九 年 义 务 教 育 课 本

六年级 第一学期

（试用本）

上海教育出版社

# 数学

数学



MATHEMATICS

MATHEMATICS

MATHEMATICS

MATHEMATICS

MATHEMATICS

MATHEMATICS

MATHEMATICS

MATHEMATICS

# 目 录




## 第一章 数的整除 …… 1

第 1 节 整数和整除 …… 2
1.1 整数和整除的意义 …… 2
1.2 因数和倍数 …… 5
1.3 能被 2,5 整除的数 …… 8
第 2 节 分解素因数 …… 11
1.4 素数、合数与分解素因数 …… 11
1.5 公因数与最大公因数 …… 15
1.6 公倍数与最小公倍数 …… 18

本章小结 …… 22
拓展 求三个整数的最小公倍数 …… 23
阅读材料 素数表的制作 …… 24
探究活动 利用素因数找因数 …… 26





## 第二章 分数 …… 27

第 1 节 分数的意义和性质 …… 28

2.1 分数与除法 …… 28
2.2 分数的基本性质 …… 31
2.3 分数的大小比较 …… 39
第 2 节 分数的运算 …… 42
2.4 分数的加减法 …… 42
2.5 分数的乘法 …… 50
2.6 分数的除法 …… 54
2.7 分数与小数的互化 …… 58
拓展 无限循环小数与分数的互化 … 63
2.8 分数、小数的四则混合运算 …… 64
2.9 分数运算的应用 …… 68

本章小结 …… 71
探究活动(一) 用计算器验证分数的有关运算律 …… 72
探究活动(二) 将一个分数拆为几个不同的单位分数之和 …… 72
阅读材料 中国古代的分数运算 …… 74



第三章 比和比例 …… 75

第 1 节 比和比例 …… 76
3.1 比的意义 …… 76
3.2 比的基本性质 …… 78
3.3 比例 …… 81
第 2 节 百分比 …… 85

3.4 百分比的意义 …… 85
3.5 百分比的应用 …… 89
3.6 等可能事件 …… 99

本章小结 …… 101
阅读材料 比出规律 …… 102
探究活动 用百分比看水的世界…… 103



第四章 圆和扇形 …… 104

第 1 节 圆的周长和弧长 …… 105
4.1 圆的周长 …… 105
4.2 弧长 …… 108
第 2 节 圆和扇形的面积 …… 111
4.3 圆的面积 …… 111
4.4 扇形的面积 …… 114

本章小结 …… 118
探究活动 最少需要切几刀 …… 119
阅读材料 π 的发展简史 …… 120

上海市教育委员会版权所有



# 第一章　数的整除

小明家装修新房，客厅的地面是长6米、宽4.8米的长方形，准备用整块的正方形地砖铺满客厅的地面．市场上地砖有30×30、40×40、60×60、80×80（单位：厘米×厘米）四种尺寸，小明家想选尺寸较大的地砖，该选哪一种尺寸呢？



我是小明，我认为应选80×80规格，越大越好看．

我是小丽，我认为应选20×20规格，这样铺上的地砖都是整块．

我是小杰，我认为应选40×40规格，这样铺上的地砖都是整块，而且还比较大．







小明、小丽、小杰说的对吗？当你学完了本章的数学知识以后，就可以自己解答这个问题了。



# 1 第 1 节 整数和整除

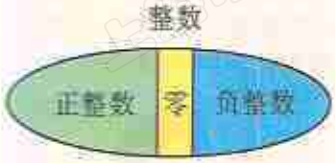
## 1.1 整数和整除的意义

我们经常要计算物体的个数，例如鸡蛋的个数，山羊的只数……．在数 (shù) 的时候，用来表示物体个数的数 1，2，3，4，5，…，叫做正整数．用零可以表示没有物体，还可以表示计量过程中某种量的基准数，如 0 摄氏度．





在正整数 1，2，3，4，5，…的前面添上符号“−”，得到的数 −1，−2，−3，−4，−5，…，叫做负整数．零既不是正整数，也不是负整数．这些是小学时学过的概念，今后我们还将深入地学习．




零和正整数统称为自然数(natural number)．
正整数、零、负整数，统称为整数*(integer)．

有多少个自然数呢？



**问题 1**

(1) 是否有最小的自然数？

(2) 是否有最大的整数？

* 本章中学习的整数，在没有特别说明时，都是指正整数．

## 思考

15名学生参加夏令营，他们想分成人数相等的几个小组进行活动，可以怎样分组呢？

如果平均分成3组，15÷3=5，每组5人。



如果平均分成5组，15÷5=3，每组3人。



为什么不能平均分成2组或者4组呢？



## 观察

下面两组算式卡片中的被除数和除数都是整数，它们的运算结果有什么不同？

(1)

| |
|---|
| 24÷2=12 |
| 21÷3=7 |
| 84÷21=4 |

(2)

| |
|---|
| 6÷5=1.2 |
| 17÷10=1.7 |
| 35÷6=5……5 |

第(1)组算式中的商都是整数，余数为0.



第(2)组算式中的商是小数，或者除不尽。



整数$a$除以整数$b$，如果除得的商是整数而余数为零，我们就说$a$能被$b$整除；或者说$b$能整除$a$.

第(1)组算式卡片中，24 能被 2 整除，21 能被 3 整除，84 能被 21 整除；也可以说，2 能整除 24，3 能整除 21，21 能整除 84.

而第(2)组的算式卡片中，6 不能被 5 整除，17 不能被 10 整除，35 也不能被 6 整除；也可以说，5 不能整除 6，10 不能整除 17，6 不能整除 35.

**例题** 下列哪一个算式的被除数能被除数整除？

$10\div3$；　　$48\div8$；　　$6\div4$.

**解** 因为 $10\div3=3\cdots\cdots1$，

$48\div8=6$，

$6\div4=1.5$，

所以，被除数能被除数整除的算式是 $48\div8$.

## 问题 2

$2.6\div1.3=2$，能不能说2.6能被1.3整除？



注意整除的条件：

1. 除数、被除数都是整数；
2. 被除数除以除数，商是整数而且余数为零.

## 练习1.1

1 从下列数中选择适当的数填入相应的圈内.

12，−7，0，0.4，−23，$\frac{3}{4}$，91，−8.75.









他们的说法对吗?

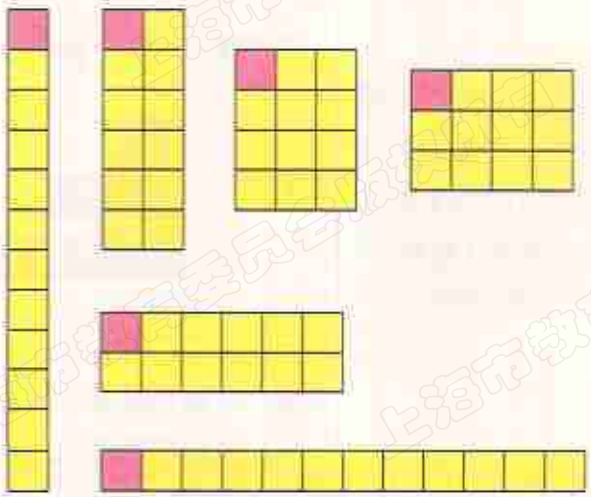
3 在下列各组数中,如果第一个数能被第二个数整除,请在下面的(　　)内打"√",不能整除的打"×".

| | | | |
|---|---|---|---|
| 72和36; | 17和34; | 20和5; | 0.5和5; |
| (　　) | (　　) | (　　) | (　　) |
| 18和3; | 19和38; | 0.2和4; | 17和3. |
| (　　) | (　　) | (　　) | (　　) |

## 1.2 因数和倍数

### 思考

用12块边长是1个单位长度的正方形分别可以拼成几种形状不同的长方形?它们的长和宽各是多少个单位?



| 面积 | ÷ | 长 | = | 宽 |
|---|---|---|---|---|
| 12 | ÷ | 1 | = | 12 |
| 12 | ÷ | 2 | = | 6 |
| 12 | ÷ | 3 | = | 4 |
| 12 | ÷ | 4 | = | 3 |
| 12 | ÷ | 6 | = | 2 |
| 12 | ÷ | 12 | = | 1 |

这里 1,2,3,4,6,12 都能整除 12,可以说它们都是 12 的因数,而 12 是它们的倍数.

因数和倍数是相互依存的.

整数 $a$ 能被整数 $b$ 整除,$a$ 就叫做 $b$ 的倍数(multiple),$b$ 就叫做 $a$ 的因数(factor)(也称为约数).

能整除 16 的整数就是 16 的因数.先找出能整除 16 的整数.
16÷1=16,16÷16=1,
16÷2=8,16÷8=2,
16÷4=4.

**例题1** 分别写出 16 和 13 的因数.

**解** 16 的因数有 1,2,4,8,16;
13 的因数有 1,13.

一个整数的因数中最小的因数是 1,最大的因数是它本身.



**例题2** 写出 2 和 5 的倍数.

能被 2 整除的整数都是 2 的倍数.2 与正整数 1,2,3,4,5,… 的积都能被 2 整除.




$2\times1=2$
$2\times2=4$
$2\times3=6$
……
……

**解** 2 的倍数有 2,4,6,8,10,12,14,…;
5 的倍数有 5,10,15,20,25,….



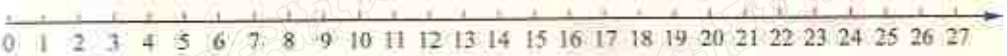
一个整数的倍数有多少个？它有没有最大或最小的倍数？如果有，是什么？



一个整数没有最大的倍数，而最小的倍数是它本身.

## 练习1.2

1. 在下面的数轴中，标出表示3的倍数的点.




2. 因为 $4\div2=2$，所以4是倍数，2是因数.



一个数没有最小的倍数.

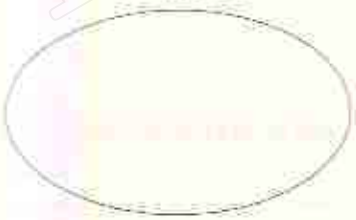


他们的说法正确吗？

3. 把下面各数填入适当的圈内.

2，3，4，5，6，12，15，18，20，24，30，60.

60的因数



6的倍数



4. 先分别写出下面四个数的所有因数，再分别写出这四个数的倍数(只需从小到大依次写3个).

12，18，30，36.

## 1.3 能被2,5整除的数



……

我们接触到的许多事物都是成对出现的，如一双鞋，一双筷子……如果小明的家中有3人用餐，那么他要从筷笼中抽出6根筷子；如果小明家来了客人，那么他抽出的筷子的根数一定是2的倍数，这个数是能被2整除的数.

### 思考1

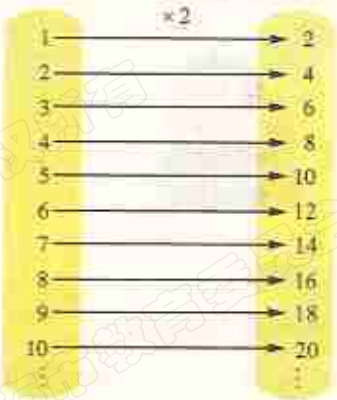
能被2整除的数有什么特征呢?

### 观察

在下图右圈里的数都是2的倍数，这些数都是能被2整除的数.

右圈中2的倍数在个位上的数只有2,4,6,8,0.





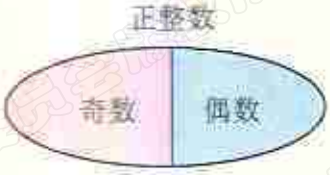

### 概括

个位上是0,2,4,6,8的整数都能被2整除.

翻开你的数学课本，所有左边的页码能被2整除吗？所有右边的页码能被2整除吗？左边和右边页码个位上的数各有什么特征？



能被2整除的整数叫做偶数(even number)，不能被2整除的整数叫做奇(jī)数(odd number).




奇　数　1,3,5,7,9,11,13,…

偶　数　2,4,6,8,10,12,14,…

正整数按照能否被2整除可以分为两类：奇数和偶数*.

### 问题 1

(1) 奇数的个位上的数有什么特点呢?

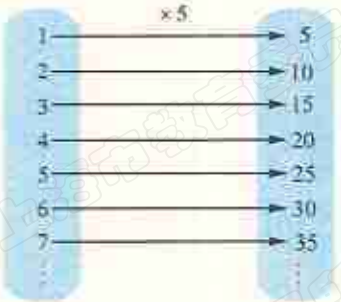
(2) 在连续的正整数中(除 1 外)，与奇数相邻的两个数是奇数还是偶数?与偶数相邻的两个数呢?

### 思考 2

能被5整除的整数有什么特征呢?

### 观察

在下图右圈里的整数都是5的倍数，这些数都是能被5整除的数.




### 概括

个位上是0或者5的整数都能被5整除.

* 这里所说的奇数和偶数是指正奇数和正偶数，当研究的数从正整数范围扩大到整数范围时，…，−4，−2，0等也是偶数，…，−5，−3，−1等也是奇数.

## 练习1.3

1. 下列数中，哪些数是奇数？哪些数是偶数？

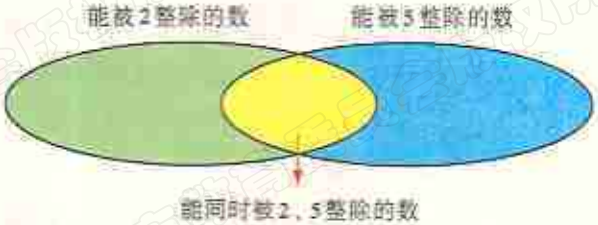
19，32，87，10，11，153，66，445.

2. 在下列数中找出能被 5 整除的数.

18，27，30，44，60，102，417，375.

3. 在下列数中找出既能被 2 整除又能被 5 整除的数，填写在适当的圈内.这样的数有什么特点？

12，25，40，75，80，94，105，210.




上海市教育委员会版权所有

# 1 第2节 分解素因数

## 1.4 素数、合数与分解素因数

**思考**

我们会求一个正整数的因数，那么一个正整数有几个因数呢？




想一想，下列每个数各含有几个因数？

1，2，3，4，5，6，7，8，9，10，11，12，13，14，…

在这些数中，有一个因数的数有哪些？有两个因数的数有哪些？有两个以上因数的数有哪些？




一个正整数，如果只有1和它本身两个因数，这样的数叫做**素数**(prime number)，也叫做**质数**；如果除了1和它本身以外还有别的因数，这样的数叫**合数**(composite number).

例如：2，3，5，7，11，13，…都是素数；4，6，8，10，12，14，…都是合数.




1既不是素数，也不是合数.这样，正整数又可以分为1、素数和合数三类.



还可以利用整除的特征来判断：

27能被3整除，因此除了1和27以外，27还有因数3，所以27是合数；

同样，35能被5整除，所以35也是合数。

**例题1** 判断27，29，35和37是素数还是合数。

**解** 27的因数有1，3，9，27；

29的因数有1，29；

35的因数有1，5，7，35；

37的因数有1，37。

通过检查每个数的因数的个数，可以知道：29，37是素数，27和35是合数。

判断一个100以内的数是不是素数，还可以查以下的素数表：

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 5 | 7 | 11 | 13 | 17 | 19 | 23 |
| 29 | 31 | 37 | 41 | 43 | 47 | 53 | 59 | 61 |
| 67 | 71 | 73 | 79 | 83 | 89 | 97 | | |



## 练习1.4(1)

1. 在自然数1到10中，

(1) 奇数有_____，偶数有_____；

(2) 素数有_____，合数有_____。

2. 下面的说法对吗？

| | |
|---|---|
| 一个合数至少有3个因数。 | 所有的奇数都是素数。 |
| 所有的偶数都是合数。 | 在正整数中，除了素数都是合数。 |

3. 把下列各数填入适当的圈内。

11，21，31，41，51，61，71，81，91。



选择题.

(1) 在正整数中,1 是 (　　)

(A) 最小的奇数. (B) 最小的偶数. (C) 最小的素数. (D) 最小的合数.

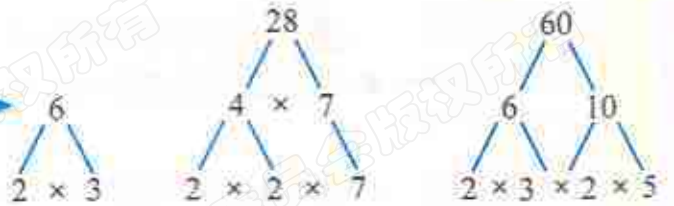
(2) 在正整数中,4 是 (　　)

(A) 最小的奇数. (B) 最小的偶数. (C) 最小的素数. (D) 最小的合数.

## 思考

6,28 和 60 可以写成哪几个素数相乘的形式?

多像树枝啊!俗称"树枝分解法".




$6=2\times3$　　$28=2\times2\times7$　　$60=2\times3\times2\times5$

$=2\times2\times3\times5$

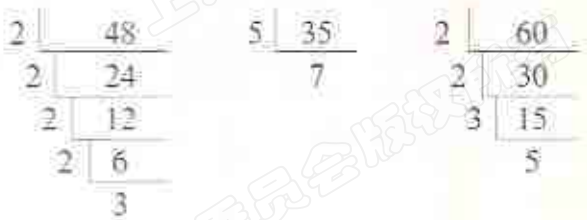
从以上的例子可以看出:

每个合数都可以写成几个素数相乘的形式,其中每个素数都是这个合数的因数,叫做这个合数的**素因数**(prime factor).把一个合数用素因数相乘的形式表示出来,叫做分解素因数.

**例题2**　把 48,35,60 分解素因数.

这种在左侧写除数、下方写商的除法格式叫做"短除法".

**解**




$48=2\times2\times2\times2\times3$;　$35=5\times7$;　$60=2\times2\times3\times5$.

用短除法分解素因数的步骤如下:

1. 先用一个能整除这个合数的素数(通常从最小

的开始)去除;

2. 得出的商如果是合数,再按照上面的方法继续除下去,直到得出的商是素数为止;

3. 然后把各个除数和最后的商按从小到大的顺序写成连乘的形式.

别忘了检验一下每个因数是否为素数!



也可以用口算来分解素因数.

$72=8\times9=2\times2\times2\times3\times3$.



用计算器计算简称为机算.



还可以使用计算器分解素因数. 如把 1334 分解素因数,用计算器计算得:

$1334\div2=667$.

为什么还要除以素数 2?

再把 667 依次除以素数 2,3,5,7,11,13,17,19,都有余数,说明它们都不是 667 的素因数.

而 $667\div23=29$,29 是素数,

所以 $1334=2\times23\times29$.

## 练习1.4(2)

1.



42分解素因数是 $42=2\times21$.



$A=2\times3\times5\times B, B>1$,
则 $B$ 一定是 $A$ 的素因数.

请问他们的说法对吗?

2. 选择题.

(1) 在等式 $4\times6=n=2\times2\times2\times3$ 中,

4 和 6 都是 $n$ 的 (　　)

2和 3 都是 $n$ 的 (　　)

(A) 素因数. (B) 素数. (C) 因数. (D) 合数.

(2) 把 24 分解素因数的正确算式是 (　　)

(A) $24=2\times3\times4$.　　(B) $24=2\times2\times2\times3$.

(C) $24=1\times2\times2\times2\times3$.　　(D) $24=2\times2\times6$.

3 把以下各数分解素因数.

35，36，56，72，81.

## 1.5 公因数与最大公因数



**思考**

植树节这天，老师带领24名女生和32名男生到植物园种树．老师把这些学生分成人数相等的若干个小组，每个小组中的男生人数都相等，请问，这56名同学最多能分成几组？

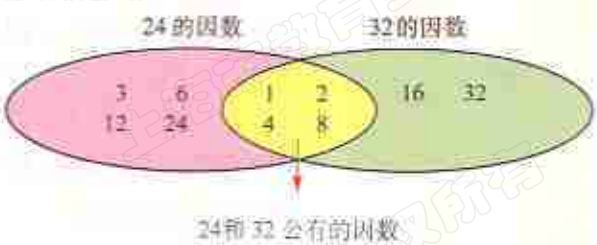


分成的组数能整除 24 和 32，也就是 24 和 32 的因数.

24的因数有：1，2，3，4，6，8，12，24；

32 的因数有：1，2，4，8，16，32；

24和 32 公有的因数有：1，2，4，8；其中最大的一个公有的因数是 8.




因此老师最多可以把这些学生分成 8 组．每组中分别有 3 名女生和 4 名男生.

几个数公有的因数，叫做这几个数的**公因数**(common factor)；其中最大的一个叫做这几个数的**最大公因数**(greatest common factor).

**例题1** 求8和9的所有公因数，并求它们的最大公因数.

**解** 8的因数有1,2,4,8；9的因数有1,3,9.

8和9只有一个公因数1，因此8和9的最大公因数是1.

素数和互素有什么区别呢?



如果两个整数只有公因数1，那么称这两个数互素.

例题1中的8和9就是互素的.

### 问题 1

在3和9、4和9、3和7、7和14、14和15五对数中，哪几对数是互素的?

**例题2** 求18和30的最大公因数.

**解一** 18的因数有 1，2，3，6，9，18；

30的因数有 1，2，3，5，6，10，15，30.

18和30的公因数有1,2,3,6，18和30的最大公因数是6.

有没有更快捷的方法呢?



**解二** 把18和30分别分解素因数.

$18=2\times3\times3$

$30=2\times3\times5$

可以看出，18和30全部公有的素因数是2和3，因此2和3的乘积6就是18和30的最大公因数.

求几个整数的最大公因数，只要把它们所有公有的素因数连乘，所得的积就是它们的最大公因数.



**解三** 为了简便，也可以用短除法计算：

$$\begin{array}{r|ll} 2 & 18 & 30 \\ \hline 3 & 9 & 15 \\ \hline & 3 & 5 \end{array}$$

(用公有的素因数2除)

(用公有的素因数3除)

(除到两个商互素为止)

18和 30 的最大公因数是 $2\times3=6$.

**例题3** 求 48 和 60 的最大公因数.

解
$$\begin{array}{r|ll} 2 & 48 & 60 \\ \hline 2 & 24 & 30 \\ \hline 3 & 12 & 15 \\ \hline & 4 & 5 \end{array}$$
(用公有的素因数 2 除)
(用公有的素因数 2 除)
(用公有的素因数 3 除)
(除到两个商互素为止)

48 和 60 的最大公因数是 $2\times2\times3=12$.

现在回到本章开始的问题:

从铺整块地砖的要求来看,要求客厅地面的长和宽都要能被地砖的边长整除,首先将客厅地面的边长与地砖的边长的单位统一,化为厘米单位.那么地砖的边长就应是长 600 厘米和宽 480 厘米的公因数.600 和 480 的公因数有 10,20,30,40,60,120,但是地砖尺寸没有 120 厘米×120 厘米的,所以应该选择 60 厘米×60 厘米尺寸的地砖.

## 问题 2

(1) 3 和 15 的最大公因数是_____;

(2) 18 和 36 的最大公因数是_____;

(3) 6 和 7 的最大公因数是_____;

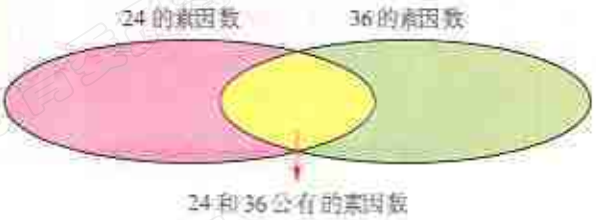
(4) 8 和 15 的最大公因数是_____.

通过求这四组数的最大公因数,你发现什么规律了吗?

两个整数中,如果某个数是另一个数的因数,那么这个数就是这两个数的最大公因数.如果这两个数互素,那么它们的最大公因数就是1.

## 练习1.5

1. 把适当的数填写在下面的圆内：




24和36的最大公因数是_____.

2. 指出下列哪组中的两个数互素.

3和5，6和9，14和15，18和1.

3. 求下列各组数的最大公因数.

12和8，13和7，11和44，45和60.

## 1.6 公倍数与最小公倍数

### 思考



在上海南站，地铁1号线每隔3分钟发车，轨道交通3号线每隔4分钟发车.如果地铁1号线和轨道交通3号线早上6：00同时发车，那么至少再过多少时间它们又同时发车?

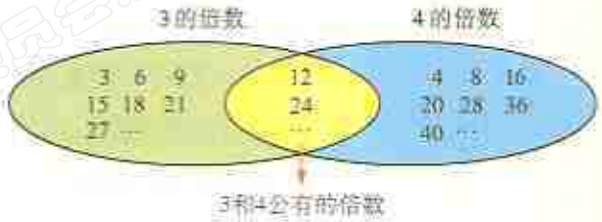
早晨6点以后地铁1号线发车间隔的时间(分钟)是3的倍数，而轨道交通3号线发车的间隔时间(分钟)是4的倍数.这个问题可以转化为求3和4的最小的公有倍数.



3的倍数有：3，6，9，12，15，18，21，24，27，…；

4的倍数有：4，8，12，16，20，24，28，36，40，….

3和4公有的倍数有：12，24，…，其中最小的一个是12.




所以12分钟后地铁1号线和轨道3号线再次同时发车.

几个整数的公有的倍数叫做它们的**公倍数**(common multiple)，其中最小的一个叫做它们的**最小公倍数**(least common multiple).

**例题1** 求18和30的最小公倍数.

有没有更快捷的方法呢?



**解一** 18的倍数有18，36，54，72，90，…；

30的倍数有30，60，90，120，160，….

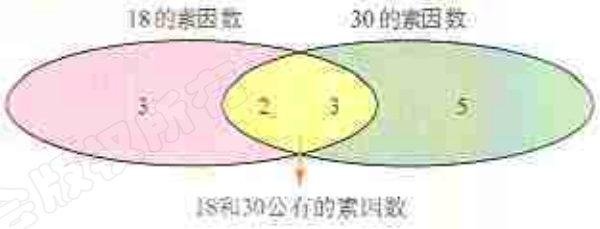
所以18和30的最小公倍数是90.

**解二** 把18和30分解素因数.

$18=\boxed{2}\times\boxed{3}\times3$

$30=\boxed{2}\times\boxed{3}\times5$

18和30的公倍数里，应当既包含18的所有素因数，又包含30的所有素因数，但相同的素因数可以只取一个.只要取出18、30的所有公有的素因数(1个2和1个3)，再取各自剩余的素因数(3和5)，将这些数连乘，所得的积$2\times3\times3\times5$(90)就是18，30的最小公倍数.




求两个整数的最小公倍数，只要取它们所有公有的素因数，再取它们各自剩余的素因数，将这些数连乘，所得的积就是这两个数的最小公倍数.



2 和 3 是公有的素因数，3 和 5 是取出公有的素因数后各自剩余的素因数.

**解三** 为了简便，也可以用短除法来计算：

$$\begin{array}{r|ll} 2 & 18 & 30 \\ 3 & 9 & 15 \\ \hline & 3 & 5 \end{array}$$

（用公有的素因数 2 除）
（用公有的素因数 3 除）
（除到两个商互素为止）

18和 30 的最小公倍数是 $2\times3\times3\times5=90$.

**例题2** 求 36 和 84 的最小公倍数.

**解**

$$\begin{array}{r|ll} 2 & 36 & 84 \\ 2 & 18 & 42 \\ 3 & 9 & 21 \\ \hline & 3 & 7 \end{array}$$

（用公有的素因数 2 除）
（用公有的素因数 2 除）
（用公有的素因数 3 除）
（除到两个商互素为止）

36 和 84 的最小公倍数是 $2\times2\times3\times3\times7=252$.

**例题3** 求 30 和 45 的最大公因数和最小公倍数.

**解**

$$\begin{array}{r|ll} 3 & 30 & 45 \\ 5 & 10 & 15 \\ \hline & 2 & 3 \end{array}$$

（用公有的素因数 3 除）
（用公有的素因数 5 除）
（除到两个商互素为止）

30 和 45 的最大公因数是 $3\times5=15$；

30 和 45 的最小公倍数是 $3\times5\times2\times3=90$.

## 问题

(1) 3 和 15 的最小公倍数是_____；

(2) 18 和 36 的最小公倍数是_____；

(3) 8 和 9 的最小公倍数是_____；

(4) 8 和 15 的最小公倍数是_____.

通过求这四组数的最小公倍数，你发现什么规律了吗？

如果两个整数中某一个数是另一个数的倍数，那么这个数就是它们的最小公倍数．如果两个数互素，那么它们的乘积就是它们的最小公倍数．

## 练习1.6

1. 已知甲数$=2\times2\times3\times5\times7$，乙数$=2\times3\times3\times5\times5$．
甲数和乙数的最小公倍数是_____，最大公因数是_____．

2. 两个整数的积一定是这两个数的最小公倍数。



两个整数的公倍数一定能被这两个数整除。



他们的说法对吗？为什么？

3. 求下列各组数的最小公倍数．
7和 21；8 和 12；9 和 45；18 和 48．

# 本章小结

小学时我们已学习了两个数相除，两个整数相除其结果是除尽或除不尽.在除尽的情况下，如果商是整数且余数为零，这就是整除.由此有了公因数、最大公因数、最小公倍数等概念，以及素因数分解的方法.学习本章数的整除是为今后学习分数的运算奠定基础.

本章知识框架如下：




上海市教育委员会版权所有

## 拓展

# 求三个整数的最小公倍数

### 思考

如何求三个数的最小公倍数呢?我们以求 8,12 和 30 的最小公倍数为例.

分别把 8,12 和 30 分解素因数:

$$\begin{aligned} 8 &= \boxed{2} \times \boxed{2} \times 2 \\ 12 &= 2 \times \boxed{2} \times \boxed{3} \\ 30 &= \boxed{2} \times \boxed{3} \times 5 \end{aligned}$$

8,12 和 30 的最小公倍数,应当既包含 8 的所有素因数,又包含 12 和 30 的所有素因数,但相同的素因数可以只取一个,所以 8,12 和 30 的最小公倍数是取三个数公有的素因数(1 个 2)和每两个数公有的素因数(1 个 2 和 1 个 3),以及再取各自剩余的素因数(2 和 5),所有这些素因数的积.

因此 8,12 和 30 的最小公倍数是 $2\times2\times2\times3\times5=120$.

为了简便,也可以用短除法计算:

解
$$\begin{array}{r|lll} 2 & 8 & 12 & 30 \\ \hline 2 & 4 & 6 & 15 \\ \hline 3 & 2 & 3 & 15 \\ \hline & 2 & 1 & 5 \end{array}$$
(用三个数公有的素因数 2 除)
(用 4 和 6 公有的素因数 2 除)
(用 3 和 15 公有的素因数 3 除)
(除到每两个商都互素为止)

8,12 和 30 的最小公倍数是 $2\times2\times2\times3\times5=120$.

**例题** 求 10,12 和 15 的最小公倍数.

解
$$\begin{array}{r|lll} 5 & 10 & 12 & 15 \\ \hline 2 & 2 & 12 & 3 \\ \hline 3 & 1 & 6 & 3 \\ \hline & 1 & 2 & 1 \end{array}$$
(用 10 和 15 公有的素因数 5 除)
(用 2 和 12 公有的素因数 2 除)
(用 6 和 3 公有的素因数 3 除)
(除到每两个商都互素为止)

10,12 和 15 的最小公倍数是 $2\times2\times3\times5=60$.

### 思考

(1) 求两个整数的最小公倍数和求三个整数的最小公倍数有什么不同?

(2) 一筐芦柑估计约有 350 个,每次拿 3 个,每次拿 4 个和每次拿 5 个都正好拿完没有剩余,这筐芦柑有几个?



## 阅读材料

# 素数表的制作

你知道 1—100 以内的素数表是怎么制成的吗?

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 |
| 46 | 47 | 48 | 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 | 71 | 72 | 73 | 74 | 75 |
| 76 | 77 | 78 | 79 | 80 | 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 | | | | | |

我们可以用筛选法制素数表,大致的步骤是:

在 1 到 100 这些正整数中,① 划去 1;② 圈出 10 以内的素数;③ 划去 2 的倍数;④ 划去 3 的倍数;⑤ 划去 5 的倍数;⑥ 划去 7 的倍数;⑦ 把没有划去的数排列起来,就制成了 1—100 以内的素数表.



## 思考

为什么划去 7 的倍数后,就不再划下去了?

两千多年前,古希腊的数学家,亚历山大图书馆馆长埃拉托塞尼就用这种方法找出了 1—1000 以内的素数.它像从沙子里筛石头那样,把素数从正整数中筛选出来,后来人们就把它叫做"埃拉托塞尼筛选法",现在的许多素数表都是用这个筛选法编制出来的.

1—100 以内的素数我们经常用到,除了一位数 2,3,5,7 四个素数以外,其余的素数都是两位数的奇数,而且它们的个位数字一定是 1,3,7,9.

素数究竟可以怎样表示呢?曾经有一位科学家找到了规律:

$1\times1+1+41=43$, $2\times2+2+41=47$;

$3\times3+3+41=53$; $4\times4+4+41=61$.

这里出现的43,47,53,61都是素数，这位数学家以为自己发现了构造素数的公式，这可是一项了不起的发明！他高兴极了，一直算到$39\times39+39+41=1601$，1601还是素数，可是再往下算时，却发现$40\times40+40+41=1681=41\times41$，1681不是素数，是合数了。

这样就产生了素数的个数是有限的还是无限的问题。如果素数的个数是有限的，就可以用筛选法构造一张素数表，罗列出所有素数。但是约在2300年前，古希腊的数学家欧几里得就已经证明了素数的个数是无限的。至今为止，数学家们还没有发现一个构建素数或产生素数的有效公式，所以寻找大的素数，必须运用计算机一个一个地找，寻找大素数的工作还在继续。

上海市教育委员会版权所有

## 探究活动

# 利用素因数找因数

要写出一个整数的因数，我们可以用试除的方法一个个试算出来，也可以按照规律一对一对地写出来。例如求 180 的因数有多少个，就可以将全部因数写出来，再数一数便可以知道因数的个数。

180 的因数有：1，180；2，90；3，60；4，45；5，36；6，30；9，20；10，18；12，15。共 9 对 18 个。

对于数字较大的合数，这样求因数既费时，又容易漏掉。有没有更好的办法呢？让我们一起来探索因数的个数与素因数个数间的关系。

利用下列各数的素因数，分别写出它们所有的因数。

| | 分解素因数 | 所有的因数 | 因数的个数 |
|---|---|---|---|
| 4 | $4=2\times2$ | | |
| 27 | $27=3\times3\times3$ | | |
| 16 | $16=2\times2\times2\times2$ | | |

你发现了因数个数和素因数个数的关系吗？

| | 分解素因数 | 所有的因数 | 因数的个数 |
|---|---|---|---|
| 6 | $6=2\times3$ | | |
| 12 | $12=2\times2\times3$ | | |
| 18 | $18=2\times3\times3$ | | |

你发现了因数的个数和素因数个数间的关系吗？

试一试解决下列问题吧！

(1) $210=21\times10=2\times3\times5\times7$，你能很快知道 210 的因数的个数并求出它的所有因数吗？

(2) 求 1260 的所有因数。

你的研究是否正确呢？不妨上网去收集这方面的资料吧。



# 第二章 分 数

你知道我国著名篮球运动员姚明和巴特尔的身高和体重吗？




姚明的身高是226厘米，体重是134千克；
巴特尔的身高是210厘米，体重是130千克。



小明和小杰哪个身高更高一点呢？哪个体重更重一点呢？
当你学完了本章中相关的数学知识以后，就可以自己解答这个问题了。

# 2 第 1 节 分数的意义和性质

## 2.1 分数与除法



我们已经知道，把一个总体平均分成若干份之后，其中的 1 份或若干份可以用分数表示.

例如：把一个蛋糕看成一个总体，将它平均分成 8 份，其中的 1 份蛋糕可以用$\frac{1}{8}$表示. 小杰、小明和小丽每人各吃了 1 份，共吃了 8 份中的 3 份，即三人共吃了蛋糕的$\frac{3}{8}$，还剩下 5 份，就是原蛋糕的$\frac{5}{8}$.



一纸盒中装有 16 块大小相同的蛋糕，将它们看成一个总体，以 2 块为 1 份，平均分成 8 份，每份就是这盒蛋糕的$\frac{1}{8}$.

### 观察

如图①，将 1 个橙子平均分给 4 个人，就是将 1 个橙子平均分成 4 份，按照除法的意义就是 1÷4，每人分得 4 份橙子中的 1 份，表示 1 份的数就是分数$\frac{1}{4}$（图②）.



图 ①



图 ②

将2个(大小相同的)橙子平均分给4个人,用除法表示就是2÷4(图③),将1个橙子平均分给4个人,每人得橙子的$\frac{1}{4}$,将2个橙子平均分给4个人,每人从2个橙子中各得$\frac{1}{4}$,所以每人应得2个$\frac{1}{4}$(图④),每人分得的是1个橙子的$\frac{2}{4}$(图⑤).



图 ③



图 ④



图 ⑤

将$\frac{1}{4}$看作1÷4的结果,$\frac{2}{4}$看作2÷4的结果,可写成$1\div4=\frac{1}{4}$,$2\div4=\frac{2}{4}$.

## 概括

被除数÷除数$=\frac{\text{被除数}}{\text{除数}}$

两个正整数$p$、$q$相除,可以用分数(fraction)$\frac{p}{q}$表示,即 $p\div q=\frac{p}{q}$,其中$p$为分子,$q$为分母.

$\frac{p}{q}$读作$q$分之$p$.

$3\div1=\frac{3}{1}=3$

$5\div1=\frac{5}{1}=5$

特别地,当$q=1$时,$\frac{p}{q}=p$.

## 思考

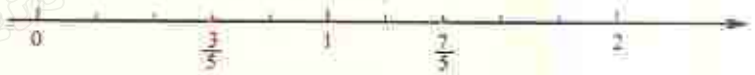
1. 一个橙子的$\frac{1}{4}$和两个橙子的$\frac{1}{4}$是否等同?为什么?

如何用数轴上的点表示分数$\frac{2}{7}$和$\frac{9}{7}$呢?



2. 分数是否可以用数轴上的点来表示?

如图,将数轴上的单位长度5等分,从0开始自左而右的第3个分点和第7个分点分别表示分数$\frac{3}{5}$和$\frac{7}{5}$.




## 练习2.1

1. 如果把下列各图形的总体用1表示,那么请用分数表示下列各图形中的涂色部分.



2. 下图中,蓝色轿车占全部轿车的几分之几?



3. 用分数表示下列除法的商:

(1) $3\div2$; (2) $2\div9$; (3) $7\div8$;

(4) $5\div12$; (5) $31\div5$; (6) $8\div2$.

4. 把下列分数写成两个数相除的式子:

(1) $\frac{4}{3}$；　(2) $\frac{5}{4}$；　(3) $\frac{4}{2}$；

(4) $\frac{1}{3}$；　(5) $\frac{13}{22}$；　(6) $\frac{3}{10}$.

5 写出数轴上点$A$、点$B$、点$C$所表示的分数.



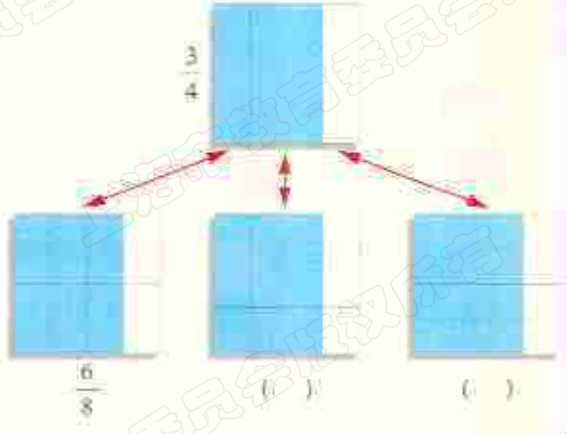

## 2.2 分数的基本性质

### 观察



一张涂色的纸，涂色部分占这张纸的$\frac{3}{4}$.

小明、小杰、小丽分别用这样的纸折成不同等分的图案，你能发现什么结论呢？




在这些大小相同、不同等分的纸中，涂色部分分别占纸的几分之几？这些分数有什么关系？

这些分数的大小是相等的，即$\frac{3}{4}=\frac{6}{8}=\frac{9}{12}=\frac{12}{16}$.



由分数$\frac{3}{4}$的分子、分母分别同乘以2,3,4可得分数$\frac{6}{8}$,$\frac{9}{12}$,$\frac{12}{16}$.

$$\frac{3}{4}=\frac{6}{8}=\frac{9}{12}=\frac{12}{16}$$

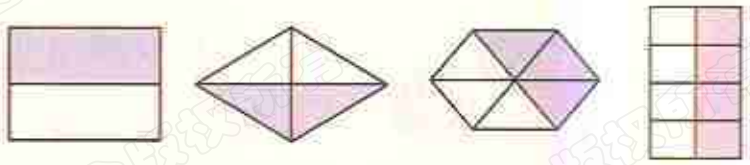


由分数$\frac{12}{16}$,$\frac{9}{12}$,$\frac{6}{8}$的分子、分母分别同除以4,3,2可得分数$\frac{3}{4}$.

$$\frac{12}{16}=\frac{9}{12}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$$

## 思考

1. 分别将每一个图形中的涂色部分用分数表示，这些分数有什么关系？



$\frac{3}{5}=\frac{(\ )}{20}$ $\frac{3}{5}=\frac{(12)}{20}$

2. 在括号内填入适当的数：$\frac{3}{5}=\frac{(\ )}{20}$.



## 概括

由分数与除法的关系以及除法的运算性质可得：

**分数的基本性质**

分数的分子和分母都乘以或都除以同一个不为零的数，所得的分数与原分数的大小相等，即

$$\frac{a}{b}=\frac{a\times k}{b\times k}=\frac{a\div n}{b\div n}\quad(b\neq 0,k\neq 0,n\neq 0).$$

与$\frac{2}{5}$相等的分数是否只有这三个？



**例题1** 试举出三个与$\frac{2}{5}$大小相等的分数.

**解** 因为$\frac{2\times2}{5\times2}=\frac{4}{10}$，所以由分数的基本性质可知：

$$\frac{4}{10}=\frac{2}{5}.$$

同理：$\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$，$\frac{10}{25}=\frac{2}{5}$.

所以$\frac{4}{10}$，$\frac{6}{15}$，$\frac{10}{25}$是与$\frac{2}{5}$相等的三个分数.

这种分数还有许多，你还能举出多少个？

**例题2** 把$\frac{2}{5}$和$\frac{8}{60}$分别化成分母是15且与原分数大小相等的分数.

**解** $\frac{2}{5}=\frac{2\times3}{5\times3}=\frac{6}{15}$，$\frac{8}{60}=\frac{8\div4}{60\div4}=\frac{2}{15}$.

运用分数的基本性质，可将一个分数化为分母不同而大小相等的分数.

## 练习2.2(1)

1. 在括号内填上适当的数，使等式成立：

(1) $\frac{9}{15}=\frac{3\times(\quad)}{5\times(\quad)}$；　(2) $\frac{2\times(\quad)}{9\times(\quad)}=\frac{8}{(\quad)}$；

(3) $\frac{5\times(\quad)}{2\times(\quad)}=\frac{(\quad)}{14}$；　(4) $\frac{15\div(\quad)}{20\div(\quad)}=\frac{(\quad)}{4}$.

2. 试各写出三个与下列分数分母不同而大小相等的分数：

(1) $\frac{1}{4}$；　(2) $\frac{5}{7}$；　(3) $\frac{4}{6}$；　(4) $\frac{10}{4}$.

3. 在一条数轴上分别用点表示分数$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{4}$，$\frac{4}{8}$，你能得到什么结论？

4 把 $\frac{2}{3}$ 和 $\frac{8}{30}$ 分别化成分母是15且与原分数大小相等的分数.

5 在括号中填上适当的数：

(1) $\frac{1}{4}=\frac{(\quad)}{12}$；　(2) $\frac{3}{7}=\frac{(\quad)}{56}$；　(3) $\frac{6}{5}=\frac{30}{(\quad)}$；

(4) $\frac{(\quad)}{10}=\frac{4}{20}$；　(5) $\frac{36}{24}=\frac{(\quad)}{8}$；　(6) $\frac{7}{35}=\frac{1}{(\quad)}$；

(7) $\frac{18}{(\quad)}=\frac{6}{12}$；　(8) $\frac{20}{16}=\frac{5}{(\quad)}$.

## 思考

你能写出三个与 $\frac{12}{30}$ 大小相等且分母小于30的分数吗?

12与30的最大公因数是什么?

12与30的大于1的公因数有2,3,6，由分数的基本性质可知：

$\frac{12}{30}=\frac{12\div2}{30\div2}=\frac{6}{15}$；$\frac{12}{30}=\frac{12\div3}{30\div3}=\frac{4}{10}$；$\frac{12}{30}=\frac{12\div6}{30\div6}=\frac{2}{5}$.

你还能发现与分数 $\frac{12}{30}$ 相等且分母小于30的分数吗?

所以与 $\frac{12}{30}$ 相等且分母小于30的三个分数有：

$\frac{6}{15}$, $\frac{4}{10}$, $\frac{2}{5}$.

在分数 $\frac{6}{15}$, $\frac{4}{10}$, $\frac{2}{5}$ 中，只有 $\frac{2}{5}$ 的分子和分母互素，我们把这样的分数叫做最简分数.

分子和分母互素的分数，叫做最简分数.

将分数 $\frac{12}{30}$ 分别化为与它相等的分数 $\frac{6}{15}$、$\frac{4}{10}$、$\frac{2}{5}$ 的过程，都称为约分.

把一个分数的分子与分母的公因数约去的过程，称为约分(cancelling).

将$\frac{12}{30}$化成$\frac{24}{60}$是约分吗?

通过约分可以化简分数.



**例题3** 将分数$\frac{12}{18}$约分，并化成最简分数.

**解** $\frac{12}{18}=\frac{2\times2\times3}{2\times3\times3}=\frac{2}{3}$.

也可以写成：

也可以直接用6除12和18.

$\frac{12}{18}=\frac{2}{3}$

先用公因数2分别除12和18，得6和9

然后用公因数3分别除6和9，得2和3

将分数化成最简分数，可以将分子、分母分别除以它们的最大公因数，也可以不断地约分，直到分子、分母互素为止.

**例题4** 把下列结果用最简分数表示：

(1) 24厘米是1米的几分之几?

(2) 小杰一天睡觉9小时，9小时是一天24小时的几分之几?

**解** (1) 1米=100厘米.

注意：单位要一致.

$24\div100=\frac{24}{100}=\frac{4\times6}{4\times25}=\frac{6}{25}$.

(2) $9\div24=\frac{9}{24}=\frac{3}{8}$.

答：(1) 24厘米是1米的$\frac{6}{25}$.

(2) 小杰睡觉的时间是一天24小时的$\frac{3}{8}$.

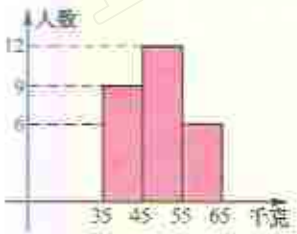
## 练习2.2(2)

1. 写出下列每组数的最大公因数：
   (1) 24，12；　　(2) 9，24；　　(3) 20，45.
2. 指出以下哪些分数是最简分数，把不是最简分数的分数化为最简分数：
   $\frac{2}{10}$，$\frac{12}{13}$，$\frac{3}{7}$，$\frac{21}{33}$，$\frac{2}{81}$，$\frac{22}{35}$，$\frac{15}{4}$，$\frac{24}{15}$.
3. 把以下分数化成最简分数：
   $\frac{20}{70}$，$\frac{15}{35}$，$\frac{42}{45}$，$\frac{21}{36}$，$\frac{33}{55}$，$\frac{26}{52}$，$\frac{50}{120}$，$\frac{28}{35}$，$\frac{81}{18}$.
4. 15分钟是1小时的几分之几？
5. 六年级(1)班共有46名同学，其中女同学28人，女同学占全班人数的几分之几？
6. 小杰的说法是错误的，你能举例说明吗？



如果分数的分子和分母中一个是奇数，另一个是偶数，那么这个分数一定是最简分数.






**例题5**　六年级(2)班全体男生的体重的统计图如左图所示，仔细观察后回答下列问题：

(1) 体重在35千克～45千克(包括35千克，不包括45千克)之间的男生人数是全体男生人数的几分之几？

(2) 体重在55千克～65千克（包括55千克，不包括65千克）之间的男生人数是全体男生人数的几分之几？

**解**　全班男生共　12+9+6=27(人).

体重在35千克～45千克(包括35千克，不包括45千克)之间的男生有9人，体重在55千克～65千克（包括55千克，不包括65千克）之间的男生有6人.

(1) $9\div27=\frac{9}{27}=\frac{1}{3}$.

答：体重在35千克～45千克(包括35千克，不包括45千克)之间的男生人数是全体男生人数的$\frac{1}{3}$.

(2) $6\div27=\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$.

答：体重在55千克～65千克（包括55千克，不包括65千克）之间的男生人数是全体男生人数的$\frac{2}{9}$.

例题6　小杰家去年下半年用电的情况统计如下：

| 月　份 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 用电量(千瓦时) | 205 | 217 | 136 | 95 | 77 | 80 |

(1) 用电最多月份的用电量占第三季度用电总量的几分之几?

(2) 第三季度的用电量占下半年用电总量的几分之几?

解　(1) 用电最多的月份是8月份.

第三季度用电总量是　205+217+136=558（千瓦时）.

$$217\div558=\frac{217}{558}=\frac{7}{18}.$$

答：用电最多月份的用电量占第三季度用电总量的$\frac{7}{18}$.

(2) 下半年用电总量是　558+95+77+80=810(千瓦时).

$$558\div810=\frac{558}{810}=\frac{31}{45}.$$

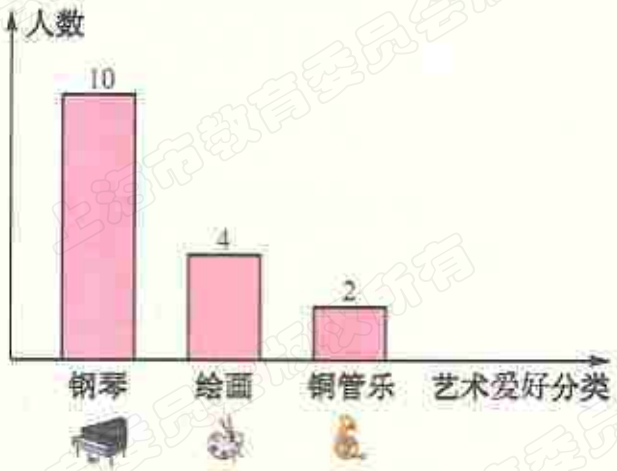
答：第三季度的用电量占下半年用电总量的$\frac{31}{45}$.

## 练习2.2(3)

1. 某学校图书馆里有50 000册书籍，其中20 000册是各学科的参考书，18 000册是小说，10 000册是科普类书籍，其他书籍2 000册．每类书各占图书馆藏书的几分之几？



2. 六年级(3)班共有46名同学，其中有艺术爱好的人数如下图所示：




(1) 有绘画爱好的同学人数占全班人数的几分之几？

(2) 如果将弹钢琴和吹钢管乐看作爱好音乐，那么爱好音乐的同学人数占全班人数的几分之几？

(3) 爱好音乐的同学人数占有艺术爱好同学人数的几分之几？

3. 请调查本班同学的出生月份数，并填入下表：

| 月　份 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 人　数 | | | | | | | | | | | | |
| 占全班人数的几分之几 | | | | | | | | | | | | |

## 2.3 分数的大小比较

还记得小学时学习的两个分数比较大小的方法吗？

对于比较两个同分母的分数$\frac{2}{9}$，$\frac{5}{9}$的大小，只需比较分子的大小，分子大的分数就大．所以$\frac{2}{9}<\frac{5}{9}$．

在数轴上可以画出$\frac{2}{9}$，$\frac{5}{9}$所对应的点，由下图可以看出，表示$\frac{2}{9}$的点在表示$\frac{5}{9}$的点的左边．




分数大小比较反映在数轴上，左面的点所表示的数小于右面的点所表示的数．

**问题**

一根直径为$\frac{5}{6}$厘米的电缆线是否可以穿进内直径为$\frac{7}{8}$厘米的管道？





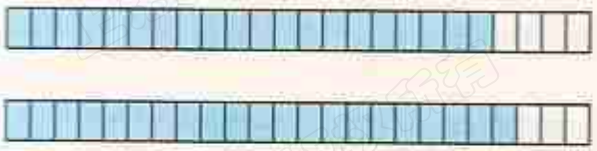








$\frac{5}{6}$，$\frac{7}{8}$的分母分别是6，8，要化成分母相同的分数，分母必须是6，8的公倍数，这个分母叫做公分母(common denominator)．6，8的公倍数有无数个，一般取它们的最小公倍数．因为6和8的最小公倍数是24，所以以24作公分母，然后将分数$\frac{5}{6}$，$\frac{7}{8}$分别化为以24作分母的分数．



$$\frac{5}{6}=\frac{5\times4}{6\times4}=\frac{20}{24},$$

$$\frac{7}{8}=\frac{7\times3}{8\times3}=\frac{21}{24},$$

因为$\frac{20}{24}<\frac{21}{24}$，所以$\frac{5}{6}<\frac{7}{8}$．

在数轴上也可以看出$\frac{5}{6}$与$\frac{7}{8}$的大小：




因此，这根直径为$\frac{5}{6}$厘米的电缆线可以穿进内直径为$\frac{7}{8}$厘米的管道．

将异分母的分数分别化成与原分数大小相等的同分母的分数，这个过程叫做通分．

**例题1** 将下列每组两个分数通分，并比较大小：

(1) $\frac{2}{5}$和$\frac{3}{7}$；　(2) $\frac{9}{25}$和$\frac{4}{15}$．

**解** (1) 用5和7的最小公倍数35作为公分母，

$$\frac{2}{5}=\frac{2\times7}{5\times7}=\frac{14}{35},\quad \frac{3}{7}=\frac{3\times5}{7\times5}=\frac{15}{35}.$$

因为$\frac{14}{35}<\frac{15}{35}$，所以$\frac{2}{5}<\frac{3}{7}$．

(2) 把 15 和 25 的最小公倍数 75 作为公分母，

$\frac{9}{25}=\frac{9\times3}{25\times3}=\frac{27}{75}$，$\frac{4}{15}=\frac{4\times5}{15\times5}=\frac{20}{75}$.

因为$\frac{27}{75}>\frac{20}{75}$，所以$\frac{9}{25}>\frac{4}{15}$.

**例题2** 把$\frac{1}{3}$，$\frac{3}{4}$和$\frac{5}{9}$通分，并比较它们的大小.

**解** 用 3，4，9 的最小公倍数 36 作为公分母，

$\frac{1}{3}=\frac{1\times12}{3\times12}=\frac{12}{36}$，$\frac{3}{4}=\frac{3\times9}{4\times9}=\frac{27}{36}$，$\frac{5}{9}=\frac{5\times4}{9\times4}=\frac{20}{36}$.

因为$\frac{12}{36}<\frac{20}{36}<\frac{27}{36}$，所以$\frac{1}{3}<\frac{5}{9}<\frac{3}{4}$.

## 练习2.3

1. 把下列每组中的两个分数通分，并比较大小：

(1) $\frac{2}{3}$和$\frac{1}{6}$；　(2) $\frac{2}{5}$和$\frac{1}{3}$；　(3) $\frac{2}{7}$和$\frac{2}{3}$；

(4) $\frac{5}{4}$和$\frac{1}{6}$；　(5) $\frac{3}{14}$和$\frac{5}{16}$；　(6) $\frac{11}{12}$和$\frac{5}{8}$.

2. 把$\frac{3}{4}$，$\frac{5}{7}$和$\frac{7}{9}$通分，并按从小到大的顺序排列.

3. 是否存在分母为12的比$\frac{5}{6}$小的最简分数？如果存在，求出所有符合条件的最简分数.

# 2 第2节 分数的运算

## 2.4 分数的加减法

**思考** $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=?$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{5}$

$\frac{1}{2}$已是一半，而$\frac{2}{5}$不到一半……这个等式是不对的吧？







请画图观察或用其他方法思考一下吧.

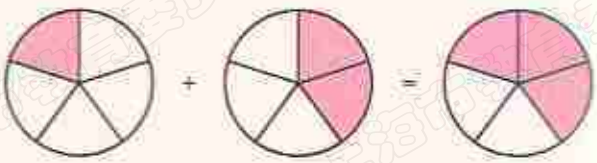
**问题**

1. 5月份小明用自己零用钱的$\frac{1}{5}$买杂志，用零用钱的$\frac{2}{5}$买制作航模的材料.5月份小明买杂志、航模材料共花了零用钱的几分之几？

你还记得小学所学的同分母的加减法吗？



这是两个相同分母的分数相加的问题，即$\frac{1}{5}+\frac{2}{5}$.



$\frac{1}{5}$ + $\frac{2}{5}$ = $\frac{3}{5}$

相同分母的分数相加，分母不变，分子相加：

$$\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{1+2}{5}=\frac{3}{5}$$

所以，小明5月份共花了零用钱的$\frac{3}{5}$.

2．6月份小明用零用钱的$\frac{1}{4}$买杂志，用零用钱的$\frac{2}{3}$买制作航模的材料．6月份小明买杂志、航模材料共花了零用钱的几分之几？

这也是两个分数相加的问题，但$\frac{1}{4}$，$\frac{2}{3}$是两个异分母的分数，如何进行加法运算呢？



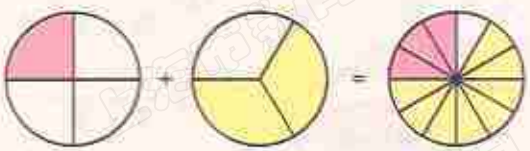
如果把它们都化成同分母的分数，那么就可以用以前学过的方法进行运算了．



如何转化为同分母的分数呢？——通分

$$\frac{1}{4}+\frac{2}{3}$$

$$=\frac{3}{12}+\frac{8}{12}=\frac{3+8}{12}=\frac{11}{12}$$



所以，小明6月份共花了零用钱的$\frac{11}{12}$.

3．小明6月份用零用钱的$\frac{2}{3}$买制作模型的材料，其中一部分是航模材料，另一部分是船模材料．如果小明买航模材料的钱占零用钱的$\frac{5}{12}$，那么买船模材料的钱占零用钱的几分之几？

这是两个异分母分数的减法问题.



$$\frac{2}{3}-\frac{5}{12}=\frac{8}{12}-\frac{5}{12}=\frac{8-5}{12}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$$

通分　　约分

所以,小明6月份买船模材料的钱占零用钱的 $\frac{1}{4}$.

## 概括

异分母分数相加减,先通分,然后按照同分母分数加减法的法则进行计算.

**例题1**　计算:

(1) $\frac{3}{8}+\frac{7}{12}$;　(2) $\frac{5}{6}-\frac{1}{3}$;　(3) $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$.

分数加减混合运算的顺序与整数加减混合运算的顺序相同.

3、4、5的最小公倍数是60.

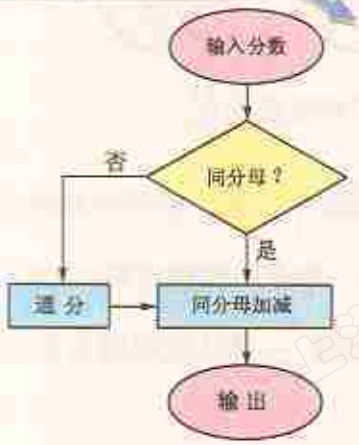
**解**　(1) $\frac{3}{8}+\frac{7}{12}=\frac{9}{24}+\frac{14}{24}=\frac{23}{24}$.

(2) $\frac{5}{6}-\frac{1}{3}=\frac{5}{6}-\frac{2}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

(3) $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{40}{60}+\frac{15}{60}-\frac{12}{60}=\frac{40+15-12}{60}=\frac{43}{60}$.

一般地,分数运算的结果用最简分数表示.

分数加减法的流程图如左图所示.



## 练习2.4(1)

1 计算：

(1) $\frac{3}{4}+\frac{5}{8}$；　(2) $\frac{2}{7}+\frac{3}{5}$；　(3) $\frac{4}{5}-\frac{3}{10}$；

(4) $\frac{11}{12}-\frac{3}{4}+\frac{1}{6}$；　(5) $\frac{12}{25}+\frac{1}{4}$；　(6) $\frac{3}{4}+\frac{5}{12}-\frac{5}{6}$.

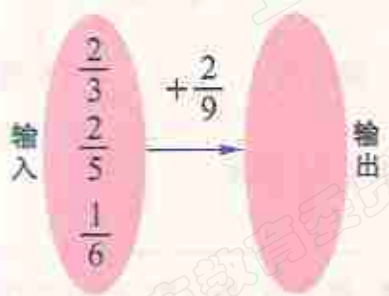
2 学校运来1吨砂子，用于修房和填跳远、跳高所需的砂坑．修房用去$\frac{4}{5}$吨，填砂坑用去$\frac{1}{8}$吨，共用了多少吨砂子？还剩多少吨砂子？



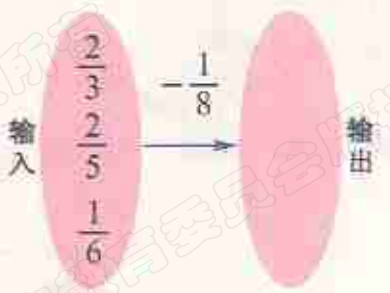
3 在三周的寒假生活中，小明第一周完成了寒假作业的$\frac{1}{5}$，第二周完成了寒假作业的$\frac{5}{12}$．这两周小明完成的寒假作业哪一周多，多多少？两周小明共完成寒假作业的几分之几？

4 在右边的圈中填数：

(1)




(2)




### 思考



徒步行走是一项健身运动．一条路从起点零千米处开始，在每$\frac{1}{4}$千米处设有一个标志．现小杰走到了第7个标志处，他已走了多少千米？如果全程长是4千米，那么小杰还需走多少千米？



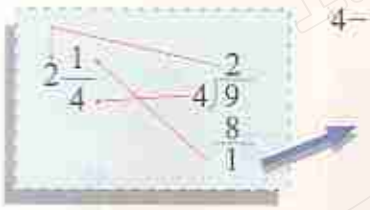

如图，7个$\frac{1}{4}$为$\frac{7}{4}$，$\frac{7}{4}=1+\frac{3}{4}$.

将$1+\frac{3}{4}$记作$1\frac{3}{4}$，即$\frac{7}{4}=1\frac{3}{4}$，读作一又四分之三.

所以，小杰已走了$1\frac{3}{4}$千米.

分子比分母小的分数叫做**真分数**(proper fraction)，分子大于或者等于分母的分数叫做**假分数**(improper fraction).

一个正整数与一个真分数相加所成的数叫做**带分数**(mixed numbers).




$4-\frac{7}{4}=\frac{4}{1}-\frac{7}{4}=\frac{16}{4}-\frac{7}{4}=\frac{9}{4}$　$\frac{9}{4}=\frac{8}{4}+\frac{1}{4}=2+\frac{1}{4}=2\frac{1}{4}$

假分数　　真分数　带分数

所以，小杰还需走$2\frac{1}{4}$千米.



想一想，真分数、假分数和1有怎样的大小关系？

也可以这样算：

$3\frac{2}{5}=\frac{3\times5+2}{5}=\frac{17}{5}$



**例题2**　将以下的带分数化为假分数：

(1) $3\frac{2}{5}$；　　(2) $5\frac{5}{6}$.

**解**　(1) $3\frac{2}{5}=3+\frac{2}{5}=\frac{15}{5}+\frac{2}{5}=\frac{17}{5}$.

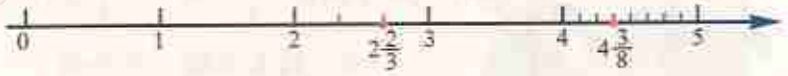
(2) $5\frac{5}{6}=5+\frac{5}{6}=\frac{30}{6}+\frac{5}{6}=\frac{35}{6}$.

**例题3** 将下列假分数化为带分数，并在数轴上标出相应的点：

(1) $\frac{8}{3}$； (2) $\frac{35}{8}$.

**解** (1) $\frac{8}{3}=\frac{6}{3}+\frac{2}{3}=2+\frac{2}{3}=2\frac{2}{3}$.

(2) $\frac{35}{8}=\frac{32}{8}+\frac{3}{8}=4+\frac{3}{8}=4\frac{3}{8}$.




带分数是假分数的另一种表示形式，用带分数可以迅速估计分数值的大小.

**例题4** 计算：

(1) $\frac{5}{3}+\frac{3}{5}$； (2) $3\frac{3}{4}+1\frac{1}{6}$； (3) $3\frac{5}{12}-\frac{11}{4}$.

**解** (1) $\frac{5}{3}+\frac{3}{5}=\frac{25}{15}+\frac{9}{15}=\frac{34}{15}=2\frac{4}{15}$.

分数加法遵循与整数加法一样的运算律：交换律和结合律.

(2) $3\frac{3}{4}+1\frac{1}{6}=3+\frac{3}{4}+1+\frac{1}{6}=(3+1)+\frac{3}{4}+\frac{1}{6}$

$=4+\frac{9+2}{12}=4\frac{11}{12}$.

也可以这样计算：

$3\frac{5}{12}-\frac{11}{4}=3+\frac{5}{12}-\frac{11}{4}$

$=\frac{36+5-33}{12}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$.

(3) $3\frac{5}{12}-\frac{11}{4}=3+\frac{5}{12}-\left(2+\frac{3}{4}\right)=3-2+\frac{5}{12}-\frac{3}{4}$

$=1+\frac{5}{12}-\frac{3}{4}=\frac{12+5-9}{12}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$.

**例题5** 计算：$2\frac{2}{3}+\frac{2}{7}+1\frac{5}{6}$.

**解** $2\frac{2}{3}+\frac{2}{7}+1\frac{5}{6}=2+\frac{2}{3}+\frac{2}{7}+1+\frac{5}{6}$

$=(2+1)+\frac{2}{3}+\frac{5}{6}+\frac{2}{7}=3+\frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{\underset{2}{\cancel{6}}}+\frac{2}{7}=3+\frac{25}{14}$

不要将结果写成$3\frac{25}{14}$.

$=3+1+\frac{11}{14}=4\frac{11}{14}$.

带分数的加减运算，可将它们的整数部分和真分数部分分别相加减，再将所得的结果合并起来；或者将带分数化为假分数再进行加减运算.

分数运算的结果如果是假分数，一般用带分数表示.



**例题6** 小丽和小杰在一次联欢会上各唱了一首歌，时间分别是$3\frac{2}{3}$分钟和$1\frac{1}{4}$分钟.问：

(1) 两人共唱了几分钟？

(2) 小丽比小杰多唱了几分钟？

$3\frac{2}{3}-1\frac{1}{4}=3-1+\frac{2}{3}-\frac{1}{4}$

$=2+\frac{8-3}{12}$

$=2\frac{5}{12}$.

**解** (1) $3\frac{2}{3}+1\frac{1}{4}=3+\frac{2}{3}+1+\frac{1}{4}=4+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$

$=4+\frac{8+3}{12}=4\frac{11}{12}$(分).

(2) $3\frac{2}{3}-1\frac{1}{4}=\frac{11}{3}-\frac{5}{4}=\frac{44-15}{12}=\frac{29}{12}=2\frac{5}{12}$(分).

答：(1) 两人共唱了$4\frac{11}{12}$分钟.

(2) 小丽比小杰多唱了$2\frac{5}{12}$分钟.

## 练习2.4(2)

1. 计算：

(1) $\frac{2}{5}+\frac{11}{10}$；　(2) $\frac{6}{5}-\frac{2}{3}$；　(3) $\frac{5}{3}+\frac{7}{4}$；　(4) $\frac{11}{12}+\frac{4}{3}-\frac{3}{4}$.

2. 将下列带分数化为假分数：

(1) $3\frac{1}{3}$；　(2) $2\frac{3}{4}$；　(3) $7\frac{3}{5}$；　(4) $34\frac{1}{2}$；

(5) $9\frac{2}{9}$；　(6) $51\frac{2}{3}$.

3 将下列假分数化为带分数，并在数轴上标出相应的点：

(1) $\frac{11}{3}$；　(2) $\frac{25}{12}$；　(3) $\frac{37}{10}$；　(4) $\frac{28}{5}$.

4 分数$\frac{23}{4}$介于哪两个正整数之间？(　　)

(A) 3和4；　(B) 4和5；　(C) 5和6；　(D) 6和7.

5 计算：

(1) $2\frac{1}{3}+3\frac{1}{4}$；　(2) $\frac{11}{3}-2\frac{1}{2}$　(3) $4\frac{2}{5}-2\frac{1}{6}$.

**例题7** 一个数减去$\frac{2}{5}$，再加上$\frac{1}{4}$等于$\frac{5}{8}$，求这个数.

**解** 设所求数为$x$，根据题意，列出等式

$$x-\frac{2}{5}+\frac{1}{4}=\frac{5}{8}.$$

$$x=\frac{5}{8}-\frac{1}{4}+\frac{2}{5}.$$

$$x=\frac{3}{8}+\frac{2}{5}.$$

$$x=\frac{31}{40}.$$

所以，这个数为$\frac{31}{40}$.




## 练习2.4(3)

1 解方程：

(1) $x+\frac{2}{3}=\frac{1}{12}+\frac{3}{4}$；　(2) $x+\frac{3}{10}=\frac{4}{5}-\frac{1}{6}$；　(3) $x-1\frac{2}{7}=\frac{3}{14}$；　(4) $x-\frac{5}{3}=\frac{5}{6}+\frac{2}{9}$.

2 小明做语文作业用了$\frac{1}{3}$小时，做数学作业用了$\frac{1}{2}$小时，做英语作业用了$\frac{5}{12}$小时，一共做了多少小时？

六年级的学生参加探究性课题的研究，每人只能参加一组，其中全年级人数的$\frac{3}{100}$参加了课题组1，全年级人数的$\frac{3}{50}$参加了课题组2，全年级人数的$\frac{7}{150}$参加了课题组3.这三个课题组的人数共占了全年级人数的几分之几？



## 2.5 分数的乘法

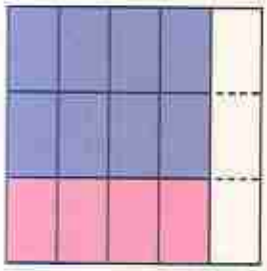
### 思考



对于两个正整数的乘法，如$4\times 2$，我们知道，它的意义是将“2”看成一个总体，然后扩大到它的4倍.

对于两个分数的乘法，如$\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}$，它的意义是什么呢？





如图，取一个边长为1的正方形，将一边5等分，取其中的4份，涂上粉红色，粉红色部分是原正方形的$\frac{4}{5}$，把“$\frac{4}{5}$”看成一个总体，再将正方形的另一边3等分，取其中的2份，涂上蓝色，此时粉红色和蓝色的公共部分（紫色）就表示$\frac{4}{5}$的$\frac{2}{3}$，也就是$\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}$的意义.

从图中可知，紫色部分占这个正方形的$\frac{8}{15}$，即

$$\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{15}.$$

一般地，由于分数$\frac{p}{q}$的意义是将一个总体等分为$q$份而取其中$p$份，于是我们把两个分数相乘$\frac{p}{q}\times\frac{m}{n}$的意义规定为：在分数$\frac{p}{q}$的基础上，以$\frac{p}{q}$为总体，“再”等分为$n$份而取其中$m$份，其结果是$\frac{p\times m}{q\times n}$，即

$$\frac{p}{q}\times\frac{m}{n}=\frac{p\times m}{q\times n}\ (q\neq 0,n\neq 0).$$



两个分数相乘，将分子相乘的积作积的分子，分母相乘的积作积的分母.

**例题1** 计算：

(1) $\frac{5}{6}\times\frac{1}{3}$；(2) $\frac{3}{8}\times\frac{2}{5}$；(3) $\frac{4}{9}\times 13\frac{1}{2}$.

**解** (1) $\frac{5}{6}\times\frac{1}{3}=\frac{5\times 1}{6\times 3}=\frac{5}{18}$.

(2) $\frac{3}{8}\times\frac{2}{5}=\frac{3\times 2}{8\times 5}=\frac{6}{40}=\frac{3}{20}$.

先将带分数化成假分数.

(3) $\frac{4}{9}\times 13\frac{1}{2}=\frac{4}{9}\times\frac{27}{2}=\frac{108}{18}=6$.

计算(2)、(3)题时，也可以先约分，再求积：

$\frac{3}{\cancel{8}_{4}}\times\frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{5}=\frac{3\times 1}{4\times 5}=\frac{3}{20}$；$\frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{\underset{1}{\cancel{9}}}\times\frac{\overset{3}{\cancel{27}}}{\underset{1}{\cancel{2}}}=2\times 3=6$.

我每天练琴$\frac{3}{4}$小时，你们知道我一周(7天)共练琴多少小时吗？

这是求7个$\frac{3}{4}$小时是多少的问题，如何计算$\frac{3}{4}\times 7$呢？







计算$\frac{3}{4}\times 7$时，把整数看作分母是1的分数，得

$$\frac{3}{4}\times 7=\frac{3}{4}\times\frac{7}{1}=\frac{3\times 7}{4\times 1}=\frac{21}{4}=5\frac{1}{4}.$$

同样，$7\times\frac{3}{4}=\frac{7}{1}\times\frac{3}{4}=\frac{7\times 3}{1\times 4}=\frac{21}{4}=5\frac{1}{4}$.

整数与分数相乘，整数与分数的分子的积作积的分子，分母不变.

**例题2** 计算：

(1) $\frac{5}{12}\times 6$；　　(2) $12\times\frac{3}{10}$.

**解** (1) $\frac{5}{\cancel{12}_{2}}\times\frac{\cancel{6}^{1}}{1}=\frac{5\times 1}{2}=\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}$.

两个分数在相乘前可先约分.

(2) $\frac{\cancel{12}^{6}}{1}\times\frac{3}{\cancel{10}_{5}}=6\times\frac{3}{5}=\frac{18}{5}=3\frac{3}{5}$.

**例题3** 计算：

(1) $\frac{10}{3}\times 1\frac{1}{5}$；　　(2) $3\frac{5}{12}\times 2\frac{3}{4}$.

**解** (1) $\frac{\cancel{10}^{2}}{3}\times\frac{\cancel{6}^{2}}{\cancel{5}_{1}}=4$.

(2) $3\frac{5}{12}\times 2\frac{3}{4}=\frac{41}{12}\times\frac{11}{4}=\frac{451}{48}=9\frac{19}{48}$.

**例题4** 一个集装厢内装有20吨的货物，货物总量的$\frac{5}{12}$是服装，在服装类货物中，童装又占了$\frac{3}{8}$，这个集装厢装运的童装有多少吨？

求20的$\frac{5}{12}$是多少的问题，算式是$20\times\frac{5}{12}$.

求$\frac{25}{3}$的$\frac{3}{8}$是多少的问题，算式是$\frac{25}{3}\times\frac{3}{8}$.

**解** $20\times\frac{5}{12}=\frac{25}{3}$，

$\frac{25}{3}\times\frac{3}{8}=\frac{25}{8}=3\frac{1}{8}$(吨).

答：这个集装厢装运的童装有$3\frac{1}{8}$吨.

本题也可以直接列下式解答：

$$20\times\frac{5}{12}\times\frac{3}{8}=\frac{25}{8}=3\frac{1}{8}.$$

## 练习2.5

1. 口算：

(1) $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$；　(2) $\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}$；　(3) $\frac{3}{8}\times\frac{2}{3}$；

(4) $\frac{5}{4}\times\frac{3}{4}$；　(5) $4\times\frac{5}{8}$；　(6) $\frac{1}{3}\times 9$.

2. 计算：

(1) $\frac{12}{13}\times 2$；　(2) $\frac{4}{7}\times 14$；　(3) $8\times\frac{5}{6}$；

(4) $2\frac{3}{4}\times 3$；　(5) $1\frac{2}{5}\times 2\frac{1}{3}$；　(6) $\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}$.

3. 小杰每天看电视$\frac{5}{6}$小时，五天共看电视多少小时？

4. 一个正方形的边长是$\frac{5}{6}$米，它的周长是多少米？

5. (1) $\frac{2}{3}$千克的$\frac{1}{4}$是多少千克？　(2) $\frac{3}{8}$米的$\frac{2}{3}$是多少米？

(3) $\frac{12}{5}$小时的$\frac{7}{24}$是多少小时？　　(4) $2\frac{2}{5}$米的$\frac{3}{4}$是多少米？

6 在括号中填入“>”，“<”或“=”：

(1) $11\times\frac{12}{13}$(　)$\frac{12}{13}$；　　(2) $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}$(　)$\frac{2}{3}$；

(3) $\frac{3}{5}\times3$(　)$\frac{3}{5}$；　　(4) $\frac{2}{11}\times\frac{12}{7}$(　)$\frac{2}{11}$.

讨论一下，有什么方法可以使你迅速地作出以上的判断.

7 小杰家本月初买了25千克大米，到月底还剩下其中的$\frac{2}{5}$.本月小杰家剩下的大米有多少千克？

## 2.6　分数的除法

### 思考

口算：

(1) $4\times\frac{1}{4}$；　　(2) $\frac{5}{12}\times\frac{12}{5}$；

(3) $2\frac{2}{3}\times\frac{3}{8}$.　　(4) $\frac{p}{q}\times\frac{q}{p}$ $(p\neq0,\ q\neq0)$.

根据计算结果，你能发现什么结论？




和整数一样，分数的除法也是乘法的逆运算.




因为$4\times\frac{1}{4}=1$，所以$1\div\frac{1}{4}=4$.

因为$\frac{p}{q}\times\frac{q}{p}=1$，所以$1\div\frac{p}{q}=\frac{q}{p}$ $(p\neq0,\ q\neq0)$.

1除以一个不为零的数得到的商，叫做这个数的**倒数**(reciprocal)，

$a$的倒数是$\frac{1}{a}$ $(a\neq0)$，$\frac{p}{q}$的倒数是$\frac{q}{p}$ $(p\neq0, q\neq0)$.

4的倒数为$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{4}$的倒数为4，4和$\frac{1}{4}$互为倒数.

$\frac{5}{12}$的倒数为$\frac{12}{5}$，$\frac{12}{5}$的倒数为$\frac{5}{12}$，$\frac{5}{12}$和$\frac{12}{5}$互为倒数.

互为倒数的两个数的乘积为1.

0有没有倒数？
1的倒数是几？



## 问题

你能说出两个互为倒数的数吗？它们是否一定有一个数大于1？

## 练习2.6(1)

1. 写出以下各数的倒数：

$\frac{5}{6}$，$\frac{11}{4}$，3，$2\frac{1}{2}$，$b$ $(b\neq0)$.

2. 





请问：他们的说法正确吗？

除法是乘法的逆运算

由分数的乘法$\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{8}{15}$，可得$\frac{8}{15}$除以$\frac{4}{5}$的商为$\frac{2}{3}$，记作$\frac{8}{15}\div\frac{4}{5}=\frac{2}{3}$.

## 思考

什么叫方程？

如何解 $\frac{3}{4}x=\frac{2}{5}$ 这个方程呢？

如何计算 $\frac{2}{5}\div\frac{3}{4}$ 的值呢？

设 $\frac{2}{5}$ 除以 $\frac{3}{4}$ 的商为 $x$，那么得方程 $\frac{3}{4}x=\frac{2}{5}$.

在方程的两边同乘以 $\frac{3}{4}$ 的倒数 $\frac{4}{3}$，得

$$\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}x=\frac{2}{5}\times\frac{4}{3}.$$

所以 $x=\frac{2}{5}\times\frac{4}{3}$，$x=\frac{8}{15}$.

而 $x=\frac{2}{5}\div\frac{3}{4}$，所以 $\frac{2}{5}\div\frac{3}{4}=\frac{2}{5}\times\frac{4}{3}$.

（倒数）

由以上虚线框内的算式，你能得到什么结论呢？

## 概括

**分数除法的运算法则**

甲数除以乙数(0除外)，等于甲数乘以乙数的倒数．用字母表示就是：

$$\frac{m}{n}\div\frac{p}{q}=\frac{m}{n}\times\frac{q}{p}\quad(n\neq0,\ p\neq0,\ q\neq0).$$

**例题1** 小丽的家与学校相距4千米，她每天用 $\frac{4}{11}$ 小时骑自行车到学校．小丽骑车的平均速度是每小时多少千米？

**解** $4\div\frac{4}{11}=\overset{1}{\cancel{4}}\times\frac{11}{\underset{1}{\cancel{4}}}=11$(千米/时).

答：小丽骑车的平均速度是每小时11千米．

如何计算呢?



**例题2** 计算:

(1) $\frac{15}{28}\div\frac{5}{7}$; (2) $\frac{4}{15}\div 8$; (3) $2\frac{1}{3}\div\frac{14}{15}$.

**解** (1) $\frac{15}{28}\div\frac{5}{7}=\frac{\overset{3}{\cancel{15}}}{\underset{4}{\cancel{28}}}\times\frac{\overset{1}{\cancel{7}}}{\underset{1}{\cancel{5}}}=\frac{3}{4}$.

(2) $\frac{4}{15}\div 8=\frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{15}\times\frac{1}{\underset{2}{\cancel{8}}}=\frac{1}{30}$.

先将带分数化成假分数,再运算.

(3) $2\frac{1}{3}\div\frac{14}{15}=\frac{7}{3}\div\frac{14}{15}=\frac{\overset{1}{\cancel{7}}}{\underset{1}{\cancel{3}}}\times\frac{\overset{5}{\cancel{15}}}{\underset{2}{\cancel{14}}}=\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}$.

**例题3** 一个数的$\frac{11}{12}$是$\frac{1}{3}$,求这个数.

**解** 设所求数为$x$,据题意可列方程 $\frac{11}{12}x=\frac{1}{3}$.

$x=\frac{1}{3}\div\frac{11}{12}$, $x=\frac{1}{\underset{1}{\cancel{3}}}\times\frac{\overset{4}{\cancel{12}}}{11}$, $x=\frac{4}{11}$.

所以,这个数是$\frac{4}{11}$.

## 练习2.6(2)

1. 填空:

(1) $\frac{8}{9}\div\frac{2}{3}=\frac{8}{9}\times(\quad)$; (2) $\frac{11}{12}\div(\quad)=\frac{11}{12}\times\frac{3}{5}$;

(3) $\frac{2}{7}\div\frac{2}{5}=(\quad)\times\frac{5}{2}$; (4) $(\quad)\div\frac{13}{10}=\frac{3}{2}\times\frac{10}{13}$.

2. 计算:

(1) $1\div\frac{3}{8}$; (2) $5\div\frac{5}{6}$; (3) $8\div\frac{4}{5}$;

(4) $\frac{4}{5}\div 6$; (5) $\frac{8}{9}\div\frac{1}{2}$; (6) $\frac{2}{3}\div\frac{5}{2}$.

4 小杰用$\frac{8}{15}$小时走完了$\frac{8}{9}$千米的路程，以此速度他1小时可以走多少千米？

5 计算：

(1) $\frac{4}{5}\div\frac{2}{3}$；　(2) $\frac{3}{11}\div\frac{2}{5}$；　(3) $\frac{5}{6}\div\frac{6}{5}$；

(4) $\frac{2}{27}\div\frac{8}{9}$；　(5) $\frac{3}{10}\div\frac{6}{25}$；　(6) $\frac{5}{14}\div\frac{10}{7}$.

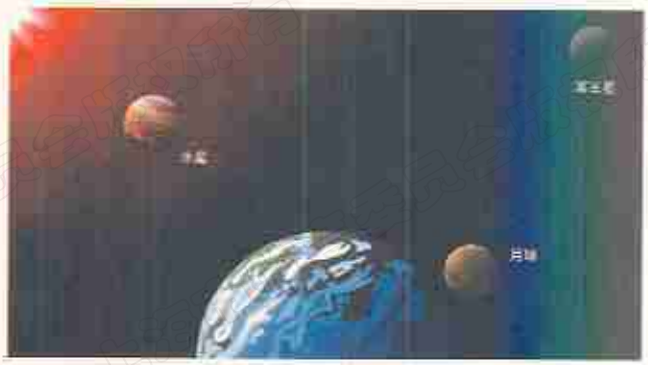
6 解方程：

(1) $\frac{6}{7}x=3$；　(2) $\frac{5}{4}x=\frac{7}{8}$；　(3) $\frac{7}{24}x=\frac{2}{21}$.

## 2.7 分数与小数的互化

### 问题

水星、冥王星、月球的直径分别约是地球直径的$\frac{19}{50}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{869}{3189}$，你能比较它们直径之间的大小吗？




小学时我们已学习了分数、小数，现在又学习了分数与除法的关系，比较上面三个分数的大小问题可以用通分的方法，也可以将分数化为小数，直接比较．如比较两个分数$\frac{2}{5}$和$\frac{3}{4}$的大小，除了通分化为同分母的分数外，还可以将分数化为小数进行比较．

$\frac{2}{5}=2\div5=0.4$，$\frac{3}{4}=3\div4=0.75$，

因为$0.4<0.75$，所以$\frac{2}{5}<\frac{3}{4}$.

**例题1** 把下列分数化成有限小数，如果不能化成有限小数，将其结果保留三位小数.

$\frac{3}{5}$，$\frac{4}{27}$，$\frac{16}{25}$，$\frac{31}{4}$，$\frac{9}{37}$，$\frac{17}{100}$.

**解** $\frac{3}{5}=3\div5=0.6$；$\frac{4}{27}=4\div27\approx0.148$；

$\frac{16}{25}=16\div25=0.64$；$\frac{31}{4}=31\div4=7.75$；

$\frac{9}{37}=9\div37\approx0.243$；$\frac{17}{100}=17\div100=0.17$.

$\frac{4}{27}=4\div27$
$=0.148\,148\cdots\cdots$



小组合作，请使用计算器，再分别将若干个分数化成小数，你能发现分数化成有限小数的规律吗？

一个最简分数，如果分母中只含有素因数2和5，再无其他素因数，那么这个分数可以化成有限小数；否则就不能化成有限小数.

$\frac{5}{6}$，$\frac{3}{8}$，$\frac{2}{15}$能否化成有限小数呢？

**例题2** 把0.9，0.25，0.234，2.12分别化成分数.

**解** $0.9=\frac{9}{10}$，← 0.9是一位小数.

$0.25=\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$，← 0.25是两位小数.

$0.234=\frac{234}{1\,000}=\frac{117}{500}$，← 0.234是三位小数.

$2.12=2+\frac{1}{10}+\frac{2}{100}$
$=\frac{212}{100}=\frac{53}{25}$.

$2.12=\frac{212}{100}=\frac{53}{25}=2\frac{3}{25}$. ← 2.12是两位小数.

由上例你发现了小数化成分数的简便方法了吗？

小数化成分数，一般要化成最简分数.

**例题3** 将$\frac{2}{5}$，$\frac{19}{40}$，0.45按从小到大的顺序排列.

**解** $\frac{2}{5}=0.4$，$\frac{19}{40}=0.475$，

因为$0.4<0.45<0.475$，所以这三个数按从小到大的顺序排列是：$\frac{2}{5}$，0.45，$\frac{19}{40}$.



还可以用什么方法比较它们之间的大小呢?

## 练习2.7(1)

1. 将下列分数分别化成小数，不能化成有限小数的保留三位小数：
$\frac{7}{8}$，$\frac{4}{15}$，$\frac{12}{25}$，$\frac{5}{12}$，$\frac{17}{40}$，$\frac{32}{5}$，$\frac{45}{31}$.
2. 与0.27最接近的分数是(　　).
(A) $\frac{1}{3}$；　(B) $\frac{4}{11}$；　(C) $\frac{7}{20}$；　(D) $\frac{11}{40}$.
3. 将下列小数分别化成最简分数：
0.22，0.15，0.4，0.32，0.45，0.65，1.34，2.56.
4. 将$\frac{4}{5}$，0.75，$\frac{5}{8}$，$\frac{15}{19}$按从大到小的顺序排列.
5. 小杰自行车上的一个螺帽松了，他准备用扳手紧一下.他拿了一套扳手，它们的尺寸大小分别是$\frac{7}{64}''$，$\frac{1}{8}''$，$\frac{3}{32}''$，$\frac{3}{16}''$，$\frac{5}{32}''$，$\frac{1}{4}''$，现小杰用$\frac{3}{32}''$的扳手紧太小，用$\frac{3}{16}''$的扳手紧太大，那么小杰只有在$\frac{3}{32}''$和$\frac{3}{16}''$之间的扳手中选择.问$\frac{3}{32}''$和$\frac{3}{16}''$之间的扳手还有哪几把.*



* $\frac{3}{32}''$表示$\frac{3}{32}$英寸.英寸是英制的一种长度单位，1英寸等于2.54厘米.我国现规定采用的长度单位是公制单位，有千米、米、厘米等.

这样做下去何时会结束?



## 观察

下面是分数$\frac{1}{3}$和$\frac{3}{22}$分别化成小数的过程:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 0.333\cdots \\
3 & 10 \\
 & 9 \\
\hline
 & 10 \\
 & 9 \\
\hline
 & 10 \\
 & 9 \\
\hline
 & 1 \\
 & \cdots\cdots
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
 & 0.13636\cdots \\
22 & 30 \\
 & 22 \\
\hline
 & 80 \\
 & 66 \\
\hline
 & 140 \\
 & 132 \\
\hline
 & 80 \\
 & 66 \\
\hline
 & 140 \\
 & 132 \\
\hline
 & 8 \\
 & \cdots\cdots
\end{array}
$$

你能发现什么规律吗?



这两个分数的分子除以分母是除不尽的,但在所得商的小数点后面有些数字是有规律地重复出现的,如:

重复出现的数字是"3", → $\frac{1}{3}$化成小数,结果为0.3333…,

重复出现的数字是"36", → $\frac{3}{22}$化成小数,结果为0.1363636….

一个小数从小数部分的某一位起,一个数字或者几个数字依次不断地重复出现,这个小数叫做**循环小数**(repeating decimal).

一个循环小数的小数部分中依次不断地重复出现的第一个最少的数字组,叫做这个循环小数的**循环节**(repetend).

为了书写简便,小数的循环部分只写出第一个循环节,在这个循环节的首位和末位的数字上面各记一个圆点.例如:

0.3333…的循环节为"3",写作$0.\dot{3}$,即$\frac{1}{3}=0.\dot{3}$;

0.1363636…的循环节为"36",写作$0.1\dot{3}\dot{6}$,即$\frac{3}{22}$



$=0.1\dot{3}6$.

$8.347564756\cdots$的循环节为“4756”，写作$8.34\dot{7}56\dot{}$.

**例题4** 将下列分数化成循环小数：

(1) $\frac{2}{9}$； (2) $\frac{17}{22}$； (3) $\frac{41}{27}$.

循环节为什么不是“772”？



**解** (1) $\frac{2}{9}=0.\dot{2}$.

(2) $\frac{17}{22}=0.7\dot{7}2\dot{}$.

(3) $\frac{41}{27}=1.\dot{5}1\dot{8}$.

对于一个分数来说，它总可以化为有限小数或循环小数，反之，有限小数和循环小数也总可以化为分数(这部分将在拓展内容中介绍).

## 练习2.7(2)

1. 下列各数哪些是循环小数？哪些不是循环小数？

   0.555，0.123123…，1.2345345…，

   2.235464309…，0.210210…，12.121212….

2. 循环小数2.35757…的循环节是_____，用简便方法写作_____，保留三位小数写作_____.

3. 将下列分数化成小数：

   (1) $\frac{5}{9}$； (2) $\frac{9}{5}$； (3) $\frac{11}{12}$； (4) $\frac{43}{11}$.

4. 将$\frac{2}{3}$，0.666，0.6656按从小到大的顺序排列.

5. 现在你能比较水星、冥王星、月球直径之间的大小了吗？

拓展

# 无限循环小数与分数的互化

分数都可以化成小数，一般化小数的方法是分子除以分母，除得尽的是有限小数，除不尽的是无限循环小数；反之，有限小数和无限循环小数也都可以化成分数．我们已经学会了把有限小数化成分数，那么，无限循环小数如何化成分数呢？

无限循环小数化成分数的问题，在高中的数学中我们会作更深入的研究，这里仅介绍一种将无限循环小数化成分数的方法．

**例题1** 将$0.\dot{5}$化成分数．

**解** 设 $x=0.\dot{5}$，那么 $10x=5.\dot{5}$．

而 $5.\dot{5}=5+0.\dot{5}$，所以 $10x=5+x$．

化简得 $9x=5$，解得 $x=\frac{5}{9}$．

所以，$0.\dot{5}=\frac{5}{9}$．

**例题2** 将$0.\dot{5}\dot{3}$化成分数．

$53+0.\dot{5}\dot{3}=53+x$

**解** 设 $x=0.\dot{5}\dot{3}$，那么 $100x=53.\dot{5}\dot{3}$．

而 $53.\dot{5}\dot{3}=53+0.\dot{5}\dot{3}$，所以 $100x=53+x$．

化简得 $99x=53$，解得 $x=\frac{53}{99}$．

所以，$0.\dot{5}\dot{3}=\frac{53}{99}$．

等式 $0.1+0.0\dot{5}\dot{0}\dot{3}=\frac{1+x}{10}$ 是如何得到的？



**例题3** 将$0.1\dot{5}0\dot{3}$化成分数．

**解** 设 $x=0.\dot{5}0\dot{3}$，那么 $1\,000x=503.\dot{5}0\dot{3}$．

而 $503.\dot{5}0\dot{3}=503+0.\dot{5}0\dot{3}$，所以 $1\,000x=503+x$．

化简得 $999x=503$，解得 $x=\frac{503}{999}$，

$0.1\dot{5}\dot{0}3=0.1+0.0\dot{5}\dot{0}3$，而 $0.1+0.0\dot{5}\dot{0}3=\frac{1+x}{10}$，

所以，$0.1\dot{5}\dot{0}3=\frac{1\,502}{9\,990}$.




**思考**

根据前面的方法，请将无限循环小数$0.\dot{9}$化为分数，你会发现什么结果？对这个结果你感到意外吗？

## 2.8 分数、小数的四则混合运算

分数的四则混合运算顺序与整数的四则混合运算顺序相同.

**例题1** 计算：(1) $\frac{3}{4}-0.25$；　　(2) $\frac{2}{3}+0.55$.

**分析** 这是分数和小数的加减混合运算，只需将题中的数同时化成小数或分数后再运算.但当分数不能化成有限小数时，则应同时化成分数后运算.

**解** (1) $\frac{3}{4}-0.25=0.75-0.25=0.5$；

或 $\frac{3}{4}-0.25=\frac{3}{4}-\frac{25}{100}=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

(2) $\frac{2}{3}+0.55=\frac{2}{3}+\frac{55}{100}=\frac{2}{3}+\frac{11}{20}$

$=\frac{40+33}{60}=\frac{73}{60}=1\frac{13}{60}$.



**例题2** 一群年轻人去郊外旅游，共用了$5\frac{3}{4}$小时.其中坐车用了2小时10分钟，吃午饭用了0.5小时.那么他们实际在一起游玩的时间是多少小时?

分析 2小时10分钟化为小时是$2\frac{1}{6}$时.

解 $5\frac{3}{4}-2\frac{1}{6}-0.5$

$=5+\frac{3}{4}-2-\frac{1}{6}-\frac{1}{2}$

$=3+\frac{9}{12}-\frac{2}{12}-\frac{6}{12}$

$=3+\frac{1}{12}$

$=3\frac{1}{12}$(时).

答：他们实际在一起游玩的时间是$3\frac{1}{12}$小时.

也可以这样计算：

$5+\frac{3}{4}-2-\frac{1}{6}-\frac{1}{2}$

$=3+\frac{3}{4}-\frac{1}{6}-\frac{1}{2}$

$=3+\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)$

$=3+\frac{3}{4}-\frac{2}{3}$

$=3+\frac{9-8}{12}$

$=3\frac{1}{12}$.

## 思考

计算：$\frac{3}{8}\div3\times\frac{3}{4}$.



$\frac{3}{8}\div3\times\frac{3}{4}=\frac{9}{8}\times\frac{3}{4}=\frac{27}{32}$



$\frac{3}{8}\div3\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}\div\left(3\times\frac{3}{4}\right)$

$=\frac{3}{8}\div\frac{9}{4}=\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{2}{\cancel{8}}}\times\frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{\underset{3}{\cancel{9}}}=\frac{1}{6}$

他们的解法是否正确？如果有错误，请指出来，并加以改正.

**例题3** 计算：

(1) $\frac{12}{25}\div\frac{2}{3}\div\frac{6}{5}$；　　(2) $\frac{3}{7}\times\frac{5}{6}+\frac{5}{14}\div\frac{2}{3}$.

解 (1) $\frac{12}{25}\div\frac{2}{3}\div\frac{6}{5}$

也可以先直接将除法转化为乘法，再约分.

$$\frac{12}{25}\div\frac{2}{3}\div\frac{6}{5}=\frac{12}{25}\times\frac{3}{2}\times\frac{5}{6}.$$

$$=\frac{\overset{6}{\cancel{12}}}{25}\times\frac{3}{\underset{1}{\cancel{2}}}\div\frac{6}{5}$$

$$=\frac{\overset{1}{\cancel{6}}}{\underset{5}{\cancel{25}}}\times3\times\frac{\overset{1}{\cancel{5}}}{\underset{1}{\cancel{6}}}$$

$$=\frac{3}{5}.$$

(2) $\frac{3}{7}\times\frac{5}{6}+\frac{5}{14}\div\frac{2}{3}$

先乘除，后加减.

$$=\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{7}\times\frac{5}{\underset{2}{\cancel{6}}}+\frac{5}{14}\times\frac{3}{2}$$

$$=\frac{5}{14}+\frac{15}{28}=\frac{25}{28}.$$

**例题4** 计算：$\frac{3}{4}\times\left|2.5-\frac{1}{4}\right|+\frac{5}{12}\div0.25$.

**解** $\frac{3}{4}\times\left|2.5-\frac{1}{4}\right|+\frac{5}{12}\div0.25$

先将小数化成分数，然后再运算.

$$=\frac{3}{4}\times\frac{10-1}{4}+\frac{5}{12}\div\frac{1}{4}$$

$$=\frac{27}{16}+\frac{5}{12}\times4=\frac{81+80}{48}=\frac{161}{48}=3\frac{17}{48}.$$



**例题5** 某超市蜜桔的售价为每千克 9.2元，小丽买了5千克，小杰买的蜜桔的千克数是小丽所买的$\frac{3}{4}$，两人各自付钱，小杰付给收银员一张50元的人民币，收银员应找零多少元人民币？

也可以直接计算.

$$50-5\times\frac{3}{4}\times9.2$$

$$=50-5\times\frac{3}{4}\times\frac{46}{5}$$

$$=15.5\text{（元）}.$$

**解** 小杰买的蜜桔千克数：$5\times\frac{3}{4}=\frac{15}{4}$（千克），

小杰应付人民币：$\frac{15}{4}\times9.2=\frac{15}{4}\times\frac{46}{5}=\frac{69}{2}=34.5$(元)；

50−34.5=15.5(元).

答：收银员应找给小杰15.5元.

## 思考




观察以下运算：

$$\frac{2}{3}\times\left(\frac{5}{6}+\frac{3}{7}\right)=\frac{2}{3}\times\frac{35+18}{42}=\frac{53}{63}.$$

$$\frac{2}{3}\times\frac{5}{6}+\frac{2}{3}\times\frac{3}{7}=\frac{5}{9}+\frac{2}{7}=\frac{35+18}{63}=\frac{53}{63}.$$

你能发现什么规律呢？

**例题6** 计算：

(1) $\frac{2}{3}\times\left(\frac{3}{8}+\frac{5}{6}\right)$；　　(2) $\left(\frac{14}{15}-\frac{7}{24}\right)\times\frac{3}{2}$.

**解** (1) $\frac{2}{3}\times\left(\frac{3}{8}+\frac{5}{6}\right)$

$$=\frac{2}{3}\times\frac{3}{8}+\frac{2}{3}\times\frac{5}{6}=\frac{1}{4}+\frac{5}{9}=\frac{29}{36}.$$

(2) 方法一：

$$\left(\frac{14}{15}-\frac{7}{24}\right)\times\frac{3}{2}$$

$$=\frac{14}{15}\times\frac{3}{2}-\frac{7}{24}\times\frac{3}{2}=\frac{7}{5}-\frac{7}{16}=\frac{77}{80}.$$




方法二：

$$\left(\frac{14}{15}-\frac{7}{24}\right)\times\frac{3}{2}$$

$$=\left(\frac{2\times7}{5\times3}-\frac{1\times7}{8\times3}\right)\times\frac{3}{2}$$

$$=\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{8}\right)\times\frac{7}{3}\times\frac{3}{2}=\frac{11}{40}\times\frac{7}{2}=\frac{77}{80}.$$

## 练习2.8

1 计算：

(1) $4\times\frac{3}{11}\div\frac{3}{5}$；　　(2) $\frac{3}{4}\times\frac{5}{12}\div\frac{2}{5}$；

(3) $\frac{5}{12}\div\frac{3}{4}\div\frac{1}{3}$；　　(4) $\frac{9}{10}\div\frac{2}{5}\times\frac{3}{8}$.

4 计算：

(1) $\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}+\frac{6}{7}\div\frac{3}{14}$；

(2) $2\div\frac{3}{4}-\frac{3}{5}\times\frac{5}{9}$；

(3) $\frac{3}{4}\times\left|\frac{2}{5}-\frac{1}{3}\right|+\frac{7}{8}\div\frac{1}{2}$.

5 计算：

(1) $3.5-\frac{2}{3}+\frac{3}{5}$；　　(2) $1.25\times\left|2\frac{2}{5}-\frac{1}{2}\right|+\frac{11}{10}\div 2$；

(3) $3.2\times\frac{4}{5}\times\frac{7}{8}$；　　(4) $2\frac{3}{5}\div\left|2.2+\frac{1}{10}\right|+\frac{2}{3}\times 6.9$.

6 一张画片的长是9厘米，宽是5.4厘米，它的厚度是$\frac{1}{25}$厘米.

(1) 这张画片的面积为多少平方厘米？

(2) 如果有一叠这样的画片，它们的厚度是4.4厘米，这叠画片共有多少张？

7 计算：

(1) $12\times\left|\frac{5}{6}+\frac{11}{24}\right|$；　　(2) $\frac{3}{4}\times\left|\frac{7}{12}-\frac{2}{9}\right|$.

## 2.9 分数运算的应用

**例题1** 小丽计划三天看完一本书，第一天看了全书的$\frac{2}{7}$，第二天看了全书的$\frac{3}{5}$，那么第三天小丽应看完全书的几分之几呢？

**分析** 将一本书看成是一个总体，用1表示，两天共看了$\frac{2}{7}+\frac{3}{5}$，将1减去前两天所看的，就是所要求的.

也可以是

$1-\frac{2}{7}-\frac{3}{5}=\frac{4}{35}$.

**解** $1-1\times\left(\frac{2}{7}+\frac{3}{5}\right)=1-\frac{31}{35}=\frac{35-31}{35}=\frac{4}{35}$.

答：第三天小丽应看完全书的$\frac{4}{35}$.



**例题2** 一只足球的表面是由黑白相间的皮块拼接而成的，现知道黑色皮块的块数是白色皮块的块数的$\frac{3}{5}$，如果黑色皮块共有12块，那么这只足球上黑白皮块共有几块？

**分析** 先求出白色皮块的块数，而白色皮块的$\frac{3}{5}$是黑色皮块的块数，可以据此列出等式.

**解** 设白色皮块的块数为$x$，则$\frac{3}{5}x=12$.

$$x=12\div\frac{3}{5}=12\times\frac{5}{3}=20.$$

$20+12=32$(块).

答：这只足球上黑白皮块共有32块.





**例题3** 某小区的房价（平均价）原来是每平方米4 200元，现上涨了$\frac{1}{100}$.

(1) 那么现售价为每平方米多少元？

(2) 买房还需交纳总房价的$\frac{3}{200}$的契税.一套120平方米的房子，按现价买应付多少元？

**解** (1) $4\,200\times\frac{1}{100}=42$，$4\,200+42=4\,242$(元).

答：现在的售价为每平方米4 242元.

(2) $120\times4\,242+120\times4\,242\times\frac{3}{200}$

$=509\,040+509\,040\times\frac{3}{200}=509\,040+25\,452\times3$

$=585\,396$(元).

答：按现价买应付585 396元.

现在回到本章一开始的问题：

姚明的身高是226厘米，体重134千克；巴特尔的身高是210厘米，体重130千克．小明的身高是姚明身高的$\frac{3}{5}$，体重是姚明体重的$\frac{7}{20}$；小杰的身高是巴特尔身高的$\frac{5}{7}$，体重是巴特尔体重的$\frac{9}{26}$．小明和小杰哪一个个子更高一点呢？哪一个体重更重一点呢？

还有什么方法可以比较小明和小杰的身高和体重呢？

小明的身高是 $226\times\frac{3}{5}=135.6$（厘米），体重是 $134\times\frac{7}{20}=46.9$（千克）；

小杰的身高是 $210\times\frac{5}{7}=150$（厘米），体重是 $130\times\frac{9}{26}=45$（千克）．

由此可知小杰比小明高，而小明比小杰重．

## 练习2.9

1. 某数的$\frac{3}{7}$是6的$\frac{2}{5}$，求这个数．

2. 解方程：

(1) $2x+\frac{1}{3}=1$；　　(2) $x+\frac{5}{7}=2\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$．

3. 一个长方体的体积是$\frac{16}{5}$立方米，长、宽分别是$\frac{4}{3}$米、$\frac{1}{5}$米，那么高是多少米？

4. 小明100米赛跑的成绩是14秒，小杰100米赛跑的成绩是小明的$\frac{27}{28}$，哪一位跑得快？快多少秒？如果你的100米赛跑的成绩比小明的快1.4秒，你能打破年级的100米纪录12.7秒吗？



# 本章小结

本章学习了分数的有关概念，分数的加、减、乘、除的运算，分数与小数的互化与运算，通过对分数的学习，提高了运算能力和解决实际问题的能力，并知道了数学中转化的思想方法，如将异分母的分数问题转化为同分母的分数问题来研究和解决。

本章知识结构框架如下：



## 探究活动(一)

### 用计算器验证分数的有关运算律

正整数的加法和乘法有以下的运算律：
加法交换律、加法结合律、乘法交换律、乘法结合律和乘法分配律.
分数的加法和乘法也是符合这些运算律的，请用计算器加以验证.
请完成下表：

| 运 算 律 | 举 例 | 用计算器验证 |
| --- | --- | --- |
| 加法交换律 | $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=\frac{3}{4}+\frac{2}{3}$ | |
| 加法结合律 | | |
| 乘法交换律 | | |
| 乘法结合律 | | |
| 乘法分配律 | | |

## 探究活动(二)

### 将一个分数拆为几个不同的单位分数之和

三千多年前，埃及人发明了一种书写分数的方法，这些分数的分子为1，它们被称为单位分数.为了方便书写和记忆，他们将太阳神眼睛的各个部分设定为特殊的分数值.其起源与司丰饶的女神、知识与魔法之神、太阳神等神话相联系.右图展示了用太阳神眼睛各部分表示的一些分数值.




对于分子不是1的分数，埃及人将它们转化成分子是1的分数再计算，这使计算非常复杂.然而，如何将一

个分数分拆为几个不同的单位分数之和却是一个很有意义的问题.例如:

$$\frac{1}{2}=\frac{3}{6}=\frac{1+2}{6}=\frac{1}{6}+\frac{2}{6}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}.$$

$$\frac{1}{3}=\frac{4}{12}=\frac{1+3}{12}=\frac{1}{12}+\frac{3}{12}=\frac{1}{12}+\frac{1}{4}.$$

$$\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{1+3}{6}=\frac{1}{6}+\frac{3}{6}=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}.$$

$$\frac{3}{5}=\frac{24}{40}=\frac{4+20}{40}=\frac{4}{40}+\frac{20}{40}=\frac{1}{10}+\frac{1}{2}.$$

或 $$\frac{3}{5}=\frac{9}{15}=\frac{1+3+5}{15}=\frac{1}{15}+\frac{3}{15}+\frac{5}{15}=\frac{1}{15}+\frac{1}{5}+\frac{1}{3}.$$

同样,1也可以分拆为几个单位分数的和,如:

$$1=\frac{3}{3}=\frac{1+2}{3}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{1}{3}+\frac{4}{6}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{2}.$$

那么是否可以将1分拆为几个分母为奇数的单位分数的和呢?有人做到了:

$$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{45}+\frac{1}{231}.$$

但它也是不惟一的,1还可以分拆为:

$$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{165}+\frac{1}{693}.$$

试一试,你是否还可以把1分拆为其他单位分数的和呢?

以上的例子说明,一个分数可以分拆为几个不同的单位分数之和,而且分拆方法不惟一.现在让我们自己来试一试.

将$\frac{3}{4}$,$\frac{2}{7}$,$\frac{7}{16}$,$\frac{5}{27}$分拆为几个不同的单位分数之和.



阅读材料

# 中国古代的分数运算

中国古代的数学经典著作《九章算术》给出了相当完整的分数运算法则，所提到的分数的算法有约分术（约分）、合分术(加法)、减分术(减法)、乘分术(乘法)、经分术(除法)、课分术(比较分数大小)、平分术(求分数平均数）。

约分术是这样叙述的：




“可半者半之，不可半者，副置分母子之数，以少减多，更相减损，求其等也，以等数约之。”

将其翻译成现代语言就是：

“可半者半之”：如果分子、分母是偶数(可半者)，那么分子、分母都除以2(半之)；

“不可半者，副置分母子之数，以少减多，更相减损，求其等也”：如果分子、分母不全是偶数，那么对于分子、分母，总是以大的数减去小的数，反复进行，直到两个数相等。

“以等数约之”：原来的分数的分子、分母同除以那个等数。

从上可以看出中国古人将约分分成了三个步骤。

请看$\frac{15}{20}$约分的过程：因为15是奇数，“不可半之”，所以(15，20)→(15，5)→(10，5)→(5，5)，得到等数5，以5约之，即：$\frac{15\div5}{20\div5}=\frac{3}{4}$。

合分术是按这样的步骤进行的：母互乘子，并以为实，母相乘为法，实如法而一。这里的实、法分别指的是分数的分子和分母，因此，将它们用现在的数学符号表示出来，就是：$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$。

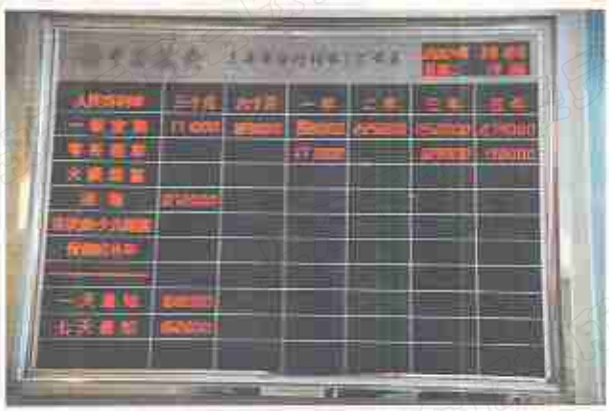
乘分术是按这样的步骤进行的：母相乘为法，子相乘为实，实如法而一。用现在的数学符号表示出来，就是：$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$。

这些方法和我们现在所学的分数的运算是相同的。

# 第三章　比和比例




小明的妈妈将3 000元钱存入银行，存期为三年．你知道这3 000元到期可以得到多少利息吗？



通过本章的学习，你就会帮小明的妈妈计算出到期的利息了．

# 3 第 1 节 比和比例

## 3.1 比的意义

**思考**

小明和小杰在篮球场上定点投篮，小明投了15次，进球6次，小杰投了10次，进球5次，谁的投篮水平高呢？




投篮水平的高低不仅与进球数有关，还与投篮的次数有关，

可以用除法比较两个同类量或者两个数的关系。

$$\frac{\text{小明投进球的次数}}{\text{小明投球的总次数}}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5},$$

$$\frac{\text{小杰投进球的次数}}{\text{小杰投球的总次数}}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}.$$

因为 $\frac{1}{2}>\frac{2}{5}$，所以小杰的投篮水平比小明高。

$a$、$b$是两个数或两个同类的量，为了把$b$和$a$相比较，将$a$与$b$相除，叫做$a$与$b$的**比**(ratio)，记作 $a:b$，或写成 $\frac{a}{b}$，其中$b\neq 0$；读作 $a$比$b$，或 $a$与$b$的比。

$a$叫做比的前项，$b$叫做比的后项，前项$a$除以后项$b$所得的商叫做**比值**。

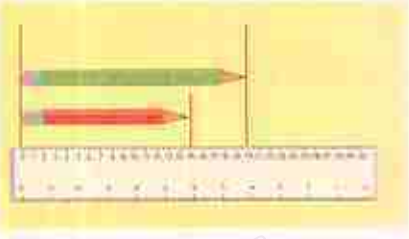


利用比的方法，可以知道$a$是$b$的几倍(或几分之几).

以下是一些比的例子：



苹果与甜橙个数之比是3∶5，也可以写成$\frac{3}{5}$.



铅笔的长短之比是20∶15

你还能举出其他“比”的例子吗?

**思考**

在第一章我们已经学习了分数与除法的关系，你知道比、分数和除法三者之间的关系吗?

比：前项:后项=比值

分数：$\frac{分子}{分母}$=分数值

除：被除数÷除数=商

比、分数和除法三者之间的关系是：
比的前项相当于分数的分子和除式中的被除数；
比的后项相当于分数的分母和除式中的除数；
比值相当于分数的分数值和除式中的商.

**例题1** 求下列各个比的比值：

(1) 36∶6；　　(2) $1\frac{4}{5}:\frac{2}{7}$；

(3) 7.5cm∶40mm；　　(4) 18秒∶1.5分.

**解** (1) 36∶6=36÷6=6.

(2) $1\frac{4}{5}:\frac{2}{7}=1\frac{4}{5}\div\frac{2}{7}=\frac{9}{5}\times\frac{7}{2}=6\frac{3}{10}$.

(3) 7.5cm∶40mm=75mm÷40mm
=75÷40=1.875.

1分=60秒
1.5分=90秒

(4) 18秒：1.5分=18秒：90秒
=18÷90=0.2.

求两个同类量的比值时，如果单位不同，必须把这两个量化成相同的单位.

## 练习3.1

六年级(5)班有男生15人，女生25人，求下列各比的比值：
(1) 男生人数：女生人数；
(2) 男生人数：全班人数；
(3) 女生人数：全班人数.

求下列各比的比值：
(1) 9：15；
(2) 1.5：0.5；
(3) $2\frac{1}{2}:\frac{4}{5}$；
(4) 75g：0.5kg；
(5) 1.5m：40dm；
(6) 5时：160分；
(7) 16时：5天.

## 3.2 比的基本性质





### 思考

将10克浓缩果汁粉溶解在100克水中，将20克的同类浓缩果汁粉溶解在200克水中，所得的两种果汁的口味是否相同？再将40克这样的浓缩果汁粉溶解在400克水中，所得的果汁的口味与前两种果汁相比呢？

因为 10：100=0.1，20：200=0.1，40：400=0.1，
所以 10：100=20：200=40：400.
因此这三种果汁的口味都是相同的.

根据分数的基本性质 $\frac{a}{b}=\frac{ka}{kb}=\frac{a\div k}{b\div k}(k\neq 0)$，得到

$$a:b=ka:kb=\frac{a}{k}:\frac{b}{k}\ (k\neq 0).$$

## 概括

最简整数比是指比的前项与后项都是整数，且它们互素.



**比的基本性质**

比的前项和后项同时乘以或除以相同的数(0除外)，比值不变.

运用这个性质，可以把比化为最简整数比.

**例题1** 化简下列各比：

(1) $\frac{88}{132}$；　(2) 0.65 : 1.3；

(3) $1\frac{1}{5}:\frac{3}{5}$；　(4) 1.25升 : 375毫升.

**解** (1) $\frac{88}{132}=\frac{88\div44}{132\div44}=\frac{2}{3}$.

(2) 0.65 : 1.3

$=(0.65\times100):(1.3\times100)$

$=65:130$

$=1:2$.

或者 $1\frac{1}{5}:\frac{3}{5}=\frac{6}{5}\div\frac{3}{5}$

$=\frac{6}{5}\times\frac{5}{3}=2:1$

(3) $1\frac{1}{5}:\frac{3}{5}$

$=\frac{6}{5}:\frac{3}{5}$

$=\left(\frac{6}{5}\times5\right):\left(\frac{3}{5}\times5\right)$

$=6:3$

$=2:1$.

1升=1 000毫升
1.25升=1 250毫升

(4) 1.25升 : 375毫升

= 1 250毫升 : 375毫升

$=(1\,250\div125):(375\div125)$

$=10:3$.

一种糕点的部分配料是30克可可粉、10克白砂糖、20克奶粉．其中可可粉与白砂糖的比是30∶10，白





砂糖与奶粉的比是10∶20．由此可以说可可粉、白砂糖、奶粉的比是30∶10∶20．像这样的比叫做三个数的连比(continued ratio)，其中30，10，20都是这个连比的项．在比较两个以上量时，往往可以采用连比．



小明、小丽、小杰三个人的身高的比就是三个人身高的连比，即：

1.36m∶1.45m∶1.50m

=136cm∶145cm∶150cm

=136∶145∶150．

## 概括

三项连比的性质是：

1. 如果 $a:b=m:n$，$b:c=n:k$，那么 $a:b:c=m:n:k$．

2. 如果 $k\neq 0$，那么 $a:b:c=ak:bk:ck=\frac{a}{k}:\frac{b}{k}:\frac{c}{k}$．

**例题2** (1) 已知 $a:b=2:3$，$b:c=3:5$，求 $a:b:c$．

(2) 已知 $a:b=2:3$，$b:c=4:5$，求 $a:b:c$．

为什么将2∶3化成8∶12?



**解** (1) 因为 $a:b=2:3$，$b:c=3:5$，

所以 $a:b:c=2:3:5$．

(2) $a:b = 2:3 = (2\times 4):(3\times 4) = 8:12$，

$b:c = 4:5 = (4\times 3):(5\times 3) = 12:15$，

所以 $a:b:c=8:12:15$．

## 练习3.2

1. 化简下列各比：

(1) 48 : 64；　　(2) 4.6 : 6.9；

(3) 220cm : 1.1m；　　(4) 1.5升 : 720毫升.

2. 求白兔与黑兔的体重之比.



3. 把下列各连比化为最简整数比：

(1) 15 : 30 : 40；　　(2) $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{6}$.

4. 利用下列已知条件，求$a:b:c$：

(1) $a:b=5:3$，$b:c=2:3$；　　(2) $a:b=4:5$，$b:c=7:9$.

## 3.3 比例

**思考**

能不能把你的课桌桌面的尺寸图画在练习本上？



经过测量，知道课桌桌面的长是1.2米，宽是0.5米.要把这张课桌桌面的尺寸图画在练习本上，不可能按实际尺寸画.

根据比的基本性质可以得到1.2米 : 0.5米=12 : 5.因此可以把桌面按长12cm、宽5cm的大小画在练习本上.

除了按这种尺寸画法以外，还有其他画法吗？



$1.2 : 0.5 = 12 : 5$

第一比例项　第二比例项　第三比例项　第四比例项

其中1.2,5叫做比例外项,0.5,12叫做比例内项.

$a,b,c,d$四个量中,如果$a:b=c:d$,那么就说$a,b,c,d$成比例(proportion).也就是表示两个比相等的式子叫做比例.其中$a,b,c,d$分别叫做第一、二、三、四比例项.第一比例项$a$和第四比例项$d$叫做比例外项,第二比例项$b$和第三比例项$c$叫做比例内项.

$4 : 6 = 6 : 9$

6就叫做4和9的比例中项.

如果两个比例内项相同,即$a:b=b:c$时,那么把$b$叫做$a$和$c$的比例中项.

在$\frac{8}{10}=\frac{12}{15}$的两边同时乘以$10\times15$,得$15\times8=12\times10$.

在$15\times8=12\times10$的两边同时除以$10\times15$,得$\frac{8}{10}=\frac{12}{15}$.

$a:b=c:d$也可以表示为$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,在$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$的等式两边同时乘以$bd$,可以得到$ad=bc$;反过来,在$ad=bc$的等式两边同时除以$bd$,就可以得到$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,其中$a,b,c,d$都不为零.

## 概括

**比例的基本性质**

如果$a:b=c:d$或$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,那么$ad=bc$.反之,如果$a,b,c,d$都不为零,且$ad=bc$,那么$a:b=c:d$或$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

**例题1**　求下列各式中的$x$:

(1) $x:4.8=5:2$;　　(2) $4:x=1\frac{1}{2}:1$;

(3) $\frac{x}{20}=\frac{11}{4}$;　　(4) $15:x=1.2:1.5$.

**解**　(1) 因为$x:4.8=5:2$,所以$2x=5\times4.8$,

可得$x=24\div2=12$.

(2) 因为$4:x=1\frac{1}{2}:1$,所以$1\frac{1}{2}x=4$,$x=4\div1\frac{1}{2}$.

由 $x=4\div\frac{3}{2}$，可得 $x=4\times\frac{2}{3}$，

所以 $x=\frac{8}{3}$.

(3) 因为 $\frac{x}{20}=\frac{11}{4}$，所以 $4x=11\times20$，$x=\frac{11\times20}{4}$，

所以 $x=55$.

(4) 因为 $15:x=1.2:1.5$，所以 $1.2x=15\times1.5$.

可得 $x=\frac{15\times15}{12}$，

所以 $x=\frac{75}{4}$.

怎样得到的?



**例题2** 牛肉6千克售100元.现有250元，可以购买牛肉多少千克?

**解** 解法一：每1千克牛肉的价格：$\frac{100}{6}=\frac{50}{3}$(元)，

250元可购买牛肉：$250\div\frac{50}{3}=250\times\frac{3}{50}=15$(千克).

解法二：设250元可以购买牛肉$x$千克.

| 牛肉重量(千克) | 价格(元) |
| --- | --- |
| 6 | 100 |
| $x$ | 250 |

x如何得出的?



由牛肉的价格与重量的关系可得：$\frac{6}{100}=\frac{x}{250}$.

$100x=250\times6$.

$x=\frac{250\times6}{100}$，$x=15$.

答：250元可以购买牛肉15千克.

也可列式为：$\frac{x}{6}=\frac{250}{100}$.

## 练习3.3

1. 求下列各式中$x$的值：

(1) $x:1\frac{1}{5}=6\frac{1}{4}:2$；　(2) $6:x=2\frac{2}{5}:1$；　(3) $\frac{60}{x}=\frac{2}{5}$.

2. 用比例方法求解下列各题：

(1) 将12本相同厚度的书叠起来，它们的高度为30厘米.如果将20本这样相同厚度的书叠起来，那么新的高度是多少？

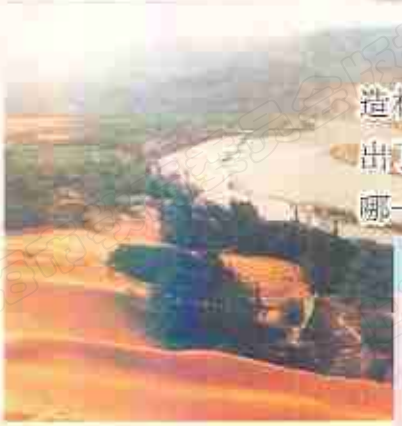
(2) 10元钱可以买苹果12个，现要购买27个这样的苹果，需要多少钱？

上海市教育委员会版权所有

# 3 第2节 百分比

## 3.4 百分比的意义

### 思考



我国许多地区都不同程度遭到沙尘暴的袭击.植树造林,扩大植被面积是防止沙尘暴的方法之一.下表列出了某一地区不同树种的种植成活情况.请你判断选择哪一种树种种植比较好.

| 名称 | 栽树总棵数 | 成活棵数 | 成活棵数与栽树总棵数的比 |
|---|---|---|---|
| A | 20 | 17 | $\frac{17}{20}$ |
| B | 25 | 23 | $\frac{23}{25}$ |
| C | 50 | 42 | $\frac{42}{50}$ |
| D | 10 | 8 | $\frac{8}{10}$ |



从表中不容易看出哪一种树的成活情况比较好,如果将成活棵数与栽树总棵数的比都用分母为100的分数表示,就很容易作出判断了.

$\frac{17}{20}=\frac{17\times5}{20\times5}=\frac{85}{100}$, $\frac{23}{25}=\frac{23\times4}{25\times4}=\frac{92}{100}$,

$\frac{42}{50}=\frac{42\times2}{50\times2}=\frac{84}{100}$, $\frac{8}{10}=\frac{8\times10}{10\times10}=\frac{80}{100}$.

因为 $\frac{92}{100}>\frac{85}{100}>\frac{84}{100}>\frac{80}{100}$,所以选择树种 $B$ 种植比较好.

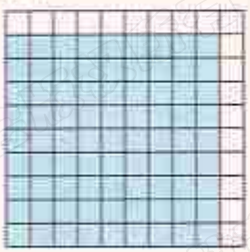
由上例，树种A的成活棵树与栽树总棵数的比可以表示为$\frac{17}{20}$，还可以表示为$\frac{85}{100}$，称树种A的成活棵树占栽树总棵树的百分之八十五.

把两个数量的比值写成$\frac{n}{100}$的形式，称为**百分数**(percentage)，也叫做**百分比**或**百分率**，记作$n\%$，读作百分之$n$.符号“%”叫做**百分号**.

例如：42%就是$\frac{42}{100}$，读作百分之四十二；125%就是$\frac{125}{100}$，读作百分之一百二十五.

**思考**

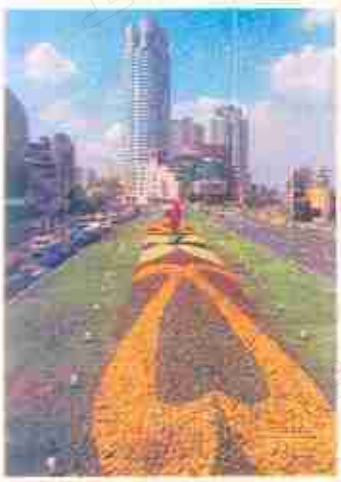
下图中阴影部分分别占整个图形的几分之几？用百分数表示.



$\frac{(\quad)}{(\quad)}=(\quad)\%$



$\frac{(\quad)}{(\quad)}=(\quad)\%$



由于百分数是分母为100的特殊分数，既能直观地反映部分与总体的关系，又便于比较，因此在工农业生产和生活中运用比较广泛.例如，近十余年来上海市市区绿化状况发生了可喜的变化，可以用百分数来描述：绿化覆盖率在近十余年中从2%上升到2003年底的26%.

**例题1** 将下列百分数化成最简分数：

(1) 62%；　　(2) 55%；

(3) 37.5%；　　(4) 125%.

解 (1) $62\%=\frac{62}{100}=\frac{31}{50}$.

(2) $55\%=\frac{55}{100}=\frac{11}{20}$.

(3) $37.5\%=37.5\div100=\frac{375}{1\,000}=\frac{3}{8}$.

(4) $125\%=\frac{125}{100}=\frac{5}{4}$.

$30\div40$的运算结果可以表示成：

$$\frac{30}{40}=\frac{3}{4}=0.75=75\%.$$

在实际生活中，应根据不同的情形选择不同的表示形式. 如，用30元钱买40只张猴桃，通常用0.75元表示每只张猴桃的价格. 又如，通常用75%或$\frac{3}{4}$表示一个班级的40位学生中有30位学生喜爱数学. 因此，掌握百分数、分数和小数之间的互化是必要的.

小数化成百分数，将小数点向右移两位，同时在右面添上百分号.

0.47→47%

0.028→2.8%

2.73→273%

0.3→30%

**例题2** 将下列小数化成百分数：

(1) 0.47； (2) 0.028；

(3) 2.73； (4) 0.3.

解 (1) $0.47=0.47\times100\%=47\%$.

(2) $0.028=0.028\times100\%=2.8\%$.

(3) $2.73=2.73\times100\%=273\%$.

(4) $0.3=0.3\times100\%=30\%$.

百分数化成小数，将%号前数字的小数点向左移两位，同时去掉后面的百分号.

40.2%→0.402

125.2%→1.252

0.52%→0.005 2

200%→2

**例题3** 将下列百分数化成小数或整数：

(1) 40.2%； (2) 125.2%；

(3) 0.52%； (4) 200%.

解 (1) $40.2\%=40.2\div100=\frac{402}{1\,000}=0.402$.

(2) $125.2\%=125.2\div100=\frac{1\,252}{1\,000}=1.252$.

(3) $0.52\%=0.52\div100=\frac{52}{10\,000}=0.005\,2$.

(4) $200\%=\frac{200}{100}=2$.




**例题4** 将下列分数化成小数，再化成百分数：

(1) $\frac{1}{4}$；　(2) $\frac{5}{8}$；　(3) $\frac{5}{6}$；　(4) $\frac{7}{5}$.

**解** (1) $\frac{1}{4}=0.25=25\%$.

(2) $\frac{5}{8}=0.625=62.5\%$.

(3) $\frac{5}{6}\approx0.833=83.3\%$.*

(4) $\frac{7}{5}=1.4=140\%$.

把分数化成百分数，通常先把分数化成小数，再把小数化成百分数.

## 练习3.4

1. 读出下列各数：
35%，100%，180%，0.4%.
2. 用%号表示下列各百分数：
百分之三十，百分之一百二十，百分之一点五.
3. 把下列各数化成百分数：
(1) 0.2；　(2) 0.05；　(3) $\frac{1}{10}$；　(4) $\frac{28}{70}$；　(5) $1\frac{3}{4}$.
4. 把下列各百分数化成小数或整数：
(1) 3%；　(2) 80%；　(3) 1.25%；　(4) 120%；　(5) 300%.
5. 把下列各百分数化成最简分数：
0.1%，20%，16%，12.5%，135%，10.23%.
6. 求下列各题的商，并把所得的商化成百分数：
(1) 240÷600；　(2) 6÷9.6；
(3) 144÷120；　(4) 12.5÷50.

* 本章中遇到除法除不尽时，如果没有注明，一般商保留三位小数.

## 3.5 百分比的应用



**例题1** 世界上高等植物约30 000种，而我国特有的高等植物有17 300种.我国特有的高等植物总数占世界高等植物总数的百分率是多少？(在百分号前保留一位小数)

**分析** 根据百分率的意义，用我国特有的高等植物总数和世界高等植物总数相比.

**解** $17\,300 \div 30\,000 = \frac{17\,300}{30\,000} = \frac{173}{300} \approx 57.7\%$.

答：我国特有的高等植物总数占世界高等植物总数的百分率约是57.7%.

在生产和工作中常用的百分率有：

$$\text{及格率} = \frac{\text{及格人数}}{\text{总人数}} \times 100\%;$$

$$\text{合格率} = \frac{\text{合格产品数}}{\text{产品总数}} \times 100\%;$$

$$\text{增产率} = \frac{\text{增加的产量}}{\text{原来的产量}} \times 100\%;$$

$$\text{出勤率} = \frac{\text{实际出勤人数}}{\text{应该出勤的人数}} \times 100\%, \text{等等.}$$

**例题2** 2002年12月3日，在摩纳哥举行国际展览局第132次大会，确定2010年世博会主办城市.在最后一轮投票中，共有88个成员国参加了投票，中国上海赢得了54票，成为2010年世博会的主办城市.问上海在这一轮投票中的得票率是多少.(在百分号前保留一位小数)

**分析** 得票率$= \frac{\text{得票数}}{\text{总的投票数}}$，

解　得票率$=\frac{54}{88}\approx0.614=61.4\%$.

答：上海在这一轮投票中的得票率是61.4%.



**例题3**　汽车配件厂每天生产汽车零件1 000个，其中次品有25个，求产品的合格率.

解　合格率$=\frac{1\,000-25}{1\,000}=\frac{975}{1\,000}=0.975=97.5\%$.

答：产品的合格率是97.5%.

**例题4**　控制工厂排放污染物的数量和浓度，是环境保护的重要措施.据我国对82个重点城市的近3 000只锅炉进行检查，已有72.7%的锅炉采取了清烟除尘的措施，达到了环境保护的标准.问共有多少只锅炉采取了清烟除尘的措施.

解　$3\,000\times72.7\%=2\,181$(只).

答：共有2 181只锅炉采取了清烟除尘的措施.

## 思考

从下面一段文字中，你想了解一些什么信息？

某市今年第二季度的工业总产值为100亿元，比第一季度增长了6.2%，预计第三季度的增长率在第二季度的基础上将提高1个百分点.



如何理解下降1个百分点呢?

$$\text{增长率}=\frac{\text{增长的数}}{\text{原来的基数}}\times 100\%.$$

1个百分点相当于1%,它是分析百分比增减变动的一种表现形式.这里第三季度的增长率是6.2%+1%=7.2%.



$$7.2\%=\frac{\text{第三季度的工业总产值}-\text{第二季度的工业总产值}}{\text{第二季度的工业总产值}}\times 100\%.$$

也可以直接列式100(1+7.2%)求.

设第三季度的工业总产值为$x$亿元,

则有 $\dfrac{x-100}{100}=7.2\%$.

可得 $x=100+100\times 7.2\%$,

$x=107.2$.

所以,预计第三季度的工业总产值是107.2亿元.

**思考**

如果第三季度工业总产值在第二季度100亿元的基础上增长了1%,而第四季度的工业总产值比第三季度的工业总产值下降了1%,那么第四季度的工业总产值是否为100亿元?

## 练习3.5(1)

1. 六年级(2)班共有学生48名,一次数学练习中有45人合格,其中10人达到优秀.该班的优秀率和合格率分别是多少?
2. 40千克肉中含6千克蛋白质,蛋白质占肉的重量的百分比是多少?
3. 全年上课日为210天,小明一年中请假14天,求小明在该学年的缺席率.
4. 六年级(1)班共有学生46人,其中有15人戴近视眼镜,求不戴近视眼镜学生的百分率.
5. 一商场2003年的全年销售额为210万元,比2002年增长了5.6%,该商场计划2004年的全年销售额的增长率比上年提高一个百分点,求这个商场2004年计划的全年销售额.



**例题5** （统计问题）下图是对228名学生来校方式进行的调查：

问：乘公共汽车来校的学生占来校学生人数的百分率是多少？




乘地铁来校的学生占来校学生人数的百分率是多少？

步行来校的学生占来校学生人数的百分率是多少？

骑自行车来校学生占来校学生人数的百分率是多少？

**解** 乘公共汽车来校的学生占来校学生人数的百分率是

$$\frac{57}{228}=0.25=25\%;$$



乘地铁来校的学生占来校学生人数的百分率是

$$\frac{76}{228}\approx 0.333=33.3\%;$$

步行来校的学生占来校学生人数的百分率是

$$\frac{39}{228}\approx 0.171=17.1\%;$$

骑自行车来校的学生占来校学生人数的百分率是

$$\frac{56}{228}\approx 0.246=24.6\%.$$

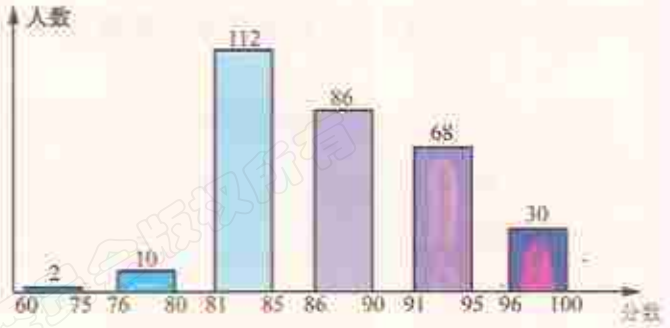
或者
100%−25%−33.3%−17.1%=24.6%



答：乘公共汽车、乘地铁、步行、骑自行车来校学生占来校学生人数的百分率分别约是25%，33.3%，17.1%，24.6%.

**例题6** （统计问题）下图是某学校六年级学生考试成绩的分布图．如果该年级学生总人数是308名，根据图表中的数据，分别计算出分数在81—85，86—90，91—95的人数占学生总人数的百分比．

**解** 该年级学生的总人数是308名，分数在81—85的人




数是112，在86—90的人数是86，在91—95的人数是68.

所以，分数在81—85的人数占学生总人数的百分比是

$$\frac{112}{308}\times 100\%\approx 36.4\%;$$

分数在86—90的人数占学生总人数的百分比是

$$\frac{86}{308}\times 100\%\approx 27.9\%;$$

分数在91—95的人数占学生总人数的百分比是

$$\frac{68}{308}\times 100\%\approx 22.1\%.$$

答：分数在81—85，86—90，91—95的人数分别占学生总人数的百分比约为36.4%，27.9%，22.1%.

## 练习3.5(2)

1. 在右图中填入适当的百分比.




(第1题)

2. 观察下页图，求：
   (1) 遗传病总数占人类疾病总数的百分比；
   (2) 遗传病患者占全球人口的百分比.




(第2(1)题)




(第2(2)题)

请调查本班同学每周7天看电视节目的情况，并填入下表：

| | 看电视新闻 | 看动画片 | 看电视连续剧 |
|---|---|---|---|
| 人　数 | | | |
| 占全班人数的百分比 | | | |



**例题7**　(恩格尔系数问题)经济学家将家庭或个人在食品消费上的支出与总消费支出的比值称作恩格尔系数，即

$$\text{恩格尔系数}=\frac{\text{食品消费支出总额}}{\text{消费支出总额}}\times 100\%.$$

恩格尔系数可以用来刻划不同的消费结构，也能间接反映国家不同的发展阶段，联合国粮农组织的规定如下表所示：

| 恩格尔系数<br>大于或等于60% | 恩格尔系数<br>在50%—60%之间 | 恩格尔系数<br>在40%—50%之间 | 恩格尔系数<br>在30%—40%之间 | 恩格尔系数<br>小于30% |
|---|---|---|---|---|
| 绝对贫困 | 温饱 | 小康 | 富裕 | 最富裕 |

(注：在50%—60%之间是指含50%而不含60%的所有数据，以此类推.)

根据上表，结合我国城市和乡村居民的恩格尔系数，请你判断下列年份属于哪个阶段.

| 恩格尔系数<br>年份 | 1978年 | 1995年 | 2001年 |
|---|---|---|---|
| 城　市 | 57.5% | 49% | 37.9% |
| 乡　村 | 67.7% | 58.6% | 47.7% |

答：1978年城市居民恩格尔系数为57.5%，属于温饱阶段；乡村居民恩格尔系数为67.7%，属于绝对贫困阶段.

1995年城市居民恩格尔系数为49%，属于小康阶段；乡村居民恩格尔系数为58.6%，属于温饱阶段.

2001年城市居民恩格尔系数为37.9%，属于富裕阶段；乡村居民恩格尔系数为47.7%，属于小康阶段.

**例题8** (盈亏问题)甲商店以每件200元的批发价购得100件衬衫,以每件售价280元卖出.乙商店以每双300元的批发价购得100双皮鞋,以每双390元的售价卖出,见下表:

| 品种 | 成本 | 售价 | 盈利 |
|---|---|---|---|
| 衬衫 | 200元 | 280元 | 280−200=80元 |
| 皮鞋 | 300元 | 390元 | 390−300=90元 |

试问:卖衬衫和卖皮鞋,甲商店与乙商店哪家店的盈利率更大?

分析

$$\text{盈利率}=\frac{\text{盈利}}{\text{成本}}\times 100\%=\frac{\text{售价}-\text{成本}}{\text{成本}}\times 100\%.$$

在上面的问题中,只需比较一件衬衫和一双皮鞋的盈利率即可.

解 卖出一件衬衫的盈利率$=\frac{280-200}{200}\times 100\%=40\%$,

卖出一双皮鞋的盈利率$=\frac{390-300}{300}\times 100\%=30\%$.

答:甲商店做衬衫买卖可获得的盈利率大.

除了盈利率外,还有亏损率.

$$\text{亏损率}=\frac{\text{亏损}}{\text{成本}}\times 100\%=\frac{\text{成本}-\text{售价}}{\text{成本}}\times 100\%.$$

**例题9** (盈亏问题)一台组装电脑的成本价是4 000元,如果商家以30%的盈利率卖给顾客,那么售价是多少元?

解 解法一:因为 盈利=成本×盈利率,所以

盈利=4 000×30%=1 200.

而 盈利=售价−成本,因此

售价=成本+盈利=4 000+1 200=5 200(元).

解法二：售价=4 000×(1+30%)

=4 000×1.3

=5 200(元).

答：这台电脑的售价是5 200元.

九五折就是原价的95%；
八折就是原价的80%；
对折就是原价的50%.

在大街上，我们到处可以看见商店的打折广告.

例如：某商品的原价是100元，按原价八折销售，那么，实际售价=100×80%=80(元).






一件外套原价每件480元，在降价120元后出售，这件外套的售价打几折？



一台电视机以原价的八折出售，售价是1 600元，那么原价是多少呢？

你能帮小杰、小明回答这两个问题吗？

## 练习3.5(3)

1. 一件服装的成本价是80元，如果以20%的盈利率售出，那么售价应是多少？
2. 新学期开学，书店让利给学生，凭学生证购买书籍可享受八折优惠．小明买了一套原价60元的书，求实际售价.
3. 一台电脑以原价的八五折出售，售价是5 100元，这台电脑的原价是多少？
4. 一套运动服原价每件380元，如果降价152元后出售，这套运动服的售价打了几折？如果降价到152元后出售，这套运动服的售价打了几折？

到银行存款，可以获得利息．向银行借款（或称贷款），必须支付利息．存放或借取的款项称为本金，利息是按本金的某个百分比进行计算的，这个百分比称为利率．利率以一个月为一期的称为月利率，以一年为一期的称为年利率．

这里所指的利息称为单利息．在日常生活中，还有采用复利息计算的，我们将在高中继续学习．

根据国家规定：到银行存款，存户在获得利息的同时，还需向国家缴纳20%的利息税．



本金与税后利息的总和称为税后本息和．

例如：存入100元钱，如果年利率是2%，那么一年可获得利息2元；扣除利息税$2\times20\%=0.4$(元)，税后实际可得本息和为$100+2-0.4=101.6$(元)．

**例题10** （利税问题）小杰将1 500元存入银行，月利率是0.11%．存满一年，到期需支付20%的利息税．求到期后小杰可拿到税后利息多少元．

月利率与单利率如何换算？



**解** 一年到期的利息$=1\,500\times0.11\%\times12=19.8$(元)．

支付利息税$=19.8\times20\%=3.96$(元)，

小杰可获得的税后利息$=19.8-3.96=15.84$(元)．

答：到期后小杰可拿到税后利息15.84元．

由此可以得到：

利息＝本金×利率×期数．

**例题11** （利税问题）李先生以4.5%的年利率向银行贷款12万元，借期五年，以单利计算，到期时支付的利息是多少元？

**解** 利息＝本金×利率×期数

$=120\,000\times4.5\%\times5$

$=27\,000$(元)．

答：到期时李先生支付的利息是27 000元．

**思考**

这是一张一年到期的存款利息清单，你能读懂这张清单吗？


中国工商银行 储蓄存款利息清单

现在你就可以解决本章一开始的问题了，请你帮小明的妈妈算一算，她把3 000元钱存入银行，年利率为2.5%，三年到期时可获得的税后利息和税后本息和分别是多少元.

可不要忘了还要支付20%的利息税.



## 练习3.5(4)

1. 小张将2 000元存入银行，定期一年，月利率为0.14%，到期需按20%的税率支付利息税，小张到期实际获得多少利息？
2. 小丽的爸爸参加保险公司的保险，他的投保金额是1万元，每年的收益率为5%，三年作一次收益返回给投保人，三年后小丽的爸爸收益返回多少元？
3. 一公司去年获得利润205万元，规定须按33%的税率纳税，该单位去年纳税多少万元？（精确到万元）
4. 请以班级或小组为单位建立小“银行”，按照银行规定的利率进行一次模拟储蓄活动.



## 3.6 等可能事件

你听到过或看到过“概率”这个词吗？只要你收看每天电视中的天气预报，你就有可能听到气象预报员报道：“明天降水的概率是80%……”这句话的意思是，明天下雨的可能性是80%，但也有可能不下雨.




### 操作

如图将圆盘8等分，指针绕着中心旋转，请问指针落在区域2内的可能性的大小.

### 思考

1,2,3,4,5,6,7,8是八个形状完全相同的区域，指针旋转后落在这八个区域中的可能性是相同的，而落在区域2内只是其中的一种可能，所以指针落在区域2内的可能性的大小为$\frac{1}{8}$.

用大写字母$P$表示可能性的大小，指针落在区域2内的可能性的大小为$P=\frac{1}{8}$，也可用百分比表示：$P=12.5\%$.

把指针绕着圆盘中心旋转，指针落在一个区域内看作一个事件，可以知道这个事件发生的所有可能的结果数是8，而这些结果的可能性是相等的，所以指针落在区域2发生的结果数是1.

这里的$P$是概率的英文单词Probability的第一个字母，在此表示可能性的大小.

### 概括

$$P=\frac{\text{发生的结果数}}{\text{所有等可能的结果数}}.$$



**例题1** 如图，圆盘等分成7块，其中有三块红色区域，三块蓝色区域，一块白色区域，指针绕着中心旋转，求指针落在红色区域内的可能性的大小.

**解** 指针绕着中心旋转，落在区域内所有可能的结果数是7，而指针落在红色区域内的结果数是3，所以$P=\frac{3}{7}$.

指针落在蓝色区域内的可能性的大小与指针落在红色区域内的可能性的大小是否相等?

也可以这样理解，红色区域占整个圆区域的$\frac{3}{7}$，所以指针落在红色区域的可能性的大小是$\frac{3}{7}$.

**例题2** 一副52张的扑克牌(无大王、小王)，从中任意取出一张，共有52种等可能的结果.

(1) 列出抽到K的所有可能的情况；

(2) 求抽到红桃K的可能性的大小；

(3) 求抽到K的可能性的大小.

**解** (1) 红桃K、黑桃K、梅花K和方块K共4种.

$\frac{1}{52}\approx0.019=1.9\%$

(2) $P=\frac{1}{52}$.

或者说抽到红桃K的可能性的大小约为1.9%.

$\frac{1}{13}\approx0.077=7.7\%$

(3) $P=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$.

或者说抽到K的可能性的大小约为7.7%.

## 练习3.6

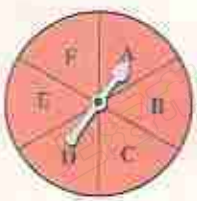
1. 将圆盘12等分，分别求出指针落在下列区域的可能性的大小.

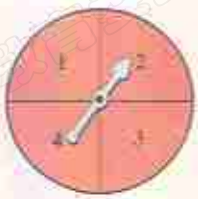


(1) A； (2) B； (3) C、D； (4) E、F或K.

2. 掷一枚骰(tóu)子，求点数1朝上的可能性的大小.

3. 两个圆盘，一个6等分，一个4等分，用字母和数字分别表示区域.





(1) 如图，以英文字母和数字分别表示两个指针停的所在区域，写出以“字母—数字”形式表示的结果数，如 A–1，A–2…等.

(2) 求以下每小题的可能性的大小.

① A–1； ② C–3； ③ F–奇数.

# 本章小结

通过本章学习，理解比和百分比的有关概念和性质，以及百分比与小数、分数间的关系，了解生活中的一些有关百分比的基本常识及其简单的应用，了解等可能事件，会用百分比来看待问题.

本章的知识框架如下：





阅读材料

# 比出规律

分别将1,2,3,4,…,100这一行数的后一个数比前一个数,使用计算器,各得一个比值:

$\frac{2}{1}=2,\frac{3}{2}=1.5,\frac{4}{3}=1.\dot{3},\frac{5}{4}=1.25,\cdots,\frac{99}{98}\approx 1.010\,204\,082,\frac{100}{99}\approx 1.010\,101\,01.$

观察这些比值的变化趋势,可以发现这些结果越来越接近于数1.

再将1,3,5,7,…,1 001,1 003,…这一行数依照以上方法使用计算器,分别求比值,观察这些比值的变化趋势,你会得到什么结论呢?

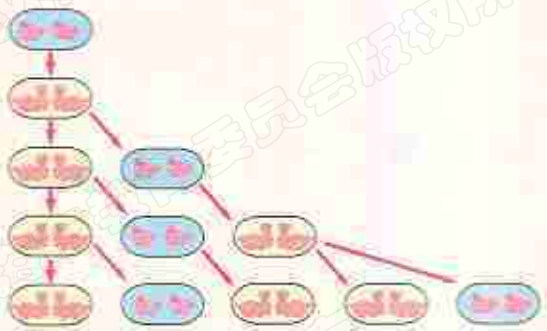
斐波那契(Fibonacci,1175–1250)是中世纪意大利的数学家.在公元1202年,他写了《算盘书》一书,其中有一道智力题:

(1) 假定一个月大小的兔子(雄和雌的)还不成熟,不能繁殖,但两个月大小的兔子便已成熟.又假定从第二个月开始,每一个月它们都繁殖一对新的兔子(雄和雌的).

(2) 如果每一对兔子都按上面说的同样的方式繁殖.试问,从开始起每个月有多少对兔子呢?

我们可以计算出从开始起每个月兔子的对数(见下表).

| 月　份 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 兔子对数 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 |
| 月　份 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 兔子对数 | 13 | 21 | 34 | 55 | 89 | 144 |
| 月　份 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 兔子对数 | 233 | 377 | 610 | 987 | 1597 | 2584 |



从表格中可发现以下规律:从第三个月开始,每个月的兔子对数分别等于前两个月兔子对数之和.

如果用前一个月的兔子对数比后一个月的兔子对数,如二月份1对兔子,三月份2对兔子,则$\frac{\text{二月份兔子对数}}{\text{三月份兔子对数}}=\frac{1}{2}=0.5$.类似地,你可以得到:$\frac{\text{八月份兔子对数}}{\text{九月份兔子对数}}=\frac{21}{34}\approx 0.617\,647\,058$.

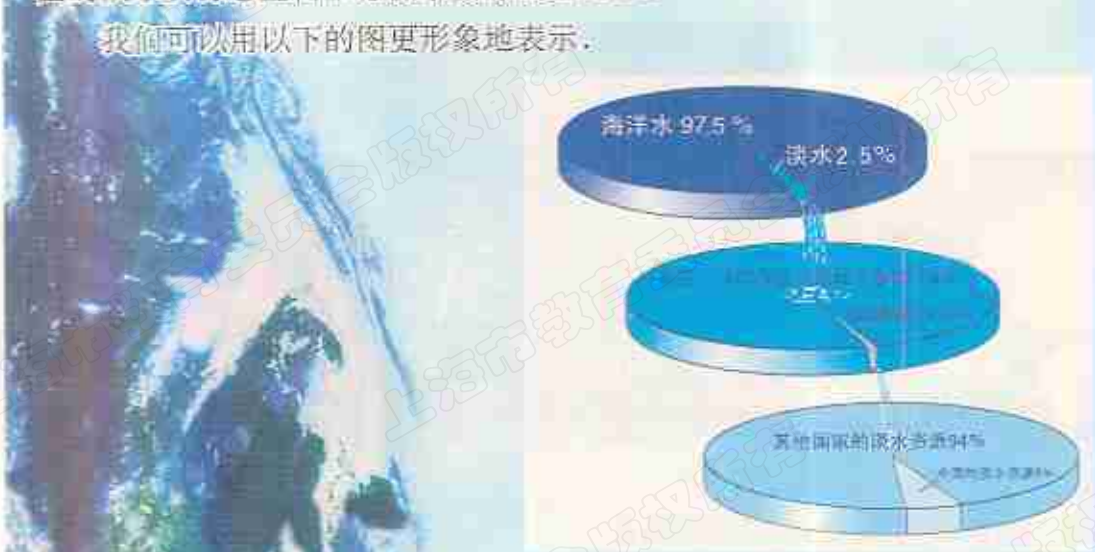
请你仔细地计算(利用计算器)上述各比的结果,观察总结这些结果的变化趋势.它们的比值非常接近一个常数,你能估计出这个数吗?(保留三位小数)

## 探究活动

# 用百分比看水的世界

我们知道一切生物离不开阳光、空气和水，水是宝贵的，但地球上的水并不都是淡水，淡水只占全部水资源的2.5%，而在这2.5%的淡水中，99.66%是冰冠、冰川水以及深层地下水，只有0.34%是可采用的淡水，在这0.34%可采用的淡水中，中国的淡水资源总量占全球淡水资源总量的6%.

我们可以用以下的图更形象地表示：




读了这些数字和图示，你有什么感受？是否对百分比有了更深刻的理解？

## 问题

(1) 你能计算出人类真正可采用的淡水占世界水储量的百分之几吗？

(2) 本世纪初，全球人口约60亿，中国人口约13亿，根据图中所给数据，请你计算出淡水资源中国人均拥有量占世界人均拥有量的百分比.

据统计，中国的淡水资源仅次于巴西、俄罗斯和加拿大，居世界第四位，有人说，中国的淡水资源很丰富，根据你计算出的结果，你赞同他们的观点吗？

(3) 你能自己查找有关资料，设计问题，用百分比来说明问题吗？

# 第四章 圆和扇形

我们的周围随处可见如下各种优美的形体，它们给人以美的享受．那么这些形体有什么特殊性质呢？如何在数学上来研究它们呢？





从下面两幅图中，你能发现什么吗？






点动成线，线动成面．

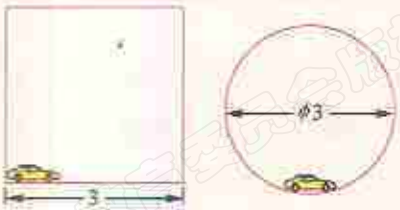
在本章中我们将进一步研究这些图形的有关性质．

# 4 圆和扇形

## 第 1 节　圆的周长和弧长

### 4.1　圆的周长

**思考**




两辆遥控模型赛车分别沿边长为3米的正方形和直径为3米的圆形赛道进行比赛．如果它们同时、同速从一点出发，那么谁先回到原出发点呢？







**操作**

分别用五角硬币、一元硬币做如下实验：

先测量硬币的直径；

再测量硬币的周长．







把测得的数据填在下表里，并求出$C$与$d$的比值.(得数保留两位小数)

| | 直径$d$ | 周长$C$ | $C$与$d$的比值 |
|---|---|---|---|
| 五角硬币 | | | |
| 一元硬币 | | | |

还可以再找一些圆形物体做上述实验.



虽然这些圆的大小不同，但通过测量和计算，你发现周长和直径有什么关系吗?

我国古代数学家对圆周率进行了长期研究，特别是南北朝的数学家祖冲之，用简单的计算工具笔、尺等，将圆周率算到了七位小数，这在当时是件非常不容易的事.感兴趣的同学可看阅读材料或上网查找资料，作进一步研究.

通过上述操作和计算，我们发现圆的周长都是直径的3倍多一些.其实，这个倍数是个固定的数，我们把它叫做圆周率，用字母$\pi$来表示，$\pi$读作"pai".

圆的周长÷直径=圆周率.

人们后来发现圆周率是个无限不循环小数，近似等于3.14，即$\pi \approx 3.14$.*



## 概括

用字母$C$表示圆的周长 (circumference)，$d$表示直径，$r$表示半径，那么

$$C=\pi d \text{ 或 } C=2\pi r.$$



**例题1** 一张王莲的叶子近似于一个圆，它的直径约是0.95米.这张叶子的周长是多少米?(结果保留两位小数)

**解** $d=0.95$，

$C=\pi d=3.14\times 0.95=2.983\approx 2.98$(米).

答：这张叶子的周长约是2.98米.

* 本章中，无特殊说明时，$\pi$取3.14，将计算结果精确到0.01.

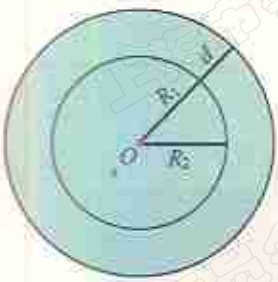
**例题2** 一颗卫星围绕地球飞行，飞行轨道近似为圆形．已知卫星距离地球表面500千米，飞行了14圈，问卫星一共飞行了多少千米．(地球的半径约6 400千米)

**解** $R_{卫}=500+6\,400=6\,900$，

$C_{轨}=2\pi R_{轨}=2\times3.14\times6\,900=43\,332$，

$14C_{轨}=43\,332\times14=606\,648$(千米)．

答：卫星围绕地球一共飞行了约606 648千米．




**例题3** 如图，如果圆环的外圆周长$C_1=250$cm，内圆周长$C_2=150$cm，求圆环的宽度$d$(结果精确到0.1cm)．

**解** 由$C=2\pi R=2\times3.14\times R=6.28\times R$，得$R=C\div6.28$．

设外圆的半径为$R_1$，内圆的半径为$R_2$，则

$R_1=C_1\div6.28$，$R_2=C_2\div6.28$，

$d=R_1-R_2=(C_1-C_2)\div6.28$

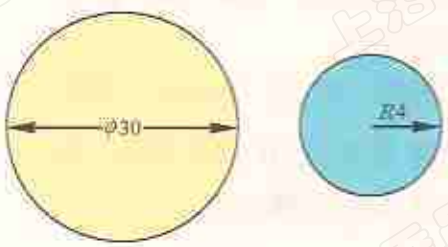
$=(250-150)\div6.28$

$\approx15.9$(cm)．

答：圆环的宽度约是15.9cm．

## 练习4.1

1. 求图中各圆的周长．(单位：厘米)




(第1题)

2. 右图是一个由半圆和一条直径所组成的图形，求这个图形的周长．小明、小丽、小杰谁算得对？为什么？(单位：厘米)



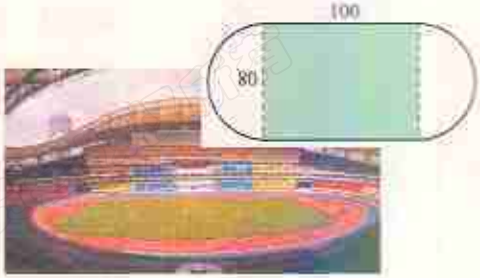

(第2题)




3. 有一奶牛场准备用粗铁丝围成一个半径是120米的圆形牛栏(如图),如果用铁丝围三圈,那么,至少需要买多少米铁丝?(接头处忽略不计.)



(第3题)




(第4题)

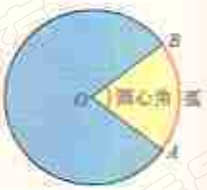
4. 如图,计算环行跑道的周长.(单位:米)

## 4.2 弧长



这是一个三色陀螺,它有三个不同颜色的圆片,按照图中方法插起来,调节这三个圆片露出部分的大小.然后转动陀螺,当你改变三种颜色的配比时,你就会得到不同的色彩."七彩陀螺"会呈现在你面前.

如图,圆上$A$、$B$两点之间的部分就是弧,记作:$\overset{\frown}{AB}$,读作:弧$AB$.$\angle AOB$称为圆心角.




在同一圆中,当圆心角变大时,它所对的弧变长.

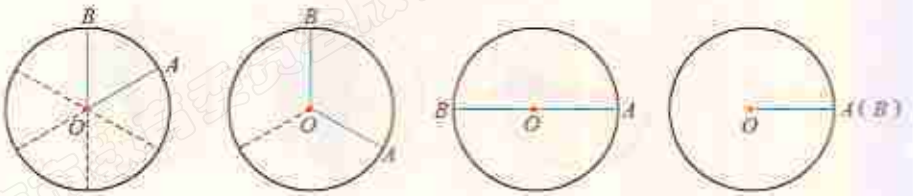


**操作**

调节陀螺,观察弧长和它所对的圆心角的大小变化情况.

## 思考

1. 图中圆心角$AOB$各是几度？圆心角$AOB$所对的弧长分别是圆周长的几分之几？




2. $n°$圆心角所对的弧长是圆周长的几分之几？



我们知道圆的周长$C=2\pi r$，圆周所对的圆心角是$360°$，所以

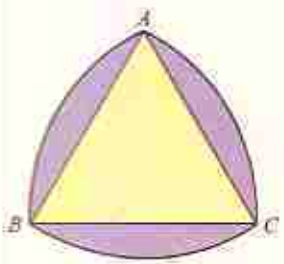
$$1°\text{圆心角所对弧长}=\frac{1}{360}\times 2\pi r=\frac{1}{180}\pi r.$$

$$n°\text{圆心角所对弧长}=\frac{n}{360}\times 2\pi r=\frac{n}{180}\pi r.$$

## 概括

设圆的半径为$r$，$n°$圆心角所对的弧长(arc length)是$l$，那么

$$l=\frac{n}{180}\pi r.$$




**例题** 如图，三角形$ABC$的三条边长都是27毫米，分别以$A$，$B$，$C$三点为圆心，27毫米为半径画弧，求这三段弧长的和.

**解** $\overset{\frown}{AC}$，$\overset{\frown}{AB}$，$\overset{\frown}{BC}$所对的圆心角都是$60°$，由弧长公式得

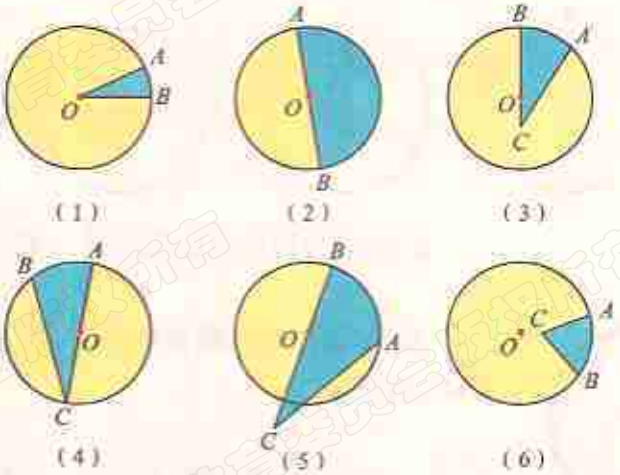
$$l=\frac{n}{180}\pi r=\frac{60}{180}\times 3.14\times 27=28.26,$$

$$3l=3\times 28.26=84.78(\text{毫米}).$$

答：三段弧长的和是84.78毫米.

## 练习4.2

1. 下列图形中的角，是圆心角的是_____，不是圆心角的是_____.(写图形编号)




2. 如果圆的半径$r$=1厘米，那么180° 的圆心角所对的弧长$l$=_____.
3. 如果圆的半径$r$=46cm，那么18°的圆心角所对的弧长$l$=_____.
4. 圆的半径为5厘米，一个圆心角所对的弧长为6.28厘米，求这个圆心角的度数(π取3.14).

上海市教育委员会版权所有

# 4 圆和扇形

## 第 2 节　圆和扇形的面积

### 4.3　圆的面积

**思考**

一只小狗被它的主人用一根绳子拴在草地上，小狗能够活动的范围有多大？









圆所占平面的大小叫做**圆的面积** (area of circle).



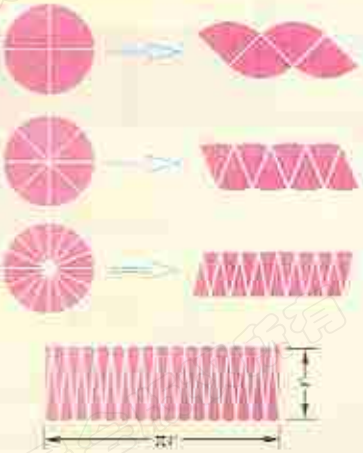
在小学里我们学习了三角形、平行四边形、梯形等直线型图形面积的求法，它们可以通过割补转化为长方形的面积来求解. 那么如何求像圆这样的曲线型图形的面积呢?

**操作**

拿一张圆形纸片，试试看把它转化为近似的直线型图形.

把圆分成若干等份，然后拼起来，可以发现：

当我们把圆分的份数越多，拼成的图形就越接近于一个长方形，它的面积也就越接近于这个长方形的面积．




## 概括

设圆的半径为 $r$，面积为 $S$，那么

圆的面积 $S=\pi r\times r=\pi r^2$．

例题1　已知一个圆的直径为 24 分米，求这个圆的面积．

解　$r=\frac{24}{2}=12$，

$S=\pi r^2=3.14\times 12^2=452.16$（平方分米）．

答：这个圆的面积为 452.16 平方分米．

## 思考

小明家新置了一个圆桌，妈妈让他求桌面的面积，你能帮助小明回答吗？



试一试吧，只要你能量出圆桌的周长或半径，面积问题就解决啦！

## 练习4.3(1)

1. 判断题：
   (1) 圆的半径扩大到原来的3倍，圆的面积也扩大到原来的3倍。（ ）
   (2) 半径为2厘米的圆的周长与面积相等。（ ）
2. 把边长为2分米的正方形剪成一个最大的圆，求这个圆的面积。
3. 已知一个圆的周长为62.8米，求这个圆的面积。



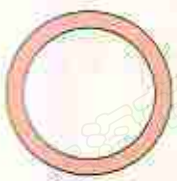
**例题2** 游乐场大转盘的半径约为50米，它旋转产生的圆面的面积是多少平方米？游客乘坐这个大转盘，旋转一周经过的路线有多长？

**解** $r=50$，

$S=\pi r^2=3.14\times 50^2=3.14\times 2\,500=7\,850$(平方米)。

$C=2\pi r=2\times 3.14\times 50=314$(米)。

答：大转盘旋转产生的圆面的面积为7 850平方米，游客乘坐一周的路线长为314米。



**例题3** 工人为管道口涂漆，管道的截面如图所示，管口的外直径是42厘米，内直径是38厘米，涂油漆的面积是多少平方厘米？

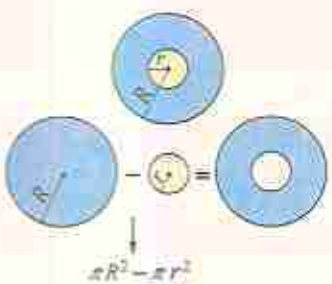
**分析** 圆环的面积就是内外两个圆面积的差。

**解** 设外圆半径为$R$，内圆半径为$r$，

$$R=\frac{42}{2}=21,\ r=\frac{38}{2}=19,$$

$$S=\pi R^2-\pi r^2$$
$$=3.14\times(21^2-19^2)$$
$$=3.14\times 80=251.2\text{(平方厘米)}.$$

答：涂油漆的面积为251.2平方厘米。



## 练习4.3(2)

1. 选择：

(1) 大圆半径是小圆半径的2倍，大圆面积是小圆面积的(　　).

A. 2倍；　　B. 3倍；　　C. 4倍；　　D. 5倍.

(2) 如图，一个半圆面的半径是$r$，它的面积是(　　).

A. $2\pi r$；　　B. $\pi r^2$；　　C. $2\pi r^2$；　　D. $\frac{1}{2}\pi r^2$.



(第1(2)题)

(3) 圆的面积扩大到原来的9倍，半径扩大到原来的(　　).

A. 4.5倍；　　B. 81倍；　　C. 3倍；　　D. 18倍.

2. 如图，如果草坪上自动旋转喷灌装置喷灌的最远距离是10米，那么它的最大喷灌面积是多少平方米？



(第2题)

3. 一张CD光盘的外直径是12cm，内直径是1.5cm，求该光盘的面积.

## 4.4 扇形的面积



记得那个三色陀螺吗？其中红色、黄色、蓝色部分都是扇形.

由组成圆心角的两条半径和圆心角所对的弧围成的图形，叫做**扇形**(sector).




如左图，将红色、黄色、蓝色部分分别记作：扇形$AOB$、扇形$BOC$、扇形$AOC$.

扇形和三角形、四边形、圆等几何图形一样，也是一种基本的几何图形.

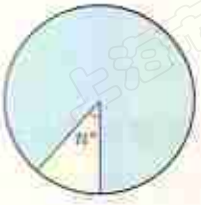
当半径固定时，扇形的面积是随着圆心角的增大而增大的.

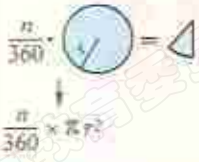


## 思考

如何求扇形的面积呢？它与哪些量有关呢？

在半径为$r$的圆中，因为圆心角是360°的扇形面积就是圆面积$S=\pi r^2$，所以圆心角是1°的扇形面积是$\frac{1}{360}\pi r^2$，圆心角是$n$°的扇形面积是$\frac{n}{360}\pi r^2$.又因为扇形中弧长$l=\frac{n}{180}\pi r$，所以扇形面积又可以由$\frac{1}{2}lr$来计算.




## 概括

设组成扇形的半径为$r$，圆心角为$n$°，弧长为$l$，那么

$$S_{扇形}=\frac{n}{360}\pi r^2=\frac{1}{2}lr.$$



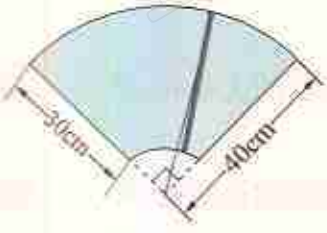
**例题1** 如图，一把展开的扇子的圆心角是135°，扇子的骨架长是30厘米，求这把扇子展开所占的面积.

**解** $r=30$，$n=135$，

$$S_{扇形}=\frac{n}{360}\pi r^2=\frac{135}{360}\times 3.14\times 30^2=1\,059.75(平方厘米).$$

答：这把扇子展开所占的面积为1 059.75平方厘米.

**例题2** 汽车上有电动雨刷装置，雨刷刮过的区域是如图所示的阴影部分，雨刷呈扇形摆动的圆心角是90°，求雨刷摆动划出区域的面积.




**解** $n=90$，$r_1=40$，$r_2=40-30=10$，

$$S_{阴}=\frac{n}{360}\pi r_1^2-\frac{n}{360}\pi r_2^2$$

$$=\frac{90}{360}\times 3.14\times 40^2-\frac{90}{360}\times 3.14\times 10^2$$

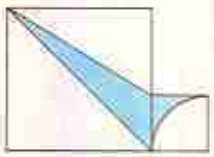
$$=1\,177.5(平方厘米).$$

答：雨刷摆动划出区域的面积是1 177.5平方厘米.

## 练习4.4(1)

1. 已知扇形的圆心角是150°，弧长是62.8cm，求扇形的面积.

2. 右图中两个相连的正方形的边长分别是8厘米、3厘米，求阴影部分的面积.

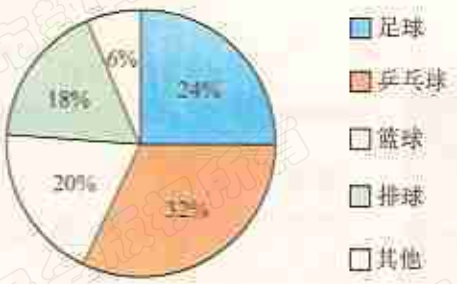


(第2题)

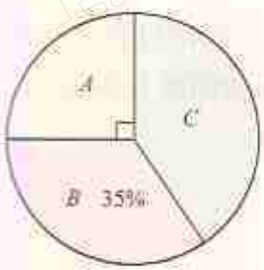
### 思考

小杰是班级里的体育委员，他准备组织全班观看一场球类比赛.为了吸引更多的学生参与，他作了一个调查，了解全班同学最爱看哪类球赛，统计如下.根据图上信息，你看小杰组织学生观看什么比赛好呢?




### 讨论




如左图，如果用这个圆表示总体1，那么哪一个扇形表示总体的25%?

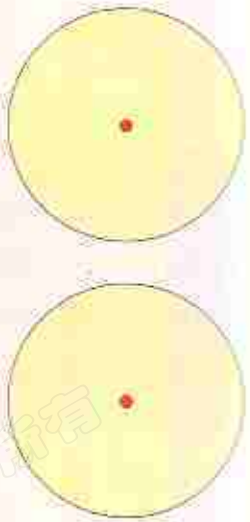
如果用整个圆表示你们班级的人数40，那么扇形$B$表示多少人呢?

如果用整个圆表示你口袋里的10块钱，那么扇形$C$表示多少钱呢?

像上面这样的统计图，叫做扇形统计图.圆代表整体，扇形代表整体中的不同部分，扇形的大小反映部分占整体的百分比.

## 练习4.4(2)

1. 某养禽场今年养鸡44 000只，养鸭20 000只，养鹅16 000只，鸡、鸭、鹅各占家禽总数的百分之几？用扇形统计图表示．
2. 调查周围同学的志向，将来他们准备从事职业的各自人数，如公务员、工程师、教师、军人、工人等，分别算出百分比，并用扇形统计图表示．

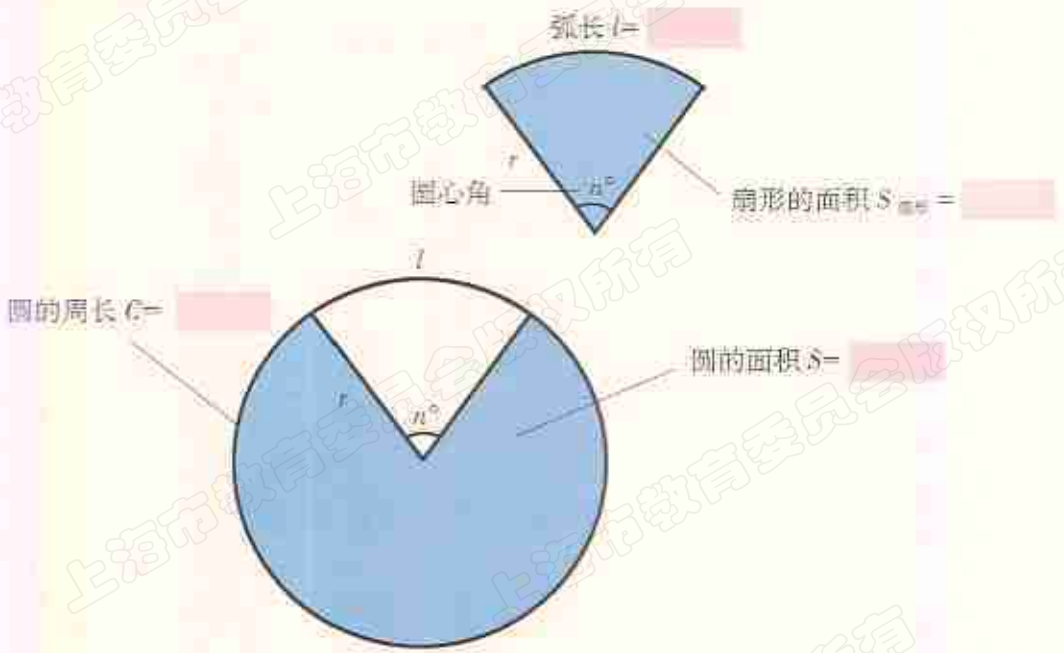


上海市教育委员会版权所有

# 本章小结

本章学习了圆的周长和面积、弧长和扇形的面积等有关概念和计算公式，并在操作实验中，体验了将未知问题转化为已学过问题的过程，学习了化曲为直和无限逼近的数学思想.

本章主要知识内容如下（请把公式补充完整）：




特别有以下关系：

$\frac{l}{C}=\frac{n}{360}$，$\frac{S_{扇形}}{S}=\frac{n}{360}$.

即：$\frac{l}{C}=\frac{S_{扇形}}{S}$.

## 探究活动

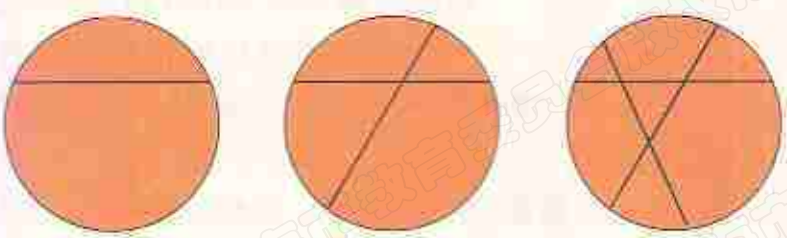
# 最少需要切几刀

小明过生日，全班28位同学为他买来了一个圆形大蛋糕.唱罢生日歌，吹灭蜡烛后，该切分蛋糕了.将蛋糕上表面的圆等分为29个扇形，然后垂直下切，这是简单易行的分法.但是，小明并不打算这样分，因为他知道同学们都不是为吃蛋糕而来，等分与否并不重要，他想借这个机会与同学们一起研究一个问题.他规定每一刀都只能从蛋糕上面垂直下切，每一刀都将蛋糕的圆面一分为二，为使同学们每人分得一份蛋糕，那么最少需要切几刀？



小明的问题的实质是：用若干条弦(圆周上两点连成的线段)最多可以将圆分成几块？

我们知道圆的1条弦最多可以将圆面分为2块，2条弦最多可以将圆面分为4块，3条弦最多可以将圆面分为7块.请你先动手在纸上画一画，然后数一数，4条弦最多可以将圆面分为几块？5条弦最多可以将圆面分为几块？6条弦最多可以将圆面分为几块？这里面隐藏着怎样的规律呢？



你能解决小明提出的问题吗？

## 阅读材料

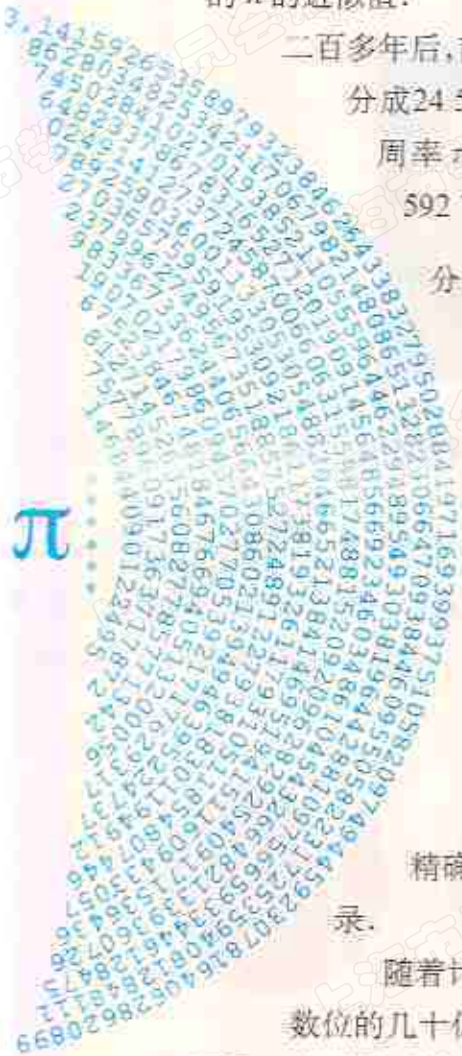
# π的发展简史


刘徽

刘徽，中国魏晋时期的杰出的数学家，中国古代数学理论奠基者之一，在详细整理我国古代数学名著《九章算术》时，他采取了把正多边形的边数逐渐增加去逼近圆周(也称割圆术)的方法，求得圆周率π的近似值是$\frac{3\,927}{1\,250}$=3.141 6，这是当时世界上精确度最高的π的近似值.


祖冲之

二百多年后，南北朝的杰出数学家祖冲之将圆分成24 576条边，用同样的方法，求得圆周率π的值介于3.141 592 6和3.141 592 7之间.为了便于应用，他用两个分数$\frac{22}{7}$和$\frac{355}{113}$代替π的近似值.这种思想比西方早了一千多年.$\frac{22}{7}$称为约率，$\frac{355}{113}$称为密率.为纪念祖冲之，也把$\frac{355}{113}$称为祖率.



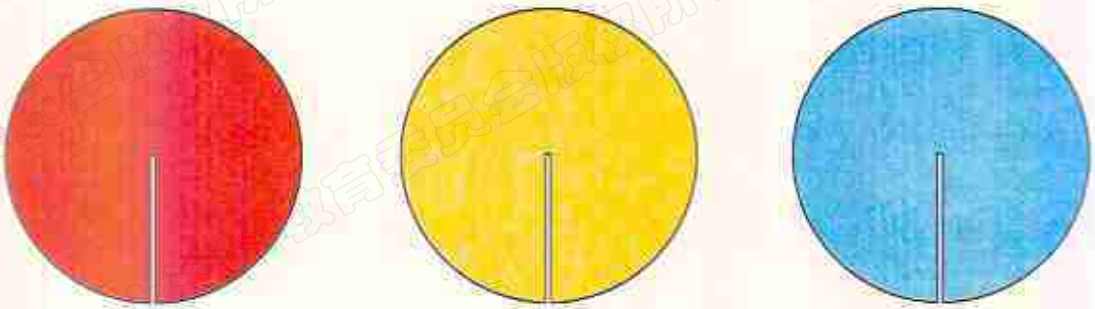
1596年，德国的数学家鲁道夫将π的值精确到了小数点后第15位，后又精确到小数点后第35位.后人把π的35位近似值3.141 592 653 589 793 238 462 643 383 279 502 88称为鲁道夫数.

20世纪40年代后期美国数学家将π的值计算精确至808位小数，这是人工计算π值的最精确的记录.

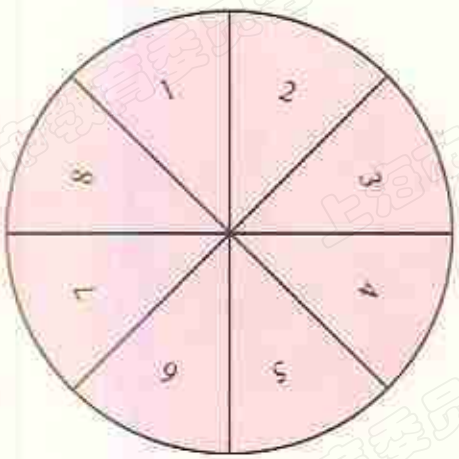
随着计算机的发展，现在π值的精确估计可以达到小数位的几十亿位.数学家已经证明π既不是整数，也不是分数，而是一个无限不循环小数.要算出π的准确值是不可能的.

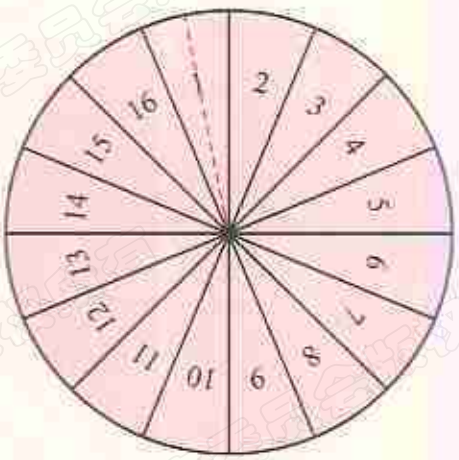
附页

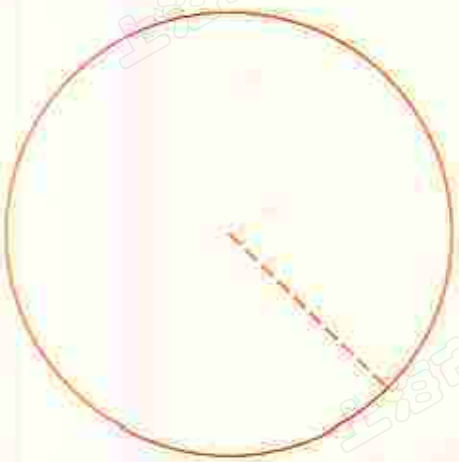
(一)



(二)





# 说　明

本册教材根据上海中小学课程教材改革委员会制定的课程方案和《上海市中小学数学课程标准(试行稿)》编写，供九年义务教育六年级(第一学期)试验用。

本教材由上海师范大学主持编写，经上海市中小学教材审查委员会审查准予试验用。

本册教材的编写人员有：

主编：项家祥　　分册主编：黄　华

特约撰稿人：(按姓氏笔划为序) 张　云　柯新立

夏英平　徐晓燕　黄　华　等

欢迎广大师生来电来函指出教材的差错和不足，提出宝贵意见。上海中小学课程教材改革委员会办公室地址：上海市陕西北路500号(邮政编码：200041)，联系电话：62560016(总机转)、52136338；出版社电话：64377165(总机转)。

**声明**　按照中华人民共和国“著作权法”第二十三条中，关于“为实施九年制义务教育和国家教育规划而编写出版教科书，除作者事先声明不许使用的外，可以不经著作权人许可，在教科书中汇编已经发表的作品片段或者短小的文字作品、音乐作品或单幅的美术作品、摄影作品，但应当按照规定支付报酬，指明作者姓名、作品名称”的有关规定，我们已尽量寻找原作者支付报酬。原作者如有关于支付报酬事宜可及时与出版社联系。

经上海市中小学教材审查委员会审查
准予试验用　准用号Ⅱ－CB－2005024

责任编辑　刘　懿




九年义务教育课本
数　学
六年级第一学期
（试用本）
上海中小学课程教材改革委员会

上海世纪出版集团
上海教育出版社出版
（上海永福路123号　　邮政编码:200031）
上海新华书店发行
商务印书馆上海印刷股份有限公司印刷

开本 787×1092　1/16　印张 8
2005年8月第2版　　2005年8月第2次印刷
书号 ISBN 7-5320-9713-7/G·9485(课)

定价:8.20元
上海市物价局价格审查批准文号:沪价商专(2005)50号
全国物价举报电话:12358
此书如有印、装质量问题,请向本社调换　上海教育出版社电话:64377165

ISBN 7-5320-9713-7
9 787532 097135 >