普通高中课程标准实验教科书

数学 2

必修

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学教材实验研究组　编著



人民教育出版社
B版

微信公众号：电子课本大全

主　　编　高存明

本册主编　范登晨

编　　者　范登晨　高存明　江守礼
　　张润琦　龙正武

责任编辑　龙正武

美术编辑　张　蓓　王　喆

绘　　图　王　鑫

封面设计　林荣桓

普通高中课程标准实验教科书　数学 2　必修　B 版

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学教材实验研究组　编著

出版发行　人民教育出版社
（北京市海淀区中关村南大街17号院1号楼　邮编：100081）

网　　址　http://www.pep.com.cn

经　　销　全国新华书店

印　　刷　北京天宇星印刷厂

版　　次　2007 年 4 月第 2 版

印　　次　2019 年 8 月第 21 次印刷

开　　本　890 毫米 × 1240 毫米　1/16

印　　张　7.75

字　　数　172 千字

书　　号　ISBN 978-7-107-17711-8

定　　价　7.15元

价格依据文件号：京发改规［2016］13号

版权所有·未经许可不得采用任何方式擅自复制或使用本产品任何部分·违者必究

如发现内容质量问题，请登录中小学教材意见反馈平台：jcyjfk.pep.com.cn

如发现印、装质量问题，影响阅读，请与本社联系。电话：400-810-5788

绿色印刷　保护环境　爱护健康

亲爱的同学们：

你们手中的这本教科书采用绿色印刷标准印制，在它的封底印有“绿色印刷产品”标志。从2013年秋季学期起，北京地区出版并使用的义务教育阶段中小学教科书全部采用绿色印刷。

按照国家环境标准（HJ2503-2011）《环境标志产品技术要求　印刷　第一部分：平版印刷》，绿色印刷选用环保型纸张、油墨、胶水等原辅材料，生产过程注重节能减排，印刷产品符合人体健康要求。

让我们携起手来，支持绿色印刷，选择绿色印刷产品，共同关爱环境，一起健康成长！

北京市绿色印刷工程

微信公众号：电子课本大全

本册导引

我们生存的宇宙是立体空间，我们接触到的物体都占有空间的一部分．研究物体的性质是各门自然科学的共同任务．只关注物体的形状、大小与位置关系，形成了一门数学学科——几何学．物体的其他性质，则留给物理学、化学等学科去研究．本模块中的立体几何与平面解析几何是几何学的初步知识，是进一步学习数学的基础．通过学习，同学们的空间想象能力、几何直观能力、推理论证能力、运用图形语言进行交流的能力，以及用代数方法解决几何问题的能力，将得到良好的发展．

空间几何体不在一个平面内，可是我们经常把它画在一个平面内，这就给认识它带来很大困难．克服这种困难有各种途径．例如，用实物模型和计算机软件观察几何体的结构特征，用平行投影和中心投影画出视图与直观图，用头脑想象几何体的现实模型等等．这些方法都有助于认识空间图形，培养空间想象能力与几何直观能力．

本模块，我们还要研究点、线、面之间的逻辑关系．首先总结出空间图形的几条基本性质（公理），然后以基本性质为基础，探索并进行逻辑推理，进一步学习空间图形的其他重要性质，同时进一步培养同学们的推理论证能力．

用坐标把点的位置数量化，进而把图形性质用数量关系表示出来，是数学发展的一次飞跃．数量是可以运算的，而且运算具有良好的运算律，把数量及其运算引进几何学，孕育出解析几何．简单地说，用代数方法解决几何问题就是解析几何．本模块以平面上的直线和圆为载体，学习解析几何的基本思想与方法，体会“数形结合”的思想方法及其解决几何问题的有效性和普遍性．

本册书的数学内容及其包含的思想方法，既有一定的理论性，又有很高的实际应用价值；既有几何直观，又有代数运算；既有简单的实际制作，又有现代信息技术的应用．无疑，它是培养数学能力的肥沃土壤．希望同学们怀着旺盛的求知欲望和愉悦的心情进入这两个几何领域，以获得宝贵的数学思想、数学方法和数学能力．

微信公众号：电子课本大全

目　录

第一章　立体几何初步 …… 1

1.1　空间几何体 …… 3

◆ 1.1.1　构成空间几何体的基本元素 …… 3

◆ 1.1.2　棱柱、棱锥和棱台的结构特征 …… 6

◆ 1.1.3　圆柱、圆锥、圆台和球 …… 11

◆ 1.1.4　投影与直观图 …… 16

◆ 1.1.5　三视图 …… 21

◆ 1.1.6　棱柱、棱锥、棱台和球的表面积 …… 25

◆ 1.1.7　柱、锥、台和球的体积 …… 28

实习作业 …… 34

1.2　点、线、面之间的位置关系 …… 35

◆ 1.2.1　平面的基本性质与推论 …… 35

◆ 1.2.2　空间中的平行关系 …… 39

◆ 1.2.3　空间中的垂直关系 …… 47

本章小结 …… 58

阅读与欣赏

散发着数学芳香的碑文 …… 61

第二章　平面解析几何初步 …… 63

2.1　平面直角坐标系中的基本公式 …… 65

◆ 2.1.1　数轴上的基本公式 …… 65

◆ 2.1.2　平面直角坐标系中的基本公式 …… 68

2.2　直线的方程 …… 74

◆ 2.2.1　直线方程的概念与直线的斜率 …… 74

◆ 2.2.2　直线方程的几种形式 …… 77

◆ 2.2.3　两条直线的位置关系 …… 81

◆ 2.2.4　点到直线的距离 …… 87

2.3　圆的方程 …… 93

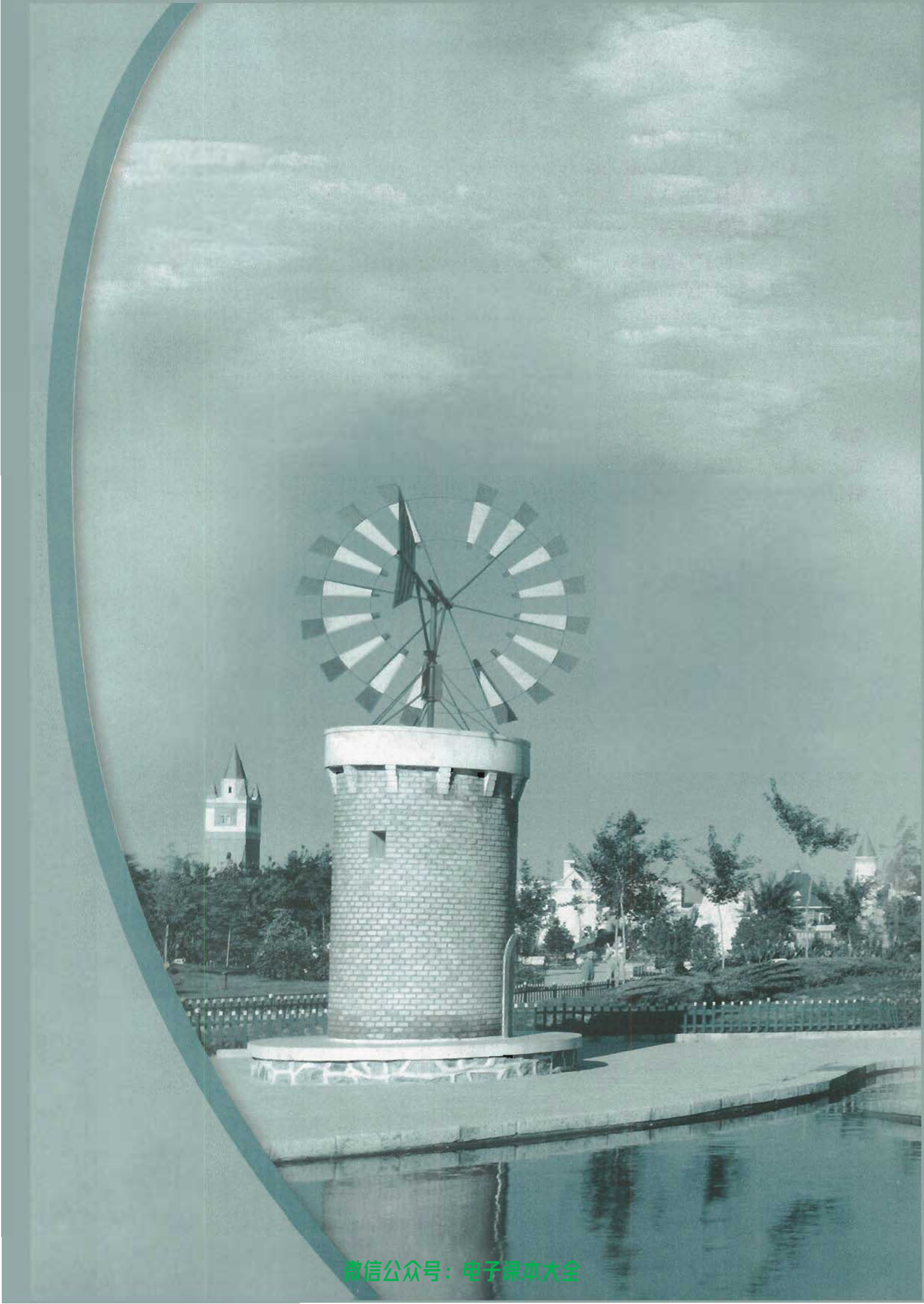
◆ 2.3.1　圆的标准方程 …… 93

微信公众号：电子课本大全

◆ 2.3.2 圆的一般方程 …… 97
◆ 2.3.3 直线与圆的位置关系 …… 99
◆ 2.3.4 圆与圆的位置关系 …… 101
2.4 空间直角坐标系 …… 106
◆ 2.4.1 空间直角坐标系 …… 106
◆ 2.4.2 空间两点的距离公式 …… 108
本章小结 …… 111
阅读与欣赏
笛卡儿 …… 115

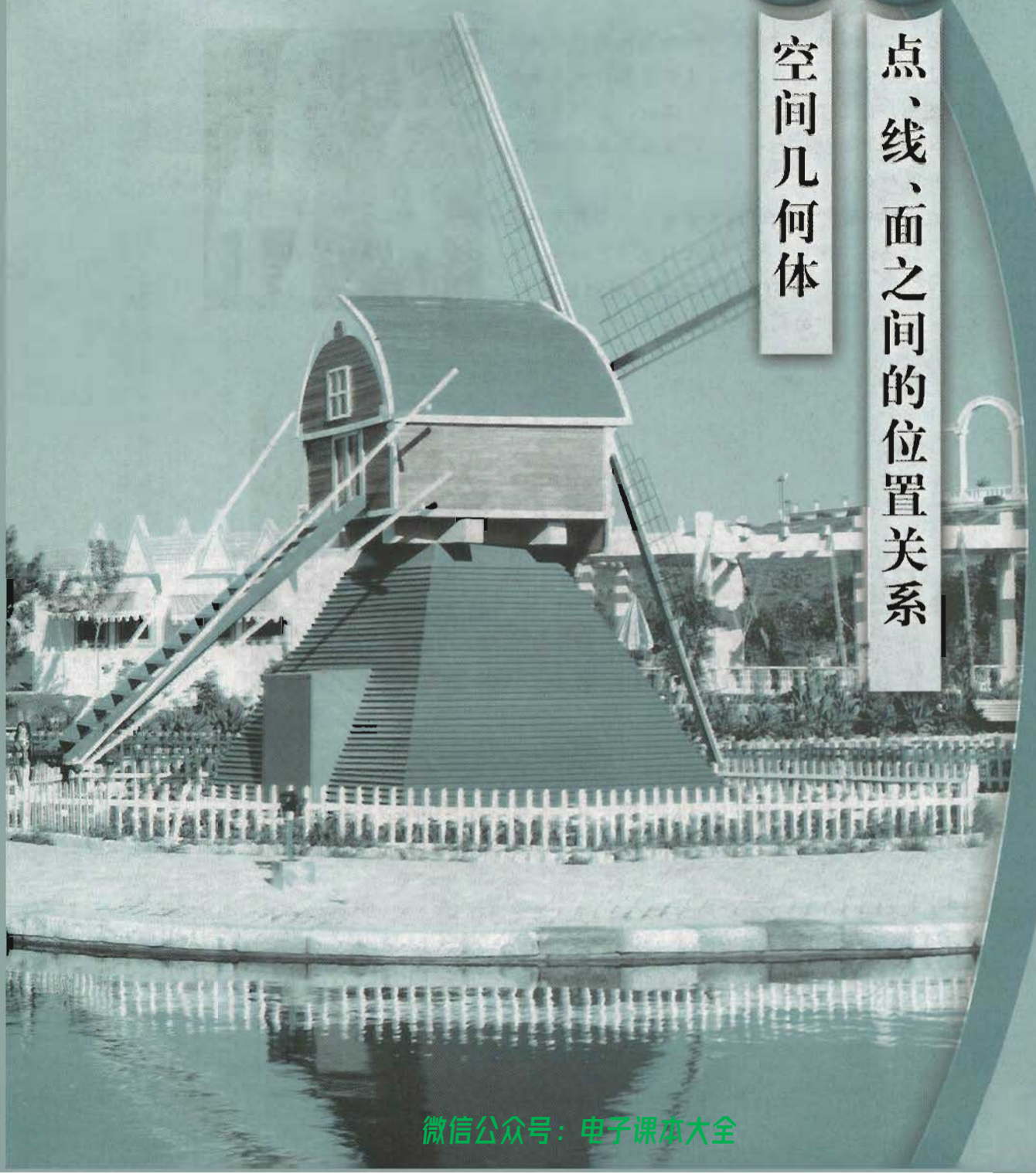
附录
部分中英文词汇对照表 …… 116
后记 …… 118

微信公众号：电子课本大全



微信公众号：电子课本大全

第一章 立体几何初步



1.1 空间几何体

1.2 点、线、面之间的位置关系

微信公众号：电子课本大全

我们经常观察周围各种各样的物体，并且不断地学着区分物体形状之间的差异. 从儿童时代起，我们就通过观察、玩各种玩具，通过父母和老师的启蒙教育，认识了各种各样的物体的形状，它们有些是长方体形的物体，有些是球形的物体等. 然后离开具体的实物，开始辨认画在纸上的物体，例如汽车、飞机、床、桌子、房屋的图片等. 后来又通过学习几何知识，认识了许多几何图形，如长方形、长方体、圆、球等. 同学们有没有想过，为什么画在纸上的各种各样的物体，你一看就能认出它是某种物体呢?

人类从能区分各种各样的物体到把这些物体画在纸上表达它们，直到现代利用计算机画出复杂物体的图形，经历了漫长的年代. 不过，你只要通过短时间的学习，就能初步学会人类几千年所积累到的立体几何知识.



图 1-1

在小学和初中，我们已经学习了一些简单的几何体. 你还记得图 1-1 中一些几何体的名称吗? 在图 1-2 的照片中，我们看到的各种各样的建筑物，大都是由图 1-1 中的几何体组成的.



图 1-2

这一章我们先从分析常见立体图形的几何结构开始，建立空间概念，学习描述简单立体图形的结构，从而学习如何在平面上表示这些立体图形，然后分析这些知识的逻辑结构，认识有关图形的基本性质，培养空间想象能力和逻辑思维能力.

微信公众号：电子课本大全



1.1 空间几何体

观察我们生活的空间，一切物体都占据着空间的一部分. 如果我们只考虑一个物体占有空间部分的形状和大小，而不考虑其他因素，则这个空间部分叫做一个**几何体**. 例如，一个长方体形包装箱，占有的空间部分就是一个几何体. 我们知道这个几何体叫做**长方体**(图 1-3).

同学们可以通过折纸练习，自己制作一些几何体的模型，帮助学习本节内容.

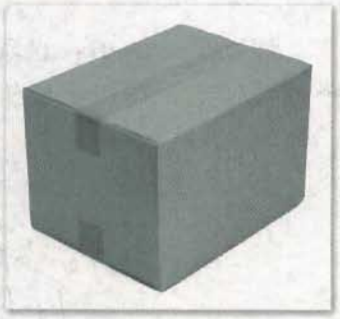


图 1-3

1.1.1 构成空间几何体的基本元素

让我们以长方体为例，分析构成几何体的基本元素以及它们之间的关系.

如图 1-3 所示，长方体由六个矩形(包括它的内部)围成，围成长方体的各个矩形，叫做**长方体的面**；相邻两个面的公共边，叫做**长方体的棱**；棱和棱的公共点，叫做**长方体的顶点**. 长方体有 6 个面，12 条棱，8 个顶点. 观察长方体和各种几何体的构成可以发现，任意一个几何体都是由点、线、面构成的. 点、线、面是构成几何体的基本元素.

线有直线(段)和曲线(段)之分，面有平面(部分)和曲面(部分)之分. 工程人员为了检查一个物体的表面是不是平的，通常把直尺放在物体表面的各个方向上，看看直尺的边缘与物体表面有没有缝隙，如果都不出现缝隙，就判断这个物体表面是平的. 由此可见，平面是处处平直的面，而曲面就不是处处平直的.

在立体几何中，平面是无限延展的，通常画一个平行四边形表示一个平面(图 1-4)，并把它想象成无限延展的.

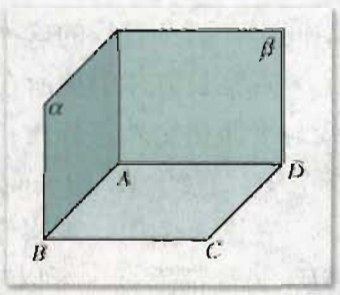


图 1-4

平面一般用希腊字母 α，β，γ，…来命名，还可以用表示它的平行四边形的对角顶点的字母来命名，例如，图 1-4 中的平面 α、平面 β、平面 $ABCD$ 或平面 AC 等.

我们还可以从运动的观点，来理解空间基本图形之间的关系. 流星划过夜空，给我们一种“点动成线”的视觉感受. 在

微信公众号：电子课本大全

几何中，可以把线看成点运动的轨迹，如果点运动的方向始终不变，那么它的轨迹就是一条直线或线段；如果点运动的方向时刻在变化，则运动的轨迹是一条曲线或曲线的一段. 同样，一条线运动的轨迹可以是一个面，面运动的轨迹(经过的空间部分)可以形成一个几何体(图 1-5).

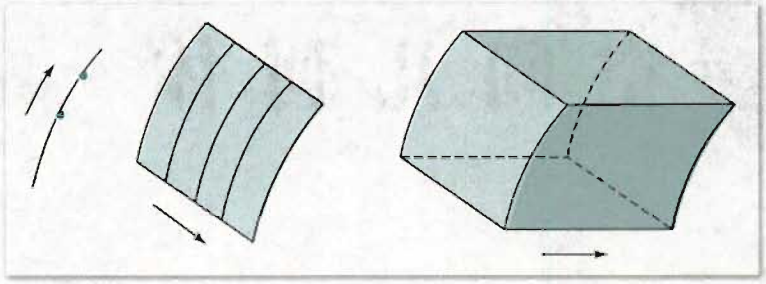


图 1-5

如图 1-6 所示，直线平行移动，可以形成平面或曲面. 固定射线的端点，让其绕着一个圆弧转动，可以形成锥面.

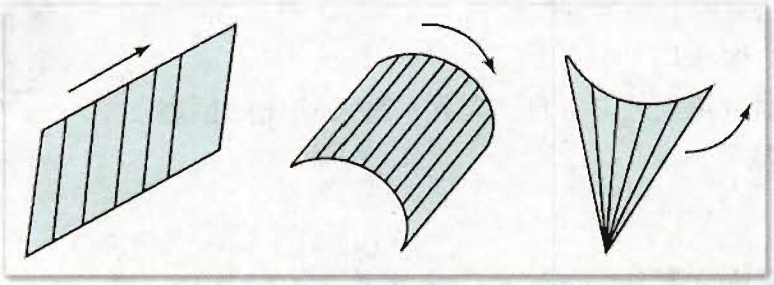


图 1-6

如图 1-7 所示的水平放置的长方体，通常记作长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$. 这个长方体，可看成矩形 $ABCD$ 上各点沿铅垂线向上移动相同距离到矩形$A'B'C'D'$所形成的几何体.

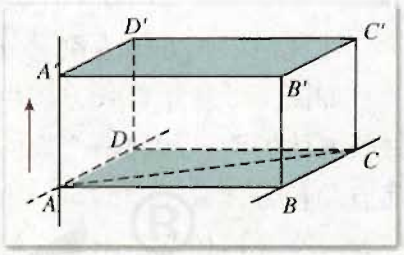


图 1-7

让我们通过长方体的顶点、棱和面之间的位置关系来直观认识一下空间点、直线和平面之间的位置关系. 在下一节，我们还要对它们之间的位置关系和性质作进一步的探讨.

设想长方体的棱可延伸为直线，面可延伸为平面. 容易看到，在长方体的棱所在直线中，有些相交，有些平行，另外还可观察到直线 AA'和直线 BC，它们既不相交也不平行. 空间中，两条直线的这种关系比比皆是，如交叉走向的高压线等.

观察长方体中棱所在直线及面所在平面的位置关系，容易看到，除直线在平面内或直线与平面相交外，直线和平面还有可能没有公共点，这时，我们说**直线和平面平行**. 如图 1-7 中，直线 AB 和平面$A'C'$平行，记作 AB∥平面 $A'C'$.

在图 1-7 中，观察直线 AA'和平面 $ABCD$，我们看到直线 AA'和平面内的两条直线 AB，AD 都垂直，可以想象，当 AD 在平面 AC 内绕点 A 旋转到任何位置时，都会和 AA'垂直. 直线 AA'给我们与平面 AC 垂直的形象，这时我们说**直线 AA'与平面 AC 垂直**，

微信公众号：电子课本大全

A 为垂足. 记作直线 $AA'\perp$ 平面 AC. 直线 AA' 称作平面 AC 的垂线. 平面 AC 称作直线 AA' 的垂面. 容易验证, 线段 AA' 为点 A' 到平面 AC 内的点所连线段中最短的一条. 线段 AA' 的长称作点 A' 到平面 AC 的距离.

在图 1-7 中, 再观察平面与平面的位置关系. 可以想象, 长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 两个相对面所在的平面没有公共点. 如果两个平面没有公共点, 则说这两个平面平行. 如果面 $ABCD$ 和面 $A'B'C'D'$ 分别作为长方体的底面, 则棱 AA', BB', CC', DD' 都与底面垂直且等长. 我们知道它们都是这个底面上的高, 它们的长度称作两底面间的距离.

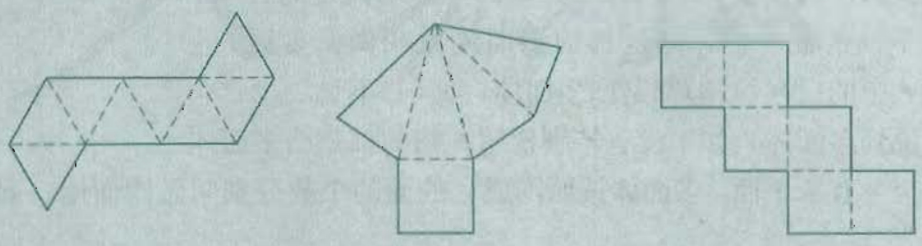
容易看到, 两个平面会相交于一条直线, 此时, 我们说这两个平面相交. 如果两个平面相交, 并且其中一个平面通过另一个平面的一条垂线, 这两个平面就给我们互相垂直的形象, 这时, 我们说这两个平面互相垂直.

练习 A

1. 想想看, 如何检验一个面是平面的一部分.
2. 举出点运动的轨迹是线、线运动的轨迹是面、面运动的轨迹是体的实例.
3. 举几对既不相交也不平行的直线的例子.
4. 下列各题说法对吗?
   (1) 点运动的轨迹是线;
   (2) 线运动的轨迹一定是面;
   (3) 面运动的轨迹一定是体.

练习 B

根据图中给出的平面图形, 制作几何体.



微信公众号: 电子课本大全

1.1.2 棱柱、棱锥和棱台的结构特征

1. 多面体

观察图 1-8 中的几何体，这些几何体都是**多面体**.

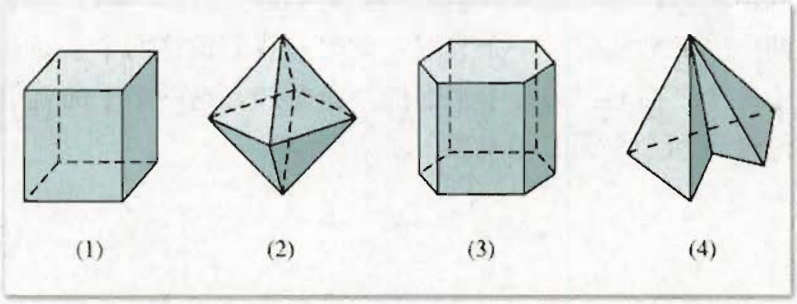


图 1-8

我们来研究所有多面体构成的集合. 现在要问：

多面体集合的哪些性质可以作为它的特征性质(多面体具有，而不是多面体的几何体都不具有的性质)?

建议同学们通过思考或讨论，回答上面的问题.

多面体的每个面都是多边形(围成多面体的多边形都包含它内部的平面部分)，而圆柱、圆锥、球等其他几何体就不具有这种性质.

由此得出多面体的结构特征：

多面体是由若干个平面多边形所围成的几何体.

如图 1-9，围成多面体的各个多边形叫做**多面体的面**，如面 $ABCD$、面 $BCC'B'$；相邻的两个面的公共边叫做**多面体的棱**，如棱 AB、棱 AA'；棱和棱的公共点叫做**多面体的顶点**，如顶点 A、顶点 A'；连接不在同一个面上的两个顶点的线段叫做**多面体的对角线**，如对角线 BD'.

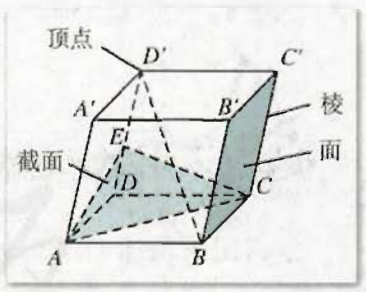


图 1-9

把一个多面体的任意一个面延展为平面，如果其余的各面都在这个平面的同一侧，则这样的多面体就叫做**凸多面体**. 如图 1-8 中的(1)(2)(3)都是凸多面体，而(4)不是.

本书中说到多面体，如果没有特别说明，指的都是凸多面体.

多面体至少有 4 个面. 多面体按照围成它的面的个数分别叫做四面体、五面体、六面体……

一个几何体和一个平面相交所得到的平面图形(包含它的内部)，叫做这个几何体的**截面**，在图 1-9 中画出了多面体的一个截面 EAC.

在小学和初中，同学们已经学习过一些特殊的多面体，如棱柱、棱锥和棱台，对这些几何体，大家都能直观地区分它们，这是因为它们各自具有自己的结构特征. 这一节，我们要通过实验、观察，进一步研究它们的特征性质.

微信公众号：电子课本大全

2. 棱柱

当你观察图 1-10 中的一些多面体时，根据小学和初中学过的几何知识，你可能会判定这些多面体是一些棱柱. 为什么你会判定它们是棱柱呢?

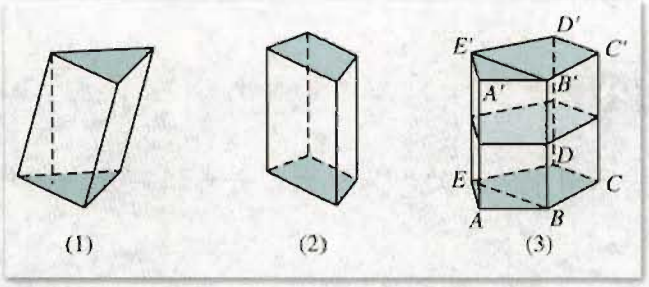


图 1-10

请你通过自己思考或与同学讨论，回答下面的问题：

棱柱有哪些性质？哪些性质可以作为棱柱集合的特征性质?

如果我们以运动的观点来观察，棱柱可以看成一个多边形(包括图形围成的平面部分)上各点都沿着同一个方向移动相同的距离所形成的几何体.

观察这个移动过程，我们可以得到棱柱的主要特征性质：

棱柱有两个互相平行的面，而且夹在这两个平行平面间的每相邻两个面的交线都互相平行(图 1-10).

棱柱的这两个互相平行的面叫做**棱柱的底面**，其余各面叫做**棱柱的侧面**，两侧面的公共边叫做**棱柱的侧棱**.

棱柱两底面之间的距离，叫做**棱柱的高**.

显然棱柱集合是多面体集合的一个子集.

棱柱按底面是三角形、四边形、五边形……分别叫做三棱柱、四棱柱、五棱柱……

棱柱用表示两底面的对应顶点的字母或者用一条对角线端点的两个字母来表示. 例如，图 1-10(3)中的五棱柱可表示为棱柱$ABCDE\text{-}A'B'C'D'E'$或棱柱AC'.

棱柱又分为斜棱柱和直棱柱.

侧棱与底面不垂直的棱柱叫做**斜棱柱**(图 1-10(1)).

侧棱与底面垂直的棱柱叫做**直棱柱**(图 1-10(2)(3)).

底面是正多边形的直棱柱叫做**正棱柱**(图 1-10(3)).

下面研究一些特殊的四棱柱.

底面是平行四边形的棱柱叫做**平行六面体**(图 1-11(1)(3)(4)). 侧棱与底面垂直的平

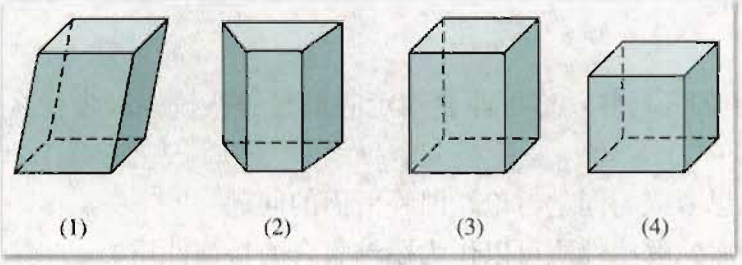


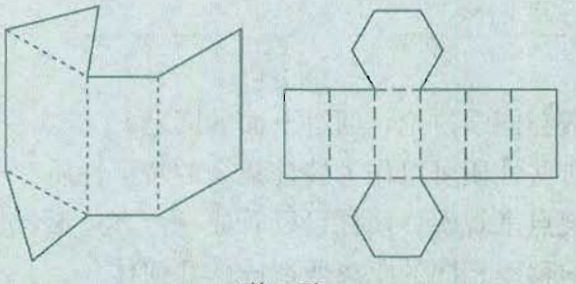
图 1-11

微信公众号：电子课本大全

行六面体叫做**直平行六面体**(图 1-11(3)(4)). 底面是矩形的直平行六面体是长方体(图 1-11(3)(4)). 棱长都相等的长方体是正方体(图 1-11(4)).

练习A

1. 在一张纸上，按照图中给出的形状放大，并剪纸，分别制作斜三棱柱、正六棱柱.

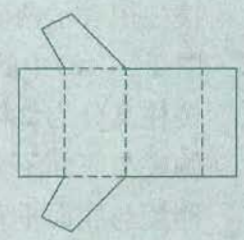


(第 1 题)

2. 任意一个直棱柱去掉两个底面，沿任意一条侧棱剪开，然后放在一个平面上展平，它是什么样的平面图形?
3. 长方体是不是四棱柱? 直四棱柱是不是长方体?
4. 设计一个平面图形，使它能折成一个正方体.

练习B

1. 在一张纸上，按照图中给出的形状放大，并剪纸，按虚线折痕折起并黏合，说出得到的几何体的名称.
2. 正方体集合记为 A，长方体集合记为 B，直棱柱集合记为 C，棱柱集合记为 D，写出这四个集合之间的关系.



(第 1 题)

3. 棱锥和棱台

棱锥

观察图 1-12 中的几何体，你可能会判定它们是一些棱锥. 为什么你会判定它们是棱锥呢?

请你通过自己思考或与同学讨论，回答下面的问题：

棱锥有哪些性质? 哪些性质可以作为棱锥集合的特征性质?

通过观察，我们可以得到棱锥的主要特征性质：

微信公众号：电子课本大全

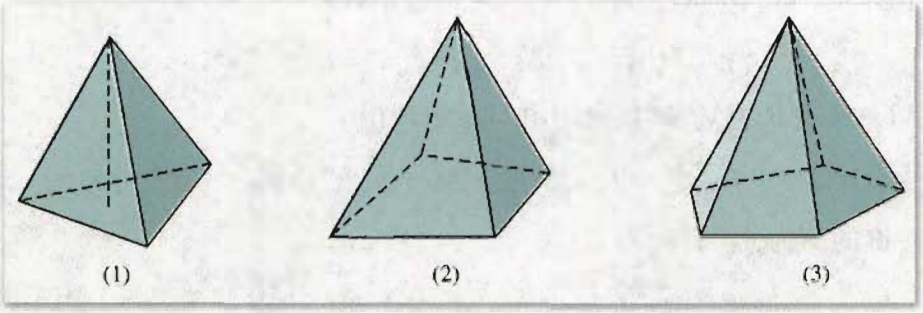


图 1-12

棱锥有一个面是多边形，而其余各面都是有一个公共顶点的三角形.

棱锥中有公共顶点的各三角形，叫做**棱锥的侧面**；各侧面的公共顶点叫做**棱锥的顶点**；相邻两侧面的公共边叫做**棱锥的侧棱**；多边形叫做**棱锥的底面**；顶点到底面的距离，叫做**棱锥的高**.

棱锥用表示顶点和底面各顶点的字母或者用表示顶点和底面的一条对角线端点的字母来表示. 例如，图 1-13 中棱锥可表示为棱锥 S-$ABCDE$ 或者棱锥 S-AC.

棱锥按底面是三角形、四边形、五边形……分别叫做三棱锥、四棱锥、五棱锥……

如果棱锥的底面是正多边形，且它的顶点在过底面中心且与底面垂直的直线上，则这个棱锥叫做**正棱锥**(图 1-13).

容易验证：正棱锥各侧面都是全等的等腰三角形，这些等腰三角形底边上的高都相等，叫做**棱锥的斜高**(图 1-13).

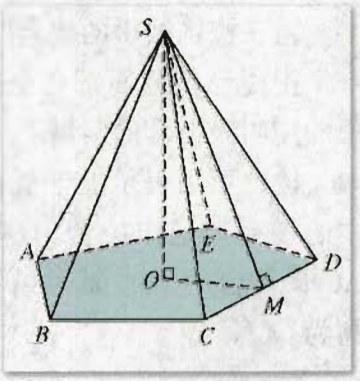


图 1-13

例 1 设计一个平面图形，使它能够折成一个侧面与底面都是等边三角形的正三棱锥.

解：因为要制作的正三棱锥的侧面与底面都是等边三角形，所以它的棱长都相等(图 1-14).

于是作一个等边三角形及其三条中位线，如图 1-14 所示. 沿图中的实线剪下这个三角形，再以虚线(中位线)为折痕就可折成符合题意的几何体.

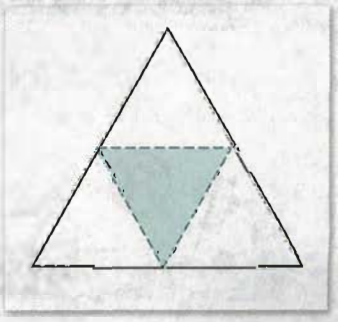


图 1-14

例 2 已知正四棱锥 V-$ABCD$(图 1-15)，底面面积为 16，一条侧棱长为 $2\sqrt{11}$，计算它的高和斜高.

解：设 VO 为正四棱锥 V-$ABCD$ 的高，作 $OM \perp BC$ 于点 M，则 M 为 BC 中点.

连接 OM，OB，则 $VO \perp OM$，$VO \perp OB$.

因为底面正方形 $ABCD$ 的面积为 16，所以

$$BC=4,\ BM=OM=2,$$

$$OB=\sqrt{BM^2+OM^2}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}.$$

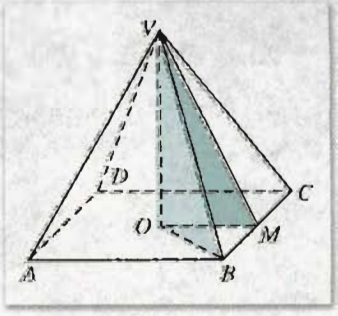


图 1-15

微信公众号：电子课本大全

又因为 $VB=2\sqrt{11}$，在 Rt$\triangle VOB$ 中，由勾股定理得

$$VO=\sqrt{VB^2-OB^2}=\sqrt{(2\sqrt{11})^2-(2\sqrt{2})^2}=6.$$

在 Rt$\triangle VOM$（或 Rt$\triangle VBM$）中，由勾股定理得

$$VM=\sqrt{6^2+2^2}=2\sqrt{10}\ (\text{或 } VM=\sqrt{(2\sqrt{11})^2-2^2}=2\sqrt{10}).$$

即正四棱锥的高为 6，斜高为 $2\sqrt{10}$.

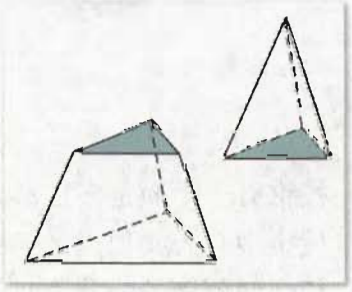


图 1-16

棱台

如图 1-16 所示，棱锥被平行于底面的平面所截，截面和底面间的部分叫做**棱台**. 原棱锥的底面和截面分别叫做**棱台的下底面、上底面**；其他各面叫做**棱台的侧面**；相邻两侧面的公共边叫做**棱台的侧棱**；两底面间的距离叫做**棱台的高**.

由正棱锥截得的棱台叫做**正棱台**.

正棱台各侧面都是全等的等腰梯形，这些等腰梯形的高叫做**棱台的斜高**.

棱台可用表示上下底面的字母来命名. 如图 1-17 中的棱台，记作棱台 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$，或记作棱台 AC'. 棱台的下底面为 $ABCD$、上底面为 $A'B'C'D'$、高为 OO'.

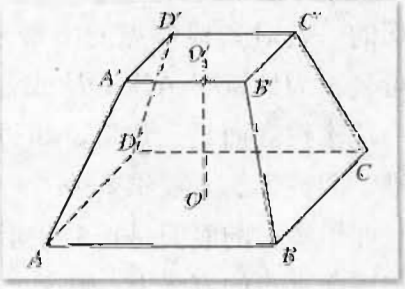


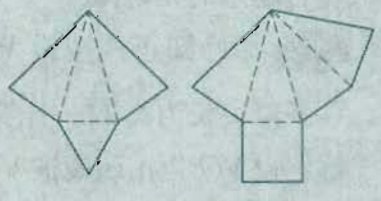
图 1-17

思考与讨论

如何判断一个多面体是棱台？

练习 A

1. 把图中所给的平面图形按适当的比例放大，分别制作三棱锥、四棱锥.
2. 底面是正多边形的棱锥一定是正棱锥吗？
3. 延长一个棱台的各条侧棱，它们是否相交于一点？

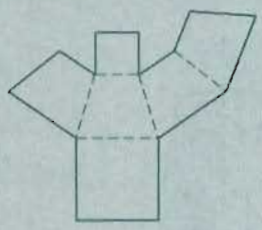


（第 1 题）

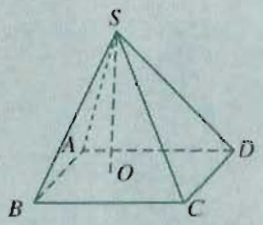
微信公众号：电子课本大全

练习B

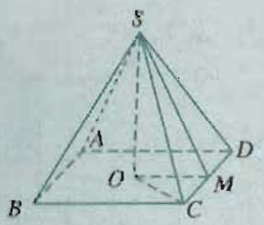
1. 按照图中所给的平面图形制作几何体模型.



（第1题）



（第2题）



（第3题）

2. 已知四棱锥 S-$ABCD$，SO 是这个四棱锥的高，以点 S，O 以及 A，B，C，D 中任意一点为顶点的三角形是否都是直角三角形?

3. 如图，在正四棱锥 S-$ABCD$ 中，SO 是这个四棱锥的高，SM 是斜高，且 $SO=8$，$SM=11$：

（1）求侧棱长；

（2）求一个侧面的面积；

（3）求底面的面积.

4. 设正三棱台的上底面和下底面的边长分别为 2 cm 和 5 cm，侧棱长为 5 cm，求这个棱台的高.

1.1.3 圆柱、圆锥、圆台和球

1. 圆柱、圆锥、圆台

观察图 1-18 中的几何体，你可能会判定它们分别是圆柱、圆锥、圆台. 为什么你会判定它们分别是圆柱、圆锥、圆台呢?

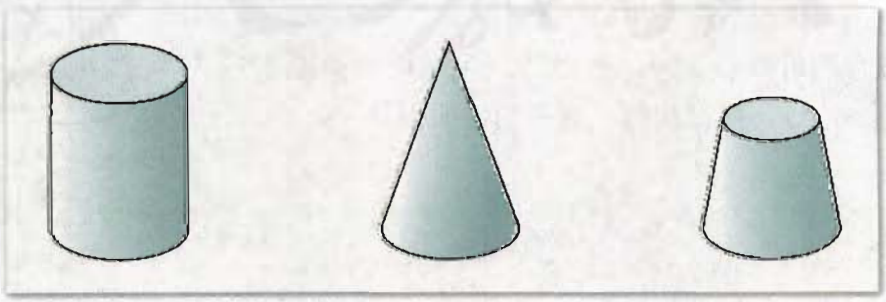


图 1-18

请你通过自己思考或与同学讨论，回答下面的问题：

圆柱、圆锥、圆台分别具有哪些性质？哪些性质可以分别作为圆柱、圆锥和圆台集合

微信公众号：电子课本大全

的特征性质?

通过观察可以看出，圆柱、圆锥和圆台可以分别看作以矩形的一边、直角三角形的一直角边、直角梯形中垂直于底边的腰所在的直线为旋转轴，将矩形、直角三角形、直角梯形分别旋转一周而形成的曲面所围成的几何体(图 1-19).

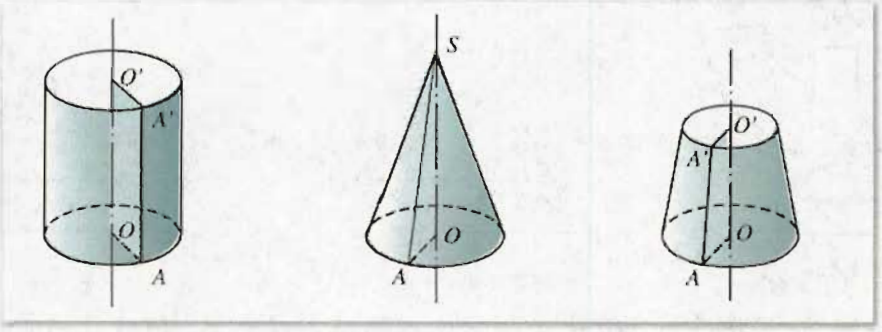


图 1-19

其中，旋转轴叫做所围成的几何体的**轴**；在轴上的这条边(或它的长度)叫做这个几何体的**高**；垂直于轴的边旋转而成的圆面叫做这个几何体的**底面**；不垂直于轴的边旋转而成的曲面叫做这个几何体的**侧面**，无论旋转到什么位置，这条边都叫做**侧面的母线**. 如图 1-19 中，直线 $O'O$，SO 是轴，线段 $O'O$，SO 是高，$A'A$，SA 是母线.

探索与研究

对圆柱、圆锥、圆台：

(1) 平行于底面的截面是什么样的图形?

(2) 过轴的截面(简称轴截面)分别是什么样的图形?

(3) 研究圆柱、圆台和圆锥之间的关系.

例 1 用一个平行于圆锥底面的平面截这个圆锥，截得圆台上下底面半径的比是 1∶4，截去的圆锥的母线长是 3 cm，求圆台的母线长(图 1-20).

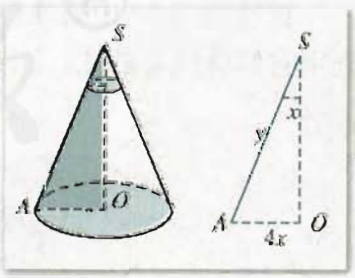


图 1-20

解：设圆台的母线长为 y，截得的圆锥底面与原圆锥底面半径分别是 x，$4x$，根据相似三角形的性质得

$$\frac{3}{3+y}=\frac{x}{4x},$$

解此方程得

$$y=9.$$

因此，圆台的母线长为 9 cm.

微信公众号：电子课本大全

练习A

1. 举出你在日常生活中见到的，具有圆柱、圆锥或圆台形状的物体.
2. 任意一个圆柱去掉两个底面，沿任意一条母线割开，然后放在平面上展平，它是什么样的平面图形?
3. 任意一个圆锥或圆台去掉底面，沿任意一条母线割开，然后放在平面上展平，它们各是什么样的平面图形?
4. 一个圆柱的母线长为5，底面半径为2，求圆柱的轴截面的面积.
5. 一个圆锥的母线长20 cm，母线与轴的夹角为30°，求圆锥的高.

练习B

1. 剪纸制作底面半径为3 cm，高为6 cm的圆柱和圆锥.
2. 剪纸制作两底面半径分别为3 cm，6 cm，高为4 cm的圆台.
3. 一个圆台的母线长为5，上底面和下底面直径分别为2和8，求圆台的高.
4. 一个圆台的母线长20 cm，母线与轴的夹角为30°，上底面的半径为15 cm，求圆台的高和下底面的面积.

2. 球

球是大家非常熟悉的几何体，请你通过思考或与同学讨论回答下面的问题：

球具有哪些性质？哪些性质可作为球集合的特征性质?

让我们做一个试验：

一个半圆绕着它的直径所在的直线旋转一周，研究半圆运动的轨迹是怎样的空间图形.

通过观察可以发现，球面可以看作一个半圆绕着它的直径所在的直线旋转一周所形成的曲面，球面围成的几何体，叫做球(图1-21).

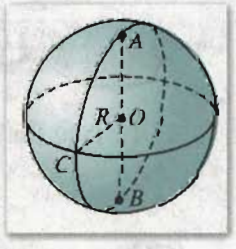


图1-21

形成球的半圆的圆心叫球心；连接球面上一点和球心的线段叫球的半径；连接球面上两点且通过球心的线段叫球的直径. 如图1-21中点O为球心，OA为球的半径，AB为球的直径.

一个球用表示它的球心的字母来表示，例如球O.

球面也可以看作空间中到一个定点的距离等于定长的点的集合.

用一个平面α去截半径为R的球O(图1-22)，不妨设平面α水平放置且不过球心，OO'为平面α的垂线，并与平面α交于点O'，$OO'=d$，则对于平面α与球面的交线上任意

微信公众号：电子课本大全

一点 P，都有 $O'P=\sqrt{R^2-d^2}$，是一个定值. 这说明截面与球面的交线是在平面 α 内，并且到定点 O' 的距离等于定长的点的集合. 因此平面 α 截球面所得到的交线是以 O' 为圆心，以

$$r=\sqrt{R^2-d^2}\ (R \text{ 是球的半径})$$

为半径的一个圆. 也就是说，截面是一个圆面(圆及其内部).

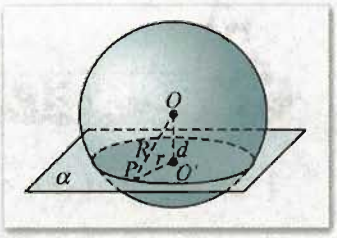


图 1-22

如果平面 α 过球心，则 $d=0$，$r=R$. 截面是半径等于球的半径的一个圆面.

球面被经过球心的平面截得的圆叫做**球的大圆**；被不经过球心的平面截得的圆叫做**球的小圆**.

当我们把地球看作一个球时，经线就是球面上从北极到南极的半个大圆；赤道是一个大圆，其余的纬线都是小圆(图1-23).

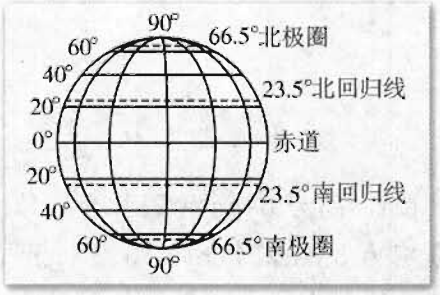


图 1-23

在球面上，两点之间的最短距离，就是经过这两点的大圆在这两点间的一段劣弧的长度. 事实上，人们把这个弧长叫做两点的球面距离. 例如，图 1-24 中劣弧 $\overset{\frown}{PQ}$ 的长度就是 P，Q 两点的球面距离. 飞机、轮船都是尽可能地以大圆弧(劣弧)为航线航行的.

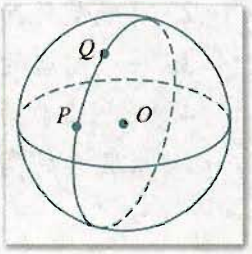


图 1-24

圆柱、圆锥、圆台、球等几何体，都是由一个平面图形绕着一条直线旋转产生的曲面所围成的几何体，这类几何体叫做**旋转体**，这条直线叫做旋转体的**轴**. 操作课件“旋转体生成”❶，可以自己动手生成一些旋转体.

思考与讨论

在平面几何中，你学习了直线与圆的位置关系，那么平面与球的位置关系如何?

例 2 我国首都北京靠近北纬 40°. 求北纬 40°纬线的长度(单位：km，地球半径约为 6 370 km，结果保留四位有效数字).

❶ 本书提到的课件都可从人教网（http://www.pep.com.cn）的高中数学 B 版栏目中下载.

微信公众号：电子课本大全

解：如图 1-25，设 A 是北纬 40°圈上的一点，AK 是它的半径，所以 $OK \perp AK$. 设 c 是北纬 40°的纬线长，因为 $\angle AOB = \angle OAK = 40°$，所以

$$\begin{aligned} c &= 2\pi \cdot AK \\ &= 2\pi \cdot OA \cdot \cos\angle OAK \\ &= 2\pi \cdot OA \cdot \cos 40° \\ &\approx 2\times 3.141\,6\times 6\,370\times 0.766\,0 \\ &\approx 3.066\times 10^4 (\text{km}). \end{aligned}$$

即北纬 40°的纬线长约为 3.066×10^4 km.

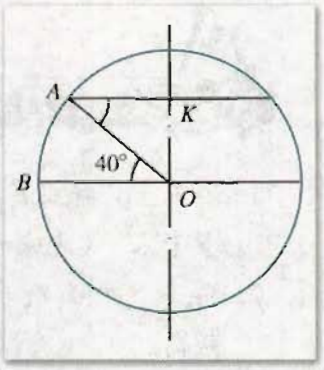


图 1-25

3. 组合体

我们观察周围的物体，除了柱、锥、台、球等基本几何体外，还有大量的几何体是由柱、锥、台、球等基本几何体组合而成的. 这些几何体叫做**组合体**. 如图1-26中所展示的机械可以看成是由一些基本几何体构成的组合体. 对组合体可以通过把它们分解为一些基本几何体来研究.

可结合课件“旋转体生成”设计生成组合体.

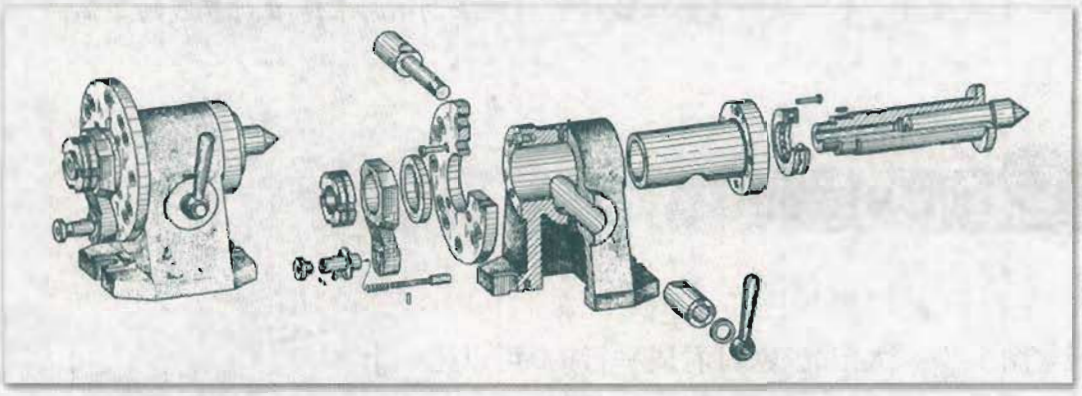


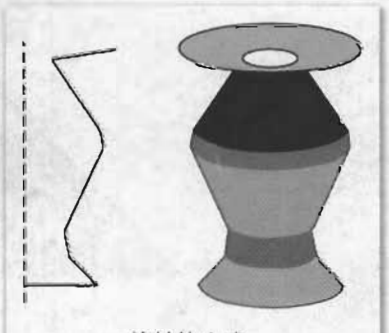
图 1-26

探索与研究

利用课件“旋转体生成”，自己动手生成一些旋转体，并分析它们分别是由哪些几何体构成的.

对课件的总的使用步骤是：先用设定母线的按钮选定母线，然后确定母线；再用一些旋转的按钮去观察旋转面或旋转体.

右图的左边是轴和选定的一种母线，右边是用这条母线旋转生成的旋转体.


旋转体生成

微信公众号：电子课本大全

练习A

1. 海面上，地球球心角1′所对的大圆的圆弧长为1 n mile(海里)，1 n mile是多少千米？(地球的半径为6 370 km)
2. 用一个平面截半径为25 cm的球，截面面积是49π cm^2，求球心到截面的距离.
3. 在图1-26中有哪些我们学过的基本几何体？

练习B

1. 我国大连与台北可以近似地认为具有相同的经度，从地图上分别查出大连与台北所在的纬度，再求出这两个城市的球面距离大约为多少千米.
2. 讨论直线与球的位置关系.
3. 一条直线被一个半径为5的球截得的线段长为8，求球心到直线的距离.

1.1.4 投影与直观图

1. 平行投影与直观图

观察图1-27，太阳光线(可看成平行的)可以把一个矩形的窗框投射到地板上，影子是平行四边形，在影子中，框边的长度以及框边之间的夹角有所改变，但框边

可结合课件“平行投影”学习平行投影的性质.

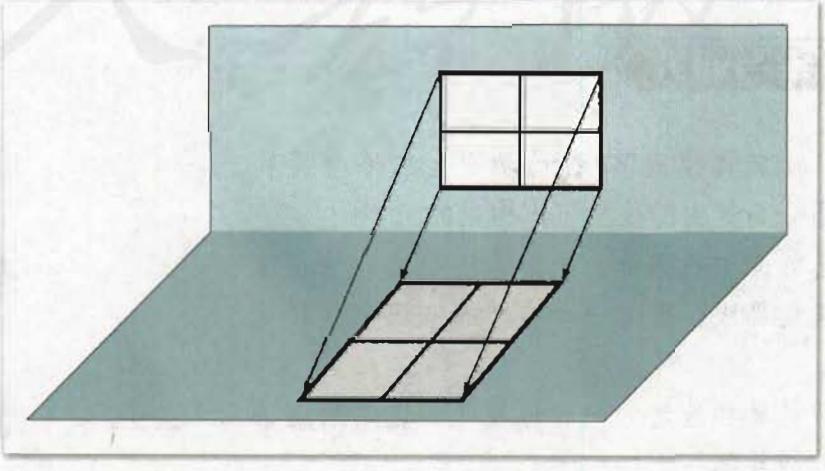


图1-27

微信公众号：电子课本大全

的平行性没有改变. 另外我们还看到，平行直线段或同一条直线上的两条线段的比也没有改变. 例如，一条线段中点的投影仍是这条线段投影的中点. 正是根据这些不变的性质，使我们能够从一个空间图形在平面上的投影来获得原来图形的大致形象.

在立体几何中，一般都是根据平行投影的性质，用平面图形来表示空间图形. 下面我们来研究平行投影的概念及其性质.

已知图形 F，直线 l 与平面 α 相交(图 1-28). 过 F 上任意一点 M 作直线 MM' 平行于 l，交平面 α 于点 M'，则点 M' 叫做点 M 在平面 α 内关于直线 l 的**平行投影**(或象). 如果图形 F 上的所有点在平面 α 内关于直线 l 的平行投影构成图形 F'，则 F' 叫做图形 F 在 α 内关于直线 l 的**平行投影**. 平面 α 叫做**投射面**，l 叫做**投射线**.

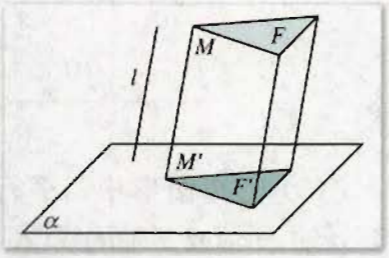


图 1-28

观察图 1-27 中窗户的影子(或打开课件“平行投影”)观看平行投影的演示，容易观察到，当图形中的直线或线段不平行于投射线时，平行投影都具有下述性质：

(1) 直线或线段的平行投影仍是直线或线段；

(2) 平行直线的平行投影是平行或重合的直线；

(3) 平行于投射面的线段，它的投影与这条线段平行且等长；

如图 1-29 中，$A'B' /\!\!/ AB$，$C'D' /\!\!/ CD$.

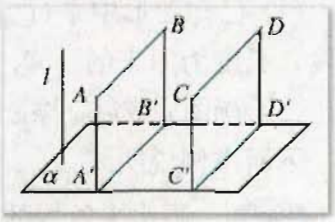


图 1-29

(4) 与投射面平行的平面图形，它的投影与这个图形全等；

(5) 在同一直线或平行直线上，两条线段平行投影的比等于这两条线段的比(图 1-30).

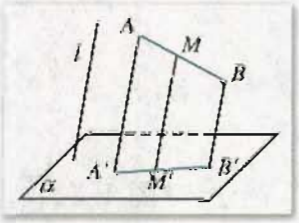


图 1-30

事实上，如果线段 AB 在平面 α 内关于直线 l 的平行投影是 $A'B'$(图 1-30)，点 M 在 AB 上，且 $AM:MB=m:n$，则点 M 的平行投影 M' 在 $A'B'$ 上，由初中所学的知识可以得出 $A'M':M'B'=m:n$.

当投射线和投射面成适当的角度或改变图形相对于投射面的位置时，一个空间图形在投射面上的平行投影(平面图形)可以形象地表示这个空间图形. 像这样用来表示空间图形的平面图形，叫做**空间图形的直观图**.

依据平行投影的性质画直观图的方法，国家规定了统一的标准. 一种较为简单的画图标准是**斜二测画法**. 这种画法的投射线与人的视线的方向不同. 下面举例说明斜二测画法.

斜二测画法的规则是(以一个正方体的模型为例)：

(1) 在已知模型所在的空间中取水平平面 $ABCD$ (图 1-31(1))，以 A 为原点 O，以 AB，AD 分别为互相垂直的轴 Ox，Oy，以 AA' 为 Oz 轴，则 $\angle xOz=90°$，且 $\angle yOz=90°$.

(2) 画直观图时(图 1-31(2))，把 Ox，Oy，Oz 画成对应的轴 $O'x'$，$O'y'$，$O'z'$，使 $\angle x'O'y'=45°$(或 135°)，$\angle x'O'z'=90°$. $x'O'y'$ 所确定的平面表示水平平面.

微信公众号：电子课本大全

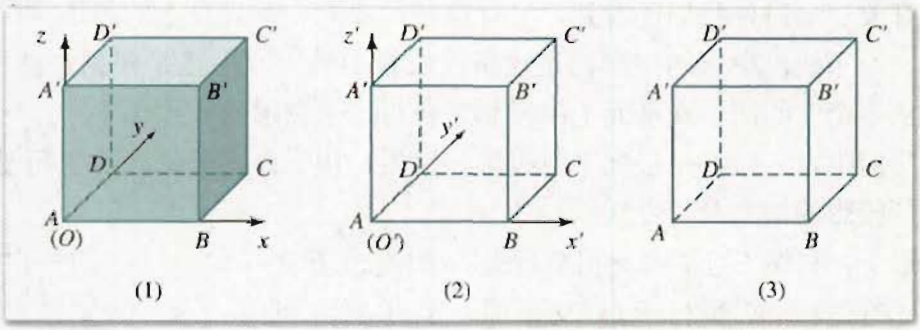


图 1-31

(3) 已知图形中，平行于 x 轴、y 轴或 z 轴的线段，在直观图中分别画成平行于 x' 轴、y' 轴或 z' 轴的线段. 并使它们和所画坐标轴的位置关系，与已知图形中相应线段和原坐标轴的位置关系相同.

(4) 已知图形中平行于 x 轴和 z 轴的线段，在直观图中保持长度不变，平行于 y 轴的线段，长度为原来的一半.

(5) 画图完成后，擦去作为辅助线的坐标轴，就得到了空间图形的直观图(图 1-31(3)).

下面举例说明.

例 1 画水平放置的正六边形的直观图.

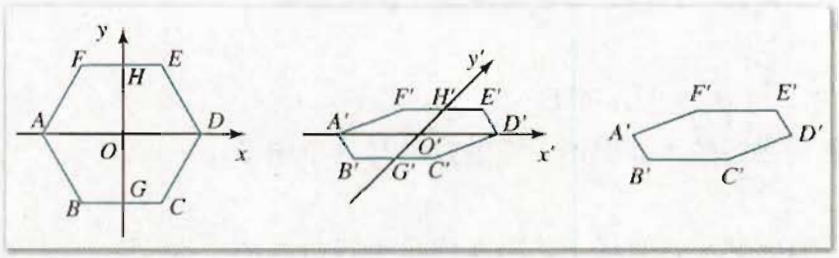


图 1-32

画法：(图 1-32) (1) 在已知六边形 $ABCDEF$ 中，取对角线 AD 所在直线为 x 轴，取对称轴 GH 为 y 轴，x 轴和 y 轴相交于点 O；任取点 O'，画对应的 x' 轴和 y' 轴，使 $\angle x'O'y'=45°$.

(2) 以点 O' 为 $A'D'$ 及 $G'H'$ 的中点，在 x' 轴上取 $A'D'=AD$，在 y' 轴上取 $G'H'=\frac{1}{2}GH$，以点 H' 为 $E'F'$ 的中点画 $F'E'\parallel O'x'$，并使 $F'E'=FE$；再以 G' 为 $B'C'$ 的中点画 $B'C'\parallel O'x'$，并使 $B'C'=BC$.

(3) 顺次连接 A'，B'，C'，D'，E'，F'，A'，并擦去作为辅助线的坐标轴，所得到的六边形 $A'B'C'D'E'F'$ 就是水平放置的正六边形 $ABCDEF$ 的直观图.

在画出水平放置的正六边形的直观图后，依照斜二测画法的画图规则不难画出六棱柱和六棱锥的直观图，如图 1-33 所示.

在立体几何中，通常用正等测画法画圆的直观图，圆的直观图是椭圆. 由于画圆的直观图比较复杂，在实际画圆的直观图时，通常使用不同尺寸的椭圆模板(图 1-34).

注

正等测画法的依据仍是平行投影的性质. 不过，这时投射线和人的视线平行，并且投射线与投射面垂直.

微信公众号：电子课本大全

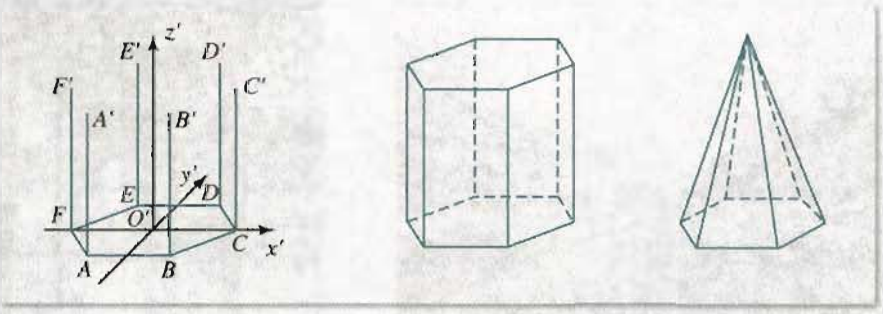


图 1-33

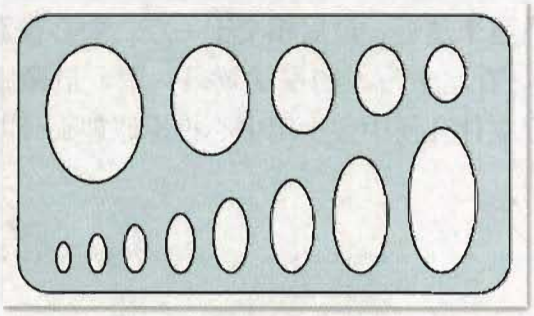


图 1-34

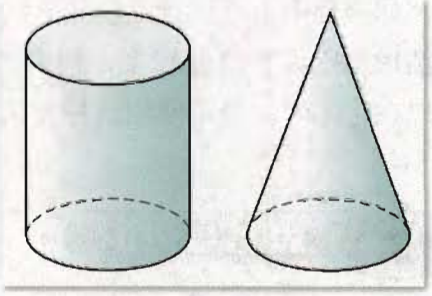


图 1-35

会画圆的直观图，就能画出圆柱、圆锥的直观图. 如图 1-35 所示.

通过以上的例子，我们介绍了空间图形直观图的画法. 为了简便，在不作严格要求时，画图时长度和角度可适当的选取，只要符合平行投影的要求，有一定的立体感就可以了. 例如，三角形的投影一般还是三角形，长方形的投影一般为平行四边形(图 1-36).

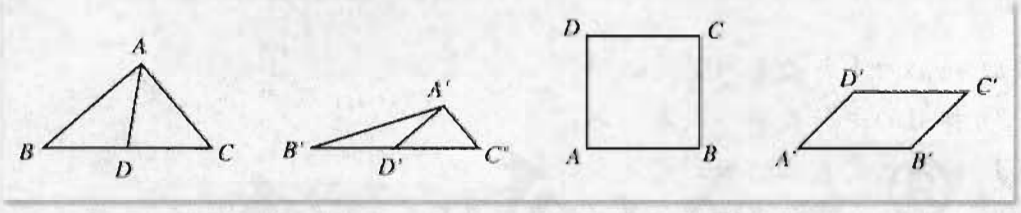


图 1-36

2. 中心投影

如图 1-37 所示，一个点光源把一个图形照射到一个平面上，这个图形的影子就是它在这个平面上的中心投影.

可以借助下页中的两幅照片来理解物体在平面上的中心投影.

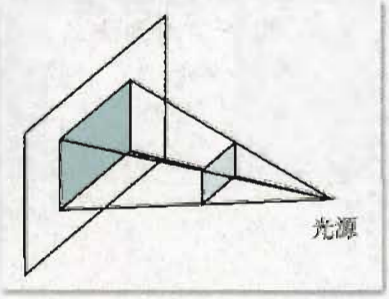


图 1-37

微信公众号：电子课本大全





从图中可以看到，空间图形经过中心投影后，直线变成直线，但平行线可能变成了相交的直线，如照片中由近到远，物体之间的距离越来越近，最后相交于一点. 中心投影后的图形与原图形相比虽然改变较多，但直观性强，看起来与人的视觉效果一致，最像原来的物体，所以在绘画时，经常使用这种方法. 但在立体几何中很少用中心投影原理来画图.

思考与讨论

如果一个平面图形所在的平面与投射面平行，试问，中心投影后得到的图形与原图形有什么关系？

练习A

1. 判断题：

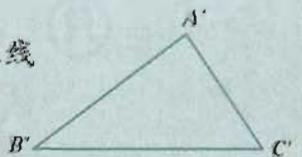
(1) 矩形的平行投影一定是矩形；

(2) 梯形的平行投影一定是梯形；

(3) 两条相交直线的投影可能平行；

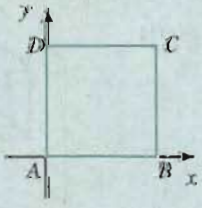
(4) 如果一个三角形的平行投影仍是三角形，那么它的中位线的平行投影，一定是这个三角形的平行投影的中位线.

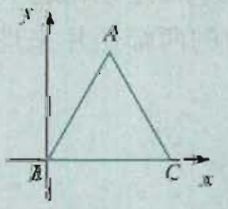
2. 已知$\triangle ABC$在一投射面内的平行投影是$\triangle A'B'C'$，如何画出$\triangle ABC$两条中线的交点M在投射面内的平行投影M'？



(第2题)

3. 用斜二测画法画出下列正方形和等边三角形水平放置的直观图.





(第3题)

4. 用斜二测画法画出长、宽、高分别为5 cm，4 cm，3 cm的长方体的直观图.

微信公众号：电子课本大全

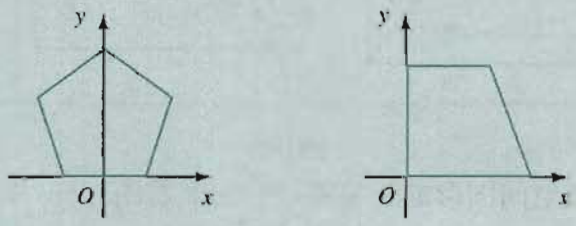
练习B

1. 判断题：

（1）平行四边形的平行投影可能是正方形；

（2）正方形的平行投影一定是菱形.

2. 用斜二测画法画出下列图中正五边形和四边形水平放置的直观图.



（第2题）

3. 用斜二测画法画底面边长为1.5 cm，高为3 cm的正三棱锥的直观图.

4. 画底面半径为1 cm，高为3 cm的圆柱和圆锥的直观图.

1.1.5 三视图

在物体的平行投影中，如果投射线与投射面垂直(图1-38)，则称这样的平行投影为**正投影**.

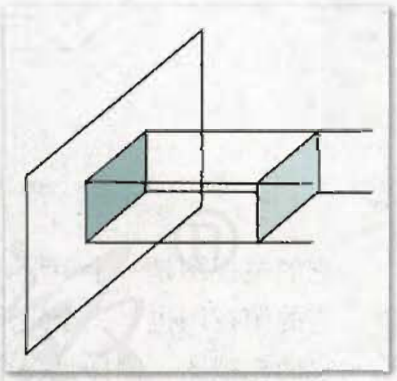


图1-38

容易知道，正投影除具有平行投影的性质外，还有如下性质：

(1) 垂直于投射面的直线或线段的正投影是点；

(2) 垂直于投射面的平面图形的正投影是直线或直线的一部分.

为了使空间图形的直观图更准确地反映空间图形的大小和形状，往往需要把图形向几个不同的平面分别作正投影，然后把这些投影图放在同一个平面内，并有机地结合起来表示物体的形状和大小.

通常，总是选取三个两两互相垂直的平面作为**投射面**，如图1-39所示：

一个投射面水平放置，叫做**水平投射面**，投射到这个平面内的图形叫做**俯视图**；

一个投射面放置在正前方，这个投射面叫做**直立投射面**，投射到这个平面内的图形叫做**主视图**；

和直立、水平两个投射面都垂直的投射面叫做**侧立投射面**，通常把这个平面放在直立投射面的右面，投射到这个平面内的图形叫做**左视图**.

将空间图形向这三个平面作正投影，然后把这三个投影按一定的布局放在一个平面

微信公众号：电子课本大全

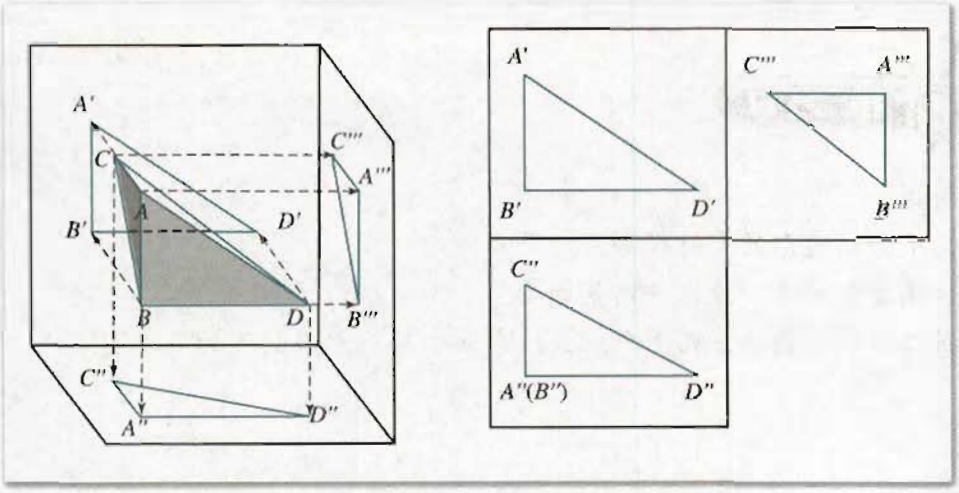


图 1-39

内，这样构成的图形叫做空间图形的三视图(图 1-39 右图).

例如，一个长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$，它的侧面分别平行于三个投射面(图 1-40)，把它向三个投射面投影：

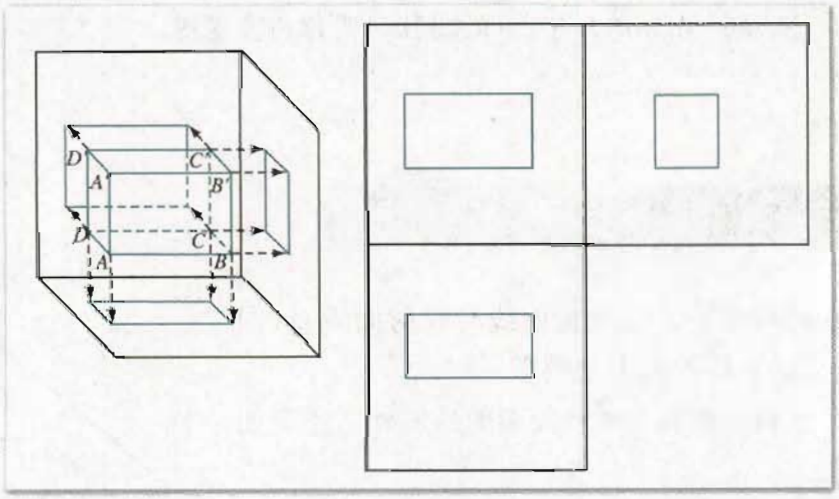


图 1-40

它的主视图是一个矩形，它表示长方体的高度和长度；

它的俯视图也是一个矩形，它表示长方体的长度和宽度；

它的左视图，同样是一个矩形，它表示长方体的宽度和高度.

把这三个投影图放在一个平面内，并按一定的布局排列，如图 1-40 所示. 这个图就是长方体的三视图.

从以上对三视图的描述可知，三视图的主视图、俯视图、左视图分别是从物体的正前方、正上方、正左方看到的物体轮廓线的正投影围成的平面图形.

任意一个物体的长、宽、高，一般指的是物体占有空间的左右、前后、上下的最大距离. 一个物体的三视图的排列规则是，俯视图放在主视图的下面，长度与主视图一样，左视图放在主视图的右面，高度与主视图一样，宽度与俯视图的宽度一样. 为了便于记忆，通常说：

“长对正、高平齐、宽相等”或说“主左一样高、主俯一样长、俯左一样宽”.

对简单的几何体，如一块砖，向两个互相垂直的平面作正投影，就能真实地反映它的

微信公众号：电子课本大全

大小和形状. 一般只画出它的主视图和俯视图(二视图). 对于复杂的几何体，三视图可能还不足以反映它的大小和形状，还需要更多的投射平面，这里就不作介绍了.

例 1 图 1-41(1)所示的是一个零件的直观图，画出这个几何体的三视图.

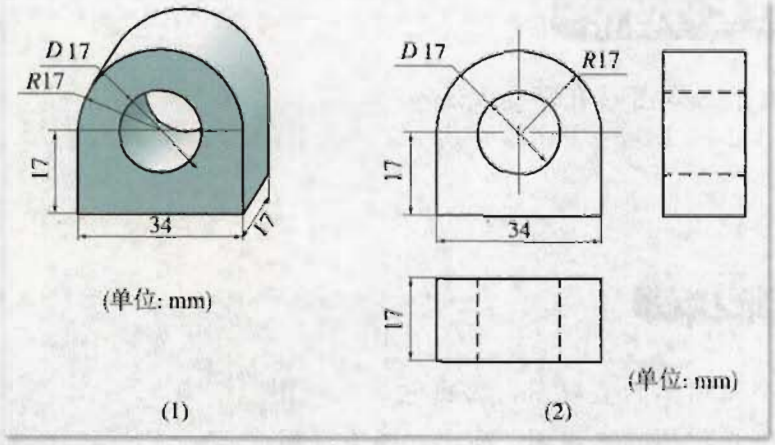


图 1-41

解：这个几何体的三视图如图 1-41(2)所示.

在视图中，被挡住的轮廓线画成虚线，尺寸线用细实线标出；D 表示直径，R 表示半径；单位不注明时按毫米计.

例 2 图 1-42(1)所示的是一个奖杯的三视图，画出它的直观图.

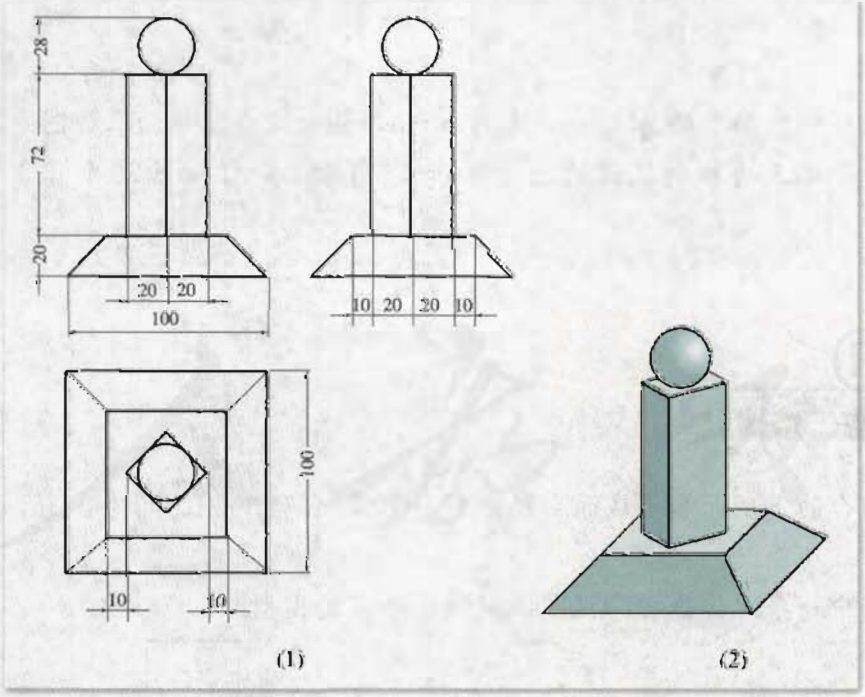


图 1-42

解：从奖杯的三视图可以看出，奖杯的底座是一个正棱台，它的上底面是边长为 60 mm的正方形，下底面是边长为 100 mm 的正方形，高为 20 mm. 底座的上面是一个底面对角线长为 40 mm，高 72 mm 的正四棱柱，它的底面的对角线分别与棱台底面的边平行，它的底面的中心在棱台上、下底面中心的连线上. 奖杯的最上部，在正四棱柱上底面

微信公众号：电子课本大全

的中心放着一个直径为 28 mm 的球.

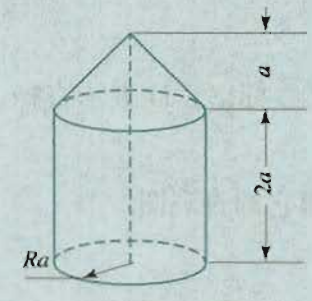
根据以上分析，画出奖杯的直观图，如图 1-42(2)所示.

思考与讨论

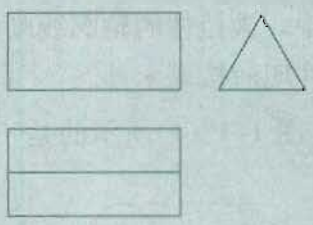
在平面上表示立体图形有哪些方法？

练习 A

1. 图中是一个几何体的直观图，画出它的三视图.
2. 图中是一个几何体的三视图，画出它的直观图.



(第 1 题)

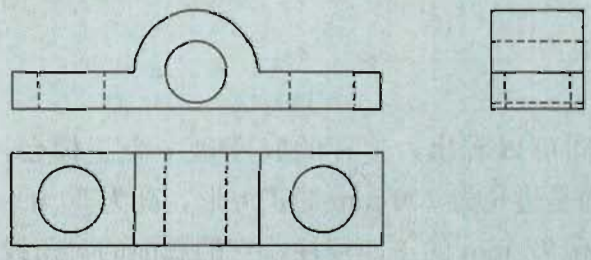


(第 2 题)

3. 已知圆柱的底面半径为 2 cm，高为 5 cm，画出这个圆柱的三视图.
4. 已知一个正三棱柱的底面边长为 3 cm，高为 5 cm，画出这个正三棱柱的三视图.

练习 B

1. 已知圆台的上底面和下底面半径分别为 1.5 cm 和 3 cm，高为 2 cm，画出这个圆台的三视图.
2. 根据图中一个几何体的三视图，制作一个实物模型.



(第 2 题)

微信公众号：电子课本大全

探索与研究

问题：旋转体放置在怎样的位置时，它的三视图比较简单？这时它的三视图有什么特征？

过程：实践并观察圆柱、圆锥和圆台的生成，研究这三种简单旋转体的三视图，并回答以下问题：

(1) 旋转体的三视图有哪些特征？

(2) 检验一下球的三视图是否符合你发现的特征.

《实验作业》

打开课件“旋转体生成”，或直观想象解答下面的问题.

如图 1-43，直角梯形 $ABCD$ 绕底边 AD 所在直线 EF 旋转，在旋转前，非直角的腰的端点 A 可以在 DE 上选定.

应用课件观察或直观想象，当点 A 选在射线 DE 上的不同位置时形成的几何体，分别画出它们的三视图并比较异同点.

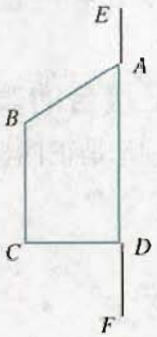


图 1-43

1.1.6 棱柱、棱锥、棱台和球的表面积

1. 直棱柱和正棱锥的表面积

我们来探讨直棱柱和正棱锥侧面积和表面积的计算方法.

图 1-44 分别是直六棱柱和正四棱锥的展开图. 不难发现，直棱柱的侧面展开图是矩形，而正棱锥的侧面展开图是一些全等的等腰三角形. 对此，我们在剪纸折叠几何体时也有所体会. 由矩形和三角形面积的计算公式，不难得到它们的侧面面积的计算公式.

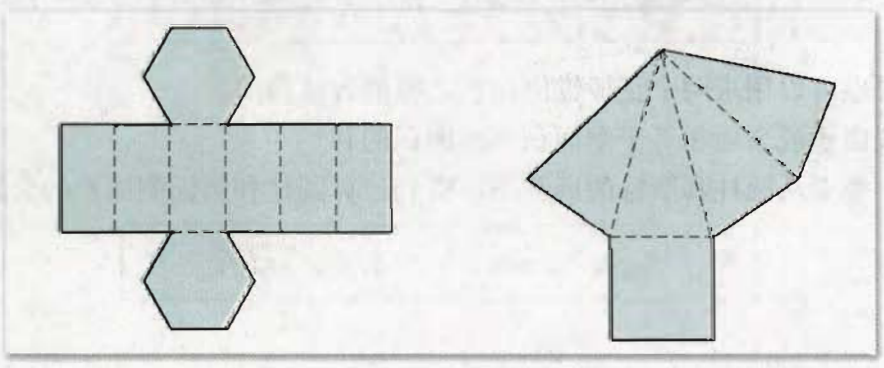


图 1-44

微信公众号：电子课本大全

设直棱柱高为 h，底面多边形的周长为 c，则得到直棱柱侧面面积计算公式

$$S_{直棱柱侧面积}=ch.$$

即直棱柱的侧面积等于它的底面周长和高的乘积.

正棱锥的侧面展开图是一些全等的等腰三角形. 底面是正多边形，如果设它的底面边长为 a，底面周长为 c，斜高为 h'，容易得到正 n 棱锥的侧面积的计算公式

$$S_{正棱锥侧}=\frac{1}{2}nah'=\frac{1}{2}ch'.$$

即正棱锥的侧面积等于它的底面的周长和斜高乘积的一半.

棱柱、棱锥的表面积或全面积等于侧面积与底面积的和.

2. 正棱台的表面积

图 1-45 是正四棱台的展开图. 棱台的展开图是由棱台的各个侧面和上下底组成的.

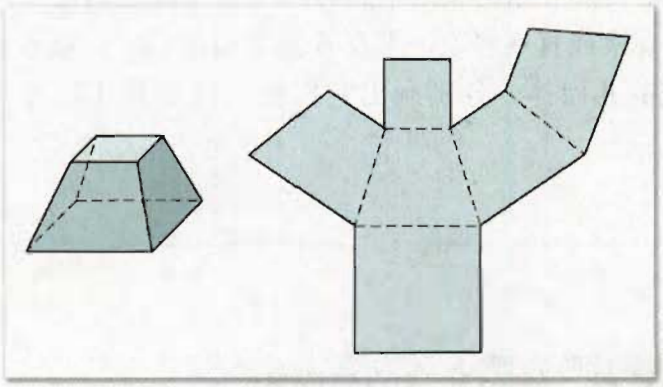


图 1-45

正棱台的侧面展开图是一些全等的等腰梯形. 设棱台下底面边长为 a、周长为 c，上底面边长为 a'、周长为 c'，斜高为 h'，可以得出正 n 棱台的侧面积公式

$$S_{正棱台侧}=n\cdot\frac{1}{2}(a+a')h'=\frac{1}{2}(na+na')h'=\frac{1}{2}(c+c')h',$$

即

$$S_{正棱台侧}=\frac{1}{2}n(a+a')h'=\frac{1}{2}(c+c')h'.$$

这一结果也可以用求两个正棱锥侧面积之差的方法得出.

棱台的表面积或全面积等于侧面积与底面积的和.

想想看，能否从圆柱和圆锥的展开图，得到计算圆柱和圆锥侧面积的公式

$$S_{圆柱侧}=2\pi Rh,\qquad S_{圆锥侧}=\pi Rl.$$

微信公众号：电子课本大全

3. 球的表面积

柱、锥的表面都可展开放在平面内，这样我们就可以根据平面图形的性质，求它们的表面积. 但球面不能展平成平面，我们要用其他方法求它的面积(具体算法请看选修系列 2 中的微积分内容). 这里我们给出由球的半径 R 计算球表面积的公式

$$S_{球}=4\pi R^2.$$

即球面面积等于它的大圆面积的四倍.

例 1 已知正四棱锥底面正方形的边长为 4 cm，高与斜高的夹角为 35°(图 1-46)，求正四棱锥的侧面积及全面积(单位：cm^2，精确到 0.01).

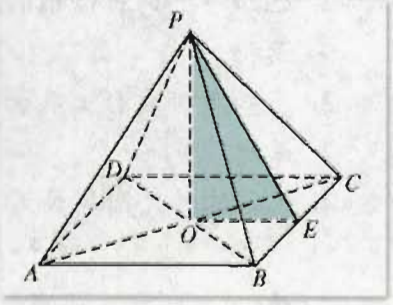


图 1-46

解：正棱锥的高 PO、斜高 PE 和底面边心距 OE 组成直角△POE.

因为 $OE=2$ cm，$\angle OPE=35°$，所以斜高

$$PE=\frac{OE}{\sin 35°}=\frac{2}{\sin 35°}.$$

因此

$$S_{棱锥侧}=\frac{1}{2}ch'=\frac{1}{2}\times 4\times 4\times\frac{2}{\sin 35°}\approx 27.90(cm^2),$$

$$S_{棱锥全}=27.90+16=43.90(cm^2).$$

例 2 如图 1-47 所示是一个容器的盖子，它是用一个正四棱台和一个球焊接而成的. 球的半径为 R. 正四棱台的两底面边长分别为 $3R$ 和 $2.5R$，斜高为 $0.6R$：

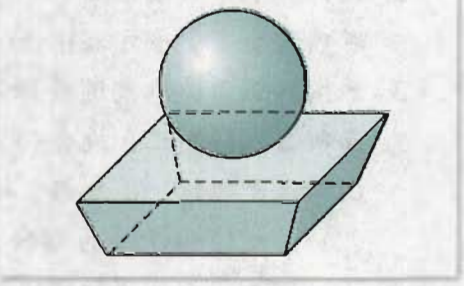


图 1-47

(1) 求这个容器盖子的表面积(用 R 表示，焊接处对面积的影响忽略不计)；

(2) 若 $R=2$ cm，为盖子涂色时所用的涂料每 0.4 kg 可以涂 1 m^2，计算为 100 个这样的盖子涂色约需涂料多少千克(精确到 0.1 kg).

解：(1) 因为

$$S_{正四棱台}=4\times\frac{1}{2}\times(2.5R+3R)\times 0.6R+(2.5R)^2+(3R)^2$$

$$=\frac{1}{2}(4\times 2.5+4\times 3)\times 0.6R^2+6.25R^2+9R^2$$

$$=21.85R^2,$$

$$S_{球}=4\pi R^2.$$

因此，这个盖子的全面积为 $S_{全}=(21.85+4\pi)R^2$.

(2) 取 $R=2$，$\pi=3.14$，得 $S_{全}=137.64$ cm^2. 又

$$(137.64\times 100)\div 10\,000\times 0.4\approx 0.6(kg).$$

微信公众号：电子课本大全

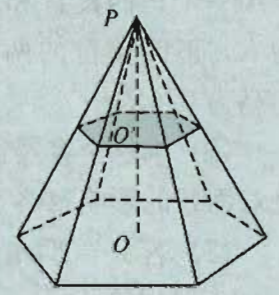
因此，涂 100 个这样的盖子共需涂料约 0.6 kg.

练习 A

1. 已知正六棱柱的高为 h，底面边长为 a，求它的全面积.
2. 已知一个正三棱锥的侧面都是等边三角形，侧棱长为 4，求它的侧面积和全面积.
3. 已知正四棱台上底面边长为 4 cm，侧棱和下底面边长都是 8 cm，求它的全面积.
4. 已知球的大圆周长为 16π cm，求这个球的表面积.

练习 B

1. 已知一个正方体的 8 个顶点都在同一个球面上，计算球的表面积和这个正方体的全面积的比.
2. 设计一个正四棱锥形冷水塔塔顶，高 0.85 米，底的边长是 1.5 米，制造这个塔顶需要多少平方米铁板(保留两位有效数字)?
3. 如图，正六棱锥被过棱锥高 PO 的中点 O' 且平行于底的平面所截，得到正六棱台 OO' 和较小的棱锥 PO'：
   (1) 求大棱锥、小棱锥、棱台的侧面积之比；
   (2) 若大棱锥 PO 的侧棱长为 12 cm，小棱锥底面边长为 4 cm，求截得的棱台的侧面积和全面积.



(第 3 题)

1.1.7 柱、锥、台和球的体积

我们在小学和初中已经知道求长方体体积 V 的公式

$$V_{长方体}=abc=Sh.$$

其中 a、b、c 分别是长方体的长、宽和高，S，h 分别是长方体的底面积和高.

由长方体体积的算法，可以推出求其他几何体体积的算法.

微信公众号：电子课本大全

我国古代对几何体的体积研究，取得了光辉的成就，并建立了完整的理论体系．这个理论的基础是：

祖暅原理：幂势既同，则积不容异．

这就是说，夹在两个平行平面间的两个几何体，被平行于这两个平面的任意平面所截，如果截得的两个截面的面积总相等，那么这两个几何体的体积相等（图 1-48）．

这个原理是非常浅显易懂的．例如，取一摞纸张堆放在桌面上，将它们如图 1-49 中的右图那样改变一下形状，这时高度没有改变，每页纸的面积也没有改变，因而这摞纸的体积与变形前相等．

可利用课件“祖暅原理”探索几何体的体积的计算方法．

祖暅是我国古代南北朝时期（5 世纪）的数学家，他在总结前人研究的基础上，总结出这个原理．在欧洲直到 17 世纪，才由意大利的卡瓦列里提出这个事实．

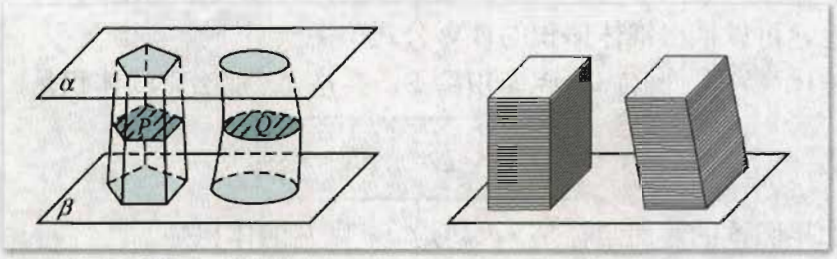


图 1-48　　图 1-49

应用祖暅原理可以说明：

等底面积、等高的两个柱体或锥体的体积相等．

1. 棱柱和圆柱的体积

如图 1-50 所示，设有一个棱柱、一个圆柱和一个长方体，它们的底面积都等于 S，高都等于 h，它们的下底面都在同一平面上．因为它们的上底面和下底面平行，并且高都相等，所以它们的上底面都在和下底面平行的同一个平面内（图 1-50）．

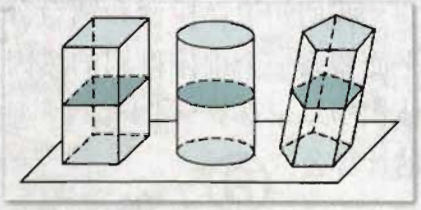


图 1-50

用与底面平行的任意平面去截它们时，所得的截面面积都等于 S，根据祖暅原理，它们的体积相等．由于长方体的体积等于它的底面积和高的乘积，因此我们得到柱体体积的计算方法：

柱体（棱柱、圆柱）的体积等于它的底面积 S 和高 h 的积．即

$$V_{柱体}=Sh.$$

底面半径是 r，高是 h 的圆柱体的体积的计算公式是

$$V_{圆柱}=\pi r^2 h.$$

微信公众号：电子课本大全

2. 棱锥和圆锥的体积

在小学我们就通过比较容积的方法，验证了圆锥的体积是等底面积、等高的圆柱体积的三分之一. 如图1-51所示，用同样大小的三个三棱锥能拼成一个三棱柱，这说明三棱锥的体积是等底面积、等高的三棱柱体积的三分之一(图 1-51).

对三棱锥体积公式的推导感兴趣的同学可结合课件“三棱锥的体积”进行研究.

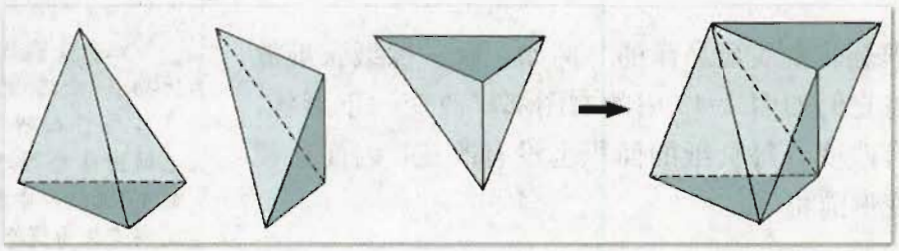


图 1-51

在此基础上，可以推出锥体体积的计算公式.

如果一个锥体(棱锥、圆锥)的底面积是 S，高是 h，那么它的体积是

$$V_{锥体}=\frac{1}{3}Sh.$$

特别地，如果圆锥的底面半径是 r，高是 h，则它的体积是

$$V_{圆锥}=\frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

3. 棱台和圆台的体积

我们知道，棱台和圆台分别是棱锥、圆锥用平行于底面的平面截去一个锥体得到的. 因此，台体的体积可以用两个锥体体积的差来计算(图 1-52)，计算过程从略. 下面给出台体体积的计算公式

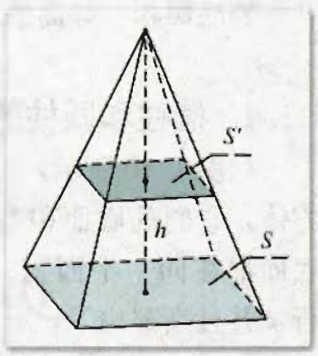


图 1-52

$$V_{台体}=\frac{1}{3}h(S+\sqrt{SS'}+S').$$

其中 S'，S 分别是台体上、下底面的面积，h 是台体的高.

特别地，如果圆台的上、下底面的半径分别是 r'，r，高是 h，则它的体积是

$$V_{圆台}=\frac{1}{3}\pi h(r^2+rr'+r'^2).$$

4. 球的体积

应用圆柱和圆锥的体积公式，根据祖暅原理可以得到球的体积公式

$$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

微信公众号：电子课本大全

其中 R 为球的半径.

关于球体积的推导过程，可参看选修 2-2 中的“导数及其应用”一章.

例 1 如图 1-53 所示，在长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，用截面截下一个棱锥 $C\text{-}A'DD'$，求棱锥 $C\text{-}A'DD'$ 的体积与剩余部分的体积之比.

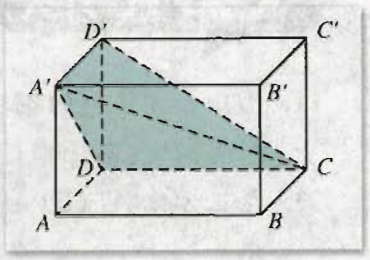


图 1-53

解：已知长方体可以看成直四棱柱 $ADD'A'\text{-}BCC'B'$，设它的底面 $ADD'A'$ 面积为 S，高为 h，则它的体积为

$$V=Sh.$$

因为棱锥 $C\text{-}A'DD'$ 的底面面积为 $\frac{1}{2}S$，高是 h，所以棱锥 $C\text{-}A'DD'$ 的体积

$$V_{C\text{-}A'DD'}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}Sh=\frac{1}{6}Sh.$$

余下的体积是

$$Sh-\frac{1}{6}Sh=\frac{5}{6}Sh.$$

所以棱锥 $C\text{-}A'DD'$ 的体积与剩余部分的体积之比为 $1:5$.

例 2 有一堆相同规格的六角螺帽毛坯(图 1-54)，共重 5.8 kg. 已知螺帽的底面六边形边长是 12 mm，高是 10 mm，内孔直径是 10 mm，这一堆螺帽约有多少个(铁的密度是 7.8 g/cm³，$\pi\approx3.14$)?

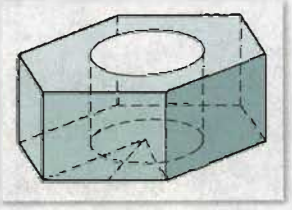


图 1-54

解：六角螺帽毛坯的体积是一个正六棱柱的体积和一个圆柱的体积的差.

因为

$$V_{正六棱柱}=6\times\frac{1}{2}\times12\times(12\times\sin60°)\times10$$

$$=3\times12^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times10\approx3.74\times10^3(\text{mm}^3),$$

$$V_{圆柱}\approx3.14\times(10\div2)^2\times10=0.785\times10^3(\text{mm}^3),$$

所以一个螺帽的体积

$$\begin{aligned}V&=3.74\times10^3-0.785\times10^3\\&\approx2.96\times10^3(\text{mm}^3)\\&=2.96(\text{cm}^3).\end{aligned}$$

因此约有

$$5.8\times10^3\div(7.8\times2.96)\approx2.5\times10^2(\text{个}).$$

答：这堆螺帽约有 250 个.

微信公众号：电子课本大全

练习A

1. 已知长方体形的铜块长、宽、高分别是2，4，8，将它熔化后铸成一个正方体形的铜块(不计损耗)，求铸成的铜块的棱长.
2. 在正方体$ABCD\text{-}A'B'C'D'$中，三棱锥$A'\text{-}BC'D$的体积是正方体体积的几分之几?
3. 一个球的大圆的面积增为原来的100倍，那么这个球的体积有什么变化?

练习B

1. 一个正方体和一个圆柱等高，并且侧面积相等，求这个正方体和圆柱的体积之比.
2. 已知正四棱锥的侧面都是等边三角形，它的斜高为$\sqrt{3}$，求这个正四棱锥的体积.
3. 有一个正四棱台形状的油槽，最多装油190 L，假如它的两底面边长分别等于60 cm和40 cm. 求它的深度.

习题1-1 A

1. 棱柱具有哪些性质就为直棱柱? 直棱柱具有哪些性质就为正棱柱?
2. 如果平行于一个正棱锥底面的截面面积是底面面积的$\frac{1}{2}$，那么截面截一条侧棱所得两条线段的比是多少?
3. 一长方体的长、宽、高分别为12，4，3，你能用勾股定理求出它的对角线长吗?
4. 回答下列问题:
   (1) 同一直线上的若干点，在同一投射面上的平行投影有什么性质?
   (2) 平行于投射面的线段的平行投影和中心投影，它的长度与原线段的长度分别有什么关系?
   (3) 与投射面垂直的面上的若干图形的正投影有什么性质?
5. 画出底面边长为2 cm，高为5 cm的正三棱锥的直观图和三视图.
6. 画出底面半径长为1.8 cm，高为5 cm的圆锥的直观图和三视图.
7. 已知一个长方体的长、宽、高的比为4∶2∶1，它的体积为1 000 cm^3，求这个长

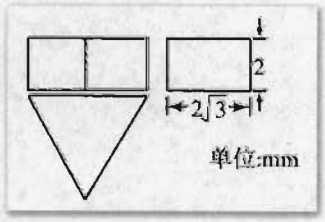
微信公众号：电子课本大全

方体的长、宽、高.

8. 正方体的每条棱都增加 1 cm，它的体积扩大为原来的 8 倍，求它的棱长.
9. 已知直三棱柱底面的一边长为 2 cm，另两边长都为 3 cm，侧棱长为 4 cm，求它的体积.
10. 已知正六棱柱底面边长为 10 cm，高为 15 cm，求这个正六棱柱的体积.
11. 火星的直径约是地球的一半，地球的体积是火星体积的几倍？地球的半径约是 6 370 km，地球和火星的体积各是多少（精确到 1 km^3）？

习题 1-1 B

1. 一个正三棱柱的三视图如图所示，求这个正三棱柱的表面积.



（第 1 题）

2. 如果圆柱的底面半径不变，要使它的体积扩大到原来的 5 倍，那么需要把它的高扩大到原来的多少倍？如果圆柱的高不变，半径扩大到原来的多少倍才能使它的体积扩大到原来的 5 倍？
3. 求正三棱柱的内切圆柱和外接圆柱的体积比.
（注：以正棱柱两个底面的内切圆面为底面的圆柱叫做它的内切圆柱，以正棱柱的两个底面的外接圆面为底面的圆柱叫做它的外接圆柱.）
4. 已知正三棱锥的侧棱两两互相垂直，且都等于 a，求棱锥的体积.
5. 等边三角形的边长为 a，它绕其一边所在的直线旋转一周，求所得旋转体的体积.
6. 已知圆锥的母线长为 5 cm，高为 4 cm，求这个圆锥的体积.
7. 木星的表面积约是地球的 120 倍，它的体积约是地球的多少倍(精确到个位)？

微信公众号：电子课本大全



实习作业

1. 在你周围的建筑物中，选一个由简单几何体组成的建筑物(可以忽略它的细节部分)，设法测量它的各部分长度的近似值：

(1) 画出它的直观图，有可能时附上它的照片；

(2) 参照实物的比例画出它的三视图，并标上实际测量得到的度量值.

2. 画出一个生活中的实物或模型的三视图和直观图(尺寸不作严格要求).

实 习 报 告　　年 月 日

1. (1) 直观图(照片或图画)：

(2) 三视图：

2. 实物或模型的名称：

三视图：

微信公众号：电子课本大全



1.2 点、线、面之间的位置关系

点、直线(线段)和平面是我们最常见的基本图形. 用它们可以构成各种各样的图形. 本节将深入探讨它们之间的逻辑关系，进行必要的说理论证，进一步培养同学们的空间想象能力和逻辑推理能力.

1.2.1 平面的基本性质与推论

1. 平面的基本性质

在几何学中，我们用点标记位置. 在日常生活中，一位同学从一个位置走到另一个位置，他经过的路径，就用一条线来表示. 在初中几何中，大家通过实验、观察得到了如下的点和直线的基本性质：

连接两点的线中，线段最短；

过两点有一条直线，并且只有一条直线.

几何中的点、直线都是抽象的概念，在现实世界中可以说是不存在的. 画出的点，我们不考虑它们的大小，画出的线也不考虑它们的粗细. 基于这种抽象的思考，我们才能总结出上述点与直线的性质. 大家学完初中几何后，已经初步体会到了这些抽象概念的意义和作用.

现在我们通过观察、想象来探讨几何中平面的概念.

在日常生活中，我们对平面的认识是直观的. 大家都会判断什么样的物体表面是“平的”，什么样的面是凹凸不平的. 物体“平的”表面使我们认识了平面的形象，现在我们来研究平面的特征性质.

基本性质❶1　如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上的所有点都在这个平面内(图 1-55).

这时我们说，直线在平面内或平面经过直线.

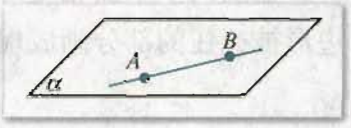


图 1-55

❶ 这里的基本性质也可以看作是公理.

微信公众号：电子课本大全

这一性质是平面的主要特征. 弯曲的面就不是处处具有这种性质.

利用这一性质，可以判断一条直线是否在一个平面内.

从基本性质 1 出发，再进一步探讨平面的其他基本性质.

在空间给定不共线的三点 A，B，C(图 1-56)，作直线 AB，BC，CA，再在直线 BC，CA，AB 上分别取动点 P，Q，R，作直线 AP，BQ，CR，让 P，Q，R 分别在直线 BC，CA，AB 上运动，我们可以想象，这些直线“编织”成一个平面.

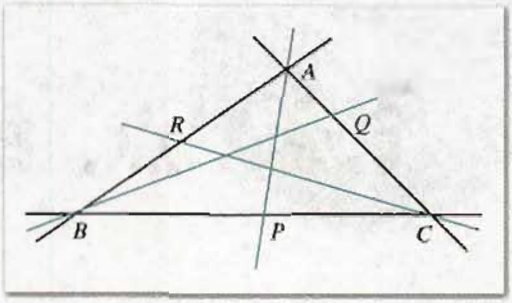


图 1-56

由以上试验可以得到平面的另一个基本性质：

基本性质 2 经过不在同一条直线上的三点，有且只有一个平面.

这也可以简单地说成，不共线的三点确定一个平面.

例如，照相机需用三条腿的架子才能支撑在地面上，就是根据这个性质.

过不共线的三点 A，B，C 的平面，通常记作平面 ABC(图1-57).

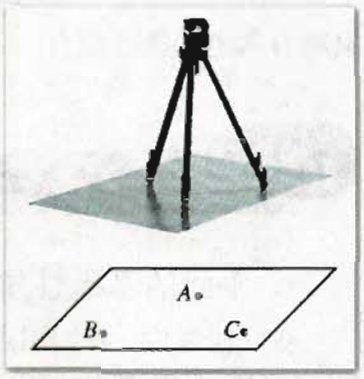


图 1-57

回顾第 1.1 节的内容，我们已经看到各种棱柱、棱锥的每两个相交的面之间的交线都是直线段，由此我们总结出以下性质：

基本性质 3 如果不重合的两个平面有一个公共点，那么它们有且只有一条过这个点的公共直线(图 1-58).

为了简便，以后说到两个平面，如不特别说明，都是指不重合的两个平面.

如果两个平面有一条公共直线，则称这两个平面相交. 这条公共直线叫做这两个平面的交线. 如图 1-58，平面 α 与 β 相交，交线是 a；平面 δ 与 γ 相交，交线是 b.

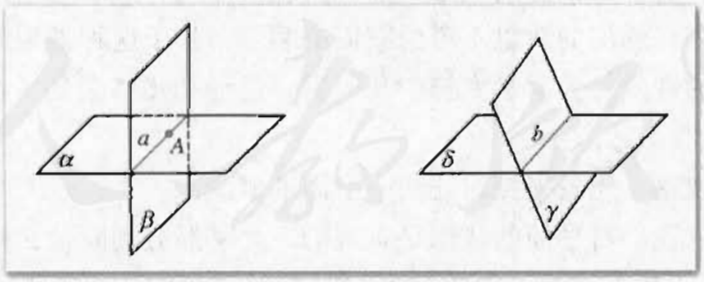


图 1-58

在画两个平面相交时，如果其中一个平面被另一个平面遮住，应把表示平面的平行四边形被遮住的部分画成虚线或不画.

2. 平面基本性质的推论

由平面的基本性质，可以得到下面的推论：

推论 1 经过一条直线和直线外的一点，有且只有一个平面 (图 1-59(1)).

微信公众号：电子课本大全

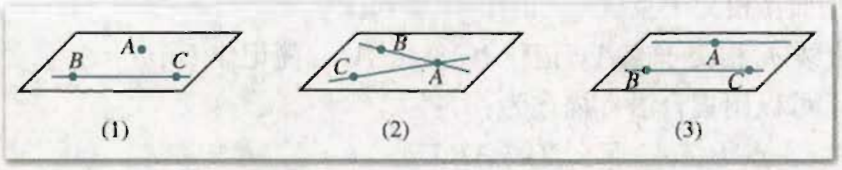


图 1-59

事实上，如图 1-59(1)所示，直线 BC 外一点 A 和直线 BC 上的两点 B，C 不共线，根据基本性质 2，A，B，C 三点确定一个平面 ABC. 并且，点 A 和直线 BC 都在平面 ABC 内.

推论 2　经过两条相交直线，有且只有一个平面（图 1-59(2)）.

事实上，如图 1-59(2)所示，两条相交直线 AB，AC 相交于点 A，三点 A，B，C 确定的平面就是直线 AB 和 AC 确定的平面.

推论 3　经过两条平行直线，有且只有一个平面(图 1-59(3)).

事实上，根据平行线的定义，这两条平行线在同一平面内，又如图 1-59(3)所示，这个平面含有一条直线上的点 A 和另一条线上的两点 B，C，由基本性质 2 可知，这个平面是确定的.

思考与讨论

已知两条直线相交，过其中任意一条直线上的一点作另一条直线的平行线，这些平行线是否都共面？为什么？

3. 共面与异面直线

空间中的几个点或几条直线，如果都在同一平面内，我们就说它们**共面**. 如果两条直线共面，那么它们平行或者相交.

在空间，两条直线还可能有既不相交也不平行的情况. 如图 1-60所示，直线 AB 与平面 α 相交于点 B，点 A 在 α 外，直线 l 在 α 内，但不过点 B. 这时直线 l 与直线 AB，既不相交也不平行，它们不可能在同一平面内，否则点 A 在 α 内. 这与点 A 在 α 外矛盾. 因此我们把这类既不相交又不平行的直线叫做**异面直线**.

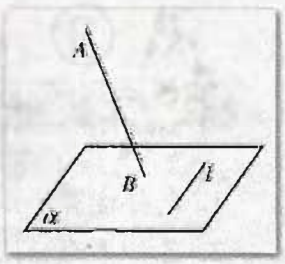


图 1-60

由以上分析，我们可以得到判断两条直线为异面直线的一种方法：与一平面相交于一点的直线与这个平面内不经过交点的直线是异面直线.

我们把空间看作点的集合，这就是说，点是空间的基本元素，直线和平面都是空间的子集，直线是它所在平面的子集. 于是，我们可以用集合语言来描述点、直线和平面之间的关系以及图形的性质. 例如：

点 A 在平面 α 内，记作 $A\in\alpha$；点 A 不在 α 内，记作 $A\notin\alpha$；

直线 l 在平面 α 内，记作 $l\subset\alpha$；直线 l 不在平面 α 内，记作 $l\not\subset\alpha$；

微信公众号：电子课本大全

平面 α 与平面 β 相交于直线 a，记作 $\alpha\cap\beta=a$；

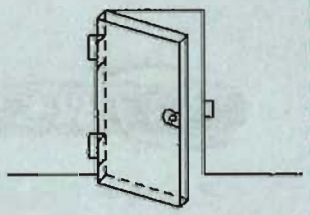
直线 l 和直线 m 相交于点 A，记作 $l\cap m=\{A\}$，简记作 $l\cap m=A$.

基本性质 1 可以用集合语言描述为：

如果点 $A\in\alpha$，点 $B\in\alpha$，那么直线 $AB\subset\alpha$.

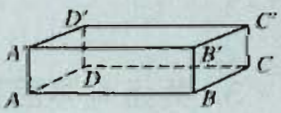
练习 A

1. 判断下列命题的真假：
   (1) 如果两个平面有两个公共点 A，B，那么它们就有无数多个公共点，并且这些公共点都在直线 AB 上；
   (2) 过一条直线的平面有无数多个；
   (3) 两个平面的公共点的集合，可能是一条线段；
   (4) 两个相交平面存在不在一条直线上三个公共点.
2. 线段 AB 在平面 α 内，直线 AB 是否在平面 α 内？为什么？
3. 一扇门，可以想象为平面的一部分，通常用两个合页把它固定在门框的一边上，当门不锁上时，可以自由转动，如果门锁上，则门就固定在墙面上，这个事实说明平面具有哪条基本性质？



(第 3 题)

4. 为什么说平行四边形和梯形都是平面图形？
5. 在空间，两条直线的位置关系有哪些？
6. 如图，把长方体的棱看作直线，试指出这些直线中哪些是平行的？哪些是相交的？哪些是异面的？



(第 6 题)

练习 B

1. 怎样检查一张桌子的四条腿的下端是否在同一平面内？
2. 已知平面 ABD 与平面 CBD 相交于直线 BD，直线 EF 与直线 GH 分别在已知的两个平面内且相交于点 M，点 M 是否在交线 BD 上？为什么？
3. 一个平面能把空间分成几部分？两个平面呢？三个平面呢？
4. 一个角一定是平面图形吗？圆是平面图形吗？为什么？
5. 画三棱锥 S-ABC，写出其棱所在直线中，哪些直线互为异面直线.
6. 用集合符号表示下列语句：
   (1) 点 A 在直线 l 上，点 B 不在直线 l 上；

微信公众号：电子课本大全

(2) 直线 l 在平面 α 内，直线 m 与平面 α 有且只有一个公共点 M；

(3) 平面 α 与平面 β 相交于过点 A 的直线 l.

7. 已知直线 a，b，c，且 $a\cap b=A$，$a\cap c=B$，b 和 c 异面，试画出图形表示它们之间的关系.

1.2.2 空间中的平行关系

1. 平行直线

在初中几何中，我们把在同一平面内不相交的两条直线叫做平行线，还学过平行公理：

过直线外一点有且只有一条直线和已知直线平行.

在初中几何中，我们还学过平行线的另一条重要性质：

在同一平面内，如果两条直线都和第三条直线平行，那么这两条直线也互相平行.

这一性质同样可以推广到空间，作为空间中平行直线的基本性质：

基本性质 4　平行于同一条直线的两条直线互相平行.

即，如果直线 $a/\!/b$，$c/\!/b$，那么 $a/\!/c$(图 1-61).

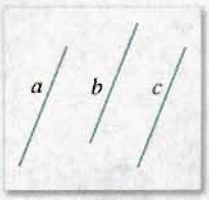


图 1-61

上述基本性质通常又叫做空间平行线的传递性.

定理　如果一个角的两边与另一个角的两边分别对应平行，并且方向相同，那么这两个角相等.

已知：如图 1-62 所示，$\angle BAC$ 和 $\angle B'A'C'$ 的边 $AB/\!/A'B'$，$AC/\!/A'C'$，且射线 AB 与 $A'B'$ 同向，射线 AC 与 $A'C'$ 同向.

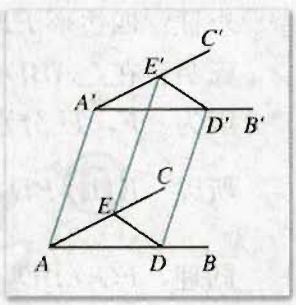


图 1-62

求证：$\angle BAC=\angle B'A'C'$.

证明：对于 $\angle BAC$ 和 $\angle B'A'C'$ 在同一平面内的情形，用初中所学的知识容易证明. 下面证明两个角不在同一平面内的情形.

分别在 $\angle BAC$ 的两边和 $\angle B'A'C'$ 的两边上截取线段 AD，AE 和 $A'D'$，$A'E'$，使 $AD=A'D'$，$AE=A'E'$.

因为　$AD/\!\!/\!\!=A'D'$，

所以　$AA'D'D$ 是平行四边形.

可得　$AA'/\!\!/\!\!=DD'$.

同理可得　$AA'/\!\!/\!\!=EE'$.

于是　$DD'/\!\!/\!\!=EE'$.

因此　$DD'E'E$ 是平行四边形.

可得　$DE=D'E'$.

于是　$\triangle ADE\cong\triangle A'D'E'$.

因此　$\angle BAC=\angle B'A'C'$.

微信公众号：电子课本大全

思考与讨论

空间中，如果一个角的两边与另一个角的两边分别对应平行，并且对应边的方向都相反，那么这两个角的大小关系如何？如果一组对应边方向相同，另一组对应边方向相反，这两个角的大小关系又如何？叙述你得到的结论，并说明理由.

如图 1-63（1）所示，顺次连接不共面的四点 A，B，C，D 所构成的图形，叫做**空间四边形**. 这四个点中的各个点叫做**空间四边形的顶点**；所连接的相邻顶点间的线段叫做**空间四边形的边**；连接不相邻的顶点的线段叫做**空间四边形的对角线**. 空间四边形用表示顶点的四个字母表示. 例如，图 1-63(2)中的四边形可以表示为空间四边形 $ABCD$，线段 AC，BD 是它的对角线.

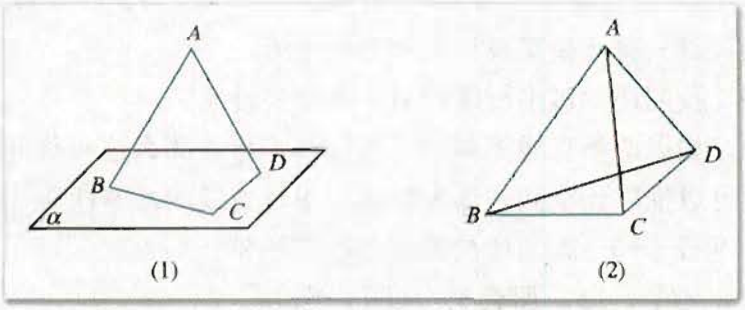


图 1-63

例 1 已知：如图 1-64，空间四边形 $ABCD$ 中，E，F，G，H 分别是边 AB，BC，CD，DA 的中点.

求证：四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

证明：在△ABD 中，

因为 E，H 分别是 AB，AD 的中点，

所以 $EH \parallel BD$，$EH=\frac{1}{2}BD$.

同理，$FG \parallel BD$，且 $FG=\frac{1}{2}BD$.

所以 $EH \parallel FG$，$EH=FG$.

所以 四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

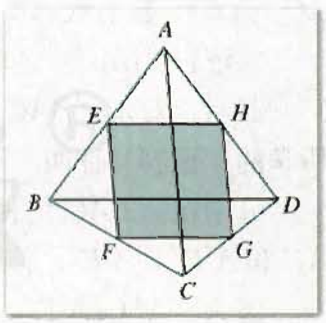


图 1-64

探索与研究

图形平移的性质

如果空间图形 F 中的所有点都沿同一方向移动相同的距离到 F' 的位置，就说图形 F 在空间中作了一次平移(图 1-65). 在图 1-62 中，可看作∠BAC 平移到∠$B'A'C'$. 由角平

微信公众号：电子课本大全

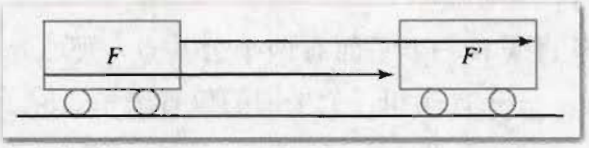


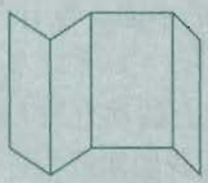
图 1-65

移的性质可以推出图形的平移具有哪些性质？

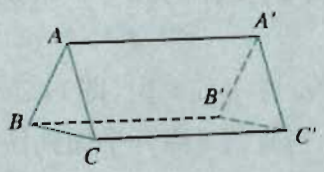
图形平移后与原图形是否全等？对应角的大小和对应两点的距离是否保持不变？对你得出的结论，你能说出理由吗？

练习A

1. 把一张长方形的纸对折两次，打开以后如图所示，说明为什么这些折痕是互相平行的.



（第1题）



（第2题）

2. 已知：如图，AA'，BB'，CC'不共面，且$AA' \parallel BB'$，$BB' \parallel CC'$.

求证：$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

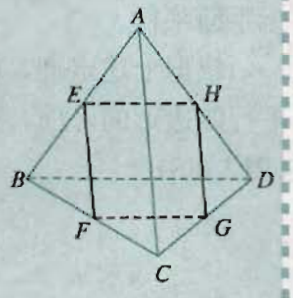
练习B

1. 判断题：

（1）如果$\angle ABC = \angle A'B'C'$，且$AB // A'B'$，则$BC // B'C'$；

（2）如果空间四边形的四条边相等，则空间四边形是菱形.

2. 如图，已知在四面体$ABCD$中，$AC=BD$，而且E，F，G，H分别为棱AB，BC，CD，DA的中点. 求证：四边形$EFGH$是菱形.



（第2题）

微信公众号：电子课本大全

2. 直线与平面平行

我们知道，如果一条直线和一个平面有两个公共点，那么这条直线就在这个平面内(图 1-66(1))．在空间中，一条直线和一个平面的位置关系，除了直线在平面内，还有另外两种情况．

直线 a 和平面 α 只有一个公共点 A，叫做**直线与平面相交**，这个公共点 A 叫做直线与平面的交点(图 1-66(2))，并记作 $a\cap\alpha=A$．

直线 a 与平面 α 没有公共点，叫做**直线与平面平行**．并记作 $a/\!/\alpha$(图 1-66(3))．

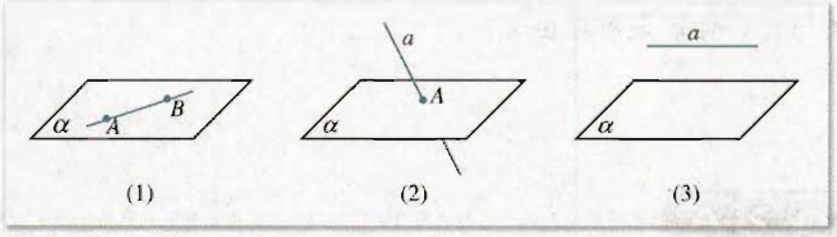


图 1-66

从以上分析可知，如果直线不在平面内，则直线与平面的位置关系不是平行就是相交．

让我们进行以下的操作与思考，来说明与一个确定的平面 α 没有公共点的直线是存在的．

如果一条直线 m 在平面 α 内(即 $m\subset\alpha$)，一条与 m 重合的动直线 l 沿着一个方向平移(保持与 m 平行)，当直线 l 离开平面到任意一个位置时，我们知道，直线 l 不可能与直线 m 相交．同样也使我们认识到，直线 l 也不会和平面 α 相交．这个直观感知的结论是否正确，下面再作分析．

从正面思考这个问题，有一定的难度，不妨从反面想一想．

如果直线 l 和平面 α 相交，则 l 和 α 一定有公共点，可设 $l\cap\alpha=P$(图 1-67)．再设 l 与 m 确定的平面为 β，则依据平面的基本性质 3，点 P 一定在平面 α 与平面 β 的交线 m 上，于是 l 和 m 相交，这和 $l/\!/m$ 矛盾．所以可以断定 l 和 α 不可能有公共点，即 $l/\!/\alpha$．

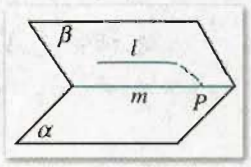


图 1-67

由以上的操作与说理，我们可以归纳出直线与平面平行的判定定理：

定理　如果不在一个平面内的一条直线和平面内的一条直线平行，那么这条直线和这个平面平行．

根据上述定理，画一条直线与已知平面平行，通常把表示直线的线段画在表示平面的平行四边形的外面，并且使它与平行四边形的一边平行或与平行四边形内的一条线段平行(图 1-68)．

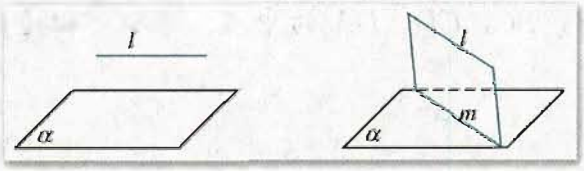


图 1-68

微信公众号：电子课本大全

我们从上面的分析过程中可以看到(图 1-67)，由 $l//m$ 可以推断出 $l//\alpha$；反过来，由 $l//\alpha$，且 $\beta\cap\alpha=m$ 也可得到 $l//m$. 由此可见，直线和平面平行具有如下性质：

定理　如果一条直线和一个平面平行，经过这条直线的平面和这个平面相交，那么这条直线就和两平面的交线平行.

已知：$l//\alpha$，$l\subset\beta$，$\alpha\cap\beta=m$ (图 1-69).

求证：$l//m$.

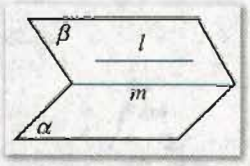


图 1-69

证明：因为　$l//\alpha$，

所以　l 和 α 没有公共点.

又因为　m 在 α 内，

所以　l 和 m 也没有公共点.

因为　l 和 m 都在平面 β 内，且没有公共点，

所以　$l//m$.

在空间中，经常应用这条定理，由“线、面平行”去判断“线、线平行”.

例 2　已知：空间四边形 $ABCD$ 中，E，F 分别是 AB，AD 的中点(图 1-70).

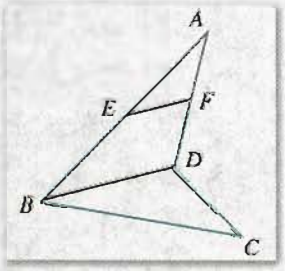


图 1-70

求证：$EF//$平面 BCD.

证明：连接 BD. 在$\triangle ABD$ 中，

因为　E，F 分别是 AB，AD 的中点，

所以　$EF//BD$.

又因为　$BD\subset$平面 BCD，$EF\not\subset$平面 BCD，

所以　$EF//$平面 BCD.

例 3　求证：如果过一个平面内一点的直线平行于与该平面平行的一条直线，则这条直线在这个平面内.

已知：$l//\alpha$，点 $P\in\alpha$，$P\in m$，$m//l$(图 1-71).

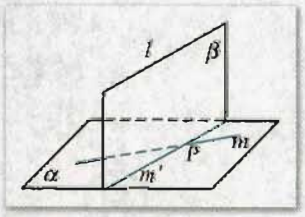


图 1-71

求证：$m\subset\alpha$.

证明：设 l 与 P 确定的平面为 β，且 $\alpha\cap\beta=m'$，则 $l//m'$. 又知 $l//m$，$m\cap m'=P$，由平行公理可知，m 与 m' 重合.

所以 $m\subset\alpha$.



1. 一条直线与一个平面的位置关系有哪几种?
2. 过平面外一点能作出几条直线和这个平面平行?
3. 使一块矩形木板 $ABCD$ 的一边 AB 紧靠桌面，绕 AB 转动，并且 AB 的对边 CD 在桌面所在平面外，试问直线 CD 是不是总是与桌面所在的平面平行? 为什么?

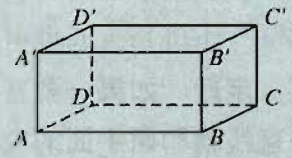
微信公众号：电子课本大全

4. 如图，在长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 的面所在的平面中：

(1) 与直线 AB 平行的平面是_____；

(2) 与直线 AA' 平行的平面是_____；

(3) 与直线 AD 平行的平面是_____.



(第 4 题)

练习B

1. 判断题：

(1) 如果直线 a 平行于直线 b，则 a 平行于经过 b 的任何平面；

(2) 过平面外一点，可以作无数条直线与已知平面平行.

2. 判断下列命题是否正确，并说明理由：

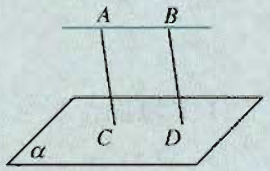
(1) 如果一条直线不在平面内，则这条直线就与这个平面平行；

(2) 过直线外一点，可以作无数个平面与这条直线平行；

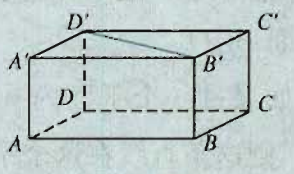
(3) 如果一条直线与平面平行，则它与平面内的任何直线都平行.

3. 已知：如图，AB // 平面 α，AC // BD，且 AC，BD 与 α 分别相交于点 C，D. 求证：$AC=BD$.

4. 已知：如图的长方体 AC'. 求证：$B'D'$ // 平面 $ABCD$.



(第 3 题)



(第 4 题)

3. 平面与平面平行

两个不重合的平面的位置关系除相交外，还有一种情况：

如果两个平面没有公共点，则称这**两个平面互相平行**. 平面 α 平行于平面 β，记作 α // β.

由于平面是无限延展的，从直观上很难判定是否存在两个没有公共点的平面. 下面我们仍像探究直线与平面平行的问题那样进行操作与说理，归纳出平面与平面平行的判定定理.

我们知道，两条相交直线确定唯一一个平面. 这启发我们尝试用两条相交直线来讨论平面的平行问题.

如图 1-72，在平面 α 内，作两条直线 a，b，并且 $a\cap b=P$，平移这两条相交的直线 a，b 到直线 a'，b' 的位置，设 $a'\cap b'=P'$，

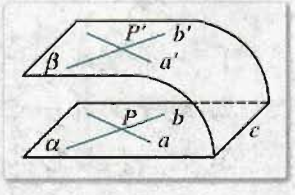


图 1-72

微信公众号：电子课本大全

由直线与平面平行的判定定理可知

$$a' /\!/ \alpha,\ b' /\!/ \alpha.$$

想必同学们已经认识到，由相交直线 a'，b' 所确定的平面 β 与平面 α 不会有公共点. 否则，如图 1-72，如果两平面相交，交线为 c，于是 a'，b' 都平行于这两个平面的交线 c，这时，过点 P' 有两条直线平行于交线 c，根据平行公理，这是不可能的.

由此，我们可以归纳出两个平面平行的判定定理：

定理 如果一个平面内有两条相交直线平行于另一个平面，那么这两个平面平行.

利用直线与平面平行的判定定理，我们可以得到：

推论 如果一个平面内有两条相交直线分别平行于另一个平面内的两条直线，则这两个平面平行.

思考与讨论

1. 以上我们从两条相交直线确定唯一一个平面出发，讨论了两个平面平行的条件. 但我们又知道两条平行直线 a，b 也能唯一确定一个平面，让我们平移 a，b 到空间任意确定的位置 a'，b'，那么 a'，b' 确定的平面一定与 a，b 确定的平面平行吗？

2. 如果两个平面平行，那么一个平面内的直线与另一个平面的位置关系如何？

根据上述定理和推论，在画两个平面平行时，通常把表示这两个平面的平行四边形的相邻两边分别画成平行线(图 1-73).

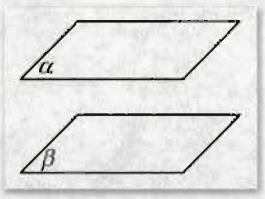


图 1-73

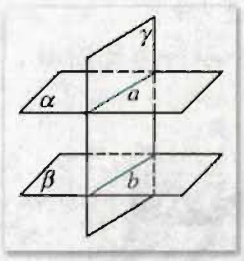


图 1-74

观察长方体形的教室，天花板面与地面是平行的. 直观上能感觉到，墙面分别与天花板面、地面相交所得到的两条交线也是平行的. 一般来说，两个平面平行有如下性质：

定理 如果两个平行平面同时与第三个平面相交，那么它们的交线平行.

事实上，由于两条交线分别在两个平行平面内，所以它们不相交，它们又都在同一平面内，由平行线的定义可知它们是平行的(图 1-74).

例 4 已知三棱锥 P-ABC 中，D，E，F 分别是棱 PA，PB，PC 的中点(图 1-75).

求证：平面 DEF // 平面 ABC.

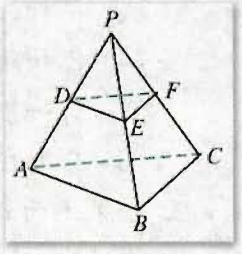


图 1-75

微信公众号：电子课本大全

证明：在△PAB中，

因为 D，E分别是PA，PB的中点，

所以 $DE/\!/AB$.

又知 $DE\not\subset$平面ABC，

因此 $DE/\!/$平面ABC.

同理 $EF/\!/$平面ABC.

又因为 $DE\cap EF=E$，

所以 平面$DEF/\!/$平面ABC.

想一想，应用本节判定定理的推论，可以怎样证明例4.

例5 已知：平面$\alpha/\!/$平面$\beta/\!/$平面γ，两条直线l，m分别与平面α，β，γ相交于点A，B，C和点D，E，F(图1-76).

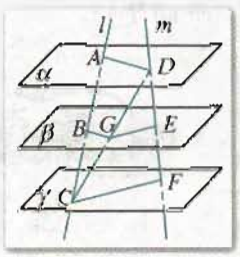


图1-76

求证：$\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{DE}{EF}$.

证明：连接DC，设DC与平面β相交于点G，则平面ACD与平面α，β分别相交于直线AD，BG. 平面DCF与平面β，γ分别相交于直线GE，CF.

因为 $\alpha/\!/\beta$，$\beta/\!/\gamma$，

所以 $BG/\!/AD$，$GE/\!/CF$.

于是，得 $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{DG}{GC}$，$\dfrac{DG}{GC}=\dfrac{DE}{EF}$.

所以 $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{DE}{EF}$.

本例通常可叙述为：

两条直线被三个平行平面所截，截得的对应线段成比例.

练习A

1. 下面的说法正确吗？

(1) 如果两个平面不相交，那么它们就没有公共点；

(2) 如果一个平面内的两条直线平行于另一个平面，那么这两个平面平行；

(3) 如果一个平面内的任何一条直线都平行于另一个平面，那么这两个平面平行；

(4) 已知两个平行平面中的一个平面内的一条直线，则在另一个平面内有且只有一条直线与已知直线平行；

(5) 分别在两个平行平面内的两条直线平行.

2. 如果平面$\alpha/\!/$平面β，平面$\beta/\!/$平面γ，是否必有平面$\alpha/\!/$平面γ(平行平面的传递性)？为什么？

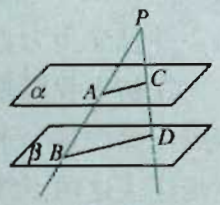
微信公众号：电子课本大全

3. 归纳平面与平面的位置关系.

4. 已知：如图，$\alpha // \beta$，点 P 是平面 α、β 外的一点，直线 PAB、PCD 分别与 α、β 相交于点 A、B 和 C、D：

(1) 求证：$AC // BD$；

(2) 已知 $PA=4$ cm，$AB=5$ cm，$PC=3$ cm，求 PD 的长.



(第 4 题)

练习B

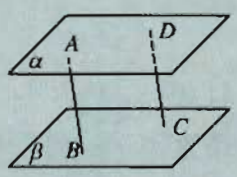
1. 判断题：

(1) 过不在平面内的一点，有且只有一个平面与这个平面平行；

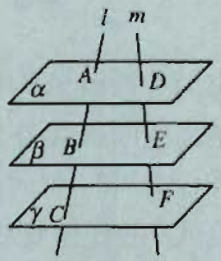
(2) 过不在平面内的一条直线，有且只有一个平面与这个平面平行.

2. 求证：夹在两个平行平面间的两条平行线段相等.

3. 如图，平面 $\alpha //$ 平面 $\beta //$ 平面 γ，两条直线 l，m 分别与平面 α、β、γ 相交于点 A，B，C 和点 D，E，F. 已知 $AC=15$ cm，$DE=5$ cm，$AB:BC=1:3$，求 AB，BC，EF 的长.



(第 2 题)



(第 3 题)

1.2.3 空间中的垂直关系

1. 直线与平面垂直

图 1-77 中的塔与地平面的位置关系，给我们直线与平面垂直的形象. 在第一大节，我们通过对长方体以及周围物体的观察，已经初步了解了空间中的直线与平面垂直的概念. 这一节我们将进一步研讨直线与平面垂直的判定与性质.

在平面内，如果两条直线互相垂直，则它们一定相交. 在空间中，两条互相垂直相交的直线中，如果固定其中一条，让另一条平移到空间的某一个位置，就可能与固定的直线没有公共点，这时两条直线为异面直线，我们同样称它们互相垂直. 下面我们给出空间中任意两条直线互相垂直的定义.

微信公众号：电子课本大全

如果两条直线相交于一点或经过平移后相交于一点，并且交角为直角，则称这**两条直线互相垂直**.



图 1-77

在初中我们学习过：如果 A，B 是一个平面内两个定点，那么这个平面内到这两个定点距离相等的点的轨迹是连接这两点线段的垂直平分线.

设 l 是线段 AB 的垂直平分线，垂足为 O. 这时，我们说 A，B 两点关于直线 l 成轴对称(图 1-78(1)).

想想看，如果 A，B 是空间中的两点，那么在空间中线段 AB 的垂直平分线有多少条？AB 的这些垂直平分线构成的集合是怎样的图形(图 1-78(2))？固定线段 AB，让 l 保持与 AB 垂直并绕直线 AB 在空间旋转，l 的轨迹是怎样的图形？

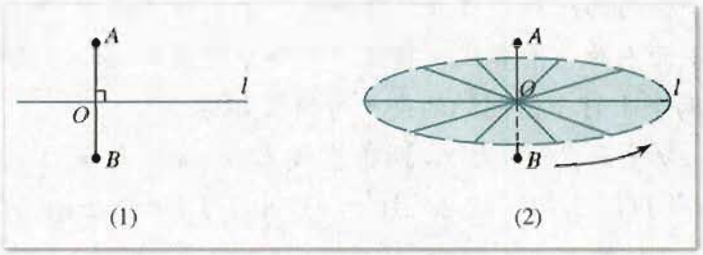
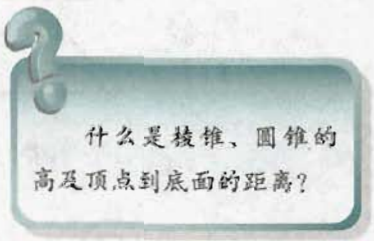


图 1-78

容易发现，空间中线段 AB 的所有垂直平分线构成的集合是一个平面.

由此可以归纳出空间直线与平面垂直的定义：

如果一条直线(AB)和一个平面(α)相交于点 O，并且和这个平面内过交点(O)的任何直线都垂直，我们就说**这条直线和这个平面互相垂直**，这条直线叫做**平面的垂线**，这个平面叫做**直线的垂面**，交点叫做**垂足**. 垂线上任意一点到垂足间的线段，叫做这个点到这个平面的**垂线段**. 垂线段的长度叫做这个**点到平面的距离**.



如图 1-79，如果 $l\perp\alpha$，垂足为 O，直线 m 是平面 α 内不过点 O 的任意一条直线，那么在 α 内过点 O，可引直线 a，使得 $m/\!/a$，根据空间直线与平面垂直的定义，由 $l\perp\alpha$ 可得 $l\perp m$. 这就是说：

如果一条直线垂直于一个平面，那么它就和平面内的任意一条直线垂直.

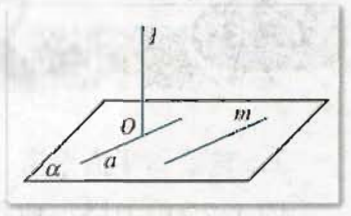


图 1-79

画直线和平面垂直时，通常要把直线画成和表示平面的平行四边形的一边垂直，如图 1-79 所示.

直线 l 和平面 α 互相垂直，记作 $l\perp\alpha$.

用直线与平面垂直的定义，直接检验直线是否与平面垂直是困难的. 想想看，判定直线与平面垂直是否有容易操作又比较简单的方法？

微信公众号：电子课本大全

我们已经知道，一个平面被它所含的两条相交直线完全确定. 实际上只要检验这条直线与平面内的两条相交直线是否垂直就可以了，如果都垂直，则这条直线就与平面垂直. 当这两条相交直线不都经过这条直线与平面的交点时，可以把它们平行移动到交点处后进行研究.

由以上分析，我们归纳出直线与平面垂直的判定定理：

定理 如果一条直线与平面内的两条相交直线垂直，则这条直线与这个平面垂直.

我们知道两条平行直线确定唯一一个平面，试问：如果一条直线垂直于平面内的两条平行直线，这条直线一定垂直于这个平面吗？

思考与讨论

如图 1-80 所示，在空间中，如果直线 m，n 都是线段 AA' 的垂直平分线，设 m，n 确定的平面为 α，你能否证明：

(1) 在平面 α 内，通过线段 AA' 中点 B 的所有直线都是线段 AA' 的垂直平分线？

(2) 线段 AA' 的任意一条垂直平分线都在 α 内？

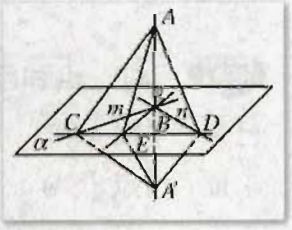


图 1-80

推论 1 如果在两条平行直线中，有一条垂直于平面，那么另一条直线也垂直于这个平面.

如图 1-81，如果直线 l 平行于直线 m，且直线 l 垂直于平面 α，则直线 l 垂直于平面 α 内任意两条相交直线，如 a，b. 根据空间两条直线垂直的定义，易知，m 与直线 a 和 b 也垂直，所以 m 与平面 α 垂直.

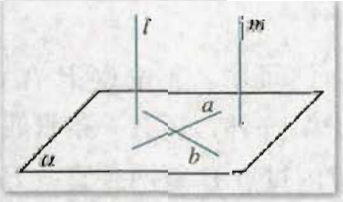


图 1-81

下面我们来研究直线与平面垂直的性质.

试问，如果两条直线 l，m 都垂直于平面 α，这两条直线平行吗？

从直观感知，我们会得出结论：直线 l 和 m 平行. 要说出平行的理由，并不简单. 不看下面的证明，自己先想想看，能否说出理由.

推论 2 如果两条直线垂直于同一个平面，那么这两条直线平行.

已知：直线 $l\perp$ 平面 α，直线 $m\perp$ 平面 α，垂足分别为 A，B(图 1-82).

求证：$l\parallel m$.

证明：假设直线 m 不与直线 l 平行. 过直线 m 与平面 α 的交点 B，作直线

$$m'\parallel l,$$

由直线与平面垂直的判定定理的推论可知

$$m'\perp\alpha.$$

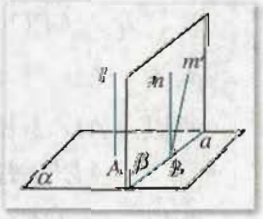


图 1-82

微信公众号：电子课本大全

设 m 和 m' 确定的平面为 β，α 与 β 的交线为 a.

因为 直线 m 和 m' 都垂直于平面 α，

所以 直线 m 和 m' 都垂直于交线 a.

因为 在同一平面内，通过直线上一点并与已知直线垂直的直线不可能有两条，

所以 直线 m 和 m' 必重合，即有 $l /\!/ m$.

思考与讨论

1. 垂直于同一条直线的两个平面是否平行？为什么？
2. 如何定义两平行平面的距离？

例 1 过一点和已知平面垂直的直线只有一条.

已知：平面 α 和一点 P（图 1-83）.

求证：过点 P 与 α 垂直的直线只有一条.

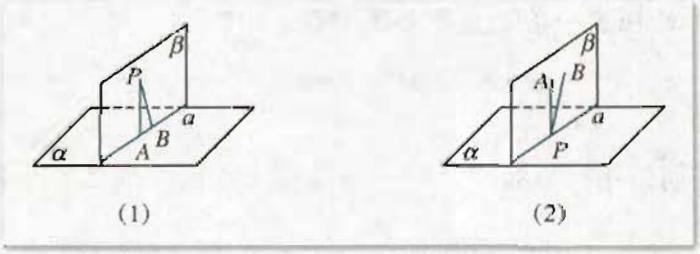


图 1-83

证明：不论点 P 在 α 外或内，设 $PA \perp \alpha$，垂足为 A（或 P）. 如果过点 P，除直线 $PA \perp \alpha$ 外，还有一条直线 $PB \perp \alpha$，设 PA，PB 确定的平面为 β，且 $\alpha \cap \beta = a$，于是在平面 β 内过点 P 有两条直线 PA，PB 垂直于交线 a，这是不可能的. 所以过点 P 与 α 垂直的直线只有一条.

例 2 有一根旗杆 AB 高 8 m（图 1-84），它的顶端 A 挂着两条长 10 m 的绳子. 拉紧绳子，并把它的下端放在地面上的两点 C，D（和旗杆脚不在同一条直线上）. 如果这两点和旗杆脚 B 的距离都是 6 m，那么旗杆就和地面垂直，为什么？

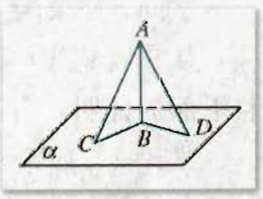


图 1-84

解：在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABD$ 中，

因为 $AB=8$ m，$BC=BD=6$ m，$AC=AD=10$ m，

所以 $AB^2+BC^2=8^2+6^2=10^2=AC^2$，

$AB^2+BD^2=6^2+8^2=10^2=AD^2$.

所以 $\angle ABC=\angle ABD=90^\circ$，

即 $AB \perp BC$，$AB \perp BD$.

又知 B，C，D 三点不共线，

因此 $AB \perp$ 平面 BCD，即旗杆和地面垂直.

微信公众号：电子课本大全

例 3 已知：直线 $l\perp$平面 α，垂足为 A，直线 $AP\perp l$.

求证：AP 在 α 内.

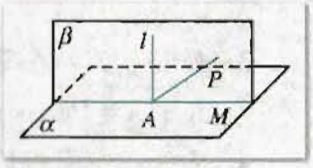


图 1-85

证明：设 AP 与 l 确定的平面为 β. 假设 AP 不在 α 内，则设 α 与 β 相交于直线 AM(图1-85).

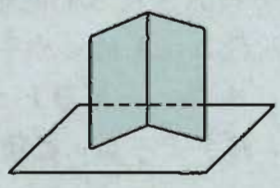
因为 $l\perp\alpha$、$AM\subset\alpha$，

所以 $l\perp AM$.

又已知 $AP\perp l$，于是在平面 β 内，过点 A 有两条直线垂直于 l. 这是不可能的，所以 AP 一定在 α 内.

练习 A

1. 在空间中，过任意一点都存在一条且只有一条与已知直线垂直的直线吗？为什么？
2. 在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的面所在的平面中，分别写出与下列直线垂直的平面：
   (1) AA_1；　(2) AB；　(3) B_1C_1.
3. 如图，拿一张矩形的纸对折后略微展开，竖立在桌面上，说明折痕为什么和桌面垂直.


(第 3 题)

4. 如果一条直线垂直于一个平面内的：
   (1) 三角形的两条边；
   (2) 梯形的两条边；
   (3) 圆的两条直径.
   试问这条直线是否与平面垂直，并对你的判断说明理由.
5. 三角形的两边，可以垂直于同一个平面吗？并对你的判断说明理由.
6. 判断题：
   (1) 如果一条直线垂直于一个平面，那么这条直线与这个平面内的任何直线垂直；
   (2) 垂直于同一个平面的两条直线平行；
   (3) 如果一条直线与一个平面不垂直，那么这条直线与这个平面内的任何直线都不垂直.

练习 B

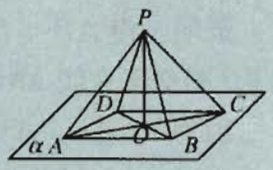
1. 已知平面 α 和直线 a、b，如果 $a/\!/\alpha$，且 $b\perp a$，那么 $b\perp\alpha$ 是否正确？为什么？
2. 求证：如果三条直线共点，且两两垂直，那么其中一条直线垂直于另两条直线确定的平面.

微信公众号：电子课本大全

3. 如图，已知在平面 α 内有 $\square ABCD$，点 O 是它的对角线的交点，点 P 在 α 外，且 $PA=PC$，$PB=PD$. 求证：$PO\perp\alpha$.

4. 已知：空间四边形 $ABCD$ 中，$AB=AC$，$DB=DC$.
求证：$BC\perp AD$.

5. 已知两个平行平面中，有一个平面与一条已知直线垂直，试问另一平面与已知直线的位置关系怎样？



（第3题）

探索与研究

镜面对称

如图 1-86(1)所示，如果平面 α 通过线段 AA' 的中点 O，且垂直于直线 AA'，那么平面 α 叫做线段 AA' 的**垂直平分面**(或**中垂面**). 并称点 A，A' 关于平面 α 成镜面对称，平面 α 叫做 A，A' 的对称平面.

如果一个图形 F 的所有点关于平面 α 的对称点构成几何图形 F'(图 1-86(2))，则称 F，F' 关于平面 α 成**镜面对称**.

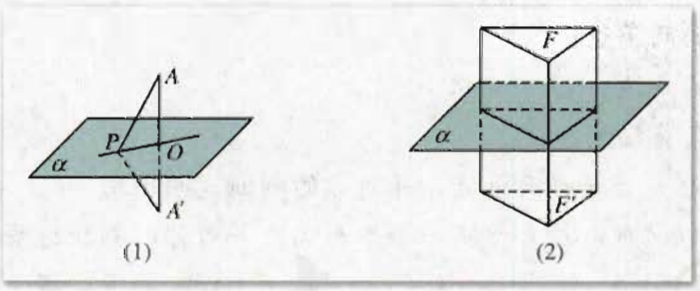


图 1-86

如果一个图形 F 通过镜面对称变换后的图形仍是它自身，则这个图形称作镜面对称图形.

根据以上定义，请探索研究以下问题：

(1) 线段的中垂面有哪些性质？

(2) 你学过的空间图形，有哪些是镜面对称图形？

(3) 写一篇研究镜面对称的小论文，探索镜面对称的性质和应用.

2. 平面与平面垂直

在第一大节，我们曾直观地看到，当一个平面通过另一个平面的垂线时，就给我们两个平面互相垂直的形象. 这一小节我们将进一步研究平面与平面垂直的判定与性质.

如图 1-87，两个平面 α，β 相交，交线为 CD，在 CD 上任取一点 B，过点 B 分别在 α，β 内作直线 BA 和 BE，使

微信公众号：电子课本大全

$BA \perp CD$，$BE \perp CD$.

于是，直线 $CD \perp$ 平面 ABE.

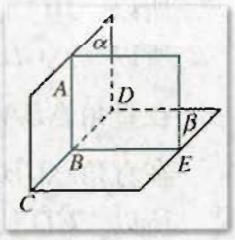


图 1-87

容易看到，当 $\angle ABE$ 为直角时，给我们两平面互相垂直的印象. 由此可以给出两平面垂直的一个定义：

如果两个相交平面的交线与第三个平面垂直，又这两个平面与第三个平面相交所得的两条交线互相垂直，就称这**两个平面互相垂直**.

平面 α，β 互相垂直，记作 $\alpha \perp \beta$.

在图 1-87 中，由于 $\angle ABE$ 为直角，可知 $BA \perp BE$. 又 $BA \perp CD$，所以 $BA \perp \beta$.

这就是说平面 α 过平面 β 的垂线 BA. 现在要问，如果平面 α 过平面 β 的垂线 BA，那么这两个平面是否相互垂直呢?

答案是肯定的. 事实上，只要在平面 β 内作 $BE \perp CD$，由于 $BA \perp \beta$，所以 $BA \perp BE$，因此 $\angle ABE$ 为直角.

依两个平面垂直的定义，就可以推出 $\alpha \perp \beta$.

由以上观察和分析，我们可以得到平面与平面垂直的判定定理：

定理　如果一个平面过另一个平面的一条垂线，则两个平面互相垂直.

建筑工人在砌墙时，常用一端系有铅锤的线来检查所砌的墙是否和水平面垂直(图 1-88)，实际上就是依据这个定理.

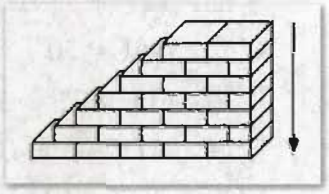


图 1-88

下面我们再来研究两平面垂直的性质.

再观察图 1-87，设平面 α 与平面 β 垂直，$\alpha \cap \beta = CD$，如果平面 α 内的直线 $BA \perp CD$，这时，BA 是否垂直平面 β?

定理　如果两个平面互相垂直，那么在一个平面内垂直于它们交线的直线垂直于另一个平面.

已知：(图 1-89)平面 $\alpha \perp$ 平面 β，$\alpha \cap \beta = CD$，$BA \subset \alpha$，$BA \perp CD$，B 为垂足.

求证：$BA \perp \beta$.

证明：在平面 β 内过点 B 作 $BE \perp CD$.

因为　$\alpha \perp \beta$，

所以　$BA \perp BE$.

又因为　$BA \perp CD$，$CD \cap BE = B$，

所以　$BA \perp \beta$.

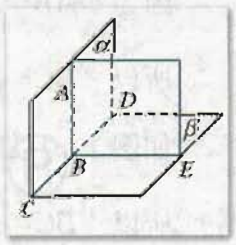


图 1-89

例 4　已知：如图 1-90，平面 $\alpha \perp$ 平面 β，在 α 与 β 的交线上取线段 $AB = 4$ cm，AC，BD 分别在平面 α 和平面 β 内，它们都垂直于交线 AB，并且 $AC = 3$ cm，$BD = 12$ cm，求 CD 的长.

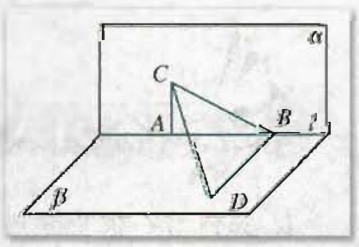


图 1-90

解：连接 BC.

因为　$BD \perp AB$，直线 AB 是两个互相垂直的平面 α 和 β 的交线，

微信公众号：电子课本大全

所以 $BD\perp a$，$BD\perp BC$.

所以 $\triangle CBD$ 是直角三角形.

在直角$\triangle BAC$中，$BC=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

在直角$\triangle CBD$中，$CD=\sqrt{5^2+12^2}=13$.

所以 CD 长为 13 cm.

例 5 已知 Rt$\triangle ABC$中，$AB=AC=a$，AD 是斜边 BC 上的高，以 AD 为折痕使 $\angle BDC$ 成直角(图 1-91).

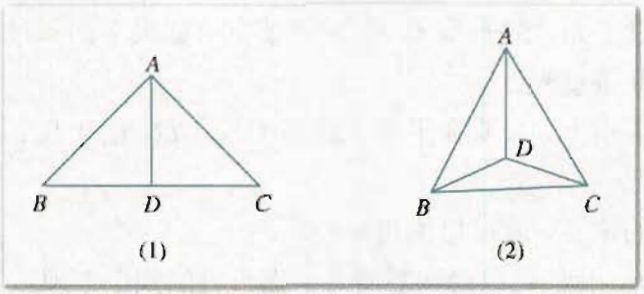


图 1-91

求证：(1) 平面 $ABD\perp$平面 BDC，平面 $ACD\perp$平面 BDC；

(2) $\angle BAC=60°$.

证明：(1) 如图 1-91(2)，因为 $AD\perp BD$，$AD\perp DC$，

所以 $AD\perp$平面 BDC.

因为 平面 ABD 和平面 ACD 都过 AD，

所以 平面 $ABD\perp$平面 BDC，平面 $ACD\perp$平面 BDC.

(2) 如图 1-91(1)，在直角三角形 BAC 中，

因为 $AB=AC=a$，

所以 $BC=\sqrt{2}a$，$BD=DC=\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

如图 1-91(2)，$\triangle BDC$ 是等腰直角三角形，

所以 $BC=\sqrt{2}BD=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}a=a$.

所以 $AB=AC=BC$.

因此 $\angle BAC=60°$.

练习 A

1. 如何沿一张长方形纸片 $ABCD$ 的对角线 AC 进行折叠，使折后两部分分别所在的平面互相垂直？
2. 长方体形教室里的相邻墙面是否垂直？

微信公众号：电子课本大全

3. 判断题：

(1) 过平面外一点只可作一个平面与已知平面垂直；

(2) 过不在平面内的一条直线可以作无数个平面与已知平面垂直.

4. 已知：三条直线 OX，OY，OZ 两两垂直.

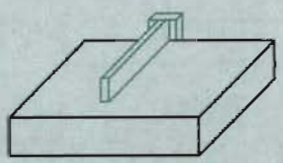
求证：三个平面 XOY，YOZ，ZOX 两两互相垂直.

练习B

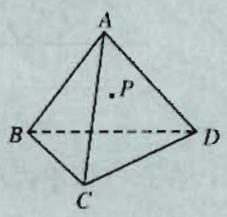
1. 画互相垂直的两个平面，两两互相垂直的三个平面. 它们把空间分成几部分？

2. 如图，检查工件的相邻的两个面是否垂直时，只要用曲尺的一边紧靠在工件的一个面上，另一边在工件的另一个面上转动一下，观察尺边是否和这个面密合就可以了. 为什么？如果不转动呢？

3. 如图，有一个正三棱锥体的零件，P 是侧面 ACD 上一点. 在面 ACD 上过点 P 画一条与棱 AB 垂直的线段，怎样画法？并说明理由.



(第2题)



(第3题)

习题 1-2 A

1. 下面的说法正确吗？为什么？

(1) 每一个平面都有确定的面积；

(2) 平面 α 与平面 β 相交时，它们的公共点可能只有有限个；

(3) 经过空间任意三点，有一个且只有一个平面；

(4) 如果两个平面有三个不共线的公共点，那么这两个平面就重合为同一个平面.

2. 填空：

(1) 经过_____的三个点，有且只有一个平面；

(2) 两条_____或_____的直线确定一个平面；

(3) 有一个公共点的两个平面相交于_____一条直线；

(4) 空间四边形两条对角线所在的直线是_____直线.

3. 四条线段首尾连接，所得的图形一定是平面图形吗？为什么？

4. 一条直线和两条平行直线都相交，这三条直线是否共面？

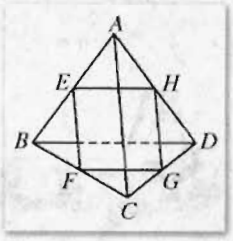
微信公众号：电子课本大全

5. 判断题：

(1) 过直线外一点可以作，且只可以作一条直线与这条直线平行；

(2) 过平面外一点可以作无数个平面与这个平面平行.

6. 已知：空间四边形 $ABCD$ 中，E、F、G、H 分别为 AB、BC、CD、DA 的中点. 求证：AC // 平面 EFG，BD // 平面 EFG.



(第 6 题)

7. 判断题：

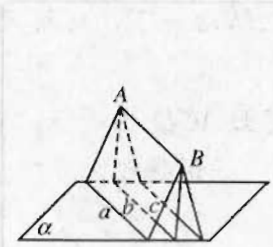
(1) 平行于同一条直线的两条直线平行；

(2) 平行于同一条直线的两个平面平行；

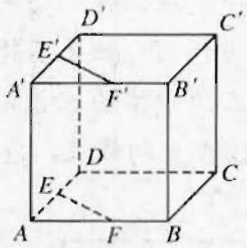
(3) 平行于同一平面的两条直线平行；

(4) 平行于同一个平面的两个平面平行.

8. 已知：直线 AB 平行于平面 α，经过 AB 的三个平面和平面 α 分别相交于直线 a、b、c. 求证：a // b // c.



(第 8 题)

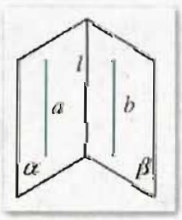


(第 9 题)

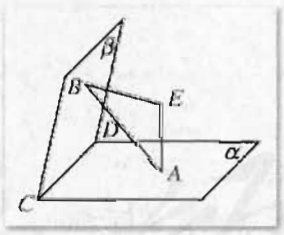
9. 已知：如图，在正方体中，$AE=A'E'$，$AF=A'F'$. 求证：EF // $E'F'$，且 $EF=E'F'$.

10. 在第 9 题的正方体的各条棱所在直线中，与直线 EF 异面的有哪几条？

11. 已知：如图，$\alpha\cap\beta=l$，$a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，且 a // b. 求证：a // l，b // l.



(第 11 题)



(第 12 题)

12. 已知平面 α 与 β 相交于直线 CD，$EA\perp\alpha$，A 是垂足；$EB\perp\beta$，B 是垂足. 求证：$CD\perp AB$.

习题 1-2 B

1. 过一个点可以有多少个平面？过两个点呢？过不共线的三个点呢？

2. 已知：$a\cap b=A$，$a\subset\alpha$，下面的结论正确吗？

(1) $A\in\alpha$；　　(2) $b\subset\alpha$.

微信公众号：电子课本大全

3. 如果四点不在同一平面内，那么它们中的三点能不能共线？

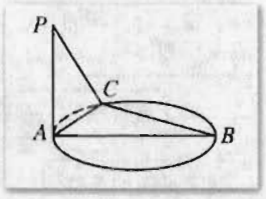
4. 三条直线两两平行且不共面，每两条确定一个平面，一共可以确定几个平面？如果三条直线相交于一点，它们最多可以确定几个平面？

5. (1) 有一个侧面是矩形的棱柱是不是直棱柱？有两个相邻的侧面是矩形的棱柱呢？
(2) 用平行于棱柱的侧棱的一个平面去截棱柱，所得的截面是什么样的图形？

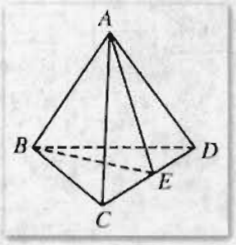
6. 已知：$\alpha // \beta$，点 P 是平面 α，β 外一点，从点 P 引三条不共面的射线 PA，PB，PC，与平面 α 分别相交于点 A，B，C，与平面 β 分别相交于 A'，B'，C'.
求证：$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

7. 已知：平面 $\alpha // \beta$，直线 AB，AC 分别与 α，β 交于点 D，B 和点 E，C.
求证：$\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}$.

8. 已知：如图 AB 是圆的直径，PA 垂直圆所在的平面，C 是圆上任一点.
求证：$BC \perp$ 平面 PAC.



(第 8 题)



(第 9 题)

9. 已知空间四边形 $ABCD$ 中，$AC=AD$，$BC=BD$，且 E 是 CD 的中点，求证：
(1) 平面 $ABE \perp$ 平面 BCD；
(2) 平面 $ABE \perp$ 平面 ACD.

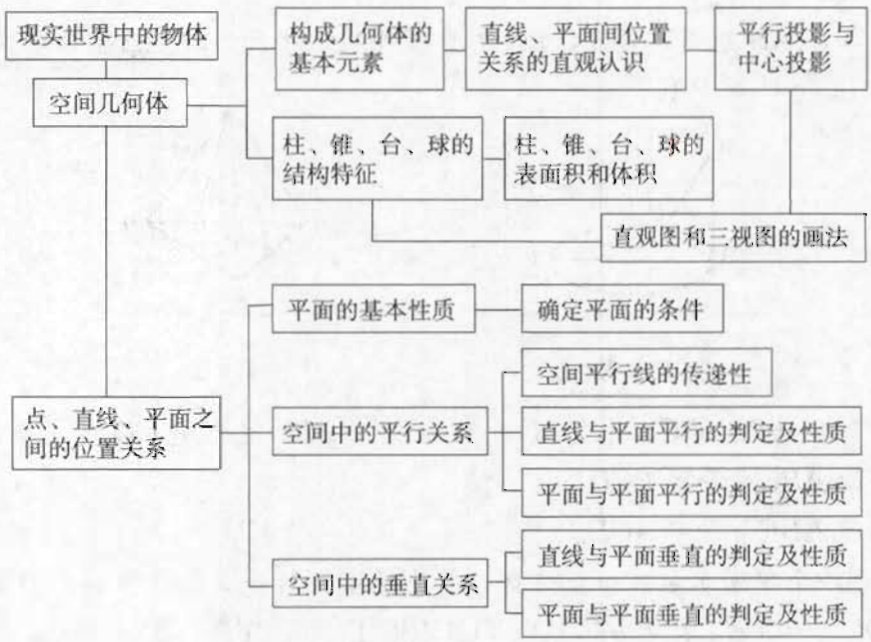
10. 用任意一个平面去截一个正方体，得到的截面可能是什么样的平面图形？

11. 已知棱长为 3 cm 的立方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，$A'BC'$ 是一个截面：
(1) 求截后的空间几何体 $B'\text{-}A'BC'$ 的体积；
(2) 画出 $B'\text{-}A'BC'$ 的表面展开图；
(3) 画出 $B'\text{-}A'BC'$ 的三视图.

微信公众号：电子课本大全

本章小结

Ⅰ 知识结构



Ⅱ 思考与交流

1. 空间几何体是现实世界中物体的抽象，空间图形直观描述了空间形体的特征. 通常画空间图形的基本要求是什么？用“斜二测画法”画直观图的一般规则是什么？
2. 空间图形可以看作点的集合，用符号语言表述点、线、面的位置关系时，经常用到集合的有关符号. 试举例说明文字语言、符号语言、图形语言的不同功能及其相互转化.
3. 柱、锥、台、球是简单几何体. 试用列表方法对它们的定义及性质进行归纳整理，再作比较研究，把你的发现与同学进行交流.
4. 对于一个正棱台，当上底面扩展为下底面的全等形时，它变为一个直棱柱；当上底面收缩为中心点时，它变为一个正棱锥. 已知 $S_{正棱台侧}=\frac{1}{2}(c+c')h'$ 和 $V_{正棱台}=\frac{h}{3}(S+\sqrt{SS'}+S')$，在上述变化中可以看到这两个公式与直棱柱、正棱锥的侧面积和体积的计

微信公众号：电子课本大全

算公式有何联系？

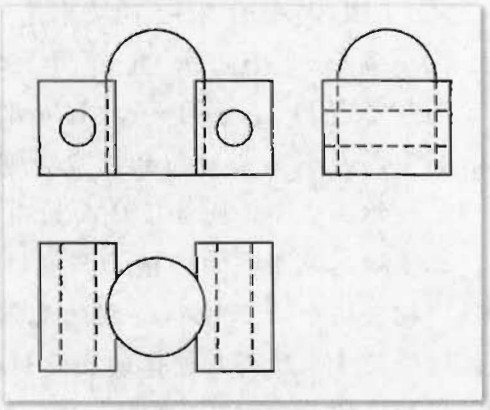
5. 几何中的平面是没有厚度且可以无限延展的，常用平行四边形表示. 确定一个平面有哪些依据？试举例说明这些依据的实际应用.

6. 有些平面几何的概念和性质，推广到空间还是正确的. 如课本中讲述的空间平行线的传递性及关于两角相等的定理. 本章中还有哪些知识可以说是由平面几何的有关知识推广到空间得到的？试再用类比的方法把平面几何中一个真命题推广到空间，并说明所得的命题是否也是真命题.

III 巩固与提高

1. 是否存在着主视图、俯视图、左视图完全相同的几何体？举例说明.

2. 按照图中所给出的三视图制作一个模型，可以使用泥土作为原料，只要求参照图中比例，不限定尺寸. 然后参照做好的模型画出直观图. 并说明这个几何体是由哪些简单几何体组合而成的.



（第 2 题）

3. 判断下列命题的真假：
   (1) 如果两个平面有三点重合，那么这两个平面一定重合为一个平面；
   (2) 在空间中，一组对边平行且相等的四边形一定是平行四边形；
   (3) 如果两个平面相交，那么它们的交点不一定共线；
   (4) 已知直线 $a\parallel b$，且 $b\parallel c$，则 $a\parallel c$；
   (5) 已知直线 $a\parallel$ 平面 α，且直线 $b\parallel$ 平面 α，则 $a\parallel b$；
   (6) 已知直线 $a\parallel$ 平面 α，过平面 α 内的一点作 $b\parallel a$，则 $b\subset\alpha$；
   (7) 过直线上一点可以作无数条直线与这条直线垂直，并且这些直线都在同一平面内；
   (8) 同一平面的两条垂线一定共面；
   (9) 过一条直线，有且仅有一个平面与已知平面垂直.

4. 在正四棱柱中，底面面积是 72 cm^2，高是 5 cm，求棱柱的对角线长.

5. 已知棱锥的底面面积是 320 cm^2，把棱锥的高 4 等分，并过各分点作底面的平行平面，求截出的各截面的面积.

6. 四棱柱共有多少条体对角线？三棱柱呢？六棱柱呢？n 棱柱共有多少条体对角线？总结一下规律并说明理由. 研究你总结的规律对五棱柱是否适用.

7. 已知：$\alpha\cap\beta=a$，$\beta\cap\gamma=b$，$\gamma\cap\alpha=c$（且 a，b，c 不重合）.
   求证：a，b，c 互相平行或相交于一点.

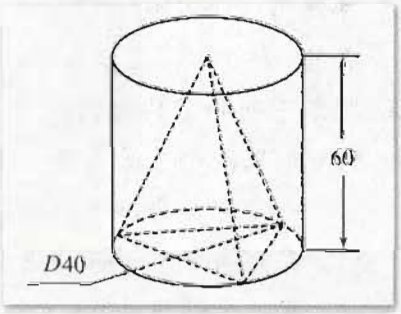
8. A，B，C 是球 O 上的三点，$AB=10$，$AC=6$，$BC=8$，球 O 的半径等于 13，求球心 O

微信公众号：电子课本大全

到平面 ABC 的距离.

Ⅳ 自测与评估

1. 判断下列命题的真假：
   (1) 如果一个几何体的主视图和俯视图都是矩形，则这个几何体是长方体；
   (2) 长方体的主视图和俯视图一定都是矩形.
2. 填空：
   (1) 空间中，到两定点距离相等点的轨迹是_____；
   (2) 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 a，$AP\perp$ 平面 $ABCD$，且 $AP=b$，则 $PC=$_____；
   (3) 已知 $\triangle ABC$，$\angle BAC=90^\circ$，P 为平面 ABC 外任一点，且 $PA=PB=PC$，则平面 PBC 与平面 ABC 的关系是_____.
3. 已知平面 $\alpha\perp$ 平面 β，且 $\alpha\cap\beta=l$，在 l 上有两点 A，B，线段 $AC\subset\alpha$，线段 $BD\subset\beta$，并且 $AC\perp l$，$BD\perp l$，$AB=6$，$AC=8$，$BD=24$，求 CD 的长.
4. 如图，一个正三棱锥的顶点是圆柱上底面的圆心，正三棱锥的底面是圆柱下底面的内接正三角形(这样的正三棱锥叫做圆柱的内接正三棱锥)．如果在这个圆柱体中挖去这个正三棱锥得到的几何体如图所示，按图中所给尺寸求所得几何体的表面积和体积.
5. 已知球的表面积为 1 680 cm^2，求与球心的距离为 9 cm 的截面的面积.



(第 4 题)

微信公众号：电子课本大全

数 学 文 化 阅读与欣赏

散发着数学芳香的碑文

在几位古代数学家的墓碑上，人们根据他们的遗愿，有的刻着图形，有的写着数字，用图形和数字表达他们一生的追求和业绩．下面举出几例，以学习他们的敬业精神．

一

图 1-92 是古希腊数学家阿基米德的墓碑图案．墓碑上刻着一个圆柱，圆柱内有一个内切球，这个球的直径恰好与圆柱的高相等．相传这个图形表达了阿基米德最引以自豪的发现：图中圆柱的体积是球体积的$\frac{3}{2}$，圆柱的表面积也是球表面积的$\frac{3}{2}$．

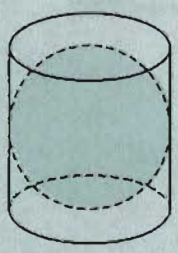


图 1-92

二

古希腊数学家丢番图的墓碑文，用独特的方式介绍他的生平：

“过路人，这座墓里安葬着丢番图．他生命的$\frac{1}{6}$是幸福的童年，生命的$\frac{1}{12}$是青少年时期，又过了生命的$\frac{1}{7}$他才结婚．婚后 5 年有了一个孩子，孩子活到父亲的一半年纪就死去了．孩子死后，丢番图在深深的悲哀中活了 4 年，也结束了尘世生涯．过路人，你知道丢番图的年纪吗？”

丢番图(246—330)是古希腊最后一位数学家．他的碑文写得多么妙！多么奇特！这是用未知的方式写出了他已知的一生．谁想知道丢番图的年纪，谁就得解这个一元一次方程

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x.$$

解得 $x=84$，即丢番图享年 84 岁．碑文是一个方程应用题，丢番图写这个碑文的目的是，提醒前来瞻仰的人们，不要忘记他所献身的事业．

三

图 1-93 是德国数学家鲁道夫(1540—1610)的墓碑文．1610 年鲁道夫把 π 的近似值算到了小数点后 35 位，是当年的世界纪录．

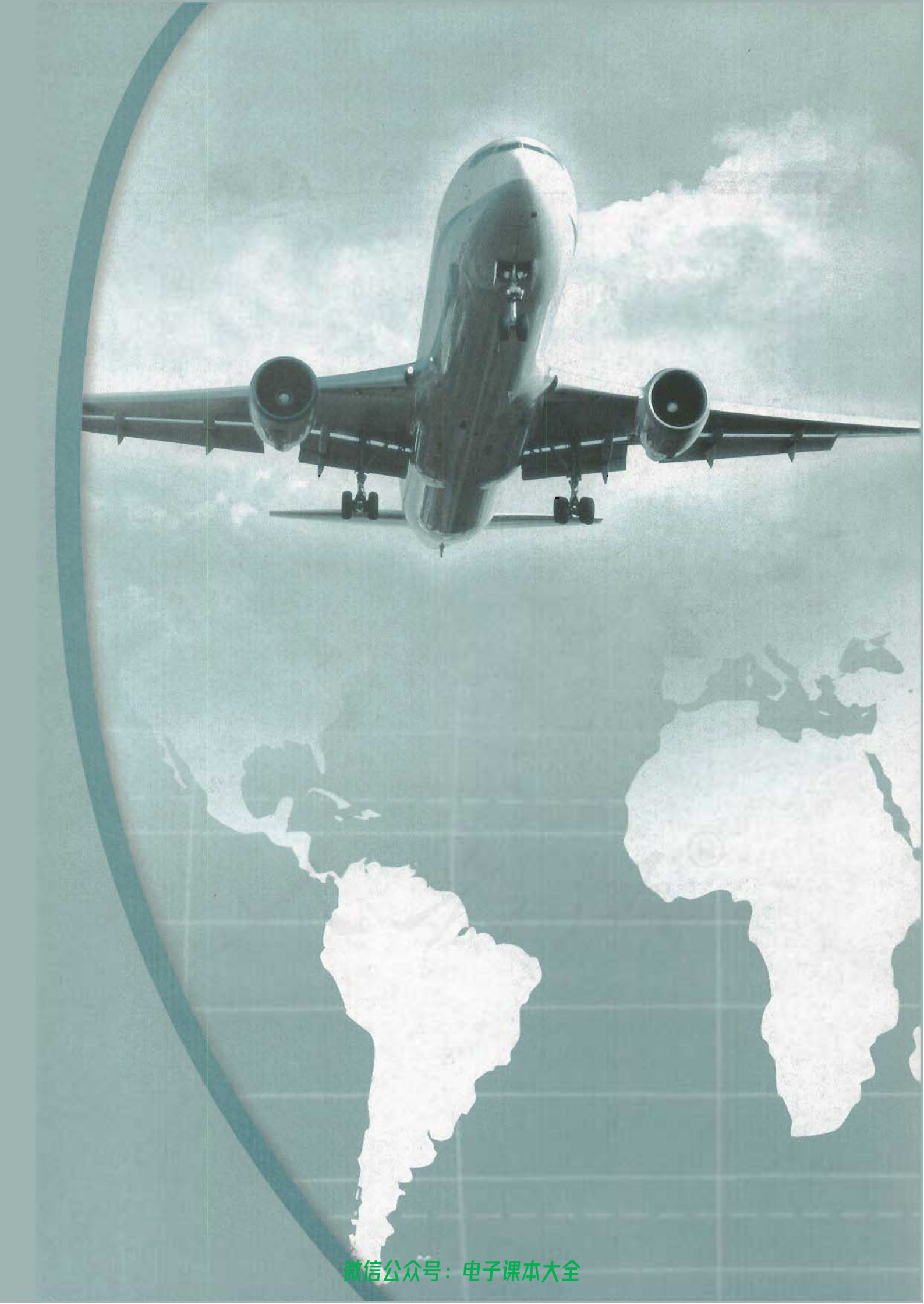


图 1-93

鲁道夫的一生献给了圆周率的研究，德国为尊敬他的功绩，至今还把 π 称作“鲁道夫数”．

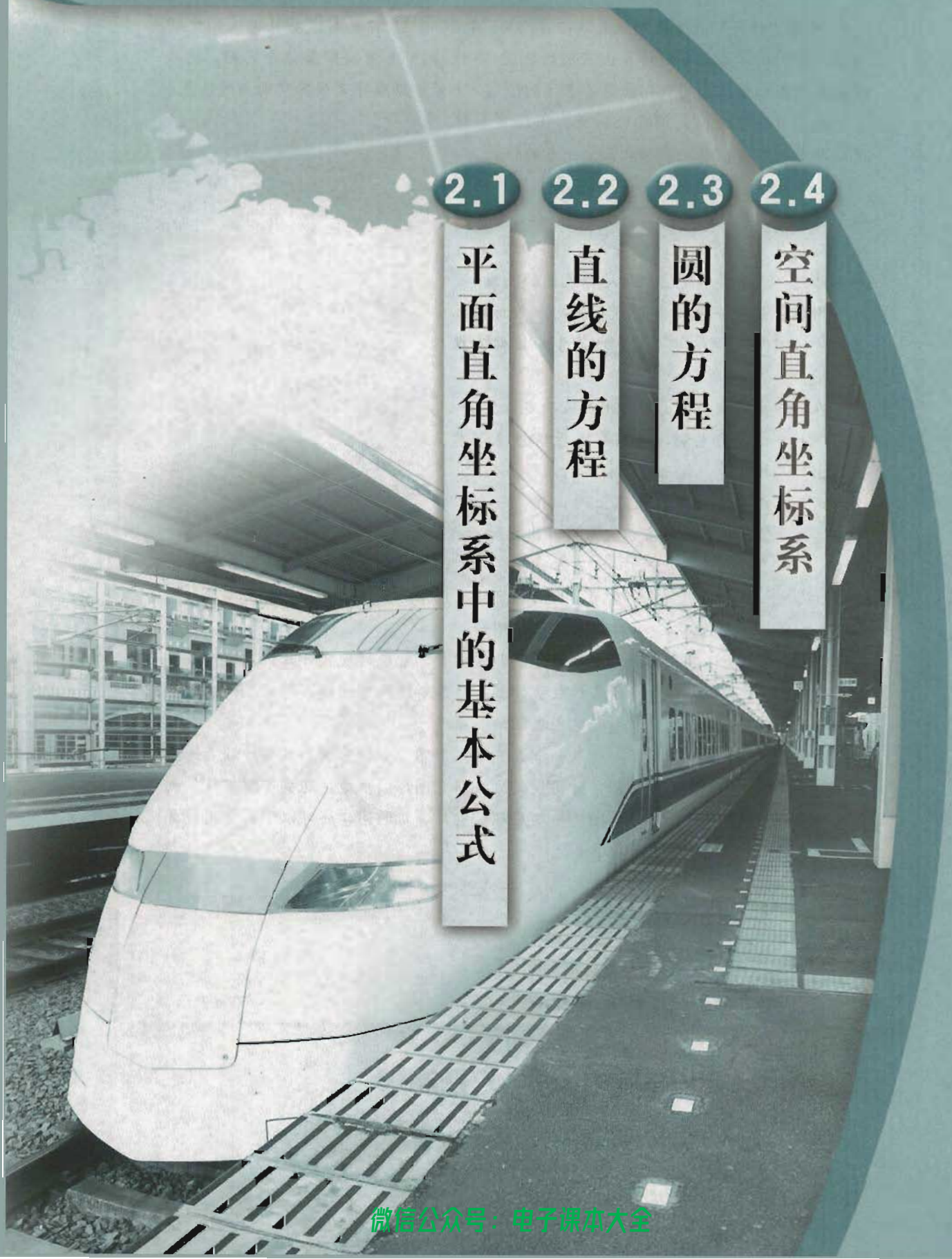
我们从上述的碑文中可以领悟到，这些数学家生前酷爱数学，到死也不忘数学．“热爱是最好的老师．”

微信公众号：电子课本大全



微信公众号：电子课本大全

第二章 平面解析几何初步



2.1 平面直角坐标系中的基本公式

2.2 直线的方程

2.3 圆的方程

2.4 空间直角坐标系

微信公众号：电子课本大全

我国“神舟”五号载人航天飞船在2003年10月15日发射成功并进入预定的轨道. 航天科学家是如何计算出飞船的轨道(路线)的？如果要回答这个问题，就必须把几何图形转化为用数字或符号表达的语言，并能借助数字来确定空间点的位置.



在学习地理时，我们已经知道，用经度和纬度这两个数字可以确定地球表面上一点的位置.

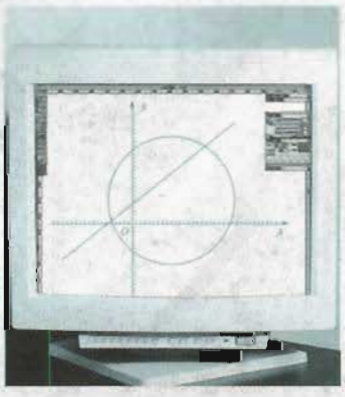
为了表示空间中任意一点的位置，只用两个数字就不够了，而是需要三个数字. 例如，为了确定一架正在飞行的飞机的位置，我们不仅需要经度和纬度，还需要确定它距离地球表面的高度.

用数字或其符号来确定一个点或一个物体位置的方法叫做坐标方法. 相关的符号和数称为点的坐标.

在实际生活中，也离不开用数来确定位置.

例如，你去看电影，进电影院后根据电影票上标出的几排几号，就可找到自己的座位.

用数可以确定火车在铁路上的位置：一个以“km”为单位的数，就可表示火车离开出发站后行驶的距离.



在本章的学习中，大家会看到，我们能用数来表示空间、平面和直线上任意一点的位置，并能用字母和数字来表达各种图形.

坐标方法非常重要，它使得现代计算机不仅可以进行各种数值计算，还能解决几何问题，研究几何体的性质和它们之间的关系.

这一章，我们主要学习如何用数和代数方程表达图形，并用代数方法研究图形的性质，还要了解用计算机画图的一些原理. 有计算机的同学还可以学着使用计算机画图.

微信公众号：电子课本大全

2.1 平面直角坐标系中的基本公式

这一大节，我们首先系统地复习一下坐标系的有关概念，然后导出解析几何中常用的基本公式. 这一大节是学习解析几何的基础.

2.1.1 数轴上的基本公式

我们知道，一条给出了原点、度量单位和正方向的直线叫做数轴，或者说在这条直线上建立了**直线坐标系**(图 2-1).

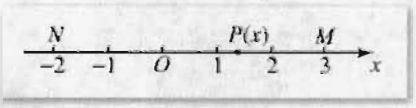


图 2-1

注

如不特别说明，我们约定数轴水平放置、正方向从左到右.

在数轴上，点 P 与实数 x 的对应法则是：如果点 P 在原点朝正向的一侧，则 x 为正数，且等于点 P 到原点的距离；如果点 P 在原点朝负向的一侧，则 x 为负数，其绝对值等于点 P 到原点的距离. 原点表示数 0. 依据这个法则我们就在实数集和数轴上的点之间建立了一一对应关系. 即对于数轴上每一个点都有唯一确定的实数与之对应；反之，对于任何一个实数，数轴上也存在一个确定的点与之对应.

如果点 P 与实数 x 对应，则称点 P 的坐标为 x，记作 $P(x)$.

?

如果数轴上的单位长取作 1 cm，你能在数轴上标出数 0.001，0.000 1 和 $\sqrt{2}$ 对应的点吗？你能说明在数轴上确实存在这些点吗？

如图 2-1 所示，数轴 x 上的点 M 的坐标为 3，记作 $M(3)$，点 N 的坐标为 -2，记作 $N(-2)$.

我们再来研究如何用数来表示数轴上的点的位移(图 2-2).

如果数轴上的任意一点 A 沿着轴的正向或负向移动到另一点 B，则说点在轴上作了一次位移，点不动则说点作了零位移. 位移是一个既有大小又有方向的量，通常叫做**位移向**

微信公众号：电子课本大全

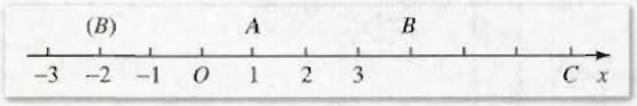


图 2-2

量，本书简称为**向量**.

从点 A 到点 B 的向量，记作$\overrightarrow{AB}$. 点 A 叫做向量$\overrightarrow{AB}$的起点，点 B 叫做向量$\overrightarrow{AB}$的终点，线段 AB 的长叫做向量$\overrightarrow{AB}$的长度，记作$|\overrightarrow{AB}|$.

数轴上同向且等长的向量叫做**相等的向量**.

例如图 2-2 中的$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$.

我们可用实数表示数轴上的一个向量. 例如，图 2-2 中的向量$\overrightarrow{AB}$，即从点 A 沿 x 轴的正向移动 3 个单位到达点 B，可用正数 3 表示；反之，用 -3 表示 B 为起点 A 为终点的向量，3 和 -3 分别叫做向量$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{BA}$的**坐标**或**数量**.

一般地，轴上向量$\overrightarrow{AB}$的坐标是一个实数，实数的绝对值为线段 AB 的长度，如果起点指向终点的方向与轴同方向，则这个实数取正数；反之取负数. 向量坐标的绝对值等于向量的长度.

起点和终点重合的向量是零向量，它没有确定的方向，它的坐标为 0.

向量$\overrightarrow{AB}$的坐标，在本书中用 AB 表示.

例如，在图 2-3 中，$AB=4$，$BA=-4$，$|AB|=4$，$|BA|=4$. 显然 $AB=-BA$ 或 $AB+BA=0$.



图 2-3

容易推断，相等的向量，它们的坐标相等；反之，如果数轴上两个向量的坐标相等，则这两个向量相等. 如果把相等的所有向量看作一个整体，作为同一个向量，则实数与数轴上的向量之间是一一对应的.

在数轴上，如果点 A 作一次位移到点 B，接着由点 B 再作一次位移到点 C，则位移$\overrightarrow{AC}$叫做位移$\overrightarrow{AB}$与位移$\overrightarrow{BC}$的和. 记作

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}.$$

由数轴上向量坐标的定义和有理数的运算法则，容易归纳出，对数轴上任意三点 A，B，C，都具有关系

$$\boxed{AC=AB+BC.} \qquad ①$$

如图 2-3 所示，已知 $AB=4$，$BC=-5$，则

$$AC=AB+BC=4+(-5)=-1;$$
$$AB=AC+CB=-1+5=4;$$
$$BC=BA+AC=-4+(-1)=-5.$$

上述关系等式①是我们学习解析几何的基础.

微信公众号：电子课本大全

下面我们来研究，对于数轴上的任意一个向量，怎样用它的起点坐标和终点的坐标来计算它的坐标.

设$\overrightarrow{AB}$是数轴上的任意一个向量，例如图 2-4，O 是原点，点 A 的坐标为 x_1，点 B 的坐标为 x_2，则

$$OB=OA+AB，\text{或}$$

$$AB=OB-OA.$$

依轴上点的坐标的定义，$OB=x_2$，$OA=x_1$，所以

$$AB=x_2-x_1.$$

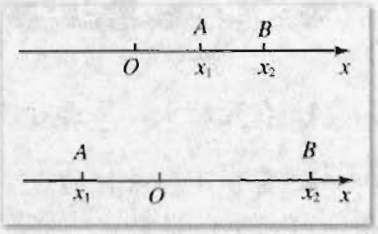


图 2-4

用 $d(A, B)$ 表示 A，B 两点的距离，根据这个公式可以得到，数轴上两点 A，B 的距离公式是

$$d(A, B)=|AB|=|x_2-x_1|.$$

思考与讨论

已知数轴上两点 $A(x_1)$，$B(x_2)$，如何计算线段 AB 中点 M 的坐标?

练习 A

1. (1) 在数轴上画出下列各点：

$$A(-2)，\quad B(-0.5)，\quad C\left(\frac{13}{3}\right)，\quad D(0)；$$

(2) 在数轴上画出点 $M(2)$，找出与点 M 的距离是 3 的两点 A，B，并写出它们的坐标.

2. (1) 在数轴上，已知点 $A(a)$ 位于点 $B(b)$ 的右侧，那么 a 与 b 哪个大?

(2) 不在数轴上画点，确定下列各组点中，哪一个点位于另一点的右侧?

$A(-3)$ 和 $B(-4)$，　　$A(3)$ 和 $B(4)$，

$A(-3)$ 和 $B(4)$，　　$A(3)$ 和 $B(-4)$.

3. 能否说点 $A(a)$ 一定位于点 $B(-a)$ 的右侧?

4. 讨论下列各组点的位置关系：

(1) $M(x)$ 和 $N(2x)$；　　(2) $A(c)$ 和 $B(c+2)$；

(3) $C(x)$ 和 $D(x-a)$；　　(4) $E(x)$ 和 $F(x^2)$.

5. 已知两点 A，B 的坐标，求 AB 和 $|AB|$：

(1) $A(2)$，$B(5)$；　　(2) $A(-2)$，$B(3)$；

(3) $A(-2)$，$B(-5)$；　　(4) $A(3)$，$B(-2)$.

微信公众号：电子课本大全

练习B

1. 在数轴上，画出对应代数式$\frac{|x|}{x}$($x\neq0$)的值的所有点.
2. 符合下列条件的点$P(x)$，位于数轴上何处？
   (1) $|x|=2$；　　(2) $|x|>3$.
3. 在数轴上求一点的坐标，使它到点$A(-9)$的距离是它到点$B(-3)$距离的2倍.
4. 根据下列条件，在数轴上分别画出点$P(x)$：
   (1) $|x-7|<3$；　　(2) $|x-2|>1$；　　(3) $|x+3|=3$.

2.1.2 平面直角坐标系中的基本公式

我们知道，在平面直角坐标系中，有序实数对构成的集合与坐标平面内的点的集合具有一一对应关系. 如图2-5所示，有序数对(x, y)与点P对应，这时(x, y)称作点P的坐标，并记为$P(x, y)$，x叫做点P的横坐标，y叫做点P的纵坐标.

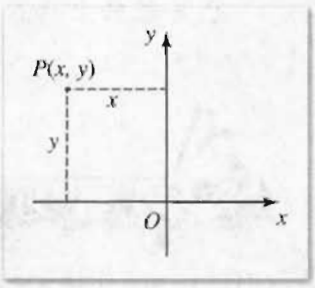


图2-5

1. 两点的距离公式

在平面直角坐标系中，已知两点的坐标，我们来讨论如何计算这两点的距离.

可能有的同学会问，既然两点已知，取一把尺子量出它们的距离就可以了，由两点的坐标来计算它们的距离有何意义？

我们知道，计算机在软件的支持下能高速地进行计算. 计算再麻烦，对计算机来说都是非常简单的事. 如果我们能根据两点的坐标找出计算两点距离的一些规则，并根据这些规则向计算机发出一条条指令，这样我们就能用计算机算出两点的距离.

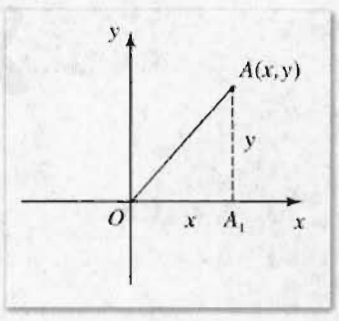


图2-6

我们先寻求原点$O(0, 0)$与任意一点$A(x, y)$之间距离的计算方法(图2-6)，O，A两点间的距离通常用$d(O, A)$表示.

当点A不在坐标轴上时，从点$A(x, y)$作x轴的垂线段AA_1，垂足为A_1. 这时，同学们只要想到勾股定理，会马上写出计算$d(O, A)$的公式

$$d(O, A)=\sqrt{x^2+y^2}.$$

微信公众号：电子课本大全

显然，当点 A 在坐标轴上时，这一公式也成立.

如何求任意两点 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$ 之间的距离呢(图 2-7)?

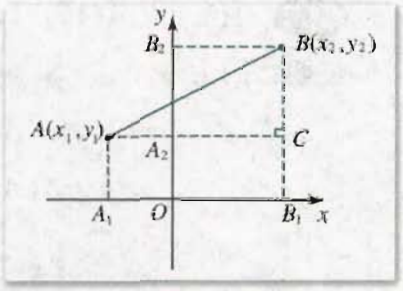


图 2-7

当 AB 不平行于坐标轴，也不在坐标轴上时，从点 A 和点 B 分别向 x 轴，y 轴作垂线 AA_1，AA_2 和 BB_1，BB_2，垂足分别为

$A_1(x_1, 0)$，$A_2(0, y_1)$，$B_1(x_2, 0)$，$B_2(0, y_2)$，

其中直线 BB_1 和 AA_2 相交于点 C.

在直角$\triangle ACB$中，

$$|AC| = |A_1B_1| = |x_2 - x_1|,$$
$$|BC| = |A_2B_2| = |y_2 - y_1|.$$

由勾股定理，得

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2.$$

由此得到计算 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$两点之间的距离公式

$$d(A, B) = |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

显然，当 AB 平行于坐标轴或在坐标轴上时，公式仍然成立.

已知两点的坐标，为了运用两点距离公式正确地计算两点之间的距离，我们可分步骤计算：

(1) 给两点的坐标赋值：

$$x_1 = ?,\ y_1 = ?,\ x_2 = ?,\ y_2 = ?;$$

(2) 计算两个坐标的差，并赋值给另外两个变量，即

$$\Delta x = x_2 - x_1, \qquad \Delta y = y_2 - y_1;$$

(3) 计算 $d = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$;

(4) 给出两点的距离 d.

通过以上步骤，对任意两点，只要给出两点的坐标，就可一步步地求值，最后算出两点的距离.

通过数学 1 的学习，我们已经知道，如果对一类问题能够一步步地求解，每一步都能算出结果，那么这个计算过程就是解这一类问题的一个算法. 求解一类问题的算法是非常重要的，它可以使这一类的所有问题，都能按相同的步骤进行简单机械的计算，对每一步的计算结果，都可以检验它是对还是错. 这种计算方法能很方便地编出计算机程序，并上机运算.

例 1 已知 $A(2, -4)$，$B(-2, 3)$，求 $d(A, B)$.

解：$x_1 = 2$，$x_2 = -2$，$y_1 = -4$，$y_2 = 3$，

$\Delta x = x_2 - x_1 = -2 - 2 = -4$，

$\Delta y = y_2 - y_1 = 3 - (-4) = 7$，

$d(A, B) = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{(-4)^2 + 7^2} = \sqrt{65}$.

微信公众号：电子课本大全

例 2 已知点 $A(1, 2)$，$B(3, 4)$，$C(5, 0)$，求证 $\triangle ABC$ 是等腰三角形.

证明：因为

$$d(A, B)=\sqrt{(3-1)^2+(4-2)^2}=\sqrt{8},$$

$$d(A, C)=\sqrt{(5-1)^2+(0-2)^2}$$

$$=\sqrt{4^2+(-2)^2}=\sqrt{20},$$

$$d(B, C)=\sqrt{(5-3)^2+(0-4)^2}$$

$$=\sqrt{2^2+(-4)^2}=\sqrt{20},$$

所以 $|AC|=|BC|$.

又可验证 A，B，C 不共线，所以 $\triangle ABC$ 是等腰三角形.

例 3 已知 $\square ABCD$，求证：$AC^2+BD^2=2(AB^2+AD^2)$.

分析：如果在 $\square ABCD$ 所在的平面上建立平面直角坐标系，写出点 A，B，C，D 的坐标. 则由距离公式就能证明题中结论是否成立. 由于点的坐标与坐标系有关，所以我们建立的坐标系，要尽量使点的坐标容易表示出来.

证明：取 A 为坐标原点、AB 所在直线为 x 轴建立平面直角坐标系 xOy（图 2-8）. 依据平行四边形的性质可设点 A，B，C，D 的坐标为 $A(0, 0)$，$B(a, 0)$，$C(b, c)$，$D(b-a, c)$.

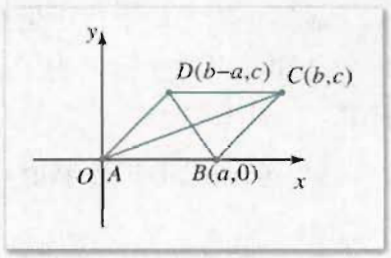


图 2-8

所以

$$AB^2=a^2,\quad AD^2=(b-a)^2+c^2,$$

$$AC^2=b^2+c^2,\quad BD^2=(b-2a)^2+c^2.$$

$$AC^2+BD^2=4a^2+2b^2+2c^2-4ab$$

$$=2(2a^2+b^2+c^2-2ab),$$

$$AB^2+AD^2=2a^2+b^2+c^2-2ab,$$

所以 $AC^2+BD^2=2(AB^2+AD^2)$.

例 3 证明了一个重要的定理：平行四边形两条对角线的平方和等于它的四边的平方和. 从中我们看到，几何问题可以转化为代数问题，通过一步步地计算来解决. 这种解决问题的方法叫做坐标法. 同学们在整章的学习中，都将体会到坐标法在研究几何问题中的作用和威力.

2. 中点公式

已知 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，设点 $M(x, y)$ 是线段 AB 的中点（图 2-9）. 过点 A，B，M 分别向 x 轴、y 轴作垂线 AA_1，AA_2，BB_1，BB_2，MM_1，MM_2，垂足分别为 $A_1(x_1, 0)$，$A_2(0, y_1)$，$B_1(x_2, 0)$，$B_2(0, y_2)$，$M_1(x, 0)$，$M_2(0, y)$.

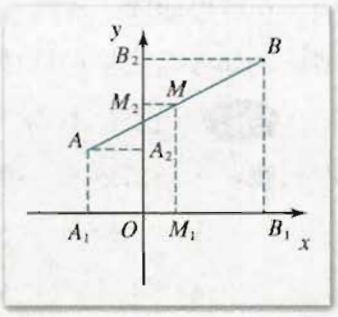


图 2-9

因为 M 是线段 AB 的中点，所以点 M_1 和点 M_2 分别是 A_1B_1 和 A_2B_2 的中点，即

微信公众号：电子课本大全

$$A_1M_1=M_1B_1,\quad A_2M_2=M_2B_2.$$

所以 $x-x_1=x_2-x$，$y-y_1=y_2-y$. 即

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

这就是线段中点坐标的计算公式，简称**中点公式**.

例 4 已知$\square ABCD$的三个顶点 $A(-3,0)$，$B(2,-2)$，$C(5,2)$，求顶点 D 的坐标(图 2-10).

解：因为平行四边形的两条对角线的中点相同，所以它们的坐标也相同. 设点 D 的坐标为(x,y)，则

$$\begin{cases}\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{-3+5}{2}=1\\[2ex]\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{0+2}{2}=1\end{cases}$$

解得$\begin{cases}x=0\\y=4\end{cases}$

所以点 D 的坐标为$(0,4)$，即 $D(0,4)$.

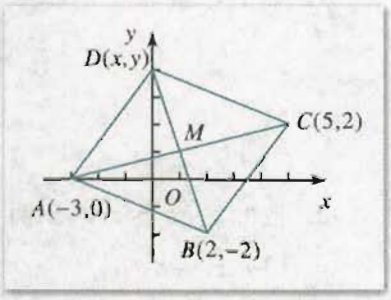


图 2-10

练习 A

1. 求两点的距离：
   (1) $A(6,2)$，$B(-2,5)$；　(2) $C(2,-4)$，$D(7,2)$；
   (3) $E(5,0)$，$F(8,0)$；　(4) $G(2,1)$，$H(5,-1)$.
2. 已知 $A(3,8)$，$B(-11,3)$，$C(-8,-2)$，求证$\triangle ABC$是等腰三角形.
3. 求线段 AB 中点的坐标：
   (1) $A(3,4)$，$B(-3,2)$；　(2) $A(-8,-3)$，$B(5,-3)$.
4. 求下列各点关于坐标原点的中心对称点：
   $A(2,3)$，$B(-3,5)$，$C(-2,-4)$，$D(3,-5)$，$P(a,b)$.

练习 B

1. 已知 $A(a,0)$，$B(0,10)$两点的距离等于 17，求 a 的值.
2. 已知$\square ABCD$的三个顶点 $A(-1,-2)$，$B(3,1)$，$C(0,2)$，求顶点 D 的坐标.

微信公众号：电子课本大全

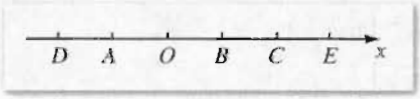
3. 求下列各点关于点 $M(-2, 1)$ 的中心对称点，并作图表示：

$A(2, -3)$，$B(1, 3)$，$C(-1, -3)$，$D(-3, 5)$.

4. 利用中点公式证明：奇函数的图象关于坐标原点成中心对称图形.

习题 2-1 A

1. 如图，数轴上的每一格等于一个长度单位，求 AB，BC，CD，EA.



（第 1 题）

2. 已知数轴上 A，B 两点的坐标 x_1，x_2，求 $d(A, B)$：

(1) $x_1=8$，$x_2=3$；　　(2) $x_1=-3$，$x_2=-5$；

(3) $x_1=15$，$x_2=-23$；　　(4) $x_1=-13$，$x_2=-7$.

3. 已知点 $A(-1, 3)$，$B(-2, 3)$，$C(0, 1)$，求这三点中每两点的距离.

4. 已知点 $A(4, 12)$，在 x 轴上的点 P 与点 A 的距离等于 13，求点 P 的坐标.

5. 已知 $A(1, 5)$，$B(5, -2)$，在 x 轴上的点 M 与 A，B 的距离相等，求点 M 的坐标.

6. 已知点 $P(7, y)$ 与点 $Q(-1, 5)$ 的距离等于 10，求点 P 的纵坐标 y.

7. 求下列两点的距离和对称中心点的坐标：

(1) $A(7, 4)$，$B(3, 2)$；　　(2) $C(6, -4)$，$D(-2, -2)$；

(3) $E(-3, 1)$，$F(2, 1)$.

8. 已知 $\triangle ABC$ 的顶点坐标是 $A(2, 1)$，$B(-2, 3)$，$C(0, -1)$，求 $\triangle ABC$ 三条中线的长度.

习题 2-1 B

1. 在 x 轴和 y 轴上各求一点，使这点到点 $A(1, 2)$ 和点 $B(5, -2)$ 的距离相等.

2. 已知点 $A(4, 1)$，$B(-3, 2)$，在 y 轴求点 C，使 $\triangle ABC$ 的面积等于 12.

3. 已知点 $M(1, 1)$ 平分线段 AB，且 $A(x, 3)$，$B(3, y)$，求 x，y.

4. 已知点 $A(1, -1)$，$B(3, 3)$，$C(4, 5)$，求证这三点在一条直线上.

5. 已知点 $A(1, 1)$，$B(5, 3)$，$C(0, 3)$，求证 $\triangle ABC$ 为直角三角形.

6. 用坐标法证明：如果四边形 $ABCD$ 是长方形，则对平面 AC 上任意一点 M，等式

$$AM^2+CM^2=BM^2+DM^2$$

成立.

微信公众号：电子课本大全

7. 已知一个二次函数的图象与函数 $y=x^2+1$ 的图象关于点 $M(2,0)$ 成中心对称，求这个二次函数的解析式.



探索与研究

在数轴上，运用两点距离的概念和计算公式，解下列方程：

(1) $|x+3|+|x-1|=5$；　(2) $|x+3|+|x-1|=4$；

(3) $|x+3|+|x-1|=3$；　(4) $|x+3|-|x-1|=5$；

(5) $|x+3|-|x-1|=4$；　(6) $|x+3|-|x-1|=3$.



计算机上的练习

1. 在电子工作表❶中，选择单元格区域，设计求两点距离的工作界面，然后计算习题 2-1A 和 B 中的两点的距离.

2. 应用“几何画板”研究上面“探索与研究”中的第 1 题的解：

(1) 建立“几何画板”中的坐标系，在其中绘制点 $A(-3,0)$，$B(1,0)$(使用“图表”菜单)；

(2) 隐藏 y 轴，在 x 轴上取一点 P(使用“显示”及“作图”菜单)；

(3) 度量 P 与 A 及 P 与 B 的距离，计算 $|PA|+|PB|$ 的值(使用度量菜单)；

(4) 用操作箭头在数轴上拖动点 P，观察点 P 在什么位置时，

$$|PA|+|PB|=5,$$

说出这时点 P 在数轴上的坐标.

❶ 电子工作表是 OpenOffice 软件的一个组件，它是一种开放源码并可免费下载使用的软件.

微信公众号：电子课本大全

2.2 直线的方程

2.2.1 直线方程的概念与直线的斜率

1. 直线方程的概念

我们已经学习过一元一次函数

$$y=kx+b \quad (k\neq 0),$$

知道所有一元一次函数的图象都是一条直线. 例如函数

$$y=2x+1$$

的图象是通过点(0，1)和点(1，3)的一条直线 l(图 2-11).

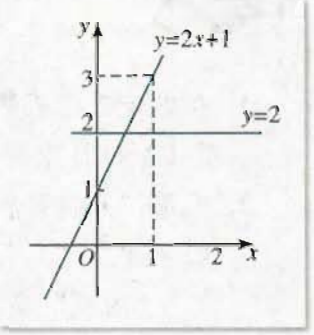


图 2-11

直线 l 是函数 $y=2x+1$ 的图象，所表达的意义是：

如果点 P 在 l 上，则它的坐标 $(x，y)$ 满足关系

$$y=2x+1; \qquad ①$$

反之，如果点 P 的坐标$(x，y)$满足①式，则点 P 一定在 l 上.

于是，函数式 $y=2x+1$，可作为描述直线 l 的特征性质，因此

$$l=\{(x，y)\,|\,y=2x+1\}.$$

我们再来看 $k=0$ 的特殊情况.

例如方程 $y=2$，无论 x 取何值，y 始终等于 2，虽然它已不是一次函数，但方程 $y=2$ (常值函数) 的图象是一条通过点(0，2)且平行于 x 轴的直线.

一元函数的解析式，仅是方程的特例. 在函数关系式中，我们已经指出，哪一个字母是自变量，哪一个字母是因变量. 但方程表达的是两个变量之间的某种关系. 它们之间并不一定存在函数关系，例如方程 $x^2+y^2=1$ 所表达的变量 x 与 y 之间的关系，在实数范围内，就不是函数关系.

由于函数 $y=kx+b$ $(k\neq 0)$ 或 $y=b$ 都可看成二元一次方程，因此，我们也可以说，方程 $y=kx+b$ 的解与其图象上的点存在一一对应关系.

如果以一个方程的解为坐标的点都在某条直线上，且这条直线上点的坐标都是这个方程的解，那么这个方程叫做这条**直线的方程**，这条直线叫做这个**方程的直线**.

由于方程 $y=kx+b$ 的图象是一条直线，因此我们今后常说直线 $y=kx+b$.

微信公众号：电子课本大全

2. 直线的斜率

直线 $y=kx+b$ 被其上的任意两个不同的点所唯一确定(图2-12). 如果点 $A(x_1, y_1)$，点 $B(x_2, y_2)$是这条直线上任意两点，其中$x_1 \neq x_2$，则由这两点的坐标可以计算出 k 的值.

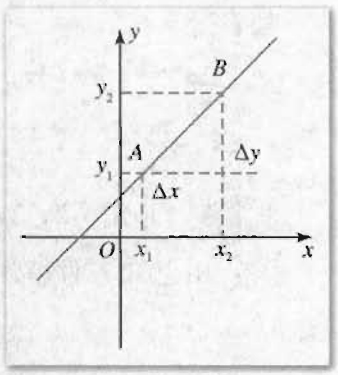


图 2-12

由于 x_1，y_1 和 x_2，y_2 是直线方程的两组解，方程

$$y_1=kx_1+b,$$

$$y_2=kx_2+b$$

两式相减，得 $y_2-y_1=kx_2-kx_1=k(x_2-x_1)$. 因此

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\ (x_1\neq x_2).$$

所以由直线上两点的坐标，可以求出 k 的值，且它与这两点在直线上的顺序无关，即

$$k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\ (x_1\neq x_2).$$

如果令 $\Delta x=x_2-x_1$，$\Delta y=y_2-y_1$，则 Δx 表示变量 x 的改变量，Δy 表示相应的 y 的改变量. 于是

$$k=\frac{\Delta y}{\Delta x}\ (\Delta x\neq 0).$$

通常，我们把直线 $y=kx+b$ 中的系数 k 叫做这条直线的**斜率**. 垂直于 x 轴的直线，人们常说它的斜率不存在.

方程 $y=kx+b(k\neq 0)$的图象是通过点$(0, b)$且斜率为 k 的直线.

对一次函数所确定的直线，它的斜率等于相应函数值的改变量与自变量改变量的比值. 直观上可使我们感知到斜率 k 的值决定了这条直线相对于 x 轴的倾斜程度.

x 轴正向与直线向上的方向所成的角叫做这条**直线的倾斜角**. 我们规定，与 x 轴平行或重合的直线的倾斜角为零度角.

由斜率 k 的定义可知：

$k=0$ 时，直线平行于 x 轴或与 x 轴重合；

$k>0$ 时，直线的倾斜角为锐角，此时，k 值增大，直线的倾斜角也随着增大；

$k<0$ 时，直线的倾斜角为钝角，此时，k 值增大，直线的倾斜角也随着增大.

垂直于 x 轴的直线的倾斜角等于 $90°$.

关于直线的斜率与倾斜角之间的关系，我们将在数学 4 中再次进行讨论.

由以上的求解过程，我们可以写出求一条直线斜率的计算步骤，以便应用计算机进行计算：

(1) 给直线上两点的坐标赋值：$x_1=?$，$x_2=?$，$y_1=?$，$y_2=?$；

(2) 计算 $\Delta x=x_2-x_1$，$\Delta y=y_2-y_1$；

(3) 如果 $\Delta x=0$，则判定“斜率 k 不存在”；

(4) 如果 $\Delta x\neq 0$，计算 $k=\frac{\Delta y}{\Delta x}$；

(5) 输出斜率 k.

微信公众号：电子课本大全

例 1 求经过 $A(-2, 0)$，$B(-5, 3)$ 两点的直线的斜率 k.

解：$x_1=-2$，$x_2=-5$，$y_1=0$，$y_2=3$；

$\Delta x=-5-(-2)=-3$，$\Delta y=3-0=3$；

$$k=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{3}{-3}=-1.$$

例 2 画出方程 $3x+6y-8=0$ 的图象.

解：由已知方程解出 y，得

$$y=-\frac{1}{2}x+\frac{4}{3}.$$

这是一次函数的表达式，它的图象是一条直线.

当 $x=0$ 时，$y=\frac{4}{3}$；当 $x=2$ 时，$y=\frac{1}{3}$.

在坐标平面内作点 $A\left(0, \frac{4}{3}\right)$，$B\left(2, \frac{1}{3}\right)$.

作直线 AB，即为所求方程的图象(图 2-13).

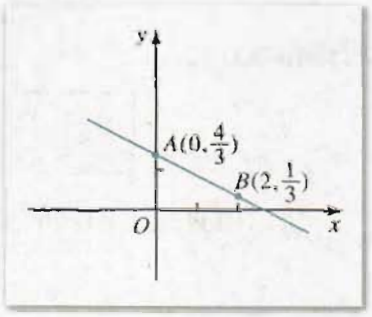


图 2-13

练习 A

1. 把满足下列条件的直线的方程写成一次函数的形式(提示：用待定系数法)：
   (1) 斜率 $k=5$，且过点(0，−3)；
   (2) 斜率 $k=-3$，且过点(3，−1).
2. 经过下列两点的直线的斜率是否存在？如果存在，求其斜率：
   (1) (1，−1)，(−3，2)；　　(2) (1，−2)，(5，−2)；
   (3) (3，4)，(−2，−5)；　　(4) (3，0)，(3，$\sqrt{3}$).

练习 B

1. 已知点 $A(-1, -1)$，$B(3, 1)$，$C(0, 5)$，分别求直线 AB，BC，CA 的斜率.
2. 求通过下列两点的直线的斜率(如果存在的话)和倾斜角，其中 a，b，c 是两两不相等的实数：
   (1) (a, c)，(b, c)；
   (2) (a, b)，(a, c)；
   (3) $(a, a+b)$，$(c, b+c)$.

微信公众号：电子课本大全

3. 已知直线的斜率 k 和直线上的一点 P，把直线方程写成一次函数的形式，并在同一坐标系中画出各条直线：

(1) $k=3$，$P(0,4)$；　　(2) $k=1$，$P(3,5)$；

(3) $k=-3$，$P(0,4)$；　　(4) $k=-1$，$P(3,5)$.

2.2.2 直线方程的几种形式

1. 直线的点斜式方程和两点式方程

已知直线 l 过点 $P_0(x_0, y_0)$，且斜率为 k（图 2-14），我们来求直线 l 的方程.

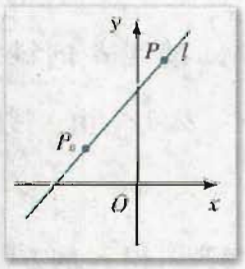


图 2-14

设点 $P(x, y)$ 为直线 l 上不同于 $P_0(x_0, y_0)$ 的任意一点，则直线 l 的斜率 k 可由 P 和 P_0 两点的坐标表示为

$$k=\frac{y-y_0}{x-x_0}.$$

即

$$y-y_0=k(x-x_0). \qquad ①$$

方程①就是点 $P(x, y)$ 在直线 l 上的条件. 在 l 上的点的坐标都满足这个方程，坐标满足方程①的点也一定在直线 l 上.

方程①是由直线上一点 $P_0(x_0, y_0)$ 和斜率 k 所确定的直线方程，我们把这个方程叫做直线的**点斜式方程**.

特别地，当 $k=0$ 时，直线方程变为

$$y=y_0.$$

这时，直线平行于 x 轴或与 x 轴重合.

如果一条直线通过点 $(0, b)$，且斜率为 k（图 2-15），则直线的点斜式方程为

$$y-b=k(x-0).$$

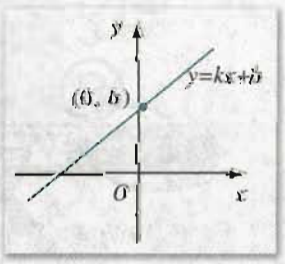


图 2-15

整理，得

$$y=kx+b.$$

这个方程叫做直线的**斜截式方程**. 其中 k 为斜率，b 叫做直线 $y=kx+b$ 在 y 轴上的**截距**，简称为直线的截距.

这种形式的方程，当 k 不等于 0 时，就是我们熟知的一次函数的解析式.

函数 $y=kx+b$ 与方程 $y=kx+b$，这两种说法的含义相同吗？

微信公众号：电子课本大全

例 1 求下列直线的方程：

(1) 直线 l_1：过点(2，1)，$k=-1$；

(2) 直线 l_2：过点(−2，1)和点(3，−3).

解：(1) 直线 l_1 过点(2，1)，斜率 $k=-1$.

由直线的点斜式方程，得

$$y-1=-1(x-2),$$

整理，得 l_1 的方程为

$$x+y-3=0.$$

(2) 我们先求出直线的斜率，再由点斜式写出直线方程.

直线 l_2 的斜率 $k=\dfrac{-3-1}{3-(-2)}=-\dfrac{4}{5}$，又因为过点(−2，1)，由直线的点斜式方程，得

$$y-1=-\frac{4}{5}[x-(-2)],$$

整理，得 l_2 的方程

$$4x+5y+3=0.$$

注 为了统一答案的形式，如没有特别要求，直线方程都化为 $ax+by+c=0$ 的形式.

例 2 求过点(0，1)，斜率为 $-\dfrac{1}{2}$ 的直线的方程.

解：直线过点(0，1)，表明直线在 y 轴上的截距为 1，又直线斜率为 $-\dfrac{1}{2}$，由直线的斜截式方程，得

$$y=-\frac{1}{2}x+1.$$

即

$$x+2y-2=0.$$

思考与讨论

已知两点 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，且 $x_1\neq x_2$，$y_1\neq y_2$，求直线 AB 的方程.

经过讨论，我们可得到上述直线 AB 的方程为

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\quad(x_1\neq x_2，\ y_1\neq y_2).$$

这种形式的方程叫做直线的**两点式方程**.

微信公众号：电子课本大全

练习A

1. 写出满足下列条件的直线的方程：

(1) 过点(3，2)，斜率为$\frac{2}{3}$；　　(2) 过点(−1，2)，斜率为$\sqrt{3}$；

(3) 过点(0，2)，斜率为−1；　　(4) 过点(−3，1)，平行于x轴；

(5) 过点(2，−1)，(−2，3)；　　(6) 过点(−3，1)，(1，4).

2. 根据下列直线方程，分别写出各直线经过的一点和直线的斜率k：

(1) $y-2=x+1$；　　(2) $y+4=\sqrt{3}(x-2)$；

(3) $y=-4x+3$；　　(4) $y=\frac{2}{5}x-3$.

3. 求满足下列条件的直线的方程，并画图：

(1) 过原点，斜率为−2；　　(2) 过点(0，3)，(2，1)；

(3) 过点(2，3)，平行于y轴；　　(4) 过点(−2，1)，平行于x轴；

(5) 斜率为5，在y轴上的截距是−2；

(6) 斜率为−1，在y轴上的截距是5.

练习B

1. 在直线方程$y-1=k(x+1)$中，k取遍所有实数，可得无数条直线，这无数条直线都过哪一点？

2. 已知直线$y-3=k(x-5)$过点(−1，−2)，求k的值.

3. 求下列过两已知点的直线方程：

(1) $A(-3，6)$，$B(7，-4)$；　　(2) $C(3，-5)$，$D(6，8)$；

(3) $E(1，5)$，$F(6，-3)$；　　(4) $G(-5，7)$，$H(-3，7)$.

4. 已知直线l在x轴上的截距是a（即直线过$(a，0)$），在y轴上的截距是b，且$a\neq0$，$b\neq0$. 求证直线l的方程可写为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

(这种形式的直线方程，叫做直线的截距式方程)

2. 直线方程的一般式

我们在前面学习了直线方程的几种形式，它们都是二元一次方程，下面我们进一步研究直线与二元一次方程的关系.

微信公众号：电子课本大全

我们知道，在坐标平面内，除垂直于 x 轴的直线外，其他直线都有斜率，它的方程都可以写成

$$y=kx+b$$

的形式.

垂直于 x 轴的直线(即 y 轴和平行于 y 轴的直线)，其上所有点的横坐标是一个定值(设为 x_1)，纵坐标可取遍所有实数，它的方程可写成

$$x=x_1$$

的形式. 这也是关于 x，y 的一次方程，其中 y 的系数是 0.

这样，对于每一条直线都可求出它的方程，而且是二元一次方程. 这也就是说：

直线的方程都是关于 x，y 的二元一次方程.

反过来要问，是否关于 x，y 的任何一个二元一次方程都表示一条直线？

关于 x，y 的二元一次方程的一般形式是

$$Ax+By+C=0, \qquad ①$$

其中 A，B 不同时为 0. 下面分 $B\neq 0$ 和 $B=0$ 两种情况加以讨论：

(1) 当 $B\neq 0$ 时，方程①可化为

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}.$$

这是直线的斜截式方程. 它表示斜率为 $-\frac{A}{B}$，在 y 轴上的截距为 $-\frac{C}{B}$ 的直线.

(2) 当 $B=0$ 时，由于 A，B 不同时为 0，必有 $A\neq 0$，于是方程①可化为

$$x=-\frac{C}{A}.$$

它表示一条与 y 轴平行或重合的直线.

根据以上讨论，我们又得到下面的结论：

关于 x，y 的二元一次方程都表示一条直线.

我们把方程

$$Ax+By+C=0 \ (A^2+B^2\neq 0),$$

叫做**直线的一般式方程**.

注

$A^2+B^2\neq 0$ 意味着 A，B 不同时为 0.

例 3 已知直线通过点 $(-2, 5)$，且斜率为 $-\frac{3}{4}$，求此直线的一般式方程.

解：由直线方程的点斜式，得

$$y-5=-\frac{3}{4}(x+2),$$

整理，得所求直线方程为

$$3x+4y-14=0.$$

例 4 求直线 l：$2x-3y+6=0$ 的斜率及在 y 轴上的截距.

解：已知直线方程可化为

微信公众号：电子课本大全

$$y=\frac{2}{3}x+2.$$

所以直线 l 的斜率 $k=\frac{2}{3}$，在 y 轴上的截距是 2.



1. 已知下列直线方程，求直线的斜率及其在 y 轴上的截距：

   (1) $2x-3y-6=0$；　　(2) $3x-y-7=0$；

   (3) $2x-5y=0$；　　(4) $x+y=3$.

2. 求下列直线与两条坐标轴围成的三角形的面积：

   (1) $3x-y+1=0$；　　(2) $5x-3y+2=0$；

   (3) $x+y-1=0$；　　(4) $x+3y-6=0$.

3. 已知□$ABCD$，其中三个顶点坐标为 $A(0,\ 0)$，$B(3,\ 0)$，$C(5,\ 3)$，求它的对角线 AC，BD 所在直线的方程.



1. 在直线方程 $Ax+By+C=0$ 中，A，B，C 满足什么条件时，直线有如下性质？

   (1) 过坐标原点；　　(2) 与两条坐标轴都相交；

   (3) 只与 x 轴相交；　　(4) 只与 y 轴相交；

   (5) 与 x 轴平行或重合；　　(6) 与 y 轴平行或重合.

2. 已知点 $A(-3,\ 2)$，$B(1,\ -4)$，求 AB 的垂直平分线的方程.（提示：利用两点间的距离公式）

3. 已知点 $A(-1,\ 2)$，$B(2,\ 1)$，$C(0,\ 4)$，求△ABC 三条边所在直线的斜率.

2.2.3 两条直线的位置关系

1. 两条直线相交、平行与重合的条件

已知两条直线的方程为

$$l_1:\quad A_1x+B_1y+C_1=0,$$

$$l_2:\quad A_2x+B_2y+C_2=0.$$

现在我们来研究这两条直线相交、平行、重合的条件.

为此，我们解方程组

微信公众号：电子课本大全

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0 & ① \\ A_2x+B_2y+C_2=0 & ② \end{cases}$$

①×B_2−②×B_1，得

$$(A_1B_2-A_2B_1)x+B_2C_1-B_1C_2=0.$$

当 $A_1B_2-A_2B_1\neq 0$ 时，得

$$x=\frac{B_1C_2-C_1B_2}{A_1B_2-A_2B_1};$$

再由①×A_2−②×A_1，当 $A_1B_2-A_2B_1\neq 0$ 时，得

$$y=\frac{A_2C_1-A_1C_2}{A_1B_2-A_2B_1}.$$

因此，当 $A_1B_2-A_2B_1\neq 0$ 时，方程组有唯一一组解.

这时，两条直线相交，交点的坐标就是(x, y).

当 $A_1B_2-A_2B_1=0$，而 $B_1C_2-C_1B_2\neq 0$ 或 $A_2C_1-A_1C_2\neq 0$ 时，方程组无解. 又知方程①，②为直线方程，A_1 与 B_1，A_2 与 B_2 不能同时为 0，由此可推知这两条直线没有公共点，即这两条直线平行.

如果 A_2，B_2，C_2 全不为 0，则上述两条直线平行的条件可转化为

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}.$$

如果 $A_1=\lambda A_2$，$B_1=\lambda B_2$，$C_1=\lambda C_2$，其中 $\lambda\neq 0$，则方程①，②中未知数的对应的系数成比例，直线 l_1 的方程变为

$$\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0,$$

由此可知，两个方程的解集相同. 可知两个方程表示同一条直线，即直线 l_1 与 l_2 重合.

总结以上分析，我们得到

l_1 与 l_2 相交 $\Leftrightarrow A_1B_2-A_2B_1\neq 0$ 或 $\dfrac{A_1}{A_2}\neq\dfrac{B_1}{B_2}$ $(A_2B_2\neq 0)$.

$$l_1 \text{ 与 } l_2 \text{ 平行} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1B_2-A_2B_1=0，\text{而}B_1C_2-C_1B_2\neq 0 \text{ 或} \\ \qquad\qquad A_2C_1-A_1C_2\neq 0; \\ \text{或} \quad \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}\neq\dfrac{C_1}{C_2} \quad (A_2B_2C_2\neq 0). \end{cases}$$

$$l_1 \text{ 与 } l_2 \text{ 重合} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1=\lambda A_2，B_1=\lambda B_2，C_1=\lambda C_2 \quad (\lambda\neq 0); \\ \text{或} \quad \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2} \quad (A_2B_2C_2\neq 0). \end{cases}$$

微信公众号：电子课本大全

思考与讨论

已知直线 l_1：$y=k_1x+b_1$，l_2：$y=k_2x+b_2$，如何用这两条直线的斜率 k_1，k_2，以及 b_1，b_2，判定这两条直线平行或者重合？

证明你的结论，并说明与直线 $y=kx+b$ 平行的直线可表示为 $y=kx+b_1(b_1\neq b)$.

经过思考与讨论，同学们会得出

$l_1 // l_2 \Leftrightarrow k_1=k_2$ 且 $b_1\neq b_2$；

l_1 与 l_2 重合 $\Leftrightarrow k_1=k_2$ 且 $b_1=b_2$.

例 1 已知直线 l_1：$Ax+By+C_1=0$，l_2：$Ax+By+C_2=0$，求证：当 $C_1\neq C_2$ 时，l_1 与 l_2 平行.

证明：因为

$$AB-BA=0,$$

所以 l_1 与 l_2 平行或重合. 又因为

$$BC_2-BC_1=B(C_2-C_1);$$

当 $B\neq 0$ 时，已知 $C_1\neq C_2$，所以 $BC_2-BC_1\neq 0$，因此两直线平行；

当 $B=0$ 时，由直线方程的定义，知 $A\neq 0$，于是两条直线的方程变为

$$x=-\frac{C_1}{A},\ x=-\frac{C_2}{A},$$

这是两条与 x 轴垂直的直线，所以它们平行或重合. 又由于 $C_1\neq C_2$，所以它们是平行的直线.

由例 1 所证结论，我们可以把与直线 $Ax+By+C=0$ 平行的直线的方程，表示成

$$Ax+By+D=0\ (D\neq C).$$

例 2 求通过下列各点且与已知直线平行的直线方程：

(1) $(-1,\ 2)$，$y=\frac{1}{2}x+1$；　　(2) $(1,\ -4)$，$2x+3y+5=0$.

解：(1)因为所求直线与已知直线平行，所以可设所求直线为

$$y=\frac{1}{2}x+b.$$

由于所求直线过点 $(-1,\ 2)$，代入方程，得 $b=\frac{5}{2}$.

因此所求方程为 $y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$，即 $x-2y+5=0$.

(2) 设所求的直线方程为

$$2x+3y+D=0.$$

微信公众号：电子课本大全

由于所求直线过点(1，−4)，代入方程，得 $D=10$.

因此，所求直线方程为

$$2x+3y+10=0.$$



1. 求下列两条直线的交点，并作图：

(1) $3x-4y+8=0$，　$5x+3y-15=0$；

(2) $x-y=1$，　$3x-4y-12=0$.

2. 判断下列各组中两直线的位置关系：

(1) l_1：$3x+4y-5=0$，　l_2：$4x-2y-1=0$；

(2) l_1：$3x+4y=5$，　l_2：$6x+8y=10$；

(3) l_1：$2y-3=0$，　l_2：$3y+5=0$；

(4) l_1：$y=\frac{1}{3}x+3$，　l_2：$y=\frac{1}{3}x+4$；

(5) l_1：$y=2x-3$，　l_2：$y=4x-3$.

3. 求过点 P 且平行于直线 l 的直线的方程：

(1) $P(2，3)$，　l：$2x+y-5=0$；

(2) $P(5，0)$，　l：$2x-3y-7=0$.



1. 判断下列各组中两直线的位置关系：

(1) l_1：$y=3x+4$，　l_2：$2x-6y+1=0$；

(2) l_1：$2x-6y+4=0$，　l_2：$y=\frac{x}{3}+\frac{2}{3}$；

(3) l_1：$(\sqrt{2}-1)x+y=3$，　l_2：$x+(\sqrt{2}+1)y=2$.

2. 对于直线方程 $2x+y+a=0$，当 a 取不同的数值时，它们表示的直线有什么关系？在平面直角坐标系中，分别作出 $a=0$，1，2 时方程表示的直线.

2. 两条直线垂直的条件

已知两条直线

$$l_1：\quad A_1x+B_1y+C_1=0,$$

$$l_2：\quad A_2x+B_2y+C_2=0.$$

下面我们来研究 l_1 与 l_2 垂直的条件.

微信公众号：电子课本大全

由于直线 l_1 与直线 $A_1x+B_1y=0$ 平行或重合，直线 l_2 与直线 $A_2x+B_2y=0$ 平行或重合，因此我们研究 l_1 和 l_2 垂直的条件时，可转化为研究直线

$$l_1'：A_1x+B_1y=0 \text{ 和 } l_2'：A_2x+B_2y=0$$

垂直的条件.

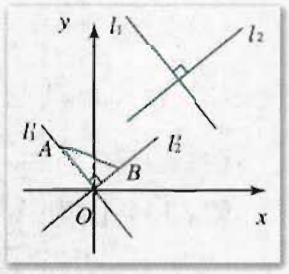


图 2-16

假定 l_1，l_2 都不与坐标轴平行或重合.

当 $l_1 \perp l_2$ 时(图 2-16)，通过坐标原点作直线 $l_1' /\!/ l_1$ 和 $l_2' /\!/ l_2$，则 l_1' 和 l_2' 互相垂直.

在直线 l_1'，l_2' 上，分别取两点 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$(都不是原点). 由勾股定理，得

$$x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2.$$

化简，得

$$x_1x_2+y_1y_2=0.$$

由假定可知 $B_1 \neq 0$，$B_2 \neq 0$，因此 $y_1=-\dfrac{A_1}{B_1}x_1$，$y_2=-\dfrac{A_2}{B_2}x_2$. 代入上式，得

$$x_1x_2\left(1+\frac{A_1A_2}{B_1B_2}\right)=0.$$

因为 A，B 都不在 y 轴上，所以 $x_1x_2 \neq 0$，因此

$$1+\frac{A_1A_2}{B_1B_2}=0, \qquad ①$$

即

$$A_1A_2+B_1B_2=0. \qquad ②$$

由于上面推导的每一步都是可逆的，因此，由②式可以证明两条直线 l_1' 与 l_2' 垂直. 从而也就证明了 l_1 与 l_2 垂直.

假定 l_1，l_2 中有一条直线与坐标轴平行或重合.

当 $l_1 \perp l_2$ 时，可以推出 l_1，l_2 中的另一条也与坐标轴平行或重合，因此同样有

$$A_1A_2+B_1B_2=0.$$

反过来，由条件 $A_1A_2+B_1B_2=0$ 也可以推出 $l_1 \perp l_2$.

总结以上讨论，我们得到，对坐标平面内的任意两条直线 l_1 和 l_2，有

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0.$$

如果 $B_1B_2 \neq 0$，则 l_1 的斜率 $k_1=-\dfrac{A_1}{B_1}$，l_2 的斜率 $k_2=-\dfrac{A_2}{B_2}$.

由上面的①式，又可以得出

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1k_2=-1.$$

根据上述结论，我们可以写出判断直线 l_1 和 l_2 是否互相垂直的计算步骤：

(1) 给 A_1，B_1，C_1，A_2，B_2，C_2 赋值；

(2) 计算 $M=A_1A_2+B_1B_2$；

微信公众号：电子课本大全

(3) 若 $M=0$，则 $l_1 \perp l_2$；若 $M\neq 0$，则 l_1 与 l_2 不垂直.

例 3 判断下列各组中的两条直线是否垂直：

(1) $2x-4y-7=0$ 与 $2x+y-5=0$；

(2) $y=3x+1$ 与 $y=-\frac{1}{3}x+5$；

(3) $2x=7$ 与 $3y-5=0$.

解：(1) 因为 $A_1=2$，$B_1=-4$，$A_2=2$，$B_2=1$，得

$$A_1A_2+B_1B_2=2\times 2+(-4)\times 1=0,$$

所以这两条直线垂直；

(2) 由 $k_1=3$，$k_2=-\frac{1}{3}$，得

$$k_1k_2=3\times\left(-\frac{1}{3}\right)=-1,$$

所以这两条直线垂直；

(3) 因为 $A_1=2$，$B_1=0$，$A_2=0$，$B_2=3$，得

$$A_1A_2+B_1B_2=2\times 0+0\times 3=0,$$

所以这两条直线垂直.

此题也可以直接看出直线 $2x=7$ 平行于 y 轴，直线 $3y-5=0$ 平行于 x 轴，从而可以判断这两条直线垂直.

例 4 求证：直线 $Ax+By+C_1=0$ 与直线 $Bx-Ay+C_2=0$ 垂直.

证明：因为

$$AB+B(-A)=0,$$

所以这两条直线垂直.

一般地，我们可以把与直线 $Ax+By+C=0$ 垂直的直线方程表示为

$$Bx-Ay+D=0.$$

同样可证明与直线 $y=kx+b$ $(k\neq 0)$ 垂直的直线可表示为

$$y=-\frac{1}{k}x+b_1.$$

例 5 求通过下列各点且与已知直线垂直的直线方程：

(1) $(-1,\ 3)$，$y=2x-3$；

(2) $(1,\ 2)$，$2x+y-10=0$.

解：(1) 设所求直线方程为 $y=-\frac{1}{2}x+b$.

因为直线过点 $(-1,\ 3)$，代入方程，得 $b=\frac{5}{2}$，所以所求方程为

$$y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2},\ \text{即}\ x+2y-5=0.$$

(2) 设所求的直线方程为 $x-2y+C=0$.

微信公众号：电子课本大全

因为直线过点(1，2)，代入方程，得 $C=3$，所以所求直线方程为

$$x-2y+3=0.$$



1. 判断下列各组中的两条直线是否垂直：

(1) $y=x$，　$2x+2y-7=0$；　　(2) $x+4y-5=0$，$4x-3y-5=0$；

(3) $x=3$，　$y=2$；　　(4) $2x-y=0$，　$x-2y=0$.

2. 找出下列直线中互相垂直的直线：

l_1：$2x+3y-7=0$，　　l_2：$3x+2y-9=0$，

l_3：$3x-2y-4=0$，　　l_4：$x=-3$，

l_5：$2y+5=0$，　　l_6：$4x-6y+5=0$.

3. 已知：点 $A(2，5)$，$B(6，-1)$，$C(9，1)$. 求证：$AB\perp BC$.

4. 求下列过点 P 且垂直于直线 l 的直线方程：

(1) $P(2，3)$，　l：$x-y-2=0$；　　(2) $P(4，-3)$，　l：$x=3$；

(3) $P(3，-5)$，　l：$y+1=0$；　　(4) $P(-2，3)$，　l：$y=3x-1$.



1. 已知直线 $ax+2y-1=0$ 与直线 $2x-3y-1=0$ 垂直，求 a 的值.

2. 已知直线 l_1：$(m+2)x-(m-2)y+2=0$，直线 l_2：$3x+my-1=0$，且 $l_1\perp l_2$，求 m 的值.

3. 判断下列各题中两个方程表示的直线是否垂直：

(1) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{3}$ 与 $\dfrac{x+4}{3}=\dfrac{y-1}{-2}$；

(2) $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{4}$ 与 $\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y+5}{3}$.

4. 已知 $A(-1，2)$，$B(3，-2)$，$C(1，5)$，求过点 C 且与直线 AB 垂直的直线方程.

2.2.4 点到直线的距离

设坐标平面上(图 2-17)，有点 $P(x_1，y_1)$和直线

$$l：Ax+By+C=0\ (A^2+B^2\neq 0).$$

微信公众号：电子课本大全

我们来寻求点 P 到直线 l 距离的求法.

作直线 m 通过点 $P(x_1, y_1)$，并且与直线 l 垂直，设垂足为 $P_0(x_0, y_0)$. 则问题可转化为求 P 和 P_0 两点之间的距离的问题. 由距离公式，只要列出关于 x_1-x_0，y_1-y_0 的两个方程，就可求出这两点的距离.

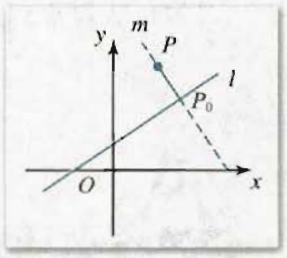


图 2-17

由 $m \perp l$ 可求得直线 m 的方程为

$$B(x-x_1)-A(y-y_1)=0,$$

由 $P_0 \in m$ 得

$$B(x_0-x_1)-A(y_0-y_1)=0. \quad ①$$

因为点 P_0 又在直线 l 上，可知 $Ax_0+By_0+C=0$，因此

$$C=-Ax_0-By_0.$$

所以 $Ax_1+By_1+C=Ax_1+By_1-Ax_0-By_0$，即

$$A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)=Ax_1+By_1+C. \quad ②$$

由①和②两式可以求出 x_1-x_0 和 y_1-y_0. 但我们只需求 $(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2$，因此把等式①和②两边平方后相加，整理就可得

$$(A^2+B^2)[(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2]=(Ax_1+By_1+C)^2,$$

即 $(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2=\dfrac{(Ax_1+By_1+C)^2}{A^2+B^2}$.

容易看出，等式左边即为点 $P(x_1, y_1)$ 到直线 l 的距离的平方. 由此我们就可以得到点 $P(x_1, y_1)$ 到直线 l 的距离 d 的计算公式

$$\boxed{d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.}$$

我们可写出求点 $P(x_1, y_1)$ 到直线 $Ax+By+C=0$ 的距离的计算步骤：

(1) 给点的坐标赋值：$x_1=?$，$y_1=?$；

(2) 给 A，B，C 赋值：$A=?$，$B=?$，$C=?$；

(3) 计算 $d=\dfrac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$；

(4) 给出 d 的值.

例 1 求点 $P(-1, 2)$ 到直线 $2x+y=5$ 的距离 d(图 2-18).

解：将直线方程化为一般式：

$$2x+y-5=0.$$

因为

$$x_1=-1,\ y_1=2,\ A=2,\ B=1,\ C=-5,$$

所以由点到直线的距离公式，得

$$d=\frac{|2\times(-1)+1\times 2-5|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}.$$

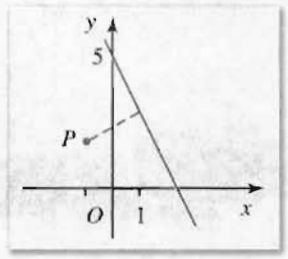


图 2-18

微信公众号：电子课本大全

例 2 (1) 求证：两条平行线 l_1：$Ax+By+C_1=0$ 与 l_2：$Ax+By+C_2=0$ 之间的距离是

$$d=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}};$$

(2) 求平行线 l_1：$12x-5y+8=0$ 与 l_2：$12x-5y-24=0$ 之间的距离(图 2-19).

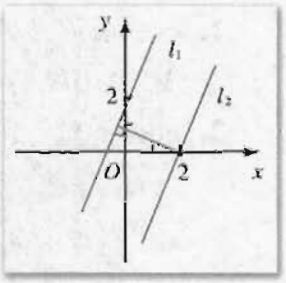


图 2-19

分析：两条平行线的距离，就是其中一条直线上任取一点，这个点到另一条直线的距离.

解：(1) 在 l_1 上任取一点 $P(x_1, y_1)$，则 $Ax_1+By_1=-C_1$，l_1 与 l_2 之间的距离等于点 P 到 l_2 的距离

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|C_2-C_1|}{\sqrt{A^2+B^2}};$$

(2) 由(1) 所得公式，直线 l_1 与 l_2 的距离为

$$d=\frac{|-24-8|}{\sqrt{12^2+5^2}}=\frac{32}{13}.$$

即平行线 l_1 与 l_2 之间的距离是 $\frac{32}{13}$.

练习 A

1. 求下列点到直线的距离：
   (1) $O(0, 0)$，l_1：$3x+4y-5=0$；　(2) $A(2, -3)$，l_2：$x+y-1=0$；
   (3) $B(1, 0)$，l_3：$\sqrt{3}x+y-\sqrt{3}=0$；　(4) $C(1, 2)$，l_4：$3x+y=0$；
   (5) $D(-2, 3)$，l_5：$y=7$.
2. 求两条平行线 $2x+3y-8=0$ 和 $2x+3y+18=0$ 之间的距离.

练习 B

1. 求坐标原点到下列直线的距离：
   (1) l_1：$4x-3y-15=0$；　(2) l_2：$x-y=0$；
   (3) l_3：$Ax+By+C=0$.
2. 求平行线 $3x-2y-5=0$ 与 $6x-4y+3=0$ 之间的距离.
3. 在 x 轴上求与直线 $3x+4y-5=0$ 的距离等于 5 的点的坐标.

微信公众号：电子课本大全

习题 2-2 A

1. 已知长方形 $ABCD$ 在 x 轴的上方，并且 $A(0, 0)$，$B(5, 0)$，$C(5, 3)$，求直线 AC 和 BD 的斜率.

2. 根据下列条件分别写出直线的方程：

(1) 斜率是 $\sqrt{3}$，且经过点 $A(5, 3)$；

(2) 斜率为 4，在 y 上的截距为 -2；

(3) 在 y 轴上的截距为 3，且平行于 x 轴；

(4) 在 x，y 轴上的截距分别是 -3，-1.

3. 已知直线的斜率 $k=2$，且通过点 $A(3, 5)$；又知点 $B(a, 7)$，$C(-3, b)$都在这条直线上，求 a，b 值.

4. 已知直线 $3x-y+5=0$ 和直线 $x=3$，求这两条直线与 x 轴围成的三角形的面积.

5. 已知一个三角形的三个顶点坐标是 $A(8, 5)$，$B(4, -2)$，$C(-6, 3)$，求分别经过其中两边中点所作的三条直线的方程.

6. 菱形的两条对角线分别在 x 轴、y 轴上，并且它们的长分别等于 8 和 6，求菱形各边所在直线的方程.

7. 写出下列直线的方程，并化为一般式：

(1) 过点(1, 3)，斜率 $k=0$；

(2) 过点(−1, −2)，(3, 5)；

(3) 斜率是 $-\frac{1}{2}$，经过点(8, −2)；

(4) 过点(−2, 1)，平行于 y 轴.

8. 求出下列直线的斜率：

(1) $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-4}$；　　(2) $y=\frac{3}{2}$；

(3) $3x-2y+5=0$；　　(4) 过点 $A(-1, 0)$，$B(-5, 4)$的直线.

9. 求下列直线在 x 轴和 y 轴上的截距，并画图：

(1) $2x-3y+4=0$；　　(2) $5x+3y=15$；

(3) $y=\frac{1}{2}x$；　　(4) $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}=1$.

10. 分别求满足下列条件的直线的方程并化为一般式：

(1) 经过点 $D(2, -3)$，且平行于过两点 $E(1, 2)$，$F(-1, -5)$的直线；

(2) 经过点 $A(2, 1)$，且与直线 $x+3y-3=0$ 垂直；

(3) 经过点 $B(3, 0)$，且与直线 $2x+y-5=0$ 垂直.

11. 判断下列直线的位置关系，如果它们相交，则求出它们的交点：

(1) $2x+y-11=0$，$x+3y-18=0$；

(2) $2x-3y-4=0$，$4x-6y-8=0$；

微信公众号：电子课本大全

(3) $3x-4y-7=0$，$12x-16y-7=0$；

(4) $2x+5y-6=0$，$2x-5y-6=0$.

12. 判断下列每小题中直线是否平行或垂直：

(1) $x+2y-7=0$，$2x+4y-7=0$；

(2) $2x+3y-4=0$，$3x-2y+1=0$；

(3) $x+3y-6=0$，$x-3y+8=0$；

(4) $4x-y+3=0$，$3x+12y-11=0$.

13. 已知点 $A(-7, 4)$，点 $B(-5, 6)$，求线段 AB 的垂直平分线的方程.

14. 求点到直线的距离：

(1) $A(2, 3)$，l_1：$2x-y+4=0$；　(2) $B(-5, 7)$，l_2：$12x+5y-1=0$；

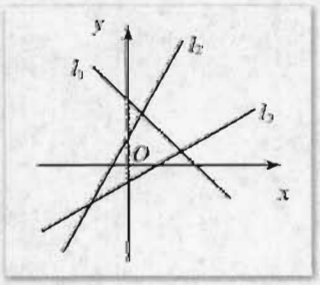
(3) $C(-1, 4)$，l_3：$x-2=0$；　(4) $D(1, -2)$，l_4：$2y+3=0$.

15. 求下列各点关于直线 $y=x$ 的轴对称点的坐标：

$A(2, 1)$，　$B(-5, -1)$，　$C(3, -2)$，　$D(-3, 4)$.

习题 2-2 B

1. 三条直线 l_1，l_2，l_3 的位置如图所示，它们的斜率分别为 k_1，k_2，k_3. 试比较 k_1，k_2，k_3 的大小.



(第 1 题)

2. 分别求直线 $3x-4y-5=0$ 关于 x 轴、y 轴对称的直线的方程.

3. 求 l_1：$2x-y+1=0$，l_2：$x+y+5=0$，l_3：$x=0$，l_4：$x=3$ 四条直线所围成的图形的面积.

4. 函数 $y=|x+3|$ 的图象由两条射线组成，求这两条射线所在直线的方程.

5. 已知 $A(1, 1)$，$B(-4, 5)$，$C(x, 13)$三点共线，求 x 的值.

6. (1) 已知$\triangle ABC$的三个顶点坐标为 $A(0, 5)$，$B(1, -2)$，$C(-6, 4)$，求 BC 边上的中线所在直线的方程；

(2) 已知点 $A(-1, 2)$，$B(2, 1)$，$C(0, 4)$，求$\triangle ABC$三条高所在直线的方程.

7. 求满足下列条件的直线的方程：

(1) 经过两条直线 $2x+y-8=0$ 和 $x-2y+1=0$ 的交点，且平行于直线$4x-2y-7=0$；

(2) 经过两条直线 $2x-3y+10=0$ 和 $3x+4y-2=0$ 的交点，且垂直于直线$3x-2y+4=0$.

8. 求平行线 $3x+4y-10=0$ 和 $6x+8y-7=0$ 的距离.

9. 三条直线 $ax+2y+8=0$，$4x+3y=10$，$2x-y=10$ 相交于一点，求 a 的值.

10. (1) 已知直线 $3x+(1-a)y+5=0$ 与直线 $x-y=0$ 平行，求 a 的值；

(2) 已知直线 $(a-4)x+y+1=0$ 与直线 $2x+3y-5=0$ 垂直，求 a 的值.

微信公众号：电子课本大全

11. 光线从点 $M(-2, 3)$ 射到 x 轴上一点 $P(1, 0)$ 后，被 x 轴反射，求反射光线所在的直线方程.（提示：设点 M' 是点 M 关于 x 轴的对称点，则直线 $M'P$ 是反射光线所在直线）

12. 已知直线 l：$x+y-3=0$，求点 $A(-1, 1)$ 关于直线 l 的对称点 A' 的坐标.



计算机上的练习

在电子工作表中，选择单元格区域，计算习题 2-2A 中有关点到直线的距离的练习.

微信公众号：电子课本大全

2.3 圆的方程

2.3.1 圆的标准方程

我们知道，平面内到一定点的距离等于定长的点的轨迹是圆. 定点是圆心，定长是圆的半径.

现在我们来求以 $C(a, b)$ 为圆心，r 为半径的圆的方程(图 2-20).

设 $M(x, y)$ 是⊙C 上的任意一点.

点 M 在⊙C 上的条件是

$$|CM|=r.$$

也就是说，如果点 M 在⊙C 上，则 $|CM|=r$；反之，如果 $|CM|=r$，则点 M 在⊙C 上.

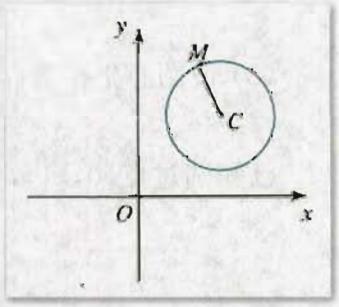


图 2-20

由两点间的距离公式，上述条件可转化为方程

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r.$$

两边平方，得

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2. \qquad ①$$

显然，⊙C 上任意一点 M 的坐标 (x, y) 满足方程①；如果平面上一点 M 的坐标 (x, y) 满足方程①，可得 $|CM|=r$，则点 M 在⊙C 上. 因此方程①是以点 $C(a, b)$ 为圆心，r 为半径的圆的方程，叫做**圆的标准方程**.

特别地，如果圆心在坐标原点(图 2-21)，这时 $a=0$，$b=0$，圆的标准方程就是

$$x^2+y^2=r^2.$$

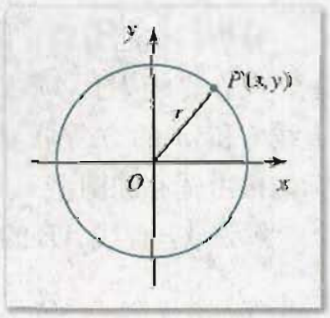


图 2-21

容易看出，如果点 $M_1(x_1, y_1)$ 在圆外，则点到圆心的距离大于圆的半径 r，即

$$(x_1-a)^2+(y_1-b)^2>r^2.$$

如果点 $M_2(x_2, y_2)$ 在圆内，则点到圆心的距离小于圆的半

微信公众号：电子课本大全

径 r，即

$$(x_2-a)^2+(y_2-b)^2<r^2.$$

例 1 根据下列条件，求圆的方程：

(1) 圆心在点 $C(-2,\ 1)$，并过点 $A(2,\ -2)$；

(2) 圆心在点 $C(1,\ 3)$，并与直线 $3x-4y-6=0$ 相切；

(3) 过点 $(0,\ 1)$ 和点 $(2,\ 1)$，半径为 $\sqrt{5}$.

分析：圆心和半径是圆的两要素，只要确定圆心坐标和半径就可以写出圆的方程.

解：(1) 所求圆的半径

$$r=|CA|=\sqrt{(2+2)^2+(-2-1)^2}=5.$$

因为圆的圆心为 $(-2,\ 1)$，所以所求圆的方程为

$$(x+2)^2+(y-1)^2=25.$$

(2) 因为直线 $3x-4y-6=0$ 是所求圆的切线，所以圆心 $(1,\ 3)$ 到这条直线的距离等于半径，根据点到直线的距离公式，有

$$r=\frac{|3\times1-4\times3-6|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{15}{5}=3.$$

所以，所求圆的方程为

$$(x-1)^2+(y-3)^2=9.$$

(3) 设圆心坐标为 $(a,\ b)$，则圆的方程为

$$(x-a)^2+(y-b)^2=5.$$

已知圆过点 $(0,\ 1)$，$(2,\ 1)$，代入圆的方程，得

$$\begin{cases}a^2+(1-b)^2=5\\(2-a)^2+(1-b)^2=5\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}a_1=1\\b_1=-1\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}a_2=1\\b_2=3\end{cases}$$

因此，所求圆的方程为

$$(x-1)^2+(y+1)^2=5\quad\text{或}\quad(x-1)^2+(y-3)^2=5.$$

例 2 求过点 $A(6,\ 0)$，$B(1,\ 5)$，且圆心在直线 l：$2x-7y+8=0$ 上的圆的方程 (图 2-22).

分析：由题意得，圆心在线段 AB 的垂直平分线 m 上，又在直线 l 上，所以圆心是直线 m 与 l 的交点. 将直线 l 和 m 的方程联立，解方程组，可以求出圆心坐标，再由圆心和圆上一点的坐标可以求出圆的半径.

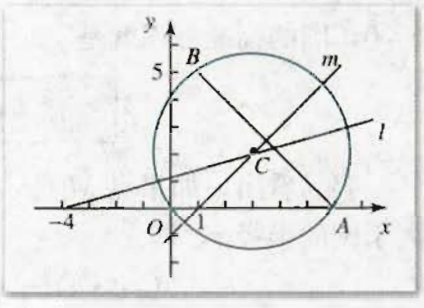


图 2-22

解法 1：直线 AB 的斜率

$$k=\frac{5-0}{1-6}=-1,$$

所以 AB 的垂直平分线 m 的斜率为 1.

微信公众号：电子课本大全

AB 的中点的横坐标和纵坐标分别为

$$x=\frac{6+1}{2}=\frac{7}{2},\quad y=\frac{0+5}{2}=\frac{5}{2}.$$

因此，直线 m 的方程为

$$y-\frac{5}{2}=1\left(x-\frac{7}{2}\right),$$

即 $x-y-1=0$.

又圆心在直线 l 上，所以圆心是直线 m 与直线 l 的交点. 解联立方程组

$$\begin{cases}x-y-1=0\\2x-7y+8=0\end{cases}$$

得

$$\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}$$

所以圆心坐标为 $C(3,2)$，又半径 $r=|CA|=\sqrt{13}$，则所求圆的方程是

$$(x-3)^2+(y-2)^2=13.$$

解法 2：设所求圆的方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. 由题意得

$$\begin{cases}(6-a)^2+(0-b)^2=r^2\\(1-a)^2+(5-b)^2=r^2\\2a-7b+8=0\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}a=3\\b=2\\r^2=13\end{cases}$$

所以所求圆的方程为

$$(x-3)^2+(y-2)^2=13.$$

注

赵州桥，位于河北省赵县，净跨 37.02 m，是世界上著名的单孔空腹式石拱桥，建于 595～605 年.

例 3 赵州桥的跨度是 37.02 m，圆拱高约为 7.2 m，求这座圆拱桥的拱圆方程（精确到 0.01 m）.

解：图 2-23 是拱桥的示意图. 以 AB 的中点为原点，x 轴通过 AB 建立直角坐标系.



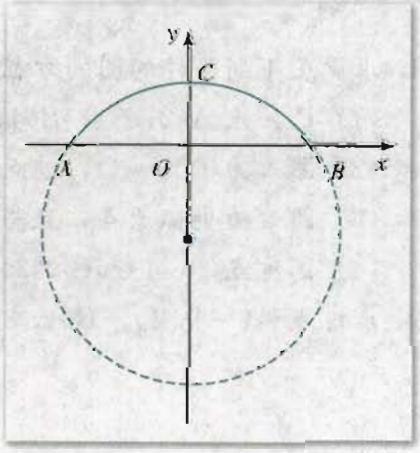


图 2-23

微信公众号：电子课本大全

根据已知条件，B，C 的坐标分别为(18.51，0)，(0，7.2)，设圆心的坐标为(0，b)，则圆的方程为

$$x^2+(y-b)^2=r^2.$$

下面用待定系数法求 b 和 r^2 的值.

因为 B，C 都在圆上，所以它们的坐标都满足这个方程，于是得到方程组

$$\begin{cases}18.51^2+b^2=r^2\\(7.2-b)^2=r^2\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}b\approx-20.19\\r^2\approx750.21\end{cases}$$

因此，圆拱桥的拱圆的方程近似为

$$x^2+(y+20.19)^2=750.21.$$

练习A

1. 求满足下列条件的圆的标准方程：

(1) 圆心为坐标原点，半径为 2；　(2) 圆心为点(0，1)，半径为 2；

(3) 圆心为点(−2，1)，半径为$\sqrt{3}$；　(4) 圆心为点(3，4)，且过坐标原点.

2. 判断点 $A(1，1)$，$B(1，\sqrt{3})$，$C(1，2)$与圆 $x^2+y^2=4$ 的位置关系.

3. 求出下列方程表示的圆的圆心和半径：

(1) $x^2+y^2=5$；　(2) $(x-3)^2+y^2=4$；

(3) $x^2+(y+1)^2=2$；　(4) $(x+2)^2+(y-1)^2=3$.

练习B

1. 求满足下列条件的圆的方程：

(1) 已知点 $A(2，3)$，$B(4，9)$，圆以线段 AB 为直径；

(2) 圆心为(0，−3)，过点(3，1)；

(3) 圆心为坐标原点，且与直线 $4x+2y-1=0$ 相切；

(4) 圆过点(0，1)和(0，3)，半径等于 1.

2. 求过点 $A(-1，1)$，$B(1，3)$且圆心在 x 轴上的圆的方程.

微信公众号：电子课本大全

2.3.2 圆的一般方程

把圆的标准方程

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

的左边展开，整理得

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0.$$

在这个方程中，如果令 $D=-2a$，$E=-2b$，$F=a^2+b^2-r^2$，则这个方程可以表示成

$$\boxed{x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.} \quad ①$$

其中 D，E，F 为常数.

这是一个二元二次方程. 如果方程①同一般的二元二次方程

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \quad ②$$

作比较，就会发现方程①具有两个特点：

(1) x^2 和 y^2 项的系数相等且不为 0；(x^2 和 y^2 项的系数如果为不是 1 的非零常数，只需在方程两边除以这个数，就可得到方程①的形式.)

(2) 没有 xy 这样的二次项.

因为所有圆的方程都可表示成①的形式，所以方程①的以上两个特点就成为二元二次方程表示圆的必须具备的条件. 利用这两个条件，我们可以判定哪些二元二次方程的曲线肯定不是圆. 例如，可以断定方程

$$x^2+2y^2-2x-3y+7=0 \text{ 和 } x^2+xy+y^2-3x-4y+5=0$$

所表示的曲线都不是圆. 这是因为在第一个方程中，x^2，y^2 的系数不相等；在第二个方程中，有 xy 项.

那么，具备这两个条件的二元二次方程是否一定表示圆呢?

我们将方程①左边配方，得

$$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4}. \quad ③$$

(1) 当 $D^2+E^2-4F>0$ 时，将方程③与圆的标准方程比较，可以看出方程①表示以 $\left(-\frac{D}{2},\ -\frac{E}{2}\right)$ 为圆心，$\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$ 为半径的圆；

(2) 当 $D^2+E^2-4F=0$ 时，方程③只有实数解 $x=-\frac{D}{2}$，$y=-\frac{E}{2}$，所以方程①表示一个点 $\left(-\frac{D}{2},\ -\frac{E}{2}\right)$；

(3) 当 $D^2+E^2-4F<0$ 时，方程③没有实数解，因而方程①不表示任何图形.

因此，只有当 $D^2+E^2-4F>0$ 时，二元二次方程

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

才表示一个圆，这时这个方程叫做圆的一般方程.

微信公众号：电子课本大全

圆的标准方程明确指出了圆的圆心和半径，而圆的一般方程表明了方程形式上的特点.

要给出圆的标准方程，需要确定圆心坐标和半径；而要给出圆的一般方程，则需要确定一般方程中的三个系数 D，E，F.

例 1 将下列圆的方程化为标准方程，并写出圆的圆心坐标和半径：

(1) $x^2+y^2+4x-6y-12=0$；

(2) $4x^2+4y^2-8x+4y-15=0$.

解：(1) 对方程左边配方，方程化为

$$(x+2)^2+(y-3)^2=25.$$

所以圆心的坐标为$(-2, 3)$，半径为 5.

(2) 方程两边除以 4，得

$$x^2+y^2-2x+y-\frac{15}{4}=0.$$

方程左边配方，得

$$(x-1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=5.$$

所以圆心的坐标为$\left(1, -\frac{1}{2}\right)$，半径为$\sqrt{5}$.

例 2 求过三点 $A(0, 5)$，$B(1, -2)$，$C(-3, -4)$的圆的方程.

解：设所求圆的方程为

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.$$

根据题设条件，用待定系数法确定 D，E，F. 因为点 A，B，C 在圆上，所以它们的坐标是方程的解，把它们的坐标依次代入上面的方程，整理得到关于 D，E，F 的三元一次方程组

$$\begin{cases}5E+F+25=0\\ D-2E+F+5=0\\ 3D+4E-F-25=0\end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases}D=6\\ E=-2\\ F=-15\end{cases}$$

于是得到所求圆的方程

$$x^2+y^2+6x-2y-15=0.$$

注：我们也可以设圆的方程为$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. 同样，根据已知条件可以列出三个未知数的方程组. 通过解方程组，求出 a，b，r.

例 3 已知一曲线是与两个定点 $O(0, 0)$，$A(3, 0)$距离的比为$\frac{1}{2}$的点的轨迹，求这个曲线的方程，并画出曲线.

解：在给定的坐标系中，设 $M(x, y)$是曲线上的任意一点，点 M 在曲线上的条件是

微信公众号：电子课本大全

$$\frac{|MO|}{|MA|}=\frac{1}{2}.$$

由两点之间的距离公式，上式用坐标表示为

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(x-3)^2+y^2}}=\frac{1}{2},$$

两边平方并化简，得曲线方程

$$x^2+y^2+2x-3=0,$$

将方程配方，得

$$(x+1)^2+y^2=4.$$

所以所求曲线是圆心为 $C(-1,\ 0)$，半径为 2 的圆(图 2-24).

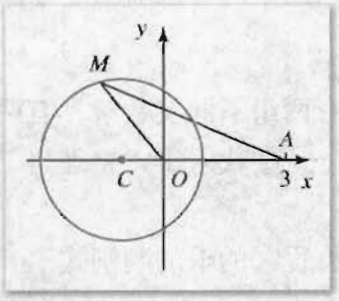


图 2-24

练习 A

1. 求出下列圆的圆心坐标和半径：

(1) $x^2+y^2-6x=0$；　(2) $x^2+y^2-4y-5=0$；

(3) $x^2+y^2-4x-6y+12=0$；　(4) $2x^2+2y^2-4x+8y+5=0$.

2. 判断下列方程表示什么图形：

(1) $x^2+y^2=0$；　(2) $x^2+y^2-2x+4y-6=0$；

(3) $x^2+y^2-2x-2y-3=0$；　(4) $x^2+y^2+2ax-b^2=0$.

练习 B

1. 求经过三点(0，0)，(3，2)，(−4，0)的圆的方程.

2. 求与两定点 $A(-1,\ 2)$，$B(3,\ 2)$的距离的比为$\sqrt{2}$的点的轨迹方程.

2.3.3 直线与圆的位置关系

在初中，我们已学过直线和圆的位置关系. 现在直线和圆都可以用方程来表示. 下面，我们通过具体的例子来学习如何用代数方法研究直线和圆的位置关系.

例 1　已知圆的方程是 $x^2+y^2=2$，直线方程是 $y=x+b$，当 b 为何值时，圆与直线有两个公共点？只有一个公共点？没有公共点？

解法 1：所求曲线公共点问题可转化为 b 为何值时，方程组

微信公众号：电子课本大全

$$\begin{cases} x^2+y^2=2 & ① \\ y=x+b & ② \end{cases}$$

有两组不同实数解；有两组相同实数解；无实数解的问题.

②代入①，整理得

$$2x^2+2bx+b^2-2=0, \quad ③$$

方程③的根的判别式

$$\begin{aligned} \Delta &=(2b)^2-4\times 2(b^2-2) \\ &=-4(b+2)(b-2). \end{aligned}$$

当$-2<b<2$时，$\Delta>0$，方程组有两组不同实数解，因此直线与圆有两个公共点；

当$b=2$或$b=-2$时，$\Delta=0$，方程组有两组相同的实数解，因此直线与圆只有一个公共点；

当$b<-2$或$b>2$时，$\Delta<0$，方程组没有实数解，因此直线与圆没有公共点.

以上就是直线与圆分别相交、相切、相离的三种情况(图2-25).

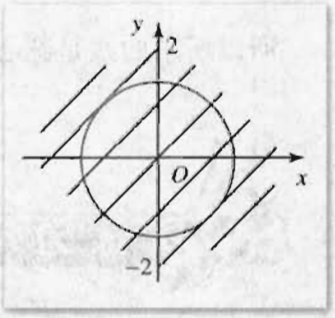


图 2-25

解法 2：圆与直线有两个公共点、只有一个公共点、无公共点的问题，可以转化为b取何值时圆心到直线的距离小于半径、等于半径、大于半径的问题.

圆的半径$r=\sqrt{2}$，圆心$O(0,0)$到直线$y=x+b$的距离为

$$d=\frac{|b|}{\sqrt{2}}.$$

当$d<r$，即$-2<b<2$时，圆与直线相交，有两个公共点；

当$d=r$，$|b|=2$，即$b=2$或$b=-2$时，圆与直线相切，直线与圆有一个公共点；

当$d>r$，$|b|>2$，即$b<-2$或$b>2$时，圆与直线相离，圆与直线无交点.

例 2 已知圆的方程是$x^2+y^2=r^2$，求过圆上一点$M(x_0, y_0)$的切线方程(图2-26).

解：如果$x_0\neq 0$且$y_0\neq 0$，则直线OM的方程为$y=\frac{y_0}{x_0}x$，从而过点M的圆的切线的斜率为$-\frac{x_0}{y_0}$，因此所求圆的切线方程为

$$y-y_0=-\frac{x_0}{y_0}(x-x_0),$$

化简，得

$$x_0x+y_0y=x_0^2+y_0^2.$$

因为点$M(x_0, y_0)$在圆上，所以

$$x_0^2+y_0^2=r^2.$$

所以，过圆$x^2+y^2=r^2$上一点(x_0, y_0)的圆的切线方程为

$$x_0x+y_0y=r^2.$$

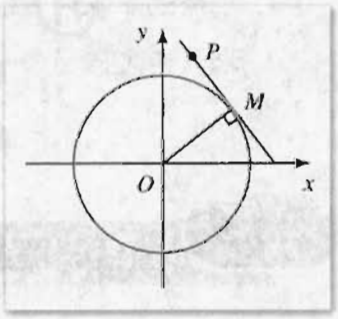


图 2-26

微信公众号：电子课本大全

如果 $x_0=0$ 或 $y_0=0$，我们容易验证，过点 $M(x_0, y_0)$ 的切线方程也可以表示为 $x_0x+y_0y=r^2$ 的形式. 因此，所求的切线方程为

$$x_0x+y_0y=r^2.$$

通过上面的例子可以看到，有关直线与圆之间的位置关系问题，可以应用坐标法转化为代数方程来求解.



练习A

1. 已知圆 $(x-1)^2+(y+2)^2=6$ 和直线 $2x+y-5=0$：
   (1) 求圆心到直线的距离 d；　　(2) 判断圆与直线的位置关系.
2. 圆 $x^2+y^2=13$ 与直线 $x-y-1=0$ 是否相交？如果相交，求出交点.
3. 判断下列圆与直线的位置关系：
   (1) 圆 $x^2+y^2-8x+2y-8=0$，直线 $4x-3y+6=0$；
   (2) 圆 $x^2+y^2-4x+3=0$，直线 $2x-y+5=0$.



练习B

1. C 为何值时，直线 $x-y-C=0$ 与圆 $x^2+y^2=4$ 有两个公共点？一个公共点？无公共点？
2. 写出过圆 $x^2+y^2=10$ 上一点 $M(2, \sqrt{6})$ 的切线方程.
3. 已知直线 $y=mx+4$ 与圆 $x^2+y^2=4$ 相切，求 m 的值和切线方程.
4. 求斜率为 2 且与圆 $x^2+y^2-2y-4=0$ 相切的直线方程.

2.3.4 圆与圆的位置关系

设 $\odot O_1$ 的半径为 r_1，$\odot O_2$ 的半径为 r_2，两圆的圆心距为 d.

在初中我们知道：

当 $|r_1-r_2|<d<r_1+r_2$ 时，两圆相交；

当 $r_1+r_2=d$ 时，两圆外切；当 $|r_1-r_2|=d$ 时，两圆内切；

当 $r_1+r_2<d$ 时，两圆外离；当 $|r_1-r_2|>d$ 时，两圆内含.

因此，只要由两圆的方程，求出两圆的半径和圆心的坐标，就可根据上面的结论判断两圆的位置关系. 下面我们举例说明.

微信公众号：电子课本大全

例 判断下列两个圆的位置关系.

(1) C_1：$x^2+y^2-2x-3=0$，C_2：$x^2+y^2-4x+2y+3=0$；

(2) C_1：$x^2+y^2-2y=0$，　C_2：$x^2+y^2-2\sqrt{3}x-6=0$.

解：(1) 已知两圆的方程可分别变形为

$$(x-1)^2+y^2=2^2,\quad (x-2)^2+(y+1)^2=(\sqrt{2})^2.$$

由此可知圆心 C_1 的坐标为(1，0)，半径 $r_1=2$；圆心 C_2 的坐标为(2，-1)，半径 $r_2=\sqrt{2}$.

设两圆的圆心距为 d，则

$$d=|C_1C_2|=\sqrt{(2-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2},$$

$$r_1+r_2=2+\sqrt{2},\ r_1-r_2=2-\sqrt{2}.$$

所以 $r_1-r_2<d<r_1+r_2$.

因此这两个圆相交.

(2) 已知两圆的方程可分别变形为

$$x^2+(y-1)^2=1^2,$$

$$(x-\sqrt{3})^2+y^2=3^2.$$

由此可知圆心 C_1 的坐标为(0，1)，半径 $r_1=1$；圆心 C_2 的坐标为($\sqrt{3}$，0)，半径 $r_2=3$，则两圆的圆心距

$$d=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2,$$

所以 $d=r_2-r_1$.

因此这两个圆内切.

下面让我们用坐标方法讨论两圆的位置关系，再次感受坐标方法在研究几何问题中的作用.

如图 2-27 所示，以 O_1 为坐标原点，使 x 轴通过 O_1，O_2，且 O_2 在 x 轴的正半轴上，建立直角坐标系 xOy.

这样，可设$\odot O_2$ 的圆心的坐标为(d，0). 这时两圆的圆心距等于 d，两圆的方程分别为

$$x^2+y^2=r_1^2,\qquad ①$$

$$(x-d)^2+y^2=r_2^2.\qquad ②$$

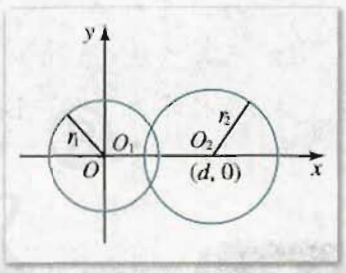


图 2-27

将①②两式联立，研究此方程组的解.

①－②，整理可得 $x=\dfrac{r_1^2-r_2^2+d^2}{2d}$.

将 x 值代入①，得

$$y^2=r_1^2-\frac{(r_1^2-r_2^2+d^2)^2}{4d^2}$$

$$=\frac{(2dr_1+r_1^2-r_2^2+d^2)(2dr_1-r_1^2+r_2^2-d^2)}{4d^2}$$

$$=\frac{[(r_1+d)^2-r_2^2][r_2^2-(r_1-d)^2]}{4d^2}$$

微信公众号：电子课本大全

$$=\frac{(r_1+r_2+d)(r_1-r_2+d)(r_1+r_2-d)(r_2-r_1+d)}{4d^2}$$

$$=\frac{[(r_1+r_2)^2-d^2][d^2-(r_1-r_2)^2]}{4d^2}.$$

由此可见，如果

$$|r_1-r_2|<d<r_1+r_2,$$

则等式右边两个因式都为正数，于是方程组有解，且有两解. 这时相应的两圆相交于两点(图 2-28(1)).

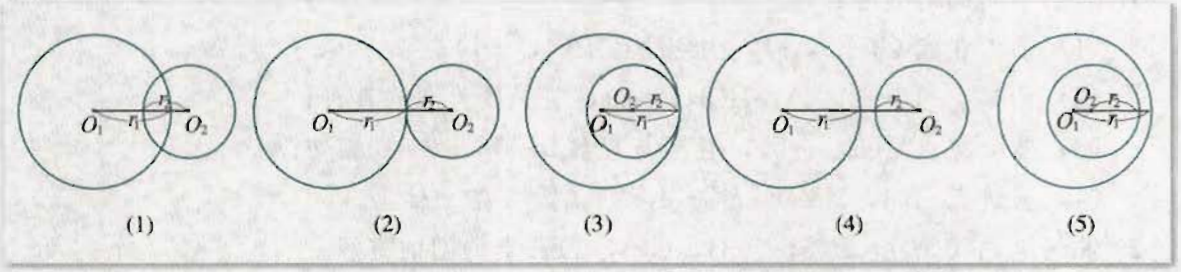


图 2-28

如果

$$r_1+r_2=d \quad 或 \quad |r_1-r_2|=d,$$

则等式右边分子的因式中至少有一个为 0，从而方程组有唯一解，这时两圆相切(外切或内切)(图 2-28(2)(3)).

如果

$$r_1+r_2<d \quad 或 \quad |r_1-r_2|>d,$$

则方程组无解，这时两圆不相交(相离或内含)(图 2-28(4)(5)).

练习A

1. 求两圆 $x^2+y^2-2x-3=0$ 和 $x^2+y^2-4x+2y+3=0$ 的交点的坐标.
2. 判断下列两圆的位置关系：
   (1) $x^2+y^2-4x-6y+9=0$ 和 $x^2+y^2+12x+6y-19=0$；
   (2) $x^2+y^2+2x-2y-2=0$ 和 $x^2+y^2-4x-6y-3=0$.

练习B

1. 两圆 $x^2+y^2=1$ 和 $(x+4)^2+(y-a)^2=25$ 相切，试确定常数 a 的值.
2. 求圆心坐标为(3，4)并与圆 $x^2+y^2=1$ 相外切的圆的方程.

微信公众号：电子课本大全

3. 试判断下列两圆的位置关系，如果有公共点，求出公共点的坐标：

(1) $x^2+y^2+6x-4=0$ 和 $x^2+y^2+6x-28=0$；

(2) $x^2+y^2-4x+6y=0$ 和 $x^2+y^2-2x+4y=0$.

习题 2-3 A

1. 求出下列圆的方程：

(1) 圆心在点 $C(-2, 1)$，且经过点 $P(4, -1)$；

(2) 已知点 $A(-2, 4)$，$B(8, -2)$，且 AB 为圆的直径；

(3) 圆心在点 $C(3, -5)$，且圆与直线 $x-7y+2=0$ 相切；

(4) 圆过点 $A(4, -2)$和 $B(-2, 2)$，圆心在 y 轴上.

2. 求经过 $A(6, 0)$，$B(5, -3)$，$C(3, 1)$三点的圆的方程.

3. 求过点 $A(1, 1)$，$B(-3, 5)$，且圆心在直线 $2x+y+2=0$ 上的圆的方程.

4. 判断直线 $4x-3y+6=0$ 与圆 $(x-4)^2+(y+1)^2=25$ 的位置关系.

5. 已知直线 $x+5y+C=0$ 与圆 $x^2+y^2=25$ 相切，求 C 的值.

6. 求过圆 $x^2+y^2=4$ 上一点$(-1, \sqrt{3})$的圆的切线方程.

7. 求下列方程表示的圆的圆心坐标和半径，并分别画出它们的图形：

(1) $x^2+y^2-2x-5=0$；　　(2) $x^2+y^2+2x-4y-4=0$；

(3) $x^2+y^2+4x=0$；　　(4) $x^2+y^2-5y+1=0$.

8. 已知

$$\odot C_1: x^2+y^2+2x+6y+6=0,$$

$$\odot C_2: x^2+y^2-4x-8y+7=0.$$

求两圆的圆心距.

9. 判断直线 $x-2y+1=0$ 与圆 $x^2+y^2-4x+3=0$ 的位置关系.

10. 已知一等腰三角形的顶点 $A(3, 20)$，一底角顶点 $B(3, 5)$，求另一底角顶点 $C(x, y)$的轨迹方程.

习题 2-3 B

1. 求过点(8, 1)且与两坐标轴都相切的圆的方程.（提示：考虑与两轴相切的圆的圆心坐标特点以及与半径的关系）

2. 求半径为 5，过点(1, 2)且与 x 轴相切的圆的方程.

3. 已知圆 $x^2+y^2=1$ 与直线 $y=kx-2$，问 k 为何值时，直线与圆相交、相切、相离？

4. 已知：圆的直径端点是 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，求证：圆的方程是

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0.$$

微信公众号：电子课本大全

5. 求通过圆$(x-3)^2+(y-4)^2=25$上的一点$A(6, 8)$的圆的切线方程.（提示：设圆心为C，则直线CA与所求的切线垂直）

6. 求点$P(0, 4)$到圆$x^2+y^2-4x-5=0$所引的切线长.

7. 求与直线$x+3y=10$垂直的圆$x^2+y^2=4$的切线方程.

8. 已知点$A(15, 0)$，点P是圆$x^2+y^2=9$上的动点，M为线段PA的中点，当点P在圆上运动时，求动点M的轨迹方程.

9. 设圆满足条件：(1) 截y轴所得的弦长为2；(2) 被x轴分成两段圆弧，其弧长的比为3∶1；(3) 圆心到直线l：$x-2y=0$的距离为$\frac{\sqrt{5}}{5}$. 求这个圆的方程.

10. 某一圆拱桥的一孔圆拱的跨度为20 m，拱高为4 m，在建造时每隔4 m需用一个支柱支撑，求每根支柱的长度(精确到0.01 m).



探索与研究

我们已掌握了圆的方程和如何用代数方法求解圆的一些问题. 下面我们再给出两个问题，让同学们自己探索研究，从中进一步体会如何用坐标方法解几何问题.

1. (1) 到两定点O，A距离的比为任意一个常数$k(k>0)$的动点M的轨迹方程是什么？从得到的方程你能说明轨迹是什么曲线吗？

(2) 如果上一问中所得到的轨迹与OA相交于P点，当k取不同的常数时，或M点位置变化时，分别度量$\angle OMP$和$\angle AMP$的大小，你猜想到什么结论？你能够证明自己的猜想吗？

2. 已知$\triangle ABC$的面积为S，外接圆的半径为R，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$的对边分别为a，b，c，用解析几何的方法证明：$R=\frac{abc}{4S}$.

提示：(1) 在$\triangle ABC$所在的平面内，建立适当的直角坐标系，使得$\triangle ABC$三个顶点的坐标的表示形式最简单，并设出表示它们坐标的字母；

(2) 用表示$\triangle ABC$三个顶点坐标的字母来表示$\triangle ABC$的外接圆半径、$\triangle ABC$的三边和面积；

(3) 根据上面得到的表达式，消去表示$\triangle ABC$三个顶点的坐标的字母，就可以得出用$\triangle ABC$的三边和面积表示$\triangle ABC$外接圆半径的式子.

微信公众号：电子课本大全

2.4 空间直角坐标系

2.4.1 空间直角坐标系

在数轴上，一个实数就能确定一点的位置；在坐标平面上，需要一对有序实数才能确定一点的位置. 为了确定空间任意点的位置，需要几个实数呢?

本章前言中曾说过，要确定一架飞机在空中的位置，我们不仅要指出地面上的经度和纬度，还需要指出飞机距离地面的高度. 这说明要确定空间一点的位置，需要三个实数.

为了确定空间点的位置，我们在平面直角坐标系 xOy 的基础上，通过原点 O，再作一条数轴 z，使它与 x 轴，y 轴都垂直(图 2-29)，这样它们中的任意两条都互相垂直；轴的方向通常这样选择：从 z 轴的正方向看，x 轴的正半轴沿逆时针方向转 $90°$ 能与 y 轴的正半轴重合. 这时，我们说在空间建立了一个**空间直角坐标系** $Oxyz$，O 叫做**坐标原点**.

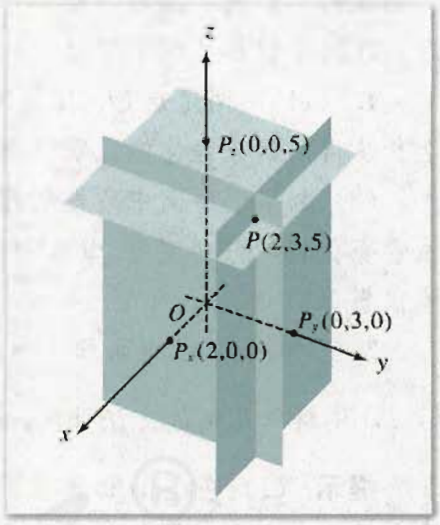


图 2-29

有了空间直角坐标系，我们就能够建立空间内的任意一点 P 与三个实数的有序数组(x, y, z)之间的一一对应关系. 其对应法则如下：

如图 2-29 所示，过点 P 作一个平面垂直于 x 轴(这样构造的平面与平面 yOz 平行或重合)，这个平面与 x 轴的交点记为 P_x，它在 x 轴上的坐标为 x(图中为 2)，这个数 x 就叫做**点 P 的 x 坐标**.

过点 P 作一个平面垂直于 y 轴，这个平面与 y 轴的交点记为 P_y，它在 y 轴上的坐标为 y(图中为 3)，这个数 y 就叫做**点 P 的 y 坐标**.

过点 P 作一个平面垂直于 z 轴，这个平面与 z 轴的交点记为 P_z，它在 z 轴上的坐标为 z(图中为 5)，这个数 z 就叫做**点 P 的 z 坐标**.

这样，我们对空间中的一个点，定义了三个实数的有序数组作为它的坐标，记作 $P(x, y, z)$(图中为 $P(2, 3, 5)$). 其中 x，y，z 也可称为点 P 的坐标分量.

反之，任意给定三个实数的有序数组(x, y, z)，就能够确定空间一个点的位置与之

微信公众号：电子课本大全

对应. 为此，按照刚才作图的相反顺序，在坐标轴上分别作出点 P_x，P_y，P_z，使它们在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标分别是 x，y，z. 再分别通过这些点作平面垂直于 x 轴、y 轴、z 轴，这三个平面的交点，就是所求的点 P.

这样，在空间任意一点与三个实数的有序数组(点的坐标)之间，我们就建立起一一对应关系

$$P \longleftrightarrow (x, y, z)$$

每两条坐标轴分别确定的平面 yOz，xOz，xOy，叫做坐标平面.

容易看出：

xOy 平面(通过 x 轴和 y 轴的平面)是坐标形如$(x, y, 0)$的点构成的点集，其中 x，y 为任意的实数；

xOz 平面(通过 x 轴和 z 轴的平面)是坐标形如$(x, 0, z)$的点构成的点集，其中 x，z 为任意的实数；

yOz 平面(通过 y 轴和 z 轴的平面)是坐标形如$(0, y, z)$的点构成的点集，其中 y，z 为任意的数；

x 轴是坐标形如$(x, 0, 0)$的点构成的点集，其中 x 为任意实数；

y 轴是坐标形如$(0, y, 0)$的点构成的点集，其中 y 为任意实数；

z 轴是坐标形如$(0, 0, z)$的点构成的点集，其中 z 为任意实数.

通过点 P 作平行于坐标平面的平面与坐标轴的交点 P_x，P_y，P_z，其过程也就是作点 P 在坐标轴上的投影. 即，从点 P 向坐标轴引垂线，它们的垂足分别为 P_x，P_y，P_z.

所以点 P 的空间坐标为点 P 在坐标轴上的投影在这些坐标轴上的坐标.

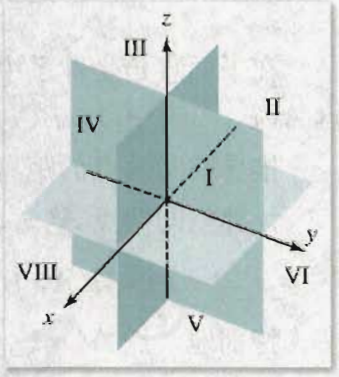


图 2-30

三个坐标平面把空间分为八部分，每一部分都称为一个卦限. 在坐标平面 xOy 上方，与该坐标平面上四个象限分别对应的卦限，称为第Ⅰ、第Ⅱ、第Ⅲ、第Ⅳ卦限；在下方的卦限称为第Ⅴ、第Ⅵ、第Ⅶ、第Ⅷ卦限(图 2-30).

在每个卦限内，点的坐标各分量的符号是不变的. 例如在第Ⅰ卦限，三个坐标分量 x，y，z 都为正数；在第Ⅱ卦限，x 为负数，y，z 都为正数……

练习A

1. 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，作出下列 8 个点：

$(1, 1, 1)$，　$(1, 1, -1)$，　$(1, -1, 1)$，　$(1, -1, -1)$，

$(-1, 1, 1)$，　$(-1, 1, -1)$，　$(-1, -1, 1)$，　$(-1, -1, -1)$.

2. 画一个正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$，使坐标轴的方向分别是射线 AB，AD，AA_1

微信公众号：电子课本大全

的方向，以棱 AB，AD，AA_1 所在的直线为坐标轴，取正方体的棱长作为单位长度，建立空间直角坐标系：

(1) 求这个正方体顶点的坐标；

(2) 求棱 CC_1 中点的坐标；

(3) 求面 AA_1B_1B 对角线交点的坐标.



练习B

1. 分别求点(2，3，4)关于各个坐标平面、坐标轴和原点的对称点的坐标.
2. 设 z 为任意实数，相应的所有点 $P(1，2，z)$ 的集合是什么图形?
3. 已知一长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的对称中心在坐标原点 O，交于同一顶点的三个面分别平行于三个坐标平面，顶点 $A(-2，-3，-1)$. 求其他 7 个顶点的坐标.

2.4.2 空间两点的距离公式

在平面直角坐标系中，已知两点的坐标，我们会求它们的距离. 你会推出计算空间两点 $A(x_1，y_1，z_1)$，$B(x_2，y_2，z_2)$ 距离的公式吗?

推导空间两点的距离公式与推导平面上两点的距离公式类似.

计算空间两点 $A(x_1，y_1，z_1)$，$B(x_2，y_2，z_2)$ 的距离公式是

$$d(A，B)=|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

特别地，点 $A(x，y，z)$ 到原点 O 的距离公式为

$$d(O，A)=|OA|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

推导空间两点距离公式的思路是：

过两点分别作三个坐标面的平行平面(图 2-31)，则这六个平面围成一个长方体. 我们知道，长方体的对角线长的平方等于一个顶点上三条棱长的平方和. 于是，只要写出交一个顶点的三条棱的棱长用坐标计算的表达式，就能导出两点的距离公式.

你还可以作线段 AB 在三个坐标平面上的正投影，把空间问题转化为平面问题加以解决(图 2-31).

微信公众号：电子课本大全

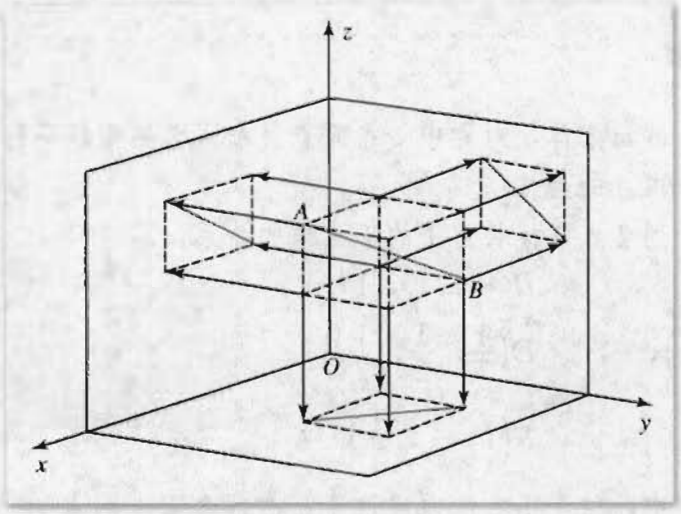


图 2-31

练习A

1. 求坐标原点 (0, 0, 0) 与以下各点的距离：
(1, 1, 1), (1, 2, 2), (2, −3, 5), (3, 0, 4), (−3, −2, −3).
2. 求以下两点间的距离：
(1) $A(1, 0, 1)$, $B(1, 1, 1)$； (2) $C(-3, 1, 5)$, $D(0, 2, 3)$.
3. 已知 $A(1, -2, 1)$, $B(2, 2, 2)$, 点 P 在 z 轴上, 且 $|PA|=|PB|$, 求点 P 的坐标.

练习B

1. 求以下两点间的距离：
(1) (4, 5, 6), (−7, 3, 11)；
(2) (1, 2, 2), (4, 6, 14)；
(3) $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$；
(4) $\left(\frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}\right)$, $\left(\frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \frac{3}{10}\right)$.
2. 已知点 A 与坐标原点的距离等于 3, 并且它的坐标分量都相等, 求该点的坐标.
3. 已知正方体的每条棱都平行于坐标轴, 有两个顶点为 $A(-1, -1, -1)$, $B(3, 3, 3)$, 且 A, B 不在同一面上, 求 A, B 间的距离和正方体的棱长.

微信公众号：电子课本大全

习题 2-4 A

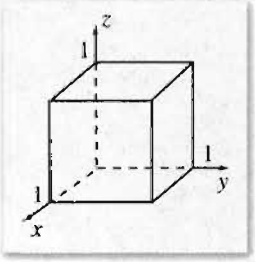
1. 一个棱长为 1 的正方体，对称中心在原点且每一个平面都平行于坐标平面，写出这个正方体 8 个顶点的坐标.

2. 如图，判断下列各点与棱长为 1 的正方体的关系：

$A(1, 0, 1)$，　　$B(-1, 0, 1)$，

$C\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}\right)$，　　$D\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$，

$E\left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{2}, 0\right)$，　　$F\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$.



（第 2 题）

3. 写出在第 1 题中，位于正方体内或位于正方体各面上的点的坐标应满足的条件.

4. 已知长方体的三条棱 AB，AC，AD 端点的坐标分别为 $A(1, 2, 1)$，$B(1, 5, 1)$，$C(1, 2, 7)$，$D(3, 2, 1)$，求这个长方体的长、宽、高和对角线的长.

习题 2-4 B

1. 点 $P(x, y, z)$ 的坐标满足方程 $x^2+y^2+z^2=1$，点 P 位于何处？

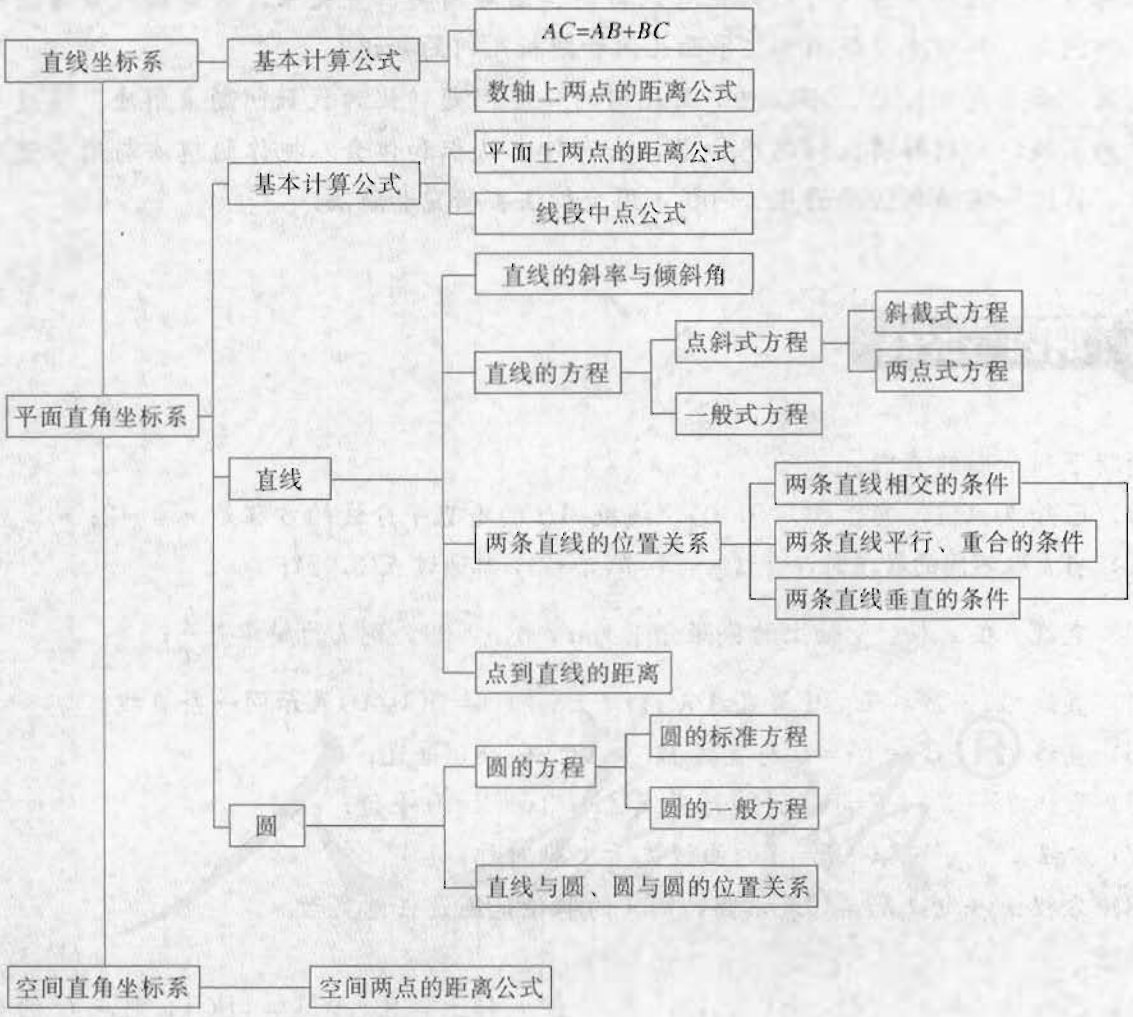
2. 求到两定点 $A(2, 3, 0)$，$B(5, 1, 0)$ 距离相等的点的坐标 (x, y, z) 满足的条件.

3. 在坐标平面 xOy 上求一点 P，使点 P 到点 $A(3, 2, 5)$，$B(3, 5, 1)$ 的距离相等.

微信公众号：电子课本大全

本章小结

Ⅰ 知识结构



Ⅱ 思考与交流

1. 在直线坐标系、平面直角坐标系、空间直角坐标系中，两点距离公式的表达形式有共同的特征. 请对它们的共同特征及其内在联系进行分析.

微信公众号：电子课本大全

2. 直线的斜率 k 是反映直线关于 x 轴倾斜程度的特征数量，而一次函数 $y=kx+b$ 中的 k，它的符号决定这个函数的增减性. 把两者联系起来，你对一次函数中 k 的意义有什么进一步的认识?

3. 直线的方程有点斜式、斜截式、两点式、一般式等不同的形式. 它们之间有什么联系? 是不是任意直线都可以用这几种形式的方程来表示?

4. 圆的方程有标准形式和一般形式. 圆的标准方程和一般方程各有什么优点? 把圆的一般方程化为标准方程时运用什么数学方法?

5. 根据两条直线的方程可以讨论它们的位置关系，这就是用代数方法研究几何问题. 把讨论得到的有关结论整理在一个表格中，再观察和比较这些结论中涉及的两直线方程的有关系数，把你总结的规律与同学交流.

6. 根据直线、圆的方程，可以讨论直线与圆、圆与圆的位置关系，这是用代数方法研究几何问题. 其中主要运用哪些平面几何和解析几何的知识?

7. 利用平面直角坐标系，可以把平面几何的一些问题转化为代数问题来解决. 通过这方面的实践，你对解析几何思想和坐标法有什么认识和体会? 把你的想法与同学进行交流，再选一道简单的平面几何问题，用坐标法去研究和解决.

III 巩固与提高

1. 判断下列命题的真假:

(1) 已知点 $A(1, 0)$，$B(-5, 0)$，线段 AB 的垂直平分线的方程是 $x=-2$;

(2) 当 k 取不同的数值时，直线 $y-3=k(x-2)$，都通过点 $(3, 2)$;

(3) 直线 l 在 x 轴、y 轴上的截距分别为 a，$b(a\neq 0)$，则 l 的斜率是 $\frac{b}{a}$;

(4) 直线 $Ax+By+C=0$ 与直线 $\lambda(Ax+By+C)=0(\lambda\neq 0)$ 表示同一条直线;

(5) 直线 $Ax+By+C_1=0$ 与直线 $Bx-Ay+C_2=0$ 垂直;

(6) 直线 $2x+3y+k=0(k\neq 2)$ 与直线 $2x+3y+2=0$ 平行;

(7) 方程 $x^2+y^2-4y-5=0$ 的曲线关于 y 轴对称;

(8) 方程 $x^2+y^2+\lambda x=0$ 表示圆，则 λ 的取值范围是任意实数.

2. 填空:

(1) 已知点 $A(-1, 2)$，$B(0, 4)$，点 C 在 x 轴上，且 $|AC|=|BC|$，则点 C 的坐标为_____;

(2) 通过点 $(3, 5)$，$(-1, 4)$ 的直线方程为_____;

(3) 通过点 $P(-1, 1)$，且与直线 $2x-3y+1=0$ 平行的直线方程为_____;

(4) 直线 $ax+3y+1=0$ 与直线 $x+(a-2)y+a=0$ 垂直，则 $a=$_____;

(5) 过点 $P(2, 3)$，且垂直于直线 $x-y+1=0$ 的直线方程为_____;

(6) 直线 $2x-y+C=0$ 与直线 $2x-y+2=0$ 的距离为 $\sqrt{5}$，则 $C=$_____;

微信公众号：电子课本大全

(7) 点(1，−2)关于直线 $2x-y+1=0$ 的对称点的坐标为_____；

(8) 直线 $2x-3y+5=0$ 关于 x 轴对称的方程为_____；

(9) 直线 $x+\sqrt{3}y-3=0$ 与两坐标轴围成的面积为_____.

3. 已知点 $A(1，4)$，$B(3，1)$，直线 l：$y=ax+2$ 与线段 AB 相交于点 P，求 l 的斜率的取值范围.

4. 已知两条直线 $ax-2y-1=0$ 和 $6x-4y-b=0$，试问 a，b 取什么值时这两条直线：

(1) 有一个公共点？　　(2) 平行？　　(3) 重合？

5. 求下列点到直线的距离：

(1) (3，−5)，$y=3x+5$；　　(2) (−3，−1)，$y=5x-8$；

(3) (−3，2)，$y=-\frac{4}{3}x-7$；　　(4) (0，−5)，$y=8$.

6. 已知点 $A(0，1)$，$B(5，-2)$，$C(3，5)$. 求点 A 到直线 BC 的距离和△ABC 的面积.

7. 从原点向直线 $3x-2y+7=0$ 作垂线，求垂足的坐标.

8. 填空：

(1) 圆 $x^2+y^2+2x-4y+4=0$ 的圆心坐标为_____；

(2) 已知 $A(1，-2)$，$B(-3，6)$，则以 AB 为直径的圆的方程是_____；

(3) 过点(−2，−1)和(4，3)，圆心在 y 轴上的圆的方程为_____；

(4) 圆心为 $C(-1，1)$，过直线 $x+3y+7=0$ 和直线 $3x-2y-12=0$ 的交点的圆的方程是_____；

(5) 直线 $2x-y+C=0$ 与圆 $x^2+y^2=9$ 相切，则 C=_____；

(6) 直线 $2x-3y-1=0$ 与圆 $x^2+y^2-4x+6y+4=0$ 的位置关系是_____；

(7) 与直线 $x+3y-10=0$ 垂直，并且与圆 $x^2+y^2=4$ 相切的直线方程为_____；

(8) 已知⊙C：$x^2+y^2-2x+4y-5=0$，AB 是圆的一条直径，点 $A(0，1)$，则点 B 的坐标为_____.

9. 已知圆的半径为 3，圆心在直线 $x-y=0$ 上，并通过点(5，2)，求该圆的方程.

10. 已知⊙O：$x^2+y^2=50$ 与直线 l：$x-2y-5=0$ 相交于 A，B 两点，求：

(1) A，B 的坐标；　　(2) △ABO 的面积.

11. 如果直线 $2x-y+1=0$ 截圆 $x^2+y^2=r^2$ 的弦长等于 5，求圆的半径 r.

12. 直线 $3x-4y-5=0$ 与⊙C：$(x-2)^2+(y-1)^2=25$ 相交于 A，B 两点，求△ABC 的面积.

13. 求证：四点 $A(0，1)$，$B(2，1)$，$C(3，4)$，$D(-1，2)$ 共圆.

14. 已知一条直线经过点 $P(2，1)$，且与圆 $x^2+y^2=10$ 相交，截得的弦长为 $2\sqrt{5}$，求这条直线的方程.

15. 已知直角坐标平面上点 $A(-2，3)$和圆 C：$(x-3)^2+(y-2)^2=1$. 一条光线从点 A 射出经 x 轴反射后与圆 C 相切，求反射后的光线方程.

16. $A(5，-5，-6)$，$B(10，8，5)$两点的距离等于_____.

17. 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，$x=1$ 的所有点构成的图形是_____.

微信公众号：电子课本大全

18. 已知空间直角坐标系 $Oxyz$ 中的点 $A(1, 1, 1)$，平面 α 过点 A 并且与直线 OA 垂直，动点 $P(x, y, z)$ 是平面 α 内的任意一点，求点 P 的坐标满足的条件.

Ⅳ 自测与评估

1. 填空：
   (1) 经过点 $(3, -5)$，且平行于直线 $y=x+3$ 的直线方程为 _____；
   (2) 经过点 $(2, 1)$，且垂直于直线 $y=-x+5$ 的直线方程为 _____.
2. 已知一条光线从点 $P(6, 4)$ 射出，与 x 轴相交于点 $(2, 0)$，遇到 x 轴反射，求入射光线和反射光线的方程.
3. 求经过点 $A(-2, -1)$，$B(6, -5)$，且圆心在直线 $x+y-2=0$ 上的圆的方程.
4. 求直线 $x-y+2=0$ 与 $x^2+y^2=25$ 的两个交点的坐标与它们之间的距离.
5. 从圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 外一点 $P(2, 3)$ 引这个圆的切线，求此切线的方程.
6. 已知直角坐标平面上点 $Q(2, 0)$ 和圆 C：$x^2+y^2=1$. 动点 M 到圆的切线长与 $|MQ|$ 的比值分别为 1 或 2 时，分别求出点 M 的轨迹方程.



计算机上的练习

1. 用 Scilab 语言研究，当 r 变化时，圆 $x^2+y^2=r^2$ 与直线 $x-y-5=0$ 的位置关系.
2. 在计算机上根据圆的方程用描点法画圆.

微信公众号：电子课本大全



笛 卡 儿

笛卡儿（1596—1650）是法国伟大的数学家、哲学家和物理学家. 1596 年 3 月 31 日出生于法国都兰的贵族家庭，自幼丧母，体弱多病. 8 岁入拉弗来什公学读书. 教师考虑他的特殊情况，允许他每天早上可以晚起床多休息. 但笛卡儿利用这段时间进行晨读，并养成了善于思考的习惯. 传说笛卡儿躺在床上观察虫子在天花板上爬行的位置，激发了灵感，使他产生了坐标的概念.

笛卡儿博览群书，曾自述："别人学的，我都学了. 我并不以此为满足，那些认为最奇怪，最不寻常的有关各种学科的书，凡是我能搞到的，我都要把它们读完." 他有好的思考习惯，每当读书时，总是把书拿来先弄清作者的主要意图，读完开头的部分就细细品味，并力求得出后面的结论.

1612 年他入普瓦界大学攻读法学，四年后获博士学位，后去巴黎当律师. 1618 年参军，部队到荷兰南部的小城市布勒达时，一次巧遇街头小报上征解数学难题，笛卡儿成功应解，这使他对数学发生兴趣，并坚定了他终生研究数学的决心. 1619 年 11 月部队到达多瑙河上的一个小村镇时，他不断地思考数学、哲学上的新方法——怎样把代数应用到几何中去. 他曾说："我想去寻求一种新的，包含这两门学科的好处，而又没有它们缺点的方法." 他致力于研究数学中这一完全崭新的领域，这个领域后来被牛顿称之为解析几何.

1621 年他退伍去荷兰、瑞士、意大利旅行. 1625 年返回巴黎. 1628 年定居荷兰进行研究和写作. 这时他研究哥白尼学说，1634 年写成《论世界》一书. 1637 年出版了简称为《方法论》的哲学巨著. 1644 年笛卡儿出版了《哲学原理》、1646 年出版了《论心灵的各种感情》等重要著作. 同年冬，笛卡儿应瑞典女王克利斯蒂娜的邀请移居斯德哥尔摩为女王讲授哲学课，后因患感冒得肺炎，于 1650 年 2 月 11 日去世.

笛卡儿研究的解析几何，使用的是坐标法. 这种方法是在平面上建立点的坐标 (x, y)，用坐标 (x, y) 表示点的位置. 于是一条曲线就可用两个变数的代数方程来表示. 这样，笛卡儿把一个几何问题通过坐标归结为代数方程式，用代数方法研究方程的性质，然后再翻译成几何语言，得出图形的几何性质. 笛卡儿用这种方法研究了含有两个变数的二次方程，指出根据方程的次数可将曲线分类，并得出一般二次方程可分别表示椭圆、双曲线、抛物线等曲线的结论.

坐标法使代数学和几何学结合起来，开创了数学发展的一个崭新时代. 恩格斯说："数学中的转折点是笛卡儿的变数，有了变数，运动进入了数学；有了变数，辩证法进入了数学；有了变数，微分和积分也就立刻成为必要的了." 这段话准确地评价了坐标法的历史功绩.

微信公众号：电子课本大全

附 录

部分中英文词汇对照表

直线	straight line
平面	plane
几何体	geometric solid
平面图形	plane figure
立体图形	solid figure
相交直线	intersecting lines
平行直线	parallel lines
垂线	perpendicular line
垂足	foot of a perpendicular
多面体	polyhedron
凸多面体	convex polyhedron
四面体	tetrahedron
六面体	hexahedron
棱柱	prism
侧棱	lateral edge
斜棱柱	oblique prism
直棱柱	right prism
平行六面体	parallelepiped
长方体	rectangular parallelepiped
正方体	cube
棱锥	pyramid
棱台	frustum of a pyramid
圆柱	cylinder
圆锥	circular cone
圆台	frustum
球	solid sphere
球心	center of a solid sphere
球面	sphere
平行投影	parallel projection
直观图	intuitionistic figure

微信公众号：电子课本大全

斜二侧画法	oblique axonometry
中心投影	central projection
三视图	three views
俯视图	top view
主视图	front view
左视图	left view
向量	vector
斜率	gradient
倾斜角	angle of inclination
点斜式	point slope form
截距	intercept
斜截式	gradient intercept form
两点式	two-point form
一般式	general form
标准方程	standard equation
一般方程	general equation

微信公众号：电子课本大全

后 记

根据教育部制订的普通高中各学科课程标准（实验），人民教育出版社课程教材研究所编写的各学科普通高中课程标准实验教科书，得到了诸多教育界前辈和各学科专家学者的热情帮助和大力支持. 在各学科教科书终于同课程改革实验区的师生见面时，我们特别感谢担任教科书总顾问的丁石孙、许嘉璐、叶至善、顾明远、吕型伟、王梓坤、梁衡、金冲及、白春礼、陶西平同志，感谢担任教科书编写指导委员会主任委员的柳斌同志和编写指导委员会委员的江蓝生、李吉林、杨焕明、顾泠沅、袁行霈等同志.

本套高中数学实验教科书（B版）的总指导为丁尔陞教授. 从教材立项、编写、送审到进入实验区实验的过程中，在丁尔陞、孙瑞清、江守礼、房艮孙、王殿军等专家教授的指导下，经过实验研究组全体成员的努力，基本上完成了“课标”中各模块的编写任务，并通过了教育部的审查.

山东、辽宁等实验区的教研员和教师在实验过程中，对教材编写的指导思想、教材内容的科学性、基础性、选择性以及是否易教、易学等诸方面，进行了审视和检验，提出了许多的宝贵意见，并针对教材和教学写出了大量的论文. 我们在总结实验的基础上，逐年对教材进行认真的修改，使教材不断地完善. 现在所取得的成果，是实验研究组全体成员、编者，实验区的省、市、县各级教学研究员及广大数学教师集体智慧的结晶.

各实验区参加教材审读、研讨及修改的主要成员有：

韩际清、常传洪、尹玉柱、秦玉波、祝广文、尚凡青、杨长智、田明泉、邵丽云、于世章、李明照、胡廷国、张颉、张成钢、李学生、朱强、窦同明、姜传祯、韩淑勤、王宗武、黄武昌.

刘莉、宋明新、高锦、赵文莲、王孝宇、周善富、胡文亮、孙家逊、舒凤杰、齐力、林文波、教丽、刘鑫、李凤、金盈、潘戈、高钧、魏明智、刘波、崔贺、李忠、关玲、郝军、郭艳霞、董晖、赵光千、王晓声、王文、姚琳.

在此，特向参与、帮助、支持这套教科书编写的专家、学者和教师深表谢意.

我们还要感谢实验区的教育行政和教研部门，以及使用本套教材的学校领导和师生们.

让我们与一切关心这套教材建设的朋友们，共同携起手来，为建设一套具有中国特色的高中数学教材而努力.

我们的联系方式如下：

电话：010-58758523　010-58758532

电子邮件：longzw@pep.com.cn

人民教育出版社　课程教材研究所

中学数学教材实验研究组

微信公众号：电子课本大全