教育部审定
2013

义务教育教科书

数学

SHUXUE

八年级　上册



华东师范大学出版社

华东师范大学出版社

义务教育教科书

数学

SHUXUE

八年级　上册

主　编　王建磐
副主编　王继延
　　唐复苏

华东师大版电子教材

华东师范大学出版社

致亲爱的同学

欢迎你，我们的小伙伴.

你现在拿到的这本数学书是依据《国家中长期教育改革和发展规划纲要（2010—2020年）》与国家《义务教育数学课程标准（2011年版）》，为你们提供的初中阶段六册数学教科书中的第三本.

这本书与七年级的数学书一样，从你所熟悉的情境入手，逐步展开最基本的、丰富多彩的数学内容，并穿插一些阅读材料，提供一些让你思考、实践和自主探索的栏目. 程度不一的习题，应用性、探索性和开放性的各种形式的问题及综合与实践等，都为你创造了充分展示你聪明才智与数学能力的机会.

现在，请你翻开这本书，与我们一起继续漫游数学世界，结识更多、更具魅力的数学朋友.

“数的开方”是一种新的运算，与你以前所学的平方、立方运算有着密切的联系. 这一章还将引入一种新数——无理数，把数的集合扩充到实数集，使数的大家庭越来越完美.

七年级时，我们已经学会了整式的加减，现在继续学习**“整式的乘除”**，其中的乘法公式给我们提供了许多美妙的信息. 在此基础上，我们还要学习因式分解，它与整数的因数分解十分类似. 所有这些都是继续学习其他数学知识的重要基础，也能进一步帮助你去解决问题.

你已经认识了许多几何图形，知道通过图形的变换——轴对称、平移与旋转，有些图形可以完全重合，它们的形状与大小都相同，即为全等图形. **“全等三角形”**是最简单的全等图形，它们的对应边、对应角都相等. 你还将了解判定三角形全等的各种简便方法，得到几何研究中几个重要的基本事实. 你将在以前说理的基础上，学习一些有关演绎推理的知识，掌握一些主要的推理论证的方法，在合情推理与演绎推理的结合中，领略其中的奥秘.

你知道2002年在北京召开的国际数学家大会（ICM－2002）吗？这次大会的会标，就是1 700多年前中国古代数学家赵爽用来证明勾股定理的弦图. 你将会在**“勾股定理”**这一章中认识这个弦图，并学会运用那个奇妙的结论解决各种有趣的问题.

最后，**“数据的收集与表示”**给你自己动手的机会，教你学会处理一些实际问题的方法，让数据说话，用数学语言表述你的见解.

数学世界继续欢迎你，为你敞开着大门.

编者

目　录

第 11 章　数的开方

11.1　平方根与立方根 / 2

1. 平方根 / 2

2. 立方根 / 5

11.2　实数 / 8

阅读材料　为什么说$\sqrt{2}$不是有理数 / 12

$\sqrt{5}$的算法 / 12

小结 / 14

复习题 / 15

第 12 章　整式的乘除

12.1　幂的运算 / 18

1. 同底数幂的乘法 / 18

2. 幂的乘方 / 19

3. 积的乘方 / 20

4. 同底数幂的除法 / 22

12.2　整式的乘法 / 25

1. 单项式与单项式相乘 / 25

2. 单项式与多项式相乘 / 27

3. 多项式与多项式相乘 / 27

12.3　乘法公式 / 30

1. 两数和乘以这两数的差 / 30

2. 两数和(差)的平方 / 32

华东师大版电子教材

阅读材料　贾宪三角 / 37
12.4　整式的除法 / 39
1. 单项式除以单项式 / 39
2. 多项式除以单项式 / 40
12.5　因式分解 / 42
小结 / 46
复习题 / 48
综合与实践　面积与代数恒等式 / 51

第 13 章　全等三角形

13.1　命题、定理与证明 / 54
1. 命题 / 54
2. 定理与证明 / 55
13.2　三角形全等的判定 / 59
1. 全等三角形 / 59
2. 全等三角形的判定条件 / 59
3. 边角边 / 62
4. 角边角 / 66
5. 边边边 / 71
6. 斜边直角边 / 73
阅读材料　图形中的“裂缝” / 77
13.3　等腰三角形 / 78
1. 等腰三角形的性质 / 78
2. 等腰三角形的判定 / 81
13.4　尺规作图 / 85

华东师大版电子教材

1. 作一条线段等于已知线段 / 86
2. 作一个角等于已知角 / 86
3. 作已知角的平分线 / 87
4. 经过一已知点作已知直线的垂线 / 88
5. 作已知线段的垂直平分线 / 89

阅读材料　由尺规作图产生的三大难题 / 91

13.5　逆命题与逆定理 / 92

1. 互逆命题与互逆定理 / 92
2. 线段垂直平分线 / 94
3. 角平分线 / 96

阅读材料　《几何原本》/ 99

小结 / 101

复习题 / 103

第 14 章　勾股定理

14.1　勾股定理 / 108

1. 直角三角形三边的关系 / 108
2. 直角三角形的判定 / 112
3. 反证法 / 114

阅读材料　勾股定理史话 / 118

美丽的勾股树 / 119

14.2　勾股定理的应用 / 120

阅读材料　勾股定理的“无字证明” / 124

小结 / 125

复习题 / 126

华东师大版电子教材

第 15 章　数据的收集与表示

15.1　数据的收集 / 130

1. 数据有用吗 / 130

2. 数据的收集 / 131

阅读材料　谁是《红楼梦》的作者 / 134

15.2　数据的表示 / 135

1. 扇形统计图 / 136

2. 利用统计图表传递信息 / 139

阅读材料　计算机帮我们画统计图 / 144

小结 / 148

复习题 / 149

综合与实践　叶子的特征 / 152

数学实验附图

方格图 / 154

格点图 / 157

华东师大版电子教材

第11章　数的开方



要剪出一张面积为25cm²的正方形纸片，正方形的边长应是多少？

本章将学习有关数的一种新的运算——开方，
认识新朋友——无理数. ▶▶▶

华东师大版教材

11.1 平方根与立方根

1. 平方根

本章导图中提出的问题，就是已知正方形的面积为 25 cm^2，求这个正方形的边长.

容易知道，这个正方形的边长是 5 cm.

上述问题实质上就是要求一个数，这个数的平方等于 25.

概括

25 的平方根只有一个吗？还有没有别的数的平方也等于 25？

如果一个数的平方等于 a，那么这个数叫做 a 的**平方根**(square root).

在上述问题中，因为 $5^2 = 25$，所以 5 是 25 的一个平方根.

又因为 $(-5)^2 = 25$，所以 -5 也是 25 的一个平方根.

这就是说，5 与 -5 都是 25 的平方根.

根据平方根的意义，我们可以利用平方运算来求一个数的平方根.

例 1 求 100 的平方根.

解 因为 $10^2 = 100$，$(-10)^2 = 100$，除了 10 和 -10 以外，任何数的平方都不等于 100，所以 100 的平方根是 10 和 -10. 也可以说，100 的平方根是 ± 10.

试一试

通过这些题目的解答，你能发现什么？

(1) 144 的平方根是什么？

(2) 0 的平方根是什么？

(3) -4 有没有平方根？为什么？

请你自己也编三道求平方根的题目，并给出解答.

华东师大版电子教材

概括

一个正数如果有平方根*，那么必定有两个，它们互为相反数. 显然，如果我们知道了这两个平方根中的一个，那么立即可以得到另一个.

正数 a 的正的平方根，叫做 a 的**算术平方根**，记作 $\sqrt{a}$，读作“根号 a”；另一个平方根是它的相反数，即 $-\sqrt{a}$. 因此，正数 a 的平方根可以记作 $\pm\sqrt{a}$，其中 a 称为被开方数.

因为 0 的平方等于 0，而其他任何数的平方都不等于 0，所以 0 的平方根只有一个（就是 0），也叫做 0 的算术平方根，记作 $\sqrt{0}$. 即有 $\sqrt{0}=0$.

$\sqrt{a}$（$a\geqslant 0$）表示 a 的算术平方根，试就 $a>0$ 和 $a=0$ 两种情况，分别说出它的意义.

思考

负数有平方根吗？

即思考：有没有一个数的平方是负数？

求一个非负数的平方根的运算，叫做开平方. 将一个正数开平方，关键是找出它的算术平方根.

在例 1 中，我们可以先求出 100 的算术平方根是 $\sqrt{100}=10$，然后得知 100 的平方根是 $\pm\sqrt{100}=\pm 10$.

例 2 将下列各数开平方：

（1）49；　　（2）$\frac{4}{25}$.

解 （1）因为 $7^2=49$，所以 $\sqrt{49}=7$，因此 49 的平方根为 $\pm\sqrt{49}=\pm 7$.

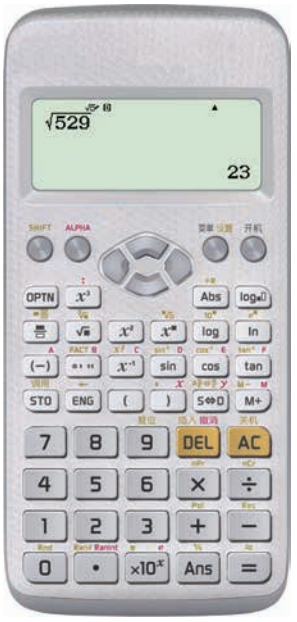
（2）_____.

按照题（1）的解答过程，写出题（2）的解答.

* 数的范围从有理数扩充到实数以后（11.2 节），每一个正实数必定有两个平方根.

华东师大版电子教材

在例 1、例 2 中，我们是通过观察，利用开平方与平方的关系来求平方根的. 通常可用计算器直接求出一个正数的算术平方根（有时得到的是近似值）.



例 3 用计算器求下列各数的算术平方根：

（1）529；　　（2）44.81（精确到 0.01）.

说明 用计算器求一个正数的算术平方根，只需直接按书写顺序按键即可.

解 （1）在计算器上依次键入

$\boxed{\sqrt{\blacksquare}}$ $\boxed{5}$ $\boxed{2}$ $\boxed{9}$ $\boxed{=}$，

显示结果为 23，所以 529 的算术平方根为

$$\sqrt{529}=23.$$

（2）在计算器上依次键入

$\boxed{\sqrt{\blacksquare}}$ $\boxed{4}$ $\boxed{4}$ $\boxed{\cdot}$ $\boxed{8}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$，

显示结果为_____，要求精确到 0.01，可得

$$\sqrt{44.81}\approx_____.$$

练　习

1. 完成下列表格：

被开方数	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
算术平方根											
平方根											

2. 说出下列各数的平方根：

（1）6 400；　　（2）0.25；　　（3）$\frac{49}{81}$.

3. 用计算器计算：

（1）$\sqrt{676}$；　　（2）$\sqrt{27.8784}$；　　（3）$\sqrt{4.225}$（精确到 0.01）.

4. 下列说法正确吗？为什么？如果不正确，请予以改正.

（1）16 的平方根是 4；　　（2）$\sqrt{25}=\pm 5$.

华东师大版电子教材

2. 立方根

问题

要做一只容积为 216 cm^3 的正方体纸盒，正方体的棱长是多少？

思考

这个实际问题，在数学上可以转化成一个怎样的计算问题？从中可以抽象出一个什么数学概念？

与“平方根”类似，试作一些讨论和研究.

上面所提出的问题，实质上就是要求一个数，这个数的立方等于 216. 容易验证，$6^3 = 216$，而且任何不等于 6 的数的立方都不等于 216，所以正方体的棱长应为 6 cm.

概括

如果一个数的立方等于 a，那么这个数叫做 a 的**立方根**(cube root).

试一试

(1) 27 的立方根是什么？
(2) −27 的立方根是什么？
(3) 0 的立方根是什么？
请你自己也编三道求立方根的题目，并给出解答.

通过这些题目的解答，你能发现什么？

概括

任何数的立方根如果存在的话*，必定只有一个. 正数的立方根是正数，负数的立方根是负数，0 的立方根是 0.

---

* 数的范围从有理数扩充到实数以后(11.2 节)，每一个实数的立方根必定存在.

数 a 的立方根，记作 $\sqrt[3]{a}$，读作“三次根号 a”. 其中，a 是被开方数，3 是根指数. 求一个数的立方根的运算，叫做开立方.

例 4 求下列各数的立方根：

（1）$\frac{8}{27}$；　　（2）-125；　　（3）-0.008.

可以借助立方运算求立方根，也可以用立方运算检验开立方是否正确.

解 （1）因为 $\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$，所以

$$\sqrt[3]{\frac{8}{27}}=\frac{2}{3}.$$

（2）因为 $(-5)^3=-125$，所以

$$\sqrt[3]{-125}=-5.$$

按照前两小题的解答过程，写出题（3）的解答.

（3）_____，

_____.

例 5 用计算器求下列各数的立方根：

（1）1 331；　　（2）9.263（精确到 0.01）.

说明 用计算器求一个有理数的立方根，只需直接按书写顺序按键即可.

解 （1）在计算器上依次键入

SHIFT $\sqrt{\blacksquare}$ ($\sqrt[3]{\blacksquare}$) 1 3 3 1 =，

显示结果为 11，所以

$$\sqrt[3]{1\,331}=11.$$

$\sqrt[3]{\blacksquare}$ 是键 $\sqrt{\blacksquare}$ 的第二功能，启用第二功能，需先按 SHIFT 键.

（2）在计算器上依次键入

SHIFT $\sqrt{\blacksquare}$ ($\sqrt[3]{\blacksquare}$) 9 · 2 6 3 =，

显示结果为_____，要求精确到 0.01，可得

$$\sqrt[3]{9.263}\approx_____.$$

华东师大版电子教材

练　习

1. 完成下列表格：

被开方数	−64	−27	−8	−1	0	1	8	27	64
立方根									

2. 求下列各数的立方根：

（1）512；　　（2）−0.027；　　（3）$-\frac{64}{125}$.

3. 用计算器计算：

（1）$\sqrt[3]{6\,859}$；　　（2）$\sqrt[3]{17.576}$；　　（3）$\sqrt[3]{5.691}$（精确到0.01）.

习题 11.1

1. 下列说法正确吗？为什么？

（1）0.09的平方根是0.3；　　（2）$\sqrt{16}=\pm4$；

（3）0没有立方根；　　（4）1的立方根是±1.

2. 求下列各数的平方根：

（1）$\frac{16}{81}$；　　（2）0.36；　　（3）324.

3. 求下列各数的立方根：

（1）0.125；　　（2）$-\frac{27}{64}$；　　（3）729.

4. 用计算器计算：（精确到0.01）

（1）$\sqrt{16.89}$；　　（2）$\sqrt[3]{6\,892}$.

5. （1）$\sqrt{10}$在哪两个相邻的整数之间？

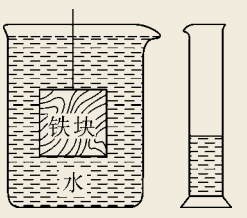
（2）$3.1<\sqrt{10}<3.2$正确吗？

（3）下列四个结论中，正确的是(　　).

A. $3.15<\sqrt{10}<3.16$　　B. $3.16<\sqrt{10}<3.17$

C. $3.17<\sqrt{10}<3.18$　　D. $3.18<\sqrt{10}<3.19$

6. 如图，在做浮力实验时，小华用一根细线将一正方体铁块拴住，完全浸入盛满水的圆柱形烧杯中，并用一量筒量得溢出的水的体积为40.5 cm^3. 然后，小华将铁块从烧杯中提起，量得烧杯中的水位下降了0.62 cm. 求烧杯内部的底面半径和正方体铁块的棱长.（用计算器计算，结果精确到0.1 cm）



（第6题）

华东师大版电子教材

11.2 实数

做一做

（1）用计算器求$\sqrt{2}$；

（2）利用平方运算验算（1）中所得的结果.

用计算器求 $\sqrt{2}$，显示结果为1.414 213 562. 再用计算器计算 1.414 213 562 的平方，结果是 1.999 999 999，并不是 2. 这说明计算器求得的只是$\sqrt{2}$的近似值.

用计算机计算 $\sqrt{2}$，你可能会大吃一惊：

$\sqrt{2}$ = 1.414213562373095048801688724209698078569671875376948073176679737990732478462107038850387534327641572735013846230912297024924836055850737212644121497099935831413222665927505592755799950501152782060571470109559971605970274534596862014728517418640889198609552329230484308714321450839762603627995251407989687253396546331808829640620615258352395054745750287759961729835575220337531857011354374603408498847160386899970699004815030544027790316454247823068492936918621580578463111596668713013015618568987237235288509264861249497715421833420428568606014682472077143585487415565706967765372022648544701585880162075847492265722600208558446652145839889394437092659180031138824646815708263010059485870400318648034219489727829064104507263688131373985525611732204024509122770022694112757362728049573810896750401836986836845072579936472906076299694138047565482372899718032680247442062926912485905218100445984215059112024944134172853147810580360337107730918286931471017111168391658172688941975871658215212…

在数学上已经证明，没有一个有理数的平方等于2，也就是说，$\sqrt{2}$ 不是一个有理数.

那么，$\sqrt{2}$ 是怎样的数呢？

我们知道，有理数包括整数和分数，而任何一个分数写成小数的形式，必定是有限小数或者无限循环小数，例如：

$$\frac{1}{4}=0.25,\ \frac{2}{3}=0.\dot{6}=0.666\,666\,666\cdots,$$

$$\frac{1}{7}=0.\dot{1}42\,85\dot{7}=0.142\,857\,142\,857\,142\,857\cdots.$$

$\sqrt{2}$ 不是一个有理数，实际上，它是一个无限不循环小数.

类似地，$\sqrt[3]{5}$、圆周率 π 等也都不是有理数，它们都是无限不循环小数.

有兴趣的同学可以读一读第12页的阅读材料.

请你随意写出三个分数，将它化成小数，验证这个结论.

概括

无限不循环小数叫做**无理数**(irrational number). 上面所提到的 $\sqrt{2}$、$\sqrt[3]{5}$、π 等都是无理数.

有理数和无理数统称**实数**(real number).

试一试

你能在数轴上找到表示 $\sqrt{2}$ 的点吗？

如图11.2.1，将两个边长为1的正方形分别沿对角线剪开，得到四个等腰直角三角形，即可拼成一个大正方形. 容易知道，这个大正方形的面积是2，所以大正方形的边长为 $\sqrt{2}$.

这就是说，边长为1的正方形的对角线长是 $\sqrt{2}$. 利用这个事实，我们容易在数轴上画出表示 $\sqrt{2}$ 的点，如图11.2.2所示.

按照计算器显示的结果，你能想象出 $\sqrt{2}$ 在数轴上的大致位置吗？

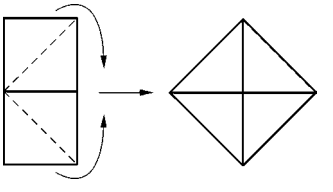


图11.2.1

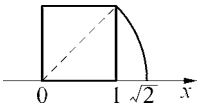


图11.2.2

华东师大版电子教材

概括

数学上可以证明，数轴上的每一点必定表示一个实数；反过来，每一个实数（有理数或无理数）都可以用数轴上的一个点来表示. 换句话说，实数与数轴上的点一一对应. 这是数集从有理数集扩充到实数集的一大进步.

能说“有理数和数轴上的点一一对应”吗？为什么？

在七年级上学期第 2 章学过的有关有理数的相反数和绝对值等概念、大小比较法则、运算法则以及运算律，对于实数也适用.

从有理数扩充到实数以后，正数总可以开方. 在实数范围内，任意一个正数有两个平方根，它们互为相反数；0 的平方根是 0；负数没有平方根. 任意一个实数有且仅有一个立方根.

涉及无理数的大小比较和运算，通常可以取它们的近似值来进行.

例 1 试比较 $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ 与 π 的大小.

解 用计算器求得

$$\sqrt{3}+\sqrt{2}\approx 3.146\,264\,37,$$

而

$$\pi\approx 3.141\,592\,654,$$

因此

$$\sqrt{3}+\sqrt{2}>\pi.$$

例 2 计算：$\dfrac{\pi}{2}-\left|\dfrac{1}{6}-\sqrt{2}\right|$.（精确到 0.01）

解 $\dfrac{1}{6}-\sqrt{2}\approx 0.167-1.414=-1.247,$

于是

$$\left|\frac{1}{6}-\sqrt{2}\right|\approx 1.247,$$

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2}-\left|\frac{1}{6}-\sqrt{2}\right| &\approx 1.571-1.247\\ &=0.324\\ &\approx 0.32.\end{aligned}$$

取近似值计算时，中间结果通常应比要求的精确度多取一位.

华东师大版电子教材

注 由于$\frac{1}{6}<\sqrt{2}$,所以

$$\left|\frac{1}{6}-\sqrt{2}\right|=\sqrt{2}-\frac{1}{6},$$

原式$=\frac{\pi}{2}-\left(\sqrt{2}-\frac{1}{6}\right)=\frac{\pi}{2}-\sqrt{2}+\frac{1}{6}$.

由此算式,可直接将数据输入计算器进行计算.

练 习

1. 下列说法是否正确?为什么?

(1) 两个整数相除,如果永远都除不尽,那么结果一定是一个无理数;

(2) 任意一个无理数的绝对值都是正数.

2. 计算:$2\sqrt{6}+3\sqrt{7}$.(精确到0.01)

3. 比较下列各对数的大小:

(1) $2\sqrt{3}$和$3\sqrt{2}$; (2) $-\frac{\sqrt{7}}{2}$和$-\frac{\pi}{3}$.

习题 11.2

1. 完成下列表格:

实数	π	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{2}-\sqrt{3}$
相反数				
绝对值				

2. 比较下列各对数的大小:

(1) $\sqrt{2}$与$\sqrt[3]{3}$; (2) $-\sqrt[3]{4}$与$-\sqrt[3]{3}$.

3. 计算:$\left|2\sqrt{5}-5\sqrt{2}\right|+\left|4\sqrt{2}-3\sqrt{3}\right|$.(精确到0.01)

4. 对于无理数$\sqrt{7}$,试解答下列问题:

(1) $\sqrt{7}$在数轴上位于哪两个相邻的整数之间?

(2) 借助计算器找出实数a与b,使$a<\sqrt{7}<b$,且$b-a=0.001$.

华东师大版电子教材

阅读材料

为什么说$\sqrt{2}$不是有理数

我们可以用以下推理来证明$\sqrt{2}$不是一个有理数.

假设$\sqrt{2}$是一个有理数,那么它可以表示为两个整数的商,设$\sqrt{2}=\frac{q}{p}$(p、q是互质的正整数). 由$\sqrt{2}$的意义,可知

$$\left(\frac{q}{p}\right)^2=2,$$

即有

$$\frac{q^2}{p^2}=2,$$

故

$$q^2=2p^2.$$

显然,$2p^2$是一个偶数,即q^2是一个偶数,因此q是偶数. 于是,可设$q=2k$(k是正整数). 由上式,得

$$(2k)^2=2p^2,$$

从而

$$2k^2=p^2,$$

即p^2是偶数,因此p也是偶数,这与p、q互质的假设矛盾.

这个矛盾表明假设"$\sqrt{2}$是一个有理数"不成立,所以$\sqrt{2}$不是一个有理数.

$\sqrt{5}$的算法

你知道$\sqrt{5}$有多大吗? 它所对应的点究竟在数轴上哪个位置呢? 让我们一起来找找看吧.

由于$2^2<5<3^2$,可以肯定$2<\sqrt{5}<3$,也就是$\sqrt{5}$的位置应该在2与3之间. 能不能再精确一点呢? 再尝试一下,你会发现$2.2^2<5<2.3^2$,那么$\sqrt{5}$的位置就在2.2与2.3之间了. 按照这个方法,继续试下去,有

华东师大版电子教材

$$2.23^2 < 5 < 2.24^2,\quad 2.23 < \sqrt{5} < 2.24;$$
$$2.236^2 < 5 < 2.237^2,\quad 2.236 < \sqrt{5} < 2.237;$$
$$\cdots\cdots$$

你看，离 $\sqrt{5}$ 越来越近了. 依据这样的想法，我们确实可以在数轴上找到那么一点，它所表示的数就是 $\sqrt{5}$.

下面我们介绍一个求 $\sqrt{5}$ 的近似值的算法.

记 $x = 1$，代入 $\left(\frac{5}{x} + x\right) \div 2$，得

$$\left(\frac{5}{1} + 1\right) \div 2 = 3,$$

再将 3 代入 $\left(\frac{5}{x} + x\right) \div 2$，得

$$\left(\frac{5}{3} + 3\right) \div 2 = 2.333\cdots,$$

继续上述过程，得

$$\left(\frac{5}{2.333} + 2.333\right) \div 2 = 2.238\cdots,$$
$$\left(\frac{5}{2.238} + 2.238\right) \div 2 = 2.236\cdots,$$
$$\cdots\cdots$$

数学上可以证明，计算步骤越多，得到的数值就越靠近 $\sqrt{5}$.

如果要求精确到 0.001，那么就可得到 $\sqrt{5} \approx 2.236$.

如果使用计算器，你不妨按照下面的按键顺序试试看：

[1] [=] [(] [5] [÷] [Ans] [+] [Ans] [)] [÷] [2] [=] [=] [=] [=] ……

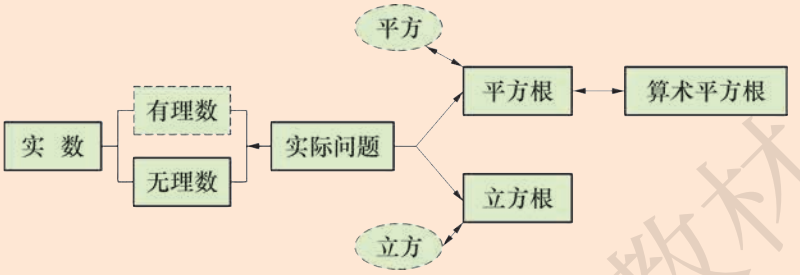
后面的 [=] 键按的次数越多，数值就越精确，到一定时候，由于计算器显示位数的限制，屏幕上显示的数值就不再发生变化了.

想一想：用类似的算法，怎样求 $\sqrt{7}$ 的近似值？用计算器试一试.

华东师大版电子教材

小结

一、知识结构



二、要点

1. 掌握平方根、算术平方根、立方根的意义是学习本章的关键. 在研究时,要抓住平方根(立方根)与平方(立方)之间的关系,例如,可以通过平方(立方)运算来寻求平方根(立方根),并可以用来验证开平方(开立方)的正确性.

2. 在实数范围内,任意一个正数有两个平方根,它们互为相反数;0 的平方根是0;负数没有平方根. 任意一个实数有且仅有一个立方根,正数的立方根为正数,0 的立方根是0,负数的立方根为负数.

3. 有理数和无理数统称实数. 实数与数轴上的点之间有着一一对应关系. 这是数集从有理数集扩充到实数集的一大进步,使数的知识更加完美.

华东师大版电子教材

复习题

A 组

1. 下列说法是否正确？为什么？

（1）4 的平方根是 2；

（2）-8 的立方根是 -2；

（3）40 的算术平方根是 20；

（4）负数没有立方根；

（5）正数有两个立方根；

（6）0 没有平方根.

2. 根据表格中所给信息，完成下列表格：

被开方数	1				
平　方　根			0		
算术平方根		2			
立　方　根				3	-4

3. 填空：

（1）16 的平方根是_____，-27 的立方根是_____；

（2）平方根等于它本身的数是_____，立方根等于它本身的数是_____；

（3）一个正方形的面积是 3 cm^2，它的边长是_____cm；另一个正方形的面积是这个正方形面积的 3 倍，它的边长是_____cm.

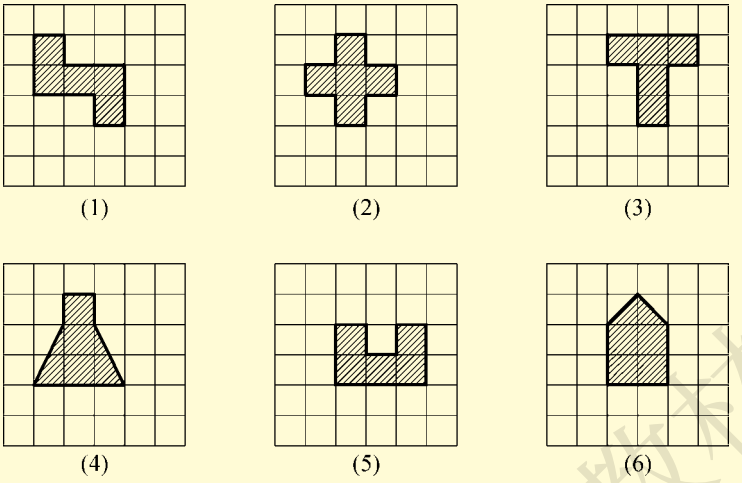
4. 将下列各数按从小到大的顺序排列，并用“$<$”号连接起来：

$$2\sqrt{2},\ \sqrt{5},\ -\frac{\pi}{2},\ 0,\ -1.6.$$

B 组

5. 观察下列各方格图中阴影所示的图形（每一小方格的边长为 1），如果它们都可以剪开，重新拼成正方形，那么所拼成的正方形的边长各为多少？这些正方形一样大吗？（如果你有兴趣，可以试试如何剪拼成一个正方形）

华东师大版电子教材



（第 5 题）

6. 把棱长分别为 2. 15 cm 和 3. 24 cm 的两个正方体铁块熔化，制成一个大的正方体铁块，求这个大正方体铁块的棱长.（先用一个式子表示，再用计算器计算，结果精确到 0. 1 cm）

C 组

7. （1）用计算器计算：

$\sqrt{3^2+4^2}=$ _____；

$\sqrt{33^2+44^2}=$ _____；

$\sqrt{333^2+444^2}=$ _____；

$\sqrt{3\,333^2+4\,444^2}=$ _____.

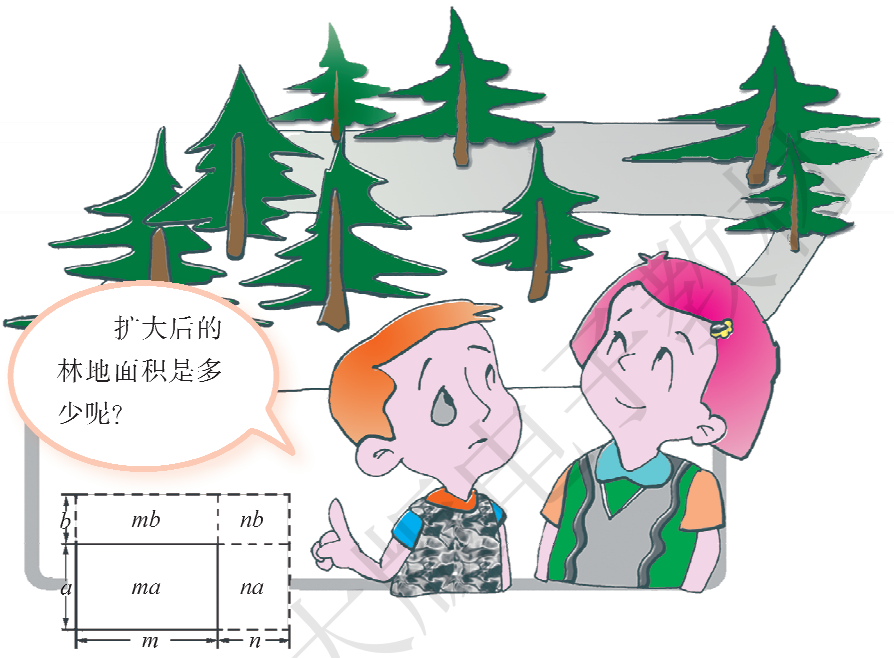
（2）观察题（1）中各式的计算结果，你能发现什么规律？

（3）试运用发现的规律猜想下式的值，并通过计算器的计算验证你的猜想：

$\sqrt{33\,333^2+44\,444^2}=$ _____.

华东师大版电子教材

第12章　整式的乘除



某地区在退耕还林期间，将一块长m米、宽a米的长方形林地的长、宽分别增加n米和b米. 用两种方法表示这块林地现在的面积，可得到：

$$(m+n)(a+b)=ma+mb+na+nb.$$

你知道上面的等式蕴含着什么样的运算法则吗?

本章将学习整式的乘除和因式分解.

华东师大版教材

12.1 幂的运算

1. 同底数幂的乘法

这几道题的计算有什么共同特点？从中你能发现什么规律？若指数为任意的正整数 m、n，$a^m \cdot a^n$ 等于什么？

试一试

根据幂的意义填空：

(1) $2^3 \times 2^4 = (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2)$

$= 2^{(\quad)}$；

(2) $5^3 \times 5^4 =$ _____

$= 5^{(\quad)}$；

(3) $a^3 \cdot a^4 =$ _____

$= a^{(\quad)}$.

概括

$$a^m \cdot a^n = (\underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{m\text{个}})(\underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n\text{个}})$$

$$= \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{(m+n)\text{个}} = a^{m+n}.$$

利用这个法则，可直接求出同底数幂的积.

可得

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}(m、n \text{ 为正整数}).$$

这就是说，同底数幂相乘，底数不变，指数相加.

例 1 计算：

(1) $10^3 \times 10^4$；　　(2) $a \cdot a^3$；

(3) $a \cdot a^3 \cdot a^5$.

华东师大版电子教材

解 （1）$10^3 \times 10^4 = 10^{3+4} = 10^7$.

（2）$a \cdot a^3 = a^{1+3} = a^4$.

（3）$a \cdot a^3 \cdot a^5 = a^{1+3+5} = a^9$.

练　习

1. 判断下列计算是否正确，并说明理由：

（1）$a \cdot a^2 = a^2$；　　（2）$a + a^2 = a^3$；

（3）$a^3 \cdot a^3 = a^9$；　　（4）$a^3 + a^3 = a^6$.

2. 计算：

（1）$10^2 \times 10^5$；　　（2）$a^3 \cdot a^7$；　　（3）$x \cdot x^5 \cdot x^7$.

2. 幂的乘方

试一试

根据乘方的意义及同底数幂的乘法法则填空：

（1）$(2^3)^2 = 2^3 \times 2^3 = 2^{(\quad)}$；

（2）$(5^2)^3 = 5^2 \times 5^2 \times 5^2 = 5^{(\quad)}$；

（3）$(a^3)^4 = a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 = a^{(\quad)}$.

这几道题的计算有什么共同特点？从中你能发现什么规律？试猜想：

$(a^m)^n = a^{(\quad)}$

（m、n 为正整数）.

概括

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \cdots \cdot a^m}_{n\text{个}}$$

$$= a^{\overbrace{m+m+\cdots+m}^{n\text{个}}}$$

$$= a^{mn}.$$

华东师大版电子教材

利用这个法则，可直接计算幂的乘方.

可得

$$(a^m)^n = a^{mn}(m、n\text{ 为正整数}).$$

这就是说，幂的乘方，底数不变，指数相乘.

例 2 计算：

(1) $(10^3)^5$；　　(2) $(b^5)^4$.

解 (1) $(10^3)^5 = 10^{3\times5} = 10^{15}$.

(2) $(b^5)^4 = b^{5\times4} = b^{20}$.

练　习

1. 判断下列计算是否正确，并说明理由：

(1) $(a^3)^5 = a^8$；

(2) $a^3 \cdot a^5 = a^{15}$；

(3) $(a^2)^3 \cdot a^4 = a^9$.

2. 计算：

(1) $(2^2)^2$；　(2) $(y^2)^5$；　(3) $(x^4)^3$；　(4) $(y^3)^2 \cdot (y^2)^3$.

3. 积的乘方

试一试

根据乘方的意义和乘法运算律填空：

(1) $(ab)^2 = (ab) \cdot (ab)$

$= (aa) \cdot (bb)$

$= a^{(\quad)}b^{(\quad)}$；

(2) $(ab)^3 =$ _____

$=$ _____

$= a^{(\quad)}b^{(\quad)}$；

华东师大版电子教材

(3) $(ab)^4$ = _____

= _____

= $a^{(\quad)}b^{(\quad)}$.

观察这几道题的计算结果，你能发现什么规律？设 n 为正整数，$(ab)^n$ 等于什么？

概括

$$(ab)^n = \underbrace{(ab)\cdot(ab)\cdot\cdots\cdot(ab)}_{n个}$$

$$= (\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{n个})\cdot(\underbrace{b\cdot b\cdot\cdots\cdot b}_{n个})$$

$$= a^n b^n.$$

可得

$$(ab)^n = a^n b^n (n 为正整数).$$

这就是说，积的乘方，把积的每一个因式分别乘方，再把所得的幂相乘.

利用这个法则，可直接计算积的乘方.

例 3 计算：

(1) $(2b)^3$；　　(2) $(2a^3)^2$；

(3) $(-a)^3$；　　(4) $(-3x)^4$.

解 (1) $(2b)^3 = 2^3b^3 = 8b^3$.

(2) $(2a^3)^2 = 2^2\times(a^3)^2 = 4a^6$.

(3) $(-a)^3 = (-1)^3\cdot a^3 = -a^3$.

(4) $(-3x)^4 = (-3)^4\cdot x^4 = 81x^4$.

$-a$ 看成 $(-1)a$.

练　习

1. 判断下列计算是否正确，并说明理由：

(1) $(xy^3)^2 = xy^6$；　　(2) $(-2x)^3 = -6x^3$.

2. 计算：

(1) $(3a)^2$；　　(2) $(-3a)^3$；

(3) $(ab^2)^2$；　　(4) $(-2\times10^3)^3$.

华东师大版电子教材

4. 同底数幂的除法

我们已经知道同底数幂的乘法法则：$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$，那么同底数幂怎么相除呢？

试一试

用你熟悉的方法计算：

（1）$2^5 \div 2^2 =$ _____；

（2）$10^7 \div 10^3 =$ _____；

（3）$a^7 \div a^3 =$ _____$(a \neq 0)$.

你是怎样计算的？从这些计算结果中你能发现什么？

由上面的计算，我们发现：

$$2^5 \div 2^2 = 2^3 = 2^{5-2};$$

$$10^7 \div 10^3 = 10^4 = 10^{7-3};$$

$$a^7 \div a^3 = a^4 = a^{7-3}.$$

你能根据除法的意义来说明这些运算结果是怎么得到的吗？

概括

一般地，设 m、n 为正整数，$m > n$，$a \neq 0$，有

$$a^m \div a^n = a^{m-n}.$$

这就是说，同底数幂相除，底数不变，指数相减.

读一读

根据除法的意义推导同底数幂的除法法则

前面我们通过一些计算，归纳、探索出同底数幂的除法法则. 下

华东师大版电子教材

面我们根据除法的意义来推导同底数幂的除法法则：

因为除法是乘法的逆运算，计算 $a^m \div a^n$（m、n 都是正整数，且 $m > n$，$a \neq 0$）实际上是要求一个式子，使

$$a^n \cdot (\quad\quad) = a^m.$$

假设这个式子是 a^k（k 是正整数，待定），即应有

$$a^n \cdot a^k = a^m,$$

即 $$a^{n+k} = a^m,$$

所以 $$n + k = m,$$

得 $$k = m - n.$$

因此，要求的式子应是 a^{m-n}.

由同底数幂的乘法法则，可知

$$a^n \cdot a^{m-n} = a^{n+(m-n)} = a^m,$$

所以 a^{m-n} 满足要求，从而有

$$a^m \div a^n = a^{m-n}（m、n 都是正整数，且 m > n，a \neq 0）.$$

例 4 计算：

（1）$a^8 \div a^3$；

（2）$(-a)^{10} \div (-a)^3$；

（3）$(2a)^7 \div (2a)^4$.

解 （1）$a^8 \div a^3 = a^{8-3} = a^5$.

（2）$(-a)^{10} \div (-a)^3 = (-a)^{10-3} = (-a)^7 = -a^7$.

（3）$(2a)^7 \div (2a)^4 = (2a)^{7-4} = (2a)^3 = 8a^3$.

以后，如果没有特别说明，我们总假设所给出的式子是有意义的. 本例中我们约定 $a \neq 0$.

思考

你能用 $(a+b)$ 的幂表示 $(a+b)^4 \div (a+b)^2$ 的结果吗？

华东师大版电子教材

练　习

1. 填空：

(1) $a^5 \cdot (\quad) = a^9$；　(2) $(\quad) \cdot (-b)^2 = (-b)^7$；

(3) $x^6 \div (\quad) = x$；　(4) $(\quad) \div (-y)^3 = (-y)^7$.

2. 计算：

(1) $a^{10} \div a^2$；　(2) $(-x)^9 \div (-x)^3$；

(3) $m^8 \div m^2 \cdot m^3$；　(4) $(a^3)^2 \div a^6$.

习题 12.1

1. 计算：(结果以幂的形式表示)

(1) $9^3 \times 9^5$；　(2) $3^5 \times 27$；

(3) $a^7 \cdot a^8$；　(4) $x^2 \cdot x^3 \cdot x^4$.

2. 计算：

(1) $(10^3)^3$；　(2) $(a^3)^7$；

(3) $(x^2)^4$；　(4) $(a^2)^3 \cdot a^5$.

3. 判断下列等式是否正确，并说明理由：

(1) $a^2 \cdot a^2 = (2a)^2$；　(2) $a^2 \cdot b^2 = (ab)^4$；

(3) $a^{12} = (a^2)^6 = (a^3)^4 = (a^5)^7$.

4. 计算：

(1) $(3 \times 10^5)^2$；　(2) $(2x)^2$；

(3) $(-2x)^3$；　(4) $a^2 \cdot (ab)^3$；

(5) $(ab)^3 \cdot (ac)^4$.

5. 计算：

(1) $x^{12} \div x^4$；　(2) $(-a)^6 \div (-a)^4$；

(3) $(p^3)^2 \div p^5$；　(4) $a^{10} \div (-a^2)^3$.

6. 判断下列计算是否正确，如果不正确，请予以改正：

(1) $(a^2b)^2 = a^2b^2$；　(2) $a^6 \div a^2 = a^3$；

(3) $(3xy^2)^2 = 6x^2y^4$；　(4) $(-m)^7 \div (-m)^2 = m^5$.

华东师大版电子教材

7. 计算：

(1) $(a^3)^3 \div (a^4)^2$；　　(2) $(x^2y)^5 \div (x^2y)^3$；

(3) $x^2 \cdot (x^2)^3 \div x^5$；　　(4) $(y^3)^3 \div y^3 \div (-y^2)^2$.

8. 用多少张边长为 a 的正方形硬纸卡片，能拼出一个新的正方形？试写出三个答案，并用两种方法表示新正方形的面积. 从不同的表示方法中，你能发现什么？

12.2 整式的乘法

1. 单项式与单项式相乘

试一试

计算：

(1) $(2 \times 10^3) \times (5 \times 10^2)$；

(2) $2x^3 \cdot 5x^2$.

将 $2x^3$ 和 $5x^2$ 分别看成 $2 \cdot x^3$ 和 $5 \cdot x^2$，利用乘法交换律和结合律进行计算.

例 1 计算：

(1) $3x^2y \cdot (-2xy^3)$；

(2) $(-5a^2b^3) \cdot (-4b^2c)$.

解 (1) $3x^2y \cdot (-2xy^3)$

$= [3 \cdot (-2)] \cdot (x^2 \cdot x) \cdot (y \cdot y^3)$

$= -6x^3y^4$.

(2) $(-5a^2b^3) \cdot (-4b^2c)$

$= [(-5) \cdot (-4)] \cdot a^2 \cdot (b^3 \cdot b^2) \cdot c$

$= 20a^2b^5c$.

总结一下，怎样进行单项式的乘法？

华东师大版电子教材

概括

单项式与单项式相乘，只要将它们的系数、相同字母的幂分别相乘，对于只在一个单项式中出现的字母，连同它的指数一起作为积的一个因式.

讨论

你能分别说出 $a\cdot b$、$3a\cdot 2a$ 和 $3a\cdot 5ab$ 的几何意义吗？



练　习

1. 计算：

（1）$3a^2\cdot 2a^3$；

（2）$(-9a^2b^3)\cdot 8ab^2$；

（3）$(-3a^2)^3\cdot(-2a^3)^2$；

（4）$-3xy^2z\cdot(x^2y)^2$.

2. 光速约为 3×10^8 米/秒，太阳光射到地球上的时间约为 5×10^2 秒，地球与太阳的距离约是多少米？

3. 小明的步长为 a 厘米，他量得一间屋子长 15 步、宽 14 步，这间屋子的面积是多少平方厘米？

华东师大版电子教材

2. 单项式与多项式相乘

试一试

利用乘法分配律，不难算吧?!

计算：$2a^2 \cdot (3a^2 - 5b)$.

例2 计算：$(-2a^2) \cdot (3ab^2 - 5ab^3)$.

解 $(-2a^2) \cdot (3ab^2 - 5ab^3)$

$= (-2a^2) \cdot 3ab^2 + (-2a^2) \cdot (-5ab^3)$

$= -6a^3b^2 + 10a^3b^3$.

总结一下，怎样将单项式与多项式相乘?

概括

单项式与多项式相乘，将单项式分别乘以多项式的每一项，再将所得的积相加.

练　习

1. 计算：

(1) $3x^3y \cdot (2xy^2 - 3xy)$；

(2) $2x \cdot (3x^2 - xy + y^2)$.

2. 化简：$x(x^2 - 1) + 2x^2(x + 1) - 3x(2x - 5)$.

3. 多项式与多项式相乘

回忆

我们再来看一看本章导图中的问题：

华东师大版电子教材

某地区在退耕还林期间，将一块长 m 米、宽 a 米的长方形林地的长、宽分别增加 n 米和 b 米. 用两种方法表示这块林地现在的面积.

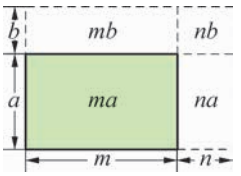


图 12.2.1

现在这块长方形林地的长为 $(m+n)$ 米，宽为 $(a+b)$ 米，因而它的面积为 $(m+n)(a+b)$ 平方米.

也可以这样理解：如图 12.2.1 所示，这块林地由四小块组成，它们的面积分别为 ma 平方米、mb 平方米、na 平方米和 nb 平方米，故这块林地的面积为 $(ma+mb+na+nb)$ 平方米.

你还能用其他方法得出这个等式吗？

由于 $(m+n)(a+b)$ 和 $(ma+mb+na+nb)$ 表示同一块林地的面积，故有

$$(m+n)(a+b)=ma+mb+na+nb.$$

实际上，把 $(m+n)$ 看成一个整体，有

$$\begin{aligned}(m+n)(a+b)&=(m+n)a+(m+n)b\\&=ma+mb+na+nb.\end{aligned}$$

如下式所示，等式的右边可以看作左边用线相连的各项乘积的和：

$$(m+n)(a+b)=ma+mb+na+nb.$$

概括

这个等式实际上给出了多项式乘以多项式的法则：

多项式与多项式相乘，先用一个多项式的每一项分别乘以另一个多项式的每一项，再把所得的积相加.

例 3 计算：

(1) $(x+2)(x-3)$；

(2) $(2x+5y)(3x-2y)$.

解 (1) $(x+2)(x-3)$

$$\begin{aligned}&=x^2-3x+2x-6\\&=x^2-x-6.\end{aligned}$$

计算结果中的 $-x$ 是怎么得到的？

华东师大版电子教材

(2) $(2x+5y)(3x-2y)$

$=6x^2-4xy+15yx-10y^2$

$=6x^2+11xy-10y^2$.

例 4 计算：

(1) $(m-2n)(m^2+mn-3n^2)$；

(2) $(3x^2-2x+2)(2x+1)$.

解 (1) $(m-2n)(m^2+mn-3n^2)$

$=m\cdot m^2+m\cdot mn-m\cdot 3n^2-2n\cdot m^2-$

$2n\cdot mn+2n\cdot 3n^2$

$=m^3+m^2n-3mn^2-2m^2n-2mn^2+6n^3$

$=m^3-m^2n-5mn^2+6n^3$.

(2) $(3x^2-2x+2)(2x+1)$

$=6x^3+3x^2-4x^2-2x+4x+2$

$=6x^3-x^2+2x+2$.

练　习

计算：

1. $(x+5)(x-7)$；

2. $(x+5y)(x-7y)$；

3. $(2m+3n)(2m-3n)$；

4. $(2a+3b)^2$.

习题 12.2

1. 计算：

(1) $5a^3\cdot 8a^2$；

(2) $11a^{12}\cdot(-12a^{11})$；

(3) $2x^2\cdot(-3x)^4$；

(4) $(-8xy^2)\cdot\left(-\frac{1}{2}x\right)^3$.

华东师大版电子教材

2. 世界上最大的金字塔——胡夫金字塔高达146.6米，底边长230.4米，用了约2.3×10^6块大石块，每块重约2.5×10^3千克. 请问：胡夫金字塔总重约为多少千克？



（第2题）

3. 计算：

（1）$-3x\cdot(2x^2-x+4)$；

（2）$\frac{5}{2}xy\cdot\left(-x^3y^2+\frac{4}{5}x^2y^3\right)$.

4. 计算：

（1）$x\left(\frac{1}{2}x+1\right)-3x\left(\frac{3}{2}x-2\right)$；　（2）$y^2(y-1)+2y(y^2-2y+3)$.

5. 计算：

（1）$(x+5)(x-6)$；　（2）$(2x+1)(2x+3)$；

（3）$(3x+4)(3x-4)$；　（4）$(9x+4y)^2$.

6. 计算：

（1）$(3x-1)(2x^2+3x-4)$；　（2）$(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)$.

12.3 乘法公式

1. 两数和乘以这两数的差

做一做

用多项式乘法法则计算：$(a+b)(a-b)$.

$(a+b)(a-b)=$ _____

_____.

华东师大版电子教材

这两个特殊的多项式相乘，得到的结果特别简洁：

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

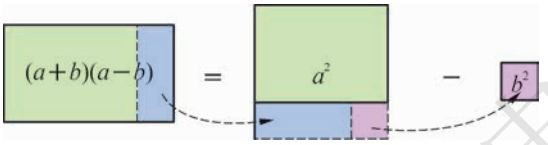
利用这个公式，可以直接计算两数和乘以这两数的差.

这就是说，两数和与这两数差的积，等于这两数的平方差.

这个公式叫做两数和与这两数差的乘法公式，有时也简称为平方差公式.

试一试

观察图 12.3.1，用等式表示下图中图形面积的运算：



_____ = _____ − _____.

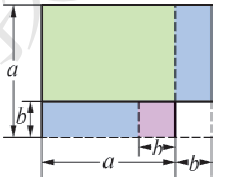


图 12.3.1

例 1 计算：

(1) $(a+3)(a-3)$；　(2) $(2a+3b)(2a-3b)$；

(3) $(1+2c)(1-2c)$；　(4) $(-2x-y)(2x-y)$.

解 (1) $(a+3)(a-3)$

$=a^2-3^2$

$=a^2-9.$

(2) $(2a+3b)(2a-3b)$

$=(2a)^2-(3b)^2$

$=4a^2-9b^2.$

(3) $(1+2c)(1-2c)$

$=1^2-(2c)^2$

$=1-4c^2.$

(4) $(-2x-y)(2x-y)$

$=(-y-2x)(-y+2x)$

$=(-y)^2-(2x)^2$

$=y^2-4x^2.$

你还有其他解法吗？

华东师大版电子教材

写成两数和乘以这两数差的形式，可使计算简便！

例 2 计算：1 998 × 2 002.

解 1 998 × 2 002

$= (2\,000 - 2) \times (2\,000 + 2)$

$= 2\,000^2 - 2^2$

$= 4\,000\,000 - 4$

$= 3\,999\,996.$

例 3 街心花园有一块边长为 a 米的正方形草坪，经统一规划后，南北向增加 2 米，东西向减少 2 米. 改造后得到一块长方形的草坪. 求这块长方形草坪的面积.

解 $(a + 2)(a - 2) = a^2 - 4.$

答：改造后的长方形草坪的面积是$(a^2 - 4)$平方米.

练　习

1. 计算：

(1) $\left(2x + \frac{1}{2}\right)\left(2x - \frac{1}{2}\right)$；　　(2) $(-x + 2)(-x - 2)$；

(3) $(-2x + y)(2x + y)$；　　(4) $(y - x)(-x - y)$.

2. 计算：

(1) 498×502；　　(2) $999 \times 1\,001$.

3. 用一定长度的篱笆围成一个长方形区域，小明认为围成一个正方形区域可使面积最大，而小亮认为不一定. 你认为如何？说说你的道理.

2. 两数和(差)的平方

做一做

用多项式乘法法则计算：$(a + b)^2$.

$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) =$ _____

_____.

华东师大版电子教材

我们又得到一个漂亮的结果：

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

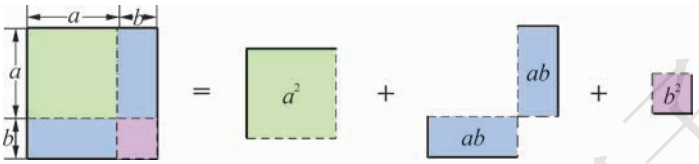
利用这个公式，可以直接计算两数和的平方.

这就是说，两数和的平方，等于这两数的平方和加上它们的积的 2 倍.

这个公式叫做两数和的平方公式.

试一试

观察图 12.3.2，用等式表示下图中图形面积的运算：



_____ = _____ + _____ + _____.

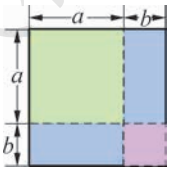


图 12.3.2

例 4 计算：

(1) $(2x+3y)^2$；　　(2) $\left(2a+\frac{b}{2}\right)^2$.

解 (1) $(2x+3y)^2$

$= (2x)^2 + 2\cdot 2x\cdot 3y + (3y)^2$

$= 4x^2 + 12xy + 9y^2$.

把 $2x$ 看作 a，$3y$ 看作 b，直接代入公式.

(2) $\left(2a+\frac{b}{2}\right)^2$

$= (2a)^2 + 2\cdot 2a\cdot \frac{b}{2} + \left(\frac{b}{2}\right)^2$

$= 4a^2 + 2ab + \frac{b^2}{4}$.

试一试

推导两数差的平方公式.

华东师大版电子教材

我们可以根据多项式的乘法法则直接计算 $(a-b)^2$. 注意到 $a-b=a+(-b)$，也可以利用两数和的平方公式来计算，即

$$\begin{aligned}(a-b)^2&=[a+(-b)]^2\\&=a^2+2a(-b)+(-b)^2\\&=a^2-2ab+b^2.\end{aligned}$$

这样就得到了两数差的平方公式：

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

这就是说，两数差的平方，等于这两数的平方和减去它们的积的 2 倍.

想一想

你能用图 12.3.3 中的面积关系来解释两数差的平方公式吗？

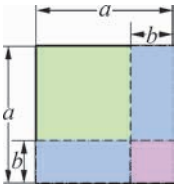


图 12.3.3

例 5 计算：

(1) $(3x-2y)^2$；

(2) $\left(-\frac{1}{2}m+1\right)^2$.

解 (1) $(3x-2y)^2$

$=(3x)^2-2\cdot 3x\cdot 2y+(2y)^2$

$=9x^2-12xy+4y^2$.

(2) 解法 1 $\left(-\frac{1}{2}m+1\right)^2$

$=\left(-\frac{1}{2}m\right)^2+2\cdot\left(-\frac{1}{2}m\right)\cdot 1+1^2$

$=\frac{1}{4}m^2-m+1$.

解法 2 $\left(-\frac{1}{2}m+1\right)^2$

$=\left(1-\frac{1}{2}m\right)^2$

$=1^2-2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}m+\left(\frac{1}{2}m\right)^2$

$=1-m+\frac{1}{4}m^2$.

你还有其他解法吗？

华东师大版电子教材

练　习

1. 计算：

（1）$(x+3)^2$；　　（2）$(2x+y)^2$.

2. 计算：

（1）$(x-3)^2$；　　（2）$(2m-3n)^2$.

3. 计算：

（1）$(-2m+n)^2$；　　（2）$(-2m-n)^2$.

读一读

末位数字是 5 的两位数平方的速算法则

你能很快算出 75^2 吗？我们一起来探索一下，末位数字是 5 的两位数的平方有什么规律. 请你用计算器计算下列算式：

15^2 = _____；25^2 = _____；35^2 = _____；

45^2 = _____；55^2 = _____；65^2 = _____；

75^2 = _____；85^2 = _____；95^2 = _____.

从这些计算结果中，你能发现什么？

我们发现了一个速算法则：

末位数字是 5 的两位数的平方，可以先写出它的十位数字与其下一个自然数的乘积，再在末尾接着写上 25.

例如，计算 75^2. 因为 $7\times8=56$，所以 $75^2=5\,625$.

这是什么道理呢？我们可以应用两数和的平方公式来说明：

设一个两位数的个位数字是 5，十位数字是 n，则这个两位数等于 $10n+5$，所以

$$(10n+5)^2=100n^2+100n+25=100n(n+1)+25.$$

教育部审定人教版电子教材

上面得到的等式，对于任意的正整数 n 都是成立的. 如果 n 是一个两位数或者三位数等等，那么 $10n + 5$ 就是一个三位数或者四位数等等，因此，对于个位数是 5 的三位数、四位数等，这个速算法则同样适用.

例如，计算 195^2. 因为 $19 \times 20 = 380$，所以 $195^2 = 38\,025$.

试一试

据一份资料介绍，可以按下面的步骤用心算来计算：

$$\underset{\text{（第一个因数）}}{13} \quad \times \quad \underset{\text{（第二个因数）}}{12}.$$

第一步：把第一个因数（13）与第二个因数的个位数（2）相加：$13 + 2 = 15$；

第二步：把第一步的结果乘以 10（也就是说后面加个 0）：$15 \times 10 = 150$；

第三步：把第一个因数的个位数（3）乘以第二个因数的个位数（2）：$3 \times 2 = 6$；

第四步：把第二、三两步的结果相加：$150 + 6 = 156$. 这就是要求的计算结果，即得 $13 \times 12 = 156$.

用这样的方法，就可以用心算很快算出从 11 到 19 这九个两位数中任何两个的乘积. 这真是太神奇了！

请你试着用这个法则计算：14×13；16×17；15×18；19×13；……

你能用整式的乘法法则来说明这个速算法则的原理吗？

习题 12.3

1. 计算：

（1）$(a + 2b)(a - 2b)$；

（2）$(2a + 5b)(2a - 5b)$；

（3）$(x^2 - 1)(1 + x^2)$；

（4）$\left(-\frac{1}{3}s + \frac{1}{2}t\right)\left(\frac{1}{3}s + \frac{1}{2}t\right)$.

2. 计算：

(1) $(3a+b)^2$；　(2) $\left(2a+\frac{1}{3}b\right)^2$；　(3) $(2a-4b)^2$；　(4) $\left(\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}b\right)^2$.

3. 计算：

(1) $(-m^2-2m)^2$；　(2) $(-2x+y)(-2x-y)$；

(3) $(2a+1)(-2a-1)$.

4. 填空：

(1) $a^2+6a+____=(a+____)^2$；　(2) $4x^2-20x+____=(2x-____)^2$；

(3) $a^2+b^2=(a-b)^2+____$；　(4) $(x-y)^2+____=(x+y)^2$.

阅读材料

贾宪三角

贾宪三角(如图 1)最初于 11 世纪被发现,在我国北宋时期数学家贾宪的《黄帝九章算法细草》一书中,原名“开方作法本源图”,用来作开方运算,在数学史上占有领先地位. 我国南宋时期数学家杨辉于1261 年写下的《详解九章算法》一书中记载着这一图表. 因此,后人把这个图表称作贾宪三角或杨辉三角.

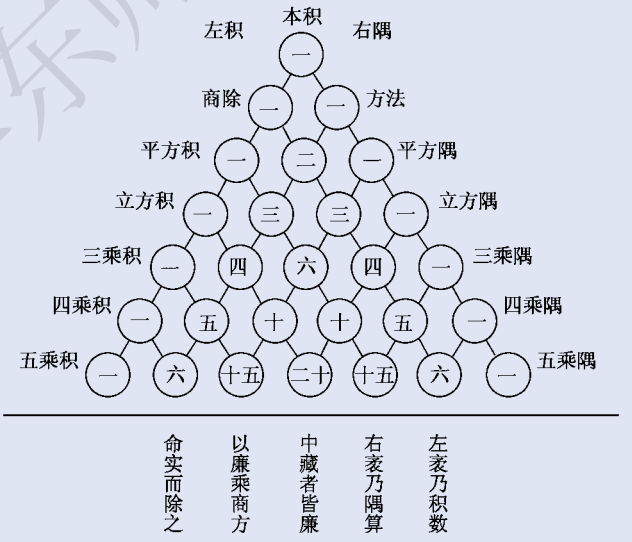


图 1

华东师大版电子教材

在欧洲，贾宪三角则被人们称为“帕斯卡三角”，这是因为法国数学家帕斯卡于1654年发表了此“三角”，这比我国已经迟了近600年. 其实，数学史上有不少人各自独立地绘制过类似图表，如1427年阿拉伯的阿尔·卡西，1527年德国的阿皮亚纳斯，1544年德国的施蒂费尔，1545年法国的薛贝尔等.

贾宪三角在历史上被不同时代的人绘制出来，有着不同的应用指向. 贾宪将它应用于开方运算，注重增乘方法，并把这种方法推向求高次方根；帕斯卡关心数字三角阵的性质探讨，并把这种性质推广到组合数的性质上；施蒂费尔则注重二项展开式系数间的关系；还有我国元代数学家朱世杰于13世纪巧妙地利用贾宪三角得出了一系列级数求和的重要公式，并且利用这些公式求出许多更为复杂的级数之和，这在当时世界上也处于领先水平.

与我们现在的学习联系最紧密的是二项式乘方展开式的系数规律. 如图2，在贾宪三角中，第三行的三个数(1，2，1)恰好对应着两数和的平方$(a+b)^2$的展开式$a^2+2ab+b^2$的系数. 类似地，通过计算可以发现：第四行的四个数(1，3，3，1)恰好对应着两数和的立方$(a+b)^3$的展开式$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$的系数，第五行的五个数(1，4，6，4，1)恰好对应着两数和的四次方$(a+b)^4$的展开式$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$的系数，等等. 由此可见，贾宪三角可以看作是对两数和平方公式的推广.

$(a+b)^0$……　　1

$(a+b)^1$……　　1　　1

$(a+b)^2$……　　1　　2　　1

$(a+b)^3$……　　1　　3　　3　　1

$(a+b)^4$……　　1　　4　　6　　4　　1

$(a+b)^5$……　　1　　5　　10　　10　　5　　1

$(a+b)^6$……　　1　　6　　15　　20　　15　　6　　1

图2

贾宪三角告诉了我们二项式乘方展开式的系数规律，你发现其中的字母及字母指数的排列规律了吗？请你试着写出$(a+b)^5$、$(a+b)^6$与$(a+b)^7$的展开式.

华东师大版电子教材

12.4 整式的除法

1. 单项式除以单项式

试一试

计算：$12a^5c^2 \div 3a^2$*.

根据除法的意义，上面的计算就是要求一个式子，使它与 $3a^2$ 相乘的积等于 $12a^5c^2$.

因为　　$(4a^3c^2)\cdot 3a^2 = 12a^5c^2$，

所以　　$12a^5c^2 \div 3a^2 = 4a^3c^2$.

这里商式的系数 4 和字母因式 a^3c^2 是怎样计算出来的？你能总结出单项式相除的法则吗？

概括

单项式相除，把系数、同底数幂分别相除作为商的因式，对于只在被除式中出现的字母，则连同它的指数一起作为商的一个因式.

例 1　计算：

(1) $24a^3b^2 \div 3ab^2$；　　(2) $-21a^2b^3c \div 3ab$；

(3) $(6xy^2)^2 \div 3xy$.

解　(1) $24a^3b^2 \div 3ab^2$

$= (24 \div 3)(a^3 \div a)(b^2 \div b^2)$

$= 8a^{3-1}\cdot 1$

$= 8a^2$.

(2) $-21a^2b^3c \div 3ab$

$= (-21 \div 3)a^{2-1}b^{3-1}c$

$= -7ab^2c$.

注意：$b^2 \div b^2 = 1$.

---

* 把这个算式中的两个单项式 $12a^5c^2$ 和 $3a^2$ 分别看成一个整体，这个算式就是 $(12a^5c^2) \div (3a^2)$ 的意思. 下同.

华东师大版电子教材

$$(3)\ (6xy^2)^2 \div 3xy$$
$$= 36x^2y^4 \div 3xy$$
$$= 12xy^3.$$

思考

你能用 $(a-b)$ 的幂表示 $12(a-b)^5 \div 3(a-b)^2$ 的结果吗?

练　习

填表:

被除式	$6x^3y^3$	$-42x^3y^3$	$-42x^3y^3$
除　式	$2xy$		$-6x^2y^2$
商		$7x^3$	

2. 多项式除以单项式

试一试

计算:

(1) $(ax+bx) \div x$;

(2) $(ma+mb+mc) \div m$.

这里,商式中的项 a、b 和 c 是怎样得到的?你能总结出多项式除以单项式的法则吗?

根据除法的意义,容易探索、计算出结果. 以题(2)为例,$(ma+mb+mc) \div m$ 就是要求一个式子,使它与 m 的积是 $ma+mb+mc$.

因为　$m(a+b+c) = ma+mb+mc$,

所以　$(ma+mb+mc) \div m = a+b+c$.

华东师大版电子教材

概括

多项式除以单项式，先用这个多项式的每一项除以这个单项式，再把所得的商相加.

例 2 计算：

(1) $(9x^4 - 15x^2 + 6x) \div 3x$;

(2) $(28a^3b^2c + a^2b^3 - 14a^2b^2) \div (-7a^2b)$.

解 (1) $(9x^4 - 15x^2 + 6x) \div 3x$

$= 9x^4 \div 3x - 15x^2 \div 3x + 6x \div 3x$

$= 3x^3 - 5x + 2.$

(2) $(28a^3b^2c + a^2b^3 - 14a^2b^2) \div (-7a^2b)$

$= 28a^3b^2c \div (-7a^2b) + a^2b^3 \div (-7a^2b) - 14a^2b^2 \div (-7a^2b)$

$= -4abc - \frac{1}{7}b^2 + 2b.$

练 习

1. 计算：

(1) $(3ab - 2a) \div a$;

(2) $(5ax^2 + 15x) \div 5x$;

(3) $(12m^2n + 15mn^2) \div 6mn$;

(4) $(x^3 - 2x^2y) \div (-x^2)$.

2. 计算：

(1) $(4a^3b^3 - 6a^2b^3c - 2ab^5) \div (-2ab^2)$;

(2) $\left(x^2y^3 - \frac{1}{2}x^3y^2 + 2x^2y^2\right) \div \frac{1}{2}xy^2$.

作东师大版电子教材

习题 12.4

1. 计算：

（1）$-21a^2b^3 \div 7a^2b$；

（2）$7a^5b^2c^3 \div (-3a^3b)$；

（3）$\left(-\frac{1}{2}a^4x^4\right) \div \left(-\frac{1}{6}a^3x^2\right)$；

（4）$(16x^3 - 8x^2 + 4x) \div (-2x)$.

2. 计算：

（1）$(6a^3b - 9a^2c) \div 3a^2$；

（2）$(4a^3 - 6a^2 + 9a) \div (-2a)$；

（3）$(-4m^4 + 20m^3n - m^2n^2) \div (-4m^2)$；

（4）$\left(x^2y - \frac{1}{2}xy^2 - 2xy\right) \div \frac{1}{2}xy$.

3. 计算：

（1）$(12p^3q^4 + 20p^3q^2r - 6p^4q^3) \div (-2pq)^2$；

（2）$[4y(2x - y) - 2x(2x - y)] \div (2x - y)$.

4. 聪聪在一次数学课外活动中发现了一个奇特的现象：他随便想一个非零的有理数，把这个数平方，再加上这个数，然后把结果除以这个数，最后减去这个数，所得结果总是 1. 你能说明其中的道理吗？

华东师大版电子教材

12.5 因式分解

回忆

运用前面所学的知识填空：

（1）$m(a + b + c) =$ _____；

（2）$(a + b)(a - b) =$ _____；

（3）$(a + b)^2 =$ _____.

试一试

观察上面三个等式，填空：

(1) $ma + mb + mc = (\quad)(\quad)$；

(2) $a^2 - b^2 = (\quad)(\quad)$；

(3) $a^2 + 2ab + b^2 = (\quad)^2$.

“回忆”和“试一试”得到的这两组等式，有什么联系和区别？

概括

“回忆”中的三个等式是我们已熟悉的整式乘法运算，而“试一试”中的三个等式，其过程正好与整式的乘法相反，它是把一个多项式化为几个整式的积的形式.

把一个多项式化为几个整式的积的形式，叫做多项式的**因式分解**(factorization).

还记得整数的因数分解与乘法之间的关系吗？

多项式 $ma + mb + mc$ 中的每一项都含有一个相同的因式 m，我们称之为**公因式**(common factor). 把公因式提出来，多项式 $ma + mb + mc$ 就可以分解成两个因式 m 和 $(a + b + c)$ 的乘积了. 像这种因式分解的方法，叫做**提公因式法**.

“试一试”中的题(2)和题(3)，实际上是将乘法公式反过来用，来进行因式分解的. 这种因式分解的方法称为**公式法**.

做一做

把下列多项式分解因式：

(1) $3a + 3b =$ _____；

(2) $5x - 5y + 5z =$ _____；

(3) $x^2 - 4y^2 =$ _____；

(4) $m^2 + 6mn + 9n^2 =$ _____.

华东师大版电子教材

例 1 把下列多项式分解因式：

(1) $-5a^2+25a$；

(2) $3a^2-9ab$；

(3) $25x^2-16y^2$；

(4) $x^2+4xy+4y^2$.

解 (1) $-5a^2+25a$

$=-5a(a-5)$.

(2) $3a^2-9ab$

$=3a(a-3b)$.

(3) $25x^2-16y^2$

$=(5x)^2-(4y)^2$

$=(5x+4y)(5x-4y)$.

(4) $x^2+4xy+4y^2$

$=x^2+2\cdot x\cdot 2y+(2y)^2$

$=(x+2y)^2$.

你知道如何检验因式分解的正确性吗？

例 2 把下列多项式分解因式：

(1) $4x^3y-4x^2y^2+xy^3$；

(2) $3x^3-12xy^2$.

先提公因式，再运用公式.

解 (1) $4x^3y-4x^2y^2+xy^3$

$=xy(4x^2-4xy+y^2)$

$=xy(2x-y)^2$.

(2) $3x^3-12xy^2$

$=3x(x^2-4y^2)$

$=3x[x^2-(2y)^2]$

$=3x(x+2y)(x-2y)$.

华东师大版电子教材

练　习

1. 判断下列因式分解是否正确，并说明理由. 如果不正确，请写出正确答案.

（1）$4a^2 - 4a + 1 = 4a(a - 1) + 1$；

（2）$x^2 - 4y^2 = (x + 4y)(x - 4y)$.

2. 把下列多项式分解因式：

（1）$a^2 + a$；　　（2）$4ab - 2a^2b$；

（3）$9m^2 - n^2$；　　（4）$2am^2 - 8a$；

（5）$2a^2 + 4ab + 2b^2$.

习题 12.5

1. 把下列多项式分解因式：

（1）$3x + 3y$；　　（2）$-24m^2x - 16n^2x$；

（3）$x^2 - 1$；　　（4）$(xy)^2 - 1$；

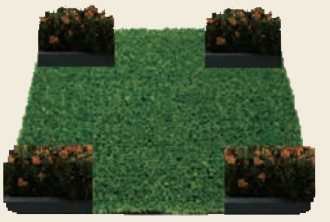
（5）$a^4x^2 - a^4y^2$；　　（6）$3x^2 + 6xy + 3y^2$；

（7）$(x - y)^2 + 4xy$；　　（8）$4a^2 - 3b(4a - 3b)$.

2. 先分解因式，再求值：

$2x(a - 2) - y(2 - a)$，其中 $a = 0.5$，$x = 1.5$，$y = -2$.

3. 在一块边长为 $a = 6.6$ 米的正方形空地的四角均留出一块边长为 $b = 1.7$ 米的正方形空地修建花坛，其余的地方种植草坪. 问草坪的面积有多大？

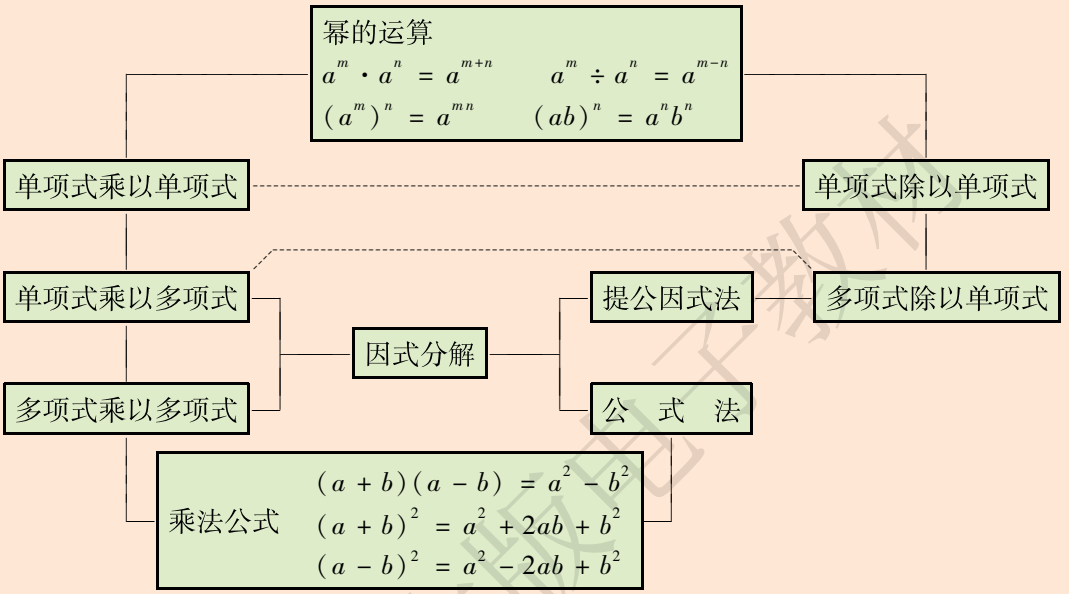


（第 3 题）

华东师大版电子教材

小结

一、知识结构



二、要点

1. 本章主要研究整式的乘法和除法，我们经历了对运算法则的探索、推导和应用的过程.

以整式的乘法为例，首先研究了幂的运算，接着逐步研究单项式乘以单项式、单项式乘以多项式和多项式乘以多项式，由特殊到一般，由已知到未知，由简到繁，层层深入，逐步发展，反映了人们对数学知识的认识和发展过程.

从运算来说，核心思想是化归. 多项式(单项式)乘以多项式，归结为项与项相乘，即单项式乘以单项式. 单项式乘以单项式归结为系数相乘和同底数幂的乘法. 幂的运算是它们的基础. 探索和推导所有这些整式运算法则的依据，从根本上说是沿用了数的运算律.

2. 有一些特殊形式的多项式乘法运算，结果较为简洁，在计算中可以作为乘法公式直接运用. 这些公式用图形的面积来解释，直观明

了,反映了数与形的美妙结合. 乘法公式不仅可以使式的运算或变形更加简便,为进一步学习其他数学知识(例如因式分解、用配方法解二次方程、研究二次函数等)奠定必要的基础,而且公式的简洁、对称、和谐给我们以数学美的享受.

3. 多项式的因式分解与整数的因数分解相类似,它与整式乘法的过程恰好相反. 我们可以用整式的乘法法则和乘法公式得到因式分解的方法,也可以用整式乘法来检验因式分解的正确性.

整式与整数还有着许多类似之处. 例如,两个整数的和、差、积仍是整数,但两个整数的商(除数不为零)却未必是整数,从而需要引进分数;类似地,两个整式的和、差、积仍是整式,但两个整式的商(除式不为零)未必是整式,从而需要引进新的代数式(分式),对此我们将在八年级下学期第 16 章作进一步研究. 本章研究的整式除法只涉及可整除的情形.

华东师大版电子教材

复习题

A 组

1. 计算：

(1) $a^{10} \cdot a^{8}$；

(2) $(xy)^{2} \cdot (xy)^{3}$；

(3) $[(-x)^{3}]^{2}$；

(4) $[(-x)^{2}]^{3}$；

(5) $(-2mn^{2})^{3}$；

(6) $(y^{3})^{2} \cdot (y^{2})^{4}$.

2. 计算：

(1) $2a \cdot 3a^{2}$；

(2) $(-3xy) \cdot (-4yz)$；

(3) $(-2a^{2})^{2} \cdot (-5a^{3})$；

(4) $(-3x) \cdot (2x^{2} - x - 1)$；

(5) $(x-2)(x-6)$；

(6) $(2x-1)(3x+2)$；

(7) $(y-2)(y^{2}-6y-9)$；

(8) $(p-6q)(p^{2}+pq+q^{2})$.

3. 计算：

(1) $(x+2)(x-2)$；

(2) $(m+n)(m-n)$；

(3) $(-m-n)(-m+n)$；

(4) $(-m-n)(m+n)$；

(5) $(-m+n)(m-n)$；

(6) $\left(\frac{2}{3}x + \frac{3}{4}y\right)^{2}$.

4. 计算：

(1) $2013^{2} - 2014 \times 2012$；

(2) $(4 \times 10^{4}) \times (2 \times 10^{3}) - (6.5 \times 10^{3}) \times (6 \times 10^{3})$；

(3) $(2x+5)^{2} - (2x-5)^{2}$；

(4) $2x \cdot \left(\frac{1}{2}x - 1\right) - 3x \cdot \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right)$；

(5) $(-2x^{2}) \cdot (-y) + 3xy \cdot \left(1 - \frac{1}{3}x\right)$；

(6) $(-6x^{2})^{2} + (-3x)^{3} \cdot x$.

5. 计算：

(1) $a \cdot a^{4} \div a^{3}$；

(2) $(-x)^{6} \div (-x)^{2} \cdot (-x)^{3}$；

(3) $27x^{8} \div 3x^{4}$；

(4) $-12m^{3}n^{3} \div 4m^{2}n^{3}$；

(5) $(6x^{2}y^{3}z^{2})^{2} \div 4x^{3}y^{4}$；

(6) $(-6a^{2}b^{5}c) \div (-2ab^{2})^{2}$.

华东师大版电子教材

6. 计算：

（1）$(6a^4 - 4a^3 - 2a^2) \div (-2a^2)$；　　（2）$(4x^3y + 6x^2y^2 - xy^3) \div 2xy$；

（3）$\left(x^4 + 2x^3 - \frac{1}{2}x^2\right) \div \left(-\frac{1}{2}x\right)^2$；　　（4）$(2ab^2 - b^3)^2 \div 2b^3$.

7. 计算：$[(x-2y)^2 + (x-2y)(x+2y) - 2x(2x-y)] \div 2x$.

8. 把下列多项式分解因式：

（1）$x^2 - 25x$；　　（2）$2x^2y^2 - 4y^3z$；

（3）$am - an + ap$；　　（4）$x^3 - 25x$；

（5）$1 - 4x^2$；　　（6）$25x^2 + 20xy + 4y^2$；

（7）$x^3 - 4x^2 + 4x$.

9. 先化简，再求值：

（1）$3a(2a^2 - 4a + 3) - 2a^2(3a + 4)$，其中 $a = -2$；

（2）$(a-3b)^2 + (3a+b)^2 - (a+5b)^2 + (a-5b)^2$，其中 $a = -8$，$b = -6$.

B 组

10. 求下列各式的值：

（1）$(3x^4 - 2x^3) \div (-x) - (x - x^2) \cdot 3x$，其中 $x = -\frac{1}{2}$；

（2）$[(ab+1)(ab-2) - 2a^2b^2 + 2] \div (-ab)$，其中 $a = \frac{3}{2}$，$b = -\frac{4}{3}$.

11. 已知 $(x+y)^2 = 1$，$(x-y)^2 = 49$，求 $x^2 + y^2$ 与 xy 的值.

12. 已知 $a + b = 3$，$ab = 2$，求 $a^2 + b^2$ 的值.

13. 已知 $a - b = 1$，$a^2 + b^2 = 25$，求 ab 的值.

14. 把下列多项式分解因式：

（1）$x(x+y) - y(x+y)$；　　（2）$(a+b)^2 + 2(a+b) + 1$；

（3）$4x^4 + 4x^3 + x^2$；　　（4）$x^2 - 16ax + 64a^2$；

（5）$(x-1)(x-3) + 1$；　　（6）$(ab+a) + (b+1)$.

15. （1）一个正方形的边长增加 3 cm，它的面积增加了 45 cm^2，求原来这个正方形的边长.

（2）一个正方形的边长减少 3 cm，它的面积减少了 45 cm^2，原来这个正方形的边长是多少呢？它和题（1）的答案相同吗？

华东师大版电子教材

C 组

16. 已知一个长方形，若它的长增加 4 cm，宽减少 1 cm，则面积保持不变；若它的长减少 2 cm，宽增加 1 cm，则面积仍保持不变. 求这个长方形的面积.

17. 已知 M 是含字母 x 的单项式，要使多项式 $4x^2 + M + 1$ 是某一个多项式的平方，求 M.

18. 判断下列说法是否正确，并说明理由：

（1）两个连续整数的平方差必是奇数；

（2）若 a 为整数，则 $a^3 - a$ 能被 6 整除.

华东师大版电子教材

综合与实践

面积与代数恒等式

在前面的学习中，我们已经接触了很多代数恒等式，知道可以用一些硬纸片拼成的图形面积来解释这些代数恒等式. 例如，图 1 可以用来解释

$$(2a)^2 = 4a^2,$$

图 2 可以用来解释

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

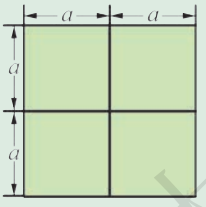


图 1

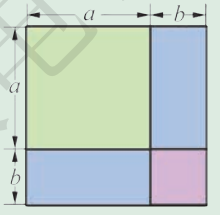


图 2

还有很多代数恒等式可以用硬纸片拼成的图形面积来解释. 现在让我们一起参与下面的实践与探索活动.

（1）做一些如图 3 所示的正方形和长方形的硬纸片.

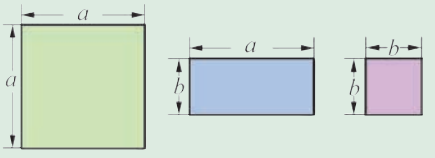


图 3

（2）利用制作的硬纸片拼成一些长方形或正方形，并用所拼成的图形面积来解释所学的乘法公式及某些幂的运算公式的正确性.

华东师大版电子教材

（3）根据图4，利用面积的不同表示方法写出一个代数恒等式.

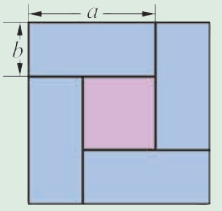


图4

（4）试写出一个代数恒等式，比如 $(a+2b)(2a-b)=2a^2+3ab-2b^2$，然后用图形的面积来解释它的正确性.

华东师大版电子教材

第13章　全等三角形



你玩过拼图游戏吗？那是用许多各种颜色的小拼板拼成一幅幅美丽的图画．那些拼板有不少是形状相同、大小一样的．它们相互之间有什么关系呢？发挥你的智慧，想想看！

本章将探索掌握判定三角形全等的一些方法，
领略推理证明的数学奥秘． ▶▶▶

华东师大版电子教材

13.1 命题、定理与证明

1. 命题

我们已经学过一些图形的特性，例如：

（1）三角形的内角和等于180°；

（2）如果两个角是对顶角，那么这两个角相等；

（3）两直线平行，同位角相等；

（4）直角都相等.

它们都是判断某一件事情的语句，像这样表示判断的语句叫做**命题**（proposition）.

许多命题是由条件和结论两部分组成的. 条件是已知事项；结论是由已知事项推出的事项. 这样的命题通常可写成“如果……，那么……”的形式. 用“如果”开始的部分就是条件，而用“那么”开始的部分就是结论.

例如，在命题（2）中，“两个角是对顶角”是条件，“这两个角相等”是结论. 有的命题的条件与结论不十分明显，若将它写成“如果……，那么……”的形式，则容易分清它的条件与结论. 例如，命题（4）可写成“如果两个角都是直角，那么这两个角相等”.

例1 把命题“三个角都相等的三角形是等边三角形”改写成“如果……，那么……”的形式，并分别指出该命题的条件与结论.

解 这个命题可以写成“如果一个三角形的三个角都相等，那么这个三角形是等边三角形”. 该命题的条件是“一个三角形的三个角都相等”，结论是“这个三角形是等边三角形”.

根据已学过的知识，可以判断前面所列举的命题都是正确的，也就是说，如果条件成立，那么结论一定成立. 像这样的命题，称为真命题.

华东师大版电子教材

而有些命题，例如：“如果两个角相等，那么它们是对顶角”；“一个锐角与一个钝角的和等于一个平角”等，条件成立时，不能保证结论总是正确，也就是说结论不成立. 像这样的命题，称为假命题.

要判断一个命题是真命题，可以用演绎推理加以论证；而要判断一个命题是假命题，只要举出一个例子，说明该命题不成立，即只要举出一个符合该命题条件而不符合该命题结论的例子就可以了. 在数学中，这种方法称为“举反例”.

例如，要说明命题“一个锐角与一个钝角的和等于一个平角”是假命题，只需举出一个反例（某一锐角与某一钝角的和不是 180°）：

_____.

试试看，对所列的假命题举出反例.

练　习

1. 把下列命题改写成“如果……，那么……”的形式，并分别指出它们的条件和结论：

（1）全等三角形的对应边相等；

（2）在同一平面内，垂直于同一条直线的两条直线互相平行.

2. 指出下列命题中的真命题和假命题：

（1）同位角相等，两直线平行；

（2）多边形的内角和等于 180°；

（3）三角形的外角和等于 360°；

（4）平行于同一条直线的两条直线互相平行.

2. 定理与证明

通过七年级的学习，我们已经知道如下各命题都是正确的，即都是公认的真命题：

两点确定一条直线；

两点之间，线段最短；

过一点有且只有一条直线与已知直线垂直；

华东师大版电子教材

过直线外一点有且只有一条直线与这条直线平行；

两条直线被第三条直线所截，如果同位角相等，那么这两条直线平行.

我们将这些命题视为基本事实，它们是我们在继续学习过程中用来判断其他命题真假的原始依据，即出发点.

数学中，有些命题可以从基本事实或其他真命题出发，用逻辑推理的方法判断它们是正确的，并且可以作为进一步判断其他命题真假的依据，这样的真命题叫做**定理**(theorem).

定理的作用不仅在于它揭示了客观事物的本质属性，而且可以作为进一步确认其他命题真假的依据.

思考

(1) 一位同学在钻研数学题时发现：

$$2+1=3,$$
$$2\times3+1=7,$$
$$2\times3\times5+1=31,$$
$$2\times3\times5\times7+1=211.$$

计算一下 $2\times3\times5\times7\times11+1$ 与 $2\times3\times5\times7\times11\times13+1$，你发现了什么？

于是，他根据上面的结果并利用质数表得出结论：从质数 2 开始，排在前面的任意多个质数的乘积加 1 一定也是质数. 他的结论正确吗？

(2) 如图 13.1.1 所示，一位同学在画图时发现：三角形三条边的垂直平分线的交点都在三角形的内部. 于是他得出结论：任何一个三角形三条边的垂直平分线的交点都在三角形的内部. 他的结论正确吗？

画一个钝角三角形试试看.

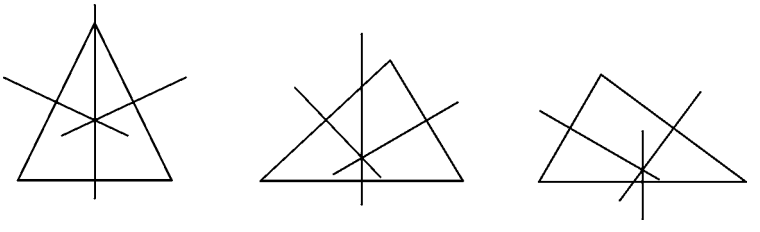


图 13.1.1

（3）我们曾经通过计算四边形、五边形、六边形、七边形等的内角和，得到一个结论：n 边形的内角和等于 $(n-2)\times 180°$. 这个结论正确吗？是否有一个多边形的内角和不满足这一规律？

实际上，这是一个正确的结论.

上面几个例子说明：通过特殊的事例得到的结论可能正确，也可能不正确. 因此，通过这种方式得到的结论，还需进一步加以证实.

根据条件、定义以及基本事实、定理等，经过演绎推理，来判断一个命题是否正确，这样的推理过程叫做**证明**(proof).

演绎推理是研究数学的一个重要方法. 除了基本事实与已知的定理外，等式与不等式的有关性质以及等量代换也可以作为推理的依据. 例如，有了“三角形的内角和等于 180°”这条定理后，我们可以证明刻画直角三角形的两个锐角之间数量关系的命题：

直角三角形的两个锐角互余.

已知：如图 13.1.2，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$.

求证：$\angle A+\angle B=90°$.

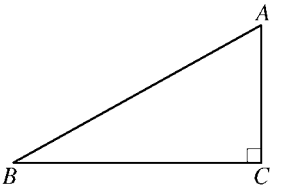


图 13.1.2

证明 $\because\ \angle A+\angle B+\angle C=180°$（三角形的内角和等于 180°），

又$\because\ \angle C=90°$（已知），

$\therefore\ \angle A+\angle B=180°-\angle C=90°$（等式的性质）.

此命题可以用来作为判断其他命题真假的依据，因此我们把它也作为定理.

读一读

证明必须做到“言必有据”，每步推理都要有依据，它们可以是已知条件，也可以是定义、基本事实、已经学过的定理，以及等式的性质、等量代换等. 在书写证明过程中，要求把依据写在每一步推理后面的括号内，今后可以逐渐淡化.

华东师大版电子教材

练　习

1. 把下列定理改写成“如果……，那么……”的形式，指出它们的条件和结论，并用演绎推理证明题(1)所示的定理：

   (1) 同旁内角互补，两直线平行；

   (2) 三角形的外角和等于360°.

2. 判断命题“两条直线被第三条直线所截，内错角相等”是真命题还是假命题，并说明理由.

习题 13.1

1. 判断下列命题是真命题还是假命题，若是假命题，举一个反例加以说明：

   (1) 两个锐角的和等于直角；

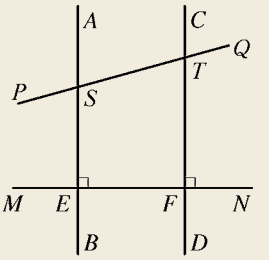
   (2) 两条直线被第三条直线所截，同位角相等.

2. 把下列命题改写成“如果……，那么……”的形式：

   (1) 全等三角形的对应角相等；

   (2) 有一个角等于60°的等腰三角形是等边三角形.

3. 如图，已知 $AB \perp MN$，$CD \perp MN$，垂足分别为点 E、F，直线 PQ 分别交 AB、CD 于点 S、T. 求证：$\angle AST = \angle STD$.



（第3题）

对于上述问题，请将下列证明过程补充完整.

证明　∵ $AB \perp MN$，$CD \perp MN$（已知），

∴ $AB \parallel CD$（在同一平面内，垂直于同一条直线的两条直线平行），

华东师大版电子教材

13.2 三角形全等的判定

1. 全等三角形

我们知道，能够完全重合的两个三角形是全等三角形，相互重合的顶点是对应顶点，相互重合的边是对应边，相互重合的角是对应角. 全等三角形的对应边相等，对应角相等.

做一做

如图 13.2.1，以直线 l 为对称轴，画出 $\triangle ABC$ 的对称图形，并指出它们的对应顶点、对应边和对应角.

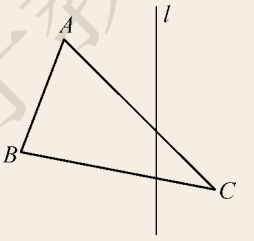


图 13.2.1

我们很容易画出 $\triangle ABC$ 的对称图形 $\triangle DEF$. 若已知 $\angle A = 60°$，$\angle B = 80°$，相信你一定可以求出 $\triangle DEF$ 的各个角的大小：

$\angle D =$ _____，$\angle E =$ _____，$\angle F =$ _____.

写出解答的结果，并说明理由.

2. 全等三角形的判定条件

对于全等三角形，从它的边、角来看，我们知道：若两个三角形的三条边与三个角都分别对应相等，那么这两个三角形一定可以互相重合，即全等.

现在要探索的是，能否减少一些条件，找到更为简便的判定三角形全等的方法.

显然，由于三角形的内角和等于 180°，如果两个角分别对应相等，那么另一个角必然也相等. 这样，若两个三角形的三条边、两个角分别对应相等，则这两个三角形仍然全等.

华东师大版电子教材

能否再减少一些条件？对两个三角形来说，六个元素（三条边、三个角）中至少要有几个元素分别对应相等，这两个三角形才全等呢？

探索

如果两个三角形只有一组对应相等的元素，那么会出现几种情况？这两个三角形会全等吗？

将你的发现填入表内，看看是否与你同伴的发现一致.

我们发现：

对应相等的元素		
三角形是否全等		

探索

如果两个三角形有两组对应相等的元素，那么会出现几种可能的情况呢？这时，这两个三角形会全等吗？

由于一个三角形有三条边、三个角共六个元素，所以可能出现的情况会较多. 可能的情况有：

两个角对应相等；_____

_____.

在这些情况下，两个三角形会全等吗？

试一试

分别按照下面的条件，用刻度尺或量角器画三角形，并和周围的同学比较一下，所画的图形是否全等.

（1）三角形的两个内角分别为 30°和 70°.

（2）三角形的两条边分别为 3 cm 和 5 cm.

（3）三角形的一个内角为 60°，一条边为 3 cm.

（i）这条长 3 cm 的边是 60°角的邻边；

（ii）这条长 3 cm 的边是 60°角的对边.

华东师大版电子教材

你一定会发现，如果只知道两个三角形有两组对应相等的元素，那么这两个三角形是否全等的情况为：

对应相等的元素				
三角形是否全等				

将你的发现填入表内，看看是否与你的同伴一致.

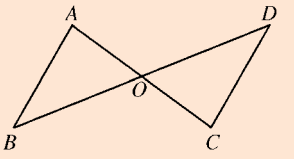
由以上的探索与发现，我们知道两个三角形只有一组或两组对应相等的元素（边或角），那么这两个三角形不一定全等.

思考

如果两个三角形有三组对应相等的元素（边或角），又会如何呢？

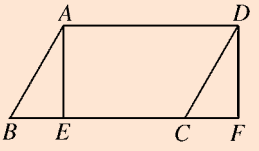
练　习

1. 如图，将△AOB 绕点 O 旋转 180°，得到△COD，这时△AOB ≌△_____. 这两个三角形的对应边是：AO 与 _____，OB 与 _____，BA 与 _____；对应角是：∠AOB 与 _____，∠OBA 与 _____，∠BAO 与 _____.

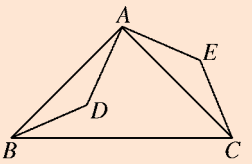


（第 1 题）

2. 如图，AD // BC，$AD = BC$，$AE \perp BC$，将△ABE 沿 AD 方向平移，使点 A 与点 D 重合，点 E 平移至点 F，则△ABE ≌_____，∠F = _____°.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，点 D 是△ABC 内一点，∠BAC = 90°，$AB = AC$，将△ABD 绕点 A 逆时针旋转 90°，点 D 旋转至点 E，则△ABD ≌_____，AD = _____，BD = _____.

华东师大版电子教材

3. 边角边

探索

为了探索三角形全等的条件，现在我们考虑两个三角形有三组对应相等的元素，那么此时会出现几种可能的情况呢？

将六个元素（三条边、三个角）分类组合，可能出现：

两边一角对应相等；_____

_____.

你认为这些情况下，两个三角形会全等吗？

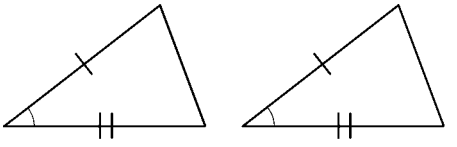
我们发现，可能出现下列四种情况：

两边一角对应相等；两角一边对应相等；三角对应相等；三边对应相等.

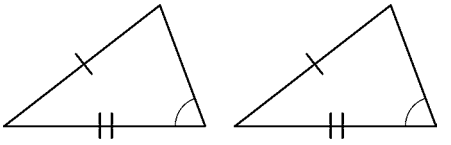
下面将对这四种情况分别进行讨论.

先让我们观察两个三角形有两条边和一个角分别对应相等的情况，这时这两个三角形一定全等吗？

如图 13.2.2 所示，此时应该有两种情况：一种情况是角夹在两条边的中间，形成两边夹一角；另一种情况是角不夹在两边的中间，形成两边一对角.



边－角－边



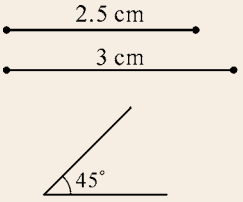
边－边－角

图 13.2.2

华东师大版电子教材

做一做

如图 13.2.3，已知两条线段和一个角，试画一个三角形，使这两条线段为其两边，这个角为这两边的夹角.



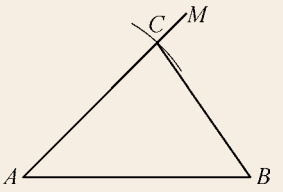


图 13.2.3

步骤：

1. 画一条线段 AB，使它等于3 cm；
2. 画 $\angle MAB = 45°$；
3. 在射线 AM 上截取 $AC = 2.5$ cm；
4. 连结 BC.

$\triangle ABC$ 即为所求.

把你画的三角形与其他同学画的三角形进行比较，或将你画的三角形剪下，放到其他同学画的三角形上，看看是否完全重合. 所画的三角形都全等吗？

换两条线段和一个角，试试看，是否有同样的结论.

下面我们用叠合的方法，看看你和你同伴所画的两个三角形是否可以完全重合.

如图 13.2.4，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中，已知 $AB = A'B'$，$\angle A = \angle A'$，$AC = A'C'$.

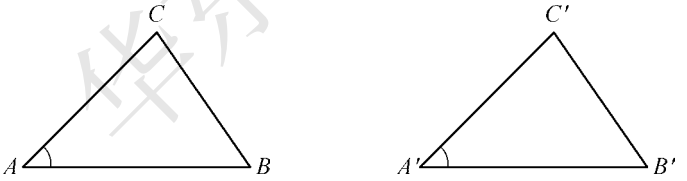


图 13.2.4

由于 $AB = A'B'$，我们可以移动 $\triangle ABC$，使点 A 与点 A'、点 B 与点 B' 重合. 因为 $\angle A = \angle A'$，所以可以使 $\angle A$ 的另一边 AC 与 $\angle A'$ 的边 $A'C'$ 重叠在一起，而 $AC = A'C'$，因此点 C 与点 C' 重合. 于是 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 重合，这就说明这两个三角形全等.

华东师大版电子教材

由此可得判定三角形全等的一种简便方法：

基本事实　两边及其夹角分别相等的两个三角形全等. 简记为 S. A. S.（或边角边）.

例 1　如图 13. 2. 5，已知线段 AC、BD 相交于点 E，$AE = DE$，$BE = CE$. 求证：$\triangle ABE \cong \triangle DCE$.

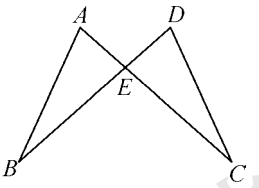


图 13. 2. 5

证明　在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle DCE$ 中，

$\because$ $AE = DE$（已知），

$\angle AEB = \angle DEC$（对顶角相等），

$BE = CE$（已知），

$\therefore$ $\triangle ABE \cong \triangle DCE$（S. A. S.）.



例 2　如图 13. 2. 6，有一池塘. 要测池塘两端 A、B 的距离，可先在平地上取一个可以直接到达 A 和 B 的点 C，连结 AC 并延长到 D，使 $CD = CA$. 连结 BC 并延长到 E，使 $CE = CB$. 连结 DE，那么 DE 的长就是 A、B 的距离. 你知道其中的道理吗？

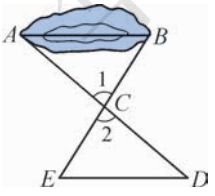


图 13. 2. 6

已知：AD 与 BE 相交于点 C，$CA = CD$，$CB = CE$.

求证：$AB = DE$.

证明　在 $\triangle ACB$ 和 $\triangle DCE$ 中，

$\because$ $CA = CD$（已知），

$\angle 1 = \angle 2$（对顶角相等），

$CB = CE$（已知），

$\therefore$ $\triangle ACB \cong \triangle DCE$（S. A. S.）.

$\therefore$ $AB = DE$（全等三角形的对应边相等）.

华东师大版电子教材

做一做

如图 13.2.7，已知两条线段和一个角，以长的线段为已知角的邻边，短的线段为已知角的对边，画一个三角形.

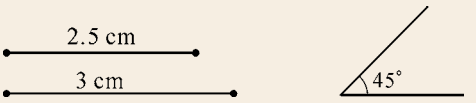


图 13.2.7

把你画的三角形与其他同学画的三角形进行比较，所画的三角形都全等吗？此时，符合条件的三角形有多少种？

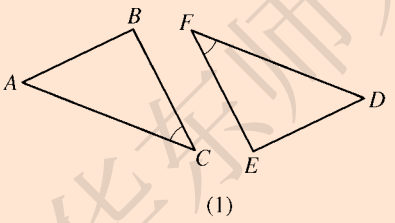
我们可以发现，此时（即“边边角”对应相等）两个三角形不一定全等.

练　习

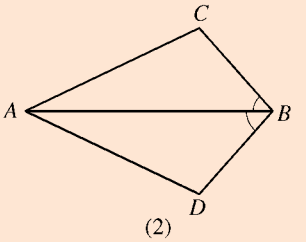
1. 根据下面的条件，能否判断如图所示的两个三角形全等？

（1）$AC = DF$，$\angle C = \angle F$，$BC = EF$；

（2）$BC = BD$，$\angle ABC = \angle ABD$.

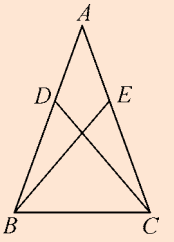


(1)



(2)

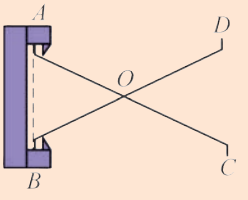
（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，在 AB、AC 上分别截取相等的两条线段 AD、AE，并连结 BE、CD. 求证：$\triangle ADC \cong \triangle AEB$.

3. 如图所示，小明想设计一种测零件内径 AB 的卡钳. 在卡钳的设计中，要使测出的 DC 长度恰好为内径 AB 的长度，那么卡钳各部分的尺寸应满足什么条件呢？请提出你的想法.



（第 3 题）

华东师大版电子教材

4. 角边角

前面我们已经讨论，当两个三角形有两边一角对应相等时，这两个三角形是否全等的两种情况，得到了全等三角形的一种判定方法.

现在，我们讨论两角一边的情况：如果两个三角形有两个角、一条边分别对应相等，那么这两个三角形全等吗？

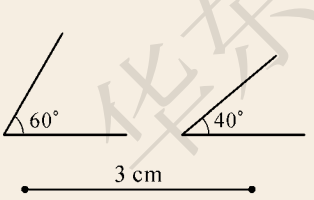
与两边一角类似，也会出现两种不同的情况：如图 13.2.8 所示，一种情况是两个角及这两角的夹边；另一种情况是两个角及其中一角的对边.



图 13.2.8

做一做

如图 13.2.9，已知两个角和一条线段，试画一个三角形，使这两个角为其内角，这条线段为这两个角的夹边.



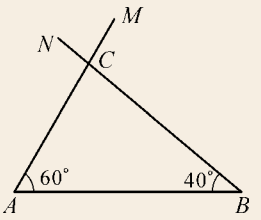


图 13.2.9

步骤：

1. 画一条线段 AB，使它等于 3 cm；

2. 画 $\angle MAB = 60°$，$\angle NBA = 40°$，MA 与 NB 交于点 C.

$\triangle ABC$ 即为所求.

把你画的三角形与其他同学画的三角形进行比较，或将你画的三角形剪下，放到其他同学画的三角形上，看看是否完全重合. 所画的三角形都全等吗？

换两个角和一条线段，试试看，是否有同样的结论.

华东师大版电子教材

下面我们用叠合的方法，看看你和你同伴所画的两个三角形是否可以完全重合.

如图 13.2.10，在△ABC 和△$A'B'C'$中，已知 $AB = A'B'$，$\angle A = \angle A'$，$\angle B = \angle B'$.

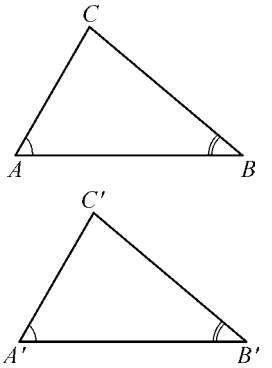


图 13.2.10

由于 $AB = A'B'$，我们可以移动△ABC，使点 A 与点 A'、点 B 与点 B'重合，且使点 C 与点 C'均位于线段 AB 的同侧. 因为 $\angle A = \angle A'$，因此可以使 $\angle A$ 的另一边 AC 与 $\angle A'$的边 $A'C'$重叠在一起，同样，因为 $\angle B = \angle B'$，可以使 $\angle B$ 的另一边 BC 与 $\angle B'$的边 $B'C'$重叠在一起. 由于两条直线只有一个交点，因此点 C 与点 C'重合. 于是△ABC 与△$A'B'C'$重合，这就说明这两个三角形全等. 由此可得判定三角形全等的又一种简便方法：

基本事实　两角及其夹边分别相等的两个三角形全等. 简记为 A. S. A.（或角边角）.

例 3　如图 13.2.11，已知 $\angle ABC = \angle DCB$，$\angle ACB = \angle DBC$. 求证：△ABC≌△DCB，$AB = DC$.

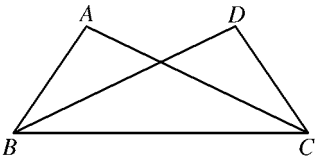


图 13.2.11

证明　在△ABC 和△DCB 中，

∵ $\angle ABC = \angle DCB$（已知），

$BC = CB$（公共边），

$\angle ACB = \angle DBC$（已知），

∴ △ABC≌△DCB（A. S. A.）.

∴ $AB = DC$（全等三角形的对应边相等）.

思考

如图 13.2.12，如果两个三角形有两个角分别对应相等，且其中一组相等的角的对边相等，那么这两个三角形是否一定全等？

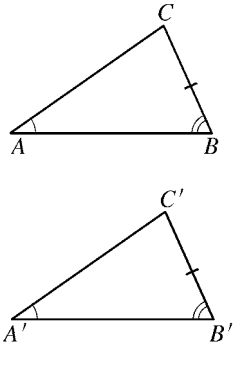


图 13.2.12

分析　因为三角形的内角和等于 180°，因此有两个角分别对应相等，那么第三个角必定对应相等，于是由“角边角”，便可证得这两个三角形全等.

华东师大版电子教材

下面我们证明这个定理：

两角分别相等且其中一组等角的对边相等的两个三角形全等. 简记为 A. A. S. (或角角边).

已知：如图 13. 2. 12，$\angle A = \angle A'$，$\angle B = \angle B'$，$BC = B'C'$.

求证：$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

证明 ∵ $\angle A = \angle A'$，$\angle B = \angle B'$(已知)，

$\angle A' + \angle B' + \angle C' = 180°$(三角形的内角和等于 180°)，

∴ $\angle A + \angle B + \angle C' = 180°$(等量代换).

又 ∵ $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$(三角形的内角和等于 180°)，

∴ $\angle C = \angle C'$(等式的性质).

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中，

请补充完整证明过程.

_____，

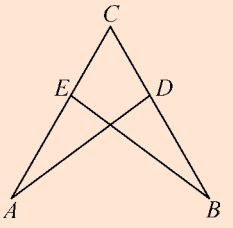
_____，

_____，

_____.

练　习

1. 如图，$\angle A = \angle B$，$CA = CB$，$\triangle CAD$ 和 $\triangle CBE$ 全等吗？CD 和 CE 相等吗？试说明理由.



(第 1 题)

2. 已知四边形 $ABCD$，对角线 BD 将其分成两个三角形，其中 $\angle ABD = \angle C$，$\angle ADB = \angle DBC$. 此时这两个三角形全等吗？请画出图形，并说说你的想法.

华东师大版电子教材

3. 课间，小明和小聪在操场上突然争论起来，他们都说自己比对方长得高. 这时数学老师走过来，笑着对他们说："你们不要争了，其实你们一样高，瞧瞧地上，你俩的影子一样长！"你知道数学老师为什么能从他们的影长相等就断定它们的身高相同吗？你能运用全等三角形的有关知识说明其中的道理吗？（假定太阳光线是平行的）



（第 3 题）

例 4 如图 13.2.13，在 $\triangle ABC$ 中，D 是边 BC 的中点，过点 C 画直线 CE，使 $CE \parallel AB$，交 AD 的延长线于点 E. 求证：$AD = ED$.

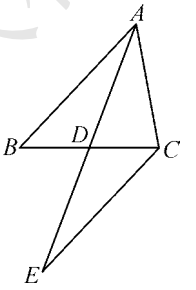


图 13.2.13

证明 $\because CE \parallel AB$（已知），

$\therefore \angle ABD = \angle ECD$，$\angle BAD = \angle CED$（两直线平行，内错角相等）.

在 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ECD$ 中，

$\because \angle ABD = \angle ECD$，$\angle BAD = \angle CED$（已证），

$BD = CD$（已知），

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ECD$（A.A.S.），

$\therefore AD = ED$（全等三角形的对应边相等）.

概括

可以采用类似的方法证明两个角相等.

要证明两条线段 AD、ED 相等，我们发现它们分别属于 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ECD$，若能证明这两个三角形全等，便可利用全等三角形的对应边相等得到要证明的结论. 这就是通常证明两条线段相等的一个重要方法.

例 5 求证：全等三角形对应边上的高相等.

已知：如图 13.2.14，$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$，$AD$、$A'D'$ 分别是 $\triangle ABC$ 的 BC 边和 $\triangle A'B'C'$ 的 $B'C'$ 边上的高. 求证：$AD = A'D'$.

华东师大版电子教材

你发现 AD、$A'D'$ 分别是哪两个三角形的边？这两个三角形全等吗？

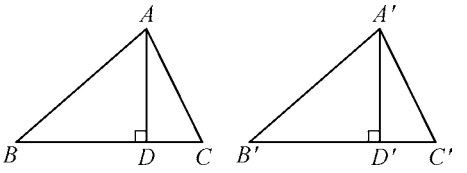


图 13.2.14

分析 从图 13.2.14 中可以看出，AD、$A'D'$ 分别属于 $\triangle ABD$ 与 $\triangle A'B'D'$，要证 $AD = A'D'$，只需证明这两个三角形全等即可.

证明 $\because$ $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$（已知），

$\therefore$ $AB = A'B'$（全等三角形的对应边相等），

$\angle B = \angle B'$（全等三角形的对应角相等）.

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle A'B'D'$ 中，

$\because$ $\angle ADB = \angle A'D'B' = 90°$（已知），

$\angle B = \angle B'$（已证），

$AB = A'B'$（已证），

$\therefore$ $\triangle ABD \cong \triangle A'B'D'$（A. A. S.），

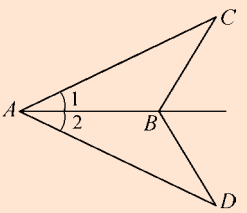
$\therefore$ $AD = A'D'$（全等三角形的对应边相等）.

思考

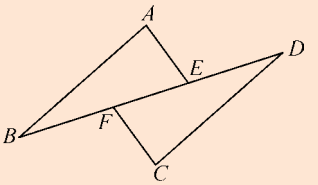
全等三角形对应边上的中线、对应角的平分线又有什么关系呢？你能说明其中的道理吗？

练　习

1. 如图，$\angle 1 = \angle 2$，$\angle C = \angle D$. 求证：$AC = AD$.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，$AB \parallel CD$，$AE \parallel CF$，$BF = DE$. 试找出图中其他的相等关系，并给出证明.

5. 边边边

我们已经讨论了两个三角形有两边一角，以及两角一边分别对应相等，这两个三角形能否全等的情况.

如图 13. 2. 15，我们很容易发现，如果两个三角形有三个角分别对应相等，那么这两个三角形未必全等.

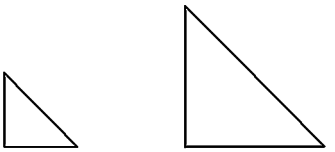


图 13. 2. 15

最后，如果两个三角形有三条边分别对应相等，那么这两个三角形是否一定全等呢？

做一做

如图 13. 2. 16，已知三条线段，试画一个三角形，使这三条线段分别为其三条边.

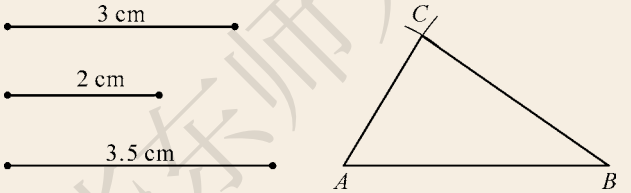


图 13. 2. 16

把你画的三角形与你同伴画的三角形进行比较，或将你画的三角形剪下，放到你同伴画的三角形上，看看是否完全重合. 所画的三角形都全等吗？

换三条线段，试试看，是否有同样的结论？

在第 9 章“多边形”中，我们曾经学习过画一个三角形，使它的三边长为给定的长度. 你还记得当时的画法吗？

由以上操作，可以发现它们完全重合，所画的三角形都全等.

华东师大版电子教材

由于∠B和∠D分别属于△ABC和△CDA，所以只需证明这两个三角形全等即可.

于是可得判定三角形全等的第3种简便方法：

基本事实　三边分别相等的两个三角形全等. 简记为S. S. S.（或边边边）.

例6　如图13. 2. 17，在四边形$ABCD$中，$AD = CB$，$AB = CD$. 求证：$\angle B = \angle D$.

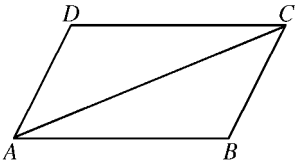


图13. 2. 17

证明　在△ABC和△CDA中，

∵ $CB = AD$，$AB = CD$（已知），

$AC = CA$（公共边），

∴ △ABC≌△CDA（S. S. S.）.

∴ $\angle B = \angle D$（全等三角形的对应角相等）.

读一读

至此，我们已经学习了关于全等三角形的三个基本事实，这是进行演绎推理的重要依据. 它们是从静态的角度探索发现的判定方法，其本质与动态的全等三角形定义是一致的，即在这些条件下，两个三角形一定可以通过图形的基本变换（轴对称、平移与旋转）而相互重合.

概括

我们可以将前面关于全等三角形判定的探索得到的结论归纳成下表（请补充完整表格中的内容）：

对应相等的元素	两边一角		两角一边		三角	三边
	两边及其夹角	两边及其中一边的对角	两角及其夹边	两角及其中一角的对边		
三角形是否一定全等	一定（S. A. S.）		一定（A. S. A.）			

华东师大版电子教材

练　习

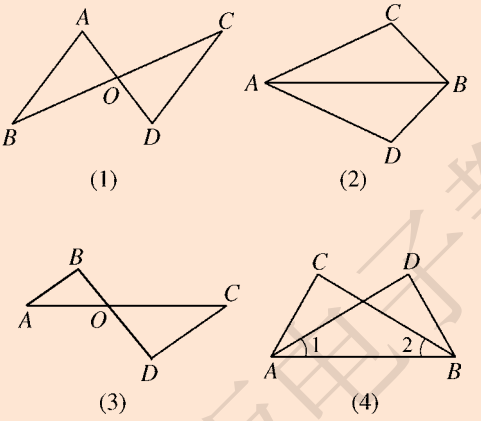
1. 如图，根据相应的条件，能否判定下面分别给出的两个三角形全等？

（1）线段 AD 与 BC 相交于点 O，$AO = DO$，$BO = CO$. $\triangle ABO$ 与 $\triangle DCO$.

（2）$AC = AD$，$BC = BD$. $\triangle ABC$ 与 $\triangle ABD$.

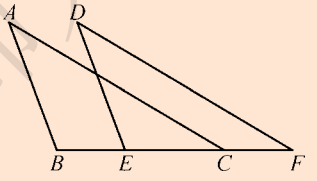
（3）线段 AC 与 BD 相交于点 O，$\angle A = \angle C$，$\angle B = \angle D$. $\triangle ABO$ 与 $\triangle CDO$.

（4）$\angle CAB = \angle DBA$，$\angle 1 = \angle 2$. $\triangle ABC$ 与 $\triangle BAD$.



（第 1 题）

2. 如图，点 B、E、C、F 在同一条直线上，$AB = DE$，$AC = DF$，$BE = CF$. 求证：$\angle A = \angle D$. 并找出图中相互平行的线段，说明你的理由.



（第 2 题）

6. 斜边直角边

我们已经知道，对于两个三角形，如果有“边边角”分别对应相等，那么不能保证这两个三角形全等.

在两个直角三角形中，当斜边和一条直角边分别对应相等时，也具有“边边角”对应相等的条件，这时这两个直角三角形是否全等呢？

华东师大版电子教材

做一做

如图 13.2.18，已知两条线段（这两条线段长不相等），试画一个直角三角形，使长的线段为其斜边、短的线段为其一条直角边.

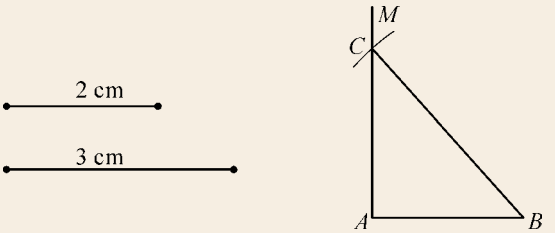


图 13.2.18

把你画的直角三角形与其他同学画的直角三角形进行比较，或将你画的直角三角形剪下，放到其他同学画的直角三角形上，看看是否完全重合. 所画的直角三角形都全等吗？

换两条线段，试试看，是否有同样的结论？

步骤：

1. 画一条线段 AB，使它等于 2 cm；
2. 画 $\angle MAB = 90°$（用量角器或三角尺）；
3. 以点 B 为圆心、3 cm 长为半径画圆弧，交射线 AM 于点 C；
4. 连结 BC.

$\triangle ABC$ 即为所求.

这是一个定理，以后会给出它的证明.

由以上操作，可以发现它们完全重合，所画的直角三角形都全等. 于是可得：

斜边和一条直角边分别相等的两个直角三角形全等. 简记为 H. L.（或斜边直角边）.

例 7 如图 13.2.19，已知 $AC = BD$，$\angle C = \angle D = 90°$. 求证：$BC = AD$.

由于 AD 与 BC 分别属于 $\triangle BAD$ 和 $\triangle ABC$，所以只需证明这两个三角形全等即可.

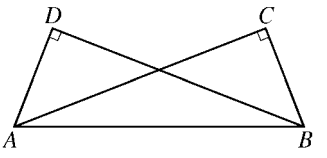


图 13.2.19

华东师大版电子教材

证明 ∵ $\angle C = \angle D = 90°$(已知),

∴ $\triangle ABC$ 与 $\triangle BAD$ 都是直角三角形(直角三角形的定义).

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 与 $\mathrm{Rt}\triangle BAD$ 中,

∵ $AB = BA$(公共边),

$AC = BD$(已知),

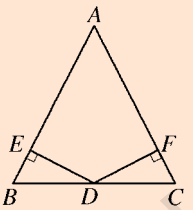
∴ $\mathrm{Rt}\triangle ABC \cong \mathrm{Rt}\triangle BAD$(H. L.).

∴ $BC = AD$(全等三角形的对应边相等).

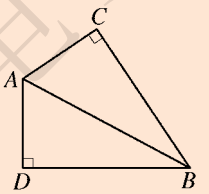
直角三角形可以用符号“Rt △”来表示.

练 习

1. 如图,在 $\triangle ABC$ 中,D 为 BC 的中点,$DE \perp AB$,$DF \perp AC$,点 E、F 为垂足,$DE = DF$. 求证:$\triangle BED \cong \triangle CFD$.



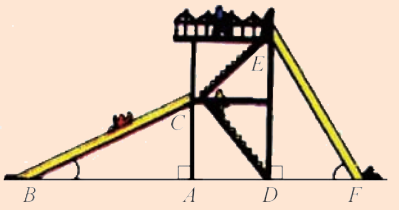
(第 1 题)



(第 2 题)

2. 如图,$AC = AD$,$\angle C = \angle D = 90°$. 求证:$BC = BD$.

3. 如图,有两个长度相同的滑梯,左边滑梯的高度 AC 与右边滑梯水平方向的跨度 DF 相等,两个滑梯的倾斜角 $\angle B$ 与 $\angle F$ 的大小有什么关系?说说你的想法和理由.

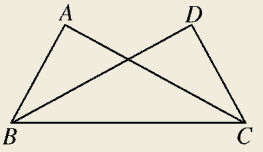


(第 3 题)

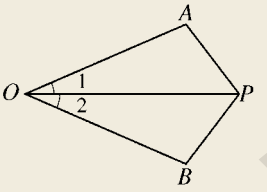
华东师大版电子教材

习题 13.2

1. 如图，已知 $AB = DC$，$AC = DB$. 求证：$\triangle ABC \cong \triangle DCB$.



（第 1 题）

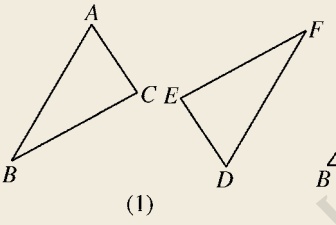


（第 2 题）

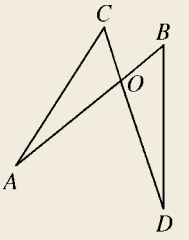
2. 如图，已知 $\angle 1 = \angle 2$，$AO = BO$. 求证：$\triangle AOP \cong \triangle BOP$.

3. 如图，要使各对三角形全等，还需要增加什么条件？

（1）$\angle A = \angle D$，$\angle B = \angle F$；　　（2）$\angle A = \angle D$，$AB = DE$.



（第 3 题）



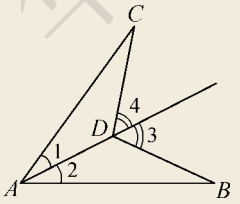
（第 4 题）

4. 如图，已知 AB 与 CD 相交于点 O，$\angle A = \angle D$，$CO = BO$. 求证：$\triangle AOC \cong \triangle DOB$.

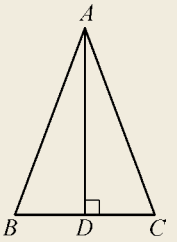
5. 如图，$\angle 1 = \angle 2$，$\angle 3 = \angle 4$. 求证：$AB = AC$.

6. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，AD 是边 BC 上的高. 求证：

（1）$BD = DC$；　　（2）$\angle BAD = \angle CAD$.



（第 5 题）



（第 6 题）



（第 7 题）

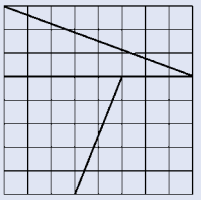
7. 一名工作人员不慎将一块三角形模具打碎成两块，他是否可以只带其中一块碎片到商店去，就能配一块与原来一样的三角形模具呢？他该带哪块去呢？请用数学知识解释你的结论.

华东师大版电子教材

阅读材料

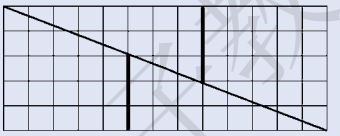
图形中的“裂缝”

几何图形的割补问题，有时会使人不知所措. 下面的图形问题是出现在萨姆·劳埃德(Sam Loyd)的《趣题大全》(*Cyclopedia of Puzzles*)中的一道趣题：将图1按所画粗线条剪开，再按图2拼合，方格线的面积竟然增加了一个平方单位！



$8\times8=64$

图1



$13\times5=65$

图2

为什么面积增加了？

这是视觉上的错觉欺骗了我们. 实际上，当图1剪成四块拼成图2时，中间有一个如图3所示的平行四边形$ABCD$的缝隙，它的面积正好为1. 也就是说，A、B、C三点及A、D、C三点都分别不在同一条直线上，图形中出现了“裂缝”，而图2中误以为它们都在同一条直线上. 这就说明了证明的重要性.

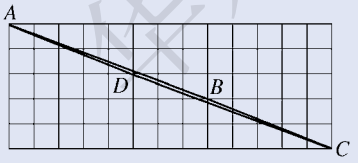


图3

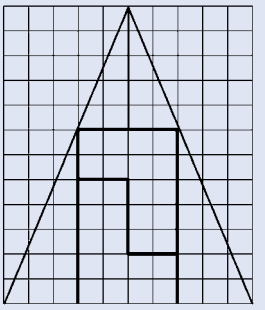


图4

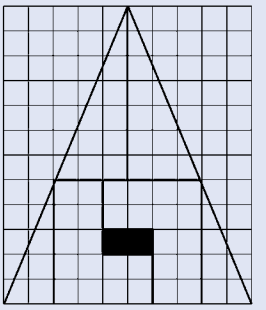


图5

后来，有人将图4中的三角形区域按所画的粗线条剪开，再按图5重新拼合，结果在三角形的内部出现了一个“黑洞”.

你能对图4和图5中的现象作出解释吗？

华东师大版电子教材

13.3 等腰三角形

1. 等腰三角形的性质

在现实生活中，你看到哪些物体的表面具有等腰三角形的形状？

我们知道，有两条边相等的三角形叫做**等腰三角形**（isosceles triangle）. 如图 13. 3. 1，$AB = AC$，$\triangle ABC$ 就是等腰三角形.

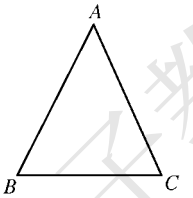


图 13. 3. 1

指出 $\triangle ABC$ 的腰、顶角和底角.

等腰三角形中，相等的两边都叫做**腰**，另一边叫做**底边**，两腰的夹角叫做**顶角**，腰和底边的夹角叫做**底角**.

做一做

剪一张等腰三角形的半透明纸片，每人所剪的等腰三角形的大小和形状可以不一样，如图 13. 3. 2，把纸片对折，让两腰 AB、AC 重叠在一起，折痕为 AD. 你能发现什么现象吗？

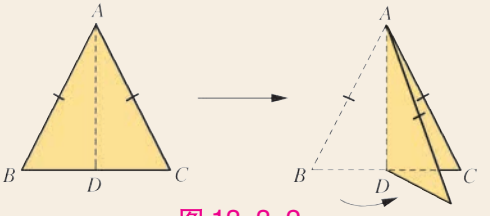


图 13. 3. 2

可以发现折叠的两个部分是互相重合的，所以等腰三角形是一个轴对称图形，折痕 AD 所在的直线就是它的对称轴. 我们还可以发现 $\angle B = \angle C$.

华东师大版电子教材

由此得到以下等腰三角形的性质：

等腰三角形的两底角相等.（简写成“**等边对等角**”）

已知：如图 13.3.3，在△ABC 中，$AB = AC$.

求证：$\angle B = \angle C$.

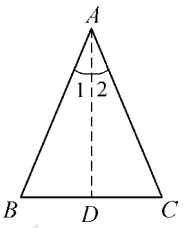


图 13.3.3

分析 由上述操作可以得到启发，即添加等腰三角形的顶角平分线 AD，然后证明 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$.

证明 画$\angle BAC$ 的平分线 AD.

在△ABD 和△ACD 中，

∵ $AB = AC$（已知），

$\angle 1 = \angle 2$（角平分线的定义），

$AD = AD$（公共边），

∴ $\triangle ABD \cong \triangle ACD$（S. A. S.）.

∴ $\angle B = \angle C$（全等三角形的对应角相等）.

从这里你还可以得到什么结论？

例 1 已知：在△ABC 中，$AB = AC$，$\angle B = 80°$. 求$\angle C$ 和$\angle A$ 的大小.

解 ∵ $AB = AC$（已知），

∴ $\angle C = \angle B = 80°$（等边对等角）.

又∵ $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$（三角形的内角和等于 180°），

∴ $\angle A = 180° - \angle B - \angle C$（等式的性质）

$= 180° - 80° - 80° = 20°$.

探索

由前面的“做一做”，你还可以发现什么结论？请写出你的发现：

_____，

_____，

_____.

华东师大版电子教材

回顾前面关于底角相等的证明过程，直接推断这一结论成立.

我们发现，AD 既是底边上的中线，又是顶角的平分线和底边上的高. 由此可得：

等腰三角形底边上的高、中线及顶角的平分线互相重合.（简称“**三线合一**”）

例 2 如图 13.3.4，在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，D 是 BC 边上的中点，$\angle B = 30°$. 求：

（1）$\angle ADC$ 的大小；

（2）$\angle 1$ 的大小.

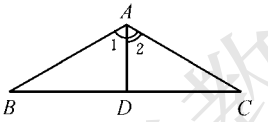


图 13.3.4

等腰三角形的“三线合一”是经常会用到的重要性质.

解 （1）$\because AB = AC$，$BD = DC$（已知），

$\therefore AD \perp BC$（等腰三角形的“三线合一”），

$\therefore \angle ADC = \angle ADB = 90°$.

（2）$\because \angle 1 + \angle B + \angle ADB = 180°$（三角形的内角和等于 180°），

$\angle B = 30°$（已知），

$\therefore \angle 1 = 180° - \angle B - \angle ADB$（等式的性质）

$= 180° - 30° - 90° = 60°$.

三条边都相等的三角形是**等边三角形**（equilateral triangle）. 如图 13.3.5，在等边三角形中，每个角的度数是多少呢？

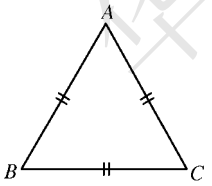


图 13.3.5

显然，$AB = AC$，根据“等边对等角”，可以得到

$$\angle B = \angle C,$$

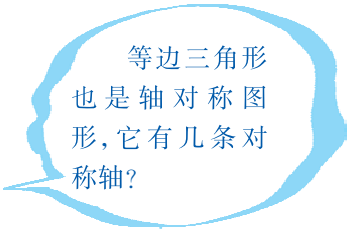
同理可得 $$\angle A = \angle B,$$

所以 $$\angle A = \angle B = \angle C.$$

而 $$\angle A + \angle B + \angle C = 180°,$$

华东师大版电子教材

所以　　$\angle A = \angle B = \angle C = \dfrac{180°}{3} = 60°.$



也就是说：

等边三角形的各个角都相等，并且每一个角都等于 60°.

等边三角形的三条边都相等，三个角都相等，也称为正三角形.

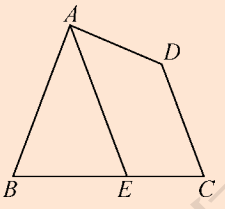
练　习

1. 填空：

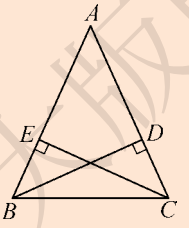
（1）如果等腰三角形的一个底角为 50°，那么其余两个角的大小分别为_____和_____；

（2）如果等腰三角形的顶角为 80°，那么它的一个底角的大小为_____.

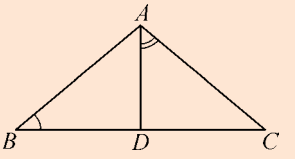
2. 如图，点 E 在 BC 上，$AE \parallel DC$，$AB = AE$. 求证：$\angle B = \angle C$.



（第 2 题）



（第 3 题）



（第 4 题）

3. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，$BD \perp AC$，$CE \perp AB$，垂足分别为点 D、E. 求证：$BD = CE$.

4. 如图，$AB = AC$，$\angle B = 40°$，点 D 在 BC 上，且 $\angle DAC = 50°$. 求证：$BD = CD$.

2. 等腰三角形的判定

对于一个三角形，怎样判定它是不是等腰三角形呢？我们已经知道的方法是按定义，看它是否有两条边相等. 现在再看看能否找到其他的判定方法.

华东师大版电子教材

探索

我们知道，等腰三角形的两个底角相等. 反过来，在一个三角形中，如果有两个角相等，那么它是等腰三角形吗？

画画看，你发现了什么？

我们可以发现，如果一个三角形中有两个角相等，那么它就是等腰三角形. 即

如果一个三角形有两个角相等，那么这两个角所对的边也相等.（简写成“**等角对等边**”）

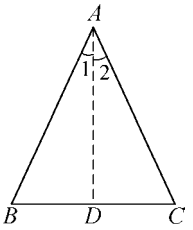


图 13.3.6

已知：如图 13.3.6，在△ABC 中，$\angle B = \angle C$.

求证：$AB = AC$.

分析 要证明 $AB = AC$，可设法构造两个全等三角形，使 AB、AC 分别是这两个全等三角形的对应边，于是想到画 $\angle BAC$ 的平分线 AD.

想想看，还可以添加什么辅助线证明这一结论？

证明 画 $\angle BAC$ 的平分线交 BC 于点 D.

在△BAD 和△CAD 中，

$\because \angle B = \angle C$（已知），

$\angle 1 = \angle 2$（角平分线的定义），

$AD = AD$（公共边），

$\therefore$ △BAD ≌ △CAD（A. A. S.），

$\therefore AB = AC$（全等三角形的对应边相等）.

例 3 如图 13.3.7，在△ABC 中，已知 $\angle A = 40°$，$\angle B = 70°$. 求证：$AB = AC$.

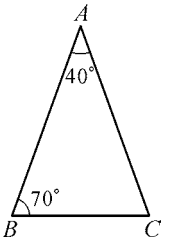


图 13.3.7

证明 $\because \angle A + \angle B + \angle C = 180°$（三角形的内角和等于 180°），

$\angle A = 40°$，$\angle B = 70°$（已知），

$\therefore \angle C = 180° - \angle A - \angle B$（等式的性质），

$= 180° - 40° - 70° = 70°$，

$\therefore \angle C = \angle B$（等量代换），

$\therefore AB = AC$（等角对等边）.

华东师大版电子教材

由上述等腰三角形的判定定理，我们还可以得到等边三角形的两个判定定理：

三个角都相等的三角形是等边三角形；

有一个角等于60°的等腰三角形是等边三角形.

你能证明这些定理吗？

例4 如图13.3.8，$AB \parallel CD$，$\angle 1 = \angle 2$. 求证：$AB = AC$.

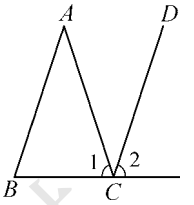


图13.3.8

分析 要证$AB = AC$，可以设法证明$\angle B = \angle 1$，而$\angle 1 = \angle 2$，因此只要证明$\angle B = \angle 2$.

证明 $\because AB \parallel CD$（已知），

$\therefore \angle B = \angle 2$（两直线平行，同位角相等）.

又$\because \angle 1 = \angle 2$（已知），

$\therefore \angle B = \angle 1$（等量代换），

$\therefore AB = AC$（等角对等边）.

例5 如图13.3.9，在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$和$\mathrm{Rt}\triangle A'B'C'$中，$\angle ACB = \angle A'C'B' = 90°$，$AB = A'B'$，$AC = A'C'$.

求证：$\mathrm{Rt}\triangle ABC \cong \mathrm{Rt}\triangle A'B'C'$.

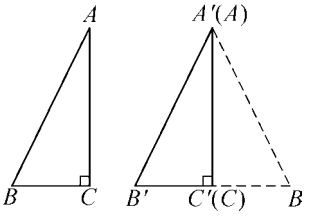


图13.3.9

证明 由于直角边$AC = A'C'$，我们移动$\mathrm{Rt}\triangle ABC$，使点A与点A'、点C与点C'重合，且使点B与点B'分别位于$A'C'$的两侧.

$\because \angle A'C'B = \angle A'C'B' = 90°$（已知），

$\therefore \angle B'C'B = \angle A'C'B' + \angle A'C'B = 180°$，

即点B'、C'、B在同一条直线上.

在$\triangle A'B'B$中，

$\because A'B' = AB = A'B$（已知），

$\therefore \angle B = \angle B'$（等边对等角）.

在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，

$\because \angle B = \angle B'$（已证），

$\angle ACB = \angle A'C'B'$（已知），

$AC = A'C'$（已知），

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ABC \cong \mathrm{Rt}\triangle A'B'C'$（A. A. S.）.

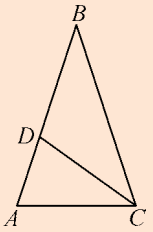
这样，我们就证明了前面已给出的直角三角形全等的H. L. 判定定理.

华东师大版电子教材

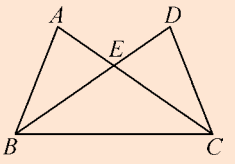
练　习

1. 如图，$\angle A = 72°$，$\angle B = 36°$，CD 平分 $\angle ACB$. 试指出图中的哪些三角形是等腰三角形，并说明理由.

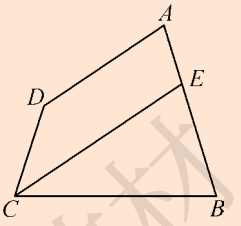
2. 如图，$AB = DC$，$\angle ABC = \angle DCB$，AC、BD 相交于点 E. 求证：$EB = EC$.



（第 1 题）



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，$\angle A = \angle B$，$CE \parallel DA$. 求证：$CE = CB$. 需再增加什么条件，可使 $\triangle BCE$ 成为等边三角形？

习题 13.3

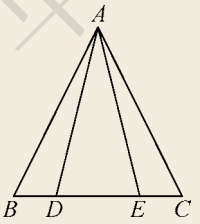
1. 等腰三角形的周长为 16，其中一条边的长是 6，求另两条边的长.

2. 等腰三角形的底角比顶角大 15°，求各个角的大小.

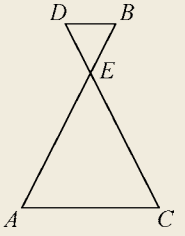
3. 有两个三角形，它们的三个角分别为：① 20°，40°，120°；② 20°，60°，100°. 怎样把它们分成两个等腰三角形？画出图形试试看.

4. 如图，$AB = AC$，D、E 都是 BC 上的点，且 $BD = CE$. 求证：$\angle ADE = \angle AED$.

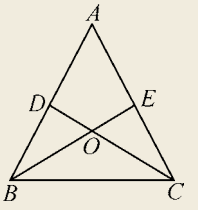
5. 如图，AB、CD 相交于点 E，$EA = EC$，$AC \parallel BD$. 求证：$EB = ED$.



（第 4 题）



（第 5 题）

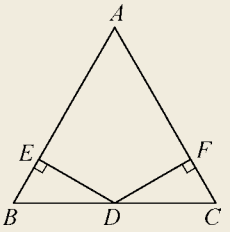


（第 6 题）

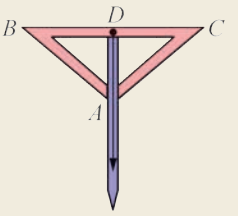
6. 如图，在等腰三角形 ABC 中，两底角的平分线 BE、CD 相交于点 O. 求证：$OB = OC$，$OD = OE$.

华东师大版电子教材

7. 如图，已知 D 为 BC 的中点，$DE \perp AB$，$DF \perp AC$，点 E、F 为垂足，且 $BE = CF$，$\angle BDE = 30°$. 求证：$\triangle ABC$ 是等边三角形.



（第 7 题）



（第 8 题）

8. 如图所示的三角测平架中，$AB = AC$，在 BC 的中点 D 挂一个重锤，自然下垂. 调整架身，使点 A 恰好在重锤线上. 试问：此时 BC 是否正好处于水平位置？为什么？

13.4 尺规作图

我们已经会使用刻度尺、三角尺、量角器和圆规等工具方便地画出各种几何图形. 如果限定只能使用圆规和没有刻度的直尺这两种工具作几何图形，你还能作出符合条件的图形吗？

我们把只能使用圆规和没有刻度的直尺这两种工具作几何图形的方法称为尺规作图. 自古希腊时代起，人们就对尺规作图产生了极大的兴趣. 对仅用直尺（以下我们所说的直尺均指没有刻度的直尺）和圆规能作出哪些图形以及不可能作出哪些图形的思考和研究，竟推动了整个数学的发展.

以下我们将研究仅用直尺和圆规作已知角的平分线、经过一已知点作已知直线的垂线、作已知线段的垂直平分线的方法. 为完整起见，我们把在七年级上学期第 4 章中已经学过的作线段和作角的内容重新以示意图列

华东师大版电子教材

出，以便较完整地学习尺规作图. 这 5 种作图称为基本作图，几何作图问题一般都是由若干个基本作图组合而成的.

1. 作一条线段等于已知线段

MN 为已知线段，你能用直尺和圆规准确地作一条与 *MN* 相等的线段吗？

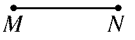


图 13.4.1

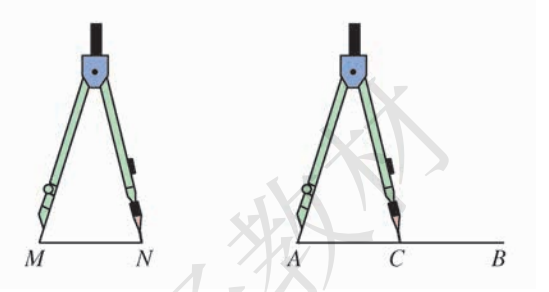


图 13.4.2

2. 作一个角等于已知角

这是我们在七年级已经学习过的作一个角等于已知角的方法，你能用学过的知识说明为什么 $\angle A'O'B' = \angle AOB$ 吗？

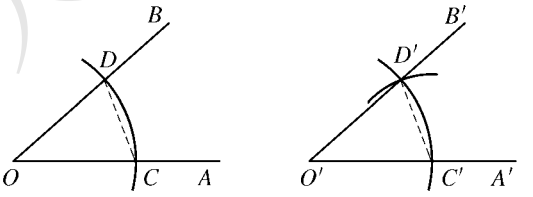


图 13.4.3

我们在讨论三角形全等的条件时，曾利用上述两种基本作图，已知两边和夹角、两角和夹边、三边分别作出相应的三角形.

练　习

1. 任意画出两条线段 *AB* 和 *CD*，再作一条线段，使它等于 $AB + 2CD$.
2. 任意画出两个角 $\angle 1$ 和 $\angle 2$，其中 $\angle 1 > \angle 2$，再作一个角，使它等于 $\angle 1 - \angle 2$.

华东师大版电子教材

3. 作已知角的平分线

试一试

如图 13.4.4，$\angle AOB$ 为已知角，试按下列步骤用直尺和圆规准确地作出 $\angle AOB$ 的平分线.

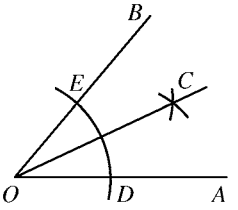


图 13.4.4

想想看，如何将 $\angle AOB$ 四等分？

第一步：在射线 OA、OB 上，分别截取 OD、OE，使 $OD = OE$；

第二步：分别以点 D 和点 E 为圆心、适当长（大于线段 DE 长的一半）为半径作圆弧，在 $\angle AOB$ 内，两弧交于点 C；

第三步：作射线 OC.

射线 OC 就是所要求作的 $\angle AOB$ 的平分线.

我们可以证明这样作出来的射线是符合要求的，即 $\angle AOC = \angle BOC$.

如图 13.4.5，连结 EC、DC.

$\because\ OD = OE,\ DC = EC,\ OC = OC,$

$\therefore\ \triangle OCD \cong \triangle OCE$（S.S.S.），

$\therefore\ \angle AOC = \angle BOC$（全等三角形的对应角相等）.

为简化推理格式，今后只注明主要依据，省略“已知”、“等量代换”等依据.

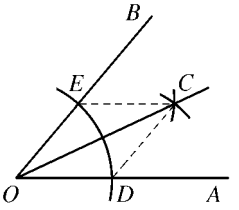
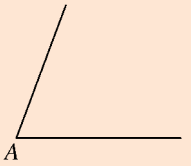


图 13.4.5

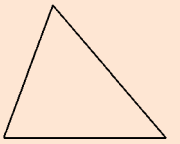
华东师大版电子教材

练　习

1. 如图，已知$\angle A$，试作$\angle B=\frac{1}{2}\angle A$.（不写作法，保留作图痕迹*）



（第1题）



（第2题）

2. 作出图中三角形三个角的平分线.

4. 经过一已知点作已知直线的垂线

已知点与已知直线可以有两种不同的位置关系：点在直线上，点不在直线上. 因此要分别按这两种情况作图.

（1）经过已知直线上一点作已知直线的垂线.

已知直线AB和AB上一点C，试按下列步骤用直尺和圆规准确地经过点C作出直线AB的垂线.

如图13.4.6，由于点C在直线AB上，因此所求作的垂线正好是平角ACB的平分线所在的直线.

第一步：作平角ACB的平分线CD；

第二步：反向延长射线CD.

直线CD就是要求作的垂线.

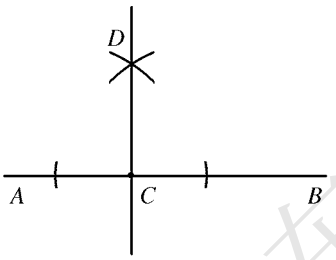


图13.4.6

动手试一试，现在你知道具体作法了吧？你能说说其中的道理吗？

（2）经过已知直线外一点作已知直线的垂线.

已知直线AB和AB外一点C，试按下列步骤用直尺和圆规准确地经过点C作出直线AB的垂线.

如图13.4.7，若以点C为圆心，作能与直线AB相交于D、E两点的弧，则$\triangle CDE$为等腰三角形. 由“等腰三角形顶角的平分线就是底边上的高”可知，只需作出$\angle DCE$的平分线，则该平分线所在的直线就是要求作的垂线.

* 尺规作图，均保留作图痕迹，不写作法.

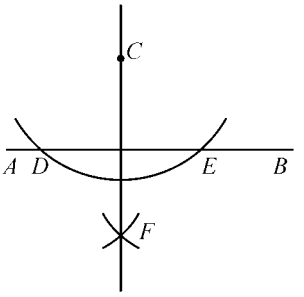


图 13.4.7

例 利用直尺和圆规作一个等于 45°的角.

作法 1. 作直线 AB;

2. 过点 A 作直线 AB 的垂线 AC;

3. 作 $\angle CAB$ 的平分线 AD.

$\angle DAB$ 就是要求作的角(如图 13.4.8 所示).

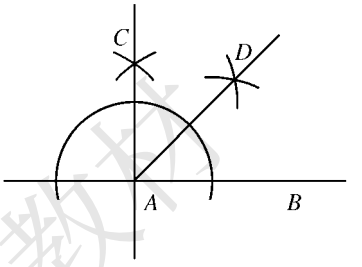
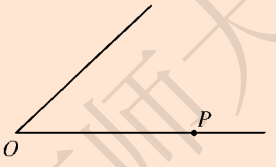


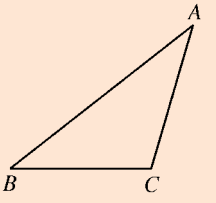
图 13.4.8

练　习

1. 如图,点 P 在 $\angle O$ 的一边上,试过点 P 作该角两边的垂线.



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 如图,作 $\triangle ABC$ 边 BC 上的高.

5. 作已知线段的垂直平分线

思考

如图 13.4.9,已知直线 l 是线段 AB 的垂直平分线,则直线 l 是线段 AB 的对称轴,对 l 上的任意两点 C、D,

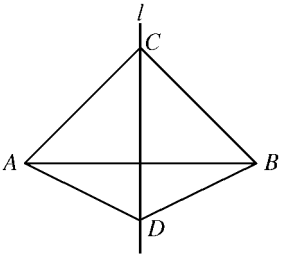


图 13.4.9

华东师大版电子教材

通过对折可以发现，总有

$$CA = CB,\ DA = DB.$$

由此，你能发现作垂直平分线的方法吗？

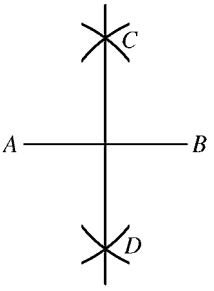


图 13.4.10

试一试

如图 13.4.10，已知线段 AB，试按下列步骤用直尺和圆规准确地作出线段 AB 的垂直平分线.

第一步：分别以点 A 和点 B 为圆心、大于 AB 一半的长为半径作圆弧，两弧相交于点 C 和点 D；

第二步：作直线 CD.

直线 CD 就是要求作的线段 AB 的垂直平分线.

我们可以证明这样作出来的直线是符合要求的，即直线 CD 垂直平分线段 AB.

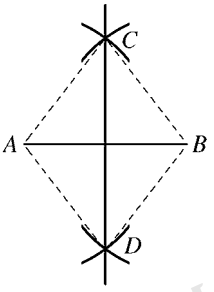


图 13.4.11

如图 13.4.11，连结 CA、CB、DA、DB.

$\because\ AC = BC,\ AD = BD,\ CD = CD,$

$\therefore\ \triangle ACD \cong \triangle BCD$（S.S.S.），

$\therefore\ \angle ACD = \angle BCD$（全等三角形的对应角相等），

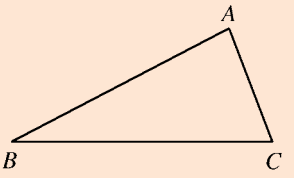
$\therefore\ CD$ 垂直平分线段 AB（等腰三角形的“三线合一”）.

由于上面作出的直线 CD 与线段 AB 的交点就是 AB 的中点，因此我们可以用这种方法作出线段 AB 的中点，从而也可以作出任意一个三角形的三条中线.

练　习

1. 四等分已知线段 AB.

2. 如图，作 $\triangle ABC$ 的边 BC 的垂直平分线.



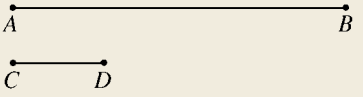
（第 2 题）

华东师大版电子教材

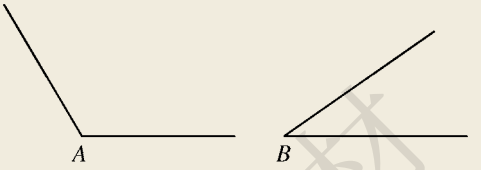
习题 13.4

完成下列作图.

1. 如图,已知线段 AB 和 CD,求作一条线段,使它等于 $AB-2CD$.



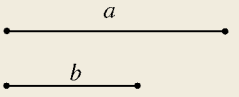
(第 1 题)



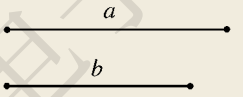
(第 2 题)

2. 如图,已知 $\angle A$ 和 $\angle B$,求作一个角,使它等于 $\angle A-2\angle B$.

3. 如图,已知线段 a 和 b,求作一个等腰三角形,使它的腰长等于 a,底边长等于 b.



(第 3 题)



(第 4 题)

4. 如图,已知线段 a 和 b,求作一个直角三角形,使它的两条直角边长分别等于线段 a 和 b.

5. 已知 $\triangle ABC$,作它的三边 AB、BC、CA 的垂直平分线. 你发现了什么?



阅读材料

由尺规作图产生的三大难题

古希腊人用尺规作图,主要目的在于训练智力,培养逻辑思维能力,所以对作图的工具有严格的限制. 他们规定作图只能用直尺和圆规,而他们所谓的直尺是没有刻度的. 正是在这种严格的限制下,产生了种种难题.

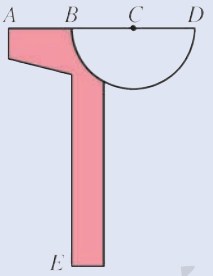
相传神话中的一个国王对儿子给他造的立方体坟墓不满意,命令把坟墓扩大一倍,但当时的工匠都不知如何解决. 后来,德利安人为了摆脱某种瘟疫,遵照神

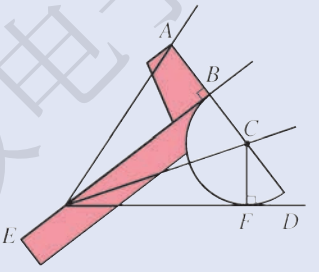
华东师大版电子教材

谕，必须把阿波洛的立方体祭坛扩大一倍. 据说，这个问题提到柏拉图那里，柏拉图又把它交给了几何学家. 这就是著名的倍立方问题. 除倍立方问题外，还有三等分任意角、化圆为方（作一个正方形，使其面积等于给定的圆的面积）这两个难题.

在数学史中，很难找到像这样长期被人关注的问题. 两千多年以来，无数人的聪明才智倾注于这三大难题而毫无结果. 但对这三个问题的深入探索，却促进了几何学的发展，引出了大量的发现，如圆锥曲线、许多二次和三次曲线以及几种超越曲线的发现等. 后来又有关于有理域、代数数、超越数、群论和方程论等数学理论的发展. 直到 19 世纪，即距第一次提出这三个问题两千年之后，这三个问题才被证实在所给的条件下是不可能解决的.

现在还有不少人创造了各种各样的辅助工具，用来解决这些尺规作图无法解决的问题. 下面的工具就可以用来解决三等分任意角的问题（这样的作图就相当于用量角器三等分任意角，已不属于尺规作图的范畴）. 你能说出其中的道理吗？





华东师大版电子教材

13.5 逆命题与逆定理

1. 互逆命题与互逆定理

观察这两个命题的条件和结论，你发现了什么？

我们已经知道，表示判断的语句叫做命题. 例如“两直线平行，内错角相等”、“内错角相等，两直线平行”都是命题.

上面两个命题的条件和结论恰好互换了位置.

在两个命题中，如果第一个命题的条件是第二个命题的结论，而第一个命题的结论是第二个命题的条件，那么这两个命题叫做**互逆命题**. 如果把其中一个命题叫做**原命题**，那么另一个命题就叫做它的**逆命题**.

命题“两直线平行，内错角相等”的

条件为：_____；

结论为：_____.

因此它的逆命题为：

_____.

每一个命题都有逆命题，只要将原命题的条件改成结论，并将结论改成条件，便可得到原命题的逆命题. 但是原命题正确，它的逆命题未必正确. 例如真命题“对顶角相等”的逆命题为“相等的角是对顶角”，此命题就是假命题.

你还能举出原命题为真命题，而其逆命题为假命题的例子吗？

如果一个定理的逆命题也是定理，那么这两个定理叫做**互逆定理**，其中的一个定理叫做另一个定理的**逆定理**.

我们已经知道命题“两直线平行，内错角相等”和它的逆命题“内错角相等，两直线平行”都是定理，因此它们就是互逆定理.

一个假命题的逆命题可以是真命题，甚至可以是定理. 例如“相等的角是对顶角”是假命题，但它的逆命题“对顶角相等”是真命题，且是定理.

练　习

1. 先指出下列各命题的条件和结论，再写出它们的逆命题，并判断其真假：

   （1）如果一个三角形是直角三角形，那么它的两个锐角互余；

   （2）等边三角形的每个角都等于60°；

   （3）全等三角形的对应角相等；

   （4）如果 $a = b$，那么 $a^3 = b^3$.

2. 举例说明下列命题的逆命题是假命题：

   （1）如果一个整数的个位数字是5，那么这个整数能被5整除；

   （2）如果两个角都是直角，那么这两个角相等.

3. 在你所学过的知识内容中，有没有原命题与逆命题都正确的例子？试举出几对.

2. 线段垂直平分线

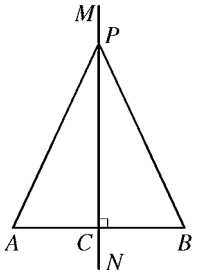


图 13.5.1

我们已经知道线段是轴对称图形，线段的垂直平分线是线段的对称轴. 如图 13.5.1，直线 MN 是线段 AB 的垂直平分线，P 是 MN 上任一点，连结 PA、PB. 将线段 AB 沿直线 MN 对折，我们发现 PA 与 PB 完全重合. 由此即有：

线段垂直平分线的性质定理　线段垂直平分线上的点到线段两端的距离相等.

已知：如图 13.5.1，$MN \perp AB$，垂足为点 C，$AC = BC$，点 P 是直线 MN 上的任意一点.

求证：$PA = PB$.

分析　图中有两个直角三角形 APC 和 BPC，只要证明这两个三角形全等，便可证得 $PA = PB$.

请写出完整的证明过程.

探索

这一定理描述了线段垂直平分线的性质，那么反过来会有什么结果呢？

	条件	结论
性质定理		
逆命题		

写出该定理与它的逆命题的条件和结论，想想看，其逆命题是否是一个真命题？

你一定发现到线段两端距离相等的点的确在该线段的垂直平分线上. 我们可以通过“证明”说明这一结论正确.

华东师大版电子教材

已知：如图 13.5.2，$QA = QB$.

求证：点 Q 在线段 AB 的垂直平分线上.

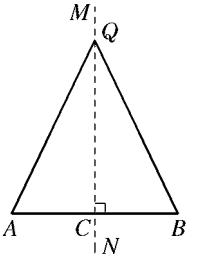


图 13.5.2

分析 为了证明点 Q 在线段 AB 的垂直平分线上，可以先经过点 Q 作线段 AB 的垂线，然后证明该垂线平分线段 AB；也可以先平分线段 AB，设线段 AB 的中点为点 C，然后证明 QC 垂直于线段 AB.

证明 过点 Q 作 $MN \perp AB$，垂足为点 C，

故 $\angle QCA = \angle QCB = 90°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle QCA$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle QCB$ 中，

$\because$ $QA = QB$，

$QC = QC$，

$\therefore$ $\mathrm{Rt}\triangle QCA \cong \mathrm{Rt}\triangle QCB$(H. L.).

$\therefore$ $AC = BC$(全等三角形的对应边相等).

$\therefore$ 点 Q 在线段 AB 的垂直平分线上.

于是就有定理：

到线段两端距离相等的点在线段的垂直平分线上.

你能根据分析中后一种添加辅助线的方法，写出它的证明过程吗？

上述两条定理互为逆定理，根据上述两条定理，我们就能证明：三角形三边的垂直平分线交于一点.

试一试

从图 13.5.3 中可以看出，要证明三角形三条边的垂直平分线交于一点，只需证明其中两条边的垂直平分线的交点一定在第三条边的垂直平分线上就可以了. 其思路可表示如下：

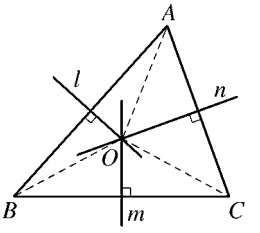
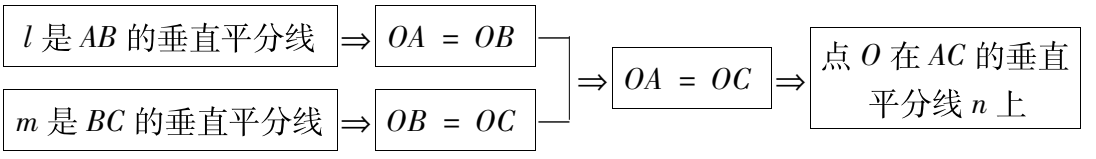


图 13.5.3



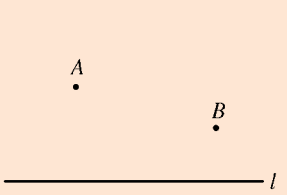
试试看，现在你会证明了吗？

修乐师大版电子教材

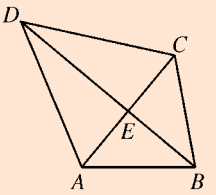
练　习

1. 如图，已知点 A、B 和直线 l，在直线 l 上求作一点 P，使 $PA = PB$.

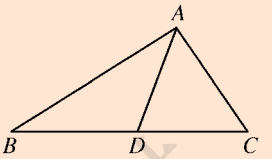
2. 如图，$BD \perp AC$，垂足为点 E，$AE = CE$. 求证：$AB + CD = AD + BC$.



（第 1 题）



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，已知点 D 在 BC 上，且 $BD + AD = BC$. 求证：点 D 在 AC 的垂直平分线上.

3. 角平分线

回忆

我们已经知道角是轴对称图形，角平分线所在的直线是角的对称轴. 如图 13.5.4，OC 是 $\angle AOB$ 的平分线，P 是 OC 上任一点，作 $PD \perp OA$，$PE \perp OB$，垂足分别为点 D 和点 E. 将 $\angle AOB$ 沿 OC 对折，我们发现 PD 与 PE 完全重合. 由此即有：

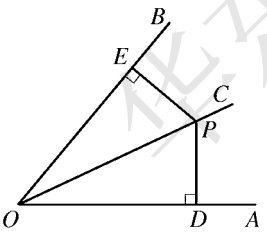


图 13.5.4

角平分线的性质定理　角平分线上的点到角两边的距离相等.

已知：如图 13.5.4，OC 是 $\angle AOB$ 的平分线，点 P 是 OC 上的任意一点，$PD \perp OA$，$PE \perp OB$，垂足分别为点 D 和点 E.

求证：$PD = PE$.

请写出完整的证明过程.

分析　图中有两个直角三角形 PDO 和 PEO，只要证明这两个三角形全等，便可证得 $PD = PE$.

华东师大版电子教材

探索

这一定理描述了角平分线的性质，那么反过来会有什么结果呢？

	条件	结论
性质定理		
逆命题		

写出该定理与逆命题的条件与结论，想想看，其逆命题是否是一个真命题？

你一定发现到角两边距离相等的点的确在该角的平分线上. 我们可以通过“证明”说明这一结论正确.

已知：如图 13.5.5，$QD \perp OA$，$QE \perp OB$，点 D、E 为垂足，$QD = QE$.

求证：点 Q 在 $\angle AOB$ 的平分线上.

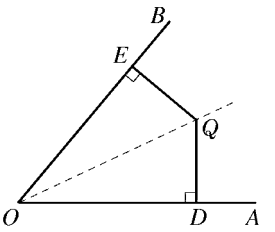


图 13.5.5

分析 为了证明点 Q 在 $\angle AOB$ 的平分线上，可以作射线 OQ，然后证明 $\mathrm{Rt}\triangle QDO \cong \mathrm{Rt}\triangle QEO$，从而得到 $\angle AOQ = \angle BOQ$.

证明 过点 O、Q 作射线 OQ.

$\because QD \perp OA$，$QE \perp OB$，

$\therefore \angle QDO = \angle QEO = 90°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle QDO$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle QEO$ 中，

$\because OQ = OQ$，$QD = QE$，

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle QDO \cong \mathrm{Rt}\triangle QEO$(H. L.)，

$\therefore \angle DOQ = \angle EOQ$(全等三角形的对应角相等).

$\therefore$ 点 Q 在 $\angle AOB$ 的平分线上.

于是就有定理：

角的内部到角两边距离相等的点在角的平分线上.

上述两条定理互为逆定理，根据上述两条定理，我们就能证明：三角形的三条角平分线交于一点.

华东师大版电子教材

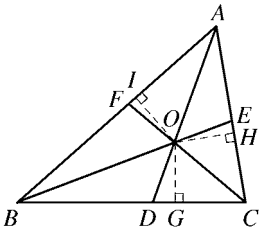


图 13.5.6

试一试

从图 13.5.6 中可以看出，要证明三角形的三条角平分线交于一点，只需证明其中的两条角平分线的交点一定在第三条角平分线上就可以了. 其思路可表示如下：

AO 是 $\angle BAC$ 的平分线 $\Rightarrow$ $OI = OH$

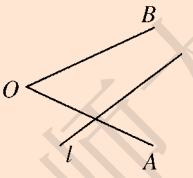
BO 是 $\angle ABC$ 的平分线 $\Rightarrow$ $OG = OI$

$\Rightarrow$ $OG = OH$ $\Rightarrow$ 点 O 在 $\angle BCA$ 的平分线上

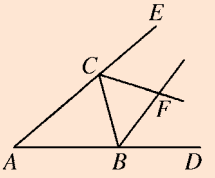
试试看，现在你会证明了吗？

练　习

1. 如图，在直线 l 上找出一点 P，使得点 P 到 $\angle AOB$ 的两边 OA、OB 的距离相等.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，$\triangle ABC$ 的外角 $\angle CBD$ 和 $\angle BCE$ 的平分线相交于点 F. 求证：点 F 在 $\angle DAE$ 的平分线上.

习题 13.5

1. 写出下列命题的逆命题，并判断它是真命题还是假命题：

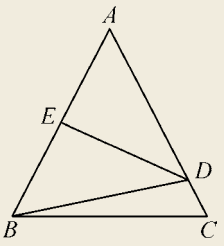
（1）如果 $x = y$，那么 $x^2 = y^2$；

（2）如果一个三角形有一个角是钝角，那么它的另外两个角是锐角.

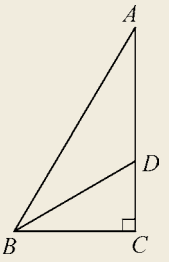
华东师大版电子教材

2. 如图，$AB = AC$，$\angle A = 50°$，DE 垂直平分 AB. 求 $\angle DBC$ 的大小.

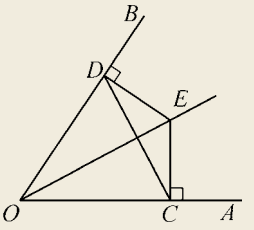
3. 如图，在$\triangle ABC$ 中，$\angle A = 30°$，$\angle C = 90°$，BD 是 $\angle ABC$ 的平分线，交 AC 于点 D. 求证：点 D 在 AB 的垂直平分线上.



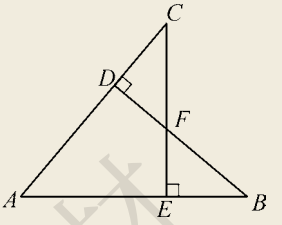
（第 2 题）



（第 3 题）



（第 4 题）



（第 5 题）

4. 如图，E 是 $\angle AOB$ 的平分线上一点，$EC \perp OA$，$ED \perp OB$，垂足分别为点 C 和点 D. 求证：$\angle ECD = \angle EDC$.

5. 如图，$BD \perp AC$，$CE \perp AB$，垂足分别为点 D 和点 E，BD 与 CE 相交于点 F，$BF = CF$. 求证：点 F 在 $\angle BAC$ 的平分线上.



阅读材料

《几何原本》

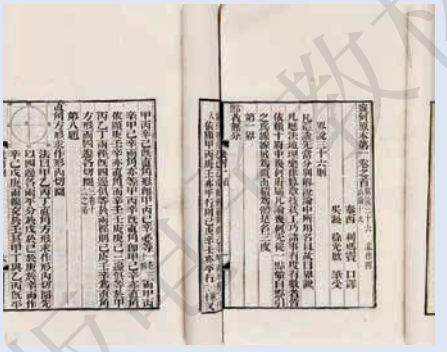
我们的前人将只研究图形形状和大小的学科称为几何学. 几何学始于巴比伦人和埃及人所处的时代. 相传古埃及尼罗河每年泛滥，河水冲毁耕地，每次泛滥后都需要重新丈量土地，从而推动了几何学的产生与发展. 在希腊文和拉丁文中，“几何学”（Geometry）一词的原意就是“测量土地”. 公元前六百年左右，古希腊开始形成了较为系统的几何学，当时人们作了大量的几何猜想，并用逻辑推理的方法证实了许多发现. 在其后的三百年中，用演绎推理证实数学猜想的方法发展得越来越完善. 公元前三百年左右，古希腊数学家欧几里得（Euclid，约公元前 330 −公元前 275）总结了前人的经验，将前人的成果和自己的发现写成了一本叫做 *Elements* 的书. 这是一部经典的数学名著. 从印刷技术发明到 19 世纪末，用各种文字发行的 *Elements* 已达一千版以上. 这是一部划时代的名著，是最早用公理法建立演绎数学体系的典范. 在这部数学名著中，欧几里得从当时人们认为的不

华东师大版电子教材

言而喻的几条基本事实出发,运用演绎推理的方法,使一个接一个的几何发现(定理)得到证明,如同滚雪球一般,使得这个体系中精确无误的几何事实越积越多,从而推演出了内容丰富多彩的几何学.

在明朝万历年间(1607),我国科学家徐光启(1562－1633)和意大利传教士利玛窦(M. Ricci, 1552－1610)共同将欧几里得原著的拉丁文本的前6卷翻译成了中文,取名为《几何原本》.徐光启巧妙地将"Geometry"翻译成"几何",既含有"多少"的意思,又考虑到了"Geo"的发音.该名词一直沿用到现在.徐光启的石像至今还矗立在上海市徐家汇的光启公园中.





在清朝咸丰年间(1857),我国数学家李善兰(1811－1882)和英国传教士伟烈亚力(A. Wylie, 1815－1887)共同将欧几里得原著的英文本的后9卷翻译成了中文.至此,对欧几里得的 *Elements* 的翻译工作宣告全部完成.

欧几里得的 *Elements* 对几何学的发展和几何学的教学起了巨大作用.人们为了纪念欧几里得,一直把这种体系的几何学称为欧几里得几何学.

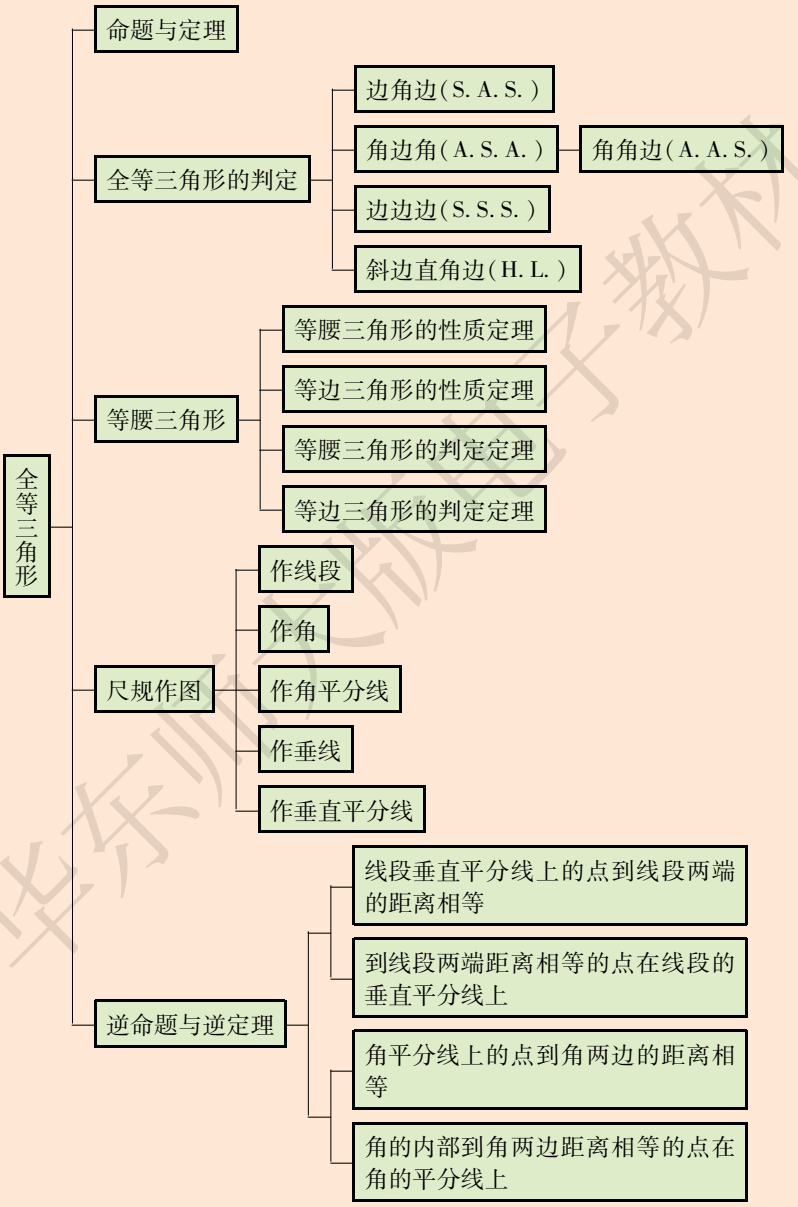




华东师大版电子教材

小结

一、知识结构



华东师大版电子教材

二、要点

1. 本章研究了命题、定理的条件与结论，以及原命题与它的逆命题、原定理与它的逆定理之间的关系，这些术语在今后的学习中会经常遇到.

2. 本章研究的主要内容是三角形全等的判定方法，判定三角形全等的三个基本事实是我们进行演绎推理的重要依据，它们是从静态的角度探索发现的依据三角形的基本元素判定三角形全等的方法. 实质上它们和动态的全等三角形定义是一致的，我们完全可以说明，在这些条件下的两个三角形一定可以通过图形的基本变换（轴对称、平移与旋转）而相互重合.

3. 在本章中，我们体会了证明的必要性，知道了经过合情推理探索发现的数学结论还需要经过演绎推理的确认. 我们还学习了一些基本的证明方法.

4. 本章对于一些几何图形（等腰三角形、线段的垂直平分线、角平分线）的研究，都经历了“探索发现——演绎证明”的过程，先通过几何直观、实验操作，探索发现某些结论，再通过演绎推理验证其正确与否，体现了合情推理与演绎推理是两种相辅相成的推理方式.

5. 本章还介绍了仅用直尺（没有刻度）与圆规的尺规作图方法，并使用尺规作图方法作一条线段等于已知线段、作一个角等于已知角、作已知角的平分线、经过一已知点作已知直线的垂线、作已知线段的垂直平分线.

华东师大版电子教材

复习题

A 组

1. 判断下列命题是真命题还是假命题，若是假命题，请举出反例说明：

（1）两直线平行，同旁内角互补；

（2）在同一平面内，垂直于同一条直线的两条直线平行；

（3）相等的角是内错角；

（4）有一个角是 60°的三角形是等边三角形.

2. 判断题（对的在括号内填“✓”，错的在括号内填“×”）

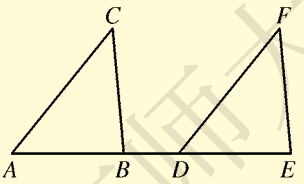
（1）每个命题都有逆命题.（　　）

（2）每个定理都有逆定理.（　　）

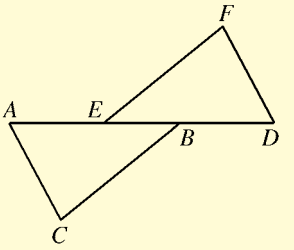
（3）真命题的逆命题都是真命题.（　　）

（4）假命题的逆命题都是假命题.（　　）

3. 如图，$AB = DE$，$AC \parallel DF$，$BC \parallel EF$. 求证：$\triangle ABC \cong \triangle DEF$.



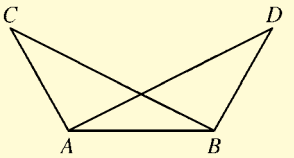
（第 3 题）



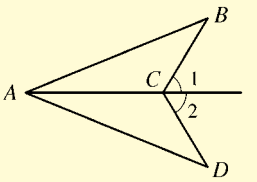
（第 4 题）

4. 如图，$AE = DB$，$BC = EF$，$BC \parallel EF$. 求证：$\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

5. 如图，$AC = BD$，$BC = AD$. 求证：$\triangle ABC \cong \triangle BAD$.



（第 5 题）

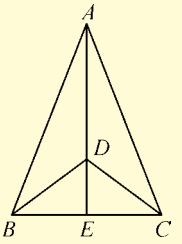


（第 6 题）

6. 如图，$\angle 1 = \angle 2$，$\angle B = \angle D$. 求证：$\triangle ABC \cong \triangle ADC$.

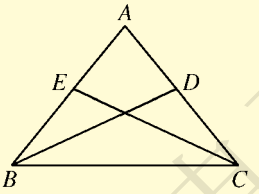
华东师大版电子教材

7. 如图，在△ABC 中，$AB = AC$，$DB = DC$，AD 的延长线交 BC 于点 E. 求证：$\angle BAE = \angle CAE$.



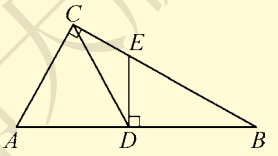
（第 7 题）

8. 如图，$\angle BDA = \angle CEA$，$AE = AD$. 求证：$AB = AC$.



（第 8 题）

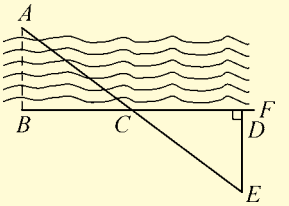
9. 如图，$\angle ACB = 90°$，$AC = AD$，$DE \perp AB$. 求证：$\angle ECD = \angle EDC$.



（第 9 题）

10. 如图，要测量河岸相对的两点 A、B 间的距离，先在 AB 的垂线 BF 上取两点 C、D，使 $BC = CD$，再定出 BF 的垂线 DE，使点 A、C、E 在同一条直线上，测得的 DE 的长就是 AB 的长，为什么？



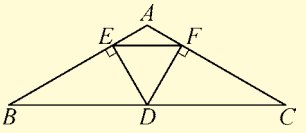


（第 10 题）

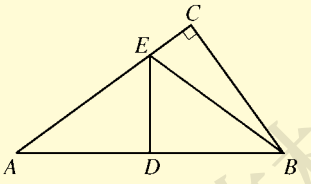
华东师大版电子教材

B 组

11. 如图，在△ABC 中，$\angle A = 120°$，$AB = AC$，D 是 BC 边的中点，$DE \perp AB$，$DF \perp AC$，点 E、F 为垂足. 求证：△DEF 是等边三角形.



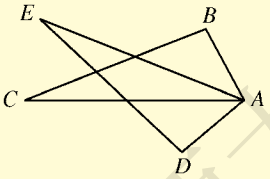
（第 11 题）



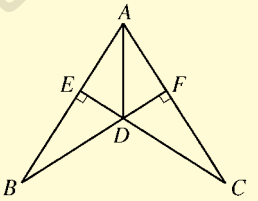
（第 12 题）

12. 如图，在 △ABC 中，$\angle C = 90°$，$\angle A = 36°$，DE 是线段 AB 的垂直平分线，交 AB 于点 D，交 AC 于点 E. 求证：$\angle EBC = 18°$.

13. 如图，$AB = AD$，$AC = AE$，$\angle BAE = \angle DAC$. 求证：$\angle C = \angle E$.



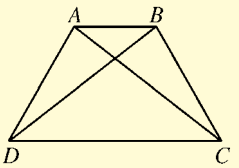
（第 13 题）



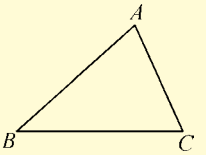
（第 14 题）

14. 如图，$BF \perp AC$，$CE \perp AB$，$BE = CF$，BF 与 CE 交于点 D. 求证：AD 平分 $\angle BAC$.

15. 如图，$AD = BC$，$\angle ADC = \angle BCD$. 求证：$\angle BAC = \angle ABD$.



（第 15 题）



（第 16 题）

16. 如图，已知△ABC，求作点 P，使 $AP = CP$，且点 P 到边 BA、BC 的距离相等.

华东师大版电子教材

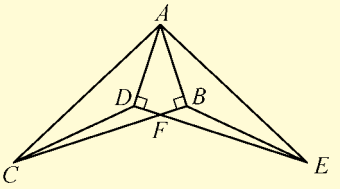
C 组

17. 两个直角三角形有两个角及一条边分别相等，这两个直角三角形会全等吗？试列出各种情况，并一一加以说明.

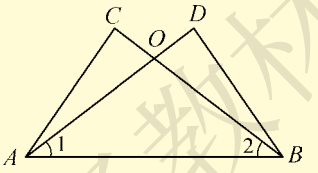
18. 如图，已知 $\mathrm{Rt}\triangle ABC \cong \mathrm{Rt}\triangle ADE$，$\angle ABC = \angle ADE = 90°$，$BC$ 与 DE 相交于点 F，连结 CD、EB.

（1）请找出图中其他的全等三角形；

（2）试证明 $CF = EF$.



（第 18 题）



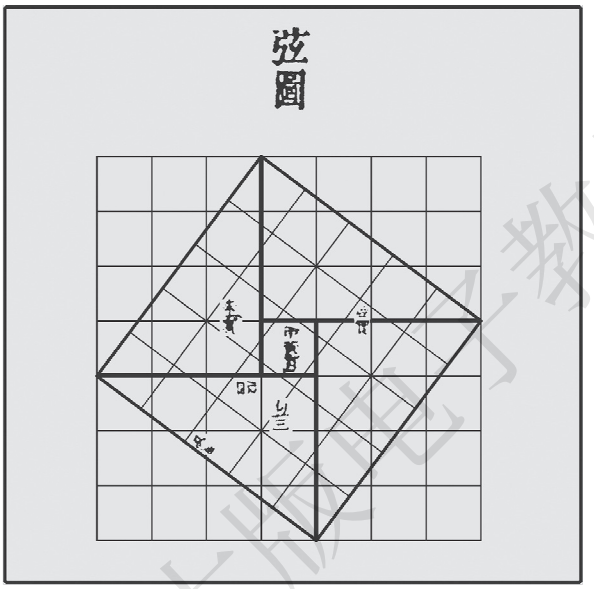
（第 19 题）

19. 如图，在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ABD$ 中，AD 与 BC 相交于点 O，$\angle 1 = \angle 2$，请你添加一个条件（不再添加其他线段，不再标注或使用其他字母），使 $AC = BD$，并给出证明.

你添加的条件是：_____.

华东师大版电子教材

第14章　勾股定理



你知道2002年在北京召开的国际数学家大会（ICM−2002）吗?在这次大会上，到处可以看到一个简洁优美、远看像旋转的纸风车的图案，它就是大会的会标.

会标采用了1700多年前中国古代数学家赵爽用来证明勾股定理的弦图.

本章将探讨直角三角形三边之间的关系，进一步认识这个奇妙的弦图，并学会解决各种有趣的问题. ▶▶▶

华东师大版电子教材

14.1 勾股定理

1. 直角三角形三边的关系

本章导图中的弦图隐含着直角三角形三边之间的一种奇妙关系，让我们首先观察下面的正方形瓷砖铺成的地面.

图 14.1.1 是正方形瓷砖铺成的地面，观察图中着色的三个正方形，显然，两个小正方形 P、Q 的面积之和等于大正方形 R 的面积. 即

$$AC^2 + BC^2 = AB^2,$$

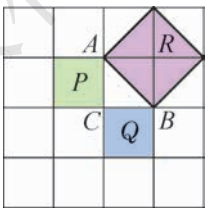


图 14.1.1

这说明，在等腰直角三角形 ABC 中，两直角边的平方和等于斜边的平方. 那么在一般的直角三角形中，两直角边的平方和是否等于斜边的平方呢？

试一试

观察图 14.1.2，如果每一小方格表示 1 平方厘米，那么可以得到：

正方形 P 的面积 = _____平方厘米；

正方形 Q 的面积 = _____平方厘米；

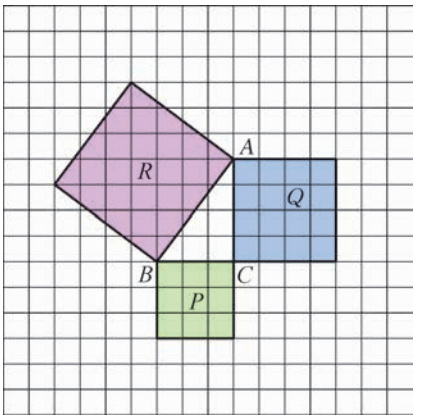
正方形 R 的面积 = _____平方厘米.

我们发现，正方形 P、Q、R 的面积之间的关系是

_____.

由此，我们得出 Rt△ABC 的三边长度之间存在的关系是_____.

华东师大版电子教材



（每一小方格表示 1 平方厘米）

图 14.1.2

做一做

画出两条直角边分别为 5 cm、12 cm 的直角三角形，然后用刻度尺量出斜边的长，并验证上述关系对这个直角三角形是否成立.

概括

由上面的探索可以发现：对于任意的直角三角形，如果它的两条直角边分别为 a、b，斜边为 c，那么一定有

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

这种关系我们称为勾股定理.

这就是我国古代所发现的勾股定理.

勾股定理　直角三角形两直角边的平方和等于斜边的平方.

勾股定理揭示了直角三角形三边之间的关系.

华东师大版电子教材

读一读

我国古代把直角三角形中较短的直角边称为勾，较长的直角边称为股，斜边称为弦. “弦图”最早是由三国时期的数学家赵爽在为《周髀算经》作注时给出的，它标志着中国古代的数学成就. 图 14. 1. 3 是 2002 年在北京召开的国际数学家大会(ICM－2002)的会标，其图案正是由“弦图”演变而来.

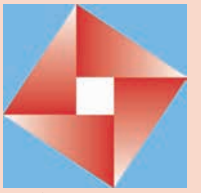


图 14. 1. 3

图 14. 1. 4 是弦图的示意图，它由 4 个全等的直角三角形与一个小正方形组成，恰好拼成一个大正方形. 大正方形的面积等于 c^2，同时它的面积又等于四个全等的直角三角形和小正方形的面积之和，于是有 $4 \cdot \frac{1}{2}ab + (b - a)^2 = c^2$，化简即得 $a^2 + b^2 = c^2$，这就证明了勾股定理.

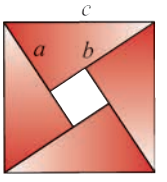


图 14. 1. 4

做一做

用四个全等的直角三角形，还可以拼成如图 14. 1. 5 所示的图形. 与上面的方法类似，根据这一图形，也能证明勾股定理. 请你试一试，写出完整的证明过程.

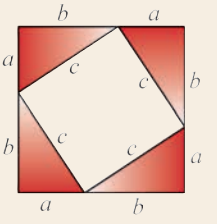


图 14. 1. 5

华东师大版电子教材

应用勾股定理，由直角三角形任意两边的长度，可以求出第三边的长度.

例 1 在 Rt△ABC 中，已知 $\angle B = 90°$，$AB = 6$，$BC = 8$. 求 AC.

解 根据勾股定理，可得

$$AB^2 + BC^2 = AC^2.$$

所以 $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10.$

练 习

1. 在 Rt△ABC 中，$AB = c$，$BC = a$，$AC = b$，$\angle C = 90°$.

（1）已知 $a = 6$，$c = 10$，求 b；　　（2）已知 $a = 24$，$c = 25$，求 b.

2. 如果一个直角三角形的两条边长分别是 3 厘米和 4 厘米，那么这个三角形的周长是多少厘米？（精确到 0.1 厘米）

例 2 如图 14.1.6，Rt△ABC 的斜边 AC 比直角边 AB 长 2 cm，另一直角边 BC 长为 6 cm. 求 AC 的长.

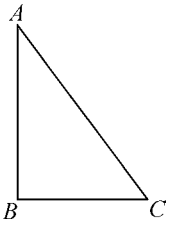


图 14.1.6

解 由已知 $AB = AC - 2$，$BC = 6$ cm，根据勾股定理，可得

$$AB^2 + BC^2 = (AC - 2)^2 + 6^2 = AC^2,$$

解得 $$AC = 10(\text{cm}).$$

例 3 如图 14.1.7，为了求出位于湖两岸的点 A、B 之间的距离，一名观测者在点 C 设桩，使△ABC 恰好为直角三角形. 通过测量，得到 AC 的长为 160 米，BC 的长为 128 米. 问从点 A 穿过湖到点 B 有多远？



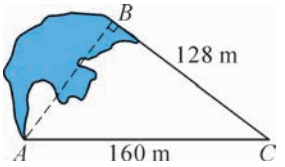


图 14.1.7

华东师大版电子教材

解 如图 14.1.7，在 Rt△ABC 中，

AC = 160 米，BC = 128 米，

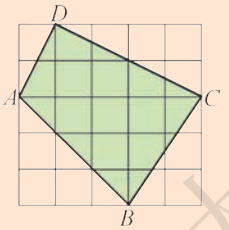
根据勾股定理，可得

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{AC^2 - BC^2} \\ &= \sqrt{160^2 - 128^2} \\ &= 96(\text{米}). \end{aligned}$$

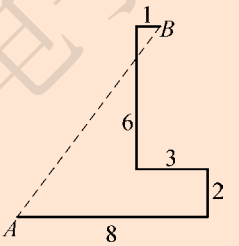
答：从点 A 穿过湖到点 B 有 96 米.

练　习

1. 如图，小方格都是边长为 1 的正方形. 求四边形 $ABCD$ 的面积与周长.（精确到 0.1）



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 假期中，王强和同学到某海岛上去探宝旅游. 按照探宝图（如图），他们在点 A 处登陆后先往东走 8 千米，又往北走 2 千米，遇到障碍后又往西走 3 千米，再折向北走到 6 千米处往东一拐，仅走 1 千米就找到了宝藏，问登陆点 A 到宝藏埋藏点 B 的直线距离是多少千米？

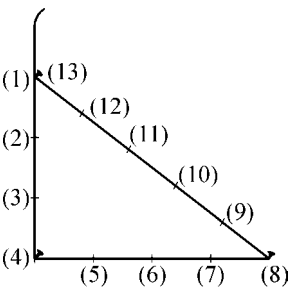


图 14.1.8

2. 直角三角形的判定

古埃及人曾经用下面的方法画直角：将一根长绳打上等距离的 13 个结，然后如图 14.1.8 那样用桩钉钉成一个三角形，他们认为其中一个角便是直角.

你知道这是什么道理吗？

华东师大版电子教材

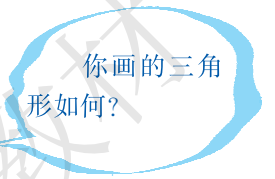
试一试

试画出三边长度分别为如下数据的三角形，看看它们是一些什么样的三角形：

(1) $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$;

(2) $a = 4$, $b = 6$, $c = 8$;

(3) $a = 6$, $b = 8$, $c = 10$.



可以发现，按(1)、(3)所画的三角形都是直角三角形，最长边所对的角是直角；按(2)所画的三角形不是直角三角形.

在这三组数据中，(1)、(3)两组数据恰好都满足 $a^2 + b^2 = c^2$. 对于直角三角形的判定，有一般的结论：

勾股定理的逆定理　如果三角形的三边长 a、b、c 有关系 $a^2 + b^2 = c^2$，那么这个三角形是直角三角形，且边 c 所对的角为直角.

已知：如图 14.1.9(1)，在△ABC 中，$AB = c$，$BC = a$，$AC = b$，$a^2 + b^2 = c^2$.

求证：$\angle C = 90°$.

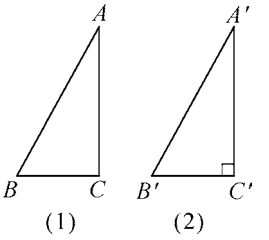


图 14.1.9

证明　如图 14.1.9(2)，作△$A'B'C'$，使 $\angle C' = 90°$，$A'C' = b$，$B'C' = a$，则 $A'B'^2 = a^2 + b^2 = c^2$，即

$$A'B' = c.$$

在△ABC 和△$A'B'C'$中，

$\because$ $BC = a = B'C'$,

$AC = b = A'C'$,

$AB = c = A'B'$,

$\therefore$ △ABC≌△$A'B'C'$.

$\therefore$ $\angle C = \angle C' = 90°$.

例 4　已知△ABC，$AB = n^2 - 1$，$BC = 2n$，$AC = n^2 + 1$（n 为大于 1 的正整数）. 试问△ABC 是直角三角形吗？若是，哪一条边所对的角是直角？请说明理由.

华东师大版电子教材

想一想，为什么选择 AB^2+BC^2？AB、BC、CA 的大小关系是怎样的？

解 $\because AB^2+BC^2=(n^2-1)^2+(2n)^2$

$=n^4-2n^2+1+4n^2$

$=n^4+2n^2+1$

$=(n^2+1)^2$

$=AC^2$,

$\therefore$ $\triangle ABC$ 是直角三角形，边 AC 所对的角是直角.

能够成为直角三角形三条边长的三个正整数，称为勾股数. 例如，3、4、5，6、8、10，n^2-1、$2n$、n^2+1（n 为大于 1 的正整数）等都是勾股数.

练　习

1. 设三角形的三边长分别等于下列各组数，试判断各三角形是否是直角三角形. 若是，指出哪一条边所对的角是直角.

   （1）12，16，20；　　（2）1.5，2，2.5.

2. 若一个三角形的三条边长 a、b、c 满足 $a^2=c^2-b^2$，则这个三角形是直角三角形吗？

3. 想一想，你现在有多少种方法可以判断一个三角形是直角三角形.

3. 反证法

我们已经知道，当一个三角形的三边长 a、b、c（$a\leqslant b\leqslant c$）有关系 $a^2+b^2=c^2$ 时，这个三角形一定是直角三角形. 那么，如果此时 $a^2+b^2\neq c^2$，这个三角形是否一定不是直角三角形呢？

做一做

画出以如下各组数为边长的三角形，算算较短的两边长的平方和是否等于最长边的平方，再观察它们的图形，你发现了什么？

（1）$a=1.0$，$b=2.4$，$c=2.6$；　　（2）$a=2$，$b=3$，$c=4$；

（3）$a=2$，$b=2.5$，$c=3$.

华东师大版电子教材

我们可以发现，第一组恰好满足 $a^2 + b^2 = c^2$，由勾股定理的逆定理可知，组成的三角形是一个直角三角形，与所画图形一致. 而另外两个三角形的较短的两边长的平方和都不等于最长边的平方，所画图形都不是直角三角形. 由此，可以猜想：

当一个三角形的三边长 a、b、c（$a \leqslant b \leqslant c$）有关系 $a^2 + b^2 \neq c^2$ 时，这个三角形不是直角三角形.

然而，想从已知条件 $a^2 + b^2 \neq c^2$（$a \leqslant b \leqslant c$）出发，直接经过推理，得出结论，十分困难. 我们可以换一种思维方式，用如下方法证明这个结论：

（1）假设它是一个直角三角形；

（2）根据勾股定理，一定有 $a^2 + b^2 = c^2$，与已知条件 $a^2 + b^2 \neq c^2$ 矛盾；

（3）因此假设不成立，即它不是一个直角三角形.

这种证明方法叫做“反证法”. 其步骤为：

先假设结论的反面是正确的；然后通过演绎推理，推出与基本事实、已证的定理、定义或已知条件相矛盾；从而说明假设不成立，进而得出原结论正确.

注意 a、b、c 的大小关系：$a \leqslant b \leqslant c$.

回想一下，以前用过类似的方法吗？

读一读

反证法是数学证明的一种重要方法，历史上许多著名的命题都是用反证法证明的. 一个命题，当正面证明有困难或者不可能时，就可以尝试运用反证法，有时该问题竟能轻易地被解决，此即所谓“正难则反”. 因此，牛顿就说过：“反证法是数学家最精良的武器之一.”用反证法不是直接证明结论，而是间接地去否定与结论相反的一面，从而得出事物真实的一面. 反证法是一种间接的证明方法.

北京师大版电子教材

我们在七年级上学期证明“两直线平行，同位角相等”这一结论时，其实使用的就是反证法.

思考

现在再回到勾股定理：直角三角形两直角边的平方和等于斜边的平方. 即“在$\triangle ABC$中，如果$AB=c$，$BC=a$，$CA=b$，且$\angle C=90°$，那么$a^2+b^2=c^2$”是一个真命题. 对于一般的非直角三角形，情况又会如何呢？即“在$\triangle ABC$中，如果$AB=c$，$BC=a$，$CA=b$，且$\angle C\neq 90°$，那么$a^2+b^2\neq c^2$”是真命题吗？

先思考作什么假设，再用反证法写出推理过程.

我们同样可以用反证法证明它是一个真命题.

例5 求证：两条直线相交只有一个交点.

已知：两条相交直线l_1与l_2.

求证：l_1与l_2只有一个交点.

分析 想从已知条件“两条相交直线l_1与l_2”出发，经过推理，得出结论“l_1与l_2只有一个交点”是很困难的，因此可以考虑用反证法.

证明 假设两条相交直线l_1与l_2不止一个交点，不妨假设l_1与l_2有两个交点A和B.

这样过点A和点B就有两条直线l_1和l_2. 这与两点确定一条直线，即经过点A和点B的直线只有一条的基本事实矛盾.

所以假设不成立，因此两条直线相交只有一个交点.

例6 求证：在一个三角形中，至少有一个内角小于或等于60°.

已知：$\triangle ABC$.

求证：$\triangle ABC$中至少有一个内角小于或等于60°.

证明 假设$\triangle ABC$中没有一个内角小于或等于60°，即$\angle A>60°$，$\angle B>60°$，$\angle C>60°$.

华东师大版电子教材

于是

$$\angle A + \angle B + \angle C > 60° + 60° + 60° = 180°,$$

这与“三角形的内角和等于180°”这个定理矛盾.

所以△ABC中至少有一个内角小于或等于60°.

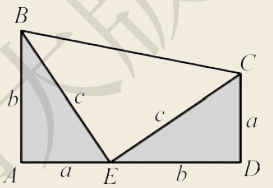
练　习

1. 求证:在一个三角形中,如果两条边不相等,那么它们所对的角也不相等.

2. 求证:两条直线被第三条直线所截,如果内错角不相等,那么这两条直线不平行.

习题 14.1

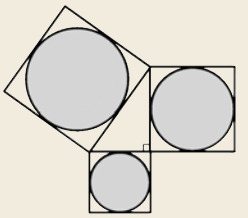
1. 把两个全等的直角三角形拼成如图所示的形状,使点A、E、D在同一条直线上.利用此图的面积表示式证明勾股定理.



(第1题)

2. 在△ABC中,$\angle B = 90°$,$AC = 13$ cm,$BC = 5$ cm.求AB的长.

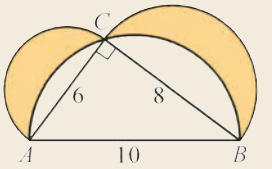
3. 如图,分别以直角三角形的三边为边长向外作正方形,然后分别以三个正方形的中心为圆心、正方形边长的一半为半径作圆.试探索这三个圆的面积之间的关系.



(第3题)

华东师大版电子教材

4. 如图，已知 Rt△ABC 的三边长分别为 6、8、10，分别以它的三边为直径向上作三个半圆，求图中着色部分的面积.



（第 4 题）

5. 试判断以如下 a、b、c 为三边长的三角形是不是直角三角形. 如果是，那么哪一条边所对的角是直角？

（1）$a = 25$，$b = 20$，$c = 15$；　　（2）$a = 1$，$b = 2$，$c = \sqrt{3}$；

（3）$a = 40$，$b = 9$，$c = 40$；　　（4）$a : b : c = 5 : 12 : 13$.

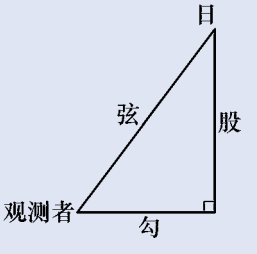
6. 求证：在一个三角形中，如果两个角不相等，那么它们所对的边也不相等.

7. 人们习惯上以英寸来计量电视机的大小，通常电视机的大小是以屏幕的对角线长度来衡量的，我们通常说的 29 英寸、34 英寸等指的就是这个指标. 如果 1 英寸≈2.54 厘米，请你量一下家里电视机屏幕的长和宽，计算出电视机屏幕的对角线长度，看看家中电视机是多大尺寸的.

阅读材料

勾股定理史话

勾股定理从被发现到现在已有五千年的历史. 早在公元前三千年的巴比伦人就已经知道和应用它了. 我国古代也发现了这个定理. 据《周髀算经》记载，商高（公元前 1120 年）对勾股定理已有明确的认识，《周髀算经》中有商高答周公的话：“勾广三，股修四，径隅五.”同书中还有另一位学者陈子（公元前六七世纪）与荣方（公元前 6 世纪）的一段对话：“求邪（斜）至日者，以日下为勾，日高为股，勾、股各自乘，并而开方除之，得邪至日（弦）”（如图所示），即



$$\text{邪至日（弦）} = \sqrt{\text{勾}^2 + \text{股}^2}.$$

这里陈子已不限于“三、四、五”的特殊情形，而是推广到一般情形了.

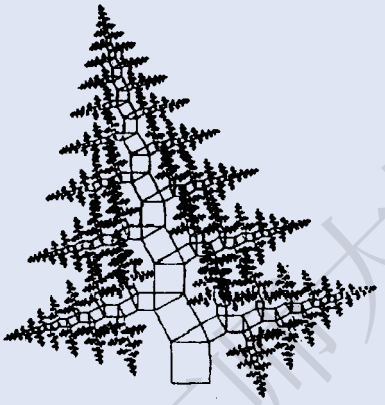
人们对勾股定理的认识，经历过一个从特殊到一般的过程，其特殊情况在世界很多地区的现存文献中都有记载，很难区分这个定理是谁最先发现的. 国外

一般认为这个定理是毕达哥拉斯(Pythagoras)学派首先证明的,因而称为毕达哥拉斯定理.

勾股定理曾引起很多人的兴趣,人们对这个定理的证明找到了很多方法.1940 年卢米斯(E. S. Loomis)专门编辑了一本证明勾股定理的小册子——《毕氏命题》,收集了这个著名定理的 370 种证明,其中包括大画家达·芬奇和美国第 20 任总统詹姆士·阿·加菲尔德(James Abram Garfield, 1831 – 1881)的证法.

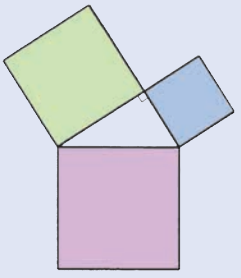
美丽的勾股树

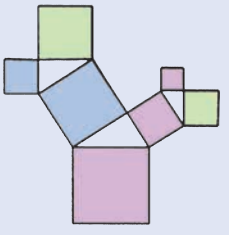
你可能去过森林公园,看到过许许多多千姿百态的植物.可是你是否见过如下的勾股树呢?

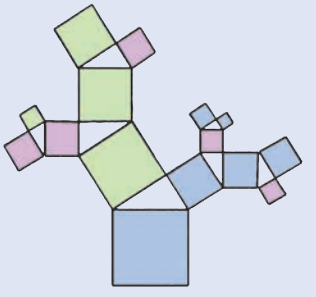




你知道这是如何画出来的吗?仔细观察,你就会发现那一个个细小的部分正是我们学过的勾股图,它们一个接着一个连在一起,构成了多么奇妙美丽的勾股树!动手画画看,相信你也能画出其他形态的勾股树.







华东师大版电子教材

14.2 勾股定理的应用

勾股定理能解决直角三角形的许多问题，因此在现实生活和数学中有着广泛的应用.

例 1 如图 14.2.1，一圆柱体的底面周长为20 cm，高 AB 为 4 cm，BC 是上底面的直径. 一只蚂蚁从点 A 出发，沿着圆柱的侧面爬行到点 C，试求出爬行的最短路程.（精确到 0.01 cm）

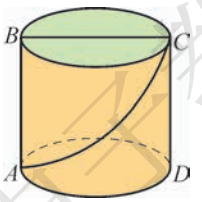


图 14.2.1

分析 蚂蚁实际上是在圆柱的半个侧面内爬行，如果将这半个侧面展开（如图 14.2.2），得到长方形 $ABCD$，根据“两点之间，线段最短”，所求的最短路程就是这一展开图——长方形 $ABCD$ 的对角线 AC 之长.

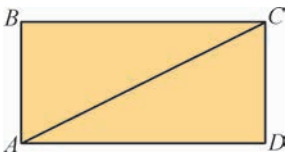


图 14.2.2

解 如图 14.2.2，在 Rt△ABC 中，BC = 底面周长的一半 = 10 cm. 由勾股定理，可得

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{AB^2 + BC^2} \\ &= \sqrt{4^2 + 10^2} \\ &= \sqrt{116} \approx 10.77(\text{cm}). \end{aligned}$$

答：爬行的最短路程约为 10.77 cm.

华东师大版电子教材

例 2 一辆装满货物的卡车，其外形高 2.5 米，宽 1.6 米，要开进厂门形状如图 14.2.3 所示的某工厂，问这辆卡车能否通过该工厂的厂门（厂门上方为半圆形拱门）？

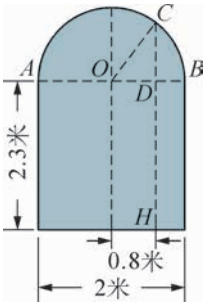


图 14.2.3

分析 由于车宽 1.6 米，所以卡车能否通过，只要比较距厂门中线 0.8 米处的高度与车高即可. 如图 14.2.3 所示，点 D 在离厂门中线 0.8 米处，且 $CD \perp AB$，与地面相交于点 H.

解 在 $\mathrm{Rt}\triangle OCD$ 中，由勾股定理，可得

$$CD = \sqrt{OC^2 - OD^2} = \sqrt{1^2 - 0.8^2} = 0.6,$$

$$CH = CD + DH = 0.6 + 2.3 = 2.9 > 2.5.$$

可见高度上有 0.4 米的余量，因此卡车能通过厂门.

做一做

如图 14.2.4，以 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 的三边为边分别向外作正方形. 在以 BC 为边所作的正方形中，点 O 是正方形对角线的交点，过点 O 作 AB 的平行线，交正方形于 M、N 两点，过点 O 作 MN 的垂线，交正方形于 E、F 两点，这样把正方形划分成四个形状与大小都一样的四边形. 试将图中 5 个着色的图形拼入到上方空白的大正方形中，填满整个大正方形.

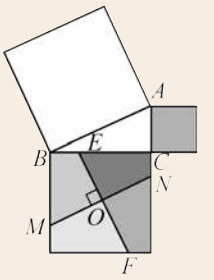
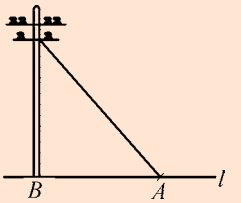


图 14.2.4

练 习

1. 为了加固电线杆，往往需要给它拉上一条固定于地面的钢缆. 如图，从电线杆离地面 5 米处向地面拉一条 7 米长的钢缆，求钢缆在地面上的固定点 A 到电线杆底部 B 的距离.（精确到 0.1 米）





（第 1 题）

华东师大版电子教材

2. 轮船 A 以 16 海里/时的速度离开港口 O 向东北方向航行，轮船 B 在同时同地以 12 海里/时的速度向西北方向航行. 试求 A、B 两船离开港口 O 一个半小时后的距离.

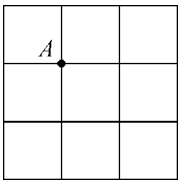


图 14.2.5

例 3 如图 14.2.5，在 3 × 3 的方格图中，每个小方格的边长都为 1，请在给定网格中按下列要求画出图形：

（1）画出所有从点 A 出发，另一个端点在格点（即小正方形的顶点）上，且长度为 $\sqrt{5}$ 的线段；

（2）画出所有以题（1）中所画线段为腰的等腰三角形.

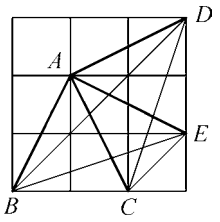


图 14.2.6

分析 只需利用勾股定理看哪一条以格点为端点的线段满足要求.

解 （1）图 14.2.6 中，AB、AC、AE、AD 的长度均为 $\sqrt{5}$.

（2）图 14.2.6 中，$\triangle ABC$、$\triangle ABE$、$\triangle ABD$、$\triangle ACE$、$\triangle ACD$、$\triangle AED$ 就是所要画的等腰三角形.

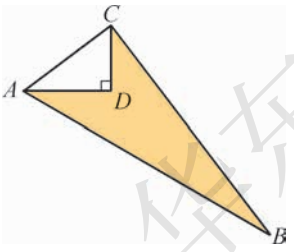


图 14.2.7

例 4 如图 14.2.7，已知 $CD = 6\ \text{m}$，$AD = 8\ \text{m}$，$\angle ADC = 90°$，$BC = 24\ \text{m}$，$AB = 26\ \text{m}$. 求图中着色部分的面积.

解 在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中，

$\because\ AC^2 = AD^2 + CD^2$（勾股定理）

$= 8^2 + 6^2 = 100$，

$\therefore\ AC = 10$.

$\because\ AC^2 + BC^2 = 10^2 + 24^2 = 676 = 26^2 = AB^2$，

$\therefore\ \triangle ACB$ 为直角三角形（勾股定理的逆定理），

$$\therefore\ S_{\text{阴影部分}} = S_{\triangle ACB} - S_{\triangle ACD}$$

$$= \frac{1}{2} \times 10 \times 24 - \frac{1}{2} \times 6 \times 8$$

$$= 96(\text{m}^2).$$

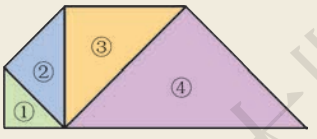
华东师大版电子教材

练　习

1. 形状为直角三角形的一块铁板的三边长分别为2米、4米、x米，试求出x的所有可能值.（精确到0.01米）
2. 利用勾股定理，分别画出长度为$\sqrt{3}$厘米和$\sqrt{5}$厘米的线段.

习题 14.2

1. 现有一张等腰直角三角形的卡片，其斜边长为2 cm，试求出它的直角边和斜边上高的长度.（精确到0.1 cm）
2. 如图所示的图形由4个等腰直角三角形组成，其中直角三角形①的腰长为1 cm，求直角三角形④的斜边长度.

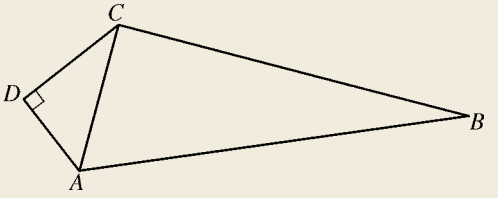


（第2题）



（第3题）

3. 如图，为了加固一个高2米、宽3米的大门，需在相对角的顶点间加一根木条. 求木条的长度.（精确到0.1米）
4. 已知三角形的三边长分别是$n+1$、$n+2$、$n+3$，当n为多少时，该三角形是一个直角三角形？
5. 如图，$AD \perp CD$，$AB=13$，$BC=12$，$CD=4$，$AD=3$，$\angle CAB=\alpha$. 求$\angle B$.（用α表示）



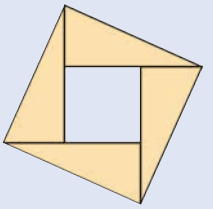
（第5题）

华东师大版电子教材

阅读材料

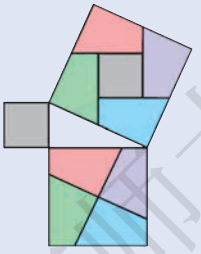
勾股定理的“无字证明”

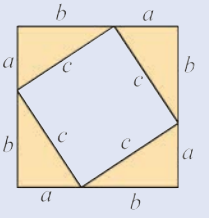
在勾股定理的学习过程中，我们已经学会了运用以下图形，验证著名的勾股定理.

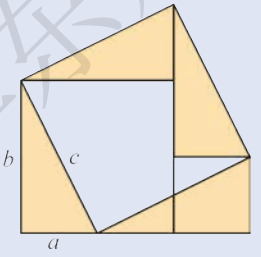


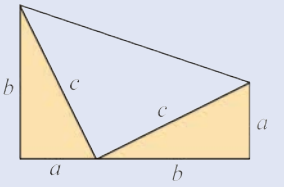
这种根据图形直观推论或验证数学规律和公式的方法，简称为“无字证明”.

对于勾股定理，我们还可以找到一些用于“无字证明”的图形，如下列各图. 你会用这些图形验证勾股定理吗？









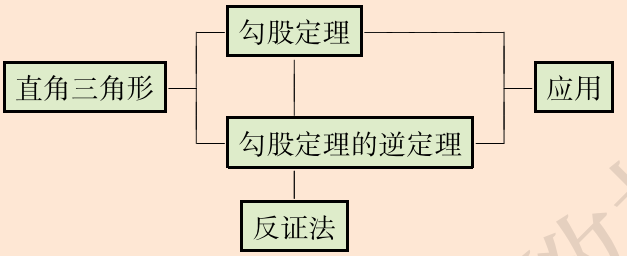
现在请你和大家一起，查阅课本和其他有关书籍，或上网查询各种相应的资料，相信你一定能够找到更多有趣的图形，验证勾股定理.

实际上你还可以发现，“无字证明”也可以用于验证数与代数、图形与几何等领域中的许多数学公式和规律.“无字证明”体现了数形结合的思想方法，展示了数学美.

华东师大版电子教材

小结

一、知识结构



二、要点

1. 本章研究了揭示直角三角形三边之间关系的勾股定理和勾股定理的逆定理. 勾股定理是一个著名的几何定理,在西方也被称为毕达哥拉斯定理,早在几千年以前,我国古代劳动人民就已经发现并开始应用勾股定理了. 勾股定理有几百种证明方法,本章主要介绍的是我国古代数学家赵爽的证明方法,这种方法利用直角三角形的面积与正方形的面积的关系,数形结合,直观、简洁,体现了我国古代几何学的思想方法.

2. 如果知道了直角三角形任意两边的长度,那么应用勾股定理可以计算出第三边的长度;如果知道了一个三角形三边的长,也可以利用勾股定理的逆定理判断这个三角形是否是直角三角形. 勾股定理可以解决直角三角形中的许多问题,在现实生活中有许多重要应用.

3. 反证法是从反面的角度着手的间接证明方法,即:肯定条件而否定结论,从而得出矛盾,使命题获得证明. 反证法是数学中常用的一种证明方法. 当命题从正面不容易或不能得到证明时,就可以考虑运用反证法.

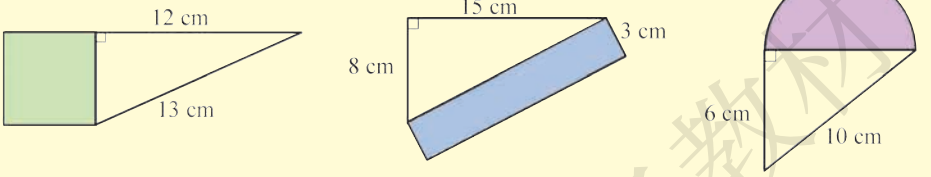
华东师大版电子教材

复习题

A 组

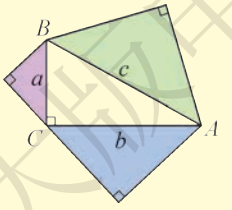
1. 求下列各图形着色部分的面积：

（1）着色部分是正方形；（2）着色部分是长方形；（3）着色部分是半圆.



（第 1 题）

2. 如图，以 Rt△ABC 的三边为斜边分别向外作三个等腰直角三角形，试探索这三个等腰直角三角形的面积之间的关系.



（第 2 题）

3. 试判断由下列三边围成的三角形是否是直角三角形：

（1）三边长分别为 m^2+n^2、mn、m^2-n^2（$m>n>0$）；

（2）三边长之比为 $1:1:\sqrt{2}$.

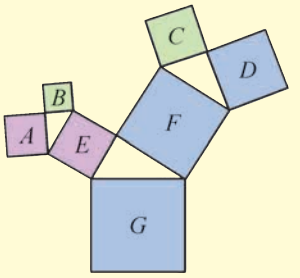
4. 一架 2.5 米长的梯子靠在一座建筑物上，梯子的底部离建筑物 0.7 米，如果梯子的顶部滑下 0.4 米，梯子的底部向外滑出多远？



（第 4 题）

华东师大版电子教材

5. 在如图所示的图形中，所有的四边形都是正方形，所有的三角形都是直角三角形，其中最大正方形的边长为 7 cm. 求正方形 A、B、C、D 的面积和.

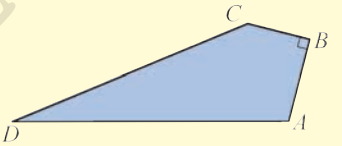


（第 5 题）

B 组

6. 在△ABC 中，$AB = AC = 10$，BD 是 AC 边上的高，$DC = 2$. 求 BD 的长.

7. 有一块四边形地 $ABCD$（如图），$\angle B = 90°$，$AB = 4$ m，$BC = 3$ m，$CD = 12$ m，$DA = 13$ m. 求该四边形地的面积.



（第 7 题）

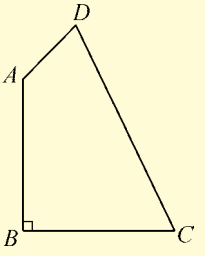
8. 我们已经知道，3、4、5，6、8、10 等都是一些勾股数. 请你再写出其他 5 组勾股数.

9. 试证明一个五边形不可能有 4 个内角为锐角.

C 组

10. 已知△ABC 的三边长 a、b、c 满足条件：$a^4 - b^4 + b^2c^2 - a^2c^2 = 0$. 试判断△$ABC$ 的形状.

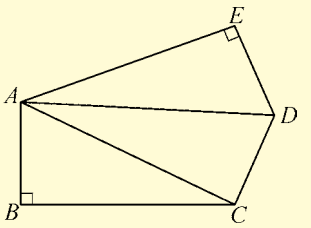
11. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB = BC = 2$，$CD = 3$，$DA = 1$，且 $\angle B = 90°$. 求 $\angle DAB$ 的大小.



（第 11 题）

华东师大版电子教材

12. 如图，在五边形 $ABCDE$ 中，$\angle B = \angle E = 90°$，$AB = 5$ cm，$\triangle ABC$ 的面积是 30 cm^2，$\triangle ACD$ 与 $\triangle AED$ 关于 AD 所在的直线成轴对称. 求 AE 的长.



（第 12 题）

13. 折竹抵地（源自《九章算术》）：
今有竹高一丈，末折抵地，去本三尺. 问折者高几何？
意即：一根竹子，原高一丈，虫伤有病，一阵风将竹子折断，其竹梢恰好抵地，抵地处离原竹子处 3 尺远. 问原处还有多高的竹子？



（第 13 题）

华东师大版电子教材

第15章　数据的收集与表示



同学们为学校设计新教学楼的模型，提出了许多方案，那么最后该选哪种方案呢？

讨论中大家有各种看法，意见不一．那该怎么办？还是把模型展示出来，让大家投票决定吧！

本章我们要做许多调查，通过收集数据、观察统计图表，发现有趣的结论． ▶▶▶

华东师大版电子教材

15.1 数据的收集

1. 数据有用吗



你喜欢看球赛吗？有没有注意过解说员是怎样点评一场球赛的？

解说员常常在比赛间隙对双方的表现评价一番，比如，领先的队为什么能取得优势，落后的队输在哪里，教练是否应该调整比赛策略，等等.

通常，在比赛开始之前，解说员都会准备一些双方球队的数据资料，比如，每位队员的身高、体重、年龄以及球队以往的战绩等. 另外，还会准备一份用于记录本场比赛攻守情况的统计表格. 表 15. 1. 1 是 2010～2011 年赛季 CBA 总决赛第三场比赛后公布的比赛统计表.

表 15. 1. 1　2010～2011 年赛季 CBA 总决赛第三场比赛统计表

	新疆	广东
最终得分	118	85
二分球	30/47	22/37
二分球命中率	64%	59%
三分球	11/24	8/32
三分球命中率	46%	25%
罚篮	25/29	17/26
罚篮命中率	86%	65%
进攻篮板	14	20
防守篮板	16	15
快攻	3/3	4/4
扣篮	2	3

想一想

从表中的数据看，新疆队最终为什么能够战胜广东队？

华东师大版教材

续　表

	新疆	广东
盖帽	3	3
助攻	17	8
失误	18	22

从整场比赛来看，新疆队最终能以 118 比 85 的比分战胜对方，靠的是高于对方的投篮命中率、较少失误以及后卫的出色发挥，新疆队 2 分球、3 分球、罚篮的命中率以及后卫助攻的次数都胜过对方.

日常生活中，会碰到各种各样的问题：

（1）我们班推荐谁当校学生会委员的候选人？

（2）班级同学喜欢哪些体育活动？

（3）你会做哪些家务？一周累计花多少时间做家务？

（4）班里有同月同日出生的同学吗？

（5）历届奥运会男子 100 米短跑的成绩怎样？

（6）玩飞行棋时要投掷骰子，有没有哪个或哪些点数不太容易出现？

（7）豌豆荚里有几粒豆子不确定，那么豆子的粒数有规律吗？

请从上述问题中挑选一个，进行调查，并记录调查中收集到的数据.

2. 数据的收集

要解决以上问题离不开调查中得到的数据. 数据有助于我们发现一些有趣的现象或者事实，进而作出合理的判断.



假如我们对豌豆荚里豆子的粒数有兴趣，就让我们回顾一下通过调查收集数据的过程.

第一步：明确调查问题——完整的豌豆荚里通常会有几粒豆子；

华东师大版电子教材

第二步：确定调查对象——一定数量的豌豆荚；

第三步：选择调查方法——打开每个豌豆荚，数清其中的豆子粒数，约定怎样成熟度的豆子才计数，如直径大于 3 毫米；

第四步：展开调查——数出每个豌豆荚中豆子的粒数；

第五步：记录结果——一位同学数数，一位同学记录，一位同学监督；

第六步：得出结论——在我们调查的豌豆荚中，包含几粒豆子的豌豆荚最多，大部分豌豆荚里有几粒豆子，这些豌豆荚里最少以及最多有几粒豆子，等等.

表 15.1.2 是某位同学对 80 个豌豆荚中豆子粒数的统计结果.

表 15.1.2　豌豆荚中豆子粒数统计表

豆子粒数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
记　录	下	正	正丁	正正一	正正丁	正正正一	正正正丁	正丁	一	丁
出现次数	3	4	7	11	12	16	17	7	1	2

根据统计数据，在我们调查的豌豆荚中，包含 6 粒豆子的豌豆荚最多，包含 5 粒的也很多，大部分豌豆荚中有 2～7 粒豆子，最多的有 9 粒豆子，最少的则一粒豆子都没有.

想一想

如果没有经过调查，直接说这些豌豆荚中包含 6 粒豆子的最多，有没有说服力？

在记录数据时，我们发现：有的对象（如豆子粒数为 6）出现的次数很多，很频繁，而有的对象（如豆子粒数为 8）出现的次数则相对较少，不太频繁. 今后，我们用**频数**（frequency）这个词来表示每个对象出现的次数，用**频率**（relative frequency）这个词来表示每个对象出现的次数与总次数的比值（或者百分比）. 频数和频率都能够反映每个对象出现的频繁程度.

你能计算表 15.1.2 中“豆子粒数为 5”出现的频数和频率各是多少吗？

思考

（1）豌豆荚问题中，每种豆子粒数出现的频数就是每种豆子粒数出现的_____；每种豆子粒数出现的频率就是_____与_____的比值.

（2）甲同学调查了 100 个豌豆荚，其中有 14 个豌豆荚中只有 3 粒豆子，乙同学调查了 50 个豌豆荚，其中有 11 个豌豆荚中有 6 粒豆子，能否认为有 3 粒豆子的豌豆荚比有 6 粒豆子的豌豆荚多？请通过这个例子说明频数和频率在使用上的异同点.

试一试

小学阶段我们已经做过投掷正方体骰子的游戏. 随意投掷，骰子落定以后应该只有 6 种可能，即朝上一面出现的点数为 1、2、3、4、5 或 6. 但投掷之前谁也无法预测它落定后朝上的一面出现哪个点数.

表 15.1.3 记录了某班投掷骰子的情况以及一些计算结果，请完成表中余下的计算. 仔细观察表中的数据，看看能发现哪些规律.

表 15.1.3　投掷骰子游戏中不同点数出现情况统计表

投掷结果	甲 10 次	乙 10 次	甲乙合计 20 次		全班合计 400 次	
	频数	频数	频数	频率	频数	频率
出现 1 点	0	0			66	
出现 2 点	3	0			62	
出现 3 点	0	2			77	
出现 4 点	2	1			74	
出现 5 点	3	5			60	
出现 6 点	2	2			61	

华东师大版电子教材

阅读材料

谁是《红楼梦》的作者



我国有一部古典文学名著《红楼梦》，虽然书的封面上通常都印有曹雪芹和高鹗两位作家的名字，但是，它的作者究竟是谁，现在还是一个谜. 一些专家正在试图用数学方法揭开这个谜.

有一种研究方法是以计算机为工具，对这部名著的遣词造句进行统计和分析，看写作手法是否前前后后完全一致. 如果整本小说出自一人之手，那么不管翻到书的哪一部分，遣词造句的写作手法应该极其相像.

谈祥柏先生在他的《数学广角镜》一书中介绍说，湖南师范大学的一位学者发现，在《红楼梦》的前 80 回中，丫环、佣人、老妈子等下人都自称为“小的”，可到了后 40 回，则一般都自称为“奴才”，这就露出了一个“马脚”，说明前 80 回和后 40 回的作者可能不是同一个人.

1987 年《复旦大学学报(社科版)》介绍说，复旦大学的李贤平先生将《红楼梦》120 回看作一个整体，统计了 47 个虚字的出现频率，又提出了不能笼统地认为前 80 回为一人所写、后 40 回为另一不相干的人所写的看法.

那么《红楼梦》的作者究竟是曹雪芹一个人呢，还是曹雪芹和高鹗两个人呢，还是它原本就是一部在几本民间小说基础上合成的长篇小说呢？至今还没有定论.

华东师大版电子教材

习题 15.1

1. 设计一张记录全班同学身高、体重的统计表格，并向班级里的每位同学收集数据，填入此表.（注意保存好数据备用）
2. 你们班的同学中有在同一个月出生的吗？有在同月同日出生的吗？你们班的同学在哪个月出生的最多？其他班的同学也是在那个月出生的最多吗？做个小调查，看看会有什么有趣的发现.
3. 调查一下这两个月来每天的最低气温，其中最低的温度是多少度？这两个月中有几天达到这个温度？这两个月每天的最低气温中哪个温度出现得最多（频数最大）？有几天达到这个温度？它出现的频率是多少？
4. 一位同学随手写了下面这一长串数字：

   10100100010011001010110110100011100011011010101100.

   请问 0 和 1 出现的频数和频率各是多少？
5. 将一张纸裁成 4 张完全相同的小纸片，依次给它们标上 1、2、3、4 这四个号码，折叠好，放入一个盒中摇匀. 闭上眼睛取出一张，记录下它的号码，折叠好，重新放回盒中摇匀后再取. 这样重复取 20 次，将你得到的结果填入下表.

号　码	1	2	3	4
频　数				
频　率				

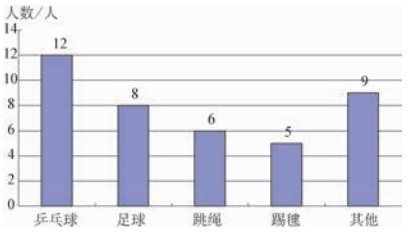
   根据表中的数据，请尽可能多地列出你的所有发现或猜测. 如果有兴趣，还可以再重复取 20 次，甚至 40 次，检验一下你猜想的结论是否总是正确的.

15.2 数据的表示

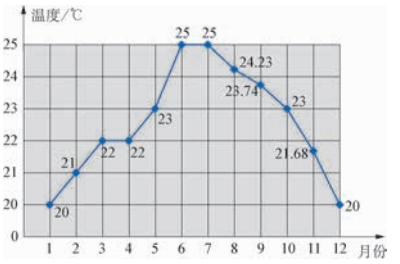
我们在小学阶段已经学过一些统计知识，也曾见到过如图 15.2.1 所示的统计图：

华东师大版电子教材

六(1)班最喜欢的运动项目统计图



某地区去年月平均气温统计图



六年级学生最喜欢的文艺节目统计图

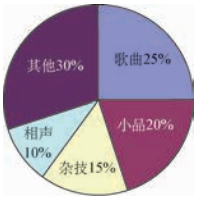


图 15.2.1

其中有**条形统计图**(bar chart)、**折线统计图**(broken line graph)和**扇形统计图**(pie chart). 现在让我们进一步认识这些统计图,利用它们传递各种有用的信息.

1. 扇形统计图

问题 1

在某所医院的健康宣传栏里有一幅如图 15.2.2 所示的海报. 显然,这样的统计图比文字更具有表现力.

请保护您的牙齿!
因为
牙齿一旦失去,不再拥有!

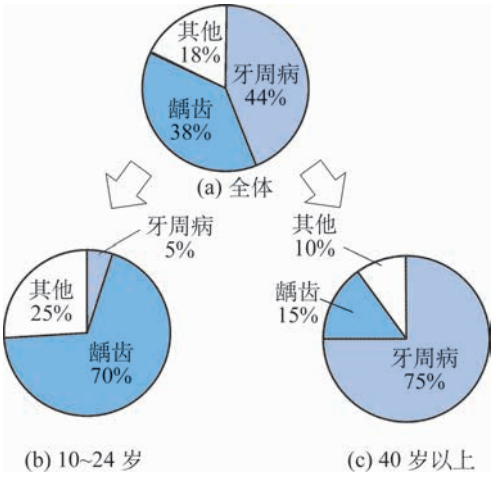


图 15.2.2　失去牙齿的原因(1985 年卫生部全国调查)

想一想

这组统计图告诉我们什么?

华东师大版电子教材

图中各个扇形分别代表什么？人们失去牙齿最主要的原因是什么？对于不同年龄的人群，情况有没有不同？

图 15.2.2 所示的每个圆中所有扇形表示的百分比之和为多少？量一量，每个扇形的圆心角度数是多少？同一个扇形统计图中各扇形圆心角的大小与图上所标的相应百分比之间有什么关系？如果不用量角器测量，你能根据百分比计算各个圆心角的度数吗？

因为扇形统计图可以清楚地告诉我们各部分数量占总数量的百分比，所以我们在表示各部分数量在总数量中所占份额时常常使用扇形统计图.

问题 2



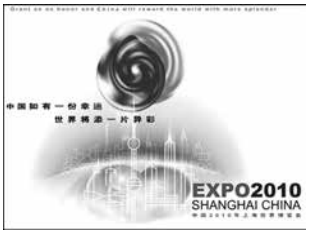
2002 年 12 月 3 日，从摩纳哥蒙特卡洛举行的国际展览局大会上传来振奋人心的消息——中国当选为 2010 年世博会的东道主！选举由国际展览局 89 个成员国的代表以无记名投票方式进行.

在首轮投票中，中国以 36 票位居第一，韩国 28 票，俄罗斯 12 票，墨西哥 6 票，波兰被淘汰；

在第二轮投票中，中国获 38 票，韩国 34 票，俄罗斯 10 票，墨西哥被淘汰；

在第三轮投票中，中国获 44 票，韩国 32 票，俄罗斯被淘汰；

在最后一轮投票中，中国以 54 票胜出.





怎样用扇形统计图表示各国得票数占总票数的百分比？

华东师大版电子教材

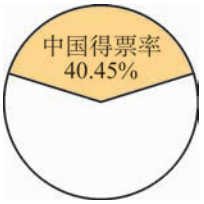


图 15.2.3　首轮投票情况

以首轮投票的结果为例：

中国得票数占总票数的百分比为

$$36 \div 89 \approx 40.45\%.$$

如图 15.2.3，反映在扇形统计图上，扇形圆心角的度数应为

$$360^\circ \times 40.45\% \approx 145.6^\circ.$$

说说制作扇形统计图的步骤.

你能将韩国、俄罗斯、墨西哥的该轮得票率补充在图 15.2.3 的扇形统计图中吗？

如果条件允许，请借助计算机中的 Excel 软件绘制这幅扇形统计图，看看是不是又快又好.

练　习

1. 根据下表，你能用扇形统计图把各大洲土地面积占全球土地总面积的百分比表示出来吗？有条件的话，请尝试用计算机中的 Excel 软件帮你作图.（精确到 0.1%）

七大洲土地面积表

洲　名	亚洲	非洲	欧洲	北美洲	南美洲	大洋洲	南极洲
土地面积（万平方千米）	4 400	3 020	1 016	2 422.8	1 797	897	1 400

2. 2002 年 10 月 12 日《青年报》第 2 版刊载了如图所示的扇形统计图.

（1）从图上看，被调查者对目前的医疗服务价格是如何评价的？

（2）有人说这幅图有问题，你看出来了吗？



（数据来源：中国经济景气监测中心）

（第 2 题）

华东师大版电子教材

2. 利用统计图表传递信息

问题 3



在 2012 年第 30 届伦敦奥林匹克运动会上，中国体育代表团取得了很好的成绩.

（1）中国体育健儿在该届奥运会上共获得多少枚奖牌？获得的金牌数在总金牌数中占多大的比例？

（2）从所获奖牌的总数看，和最近几届奥运会相比，中国体育健儿在本届奥运会上的成绩如何？

上面只是提出了问题，并没有给出回答问题所需要的数据. 因此，我们首先需要收集该届以及最近几届奥运会上各个代表团获得奖牌的数据. 表 15.2.1 记录的是第 30 届奥运会上获得奖牌总数最多的四个代表团在最近两届奥运会获得的奖牌数统计表（表中数据来自 http://match.2012.sina.com.cn/medals）.

表 15.2.1　奥运奖牌榜（第 29、30 届）

代表团		金牌	银牌	铜牌	总计
美国	29 届	36	38	36	110
	30 届	46	29	29	104
中国	29 届	51	21	28	100
	30 届	38	27	23	88
俄罗斯	29 届	23	21	29	73
	30 届	24	26	32	82
英国	29 届	19	13	15	47
	30 届	29	17	19	65

华东师大版用不教

先回答题(1). 表 15. 2. 1 表明,中国体育健儿在第 30 届奥运会上共获得 88 枚奖牌,其中金牌 38 枚,约占该届奥运会总金牌数 302 枚的 13%.

根据表 15. 2. 1 中各国第 30 届奥运会所获金牌数,可以用计算机软件很快画出图 15. 2. 4 和图 15. 2. 5,它们分别是美、中、俄、英等国在该届奥运会上所获金牌数的条形统计图和扇形统计图.

用计算机软件可以很快画出这些统计图.

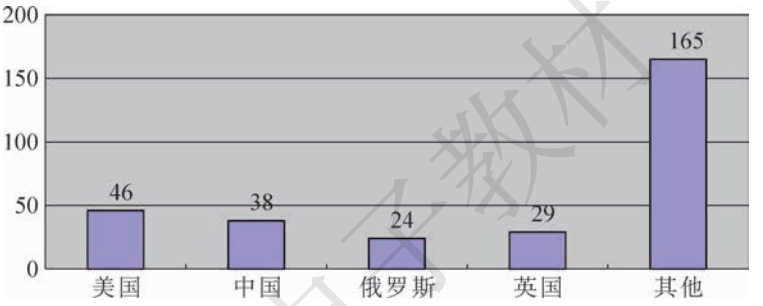


图 15. 2. 4　第 30 届奥运会金牌数条形统计图

你知道图 15. 2. 5 中中国占 13% 是怎么计算出来的吗?

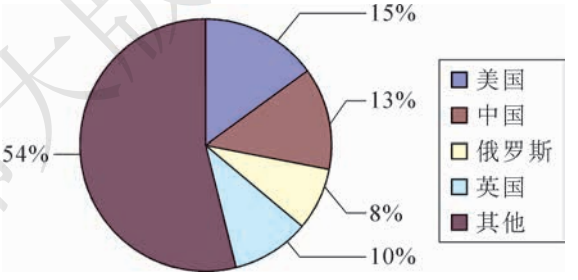


图 15. 2. 5　第 30 届奥运会金牌数扇形统计图

接下来回答题(2). 可以先比较我国体育健儿在最近七届奥运会上所获奖牌总数的情况,再看这四个代表团在最近两届奥运会所获奖牌总数上的各自表现.

表 15. 2. 2 罗列了金、银、铜牌和奖牌总数这四栏. 图 15. 2. 6 是根据表 15. 2. 2 中“总计奖牌数”这一栏绘制的我国体育健儿所获奖牌总数的折线统计图.

华东师大版电子教材

表 15.2.2　中国奥运奖牌数回眸

届数	金牌数	银牌数	铜牌数	总计奖牌数
24	5	11	12	28
25	16	22	16	54
26	16	22	12	50
27	28	16	15	59
28	32	17	14	63
29	51	21	28	100
30	38	27	23	88

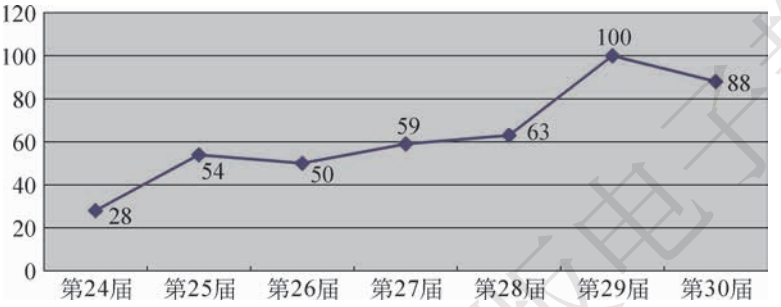


图 15.2.6　第 24 ～ 30 届奥运会中国代表团奖牌总数统计图

思考

（1）在图 15.2.6 中用一条折线将七届奥运会的数据连起来了，请问介于相邻两届之间的六条线段是否表示某种意思？连线是为了显示什么？

（2）与第 29 届北京奥运会相比，我国代表团在这一届获得的奖牌总数有所下降，你怎么解释这个结果呢？图 15.2.7 和图 15.2.8 传达的信息对你的分析有帮助吗？

要比较客观地评价一个代表团在一届奥运会上的表现的确是很困难的，总奖牌数下降有多种原因，比如上一届是东道主，天时地利人和；这一届没能保住上一届在某些项目上的优势；其他代表团在某些项目上显著进步等等. 有人认为只看金牌总数或奖牌总数都不够全面，建议比较金牌和银牌的总数等. 你比较赞同怎样的方案？

华东师大版电子教材

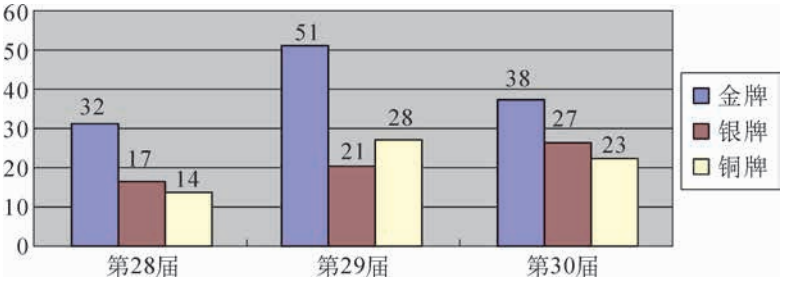


图 15.2.7　最近三届奥运会中国代表团奖牌数比较图

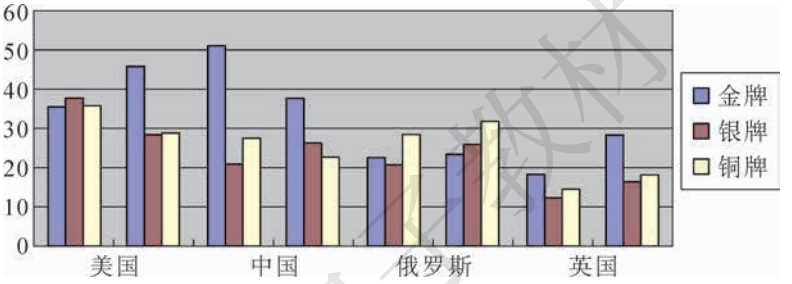


图 15.2.8　最近两届奥运会四个代表团奖牌数比较图

概括

统计表可以清楚地将数据分门别类地列出来，当数据之间的关系比较复杂时，可以通过增加子栏目继续对数据进行分类统计.

条形统计图是用宽度相同的条形的高低或长短来表示数据特征的统计图，它可以直观地反映出数据的数量特征. 如果有两个研究对象，常常把这两个对象的相应数据并列表示在同一幅条形统计图中.

扇形统计图是用整个圆代表所研究的总体，用圆中各个扇形代表组成总体的各个部分，扇形圆心角的大小反映出各组成部分的数量在总数量中所占份额的大小.

折线统计图是用折线表示数量变化规律的统计图. 如果关注的是某种现象随时间变化而发生的变化，常常以时间为水平放置的数轴，以折线的起伏直观地反映出数量随时间所发生的相应变化.

华东师范版电子教材

读一读

我们可以看到,对于同样的数据,需要根据问题的背景选择合适的统计图表,将收集到的数据所隐含的信息显示出来,并通过适当的数据分析,让数据说话,使人们真正了解研究的对象.

练 习

1. 下表是第 30 届奥运会上中国代表团的奖牌榜,请用合适的统计图直观地表示这些数据,并说说你从这些数据中发现了哪些信息.

	金牌	银牌	铜牌	总计
男子	17	8	11	36
女子	20	18	12	50
混合	1	1	0	2
总计	38	27	23	88

2. 下表中列出了第 30 届奥运会上中国代表团获得金牌的项目,请你通过查询网站了解其他国家代表团(如美国)获得金牌的项目和中国代表团有什么差异,并用统计表把这些数据表示出来,然后就这届奥运会上中国体育健儿的表现谈谈你的想法.

(参考网站:http://match.2012.sina.com.cn/medals)

项 目	金牌数	项 目	金牌数
跳水	6	击剑	2
羽毛球	5	拳击	1
举重	5	跆拳道	1
游泳	5	帆船帆板	1
乒乓球	4	田径	1
竞技体操	4	蹦床	1
射击	2		

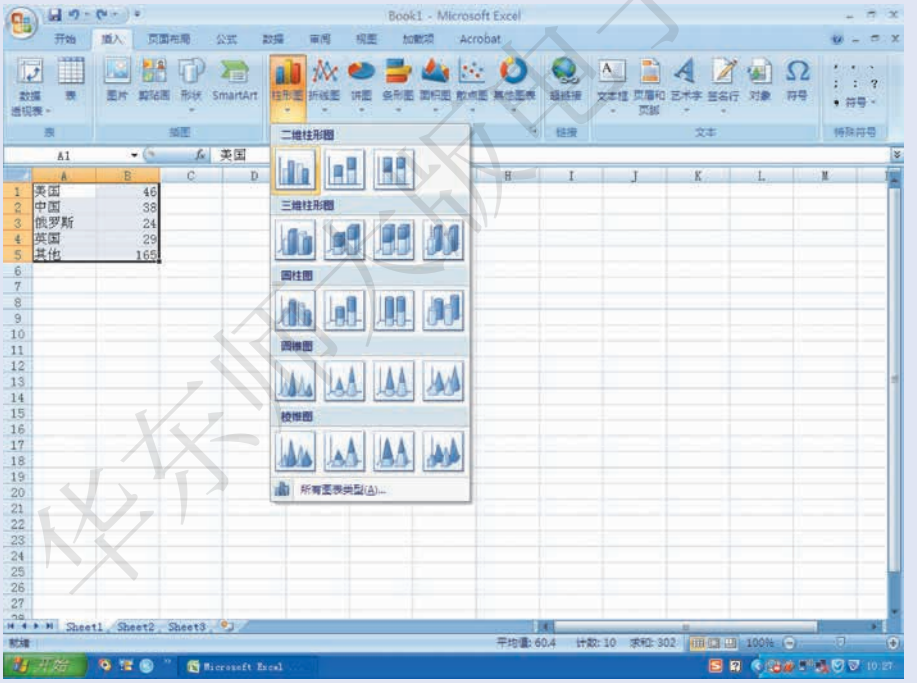
华东师大版电子教材

阅读材料

计算机帮我们画统计图

利用计算机可以很方便地画出统计图，如果你有兴趣的话，不妨试一试用 Microsoft Office 软件中的 Excel 来画统计图. Excel 和 Word 一样，界面友好，容易学，也方便用. 它们的区别在于功能不同，Word 大多用来处理文字，而 Excel 大多用来处理数据.

打开 Excel，会出现一张画满格子的表，如果我们要根据表 15.2.1 画出相应的统计图，那么只需要把表中的内容先按下面的格式填入格子.



选中你填好的所有格子（被选中的格子会变成浅灰色），再按工具栏中的“插入”，屏幕会出现上面的画面，选择一个你要画的图形类型，比如条（柱）形图、折线图或扇形（饼）图等等，就可以大功告成. 如果遇到困难，可以点击“帮助”按钮寻求帮助.

请分别画出图 15.2.4 和图 15.2.5.

华东师范版电子教材

习题 15.2

1. 下面是我们从上海《解放日报》收集到的 2011 年 2 月上海空气的“污染指数”和“空气质量”这两种数据.

日　期	2 月 1 日	2 月 2 日	2 月 3 日	2 月 4 日	2 月 5 日	2 月 6 日	2 月 7 日
污染指数	82	91	154	79	77	68	141
空气质量	良	良	轻度污染	良	良	良	轻微污染
日　期	2 月 8 日	2 月 9 日	2 月 10 日	2 月 11 日	2 月 12 日	2 月 13 日	2 月 14 日
污染指数	91	84	29	18	67	29	41
空气质量	良	良	优	优	良	优	优
日　期	2 月 15 日	2 月 16 日	2 月 17 日	2 月 18 日	2 月 19 日	2 月 20 日	2 月 21 日
污染指数	57	38	53	72	69	50	86
空气质量	良	优	良	良	良	优	良
日　期	2 月 22 日	2 月 23 日	2 月 24 日	2 月 25 日	2 月 26 日	2 月 27 日	2 月 28 日
污染指数	69	47	46	50	55	67	74
空气质量	良	优	优	优	良	良	良

（1）这 28 天中属于“重度污染”、“中度污染”、“轻度污染”、“轻微污染”、“良”和“优”的天数各有几天？出现的频率各是多少？请用一张统计表来表示.

（2）用折线统计图表示这 28 天污染指数的变化情况.

（3）从你画的统计图表中，可以得到哪些结论？说说你的想法.

（4）了解一下你所居住的地方或者你感兴趣的一个地方某月的空气质量情况.

2. 下面是一个机器人做 9 999 次“抛掷硬币”游戏时记录下的出现正面的频数和频率表，以及根据出现正面的频率所画的一张条形统计图.

（1）由这张频数和频率表可知，机器人抛掷完 5 次时，得到 1 次正面，正面出现的频率是 20%，那么，也就是说，机器人抛掷完 5 次时，得到_____次反面，反面出现的频率是_____.

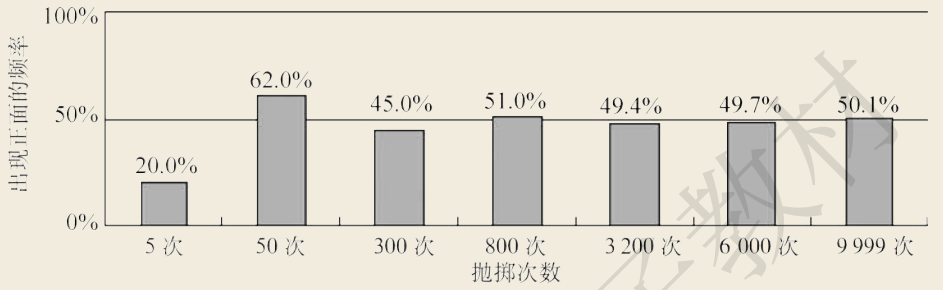
（2）由这张频数和频率表可知，机器人抛掷完 9 999 次时，得到_____次正面，正面出现的频率是_____，那么，也就是说，机器人抛掷完 9 999 次时，得到_____次反面，反面出现的频率是_____.

（3）如果你和你的朋友一起合作也抛掷完 9 999 次，你们记录下的频数和频率表会与这张记录表一模一样吗？为什么？

华东师大版电子教材

（4）观察条形统计图，当抛掷次数很多很多以后（比如 800 次以后），出现正面的频率是否比先前稳定？

抛掷次数	5 次	50 次	300 次	800 次	3 200 次	6 000 次	9 999 次
出现正面的频数	1	31	135	408	1 580	2 980	5 006
出现正面的频率	20.0%	62.0%	45.0%	51.0%	49.4%	49.7%	50.1%



（第 2 题）

3. 现在有些学校试行了分班制，就是将年级中学习成绩比较接近的同学分在同一个班上课. 就学校的这种做法，校学生会对全校每名同学做了调查，发现有 a 名同学投赞同票，b 名同学投反对票，还有 c 名同学弃权. 如果全校共有 d 名同学，那么：

（1）为了检查调查结果 a、b、c 是否统计无误，可以首先核对是否有等式_____成立；

（2）“赞同票”出现的频数是_____，频率是_____；

（3）“反对票”出现的频数是_____，频率是_____；

（4）在已经求出了“赞同票”以及“反对票”出现的频率之后，如何求“弃权票”出现的频率比较简便？

4. 2009 年，我国粮食总产量为 53 082.1 万吨，其中，谷物 48 156.3 万吨，豆类 1 930.3 万吨，薯类 2 995.5 万吨. 如果用扇形统计图表示这组数据，各部分扇形的圆心角分别约为多少度？（精确到 0.1°）



（第 4 题）

5. 2002 年 4 月 11 日《文汇报》报道，据不完全统计，至今上海自愿报名去西部地区工作的专业技术人员和管理人员已达 3 600 多人，其中研究生学历占 4%，本科学历占 79%，大专学历占 13%. 根据上述数据绘制扇形统计图，表示这些人员的学历分布情况.

华东师大版电子教本

6. 在2003年第九届女排世界杯上，中国女排登上了世界冠军领奖台. 某调查队为了解人们对中国女排的看法，对4 000人进行了调查，调查结果如下表所示.

意　见	非常满意	满　意	有一点满意	不满意
人　数	2 000	1 600	360	40



（1）请分别计算持各种意见的人数占总调查人数的百分比.

（2）请作出反映此调查结果的扇形统计图.

（3）从统计图中你能得出什么结论？说说你的想法.

7. 下面的数据摘录自2010年《中国统计年鉴》，请根据统计表中的信息回答后面的问题.

2009年我国部分城市日照时数统计表　　单位：小时

城市	1月	2月	3月	4月	5月	6月	7月	8月	9月	10月	11月	12月	全年
拉萨	249.1	241.5	263.6	298.2	291.9	304.0	254.7	254.5	259.5	305.9	276.3	246.0	3 245.2
北京	214.2	179.9	238.9	262.2	280.9	269.9	185.1	178.7	148.8	227.9	152.7	172.6	2 511.8
广州	181.8	104.9	48.9	79.6	121.2	111.1	185.8	187	176.3	208.9	149.7	116.6	1 671.8
贵阳	45.9	66.8	79.4	41.7	71.7	62.6	95.2	151.1	157.5	53.5	95.1	14.1	934.6

（1）上述统计表主要传递了什么信息？

（2）表中被圈起来的两个数“187”和“2 511.8”各表示什么含义？

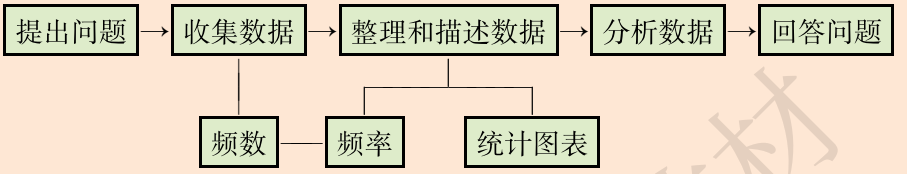
（3）2009年10月份上述四个城市中哪个城市的日照时数最多？哪个城市的日照时数最少？2009年中北京在哪个月份的日照时数最多？

华东师大版电子教材

小结

一、知识结构

利用数据分析解决简单实际问题的过程：



二、要点

1. 通过解决一些简单的实际问题，我们了解到：在现实生活中有许多问题应当先做调查研究，收集数据，再通过分析作出判断.

2. 频数用来表示每个对象出现的次数，频率则表示每个对象出现的次数在总次数中所占的比值. 频数和频率都能够反映每个对象出现的频繁程度. 但在总次数不相等时，应比较频率而不是频数.

3. 数据中蕴含着丰富的信息，我们可以适当运用数据分析的方法，借助统计图表读取或传递一些有用的信息，让数据说话.

华东师大版电子教材

复习题

A 组

1. 如果你想了解自己花在看电视上的时间在全班同学中属于多的还是少的，该怎么办呢？请说明你的计划.

2. 已知全班共有 40 名学生，他们上学有的步行，有的骑车，还有的乘车，根据以下已知信息完成整个统计表.

上学方式	步　行	骑　车	乘　车
“正字法”记录	正正正		
频　数		9	
频　率			40%

3. 一名同学在调查 50 名同班同学的出生月份时记录的数据如下：

2，5，11，7，9，3，12，1，8，10，12，7，8，2，11，10，
2，9，6，4，9，11，5，12，3，8，4，10，12，7，8，6，7，
1，8，11，7，5，3，9，11，4，2，9，6，5，8，3，8，12.

请为他设计一张统计表，使每个月出生人数的情况一目了然.（不要遗漏表的标题）

4. 请将上题的数据用条形统计图表示，体会使用统计图表表示数据的好处.

B 组

5. 根据生活经验，画出你所居住的地区一年中每月平均气温走势的草图，再与你收集到的实际数据作比较，或者与班上其他同学所画的草图作比较，并交流各自的想法.

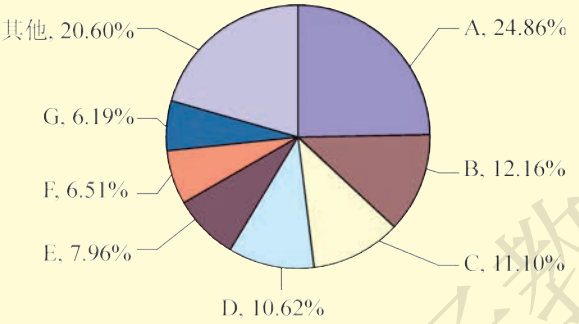
6. 和你的同学合作“抛掷硬币”，画出五张频数条形统计图，依次表示抛硬币 10 次、50 次、100 次、150 次和 200 次后正面和反面出现的次数，你们有什么发现？

华东师大版电子教材

7. 如图是某市场调查公司调查A、B、C、D、E、F、G等各大手机品牌占我国智能手机市场份额情况得到的统计图.

(1) 图中最大的扇形表示_____手机占我国智能手机市场份额的_____%,这个扇形的圆心角为_____°(精确到1°).

(2) 你从图中还能得到哪些信息?

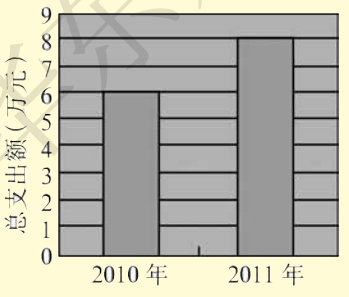


(第7题)

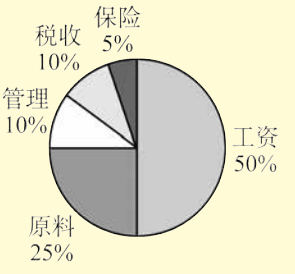
8. 小明投掷一个普通的正方体骰子40次,已知他掷得奇数的次数是15,求掷得偶数的次数. 他掷得奇数的频率高还是掷得偶数的频率高? 如果再掷40次,此结论会改变吗?

C组

9. 利用图(A)、(B)提供的某公司的一些信息,回答后面的问题.



(A) 2010年和2011年总支出图



(B) 2011年总支出的分配图

(第9题)

(1) 2011年管理费支出的金额是多少? 保险费支出的金额是多少?

(2) 2011年的总支出比2010年增加多少? 增加百分之几?

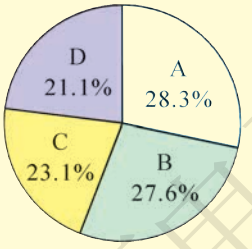
华东师大版电子教材

10. 据报道,2011 年我国汽车市场上一些轿车的销量如下表所示.

车　型	A	B	C	D
销量(万辆)	25.35	24.75	20.70	18.90

(1) 请用条形统计图表示表中描述的信息.

(2) 将表中 4 个数据相加,可以知道,四种轿车在 2011 年的总销量为89.70 万辆. 有人据此画出如图所示的 2011 年中国汽车市场品牌占有率的扇形统计图,称车型 A 的市场占有率为 25.35 ÷ 89.70 ≈ 28.3%,其余三种车型的市场占有率依次为 27.6%、23.1% 和 21.1%. 你同意吗? 为什么?



(第 10 题)

11. 1999 年,全国少工委与中国青少年研究中心调查显示,46.9% 的中小学生没有达到 8 小时的睡眠时间标准. 请你在班级里也进行一次调查,并就此问题与同学作一交流.

华东师大版电子教材

综合与实践

叶子的特征

大自然中的植物千姿百态. 如果细心观察,就会发现:不同植物的叶子通常有着不同的特征. 比如,夹竹桃的叶子又细又长,银杏树的叶子像把小扇子,黄杨树的叶子则接近于椭圆形……



夹竹桃



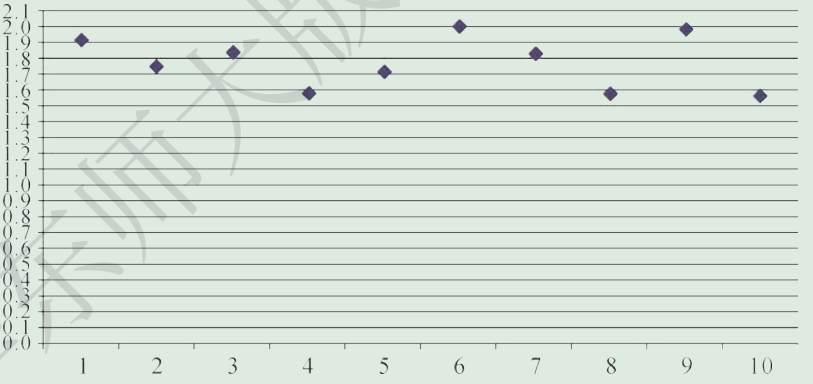
银杏树



黄杨树

下面是一位同学通过亲自收集和分析数据得到的一份关于绿萝叶子的研究报告. 请你选择一种植物,利用自己掌握的分析数据的方法,对植物叶子的长、宽比进行研究,撰写研究报告并与同伴交流.

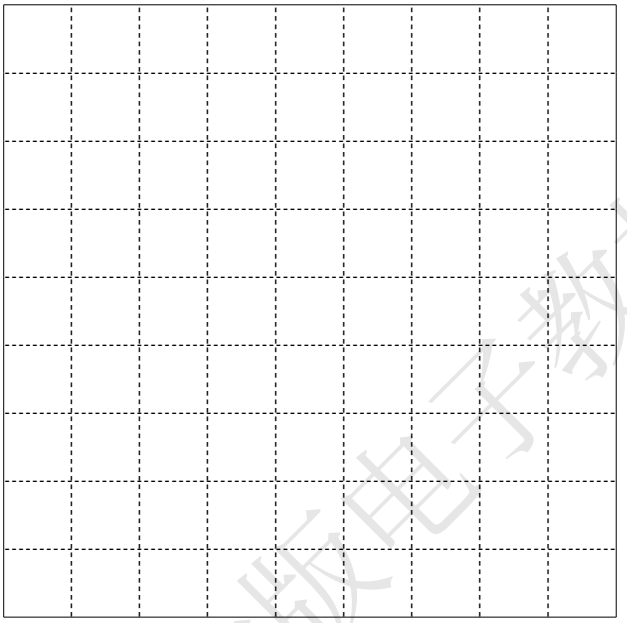
华东师大版教材

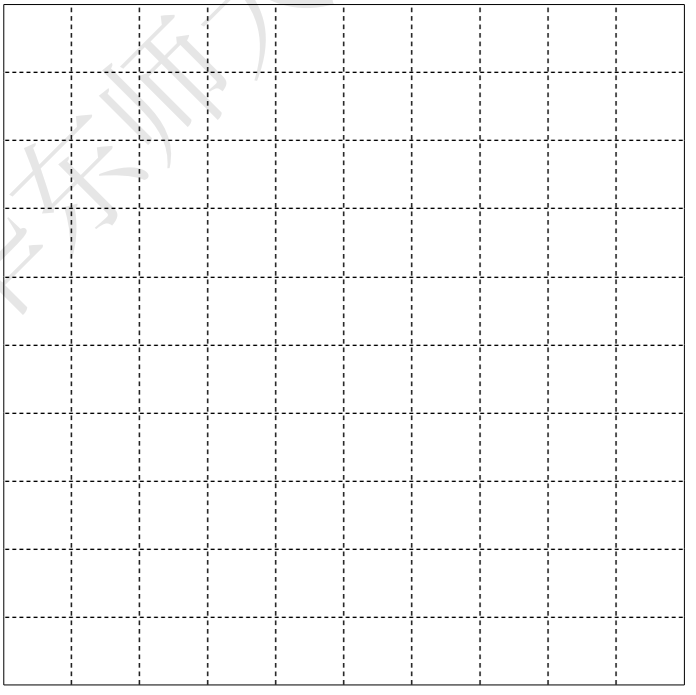
<table>
<tr><td>研究问题</td><td>了解绿萝叶子的长、宽比.</td></tr>
<tr><td>数据来源</td><td>选择一株绿萝，亲自测量其中 10 片叶子的长和宽.
注：
1. 将右图中长方形的长和宽当作叶子的长和宽；
2. 尽量选择大小有差异的叶子.
</td></tr>
<tr><td>数据记录</td><td>绿萝叶子的长和宽统计表（单位：cm）
<table><tr><td>编号</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr><tr><td>长</td><td>10.5</td><td>14</td><td>13.2</td><td>13.5</td><td>13</td><td>18</td><td>16.5</td><td>11</td><td>12.5</td><td>19.5</td></tr><tr><td>宽</td><td>5.5</td><td>8</td><td>7.2</td><td>8.5</td><td>7.6</td><td>9</td><td>9</td><td>7</td><td>6.3</td><td>12.5</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>数据处理</td><td>计算：求出每片叶子的长、宽比，再计算平均数，保留两位小数的结果是 1.77.
作图：将 10 片叶子的长、宽比绘制成如下统计图，发现数据点在 1.77 附近波动.

10 片绿萝叶子的长、宽比统计图</td></tr>
<tr><td>结论与思考</td><td>结论：1. 绿萝叶子的长、宽比大约为 1.77.
2. 任意一片叶子真实的长、宽比通常并不等于估计值，但大多与估计值接近.
思考：1. 是否可以利用叶子的长、宽比对植物进行分类？
2. 这种方法可以用于解决其他分类问题吗？</td></tr>
<tr><td>报告人</td><td></td></tr>
</table>

华东师大版电子教材

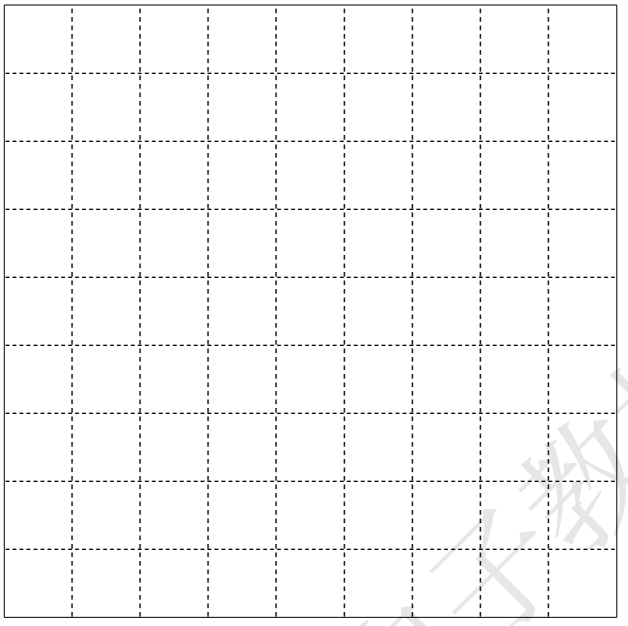
数学实验附图

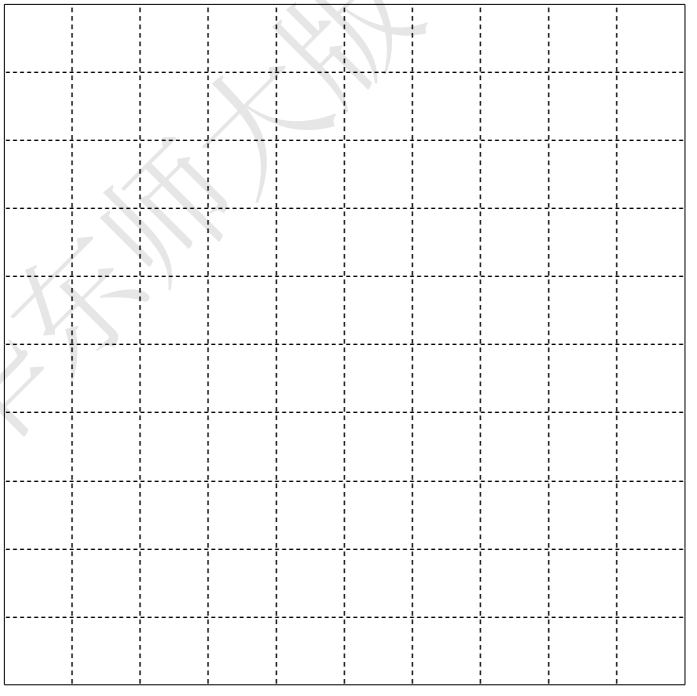
方格图



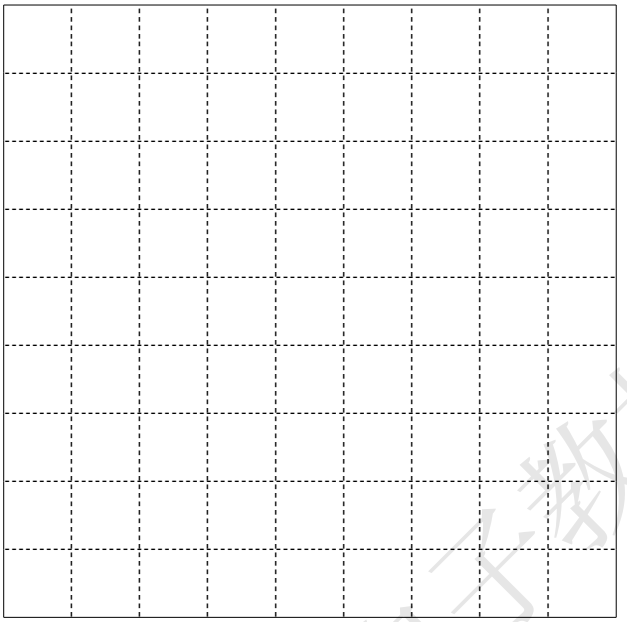


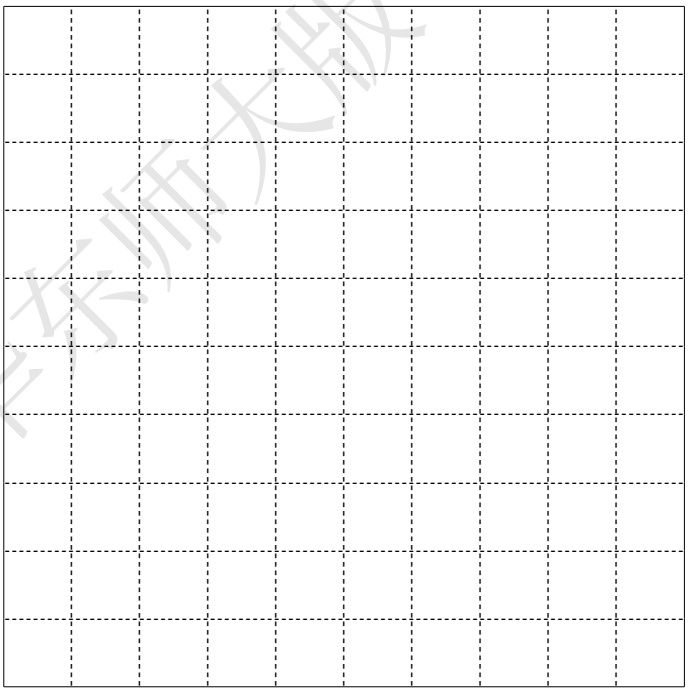
华东师大版电子教材





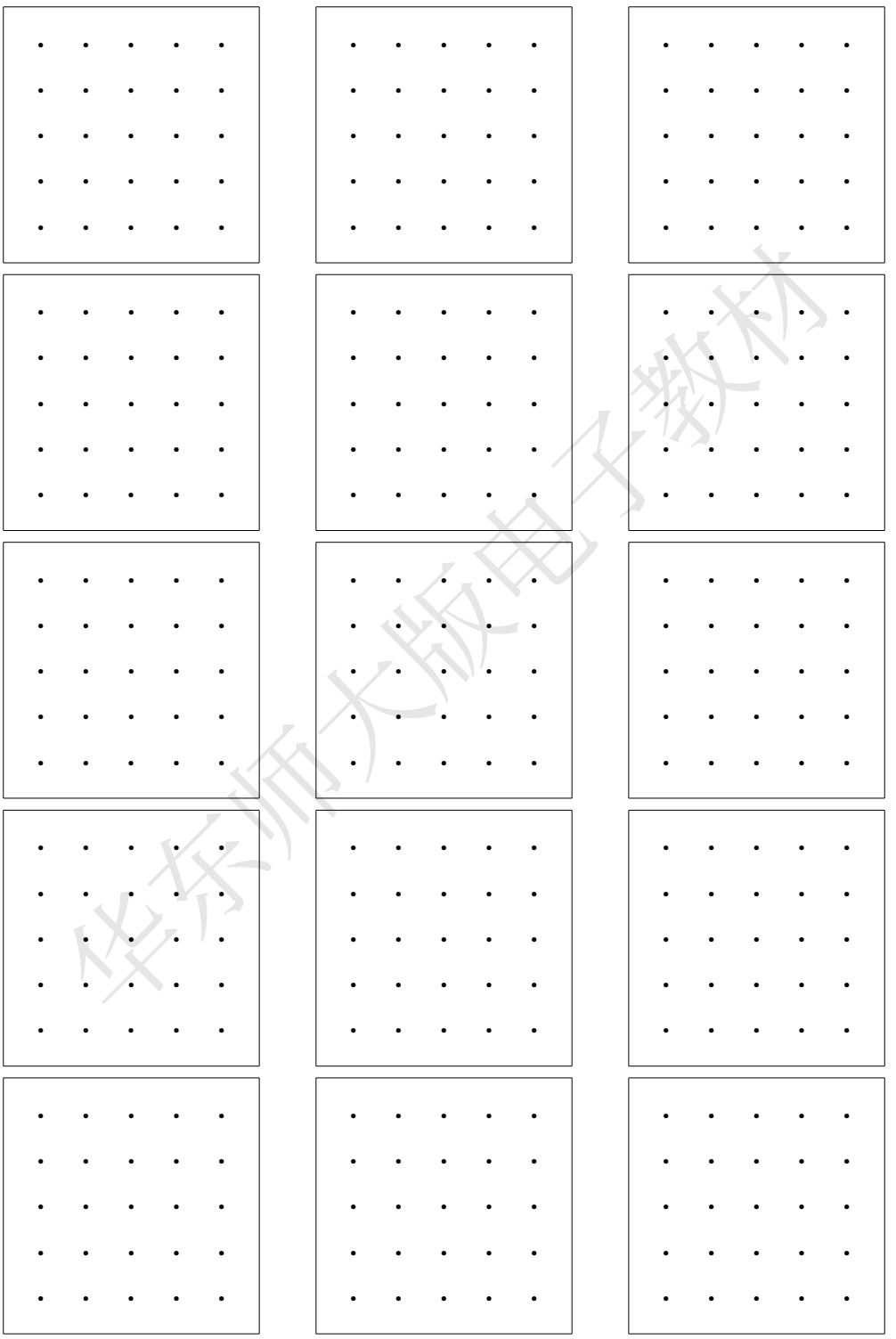
华东师大版电子教材



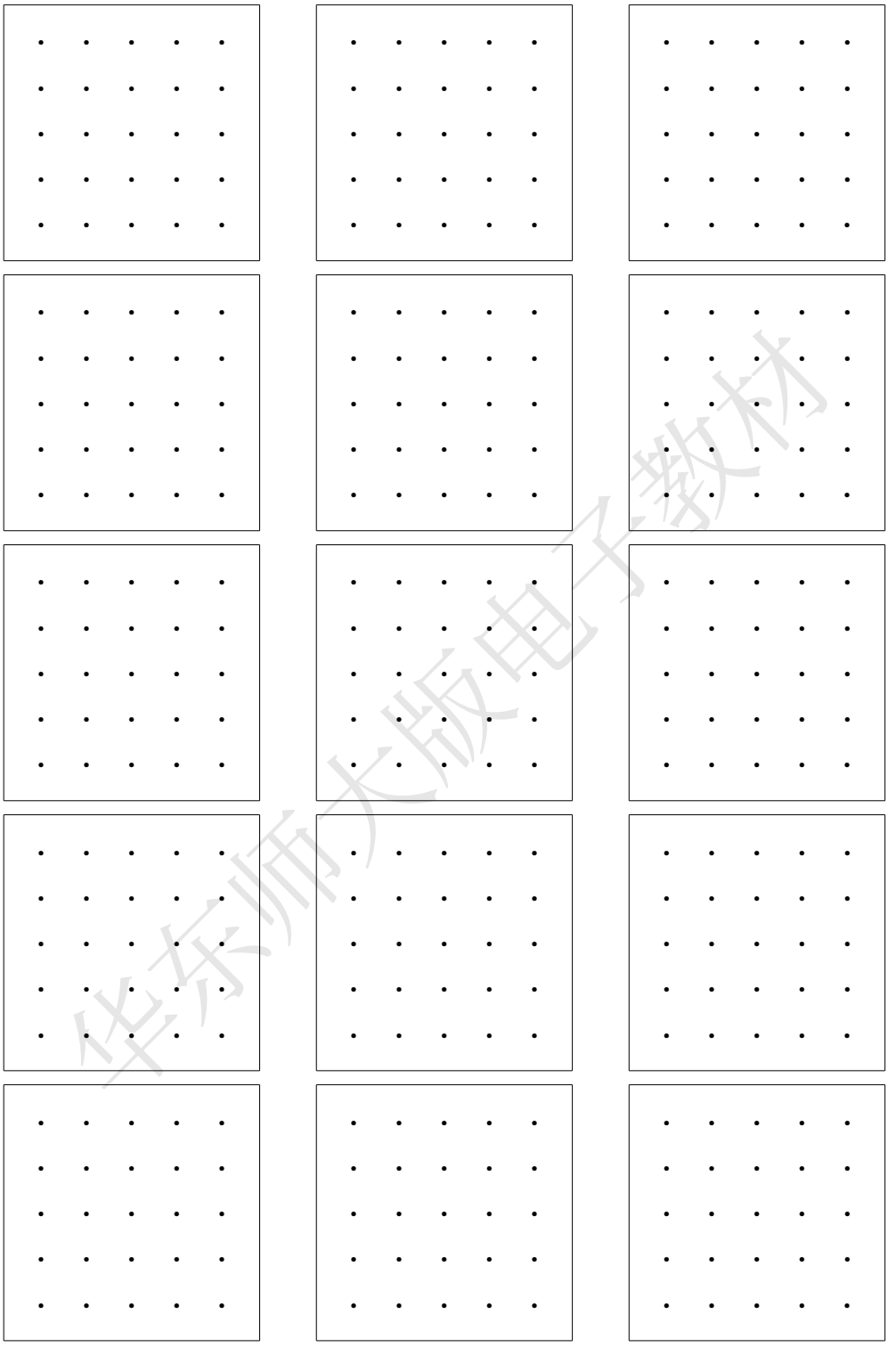


华东师大版电子教材

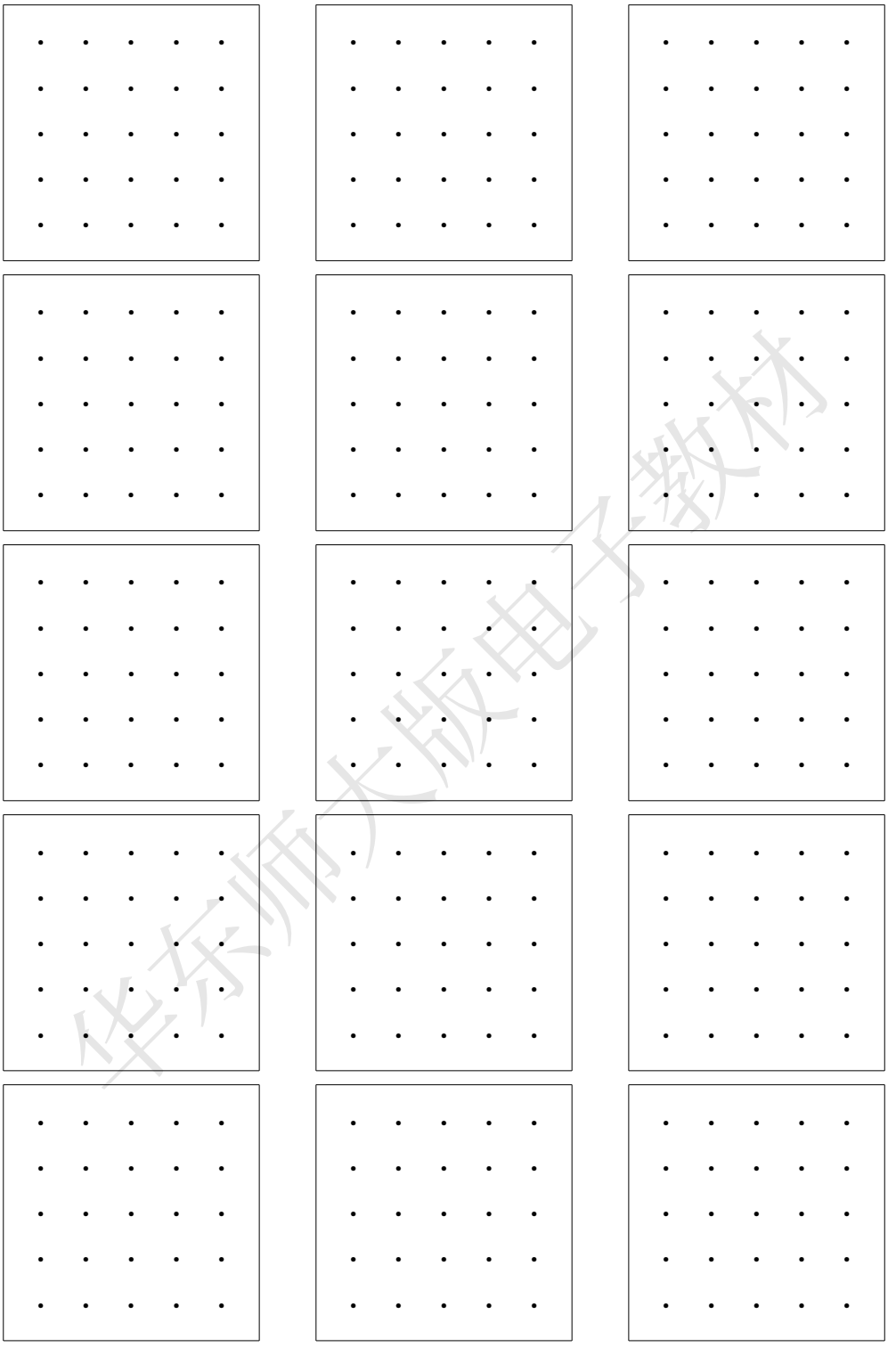
格点图



华东师大版电子教材



华东师大版电子教材



华东师大版电子教材

后　　记

华东师大版初中数学教材是最早通过教育部审查的新课标初中数学教材之一. 自 2001 年秋季在 7 个国家级实验区投入实验以来,已有分布在 26 个省、市、自治区的地市选用过或正在选用本套教材. 10 多年来,实验区的广大师生对本套教材寄予了厚爱,为它的不断完善提出了许多宝贵意见. 根据这些意见,在实验期间,我们对教材进行了多次修改. 在此,我们对多年来给予本套教材关心的各级领导、广大实验区师生和各位同仁表示衷心感谢.

根据教育部的统一部署,在 2012 年前要完成义务教育阶段所有新课标教材的修订工作. 为了确保本套教材修订工作的顺利进行,在 2011 年 4 月至 7 月间,我们就本套教材的修订广泛征求了一线教师的意见. 2011 年 9 月在南京召开了“华东师大版初中数学教材修订研讨会”,来自实验区的 120 多名教研员和骨干教师以及全体编写人员参加了会议. 会议期间就本套教材修订的整体框架达成了广泛共识. 本套教材的修订稿完成后,我们又特邀有关专家和来自教学一线的教师进行了审稿. 参与本册教材审稿的有冯国卫、郭奕津等专家和教师.

尽管我们对修订工作倾注了心血,但现在呈现在广大师生面前的修订教材肯定还存在有待进一步完善的地方. 我们真诚希望广大师生继续关心我们的教材,对我们的教材不断提出新的宝贵意见.

本册教材修订的撰稿人如下(以姓氏笔画为序):

王继延、李俊、吴中才、忻重义、沈加、胡耀华、唐复苏、程靖.

编　者

华东师大版电子教材