教育部审定
2013

义务教育教科书

数学

九年级 下册



上海科学技术出版社

微信公众号：电子课本大全

SHUXUE

目　录

第24章　圆 …… 1

24.1　旋转 …… 2

阅读与欣赏　在平面直角坐标系中对图形进行旋转变换 …… 7

数学活动　设计图案(一) …… 8

24.2　圆的基本性质 …… 12

24.3　圆周角 …… 27

24.4　直线与圆的位置关系 …… 33

24.5　三角形的内切圆 …… 42

24.6　正多边形与圆 …… 47

24.7　弧长与扇形面积 …… 53

数学史话　圆周率π …… 58

数学活动　设计图案(二) …… 59

24.8　综合与实践　进球线路与最佳射门角 …… 62

小结·评价 …… 65

复习题 …… 67

上海科学技术出版社版权所有

微信公众号：电子课本大全

第25章 投影与视图 …… 72
25.1 投影 …… 73
25.2 三视图 …… 80
小结·评价 …… 86
复习题 …… 87

第26章 概率初步 …… 90
26.1 随机事件 …… 91
26.2 等可能情形下的概率计算 …… 95
26.3 用频率估计概率 …… 104
数学活动 投针实验 …… 107
26.4 综合与实践 概率在遗传学中的应用 …… 110
阅读与思考 几何概率 …… 112
数学史话 概率论的产生与发展 …… 114
小结·评价 …… 115
复习题 …… 116

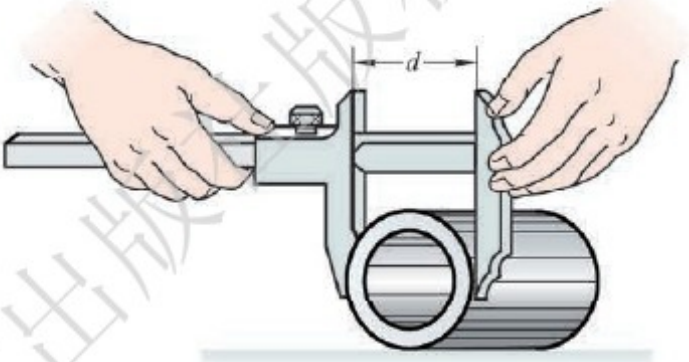
附录 部分中英文词汇索引 …… 118
后记 …… 119

上海科学技术出版社版权所有

微信公众号：电子课本大全

第24章 圆

24.1 旋转
24.2 圆的基本性质
24.3 圆周角
24.4 直线与圆的位置关系
24.5 三角形的内切圆
24.6 正多边形与圆
24.7 弧长与扇形面积
24.8 综合与实践　进球线路与最佳射门角



如何确定一个破残轮的圆心和半径？如何测量一个圆形工件的直径？这些实际问题的解决都涉及圆的有关知识.

本章我们将学习圆的一些性质以及它们在实际中的应用.

上海科学技术出版社版权所有

微信公众号：电子课本大全

24.1 旋　转

生活中，旋转现象普遍存在，如各种车轮子的转动，风力发电机风叶的转动等，如图 24－1.



(1) 汽车的轮子　　(2) 风力发电机的风叶

图　24－1

在平面内，一个图形（如图 24－2 中的△ABC）绕着一个定点（如点 O），旋转一定的角度（如 θ），得到另一个图形（如△$A'B'C'$）的变换，叫做**旋转**（rotation）. 定点 O 叫做**旋转中心**，θ 叫做**旋转角**. 原图形上一点 A 旋转后成为点 A'，这样的两个点叫做**对应点**.

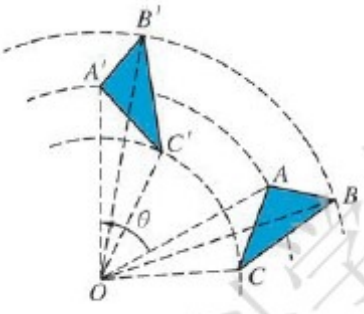


图　24－2

观察

如图 24－2，△ABC 绕着旋转中心 O 按逆时针方向旋转 θ 后，得到△$A'B'C'$.

(1) 连接 OA，OB，OC，OA'，OB'，OC'，那么 OA 与 OA' 的长度有何关系？OB 与 OB'、OC 与 OC' 也有这样的关系吗？

(2) ∠AOA'、∠BOB'、∠COC' 的大小有何关系？

平面内的旋转既可按逆时针方向也可按顺时针方向.

上海科学技术出版社版权所有
微信公众号：电子课本大全

在一个图形和它经过旋转所得到的图形中，对应点到旋转中心的距离相等；两组对应点分别与旋转中心的连线所成的角相等，都等于旋转角；旋转中心是唯一不动的点.

在平面内，一个图形绕着一个定点旋转一定的角度 θ ($0° < \theta < 360°$)后，能够与原图形重合，这样的图形叫做**旋转对称图形**，这个定点就是旋转中心. 图 24－3 中的图形绕旋转中心旋转 180°，与原图形重合；图 24－4 中的图形绕旋转中心旋转 120°或 240°，也与原图形重合. 图 24－3 和图 24－4 中的图形都是旋转对称图形.

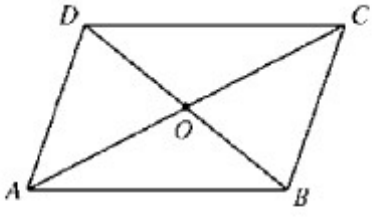


图 24－3



图 24－4

练习

1. 找出下列旋转对称图形的旋转中心，并指出这个图形至少需旋转多大角度才能与原图形重合.



（第 1 题）

2. 在下列图形中：



（第 2 题）

上海科学技术出版社版权所有

微信公众号：电子课本大全

(1) 指出轴对称图形，并用虚线画出该图形的对称轴；

(2) 指出旋转对称图形，用“*”号标出该图形的旋转中心，并指出至少需旋转多大角度才能与原图形重合.

在上述旋转变换中，当 $\theta = 180°$ 时，是一个特殊的变换. 如图 24－5，将△ABC 绕定点 O 旋转 180°，得到△$A'B'C'$，这时，图形△ABC 与图形△$A'B'C'$ 关于点 O 的对称叫做**中心对称**，点 O 就是**对称中心**.

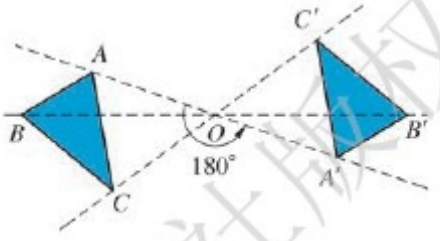


图 24－5

观察图 24－5，两个图形成中心对称，除具有一般旋转的性质外，还有什么特性呢？

成中心对称的两个图形中，对应点的连线经过对称中心，且被对称中心平分.

例 如图 24－6，已知四边形 $ABCD$ 和点 O，试画出四边形 $ABCD$ 关于点 O 成中心对称的图形 $A'B'C'D'$.

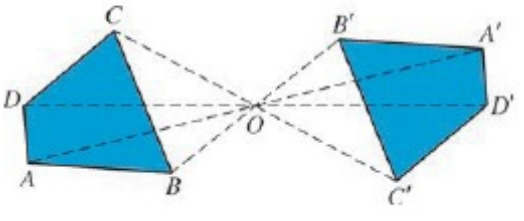


图 24－6

分析：要画出四边形 $ABCD$ 关于点 O 成中心对称的图形，只要画出 A，B，C，D 四点关于点 O 的对应点，再顺次连接各对应点即可.

作法

1. 连接 AO 并延长到 A'，使 $OA' = OA$，得到点 A 的对

上海科学技术出版社版权所有
微信公众号：电子课本大全

应点 A'.

2. 同理,可作出点 B, C, D 的对应点 B', C', D'.

3. 顺次连接点 A', B', C', D'.

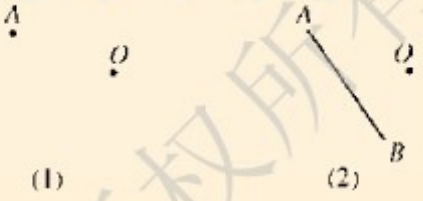
则四边形 $A'B'C'D'$ 即为所作.

练习

1. 作图:

(1) 求作已知点 A 关于点 O 成中心对称的对应点;

(2) 求作已知线段 AB 关于点 O 成中心对称的线段.



(第 1 题)

2. 判断正误:

(1) 平行四边形的对角顶点关于对角线交点对称. (　　)

(2) 平行四边形的对边关于对角线交点对称. (　　)

把一个图形绕某一个定点旋转 180°,如果旋转后的图形能和原来图形重合,那么这个图形叫做**中心对称图形**,这个定点就是**对称中心**.

例如,一条线段绕它中点旋转 180°后,它的两个端点互换了位置,旋转后的线段与原线段重合,因此,线段是中心对称图形. 又如$\square ABCD$(图 24－3),把它绕对角线交点 O 旋转 180°后,点 A 与点 C、点 B 与点 D 互换了位置,且由于 $OA = OC$, $OB = OD$, 所以旋转后的图形和原来图形重合,因此,平行四边形是中心对称图形.

矩形、菱形、正方形都是中心对称图形,这些图形同时还是轴对称图形,它们的对称轴交点就是对称中心,如图 24－7.

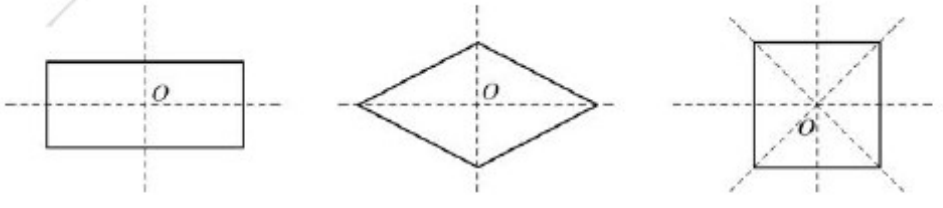
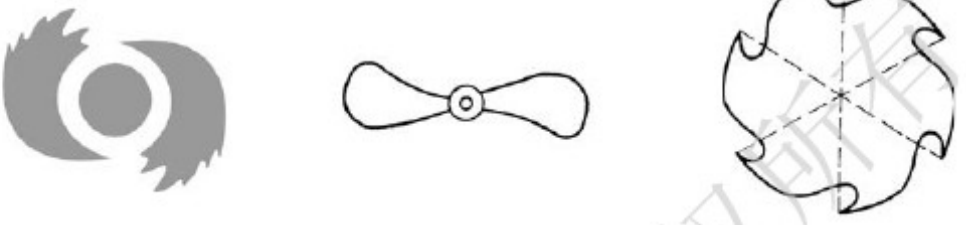


图　24－7

上海科学技术出版社版权所有
微信公众号：电子课本大全

中心对称图形的形状匀称美观，因而常常被用在图案设计和建筑装饰中，如中央电视台栏目“东方时空”的图标. 此外，具有中心对称的图形，能够在平面内绕对称中心平稳地旋转，所以有许多旋转部分被设计成中心对称图形，如飞机的螺旋桨、切削金属用的铣刀等(图 24－8).



(1)“东方时空”标志　　(2)螺旋桨　　(3)铣刀

图　24－8

练习

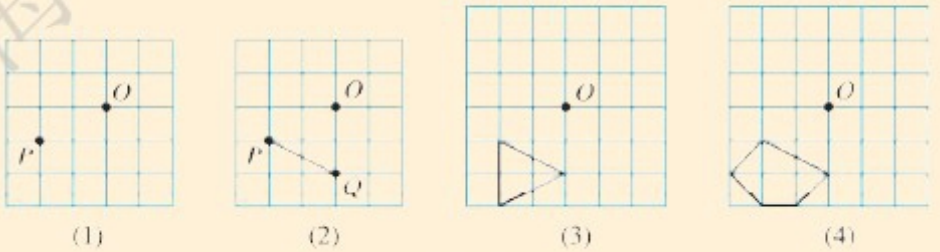
1. 下列图形中，哪些是中心对称图形？哪些是轴对称图形？画出它们的对称中心或所有的对称轴.



正三角形　　正五边形　　正六边形
(1)　　(2)　　(3)　　(4)　　(5)

(第 1 题)

2. 画出下列各题中的图形关于点 O 成中心对称的图形.



(1)　　(2)　　(3)　　(4)

(第 2 题)

上海科学技术出版社版权所有
微信公众号：电子课本大全



阅读与欣赏

在平面直角坐标系中对图形进行旋转变换

如图 24－9，△ABC 的顶点坐标分别是 $A(2, 1)$，$B(0, 0)$，$C(2, 0)$.

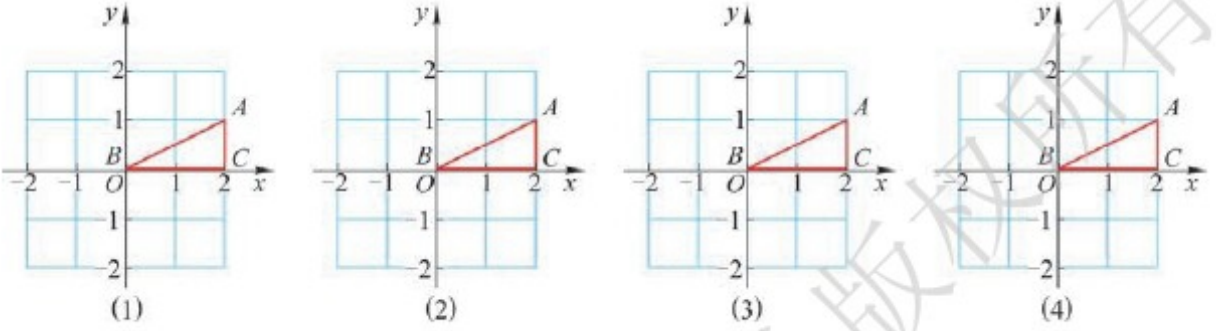


图　24－9

（1）分别画出 △ABC 以点 $O(0, 0)$ 为旋转中心，在图 24－9(1)中旋转 90°、在图 24－9(2)中旋转 180°、在图 24－9(3)中旋转 270°、在图 24－9(4)中旋转 360°而得到的 △$A'B'C'$；(按逆时针方向旋转)

（2）给出点 A'，B'，C'的坐标(填在下表中)：

原图形上点的坐标		$A(2, 1)$	$B(0, 0)$	$C(2, 0)$
按逆时针方向旋转后对应点坐标	以点 O 为旋转中心旋转 90°	A'(　　)	B'(　　)	C'(　　)
	以点 O 为旋转中心旋转 180°	A'(　　)	B'(　　)	C'(　　)
	以点 O 为旋转中心旋转 270°	A'(　　)	B'(　　)	C'(　　)
	以点 O 为旋转中心旋转 360°	A'(　　)	B'(　　)	C'(　　)

（3）分别比较点 A'与点 A、点 B'与点 B、点 C'与点 C 的坐标，能得到怎样的结论？

通过作图、分析能看到，把一个图形以点 O 为旋转中心作几个特殊角度的旋转，可得如下结果：

原图形上任一点坐标	以点 O 为旋转中心按逆时针方向旋转后对应点坐标			
	旋转 90°	旋转 180°	旋转 270°	旋转 360°
(x, y)	$(-y, x)$	$(-x, -y)$	$(y, -x)$	(x, y)

上海科学技术出版社版权所有

微信公众号：电子课本大全

旋转任意角度时，任一点的原坐标与变换后新坐标之间的关系，要用到一般三角函数，这里不作介绍.

这里，把(x, y)变换成(x, y)的变换叫做**恒等变换**，即在平面直角坐标系中，一个图形绕点O作360°旋转是一个恒等变换.

我们已学过平移、轴对称和旋转，利用这些图形变换中的一种或几种的组合，可进行图案设计. 例如，我们先设计好图案，用厚纸板制成镂花模板(图24－10). 将这个镂花模板或作平移，或作轴对称，或作旋转…… 然后重复，可以得到不同形式的镶边，如图24－11.

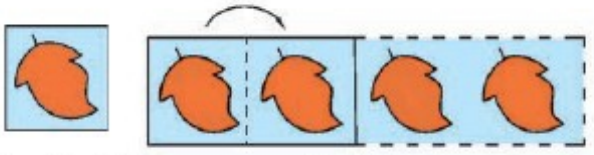
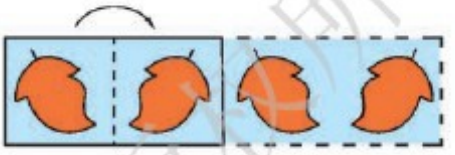
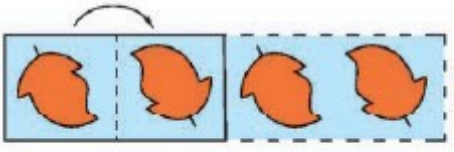


图 24－10

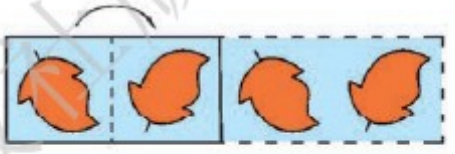
(1) 平移



(2) 轴对称



(3) 旋转180°



(4) 轴对称并旋转180°

图 24－11



数学活动

设计图案(一)

通过几何变换制作图案：

(1) 先设计一个基本图形(或花纹)，然后通过轴对称、旋转、平移等变换，设计1～2个图案；

(2) 请你为学校设计校徽、运动会的会徽或黑板报的一组花边.

上海科学技术出版社版权所有
微信公众号：电子课本大全

数学园地

1. 连续两次作两条平行对称轴的轴对称变换

(1) 在纸上先画出如图 24－12 中的图形 F(小旗子) 和对称轴 l_1,l_2,且 $l_1 /\!/ l_2$;然后画出 F 关于 l_1 的对称图形 F_1,再画出 F_1 关于 l_2 的对称图形 F_2;

(2) 比较原图形 F 与最后对称图形 F_2. 当两条对称轴平行时,什么样的一次变换可直接使 F 变成 F_2?

(3) 如果 l_1 与 l_2 之间距离为 8 cm,图形 F 上一点 A 距离 l_1 为 3 cm,经上述两次作轴对称变换后,点 A 被平移了多远?如果图形 F 上一点 B 距离 l_1 为 2 cm,经上述两次作轴对称变换后,点 B 又被平移了多远?

由此,你能得出什么结论?

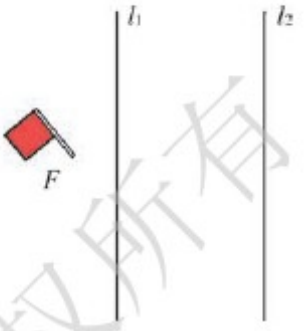


图 24－12

2. 连续两次作两条相交对称轴的轴对称变换

(1) 在纸上先画出如图 24－13 中的图形 F(小旗子) 和对称轴 l_1,l_2,且 l_1 与 l_2 相交;然后画出 F 关于 l_1 的对称图形 F_1,再画出 F_1 关于 l_2 的对称图形 F_2;

(2) 比较原图形 F 与最后对称图形 F_2. 当两条对称轴相交时,什么样的一次变换可直接使 F 变成 F_2?

(3) 如果 l_1 与 l_2 所夹的锐角为 α,上述(2)中的这个变换结果与 α 有何关系?

由此,你能得出什么结论?

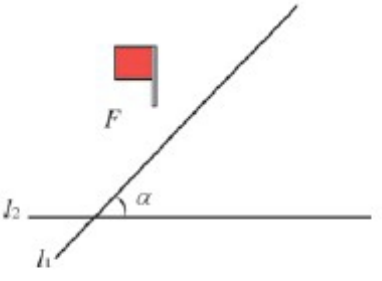


图 24－13

3. 连续两次作两条重合对称轴的轴对称变换

如果一个图形关于两条重合的对称轴作两次轴对称变换,那么结果与原图形有什么关系?

上海科学技术出版社版权所有

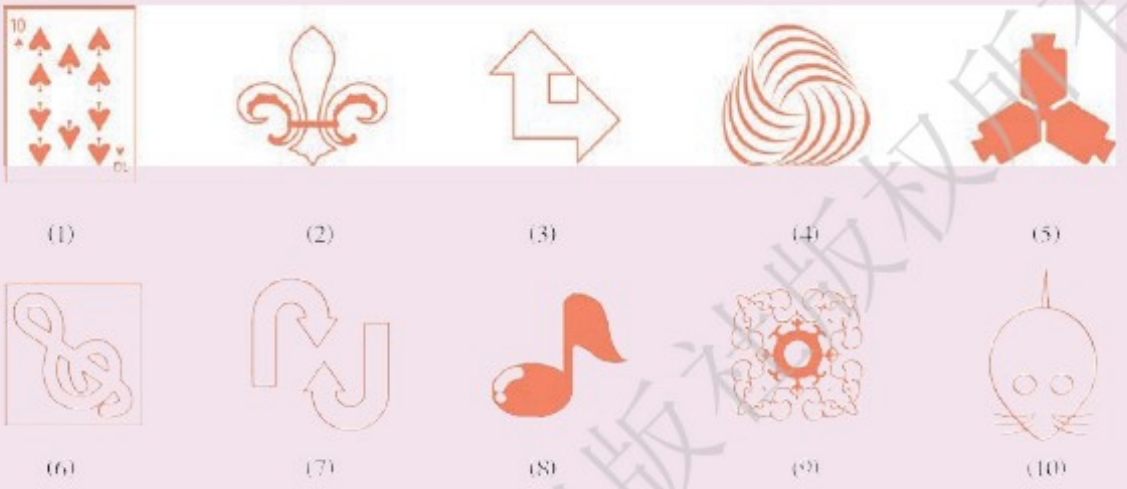
微信公众号：电子课本大全

习题 24.1

1. 给下列图形分类：

（1）只属轴对称；　　（2）只属旋转对称；

（3）既属轴对称又属旋转对称；　　（4）不属任何对称.

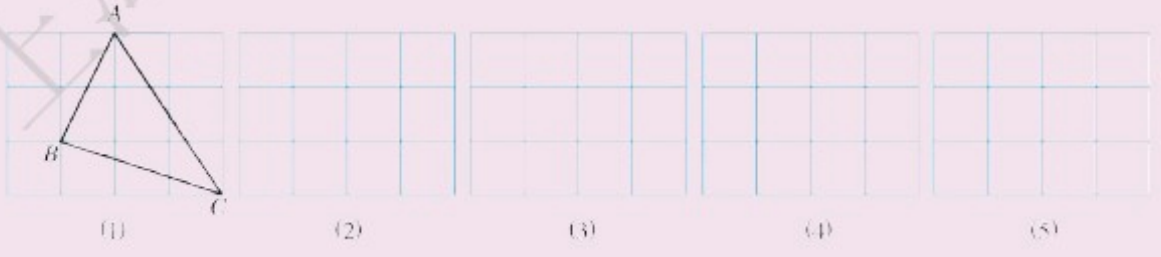


（第 1 题）

2. 画出上题中轴对称图形的对称轴，用“ * ”号标出上题中旋转对称图形的旋转中心.

3. 画出已知线段 AB 关于点 O（不在 AB 上）成中心对称的线段 $A'B'$，再画出 $A'B'$ 关于另一点 O'（不与 O 重合，也不在 $A'B'$ 上）成中心对称的线段 $A''B''$，并且证明 $A''B'' /\!/ AB$. 由此你能得出怎样的猜想？

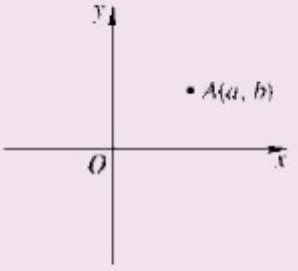
4. 在方格纸上，格点 $\triangle ABC$ 的位置如图（1），请在图（2）~（5）中各画出一个与格点 $\triangle ABC$ 全等但位置不同的格点三角形.



（第 4 题）

上海科学技术出版社版权所有
微信公众号：电子课本大全

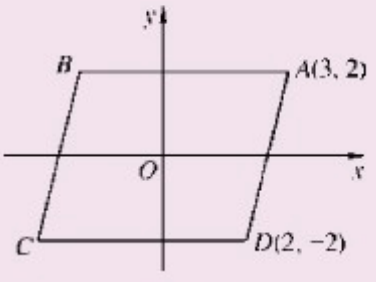
5. 如图，在平面直角坐标系中有点 $A(a, b)$，作出点 A 关于 x 轴对称的对应点 A_1，点 A_1 关于 y 轴对称的对应点 A_2. 连接 OA_1 和 OA_2，观察点 A_1，A_2 与点 O 有什么关系？



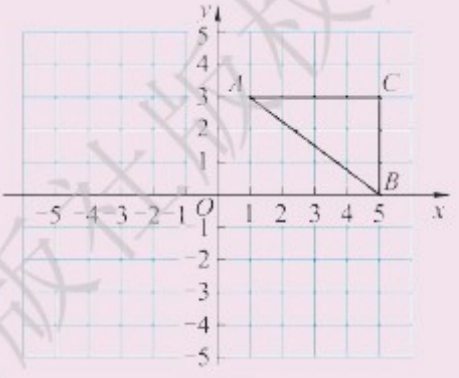
（第 5 题）

6. 在平面直角坐标系中画出点 $A(-1, 2)$，$B(-3, 1)$，$C(-2, -1)$，并画出这三点关于原点成中心对称的对应点，写出它们的坐标. 然后画出点 A 关于点 B 成中心对称的对应点并写出其坐标.

7. 如图，已知 $\square ABCD$ 的中心在原点 O，顶点 $A(3, 2)$，$D(2, -2)$，求顶点 B，C 的坐标.



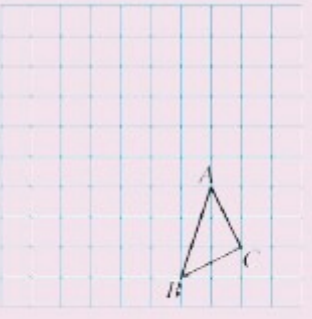
（第 7 题）



（第 8 题）

8. 如图，$\triangle ABC$ 的顶点坐标分别为 $A(1, 3)$，$B(5, 0)$，$C(5, 3)$，将 $\triangle ABC$ 绕原点 O 按逆时针方向旋转 90°，得 $\triangle A_1B_1C_1$，求顶点 A_1，B_1，C_1 的坐标.

9. $\triangle ABC$ 在方格纸中的位置如图.



（第 9 题）

（1）请在方格纸上建立平面直角坐标系，使得 A，B 两点的坐标分别为 $A(2, -1)$，$B(1, -4)$，并求出点 C 的坐标；

（2）作出 $\triangle ABC$ 关于 x 轴对称的 $\triangle A_1B_1C_1$，再作出 $\triangle ABC$ 以原点为旋转中心、按逆时针方向旋转 180° 后得到的 $\triangle A_2B_2C_2$，并写出 C_1，C_2 两点的坐标；

（3）观察 $\triangle A_1B_1C_1$ 和 $\triangle A_2B_2C_2$，其中的一个三角形能否由另一个三角形经过某种变换而得到？若能，请指出是什么变换？

10. 在平面直角坐标系中，将抛物线 $y = 4x^2$ 绕原点、按逆时针方向旋转 180°，求这时抛物线对应的函数表达式.

上海科学技术出版社版权所有

微信公众号：电子课本大全

24.2 圆的基本性质

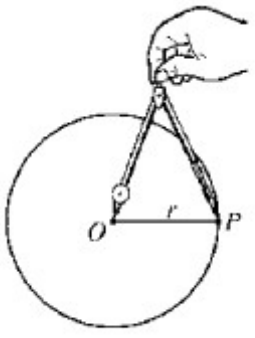


图 24-14

如图 24－14，在平面内，线段 OP 绕着它固定的一个端点 O 旋转一周，则另一个端点 P 所形成的封闭曲线叫做**圆**（circle）. 固定的端点 O 叫做**圆心**（center of a circle），线段 OP 的长为 r 叫做**半径**（radius）. 以点 O 为圆心的圆，记作“$\odot O$”，读作“圆 O”.



思考

从图 24－14 画图的过程中，你能说出圆上的点有什么特性吗？

（1）圆上各点到定点（圆心 O）的距离都等于定长（半径 r）；

（2）平面内到定点（圆心 O）的距离等于定长（半径 r）的所有点都在同一个圆上.

因此，圆可以看成：平面内到定点（圆心 O）的距离等于定长（半径 r）的所有点组成的图形.



交流

平面上有一个圆，这个平面上的点，除了在圆上外，与圆还有几种位置关系，这些关系根据什么来确定？

上海科学技术出版社版权所有

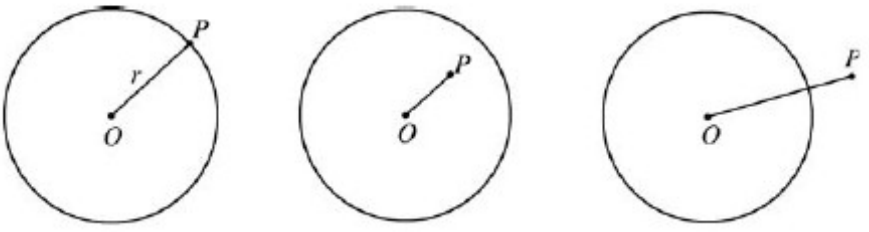
微信公众号：电子课本大全

平面上一点 P 与⊙O(半径为 r)的位置关系有以下三种情况(图 24－15):

(1) 点 P 在⊙O 上$\Longleftrightarrow OP=r$;

(2) 点 P 在⊙O 内$\Longleftrightarrow OP<r$;

(3) 点 P 在⊙O 外$\Longleftrightarrow OP>r$.



(1) (2) (3)

图 24－15

符号"$\Longleftrightarrow$"读作"等价于".它表示从符号的左边可以推出右边;同时从符号的右边也可以推出左边.

圆上任意两点间的部分叫做**圆弧**(arc),简称**弧**,用符号"⌒"表示.如图 24－16,以 A,B 为端点的弧记作$\overset{\frown}{AB}$,读作"弧 AB".

连接圆上任意两点的线段(图 24－16 中的 AB,CD)叫做**弦**(chord),经过圆心的弦(图 24－16 中的 CD)叫做**直径**(diameter).

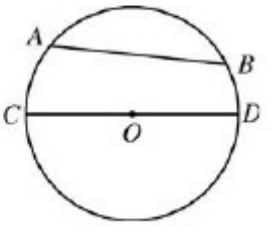


图 24－16

同圆中所有的半径相等.

圆的任意一条直径的两个端点分圆成两条弧,每一条弧都叫做**半圆**.大于半圆的弧(图 24－16 中的$\overset{\frown}{ACB}$,一般用三个字母表示)叫做**优弧**;小于半圆的弧(图 24－16 中的$\overset{\frown}{AB}$,$\overset{\frown}{AC}$或$\overset{\frown}{BD}$)叫做**劣弧**.

由弦及其所对的弧组成的图形叫做**弓形**(图 24－16 中弦 AB 分别与$\overset{\frown}{AB}$及$\overset{\frown}{ACB}$组成两个不同的弓形).

能够重合的两个圆叫做**等圆**,等圆的半径相等.

在同圆或等圆中,能够互相重合的弧叫做**等弧**.

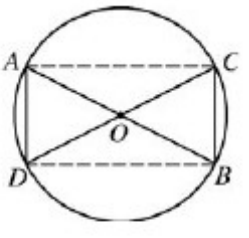


图 24－17

例 1 已知:如图 24－17,AB,CD 为⊙O 的直径.

求证:$AD\parallel CB$.

证明 连接 AC,DB.

微信公众号:电子课本大全

$\because$ AB, CD 为$\odot O$ 的直径，

$\therefore$ $OA = OB$，

$OC = OD$.

$\therefore$ 四边形 $ADBC$ 为平行四边形.

$\therefore$ $AD \parallel CB$.

练习

1. 举出一些圆形的物体实例.
2. 以点 O 为圆心，分别以 2 cm，3 cm 为半径画两个圆（这两个圆叫做**同心圆**），说出满足下列条件的点 P 的位置：

   (1) $OP > 3$ cm；　　(2) $OP \leqslant 2$ cm；

   (3) 2 cm $< OP <$ 3 cm；　　(4) $OP = 0$ cm.
3. 矩形的四个顶点是否一定能在同一个圆上，为什么？

我们知道，等腰三角形、平行四边形、矩形、菱形、正方形等图形都具有对称性. 那么，圆是否具有对称性呢？根据它的对称性又能推出圆的哪些性质呢？

1. 垂径分弦

探究

1. 在纸上任意画一个$\odot O$，以$\odot O$ 的一条直径为折痕，把$\odot O$ 折叠，如图 24－18，你发现了什么？

圆是轴对称图形，对称轴是圆所在平面内任意一条过圆心的直线.

上海科学技术出版社版权所有
微信公众号：电子课本大全

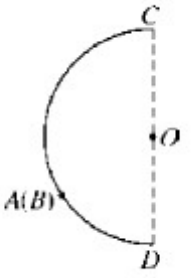


图 24－18

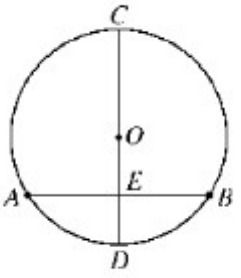


图 24－19

2. 在折叠⊙O后，用针在半圆上刺一个小孔，得两个重合的点A，B，如图24－18. 把折叠的圆摊平，那么折痕CD是直径，点A，B是关于直线CD的一对对应点. 连接AB，得弦AB，如图24－19，这时直径CD与弦AB有怎样的位置关系？

3. 直径CD把劣弧$\overset{\frown}{ADB}$分成$\overset{\frown}{AD}$与$\overset{\frown}{DB}$两部分，把优弧$\overset{\frown}{ACB}$分成$\overset{\frown}{AC}$与$\overset{\frown}{CB}$两部分，这时$\overset{\frown}{AD}$与$\overset{\frown}{DB}$、$\overset{\frown}{AC}$与$\overset{\frown}{CB}$各有怎样的关系？

由上面的探究，我们可以发现并证明如下定理：

***垂径定理　垂直于弦的直径平分这条弦，并且平分这条弦所对的两条弧.**

*已知：如图24－20，在⊙O中，CD是直径，AB是弦，并且$CD \perp AB$，垂足为E.

求证：$AE = EB$，$\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DB}$（或$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CB}$）.

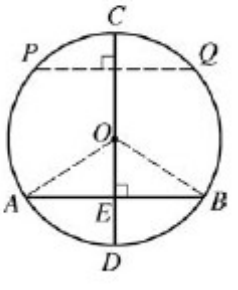


图 24－20

证明　连接OA，OB，则$OA = OB$，$\triangle OAB$为等腰三角形，所以底边AB上的高OE所在直线CD是AB的垂直平分线，因此点A与点B关于直线CD对称. 同理，如果点P是⊙O上任意一点，过点P作直线CD的垂线，与⊙O相交于点Q，则点P与点Q关于直线CD也对称，所以⊙O关于直线CD对称. 当把圆沿着直径CD折叠时，CD两侧的两个半圆重合，AE与BE重合，点A与点B重合，$\overset{\frown}{AD}$与$\overset{\frown}{DB}$重合，$\overset{\frown}{AC}$与$\overset{\frown}{CB}$重合.

微信公众号：电子课本大全

因此，$AE = EB$，$\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DB}$，$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CB}$.

同理，可以证明下面的定理：

定理　平分弦（不是直径）的直径垂直于弦，并且平分弦所对的两条弧.

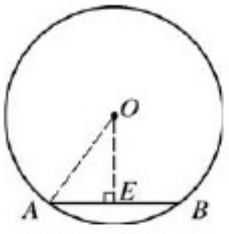


图　24－21

例 2　如图 24－21，⊙O 的半径为 5 cm，弦 AB 为 6 cm，求圆心 O 到弦 AB 的距离.

解　连接 OA，过圆心 O 作 $OE \perp AB$，垂足为 E，则

$$AE = EB = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 6 = 3(\text{cm}).$$

又　∵　$OA = 5$ cm，

∴　在 Rt△OEA 中，有

$$OE = \sqrt{OA^2 - AE^2}$$

$$= \sqrt{5^2 - 3^2} = 4(\text{cm}).$$

答：圆心 O 到弦 AB 的距离是 4 cm.

圆心到弦的距离叫做**弦心距**.

例 3　赵州桥（图 24－22）建于 1 400 年前的隋朝，是我国石拱桥中的代表性桥梁，桥的下部呈圆弧形，桥的跨度（弧所对的弦长）为 37.4 m，拱高（弧的中点到弦的距离）为 7.2 m，求赵州桥桥拱所在圆的半径.（精确到 0.1 m）

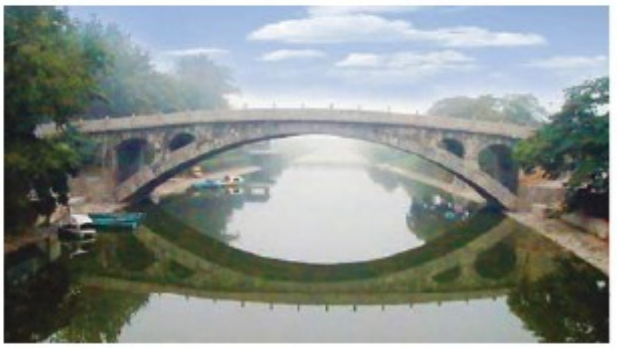


图　24－22

上海科学技术出版社版权所有
微信公众号：电子课本大全

解 如图 24－23，过桥拱所在圆的圆心 O 作 AB 的垂线，交$\overset{\frown}{AB}$于点 C，交 AB 于点 D，则 $CD=7.2$ m.

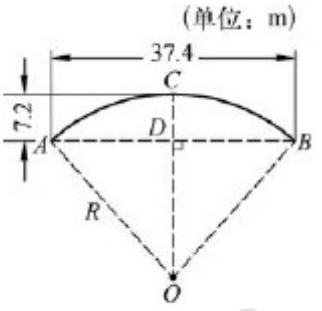


图 24－23

由垂径定理，得

$$AD=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 37.4=18.7(\text{m}).$$

设⊙O 的半径为 R m，在 Rt△AOD 中，$AO=R$，$OD=R-7.2$，$AD=18.7$.

由勾股定理，得

$$AO^2=OD^2+AD^2.$$

$$\therefore\quad R^2=(R-7.2)^2+18.7^2.$$

解方程，得

$$R\approx 27.9.$$

答：赵州桥桥拱所在圆的半径约为 27.9 m.

练习

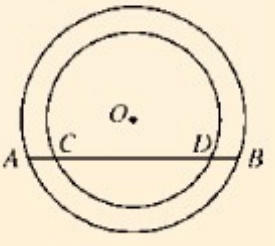
1. 在半径为 4 cm 的⊙O 中，有长为 4 cm 的弦 AB. 计算：

   (1) 点 O 与 AB 的距离；

   (2) ∠AOB 的度数.

2. 已知：如图，在以 O 为圆心的两个同心圆中，大圆的弦 AB 交小圆于 C，D 两点.

   求证：$AC=BD$.



(第 2 题)

3. 判断正误：

   (1) 垂直于弦的直径平分这条弦. (　　)

   (2) 平分弦的直径垂直于这条弦. (　　)

   (3) 弦的垂直平分线必过圆心. (　　)

   (4) 平分弦所对弧的直径垂直于这条弦. (　　)

上海科学技术出版社版权所有

微信公众号：电子课本大全

2. 圆心角、弧、弦、弦心距间关系



探究

圆是中心对称图形吗?

1. 如图 24－24,在两张透明纸上,分别作半径相等的⊙O 和⊙O',把两张纸叠在一起,使⊙O 与⊙O' 重合,用图钉钉住圆心. 将上面一个圆旋转任意一个角度,两个圆还能重合吗?

圆是旋转对称图形,旋转中心为圆心.

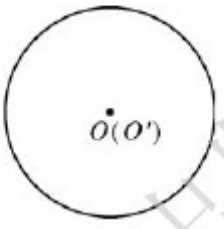


图 24－24

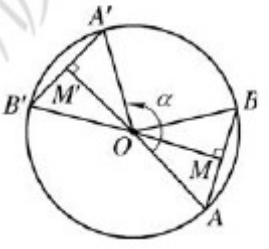


图 24－25

2. 如图 24－25,顶点在圆心的角($\angle AOB$、$\angle A'OB'$)叫做**圆心角**(central angle). 当 $\angle AOB = \angle A'OB'$ 时,根据上述圆的性质,你能猜测出,两个圆心角所对的 $\overset{\frown}{AB}$ 与 $\overset{\frown}{A'B'}$、弦 AB 与弦 $A'B'$、弦心距 OM 与弦心距 OM' 之间有怎样的关系?

在图 24－25 中,根据圆的旋转对称性,把 $\angle AOB$ 连同 $\overset{\frown}{AB}$ 绕圆心 O 旋转,使线段 OA 与 OA' 重合,设 $\angle A'OA = \alpha$.

$\because$ $\angle AOB = \angle A'OB'$,

$\therefore$ $\angle B'OB = \angle A'OB' + \angle A'OB$

$= \angle AOB + \angle A'OB = \alpha$.

$\therefore$ 线段 OB 与线段 OB' 重合.

上海科学技术出版社版权所有
微信公众号：电子课本大全

又 $\because$ $OA=OA'$, $OB=OB'$,

$\therefore$ 旋转后点 A 与点 A' 重合，点 B 与点 B' 重合.

这样，$\overset{\frown}{AB}$ 与 $\overset{\frown}{A'B'}$ 重合，弦 AB 与弦 $A'B'$ 重合，弦心距 OM 与弦心距 OM' 也重合，即 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'}$, $AB=A'B'$, $OM=OM'$.

因此有：

定理　在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弧相等，所对的弦相等，所对弦的弦心距相等.

同理，可以证明以下推论：

在同圆或等圆中，如果两个圆心角以及这两个角所对的弧、所对的弦、所对弦的弦心距中，有一组量相等，那么其余各组量都分别相等.

这个推论可简记为：

在同圆或等圆中，**圆心角相等⟺弧相等⟺弦相等⟺弦心距相等.**

我们知道，把顶点在圆心的周角等分成 360 份，每一份的圆心角是 1°的角. 因为同圆中相等的圆心角所对的弧相等，所以整个圆周也被等分成 360 份. 我们把每一份这样的弧叫做 1°的弧.

一般地，$n°$ 的圆心角对着 $n°$ 的弧，$n°$ 的弧对着 $n°$ 的圆心角. 也就是说，圆心角的度数和它所对的弧的度数相等.

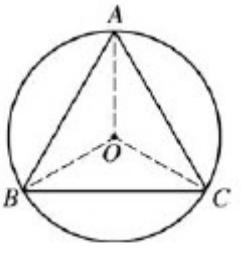


图　24－26

例 4　已知：如图 24－26，等边三角形 ABC 的三个顶点都在⊙O 上.

求证：$\angle AOB=\angle BOC=\angle COA=120°$.

证明　连接 OA, OB, OC.

$\because$ $AB=BC=CA$,

$\therefore$ $\angle AOB=\angle BOC=\angle COA$

$$=\frac{1}{3}\times 360°=120°.$$

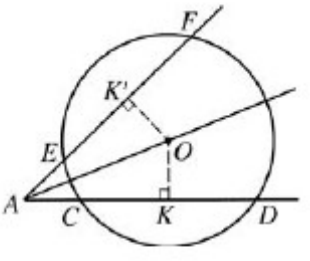


图　24－27

例 5　已知：如图 24－27，点 O 是 $\angle A$ 平分线上的一点，

上海科学技术出版社版权所有
微信公众号：电子课本大全

$\odot O$ 分别交 $\angle A$ 两边于点 C,D 和点 E,F.

求证：$CD=EF$.

证明 过点 O 作 $OK\perp CD$、$OK'\perp EF$，垂足分别为 K,K'.

$\because$ $OK=OK'$（角平分线性质），

$\therefore$ $CD=EF$.

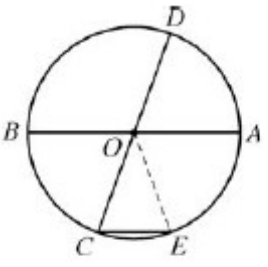


图 24-28

例 6 如图 24－28，AB,CD 为 $\odot O$ 的两条直径，CE 为 $\odot O$ 的弦，且 $CE\parallel AB$，$\overset{\frown}{CE}$ 为 40°，求 $\angle BOD$ 的度数.

解 连接 OE.

$\because$ $\overset{\frown}{CE}$ 为 40°，

$\therefore$ $\angle COE=40°$.

$\because$ $OC=OE$，

$\therefore$ $\angle C=\dfrac{180°-40°}{2}=70°$.

$\because$ $CE\parallel AB$，

$\therefore$ $\angle AOD=\angle C=70°$.

$\therefore$ $\angle BOD=180°-70°=110°$.

练习

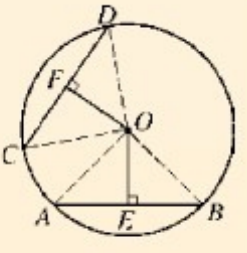
1. 如图，AB,CD 是 $\odot O$ 的两条弦，OE,OF 分别为 AB,CD 的弦心距，填空：

（1）如果 $AB=CD$，那么 _____，_____，_____；

（2）如果 $OE=OF$，那么 _____，_____，_____；

（3）如果 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，那么 _____，_____，_____；

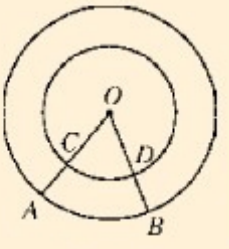
（4）如果 $\angle AOB=\angle COD$，那么 _____，_____，_____.



（第 1 题）

2. 如图，在两个同心圆中，“$\because$ $\angle AOB=\angle COD$，$\therefore$ $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$”，这种说法对吗？请说明理由.

3. 圆的一条弦把圆周分成度数比为 1∶2 的两条弧，如果该圆的半径为 5，求这条弦的弦长及劣弧所对的圆心角.



（第 2 题）

上海科学技术出版社版权所有
微信公众号：电子课本大全

3. 圆的确定

我们已经知道，经过一点可以作直线，且可作无数条直线；而经过两点只可以作一条直线，即**两点确定一条直线**. 那么确定一个圆需要几个已知点呢？

思考

1. 经过一点 A 作圆，如图 24－29(1)，能作多少个圆？

2. 经过两点 A，B 作圆，如图 24－29(2)，能作多少个圆？这些圆的圆心有什么特点？

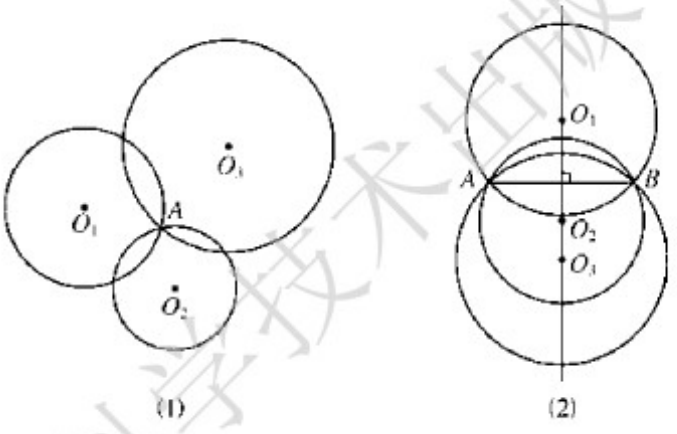


图　24－29

3. 经过三点 A，B，C，能不能作圆？

当三个点不在同一条直线上时，如图 24－30 中的点 A，B，C，要求作一个圆，使它经过 A，B，C 三点，可能吗？如何作？

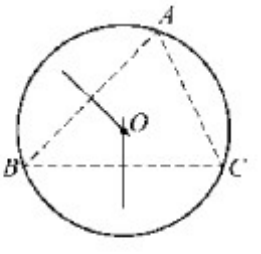


图　24－30

分析：经过不在同一条直线上的三点 A，B，C 能否作圆，关键是看能否找到一点 O，使 $OA=OB=OC$. 由上述“思

上海科学技术出版社版权所有
微信公众号：电子课本大全

三角形三边的垂直平分线交于一点，这一点与三角形的三个顶点的距离相等. 这个性质你还记得吗？（参见八年级上册 15.2 节“线段的垂直平分线”的有关内容）

考”内容可知，若圆过 A，B 两点，圆心应在线段 AB 的垂直平分线上；同理，若圆过 B，C 两点，圆心也应在线段 BC 的垂直平分线上. 所以 AB，BC 两条线段的垂直平分线的交点 O 就是所找的点，就是经过 A，B，C 三点的圆的圆心.

作法

1. 连接 AB，BC，如图 24－30.

2. 分别作线段 AB，BC 的垂直平分线，设它们交于点 O.

3. 以点 O 为圆心、OA 为半径作圆.

则⊙O 即为所作.

由于经过不在同一条直线上的三点 A，B，C 的圆，其圆心只能是线段 AB，BC 的垂直平分线的交点 O，所以经过不在同一直线上的三点 A，B，C，只可以作一个圆.

不在同一直线上的三个点确定一个圆.

在图 24－30 中，再连接 CA，得 $\triangle ABC$. 经过三角形三个顶点的圆叫做**三角形的外接圆**（circumcircle of triangle），外接圆的圆心叫做**三角形的外心**（circumcenter of triangle）. 这个三角形叫做**圆的内接三角形**（inscribed triangle of circle）.

三角形的外心到三角形的三个顶点距离相等.

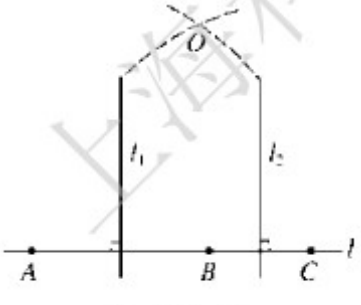


图　24－31

当三个点在同一条直线 l 上时，如图 24－31 中的点 A，B，C，要求作一个圆，使它经过 A，B，C 三点，可能吗？

与上面情况不同，经过同一条直线上的三点是不能作圆的.

假设经过直线 l 上的三点 A，B，C 可以作圆，设这个圆的圆心为 O. 由 $OA=OB$ 可知，点 O 在 AB 的垂直平分线 l_1 上；由 $OB=OC$ 可知，点 O 也应在 BC 的垂直平分线 l_2 上. 因为 AB，BC 都在直线 l 上，这样，经过点 O 便有两条直线 l_1，l_2 都垂直于直线 l，这与“过一点有且只有一条直线与已

上海科学技术出版社版权所有
微信公众号：电子课本大全

知直线垂直”相矛盾.

所以，经过同一条直线上的三点是不可以作圆的.

这里的证明不是直接从题设推出结论，而是先假设命题结论不成立，然后经过推理，得出矛盾的结果，最后断言结论一定成立，这样的证明方法叫做**反证法**.

用反证法证明命题一般有以下三个步骤：

(1) 反设：假设命题的结论不成立；

(2) 推理：从(1)中的“反设”出发，逐步推理直至出现与已知条件、定义、基本事实、定理等中任一个相矛盾的结果；

(3) 结论：由矛盾的结果判定(1)中的“反设”不成立，从而肯定命题的结论成立.

关于反证法，本套教科书在七年级下册 6.2 节“实数”的“阅读与思考”中已作了介绍，这里，再用反证法证明前面学过但未作证明的一个定理.

在七年级下册 10.3 节“平行线的性质”中学过.

定理　两条平行直线被第三条直线所截，同位角相等.

已知：如图 24－32，直线 AB // 直线 CD，直线 EF 分别交 AB，CD 于点 O_1，O_2.

求证：$\angle EO_1B = \angle EO_2D$.

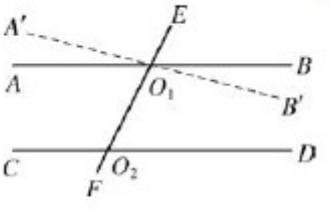


图　24－32

证明　假设 $\angle EO_1B \neq \angle EO_2D$，过点 O_1 作直线 $A'B'$，使 $\angle EO_1B' = \angle EO_2D$.

根据“同位角相等，两直线平行”，得 $A'B' // CD$.

这样，过点 O_1 就有两条直线 AB，$A'B'$ 平行于直线 CD，这与“过直线外一点有且只有一条直线与这条直线平行”相矛盾，即 $\angle EO_1B \neq \angle EO_2D$ 的假设不成立，所以 $\angle EO_1B = \angle EO_2D$.

上海科学技术出版社版权所有

微信公众号：电子课本大全

练习

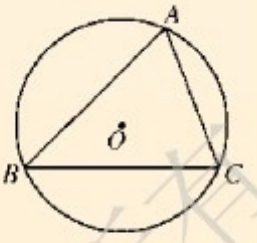
1. 按图填空：

(1) $\triangle ABC$ 是 $\odot O$ 的_____三角形；

(2) $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的_____圆；

(3) 点 O 是 $\triangle ABC$ 的_____心；

(4) OA, OB, OC 三条线段的长度有关系：_____.



（第 1 题）

2. 经过 4 个点，是否能作一个圆，为什么？

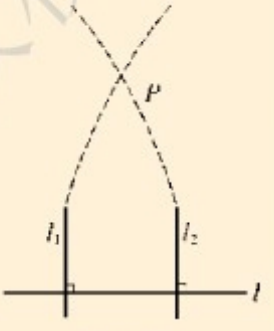
3. 分别作出锐角三角形、直角三角形、钝角三角形的外接圆，并比较它们的外心位置有怎样的特点？

4. 完成下面的证明过程：

已知：如图，直线 l_1, l_2, l 在同一平面内，且 $l_1 \perp l, l_2 \perp l$.

求证：$l_1 // l_2$.

证明 假设_____，则 l_1 与 l_2 相交，设 l_1 与 l_2 交于点 P. 由已知条件_____，_____得知，过点 P 有两条直线与直线 l 垂直，这与“_____”相矛盾. 所以，“假设_____”不成立，故_____.



（第 4 题）

数学园地

从下面两个故事中可以看出，在处理日常事务中，理性思维也是很重要的.

1. 王戎证明了道旁李苦

古时候，一个名叫王戎的孩子与伙伴们在大路上玩耍，他们看到路旁树上结了许多李子，都蜂拥而上摘李子吃，唯有王戎没去摘. 王戎断定，李子是苦的，根本不能吃. 伙伴们感到奇怪，便问他：“你怎么知道李子是苦的？”王戎说：“假如李子是甜的，能吃，那么早就被过路人摘完了，树上怎么还会有李子呢？”

上海科学技术出版社版权所有
微信公众号：电子课本大全

2. 伽利略证明了大小不同的两个铁球同时落地

古希腊哲学家亚里士多德曾经断言：质量分别为 10 kg 和 1 kg 的两个铁球，在同一高处同时落下，10 kg 的铁球一定先着地，速度是 1 kg 铁球的 10 倍. 伽利略产生了疑问，他做了如下推理：假如这句话正确，那么两个铁球拴在一起，落得慢的就会拖住落得快的，落下的速度应当比 10 kg 的铁球慢. 但是按亚里士多德说法，拴在一起的 11 kg 的铁球落下的速度应该比 10 kg 的铁球快. 这不是出现了矛盾吗？可见亚里士多德说错了.

在上面两个故事中，推理论证的思想方法就是反证法. 王戎从假设“李子是甜的能吃”出发，推出“早就被过路人摘完了”的结论，与“树上还有许多李子”的事实矛盾，从而证明“李子是苦的”，得到“道旁李苦”的结论. 伽利略从假设“按亚里士多德的说法，质量大的铁球落得快”出发，推出“拴在一起 11 kg 铁球反而比10 kg 铁球落得慢”的结论，与假设矛盾，从而证明“两个铁球应该同时落地”.

习题 24.2

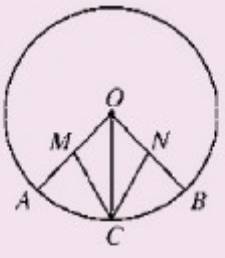
1. 在矩形 $ABCD$ 中，$AB=3$ cm，$BC=3\sqrt{3}$ cm，以点 A 为圆心、AB 为半径作圆，则 B，C，D 三点分别与⊙A 有怎样的位置关系？AC 的中点 M 与⊙A 又有怎样的位置关系？
2. 证明：菱形四边的中点在同一个圆上.
3. 已知：⊙O 的半径为 2 cm，弦 AB 为 $2\sqrt{3}$ cm. 求弦 AB 中点到它所对劣弧中点的距离.
4. 经过⊙O 内已知点 A 作弦，使所作的弦被点 A 平分.
5. 已知$\overset{\frown}{AB}$，通过作图，求出$\overset{\frown}{AB}$的中点.
6. 已知：在半径为 R 的⊙O 中，有三条弦 AB，CD，EF，它们所对的圆心角分别为 60°、90°、120°.
   （1）比较弦 AB，CD，EF 的长短；
   （2）比较这三条弦的弦心距长短.
7. 证明：圆的两条平行弦所夹的弧相等.

上海科学技术出版社版权所有
微信公众号：电子课本大全

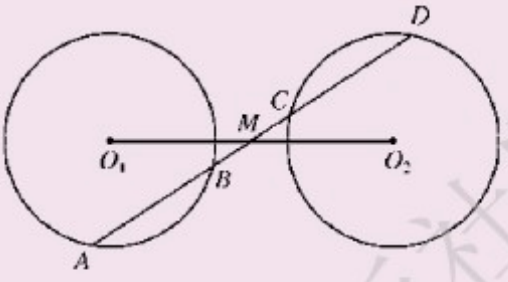
8. 已知：⊙O 的半径为 5 cm，弦 AB // 弦 CD，AB = 6 cm，CD = 8 cm，求 AB 与 CD 之间的距离.

9. 已知：AB 是⊙O 的直径，AC，AD 是在 AB 两侧的两条弦，且 AC = AD.
求证：AB 平分∠CAD.

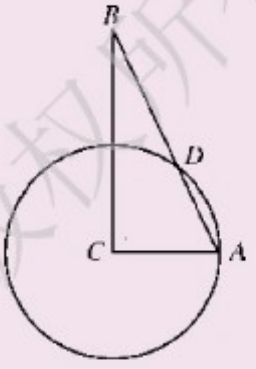
10. 已知：如图，OA，OB，OC 是⊙O 的半径，$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$，点 M，N 分别是 OA，OB 的中点.
求证：MC = NC.



（第 10 题）



（第 11 题）



（第 12 题）

11. 如图，⊙O_1 与⊙O_2 是等圆，M 是 O_1O_2 的中点，过点 M 的直线交⊙O_1 于 A，B 两点，交⊙O_2 于 C，D 两点，则$\overset{\frown}{AB}$与$\overset{\frown}{CD}$有怎样的关系，为什么？

12. 如图，在△ABC 中，∠C =90°，∠B =25°，以点 C 为圆心、AC 为半径的圆交 AB 于点 D，求$\overset{\frown}{AD}$所对圆心角的度数.

13. 求证：直径是圆中最长的弦.

14. 菱形 $ABCD$ 的四个顶点能否在同一个圆上？如在同一圆上，它应成为什么图形？

15. 一个破残的轮片如图，现要重新翻制一个圆轮，如何确定圆心的位置和半径的大小？


（第 15 题）

16. 用反证法证明：
（1）△ABC 中至多只能有一个角是直角；
（2）在同一个圆中，如果两条弦不等，那么它们的弦心距也不等.

17. 用反证法证明：如果两条直线都与第三条直线平行，那么这两条直线互相平行.

上海科学技术出版社版权所有

微信公众号：电子课本大全

24.3 圆周角

一个三角形，当它内接于一个圆时，它的任一个角都与圆有着特殊的位置关系. 如图 24－33，$\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$，这时 $\angle A$ 的顶点在圆上，$\angle A$ 的两边 AB，AC 分别与圆还有另一个公共点.

像这样，顶点在圆上，并且两边都与圆还有另一个公共点的角叫做**圆周角**（angle in a circular segment）.

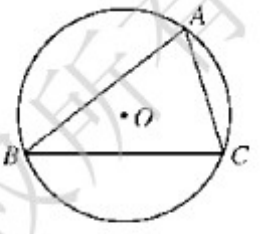


图 24－33

探究

如图 24－34，$\triangle ABC$ 是等边三角形，$\odot O$ 是其外接圆. 由 $\angle BAC=60°$，$\angle BOC=120°$，得出 $\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC$（$\angle BAC$ 对着 $\overset{\frown}{BC}$，$\angle BOC$ 也对着 $\overset{\frown}{BC}$）.

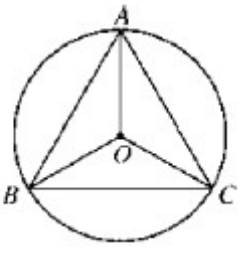


图 24－34

观察这个特例，然后再任意画一个 $\odot O$ 及其内接 $\triangle ABC$，用量角器量一量 $\angle BAC$ 及 $\angle BOC$ 之后，引发你对圆周角性质有怎样的猜想？

一个圆周角的大小与它所对弧上的圆心角有关；前者是后者的二分之一.

下面给出猜想的证明.

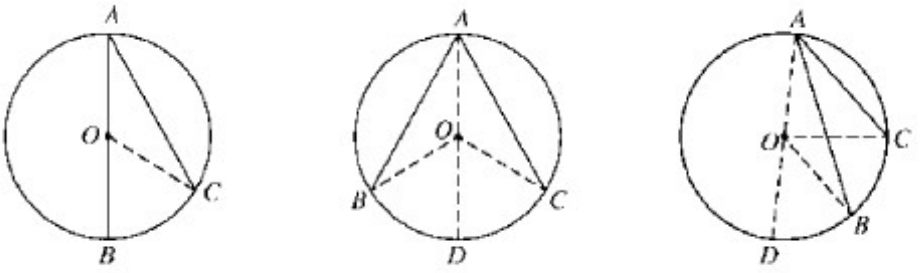
以 $\odot O$ 上任一点 A 为顶点的圆周角有无数多个，按圆心与圆周角的位置关系，存在下面三种情况，如图 24－35（自己画图试试）.

首先，我们从特殊情况着手：在图 24－35（1）中，连接 OC，则 $\triangle AOC$ 是等腰三角形，$\angle A=\angle OCA$. 所以，

$\angle BOC=\angle A+\angle OCA=2\angle A$，即 $\angle A=\frac{1}{2}\angle BOC$.

上海科学技术出版社版权所有

微信公众号：电子课本大全



(1) 圆心在角的一边上　(2) 圆心在角的内部　(3) 圆心在角的外部

图 24-35

圆心与圆周角的位置关系只有三种情况，当对每种情况都给出证明后才完成了整个证明过程.

对于图 24－35(2)(3)两种情况，你会解决吗？

在图 24－35(2)(3)中，连接 AO 并延长，交⊙O 于点 D，再连接 OB，OC，则在图 24－35(2)中，有

$$\begin{aligned}\angle BAC &= \angle DAC + \angle DAB\\ &= \frac{1}{2}\angle DOC + \frac{1}{2}\angle DOB\\ &= \frac{1}{2}\angle COB.\end{aligned}$$

在图 24－35(3)中，有

$$\begin{aligned}\angle BAC &= \angle DAC - \angle DAB\\ &= \frac{1}{2}\angle DOC - \frac{1}{2}\angle DOB\\ &= \frac{1}{2}\angle COB.\end{aligned}$$

综合以上三种情况后可得：

定理　一条弧所对的圆周角等于它所对圆心角的一半.

由定理可得：

推论 1　在同圆或等圆中，同弧或等弧所对的圆周角相等，相等的圆周角所对的弧也相等(图 24－36).

推论 2　半圆或直径所对的圆周角是直角；90°的圆周角所对的弦是直径(图 24－37).

上海科学技术出版社版权所有

微信公众号：电子课本大全

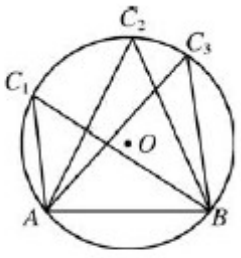


图 24−36

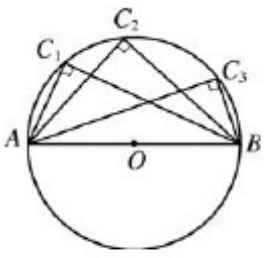


图 24−37

例 1 如图 24 − 38，AB 为⊙O 的直径，弦 CD 交 AB 于点 P，$\angle ACD=60°$，$\angle ADC=70°$，求 $\angle APC$ 的度数.

分析：$\angle APC$ 等于圆周角 $\angle BAD$ 与 $\angle ADC$ 之和.

解 连接 BC，则 $\angle ACB=90°$，

$$\angle DCB = \angle ACB - \angle ACD = 90° - 60° = 30°.$$

又 $\because$ $\angle BAD = \angle DCB = 30°$，

$\therefore$ $\angle APC = \angle BAD + \angle ADC = 30° + 70°$

$= 100°$.

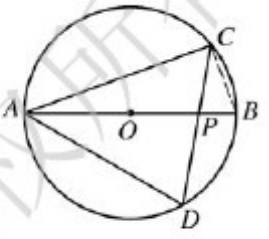
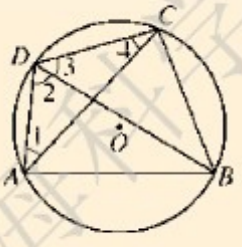


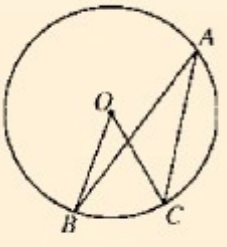
图 24−38

练习

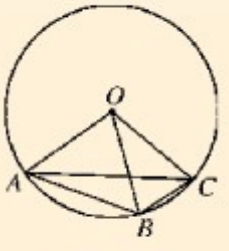
1. 如图，四边形 $ABCD$ 的四个顶点在⊙O 上，找出图中分别与 $\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$、$\angle 4$ 相等的角.



（第 1 题）



（第 2 题）



（第 3 题）

2. 如图，在⊙O 中，$\angle BOC=50°$，求 $\angle A$ 的大小.

3. 已知：如图，OA，OB，OC 都是⊙O 的半径，$\angle AOB=2\angle BOC$.

求证：$\angle ACB=2\angle BAC$.

4. 已知等腰直角三角形 ABC 的一条直角边为 $\sqrt{2}$，求它的外接圆的半径.

5. 证明：如果三角形一边上的中线等于该边的一半，那么这个三角形是直角三角形.

上海科学技术出版社版权所有

微信公众号：电子课本大全

一个多边形的所有顶点都在同一个圆上，这个多边形叫做**圆的内接多边形**，这个圆叫做这个**多边形的外接圆**.

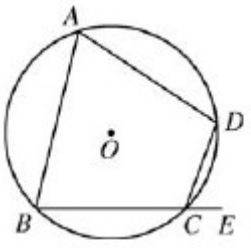


图 24-39

如图 24－39，四边形 $ABCD$ 内接于⊙O，这时，它的每一个角都成为圆周角. 利用圆周角定理，我们来研究圆内接四边形的角之间的关系.

在图 24－39 中，由于$\overset{\frown}{BAD}$与$\overset{\frown}{BCD}$所对的圆心角之和是周角为 360°，则

$$\angle A + \angle BCD = 180°.$$

同理，得

$$\angle B + \angle D = 180°.$$

延长 BC 到点 E，有

$$\angle BCD + \angle DCE = 180°.$$

$$\therefore \quad \angle A = \angle DCE.$$

由于 $\angle A$ 是 $\angle DCE$ 的补角 $\angle BCD$ 的对角（简称为 $\angle DCE$ 的内对角），于是我们得到圆内接四边形的性质：

定理　圆内接四边形的对角互补，且任何一个外角都等于它的内对角.

例 2　在圆内接四边形 $ABCD$ 中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的度数之比是 2∶3∶6，求这个四边形各角的度数.

解　设 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的度数分别等于 $2x°$、$3x°$、$6x°$.

$\because$　四边形 $ABCD$ 内接于圆，

$$\therefore \quad \angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°.$$

$$\because \quad 2x + 6x = 180,$$

$$\therefore \quad x = 22.5.$$

$$\therefore \quad \angle A = 45°,$$

$$\angle B = 67.5°,$$

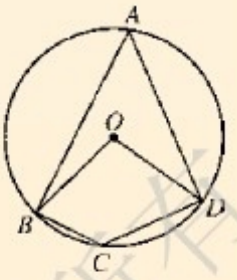
$$\angle C = 135°,$$

$$\angle D = 180° - 67.5° = 112.5°.$$

上海科学技术出版社版权所有
微信公众号：电子课本大全

练习

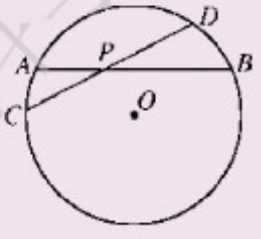
1. 如图，四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形，$\angle BOD = 100°$，求 $\angle BAD$ 与 $\angle BCD$ 的度数.
2. 已知：四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$，BC 是 $\odot O$ 的直径，$AD \parallel BC$，AC 与 BD 相交于点 P，$\angle APB = 20°$，求四边形 $ABCD$ 各个角的度数.
3. 证明：圆内接平行四边形是矩形.



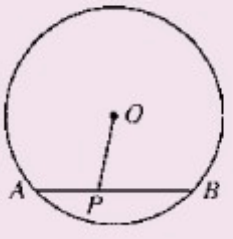
（第 1 题）

习题 24.3

1. 已知：三角形的三个顶点在圆上，且把圆周分成所对圆心角之比为 1∶2∶3 的三个部分，求这个三角形的三个角的大小.
2. 以半圆的直径为一边作一等边三角形，求该等边三角形将半圆截成的三条弧所对的圆心角的度数.
3. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC = 3$ cm，$\angle A = 120°$，求 $\triangle ABC$ 的外接圆直径.
4. 已知：如图，AB 和 CD 交于 $\odot O$ 内一点 P.
   求证：$PA \cdot PB = PC \cdot PD$.



（第 4 题）



（第 5 题）

5. 如图，AB 是 $\odot O$ 的弦，P 是 AB 上一点，$AB = 10$ cm，$PA = 4$ cm，$OP = 5$ cm，求 $\odot O$ 的半径.
6. 已知：在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC$ 的平分线分别交边 BC $\triangle ABC$的外接圆于点 D，E.
   求证：(1) $\triangle ABD \backsim \triangle AEC$；(2) $AB \cdot AC = AD \cdot AE = AD^2 + BD \cdot DC$.

上海科学技术出版社版权所有

微信公众号：电子课本大全

7. 已知：半圆的直径 $AB = 13$ cm，C 为半圆上一点，$CD \perp AB$，垂足为 D，且 $CD = 6$ cm，求 AD 的长.

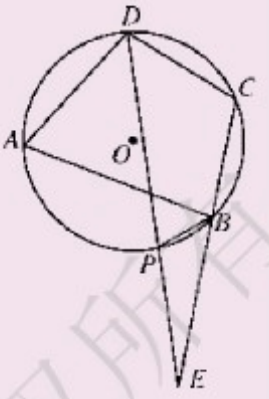
8. 在圆内接四边形 $ABCD$ 中，$\angle A : \angle B : \angle C : \angle D$ 只可能是下列四个选项中的_____.

① 1∶2∶3∶4；② 4∶3∶2∶1；③ 4∶1∶3∶2；④ 4∶3∶1∶2.

由此你发现，圆内接四边形的各角度数之比的规律是什么？

9. 已知：如图，四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$，$\angle ADC$ 的平分线交 $\overset{\frown}{AB}$ 于点 P，交 CB 延长线于点 E.

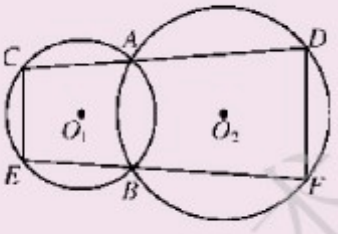
求证：BP 平分 $\angle ABE$.



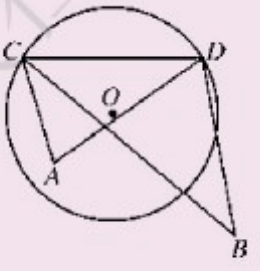
（第 9 题）

10. 已知：如图，$\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 都经过 A，B 两点，经过点 A 的直线 CD 与 $\odot O_1$ 交于点 C、与 $\odot O_2$ 交于点 D；经过点 B 的直线 EF 与 $\odot O_1$ 交于点 E、与 $\odot O_2$ 交于点 F.

求证：$CE \parallel DF$.



（第 10 题）



（第 11 题）

11. 如图，点 A 在 $\odot O$ 内，点 B 在 $\odot O$ 外，点 C，D 在 $\odot O$ 上，试比较 $\angle CAD$ 与 $\angle CBD$ 的大小.

上海科学技术出版社版权所有

微信公众号：电子课本大全

24.4 直线与圆的位置关系

观察

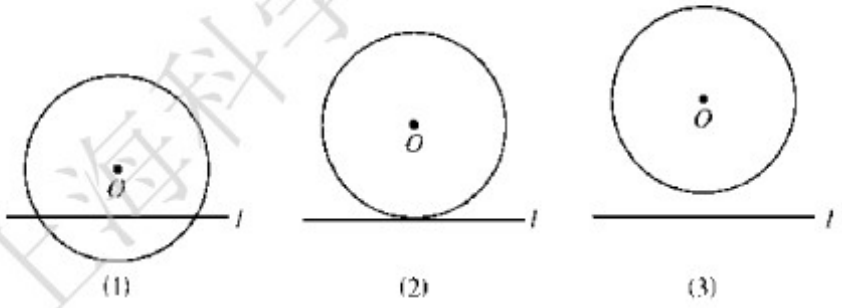
1. 日出的一组照片反映了太阳与地平线的位置变化，将照片中太阳与地平线（图 24－40）分别看作圆与直线，并按它们之间不同的位置关系表示成如图 24－41.



(1)　(2)　(3)

图　24-40

2. 在图 24－41 中，观察⊙O 与直线 l 的公共点的个数，有几种情况？



(1)　(2)　(3)

图　24-41

如果直线与圆有两个公共点，这时直线与圆的位置关系叫做**相交**，如图 24－41（1），这条直线叫做圆的**割线**（secant

上海科学技术出版社版权所有

微信公众号：电子课本大全

line).

如果直线与圆只有一个公共点,这时直线与圆的位置关系叫做**相切**,如图 24－41(2),这条直线叫做圆的**切线**(tangent line),这个公共点叫做**切点**(point of tangency).

如果直线与圆没有公共点,这时直线与圆的位置关系叫做**相离**,如图 24－41(3).

设⊙O 的半径为 r,圆心 O 到直线 l 的距离为 d,由上述直线与圆的位置关系可知:

(1) 直线 l 与⊙O 相交$\Longleftrightarrow d<r$,如图 24－42(1);

(2) 直线 l 与⊙O 相切$\Longleftrightarrow d=r$,如图 24－42(2);

(3) 直线 l 与⊙O 相离$\Longleftrightarrow d>r$,如图 24－42(3).

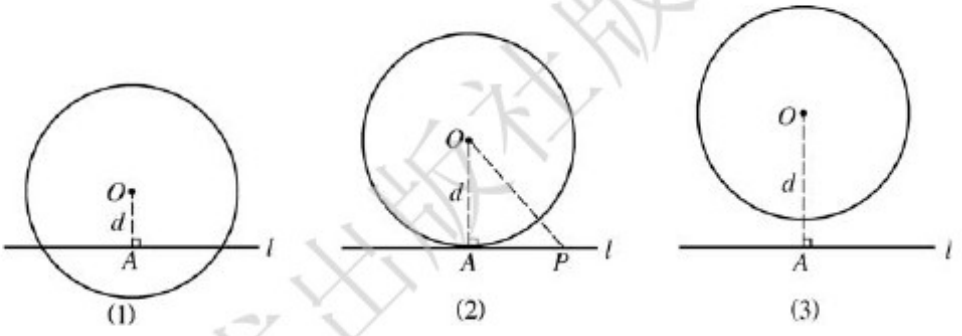


图 24－42

在图 24－42(2)中,当直线 l 与⊙O 相切时,切点为 A,连接 OA. 这时,如在直线 l 上任取一个不同于点 A 的点 P,连接 OP,因为点 P 在⊙O 外,所以 $OP>OA$. 这就是说,OA 是点 O 到直线 l 上任一点的连线中最短的,故 $OA\perp l$.

于是可得:

切线性质　圆的切线垂直于经过切点的半径.

例 1　如图 24－43,Rt△ABC 的斜边 $AB=10$ cm,$\angle A=30°$.

(1) 以点 C 为圆心作圆,当半径为多少时,AB 与⊙C 相切?

(2) 以点 C 为圆心、半径 r 分别为 4 cm 和 5 cm 作两个

上海科学技术出版社版权所有
微信公众号：电子课本大全

圆，这两个圆与斜边 AB 分别有怎样的位置关系？

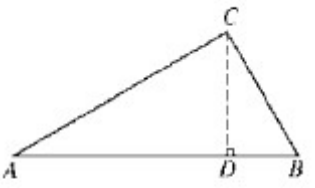


图 24－43

解 （1）过点 C 作边 AB 上的高 CD.

$\because$ $\angle A=30°, AB=10$ cm,

$\therefore$ $BC=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 10=5(\text{cm})$.

在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中，有

$$CD = BC\sin B = 5\sin 60° = \frac{5}{2}\sqrt{3}(\text{cm}).$$

当半径为 $\frac{5}{2}\sqrt{3}$ cm 时，AB 与 $\odot C$ 相切.

（2）由（1）可知，圆心 C 到 AB 的距离 $d=\frac{5}{2}\sqrt{3}$ cm.

当 $r=4$ cm 时，$d>r$，$\odot C$ 与 AB 相离；

当 $r=5$ cm 时，$d<r$，$\odot C$ 与 AB 相交.



思考

1. 如图 24－44（1），经过圆上一点 P，作直线与已知圆相切，如何作？能够作几条？

2. 如图 24－44（2），经过圆外一点 P，作直线与已知圆相切，如何作？能够作几条？

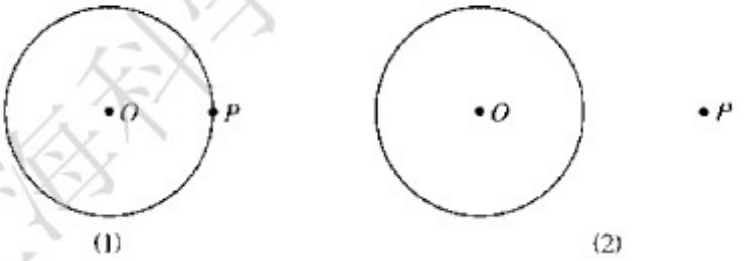


图 24－44

例 2 如图 24－45，点 P 为 $\odot O$ 上任一点，过点 P 作直线 l 与 $\odot O$ 相切.

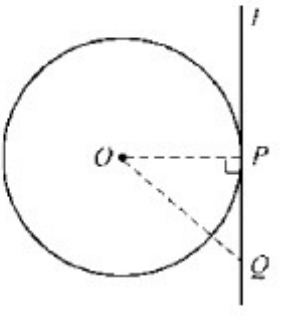


图 24－45

上海科学技术出版社版权所有
微信公众号：电子课本大全

作法

1. 连接 OP.

2. 过点 P 作直线 $l \perp OP$.

则直线 l 即为所作.

为什么直线 l 即为所作呢?

由作图可知,直线 l 与⊙O 有一个公共点 P,若取直线 l 上除点 P 之外任一点 Q,连接 OQ,则 $OQ > OP$(斜线大于垂线),所以点 Q 在圆外. 因此,直线 l 与⊙O 只有一个公共点,故直线 l 为⊙O 的切线.

于是可得:

切线判定定理　经过半径外端点并且垂直于这条半径的直线是圆的切线.

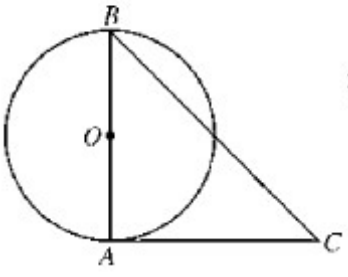


图　24-46

例 3　已知:如图 24-46,$\angle ABC = 45°$,AB 是⊙O 的直径,$AB = AC$.

求证:AC 是⊙O 的切线.

证明　∵　$AB = AC$, $\angle ABC = 45°$,

∴　$\angle ACB = \angle ABC = 45°$.

∴　$\angle BAC = 180° - \angle ABC - \angle ACB = 90°$.

∵　AB 是⊙O 的直径,

∴　AC 是⊙O 的切线.



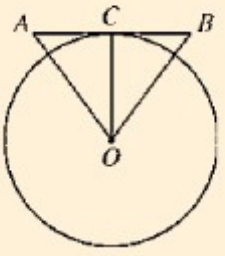
1. ⊙O 的圆心到直线 l 的距离为 5 cm,直线 l 与⊙O 有唯一公共点,问⊙O 的半径 r 是多少厘米?

2. 在△ABC 中,$\angle C = 90°$,$a = 3$,$b = 4$,以点 C 为圆心,下列 r 为半径的圆与 AB 有怎样的位置关系,为什么?

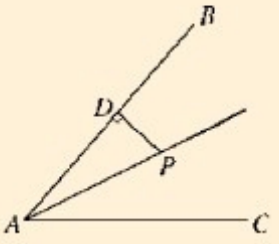
(1) $r = 2$;　　(2) $r = 2.4$;　　(3) $r = 2.8$.

上海科学技术出版社版权所有
微信公众号:电子课本大全

3. 如图，AB 与⊙O 相切于点 C，$OA=OB$，⊙O 的直径为 8 cm，$AB=6$ cm，求 OA 的长.



（第 3 题）



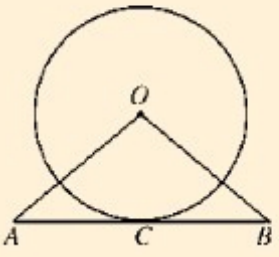
（第 4 题）

4. 已知：如图，点 P 在 $\angle BAC$ 的平分线上，$PD\perp AB$，垂足为 D.

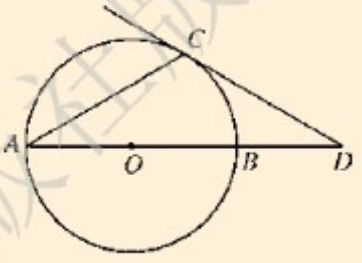
求证：以点 P 为圆心、PD 为半径的圆与 $\angle BAC$ 两边相切.

5. 已知：如图，直线 AB 过⊙O 上的点 C，且 $OA=OB$，$CA=CB$.

求证：直线 AB 是⊙O 的切线.



（第 5 题）



（第 6 题）

6. 已知：如图，AB 是⊙O 的直径，点 D 在 AB 的延长线上，$BD=OB$，点 C 在圆上，$\angle CAB=30°$.

求证：DC 是⊙O 的切线.

* **例 4**　如图 24－47，点 P 为⊙O 外一点，过点 P 作直线与⊙O 相切.

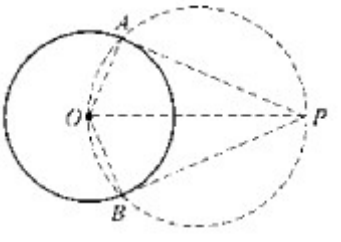


图　24－47

作法

1. 连接 OP.
2. 以 OP 为直径作圆，设此圆交⊙O 于点 A，B.
3. 连接 PA，PB.

则直线 PA，PB 即为所作.

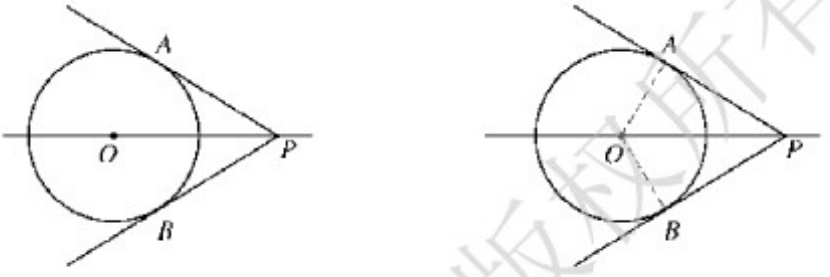
过圆外一点能够作圆的两条切线.

切线上一点到切点之间的线段长叫做这点到圆的**切线长**.

上海科学技术出版社版权所有
微信公众号：电子课本大全

探究

1. 在透明纸上画出图 24－48(1)，设 PA，PB 是 $\odot O$ 的两条切线，A，B 是切点. 沿直线 OP 将图形折叠，有什么发现？



(1)　　(2)

图　24－48

2. 学生证明自己的发现.

如图 24－48(2)，连接 OA，OB. 下面如何证明？

_____

_____

_____

_____

$\therefore$　$PA = PB$，$\angle APO = \angle BPO$.

*** 切线长定理**　**过圆外一点作圆的两条切线，两条切线长相等，圆心与这一点的连线平分两条切线的夹角.**

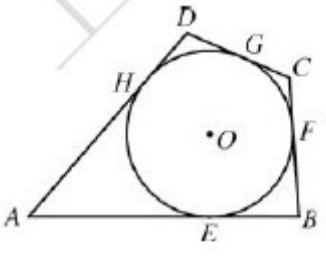


图　24－49

*** 例 5**　已知：如图 24－49，四边形 $ABCD$ 的边 AB，BC，CD，DA 和 $\odot O$ 分别相切于点 E，F，G，H.

求证：$AB + CD = DA + BC$.

证明　$\because$　AB，BC，CD，DA 都与 $\odot O$ 相切，E，F，G，H 是切点，

$\therefore$　$AE = AH$，$BE = BF$，$CG = CF$，$DG = DH$.

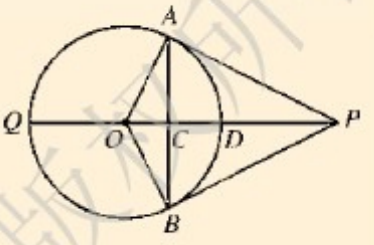
上海科学技术出版社版权所有
微信公众号：电子课本大全

$\therefore \quad AE + BE + CG + DG = AH + BF + CF + DH,$

即 $\quad AB + CD = DA + BC.$

练习

1. 已知：⊙O 的半径是 30 cm，点 P 与圆心 O 的距离是 60 cm，PA，PB 是⊙O 的两条切线，A，B 是切点，求∠APB 的大小与 PA 的长.
2. 如图，PA，PB 是⊙O 的两条切线，A，B 是切点，直线 OP 交⊙O 于 Q，D 两点，交 AB 于点 C.
   （1）写出图中所有的垂直关系；
   （2）写出图中所有的全等三角形.
3. 已知：PA，PB 是⊙O 的切线，A，B 是切点，∠APB =60°，点 C 是⊙O 上异于 A，B 的任意一点，求∠ACB 的大小.



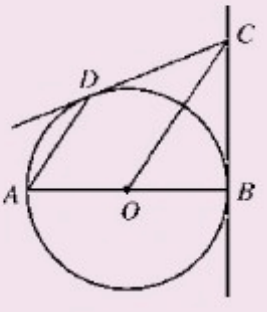
（第 2 题）

习题 24.4

1. 以边长为 3 cm 的等边三角形 ABC 的顶点 A 为圆心、r 为半径作圆. r 为何值时：
   （1）⊙A 与 BC 相交？
   （2）⊙A 与 BC 相切？
   （3）⊙A 与 BC 相离？
2. 试证：如果圆的两条切线互相平行，那么连接两个切点的线段是圆的直径.
3. 如图，可以用游标卡尺测量圆形工件的直径. 当两卡脚贴紧工件，从刻度尺上读出两卡脚之间的距离 d 的数值，即可测出直径的实际值. 说明该测量的原理.



（第 3 题）



（第 4 题）

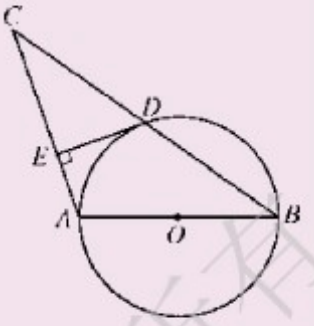
上海科学技术出版社版权所有
微信公众号：电子课本大全

4. 已知：如图，AB 是⊙O 的直径，BC 是⊙O 的切线，切点为 B，OC 平行于弦 AD.

求证：CD 是⊙O 的切线.

5. 已知：如图，AB 是⊙O 的直径，⊙O 过 BC 的中点 D，$DE \perp AC$ 于点 E.

求证：DE 是⊙O 的切线.



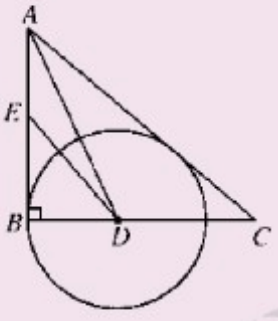
（第 5 题）

6. 已知：如图，在△ABC 中，$\angle B = 90°$，$\angle A$ 的平分线交 BC 于点 D，点 E 在 AB 上，$DE = DC$，以点 D 为圆心、DB 为半径作⊙D.

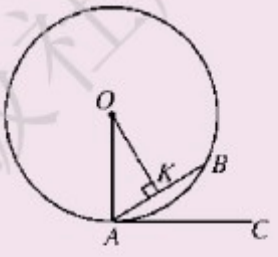
求证：

（1）AC 是⊙D 的切线；

（2）$AB + EB = AC$.



（第 6 题）



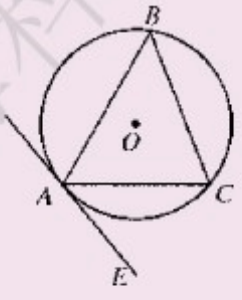
（第 7 题）

7. 已知：如图，AB 是⊙O 的弦，AC 是⊙O 的切线，作 $OK \perp AB$，垂足为 K.

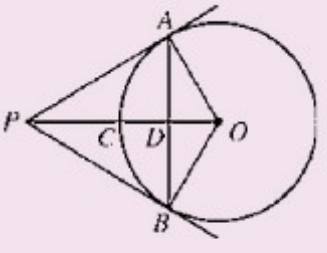
求证：$\angle BAC = \angle AOK$.

8. 已知：如图，△ABC 内接于⊙O，AB 为非直径的弦，$\angle CAE = \angle B$.

求证：AE 与⊙O 相切于点 A.



（第 8 题）



（第 9 题）

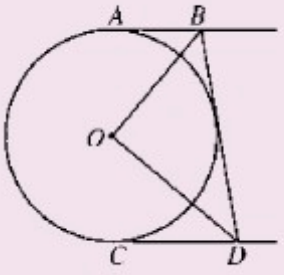
9. 如图，PA，PB 是⊙O 的切线，A，B 是切点，OP 交 AB 于点 D、交⊙O 于点 C，$AD = 2\sqrt{3}$，$DC = 2$，求⊙O 的半径及 PA，PC 的长.

上海科学技术出版社版权所有

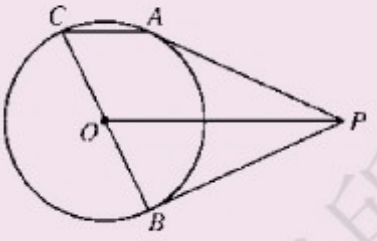
微信公众号：电子课本大全

10. 已知：如图，AB，CD 是⊙O 的两条平行切线，A，C 是切点，⊙O 的另一条切线 BD 与 AB，CD 分别相交于 B，D 两点.

求证：$BO \perp OD$.



（第 10 题）



（第 11 题）

11. 已知：如图，点 P 在⊙O 外，PA，PB 是⊙O 的切线，A，B 为切点. BC 是直径，连接 CA.

求证：$CA /\!/ OP$.

上海科学技术出版社版权所有

微信公众号：电子课本大全

24.5 三角形的内切圆

探究

有一块三角形材料，如何从中剪下一个面积最大的圆？

(1) 如果最大圆存在，它与三角形的各边应有怎样的位置关系？

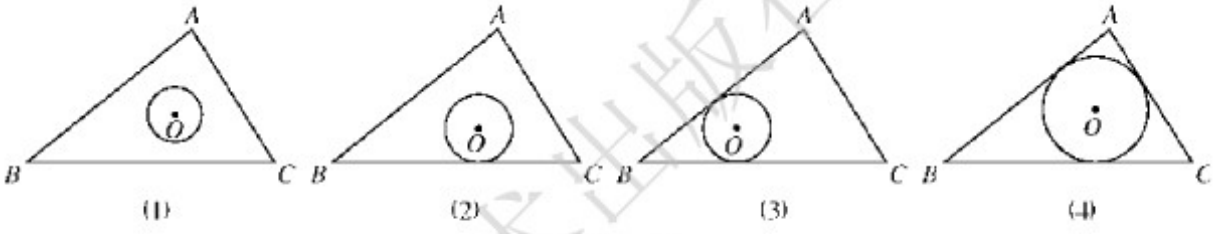


图 24-50

如图 24－50，⊙O 按其位置与三角形的边是否相切分四种情形：图 24－50(1) 的⊙O 与三边都不相切，图 24－50(2) 的⊙O 只与一边相切，图 24－50(3) 的⊙O 与两边相切，图 24－50(4) 的⊙O 与三边都相切.

图 24－50(1)(2)(3) 中的圆面积都不是最大的(试一试，可作出一个面积更大的圆来)，由此猜想：要使剪下的圆面积最大，这个圆应与三角形的三边都相切，如图24－50(4).

(2) 求作一个圆，使它和已知三角形的各边都相切.

如图 24－51，如果半径为 r 的⊙I 与△ABC 的三边都相切，那么其圆心 I 应与△ABC 的三边距离相等，都等于半径 r，所以圆心 I 应是三角形的三条角平分线的交点.

三角形的三条角平分线交于一点，这一点与三角形的三边距离相等. 这个性质你还记得吗？(参见八年级上册 15.4 节“角的平分线”的有关内容)

浙江科学技术出版社版权所有
微信公众号：电子课本大全

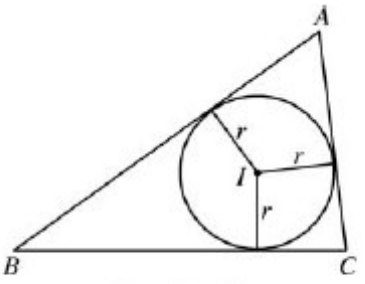


图 24-51

作法

1. 如图 24－52，作△ABC 的∠B、∠C 平分线 BE，CF，设它们交于点 I.

2. 过点 I 作 $ID \perp BC$ 于点 D.

3. 以点 I 为圆心、ID 为半径作⊙I.

则⊙I 即为所作.

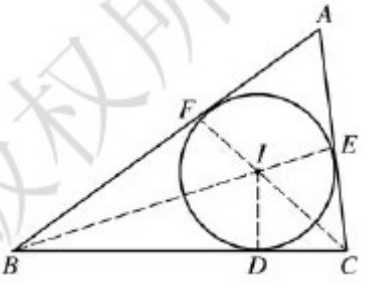


图 24-52

与三角形三边都相切的圆叫做**三角形的内切圆**(inscribed circle of triangle)，内切圆的圆心叫做**三角形的内心**(incenter of triangle)，这个三角形叫做**圆的外切三角形**(circumscribed triangle of circle).

三角形的内心到三角形的三边距离相等.

例 如图 24－53，在△ABC 中，∠B =43°，∠C =61°，点 I 是△ABC 的内心，求∠BIC 的度数.

解 连接 IB，IC.

因为点 I 是△ABC 的内心，所以 IB，IC 分别是∠B、∠C 的平分线.

在△IBC 中，有

$$\begin{aligned}\angle BIC &= 180^\circ - (\angle IBC + \angle ICB)\\ &= 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle B + \angle C)\\ &= 180^\circ - \frac{1}{2}(43^\circ + 61^\circ)\\ &= 128^\circ.\end{aligned}$$

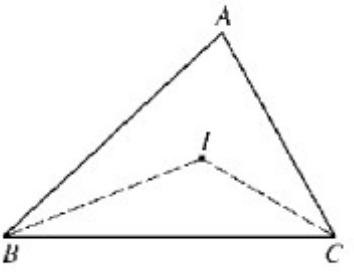


图 24-53

上海科学技术出版社版权所有

微信公众号：电子课本大全

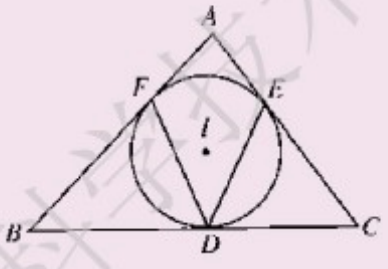
练习

1. 在△ABC中，$AB=AC=4$ cm，以点A为圆心、2 cm为半径的圆与BC相切，求$\angle BAC$的度数.
2. 在△ABC中，$\angle A=80°$，点I是内心，求$\angle BIC$的度数.
3. 在△ABC中，$\angle C=90°$，$BC=3$，$AC=4$，求这个三角形的内切圆半径.
4. 在一块周长为12 cm、面积为6 cm^{2}的三角形材料中作一个内切圆，问这个圆的半径是多少厘米？

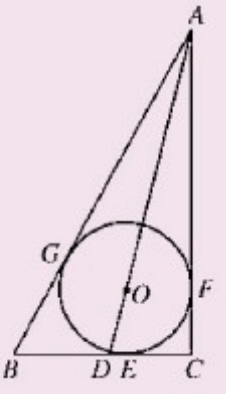
习题 24.5

1. 证明：等边三角形的内心与外心重合，并且外接圆半径是内切圆半径的2倍.
2. 已知：如图，在△ABC中，内切圆I与边BC，CA，AB分别相切于点D，E，F.

   求证：$\angle FDE=90°-\frac{1}{2}\angle A$.



（第2题）



（第3题）

3. 如图，⊙O为△ABC的内切圆，切点为E，F，G，$\angle C=90°$，AO的延长线交BC于点D，$AC=4$，$CD=1$，求⊙O的半径r.
4. 已知：在△ABC中，$\angle C=90°$，三边长为a，b，c，△ABC的内切圆半径为r.

   求证：

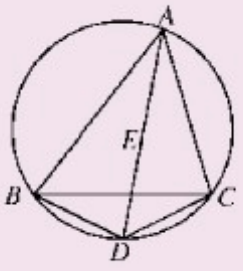
   (1) $r=\frac{1}{2}(a+b-c)$；

   (2) $r=\frac{ab}{a+b+c}$.

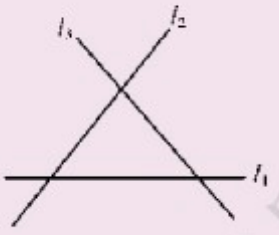
上海科学技术出版社版权所有
微信公众号：电子课本大全

5. 已知：如图，在△ABC中，点E是内心，延长AE交三角形的外接圆于点D，连接BD，DC.

求证：$DB = DC = DE$.



（第5题）



（第6题）

6. 如图，三条直线l_1，l_2，l_3两两相交构成三角形. 在这个图中能找出几个到三条直线距离相等的点，为什么？

7. 在△ABC中，$BC = a = 14$ cm，$AC = b = 9$ cm，$AB = c = 13$ cm，它的内切圆与BC，AC，AB分别相切于点D，E，F，求AF，BD，CE的长.

数学园地

圆与圆的位置关系

如图24－54，选择两个大小不一样的圆，放在桌上做相对运动，可以找出平面上两圆之间几种不同的位置关系？



图 24－54

如图24－55，设⊙O_1、⊙O_2的半径分别为r，$R(R>r)$，两圆圆心间的距离（简称**圆心距**）$O_1O_2 = d$.

上海科学技术出版社版权所有

微信公众号：电子课本大全

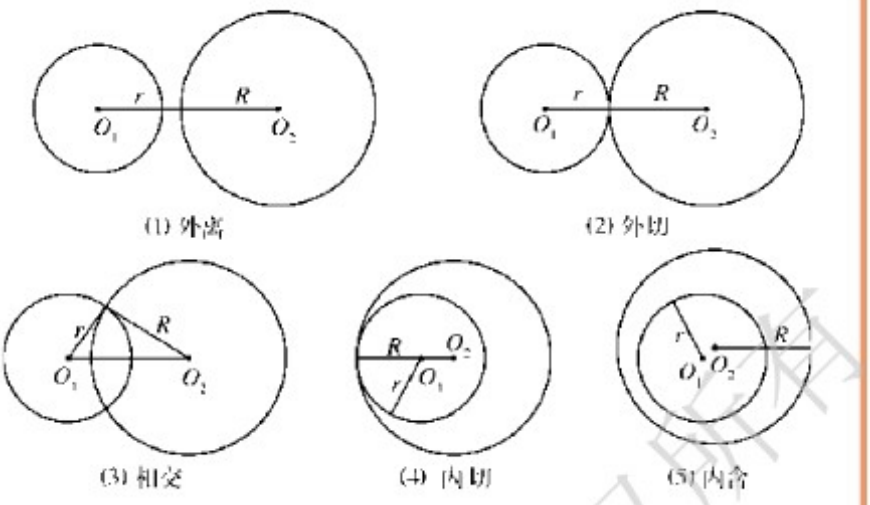


图 24-55

当两圆处在不同的位置关系时，d 与 R，r 之间有如下的关系：

两圆位置	外离	外切	相交	内切	内含
半径与圆心距关系		$d=R+r$		$d=R-r$	

（1）填写上表的空白处；

（2）当圆心 O_1 与圆心 O_2 重合时，两圆是同心圆，此时有：$d=$_____；

（3）当两圆相交、外切或内切时，过点 O_1，O_2 的直线（连心线）有怎样的性质？

上海科学技术出版社版权所有

微信公众号：电子课本大全

24.6 正多边形与圆

1. 正多边形与圆

在七年级上册 4.6 节“用尺规作线段与角”的“数学活动”中，曾介绍过画正五角星，你还记得是怎么画的吗？下面就来研究这样画的道理.

各边相等、各角也相等的多边形叫做**正多边形**.

正多边形与圆有非常密切的关系，把一个圆分成 n 条相等的弧，就可以作出这个圆的内接或外切正 n 边形.

如图 24 − 56，点 A，B，C，D，E 在 $\odot O$ 上，且有 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{EA}$，$TP$，$PQ$，$QR$，$RS$，$ST$ 分别是以点 A，B，C，D，E 为切点的 $\odot O$ 的切线. 于是有：

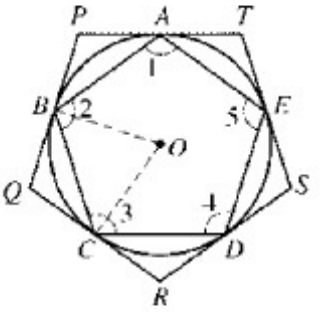


图 24−56

五边形 $ABCDE$ 是 $\odot O$ 的内接正五边形，五边形 $PQRST$ 是 $\odot O$ 的外切正五边形.

由 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{EA}$，得

$$AB=BC=CD=DE=EA.$$

$\because$ $\overset{\frown}{BCE}=\overset{\frown}{CDA}=3\overset{\frown}{AB}$，

$\therefore$ $\angle 1=\angle 2$.

同理，得

$$\angle 2=\angle 3=\angle 4=\angle 5.$$

$\because$ 顶点 A，B，C，D，E 都在 $\odot O$ 上，

$\therefore$ 五边形 $ABCDE$ 是 $\odot O$ 的内接正五边形.

连接 OA，OB，OC，则

$$\angle OAB=\angle OBA=\angle OBC=\angle OCB.$$

上海科学技术出版社版权所有

微信公众号：电子课本大全

∵ TP, PQ, QR 分别是以点 A, B, C 为切点的⊙O 的切线，

∴ $\angle OAP = \angle OBP = \angle OBQ = \angle OCQ$.

∴ $\angle PAB = \angle PBA = \angle QBC = \angle QCB$.

又 ∵ $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC}$,

∴ $AB = BC$.

∴ $\triangle PAB \cong \triangle QBC$.

∴ $\angle P = \angle Q$, $PQ = 2PA$.

同理，得

$$\angle Q = \angle R = \angle S = \angle T,$$

$$QR = RS = ST = TP = 2PA.$$

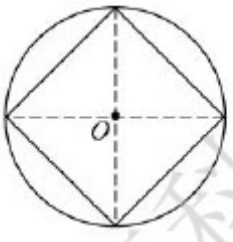
∵ 五边形 $PQRST$ 的各边都与⊙O 相切，

∴ 五边形 $PQRST$ 是⊙O 的外切正五边形.

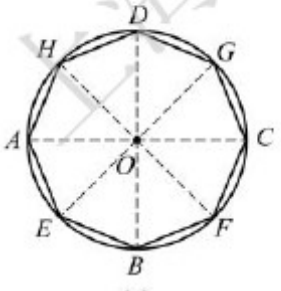
由上可知，通过等分圆周的方法能作出正多边形.

(1) 用量角器等分圆周

由在同圆中相等的弦所对的弧相等可知，在一个圆中，先用量角器作一个等于$\frac{360°}{n}$ 的圆心角，这个角所对的弧就是圆周的$\frac{1}{n}$，然后在圆周上依次截取这条弧的等弧，就得到圆的 n 等份点，从而作出正 n 边形(正五角星就是这样作出的).



(1)



(2)

图 24-57

(2) 用尺规等分圆周

对于一些特殊的正 n 边形，还可以用直尺和圆规来等分圆周.

① 正四边形的作法

如图 24－57(1)，用直尺和圆规作⊙O 的两条互相垂直的直径，就可以把⊙O 分成 4 等份，从而作出正四边形.

我们再逐次平分各边所对的弧，就可以作出正八边形[图 24－57(2)]、正十六边形等.

上海科学技术出版社版权所有
微信公众号：电子课本大全

② 正六边形的作法

如图24－58(1)，设⊙O的半径为R，通常先作出⊙O的一条直径AB，然后分别以点A，B为圆心、R为半径作弧，与⊙O交于点C，D，E，F，从而得到⊙O的6等份点，作出正六边形.

如果再逐次等分各边所对的弧，就可作出正十二边形、正二十四边形等.

我们可以连接6等份圆周的相间两个点，得到正三角形，如图24－58(2).

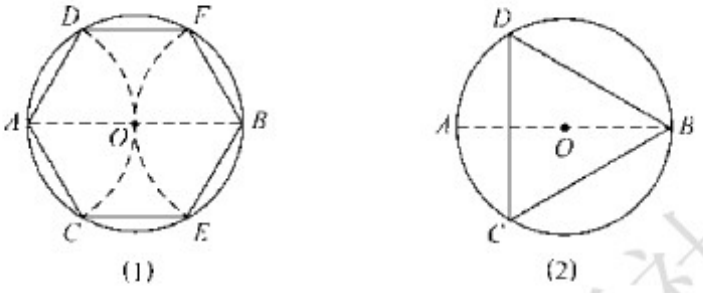


图　24－58

练习

1. 求下列正多边形每个内角及其外角的度数：

（1）正五边形；（2）正八边形；（3）正十二边形.

2. 在一个半径为2 cm的圆中，作出它的内接正六边形及内接正三角形.

3. 用量角器作出一个半径为2 cm的圆的内接正五边形.

2. 正多边形的性质

将一个圆n等分，就可以作出这个圆的内接或外切正n边形. 反过来，是不是每个正多边形都有一个外接圆和一个内切圆呢？

我们仍然以正五边形为例来进行探究.

如图24－59，过正五边形$ABCDE$的顶点A，B，C作⊙O，连接OA，OB，OC，OD，OE.

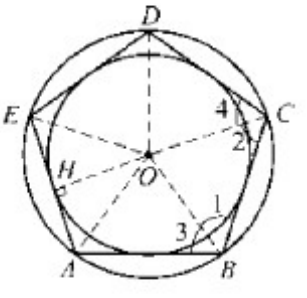


图　24－59

上海科学技术出版社版权所有
微信公众号：电子课本大全

$\because$ $OB = OC$,

$\therefore$ $\angle 1 = \angle 2$.

又 $\because$ $\angle ABC = \angle BCD$,

$\therefore$ $\angle 3 = \angle 4$.

$\because$ $AB = DC$,

$\therefore$ $\triangle OAB \cong \triangle ODC$.

$\therefore$ $OA = OD$,

即点 D 在$\odot O$ 上.

同理,得点 E 也在$\odot O$ 上.

所以正五边形 $ABCDE$ 有一个以 O 为圆心的外接圆.

由于正五边形 $ABCDE$ 的各边是$\odot O$ 中相等的弦,等弦的弦心距相等,所以以点 O 为圆心、弦心距 OH 为半径的圆与正五边形的各边都相切.

所以正五边形 $ABCDE$ 还有一个以 O 为圆心的内切圆.

任何正多边形都有一个外接圆和一个内切圆,并且这两个圆是同心圆.

我们把一个正多边形的外接圆和内切圆的公共圆心,叫做**正多边形的中心**,外接圆的半径叫做**正多边形的半径**,内切圆的半径叫做**正多边形的边心距**,正多边形每一条边所对的圆心角,叫做**正多边形的中心角**,正 n 边形的每个中心角都等于$\frac{360°}{n}$.

正多边形都是轴对称图形,一个正 n 边形一共有 n 条对称轴,每一条对称轴都通过正多边形的中心,如图 24－60.

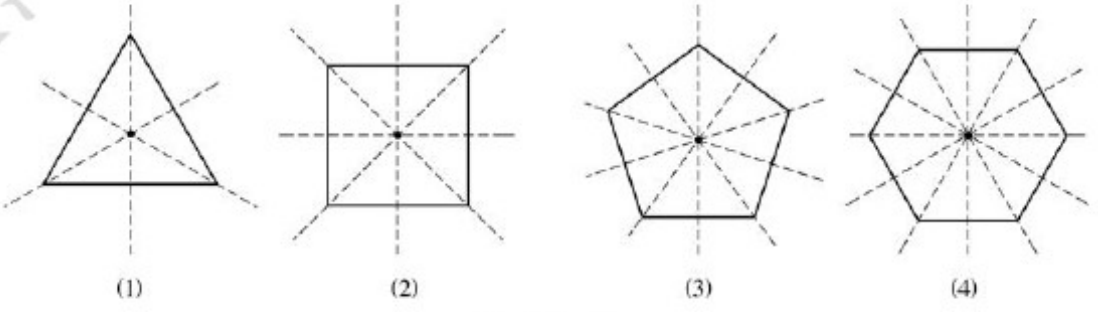


图 24－60

上海科学技术出版社版权所有
微信公众号：电子课本大全

如果一个正多边形有偶数条边，那么它又是中心对称图形，它的中心就是对称中心.

例 求边长为 a 的正六边形的周长和面积.

解 如图 24－61，过正六边形的中心 O 作 $OG \perp BC$，垂足是 G，连接 OB，OC，设该正六边形的周长和面积分别为 C 和 S.

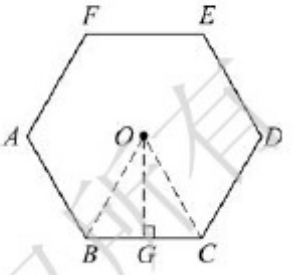


图 24－61

$\because$ 多边形 $ABCDEF$ 是正六边形，

$\therefore$ $\angle BOC = 60°$，$\triangle BOC$ 是等边三角形.

$\therefore$ $C = 6BC = 6a$.

在 $\triangle BOC$ 中，有

$$OG = \frac{\sqrt{3}}{2}BC$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

$\therefore$ $S = 6 \cdot \frac{1}{2}BC \cdot OG$

$$= 6 \cdot \frac{1}{2}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2.$$



1. 一个不等边三角形是否一定有一个外接圆和内切圆？如果有，它们是不是同心圆？
2. 有一正六边形 $ABCDEF$ 的内切圆半径为 R，求 R 与这个正六边形 $ABCDEF$ 的外接圆半径之比.
3. 证明：在正 n 边形中，中心角与正 n 边形的每个外角相等.

上海科学技术出版社版权所有

微信公众号：电子课本大全

习题 24.6

1. 作已知⊙O 的内接正八边形.

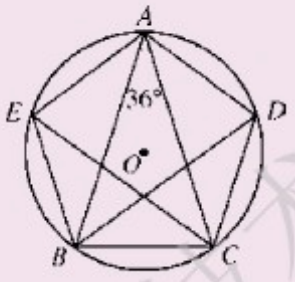
2. 用等分圆周的方法画出下列图案.



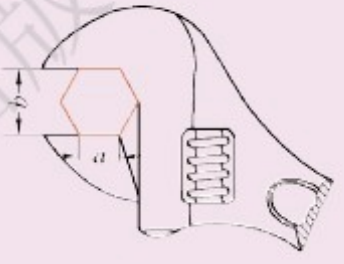
（第 2 题）

3. 已知：如图，$\triangle ABC$ 是⊙O 的内接等腰三角形，顶角 $\angle A=36°$，弦 BD，CE 分别平分 $\angle ABC$、$\angle ACB$.

求证：五边形 $AEBCD$ 是正五边形.



（第 3 题）



（第 4 题）

4. 如图，正六边形的螺帽边长 $a=12$，这个扳手的开口 b 应是多少？

5. 要用圆形铁片截出边长为 a 的正方形铁片，问圆形铁片的直径最小要多长？

6. 分别求出半径为 R 的圆内接正三角形、圆内接正方形的周长和面积.

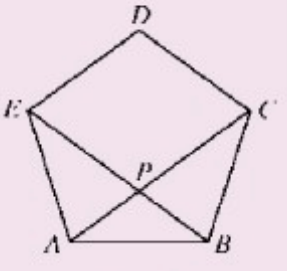
7. 设正三角形的外接圆半径与内切圆半径之差为 2 cm，求这个正三角形的面积.

8. 已知：如图，正五边形的对角线 AC 和 BE 相交于点 P.

求证：

（1）$PE=AB$；

（2）$PE^2=BE\cdot BP$.



（第 8 题）

上海科学技术出版社版权所有

微信公众号：电子课本大全

24.7 弧长与扇形面积

在小学时我们就已知道，圆的周长 C、圆的面积 S 与圆的半径 R 之间有下面的关系：

$$C = 2\pi R,$$
$$S = \pi R^2.$$

这里的 $\pi = 3.141\,59\cdots$，是个无理数，叫做**圆周率**.

但在许多情况下，我们还需要计算圆的一部分弧长和面积，如图 24－62 中的$\overset{\frown}{AB}$长度，以及半径 OA，OB 与$\overset{\frown}{AB}$所围橘红色部分的面积. 我们把两条半径与所夹弧围成的图形叫做**扇形**（图 24－62 中劣弧 AB 所围橘红色部分或优弧 AB 所围白色部分）.

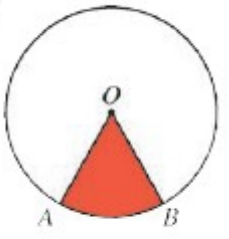


图 24－62

思考

如何求一个扇形的弧长和面积？

在圆中，如果圆心角 $\angle AOB = n°$，那么它是周角（360°）的$\frac{n}{360}$，因此，$n°$的圆心角所对的弧长和以 $n°$为圆心角的扇形面积分别是整个圆的周长和面积的$\frac{n}{360}$. 所以，在半径为 R 的圆中，$n°$的圆心角所对的弧长 C_1 和以 $n°$为圆心角的扇形面积 S_1的计算方法分别是

$$C_1 = \frac{n}{360} \cdot 2\pi R = \frac{n\pi R}{180},$$

上海科学技术出版社版权所有

微信公众号：电子课本大全

$$S_1 = \frac{n}{360} \cdot \pi R^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{n\pi R}{180} \cdot R = \frac{1}{2} C_1 R.$$

例 1 一滑轮装置如图 24－63，滑轮的半径 $R = 10$ cm，当重物上升 15.7 cm 时，问滑轮的一条半径 OA 绕轴心 O 按逆时针方向旋转的角度？（假设绳索与滑轮之间没有滑动，π 取 3.14）

重物上升的高度等于半径 OA 绕轴心 O 旋转时点 A 所画的弧长.

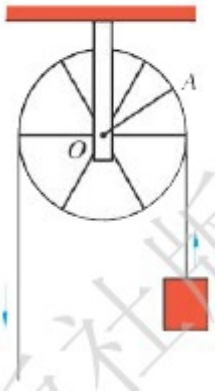


图 24－63

解 设半径 OA 绕轴心 O 按逆时针方向旋转 $n°$，则

$$\frac{n\pi R}{180} = 15.7.$$

解方程，得

$$n \approx 90.$$

答：滑轮按逆时针方向旋转的角度约为 90°.

埃拉托塞尼（Eratosthenes，约公元前 276—前 195）是古希腊数学家、地理学家，在数学方面的主要贡献是提出了寻找素数的最简明有效的方法，后称埃拉托塞尼筛法；在地理学方面，他最著名的成就是测地球的周长.

例 2 古希腊埃拉托塞尼曾给出一个估算地球周长（或子午圈长）的简单方法. 如图 24－64，点 S 和点 A 分别表示埃及的赛伊尼和亚历山大两地，亚历山大在赛伊尼的北方，两地的经度大致相同，两地的实际距离为 5 000 希腊里（1 希腊里 ≈ 158.5 m）. 当太阳光线在赛伊尼直射时，同一时刻在亚历山大测量太阳光线偏离直射方向的角为 α，实际测得 α 是 7.2°，由此估算出了地球的周长，你能进行计算吗？

上海科学技术出版社版权所有
微信公众号：电子课本大全

解 因为太阳光线可看作平行的，所以圆心角 $\angle AOS=\alpha=7.2°$.

设地球的周长（即⊙O 的周长）为 C，则

$$\frac{C}{\overset{\frown}{AS}}=\frac{360°}{7.2°}=50,$$

$$\therefore\quad C=50\overset{\frown}{AS}=50\times 5\,000$$

$$=250\,000(\text{希腊里})$$

$$\approx 39\,625(\text{km}).$$

答：地球的周长约为 39 625 km.

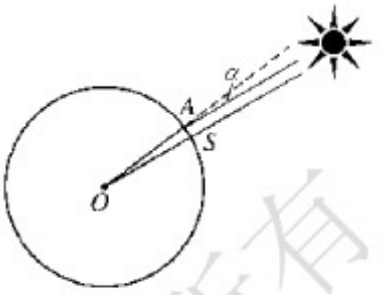


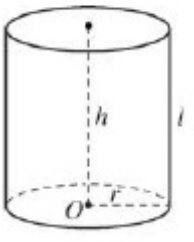
图 24-64

我们知道，地球周长约为 40 000 km. 可见，2 000 多年前，埃拉托塞尼的估算结果已经相当精确了.

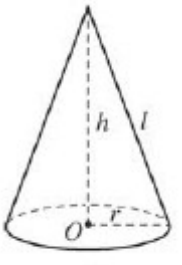
思考

1. 如图 24-65(1)，底面半径为 r、母线（上下底面圆周上对应两点的连线）为 l 的圆柱，它的侧面展开图是什么？这个侧面展开图的面积计算公式是什么？

2. 如图 24-65(2)，底面半径为 r、母线（顶点与底面圆周上一点的连线）为 l 的圆锥，它的侧面展开图又是什么？这个侧面展开图的面积计算公式是什么？



(1)



(2)

图 24-65

例 3 如图 24-66，圆锥形的烟囱帽，它的底面直径为 80 cm，母线为 50 cm. 在一块大铁皮上剪裁时，如何画出这个烟囱帽的侧面展开图？求出该侧面展开图的面积.

解 烟囱帽的侧面展开图是扇形，如图 24-67，设该扇形的面积为 S.

上海科学技术出版社版权所有
微信公众号：电子课本大全

在铁皮上画一个扇形，除需知道扇形半径 l 外，还需知道扇形圆心角 α. 由刚学过的弧长计算方法，可得

$$2\pi r = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi l.$$



图 24-66

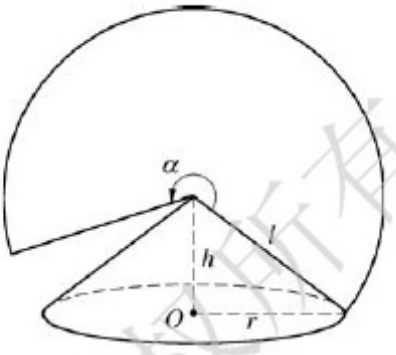


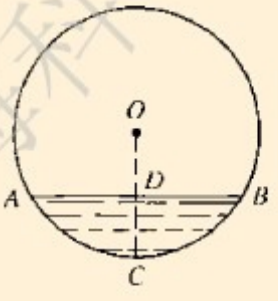
图 24-67

$$\therefore \quad \alpha = 360^\circ \times \frac{r}{l} = 360^\circ \times \frac{40}{50} = 288^\circ.$$

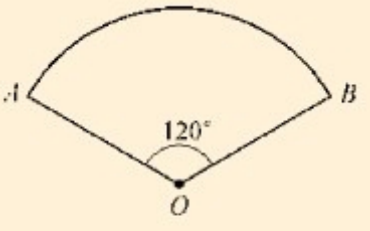
$$S = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi l^2 = \frac{288^\circ}{360^\circ} \times 50^2\pi = 2\,000\pi(\text{cm}^2).$$

练习

1. 已知：扇形 AOB 的半径为 12 cm，$\angle AOB = 120^\circ$，求 $\overset{\frown}{AB}$ 的长度和扇形 AOB 的面积.
2. 已知：扇形的圆心角为 150°，弧长为 20π，求扇形面积.
3. 如图，圆柱形排水管的截面半径 $OC = 0.6$ m，水面高 $DC = 0.3$ m，求截面中有水部分的面积.



（第 3 题）



（第 4 题）

4. 如图，把圆锥的侧面展开得到扇形，其半径 $OA = 3$，圆心角 $\angle AOB = 120^\circ$，求 $\overset{\frown}{AB}$ 的长.

上海科学技术出版社版权所有

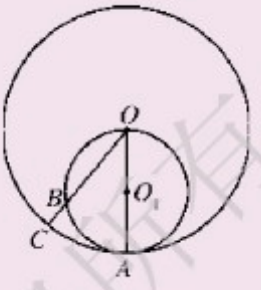
微信公众号：电子课本大全

习题 24.7

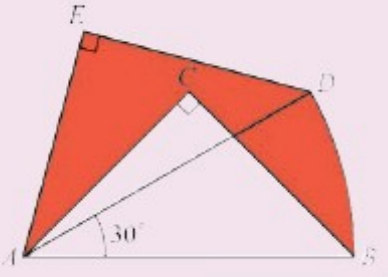
1. 火车上主动轮直径为 1.2 m，主动轮的转速为 400 圈/min，问火车的前进速度是多少？

2. 如图，⊙O 的半径 OA 是⊙O_1 的直径，⊙O 的半径 OC 交⊙O_1 于点 B，问$\overset{\frown}{AB}$与$\overset{\frown}{AC}$的长度之间有什么关系？

3. 如图，在 Rt△ABC 中，$\angle ACB = 90°$，$AC = BC = 1$，将 Rt△ABC 绕点 A 按逆时针方向旋转 30°后得到 Rt△ADE，点 B 经过的路径为$\overset{\frown}{BD}$，求橘红色部分的面积.



（第 2 题）



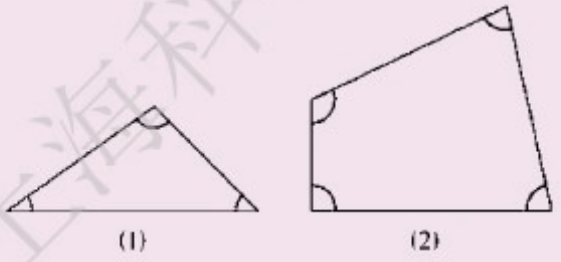
（第 3 题）



（第 4 题）

4. 已知：如图，以 Rt△ABC 各边为直径的三个半圆.
求证：所围成的橘红色部分面积等于 Rt△ABC 的面积.

5. 如图，三角形和四边形的边长都大于 2. 现在以它们的顶点为圆心、1 为半径画弧与两邻边相交，在三角形内有三段弧，在四边形内有四段弧，求每个图形中各段弧长之和. 如在 n 边形内也像上面一样做，这时 n 边形的各段弧长之和为多少？



（第 5 题）



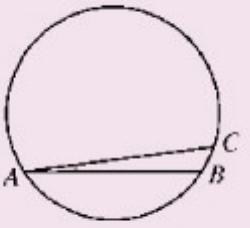
（第 6 题）

6. 如图，一折扇完全打开后，若外侧两竹片 AB，AC 的夹角为 120°，AB 长为 25 cm，贴纸部分 BD 长为 14 cm，则贴纸部分的面积（双面）为多少？

上海科学技术出版社版权所有

微信公众号：电子课本大全

7. 如图，为测量某个圆形人工湖的半径，在湖边 A，B，C 三点竖立标杆，并测量出 $\angle CAB = 7.5°$，$\overset{\frown}{BC} = 392.5$ m，试求该圆形人工湖的半径.



（第 7 题）

数学史话

圆周率 π

圆的周长和直径的比值——圆周率，是一个无限不循环小数，即无理数. 不断地用有理数来逼近它，以求得更精确的圆周率成为古代数学的一个热门课题.

我国古代有“径一周三”的说法，实际上，3∶1 仅是圆内接正六边形的周长与圆的直径之比，而非圆的周长与直径之比，因此以 3 为圆周率的误差很大.

我国魏晋时代的数学家刘徽用割圆术作为计算圆周率的基础，他从圆内接正六边形出发，将边数逐次加倍，并计算逐次得到的正多边形的周长和面积，由此来计算圆周率的近似值. 刘徽发现在圆内接正多边形边数加倍的过程中，“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体，而无所失矣”. 也就是说，当边数成倍增加地进行分割时，被分割的圆弧和所对应的正多边形的边就越来越短（这就是“割之弥细”），于是圆内接正多边形的面积与圆面积之差也就越来越小（这就是“所失弥少”）. 按照这种方法，如果分割次数无限增加时，则正多边形趋于与圆重合，“而无所失矣”，相应地所算出的圆周率的近似值也越来越接近于 π 的精确值. 刘徽取半径为 1 尺（1 尺 $= 0.\dot{3}$ m），从圆内接正六边形出发，一直计算到圆内接正 192 边形，得出了圆周率精确到小数点后两位的近似值 $\pi = \frac{157}{50} = 3.14$，并指出这是一个不足近似值，后人通常称

上海科学技术出版社版权所有
微信公众号：电子课本大全

之为“徽率”.

在刘徽之后200年,即南北朝时期,伟大的数学家、天文学家祖冲之(429—500),也致力于圆周率的研究,获得两项成果:

(1) 圆周率的小数近似值

$$3.141\,592\,6 < \pi < 3.141\,592\,7;$$

(2) 圆周率的近似分数

$$\text{密率 } \pi = \frac{355}{113}, \text{约率 } \pi = \frac{22}{7}.$$

上述(1)中的π具有8位准确数字,并由不足与过剩两方面作了逼近.这项成果直到1427年才被阿拉伯学者卡西(al-Kashi)超过.



祖冲之

图 24-68

密率是π的一个具有特殊性质的近似分数,这一分数在西方是由德国人奥托(V. Otto)于1573年得出的.可见,祖冲之的这两大成果在世界上均保持领先地位1 000年,为了纪念他,现在把$\frac{355}{113}$称为“祖率”.

计算机问世后,圆周率的计算有了重大进展.2002年底,日本东京大学宣布,他们应用超级计算机计算的π已精确到了小数点后12 411亿位.

计算π数值的计算机竞赛可以看成人类探索π奥秘的一种智力竞争,它的计算过程本身也成了检验计算机运算性能(包括计算方法)的一种标准.



数学活动

设计图案(二)

前面,我们学习了利用几何变换来设计几何图案.现在再学习通过等分圆周的办法来设计几何图案.

(1) 以正多边形为基础的图案例子.

① 如图24-69.

上海科学技术出版社版权所有

微信公众号:电子课本大全

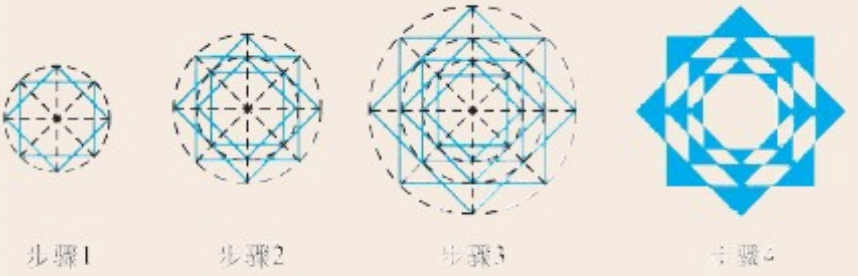


图　24-69

② 如图 24－70，在将圆 6 等分的基础上，作出$\overset{\frown}{PR}$的中点 Q，再用圆规从点 Q 开始作出圆的 6 个等份点，将圆 12 等分. 然后每隔 4 点连线得正三角形，这样可作出许多正三角形，即得到一种图案.



图　24-70

(2) 观察图 24－71 中的图案，并仿制其中一个.



图　24-71

(3) 自己设计并绘制出一个与正多边形有关的图案.

上海科学技术出版社版权所有

微信公众号：电子课本大全

数学园地

某学习小组在探索“各角相等的圆内接多边形一定是正多边形”这个命题是否成立时，进行了一些讨论. 甲同学举出了圆内接矩形；乙同学举出了如图 24－72(1)中的六边形，因为△ABC是正三角形，$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{CF}$，这样得到的六边形 $ADBECF$ 的各内角相等.

甲、乙两同学通过反例，说明了当边数是 4，6 时，这个命题不成立，那么对于哪些边数这个命题成立呢？丙同学由边数是 3 时，这个命题成立，进而猜想：当边数是 5 时，这个命题仍成立.

(1) 你认为丙同学猜想的命题成立吗？

(2) 证明：各角相等的圆内接五边形一定是正五边形，如图 24－72(2)；

(3) 根据以上探索过程，提出你的进一步猜想.



(1)　　(2)

图　24－72

上海科学技术出版社版权所有

微信公众号：电子课本大全

24.8 综合与实践

进球线路与最佳射门角

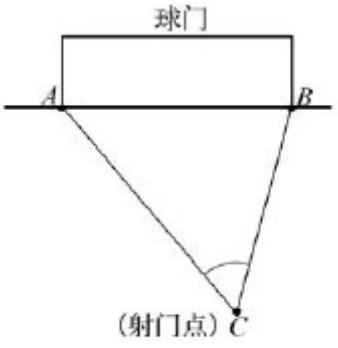
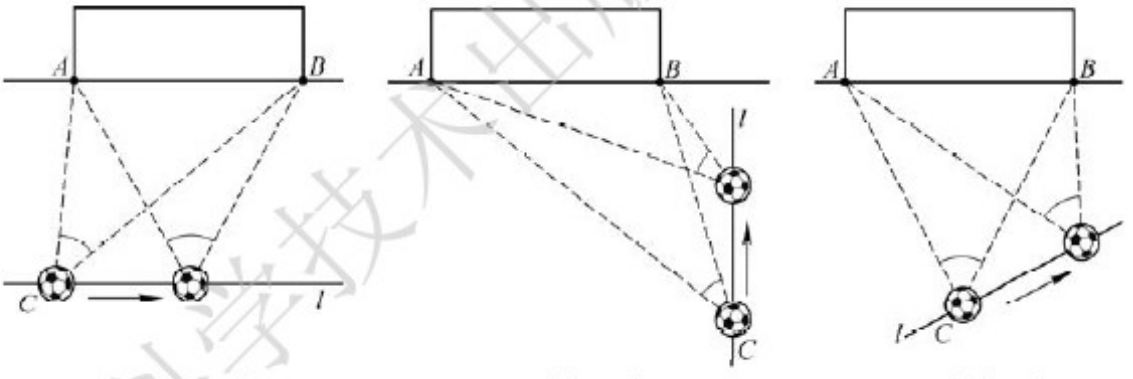


图 24-73

足球运动员在球场上，常需带球跑动到一定位置后，再进行射门，这个位置为射门点，射门点与球门边框两端点的夹角就是射门角. 如图 24－73，如果点 A，B 表示球门边框（不考虑球门的高度）的两端点，点 C 表示射门点，连接 AC，BC，则 $\angle ACB$ 就是射门角. 在不考虑其他因素的情况下，一般地，射门角越大，射门进球的可能性就越大.

图 24－74 是运动员带球跑动的三种常见线路（用直线 l 表示），了解跑动线路中射门角的变化，把握最佳射门点，无疑是有助于提高运动员进球成功率的.



(1) 横向跑动　(2) 直向跑动　(3) 斜向跑动

图 24－74

下面对运动员横向跑动时的情况进行研究.

如图 24－75，直线 l 与球门 AB 平行，点 C 表示运动员的位置，当点 C 在直线 l 上由左边（或右边）逐渐向球门的中心靠近时，$\angle ACB$ 逐渐增大.

根据对称性可知，当点 C 在直线 l 上移动到离球门中心最近的位置，即线段 AB 的垂直平分线与直线 l 的交点 C_0 时，$\angle AC_0B$ 最大.

上海科学技术出版社版权所有
微信公众号：电子课本大全

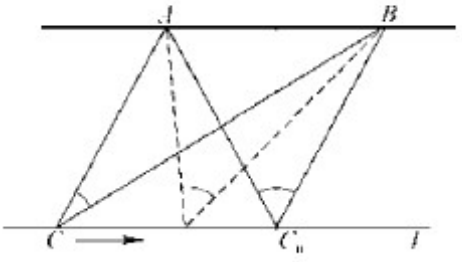


图 24-75

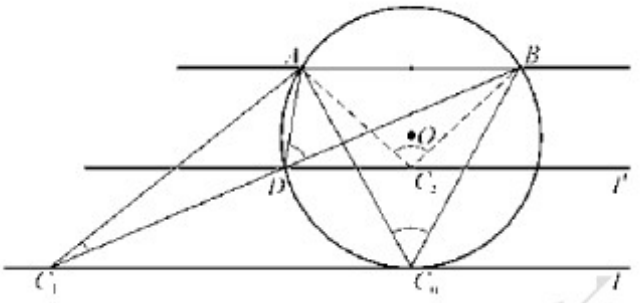


图 24-76

现在，我们来证明点 C 在直线 l 上移动时，$\angle ACB$ 的最大值为 $\angle AC_0B$.

如图 24－76，过 A，B，C_0 三点作 $\odot O$，由于 $AB \parallel l$，$AC_0 = BC_0$，易知 $\odot O$ 与直线 l 相切于点 C_0，在直线 l 上另取点 C_1（不同于点 C_0），连接 AC_1 和 BC_1，BC_1 与 $\odot O$ 交于点 D. 则

$$\angle ADB = \angle AC_0B.$$

$\because$ $\angle ADB > \angle AC_1B$,

$\therefore$ $\angle AC_0B > \angle AC_1B$.

即点 C 在直线 l 上移动时，$\angle ACB$ 的最大值为 $\angle AC_0B$.

在图 24－76 中，当直线 l 向上平移到直线 l' 时，$C_0 \to C_2$，$\angle AC_0B \to \angle AC_2B$，且有 $\angle AC_2B > \angle AC_0B$.

由此可知，当运动员沿直线 l 横向跑动时，他的位置离球门的中心越近，射门角越大，离球门的中心最近（点 C_0）时，射门角最大，我们把点 C_0 称为直线 l 上的最佳射门点，$\angle AC_0B$ 称为直线 l 上的最佳射门角.

最佳射门角的大小与直线 l 到 AB 的距离有关，由图 24－76 知，当直线 l 与 AB 的距离越近，最佳射门角就越大，射门进球的可能性也就越大，这与我们踢足球的经验相吻合.

事实上，在上面的证明过程中，我们还可得到如下的结论：

如果 $\odot O$ 过点 A，B，而直线 AB 同侧的三点 C_1，C_0，C_2 分别在 $\odot O$ 外，$\odot O$ 上和 $\odot O$ 内，则有

上海科学技术出版社版权所有

微信公众号：电子课本大全

$$\angle AC_1B < \angle AC_0B < \angle AC_2B.$$

简单地说，在弦的同侧，同弦所对的圆外角 α、圆周角 β 和圆内角 θ 的大小关系为

$$\alpha < \beta < \theta.$$

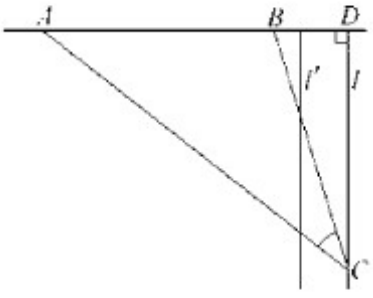


图　24－77

问题❶　如图 24－77，当运动员直向跑动时，球门 AB 与直线 l 垂直，点 C 是运动员的位置.

（1）作出过 A，B，C 三点的圆，猜想当点 C 在直线 l 上移动时，直线 l 与该圆的位置关系；

（2）当直线 l 与该圆有怎样的位置关系时，$\angle ACB$ 是直线 l 上的最佳射门角；

（3）已知 $AB = m$，$BD = n$，当点 C 是直线 l 上的最佳射门点时，求 CD 的长；

（4）向左平移直线 l 到直线 l'，观察直线 l 上的最佳射门角与直线 l' 上的最佳射门角之间的大小关系，写出你的结论.

有条件的同学可用《几何画板》进行探究.

问题❷　如图 24－78，当运动员直向跑动时，直线 l 垂直穿过球门 AB，点 C 是运动员的位置.

（1）$\angle ACB$ 的大小是怎样变化的？

（2）直线 l 上还有没有最佳射门点？说明你的理由.

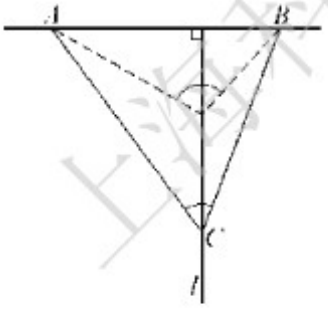


图　24－78

问题❸　对运动员斜向跑动时进行相关探究，或自选一个问题进行探究.

问题❹　与同学合作，将探究的结果写成小论文，并检验你得到的结论是否与足球运动的实际相符合.

上海科学技术出版社版权所有

微信公众号：电子课本大全

小结·评价

一、内容整理



二、主要知识回顾

1. 在平面内，一个图形_____
叫做旋转. 旋转是由_____，_____和_____所确定.

2. 圆是轴对称图形，如何根据它得到垂径定理？

3. 旋转对称图形具有怎样的特点，举几个实例.

4. 圆是旋转对称图形，如何根据它得到弧、弦、弦心距、圆心角之间的关系？

5. 根据什么条件可以确定圆？

6. 与圆有关的角

（1）顶点在_____的角叫做圆心角.

上海科学技术出版社版权所有
微信公众号：电子课本大全

（2）顶点在圆上，并且两边都与圆还有另一个公共点的角叫做_____，它的度数等于同弧上圆心角的_____.

7. 点与圆、直线与圆位置关系

（1）点 P 与半径为 r 的⊙O，设 $OP=d$.

点 P 在⊙O 外$\Longleftrightarrow d>r$;

点 P 在⊙O 上$\Longleftrightarrow$_____;

点 P 在⊙O 内$\Longleftrightarrow$_____.

（2）直线 l 与半径为 r 的⊙O，设点 O 到直线 l 的距离为 d.

直线 l 与⊙O 相离$\Longleftrightarrow$_____;

直线 l 与⊙O 相切$\Longleftrightarrow$_____;

_____$\Longleftrightarrow d<r$.

切线性质　圆的切线_____经过切点的半径.

切线判定定理　经过半径外端点并且垂直于这条半径的直线是圆的切线.

*切线长定理　过圆外一点作圆的两条切线，两条切线长相等，圆心与这一点的连线平分两条切线的夹角.

8. 三角形与圆的关系

三角形有且仅有一个外接圆和_____，它们的圆心分别叫做三角形的_____和内心.

9. 正多边形与圆

圆的内接或外切正多边形.

正多边形的计算.

10. 弧长与扇形面积的计算.

三、自评与互评

1. 你学过哪些几何变换？请总结一下它们各自的性质.

2. 平移、旋转、轴对称这三种变换与相似变换有什么不同的地方？

3. 圆的本质特征是什么？

4. 圆既是轴对称图形又是旋转对称图形，并且有无数条对称轴，旋转角可为任一个角度，它的许多性质都可以由它的对称性推出. 在学习和理解“圆”这一章内容时，一定要注意圆的对称性.

5. 从本章用反证法证明的例、习题中，你能体会反证法的意义吗？请举出日常生活中用反证法说理的例子.

上海科学技术出版社版权所有

微信公众号：电子课本大全

A组 复习题

1. 仔细观察下列镶边图案：

（1）每幅镶边图案具有什么特征？

（2）说出每幅镶边图案的变换名称并加以解释.



（1）

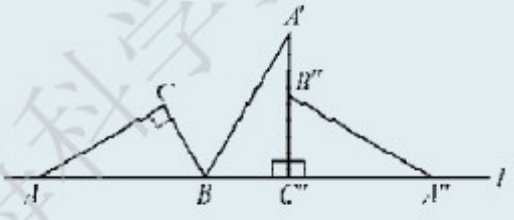


（2）

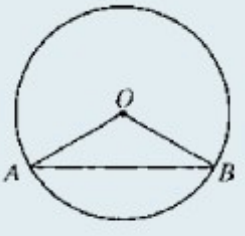
（第 1 题）

2. 已知：⊙O 的半径为 2，点 P 在⊙O 上，该平面上另有一点 Q，PQ 为 2. 画出图形，标注点 Q 可能的位置.

3. 如图，把 Rt△ABC 的斜边 AB 放在直线 l 上，按顺时针方向在 l 上转动两次，使它转到△$A''B''C''$的位置. 若 $BC=1$，$AC=\sqrt{3}$，则当点 A 转动到点 A''的位置时，求点 A 两次转动所经过的路程.



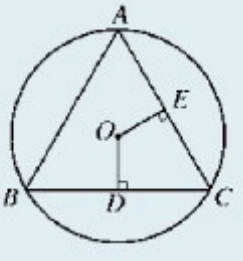
（第 3 题）



（第 4 题）

4. 如图，在⊙O 中，弦 AB 所对劣弧为圆的$\frac{1}{3}$，圆半径为 2 cm，求 AB 的长及∠AOB 的大小.

5. 如图，在⊙O 中，如果$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}$，$OD$，$OE$ 是弦心距，且 $OD=OE$，那么△ABC 是什么三角形，为什么？



（第 5 题）

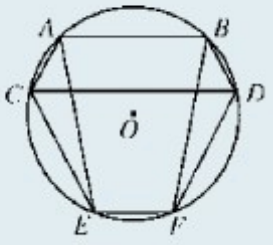
上海科学技术出版社版权所有
微信公众号：电子课本大全

6. 已知：⊙O 的半径为 5，点 A 到圆心 O 的距离 OA 为 3，求过点 A 最短的弦长.

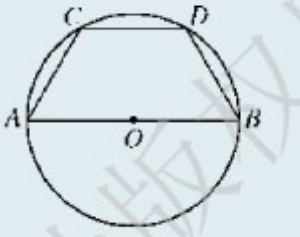
7. 已知：两弦 AB 和 CD 相交于圆内的一点 P，并且两弦夹角被经过点 P 的直径平分.
求证：$AB=CD$.

8. 已知：在⊙O 中，弦 AB 的长是半径 OA 的$\sqrt{3}$倍，点 C 是$\overset{\frown}{AB}$的中点，问四边形 $OACB$ 是什么图形，为什么？

9. 如图，AB，CD，EF 是⊙O 的三条弦，$AB\parallel CD\parallel EF$，问 $\triangle ACE$ 与 $\triangle BDF$ 有什么关系，为什么？



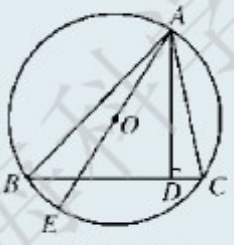
（第 9 题）



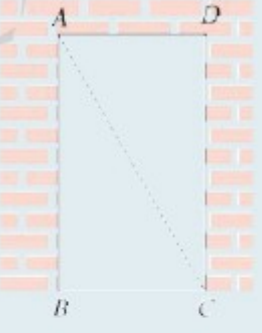
（第 10 题）

10. 如图，AB 为⊙O 的直径，C，D 是半圆上两点，且 $AC=CD=DB$，$AB=10$ cm.
（1）求 AC 的长度；
（2）证明 $CD\parallel AB$.

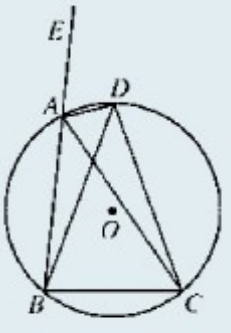
11. 已知：如图，AD 是 $\triangle ABC$ 的高，AE 是 $\triangle ABC$ 的外接圆直径.
求证：$AB\cdot AC=AE\cdot AD$.



（第 11 题）



（第 12 题）



（第 13 题）

12. 如图，花园围墙上有一宽为 1 m 的矩形门 $ABCD$，量得门框对角线 AC 的长为 2 m. 现准备打掉部分墙体，使其变为以 AC 为直径的圆弧形门，问要打掉墙体的面积是多少？（$\pi\approx3.14$，$\sqrt{3}\approx1.73$）

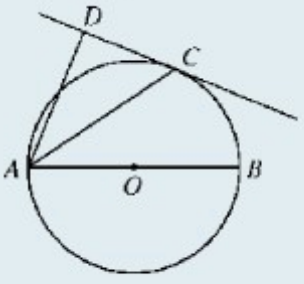
13. 已知：如图，AD 是 $\angle EAC$ 的平分线，AD 与 $\triangle ABC$ 的外接圆交于点 D.
求证：$DB=DC$.

上海科学技术出版社版权所有

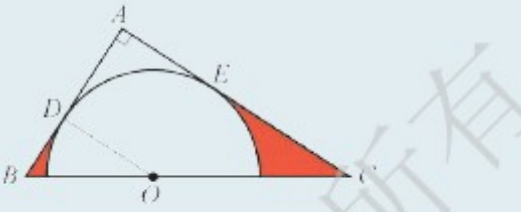
微信公众号：电子课本大全

14. 已知：如图，AB 为⊙O 的直径，点 C 在⊙O 上，AD 与过点 C 的切线垂直，垂足为 D.

求证：AC 平分∠DAB.



（第 14 题）



（第 15 题）

15. 如图，在△ABC 中，∠A = 90°，O 是 BC 边上的一点，以点 O 为圆心的半圆分别与边 AB，AC 相切于点 D，E，连接 OD. 已知 BD = 2，AD = 3，求橘红色部分的面积.

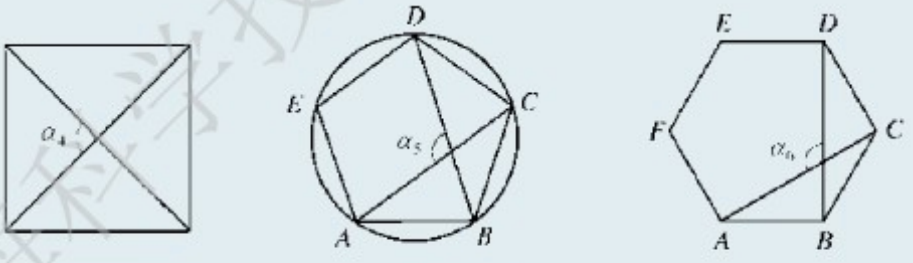
16. 已知：过⊙O 外的定点 P 作⊙O 的两条切线，分别切⊙O 于点 A，B. 在劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上任取一点 C，经过点 C 作⊙O 的切线，分别交 PA，PB 于点 D，E.

求证：

（1）△PDE 的周长是定值（PA + PB）；

（2）∠DOE 的大小是定值 $\left(\frac{1}{2}\angle AOB\right)$.

17. 如图是正四边形、正五边形、正六边形，试分别计算其相邻两条对角线的夹角 α_4、α_5、α_6，并探究正 n 边形相邻两条对角线的夹角存在什么规律.



（第 17 题）

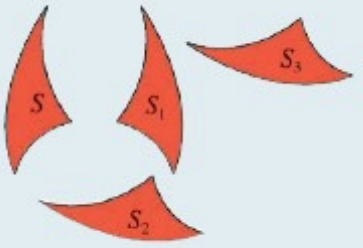
B组 复习题

1. 如图是 4 个全等的图形.

上海科学技术出版社版权所有
微信公众号：电子课本大全

(1) 将 S 变换为 S_2、将 S 变换为 S_3 分别是什么变换？如果是旋转，找出旋转中心，并量一下旋转角的度数；

(2) S 到 S_1、S_2 到 S_3 各是什么变换？如果是旋转，找出旋转中心；如果是轴对称，找出对称轴；如果是平移，求平移方向及距离.



(第 1 题)

2. 在平面直角坐标系中，有两个正方形 $ABCD$ 和 $PQRS$，顶点分别为 $A(-3, 1)$，$B(1, 1)$，$C(1, -3)$，$D(-3, -3)$ 与 $P(-1, 3)$，$Q(3, 3)$，$R(3, -1)$，$S(-1, -1)$，试在方格纸上画出它们，并完成下列要求：

(1) 找出旋转中心和旋转角度，使正方形 $ABCD$ 变换成正方形 $QRSP$；正方形 $ABCD$ 变换成正方形 $SPQR$；正方形 $ABCD$ 变换成正方形 $RSPQ$；

(2) 在(1)中，两个正方形是否成轴对称？如是，找出其对称轴；

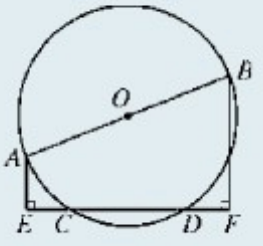
(3) 什么变换可以使正方形 $ABCD$ 变换成正方形 $PQRS$？

3. 已知：在两个同心圆中，大圆的弦 AB，AC 分别与小圆相切于点 D，E.

求证：$DE \parallel BC$，且 $DE = \frac{1}{2}BC$.

4. 已知：如图，AB 是 $\odot O$ 的直径，CD 是弦，AE，BF 垂直于 DC 的延长线，垂足分别为 E，F.

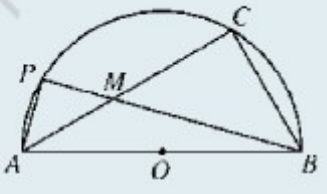
求证：$EC = DF$.



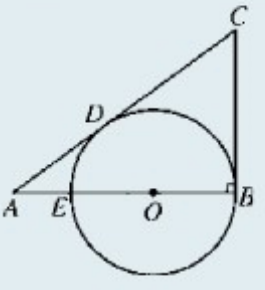
(第 4 题)

5. 证明：以等腰三角形的一腰为直径的圆平分底边.

6. 如图，P，C 是以 AB 为直径的半圆上的两点，$\overset{\frown}{PC}$ 为 $\frac{\pi}{2}$. 连接 PB，AC 交于点 M，试分别比较 MC 与 BC、MP 与 AP 的大小，问 $\angle BMC$ 为多大？



(第 6 题)



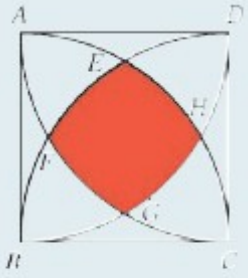
(第 7 题)

7. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B = 90°$，点 O 在 AB 上，以点 O 为圆心、OB 为半径的圆与 AB 交于点 E，与 AC 相切于点 D，$AD = 2$，$AE = 1$，求 CD 的长.

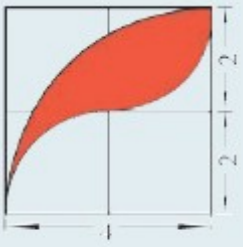
上海科学技术出版社版权所有

微信公众号：电子课本大全

8. 如图，四边形 $ABCD$ 是边长为 a 的正方形，分别以点 A,B,C,D 为圆心、a 为半径作弧，相互交于点 E,F,G,H，求橘红色部分的周长.



（第 8 题）



（第 9 题）



（第 10 题）

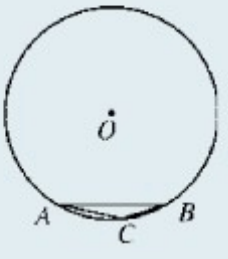
9. 如图，一个边长为 4 的大正方形被分成 4 个全等的小正方形，橘红色部分由 3 段圆弧围成，大圆弧半径是 4，两个小圆弧半径是 2，求橘红色部分的面积.

10. 如图，圆半径为 R，分别以圆上 3 等份点为圆心、R 为半径在圆内作弧，求橘红色部分的面积.

C组 复习题

1. 已知：在如图的⊙O 中，弦 AB 是圆内接正六边形的一边，弦 AC 是圆内接正十边形的一边.

   求证：BC 是圆内接正十五边形的一边.



（第 1 题）

2. 求边长为 a 的正五边形对角线的长.

3. 已知：正十边形外接圆的半径为 R.

   求证：正十边形的边长 $a_{10}=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)R$.

4. 已知：过点 P 作一直线与半径为 R 的⊙O 相交于 A,B 两点.

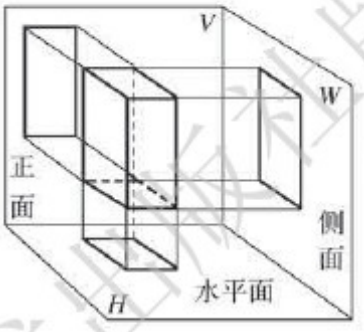
   求证：$PA\cdot PB=|R^2-OP^2|$.

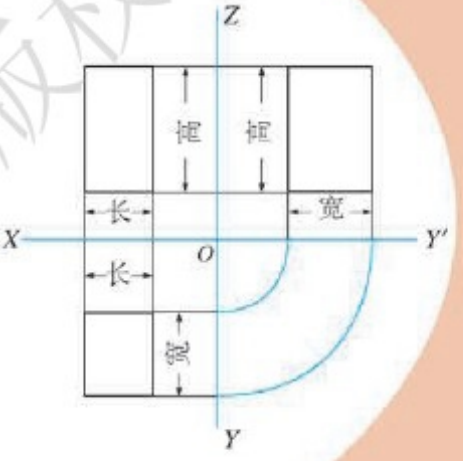
5. 三人各带一根长 100 m 的绳子在荒滩上围地开垦，甲围成正三角形，乙围成正方形，丙围成圆，问三人中谁围的地面积最大？

上海科学技术出版社版权所有
微信公众号：电子课本大全

第25章 投影与视图

25.1 投影
25.2 三视图





各种机械零件的加工都离不开图纸，那么机械零件的立体形状和尺寸大小用平面图形是怎样表示的呢？

本章我们将学习投影的知识，并根据投影原理认识三视图.

上海科学技术出版社版权所有

微信公众号：电子课本大全

25.1 投 影

在七年级上册4.1节“几何图形”中，我们已知道几何图形分平面图形与立体图形，初中几何的重点是学习平面图形. 本章我们将学习如何根据投影原理来认识平面图形与立体图形的关系.

1. 平行投影与中心投影

一个物体放在阳光下或者灯光前，就会在地面上或者墙面上留下它的影子，这个影子称为物体的**投影**. 投影从某个侧面反映出这个物体的形状.



(1) (2)

图 25-1

如图25-1(1)，在阳光下，房屋的影子是房屋在地面上的投影，地面是投影面，光线是投射线. 由于太阳的光线可看作是平行的，我们称这种由平行的光线所形成的投影为**平行投影**(parallel projection).

如图25-1(2)，在灯光前，将两手交叉握紧，墙面上就会出现影子，它是手的造型在墙面上的投影，墙面是投影面，光线是投射线. 由于灯光的光线可看作是从一点发出的，我

上海科学技术出版社版权所有
微信公众号：电子课本大全

你还见过哪些平行投影和中心投影的现象呢？

们称这种由一点（点光源）发出的光线所形成的投影为**中心投影**（center projection）.

思考

1. 如图 25－2(1)，直线 l_1 上的三点 A,B,C 被平行投影到直线 l_2 上，对应的点为 A',B',C'，问对应点的连线之间有怎样的位置关系？

2. 如图 25－2(2)，直线 l_1 上的三点 A,B,C 被中心投影到直线 l_2 上，对应的点为 A',B',C'，问对应点的连线之间又有怎样的位置关系？

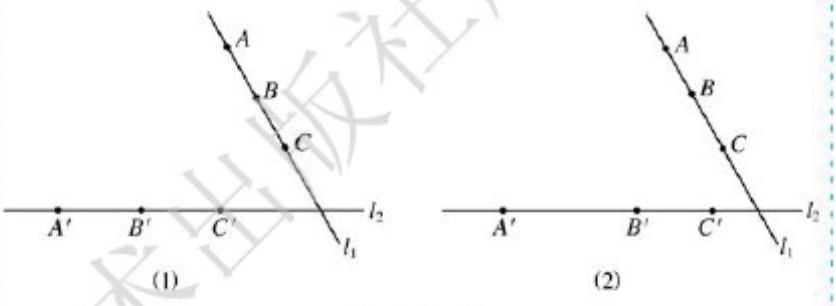


图　25－2

练习

1. 下列两幅图中的投影是平行投影还是中心投影，为什么？

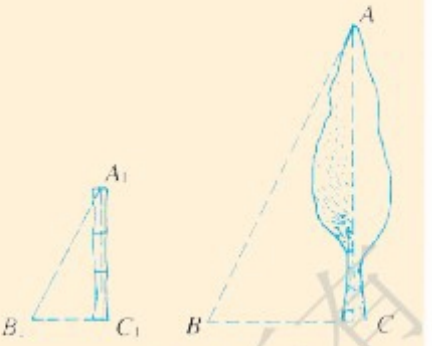


(1)　　(2)

（第 1 题）

上海科学技术出版社版权所有
微信公众号：电子课本大全

2. 如图是在同一时刻的阳光照射下，操场边一棵树 AC 和旁边一根竹竿 A_1C_1 以及它们的影子 CB，C_1B_1 的示意图. 问 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 有什么关系，为什么？



（第 2 题）

3. 如图，树 A，B 与一盏路灯位于同一条直线上，并分别在该路灯两旁. 图中只画出了树 A，B 在路灯照射下的影子，但没有画出路灯.

（1）你能画出路灯吗？

（2）两棵树分别与各自影子构成的两个直角三角形相似吗？



（第 3 题）

4. 举出一些生活中平行投影与中心投影的例子.

2. 正投影

在平行投影中，如果投射线垂直于投影面，那么这种投影称为**正投影**.

在正投影下，图形的投影有什么规律呢？

（1）线段的正投影



观察

如图 25－3，用一束平行光线垂直于水平桌面，照射一支铅笔（看作线段 AB），改变铅笔的位置，观察它在桌面（看作投影面 H）上投影的形状与大小，

上海科学技术出版社版权所有
微信公众号：电子课本大全

你能发现线段正投影的规律吗？

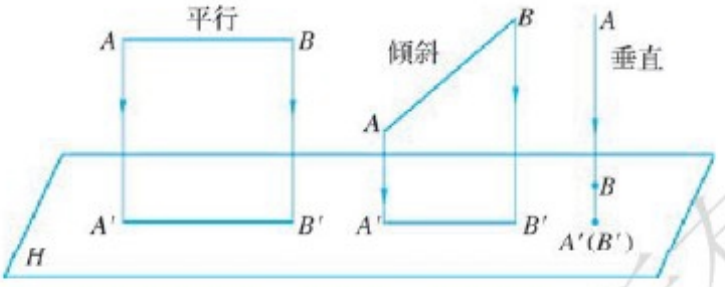


图 25-3

设线段 AB 的端点 A，B 在投影面 H 上的投影为点 A'，B'，线段 $A'B'$ 就是线段 AB 在投影面 H 上的投影.

当线段 AB 平行于投影面 H 时，$A'B' = AB$；

当线段 AB 倾斜于投影面 H 时，$A'B' < AB$；

当线段 AB 垂直于投影面 H 时，$A'B' = 0$（此时点 A' 与点 B' 重合，点 A' 或点 B' 就是 AB 在投影面 H 上的投影）.

一般地，线段正投影有如下的规律：

平行长不变，倾斜长缩短，垂直成一点.

（2）平面图形的正投影



观察

如图 25-4，把一块矩形纸板（矩形 $ABCD$）放在正午的阳光下，变换纸板的位置，观察它在水平地面（看作投影面 H）上投影的形状与大小. 你能根据线段正投影的规律，发现矩形 $ABCD$ 正投影的规律吗？

上海科学技术出版社版权所有
微信公众号：电子课本大全

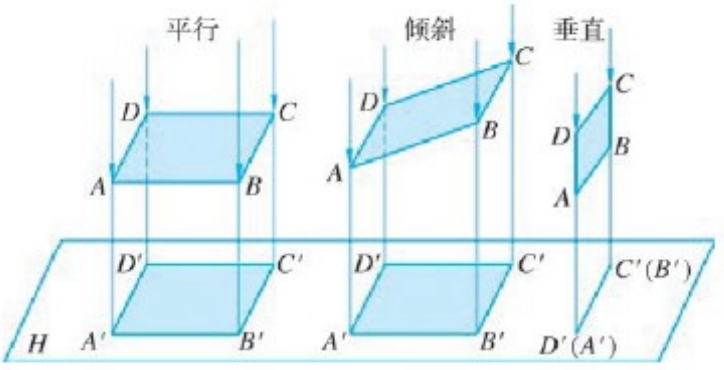


图 25−4

设矩形 $ABCD$ 的顶点 A,B,C,D 在投影面 H 上的投影为点 A',B',C',D'，四边形 $A'B'C'D'$ 就是矩形 $ABCD$ 在投影面 H 上的投影.

当矩形 $ABCD$ 平行于投影面 H 时，四边形 $A'B'C'D'\cong$ 矩形 $ABCD$；

当矩形 $ABCD$ 倾斜于投影面 H 时，四边形 $A'B'C'D'$ 的大小、形状相对于矩形 $ABCD$ 已有改变；

当矩形 $ABCD$ 垂直于投影面 H 时，四边形 $A'B'C'D'$ 变为线段 $D'C'$（或 $A'B'$）.

一般地，平面图形正投影有如下的规律：

平行形不变，倾斜形改变，垂直成线段.

矩形 $ABCD$ 的位置变化时，它的各边在投影面 H 上的投影会是什么图形？

（3）几何体的正投影

观察

如图 25−5，你能根据平面图形正投影的规律，说出长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 在投影面 H 上的正投影是什么图形吗？

上海科学技术出版社版权所有
微信公众号：电子课本大全

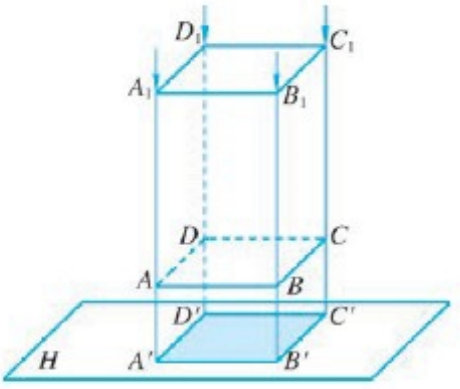


图 25-5

由于长方体的两个底面都平行于投影面 H，因而它们在投影面 H 上的正投影都是矩形 $A'B'C'D'$.

由于长方体的四个侧面都垂直于投影面 H，因而它们在投影面 H 上的正投影分别是线段 $A'B'$，$B'C'$，$C'D'$，$D'A'$.

由此可知，长方体在投影面 H 上的正投影就是矩形 $A'B'C'D'$.

一般地，**一个几何体在一个平面上的正投影是一个平面图形.**

一个几何体在一个平面上的正投影叫做这个几何体的**视图**(view).

练习

1. 把两支铅笔捆在一起成交叉状，再拿一块矩形纸板，在正午的阳光下，查看它们在地面上投影的各种可能情况(分别改变交叉铅笔、矩形纸板与地面的不同倾斜程度).
2. 如果圆柱、圆锥的底面与投影面平行，那么它们的正投影分别是什么图形？球的正投影呢？

微信公众号：电子课本大全

习题 25.1

1. 一块圆形铁片,它的正投影一定是圆吗?什么时候一定是圆?
2. 如果一个几何体在一个投影面上的正投影是矩形,那么这个几何体一定是长方体吗?举例说明.

上海科学技术出版社版权所有

微信公众号:电子课本大全

25.2 三视图

思考

只看到几何体的一个视图，就能够准确地刻画这个几何体的形状与大小吗？如果已知一个几何体在水平面上的视图是圆，你能断定这个几何体是球吗？为什么？

要想清楚地刻画一个几何体的形状与大小，通常需要画出它在三个互相垂直的投影面（例如墙角的三个面）上的正投影（视图）. 如图 25－6(1)，其中正对着我们的面叫做正面，下方的面叫做水平面，右边的面叫做侧面.

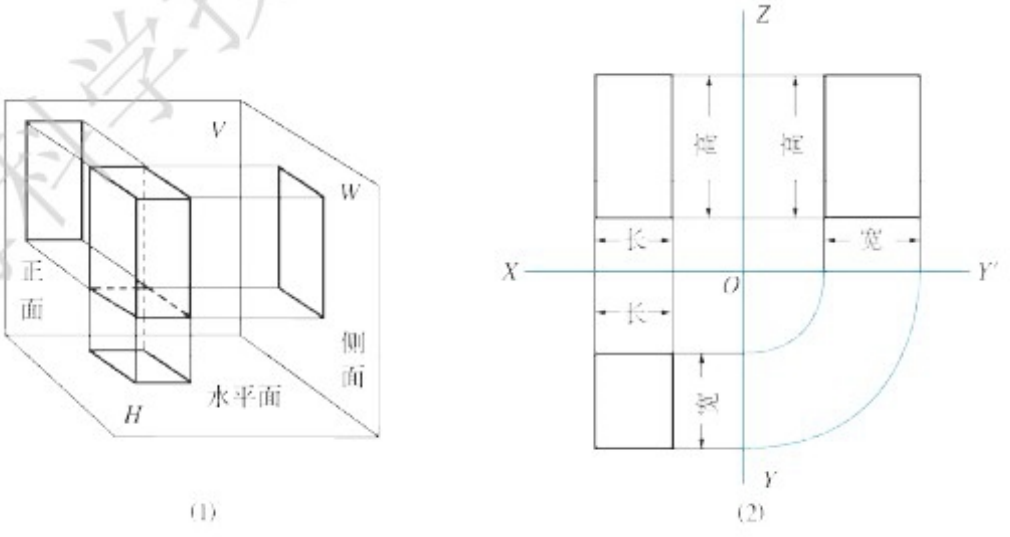


图 25－6

自几何体的前方向后投射，在正面投影面 V 上得到的

上海科学技术出版社版权所有
微信公众号：电子课本大全

视图称为**主视图**；自几何体的上方向下投射，在水平投影面 H 上得到的视图称为**俯视图**；自几何体的左侧向右投射，在侧面投影面 W 上得到的视图称为**左视图**. 主视图、俯视图和左视图就组成了三视图.

如图 25－6(2)，三视图可画在同一个平面上，其位置以主视图为基准，俯视图画在主视图的正下方，左视图画在主视图的正右方.

一个几何体的三个视图分别从不同方向反映了一个几何体的形状与大小，主视图反映几何体的长与高，俯视图反映几何体的长与宽，左视图反映几何体的高与宽. 因此，三视图能较全面地反映几何体的形状与大小.

三视图的画法必须符合以下规律：

(1) 主视图的长与俯视图的长对正；

(2) 主视图的高与左视图的高平齐；

(3) 俯视图的宽与左视图的宽相等.

可简述为：**长对正，高平齐，宽相等.**

例 1　画出图 25－7(1)中几何体的三视图：

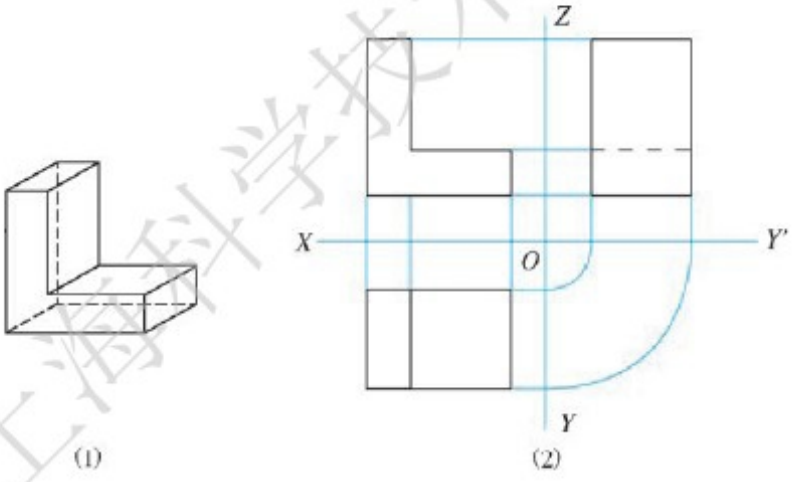


图　25－7

作法

1. 在图 25－7(2)中，先画互相垂直的辅助线 XY'，ZY（用铅笔画，图画好后可擦去）.

上海科学技术出版社版权所有
微信公众号：电子课本大全

2. 确定主视图的位置，画出主视图.

3. 根据“长对正”与几何体宽度画出俯视图.

4. 根据“高平齐”与“宽相等”画出左视图（宽相等，可通过点 O 为中心旋转画出）.

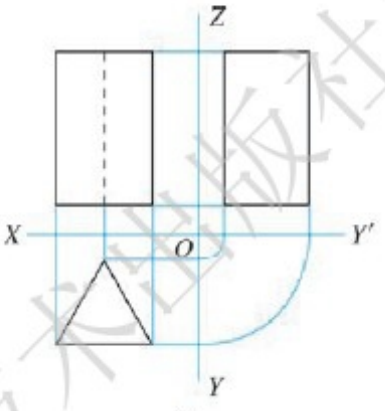
5. 擦去辅助线.

要注意看不见的轮廓线应画成虚线.

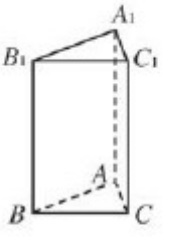


思考

图 25－8(1) 是与图 25－8(2) 中几何体对应的三视图，根据这个三视图，你能说说这种几何体的特点吗？



(1)



(2)

图 25－8

如图 25－8(2) 这样的几何体叫做**棱柱**，它的上、下两个面叫做**底面**（$\triangle ABC$、$\triangle A_1B_1C_1$ 互相平行且是全等的三角形），其余各面叫做**侧面**，相邻侧面的交线叫做**侧棱**（各侧棱 AA_1，BB_1，CC_1 平行且相等）.

根据棱柱底面多边形的边数，我们依次称棱柱为三棱柱、四棱柱、五棱柱…… 当侧棱垂直于底面时，棱柱称为**直棱柱**，直棱柱的各个侧面都是矩形.

底面是正多边形的直棱柱叫做**正棱柱**，图 25－8(2) 中几何体叫做**正三棱柱**.

上海科学技术出版社版权所有
微信公众号：电子课本大全

例 2 某工厂要加工一批正六棱柱形状的食品盒，其三视图如图 25－9（单位：cm）. 问制作这样一个食品盒所需要硬纸板的面积至少为多少？（精确到 1 cm^2）

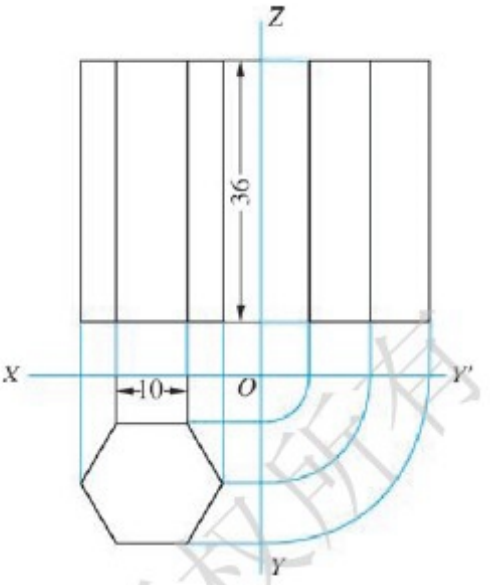


图 25－9

解 这个正六棱柱形状的食品盒有六个侧面（都是矩形）和两个底面（都是正六边形），因此制作这样一个食品盒所需要硬纸板的面积至少为

$$S = 6 \times 10 \times 36 + 2 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 10^2$$

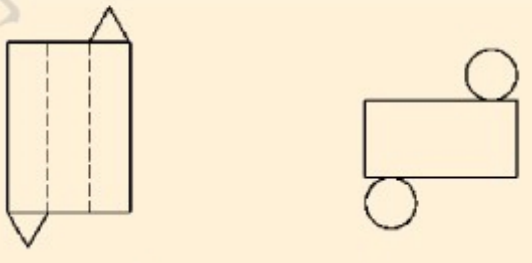
$$= 2\,160 + 300\sqrt{3}$$

$$\approx 2\,680(cm^2).$$

答：制作这样一个食品盒所需要硬纸板的面积至少为 2 680 cm^2.



1. 如图是一些几何体的展开图，请在展开图的下方写出几何体的名称：



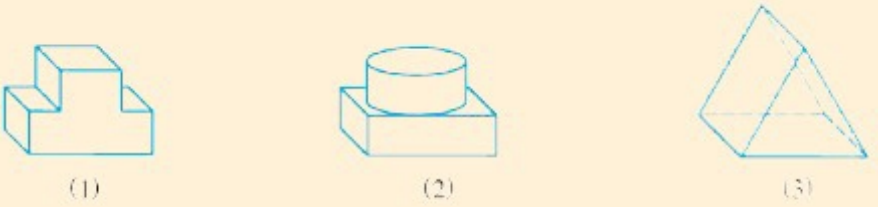
（　　）　　（　　）

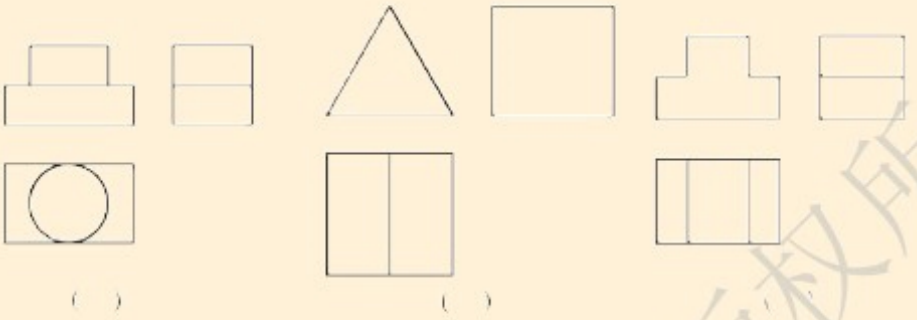
（第 1 题）

2. 找出与下列几何体对应的三视图，在三视图的下方填上对应的几何体序号.

上海科学技术出版社版权所有

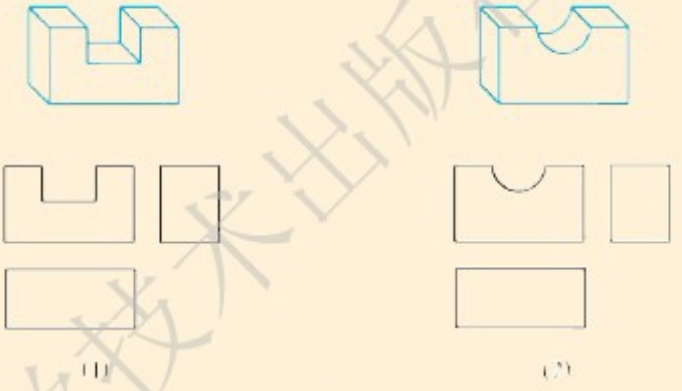
微信公众号：电子课本大全





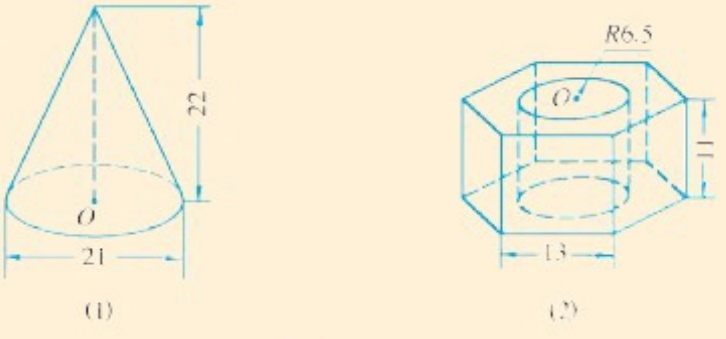
（第 2 题）

3. 添线补全下列三视图.



（第 3 题）

4. 画出下列几何体的三视图（单位：mm）.



（第 4 题）

上海科学技术出版社版权所有

微信公众号：电子课本大全

数学园地

图 25－10 是两套不同户型的房屋平面图，从中你能得到哪些信息？请列出 2～3 个数据，并说明你是如何得出数据的.

A 建筑面积：72.1～73.65m²
两房两厅+南向阳台



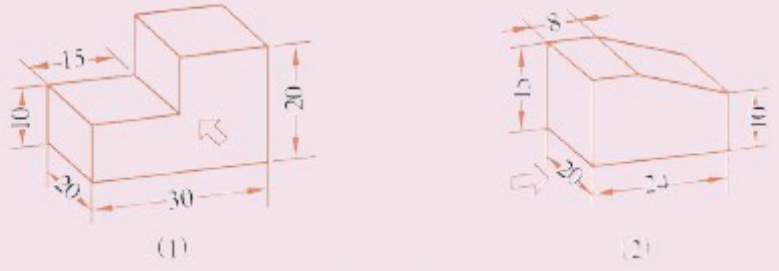
B 建筑面积：131.58m²
两房两厅+入户花园+空中花园+双阳台



图 25－10

习题 25.2

1. 画出下列几何体在箭头指定方向上的视图（单位：mm）.

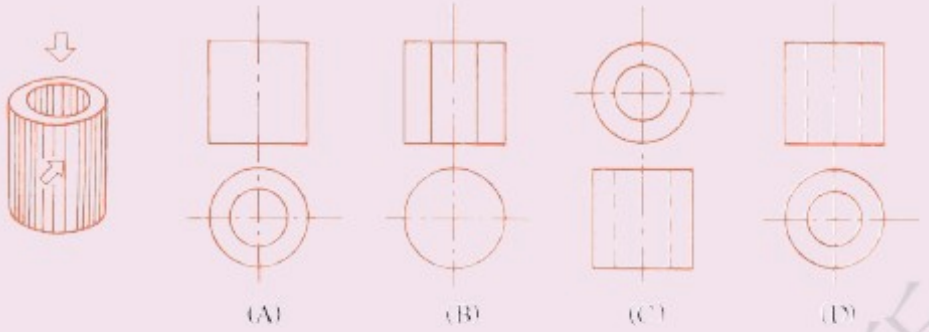


(1)　　(2)

（第 1 题）

上海科学技术出版社版权所有
微信公众号：电子课本大全

2. 下面是空心圆柱的主视图与俯视图，其中正确的是(　　).



(第 2 题)

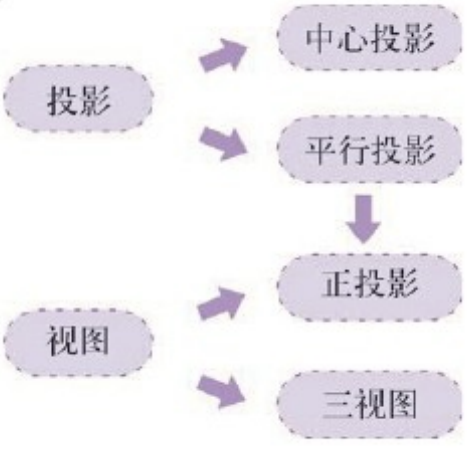
3. 如图是由 7 个完全一样的小正方体搭成的几何体的俯视图，其中小正方形中的数字表示在该位置上小正方体的个数. 请你画出该几何体的主视图、左视图.



(第 3 题)

小结·评价

一、内容整理



二、主要知识回顾

1. 什么是平行投影，什么是中心投影？

上海科学技术出版社版权所有
微信公众号：电子课本大全

2. 投射线垂直于投影面的平行投影叫做_____投影. 一个几何体在一个平面上的_____投影叫做这个几何体的视图.

3. 在画一个几何体的三视图时应该遵循的投影规律是_____，_____，_____.

4. 直棱柱的两个底面_____，各个侧面都是_____，各侧棱_____，底面是_____的直棱柱叫做正棱柱.

三、自评与互评

1. 举例说明生活中有哪些投影是平行投影，有哪些投影是中心投影？

2. 为什么三视图能够刻画一个几何体的形状与大小？与同学交流你的看法.

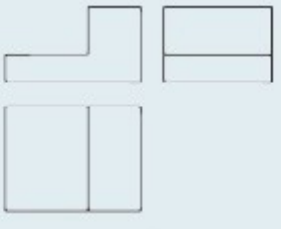
3. 三视图被广泛应用于加工业、建筑业等图纸设计上，你是否见到过有关的图纸？请到工厂或建筑单位去看一看零件图纸或建筑图纸，以增加实际知识.

A组 复习题

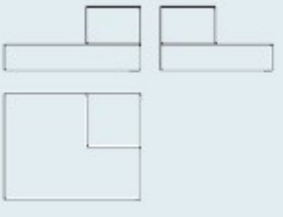
1. 找出与下列几何体对应的三视图，在三视图的下方填上对应的几何体序号.



(1)　(2)　(3)　(4)



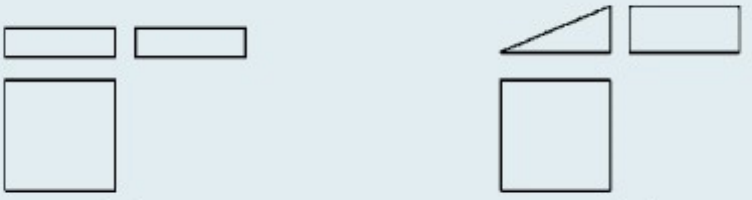
(　)



(　)

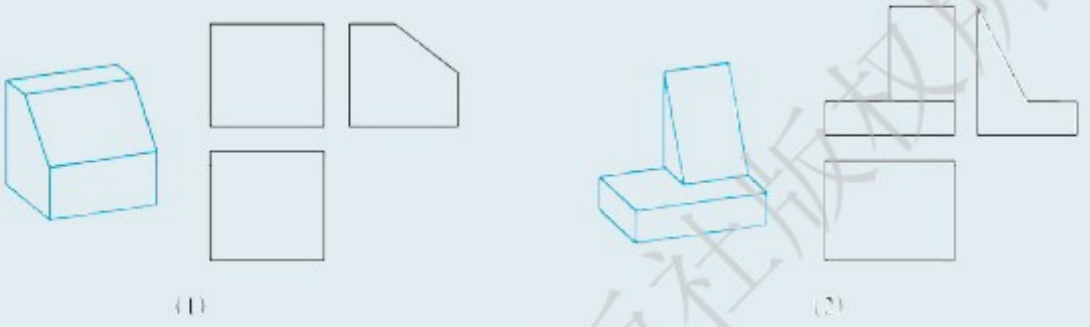
上海科学技术出版社版权所有

微信公众号：电子课本大全



（第 1 题）

2. 添线补全下列三视图.



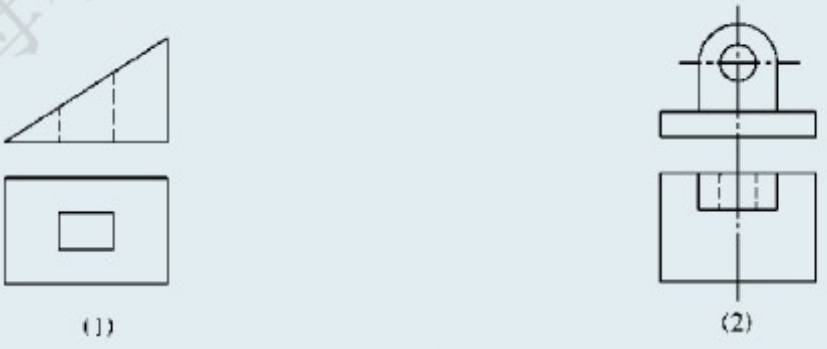
（第 2 题）

3. 下列视图有没有错误,请改正.



（第 3 题）

4. 根据所给的主视图和俯视图,画出对应的左视图.



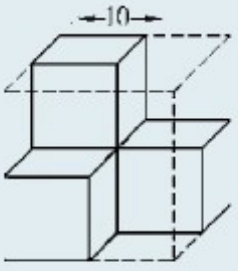
（第 4 题）

上海科学技术出版社版权所有

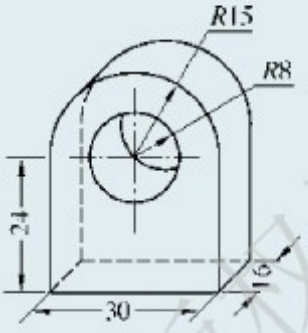
微信公众号：电子课本大全

B组 复习题

1. 如图，实线部分是从正方体中切割出来的几何体，画出它的三视图（单位：mm）.



（第1题）

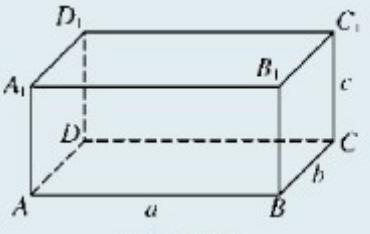


（第2题）

2. 画出图中物体的三视图（单位：mm）.

C组 复习题

1. 如图是一个长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，它的长、宽、高分别为 a,b,c，且 $a>b>c$. 现有一只蜘蛛，在长方体的表面上从点 A 爬到点 C_1. 问蜘蛛应选择怎样的路径可使爬过的路程最短，最短路程是多少？



（第1题）

2. 有 A,B,C 三个水池，它们各有一个出水口分别是圆形（直径为 a）、正方形（边长为 a）、等腰三角形（底边与底边上的高均为 a）. 你能不能只做一个塞子，可塞住上述三个水池中的任一个出水口. 请用萝卜（或红薯、黄泥）做出模型，并画出它的视图.

上海科学技术出版社版权所有

微信公众号：电子课本大全

第26章 概率初步

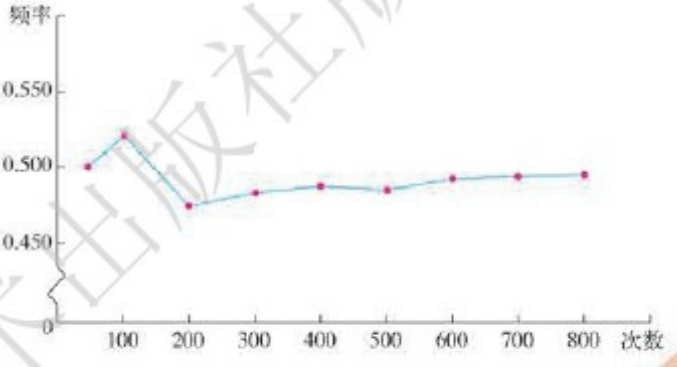
26.1 随机事件

26.2 等可能情形下的概率计算

26.3 用频率估计概率

26.4 综合与实践　概率在遗传学中的应用

抛掷次数	50	100	200	300	400	500	600	700	800
出现正面次数	25	52	95	145	195	243	295	345	396
出现正面的频率	0.500	0.520	0.475	0.483	0.488	0.486	0.492	0.493	0.495



买一注彩票可能中奖，也可能不中奖；抛一枚硬币，可能出现正面，也可能出现反面. 像这样的随机事件无处不在，虽然这些事件发生的可能性事先不确定，但是它们发生的可能性是否有一定的规律呢？

本章我们将学习随机事件的概念，计算等可能情形下随机事件发生的概率以及概率的估计和应用.

上海科学技术出版社版权所有

微信公众号：电子课本大全

26.1 随机事件

观察

如图 26－1，重复抛掷一枚各面上点数分别是 1，2，3，4，5，6 的均匀骰子，记录每次抛掷后骰子向上一面的点数，回答以下问题：

（1）可能出现哪些点数？

（2）出现的点数小于 7 吗？

（3）出现的点数会是 8 吗？

（4）抛掷一次，出现的点数会是 6 吗？



图 26－1

从抛掷结果可以发现：

（1）每次抛掷的结果不一定相同，可能出现的点数共有 6 种，分别是 1，2，3，4，5，6；

（2）出现的点数一定小于 7；

（3）出现的点数一定不是 8；

（4）抛掷一次，出现的点数可能是 6，也可能不是 6，无法预先确定.

在上面的问题中，把抛掷骰子一次看作是一次试验. 在每次试验中，可以事先知道其一定会发生的事件叫做**必然事件**（certain event），一定不会发生的事件叫做**不可能事件**（impossible event）. 根据骰子的构造，在试验前，我们就可以知道“点数小于 7”，且“点数一定不是 8”. 因此，点数小于 7 的事件是必然事件，点数是 8 的事件是不可能事件. 必然事

上海科学技术出版社版权所有

微信公众号：电子课本大全

件和不可能事件统称为**确定性事件**.

抛掷骰子一次,点数是 6 可能发生也可能不发生,不能事先确定,像这样无法事先确定在一次试验中会不会发生的事件叫做**随机事件**(random event). 买一注彩票中大奖、掷一枚均匀硬币时正面向上等都是随机事件.

确定性事件和随机事件统称为**事件**,一般用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示.

例 判断下列事件是必然事件、不可能事件还是随机事件:

(1) 乘公交车到十字路口,遇到红灯;

(2) 把铁块扔到水中,铁块浮起;

(3) 任选 13 个人,至少有两人的出生月份相同;

(4) 从上海到北京的 D 314 次动车明天正点到达北京.

解 (3)是必然事件;(2)是不可能事件;(1)(4)是随机事件.



思考

请你举出一些必然事件、不可能事件和随机事件的实例.

对于随机事件,虽然它们发生的可能性(即机会)事先不确定,但是它们发生的可能性是否有一定的规律呢? 对此人们十分关注. 如在抛硬币的试验中,正面向上和反面向上的机会一样吗? 在掷骰子的试验中,点数是偶数的可能性比点数是 1 的可能性大吗?

抛掷一枚均匀的硬币一次,落地时这枚硬币朝向的结果有两种可能:正面向上或反面向上. 由于硬币是均匀的,出现正面向上或反面向上的可能性是完全相等的(各占一

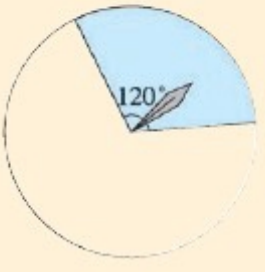
上海科学技术出版社版权所有
微信公众号:电子课本大全

半),所以,我们用$\frac{1}{2}$(或0.5)来表示出现正面向上或反面向上的可能性的大小.

一般地,表示一个随机事件A发生的可能性大小的数,叫做这个事件发生的**概率**(probability),记作$P(A)$. 如抛掷一枚均匀的硬币一次,出现正面向上的概率是$\frac{1}{2}$,用符号表示就是$P(\text{正面})=\frac{1}{2}$.

练习

1. 在下列事件中,哪些是必然事件,哪些是不可能事件,哪些是随机事件?
   (1) 打开电视,正在播放天气预报;
   (2) 同时抛掷10枚均匀的硬币,落地时正面都向上;
   (3) 水在1个标准大气压下、温度为-1℃时结冰;
   (4) 在全是白球的袋中任意摸出1个球,结果是黑球.
2. 比较下列随机事件发生的可能性的大小:
   (1) 抛掷一枚各面上点数分别是1,2,…,6的均匀骰子一次,向上一面的点数是奇数或是偶数;
   (2) 从你班上任选1名学生,选出的是男生或是女生;
   (3) 如图,转动转盘,指针落在蓝色区域内或指针落在白色区域内;
   (4) 从一副扑克牌中任意抽取1张,抽到红桃或抽到方块.



[第2(3)题]

习题26.1

1. 在下列事件中,哪些是必然事件,哪些是不可能事件,哪些是随机事件?
   (1) 明天是晴天;
   (2) 射击一次,子弹中靶;

上海科学技术出版社版权所有

微信公众号:电子课本大全

(3) 在面值为 1 元、2 元、5 元的三张人民币中任取两张，面值之和小于 8 元；

(4) 买一注彩票末位数字是 8.

2. 13 张扑克牌中有 4 张红桃、7 张黑桃和 2 张方块，从中任意抽取 1 张，抽到哪种花色牌的可能性最大，哪种花色牌的可能性最小？

3. 在一个不透明的袋子里装有 3 个红球、4 个绿球和 2 个黄球，这些球除颜色不同外，没有其他任何区别. 现在从袋子里随意摸出 1 个球.

(1) 摸到哪一种颜色球的可能性较大？

(2) 可能摸到黑球吗？摸到黑球的可能性是多少？

上海科学技术出版社版权所有

微信公众号：电子课本大全

26.2 等可能情形下的概率计算

抛掷一枚均匀的硬币一次，向上一面只有正面或反面两种不同的可能结果，而且两种结果出现的可能性相等.

抛掷一枚均匀的骰子一次，向上一面只有1,2,…,6点6种不同的可能结果，而且6种结果出现的可能性相等.

在上述抛掷硬币、抛掷骰子的试验中，有如下两个共同的特点：

(1) 所有可能出现的不同结果是有限个；

(2) 各种不同结果出现的可能性相等.

对于具有上述特点的试验，我们可以通过列举所有可能的结果，具体分析后得出随机事件的概率.

下面来看例子.

例1 袋中有3个球，2红1白，除颜色外，其余如材料、大小、质量等完全相同，随意从中抽出1个球，抽到红球的概率是多少？

解 袋中有3个球，随意从中抽出1个球，虽然红色、白色球的个数不等，但每个球被选中的可能性相等. 抽出的球共有3种结果：红(1)、红(2)、白，这3个结果的发生是“等可能”的. 3个结果中有2个结果使事件A(抽得红球)发生，故抽得红球这个事件的概率为$\frac{2}{3}$，即

$$P(A)=\frac{2}{3}.$$

一般地，如果在一次试验中，有n种可能的结果，并且这些结果发生的可能性相等，其中使事件A发生的结果有m($m\leqslant n$)种，那么事件A发生的概率为

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

上海科学技术出版社版权所有
微信公众号：电子课本大全

在上式中，当 A 是必然事件时，$m = n$，$P(A) = 1$；当 A 是不可能事件时，$m = 0$，$P(A) = 0$. 所以有

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1.$$

一般地，对任何随机事件 A，它的概率 $P(A)$ 满足 $0 < P(A) < 1$. 必然事件的概率为 1，不可能事件的概率为 0.

练习

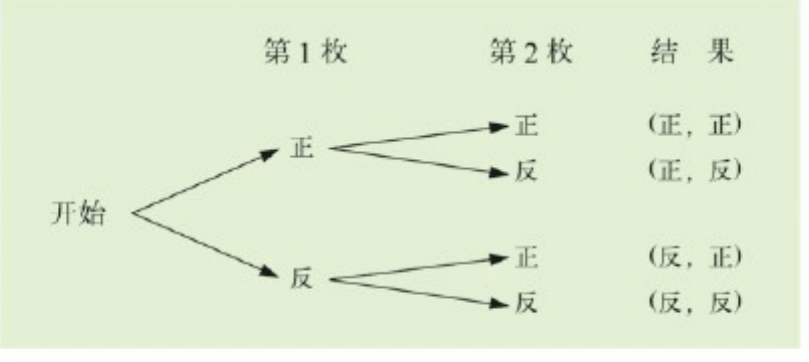
1. 在不透明的袋子里装有 5 个形状与大小完全一样的球，其中 3 个红球，2 个白球，现从中任取 1 个球.
   (1) 摸到红球的概率大还是摸到白球的概率大？
   (2) 若记摸到红球为事件 A，摸到白球为事件 B，则 $P(A)$ 与 $P(B)$ 的值分别是多少，$P(A)$ 与 $P(B)$ 有什么大小关系？
2. 从一副没有大小王的扑克牌（共 52 张）中随机地抽 1 张，问：
   (1) 抽到黑桃 K 的概率；
   (2) 抽到红桃的概率；
   (3) 抽到 Q 的概率.

例 2 同时抛掷 2 枚均匀的硬币一次，求 2 枚硬币都是正面向上的概率.

解 同时抛掷 2 枚硬币一次，可能出现如下 4 种不同的结果：

(正，正)，(正，反)，(反，正)，(反，反).

我们可以用“树状图”来表示上述所有可能出现的结果.



1 枚出现正面、1 枚出现反面的概率是多少？

上海科学技术出版社版权所有
微信公众号：电子课本大全

由于每种结果出现的可能性相等，其中 2 枚硬币都是正面向上的结果只有（正，正）这 1 种，设 2 枚硬币都是正面向上的事件为 A，则事件 A 的概率为

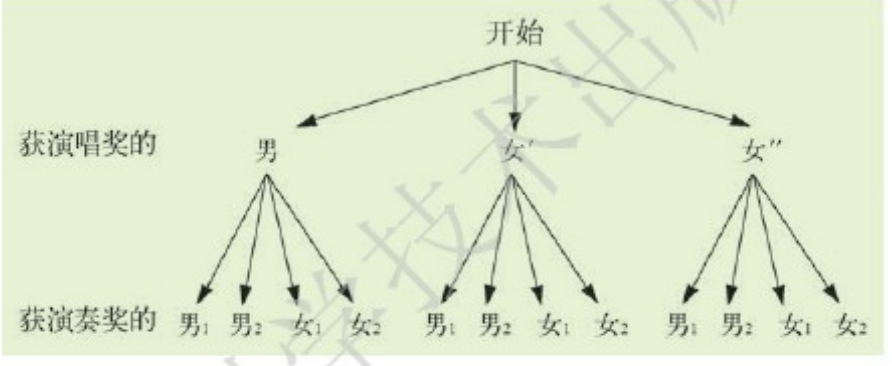
$$P(A) = \frac{1}{4}.$$

上面的解题过程中，我们用“树状图”列出所有可能出现的结果. 图中从左到右每条路径表示一个结果，每个结果发生的可能性相等.

计算等可能情形下概率的关键是确定所有可能性相等的结果总数 n 和求出其中使事件 A 发生的结果总数 m. “树状图”能帮助我们有序地思考，不重复、不遗漏地得出 n 和 m.

例 3 某班有 1 名男生、2 名女生在校文艺演出中获演唱奖，另有 2 名男生、2 名女生获演奏奖. 从获演唱奖和演奏奖的学生中各选 1 名去领奖，求 2 名领奖学生都是女生的概率.

解 设 2 名领奖学生都是女生的事件为 A，两种奖项各选 1 名学生的结果用“树状图”来表示.



由于共有 12 种结果，且每种结果出现的可能性相等，其中 2 名领奖学生都是女生的结果有 4 种，所以事件 A 发生的概率为

$$P(A) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

例 4 同时抛掷 2 枚均匀的骰子一次，骰子各面上的点数分别是 1，2，…，6. 试分别计算如下各随机事件的概率：

（1）抛出的点数之和等于 8；

（2）抛出的点数之和等于 12.

上海科学技术出版社版权所有
微信公众号：电子课本大全

分析：为了解决这个问题，我们首先要弄清楚一共有多少个可能结果. 虽然同时抛掷 2 枚均匀的骰子一次，点数之和可能为 2,3,…,12 中的任何一种，但是它们并不是发生的所有可能结果. 所有可能结果有哪些呢？我们知道：第 1 枚骰子可能掷出 1,2,…,6 中的每一种情况，第 2 枚骰子也可能掷出 1,2,…,6 中的每一种情况，而且无论第 1 枚骰子掷出 1,2,…,6 中的哪一种情况，第 2 枚骰子都可能掷出 1,2,…,6 中的任一种情况. 所以我们用“列表法”列出所有的可能结果如下：

结果 / 第2枚骰子 / 第1枚骰子	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

从这个例子中再次体会弄清楚所有可能结果的重要性.

如同“树状图”一样，“列表法”也能帮助我们有序地思考.

解　从上面表格中可以看出，同时抛掷 2 枚骰子一次，所有可能出现的结果有 36 种. 由于骰子是均匀的，所以每个结果出现的可能性相等.

(1) 抛出的点数之和等于 8 的结果有(2, 6),(3, 5),(4, 4),(5, 3)和(6, 2)这 5 种，所以抛出的点数之和等于 8 这个事件发生的概率为$\frac{5}{36}$.

(2) 抛出的点数之和等于 12 的结果仅有(6, 6)这 1 种，所以抛出的点数之和等于 12 这个事件发生的概率为$\frac{1}{36}$.

微信公众号：电子课本大全

练习

1. 口袋中有3个红球和11个黄球，这两种球除颜色外没有任何区别. 随机从口袋中取1个球，取到红球或黄球的概率分别是多少？
2. 一间宿舍有4张分上下铺的单人床，可安排8名同学住宿. 小明和小兵住同一间宿舍，因为小兵最小，大家一致同意他睡下铺，其余同学通过抽签决定自己的床位，那么小明抽到睡上铺的概率是多少？
3. 将分别标有数字1,2,3的三张卡片混匀后，背面朝上放在桌面上，随机地抽一张作为十位上的数字（不放回），再随机地抽一张作为个位上的数字，能组成哪些两位数？这两位数恰好是“32”的概率是多少？数字之和等于5的概率是多少？
4. 如图，两个圆盘的指针落在每一个数代表的扇形上的可能性相等，求两个圆盘的指针同时落在偶数代表的扇形上的概率.



（第4题）

下面，再来看几个概率应用方面的例子.

例5 “石头、剪刀、布”是民间广为流传的一种游戏，游戏的两人每次做“石头”“剪刀”“布”三种手势中的一种，并约定“石头”胜“剪刀”，“剪刀”胜“布”，“布”胜“石头”，同种手势不分胜负须继续比赛. 现有甲、乙两人做这种游戏.

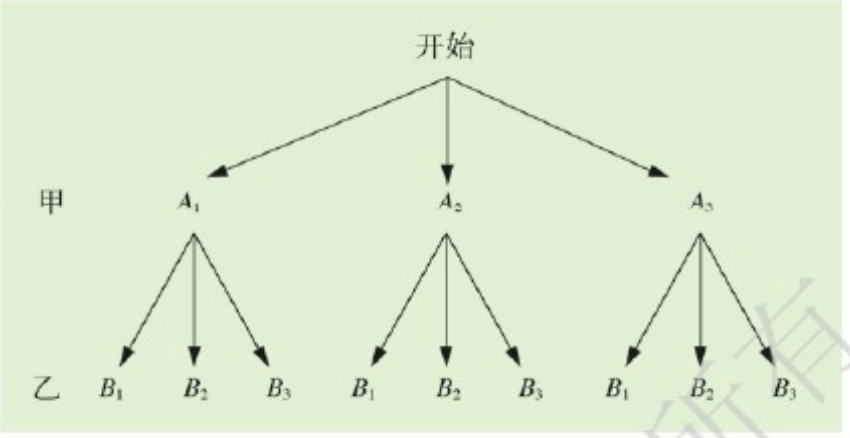
（1）一次游戏中甲获胜、乙获胜的概率各是多少？

（2）这种游戏对于两个人来说公平吗？

解 若分别用A,B表示甲、乙两人，用1,2,3表示石头、剪刀、布，则A_1表示甲出石头、B_2表示乙出剪刀，依次类推. 于是，游戏的所有结果用“树状图”来表示：

上海科学技术出版社版权所有
微信公众号：电子课本大全

你会用“列表法”对游戏的所有结果进行分析吗?



所有结果是 9 种,且出现的可能性相等. 因此,一次游戏时:

(1) 甲获胜的结果有(A_1, B_2),(A_2, B_3),(A_3, B_1)这 3 种,故甲获胜的概率是$\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$. 同理,乙获胜的概率也是$\frac{1}{3}$.

(2) 由(1)可知,这种游戏中,两人获胜的概率都是$\frac{1}{3}$,机会均等,故游戏对于两人来说是公平的.

例 6 某人的密码箱密码由三个数字组成,每个数字都是从 0 ~ 9 中任选的. 如果他忘记了自己设定的密码,求在一次随机试验中他能打开箱子的概率.

解 设在一次随机试验中他能打开箱子的事件为 A.

根据题意,在一次随机试验中选择的号码应是 000 ~ 999 中的任意一个 3 位数,所有可能出现的结果共有 1 000 种,且出现每一种结果的可能性相等. 要能打开箱子,即选择的号码与密码相同的结果只有 1 种,所以

$$P(A)=\frac{1}{1\ 000}.$$

答:在一次随机试验中他能打开箱子的概率为$\frac{1}{1\ 000}$.

例 7 甲、乙两人要去风景区游玩,仅知道每天开往风

上海科学技术出版社版权所有
微信公众号:电子课本大全

景区有 3 辆汽车，并且舒适程度分别为上等、中等、下等 3 种，但不知道怎样区分这些车，也不知道它们会以怎样的顺序开来. 于是他们分别采用了不同的乘车办法：甲乘第 1 辆开来的车. 乙不乘第 1 辆车，并且仔细观察第 2 辆车的情况，如比第 1 辆车好，就乘第 2 辆车；如不比第 1 辆车好，就乘第 3 辆车. 试问甲、乙两人的乘车办法，哪一种更有利于乘上舒适度较好的车？

解 容易知道 3 辆汽车开来的先后顺序有如下 6 种可能情况：

（上中下），（上下中），（中上下），
（中下上），（下上中），（下中上）.

假定 6 种顺序出现的可能性相等，我们来看一看在各种可能的顺序之下，甲、乙两人分别会乘到哪一辆汽车：

顺　序	甲	乙
（上中下）	上	下
（上下中）	上	中
（中上下）	中	上
（中下上）	中	上
（下上中）	下	上
（下中上）	下	中

于是不难看出：

甲乘到上等、中等、下等 3 种汽车的概率都是

$$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

而乙乘到上等汽车的概率是$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$，乘到中等汽车的概率是$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$，乘到下等汽车的概率却只有$\frac{1}{6}$.

答：乙的乘车办法更有利于乘上舒适度较好的车.

上海科学技术出版社版权所有
微信公众号：电子课本大全

练习

1. 举例说明概率在生活中的应用.
2. 密码锁的密码有五位,每位上的数字是0到9中的任一个.在开锁时,某人忘了密码的最后两个数字,他随意拨动最后两位号码,问恰好打开锁的概率是多少?
3. 元旦联欢会上,小明设计了一种翻牌游戏:先在9张大小相同的正方形纸牌上分别写上数字1,2,3,…,9;再在另一面写上奖品的名称,其中4张写的是"铅笔",3张写的是"贺年卡",2张写的是"笔记本".如图,将9张纸牌贴在黑板上.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

(第3题)

(1) 小丽第一个翻牌,请问她获得奖品"笔记本"的概率是多少?

(2) 若小丽翻到的是"贺年卡",则第二个翻牌人小勇翻到"铅笔"的概率是多少?

习题26.2

1. 假设你们学校有2 500名学生,其中1 327名是女生.校报记者随机选1名同学进行采访.选中女生的概率是不是大一些,为什么?选中男生的概率是多少?
2. 10月份家电商场售出的彩电中,国外品牌与国内品牌的比例是5:11,预计11月份将售出200台彩电.假设顾客选择品牌是随机的,估计有多少台是国内品牌?如果有一位顾客来购买彩电,你认为他购买国外品牌的概率是多少?
3. 如图,有两个可以自由转动的均匀转盘A,B.转盘A被3等分,分别标上1,2,3三个数字;转盘B被4等分,分别标上4,5,6,7四个数字.有人为甲、乙两人设计了一种游戏,其规则如下:



转盘A



转盘B

(第3题)

上海科学技术出版社版权所有
微信公众号:电子课本大全

同时自由转动转盘 A,B,转盘停止后,指针各指向一个数字所在的扇形(如果指针恰好指在分格线上,那么重转一次,直到指针指向某一数字为止). 将两指针所指的两个扇形中的数相乘,如果得到的积是偶数,那么甲胜;如果得到的积是奇数,那么乙胜.

你认为这样的规则是否公平? 请说明理由;如果不公平,请你设计一个公平的规则,并说明理由.

上海科学技术出版社版权所有

微信公众号: 电子课本大全

26.3 用频率估计概率

在试验中，当所有可能出现的不同结果不是有限个，或各种不同结果出现的可能性不相等时，我们就要通过大量重复的试验去探究不同结果出现可能性的大小，并用随机事件发生的频率去估计它的概率.

下面先观察一个例子.

观察

一位同学在做“抛硬币”的试验中，将获得的数据绘制成下表及折线统计图(图 26－2)，其中：

$$\text{出现正面的频率}=\frac{\text{出现正面次数}}{\text{抛掷次数}}.$$

抛掷次数	50	100	200	300	400	500	600	700	800
出现正面次数	25	52	95	145	195	243	295	345	396
出现正面的频率	0.500	0.520	0.475	0.483	0.488	0.486	0.492	0.493	0.495

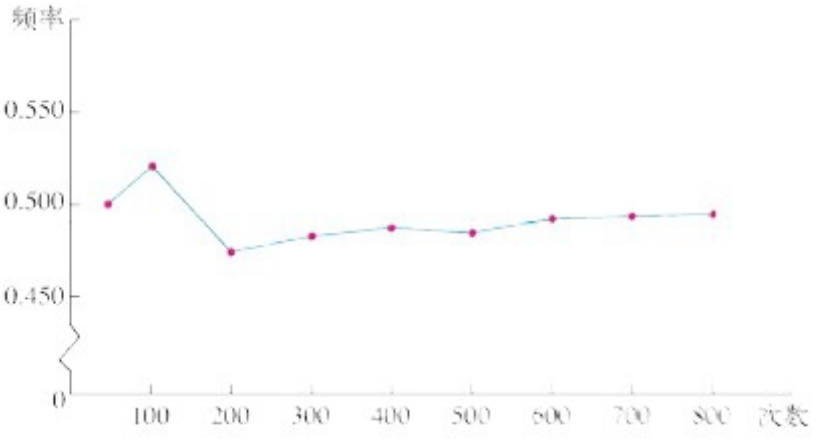


图 26－2

上海科学技术出版社版权所有
微信公众号：电子课本大全

观察图 26－2，当抛掷次数很多以后，出现正面的频率是否比较稳定？

对于上面这样的抛硬币试验，历史上许多数学家都曾做过，结果如下表：

试　验　者	抛掷次数	出现正面次数	出现正面的频率
Buffon（布丰）	4 040	2 048	0.506 9
De. Morgan（德·摩根）	4 092	2 048	0.500 5
Feller（费勒）	10 000	4 979	0.497 9
Pearson（皮尔逊）	12 000	6 019	0.501 6
Pearson（皮尔逊）	24 000	12 012	0.500 5

从上面试验中我们可以发现，在重复抛掷一枚硬币时，“出现正面”和“出现反面”的频率都在 0.5 附近波动. 随着抛掷次数的增加，频率在 0.5 附近波动的幅度会越来越小，呈现出一定的稳定性，“出现正面”和“出现反面”的频率都逐渐稳定到常数 0.5.

这样，我们用随机事件发生的频率逐渐稳定到的常数来刻画它发生可能性的大小，0.5 就作为多次抛掷硬币后出现正面（或反面）这个随机事件发生的概率.

下面再看两个例子.



观察

1. 某农科所通过抽样试验来估计一大批种子（总体）的发芽率，为此，从中抽取 10 批，分别做发芽试验. 记录下每批发芽粒数，并算出发芽的频率（发芽粒数与每批试验粒数之比），结果如下表：

上海科学技术出版社版权所有
微信公众号：电子课本大全

每批试验粒数 n	2	5	10	70	130	310	700	1 500	2 000	3 000
发芽粒数 m	2	4	9	60	116	282	639	1 339	1 806	2 715
发芽的频率 $\frac{m}{n}$	1	0.800	0.900	0.857	0.892	0.910	0.913	0.893	0.903	0.905

从上表中你能发现什么？

由上面试验所得数据可以看出：当发芽试验样本容量增大时，发芽的频率逐渐稳定到常数 0.9.

2. 某乒乓球生产厂，从最近生产的一大批乒乓球中，抽取 6 批进行质量检测，结果如下表：

每批抽取球数 n	50	100	200	500	1 000	2 000
优等品数 m	45	92	194	470	954	1 902
优等品的频率 $\frac{m}{n}$	0.900	0.920	0.970	0.940	0.954	0.951

从上表中你能发现什么？

由上面检测所得数据可以看出：当质量检测样本容量增大时，优等品的频率逐渐稳定到常数 0.95.

种子不发芽的概率是多少？

乒乓球非优等品的概率是多少？

上面两个例子说明，一般随机事件具有一个极为重要的特性——频率的稳定性，即在大次数重复试验中，随机事件发生的频率总是稳定到一个常数. 我们就用频率所稳定到的这个常数来衡量该随机事件发生可能性的大小. 于是，就认为第 1 个例子中种子发芽的概率为 0.9，第 2 个例子中乒乓球优等品的概率为 0.95.

一般地，在大量重复试验下，随机事件 A 发生的频率 $\frac{m}{n}$（这里 n 是总试验次数，它必须相当大，m 是在 n 次试验中随机事件 A 发生的次数）会稳定到某个常数 p. 于是，我们用 p 这个常数表示随机事件 A 发生的概率，即

微信公众号：电子课本大全

$$P(A) = p.$$

这样，求一个随机事件概率的基本方法可以是：通过大量的重复试验，用这个随机事件发生的频率作为它的概率的估计值.



数学活动

投 针 实 验

18 世纪，法国博物学家布丰(Buffon)，在研究随机事件规律时，设计了一个投针实验："在平面上画一组间距为 h 的平行线，将一根长度为 $a(a<h)$ 的针任意地投掷在这个平面上，求这根针与平行线中任一条相交的概率".

布丰证明了这个概率为

$$P = \frac{2a}{\pi h}.$$

这个结果写进了他的著作《或然性的算术试验》中.

其后，不少学者都先后做过布丰的投针实验，并得出 π 的一些估计值. 下表记录了他们的实验结果(把平行线间距 h 折算为 1).

实　验　者	年份	投掷次数	相交次数	π 的估计值	针长 a
Wolf(沃尔夫)	1850	5 000	2 532	3.159 6	0.8
Smith(史密斯)	1855	3 204	1 218.5	3.155 4	0.6
De. Morgan(德·摩根)	1860	600	382.5	3.137	1.0
Fox(福克斯)	1884	1 030	489	3.159 5	0.75
Reina(赖纳)	1925	2 520	859	3.179 5	0.541 9

全班同学可根据同一规格(在纸上绘制同一间距的平行线组、一把等长的针)分组进行布丰的投针实验，汇总各组数据，求出相应的 π 值.

上海科学技术出版社版权所有

微信公众号：电子课本大全

练习

1. 判断下列说法是否正确，并说明理由.

(1) 在 n 次随机试验中，事件 A 出现 m 次，则事件 A 发生的频率 $\frac{m}{n}$ 就是事件 A 的概率；

(2) 设一大批灯泡的次品率为 0.01，那么从中随机抽取 1 000 只灯泡，一定有 10 只次品.

2. 多次投掷一枚均匀的骰子，出现向上一面为 5 点的概率是 $\frac{1}{6}$. 小军说，这表示当投掷的次数足够多时，出现 5 点的次数就很接近投掷总数的 $\frac{1}{6}$. 他的说法正确吗，为什么？

3. 某射手在同一条件下进行多次射击，结果如下表：

射击次数 n	10	20	50	100	200	500
击中靶心次数 m	8	19	44	92	178	455
击中靶心的频率 $\frac{m}{n}$						

(1) 计算表中“击中靶心的频率”；

(2) 这个射手射击 1 次，击中靶心的概率约是多少？

4. 一家商店对进店顾客进行为期一周的调查登记，得到结果如下表：

性　别	购　买	不　购　买
男　性	50	150
女　性	60	180

根据这个结果求：

(1) 1 名顾客进入该店后购买东西的概率是多少；

(2) 哪一种性别的顾客在该店买东西的可能性较大.

5. 用实验的方法估计投掷一枚均匀的骰子 2 次，2 次都出现点数 6 的概率.

上海科学技术出版社版权所有

微信公众号：电子课本大全

习题 26.3

1. 有人说“买彩票中奖的可能性是2‰，买1 000注彩票最多只能有2注中奖”，这种说法对吗，为什么？

2. “若一个事件可能发生的结果共有 n 种，则每一种结果发生的可能性是$\frac{1}{n}$.”这样说对吗？试举一例说明.

3. 在水产养殖场进行一种鱼的人工孵化，10 000个鱼卵能孵化出8 500尾鱼苗，求下列各题：
   （1）这种鱼卵孵化的概率（孵化率）；
   （2）30 000个鱼卵大概能孵化出多少尾鱼苗；
   （3）要孵化出5 000尾鱼苗，大概要准备多少个鱼卵？

4. 如图，用实验的方法估计抛掷一枚瓶盖1次，盖面朝上的概率.



盖面朝上　　盖面朝下

（第4题）

数学园地

做“石头、剪子、布”的游戏.

（1）在1次游戏中，出现平局的概率是多少？

（2）和同学合作做这个游戏10次，记录游戏次数与平局的次数；

（3）统计10组同学的游戏数据，看看平均多少次游戏会出现1次平局；

（4）有同学说：“如果出现平局的概率是$\frac{1}{3}$，那么每3次游戏中就有1次是平局.”你认为对吗？说说你的理由.

上海科学技术出版社版权所有
微信公众号：电子课本大全

26.4 综合与实践

概率在遗传学中的应用

所谓性状是指生物的形态、结构和生理等特征.

对遗传现象人们早就认识到了,那么遗传又是遵循怎样的规律呢?奥地利人孟德尔(G. J. Mendel,1822—1884)通过认真观察遗传现象、设计实验、收集数据、科学分析,成为第一个总结出遗传规律的遗传学家.他选择豌豆作杂交试验,并注意到不同品种的豌豆具有区别明显的性状(豌豆的花色、种子的形状等都是性状).

如图 26－3,孟德尔用纯种黄色子叶豌豆与纯种绿色子叶豌豆进行杂交,产生的子一代子叶全部是黄色的,没有绿色的.他将子一代表现出来的性状称为显性性状,没有表现出来的性状称为隐性性状,即子叶黄色为显性性状,子叶绿色为隐性性状,黄色显性性状掩盖了绿色隐性性状.

孟德尔又让子一代进行自交,结果在子二代中除了有黄色子叶,还有绿色子叶,两者数量上的比例接近 3∶1.



图 26－3

为什么在子二代中隐性性状又出现了呢?孟德尔认为,生物的遗传性状是由成对基因(遗传因子)决定的,其中控

上海科学技术出版社版权所有
微信公众号:电子课本大全

制显性性状(黄色子叶)的为显性基因(用 A 表示);控制隐性性状(绿色子叶)的为隐性基因(用 a 表示).

纯种黄色子叶豌豆和纯种绿色子叶豌豆分别含有成对基因 AA 和 aa,它们杂交产生的子一代的成对基因分别来自父本和母本的各一个基因,因而只能是 Aa,表现为全是黄色子叶.

当子一代自交产生子二代时,来自父本和母本的各一个基因有 AA,Aa,aA,aa 四种组合. 由于 AA,Aa,aA 均表现为黄色,而 aa 表现为绿色,所以黄色与绿色的数量比例接近 3∶1,也就是说,子二代中子叶为黄色和子叶为绿色的概率分别是$\frac{3}{4}$和$\frac{1}{4}$,图 26-4 显示了这一过程.

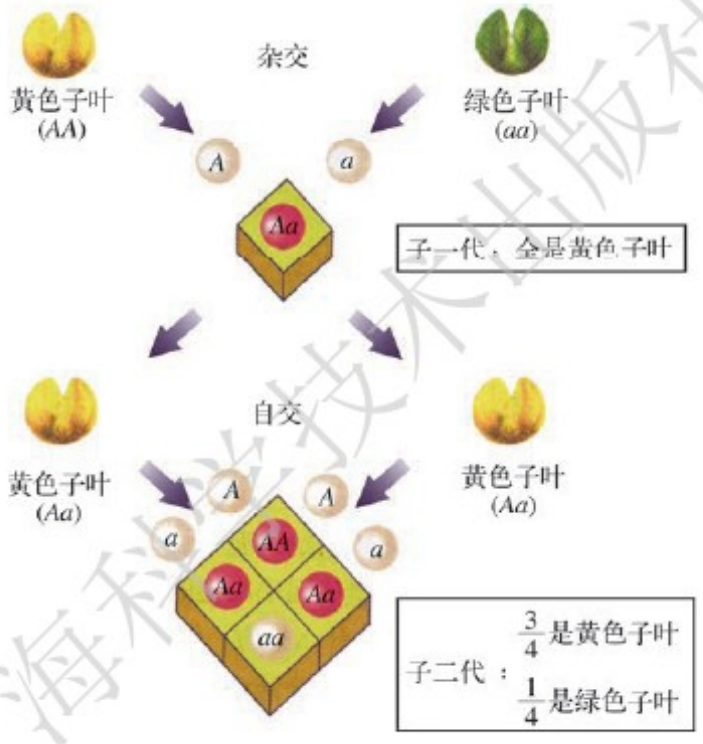


图 26-4

人类的遗传病是从上一代(父母)传递给下一代(孩子)而发生的疾病,例如白化病、红绿色盲和高度近视等. 了解遗传病的传代规律及出现概率,防止遗传病患儿的出生,是全社会都需要共同关注的问题. 下面用孟德尔发现的遗传规律

上海科学技术出版社版权所有
微信公众号：电子课本大全

来探讨白化病的遗传情况.

问题 白化病是一种隐性性状,如果 A 是正常基因、a 是白化病基因,那么携带成对基因 Aa 的个体的皮肤、头发和眼球的颜色是正常的,而携带成对基因 aa 的个体将患有白化病.

(1) 设母亲和父亲都携带成对基因 Aa,求他们有正常孩子的概率;

(2) 设母亲和父亲分别携带成对基因 AA 和 Aa,求他们有正常孩子的概率和孩子患有白化病的概率;

(3) 设母亲和父亲分别携带成对基因 aa 和 Aa,求他们有正常孩子的概率和孩子患有白化病的概率.



阅读与思考

几何概率

这里介绍另外一种基于等可能假设的概率模型,这种概率模型的基本原理是:设想每个结果是一个点,所有结果的点组成一个区域 G,而组成事件 A 的结果是 G 中的部分区域 g,G,g 可以是直线上的线段,也可以是平面或空间的区域.因此,这种概率可以表示为两个线段的长度之比,或两个平面区域的面积之比,或两个空间区域的体积之比.

例 1 某商厦开展"幸运一刻钟"有奖促销活动,办法如下:在营业时间 9:00 ~ 21:00 内随机产生一个 15 min 的时段(如 10:36 ~ 10:51),该时段内在该商厦购物的顾客可得到与购物款等额的奖券.小明妈妈在商厦购买了一双价格为 80 元的运动鞋,那么她中奖的概率是多少呢?

商厦一天的营业时间是 12 h,计 720 min,那么它的时间长度为 720 min,可用一条线段 AB 表示,如图 26 - 5.

上海科学技术出版社版权所有
微信公众号:电子课本大全



图 26-5

设“幸运一刻钟”的起始时刻为点 C，终止时刻为点 D，则线段 CD 的时间长度为 15 min. 因此，小明妈妈中奖的概率应为

$$\frac{CD\text{ 的长}}{AB\text{ 的长}}=\frac{15}{720}=\frac{1}{48}.$$

例 2 在图 26－6 的正方形中有一内切圆，随机撒一把芝麻，假设每一粒芝麻落在正方形内的每一个点的可能性都是相等的，计算落在圆中的芝麻数与落在正方形中的芝麻数之比，并以此估计圆周率的值.

解 随机撒一把芝麻，每粒芝麻落在正方形内任何一点是等可能的，落在每个区域的芝麻数与这个区域的面积近似成正比，假设正方形的边长为 $2a$，则

$$\frac{\text{落在圆中的芝麻数}}{\text{落在正方形中的芝麻数}}\approx\frac{\text{圆的面积}}{\text{正方形的面积}}$$

$$=\frac{\pi a^2}{2a\times 2a}$$

$$=\frac{\pi}{4}.$$

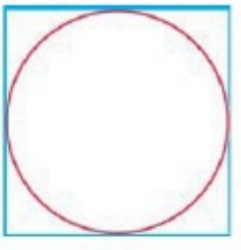


图 26-6

如果数出落在每个区域的芝麻数，由上式就能得到 π 的近似值. 比如，向图 26－6 的正方形中随机撒 400 粒芝麻，如果落在圆中的芝麻数是 314，那么

$$\pi\approx\frac{\text{落在圆中的芝麻数}}{\text{落在正方形中的芝麻数}}\times 4$$

$$=\frac{314}{400}\times 4=3.14.$$

通过多次试验可以看出，随着每次试验所撒的芝麻数的增加，圆周率 π 的近似值精度就越高.

我们也可以用计算机来模拟上述过程，计算 π 的近似值.

利用几何概率，并通过计算机模拟方法，还可以计算某些不规则图形（图 26－7 中区域 A）的近似面积：

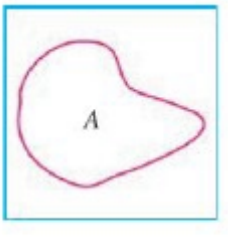


图 26-7

上海科学技术出版社版权所有
微信公众号：电子课本大全

区域 A 的面积 $\approx \dfrac{\text{落在区域 } A \text{ 中的芝麻数}}{\text{落在正方形中的芝麻数}} \times$ 正方形的面积.

数学史话

概率论的产生与发展

概率论作为一门学科产生的原因虽然是多方面的,但主要是由于当时保险行业的产生与发展以及赌博的盛行.

赌博的盛行,为研究概率问题提供了一个很好的模型(如掷骰子的等可能性较为明显,又可做重复试验).16 世纪前后,相当多的数学家对赌博中的数学问题有着浓厚的兴趣.

帕斯卡是法国著名数学家,帕斯卡的朋友梅累曾向帕斯卡提出这样一个问题:甲、乙两人相约赌若干局,谁先赢 s 局谁就是胜者,就可得全部赌金.现在甲赢 $a(a<s)$ 局,乙赢 $b(b<s)$ 局,赌博中断,问两人应按怎样的比例分配赌金?帕斯卡接到这个问题后,转告了著名数学家费马,此后,他们两人就这个问题开始了频繁的通信研究,在他们的来往信件中,有关于这个问题的不同解法,被认为是概率论最早的几篇论文.1655 年,荷兰数学家惠更斯来到巴黎,也潜心研究了这个问题,并于 1657 年出版了《论赌博中的计算》一书,这本书的出版是概率论产生的标志之一.

18 世纪,有更多的数学家投身概率论的研究.到了 19 世纪,概率论朝着完整的理论体系和更广泛的应用方向发展.在诸多数学家研究的基础上,1933 年苏联数学家柯尔莫哥洛夫,给出了概率论的公理体系,从此概率论成为一完整、严谨的数学分支.

概率论传入我国是在 1896 年,在英国传教士傅兰雅的协助下,晚清数学家华蘅芳(1833—1902)译出了名为《决疑数学》一书.后来,"probability"又被译为"或然率""可能率""机率"等.1935 年,《数学词典》定名为"几率"或"概率".1964 年,《数学名词补编》开始确定用"概率".

我国对概率论的研究是从 20 世纪初开始的.目前,在概率论研究方面,我国的学者也取得了一系列成果.

上海科学技术出版社版权所有
微信公众号:电子课本大全

小结·评价

一、内容整理



二、主要知识回顾

1. 随机事件、不可能事件和必然事件.

2. 表示一个随机事件 A 发生的可能性大小的数，叫做这个事件发生的概率，记作 $P(A)$. 必然事件的概率为 1，不可能事件的概率为 0.

3. 在等可能情形下求随机事件 A 发生的概率时，通常利用“树状图”或“列表法”列出所有可能性相等的结果以及使事件 A 发生的结果，这是解决问题的关键.

4. 一般在大量重复试验中，用随机事件发生的频率作为该随机事件概率的估计值.

三、自评与互评

1. 你能举出生活中的随机事件、必然事件和不可能事件吗？

2. 你和同学进行乒乓球比赛时，采用什么方法决定谁先发球呢？这个方法对双方公平吗？

3. 编一个等可能情形下求概率的问题.

4. 举出一个日常生活中的例子：在大量重复试验后用随机事件发生的频率来估计概率.

上海科学技术出版社版权所有

微信公众号：电子课本大全

A组 复习题

1. 一个口袋中有 6 个完全一样的球，球上分别标有 1，2，3，4，5，6. 小明从口袋中摸出 1 个球，求：
   （1）摸到球的号码是奇数的概率；
   （2）摸到球的号码大于 3 的概率；
   （3）摸到球的号码不大于 6 的概率.
2. 小明有三件 T 恤衫，颜色分别为红色、白色、黄色；有两条长裤，颜色分别为蓝色、黑色. 现从中随机选一件 T 恤衫、一条长裤，问恰好是红 T 恤、黑裤子的概率是多少？
3. 同时抛掷 2 枚均匀的骰子一次（骰子各面上的点数分别是 1，2，…，6），所得点数之和有多少种可能？概率最大的点数之和为多少？
4. 某商场举行有奖销售，发行奖券 5 万张，其中设一等奖 2 个、二等奖 8 个、三等奖 40 个、四等奖 200 个、五等奖 1 000 个. 有一位顾客购物后得到一张奖券，问这位顾客：
   （1）获得一等奖的概率是多少？
   （2）获奖的概率是多少？
5. 从 HAPPY 这个单词中任选一个字母，求选到字母 P 的概率.
6. 在第 1，3，5，6 路汽车都要停靠的一个站上，一位乘客等候 1 路或 3 路汽车. 假定各路汽车首先到站的可能性相等，求首先到站的正好是该乘客要乘的汽车的概率.
7. 同时抛掷 3 枚均匀的硬币一次，求：
   （1）出现 3 个正面的概率；
   （2）出现 2 个正面、1 个反面的概率.
8. 把 1，4，3 三个数字随机排成一个 3 位数，求排出的数是偶数的概率.

B组 复习题

1. 某种彩票的号码是 0 000 000 ~ 9 999 999 中的任意一个 7 位数，摇奖得出一个 7 位数为中奖号. 若一注彩票上的 7 位数号码与其完全相同且排列一致，即中特等奖；

上海科学技术出版社版权所有
微信公众号：电子课本大全

若一注彩票上仅有连续 6 位数号码与中奖号对应位置的连续 6 位数号码相同(如中奖号为 4 364 166,彩票上的号码为 436416X 或 X364166),即中一等奖. 问:

(1) 买 1 注彩票中特等奖的概率是多少?

(2) 买 1 注彩票中一等奖的概率是多少?

2. (1) 连续抛掷一枚均匀的骰子 3 次,将掷得的点数依次作为百位、十位和个位上的数字组成一个 3 位数,求得到个位上数字为 5 的 3 位数的概率.

(2) 如果将抛掷骰子换成摸球,即在不透明的袋中放入标有数字 1,2,3,4,5,6 的 6 个形状与大小完全相同的小球,依次从袋中摸出 3 个球(每次摸出 1 个球,且摸出的球不再放回袋中),将球上所标的数字分别作为百位、十位和个位上的数字组成一个 3 位数,那么得到个位上数字为 5 的 3 位数的概率与(1)的结果相同吗?

3. 从长为 2 cm,3 cm,4 cm,5 cm 的 4 条线段中随机取出 3 条线段,问随机取出的 3 条线段能围成一个三角形的概率是多少? 能围成直角三角形的概率又是多少?

C组 复习题

在对病毒流行规律的研究中,人们需要建立数学模型. 如某个群体中一共有 4 个人先后感染了病毒,其中只有 1 个人去过疫区,从而认定他是这个群体的感染源头,第 2 个发病的人一定是被他传染的;由于不清楚传染机制,于是假定第 3 个发病的人"等可能"地被第 1 或第 2 个发病人所传染;同样,第 4 个发病人"等可能"地被前 3 个发病人中任一个所传染. 问这 4 人中有哪些可能的传染途径? 其中依次(即①—②—③—④)传染的概率有多大?

微信公众号: 电子课本大全

附录　部分中英文词汇索引

中　文	英　文	页　码
旋转	rotation	2
圆	circle	12
圆心	center of a circle	12
半径	radius	12
圆弧	arc	13
弦	chord	13
直径	diameter	13
圆心角	central angle	18
三角形的外接圆	circumcircle of triangle	22
三角形的外心	circumcenter of triangle	22
圆的内接三角形	inscribed triangle of circle	22
圆周角	angle in a circular segment	27
割线	secant line	33
切线	tangent line	34
切点	point of tangency	34
三角形的内切圆	inscribed circle of triangle	43
三角形的内心	incenter of triangle	43
圆的外切三角形	circumscribed triangle of circle	43
平行投影	parallel projection	73
中心投影	center projection	74
视图	view	78
必然事件	certain event	91
不可能事件	impossible event	91
随机事件	random event	92
概率	probability	93

上海科学技术出版社版权所有

微信公众号：电子课本大全

后记

1999 年，我们根据《九年义务教育全日制初级中学数学教学大纲（试用修订版）》，编写了一套华东版初中数学教材，经三年实验后，于 2002 年报教育部经全国中小学教材审定委员会审查通过.

2001 年，国家颁布了《基础教育课程改革纲要（试行）》及《全日制义务教育数学课程标准（实验稿）》，正式启动了新一轮中小学课程、教材改革. 本套教科书就是根据课程标准，在吸取了华东版教材实验过程中的经验后重新编写的，并于 2004 年经全国中小学教材审定委员会初审通过. 现教育部决定全面启动义务教育课程标准实验教材的修订工作，我们将切实把《义务教育数学课程标准（2011 年版）》的要求落实到新修订的教材中，使教材的质量进一步得到提升，特色更加鲜明.

本套教材在送审和实验过程中，得到了许多专家、学者、教研人员与广大师生的关爱，特别是人民教育出版社的张孝达先生与陈宏伯先生直接参与教材的整体设计和章节审稿，他们以实际行动给予我们很大的支持与鼓舞，我们衷心地感谢他们.

为了做好这次的修订工作，我们调整并充实了编写队伍，本套教科书编写组主要人员有：

吴之季　苏　淳　杜先能　徐子华　郭要红　胡　涛　陈先荣　王南林　胡茂侠　邱广东

本册主要编写人员：

洪新华　刘义杰　金　超　王　峰　贾　斌　程立虎　任大益　李启梅　苗兴敏　薛　凌　韦鹏飞

此外，参与本册修改工作的还有：

刘正会　徐宁宁　朱传良　查　刚　司武侠　周　米　张满亮　高正才　陈刘送　高成林　李兆坤

教材建设是一项长期任务，需要通过实验、修改，反复锤炼. 这不仅需要全体编写人员的努力，还要有广大师生的积极支持与参与，恳请使用本套教材的师生批评指正.

新时代数学编写组

2014 年 10 月

上海科学技术出版社版权所有

微信公众号：电子课本大全