义务教育教科书（五·四学制）

数学

九年级 下册

教师教学用书

山东出版
SHANDONG PUBLISHING

山东教育出版社

义务教育教科书（五·四学制）

数学

九年级 下册

教师教学用书

山东教育出版社
山东教育出版社

山东教育出版社

出 版 说 明

为了更好地满足义务教育教学的需求，山东教育出版社等单位受山东省教育厅委托，以教育部审查通过的义务教育教科书为基础，改编出版了一套适合五四分段教学使用的义务教育教科书。本书依据《义务教育数学课程标准（2011年版）》，配合山东教育出版社《义务教育教科书（五四学制）·数学》（九年级下册）编写而成，供教师教学时参考使用。

本书力求体现义务教育课程标准精神和教科书的编写意图；从教师教学实际出发，既有利于教师更好地把握教科书的内容，解决备课中的实际困难，又留给教师一定独立发挥、独立钻研教科书的个性空间；根据素质教育的要求，在每一教学环节都注重体现对学生进行知识与能力、思想与方法、情感态度与价值观的培养；注意吸收数学教育教学的最新研究成果；符合五四分段教学实际，体现五四学制教育特色。

本书是在北京师范大学出版社出版的《义务教育教科书·数学教师教学用书》（九年级上、下册）的基础上改编而成的。参加本书改编的人员是韩际清、陈杰、王德刚、云鹏、柳圣明、刘崇渭、赵水祥、辛珍文，由马复、韩际清主编。

欢迎广大教师在使用过程中提出修改意见和建议，以利于本书的不断改进和完善。

山东教育出版社

山东教育出版社 山东教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学教师教学用书．五·四学制．九年级．下册 / 马复等编．—2版．—济南：山东教育出版社，2019.1（2020.1重印）
义务教育教科书
ISBN 978-7-5328-8582-4

Ⅰ．①数… Ⅱ．①马… Ⅲ．①中学数学课－初中－教学参考资料 Ⅳ．①G633.603

中国版本图书馆CIP数据核字（2018）第297959号

山东教育出版社

YIWU JIAOYU JIAOKESHU（WU·SI XUEZHI）
SHUXUE
JIAOSHI JIAOXUE YONG SHU
JIU NIANJI XIA CE
义务教育教科书（五·四学制）
数学
教师教学用书
九年级 下册

*

山东出版传媒股份有限公司
山东教育出版社出版
（济南市纬一路321号）
山东新华书店集团有限公司发行
山东华立印务有限公司印装

*

开本：787毫米×1092毫米 1/16
印张：11.25 字数：144千
定价：17.00元（上光）
ISBN 978-7-5328-8582-4
2015年1月第1版 2019年1月第2版 2020年1月第6次印刷

著作权所有·请勿擅用本书制作各类出版物·违者必究

目　录

第五章　圆

1	圆	5（2）
2	圆的对称性	11（7）
*3	垂径定理	18（14）
4	圆周角和圆心角的关系	22（18）
5	确定圆的条件	29（25）
6	直线和圆的位置关系	37（32）
*7	切线长定理	47（42）
8	正多边形和圆	50（45）
9	弧长及扇形的面积	58（53）
10	圆锥的侧面积	61（56）
回顾与思考		65（60）
复习题		65（60）

第六章　对概率的进一步认识

1	用树状图或表格求概率	86（68）
2	生活中的概率	104（78）

义务教育教科书 SHUXUE
山东教育出版社
山东教育出版社

*3　用频率估计概率　106（80）
回顾与思考　115（87）
复习题　118（88）

综合与实践

◀哪种方式更合算　133（91）

综合与实践

◀统计活动——视力的变化　148（94）

综合与实践

◀折纸与数学　160（98）

总复习题　165（101）

注：括号内页码系教科书的页码.

义务教育教科书 SHUXUE
山东教育出版社
山东教育出版社

编者的话

本书依据《义务教育数学课程标准（2011年版）》（以下简称《标准》），配合山东教育出版社五四学制《义务教育教科书·数学》（九年级　下册）编辑而成，供教师从事教学时参考.

一、教科书特点

为了实现《标准》的课程目标，教科书力图突出如下特点：

为学生的数学学习构筑起点. 为了使每个学生都能够在数学学习过程中获得最适合自己的发展，教科书提供了大量数学活动的线索，作为所有学生从事数学学习的出发点. 学生在教科书所提供的学习情境中，通过探索与交流等活动，获得必要的发展，达到《标准》所设立的课程目标.

向学生提供现实、有趣、富有挑战性的学习素材. 数学知识的学习，大都力求从学生实际出发，用他们熟悉或感兴趣的问题情境引出学习主题，并提供众多有趣而富有数学含义的问题，以展开数学探究. 这将有助于展现数学与现实及其他学科的联系，突出“数学化”的过程.

为学生提供探索、交流的时间与空间. 有意义的数学学习不能单纯依赖模仿与记忆，动手实践、自主探索与合作交流也是重要的数学学习方式. 为此，教科书在提供学习素材的同时，还依据学生已有的知识背景和活动经验，提供了大量的操作、思考与交流的机会，如提出了大量富有启发性的问题，设立了“做一做”“想一想”“议一议”等栏目，以使学生通过自主探索与合作交流，形成新的知识，包括归纳法则与方法、描述概念等. 章后的回顾与思考、总复习也以问题的形式出现，以帮助学生通过思考与交流，梳理所学的知识，建立符合个体认知特点的知识结构.

展现数学知识的形成与应用过程. 经历知识的形成与应用过程，将有利于学生更好地理解数学、应用数学，增强学好数学的信心. 因此，教科书力图采用“问题情境—建立模型—解释、应用与拓展”的模式展开. 所有新知识的学习都以对相关问题情境的研究作为开始，它们是学生了解与学习这些知识的有效切入点. 随后，通过对一个个问题的研讨，逐步展开相应内容的学习，这些有助于学生经历真正的“做数学”和“用数学”的过程，并在此过程中逐步发展数感、符号感、空间观念、统计观念、应用意识和推理能力等.

满足不同学生的发展需求. 教科书在保证基本要求的同时，也为有更多数学学习需求

山东教育出版社 山东教育出版社

的学生提供了有效的途径. “读一读”栏目提供了有关的数学史料或背景知识、数学在现实世界和科学技术中的应用实例、有趣的或有挑战性的问题讨论、有关数学知识延伸的介绍等，目的在于给这些学生以更多了解数学、研究数学的机会. 教科书中的习题分为两类：一类面向全体学生，为他们熟悉、巩固新学的内容，加深对相关知识和方法的理解所设；另一类带“※”的题目则面向有特殊数学学习需求的学生，不要求全体学生都尝试去完成它们.

二、 教学活动

数学教学是数学活动的教学，是师生交往、互动、共同发展的过程. 学生是数学学习的主人，教师是学生从事数学学习的组织者、引导者和合作者. 有效的数学教学应当从学生的生活经验和已有的知识背景出发，向他们提供充分的从事数学活动的机会，在活动中激发学生的学习潜能，促使他们在自主探索与合作交流的过程中真正理解和掌握基本的数学知识、技能及数学思想方法，获得广泛的数学活动经验，提高解决问题的能力，学会学习. 同时使学生在意志力、自信心、理性精神等情感与态度方面得到良好的发展.

教学活动中，教师应根据学生实际，创造性地使用教科书，积极开发和利用各种教学资源，为学生提供丰富多彩的学习素材，让学生经历数学知识的形成与应用过程；要关注学生的个体差异，有效地实施有差异的教学，使每个学生都得到充分的发展；应根据学生的认知特征和所学知识的特征，灵活采用多种教学形式，促进学生有效地学习；应要求学生在学习数学和解决问题的过程中充分借助计算器（有条件的地区鼓励学生使用计算机），培养他们运用现代信息技术解决实际问题的意识和能力，使他们能够借助新技术去学习数学、解决较为现实的问题，并免于从事大量繁杂、重复的机械性操作活动，而把更多的精力投入到有意义的探索性活动中去.

教师在教学中要尽可能多地使用不同的教学媒体，包括模型、挂图、投影片、录音（像）带、软件等，以丰富学生感知认识对象的途径，促使他们更加乐意接近数学、更好地理解数学、在数学学习上获得更多的成功.

三、 学习评价

评价的目的是全面了解学生的学习状况，激励学生的学习热情，促进学生的全面发展. 评价也是教师反思和改进教学的有力手段.

对学生数学学习的评价，应全面反映学生的学习状况. 首先要关注对学生学习过程的评价，包括学生参与活动的程度和行为表现、合作交流的意识和能力等. 对学生数学思维过程的评价，不仅要关注学生是否能积极主动地独立思考，而且要关注他们在学习过程中

山东教育出版社

表现出来的数学思维策略、水平和思维品质. 对学生解决问题能力的评价，包括考查他们能否结合具体情境提出数学问题；能否尝试从不同角度分析和解决问题；能否与他人合作解决问题；能否清楚地表达解决问题的过程，并解释结果的合理性；能否对解决问题的过程进行反思，并获得解决问题的经验. 对学生情感与态度的评价，应结合具体的教学过程和问题情境，随时了解他们学习数学的主动性、自信心、对数学活动的兴趣和应用数学知识解决问题的意识. 对学生掌握基础知识和基本技能状况的评价，应着重考查学生对知识与技能的理解和运用，而不是对知识的机械记忆和过分的技巧性要求. 应当强调的是，《标准》所列的教学目标是本学段结束时学生应达到的目标，不能要求每一个学生在相应内容学习之后立即达到，应允许他们经过一段时间的努力和知识、技能与经验的积累而逐步达到.

要采用多样化的评价方式，如书面考试、口试、作业分析、课堂观察、课后访谈、建立数学成长记录、撰写小论文和活动报告等，准确了解学生的数学学习状况. 在采用书面考试时，教师要按照《标准》的要求，控制考试难度及次数，控制客观题型的比例，避免偏题、怪题和死记硬背的题目. 对于综合与实践，学生需要一定的操作和思考时间，还需要和同伴进行讨论与交流，很难在一次书面测验中完成. 因此，教师应注重评价学生综合与实践学习的过程，不宜把它纳入到书面考试（测验）的范围之中.

在呈现评价结果时，应重视定性评价的作用，采用定性与定量相结合的方法. 定性评价可采用评语的形式，更多地关注学生已经掌握了什么，有哪些进步，具备了什么能力，还需要在哪些方面努力等，以使评价结果有利于学生树立学习数学的自信心，提高学生学习数学的兴趣，促进学生的全面发展.

四、几点说明

1. 教科书体例

本版教科书以学生的学习活动为出发点，即将教科书首先视为学生学习的“学材”. 教科书体例以“章”为一个基本单位，不同章之间的体例并无明显区别. 每一章的基本体例如下：

（1）章首页. 包括：本章名称、本章主题图、本章引言、本章学习目标.

（2）若干节. 每一节大致包括：

——节名称.

——问题情境：以学生自身和周围环境中的自然现象、社会生活、数学或其他学科中的问题为知识学习的切入点，突出数学与现实世界、其他学科之间的联系，以及知识产生的由来，引发学生的学习欲望，并引导他们的思维指向将要学习的新知识.

山东教育出版社

——问题串：由浅入深，提出一系列有思维层次或不同理解深度的问题，力图使每一位学生都能投入到学习活动中，不同的学生有不同的收获.

——数学活动：依据学生已有的知识背景和活动经验，针对相应学习主题，向学生提供以自主探索、合作交流等方式进行的主动式学习活动，包括“做一做”“想一想”“议一议”等.

——思考与整理：让学生经历归纳、概括等过程，提炼出上述活动中的数学学习对象，并用自己熟悉的方式、语言及数学符号去表达.

——明晰：以较为规范的形式表达主要的数学对象（如重要的结论、术语、概念、法则等）.

——例题：直接联系所学内容的基础性问题.

——随堂练习：与先前的数学活动或例题关联的基本问题.

——读一读：与学习主题密切相关的数学史实、现实中的数学应用介绍文章或趣味性小品文. 每章至少有一篇.

——习题. 横向分为：知识技能、数学理解、问题解决、联系拓广；纵向分为：一般性问题、尝试性问题（以“※”标记）.

（3）章后小结：回顾与思考. 以设问的方式，让学生通过思考与交流，梳理所学的知识，建立符合个体认知特点的知识结构.

（4）章复习题. 复习题与习题类似，也从横向、纵向两个方面进行了分类.

2. 教师教学用书体例

教师教学用书旨在引导教师帮助学生学习. 与教科书相同，教师教学用书体例也以“章”为一个基本单位，其基本体例在以教科书的体例为“纲”的前提下，增加了相应的教的要素，以体现“教师怎样做才有助于学生有效地学”的指导思想. 教师教学用书每一章的基本体例如下：

（1）《标准》要求：介绍《标准》对相关内容的具体要求.

（2）教学目标：通过本章教学活动希望达成的多维课程目标.

（3）设计思路：介绍本章教科书的编写意图、编写思路以及内容重心等，阐述本章内容与本册书或全套书其他相关内容之间的关系.

（4）课时安排建议：提出本章具体教学课时安排建议.

（5）教学建议（总体）：针对本章教学重心及要点，提出一些在教学活动中的处理方法、注意点，以及选择其他教学资源等方面的操作性建议.

（6）评价建议（总体）：针对本章教学内容及教学活动的重心、要点，提出主要的教学评价方面和方法.

山东教育出版社

（7）各节（包括“回顾与思考”）具体教学说明：针对每一节（包括“回顾与思考”）具体的活动或问题等，提出教学建议，提供相关问题的答案.

（8）附录：提供一个典型教学案例及其评价. 有些章还提供一些学科拓展知识.

3. 使用说明

（1）从具体操作层面看，不同的教师针对同样的教学内容可以有自己的教学方式、方法，这就是教学创造性的一种体现. 教师进行有效教学创造的前提是准确把握《标准》的要求、理解教科书的编写意图. 因此，教师教学时可在遵循上述原则的基础上，根据学生的实际状况，创造性地使用本书，如改变或替换教科书中的例题或习题，因地制宜地创设一些学习情境、学习素材和教学用具.

（2）教科书中需要学生完成的任务，包括归纳法则（方法）、描述概念（定义）、总结所学内容的知识结构等. 应首先鼓励学生通过独立思考与合作交流给出各自的答案，教师则在学生充分活动的基础之上介绍规范的表述，但不宜要求学生机械记忆规范的表述，应提倡在了解不同答案的基础之上，每个人选择最适合自己的答案.

（3）教科书中的“读一读”目的在于给对数学有兴趣的学生以更多了解数学、探究数学的机会，是教学中“弹性”的一种表现. 教学中应明确：有兴趣的学生可以选择相关材料进行阅读和思考，教师则有义务给他们提供必要的帮助. 习题中带“※”的内容仅仅面向部分学生，以满足他们进一步理解和研究有关知识与方法的需求，是体现教学“弹性”的另一个方面，不应当要求全体学生都尝试去完成它们.

（4）本书的目的在于帮助教师更好地把握教科书，包括它的总体目标、编写思路、内容结构、教学中应当予以关注的重点和难点. 所提教学建议仅供教师在教学过程中参考，希望广大教师在使用过程中对它提出宝贵的意见和建议.

谢谢！

山东教育出版社

第五章　圆

一、《标准》要求

1. 理解圆、弧、弦、圆心角、圆周角的概念，了解等圆、等弧的概念；探索并了解点与圆的位置关系.

2. *探索并证明垂径定理：垂直于弦的直径平分弦以及弦所对的两条弧.

3. 探索圆周角与圆心角及其所对弧的关系，了解并证明圆周角定理及其推论：圆周角的度数等于它所对弧上的圆心角度数的一半；直径所对的圆周角是直角；90° 的圆周角所对的弦是直径；圆内接四边形的对角互补.

4. 知道三角形的内心和外心.

5. 了解直线和圆的位置关系，掌握切线的概念，探索切线与过切点的半径的关系，会用三角尺过圆上一点画圆的切线.

6. 探索并证明切线长定理：过圆外一点所画的圆的两条切线长相等.

7. 会计算圆的弧长、扇形的面积.

8. 了解正多边形的概念及正多边形与圆的关系.

9. 会利用基本作图完成：过不在同一直线上的三点作圆；作三角形的外接圆、内切圆；作圆的内接正方形和正六边形.

10. 在尺规作图中，了解作图的道理，保留作图的痕迹，不要求写出作法.

11. 探索圆的轴对称性质和中心对称性质.

二、教学目标

1. 了解圆周角、等圆、等弧等概念.

2. 认识圆的轴对称性和中心对称性，探索并证明垂径定理.

3. 探索并证明圆心角、弧、弦之间相等关系的定理，探索并证明圆周角和圆心角的关系定理，及圆周角定理的推论.

4. 探索并了解点与圆、直线与圆的位置关系.

5. 了解切线的概念，探索切线与过切点的直径之间的关系，能判定一条直线是否为圆的切线，会过圆上一点画圆的切线.

6. 知道三角形的内心和外心，探索并证明切线长定理.

7. 了解正多边形与圆的关系.

8. 会计算圆的弧长、扇形的面积.

9. 了解圆锥的侧面展开图，会计算圆锥的侧面积和全面积.

10. 经历探索圆及其相关结论的过程，进一步认识和理解研究图形性质的各种方法，发展数学思维.

山东教育出版社
山东教育出版社

三、设计思路

本章是在学习了直线型图形的有关性质和证明的基础上，来探索一种特殊的曲线型图形——圆的有关性质．在学习这一章之前，学生已经通过折纸、对称、平移、旋转、推理证明等方式认识了许多图形的性质，积累了大量的空间与图形的学习经验．本章设计充分体现了学生已有经验的作用．例如，用折叠、旋转的方法探索圆的对称性；用旋转变换的方法探索圆心角、弧、弦之间相等关系的定理，然后加以证明；用推理证明的方法研究圆周角和圆心角的关系；用对称变换及反证法研究切线的性质；用图形运动的方法研究直线与圆的位置关系，等等．

第一节“圆”，主要是让学生通过实例来归纳出圆的定义．虽然小学阶段及六年级时学生已经对圆的有关知识有所了解，但还没有抽象出“平面上到定点的距离等于定长的所有点组成的图形叫做圆”的概念．本节主要使学生体会圆的概念的形成过程．

圆是一种特殊的图形，它既是中心对称图形又是轴对称图形，这一点在前几册学习对称性时，学生已经有所了解．同时，圆还具有旋转不变性．本章借助圆的旋转不变性去探索圆心角、弧、弦之间的关系．

在探索圆周角和圆心角关系的过程中，让学生形成分类讨论的意识，明确分类的依据．确定圆的条件不仅仅是一个作圆的问题，而且可以使学生体会在这一过程中所体现的归纳思想．

通过直线与圆的相对运动方式，认识直线与圆的位置关系，使学生明确“直线与圆的位置关系”的相互联系，体会形与数的统一和转化．教科书还通过切线的性质定理、判定定理、切线长定理和三角形的内切圆概念，重点研究了直线与圆相切的情况，进一步发展学生的推理能力．

正多边形是“图形与几何”领域所研究的一类重要的直线型图形，同时它与最简单的曲线型图形——圆有着深刻的内在联系．在“正多边形和圆”一节中，不仅让学生探索它们之间的这种联系，并且学习了几种特殊正多边形的作图方法以及正多边形的边长、边心距和半径的计算问题，为继续学习高中内容做好准备．

弧长、扇形的面积、圆锥的侧面积和全面积的计算公式不是直接给出的，而是要求学生进行探索．因此，“弧长及扇形的面积”“圆锥的侧面积”这两节不仅仅要求学生会计算，而且应该使他们理解公式的意义，理解算法的意义．

需要说明的是，推理证明是本章采用的研究手段之一．同时，本章还体现了运动、变换、转化、分类讨论等数学思想方法，在教学中应注意体现．

四、课时安排建议

1	圆	1 课时
2	圆的对称性	2 课时
*3	垂径定理	1 课时
4	圆周角和圆心角的关系	2 课时

山东教育出版社

5	确定圆的条件	2 课时
6	直线和圆的位置关系	4 课时
*7	切线长定理	1 课时
8	正多边形和圆	2 课时
9	弧长及扇形的面积	1 课时
10	圆锥的侧面积	1 课时
回顾与思考		2 课时

五、教学建议

1. 积极引导学生从事观察、测量、折叠、平移、旋转、推理证明等活动，帮助他们有意识地积累活动经验，获得成功的体验. 教学中，应鼓励学生动手、动口、动脑，并进行同伴之间的交流.

2. 充分利用现实生活和数学中的素材，使学生探索与圆有关的概念和性质，尽可能地设计具有挑战性的情境，激发学生求知、探索的欲望.

3. 鼓励学生用多种方法去认识圆的有关性质，有意识地满足学生多样化的学习要求.

4. 在观察、操作和推理活动中，使学生有意识地反思其中的数学思想方法，发展学生有条理的思考及表达能力.

六、评价建议

1. 关注学生思考方式的多样化，注重对学生观察、操作、推理证明等活动进行评价，包括学生在活动中的主动性、参与程度、与同学合作交流的意识、思考与表达的条理性等.

2. 对有关概念学习的评价，应主要通过实例进行；对有关性质学习的评价，应更多考查学生是否借助具体的思考方法去理解；对有关计算的评价，应着重考查学生是否懂得了基本的算理.

3. 在日常教学中，不仅要关注学生能否计算或推出某个结论，而且要关注学生在各种数学活动中的情感和态度，特别是在小组活动中的表现，对于学生在本章学习、探索过程中出现的新方法或新作品，可以通过成长记录的形式进行评价.

山东教育出版社

第五章　圆

为什么车轮要做成圆形？你能利用直角尺检查某些工件是否半圆形吗？用一张三角形的纸片，你能裁出一个尽可能大的圆吗？

与三角形、四边形一样，圆也是我们常见的图形．本章将运用我们以前学习过的对称、平移、旋转以及推理等方法研究圆的有关性质，并利用这些知识解决一些实际问题．





学习目标

- 认识圆及其相关概念，发展空间观念
- 经历探索圆及其相关结论的过程，发展推理能力，进一步积累研究几何图形的活动经验
- 用所学的知识解决日常生活中与圆有关的问题



章前文字旨在激发学生学习的兴趣，同时指出本章学习的主要内容. 这里提出的问题不要求学生给予回答.

山东教育出版社
山东教育出版社

1 圆



（1）为什么车轮都做成圆形？车轮能否做成正方形或矩形？

（2）如图5−1，A，B是车轮边缘上的任意两点，点 O 是车轮的轴心，点 A，O之间的距离与点 B，O之间的距离有什么关系？

（3）想一想，你在生活中还见过哪些圆的形象？它们有哪些共同的特征？

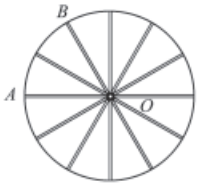


图 5−1

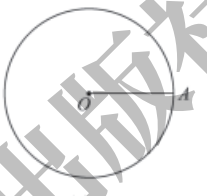


图 5−2

（4）如图5−2，在平面内，线段OA绕它固定的端点O旋转一周，另一个端点A所描出的封闭曲线是什么图形？

[1]前面我们已经认识了圆. 事实上，圆还可以看成是平面内到定点的距离等于定长的所有点组成的图形. 其中，定点就是圆心，定长就是半径. 以点O为圆心的圆记作⊙O，读作“圆 O”.

半径相等的两个圆叫做**等圆**. 两个等圆能够重合.

想一想

如图5−3，⊙O的半径为r，点A，B，C，D，E的位置如图所示.

教学目标

1. 经历形成圆的概念的过程，经历探索点与圆位置关系的过程.

2. 理解圆的概念，了解等圆的概念，了解点与圆的位置关系.

本节主要用集合的观点研究圆的概念及点与圆的位置关系.

教学问题（1）时，可以给学生演示正方形或矩形的车轮在行走时存在的问题，并让学生通过计算认识到正方形或矩形边上的各点到中心的距离不全相等，使学生感受圆形的车轮运转起来最平稳. 问题（2）先让学生观察车轮边缘上任意两点A，B到车轮轴心O的距离，由于它们的长都等于车轮辐条的长，所以$AO = BO$，从而使学生认识到圆上任意一点到圆心的距离是一个定值，为揭示圆的本质属性创设生活中的情境. 问题（3）让学生通过举例，感受圆是生活中最常见的一种平面图形，并从大量的实例中概括出圆的共同特征. 问题（4）在学生感受圆的生活实例的基础上，由圆的发生过程引出圆的描述性定义.

[1]学生在前面的学习中已经学过圆的概念. 教科书在此用集合的观点给出了圆的描述性定义.

把一个几何图形看成是满足某种条件的点的集合的思想，在几何中十分重要，因为这实际上就是关于轨迹的概念. 线段的垂直平分线，实际上是“到线段的两个端点距离相等的点”的轨迹；角的平分线，实际上是“（在已知角内部）到角的两边距离相等的点”的轨迹. 圆，实际上是“到定点的距离等于定长的点”的轨迹. 把一个图形看成是满足某种条件的点的集合，必须符合下列两点：① 在图形上的每一个点，都满足某种条件；② 满足这种条件的每一个点，都在这个图形上. 这两方面的要求缺一不可. ① 保证了图形上点的纯粹性，即不杂；② 保证了图形的完备性，即没有

山东教育出版社

漏掉满足这种条件的点．① ② 同时符合，保证了图形上的点“不杂不漏”．若只符合 ①，则有可能图形上漏掉满足条件的点；若只符合 ②，则图形上有可能混杂上不满足条件的点．对于这些，事实上，教师应心中有数，不必向学生讲解．

确定一个圆需要两个要素，一是位置，二是大小．圆心确定其位置，半径确定其大小．只有圆心没有半径，虽然圆的位置固定，但大小不定，因而圆不确定；只有半径而没有圆心，虽然圆的大小固定，但圆心的位置不定，因而圆也不确定．只有圆心和半径都固定，圆才被唯一确定．明确两个要素的作用，对今后作圆或在解析几何中求圆的方程都是十分重要的．例如，作三角形外接圆的问题，可转化为求圆心位置的问题．

想一想

教学中不必要求学生去精确地度量这些线段的长度，只要求有一个大小估计就可以了．为了使学生充分理解点与圆的位置关系，教学时也可以让学生平移圆外一点，观察“点与圆的位置关系”和“点到圆心的距离与半径之间的数量关系”之间的关系．

山东教育出版社
山东教育出版社

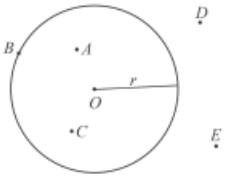


图 5-3

（1）你能说明这些点分别与 ⊙O 有怎样的位置关系吗？

（2）点 A，B，C，D，E 到圆心 O 的距离分别与 ⊙O 的半径有怎样的大小关系？

（3）如果点 P 和 ⊙O 都在同一平面内，那么点 P 与 ⊙O 可能有哪几种位置关系？

（4）你能根据点 P 与 ⊙O 的位置关系，确定点 P 到圆心 O 的距离 d 与 ⊙O 的半径 r 的大小关系吗？反过来，你能根据 d 与 r 的大小关系，确定点 P 与 ⊙O 的位置关系吗？

[1]在平面内，点与圆的位置关系有三种：点在圆外、点在圆上、点在圆内.

当点在圆外时，$d>r$；反过来，当 $d>r$ 时，点在圆外.
当点在圆上时，_____；反过来，当_____时，点在圆上.
当点在圆内时，_____；反过来，当_____时，点在圆内.

做一做

设 $AB=3$ cm，作图说明满足下列要求的图形：

（1）到点 A 和点 B 的距离都等于 2 cm 的所有点组成的图形.

（2）到点 A 和点 B 的距离都小于 2 cm 的所有点组成的图形.

例 如图 5-4，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$AC=2$，$BC=4$，CM 是 AB 边上的中线. 以点 C 为圆心，以 $\sqrt{5}$ 为半径作圆，试确定 A，B，M 三点分别与

[1]点与圆的位置关系可以转化为点到圆心的距离与半径之间的数量关系；反过来，也可以通过这种数量关系判断点与圆的位置关系.

由于平面内的点到圆心的距离有且只有下列三种情况：大于半径，等于半径，小于半径，所以平面内的点与一个圆的位置关系能且只能分成以下三类：圆外的点，圆上的点，圆内的点. 圆外的点构成圆的外部，圆内的点组成圆的内部. 与用集合定义圆一样，圆的内部和圆的外部也可用集合定义：圆的内部是到圆心的距离小于半径的点的集合；圆的外部是到圆心的距离大于半径的点的集合. 本节并没有正式引入圆的内部和圆的外部两个概念，而是让学生结合具体实例判断点在圆内、点在圆上或点在圆外，进而体会用集合的观点对平面内的点进行分类，体会分类以及集合等数学思想. 教师应鼓励学生通过“想一想”的实例以及结合图形形象地理解这两个概念的集合意义.

做一做

让学生再次经历用集合的观点理解图形的过程. 值得注意的是，这里渗透了一种常用的数学方法——交集法. 所谓交集法，就是先由部分条件构成一个集合，然后再由剩余条件构成另一个集合，两个集合的交集就是问题的解.

（1）如图 1，所求图形即 P，Q 两点.

（2）如图 2，所求图形为阴影部分（不包括阴影的边界）.

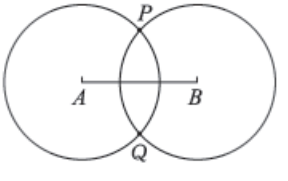


图 1

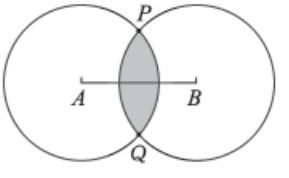


图 2

山东教育出版社

教学时，可以先让学生思考：满足条件的点分别与⊙A，⊙B有怎样的位置关系？

例

利用点到圆心的距离 d 与半径 r 的数量关系，确定点与圆的位置关系.

随堂练习

1. 将绳子的一端 A 固定，然后拉紧绳子的另一端 B，并绕 A 在地上转一圆，B 所经过的路径就是所希望的圆.

通过解决这一问题，可以使学生感受到圆周上的点到圆心的距离都是 3 m，或到圆心距离等于 3 m的点都在圆周上.

2. 点 A 在 ⊙A 内，点 B，D 在 ⊙A 上，点 C 在 ⊙A 外.
3. 略. 学生既可以用文字描述，也可以在图中标示.

⊙C 有怎样的位置关系，并说明你的理由.

解：在△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$AC=2$，$BC=4$，

$\therefore AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$.

$\because CM$ 是 AB 边上的中线，

$\therefore CM=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{5}=\sqrt{5}$.

$\because CA<\sqrt{5}$，$CB>\sqrt{5}$，$CM=\sqrt{5}$，

$\therefore$ 点 A 在 ⊙C 内，点 B 在 ⊙C 外，点 M 在 ⊙C 上.

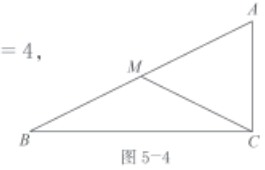
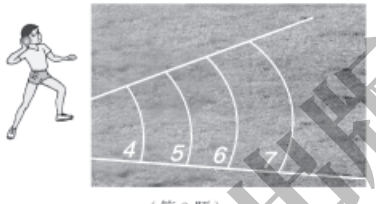


图 5-4

随堂练习

1. 体育老师想利用一根3 m长的绳子在操场上画一个半径为3 m的圆，你能帮他想想办法吗？
2. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 1，以顶点 A 为圆心，作一个半径为 1 的圆. 分别指出正方形 $ABCD$ 的顶点 A，B，C，D 与 ⊙A 的位置关系.
3. 小明和小华正在练习投铅球，铅球场地分为 4 m 以内，4～5 m，5～6 m，6～7 m，7 m 以外几个区域. 小明投了5.2 m，小华投了6.7 m，他们投的球分别落在下图中哪个区域内？



（第3题）

读一读

车轮为什么是圆的

圆是一种美丽的图形. 春秋战国时期，墨翟在其所著《墨经》一书中就曾明确指出："圜，一中同长也."意思是说：圆，只有一个圆心，由圆心到圆周的长都相等. 圆在日常生活中的应用非常广泛，如车轮、方向盘、光盘等. 相传，英国的亚瑟王用圆桌宴请骑士，就是因为圆形桌子不易区分上、下席，所以每位骑士都是贵宾. 餐厅的餐桌大多做成圆形，月饼也大都做成圆形，这些都象征圆满、团圆、和谐. 毕达哥

山东教育出版社

拉斯曾经说过："一切立体图形中最美的是球形，一切平面图形中最美的是圆形."

在日常生活中，我们见到的车轮都是圆形的，它们可以在平地上平稳地滚动．中国古时候就造出了装有圆形车轮的车辆．为什么车轮要做成圆形的呢？

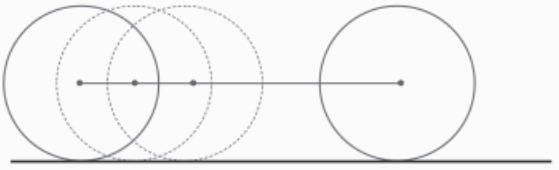


图 5-5

观察图 5-5，车辆在平坦的地面上行驶时，车轮的中心与地面的距离总是不变的，这个距离等于车轮的半径．如果把车厢装在过轮子中心的车轴上，那么车辆在平坦的公路上行驶时，人坐在车厢里会感觉非常平稳．试想一下，如果车轮不是圆的，而是正六边形的（如图 5-6），或是正三角形的（如图 5-7），那么坐在车上的人会感觉到颠簸．

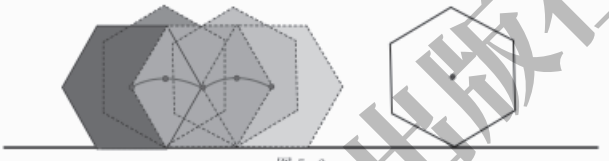


图 5-6

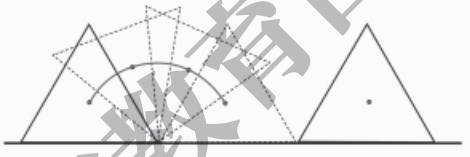


图 5-7

如果要保证正三角形的车轮平稳地滚动，那么地面应设计成如图 5-8 所示的形状．

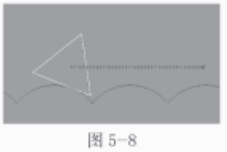
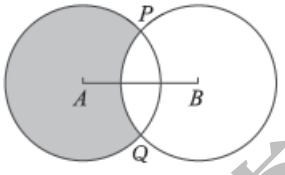


图 5-8

山东教育出版社
山东教育出版社

习题5.1

1. 点 A 的坐标是（4，0）；
   点 B 的坐标是（0，4）；
   点 C 的坐标是（–4，0）；
   点 D 的坐标是（0，–4）.
2. 略.
3. （1）$\odot O$ 外；
   （2）$\odot O$ 内；
   （3）5.
4. 如图，所求图形为阴影部分（不包括阴影的边界）.

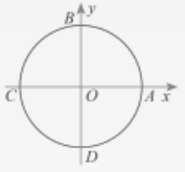


5. 小明可能，如1 + 1 + 1 +1 + 1 + 3 = 8（分）；小华不可能，因为最多只能得到9 × 6 = 54（分）；小红可能，如5 + 5 + 5 + 7 + 1 = 28（分）.

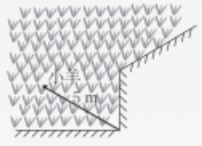
习题 5.1

知识技能

1. 如图，在直角坐标系中，以坐标原点 O 为圆心，作一个半径为 4 的圆，$\odot O$ 与坐标轴分别交于点 A，B，C，D. 求点 A，B，C，D 的坐标.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，一根 5 m 长的绳子，一端拴在柱子上，另一端拴着一只羊（羊只能在草地上活动），请画出羊的活动区域.

3. 点 P 是 $\odot O$ 所在平面内的一点，$\odot O$ 的面积为 25π.

（1）若 $PO = 5.5$，则点 P 在_____；

（2）若 $PO = 4$，则点 P 在_____；

（3）若 $PO =$ _____，则点 P 在 $\odot O$ 上.

数学理解

4. 设 $AB = 3$ cm，作图说明：到点 A 的距离小于 2 cm，且到点 B 的距离大于 2 cm 的所有点组成的图形.

※5. 如图是一张靶纸. 靶纸上的 1，3，5，7，9 分别表示投中该靶区的得分数. 小明、小华、小红 3 人各投了 6 次镖，每次镖都中了靶. 最后他们是这样说的——

小明说："我只得了 8 分."

小华说："我共得了 56 分."

小红说："我共得了 28 分."

他们可能得到这些分数吗？如果可能，请把投中的靶区在靶纸上表示出来（用不同颜色的彩笔画出来）；如果不可能，请说明理由.



（第 5 题）

山东教育出版社

2 圆的对称性

（1）圆是轴对称图形吗？如果是，它的对称轴是什么？你能找到多少条对称轴？

（2）你是用什么方法解决上面这个问题的？与同伴进行交流.

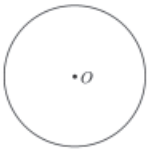


图 5-9

利用折叠的方法，我们可以发现圆具有下面的特性.

圆是轴对称图形，其对称轴是任意一条过圆心的直线.

[1]我们知道，圆上任意两点间的部分叫做圆弧，简称弧. 连接圆上任意两点的线段叫做**弦**（chord），经过圆心的弦叫做**直径**（diameter）. 如图5-10，以 A，B 为端点的弧记作 $\overset{\frown}{AB}$，读作“圆弧 AB”或“弧 AB”；线段 AB 是 $\odot O$ 的一条弦，弦 CD 是 $\odot O$ 的一条直径.

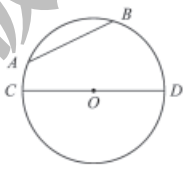


图 5-10

在同圆或等圆中，能够重合的两条弧叫做**等弧**.[2]圆的任意一条直径的两个端点分圆为两条等弧，每一条弧都叫做**半圆**（semicircle）❶.

做如下实验：[3]

如图 5-11，在两张透明纸上，分别作半径相等的 $\odot O$ 和 $\odot O'$，把两张纸叠在一起，使 $\odot O$ 与 $\odot O'$ 重合，然后固定圆心.

❶ 弧包括优弧（superior arc）和劣弧（inferior arc）；大于半圆的弧称为优弧，小于半圆的弧称为劣弧. 如图 5-10 中，以 A，D 为端点的弧有两条：优弧 ACD（记作 $\overset{\frown}{ACD}$），劣弧 ABD（记作 $\overset{\frown}{AD}$）.

教学目标

1. 经历探索圆的轴对称性和中心对称性及其相关性质的过程，进一步体会和理解研究几何图形的各种方法.

2. 理解圆的轴对称性和中心对称性及相关性质.

3. 了解弧的度数，探索圆心角的度数与它所对弧的度数之间的关系.

4. 了解等弧、弦、直径半圆等概念.

本节共分 2 课时，第 1 课时主要利用圆的旋转不变性研究圆心角、弧、弦之间相等关系的定理. 第 2 课时主要探索圆心角的度数与它所对弧的度数之间的关系.

圆有许多性质，其中最基本也是最主要的性质是圆的对称性（轴对称性和旋转不变性），教科书在探索和证明圆的许多重要性质时，都运用了它的对称性. 教学时，应使学生对圆的对称性有较深刻的感受. 但是，由于圆的对称性是利用叠合或旋转后两个图形重合给出的，因而用这个性质证明问题比较困难. 教学时，一方面要重视利用圆的对称性，另一方面不要求学生严格地用对称的定义和性质写出证明过程，要恰当地把握好这两个要求.

在探索圆是轴对称图形时，可以采用折叠的方法，利用轴对称图形的定义说明圆的轴对称性. 在找对称轴时，学生可能会找到 1 条、2 条、3 条……教师不要过早地去评判，应该把机会留给学生，让他们在相互交流中，认识到圆的对称轴有无数条. 要鼓励学生表达自己的想法.

[1]对于和圆有关的这些概念，应让学生借助图形进行理解，并弄清楚它们之间的联系和区别. 例如，直径是弦，但弦不一定是直径；半圆是弧，但弧不一定是半圆；半圆既不是劣弧，也不是优弧.

[2]等弧是利用“能够重合”这一本质属性来定义的. 这一属性是判定两条弧是否相等的基本依据. 对此，教师应当明确：“等弧”概念是相对于“同圆或等圆”而言的，两条弧相等是指它们

山东教育出版社

的长度和度数都分别相等. 对于大小不等的两个圆上的弧来说，两条长度相等的弧或两条度数相等的弧都不是等弧. 至于等弦问题，是指线段的长度相等，与等圆或同圆无关.

[3]（上页）通过这个实验，让学生了解圆的旋转不变性——一个圆绕着它的圆心旋转任意一个角度，都能与原来的图形重合. 圆的中心对称性是其旋转不变性的特例.

做一做

通过实验探索圆的另一个特性：圆心角相等时，它们所对的弧相等，它们所对的弦相等. 教师应该明确：圆心角是与圆有关的角的一种，其特征是顶点在圆心；圆心角所对的弧是指圆心角两边所夹的圆弧. 在画$\angle AOB$与$\angle A'O'B$时，要注意使 OB 相对于 OA 的方向与$O'B'$ 相对于 $O'A'$ 的方向一致，否则当OA与 $O'A'$ 重合时，OB 与 $O'B'$ 不能重合.



图 5-11

将其中一个圆旋转任意一个角度，两个圆还能重合吗？

利用旋转的方法可以发现：一个圆绕着它的圆心旋转任意一个角度，都能与原来的图形重合.

圆是中心对称图形，对称中心为圆心.

做一做

在图 5-12 的等圆 $\odot O$ 和 $\odot O'$ 中，分别作相等的圆心角 $\angle AOB$ 和 $\angle A'O'B'$，将两圆重叠，然后固定圆心，将其中的一个圆旋转一个角度，使得 OA 与 $O'A'$ 重合.

你能发现哪些等量关系？说一说你的理由.

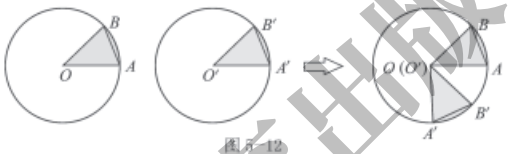


图 5-12

小颖认为 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'}$，$AB=A'B'$. 她是这样想的：

∵ 半径 OA 与 $O'A'$ 重合，$\angle AOB=\angle A'O'B'$，

∴ 半径 OB 与 $O'B'$ 重合.

∵ 点 A 与点 A' 重合，点 B 与点 B' 重合，

∴ $\overset{\frown}{AB}$ 与 $\overset{\frown}{A'B'}$ 重合，弦 AB 与弦 $A'B'$ 重合.

∴ $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'}$，$AB=A'B'$.

她的想法正确吗？与同伴进行交流.

教师应引导学生发现图 5–12中的许多等量关系，如$\angle AOB = \angle A'O'B'$（已知），$OA = OB = O'A' = O'B'$（半径），$\angle OAB = \angle OBA = \angle O'A'B' = \angle O'B'A'$，$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'}$，$AB = A'B'$.

在说明理由时，有的学生可能会尝试通过证明 $\triangle AOB \cong \triangle A'O'B'$ 证明 $AB = A'B'$，但这无法推出 $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'}$. 应使学生认识到，到目前为止，证明弧相等只有两条途径，一是根据定义用叠合法，二是利用垂径定理或它的推论. 通过分析已知条件，使学生体会到证明本定理只能根据定义，采用旋转的方法. 学过这一定理后，证明弧相等又多了一种方法.

在得出定理后，应使学生明确“在同圆或等圆中”的含义. 同圆是指同一个圆，等圆是指两个半径相等的圆. 两个等圆能够重合，它们的区别只是圆心的位置不同. 在本定理中，“同圆或等圆”这一前提条件是不可缺少的. 教师可通过举出反例的方式加深学生的理解.

对于本定理的证明过程，只要求学生理解，不要求所有学生都掌握.

山东教育出版社

在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弧相等，所对的弦相等.

想一想

在同圆或等圆中，如果两个圆心角所对的弧相等，那么这两个圆心角相等吗？它们所对的弦相等吗？你是怎么想的？

在同圆或等圆中，如果两条弦相等，你能得出什么结论？

在同圆或等圆中，如果两个圆心角、两条弧、两条弦中有一组量相等，那么它们所对应的其余各组量都分别相等.

例 1　如图 5−13，在 $\odot O$ 中，AB，CD 是两条弦，$OE\perp AB$，$OF\perp CD$，垂足分别是点 E，F.

（1）如果 $\angle AOB=\angle COD$，那么 OE 与 OF 的大小有什么关系？为什么？

（2）如果 $OE=OF$，那么 $\overset{\frown}{AB}$ 与 $\overset{\frown}{CD}$ 的大小有什么关系？为什么？

解：（1）$OE=OF$. 理由如下：

$\because \angle AOB=\angle COD$，

$\therefore AB=CD$.

$\because OE\perp AB$，$OF\perp CD$，$OA=OB$，$OC=OD$，

$\therefore AE=\frac{1}{2}AB$，$CF=\frac{1}{2}CD$.

$\therefore AE=CF$.

又 $\because OA=OC$，

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle OAE\cong \mathrm{Rt}\triangle OCF$.

$\therefore OE=OF$.

（2）$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$. 理由如下：

$\because OA=OC$，$OE=OF$，

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle OAE\cong \mathrm{Rt}\triangle OCF$.

$\therefore AE=CF$.



图 5−13

想一想

让学生思考上述定理的逆命题是否成立. 上述定理的逆命题有两个：（1）在同圆或等圆中，相等的弧所对的圆心角相等，所对的弦相等；（2）在同圆或等圆中，相等的弦所对的圆心角相等，所对的弧相等. 这两个逆命题都可以利用旋转法得到证明. 在教学中，只要能启发学生说出证明的思路即可.

把上面两个逆定理和原定理概括在一起，从而得到圆心角、弧、弦之间相等关系的定理. 教师应当明确：在应用定理时，可根据题目要求，只用其中的一部分. 例如，证明同圆或等圆中的两条弧相等，可转化为证明两个圆心角相等，或转化为证明两条弦相等. 究竟采用哪种方法，应因题而异. 有了这一定理，证明两弧相等的途径又增加了两条，而且变得简单易行.

例 1

本例是本节定理的综合应用. 同时通过本例，将“圆心角、弧、弦之间相等关系定理”扩充为“圆心角、弧、弦、弦心距之间相等关系定理”——在同圆或等圆中，如果两个圆心角、两条弧、两条弦或两条弦的弦心距中有一组量相等，那么它们所对应的其余各组量都分别相等.

上面所说的弦心距，是指圆心到弦的垂线段的长. 在图 5−13 中，OE，OF 分别是弦 AB 和 CD 的弦心距. 弦心距是弦相对于圆心位置的数量表示.

教学中是否提出弦心距的概念，教师可视学生的实际情况来确定.

山东教育出版社

议一议

引导学生有意识地归纳、总结所使用的研究图形的方法. 本节采用的方法有多种，如折叠、轴对称、旋转、证明以及当命题的条件和结论不止一项内容时构造逆命题的方法.

随堂练习

1. 如碗口、圆桌、圆桌上的转盘、方向盘、某些银行或汽车的标志等.
2. 略.
3. 四边形 $OACB$ 为菱形. 提示：连接 OC，证明△AOC 和 △BOC 都是等边三角形.

习题5.2

1. 相等. 提示：由 $AB = DC$，$BC = CB$，可证 $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{DB}$，所以 $AC = DB$.
2. 相等. 提示：由∠AOD =∠BOE 及已知条件，可证 $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{CE}$，所以 $BE = CE$.

又∵$OE \perp AB$，$OF \perp CD$，$OA = OB$，$OC = OD$，

$\therefore AE = \frac{1}{2}AB$，$CF = \frac{1}{2}CD$.

$\therefore AB = CD$.

$\therefore \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$.

议一议

在得出本节结论的过程中，你用到了哪些方法？与同伴进行交流.

随堂练习

1. 日常生活中的许多图案或现象都与圆的对称性有关，试举几例.

2. 利用一个圆及其若干条弦分别设计出符合下列条件的图案：

（1）是轴对称图形但不是中心对称图形；

（2）是中心对称图形但不是轴对称图形；

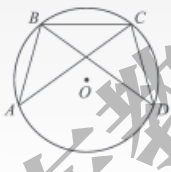
（3）既是轴对称图形又是中心对称图形.

3. 已知 A，B 是⊙O 上的两点，∠$AOB = 120°$，C 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点. 试确定四边形 $OACB$ 的形状，并说明理由.

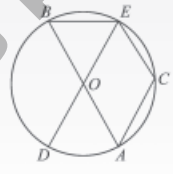
习题 5.2

知识技能

1. 如图，A，B，C，D 是 ⊙O 上的四点，$AB = DC$. AC 与 BD 相等吗？为什么？



（第 1 题）



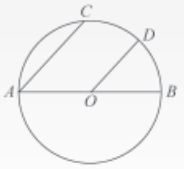
（第 2 题）

2. 如图，AB，DE 是 ⊙O 的直径，C 是 ⊙O 上的一点，且 $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{CE}$. BE 与 CE 的大小有什么关系？为什么？

山东教育出版社

数学理解

3. 如图，AB 是 $\odot O$ 的直径，$OD /\!/ AC$. $\overset{\frown}{CD}$ 与 $\overset{\frown}{BD}$ 的大小有什么关系？为什么？



（第 3 题）



（第 4 题）

4. 如图，AB 是半圆的直径，E 是 OA 的中点，F 是 OB 的中点，$ME \perp AB$，$NF \perp AB$，垂足分别是点 E，F. $\overset{\frown}{AM}$，$\overset{\frown}{MN}$，$\overset{\frown}{NB}$ 的大小有什么关系？为什么？

想一想

（1）1 平角等于多少度？1 周角等于多少度？

（2）把顶点在圆心的周角等分成 360 份时，每一份的圆心角的度数是多少？整个圆被等分成多少份？

把整个圆等分成 360 份，每一份这样的弧叫做 1° 的弧.

议一议

（1）1° 的圆心角所对的弧的度数是多少？反过来，1° 的弧所对的圆心角的度数是多少？

（2）$n°$ 的圆心角的度数与它所对的弧的度数（如图 5–14）有怎样的关系？

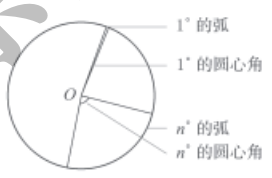


图 5–14

议一议

弧的度数是通过它所对的圆心角的度数定义的.

3. 相等.

提示：连接 OC. 由 $OD /\!/ AC$，知 $\angle CAO = \angle DOB = \angle COD$.

所以 $\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{BD}$.

4. 相等.

提示：连接 MA，MO，NO，NB. 由 ME 是 OA 的中垂线，可知 $MA = MO$，所以 $\triangle OMA$ 是等边三角形，$\angle MOA = 60°$. 同理 $\angle NOB = 60°$. 所以 $\angle MOA = \angle NOB = \angle MON = 60°$.

想一想

关于弧的度量，本章中介绍了两种方式，一是度数，二是长度. 弧的度数的单位与角的度量单位是一致的，都是度（在弧度制下都是弧度），从而沟通了角与弧这两种不同几何图形之间的联系，使得与圆有关的角同弧之间可以实现相互转化. 弧的长度单位与线段的长度单位是一致的. 弧长的计算将在本章第 9 节中教学.

山东教育出版社

圆心角的度数与它所对的弧的度数相等.

例 2 如图 5−15，在 $\odot O$ 中，已知弦 AB 所对的劣弧为圆的 $\frac{1}{3}$，$\odot O$ 的半径为 R，求弦 AB 的长.

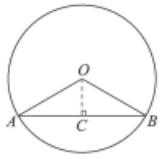


图 5−15

解： 由题意可知，$\overset{\frown}{AB}$ 的度数为 120°.

$\therefore \angle AOB = 120°$.

$\because OA = OB$,

$\therefore \angle OAB = \angle OBA = 30°$.

作 $OC \perp AB$，垂足为点 C，则

$$OC = \frac{1}{2}OA = \frac{R}{2}.$$

$$\therefore AC = \sqrt{OA^2 - OC^2} = \sqrt{R^2 - (\frac{R}{2})^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}R.$$

$$\therefore AB = 2AC = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}R = \sqrt{3}R.$$

例 3 如图 5−16，已知 AB，CD 为 $\odot O$ 的两条直径，弦 $CE \parallel AB$，$\angle BOD = 110°$，求 $\overset{\frown}{CE}$ 的度数.

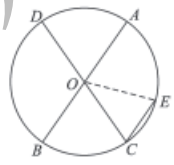


图 5−16

解： 连接 OE.

$\because \angle BOD = 110°$,

$\therefore \angle BOC = 70°$.

$\because CE \parallel AB$,

$\therefore \angle C = 70°$.

$\because OC = OE$,

$\therefore \angle E = \angle C = 70°$.

$\therefore \angle COE = 180° - \angle C - \angle E = 40°$.

$\therefore \overset{\frown}{CE}$ 的度数为 40°.

例 2

本例的解题关键是把已知条件中弧的度数化为所对圆心角的度数，然后利用垂径定理，使问题得到解决.

例 3

本例是把求弧的度数问题转化成求这条弧所对圆心角的度数问题. 教学时，应使学生感悟“转化思想”的应用.

山东教育出版社

随堂练习

已知 $\overset{\frown}{AB}$ 和 $\overset{\frown}{CD}$ 分别是 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 的弧. 试判断下列说法是否正确，并简要说明理由.

（1）如果 $\overset{\frown}{AB}$ 的度数 = $\overset{\frown}{CD}$ 的度数，那么 $\angle AO_1B = \angle CO_2D$；

（2）如果 $\overset{\frown}{AB}$ 的度数 = $\overset{\frown}{CD}$ 的度数，那么 $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$；

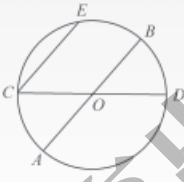
（3）如果 $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$，那么 $\overset{\frown}{AB}$ 的度数 = $\overset{\frown}{CD}$ 的度数.

习题 5.3

知识技能

1. 在 $\odot O$ 中，已知弦 $AB = 4\sqrt{3}$ cm，$OA = 4$ cm，求弦 AB 所对的两条弧的度数.

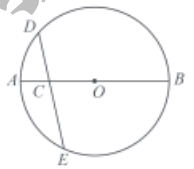
2. 如图，已知 AB，CD 是 $\odot O$ 的两条直径，弦 $CE \parallel AB$，$\overset{\frown}{CE}$ 的度数为 80°. 求 $\angle AOD$ 的度数.



（第 2 题）

数学理解

3. 如图，已知点 C 是 $\odot O$ 的直径 AB 上的一点，过点 C 作弦 DE，使 $CD = CO$. 若 $\overset{\frown}{AD}$ 的度数为 40°，求 $\overset{\frown}{BE}$ 的度数.



（第 3 题）

随堂练习

（1）√；（2）×；（3）√.

提示：两条弧相等时，这两条弧能够重合，则它们的度数相等，长度也相等. 反之也成立.

习题5.3

1. 120°，240°.

2. 130°.

提示：连接 OE，则 $\angle COE = 80°$. 由 $OC = OE$，可知 $\angle OCE = \dfrac{180° - 80°}{2} = 50°$. 由 $CE \parallel AB$，可知 $\angle BOD = \angle OCE = 50°$，所以 $\angle AOD = 180° - 50° = 130°$.

3. 120°.

提示：连接 OD，OE，则 $\angle AOD = 40°$. 由 $CD = CO$，可知 $\angle ODE = \angle AOD = 40°$. 在 $\triangle ODE$ 中，$OD = OE$，可知 $\angle OED = \angle ODE = 40°$，$\therefore \angle DOE = 180° - 40° - 40° = 100°$. $\therefore \angle AOE = \angle DOE - \angle AOD = 100° - 40° = 60°$，$\therefore \angle BOE = 180° - \angle AOE = 180° - 60° = 120°$. $\therefore \overset{\frown}{BE}$ 的度数是 120°.

山东教育出版社

教学目标

1. 探索并证明垂径定理.

2. 通过对垂径定理的探索和证明发展学生的推理能力.

本节主要利用圆的轴对称性研究垂径定理及其相关结论.

做一做

旨在通过教科书图 5-17 这样的复合图形的轴对称性，探索垂径定理. 在此过程中得到的等量关系不仅限于垂径定理，对于其他正确的结论应予以肯定. 有的学生可能会用折叠的办法得出猜想，还有的学生可能会尝试用证明的方法得出结论. 教学时，应鼓励学生探索方式的多样性，在此基础上通过交流使所有的学生都能有所收获.

[1] 这一结论称为“垂径定理”. 条件中的“弦”可以是直径，结论中的“平分弧”既意味着平分弦所对的劣弧，也意味着平分弦所对的优弧.

*3 垂径定理

做一做

如图 5-17，AB 是 $\odot O$ 的一条弦，作直径 CD，使 $CD \perp AB$，垂足为点 M.

（1）图 5-17 是轴对称图形吗？如果是，其对称轴是什么？

（2）你能发现图中有哪些等量关系？说一说你的理由.

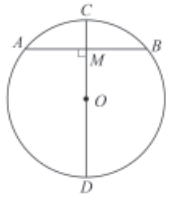


图 5-17

垂径定理[1] 垂直于弦的直径平分这条弦，并且平分弦所对的两条弧.

已知：如图 5-18，AB 是 $\odot O$ 的一条弦，CD 是 $\odot O$ 的一条直径，并且 $CD \perp AB$，垂足为点 M.

求证：$AM = BM$，$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC}$，$\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD}$.

证明：连接 OA，OB，则 $OA = OB$.

在等腰三角形 OAB 中，

$\because OM \perp AB$，

$\therefore AM = BM$.

$\therefore$ 点 A 和点 B 关于 CD 对称.

$\because \odot O$ 关于直径 CD 对称，

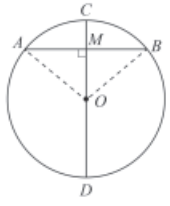


图 5-18

教科书展示了垂径定理的一种证明方法. 教师要结合图形的轴对称性让学生理解和掌握这种证法. 也可以通过三角形全等证明.

证明垂径定理的基本思路是：先构造等腰三角形，由垂直于弦得出平分弦；然后将直径看作圆的对称轴，利用轴对称图形对应元素相等的性质得出平分弧的结论.

山东教育出版社

∴ 当圆沿着直径 CD 对折时，点 A 与点 B 重合，$\overset{\frown}{AC}$ 与 $\overset{\frown}{BC}$ 重合，$\overset{\frown}{AD}$ 与 $\overset{\frown}{BD}$ 重合.

∴ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$，$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$.

想一想

如图 5−19，AB 是 $\odot O$ 的弦（不是直径），作一条平分 AB 的直径 CD，交 AB 于点 M.

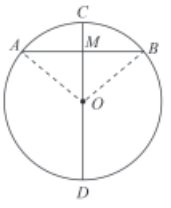


图 5−19

（1）图 5−19 是轴对称图形吗？如果是，其对称轴是什么？

（2）你能发现图中有哪些等量关系？说一说你的理由.

[1] 平分弦（不是直径）的直径垂直于弦，并且平分弦所对的两条弧.

例 如图 5−20，一条公路的转弯处是一段圆弧（即图中 $\overset{\frown}{CD}$，点 O 是 $\overset{\frown}{CD}$ 的圆心），其中 $CD=600$ m，E 为 $\overset{\frown}{CD}$ 上一点，且 $OE\perp CD$，垂足为点 F，$EF=90$ m. 求这段弯路的半径.

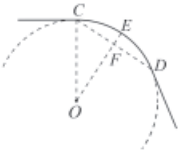


图 5−20

解：连接 OC.

设弯路的半径为 R m，则 $OF=(R-90)$ m.

∵ $OE\perp CD$，

∴ $CF=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}\times 600=300$（m）.

根据勾股定理，得

想一想

与前面的过程类似，探索垂径定理的一个逆定理. 教学时，应首先鼓励学生独立探索，然后通过同学间的交流得出结论，并在这一过程中再次体会研究图形的多种方法.

仿照前面证明垂径定理的方法，有些学生可能会证明垂径定理的这一逆定理. 教学时应当鼓励有能力的学生书写证明过程.

证明这一逆定理的基本思路：构造等腰三角形，由平分弦得出垂直于弦；然后利用圆的对称性证明平分弦所对的弧.

[1] 这是垂径定理几个逆定理中的一个. 当命题的条件和结论不止一项时，只要交换条件和结论中的一项，就可得到一个逆命题，全部交换也构成一个逆命题. 不必向学生讲解这些内容.

考虑到《标准》对这部分内容的要求，教科书只介绍了垂径定理的一个逆定理，教学时不宜进行过多扩充.

例

本例是垂径定理的应用，解题过程中使用了列方程的方法. 用代数方法解决几何问题，这种思想应该向学生进行渗透.

山东教育出版社

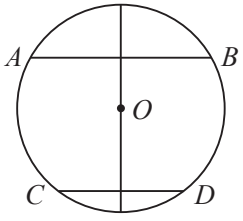
随堂练习

1. 约27.9 m.

提示：过点O作AB的垂线，交$\overset{\frown}{AB}$于点C，交AB于点D.

2. 相等.

提示：说理的基本思路是，如图，作出垂直于弦的直径，利用垂径定理得两组弧分别相等，用“等量减等量差相等”即可说明结论成立.



当然，符合条件的图形有三种情况：圆心在平行弦外，圆心在其中一条弦上，圆心在平行弦内，但说理的思路都是一样的.

习题5.4

1. 直径$CD = 26$寸.

$$OC^2 = CF^2 + OF^2,$$

即

$$R^2 = 300^2 + (R - 90)^2.$$

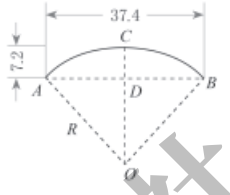
解这个方程，得$R = 545$.

所以，这段弯路的半径为545 m.

随堂练习

1. 1400多年前，我国隋朝建造了赵州石拱桥（如图），它的桥拱是圆弧形，它的跨度（即弧所对的弦长）为37.4 m，拱高（即弧的中点到弦的距离）为7.2 m，求桥拱所在圆的半径（结果精确到0.1 m）.





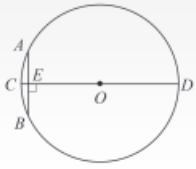
（第1题）

2. 如果圆的两条弦互相平行，那么这两条弦所夹的弧相等吗？为什么？

习题5.4

知识技能

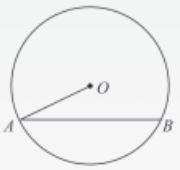
1. “圆材埋壁”是我国古代数学名著《九章算术》中的一个问题：“今有圆材，埋在壁中，不知大小．以锯锯之，深一寸，锯道长一尺，问：径几何？”转化为现在的数学语言就是：如图，CD为$\odot O$的直径，弦$AB \perp CD$，垂足为点E，$CE = 1$寸，$AB = 10$寸，求直径CD的长.



（第1题）

山东教育出版社

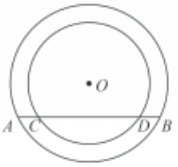
2. 如图，已知⊙O的半径为30 mm，弦 $AB=36$ mm，求点O到AB的距离及$\angle OAB$的余弦值.



（第2题）

数学理解

3. 如图，两个圆都以点 O 为圆心，小圆的弦 CD 与大圆的弦 AB 在同一条直线上，你认为 AC 与 BD 的大小有什么关系？为什么？



（第3题）



（第4题）

4. 如图，M 为 ⊙O 内一点，画一条弦 AB，使 AB 过点 M，并且 $AM=BM$.

2. 距离为24 mm，$\cos\angle OAB=0.6$.

提示：过点O作AB的垂线，垂足为点E.

3. $AC=BD$.

提示：过点O作AB的垂线，垂足为点E.

4. 提示：（1）作直线OM；

（2）过点M作OM的垂线，交⊙O于A，B.

线段AB即为所求的弦.

山东教育出版社

山东教育出版社

教学目标

1．经历探索圆周角和圆心角的关系及其相关推论的过程，体会分类、归纳等数学思想方法.

2．理解圆周角的概念及其相关性质.

本节课共分 2 课时，第 1 课时主要研究圆周角和圆心角的关系（圆周角定理）及其相关推论.

[1] 在射门游戏中，球员射中球门的难易与他所处的位置 B 对球门 AC 的张角（$\angle ABC$）有关.

情境引入意在通过射门问题引出圆周角的概念. 教学时可引导学生理解张角的特征，从而归纳出圆周角的特征：角的顶点在圆上；两边在圆内的部分是圆的两条弦. 对此，教师可举一些反例让学生进行辨析. 教学时要引导学生认识圆周角与圆心角的主要区别，即角的顶点的位置不同.

4 圆周角和圆心角的关系

[1] 在射门游戏中，球员射中球门的难易与他所处的位置对球门的张角（如图 5–21中的$\angle ABC$）有关. 就角度大小而言，球员在 B，D，E 中的哪一个点处射门更容易些？还是都一样？

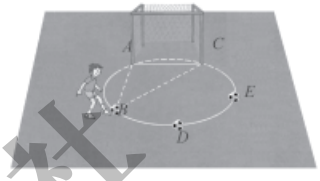


图 5–21

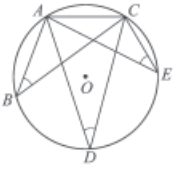


图 5–22

在图 5–22 中，点 A，B，D，E，C 在同一个圆上. 当球员分别在 B，D，E 处射门时，他所处的位置对球门 AC 分别形成三个张角 $\angle ABC$，$\angle ADC$，$\angle AEC$. 观察可以发现，这三个角的顶点在圆上，它们的两边在圆内的部分分别是圆的弦. 像这样的角，叫做**圆周角**（angle in a circular segment）.

上面的问题就是要研究同一条弧（$\overset{\frown}{AC}$）所对的圆周角（$\angle ABC$，$\angle ADC$，$\angle AEC$）之间的大小关系.[2]

做一做

如图 5–23，在 $\odot O$ 中，$\angle AOB = 80°$.

（1）请你画出几个 $\overset{\frown}{AB}$ 所对的圆周角，这几个圆周角有什么关系？与同伴交流.

（2）这些圆周角与圆心角 $\angle AOB$ 的大小有什么关系？你是怎样发现的？与同伴交流.

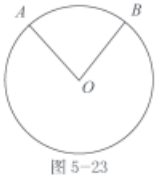


图 5–23

[2] 提出这一问题意在引起学生思考，为本节的活动埋下伏笔.

做一做

设置此活动的意图是让学生通过动手画图，找到特定弧所对的圆周角，并通过测量或比较对相关结论进行猜测，使学生经历发现问题的全过程.

学生所画的圆周角会有不同的位置，教师可以在班级中找到典型的图形进行展示，并启发学生思考，为什么不同位置的圆周角度数都相同.

山东教育出版社

议一议

在图 5–23 中，改变 $\angle AOB$ 的度数，上面的结论仍然成立吗？

圆周角定理　圆周角的度数等于它所对弧上的圆心角度数的一半.

已知：如图5–24，$\angle ACB$ 是 $\overset{\frown}{AB}$ 所对的圆周角，$\angle AOB$ 是 $\overset{\frown}{AB}$ 所对的圆心角.

求证：$\angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB$.

分析：根据圆周角和圆心的位置关系，分三种情况讨论：

（1）圆心 O 在 $\angle ACB$ 的一条边上，如图5–24（1）；

（2）圆心 O 在 $\angle ACB$ 的内部，如图5–24（2）；

（3）圆心 O 在 $\angle ACB$ 的外部，如图5–24（3）.

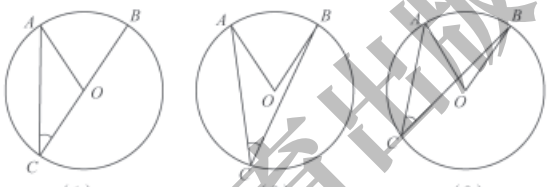


图 5–24

在三种位置关系中，我们选择第（1）种情况给出证明，其他情况可以转化为（1）的情况进行证明.

证明：圆心 O 在 $\angle ACB$ 的一条边上，如图 5–24（1）.

$\because$ $\angle AOB$ 是 $\triangle AOC$ 的外角，

$\therefore$ $\angle AOB=\angle CAO+\angle ACB$.

$\because$ $OA=OC$，

$\therefore$ $\angle CAO=\angle ACB$.

议一议

进一步将问题一般化，探讨结论是否依然成立.

证明圆周角和圆心角的关系这一定理对学生来说是有一定难度的. 尽管如此，教学时仍应给学生留有时间和空间，让他们进行思考. 结合“做一做”中学生得到的不同情况进行分类，并引导学生从特殊情况入手进行证明. 在此基础上，让学生思考：其他两种情况能否转化为第一种情况？如何转化？实际上，实现转化的方法是连接 CO 并延长，转化为第一种形式，得到圆中的等腰三角形解决问题.

当解决一个问题有困难时，我们可以首先考虑其特殊情形，然后再设法解决一般问题. 这是解决问题时常用的策略. 教学过程中要有意识地向学生渗透解决问题的策略以及转化、分类、归纳等数学思想方法.

山东教育出版社

做一做

让学生体验将另外两种情况转化为第一种情况进行证明，进一步感悟转化思想.

想一想

引导学生观察$\angle ABC$,$\angle ADC$和$\angle AEC$是同弧（$\overset{\frown}{AC}$）所对的圆周角，根据圆周角定理，它们都等于圆心角$\angle AOC$的一半，所以这几个圆周角相等.

议一议

旨在引导学生回顾、总结，进一步体会探究过程中所用到的分类、归纳等数学思想方法.

随堂练习

1. $\angle BAC=25°$.

$\therefore \angle AOB=2\angle ACB$,

即 $\angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB$.

做一做

你能将图 5-24（2）和图 5-24（3）这两种情况分别转化成图 5-24（1）的情况去解决吗？做一做，并与同伴交流.

由圆周角定理，我们还可以得到下面的结论：

圆周角的度数等于它所对弧的度数的一半.

想一想

你能解决射门游戏中的问题了吗？当球员在 B，D，E 处射门时，他所处的位置对球门 AC 形成的三个张角$\angle ABC$，$\angle ADC$，$\angle AEC$ 的大小有什么关系？你能用圆周角定理去解决它吗？

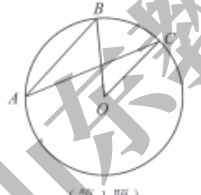
同弧或等弧所对的圆周角相等.

议一议

在得出本节结论的过程中，你用到了哪些方法？请举例说明，并与同伴交流.

随堂练习

1. 如图，在 $\odot O$ 中，$\angle BOC=50°$，求 $\angle BAC$ 的度数.



（第 1 题）



（第 2 题）

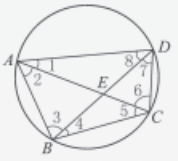
山东教育出版社

2. 如图，在 ⊙O 中，$\angle A = 40°$，求 $\angle OBC$ 的度数.

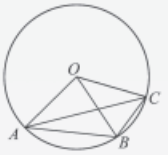
习题 5.5

知识技能

1. 如图，点 A，B，C，D 在同一个圆上，四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 和 BD 相交于点 E. 在图中标出的 8 个角中，哪些是相等的角？



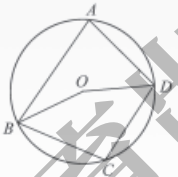
（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，OA，OB，OC 都是 ⊙O 的半径，$\angle AOB = 2\angle BOC$. $\angle ACB$ 与 $\angle BAC$ 的大小有什么关系？为什么？

3. 如图，A，B，C，D 是 ⊙O 上的四个点，且 $\angle BCD = 100°$，求 $\angle BOD$（$\overset{\frown}{BCD}$ 所对的圆心角）和 $\angle BAD$ 的度数.



（第 3 题）

数学理解

4. 为什么有些电影的座位排列（横排）呈圆弧形？说一说这种设计的合理性.

想一想

（1）如图 5–25，BC 是 ⊙O 的直径，它所对的圆周角有什么特点？你能证明吗？

2. $\angle OBC = 50°$.

习题5.5

1. $\angle 1 = \angle 4$，$\angle 2 = \angle 7$，$\angle 3 = \angle 6$，$\angle 5 = \angle 8$.
2. $\angle ACB = 2\angle BAC$.
3. $\angle BOD = 160°$，$\angle BAD = 80°$.
4. 尽量保证同排的人视角相同.

第 2 课时研究圆周角定理的推论以及圆内接四边形的相关性质. 本课时首先从正反两方面引导学生思考一个问题，进而得到圆周角定理的推论，再对圆内接四边形的性质进行研究. 教学时应让学生先独立思考，然后再进行交流. 要鼓励学生说理方式的多样性.

想一想

（1）图 5–25 是圆周角定理的一种特殊情况，即半圆所对的圆周角是直角. 在教科书图 5–25 中，半圆所对的圆心角 $\angle BOC = 180°$，所以 $\angle BAC = 90°$.

山东教育出版社 山东教育出版社

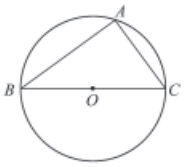


图 5-25

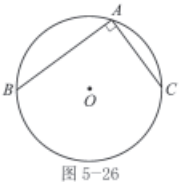
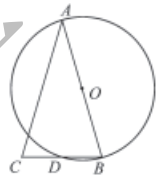


图 5-26

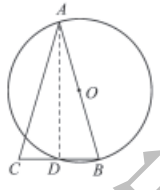
（2）如图 5-26，圆周角∠BAC = 90°，弦 BC 是直径吗？为什么？

[1] 直径所对的圆周角是直角；90° 的圆周角所对的弦是直径.

例 如图 5-27（1），在△ABC 中，AB = AC，以 AB 为直径的 ⊙O 交 BC 于点 D. BD 与 CD 的大小有什么关系？为什么？



（1）



（2）

图 5-27

解： BD = CD. 理由如下：

如图 5-27（2），连接 AD.

∵ AB 是 ⊙O 的直径，

∴ ∠ADB = 90°.

∴ AD ⊥ BC.

又∵ AC = AB，

∴ BD = CD.

做一做

轮船在航行过程中，船长常常通过测定角度来确定轮船是否会遇到暗礁.

[1] 本课时所得到的推论实际上是两个互逆的真命题. 教学时，应注意分析它们的互逆性，说明它们的正确性.

还可以让学生将这一推论与前面所学过的“直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半”这一性质相比较，体会二者之间的联系. 教学中应通过例题和习题，让学生体会“直径所对的圆周角是直角”是圆内证明垂直的重要途径.

例

本例是“直径所对的圆周角是直角”及等腰三角形“三线合一”定理的综合应用.

做一做

这是一个有实际背景的问题，解决这一问题不仅要用到圆周角定理的推论，而且还要应用分类讨论和反证法的思想.

（1）轮船位于暗礁区域内（即 ⊙O 内）. 理由是：假设轮船在 ⊙O 上，则有∠α=∠C，这与∠α>∠C 矛盾，所以轮船不可能在 ⊙O 上；假设轮船在 ⊙O 外，则有∠α<∠AEB，即∠α<∠C，这与∠α>∠C 矛盾，所以轮船不可能在 ⊙O 外. 因此，轮船只能位于 ⊙O 内.

（2）轮船位于暗礁区域外（即 ⊙O 外），说理方式与（1）类似.

山东教育出版社

如图 5−28，A，B 表示灯塔，暗礁分布在经过 A，B 两点的一个圆形区域内，C 表示一个危险临界点，$\angle ACB$ 就是“危险角”，当轮船与两个灯塔的夹角大于“危险角”时，就有可能触礁.

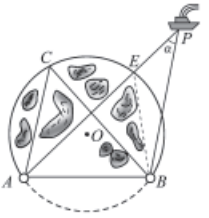


图 5−28

（1）当轮船与两个灯塔的夹角 $\angle\alpha$ 大于“危险角”时，轮船位于哪个区域？为什么？

（2）当轮船与两个灯塔的夹角 $\angle\alpha$ 小于“危险角”时，轮船位于哪个区域？为什么？

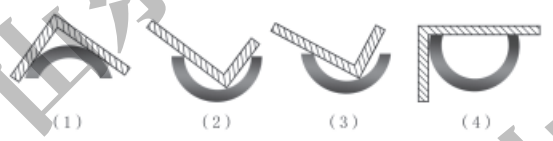
随堂练习

1. 如图，$\odot O$ 的直径 $AB = 10$ cm，C 为 $\odot O$ 上的一点，$\angle ABC = 30°$，求 AC 的长.



（第 1 题）

2. 小明想用直角尺检查某些工件是否恰好为半圆形. 如图，你能判断哪个是半圆形？为什么？



（第 2 题）

随堂练习

1. $AC = 5$ cm.

2. 图（2）是半圆形，理由是：90° 的圆周角所对的弦是直径.

山东教育出版社

习题5.6

1. $AD=\sqrt{3}$，$CD=3$.

2. $\angle BAD=75°$.

提示：多种解法，如连接BD或连接BC.

3. $AB=AE$，$BD=ED=CD$.

提示：连接AD，则$\angle ADB=90°$，

$\therefore \triangle ADB$和$\triangle ADE$都是直角三角形.

$\therefore \angle B$与$\angle BAD$互余，$\angle E$与$\angle EAD$互余.

$\because \overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{DC}$，

$\therefore \angle BAD=\angle EAD$.

$\therefore \angle B=\angle E$.

$\therefore AB=AE$.

$\therefore BD=ED$.

$\because BD=CD$，

$\therefore CD=ED$.

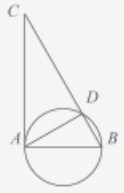
4. $BE=EC$.

提示：连接OC，证明$\angle BOE=\angle COE$.

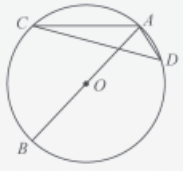
习题 5.6

知识技能

1. 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle BAC=90°$，$\angle B=60°$，$AB=2$，以AB为直径的圆与BC相交于点D. 求AD和CD的长.



（第1题）



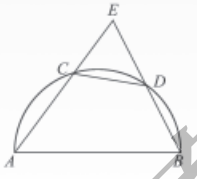
（第2题）

2. 如图，AB是$\odot O$的直径，$\angle ACD=15°$，求$\angle BAD$的度数.

数学理解

3. 如图，C，D为半圆上的两点，且$\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{DC}$，连接$AC$并延长，与$BD$的延长线相交于点$E$.

写出图中相等的线段，并说明理由.



（第3题）



（第4题）

4. 如图，AB，DE是$\odot O$的直径，$AC/\!/DE$，AC与$\odot O$相交于点C. BE与EC的大小有什么关系？为什么？

山东教育出版社

5 确定圆的条件

[1]经过一点可以作无数条直线，经过两点只能作一条直线. 那么，经过一点能作几个圆？经过两点、三点……呢？

做一做

（1）作圆，使它经过已知点 A. 你能作出几个这样的圆？

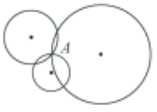


图 5-29

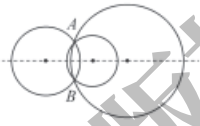


图 5-30

（2）作圆，使它经过已知点 A，B. 你是如何做的？你能作出几个这样的圆？其圆心的位置有什么特点？与线段 AB 有什么关系？为什么？

（3）作圆，使它经过已知点 A，B，C（A，B，C 三点不在同一条直线上）. 你是如何做的？你能作出几个这样的圆？

利用尺规过不在同一条直线上的三个点作圆的方法如下：[2]

作　法	图　示
（1）连接 AB，BC.	

教学目标

1. 经历不在同一条直线上的三个点确定一个圆的探索过程，进一步体会解决数学问题的策略.

2. 了解不在同一条直线上的三个点确定一个圆，以及过不在同一条直线上的三个点作圆的方法，了解三角形的外接圆、三角形的外心等概念.

3. 了解圆内接多边形的概念，了解并证明圆内接四边形的性质.

本课时从过一点画圆，过两点画圆，到过不共线三点画圆，让学生经历研究问题从简单到复杂的过程，并对典型的过不共线三点作圆问题进行系统研究.

[1]与作直线类比，引出确定圆的条件问题.

做一做

由易到难让学生经历画圆的过程，从中探索确定圆的条件.

画图前，要引导学生通过思考明确这样的基本思想：作圆的问题实质上就是确定圆心和半径的问题，确定了圆心和半径，圆就随之确定.

（1）以点A以外的任意一点为圆心，以这一点与点A所连的线段为半径就可以作一个圆. 由于圆心是任意的，因此这样的圆有无数个.

（2）经过 A，B 两点的圆，其圆心到 A，B 两点的距离一定相等，所以圆心应在线段 AB 的垂直平分线上. 另一方面，线段 AB 的垂直平分线上的点到 A，B 两点的距离相等，所以在 AB 的垂直平分线上任意取一点为圆心，都可以画一个经过 A，B 两点的圆. 因此这样的圆也有无数个.

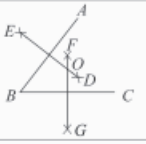
山东教育出版社

（3）要作一个圆经过 A，B，C 三点，就要确定一个点作为圆心，使它到三点的距离相等．到 A，B 两点距离相等的点的集合是线段 AB 的垂直平分线，到 B，C 两点距离相等的点的集合是线段 BC 的垂直平分线，两集合的交集就是到 A，B，C 三点距离相等的点的集合，即所作圆的圆心，这种确定圆心的方法就是交集法．交集法是数学中常用的方法．教学时不必向学生介绍交集法，但应结合具体内容让学生体会这种解决问题的策略．

[2] 过不在同一条直线上的三个点作圆时，只需由两条线段的垂直平分线确定圆心即可，没有必要作出三条线段的垂直平分线．事实上，三条垂直平分线交于同一点．

山东教育出版社
山东教育出版社

续表

作　法	图　示
（2）分别作线段 AB，BC 的垂直平分线 DE 和 FG，DE 与 FG 相交于点 O.	
（3）以点 O 为圆心，以 OB 为半径作圆. $\odot O$ 就是所要求作的圆.	

说说以上作法的道理.

在上面的作图过程中，点 O 是线段 AB，BC 的垂直平分线 DE 和 FG 的交点，它到 A，B，C 三点的距离相等. 因为直线 DE 和 FG 有且只有一个交点 O，所以经过 A，B，C 三点能且只能作一个圆.

不在同一条直线上的三个点确定一个圆.

[1]因此，三角形的三个顶点确定一个圆. 经过三角形各顶点的圆叫做三角形的**外接圆**（circumcircle of triangle），外接圆的圆心是三角形三边垂直平分线的交点，叫做三角形的**外心**（circumcenter）. 这个三角形叫做这个圆的**内接三角形**（inscribed triangle）. 如图 5-31，$\odot O$ 就是 $\triangle ABC$ 的外接圆，圆心 O 就是 $\triangle ABC$ 的外心，$\triangle ABC$ 是 $\odot O$ 的一个内接三角形. 三角形的外心是三角形三边垂直平分线的交点，它到三角形三个顶点的距离相等.

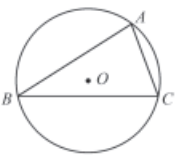


图 5-31

想一想

你能设法确定一张圆形纸片的圆心吗？你有哪些方法？与同伴交流.

[1]教学时，可以鼓励学生通过画图理解外接圆、外心等概念.

想一想

有很多种方法，举例如下：

（1）对折两次，折痕的交点即为圆心；

（2）在圆纸片上画两个 90° 的圆周角，使它们所对的弦相交，这个交点就是圆心；

（3）在圆中画两条不平行的弦，分别作这两条弦的垂直平分线，其交点即为圆心；

（4）在圆中任意画一条弦，然后作这条弦的垂直平分线，交圆于 A，B 两点，再作 AB 的垂直平分线，两线的交点就是圆心.

山东教育出版社

随堂练习

作图略．锐角三角形的外心在三角形的内部，直角三角形的外心在斜边上，钝角三角形的外心在三角形的外部．

随堂练习

已知下面三个三角形，分别作出它们的外接圆．你发现它们的外心的位置分别有什么特点？



锐角三角形　直角三角形　钝角三角形

读一读

运用指令操作计算机

数学中有公理，也有定理，这些规则一方面能够帮助我们把握事情的规律，而另一方面似乎也会使我们感觉数学有些刻板、烦琐．这是数学中独有的吗？其实不然，规则和定理我们平时都在讲、都在用．例如，与我们生活紧密联系的计算机就特别守规则、讲道理．一些软件可以根据给出的指令画圆．

以几何画板为例，如何利用它画一个确定的圆呢？当使用作图菜单时，你会发现所有与画圆相关的条目都是灰色的．为什么呢？因为计算机没有得到规则，不知道你想在哪里画、画多大的圆，所以它拒绝完成．

那么你可以用如下方法画圆：

直接使用画圆工具，只要以一点为圆心通过拖拽就可以确定半径长，从而画出一个圆．

先画出两点，再选中它们，执行作图命令里的“过圆心和圆周上点绘圆”，也可以画圆．

给出点和线段长，选中它们，执行作图命令里的“以圆心和半径绘圆”（如图），可以画出指定半径的圆．



山东教育出版社

没有条件约束是不能确定一个圆的. 用什么样的条件就可以确定一个圆呢? 相信通过本节课的学习你已经心中有数了. 想在几何画板上试一试吗?

习题 5.7

知识技能

1. 草原上有三个放牧点, 要修建一个牧民定居点, 使得三个放牧点到定居点的距离相等. 三个放牧点的位置如图所示, 那么如何确定定居点的位置?

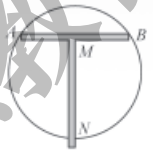




(第 1 题)

数学理解

2. 已知 $AB = 4$ cm, 以 3 cm 长为半径作圆, 使它经过点 A 和点 B. 这样的圆能作出几个?
3. 经过不在同一条直线上的四个点是否一定能作一个圆? 举例说明.
4. 如图, MN 所在的直线垂直平分线段 AB. 利用这样的工具, 最少使用多少次, 就可以找到圆形工件的圆心? 为什么?



(第 4 题)

如图 5–32, 四边形 $ABCD$ 的四个顶点都在⊙O 上, 我们说四边形 $ABCD$ 是 ⊙O 的内接四边形, ⊙O 是四边形 $ABCD$ 的外接圆. 一般地, 如果一个多边

习题5.7

1. 作图略, 该实际问题转化为数学问题就是: 确定一点, 使这点到已知三点的距离相等.
2. 能作出2个.

   提示:

   (1) 作 AB 的垂直平分线 l;

   (2) 以点 A 为圆心、以 3 cm 长为半径作弧, 交 l 于点 O_1, O_2;

   (3) 分别以点 O_1, O_2 为圆心, 以 OA 为半径作圆.

   ⊙O_1, ⊙O_2 即为所求的圆.
3. 不一定, 因为要想作经过四个点的圆, 应先作经过其中三个点(不在同一条直线上)的圆, 而第四个点到该圆圆心的距离不一定等于半径.
4. 最少用 2 次.

   提示: 第一次画出 A_1B_1 的垂直平分线 M_1N_1, 第二次画出 A_2B_2 (A_2B_2 与 A_1B_1 不平行)的垂直平分线 M_2N_2, 两线的交点就是圆形工件的圆心. 理由是: 圆心到 A_1B_1 两点的距离相等, 因此圆心一定在 A_1B_1 的垂直平分线 M_1N_1 上, 同理, 圆心也一定在 A_2B_2 的垂直平分线 M_2N_2 上, 直线 M_1N_1 与 M_2N_2 的交点到点 A_1, B_1, A_2, B_2 的距离相等, 所以它是圆心.

本课时的内容是在学生学习了圆内接三角形的基础上, 进一步学习圆内接四边形的概念和性质: 圆内接四边形的对角互补. 这一性质充分揭示了作为直线形的圆内接四边形与圆的内在联系.

山东教育出版社

议一议

“议一议”是引导学生观察圆内接四边形的两组对角与其所对弧之间的关系，让学生发现每组对角所对的弧都恰好组成整个圆，从而根据圆周角定理，得到圆内接四边形对角互补的结论. 它是今后证明与圆有关的角互补的重要依据. 教学时应要求学生会证明这一定理.

想一想

圆内接四边形外角的内对角是与这个外角相邻的内角的对角，因此推论成立的依据是同角的补角相等. 这个推论在证明与圆有关的角相等时经常用到.

形的所有顶点都在同一个圆上，那么这个多边形叫做**圆内接多边形**，这个圆叫做多边形的**外接圆**.

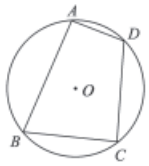


图 5-32

议一议

（1）如图 5-32，在 $\odot O$ 的内接四边形 $ABCD$ 中，$\angle A$ 与 $\angle C$，$\angle B$ 与 $\angle D$ 分别是它的两组对角. $\angle A$ 所对的弧是哪条弧？$\angle C$ 所对的弧是哪条弧？

（2）$\angle A$ 与 $\angle C$ 所对的两条弧的度数之和是多少？由此你发现 $\angle A$ 与 $\angle C$ 有怎样的数量关系？$\angle B$ 与 $\angle D$ 呢？

已知：如图 5-32，四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形.

求证：$\angle A+\angle C=180^\circ$，$\angle B+\angle D=180^\circ$.

证明：在图 5-32 中，

$\because \angle A$ 的度数 $=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BCD}$ 的度数，

$\angle C$ 的度数 $=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BAD}$ 的度数，

$\overset{\frown}{BCD}$ 的度数 $+\overset{\frown}{BAD}$ 的度数 $=360^\circ$，

$\therefore \angle A+\angle C=180^\circ$.

同理，$\angle B+\angle D=180^\circ$.

圆内接四边形的对角互补.

想一想

在图 5-32 中，延长 BC 到点 E，便得 $\angle DCE$（如图 5-33）. $\angle DCE$ 是四边形 $ABCD$ 的一个外角，$\angle A$ 称为 $\angle DCE$ 的内对角. $\angle DCE$ 与 $\angle A$ 的大小有什么关系？为什么？

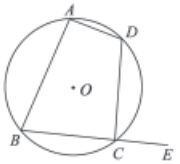


图 5-33

山东教育出版社

圆内接四边形的任何一个外角都等于它的内对角.

例 如图 5−34，$\triangle ABC$ 的外角 $\angle BAM$ 的平分线与它的外接圆相交于点 E，连接 BE，CE. 试判断 BE 与 CE 是否相等，并说明理由.

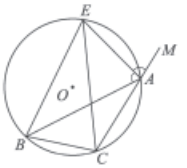


图 5−34

解：$BE=CE$. 理由如下：

在图 5−34 中，

$\because$ $\angle EAM$ 是圆内接四边形 $AEBC$ 的外角，

$\therefore$ $\angle EAM=\angle EBC$.

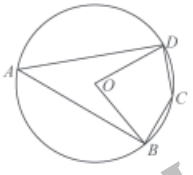
$\because$ $\angle ECB=\angle EAB$，$\angle EAM=\angle EAB$，

$\therefore$ $\angle ECB=\angle EBC$.

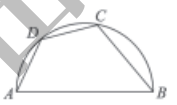
$\therefore$ $EB=EC$.

随堂练习

1. 如图，在 $\odot O$ 中，$\angle BOD=80°$，求 $\angle BAD$ 和 $\angle BCD$ 的度数.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，AB 为半圆的直径，点 C，D 在半圆上，且 $AD=CD$，$\angle B=50°$，求 $\angle A$，$\angle C$ 的度数.

3. 试说明圆内接平行四边形是矩形.

习题 5.8

知识技能

1. 在圆内接四边形 $ABCD$ 中，$\angle A:\angle B:\angle C=2:3:4$，求 $\angle D$ 的度数.

例

本例证明的步骤并不复杂，但综合应用了圆内接四边形性质定理的推论、圆周角定理的推论、等量代换以及等腰三角形的判定定理等多项知识. 解决问题的关键是认真观察图形，根据解决问题的需要，发现图中的圆内接四边形，找出对解决问题起作用的圆内接四边形的外角及其内对角，以及同弧上的圆周角.

随堂练习

1. $\angle BAD=40°$，$\angle BCD=140°$.

2. $\angle A=65°$，$\angle C=115°$.

提示：连接 BD. 由 $AD=CD$，$\angle B=50°$，可得 $\angle ABD=\angle CBD=25°$，且 $\angle ADB=90°$，所以 $\angle A=65°$. 由圆内接四边形的性质，可得 $\angle C=180°-\angle A=115°$.

3. 提示：由题设可证圆内接平行四边形的对角互补且相等，故一组对角中的每个角都为直角. 根据矩形的定义，便可证得结论.

习题5.8

1. 90°.

提示：在圆内接四边形$ABCD$中，$\angle A$与$\angle C$互补，$\angle B$与$\angle D$互补.

山东教育出版社

2. $\angle BAD = 100°$，$\angle ABC = \angle ADC = 90°$.

3. $\angle A$=40°.

提示：$\angle DCB$=$\angle E$+$\angle EDF$，$\angle EDF = \angle F + \angle A$，所以$\angle DCB = \angle A$+$\angle E$+$\angle F$.

4. $\angle FGC = \angle AGD$.

提示：连接AD，则$\angle FGC$=$\angle ADC$. 由垂径定理可知$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AD}$，因此$\angle ADC$=$\angle AGD$. 所以$\angle FGC$=$\angle AGD$.

5. $BC = 2\sqrt{3} - 2$.

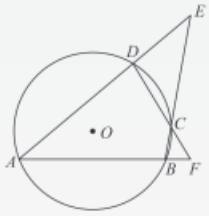
提示：延长AD，BC，相交于点P. 由$\angle B = 90°$，可知AC为直径，$\angle D = 90°$. 而$\angle A = 60°$，所以$\angle P = 30°$. 在Rt△ABP中，由$AB = 2$，可得$BP = 2\sqrt{3}$. 在Rt△CDP中，由$CD = 1$，可得$CP = 2$. 所以$BC = BP - CP = 2\sqrt{3} - 2$.

6.（1）略；

（2）$\angle APB$，$\angle ACB$，$\angle BCP$，$\angle CBP$大小不变.

2. 在圆内接四边形$ABCD$中，AC垂直平分BD，$\angle BCD = 80°$，求四边形$ABCD$其他三个角的度数.

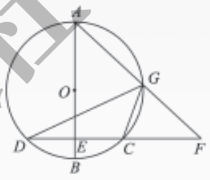
3. 如图，分别延长圆内接四边形$ABCD$的两组对边，延长线相交于点E，F，若$\angle E = 40°$，$\angle F = 60°$，求$\angle A$的度数.



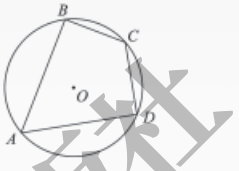
（第3题）

数学理解

4. 如图，AB是⊙O的直径，弦$CD \perp AB$，垂足为点E，G是$\overset{\frown}{AC}$上的任意一点，AG，DC的延长线相交于点F. $\angle FGC$与$\angle AGD$的大小有什么关系？为什么？



（第4题）



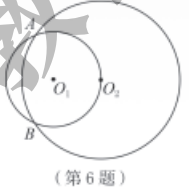
（第5题）

5. 如图，四边形$ABCD$是⊙O的内接四边形，$\angle A = 60°$，$\angle B = 90°$，$AB = 2$，$CD = 1$. 求BC的长.

6. 如图，⊙O_1与⊙O_2都经过A，B两点，且点O_2在⊙O_1上，点C是$\overset{\frown}{AO_2B}$上的一点（点C不与A，B重合），AC的延长线交⊙O_2于点P，连接AB，BC，BP.

（1）根据题意将图形补充完整；

（2）当点C在$\overset{\frown}{AO_2B}$上运动时，图中大小不变的角有哪些？（将符合要求的角都写出来）



（第6题）

山东教育出版社

6 直线和圆的位置关系



（1）观察上面的三幅照片，地平线与太阳的位置关系是怎样的？

（2）作一个圆，将直尺的边缘看成一条直线．固定圆，平移直尺，直线和圆有几种位置关系？

[1]可以发现，直线和圆有三种位置关系：

（1）当直线和圆有两个公共点时（如图 5-35（1）），我们说直线和圆**相交**，两个公共点叫做**交点**．



（1） （2） （3）

图 5-35

（2）当直线和圆有唯一公共点时（如图 5-35（2）），我们说直线和圆**相切**，这条直线叫做圆的**切线**（tangent line），这个唯一的公共点叫做**切点**（point of tangency）．

（3）当直线和圆没有公共点时（如图 5-35（3）），我们说直线和圆**相离**．

议一议

你能举出生活中直线和圆相交、相切、相离的实例吗？与同伴进行交流．

教学目标

1. 经历探索直线与圆的位置关系的过程，理解直线与圆有相交、相切、相离三种位置关系．

2. 了解切线的概念，探索切线与过切点的直径之间的关系，能判定一条直线是否为圆的切线，会过圆上一点画圆的切线．

3. 了解三角形的内切圆、内心等概念，会画一个三角形的内切圆，并能解决与内心有关的计算问题．

本节共分 4 课时，第 1 课时主要研究直线和圆的三种位置关系；第 2 课时探索圆的切线的性质定理，第 3 课时探索圆的切线的判定定理；第 4 课时通过画出三角形的内切圆，认识三角形都有且仅有一个内切圆，并建立内心的概念．

首先让学生感受生活中反映直线与圆位置关系的现象，然后让学生动手操作感受无论直线与圆怎样相对运动，即圆动线不动，或线动圆不动，或线动圆也动，二者之间有且只有三种位置关系，其本质属性是由直线与圆有无公共点和有几个公共点来界定的．在这一过程中引导学生归纳出直线与圆的三种位置关系．

[1]这里对相交、相切、相离等概念采取的是图示定义，意在淡化概念．

议一议

由直线和圆的三种位置关系逐步转向对切线的进一步研究．

筷子放在碗上的位置关系就是相交，火车车轮和铁轨的位置关系就是相切，晾衣杆放在脸盆旁边的位置关系就是相离．

山东教育出版社

想一想

通过观察得出“圆心到直线的距离 d 与半径 r 之间的数量关系”和“直线与圆的位置关系”的对应与等价，从而实现位置关系与数量关系的相互转化. 这种等价关系是研究切线的理论基础.

例1

本例是根据 d 与 r 的数量关系判断直线与圆的位置关系，同时应用了三角函数的知识. 教学时可分步画图，帮助学生进行分析.

另外，所谓 AB 与圆的位置关系，指的是AB 所在的直线与圆的位置关系.

想一想

如图 5–35，当直线 l 分别与 $\odot O$ 相交、相切、相离时， 圆心 O 到直线 l 的距离 d 与 $\odot O$ 的半径 r 的大小分别有什么关系？你能根据 d 与 r 的大小关系确定直线与圆的位置关系吗？

当直线和圆相交时，$d<r$；反过来，当 $d<r$ 时，直线和圆相交.
当直线和圆相切时，d _____ r；反过来，当 d _____ r 时，直线和圆相切.
当直线和圆相离时，d _____ r；反过来，当 d _____ r 时，直线和圆相离.

例 1 已知在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$AB=8$ cm，$AC=4$ cm.

（1）以点 C 为圆心作圆，当半径的长为多少时，AB 与 $\odot C$ 相切？

（2）以点 C 为圆心，分别以 2 cm 和 4 cm 的长为半径作两个圆，这两个圆与 AB 分别有怎样的位置关系？

解：（1）如图 5–36，过点 C 作 AB 的垂线段 CD.

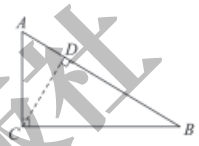


图 5–36

$\because AC=4$ cm，$AB=8$ cm，

$\therefore \cos A=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{1}{2}$.

$\therefore \angle A=60^\circ$.

$\therefore CD=AC\cdot\sin A=4\sin 60^\circ=2\sqrt{3}$（cm）.

因此，当半径的长为 $2\sqrt{3}$ cm 时，AB 与 $\odot C$ 相切.

（2）由（1）可知，圆心 C 到 AB 的距离 $d=2\sqrt{3}$ cm，所以，

当 $r=2$ cm 时，$d>r$，$\odot C$ 与 AB 相离；

当 $r=4$ cm 时，$d<r$，$\odot C$ 与 AB 相交.



山东教育出版社

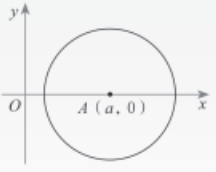
随堂练习

已知一条直线 l 与半径为 r 的 $\odot O$ 相交，且点 O 到直线 l 的距离为 5，求 r 的取值范围.

习题 5.9

知识技能

1. 如图，在直角坐标系中，$\odot A$ 的半径为 2，点 $A(a, 0)$ 在 x 轴上移动.



（第 1 题）

（1）当 $\odot A$ 与 y 轴相离时，a 的取值范围是_____；

（2）当 $\odot A$ 与 y 轴相切时，a 的取值范围是_____；

（3）当 $\odot A$ 与 y 轴相交时，a 的取值范围是_____.

2. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90^\circ$，$\angle B = 30^\circ$，O 是 AB 上的一点，$OA = m$，$\odot O$ 的半径为 r，当 r 与 m 满足怎样的关系时：

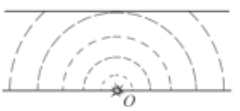
（1）直线 AC 与 $\odot O$ 相交？

（2）直线 AC 与 $\odot O$ 相切？

（3）直线 AC 与 $\odot O$ 相离？

数学理解

3. 用如下方法可以估测河流的大致宽度：如图，观测者站在岸边 O 处投下一块石头，激起的半圆形波纹逐渐向远处扩展，当波纹刚好抵达对岸时，另一观测者记录下波纹沿着观测者所在岸边所扩展的距离，这一距离就是河流的大致宽度. 请说明这种方法的合理性.



（第 3 题）

随堂练习

$r > 5$.

习题5.9

1.（1）$a > 2$ 或 $a < -2$；

（2）$a = 2$ 或 $a = -2$；

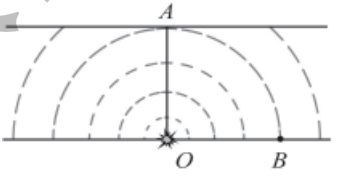
（3）$-2 < a < 2$.

2.（1）$r > \frac{\sqrt{3}}{2} m$；

（2）$r = \frac{\sqrt{3}}{2} m$；

（3）$r < \frac{\sqrt{3}}{2} m$.

3. 提示：如图，波纹刚好抵达对岸，即此时的 $\odot O$ 与对岸相切，设切点为 A. 由于圆的切线垂直于过切点的直径，所以 OA 与对岸垂直，即 OA 为河宽. 另一方面，OA 为 $\odot O$ 的半径，因此 $OA = OB$，所以只要测出 OB 即可.



山东教育出版社

议一议

由直线和圆的三种位置关系逐步转向对切线的进一步研究.

（1）是轴对称图形；对称轴是过圆心 O 且与直线 l 垂直的直线.

（2）这一问题意在引出圆的切线的性质. 在说明理由时，可引导学生考虑用反证法.

[1] 这是对切线的性质定理的证明，采用的是反证法. 根据《标准》对反证法的要求，学生应通过本定理的证明，体会对于一个命题，如果直接证明困难很大时，可考虑用反证法证明. 教学时，先应结合教科书图5–37让学生说出命题的条件和结论，再考虑使用反证法应首先做怎样的假设，然后让学生思考在假设成立时，即 OA 与 CD 不垂直时，就可以再作 $OM\perp CD$，垂足是点 M，OM 就是点 O 到直线 CD 的距离. 比较 OM 与 OA，可得 $OM<OA$（让学生说出理由）. 但 OA 是半径，能得出 $\odot O$ 与 CD 有怎样的位置关系？它与已知条件矛盾吗？由上述矛盾，你可得到怎样的结论呢？由此让学生再次体会用反证法证明的实质是：否定结论后，正确推证，导致矛盾.

议一议

（1）图 5–35 中的三个图形都是轴对称图形吗？如果是，你能分别画出它们的对称轴吗？

（2）如图 5–37，直线 CD 与 $\odot O$ 相切于点 A，半径 OA 与直线 CD 有怎样的位置关系？说一说你的理由.

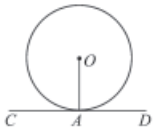


图 5–37

对于（2），小颖和小明都认为半径 OA 垂直于直线 CD.



因为图 5–37 是轴对称图形，OA 所在的直线是对称轴，所以沿它对折图形时，AC 与 AD 重合，因此 $\angle OAC=\angle OAD=90^\circ$.

[1] OA 与 CD 要么垂直，要么不垂直. 假设 OA 与 CD 不垂直，过圆心 O 作直线 CD 的垂线段 OM（如图 5–38），即 $OM\perp CD$，垂足是点 M，则 $OM<OA$，即圆心 O 到直线 CD 的距离小于 $\odot O$ 的半径，因此 CD 与 $\odot O$ 相交. 这与已知条件“直线 CD 与 $\odot O$ 相切”相矛盾. 所以 OA 与 CD 垂直.

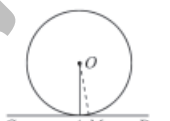


图 5–38



山东教育出版社

圆的切线垂直于过切点的半径 .

例 2 城市广场上有一个圆形喷水池，图 5−39 是它的平面示意图. 图中的圆环部分是喷水池的围墙. 为了测量圆环的面积，小明和小颖取来一个卷尺，拉直后使它与内圆相切于点 C，与外圆相交于点 A，B，量得 AB 的长为 12 m. 你能由此求出圆环的面积吗？（结果精确到 0.1 m^2）

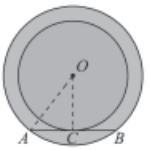


图 5−39

解： 设喷水池平面图的圆心为点 O，连接 OC，OA.

$\because$ AB 与内圆相切于点 C，

$\therefore$ $OC \perp AB$.

$\because$ AB 是外圆的弦，$AB = 12$（m），

$\therefore$ $AC = BC = 6$（m）.

在 Rt$\triangle ACO$ 中，

$\because$ $AC^2 + OC^2 = OA^2$，

$\therefore$ $OA^2 - OC^2 = AC^2$.

于是 $\pi \cdot OA^2 - \pi \cdot OC^2 = \pi(OA^2 - OC^2) = \pi \cdot AC^2$

$\approx 3.14 \times 6^2 \approx 113.0$（$m^2$）.

所以，圆环的面积为 113.0 m^2.



在解决有关圆的切线问题时，常常需要作出过切点的半径.

例2

本例是切线的性质定理的应用. 在本例中，内圆的切线同时又是外圆的一条弦，从而将问题转化为垂径定理，再转化为勾股定理，最后应用圆的面积公式，使问题得到解决. 教学时，应注意让学生体会转化的数学思想在解决数学问题时的应用.

山东教育出版社

随堂练习

$\angle ABD = 45°$.

提示：由 AB 是直径可得$BD \perp AC$. 又$AD = DC$, $\therefore AB = BC$. 由切线的性质定理可知 $AB \perp BC$, $\therefore \angle A = 45°$, $\angle ABD = 45°$.

习题5.10

1. $\angle B = 30°$.

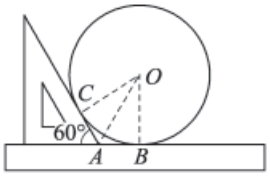
提示：连接 OC，可得 $OC \perp BC$，且$OC = OA = AB = \frac{1}{2}OB$，所以$\angle B = 30°$.

2. $\angle BAC = \angle DAC$.

提示：连接 OC，则 $OC \perp CD$. 又$AD \perp CD$，可知$OC // AD$，故$\angle DAC = \angle OCA$. 由$OC = OA$，可知$\angle OAC = \angle OCA$，所以$\angle DAC = \angle OAC$.

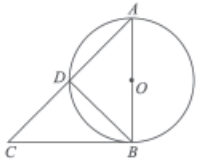
3. 21 cm.

提示：设光盘的圆心为 O，光盘与三角尺的切点为 C. 根据题意可知$\angle CAB = 120°$，连接 OA，OB，OC，则 $OB \perp AB$，$OC \perp AC$. 所以 Rt$\triangle OAB \cong$ Rt $\triangle OAC$，所以 $\angle OAB = \angle OAC = 60°$. 在 Rt$\triangle OAB$ 中，$OB = AB\tan 60°$.



随堂练习

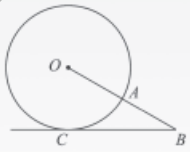
如图，在 $\odot O$ 中，AB 为直径，AD 为弦，过点 B 的切线与 AD 的延长线相交于点 C，且 $AD = DC$，求 $\angle ABD$ 的度数.



习题 5.10

知识技能

1. 如图，延长 $\odot O$ 的半径 OA 到点 B，使 $AB = OA$. 直线 BC 与 $\odot O$ 相切于点 C. 求 $\angle B$ 的度数.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，AB 为 $\odot O$ 的直径，C 为 $\odot O$ 上的一点，AD 垂直于过点 C 的切线，垂足为点 D. $\angle BAC$ 和 $\angle DAC$ 的大小有什么关系？为什么？

问题解决

3. 为了测量一个光盘的直径，小明把直尺、光盘和三角尺按图所示放置于桌面上，并量出 $AB = 6$ cm，这张光盘的直径是多少？（精确到 1 cm）



（第 3 题）

山东教育出版社

联系拓广

4. 如图，在直角坐标系中，点 P 在第一象限内，$\odot P$ 与 x 轴相切于点 Q，与 y 轴相交于 $M(0, 2)$，$N(0, 8)$ 两点，求点 P 的坐标.



（第 4 题）

议一议

如图 5−40，OA 是 $\odot O$ 的半径，直线 l 经过点 A，l 与 OA 的夹角为 $\angle\alpha$. 当 l 绕点 A 旋转时：

（1）随着 $\angle\alpha$ 的变化，点 O 到 l 的距离 d 如何变化？直线 l 与 $\odot O$ 的位置关系如何变化？

（2）当 $\angle\alpha$ 等于多少度时，点 O 到 l 的距离 d 等于半径 r？此时，直线 l 与 $\odot O$ 有怎样的位置关系？为什么？

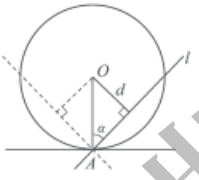


图 5−40

由此可得到一个结论：

[1] 过半径外端且垂直于这条半径的直线是圆的切线.

做一做

经过 $\odot O$ 上的一点 P，你能用三角尺画出 $\odot O$ 的切线吗？你是怎样画的？能画出几条？与同伴进行交流.

例 3 如图 5−41，$\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$，CD 与 AB 的延长线相交于点 D，且 $\angle BCD = \angle BAC$. CD 是 $\odot O$ 的切线吗？为什么？

4.（4，5）.

提示：连接 PQ，过点 P 作 MN 的垂线，得到一个矩形.由点 M，N 的纵坐标，可知 MN 的长为 6，因此 MN 的中点为（0，5），因此 PQ 的长为 5，即圆的半径为 5. 连接 PM，可求得点 P 到 y 轴的距离为 4.

议一议

通过旋转实验探索切线的判定条件. 在这个实验中，随着 $\angle\alpha$ 由小变大，点 O 到 l 的距离 d 也由小变大；当 $\angle\alpha = 90°$ 时，d 达到最大，此时 $d = r$；之后当 $\angle\alpha$ 继续增大时，d 逐渐变小. 因此当 $\angle\alpha = 90°$（即 $l \perp OA$）时，$d = r$，这时直线 l 与 $\odot O$ 相切.

[1] 这一判定定理是切线性质定理的逆定理，它实际上是圆心到直线的距离等于半径时，直线与圆相切的另一种说法. 因此，教学时不必要求学生写出证明过程.

做一做

这是切线判定定理的一个直接应用. 这里不要求学生用尺规作图，允许用三角尺画垂线.

画法：连接 OP；过点 P 作 OP 的垂线 l. l 即所要画的切线.

通过画图，使学生体会到经过圆上任意一点，能且只能画一条圆的切线.

例3

切线的判定定理的作用是：利用这一定理可由垂直关系判定直线与圆相切. 这样，证明直线是

山东教育出版社

圆的切线可转化为证明垂直，而证明垂直的途径已有很多. 本例证明的关键是作出直径后证明垂直. 教学时，可引导学生共同探索它的证明思路：连接OC，只要证明$OC \perp CD$，即$\angle OCD = 90°$即可. 由$\angle OCD = \angle OCB + \angle BCD$，已知$\angle BCD = \angle BAC$，故只要证明$\angle OCB + \angle BAC = 90°$就可以了. 但$\angle OCB$与$\angle BAC$既没有共同的顶点，又不在同一个三角形中，故可延长$CO$交$\odot O$于点$E$，连接$EB$，由圆周角定理的推论，可知$\angle BAC = \angle BEC$，而$\angle BCE$与$\angle BEC$都是同一个三角形的内角，因此只要证明$\angle CBE = 90°$就行了，这是很容易做到的. 将上述分析过程倒过来写，即得教科书中的证明过程.

随堂练习

1. 向下平移 2 cm 或向上平移 8 cm.

2. 3，4，$\frac{12}{5}$.

习题5.11

1. BC与$\odot O$相切.

提示：连接OD，则$OD \perp AB$. 作$OF \perp BC$，垂足为点F，可得$OD = OF$，即OF为$\odot O$的半径. 所以BC与$\odot O$相切.

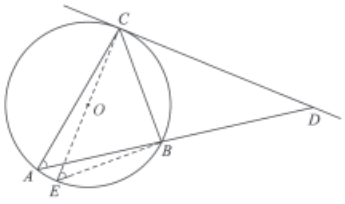


图 5-41

解： CD是$\odot O$的切线. 理由如下：

过点C作$\odot O$的直径CE，连接BE，则

$\angle CBE = 90°$.

$\therefore \angle BEC + \angle BCE = 90°$.

$\because \angle BEC = \angle BAC$，$\angle BAC = \angle BCD$，

$\therefore \angle BCD + \angle BCE = 90°$.

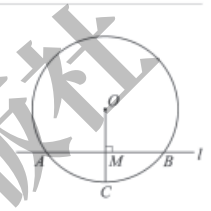
$\therefore EC \perp CD$.

$\therefore CD$是$\odot O$的切线.

随堂练习

1. 如图，$\odot O$的半径$OC = 5$ cm，直线$l \perp OC$，垂足为点M，且l与$\odot O$相交于A，B两点，$AB = 8$ cm. 如何沿OC所在的直线平移直线l，使l与$\odot O$相切？

2. 以边长为 3，4，5 的三角形的三个顶点为圆心，分别作圆与对边相切，则这三个圆的半径分别是多少？



（第 1 题）

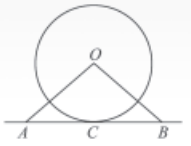
习题 5.11

知识技能

1. BE平分$\angle ABC$，O是BE上的任意一点，$\odot O$与BA相切于点D，BC与$\odot O$相切吗？为什么？



（第 1 题）



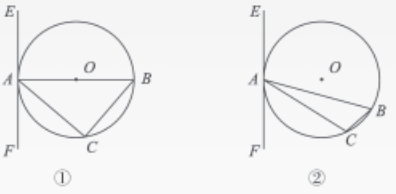
（第 2 题）

山东教育出版社

2. 如图，直线 AB 经过 $\odot O$ 上的点 C，并且 $OA=OB$，$CA=CB$. 直线 AB 是 $\odot O$ 的切线吗？为什么？

数学理解

3. 如图，$\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$，过点 A 作直线 EF.



（第3题）

（1）如图①，AB 为 $\odot O$ 的直径，要使直线 EF 是 $\odot O$ 的切线，还需要添加什么条件？（请写出三种不同的条件）

（2）如图②，AB 不是 $\odot O$ 的直径，要使直线 EF 是 $\odot O$ 的切线，还需要添加什么条件？（请写出两种不同的条件）

问题解决

※**4.** 已知 $\odot O$ 外一点 P，你能用尺规过点 P 作 $\odot O$ 的切线吗？

做一做

如图 5-42，$\triangle ABC$ 是一张三角形纸片，你能从它上面剪出一张面积最大的圆形纸片吗？



图 5-42

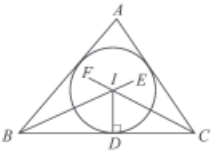


图 5-43

设这个圆为 $\odot I$，为使圆的面积最大，$\odot I$ 应当与 $\triangle ABC$ 的三边都相切，所以点 I 到三角形三边的距离相等. 因此，点 I 在这个三角形三个角的平分线上，半径等于圆心到三边的距离.

2. AB 是 $\odot O$ 的切线.

提示：连接 OC，由等腰三角形的性质可得 $OC\perp AB$. 再由切线的判定定理，可证得结论.

3.（1）①$EF\perp AB$（或$\angle EAB=90°$，或$\angle FAB=90°$）；

② $\angle EAB=\angle C$；

③ $\angle BAC+\angle FAC=90°$；

④ $\angle FAC=\angle B$；

⑤ $\angle BAC+\angle FAC=\angle EAB$ 等.

（2）①$\angle FAC=\angle B$；

② $\angle EAB=\angle C$等.

4. 略.

做一做

这里作图的关键是确定圆心的位置. 确定圆心的方法与确定三角形外心的方法类似，先考虑圆心到其中两边的距离相等，从而它在这两边夹角的平分线上，此时圆心的位置尚未被唯一确定；再考虑它还到两边中的一边与第三边的距离也相等，因此圆心又在另一个角的平分线上. 因为两条角平分线只有一个交点，所以圆心位置被唯一确定.

当然，这里也不要求学生用尺规作垂线.

山东教育出版社

[1] 应使学生明确三角形的内心、外心的区别，它们分别是三条内角平分线的交点、三条边垂直平分线的交点，它们各自具有不同的性质. 内心到三角形三边的距离相离，内心与顶点的连线平分内角；外心到三角形三个顶点的距离相等，过外心作任何一条边的垂线都平分这条边. 对于一般三角形来说，三角形的内心和外心不重合，但当三角形是正三角形时，内心和外心重合为一个点.

例 4

本例由已知三角形一个内角的度数，计算另两个角的平分线夹角的度数. 它告诉我们一个这样的事实：如果 I 为 $\triangle ABC$ 的内心，那么

$$\angle BIC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A,$$

$$\angle BIA = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle C,$$

$$\angle AIC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle B.$$

随堂练习

三角形的内心都在三角形的内部.

已知$\triangle ABC$（如图 5−42），求作一个圆，使它与$\triangle ABC$的各边相切.

作法：（1）作$\angle B$，$\angle C$的平分线 BE 和 CF，交点为 I（如图 5−43）.

（2）过点 I 作 $ID \perp BC$，垂足是点 D.

（3）以点 I 为圆心，以 ID 为半径作 $\odot I$.

$\odot I$ 就是所求作的圆.

在上面的作图过程中，因为点 I 是$\angle B$，$\angle C$ 的平分线 BE 和 CF 的交点，所以点 I 到$\triangle ABC$ 三边的距离相等，因此点 I 也在$\angle A$ 的平分线上. 因为 BE 和 CF 有且只有一个交点 I，所以与$\triangle ABC$ 三边都相切的圆能且只能作出一个.

与三角形三边都相切的圆叫做三角形的**内切圆**(inscribed circle of triangle). 内切圆的圆心是三角形三条角平分线的交点，叫做三角形的**内心**（incenter）.[1]

例 4 如图 5−44，在$\triangle ABC$ 中，$\angle A = 68^\circ$，点 I 是$\triangle ABC$ 的内心，求 $\angle BIC$ 的度数.

解： ∵ 点 I 是$\triangle ABC$ 的内心，

$$\therefore \angle 1 = \frac{1}{2}\angle ABC,\ \angle 2 = \frac{1}{2}\angle ACB.$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB)$$

$$= \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A)$$

$$= \frac{1}{2}(180^\circ - 68^\circ) = 56^\circ.$$

$$\therefore \angle BIC = 180^\circ - (\angle 1 + \angle 2) = 180^\circ - 56^\circ = 124^\circ.$$

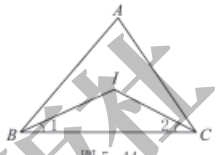
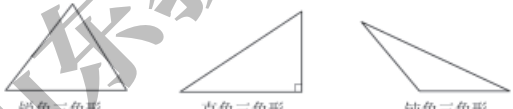


图 5−44

随堂练习

如图，已知锐角三角形、直角三角形、钝角三角形，分别作出它们的内切圆. 三角形的内心是否都在三角形的内部？



山东教育出版社

习题 5.12

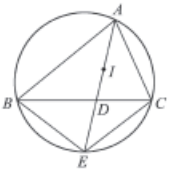
知识技能

1. 在△ABC 中，$\angle A=40^\circ$，$\angle B=70^\circ$，点 I 是△ABC 的内心，求$\angle AIB$，$\angle BIC$ 和$\angle AIC$ 的度数.

2. 已知△ABC 的周长为 p，内切圆的半径为 r，求△ABC 的面积.

数学理解

3. 如图，点 I 是△ABC 的内心，AI 的延长线与 BC 相交于点 D，与△ABC 的外接圆相交于点 E.
找出图中相等的线段，并说明理由.



（第3题）

*7 切线长定理

[1] 过圆外一点画圆的切线，你能画出几条？试试看.

议一议

如图 5-45，PA，PB 是 ⊙O 的两条切线，A，B 是切点.

（1）这个图形是轴对称图形吗？如果是，它的对称轴是什么？

（2）在这个图中你能找到相等的线段吗？说说你的理由.

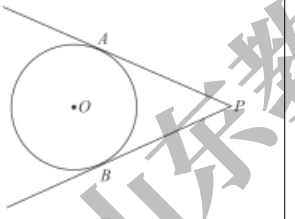


图 5-45

[1] 这里不要求学生用尺规作图.

习题5.12

1. $\angle AIB=125^\circ$，$\angle BIC=110^\circ$，$\angle AIC=125^\circ$.

2. $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}pr$.
提示：将△ABC 的内心与 A，B，C 三点分别连接，则△ABC 被分成以原三角形各边为底边、高都是 r 的三个三角形.

3. $EB=EC=EI$.
提示：连接 BI. 由 I 为内心，可知$\angle BAE=\angle CAE$，$\therefore \overset{\frown}{EB}=\overset{\frown}{EC}$，$EB=EC$. 又由$\angle EBC=\angle EAC=\angle BAE$，可知$\angle BIE=\angle IBA+\angle IAB=\angle IBC+\angle EBC=\angle EBI$，$\therefore EB=EI$.

教学目标

1. 掌握切线长的定义.
2. 探索并证明切线长定理.

本节在引入切线长定义之后，探索并证明切线长定理.

议一议

这里用轴对称性来探索切线长定理，从而引出本节课要研究的对象. 图形的对称轴是直线 OP，图中相等的线段是 PA 和 PB.

教师还可以就学生情况在图中添加线段 OA，OB，OP，并将问题改为“你能找到相等的量吗？”，给学生更宽裕的空间探索图形.

山东教育出版社

[1] 过圆外一点作圆的切线，这点和切点之间的线段长叫做这点到圆的**切线长**（length of the tangent）.

切线长定理 从圆外一点引圆的两条切线，它们的切线长相等.

[2] 我们来证明切线长定理.

已知：如图 5−46，PA，PB 是 $\odot O$ 的两条切线，A，B 是切点.

求证：$PA = PB$.

证明：连接 OA，OB.

∵ PA，PB 是 $\odot O$ 的切线，

∴ $\angle PAO = \angle PBO = 90^\circ$.

在 Rt△POA 和 Rt△POB 中，

∵ $OA = OB$，$OP = OP$，

∴ Rt△POA ≌ Rt△POB.

∴ $PA = PB$.

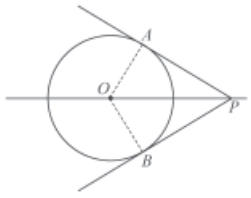


图 5−46

想一想

如图 5−47，四边形 $ABCD$ 的四条边都与 $\odot O$ 相切，图中的线段之间有哪些等量关系？与同伴交流.

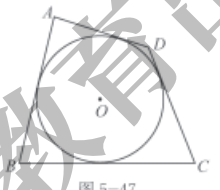


图 5−47

例 如图 5−48，Rt△ABC 的两条直角边 $AC=10$，$BC=24$，$\odot O$ 是△ABC 的内切圆，切点分别为 D，E，F，求 $\odot O$ 的半径.

[1] 对切线长的定义不必过于强化，只要学生能够理解其含义即可.

[2] 在利用轴对称探索了相关结论之后，进一步引导学生用三角形全等的方法对切线长定理进行证明.

想一想

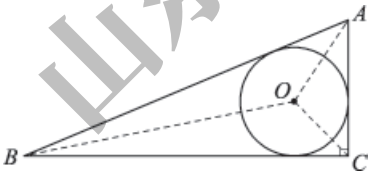
切线长定理的应用.

$AB + CD = BC + DA$. 对学生发现的其他相等关系也应认可.

例

应用切线长定理和勾股定理解决问题. 该题还有其他解决方法：

连接OA，OB，OC，



$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABO} + S_{\triangle BCO} + S_{\triangle ACO}$$
$$= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot r + \frac{1}{2} \cdot BC \cdot r + \frac{1}{2} \cdot AC \cdot r$$
$$= \frac{1}{2} \times (10+24+26) \cdot r$$
$$= 30r.$$

又∵ $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC$
$$= \frac{1}{2} \times 10 \times 24$$
$$= 120.$$

∴ $r = 4$.

山东教育出版社

解：连接 OD，OE，OF，设 $OD=r$.

在 Rt△ABC 中，$AC=10$，$BC=24$，

$\therefore AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{10^2+24^2}=26$.

$\because$ ⊙O 分别与 AB，BC，CA 相切于点 D，E，F，

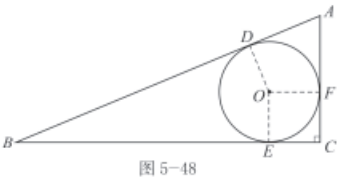


图 5-48

$\therefore OD\perp AB$，$OE\perp BC$，$OF\perp AC$，$BE=BD$，$AF=AD$，$CE=CF$.

又$\because \angle C=90^\circ$，

$\therefore$ 四边形 $OECF$ 为正方形.

$\therefore EC=FC=r$.

$\therefore BE=24-r$，$AF=10-r$.

$\therefore AB=BD+AD=BE+AF=34-2r$.

$\therefore 34-2r=26$.

$\therefore r=4$，

即 ⊙O 的半径为 4.

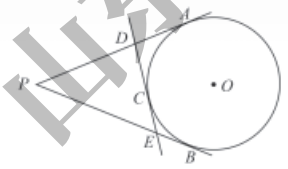
随堂练习

已知 ⊙O 的半径为 3 cm，点 P 和圆心 O 的距离为 6 cm，过点 P 作 ⊙O 的两条切线，求这两条切线的切线长.

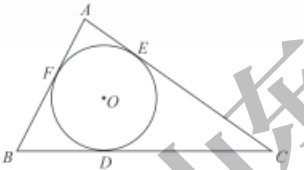
习题 5.13

知识技能

1. 如图，PA，PB 分别与 ⊙O 相切于 A，B 两点．C 是 $\overset{\frown}{AB}$ 上任意一点，过点 C 作 ⊙O 的切线，分别与 PA，PB 相交于 D，E 两点，若 $PA=PB=5$ cm，求△PDE 的周长.



（第 1 题）



（第 2 题）

随堂练习

$3\sqrt{3}$ cm.

习题5.13

1. 10 cm.

提示：$AD=CD$，$CE=BE$.

山东教育出版社

2. 4 cm，5 cm，9 cm.

提示：设 $AF=x$，$BD=y$，$CE=z$，

可得 $\begin{cases} x+y=9, \\ y+z=14, \\ x+z=13. \end{cases}$

3. 70°.

提示：依题意可得 $\triangle ADF\cong\triangle BED$，所以$\angle BDE=\angle AFD$，又$\angle ADF+\angle FDE+\angle BDE=180°$，所以$\angle EDF+\angle BED+\angle BDE=180°$.

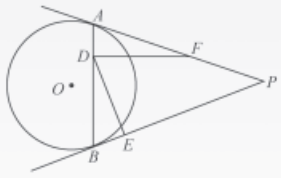
4.（1）先将纸片沿 AC 折叠，再过 B 点将纸片折叠，使边 AB，BC 重合，两条折痕的交点即为圆心；

（2）$\frac{24}{7}$ cm.

提示：$\frac{1}{2}\times6\times8=\frac{1}{2}(6+8)r$.

※2. $\triangle ABC$ 的内切圆 $\odot O$ 与 BC，CA，AB 分别相切于点 D，E，F，且 $AB=9$ cm，$BC=14$ cm，$CA=13$ cm，求 AF，BD，CE 的长.

3. 如图，过 $\odot O$ 外一点 P 作 $\odot O$ 的两条切线 PA 和 PB，点 A，B 为切点，$\angle P=40°$. 点 D 在 AB 上，点 E 在 PB 上，点 F 在 PA 上，且 $AD=BE$，$BD=AF$，求 $\angle EDF$ 的度数.



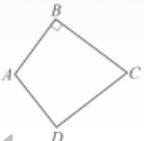
（第3题）

数学理解

4. 有一张如图所示的四边形纸片 $ABCD$，$AB=AD=6$ cm，$CB=CD=8$ cm，且 $\angle B=90°$.

（1）要把该四边形纸片裁剪成一个面积最大的圆形纸片，你能否用折叠的方法找出圆心？若能，请你度量出圆的半径；

（2）计算出最大的圆形纸片的半径.



（第4题）

8 正多边形和圆

你还记得什么叫做正多边形吗？你能举出正多边形的一些例子来吗？

议一议

如图 5-49，A，B，C，D，E 都是$\odot O$ 上的点，且$\angle AOB=\angle BOC=\angle COD=\angle DOE$.

教学目标

1. 会用量角器和圆规画出圆的内接正 n 边形，会用尺规作图的方法作圆内接正方形和正六边形.

2. 了解圆内接正多边形的概念及轴对称性，了解正多边形与圆的关系，了解正多边形的半径、边长和边心距之间的关系，能把正多边形的计算问题转化为解直角三角形的问题.

议一议

在学生已学过的正多边形定义的基础上，由圆心角、等腰三角形的性质引出画正 n 边形的方法，从而画出圆的内接正 n 边形. 画圆的内接正 n 边形的关键在于将圆周 n 等分. 这是一种简单而且常用的画图方法. 但是，应使学生注意到，由于量角器的限制，这种画图方法只是近似地将圆周 n 等分，所画出的图形也只是一个近似的正 n 边形.

山东教育出版社

（1）弦 AB，BC，CD，DE 的长相等吗？为什么？

（2）$\angle ABC$，$\angle BCD$，$\angle CDE$ 相等吗？为什么？

（3）由（1）和（2），你能设计出画正 n 边形的方法吗？与同伴进行交流.

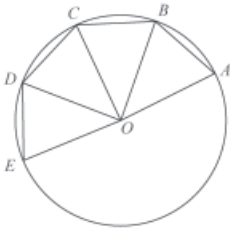


图 5-49

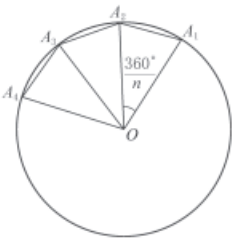


图 5-50

如图 5-50 所示，画一个 $\odot O$，用量角器画一个 $\frac{360°}{n}$ 的圆心角 $\angle A_1OA_2$，再以点 A_2 为圆心、以弦 A_2A_1 为半径作弧，在 $\odot O$ 上截得点 A_3，然后以点 A_3 为圆心、以弦 A_2A_1 为半径作弧，在 $\odot O$ 上截得点 A_4 …… 这样继续下去，就可以把 $\odot O$ 分成 n 等份，顺次连接这 n 个分点，便得到了 $\odot O$ 的一个**圆内接正 n 边形**.

做一做

你能用上面的方法画一个正五边形吗？试一试.

例 1　用尺规作一个正六边形.

作法：（1）任意画一个圆，记圆心为 O，如图 5-51.



图 5-51

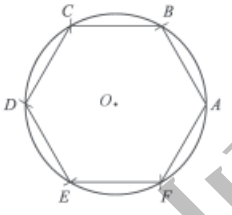


图 5-52

做一做

使学生在了解一般正 n 边形画法的基础上，由一般到特殊，画一个具体的正五边形，在画图过程中，熟悉用量角器和圆规画正多边形的方法.

例 1

用尺规等分圆，从理论上讲这是一种准确等分圆的方法. 但是，由于并不是任意等分圆周都能用尺规作图来完成，而且作图步骤较为复杂，因此教科书只对几种特殊情况进行研究.

本节的教学只要求学生会用尺规作出正六边形、正三角形、正十二边形、正方形、正八边形. 作正方形的理论依据是：当 $n = 4$ 时，$\frac{360°}{n} = 90°$，因此四等分圆只需作互相垂直的两条直径即可；作正六边形的理论依据是：当 $n = 6$ 时，$\frac{360°}{n} = 60°$，此时圆心角所对的弦长恰为半径的长，以半径为弦在圆上截取等弧就可将圆六等分.

在四等分圆的基础上，将四等分圆的每一段弧再二等分，可得到圆的八等分点，再将每段弧二等分，又得到圆的十六等分点……这一过程可以一直继续下去，所以用尺规可以作出圆的内接正 4×2^n 边形. 同样地，将圆六等分后，自然也就将圆三等分，而且还可以将圆十二等分、二十四等分……所以用尺规可以作出圆的内接正 3×2^n 边形.

山东教育出版社

议一议

用尺规作图作圆内接正四边形的方法不止一种，教师应鼓励学生采取多种方式解决问题. 小组合作及展示可以促进学生的交流.

随堂练习

小颖的作法是正确的. 理由是：分别以 A，D 为圆心，以 $\odot O$ 的半径为半径作圆，所得到的圆心角 $\angle AOB$，$\angle AOF$，$\angle DOC$，$\angle DOE$ 都是60°，由此可推出 $\angle EOF$，$\angle BOC$也都是60°，因此 A，B，C，D，E，F 是 $\odot O$ 的六等分点，顺次连接它们，所得到的六边形就是正六边形.

（2）在 $\odot O$ 上任取一点 A，自点 A 起在 $\odot O$ 上依次截取长度等于半径 OA 的弦，得到点 B，C，D，E，F.

（3）顺次连接点 A，B，C，D，E，F，A，如图 5-52.

六边形 $ABCDEF$ 就是所求作的正六边形.

议一议

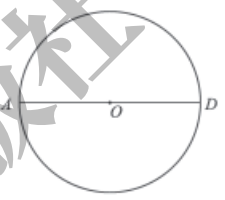
怎样用尺规作一个正十二边形？作一个正三角形呢？作圆内接正方形呢？与同伴进行交流.

随堂练习

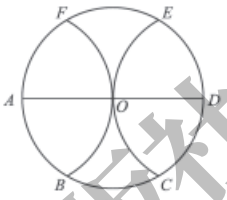
小颖用下面的方法作一个正六边形.

（1）任意画一个圆，记圆心为 O；

（2）任意作 $\odot O$ 的一条直径 AD，如图（1）；



（1）



（2）

（3）分别以 A，D 为圆心，以 $\odot O$ 的半径为半径作弧，与 $\odot O$ 相交于点 B，F 和点 C，E.

（4）顺次连接点 A，B，C，D，E，F，A. 六边形 $ABCDEF$ 就是所求作的正六边形.

小颖的作法对吗？为什么？

读一读

用尺规作正五边形

用下面的方法可以作出正五边形.

（1）作 $\odot C$.

（2）作直径 AB.

（3）作 BC 的中点 D.

山东教育出版社

（4）过点 C 作 AB 的垂线，交⊙C 于点 P.

（5）以点 D 为圆心，以 DP 的长为半径作弧，交 AB 于点 E.

（6）以点 P 为圆心，以 PE 的长为半径作弧，交圆于一点.

再连续取三个等弧，连接端点，就可以作出圆内接正五边形.（如图 5-53）

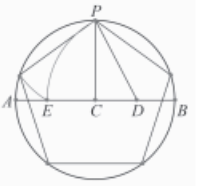


图 5-53

利用作出的正五边形可以作出五角星. 试试看！

习题 5.14

知识技能

1. 用量角器画一个已知圆的内接正八边形.

2. 用尺规作一个正八边形.

3. 用等分圆周的方法画一个正五角星形.

做一做

观察下列正多边形：


图 5-54

（1）它们都是轴对称图形吗？如果是，分别画出每个正多边形所有的对称轴.

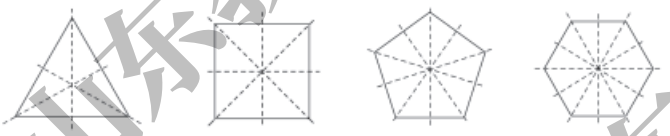


图 5-55

（2）它们分别有多少条对称轴？数一数，你发现了什么规律？正 n 边形有多少条对称轴？

习题5.14

1. 略.

2. 作法：① 用直尺作⊙O的一条直径AB；② 用直尺和圆规作AB的垂直平分线，与⊙O交于C，D两点；③ 顺次连接A，C，B，D，可得到⊙O的内接正方形；④ 用圆规将 $\overset{\frown}{AC}$，$\overset{\frown}{CB}$，$\overset{\frown}{BD}$，$\overset{\frown}{DA}$ 分别二等分，顺次连接上述八个分点，所得到的八边形就是正八边形.

3. 提示：用量角器将圆周五等分，从一个分点开始，每隔一个分点顺次连接，就得到正五角星形.

山东教育出版社

山东教育出版社

做一做

让学生通过画图（也可以利用折叠的方法），发现正三角形、正方形、正五边形、正六边形分别有三条、四条、五条、六条对称轴，从而猜想正 n 边形有 n 条对称轴.

从理论上，对正多边形的对称性可分以下两种情况加以分析：

① 当边数为偶数（$2k$）时，正多边形既是轴对称图形，又是中心对称图形，由各对角顶点确定的直线和各对边中点确定的直线都是它的对称轴，此时，正 $2k$ 边形共有 $2k$ 条对称轴.

② 当边数为奇数（$2k+1$）时，正多边形是轴对称图形，但不是中心对称图形，每个顶点到对边所作的垂线都是它的对称轴，共有（$2k+1$）条. 此时，正（$2k+1$）边形有（$2k+1$）条对称轴.

综上可知，正 n 边形有 n 条对称轴.

（3）正多边形的对称轴具有什么特点？

正多边形都是轴对称图形．一个正 n 边形一共有 n 条对称轴，这 n 条对称轴相交于一点，这个点到正 n 边形各顶点的距离都相等，到各边的距离也都相等．我们把这个点叫做正多边形的**中心**.

以正多边形的中心为圆心，以中心到一个顶点的距离为半径作圆，便得到这个正多边形的外接圆．以正多边形的中心为圆心，以中心到一条边的距离为半径作圆，便得到这个正多边形的内切圆.

正多边形的外接圆的半径叫做**正多边形的半径**．正多边形的内切圆的半径叫做**正多边形的边心距**．正多边形每一条边所对的外接圆的圆心角叫做**正多边形的中心角**.

议一议

（1）正三角形、正方形、正五边形、正六边形的中心角分别是多少度？正 n 边形的中心角呢？

（2）将正 n 边形以它的中心为旋转中心，以它的中心角为旋转角进行旋转，你能得到什么结论？

如果一个正多边形的边数是偶数，那么它是中心对称图形，它的中心就是对称中心.

过正 n 边形顶点的 n 条半径把正 n 边形分成 n 个全等的等腰三角形，每个等腰三角形又被相应的边心距分成两个全等的直角三角形.



议一议

（1）正三角形的中心角为120°，正方形的中心角为90°，正五边形的中心角为72°，正六边形的中心角为60°．一般地，正 n 边形的中心角为 $\frac{360°}{n}$.

（2）可让学生通过操作、观察、归纳、猜想、交流得出结论：将正 n 边形绕其中心旋转 $\frac{360°}{n}$，仍与自身重合．由此，便可得出正多边形具有旋转对称性的结论.

借助已学过的旋转知识，让学生体会到正 n 边形都可以通过由一条边和两条半径组成的顶角为 $\frac{360°}{n}$ 的等腰三角形作为“基本图形”连续旋转（$n-1$）次而得到．根据等腰三角形的性质，每个“基本图形”又被相应的边心距分为两个全等的直角三角形．这个结论揭示了正 n 边形的半径、边长、中心角及边心距之间的关系，是有关正 n 边形计算的依据，并将正 n 边形的有关计算转化为解直角三角形的问题.

山东教育出版社

例 2 已知正六边形 $ABCDEF$ 的半径是 R，求这个正六边形的边长 a，周长 p 和面积 S.

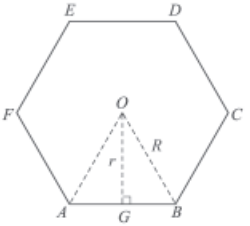


图 5-56

解： 如图 5-56，点 O 为正六边形 $ABCDEF$ 的中心，连接 OA，OB，作 $OG\perp AB$，垂足为点 G，可得到 Rt△OGB，其中 OG 为边心距，记为 r.

$\because \angle GOB=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}\times\frac{360^\circ}{6}=30^\circ$，

$\therefore a=2R\sin 30^\circ=R$，$p=6a=6R$.

$\because r=R\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}R$，

$\therefore S=\frac{1}{2}\times r\times a\times 6=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}R\cdot 6R$

$=\frac{3\sqrt{3}}{2}R^2$.

随堂练习

1. 分别求出半径为 6 cm 的圆内接正三角形的边长和边心距.

2. 如图，钟表表盘上的圆周被均匀划分为 12 等份，如果表盘的半径为 10 cm，那么表盘上每相邻的两个刻度之间的距离是多少？



（第 2 题）

随堂练习

1. 边长为 $6\sqrt{3}$ cm，边心距为 3 cm.

2. $a_{12}=2R\sin\frac{180^\circ}{n}=2\times 10\times\sin 15^\circ\approx 5.18$（cm）.

山东教育出版社

山东教育出版社

读一读

鼓励学有余力的学生进行阅读，了解圆的周长及面积公式与圆周率的关系. 教师应提供必要的指导和帮助.

读一读

圆的周长及面积公式是怎样得出的

我们已经知道，圆的周长及面积公式是：

$$C = 2\pi R,$$

$$S = \pi R^2,$$

这里的 $\pi = 3.141\,59\cdots$，它是一个无理数，叫做圆周率.

上面的公式是怎样得出的呢？学过正多边形和圆的知识后，可以来说说其中的道理了.

由于一个圆被 n 等分后，顺次连接各分点，便得到一个正 n 边形. 如果再取这 n 条弧的中点，圆上便有 $2n$ 个分点，顺次连接这 $2n$ 个分点，可以得到一个正 $2n$ 边形. 这个正 $2n$ 边形便包围着原来的正 n 边形，这个正 $2n$ 边形的周长和面积都比原来正 n 边形的周长和面积大（图 5–57）. 继续这样做下去，可以得到边数为 $4n$，$8n$，…的圆内接正多边形. 可以看出，这样的圆内接正多边形随着边数的成倍增加，它们的周长和面积就越来越逼近圆的周长和面积. 这样，当已知圆的半径时，便可以通过计算它的边数为 n，$2n$，$4n$，…的圆内接正多边形的周长和面积，作为精确度不同的圆的周长和面积的近似值.



图 5–57

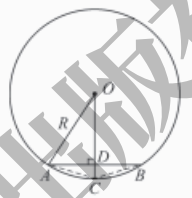


图 5–58

如果 $\odot O$ 的半径为 R，它的内接正 n 边形的边长 $AB = a_n$，我们来求它的内接正 $2n$ 边形的边长 $AC = a_{2n}$，如图 5–58.

$$\begin{aligned} a_{2n} = AC &= \sqrt{AD^2 + DC^2} \\ &= \sqrt{AD^2 + (OC - OD)^2} \\ &= \sqrt{AD^2 + (OC - \sqrt{OA^2 - AD^2})^2} \\ &= \sqrt{2 \cdot OC^2 - 2 \cdot OC\sqrt{OA^2 - AD^2}} \\ &= \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - a_n^2}}. \end{aligned}$$

山东教育出版社

利用这个递推的二倍边公式，由 $n=6$ 开始，逐步迭代算得结果如下：

边数 n	边长 a_n	周长 p_n	周长与直径的比 $\frac{P_n}{2R}$
6	1.00000000 R	6.00000000 R	3.00000000
12	0.51763809 R	6.21165708 R	3.10582854
24	0.26105238 R	6.26525722 R	3.13262861
48	0.13080626 R	6.27870041 R	3.13935021
96	0.06543817 R	6.28206396 R	3.14103198
192	0.03272346 R	6.28290510 R	3.14145255
384	0.01636228 R	6.28311544 R	3.14155772
768	0.00818121 R	6.28316941 R	3.14158471

随着 n 无限倍增，可以得到：p_n 趋近于 C，

所以有 $$\frac{C}{2R}=\pi,$$

即 $$C=2\pi R.$$

再根据前面正 n 边形的面积公式

$$S_n=\frac{1}{2}r_n p_n,$$

其中 r_n 为正 n 边形的边心距，p_n 为它的周长. 当边数 n 无限增加时，r_n 趋近于 R，p_n 趋近于 C，所以圆的面积

$$S=\frac{1}{2}RC=\frac{1}{2}R\cdot 2\pi R=\pi R^2.$$

习题 5.15

知识技能

1. 如图，把边长为 6 的正三角形剪去三个三角形得一个正六边形 $DFHKGE$，求这个正六边形的面积.

2. 求半径为 6 cm 的圆内接正方形的边长、边心距和面积.



（第 1 题）

习题5.15

1. $6\sqrt{3}$.

2. $6\sqrt{2}$ cm，$3\sqrt{2}$ cm，72 cm^2.

山东教育出版社

数学理解

3. 各边相等的圆内接四边形是正方形吗？各角相等的圆内接四边形呢？如果是，说明理由；如果不是，举出反例.

4. ⊙O 的半径为 r，其内接正三角形、正方形、正六边形的边长分别为 a，b，c.

（1）求 a，b，c 的值；

（2）以 a，b，c 为边可否构成三角形？如果能，构成的是什么三角形？如果不能，请说明理由.

问题解决

5. 画一个正五边形，再画出它的对角线，那么你会得到一个什么图案？

6. 正六边形螺帽的边长 a = 12 mm，当扳手的开口 b 为多少时，恰好能卡住螺帽？



（第 6 题）

3. 是；不一定，如矩形. 教师还可以依据学生情况追问：各边相等的圆内接 n 边形是正 n 边形吗？

4. （1）$\sqrt{3}r$，$\sqrt{2}r$，r；

（2）能构成三角形，是直角三角形，可利用勾股定理逆定理判定.

5. 五角星.

6. $b = 12\sqrt{3} \approx 20.8$（mm）.

提示：b 为正六边形边心距的 2 倍.

9 弧长及扇形的面积

教学目标

1. 经历探索弧长计算公式及扇形面积计算公式的过程.

2. 了解弧长计算公式及扇形面积计算公式，并会应用公式解决问题.

本节通过实际问题的解决探究圆中的弧长和扇形面积的计算方法.

[1] 如图 5–59，某传送带的一个转动轮的半径为 10 cm.

（1）转动轮转一周，传送带上的物品 A 被传送多少厘米？

（2）转动轮转 1°，传送带上的物品 A 被传送多少厘米？

（3）转动轮转 n°，传送带上的物品 A 被传送多少厘米？

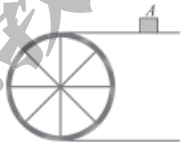


图 5–59

[1] 联系小学数学学过的圆的周长的计算公式，探索弧长的计算公式. 如果学生对传感带感到陌生，那么也可以改用“车轮在平地上滚动”的情景，并提出类似问题串.

（1）20π cm；

（2）$\frac{\pi}{18}$ cm；

（3）$\frac{n\pi}{18}$ cm.

山东教育出版社

在半径为 R 的圆中，n° 的弧的弧长（arc length）计算公式为

$l =$ _____.[1]

例 1 如图 5−60，制作一段弯形管道时，需要先按图纸上的中心线计算“展直长度”再下料. 试计算图中所示的管道的展直长度（结果精确到 0.1 mm）.

解：管道的展直长度即图纸上的中心线 $\overset{\frown}{AB}$ 的长.

由图 5−60 可知，$R = 40$ mm，$n = 110$，所以

$\overset{\frown}{AB}$ 的长 $= \frac{n}{180}\pi R$

$= \frac{110}{180} \times 40\pi \approx 76.8$（mm）.

因此，管道的展直长度约为 76.8 mm.

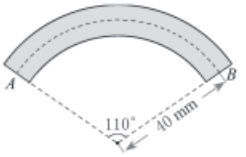


图 5−60

想一想



在一块空旷的草地上有一根柱子，柱子上拴着一条长 3 m 的绳子，绳子的另一端拴着一只狗.

（1）这只狗的最大活动区域有多大？

（2）如果这只狗只能绕柱子转过 n° 角，那么它的最大活动区域有多大？

如果扇形的半径为 R，圆心角为 n°，那么扇形的面积计算公式为

$S_{扇形} =$ _____.[2]

比较扇形面积公式与弧长公式，你能用弧长来表示扇形的面积吗？

$S_{扇形} =$ _____ l.[3]

[1] $l = \frac{n}{180}\pi R$.

应要求学生会推导这个公式，不必死记.

例1

主要是让学生应用公式进行计算. 在计算时，要注意公式中 n 的意义. n 表示1° 的弧度数的倍数，所以不写单位. 要防止学生在解题时出现类似 $\frac{1}{180} \times 110^\circ \times 40\pi$ 的书写错误.

另外，本章在进行近似计算时，通常 π 取 3.14.

想一想

通过具体实际情境，探索扇形面积的计算公式. 扇形面积公式以圆面积公式为基础. 在让学生思考问题时，要注意两点：一是最大活动区域的数学含义；二是圆心角是 360° 的扇形面积等于圆面积，圆心角为 n° 的扇形面积等于圆面积的 $\frac{n}{360}$.

（1）狗的最大活动区域为 $9\pi\ \text{m}^2$；

（2）狗的最大活动区域为 $\frac{n}{40}\pi\ \text{m}^2$.

[2] $S_{扇形} = \frac{n}{360}\pi R^2$.

[3] $S_{扇形} = \frac{1}{2}Rl$.

可以引导学生在这一公式与三角形的面积公式之间建立联系.

山东教育出版社

例2

利用扇形面积公式进行计算. 计算时，根据题目要求的精确度，π 取3.14.

随堂练习

1. 约88.4 cm^2.

本题实际上是求弓形的面积. 非半圆的弓形面积都可以化归为扇形面积与三角形面积的差或和.

2. （1）约31.8 m；

（2）约18.8 m.

习题5.16

1. 半径为7.2 cm.

2. 旋转了约115°.

例 2 扇形 AOB 的半径为 12 cm，$\angle AOB = 120°$，求 $\overset{\frown}{AB}$ 的长（结果精确到 0.1 cm）和扇形 AOB 的面积（结果精确到 0.1 cm^2）.

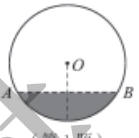
解： $\overset{\frown}{AB}$ 的长 $= \frac{120}{180}\pi \times 12 \approx 25.1$（cm）.

$S_{扇形} = \frac{120}{360}\pi \times 12^2 \approx 150.7$（$cm^2$）.

因此，$\overset{\frown}{AB}$ 的长约为 25.1 cm，扇形 AOB 的面积约为 150.7 cm^2.

随堂练习

1. 如图，水平放置的一个油管的横截面半径为 12 cm，其中有油的部分油面高 6 cm，求截面上有油部分的面积（结果精确到 0.1 cm^2）.



（第 1 题）


（第 2 题）

2. 如图，某田径场的周长（内圈）为400 m，其中两个弯道内圈（半圆形）共长200 m，直线段共长200 m，而每条跑道宽约1 m（共 6 条跑道）.

（1）内圈弯道的半径为多少米？

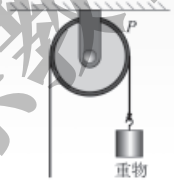
（2）一个内圈弯道与一个外圈弯道的长相差多少米？（结果精确到 0.1 m）

习题 5.16

知识技能

1. 已知圆上一段弧长为 4π cm，它所对的圆心角为100°，求该圆的半径.

2. 如图，一个半径为 5 cm 的定滑轮带动重物上升了 10 cm，假设绳索与滑轮之间没有滑动，则滑轮上某一点 P 旋转了多少度？（结果精确到 1°）

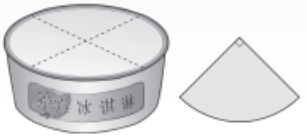


（第 2 题）

山东教育出版社

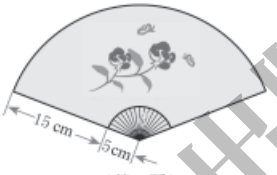
问题解决

3. 在圆柱形包装盒的侧面上设计商品的名称时，为了获得较好的视觉效果，名称的总长度（截面的弧长）所对的圆心角一般定为 90°（如图）. 已知一个圆盒的底面半径为 5 cm，要在它的侧面设计“草莓冰淇淋”的字样，商标纸的长应为多少？（π 取 3.14）



（第 3 题）

4. 如图，某家设计公司设计了这样一种纸扇：纸扇张开的最大角度 θ 与 $360^\circ-\theta$ 的比为黄金比，那么制作一把这样的纸扇至少要用多少平方厘米的纸？（纸扇有两面，结果精确到 0.1 cm^2）



（第 4 题）

3. 长约为 7.85 cm.

4. 至少要用 899.6 cm^2 的纸.

提示：黄金比取 0.618，可得 $\theta\approx137.50^\circ$. 根据题目要求的精确度，π 取 3.14.

10 圆锥的侧面积

如图 5-61，在圆锥的底面圆周上取一点 A，连接点 A 和圆锥的顶点 V，所得到的线段 VA 叫做圆锥的一条**母线**（generating line）. 沿这条母线将圆锥的侧面剪开，铺在一个平面上，便得到圆锥的侧面展开图.

教学目标

1. 经历探索圆锥侧面积计算公式的过程.

2. 了解圆锥的侧面展开图和侧面积计算公式，并会应用公式解决问题.

3. 通过圆锥的侧面可以展开成平面图形，以及用扇形可以卷成圆锥侧面的事实，体验空间图形与平面图形之间可以相互转化的数学思想.

首先让学生通过观察圆锥，认识到它的表面是由一个圆面和一个曲面围成的，然后再思考：圆锥的曲面展开在平面上是什么样的图形？

山东教育出版社 山东教育出版社



图 5-61



图 5-62

（1）圆锥的侧面展开图是什么图形？

（2）由（1）你能想到如何计算圆锥的侧面积吗？

圆锥的侧面展开图是一个扇形．如图 5-62，设圆锥的母线长为 l，底面圆的半径为 r，那么这个扇形的半径为_____，扇形的弧长为_____，因此圆锥的侧面积为_____.[1]

圆锥的侧面积与底面积之和称为圆锥的全面积（surface area）.

例 如图 5-63，某加工厂生产一种圆锥形的烟囱帽. 已知烟囱帽的底面周长为 83 cm，高为 10 cm. 要制作一个这样的烟囱帽，至少需要多少平方厘米的铁皮？（结果精确到 0.1 cm^2）


图 5-63

解：设烟囱帽的底面半径为 r cm，母线长为 l cm，则

$$r=\frac{83}{2\pi},$$

$$l=\sqrt{\left(\frac{83}{2\pi}\right)^2+10^2}\approx 16.57.$$

$$S_{\text{侧面积}}=\pi rl$$

$$\approx\frac{1}{2}\times 83\times 16.57\approx 687.7\ (cm^2).$$

所以，至少需要 687.7 cm^2 的铁皮.

[1] 扇形的半径为 l，扇形的弧长为 $2\pi r$，圆锥的侧面积为 πrl.

应要求学生理解圆锥侧面积公式的由来，不必死记.

例

利用圆锥的侧面积公式进行计算.

山东教育出版社

做一做

如图 5–64，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$，$AC = BC = 8$，要在 $\triangle ABC$ 中剪出一个扇形，使 $\triangle ABC$ 的三边分别与扇形的弧相切或与扇形的半径在同一条直线上.

（1）请画出符合要求的设计方案示意图；

（2）若用剪下的扇形作侧面围成圆锥，请计算出圆锥的底面半径.

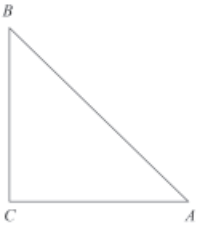


图 5–64

随堂练习

1. 已知一个圆锥的侧面展开图是半径为 r 的半圆，求这个圆锥的全面积.
2. 把一个用来盛爆米花的圆锥形纸杯沿母线剪开，可得到一个半径为 24 cm、圆心角为 118° 的扇形，求该纸杯的底面半径和高度（结果精确到 0.1 cm）.
3. 如图所示为一张矩形薄铁片 $ABCD$，对角线 $AC = 8$，$\angle BAC = 30°$，若用这张薄铁片作侧面焊接成一个圆柱状物体，求这个圆柱的底面积.

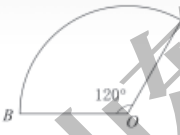


（第 3 题）

习题 5.17

知识技能

1. 工人师傅用一张如图所示的半径为 3 cm、圆心角为 120° 的扇形薄铁片做一个圆锥的侧面，求这个圆锥的底面半径.
2. 一个圆锥的母线与高的夹角为 30°，母线长为 6 cm，求这个圆锥的侧面积（结果精确到 0.1 cm^2）.



（第 1 题）

做一做

（1）图略.

（2）分两种情况：底面半径为 1 或 $\sqrt{2}$.

随堂练习

1. $\frac{3}{4}\pi r^2$.
2. 半径约为 7.9 cm，高约为 22.7 cm.
3. $\frac{12}{\pi}$.

习题5.17

1. 底面半径为 1.
2. 侧面积约为 56.5 cm^2.

山东教育出版社

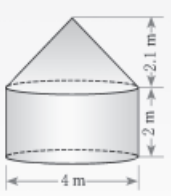
3. 面积约为 55.9 m^2.

4. 全面积约为 1 318.8 cm^2.

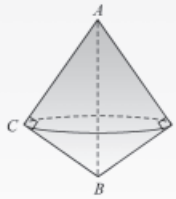
5. 最短路程为 $30\sqrt{3}$ cm.

问题解决

3. 一种太空囊的示意图如图所示．太空囊的外表面须作特别处理，以承受重返地球大气层时与空气摩擦而产生的高热．求该太空囊要接受防高热处理的面积（结果精确到 0.1 m^2）.



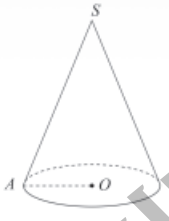
（第 3 题）



（第 4 题）

4. 一个三角尺的两直角边长分别为 15 cm 和 20 cm，以它的斜边为旋转轴旋转这个三角尺，便形成如图所示的旋转体，求这个旋转体的全面积.（π 取 3.14）

5. 如图，已知圆锥底面半径为 10 cm，母线长为 30 cm，求一只蚂蚁从 A 处出发绕圆锥侧面一周（回到原来的位置 A）所爬行的最短路程.



（第 5 题）

山东教育出版社
山东教育出版社

回顾与思考

1. 举例说明圆的轴对称性和中心对称性在生活中的应用.
2. 在同圆或等圆中，一条弧所对的圆周角与它所对的圆心角有什么大小关系？
3. 圆周角定理及其推论包含哪些内容？你会证明它们吗？
4. 圆内接四边形的对角有什么关系？你是怎么得到的？
5. 点与圆有哪些位置关系？怎样判断？直线与圆呢？
6. 圆的切线有哪些性质？怎样判定一条直线是圆的切线？
7. 什么是三角形的内心和外心？它们各有哪些性质？
8. 你对圆内接正多边形有哪些认识？
9. 举例说明如何计算弧长，如何计算扇形的面积，如何计算圆锥的侧面积和全面积.
10. 用适当的方式梳理本章的知识，并与同伴进行交流.

复习题

知识技能

1. 观察下面四个图形，哪个既是轴对称图形又是中心对称图形？

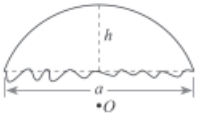


（第1题）

2. 如图，已知 AB 是 $\odot O$ 的弦，半径 $OA=20$ cm，$\angle AOB=120^\circ$，求 $\triangle AOB$ 的面积.



（第2题）



（第3题）

※**3.** 一个残破的车轮如图所示，测得它所剩圆弧两端点间的距离 $a=0.72$ m，弧的中点

回顾与思考

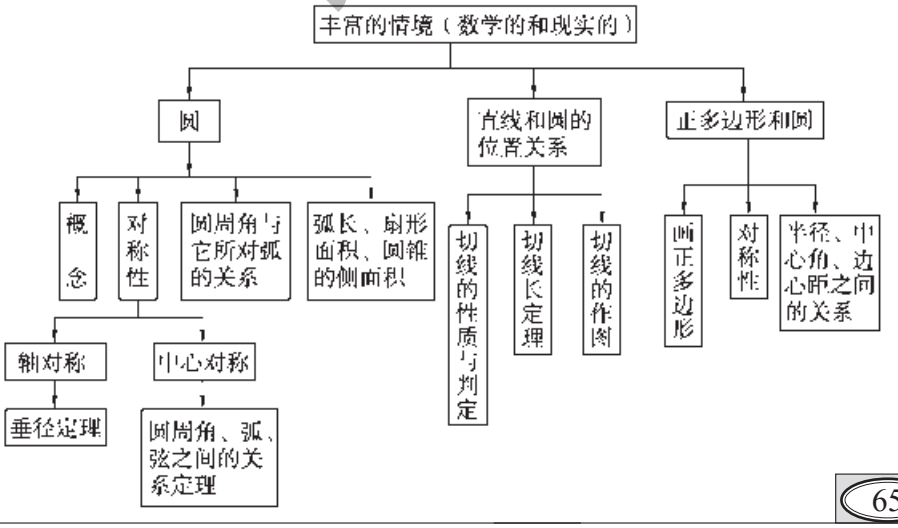
“回顾与思考”通过问题的方式回顾本章的主要内容. 教学时，教师要引导学生对所学的数学知识、技能、思想方法进行梳理和反思，让学生自己归纳、总结，建立起新旧知识之间的联系，并用自己的语言进行表达. 在总结时，教师可引导学生建立如下图所示的知识结构图.

教学时，可以先让学生独立地对本章内容进行小结. 小结中要体现个性化的要求，要鼓励学生充分利用各种素材来表达对这一章的认识，并将学习这一章的收获和遇到的困难表达出来. 教师要把学生在本章学习中有创意的思考、多种解决问题的方法收入其成长记录中，以反映学生学习的进步情况.

山东教育出版社

复习题

1. 图（4）.
2. $100\sqrt{3}$ cm^2.
   提示：过点 O 作 AB 的垂线，垂足为 M. 可求出 $OM=10$ cm，$AM=10\sqrt{3}$ cm.
3. 半径约为 0.384 m.



4. $CD = CE$.

提示：连接OC，证明$\triangle OCD \cong \triangle OCE$.

5. $OD // AC$.

提示：$\angle CAD = \frac{1}{2}\angle COD = 30°$，所以$\angle CAO = 60°$，而$\angle BOD = 2\angle DAB = 60°$.

6. （1）$\angle AEB = \angle ADB = \angle ACB$;

（2）$\angle BAC = \angle BEC = \angle BDC$;

（3）$\angle CAD = \angle CBD = \angle CED$;

（4）$\angle DAE = \angle DBE = \angle DCE$;

（5）$\angle EBA = \angle ECA = \angle EDA$.

7. 所对的圆周角为90°.

提示：$\overset{\frown}{DAB}$与$\overset{\frown}{ABC}$是等弧.

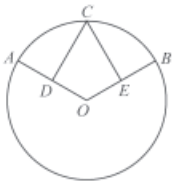
8. $AD = 4$ cm.

提示：解法不唯一. 例如，可由$\triangle ACD \backsim \triangle CBD$，得$\frac{CD}{BD} = \frac{AD}{CD}$，即$CD^2 = BD \times AD$；也可以连接$OC$，在Rt$\triangle OCD$中求得$OD$，从而$AD = OA - OD$.

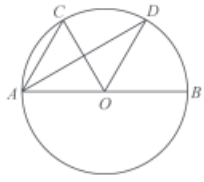
9. 略.

到弧所对弦的距离$h = 0.25$ m，如果需要加工与原来大小相同的车轮，那么这个车轮的半径是多少？（结果精确到0.001 m）

4. 如图，D，E分别是半径OA，OB的中点，$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CB}$. CD和CE的大小有什么关系？为什么？



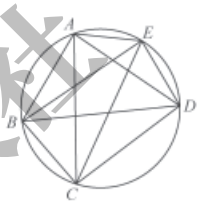
（第4题）



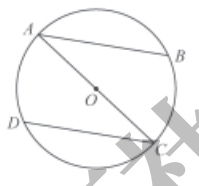
（第5题）

5. 如图，在直径为AB的$\odot O$中，$\angle DAB = 30°$，$\angle COD = 60°$，OD平行于AC吗？为什么？

6. 如图，请找出4组相等的圆周角.



（第6题）



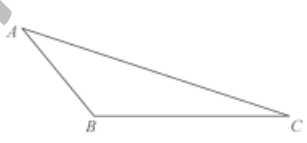
（第7题）

7. 如图，AC是$\odot O$的直径，AB，CD是$\odot O$的两条弦，且$\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC}$，求$\overset{\frown}{DAB}$所对的圆周角的度数.

8. 如图，$\odot O$的直径$AB = 13$ cm，C为$\odot O$上的一点，已知$CD \perp AB$，垂足为点D，并且$CD = 6$ cm，$AD < DB$，求AD的长.



（第8题）

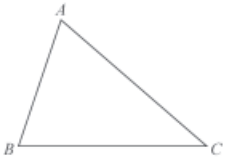


（第9题）

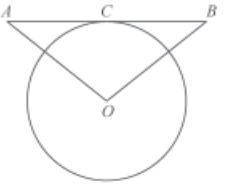
9. 如图，已知$\triangle ABC$，求作其外接圆.

山东教育出版社

10. 如图，已知△ABC，求作其内切圆.



（第 10 题）



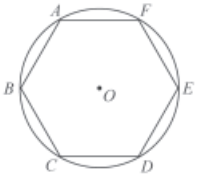
（第 11 题）

11. 如图，AB 与 ⊙O 相切于点 C，$OA = OB$，⊙O 的直径为 8 cm，AB = 10 cm，求 OA 的长.

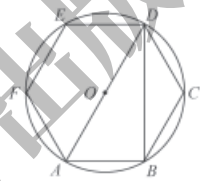
12. 完成下表中有关圆内接正多边形的计算.

正多边形边数	内角	中心角	半径	边长	边心距	周长	面积
3	60°			$2\sqrt{3}$			
4					1		
6					$\sqrt{3}$		

13. 如图，已知 ⊙O 的周长等于 6π cm，求以它的半径为边长的正六边形 $ABCDEF$ 的面积.



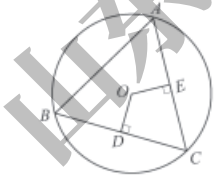
（第 13 题）



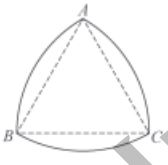
（第 14 题）

14. 如图，正六边形 $ABCDEF$ 内接于 ⊙O，求 ∠ADB 的度数.

※**15.** 如图，在 ⊙O 中，$\overset{\frown}{AB}$ 与 $\overset{\frown}{BC}$ 相等，$OD \perp BC$，$OE \perp AC$，垂足分别为点 D，E，且 $OD = OE$，那么△ABC 是什么三角形？为什么？



（第 15 题）



（第 16 题）

10. 略.

11. $OA = \sqrt{41}$ cm.

提示：连接OC，可得$OC = 4$ cm，$AC = 5$ cm.

12.

正多边形边数	内角	中心角	半径	边长	边心距	周长	面积
3	60°	120°	2	$2\sqrt{3}$	1	$6\sqrt{3}$	$3\sqrt{3}$
4	90°	90°	$\sqrt{2}$	2	1	8	4
6	120°	60°	2	2	$\sqrt{3}$	12	$6\sqrt{3}$

13. $\frac{27\sqrt{3}}{2}$ cm^2.

14. 30° .

15. △ABC 为等边三角形. 提示：连接 OC，则 Rt△OCD≌ Rt△OCE，得 $CD = CE$，从而 $BC = AC$.

山东教育出版社

16. 面积为$\frac{\pi-\sqrt{3}}{2}$.

提示：由曲边三角形的周长为π可求得△ABC的边长为1.

17. （$\frac{16\pi}{3}-4\sqrt{3}$）$cm^2$.

18.（1）点P在⊙O外；

（2）点P在⊙O外，或⊙O内，或⊙O上.

19. ⊙P运动一圈与△OBC的边相切6次；⊙P与△OBC的边相切时，点P的位置分别是$PO=2$（点P在OB或OC上），$PB=2$（点P在OB或BC上），$PC=2$（点P在BC或OC上）.

20.（1）提示：分别以A，C为圆心，以AP的长为半径作弧，两弧相交于点O；以点O为圆心，以OA的长为半径作弧.

（2）$\frac{3\sqrt{2}\pi}{2}$cm.

21.（1）1个；（2）0个；

（3）无数个.

16. 如图所示的曲边三角形可按下述方法作出：作等边三角形ABC；分别以点A，B，C为圆心，以AB的长为半径作$\overset{\frown}{BC}$，$\overset{\frown}{AC}$，$\overset{\frown}{AB}$. 三段弧所围成的图形就是一个曲边三角形. 如果一个曲边三角形的周长为π，那么它的面积是多少？

17. 如图，P是半径为4 cm的⊙O内的一点，$OP=2$ cm，过点P的弦与圆弧组成弓形，当过点P的弦垂直于OP时，弦与其所对的劣弧所组成的弓形面积最小. 那么最小的弓形面积是多少？



（第17题）

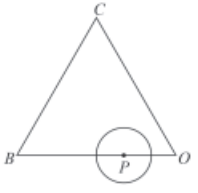
数学理解

18. 已知A为⊙O上的一点，⊙O的半径为1，该平面上另有一点P.

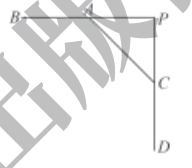
（1）若$PA=\sqrt{5}$，那么点P与⊙O有怎样的位置关系？

（2）若$PA=\sqrt{3}$，那么点P与⊙O有怎样的位置关系？

19. 如图，等边三角形OBC的边长为10，点P沿$O\to B\to C\to O$的方向运动，⊙P的半径为$\sqrt{3}$. ⊙P运动一圈与△OBC的边相切多少次？每次相切时，点P分别在什么位置？



（第19题）



（第20题）

20. 如图，直线$AB\perp CD$，垂足为点P，测得$\angle ACP=45°$，$AC=6$ cm.

（1）用尺规在图中作一段劣弧，使得它在A，C两点分别与直线AB和CD相切；

（2）求该圆弧的长.

21. 已知点A，B和直线l，作一个圆，使它经过点A和点B，并且圆心在直线l上.

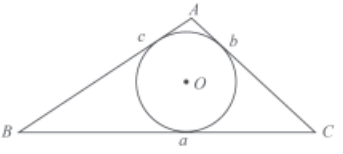
（1）当直线l与直线AB不垂直时，可作几个圆？

（2）当直线l与直线AB垂直但不经过AB的中点时，可作几个圆？

（3）当直线l是线段AB的垂直平分线时，可作几个圆？

山东教育出版社

※**22.** 设△ABC的内切圆的半径为r，△ABC的周长为l，求△ABC的面积S.

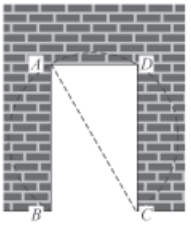


（第22题）

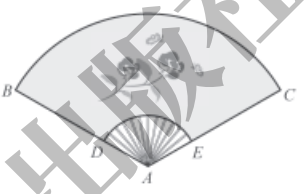
问题解决

23. 日常生活中有很多物体呈圆形，如碗口、水盆边沿等，你可以用哪些办法来确定这些呈圆形物体的半径？

24. 如图，花园边墙上有一宽为1 m的矩形门$ABCD$，量得门框对角线AC的长为2 m，现准备打掉部分墙体，使其变为以AC为直径的圆弧形门，那么要打掉墙体的面积是多少？（结果精确到0.1 m^2）



（第24题）



（第25题）

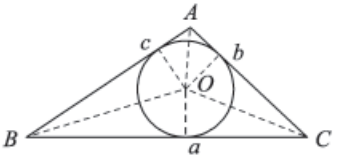
25. 如图，一扇形纸扇完全打开后，外侧两竹条AB和AC的夹角为120°，AB长为30 cm，贴纸部分的宽BD为20 cm，求贴纸部分的面积（纸扇有两面，结果精确到0.1 cm^2）.

26. 铅球比赛的规则要求运动员在一固定圆圈内投掷. 推出的铅球必须落在40°角的扇形区域内（以投掷圈的中心为圆心），这一区域为危险区域. 如果运动员最多可投7 m，那么这一比赛的危险区域的面积至少应是多少？（结果精确到0.1 m^2）

27. 如图，相距40 km的两个城镇A，B之间有一个圆形湖泊，它的圆心落在AB连线的中点O处，半径为10 km. 现要修建一条连接两城镇的公路. 经过论证，认为$AA'+\overset{\frown}{A'B'}+B'B$为最短路线（其中$AA'$，$BB'$都与⊙$O$相切）. 你能计算出这段路线的长度吗？（结果精确到0.1 km）

22. 分析：如图所示，连接OA，OB，OC后，可把△ABC分成三个小三角形，而小三角形的高都是内切圆的半径r，△ABC的面积就是三个小三角形的面积之和.

求得$S=\frac{1}{2}lr$.



23. 略.

24. 约1.3 m^2.

提示：∠ACD = 30°.

25. 约1 674.7 cm^2.

26. 约17.1 m^2.

提示：所求的区域是半径为7 m、圆心角为40°的扇形.

27. 长度约45.1 km.

提示：连接OA'，OB'.

山东教育出版社

28. 约 421 人.

提示：过点 O 作 AB 的垂线，垂足为点 C.

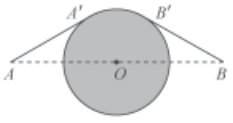
29. 略.

30. 略.

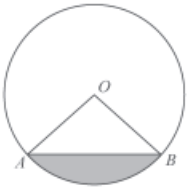
31. 约 23 m^2.

32. 半径为 3 cm.

33. 略.



（第 27 题）



（第 28 题）

28. 如图，有一个马戏帐篷，它的底面是圆形，其半径为 20 m，从 A 到 B 有一笔直的栅栏，其长为 30 m. 观众在阴影区域里看马戏，如果每平方米可以坐 3 名观众，并且阴影区域坐满了人，那么大约有多少名观众在看马戏？

29. 如图，有一个圆形花坛，现要求将它三等分，以便在上面种植三种不同品种的花. 请给出你的设计方案.


（第 29 题）


（第 30 题）

30. 某居民小区要在一块矩形空地（如图）上建花坛，现征集设计方案，要求设计的图案由圆和正方形组成（圆和正方形的个数不限），并且使整个矩形场地为轴对称图形. 请给出你的设计方案.

31. 一个圆锥形粮堆，底面周长为 15.7 m，高为 1.5 m，要用塑料布盖住这个粮堆，至少需要多少平方米的塑料布？（结果精确到 1 m^2）

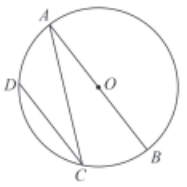
32. 如果圆锥侧面展开图的面积是 15π cm^2，母线的长是 5 cm，那么这个圆锥的底面半径是多少？

联系拓广

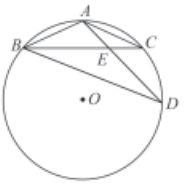
33. 用 50 m 长的篱笆在空地上围成一个绿化场地，现有几种设计方案，正三角形、正方形、正六边形、圆，哪种场地的面积最大？（可以利用计算器计算）

山东教育出版社
山东教育出版社

34. 如图，已知 $\odot O$ 的直径 $AB=d$，弦 $AC=a$，$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BC}$，求 A，D 两点间的距离.



（第 34 题）



（第 35 题）

35. 如图，A，B，C，D 是 $\odot O$ 上的四个点，$AB=AC$，AD 与 BC 相交于点 E，$AE=2$，$ED=4$，求 AB 的长.

36. 某学校 A 位于工地 O 的正西方向，且 $OA=200$ m，一辆货车从 O 处出发，以 5 m/s 的速度沿北偏西 53° 方向行驶. 已知货车的噪声污染半径为 130 m，那么学校是否在该货车噪声污染范围内？若在，则学校受该货车噪声污染的时间有几秒？（结果精确到 1 s）

37. 如图，点 A 表示一个半径为 300 m 的圆形森林公园的中心，在森林公园附近有 B，C 两个村庄，且 $\angle B=45°$，$\angle C=30°$. 如果在 B，C 两村庄之间修一条长 500 m 的笔直公路将两村连通，那么该公路是否会穿过该森林公园？



（第 37 题）

34. $AD=\sqrt{d^2-a^2}$.

提示：连接 AD，BC，则 $AD=BC$.

35. $AB=2\sqrt{3}$.

提示：连接CD，则$\triangle ACE\backsim\triangle ADC$，得 $\frac{AC}{AD}=\frac{AE}{AC}$，即 $AC^2=AD\times AE$.

36. 在噪声范围内，约 20 s.

提示：A 与货车行驶线路的最短距离 $200\sin37°<130$.

37. 提示：$AH+\frac{AH}{\tan30°}=500$，得 $AH=\frac{500}{1+\sqrt{3}}<300$，所以该公路会穿过公园.

山东教育出版社

附录　典型案例评析

圆周角和圆心角的关系

设计：首都师范大学附属中学　张彩萍
评析：首都师范大学　王瑞霖

一、教学目标

知识与技能

1. 理解圆周角的概念，掌握圆周角的两个特征.

2. 经历圆周角和圆心角关系的探索过程，发现圆周角和圆心角的关系并进行验证. 在此过程中发展学生合情推理和演绎推理的能力.

3. 能用圆周角和圆心角的关系进行计算及推理，培养学生的推理意识.

数学思考

1. 在探索圆周角和圆心角关系的过程中，学会运用分类讨论、转化的数学思想解决问题.

2. 在教学过程中渗透“由特殊到一般”和“由一般到特殊”的数学思想方法.

问题解决

在观察、分析图形的过程中提高学生的识图能力，合理引导学生通过添加辅助线解决问题.

情感与态度

通过操作交流等活动，培养学生互相帮助、团结协作、互相讨论的团队精神，培养学生的表达能力，让学生的个性得到充分的展示.

引导学生观察图形，激发学生的好奇心和求知欲，并在运用数学知识解答问题的活动中体验成功，建立学习的自信心.

二、教学重难点

教学重点：探索圆周角和圆心角的关系.

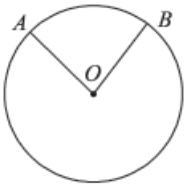
教学难点：体会圆周角的分类方法，用化归思路验证圆周角和圆心角的关系.

三、教学方式

本节课主要采用探究式教学法：在教师的启发引导下，学生分组自主探究.

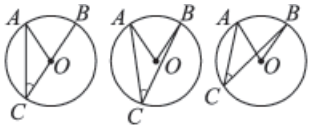
山东教育出版社

四、教学过程

教学环节	教师活动	学生活动	活动说明
创设情境 界定概念	 如图，运动员在球门前划了一个圆圈进行无人防守的射门训练. 在B点对球门AC的张角与在D点对球门的张角哪个大呢? 要研究这个问题，我们先来认识这样的角. 我们要研究的$\angle ABC$、$\angle ADC$与前面所学的圆心角有什么区别? 这样的角叫做圆周角，你能仿照圆心角的定义给圆周角下个定义吗? 师生共同得出定义：顶点在圆上，两边分别与圆还有另一个交点，像这样的角，叫做圆周角.	角的顶点在圆上. 归纳特征： ①角的顶点在圆上； ②角的两边都与圆相交.	联系学生感兴趣的足球射门活动，创设具有一定挑战性的问题情境，导入新课，激发学生的探索激情和求知欲望. 选择新旧知识的切入点，既复习上节课的内容，又激发学生学习新知识的兴趣，加强各知识点之间的联系. 让学生给圆周角下定义，提高学生的抽象概括能力.
活动探究 提出猜想	在$\odot O$中画出圆心角$\angle AOB = 80°$.  （1）请你画出$\overset{\frown}{AB}$对的圆周角，你能画出几个? （2）这些圆周角有什么共性与差别呢？请与同伴交流.	学生动手画图. 最开始学生可能只会画出一个圆周角，但思考之后他们会发现，可以画出无数个圆周角. 小组合作寻找共性与差异. 不少学生可以发现他们的度数是相同的. 但学生尚不具备将其分类的意识.	让学生通过动手画图，找到特定弧所对的圆周角，并通过测量或比较对相关结论进行猜测，经历发现问题的全过程. 学生所画的圆周角会有不同的位置，教师可以在班级中找到典型的图形进行展示，并启发学生思考：各种位置有何不同？如何将其进行分类?

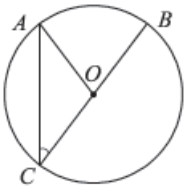
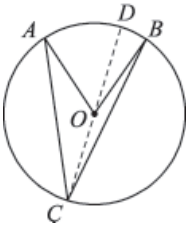
山东教育出版社

续表

教学环节	教师活动	学生活动	活动说明
活动探究 提出猜想	（3）这些圆周角和圆心角∠AOB的大小有什么关系？你用什么方法得到的？与同伴交流. 改变∠AOB的度数，上面的结论仍成立吗？画图试试看. 由此你得到了什么猜想？ 教师用几何画板演示，师生发现所得猜想是正确的.	用测量或重合的方法验证结论，并进行交流.交流讨论后，学生代表说出本小组的猜想. 学生画图并测量. 猜想1：圆周角的度数等于它所对弧上的圆心角度数的一半. 猜想2：同弧所对的圆周角相等.	进一步将问题一般化，探讨结论是否依然成立. 这里得出了两个猜想待验证，其中第二个猜想尚未谈及“等弧所对的圆周角”，在后面验证猜想的时候再补充. 用多媒体演示辅助教学，可以给学生以更直观的认识.
分类转化 验证猜想	我们提出的猜想需要经过证明才能成为定理.先证明哪一个猜想？ 要证明猜想1，需要对无数种情况的圆周角进行分类，如何分类？ 教师引导学生观察各圆周角相对于圆心角来说位置有何不同.  （1） （2） （3） 哪一种类型最容易证明？为什么？ 在三种位置关系中，我们可以选择给出（1）的证明，可以将其他情况转化为（1）的情况进行证明. 如何写已知求证？	学生讨论后认为猜想1是基础，应先证明猜想1. 根据圆周角和圆心的位置关系分三种情况讨论： （1）圆心O在∠ACB的一边上，如图（1）. （2）圆心O在∠ ACB的内部，如图（2）. （3）圆心O在∠ ACB的外部，如图（3）. 第一类，因为有我们熟悉的等腰三角形，以及三角形的外角. 学生尝试回答： 已知：如图，∠C是$\overset{\frown}{AB}$所对的圆周角，∠AOB是$\overset{\frown}{AB}$所对的圆心角. 求证：$\angle C=\frac{1}{2}\angle AOB$.	证明圆周角和圆心角的关系这一定理对学生来说是有一定难度的. 教师将问题拆解，一步一步深入，引导学生理解几个问题之间的联系，并进行说理证明. 这一阶段占用时间较长，要给学生留有足够的时间和空间，让他们进行思考.

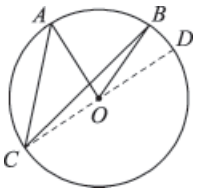
山东教育出版社

续表

教学环节	教师活动	学生活动	活动说明
分类转化 验证猜想	 刚刚我们选择这一类来证明的原因是这一类最为特殊．图中有我们熟悉的等腰三角形，还能找到三角形的外角， 如何利用这两点进行证明？ 其他两种如何转化为第一种，从而利用等腰三角形的外角解决问题？与同伴交流，并思考： 图（2）中没有三角形，应如何创建三角形？ 创建的目标是什么？ 与第一种情况寻求一致，力图用同样的方法来解决． 证明第二类：  第三种情况的证明相对较难，教师启发学生将其转化为第一种情况，然后利用等腰三角形的外角来进行证明．	讨论后学生代表回答： 证明： $\because \angle AOB$是$\triangle AOC$的外角， $\therefore \angle AOB = \angle A + \angle C$. 又$\because OA = OC$， $\therefore \angle A = \angle C$. $\therefore \angle AOB = 2\angle C$. 即$\angle C = \frac{1}{2}\angle AOB$. 学生独立研究较难找到证明的途径，教师鼓励学生交流讨论，认真观察第一类图形，找出两个图形之间的联系． 证明：作直径CD. $\because OA = OC$， $\therefore \angle A = \angle ACD$. 又$\because \angle AOD = \angle A + \angle ACD$， $\therefore \angle ACD = \frac{1}{2}\angle AOD$. 同理： $\angle BCD = \frac{1}{2}\angle BOD$. $\therefore \angle ACD + \angle BCD = \frac{1}{2}\angle AOD + \frac{1}{2}\angle BOD$. 即$\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB$.	当解决一个问题有困难时，我们可以首先考虑其特殊情形，然后再设法解决一般问题．这是解决问题时常用的策略． 这种将一般转换为特殊的思想是数学里的化归思想，今后的学习中常会用到．

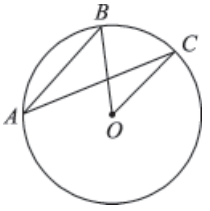
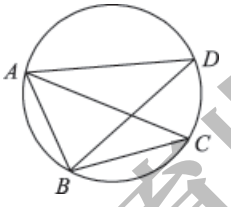
山东教育出版社

续表

教学环节	教师活动	学生活动	活动说明
分类转化 验证猜想	证明第三类：  由此我们分三种情况证明了猜想 1，将它作为圆周角和圆心角关系的定理，也叫做圆周角定理： 圆周角的度数等于它所对弧上的圆心角度数的一半. 由上述结论可以很自然地验证猜想 2：同弧所对的圆周角相等. 如果将猜想 2 中的“同弧”换成“等弧”，结论如何呢? 结论也是成立的. 它作为圆周角定理的一个推论： 同弧或等弧所对的圆周角相等. 在射门游戏中，当球员在 B，D，E 处射门时，所形成的三个张角 $\angle ABC$，$\angle ADC$，$\angle AEC$ 的大小有什么关系? 你能用圆周角定理去解决它吗?	证明：作直径 CD. $\because OA = OC$, $\therefore \angle A = \angle ACD$. 又 $\because \angle AOD = \angle A + \angle ACD$, $\therefore \angle ACD = \frac{1}{2}\angle AOD$. 同理： $\angle BCD = \frac{1}{2}\angle BOD$. $\therefore \angle ACD - \angle BCD$ $= \frac{1}{2}\angle AOD - \frac{1}{2}\angle BOD$ $= \frac{1}{2}(\angle AOD - \angle BOD)$. 即 $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB$. 引导学生观察球门前的 $\angle ABC$，$\angle ADC$ 和 $\angle AEC$ 是同弧所对的圆周角，根据圆周角定理，它们都等于圆心角的一半，所以这几个圆周角相等.	完成对之前做出的两个猜想的证明，并将猜想 2 进一步完善. 在此过程中强化学生对知识的理解，促使其自主建构圆周角、圆心角、弧的知识网络.

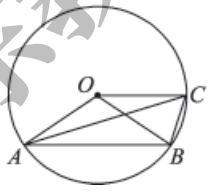
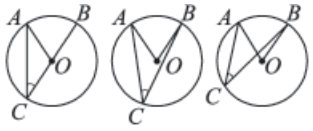
山东教育出版社

续表

教学环节	教师活动	学生活动	活动说明
练习	1. 如图，在⊙O中，$\angle BOC = 50°$，求$\angle BAC$的度数.  2. 如图，哪个角与$\angle BAC$相等？你还能找到哪些相等的角？  		第 1 题考查学生对所学知识的理解. 第 2 题是对推论的应用. 教师通过练习，及时发现问题，评价教学效果.
小结	1. 本节课学习了哪些知识？ 2. 本节课学习了哪些思想方法？ 3. 这些数学思想体现在什么地方？ 4. 以前的学习中有没有使用过类似的思想方法呢？	学生总结： 认识圆周角；在运动变化中找到不同类型的圆周角；探索圆周角的性质. 学生总结： 分类思想、转化思想、类比思想. 给圆周角下定义时用到了类比思想；证明时用到了分类和转化的思想. 学生举例： 1. 类比思想. 证明相似的判定定理时类比全等判定定理的思路；学习一元一次不等式的性质时类比一元一次方程的性质.	通过小结帮助学生梳理本节课所学的知识，建立自己的知识体系. 让学生举例说明所学数学思想方法，可以增进他们对方法的理解，体会新旧知识的联系，以更高的视角认识数学.

山东教育出版社

续表

教学环节	教师活动	学生活动	活动说明
	教师对学生举例予以追问，寻求学生对所举例子与数学思想之间的深入认识. 对部分不合适的例子也加以分析.	2. 分类思想. 点和圆的位置关系需要分类讨论；两三角形相似，对应点需要分类讨论；等腰三角形的问题需要分为锐角等腰三角形和钝角等腰三角形来讨论. 3. 转化思想. 四边形内角和可以转化为三角形内角和去研究；高次方程可以转化为低次方程来解.	
作业	基本题：习题 5.5 提升题：如图，OA，OB，OC 都是⊙O的半径，$\angle AOB = 2\angle BOC$. 求证：$\angle ACB = 2\angle BAC$. 		为尊重学生个体差异，尽可能地让学生主动参与，使不同的学生获得不同程度的发展，在作业中布置了分层练习.
板书	圆周角和圆心角的关系 定义：顶点在圆上，且两边都和圆相交的角叫圆周角. 证明过程 猜想 1：圆周角的度数等于它所对弧上的圆心角度数的一半. 猜想 2：同弧或等弧所对的圆周角相等. 		

五、案例评析

1. 在教学中如何使学生有效地领悟数学思想.

在中学数学教学中渗透数学思想的必要性和重要性早已成为了共识，它是培养创新人才、提高学生数学素养的关键. 分类思想是根据数学对象的本质属性的共性或差异，将数

山东教育出版社

学对象分为不同类别的思想方法．分类的基础是认识数学对象的内在规律．化归是转化、归结的意思．在数学研究中人们把待解决的问题转化为已解决的问题．分类和化归是数学中重要的思想方法．常常有人建议开设“数学思想方法”这样一门课，但我们想一想，“数学思想”到底应如何教授？最好的方法恰恰是在平时的数学知识学习过程中渗透数学思想，“润物细无声”地使学生逐步领悟数学思想方法．

《圆周角和圆心角的关系》这节课蕴含着丰富的数学思想，是非常典型的教学题材. 如何有效地让学生领悟数学思想是需要思考的．在这堂课中，教师让学生参与并完全投入到探索过程中，这十分有助于他们对数学思想的领悟. 本节课的教学重点非常明确，就是让学生经历观察、操作、猜想、证明的一系列探索活动．这是一次“做数学”的机会，从提出猜想到验证猜想的全过程中，教师都始终将探索发现的空间留给学生．所设计的问题由浅入深，循序渐进，学习任务从易到难，挑战性在逐步提高，这是一种非常能够激发学习兴趣的设计．我们可以看到，动手操作、小组活动、讨论与碰撞都能够确保学生较高的参与程度．

知识的发生过程也是数学思想的发生过程，如形成概念、推导结论、运用方法、发现问题、探索思路、揭示规律等，都蕴藏着向学生渗透数学思想方法，训练思维的极好机会．

这节课中，概念形成的过程蕴含着类比的思想，教师将圆周角与已经学过的圆心角做类比，鼓励学生自己给出新知的定义，促进了学生抽象概括能力的发展．

提出猜想之后，教师不必过早下结论．例如在猜想2中，学生得出的猜想是“同弧所对的圆周角相等”，与圆周角定理的推论是有差别的，但这正如实地反映了定理的形成过程，在发现猜想的时候总会有各种遗漏或不足，在证明猜想的过程中会通过观察、比较、归纳有效地弥补这些不足．先猜后证的教学设计，有效地激发学生的积极性，唤起他们在课堂上主动探索的学习意识．

在证明猜想的过程中，教师采用小组讨论的形式让学生提出自己的想法．这个定理的证明是有难度的，第二类图形和第三类图形学生很难独立完成，小组讨论能够帮助他们解决问题，同时不能忽视教师的指导作用．教师设计了几个问题作为小组讨论的引导，这种悉心引导能够确保学生的参与度，提高合作完成任务的可能性．

在知识探索过程中渗透数学思想是这节课的主体，同时，在小结过程中又进一步安排了回顾已学知识的环节，这对学生数学思想的提升有显著作用．这节课所运用到的数学思想主要有类比、分类、化归等，各种数学思想在学习过程的不同阶段有多种体现，教师有意地让学生在小结时回顾以前的学习，找到数学思想的具体体现，可以帮助学生从横向、纵向两个方面整理数学思想方法体系．学生的回顾与举例会非常丰富，有些也会偏离主题，但教师都应予以肯定，和学生一起认识其数学价值，逐步提炼概括数学思想的应用．

当然，数学思想还需要在数学学习中不断发展深化，它存在于解决数学问题的过程中，以探索—应用—反思的模式使学生领会数学思想，逐步形成自觉运用数学思想的意识．

山东教育出版社

2. 在教学中如何有效小结.

这节课的另一个亮点就是比较独特的小结环节. 我们知道，小结与反思历来是教学中不可或缺的环节，反思可以促进经验升华，但我们常见的小结容易流于形式，学生到了小结环节已经具备了寻找“答案关键词”的能力，仅仅回答出这节课的概念、定理等名词，却并未深入思考，并未自觉运用，更谈不上认识上有真正的提升.

在培养正确的数学学科观念的过程中，认识知识的内在、外在联系是十分重要的. 教学中要重视横向和纵向联系，例如思考数与形的结合、思考函数对代数几何知识的作用等，不断揭示数学的多样性和统一性. 在这堂课里，教师就是以数学方法为线索，鼓励学生找到知识间的联系，在渗透新观点、新方法的同时，又运用新观点回顾复习旧知识，拓宽了学生的思维领域，突显了揭示数学的内在联系的至关重要的作用. 本节课所采用的方式能够调动学生的积极性，使其投入到思考中，将自己的理解纳入到问题中，建立基于自己理解的知识体系. 这样的小结的收效显著，使得这一教学环节不流于形式，是非常可取的办法.

山东教育出版社 山东教育出版社

第六章　对概率的进一步认识

一、《标准》要求

1. 了解利用数据可以进行统计推断，发展数据分析观念，感受随机现象的特点.

2. 能通过列表、画树状图等方法列出简单随机事件所有可能的结果，以及指定事件发生的所有可能的结果，了解事件的概率.

3. 知道通过大量的重复试验，可以用频率来估计概率.

二、教学目标

1. 经历试验、收集与统计试验数据、分析试验结果等活动过程，进一步发展数据分析观念，体会概率与统计的关系.

2. 通过试验进一步感受随机事件发生的频率的稳定性，感受随机现象的特点，理解随机事件发生的频率与概率的关系，加深对概率意义的理解.

3. 能运用列表和画树状图等方法计算一些简单事件发生的概率；能用试验频率估计一些较复杂随机事件发生的概率.

4. 能运用概率解决一些简单实际问题，进一步发展应用意识.

5. 在活动过程中积累活动经验，体验与他人合作交流的意义和作用.

三、设计思路

在自然界和人类社会中，确定性现象十分有限，不确定性现象（也称为随机现象）却是大量存在的，而概率正是对随机现象的数学描述，它能帮助人们更好地把握机会和理解风险，并帮助人们作出合理的决策.

学生通过七年级下册“概率初步”一章的学习，已经认识到现实生活中存在着大量的随机事件，并研究了一些简单的随机事件发生的概率，对一些现象作出了合理的解释，对一些游戏活动的公平性作出了自己的评判. 但学生对随机事件及其发生的概率的认识是一个较长的认知过程，学生对概率的理解也有必要随着其数学活动经验的增加而不断深入. 例如，学生由于受以往学习经验的影响，误认为可以对所有事件发生的概率进行理论计算，从而得到概率的精确值. 但事实上，并非所有事件发生的概率都能理论地计算出精确值，概率的计算有理论计算和试验估算两种方式. 根据获得概率的方式，我们遇到的概率问题大致有三类：第一类问题，它没有理论概率，只能通过多次试验，用频率来估计它；第二类问题，它有理论概率，但理论概率的计算很困难，这时也可以通过多次试验，用频率来估计它；第三类问题，它是简单的古典概型，有理论概率，且理论概率的计算较简单，我们就可以通过计算得到它的概率.

山东教育出版社

对于第三类问题，其复杂程度又有所不同. 例如，（1）随意掷一枚均匀的骰子，掷得的点数为 1 的概率；（2）随意掷一枚均匀的骰子，掷得的点数是奇数的概率；（3）随意掷两枚均匀的骰子，掷得的点数和为 7 的概率；……学生通过七年级下册的学习，已经掌握了类似于（1）（2）的问题的解决方法，而对于类似于（3）的问题，学生尚未接触. 为此，本章第一节通过学生喜闻乐见的游戏活动，让学生经历猜测、试验、收集试验数据、分析试验结果等活动过程，然后介绍计算这类事件发生的概率的两种方法——画树状图和列表法.

对于上述第一类问题，教科书在七年级下册已有所涉及（如掷图钉试验），它不是义务教育阶段概率学习的重点. 对于上述第二类问题，本章第三节选择与学生日常生活密切相关的生日问题为基本素材，利用试验频率来估计事件发生的概率，让学生进一步感受到频率的稳定性，加深对概率意义的理解.

在教学情境的选择上，教科书注意到连续性、现实性、趣味性和可操作性，以激发学生的学习兴趣. 首先以涉及两步试验的游戏公平性问题为切入点，承前启后，一方面加强与前面所学内容的联系，另一方面得出两步试验的概率计算的两种方法——画树状图和列表法；然后以生日问题为基本素材，利用试验频率来估计事件发生的概率，进一步加深对概率意义的理解，体会概率与统计的关系，并在此过程中提高学生发现问题、提出问题、分析问题、解决问题的能力.

四、课时安排建议

1　用树状图或表格求概率	3 课时
2　生活中的概率	1 课时
*3　用频率估计概率	3 课时
回顾与思考	1 课时

五、教学建议

1. 注重发展学生的数据分析观念，让学生感受随机现象的特点.

培养与发展学生的数据分析观念是义务教育阶段统计与概率教学的最重要目的. 就本章内容而言，教学过程中要让学生亲自经历对随机现象的探索过程，亲自经历猜测、试验、收集试验数据、分析试验结果等活动过程，从中使学生体验数据的随机性：一方面，对于重复的试验，每次试验的结果可能不同；另一方面，只要试验次数足够多，就可以从中发现规律.

频率与概率既有密切的联系，又有本质的差别. 概率是随机事件的本质属性，而频率是随机事件在试验中的统计结果，虽然大量重复试验的频率渐趋稳定于其概率，但也不排除无论做多少次试验，试验频率仍然是概率的一个近似值，而不能等同于概率，两者存在着一定的偏差，而且偏差的存在是正常的、经常的. 这正是随机现象的特点.

感受数据的随机性，了解随机现象的特点，理解概率的意义，这是本章教学的重点和

山东教育出版社

难点.

2. 注重发展学生合作交流的意识与能力.

在教学中，注重引导学生积极参与试验过程，让学生亲自动手进行试验，经历猜测、试验、收集试验数据、分析试验结果等活动过程，并在活动过程中体验如何与他人合作交流.

在现代社会中，单个个体在社会中的作用越来越小，大部分的事务要求人们进行合作与交流，因此，培养学生合作交流的意识与能力已经成为现代教学活动的重要目标之一. 本部分内容的学习为此提供了一个较好的机会. 试验的频率稳定于概率，必须借助大量的重复试验，在有限的课堂教学时间内，一个学生完成的试验次数不会太多，难以得出频率的稳定性的结论，也难以用试验频率来估计其概率. 因此，在教学中，必须注重学生的交流与合作，让学生体会到与他人合作交流的重要性，发展学生合作交流的意识与能力.

3. 在用试验的方法估计一些事件发生的概率时，应主要关注学生试验的过程，而不必对概率估计值的精确度提出过高要求.

这一方面是因为要达到一定的精确度，需要较大的试验次数，有时在有限的课堂时间内无法完成；另一方面是因为对我们来说，一个估计值只要“够用”即可. 例如，“明天下雨的概率是35%”“明天下雨的概率是36%”，甚至“明天下雨的概率是30%”，这些对我们的日常决策区别并不大.

4. 注意揭示概率与统计之间的关系.

从数学的角度来说，概率与统计是密切相关的两门学科，概率的概念就是建立在频率的稳定性这一统计规律性的基础上的，而统计又离不开概率的理论支撑，统计推断、估计、假设检验、方差分析等统计方法的合理性和科学性都有赖于概率理论. 在本章中，频率的稳定性、用试验的频率估计事件发生的概率等活动，本身就是一个统计活动. 因此，在教学中要注意揭示概率与统计之间的关系.

5. 鼓励学生用现代信息技术手段进行概率学习.

在理解试验频率的稳定性和用试验频率来估计概率的过程中，应该首先让学生通过具体的操作，获得一定的活动经验，促进知识的建构. 在此基础上，如果条件允许，也可以鼓励学生用现代信息技术手段（如计算器、计算机等）进行模拟试验，通过更大量、更经济的模拟试验，进一步加深学生对概率意义的理解，获得更好的试验结果.

6. 引导学生从身边的点点滴滴去观察和体会随机现象及其规律性.

在教学时，应该充分挖掘与学生生活密切相关而又生动有趣的教学素材，以激发学生的学习兴趣，让学生在熟悉的问题情境中积极地学习. 要注重让学生了解概率在日常生活和生产实践中的应用，进一步体会“数学就在我们身边”，发展“用数学”的意识与能力.

六、评价建议

1. 注重评价学生能否积极地参与试验活动.

与之前的概率内容学习一样，试验仍然是本章学习的基础. 无论是感受频率的稳定

山东教育出版社

性，还是用频率估计概率，都需要学生通过试验来体会，因此要关注学生参与试验等活动的积极性，在试验中是否有科学的态度，能否积极地思考，能否与他人良好地合作交流，能否从试验数据中获得规律……这些对于学生真正理解有关内容是十分重要的，同时也是学生积累活动经验的必经途径.

2. 注重评价学生对概率意义的理解和应用.

通过本章的学习，要求学生在已有的知识基础上进一步理解概率的意义. “连续掷两枚均匀的硬币”和“石头、剪刀、布”等内容为学生深入理解概率的意义提供了更丰富的素材. 一方面，希望学生能够掌握求涉及两步试验的事件的概率；另一方面，希望学生在试验的过程中深入理解概率的含义，体会概率的实质.

在此基础上，要求学生运用概率解决一些简单的问题，更好地将所学知识应用到实际中去. 所以，评价时还应该关注学生运用有关概率解决实际问题的能力.

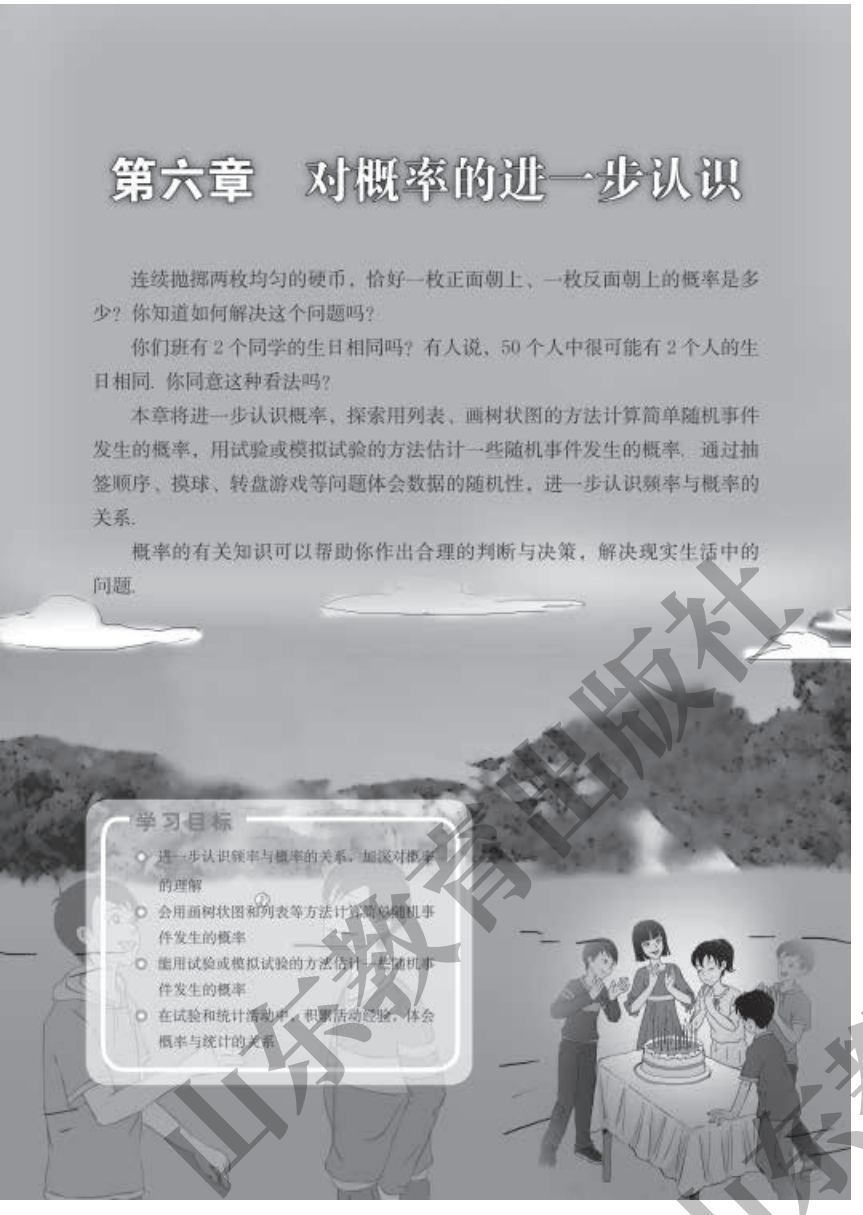
3. 恰当评价学生对知识技能的理解与应用.

主要包括：能否用试验的方法估计一些较复杂事件发生的概率，能否借助画树状图和列表的方法计算一些简单事件的概率等.

4. 注意评价方式的多样性.

除了传统的评价方式外，根据本章的具体学习内容，也可以要求学生撰写试验报告或小论文，以此考查学生对相关学习内容的掌握情况.

山东教育出版社 山东教育出版社



章前图包含有学生熟悉的掷硬币和过生日的场景，容易激发学生的学习兴趣，也预示本章的主要学习内容：进一步认识概率，计算两步试验的概率，利用试验频率估计一些复杂随机事件的概率．

山东教育出版社
山东教育出版社

教学目标

1. 经历猜测、试验、收集试验数据、分析试验结果等活动过程，进一步体验数据的随机性，积累数学活动经验.

2. 通过试验进一步感受随机事件发生的频率的稳定性，理解事件发生的频率与概率的关系，并能用试验频率估计事件发生的概率，加深对概率意义的理解.

3. 能运用画树状图和列表的方法计算一些简单事件的概率.

4. 能利用概率解决一些简单的实际问题，理解概率对日常生活和生产实践的指导作用，体会概率是描述随机现象的数学模型，发展应用意识.

5. 在试验和收集数据的活动过程中，发展合作交流的意识和发现问题、提出问题的能力.

1 用树状图或表格求概率

[1] 小明、小颖和小凡都想去看周末电影，但只有一张电影票，三人决定一起做游戏，谁获胜谁就去看电影. 游戏规则如下：

连续抛掷两枚质地均匀的硬币，如果两枚正面朝上，则小明获胜；如果两枚反面朝上，则小颖获胜；如果一枚正面朝上、一枚反面朝上，则小凡获胜.

你认为这个游戏公平吗？

做一做

连续抛掷两枚质地均匀的硬币，共有三种可能的结果："两枚正面朝上"、"两枚反面朝上"和"一枚正面朝上、一枚反面朝上". 这三种结果发生的概率是否相同呢？还是动手做一做试验吧！

分组进行试验，记录每次试验的结果，分别计算"两枚正面朝上"、"两枚反面朝上"和"一枚正面朝上、一枚反面朝上"这三个事件发生的频数与频率，并由此估计这三个事件发生的概率.

通过试验我们发现，在一般情况下，"一枚正面朝上、一枚反面朝上"发生的概率大于其他两个事件发生的概率. 所以，这个游戏是不公平的，它对小凡较有利.

议一议

在上面抛掷硬币的试验中，

（1）抛掷第一枚硬币可能出现哪些结果？它们发生的可能性是否一样？

（2）抛掷第二枚硬币可能出现哪些结果？它们发生的可能性是否一样？

（3）在第一枚硬币正面朝上的情况下，第二枚硬币可能出现哪些结果？它们发生的可能性是否一样？如果第一枚硬币反面朝上呢？

通过七年级下册"概率初步"的学习，学生已经对频率的稳定性、用试验频率估计事件发生的概率有了一定的了解，也会用等可能事件的概率计算公式计算只涉及一步试验的古典概型及可化为古典概型的几何概型的概率. 在此基础上，本节进一步研究涉及两步试验的等可能事件的概率计算问题. 本节共 3 课时，第 1 课时通过一个试验活动引出求概率的树状图和列表方法，第 2 课时和第 3 课时分别选择不同的情境，让学生经历利用画树状图和列表法求出概率并解决问题的过程.

第 1 课时，教科书首先呈现了一个有趣的游戏，仍为等可能概型，但与七年级下册学习的有所不同. 七年级下册"概率初步"中只涉及一步试验，而这里的等可能概型涉及两步试验. 教科书通过这个试验一方面使学生体会到在遇到较复杂的事件，还无法理论地计算它的概率时，我们总可以用试验频率估计事件发生的概率，从而进一步加深学生对概率意义的理解；另一方面，通过对这个试

山东教育出版社

验过程的分析，引出计算涉及两步试验的等可能事件概率的两种方法——画树状图和列表.

[1]试验题材的设计注意了试验的可操作性和其理论概率计算的简单性. 当然，在具体教学时，教师也可以根据具体情况，选择其他的概率试验，如摸两张牌的牌面数字之和等.

涉及两步试验的等可能概型，是本节讨论的重点.

做一做

让学生亲自动手进行试验，经历猜测、试验、收集试验数据、分析试验结果等活动过程，进一步体验数据的随机性. 一方面每次试验的结果可能是不一样的，事先无法确定；另一方面，只要进行足够多次试验，试验的频率就趋于稳定. 此外，频率稳定于概率，必须借助大量的重复试验，在有限的课堂教学时间内，一个学生完成的试验次数不会太多，难以得出频率的稳定性的结论，也难以用试验频率来估计其概率. 因此，在教学中，必须注重学生的交流与合作，让学生体会到与他人合作交流的重要性，发展学生合作交流的意识与能力.

教学时，教师可以指导学生先个人试验，然后累计各组的试验数据. 例如：

（1）每人掷硬币 20 次，并记录每次试验的结果.

试验	1	2	3	…	20
掷硬币的结果					

在掷硬币时，要注意在一定的高度任意抛出，以保证随机性.

在一次试验中，第 1 枚硬币正面朝上、第 2 枚硬币正面朝上，结果可记为（正，正）；第 1 枚硬币正面朝上、第 2 枚硬币反面朝上，结果可记为（正，反）；第 1 枚硬币反面朝上、第 2 枚硬币正面朝上，结果可记为（反，正）；第 1 枚硬币反面朝上、第 2 枚硬币反面朝上，结果可记为（反，反）.

整理 20 次试验记录，得到个人试验（20 次）结果.

掷硬币的结果	两枚正面朝上	两枚反面朝上	一枚正面朝上、一枚反面朝上
频数			
频率			

这些数据在后面的讨论中还会用到.

（2）5 个同学为一个小组，把 5 个人的试验数据汇总，得到小组试验（100 次）结果.

掷硬币的结果	两枚正面朝上	两枚反面朝上	一枚正面朝上、一枚反面朝上
频数			
频率			

山东教育出版社

（3）依次累计各组的试验数据，相应得到试验 200 次、300 次、400 次、500 次……时的试验结果，填写下表，并绘制相应的折线统计图.

试验次数	200	300	400	500	…
两枚正面朝上的频数					
两枚正面朝上的频率					
两枚反面朝上的频数					
两枚反面朝上的频率					
一枚正面朝上、一枚反面朝上的频数					
一枚正面朝上、一枚反面朝上的频率					

根据上面的统计图表，便可分别估计“两枚正面朝上”“两枚反面朝上”“一枚正面朝上、一枚反面朝上”这三个事件的概率.

从上面的试验中可以发现，试验次数较大时，试验频率基本稳定，而且在一般情况下，“一枚正面朝上、一枚反面朝上”发生的概率大于其余两个事件发生的概率. 所以，这个游戏是不公平的，它对小凡较有利.

在此，学生又一次感受到频率的稳定性，并用试验频率估计事件发生的概率. 一般而言，学生通过试验及相应的折线统计图，能够得出“一枚正面朝上、一枚反面朝上”发生的概率远大于其余两个事件发生的概率的结论. 在理论上，“两枚正面朝上”“两枚反面朝上”和“一枚正面朝上、一枚反面朝上”的概率分别为 $\frac{1}{4}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{2}$，如果试验次数很大，学生估计的值应该与它们比较接近. 当然，如果试验次数太少，结论可能会有较大出入.

议一议

通过对所做试验的分析，体会两步试验中“两步”之间的独立性，进而容易得到该两步试验所有可能出现的结果，并且容易认识到每种结果出现的等可能性，这样的两步试验也是等可能概型，也可以用等可能概型的概率计算公式进行计算. 在此基础上，引出计算其概率的两种方法——画树状图和列表.

在概率论中，“独立性”也是一个很重要的概念. 如果两个事件互不影响，我们就称这两个事件独立. 其数学定义为：设 A，B 为两个事件，如果 $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$，那么称事件 A 与 B 相互独立. 在此，教师不必强调“独立性”的概念.

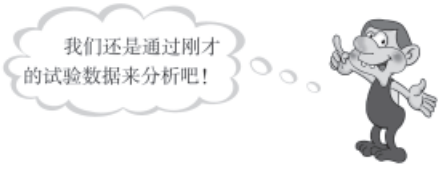
实际上，就两步试验的等可能概型而言，“独立性”并不是一个必要条件. 例如，从有 3 个红球、4 个白球的袋子中连续地随机摸出 2 个球（不放回），这也是一个两步试验的等可能概型，但试验中“两步”之间是不独立的. 在这里教科书之所以选择“两步”之间相互独立的等可能概型，主要是因为学生对此更容易理解，也更容易得出有关的结论.

山东教育出版社

教学时，如有必要，可以让学生运用试验数据来说明“两步”之间的独立性. 例如，可以将试验数据汇总后，填写下面的表格：

掷第 1 枚硬币		掷第 2 枚硬币	
正面朝上的次数		正面朝上的次数	
		反面朝上的次数	
反面朝上的次数		正面朝上的次数	
		反面朝上的次数	

山东教育出版社
山东教育出版社



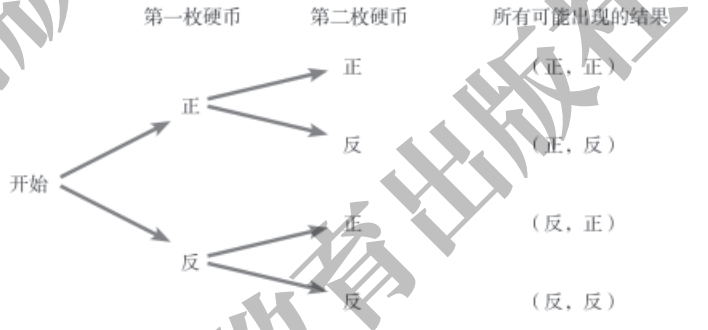
请将各自的试验数据汇总后，填写下面的表格：

抛掷第一枚硬币		抛掷第二枚硬币	
正面朝上的次数		正面朝上的次数	
		反面朝上的次数	
反面朝上的次数		正面朝上的次数	
		反面朝上的次数	

表格中的数据支持你的猜测吗？

[1] 抛掷第一枚硬币可能出现的结果是“正面朝上”或“反面朝上”，抛掷第二枚硬币可能出现的结果也是“正面朝上”或“反面朝上”.

我们常用下面的树状图或表格更好地反映这些所有可能出现的结果：



第一枚硬币 \ 第二枚硬币	正	反
正	（正，正）	（正，反）
反	（反，正）	（反，反）

由于硬币是均匀的，因此抛掷第一枚硬币出现“正面朝上”和“反面朝

[1] 在这里，应该向学生强调等可能性. 教师可以引导学生回忆一步试验时判断等可能性的方法，然后通过类比，向学生指明：我们仍然可以根据随机试验结果的对称性或均衡性来判断两步试验的结果是否具有等可能性.

山东教育出版社

上”的可能性相同. 无论抛掷第一枚硬币出现怎样的结果，抛掷第二枚硬币时出现“正面朝上”和“反面朝上”的可能性也是相同的. 所以，抛掷两枚均匀的硬币，出现的（正，正）、（正，反）、（反，正）、（反，反）四种结果是等可能的.[1]

因此，小明获胜的结果有一种：（正，正），所以小明获胜的概率是$\frac{1}{4}$；

小颖获胜的结果也有一种：（反，反），所以小颖获胜的概率也是$\frac{1}{4}$；

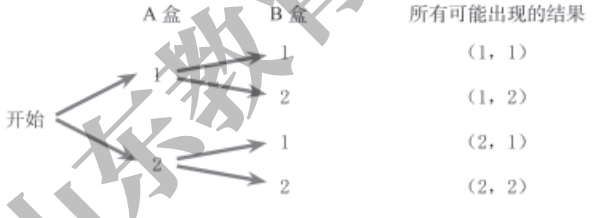
小凡获胜的结果有两种：（正，反）（反，正），所以小凡获胜的概率是$\frac{2}{4}$，即$\frac{1}{2}$.

所以，这个游戏对三人是不公平的.

[2]利用树状图或表格，我们可以不重复、不遗漏地列出所有可能的结果，从而比较方便地求出某些事件发生的概率. 例如，在上面抛掷硬币的试验中，至少有一次正面朝上的结果有3种：（正，正）、（正，反）、（反，正），因此至少有一次正面朝上的概率为$\frac{3}{4}$.

例 1 在 A，B 两个盒子中都装入分别写有数字 1，2 的两张卡片，分别从每个盒子中任取一张卡片，两张卡片上的数字之和为 3 的概率是多少?

解：分别从 A 盒、B 盒中任取一张卡片，卡片上的数字是 1 或 2 的可能性相同，所有可能出现的结果如下：



总共有4种可能的结果，每种结果出现的可能性相同. 其中两数之和为3的结果有2种，即（1，2）、（2，1）.

所以 P（和为 3）$=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

如何用列表法求解例1?

[1]等可能性是关键，在教学时，教师应加以强调. 要让学生明白，只要想用等可能概型的概率计算公式计算概率，就必须首先判断试验为等可能试验， 即具有等可能概型（古典概型）的两个基本特点：有限性和等可能性，两者缺一不可.

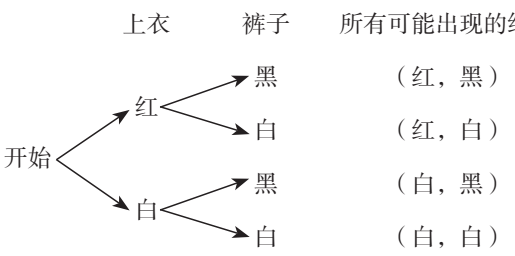
[2]在用等可能概型的概率计算公式计算概率时，关键是计算试验中所有等可能的结果总数和所求事件中可能出现的结果数，为此，我们常用列举法. 但当可能的结果很多时，要将它们不重复、不遗漏地列出，有时可能不太容易，此时，我们常用树状图或者表格来帮助我们列出所有可能出现的结果. 从这个意义上说，画树状图和列表只是辅助的方法，其目的是为了方便而又不重复、不遗漏地列出所有可能出现的结果.

如果学生用其他的方法不重复、不遗漏地列出所有的结果，也应给予鼓励，但同时教师可以引导学生对不同列举方法进行比较，从而使学生体会画树状图、列表这两种方法的优越性.

山东教育出版社

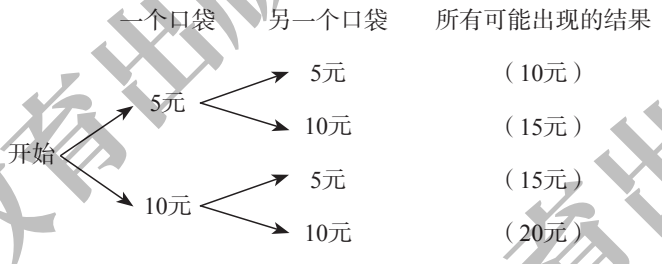
随堂练习（下页）

1. 树状图如下：



总共有 4 种等可能的结果，恰好是白色上衣和白色裤子的结果只有 1 种：（白，白），所以，所求的概率为 $\frac{1}{4}$.

2. 树状图如下：



总共有 4 种等可能的结果，两张纸币的钱数之和为 15 元的结果有 2 种，所以，所求的概率为 $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

山东教育出版社
山东教育出版社

随堂练习

1. 小颖有两件上衣，分别为红色和白色；有两条裤子，分别为黑色和白色．她随意拿出一件上衣和一条裤子穿上，恰好是白色上衣和白色裤子的概率是多少？
2. 小亮的上衣有两个口袋，其中一个口袋中装有一张 5 元和一张 10 元的纸币，另一个口袋中也装有一张 5 元和一张 10 元的纸币．现从两个上衣口袋中各任取一张纸币，所取的两张纸币的钱数之和为 15 元的概率是多少？

习题 6.1

知识技能

1. 袋中装有 1 个红球、2 个白球，它们除颜色外都相同．每次从袋中随机地摸出一个球，求下列事件发生的概率：
   （1）在第一次摸到红球的情况下，将该球放回袋中摇匀，再摸第二次，第二次摸到红球的概率是多少？
   （2）如果第一次摸到的是白球，将该球放回袋中摇匀，第二次摸到红球的概率又是多少？
2. 准备两组相同的牌，每组两张，两张牌的牌面数字分别是 1 和 2．从每组牌中各摸出一张牌，称为一次试验．
   （1）一次试验中两张牌的牌面数字之和可能有哪些值？
   （2）利用树状图或表格，计算两张牌的牌面数字之和等于 4 的概率．
3. 一个盒子中装有 1 个红球、1 个白球，这两个球除颜色外都相同．从中随机地摸出一个球，记下颜色后放回，充分摇动后，再从中随机地摸出一个球．求：
   （1）两次都摸到红球的概率；
   （2）两次摸到不同颜色的球的概率．

数学理解

4. 小明从一定高度随机地抛掷一枚均匀的硬币，他已经掷了两次硬币，结果都是“正面朝上”，那么，你认为小明第三次抛掷硬币时，“正面朝上”与“反面朝上”哪种可能性大？还是一样大？说说你的理由，并与同伴交流．

习题6.1

1.（1）$\frac{1}{3}$；（2）$\frac{1}{3}$.

2.（1）一次试验中，两张牌的牌面数字之和可能为 2，3 和 4；

（2）列表如下：

第 1 张牌 \ 第 2 张牌	1	2
1	(1, 1)	(1, 2)
2	(2, 1)	(2, 2)

总共有 4 种结果，每种结果出现的可能性相同．两张牌的牌面数字之和等于 2 的结果有一种：(1，1)；两张牌的牌面数字之和等于 3 的结果有两种：(1，2)、(2，1)；两张牌的牌面数字之和等于 4 的结果有一种：(2，2)．因此，两张牌的牌面数字之和等于 4 的概率为 $\frac{1}{4}$.

3.（1）$\frac{1}{4}$；（2）$\frac{1}{2}$.

4. 由于硬币质地均匀，并且是“没有记忆”的，所以第三次掷硬币，“正面朝上”的可能性和“反面朝上”的可能性一样大，都是 $\frac{1}{2}$.

山东教育出版社

第 2 课时通过解决“石头、剪刀、布”游戏的公平性问题及一个猜数游戏的策略问题，巩固计算概率的方法.

例 2

“石头、剪刀、布”是民间喜闻乐见的游戏，也是学生喜欢的一种游戏. 本例从理论上求出了在玩“石头、剪刀、布”游戏时双方胜、平、负的概率，让学生进一步体会“数学就在我们身边”，发展“用数学”的意识与能力.

实际上，在真正玩“石头、剪刀、布”游戏时，双方做这三种手势的可能性不一定相同，每人都有自己的习惯与偏好. 本例中，我们假设小明和小颖每次做这三种手势的可能性相同，使它成为一个等可能概型的问题. 如果没有这种假设，后面的解法就缺乏依据；而且，如果没有这种假设，这个问题就没有理论解. 事实上，我们在将一个实际问题数学化时，往往不仅是一个抽象化的过程，而且也是一个理想化的过程.

例 2　小明、小颖和小凡做“石头、剪刀、布”的游戏. 游戏规则如下：

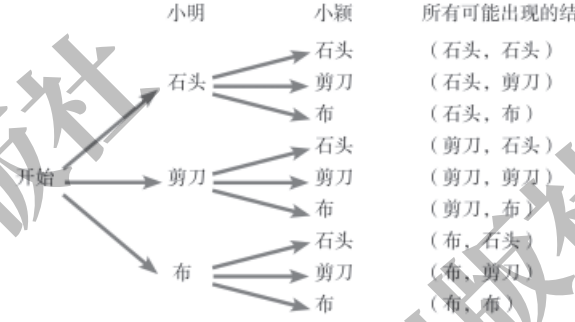
由小明和小颖玩“石头、剪刀、布”游戏，如果两人的手势相同，那么小凡获胜；如果两人手势不同，那么按照“石头胜剪刀，剪刀胜布，布胜石头”的规则决定小明和小颖中的获胜者.

假设小明和小颖每次出这三种手势的可能性相同，你认为这个游戏对三人公平吗？



石头　剪刀　布

解：因为小明和小颖每次出这三种手势的可能性相同，所以可以利用树状图列出所有可能出现的结果：



总共有 9 种可能的结果，每种结果出现的可能性相同，两人手势相同的结果有三种：（石头，石头）、（剪刀，剪刀）、（布，布），所以小凡获胜的概率为 $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$；

小明胜小颖的结果有三种：（石头，剪刀）、（剪刀，布）、（布，石头），所以小明获胜的概率为 $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$；

小颖胜小明的结果也有三种：（剪刀，石头）、（布，剪刀）、（石头，布），所以小颖获胜的概率为 $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

所以，这个游戏对三人是公平的.

[1] 你能用列表法来求解例 2 吗？

[1] 也可以列表如下：

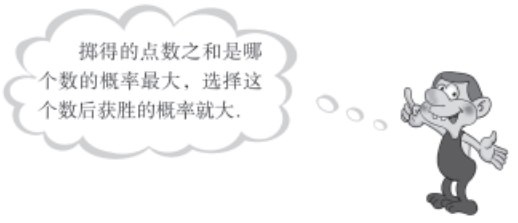
小颖 / 小明	石头	剪刀	布
石头	（石头，石头）	（石头，剪刀）	（石头，布）
剪刀	（剪刀，石头）	（剪刀，剪刀）	（剪刀，布）
布	（布，石头）	（布，剪刀）	（布，布）

可以得到相同的结果.

山东教育出版社

做一做

小明和小军两人一起做游戏. 游戏规则如下：每人从 1，2，…，12 中任意选择一个数，然后两人各掷一次均匀的骰子，谁事先选择的数等于两人掷得的点数之和谁就获胜；如果两人选择的数都不等于掷得的点数之和，就再做一次上述游戏，直至决出胜负. 如果你是游戏者，你会选择哪个数？



随堂练习

有三张大小一样而画面不同的画片，先将每一张从中间剪开，分成上下两部分；然后把三张画片的上半部分都放在第一个盒子中，把下半部分都放在第二个盒子中. 摇匀后，分别从每个盒子中各随机地摸出一张，求这两张恰好能拼成原来的一幅画的概率.

习题 6.2

知识技能

1. 准备两组相同的牌，每组三张，三张牌的牌面数字分别是 1，2，3. 从每组牌中各摸出一张牌.
   （1）两张牌的牌面数字之和等于1的概率是多少？
   （2）两张牌的牌面数字之和等于2的概率是多少？
   （3）两张牌的牌面数字之和为几的概率最大？
   （4）两张牌的牌面数字之和大于3的概率是多少？
2. 经过某路口的行人，可能直行，也可能左拐或右拐. 假设这三种可能性相同，现有两人经过该路口，求下列事件的概率：
   （1）两人都左拐；
   （2）恰好有一人直行，另一人左拐；
   （3）至少有一人直行.

做一做

这个问题看上去有些复杂. 实际上，它等同于下面的问题：两人各掷一次均匀的骰子，将两人掷得的点数相加，点数之和为几的概率最大？

通过这个问题是要说明，在不确定的情境中，概率可以为我们的决策提供依据. 一般来说，掷得的点数之和是哪个数的概率最大，选择这个数后获胜的概率就大.

可以用列表的方法得到，掷得的点数之和是 7 的概率最大，所以一般来说，选择 7 这个数获胜的可能性最大.

需要指出的是，尽管概率并不提供确切无误的结论，也有可能你选择概率大的那一个数而最后反而输了，但在掷骰子之前，选择概率大的那一个数显然是明智的.

随堂练习

将第 1 张画片的上半部分记为“1 上”，下半部分记为“1 下”，依此类推，可列表如下：

从第一个盒子摸出的结果 \ 从第二个盒子摸出的结果	1下	2下	3下
1上	（1上，1下）	（1上，2下）	（1上，3下）
2上	（2上，1下）	（2上，2下）	（2上，3下）
3上	（3上，1下）	（3上，2下）	（3上，3下）

总共有 9 种等可能的结果，其中能拼成原来的一幅画的结果有 3 种：（1 上，1 下）、（2上，2 下）、（3 上，3 下），所以所求的概率为$\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

山东教育出版社

习题6.2

1.（1）0；（2）$\frac{1}{9}$；（3）两张牌的牌面数字之和为 4 的概率最大，其概率为 $\frac{1}{3}$；（4）$\frac{2}{3}$.

2. 列表如下：

第一个人 \ 第二个人	直行	左拐	右拐
直行	（直，直）	（直，左）	（直，右）
左拐	（左，直）	（左，左）	（左，右）
右拐	（右，直）	（右，左）	（右，右）

共有 9 种等可能的结果，其中

（1）两人都左拐的结果只有 1 种：（左，左），所以两人都左拐的概率为 $\frac{1}{9}$；

（2）恰好有一人直行，另一人左拐的结果有 2 种：（直，左）、（左，直），所以恰好有一人直行，另一人左拐的概率为 $\frac{2}{9}$；

（3）至少有一人直行的结果有 5 种：（直，直）、（直，左）、（直，右）、（左，直）、（右，直），所以至少有一人直行的概率为 $\frac{5}{9}$.

3. 列表如下：

第一枚 \ 第二枚	1	2	3	4	5	6
1	（1，1）	（1，2）	（1，3）	（1，4）	（1，5）	（1，6）
2	（2，1）	（2，2）	（2，3）	（2，4）	（2，5）	（2，6）
3	（3，1）	（3，2）	（3，3）	（3，4）	（3，5）	（3，6）
4	（4，1）	（4，2）	（4，3）	（4，4）	（4，5）	（4，6）
5	（5，1）	（5，2）	（5，3）	（5，4）	（5，5）	（5，6）
6	（6，1）	（6，2）	（6，3）	（6，4）	（6，5）	（6，6）

共有 36 种等可能的结果，其中

（1）至少有一枚骰子的点数为 1 的结果有 11 种，所以至少有一枚骰子的点数为 1 的概率为 $\frac{11}{36}$；

山东教育出版社

（2）两枚骰子的点数和为奇数的结果有18种，所以两枚骰子的点数和为奇数的概率为 $\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$；

（3）两枚骰子的点数和大于 9 的结果有 6 种，所以两枚骰子的点数和大于 9 的概率为 $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$；

（4）第二枚骰子的点数整除第一枚骰子的点数的结果有14 种，所以第二枚骰子的点数整除第一枚骰子的点数的概率为 $\frac{14}{36}=\frac{7}{18}$.

4. 列表如下：

课本＼作业	语文	数学	英语
语文	（语文，语文）	（语文，数学）	（语文，英语）
数学	（数学，语文）	（数学，数学）	（数学，英语）
英语	（英语，语文）	（英语，数学）	（英语，英语）

共有 9 种等可能的结果；

课本和作业恰好为同一门课的结果有 3 种，所以课本和作业恰好为同一门课的概率为 $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

5.（1）两人掷得的点数之和为奇数的概率为 $\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$，点数之和为偶数的概率也是 $\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$，所以这个游戏对双方是公平的；

（2）两人掷得的点数之积为奇数的概率为 $\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$，点数之积为偶数的概率为 $\frac{27}{36}=\frac{3}{4}$，所以这个游戏对双方不公平.

山东教育出版社

3. 掷两枚均匀的骰子，求下列事件的概率：

（1）至少有一枚骰子的点数为 1；

（2）两枚骰子的点数和为奇数；

（3）两枚骰子的点数和大于 9；

（4）第二枚骰子的点数整除第一枚骰子的点数.

4. 小亮从语文、数学、英语 3 本课本中任意抽取一本，又从这 3 门课的作业本中任意抽取一本. 课本和作业本恰好为同一门课的概率是多少？

数学理解

5. 小明和小军做掷骰子游戏，两人各掷一枚均匀的骰子.

（1）若两人掷得的点数之和为奇数，则小军获胜，否则小明获胜. 这个游戏对双方公平吗？为什么？

（2）若两人掷得的点数之积为奇数，则小军获胜，否则小明获胜. 这个游戏对双方公平吗？为什么？

联系拓广

6. 如图，小明和小红正在玩一个游戏：每人先抛掷骰子，骰子朝上的数字是几，就将棋子前进几格，并获得格子中的相应物品. 现在轮到小明掷，棋子在标有数字“1”的那一格，小明能一次就获得“汽车”吗？小红下一次抛掷可能得到“汽车”吗？她下一次得到“汽车”的概率是多少？



※7. 在本节课的“石头、剪刀、布”游戏中，有一个人没有参与活动，有“任人宰割”的感觉，于是他们修改游戏规则如下：三个人同时玩“石头、剪刀、布”的游戏，如果三个人的手势都相同或三个人的手势互不相同，那么三个人不分胜负；如果有两个人的手势相同，则按照“石头胜剪刀，剪刀胜布，布胜石头”的规则决定胜负（有可能有两个胜者）.

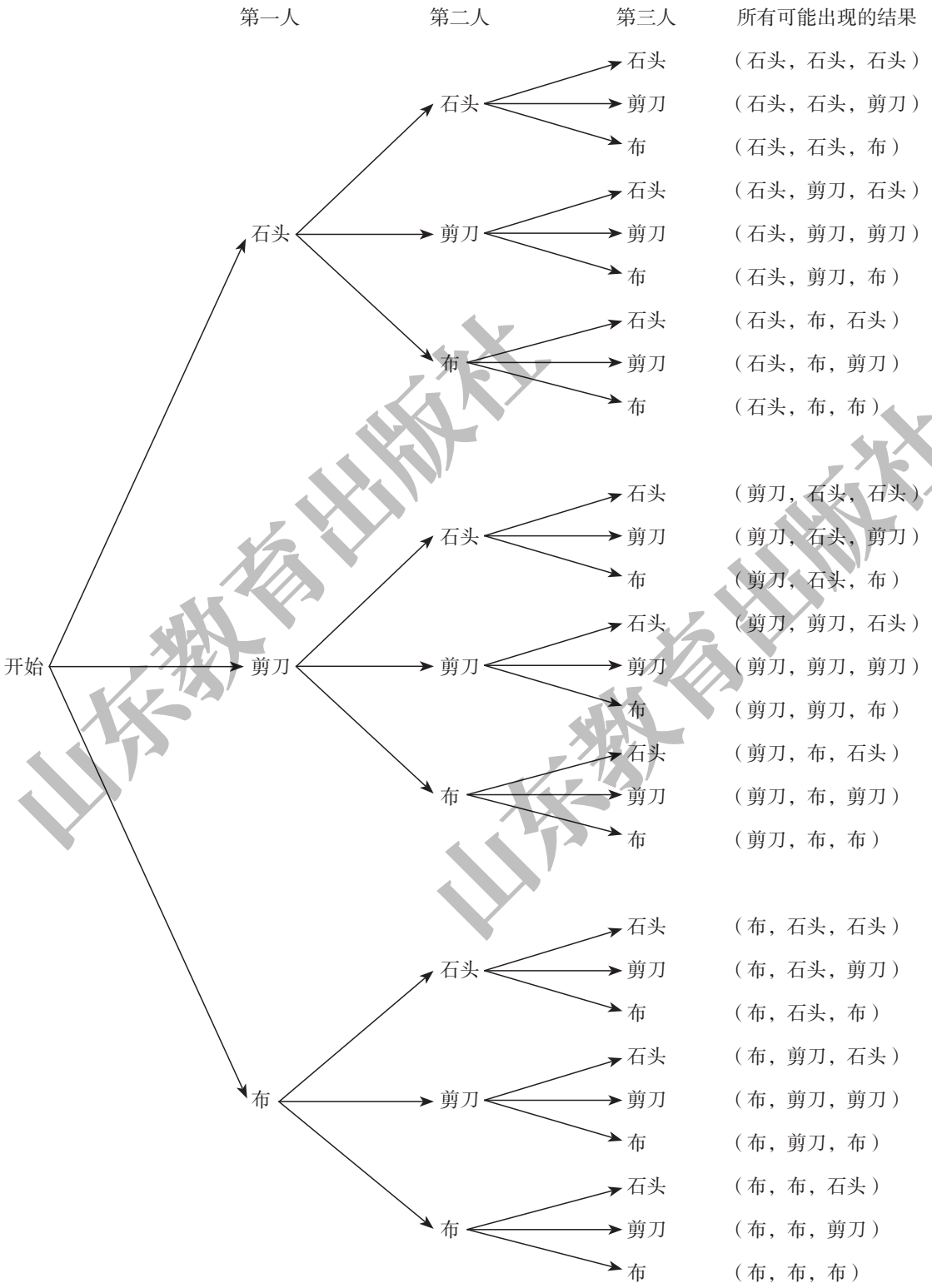
这个游戏公平吗？先算一算，再做一做.

小颖为学校联欢会设计了一个“配紫色”的游戏：图 6−1 是两个可以自由转动的转盘，每个转盘被分成面积相等的几个扇形. 转盘 A 中的扇形分别涂

6. 小明的棋子现在第1格，距离“汽车”所在的位置还有7格，而骰子最大的点数为 6，掷一次骰子不可能得到数字 7，所以小明不可能一次就得到“汽车”. 只要小明和小红两人掷骰子的点数和为 7，小红就可以得到“汽车”，所以小红下一次掷有可能得到“汽车”. 通过列表可知，共有36 种等可能的结果，而点数和为 7 的有 6 种，因此小红下一次得到“汽车”的概率为 $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

山东教育出版社

7. 画树状图如下：

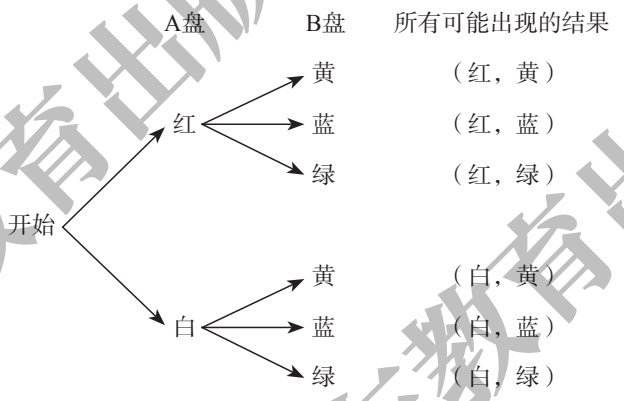


山东教育出版社
山东教育出版社

共有 27 种等可能的结果，其中第一人获胜的结果有 9 种，所以第一人获胜的概率为 $\frac{9}{27}=\frac{1}{3}$，第二人和第三人获胜的结果也都有 9 种，所以第二人和第三人获胜的概率也都是 $\frac{9}{27}=\frac{1}{3}$，所以这个游戏对三人是公平的.

第 3 课时以“配紫色”为主要情境，让学生经历利用画树状图或列表的方法求出概率并解决实际问题的过程，提高学生运用所学的概率知识解决问题的能力. 当然，教学时教师也可以根据具体情况选择更适合学生的素材进行教学.

（1）所有可能出现的结果共有6 种，树状图和表格可以是：



A盘 \ B盘	黄色	蓝色	绿色
红色	（红，黄）	（红，蓝）	（红，绿）
白色	（白，黄）	（白，蓝）	（白，绿）

（2）游戏者获胜的概率为 $\frac{1}{6}$.

山东教育出版社

有红、白两种颜色，转盘 B 中的扇形分别涂有黄、蓝、绿三种颜色. 游戏者同时转动两个转盘，如果转盘 A 转出了红色，转盘 B 转出了蓝色，那么他就赢了，因为红色和蓝色在一起配成了紫色.



图 6–1

（1）利用树状图或表格表示游戏所有可能出现的结果.

（2）游戏者获胜的概率是多少?

想一想

用图 6–2 所示的转盘进行“配紫色”游戏.

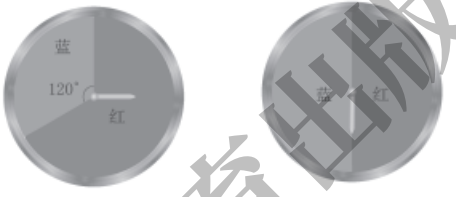
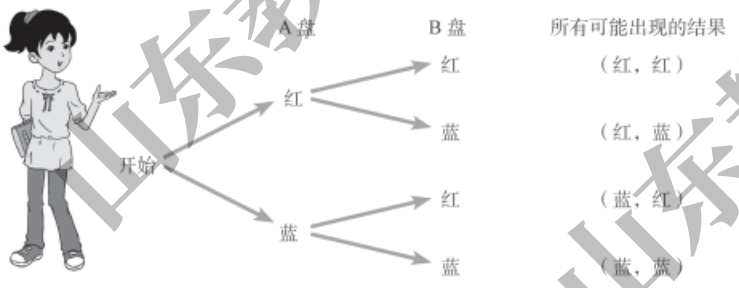


图 6–2

小颖制作了下面的树状图，并据此求出游戏者获胜的概率为 $\frac{1}{2}$.



想一想

在利用树状图或列表的方法求概率时，各种结果出现的可能性必须相同，若把可能性不同的情况当成可能性相同的情况来处理，则是错误的.

小颖的做法是不正确的，因为 A 盘中红色区域和蓝色区域的面积不同，所以指针落在这两个区域的可能性是不同的. 而小亮的做法是正确的，他将 A 盘的红色区域分成 2 份，这样各种结果出现的可能性就相同了，也就可以用等可能概型的概率计算公式计算概率了.

小颖所犯的错误也是一些学生容易犯的，而小亮的做法则是解决这类问题的一种常用方法.

山东教育出版社

小亮则先把转盘A的红色区域等分成2份，分别记作“红色1”“红色2”，然后制作了下表，据此求出游戏者获胜的概率也是$\frac{1}{2}$.

A盘 \ B盘	红色	蓝色
红色1	（红1，红）	（红1，蓝）
红色2	（红2，红）	（红2，蓝）
蓝色	（蓝，红）	（蓝，蓝）



你认为谁做得对？说说你的理由.

议一议

用树状图或表格求概率时应注意些什么？

例3　一个盒子中装有2个红球、2个白球和1个蓝球，这些球除颜色外都相同，从中随机地摸出一个球，记下颜色后放回，再从中随机地摸出一个球，求两次摸到的球的颜色能配成紫色的概率.

解：先将2个红球分别记为“红1”“红2”，2个白球分别记为“白1”“白2”，然后列表如下：

第一次 \ 第二次	红1	红2	白1	白2	蓝
红1	（红1，红1）	（红1，红2）	（红1，白1）	（红1，白2）	（红1，蓝）
红2	（红2，红1）	（红2，红2）	（红2，白1）	（红2，白2）	（红2，蓝）
白1	（白1，红1）	（白1，红2）	（白1，白1）	（白1，白2）	（白1，蓝）
白2	（白2，红1）	（白2，红2）	（白2，白1）	（白2，白2）	（白2，蓝）
蓝	（蓝，红1）	（蓝，红2）	（蓝，白1）	（蓝，白2）	（蓝，蓝）

总共有25种可能的结果，每种结果出现的可能性相同. 两次摸到的球的颜色能配成紫色的结果有4种：（红1，蓝）、（红2，蓝）、（蓝，红1）、（蓝，红2），所以，

$$P(\text{能配成紫色})=\frac{4}{25}.$$

议一议

用树状图和列表的方法求概率时，应注意各种结果出现的可能性要相同.

例3

本例的解法在本质上和上面小亮的做法是一样的，可以将2个红球分别记为“红1”“红2”，2个白球分别记为“白1”“白2”，这样摸到每个球的可能性就相同了.

教学时应鼓励学生分别用树状图和列表法进行解答.

山东教育出版社

随堂练习

用如图所示的两个转盘进行“配紫色”游戏，每个转盘都被分成面积相等的三个扇形，配得紫色的概率是多少？



习题 6.3

知识技能

1. 用如图所示的两个转盘进行“配紫色”游戏，配得紫色的概率是多少？



（第1题）

2. 一个盒子中装有3个红球和2个白球，这些球除颜色外都相同．从中随机地摸出一个球，记下颜色后放回，再从中随机地摸出一个球，求两次摸到相同颜色的球的概率．

3. 有两组卡片，第一组卡片上写有A，B，B，第二组卡片上写有A，B，B，C，C．分别利用树状图和表格，求从每组卡片中各随机地抽出一张，都抽到B的概率．

数学理解

4. 设计两个转盘进行“配紫色”游戏，使配得紫色的概率是 $\frac{1}{3}$．

随堂练习

$\frac{2}{9}$.

习题6.3

1. $\frac{5}{9}$.

2. $\frac{13}{25}$.

3. $\frac{4}{15}$.

4. 提示：答案不唯一．根据要求设计游戏，充分体现了概率的模型思想．

山东教育出版社
山东教育出版社

教学目标

1. 经历试验、统计等活动过程，在活动中发展学生合作交流的意识和能力.

2. 能利用试验频率估计一些随机事件发生的概率.

3. 通过降水概率，体会随机事件发生的不确定性.

做一做

教科书在此先呈现了一个生活中的实际问题："抽签的先后会影响抽签的公平性吗？"然后呈现了一种试验方案.

2 生活中的概率

概率和日常生活有着密切的联系，对于生活中的随机事件，我们可以利用概率知识作出合理的判断与决策.

做一做

4 名同学都想去看周末的演唱会，但只有 1 张门票，只好用抽签的方法来解决. 他们做了 4 张一样的卡片，只有其中一张写有"门票". 将 4 张卡片放在一起洗匀，让 4 个人依次抽取（抽完后不放回）. 先抽签的人比后抽签的人抽到"门票"的机会大吗？



小明：第一个人抽签的时候，无论如何，写有"门票"的卡片还在. 如果它被第一个人抽去了，后面的人就根本不用再抽了. 这样，后抽签的人显然比先抽的人吃亏了.

你认为抽签的先后会影响抽签的公平性吗？

我们可以做如下的试验：每 4 个人一组，按顺序依次从中抽取 1 张卡片. 每组重复 20 次，将结果记录在下表中.

	第一人 抽到"门票"	第二人 抽到"门票"	第三人 抽到"门票"	第四人 抽到"门票"
出现的次数				
出现的频率				

教学中，要注重学生的交流与合作，让学生体会到与他人合作交流的重要性，发展学生合作交流的意识与能力.

（1）每组试验 20 次，并记录每次试验结果.

（2）整理每组 20 次试验记录，得到每组试验结果.

（3）汇总全班的试验结果，分别估计第一人、第二人、第三人、第四人抽到"门票"的概率.

	第一人抽到"门票"	第二人抽到"门票"	第三人抽到"门票"	第四人抽到"门票"
出现的次数				
出现的频率				
概率				

山东教育出版社

（1）汇总全班的数据，分别估计出第一人、第二人、第三人、第四人抽到“门票”的概率.

[1]（2）你认为抽签的次序对抽到“门票”的概率有影响吗？

抽签有先有后，但是先抽的人和后抽的人抽到“门票”的概率相同，因此对每个人来说都是公平的.



议一议

明天北京的降水概率是60%，上海的降水概率是80%. 假如明天北京降雨了，上海是否一定会降雨？



小明：因为80%>60%，降水概率小的地方下雨了，降水概率大的地方当然也要下，所以上海一定会下雨.

“明天降雨”是一个随机事件，明天北京的降水概率是60%，上海的降水概率是80%，只是说明明天上海降雨的可能性比北京大，并不表示明天北京降雨了上海就一定会降雨. 如果明天北京降雨了而上海没有降雨，这只能说明可能性较小的事件发生了而可能性较大的事件却没有发生，这也正是随机事件发生的不确定性的体现.

随堂练习

有两个工厂生产同一种产品，已知甲厂产品的次品率为0.001，乙厂产品的次品率为0.01.

（1）若某人在甲厂购买该产品时买到了次品，他在乙厂购买相同数量的产品时是否一定会买到次品？

（2）若两个工厂的产品在价格等其他方面条件都相同，你会选择购买哪个工厂的产品？

[1] 没有影响.

议一议

降水概率指的是某个时间或范围下雨的可能性是百分之多少，在预报的时间和区域范围内，会降水的概率为这个数.

随堂练习

（1）不一定.

（2）甲厂.

山东教育出版社

习题6.4

1. 略.

2.（1）错，每个人都有25%的概率得到门票；

（2）错；

（3）错.

3. 由于“手术的成功率是90%”，所以“失败率是10%”，这说明手术有一定风险.“失败率10%”或“成功率90%”只代表手术的难度，不能代表什么.

4. 略.

教学目标

1. 经历试验、统计等活动过程，在活动中进一步发展学生合作交流的意识和能力；

2. 能用试验的方法估计一些复杂的随机事件发生的概率.

习题 6.4

数学理解

1. 请举出一些日常生活中与概率有关的例子.

2. 下列说法正确吗？谈谈你的看法.

（1）现有一张周末演唱会的门票，四名同学都想去. 为公平起见，他们采取抽签的办法来决定，这样每个人都有50%的概率得到门票；

（2）天气预报说明天的降水概率是90%，所以明天一定会下雨；

（3）小颖买了很多次彩票但从来没有中过奖，所以她决定坚持买下去，因为她认为以后中奖的概率增大了.

联系拓广

3. 一位病人到医生那里就诊，医生在检查完病情后说：“你的病需要做手术，这种手术有一定的风险，手术的成功率是90%.”

你如何应用概率的知识理解医生所说的含义？

4. 在篮球比赛中有一些与概率相关的数据，如“某球员投中三分球的概率”“某球员罚进球的概率”，你知道这些数据是怎样得到的吗？

*3 用频率估计概率

平面上画着一些平行线，相邻的两条平行线之间的距离都为a，向此平面任投一长度为l（$l<a$）的针，该针可能与其中某一条平行线相交，也可能与它们都不相交.

相交和不相交的可能性相同吗？你能通过画树状图或列表法求出该针与平行线相交的概率吗？



通过前面的学习，学生已经认识到当试验次数较大时，随机事件发生的频率具有稳定性，并据此可以估计某一事件发生的概率. 本节选取了一个历史上较为著名的投针试验和与学生日常生活密切相关的生日问题为题材，力图让学生再次感受到频率的稳定性，进一步加深对概率意义的理解. 当然，具体教学时教师也可以根据学生的实际情况，选择其他题材开展教学.

如前所述，概率的计算有理论计算和试验估算两种方式. 根据获得概率的方式，我们遇到的概率问题大致有三类：第一类问题，它没有理论概率，只能通过多次试验，用频率来估计它；第二类问题，它有理论概率，但理论概率的计算很困难，这时也可以通过多次试验，用频率来估计它；第三类问题，它是简单的古典概型，有理论概率，且理论概率的计算比较简单，我们就可以通过计算得到它的概率.

对于本节中的投针问题，教科书首先提出问题，并引导学生思考能否借助画树状图或列表求出该针与平行线相交的概率，力图引起学生的认知冲突，产生试验估计的愿望，然后通过“做一做”具体估计其概率.

山东教育出版社 山东教育出版社

上述事件发生的概率，无法用画树状图、列表法求得，此时，我们常常可以通过大量重复试验，用事件发生的频率来估计它的概率.

做一做

先确定 l 和 a 的值，然后两个同学组成一组，至少完成 100 次试验，分别记录其中相交和不相交的次数. 统计全班的试验数据，估计针与平行线相交的概率.

随堂练习

1. 在一个不透明的盒子里装有黑棋子和白棋子若干枚，请你设计一个估计盒子里黑棋子和白棋子数量的方案.
2. 某绿豆芽生产基地每天要向客户提供 5 000 kg 的绿豆芽，在正常情况下，1 kg 绿豆全部发芽，可发 4.5 kg 的绿豆芽. 该基地现新进了一批绿豆，工作人员首先从这批绿豆中随机地抽取若干绿豆，进行绿豆发芽率的试验，并将所得的数据记录在下表中.

抽取的绿豆数量 n / 粒	发芽的绿豆数量 m / 粒	绿豆发芽的频率 $\frac{m}{n}$
10	8	0.8
50	46	0.92
100	93	
500	462	
1 000	925	
1 500	1 397	
2 000	1 865	
3 000	2 793	
5 000	4 651	

（1）请完成上表；

（2）工作人员每天用多少千克这种绿豆发芽比较合适？

做一做

首先要求每组学生都确定相同的 l 和 a 的值，这是因为不同的 l 和 a 的值，试验的结果是不同的，那样就不能将各组的试验结果汇总，也就无法保证试验的次数.

在具体的试验过程中，注意要求学生要从一定高度随意抛针，以保证投针的随机性；组内同学也可进行适当的分工，应该说，这节课基本上是一节学生活动课，因而要注意体现学生的自主性，试验活动以及试验数据的汇总等都可以由学生自行组织完成. 正因为这节课中学生活动较多，它也为教师评价学生合作交流的意识和能力、学生的思维水平和动手能力等提供了一个很好的机会.

此外，在试验过程中，有时针与线是否相交较难判断，学生可能为此发生一些争执，教师应进行适当的指导（如建议学生忽略这次试验或者认为相交、不相交各计半次，等等），避免学生过多地停留于此.

随堂练习

略.

山东教育出版社

读一读

介绍了投针试验的一些历史资料以及其概率与π之间的关系，据此获得了一种估计π的值的方法，并将其引申为现在广泛使用的蒙特卡罗方法，旨在给学生一定的拓展空间，让学生体会到有些高深的数学中蕴含的思想其实极为朴素，从而激发学生的数学学习兴趣.

蒙特卡罗方法是以概率和统计的理论、方法为基础的一种计算方法，它将所求解的问题与一定的概率模型相联系，用计算机实现统计模拟或抽样，以获得问题的近似解，因此又称为统计模拟法或统计试验法.

蒙特卡罗是摩纳哥的一个城市，以赌博闻名于世. 蒙特卡罗方法借用这一城市的名称是为了象征性地表明该方法的概率统计特点.

作为一种计算方法，蒙特卡罗方法是由乌拉姆（S.M. Ulam，1909—1984）和冯·诺伊曼（J.von Neumann，1903—1957）在20世纪40年代为研制核武器的需要而首先提出来的. 在此之前，该方法的基本思想实际上早已被统计学家所采用了.

读一读

投针试验

历史上，法国数学家布丰（George-Louis Leelere de Buffon，1707—1788）最早设计了本节这个投针试验，并于1777年给出了针与平行线相交的概率的计算公式 $P=\frac{2l}{\pi a}$. 由于它与π有关，于是人们想到利用投针试验来估计π的值.

投针试验的历史资料

试验者	时间	投掷次数	相交次数	π的试验值
Wolf	1850年	5 000	2 532	3.159 6
Smith	1855年	3 204	1 218.5	3.155 4
C. De Morgan	1860年	600	382.5	3.137
Fox	1884年	1 030	489	3.159 5
Lazzerini	1901年	3 408	1 808	3.141 592 9
Reina	1925年	2 520	859	3.179 5

在投针试验中，你们估计的针与平行线相交的概率P是多少？试计算$\frac{2l}{\pi a}$的值，看看你们估计的π值如何.

此外，随便说出3个正数，以这3个数为边长可以围成一个钝角三角形的概率P也与π有关.[1]

值得注意的是这里采用的方法：设计一个适当的试验，它的概率与我们感兴趣的一个量（如π）有关，然后利用试验结果来估计这个量. 随着计算机等现代技术的发展，这一方法已经发展为具有广泛应用性的蒙特卡罗方法（Monte Carlo method）.

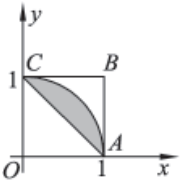
[1] 其理论概率为 $\frac{\pi-2}{4}$.

事实上，不妨设所取的三个数为a，b，c（$0<a\leqslant b\leqslant c$），若能够组成钝角三角形，则$a$，$b$，$c$应满足：$a+b>c$，$a^2+b^2<c^2$，即 $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}>1$，$\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}<1$.

设 $\frac{a}{c}=x$，$\frac{b}{c}=y$，则有$x+y>1$，$x^2+y^2<1$，其中$0<x\leqslant 1$，$0<y\leqslant 1$.

山东教育出版社

在直角坐标系中（如图），任意 a，b，c 所对应的图形为正方形 $OABC$ 及其内部（不包括 x 轴、y 轴上的点），而能构成钝角三角形的 a，b，c 对应的图形是图中的阴影部分.



因此，所求概率为 $\dfrac{\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}}{1}=\dfrac{\pi-2}{4}$.

当然，本题的理论概率不应要求学生掌握.

山东教育出版社
山东教育出版社

习题6.5

略.

生日问题属于第二类问题，它有理论概率，但理论概率的计算对现阶段的学生来说很困难，所以教科书仍然通过多次试验，用频率来估计概率.

由于生日问题贴近生活，数据随手可得，所以具有一定的可操作性. 另一方面，该问题的理论概率为（一年按365天计算）：$1-\frac{A_{365}^{50}}{365^{50}}\approx 0.97$，可能有违学生的“常识”，所以也有一定的趣味性.

[1] 首先提问：“400 个同学中，一定有 2 个同学的生日相同（可以不同年）吗？”学生利用抽屉原理（将多于 n 件的物品任意放到 n 个抽屉中，那么至少有一个抽屉中的物品不少于 2 件）容易发现结论是肯定的. 随后提请学生思考：“300 个同学呢？”此时就不能保证了. 在此基础上再提出老师的观点：50 个同学中，就很可能有 2 个同学的生日相同. 这势必与学生的认识产生较大的反差，极大地激发学生研究的兴趣. 当然，本问题的理论研究已经超出了学生的学历水平，同时根据已有学习经验，学生会想到用试验频率进行估计，从而转入下面“议一议”环节.

注意：本问题只要有 2 个同学的生日相同即可，如有 3 个同学的生日相同当然也必然有 2 个同学的生日相同了，后面的几个问题也类似.

议一议

在明确用试验频率估计概率的基础上，通过思考与讨论设计出具体可行的试验方案.

教学时，应首先鼓励学生独立思考，提出自己的方案；然后通过相互交流，设计出相对完善且容易操作的试验方案. 比如，每个同学课外调查一定数量人的生日供试验使用，也可以随机地产生出1~365 之间的某一个自然数代表生日（这实际上就是模拟试验）.

习题 6.5

问题解决

1. 农民在播种之前要了解种子在一定条件下的发芽率，请你设计一个方案，帮他们估计种子的发芽率.

联系拓广

2. 如图，边长为 10 cm 的正方形被两条曲线分成三个部分，请你设计一个试验，分别估算区域 A，B，C 的面积.



（第 2 题）

3. 随便说出 3 个正数，以这 3 个数为边长一定能围成一个三角形吗？一定能围成一个钝角三角形（其中最大边的平方大于另外两边的平方和）吗？估计能围成一个钝角三角形的概率.



[1] 400 个同学中，一定有 2 个同学的生日相同（可以不同年）吗？300 个同学呢？

可有人说：“50 个同学中，就很可能有 2 个同学的生日相同.”你同意这种说法吗？

议一议

为了说明上述说法正确与否，我们可以通过大量重复试验，用“50 个人中有 2 个人的生日相同”的频率来估计这一事件的概率. 请你设计试验方案并与同伴交流.

山东教育出版社

做一做

（1）每个同学课外调查 10 个人的生日.

（2）从全班的调查结果中随机选取 50 个被调查人的生日，记录其中有无 2 个人的生日相同. 每选取 50 个被调查人的生日为一次试验，重复多次试验.

（3）统计试验记录，并据此估计“50 个人中有 2 个人的生日相同”的概率.

想一想

（1）口袋中装有 3 个红球和 7 个白球，这些球除颜色外都相同，从袋子中随机摸出一个球，这个球是红球的概率是多少?

（2）口袋里装有红球和白球共 10 个，这些球除颜色外都相同. 如果不将球倒出来数，那么你能设计一个试验方案，估计其中红球和白球的比例吗?

（3）生活中还有哪些问题的解决可以借助上面（2）的方案，与同伴交流.

随堂练习

1. 口袋里装有红球和白球共 10 个，这些球除颜色外都相同. 每次将球搅拌均匀，任意摸出一个球，记下颜色后再放回口袋里. 摸了 100 次球，发现其中 69 次摸到红球. 请你估计口袋里红球和白球各有多少个.
2. 课外调查的 10 个人的生肖分别是什么? 他们中有 2 个人的生肖相同吗? 6 个人中呢? 利用全班的调查数据设计一个方案，估计 6 个人中有 2 个人生肖相同的概率.

习题 6.6

数学理解

1. 小明和几个同学在课堂上进行摸球试验，大家认为，摸球的人每次摸球前应当将盒中的球摇一摇，使得每个球被摸到的可能性相同. 但小明有不同想法，他认为，如果连续两次都是自己摸球，那么他只要在第二次摸球时有意识地避开第一次放进去的那个球，而随意地摸取其他球，就可以保证每个球被摸到的可能性相同. 你觉得他的想法对吗? 为什么?

做一做

教科书在此呈现了一种试验方案. 在具体试验时，可以将学生所调查的生日写在纸条上并放到某个箱子中随机抽取；也可以将每个同学所调查的生日随机排列成某一适当形式（如方阵），然后再按照某种规则从中选取 50 个进行试验；还可以要求学生随机地写下自己所调查的一个生日，再汇总. 写生日时，为了节约时间，可以进行一定的简化，如可将“2 月 16 日”记为“0216”等.

如果一年按 365 天计算，那么该问题的理论概率约为 0.97. 需要说明的是，此处重点是让学生经历用试验频率估计概率的过程，并在这一过程中进一步体验随机现象的特点. 至于结果，只要能让学生感受到本问题的概率较大即可，不要求学生估计出多么准确的概率值.

想一想

通过大量重复试验，可以用频率来估计概率. 对此，学生已经有了一定的认识. 本环节旨在引导学生思考如何利用频率与概率之间的这种关系解决一些问题，感受概率与统计之间的联系.

（1）$\frac{3}{10}$. 这个问题比较简单，目的是为解决下一个问题做铺垫. 教学时，根据学生的情况也可以跳过这一问题，直接思考下面的问题.

（2）可以先将口袋中的球搅拌均匀，从中随机摸出一个，记下颜色后放回. 不断重复这个过程，共摸 n 次（n 要足够大，例如 $n\geqslant 100$），其中 m 次摸到红球. 由此可以估计出：从口袋中随机摸出一球，它是红球的概率为 $\frac{m}{n}$. 另一方面，假设口袋中有 x 个红球，从口袋中随机摸出一球，它

山东教育出版社

是红球的概率应该等于 $\frac{x}{10}$. 由 $\frac{x}{10}=\frac{m}{n}$，得 $x=\frac{10m}{n}$；白球数量为 $10-x=\frac{10(n-m)}{n}$（个）.

因此，口袋中红球和白球的数量比约为 $\frac{m}{n-m}$.

（3）答案不唯一. 比如，一个口袋中有 8 个红球和若干个白球，如果不将球倒出来数，那么你能估计出其中的白球数吗？又如，如果口袋中只有若干个白球，没有其他颜色的球，而且不将球倒出来数，那么你如何估计出其中的白球数？……教学时，应充分鼓励学生大胆提出问题，并思考解决问题的方案，增强学生发现问题、提出问题的意识和能力.

随堂练习

1. 大约有 7 个红球，3 个白球.
2. 本问题与生日问题类似，旨在让学生借助课外调查的数据再次进行有关问题的概率估计.

   6 个人中有 2 个人生肖相同的理论概率为 $1-\frac{A_{12}^{6}}{12^{6}}\approx 0.78$. 当然，这里不要求学生进行理论计算.

习题6.6

1. 小明的想法不对.因为有意识地避开第一次放进去的球，正好破坏了“每个球被摸到的可能性都相同”的条件.

山东教育出版社

问题解决

2. 你几月份过生日？和同学交流，看看 6 个同学中是否有 2 个人同月过生日. 开展调查，看看 6 个人中有 2 个人同月过生日的概率大约是多少.

通过调查，我们估计了 6 个人中有 2 个人生肖相同的概率. 要想使这种估计尽可能精确，往往需要大量地增加调查对象，而这样做既费时又费力. 能不能不用调查即可估计出这一概率呢?

我们在估计 6 个人中有 2 个人生肖相同的概率时，可以用 12 个编有号码的、大小相同的球代替 12 种不同的生肖，这样每个人的生肖都对应着一个球. 6 个人中有 2 个人生肖相同，就意味着 6 个球中有 2 个球的号码相同. 因此，可在口袋中放入这样的 12 个球，从中摸出 1 个球，记下它的号码，放回去；再从中摸出 1 个球，记下它的号码，放回去……直至摸出第 6 个球，记下第 6 个号码，为一次试验. 重复多次试验，即可估计 6 个人中有 2 个人生肖相同的概率.

上面的方法是用摸球试验代替实际调查. 类似这样的试验称为模拟试验.

议一议

除了用大小相同的12个球进行模拟试验外，你还能想出其他方法吗?

事实上，还可以用计算器产生的随机数进行模拟试验.

[1] 使用计算器产生随机数的大体步骤是：进入产生随机数的状态，输入所产生的随机数的范围，按键得出随机数.❶

❶ 不同计算器产生随机数的方法可能不同，同学们可利用自己所使用的计算器探索产生随机数的具体步骤.

2. 本题的题型与随堂练习第 2 题完全一样，其理论概率为 $1-\frac{A_{12}^{6}}{12^{6}}\approx 0.78$.

第3课时承第2课时的生肖问题，考虑能否不借助大量调查估计其概率，从而引入模拟试验.

教科书首先给出了一种模拟方案（有放回地摸编号为1~12的球），这是为了行文的方便和引入模拟试验的需要. 在具体教学时，教师可以先提出问题，引导学生思考具体方案，在学生交流的基础上再阅读教科书上的方案. 当然，学生的方案可能是多种多样的，只要学生的方案合理（注意是有放回的），就应给予肯定和鼓励.

[1] 教学中可以引导学生利用自己所使用的计算器探索产生随机数的具体步骤.

山东教育出版社 山东教育出版社

例如，利用如图所示的计算器，产生随机整数的一般步骤如下：



1. 按 ON/C 键打开计算器，并清屏.

2. 按 2ndF 7 2 键进入产生随机整数的状态.

3. 输入所产生的随机整数的范围，如随机整数的范围为1~12，则按键顺序为

1 , 1 2)

4. 按 = 键输出一个符合要求的随机整数.

5. 继续按 = 键，每次均输出一个符合要求的随机整数.

做一做

两人组成一个小组，利用计算器产生 1~12 之间的随机数，并记录下来. 每产生6个随机数为一次试验. 每组做10次试验，看看有几次试验中存在2个相同的整数. 将全班的数据集中起来，估计6个1~12之间的整数中有2个数相同的概率.

这一结果与上一课的估计一致吗?

通过试验估计随机事件发生的概率是一种很常见、很有效的方法. 我们以前所进行的抛硬币、掷骰子、摸球、转转盘、摸牌等活动，都是在进行概率试验.

对于很多简单的问题，我们借助上面的“道具”，依靠手工就可以完成. 然而，随着问题背景的逐步复杂、以及试验次数的不断增加，手工试验的不便之处就暴露出来了. 这时，我们可以借助一些计算机软件进行模拟试验. 有兴趣的同学可以查阅有关资料或上机试一试.

做一做

要求学生利用计算器实际进行模拟试验. 如果学生的计算器不具有产生随机数的功能，那么可以引导学生用其他方法进行模拟试验，如有放回地抽签等. 当然，试验结果未必具有很好的精确度，只要让学生体会到试验次数很大时结果将较为精确即可. 这里的结果未必和上一课时的估计结果一致，但要让学生体会到两者的差异只是由试验次数的差异造成的，当试验次数很大时，两者应是较为相近的.

山东教育出版社 山东教育出版社

随堂练习

1. 用计算器模拟试验估计 50 个人中有 2 个人生日相同的概率：
两人组成一个小组，利用计算器产生 1 ~ 366 之间的随机数，并记录下来．每产生 50 个随机数为一次试验．每组做 5 次试验，看看有几次试验中存在 2 个相同的整数．将全班的数据集中起来，估计 50 个 1 ~ 366 之间的整数中有 2 个数相同的概率．
2. 老师有 5 张电影票，现在要将它们随机分给班上的 5 名同学，为了保证公正，你能利用计算器帮老师作出决定吗？

习题 6.7

数学理解

1. 如果手头没有硬币，那么你能用什么办法模拟掷硬币试验？你能用计算器模拟该试验吗？做一做，看看结果如何．

问题解决

2. 某种“15 选 5”的彩票规定：从 1 ~ 15 这 15 个数字中选择 5 个（可以重复），如果其中有 2 个与所公布的中奖号码（不妨设为 1，2，6，8，8）相同，即可获得四等奖．利用计算器模拟试验估计获得四等奖的概率．
3. 老师要求化学兴趣小组的 8 名同学每人在化学元素周期表中的前 20 号元素中随机选取一种元素了解其化学性质．利用模拟试验的方法估计有两人或两人以上选择同一种化学元素的概率．

回顾与思考

1. 用树状图或表格求概率时应注意些什么？请举例说明．
2. 你能用试验的方法估计事件发生的概率吗？请举例说明．
*3. 有时通过试验的方法估计事件发生的概率有一定的难度，你能否通过模拟试验的方法估计该事件发生的概率？请举例说明．
4. 你掌握了哪些求概率的方法？请举例说明．
5. 结合本章的内容，体会概率的意义及其实用价值．
6. 用适当的方式梳理本章的知识，并与同伴进行交流．

随堂练习

1. 利用计算器模拟试验解决上一课时的生日问题，以加强前后联系．
2. 如班级有 45 人，可以利用计算器产生 5 个 1~45 之间的随机整数，学号与这 5 个随机数相同的同学将获得电影票．当然，这 5 个数中可能有重复的，此时可以利用计算器再产生几个随机数，只要最终产生 5 个不同的数即可．

习题6.7

1. 可以利用计算器进行模拟试验，如可将产生的随机数1，2分别对应硬币的正面、反面．如果计算器只有产生0~1之间随机小数的功能，那么可将0~0.5之间的随机数对应硬币的正面，而将0.5~1之间的随机数对应硬币的反面．
2. 可利用计算器产生1~15之间的随机整数进行模拟试验．
3. 略．

回顾与思考

设计“回顾与思考”的目的是让学生通过回答问题梳理本章的学习内容，加深对所学内容的理解，并使之系统化．教师应引导学生进行独立思考，然后进行充分交流，并用自己的语言回答每一个问题．

教学中应鼓励学生自主地梳理本章内容，如果学生在经验和能力上有困难，教师可以适当地加以引导．下面的教学建议供参考．

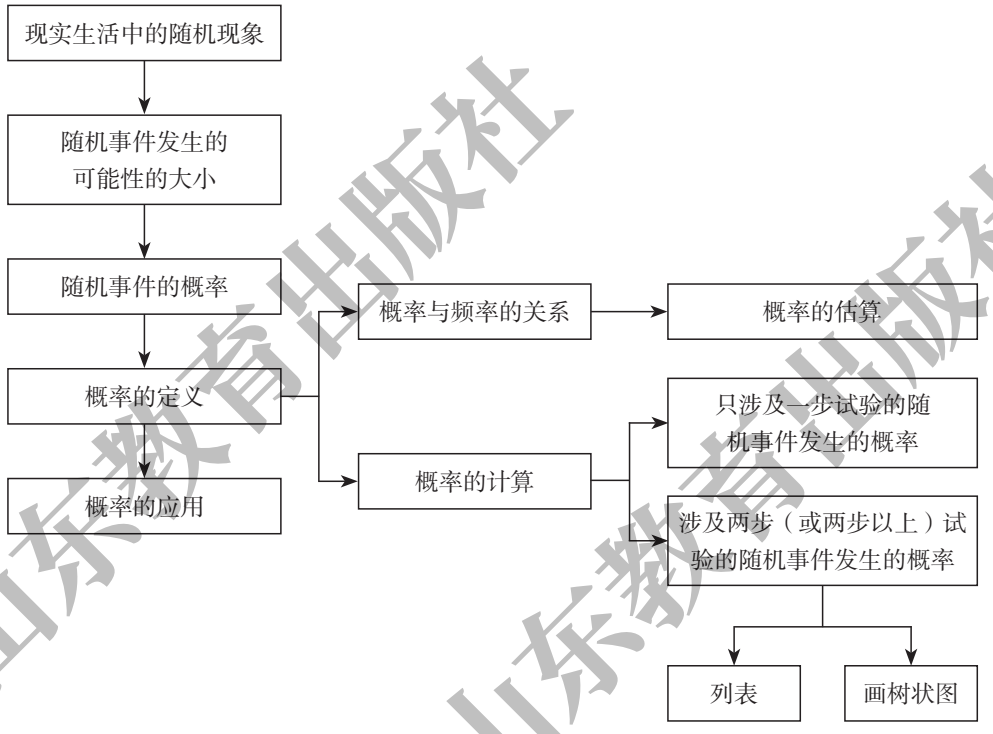
首先，教师可以引导学生以知识的先后顺序为线索，回顾本章学习的知识内容；其次，引导学生将这些知识内容进行分类、加工、选择、组合，使所学内容条理化、有序化、结构化．在此过程中，教师可以对本章内容进行提问，在学生回答的基础上，教师可以在黑板的适当位置写下相应的内容．对这些内容，教师可以让学生进行一定的解释或者举例说明．然后，教师可以进一步提问：

山东教育出版社

这些内容之间有什么关系？能否将这种关系用适当的方式表示出来？同时在黑板上进行标注，在此基础上形成全章的知识结构图.

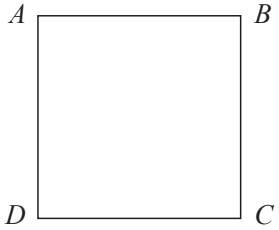
到本章为止，学生基本完成了义务教育阶段有关概率知识的学习，因此，在学生充分交流的基础上，教师可引导学生建立有关义务教育阶段概率内容的知识结构图. 教师可以鼓励学生在课外完成一份小结，谈谈学习本章或者整个义务教育阶段概率后的收获和体会，也可以谈谈自己在概率学习中的困惑及还想进一步研究的问题，教师还应该鼓励和指导学生运用所学的概率知识去解决某些实际问题，然后在班级中进行交流和汇报.

下面是一个可供参考的初中阶段概率知识结构图.



下面的例题可供参考.

例 如图，将一枚棋子依次沿正方形 $ABCD$ 的四个顶点 A，B，C，D，A，B，C，…移动. 开始时，棋子位于点 A 处；然后，根据掷骰子掷得的点数移动棋子（如掷得 1 点就移动 1 步到点 B 处，如掷得 3 点就移动 3 步到点 D 处，如掷得 6 点就移动 6 步到点 C 处……）；接着，以移动后棋子所在的位置为新的起点，再进行同样的操作. 在第二次掷骰子后，棋子回到点 A 处的概率是多少？



分析： 这是一个等可能事件的概率计算问题. 在用等可能概型的概率计算公式计算概率时，关键是计算试验中所有等可能的结果总数和所求事件中可能出现的结果数. 当可能的结果很多时，要将它们不重复、不遗漏地列出. 此时，常用画树状图或者列表的方法来帮助我们列出所有可能出现的结果.

山东教育出版社

就本题而言，要使棋子回到点 A 处，前两次掷得的点数之和必须为 4，8 或 12. 因此，所求事件中可能出现的结果数应该等于：两次掷得的点数之和为 4 的结果数+两次掷得的点数之和为 8 的结果数+两次掷得的点数之和为 12 的结果数.

解：随机地掷一枚质地均匀的骰子两次，所有可能出现的结果如下：

第一次＼第二次	1	2	3	4	5	6
1	(1，1)	(1，2)	(1，3)	(1，4)	(1，5)	(1，6)
2	(2，1)	(2，2)	(2，3)	(2，4)	(2，5)	(2，6)
3	(3，1)	(3，2)	(3，3)	(3，4)	(3，5)	(3，6)
4	(4，1)	(4，2)	(4，3)	(4，4)	(4，5)	(4，6)
5	(5，1)	(5，2)	(5，3)	(5，4)	(5，5)	(5，6)
6	(6，1)	(6，2)	(6，3)	(6，4)	(6，5)	(6，6)

总共有 36 种可能的结果，每种结果出现的可能性相同.

要使棋子回到点 A 处，两次掷得的点数之和必须为 4，8 或 12. 两次掷得的点数之和为 4 的结果有 3 种：(1，3)、(2，2)、(3，1)；两次掷得的点数之和为 8 的结果有 5 种：(2，6)、(3，5)、(4，4)、(5，3)、(6，2)；两次掷得的点数之和为 12 的结果有 1 种：(6，6). 所以，使棋子回到点 A 处的可能结果总共有 $3+5+1=9$（种）. 因此，棋子回到点 A 处的概率为 $\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$.

山东教育出版社

复习题

1. 概率大约为 $\frac{250}{2\,000}=0.125$.

2. （1）$\frac{1}{6}$；（2）$\frac{1}{6}$；（3）$\frac{1}{6}$；

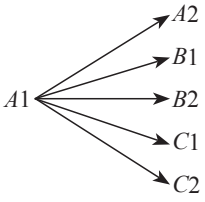
※（4）$\frac{1}{6}$.

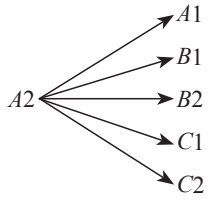
小明的说法是有道理的，这几个题具有相同的概率模型，如第（2）题只是将第（1）题的1，2，3，4，5，6换成红、蓝、黑、黄、绿、白六个区域而已. 将这三题放在一起，旨在通过多题一解，让学生体会它们是同一个数学模型，培养学生的抽象概括能力.

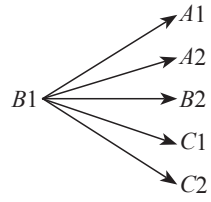
3. $\frac{1}{100}$.

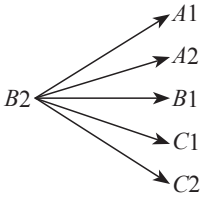
4. $\frac{1}{5}$.

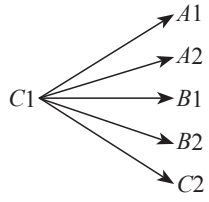
提示：将第1张画片的两部分分别记为 $A1$，$A2$，将第2张画片的两部分分别记为 $B1$，$B2$，将第3张画片的两部分分别记为 $C1$，$C2$，树状图如下：

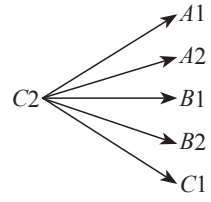












复习题

知识技能

1. 在一个有10万人的小镇，随机调查了2 000人，其中250人看某电视台的早间新闻. 在该镇随便问一个人，他看该电视台早间新闻的概率大约是多少？

2.（1）连掷两枚骰子，它们的点数相同的概率是多少？

（2）转动如图所示的转盘（转盘被分成面积相等的6个扇形）两次，两次所得的颜色相同的概率是多少？



（第2（2）题）

（3）某口袋放有编号为1~6的六个球，先从中随机地摸出一个球，将它放回口袋中，再摸一次，两次摸到的球相同的概率是多少？

※（4）利用计算器产生1~6的随机整数，连续两次随机整数相同的概率是多少？

小明认为，上面几个求概率的问题本质上是相同的. 你同意他的观点吗？

3. 一个密码锁的密码由四个数字组成，每个数字都是0~9这十个数字中的一个，只有当四个数字与所设定的密码相同时，才能将锁打开. 粗心的小明忘了中间的两个数字，他一次就能打开该锁的概率是多少？

4. 将三张大小一样而画面不同的画片从中间剪开，变成六张卡片，把它们放在一个盒子中，摇匀后，随机地取两张，求这两张恰好能拼成原来的一幅画的概率.

5. 用如图所示的两个转盘（每个转盘被分成面积相等的几个扇形）进行“配紫色”游戏，配得紫色的概率是多少？



（1） （2）

（第5题）

6.（1）一个盒子中装有1个红球、2个白球和2个蓝球，这些球除颜色外都相同，从中随机地摸出一个球，记下颜色后放回，再从中随机地摸出一个球，求两次摸到的球的颜色能配成紫色的概率；

山东教育出版社

总共有 30 种等可能的结果，其中能拼成原来的一幅画的结果有 6 种：（$A1$，$A2$）、（$A2$，$A1$）、（$B1$，$B2$）、（$B2$，$B1$）、（$C1$，$C2$）、（$C2$，$C1$），所以所求的概率为：$\frac{6}{30}=\frac{1}{5}$.

5. $\frac{1}{6}$.

6.（1）$\frac{4}{25}$；※（2）$\frac{1}{5}$.

提示：对于第（1）题，共有 25 种等可能的结果， 其中能配成紫色的结果有 4 种；对于第（2）题，共有 20 种等可能的结果，其中能配成紫色的结果有 4 种.

山东教育出版社
山东教育出版社

※（2）在上面的问题中，如果从中随机地摸出一个球，记下颜色后不放回，再从中随机地摸出一个球，那么两次摸到的球的颜色能配成紫色的概率又是多少？

数学理解

7. 抛掷一枚均匀的硬币5次，其中2次正面朝上，3次反面朝上，现再抛掷一次.

小明认为，因为硬币是均匀的，前面已经是2次正面朝上，3次反面朝上，所以这一次一定是正面朝上，即这一次正面朝上的概率为1；小凡认为，每次硬币正面朝上和反面朝上的可能性是相同的，所以这一次正面朝上的概率仍为$\frac{1}{2}$.

你同意谁的观点？你是怎么想的？

8. 对下列说法谈谈你的看法：

（1）小明的幸运数字是“6”，所以他在买彩票时选数字“6”中奖的概率比他选其他数字中奖的概率要大；

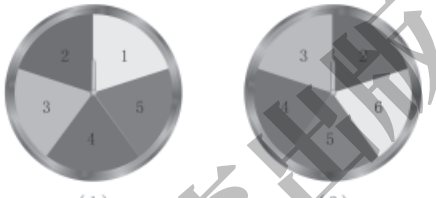
（2）某彩票在前3次的中奖号中都出现了数字“5”，小华在这次买彩票时决定不选“5”，他认为“5”在这次出现的概率肯定很小了.

9. 小明说：“掷两枚均匀的骰子，掷得两个点数6的概率应是$\frac{1}{6}$的一半，即$\frac{1}{12}$.”

你认为小明的说法正确吗？为什么？

10. 一个人的生日在周六或周日的概率是多少？

11. 小明和小亮用如图所示的两个转盘（每个转盘被分成面积相等的5个扇形）做游戏，转动两个转盘各一次.



（1） （2）

（第11题）

（1）若两次数字之和为6，7或8，则小明胜，否则小亮胜. 这个游戏对双方公平吗？说说你的理由；

（2）若两次数字之和为奇数，则小明胜；若和为偶数，则小亮胜. 这个游戏对双方公平吗？说说你的理由.

※**12.** 小明有3双黑袜子和1双白袜子（每双袜子除颜色外都相同），假设袜子不分左右，那么从中随机抽取2只恰好配成一双的概率是多少？如果袜子分左右呢？你是怎么做的？与同伴进行交流.

7. 小凡的说法是正确的.

8.（1）说法不正确. 因为选数字6和选其他数字中奖的可能性相同.

（2）说法不正确. 数字5出现的可能性和其他数字出现的可能性一样.

9. 小明的说法不正确. 因为掷两枚均匀的骰子，共有36种等可能的结果，掷得两个点数6的结果只有一种情况，故概率为$\frac{1}{36}$.

10. $\frac{2}{7}$.

11.（1）小明获胜的概率为$\frac{13}{25}$，小亮获胜的概率为$\frac{12}{25}$，游戏不公平；

（2）小明获胜的概率为$\frac{13}{25}$，小亮获胜的概率为$\frac{12}{25}$，游戏也不公平.

山东教育出版社

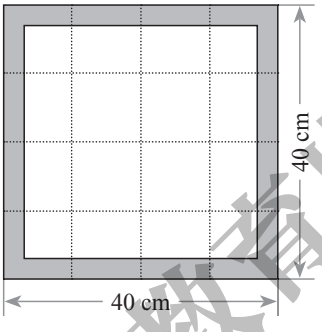
12. 列表：

	黑 1	黑 2	黑 3	黑 4	黑 5	黑 6	白 1	白 2
黑 1								
黑 2								
黑 3								
黑 4								
黑 5								
黑 6								
白 1								
白 2								

自己填表，所有可能的结果为 56 种，若不分左右，能配成一双的有 32 种，所以概率 $P=\frac{32}{56}=\frac{4}{7}$；若分左右，能配成一双的有 20 种，所以 $P=\frac{5}{14}$.

山东教育出版社
山东教育出版社

13. 本题仅要求有兴趣的学生通过具体试验获得结论，试验时要注意随意抛掷. 事实上，本题也可计算出其理论概率. 如图，当所抛圆碟的圆心在图中阴影部分时，圆碟将与地砖间的间隙相交，因此所求概率等于一块正方形地砖内的阴影部分和该正方形的面积比，结果为 $\frac{7}{16}$.



14. （1）$\frac{1}{8}$；（2）树状图.

问题解决

※**13.** 如图，地面上铺满了正方形的地砖（40 cm × 40 cm），现在向这一地面上抛掷半径为 5 cm 的圆碟，圆碟与地砖间的间隙相交的概率大约是多少？具体做做看！



（第 13 题）

联系拓广

※**14.** 连续抛掷 3 枚均匀的硬币.

（1）3 枚硬币都是正面朝上的概率是多少？

（2）你觉得求解本题时，适合用树状图还是列表格的方法？

※**15.** 小明将 36 个球放入标有 1，2，…，12 这 12 个号码的 12 个盒子中，然后抛掷 2 枚均匀的骰子，掷得的点数之和是几，就从几号盒子中摸出一个球. 为了尽快将球摸完，你觉得应该怎样放球？

15. 掷两枚质地均匀的骰子，掷得的点数和为 1，2，3，4，5，6，7，8，9，10，11，12 的概率分别为 0，$\frac{1}{36}$，$\frac{2}{36}$，$\frac{3}{36}$，$\frac{4}{36}$，$\frac{5}{36}$，$\frac{6}{36}$，$\frac{5}{36}$，$\frac{4}{36}$，$\frac{3}{36}$，$\frac{2}{36}$，$\frac{1}{36}$，因此理论上，在 1，2，3，4，5，6，7，8，9，10，11，12 号盒子中分别放 0，1，2，3，4，5，6，5，4，3，2，1 个球是最好的放法. 当然，学生也可以通过模拟试验来体会这一点.

山东教育出版社

附录　典型案例评析

用频率估计概率（第 2 课时）

设计：山东省青岛市第二实验初级中学　葛鸿芬
评析：山东省青岛市市北区教育研究发展中心　陈　怡

一、学情分析

学生的知识技能基础：在七年级学生已经初步认识了频率与概率之间的关系，并掌握了求简单的随机事件概率的一类方法. 在本章第 1 节，学生又进一步学习了求涉及两步试验随机事件概率的方法——画树状图和列表，学生对频率与概率的理解随着数学活动经验的不断积累已逐步得到发展，完全具备进一步学习较为复杂随机事件的能力和知识基础.

学生的活动经验基础：在之前的学习中，学生已经经历了一些统计活动，用频率估计简单事件的概率，在这一过程中获得了本节课所需要的一些数学活动经验. 同时，他们也积累了一定的合作学习经验，具备了一定的合作交流能力.

二、任务分析

本节课是让学生经历试验、统计等活动过程，进一步丰富活动经验，并深刻体会统计与概率的联系. 本节课的具体学习任务：估计 50 人中有 2 个人生日相同的概率，用试验频率来估计复杂事件发生的概率.

三、教学目标

1. 经历试验、统计等活动过程，积累活动经验，体会概率与统计的关系，进一步发展合作交流的意识和能力.

2. 进一步认识频率与概率的关系，加深对概率的理解；能用试验的方法估计一些随机事件发生的概率.

3. 通过有趣的生日问题的试验、统计，提高学习兴趣，形成严谨的科学态度.

四、教学重、难点

本节课的重点是用试验的方法估计一些复杂随机事件发生的概率.

本节课的难点是试验方案的设计.

五、教学过程

【第一环节】课前准备，收集数据（提前布置）

1. 内容

（1）以小组为单位，每组调查 50 个不同人的生日，由组长分工.

山东教育出版社

除了调查自己周围的人，每个小组可以根据自己组内同学的兴趣爱好，调查部分不同领域、不同年龄段、不同国籍的名人. 例如，第一组的 50 个数据中，有 10 个来自体育名人，可命名为“体育组”；第二组的 50 个数据中，有 10 个来自艺术家，命名为“艺术组”；第三组的 50 个数据中，有 8 个来自政治名人，命名为“政治名人组”；如此等等.

（2）每组组长负责汇总、记录本组数据，数学课代表以方便提取使用为原则对全班的数据进行统计.

（3）以小组为单位，课前初步讨论对“50 个人中，就很可能有 2 个人的生日相同”这一说法的看法.

2. 目的

收集数据，为本节课的学习提供素材. 让学生调查不同领域、不同年龄段、不同国籍的名人的生日，既可以培养学生良好的价值观，同时在时空穿越中，将自己的生日与名人的比较，又可以增加本课的趣味性，必能极大地调动全体学生的参与热情. 对于问题（2）（3），可以启发学生思考：怎样做可以使数据的统计更有效率？统计结果更便于使用？以此突出课堂教学的重点，切实提高课堂效率.

3. 预期

在课堂中运用源于学生实际调查的真实数据展开教学，必将极大地激发学生学习数学的兴趣，调动他们学习的积极性与主动性. 学生课外收集的数据有可能来自相同的人，因此调查时应要求写上被调查人的姓名，防止重复. 教师还应关注学生调查数据来源的广泛性，如学生会调查周围的亲友，或者在马路、商场等不同场所调查，或者运用网络技术，也不排除有的学生会自己随意写一个生日. 课上请组长展示数据的同时，要求说明数据的来源情况，此时教师应给予正面具体评价，如“你的数据来源很丰富”“你能充分利用信息技术”，甚至“你随意写的一个生日说明你意识到生日的随机性”等.

【第二环节】提出问题，认知冲突

1. 内容

教师提出问题串：

（1）400 个人中，一定有生日相同（可以不同年）的人吗？

（2）300个人中，一定有生日相同（可以不同年）的人吗？

（3）有人说：“50 个人中，就很可能有2个人的生日相同.”你同意这种说法吗？

2. 目的

生日问题紧紧贴近学生生活，迅速吸引学生的注意力，极大地调动了学生的积极性和参与意识. 问题（3）的提出与学生的直觉形成强烈认知冲突，激发学生探究的欲望.

3. 预期

对于问题（1），学生会肯定地回答“一定存在”. 能力比较强的学生会用“抽屉原理”加以解释. 例如，有的学生会给出如下的解释：“一年最多 366 天，400 个人中一定会出现至少 2 个人出生在同一天，相当于 400 个物品放到 366 个抽屉里，一定至少有 2 个物品放在同一抽屉里. 抽屉原理：把 m 个物品任意放进 n 个空抽屉里（$m>n$），那么一定有一个抽

山东教育出版社 山东教育出版社

屉中放进了至少 2 个物品.”对于能用“抽屉原理”解释的学生，教师应给予充分的表扬.

对于问题（2），学生会给出“不一定”的答案，此时学生凭直觉会断定可能性较大.

对于问题（3），学生凭直觉会认为“不太可能”，与问题中的观点形成强烈的反差. 由于学生不理解这一事件的意义，因此会出现两种思维的偏差：① 如果有 2 个人在 1 月 1 日出生，3 个人在 1 月 2 日出生，那么有的学生会认为事件的概率为 $\frac{5}{366}$ 或者 $\frac{5}{50}$；② 还有学生会认为事件的概率为 $\frac{50}{366}$. 对于观点 ①，教师应明确“50 个人中，有 2 个人的生日相同”这一事件，重点在“生日是否相同”，而不在“有多少人生日相同”；至于持观点 ② 的学生，其潜意识中误认为所有可能的结果是 366 种，而生日相同的结果是 50 种. 基于课前组内的初步交流与讨论，此时教师不要急于否定学生中的错误观点，而应给予其他学生表达自己看法的机会，让学生在质疑与辩论中加深对这一事件的理解. 如果没有学生质疑，教师应追问：“这一问题中，每个人的生日有多少种等可能的结果？50 个人的生日共有多少种等可能结果？是 366 种吗？”通过教师的点拨与引导，纠正学生对这一事件理解上的偏差，初步感悟这一事件的复杂性，在学生困顿与迷茫中，顺势引出下一环节.

【第三环节】交流碰撞，明确方法

1. 内容

“50 个人中，有2 个人的生日相同”的可能性大吗？怎样说明你的观点是否正确？与同伴交流.

2. 目的

通过前面环节的铺垫，在此以开放性的问题促进学生的进一步思考，在交流与碰撞中，水到渠成地使学生感悟到“用试验的方法估计这一复杂随机事件的概率”的必要性.

3. 预期

学生在交流中，会回顾所学过的求概率的方法，出现两种可能情况：（1）有的学生会试图用画树状图或者列表的方式求概率的理论值，但很快便感受到其复杂性而终止尝试.（2）还有的学生会先从身边寻找证据：自己家人中是否有生日相同的？自己现在所在班级中是否有生日相同的？自己小学所在班级中是否有生日相同的？教师应给予学生充足的时间进行交流和展示. 对于这两种不同的思路，教师都应给予积极的引导性评价. 例如，“两类同学都能积极思考，联系以前的知识，第一类同学独具慧眼发现了这一事件的本质是等可能事件，第二类同学认识到概率与统计之间的关系”. 在此基础上，教师还应继续追问：通过对家人和小学同学的调查，你能由此确定“50个人中有2个人生日相同”的概率吗？如何得到较为准确的结论？在教师的引导下，学生顺理成章地想到需要通过大量重复试验，用频率来估计“50 个人中有 2 个人生日相同”的概率，顺利进入下一环节.

【第四环节】合作交流，设计方案

1. 内容

请你尝试设计试验方案，估计“50 个人中有 2 个人生日相同”的概率，并与同伴交流.

山东教育出版社

2. 目的

通过设计方案，将上一环节的讨论进一步深化，加深学生对用试验频率估计“50 个人中有2个人生日相同”的概率的理解.

3. 预期

在这一环节中，教师要鼓励学生进行设计和表达，在交流与讨论中完善试验方案. 基于课前学生的调查、讨论和交流，以及前几个环节的学习，学生已经理解了这一事件的本质，试验方案也已形成，表现的时刻终于到来，因此学生积极性会很高. 教师要引导学生反思每种方案的注意事项及其优劣，加深学生对设计方案的理解，突破难点.

学生可能提出以下设计方案（学生展示自己设计的方案时，当即操作一组试验，既可以发现问题，又可以感受方法的优劣）：

方案一：在班级课堂里展开现场调查，提问小学不在同一个班级的同学，看他小学所在的班级中是否有生日相同的同学，他家里亲友是否有生日相同的人.（优点：便于操作；缺点：有的学生不知道小学同学的生日）

方案二：调查全校各个班级（或者历届各个班级）是否有生日相同的情况，并记录.（教师应在课前准备全校各个班级及历届各个班级的数据，提高课堂效率，加大试验数据，提高准确度）

方案三：从50 个同学手里随机抽取一个调查数据，组成50 个数据.

方案四：全班分成10 个小组，把每个小组的调查数据放在一起，打乱次序，随机抽取5 个，然后10 个小组的结果放在一起组成50 个数据.

方案五：将每个同学调查的生日随机排列成一数阵，然后按某一规则从中选取50 个数据进行试验（如排成25 × 20 的数阵，从某行某列开始，自左而右、自上而下，选出50个数）.

方案六：把全班每个同学所调查的数据写在纸条上，放在箱子里随机抽取.

方案七：将每个同学调查的10 个生日分别写在10 张纸条上，放在箱子里随机抽取.

方案八：把一年366 天用366 个数字代替，写在366 张纸条上，放在箱子里随机抽取.

方案九：每个同学随意写一个生日.

方案三至方案七均是充分利用学生的调查数据，学生的理解随着不同方案设计的展示而逐渐加深，如用频率估计概率需要在大量试验的情况下，所以需要较多数据. 展示方案二时，学生可能会认为被选过的同学手中的数据在下一组试验中不能再被选用，这样数据就会很有限. 此时，教师要引导学生充分表达自己的见解. 不排除随着各种不同方案的展示与交流，学生也可能会想到方案八和方案九. 如果有学生提出了这两种方案，那么教师应给予导向性评价，如“思维很深刻，发现了这一事件的本质，操作简单”等；如果没有学生提出这两种方案，那么教师可以在下一环节继续引导学生思考.

【第五环节】分组合作，统计数据

1. 内容

（1）每个组长到讲台上展示自己小组调查的数据，记录其中有无2 个人的生日相同，有则记为“1”，无则记为“0”；每统计50 个被调查人的生日为一次试验，重复多次试验.

山东教育出版社

（2）教师展示提前统计的本校历届各个班级的学生生日的信息.

（3）统计试验的总次数 m，及记为“1”的次数 n，据此估计“50 个人中有 2 个人生日相同”的概率.

（4）你还有其他比较简便的方法来估计“50 个人中有 2 个人生日相同”的概率吗?

2. 目的

给小组搭建展示的平台，展现学生不同的记录方式，在对比中提升统计的水平和小组合作的水平. 通过具体收集数据、试验、统计结果等过程，丰富学生的数学活动经验，使学生对用频率估计概率这一方法有更直观的感知，加深对概率的理解. 同时使学生感受到生日相同的概率比想象的要大得多. 问题（4）旨在引导学生进一步思考更加简便的操作方法，渗透模拟试验的想法.

3. 预期

有了前面的铺垫，本环节的教学相对比较顺利，学生的参与热情高涨. 对于小组展示的不同记录数据的方式，学生会自觉地在对比中判断优劣，潜移默化地提升自己的统计水平. 同时，教师围绕教学重点针对不同情况启发学生共同想办法提高效率. 比如，为了节约时间，生日表示方式简化成四位数（如“0217”），将相同月份写在同一行或同一列；课代表可以把数据提前统计在 EXCEL 表中. 教师应适时评价学生的参与程度、与同学合作交流的情况、对概率的理解是否全面等，并对活动过程中学生的思维方式进行及时指导.

教师提前统计本校历届各个班级学生的生日信息，通过真实数据，使学生有更加直观的感知，同时也可以增加试验的次数，提高课堂效率. 随着试验次数的增加，学生强烈感受到试验结果与原来想象的巨大反差. 教师也可将试验数据输入 EXCEL 表格，转化成频率折线统计图，展示频率的大小随试验次数的增加而变化的情况，发现频率的稳定性，同时估算出概率.

对于问题（4），有了前面的层层铺垫，学生可能会想到类似上一环节中的方案八或者方案九. 教师应充分肯定学生的模型意识，把实际调查转化成了模拟试验. 对这个问题的思考也为下一环节从生活中发现问题进行了方法上的铺垫.

【第六环节】方法提炼，变式探究

1. 内容

（1）同学们设计的试验方案可以分为几类？为什么？谈谈你的看法.

（2）在之前的概率学习中，用过类似的方法吗?

（3）请你设计一个方案，估计 6 个人中有 2 个人星座相同的概率.

2. 目的

这一环节起到承上启下的作用. 问题（1）和问题（2）逐步引导学生感悟模型思想. 问题（3）将生日问题替换成星座问题，既可以巩固对方案设计的认识和理解，又能深刻体会方法的迁移，为下一环节做好铺垫.

3. 预期

对于问题（1），学生能较为顺利地将设计的方案分成两大类：一类是真实调查，一类

山东教育出版社

是模拟试验.

对于问题（2），学生应能联想到掷骰子、转转盘、摸球、摸纸牌等游戏，认识这些游戏的共同之处.

对于问题（3），教师应鼓励学生勇于表达，如有不完善之处，不应急于告知答案，而应请其他同学补充完善.

【第七环节】方法迁移，类比应用

1. 内容

（1）一个口袋中有 3 个红球、7 个白球，这些球除颜色外都相同. 从口袋中随机摸出一个球，这个球是红球的概率是多少?

（2）将问题（1）口袋中的球搅拌均匀，从中随机摸出一个球，记下颜色并放回. 不断重复这一过程，共摸了 100 次球，大约会有多少次是红球？多少次是白球?

（3）老师有一个不透明的盒子，盒中有红球、白球共 10 个，这些球除颜色外都相同. 如果不将球倒出来数，如何估计其中红球和白球的比例呢？请你帮助老师设计一个方案.

（4）你还能提出并解决哪些与问题（3）类似的问题？与同伴交流.

2. 目的

这一环节将复杂的生日问题换成一个简单的摸球试验，呈现 4 个不同梯度的问题，逐层递进. 问题（1）和问题（2）引导学生再次体会概率与频率之间的关系，进一步感受统计推断的合理性. 问题（3）通过“摸球试验”与“生日相同的试验”类比，体会两者之间方法的联系，应用频率与概率的关系求解比例或者数量问题，培养学生知识和方法的迁移能力. 问题（4）引导学生将此类方法进行延伸，进一步发展学生发现问题、提出问题的意识和能力，以及用统计概率解决问题的能力.

3. 预期

对于问题（1）和问题（2），学生能顺利得出正确结论，从而为问题（3）的解决扫清障碍，奠定基础. 如有时间，问题（2）应让学生当堂试验验证，在试验中进一步体验统计推断的合理性. 对于问题（3），学生会用字母表示比例，同时受前面环节的影响，学生会自然而然地想到用统计的方法估计红球和白球的比例. 对于问题（4），学生一般能想到可以估计数量. 比如，一个口袋中有 8 个红球和若干个白球，如果不将球倒出来数，那么你能估计出其中的白球数吗？又如，如果口袋中只有若干个白球，没有其他颜色的球，而且不将球倒出来数，那么你如何估计出其中的白球数？……如果学生缺乏思路，教师可适当进行点拨.

【第八环节】归纳小结，思维升华

1. 内容

师生共同总结本节内容：

（1）请从知识、方法角度谈谈你的收获.

（2）你的困惑是什么？你还想继续研究什么问题?

山东教育出版社 山东教育出版社

（3）哪位同学的表现值得你学习或让你惊喜？

2. 目的

帮助学生养成归纳总结的良好习惯，培养反思意识，在归纳总结中加深对知识和方法的理解与感悟. 问题（2）给学有余力的学生搭建平台，激发学生继续思考，大胆探索. 问题（3）鼓励学生善于学习他人的优点，勇于表达自己的观点.

3. 预期

学生从知识、方法、学习品质等不同角度畅谈自己的收获和感想.

对于问题（1），学生会总结如下：① 本节课经历了猜想、调查、试验、统计结果、合作交流的过程，知道了用大量重复试验的频率来估计一些复杂随机事件的概率. ② 当试验次数较多时，试验频率稳定于理论概率. ③ 知道了“直觉并不可靠”，本节“50 人中有 2 人生日相同”的概率竟高达 0.97，这有违我们的“常识”. ④ 生活中有很多看似巧合实则平凡的现象，如果我们用科学的方法研究一下其概率，就会“透过现象看到本质”.

对于问题（2），部分学有余力的学生会继续研究模拟试验，或者“假如不知道总量，如何用试验的方法估计总量？”. 对于学生的表现，教师应从不同角度予以具体的引导性评价.

【第九环节】布置作业，课后巩固

1. 教科书习题.

*2. 老师有一个不透明的盒子，盒中有一些球，这些球除颜色外都相同. 如果不将球倒出来数，如何估计盒子中球的个数？请你帮助老师设计一个方案.（长期）

**3. 写一篇有关生日相同概率的小文章，谈谈你的体会和发现.（长期）

**4. 利用树状图求 6 个人中有两个人生肖相同的概率.（长期）

【第十环节】课后探究，拓展延伸

本环节对学生的思维要求较高，仅供部分学有余力的学生阅读，并非对全体学生的要求.

1. 内容

（1）求 6 个人中有 2 个人生肖相同的概率.

先求出“6 个人生肖都不相同”的概率 $P(A)$：要使 6 个人的生肖都不相同，则第一个人的生肖有 12 种可能，第二个人的生肖有 11 种可能……第六个人的生肖有 7 种可能.

$$P(A)=\frac{12\times11\times10\times9\times8\times7}{12\times12\times12\times12\times12\times12}\approx0.22.$$

因此，“6 个人中有 2 个人生肖相同”的概率为：$P=1-P(A)\approx1-0.22=0.78$.

（2）求 60 个人中有 2 个人生日相同的概率（一年按 365 天计算）.

先求出“60 个人中生日都不相同”的概率 $P(A)$：要使 60 个人的生日都不相同，则第一个人的生日有 365 种可能，第二个人的生日有 364 种可能……第60 个人的生日有 306 种可能.

$$P(A)=\frac{365\times364\times363\times\cdots\times306}{\underbrace{365\times365\times365\times\cdots\times365}_{60\text{个}}}\approx 0.005\,9.$$

山东教育出版社

因此，“60 个人中有2个人生日相同”的概率为：$P=1-P(A)\approx 1-0.005\ 9=0.994\ 1$.

2. 目的

巩固学生应用知识的能力，提高探究能力，培养思维的深刻性.

3. 预期

学生会针对此问题展开多种尝试，教师不必介入，可以在学生需要时适时点拨引导，培养学生勇于探究的欲望和能力.

六、案例评析

本教学设计对教学内容的把握和处理，基本符合教科书的编写意图. 葛老师基于自身的教学实践，提供了丰富的学情资源，从而保证了本设计的可操作性. 以下三个方面可借鉴价值比较强，有利于使用者到自己的课堂中进行更好的创新移植.

1. 立足《标准》要求，指导方法，提升能力. 概率这一概念是建立在频率这一统计量稳定性基础之上的，怎样让学生在有限的教学时空中，体会到随机现象的不确定性，以及所呈现的规律性？只有通过大量重复试验，才能发现试验频率的稳定性. 我们看到，葛老师一方面注意对统计的方法和呈现方式进行指导，不同领域、不同年龄段，甚至不同国籍人的生日调查都在教师的设计考量之中；另一方面，葛老师借助将设计方案分类，适时地提炼方法、变式探究、模型类比，使教学环节过渡自然、衔接巧妙，帮助学生感悟概率的模型思想，还为学有余力的学生课后探究做好预设，将研究延伸到课下更广阔的天地中. 整个设计重视教科书的编写意图，又不拘泥于教科书的既定内容.

2. 以学情为先导，推行开放的研究性教学. 本设计引导学生想方法、定标准、做试验、归纳结论，教师注重指导不同层次学生积极参与试验活动，留有足够的时间让学生自主学习、思考；教师总是让学生在开放的情境下先思考、先表现，然后再根据学情进行动态的调整，从而帮助学生学会思考，积累数学活动经验. 著名数学教育家波利亚指出：“学习任何东西，最好的途径是自己去发现.”这正是本节课葛老师教学的着力点.

3. 以评价促进学生发展. 葛老师的教学评价注重针对性、激励性、发展性，能将评价与学习态度、学习方法等有机结合，让学生对自主探究有信心、有方向、有方法.

本节课内容较多，如何既保证学生有充分的思考、活动时间，又能务实高效地完成教学任务，时间分配是个难题，需要老师在研究学生和内容取舍上进行更多的思考.

山东教育出版社

综合与实践　哪种方式更合算

一、教学目标

1. 在具体问题中感受学期望的意义，初步体会如何评判某件事情是否合算.

2. 进一步体会概率与统计的联系.

3. 经历问题解决的活动过程，并在活动中进一步发展合作交流的意识与能力，增强数学应用意识和能力.

二、设计思路

经过前面的学习，学生已经研究了随机事件及其概率的概念，掌握了随机事件发生的概率的一些计算方法（包括理论计算和试验估算等），并通过具体的问题情境和实践活动等，体会了概率的应用，而且已经基本完成了初中阶段概率有关知识点的学习，感受到概率在现实生活中的广泛应用.

概率与统计是紧密联系的，它们互为基础. 概率这一概念是建立在频率这一统计量的稳定性的基础之上；而统计又离不开概率的理论支撑，统计推断、估计、假设检验等统计方法的合理性、科学性都依赖于概率理论的严密性. 为此，在本综合与实践的设计中，我们力图体现两者的联系. 此外，在初中阶段，由于学生所学知识的局限，综合运用统计与概率的知识和方法所能够解决的实际问题并不复杂，因此我们以日常生活中较为常见的活动（现象）作为学习的素材，借助数学期望的相关思想和素材设计统计与概率的综合应用内容，以帮助学生更好地理解统计与概率的思想，并切实感受它们在生活中的广泛应用. 也许有人会担心数学期望超出了初中学生的学力，但我们认为，数学期望从思维要求上来讲并未超出初中学生的学力水平，很多国家的初中阶段学习都包含数学期望这一概念. 当然，为了促进学生的理解，我们应该进行恰当的定位，采用初中生能理解的方式将其内容进行调整和变通.

基于以上思考，教科书中具体设计了以下内容：通过试验初步体会数学期望的意义，并利用数学期望解决实际问题. 在本综合与实践的学习中，学生不仅能初步体会数学期望的意义，综合运用统计概率的内容解决实际问题，还能复习统计与概率的相关知识，进一步体会频率与概率之间的关系，并初步体会数据的随机性，加深对概率意义及统计思维的理解.

三、教学建议

1. 注重学生对概率意义的理解.

教科书的转盘试验让学生经历小组试验、数据汇总、分析等活动过程，获得每种结果出现的频数、频率，以及每转动一次转盘所获得购物券金额的平均数，并引导学生从频率稳定于概率的角度得到平均收益的计算公式，从而初步理解数学期望的含义. 而学生能否对数学期望的含义有正确的理解，取决于对概率的统计定义（即用频率估计概率）的掌握程度. 教学时建议教师帮助学生回顾频率的稳定性与概率的关系，加深对概率意义的理解，这也将有助于学生对数学期望含义的正确理解.

2. 注重学生的活动，特别是小组合作的活动.

山东教育出版社

本综合与实践中，在探索摸奖的平均收益的过程中，学生都必须展开一定的实际操作活动或研讨活动. 这些活动的展开往往非一人之力所能完成，需要小组的合作；而对活动结果的评价也是因人而异的. 通过充分的研讨、广泛的交流，必能扩大学生的思维视角，深化学生对知识的理解. 因此，教师应尽量给学生提供实践活动的机会，设计一些活动或选择某些案例，要求学生亲自实践，并在活动的过程中引导学生逐步体会统计与概率的基本思想，同时运用所学知识、方法解决实际问题. 另外，还要特别加强小组之间合作活动的组织与教学，在合作交流中，通过相互帮助，让所有学生都得到发展.

四、评价建议

1. 关注学生对统计概率知识意义的理解与应用.

本综合与实践主要是梳理初中阶段统计与概率的相关内容，新的知识只有数学期望，但教科书根本没有出现有关数学期望的概念，而是以问题和案例的形式逐渐渗透数学期望的含义，以此帮助学生更好地理解统计与概率的思想，同时综合运用统计概率解决实际问题. 因此，对学生评价时，应更为关注学生对数学期望意义的理解以及运用它解决实际问题的能力. 比如，对于现实生活中的某一街头骗术，能否运用所学知识进行揭露. 因此，教学中可要求学生举例说明自己对问题的理解.

2. 提倡运用定性的方法对学生进行评价.

鉴于本综合与实践的特点，在评价时更应注重定性的方法. 教师在日常教学中应多观察学生，特别是他们在小组中的表现，及时记录学生的独特想法，这不仅有利于教师全面地评价学生，而且使得评价与教学成为一个有机的整体. 教师还应鼓励学生建立自己的成长记录，记录印象最为深刻的一次活动，在学习中遇到的困难，需要改进的地方等.

对学生活动结果的评价可采用四个等级：A，B，C，D. 其分别对应：优秀、良好、中等、基本合格. 一般情况下，教学中尽量不要给予学生不合格的评价，除非学生的成绩与 D 级水平有明显差异. 具体等级表现描述如下，供参考.

D 等级：仅仅是按照老师的要求去做，得到一些数据、获得一些结论；没有自己解决问题的方法，不能真正参与到同伴的活动过程中；汇总数据、分析总结时仅仅停留在对结果的表面认识，基本不能理解数学期望的含义.

C 等级：能够比较准确地完成规定的试验步骤，比较主动地和同伴一起分工合作，能够完成基本的数据收集、汇总任务；活动积极性较高；获得的活动结果基本正确；提供了解释结果正确性的一些依据，能够基本理解数学期望的含义.

B 等级：对试验及讨论的问题有比较准确、完整的理解，有自己的想法和见解，积极主动地从事各项活动，能根据试验的过程与结果得出计算数学期望的方法，还能够向同伴解释自己的想法，听取别人的建议和意见等；获得正确的试验结果；提供了解释结果正确性的论述过程，如对概率意义的正确理解等.

A 等级：在 B 级基础上，善于挑战自我，主动寻求解决问题的优化方案；能够指出他人方法中的不合理之处，并主动帮助同学，给出改进建议；能够在对数学期望的理解和解释上有独特的想法；能够对试验的过程、结果进行较为深刻的反思，并能提出新的问题和建议等.

山东教育出版社

综合与实践

哪种方式更合算

也许你曾被大幅的彩票广告所吸引，也许你曾经历过各种摇奖促销活动. 你研究过获得各种奖项的可能性吗？你想知道每一次活动的平均收益吗？

让我们一起去研究其中的奥秘吧！

某商场为了吸引顾客，设立了一个可以自由转动的转盘（如图 1，转盘被等分为 20 份），并规定：顾客每购买 100 元的商品，就能获得一次转动转盘的机会. 如果转盘停止后，指针正好对准红色、黄色、绿色区域，那么顾客就可以分别获得 100 元、50 元、20 元的购物券，凭购物券可以在该商场继续购物. 如果顾客不愿意转转盘，那么可以直接获得购物券 10 元. 转转盘和直接获得购物券，你认为哪种方式对顾客更合算？



图 1

做一做

当你遇到复杂的问题无法做出判断时，不妨先观察一下别人的结果，积累点经验. 因此可以在商场多观察几次. 当然，我们也可以模拟商场的情景用试验的方式获得经验.

（1）组成合作小组，仿照图 1 制作一个转盘，用试验的方法（每组试验 100 次）分别求出获得 100 元、50 元、20 元购物券以及未获得购物券的频率，并据此估计每转动一次转盘所获得购物券金额的平均数. 看看转转盘和直接获得购物券，哪种方式更合算.

（2）全班交流，看看各小组的结论是否一致，并将各组的数据汇总，计算每转动一次转盘所获购物券金额的平均数.

在初中阶段，由于学生所学知识的局限，综合运用统计与概率的知识和方法所能够解决的实际问题并不复杂，因此应当以日常生活中较为常见的活动（现象）作为学习的素材，比如各种摸奖活动. 通过以前的学习，学生可能已经认识到这些活动中获胜或获奖的可能性，但还未必具有正确的评判能力和决策能力，应该给予学生一定的工具，让学生评判某项活动是否“合算”. 因此，我们借助数学期望的相关内容来设计本综合与实践的内容. 通过转盘等情境，力图使学生在具体情境中感受“合算”，并掌握一定的判断方法，提高决策能力，从而对现实生活中的一些类似的现象进行评判. 在此过程中进一步巩固学生对统计概率相关内容的理解，体会统计与概率的联系，加深对数学实用价值的认识，同时激发学习兴趣.

在素材选取时，教科书注意了知识的前后联系，选择了一个学生以前研究的转盘情境，以降低学生问题解决的难度. 在问题解决的过程中，考虑到学生的基础，此处先让学生分析哪种方式更合算，再通过试验进行验证.

从一次转转盘的情况来看，会出现四种不同的结果：得到 100 元、50 元、20 元、0 元，且四种情况出现的概率分别为 5%、10%、20%、65%. 是赚还是赔，这就需要看多次转转盘之后的平均收益了.

做一做

从转盘情境入手，让学生经历小组试验、数据汇总、分析等统计活动过程，获得每种结果出现

山东教育出版社

的频数、频率，以及每转动一次转盘的平均收益，并引导学生从频率稳定于概率的角度得到平均收益的计算公式，从而初步理解数学期望的含义.

事件	频数	频率
转到红色（得到100 元）	n_1	f_1
转到黄色（得到50 元）	n_2	f_2
转到绿色（得到20元）	n_3	f_3
转到白色（得到0 元）	n_4	f_4

说明：在教学过程中，上表中的字母可用试验中的具体数字代替，结合具体数字来进行下面的说明.

每次转转盘的平均收益：

$$\frac{100\times n_1+50\times n_2+20\times n_3+0\times n_4}{n_1+n_2+n_3+n_4}=100\times f_1+50\times f_2+20\times f_3+0\times f_4\text{（元）}.$$

根据以上的试验及分析，学生可以得出结论：随着转转盘次数的增加，平均每次可以获得 14 元左右，比直接获得 10 元购物券更合算. 同时，也让学生初步体会：期望值不是“在一次试验中得到的收益”，而是“在相同条件下多次试验的平均收益”.

山东教育出版社
山东教育出版社

想一想

当然，我们不能停留于试验，还希望不借助试验也能求出每转动一次转盘所获得购物券金额的平均数.

（1）影响每转动一次转盘所获得购物券金额的平均数的因素有哪些？与同伴交流.

（2）将图 1 的转盘改成图 2 的转盘，如果转盘停止后，指针正好对准红色、黄色、绿色区域，那么顾客仍分别获得 100 元、50 元、20 元的购物券. 与图 1 的转盘相比，用哪个转盘对顾客更合算？

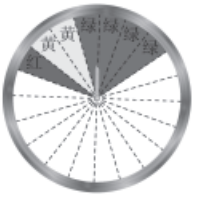


图 2

（3）不用试验的方法，求出每转动一次转盘（如图 1）所获得的奖券金额的平均数，与同伴交流.

做一做

如图3，转盘被均匀分为 37 格，分别标以 0~36 这 37个数字，且所有写有偶数（0 除外）的格子都涂成了红色，写有奇数的格子都涂成了蓝色，而 0 所在的格子被涂成了绿色. 游戏者可以自由下赌注. 例如，游戏者所下赌注为 1 元，若最后指针所指的格子与所押的格子颜色相同，则返还赌本并奖励 1 元；若颜色相异，则没收赌本；若最后指针指向“0”，则没收赌本而奖励 0.5 元. 你认为该游戏对游戏者有利吗？转动多次后，游戏者平均每次将获利或损失多少元？

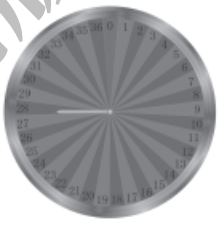


图 3

议一议

生活中，你还见过哪些与概率有关活动，与同伴交流.

想一想

（1）学生经过“做一做”的试验及分析，不难得到影响每转动一次转盘所获得购物券金额的平均数的因素主要有两个：转到红色、黄色、绿色、白色区域的概率；转到每种颜色所得的购物券的金额. 鼓励学生在试验的基础上独立思考，并与同伴进行交流.

（2）通过转盘的“变式”，让学生进一步思考影响所获购物券金额的平均数的因素，同时为学生得出理论计算方法打下基础. 由于转到红色、黄色、绿色、白色区域的概率及转到每种颜色所得的购物券的金额均没有变化，因此用图 2 的转盘和图1 的转盘，对顾客而言结果应是一样的.

（3）当转动转盘次数很多时，转到红色、黄色、绿色、白色区域的频率将分别稳定于 5%，10%，20%，65%. 也就是说，随着试验次数的增加，转动一次转盘所获得的平均收益将稳定于 $100\times5\%+50\times10\%+20\times20\%+0\times65\%=14$（元）. 每转动一次图2的转盘，所得的平均收益与图1的转盘是一致的.

在学生用试验和以上的分析方法获得了结论后，还可以引导学生这样思考问题：转动一次转盘，转到红色、黄色、绿色、白色区域的概率分别为 5%，10%，20%，65%. 如果转动很多次的话，那么平均每 100 次有 5 次转到红色区域、10 次转到黄色区域、20 次转到绿色区域、65 次转到白色区域. 因此，每转一次转盘的平均收益为：

$$\frac{100\times5+50\times10+20\times20+0\times65}{100}=14\text{（元）}.$$

这种理解方式不仅能够直观、方便地得到数学期望值，而且能帮助学生更好地理解概率的意义.

山东教育出版社

做一做

这个游戏具有很大的欺骗性，实际上这个游戏对游戏者不利. 显然，游戏者一般是不会押“0”的；设游戏者所下赌注为 1 元，如果押的是奇数格子（蓝色格子），那么他每次的平均收益是 $(2-1)\times\frac{18}{37}-1\times\frac{18}{37}-0.5\times\frac{1}{37}=-\frac{1}{74}$（元）；如果押的是非 0 偶数格子（红色格子），那么他每次的平均收益也是 $-\frac{1}{74}$ 元.

山东教育出版社
山东教育出版社

做一做

选择生活中的某一活动（如彩票、摇奖或街头摸球游戏等），利用概率统计知识揭示其中的规律，并撰写一份研究报告，在全班进行交流.

习题

照照攘攘的集市上，某人在设摊“摸彩”. 只见他手拿一袋，内装大小、形状、质量完全相同的4个绿球和4个红球. 每次让顾客“免费”从袋中摸出4个球，输赢的规则是：

所摸球的颜色	顾客的收益
4个全红	得5元
3红1绿	得2元
2红2绿	得−3元
1红3绿	得2元
4个全绿	得5元

你愿意参加这一“免费”的摸球活动吗？说说你的看法.

做一做

（1）当我们说某个决策的好坏时，是用所获的平均收益而不是某一次的收益来衡量的. 若选择了转转盘，由于随机性，每次试验的结果都是不确定的，完全可能什么都得不到，比直接获得10元购物券要差. 事实上，在随机现象中，任何的决策都不能保证我们一定赢，这是随机现象本身决定的. 当然，也有可能得到100元、50元或20元购物券. 如果有大量人来选择，选择转转盘的人的平均收益要比选择直接获得10元购物券的人的平均收益高. 因此，我们选择转转盘的决策是有意义的.

（2）由于随机性，每次试验的结果都是不确定的，即使试验的次数相同，最后得到的结果也可能互不相同. 但由于随机事件频率的稳定性，随着试验次数的增加，平均收益将稳定于14元. 另外，当你转转盘时，实际收益只可能是100元、50元、20元、0元中的一种，不会出现14元，14这一数字只在决策中起作用.

习题

经过计算知，这五种情况出现的概率如下：P（4个全红）$=\frac{1}{70}$，P（3红1绿）$=\frac{16}{70}$，P（2红2绿）$=\frac{36}{70}$，P（1红3绿）$=\frac{16}{70}$，P（4个全绿）$=\frac{1}{70}$.

平均收益$=5\times\frac{1}{70}+2\times\frac{16}{70}-3\times\frac{36}{70}+2\times\frac{16}{70}+5\times\frac{1}{70}=-\frac{17}{35}$（元）.

本题旨在让学生通过一定次数的试验，感受到该活动的欺骗性，而不愿意参与这一“免费”活动.

山东教育出版社

附录一　典型案例评析

哪种方式更合算

设计：广东省清远市佛冈县城北中学　朱　琼
评析：北京师范大学出版集团　王建波

一、学生知识状况分析

学生知识技能基础

学生已经学习了随机事件及其概率的概念，及相关的统计知识，掌握了一些求随机事件概率的方法（包括理论计算和试验估算等），对获胜或获奖的可能性有了一定的了解.

学生活动经验基础

学生在有关知识的学习中，经历了活动过程，并通过具体问题情境和实践活动体会了统计与概率的初步应用，具备了一些解决简单问题的经验及合作交流的能力.

二、教学任务分析

我们在日常生活中经常会遇到各种摇奖活动，通过以前的学习，学生已经认识到了这些活动中获胜或获奖的可能性，但未必具有正确的评判能力和决策能力. 本综合与实践设计了一个具体的情境，力图让学生在具体情境中感受“合算”，并掌握一定的判断方法，提高其决策能力，从而对现实生活中的一些类似现象进行评判. 该内容对学生具有一定的思维要求，在选取素材时教科书注意了知识的前后联系，选择了一个学生以前研究过的问题情境，以降低学生解决问题的难度. 在解决问题的过程中，让学生首先通过试验获得初步的感受，再通过与同伴间的交流、讨论和分析思考，逐步获得对问题的理论解释. 为此，本节课的教学目标：

知识与技能

1. 让学生初步体会如何评判某事件是否“合算”，并利用它对现实生活中的一些现象进行评判.

2. 进一步体会概率与统计之间的联系.

过程与方法

通过具体问题情境，让学生初步体会如何评判某事件是否“合算”，并利用它对现实生活中的一些现象进行评判.

山东教育出版社　山东教育出版社

情感与态度

1. 经历解决问题的活动过程，发展学生的合作交流意识与能力，增强学生的数学应用意识和能力.

2. 经历解决问题的活动过程，锻炼学生克服困难的勇气和信心，通过对现实问题的理论解释获得学习数学的成就感.

三、教学过程分析

本节课设计了七个教学环节：课前准备——情境引入——试验探讨——合作交流——练习巩固——课堂小结——布置作业.

【第一环节】课前准备

活动内容：

社会调查，每小组做好一个课本上图1 的转盘，准备好计算器（提前一周布置）.

以4 人为一个合作小组开展以下活动.

活动1：分工合作收集有关彩票、街头“摸奖”游戏以及各种各样博彩行当的资料、广告等.

活动 2：小组合作制作课本上图 2、图 3 的转盘.

活动目的：通过第1 个活动吸引学生关注生活中的一些数学问题，用生活中的某件事情是否“合算”作为现实背景和生活素材，体现了数学来源于生活的思想.

通过第 2 个活动，不但提高了学生的合作能力，动手制作能力，还丰富了学生的课余生活，使他们积极地参与到数学的学习中去. 这样，必定能激发学生学习的兴趣及学习的主动性.

实际教学效果：学生收集到的资料内容丰富多彩，有街头的“摸奖”活动广告，商场摇奖促销活动广告, 福利彩票广告等. 资料的来源多种多样，学生做的转盘形式也多种多样. 这两个活动不但让学生感受到数学来源于生活，而且促进了学生学习数学的热情，锻炼了他们社会活动的能力和动手制作的能力.

附部分学生收集的资料：

温廷同学拍到的福利彩票宣传广告：



山东教育出版社

范佩娜同学通过网上下载的某商场转盘游戏图片：



吴武江等同学制作的转盘：



【第二环节】情境引入

活动内容：向学生展示个别同学收集到的资料——中国福利彩票广告、摇奖促销活动广告、一些街头的设摊“摸彩”活动，并给大家讲一个集市上的“摸彩”故事（通过这个故事自然地引出课题）.

故事大意：熙熙攘攘的集市上，某人在设摊“摸彩”，只见他手拿一袋，内装大小、形状、质量完全相同的 4 个绿球和 4 个红球，每次让顾客“免费”从袋中摸出 4 个球，输赢的规则是：

所摸球的颜色	顾客的收益
4 个全红	得 5 元
3 红 1 绿	得 2 元
2 红 2 绿	失 3 元
1 红 3 绿	得 2 元
4 个全绿	得 5 元

只见很多顾客围上前去“免费”摸球，虽然只有摸到“2 红 2 绿”的情况才赔钱，其余情况都得钱，但我在旁边观察的结果是一半以上顾客都赔了钱，这种活动的欺骗性到底体现在什么地方呢？相信同学们经过这节课的学习，一定能揭开其中的“奥秘”，而不愿参加这类“免费活动”.

活动目的：以学生感兴趣的话题引出本课，不仅吸引学生的注意力，而且为本节学习评判某件事情是否“合算”提供了现实背景和生活素材，体现了数学来源于生活的思想.

实际教学效果：展示学生收集到的一些博彩广告，学生体验到数学来源于生活. 通过集

山东教育出版社 山东教育出版社

市上一个“摸彩”故事引入课题，吸引了学生的注意力，激发了他们的好奇心和学习兴趣.

【第三环节】试验探讨

活动内容：参照课本“做一做”进行试验，提出问题.

1. 根据试验情况计算每转动一次转盘所获购物券金额的平均数，看看转转盘和直接获得10 元购物券，哪种更合算.

2. 全班交流，看看各小组的结论是否一致，并将各组数据汇总，计算每转动一次转盘所获得购物券金额的平均数，看看哪种方式更合算.

活动目的：学生自己动手统计摇奖的结果，并做出正确判断，为下面从理论上计算是否“合算”提供了现实依据.

实际教学效果：学生自己动手统计摇奖的结果，并根据摇奖结果，计算每转动一次转盘所获购物券金额的平均数，判断哪种方式对顾客更合算. 教师组织学生汇总记录结果，并引导学生根据记录结果判断哪种方式对顾客更合算. 学生在动手操作中，提高了合作意识，体验到成功感，更激发了学习的主动性.

【第四环节】合作交流

活动内容：课本中的“想一想”和“议一议”.

“想一想”提出三个问题：

（1）影响每转动一次转盘所获得购物券金额的平均数的因素有哪些？

（2）图 1 与图 2 的转盘相比，用哪个转盘对顾客更合算？

（3）不用试验的方法，求出每转动一次转盘 1 和转盘 2 所获得的奖券金额的平均数.

活动目的：设置这三个问题的主要目的是让学生尝试着从概率角度来解释实际问题，为过渡到理论计算所获金额的平均数打好基础，这样便可由浅入深，逐步突破本节的难点.

“议一议”旨在说明：在随机现象中，任何的决策都不能保证我们一定赢. 由于随机性，每次试验的结果可能是不一样的，事先无法确定，即使试验的次数相同，最后得到的结果也可能互不相同；另一方面，由于随机事件频率的稳定性，随着试验次数的增加，就能从中发现规律，即平均收益将稳定于 14 元.

实际教学效果：学生积极思考问题，尝试从概率角度加以解释. 学生以小组为单位讨论并进行计算，回答教材中的问题. 根据学生的回答，教师引导学生计算每转动一次转盘所获得金额的平均数，从理论上解释上述问题. 通过深入的讨论让学生明白平均收益的真正含义，同时也进一步理解当试验次数很多时，试验结果应该和理论值相近，但试验次数再多，也很难保证试验结果与理论值相等，从而让学生建立良好的数据分析观念.

【第五环节】练习巩固

活动内容：课本“做一做”.

活动目的：让学生根据所学的知识解决实际问题，有利于进一步巩固和加深所学知识，同时也养成用数学思维和方法解决生活中遇到的实际问题的习惯.

实际教学效果：学生自己解决教材中的问题，老师组织学生运用学过的方法解决遇到

山东教育出版社

的问题，学生基本上都能利用所学知识解决实际问题，收到了较好的教学效果.

【第六环节】课堂小结

活动内容：总结本节课的收获及获得的启示，反思在学习中存在的问题.

活动目的：这一环节有利于学生总结问题、理清思路，培养学习后自我反思的良好习惯.

实际教学效果：学生总结本节课的收获及得到的启示，反思在学习中存在的问题. 教师指导学生总结本节的收获，并解决学生存在的问题.

【第七环节】布置作业

选择生活中的某一活动（如彩票、摇奖或街头摸球游戏等）或本节课开始时所讲的故事，利用统计与概率的知识揭示其中的规律，并撰写一份研究报告，在全班进行交流.

四、教学反思

本综合与实践活动课打破了传统教学模式，是较好地贯彻新课程理念的一节数学课，其原因有以下几个方面：

1. 这节课真正体现了探求知识与培养学生的情感、态度、价值观的有机结合，注重了过程教学，是对新课程标准的具体实施.

2. 通过收集资料、动手制作、动手试验来解决问题，能够调动学生的积极性，在探索的过程中，注重了对学生情感的培养. 以往在数学课上，教师较难与学生在情感上进行沟通，但在这节课上，学生与教师共同感受了数学的魅力，师生共同培养起了对数学的情感.

3. 我们现在提倡探究性学习、研究性学习，但是这种学习应该放在课内还是课外的问题，始终众说纷纭. 现在我们找到了一个可供借鉴的案例. 也就是说，作为一种学习方式，在课内探求新知识，显得更有实际价值和意义.

五、案例评析

1. 本综合实践活动作为九年级下册统计与概率综合应用的内容，朱琼老师充分考虑到学生已经具备的相关知识、能力和活动经验，让学生小组合作收集有关彩票、街头“摸奖”游戏以及各种各样博彩行当的资料、广告等，通过对相关问题的解决激发学生的学习兴趣，同时加深对统计与概率相关内容的理解.

2. 本设计让学生经历了综合与实践的过程，从问题的提出，到数据的收集、整理、分析及决策的过程，都注重以学生为主体，给学生提供了充分自主探究的空间，鼓励学生动手操作、积极思考，从试验和理论计算的角度分别理解“数学期望”的含义，并探索它们之间的联系. 通过对这些活动的参与、讨论及思考，让学生不断体会频率与概率之间的关系，加深对概率意义及统计思维的理解，同时进一步积累学生的数学活动经验.

3. 本设计朱琼老师还对教材进行了创造性使用，设计中多处地方都体现了这一点. 如将教材的习题内容作为故事进行情境引入；将教材中的“想一想”和“议一议”有机地结合

山东教育出版社

在一起，从试验计算到理论分析再到对试验结果的解释，从而让学生在解决问题的同时建立起良好的数据分析观念；将教材中的最后一个“做一做”与对情境引入故事的解决作为作业留给学生，为学生的活动提供了选择性. 上述对教材的处理使得整个教学过程针对性更强，能够有效地提高综合与实践活动课的教学效率.

4. 本综合与实践活动的难点在于学生对数学期望含义的理解，虽然数学期望的形式化定义可能超出了初中学生的学力，但事实上数学期望从思维要求上来讲学生是可以接受的. 当然，由于学生个体的差异，不同学生可能会对数学期望有不同角度的理解. 建议教师可以多关注不同学生在不同理解程度上的差异，对于学有余力的学生，鼓励他们用不同方式进行理解，这样不仅能够直观、方便地得到数学期望值，而且能帮助他们更好地理解概率的意义.

山东教育出版社
山东教育出版社

附录二　学科知识拓展

“数学期望”的含义及应用

设离散型随机变量 X 的可能取值为 a_1，a_2，…，a_r，取 a_i 的概率为 p_i（$i=1$，2，…，r），即 X 的分布为

$$P(X=a_i)=p_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ r.$$

则定义 X 的数学期望为

$$a_1P(X=a_1)+a_2P(X=a_2)+\cdots+a_rP(X=a_r)=a_1p_1+a_2p_2+\cdots+a_rp_r.$$

即随机变量 X 的所有取值 a_i 乘以对应的概率 $P(X=a_i)$ 的和.

随机变量 X 的数学期望也称作 X 的期望或均值，它是一个数，记为 EX. 它刻画的是随机变量 X 取值范围的“中心位置”，反映了 X 取值的平均水平，是随机变量按概率的加权平均，是简单算术平均的一种推广.

数学期望反映了随机变量的重要信息，并且在很多时候，人们往往只需要知道随机变量的均值即可，因而现实生活中的许多问题都可以利用数学期望来解决. 另外，在运用数学期望解决问题的过程中，不仅能巩固学生对统计概率相关内容的理解，还能加深对数学实用价值的认识，同时激发学生的学习兴趣.

山东教育出版社

综合与实践　统计活动——视力的变化

一、教学目标

1. 经历“收集数据—整理数据—分析数据—作出推断”的统计活动，体验统计活动的全过程，积累统计活动经验.

2. 能通过对数据的分析为合理的决策提供一些依据，认识统计的作用，体会数据的随机性，发展数据分析的观念.

3. 形成对数据处理过程进行初步评价的意识，体会数学与现实生活的密切联系，增强应用意识.

二、设计思路

经过前面几个学期的学习，学生已经基本独立地经历了统计的各个过程，收集过一些数据，掌握了数据表示和数据处理的一些方法，对一些现实问题作出了自己的评判，而且基本完成了初中阶段统计有关知识点的学习，感受到了统计在现实生活中的广泛应用. 但在前面的学习中，受学生所学知识的限制，统计活动的各个过程分散在不同的阶段依次进行，学生还未真正经历从具体问题出发，提出有价值的统计问题，并通过收集、整理、分析数据，从而作出合理的推断这一完整过程. 因此，在本综合与实践活动中，我们设计了相关活动，让学生经历统计活动全过程，并对统计过程进行反思，即对数据的来源、处理数据的方法以及由此得到的结论进行合理的质疑，进一步发展学生的数据分析观念，切实提高学生的统计决策能力.

教科书设计此综合与实践活动，一方面是在初中阶段学习了统计的基础知识和方法之后，在此处对这些内容作一个总结，并运用所学的知识和方法去解决实际问题，让学生体会数学与现实生活的密切联系，增强应用意识；另一方面也是对统计活动的过程作一个概括说明，让学生进一步明确从事统计活动的几个基本步骤，并在活动的过程中认识到统计对决策的作用，发展他们的数据分析观念.

基于以上思考，教科书中具体设计了以下两课时内容：第 1 课时先提出问题“在中学阶段，视力是否随着年龄的增加而逐渐变差”，让学生经历从实际问题出发，收集、整理、分析数据，进而解决问题的过程，同时对统计活动的过程作一个概括说明，让学生进一步明确从事统计活动的几个基本步骤，并认识统计对决策的作用；第 2 课时以问题的形式引导学生对统计活动的过程进行反思，并再次经历一个难度和挑战性更高的活动过程，解决新的问题.

在具体教学素材的选取上，进一步体现实践性和可操作性原则，保证素材的真实性、科学性和活动的可操作性. 如学生的视力情况应该是比较容易获得的，从而保证了数据的真实性和活动的可操作性.

山东教育出版社

三、教学建议

1. 注重教学素材及其呈现方式的多样化以及数据的真实性和科学性.

本综合与实践活动的教学素材——学生的视力，来自学生的现实生活，教师可以让学生课前调查自己班级或学校的相关数据，也可以上网或到有关机构查询相关资料. 在呈现统计数据时，既可以是未经加工的数据，也可以是经过加工处理的各种统计图表等. 当然，教师还可以结合学生的具体认知和生活实际，组织学生开展一些调查或文献检索活动，自己收集一些相关教学素材，也可以由教师提供一定的素材，让学生分析、评判. 同时，统计作为处理现实世界数据信息的一个重要数学分支，必然要求教学素材本身的真实性和科学性，即要求统计数据与客观实际情况相符合，也要求数据的获取及处理过程科学合理，以培养学生求真的科学态度.

2. 注重学生的活动，特别是小组合作的活动.

本综合与实践活动中，学生需要展开一定的实际操作活动或研讨活动. 这些活动的展开往往非一人之力所能完成，需要小组的合作，只有通过充分地研讨，广泛地交流，才能扩大学生的思维视角，深化学生对知识的理解. 因此，教师应尽量给学生提供一定的实践活动机会，要求学生亲自实践，并在活动的过程中引导学生逐步体会统计的基本思想，同时运用所学知识、方法去解决实际问题. 另外，还要特别加强小组合作活动的组织与教学，在合作交流中，通过相互帮助，让所有学生都得到发展，达到共同进步.

3. 鼓励学生使用计算器处理复杂的数据，注重其他课程资源（如信息技术、多媒体）的开发与利用.

真实的统计数据往往比较复杂，因而计算量较大. 教学中，应关注学生对知识的理解，而不要将学生的精力耗费于繁杂的计算中. 为此，应鼓励学生使用计算器. 有条件的地区或学校可尝试用计算机等现代化手段进行数据的处理和教学，如要求学生利用计算机的相关应用软件绘制图表.

4. 引导学生初步形成对统计过程进行评价与反思的意识.

在统计活动的教学过程中，建议教师要不断引导学生在利用统计解决问题、作出决策之前，应从问题出发思考需要收集哪些信息、如何收集信息、如何表达信息等，让学生逐渐体会为什么要用统计、统计到底能给我们带来什么，同时引导学生对统计过程进行评价与反思：调查结果和预想的结论一致吗？你能对统计结论进行解释吗？不一致的原因是什么？是研究设计的问题，统计方法的问题，还是数据处理的问题？

自我评价与反思意识的形成有助于改进学生的学习方法，提高学生的学习能力. 在统计内容的学习中，要求学生形成对数据处理过程初步评价与反思的意识，将有助于学生对统计思维与确定性思维的理解. 另外，数据处理的过程存在着统计思想与统计方法的差异，这样可能导致统计分析结果的差别，学生的初步评价与反思的意识，将有助于改善统计分析过程中可能出现的各种问题. 更重要的一条是，评价与反思的意识将有助于学生客观地认识统计的过程. 统计分析的方法，有助于理性思维的培养.

山东教育出版社

四、评价建议

1. 注重对学生活动的评价，主要评价学生的参与程度，以及在活动过程中表现出来的思维方式，与同学合作与交流的情况等.

在分析学生视力变化情况的过程中，学生必须展开一定的实际操作活动或研讨活动，因而对学生活动的考查应成为教学评价的主要方面. 这方面的评价主要以学生在从事活动时的表现作为对象，可以从两个方面来进行：一是学生在活动中的投入程度——能否积极、主动地从事各项活动，向同伴解释自己的想法，听取别人的建议和意见；二是学生在活动中表现出来的思维水平、表述水平等.

对学生活动结果的评价可采用四个等级：A，B，C，D. 其分别对应：优秀、良好、中等、基本合格. 一般情况下，教学中尽量不要给予学生不合格的评价，除非学生的成绩与 D 级水平有明显差异. 具体等级表现描述如下，供参考.

D 等级：仅仅是按照教师的要求去做，得到一些数据、获得一些结论；没有自己解决综合与实践问题的方法，不能真正参与到同伴的活动过程中；收集数据、比较判断时仅能够实施一些预先设计的活动，对任务没有完整的求解思路、框架、步骤.

C等级：能够比较准确地完成规定的活动步骤，比较主动地和同伴一起制订方案、分工合作，能够完成基本的数据收集、处理任务；活动积极性较高；获得的活动结果基本正确；提供了解释结果正确性的一些依据，如具体案例、数据解释、逻辑论据等.

B等级：对本活动的内容有比较准确、完整的理解，有自己的想法和见解，积极主动地从事各项活动，能根据数据处理结果得出合理的统计推断，还能够向同伴解释自己的想法，听取别人的建议和意见等；能够恰当地处理活动过程中出现的意外情况，适时调整方案或改变方法；获得正确的活动结果；提供了解释结果正确性的论述过程，如验证、数据解释等.

A等级：在B级基础上，善于挑战自我，主动寻求解决问题的优化方案；能够指出他人方法中的不合理之处，并主动帮助同学，给出改进建议；能够在表达调查对象的信息及处理数据中有新颖独特的想法，或在数据的推断上有自己独特的建议；能够对活动的过程、结果进行较为深刻的反思，并能提出新的问题和建议等.

当然，具体评价标准是个性化的，教师可以根据活动的需要和学生的实际情况制订更加细化的、适合的评价标准. 如对于制订各学习环节的等级评价标准，然后再根据学生或者小组各环节的等级状况进行总体评价.

2. 关注学生的自评与互评.

可以制订适当的标准让学生进行自评与互评. 如可以从标准的科学性、数据收集的代表性、数据处理的正确性、课堂交流的流畅性、课堂评析的积极性等方面，由其他组学生对某组学生的表现进行评价，从而形成对该组的总体评价. 当然，也可以在学生申请的基础上，形成专门的评价小组，进行小组评价.

山东教育出版社 山东教育出版社

综合与实践

统计活动

——视力的变化

在日常生活中，我们可能会有这样的感觉：在中学阶段，视力随着年龄的增加而逐渐变差. 那么，实际情况是否的确如此呢?

做一做

为了了解本班同学的视力变化情况，我们可以以小组为单位，按照如下的步骤合作完成下列统计活动.

1. 确定调查对象

根据调查的问题，我们选定全班所有同学作为调查对象.

2. 收集数据

每位同学分别查找并记录近期和上一年度自己左右眼的视力情况，填入下表：

姓名	近期视力情况		上一年度视力情况	
	左眼视力	右眼视力	左眼视力	右眼视力

3. 整理、表示数据

（1）先将本小组成员收集到的数据按下表汇总：

第_____小组

视力情况 成员	近期视力情况		上一年度视力情况	
	左眼视力	右眼视力	左眼视力	右眼视力
小组成员 1				
小组成员 2				
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
小组成员 n				

教科书从“中学生的视力”这个生活中常见的现象出发，提出了“在中学阶段，视力是否随着年龄的增加而逐渐变差”这样一个问题，让学生经历从实际问题出发，收集并分析数据，进而解决问题的过程. 在从事统计活动之前，教师可以鼓励学生根据自己的生活经验对上述问题的结论进行猜测，以增强学生参与统计活动的兴趣.

做一做

本课时的主要目的是对统计活动的过程作一个概括说明，让学生进一步明确从事统计活动的几个基本步骤. 为了便于统计活动的开展，我们先从调查全班同学的视力情况入手，并且只收集近期和上一年度的视力数据.

在整理数据的过程中，可以按照教科书给出的方式，先小组汇总，再按小组进行全班汇总，也可以按照其他的方式进行整理. 不管采用什么样的方式，教师都应该让学生明确：整理数据的目的是为了后面更方便地表示和分析数据.

对于整理好的数据，教师应鼓励学生先用适当的统计图表分别将近期和上一年度左右眼的视力情况表示出来，并尽可能地从这些统计图表中获取更多的信息，如从中估计平均数、中位数、众数、极差等. 然后再分别计算近期和上一年度左右眼视力的平均数、中位数、众数、极差和方差，看看与自己的估计结果是否大致相同.

教师应鼓励学生从上面的数据以及分析的结果中获取尽可能多的结论，并由此作出推断. 学生可能得出近期左眼、右眼的平均数都比上年左眼、右眼的平均数大. 而由学生得到的这些结论，不难作出推断：本班同学的视力随着年龄的增加在逐渐变差.

教师应帮助学生逐渐形成对数据处理过程进行初步评价的意识. 自我评价意识的形成有助于改

山东教育出版社

进学生的学习方法，提高学生的学习能力. 在统计内容的学习中，要求学生形成对数据处理过程初步评价的意识，将有助于学生对统计思维与确定性思维的理解. 另外，数据处理的过程存在着统计思想与统计方法的差异，这样可能导致统计分析结果的差别，学生的初步评价的意识将有助于改善统计分析过程中可能出现的各种问题. 更重要的一条是，评价的意识将有助于学生客观地认识统计的过程、统计分析的方法，有助于理性思维的培养.

教师用书中给出以下真实的数据，一方面若学生所在的班级无法收集到相关的视力记录时，教师可以将此数据提供给学生进行分析；另一方面可以以此数据为基础呈现分析数据和作出推断的过程，供教师教学时参考.

某学校九年级六班近期和上一年度视力数据整理如下：

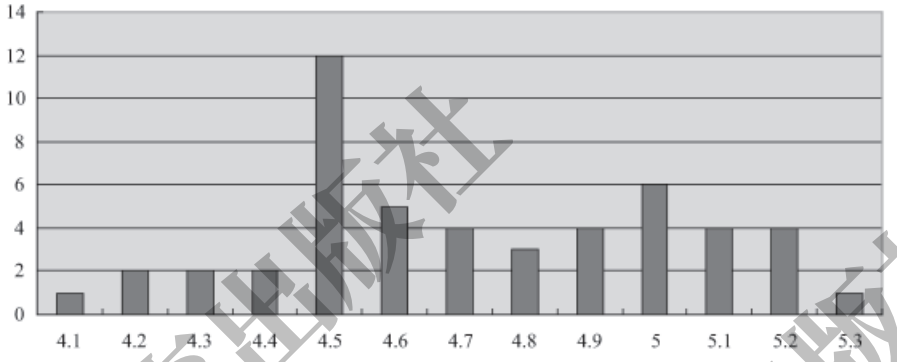
近期视力情况		上一年度视力情况		近期视力情况		上一年度视力情况	
左眼视力	右眼视力	左眼视力	右眼视力	左眼视力	右眼视力	左眼视力	右眼视力
4.6	4.7	4.7	4.9	4.7	4.7	4.7	4.6
4.5	4.6	4.6	4.2	4.7	4.7	4.8	4.9
5.2	5.3	5.2	5.3	4.4	4.4	4.6	4.6
4.8	4.9	4.9	4.4	4.5	4.6	4.9	4.9
4.4	4.4	4.7	4.7	4.3	4.4	4.2	4.6
5	4.9	5	5.1	4.1	4.2	4.6	4.6
5.2	5.2	5.2	5.2	4.8	4.7	5	5
4.5	4.5	4.8	4.5	4.7	5	4.8	5.2
4.5	4.4	4.8	4.6	5	4.9	4.8	4.5
5.1	5	5.1	5.1	5	4.9	5.2	5.2
4.2	4.1	4.3	4.3	4.5	4.6	5	4.9
4.6	4.6	4.5	4.7	4.5	4.5	4.9	4.9
4.6	4.8	4.9	4.9	4.5	4.4	4.5	4.5
4.8	5.1	4.8	4.8	5	5.2	5.2	5.1
5.3	5.3	5.1	5.2	4.5	4.4	4.6	4.6
4.7	4.7	4.6	4.7	4.5	4.8	4.8	4.8
4.9	4.8	5	5	4.5	4.5	4.7	4.5
5	4.8	4.8	4.8	5.1	5	5.2	5.3
4.9	4.7	5.2	5.3	5	4.6	4.9	5
4.3	4.4	4.8	4.6	4.6	4.5	4.6	4.7
4.5	4.4	4.5	4.5	4.2	4.4	4.5	4.5
5.1	5	5.1	4.9	4.9	4.9	5.2	5.2
5.2	5.2	5.1	5.1	4.5	4.6	4.6	4.7
5.2	4.7	5.2	4.9	5.1	5.1	5.2	5
4.6	4.8	5	4.9	4.9	4.6	4.9	4.8

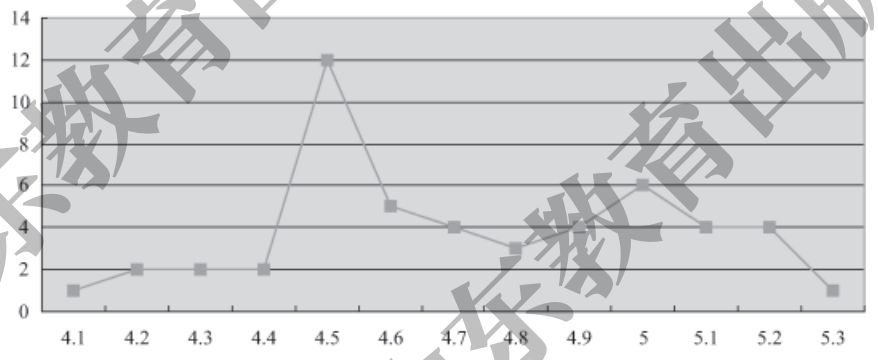
山东教育出版社

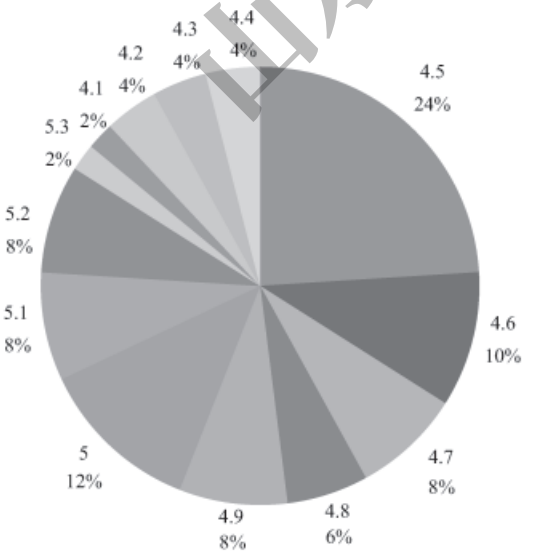
对所有的数据进行汇总：

	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7	4.8	4.9	5.0	5.1	5.2	5.3
近期左眼	1	2	2	2	12	5	4	3	4	6	4	4	1
近期右眼	1	1	0	9	4	7	7	5	5	4	2	3	2
上年左眼	0	1	1	0	4	7	4	9	6	5	4	9	0
上年右眼	0	1	1	1	6	7	5	4	9	4	4	5	3

对于近期左眼的视力情况，可以用以下统计图来表示：





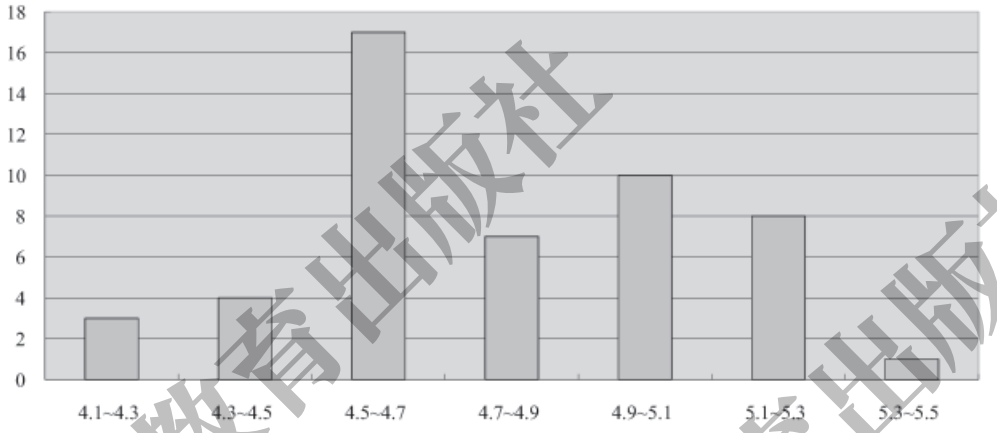


山东教育出版社

将上表的数据进行分组：

	4.1~4.3	4.3~4.5	4.5~4.7	4.7~4.9	4.9~5.1	5.1~5.3	5.3~5.5
近期左眼	3	4	17	7	10	8	1
近期右眼	2	9	11	12	9	5	2
上年左眼	1	1	11	13	11	13	0
上年右眼	1	2	13	9	13	9	3

对于近期左眼的视力情况，还可以用以下频数分布直方图表示：



（1）近期和上一年度左右眼视力的平均数、中位数、众数、极差和方差如下表：

	近期左眼	近期右眼	上年左眼	上年右眼
平均数	4.724	4.718	4.846	4.824
中位数	4.7	4.7	4.8	4.85
众　数	4.5	4.4	5.2	4.9
极　差	1.2	1.2	1	1.1
方　差	0.091 824	0.080 676	0.064 884	0.075 424

（2）近期和上一年度的视力不良率分别为 82%，72%.

从上表不难看出，随着年龄的增加，视力的平均数、中位数、众数都在变小，而极差和方差都在变大，视力不良率在变大.

从上面的数据分析不难作出推断：本班同学的视力随着年龄的增加在逐渐变差.

山东教育出版社

（2）再把班上所有同学的数据按照小组进行汇总，得到下表：

视力情况 / 成员	近期视力情况		上一年度视力情况	
	左眼视力	右眼视力	左眼视力	右眼视力
第 1 小组				
第 2 小组				
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
第 m 小组				

将上面的数据用适当的统计图表示出来，并与同伴进行交流．你觉得用哪种统计图表示更合适？

4. 分析数据

（1）分别计算近期和上一年度左右眼视力的平均数、中位数、众数、极差和方差，你发现了什么？

（2）分别计算近期和上一年度的视力不良率，并进行比较．（凡是单眼视力在 5.0 以下的都算作视力不良）

5. 作出推断

根据上面的数据，你能得到什么结论？它与你在从事这个统计活动之前的猜想一致吗？

议一议

若要了解全校范围内学生的视力状况随年龄的变化趋势，你将如何进行统计活动？

议一议

关键是要让学生注意样本的选取一定要有代表性，比如可以考虑每个年级随机抽取若干班级，再从每个班级中随机抽取若干学生.

山东教育出版社

想一想

回顾前面统计活动的过程，回答下列问题，并与同伴交流：

（1）调查的问题和目的分别是什么？你经历了哪些主要的步骤？

（2）确定调查对象时应当注意什么？

（3）你认为如何收集数据比较方便？你将如何对收集到的数据进行整理和表示？

（4）想得到一个比较客观的结论，应当对数据做哪些分析？

做一做

请根据全班同学课前收集的数据，分析不同年级学生的视力状况是否随着年级的升高而逐渐变差.

学生的视力状况是从七年级到八年级的变化更显著，还是从八年级到九年级的变化更显著？

姓名	九年级学生近期视力情况		姓名	八年级学生近期视力情况		姓名	七年级学生近期视力情况	
	左眼视力	右眼视力		左眼视力	右眼视力		左眼视力	右眼视力

议一议

（1）针对中学生视力的变化状况，我们还可以研究哪些问题？

（2）为了更好地保护视力，你能给学弟学妹们提供哪些建议？

想一想

在上一课时活动的基础上，以问题的形式总结统计活动的基本步骤. 教师可以鼓励学生先回顾上一课时统计活动的过程，并结合该活动尽可能地用自己的方式来回答，在此基础上让他们充分交流，并引导学生共同得出结论.

教师在教学中也可以根据需要把问题分散到下面统计活动的各环节中，在活动的过程中不断让学生体会.

做一做

通过上一课时的统计活动，已经得出了结论：在中学阶段，视力确实在随着年龄的增加而逐渐变差. 但是这个结论反映的只是同一批人在不同年龄阶段视力的变化趋势，而且结论相对比较明显. 为此，教科书又专门设计了另一个活动，分析在中学阶段，不同年级学生的视力状况是否随着年级的升高而逐渐变差，并进一步分析学生的视力状况是从七年级到八年级的变化更显著，还是从八年级到九年级的变化更显著.

当然，设计这个实践活动，还有另外一个目的，就是要让学生在上面回顾总结了统计活动的基本步骤之后，再次经历一个难度和挑战性更高的活动过程. 尽管上一课时已经让学生调查了七、八年级同学近期及上一年度左右眼的视力情况，我们仍希望让学生根据调查问题的目的，自主确定调查对象和收集数据的方法. 若分析中学阶段男生和女生的视力是否都是随着年级的升高而逐渐变差，收集数据时就应包括被调查者的性别. 至于整理、表示、分析数据及根据数据作出推断的内容，与上一课时基本是相似的.

由于样本选取的代表性、分析数据方法的多样性以及统计结果的随机性等多方面的因素，从学生调查的数据分析得到的结果可能不太容易看出学生的视力状况到底是从七年级到八年级的变化更

山东教育出版社

显著，还是从八年级到九年级的变化更显著. 如果学生得出的结论存在偏差，教师可以通过问题的方式引导学生进行反思：样本的选取是否具有代表性？表达和分析数据的方法是否合理？等等. 即便学生从数据分析的结果中得到了正确的推断，教师仍可以让学生思考：哪些环节可以作进一步的改进？怎样才能使得结果更精确可信？等等. 让学生在这个具体的问题情境中，通过统计活动的过程以及之后的反思，真正体会统计思维与确定性思维的差异.

教师用书给出某学校九年级二班、八年级九班和七年级一班学生近期视力的数据，教师可以鼓励学生对此数据进行分析和推断，并与自己的结论进行比较.

某学校在同一时间进行体检，其中九年级二班、八年级九班和七年级一班的视力数据情况如下：

姓名	九年级二班学生近期视力情况		姓名	八年级九班学生近期视力情况		姓名	七年级一班学生近期视力情况	
	左眼视力	右眼视力		左眼视力	右眼视力		左眼视力	右眼视力
	4.9	5		4.7	4.7		5.1	5.2
	4.1	4		4.7	4.7		5.2	5.2
	4.1	4		4.4	4.8		5	5
	5	4.2		4.9	4.6		5.1	4.8
	5.2	5.1		4.8	4.8		5	5
	4.6	4.3		5.1	5.1		4.9	4.9
	5.1	5.2		4.4	4.5		5.1	5.2
	4.8	4.8		4.6	4.8		4.9	4.8
	5.2	5.2		4.8	4.7		5.2	5.2
	5	4.6		4.1	4.2		5	5.1
	4.7	4.7		5	5		4.7	4.6
	4.3	4.3		5	5		4.1	4.6
	5	5		4.3	4.3		4	4
	5.2	5.1		5	4.9		5	5.1
	4	4		4.4	4.3		4.7	4.9
	4.5	4.6		5	5		4.9	4.8
	4.4	4.3		5	4.9		4.9	4.7
	5.2	5.2		5.1	5		5	4.8
	5.1	4.9		4.8	4.8		5.2	5.2
	5.2	5.1		5	5		4.8	4.5
	4.6	4.7		5	5.1		4.9	5.1
	4.9	5.2		4.2	4.3		5	5
	5.1	5		5	5		5.2	5.2

山东教育出版社

续表

姓名	九年级二班学生近期视力情况		姓名	八年级九班学生近期视力情况		姓名	七年级一班学生近期视力情况	
	左眼视力	右眼视力		左眼视力	右眼视力		左眼视力	右眼视力
	4.7	4.7		5	4.6		4.7	4.5
	5.1	5		5	4.9		4.3	4.5
	4.4	4.4		5.1	5.1		4.9	4.8
	4.7	4.4		4.5	4.3		5	5
	4.8	4.8		4.4	4.2		4.8	4.7
	5.2	5		5	5.1		4.9	4.9
	4.5	4.3		5	5		4.3	4.2
	5.2	5.1		5.1	5.1		5	4.8
	4.9	5.1		5	5		4.3	5.2
	4.3	4.1		4.4	4.9		5.1	5
	4.2	4		4.9	4.9		4.8	4.8
	5	4.8		4.8	4.8		5.1	5.2
	4.5	4.6		5.1	4.6		4	4.2
	4.9	4.7		4.6	4.6		4.8	4.7
	4.3	4.2		5	5		5.1	5
	4.1	4		5.3	4.6		4.2	4.1
	4.3	4.1		4.5	4.6		5.1	4.9
	4.7	4.9		5	4.9		5	4.9
	4.8	4.8		4.9	5		4.9	4.7
	4.4	4.2		4.8	4.7		4.7	4.7
	4	4.1		4.3	4.5		5	4.8
	4.6	4.7		4.8	4.8		4.6	4.6
	4.9	5		4.2	4.6		5.1	5
	4.8	4.8		4.8	4.8		4.9	4.9
	4.2	4.2		4.1	4.1		4.3	4.3
	4.9	4.9		5	5		5	5
	4	4.2		4.8	4.7		5	5
	4.2	4.2		4.8	5			
	4.9	4.7		4.9	4			
	4.1	4.1		5	5.1			
	4.9	4.6						
	4.3	4.4						

山东教育出版社

九年级、八年级、七年级左右眼视力的平均数、中位数、众数、极差和方差如下表：

	九年级左眼	九年级右眼	八年级左眼	八年级右眼	七年级左眼	七年级右眼
平均数	4.672 727	4.610 909 1	4.781 132	4.754 717	4.836	4.826
中位数	4.7	4.7	4.9	4.8	4.9	4.9
众　数	4.9	5	5	5	5	5
极　差	1.2	1.2	1.2	1.1	1.2	1.2
方　差	0.144 529	0.152 971 9	0.088 323	0.081 723	0.101 504	0.089 524

九年级、八年级、七年级的视力不良率分别为 80%，69.8%，64%.

从上表不难看出，随着年级的增加，视力的平均数在变小，且从八年级到九年级的变化更显著；方差从七年级到八年级的变化不大，从八年级到九年级明显变大；中位数、众数和极差的变化不显著；视力不良率在变大，且从八年级到九年级的变化更显著.

从上面的数据分析不难作出推断：不同年级学生的视力状况随着年级的升高而逐渐变差，并且从八年级到九年级的变化更显著.

议一议

（1）性别、座位、学习成绩等对视力的影响.

（2）如视力从八年级到九年级的变化更显著，可以提醒注意面对中考的压力.

山东教育出版社

习题

1. 请调查你所在班级的同学在六、七、八、九年级的视力情况，并分析视力的变化趋势.
2. 如果要调查全市范围内初中生的视力状况随年级的变化趋势，你该如何应用统计方法来说明？如果要调查全国范围内的呢？

习题

1. 略.
2. 涉及抽样调查，应关注样本的代表性. 教师可以引导学生自主查询全市及全国有关初中生视力情况的资料，以此为基础进行统计分析.

山东教育出版社
山东教育出版社

综合与实践　折纸与数学

一、教学目标

1. 探索折纸中蕴含的数学知识，体会折纸的原理，理解折纸与尺规作图原理、轴对称变换等有关知识之间的联系.

2. 会根据折纸基本操作方法折叠出一些规定的图形，发展学生的动手能力.

3. 经历探索折纸原理的过程，进一步积累数学活动经验，发展综合运用数学知识分析问题、解决问题的能力.

4. 通过折纸激发学生的好奇心与求知欲，发展学生的探索能力.

二、设计思路

在以前的数学课中，经常遇到折纸的问题，但折纸的数学原理涉及较少. 本综合与实践旨在结合第三学段学过的尺规作图原理、轴对称变换等知识，让学生通过实际操作，探索折纸中蕴含的数学知识，进一步发展学生综合运用数学知识分析和解决问题的能力，体会数学运用的广泛性，并进一步形成学数学、用数学的能力.

具体来说，本综合与实践设计的基本框架是：折一折、想一想、做一做.

第一步：折一折. 教材列举了折纸的 6 种基本操作方法. 学生经历这些操作过程，初步熟悉了折纸的基本方法，培育了对折纸的兴趣.

这 6 种基本操作方法如下.

折纸 1：两点折线. 即过两点折一条折痕，折痕是过这两点的直线.

折纸 2：两点对折. 即折起一点使其与另一点重合，折痕是这两点的对称轴，也是这两点连线的垂直平分线.

折纸 3：平行对折. 即折起两条平行线中的一条，使其与另一条重合，折痕是这两条平行线的中平分线（位于两条平行线之间，且与这两条平行线距离相等的直线叫做这两条平行线的中平分线）.

折纸 4：交线对折. 即折起角的一边使其与另一边重合，折痕是角的平分线.

折纸 5：过点折线. 即过一点将一条线段折叠（不一定是对折），折痕是这条线段过这点的垂线. 分点在线上和点在线外两种情况.

折纸 6：折点到线. 一条线段的一端不动，将另一端翻折到另一条线上，折痕是翻折的线段前后形成的夹角的平分线.

基本操作方法还有 2 种，由于较复杂，教科书不赘述.

第二步：想一想. 此步骤是帮助学生建立折纸操作与数学知识联系的重要环节. 教材通过“议一议”，让学生充分讨论两个问题.

学生不难发现，折纸是通过折叠实现的，任何一次折叠都是轴对称变换的具体操作.

折纸的 6 种基本操作方法分别相当于尺规作图中的以下操作.

山东教育出版社

（1）“两点折线”的操作，相当于过两点作一条直线.

（2）“两点对折”的操作，相当于作两点连线的垂直平分线.

（3）“平行对折”的操作，相当于作两条平行线的中平分线.

（4）“交线对折”的操作，相当于作角的平分线.

（5）“过点折线”的操作，相当于过一点作已知直线的垂线.

（6）“折点到线”的操作，相当于以已知点为圆心，以已知长度为半径画圆，使其与已知直线相交.

第三步：做一做. 按要求折叠几个具体图形. 此步骤是折纸的 6 种基本操作方法的具体应用，也是数学知识的综合应用.

图形折出后，要引导学生说出用了哪些基本操作方法折成的. 通过此步骤进一步发展学生综合运用数学知识分析和解决问题的能力.

三、教学建议

1. 课前每位同学要准备好 10 张 A4（或 B5、16 开）打印纸、4 张三角形纸片、剪刀、铅笔等.

2. 以小组合作方式展开折纸实践活动，鼓励每一名学生（特别是学习有困难的学生）在活动过程中认真思考、积极动手、热情交流、互相学习，进一步积累数学活动经验.

3. 既要关注学生折纸活动的规范性（折痕两端是关键，位置要准确，关键点可以用铅笔作记号），又要鼓励学生积极表述活动中探索发现的结论与反思的结果. 图形折出后，要引导学生说出用了哪些基本操作方法.

4. 有条件的学校可以把折纸过程制成课件，在课堂上展示. 但课件展示不能替代学生的折纸操作.

5. 活动结束后，可以进一步启发学生，使他们认识到数学应用的广泛性，培养他们用数学的眼光观察现实世界的意识.

6. 本活动建议安排 2 课时.

四、评价建议

1. “综合与实践”是一类以问题为载体、以学生自主参与为主的学习活动，因此课堂首先要关注学生个体参与活动的热情和程度，同时要关注学生的表述和反思能力.

2. 关注学生的合作意识、协作交流能力.

3. 关注学生对折纸的基本操作方法与所学数学知识之间的关系理解程度.

4. 关注学生的动手操作能力，关注折纸的质量与速度.

5. 关注学生探索新知识的意识和能力.

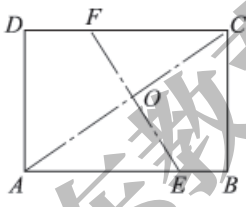
山东教育出版社 山东教育出版社

做一做

教材列举了折纸的 6 种基本操作方法. 经历这些操作过程，使学生初步熟悉折纸的基本方法，激发他们对折纸的兴趣.

折纸 1：相当于过 A，C 两点画一条线段，体现了“两点确定一条直线”的基本事实.

折纸 2：相当于画出 A，C 两点的对称轴 EF（因为任何两点都可以看成轴对称）. 若先折出线段 AC，再折出 EF，就相当于作了线段 AC 的垂直平分线（如下图）. 要折出一条线段的中点，也可以用这种方法.



折纸3：相当于画出了平行线 AB，CD 的中平行线 EF. $EF \parallel AB \parallel CD$，且 EF 与 AB，CD 距离相等.

折纸 4：相当于画出了 $\angle ADC$ 的平分线 DE.

综合与实践

折纸与数学

以前的数学学习中，我们遇到过一些与折纸有关的问题. 折纸中蕴涵着许多数学知识，你想过吗?

做一做

分别按下列要求折纸：

折纸 1：过 A，C 两点折叠矩形纸（如图 1），折痕有几条?

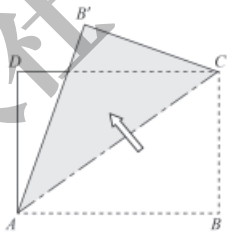


图 1

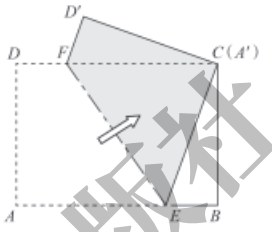


图 2

折纸 2：折叠矩形纸，使 A，C 两点重合（如图 2），EF 是折痕. A，C 两点与直线 EF 是什么关系? 若连接 AC，则线段 AC 与直线 EF 是什么关系?

折纸 3：折叠矩形纸，使 AB 与 DC 重合（如图 3），EF 是折痕. 直线 AB，DC 与 EF 是什么关系?

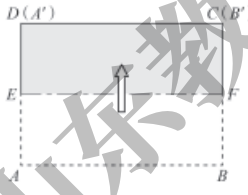


图 3

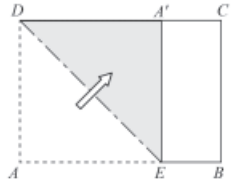


图 4

山东教育出版社

折纸 4：折叠矩形纸，使 AD 与 CD 重合（如图 4），DE 是折痕. $\angle ADC$ 与 DE 是什么关系？

折纸 5：P 是 AB 边上的一点，过点 P 折叠矩形纸，使折痕与直线 AB 垂直（如图 5）.

图 5 中，R 是 AB 外一点，你能否过点 R 折叠矩形纸，使折痕与直线 AB 垂直？试一试.

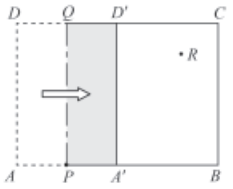


图 5

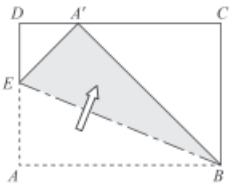


图 6

折纸 6：B 点不动，将 AB 边折起，使点 A 落在 DC 边上的 A' 处（如图 6）.

若点 B 不动，将 BC 折起，能否使点 C 落在 AD 边上？为什么？

议一议

（1）通过以上操作，你认为折纸与轴对称有什么联系？

（2）折纸 1 ~ 6 的六种基本操作方法分别相当于尺规作图中的哪些操作？与同伴进行交流.

我们可以得到下面的结论：

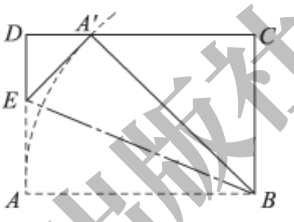
将一张纸上一条直线一侧的图形绕这条直线翻折 180°，翻折前后的两个图形关于这条直线（折痕）成轴对称.

想一想

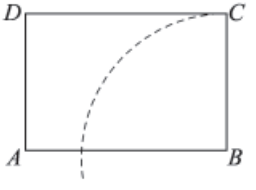
剪下一张三角形纸片，你能用几种方法折出它的一条中位线？

折纸 5：相当于过一点 P 画已知直线 AB 的垂线（即折痕 PQ）. 点 P 可以在已知直线 AB 上，也可以在已知直线 AB 外（图中的点 R）. 用这种方法可以折出三角形的高.

折纸 6：相当于以点 B 为圆心，以 AB 的长度为半径画弧，作出弧与直线 CD 的交点 A'（如下图）. 由于半径 AB 的长度大于圆心 B 到直线 CD 的距离，所以交点 A' 是存在的.



由于 $BC < AB$，所以若以点 B 为圆心，以 BC 的长度为半径画弧是不能与 AD 相交的（如下图）.



议一议

每一次折叠，都可以看成做了一次轴对称变换. 翻折前后的两个图形关于折痕成轴对称. 例如，图 1 中的 $\triangle ACB$ 与 $\triangle ACB'$ 关于折痕 AC 成轴对称；图 2 中的四边形 $AEFD$ 与四边形 $A'EFD'$ 关于折痕 EF 成轴对称，等等.

想一想

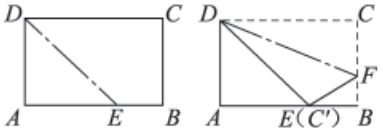
提示：方法 1，可以先用折纸 2 的方法折出三角形两边的中点，再用折纸 1 的方法过两个中点折出三角形的一条中位线.

方法 2，先用折纸 5 的方法折出三角形的一条高，再用折纸 2 的方法折出这条高的垂直平分线，即得三角形的一条中位线.

山东教育出版社

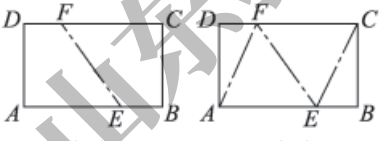
做一做

1. 提示：可以先用折纸 4，折出矩形 $ABCD$ 的 $\angle D$ 的平分线 DE，则矩形的宽 AD 与折痕 DE 的长之比为 $1:\sqrt{2}$. 再用折纸 4 折出 $\angle DCE$ 的平分线 DF，比较 DC 与 DE 的长是否相等即可（如下图）.



2. 提示：能折出，折法较多，仅举几例.

方法 1. 先用折纸 2 折出矩形 $ABCD$ 的顶点 A，C 的对称轴 EF，再用折纸 1 折出折痕 AF，CE. 四边形 $AECF$ 即是所求菱形（如下图）.



（1）　（2）

做一做

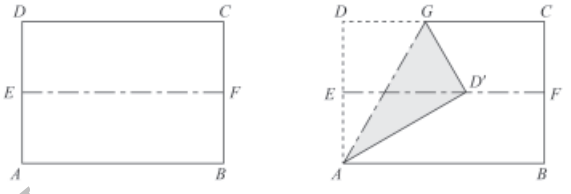
1. 通过折纸检验一张 A4 打印纸的宽与长的比是否 $1:\sqrt{2}$.

2. 你能用矩形纸折出一个菱形吗？你有几种方法？先想一想，再做一做.

3. 小明认为若有一张矩形纸，折两次就可以折出 30° 角（如图 7）.

（1）你能说明小明这种折法的道理吗？

（2）你能用矩形纸折出一个等边三角形吗？



（1）　（2）

图 7

习题

1. 折出矩形纸一条对角线的一个三等分点.

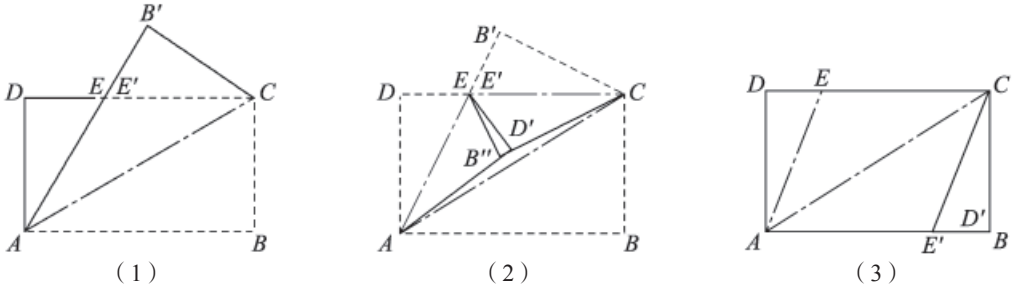
2. 用正方形纸折出边长与正方形边长相等的等边三角形.

3. 用正方形纸折出一个顶点在正方形的顶点上的等边三角形（如图）.



（第 3 题）

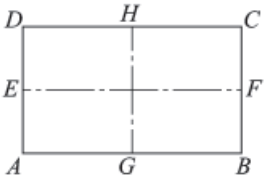
方法 2. 先用折纸 1 折出矩形 $ABCD$ 的对角线 AC，此时，点 B 折到 B' 处，AB' 与 CD 的交点分别是 E，E'（如图（1），点 E 在 CD 上，点 E' 在 AB' 上）. 再用折纸 1 分别折出折痕 AE' 和 CE（如图（2））. 完全展开后得到图（3），四边形 $AE'CE$ 即是所求菱形.



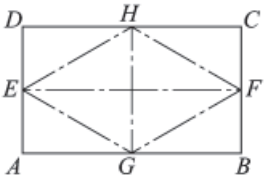
（1）　（2）　（3）

山东教育出版社

方法 3. 先两次用折纸 3 折出矩形 $ABCD$ 的两条对称轴 EF，GH，（如图（1）），再用折纸 1 折出折痕 EG，GF，FH，HE 即可（如图（2））.



（1）



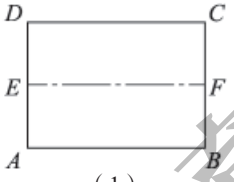
（2）

方法 4. 可用折纸 4 和折纸 1 折出一个特殊的菱形——正方形（图形略）.

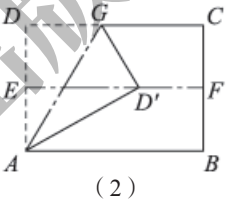
3. 小明说的对.

图（1）、（2）表示先用折纸 3 折出 AB，CD 的中平行线 EF，再用折纸 6 将点 D 折到 EF 上，得到点 D' 和折痕 AG. 我们可以延长 GD' 交 AB 于点 H（如图（3）），由平行线分线段成比例性质知，$GD'=HD'$. 又 $\because \angle AD'G=\angle AD'H$，$AD'=AD'$，$\therefore \triangle AD'G\cong\triangle AD'H$. 又 $\therefore \triangle ADG\cong\triangle AD'G$，$\therefore \angle DAG=\angle GAD'=\angle D'AH=90°\div 3=30°$.

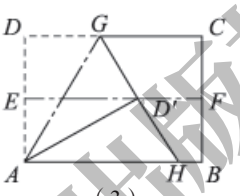
图（3）中的 $\triangle AGH$ 即是一个等边三角形.



（1）



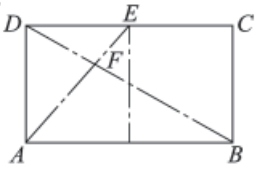
（2）



（3）

习题

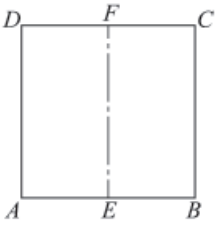
1. 提示：先用折纸 1 折出矩形 $ABCD$ 的对角线 BD，再用折纸 2 折出 CD 的的中点 E，最后用折纸1折出折痕 AE，AE 与 BD 的交点 F 即是对角线 BD 的一个三等分点.



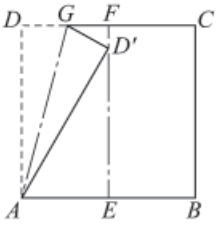
由于 $\triangle DEF\backsim\triangle BAF$，$\therefore DF:FB=DE:AB=1:2$.

2. 提示：先用折纸 3 折出正方形 $ABCD$ 的边 AD，BC 的中平行线 EF（如图（1））；再用折纸 6，使点 A 不动，将点 D 折到 EF 上，得到点 D'（如图（2））；最后用折纸 1 折出折痕 BD'（如图（3））. 由于 $AD'=AD=2AE$，$ED'\perp AB$，$\therefore \angle EAD'=60°$.

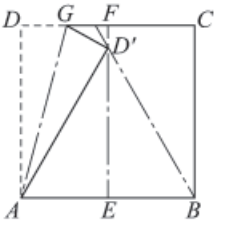
$\triangle ABD'$ 就是满足条件的等边三角形.



（1）

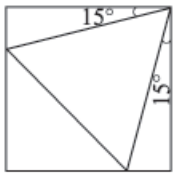


（2）



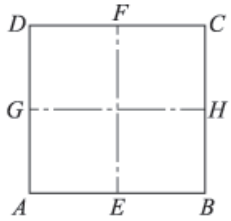
（3）

山东教育出版社

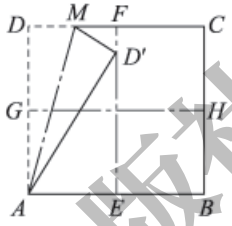


3. 分析：从给出的图形可以看出，关键是折出 15° 的角（如右图）. 上面的第 2 题的图（2）中，$\angle DAD'=30°$，因而$\angle DAG=15°$. 这个图形给我们以启发.

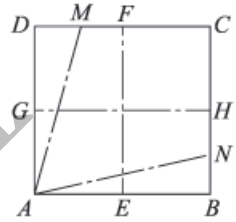
提示：先两次用折纸 3 折出正方形 $ABCD$ 两条与边平行的对称轴 EF，GH（如图（1））， 标记出点 F，H. 再用折纸 6，使点 A 不动，将点 D 折到 EF 上，得到点 D'（如图（2））， 折痕 AM 就是所求三角形的一条边. 折完后将$\triangle AMD'$ 展开，用同样的方法可以折出所求三角形的另一条边 AN（如图（3））. 最后用折纸 1 折出折痕 MN（如图（4）），$\triangle AMN$ 即是所求的三角形.



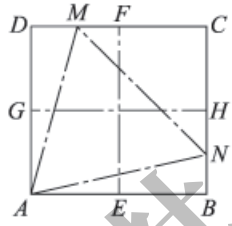
（1）



（2）



（3）



（4）

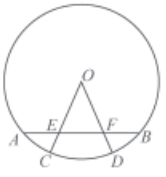
山东教育出版社
山东教育出版社

总复习题

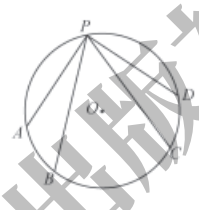
- 整理本学期学过的知识与方法，用一张图把它们表示出来，并与同伴进行交流.
- 在自己经历过的解决问题活动中，选择一个最具有挑战性的问题，写下解决它的过程，包括遇到的困难、克服困难的方法与过程及所获得的体会，并解释选择这个问题的原因.
- 通过本学期的数学学习，你有哪些收获？有哪些需要改进的地方？

知识技能

1. 如图，AB 是⊙O 的弦，半径 OC，OD 分别交 AB 于点 E，F，且 $AE = BF$. OE 与 OF 的大小有什么关系？为什么？



（第 1 题）

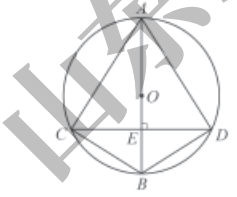


（第 2 题）

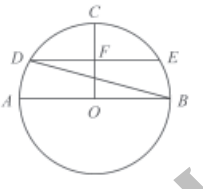
2. 如图，A，B，C，D，P 是⊙O 上的五个点，且 $\angle APB = \angle CPD$. $\overset{\frown}{AB}$ 与 $\overset{\frown}{CD}$ 的大小有什么关系？为什么？

3. 已知直线 l 及 l 外一点 A，以 A 为圆心作圆与直线 l 相切.

4. 如图，⊙O 的直径 AB 垂直于弦 CD，垂足为点 E，连接 AC，AD，BC，BD. 图中有哪些相等的量？请分别写出来.



（第 4 题）



（第 5 题）

总复习题

教师首先鼓励学生自己回顾本册的学习内容，并与同伴合作完成本册内容框架图，每个小组制成的框架图可以各有特色，但应包括所有的学习重点.

教师还应组织学生交流在本册学习中的收获和不足，培养他们的反思意识.

1. $OE = OF$.

提示：过点 O 作 AB 的垂线，（垂足为点 G，则 $AG = BG$，因此 $EG = FG$. Rt△OEG ≌ Rt△OFG.

2. $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$.

提示：连接 OA，OB，OC，OD. 由 $\angle APB = \angle CPD$，得 $\angle AOB = \angle COD$. 从而 $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$.

3. 略. 本题需要过点 A 作 l 的垂线，作垂线时可以用三角尺.

4. $\angle BAC = \angle BAD = \angle CDB = \angle BCD$;

$\angle ABC = \angle ABD = \angle ADC = \angle ACD$;

$\angle ACB = \angle ADB$;

$AC = AD$，$BC = BD$，$CE = ED$;

$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AD}$，$\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BD}$，$\overset{\frown}{ACB} = \overset{\frown}{ADB}$.

山东教育出版社

5. $\angle ABC = 15°$.

提示：连接 OD.

6. $AB = 2\sqrt{3}$ cm.

7. 相离.

8. 连接 BD，

则有 $\angle CFD = \angle DBC$.

因为 $\angle DBC = 36°$，

所以 $\angle CFD = 36°$.

9. 概率为 $\frac{1}{16}$.

10.（1）这个游戏不公平，小明获胜的概率为 $\frac{2}{9}$，小亮获胜的概率为 $\frac{7}{9}$；

（2）游戏仍不公平，但对小明有利，因为他获胜的概率是 $\frac{5}{9}$，小亮获胜的概率是 $\frac{4}{9}$；修改规则的方法不唯一，如若两个转盘转出的颜色相同或者可以配成紫色，则小明得 4 分，否则小亮得 5 分.

11. 本题的理论概率为 $\frac{1}{5}$，可以用列表法.

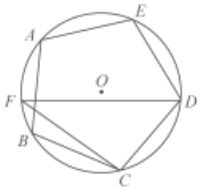
12. 略.

5. 如图，$\odot O$ 的半径 OC 与直径 AB 互相垂直，F 是 OC 的中点，弦 DE 经过点 F，且 $DE \parallel AB$. $\angle ABD$ 的度数是多少？

※**6.** 两个圆的圆心相同，半径分别为 1 cm 和 2 cm，大圆的弦 AB 与小圆相切，求 AB 的长度.

7. $\odot O$ 的周长为 a cm，面积为 a cm^2，如果点 O 到一条直线的距离为 π cm，那么这条直线与 $\odot O$ 有怎样的位置关系？

8. 如图，正五边形 $ABCDE$ 内接于 $\odot O$，点 F 在劣弧 AB 上，求 $\angle CFD$ 的大小.



（第 8 题）

9. 两道单选题都含有 A，B，C，D 四个选项，瞎猜这两道题，恰好全部猜对的概率是多少？

10. 小明和小亮用下图中两个转盘（每个转盘被分成面积相等的 3 个扇形）做“配紫色”游戏.

（1）分别转动两个转盘，若配成紫色，则小明赢，否则小亮赢. 这个游戏对双方公平吗？

（2）若两个转盘颜色相同或者可以配成紫色，则小明得 1 分，否则小亮得 1 分. 这个游戏对双方公平吗？如果你认为公平，请说明理由；否则，如何修改得分规则才能使游戏对双方公平？



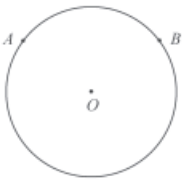
（第 10 题）

11. 两人一组，每人在纸上随机写一个不大于 5 的正整数，两人所写的正整数恰好相同的概率是多少？你是怎么计算的？

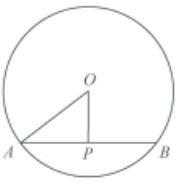
数学理解

12. 如图，A，B 是圆上的任意两点，如何找到关于这两点的对称轴？你有哪些方法？

山东教育出版社



（第 12 题）

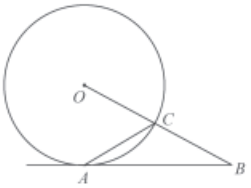


（第 13 题）

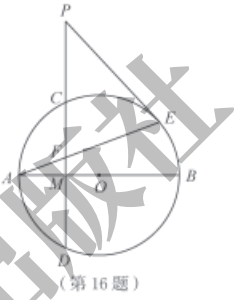
13. 如图，⊙O 的直径为 10 cm，弦 AB = 8 cm，P 是弦 AB 上的一个动点，求 OP 的长度范围.

14. 半径为 5 的⊙O 中，点 A 与圆心 O 的距离为 2，直线 l 与点 A 的距离为 3，且直线 OA 与 l 垂直，则直线 l 与⊙O 有怎样的位置关系？

15. 如图，在⊙O 中，AC 是弦，$AC = OC$，延长半径 OC 到点 B，使 $CB = OC$. AB 是⊙O 的切线吗？为什么？



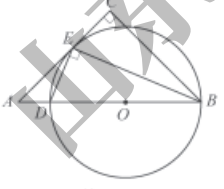
（第 15 题）



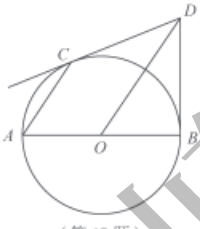
（第 16 题）

16. 如图，在⊙O 中，直径 AB 与弦 CD 相交于点 M，且 M 是 CD 的中点，点 P 在 DC 的延长线上，PE 是⊙O 的切线，E 是切点，AE 与 CD 相交于点 F. PE 与 PF 的大小有什么关系？为什么？

17. 如图，在△ABC 中，$\angle C = 90°$，$\angle ABC$ 的平分线与 AC 相交于点 E，过点 E 作 BE 的垂线，与 AB 相交于点 D，⊙O 是△BDE 的外接圆. AC 是⊙O 的切线吗？为什么？



（第 17 题）



（第 18 题）

13. 3 cm≤OP≤5 cm.

14. 相交或者相切.

15. 是.

提示：连接 OA，易知△AOC 为等边三角形，所以 $\angle OAC = \angle OCA = 60°$. 由 $AC = OC = BC$，可知 $\angle CAB = 30°$. 所以 $\angle OAC + \angle CAB = 90°$，即 $OA \perp AB$.

16. $PE = PF$.

提示：连接 OE，即 $OE \perp PE$，所以 $\angle PEF + \angle OEA = 90°$，$\angle A = \angle OEA$. 由已知条件可得 $AB \perp CD$，$\angle A + \angle AFM = 90°$，由此可得 $\angle PEF = \angle AFM = \angle PFE$，所以 $PE = PF$.

17. 是.

提示：由 $DE \perp BE$，可知 DB 是直径. 连接 OE，则 $\angle OBE = \angle OEB$，由 $\angle CBE = \angle OBE$，所以 $\angle OEB = \angle CBE$，从而 $OE // BC$，可知 $\angle OEA = \angle C = 90°$. 所以 AC 是⊙O 的切线.

山东教育出版社

18. 是.

提示：连接 OC，易知 $OC\perp CD$. 由 $AC//OD$，$OA=OC$，可知 $\angle DOC=\angle OCA=\angle OAC$，$\angle DOB=\angle OAC$. 所以 $\angle DOC=\angle DOB$. 所以 $\triangle OCD\cong\triangle OBD$. 所以 $\angle OBD=\angle OCD=90°$.

19. 面积为 $\dfrac{\pi+6\sqrt{3}}{6}\text{ cm}^2$.

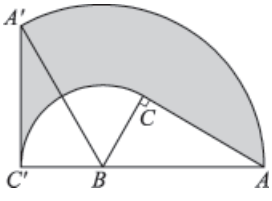
20.（1）$27\pi\text{ cm}^2$；

（2）$180°$.

21.（1）未必是 $\dfrac{1}{6}$，因为该盒子是长方体，各面落地的可能性未必相等；

（2）利用试验数据可以估计很多事件发生的概率，学生的结论将不一而足，如学生可以估计落地一面数字大于 3 的概率等.

22. 提示：如图，阴影部分的面积 = 扇形 ABA' 的面积 – 扇形 CBC' 的面积 $=9\pi\text{ cm}^2$.



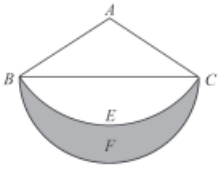
23. 提示：分别从正三角形木板的三个角处截去一个小正三角形，得到的正六边形木板的面积最大，其边长为 20 cm. 面积为 $600\sqrt{3}\text{ cm}^2$.

24. 长度是 5π.

25.（1）略；（2）$\dfrac{1}{4}$.

18. 如图，AB 为 $\odot O$ 的直径，CD 与 $\odot O$ 相切于点 C，$OD//AC$. BD 是 $\odot O$ 的切线吗？为什么？

19. 如图所示的图案（阴影部分）是这样设计的：在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC=2$ cm，$\angle ABC=30°$，以点 A 为圆心、以 AB 为半径作 $\overset{\frown}{BEC}$；以 BC 为直径作 $\overset{\frown}{BFC}$. 求图案的面积.



（第 19 题）

20.（1）一个圆锥的高为 $3\sqrt{3}$ cm，侧面展开图是半圆，求这个圆锥的全面积；

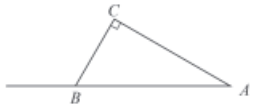
（2）一个圆锥的高为 $\sqrt{3}$，底面半径为 1，求这个圆锥侧面展开图的扇形圆心角的度数.

21.（1）自制一个长方体盒子，各面依次写上数字 1，2，3，4，5，6，从一定高度掷下，落地后写有 1 的一面朝上的概率是 $\dfrac{1}{6}$ 吗？

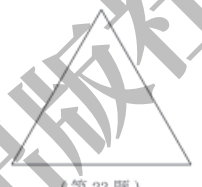
（2）利用试验数据，你还能估计哪些事件发生的概率？

问题解决

22. 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\angle A=30°$，$AB=6$ cm. 将 $\triangle ABC$ 以点 B 为中心，逆时针旋转，使 BC 边落在 AB 的延长线上. 在图上画出直角边 AC 扫过的图形（用阴影表示），并求出它的面积.

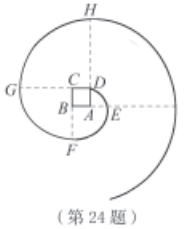


（第 22 题）


（第 23 题）

23. 如图是一块边长为 60 cm 的正三角形木板. 你能从它上面截取一块面积尽可能大的正六边形木板吗？画出你的设计方案，并计算出这块正六边形木板的边长和面积.

24. 如图，四边形 $ABCD$ 是正方形，曲线 $DEFGH\cdots$ 叫做“正方形的渐开线”，其中 $\overset{\frown}{DE}$，$\overset{\frown}{EF}$，$\overset{\frown}{FG}$，$\overset{\frown}{GH}$，…的圆心依次按点 A，B，C，D 循环. 当 $AB=1$ 时，曲线 $DEFGH$ 的长度是多少？



（第 24 题）

25. 在街头巷尾会遇到一类“摸球游戏”，摊主把分别标有数字 1，2，3 的 3 个白球和标有数字 4，5，6 的 3 个黑球放在口袋里（球除颜色外完全相同），让你摸球.

山东教育出版社

规定：每付 3 元钱就玩一局，每局连续摸两次，每次只能摸一个，第一次摸完后把球放回口袋里搅匀后再摸一次，若前后两次摸得的都是白球，摊主就送你 10 元钱的奖品.

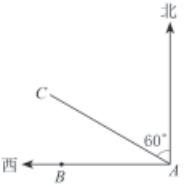
（1）用列表法列举出摸出的两个球可能出现的结果；

（2）求出获奖的概率.

26. 如图，某货船以 20 海里/时的速度将一批重要物资由 A 处运往正西方向的 B 处，经过 16 小时到达，到达后立即卸货. 此时，接到气象部门通知，一台风中心正以 40 海里/时的速度由 A 处向北偏西 60° 方向移动，距台风中心 200 海里的圆形区域（包括边界）均会受到影响.

（1）B 处是否会受到台风的影响？请说明理由；

（2）为避免受到台风的影响，该船应在多长时间内卸完货物？



（第 26 题）

27. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 a，AC 与 BD 相交于点 E，过点 E 作 $FG/\!/AB$，分别交 AD，BC 于点 F，G. 那么以 B 为圆心、以 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ 为半径的圆与直线 AC，FG，DC 有怎样的位置关系？为什么？

26.（1）会受到台风的影响；

（2）约在 3.9 小时内.

27. $\odot B$ 与 AC 相切，与 FG 相交，与 DC 相离.

山东教育出版社

山东教育出版社