高推广到研究三角形的角平分线、中线.

在证明“相似三角形对应高的比、对应角平分线的比等于相似比”的结论时，要用到“两角分别相等的两个三角形相似”；在证明“相似三角形对应中线的比等于相似比”的结论时，要用到“两边成比例且夹角相等的两个三角形相似”.

议一议

把上述相似三角形的性质定理推广到更一情况：相似三角形对应线段的比等于相似比. 推广的过程也是由特殊到一般.

（1）由“两角分别相等的两个三角形相似”，可知$\triangle ABD \backsim \triangle A'B'D'$，于是$\frac{AD}{A'D'}=\frac{AB}{A'B'}=k$.

（2）由“两边成比例且夹角相等的两个三角形相似”，可知$\triangle ABE \backsim \triangle A'B'E'$，于是$\frac{AE}{A'E'}=\frac{AB}{A'B'}=k$.

（3）鼓励学生大胆提出问题，发展他们发现问题、提出问题的能力. 对于有困难的学生，教师可进行适当的引导. 例如，可这样启发学生：问题（1）中，若将$\frac{1}{3}$换成$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{5}$，结论还成立吗？若换成$\frac{1}{k}$呢？说说你的理由. 同样，将问题（2）中的$\frac{1}{3}$也进行这样的变化，结论还成立吗？问题（1）中的线段AD与$A'D'$、问题（2）中的线段AE与$A'E'$有什么共同的特点？

山东教育出版社 山东教育出版社

（3）你还能提出哪些问题？与同伴交流.

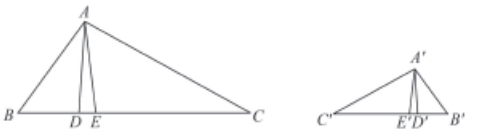


图 9-34

例 1 如图 9-35，AD 是△ABC 的高，点 P，Q 在 BC 边上，点 R 在 AC 边上，点 S 在 AB 边上，$BC = 60$ cm，$AD = 40$ cm，四边形 $PQRS$ 是正方形.

（1）△ASR 与△ABC 相似吗？为什么？

（2）求正方形 $PQRS$ 的边长.

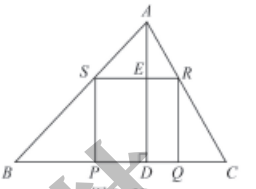


图 9-35

解：（1）△ASR ∽ △ABC. 理由如下：

∵ 四边形 $PQRS$ 是正方形，

∴ $SR // BC$.

∴ $\angle ASR = \angle B$，$\angle ARS = \angle C$.

∴ △ASR ∽ △ABC（两角分别相等的两个三角形相似）.

（2）由（1）可知△ASR ∽ △ABC，

∴ $\frac{AE}{AD} = \frac{SR}{BC}$（相似三角形对应高的比等于相似比）.

设正方形 $PQRS$ 的边长为 x cm，则 $AE = (40 - x)$ cm.

∴ $\frac{40 - x}{40} = \frac{x}{60}$.

解得 $x = 24$.

∴ 正方形 $PQRS$ 的边长为 24 cm.

随堂练习

1. △ABC ∽ △$A'B'C'$，BD 和 $B'D'$ 是它们的对应中线. 已知 $\frac{AC}{A'C'} = \frac{3}{2}$，$B'D' = 4$ cm，求 BD 的长.

2. 两个相似三角形一组对应角平分线的长分别是 2 cm 和 5 cm，求这两个三角形的相似比. 在这两个三角形的一组对应中线中，如果较短的中线是 3 cm，那么较长的中线有多长？

例 1

本例是对相似三角形性质定理的应用. 鼓励学生独立思考，寻求解题思路，并与同学进行交流.

随堂练习

1. $BD = 6$ cm.

2. 这两个三角形的相似比是 2 ∶ 5；较长的中线是 7.5 cm.

山东教育出版社

习题9.11

1. $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'D'C'$ 对应高的比是8 ∶ 3.

2. 蜡烛应放在距离纸筒 60 cm 的地方.

   提示：设蜡烛应放在距离纸筒 x cm 的地方，根据题意，得 20 ∶ 5 = x ∶ 15，解得 $x = 60$.

3. 提示：$\triangle ABD \backsim \triangle MHD$，$\frac{MH}{AB} = \frac{DH}{BD}$，同理 $\frac{MH}{CD} = \frac{BH}{BD}$，二式相加，

   得 $\frac{MH}{AB} + \frac{MH}{CD} = \frac{DH + BH}{BD} = 1$，

   所以 $\frac{MH}{10} + \frac{MH}{15} = 1$，

   $MH = 6$(m).

4. 提示：由 $\triangle ANM \backsim \triangle ABC$，得 $\frac{AE}{AD} = \frac{NM}{BC}$. 设 $NP = x$，

   则 $MN = 2x$，$AE = AD - x$，

   于是 $\frac{60 - x}{60} = \frac{2x}{80}$，$x = 24$，

   $2x = 48$. 矩形的长和宽分别为 48 cm 和 24 cm.

习题 9.11

知识技能

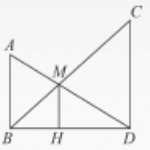
1. $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，$AD$ 和 $A'D'$ 是它们的对应角平分线. 已知 $AD = 8$ cm，$A'D' = 3$ cm，求 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 对应高的比.

问题解决

2. 如图，小明自制了一个小孔成像装置，其中纸筒的长度为 15 cm. 他准备了一支长为 20 cm 的蜡烛，想要得到高度为 5 cm 的像，蜡烛应放在距离纸筒多远的地方?



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，AB 和 CD 表示两根直立于地面的柱子，AD 和 BC 表示起固定作用的两根钢筋，AD 与 BC 的交点为 M. 已知 $AB = 10$ m，$CD = 15$ m，求点 M 离地面的高度 MH.

4. 如图，有一块三角形余料 ABC，它的边 $BC = 80$ cm，高 $AD = 60$ cm. 现在要把它加工成长与宽的比为 2 : 1 的矩形零件 $PQMN$，要求一条长边在 BC 上，其余两个顶点分别在 AB，AC 上，求矩形的长和宽.



（第 4 题）

[1] 如果 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，相似比为 2，那么 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的周长之比是多少？面积之比呢？

如果 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，相似比为 k，那么你能求出 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的周长之比和面积之比吗？

本课时研究相似三角形的周长比、面积比与相似比的关系.

[1] 教科书从相似比为 2 的两个相似三角形入手，再到相似比为 k 的两个相似三角形，问题从特殊推广到一般.

在求周长比时，需要用到比例的等比性质；在求面积比时，需要作出三角形的高. 因此，解决这两个问题对一些学生来说有一定挑战性. 教学时，可在鼓励学生独立思考的基础上，对有困难的学生进行适当的引导，并重视学生间的相互交流与启发.

山东教育出版社



如图 9–36，由已知，得 $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}=k$，

$\therefore \frac{AB+BC+AC}{A'B'+B'C'+A'C'}=\frac{AB}{A'B'}=k$.

分别作△ABC 和△$A'B'C'$ 的高 CD，$C'D'$.

$\because$ △ABC ∽ △$A'B'C'$，

$\therefore \frac{CD}{C'D'}=\frac{AB}{A'B'}=k$（相似三角形对应高的比等于相似比）.

$\therefore \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}}=\frac{\frac{1}{2}AB\cdot CD}{\frac{1}{2}A'B'\cdot C'D'}=\frac{AB}{A'B'}\cdot\frac{CD}{C'D'}=k^2$.

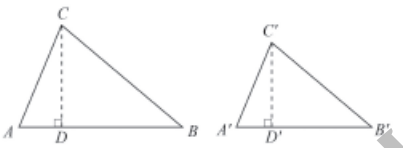


图 9–36

定理 相似三角形周长的比等于相似比，面积的比等于相似比的平方.

议一议

两个相似四边形的周长的比等于相似比吗？面积的比等于相似比的平方吗？两个相似五边形的周长的比以及面积的比怎样呢？两个相似的 n 边形呢？

例 2 如图 9–37，将△ABC 沿 BC 方向平移得到△DEF，△ABC 与△DEF 重叠部分（图中阴影部分）的面积是△ABC 的面积的一半. 已知 $BC=2$，求△ABC 平移的距离.

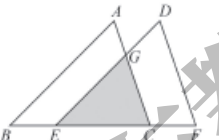


图 9–37

解：根据题意，可知 $EG/\!/AB$，

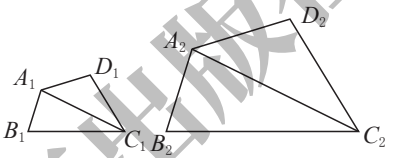
$\therefore \angle GEC=\angle B$，$\angle EGC=\angle A$.

$\therefore$ △GEC ∽ △ABC（两角分别相等的两个三角形相似）.

议一议

把问题由相似三角形进一步推广到相似四边形、相似五边形……相似 n 边形，这个推广的过程，也是由特殊到一般的过程. 教学时，可以以四边形为例进行研究. 由于周长比的推导过程相对比较简单，而面积比的推导过程则要复杂一些，因此可以采用问题串的形式引导、启发学生思考. 下面问题串可供参考：

如图，四边形 $A_1B_1C_1D_1$ ∽ 四边形 $A_2B_2C_2D_2$，相似比为 k.



（1）四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 与四边形 $A_2B_2C_2D_2$ 的周长比是多少？

（2）连接相应的对角线 A_1C_1，A_2C_2，所得的△$A_1B_1C_1$ 与△$A_2B_2C_2$ 相似吗？△$A_1C_1D_1$ 与△$A_2C_2D_2$ 呢？如果相似，它们的相似比各是多少？为什么？

（3）设△$A_1B_1C_1$，△$A_1C_1D_1$，△$A_2B_2C_2$，△$A_2C_2D_2$ 的面积分别是 $S_{\triangle A_1B_1C_1}$，$S_{\triangle A_1C_1D_1}$，$S_{\triangle A_2B_2C_2}$，$S_{\triangle A_2C_2D_2}$，那么 $\frac{S_{\triangle A_1B_1C_1}}{S_{\triangle A_2B_2C_2}}$，$\frac{S_{\triangle A_1C_1D_1}}{S_{\triangle A_2C_2D_2}}$ 各是多少？

（4）四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 与四边形 $A_2B_2C_2D_2$ 的面积比是多少？

要引导学生进一步感悟化归、转化的思想与方法.

其他相似多边形的情况与相似四边形的情况基本类似，只是推导过程更为烦琐. 因此，不必要求所有学生都去研究.

例 2

本例是“相似三角形的面积比等于相似比的平方”的一个应用.

教学时，要指导学生认真读题，弄懂题意. 在熟读题意的基础上，引导学生思考：△ABC 平移的距离是什么？BE 能直接求得吗？若不能直接求得，怎么办？怎么利用已知条件中给出的“……重叠部分的面积是△ABC 的面积的一半”？

山东教育出版社

随堂练习

1. (1) √; (2) ×.

2. 相似，△$A_1B_1C_1$与△$A_2B_2C_2$的周长比是2 ∶ 1，面积比是4 ∶ 1.

提示：设小方格的边长为1，则$A_1B_1=2\sqrt{2}$，$B_1C_1=2\sqrt{10}$，$C_1A_1=4$；$A_2B_2=\sqrt{2}$，$B_2C_2=\sqrt{10}$，$C_2A_2=2$.

习题9.12

1. (1) 2 ∶ 1；(2) 4 ∶ 1.

提示：可证△ABC ∽ △DEF，且相似比是2 ∶ 1.

$\therefore \frac{S_{\triangle GEC}}{S_{\triangle ABC}}=(\frac{EC}{BC})^2=\frac{EC^2}{BC^2}$（相似三角形面积的比等于相似比的平方），

即$\frac{1}{2}=\frac{EC^2}{2^2}$.

$\therefore EC^2=2$.

$\therefore EC=\sqrt{2}$.

$\therefore BE=BC-EC=2-\sqrt{2}$，

即△ABC平移的距离为$2-\sqrt{2}$.

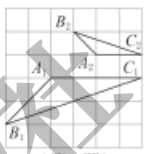
随堂练习

1. 判断正误：

(1) 如果把一个三角形三边的长同时扩大为原来的10倍，那么它的周长也扩大为原来的10倍；（　　）

(2) 如果把一个三角形的面积扩大为原来的9倍，那么它三边的长都扩大为原来的9倍.（　　）

2. 如图，在方格纸上有△$A_1B_1C_1$和△$A_2B_2C_2$，这两个三角形是否相似？如果相似，△$A_1B_1C_1$与△$A_2B_2C_2$的周长比和面积比分别是多少？



（第2题）

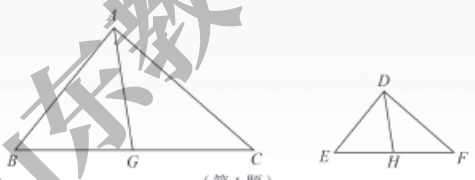
习题9.12

知识技能

1. 如图，在△ABC和△DEF中，G，H分别是边BC和EF的中点，已知$AB=2DE$，$AC=2DF$，$\angle BAC=\angle EDF$.

(1) 中线AG与DH的比是多少？

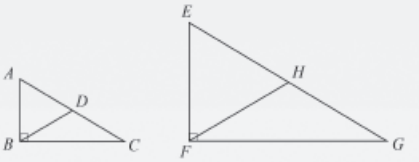
(2) △ABC与△DEF的面积比是多少？



（第1题）

山东教育出版社

2. 如图，Rt△ABC ∽ Rt△EFG，$EF=2AB$，BD 和 FH 分别是它们的中线，△BDC 与△FHG 是否相似？如果相似，试确定其周长比和面积比.



（第2题）

问题解决

3. 一块三角形土地的一边长为 120 m，在地图上量得它的对应边长为 0.06 m，这边上的高为 0.04 m，求这块地的实际面积.

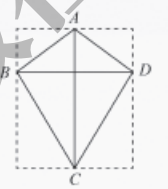
4. 小明同学把一幅矩形图片放大欣赏，经测量其中一条边由 10 cm 变成了 40 cm，那么这次放大的比例是多少？这幅画的面积发生了怎样的变化？

5. 一个小风筝与一个大风筝形状相同，它们的形状如图所示，其中对角线 $AC\perp BD$. 已知它们的对应边之比为 1∶3，小风筝两条对角线的长分别为 12 cm 和 14 cm.

（1）小风筝的面积是多少？

（2）如果在大风筝内装设一个连接对角顶点的十字交叉形的支撑架，那么至少需用多长的材料？（不计损耗）

（3）大风筝要用彩色纸覆盖，而彩色纸是从一张刚好覆盖整个风筝的矩形彩色纸（如图中虚线所示）裁剪下来的，那么从四个角裁剪下来废弃不用的彩色纸的面积是多少？



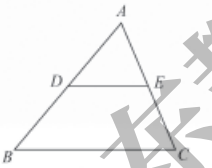
（第5题）

联系拓广

6. 如图，在△ABC 中，点 D，E 分别在边 AB 和 AC 上，且 $DE\parallel BC$.

（1）若 $AD:DB=1:1$，则 $S_{\triangle ADE}:S_{梯形DBCE}$ 等于多少？

（2）若 $S_{\triangle ADE}=S_{梯形DBCE}$，则 $DE:BC$，$AD:DB$ 各等于多少？



（第6题）

2. 相似，△BDC 与△FHG 的周长比是 1∶2，面积比是 1∶4.

3. 4 800 m^2.

提示：相似比是 120 ∶ 0.06 = 2 000 ∶ 1.

4. 放大的比例是 400%，面积变为原来的 16 倍.

5.（1）84 cm^2；

（2）78 cm；

（3）756 cm^2.

6.（1）1 ∶ 3；

（2）1 ∶ $\sqrt{2}$，1 ∶ （$\sqrt{2}-1$）.

提示：由 $S_{\triangle ADE}=S_{梯形DBCE}$，得 $S_{\triangle ADE}:S_{\triangle ABC}=1:2$，则 $DE:BC=1:\sqrt{2}$，于是 $AD:AB=1:\sqrt{2}$，因此，$AD:DB=k:(\sqrt{2}k-k)=1:(\sqrt{2}-1)$.

山东教育出版社

教学目标

1. 了解位似多边形的有关概念；能利用位似将一个图形放大或缩小.

2. 在直角坐标系中，探索并了解将一个多边形的顶点坐标（有一个顶点为原点、有一条边在横坐标轴上）分别扩大或缩小相同倍数时所对应的图形与原图形是位似的.

本节安排2课时，第1课时主要介绍位似图形的概念，并利用作位似图形的方法将一个图形放大或缩小；第2课时研究多边形的顶点坐标分别扩大或缩小相同倍数时所对应的图形与原图形的位似关系.

教科书首先设置了一个宣传海报的情境，其中的图片属于生活中的图案，它们形状相同且有特殊的位置关系. 通过这一问题情境，让学生初步直观感受位似图形的特点.

接着，教科书又呈现了两个具有特殊位置关系的相似五边形，让学生再次感受位似图形的特点. 在此基础上引出位似多边形的有关概念.

9 利用位似放缩图形

图 9–38 是一幅电影的宣传海报，它由一组形状相同的图形组成. 在图片①上取一点 A，它与另一张图片（如图片②）上相应的点 B 之间的连线经过镜头中心点 P. 在图片上换其他的点试一试，还有类似的规律吗？



图 9–38

[1] 如果两个相似多边形每组对应顶点 A，A' 的连线都经过同一个点 O，且有 $OA' = k \cdot OA$（$k \neq 0$），那么这样的两个多边形叫做**位似多边形**（homothetic polygons），点 O 叫做**位似中心**（homothetic center）. 实际上，k 就是这两个相似多边形的相似比.

例如，下面每组中的两个多边形都是位似多边形.

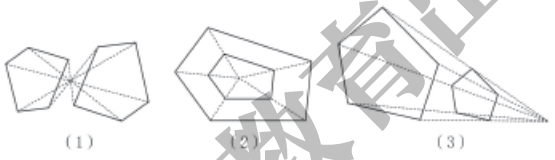


图 9–39

位似中心有时在两个对应点之间（如图（1）），有时在两个对应点连线的延长线上（如图（2）（3））.

[1]位似多边形可以有多种定义方式，教科书的定义比较直观. 需要说明的是：

第一，定义中的“$OA' = k \cdot OA\ (k \neq 0)$”不可缺少. 另外，当位似中心是多边形的一个顶点时，$OA = OA' = 0$，因此定义中采用“$OA' = k \cdot OA\ (k \neq 0)$”的形式，而没有用“$\frac{OA'}{OA} = k\ (k \neq 0)$”的形式.

第二，定义中 $k \neq 0$，但 k 可以等于 1. 当 $k = 1$ 时，两个图形成中心对称.

第三，位似图形是一种特殊的相似图形，而相似图形未必都能构成位似关系.

对此，教师了解即可，不必向学生介绍.

山东教育出版社

例 如图 9−40，已知△ABC，以点 O 为位似中心画△DEF，使它与△ABC 位似，且相似比为 2.



图 9−40

解：如图 9−41，作射线 OA，OB，OC；在射线 OA，OB，OC 上分别取点 D，E，F，使 $OD=2OA$，$OE=2OB$，$OF=2OC$；顺次连接 D，E，F，则△DEF 与△ABC 位似，相似比为 2.

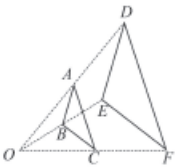


图 9−41

[1]如果在射线 AO，BO，CO 上分别取点 D，E，F 呢?

想一想

用上面的方法画出的△DEF 为何与△ABC 相似.

做一做

利用下面的方法可以近似地将一个图形放大：



（1）将 2 根长短相同的橡皮筋系在一起，联结处形成一个结点.

（2）选取一个图形，在图形外取一个定点.

（3）将系在一起的橡皮筋的一端固定在定点，把一支铅笔固定在橡皮筋的另一端.

（4）拉动铅笔，使 2 根橡皮筋的结点沿所选图形的边缘运动，当结点在已知图形上运动一圈时，铅笔就画出了一个新的图形.

这个新图形与已知图形形状相同.

请你用这种方法把一个已知图形放大.

随堂练习

已知点 O 在△ABC 内，以点 O 为位似中心画一个三角形，使它与△ABC 位似，且相似比为 $\frac{1}{2}$.

例

本例给定位似中心位置和相似比，要求画已知三角形的位似图形. 由于所要画的三角形与已知三角形的相似比为 2，因此本例是将已知三角形放大.

教科书呈现了画法，以方便学生理解画图过程，但不要求学生写画法.

[1]给定图形、位似中心和位似比，要画出位似图形，当 $k\neq 1$ 时有两种方法. 课本上只画出一个图形，可让学生画出另一个图形，并进行比较.

想一想

理由如下：由画图可知 $\triangle ODE\backsim\triangle OAB$，$\frac{DE}{AB}=\frac{OD}{OA}=2$，同理 $\frac{DF}{AC}=2$，$\frac{EF}{BC}=2$，从而 $\frac{DE}{AB}=\frac{DF}{AC}=\frac{EF}{BC}$.

所以△DEF ∽ △ABC.

做一做

教科书在这里介绍了放大图形的一种近似方法. 尽管其实用价值未必很大，但它却是位似图形的一个具体应用. 教学时应当让学生亲自试一试.

随堂练习

略. 注意位似中心在△ABC 内.

山东教育出版社

习题9.13

1. 略.

2. 略.

解答第1～2两题时，一要注意位似中心的位置，二要注意相似比.

3. 相似多边形不都是位似多边形，反例略.

4. △GHO与△ABO是位似图形. 图中的所有三角形都相似，相邻两个三角形的相似比（较小的三角形与较大三角形对应边之比）为$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

即：$\frac{OG}{OF}=\frac{OF}{OE}=\frac{OE}{OD}=\frac{OD}{OC}=\frac{OC}{OB}=\frac{OB}{OA}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

所以$\frac{OG}{OA}=(\frac{\sqrt{3}}{2})^6=\frac{27}{64}$.

△GHO与△ABO的相似比为$\frac{27}{64}$.

5. 小明的做法有道理.

理由如下：根据画法，四边形$D'E'F'G'$与正方形$DEFG$是位似图形. 因此四边形$D'E'F'G'$是正方形，且边与顶点的位置都符合要求.

习题 9.13

知识技能

1. 已知边长为1的正方形$ABCD$，以它的两条对角线的交点为位似中心，画一个边长为2并与它位似的正方形.

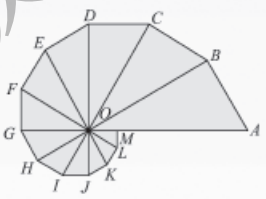
2. 画一个任意四边形$ABCD$，在它的内部任取一点O，以点O为位似中心，画一个四边形$A'B'C'D'$，使它与四边形$ABCD$位似，且相似比为$\frac{1}{2}$.

数学理解

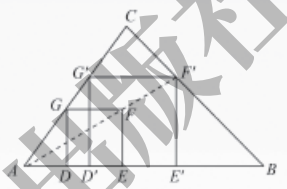
3. 相似多边形都是位似多边形吗？若不是请举反例，若是请说明理由.

联系拓广

4. 如图所示的图形是由12个有公共顶点O的直角三角形拼成的，$\angle AOB=\angle BOC=\cdots=\angle LOM=30°$. 你能从图中找出△$ABO$的位似图形吗？它们的相似比是多少？



（第4题）



（第5题）

※**5.** 如图，小明要在三角形木板ABC上锯下一个一边在AB上的面积最大的正方形，他采用了以下方法画线：

（1）在边AC上取一点G，作$GD\perp AB$，垂足为点D，以GD为一边在△ABC内作正方形$GDEF$；

（2）连接AF并延长，交BC于点F'；

（3）过点F'作AB的平行线，交AC于点G'，分别过G'，F'作AB的垂线，垂足为点D'，E'. 所得到的四边形$G'D'E'F'$就是满足条件的正方形.

小明的做法有道理吗？说说你的意见.

山东教育出版社

[1]如图 9-42，在直角坐标系中，$\triangle OAB$ 三个顶点的坐标分别为 $O(0, 0)$，$A(3, 0)$，$B(2, 3)$.

将点 O，A，B 的横坐标、纵坐标都乘 2，得到三个点，以这三个点为顶点的三角形与 $\triangle OAB$ 位似吗？如果位似，指出位似中心和相似比.

如果将 O，A，B 的横坐标、纵坐标都乘 -2 呢？

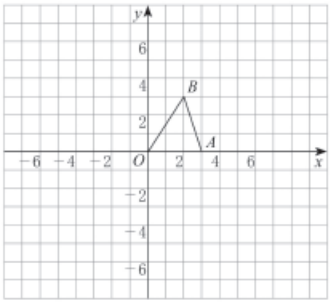


图 9-42

做一做

如图 9-43，在直角坐标系中，四边形 $OABC$ 的顶点坐标分别为 $O(0, 0)$，$A(5, 0)$，$B(5, 3)$，$C(2, 4)$. 将点 O，A，B，C 的横坐标、纵坐标都乘 $\frac{1}{2}$，得到四个点，以这四个点为顶点的四边形与四边形 $OABC$ 位似吗？如果位似，指出位似中心和相似比.

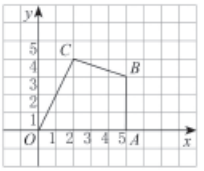


图 9-43

在直角坐标系中，将一个多边形每个顶点的横坐标、纵坐标都乘同一个数 k（$k\neq 0$，1），所对应的图形与原图形位似，位似中心是坐标原点，它们的相似比为 $|k|$.[2]

第 2 课时研究多边形的顶点坐标分别扩大或缩小相同倍数时所对应的图形与原图形的位似关系. 教科书从一个具体的三角形入手开始研究，接着研究一个具体的四边形，最后推广到多边形，归纳出一个一般性结论.

[1]引导学生先动手画图，再观察图形变化及与原图形的关系，最后将图形变化与坐标变化联系起来.

将点 O，A，B 的横坐标、纵坐标都乘 2，以所得三个点为顶点的三角形与 $\triangle OAB$ 位似，位似中心是原点，相似比是 2 ∶ 1. 两个三角形位于位似中心的同侧.

将点 O，A，B 的横坐标、纵坐标都乘 -2，以所得三个点为顶点的三角形与 $\triangle OAB$ 也位似，位似中心是原点，相似比是 2 ∶ 1. 两个三角形分别位于位似中心的两侧.

做一做

将点 A，B，C，D 的横坐标、纵坐标都乘 $\frac{1}{2}$，以所得四个点为顶点的四边形与四边形 $ABCD$ 位似，位似中心是原点，相似比是 1 ∶ 2. 两个四边形位于位似中心的同侧.

将点 A，B，C，D 的横坐标、纵坐标都乘 $-\frac{1}{2}$，以所得四个点为顶点的四边形与四边形 $ABCD$ 也位似，位似中心是原点，相似比是 1 ∶ 2. 两个四边形分别位于位似中心的两侧.

[2]这个结论可以看成对前面具体情况的归纳.《标准》的要求限于“有一个顶点在原点，有一条边在横坐标轴上”的多边形，但实际上无论多边形是否有一个顶点在原点，有一条边在横坐标轴上，结论都成立，因此教科书在这里没有附加“有一个顶点在原点，有一条边在横坐标轴上”这个条件. 但是，在应用该结论时，最好限于《标准》的要求范围. 教学中请注意把握.

山东教育出版社

议一议

四边形 $D'A'B'C'$ 各顶点的坐标分别为 $O'(0, 0)$，$A'(9, 0)$，$B'(4.5, 9)$，$D'(-4.5, 4.5)$. 或者 $O'(0, 0)$，$A'(-9, 0)$，$B'(-4.5, -9)$，$D'(4.5, -4.5)$.

与四边形 $OABC$ 相比，每个对应顶点的横坐标、纵坐标同乘 $\frac{3}{2}$，或者同乘 $-\frac{3}{2}$.

随堂练习

提示：有两种画法. 将四边形 $OABC$ 各顶点的坐标都乘 2，或都乘 −2.

习题9.14

1. 位似.

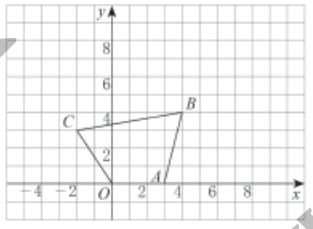
2. 图略. 所得位似图形顶点的横坐标、纵坐标是五边形 $OBCDE$ 对应顶点横坐标、纵坐标的 $\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}$.

议一议

在直角坐标系中，四边形 $OABC$ 的顶点坐标分别是 $O(0, 0)$，$A(6, 0)$，$B(3, 6)$，$C(-3, 3)$. 已知四边形 $O'A'B'C'$ 与四边形 $OABC$ 是以原点 O 为位似中心的位似四边形，且相似比是 3∶2，请写出四边形 $O'A'B'C'$ 各个顶点的坐标. 与四边形 $OABC$ 相比，四边形 $O'A'B'C'$ 对应顶点的坐标发生了什么变化?

随堂练习

如图，在直角坐标系中，四边形 $OABC$ 的顶点坐标分别是 $O(0, 0)$，$A(3, 0)$，$B(4, 4)$，$C(-2, 3)$，画出四边形 $OABC$ 以点 O 为位似中心的位似图形，使它与四边形 $OABC$ 的相似比是 2∶1.



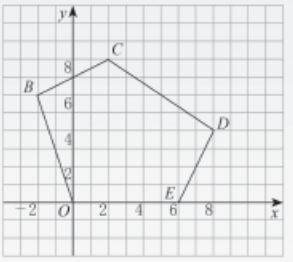
习题 9.14

知识技能

1. 在直角坐标系中，$\triangle OBC$ 各顶点的坐标分别是 $O(0, 0)$，$B(6, 0)$，$C(8, 4)$. 将点 O，B，C 的横坐标、纵坐标都乘 $\frac{1}{2}$，得到三个点，以这三个点为顶点的三角形与 $\triangle OBC$ 位似吗?

2. 如图，在直角坐标系中，以原点 O 为位似中心，画出五边形 $OBCDE$ 的位似图形，使它与 $OBCDE$ 的相似比为 $\frac{1}{2}$. 比较两个图形对应点的坐标，你能发现什么?

山东教育出版社



（第2题）

数学理解

3. 在直角坐标系中，五边形 *OBCDE* 与五边形 *OFGHJ* 位似，位似中心是原点 *O*，相似比是 *k*，这两个五边形每组对应顶点到位似中心的距离之比是多少？

4. 在直角坐标系中，四边形 *OBCD* 与四边形 *OEFG* 位似，位似中心是原点 *O*. 已知 *C* 与 *F* 是对应顶点，且 *O*，*C*，*F* 的坐标分别是 *O*（0，0），*C*（3，7），*F*（9，21），那么四边形 *OBCD* 与四边形 *OEFG* 的相似比是多少？四边形 *OEFG* 与四边形 *OBCD* 的相似比呢？

回顾与思考

1. 举例说明比例的性质.
2. 判定两个三角形相似的条件有哪些？你是如何得到它们的？三角形相似与三角形全等有怎样的关系？
3. 相似三角形有哪些性质？
4. 如何将一个图形放大或缩小？请举例说明.
5. 在直角坐标系中，如何利用多边形各顶点坐标的变化得到与其位似的多边形？请举例说明.
6. 用适当的方式梳理本章的知识，并与同伴进行交流.

3. 五边形 *OBCDE* 每个顶点到位似中心的距离＝五边形 *OFGHJ* 对应顶点到位似中心的距离 × *k*.

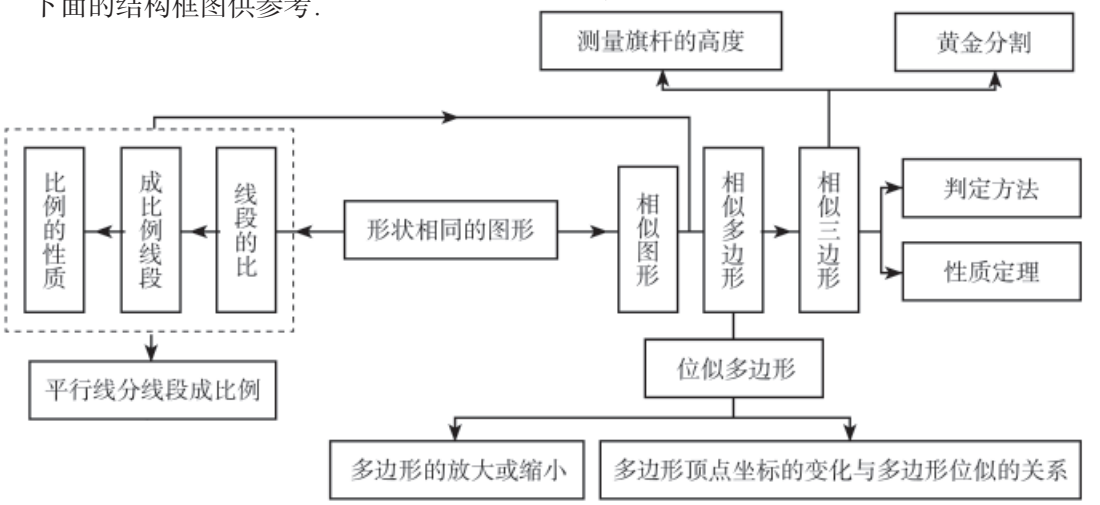
4. 因为 *C*，*F* 是对应顶点，且它们横坐标的比、纵坐标的比都是 1 ∶ 3，所以四边形 *OBCD* 与四边形 *OEFG* 的相似比是 1 ∶ 3，四边形 *OEFG* 与四边形 *OBCD* 的相似比是 3 ∶ 1.

回顾与思考

教科书设计“回顾与思考”的目的是引导学生通过对问题的思考和对知识系统的梳理，进一步加深对本章学习内容的理解，提高自主建构知识系统的能力.

到了八年级下学期，学生一般已具备对所学知识进行自主整理的能力，教师在教学中应该放手让学生独立思考、合作交流. 对个别有困难的学生要加强个别指导，指导他们学会回顾、梳理与建立知识框架结构.

下面的结构框图供参考.



山东教育出版社

以下例题可供参考.

例 1 如图 1，在 $\square ABCD$ 中，$AB=6$，$AD=9$，$\angle BAD$ 的平分线交 BC 于点 E，交 DC 的延长线于点 F，过点 B 作 AE 的垂线，垂足为 G，$BG=4\sqrt{2}$，则 $\triangle EFC$ 的周长为（　　）.

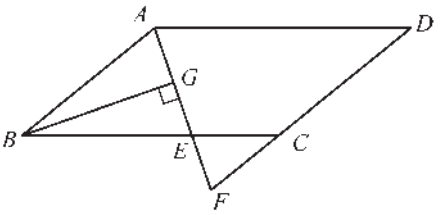


图 1

（A）11　　（B）10　　（C）9　　（D）8

分析： 由已知条件，$\triangle EFC$ 的周长不可能直接求得，平行四边形提供了线段平行的条件，因此可以寻求与 $\triangle EFC$ 相似的三角形，通过应用相似三角形的性质解决问题. 分析条件，易得 $\triangle EFC\backsim\triangle EAB$. $\triangle EAB$ 的周长如何求得？ AB 已知，AE，EB 呢？经分析，$\triangle EAB$ 是等腰三角形，$AB=EB$，由 $BG\perp AE$ 得 $AG=EG$，由勾股定理可求 AG. 至此，求得 $\triangle EAB$ 的周长为 16. 问题转化为求 $\triangle EAB$ 与 $\triangle EFC$ 的相似比；由 BC 与 BE 的差为 3，可求得相似比为 2 ∶ 1，故 $\triangle EFC$ 的周长为 8. 选 D.

本例将相似三角形的判定与性质整合在一题中考查，往往是先判定三角形相似，再利用相似三角形的性质求解. 在这个过程中，要始终注意对图形的观察，对图形隐含条件的发掘.

例 2 如图 2，在直角坐标系中，矩形 $OABC$ 的顶点 O 在坐标原点，边 OA 在 x 轴上，OC 在 y 轴上，如果矩形 $OA'B'C'$ 与矩形 $OABC$ 关于点 O 位似，且矩形 $OA'B'C'$ 的面积等于矩形 $OABC$ 面积的 $\frac{1}{4}$，那么点 B' 的坐标是（　　）.

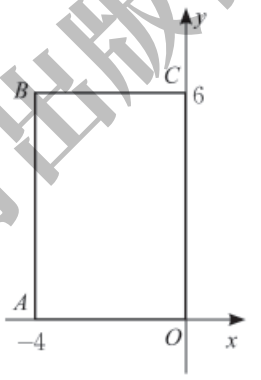


图 2

（A）（−2，3）　　（B）（2，−3）

（C）（3，−2）或（−2，3）　（D）（−2，3）或（2，−3）

分析： 矩形 $OABC$ 在第二象限，$OA'B'C'$ 在哪个象限？只能是第二象限吗？第四象限可能吗？考虑到矩形 $OA'B'C'$ 所在象限位置没有明确，因此要分情况讨论. 应选 D.

本例体现了分类讨论的思想.

例 3 如图 3，在直角坐标系中，点 A，B 的坐标分别为（3，0），（2，−3），$\triangle AB'O'$ 是 $\triangle ABO$ 关于点 A 的位似图形，且点 O' 的坐标为（−1，0），求点 B' 的坐标.

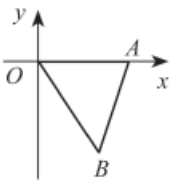


图 3

分析： 由已知，A，O，O' 在同一条直线上，点 A 是位似中心，因此点 B' 必在线段 AB 的延长线上，要求点 B' 的坐标必须借助对应边之间的关系. 为此需根据位似图形的性质画出图形，求出对应边及其比值.

如图 4，过点 B 作 x 轴的垂线，垂足为 E；过点 B' 作 x 轴的垂线，垂足为 F. 由已知易得 $AE=1$，$EO=2$，$BE=3$. 根据相似三角形的性质，有 $\frac{BE}{B'F}=\frac{AE}{AF}=\frac{AO}{AO'}=\frac{3}{4}$.

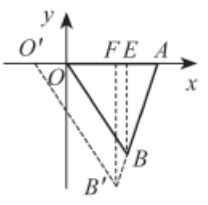


图 4

由 $\frac{AE}{AF}=\frac{3}{4}$，得 $AF=\frac{4}{3}$，所以 $EF=\frac{1}{3}$，所以 $FO=EO-EF=\frac{5}{3}$.

由 $\frac{BE}{B'F}=\frac{3}{4}$，得 $B'F=4$，所以点 B' 的坐标为（$\frac{5}{3}$，−4）.

山东教育出版社

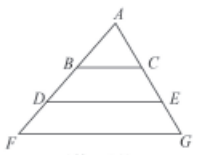
复习题

知识技能

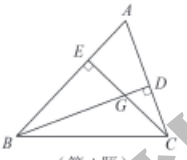
1. 若 A，B 两地在地图上的距离为 7 cm，地图的比例尺为 1∶5 000，求 A，B 两地间的实际距离.

2. 四条线段 a，b，c，d 成比例，其中 $b=3$ cm，$c=2$ cm，$d=6$ cm，求线段 a 的长.

3. 如图，$BC/\!/DE/\!/FG$，图中有几对相似三角形？你是怎样判断的？



（第 3 题）



（第 4 题）

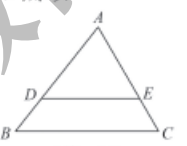
4. 如图，$\triangle ABC$ 的高 BD，CE 相交于点 G，找出其中的三对相似三角形.

5. 如图，已知 $\triangle ADE\backsim\triangle ABC$，$AD=2a$ cm，$DB=a$ cm，$BC=b$ cm，$\angle A=70^\circ$，$\angle B=50^\circ$.

（1）求 $\angle ADE$ 的度数；

（2）求 $\angle AED$ 的度数；

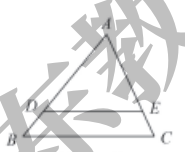
（3）求 DE 的长.



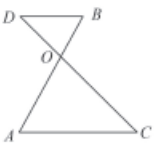
（第 5 题）

6. 如果两个相似三角形面积的比为 4∶9，那么这两个相似三角形对应边的比是多少？

7. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，已知 $DE/\!/BC$，$AD=3BD$，$S_{\triangle ABC}=48$，求 $S_{\triangle ADE}$.



（第 7 题）



（第 8 题）

8. 如图，AB 与 CD 相交于点 O，且 $AC/\!/BD$. $OA\cdot OD=OC\cdot OB$ 成立吗？为什么？

9.（1）在直角坐标系中描出点 $A(4,2)$，$B(2,4)$，$C(0,4)$，$D(0,2)$，$E(2,0)$，顺次连接点 A，B，C，D，E，A，得到一个五边形 $ABCDE$.

（2）将点 A，B，C，D，E 的横坐标和纵坐标都除以 2，得到五个新的点，顺次连

复习题

1. 350 m.

2. $a=1$ cm.

3. 3 对.

4. $\triangle BEG\backsim\triangle BDA$，

$\triangle BEG\backsim\triangle CDG$，

$\triangle BEG\backsim\triangle CEA$.

5.（1）$\angle ADE=50^\circ$；

（2）$\angle AED=60^\circ$；

（3）$DE=\frac{2}{3}b$ cm.

6. 2 ∶ 3.

7. 提示：$\frac{AD}{AB}=\frac{3}{4}$，

$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=(\frac{3}{4})^2=\frac{9}{16}$，

$S_{\triangle ADE}=48\times\frac{9}{16}=27$.

8. 提示：$\because AC/\!/BD$，

$\therefore\angle A=\angle B$，$\angle C=\angle D$，

$\therefore\triangle ACO\backsim\triangle BDO$，

$\therefore\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}$，

$\therefore OA\cdot OD=OC\cdot OB$.

9.（1）画图略；

（2）相似；也相似.

山东教育出版社

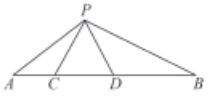
接这五个点，得到一个新的五边形．这两个五边形相似吗？如果将点 A，B，C，D，E 的横坐标和纵坐标都乘 3 呢？

10. 公园中的儿童游乐场是两个相似三角形地块，相似比为 2 : 3，面积的差为 30 m^2，它们的面积之和为多少？

11. 如图，在长 8 cm、宽 6 cm 的矩形中，截去一个矩形（图中阴影部分所示），使留下的矩形与原矩形相似，那么留下的矩形面积为多少？



（第 11 题）



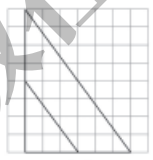
（第 12 题）

12. 如图，点 C，D 在线段 AB 上，$\triangle PCD$ 是等边三角形，且 $\triangle ACP \backsim \triangle PDB$．

（1）求 $\angle APB$ 的度数；

（2）若 $AC=4$，$BD=9$，求 $\triangle PCD$ 的边长．

13. 如图，每组中的两个图形是位似图形吗？如果是，求它们的相似比，并画出位似中心；如果不是，请说明理由．

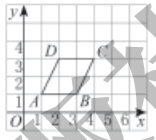


（1）



（2）

（第 13 题）



（第 14 题）

14. 如图，在直角坐标系中，以原点为位似中心，画出 $\square ABCD$ 的位似图形，要求它与 $\square ABCD$ 的相似比为 2．比较两个图形的顶点坐标，你发现了什么？

数学理解

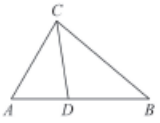
15. 如图，D 是 AB 上一点，能保证使 $\triangle ACD$ 与 $\triangle ABC$ 相似的条件是（　　）．

（A）$AC : CD = AB : BC$

（B）$CD : AD = BC : AC$

（C）$AC^2 = AD \cdot AB$

（D）$CD^2 = AD \cdot DB$



（第 15 题）

10. 面积和为 78 m^2.

提示：由它们的相似比为 2 : 3 知它们的面积比为 4 : 9；分别设它们的面积为 $4k$，$9k$，则 $9k-4k=30$，解得 $k=6$；面积和为 $4k+9k=13k$.

11. 提示：设留下的矩形宽为 x cm，则 $\frac{x}{6}=\frac{6}{8}$，

$x=4.5$（cm），

留下的矩形面积为

$4.5\times 6=27$（cm^2）.

12.（1）$\angle APB=120^\circ$.

提示：由已知得 $\angle APC=\angle B$，$\angle BPD=\angle A$，因此 $\angle APB=\angle APC+\angle CPD+\angle BPD=(\angle APC+\angle A)+\angle CPD=\angle PCD+\angle CPD=60^\circ+60^\circ$.

（2）18.

提示：$\because \triangle ACP \backsim \triangle PDB$，

$\therefore \frac{AC}{PD}=\frac{PC}{BD}$，

又 $\because PD=PC$，

$\therefore PC^2=AC\cdot BD=4\times 9=36$，$PC=6$.

13.（1）是位似图形，相似比为 1 : 2，位似中心在两个三角形的公共顶点.

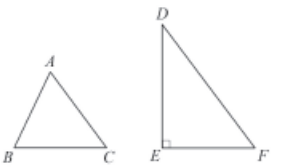
（2）是位似图形.

14. 画图略，所画图形与原图形相比，每个对应顶点的横坐标、纵坐标同乘 2，或者同乘 − 2.

15. C.

山东教育出版社

16. 如图，BC 与 EF 在一条直线上，$AC \parallel DF$. 将图（2）的三角形截去一块，使它变为与图（1）相似的图形，且 EF 是这个图形的一条边，应该怎样截？



（1）　（2）

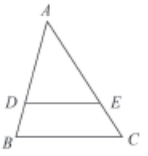
（第16题）



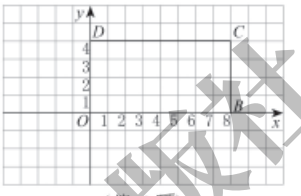
（第17题）

17. 将三角形各边向外平移 1 个单位并适当延长，得到如图所示的图形，变化前后的两个三角形相似吗？

18. 如图，D，E 分别是 AB，AC 上的点，$\triangle ABC \backsim \triangle ADE$，除了 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 的对应边成比例之外，你还能发现哪些线段成比例？请写出这些比例式.



（第18题）



（第19题）

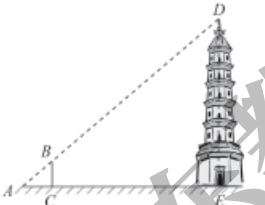
19. 如图，在直角坐标系中，以原点为位似中心，画出矩形 $OBCD$ 的位似图形，要求它与矩形 $OBCD$ 的相似比为 $\frac{1}{2}$. 你有几种方法？画出所有满足条件的图形.

问题解决

20. 如图，小明欲测量一座古塔的高度. 他站在该塔的影子上前后移动，直到他自己影子的顶端正好与塔的影子的顶端重叠，此时他距离该塔 18 m. 已知小明的身高是 1.6 m，他的影长是 2 m.

（1）图中 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 是否相似？为什么？

（2）求古塔的高度.



（第20题）

16. 提示：方法一，过点 E 画一条直线 $EG \parallel AB$ 交 DF 于点 G，沿 EG 截去 $\triangle EGD$，则剩下的 $\triangle GEF$ 与 $\triangle ABC$ 相似.

方法二，在 $\triangle EFD$ 内画 $\angle FEH$，使 $\angle FEH = \angle A$，沿 EH 截去 $\triangle EHD$，则剩下的 $\triangle EHF$ 与 $\triangle ABC$ 相似.

17. 相似.

18. $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$，$\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}$.

19. 两种方法，一种画在第一象限，另一种画在第三象限，画图略.

20.（1）相似，因为 $\angle A = \angle A$，$\angle ACB = \angle AED$.

（2）提示：$\frac{DE}{1.6} = \frac{2+18}{2}$，

$\therefore DE = 16$（m）.

山东教育出版社

21. 结论正确.

提示：设 $PA = x$ m，

$\because \triangle PAD \backsim \triangle PBC$，

$\therefore \dfrac{x}{x+45} = \dfrac{60}{90}$，

解得 $x = 90$（m）.

22. 相似.

提示：这两个直角三角形另一条直角边分别为 $\sqrt{6^2-4^2} = 2\sqrt{5}$，$\sqrt{9^2-6^2} = 3\sqrt{5}$，由 $\dfrac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{6}$ 知. 这两个直角三角形两条直角边同一比例，夹角（直角）相等，所以相似.

23.（1）$\triangle ADE \backsim \triangle ABC$，

$\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{DE}{BC}$，

$\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC}$，$\dfrac{DB}{AB} = \dfrac{EC}{AC}$.

（2）$AE = EC$.

（3）$DF = FC$.

因为 $AD \parallel EF \parallel BC$，

所以 $\dfrac{DF}{FC} = \dfrac{AE}{EB} = 1$.

（4）$HE = EC$.

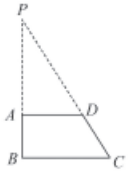
理由同上.

24.（1）相似.

提示：要说明两矩形相似，只要说明矩形的一组邻边对应成比例. 由 $AB \parallel CD$，得到 $\triangle AEP \backsim \triangle CFP$，故 $\dfrac{AE}{CF} = \dfrac{AP}{PC}$. 同理可知 $\dfrac{AG}{HC} = \dfrac{AP}{PC}$，$\therefore \dfrac{AE}{CF} = \dfrac{AG}{HC}$，$\therefore$ 矩形 $AEPG \backsim$ 矩形 $CFPH$.

21. 如图，为了测量一条河的宽度，测量人员在对岸岸边 P 点处观察到一根柱子，再在他们所在的这一侧岸上选点 A 和 B，使得 B，A，P 在一条直线上，且与河岸垂直. 随后确定点 C，D，使 $BC \perp BP$，$AD \perp BP$，由观测可以确定 CP 与 AD 的交点 D. 他们测得 $AB = 45$ m，$BC = 90$ m，$AD = 60$ m，从而确定河宽 $PA = 90$ m. 你认为他们的结论对吗？还有其他测量方法吗？





（第 21 题）

联系拓广

22. 如果一个直角三角形一条直角边和斜边分别是 4 cm 和 6 cm，另一个直角三角形的一条直角边和斜边分别是 6 cm 和 9 cm，这两个三角形相似吗？为什么？

23.（1）如图（1），D，E 分别是 $\triangle ABC$ 边 AB 和 AC 上的点，且 $DE \parallel BC$，$\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 相似吗？你能写出几组成比例的线段吗？

（2）在（1）中，若 D 为 AB 的中点，则线段 AE 和线段 EC 有什么关系？

（3）如图（2），在梯形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，E 为 AB 的中点，且 $EF \parallel BC$，线段 DF 和线段 FC 有什么关系？为什么？

（4）如图（3），直线 $GH \parallel DE \parallel BC$，若点 D 为 GB 的中点，则线段 HE 和线段 EC 有什么关系？为什么？



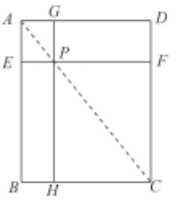
（第 23 题）

※**24.**（1）某广告公司设计员辛叔叔设计的一份矩形样图如图（1）所示，他在矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 上任意取一点 P，过点 P 分别作 $EF \parallel BC$，$GH \parallel DC$，EF 和 GH 把矩形 $ABCD$ 分为四个小矩形. 他这样设计的目的是：使左上角矩形和

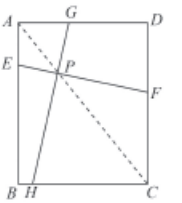
山东教育出版社

右下角矩形相似，给人一种和谐的感觉. 他的设计方法能使左上角矩形和右下角矩形相似吗？如果能，请说明理由.

（2）如图（2），在设计过程中，李叔叔又尝试着过对角线上一点 P 画了两条斜线，分别与矩形 $ABCD$ 两组对边相交于点 E，F，G，H，此时四边形 $AEPG$ 与四边形 $CFPH$ 还相似吗？为什么？

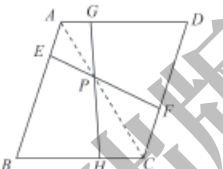


（第24（1）题）



（第24（2）题）

（3）赵叔叔认为，如图（3），只要四边形 $ABCD$ 是平行四边形，那么过对角线 AC 上任意一点 P 作两条直线分别与两组对边相交于点 E，F，G，H，上述结论都成立. 你认为他说的对吗？



（第24（3）题）

（2）四边形 $AEPG \backsim$ 四边形 $CFPH$.

提示：与（1）相同的原因，$\frac{AE}{CF}=\frac{AP}{PC}$，$\frac{AG}{HC}=\frac{AP}{PC}$，$\frac{PG}{PH}=\frac{AP}{PC}$，$\frac{EP}{FP}=\frac{AP}{PC}$.

$\therefore \frac{AE}{CF}=\frac{AG}{HC}=\frac{PG}{PH}=\frac{PE}{FP}$.

又 $\because \angle EAG=\angle FCH$，

$\angle EPG=\angle FPH$，

$\angle AGP=\angle CHP$，

$\angle AEP=\angle PFC$，

$\therefore$ 四边形 $AEPG \backsim$ 四边形 $CFPH$.

（3）上述结论成立，理由同（2）.

山东教育出版社

附录　典型案例评析

成比例线段 （第1课时）

设计：安徽省宿州市第九中学　许敬文
评析：安徽省合肥市教研室　刘德华

一、学情分析

学生已经学习了相交线、平行线、三角形、四边形（主要是平行四边形）等图形的性质与图形的判定，积累了较为丰富的数学活动经验，空间观念逐步增强，几何直观与推理能力都得到了一定的培养，对数学思想方法也有了初步的感悟. 特别是经过有关平行线、三角形、平行四边形性质与判定的学习，合情推理能力与演绎推理能力都得到了大幅度提高，为相似形的学习打下了基础.

二、教学目标

1. 结合现实情境，感受学习线段的比的必要性，了解线段的比和成比例线段.

2. 借助几何直观，掌握比例的基本性质及其简单应用.

3. 通过现实情境，进一步发展从数学的角度发现问题、提出问题、解决问题的能力；进一步培养应用意识，体会数学与自然、社会的密切联系.

三、教学重、难点

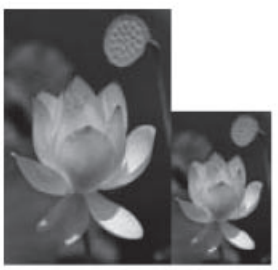
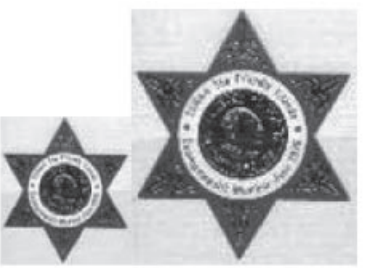
重点：理解线段的比和成比例线段的概念，掌握比例的基本性质及其应用.

难点：理解线段的比和成比例线段的概念.

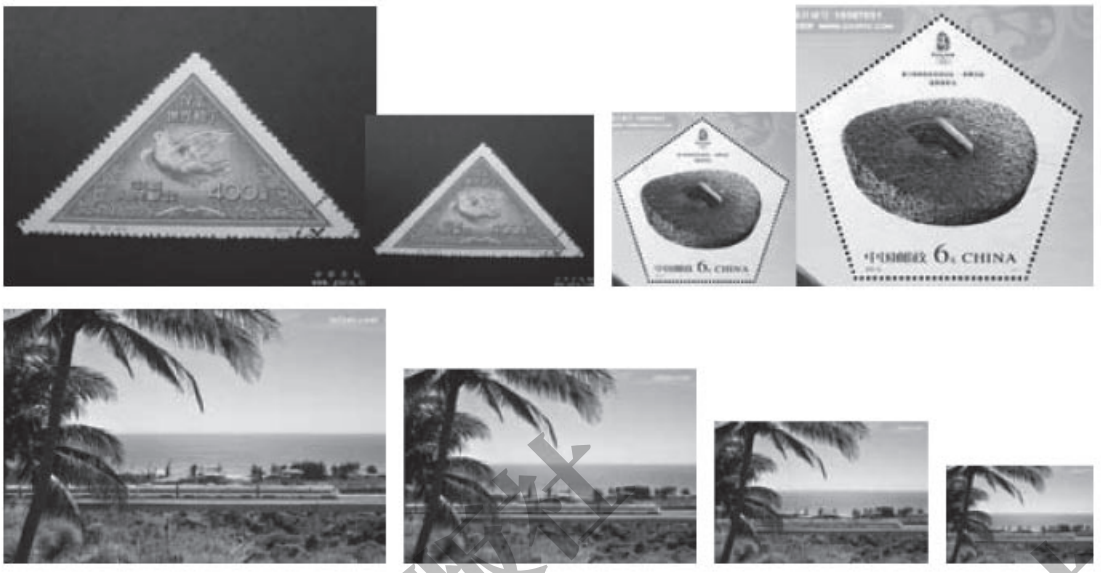
四、教学过程

【第一环节】观察与思考——导入新知

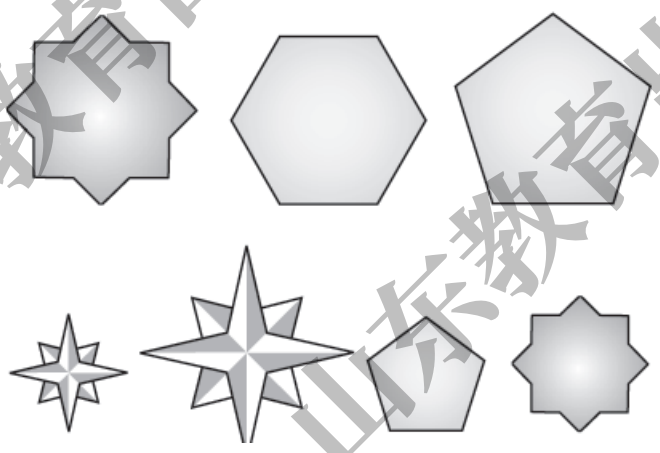
问题：（1）观察下列图形，每一组图形有什么特点？


山东教育出版社



（2）请从下图中找出形状相同的图形. 这些形状相同的图形有什么不同？怎样描述它们的不同呢？



讲评要点：难点在于如何想到用相应线段长度的比来描述它们的大小关系. 可利用多媒体技术，通过放大或缩小得到形状相同、大小不同的图形，引导学生观察放大、缩小的过程中图形上的相应线段也被放大或缩小，从而发现结论.

明晰：对于形状相同、大小不同的两个图形，我们可以用相应线段长度的比来描述它们的大小关系.

【第二环节】操作与思考——展开新知

（一）线段的比与成比例线段

1. 活动：同桌之间用不同的长度单位测量课本的长与宽（精确到0.1 cm），并求出这两条线段的长度之比.

问题：你们的结论相同吗？两条线段长度的比与所采用的长度单位有没有关系？

山东教育出版社

讲评要点：两条线段长度的比与所采用的长度单位没有关系；测量两条线段时所采用的长度单位不作限制，但要求单位统一.

明晰并板书：如果选用同一个长度单位量得两条线段 AB，CD 的长度分别是 m，n，那么这两条线段的比就是它们长度的比，即 $AB : CD = m : n$，或写成 $\frac{AB}{CD} = \frac{m}{n}$. 两条线段的比实际上就是两个数的比；两条线段的比是有序的.

2. 问题：如图1，五边形 $ABCDE$ 与五边形 $A'B'C'D'E'$ 形状相同，$AB = 5$ cm，$A'B' = 3$ cm，线段 AB 与线段 $A'B'$ 的比是多少？

讲评要点：$AB : A'B' = 5 : 3$，$5 : 3$ 就是线段 AB 与线段 $A'B'$ 的比. 这个比值刻画了这两个五边形的大小关系.

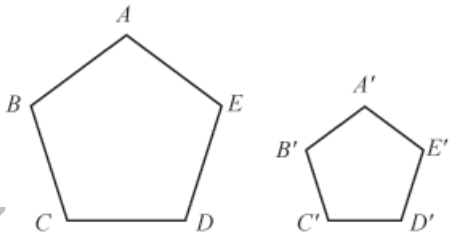


图1

3. 问题：如图2，小方格的边长为1，图中两个四边形的顶点都在格点上，那么 AB，AD，EF，EH 的长度分别是多少？分别计算 $\frac{AB}{EF}$，$\frac{AD}{EH}$ 的值，你发现了什么？$\frac{AB}{AD}$ 与 $\frac{EF}{EH}$ 的值呢？

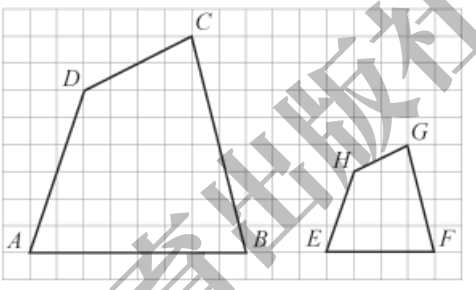


图2

讲评要点：（1）所求线段的长度可通过建立不同的直角三角形用勾股定理求出；（2）通过这一问题的探究，进一步体会两图形间线段与线段及图形本身之间的内在联系，同时承上启下，为引出比例线段做铺垫，自然过渡到下一知识点的学习.

明晰并板书：四条线段 a，b，c，d 中，如果 a 与 b 的比等于 c 与 d 的比，即 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$，那么这四条线段 a，b，c，d 叫做成比例线段，简称比例线段.

讲评要点：四条线段成比例，与四条线段的排列顺序有关，不能变动. 例如，图2中的 AB，EF，AD，EH 是成比例线段，AB，AD，EF，EH 也是成比例线段，但是 AB，AD，EH，EF 就不是成比例线段.

（二）比例的基本性质

问题：如果 a，b，c，d 四个数成比例，即 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$，那么 $ad = bc$ 吗？反过来，如果 $ad = bc$，那么 a，b，c，d 四个数成比例吗？与同伴交流.

讲评要点：（1）有学生根据等式的基本性质，在 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 两边同时乘 bd，得到 $ad = bc$，对此要给予积极的肯定. 还可以引导学生通过引入比值 k 的方法解决问题. 可设计问题串引导学生将问题的思考步步深入：① 还有没有其他方法，可以化分式形式为整式形式呢？② 如果已知 $\frac{a}{b}$ 与 $\frac{c}{d}$ 的比值为2，你怎样由 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 得到 $ad = bc$ 呢？③ 如果 $\frac{a}{b}$ 与 $\frac{c}{d}$ 的比值不确定，你还能用②中的方法得到结论吗？

山东教育出版社

至于由 $ad=bc$ 得出 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，要提醒学生注意条件：$b\neq 0$，$d\neq 0$.

（2）a，b，c，d 四个数成比例，它们是有顺序的，它们对应的关系只能是 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 或 $a:b=c:d$.

明晰并板书：如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么 $ad=bc$.

如果 $ad=bc$（a，b，c，d 都不等于 0），那么 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

【第三环节】应用与思考——巩固新知

1. 例题：如图 3，一块矩形绸布的长 AB 为 a m，宽 AD 为 1 m，要将它裁成相同的三面矩形彩旗，且使裁出的每面彩旗的长与宽的比与原绸布的长与宽的比相同，即 $\frac{AE}{AD}=\frac{AD}{AB}$，那么，满足条件的 a 的值应当是多少？

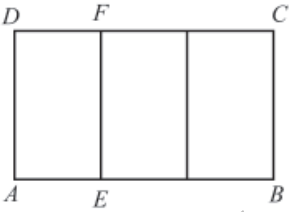


图3

解：易知裁出的每面彩旗的宽和长分别为 $\frac{a}{3}$ m 和 1 m，依题意得 $\frac{\frac{1}{3}a}{1}=\frac{1}{a}$，即 $\frac{1}{3}a^2=1$，所以 $a^2=3$.

开平方得 $a=\sqrt{3}$（$a=-\sqrt{3}$ 舍去）.

即满足条件的 a 为$\sqrt{3}$.

讲评要点：应用比例的基本性质解题.

尽量由学生自己通过独立思考解决问题，对于有困难的学生，注意引导学生反复阅读，理解题意，师生共同分析.

2. 随堂练习：

1. 你知道地图比例尺的含义吗？生活中还有哪些利用线段比的实例？

2. 一条线段的长度是另一条线段的 5 倍，求这两条线段的比.

3. a，b，c，d 是成比例线段，其中 $a=3$ cm，$b=2$ cm，$c=6$ cm，求线段 d 的长.

讲评要点：通过 1~2 两题的练习，学生进一步体会线段的比例在生活中的应用. 第 3 题是比例的基本性质的应用.

【第五环节】回顾与思考——提升新知

1. 这节课我们学习了哪些知识点？

讲评要点：线段的比和成比例线段的概念；比例的基本性质.

2. 对本节课所学的知识，你觉得需要注意什么问题？

讲评要点：两条线段的比，与度量的长度单位无关，只要度量单位一致即可；两条线段的比及四条线段成比例与线段排列顺序有关.

3. 你有没有需要和同伴探讨、交流的问题？有没有需要老师点拨的问题？

【第六环节】布置作业

习题9.1.

山东教育出版社

五、案例评析

许老师的设计对教科书理解正确、把握恰当；教学目标的确立，重点和难点的分析，尤其是教学难点的分析，符合教科书的编写意图. 整个教学设计，过程完整，层次清楚.

这节课是本章的起始课，教学内容的特点是概念多而碎，难点是线段比的概念的引出，重点是比例的基本性质及其推导. 在教学重、难点的处理上，本设计做了有意义的尝试.

1. 本设计利用多媒体技术，引导学生通过观察图形放大、缩小的过程，从而引出图形中相应线段也同步放大、缩小，进而提出用线段的比刻画、描述形状相同的图形的不同. 由于学生对多媒体应用背景熟悉，加之整个操作过程形象、直观，因此有利于对教学难点的突破.

2. 比例的基本性质是本节课的重点. 对比例基本性质的推导，学生容易想到根据等式的基本性质进行推导，而对于设比值k的方法，会有“怎么想到设k”的疑问. 本设计通过问题串，引导学生将问题的思考一步一步引向深入：从化归转化思想出发，提出有没有新的化归转化方法的问题；从具体的比值，到抽象的但更具一般性的比值k，不仅回答了“怎么想到”的疑问，而且通过问题的步步深入，培养学生的数学思维能力，帮助他们积累数学活动经验.

山东教育出版社 山东教育出版社

综合与实践　制作视力表

一、教学目标

1．经历探究视力表制作原理的过程，进一步积累数学活动经验，发展综合运用数学知识分析问题、解决问题的能力.

2．探究视力表中蕴含的数学知识，体会视力表的制作原理，进一步理解相似图形、位似图形等有关内容，会根据一个已知标准视力表，制作测试距离变更后的视力表.

二、设计思路

本综合与实践旨在结合前面学过的相似多边形及位似图形的相关内容，让学生通过实际操作，探究视力表中蕴含的数学知识，进一步发展学生综合运用数学知识分析问题、解决问题的能力，初步形成“用数学”的意识.

具体来说，本综合与实践设计了五个步骤.

步骤1:引导学生观察、度量“标准对数视力表”中不同视力所对应的“E”的大小（长和宽），发现它们可以近似看成相似图形.

步骤2：通过对两个“E”的实际操作，让学生初步体会：可以用“E”的高与它到眼睛的水平距离之比来刻画视力.

步骤3：通过对多个“E”的实际操作，让学生进一步认识步骤2的结论.

步骤4：让学生根据一个已知标准视力表，利用前面的结论制作测试距离变更后的视力表.

步骤5：让学生调查其他类型的视力表，并写出调查报告.

本综合与实践的内容重心是，探究视力表中蕴含的数学知识，体会视力表的制作原理，进一步理解相似图形、位似图形等有关内容，会根据一个已知标准视力表，制作测试距离变更后的视力表.

本综合与实践的活动重心是，引导学生观察、度量“标准对数视力表”中不同视力所对应的“E”的大小（长和宽），让学生初步体会，可以用“E”的高与它到眼睛的水平距离之比来刻画视力．另外，让学生调查其他类型的视力表，写出调查报告.

三、教学建议

1．以小组合作方式展开综合与实践活动，鼓励学生在活动过程中认真思考、积极交流，进一步积累相关活动经验.

2．注意学生度量活动的科学性、准确性，以及操作活动的规范性（如步骤2和步骤3）；不仅关注度量的结果，更要重视对结果的反思和交流，引导学生思考视力表的制作

山东教育出版社

原理，鼓励学生积极表述活动中探究发现的结论或反思后的结果.

3．活动结束后，可以进一步启发学生思考现实生活中可能蕴含某些数学知识的现象，培养他们用数学的眼光考察现实世界的意识.

四、评价建议

1．关注学生的合作意识、协作交流能力、反思能力，以及表达能力．如在步骤 2 和步骤 3 的小组合作活动中，要关注每个学生参与活动的程度，与小组成员的交往、交流、协作能力，对结果的表述、反思能力等.

2．在调查视力表的活动中，关注学生的自主调研能力.

3．建议采用 A，B，C，D 四个等级进行评价，分别对应优秀、良好、中等、基本及格．一般情况下，尽量不给予学生不合格的评价，除非其与 D 级水平有明显差异．四个等级表现描述如下：

等级	标　准
D	在小组活动中，能自己完成步骤 1．能按照教师的要求去做，与小组成员的交往、协作能力一般，参与活动的热情一般.
C	在操作活动中，能从视力表中发现数学知识，能够比较主动地和同伴一起动手操作，分工合作，得到结果后能与他人交流、表述，活动积极性较高.
B	在 C 级基础上，有自己的想法和见解，并能对实验的结果进行反思，向同伴解释自己的想法，听取别人的建议和意见等.
A	在 B 级基础上，善于挑战自我，能自主探究，从数学的角度分析现实生活中的现象，用数学知识解决生活中的问题，并能积极主动地帮助同学.

山东教育出版社

综合与实践

制作视力表

视力表对我们来说并不陌生. 但你想过吗，视力表中蕴含着一定的数学知识.

[1]有一种视力表，它是以能否分辨出“E”的开口朝向为依据来测定视力的. 换句话说，它的测试依据是能否看清楚“E”的两个空白缺口（如图 1 中 AB，CD 两个缺口）.



图 1

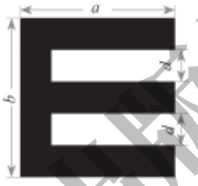


图 2



下面我们以“标准对数视力表”为例，探索视力表中的奥秘.

[2]1. 度量视力表中视力为 0.1，0.2，0.3，0.4，0.5，0.6，0.8，1.0，1.2，1.5，2.0 所对应的“E”的长 a、宽 b，空白缺口宽 d（见图2），并填写下表：

视力	a/mm	b/mm	d/mm
0.1			
0.2			
0.3			
0.4			
0.5			

[1]这里所说的视力表是指以“E”为测试工具的视力表. 除这种视力表外，目前还有以“C”为测试工具的视力表.

[2]选取“标准对数视力表”，原因在于这种视力表中的“E”恰好都近似于“正方形”，因而很容易判定它们是相似图形.

若教学时间允许，也可以组织学生从数学的角度对“标准对数视力表”中的“E”进行另外的探究. 如从平移、旋转的角度考察各个“E”的关系等.

山东教育出版社

续表

视力	a/mm	b/mm	d/mm
0.6			
0.8			
1.0			
1.2			
1.5			
2.0			

（1）观察上表，你发现了什么？

（2）视力表中的各“E”形图之间有什么关系？

[1] 2. 用硬纸板复制视力表中视力为 0.1，0.2，0.3，0.5，1.0 所对应的“E”，并依次编号为①②③④⑤.

取编号为①②的两个“E”，按图 3 的方式把它们放置在水平桌面上.



图 3

如图 4，将②号“E”沿水平桌面向右移动，直至从右侧点 O 看去，点 P_1，P_2，O 在一条直线上为止. 这时我们说，在 D_1 处用①号“E”测得的视力与在 D_2 处用②号“E”测得的视力相同.[2]

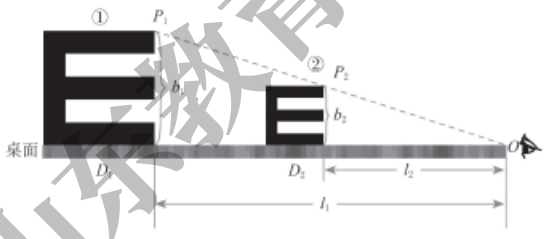


图 4

[1] 选取的硬纸板材料要有一定硬度和厚度，以便能立于桌面上.

[2] 实际上，可以用“E”的高与它到眼睛的水平距离之比（即 $\frac{b}{l}$）来刻画视力. 也就是说，大小不同的“E”，只要它们这一比值相同，那么用它们测得的视力就相同. 例如，在图 4 中，如果以 l_1 为测试距离，①号“E”对应的视力为 0.1，那么当以 l_2 为测试距离时，②号“E”所对应的视力也是 0.1；反之，如果以 l_2 为测试距离，②号“E”对应的视力为 0.2，那么当以 l_1 为测试距离时，①号”E”所对应的视力也是 0.2.

山东教育出版社

[1] 从图 4 你发现了什么？与同伴交流.

3. 按照上述方式，将 ①～⑤ 各个“E”排列成如图 5 所示的样子.

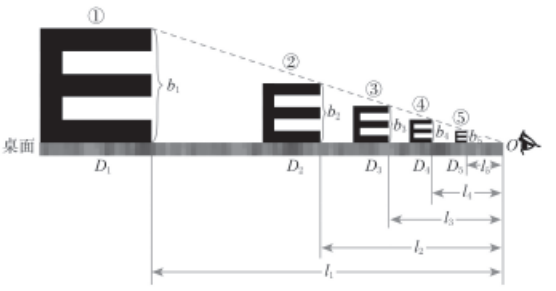


图 5

从图 5 你能得到什么结论？[2]

[3]4. 现有一个标准视力表，它要求的测试距离❶为 5 m. 根据这个视力表，怎样制作一个测试距离为 3 m 的视力表？如果要求测试距离为 8 m 呢？

习题

到有关单位进行调查，目前较为通用的视力表有哪几种？它们与我们上面讨论的视力表是一种什么换算关系？整理调查结果并写出调查报告.[4]

❶ 测试距离指被测者与视力表之间的水平距离.

[1] 从图 4 可以发现两个相似直角三角形，进而得到 $\frac{b_1}{l_1}=\frac{b_2}{l_2}$. 如果有必要，教学时也可以让学生实际度量一下，并列出下表：

“E”的编号	b/mm	l/mm
①	$b_1=$	$l_1=$
②	$b_2=$	$l_2=$

根据这个表中的数据得出或验证上述结论，这样可以增加学生的真实感受.

[2]从图5可以得到如下结论：

（1）$\frac{b_1}{l_1}=\frac{b_2}{l_2}=\frac{b_3}{l_3}=\frac{b_4}{l_4}=\frac{b_5}{l_5}$.

（2）如果以 l_1 为测试距离，① 号“E”对应的视力为 0.1，那么当 l_3 为测试距离时，③ 号“E”所对应的视力也是 0.1；反之，如果以 l_3 为测试距离，③ 号“E”对应的视力为 0.3，那么当以 l_1 为测试距离时，① 号“E”所对应的视力也是 0.3……

学生的回答可能多种多样，但只要有道理就应予以肯定.

（3）这五个“E”两两是位似图形.

[3] 步骤 4 要求学生利用步骤 2 和步骤 3 得出的结论进行实际制作. 教学时，应首先要求学生提出制作方案，并说明其中的道理.

测试距离变更为 3 m 时，只需把已知视力表中的各个“E”的边长分别缩小到其 $\frac{3}{5}$；

测试距离变更为 8 m 时，只需把已知视力表中的各个“E”的边长分别扩大到其 $\frac{8}{5}$.

[4] 若教学时间允许，教师可组织学生课上讨论. 学生可通过社会调查、网上调查、资料查询等方式对现有视力表的类型、制作原理、与本综合与实践所用视力表的换算关系等提供有价值的报告. 教师对相关信息也应事先有所了解和掌握.

山东教育出版社

附录　典型案例评析

制作视力表

设计：山东省青岛市第五十一中学　苗芳花
评析：山东省青岛市市南区教育研究指导中心　林建明

课前准备

1. 到有关单位调查或上网了解各种视力表的类型以及特点，并收集有代表性的几种视力表，自主探究视力表中蕴含的数学问题.

2. 小组交流，每组准备一张标准对数视力表（测试距离为5 m），小组合作，用硬纸片复制其中五个大小不同的“E”.

说明：为了便于测量，复制的“E”要选取两个较大的.

一、教学过程

【第一环节】小组展示

活动一：各组展示收集到的视力表.

小组发言1：我们收集的是动物形视力表，常用于幼儿园.

小组发言2：我们展示的是国际标准视力表，字母“C”形视力表，是飞行员用的.

小组发言3：我们的是“E”形视力表，测试距离是5 m. 还有测试距离是3 m和1.5 m的.

说明：教师展示的是测试距离为20 cm的“E”形视力表. 通过展示，学生发现视力表的大小与测试距离有关，为后续探究做好铺垫. 在展示中应引导学生观察各种视力表的用处，同时关注视力表的大小与测试距离有关.

【第二环节】探究规律

活动二：标准对数视力表是以能否分辨出“E”的开口朝向为依据来测定视力的. 换句话说，视力表的测试依据是能否看清楚“E”的两个空白缺口（如图1中AB，CD两个缺口）. 我们以对数视力表为例，观察视力表中蕴含着哪些数学知识. 小组讨论交流.



图1

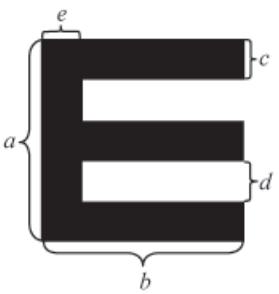


图2

山东教育出版社

小组发言1：“E”形图的外框是正方形，所有的“E”都是相似的.

小组发言2：每一行的“E”是全等的，同一行的“E”之间可经过平移、旋转、轴对称得到.

小组发言3：在同一测试距离下，视力越好，所对应的视标“E”越小.

小组发言4：如图2，$a=b$，$c=d=e$.

说明：在探究的过程中，教师引导学生，让各组选取不同的“E”，合作完成下列表格：

视力	a/mm	b/mm	c/mm	d/mm	e/mm
0.1					
0.2					
0.3					
…	…	…	…	…	…

学生通过观察、操作、验证视力表中蕴含的数学知识，进一步熟悉视力表，为制作视力表奠定基础. 教师也可以用几何画板展示规律.

【第三环节】揭示原理

活动三：以小组为单位取出两个较大的用硬纸板复制的“E”，依次编号为①②，放在水平的桌面上. 如图3所示，将②号“E”沿水平桌面移动，直至从观测点 O 看去，对应顶点 P_1，P_2，O 在同一条直线上为止. 探究 $\frac{b_1}{l_1}$ 与 $\frac{b_2}{l_2}$ 之间的关系. 小组合作完成，你有哪些发现？

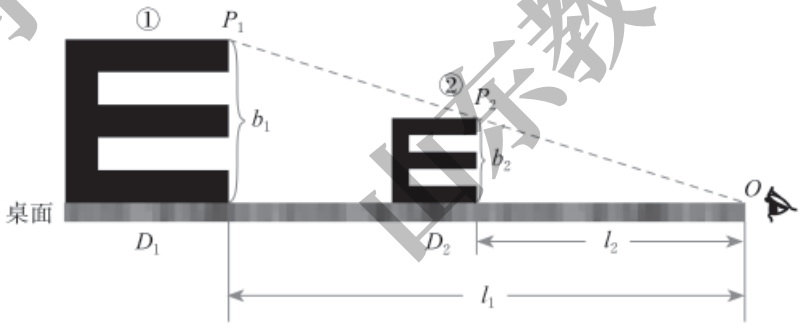


图3

小组发言1：通过计算我们发现 $\frac{b_1}{l_1}=\frac{b_2}{l_2}$.

小组发言2：我们从图3中可以发现这两个“E”还是位似图形，位似中心是点 O，$\frac{b_1}{b_2}=\frac{l_1}{l_2}$是相似比，所以 $\frac{b_1}{l_1}=\frac{b_2}{l_2}$.

小组发言3：我们得出的结论是，大小不同的“E”，只要 $\frac{b_1}{l_1}=\frac{b_2}{l_2}$，那么用它们测得的视力就相同.

山东教育出版社

说明：教师应关注和指导学生操作的规范性，以及测量的科学性和准确性；及时捕捉学生的亮点，并给予积极的评价；教师可制作 EXCEL 表格，汇总学生的实验数据，得出实验结果，并与小组的发言进行对比.

测量数据						
组别	b_1	b_2	l_1	l_2	$\frac{b_1}{l_1}$	$\frac{b_2}{l_2}$
第一组						
第二组						
第三组						
…	…	…	…	…	…	…

学生通过测量、计算得出 $\frac{b_1}{l_1}=\frac{b_2}{l_2}$ 后，应引导学生通过证明三角形相似，发现可以用“E”的高与它到眼睛的水平距离之比（即 $\frac{b}{l}$）来刻画视力. 教师可向学生介绍视角的概念及其相关的结论.

活动四：按照上述方式，将 ①~⑤ 各个“E”排列成如图 4 所示的样子.

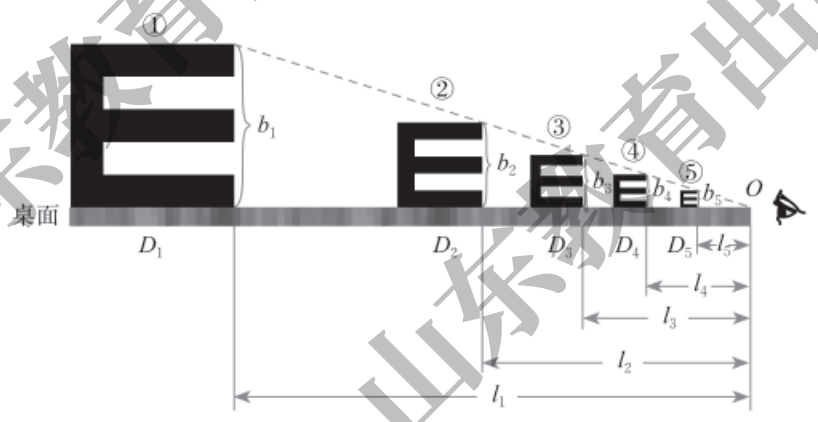


图 4

观察图 4，从图 4 你能进一步得到什么结论？小组讨论交流.

小组发言 1：$\frac{b_1}{l_1}=\frac{b_2}{l_2}=\frac{b_3}{l_3}=\frac{b_4}{l_4}=\frac{b_5}{l_5}$.

小组发言 2：如果以 l_1 为测试距离，① 号“E”对应的视力为 0.1，那么当 l_3 为测试距离时，③ 号“E”所对应的视力也是 0.1；反之，如果以 l_3 为测试距离，③ 号“E”对应的视力为 0.3，那么当以 l_1 为测试距离时，① 号“E”所对应的视力也是 0.3……

小组发言 3：这五个“E”两两是位似图形.

说明：通过对五个“E”的实际操作，让学生进一步体会前一个步骤所得结论.

山东教育出版社

【第四环节】拓展应用

问题1：现有一个标准视力表，它要求的测试距离为5 m. 根据这个视力表，怎样制作一个测试距离为3 m的视力表？如果要求测试距离为8 m呢？小组讨论，制订方案.

问题2：如果小明房间最大距离为3.5 m，那么他如何使用测试距离为5 m的标准视力表？你有哪些办法？小组讨论，然后交流.

说明：小组内讨论、思考制作过程中的细节，得出制作方案；请一个小组展示本组设计的方案，其他小组进行评价和补充，引导学生将方案进行优化. 课堂上可以根据准备的标准对数视力表，通过小组合作，制作一个视力为0.1、测试距离为3 m的“E”，各组比较，看看大小是否一样，并解释理由.

【第五环节】感悟交流

1. 你学到了哪些知识？哪些方法？

2. 你还有哪些困惑？

3. 你对自己有何评价？

说明：学起于思，贵有疑. 教师应鼓励学生畅谈自己的学习心得和体会，对自己进行合理的评价，激发学生对数学的学习兴趣与信心，培养学生独自梳理知识、归纳学习方法、积累活动经验的能力，锻炼学生的语言表达能力. 教师应鼓励其他学生进行补充纠正，并进行适时的点拨和强调.

【第六环节】布置作业

1. 市疾病控制中心专家2007年度追踪调查岛城中小学生视力不良状况，发现四成小学生、八成中学生视力不良. 为了保护好自己的眼睛，根据你的卧室条件，自制一张视力表，定期测试视力.

2. 到有关单位进行调查，目前较为通用的视力表有哪几种？它们与我们今天讨论的视力表是一种什么换算关系？整理调查结果并写出调查报告.

说明：作业的布置将课内的学习延伸到课外，给学生更广阔的提升空间. 对于第1题，应重点强调步骤的有序性及语言叙述的简练性. 教师应鼓励学生用所学知识进行探究、创新、实践.

二、案例评析

本教学设计主要通过学生的操作活动，探究视力表中所蕴含的数学知识，并运用有关原理制作视力表，让学生经历操作、探究、发现、应用的过程. 教师的教学设计环环相扣，层层深入. 学生通过这一综合与实践活动，活动经验进一步丰富，发现问题、分析问题、解决问题的能力进一步提高.

实际教学时，教师也可以根据自己学生的情况进行调整. 例如，教师可以先提前布置任务，完全让学生自己去探究，小组合作总结出有关结论，制订出制作视力表的方案；然后再进行课堂展示、交流、质疑、修改.

山东教育出版社

综合与实践　直觉的误导

一、《标准》要求

1．结合实际情景，经历设计解决具体的方案并加以实施的过程.

2．会反思活动的全过程，将研究的过程和结果进行交流.

3．通过对有关问题的探讨，了解所学知识之间的关联，进一步理解有关知识，发展应用意识和能力.

本节课内容是《标准》实施建议中的实例 74.

二、教学目标

1. 经历按要求设计、制作正方形，并按要求剪切和拼接成“矩形”的过程，发展动手操作能力.

2. 经历发现正方形与“矩形”面积不等的矛盾，寻求解释矛盾的方法，发展合情推理和逻辑推理能力.

3. 体会直接判断的局限性，增强对严密的数学逻辑推理重要性的认识.

4. 体会相似三角形等知识应用的广泛性，提高学数学、用数学的意识.

5. 经历小组合作与交流活动，进一步积累合作与交流的活动经验，增强合作意识，发展合作能力.

三、设计思路

本综合与实践活动的基本意图是让学生通过拼接图形发现矛盾和解释矛盾，体会到对于数学结论，完全凭直觉判断是不行的，还需要通过逻辑推理验证.

步骤 1：两人一组，用预先准备好的硬纸每人剪下一个 8 cm × 8 cm 的正方形硬纸片，然后按图 1 所示的尺寸划线，并将正方形硬纸剪成两个直角梯形和两个直角三角形纸片.

步骤 2：将剪成的纸片按图 2 拼成一个“矩形”. 两人相互检查，看看拼成的“矩形”是否标准. 计算“矩形”的面积，看看与原来的正方形面积有何差别.

步骤 3：思考、讨论下面几个问题：

（1）拼成的图形从边框看是否是矩形？

（2）拼成的图形中间是否有空隙？怎样检验？

步骤 4：确定空隙的形状，计算空隙的面积.

步骤 5：完成课本第 2 个“做一做”，思考、讨论拼成的图形面积减少了 1 cm^2 的原因.

步骤 6：总结交流本节课的收获，写出小论文.

山东教育出版社

四、教学建议

本节课预设两课时，步骤 1~3 为第 1 课时，步骤 4~6 为第 2 课时.

在教学活动中，建议注意以下几个问题：

1. 课前要有充分准备. 每位同学要准备约 16 开大小的薄纸板（鞋子、衬衣等的包装盒都可以）2 张、刻度尺、三角尺、铅笔、剪刀等.

2. 要注意学生动手操作的规范性，剪出的正方形以及后来剪出的直角梯形、直角三角形纸片尽可能标准、平整，便于拼接.

3. 引导学生猜想、证明拼出的“疑似矩形 $ABCD$”内部有空隙. 这一环节是本节课的重点.

由于剪裁和拼接总会有一定的误差，学生很难发现拼出的图形内部有空隙.

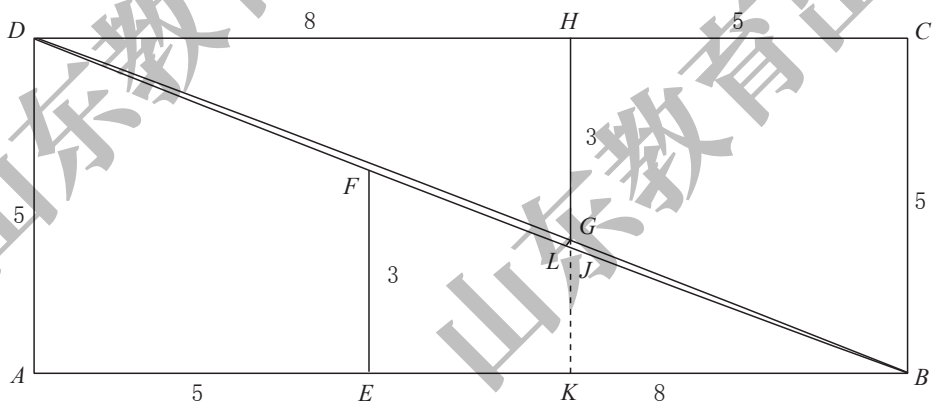
要让学生充分发表意见，大胆猜想拼出的“疑似矩形”（课本中图 2）比原来的正方形多出 1 cm^2 的原因. 以下是引导学生思考的过程.

① 拼出的图形的外框是矩形（拼成的图形两组对边分别相等，且有一个角是直角）.

② 多出 1 cm^2 可能是拼成的图形内部有空隙.

③ 由于△DGH 与梯形 $BCHG$ 拼接紧密，△BEF 与梯形 $AEFD$ 拼接紧密，所以要有空隙，只能在对角线 BD 附近.

④ 也就是说图 2 中，△DGH 的边沿 DG 与梯形 $BCHG$ 的边沿 GB 可能不在一条直线上，同理 DF 与 FB 也不在一条直线上. 若将图 2 放大，很可能是下面的图形！



⑤ 以上都是我们的猜想（合情推理），要证明拼成的图形在对角线附近有空隙，就要用证明（逻辑推理）.

⑥ 上图中，延长 HG 分别交 FB，EB 与 J，K. $HG = 3$ cm，$HK = 5$ cm，若能证明 $JK < 2$ cm，就说明点 G，J 之间有间隙.

⑦ JK 的值是可以通过△JKB ∽ △FEB 求得：

$\frac{JK}{FE} = \frac{KB}{EB} \Rightarrow \frac{JK}{3} = \frac{5}{8} \Rightarrow JK = \frac{15}{8}$（cm）. $GJ = 2 - \frac{15}{8} = \frac{1}{8}$（cm）. 这就证明了点 G，J 之间有 $\frac{1}{8}$ cm 的间隙.

山东教育出版社

⑧ 同理，在 F 点的上方也应有 $\frac{1}{8}$ cm 的间隙. 这就证明了拼成的疑似矩形 $ABCD$ 在对角线 BD 附近确有空隙，这个空隙是四边形 $BGDF$.

教学时教师可以用《几何画板》等教学软件将拼成的图形局部适当放大，便于学生看清空隙的形状.

教学中学生若能用其他方法合理说明疑似矩形 $ABCD$ 在对角线 BD 附近确有空隙，要给予鼓励.

4. 引导学生猜想、证明空隙四边形 $BGDF$ 的形状，并求出其面积. 此环节是本节课的难点. 以下是引导学生思考的过程.

① 疑似矩形 $ABCD$ 比原来的正方形多 1 cm^2，这 1 cm^2 是否是空隙四边形 $BGDF$ 的面积?

② 确定空隙四边形 $BGDF$ 的形状，求出它的面积.

③ 四边形 $BGDF$ 是不是平行四边形?

易知，$BG = DF$，$BF = GD$，所以空隙四边形 $BGDF$ 是平行四边形.

④ 作平行四边形 $BGDF$ 的高 GL. $BF = \sqrt{3^2 + 8^2} = \sqrt{73}$. 由 Rt△ GLJ ∽ Rt△ BEF 得到 $\frac{GL}{EB} = \frac{GJ}{BF} \Rightarrow \frac{GL}{8} = \frac{\frac{1}{8}}{\sqrt{73}} \Rightarrow GL = \frac{1}{\sqrt{73}}$. ∴ $\square BGDF$ 的面积 $S = BF \cdot GL = \sqrt{73} \cdot \frac{1}{\sqrt{73}} = 1$(cm^2).

这说明疑似矩形 $ABCD$ 内有 1 cm^2 的空隙，这恰好是疑似矩形比原来的正方形多出的面积. 问题得到完全解决.

5. 学生完成课本第 2 个“做一做”时，鼓励学生用类比的方法确定疑似矩形 $ABCD$ 内重叠的情况.

6. 学生的小论文中要包括对习题 2，3 的解答.

习题 2 中，重新拼接的图形面积“减少”的原因有两条：一是图形有重叠，二是小矩形的宽大于 1.

习题 3 与“黄金分割”相联系. 要使学生明白，此类拼图问题，只有按黄金分割剪切正方形纸片，才能拼接成内部无空隙、无重叠的矩形，面积才不会发生变化！同样，用这种方法拼接习题 2 的图形时，面积也不会发生变化.

五、评价建议

1. 关注学生制作图形、拼接图形过程中，动手操作能力的发展.

2. 关注学生合情推理能力与逻辑推理能力的发展.

3. 关注学生计算能力的发展.

4. 关注学生合作能力的发展.

5. 小论文的质量是评价的重要依据.

山东教育出版社 山东教育出版社

综合与实践

直觉的误导

[1]将一个正方形纸片剪成四块，能拼成一个比原来正方形面积大的矩形，你相信吗？

做一做

（1）两人一组，分别从硬纸上剪下一张 8 cm × 8 cm 的正方形纸片，并按图 1 所示的尺寸画线，然后剪成两个梯形和两个直角三角形纸片．

（2）将剪出的 4 张纸片按图 2 所示的方式拼接成四边形 *ABCD*．

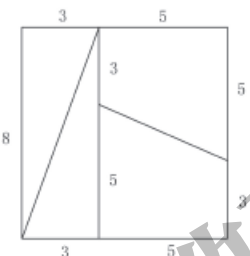


图 1

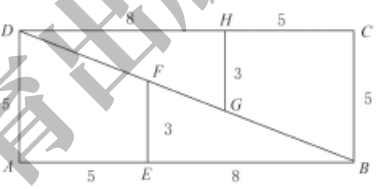


图 2

想一想

（1）四边形 *ABCD* 是矩形吗？为什么？

（2）分别计算图 1 和图 2 的面积，你发现什么问题？你认为问题出在哪里？

教学目标

1. 经历按要求设计、制作正方形纸片，并按要求裁剪和拼接成疑似矩形纸片的过程，发展动手操作能力．

2. 经历发现正方形与矩形面积不等的矛盾，寻求解释矛盾的方法，发展合情推理和演绎推理能力．

3. 体会直接判断的局限性，增强对严密的数学逻辑推理重要性的认识．

[1]提出一个自相矛盾的问题，激发学生的学习兴趣．

做一做

划线、剪切、拼接一定要规范，同桌要相互检查．

拼接时，要保证 *D*，*H*，*C* 三点共线，*A*，*E*，*B* 三点共线．

由于拼出的图形中间空隙很小，学生不容易发现．

想一想

（1）拼出的四边形 *ABCD* 两组对边分别相等，且 $\angle A = 90^\circ$，四边形 *ABCD* 是矩形．

（2）正方形的面积是 64 cm^2，拼出的“矩形” *ABCD* 的面积是 65 cm^2，产生矛盾．

猜想拼出的“矩形”内部有空隙．

山东教育出版社

议一议

本环节是本节课的教学重点. 一定要组织学生积极参加讨论，各种不同的意见要充分交锋. 每个同学的合情推理能力和演绎推理能力都要让他们充分展现.

做一做

正方形的面积是 169 cm^2，拼接出的矩形面积是 168 cm^2，猜想矩形对角线附近有重叠（如下图）. 利用相似三角形可以求得重叠部分 $JG=\frac{1}{13}$.

议一议

（1）有的同学认为图 2 拼接成的四边形 $ABCD$ 虽然对边相等，但左上角和右下角可能不是直角，四边形 $ABCD$ 是平行四边形但可能不是矩形，所以按矩形计算面积会算多了. 他的想法有道理吗？

（2）有的同学怀疑 4 块纸片并没有铺满图 2 中的四边形 $ABCD$，而是留有缝隙. 他的怀疑有道理吗？你能发现你们拼的四边形中间有缝隙吗？

（3）如果有缝隙，缝隙在何处？是什么形状？你能证明这个结论吗？

做一做

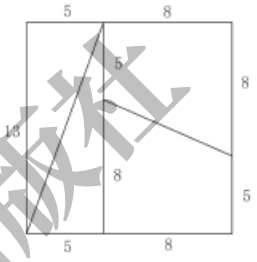


图 3

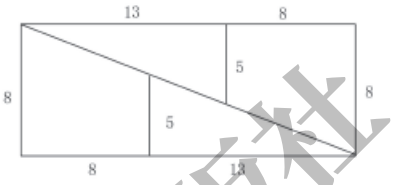
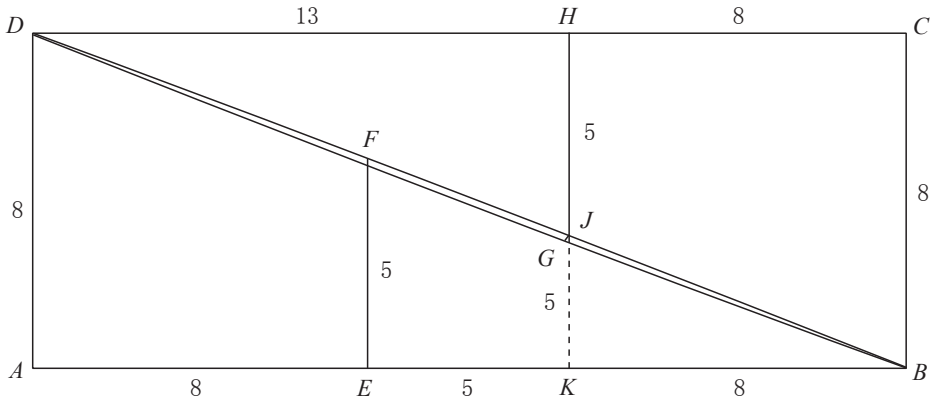


图 4

（1）从一张硬纸上剪下一个 13 cm × 13 cm 的正方形纸片，按图 3 的方式裁剪，再按图 4 的方式拼接，分别计算图 3 和图 4 中图形的面积.

（2）解释两个图形面积不同的原因.

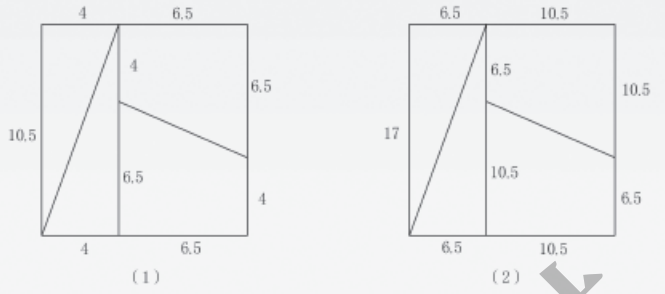
以上是两个直觉与逻辑不符的例子，拼接图形时，由于拼接处留下的空隙或重叠的部分很小，我们不易察觉，因而出现“多出”或“丢失”一小块面积的错觉，直觉误导了我们.



山东教育出版社

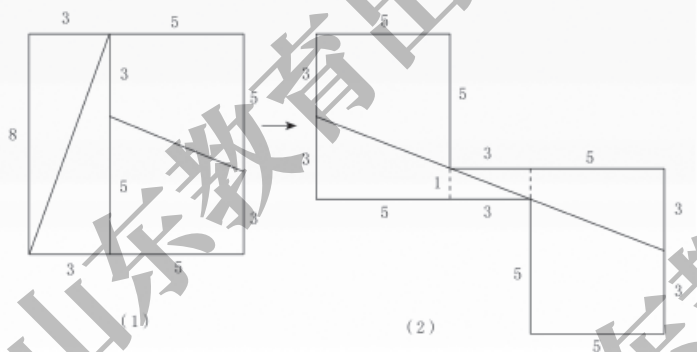
习题

1. 下面分别是 10.5 cm × 10.5 cm 和 17 cm × 17 cm 的两个正方形，请按图上的尺寸准确画图并剪开，分别拼成矩形，解释拼成的矩形为什么与原来的正方形面积不同.



（第1题）

2. 将 8 cm×8 cm 的正方形硬纸片按图（1）的方法剪开拼成图（2），图（2）可以看做是由两个大矩形和一个小矩形组成的. 计算图（2）的面积，你发现了什么问题？问题出在哪里？



（第2题）

习题

1.（1）正方形的面积是 $10.5\times10.5=110.25$（cm^2），拼出的“矩形”的面积是 $17\times6.5=110.5$（cm^2），比正方形多出了 0.25 cm^2，因为拼出的“矩形”中间有缝隙.

（2）正方形的面积是 $17\times17=289$（cm^2），拼出的“矩形”的面积是 $10.5\times27.5=288.75$（cm^2），比正方形减少了 0.25 cm^2，因为拼出的“矩形”中间有重叠.

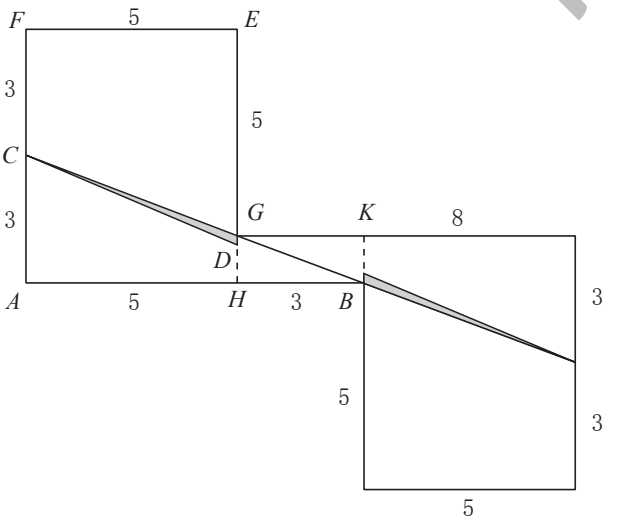
2. 拼出的图形面积看起来是 $5\times6\times2+3\times1=63$（$cm^2$），比正方形的面积 64 cm^2 减少了 1 cm^2. 通过仔细计算可以发现其中的问题.

下图中，$\triangle BHG\backsim\triangle BAC$，$\therefore\ GH:AC=BH:BA$，$GH:3=3:8$. $GH=1.125$.

$S_{矩形\ BKGH}=3\times1.125=3.375$（$cm^2$）. 比原来少算了 0.375 cm^2.

再者，由 $GD=GH-DH=1.125-(6-5)=0.125$（cm）可知，图中的 $\triangle GDC$ 和另外一个相同的三角形为拼接时重叠的部分，重叠的面积为 $(0.125\times5\div2)\times2=0.625$（$cm^2$）.

0.375 cm^2 + 0.625 cm^2 = 1 cm^2，这恰好是拼图时少算的面积.



山东教育出版社

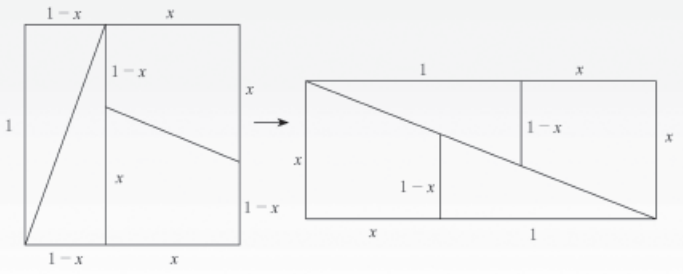
3. 依题意：$(x+1)x=1$，

$x^2+x-1=0$. 解得

$x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618(\text{dm})$.

（另一根不合题意，舍去）

3. 将边长为 1 dm 的正方形硬纸片按适当的比例剪成图（1）所示的 4 块，恰好能拼成图（2）所示的面积为 1 dm^2 的矩形，求 x 的近似值（精确到 0.001 dm）.



（第 3 题）

山东教育出版社

山东教育出版社

附录　学科知识拓展

斐波那契数列与本节内容的关系

按照一定顺序排列的一列数叫做数列. 例如：1，2，3，4，…叫做自然数列；1，3，5，7，…叫做奇数列；1，2，3，5，7，11，13…叫做质数列. 数列的项 a_n 与项数 n 之间的关系如果可以用一个公式表示，那么这个公式叫做这个数列的通项公式. 例如，自然数列的通项公式是 $a_n=n$，奇数数列的通项公式是 $a_n=2n-1$. 质数列没有通项公式.

数列1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，…叫做斐波那契数列. 它的构成是：$a_1=a_2=1$，从第3项开始，每一项都等于前面两项的和，即 $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$. 例如 $a_3=1+1=2$，$a_4=1+2=3$，$a_5=2+3=5$，$a_6=3+5=8$，$a_7=5+8=13$，…高中学段学过数列以后，斐波那契数列的通项公式就能求出，这就是 $a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$，也可以用数学归纳法证明这个公式.

斐波那契数列有一条重要性质：任何连续3项 a_n，a_{n+1}，a_{n+2} 之间，都有 $a_{n+1}^2=a_n\cdot a_{n+2}+(-1)^n$. 例如，当 $n=1$ 时，$1^2=1\times2-1$；当 $n=2$ 时，$2^2=1\times3+1$；当 $n=3$ 时，$3^2=2\times5-1$；当 $n=4$ 时，$5^2=3\times8+1$；当 $n=5$ 时，$8^2=5\times13-1$；当 $n=6$ 时，$13^2=8\times21+1$…… 最后两个等式就是本节教科书两个“做一做”中的两组图形的构图原理. 如果还要构造类似的图形，可以采用等式 $21^2=13\times34-1$，$34^2=21\times55+1$…… 如果觉得数据太大，剪切、拼图不方便，可以将等式中的数据按比例适当缩小. 例如，将等式 $21^2=13\times34-1$ 与 $34^2=21\times55+1$ 中的数据都缩小到原来的一半，就得到等式：$10.5^2=6.5\times17-0.5^2$，$17^2=10.5\times27.5+0.5^2$. 这就是本节教科书习题1的构图原理.

山东教育出版社

总复习题

教师首先鼓励学生自己回顾本册的学习内容，并与同伴合作完成本册内容框架图，每个小组制成的框架图可以各有特色，但应包括所有的学习重点.

教师还应组织学生交流在本册学习中的收获和不足，培养他们的反思意识.

1. 周长为 20 cm，面积为 24 cm^2.

2. 60°，120°，60°，120°.

提示：连接菱形两个钝角顶点.

3. 提示：证明

Rt△ABE ≌ Rt△ADF.

4.（1）$x \geqslant 10$；

（2）$x \leqslant \frac{5}{3}$；

（3）$x > -\frac{2}{3}$；

（4）$1 \leqslant x \leqslant 2$.

5.（1）$10\sqrt{2}$；

（2）$\frac{4\sqrt{3}}{3}$；

（3）$2\sqrt{7x}$；

（4）$b\sqrt{5ab}$.

6.（1）$\frac{7}{3}\sqrt{6}$；

（2）1；

（3）$\frac{7}{2}+\frac{4}{3}\sqrt{3}$；

（4）$-3\sqrt{a}$.

总复习题

- 整理本学期学过的知识与方法，并与同伴进行交流.
- 在自己经历过的解决问题的活动中，选择一个最具有挑战性的问题，写下解决它的过程，包括遇到的困难、克服困难的方法与过程及所获得的体会，并解释选择这个问题的原因.
- 通过本学期的数学学习，你有哪些收获？有哪些需要改进的地方？

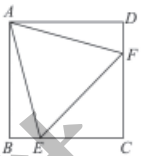
知识技能

1. 已知菱形的两条对角线的长分别为 6 cm 和 8 cm，求菱形的周长和面积.

2. 从菱形的钝角的顶点向对边作垂线，垂线平分对边，求菱形各角的度数.

3. 已知：如图，在正方形 $ABCD$ 中，等边三角形 AEF 的顶点 E，F 分别在 BC 和 CD 上.

求证：$\angle CEF = \angle CFE$.



（第3题）

4. x 取什么值时，下列各式在实数范围内有意义？

（1）$\sqrt{\frac{x}{2}-5}$；　　（2）$\sqrt{5-3x}$；

（3）$\frac{1}{\sqrt{2+3x}}$；　　（4）$\sqrt{2-x}+\sqrt{x-1}$.

5. 把下列各式化成最简二次根式：

（1）$\sqrt{200}$；　　（2）$\sqrt{\frac{16}{3}}$；

※（3）$\sqrt{28x}$；　　※（4）$\sqrt{5ab^3}$.

6. 计算：

（1）$\sqrt{24}-(2\sqrt{\frac{2}{3}}-\sqrt{6})$；

（2）$\sqrt{18}\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}\div\frac{\sqrt{6}}{2}$；

（3）$(6\sqrt{\frac{3}{2}}-5\sqrt{\frac{1}{2}})(\frac{1}{4}\sqrt{8}+\sqrt{\frac{2}{3}})$；

※（4）$7\sqrt{a}+2\sqrt{a^3x}-5a\sqrt{\frac{4}{a}}-6a\sqrt{\frac{x}{9}}$.

山东教育出版社

7. 已知两个连续整数的积为 272，求这两个整数.

8. 一个两位数的十位数字比个位数字大 2，把这个两位数的个位数字和十位数字互换后平方，所得的数值比原来的两位数大 138，求原来的两位数.

9. 在一块面积为 888 cm^2 的矩形材料的四角，各剪掉一个大小相同的正方形（剪掉的正方形作废料处理，不再使用），做成一个无盖的长方体盒子，要求盒子的长为 25 cm，宽为高的 2 倍. 盒子的宽和高应为多少？

10. 解下列方程：

（1）$(4x+3)(5-x)=0$；　　（2）$(x-1)^2+2x(x-1)=0$；

（3）$2x^2-4x-5=0$；　　（4）$-3x^2-4x+4=0$；

（5）$3x(x-1)=2-2x$；　　（6）$(x-1)(x+2)=70$；

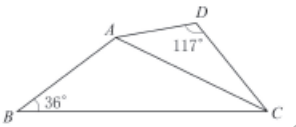
（7）$x(x+6)=7$；　　（8）$(3-x)^2+x^2=9$.

11. 沿一张矩形纸较长两边的中点将纸一分为二，所得的两张矩形纸的边缘形状仍然与原来的矩形纸相似，那么这种矩形纸的长、宽之比是多少？

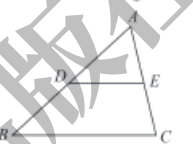
12. 如图，已知 $AD=a$ cm，$AC=b$ cm，$2BC=3AC$，$\angle B=36^\circ$，$\angle D=117^\circ$，$\triangle ABC\backsim\triangle DAC$.

（1）求 AB 的长；　　（2）求 DC 的长；

（3）求 $\angle BAD$ 的大小.



（第12题）



（第13题）

13. 如图，已知 $\triangle ADE\backsim\triangle ABC$，$DE$ 与 BC 具有怎样的位置关系？为什么？

14. 在直角坐标系中，将点（1，1），（2，0），（3，0），（2，2），（0，3），（1，1）用线段顺次连接，得到一个五边形，然后再将这五个点的横、纵坐标同时扩大到原来的 2 倍，并用同样的方式连接得到一个新的五边形，新五边形与原五边形相似吗？如果相似，相似比是多少？周长比呢？面积比呢？

数学理解

15. 已知 $x=2+\sqrt{3}$，$y=2-\sqrt{3}$，求 $\dfrac{x^2-xy+y^2}{x+y}$ 的值.

16. 求下列各式中 a，b 的值：

（1）$\sqrt{a^2-4}+\sqrt{a-b}=0$；

（2）$\sqrt{2a-3b-1}+(a-2b)^2=0$.

7. -17，-16；或16，17.

8. 31.

9. 宽 12 cm，高 6 cm.

10.（1）$x_1=-\dfrac{3}{4}$，$x_2=5$；

（2）$x_1=1$，$x_2=\dfrac{1}{3}$；

（3）$x_1=1+\dfrac{\sqrt{14}}{2}$，

$x_2=1-\dfrac{\sqrt{14}}{2}$；

（4）$x_1=-2$，$x_2=\dfrac{2}{3}$；

（5）$x_1=1$，$x_2=-\dfrac{2}{3}$；

（6）$x_1=-9$，$x_2=8$；

（7）$x_1=-7$，$x_2=1$；

（8）$x_1=0$，$x_2=3$.

11. $\sqrt{2}$ ∶ 1.

12.（1）$\dfrac{2}{3}a$ cm；

（2）$\dfrac{2}{3}b$ cm；

（3）153°.

13. 若点 D 与点 B 是对应点，则 $DE\parallel BC$；否则，DE 与 BC 的位置关系不确定.

14. 相似；相似比、周长比都是 2 ∶ 1，面积比是 4 ∶ 1.

15. $\dfrac{13}{4}$.

16.（1）$\begin{cases}a=2,\\b=2,\end{cases}$ $\begin{cases}a=-2,\\b=-2;\end{cases}$

（2）$a=2$，$b=1$.

山东教育出版社

17. 成立.

18. 2 条.

19. 提示：连接三边的中点，将原三角形分成四个小三角形，这四个小三角形全等，并且都与原三角形相似.

20. 道路宽 2 m.

21.（1）57.6 m；

（2）约 69 m.

22.（1）略；

（2）约 34 岁；

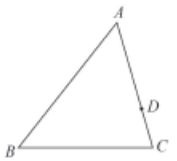
（3）约 43 岁.

23. 1.98%.

17. 已知线段 a，b，c，d（$b \neq d$），如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$，那么 $\frac{a-c}{b-d}=\frac{a+c}{b+d}$ 成立吗？为什么？

18. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB > AC$，过 AC 上一点 D 作直线 DE 交 AB 于点 E，使所得的三角形与原三角形相似，这样的直线可作多少条？

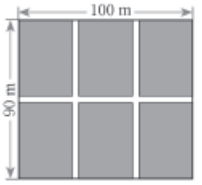
19. 任意画一个三角形，设法将这个三角形分成四个小三角形，使得它们都与原来的三角形相似.



（第 18 题）

问题解决

20. 如图，要在长 100 m、宽 90 m 的长方形绿地上修建宽度相同的道路，6 块绿地的面积共 8 448 m^2，求道路的宽.



（第 20 题）

21. 一个高尔夫球手击出一个高尔夫球，水平距离 d（m）和球上升的高度 h（m）满足关系：

$$h = d - 0.004d^2.$$

（1）当球水平方向飞了 90 m 远时，它上升的高度是多少？

（2）当球第一次达到 50 m 高处时，它在水平方向飞了多远？（精确到 1 m）

22. 一个人的血压与其年龄及性别有关. 对女性来说，正常的收缩压 p（毫米汞柱[1]）与年龄 x（岁）大致满足关系：$p = 0.01x^2 + 0.05x + 107$；对男性来说，正常的收缩压 p（毫米汞柱）与年龄 x（岁）大致满足关系：$p = 0.006x^2 - 0.02x + 120$.

（1）利用公式计算你的收缩压；

（2）如果一个女性的收缩压为 120 毫米汞柱，那么她的年龄大概是多少？

（3）如果一个男性的收缩压为 130 毫米汞柱，那么他的年龄大概是多少？

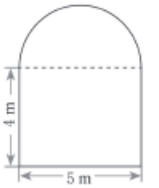
23. 李先生存入银行 1 万元，先存一个一年定期，一年后将本息自动转存为另一个一年定期，年利率不变，两年后共得本息 1.04 万元. 存款的年利率为多少？

[1] “毫米汞柱”是血压的一种计量单位. 我国目前采用的血压的法定计量单位为“帕”，1 毫米汞柱 = 133.322 4 帕.

山东教育出版社

24. 某果园今年栽种果树 200 棵，现计划扩大栽种面积，使今后两年的栽种量都比前一年增长一个相同的百分数，这样三年（包括今年）的总栽种量为 1 400 棵. 求这个百分数.

25. 一辆卡车装满货物后，它的高比宽多 2 m，且恰好通过如图所示的隧道（上部为半圆形）. 卡车有多高？（结果精确到 0.1 m）



（第25题）

26. 利用相似三角形设计一种测量建筑物高度的方案，并具体实施你的方案.

联系拓广

27. 选一个你认为漂亮的图案，利用橡皮筋放大图形的方法将它的边缘图案放大. 如果有条件，请在计算机上将一个图案放大.

28. 一个容器盛满纯药液 20 L，第一次倒出若干升后，用水加满；充分混合后第二次又倒出同样体积的溶液，这时容器里溶液中的纯药液只剩下 5 L. 每次倒出的液体是多少升？

24. 100%.

25. 约 5.7 m.

26. 略.

27. 略.

28. 每次倒出液体 10 L.

提示：设每次倒出液体 x L，根据题意，得

$$20-x-\frac{20-x}{20}x=5.$$

山东教育出版社

山东教育出版社