教育部审定
2013

义务教育教科书

数学

SHU XUE

九年级 下册



江苏凤凰科学技术出版社

微信公众号：电子课本大全

义务教育教科书

数学

SHU XUE

九年级 下册

杨裕前　董林伟　主编

江苏凤凰科学技术出版社

微信公众号：电子课本大全

图书在版编目(CIP)数据

数学.九年级.下册/杨裕前,董林伟主编.—南京:江苏凤凰科学技术出版社,2014.12(2019.10 重印)

ISBN 978-7-5537-0472-2

Ⅰ.①数… Ⅱ.①杨… ②董… Ⅲ.①中学数学课—初中—教学参考资料 Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 256432 号

义务教育教科书

数学 九年级下册

主　　编　杨裕前　董林伟

责任编辑　许礼光　闵正年　沈　琼

责任校对　郝慧华

微信公众号：电子课本大全



致同学

亲爱的伙伴：

这套数学课本与你同行了3个春秋，那一串串走过的脚印是你成长的记录．

本册课本将继续引导你实践、操作、探索、交流，并通过数学思考解决一些实际问题．在这样的过程中你将学到更多的数学知识，变得更加聪明，更加富有创造性．

某种粮大户今年多承租多少亩水稻，才能使总收益最大？一艘满载抗洪救灾物资的船只，能否通过抛物线形的桥洞……学习了“二次函数”的概念、图像和性质后，你就能解决这样的实际问题．

“图形的相似”将引导你经历从“全等”到“相似”的探索过程，感悟特殊与一般的关系，并进而探索相似图形的性质，判定两个三角形相似的方法，以及它们的一些应用．

当你爬楼梯的时候，你会感到楼梯很陡或比较平缓；当你乘坐的汽车行驶在盘山公路上时，你也许会想，山路陡不陡？“锐角三角函数”能帮助你做出这种判断；树有多高，河有多宽？当你乘坐摩天轮时，你也许想知道自己升高了多少……“锐角三角函数”会给你解决这些问题的方法．

你校全体学生的视力情况如何？影响视力的因素是什么？对于保护视力你能提出哪些合理的建议？某地区的空气质量如何？怎样才能更好地保护环境……设计调查方案，选取调查样本，收集、整理、描述、分析调查所得到的数据，就能对这样的问题做出合理的判断和预测．“统计和概率的简单应用”将引导你经历统计的全过程，体会统计对决策的作用．

你是否认为，抽签时先抽的人沾光，后抽的人吃亏？先抽与后抽中签的可能性一样吗？保险公司怎样才能不亏本？怎样估计一条河流中某种鱼的数量……“统计和概率的简单应用”将引导你研究、解决这样的问题．

你曾是“小树”，现在“长大”了．当你学完这册课本的时候，将带着成功的体验和数学给你的知识和智慧，充满自信地走向新的学习生活．

微信公众号：电子课本大全

微信公众号：电子课本大全

目　录



第 5 章　二次函数

5.1 二次函数 …… 6

5.2 二次函数的图像和性质 …… 9

5.3 用待定系数法确定二次函数表达式 …… 21

5.4 二次函数与一元二次方程 …… 24

5.5 用二次函数解决问题 …… 29

数学活动　校园景观设计 …… 34

小结与思考 …… 34

复习题 …… 35



第 6 章　图形的相似

6.1 图上距离与实际距离 …… 40

6.2 黄金分割 …… 44

6.3 相似图形 …… 48

6.4 探索三角形相似的条件 …… 53

6.5 相似三角形的性质 …… 69

6.6 图形的位似 …… 76

6.7 用相似三角形解决问题 …… 81

数学活动　测量两地间的距离 …… 87

小结与思考 …… 88

复习题 …… 88

微信公众号：电子课本大全



第 7 章　锐角三角函数

7.1 正切 …… 96

7.2 正弦、余弦 …… 100

7.3 特殊角的三角函数 …… 105

7.4 由三角函数值求锐角 …… 107

7.5 解直角三角形 …… 109

7.6 用锐角三角函数解决问题 …… 113

数学活动　测量建筑物的高度 …… 118

小结与思考 …… 119

复习题 …… 119



第 8 章　统计和概率的简单应用

8.1 中学生的视力情况调查 …… 124

8.2 货比三家 …… 130

8.3 统计分析帮你做预测 …… 134

8.4 抽签方法合理吗 …… 137

8.5 概率帮你做估计 …… 139

8.6 收取多少保险费才合理 …… 143

数学活动　香烟浸出液对种子发芽的影响 …… 146

小结与思考 …… 146

复习题 …… 147

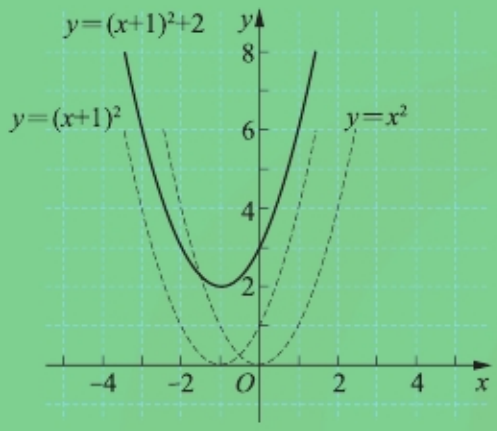
微信公众号：电子课本大全

课题学习　制作“动画片” …… 152

数学活动评价表 …… 154

微信公众号：电子课本大全

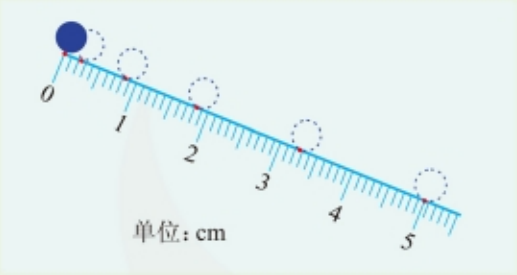
第5章　二次函数



一次函数、反比例函数、二次函数……
揭示了变量之间的关系；
直线、双曲线、抛物线……
直观地显示了函数的性质．



微信公众号：电子课本大全



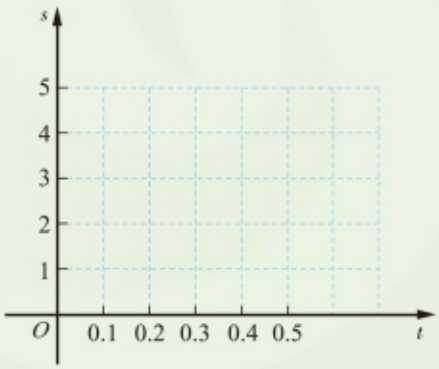
图中分别记录了小球滚落 0.1 s、0.2 s、0.3 s、0.4 s、0.5 s 时的位置．

(1) 观察图中小球各时刻的位置与起点的距离，并将结果填入下表：

时刻 t/s	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
距离 s/cm					

(2) 以表中 t 的值为点的横坐标、对应的 s 的值为点的纵坐标，在平面直角坐标系中描出各点，并把它们用平滑曲线顺次连接．

(3) 在小球滚落的过程中，距离 s 是时刻 t 的一次函数吗?



本章将学习二次函数的概念，二次函数的图像、性质及二次函数的应用．

微信公众号：电子课本大全

5.1　二次函数

水滴激起的波纹不断向外扩展，所形成的圆的面积 S 与半径 r 之间的函数关系为 $S = \pi r^2$.



我们曾讨论过“用长 16 m 的篱笆围成长方形的生物园饲养小兔，怎样围可使小兔的活动范围较大”的问题 .



设长方形的长为 x m，则宽为 $(8-x)$ m，面积 $y(\text{m}^2)$ 与长 $x(\text{m})$ 之间的函数关系为 $y = x(8-x) = -x^2 + 8x$.

一面长与宽之比为 2∶1 的矩形镜子，四周镶有边框 . 已知镜面的价格是每平方米 120 元，边框的价格是每米 30 元，加工费为45 元 .

微信公众号：电子课本大全

设镜面宽为 x m，则长为 $2x$ m，镜面面积为 $2x^2$ m^2，镜面费用为 $120\times 2x^2$ 元，即 $240x^2$ 元；边框费用为 $30(2x+x+2x+x)$ 元，即 $180x$ 元．总费用 y(元)与镜面宽 x(m)之间的函数关系为：



$$y = 240x^2 + 180x + 45.$$



函数表达式 $S=\pi r^2$、$y=-x^2+8x$ 和 $y=240x^2+180x+45$ 有什么共同特征？

一般地，形如 $y=ax^2+bx+c$(a、b、c 是常数，且 $a\neq 0$)的函数叫做**二次函数**(quadratic function)，其中 x 是自变量，y 是 x 的函数．

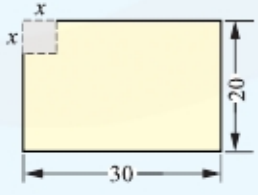
通常，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的自变量 x 可以是任意实数．

如果二次函数的自变量表示实际问题中的某个数量，那么它的取值范围受到实际意义的限制．例如，在以上实际问题中，二次函数 $S=\pi r^2$、$y=-x^2+8x$ 和 $y=240x^2+180x+45$ 的自变量的取值范围分别是 $r>0$、$0<x<8$ 和 $x>0$.

生活中有许多类似的实例，你还能举出一些例子吗？



1. 写出正方体的表面积 S(cm^2)与正方体的棱长 a(cm)之间的函数表达式．
2. 写出高为 14 cm 的圆柱的体积 V(cm^3)与底面半径 r(cm)之间的函数表达式．
3. 如图，矩形纸片长为 30 cm、宽为 20 cm，剪去一个边长为 x cm 的正方形，写出剩余部分的面积 S(cm^2)与 x(cm)之间的函数表达式．



(第 3 题)

微信公众号：电子课本大全

5.1 习题

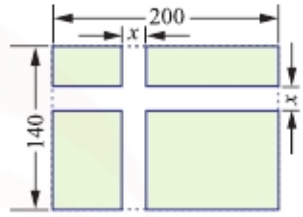
1. 某矩形的长是宽的 1.6 倍，写出这个矩形的面积 S 与宽 x 之间的函数表达式．

2. 一个圆柱的高与底面直径相等，写出它的表面积 S 与底面半径 r 之间的函数表达式．

3. 写出下列问题中 y 与 x 之间的函数表达式，并写出自变量的取值范围：

(1) 如图，在长 200 m、宽 140 m 的矩形绿地内修建等宽的十字形道路，设道路宽为 x(m)，绿地面积为 y(m^2)；

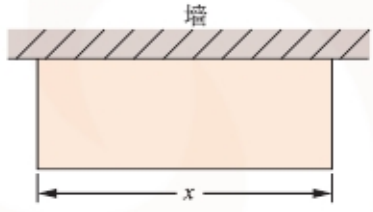




(第 3 题 (1))

(2) 某化肥厂 10 月份生产某种化肥 200 t，设该厂 11 月、12 月的月平均增长率为 x，12 月份化肥的产量为 y(t)；

(3) 如图，用长 50 m 的护栏围成一块靠墙的矩形花园，设矩形花园的长为 x(m)，面积为 y(m^2)．



(第 3 题 (3))

微信公众号：电子课本大全

5.2 二次函数的图像和性质

我们已经学习了一次函数和反比例函数的图像的画法，并借助图像研究这些函数的性质．

二次函数的图像是什么形状？二次函数有什么性质？

我们先研究二次函数 $y=x^2$ 的图像和性质．



根据二次函数表达式 $y=x^2$，你能描述它的图像有什么特征吗？



$x=0$ 时，$y=0$．图像过原点．

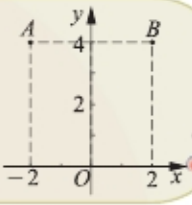
x 可取一切实数．图像向左、右无限延伸．





$y\geqslant 0$，图像向上无限延伸，且 x 轴下方没有图像．

$x=2$ 时，$y=4$；$x=-2$ 时，$y=4$．图像上的点 $A(-2,4)$ 与点 $B(2,4)$ 关于 y 轴对称．







1．在图 5－1 的平面直角坐标系中，用描点法画出二次函数 $y=x^2$ 的图像．

（1）列表：恰当地选取自变量 x 的几个值，计算函数 y 对应的值：

x	…	−3	−2	−1	0	1	2	3	…
y	…								…

（2）描点：以表中各对 x、y 的值为点的坐标，在图 5－1 的平面直角坐标系中描出对应的点．

（3）连线：用平滑曲线顺次连接描出的各点．

微信公众号：电子课本大全

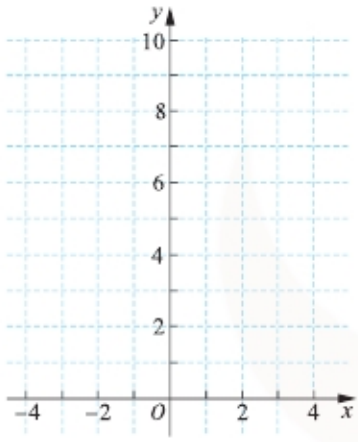


图 5－1

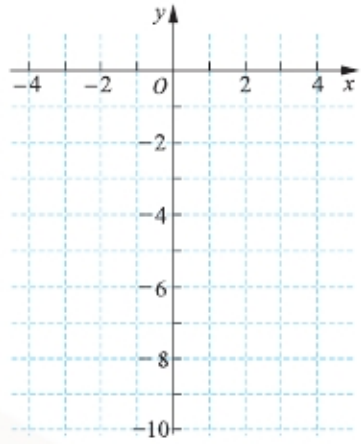
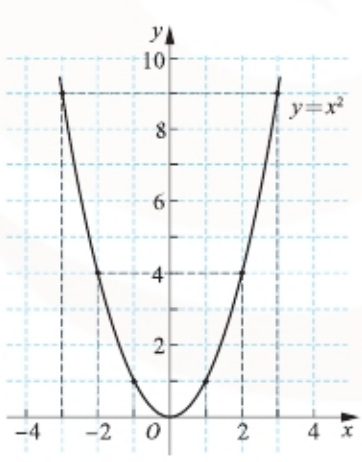


图 5－2

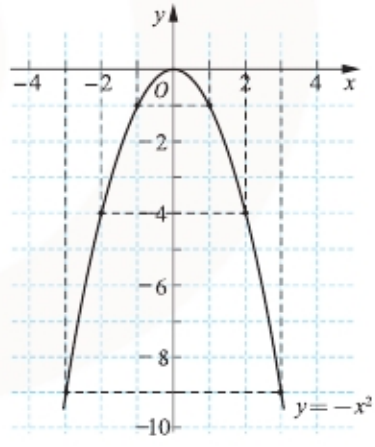
2. 类似地，在图 5－2 的平面直角坐标系中画出二次函数 $y=-x^2$ 的图像．

3. 函数 $y=x^2$ 的图像与函数 $y=-x^2$ 的图像有什么共同特征？

如图 5－3，二次函数 $y=x^2$、$y=-x^2$ 的图像都是**抛物线**（parabola），且关于 y 轴对称．抛物线与对称轴的交点叫做抛物线的顶点．



（1）



（2）

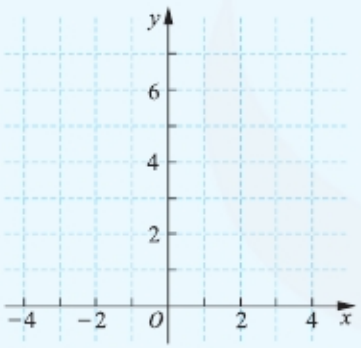
图 5－3

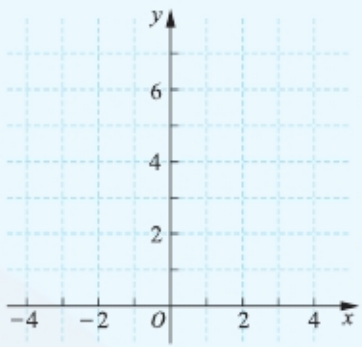
微信公众号：电子课本大全

练习

1. 在平面直角坐标系中，分别画出下列函数的图像：

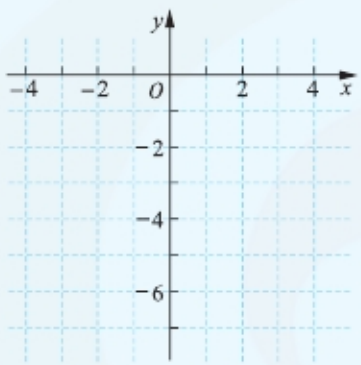
(1) $y=\frac{1}{2}x^2$；　　(2) $y=2x^2$.

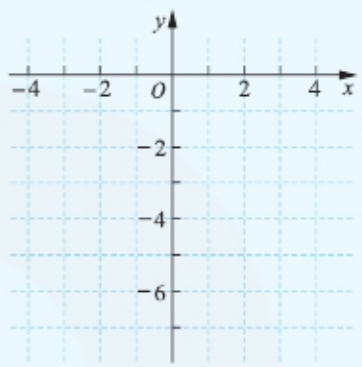




2. 在平面直角坐标系中，分别画出下列函数的图像：

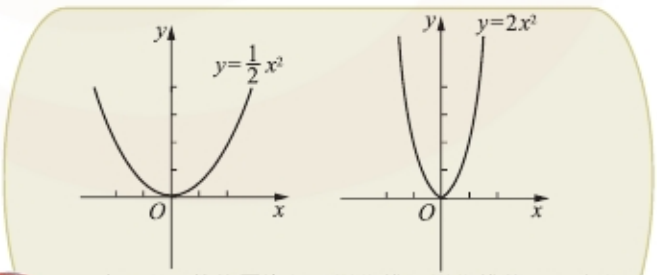
(1) $y=-\frac{1}{2}x^2$；　　(2) $y=-2x^2$.





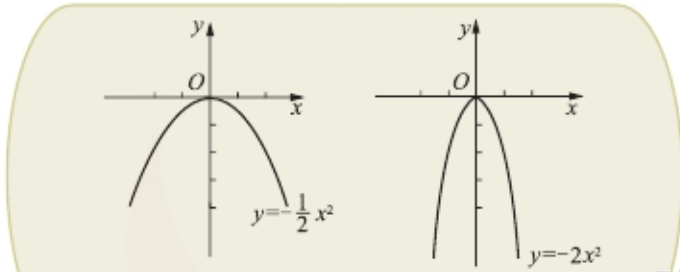
思考

函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 和 $y=2x^2$、$y=-\frac{1}{2}x^2$ 和 $y=-2x^2$ 的图像各有什么特征？与同学交流.



这两个函数的图像都是抛物线，抛物线的开口向上，对称轴是y轴，顶点在原点，顶点是抛物线的最低点.

微信公众号：电子课本大全



这两个函数的图像都是抛物线，抛物线的开口向下，对称轴是y轴，顶点在原点，顶点是抛物线的最高点.

二次函数 $y=ax^2$ 的图像是一条抛物线，抛物线的顶点在原点、对称轴是 y 轴.

当 $a>0$ 时，抛物线的开口向上，顶点是抛物线的最低点；

当 $a<0$ 时，抛物线的开口向下，顶点是抛物线的最高点.

思考探索

1. 观察 $y=ax^2$ 的图像(如图 5－4)，你还能发现什么？

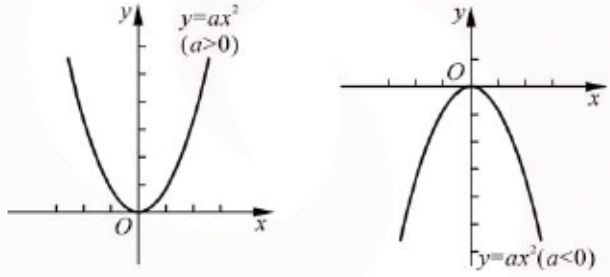
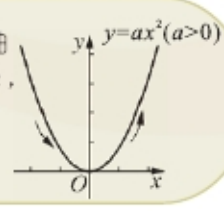


图 5－4

$a>0$时，y轴左边的图像下降，y轴右边的图像上升.





$a<0$时，y轴左边的图像上升，y轴右边的图像下降.

微信公众号：电子课本大全

2. 如何用 x、y 的值的变化来描述图像的上升、下降？



图像“上升”可以用“x增大时，y也增大”来描述.

图像“下降”可以用“x增大时，y减小”来描述.



二次函数 $y=ax^2$ 的性质：

(1) $a>0$，

当 $x<0$ 时，y 随 x 增大而减小；

当 $x>0$ 时，y 随 x 增大而增大；

当 $x=0$ 时，y 的值最小，最小值是 0.

(2) $a<0$，

当 $x<0$ 时，y 随 x 增大而增大；

当 $x>0$ 时，y 随 x 增大而减小；

当 $x=0$ 时，y 的值最大，最大值是 0.



1. 分别说出下列函数图像的开口方向、顶点坐标与对称轴：

$$y=-3x^2,\ y=\frac{1}{3}x^2,\ y=5x^2,\ y=-\frac{3}{4}x^2.$$

2. 填空：

(1) 对于函数 $y=-7x^2$，当 $x<0$ 时，y 随 x 增大而_____；当 $x>0$ 时，y 随 x 增大而_____；当 $x=$_____ 时，y 的值最_____，最_____值是_____.

(2) 对于函数 $y=\frac{2}{3}x^2$，当 $x<0$ 时，y 随 x 增大而_____；当 $x>0$ 时，y 随 x 增大而_____；当 $x=$_____ 时，y 的值最_____，最_____值是_____.

3. 已知二次函数 $y=ax^2$ 的图像经过点 $P(2,3)$，确定图像的开口方向.

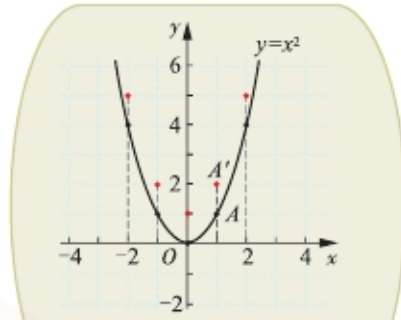
微信公众号：电子课本大全



函数 $y = x^2 + 1$ 的图像与函数 $y = x^2$ 的图像之间有什么关系？

x	…	−2	−1	0	1	2	…
$y=x^2$	…	4	1	0	1	4	…
$y=x^2+1$	…	5	2	1	2	5	…

对应于同一个自变量的值，两个函数的值相差1.



将点$A(1,1)$向上平移1个单位长度得到点$A'(1,2)$……

函数 $y = x^2 + 1$ 的图像可以由函数 $y = x^2$ 的图像向上平移 1 个单位长度得到(如图 5－5)，它是一条开口向上的抛物线，顶点坐标是(0，1)，对称轴是 y 轴．

根据图 5－5，可以知道：当 $x < 0$ 时，y 随 x 增大而减小；当 $x > 0$ 时，y 随 x 增大而增大；当 $x = 0$ 时，y 的值最小，最小值是 1．

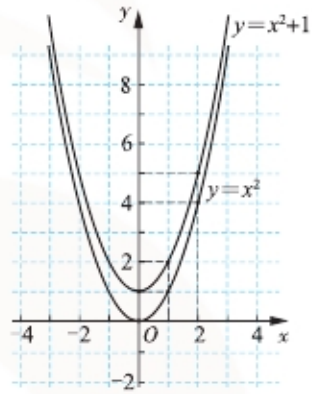


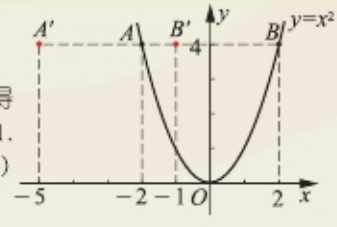
图 5－5

你能说出函数 $y = -x^2 + 1$ 的图像与函数 $y = -x^2$ 的图像之间有什么关系吗？



函数 $y = (x + 3)^2$ 的图像与函数 $y = x^2$ 的图像之间有什么关系？

由$(x+3)^2=4$，得 $x=-5$，$x=-1$．描出点$A'(-5,4)$和点$B'(-1,4)$．



由$x^2=4$，得 $x=-2$，$x=2$．描出点$A(-2,4)$和点$B(2,4)$．

将点A向左平移3个单位长度得到点A'，将点B向左平移3个单位长度得到点B'．

微信公众号：电子课本大全

函数 $y=(x+3)^2$ 的图像可以由函数 $y=x^2$ 的图像向左平移 3 个单位长度得到（如图 5－6），它是一条开口向上的抛物线，顶点坐标是（－3，0），对称轴是过点（－3，0）且平行于 y 轴的直线．

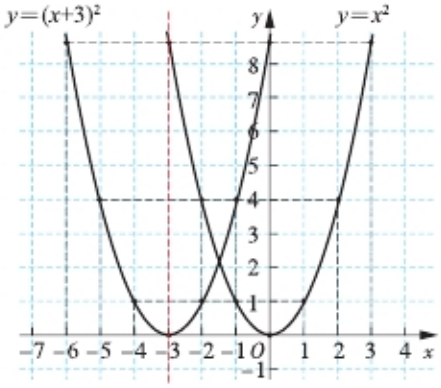


图 5－6

根据图 5－6，可以知道：

当 $x<-3$ 时，y 随 x 增大而减小；

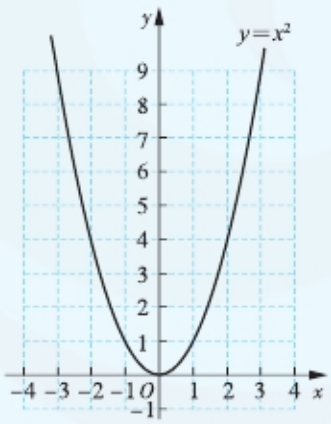
当 $x>-3$ 时，y 随 x 增大而增大；

当 $x=-3$ 时，y 的值最小，最小值是 0．

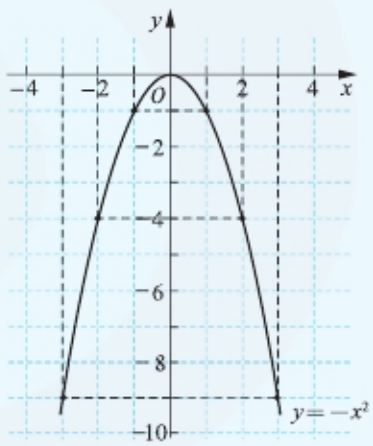
你能说出函数 $y=-(x+3)^2$ 的图像与函数 $y=-x^2$ 的图像之间有什么关系吗？



1. 说出函数 $y=x^2-1$ 的图像与函数 $y=x^2$ 的图像之间的位置关系，并画出它的图像．



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 说出函数 $y=-(x-2)^2$ 的图像与函数 $y=-x^2$ 的图像之间的位置关系，并画出它的图像．

微信公众号：电子课本大全



根据图 5－7，说出函数 $y=(x+1)^2+2$ 的图像与函数 $y=x^2$ 的图像之间的关系，以及这个图像的特征．函数 $y=(x+1)^2+2$ 有什么性质？

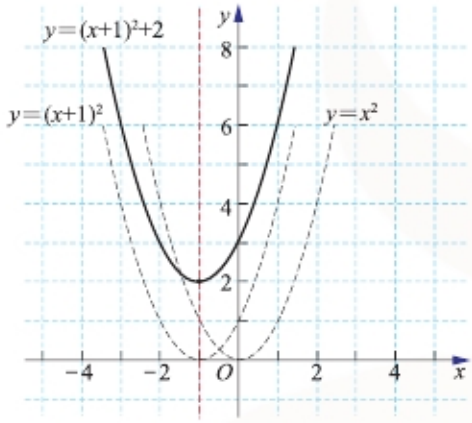


图 5－7

把函数$y=x^2$的图像向左平移1个单位长度，可得到函数$y=(x+1)^2$的图像，再把函数$y=(x+1)^2$的图像向上平移2个单位长度，就得到函数$y=(x+1)^2+2$的图像.它是一条开口向上的抛物线，顶点坐标是（−1,2），对称轴是过点（−1，2）且平行于y轴的直线.



当$x<-1$时，y随x增大而减小；
当$x>-1$时，y随x增大而增大；
当$x=-1$时，y的值最小，最小值是2.



函数 $y=-(x+1)^2+2$ 的图像与函数 $y=-x^2$ 的图像之间有什么关系？函数 $y=-(x+1)^2+2$ 有什么性质？

一般地，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 可以变形为 $y=a(x+h)^2+k$ 的形式：

$$\begin{aligned}
y &= ax^2+bx+c \\
&= a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c \\
&= a\left[x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]+c \\
&= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c \\
&= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.
\end{aligned}$$

微信公众号：电子课本大全

二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像是一条抛物线，它的顶点坐标是 $\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$，对称轴是过顶点且平行于 y 轴的直线．

$a>0$，抛物线开口向上，当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，函数 $y=ax^2+bx+c$ 的值最小，$y_{最小值}=\frac{4ac-b^2}{4a}$；

$a<0$，抛物线开口向下，当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，函数 $y=ax^2+bx+c$ 的值最大，$y_{最大值}=\frac{4ac-b^2}{4a}$．

例 画出二次函数 $y=-x^2-4x-5$ 的图像，并指出它的开口方向、顶点坐标、对称轴、最大值或最小值．

分析： 要画出二次函数 $y=-x^2-4x-5$ 的图像，可先将函数表达式变形为 $y=a(x+h)^2+k$ 的形式．

解： $y=-x^2-4x-5$

$=-(x^2+4x+4-4)-5$

$=-(x+2)^2-1$.

二次项系数 $-1<0$，函数图像开口向下，顶点坐标是$(-2,-1)$，对称轴是过点$(-2,-1)$且平行于 y 轴的直线．

二次函数 $y=-x^2-4x-5$ 的图像如图 5-8.

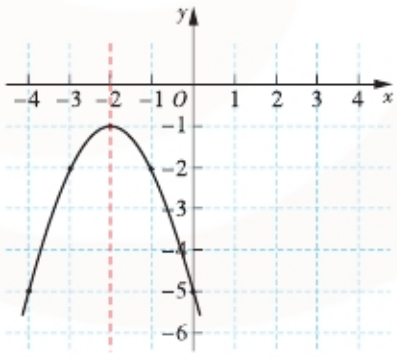


图 5-8

当 $x=-2$ 时，y 的值最大，最大值是 -1.

微信公众号：电子课本大全



1. 填空：

(1) x^2+4x+____ $=(x+$____$)^2$；

(2) $x^2-\frac{7}{2}x+$____ $=(x-$____$)^2$；

(3) $x^2+6x+12=(x+3)^2+$____；

(4) $x^2-7x+13=\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+$____.

2. 画出函数 $y=\frac{1}{2}x^2-3x-\frac{5}{2}$ 的图像.

3. 填表：

函　数	图像特征			函数的最大值或最小值
	开口方向	顶点坐标	对称轴	
$y=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-2$			过点 $\left(\frac{1}{2},-2\right)$ 且平行于 y 轴的直线	当 $x=$____时，$y_{最(小)值}=$____
$y=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+5$				当 $x=$____时，$y_{最(小)值}=$____
$y=2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$				当 $x=$____时，$y_{最(小)值}=$____
$y=-2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$				当 $x=$____时，$y_{最(小)值}=$____

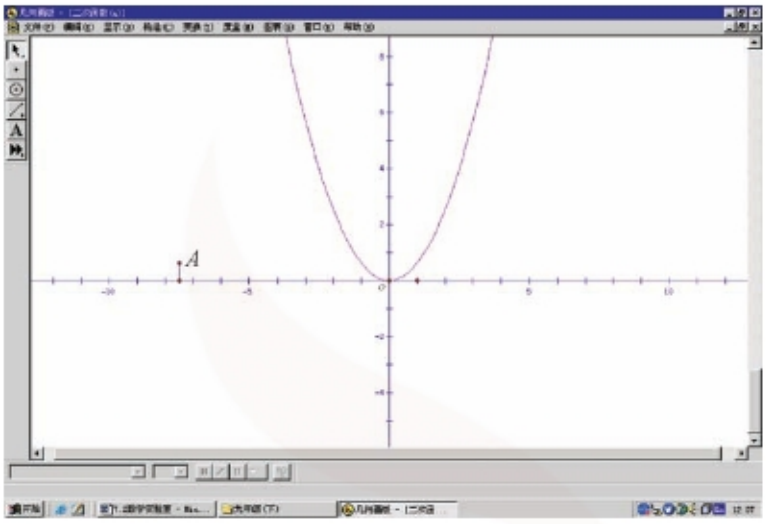


用几何画板软件研究二次函数的性质

1. 画二次函数 $y=ax^2$ 的图像.

(1) 打开几何画板软件，过 x 轴上任意一点作 x 轴的垂线，在该垂线上任取一点 A 后隐去垂线；

微信公众号：电子课本大全



(2) 度量点 A 的纵坐标，改用字母 a 表示这个纵坐标；

(3) 以 a 的值为二次项系数，画二次函数 $y=ax^2$ 的图像，则此图像随 a 的值的变化而变化．

2. 操作与观察．

(1) 用鼠标拖动点 A，观察 a 的值由正变为负时，抛物线开口方向的变化；

(2) 过 y 轴上任意一点作 y 轴的垂线，观察 a 的绝对值由小变大时，抛物线与垂线的两个交点间的距离的变化；

(3) 在抛物线上任取一点 P，度量点 P 的横坐标，用鼠标拖动点 P，观察点 P 的横坐标变化时，点 P 在抛物线上的位置变化．

3. 结论．

交流由观察而得到的结论．

你会用类似的方法，研究系数 a、b、c 对二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像的影响吗？

5.2 习题

1. 在同一平面直角坐标系中，画出下列函数的图像：

$y=\frac{3}{2}x^2$，　$y=\frac{2}{3}x^2$，　$y=-\frac{3}{2}x^2$，　$y=-\frac{2}{3}x^2$．

2. 已知函数：

① $y=0.5x^2$，　② $y=\frac{2}{5}x^2$，　③ $y=-11x^2$，　④ $y=\frac{7}{4}x^2$．

微信公众号：电子课本大全

(1) 图像开口向下的是_____，图像开口向上的是_____；

(2) 当 $x<0$ 时，y 随 x 增大而增大的是_____，当 $x>0$ 时，y 随 x 增大而增大的是_____.

3. 二次函数 $y=ax^2$ 的图像经过点 $A(-2,5)$.

(1) 写出点 A 关于 y 轴对称的点 B 的坐标，点 B 在这个二次函数的图像上吗？为什么？

(2) y 有最大值还是有最小值？x 为何值时，y 的最大值或最小值是多少？

4. 在同一平面直角坐标系中，函数 $y=-\frac{1}{2}x^2$、$y=-\frac{1}{2}x^2+2$、$y=-\frac{1}{2}x^2-2$ 的图像有怎样的位置关系？

5. 在同一平面直角坐标系中，画出下列函数的图像及其对称轴，并写出它们的顶点坐标：

$$y=\frac{2}{3}x^2,\ y=\frac{2}{3}(x-2)^2.$$

6. 画出下列函数的图像及其对称轴，并写出它们的顶点坐标：

(1) $y=2(x+2)^2+1$；　　(2) $y=-\frac{3}{4}(x-3)^2+2$.

7. 画出下列函数的图像：

(1) $y=x^2-x-2$；　　(2) $y=-\frac{1}{2}x^2-x+2$.

8. 求下列函数的最大值或最小值：

(1) $y=x^2-2x-3$；　　(2) $y=-2x^2-5x+7$；

(3) $y=3x^2+2x$；　　(4) $y=\frac{5}{2}x-2-3x^2$.

9. 怎样平移函数 $y=-x^2$ 的图像，可以得到函数 $y=-x^2-8x-7$ 的图像？

微信公众号：电子课本大全

5.3 用待定系数法确定二次函数表达式

我们知道，根据已知条件用待定系数法可以确定一次函数、反比例函数的表达式．类似地，根据已知条件用待定系数法也可以确定二次函数的表达式．

例 1 已知二次函数 $y = ax^2$ 的图像经过点$(-2, 8)$，求 a 的值．

分析： 如果一个点在函数的图像上，那么这个点的坐标适合函数的表达式．要确定“a”的值，只要根据已知条件“图像经过点$(-2, 8)$”列出关于 a 的一元一次方程．

解： 由二次函数 $y = ax^2$ 的图像经过点$(-2, 8)$，

得

$$8 = (-2)^2 a.$$

解得

$$a = 2.$$

例 2 已知二次函数 $y = ax^2 + c$ 的图像经过点$(-2, 8)$和$(-1, 5)$，求 a、c 的值．

分析： 要确定“a”、“c”的值，只要根据已知条件“图像经过点$(-2, 8)$和$(-1, 5)$”列出关于 a、c 的二元一次方程组．

解： 由二次函数 $y = ax^2 + c$ 的图像经过点$(-2, 8)$和$(-1, 5)$，

得

$$\begin{cases} 8 = (-2)^2 a + c, \\ 5 = (-1)^2 a + c. \end{cases}$$

解得

$$a = 1, c = 4.$$

微信公众号：电子课本大全

*例 3　已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图像经过点(−3，6)、(−2，−1)和(0，−3)，求这个二次函数的表达式．

解：由二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图像经过点(−3，6)、(−2，−1)和(0，−3)，

得

$$\begin{cases} 6 = (-3)^2 a - 3b + c, \\ -1 = (-2)^2 a - 2b + c, \\ -3 = c. \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} a = 2, \\ b = 3, \\ c = -3. \end{cases}$$

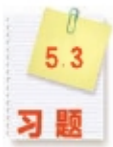
所求二次函数表达式为 $y = 2x^2 + 3x - 3$.

通常，要确定函数表达式中几个待定的系数，相应地需要几个已知条件，根据这些已知条件列出方程（组）求解．



1. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx$ 的图像经过点(−2，8)和(−1，5)，求这个二次函数的表达式．

*2. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图像经过点(0，3)、(3，0)和(1，4)，求这个二次函数的表达式．

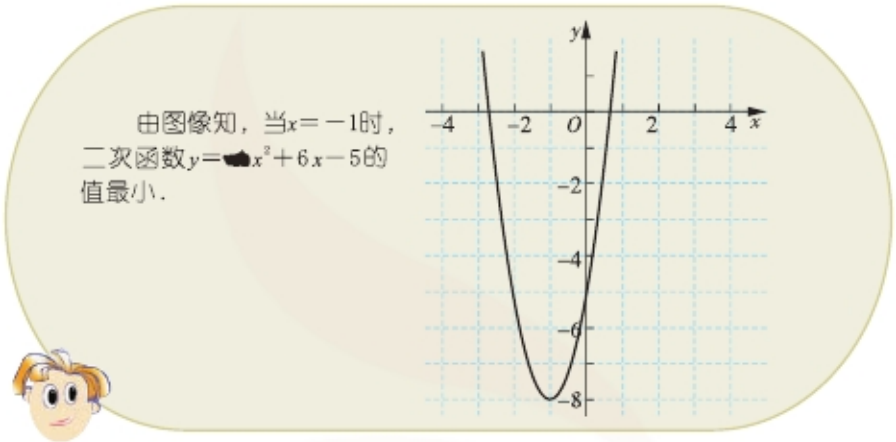


1. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + 1$ 的图像经过点(1，3)和(3，−5)，求 a、b 的值．

*2. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图像经过点(−1，−6)、(1，4)和(3，6)，求这个二次函数的表达式．

微信公众号：电子课本大全

3. 这是小明在阅读一本关于函数的课外读物时看到的一段文字，你能写出被墨迹污染的二次项系数吗？



微信公众号：电子课本大全

5.4　二次函数与一元二次方程



二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 与一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有怎样的关系？



当y的值确定后，由二次函数$y=ax^2+bx+c$可以相应地得到一个一元二次方程. 如，$y=0$时，由二次函数$y=ax^2+bx+c$可得一元二次方程$ax^2+bx+c=0$.

从图像上看，如果二次函数$y=ax^2+bx+c$的图像与x轴有交点，那么交点的纵坐标$y=0$，交点的横坐标就是一元二次方程$ax^2+bx+c=0$的根.



根据二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 与一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的关系，我们可以由二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像确定一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的情况．

如图 5－9，二次函数 $y=x^2-2x-3$ 的图像与 x 轴的交点坐标分别是 $M(3,0)$、$N(-1,0)$.

由此可知，当 $x=3$ 时，$y=0$，即 $x^2-2x-3=0$. 也就是说，$x=3$ 是一元二次方程 $x^2-2x-3=0$ 的一个根．

同样，$x=-1$ 是一元二次方程 $x^2-2x-3=0$ 的另一个根．

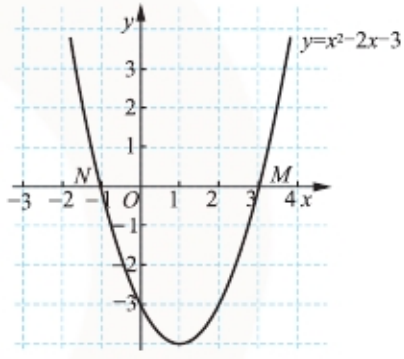


图 5－9



观察二次函数 $y=-\frac{1}{2}x^2-4x-6$、$y=x^2-6x+9$、$y=x^2-2x+3$ 的图像（如图 5－10），分别说出一元二次方程 $-\frac{1}{2}x^2-4x-6=0$、$x^2-6x+9=0$、$x^2-2x+3=0$ 的根的情况．

微信公众号：电子课本大全

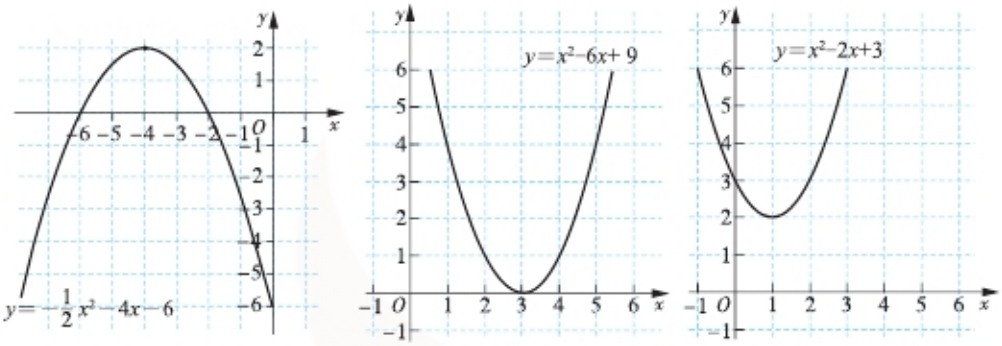


图 5－10

如果二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像与 x 轴有两个公共点，那么一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不相等的实数根；

如果二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像与 x 轴有且只有一个公共点，那么一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个相等的实数根；

如果二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像与 x 轴没有公共点，那么一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 没有实数根．

反过来，根据一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的情况，可以判断二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像与 x 轴的公共点的个数．

例 不画图像，判断二次函数 $y=-x^2+5x-8$ 的图像与 x 轴是否有公共点．

解： 因为一元二次方程 $-x^2+5x-8=0$ 的根的判别式

$$b^2-4ac=5^2-4\times(-1)\times(-8)<0,$$

所以方程 $-x^2+5x-8=0$ 没有实数根．

二次函数 $y=-x^2+5x-8$ 的图像与 x 轴没有公共点．



不画图像，判断下列函数的图像与 x 轴的公共点的个数：

(1) $y=x^2-x$；

(2) $y=-x^2+6x-9$；

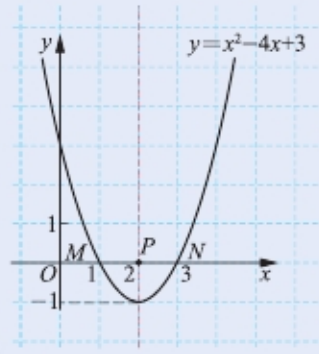
(3) $y=3x^2+6x+11$.

微信公众号：电子课本大全

读一读

学会“读”二次函数的图像

二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像，不仅直观地显示了函数的性质，而且从中还可以“读”出其他的相关信息．



例如，从二次函数 $y=x^2-4x+3$ 的图像中，可以“读”出如下信息：

这个函数的图像开口向上，顶点的坐标是(2，−1)，对称轴是过点(2，−1)且平行于 y 轴的直线，与 x 轴交于 $M(1，0)$、$N(3，0)$ 两点，进而可知 MN 的中点 $P(2，0)$在对称轴上．

根据函数 $y=x^2-4x+3$ 的图像，我们还可以知道：

(1) 当 $x<2$ 时，y 随 x 增大而减小；当 $x=2$ 时，y 的值最小，最小值是 -1；当 $x>2$ 时，y 随 x 增大而增大．

(2) $x=1$ 或 $x=3$ 是一元二次方程 $x^2-4x+3=0$ 的根．

(3) 当 $x<1$ 或 $x>3$ 时，图像上所有点的纵坐标 y 都大于 0．也就是说，$x<1$ 或 $x>3$ 是一元二次不等式 $x^2-4x+3>0$ 的解集．

当 $1<x<3$ 时，图像上所有点的纵坐标 y 都小于 0．也就是说，$1<x<3$ 是一元二次不等式 $x^2-4x+3<0$ 的解集．

观察与思考

你能利用函数 $y=x^2+2x-5$ 的图像(如图 5－11)，探索方程 $x^2+2x-5=0$ 的根的取值范围吗？

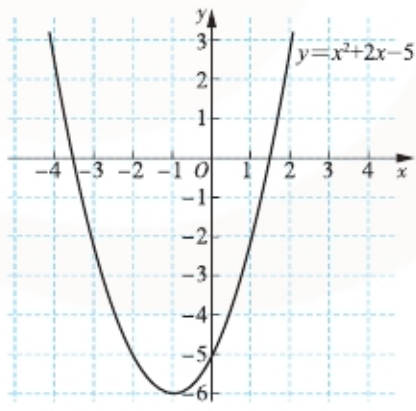


图 5－11

微信公众号：电子课本大全

从图 5－11 可以看出，函数 $y=x^2+2x-5$ 的图像与 x 轴有两个公共点，它们分别位于表示实数 1 与 2、－4 与－3 的点之间，所以一元二次方程 $x^2+2x-5=0$ 有两个根，它们分别介于实数 1 与 2、－4 与－3 之间．

下面，我们借助计算器，探索介于 1 与 2 之间的根的近似值．

表 1

x	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6
y	－1.59	－1.16	－0.71	－0.24	0.25	0.76

所以 $1.4<x<1.5$．

表 2

x	1.41	1.42	1.43	1.44	1.45	1.46
y	－0.191 9	－0.143 6	－0.095 1	－0.046 4	0.002 5	0.051 6

所以 $1.44<x<1.45$.

表 3

x	1.441	…	1.447	1.448	1.449	1.450
y	－0.041 519	…	－0.012 191	－0.007 296	－0.002 399	0.002 5

所以 $1.449<x<1.450$．

⋮

如此继续进行下去，可以进一步缩小这个根的取值范围．在解决实际问题时，常常需要取一元二次方程根的近似值．例如，取方程 $x^2+2x-5=0$ 介于 1 与 2 之间的根的近似值，如果要精确到 0.1，根据表 1，可知 $x\approx1.4$；如果要精确到 0.01，根据表 2，可知 $x\approx1.45$；如果要精确到 0.001，根据表 3，可知 $x\approx1.449$．



利用二次函数 $y=x^2+2x-5$ 的图像，借助计算器探索方程 $x^2+2x-5=0$ 的另一个介于－4 与－3 之间的根的近似值（精确到 0.01）．

微信公众号：电子课本大全

5.4 习题

1. 不画图像，判断下列函数的图像与 x 轴是否有公共点．如果有，写出公共点的坐标．

   (1) $y = 2x^2 + x + 1$；　　(2) $y = x^2 + x - 6$.

2. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + 16$ 的图像经过点 $(-2, 40)$ 和点 $(6, -8)$，求一元二次方程 $ax^2 + bx + 16 = 0$ 的根．

3. 利用二次函数的图像，借助计算器求下列方程的根的近似值(精确到 0.1)：

   (1) $x^2 + x - 3 = 0$；　　(2) $\frac{1}{2}x^2 - x - 1 = 0$.

微信公众号：电子课本大全

5.5 用二次函数解决问题

我们已经知道，生产、生活中的一些实际问题，有时可以用二次函数来揭示其中数量之间的关系，运用二次函数的有关知识，常常可以使这些实际问题得到解决．

问题 1 某种粮大户去年种植水稻 360 亩，平均每亩收益 440 元．他计划今年多承租若干亩稻田，预计原 360 亩稻田平均每亩收益不变，新承租的稻田每增加 1 亩，其每亩平均收益比去年每亩平均收益少 2 元．该种粮大户今年应多承租多少亩稻田才能使总收益最大？



分析：如果今年多承租 x 亩稻田，那么新承租的稻田共收益 $(440-2x)x$ 元．

解：设今年多承租 x 亩稻田，总收益为 y 元，则

$$y = 440 \times 360 + (440 - 2x)x = -2(x - 110)^2 + 182\,600.$$

当 $x = 110$ 时，y 的值最大，最大值是 182 600.

答：该种粮大户今年应多承租 110 亩稻田才能使总收益最大，最大收益为 182 600 元．

微信公众号：电子课本大全

问题 2　某鱼塘里饲养了鱼苗 10 千尾，预计平均每千尾鱼的产量为1 000 kg. 若再向该鱼塘里投放鱼苗，每多投放鱼苗 1 千尾，每千尾鱼的产量将减少 50 kg. 应再投放鱼苗多少千尾才能使总产量最大？最大总产量是多少？

分析： 若向鱼塘里再投放鱼苗 x 千尾，则鱼塘里共有鱼苗$(10+x)$千尾，每千尾鱼的产量为$(1\,000-50x)$ kg.

解： 设向鱼塘里再投放鱼苗 x 千尾，总产量为 y kg，则

$$y=(1\,000-50x)(10+x)=-50(x-5)^2+11\,250.$$

当 $x=5$ 时，y 的值最大，最大值是 11 250.

答： 应再投放鱼苗 5 千尾才能使总产量最大，最大总产量为 11 250 kg.



某商场以每件 42 元的价格购进一种服装，由试销知，每天的销量 t(件)与每件的销售价 x(元)之间的函数关系为 $t=204-3x$.

(1) 试写出每天销售这种服装的毛利润 y(元)与每件销售价 x(元)之间的函数表达式(毛利润＝销售价－进货价)；

(2) 每件销售价多少元才能使每天的毛利润最大？最大毛利润是多少？

问题 3　河上有一座抛物线形的拱桥，水面宽 6 m 时，水面离桥拱顶部 3 m. 因降暴雨水位上升 1 m，此时水面宽为多少(精确到 0.1 m)？

分析： 解决这个实际问题，先要把它数学化——恰当地建立平面直角坐标系，把抛物线形的桥拱看作一个二次函数的图像，并写出这个函数的表达式，然后根据题设条件求解.

解： 如图 5－12，以桥拱的最高点为原点，过原点的水平线为横轴，过原点的铅垂线为纵轴，建立平面直角坐标系. 抛物线形的桥拱是二次函数 $y=ax^2$ 的图像.

因为当水面宽 $AB=6$ m 时，水面离桥拱顶部 3 m，所以点 A 的坐标是 $(3,-3)$.

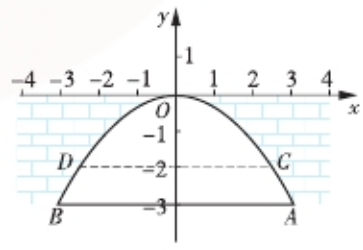


图 5－12

微信公众号：电子课本大全

把 $x=3$、$y=-3$ 代入 $y=ax^2$，得

$$-3=a\times 3^2.$$

解得

$$a=-\frac{1}{3}.$$

把 $y=-2$ 代入 $y=-\frac{1}{3}x^2$，得

$$-2=-\frac{1}{3}x^2.$$

解得

$$x=\pm\sqrt{6}.$$

所以，点 C、D 的坐标分别为 $(\sqrt{6},-2)$、$(-\sqrt{6},-2)$，

$$CD=2\sqrt{6}\approx 4.9.$$

答：水位上升 1 m 时，水面宽约为 4.9 m.



根据问题 3 给出的条件，一艘装满物资的小船，露出水面部分的高为0.5 m、宽为 4 m（横断面如图 5－13）．暴雨后这艘船能从这座拱桥下通过吗？

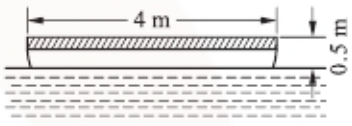
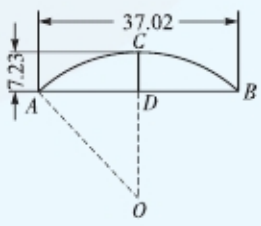


图 5－13



我国隋朝建造的赵州石拱桥闻名中外．假设石拱桥的桥拱是抛物线形，已知石拱跨径 AB 为 37.02 m，拱高 CD 为 7.23 m．把桥拱看作一个二次函数的图像，建立恰当的平面直角坐标系，写出这个函数的表达式．

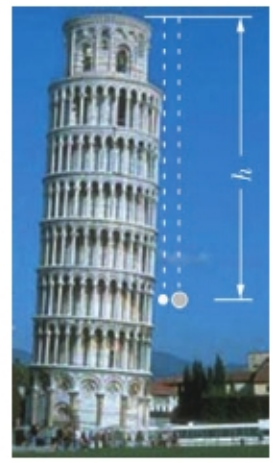




微信公众号：电子课本大全

5.5 习题

1. 比萨斜塔是意大利的一座著名斜塔，据说物理学家伽利略曾在塔顶上做过著名的自由落体试验：在地球上同一地点，不同质量的物体从同一高度同时下落，如果除地球引力外不考虑其他外力的作用，那么它们的落地时间相同，物体的下落距离 h(m)与下落时间 t(s)之间的函数表达式为 $h=\frac{1}{2}gt^2$，g 的取值为 9.8 m/s^2，即 $h=4.9t^2$. 已知比萨斜塔的高度为 55 m，试计算试验物大约经过多少时间落到地面(精确到 0.1 s).



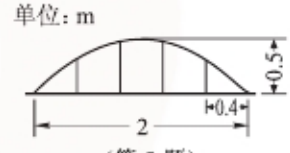
(第 1 题)

2. 小明利用第 1 题中的自由落体计算公式，用一块小石子来估算一口枯井的深度. 如果石子从井口脱手 1.3 s 时听到石子落到井底的声音(不计声音传播的时间)，那么该枯井大约有多深(精确到 0.1 m)?

3. 用长 16 m 的篱笆围成长方形的生物园饲养小兔，怎样围可使小兔的活动范围最大?

4. 某汽车出租公司以每辆汽车月租费 3 000 元，100 辆汽车可以全部租出. 若每辆汽车的月租费每增加 50 元，则将少租出 1 辆汽车. 已知每辆租出的汽车支付月维护费 200 元，问每月租出多少辆汽车时，该出租公司的月收益最大? 最大月收益是多少?

5. 某公园草坪的护栏由 50 段形状相同的抛物线形不锈钢管组成，如果每段护栏都按 0.4 m的间距加装不锈钢管的立柱(如图)，那么制作这些立柱共需要多少不锈钢管(精确到 1 m)?



(第 5 题)

6. 正常水位时，抛物线形拱桥下的水面宽 20 m. 水面上升 3 m 达到警戒水位时，桥下水面宽 10 m.

(1) 把桥拱看作一个二次函数的图像，建立恰当的平面直角坐标系，写出这个函数的表达式;

(2) 如果水位以 0.2 m/h 的速度持续上涨，那么达到警戒水位后，再过多长时间此桥孔将被淹没?

微信公众号：电子课本大全

阅读

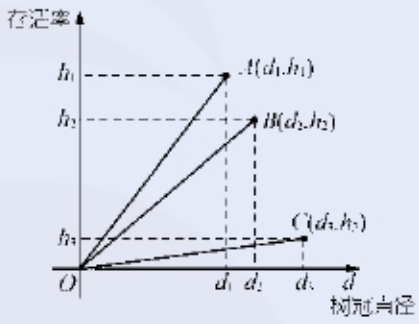
把实际问题数学化

在本章中，我们把一些实际问题中的数量关系抽象成为二次函数，并应用二次函数的有关知识解决了这些问题．事实上，日常生产、生活中的许多实际问题，都可以抽象成为数学问题．

例如，道路两旁种植行道树，选择哪种树更好呢？

选择行道树要考虑的因素很多，比如树形要美、树冠要大、存活率要高、落叶要少……如果只考虑树冠的大小、存活率的高低两个因素，那么就可以用如下的方法把这个实际问题数学化：

设树冠直径为 d，存活率为 h，在平面直角坐标系中画出点 (d, h)．在所画的点中，与原点距离较远的点所表示的树种较优，因为这种树种或树冠直径较大、或存活率较高．如图，$OA>OB$，A 树种比 B 树种优．



若表示两种树种的点与原点的距离相等，则可先分别计算它们的 d 与 h 的差的绝对值，再比较这些绝对值的大小，绝对值较小的树种较优，因为这种树种的树冠的大小和存活率的高低没有明显的缺陷．如图，$OB=OC$，且 $|d_2-h_2|<|d_3-h_3|$，B 树种比 C 树种优．

像这样，如果一个实际问题涉及的因素较多，那么应根据实际需要选择其中的一些主要因素，舍弃次要因素，然后通过抽象建立数学模型，再运用有关的数学知识解决实际问题．应当指出：数学问题的解，需要检验它是否符合实际．如果符合，那么要对解的意义做出解释；如果不符合，那么要建立新的数学模型，重新尝试解决实际问题．

微信公众号：电子课本大全

数学活动

校园景观设计

如图 5－14，学校计划在流经校园的小河上建造一座抛物线形的小拱桥，桥拱的跨径为 4 m、拱高为 2.5 m.

(1) 把该桥拱看作一个二次函数的图像，请你建立恰当的平面直角坐标系，写出这个函数的表达式；

(2) 施工时，工人师傅先要制作如图 5－15 的桥孔模型，请你帮助工人师傅计算模型中各立柱的高；

(3) 如有条件，可选择适当材料，按 1∶20 的比例制作这座桥的模型.

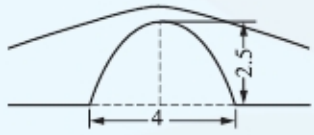


图 5－14



图 5－15

小结与思考

1. 形如 $y=ax^2+bx+c(a、b、c$ 是常数，且 $a\neq 0)$ 的函数是二次函数，它是描述现实世界数量变化及其关系的一种数学模型.

2. 二次函数的图像是抛物线，它直观地揭示了二次函数的性质，你能根据二次函数 $y=ax^2$ 的图像的开口方向、对称轴和顶点位置，说出二次函数 $y=ax^2$ 的性质吗？

3. 你知道二次函数 $y=ax^2+k$、$y=a(x+h)^2$、$y=a(x+h)^2+k$ 的图像与 $y=ax^2$ 的图像有怎样的位置关系吗？

通过配方，把二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 化为 $y=a(x+h)^2+k$ 的形式，可以方便地确定抛物线的顶点坐标和对称轴的位置.

4. 确定一个二次函数表达式中的待定系数，通常需要根据问题中的已知条件建立方程(组)，待定系数个数与问题中的条件数有什么关系？

5. 我们曾通过“读”一次函数的图像，发现了一次函数与一元一次方程、一元一次不等式之间的联系. 你能通过“读”二次函数的图像发现什么？

6. 用二次函数解决实际问题通常经历怎样的过程？试举例说明.

微信公众号：电子课本大全



复习巩固

1. 画出下列函数的图像：

(1) $y=(x-2)^2$；　　(2) $y=(x+2)^2$；

(3) $y=(x-2)^2+3$；　　(4) $y=(x+2)^2-3$.

2. (1) 填表：

函　数	图像特征			函数的最大值或最小值
	开口方向	顶点坐标	对称轴	
$y=2x^2+3x$				
$y=-x^2-2x$				
$y=2x^2-6x+3$				
$y=-\frac{1}{3}x^2+4x-8$				

(2) 画出上表中各个二次函数的图像.

3. 在同一平面直角坐标系中，画出函数 $y=-\frac{1}{4}x^2$、$y=-\frac{1}{4}(x-1)^2$、$y=-\frac{1}{4}(x-1)^2+1$ 的图像. 指出这三个函数图像之间的位置关系，并画出它们的对称轴，写出顶点坐标.

4. 已知二次函数 $y=-x^2+bx+c$ 的图像与 x 轴的两个交点的横坐标分别为 1 和 2.

(1) 求这个二次函数的表达式；

(2) 指出这个二次函数图像的开口方向、顶点坐标和对称轴的位置；

(3) x 在什么范围内，y 随 x 增大而增大？

(4) x 在什么范围内，y 随 x 增大而减小？

微信公众号：电子课本大全

5. 美国圣路易斯市有一座巨大的拱门，这座拱高和底宽都是 192 m 的不锈钢拱门是美国开发西部的标志性建筑．如果把拱门看作一条抛物线，试建立恰当的平面直角坐标系，并写出与该抛物线相应的函数表达式．



（第 5 题）

6. 两个数的和是 100，这两个数积的最大值是多少？

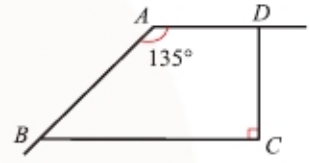
7. 我国是最早发明火箭的国家，制作火箭模型、模拟火箭升空是青少年喜爱的一项科技活动．已知学校航模组设计制作的火箭，它的升空高度h(m)与飞行时间t(s)满足函数表达式$h=-t^2+26t+1$．如果火箭在点火升空到最高点时打开降落伞，那么火箭点火后多少时间降落伞将打开？这时该火箭的高度是多少？



（第 7 题）

8. 把一根长 100 cm 的铁丝分成两部分，分别围成两个正方形，这两个正方形的面积和最小是多少？

9. 如图，利用 135° 的墙角修建一个梯形$ABCD$的储料场，并使$\angle C=90°$．如果新建墙BCD总长 15 m，那么怎样修建才能使储料场的面积最大？



（第 9 题）

灵活运用

10. (1) 已知二次函数$y=x^2-mx+m$的图像与x轴有且只有一个公共点，求m的值；

(2) 已知二次函数$y=ax^2-2x-3$的图像与x轴有两个公共点，求a的取值范围．

11. 当自变量$x=4$时，二次函数的值最小，最小值为-3，且这个函数的图像与x轴的一个交点的横坐标为 1．求：

(1) 这个二次函数的表达式；

(2) 这个函数的图像与x轴另一个交点的横坐标．

12. 一艘装有防汛器材的运输船，露出水面部分的宽为 4 m，高为 0.75 m．当水面与抛物线形桥拱的顶部相距 5 m 时，桥下水面宽为 8 m．要使该船顺利通过桥孔，水面与顶部至少相距多少？

微信公众号：电子课本大全

13. 心理学家研究发现，某年龄段的学生 30 min 内对概念的接受能力 y 与提出概念所用时间 x 之间满足函数表达式：$y=-0.1x^2+2.6x+43(0\leqslant x\leqslant 30)$．何时学生接受概念的能力最强？什么时段学生接受概念的能力逐步降低？

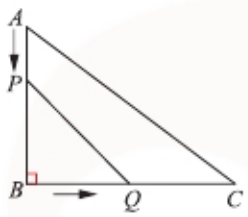
探索研究

14. 把二次函数 $y=x^2+bx+c$ 的图像向下平移 1 个单位长度，再向左平移 5 个单位长度后，所得的抛物线的顶点坐标为 $(-2,0)$．写出原抛物线相应的函数表达式．

15. 如图，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle B=90^\circ$，$AB=3$ cm，$BC=4$ cm．点 P 从点 A 出发，以 1 cm/s 的速度沿 AB 运动；同时，点 Q 从点 B 出发，以 2 cm/s 的速度沿 BC 运动．当点 Q 到达点 C 时，P、Q 两点同时停止运动．

(1) 试写出 $\triangle PBQ$ 的面积 $S(\mathrm{cm}^2)$ 与动点运动时间 $t(\mathrm{s})$ 之间的函数表达式；

(2) 运动时间 t 为何值时，$\triangle PBQ$ 的面积最大？最大面积是多少？



（第 15 题）

16. 某水果店出售一种水果，每只定价 20 元时，每周可卖出 300 只．试销发现：

(1) 每只水果每降价 1 元，每周可多卖出 25 只，如何定价，才能使一周销售收入最多？

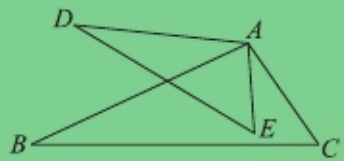
(2) 每只水果每涨价 1 元，每周将少卖出 10 只，如何定价，才能使一周销售收入最多？

(3) 根据以上信息，你认为应当如何定价才能使一周销售收入最多？

17. 根据函数表达式 $y=\dfrac{1}{x^2}$，你能说出它的图像具有的一些特征吗？试画出它的图像．

微信公众号：电子课本大全

第6章　图形的相似



$\triangle ABC \backsim \triangle ADE$

“全等”、“相似”，具有特殊与一般的关系，
研究“相似”，可以有效地解决一些实际问题．

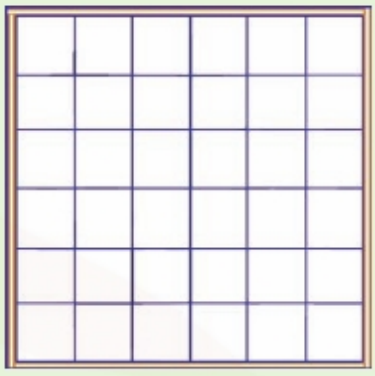


微信公众号：电子课本大全

把图(1)中的熊猫图案放大，画到图(2)的方格中．

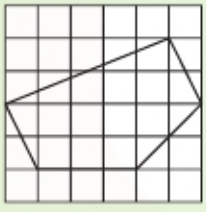


图（1）

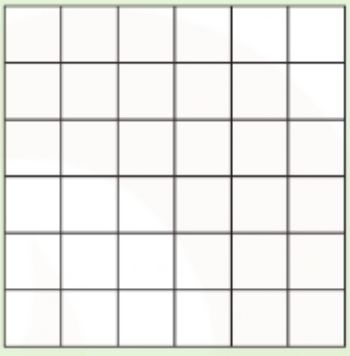


图（2）

把图(3)中的多边形放大，画到图(4)的方格中．



图（3）



图（4）

这两个多边形的形状相同吗？

度量这两个多边形对应的边和角，你有什么发现？请与同学交流．

本章将学习相似形的概念，探索并证明三角形相似的判定方法和相似三角形的性质，并运用这些知识解决简单的实际问题．

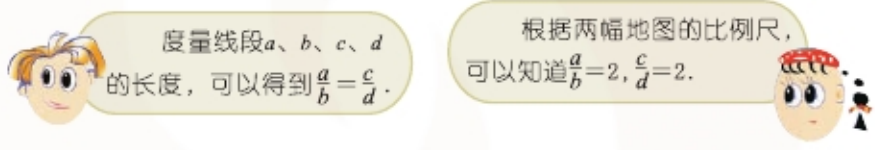
微信公众号：电子课本大全

6.1　图上距离与实际距离





在上面的两幅江苏省地图中，设连接南京与徐州的线段分别为 a、b，它们的比（即 a 与 b 的长度的比）为 $a:b$ 或 $\frac{a}{b}$，连接南京与连云港的线段分别为 c、d，它们的比为 $c:d$ 或 $\frac{c}{d}$，这两个比值相等吗？



在四条线段中，如果两条线段的比等于另两条线段的比，那么这四条线段叫做成比例线段．



1．在图 6－1 中，哪两个矩形的长和宽是成比例线段？

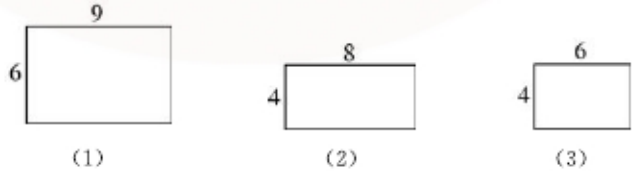


图 6－1

微信公众号：电子课本大全

2. 如图 6－2，线段 A_1B_1、B_1C_1、A_2B_2、B_2C_2 的端点都在边长为 1 的小正方形的顶点上．这四条线段是成比例线段吗？为什么？

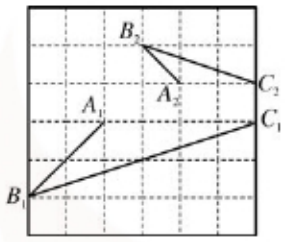


图 6－2

在小学里，我们学习过**比例的基本性质：如果 $a:b=c:d$，那么 $ad=bc$；反过来，如果 $ad=bc$（$b\neq0$，$d\neq0$），那么 $a:b=c:d$．**

在比例式 $a:b=b:c$ 中，b 叫做 a 和 c 的比例中项．

例 1 某公园平面图上有一块三角形草地，三边长分别为 4 cm、5 cm、6 cm．已知这块三角形草地最短边的实际长度为 80 m，求另外两条边的实际长度．

解： 比例尺＝图上距离：实际距离＝4：8 000＝1：2 000．

三角形草地的另外两条边的实际长度分别为

$5\times2\,000=10\,000(\text{cm})=100\ \text{m}$，

$6\times2\,000=12\,000(\text{cm})=120\ \text{m}$．

答： 这块三角形草地的另外两条边的实际长度分别为 100 m 和 120 m．

例 2 已知 $\frac{x}{3}=\frac{y}{5}$，且 $x+y=24$．求 x、y 的值．

解： 设 $\frac{x}{3}=\frac{y}{5}=k$，则 $x=3k$，$y=5k$．

$\because\ x+y=24$，

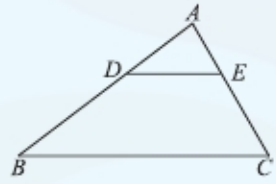
$\therefore\ 3k+5k=24$，$k=3$．

$\therefore\ x=9$，$y=15$．

微信公众号：电子课本大全



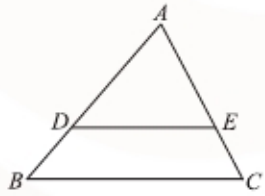
1. 根据本节开头提供的地图，分别求南京与徐州、南京与连云港之间的实际距离．
2. 小丽的身高为 1.6 m，在某一时刻，她的影长为 2 m. 求此时小丽的身高与影长的比．
3. 图纸上画出的某个工件的长为 40 mm，如果比例尺为1∶30，那么这个工件实际长度是多少？如果比例尺为 2∶1 呢？
4. 如图，$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$，$AD=15$，$AB=40$，$AC=28$. 求 AE 的长．



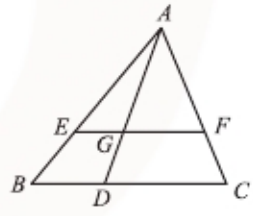
（第 4 题）



1. 在比例尺为 1∶38 000 的城市交通地图上，某条道路的长为7 cm. 求这条道路的实际长度．
2. 已知 $\frac{a}{9}=\frac{b}{11}=\frac{c}{14}$，且 $a+b+c=68$. 求 a、b、c 的值．
3. 如图，$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}=2$. 求$\frac{AB}{DB}$、$\frac{AE}{AC}$ 的值．



（第 3 题）

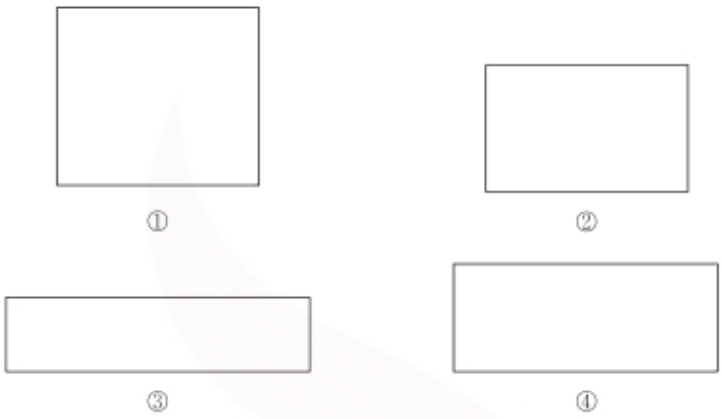


（第 4 题）

4. 如图，$\frac{AG}{AD}=\frac{EF}{BC}$，$EF=10$，$BC=15$，$GD=4$，求 AD 的长．

微信公众号：电子课本大全

5. 给出下列一组矩形：

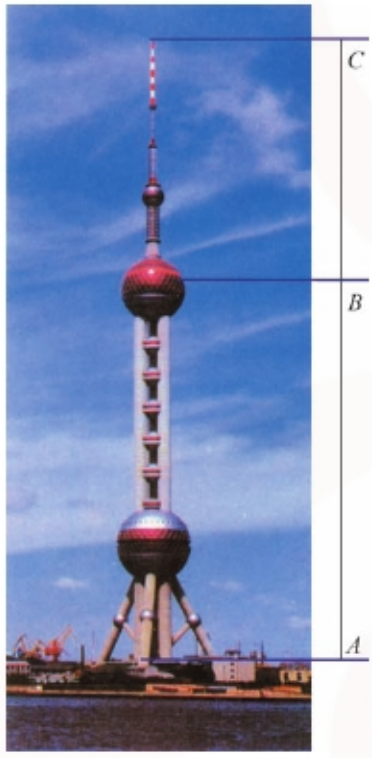


（第 5 题）

请调查 10 名(或更多)同学，他们最喜欢这组矩形中的哪一个？并记录调查结果．

微信公众号：电子课本大全

6.2　黄金分割



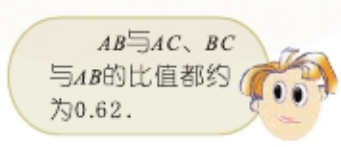
上海东方明珠电视塔设计巧妙，整个塔体挺拔秀丽．

度量图中线段 AB、AC 的长度，并计算线段 AB 与 AC、BC 与 AB 的比值．



芭蕾舞演员身体各部分之间适当的比例给人以匀称、协调的美感．

度量图中线段 AB、AC 的长度，并计算线段 AB 与 AC、BC 与 AB 的比值．



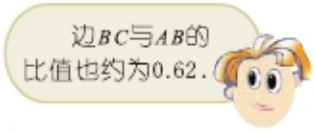
微信公众号：电子课本大全



在习题 6.1 第 5 题“你最喜欢的矩形”调查活动中，小丽调查了 10 名同学，其中有 8 名同学最喜欢第②个矩形．度量这个矩形（如图 6－3）的边 BC、AB 的长度，计算它们的比值，你发现了什么？



图 6－3



例 如图 6－4，点 B 在线段 AC 上，且 $\frac{BC}{AB}=\frac{AB}{AC}$．设 $AC=1$，求 AB 的长．



图 6－4

解：设 $AB=x$，则 $BC=AC-AB=1-x$．

由 $\frac{BC}{AB}=\frac{AB}{AC}$，得

$$\frac{1-x}{x}=x,$$

即 $x^2+x-1=0$．

解这个方程，得

$$x_1=\frac{\sqrt{5}-1}{2},x_2=\frac{-\sqrt{5}-1}{2}\text{（不合题意，舍去）}.$$

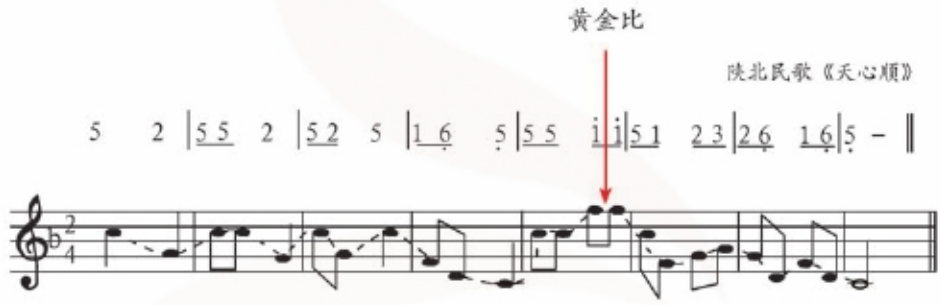
于是，AB 的长为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$．

像图 6－4 那样，点 B 把线段 AC 分成两部分，如果 $\frac{BC}{AB}=\frac{AB}{AC}$，那么称线段 AC 被点 B **黄金分割**（golden section），点 B 为线段 AC 的黄

微信公众号：电子课本大全

金分割点．AB 与 AC（或 BC 与 AB）的比称为黄金比，它们的比值为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，在计算时，通常取它的近似值 0.618.

“黄金分割”给人以美感，它在建筑、艺术等领域有着广泛的应用．



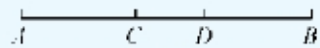
用黄金比巧妙构思的音乐作品

我国的国歌歌词是散文式的自由体新诗，作曲家聂耳在谱曲时，创造性地将它谱成由 6 个长短不等的乐句组成的自由体乐段．歌曲高潮部分在结构上几乎正好是全曲的黄金分割的位置，音乐富有动力，让人感到无比振奋．

你能举例说明黄金分割在生活中的应用吗？



1. 在图 6－3 中，BC 与 AB 的比为黄金比，这样的矩形称为黄金矩形，它给人以美感．某建筑物的窗户为黄金矩形，已知它的一边长为 3.24 m，求它的邻边的长（精确到 0.01 m）．
2. 如图，C、D 是线段 AB 的两个黄金分割点，$AB = 1$．求线段 CD 的长．



（第 2 题）

微信公众号：电子课本大全

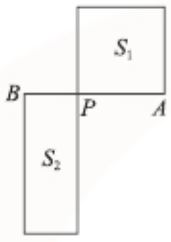
6.2 习题

1. 东方明珠电视塔高 468 m，如果把塔身看作一条线段 AC，中间的球体看作点 B，那么点 B 是线段 AC 的黄金分割点．求 AB 的长（精确到 0.1 m）．



（第 1 题）

2. 如图，P 是线段 AB 的黄金分割点，且 $PA>PB$，S_1 表示以 PA 为一边的正方形的面积，S_2 表示长为 AB、宽为 PB 的矩形的面积．比较 S_1 与 S_2 的大小，并说明理由．



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，设线段 $AC=1$．

（1）过点 C 画 $CD\perp AC$，使 $CD=\frac{1}{2}AC$；连接 AD，以点 D 为圆心，DC 的长为半径画弧，交 AD 于点 E；以点 A 为圆心，AE 的长为半径画弧，交 AC 于点 B．

（2）在所画图中，点 B 是线段 AC 的黄金分割点吗？为什么？

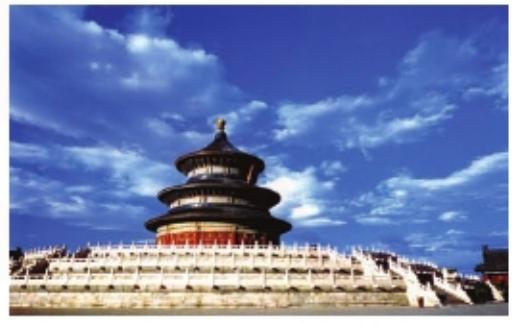
微信公众号：电子课本大全

6.3　相似图形

放映电影时，银幕上的画面是由放映机把底片上的画面经过放大后投影得到的，底片上的画面与银幕上的画面形状相同．

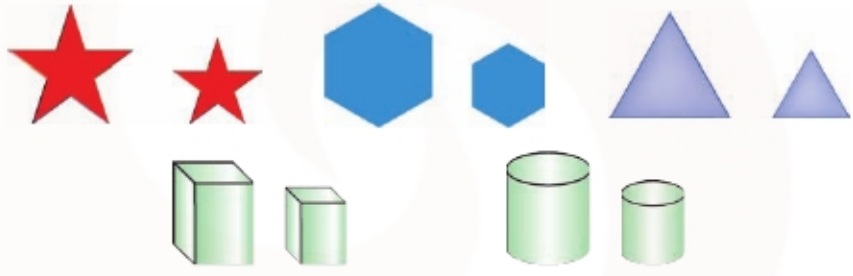
用复印机可以把图形按比例放大或缩小，得到形状相同的图形．







下列各组图形有什么共同的特征？你还能举出具有这样特征的图形吗？



形状相同的图形叫做**相似形**(similar figures).

在数学中，两个多边形具有怎样的特征才能说它们“形状相同”，称为相似多边形呢？



1. 图 6－5(1)中的两个正三角形的边和角分别有怎样的数量关系？图 6－5(2)中的两个三角形呢？

微信公众号：电子课本大全

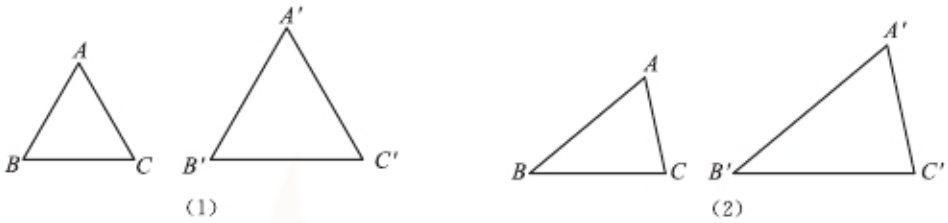


图 6－5



2. 图 6－6(1)中的两个正方形的边和角分别有怎样的数量关系？图 6－6(2)中的两个四边形呢？

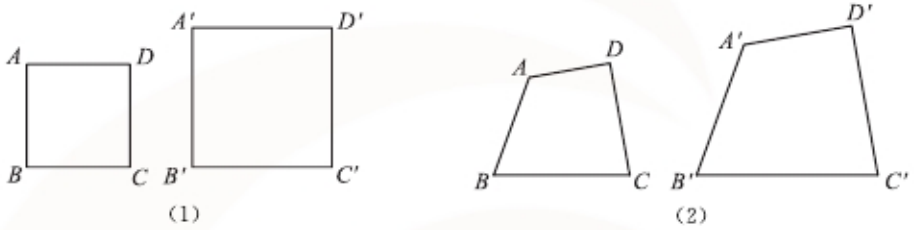
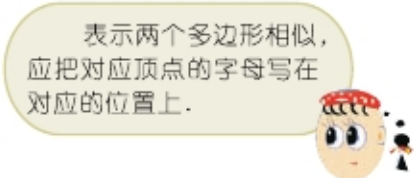


图 6－6



如图 6－5，在$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$中，$\angle A=\angle A'$、$\angle B=\angle B'$、$\angle C=\angle C'$、$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{CA}{C'A'}$；如图 6－6，在四边形 $ABCD$ 与四边形 $A'B'C'D'$ 中，$\angle A=\angle A'$、$\angle B=\angle B'$、$\angle C=\angle C'$、$\angle D=\angle D'$、$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{CD}{C'D'}=\dfrac{DA}{D'A'}$. 像这样，各角分别相等、各边成比例的两个多边形，它们的形状相同，称为**相似多边形**(similar polygons).

在图 6－5 中，$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$相似，记作“$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$”，读作“$\triangle ABC$相似于$\triangle A'B'C'$”；在图 6－6 中，四边形 $ABCD$ 与四边形 $A'B'C'D'$相似，记作“四边形 $ABCD\backsim$四边形$A'B'C'D'$”，读作“四边形 $ABCD$ 相似于四边形 $A'B'C'D'$”.



微信公众号：电子课本大全

相似多边形的对应角相等，对应边成比例．相似多边形的对应边的比叫做**相似比**(similarity ratio)．



图 6－7(1) 中的两个矩形是相似多边形吗？为什么？图 6－7(2) 中的两个菱形呢？

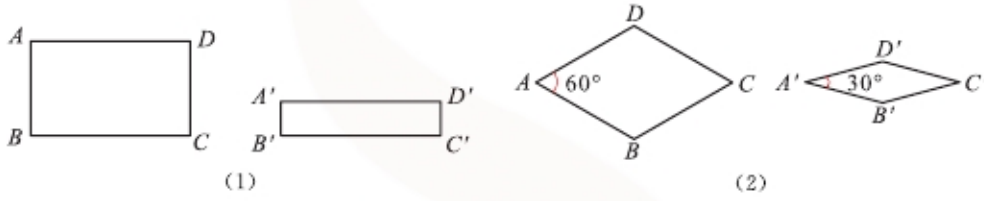
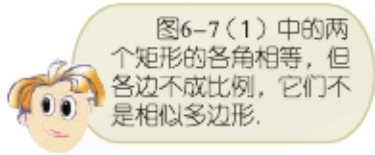
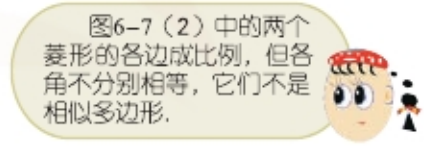


图 6－7





例 1　如图 6－8，已知$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$．求$\angle\alpha$的大小和$A'C'$的长．



图 6－8

解：因为$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，

所以它们的对应角相等，对应边成比例．

由此，得

$$\angle\alpha=\angle A=60°,$$

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'},\ A'C'=\frac{AC\cdot A'B'}{AB}=\frac{10\times 6}{8}=7.5.$$

例 2　如图 6－9，D、E、F 分别是$\triangle ABC$三边的中点．$\triangle DEF$与$\triangle ABC$相似吗？为什么？

分析：判定两个三角形相似，需要知道它们的各角分别相等，各边成比例．

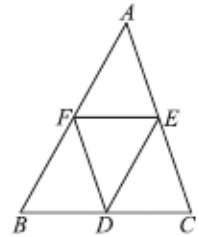


图 6－9

微信公众号：电子课本大全

解：由三角形中位线的性质，知

$EF \parallel BC$，$DE \parallel AB$，$DF \parallel AC$；

$EF = \frac{1}{2}BC$，$DE = \frac{1}{2}AB$，$DF = \frac{1}{2}AC$.

于是，在$\square AFDE$、$\square BDEF$、$\square CEFD$中，

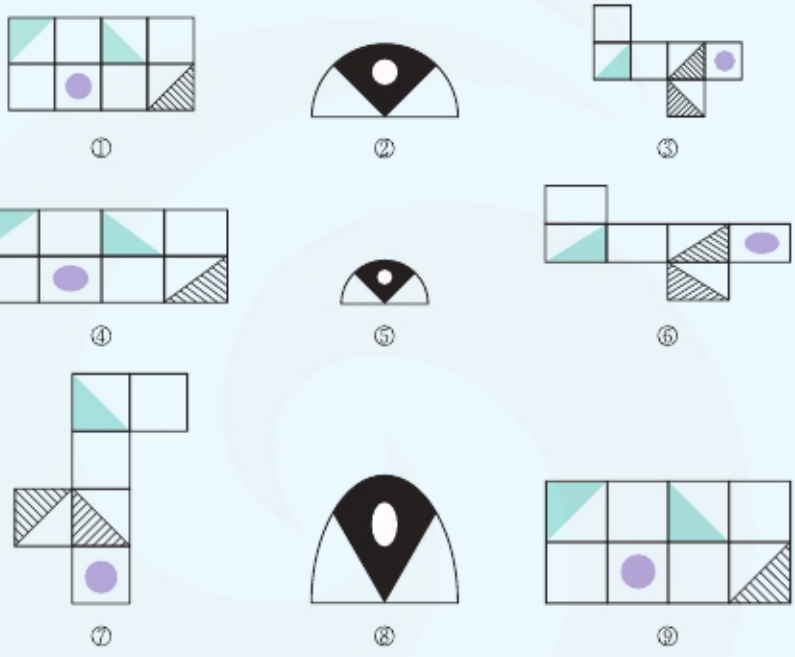
$\angle EDF = \angle A$，$\angle DEF = \angle B$，$\angle DFE = \angle C$.

又因为 $\frac{EF}{BC} = \frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} = \frac{1}{2}$，

所以 $\triangle DEF \backsim \triangle ABC$.

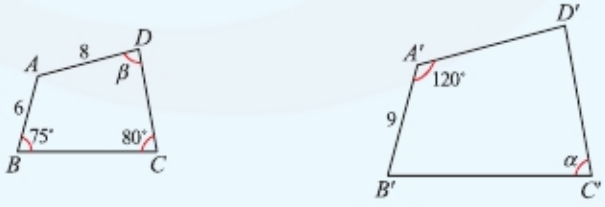


1. 在图④～⑨中，找出分别与图①、图②、图③相似的图形.



（第 1 题）

2. 如图，四边形 $ABCD$∽四边形 $A'B'C'D'$. 求$\angle\alpha$、$\angle\beta$的大小和 $A'D'$的长.

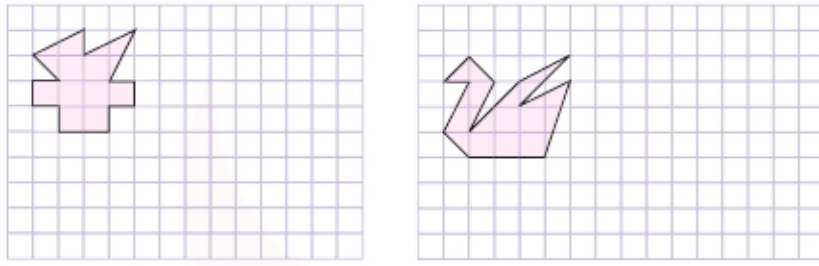


（第 2 题）

微信公众号：电子课本大全

6.3 习题

1. 在方格纸中分别画出与下列图形相似的图形．



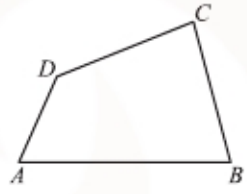
（第 1 题）

2. $\triangle ABC$ 的三条边的长分别为 4、5、6，与 $\triangle ABC$ 相似的 $\triangle A'B'C'$ 的最长边的长为 18．求 $\triangle A'B'C'$ 的最短边的长．

3. （1）所有的等腰三角形都相似吗？为什么？

（2）所有的直角三角形都相似吗？所有的等腰直角三角形呢？为什么？

4. 如图，在四边形 $ABCD$ 的边 AB 上任取一点 O（不与点 A、B 重合），连接 OC、OD，分别取 OA、OB、OC、OD 的中点 A'、B'、C'、D'，连接 $A'D'$、$D'C'$、$C'B'$．四边形 $A'B'C'D'$ 与四边形 $ABCD$ 相似吗？为什么？



（第 4 题）

微信公众号：电子课本大全

6.4 探索三角形相似的条件

我们知道，两个相似三角形的对应角相等，对应边成比例．反过来，当两个三角形具备几对角相等或几对边成比例的条件时，它们就相似呢？



1．在练习本上，先画 3 条互相平行的直线 l_1、l_2、l_3，再任意画 2 条直线 a、b，使 a、b 与 l_1、l_2、l_3 分别相交于点 A、B、C 和点 D、E、F（如图 6－10）．

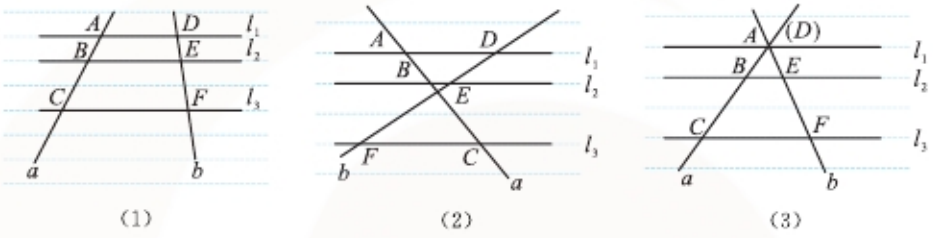


图 6－10

2．度量所画图中 AB、BC、DE、EF 的长度，并计算对应线段的比值．你有什么发现？请与同学交流．



在练习本上，画 4 条、5 条……互相平行的直线，重复上面的过程，你发现的结论还成立吗？

实践告诉我们一个**基本事实**：

两条直线被一组平行线所截，所得的对应线段成比例．

微信公众号：电子课本大全

例 1　如图 6－11，在△ABC 中，点 D、E 分别在 AB、AC 上，且 $DE \parallel BC$．试说明△ADE 与△ABC 相似的理由．

分析： 由题意知，在△ADE 和△ABC 中，各角分别相等，且 $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$，要说明△$ADE$∽△$ABC$，只需要 $\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}$．为此，把 DE 平移到 FC 的位置（作 $DF \parallel AC$，交 BC 于点 F）就可以了．

解： 过点 D 作 $DF \parallel AC$，交 BC 于点 F．

∵ $DE \parallel BC$，$DF \parallel AC$，

∴ $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$，$\frac{AD}{AB}=\frac{FC}{BC}$（两条直线被一组平行线所截，所得的对应线段成比例）．

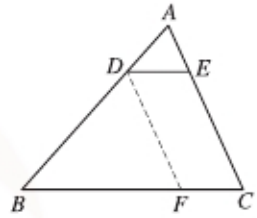


图 6－11

∵ 四边形 $DFCE$ 是平行四边形，

∴ $DE = FC$．

∴ $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$．

∵ $DE \parallel BC$，

∴ $\angle ADE = \angle B$，$\angle AED = \angle C$．

又∵ $\angle DAE = \angle BAC$，

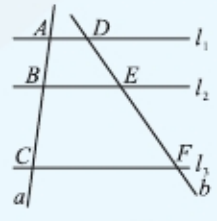
∴ △ADE ∽ △ABC．

由例 1，我们得到如下结论：

平行于三角形一边的直线与其他两边相交，所截得的三角形与原三角形相似．



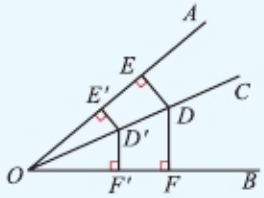
1. 如图，$l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$，直线 a、b 与 l_1、l_2、l_3 分别相交于点 A、B、C 和点 D、E、F．设 $AB = 3$，$BC = 5$，$DE = 4$，求 EF 的长．



（第 1 题）

微信公众号：电子课本大全

2. 如图，OC 是 $\angle AOB$ 内的一条射线，点 D、D' 在 OC 上，过点 D、D' 分别作 OA、OB 的垂线，垂足分别为 E、E' 和 F、F'.



（第 2 题）

（1）图中有几对相似三角形？是哪几对？

（2）$\frac{DE}{D'E'}$ 与 $\frac{DF}{D'F'}$ 相等吗？为什么？



如图 6－12，已知 $\angle\alpha$、$\angle\beta$.

作 $\triangle ABC$，使 $\angle A=\angle\alpha$，$\angle B=\angle\beta$. 这样的三角形可以作多少个？它们都相似吗？

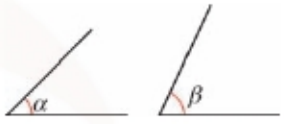


图 6－12

如图 6－13，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中，$\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$.

我们可以用如下方法证实 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$：

平移 $\triangle A'B'C'$，使点 A' 与点 A 重合，$A'B'$ 落在 AB 上（假设 $AB>A'B'$）. 由 $\angle A'=\angle A$，可知 $A'C'$ 落在 AC 上（如图 6－14）.

又由 $\angle AB'C'=\angle B$，可知 $B'C'\ /\!/\ BC$.

这样，根据本节例 1 所得的结论，可得 $\triangle ABC\backsim\triangle AB'C'$.

因为平移 $\triangle A'B'C'$ 不改变它的形状、大小，所以 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

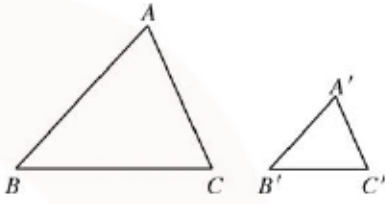


图 6－13

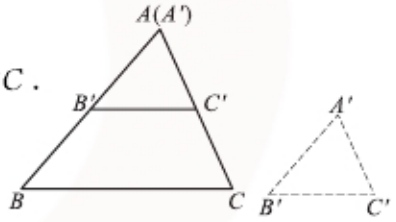


图 6－14

于是，我们得到如下定理：

两角分别相等的两个三角形相似.

例 2 如图 6－15，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中，$\angle A=50°$，$\angle B=\angle B'=60°$，$\angle C'=70°$. $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 相似吗？为什么？

微信公众号：电子课本大全

解： $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 相似．

在 $\triangle ABC$ 中，

$\because \angle A = 50°, \angle B = 60°,$

$\therefore \angle C = 180° - (50° + 60°) = 70°.$

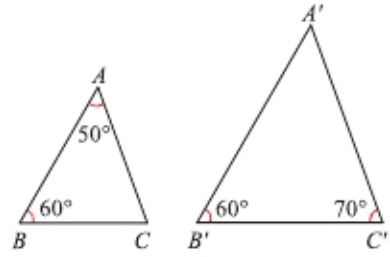


图 6－15

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中，

$\because \angle B = \angle B', \angle C = \angle C',$

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$（两角分别相等的两个三角形相似）.

例 3　如图 6－16，在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，点 D、E 分别在 BC、AB 上，且 $\angle BDE = \angle CAD$．$\triangle ADE$ 与 $\triangle ABD$ 相似吗？为什么？

分析： 在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle ABD$ 中，$\angle DAB$ 是公共角，如果 $\angle ADE = \angle B$（或 $\angle AED = \angle ADB$），那么这两个三角形就相似．

解： $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABD$ 相似．

$\because \angle ADB = \angle ADE + \angle BDE,$

$\angle ADB = \angle CAD + \angle C,$

$\angle BDE = \angle CAD,$

$\therefore \angle ADE = \angle C.$

又 $\because AB = AC,$

$\therefore \angle B = \angle C.$

$\therefore \angle ADE = \angle B.$

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle ABD$ 中，

$\because \angle DAE = \angle BAD, \angle ADE = \angle B,$

$\therefore \triangle ADE \backsim \triangle ABD$（两角分别相等的两个三角形相似）.



图 6－16

微信公众号：电子课本大全

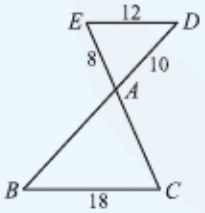


1. 在△ABC和△$A'B'C'$中，$\angle A=\angle A'$，$\dfrac{AB}{A'B'}=k$，$\angle B=\angle B'$.

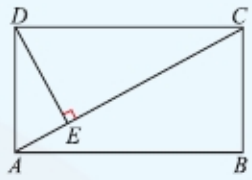
（1）当 $k=1$ 时，△ABC与△$A'B'C'$有怎样的关系？

（2）当 $k\neq 1$ 时，△ABC与△$A'B'C'$有怎样的关系？

2. 如图，$BC\ //\ ED$，计算 AB、AC 的长.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 在矩形 $ABCD$ 中，$DE\perp AC$，垂足为 E. 图中有哪些三角形与△ABC相似？为什么？



如图 6－17，已知△ABC.

作△$A'B'C'$，使 $\angle A'=\angle A$，$\dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{A'C'}{AC}=\dfrac{1}{2}$. 所作的△$A'B'C'$与△$ABC$相似吗？

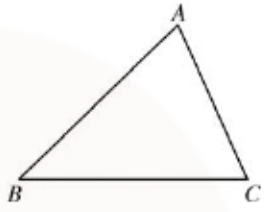


图 6－17

设 $\dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{A'C'}{AC}=k$，改变 k 值的大小，再试一试.

如图 6－18，在△ABC和△$A'B'C'$中，$\angle A=\angle A'$，$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}$.

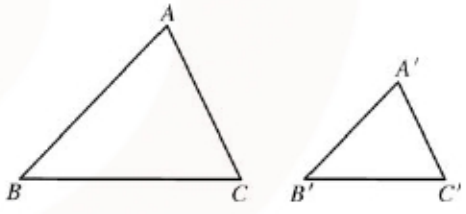


图 6－18

我们可以用如下方法证实△$ABC\backsim$△$A'B'C'$：

在 AB 上截取 $AB''=A'B'$（假设 $AB>A'B'$），过点 B'' 作 $B''C''\ //\ BC$，交 AC 于点 C''（如图 6－19）.

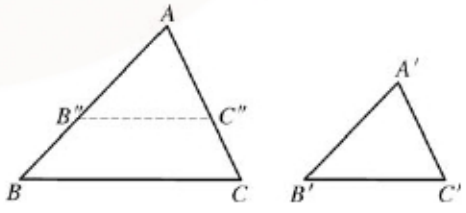


图 6－19

微信公众号：电子课本大全

根据本节例 1 所得的结论，可以知道 $\triangle ABC \backsim \triangle AB''C''$.

于是，$\dfrac{AB}{AB''} = \dfrac{AC}{AC''}$.

又由 $AB'' = A'B'$，$\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'}$，可得 $AC'' = A'C'$.

这样，$\triangle AB''C'' \cong \triangle A'B'C'$，$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

于是，我们得到如下定理：

两边成比例且夹角相等的两个三角形相似.

例 4　如图 6－20，点 D 在$\triangle ABC$ 内，点 E 在$\triangle ABC$ 外，且 $\angle 1 = \angle 2$，$\angle 3 = \angle 4$. $\triangle DBE$ 与$\triangle ABC$ 相似吗？为什么？

分析： 在$\triangle DBE$ 和$\triangle ABC$ 中，易知$\angle DBE = \angle ABC$. 如果$\dfrac{BD}{AB} = \dfrac{BE}{BC}$，那么这两个三角形就相似.

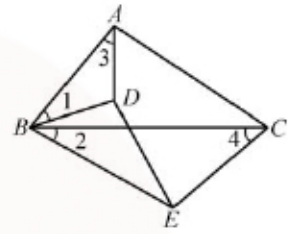


图 6－20

解： $\triangle DBE$ 与$\triangle ABC$ 相似.

在$\triangle ABD$ 和$\triangle CBE$ 中，

$\because \angle 1 = \angle 2$，$\angle 3 = \angle 4$，

$\therefore \triangle ABD \backsim \triangle CBE$（两角分别相等的两个三角形相似）.

$\therefore \dfrac{BD}{AB} = \dfrac{BE}{BC}$（相似三角形的对应边成比例）.

又 $\because \angle 2 = \angle 1$，

$\therefore \angle DBE = \angle ABC$.

在$\triangle DBE$ 和$\triangle ABC$ 中，

$\because \dfrac{BD}{AB} = \dfrac{BE}{BC}$，$\angle DBE = \angle ABC$，

$\therefore \triangle DBE \backsim \triangle ABC$（两边成比例且夹角相等的两个三角形相似）.



如图 6－21，在$\triangle ABC$ 中，$AB = 4$，$AC = 2$.

（1）试在 AB 上确定点 D 的位置，使 $\triangle ACD \backsim \triangle ABC$；

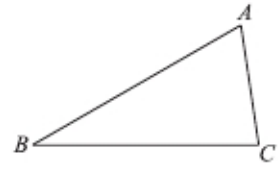


图 6－21

微信公众号：电子课本大全

(2) 试在 AC 的延长线上确定点 E 的位置，使 $\triangle AEB \backsim \triangle ABC$. 此时，$BE$ 与 DC 有怎样的位置关系？为什么？

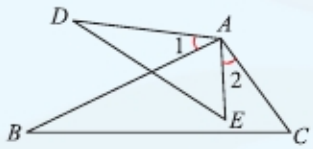


1. 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中，$\angle A = \angle A'$，$\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = k$.

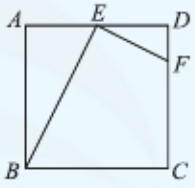
   (1) 当 $k = 1$ 时，$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 有怎样的关系？

   (2) 当 $k \neq 1$ 时，$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 有怎样的关系？

2. 如图，$\angle 1 = \angle 2$. 要使 $\triangle ABC \backsim \triangle ADE$，还需要添加什么条件？



(第 2 题)



(第 3 题)

3. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，E 是 AD 的中点，点 F 在 CD 上，且 $CF = 3FD$. $\triangle ABE$ 与 $\triangle DEF$ 相似吗？为什么？



如图 6－22，已知 $\triangle ABC$.

作 $\triangle A'B'C'$，使 $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{C'A'}{CA} = \dfrac{1}{2}$. 所作的 $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 相似吗？



图 6－22

设 $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{C'A'}{CA} = k$，改变 k 值的大小，再试一试.

如图 6－23，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中，$\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CA}{C'A'}$.

我们可以用如下方法证实 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$：

在 AB 上截取 $AB'' = A'B'$（假设 $AB > A'B'$），过点 B'' 作 $B''C'' /\!/ BC$，交 AC 于点 C''（如图 6－24）.

微信公众号：电子课本大全

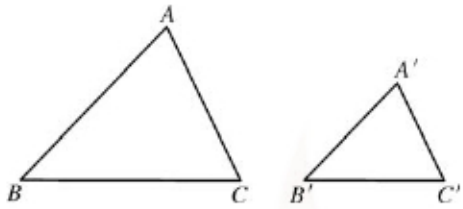


图 6－23

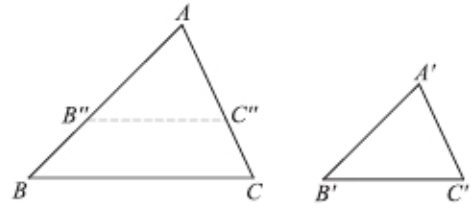


图 6－24

根据本节例 1 所得的结论，可以知道 $\triangle ABC \backsim \triangle AB''C''$.

于是，$\dfrac{AB}{AB''} = \dfrac{BC}{B''C''} = \dfrac{CA}{C''A}$.

又由 $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CA}{C'A'}$，$AB'' = A'B'$，

可得 $B''C'' = B'C'$，$C''A = C'A'$.

这样，$\triangle AB''C'' \cong \triangle A'B'C'$，$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

于是，我们得到如下定理：

三边成比例的两个三角形相似.

例 5　如图 6－25，在四边形 $ABCD$ 中，AC、BD 相交于点 F，点 E 在 BD 上，且 $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{BC}{ED} = \dfrac{AC}{AD}$.

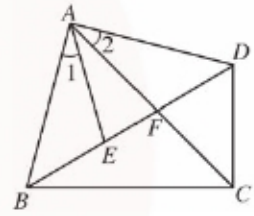


图 6－25

（1）$\angle 1$ 与 $\angle 2$ 相等吗？为什么？

（2）判断 $\triangle ABE$ 与 $\triangle ACD$ 是否相似，并说明理由.

解：（1）$\angle 1$ 与 $\angle 2$ 相等.

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle AED$ 中，

$\because \dfrac{AB}{AE} = \dfrac{BC}{ED} = \dfrac{AC}{AD}$，

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle AED$（三边成比例的两个三角形相似）.

$\therefore \angle BAC = \angle EAD$（相似三角形的对应角相等）.

$\therefore \angle 1 = \angle 2$.

微信公众号：电子课本大全

(2) $\triangle ABE$ 与 $\triangle ACD$ 相似.

由 $\frac{AB}{AE}=\frac{AC}{AD}$，得

$\frac{AB}{AC}=\frac{AE}{AD}$.

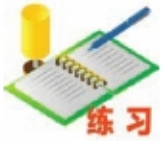
在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ACD$ 中，

$\because \frac{AB}{AC}=\frac{AE}{AD}$，$\angle 1=\angle 2$，

$\therefore \triangle ABE\backsim\triangle ACD$(两边成比例且夹角相等的两个三角形相似).



在图 6－25 中，还有哪几对相似三角形？把它们分别表示出来，并说明理由.



1. 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中，$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}=k$.

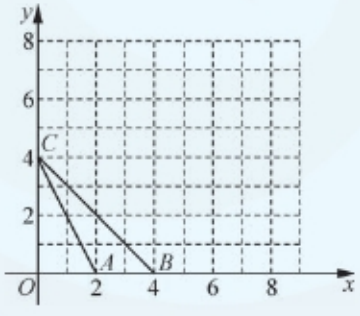
   (1) 当 $k=1$ 时，$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 有怎样的关系？

   (2) 当 $k\neq 1$ 时，$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 有怎样的关系？

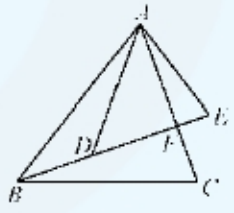
2. 如图，在平面直角坐标系中，$\triangle ABC$ 的顶点坐标为 $A(2,0)$、$B(4,0)$、$C(0,4)$，将各顶点的横坐标、纵坐标都乘 2，得相应的点 A'、B'、C' 的坐标.

   (1) 画 $\triangle A'B'C'$；

   (2) $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 相似吗？为什么？



(第 2 题)



(第 3 题)

3. 如图，点 B、D、E 在一条直线上，BE 交 AC 于点 F，$\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{DE}=\frac{AC}{AE}$. $\angle BAD$ 与 $\angle EBC$ 相等吗？为什么？

微信公众号：电子课本大全

例 6　如图 6－26，在△ABC 中，$AB = AC$，点 D 在 BC 上，AD 的延长线交 △ABC 的外接圆于点 E．△ABE 与 △CDE 相似吗？为什么？

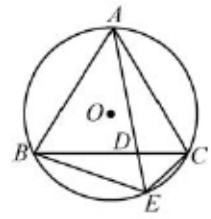


图 6－26

解：△ABE 与△CDE 相似．

∵ $AB = AC$，

∴ $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC}$，

∴ $\angle AEB = \angle AEC$．

在△ABE 和△CDE 中，

∵ $\angle AEB = \angle DEC$，$\angle BAE = \angle DCE$，

∴ △ABE ∽ △CDE（两角分别相等的两个三角形相似）．



在图 6－26 中，还有哪几对相似三角形？把它们分别表示出来，并说明理由．



在七年级，我们通过观察、操作，发现三角形的三条中线相交于一点．你能运用相似形的有关知识证实这个结论吗？



如图 6－27，△ABC 的中线 BE、CF 相交于点 G，连接 EF，则 $FE \parallel BC$，$FE = \frac{1}{2}BC$．这样，由△GEF∽△GBC，可得 $GE = \frac{1}{2}GB$．

微信公众号：电子课本大全

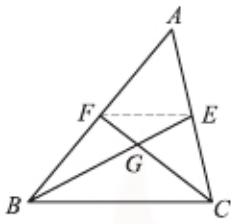


图 6－27

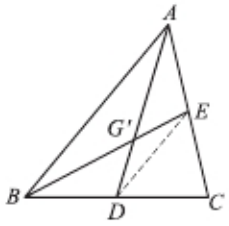


图 6－28

如图 6－28，AD 是△ABC 的另一条中线，设 AD 与 BE 相交于点 G'，连接 DE，同样可得△$G'DE$∽△$G'AB$，$G'E=\frac{1}{2}G'B$.

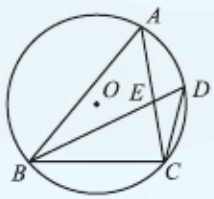
于是，点 G' 与点 G 重合，三角形的三条中线相交于一点．

三角形的三条中线相交于一点，这点叫做**三角形的重心**（barycenter of a triangle）.

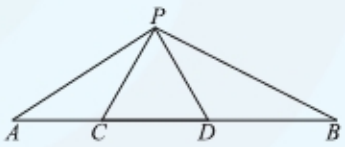
重心是物理学中的一个概念．物理学告诉我们：一个物体的各个部分都受到重力的作用，从效果看，可以认为各部分受到的重力作用集中于一点，这点叫做物体的重心．如果我们用一根手指顶在一块质地均匀的三角形薄板的重心处，这块薄板就能保持平衡．



1. 如图，△ABC 是⊙O 的内接三角形，D 是$\overset{\frown}{AC}$的中点，BD 交 AC 于点 E．△CDE 与△BDC 相似吗？为什么？



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，在△PAB 中，点 C、D 在 AB 上，且 $PC=PD=CD$，$\angle APB=120°$．△APC 与△PBD 相似吗？为什么？

微信公众号：电子课本大全

读一读

直觉的误导

在七年级下册“12.2　证明”一节中，我们做过如下实验：

图 12－4(1)是一张 8×8 的正方形纸片，把它剪成 4 块，按图 12－4(2)重新拼合．

这 4 块纸片恰好能拼成一个长为 13、宽为 5 的长方形吗？

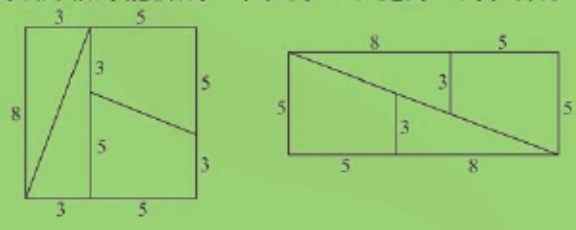
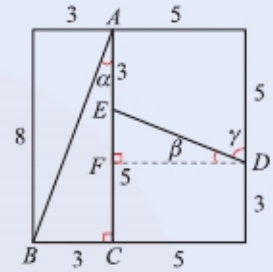


图 12－4

现在，我们用反证法证实图(2)不是长方形．

如图(3)，过点 D 作 $DF\perp AC$，垂足为 F．假设图(2)是长方形，那么图(2)的右下角就应是直角．于是，在图(3)中，有 $\angle\alpha+\angle\gamma=90^\circ$．又 $\angle\beta+\angle\gamma=90^\circ$，这样 $\angle\alpha=\angle\beta$，$\mathrm{Rt}\triangle DEF\backsim\mathrm{Rt}\triangle ABC$，$\dfrac{EF}{BC}=\dfrac{DF}{AC}$，即 $\dfrac{2}{3}=\dfrac{5}{8}$，这是不可能的，因而图(2)不是长方形．



(3)

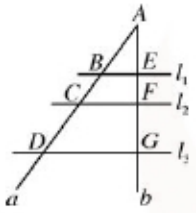
由于 $\dfrac{2}{3}-\dfrac{5}{8}=\dfrac{1}{24}$，这个差很小，因此造成了我们视觉上的误差．

这个例子说明：对于数学结论，完全凭借直觉判断是不行的，还需要通过推理加以证实．

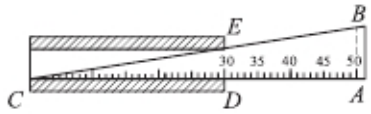
微信公众号：电子课本大全

6.4 习题

1. 如图，$l_1 // l_2 // l_3$，过点 A 的直线 a、b 分别与 l_1、l_2、l_3 相交于点 B、C、D 和点 E、F、G. 图中有几对相似三角形？是哪几对？



（第 1 题）



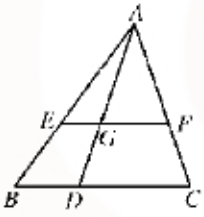
（第 2 题）

2. 如图，刻度尺的分度值为 1 mm. 如果玻璃管的内径 DE 正对“30”刻度线（$DE // AB$），且量得 AB 长 7 mm，那么 DE 的长为多少？如果 DE 正对“35”刻度线呢？

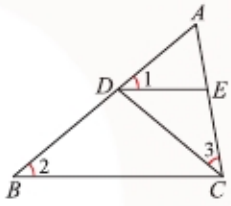
3. 如图，在△ABC 中，点 D、E、F 分别在 BC、AB、AC 上，$EF // BC$，交 AD 于点 G.

（1）图中有几对相似三角形？是哪几对？

（2）$\dfrac{EG}{BD}$ 与 $\dfrac{FG}{CD}$ 相等吗？为什么？



（第 3 题）



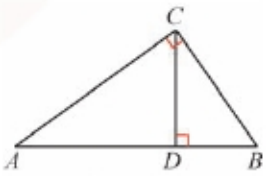
（第 4 题）

4. 如图，在△ABC 中，点 D、E 分别在 AB、AC 上，且 $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$. 图中有几对相似三角形？是哪几对？

5. 如图，在△ABC 中，$\angle ACB = 90°$，$CD \perp AB$，垂足为 D.

（1）△ACD 与△CBD 相似吗？为什么？

（2）图中还有几对相似三角形？是哪几对？



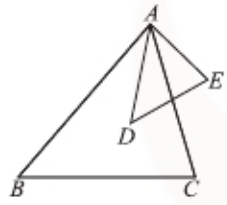
（第 5 题）

微信公众号：电子课本大全

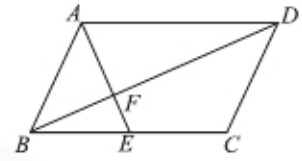
6. 如图，$\angle BAD = \angle CAE$，$\angle B = \angle D$.

（1）$\triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 相似吗？为什么？

（2）如果 $AB = 2AD$，$BC = 4$，那么 DE 的长为多少？



（第 6 题）

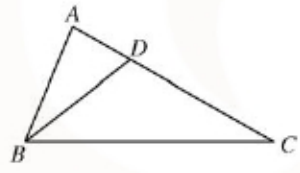


（第 7 题）

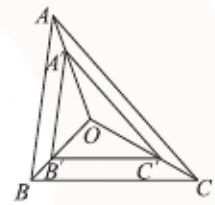
7. 如图，在 $\square ABCD$ 中，E 是 BC 的中点，AE 交 BD 于点 F. 求 $\dfrac{AF}{EF}$ 的值.

8. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB = 6$，$AC = 8$，$\angle A = 50°$；在 $\triangle DEF$ 中，$DE = 12$，$\angle D = 50°$. 试确定 DF 的长，使 $\triangle ABC \backsim \triangle DEF$.

9. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在 AC 上，且 $AB^2 = AD \cdot AC$. $\angle ABD$ 与 $\angle C$ 是否相等？为什么？



（第 9 题）



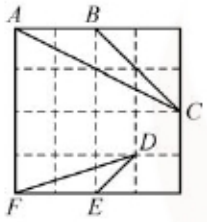
（第 10 题）

10. 如图，O 是 $\triangle ABC$ 内的一点，点 A'、B'、C' 分别在线段 OA、OB、OC 上，且 $\triangle OA'B' \backsim \triangle OAB$，$\triangle OB'C' \backsim \triangle OBC$. $\triangle OA'C'$ 与 $\triangle OAC$ 相似吗？为什么？

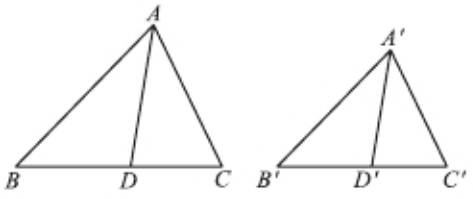
11. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB = 8$，$AC = 6$；在 $\triangle DEF$ 中，$DE = 4$，$DF = 3$. 当 BC 与 EF 的比值为多少时，$\triangle ABC \backsim \triangle DEF$？

微信公众号：电子课本大全

12. 如图，$\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的顶点都在边长为 1 的小正方形的顶点上．$\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 相似吗？为什么？



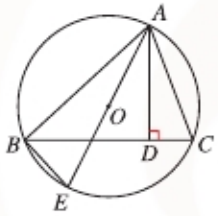
（第 12 题）



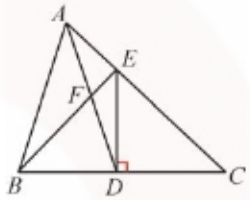
（第 13 题）

13. 如图，AD、$A'D'$ 分别是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的角平分线，且 $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BD}{B'D'}=\dfrac{AD}{A'D'}$．判断 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 是否相似，并说明理由．

14. 如图，$\triangle ABC$ 是 $\odot O$ 的内接三角形，AD 是 $\triangle ABC$ 的高，AE 是 $\odot O$ 的直径．$\triangle ABE$ 与 $\triangle ADC$ 相似吗？为什么？



（第 14 题）



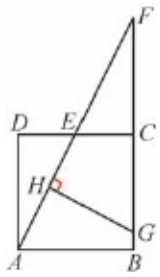
（第 15 题）

15. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，BC 的垂直平分线分别交 BC、AC 于点 D、E，BE 交 AD 于点 F，$AB=AD$.

(1) 判断 $\triangle FDB$ 与 $\triangle ABC$ 是否相似，并说明理由．

(2) AF 与 DF 相等吗？为什么？

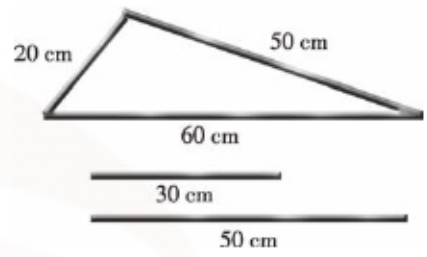
16. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 8，E 是 CD 的中点，AE、BC 的延长线相交于点 F，AE 的垂直平分线分别交 AE、BC 于点 H、G．求 FG 的长．



（第 16 题）

微信公众号：电子课本大全

17. 如图，一个三角形钢筋框架的三边长分别为 20 cm、50 cm、60 cm，要再做一个与它相似的三角形钢筋框架．现有长分别为 30 cm、50 cm 的两根钢筋，要求以其中的一根为一边，从另一根上截下两段（允许有余料）作为另外两边，你认为有几种不同的截法？



（第 17 题）

微信公众号：电子课本大全

6.5 相似三角形的性质

相似三角形除了具有对应角相等、对应边成比例的性质外，还具有什么性质？



如图 6－29，我们已经知道，当 D、E、F 分别是 $\triangle ABC$ 各边的中点时，$\triangle DEF \backsim \triangle ABC$，相似比为 $\frac{1}{2}$．这两个三角形的周长、面积分别有什么关系？

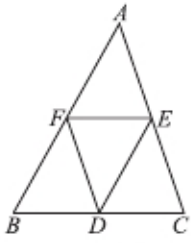
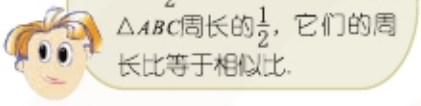
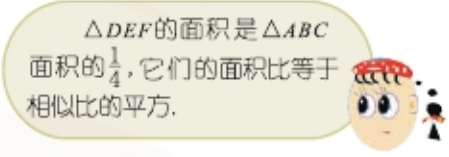


图 6－29





我们可以用如下的方法证实小明、小丽的猜想：

如果 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，相似比为 k，那么 $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{CA}{C'A'}=k$，$AB=kA'B'$，$BC=kB'C'$，$CA=kC'A'$．

所以 $\dfrac{AB+BC+CA}{A'B'+B'C'+C'A'}=\dfrac{kA'B'+kB'C'+kC'A'}{A'B'+B'C'+C'A'}=k$．

于是，我们得到如下定理：

相似三角形周长的比等于相似比．

类似地，我们还可以得到：

相似多边形周长的比等于相似比．

如图 6－30，$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，相似比为 k，AD、$A'D'$ 分别是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的高．

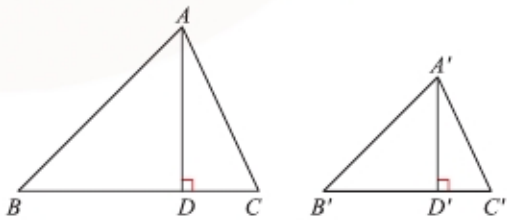


图 6－30

微信公众号：电子课本大全

由 $\angle B = \angle B'$，$\angle ADB = \angle A'D'B' = 90°$，可得 $\triangle ABD \backsim \triangle A'B'D'$，$\dfrac{AD}{A'D'} = \dfrac{AB}{A'B'} = k$，$AD = kA'D'$.

因为 $BC = kB'C'$，

所以 $\dfrac{\triangle ABC \text{ 的面积}}{\triangle A'B'C' \text{ 的面积}} = \dfrac{\frac{1}{2}BC \cdot AD}{\frac{1}{2}B'C' \cdot A'D'} = \dfrac{\frac{1}{2}kB'C' \cdot kA'D'}{\frac{1}{2}B'C' \cdot A'D'} = k^2$.

于是，我们得到如下定理：

相似三角形面积的比等于相似比的平方.

如果把两个相似多边形分成若干个相似的三角形，我们还可以得到：

相似多边形面积的比等于相似比的平方.

例 1　在比例尺为 1∶500 的地图上，测得三角形地块 ABC 的周长为 12 cm，面积为 6 cm^2. 求这个地块的实际周长和面积.

解： 如果把实际三角形地块记为 $\triangle A'B'C'$，那么 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，且相似比 $k = \dfrac{1}{500}$.

于是 $\dfrac{\triangle ABC \text{ 的周长}}{\triangle A'B'C' \text{ 的周长}} = \dfrac{1}{500}$（相似三角形周长的比等于相似比），

$\dfrac{\triangle ABC \text{ 的面积}}{\triangle A'B'C' \text{ 的面积}} = \left(\dfrac{1}{500}\right)^2$（相似三角形面积的比等于相似比的平方）.

$\therefore$ $\triangle A'B'C'$ 的周长 $= 12 \times 500 = 6\,000(\text{cm}) = 60\ \text{m}$，

$\triangle A'B'C'$ 的面积 $= 6 \times 500^2 = 1\,500\,000(\text{cm}^2) = 150\ \text{m}^2$.

答： 这个地块的实际周长为 60 m，面积为 150 m^2.

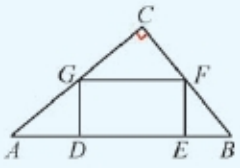
微信公众号：电子课本大全



1. 给形状相同且对应边的比为 1∶2 的两块多边形标牌的表面涂漆．如果小标牌用漆半听，那么大标牌需用漆多少听？

2. 两个相似多边形面积的比为 9∶16，其中较小的多边形的周长为 36 cm．求另一个多边形的周长．

3. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，矩形 $DEFG$ 的顶点 G、F 分别在 AC、BC 上，DE 在 AB 上．设 $AG=5$，$AD=4$，求 $\triangle ADG$ 与 $\triangle FEB$ 的面积的比．



（第 3 题）



在探索“相似三角形面积的比等于相似比的平方”的过程中，我们发现了“相似三角形对应高的比等于相似比”．类似地，相似三角形对应中线、对应角平分线等对应线段的比是否也等于相似比呢？

如图 6－31，如果 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，相似比为 k，AE、$A'E'$ 分别是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的中线，那么 $\dfrac{AE}{A'E'}=k$．

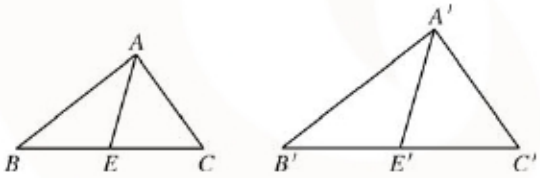
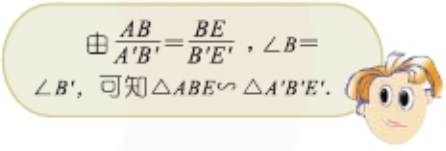


图 6－31



如图 6－32，如果 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，相似比为 k，AF、$A'F'$ 分别是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的角平分线，那么 $\dfrac{AF}{A'F'}=k$．

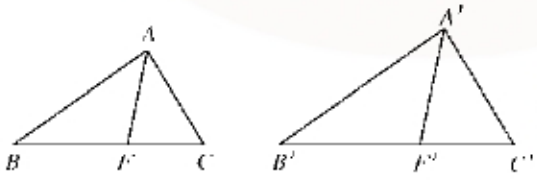
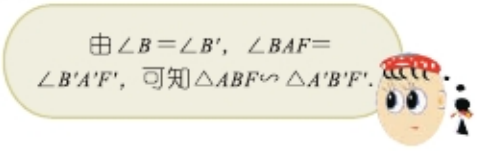


图 6－32



微信公众号：电子课本大全

如图 6－33，如果 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，相似比为 k，点 G、G' 分别在 BC、$B'C'$ 上，且 $\dfrac{BG}{B'G'}=k$，那么 $\dfrac{AG}{A'G'}=k$.

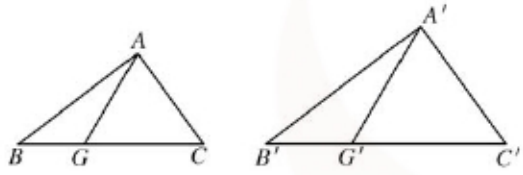
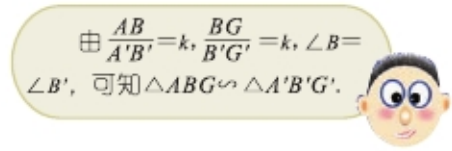


图 6－33



于是，我们得到如下定理：

相似三角形对应线段的比等于相似比．

例 2　如图 6－34，AF 是 $\triangle ABC$ 的高，点 D、E 分别在 AB、AC 上，且 $DE \parallel BC$，DE 交 AF 于点 G．设 $DE=6$，$BC=10$，$GF=5$，求点 A 到 DE、BC 的距离．

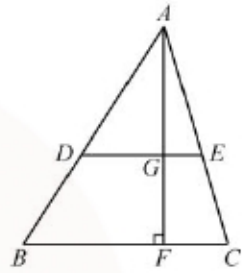


图 6－34

解： 由 $DE \parallel BC$，$\angle AFB=90°$，得

$\angle AGD=90°$，即 $AG \perp DE$.

可知 AG、AF 的长分别为点 A 到 DE、BC 的距离．

由 $DE \parallel BC$，得

$\angle ADE=\angle B$，$\angle AED=\angle C$.

于是，$\triangle ADE \backsim \triangle ABC$，$\dfrac{AG}{AF}=\dfrac{DE}{BC}$，即 $\dfrac{AG}{AG+5}=\dfrac{3}{5}$.

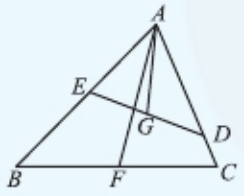
计算，得 $AG=7.5$，$AF=AG+5=12.5$，

即点 A 到 DE、BC 的距离分别为 7.5、12.5.

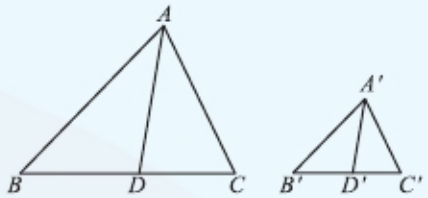
微信公众号：电子课本大全

练习

1. 如图，点 D、E 分别在 AC、AB 上，且 $\angle ADE = \angle B$，F、G 分别是 BC、DE 的中点．设 $AD = 3$，$AB = 5$，求 $\dfrac{AG}{AF}$ 的值．



（第 1 题）



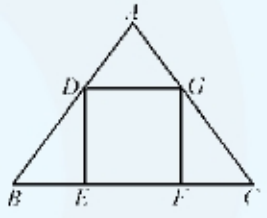
（第 2 题）

2. 如图，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中，AD、$A'D'$ 分别是 $\triangle ABC$、$\triangle A'B'C'$ 的角平分线，且 $AB = 2A'B'$，$AC = 2A'C'$，$\angle BAC = \angle B'A'C'$．求：

(1) $\dfrac{AD}{A'D'}$ 的值；

(2) $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的面积的比．

3. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，正方形 $DEFG$ 的顶点 D、G 分别在 AB、AC 上，EF 在 BC 上．设 $AB = 5$，$BC = 6$，求正方形 $DEFG$ 的边长．



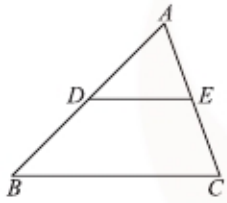
（第 3 题）

6.5 习题

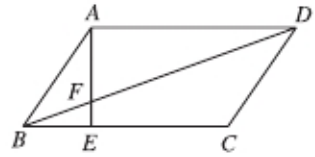
1. 在比例尺为 1∶5 000 的地图上，测得一个多边形地块的面积为 24 cm^2．求这个多边形地块的实际面积．

微信公众号：电子课本大全

2. 如图，在$\triangle ABC$中，点D、E分别在AB、AC上，且$DE \parallel BC$，$\triangle ADE$与四边形$DBCE$的面积的比为$1:3$. 求$\dfrac{AD}{AB}$的值.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，在$\square ABCD$中，E是BC上的3等分点，AE交BD于点F. 求：

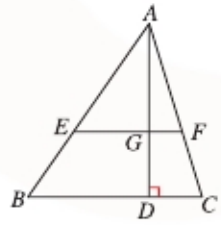
(1) $\dfrac{BF}{DF}$的值；

(2) $\triangle BEF$与$\triangle DAF$的周长的比、面积的比.

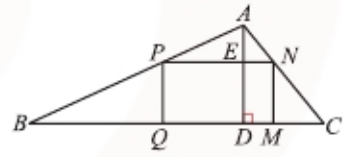
4. 如图，在$\triangle ABC$中，AD是高，点E、F分别在AB、AC上，且$EF \parallel BC$，EF交AD于点G，$\dfrac{EF}{BC}=\dfrac{3}{5}$. 求：

(1) $\dfrac{AG}{AD}$的值；

(2) $\triangle AEF$与$\triangle ABC$的面积的比.



（第 4 题）



（第 5 题）

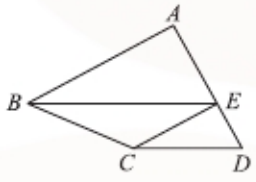
5. 如图，在$\triangle ABC$中，AD是高，矩形$PQMN$的顶点P、N分别在AB、AC上，QM在BC上，AD交PN于点E. 设$BC=48$，$AD=16$，$PQ:PN=5:9$，求矩形$PQMN$的面积.

微信公众号：电子课本大全

6. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，点 E 在 AD 上，且 $EC \parallel AB$，$EB \parallel DC$.

(1) $\triangle ABE$ 与 $\triangle ECD$ 相似吗？为什么？

(2) 设 $\triangle ABE$ 的边 BE 上的高为 h_1，$\triangle ECD$ 的边 CD 上的高为 h_2，$\triangle ABE$ 的面积为 3，$\triangle ECD$ 的面积为 1，求 $\frac{h_1}{h_2}$ 的值以及 $\triangle BCE$ 的面积.



(第 6 题)

微信公众号：电子课本大全

6.6　图形的位似

在玻璃片上画一个三角形，使玻璃片与墙面平行，用点光源（如手电筒光源）把三角形投影到墙面上（如图 6－35）．你发现了什么？

保持玻璃片与墙面平行，将玻璃片前后移动，你又能发现什么？

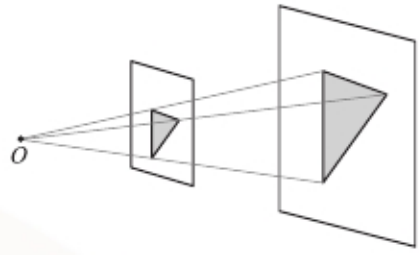


图 6－35



1．在图 6－36(1)中，连接 OA、OB、OC，分别在线段 OA、OB、OC 的反向延长线上取点 A'、B'、C'，使 $\dfrac{OA'}{OA}=\dfrac{OB'}{OB}=\dfrac{OC'}{OC}=2$；画 $\triangle A'B'C'$．

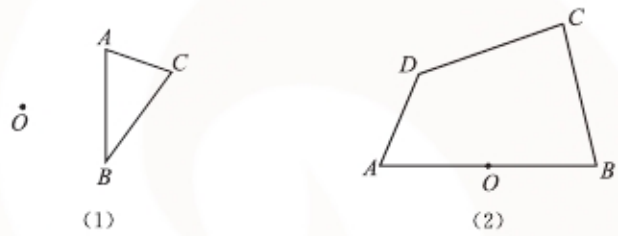
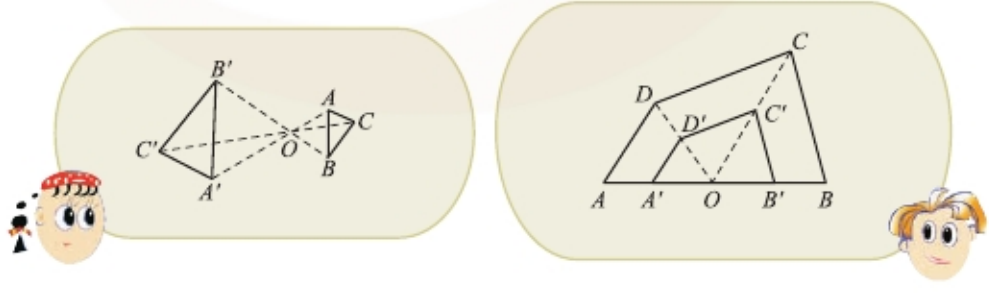


图 6－36

2．在图 6－36(2)中，连接 OC、OD，分别在线段 OA、OB、OC、OD 上取点 A'、B'、C'、D'，使 $\dfrac{OA'}{OA}=\dfrac{OB'}{OB}=\dfrac{OC'}{OC}=\dfrac{OD'}{OD}=\dfrac{1}{2}$；画四边形 $A'B'C'D'$．



微信公众号：电子课本大全

如图 6－37，两个多边形的顶点 A 与 A'、B 与 B'、C 与 C'……所在的直线都经过同一点 O，并且 $\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=\frac{OC'}{OC}=$……像这样的两个多边形叫做**位似多边形**(homothetic polygons)，点 O 叫做位似中心．

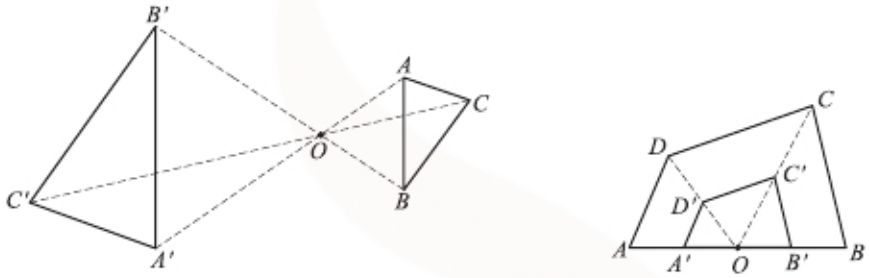
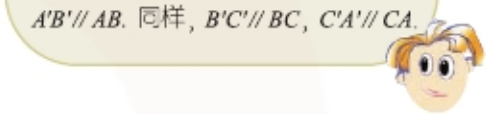


图 6－37



1．在图 6－37(1)中，$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 是位似形，这两个三角形相似吗？它们的对应边有怎样的位置关系？为什么？





2．在图 6－37(2)中，四边形 $ABCD$ 与四边形 $A'B'C'D'$ 是位似形，这两个四边形相似吗？它们的对应边有怎样的位置关系？为什么？

两个位似多边形一定相似，并且它们的对应边互相平行(或在同一条直线上)．

利用位似可以把一个图形按所给相似比放大或缩小．



1．在图 6－38 中，以点 O 为位似中心，把 $\triangle ABC$ 按相似比 2∶1 放大(即所画图形与原图形的相似比为 2∶1)．

微信公众号：电子课本大全

2. 在图 6－39 中，以点 O 为位似中心，把四边形 $ABCD$ 按相似比 1∶2 缩小.

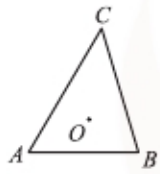


图 6－38

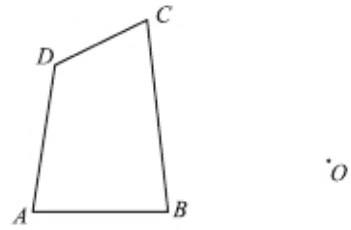


图 6－39



如图 6－40，在平面直角坐标系中，$\triangle OAB$ 的顶点坐标分别为 $O(0,\ 0)$、$A(5,\ 4)$、$B(3,\ 0)$，分别将点 A、B 的横坐标、纵坐标都乘 2，得相应的点 A'、B' 的坐标.

(1) 画 $\triangle OA'B'$；

(2) $\triangle OA'B'$ 与 $\triangle OAB$ 是位似形吗？为什么？

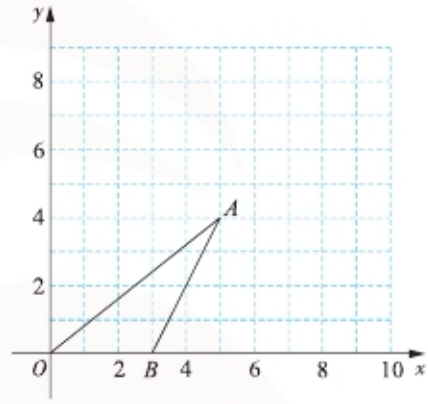


图 6－40



在平面直角坐标系中，

(1) 取横坐标、纵坐标都是整数的 4 个点，画出以这 4 个点为顶点的四边形 $ABCD$；

(2) 以坐标原点为位似中心，把四边形 $ABCD$ 按相似比 2∶1 放大，得四边形 $A'B'C'D'$；

(3) 四边形 $A'B'C'D'$ 的顶点坐标与四边形 $ABCD$ 的顶点坐标有怎样的数量关系？

微信公众号：电子课本大全

阅读

特殊—一般—特殊

我们知道，在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，如果

(1) $\angle A=\angle A'$，$\dfrac{AB}{A'B'}=k$，$\angle B=\angle B'$，

(2) $\angle A=\angle A'$，$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}=k$，

(3) $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{CA}{C'A'}=k$，

那么当$k=1$时，$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$；当$k\neq 1$时，$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

可见，全等形是特殊的相似形.

位似形不仅相似，而且具有“对应边互相平行(或在同一条直线上)，对应顶点所在直线相交于一点”的特殊位置关系. 可见，位似形是特殊的相似形.

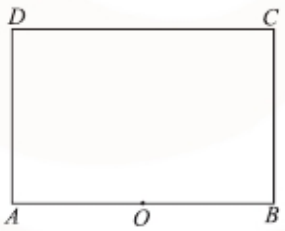
对全等形、相似形、位似形的研究，我们经历了“由特殊到一般，再由一般到特殊”的认识过程. 利用“特殊”与“一般”的关系，常常可以探索、发现、证实结论. 你能举例说明吗？

6.6 习题

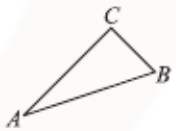
1. 根据下列要求画图：

(1) 如图①，以AB的中点O为位似中心，把矩形$ABCD$按相似比1∶2缩小；

(2) 如图②，以点B为位似中心，把$\triangle ABC$按相似比2∶1放大.



①

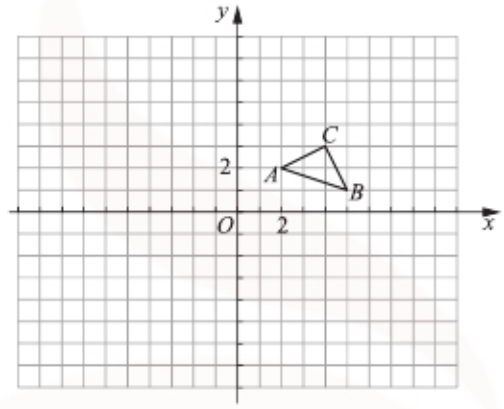


②

(第1题)

微信公众号：电子课本大全

2. 如图，在平面直角坐标系中，$\triangle ABC$ 的顶点坐标分别为 $A(2, 2)$、$B(5, 1)$、$C(4, 3)$. 以坐标原点为位似中心，在第一、三象限分别画出与 $\triangle ABC$ 位似的三角形，使相似比为 2∶1，并分别写出所画三角形的顶点坐标.



（第 2 题）

微信公众号：电子课本大全

6.7 用相似三角形解决问题

光在空气中传播时，遇到不透明的物体，在这个物体后面光不能到达的区域便产生影．

如图 6－41，在太阳光的照射下，树木、路灯、路标都产生了影．通常，我们把太阳光看成平行光．在平行光的照射下，物体所产生的影称为**平行投影**(parallel projection)．

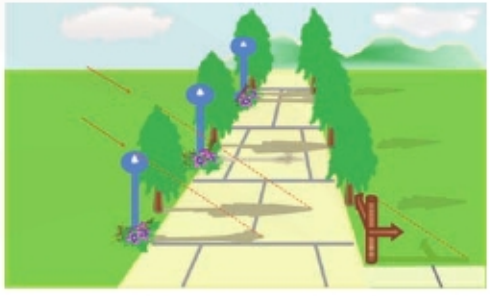


图 6－41

数学实验室

在学校操场上分别竖立长度不同的甲、乙、丙三根木杆，在同一时刻分别测量这三根木杆在阳光下的影长，并将有关数据填入下表：

木杆	木杆长度	杆影长度	木杆长度 杆影长度
甲			
乙			
丙			

通过观察、测量，你发现了什么？请与同学交流．

在平行光的照射下，在同一时刻，不同物体的物高与影长成比例．

微信公众号：电子课本大全



1. 在图 6－42 中，甲木杆 AB 在阳光下的影长为 BC. 试在图中画出同一时刻乙、丙两根木杆在阳光下的影长.

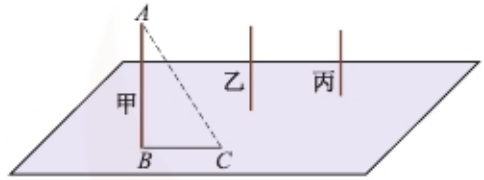


图 6－42

2. 古埃及国王曾请一位学者测量金字塔的高度. 当这位学者确认在阳光下他的影长等于他的身高时(如图 6－43(1))，要求他的助手同时测出金字塔的影长 DB 以及金字塔底部正方形的边长，这样他就知道了金字塔的高度.

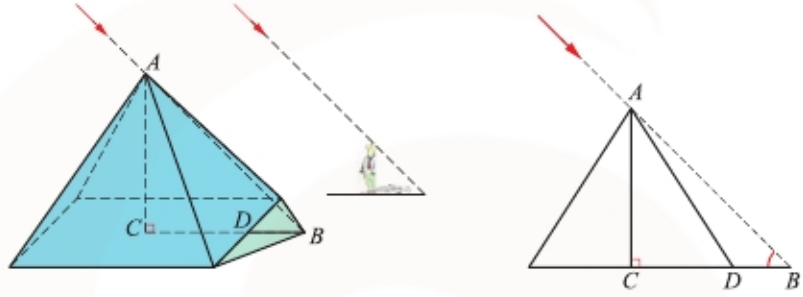


图 6－43

如图 6－43(2)，AC 是金字塔的高，DB 是金字塔的影长. 如果此时测得影长 DB 为 32 m，金字塔底部正方形的边长为 230 m，你能帮助这位学者计算这座金字塔的高度吗?

你能用这种方法测量出学校附近某一物体的高度吗?



1. 在阳光下，身高为 1.68 m 的小强在地面上的影长为 2 m. 在同一时刻，测得旗杆在地面上的影长为 18 m. 求旗杆的高度(精确到 0.1 m).
2. 在阳光下，高为 6 m 的旗杆在地面上的影长为 4 m. 在同一时刻，测得附近一座建筑物的影长为 36 m. 求这座建筑物的高度.

微信公众号：电子课本大全

夜晚，当人在路灯下行走时，会看到一个有趣的现象：在灯光照射范围内，离开路灯越远，影子就越长(如图 6－44).

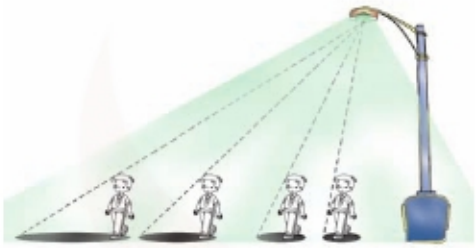


图 6－44

通常，路灯、台灯、手电筒……的光可以看成是从一个点发出的．在点光源的照射下，物体所产生的影称为**中心投影**(central projection).

一般地，在点光源的照射下，同一个物体在不同的位置，它的物高与影长不成比例.



1. 三根旗杆的底部在同一条直线上，其中两根在同一灯光下的影长如图 6－45. 请在图中画出光源的位置，并画出另一根旗杆在该灯光下的影长(不写画法).

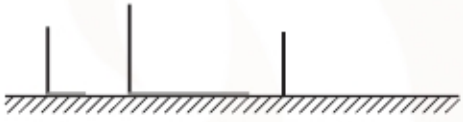


图 6－45

2. 如图 6－46，马路两侧有两根灯杆 AB、CD. 当小明站在点 N 处时，在灯 C 的照射下小明的影长正好为 NB，在灯 A 的照射下小明的影长为 NE. 测得 $BD = 24\,\text{m}, NB = 6\,\text{m}, NE = 2\,\text{m}$，判断这两根灯杆的高度是否相同，并说明理由.

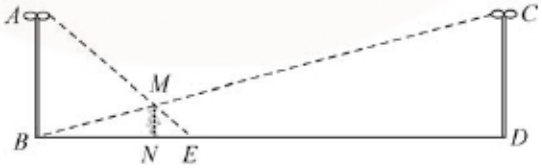


图 6－46

微信公众号：电子课本大全

例　如图 6－47，河对岸有一灯杆 AB，在灯光下，小丽在点 D 处测得自己的影长 $DF = 3$ m，沿 BD 方向前进到点 F 处测得自己的影长 $FG = 4$ m. 设小丽的身高为 1.6 m，求灯杆 AB 的高度.

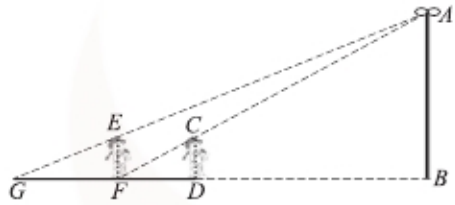


图 6－47

分析：由△ABF∽△CDF，且 CD、DF 是已知量，可以得到 AB 与 $BF(BD)$之间的一个关系式；由△ABG∽△EFG，且 EF、FG 是已知量，可以得到 AB 与 $BG(BD)$之间的又一个关系式. 这样，根据这两个关系式可以求得 BD 和 AB.

解：在 Rt△ABF 和 Rt△CDF 中，

$\angle AFB = \angle CFD$，

于是 $\triangle ABF \backsim \triangle CDF$.

所以 $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{BF}{DF}$，即

$$\frac{AB}{1.6} = \frac{3+BD}{3}. \qquad ①$$

类似的，$\triangle ABG \backsim \triangle EFG$.

所以 $\dfrac{AB}{EF} = \dfrac{BG}{FG}$，即

$$\frac{AB}{1.6} = \frac{7+BD}{4}. \qquad ②$$

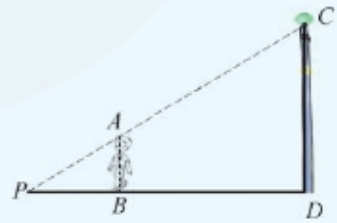
由①、②，得 $\dfrac{3+BD}{3} = \dfrac{7+BD}{4}$，$BD = 9$.

将 $BD=9$ 代入①，得 $\dfrac{AB}{1.6} = \dfrac{3+9}{3}$，$AB = 6.4$.

答：灯杆 AB 高 6.4 m.



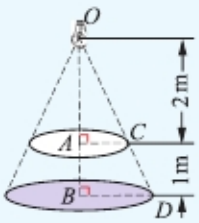
1. 如图，某学生身高 $AB = 1.70$ m，在灯光下，他从灯杆底部点 D 处沿直线前进 4 m 到达点 B 时，测得他的影长 $PB = 2$ m. 求灯杆 CD 的高度.



（第 1 题）

微信公众号：电子课本大全

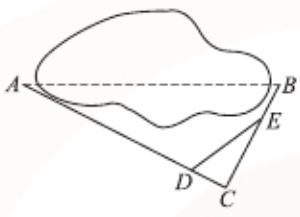
2. 如图，圆桌正上方的灯泡 O（看作一个点）发出的光线照射到桌面后，在地面上形成影．设桌面的半径 $AC = 0.8$ m，桌面与地面的距离 $AB = 1$ m，灯泡与桌面的距离 $OA = 2$ m，求地面上形成的影的面积．



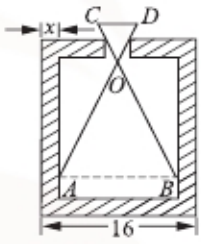
（第 2 题）

6.7 习题

1. 如图，A、B 两地分别在湖的两侧，点 D、E 分别在 AC、BC 上．设 $CD = 20$ m，$CE = 40$ m，$AD = 100$ m，$BE = 20$ m，$DE = 45$ m，求 AB.



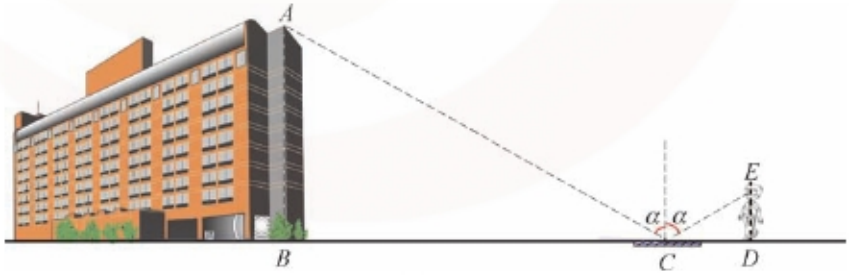
（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，零件的外径为 16 cm，用卡钳（$AD = BC$，且 $OA : OD = OB : OC = 3 : 1$）测得 $CD = 5$ cm，求零件的壁厚 x.

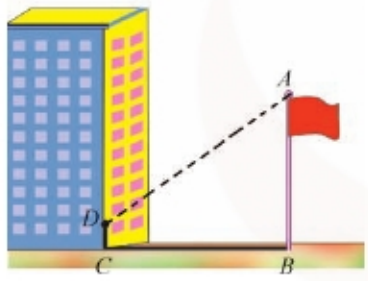
3. 小军想出了一个测量建筑物高度的方法：在地面上点 C 处平放一面镜子，并在镜子上做一个标记，然后向后退去，直至站在点 D 处恰好看到建筑物 AB 的顶端 A 在镜子中的像与镜子上的标记重合（如图）．设小军的眼睛距地面 1.65 m，BC、CD 的长分别为 60 m、3 m，求这座建筑物的高度.



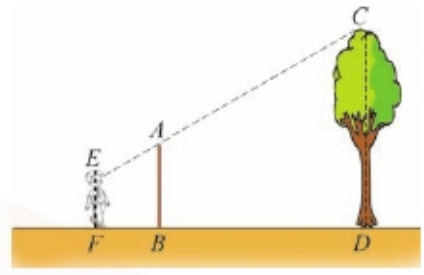
（第 3 题）

微信公众号：电子课本大全

4. 如图，在阳光下，旗杆 AB 在地面上的影长 BC 为 20 m；在建筑物墙面上的影长 CD 为 4 m．同一时刻，测得直立于地面长 1 m 的木杆的影长为 0.8 m．求旗杆 AB 的高度．



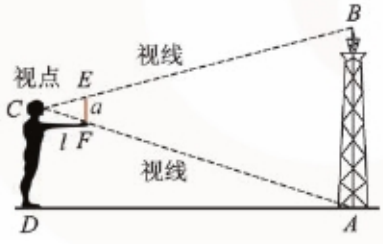
（第 4 题）



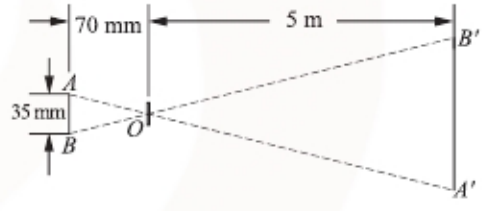
（第 5 题）

5. 如图，竖立在点 B 处的标杆 AB 高 2.5 m，站立在点 F 处的观察者从点 E 处看到标杆顶 A、树顶 C 在一条直线上．设 $BD = 10$ m，$FB = 3$ m，$EF = 1.7$ m，求树高 CD（精确到 0.1 m）．

6. 小明把手臂水平向前伸直，手持小尺竖直，瞄准小尺的两端 E、F，不断调整站立的位置，使在点 D 处时恰好能看到铁塔的顶部 B 和底部 A（如图）．设小明的手臂长 $l = 50$ cm，小尺长 $a = 20$ cm，点 D 到铁塔底部的距离 $AD = 40$ m，求铁塔的高度．



（第 6 题）

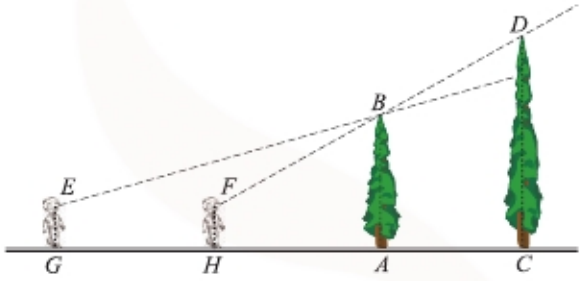


（第 7 题）

7. 如图是一个照相机成像的示意图．如果底片 AB 宽为 35 mm，焦距是 70 mm，那么拍摄 5 m 外的景物 $A'B'$ 至少有多宽？如果焦距是 50 mm 呢？

微信公众号：电子课本大全

8. 如图，点 G 与树 AB、CD 的根部点 A、点 C 在一条直线上，小强从点 G 出发沿 GC 方向前进到点 H 时，恰好看不到树顶 D. 已知小强的眼睛离地面 1.6 m，$AB=6$ m，$CD=9$ m，$AC=6$ m，求 AH 的长.



（第 8 题）

数学活动

测量两地间的距离

要测量不能到达的两个目标 A、B 间的距离，一种测量方法如下：

（1）选择两个观测点 C、D，测出它们之间的距离，并按一定的比例尺将它们画在纸上；

（2）在点 C 处测出 $\angle ACD$ 和 $\angle BCD$ 的度数，在点 D 处测出 $\angle ADC$ 和 $\angle BDC$ 的度数；

（3）在纸上分别画出 $\angle ACD$、$\angle BCD$、$\angle ADC$ 和 $\angle BDC$，从而确定点 A、B 在纸上的位置（如图 6－48）.

这样，量出 A、B 两点间的图上距离，就可以根据比例尺求出 A、B 两地间的实际距离.

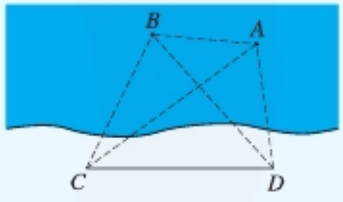


图 6－48

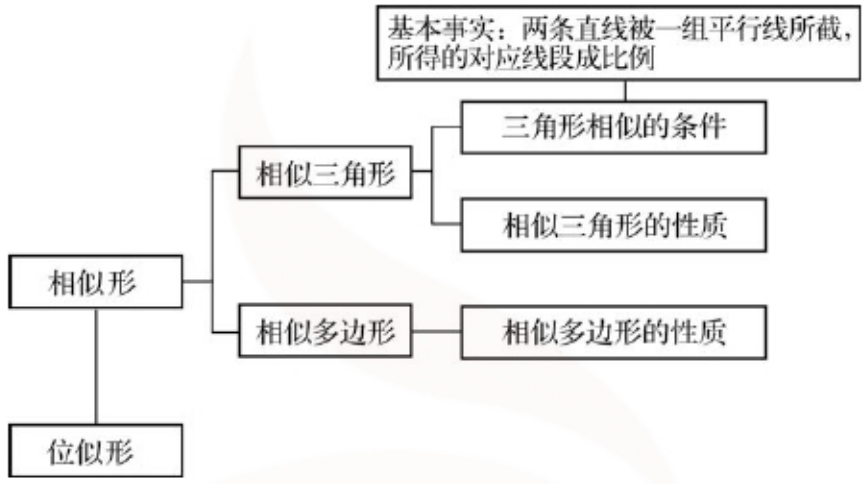
若测得 $CD=600$ m，$\angle ACD=45°$，$\angle BCD=75°$，$\angle ADC=80°$，$\angle BDC=54°$. 用 1∶3 000 的比例尺在纸上分别画出点 C、D 和点 A、B，则 A、B 两地间的实际距离为多少？

试在校园内或郊外选择相距 100 m 左右的两个目标 A、B（AB 的长度可直接测量），用上述方法测量出 A、B 两地间的距离，再直接量出 AB 的长，加以检验.

微信公众号：电子课本大全

小结与思考

1. 本章知识结构



2. 本章中，我们从基本事实出发，通过推理得到“平行于三角形一边的直线与其他两边相交，所截得的三角形与原三角形相似”的结论，并运用这个结论探索三角形相似的条件，进而研究相似三角形的性质．

3. 本章中，我们通过操作、实践，了解黄金分割及其在生产、生活中的一些应用；通过对具体实例的观察，了解中心投影和平行投影．把一些实际问题抽象成相似三角形问题，然后用相似形的知识解决这些问题，体现了数学的价值．

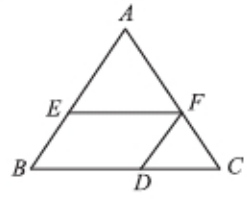
4. 全等形是具有特殊数量关系的相似形，位似形是具有特殊位置关系的相似形．对全等形、相似形、位似形的研究，我们经历了“由特殊到一般，再由一般到特殊”的认识过程．利用“特殊”与“一般”的关系，常常可以探索、发现、证实结论．你能举例说明吗？

5. 我们已经学习了图形的平移、旋转、对称、位似等变化，请举出一些应用实例，体会从图形运动变化的角度研究图形的方法．

复习巩固

1. 在 A 市建设规划图上，城区南北长为 240 cm，A 市城区南北的实际长为 18 km，试写出该规划图的比例尺．

2. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D、E、F 分别在 BC、AB、AC 上，且 $EF \parallel BC$，$FD \parallel AB$．设 $AE = 3.6$，$BE = 2.4$，$CD = 2.8$，求 BD 的长．



（第 2 题）

微信公众号：电子课本大全

3. 满足下列条件的两个三角形是否相似？为什么？

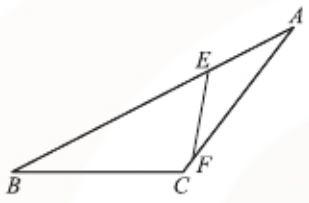
(1) $\triangle ABC$ 的两个角分别是 $60°$、$80°$，$\triangle A'B'C'$ 的两个角分别是 $80°$、$40°$；

(2) $\triangle ABC$ 的两边长分别为 8 cm、12 cm，夹角为 $60°$，$\triangle A'B'C'$ 的两边长分别为 15 cm、10 cm，夹角为 $60°$；

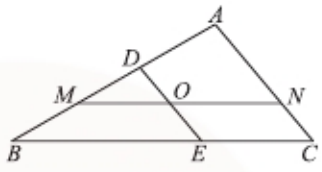
(3) $\triangle ABC$ 的三边长分别为 4 cm、6 cm、8 cm，$\triangle A'B'C'$ 的三边长分别为 24 cm、18 cm、12 cm.

4. 要制作两个相似的三角形框架，其中一个三角形框架的三边长分别为 4、6、8，另一个三角形框架的一边长为 2. 求另一个三角形框架的其他两边的长.

5. 如图，要使 $\triangle AFE \backsim \triangle ABC$，需要添加什么条件？



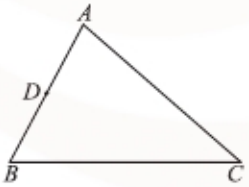
（第 5 题）



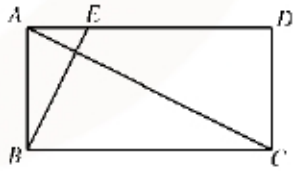
（第 6 题）

6. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D、M 在 AB 上，点 E、N 分别在 BC、AC 上，且 $DE \parallel AC$，$MN \parallel BC$，DE 交 MN 于点 O. 图中与 $\triangle ABC$ 相似的三角形有多少个？把它们表示出来，并说明理由.

7. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB = 6$，$AC = 8$，D 是 AB 的中点. 试在 AC 上确定点 E 的位置，使 $\triangle ADE$ 与原三角形相似，并求 AE 的长.



（第 7 题）

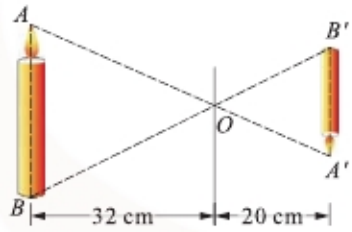


（第 8 题）

8. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB : BC = 1 : 2$，点 E 在 AD 上，且 $ED = 3AE$. 判断 $\triangle ABC$ 与 $\triangle EAB$ 是否相似，并说明理由.

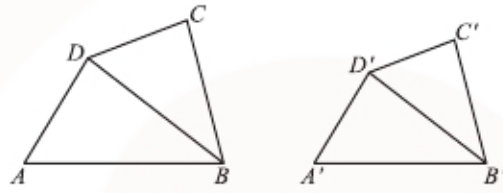
微信公众号：电子课本大全

9. 如图，燃烧的蜡烛 AB 经小孔 O 在屏幕上成像 $A'B'$．设 $AB=30$ cm，小孔 O 到 AB、$A'B'$ 的距离分别为 32 cm、20 cm，求像 $A'B'$ 的长．



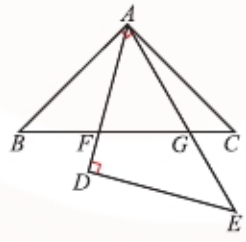
（第 9 题）

10. 如图，在四边形 $ABCD$ 和四边形 $A'B'C'D'$ 中，$\angle A=\angle A'$，$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{CD}{C'D'}=\dfrac{DA}{D'A'}$．判断 $\triangle BCD$ 与 $\triangle B'C'D'$ 是否相似，并说明理由．

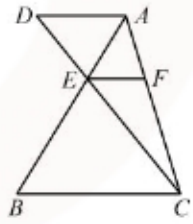


（第 10 题）

11. 如图，$\triangle ABC$ 与 $\triangle DEA$ 是两个全等的等腰直角三角形，$\angle BAC=\angle D=90°$，BC 分别交 AD、AE 于点 F、G．图中有哪几对相似三角形？把它们表示出来，并说明理由．



（第 11 题）



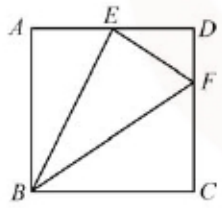
（第 12 题）

12. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 E 在 AB 上，$AE:EB=1:2$，$EF/\!/BC$，交 AC 于点 F，$AD/\!/BC$，交 CE 的延长线于点 D．设 $\triangle AEF$ 的面积为 3，求 $\triangle CEF$ 和 $\triangle CAD$ 的面积．

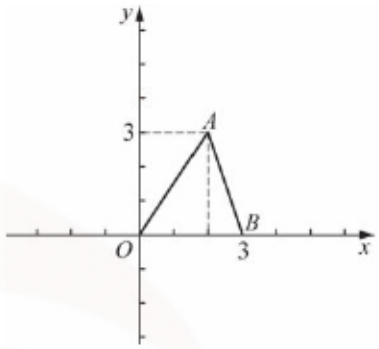
微信公众号：电子课本大全

灵活运用

13. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，E 是 AD 的中点，F 是 CD 上一点，且 $CF=3FD$. 图中有哪几对相似三角形？把它们表示出来，并说明理由.



（第 13 题）



（第 14 题）

14. 如图，在平面直角坐标系中，点 A 的坐标为(2，3)，点 B 的坐标为(3，0).

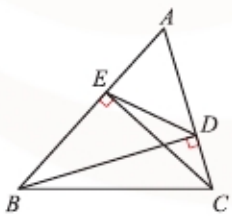
(1) 把△AOB 沿 x 轴向左平移 1 个单位长度得到△$A_1O_1B_1$，写出点 A_1、O_1、B_1 的坐标；

(2) 把△AOB 绕原点旋转 180° 得到△A_2OB_2，写出点 A_2、B_2 的坐标；

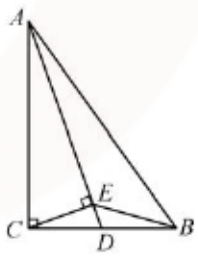
(3) 把△AOB 沿 x 轴翻折得到△A_3OB，写出点 A_3 的坐标；

(4) 以点 O 为位似中心，在第一象限内把△AOB 按相似比 2∶1 放大，得到△A_4OB_4，写出点 A_4、B_4 的坐标.

15. 如图，BD、CE 是△ABC 的高. △ADE 与△ABC 相似吗？为什么？



（第 15 题）

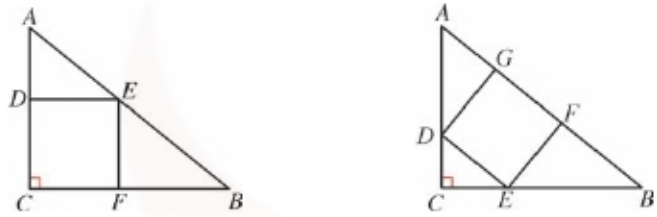


（第 16 题）

16. 如图，在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，D 是 BC 的中点，$CE\perp AD$，垂足为 E. 判断 $\angle BED$ 与 $\angle ABC$ 是否相等，并说明理由.

微信公众号：电子课本大全

17. 一块直角三角形木板，它的一条直角边 AC 长 1.5 m，面积为 1.5 m^2. 甲、乙两人分别按图①、②把它加工成一个正方形桌面．请说明哪个正方形面积较大．



①　②

（第 17 题）

探索研究

18. 如图，有两个分别涂有黄色和蓝色的 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$，其中 $\angle C = \angle C' = 90°$，且两个三角形不相似．问：能否分别用一条直线分割这两个三角形，使 $\triangle ABC$ 所分割成的两个黄色三角形与 $\triangle A'B'C'$ 所分割成的两个蓝色三角形分别相似？如果能，请设计分割方案；如果不能，请说明理由．



①　②

（第 18 题）

19. 如图，AD 是 $\triangle ABC$ 的中线，点 E 在 AC 上，BE 交 AD 于点 F．某数学兴趣小组在研究这个图形时得到如下结论：

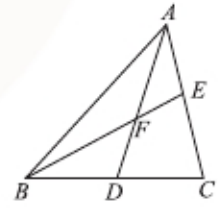
（1）当 $\dfrac{AF}{AD} = \dfrac{1}{2}$ 时，$\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{1}{3}$；

（2）当 $\dfrac{AF}{AD} = \dfrac{1}{3}$ 时，$\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{1}{5}$；

（3）当 $\dfrac{AF}{AD} = \dfrac{1}{4}$ 时，$\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{1}{7}$；

⋮

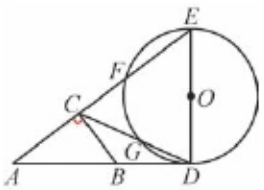
猜想：当 $\dfrac{AF}{AD} = \dfrac{1}{n+1}$ 时，$\dfrac{AE}{AC} =$？并说明理由．



（第 19 题）

微信公众号：电子课本大全

20. 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90^\circ$，$AB=5$，$BC=3$，点D在AB的延长线上，且$BD=3$，过点D作$DE\perp AD$，交AC的延长线于点E，以DE为直径的$\odot O$交AE于点F.



（第20题）

(1) 求$\odot O$的半径及圆心O到弦EF的距离；

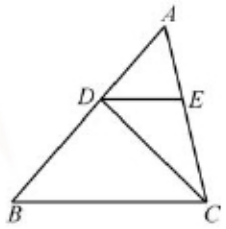
(2) 设CD交$\odot O$于点G，试说明G是CD的中点.

21. 如图，在$\triangle ABC$中，$AB=4$，D是AB上的一点(不与点A、B重合)，$DE\ /\!/\ BC$，交AC于点E.设$\triangle ABC$的面积为S，$\triangle DEC$的面积为S'.

(1) 当D是AB的中点时，求$\dfrac{S'}{S}$的值；

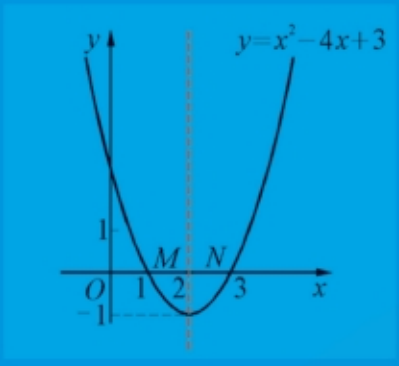
(2) 设$AD=x$，$\dfrac{S'}{S}=y$，求y与x的函数表达式，并写出自变量x的取值范围；

(3) 根据y的取值范围，探索S'与S之间的大小关系，并说明理由.



（第21题）

微信公众号：电子课本大全



数学

SHU XUE

九年级 下册

绿色印刷产品

微信公众号：电子课本大全