教辅资料站

电子教辅　试卷练习
知识总结　备课资源

扫码关注获取更多学习资料

荣德基 主编

典中点®

综合应用创新题 典中点

按课时编写



九年级数学 上

（R版）

按80:1配赠教师用书

登录荣德基官方网站
免费下载课件资源



典中点·不简单　你·不平凡

- 方法技巧45招
- 典型易错题37道
- 培优拔尖题65道
- 高频考点14个

典中点微课堂 扫一扫

全书微课精彩呈现
创新题目 快速方法

陕西新华出版传媒集团
陕西人民教育出版社

综合应用创新题 典中点 九年级数学 上 荣德基 主编 陕西新华出版传媒集团 陕西人民教育出版社

练透方法 练出高分

本书方法规律索引

方法规律

频次	方法名称	首次页码
	思想方法	
3	整体思想	6
6	分类讨论思想	8
2	转化思想	25
1	建模思想	35
3	数形结合思想	60
3	方程思想	60
1	从特殊到一般的思想	113
	解题方法	
1	判别一元二次方程的两种方法	1
1	夹逼法	2
1	用直接开平方法解一元二次方程的“三步法”	4
1	配方法	6
5	换元法	6
1	用公式法解一元二次方程的四个步骤	9
1	用因式分解法解一元二次方程的步骤	10
1	类比法	11
1	一元二次方程的九种解法	14
2	构造法	15
1	特殊值法	15
1	解二次函数 $y=ax^2$ 应用问题的三个步骤	28
1	抛物线 $y=ax^2$ 平移得到抛物线 $y=a(x-h)^2+k$ 的方法“八字诀”	34
1	利用二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象信息判断各项系数的符号的方法	36
1	用待定系数法求二次函数解析式，选择解析式类型的方法	38
1	判断抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴交点的个数的方法	43
1	利用图象求一元二次方程的根的方法	45
1	用旋转的性质证明线段或角相等的两种主要方法	63
1	判断中心对称的两个方法	65
1	判断中心对称图形的两个方法	67
1	对称点的坐标的特征	69
1	旋转在解几何题中的十种常见技巧	73
1	旋转法	77
1	对称法	77
1	同一圆中证明两弦相等的四种方法	82
1	构造圆的基本性质的基本图形的六种常用作辅助线的技巧	90
1	证明直线与圆相切的三种途径	95
1	证明圆的切线的常用方法	99
1	两类弓形面积的求法	103
2	割补法	104
1	替换法	104
1	作差法	107
1	等积法	107
1	平移法	108
1	应用 $P(A)=\frac{m}{n}$ 求简单事件的概率的步骤	114
2	枚举法	116
3	列表法	116
2	树状图法	118

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

荣德基 主编

综合应用创新题 典中点

本册主编：程小恒　周淑霞



九年级数学 上

（R版）

陕西新华出版传媒集团
陕西人民教育出版社
·西安·

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



极速提分17招

书山有路 · 训练有法

思想 方法 技巧 应用

四类绝招速解百题，招招见效助拿高分

第 1 招　一元二次方程的六种解法
第 2 招　配方法的六种常见应用
第 3 招　根的判别式的八种常见应用
第 4 招　一元二次方程中常见易错易混问题归类
第 5 招　降次思想在整式和解方程中的应用
第 6 招　根与系数的关系的十一种应用
第 7 招　二次函数的图象与系数的七种关系
第 8 招　求二次函数解析式的九种方法
第 9 招　二次函数的五种解题技巧
第10招　旋转问题中作辅助线的技巧
第11招　巧用圆的基本性质解圆的五种关系
第12招　巧用勾股定理解决圆的直径问题
第13招　与圆的切线有关的计算与证明的常见类型
第14招　求阴影部分面积的技巧
第15招　求概率的四种方法
第16招　概率的应用类型
第17招　统计概率思想在实际中的应用



提分一定有方法！

内容及详解请见夹册《极速提分法》

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

目录 CONTENTS

第二十一章 一元二次方程

21.1 一元二次方程

第 1 课时 认识一元二次方程 …… 1

第 2 课时 **一元二次方程的定义及相关概念的五种常见应用** …… 3

21.2 解一元二次方程

第 1 课时 直接开平方法解方程 …… 4

第 2 课时 配方法解方程 …… 5

第 3 课时 一元二次方程根的判别式 …… 7

第 4 课时 公式法解方程 …… 9

第 5 课时 因式分解法解方程 …… 10

* 第 6 课时 一元二次方程的根与系数的关系 …… 12

阶段核心方法

一元二次方程的九种解法 …… 14

21.3 实际问题与一元二次方程

第 1 课时 列一元二次方程解实际应用问题 …… 16

第 2 课时 列一元二次方程解百分率问题 … 18

第 3 课时 列一元二次方程解几何面积问题 …… 19

阶段核心应用

一元二次方程解实际问题的十种常见应用 … 20

全章热门考点整合应用 …… 23

第二十二章 二次函数

22.1 二次函数的图象和性质

第 1 课时 二次函数 …… 26

第 2 课时 二次函数 $y=ax^2$ 的图象和性质 … 28

第 3 课时 二次函数 $y=ax^2+k$ 的图象和性质 …… 30

第 4 课时 二次函数 $y=a(x-h)^2$ 的图象和性质 …… 32

第 5 课时 二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象和性质 …… 34

第 6 课时 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象和性质 …… 36

* 第 7 课时 用待定系数法求二次函数解析式 …… 38

阶段核心归类

二次函数的图象和性质的九种常见类型 …… 40

22.2 二次函数与一元二次方程

第 1 课时 二次函数与一元二次方程之间的关系 …… 43

第 2 课时 利用函数的图象解一元二次方程 …… 45

第 3 课时 **二次函数图象信息题的四种常见类型** …… 47

22.3 实际问题与二次函数

第 1 课时 利用二次函数求几何图形面积的最值问题 …… 48

第 2 课时 利用二次函数求实际中最值问题 …… 50

第 3 课时 利用建立坐标系解“抛物线”型问题 …… 52

阶段核心归类

用二次函数解实际应用问题的六种常见类型 …… 54

全章热门考点整合应用 …… 57

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

目 录 CONTENTS

第二十三章 旋 转

23.1 图形的旋转

第1课时 图形的旋转及性质 …… 61

第2课时 旋转的性质在证明线段(角)关系中的应用 …… 63

第3课时 旋转作图 …… 64

23.2 中心对称

第1课时 中心对称 …… 65

第2课时 中心对称图形 …… 67

第3课时 关于原点对称的点的坐标 …… 69

第4课时 图形变换的四种作图 …… 70

23.3 课题学习 图案设计 …… 71

阶段核心技巧

旋转在解几何题中的十种常见技巧 …… 73

全章热门考点整合应用 …… 76

第二十四章 圆

24.1 圆的有关性质

第1课时 圆 …… 78

第2课时 垂直于弦的直径 …… 80

第3课时 弧、弦、圆心角 …… 82

第4课时 圆周角和圆心角、弧的关系 …… 84

第5课时 圆周角和直径的关系 …… 86

第6课时 圆内接四边形 …… 88

阶段核心技巧

构造圆的基本性质的基本图形的六种常用作辅助线的技巧 …… 90

24.2 点和圆、直线和圆的位置关系

第1课时 点和圆的位置关系 …… 91

第2课时 直线和圆的位置关系——相交、相切、相离 …… 93

第3课时 直线和圆的位置关系——切线的判定和性质 …… 95

第4课时 直线和圆的位置关系——切线长和三角形的内切圆 … 97

阶段核心方法

证明圆的切线的常用方法 …… 99

24.3 正多边形和圆 …… 101

24.4 弧长和扇形面积

第1课时 弧长和扇形面积 …… 103

第2课时 圆锥的侧面积和全面积 …… 105

阶段核心题型

圆中常见的计算题型 …… 107

全章热门考点整合应用 …… 109

第二十五章 概率初步

25.1 随机事件与概率

第1课时 随机事件 …… 112

第2课时 概 率 …… 114

25.2 用列举法求概率

第1课时 用列表法求概率 …… 116

第2课时 用树状图法求概率 …… 118

第3课时 利用概率判断游戏规则的公平性 …… 120

25.3 用频率估计概率 …… 121

阶段核心归类

概率与其他知识的综合应用类型 …… 123

全章热门考点整合应用 …… 124

达标检测卷

第二十一章达标检测卷 …… 125

第二十二章达标检测卷 …… 129

第二十三章达标检测卷 …… 133

第二十四章达标检测卷 …… 137

第二十五章达标检测卷 …… 141

期末达标检测卷 …… 145

参考答案及点拨 …… 149

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

21.1 一元二次方程

第1课时 认识一元二次方程

小贴士："*"表示该题的难度较大，综合性或技巧性较强。

名师点金

判别一元二次方程的两种方法

1. **根据定义要把握三点**：一是整式方程；二是含有一个未知数；三是未知数的最高次数是2.
2. **根据一般形式要把握两点**：一是能化成 $ax^2+bx+c=0$ 的形式，且 a 一定不能为0，而 b，c 都可以为0；二是判断是否为一元二次方程与其解的情况无关.

Ⅰ 夯实基础·逐点练 (答案见149页)

知识点1 一元二次方程的定义

1. 下列关于 x 的方程一定是一元二次方程的是(　　)

A. $ax^2+bx+c=0$　　B. $x^2+1-x^2=0$

C. $x^2+\frac{1}{x}=2$　　D. $x^2-x-2=0$

2. 如果方程 $(m-3)x^{m^2-7}-x+3=0$ 是关于 x 的一元二次方程，那么 m 的值为(　　)

A. ±3　　B. 3

C. -3　　D. 以上都不对

知识点2 一元二次方程的一般形式

3. 把方程 $x(x+2)=5(x-2)$ 化成一般形式，则 a，b，c 的值分别是(　　)

A. 1，-3，10　　B. 1，7，-10

C. 1，-5，12　　D. 1，3，2

*4. 若方程 $2x^2+mx=4x+2$ 中不含 x 的一次项，则 $m=$(　　)

A. 0　　B. 4　　C. -4　　D. ±4

知识点3 一元二次方程的解(根)

5. 【2019·资阳】a 是方程 $2x^2=x+4$ 的一个根，则代数式 $4a^2-2a$ 的值是_____.

6. 若一元二次方程 $x^2-2kx+k^2=0$ 的一根为 $x=-1$，则 k 的值为(　　)

A. -1　　B. 0　　C. 1或-1　　D. 2或0

7. 老师出示了小黑板上的题目(如图)后，小敏回答："方程有一个根为-4."小聪回答："方程有一个根为3."你认为(　　)

方程 $x^2+x-12=0$ 的根是_____.

(第7题)

A. 只有小敏回答正确　　B. 只有小聪回答正确

C. 小敏、小聪回答都正确　　D. 小敏、小聪回答都不正确

知识点4 利用一元二次方程建立实际问题模型

8. 【2019·日照】某省加快新旧动能转换，促进企业创新发展，某企业一月份的营业额是1 000万元，月平均增长率相同，第一季度的总营业额是3 990万元. 若设月平均增长率是 x，那么可列出的方程是(　　)

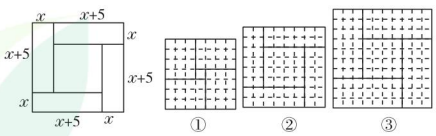
A. $1\,000(1+x)^2=3\,990$

B. $1\,000+1\,000(1+x)+1\,000(1+x)^2=3\,990$

C. $1000(1+2x)=3\,990$

D. $1\,000+1\,000(1+x)+1\,000(1+2x)=3\,990$

*9. 【2019·宁夏】你知道吗，对于一元二次方程，我国古代数学家还研究过其几何解法呢！以方程 $x^2+5x-14=0$ 即 $x(x+5)=14$ 为例加以说明. 数学家赵爽(公元3～4世纪)在其所著的《勾股圆方图注》中记载的方法是：构造图(如下面左图)中大正方形的面积是 $(x+x+5)^2$，其中它又等于四个矩形的面积加上中间小正方形的面积，即 $4\times14+5^2$，据此易得 $x=2$. 那么在下面右边的三个构图(矩形的顶点均落在边长为1的小正方形网格格点上)中，能够说明方程 $x^2-4x-12=0$ 的正确构图是_____.(只填序号)



(第9题)

易错点 忽视二次项系数不为零的条件而致错

10. 【2019·遂宁】已知关于 x 的一元二次方程 $(a-1)x^2-2x+a^2-1=0$ 有一个根为 $x=0$，则 a 的值为(　　)　　【导学号：7574456】

A. 0　　B. ±1　　C. 1　　D. -1

趣味数学　阿尔·花剌子模与一元二次方程：穆罕默德·本·穆萨·阿尔·花剌子模是著名的数学家、天文学家、地理学家.(待续)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法·提升练 ☞（答案见149页）

考查角度1 利用一元二次方程的定义求字母的值

11. 已知关于 x 的方程 $(2k+1)x^2+4kx+k-1=0$.

(1) k 为何值时，此方程是一元一次方程？

(2) k 为何值时，此方程是一元二次方程？并写出这个一元二次方程的二次项系数、一次项系数及常数项.

考查角度2 利用一元二次方程的根求等腰三角形的周长

12. 若 2 是关于 x 的方程 $x^2-(3+k)x+12=0$ 的一个根，求以 2 和 k 为两边长的等腰三角形的周长.

Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞（答案见149页）

拔尖角度1 利用一元二次方程的定义探究字母取值问题

13. 若 $x^{2a+b}-3x^{a-b}+1=0$ 是关于 x 的一元二次方程，求 a，b 的值. 下面是两位同学的解法.

甲：根据题意，得 $\begin{cases}2a+b=2,\\ a-b=1.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\ b=0.\end{cases}$

乙：根据题意，得 $\begin{cases}2a+b=2,\\ a-b=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2a+b=1,\\ a-b=2.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=1,\\ b=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=1,\\ b=-1.\end{cases}$

你认为上述两位同学的解法是否正确？为什么？如果都不正确，请给出正确的解法.

拔尖角度2 利用“夹逼法”求所列方程的解

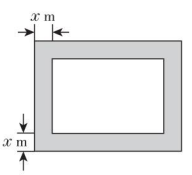
14. 某大学为改善校园环境，计划在一块长 80 m，宽 60 m 的长方形场地中央建一个长方形网球场，网球场占地面积为 3 500 m^2. 四周为宽度相等的人行走道，如图，若设人行走道宽为 x m.

(1) 请列出相应的方程.

(2) x 的值可能小于 0 吗？说说你的理由.

(3) x 的值可能大于 40 吗？可能大于 30 吗？说说你的理由.

(4) 你知道人行走道的宽是多少吗？说说你的求解过程.



（第 14 题）

微信公众号 教辅资料站

趣味数学

花剌子模在他的数学巨著《们尔热巴拉和阿尔穆卡巴拉》中，第一次以对称的方式揭示了二次方程的解法.（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第2课时　一元二次方程的定义及相关概念的五种常见应用 ☞(答案见149页)

名师点金

巧用一元二次方程的定义及相关概念求值主要体现

利用定义或项的概念求字母的值,利用根的概念求字母或代数式的值等.

应用1　利用一元二次方程的定义确定字母的值

1. 向阳中学数学兴趣小组对关于 x 的方程 $(m+1)x^{m^2+1}+(m-2)x-1=0$ 提出了下列问题:

(1)是否存在 m,使方程为一元二次方程?若存在,求出 m 的值,并写出此方程;若不存在,请说明理由.

(2)是否存在 m,使方程为一元一次方程?若存在,求出 m 的值,并解此方程;若不存在,请说明理由.

应用2　利用一元二次方程的项的定义求字母的值

2. 若关于 x 的一元二次方程 $(2ax+1)(x-a)=a-2$ 的二次项系数是 -4,求 a 的值.

应用3　利用一元二次方程定义及一般形式解新定义问题

3. 将4个数 a,b,c,d 排成2行、2列,两边各加一条竖线,记成 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$,定义 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$,上述记号叫做二阶行列式.那么 $\begin{vmatrix} x+1 & x+2 \\ x-2 & 2x \end{vmatrix}=1$ 表示的方程是一元二次方程吗?如果是,请写出它的一般形式.

应用4　利用一元二次方程根的定义求代数式的值

4. 若 $n(n\neq 0)$ 是关于 x 的方程 $x^2+mx+2n=0$ 的一个根,求 $m+n$ 的值.

5. 已知实数 a 是一元二次方程 $x^2-2\,022x+1=0$ 的一个根,求代数式 $a^2-2\,021a-\dfrac{a^2+1}{2\,022}$ 的值.

应用5　利用一元二次方程根的定义说明是根的理由

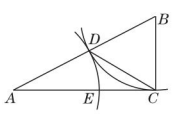
6. 如图,在 $\triangle ABC$ 中,$\angle ACB=90°$,以点 B 为圆心,BC 长为半径画弧,交线段 AB 于点 D;以点 A 为圆心,AD 长为半径画弧,交线段 AC 于点 E,连接 CD.

(1)若 $\angle A=28°$,求 $\angle ACD$ 的度数.

(2)设 $BC=a$,$AC=4$.

①若 $AD=EC$,求 a 的值.

②线段 AD 的长是方程 $x^2+2ax-16=0$ 的一个根吗?说明理由.



(第6题)

微信公众号
教辅资料站

趣味数学　该书中的单词"al-jabr"的意思是"复原"或"完成",指将负项从方程一边移到另一边.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

21.2 解一元二次方程

第1课时 直接开平方法解方程

名师点金

用直接开平方法解一元二次方程的“三步法”

变形：将方程化为“含未知数的完全平方式＝非负常数”的形式.

开方：利用平方根的定义，将方程转化为两个一元一次方程.

求解：解一元一次方程，得出方程的根.

Ⅰ 夯实基础·逐点练 ☞（答案见149页）

知识点1 形如$x^2=p(p\geqslant 0)$型方程的解法

1. 【2019·徐州】方程$x^2-4=0$的解是_____.

2. 一元二次方程$4x^2-9=0$的解为(　　)

A. $x=\frac{3}{2}$　　B. $x=\frac{2}{3}$

C. $x_1=\frac{3}{2}, x_2=-\frac{3}{2}$　　D. $x_1=\frac{2}{3}, x_2=-\frac{2}{3}$

3. 用直接开平方法解下列一元二次方程，其中无实数解的方程为(　　)

A. $x^2-1=0$　　B. $x^2=0$

C. $x^2+4=0$　　D. $-x^2+3=0$

4. 若代数式$3x^2-6$的值为21，则x的值一定为(　　)

A. 3　　B. ± 3

C. -3　　D. $\pm\sqrt{3}$

知识点2 形如$(mx+n)^2=p(p\geqslant 0)$型方程的解法

5. 【2019·吉林】若关于x的一元二次方程$(x+3)^2=c$有实数根，则c的值可以为_____（写出一个即可）.

6. 一元二次方程$(x+6)^2=16$可转化为两个一元一次方程，其中一个一元一次方程是$x+6=4$，则另一个一元一次方程是(　　)

A. $x-6=4$　　B. $x-6=-4$

C. $x+6=0$　　D. $x+6=-4$

*7. 已知一元二次方程$(x-3)^2=1$的两个解恰好分别是等腰三角形ABC的底边长和腰长，则$\triangle ABC$的周长为(　　)

A. 10　　B. 10或8　　C. 9　　D. 8

Ⅱ 整合方法·提升练 ☞（答案见149页）

考查角度1 利用直接开平方法求字母的值

8. 已知关于x的方程$(x-1)^2=k^2+2$的一个根是3，求k的值及另一个根.

考查角度2 利用直接开平方法所得根的特征求分式的值

9. 若关于x的一元二次方程$ax^2=b(ab>0)$的两个根分别是$m+1$与$2m-4$，求$\frac{b}{a}$的值.

更多提分招数详见《极速提分法》第8页。

微信公众号 教辅资料站

趣味数学

数学神童维纳的年龄：著名数学家诺伯特·维纳，在博士学位的授予仪式上，执行主席询问他的年龄.（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第2课时　配方法解方程

名师点金

二次三项式的配方过程与一元二次方程的配方过程的两大区别

一是二次项系数化为1，二次三项式是提出二次项的系数，一元二次方程是两边同时除以二次项的系数.

二是配方，二次三项式是先加上一次项系数一半的平方再减去一次项系数一半的平方，一元二次方程是两边同时加上一次项系数一半的平方.

1 夯实基础·逐点练 ☞(答案见150页)

知识点1 二次三项式的配方

1. 【2018·安顺】若$x^2+2(m-3)x+16$是关于x的完全平方式，则$m=$_____.

2. 将代数式a^2+4a-5变形，结果正确的是(　　)

A. $(a+2)^2-1$　　B. $(a+2)^2-5$

C. $(a+2)^2+4$　　D. $(a+2)^2-9$

3. 将代数式$x^2-10x+5$配方后，发现它的最小值为(　　)

A. -30　　B. -20　　C. -5　　D. 0

4. 不论x,y为何实数，代数式$x^2+y^2+2x-4y+7$的值(　　)

A. 总不小于2　　B. 总不小于7

C. 可为任何实数　　D. 可能为负数

5. 【中考·扬州】已知$M=\frac{2}{9}a-1$，$N=a^2-\frac{7}{9}a$(a为任意实数)，则M,N的大小关系为(　　)

A. $M<N$　　B. $M=N$

C. $M>N$　　D. 不能确定

***6.** 已知a,b,c是$\triangle ABC$的三边长，且$a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$，则$\triangle ABC$的形状为(　　)

A. 钝角三角形　　B. 等边三角形

C. 直角三角形　　D. 等腰直角三角形

知识点2 用配方法解一元二次方程

7. 用配方法解下列方程，其中应在方程左右两边同时加上4的是(　　)

A. $x^2+4x=5$　　B. $2x^2-4x=5$

C. $x^2-2x=5$　　D. $x^2+2x=5$

8. 【2019·南通】用配方法解方程$x^2+8x+9=0$，变形后的结果正确的是(　　)

A. $(x+4)^2=-9$　　B. $(x+4)^2=-7$

C. $(x+4)^2=25$　　D. $(x+4)^2=7$

9. 一元二次方程$x^2-8x=48$可表示成$(x-a)^2=48+b$的形式，其中a,b为整数，则$a+b$的值为(　　)

A. 20　　B. 12　　C. -12　　D. -20

10. 用配方法解方程$x^2-8x+15=0$的过程中，配方正确的是(　　)

A. $x^2-8x+(-4)^2=1$

B. $x^2-8x+(-4)^2=31$

C. $(x+4)^2=1$

D. $(x-4)^2=-11$

11. 用配方法解下列方程时，配方正确的是(　　)

A. 方程$x^2-6x-5=0$，可化为$(x-3)^2=4$

B. 方程$y^2-2y-2\,022=0$，可化为$(y-1)^2=2\,022$

C. 方程$a^2+8a+9=0$，可化为$(a+4)^2=25$

D. 方程$2x^2-6x-7=0$，可化为$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{23}{4}$

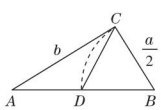
***12.** 【2018·舟山】欧几里得的《原本》记载，形如$x^2+ax=b^2$的方程的图解法是：如图，画$\mathrm{Rt}\triangle ABC$，使$\angle ACB=90°$，$BC=\frac{a}{2}$，$AC=b$，再在斜边AB上截取$BD=\frac{a}{2}$，则该方程的一个正根是(　　)

A. AC的长

B. AD的长

C. BC的长

D. CD的长



(第12题)

13. 【2018·益阳】规定：$a\otimes b=(a+b)b$，如：$2\otimes 3=(2+3)\times 3=15$，若$2\otimes x=3$，则$x=$_____.

易错点! 在配方时忽视等式的性质而致错

14. 【2019·齐齐哈尔】解方程：$x^2+6x=-7$.

微信公众号 教辅资料站

趣味数学　维纳不愧为数学神童，回答得十分巧妙："我今年岁数的立方是个四位数，岁数的四次方是个六位数，这两个数刚好把十个数字0，1，2，3，4，5，6，7，8，9全都用上了，不重不漏.(待续)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法·提升练 ☞（答案见150页）

考查角度1 利用配方法解非负数问题

15. 先阅读下面的内容，再解决问题.

例题：若 $m^2+2mn+2n^2-6n+9=0$，求 m 和 n 的值.

解：$\because m^2+2mn+2n^2-6n+9=0$，

$\therefore m^2+2mn+n^2+n^2-6n+9=0$.

$\therefore (m+n)^2+(n-3)^2=0$.

$\therefore m+n=0, n-3=0$.

$\therefore m=-3, n=3$.

问题：已知 a,b,c 为正整数且是 $\triangle ABC$ 的三边长，c 是 $\triangle ABC$ 的最短边长，a,b 满足 $a^2+b^2=12a+8b-52$，求 c 的值.

考查角度2 利用配方法解二次三项式的最值问题

16. 我们可以利用配方法求一些多项式的最值，如：$x^2+2x+3=(x^2+2x+1)+2=(x+1)^2+2$，当 $x=-1$ 时，x^2+2x+3 有最小值为2；再如：$-x^2+2x-2=-(x^2-2x+1)-1=-(x-1)^2-1$，当 $x=1$ 时，$-x^2+2x-2$ 有最大值为 -1.

(1) 代数式 x^2+6x+m 有最小值为1，则 $m=$_____；

(2) 代数式 $-x^2+4x+m$ 有最大值为2，则 $m=$_____；

(3) 代数式 $x^2+(m+2)x+4m-7$ 有最小值为0，求 m 的值.

Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞（答案见150页）

拔尖角度1 利用配方法求代数式的值（整体思想、换元法）

17. 已知实数 x 满足 $x^2+\frac{1}{x^2}+2\left(x+\frac{1}{x}\right)=0$，求 $x+\frac{1}{x}$ 的值.

拔尖角度2 利用配方法探究新定义法

18. 小明在解一元二次方程时，发现有这样一种解法：

如：解方程 $x(x+4)=6$.

解：原方程可变形，

得 $[(x+2)-2][(x+2)+2]=6$，

$(x+2)^2-2^2=6$，

$(x+2)^2=6+2^2$，

$(x+2)^2=10$.

直接开平方并整理，得 $x_1=-2+\sqrt{10}, x_2=-2-\sqrt{10}$.

我们称小明这种解法为“平均数法”.

(1) 下面是小明用“平均数法”解方程 $(x+3)(x+7)=5$ 时的解题过程.

解：原方程可变形，得 $[(x+a)-b][(x+a)+b]=5$，$(x+a)^2-b^2=5$，

$(x+a)^2=5+b^2$.

直接开平方并整理，得 $x_1=c, x_2=d(c>d)$.

上述解题过程中的 a,b,c,d 所表示的数分别是____，____，____，____.

(2) 请用“平均数法”解方程：$(x-5)(x+3)=6$.

更多提分招数详见《极速提分法》第3页。

微信公众号 教辅资料站

这意味着全体数字都向我俯首称臣，预祝我将来在数学领域里一定能干出一番惊天动地的大事业.”

维纳的年龄：18岁.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第3课时　一元二次方程根的判别式



名师点金

根的判别式的应用

1. **直用**：不解方程，判断方程根的情况.

2. **逆用**：由方程根的情况，求字母系数的取值范围.

注意：一元二次方程有实数根，包含有两个相等的实数根和有两个不相等的实数根两种情况.

1 夯实基础·逐点练

☞(答案见150页)

知识点1 一元二次方程根的判别式

1. 方程 $7x=2x^2-4$ 化为一般形式 $ax^2+bx+c=0$ 后，$a=$_____，$b=$_____，$c=$_____，$b^2-4ac=$_____.

2. 方程 $6x-8=5x^2$ 化为一般形式 $ax^2+bx+c=0$ 后，a,b,c 的值为(　　)

A. $a=5,b=6,c=-8$

B. $a=5,b=-6,c=-8$

C. $a=5,b=-6,c=8$

D. $a=6,b=5,c=8$

3. 在方程 $2x^2+3x=1$ 中，b^2-4ac 的值为(　　)

A. 1　　B. -1　　C. 17　　D. -17

4. 已知方程 $2x^2+mx+1=0$ 的根的判别式的值为16，则 m 的值为(　　)

A. $2\sqrt{6}$　　B. $-2\sqrt{6}$　　C. $\pm2\sqrt{6}$　　D. $\pm3\sqrt{6}$

知识点2 一元二次方程根的情况

5. 【2019·河南】一元二次方程 $(x+1)(x-1)=2x+3$ 的根的情况是(　　)

A. 有两个不相等的实数根

B. 有两个相等的实数根

C. 只有一个实数根

D. 没有实数根

6. 【2019·湘西州】一元二次方程 $x^2-2x+3=0$ 根的情况是(　　)

A. 有两个不相等的实数根

B. 有两个相等的实数根

C. 没有实数根

D. 无法判断

***7.** 【2018·娄底】关于 x 的一元二次方程 $x^2-(k+3)x+k=0$ 的根的情况是(　　)

A. 有两个不相等的实数根

B. 有两个相等的实数根

C. 无实数根

D. 不能确定

知识点3 一元二次方程根的判别式的应用

8. 【2019·自贡】关于 x 的一元二次方程 $x^2-2x+m=0$ 无实数根，则实数 m 的取值范围是(　　)

A. $m<1$　　B. $m\geqslant1$

C. $m\leqslant1$　　D. $m>1$

9. 【2019·荆州】若一次函数 $y=kx+b$ 的图象不经过第二象限，则关于 x 的一元二次方程 $x^2+kx+b=0$ 的根的情况是(　　)

A. 有两个不相等的实数根

B. 有两个相等的实数根

C. 无实数根

D. 无法确定

10. 【2018·安徽】若关于 x 的一元二次方程 $x(x+1)+ax=0$ 有两个相等的实数根，则实数 a 的值为(　　)

A. -1　　B. 1

C. -2 或2　　D. -3 或1

***11.** 新型冠状病毒疫情期间，小刚在家解关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 时，只抄对了 $a=1,b=4$，解出其中一个根是 $x=-1$. 他核对时发现所抄的 c 比原方程的 c 值小2，则原方程的根的情况是(　　)

A. 不存在实数根

B. 有两个不相等的实数根

C. 有一个根是 $x=-1$

D. 有两个相等的实数根

易错点 应用根的判别式求字母的取值范围时忽视一元二次方程的隐含条件

12. 【2019·新疆】若关于 x 的一元二次方程 $(k-1)x^2+x+1=0$ 有两个实数根，则 k 的取值范围是(　　)

A. $k\leqslant\frac{5}{4}$　　B. $k>\frac{5}{4}$

C. $k<\frac{5}{4}$ 且 $k\neq1$　　D. $k\leqslant\frac{5}{4}$ 且 $k\neq1$

更多提分招数详见《极速提分法》第6页。

趣味数学　**国王的怪题**：一位国王想为王子招聘一位算术先生，就出了这样一道怪题：把1 000颗珍珠分别装进10个盒子里，不管要多少颗珍珠，都能整盒地拿出，不得临时拆盒拼凑.(待续)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞（答案见150页）

考查角度1 利用方程的根的情况求字母的值

13. 【2019 · 北京】关于 x 的方程 $x^2-2x+2m-1=0$ 有实数根，且 m 为正整数，求 m 的值及此时方程的根.

考查角度2 利用一元二次方程根的情况求字母的取值范围

14. 【2019 · 衡阳】关于 x 的一元二次方程 $x^2-3x+k=0$ 有实数根.

（1）求 k 的取值范围；

（2）如果 k 是符合条件的最大整数，且一元二次方程 $(m-1)x^2+x+m-3=0$ 与方程 $x^2-3x+k=0$ 有一个相同的根，求此时 m 的值.

Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞（答案见150页）

拔尖角度1 利用一元二次方程根的情况解等腰三角形问题（分类讨论思想）

15. 已知关于 x 的方程 $x^2-(2k+1)x+4\left(k-\frac{1}{2}\right)=0$.

（1）求证：无论 k 取何值，这个方程总有实数根；

（2）若等腰三角形 ABC 的一边长 $a=4$，另两边长 b，c 恰好是这个方程的两个根，求 $\triangle ABC$ 的周长.

拔尖角度2 利用新定义中方程根的情况求字母的值

16. 对于实数 m，n，定义一种运算“$\otimes$”：$m\otimes n=mn+n$.

（1）求 $2\otimes5$ 与 $2\otimes(-5)$ 的值；

（2）如果关于 x 的方程 $x\otimes(a\otimes x)=-\frac{1}{4}$ 有两个相等的实数根，求实数 a 的值.

更多提分招数详见《极速提分法》第4页。

微信公众号 教辅资料站

首先做出这道题目者就可以成为王子的先生. 应试者中有一个十多岁的男孩不但分装好了，而且完全符合国王的要求. 就这样，他被聘为王子的算术先生. 你知道这个聪明的男孩是怎么分装的吗？（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第4课时　公式法解方程

名师点金

用公式法解一元二次方程的四个步骤

1. 把一元二次方程化为一般形式. 2. 确定 a,b,c 的值. 3. 计算 b^2-4ac 的值. 4. 当 $b^2-4ac\geqslant 0$ 时,把 a,b,c 的值代入求根公式,求出方程的两个实数根;当 $b^2-4ac<0$ 时,方程无实数根.

Ⅰ 夯实基础·逐点练 ☞(答案见150页)

知识点1 一元二次方程的求根公式

1. 方程 $3x^2-x=4$ 化为一般形式后 a,b,c 的值分别为(　　)

A. 3,1,4　　B. 3,−1,−4

C. 3,−4,−1　　D. −1,3,−4

2. 一元二次方程 $\sqrt{2}x^2+4\sqrt{3}x=2\sqrt{2}$ 中,b^2-4ac 的值应是(　　)

A. 64　　B. −64　　C. 32　　D. −32

3. 以 $x=\dfrac{b\pm\sqrt{b^2+4c}}{2}$ 为根的一元二次方程可能是(　　)

A. $x^2+bx+c=0$　　B. $x^2+bx-c=0$

C. $x^2-bx+c=0$　　D. $x^2-bx-c=0$

知识点2 求根公式的应用

4. 【2019·威海】一元二次方程 $3x^2=4-2x$ 的解是_____.

***5.** 【2018·泰安】一元二次方程 $(x+1)(x-3)=2x-5$ 的根的情况是(　　)

A. 无实数根

B. 有一个正根,一个负根

C. 有两个正根,且都小于3

D. 有两个正根,且有一根大于3

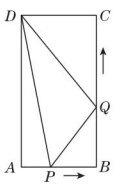
Ⅱ 整合方法·提升练 ☞(答案见151页)

考查角度1 利用一元二次方程解与非负数综合问题

6. 已知 a,b,c 均为实数且 $\sqrt{a^2-2a+1}+|b+1|+(c+3)^2=0$,求方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根.

考查角度2 利用一元二次方程探究与几何综合问题

7. 如图,在矩形 $ABCD$ 中,$AB=6$ cm,$BC=12$ cm,点 P 从点 A 出发沿边 AB 向点 B 以 1 cm/s 的速度移动;同时,点 Q 从点 B 出发沿边 BC 向点 C 以 2 cm/s 的速度移动,问:几秒时 $\triangle PDQ$ 的面积为 35 cm^2?



(第7题)

微信公众号
教辅资料站

趣味数学　(答案:10个盒子里分别装有1,2,4,8,16,32,64,128,256,489颗珍珠.)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

第5课时　因式分解法解方程

名师点金

用因式分解法解一元二次方程的步骤

1. 移项，将方程的右边化为0.
2. 将方程的左边分解为两个一次因式的积.
3. 令每个因式等于0，得两个一元一次方程.
4. 解这两个一元一次方程，得方程的两个根.

用因式分解法解方程的关键是将方程左边因式分解. 常用到的因式分解的方法有：**提公因式法、公式法、十字相乘法**（即$x^2-(a+b)x+ab$型的因式分解）.

1 夯实基础·逐点练

☞（答案见151页）

知识点1 因式分解法的依据

1. 【中考·山西】我们解一元二次方程$3x^2-6x=0$时，可以运用因式分解法，将此方程化为$3x(x-2)=0$，从而得到一元一次方程$3x=0$或$x-2=0$，进而得到原方程的解为$x_1=0$，$x_2=2$. 这种解法体现的数学思想是（　　）

A. 转化思想　　B. 函数思想

C. 数形结合思想　　D. 公理化思想

2. 用因式分解法解方程，下列过程正确的是（　　）

A. $(2x-3)(3x-4)=0$化为$2x-3=0$或$3x-4=0$

B. $(x+3)(x-1)=1$化为$x+3=1$或$x-1=1$

C. $(x-2)(x-3)=2\times3$化为$x-2=2$或$x-3=3$

D. $x(x+2)=0$化为$x+2=0$

知识点2 用因式分解法解方程

3. 【2019·扬州】一元二次方程$x(x-2)=x-2$的根是_____.

4. 【2019·十堰】对于实数a，b，定义运算“◎”如下：$a◎b=(a+b)^2-(a-b)^2$. 若$(m+2)◎(m-3)=24$，则$m=$_____.

5. 【2019·怀化】一元二次方程$x^2+2x+1=0$的解是（　　）

A. $x_1=1$，$x_2=-1$　　B. $x_1=x_2=1$

C. $x_1=x_2=-1$　　D. $x_1=-1$，$x_2=2$

6. 【中考·凉山州】若关于x的方程$x^2+2x-3=0$与$\frac{2}{x+3}=\frac{1}{x-a}$有一个解相同，则$a$的值为（　　）

A. 1　　B. 1或-3

C. -1　　D. -1或3

7. 【2019·内江】一个等腰三角形的底边长是6，腰长是一元二次方程$x^2-8x+15=0$的一根，则此三角形的周长是（　　）

A. 16　　B. 12　　C. 14　　D. 12或16

***8.** 【2019·通辽】一个菱形的边长是方程$x^2-8x+15=0$的一个根，其中一条对角线长为8，则该菱形的面积为（　　）

A. 48　　B. 24　　C. 24或40　　D. 48或80

知识点3 用适当的方法解一元二次方程

9. 解方程$(5x-1)^2=3(5x-1)$的最适当的方法是（　　）

A. 直接开平方法　　B. 配方法

C. 公式法　　D. 因式分解法

10. 已知下列方程，请把它们的序号填在最适当的解法后的横线上.

①$2(x-1)^2=6$；　②$(x-2)^2+x^2=4$；

③$(x-2)(x-3)=3$；　④$x^2-2x-1=0$；

⑤$x^2-\sqrt{2}x+\frac{1}{4}=0$；　⑥$x^2-2x-98=0$.

(1)直接开平方法：_____；

(2)配方法：_____；

(3)公式法：_____；

(4)因式分解法：_____.

易错点1 在方程两边同时除以含有未知数的式子导致失根

11. 【2018·齐齐哈尔】解方程：$2(x-3)=3x(x-3)$.

易错点2 用换元法解一元二次方程时，忽视实数这一条件而致错

12. 已知x为实数，且满足$(x^2+x+1)^2+2(x^2+x+1)-3=0$，那么$x^2+x+1$的值为（　　）

A. 1　　B. -3　　C. -3或1　　D. -1或3

趣味数学

唐朝时，有一位懂数学的尚书主持了一场考试，其中有一道题是：有一天，几个盗贼正在商议怎样分配偷来的布. 贼首说：“每人分6匹布，还剩5匹布；每人分7匹布，还少8匹布.”（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法·提升练 ☞(答案见151页)

考查角度1　利用方程的特点选择适当的方法解方程

13. 解下列方程:

(1)【2019·无锡】$x^2-2x-5=0$;

(2)$x^2-(\sqrt{2}+\sqrt{3})x+\sqrt{6}=0$;

(3)$x^2-8x+4=0$.

考查角度2　利用因式分解法解 $x^2+(a+b)x+ab=0$ 型的方程(类比法)

14. 【中考·湘潭】由多项式乘法得$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$,将该式从右到左使用,即可得到"十字相乘法"进行因式分解的公式:$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$.

示例:分解因式:$x^2+5x+6=x^2+(2+3)x+2\times3=(x+2)(x+3)$.

(1)尝试:分解因式:$x^2+6x+8=(x+____)(x+____)$;

(2)应用:请用上述方法解方程:$x^2-3x-4=0$.

Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞(答案见151页)

拔尖角度1　利用换元法解方程

15. 阅读材料:

为了解方程$(x^2-1)^2-5(x^2-1)+4=0$,我们可以将x^2-1看作一个整体,然后设$x^2-1=y$,那么原方程可化为$y^2-5y+4=0$ ①,解得$y_1=1,y_2=4$,当$y=1$时,$x^2-1=1$,$\therefore x^2=2$,$\therefore x=\pm\sqrt{2}$;当$y=4$时,$x^2-1=4$,$\therefore x^2=5$,$\therefore x=\pm\sqrt{5}$,故原方程的解为$x_1=\sqrt{2},x_2=-\sqrt{2},x_3=\sqrt{5},x_4=-\sqrt{5}$.

解答问题:

(1)上述解题过程,在由原方程得到方程①的过程中,利用_____法达到了降次的目的,体现了转化的数学思想;

(2)请利用以上知识解方程:$\dfrac{x+1}{x^2}-\dfrac{2x^2}{x+1}=1$.

拔尖角度2　利用因式分解法解与根有关三角形问题

16. 已知关于x的方程$(a-1)x^2-4x-1+2a=0$,$x=3$是方程的一个根.

(1)求a的值及方程的另一个根;

(2)一个三角形的三边长都是此方程的根,求这个三角形的周长. 【导学号:7574456】

更多提分招数详见《极速提分法》第8页。

趣味数学　贼首的话被躲在暗处的衙役听到了,衙役飞快地跑回官府,报告了知府,但知府不知道有多少盗贼,所以不知派多少人去抓捕他们.请问有盗贼几人,布几匹?　(答案:盗贼13人,布83匹.)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

* 第6课时　一元二次方程的根与系数的关系

名师点金

与一元二次方程根与系数的关系有关的几种常见式子变形

1. $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$；
2. $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$；
3. $(x_1+1)(x_2+1)=x_1x_2+(x_1+x_2)+1$；
4. $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}$；
5. $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}$；
6. $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$.

Ⅰ 夯实基础·逐点练 ☞（答案见151页）

知识点1 一元二次方程的根与系数的关系

1. 【2019·黄冈】若 x_1,x_2 是一元二次方程 $x^2-4x-5=0$ 的两根，则 $x_1\cdot x_2$ 的值为（　　）

A. -5　　B. 5　　C. -4　　D. 4

2. 【2019·广东】已知 x_1,x_2 是一元二次方程 $x^2-2x=0$ 的两个实数根，下列结论错误的是（　　）

A. $x_1\neq x_2$　　B. $x_1^2-2x_1=0$

C. $x_1+x_2=2$　　D. $x_1\cdot x_2=2$

3. 【2018·贵港】已知 α,β 是一元二次方程 $x^2+x-2=0$ 的两个实数根，则 $\alpha+\beta-\alpha\beta$ 的值是（　　）

A. 3　　B. 1

C. -1　　D. -3

4. 【2019·淄博】若 $x_1+x_2=3$，$x_1^2+x_2^2=5$，则以 x_1,x_2 为根的一元二次方程是（　　）

A. $x^2-3x+2=0$　　B. $x^2+3x-2=0$

C. $x^2+3x+2=0$　　D. $x^2-3x-2=0$

5. 【中考·怀化】设 x_1,x_2 是方程 $x^2+5x-3=0$ 的两个根，则 $x_1^2+x_2^2$ 的值是（　　）

A. 19　　B. 25　　C. 31　　D. 30

6. 【2018·眉山】若 α,β 是一元二次方程 $3x^2+2x-9=0$ 的两根，则 $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}$ 的值是（　　）

A. $\frac{4}{27}$　　B. $-\frac{4}{27}$

C. $-\frac{58}{27}$　　D. $\frac{58}{27}$

***7.** 【中考·天门】若 α,β 为方程 $2x^2-5x-1=0$ 的两个实数根，则 $2\alpha^2+3\alpha\beta+5\beta$ 的值为（　　）

A. -13　　B. 12

C. 14　　D. 15

知识点2 一元二次方程根与系数的关系的应用

8. 【2019·天门】若方程 $x^2-2x-4=0$ 的两个实数根为 α,β，则 $\alpha^2+\beta^2$ 的值为（　　）

A. 12　　B. 10　　C. 4　　D. -4

9. 【中考·绵阳】若关于 x 的方程 $x^2-2x+c=0$ 有一根为 -1，则方程的另一根为（　　）

A. -1　　B. -3　　C. 1　　D. 3

10. 【2019·贵港】若 α,β 是关于 x 的一元二次方程 $x^2-2x+m=0$ 的两实根，且 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=-\frac{2}{3}$，则 m 等于（　　）

A. -2　　B. -3　　C. 2　　D. 3

***11.** 【2019·包头】已知等腰三角形的三边长分别为 $a,b,4$，且 a,b 是关于 x 的一元二次方程 $x^2-12x+m+2=0$ 的两根，则 m 的值是（　　）

A. 34　　B. 30

C. 30或34　　D. 30或36

***12.** 已知 m,n 是关于 x 的一元二次方程 $x^2-2tx+t^2-2t+4=0$ 的两实数根，则 $(m+2)(n+2)$ 的最小值是（　　）

A. 7　　B. 11

C. 12　　D. 16

易错点 忽视判断一元二次方程的根的判别式的符号

13. 关于 x 的一元二次方程 $x^2-(k-1)x-k+2=0$ 有两个实数根 x_1,x_2，若 $(x_1-x_2+2)(x_1-x_2-2)+2x_1x_2=-3$，则 k 的值为（　　）

A. 0或2　　B. -2或2

C. -2　　D. 2

圆中正方形：我国古代数学家经常用诗歌的形式编写数学题，称为诗题．清代有一位数学家对明代数学家程大位的《算法统宗》进行修改补充，编著了《增删算法统宗》一书．（待续）

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法·提升练 ☞(答案见151页)

考查角度1　利用一元二次方程根与系数的关系求方程的根

14. 【2019·随州】已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-(2k+1)x+k^2+1=0$ 有两个不相等的实数根 x_1,x_2.

(1)求 k 的取值范围;

(2)若 $x_1+x_2=3$,求 k 的值及方程的根.

考查角度2　利用根与系数的关系求两根满足某关系式时字母的值

15. 【2019·绥化】已知关于 x 的方程 $kx^2-3x+1=0$ 有实数根.

(1)求 k 的取值范围;

(2)若该方程有两个实数根,分别为 x_1 和 x_2,当 $x_1+x_2+x_1x_2=4$ 时,求 k 的值.

Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞(答案见152页)

拔尖角度1　利用根与系数的关系及根的判别式解求代数式值问题

16. 【2019·南充】已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+(2m-1)x+m^2-3=0$ 有实数根.

(1)求实数 m 的取值范围;

(2)当 $m=2$ 时,方程的根为 x_1,x_2,求代数式 $(x_1^2+2x_1)(x_2^2+4x_2+2)$ 的值.

拔尖角度2　利用根与系数的关系及根的判别式解存在性问题

17. 【中考·鄂州】关于 x 的方程 $x^2-(2k-1)x+k^2-2k+3=0$ 有两个不相等的实数根.

(1)求实数 k 的取值范围;

(2)设方程的两个实数根分别为 x_1,x_2,存不存在这样的实数 k,使得 $|x_1|-|x_2|=\sqrt{5}$? 若存在,求出这样的 k 值;若不存在,说明理由.

更多提分招数详见《极速提分法》第10页。

微信公众号
教辅资料站

趣味数学　在该书的众多诗题中,有一首"圆中正方形":今有圆田一块,中间有个方池.丈量田地待耕犁,恰好三分在记.池面至周有数,每边三步无疑.内方圆径若能知,堪作算中第一.(待续)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

阶段核心方法

一元二次方程的九种解法 ☞（答案见152页）

名师点金

解一元二次方程时，主要考虑降次，其解法有**直接开平方法**、**因式分解法**、**配方法和公式法**，有些特殊方程还可用**换元法**等. 在具体的解题过程中，结合方程的特点选择合适的方法，往往会达到事半功倍的效果.

方法1 形如$(x+m)^2=n(n\geqslant 0)$的一元二次方程用直接开平方法求解

1. 用直接开平方法解下列一元二次方程，其中无实数解的方程为（　　）

A. $x^2-5=5$　　B. $-3x^2=0$

C. $x^2+7=0$　　D. $(x+1)^2=0$

2. 解方程：$\frac{1}{3}(x-2)^2=8$.

方法2 当二次项系数为1，且一次项系数为偶数时，用配方法求解

3. 解方程：$x^2+4x-2=0$.

4. 已知$x^2-10x+y^2-16y+89=0$，求$\frac{x}{y}$的值.

方法3 能化成形如$(x+a)(x+b)=0$的一元二次方程用因式分解法求解

5. 【中考·宁夏】一元二次方程$x(x-2)=2-x$的根是（　　）

A. -1　　B. 2

C. 1和2　　D. -1和2

6. 解下列一元二次方程：

(1) $x^2-2x=0$；

(2) $16x^2-9=0$；

(3) 【2018·巴中】$3x(x-2)=x-2$.

方法4 如果一个一元二次方程易化为一般形式，则用公式法求解

7. 用公式法解一元二次方程$x^2-\frac{1}{4}=2x$，方程的解应是（　　）

A. $x=\frac{-2\pm\sqrt{5}}{2}$　　B. $x=\frac{2\pm\sqrt{5}}{2}$

C. $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$　　D. $x=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$

8. 【2018·绵阳】已知$a>b>0$，且$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}+\frac{3}{b-a}=0$，则$\frac{b}{a}=$_____.

9. 用公式法解下列方程：

(1) $3(x^2+1)-7x=0$；

微信公众号 教辅资料站

大意是：有一块圆形的田地，中间有一个正方形水池. 量得除水池外圆内田地的面积恰好是3分. 从水池的每条边到圆周，最远都是3步.（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2) $4x^2-3x-5=x-2$.

方法5　用构造法解一元二次方程

10. 解方程：$6x^2+19x+10=0$.

11. 若 m,n,p 满足 $m-n=8$，$mn+p^2+16=0$，求 $m+n+p$ 的值.

方法6　用整体换元法解方程

12. 解方程：$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=48$.

13. 解方程：$x^2+\frac{1}{x^2}-2\left(x+\frac{1}{x}\right)-1=0$.

方法7　用降次换元法解方程

14. 解方程：$6x^4-35x^3+62x^2-35x+6=0$.

方法8　用倒数换元法解分式方程

15. 解方程：$\frac{x-2}{x}-\frac{3x}{x-2}=2$.

方法9　用特殊值法解一元二次方程

16. 解方程：$(x-2\,019)(x-2\,020)=2\,021\times2\,022$.

更多提分招数详见《极速提分法》第1页。

趣味数学　如果你能求出正方形的边长和圆的直径，那么你的运算能力就数第一了. 亩、分、平方步都是面积单位，其中1亩=10分；1分=24平方步. 本题可以通过列一元二次方程解决.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

21.3 实际问题与一元二次方程

第1课时 列一元二次方程解实际应用问题

名师点金

列一元二次方程解应用题的一般步骤可归结为六个字：审、设、列、解、验、答.

1. 一般情况下，步骤中的第一步“审”不写出来，但它是关键的一步，只有审清题意，明确了已知量、未知量及它们之间的关系，才能准确列出方程.
2. 设未知数有**直接设元**和**间接设元**两种方式，直接设元就是问什么，设什么；间接设元就是在直接设元比较困难，或所列方程较复杂时所采用的间接设未知数的方法.

1 夯实基础·逐点练

☞（答案见153页）

知识点1 传播问题

1. 【2019·鸡西】某校“研学”活动小组在一次野外实践时，发现一种植物的主干长出若干数目的支干，每个支干又长出同样数目的小分支，主干、支干和小分支的总数是43，则这种植物每个支干长出的小分支个数是（　　）

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

2. 【中考·贺州】某生物实验室需培育一群有益菌. 现有60个活体样本，经过两轮培植后，有益菌总和达24 000个，其中每个有益菌每一轮可分裂出若干个相同数目的有益菌.

(1) 每轮分裂中每个有益菌可分裂出多少个有益菌？

(2) 按照这样的分裂速度，经过三轮培植后共有多少个有益菌？

知识点2 循环问题

3. 【2019·新疆】在某篮球邀请赛中，参赛的每两个队之间都要比赛一场，共比赛36场，设有x个队参赛，根据题意，可列方程为（　　）

A. $\frac{1}{2}x(x-1)=36$　　B. $\frac{1}{2}x(x+1)=36$

C. $x(x-1)=36$　　D. $x(x+1)=36$

4. 【中考·新疆】某市体育局要组织一次篮球赛，赛制为单循环形式（每两支球队之间都赛一场），计划安排28场比赛，应邀请多少支球队参加比赛？

知识点3 数字问题

5. 一个两位数，它的十位数字比个位数字小4，若把这两个数字调换位置，所得的两位数与原两位数的乘积等于765，求原两位数.

趣味数学

数学是各式各样的证明技巧.

——维特根斯坦

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法·提升练 ☞(答案见153页)

考查角度1 利用一元二次方程解传播问题

6. 2020年,新型冠状病毒感染的肺炎疫情牵动着你我的心.岳一中九年级某学生写了一份预防新型冠状病毒倡议书在微信朋友圈传播,规则为:将倡议书发表在自己的朋友圈,再邀请n个好友转发倡议书,每个好友转发倡议书之后,又邀请n个互不相同的好友转发倡议书,以此类推,已知经过两轮传播后,共有421人参与了传播活动,求n的值.

考查角度2 利用一元二次方程解计数问题

7. 我们知道,计算n边形的对角线条数公式为:$\frac{1}{2}n(n-3)$.如果一个n边形共有20条对角线,那么可以得到方程$\frac{1}{2}n(n-3)=20$.整理得$n^2-3n-40=0$,解得$n=8$或$n=-5$.

$\because n\geqslant 3$,$\therefore n=-5$不合题意,舍去.$\therefore n=8$,即该多边形是八边形.

根据以上内容,解答下列问题:

(1)若一个多边形共有14条对角线,则这个多边形的边数是多少?

(2)A同学说:"我求得一个多边形共有10条对角线."你认为A同学的说法正确吗?为什么?

Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞(答案见153页)

拔尖角度1 利用一元二次方程解与一次函数综合的问题

8. 【2018·德州】为积极响应新旧动能转换,提高公司经济效益,某科技公司近期研发出一种新型高科技设备,每台设备成本价为30万元,经过市场调研发现,每台售价为40万元时,年销售量为600台;每台售价为45万元时,年销售量为550台.假定该设备的年销售量y(单位:台)和销售单价x(单位:万元)成一次函数关系.

(1)求年销售量y与销售单价x的函数关系式;

(2)根据相关规定,此设备的销售单价不得高于70万元,如果该公司想获得10 000万元的年利润,则该设备的销售单价应是多少万元?

拔尖角度2 利用一元二次方程解与不等式综合的问题

9. 为进一步促进义务教育均衡发展,某市加大了基础教育经费的投入,已知2018年该市投入基础教育经费5 000万元,2020年投入基础教育经费7 200万元.

(1)求该市这两年投入基础教育经费的年平均增长率;

(2)如果按(1)中投入基础教育经费的年平均增长率计算,该市计划2021年用不超过当年基础教育经费的5%购买电脑和实物投影仪共1 500台调配给农村学校,若购买一台电脑需3 500元,购买一台实物投影仪需2 000元,则最多可购买电脑多少台?

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

第2课时　列一元二次方程解百分率问题



名师点金

1. 增长率（或降低率）问题的规律

（1）**增长率问题**：设某数为 a，平均增长率为 x，则一次增长后的值为 $a(1+x)$，两次增长后的值为 $a(1+x)^2$，依次类推，n 次增长后的值为 $a(1+x)^n$.（2）**降低率问题**：设某数为 a，平均降低率为 x，则一次降低后的值为 $a(1-x)$，两次降低后的值为 $a(1-x)^2$，依次类推，n 次降低后的值为 $a(1-x)^n$.

2. 解决利润问题常用的关系式

（1）利润 = 售价 − 进价.（2）利润率 $=\frac{\text{利润}}{\text{进价}}\times 100\% =\frac{\text{售价}-\text{进价}}{\text{进价}}\times 100\%$.

（3）售价 = 进价 ×（1 + 利润率）.（4）总利润 = 单个利润 × 销售量 = 总收入 − 总支出.

Ⅰ 夯实基础 · 逐点练

☞（答案见 153 页）

知识点1 增长率问题

1. 【2019 · 大连】某村 2016 年的人均收入为 20 000 元，2018 年的人均收入为 24 200 元.

（1）求 2016 年到 2018 年该村人均收入的年平均增长率；

（2）假设 2019 年该村人均收入的增长率与前两年的年平均增长率相同，请你计算 2019 年该村的人均收入是多少元？

知识点2 降低率问题

2. 【2019 · 东营】为加快新旧动能转换，提高公司经济效益，某公司决定对近期研发出的一种电子产品进行降价促销，使生产的电子产品能够及时售出，根据市场调查：这种电子产品销售单价定为 200 元时，每天可售出 300 个；若销售单价每降低 1 元，每天可多售出 5 个. 已知每个电子产品的固定成本为 100 元，问这种电子产品降价后的销售单价为多少元时，公司每天可获利 32 000 元？

Ⅱ 整合方法 · 提升练

☞（答案见 153 页）

拔尖角度 利用一元二次方程、不等式解实际问题的应用

3. 【2019 · 玉林】某养殖场为了响应党中央的扶贫政策，今年起采用“场内 + 农户”养殖模式，同时加强对蛋鸡的科学管理，蛋鸡的产蛋率不断提高，三月份和五月份的产蛋量分别是 2.5 万 kg 与 3.6 万 kg，现假定该养殖场蛋鸡产蛋量的月增长率相同.

（1）求该养殖场蛋鸡产蛋量的月平均增长率；

（2）假定当月产的鸡蛋当月在各销售点全部销售出去，且每个销售点每月平均销售量最多为 0.32 万 kg，如果要完成六月份的鸡蛋销售任务，那么该养殖场在五月份已有的销售点的基础上至少再增加多少个销售点？

趣味数学

在 1825 年，挪威学者阿贝尔终于证明了“如果方程的次数 $n\geqslant 5$，那么此方程不可能用求根公式求解.”即不存在求一元五次方程的求根公式. 这就是著名的阿贝尔定理.（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第3课时　列一元二次方程解几何面积问题

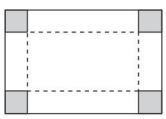
名师点金

建立一元二次方程解决几何图形问题应注意三点：
一是图形的面积公式是基本的等量关系式；二是利用平移的性质（图形的面积不变）将零散的图形拼聚在一起；三是取舍根时，注意条件中对图形边长的限制.

Ⅰ 夯实基础·逐点练 ☞（答案见153页）

知识点1 规则图形的应用

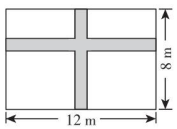
1. 【2019·徐州】如图，有一块矩形硬纸板，长30 cm，宽20 cm，在其四角各剪去一个同样的正方形，然后将四周突出部分折起，可制成一个无盖长方体盒子，当剪去正方形的边长取何值时，所得长方体盒子的侧面积为200 cm^2？



（第1题）

知识点2 不规则图形的应用

2. 【2019·山西】如图，在一块长12 m，宽8 m的矩形空地上，修建同样宽的两条互相垂直的道路（两条道路各与矩形的一条边平行），剩余部分栽种花草，且栽种花草的面积为77 m^2，设道路的宽为x m，则根据题意，可列方程为_____.



（第2题）

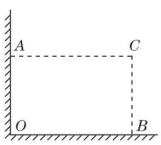
Ⅱ 整合方法·提升练 ☞（答案见153页）

考查角度1 利用一元二次方程解与方案有关的问题

3. 【中考·百色】如图，在直角墙角AOB（$OA \perp OB$，且OA，OB长度不限）中，要砌20 m长的墙，与直角墙角AOB围成地面为矩形的储仓，且矩形地面$AOBC$的面积为96 m^2.

（1）求这个矩形地面的长；

（2）有规格为0.80×0.80和1.00×1.00（单位：m）的地板砖价格分别为55元/块和80元/块，若只选其中一种地板砖都恰好能铺满储仓的矩形地面（不计缝隙），用哪一种规格的地板砖费用较少？



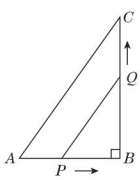
（第3题）

考查角度2 利用一元二次方程探究面积问题

4. 如图所示，在$\triangle ABC$中，$\angle B = 90°$，$AB = 5$ cm，$BC = 7$ cm. 点P从点A开始沿AB边向点B以1 cm/s的速度移动，点Q从点B开始沿BC边向点C以2 cm/s的速度移动.

（1）如果点P，Q分别从点A，B同时出发，那么几秒后，$\triangle PBQ$的面积等于4 cm^2？

（2）如果点P，Q分别从点A，B同时出发，$\triangle PBQ$的面积能否等于7 cm^2？



（第4题）

趣味数学 由于受阿贝尔定理的影响，绝大多数的数学家早已放弃了对一元五次方程求根公式的探索. 但由于社会的发展，仍然有一群爱好数学的学者在不断地寻求突破！

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

阶段核心应用

一元二次方程解实际问题的十种常见应用 ☞（答案见154页）

名师点金

学习了一元二次方程的解法以后，就会经常遇到解决与一元二次方程有关的生活中的应用问题，即列一元二次方程解应用题，不少同学遇到这类问题总是左右为难，难以下笔，事实上，同学们只要能认真地阅读题目，分析题意，并能学会分解题目，各个击破，从而找到已知的条件和所求问题，必要时可通过画图、列表等方法来帮助我们理顺已知与未知之间的关系，找到一个或几个相等的式子，从而列出方程求解，同时还要及时地检验答案的正确性并作答. 现就列一元二次方程解应用题中遇到的常见的十大典型题目，举例说明.

应用1 增长率问题

1. 【2019·宜昌】HW公司2018年使用自主研发生产的“QL”系列甲、乙、丙三类芯片共2 800万块，生产了2 800万部手机，其中乙类芯片的产量是甲类芯片的2倍，丙类芯片的产量比甲、乙两类芯片产量的和还多400万块，这些“QL”芯片解决了该公司2018年生产的全部手机所需芯片的10%.

(1)求2018年甲类芯片的产量；

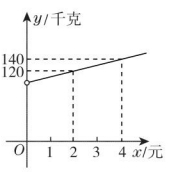
(2)HW公司计划2020年生产的手机全部使用自主研发的“QL”系列芯片，从2019年起逐年扩大“QL”芯片的产量，2019年、2020年这两年，甲类芯片每年的产量都比前一年增长一个相同的百分数$m\%$，乙类芯片的产量平均每年增长的百分数比$m\%$小1，丙类芯片的产量每年按相同的数量递增. 2018年到2020年，丙类芯片三年的总产量达到1.44亿块，这样，2020年HW公司的手机产量比2018年全年的手机产量多10%，求丙类芯片2020年的产量及m的值.

应用2 销售问题

2. 【2019·安顺】安顺市某商贸公司以每千克40元的价格购进一种干果，计划以每千克60元的价格销售，为了让顾客得到更大的实惠，现决定降价销售，已知这种干果的销售量y（千克）与每千克降价x（元）$(0<x<20)$之间满足一次函数关系，其图象如图所示.

(1)求y与x之间的函数关系式；

(2)商贸公司要想获利2 090元，则这种干果每千克应降价多少元？



（第2题）

1707年，牛顿的代数讲义经整理后出版，定名为《普遍算术》. 书中陈述了代数基本概念与基本运算，同时对方程的根及其性质进行了深入探讨，引出了方程论方面的丰硕成果.（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

应用3　储蓄问题

3. 王红梅同学将1 000元压岁钱第一次按一年定期存入“少儿银行”，到期后将本金和利息取出，并将其中的500元捐给“希望工程”，剩余的又全部按一年定期存入，这时存款的年利率已下调到第一次存款时年利率的90%，这样到期后，可得本金和利息共530元，求第一次存款时的年利率.（不计利息税）

应用4　趣味问题

4. 一个醉汉拿着一根竹竿进城，横着怎么也拿不进去，量得竹竿长比城门宽4米. 旁边一个醉汉嘲笑他：“你没看城门高吗？竖着拿就可以进去啦!”结果竹竿竖着比城门高2米，二人没办法，只好请教聪明人，聪明人教他们二人沿着城门的对角斜着拿，二人一试，不多不少刚好进城门，你知道竹竿有多长吗？

应用5　古诗问题

5. 读诗词解题：（通过列方程，算出周瑜去世时的年龄）

大江东去浪淘尽，千古风流数人物；

而立之年督东吴，早逝英年两位数；

十位恰小个位三，个位平方与寿符；

哪位学子算得快，多少年华属周瑜？

应用6　传播问题

6. 某种电脑病毒传播非常快，如果有一台电脑被感染，经过两轮感染后就会有81台电脑被感染. 请回答：每轮感染中平均一台电脑会感染几台电脑？若病毒得不到有效控制，三轮感染后被感染的电脑总数会不会超过700台？

趣味数学　他得出了方程的根与其判别式之间的关系，指出可以利用方程系数确定方程根之幂的和数，即“牛顿幂和公式”.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

应用7 情景问题

7. 收发微信红包已成为各类人群进行交流联系、增强感情的一部分. 如图是甜甜和她的双胞胎妹妹在六一儿童节期间的对话.



（第7题）

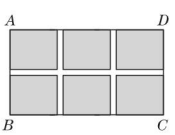
请问：

(1) 2018 年到 2020 年甜甜和她的妹妹在六一收到红包钱数的年平均增长率是多少？

(2) 2020 年六一，甜甜和她的妹妹各收到了多少钱的微信红包？

应用8 几何问题

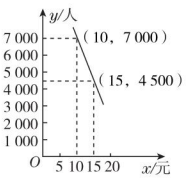
8. 【2019·襄阳】改善小区环境，争创文明家园. 如图所示，某社区决定在一块长（AD）16 m，宽（AB）9 m 的矩形场地 $ABCD$ 上修建三条同样宽的小路，其中两条与 AB 平行，另一条与 AD 平行，其余部分种草，要使草坪部分的总面积为 112 m^2，则小路的宽应为多少？



（第8题）

应用9 函数问题

9. 某博物馆每周都吸引大量中外游客前来参观. 如果游客过多，对馆中的珍贵文物会产生不利影响，因此博物馆采取了提高门票价格的方法来控制参观人数，在该方法的实施过程中发现：每周参观人数 y（人）与票价 x（元）之间存在着如图所示的一次函数关系，在这种情况下，如果要保证每周 4 万元的门票收入，那么每周应限定参观人数为多少？门票价格应是多少？



（第9题）

应用10 新定义问题

10. 观察下列一组方程：①$x^2-x=0$；②$x^2-3x+2=0$；③$x^2-5x+6=0$；④$x^2-7x+12=0$……它们的根有一定的规律，都是两个连续的自然数，我们称这类一元二次方程为“连根一元二次方程”.

(1) 若 $x^2+kx+56=0$ 也是“连根一元二次方程”，写出实数 k 的值，并解这个一元二次方程；

(2) 请写出第 n 个方程和它的根.

数学是打开科学大门的钥匙.

——培根

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

全章热门考点整合应用

☞(答案见154页)



名师点金

关于一元二次方程的题型非常丰富,常见的有一元二次方程的根、一元二次方程的解法、一元二次方程根的情况、一元二次方程根与系数的关系、一元二次方程的应用等,只要我们掌握了不同题型的解法特点,就可以使问题变得简单明了.本章热门考点可概括为:两个概念,一个解法,两个关系,两个应用,三种思想.

考点1 两个概念

概念1 一元二次方程

1. 当 m 取何值时,方程 $(m-1)x^{m^2+1}+2mx+3=0$ 是关于 x 的一元二次方程?

概念2 一元二次方程的根

2. 若关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一根为 -1,且 $a=\sqrt{4-c}+\sqrt{c-4}-2$,求 $\dfrac{(a+b)^{2\,022}}{2\,021c}$ 的值.

考点2 一个解法——一元二次方程的解法

3. 选择适当的方法解下列方程:

(1) $(x-1)^2+2x(x-1)=0$;

(2) $x^2-6x-6=0$;

(3) $6\,000(1-x)^2=4\,860$;

(4) $(10+x)(50-x)=800$;

(5)【中考·山西】$(2x-1)^2=x(3x+2)-7$.

趣味数学 从前,一个醉汉拿着一根笔直的竹竿进屋,横拿竖拿都进不去.经测量,他横着拿时比门框宽4尺,竖着拿时比门框高2尺.(待续)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

考点3 两个关系

关系1 一元二次方程根的判别式与系数的关系

4. 【2019·烟台】当 $b+c=5$ 时，关于 x 的一元二次方程 $3x^2+bx-c=0$ 的根的情况为(　　)

A. 有两个不相等的实数根

B. 有两个相等的实数根

C. 没有实数根

D. 无法确定

5. 在等腰三角形 ABC 中，三边长分别为 a,b,c. 其中 $a=5$，若关于 x 的方程 $x^2+(b+2)x+(6-b)=0$ 有两个相等的实数根，求 $\triangle ABC$ 的周长.

关系2 一元二次方程根与系数的关系

6. 【2019·孝感】已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-2(a-1)x+a^2-a-2=0$ 有两个不相等的实数根 x_1,x_2.

(1)若 a 为正整数，求 a 的值；

(2)若 x_1,x_2 满足 $x_1^2+x_2^2-x_1x_2=16$，求 a 的值.

7. 【2019·黄石】已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-6x+(4m+1)=0$ 有实数根.

(1)求 m 的取值范围；

(2)若该方程的两个实数根为 x_1,x_2，且 $|x_1-x_2|=4$，求 m 的值.

考点4 两个应用

应用1 一元二次方程的应用

8. 【2019·德州】习近平总书记说："读书可以让人保持思想活力，让人得到智慧启发，让人滋养浩然之气."某校为响应我市全民阅读活动，利用节假日面向社会开放学校图书馆. 据统计，第一个月进馆128人次，进馆人次逐月增加，到第三个月末累计进馆608人次，若进馆人次的月平均增长率相同.

(1)求进馆人次的月平均增长率；

(2)因条件限制，学校图书馆每月接纳能力不超过500人次，在进馆人次的月平均增长率不变的条件下，校图书馆能否接纳第四个月的进馆人次，并说明理由.

应用2 配方法的应用

9. 阅读下面材料.

我们知道 x^2+6x+9 可以分解因式，结果为 $(x+3)^2$，其实 x^2+6x+8 也可以通过配方法分解因式，其过程如下：

$x^2+6x+8=x^2+6x+9-9+8$

$=(x+3)^2-1$

$=(x+3+1)(x+3-1)$

$=(x+4)(x+2)$.

(1)请仿照上述过程填空：

$x^2+4x-5=[x+(\quad\quad)][x+(\quad\quad)]$；

$x^2-5x+6=[x+(\quad\quad)][x+(\quad\quad)]$；

$x^2-8x-9=[x+(\quad\quad)][x+(\quad\quad)]$.

(2)请观察(1)中横线上所填的数，每道题所填的两个数与一次项系数、常数项有什么关系？

趣味数学

另一个醉汉教他沿着门的两个对角斜着拿竹竿，这个醉汉一试，不多不少刚好进去了，你知道这根竹竿有多长吗？

答案：这根竹竿有10尺长.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

10. 阅读材料：

把形如 $ax^2+bx+c(a,b,c$ 为常数$)$的二次三项式(或其中一部分)配成完全平方式的方法叫做配方法. 配方法的依据是 $a^2\pm2ab+b^2=(a\pm b)^2$.

例如：$(x-1)^2+3$，$(x-2)^2+2x$，$\left(\frac{1}{2}x-2\right)^2+\frac{3}{4}x^2$ 是 x^2-2x+4 的三种不同形式的配方，即“余项”分别是常数项、一次项、二次项.

请根据阅读材料解决下列问题：

(1)仿照上面的例子，写出 x^2-4x+2 的三种不同形式的配方；

(2)已知 $a^2+b^2+c^2-ab-3b-2c+4=0$，求 $a+b+c$ 的值.

考点5 三种思想

思想1 整体思想

11. 已知 $x=a$ 是 $2x^2+x-2=0$ 的一个根，求代数式 $2a^4+a^3+2a^2+2a+1$ 的值.

思想2 转化思想

12. 解方程：$(2x+1)^2-3(2x+1)=-2$.

思想3 分类讨论思想

13. 已知关于 x 的方程 $x^2+2(a-1)x+a^2-7a-4=0$ 有两个实数根 x_1,x_2.

(1)求 a 的取值范围；

(2)若 $x_1^2=x_1x_2$，求方程的两个根及 a 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

22.1 二次函数的图象和性质

第1课时 二次函数

名师点金

关于二次函数的定义要理解三点：

1. 函数解析式必须是整式，自变量的取值是全体实数，而在实际应用中，自变量的取值必须符合实际意义.
2. 确定二次函数解析式的各项系数及常数项时，要把函数解析式化为一般式.
3. 二次项系数不为0.

1 夯实基础·逐点练 ☞(答案见155页)

知识点1 二次函数的定义

1. 【中考·兰州】下列函数解析式中，一定为二次函数的是(　　)

A. $y=3x-1$　　B. $y=ax^2+bx+c$

C. $s=2t^2-2t+1$　　D. $y=x^2+\frac{1}{x}$

2. 下列各式中，y 是 x 的二次函数的是(　　)

A. $y=\frac{1}{x^2}$　　B. $y=x^2+\frac{1}{x}+1$

C. $y=2x^2-1$　　D. $y=\sqrt{x^2-1}$

3. 下列各式中，y 是 x 的二次函数的是(　　)

A. $y=ax^2+bx+c$　　B. $x^2+y-2=0$

C. $y^2-ax=2$　　D. $x^2-y^2+1=0$

4. 若函数 $y=(m-2)x^2+4x-5$(m 是常数)是二次函数，则(　　)

A. $m\neq-2$　　B. $m\neq2$

C. $m\neq3$　　D. $m\neq-3$

5. 若 $y=(m-1)x^{m^2+1}$ 是二次函数，则 m 的值是(　　)

A. 1　　B. -1

C. 1或-1　　D. 2

6. 对于任意实数 m，下列函数一定是二次函数的是(　　)

A. $y=mx^2+3x-1$　　B. $y=(m-1)x^2$

C. $y=(m-1)^2x^2$　　D. $y=(-m^2-1)x^2$

知识点2 二次函数的一般形式及函数值

7. 已知二次函数 $y=1-3x+5x^2$，则它的二次项系数 a，一次项系数 b，常数项 c 分别是(　　)

A. $a=1,b=-3,c=5$　　B. $a=1,b=3,c=5$

C. $a=5,b=3,c=1$　　D. $a=5,b=-3,c=1$

8. 关于函数 $y=(500-10x)(40+x)$，下列说法不正确的是(　　)

A. y 是 x 的二次函数　　B. 二次项系数是 -10

C. 一次项是100　　D. 常数项是20 000

*__9.__ 已知 x 是实数，且满足 $(x-2)(x-3)\sqrt{1-x}=0$，则相应的函数 $y=x^2+x+1$ 的值为(　　)

A. 13或3　　B. 7或3

C. 3　　D. 13或7或3

知识点3 实际问题与二次函数

10. 某农机厂四月份生产零件60万个，设该厂第二季度平均每月的增长率为 x，如果第二季度共生产零件 y 万个，那么 y 与 x 满足的函数关系式是(　　)

A. $y=60(1+x)^2$

B. $y=60+60(1+x)+60(1+x)^2$

C. $y=60(1+x)+60(1+x)^2$

D. $y=60+60(1+x)$

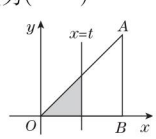
*__11.__ 如图，在 $\mathrm{Rt}\triangle AOB$ 中，$AB\perp OB$，且 $AB=OB=3$，设直线 $x=t(0<t<3)$ 截此三角形所得阴影部分的面积为 S，则 S 与 t 之间的函数关系式为(　　)

A. $S=t$

B. $S=\frac{1}{2}t^2$

C. $S=t^2$

D. $S=\frac{1}{2}t^2-1$



(第11题)

易错点 利用二次函数的定义求字母的值时，易忽略二次项系数不为0这一条件而导致错误

12. 当 $a=$_____时，函数 $y=(a-2)x^{a^2-2}+ax-1$ 是二次函数.

太阳灶与抛物线：抛物线的性质有着广泛的应用. 例如，在光学上，如果把光源放在抛物镜的焦点处，射出的光线经过抛物镜的反射，就变成了平行光线.(待续)

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞(答案见155页)

考查角度1　利用二次函数的解析式建立实际问题模型

13. 某商店以每副42元的价格购进一种手套,根据试销得知这种手套每天的销售量t(副)与每副的售价x(元)之间可以看成一次函数关系:$t=-4x+204$.请写出每天的销售利润y(元)与每副的售价x(元)之间的函数解析式,并确定自变量x的取值范围.

考查角度2　利用二次函数的解析式建立图形排列问题模型

14. 观察如图所示图形的构成规律.

(1)如果第n个图中有S个圆,试写出S与n的函数解析式;

(2)这个函数是不是二次函数?



(第14题)

Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞(答案见155页)

拔尖角度1　利用二次函数探究最值问题

15. 某广告公司设计一幅周长为12 m的矩形广告牌,设计费为每平方米1 000元,设矩形一边的长为x m,面积为S m^2.

(1)求S与x之间的函数解析式,并确定自变量x的取值范围;

(2)若要求设计的广告牌的边长为整数,请你填写下表,并探究当x取何值时,广告牌的设计费最多.

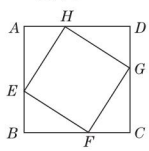
x/m					
S/m^2					
设计费/元					

拔尖角度2　利用二次函数解几何问题

16. 如图,正方形$EFGH$的顶点在边长为2的正方形$ABCD$的边上.设$AE=x$,正方形$EFGH$的面积为y.

(1)求y与x之间的函数关系式;

(2)若正方形$EFGH$的面积为2,求AE的长.



(第16题)

趣味数学　汽车前灯、探照灯、手电筒就是利用这个光学性质设计的.反过来,也可以把射来的平行光线集中于焦点处,太阳灶就是利用这个原理设计的.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

第2课时　二次函数 $y=ax^2$ 的图象和性质

名师点金

解二次函数 $y=ax^2$ 应用问题的三个步骤

1. **审题建模**：审查题目特点，建立 $y=ax^2$ 模型.
2. **确定解析式**：根据图形或者其他条件，确定点的坐标，用待定系数法确定二次函数解析式.
3. **解决问题**：利用解析式，根据纵坐标求横坐标，或根据横坐标求纵坐标解决问题.

Ⅰ 夯实基础·逐点练

（答案见155页）

知识点1 二次函数 $y=ax^2$ 的图象

1. 关于二次函数 $y=3x^2$ 的图象，下列说法错误的是(　　)

A. 它是一条抛物线

B. 它的开口向上，且关于 y 轴对称

C. 它的顶点是抛物线的最高点

D. 它与 $y=-3x^2$ 的图象关于 x 轴对称

2. 关于二次函数 $y=2x^2$ 与 $y=-2x^2$，下列叙述正确的有(　　)

①它们的图象都是抛物线；

②它们的图象的对称轴都是 y 轴；

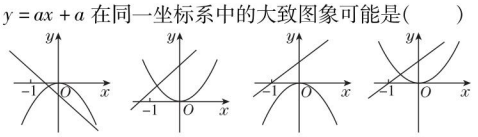
③它们的图象都经过点(0,0)；

④二次函数 $y=2x^2$ 的图象开口向上，二次函数 $y=-2x^2$ 的图象开口向下；

⑤它们的图象关于 x 轴对称.

A. 5个　　B. 4个　　C. 3个　　D. 2个

3. 【2019·呼和浩特】二次函数 $y=ax^2$ 与一次函数 $y=ax+a$ 在同一坐标系中的大致图象可能是(　　)



A　　B　　C　　D

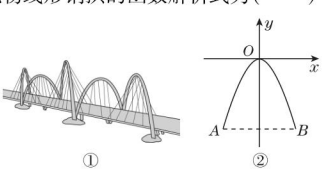
***4.** 【2019·山西】北中环桥是省城太原的一座跨汾河大桥(如图①)，它由五个高度不同，跨径也不同的抛物线形钢拱通过吊杆、拉索与主梁相连. 最高的钢拱如图②所示，此钢拱(近似看成二次函数的图象——抛物线)在同一竖直平面内，与拱脚所在的水平面相交于 A，B 两点. 拱高为78 m(即最高点 O 到 AB 的距离为78 m)，跨径为90 m(即 $AB=90$ m)，以最高点 O 为坐标原点，以平行于 AB 的直线为 x 轴建立平面直角坐标系. 则此抛物线形钢拱的函数解析式为(　　)

A. $y=\frac{26}{675}x^2$

B. $y=-\frac{26}{675}x^2$

C. $y=\frac{13}{1\,350}x^2$

D. $y=-\frac{13}{1\,350}x^2$



①　　②

（第4题）

知识点2 二次函数 $y=ax^2$ 的性质

5. 【2019·益阳】下列函数中，y 总随 x 增大而减小的是(　　)

A. $y=4x$　　B. $y=-4x$　　C. $y=x-4$　　D. $y=x^2$

6. 下列关于函数 $y=36x^2$ 的叙述中，错误的是(　　)

A. 图象的对称轴是 y 轴

B. 图象的顶点是原点

C. 当 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而增大

D. y 有最大值

7. 【中考·玉林】抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$，$y=x^2$，$y=-x^2$ 的共同性质是：①都是开口向上；②都以点(0,0)为顶点；③都以 y 轴为对称轴；④都关于 x 轴对称.

其中正确的有(　　)

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

8. 【中考·连云港】已知抛物线 $y=ax^2(a>0)$ 经过 $A(-2,y_1)$，$B(1,y_2)$ 两点，则下列关系式一定正确的是(　　)

A. $y_1>0>y_2$　　B. $y_2>0>y_1$

C. $y_1>y_2>0$　　D. $y_2>y_1>0$

***9.** 对于二次函数：①$y=3x^2$；②$y=\frac{1}{3}x^2$；③$y=\frac{4}{3}x^2$，它们的图象在同一坐标系中，开口大小的顺序用序号来表示应是(　　)

A. ②>③>①　　B. ②>①>③

C. ③>①>②　　D. ③>②>①

易错点 不能准确地掌握二次函数 $y=ax^2$ 的图象与性质

10. 已知二次函数 $y=x^2$，在 $-1\leqslant x\leqslant 4$ 这个范围内，求函数的最值.

雨后的彩虹：彩虹在雨后出现在天空中，它是一道横跨天空的七色彩带，红、橙、黄、绿、青、蓝、紫，宛如一座彩色的拱桥飞架天空.（待续）

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法·提升练 ☞(答案见155页)

考查角度1　利用二次函数 $y=ax^2$ 的图象的特征解相关问题

11. 已知函数 $y=(m+3)x^{m^2+3m-2}$ 是关于 x 的二次函数.

(1)求 m 的值.

(2)当 m 为何值时,该函数图象的开口向下?

(3)当 m 为何值时,该函数有最小值?

考查角度2　利用二次函数 $y=ax^2$ 的性质解相关问题

12. 根据下列条件分别求 a 的值或取值范围.

(1)函数 $y=(a-2)x^2$,当 $x>0$ 时,y 随 x 的增大而减小;当 $x<0$ 时,y 随 x 的增大而增大.

(2)函数 $y=(3a-2)x^2$ 有最大值.

(3)抛物线 $y=(a+2)x^2$ 与抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的形状相同.

(4)函数 $y=ax^{a^2+a}$ 的图象是开口向上的抛物线.

Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞(答案见155页)

拔尖角度1　利用二次函数图象的几何特征求点的坐标

13. 已知函数 $y=ax^2(a\neq0)$ 的图象与直线 $y=2x-3$ 交于点 $A(1,b)$.

(1)求 a 和 b 的值.

(2)当 x 取何值时,二次函数 $y=ax^2(a\neq0)$ 中的 y 随 x 的增大而增大?

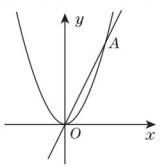
(3)求二次函数 $y=ax^2(a\neq0)$ 的图象与直线 $y=2x-3$ 的另一个交点 B 的坐标.

拔尖角度2　利用函数的图象探究存在性问题(分类讨论思想)

14. 如图,抛物线 $y=ax^2$ 与直线 $y=kx$ 在第一象限内交于点 $A(2,4)$.

(1)求抛物线的函数解析式.

(2)在 x 轴上是否存在一点 P,使 $\triangle AOP$ 为等腰三角形?若存在,请你求出点 P 的坐标;若不存在,请说明理由. 【导学号:7574456】



(第14题)

趣味数学　"东边日出西边雨,道是无晴却有晴""残虹收度雨,轶岸上新流""虹销雨霁,彩彻区明""虹收青嶂雨,乌没夕阳天".(待续)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

第3课时　二次函数 $y=ax^2+k$ 的图象和性质

名师点金

解二次函数 $y=ax^2+k$ 的问题要注意两点：

1. 二次项系数的符号⇔图象的开口方向；二次项系数的绝对值相等⇔抛物线的形状相同；k⇔顶点的纵坐标.

2. 抛物线 $y=ax^2+k$ 可由抛物线 $y=ax^2$ 向上（下）平移得到，可简记为“**上加下减**”.

1 夯实基础·逐点练

☞（答案见156页）

知识点1 二次函数 $y=ax^2+k$ 的图象

1. 抛物线 $y=2x^2-3$ 的顶点在（　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. x 轴上　　D. y 轴上

2. 在平面直角坐标系中，抛物线 $y=x^2-1$ 与 x 轴的交点的个数是（　　）

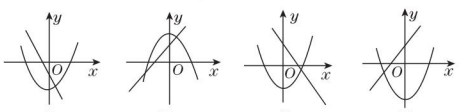
A. 3　　B. 2　　C. 1　　D. 0

3. 在二次函数：①$y=3x^2$；②$y=\frac{1}{2}x^2+1$；③$y=-\frac{4}{3}x^2-3$ 中，图象开口大小顺序用序号表示为（　　）

A. ①>②>③　　B. ①>③>②

C. ②>③>①　　D. ②>①>③

4. 【中考·泰安】在同一平面直角坐标系中，一次函数 $y=-mx+n^2$ 与二次函数 $y=x^2+m$ 的图象可能是（　　）



A　　B　　C　　D

***5.** 【2019·宜宾】已知抛物线 $y=x^2-1$ 与 y 轴交于点 A，与直线 $y=kx$（k 为任意实数）交于 B,C 两点，则下列结论不正确的是（　　）

A. 存在实数 k，使得 $\triangle ABC$ 为等腰三角形

B. 存在实数 k，使得 $\triangle ABC$ 的内角中有两角分别为30°和60°

C. 任意实数 k，使得 $\triangle ABC$ 都为直角三角形

D. 存在实数 k，使得 $\triangle ABC$ 为等边三角形

知识点2 二次函数 $y=ax^2+k$ 的性质

6. 对于二次函数 $y=3x^2+2$，下列说法错误的是（　　）

A. 最小值为2

B. 图象与 x 轴没有公共点

C. 当 $x<0$ 时，y 随 x 的增大而增大

D. 图象的对称轴是 y 轴

7. 【中考·河池】已知点 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ 均在抛物线 $y=x^2-1$ 上，下列说法正确的是（　　）

A. 若 $y_1=y_2$，则 $x_1=x_2$　　B. 若 $x_1=-x_2$，则 $y_1=-y_2$

C. 若 $0<x_1<x_2$，则 $y_1>y_2$　　D. 若 $x_1<x_2<0$，则 $y_1>y_2$

8. 点 $A(-1,y_1),B(2,y_2),C(3,y_3)$ 都在二次函数 $y=(a^2+1)x^2+2$ 的图象上，则 y_1,y_2,y_3 的大小关系是（　　）

A. $y_1<y_2<y_3$　　B. $y_1>y_2>y_3$

C. $y_2>y_1>y_3$　　D. $y_2<y_1<y_3$

知识点3 二次函数 $y=ax^2+k$ 与 $y=ax^2$ 之间的关系

9. 抛物线 $y=2x^2+1$ 是由抛物线 $y=2x^2$（　　）得到的.

A. 向上平移2个单位长度

B. 向下平移2个单位长度

C. 向上平移1个单位长度

D. 向下平移1个单位长度

10. 二次函数 $y=-3x^2+1$ 的图象是将（　　）

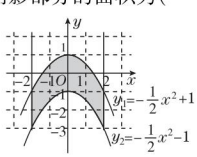
A. 抛物线 $y=3x^2$ 向左平移1个单位长度得到的

B. 抛物线 $y=-3x^2$ 向左平移1个单位长度得到的

C. 抛物线 $y=3x^2$ 向上平移1个单位长度得到的

D. 抛物线 $y=-3x^2$ 向上平移1个单位长度得到的

***11.** 如图，两条抛物线 $y_1=-\frac{1}{2}x^2+1,y_2=-\frac{1}{2}x^2-1$ 与分别经过点 $(-2,0),(2,0)$ 且平行于 y 轴的两条平行线围成的阴影部分的面积为（　　）



（第11题）

A. 8　　B. 6　　C. 10　　D. 4

易错点 对平移的规律理解不透彻

12. 能否通过上下平移二次函数 $y=\frac{1}{3}x^2$ 的图象，使得到的新的函数图象过点 $(3,-3)$？若能，说出平移的方向和距离；若不能，说明理由.

趣味数学　这些是诗人赞美彩虹的诗句，这是大多数人眼中的彩虹，但是在数学家的眼中，彩虹是一条开口向下的弧线，这条弧线就像我们抛出物体以及该物体下落的轨迹，所以叫做“抛物线”.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法·提升练 ☞(答案见156页)

考查角度1　利用二次函数 $y=ax^2$ 与 $y=ax^2+k$ 的关系求函数解析式

13. 抛物线 $y=ax^2+c$ 的顶点坐标是(0,2),且形状及开口方向与抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 相同.

(1)确定 a,c 的值;

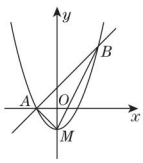
(2)画出抛物线 $y=ax^2+c$.

考查角度2　利用二次函数图象上点的坐标求函数解析式

14. 【中考·衡阳】如图,顶点 M 在 y 轴上的抛物线与直线 $y=x+1$ 相交于 A,B 两点,且点 A 在 x 轴上,点 B 的横坐标为2,连接 AM,BM.

(1)求抛物线的函数解析式;

(2)判断△ABM 的形状,并说明理由.



(第14题)

Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞(答案见156页)

拔尖角度1　利用抛物线的特征探究存在性问题

15. 已知二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2+1$,$A(2,m)$ 是这个二次函数图象上的一点,点 B 与点 A 关于该函数图象的对称轴对称.

(1)画出这个二次函数的图象及点 A,B.

(2)求△AOB 的面积.

(3)在这个函数图象上是否存在一点 P,使△APB 的面积是△AOB 的面积的一半?若存在,求出点 P 的坐标;若不存在,请说明理由.

拔尖角度2　利用二次函数的图象和性质求最值问题

16. 【2019·安徽】一次函数 $y=kx+4$ 与二次函数 $y=ax^2+c$ 的图象的一个交点坐标为(1,2),另一个交点是该二次函数图象的顶点.

(1)求 k,a,c 的值;

(2)过点 $A(0,m)(0<m<4)$ 且垂直于 y 轴的直线与二次函数 $y=ax^2+c$ 的图象相交于 B,C 两点,点 O 为坐标原点,记 $W=OA^2+BC^2$,求 W 关于 m 的函数解析式,并求 W 的最小值.

趣味数学　在一次战役后,一位长官气急败坏地质问他的士兵:"在打仗的时候,你为什么向后撤而不向前冲?"这个士兵理直气壮地回答:"长官,这完全不怪我,地球是圆的,我想从后面打他们."

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

第4课时　二次函数 $y=a(x-h)^2$ 的图象和性质

名师点金

1. 将抛物线 $y=ax^2$ 沿 x 轴**左右平移**可以得到抛物线 $y=a(x-h)^2$. 抛物线 $y=ax^2$ 的顶点坐标是(0,0)，抛物线 $y=a(x-h)^2$ 的顶点坐标是$(h,0)$，顶点始终在 x 轴上.
2. 对于函数 $y=a(x-h)^2$，若 $a>0$，则 $x<h$ 时，y 随 x 的增大而减小，$x>h$ 时，y 随 x 的增大而增大，函数有最小值0；若 $a<0$，则 $x<h$ 时，y 随 x 的增大而增大，$x>h$ 时，y 随 x 的增大而减小，函数有最大值0.

Ⅰ 夯实基础·逐点练 ☞（答案见156页）

知识点1 二次函数 $y=a(x-h)^2$ 的图象

1. 抛物线 $y=-5(x-2)^2$ 的顶点坐标是(　　)

A. $(-2,0)$　B. $(2,0)$　C. $(0,-2)$　D. $(0,2)$

2. 【中考·兰州】在下列二次函数中，其图象的对称轴为直线 $x=-2$ 的是(　　)

A. $y=(x+2)^2$　B. $y=2x^2-2$

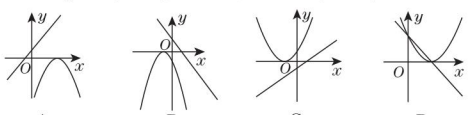
C. $y=-2x^2-2$　D. $y=2(x-2)^2$

3. 对于抛物线 $y=2(x-1)^2$，下列说法正确的有(　　)

①开口向上；②顶点坐标为$(0,-1)$；③对称轴为直线 $x=1$；④与 x 轴的交点坐标为$(1,0)$.

A. 1个　B. 2个　C. 3个　D. 4个

4. 在同一平面直角坐标系中，一次函数 $y=ax+c$ 和二次函数 $y=a(x+c)^2$ 的图象可能是(　　)



A　B　C　D

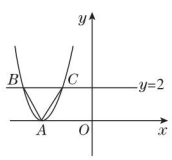
*5. 如图，坐标平面上有一顶点为 A 的抛物线，此抛物线与直线 $y=2$ 交于 B,C 两点，$\triangle ABC$ 为正三角形. 若 A 点坐标为$(-3,0)$，则此抛物线与 y 轴的交点坐标为(　　)

A. $\left(0,\frac{9}{2}\right)$

B. $\left(0,\frac{27}{2}\right)$

C. $(0,9)$

D. $(0,19)$



（第5题）

知识点2 二次函数 $y=a(x-h)^2$ 的性质

6. 关于二次函数 $y=-2(x+3)^2$，下列说法正确的是(　　)

A. 其图象的开口向上

B. 其图象的对称轴是直线 $x=3$

C. 其图象的顶点坐标是$(0,3)$

D. 当 $x>-3$ 时，y 随 x 的增大而减小

7. 已知抛物线 $y=-(x+1)^2$ 上的两点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，如果 $x_1<x_2<-1$，那么下列结论成立的是(　　)

A. $y_1<y_2<0$　B. $0<y_1<y_2$

C. $0<y_2<y_1$　D. $y_2<y_1<0$

*8. 已知二次函数 $y=-2(x+m)^2$，当 $x<-3$ 时，y 随 x 的增大而增大；当 $x>-3$ 时，y 随 x 的增大而减小，则当 $x=1$ 时，y 的值为(　　)

A. -12　B. 12　C. 32　D. -32

知识点3 二次函数 $y=a(x-h)^2$ 与 $y=ax^2$ 之间的关系

9. 【中考·海南】把抛物线 $y=x^2$ 平移得到抛物线 $y=(x+2)^2$，则这个平移过程正确的是(　　)

A. 向左平移2个单位长度

B. 向右平移2个单位长度

C. 向上平移2个单位长度

D. 向下平移2个单位长度

10. 对于任何实数 h，抛物线 $y=-x^2$ 与抛物线 $y=-(x-h)^2$ 的相同点是(　　)

A. 形状与开口方向相同　B. 对称轴相同

C. 顶点相同　D. 都有最低点

易错点 函数 $y=ax^2+c$ 与 $y=a(x-h)^2$ 的图象与性质区别不清

11. 对于二次函数 $y=3x^2+1$ 和 $y=3(x-1)^2$，以下说法：

①它们的图象都是开口向上；

②它们图象的对称轴都是 y 轴，顶点坐标都是$(0,0)$；

③当 $x>0$ 时，它们的函数值 y 都是随着 x 的增大而增大；

④它们图象的开口的大小是一样的.

其中正确的说法有(　　)

A. 1个　B. 2个　C. 3个　D. 4个

怎样改变“女性跑得比男性慢”的说法：若比较两性赛跑的速度时，加入“身高”的因素，会对选手的表现产生什么变化？（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞(答案见156页)

考查角度1　利用二次函数的图象和性质求解析式

12. 已知抛物线 $y=a(x-h)^2$ 的对称轴为直线 $x=-2$，且过点(1，-3).

(1)求抛物线的函数解析式.

(2)画出函数的图象.

(3)从图象上观察，当 x 取何值时，y 随 x 的增大而增大？当 x 取何值时，函数有最大值(或最小值)？

考查角度2　利用二次函数的图象平移求函数解析式

13. 已知抛物线 $y=a(x-h)^2$ 向右平移3个单位长度后得到抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2$.

(1)求 a，h 的值；

(2)写出抛物线 $y=a(x-h)^2$ 的对称轴及顶点坐标.

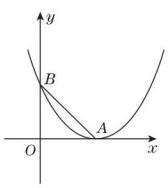
Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞(答案见157页)

拔尖角度1　利用二次函数图象的位置变换探究几何问题

14. 如图，将抛物线 $y=x^2$ 向右平移 a 个单位长度后，顶点为 A，与 y 轴交于点 B，且 $\triangle AOB$ 为等腰直角三角形.

(1)求 a 的值.

(2)图中的抛物线上是否存在点 C，使 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形？若存在，直接写出点 C 的坐标，并求 $S_{\triangle ABC}$；若不存在，请说明理由.



(第14题)

拔尖角度2　利用二次函数的图象和性质解几何问题

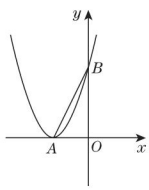
15. 如图，已知二次函数 $y=(x+2)^2$ 的图象与 x 轴交于点 A，与 y 轴交于点 B.

(1)写出点 A，点 B 的坐标.

(2)求 $S_{\triangle AOB}$.

(3)求出抛物线的对称轴.

(4)在对称轴上是否存在一点 P，使以 P，A，O，B 为顶点的四边形为平行四边形？若存在，求出 P 点的坐标；若不存在，请说明理由.



(第15题)

趣味数学　体育专栏作家按照这个想法，计算出男子、女子一百米世界纪录的每秒身高比(速度除以其身高)分别为5.55和5.64.因此，他的结论是跑得最快的女人比跑得最快的男人还要快.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第5课时　二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象和性质

名师点金

抛物线 $y=ax^2$ 平移得到抛物线 $y=a(x-h)^2+k$ 的方法“八字诀”

平移规律是“**上加下减，左加右减**”.

1. “上加下减”是指抛物线 $y=ax^2$ 向上平移，则在 ax^2 后加上一个正数；向下平移，则在 ax^2 后减去一个正数.

2. “左加右减”是指抛物线 $y=ax^2$ 向左平移，则括号内 x 后面加上一个正数；向右平移，则括号内 x 后面减去一个正数.

Ⅰ 夯实基础·逐点练

（答案见157页）

知识点1 二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 与 $y=ax^2$ 之间的关系

1. 【2018·广安】抛物线 $y=(x-2)^2-1$ 可以由抛物线 $y=x^2$ 平移而得到，下列平移正确的是(　　)

A. 先向左平移2个单位长度，然后向上平移1个单位长度

B. 先向左平移2个单位长度，然后向下平移1个单位长度

C. 先向右平移2个单位长度，然后向上平移1个单位长度

D. 先向右平移2个单位长度，然后向下平移1个单位长度

2. 【2019·哈尔滨】将抛物线 $y=2x^2$ 向上平移3个单位长度，再向右平移2个单位长度，所得到的抛物线为(　　)

A. $y=2(x+2)^2+3$

B. $y=2(x-2)^2+3$

C. $y=2(x-2)^2-3$

D. $y=2(x+2)^2-3$

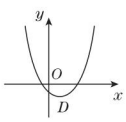
***3.** 【2019·玉林】已知抛物线 $C:y=\frac{1}{2}(x-1)^2-1$，顶点为 D（如图），将 C 沿水平方向向右（或向左）平移 $|m|$ 个单位长度，得到抛物线 C_1，顶点为 D_1，C 与 C_1 相交于点 Q，若 $\angle DQD_1=60°$，则 m 等于(　　)

A. $\pm4\sqrt{3}$

B. $\pm2\sqrt{3}$

C. -2 或 $2\sqrt{3}$

D. -4 或 $4\sqrt{3}$



（第3题）

知识点2 二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象

4. 【2019·衢州】二次函数 $y=(x-1)^2+3$ 图象的顶点坐标是(　　)

A. $(1,3)$　　B. $(1,-3)$

C. $(-1,3)$　　D. $(-1,-3)$

5. 【中考·益阳】若抛物线 $y=(x-m)^2+(m+1)$ 的顶点在第一象限，则 m 的取值范围为(　　)

A. $m>1$　　B. $m>0$

C. $m>-1$　　D. $-1<m<0$

6. 下列二次函数中，图象以直线 $x=2$ 为对称轴，且经过点 $(0,1)$ 的是(　　)

A. $y=(x-2)^2+1$　　B. $y=(x+2)^2+1$

C. $y=(x-2)^2-3$　　D. $y=(x+2)^2-3$

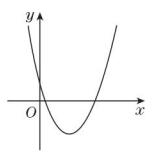
7. 二次函数 $y=a(x+m)^2+n$ 的图象如图所示，则一次函数 $y=mx+n$ 的图象经过(　　)

A. 第一、二、三象限

B. 第一、二、四象限

C. 第二、三、四象限

D. 第一、三、四象限



（第7题）

知识点3 二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的性质

8. 【中考·泰安】对于抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2+3$，有下列结论：

①抛物线的开口向下；

②对称轴为直线 $x=1$；

③顶点坐标为 $(-1,3)$；

④$x>1$ 时，y 随 x 的增大而减小.

其中正确的个数为(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

***9.** 【2019·凉山州】当 $0\leqslant x\leqslant3$ 时，直线 $y=a$ 与抛物线 $y=(x-1)^2-3$ 有交点，则 a 的取值范围是_____.

易错点 对顶点式 $y=a(x-h)^2+k$ 在指定条件下的最值理解不透而致错

10. 【中考·舟山】二次函数 $y=-(x-1)^2+5$，当 $m\leqslant x\leqslant n$ 且 $mn<0$ 时，y 的最小值为 $2m$，最大值为 $2n$，则 $m+n$ 的值为(　　)

A. $\frac{5}{2}$　　B. 2　　C. $\frac{3}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

趣味数学

哥尼斯堡七桥问题：18世纪时，欧洲有一个风景秀丽的小城哥尼斯堡（今俄罗斯加里宁格勒），那里的普雷格尔河上有七座桥，将河中的两个岛与河岸连接起来.（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

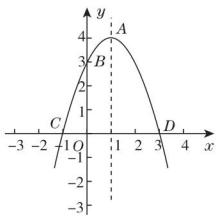
Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞(答案见157页)

考查角度1 利用抛物线的特征求函数的解析式

11. 【中考 · 齐齐哈尔】如图,已知抛物线的顶点为$A(1,4)$,抛物线与y轴交于点$B(0,3)$,与x轴交于C,D两点,点P是x轴上的一个动点.

(1)求此抛物线的解析式;

(2)当$PA+PB$的值最小时,求点P的坐标.



(第11题)

考查角度2 利用抛物线的平移求函数的解析式

12. 把二次函数$y=a(x-h)^2+k$的图象先向左平移2个单位长度,再向上平移4个单位长度,得到二次函数$y=\frac{1}{2}(x+1)^2-1$的图象.

(1)试确定a,h,k的值;

(2)指出二次函数$y=a(x-h)^2+k$图象的开口方向、对称轴和顶点坐标.

Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞(答案见157页)

拔尖角度1 利用二次函数图象解实际应用问题

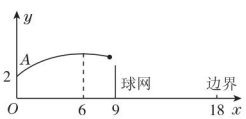
(建模思想)

13. 【中考 · 天水】如图,排球运动员站在点O处练习发球,将球从O点正上方2 m的A处发出,把球看成点,其运行的高度y(m)与运行的水平距离x(m)满足关系式$y=a(x-6)^2+h$. 已知球网与O点的水平距离为9 m,高度为2.43 m,球场的边界距O点的水平距离为18 m.

(1)当$h=2.6$时,求y与x的关系式(不要求写出自变量x的取值范围).

(2)当$h=2.6$时,球能否越过球网?球会不会出边界?请说明理由.

(3)若球一定能越过球网,又不出边界,求h的取值范围.



(第13题)

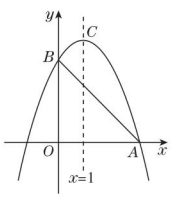
拔尖角度2 利用二次函数的图象探究动点问题

(分类讨论思想)

14. 如图,已知抛物线$y=a(x-h)^2+k$与x轴的一个交点为$A(3,0)$,与y轴的交点为$B(0,3)$,对称轴为直线$x=1$.

(1)求抛物线的函数解析式;

(2)已知点M为y轴上的一个动点,当$\triangle ABM$为等腰三角形时,求点M的坐标.



(第14题)

趣味数学　有人提出了一个问题:一个人怎样才能一次走遍七座桥,每座桥只走过一次,最后回到出发点?欧拉研究并解决了此问题,他把问题归结为“一笔画”的问题,证明上述走法是不可能的.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第6课时　二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象和性质

名师点金

利用二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象信息判断各项系数的符号的方法

1. a 决定抛物线的开口方向，简记为“**上正下负**”.
2. c 决定抛物线与 y 轴的交点位置，简记为“**上正下负原点**0”.
3. a,b 的符号共同决定对称轴的位置，简记为“**左同右异，y 轴 b 的值为**0”.

另外还要注意特殊值的意义，如$x=1,-1,2$ 时 y 的值的符号. 可以由图象的位置来判断各项系数的符号，也可以由各项系数的符号来判断图象的位置.

Ⅰ 夯实基础·逐点练

☞（答案见157页）

知识点1 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 与 $y=a(x-h)^2+k$ 之间的关系

1. 【2018·山西】用配方法将二次函数 $y=x^2-8x-9$ 化为 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式为(　　)

A. $y=(x-4)^2+7$　　B. $y=(x-4)^2-25$

C. $y=(x+4)^2+7$　　D. $y=(x+4)^2-25$

2. 【2019·济宁】将抛物线 $y=x^2-6x+5$ 向上平移两个单位长度，再向右平移一个单位长度后，得到的抛物线解析式是(　　)

A. $y=(x-4)^2-6$　　B. $y=(x-1)^2-3$

C. $y=(x-2)^2-2$　　D. $y=(x-4)^2-2$

3. 【中考·眉山】若抛物线 $y=x^2-2x+3$ 不动，将平面直角坐标系 xOy 先沿水平方向向右平移一个单位长度，再沿铅直方向向上平移三个单位长度，则原抛物线的解析式应变为(　　)

A. $y=(x-2)^2+3$　　B. $y=(x-2)^2+5$

C. $y=x^2-1$　　D. $y=x^2+4$

知识点2 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象和性质

4. 【2019·重庆】抛物线 $y=-3x^2+6x+2$ 的对称轴是(　　)

A. 直线 $x=2$　　B. 直线 $x=-2$

C. 直线 $x=1$　　D. 直线 $x=-1$

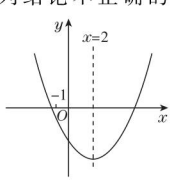
5. 【2019·遂宁】二次函数 $y=x^2-ax+b$ 的图象如图所示，对称轴为直线 $x=2$，下列结论不正确的是(　　)

A. $a=4$

B. 当 $b=-4$ 时，顶点的坐标为 $(2,-8)$

C. 当 $x=-1$ 时，$b>-5$

D. 当 $x>3$ 时，y 随 x 的增大而增大



（第5题）

6. 【2019·温州】已知二次函数 $y=x^2-4x+2$，关于该函数在 $-1\leqslant x\leqslant 3$ 的取值范围内，下列说法正确的是(　　)

A. 有最大值 -1，有最小值 -2

B. 有最大值0，有最小值 -1

C. 有最大值7，有最小值 -1

D. 有最大值7，有最小值 -2

***7.** 【2019·福建】若二次函数 $y=|a|x^2+bx+c$ 的图象经过 $A(m,n)$，$B(0,y_1)$，$C(3-m,n)$，$D(\sqrt{2},y_2)$，$E(2,y_3)$，则 y_1,y_2,y_3 的大小关系是(　　)

A. $y_1<y_2<y_3$　　B. $y_1<y_3<y_2$

C. $y_3<y_2<y_1$　　D. $y_2<y_3<y_1$

知识点3 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 a,b,c 之间的关系

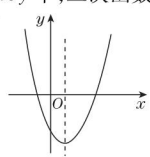
8. 【中考·成都】在平面直角坐标系 xOy 中，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图所示，下列说法正确的是(　　)

A. $abc<0$，$b^2-4ac>0$

B. $abc>0$，$b^2-4ac>0$

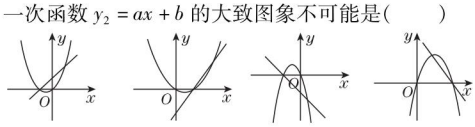
C. $abc<0$，$b^2-4ac<0$

D. $abc>0$，$b^2-4ac<0$



（第8题）

***9.** 【2019·湖州】已知 a,b 是非零实数，$|a|>|b|$，在同一平面直角坐标系中，二次函数 $y_1=ax^2+bx$ 与一次函数 $y_2=ax+b$ 的大致图象不可能是(　　)



A　　B　　C　　D

易错点 不善于结合方程的根的知识而致错

10. 【中考·黄石】以 x 为自变量的二次函数 $y=x^2-2(b-2)x+b^2-1$ 的图象不经过第三象限，则实数 b 的取值范围是(　　)

A. $b\geqslant\frac{5}{4}$　　B. $b\geqslant 1$ 或 $b\leqslant -1$

C. $b\geqslant 2$　　D. $1\leqslant b\leqslant 2$

我们在运动会中进行铅球比赛时，如何能用巧劲把沉重的铅球扔得最远呢？（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法·提升练 ☞(答案见158页)

考查角度1 利用二次函数的特征判断二次函数的图象与x轴的交点情况

11. 【2018·云南】已知二次函数$y=-\frac{3}{16}x^2+bx+c$的图象经过$A(0,3)$,$B\left(-4,-\frac{9}{2}\right)$两点.

(1)求b,c的值.

(2)二次函数$y=-\frac{3}{16}x^2+bx+c$的图象与x轴是否有公共点?若有,求出公共点的坐标;若没有,请说明理由.

考查角度2 利用二次函数的图象和性质求字母的取值范围

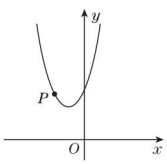
12. 【2019·宁波】如图,已知二次函数$y=x^2+ax+3$的图象经过点$P(-2,3)$.

(1)求a的值和图象的顶点坐标.

(2)点$Q(m,n)$在该二次函数图象上.

①当$m=2$时,求n的值;

②若点Q到y轴的距离小于2,请根据图象直接写出n的取值范围.



(第12题)

Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞(答案见158页)

拔尖角度1 利用二次函数的图象和性质求交点图形的面积

13. 【2018·黄冈】已知直线l:$y=kx+1$与抛物线$y=x^2-4x$. 【导学号:7574456】

(1)求证:直线l与该抛物线总有两个交点.

(2)设直线l与该抛物线的两个交点为A,B,O为原点,当$k=-2$时,求$\triangle OAB$的面积.

拔尖角度2 利用二次函数的图象和性质求最值问题(分段讨论法)

14. 【2019·台州】已知函数$y=x^2+bx+c$(b,c为常数)的图象经过点$(-2,4)$.

(1)求b,c满足的关系式;

(2)设该函数图象的顶点坐标是(m,n),当b的值变化时,求n关于m的函数解析式;

(3)若该函数的图象不经过第三象限,当$-5\leqslant x\leqslant 1$时,函数的最大值与最小值之差为16,求b的值.

更多提分招数详见《极速提分法》第12页。

趣味数学　经过实验和计算发现,当我们使铅球抛出的弧线与水平线的夹角为45°时,扔出的距离最远.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

* 第7课时　用待定系数法求二次函数解析式

名师点金

用待定系数法求二次函数解析式，选择解析式类型的方法

若已知图象上三个任意点的坐标，则利用一般式 $y=ax^2+bx+c$ 求；若已知图象的顶点坐标（或对称轴或函数的最值），则利用顶点式 $y=a(x-h)^2+k$ 求；若已知图象与 x 轴的两个交点，则利用交点式 $y=a(x-x_1)(x-x_2)$ 求.

Ⅰ 夯实基础·逐点练

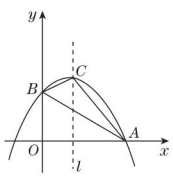
☞（答案见158页）

知识点1 用一般式（三点式）确定二次函数的解析式

1. 【2018·宁夏】如图，抛物线 $y=-\frac{1}{3}x^2+bx+c$ 经过点 $A(3\sqrt{3},0)$ 和点 $B(0,3)$，且这个抛物线的对称轴为直线 l，顶点为 C.

（1）求抛物线的解析式；

（2）连接 AB,AC,BC，求 $\triangle ABC$ 的面积.



（第1题）

知识点2 用顶点式确定二次函数的解析式

2. 已知 $A(1,0),B(0,-1),C(-1,2),D(2,-1),E(4,2)$ 五个点，抛物线 $y=a(x-1)^2+k(a>0)$ 经过其中三个点.

（1）求证：C,E 两点不可能同时在抛物线 $y=a(x-1)^2+k(a>0)$ 上；

（2）点 A 在抛物线 $y=a(x-1)^2+k(a>0)$ 上吗？为什么？

（3）求 a 和 k 的值.

知识点3 用交点式确定二次函数的解析式

3. 【2019·烟台】已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的 y 与 x 的部分对应值如下表：

x	-1	0	2	3	4
y	5	0	-4	-3	0

下列结论：①抛物线的开口向上；

②抛物线的对称轴为直线 $x=2$；

③当 $0<x<4$ 时，$y>0$；

④抛物线与 x 轴的两个交点间的距离是4；

⑤若 $A(x_1,2),B(x_2,3)$ 是抛物线上两点，则 $x_1<x_2$.

其中正确的个数是（　　）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

4. 在平面直角坐标系中，设二次函数为 $y=(x+a)(x-a-1)$，其中 $a\neq0$.

（1）若此二次函数的图象经过点 $(1,-2)$，求该二次函数的解析式；

（2）若一次函数 $y=ax+b$ 的图象与二次函数的图象经过 x 轴上同一点，探究实数 a,b 满足的关系式；

（3）已知点 $P(x_0,m)$ 和 $Q(1,n)$ 在二次函数的图象上，若 $m<n$，求 x_0 的取值范围.

趣味数学

1998年我国大洪水期间，为了确保武汉、南京等大工业城市的安全，有关部门提出荆江分洪的方案.20吨炸药已经装好，爆破进入倒计时，但这一方案在最后一刻被放弃.（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

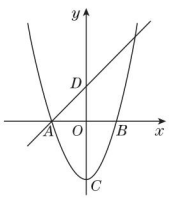
Ⅱ 整合方法·提升练 ☞(答案见159页)

考查角度1 利用二次函数图象的平移求函数的解析式

5. 【2018·苏州】如图,已知抛物线 $y=x^2-4$ 与 x 轴交于点 A,B(点 A 位于点 B 的左侧),C 为顶点,直线 $y=x+m$ 经过点 A,与 y 轴交于点 D.

(1)求线段 AD 的长;

(2)平移该抛物线得到一条新抛物线,设新抛物线的顶点为 C',若新抛物线经过点 D,并且新抛物线的顶点和原抛物线的顶点的连线 CC' 平行于直线 AD,求新抛物线对应的函数解析式.



(第5题)

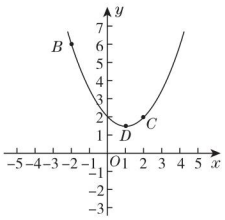
考查角度2 利用直线的平移与二次函数图象的交点情况求字母范围

6. 【中考·菏泽】如图,在平面直角坐标系 xOy 中,抛物线 $y=ax^2+bx+2$ 过 $B(-2,6)$,$C(2,2)$ 两点.

(1)试求抛物线的函数解析式;

(2)记抛物线的顶点为 D,求 $\triangle BCD$ 的面积;

(3)若直线 $y=-\frac{1}{2}x$ 向上平移 c 个单位长度所得的直线与抛物线段 BDC(包括端点 B,C)部分有两个交点,求 c 的取值范围.



(第6题)

更多提分招数详见《极速提分法》第14页。

趣味数学　据当时的新闻报道,水利专家组用数学里的有限元法对荆江大堤的体积渗漏进行了测算,确定出一个安全系数.按照这个结果,水位即使涨到45.3米,也可以坚持对长江大堤严防死守,因此不用分洪.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

阶段核心归类

二次函数的图象和性质的九种常见类型 ☞（答案见159页）

名师点金

二次函数的图象和性质是学习一次函数的图象和性质的拓展，是对一次函数图象和性质的一次升华，是后面二次函数与一元二次方程、二次函数的应用的预备知识，是各类考试的必考内容，它的最大特点是结合图象来研究二次函数的性质，考题所涉及的内容主要有图象的顶点坐标、开口方向、对称轴、函数的增减性，图象的平移及求二次函数的解析式等.

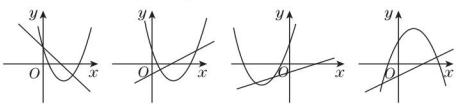
类型1 二次函数的图象在解题中的应用

1. 【2018·岳阳】抛物线 $y=3(x-2)^2+5$ 的顶点坐标是(　　)

A. $(-2,5)$　　B. $(-2,-5)$

C. $(2,5)$　　D. $(2,-5)$

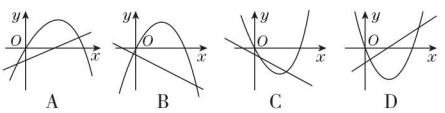
2. 【2018·德州】如图，函数 $y=ax^2-2x+1$ 和 $y=ax-a$（a 是常数，且 $a\neq0$）在同一平面直角坐标系中的图象可能是(　　)



A　　B　　C　　D

类型2 二次函数的性质在解题中的应用

3. 如图，二次函数 $y=ax^2+bx$ 和一次函数 $y=ax+b$ 在同一坐标系内的图象可能是(　　)



A　　B　　C　　D

4. 【2018·南通】在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线 $y=x^2-2(k-1)x+k^2-\frac{5}{2}k$（$k$ 为常数）.

(1) 若抛物线经过点 $(1,k^2)$，求 k 的值；

(2) 若抛物线经过点 $(2k,y_1)$ 和点 $(2,y_2)$，且 $y_1>y_2$，求 k 的取值范围；

(3) 若将抛物线向右平移1个单位长度得到新抛物线，当 $1\leqslant x\leqslant2$ 时，新抛物线对应的函数有最小值 $-\frac{3}{2}$，求 k 的值.

类型3 二次函数图象的平移在解题中的应用

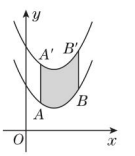
5. 【中考·盐城】如图，将函数 $y=\frac{1}{2}(x-2)^2+1$ 的图象沿 y 轴向上平移得到一条新函数的图象，其中点 $A(1,m)$，$B(4,n)$ 平移后的对应点分别为点 A'，B'，若曲线段 AB 扫过的面积为9（图中的阴影部分），则新图象的函数解析式是(　　)

A. $y=\frac{1}{2}(x-2)^2-2$

B. $y=\frac{1}{2}(x-2)^2+7$

C. $y=\frac{1}{2}(x-2)^2-5$

D. $y=\frac{1}{2}(x-2)^2+4$



（第5题）

6. 已知抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2+bx+c$ 经过点 $(1,0)$，$\left(0,\frac{3}{2}\right)$.

(1) 求该抛物线的函数解析式；

(2) 将抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2+bx+c$ 平移，使其顶点恰好落在原点，请写出一种平移的方法及平移后的函数解析式.

趣味数学

在清代乾隆五十年的时候，乾隆皇帝在乾清宫摆下千叟宴，约三千位老年人应邀参加宴会. 其中有一位客人的年纪特别大，多大呢？ 乾隆皇帝说了，不过不是明说，而是出了一副对联.（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型4　二次函数图象上的点的坐标特征在解题中的应用

7. 【2018·河北】对于题目“一段抛物线 $L: y=-x(x-3)+c(0\leqslant x\leqslant 3)$ 与直线 $l: y=x+2$ 有唯一公共点，若 c 为整数，确定所有 c 的值.”甲的结果是 $c=1$，乙的结果是 $c=3$ 或 4，则(　　)

A. 甲的结果正确

B. 乙的结果正确

C. 甲、乙的结果合在一起才正确

D. 甲、乙的结果合在一起也不正确

8. 【2018·杭州】设二次函数 $y=ax^2+bx-(a+b)$ (a，b 是常数，$a\neq 0$).

(1) 判断该二次函数图象与 x 轴的交点的个数，说明理由；

(2) 若该二次函数图象经过 $A(-1,4)$，$B(0,-1)$，$C(1,1)$ 三个点中的两个，求该二次函数的解析式；

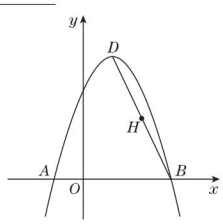
(3) 若 $a+b<0$，点 $P(2,m)$ ($m>0$) 在该二次函数图象上，求证：$a>0$.

类型5　二次函数图象上的线段在解题中的应用

9. 【2018·牡丹江】如图，抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 经过 $A(-1,0)$，$B(3,0)$ 两点，点 D 为抛物线的顶点，连接 BD，点 H 为 BD 的中点. 请解答下列问题：

(1) 求抛物线的解析式及顶点 D 的坐标；

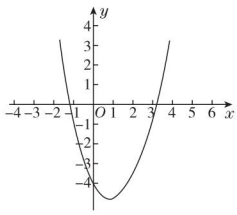
(2) 在 y 轴上找一点 P，使 $PD+PH$ 的值最小，则 $PD+PH$ 的最小值为_____.



(第 9 题)

类型6　二次函数图象上的直线在解题中的应用

10. 【中考·郴州】设 a，b 是任意两个实数，用 $\max\{a,b\}$ 表示 a，b 两数中较大者，例如：$\max\{-1,-1\}=-1$，$\max\{1,2\}=2$，$\max\{4,3\}=4$. 参照上面的材料，解答下列问题：



(第 10 题)

(1) $\max\{5,2\}=$_____，$\max\{0,3\}=$_____；

(2) 若 $\max\{3x+1,-x+1\}=-x+1$，求 x 的取值范围；

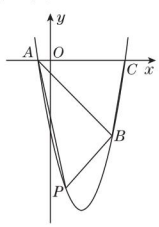
(3) 求函数 $y=x^2-2x-4$ 与 $y=-x+2$ 的图象的交点坐标. 函数 $y=x^2-2x-4$ 的图象如图所示，请你在图中作出函数 $y=-x+2$ 的图象，并根据图象直接写出 $\max\{-x+2,x^2-2x-4\}$ 的最小值.

类型7　二次函数图象上的四边形在解题中的应用

11. 【中考·娄底节选】如图，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ (a，b，c 为常数，$a\neq 0$) 经过点 $A(-1,0)$，$B(5,-6)$，$C(6,0)$.

(1) 求抛物线的解析式；

(2) 如图，在直线 AB 下方的抛物线上是否存在点 P 使四边形 $PACB$ 的面积最大？若存在，请求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.



(第 11 题)

趣味数学　上联：花甲重开，外加三七岁月. 大臣纪昀在一旁凑热闹，对出了下联：古稀双庆，又多一个春秋. 这位老人的岁数究竟是多少？(答案：141 岁)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

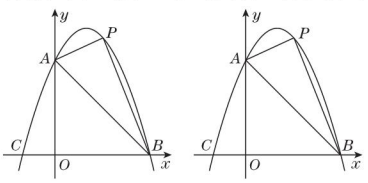
类型8 二次函数的最值在解题中的应用

12. 【2018·资阳】已知：如图，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与坐标轴分别交于点 $A(0,6)$，$B(6,0)$，$C(-2,0)$，点 P 是线段 AB 上方抛物线上的一个动点.

(1) 求抛物线的解析式.

(2) 当点 P 运动到什么位置时，$\triangle PAB$ 的面积有最大值？

(3) 过点 P 作 x 轴的垂线，交线段 AB 于点 D，再过点 P 作 $PE\parallel x$ 轴交抛物线于点 E，连接 DE，请问是否存在点 P 使 $\triangle PDE$ 为等腰直角三角形？若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，说明理由.



备用图

（第 12 题）

类型9 求二次函数中字母的取值范围在解题中的应用

13. 【2019·长春】已知函数 $y=\begin{cases}-x^2+nx+n(x\geqslant n),\\ -\frac{1}{2}x^2+\frac{n}{2}x+\frac{n}{2}(x<n).\end{cases}$（$n$ 为常数）

(1) 当 $n=5$ 时：

①点 $P(4,b)$ 在此函数图象上，求 b 的值；

②求此函数的最大值.

(2) 已知线段 AB 的两个端点坐标分别为 $A(2,2)$，$B(4,2)$，当此函数的图象与线段 AB 只有一个交点时，直接写出 n 的取值范围.

(3) 当此函数图象上有 4 个点到 x 轴的距离等于 4 时，求 n 的取值范围.

更多提分招数详见《极速提分法》第 17 页。

数学是一切知识中的最高形式.

——柏拉图

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

22.2　二次函数与一元二次方程

第1课时　二次函数与一元二次方程之间的关系

名师点金

判断抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴交点的个数的方法

当 $b^2-4ac>0$ 时，有两个交点；当 $b^2-4ac=0$ 时，有一个交点；当 $b^2-4ac<0$ 时，没有交点.

1 夯实基础·逐点练 ☞(答案见161页)

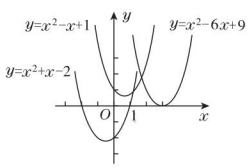
知识点1　二次函数与一元二次方程之间的关系

1. 观察图象(如图)填空：

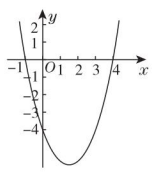
(1)二次函数 $y=x^2+x-2$ 的图象与 x 轴有_____个交点，则一元二次方程 $x^2+x-2=0$ 的根的判别式 Δ _____ 0；

(2)二次函数 $y=x^2-6x+9$ 的图象与 x 轴有_____个交点，则一元二次方程 $x^2-6x+9=0$ 的根的判别式 Δ _____ 0；

(3)二次函数 $y=x^2-x+1$ 的图象与 x 轴_____交点，则一元二次方程 $x^2-x+1=0$ 的根的判别式 Δ _____ 0.



(第1题)



(第2题)

2. 【中考·柳州】小兰画了一个函数 $y=x^2+ax+b$ 的图象如图所示，则关于 x 的方程 $x^2+ax+b=0$ 的解是(　　)

A. 无解　　B. $x=1$

C. $x=-4$　　D. $x=-1$ 或 $x=4$

3. 【2019·梧州】已知 $m>0$，关于 x 的一元二次方程 $(x+1)(x-2)-m=0$ 的解为 x_1，x_2 $(x_1<x_2)$，则下列结论正确的是(　　)

A. $x_1<-1<2<x_2$　　B. $-1<x_1<2<x_2$

C. $-1<x_1<x_2<2$　　D. $x_1<-1<x_2<2$

***4.** 【2019·岳阳】对于一个函数，当自变量 x 取 a 时，函数值 y 也等于 a，我们称 a 为这个函数的不动点. 如果二次函数 $y=x^2+2x+c$ 有两个相异的不动点 x_1，x_2，且 $x_1<1<x_2$，则 c 的取值范围是(　　)

A. $c<-3$　　B. $c<-2$

C. $c<\frac{1}{4}$　　D. $c<1$

知识点2　二次函数与其图象与 x 轴的交点个数之间的关系

5. 【2019·荆门】抛物线 $y=-x^2+4x-4$ 与坐标轴的交点个数为(　　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

6. 【2018·天津】已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ $(a,b,c$ 为常数，$a\neq0)$ 经过点 $(-1,0)$，$(0,3)$，其对称轴在 y 轴右侧. 有下列结论：

①抛物线经过点 $(1,0)$；②方程 $ax^2+bx+c=2$ 有两个不相等的实数根；③ $-3<a+b<3$.

其中，正确结论的个数为(　　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

***7.** 【2019·杭州】在平面直角坐标系中，已知 $a\neq b$，设函数 $y=(x+a)(x+b)$ 的图象与 x 轴有 M 个交点，函数 $y=(ax+1)(bx+1)$ 的图象与 x 轴有 N 个交点，则(　　)

A. $M=N-1$ 或 $M=N+1$　　B. $M=N-1$ 或 $M=N+2$

C. $M=N$ 或 $M=N+1$　　D. $M=N$ 或 $M=N-1$

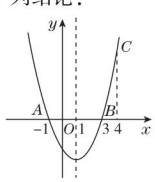
***8.** 【2018·大庆】如图，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象经过点 $A(-1,0)$、点 $B(3,0)$、点 $C(4,y_1)$，若点 $D(x_2,y_2)$ 是抛物线上任意一点，有下列结论：

①二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的最小值为 $-4a$；

②若 $-1\leqslant x_2\leqslant4$，则 $0\leqslant y_2\leqslant5a$；

③若 $y_2>y_1$，则 $x_2>4$；

④一元二次方程 $cx^2+bx+a=0$ 的两个根为 -1 和 $\frac{1}{3}$.



(第8题)

其中正确结论的个数是(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

易错点　混淆“与 x 轴交点”和“与坐标轴交点”而致错

9. 【中考·徐州】若函数 $y=x^2-2x+b$ 的图象与坐标轴有三个交点，则 b 的取值范围是(　　)

A. $b<1$ 且 $b\neq0$　　B. $b>1$

C. $0<b<1$　　D. $b<1$

趣味数学　**聪明的马克·吐温**：在一个社交舞会上，一个自称为慈善家的人得意洋洋地告诉马克·吐温：“上个星期我根据困难程度将50枚银元施舍给了10个穷人，他们得到的数目各不相同.”(待续)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

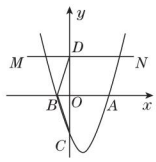
Ⅱ 整合方法·提升练 ☞（答案见161页）

考查角度1 利用抛物线与 x 轴的交点情况求点的坐标

10. 【2019·黑龙江】如图，在平面直角坐标系中，抛物线 $y=x^2+bx+c$ 与 x 轴交于点 $A(3,0)$、点 $B(-1,0)$，与 y 轴交于点 C.

(1)求抛物线的函数解析式；

(2)过点 $D(0,3)$ 作直线 $MN/\!/x$ 轴，点 P 在直线 MN 上且 $S_{\triangle PAC}=S_{\triangle DBC}$，直接写出点 P 的坐标.



（第10题）

考查角度2 利用抛物线与线段的交点情况求字母的取值范围

11. 【2019·北京】在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y=ax^2+bx-\frac{1}{a}$ 与 y 轴交于点 A，将点 A 向右平移2个单位长度，得到点 B，点 B 在抛物线上.

(1)求点 B 的坐标(用含 a 的式子表示)；

(2)求抛物线的对称轴；

(3)已知点 $P\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{a}\right)$，$Q(2,2)$，若抛物线与线段 PQ 恰有一个公共点，结合函数图象，求 a 的取值范围.

Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞（答案见162页）

拔尖角度1 利用抛物线与 x 轴的交点距离解新定义问题

12. 【2019·荆州】若二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 图象的顶点在一次函数 $y=kx+t(k\neq0)$ 的图象上，则称 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 为 $y=kx+t(k\neq0)$ 的伴随函数，如：$y=x^2+1$ 是 $y=x+1$ 的伴随函数.

(1)若 $y=x^2-4$ 是 $y=-x+p$ 的伴随函数，求直线 $y=-x+p$ 与两坐标轴围成的三角形的面积；

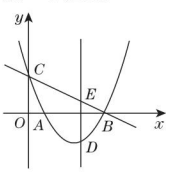
(2)若函数 $y=mx-3(m\neq0)$ 的伴随函数 $y=x^2+2x+n$ 的图象与 x 轴两个交点间的距离为4，求 m,n 的值.

拔尖角度2 利用抛物线与坐标轴的交点求点的坐标

13. 【中考·大连】如图，抛物线 $y=x^2-3x+\frac{5}{4}$ 与 x 轴相交于 A,B 两点，与 y 轴相交于点 C，点 D 是直线 BC 下方抛物线上一点，过点 D 作 y 轴的平行线，与直线 BC 相交于点 E.

(1)求直线 BC 的解析式；

(2)当线段 DE 的长度最大时，求点 D 的坐标.



（第13题）

趣味数学

马克·吐温听了笑了起来，当场揭穿了“慈善家”的伪善面目.你知道他是怎么知道的吗？

（答案：每人得到数目各不相同的银元，至少要 $1+2+3+\cdots+10=55$（枚）银元）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第2课时　利用函数的图象解一元二次方程

名师点金

利用图象求一元二次方程的根的方法

直接画出函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象，则图象与 x 轴交点的横坐标就是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根. **其步骤一般为**：1. 作出二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象；2. 观察图象与 x 轴交点的个数；3. 若图象与 x 轴有交点，估计出图象与 x 轴交点的横坐标即可得到一元二次方程的近似根.

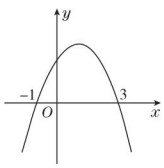
Ⅰ 夯实基础·逐点练 ☞(答案见162页)

知识点1 利用二次函数的图象解一元二次方程

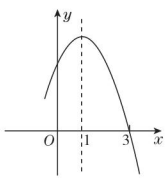
1. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图所示，则一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根为(　　)

A. $x_1=1, x_2=-3$　　B. $x_1=x_2=-1$

C. $x_1=x_2=3$　　D. $x_1=-1, x_2=3$



(第1题)



(第2题)

2. 二次函数 $y=-x^2+2x+k$ 的部分图象如图所示，且关于 x 的一元二次方程 $-x^2+2x+k=0$ 的一个解是 $x_1=3$，另一个解 x_2 是(　　)

A. 1　　B. -1　　C. -2　　D. 0

3. 已知二次函数 $y=x^2+2x-10$，小明利用计算器列出了下表：

x	-4.1	-4.2	-4.3	-4.4
$x^2+2x-10$	-1.39	-0.76	-0.11	0.56

那么方程 $x^2+2x-10=0$ 的一个近似根是(　　)

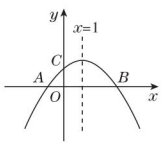
A. -4.1　　B. -4.2　　C. -4.3　　D. -4.4

4. 【中考·包头】已知一次函数 $y_1=4x$，二次函数 $y_2=2x^2+2$，在实数范围内，对于 x 的同一个值，这两个函数所对应的函数值分别为 y_1 与 y_2，则下列关系正确的是(　　)

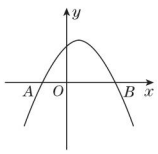
A. $y_1>y_2$　　B. $y_1\geqslant y_2$　　C. $y_1<y_2$　　D. $y_1\leqslant y_2$

*5. 【2019·随州】如图，已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴交于 A, B 两点，与 y 轴交于点 C，$OA=OC$，对称轴为直线 $x=1$，则下列结论：①$abc<0$；②$a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{4}c=0$；③$ac+b+1=0$；④$2+c$ 是关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根. 其中正确的有(　　)

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个



(第5题)



(第6题)

知识点2 利用二次函数的图象解一元二次不等式

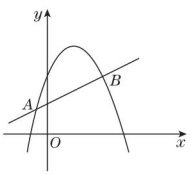
6. 如图，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴交于点 $A(-1,0)$，$B(2,0)$.

(1)方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解为_____；

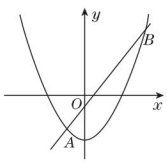
(2)不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为_____；

(3)不等式 $ax^2+bx+c\leqslant 0$ 的解集为_____.

7. 【中考·咸宁】如图，直线 $y=mx+n$ 与抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 交于 $A(-1,p)$，$B(4,q)$ 两点，则关于 x 的不等式 $mx+n>ax^2+bx+c$ 的解集是_____.



(第7题)



(第8题)

*8. 【2019·济宁】如图，抛物线 $y=ax^2+c$ 与直线 $y=mx+n$ 交于 $A(-1,p)$，$B(3,q)$ 两点，则不等式 $ax^2+mx+c>n$ 的解集是_____.

易错点 不考虑方程根的情况盲目作图象而致错

9. 用图象法求 $x^2-x+\frac{1}{4}=0$ 的解.

趣味数学　**漫谈抛物线**：炮弹发射之后飞行的路线是怎样的？火炮刚发明时，人们对这个问题并不十分明白. 从发射炮弹的一方看来，以为炮弹离开炮筒后是沿着炮筒所在的射线飞出的.(待续)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法·提升练 ☞（答案见162页）

考查角度1 二次函数的图象与线段的交点情况在求字母范围中的应用

10. 【2019·天门】在平面直角坐标系中，已知抛物线 $C: y=ax^2+2x-1\ (a\neq 0)$ 和直线 $l: y=kx+b$，点 $A(-3,-3)$，$B(1,-1)$ 均在直线 l 上.

(1) 若抛物线 C 与直线 l 有交点，求 a 的取值范围；

(2) 当 $a=-1$，二次函数 $y=ax^2+2x-1$ 的自变量 x 满足 $m\leqslant x\leqslant m+2$ 时，函数 y 的最大值为 -4，求 m 的值；

(3) 若抛物线 C 与线段 AB 有两个不同的交点，请直接写出 a 的取值范围.

考查角度2 二次函数的图象与点到坐标轴的距离情况在求点的坐标中的应用

11. 【2019·云南】已知 k 是常数，抛物线 $y=x^2+(k^2+k-6)x+3k$ 的对称轴是 y 轴，并且与 x 轴有两个交点.

(1) 求 k 的值；

(2) 若点 P 在抛物线 $y=x^2+(k^2+k-6)x+3k$ 上，且 P 到 y 轴的距离是2，求点 P 的坐标.

Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞（答案见162页）

拔尖角度 利用表格求二次函数解析式

12. 【2019·威海】在画二次函数 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ 的图象时，甲写错了一次项的系数，列表如下：

x	…	−1	0	1	2	3	…
$y_{甲}$	…	6	3	2	3	6	…

乙写错了常数项，列表如下：

x	…	−1	0	1	2	3	…
$y_{乙}$	…	−2	−1	2	7	14	…

通过上述信息，解决以下问题：

(1) 求原二次函数 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ 的解析式；

(2) 对于二次函数 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$，当 x _____ 时，y 的值随 x 的值增大而增大；

(3) 若关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=k\ (a\neq 0)$ 有两个不相等的实数根，求 k 的取值范围.

趣味数学

敌方也以为炮弹是从空中沿直线方向飞下来的，于是当时人们总认为炮弹飞行的路线是一条折线. 意大利著名学者伽利略更正了这种错误认识.（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第3课时　二次函数图象信息题的四种常见类型 ☞(答案见163页)

名师点金

本章是中考的必考内容之一,所占分值较高,对于二次函数的概念、增减性、图象的顶点坐标、对称轴及平移等性质多以选择题、填空题的形式出现;对于二次函数的应用,主要考查函数的建模思想及分析问题、解决问题的能力,多以解答题的形式出现;对于求函数解析式及与一元二次方程的关系,综合性较强;对于二次函数和图形的变化、图形的面积等相结合的一些探究性问题,则常以中考压轴题的形式出现.

类型1 根据二次函数图象的特征确定 a,b,c 及与其有关的代数式的符号

1. 【2018·毕节】已知二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图象如图所示,下列结论:

①$abc>0$;

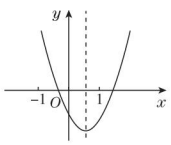
②$2a+b>0$;

③$b^2-4ac>0$;

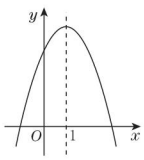
④$a-b+c>0$.

其中正确的个数是(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4



(第1题)



(第2题)

类型2 利用二次函数的图象比较大小

2. 二次函数 $y=-x^2+bx+c$ 的图象如图所示,若点 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$ 在此函数图象上,且 $x_1<x_2<1$,则 y_1 与 y_2 的大小关系是(　　)

A. $y_1\leqslant y_2$　　B. $y_1<y_2$

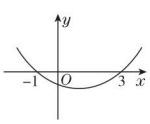
C. $y_1\geqslant y_2$　　D. $y_1>y_2$

类型3 利用二次函数的图象求方程的解或不等式的解集

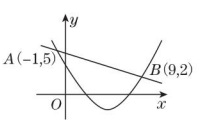
3. 【中考·黄石】二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图象如图所示,则当函数值 $y>0$ 时,x 的取值范围是(　　)

A. $x<-1$　　B. $x>3$

C. $-1<x<3$　　D. $x<-1$ 或 $x>3$



(第3题)



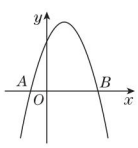
(第4题)

4. 如图,一次函数 $y_1=kx+n$ 与二次函数 $y_2=ax^2+bx+c$ 的图象相交于 $A(-1,5)$,$B(9,2)$ 两点,则关于 x 的不等式 $kx+n\geqslant ax^2+bx+c$ 的解集为(　　)

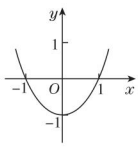
A. $-1\leqslant x\leqslant9$　　B. $-1\leqslant x<9$

C. $-1<x\leqslant9$　　D. $x\leqslant-1$ 或 $x\geqslant9$

5. 【中考·阜新】如图,二次函数 $y=ax^2+bx+3$ 的图象经过点 $A(-1,0)$,$B(3,0)$,那么关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx=0$ 的根是_____.



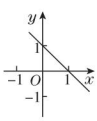
(第5题)



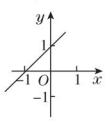
(第6题)

类型4 根据二次函数图象的特征确定其他函数的图象

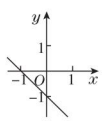
6. 已知函数 $y=(x-a)(x-b)$(其中 $a>b$)的图象如图所示,则函数 $y=ax+b$ 的图象正确的是(　　)



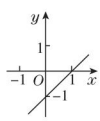
A



B



C



D

7. 【中考·广州】已知抛物线 $y_1=-x^2+mx+n$,直线 $y_2=kx+b$,y_1 的对称轴与 y_2 交于点 $A(-1,5)$,点 A 与 y_1 的顶点 B 的距离是4.

(1)求 y_1 的解析式;

(2)若 y_2 随着 x 的增大而增大,且 y_1 与 y_2 都经过 x 轴上的同一点,求 y_2 的解析式.

趣味数学　他指出炮弹并不是沿着折线飞行的,而是沿着一条曲线飞行的,他把这条曲线叫"抛物线",就像斜抛一个物体后,物体在空中划过的曲线的形状,"抛物"的名称正是从此而来.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

22.3 实际问题与二次函数

第1课时 利用二次函数求几何图形面积的最值问题

名师点金

利用二次函数求几何图形面积的最值是二次函数应用的重点之一，解决此类问题的基本方法是借助已知条件，分析几何图形的性质，确定二次函数解析式，再根据二次函数的图象和性质求出最值，从而解决问题.

1 夯实基础·逐点练 ☞（答案见163页）

知识点1 二次函数的最值

1. 二次函数 $y=x^2-4x+c$ 的最小值为0，则 c 的值为（　　）

A. 2　　B. 4

C. -4　　D. 16

2. 已知 $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$，那么函数 $y=-2x^2+8x-6$ 的最大值是（　　）

A. -6　　B. -2.5

C. 2　　D. 不能确定

3. 【2018·黄冈】当 $a\leqslant x\leqslant a+1$ 时，函数 $y=x^2-2x+1$ 的最小值为1，则 a 的值为（　　）

A. -1　　B. 2

C. 0或2　　D. -1或2

4. 二次函数 $y=2x^2-6x+1$，当 $0\leqslant x\leqslant5$ 时，y 的取值范围是_____.

*5. 若二次函数 $y=x^2+ax+5$ 的图象关于直线 $x=-2$ 对称，且当 $m\leqslant x\leqslant0$ 时，y 有最大值5，最小值1，则 m 的取值范围是_____.

知识点2 几何图形面积的最值

6. 已知一个直角三角形两直角边长之和为20 cm，则这个直角三角形的最大面积为（　　）

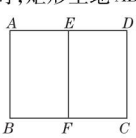
A. 25 cm^2　　B. 50 cm^2

C. 100 cm^2　　D. 不确定

7. 用一条长为40 cm的绳子围成一个面积为 a cm^2 的长方形，a 的值不可能为（　　）

A. 20　　B. 40　　C. 100　　D. 120

8. 【2018·沈阳】如图，一块矩形土地 $ABCD$ 由篱笆围着，并且由一条与 CD 边平行的篱笆 EF 分开，已知篱笆的总长为900 m（篱笆的厚度忽略不计），当 $AB=$_____m时，矩形土地 $ABCD$ 的面积最大.

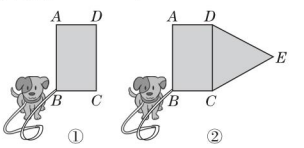


（第8题）

*9. 【中考·金华】在一空旷场地上设计一落地为矩形 $ABCD$ 的小屋，$AB+BC=10$ m，拴住小狗的10 m长的绳子一端固定在 B 点处，小狗在不能进入小屋内的条件下活动，其可以活动的区域面积为 S m^2.

（1）如图①，若 $BC=4$ m，则 $S=$_____；

（2）如图②，现考虑在（1）中矩形 $ABCD$ 小屋的右侧以 CD 为边拓展一等边三角形 CDE 区域，使之变成落地为五边形 $ABCED$ 的小屋，其他条件不变，则在 BC 的变化过程中，当 S 取得最小值时，边 BC 的长为_____.

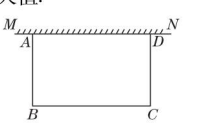


（第9题）

10. 【2018·福建】如图，在足够大的空地上有一段长为 a 米的旧墙 MN，某人利用旧墙和木栏围成一个矩形菜园 $ABCD$，其中 $AD\leqslant MN$，已知矩形菜园的一边靠墙，另三边一共用了100米木栏.

（1）若 $a=20$，所围成的矩形菜园的面积为450平方米，求所利用旧墙 AD 的长；

（2）求矩形菜园 $ABCD$ 面积的最大值.



（第10题）

鲁班造锯与类比思维：鲁班是我国古代的一位出色的发明家，两千多年以来，他的名字和有关他的故事，一直在广大人民群众中流传.我国的土木工匠们都尊称他为祖师.（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法·提升练 ☞(答案见163页)

考查角度1 利用二次函数解决实际中面积的最值问题

11. 【中考·包头】某广告公司设计一个周长为16米的矩形广告牌,广告设计费为每平方米2 000元,设矩形一边长为x米,面积为S平方米.

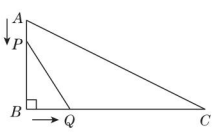
(1)求S与x之间的函数关系式,并写出自变量x的取值范围;

(2)设计费能达到24 000元吗?为什么?

(3)当x是多少时,设计费最多?最多是多少元?

考查角度2 利用二次函数解决动态几何面积的最值问题

12. 如图,在$\triangle ABC$中,$\angle B=90°$,$AB=12$ mm,$BC=24$ mm,动点P从点A开始沿边AB向B以2 mm/s的速度移动,动点Q从点B开始沿边BC向C以4 mm/s的速度移动.已知P,Q分别从A,B同时出发,求$\triangle PBQ$的面积$S(\text{mm}^2)$关于出发时间$t(\text{s})$的函数解析式,并求出t为何值时,$\triangle PBQ$的面积最大?最大值是多少?



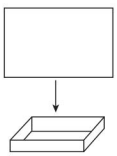
(第12题)

考查角度3 利用二次函数解决与一元二次方程相关的几何应用问题

13. 【2018·巴彦淖尔】工人师傅用一块长为12分米,宽为8分米的矩形铁皮制作一个无盖长方体容器,需要将四角各裁掉一个正方形.(厚度不计)

(1)请在图中画出裁剪示意图,用实线表示裁剪线,虚线表示折痕;并求当长方体底面面积为32平方分米时,裁掉的正方形边长是多少?

(2)若要求制作的长方体的底面长不大于底面宽的5倍(长大于宽),并将容器外表面进行防锈处理,侧面每平方分米的费用为0.5元,底面每平方分米的费用为2元,求裁掉的正方形边长为多少时,总费用最低,最低费用为多少元?



(第13题)

趣味数学 鲁班造锯是我们熟悉的一个历史故事:当鲁班的手不慎被一片小草割破后,他仔细观察发现小草叶子边沿布满了有序的小齿.(待续)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

第2课时　利用二次函数求实际中最值问题

名师点金

利润问题的基本关系式

总利润＝单件利润×销售总量.

若销售单价每提高 m 元，销售量相应减少 n 件，设提高 x 元，则现销售量＝原销售量 $-\frac{x}{m}n$.

1 夯实基础·逐点练

☞（答案见163页）

知识点1 用二次函数表示实际问题

1. 某工厂2019年产品的产量为100吨，该产品产量的年平均增长率为 $x(x>0)$，设2021年该产品的产量为 y 吨，则 y 关于 x 的函数解析式为(　　)

A. $y=100(1-x)^2$

B. $y=100(1+x)^2$

C. $y=\frac{100}{(1+x)^2}$

D. $y=100+100(1+x)+100(1+x)^2$

2. 心理学家发现：学生对概念的接受能力 y 与提出概念的时间 x（min）之间是二次函数关系，当提出概念13 min时，学生对概念的接受能力最大，为59.9；当提出概念30 min时，学生对概念的接受能力就剩下31，则 y 与 x 满足的二次函数关系式为(　　)

A. $y=-(x-13)^2+59.9$

B. $y=-0.1x^2+2.6x+31$

C. $y=0.1x^2-2.6x+76.8$

D. $y=-0.1x^2+2.6x+43$

3. 某商场购进一种单价为40元的商品，如果以单价60元售出，那么每天可卖出300个，根据销售经验，每降价1元，每天可多卖出20个，假设每个降价 x（元），每天销售 y（个），每天获得利润 W（元）.

(1)写出 y 与 x 的函数关系式：_____；

(2)求出 W 与 x 的函数关系式（不必写出 x 的取值范围）.

知识点2 用二次函数的最值解实际问题

4. 某旅行社在五一期间接团去外地旅游，经计算，所获营业额 y（元）与旅行团人数 x（人）满足关系式 $y=-x^2+100x+28\,400$，要使所获营业额最大，则此旅行团应有(　　)

A. 30人　　B. 40人　　C. 50人　　D. 55人

5. 【2018·兰州】某商家销售一款商品，进价每件80元，售价每件145元，每天销售40件，每销售一件需支付给商场管理费5元，未来一个月（按30天计算），这款商品将开展“每天降价1元”的促销活动，即从第一天开始每天的单价均比前一天降低1元，通过市场调查发现，该商品单价每降1元，每天销售量增加2件，设第 x 天（$1\leqslant x\leqslant 30$ 且 x 为整数）的销售量为 y 件.

(1)直接写出 y 与 x 的函数关系式.

(2)设第 x 天的利润为 w 元，试求出 w 与 x 之间的函数关系式，并求出哪一天的利润最大，最大利润是多少元？

易错点 将销售额当销售利润而致错

6. 【2018·毕节】某商店销售一款进价为每件40元的护肤品，调查发现，销售单价不低于40元且不高于80元时，该商品的日销售量 y（件）与销售单价 x（元）之间存在一次函数关系，当销售单价为44元时，日销售量为72件；当销售单价为48元时，日销售量为64件.

(1)求 y 与 x 之间的函数关系式.

(2)设该护肤品的日销售利润为 W（元），当销售单价为多少时，日销售利润最大，最大日销售利润是多少？

趣味数学

于是便根据小草的结构发明了铁锯. 鲁班在这里用了类比思维方法，类比思维是从要解决的问题联想到与它类似的熟悉的问题，用熟悉的问题的解法来思考所要解决的问题.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法·提升练 ☞(答案见164页)

考查角度① 利用二次函数解与方程(组)综合问题

7. 【2019·通辽】当今,越来越多的青少年在观看影片《流浪地球》后,更加喜欢同名科幻小说,该小说销量也急剧上升. 书店为满足广大顾客需求,订购该科幻小说若干本,每本进价为20元. 根据以往经验:当销售单价是25元时,每天的销售量是250本;销售单价每上涨1元,每天的销售量就减少10本. 书店要求每本书的利润不低于10元且不高于18元.

(1)直接写出书店销售该科幻小说时每天的销售量y(本)与销售单价x(元)之间的函数关系式及自变量的取值范围;

(2)书店决定每销售1本该科幻小说,就捐赠a($0<a\leqslant 6$)元给困难职工,每天扣除捐赠后可获得的最大利润为1 960元,求a的值.

考查角度② 利用二次函数解与不等式(组)综合问题

8. 【2019·随州】某食品厂生产一种半成品食材,成本为2元/千克,每天的产量p(百千克)与销售价格x(元/千克)满足函数关系式$p=\frac{1}{2}x+8$. 从市场反馈的信息发现,该半成品食材每天的市场需求量q(百千克)与销售价格x(元/千克)满足一次函数关系,部分数据如下表:

销售价格x/(元/千克)	2	4	…	10
市场需求量q/百千克	12	10	…	4

已知按物价部门规定,销售价格x不低于2元/千克且不高于10元/千克.

(1)直接写出q与x的函数关系式,并注明自变量x的取值范围.

(2)当每天的产量小于或等于市场需求量时,这种半成品食材能全部售出,而当每天的产量大于市场需求量时,只能售出符合市场需求量的半成品食材,剩余的食材由于保质期短而只能废弃.

①当每天的半成品食材能全部售出时,求x的取值范围;

②求厂家每天获得的利润y(百元)与销售价格x(元/千克)的函数关系式.

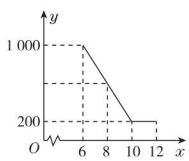
(3)在(2)的条件下,当x为_____元/千克时,利润y有最大值;若要使每天的利润不低于24百元,并尽可能地减少半成品食材的浪费,则x应定为_____元/千克.

考查角度③ 利用图中的信息解函数问题

9. 【2019·云南】某驻村扶贫小组实施产业扶贫,帮助贫困农户进行西瓜种植和销售. 已知西瓜的成本为6元/kg,规定销售单价不低于成本,又不高于成本的两倍. 经过市场调查发现,某天西瓜的销售量y(kg)与销售单价x(元/kg)的函数关系如图所示.

(1)求y与x的函数解析式;

(2)求这一天销售西瓜获得的利润W(元)的最大值.



(第9题)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

第3课时　利用建立坐标系解“抛物线”型问题

名师点金

1. **抛物线型建筑物问题**

几种常见的抛物线型建筑物有拱形桥洞、隧道洞口、拱形门等. 解决这类问题的关键是根据已知条件选择合理的位置建立直角坐标系，结合问题中的数据求出函数解析式，然后利用函数解析式解决问题.

2. **运动问题**

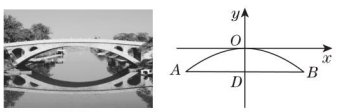
(1)运动中的距离、时间、速度问题. 这类问题多根据运动规律中的公式求解.

(2)物体的运动路线(轨迹)问题. 解决这类问题的思想方法是利用**数形结合思想**和**函数思想**，合理建立直角坐标系，根据已知数据，运用待定系数法求出运动轨迹(抛物线)的解析式，再利用二次函数的性质去分析、解决问题.

Ⅰ 夯实基础·逐点练 ☞(答案见164页)

知识点1 建立坐标系解抛物线型建筑物问题

1. 【中考·铜仁】河北省赵县的赵州桥的桥拱是近似的抛物线形，如图①，建立如图②所示的平面直角坐标系，其函数关系式为 $y=-\frac{1}{25}x^2$，当水面离桥拱顶的高度 DO 是4 m时，水面宽度 AB 为(　　)



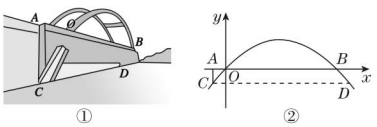
①　②

(第1题)

A. −20 m　　B. 10 m

C. 20 m　　D. −10 m

2. 【中考·金华】如图②是图①中拱形大桥的示意图，桥拱与桥面的交点为 O，B，以点 O 为原点，水平直线 OB 为 x 轴，建立平面直角坐标系，桥的拱形可近似看成抛物线 $y=-\frac{1}{400}(x-80)^2+16$，桥拱与桥墩 AC 的交点 C 恰好在水面，且 $AC\perp x$ 轴，若 $OA=10$ m，则桥面离水面的高度 AC 为(　　)



①　②

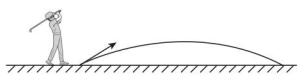
(第2题)

A. $16\frac{9}{40}$ m　　B. $\frac{17}{4}$ m　　C. $16\frac{7}{40}$ m　　D. $\frac{15}{4}$ m

知识点2 建立坐标系解抛物线型运动的最值问题

***3.** 【中考·天门】飞机着陆后滑行的距离 s(单位:m)关于滑行的时间 t(单位:s)的函数解析式是 $s=60t-\frac{3}{2}t^2$，则飞机着陆后滑行的最长时间为_____.

4. 【2019·襄阳】如图，若被击打的小球飞行高度 h(单位:m)与飞行时间 t(单位:s)之间具有的关系为 $h=20t-5t^2$，则小球从飞出到落地所用的时间为_____s.



(第4题)

5. 【2019·临沂】从地面竖直向上抛出一小球，小球的高度 h(单位:m)与小球的运动时间 t(单位:s)之间的函数关系如图所示. 给出下列结论:

①小球在空中经过的路程是40 m;

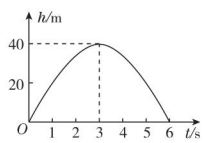
②小球抛出3 s后，速度越来越快;

③小球抛出3 s时速度为0;

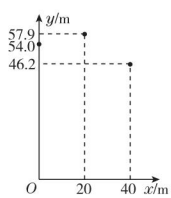
④小球的高度 $h=30$ m时，$t=1.5$ s.

其中正确的是(　　)

A. ①④　　B. ①②　　C. ②③④　　D. ②③



(第5题)



(第6题)

6. 【2018·北京】跳台滑雪是冬季奥运会比赛项目之一，运动员起跳后的飞行路线可以看作是抛物线的一部分，运动员起跳后的竖直高度 y(单位:m)与水平距离 x(单位:m)近似满足函数关系 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$，如图记录了某运动员起跳后的 x 与 y 的三组数据，根据上述函数模型和数据，可推断出该运动员起跳后飞行到最高点时，水平距离为(　　)

A. 10 m　　B. 15 m　　C. 20 m　　D. 22.5 m

趣味数学

花瓣知多少：百合花的花瓣是3瓣，梅花是5瓣，飞燕草是8瓣，万寿菊是13瓣，向日葵是21或34瓣，雏菊是34、55或89瓣，其他数目很少出现. 这些花的花瓣数不正是斐波那契数列中的数吗？（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法·提升练 ☞(答案见164页)

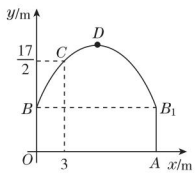
考查角度① 利用二次函数的图象和性质解车过拱桥(隧道)问题

7. 【中考·青岛】如图,隧道的截面由抛物线和长方形构成,长方形的长是12 m,宽是4 m. 按照图中所示的直角坐标系,抛物线可以用 $y=-\frac{1}{6}x^2+bx+c$ 表示,且抛物线上的点 C 到墙面 OB 的水平距离为3 m,到地面 OA 的距离为 $\frac{17}{2}$ m.

(1)求该抛物线对应的函数解析式,并计算出拱顶 D 到地面 OA 的距离.

(2)一辆货运汽车载一长方体集装箱后高为6 m,宽为4 m,如果隧道内设双向行车道,那么这辆货运汽车能否安全通过?

(3)在抛物线形拱壁上需要安装两排灯,使它们离地面的高度相等,如果灯离地面的高度不超过8 m,那么两排灯的水平距离最小是多少米?



(第7题)

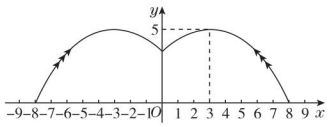
考查角度② 利用二次函数的图象和性质解生活中的抛物线型问题

8. 【2018·衢州】某游乐园有一个直径为16米的圆形喷水池,喷水池的周边有一圈喷水头,喷出的水柱为抛物线,在距水池中心3米处达到最高,高度为5米,且各方向喷出的水柱恰好在喷水池中心的装饰物处汇合,如图所示,以水平方向为 x 轴,喷水池中心为原点建立直角坐标系.

(1)求水柱所在抛物线(第一象限部分)的函数解析式.

(2)王师傅在喷水池内维修设备期间,喷水管意外喷水,为了不被淋湿,身高1.8米的王师傅站立时必须在离水池中心多少米以内?

(3)经检修评估,游乐园决定对喷水设施做如下设计改进:在喷出水柱的形状不变的前提下,把水池的直径扩大到32米,各方向喷出的水柱仍在喷水池中心保留的原装饰物(高度不变)处汇合,请探究扩建改造后喷水池水柱的最大高度.



(第8题)

考查角度③ 利用数据信息建立二次函数模型解运动中抛物线型问题

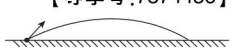
9. 【2018·滨州】如图,一小球沿与地面成一定角度的方向飞出,小球的飞行路线是一条抛物线. 如果不考虑空气阻力,小球的飞行高度 y(单位:m)与飞行时间 x(单位:s)之间具有函数关系 $y=-5x^2+20x$,请根据要求解答下列问题:

(1)在飞行过程中,当小球的飞行高度为15 m时,飞行时间是多少?

(2)在飞行过程中,小球从飞出到落地所用时间是多少?

(3)在飞行过程中,小球飞行高度何时最大?最大高度是多少?

【导学号:7574456】



(第9题)

趣味数学　两位法国物理学家于1992年将花瓣形成过程的参数考虑进去,设计了一套计算机仿真,同时做了仿真实验.(待续)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

阶段核心归类

用二次函数解实际应用问题的六种常见类型 ☞（答案见165页）

名师点金

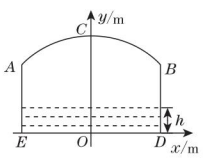
利用二次函数解决实际问题时，要注意**数形结合**，巧妙地建立二次函数模型，从而达到利用二次函数的某些性质来解决问题的目的.

类型1 拱桥问题

1. 如图，小河上有一拱桥，拱桥及河道的截面轮廓线由抛物线的一部分 ACB 和矩形的三边 AE，ED，DB 组成，已知河底 ED 是水平的，$ED=16$ m，$AE=8$ m，抛物线的顶点 C 到 ED 的距离是 11 m，以 ED 所在的直线为 x 轴，抛物线的对称轴为 y 轴建立平面直角坐标系.

（1）抛物线对应的函数解析式是_____.

（2）已知从某时刻开始的 40 h 内，水面与河底 ED 的距离 h（m）随时间 t（h）的变化满足函数关系式 $h=-\frac{1}{128}(t-19)^2+8(0\leqslant t\leqslant 40)$，且当顶点 C 与水面的距离不大于 5 m 时，需禁止船只通行. 请通过计算说明：在这一时段内，需多少小时禁止船只通行？



（第1题）

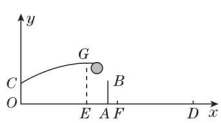
类型2 运动问题

2. 为备战2021年东京奥运会，中国女排的姑娘们刻苦训练，为国争光. 如图，已知排球场的长度 OD 为 18 m，位于球场中线处球网的高度 AB 为 2.43 m，一队员站在点 O 处发球，排球从点 O 的正上方 1.8 m 的 C 点向正前方飞出，排球的飞行路线是一条抛物线. 当排球运行至离点 O 的水平距离 OE 为 7 m 时，到达最高点 G，建立如图所示的平面直角坐标系.

（1）当排球上升的最大高度为 3.2 m 时，求排球飞行的高度 y（单位：m）与水平距离 x（单位：m）的函数解析式（不要求写自变量 x 的取值范围）.

（2）在（1）的条件下，对方距球网 0.5 m 的点 F 处有一队员，她起跳后的最大高度为 3.1 m，问这次她是否可以拦网成功？请通过计算说明.

（3）若队员发球既要过球网，又不出边界，问排球飞行的最大高度 h 的取值范围是多少（排球压线属于没出界）？



（第2题）

两项的结果都证实，在自然界定律的要求下（系统保持在最低能量状态），花朵会以斐波那契数列长出花瓣. 其实，这些类似花瓣数目的大自然模式，都有深层的数学规律.

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型3 利润问题

3. 【2019·十堰节选】某超市拟于中秋节前50天里销售某品牌月饼，其进价为18元/kg，设第x天的销售价格为y(元/kg)，销售量为m(kg)．该超市根据以往的销售经验得出以下的销售规律：①当$1\leqslant x\leqslant 30$时，$y=40$；当$31\leqslant x\leqslant 50$时，$y$与$x$满足一次函数关系，且当$x=36$时，$y=37$；$x=44$时，$y=33$．②$m$与$x$的关系为$m=5x+50$．

(1)当$31\leqslant x\leqslant 50$时，$y$与$x$的关系式为_____．

(2)x为多少时，当天的销售利润W(元)最大？最大利润为多少？

4. 【2018·抚顺】俄罗斯世界杯足球赛期间，某商店销售一批足球纪念册，每本进价40元，规定销售单价不低于44元，且获利不高于30%．试销售期间发现，当销售单价定为44元时，每天可售出300本，销售单价每上涨1元，每天销售量减少10本，现商店决定提价销售．设每天销售量为y本，销售单价为x元．

(1)请直接写出y与x之间的函数关系式和自变量x的取值范围；

(2)当每本足球纪念册销售单价是多少元时，商店每天获利2 400元？

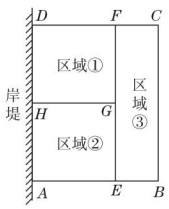
(3)将足球纪念册销售单价定为多少元时，商店每天销售纪念册获得的利润w(元)最大？最大利润是多少元？

类型4 面积问题

5. 为了节省材料，某水产养殖户利用水库的岸堤(岸堤足够长)为一边，用总长为80 m的围网在水库中围成了如图所示的①②③三块矩形区域，而且这三块矩形区域的面积相等．设BC的长度是x m，矩形区域$ABCD$的面积为y m^2．

(1)求y与x之间的函数关系式，并注明自变量x的取值范围．

(2)x取何值时，y有最大值？最大值是多少？



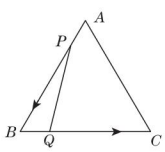
(第5题)

类型5 动点问题

6. 如图，$\triangle ABC$是边长为3 cm的等边三角形，动点P，Q同时从A，B两点出发，分别沿AB，BC方向匀速移动，它们的速度都是1 cm/s，当点P运动到B时，两点均停止运动，设P点运动时间为t s．

(1)当t为何值时，$\triangle PBQ$是直角三角形？

(2)设四边形$APQC$的面积为y cm^2，求y关于t的函数解析式，当t取何值时，四边形$APQC$的面积最小？并求出最小面积．



(第6题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型6 决策问题

7. 【中考·资阳】某商家计划从厂家采购空调和冰箱两种产品共20台，空调的采购单价y_1（元）与采购数量x_1（台）满足$y_1=-20x_1+1\,500(0<x_1<20,x_1$为整数）；冰箱的采购单价$y_2$（元）与采购数量$x_2$（台）满足$y_2=-10x_2+1\,300(0<x_2<20,x_2$为整数）.

（1）经商家与厂家协商，采购空调的数量不少于冰箱数量的$\frac{11}{9}$倍，且空调采购单价不低于1 200元，问该商家共有几种进货方案？

（2）该商家分别以1 760元和1 700元的销售单价售出空调和冰箱，且全部售完. 在（1）的条件下，问采购空调多少台时总利润最大？并求最大利润.

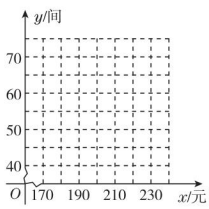
8. 【2019·衢州】某宾馆有若干间标准房，当标准房的价格为200元时，每天入住的房间数为60间. 经市场调查表明，该宾馆每间标准房的价格在170～240元之间（含170元、240元）浮动时，每天入住的房间数y（间）与每间标准房的价格x（元）的数据如下表：

x/元	…	190	200	210	220	…
y/间	…	65	60	55	50	…

（1）根据所给数据在如图所示的坐标系中描出相应的点，并画出图象.

（2）求y关于x的函数解析式，并写出自变量x的取值范围.

（3）设客房的日营业额为w（元）. 若不考虑其他因素，问宾馆标准房的价格定为多少元时，客房的日营业额最大？最大为多少元？



（第8题）

科学家对这个美丽的结构用数学方法进行分析时，发现涉及的概念真是惊人——半径、弦、平行线段、三角形、全等对应角、对数螺线、悬链线和超越线.

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

全章热门考点整合应用

☞(答案见166页)

名师点金

二次函数是中考的必考内容,难度高,综合性强,既可以与代数知识相结合,也可以与几何知识相结合. 有关二次函数的问题,中考一般以三种形式出现:一是以选择题或填空题出现,重在考查二次函数的基本概念和基本性质;二是以实际应用题的形式出现,重在考查函数建模思想;三是以综合题的形式出现,往往是压轴题,考查学生分析问题和解决问题的能力. 其主要热门考点可概括为:一个概念,一个性质,两个关系,三个应用,两个技巧,三种思想.

考点1 一个概念——二次函数的定义

1. 已知函数 $y=(m+3)x^{m^2+4m-3}+5$ 是关于 x 的二次函数.

(1)求 m 的值.

(2)当 m 为何值时,该函数图象的开口向上?

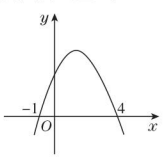
(3)当 m 为何值时,该函数有最大值?

考点2 一个性质——二次函数的图象与性质

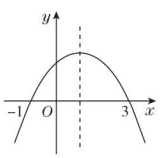
2. 【2018·阜新】如图,抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 交 x 轴于点 $(-1,0)$ 和 $(4,0)$,那么下列说法正确的是(　　)

A. $ac>0$　　B. $b^2-4ac<0$

C. 对称轴是直线 $x=2.5$　　D. $b>0$



(第2题)



(第3题)

考点3 两个关系

关系1 抛物线的位置与二次函数各项系数的关系

3. 【中考·安顺】如图为二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq0)$ 的图象,则下列说法:

①$a>0$;

②$2a+b=0$;

③$a+b+c>0$;

④当 $-1<x<3$ 时,$y>0$.

其中正确的个数为(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

关系2 二次函数与一元二次方程的关系

4. 【2018·乐山】已知关于 x 的一元二次方程 $mx^2+(1-5m)x-5=0(m\neq0)$.

(1)求证:无论 m 为任何非零实数,此方程总有两个实数根.

(2)若抛物线 $y=mx^2+(1-5m)x-5$ 与 x 轴交于 $A(x_1,0)$、$B(x_2,0)$ 两点,且 $|x_1-x_2|=6$,求 m 的值.

(3)若 $m>0$,点 $P(a,b)$ 与 $Q(a+n,b)$ 在(2)中的抛物线上(点 P,Q 不重合),求代数式 $4a^2-n^2+8n$ 的值.

考点4 三个应用

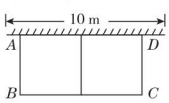
应用1 最大面积的应用

5. 如图,有长为24 m的栅栏,一面利用墙(墙的最大可用长度为10 m),围成中间隔有一道栅栏的长方形鸡舍(栅栏厚度不计). 设鸡舍的一边 AB 为 x m,面积为 S m^2.

(1)求 S 与 x 的函数关系式(不必写出 x 的取值范围).

(2)如果围成面积为45 m^2 的鸡舍,AB 的长是多少米?

(3)能围成面积比45 m^2 更大的鸡舍吗?如果能,请求出最大面积;如果不能,请说明理由.



(第5题)

趣味数学　宇宙之大,粒子之微,火箭之速,化工之巧,地球之变,生物之谜,日用之繁,无处不用数学.

——华罗庚

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

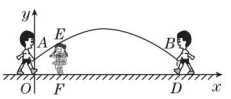
应用2 “抛物线”型几何应用

6. 跳绳时，绳甩到最高处时的形状是抛物线. 正在甩绳的甲、乙两名同学拿绳的手间距（A 与 B 间的水平距离）为 6 m，到地面的距离 AO 和 BD 均为 0.9 m，身高为1.4 m的小丽站在距点 O 的水平距离为 1 m 的点 F 处，绳子甩到最高处时刚好通过她的头顶点 E. 以点 O 为原点建立如图所示的平面直角坐标系，设此抛物线对应的函数解析式为 $y=ax^2+bx+0.9$.

（1）求该抛物线对应的函数解析式（不考虑自变量的取值范围）；

（2）如果小华站在 O，D 之间，且离点 O 的距离为 3 m，当绳子甩到最高处时刚好通过他的头顶，请你算出小华的身高；

（3）如果身高为 1.4 m 的小丽站在 O，D 之间，且离点 O 的距离为 t m，绳子甩到最高处时超过她的头顶，请结合图象，写出 t 的取值范围.

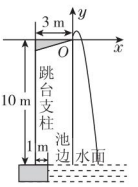


（第6题）

7. 某跳水运动员进行 10 m 高台跳水训练时，身体（看成一点）在空中的运动路线是如图所示的一条抛物线. 在跳某个规定动作时，正常情况下，该运动员在空中的最高处距水面 $10\frac{2}{3}$ m，入水处距池边的距离为 4 m，同时，运动员在距水面高度为 5 m 以前，必须完成规定的翻腾动作，并调整好入水姿势，否则就会出现失误.

（1）求这条抛物线对应的函数解析式；

（2）在某次试跳中，测得运动员在空中的运动路线是（1）中的抛物线，且运动员在空中调整好入水姿势时，距池边的水平距离为 $3\frac{3}{5}$ m，问此次跳水会不会出现失误？



（第7题）

托尔斯泰的分数： 一个人就好像一个分数，他的实际才能好比分子，而他对自己的估价好比分母. 分母越大，则分数的值就越小.

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

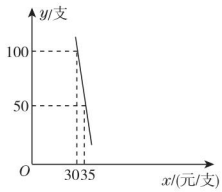
应用3 生活实际应用

8. 某网店专售一款电动牙刷，其成本为20元/支，销售中发现，该商品每天的销售量y(支)与销售单价x(元/支)之间存在如图所示的关系.

(1)请求出y与x的函数关系式；

(2)该款电动牙刷销售单价定为多少元时，每天销售利润最大？最大利润是多少元？

(3)近期武汉爆发了“新型冠状病毒”疫情，该网店店主决定从每天获得的利润中抽出200元捐赠给武汉，为了保证捐款后每天剩余利润不低于550元，如何确定该款电动牙刷的销售单价？



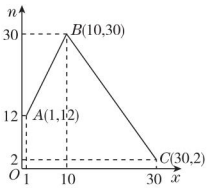
(第8题)

9. 【2019·荆门】为落实“精准扶贫”精神，市农科院专家指导李大爷利用坡前空地种植优质草莓. 根据市场调查，在草莓上市销售的30天中，其销售价格m(元/kg)与第x天(x为正整数)之间满足$m=\begin{cases}3x+15(1\leqslant x\leqslant 15),\\-x+75(15<x\leqslant 30),\end{cases}$销售量$n$(kg)与第$x$天之间的函数关系如图所示. 如果李大爷的草莓在上市销售期间每天的维护费用为80元.

(1)求销售量n与第x天之间的函数关系式；

(2)求在草莓上市销售的30天中，每天的销售利润y(元)与第x天之间的函数关系式(日销售利润=日销售额-日维护费)；

(3)求日销售利润y的最大值及相应的x.

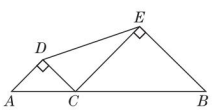


(第9题)

考点5 两个技巧

技巧1 巧用二次函数求几何最值

10. 如图，线段AB的长为2，点C为AB上一个动点，分别以AC，BC为斜边在AB的同侧作等腰直角三角形ACD和等腰直角三角形BCE，求DE长的最小值.



(第10题)

趣味数学　**王菊珍的百分数**：我国科学家王菊珍对待实验失败有句格言，即“千下去还有50%成功的希望，不干便是100%的失败.”

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

技巧2 巧用二次函数设计方案

11. 某市“建设社会主义新农村”工作组到某县大棚蔬菜生产基地指导菜农修建大棚种植蔬菜. 通过调查得知平均修建每公顷大棚要用支架、农膜等材料费2.7万元;购置滴灌设备的费用(万元)与大棚面积(公顷)的平方成正比,比例系数为0.9;另外种植每公顷蔬菜需种子、化肥、农药等开支0.3万元. 每公顷蔬菜年均可卖7.5万元.

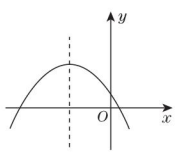
(1)某基地的菜农共修建大棚x公顷,当年收益(扣除修建和种植成本后)为y万元,写出y关于x的函数解析式.

(2)除种子、化肥、农药等投资只能当年使用外,其他设施3年内不需要增加投资仍可继续使用. 如果按3年计算,是否修建大棚面积越大,收益就越大?如果不是,修建面积为多少时可以获得最大收益?请帮助工作组为基地修建大棚提一条合理化的建议.

考点6 三种思想

思想1 数形结合思想

12. 已知抛物线$y=ax^2+bx+c$的位置如图,则点$P(a,bc)$在第_____象限.



(第12题)

13. 【2019·天津】二次函数$y=ax^2+bx+c(a,b,c$是常数,$a\neq0)$的自变量x与函数值y的部分对应值如下表:

x	…	-2	-1	0	1	2	…
$y=ax^2+bx+c$	…	t	m	-2	-2	n	…

且当$x=-\frac{1}{2}$时,与其对应的函数值$y>0$,有下列结论:

①$abc>0$;②-2和3是关于x的方程$ax^2+bx+c=t$的两个根;③$0<m+n<\frac{20}{3}$.

其中,正确结论的个数是(　　)

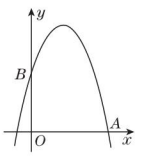
A.0　　B.1　　C.2　　D.3

思想2 分类讨论思想

14. 如图,已知二次函数$y=-x^2+bx+3$的图象与x轴的一个交点为$A(4,0)$,与y轴交于点B.

(1)求此二次函数的解析式和点B的坐标.

(2)在x轴上是否存在点P,使得$\triangle PAB$为等腰三角形?若存在,求出点P的坐标;若不存在,请说明理由.



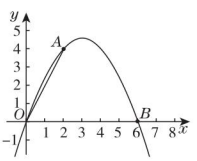
(第14题)

思想3 方程思想

15. 【中考·安徽】如图,二次函数$y=ax^2+bx$的图象经过点$A(2,4)$与$B(6,0)$.

(1)求a,b的值;

(2)点C是该二次函数图象上A,B两点之间的一动点,横坐标为$x(2<x<6)$,写出四边形$OACB$的面积S关于点C的横坐标x的函数解析式,并求S的最大值.



(第15题)

华罗庚的减号:在学习中要敢于做减法,减去前人已经解决的部分,看看还有哪些问题没有解决,需要我们去探索解决.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

23.1 图形的旋转

第1课时 图形的旋转及性质

名师点金

理解旋转必须明确的两点

1. 图形绕着某一定点旋转，这一定点可以是图形外的一点，也可以是图形上的一点，还可以是图形内的一点，这一定点即为旋转中心.
2. **旋转的决定因素**

(1)旋转中心；(2)旋转角；(3)旋转方向.

Ⅰ 夯实基础·逐点练 ☞(答案见167页)

知识点1 旋转及相关概念

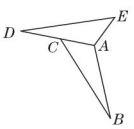
1. 如图，$\triangle ABC$ 按顺时针方向旋转到 $\triangle ADE$ 的位置，以下关于旋转中心和对应点的说法正确的是(　　)

A. 点 A 是旋转中心，点 B 和点 E 是对应点

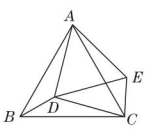
B. 点 C 是旋转中心，点 B 和点 D 是对应点

C. 点 A 是旋转中心，点 C 和点 E 是对应点

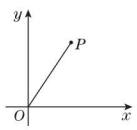
D. 点 C 是旋转中心，点 A 和点 D 是对应点



(第1题)



(第2题)



(第3题)

2. 如图，$\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 均为等边三角形，则图中可以看成是旋转关系的三角形是(　　)

A. $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$　　B. $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABD$

C. $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$　　D. $\triangle ACE$ 和 $\triangle ADE$

***3.** 【2019·孝感】如图，在平面直角坐标系中，将点 $P(2,3)$ 绕原点 O 顺时针旋转 $90°$ 得到点 P'，则点 P' 的坐标为(　　)

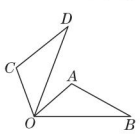
A. $(3,2)$　　B. $(3,-1)$

C. $(2,-3)$　　D. $(3,-2)$

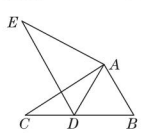
知识点2 旋转的性质

4. 【2019·湘潭】如图，将 $\triangle OAB$ 绕点 O 逆时针旋转 $70°$ 到 $\triangle OCD$ 的位置，若 $\angle AOB=40°$，则 $\angle AOD=$(　　)

A. $45°$　　B. $40°$　　C. $35°$　　D. $30°$



(第4题)



(第5题)

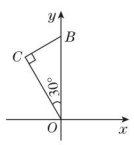
5. 【2019·内江】如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=2$，$BC=3.6$，$\angle B=60°$，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 顺时针旋转得到 $\triangle ADE$，当点 B 的对应点 D 恰好落在 BC 边上时，则 CD 的长为(　　)

A. 1.6　　B. 1.8　　C. 2　　D. 2.6

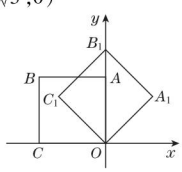
6. 【2019·荆门】如图，Rt$\triangle OCB$ 的斜边在 y 轴上，$OC=\sqrt{3}$，含 $30°$ 角的顶点与原点重合，直角顶点 C 在第二象限，将 Rt$\triangle OCB$ 绕原点顺时针旋转 $120°$ 后得到 $\triangle OC'B'$，则 B 点的对应点 B' 的坐标是(　　)

A. $(\sqrt{3},-1)$　　B. $(1,-\sqrt{3})$

C. $(2,0)$　　D. $(\sqrt{3},0)$



(第6题)



(第7题)

***7.** 【2019·张家界】如图，在平面直角坐标系中，将边长为1的正方形 $OABC$ 绕点 O 顺时针旋转 $45°$ 后得到正方形 $OA_1B_1C_1$，依此方式，绕点 O 连续旋转2 019次得到正方形 $OA_{2\,019}B_{2\,019}C_{2\,019}$，那么点 $A_{2\,019}$ 的坐标是(　　)

A. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$　　B. $(1,0)$

C. $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$　　D. $(0,-1)$

易错点 易忽视旋转方向而漏解

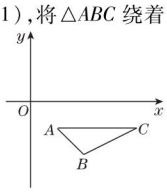
8. 【2018·牡丹江】如图，$\triangle ABC$ 三个顶点的坐标分别是 $A(1,-1)$，$B(2,-2)$，$C(4,-1)$，将 $\triangle ABC$ 绕着原点 O 旋转 $75°$，得到 $\triangle A_1B_1C_1$，则点 B_1 的坐标为(　　)

A. $(\sqrt{2},\sqrt{6})$ 或 $(-\sqrt{6},-\sqrt{2})$

B. $(\sqrt{6},\sqrt{2})$ 或 $(-\sqrt{6},-\sqrt{2})$

C. $(-\sqrt{2},-\sqrt{6})$ 或 $(\sqrt{6},\sqrt{2})$

D. $(-\sqrt{2},-\sqrt{6})$ 或 $(\sqrt{2},\sqrt{6})$



(第8题)

趣味数学 大自然中最普遍最醉人的舞步——螺旋：世间万物都在运动，运动的形式多种多样，螺旋是一种备受大自然和人类文明青睐的运动形式.(待续)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

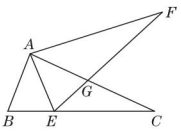
Ⅱ 整合方法·提升练 ☞（答案见167页）

考查角度1 利用旋转的性质进行角的计算

9. 【2019·苏州】如图，△ABC中，点E在BC边上，$AE=AB$，将线段AC绕A点旋转到AF的位置，使得$\angle CAF=\angle BAE$，连接EF，EF与AC交于点G.

（1）求证：$EF=BC$；

（2）若$\angle ABC=65°$，$\angle ACB=28°$，求$\angle FGC$的度数.



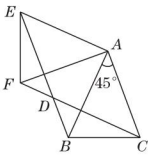
（第9题）

考查角度2 利用旋转的性质进行线段的计算

10. 如图，在△ABC中，$AB=AC=1$，$\angle BAC=45°$，△AEF是由△ABC绕点A按顺时针方向旋转得到的，连接BE，CF，相交于点D.

（1）求证：$BE=CF$；

（2）当四边形$ACDE$的四边相等时，求BD的长.



（第10题）

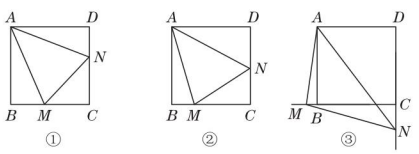
Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞（答案见168页）

拔尖角度1 利用旋转的性质探究线段的和差关系

11. 在正方形$ABCD$中，$\angle MAN=45°$，$\angle MAN$绕点A按顺时针方向旋转，它的两边分别交CB，DC（或它们的延长线）于M，N两点. 当$\angle MAN$绕点A旋转到$BM=DN$时（如图①），易证$BM+DN=MN$.

（1）当$\angle MAN$绕点A旋转到$BM\neq DN$时（如图②），线段BM，DN和MN之间有怎样的数量关系？并说明理由.

（2）当$\angle MAN$绕点A旋转到如图③所示的位置时，线段BM，DN和MN之间又有怎样的数量关系？请直接写出你的猜想.



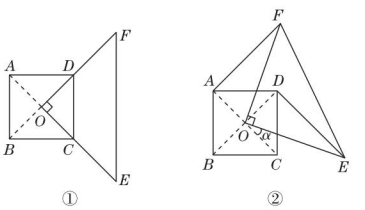
（第11题）

拔尖角度2 利用旋转的性质探究边角的关系

12. 【2019·荆州】如图①，等腰直角三角形OEF的直角顶点O为正方形$ABCD$的中心，点C，D分别在OE和OF上，现将△OEF绕点O逆时针旋转α角（$0°<\alpha<90°$），连接AF，DE（如图②）.

（1）在图②中，$\angle AOF=$_____（用含α的式子表示）；

（2）在图②中猜想AF与DE的数量关系，并证明你的结论.



（第12题）

趣味数学 你只要随便往身边一看，你手指上的指纹结构、野外向日葵种子的排列、藤类植物的卷须等都不约而同地呈现出螺旋结构.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第2课时　旋转的性质在证明线段（角）关系中的应用 ☞（答案见168页）

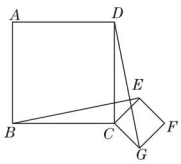
名师点金

用旋转的性质证明线段或角相等的两种主要方法

1. 根据旋转角相等，对应点与旋转中心的连线相等可得线段或角相等.
2. 根据旋转后的图形与原来图形的形状、大小都相同可得旋转前后两个图形的对应线段、对应角相等.

应用1 证明线段相等

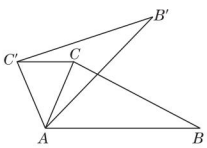
1. 如图，正方形 $ABCD$ 和正方形 $CEFG$，将正方形 $CEFG$ 绕点 C 旋转. 求证：$BE = DG$.



（第1题）

应用2 证明线段平行

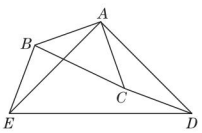
2. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle CAB = 67°$，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转 $46°$ 得到 $\triangle AB'C'$. 求证：$CC' /\!/ AB$.



（第2题）

应用3 证明线段垂直

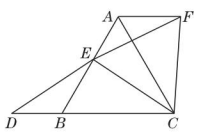
3. 如图，已知 $\triangle ABC$ 和 $\triangle AED$ 都是等腰直角三角形，$\angle BAC = \angle EAD = 90°$，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 旋转. 求证：$CD \perp BE$.



（第3题）

应用4 证明线段和差关系

4. 如图，已知 $\triangle ABC$ 是等边三角形，点 E 在线段 AB 上，点 D 在射线 CB 上，且 $ED = EC$，将 $\triangle BCE$ 绕点 C 顺时针旋转 $60°$ 至 $\triangle ACF$，连接 EF. 求证：$AB = AF + BD$.



（第4题）

趣味数学　谜语：走遍天下都不怕.（打一数学名词）

（谜底：有理数）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第3课时　旋转作图

名师点金

旋转作图的一般步骤

一连：连接已知点与旋转中心；**二定**：确定旋转方向；**三量**：测量旋转角度；**四截**：在旋转角的另一条边上以旋转中心为一端点截取等于对应线段长度的线段；**五画**：顺次连接所得的点，从而画出旋转得到的图形.

Ⅰ 夯实基础·逐点练 ☞（答案见168页）

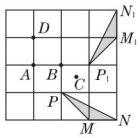
知识点1 旋转作图

1. 【2019·吉林】把图中的交通标志图案绕着它的中心旋转一定角度后与自身重合，则这个旋转角度至少为（　　）

A. 30°　　B. 90°　　C. 120°　　D. 180°



（第1题）



（第2题）

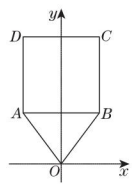
2. 如图，在4×4的正方形网格中，$\triangle MNP$ 绕某点旋转一定的角度，得到 $\triangle M_1N_1P_1$，则其旋转中心是（　　）

A. 点 A　　B. 点 B

C. 点 C　　D. 点 D

知识点2 作图的应用

3. 【2019·河南】如图，在 $\triangle OAB$ 中，顶点 $O(0,0)$，$A(-3,4)$，$B(3,4)$，将 $\triangle OAB$ 与正方形 $ABCD$ 组成的图形绕点 O 顺时针旋转，每次旋转90°，则第70次旋转结束时，点 D 的坐标为（　　）



（第3题）

A. (10,3)　　B. (−3,10)

C. (10,−3)　　D. (3,−10)

Ⅱ 整合方法·提升练 ☞（答案见168页）

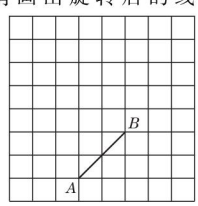
考查角度1 利用旋转的性质作图并求图形的面积

4. 【2019·淮安】如图，方格纸上每个小正方形的边长均为1个单位长度，点 A，B 都在格点上（两条网格线的交点叫格点）.

（1）将线段 AB 向上平移2个单位长度，点 A 的对应点为点 A_1，点 B 的对应点为点 B_1，请画出平移后的线段 A_1B_1；

（2）将线段 A_1B_1 绕点 A_1 按逆时针方向旋转90°，点 B_1 的对应点为点 B_2，请画出旋转后的线段 A_1B_2；

（3）连接 AB_2，BB_2，求 $\triangle ABB_2$ 的面积.



（第4题）

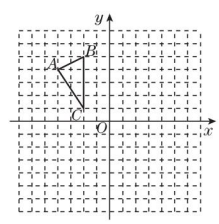
考查角度2 利用旋转的性质作图并求旋转路径长

5. 【2018·阜新】如图，$\triangle ABC$ 在平面直角坐标系内，顶点的坐标分别为 $A(-4,4)$，$B(-2,5)$，$C(-2,1)$.

（1）平移 $\triangle ABC$，使点 C 移到点 $C_1(-2,-4)$，画出平移后的 $\triangle A_1B_1C_1$，并写出点 A_1，B_1 的坐标；

（2）将 $\triangle ABC$ 绕点 $(0,3)$ 旋转180°，得到 $\triangle A_2B_2C_2$，画出旋转后的 $\triangle A_2B_2C_2$；

（3）求（2）中的点 C 旋转到点 C_2 时，点 C 经过的路径长（结果保留 π）.



（第5题）

趣味数学

谜语：夏周之间.（打一数学名词）

（谜底：商）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第二十一章达标检测卷

(120 分,90 分钟)

题 号	一	二	三	总 分
得 分				

姓名 学号 班级 学校

一、选择题(每题 3 分,共 30 分)

1. 下列方程是关于 x 的一元二次方程的是(　　)

A. $ax^2+2=x(x+1)$　　B. $x^2+\frac{1}{x}=3$

C. $x^2+2x=y^2-1$　　D. $3(x+1)^2=2(x+1)$

2. 如果 2 是方程 $x^2-3x+k=0$ 的一个根,那么常数 k 的值为(　　)

A. 1　　B. 2　　C. -1　　D. -2

3. 用配方法解方程 $x^2+4x+1=0$,配方后的方程是(　　)

A. $(x+2)^2=3$　　B. $(x-2)^2=3$　　C. $(x-2)^2=5$　　D. $(x+2)^2=5$

4. 方程 $x^2-4\sqrt{2}x+9=0$ 的根的情况是(　　)

A. 有两个不相等的实根　　B. 有两个相等的实根

C. 无实根　　D. 以上三种情况都有可能

5. 等腰三角形的两边长为方程 $x^2-7x+10=0$ 的两根,则它的周长为(　　)

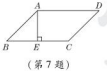
A. 12　　B. 12 或 9　　C. 9　　D. 7

6. 某校进行体操队列训练,原有 8 行 10 列,后增加 40 人,使得队伍增加的行数、列数相同,你知道增加了多少行(或列)吗?设增加了 x 行(或列),则列方程得(　　)

A. $(8-x)(10-x)=8\times10-40$　　B. $(8-x)(10-x)=8\times10+40$

C. $(8+x)(10+x)=8\times10-40$　　D. $(8+x)(10+x)=8\times10+40$

7. 如图,在$\square ABCD$ 中,$AE\perp BC$ 于 E,$AE=EB=EC=a$,且 a 是一元二次方程 $x^2+2x-3=0$ 的根,则$\square ABCD$ 的周长为(　　)

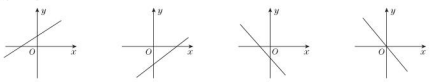


(第 7 题)

A. $4+2\sqrt{2}$　　B. $12+6\sqrt{2}$

C. $2+2\sqrt{2}$　　D. $4+2\sqrt{2}$ 或 $12+6\sqrt{2}$

8. 若关于 x 的一元二次方程 $x^2-2x+kb+1=0$ 有两个不相等的实数根,则一次函数 $y=kx+b$ 的大致图象可能是(　　)

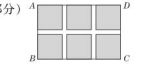


A　　B　　C　　D

9. 在直角坐标系 xOy 中,已知点 $P(m,n)$,m,n 满足 $(m^2+1+n^2)(m^2+3+n^2)=8$,则 OP 的长为(　　)

A. $\sqrt{5}$　　B. 1　　C. 5　　D. $\sqrt{5}$ 或 1

10. 如图,某小区规划在一个长为 40 m,宽为 26 m 的矩形场地 $ABCD$ 上修建三条同样宽的路,使其中两条与 AB 平行,另一条与 AD 平行,其余部分种植草坪,若使每块草坪(阴影部分)的面积都为 144 m^2,则路的宽为(　　)



(第 10 题)

A. 3 m　　B. 4 m

C. 2 m　　D. 5 m

二、填空题(每题 3 分,共 30 分)

11. 方程 $(x-3)^2+5=6x$ 化成一般形式是_____,其中一次项系数是_____.

12. 三角形的每条边的长都是方程 $x^2-6x+8=0$ 的根,则三角形的周长为_____.

13. 已知 $x=1$ 是一元二次方程 $x^2+ax+b=0$ 的一个根,则 $(a+b)^{2\,023}$ 的值为_____.

14. 若关于 x 的一元二次方程 $2x^2-5x+k=0$ 无实数根,则 k 的最小整数值为_____.

15. 已知 x_1,x_2 是关于 x 的一元二次方程 $x^2-5x+a=0$ 的两个实数根,且 $x_1^2-x_2^2=10$,则 $a=$_____.

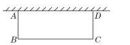
16. 对于任意实数 a,b,定义 $f(a,b)=a^2+5a-b$,如 $f(2,3)=2^2+5\times2-3$,若 $f(x,2)=4$,则实数 x 的值是_____.

17. 下面是某同学在一次测试中解答的填空题:①若 $x^2=a^2$,则 $x=a$;②方程 $2x(x-2)=x-2$ 的解为 $x=\frac{1}{2}$;③已知 x_1,x_2 是方程 $2x^2+3x-4=0$ 的两根,则 $x_1+x_2=\frac{3}{2}$,$x_1x_2=-2$. 其中解答错误的序号是_____.

18. 已知 a,b,c 是 $\triangle ABC$ 的三边长,若方程 $(a-c)x^2+2bx+a+c=0$ 有两个相等的实数根,则 $\triangle ABC$ 是_____三角形.

19. 若 $x^2-3x+1=0$,则 $\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$ 的值为_____.

20. 如图,用篱笆靠墙围成矩形花圃 $ABCD$,一面利用墙,其余三面用篱笆围,墙可利用的最大长度为 15 m,篱笆长为 24 m. 当围成的花圃面积为 40 m^2 时,平行于墙的边 BC 的长为_____m.



(第 20 题)

三、解答题(21,26 题每题 12 分,22,23 题每题 8 分,其余每题 10 分,共 60 分)

21. 用适当的方法解下列方程:

(1) $x(x-4)+5(x-4)=0$;　　(2) $(2x+1)^2+4(2x+1)+4=0$;

(3) $x^2-2x-2=0$;　　(4) $(y+1)(y-1)=2y-1$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

22. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-(t-1)x+t-2=0$.

(1)求证:对于任意实数 t,方程都有实数根;

(2)当 t 为何值时,方程的两个根互为倒数?请说明理由.

23. 关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+1=0$.

(1)当 $b=a+2$ 时,利用根的判别式判断方程根的情况;

(2)若方程有两个相等的实数根,写出一组满足条件的 a,b 的值,并求此时方程的根.

24. 关于 x 的一元二次方程 $x^2+(2k+1)x+k^2+1=0$ 有两个不相等的实数根 x_1,x_2.

(1)求实数 k 的取值范围;

(2)若方程的两个实数根 x_1,x_2 满足 $|x_1|+|x_2|=x_1\cdot x_2$,求 k 的值.

25. 为了贯彻党中央、国务院关于倡导开展全民阅读的重要部署,落实《关于实施中华优秀传统文化传承发展工程的意见》,某社区鼓励居民到社区阅览室借阅图书,并统计每年的借阅人数和图书借阅总量(单位:本),该阅览室在 2017 年图书借阅总量是 7 500 本,2019 年图书借阅总量是 10 800 本.

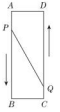
(1)求该社区从 2017 年至 2019 年图书借阅总量的年平均增长率;

(2)已知 2019 年该社区居民借阅图书人数有 1 350 人,预计 2020 年达到 1 440 人. 如果 2019 年至 2020 年图书借阅总量的增长率不低于 2017 年至 2019 年的年平均增长率,那么 2020 年的人均借阅量比 2019 年增长 $a\%$,则 a 的值至少是多少?

26. 如图,已知 A,B,C,D 为矩形的四个顶点,$AB=16$ cm,$AD=6$ cm,动点 P,Q 分别从点 A,C 同时出发,点 P 以 3 cm/s 的速度向点 B 移动,一直到点 B 为止,点 Q 以 2 cm/s 的速度向点 D 移动. 问:

(1)P,Q 两点出发多长时间后,四边形 $PBCQ$ 的面积是 33 cm^2?

(2)P,Q 两点出发多长时间后,点 P 与点 Q 之间的距离是 10 cm?



(第 26 题)

荣德基 品质教辅

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第二十二章达标检测卷

(120 分,90 分钟)

题 号	一	二	三	总 分
得 分				

姓名 学号 班级 学校

一、选择题(每题 3 分,共 30 分)

1. 下列函数是二次函数的是(　　)

A. $y=3x^2+9$　　B. $y=mx^2+2x-3$　　C. $y=2x^2+\frac{1}{x}-2$　　D. $y=\frac{4}{x^2}$

2. 抛物线 $y=2(x-3)^2+4$ 的顶点坐标是(　　)

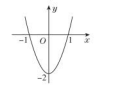
A. (3,4)　　B. (−3,4)　　C. (3,−4)　　D. (2,4)

3. 二次函数 $y=ax^2+bx-1(a\neq 0)$ 的图象经过点(1,1),则 $a+b+1$ 的值是(　　)

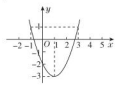
A. −3　　B. −1　　C. 2　　D. 3

4. 将如图所示的抛物线向右平移 1 个单位长度,再向上平移 3 个单位长度后,得到的抛物线解析式是(　　)

A. $y=(x-1)^2+1$　　B. $y=(x+1)^2+1$　　C. $y=2(x-1)^2+1$　　D. $y=2(x+1)^2+1$



(第 4 题)



(第 5 题)

5. 已知 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图所示,根据图中提供的信息,可求得使 $y\geqslant 1$ 成立的 x 的取值范围是(　　)

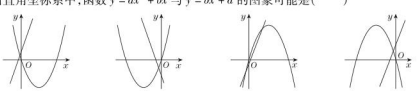
A. $-1\leqslant x\leqslant 3$　　B. $-3\leqslant x\leqslant 1$　　C. $x\geqslant -3$　　D. $x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 3$

6. 已知二次函数 $y=x^2-2mx-3$,下列结论不一定成立的是(　　)

A. 它的图象与 x 轴有两个交点　　B. 方程 $x^2-2mx=3$ 的两根之积为 −3

C. 它的图象的对称轴在 y 轴的右侧　　D. 当 $x<m$ 时,y 随 x 的增大而减小

7. 在同一平面直角坐标系中,函数 $y=ax^2+bx$ 与 $y=bx+a$ 的图象可能是(　　)



A　　B　　C　　D

8. 抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 上部分点的横坐标 x,纵坐标 y 的对应值如下表所示:

x	…	−2	−1	0	1	2	…
y	…	0	4	6	6	4	…

从上表可知,下列说法中错误的是(　　)

A. 抛物线与 x 轴的一个交点坐标为(−2,0)　　B. 抛物线与 y 轴的交点坐标为(0,6)

C. 抛物线的对称轴是直线 $x=0$　　D. 抛物线在对称轴左侧部分是上升的

9. 向空中发射一枚炮弹,经 x 秒后的高度为 y 米,且时间与高度的关系式为 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$. 若此炮弹在第 6 秒与第 14 秒时的高度相等,则在下列时间中炮弹所在高度最高的是(　　)

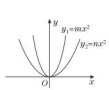
A. 第 8 秒　　B. 第 10 秒　　C. 第 12 秒　　D. 第 14 秒

10. 如图,抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 过点(−1,0)和点(0,−3),且顶点在第四象限,设 $P=a+b+c$,则 P 的取值范围是(　　)

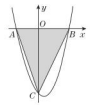
A. $-3<P<-1$　　B. $-6<P<0$　　C. $-3<P<0$　　D. $-6<P<-3$



(第 10 题)



(第 12 题)



(第 14 题)

二、填空题(每题 3 分,共 30 分)

11. 二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2-6x+21$ 的图象的开口向_____,顶点坐标为_____.

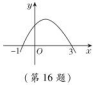
12. 二次函数 $y_1=mx^2$,$y_2=nx^2$ 的图象如图所示,则 m _____ n(填“>”或“<”).

13. 将一条长为 20 cm 的铁丝剪成两段,并以每一段铁丝的长度为周长各做成一个正方形,则这两个正方形的面积之和的最小值是_____cm^2.

14. 如图,二次函数 $y=x^2-x-6$ 的图象交 x 轴于 A,B 两点,交 y 轴于 C 点,则△ABC 的面积为_____.

15. 已知抛物线 $y=ax^2-2ax+c$ 与 x 轴的一个交点的坐标为(−1,0),则方程 $ax^2-2ax+c=0$ 的根为_____.

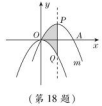
16. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的图象如图所示,则不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是_____.



(第 16 题)



(第 17 题)



(第 18 题)

17. 如图是一座抛物线形拱桥,当水面宽 4 m 时,拱顶(拱桥洞的最高点)离水面 2 m,当水面下降 1 m 时,水面的宽度为_____.

18. 如图,将抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 平移得到抛物线 m. 抛物线 m 经过点 $A(6,0)$ 和原点 O,它的顶点为 P,它的对称轴与抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 交于点 Q,则图中阴影部分的面积为_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

19. 若二次函数 $y=2x^2-4x-1$ 的图象与 x 轴交于 $A(x_1,0)$，$B(x_2,0)$ 两点，则 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ 的值为_____.

20. 如图是二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象，有下列结论：

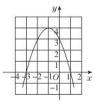
①二次三项式 ax^2+bx+c 的最大值为 4；

②$4a+2b+c<0$；

③一元二次方程 $ax^2+bx+c=1$ 的两根之和为 -1；

④使 $y\leqslant 3$ 成立的 x 的取值范围是 $x\geqslant 0$.

其中正确的有_____个.



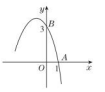
（第 20 题）

三、解答题（21 题 8 分，22～25 题每题 10 分，26 题 12 分，共 60 分）

21. 如图是抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 的部分图象，其中 $A(1,0)$，$B(0,3)$.

（1）求抛物线的解析式；

（2）结合图象，写出当 $y<3$ 时 x 的取值范围（作适当说明）.



（第 21 题）

22. 已知二次函数 $y=x^2+bx-c$ 的图象与 x 轴两交点的坐标分别为 $(m,0)$，$(-3m,0)$ $(m\neq 0)$.

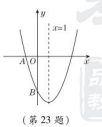
（1）求证：$4c=3b^2$；

（2）若该函数图象的对称轴为直线 $x=1$，试求二次函数的最小值.

23. 如图，已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ 与 x 轴负半轴交于点 A，与 y 轴交于点 B，若 $OA=1$，$OB=3$，抛物线的对称轴为直线 $x=1$.

（1）求抛物线的解析式；

（2）在抛物线的对称轴上，是否存在点 P，使它到点 A 的距离与到点 B 的距离之和最小？如果存在，请求出点 P 的坐标；如果不存在，请说明理由.

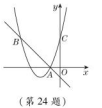


（第 23 题）

24. 如图，二次函数 $y=(x+2)^2+m$ 的图象与 y 轴交于点 C，点 B 在抛物线上，且与点 C 关于抛物线的对称轴对称，已知一次函数 $y=kx+b$ 的图象经过该二次函数图象上的点 $A(-1,0)$ 及点 B.

（1）求二次函数与一次函数的解析式；

（2）根据图象，写出满足 $(x+2)^2+m\geqslant kx+b$ 的 x 的取值范围.



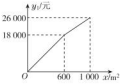
（第 24 题）

25. 为了“创建文明城市，建设美丽家园”，某社区将辖区内的一块面积为 1 000 m^2 的空地进行绿化，一部分种草，剩余部分栽花. 设种草部分的面积为 $x(m^2)$，种草所需费用 y_1（元）与 $x(m^2)$ 的函数解析式为 $y_1=\begin{cases}k_1x(0\leqslant x<600),\\k_2x+b(600\leqslant x\leqslant 1\,000),\end{cases}$ 其图象如图所示；栽花所需费用 y_2（元）与 $x(m^2)$ 的函数解析式为 $y_2=-0.01x^2-20x+30\,000(0\leqslant x\leqslant 1\,000)$.

（1）请直接写出 k_1，k_2 和 b 的值；

（2）设这块 1 000 m^2 空地的绿化总费用为 W（元），请利用 W 与 x 的函数解析式，求出 W 的最大值；

（3）若种草部分的面积不少于 700 m^2，栽花部分的面积不少于 100 m^2，请求出 W 的最小值.



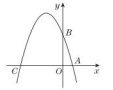
（第 25 题）

26. 已知如图，在平面直角坐标系 xOy 中，点 A，B，C 分别为坐标轴上的三个点，且 $OA=1$，$OB=3$，$OC=4$.

（1）求经过 A，B，C 三点的抛物线的解析式；

（2）在平面直角坐标系 xOy 中是否存在一点 P，使得以点 A，B，C，P 为顶点的四边形为菱形？若存在，请求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由；

（3）若点 M 为该抛物线上一动点，在（2）的条件下，请求出使 $|PM-AM|$ 最大时点 M 的坐标，并直接写出 $|PM-AM|$ 的最大值.



（第 26 题）

荣德基 品质教辅

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第二十三章达标检测卷

(120 分,90 分钟)

题 号	一	二	三	总 分
得 分				

姓名 学号 班级 学校

一、选择题(每题 3 分,共 30 分)

1. 下列 A,B,C,D 四幅图案中,能通过将图案(1)顺时针旋转 180°得到的是(　　)



(1)　　A　　B　　C　　D

(第 1 题)

2. 下列标志既是轴对称图形又是中心对称图形的是(　　)



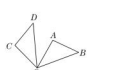
A　　B　　C　　D

3. 正六边形绕其中心旋转一定角度后,与自身重合,旋转角至少为(　　)

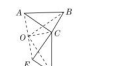
A. 30°　　B. 60°　　C. 120°　　D. 180°

4. 如图,△OAB 绕点 O 逆时针旋转 75°到△OCD 的位置,已知∠AOB = 40°,则∠AOD 等于(　　)

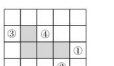
A. 55°　　B. 45°　　C. 40°　　D. 35°



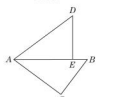
(第 4 题)



(第 5 题)



(第 6 题)



(第 7 题)

5. 如图,△ABC 绕着点 O 按顺时针方向旋转 90°后到达了△CDE 的位置,下列说法中不正确的是(　　)

A. 线段 AB 与线段 CD 互相垂直　　B. 线段 AC 与线段 CE 互相垂直

C. 点 A 与点 E 是两个三角形的对应点　　D. 线段 BC 与线段 DE 互相垂直

6. 在如图所示的方格纸中,将标有序号的小正方形中的一个涂上阴影,使它与图中阴影部分组成的新图形是中心对称图形,该小正方形的序号是(　　)

A. ①　　B. ②　　C. ③　　D. ④

7. 如图,在△ABC 中,∠C = 90°,AC = 4,BC = 3,将△ABC 绕点 A 逆时针旋转,使点 C 落在线段 AB 上的点 E 处,点 B 落在点 D 处,则 B,D 两点间的距离为(　　)

A. $\sqrt{10}$　　B. $2\sqrt{2}$　　C. 3　　D. $2\sqrt{5}$

8. 如图,在平面直角坐标系中,点 B,C,E 在 y 轴上,Rt△ABC 经过变换得到 Rt△ODE. 若点 C 的坐标为(0,1),AC = 2,则这种变换可以是(　　)

A. △ABC 绕点 C 顺时针旋转 90°,再向下平移 3 个单位长度

B. △ABC 绕点 C 顺时针旋转 90°,再向下平移 1 个单位长度

C. △ABC 绕点 C 逆时针旋转 90°,再向下平移 1 个单位长度

D. △ABC 绕点 C 逆时针旋转 90°,再向下平移 3 个单位长度



(第 8 题)



(第 9 题)



(第 10 题)

9. 如图,直线 $y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$ 与 y 轴交于点 P,将它绕着点 P 旋转 90°所得的直线对应的函数解析式为(　　)

A. $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}$　　B. $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}$　　C. $y = \frac{1}{3}x + \sqrt{3}$　　D. $y = -\frac{1}{3}x + \sqrt{3}$

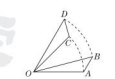
10. 如图,将斜边长为 4 的直角三角板放在直角坐标系 xOy 中,两条直角边分别与坐标轴重合,P 为斜边的中点,现将此三角板绕点 O 顺时针旋转 120°后,点 P 的对应点的坐标是(　　)

A. $(\sqrt{3},1)$　　B. $(1,-\sqrt{3})$　　C. $(2\sqrt{3},-2)$　　D. $(2,-2\sqrt{3})$

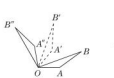
二、填空题(每题 3 分,共 30 分)

11. 请写出一个是中心对称图形的几何图形的名称:_____.

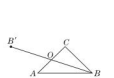
12. 如图,将△AOB 绕点 O 按逆时针方向旋转 45°后得到△COD. 若∠AOB = 15°,则∠AOD 的度数是_____.



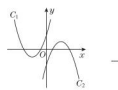
(第 12 题)



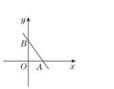
(第 14 题)



(第 15 题)



(第 17 题)



(第 18 题)

13. 在平面直角坐标系中,若点 $P(m,m-n)$ 与点 $Q(-2,3)$ 关于原点对称,则点 $M(m,n)$ 在第_____象限.

14. 如图,将△OAB 绕着点 O 逆时针连续旋转两次得到△$OA''B''$,每次旋转的角度都是 50°. 若∠$B''OA$ = 120°,则∠AOB = _____.

15. 如图,在△ABC 中,∠C = 90°,AC = BC = 4 cm. 若以 AC 的中点 O 为旋转中心,将这个三角形旋转 180°后,点 B 落在 B'处,则 BB' = _____cm.

16. 已知点 $P(3,1-b)$ 关于原点的对称点 Q 的坐标是$(a,-1)$,则 a^b 的值是_____.

17. 如图,已知抛物线 C_1,抛物线 C_2 关于原点中心对称. 如果抛物线 C_1 的解析式为 $y = \frac{3}{4}(x+2)^2 - 1$,那么抛物线 C_2 的解析式为_____.

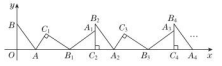
18. 如图,直线 $y = -\frac{1}{2}x + 3$ 与 x 轴,y 轴分别交于 A,B 两点,把△AOB 绕点 A 旋转 90°后得到△$AO'B'$,则点 B'的坐标是_____.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

19. 如图,边长为 1 的正方形 $ABCD$ 绕点 A 逆时针旋转 30°到正方形 $AB'C'D'$ 的位置,则图中阴影部分的面积为_____.



(第 19 题)



(第 20 题)

20. 如图,在平面直角坐标系中,将△ABO 绕点 A 顺时针旋转到△AB_1C_1 的位置,点 B,O 分别落在点 B_1,C_1 处,点 B_1 在 x 轴上,再将△AB_1C_1 绕着 B_1 顺时针旋转到△$A_1B_1C_2$ 的位置,点 C_2 在 x 轴上,将△$A_1B_1C_2$ 绕点 C_2 顺时针旋转到△$A_2B_2C_2$ 的位置,点 A_2 在 x 轴上,依次进行下去……若点 $A\left(\frac{3}{2},0\right)$,$B(0,2)$,则点 $B_{2\,022}$ 的坐标为_____.

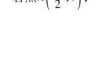
三、解答题(21,22 题每题 8 分,23,24 题每题 10 分,25,26 题每题 12 分,共 60 分)

21. 如图,AC 是正方形 $ABCD$ 的对角线,△ABC 经过旋转后到达△AEF 的位置.

(1)指出它的旋转中心;

(2)说出它的旋转方向和旋转角是多少度;

(3)分别写出点 A,B,C 的对应点.



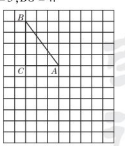
(第 21 题)

22. 在下面的网格图中,每个小正方形的边长均为 1,在 Rt△ABC 中,$\angle C=90°$,$AC=3$,$BC=4$.

(1)试在图中作出△ABC 以点 A 为旋转中心,按顺时针方向旋转 90°后得到的△AB_1C_1;

(2)若点 B 的坐标为(-3,5),试在图中画出直角坐标系,并写出 A,C 两点的坐标;

(3)根据(2)中的直角坐标系作出与△ABC 关于原点对称的△$A_2B_2C_2$,并写出 B_2,C_2 两点的坐标.

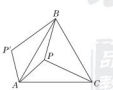


(第 22 题)

23. 如图,P 是等边三角形 ABC 内一点,且 $PA=6$,$PB=8$,$PC=10$. 若将△PAC 绕点 A 逆时针旋转后得到△$P'AB$.

(1)求点 P 与点 P' 之间的距离;

(2)求∠APB 的度数.

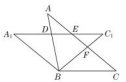


(第 23 题)

24. 如图,在等腰三角形 ABC 中,$AB=BC$,将等腰三角形 ABC 绕顶点 B 按逆时针方向旋转角 α 到△A_1BC_1 的位置,AB 与 A_1C_1 相交于点 D,AC 与 A_1C_1,BC_1 分别交于点 E,F.

(1)求证:△BCF≌△BA_1D;

(2)当∠$C=\alpha$ 时,判定四边形 A_1BCE 的形状并说明理由.



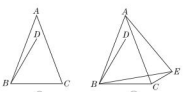
(第 24 题)

25. 在△ABC 中,$AB=AC$,$\angle BAC=\alpha(0°<\alpha<60°)$,将线段 BC 绕点 B 逆时针旋转 60°得到线段 BD.

(1)如图①,直接写出∠ABD 的大小;(用含 α 的式子表示)

(2)如图②,∠$BCE=150°$,∠$ABE=60°$,判断△ABE 的形状并加以证明;

(3)在(2)的条件下,连接 DE,若∠$DEC=45°$,求 α 的值.



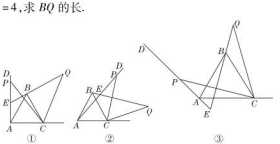
(第 25 题)

26. 已知∠$DAC=90°$,△ABC 是等边三角形,点 P 为射线 AD 上任意一点(点 P 不与点 A 重合),连接 CP,将线段 CP 绕点 C 顺时针旋转 60°得到线段 CQ,连接 QB 并延长交直线 AD 于点 E.

(1)如图①,猜想∠QEP=_____°;

(2)如图②和图③,若当∠DAC 是锐角或钝角时,其他条件不变,猜想∠QEP 的度数,并选取一种情况加以证明;

(3)如图③,若∠$DAC=135°$,∠$ACP=15°$,且 $AC=4$,求 BQ 的长.



(第 26 题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第二十四章达标检测卷

(120 分,90 分钟)

题 号	一	二	三	总 分
得 分				

姓名 学号 班级 学校

一、选择题(每题 3 分,共 30 分)

1. 下列说法中不正确的是(　　)

A. 圆是轴对称图形　　B. 三点确定一个圆

C. 半径相等的两个圆是等圆　　D. 每个圆都有无数条对称轴

2. 若⊙O 的面积为 25π,在同一平面内有一个点 P,且点 P 到圆心 O 的距离为 4.9,则点 P 与⊙O 的位置关系为(　　)

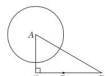
A. 点 P 在⊙O 外　　B. 点 P 在⊙O 上　　C. 点 P 在⊙O 内　　D. 无法确定

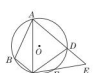
3. 如图,⊙O 是△ABC 的外接圆,$\angle BOC=120°$,则$\angle BAC$ 的度数是(　　)

A. 70°　　B. 60°　　C. 50°　　D. 30°


(第 3 题)


(第 4 题)


(第 5 题)


(第 6 题)

4. 如图,⊙O 的半径为 13,弦 AB 的长度是 24,$ON\perp AB$,垂足为 N,则 $ON=$(　　)

A. 5　　B. 7　　C. 9　　D. 11

5. 如图,在 Rt△ABC 中,$\angle C=90°$,$AC=4$,$BC=7$,点 D 在边 BC 上,$CD=3$,⊙A 的半径长为 3,⊙D 与⊙A 相交,且点 B 在⊙D 外,那么⊙D 的半径长 r 的取值范围是(　　)

A. $1<r<4$　　B. $2<r<4$　　C. $1<r<8$　　D. $2<r<8$

6. 如图,四边形 $ABCD$ 内接于⊙O,F 是$\overset{\frown}{CD}$上一点,且$\overset{\frown}{DF}=\overset{\frown}{BC}$,连接 CF 并延长交 AD 的延长线于点 E,连接 AC. 若$\angle ABC=105°$,$\angle BAC=25°$,则$\angle E$ 的度数为(　　)

A. 45°　　B. 50°　　C. 55°　　D. 60°

7. 如图,⊙O 与矩形 $ABCD$ 的边相切于点 E,F,G,点 P 是$\overset{\frown}{EFG}$上一点,则$\angle P$ 的度数是(　　)

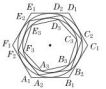
A. 45°　　B. 60°　　C. 30°　　D. 无法确定

8. 如图,在△ABC 中,$\angle ACB=90°$,$\angle ABC=30°$,$AB=2$. 将△ABC 绕直角顶点 C 逆时针旋转 60°得△$A'B'C$,则点 B 转过的路径长为(　　)

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. π


(第 7 题)


(第 8 题)


(第 10 题)

9. 若圆锥的侧面积等于其底面积的 3 倍,则该圆锥侧面展开图所对应扇形圆心角的度数为(　　)

A. 60°　　B. 90°　　C. 120°　　D. 180°

10. 如图,正六边形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的边长为 2,正六边形 $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$ 的外接圆与正六边形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的各边相切,正六边形 $A_3B_3C_3D_3E_3F_3$ 的外接圆与正六边形 $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$ 的各边相切……按这样的规律进行下去,正六边形 $A_{10}B_{10}C_{10}D_{10}E_{10}F_{10}$ 的边长为(　　)

A. $\frac{243}{2^9}$　　B. $\frac{81\sqrt{3}}{2^9}$　　C. $\frac{81}{2^9}$　　D. $\frac{81\sqrt{3}}{2^8}$

二、填空题(每题 3 分,共 30 分)

11. 如图,在圆内接四边形 $ABCD$ 中,若$\angle A$,$\angle B$,$\angle C$ 的度数之比为 4∶3∶5,则$\angle D$ 的度数是_____.


(第 11 题)


(第 12 题)


(第 13 题)


(第 14 题)

12. 如图,PA,PB 是⊙O 的切线,切点分别为 A,B,若 $OA=2$,$\angle P=60°$,则$\overset{\frown}{AB}$的长为_____.

13. 如图,⊙O 中,$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$,$\angle BAC=50°$,则$\angle AEC$ 的度数为_____.

14. 如图,AB 是⊙O 的直径,BD,CD 分别是过⊙O 上点 B,C 的切线,且$\angle BDC=110°$. 连接 AC,则$\angle A$ 的度数是_____.

15. 一元钱硬币的直径约为 24 mm,则用它能完全覆盖住的正六边形的边长最大不能超过_____mm.

16. 如图,在⊙O 的内接五边形 $ABCDE$ 中,$\angle CAD=35°$,则$\angle B+\angle E=$_____°.

17. 一个圆锥形漏斗,某同学用三角板测得其高度的尺寸如图所示,则该圆锥形漏斗的侧面积为_____.


(第 16 题)



(第 17 题)


(第 18 题)


(第 19 题)

18. 如图,$AC\perp BC$,$AC=BC=4$,以 BC 长为直径作半圆,圆心为点 O. 以点 C 为圆心,BC 长为半径作弧 AB,过点 O 作 AC 的平行线交两弧于点 D,E,则阴影部分的面积是_____.

19. 如图,AB 是⊙O 的一条弦,点 C 是⊙O 上一动点,且$\angle ACB=30°$,点 E,F 分别是 AC,BC 的中点,直线 EF 与⊙O 交于 G,H 两点,若⊙O 的半径是 7,则 $GE+FH$ 的最大值是_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

20. 如图，在⊙O中，C，D分别是OA，OB的中点，$MC\perp AB$，$ND\perp AB$，M，N在⊙O上. 下列结论：①$MC=ND$；②$\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{MN}=\overset{\frown}{NB}$；③四边形$MCDN$是正方形；④$MN=\frac{1}{2}AB$，其中正确的是_____.（填序号）



（第20题）

三、**解答题**（21，22题每题8分，23，24题每题10分，其余每题12分，共60分）

21. 如图，AB是圆O的直径，CD为弦，$AB\perp CD$，垂足为H，连接BC，BD.

（1）求证：$BC=BD$；

（2）已知$CD=6$，$OH=2$，求圆O的半径长.



（第21题）

22. “不在同一条直线上的三个点确定一个圆”. 请你判断平面直角坐标系内的三个点$A(2,3)$，$B(-3,-7)$，$C(5,11)$是否可以确定一个圆.

23. 如图，已知直线l与⊙O相离，$OA\perp l$于点A，交⊙O于点P，点B是⊙O上一点，连接BP并延长，交直线l于点C，恰有$AB=AC$.

（1）求证：AB是⊙O的切线；

（2）若$PC=2\sqrt{5}$，$OA=5$，求⊙O的半径.

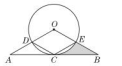


（第23题）

24. 如图，AB与⊙O相切于点C，OA，OB分别交⊙O于点D，E，$CD=CE$.

（1）求证：$OA=OB$；

（2）已知$AB=4\sqrt{3}$，$OA=4$，求阴影部分的面积.

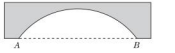


（第24题）

25. 如图，一座拱形公路桥，圆弧形桥拱的水面跨度$AB=80$米，桥拱到水面的最大高度为20米.

（1）求桥拱的半径；

（2）现有一艘宽60米，顶部截面为长方形且高出水面9米的轮船要经过这座拱桥，这艘轮船能顺利通过吗？请说明理由.



（第25题）

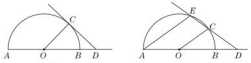
26. 已知AB是半圆O的直径，点C是半圆O上的动点，点D是线段AB延长线上的动点，在运动过程中，保持$CD=OA$.

（1）当直线CD与半圆O相切时，如图①，连接OC，求$\angle DOC$的度数；

（2）当直线CD与半圆O相交时，如图②，设另一交点为E，连接AE，OC，若$AE\parallel OC$.

①试猜想AE与OD的数量关系，并说明理由；

②求$\angle ODC$的度数.



（第26题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第二十五章达标检测卷

(120 分,90 分钟)

题 号	一	二	三	总 分
得 分				

姓名 学号 班级 学校

一、选择题(每题 3 分,共 30 分)

1. 下列事件中,是必然事件的是(　　)
A. 将油滴入水中,油会浮在水面上　　B. 车辆随机到达一个路口,遇到红灯
C. 如果 $a^2=b^2$,那么 $a=b$　　D. 掷一枚质地均匀的硬币,正面向上

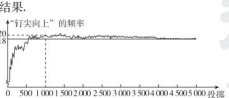
2. 小明将 6 本书分别放在 6 个完全相同的不透明礼盒中,准备将它们送给 6 个好朋友. 这些书中有 3 本小说,2 本科普读物和 1 本英语小词典. 小明的 1 个好朋友从 6 个礼盒中随机取 1 个,恰好取到小说的概率是(　　)
A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{2}{3}$

3. 小明在做一道正确答案是 2 的计算题时,由于运算符号("+""-""×"或"÷")被墨迹污染,看见的算式是"4■2",那么小明还能做对的概率是(　　)
A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{6}$　　D. $\frac{1}{2}$

4. 如图是一个可以自由转动的正六边形转盘,其中三个正三角形涂有阴影,转动转盘,指针落在有阴影的区域内的概率为 a(若指针落在分界线上,则重转);如果投掷一枚质地均匀的硬币,正面向上的概率为 b. 关于 a,b 大小的判断正确的是(　　)
A. $a>b$　　B. $a=b$
C. $a<b$　　D. 不能判断


(第 4 题)

5. 如图是求了用计算机模拟随机投掷一枚图钉的某次试验的结果.
下面有三个推断:
①当投掷次数是 500 时,计算机记录"钉尖向上"的次数是 308,所以"钉尖向上"的概率是 0.616;
②随着试验次数的增加,"钉尖向上"的频率总在 0.618 附近摆动,显示出一定的稳定性,可以估计"钉尖向上"的概率是 0.618;
③若再次用计算机模拟此试验,则当投掷次数为 1 000 时,"钉尖向上"的频率一定是 0.620.
其中合理的是(　　)
A. ①　　B. ②　　C. ①②　　D. ①③

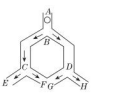


(第 5 题)

6. 从长度分别为 1 cm,3 cm,5 cm,7 cm 的四条线段中任取三条作为边,能构成三角形的概率为(　　)
A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{5}$

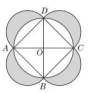
7. 义乌国际小商品博览会某志愿小组有五名翻译,其中一名只会翻译阿拉伯语,三名只会翻译英语,还有一名这两种语言都会翻译. 若从中随机挑选两名组成一组,则该组能够翻译上述两种语言的概率是(　　)
A. $\frac{3}{5}$　　B. $\frac{7}{10}$　　C. $\frac{3}{10}$　　D. $\frac{16}{25}$

8. 如图,一个小球从 A 点沿轨道下落,在每个交叉口向左或向右的机会均等,则小球最终落到 H 点的概率是(　　)
A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{6}$　　D. $\frac{1}{3}$



(第 8 题)


(第 9 题)



(第 15 题)

9. 如图,在一个长方形内有对角线长分别为 2 和 3 的菱形,边长为 1 的正六边形和半径为 1 的圆,则一点随机落在这三个图形内的概率较大的是(　　)
A. 落在菱形内　　B. 落在圆内　　C. 落在正六边形内　　D. 一样大

10. 同时抛掷 A,B 两个均匀的小正方体(每个面上分别标有数字 1,2,3,4,5,6),设两个正方体朝上一面的数字分别为 x,y,并以此确定点 $P(x,y)$,那么点 P 满足在抛物线 $y=-x^2+3x$ 上的概率为(　　)
A. $\frac{1}{18}$　　B. $\frac{1}{12}$　　C. $\frac{1}{9}$　　D. $\frac{1}{6}$

二、填空题(每题 3 分,共 30 分)

11. 用"必然事件""不可能事件""随机事件"填空:
(1)明天要下雨. _____;(2)小明身高 3.5 m. _____;(3)两直线平行,同位角相等. _____.

12. 同时抛掷两枚质地均匀的骰子,则事件"两枚骰子的点数和小于 8 且为偶数"的概率是_____.

13. 现有 50 张大小、质地及背面图案均相同的《西游记》人物卡片,正面朝下放置在桌面上,从中随机抽取 1 张并记下卡片正面所绘人物的名字后原样放回,洗匀后再抽. 通过多次试验后,发现抽到绘有孙悟空这个人物卡片的频率约为 0.3. 估计这些卡片中绘有孙悟空这个人物的卡片张数约为_____.

14. 在四边形 $ABCD$ 中,①$AB\parallel CD$,②$AD\parallel BC$,③$AB=CD$,④$AD=BC$. 在这四个条件中任选两个作为已知条件,能判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形的概率是_____.

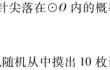
15. 已知 $\odot O$ 的两条直径 AC,BD 互相垂直,分别以 AB,BC,CD,DA 为直径向外作半圆得到如图所示的图形. 现随机地向该图形内掷一枚小针,记针尖落在阴影区域内的概率为 P_1,针尖落在 $\odot O$ 内的概率为 P_2,则 $\frac{P_1}{P_2}=$_____.

16. 在不透明的袋子中有黑棋子 10 枚和白棋子若干(它们除颜色外都相同),现随机从中摸出 10 枚记下颜色后放回,这样连续做了 10 次,记录了如下的数据:

次数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
黑棋子数量/枚	1	3	0	2	3	4	2	1	1	3

根据以上数据,估算袋子中的白棋子数量为_____枚.

17. 如图,在 3×3 的方格中,A,B,C,D,E,F 分别位于格点上,从 C,D,E,F 四点中任取一点,与点 A,B 为顶点作三角形,则所作三角形为等腰三角形的概率是_____.



(第 17 题)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

18. 点 P 的坐标是 (a,b)，从 $-2,-1,0,1,2$ 这五个数中任取一个数作为 a 的值，再从余下的四个数中任取一个数作为 b 的值，则点 $P(a,b)$ 在平面直角坐标系中的第二象限内的概率是_____.

19. 张凯家购置了一辆新车，爸爸妈妈商议确定车牌号，前三位选定为 8ZK 后，对后两位数字意见有分歧，最后决定由毫不知情的张凯从如图排列的四个数字中随机划去两个，剩下的两个数字从左到右组成两位数，续在 8ZK 之后，则选中的车牌号为 8ZK86 的概率是_____.



（第 19 题）

20. 从 $-1,0,1,2$ 这四个数中随机选取一个数，记为 a，那么使一次函数 $y=2x+a$ 的图象与 x 轴，y 轴围成的三角形面积为 $\frac{1}{4}$，且使关于 x 的不等式组 $\begin{cases} x+2\leqslant a, \\ 1-x\leqslant 2a \end{cases}$ 有解的概率为_____.

三、解答题(21 题 8 分，22－25 题每题 10 分，26 题 12 分，共 60 分)

21. 在一个不透明的袋子中装有仅颜色不同的 10 个球，其中红球 4 个，黑球 6 个.

(1)先从袋子中取出 $m(m>1)$ 个红球，再从袋子中随机摸出 1 个球，将“摸出黑球”记为事件 A，请完成下列表格：

事件 A	必然事件	随机事件
m 的值	_____	_____

(2)先从袋子中取出 m 个红球，再放入 m 个一样的黑球并摇匀，随机摸出 1 个黑球的概率等于 $\frac{4}{5}$，求 m 的值.

22. 在一次大规模的统计中发现英文文献中字母 E 使用的频率在 0.105 附近，而字母 J 使用的频率大约为 0.001，如果这次统计是可信的，那么下列说法正确吗？试说明理由.

(1)在英文文献中字母 E 出现的概率在 10.5% 左右，字母 J 出现的概率在 0.1% 左右；

(2)如果再去统计一篇约含 200 个字母的英文文献，那么字母 E 出现的概率一定会非常接近 10.5%；

23. 一个不透明的袋中装有 20 个只有颜色不同的球，其中 5 个黄球，8 个黑球，7 个红球.

(1)求从袋中摸出 1 个球是黄球的概率；

(2)现从袋中取出若干个黑球，搅匀后，使从袋中摸出 1 个球是黑球的概率是 $\frac{1}{3}$，求从袋中取出黑球的个数.

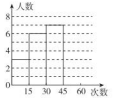
24. “端午节”是我国的传统节日，全国各地举行了丰富多彩的纪念活动. 为了继承传统，减缓学生考前的心理压力，某班学生组织了一次拔河比赛，裁判员让两队队长用“石头、剪刀、布”的方式选择场地位置，规则是：石头胜剪刀，剪刀胜布，布胜石头，手势相同则再决胜负.

(1)用列表法或画树状图法，列出甲、乙两队手势可能出现的情况；

(2)裁判员的这种做法对甲、乙双方公平吗？请说明理由.

25. 在大课间活动中，体育老师随机抽取了七年级甲、乙两班部分女学生进行一分钟仰卧起坐的测试，并对成绩进行统计分析，绘制了如下的统计表和统计图(均不完整).

分组	频数	频率
第一组($0\leqslant x<15$)	3	0.15
第二组($15\leqslant x<30$)	6	a
第三组($30\leqslant x<45$)	7	0.35
第四组($45\leqslant x\leqslant 60$)	b	0.20



（第 25 题）

请你根据图表中的信息完成下列问题：

(1)统计表中 $a=$_____，$b=$_____，并将统计图补充完整；

(2)如果该校七年级共有女学生 180 人，请估计仰卧起坐能够一分钟完成 30 次或 30 次以上的女学生有多少人；

(3)已知第一组中只有一名甲班学生，第四组中只有一名乙班学生，老师随机从这两组中各选一名学生谈心得体会，所选两人正好都是甲班学生的概率是多少？

26. 从一副 52 张(没有大王、小王)的扑克牌中，每次抽出 1 张，然后放回洗匀再抽，在试验中得到下表中部分数据：

试验次数	40	80	120	160	200	240	280	320	360	400
出现方块的次数	11	18		40	49	63	68	80	91	100
出现方块的频率	0.275	0.225	0.250	0.250	0.245	0.263	0.243		0.253	0.250

(1)将上表补充完整；

(2)从上表中可以估计出现方块的概率是_____(精确到 0.01)；

(3)从这副扑克牌中取出两组牌，分别是方块 1，2，3 和红桃 1，2，3，将它们背面朝上分别重新洗牌后，从两组牌中各摸出一张，若摸出的两张牌的牌面数字之和等于 3，则甲方赢；若摸出的两张牌的牌面数字之和等于 4，则乙方赢. 你认为这个游戏对双方是公平的吗？若不是，有利于谁？请你用概率知识(列表法或画树状图法)加以分析说明.

荣德基 品质教辅

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

期末达标检测卷

(120 分,90 分钟)

题 号	一	二	三	总 分
得 分				

姓名 学号 班级 学校

一、选择题(每题 3 分,共 30 分)

1. 下面的图形中,既是轴对称图形又是中心对称图形的是(　　)



A　　B　　C　　D

2. 一元二次方程 $x(x-3)=4$ 的解是(　　)

A. $x=1$　　B. $x=4$　　C. $x_1=-1, x_2=4$　　D. $x_1=1, x_2=-4$

3. 抛物线 $y=-\frac{3}{5}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-3$ 的顶点坐标是(　　)

A. $\left(\frac{1}{2},-3\right)$　　B. $\left(-\frac{1}{2},-3\right)$　　C. $\left(\frac{1}{2},3\right)$　　D. $\left(-\frac{1}{2},3\right)$

4. 《九章算术》是中国传统数学重要的著作,书中有一个关于门和竹竿的问题,简译为:今有一扇门,不知门的高和宽. 另有一竹竿,也不知竹竿的长短. 竹竿横着放时比门的宽长 4 尺,竹竿竖着放时比门的高长 2 尺,竹竿斜着放时与门的对角线恰好相等,求门的对角线长. 若设门的对角线长为 x 尺,则可列方程为(　　)

A. $(x+2)^2=(x-4)^2+x^2$　　B. $(x+4)^2=x^2+(x-2)^2$

C. $x^2=(x-4)^2+(x-2)^2$　　D. $(x+4)^2=(x+2)^2+x^2$

5. 如图,$\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$,CD 是 $\odot O$ 的直径,$\angle BCD=54°$,则 $\angle A$ 的度数是(　　)

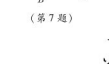
A. 36°　　B. 33°　　C. 30°　　D. 27°

6. 一个不透明的袋子中有若干个白球. 为估计白球个数,小何向其中投入 8 个黑球(黑球与白球除颜色外,其他均相同),搅拌均匀后随机摸出一个球,记下颜色,再把它放入袋子中,不断重复摸球 400 次,其中 88 次摸到黑球,则估计袋子中有白球(　　)

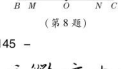
A. 18 个　　B. 28 个　　C. 36 个　　D. 42 个



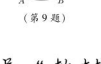
(第 5 题)



(第 7 题)



(第 8 题)



(第 9 题)

7. 如图,正方形 $OABC$ 绕着点 O 逆时针旋转 40°得到正方形 $ODEF$,连接 AF,则 $\angle OFA$ 的度数是(　　)

A. 15°　　B. 20°　　C. 25°　　D. 30°

8. 如图,在等腰直角三角形 ABC 中,$AB=AC=4$,O 为 BC 的中点,以 O 为圆心作半圆 O 交 BC 于点 M,N,半圆 O 与 AB,AC 相切,切点分别为 D,E,则半圆 O 的半径和 $\angle MND$ 的度数分别为(　　)

A. 2,22.5°　　B. 3,30°　　C. 3,22.5°　　D. 2,30°

9. 如图,$\triangle ABC$ 是 $\odot O$ 的内接三角形,$\angle C=30°$,$\odot O$ 的半径为 5,若点 P 是 $\odot O$ 上的一点,在 $\triangle ABP$ 中,$PB=AB$,则 PA 的长为(　　)

A. 5　　B. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$　　C. $5\sqrt{2}$　　D. $5\sqrt{3}$

10. 二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的部分图象如图所示,图象过点 $(-1,0)$,对称轴为直线 $x=2$,下列结论:(1)$4a+b=0$;(2)$9a+c>3b$;(3)$8a+7b+2c>0$;(4)若点 $A(-3,y_1)$,点 $B\left(-\frac{1}{2},y_2\right)$,点 $C\left(\frac{7}{2},y_3\right)$ 在该函数图象上,则 $y_1<y_3<y_2$;(5)若方程 $a(x+1)(x-5)=-3$ 的两根为 x_1 和 x_2,且 $x_1<x_2$,则 $x_1<-1<5<x_2$,其中正确的有(　　)

A. 2 个　　B. 3 个　　C. 4 个　　D. 5 个



(第 10 题)

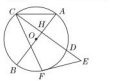
二、填空题(每题 3 分,共 30 分)

11. 已知关于 x 的方程 $x^2+(1-m)x+\frac{m^2}{4}=0$ 有两个不相等的实数根,则 m 的最大整数值是_____.

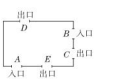
12. 在平面直角坐标系中,点 $(-3,2)$ 关于原点对称的点的坐标是_____.

13. 设 m,n 分别为一元二次方程 $x^2+2x-2\,018=0$ 的两个实数根,则 $m^2+3m+n=$_____.

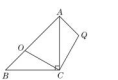
14. 如图,AB 是 $\odot O$ 的直径,且经过弦 CD 的中点 H,过 CD 延长线上一点 E 作 $\odot O$ 的切线,切点为 F. 若 $\angle ACF=65°$,则 $\angle E=$_____.



(第 14 题)



(第 15 题)

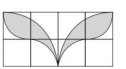


(第 16 题)

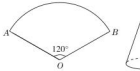
15. 如图,五一期间,某景区规定 A 和 B 为入口,C,D,E 为出口,小红随机选一个入口进入景区,游玩后任选一个出口离开,则她选择从 A 入口进入,从 C 或 D 出口离开的概率是_____.

16. 如图,在等腰直角三角形 ABC 中,$AC=BC$,$\angle ACB=90°$,点 O 分斜边 AB 为 $BO:OA=1:\sqrt{3}$. 将 $\triangle BOC$ 绕 C 点沿顺时针方向旋转到 $\triangle AQC$ 的位置,则 $\angle AQC=$_____.

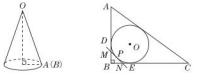
17. 如图,小方格都是边长为 1 的正方形,则以格点为圆心,半径为 1 和 2 的两种弧围成的叶状阴影图案的面积为_____.



(第 17 题)



(第 18 题)



(第 19 题)

18. 如图,用一个圆心角为 120°的扇形围成一个无底的圆锥,若这个圆锥底面圆的半径为 1 cm,则这个扇形的半径是_____cm.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

19. 如图，Rt△ABC 的内切圆⊙O 与两直角边 AB，BC 分别相切于点 D，E，过劣弧 DE（不包括端点 D，E）上任一点 P 作⊙O 的切线 MN 与 AB，BC 分别交于点 M，N，若⊙O 的半径为 r，则 Rt△MBN 的周长为_____.



（第 20 题）

20. 如图，在平面直角坐标系中，已知点 A 的坐标为(4，0)，且 $OA=OC=4OB$，动点 P 在过 A，B，C 三点的抛物线上. 过点 P 作 PE 垂直于 y 轴于点 E，交直线 AC 于点 D，过点 D 作 x 轴的垂线，垂足为 F，连接 EF，当线段 EF 的长度最短时，点 P 的坐标为_____.

三、解答题(21 题 8 分，22，23 题每题 6 分，26 题 10 分，27 题 12 分，其余每题 9 分，共 60 分)

21. 选择适当的方法解下列方程：

(1) $x^2-2x-143=0$；　　(2) $5x+2=3x^2$.

22. 已知抛物线 $y=ax^2+bx+3$ 的对称轴是直线 $x=1$.

(1) 求证：$2a+b=0$；

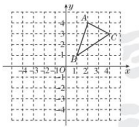
(2) 若关于 x 的方程 $ax^2+bx-8=0$ 的一个根为 4，求方程的另一个根.

23. 如图，△ABC 三个顶点的坐标分别为 $A(2,4)$，$B(1,1)$，$C(4,3)$.

(1) 请画出△ABC 关于 x 轴对称的△$A_1B_1C_1$，并写出点 A_1 的坐标；

(2) 请画出△ABC 绕点 B 逆时针旋转 90°后的△A_2BC_2；

(3) 求出(2)中 C 点旋转到 C_2 点所经过的路径长(结果保留根号和 π).



（第 23 题）

24. 若一个三位数的十位数字比个位数字和百位数字都大，则称这个三位数为“伞数”. 现从 1，2，3，4 这 4 个数字中任取 3 个，组成无重复数字的三位数.

(1) 请用画树状图的方法求所有可能得到的三位数；

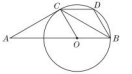
(2) 甲、乙两人玩一个游戏，游戏规则是：若组成的三位数是“伞数”，则甲胜；否则乙胜. 你认为这个游戏规则公平吗？试说明理由.

25. 如图，△ABC 是等腰三角形，且 $AC=BC$，$\angle ACB=120°$，在 AB 上取一点 O，使 $OB=OC$，以点 O 为圆心，OB 为半径作圆，过点 C 作 $CD/\!/AB$ 交⊙O 于点 D，连接 BD.

(1) 猜想 AC 与⊙O 的位置关系，并证明你的猜想；

(2) 试判断四边形 $BOCD$ 的形状，并证明你的判断；

(3) 已知 $AC=6$，求扇形 OBC 所围成圆锥的底面圆的半径 r.



（第 25 题）

26. 某商场要经营一种新上市的文具，进价为 20 元/件. 试营销阶段发现：当销售单价是 25 元时，每天的销售量为 250 件；销售单价每上涨 1 元，每天的销售量就减少 10 件.

(1) 写出商场销售这种文具每天所得的销售利润 w(元)与销售单价 x(元)之间的函数关系式；

(2) 求销售单价为多少元时，该文具每天的销售利润最大；

(3) 商场的营销部结合上述情况，提出了 A，B 两种营销方案：

A 方案：该文具的销售单价高于进价且不超过 30 元；

B 方案：每天销售量不少于 10 件，且每件文具的利润至少为 25 元.

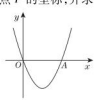
请比较哪种方案的最大利润更高，并说明理由.

27. 如图，在直角坐标系 xOy 中，二次函数 $y=x^2+(2k-1)x+k+1$ 的图象与 x 轴相交于 O，A 两点.

(1) 求这个二次函数的解析式；

(2) 在这条抛物线的对称轴右边的图象上有一点 B，使△AOB 的面积等于 6，求点 B 的坐标；

(3) 对于(2)中的点 B，在此抛物线上是否存在点 P，使∠$POB=90°$？若存在，求出点 P 的坐标，并求出△POB 的面积；若不存在，请说明理由.



（第 27 题）

荣德基 品质教辅

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

正文练习答案

第二十一章 一元二次方程

21.1 一元二次方程

第1课时 认识一元二次方程

1. D　2. C　3. A
4. B　**点拨**：若方程中不含 x 的一次项，则移项后 x 的一次项系数为 0.
5. 8
6. A　7. C　8. B
9. ②　**点拨**：$\because x^2-4x-12=0$，
即 $x(x-4)=12$，
∴ 构造图中大正方形的面积是 $(x+x-4)^2$，其中它又等于四个矩形的面积加上中间小正方形的面积，即 $4\times12+4^2$. 易得 $x=6$，故答案为②.
10. D　**点拨**：$\because$ 关于 x 的一元二次方程 $(a-1)x^2-2x+a^2-1=0$ 有一个根为 $x=0$，
$\therefore a^2-1=0$，且 $a-1\neq0$，
解得 $a=-1$. 故选 D.



11. **解**：(1) 当 $2k+1=0$，且 $4k\neq0$，即 $k=-\frac{1}{2}$ 时，方程 $(2k+1)x^2+4kx+k-1=0$ 可化为 $-2x-\frac{3}{2}=0$，此时为一元一次方程.
(2) 当 $2k+1\neq0$，即 $k\neq-\frac{1}{2}$ 时，此方程为一元二次方程，其二次项系数是 $2k+1$，一次项系数是 $4k$，常数项是 $k-1$.
12. **解**：把 $x=2$ 代入方程得 $4-2(3+k)+12=0$，解得 $k=5$.
当以 2 为腰长时，等腰三角形的三边长分别为 2，2，5，因为 $2+2<5$，所以不能组成三角形，即此种情况不存在.
当以 5 为腰长时，等腰三角形的三边长分别为 2，5，5，能够组成三角形. 所以等腰三角形的周长为 $5+5+2=12$.
点拨：确定三角形的三边长时，要注意“三角形任意两边之和大于第三边”这一条件，否则容易出现错误的解答.
13. **解**：都不正确，均考虑不全面. 正确解法如下：
欲使 $x^{2a+b}-3x^{c-b}+1=0$ 是关于 x 的一元二次方程，则 $\begin{cases}2a+b=2,\\a-b\neq2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2a+b\neq2,\\a-b=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2a+b=1,\\a-b=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2a+b=0,\\a-b\neq2.\end{cases}$
解得 $\begin{cases}a=\frac{4}{3},\\b=-\frac{2}{3}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=1,\\b=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=\frac{2}{3},\\b=\frac{2}{3}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=1,\\b=-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=\frac{2}{3},\\b=-\frac{4}{3}.\end{cases}$
14. **解**：(1) 由题意可知网球场的长和宽分别为 $(80-2x)$ m，$(60-2x)$ m，则可列方程为 $(80-2x)(60-2x)=3500$，整理得 $x^2-70x+325=0$.
(2) x 的值不可能小于 0，因为人行走道的宽度不可能为负数.
(3) x 的值不可能大于 40，也不可能大于 30，因为当 $x>30$ 时，$60-2x<0$，这是不符合实际的，当然 x 更不可能大于 40.
(4) 人行走道的宽为 5 m，求解过程如下：

x	…	1	2	3	4	5	6	7	…
$x^2-70x+325$	…	256	189	124	61	0	−59	−116	…

显然，当 $x=5$ 时，$x^2-70x+325=0$，故人行走道的宽为 5 m.
点拨：本题运用**典型法**，根据实际情况确定 x 的取值范围，在 x 的取值范围内取整数值，能够使方程左边等于 0，则这个数就是方程的一个解，若没有一个数能使方程左边等于 0，则找一个使方程左边最接近 0 的数，这个数就是方程的近似解.

第2课时 一元二次方程的定义及相关概念的五种常见应用

1. **解**：(1) 存在. 根据一元二次方程的定义可得 $\begin{cases}m^2+1=2,\\m+1\neq0,\end{cases}$ 解得 $m=1$，此时方程为 $2x^2-x-1=0$.
(2) 存在. 由题可知 $\begin{cases}m^2+1=1,\\m+1+m-2\neq0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m+1=0,\\m-2\neq0\end{cases}$ 时方程为一元一次方程.
当 $\begin{cases}m^2+1=1,\\m+1+m-2\neq0\end{cases}$ 时，解得 $m=0$，此时方程为 $-x-1=0$，解得 $x=-1$；
当 $\begin{cases}m+1=0,\\m-2\neq0\end{cases}$ 时，解得 $m=-1$，此时方程为 $-3x-1=0$，解得 $x=-\frac{1}{3}$.
2. **解**：将 $(2ax+1)(x-a)=a-2$ 化为一般形式，得 $2ax^2+(1-2a^2)x+2-2a=0$.
所以该一元二次方程的二次项系数为 $2a$，依题意，得 $2a=-4$，
解得 $a=-2$.
3. **解**：由题意可得 $(x+1)\times2x-(x+2)(x-2)=1$，它是一元二次方程，写成一般形式为 $x^2+2x+3=0$.
4. **解**：由题意得 $n^2+mn+2n=0$，
$\because n\neq0$，$\therefore n+m+2=0$，
$\therefore m+n=-2$.
5. **解**：$\because$ 实数 a 是一元二次方程 $x^2-2022x+1=0$ 的一个根，
$\therefore a^2-2022a+1=0$.
$\therefore a^2-2022a=-1$，$a^2-2022a=-1$.
$\therefore a^2-2021a-\frac{a^2+1}{2022}$
$=a^2-2021a-\frac{2022a}{2022}$
$=a^2-2021a-a$
$=a^2-2022a=-1$.
6. **解**：(1) $\because\angle ACB=90°$，$\angle A=28°$，
$\therefore\angle B=90°-28°=62°$.
$\because BD=BC$，
$\therefore\angle BCD=\angle BDC=\frac{180°-\angle B}{2}=59°$，
$\therefore\angle ACD=\angle ACB-\angle BCD=90°-59°=31°$.
(2) ①∵ $AD=EC$，$AD=AE$，$AC=4$，
$\therefore AD=EC=AE=2$.
∵ $BC=BD=a$，
$\therefore AB=2+a$.
∵ $AB^2=BC^2+AC^2$，
即 $(a+2)^2=a^2+4^2$，
$\therefore a=3$.
②线段 AD 的长是该方程的一个根.
理由：∵ $BC=a$，$AC=4$，
$\therefore AB=\sqrt{16+a^2}$，
$\therefore AD=\sqrt{16+a^2}-a$.
∵ 当 $x=AD=\sqrt{16+a^2}-a$ 时，
$x^2+2ax-16=(\sqrt{16+a^2}-a)^2+2a(\sqrt{16+a^2}-a)-16$
$=16+a^2-2a\sqrt{16+a^2}+a^2+2a\sqrt{16+a^2}-2a^2-16$
$=0$，
∴ 线段 AD 的长是该方程的一个根.

21.2 解一元二次方程

第1课时 直接开平方法解方程

1. $x_1=2$，$x_2=-2$
2. C
3. C　**点拨**：方程 $x^2+4=0$，移项得 $x^2=-4$，由平方的非负性可得此方程无实数解. 故选 C.
4. B　5. 5（答案不唯一，只要 $c\geqslant0$ 即可）
6. D
7. A　**点拨**：本题的易错之处是在求出方程的根后忽略三角形的三边关系而错选 B.
8. **解**：把 $x=3$ 代入原方程，得 $k^2=2$，
∴ $k=\pm\sqrt{2}$，
由 $(x-1)^2=4$，得 $x-1=\pm2$，
∴ $x_1=3$，$x_2=-1$，
故另一个根为 -1.
9. **解**：∵ $m+1$ 与 $2m-4$ 是关于 x 的一元二次方程 $ax^2=b$（$ab>0$）的两个根，
∴ $(m+1)+(2m-4)=0$，
∴ $m=1$，即方程的两根分别为 2 和 -2.
把 $x=2$ 或 $x=-2$ 代入 $ax^2=b$ 中，
得 $4a=b$，∴ $\frac{b}{a}=4$.

第2课时 配方法解方程

1. -1 or 7
2. D　3. B　4. A　5. A
6. B　**点拨**：∵ $a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$，
∴ $2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc=0$.
∴ $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$.
∴ $a=b=c$. ∴ $\triangle ABC$ 为等边三角形.
7. A　8. D　9. A
10. A　11. D
12. B　**点拨**：由勾股定理可得 $AC^2+BC^2=AB^2=(AD+BD)^2$，代入 b 和 a 即可得出答案.
13. 1 或 -3　**点拨**：依题意得 $(2+x)x=3$，
整理，得 $x^2+2x=3$，
∴ $(x+1)^2=4$，
∴ $x+1=\pm2$，
∴ $x=1$ 或 $x=-3$.
14. **解**：∵ $x^2+6x=-7$，
∴ $x^2+6x+9=-7+9$，即 $(x+3)^2=2$，
∴ $x+3=\pm\sqrt{2}$，
∴ $x=-3\pm\sqrt{2}$，$x_2=-3-\sqrt{2}$.
点拨：本题的易错之处是在配方时忽视等式的性质，忘了在等号右边加 9 而致错.
15. **解**：∵ $a^2+b^2=12a+8b-52$，
∴ $a^2-12a+b^2-8b+52=0$.
∴ $(a-6)^2+(b-4)^2=0$.
∴ $a-6=0$ 且 $b-4=0$.
∴ $a=6$，$b=4$.
又 ∵ a，b，c 为正整数且是 $\triangle ABC$ 的三边长，c 是 $\triangle ABC$ 的最短边长，
∴ $6-4<c\leqslant4$（c 是正整数）.
∴ $c=3$ 或 $c=4$.
即 c 的值是 3 或 4.
点拨：根据 $a^2+b^2=12a+8b-52$，可以求得 a，b 的值，由 a，b，c 为正整数且是 $\triangle ABC$ 的三边长，c 是 $\triangle ABC$ 的最短边长，即可求得 c 的值.
16. **解**：(1) 10　(2) -2
(3) $\because x^2+(m-2)x+4m-7=\left(x+\frac{m+2}{2}\right)^2+4m-7-\frac{(m+2)^2}{4}$.
∴ 原代数式有最小值为 0，$\therefore4m-7-\frac{(m+2)^2}{4}=0$，
即 $m^2-12m+32=0$. 配方得 $(m-6)^2=4$，
∴ $m-6=\pm2$，∴ $m_1=8$，$m_2=4$.
17. **解**：将已知等式两边同时加上 2，
得 $x^2+\frac{1}{x^2}+2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)=2$，
即 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)=2$.
设 $x+\frac{1}{x}=y$，则 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)=2$
2 可化为 $y^2+2y=2$.
配方，得 $y^2+2y+1=2+1$，
∴ $(y+1)^2=3$.
直接开平方，得 $y+1=\pm\sqrt{3}$.
解得 $y_1=\sqrt{3}-1$，$y_2=-\sqrt{3}-1$.
即 $x+\frac{1}{x}=\sqrt{3}-1$ 或 $x+\frac{1}{x}=-\sqrt{3}-1$.
经检验，不存在实数 x 使 $x+\frac{1}{x}=\sqrt{3}-1$，
故舍去.
∴ $x+\frac{1}{x}=-\sqrt{3}-1$.
点拨：本题在解答过程中应用了**换元法**和**整体思想**，即用 y 来代替 $x+\frac{1}{x}$，将已知等式转化成一元二次方程求解.
18. **解**：(1) 5，2，-2，-8
(2) 原方程可变形，得 $[(x-1)-4]\cdot[(x-1)+4]=6$，$(x-1)^2-4^2=6$，
$(x-1)^2=6+4^2$.
直接开平方并整理，得 $x_1=1+\sqrt{22}$，$x_2=1-\sqrt{22}$.

第3课时 一元二次方程根的判别式

1. $2_1-7_1-4_1$8_1
2. C　3. C　4. C　5. A　6. C
7. A　**点拨**：$\Delta=(k+3)^2-4k=k^2+2k+9=(k+1)^2+8$.
∵ $(k+1)^2\geqslant0$，
∴ $(k+1)^2+8>0$，即 $\Delta>0$.
∴ 方程有两个不相等的实数根.
8. D　9. A
10. A　**点拨**：原方程可变形为 $x^2+(a+1)x=0$.
∵ 该方程有两个相等的实数根，
∴ $\Delta=(a+1)^2-4\times1\times0=0$，
∴ $a=-1$.
11. A　**点拨**：∵ 小刚在解关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）时，只抄对了 $a=1$，$b=4$，解出其中一个根是 $x=-1$，
∴ $(-1)^2-4+c=0$，
解得 $c=3$，
故原方程中 $c=5$，
则 $b^2-4ac=16-4\times1\times5=-4<0$，
故原方程不存在实数根.
12. D　**点拨**：本题易忽视一元二次方程二次项系数不为 0 这一条件，而直接由根的判别式求得 $k\leqslant\frac{5}{4}$.
13. **解**：∵ 关于 x 的方程 $x^2-2x+2m-1=0$ 有实数根，
∴ $\Delta^2-4ac=4-4(2m-1)\geqslant0$，
解得 $m\leqslant1$.
∵ m 为正整数，
∴ $m=1$，
∴ $x^2-2x+1=0$，
则 $(x-1)^2=0$，
解得 $x_1=x_2=1$.
14. **解**：(1) 根据题意得 $\Delta=(-3)^2-4k\geqslant0$，
解得 $k\leqslant\frac{9}{4}$.
(2) 由 (1) 知 k 的最大整数值为 2，
此时方程 $x^2-3x+k=0$ 即为 $x^2-3x+2=0$，解得 $x_1=1$，$x_2=2$.
∵ 一元二次方程 $(m-1)x^2+x+m-3=0$ 与方程 $x^2-3x+k=0$ 有一个相同的根，
∴ 当 $x=1$ 时，$m-1+1+m-3=0$，解得 $m=\frac{3}{2}$；
当 $x=2$ 时，$4(m-1)+2+m-3=0$，解得 $m=1$.
∵ $m-1\neq0$，
∴ m 的值为 $\frac{3}{2}$.
15. (1) **证明**：[因为] $\Delta=[-(2k+1)]^2-4\times1\times4\left(k-\frac{1}{2}\right)=4k^2-12k+9=(2k-3)^2\geqslant0$，所以无论 k 取何值，这个方程总有实数根.
(2) **解**：若 a 为等腰三角形 ABC 的底边长，则 b，c 为等腰三角形 ABC 的两腰长，所以方程有两个相等的实数根，所以 $\Delta=0$，即 $\Delta=\frac{1}{2}$，所以方程为 $x^2-4x+4=0$，解得 $x_1=x_2=2$.
即 $b=c=2$，不符合三角形三边关系，故舍去.
若 a 为等腰三角形 ABC 的一腰长，由题意知 4 是方程的一个根，所以 $4^2-(2k+1)\times4+4\left(k-\frac{1}{2}\right)=0$，解得 $k=\frac{5}{2}$，所以方程为 $x^2-6x+8=0$，解得 $x_1=2$，$x_2=4$，符合题意. 所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $2+4+4=10$.
点拨：等腰三角形的边分腰和底边，若没有说明，则必须分类讨论，同时注意三角形的三边关系.
16. **解**：(1) $2\leqslant5=2\times5+5\times15$；
$2\leqslant(-5)=2\times(-5)+(-5)=-15$.
(2) $x\otimes(a\otimes x)=x\otimes(ax+x)=x\otimes[(a+1)x]=(a+1)x^2+(a+1)x=-\frac{1}{4}$，
整理，得 $4(a+1)x^2+4(a+1)x+1=0$.
∵ 关于 x 的方程 $x\otimes(a\otimes x)=-\frac{1}{4}$ 有两个相等的实数根，
∴ $\begin{cases}a+1\neq0,\\\Delta=16(a+1)^2-16(a+1)=0.\end{cases}$
解得 $a=0$.

第4课时 公式法解方程

1. B　2. A　3. D
4. $x_1=\frac{-1+\sqrt{13}}{3}$，$x_2=\frac{-1-\sqrt{13}}{3}$
5. D　**点拨**：$(x+1)(x-3)=2x-5$，
整理得 $x^2-4x+2=0$，
解得 $x_1=2+\sqrt{2}>3$，$x_2=2-\sqrt{2}$，$0<2-\sqrt{2}<3$，故有两个正根，且有一根大于 3.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6. 解：依题意，得 $a^2-2a+1=0$ 且 $b+1\neq 0$ 且 $c+3\neq 0$，
∴ $a=1$，$b\neq -1$，$c\neq -3$，代入方程可得
$x^2-x-3=0$，∴ $x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$，即 $x_1=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$，$x_2=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$.

7. 解：设 x 时 $\triangle PDQ$ 的面积为 35 cm^2，即 $S_{矩形ABCD}-S_{\triangle AMP}-S_{\triangle PBQ}-S_{\triangle DCQ}=12\times 6-\dfrac{1}{2}\times 12x-\dfrac{1}{2}(6-x)\cdot 2x-\dfrac{1}{2}\times 6\times(12-2x)=35$，解得 $x_1=3+2\sqrt{2}$，$x_2=3-2\sqrt{2}$. 因为当点 P，Q 移动 $(3+2\sqrt{2})$ s或 $(3-2\sqrt{2})$ s 时均符合题意，所以 $(3+2\sqrt{2})$ s或 $(3-2\sqrt{2})$ s 时△PDQ 的面积为 35 cm^2.

第 5 课时　因式分解法解方程

1. A　**2.** A　**3.** $x_1=2$，$x_2=1$　**4.** -3 或 4　**5.** C　**6.** C

7. A　**点拨**：解方程 $x^2-8x+15=0$，得 $x=3$ 或 $x=5$，
若腰长为 3，则三角形的三边长为 3，3，6，显然不能构成三角形；
若腰长为 5，则三角形三边长为 5，5，6，此时三角形的周长为 16.
故选 A.

8. B　**点拨**：∵ $(x-5)(x-3)=0$，
∴ $x_1=3$，$x_2=5$.
∵ 菱形一条对角线长为 8，
∴ 菱形的边长为 5.
∴ 菱形的另一条对角线为 6.
∴ 菱形的面积为 24.

9. D

10. (1)①　(2)④⑥　(3)③⑤　(4)②

11. 解：移项，得 $2(x-3)-3x(x-3)=0$.
整理，得 $(x-3)(2-3x)=0$.
$x-3=0$ 或 $2-3x=0$.
解得 $x_1=3$，$x_2=\dfrac{2}{3}$.
点拨：解方程时千万不能将方程两边同时除以 $x-3$，否则方程会漏掉一解.

12. 错解：C
诊断：设 $x^2+x+1=y$，
则已知等式可化为 $y^2+2y-3=0$，
分解因式得 $(y+3)(y-1)=0$，
解得 $y_1=-3$，$y_2=1$.
当 $y=-3$ 时，$x^2+x+1=-3$ 无实数根；
当 $y=1$ 时，$x^2+x+1=1$ 有实数根. 本题易因未讨论满足 $x^2+x+1=y$ 的实数 x 是否存在而错选 C.
正解：A

13. 解：(1) $x^2-2x-5=0$，
$(x-1)^2=6$，
∴ $x_1=1+\sqrt{6}$，$x_2=1-\sqrt{6}$.
(2) $x^2-(\sqrt{2}+\sqrt{3})x+\sqrt{6}=0$，
$(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{3})=0$，
∴ $x_1=\sqrt{2}$，$x_2=\sqrt{3}$.
(3) $x^2-8x+4=0$，$x^2-8x+16=12$，
$(x-4)^2=12$，$x-4=\pm 2\sqrt{3}$，
∴ $x_1=4+2\sqrt{3}$，$x_2=4-2\sqrt{3}$.

14. 解：(1) 2；4
(2)∵ $x^2-3x-4=0$，
∴ $(x+1)(x-4)=0$，
则 $x+1=0$ 或 $x-4=0$，
∴ $x_1=-1$，$x_2=4$.
点拨：阅读材料，其**提出法**确定 a，b 的值，从而用因式分解法解方程.

15. 解：(1) 换元
(2) 设 $\dfrac{x+1}{x^2}=y$，则原方程可化为 $y-\dfrac{2}{y}=1$，
解得 $y_1=-1$，$y_2=2$.
经检验，$y_1=-1$，$y_2=2$ 都为方程 $y-\dfrac{2}{y}=1$ 的解.
当 $y=-1$ 时，$\dfrac{x+1}{x^2}=-1$，
∴ $x^2+x+1=0$，
∵ $\Delta=1-4=-3<0$，
∴ $\dfrac{x+1}{x^2}=-1$ 无实数解；
当 $y=2$ 时，$\dfrac{x+1}{x^2}=2$，
∴ $2x^2-x-1=0$，
∴ $x_1=-\dfrac{1}{2}$，$x_2=1$.
经检验，$x_1=-\dfrac{1}{2}$，$x_2=1$ 是方程 $\dfrac{x+1}{x^2}=2$ 的解.
∴ 原方程的解为 $x_1=-\dfrac{1}{2}$，$x_2=1$.
点拨：本题运用了**换元法**和**整体思想**，先设 $\dfrac{x+1}{x^2}=y$，原方程可以化为 $y-\dfrac{2}{y}=1$，解方程求出 y 的值，再代入 $\dfrac{x+1}{x^2}=y$ 就可以求出 x 的值.


第15题答案

16. 解：(1) 将 $x=3$ 代入方程 $(a-1)x^2-4x-1+2a=0$，得 $9(a-1)-12-1+2a=0$，解得 $a=2$.
将 $a=2$ 代入原方程，得 $x^2-4x+3=0$，
因式分解得 $(x-1)(x-3)=0$，∴ $x_1=1$，$x_2=3$.
∴ 方程的另一个根是 $x=1$.
(2)∵ 三角形的三边长都是这个方程的根，
∴ ①当三边长都为 1 时，周长为 3；
②当三边长都为 3 时，周长为 9；
③当两边长为 3，一边长为 1 时，周长为 7；
④当两边长为 1，一边长为 3 时，不满足三角形三边关系，不能构成三角形.
综上，三角形的周长为 3 或 9 或 7.

* 第 6 课时　一元二次方程的根与系数的关系

1. A　**2.** D

3. B　**点拨**：∵ a,β 是方程 $x^2+x-2=0$ 的两个实数根，
∴ $\alpha+\beta=-1$，$\alpha\beta=-2$.
∴ $\alpha+\beta-\alpha\beta=-1+2=1$.

4. A　**5.** C　**6.** C

7. B　**点拨**：∵ α,β 为方程 $2x^2-5x-1=0$ 的两个实数根，
∴ $2\alpha^2-5\alpha-1=0$，∴ $2\alpha^2=5\alpha+1$.
∵ $\alpha+\beta=\dfrac{5}{2}$，$\alpha\beta=-\dfrac{1}{2}$，
∴ $2\alpha^2+3\alpha\beta+5\beta=5\alpha+1+3\alpha\beta+5\beta=5(\alpha+\beta)+3\alpha\beta+1=12$.

8. A　**点拨**：∵ 方程 $x^2-2x-4=0$ 的两个实数根为 α,β，
∴ $\alpha+\beta=2$，$\alpha\beta=-4$.
∵ $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4+8=12$.
故选 A.

9. D　**10.** B

11. A　**点拨**：当 $a=4$ 时，$b<8$，
∵ a,b 是关于 x 的一元二次方程 $x^2-12x+m+2=0$ 的两根，
∴ $4+b=12$，
∴ $b=8$，不符合；
当 $b=4$ 时，$a<8$，
∵ a,b 是关于 x 的一元二次方程 $x^2-12x+m+2=0$ 的两根，
∴ $4+a=12$，
∴ $a=8$，不符合；
当 $a=b$ 时，
∵ a,b 是关于 x 的一元二次方程 $x^2-12x+m+2=0$ 的两根，
∴ $a+b=12$，$ab=m+2$，
∴ $a=b=6$，
∴ $m+2=36$，
∴ $m=34$.

12. D　**点拨**：∵ m,n 是关于 x 的一元二次方程 $x^2-2tx+t^2-2t+4=0$ 的两实数根，
∴ $\Delta=4t^2-4t^2+8t-16\geqslant 0$，
∴ $t\geqslant 2$.
∵ $(m+2)(n+2)=mn+2(m+n)+4=t^2-2t+4+4t=(t+1)^2+3$.
∴ $(m+2)(n+2)$ 的最小值为 12.

13. D　**点拨**：∵ 关于 x 的一元二次方程 $x^2-(k-1)x-k+2=0$ 的两个实数根为 x_1,x_2，
∴ $x_1+x_2=k-1$，$x_1x_2=-k+2$.
∵ $(x_1-x_2+2)(x_1-x_2-2)+2x_1x_2=-3$，
即 $(x_1+x_2)^2-2x_1x_2-4=-3$，
∴ $(k-1)^2+2k-4-4=-3$，
解得 $k=\pm 2$.
∵ 关于 x 的一元二次方程 $x^2-(k-1)x-k+2=0$ 有实数根，
∴ $\Delta=[-(k-1)]^2-4\times 1\times(-k+2)\geqslant 0$，
解得 $k\geqslant 2\sqrt{2}-1$ 或 $k\leqslant -2\sqrt{2}-1$，
∴ $k=2$.

14. 解：(1)∵ 关于 x 的一元二次方程 $x^2-(2k+1)x+k^2+1=0$ 有两个不相等的实数根，
∴ $\Delta>0$，
∴ $(2k+1)^2-4(k^2+1)>0$，
解得 $k>\dfrac{3}{4}$.
故 k 的取值范围为 $k>\dfrac{3}{4}$.
(2)∵ 方程的两个根分别为 x_1,x_2，
∴ $x_1+x_2=2k+1=3$，
解得 $k=1$，
∴ 原方程为 $x^2-3x+2=0$，
∴ $x_1=1$，$x_2=2$.

15. 解：(1) 当 $k=0$ 时，原方程为 $-3x+1=0$，
解得 $x=\dfrac{1}{3}$.
∴ $k=0$ 符合题意；
当 $k\neq 0$ 时，原方程为一元二次方程，
∵ 该一元二次方程有实数根，
∴ $\Delta=(-3)^2-4\times k\times 1\geqslant 0$，
解得 $k\leqslant\dfrac{9}{4}$.
综上所述，k 的取值范围为 $k\leqslant\dfrac{9}{4}$.
(2)∵ x_1 和 x_2 是方程 $kx^2-3x+1=0$ 的两个根，
∴ $x_1+x_2=\dfrac{3}{k}$，$x_1x_2=\dfrac{1}{k}$.
∵ $x_1+x_2+x_1x_2=4$，
∴ $\dfrac{3}{k}+\dfrac{1}{k}=4$，
解得 $k=1$，
经检验，$k=1$ 是分式方程的解，且符合题意，
∴ k 的值为 1.

16. 解：(1) 由题意得，$\Delta\geqslant 0$，
∴ $(2m-1)^2-4(m^2-3)\geqslant 0$，
∴ $m\leqslant\dfrac{13}{4}$.
(2) 当 $m=2$ 时，方程为 $x^2+3x+1=0$，
∵ 方程的根为 x_1,x_2，
∴ $x_1+x_2=-3$，$x_1x_2=1$，
∴ $x_1^2+3x_1+1=0$，$x_2^2+3x_2+1=0$，
∴ $(x_1^2+2x_1)(x_2^2+4x_2+2)$
$=(x_1^2+2x_1+x_1-x_1)(x_2^2+3x_2+x_2+2)$
$=(-1+x_1)(-1+x_2+2)$
$=(-1+x_1)(x_2+1)$
$=-x_2-x_1x_2-1-x_1$
$=-(x_1+x_2)-x_1x_2-1$
$=3-1-1$
$=1$.

17. 解：(1)∵ 方程有两个不相等的实数根，
∴ $\Delta=[-(2k-1)]^2-4(k^2-2k+3)=4k-11>0$，
解得 $k>\dfrac{11}{4}$.
(2) 存在.
∵ $x_1^2-2k+3=(k-1)^2+2>0$，
∴ 将 $|x_1|-|x_2|=\sqrt{5}$ 两边平方可得 $x_1^2-2x_1x_2+x_2^2=5$，即 $(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=5$，
∵ $x_1+x_2=2k-1$，$x_1x_2=k^2-2k+3$，
∴ $(2k-1)^2-4(k^2-2k+3)=5$，
整理得 $4k-11=5$，
解得 $k=4$.

阶段核心方法

1. C

2. 解：$\dfrac{1}{3}(x-2)^2=8$，
$(x-2)^2=24$，
$x-2=\pm 2\sqrt{6}$，
∴ $x_1=2+2\sqrt{6}$，$x_2=2-2\sqrt{6}$.

3. 解：　$x^2+4x-2=0$，
$x^2+4x=2$，
$(x+2)^2=6$，
$x+2=\pm\sqrt{6}$，
∴ $x_1=-2+\sqrt{6}$，$x_2=-2-\sqrt{6}$.

4. 解：$x^2-10x+y^2-16y+89=0$，
$(x^2-10x+25)+(y^2-16y+64)=0$，
$(x-5)^2+(y-8)^2=0$，
∴ $x=5$，$y=8$. ∴ $\dfrac{x}{y}=\dfrac{5}{8}$.

5. D

6. 解：(1) $x^2-2x=0$，
$x(x-2)=0$，
∴ $x_1=0$，$x_2=2$.
(2) $16x^2-9=0$，
$(4x+3)(4x-3)=0$，
∴ $x_1=-\dfrac{3}{4}$，$x_2=\dfrac{3}{4}$.
(3) $3x(x-2)=x-2$，
$3x(x-2)-(x-2)=0$，
$(x-2)(3x-1)=0$，
∴ $x-2=0$ 或 $3x-1=0$，
∴ $x_1=2$，$x_2=\dfrac{1}{3}$.

7. B

8. $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$　**点拨**：由题意得 $2b(b-a)+a(b-a)+3ab=0$，
整理得 $2\left(\dfrac{b}{a}\right)^2+\dfrac{2b}{a}-1=0$，
解得 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$，
∵ $a>b>0$，
∴ $\dfrac{b}{a}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

9. 解：(1) $3(x^2+1)-7x=0$，
$3x^2-7x+3=0$.
其中 $a=3$，$b=-7$，$c=3$.
∴ $\Delta=(-7)^2-4\times 3\times 3=13$.
∴ $x=\dfrac{7\pm\sqrt{13}}{6}$.
即 $x_1=\dfrac{7+\sqrt{13}}{6}$，$x_2=\dfrac{7-\sqrt{13}}{6}$.
(2) $4x^2-3x-5=x-2$，$4x^2-4x-3=0$，
其中 $a=4$，$b=-4$，$c=-3$.
∴ $\Delta=(-4)^2-4\times 4\times(-3)=64$.
∴ $x=\dfrac{4\pm\sqrt{64}}{8}$，即 $x_1=\dfrac{3}{2}$，$x_2=-\dfrac{1}{2}$.

10. 解：将原方程两边同乘 6，得 $(6x)^2+19\times(6x)+60=0$. 解得 $6x=-15$ 或 $6x=-4$. ∴ $x_1=-\dfrac{5}{2}$，$x_2=-\dfrac{2}{3}$.
点拨：本题将原方程两边同时乘 6，构造符合因式分解法的一元二次方程求解.

11. 解：因为 $m-n=8$，所以 $m=n+8$.
将 $m=n+8$ 代入 $mn+p^2+16=0$ 中，得 $n(n+8)+p^2+16=0$，所以 $n^2+8n+16+p^2=0$，即 $(n+4)^2+p^2=0$.
又因为 $(n+4)^2\geqslant 0$，$p^2\geqslant 0$，
所以 $\begin{cases}n+4=0,\\ p=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}n=-4,\\ p=0.\end{cases}$
所以 $m=n+8=4$，
所以 $m+n+p=4+(-4)+0=0$.

12. 解：原方程即为 $[(x-1)(x-4)]\cdot[(x-2)(x-3)]=48$，
即 $(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)=48$.
设 $y=x^2-5x+5$，则原方程变为 $(y-1)(y+1)=48$.
解得 $y_1=7$，$y_2=-7$.
当 $x^2-5x+5=7$ 时，解得 $x_1=\dfrac{5+\sqrt{33}}{2}$，$x_2=\dfrac{5-\sqrt{33}}{2}$；
当 $x^2-5x+5=-7$ 时，$\Delta=(-5)^2-4\times 1\times 12=-23<0$，方程无实数根.
∴ 原方程的根为 $x_1=\dfrac{5+\sqrt{33}}{2}$，$x_2=\dfrac{5-\sqrt{33}}{2}$.
点拨：运用**换元法**解一元二次方程时，先要找出相同的整体进行换元，使方程变得更简易.

13. 解：设 $x+\dfrac{1}{x}=y$，则原方程为 $y^2-2y-3=0$.
解得 $y_1=3$，$y_2=-1$.
当 $y=3$ 时，$x+\dfrac{1}{x}=3$，
∴ $x_1=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$，$x_2=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.
当 $y=-1$ 时，$x+\dfrac{1}{x}=-1$ 无实数根.
经检验，$x_1=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$，$x_2=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ 都是原方程的根.
∴ 原方程的根为 $x_1=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$，$x_2=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.
点拨：本题的解题关键是将原方程转化为只含 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$ 的方程，再把 $x+\dfrac{1}{x}$ 看成一个整体用换元法求解.

14. 解：经验证 $x=0$ 不是方程的根，原方程两边同除以 x^2，
得 $6x^2-35x+62-\dfrac{35}{x}+\dfrac{6}{x^2}=0$，
即 $6\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-35\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+62=0$.
设 $y=x+\dfrac{1}{x}$，则 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=y^2-2$，
原方程可变为 $6(y^2-2)-35y+62=0$.
解得 $y_1=\dfrac{5}{2}$，$y_2=\dfrac{10}{3}$.
当 $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{2}$ 时，
解得 $x_1=2$，$x_2=\dfrac{1}{2}$；
当 $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{10}{3}$ 时，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解得 $x_3=3, x_4=\frac{1}{3}$.

经检验，均符合题意.

∴ 原方程的根为 $x_1=2, x_2=\frac{1}{2}$，

$x_3=3, x_4=\frac{1}{3}$.

15. 解：设 $\frac{x-2}{x}=y$，则原方程化为 $y-\frac{3}{y}=2$，

整理得 $y^2-2y-3=0$，

∴ $y_1=3, y_2=-1$.

当 $y=3$ 时，$\frac{x-2}{x}=3$，

∴ $x=-1$.

当 $y=-1$ 时，$\frac{x-2}{x}=-1$，

∴ $x=1$.

经检验，$x=\pm1$ 都是原方程的根.

∴ 原方程的根为 $x_1=1, x_2=-1$.

点拨：本题利用倒数换元法将所求方程转化为一元二次方程，解方程求出根后要检验.

16. 解：方程组 $\begin{cases}x-2\ 019=2\ 022,\\ x-2\ 020=2\ 021\end{cases}$ 的解一定是原方程的解，

解得 $x=4\ 041$.

方程组 $\begin{cases}x-2\ 019=-2\ 021,\\ x-2\ 020=-2\ 022\end{cases}$ 的解也一定是原方程的解，

解得 $x=-2$.

∴ 原方程最多有两个实数解，

∴ 原方程的根为 $x_1=4\ 041, x_2=-2$.

点拨：解本题也可采用换元法. 设 $x-2\ 020=t$，则 $x-2\ 019=t+1$，原方程可化为 $t(t+1)=2\ 021\times2\ 022$，先求出 t，进而求出 x.

21.3 实际问题与一元二次方程

第 1 课时　列一元二次方程解实际应用问题

1. C

2. 解：(1) 设每轮分裂中每个有益菌可分裂出 x 个有益菌，根据题意，得

$60(1+x)^2=24\ 000$.

解得 $x_1=19, x_2=-21$（不合题意，舍去）.

答：每轮分裂中每个有益菌可分裂出 19 个有益菌.

(2) $60\times(1+19)^3=60\times20^3=480\ 000$（个）.

答：经过三轮培植后共有 480 000 个有益菌.

3. A

4. 解：设应邀请 x 支球队参加比赛，

根据题意，可列出方程 $\frac{x(x-1)}{2}=28$. 解这个方程，得 $x_1=8, x_2=-7$（舍去）.

答：应邀请 8 支球队参加比赛.

5. 解：设原两位数的十位数字为 x，则个位数字为 $x+4$，根据题意得 $[10x+x+4]\cdot[10(x+4)+x]=765$，整理得 $x^2+4x-5=0$，解得 $x_1=1, x_2=-5$（舍去），则 $x+4=5$，故原两位数为 $10x+x+4=10\times1+1+4=15$.

6. 解：由题意得 $n+n^2+1=421$，解得 $n_1=-21$（舍去），$n_2=20$.

答：n 的值是 20.

7. 解：(1) 设这个多边形的边数为 n，根据题意得 $\frac{1}{2}n(n-3)=14$，整理得 $n^2-3n-28=0$，解得 $n=7$ 或 $n=-4$.

∵ $n\geqslant3$，∴ $n=-4$ 不合题意，舍去.

∴ $n=7$，即这个多边形的边数是 7.

(2) A 同学的说法是不正确的. 理由如下：

设这个多边形的边数为 n，则 $\frac{1}{2}n(n-3)=10$，整理得 $n^2-3n-20=0$，解得 $n=\frac{3\pm\sqrt{89}}{2}$，

∴ 符合方程 $n^2-3n-20=0$ 的正整数 n 不存在，∴ 多边形的对角线不可能有 10 条，即 A 同学的说法不正确.

8. 解：(1) 设年销售量 y 与销售单价 x 的函数关系式为 $y=kx+b(k\neq0)$，

由题意得 $\begin{cases}40k+b=600,\\ 45k+b=550,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-10,\\ b=1\ 000.\end{cases}$

∴ 年销售量 y 与销售单价 x 的函数关系式为 $y=-10x+1\ 000$.

(2) 根据题意可知每台设备的利润为 $(x-30)$ 万元，年销售量为 $(-10x+1\ 000)$ 台.

则 $(x-30)(-10x+1\ 000)=10\ 000$，

整理，得 $x^2-130x+4\ 000=0$，

解得 $x_1=50, x_2=80$.

∵ 此设备的销售单价不得高于 70 万元，

∴ $x=50$.

答：该设备的销售单价应是 50 万元.

9. 解：(1) 设该市这两年投入基础教育经费的年平均增长率为 x，

根据题意，得 $5\ 000(1+x)^2=7\ 000$，

解得 $x_1=0.2=20\%, x_2=-2.2$（舍去）.

答：该市这两年投入基础教育经费的年平均增长率为 20%.

(2) 2021 年投入基础教育经费为 $7\ 200\times(1+20\%)=8\ 640$（万元），

设购买电脑 m 台，则购买实物投影仪 $(1\ 500-m)$ 台，

根据题意，得 $3\ 500m+2\ 000(1\ 500-m)\leqslant8\ 640\ 000\times5\%$，

解得 $m\leqslant880$.

答：最多可购买电脑 880 台.

第 2 课时　列一元二次方程解百分率问题

1. 解：(1) 设 2016 年到 2018 年该村人均收入的年平均增长率为 x，

根据题意得 $20\ 000(1+x)^2=24\ 200$，

解得 $x_1=0.1=10\%, x_2=-2.1$（不合题意，舍去）.

答：2016 年到 2018 年该村人均收入的年平均增长率为 10%.

(2) $24\ 200\times(1+10\%)=26\ 620$（元）.

答：2019 年该村的人均收入是 26 620 元.

2. 解：设降价后的销售单价为 x 元，则降价后每天可售出 $[300+5(200-x)]$ 个，依题意，得 $(x-100)[300+5(200-x)]=32\ 000$，

整理，得 $x^2-360x+32\ 400=0$，

解得 $x_1=x_2=180$，

$180<200$，符合题意.

答：这种电子产品降价后的销售单价为 180 元时，公司每天可获利 32 000 元.

3. 解：(1) 设该养殖场蛋鸡产蛋量的月平均增长率为 x，

根据题意得，$2.5(1+x)^2=3.6$，

解得 $x_1=0.2=20\%, x_2=-2.2$（不合题意，舍去），

答：该养殖场蛋鸡产蛋量的月平均增长率为 20%.

(2) 设再增加 y 个销售点，

根据题意得，$3.6+0.3(2+y)\geqslant3.6\times(1+20\%)$，

解得 $y\geqslant\frac{9}{4}$.

∵ y 为正整数，∴ $y=3$.

答：至少再增加 3 个销售点.

第 3 课时　列一元二次方程解几何题和积问题

1. 解：设剪去正方形的边长为 x cm，则制成无盖长方体盒子的底面长为 $(30-2x)$ cm，宽为 $(20-2x)$ cm，高为 x cm，

依题意，得 $2\times[(30-2x)+(20-2x)]x=200$，

整理，得 $2x^2-25x+50=0$，

解得 $x_1=\frac{5}{2}, x_2=10$.

当 $x=10$ 时，$20-2x=0$，不合题意，舍去.

答：当剪去正方形的边长为 $\frac{5}{2}$ cm 时，所得长方体盒子的侧面积为 200 cm^2.

2. $(12-x)(8-x)=77$，或 $x^2-20x+19=0$

3. 解：(1) 设这个矩形地面的长是 x m，则依题意得 $x(20-x)=96$，

解得 $x_1=12, x_2=8$（舍去）.

答：这个矩形地面的长是 12 m.

(2) 用现格方 0.80 × 0.80（单位：m）的地板砖所需的费用：$96\div(0.80\times0.80)\times45=8\ 250$（元）.

用现格方 1.00 × 1.00（单位：m）的地板砖所需的费用：$96\div(1.00\times1.00)\times80=7\ 680$（元）.

∵ $8\ 250>7\ 680$，

∴ 用规格为 1.00 × 1.00（单位：m）的地板砖所需的费用较少.

4. 解：(1) 设 x s 后，△PBQ 的面积为 4 cm^2，

则 $\frac{1}{2}\cdot2x\cdot(5-x)=4$，

解得 $x_1=1, x_2=4$.

当 $x=4$ 时，$2x=8>7$，不合题意，舍去，

∴ $x=1$.

答：1 s 后，△PBQ 的面积等于 4 cm^2.

(2) 设 y s 后，△PBQ 的面积是 7 cm^2.

由题意，得 $\frac{1}{2}\cdot2y\cdot(5-y)=7$，即 $y^2-5y+7=0$.

$\Delta=(-5)^2-4\times7<0$，∴ 此方程无实数根.

∴ △PBQ 的面积不能等于 7 cm^2.

阶段核心应用

1. 解：(1) 设 2018 年甲类芯片的产量为 x 万块，

由题意得 $x+2x+(x+2x)\cdot400=2\ 800$，

解得 $x=400$.

答：2018 年甲类芯片的产量为 400 万块.

(2) 2018 年丙类芯片的产量为 $400+2\times400+400\times1\ 600(万块)$.

设丙类芯片的产量每年增加 y 万块，

则 $1\ 600+1\ 600+y+1\ 600+2y=14\ 400$，

解得 $y=3\ 200$.

∴ 丙类芯片 2020 年的产量为 $1\ 600+2\times3\ 200=8\ 000$（万块）.

2018 年 HW 公司手机产量为 $2\ 800\times10\%=28\ 000$（万部），

$400(1+m\%)^2+2\times400(1+m\%-1)^2+8\ 000\times28\ 000\times(1+10\%)$，

设 $m\%=t$，化简得 $3t^2+2t-56=0$，

解得 $t=4$，或 $t=-\frac{14}{3}$（舍去）.

∴ $t=4$.

∴ $m\%=4$.

∴ $m=400$.

答：丙类芯片 2020 年的产量为 8 000 万块，m 的值为 400.

2. 解：(1) 设一次函数关系式为 $y=kx+b$，将 $x=2, y=120$ 和 $x=4, y=140$ 分别代入得 $\begin{cases}2k+b=120,\\ 4k+b=140,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=10,\\ b=100.\end{cases}$

∴ y 与 x 之间的函数关系式为 $y=10x+100$.

(2) 由题意得

$(60-40-x)(10x+100)=2\ 090$，

整理得 $x^2-10x+9=0$，

解得 $x_1=1, x_2=9$.

∵ 要让顾客得到更大的实惠，

∴ $x=9$.

答：这种干果每千克应降价 9 元.

3. 解：设第一次存款时的年利率为 x.

则根据题意，得 $[1\ 000(1+x)-500](1+0.9x)=530$，整理，得 $90x^2+145x-3=0$.

解这个方程，得 $x_1\approx0.0204=2.04\%$，$x_2\approx-1.63$（舍去）.

答：第一次存款时的年利率约是 2.04%.

4. 解：(1) 设竹竿的长为 x 米，

∵ 撤着比城门宽 4 米，竖着比城门高 2 米，

∴ 城门高为 $(x-2)$ 米，宽为 $(x-4)$ 米.

∵ 沿着对角斜着拿刚好可以进城门，∴ 可列方程为 $(x-2)^2+(x-4)^2=x^2$.

解得 $x_1=2$（舍去），$x_2=10$.

答：竹竿长为 10 米.

5. 解：设周瑜走出时的年龄的个位数字为 x，则十位数字为 $x-3$.

根据题意，得 $2\times[10(x-3)+x]$ 即 $x^2-11x+30=0$，解这个方程，得 $x=5$ 或 $x=6$.

当 $x=5$ 时，周瑜去世时的年龄为 25 岁，不合题意，舍去；

当 $x=6$ 时，周瑜去世时的年龄为 36 岁，符合题意.

答：周瑜去世时的年龄为 36 岁.

6. 解：设每轮感染中平均一台电脑会感染 x 台电脑.

则 $1+x+x(1+x)=81$，

解得 $x_1=8, x_2=-10$（舍去），

三轮感染后被感染的电脑总数为 $81+81\times8=729$（台），729 台 >700 台.

答：每轮感染中平均一台电脑会感染 8 台电脑，若病毒得不到有效控制，三轮感染后被感染的电脑总数会超过 700 台.

7. 解：(1) 设收到红包钱数的年平均增长率是 x，

根据题意，得 $400(1+x)^2=484$，

解得 $x_1=-2.1$（舍去），$x_2=0.1=10\%$.

答：2018 年到 2020 年甜甜和她的妹妹在六一收到红包钱数的年平均增长率是 10%.

(2) 设甜甜收到了 y 元微信红包，则她的妹妹收到了 $(2y+34)$ 元微信红包，

根据题意，得 $y+2y+34=484$，

解得 $y=150$，

则 $2y+34=334$.

答：2020 年六一，甜甜和她的妹妹分别收到了 150 元和 334 元微信红包.

8. 解：设小路的宽度为 x m，

根据题意得 $(16-2x)(9-x)=112$，

整理得 $x^2-17x+16=0$，

解得 $x_1=1, x_2=16$.

∵ $16>9$，∴ $x=16$ 不符合题意，舍去.

∴ $x=1$.

答：小路的宽度为 1 m.

9. 解：设每周参观人数 y（人）与票价 x（元）之间的一次函数关系式为 $y=kx+b(k>0)$，

根据题意，得 $\begin{cases}10k+b=7\ 000,\\ 15k+b=4\ 500.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=-500,\\ b=12\ 000.\end{cases}$

∴ $y=-500x+12\ 000(x>0)$.

∵ $xy=40\ 000$，即 $x(-500x+12\ 000)=40\ 000$，

∴ $x^2-24x+80=0$，

解得 $x_1=20, x_2=4$.

当 $x=20$ 时，$y=-500x+12\ 000=2\ 000$，

当 $x=4$ 时，$y=-500x+12\ 000=10\ 000$.

∵ 要控制参观人数，∴ 取 $x=20$，此时，$y=2\ 000$.

答：每周应限定参观人数为 2 000 人，门票价格应是 20 元.

10. 解：(1) 由题意可得 $k=-15$，则原方程为 $x^2-15x+56=0$，∴ $(x-7)(x-8)=0$，

解得 $x_1=7, x_2=8$.

(2) 第 n 个方程为 $x^2-(2n-1)x+n(n-1)=0$，它的根为 $x_1=n-1, x_2=n$.

全章热门考点整合应用

1. 解：当 $m^2+1=2$ 且 $m-1\neq0$ 时，方程 $(m-1)x^{m^2+1}+2mx+3=0$ 是关于 x 的一元二次方程.

由 $m^2+1=2$，得 $m^2=1$，则 $m=\pm1$.

由 $m-1\neq0$，得 $m\neq1$，

所以 $m=-1$.

所以当 $m=-1$ 时，方程 $(m-1)x^{m^2+1}+2mx+3=0$ 是关于 x 的一元二次方程.

点拨：要准确理解一元二次方程的概念，需从次数和系数两方面考虑.

2. 解：由题意得 $c-4\geqslant0$ 且 $4-c\geqslant0$.

∴ $c=4$，则 $a=-2$.

又∵ -1 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根，

∴ $a-b+c=0$，∴ $b=a+c=-2+4=2$.

∴ 原式 $=\frac{(-2+2)^{2\ 021}}{2\ 021\times4}=0$.

3. 解：(1) $(x-1)^2+2x(x-1)=0$，

$(x-1)(x-1+2x)=0$，

$(x-1)(3x-1)=0$，

∴ $x_1=1, x_2=\frac{1}{3}$.

(2) $x^2-6x-6=0$，

$x^2-6x=6$，

$x^2-6x+9=15$，

$(x-3)^2=15$，

$x-3=\pm\sqrt{15}$，

∴ $x_1=3+\sqrt{15}, x_2=3-\sqrt{15}$.

(3) $6\ 000(1-x)^2=4\ 860$，

$(1-x)^2=0.81$，

$1-x=\pm0.9$，

∴ $x_1=1.9, x_2=0.1$.

(4) $(10+x)(50-x)=800$，

$x^2-40x+300=0$，

$(x-10)(x-30)=0$，

∴ $x_1=10, x_2=30$.

(5) $(2x-1)^2=x(3x+2)-7$，

$4x^2-4x+1=3x^2+2x-7$，

$x^2-6x+8=0$，

$(x-2)(x-4)=0$，

∴ $x_1=2, x_2=4$.

4. A

5. 解：∵ 关于 x 的方程 $x^2+(b+2)x+(6-b)=0$ 有两个相等的实数根，

∴ $\Delta=(b+2)^2-4(6-b)=0$，

∴ $b_1=2, b_2=-10$（舍去）.

当 a 为腰长时，△ABC 的周长为 $5+5+2=12$.

当 b 为腰长时，$2+2<5$，不能构成三角形.

∴ △ABC 的周长为 12.

6. 解：(1) ∵ 关于 x 的一元二次方程 $x^2-2(a-1)x+a^2-a-2=0$ 有两个不相等的实数根，

∴ $\Delta=[-2(a-1)]^2-4(a^2-a-2)>0$，

解得 $a<3$，

∴ a 为正整数，

∴ $a=1$ 或 2.

(2) ∵ $x_1^2+x_2^2-x_1x_2=16$，

∴ $(x_1+x_2)^2-3x_1x_2=16$，

∵ $x_1+x_2=2(a-1), x_1x_2=a^2-a-2$，

∴ $[2(a-1)]^2-3(a^2-a-2)=16$，

解得 $a_1=-1, a_2=6$，

∵ $a<3$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore a=-1$.

7. 解:(1)∵关于 x 的一元二次方程 $x^2-6x+(4m+1)=0$ 有实数根,

$\therefore \Delta=(-6)^2-4\times1\times(4m+1)\geqslant0$,

解得 $m\leqslant2$.

(2)∵方程 $x^2-6x+(4m+1)=0$ 的两个实数根为 x_1,x_2,

$\therefore x_1+x_2=6, x_1x_2=4m+1$.

∵$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=4^2$,

$\therefore 32-16m=16$,

解得 $m=1$.

8. 解:(1)设进出入次的月平均增长率为 x,

则由题意得

$128+128(1+x)+128(1+x)^2=608$,

化简得 $4x^2+12x-7=0$,

解得 $x_1=0.5=50\%$, $x_2=-3.5$(舍去).

答:进出入次的月平均增长率为 50%.

(2)∵进出入次的月平均增长率为 50%,

∴第四个月的进出入次为 $128(1+50\%)^3=128\times\frac{27}{8}=432<500$.

答:按照书馆能接纳第四个月的进馆人次.

9. 解:(1)$-1\leqslant5_1-2_1-3\leqslant1_1-9$

(2)两个数的和等于一次项系数,积等于常数项.

10. 解:(1)$(x-2)^2-2_1(x-\sqrt{2})^2-(4-2\sqrt{2})x$;$(x+\sqrt{2})^2-(2\sqrt{2}+4)x$;

$2(x-1)^2-x^2$.

(2)$a^2+b^2+c^2-ab-3b-2c+4=\left(a-\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}(b-2)^2+(c-1)^2=0$,

所以 $a-\frac{1}{2}b=0, b-2=0, c-1=0$.

所以 $a=1, b=2, c=1$.

所以 $a+b+c=4$.

11. 解:∵$x=a$ 是 $2x^2+x-2=0$ 的一个根,

∴$2a^2+a-2=0$,即 $2a^2+a=2$.

原式$=a^2(2a^2+a)+2a^2+2a+1=2a^2+2a^2+2a+1=2(2a^2+a)+1=5$.

点拨:将 $x=a$ 代入 $2x^2+x-2=0$ 中,再对等式变形,利用**整体代入**求出代数式的值.

12. 解:设 $2x+1=y$,则原方程可化为 $y^2-3y=-2$.

解得 $y_1=1, y_2=2$.

当 $y=1$ 时,有 $2x+1=1$,所以 $x=0$;

当 $y=2$ 时,有 $2x+1=2$,所以 $x=\frac{1}{2}$.

所以原方程的解为 $x_1=0, x_2=\frac{1}{2}$.

点拨:利用**转化思想**将复杂的一元二次方程转化为简单的一元二次方程来求解.

13. 解:(1)由题意得 $\Delta=4(a-1)^2-4(a^2-7a-4)=20a+20\geqslant0$,∴$a\geqslant-1$.

(2)若 $x_1^2=x_1x_2$,则 $x_1(x_1-x_2)=0$,故 $x_1=0$ 或 $x_1=x_2$.

当 $x_1=0$ 时,代入原方程得 $a^2-7a-4=0$,

解得 $a=\frac{7\pm\sqrt{65}}{2}$.

而此时 $x_1+x_2=-2(a-1)$,

∴$x_2=-2(a-1)$.

故 $x_2=-5-\sqrt{65}$ 或 $x_2=-5+\sqrt{65}$.

当 $x_1=x_2$ 时,$\Delta=20a+20=0$,

∴$a=-1$.

原方程为 $x^2-4x+4=0$,解得 $x_1=x_2=2$.

点拨:本题运用**分类讨论思想**,解题的关键是利用根与系数的关系以及根的判别式建立方程或不等式.

第二十二章 二次函数

22.1 二次函数的图象和性质

第 1 课时 二次函数

1. C **2.** C **3.** B **4.** B **5.** B **6.** D

7. D **8.** C

9. C **点拨**:本题易忽略二次根式有意义的条件,误认为 x 等于 1,2,3,而错选 D.

10. B

11. B **点拨**:∵$AB\perp OB$, $AB=OB=3$,

∴$\angle AOB=45°$.

∴阴影部分三角形是等腰直角三角形.

根据三角形的面积公式,可得 $S=\frac{1}{2}r^2$.

12. -2 **点拨**:根据题意,得 $\begin{cases}a^2-2=2,①\\a-2\neq0,②\end{cases}$

由①,得 $a=\pm2$;由②,得 $a\neq2$,所以 $a=-2$.

易错总结:求二次函数中字母系数的值时,要根据二次函数的定义,在保证函数中含自变量的式子是整式的前提下,还必须满足自变量的最高次数是 2 和二次项系数不为 0. 在解题过程中,往往容易忽略二次项系数不为 0 这个条件,只是从自变量的最高次数是 2 入手列方程来出 a 的值,从而得出错解.

13. 解:$y=(x-42)(x-(x-42)(-4x+204)$,即 $y=-4x^2+372x-8568$.

因为每副手套的进价为 42 元,所以 $x\geqslant42$.

而 $x\geqslant0$,

故 $-4x+204\geqslant0$,即 $x\leqslant51$.

所以自变量 x 的取值范围为 $42\leqslant x\leqslant51$.

点拨:本题最终要求的是 y 与 x 之间的函数解析式,即式子中不应该含有 t,因此在运算过程中,应利用 t 与 x 之间的关系将 t 代换掉.

14. 解:(1)$S=x^2+1$.

(2)是二次函数.

15. 解:(1)$S=x\left(\frac{12}{2}-x\right)$,即 $S=-x^2+6x(0<x<6)$.

(2)

x/m	1	2	3	4	5
S/m²	5	8	9	8	5
设计费/元	5 000	8 000	9 000	8 000	5 000

由表格可得,当 $x=3$ 时,广告牌的设计费最多.

16. 解:(1)$y=2x^2-4x+4$.

(2)令 $y=2$,则 $2x^2-4x+4=2$,整理得 $x^2-2x+1=0$,解得 $x_1=x_2=1$,即 AE 的长为 1.

第 2 课时 二次函数 $y=ax^2$ 的图象和性质

1. C **2.** A **3.** D

4. B **点拨**:直接利用图象设出抛物线解析式,将 $B(45,-78)$ 代入得出答案.

5. B **6.** D

7. B **点拨**:抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$,$y=x^2$ 的开口向上,抛物线 $y=-x^2$ 的开口向下,①错误;抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$,$y=x^2$,$y=-x^2$ 的顶点坐标都为 $(0,0)$,对称轴都为 y 轴,②③正确;④错误. 故选 B.

8. C

9. A **点拨**:在 $y=ax^2$ 中,$|a|$ 越大,开口越小,∴$\frac{1}{3}<\frac{4}{3}<3$,∴A 正确.

10. **错解**:当 $x=-1$ 时,$y=(-1)^2=1$;

当 $x=4$ 时,$y=4^2=16$.

∴在 $-1\leqslant x\leqslant4$ 这个范围内,函数 $y=x^2$ 的最小值是 1,最大值是 16.

诊断:$-1\leqslant x\leqslant4$ 既包含了正数、零,又包含了负数,因此在这个范围内对应的函数值与 x 的变化情况要分段研究. 实际上,当 $x=0$ 时,函数取得最小值 0. 而当 $x=-1$ 时,$y=1$;当 $x=4$ 时,$y=16$,所以最大值为 16.

正解:∵$-1\leqslant x\leqslant4$,∴当 $x=0$ 时函数 $y=x^2$ 有最小值为 0. 当 $x=-1$ 时,$y=1$;当 $x=4$ 时,$y=16$.

∴当 $-1\leqslant x\leqslant4$ 时,函数 $y=x^2$ 的最大值为 16,最小值为 0.

11. 解:(1)根据题意,得 $\begin{cases}m^2+3m-2=2,\\m+3\neq0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}m=-4\text{ 或 }1,\\m\neq-3.\end{cases}$

∴$m=-4$ 或 $m=1$.

(2)∵函数图象的开口向下,

∴$m+3<0$.∴$m<-3$.∴$m=-4$.

∴当 $m=-4$ 时,该函数图象的开口向下.

(3)∵函数有最小值,∴$m+3>0$.

∴$m>-3$.∴$m=1$.

∴当 $m=1$ 时,该函数有最小值.

12. 解:(1)由题意得 $a-2<0$,解得 $a<2$.

(2)由题意得 $3a-2<0$,解得 $a<\frac{2}{3}$.

(3)由题意得 $|a+2|=\left|-\frac{1}{2}\right|$,

解得 $a_1=-\frac{5}{2}$,$a_2=-\frac{3}{2}$.

(4)由题意得 $a^2+a=2$,解得 $a_1=-2$,$a_2=1$.

又由题意知 $a>0$,∴$a=1$.

13. 解:(1)把点 $A(1,b)$ 的坐标代入 $y=2x-3$ 得 $b=2\times1-3=-1$,

把点 $A(1,-1)$ 的坐标代入 $y=ax^2$ 得 $a=-1$.

(2)∵$a=-1$,

∴二次函数为 $y=-x^2$,它的图象开口向下,对称轴为 y 轴,

∴当 $x<0$ 时,y 随 x 的增大而增大.

(3)解方程组

$\begin{cases}y=2x-3,\\y=-x^2,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x_1=1,\\y_1=-1,\end{cases}\begin{cases}x_2=-3,\\y_2=-9.\end{cases}$

二次函数 $y=ax^2(a\neq0)$ 的图象与直线 $y=2x-3$ 的另一个交点 B 的坐标是 $(-3,-9)$.

14. 解:(1)将 $A(2,4)$ 的坐标代入 $y=ax^2$ 得 $4=4a$,∴$a=1$.

∴抛物线的函数解析式为 $y=x^2$.

(2)设存在一点 $P(x,0)$,使 $\triangle AOP$ 为等腰三角形.

由题意知 $OA=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$.

当 $OA=OP$ 时,$OP=2\sqrt{5}$,

∴$P(2\sqrt{5},0)$ 或 $P(-2\sqrt{5},0)$.

当 $OA=AP$ 时,$(x-2)^2+16=20$,

∴$x=0$(舍去)或 $x=4$.

∴$P(4,0)$.

当 $OP=AP$ 时,$x^2=(x-2)^2+16$,

∴$x=5$.

∴$P(5,0)$.

综上可知,当点 P 的坐标为 $(2\sqrt{5},0)$,$(-2\sqrt{5},0)$,$(4,0)$ 或 $(5,0)$ 时,$\triangle AOP$ 为等腰三角形.

点拨:等腰三角形的边分腰和底边,若没有说明,则必须分类讨论,同时注意三角形的三边关系.

第 3 课时 二次函数 $y=ax^2+k$ 的图象和性质

1. D **2.** B **3.** C **4.** D

5. D **点拨**:本题考查了二次函数和正比例函数图象、直角三角形的判定. 等边三角形的判定,正确画图是关键.

6. C **7.** D **8.** A **9.** C **10.** D

11. A **点拨**:把阴影部分分别拼凑成矩形,利用矩形的面积即可求得答案.

12. 解:设平移后的图象的函数解析式为 $y=\frac{1}{3}x^2+k$,将点 $(3,-3)$ 的坐标代入解析式,得 $k=-6$.

所以平移的方向是向下,平移的距离是 6 个单位长度.

点拨:二次函数图象平移的规律:上加下减;左加右减. 本题易因对平移变化规律理解不透彻而致错.

13. 解:(1)由题意易知 $a=-\frac{1}{2}$,把点 $(0,$ $2)$ 的坐标代入 $y=-\frac{1}{2}x^2+c$,得 $c=2$.

(2)略.

14. 解:(1)∵A 点为直线 $y=x+1$ 与 x 轴的交点,

∴$A(-1,0)$.

∵B 点的横坐标为 2,

∴当 $x=2$ 代入 $y=x+1$ 可求得 $y=3$,

∴$B(2,3)$.

∵抛物线的顶点在 y 轴上,

∴可设抛物线的函数解析式为 $y=ax^2+c$,把 A,B 两点的坐标代入可得 $\begin{cases}a+c=0,\\4a+c=3.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=1,\\c=-1.\end{cases}$

∴抛物线的函数解析式为 $y=x^2-1$.

(2)△ABM 为直角三角形,理由如下:由(1)中求得的抛物线的函数解析式可得 $y=x^2-1$ 可知 M 点的坐标为 $(0,-1)$,

∴$AM=\sqrt{2}$,$AB=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$,$BM=\sqrt{2^2+[3-(-1)]^2}=2\sqrt{5}$.

∴$AM^2+AB^2=2+18=20=BM^2$.

∴△ABM 为直角三角形.

15. 解:(1)当 $x=2$ 时,$y=\frac{1}{2}\times2^2+1=3$,

∴点 $A(2,3)$.

∵这个二次函数的图象是关于 y 轴对称,

∴点 $B(-2,3)$.

画出的二次函数图象及点 A,B 如图所示.

(2)在△AOB 中,∵$AB=2-(-2)=4$,AB 边上的高是 3,

∴$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times4\times3=6$.



(第 15 题)

(3)存在点 P.

如图所示,设点 $P\left(x,\frac{1}{2}x^2+1\right)$,则在△$APB$ 中,AB 边上的高为 $\left|\frac{1}{2}x^2+1-3\right|=\left|\frac{1}{2}x^2-2\right|$.

∵$S_{\triangle APB}=\frac{1}{2}S_{\triangle AOB}$,∴$\left|\frac{1}{2}x^2-2\right|=\frac{3}{2}$,

解得 $x_1=1$,$x_2=-1$,$x_3=\sqrt{7}$,$x_4=-\sqrt{7}$.

当 $x=1$ 时,$y=\frac{1}{2}\times1^2+1=\frac{3}{2}$;

当 $x=-1$ 时,$y=\frac{1}{2}\times(-1)^2+1=\frac{3}{2}$;

当 $x=\sqrt{7}$ 时,$y=\frac{1}{2}\times(\sqrt{7})^2+1=\frac{9}{2}$,

当 $x=-\sqrt{7}$ 时,$y=\frac{1}{2}\times(-\sqrt{7})^2+1=\frac{9}{2}$.

∴符合条件的点 P 有四个,分别是 $P\left(1,\frac{3}{2}\right)$或 $P\left(-1,\frac{3}{2}\right)$或 $P\left(\sqrt{7},\frac{9}{2}\right)$或 $P\left(-\sqrt{7},\frac{9}{2}\right)$.

16. 解:(1)由题意得 $k+4=2$,解得 $k=-2$.

∵$y=ax^2+c$ 的图象的顶点为 $(0,4)$,

∴$c=4$.

把点 $(1,2)$ 的坐标代入 $y=ax^2+4$,得 $a+4=2$,解得 $a=-2$.

(2)由(1)得二次函数解析式为 $y=-2x^2+4$,令 $y=m$,得 $2x^2+m-4=0$,

∴$x=\pm\sqrt{\frac{4-m}{2}}(0<m<4)$.

设 B,C 两点的坐标分别为 (x_1,m),(x_2,m),则 $BC=|x_1|+|x_2|=2\sqrt{\frac{4-m}{2}}$.

∵$W=OA^2+BC^2=m^2+4\times\frac{4-m}{2}=m^2-2m+8=(m-1)^2+7(0<m<4)$.

∴当 $m=1$ 时,W 取得最小值 7.

第 4 课时 二次函数 $y=a(x-h)^2$ 的图象和性质

1. B **2.** A **3.** C **4.** B

5. B **点拨**:设 $B(-3-m,2)$,$C(-3+m,2)$ $(m>0)$,则 $BC=2m$. 过点 A 作 $AD\perp BC$ 于 D,则 $AD=2$.

∵△ABC 为正三角形,

∴$AC=2m$,$CD=BD=m$.

∴$m^2+2^2=(2m)^2$,解得 $m=\frac{2\sqrt{3}}{3}$(负值舍去).

∴$C\left(-3+\frac{2\sqrt{3}}{3},2\right)$.

设抛物线的函数解析式为 $y=a(x+3)^2$,将 C 点坐标代入解析式,

得 $a\left(-3+\frac{2\sqrt{3}}{3}+3\right)^2=2$,

∴$a=\frac{3}{2}$.∴$y=\frac{3}{2}(x+3)^2$.

当 $x=0$ 时,$y=\frac{27}{2}$.

∴此抛物线与 y 轴的交点坐标为 $\left(0,\frac{27}{2}\right)$.

6. D **7.** A

8. D **点拨**:由二次函数 $y=a(x-h)^2$ 的性质可知二次函数 $y=-2(x+m)^2$ 的图象的对称轴为直线 $x=-m$,根据题意,可知 $x=-m=-3$. 因此 $m=3$. 由二次函数的解析式为 $y=-2(x+3)^2$,所以当 $x=1$ 时,$y=-32$. 故选 D.

9. A **10.** A

11. B **点拨**:二次函数 $y=3x^2+1$ 的图象开口向上,对称轴是 y 轴,顶点坐标是 $(0,1)$,当 $x>0$ 时,y 随 x 的增大而增大;二次函数 $y=3(x-1)^2$ 的图象开口向上,对称轴是直线 $x=1$,顶点坐标是 $(1,0)$,当 $x>1$ 时,y 随 x 的增大而增大;二次函数 $y=3x^2+1$ 和 $y=3(x-1)^2$ 的图象的开口大小一样. 因此正确的说法有 2 个;①④. 故选 B.

12. 解:(1)由题意知 $h=-2$. 将点 $(1,-3)$ 的坐标代入 $y=a(x+2)^2$ 得 $a=-\frac{1}{3}$,所以抛物线的函数解析式为 $y=-\frac{1}{3}(x+2)^2$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)图象略.
(3)当 $x<-2$ 时，y 随 x 的增大而增大；当 $x=-2$ 时，函数有最大值.

13. 解：(1) $a=\frac{1}{4}$，$h=-3$.

(2)抛物线 $y=\frac{1}{4}(x+3)^2$ 的对称轴为直线 $x=-3$，顶点坐标为 $(-3,0)$.

14. 解：(1)依题意得抛物线 $y=x^2$ 平移后为抛物线 $y=(x-a)^2$，即 $y=x^2-2ax+a^2$.
$\because OA=OB$，点 A 的坐标为 $(a,0)$，点 B 的坐标为 $(0,a^2)$，
$\therefore a^2=a$，$\because a\neq 0$，$\therefore a=1$.
(2)存在. 点的坐标为 $(2,1)$，此时 $AB=AC$，$\angle BAC=90°$.
易知 $AB=AC=\sqrt{2}$，
$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=1$.

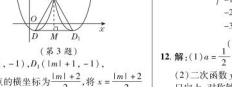
15. 解：(1)在 $y=(x+2)^2$ 中，令 $y=0$，得 $x=-2$；令 $x=0$，得 $y=4$.
$\therefore$ 点 A，点 B 的坐标分别为 $(-2,0)$，$(0,4)$.
(2)$\because$ 点 A，点 B 的坐标分别为 $(-2,0)$，$(0,4)$，$\therefore OA=2$，$OB=4$.
$\therefore S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}OA\cdot OB=\frac{1}{2}\times 2\times 4=4$.
(3)抛物线的对称轴为直线 $x=-2$.
(4)存在. ①以 OA 和 OB 为邻边可作平行四边形 $PAOB$，易求得 $P(-2,4)$；
②以 AB 和 OB 为邻边可作平行四边形 $PABO$，易求得 $P(-2,-4)$. 点 P 的坐标为 $(-2,4)$或 $(-2,-4)$.

第5课时　二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象和性质

1. D　**点拨**：抛物线 $y=x^2$ 的顶点是 $(0,0)$，抛物线 $y=(x-2)^2-1$ 的顶点是 $(2,-1)$. 由点 $(0,0)$ 到点 $(2,-1)$ 的平移方法可以是先向右平移 2 个单位长度，然后向下平移 1 个单位长度，故选 D.

2. B

3. A　**点拨**：如图，当抛物线 $C_3y=\frac{1}{2}(x-1)^2-1$ 沿水平方向向右平移 $|m|$ 个单位长度时，得到抛物线 $C_1:y=\frac{1}{2}(x-|m|-1)^2-1$，
$\therefore QD=QD_1$. 过点 Q 作 $QM\perp DD_1$ 于点 M.



(第3题)

$\because D(1,-1)$，$D_1(|m|+1,-1)$，
$\therefore Q$ 点的横坐标为 $\frac{|m|+2}{2}$，将 $x=\frac{|m|+2}{2}$ 代入 $y=\frac{1}{2}(x-1)^2-1$，得 $y=\frac{m^2}{8}-1$，
$\therefore Q\left(\frac{|m|+2}{2},\frac{m^2}{8}-1\right)$.
$\because \angle DQD_1=60°$，$\therefore \triangle DQD_1$ 是等边三角形.
$\therefore QD=DD_1=|m|$.
在 Rt $\triangle QDM$ 中，由勾股定理得 $\left(\frac{|m|+2}{2}-1\right)^2+\left(\frac{m^2}{8}-1+1\right)^2=m^2$，解得 $m=\pm 4\sqrt{3}\,(m=0$ 舍去$)$.
同理可得，当抛物线 $C_2:y=\frac{1}{2}(x-1)^2-1$ 沿水平方向向左平移 $|m|$ 个单位长度时，$m=\pm 4\sqrt{3}$.
$\therefore m=\pm 4\sqrt{3}$.

4. A

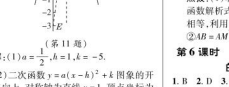
5. B　**点拨**：$\because$ 抛物线 $y=(x-m)^2+(m+1)$ 的顶点在第一象限，
$\therefore\begin{cases}m>0,\\m+1>0.\end{cases}\therefore m>0$. 故选 B.

6. C　**7.** C　**8.** C

9. $-3\leqslant a\leqslant 1$　**点拨**：画出抛物线 $y=(x-1)^2-3$ 在 $0\leqslant x\leqslant 3$ 范围内的图象，根据“直线 $y=a$ 与抛物线 $y=(x-1)^2-3$ 有交点”可得 a 的取值范围.

10. D　**点拨**：根据 $m\leqslant x\leqslant n$，且 $mn<0$，得出 $m<0<n$，进而根据图象分成 $m\leqslant x\leqslant n<1$ 和 $m\leqslant x\leqslant n$ 且 $n\geqslant 1$ 两种情况讨论.

11. 解：(1)设抛物线的解析式为 $y=a(x-1)^2+4$，
由抛物线过点 $B(0,3)$，
得 $3=a(0-1)^2+4$.
解得 $a=-1$.
$\therefore$ 解析式为 $y=-(x-1)^2+4$，
即 $y=-x^2+2x+3$.
(2)如图，点 B 关于 x 轴的对称点为 $E(0,-3)$，连接 AE. 交 x 轴于点 P，设直线 AE 的解析式为 $y=kx+b$，则 $\begin{cases}k+b=4,\\b=-3.\end{cases}$解得 $\begin{cases}k=7,\\b=-3.\end{cases}$
$\therefore$ 直线 AE 的解析式为 $y=7x-3$.
当 $y=0$ 时，$x=\frac{3}{7}$，
$\therefore$ 点 P 的坐标为 $\left(\frac{3}{7},0\right)$.



(第11题)

12. 解：(1) $a=\frac{1}{2}$，$h=1$，$k=-5$.
(2)二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 图象的开口向上，对称轴为直线 $x=1$，顶点坐标为 $(1,-5)$.

13. 解：(1)$\because$ 球从 O 点正上方 2 m 的 A 处发出，
$\therefore$ 抛物线 $y=a(x-6)^2+h$ 过点 $(0,2)$.
又$\because h=2.6$，
$\therefore 2=a(0-6)^2+2.6$. 解得 $a=-\frac{1}{60}$. 故 y 与 x 的关系式为 $y=-\frac{1}{60}(x-6)^2+2.6$.
(2)当 $x=9$ 时，$y=-\frac{1}{60}\times(9-6)^2+2.6=2.45>2.43$，$\therefore$ 球能越过球网.
当 $y=0$ 时，$-\frac{1}{60}(x-6)^2+2.6=0$，
解得 $x_1=6+2\sqrt{39}>18$，$x_2=6-2\sqrt{39}$(舍去).
$\because 6+2\sqrt{39}>18$，$\therefore$ 球会出边界.(另解：将 $x=18$ 代入函数解析式得 $y=-\frac{1}{60}\times(18-6)^2+2.6=0.2>0$，此时球仍在空中运行，故会出界)
(3)将 $x=0$，$y=2$ 代入 $y=a(x-6)^2+h$，得 $a=\frac{2-h}{36}$.
若球一定能越过球网，则当 $x=9$ 时，$y=\frac{2-h}{36}\cdot(9-6)^2+h=\frac{2+3h}{4}>2.43$①；
若球不出边界，则当 $x=18$ 时，$y=\frac{2-h}{36}\cdot(18-6)^2+h=8-3h\leqslant 0$②，
由①②得 $h\geqslant\frac{8}{3}$.
$\therefore h$ 的取值范围为 $h\geqslant\frac{8}{3}$.

点拨：利用二次函数解决实际问题时，运用**建模思想**把实际问题中的已知条件转化为点的坐标，代入解析式求解，最后根据求解的结果转化为实际问题的答案.

14. 解：(1)由题意可知 $h=1$，则 $y=a(x-1)^2+k$.
将点 $(3,0)$，$(0,3)$ 的坐标分别代入上式，得 $\begin{cases}4a+k=0,\\a+k=3.\end{cases}$解得 $\begin{cases}a=-1,\\k=4.\end{cases}$
故抛物线的函数解析式为 $y=-(x-1)^2+4$.
(2)①当 $MA=MB$ 时，$M(0,0)$；
②当 $AB=AM$ 时，$M(0,-3)$；
③当 $AB=BM$ 时，$M(0,3+3\sqrt{2})$ 或 $M(0,3-3\sqrt{2})$.
所以点 M 的坐标为 $(0,0)$，$(0,-3)$，$(0,3+3\sqrt{2})$ 或 $(0,3-3\sqrt{2})$.
点拨：(1)利用**待定系数法**求出抛物线的函数解析式. (2)根据等腰三角形的两腰相等，利用**分类讨论思想**分①$MA=MB$；②$AB=AM$；③$AB=BM$ 三种情况讨论.

第6课时　二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象和性质

1. B　**2.** D　**3.** C　**4.** C　**5.** C　**6.** D

7. D　**点拨**：由 $A(m,n)$，$C(3-m,n)$ 的对称性，可求得二次函数图象的对称轴为直线 $x=\frac{3}{2}$. 由 $B(0,y_1)$，$D(\sqrt{2},y_2)$，$E(2,y_3)$ 与对称轴的距离，即可判断 $y_1>y_3>y_2$.

8. B

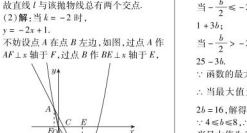
9. D　**点拨**：由 $\begin{cases}y=ax^2+bx,\\y=ax+b\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-\frac{b}{a},\\y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=1,\\y=a+b.\end{cases}$ 故二次函数 $y_1=ax^2+bx$ 与一次函数 $y_2=ax+b\,(a\neq 0)$ 的图象的交点为 $\left(-\frac{b}{a},0\right)$，$(1,a+b)$.
在 A 中，由一次函数图象可知 $a>0$，$b>0$；由二次函数图象可知 $a>0$，$b>0$，则 $a+b>0$，不符合题意.
在 B 中，由一次函数图象可知 $a>0$，$b<0$；由二次函数图象可知 $a>0$，$b<0$，由 $|a|>|b|$，可得 $a+b>0$，不符合题意.
在 C 中，由一次函数图象可知 $a<0$，$b<0$；由二次函数图象可知 $a<0$，$b<0$，则 $a+b<0$，不符合题意.
在 D 中，由一次函数图象可知 $a<0$，$b>0$；由二次函数图象可知 $a<0$，$b>0$，由 $|a|<|b|$，可得 $a+b<0$，符合题意.

10. A　**点拨**：根据二次函数的二次项系数可知抛物线开口向上. 由于二次函数 $y=x^2-2(b-2)x+b^2-1$ 的图象不经过第三象限，所以 $[-2(b-2)]^2-4(b^2-1)\leqslant 0$，或 $\begin{cases}-2(b-2)>0,\\b^2-1\geqslant 0.\end{cases}$
所以 $b\geqslant\frac{5}{4}$.

11. 解：(1)把 $A(0,3)$，$B\left(-4,-\frac{9}{2}\right)$ 的坐标分别代入 $y=-\frac{3}{16}x^2+bx+c$，得
$\begin{cases}c=3,\\-\frac{3}{16}\times 16-4b+c=-\frac{9}{2},\end{cases}$
解得 $\begin{cases}b=\frac{9}{8},\\c=3.\end{cases}$
(2)有公共点. 由(1)可得，该二次函数的解析式为 $y=-\frac{3}{16}x^2+\frac{9}{8}x+3$.
$b^2-4ac=\left(\frac{9}{8}\right)^2-4\times\left(-\frac{3}{16}\right)\times 3=\frac{225}{64}>0$，
$\therefore$ 二次函数 $y=-\frac{3}{16}x^2+bx+c$ 的图象与 x 轴有两个公共点.
$\because -\frac{3}{16}x^2+\frac{9}{8}x+3=0$ 的解为 $x_1=-2$，$x_2=8$，
$\therefore$ 公共点的坐标是 $(-2,0)$ 和 $(8,0)$.

12. 解：(1)把点 $P(-2,3)$ 的坐标代入 $y=x^2+ax+3$，得 $3=(-2)^2-2a+3$，解得 $a=2$.
$\therefore y=x^2+2x+3=(x+1)^2+2$.
$\therefore$ 图象的顶点坐标为 $(-1,2)$.
(2)①当 $m=2$ 时，$n=3^2+2=11$.
②$2\leqslant n<11$.

13. (1)**证明**：由题意得 $\begin{cases}y=kx+1,\\y=x^2-4x,\end{cases}$
化简可得 $x^2-(4+k)x-1=0$，
$\because \Delta=(4+k)^2+4>0$，
故直线 l 与该抛物线总有两个交点.
(2)**解**：当 $k=-2$ 时，
$y=-2x+1$.
不妨设点 A 在点 B 左边，如图，过点 A 作 $AF\perp x$ 轴于 F，过点 B 作 $BE\perp x$ 轴于 E，



(第13题)

由 $\begin{cases}y=x^2-4x,\\y=-2x+1,\end{cases}$
得 $\begin{cases}x=1+\sqrt{2},\\y=-1-2\sqrt{2},\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=1-\sqrt{2},\\y=-1+2\sqrt{2}.\end{cases}$
$\therefore A(1-\sqrt{2},2\sqrt{2}+1)$，$B(1+\sqrt{2},-1-2\sqrt{2})$.
$\therefore AF=2\sqrt{2}-1$，$BE=1+2\sqrt{2}$.
易求得直线 $y=-2x+1$ 与 x 轴的交点 C 的坐标为 $\left(\frac{1}{2},0\right)$，
$\therefore OC=\frac{1}{2}$，
$\therefore S_{\triangle OAB}=S_{\triangle AOC}+S_{\triangle BOC}$
$=\frac{1}{2}OC\cdot AF+\frac{1}{2}OC\cdot BE$
$=\frac{1}{2}OC\cdot(AF+BE)$
$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times(2\sqrt{2}-1+1+2\sqrt{2})$
$=\sqrt{2}$.

14. 解：(1)将点 $(-2,4)$ 的坐标代入 $y=x^2+bx+c$，得 $4-2b+c=4$，$\therefore c=2b$.
(2)由题知，$m=-\frac{b}{2}$，$n=\frac{4c-b^2}{4}$，
$\therefore b=-2m$.
又由(1)知 $c=2b$，$\therefore n=\frac{8b-b^2}{4}$.
$\therefore n=-m^2-4m$.
(3)$y=x^2+bx+2b=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b^2}{4}+2b$，
图象的对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2}$.
当 $b\leqslant 0$ 时，$c\leqslant 0$，若函数的图象不经过第三象限，则 $c=0$.
此时 $y=x^2$，当 $-5\leqslant x\leqslant 1$ 时，函数的最小值是 0，最大值是 25.
$\therefore$ 最大值与最小值之差是 25(不合题意，舍去).
当 $b>0$ 时，$c>0$，若函数的图象不经过第三象限，则 $b^2-4c\leqslant 0$，$\therefore 0<b\leqslant 8$.
$\therefore -4\leqslant-\frac{b}{2}<0$.
当 $-5\leqslant x\leqslant 1$ 时，函数有最小值 $-\frac{b^2}{4}+2b$，
当 $-\frac{b}{2}\leqslant -2$，即 $b\geqslant 4$ 时，函数有最大值 $1+3b$；
当 $-\frac{b}{2}>-2$，即 $b<4$ 时，函数有最大值 $25-3b$.
$\because$ 函数的最大值与最小值之差为 16，
$\therefore$ 当最大值为 $1+3b$ 时，$1+3b+\frac{b^2}{4}-2b=16$，解得 $b=6$ 或 $b=-10$，
$\because 4\leqslant b\leqslant 8$，$\therefore b=6$；
当最大值为 $25-3b$ 时，$25-3b+\frac{b^2}{4}-2b=16$，
解得 $b=2$ 或 $b=18$，
$\because 0<b<4$，$\therefore b=2$.
综上所述，$b=2$ 或 $b=6$.


第14题图像

点拨：将 b 的值分成几段进行分段讨论.

第7课时　用待定系数法求二次函数解析式

1. 解：(1)$\because$ 抛物线 $y=-\frac{1}{3}x^2+bx+c$ 经过点 $A(3\sqrt{3},0)$，$B(0,3)$，
$\therefore\begin{cases}-9+3\sqrt{3}b+c=0,\\c=3,\end{cases}$解得 $\begin{cases}b=\frac{2\sqrt{3}}{3},\\c=3.\end{cases}$
$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y=-\frac{1}{3}x^2+\frac{2\sqrt{3}}{3}x+3$.
(2)由(1)知抛物线的对称轴为直线 $x=\sqrt{3}$. 把 $x=\sqrt{3}$ 代入 $y=-\frac{1}{3}x^2+\frac{2\sqrt{3}}{3}x+3$ 得 $y=4$，
则点 C 的坐标为 $(\sqrt{3},4)$.
设直线 AB 的解析式为 $y=kx+a$.
将 $A(3\sqrt{3},0)$，$B(0,3)$ 的坐标代入可求得 $k=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，$a=3$，
$\therefore$ 直线 AB 的解析式为 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+3$.
如图，设抛物线的对称轴 l 与直线 AB 的交点 D 的坐标为 $(\sqrt{3},m)$，
将点 $D(\sqrt{3},m)$ 的坐标代入 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+3$，得 $m=2$，
$\therefore$ 点 D 的坐标为 $(\sqrt{3},2)$，
$\therefore CD=CE-DE=2$.

(第1题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

过点 B 作 $BF\perp l$ 于点 F.

∴ $BF=OE$.

∴ $BF+AE=OE+AE=OA=3\sqrt{3}$.

∴ $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle BCD}+S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}CD\cdot BF+\frac{1}{2}CD\cdot AE=\frac{1}{2}CD\cdot(BF+AE)=\frac{1}{2}\times 2\times 3\sqrt{3}=3\sqrt{3}$.

2. (1)**证明**:由题意可知,抛物线的对称轴为直线 $x=1$.

若点 $C(-1,2)$ 在抛物线上,

则点 C 关于直线 $x=1$ 的对称点 $(3,2)$ 也在这条抛物线上,此时点 $E(4,2)$ 不在这条抛物线上.

同理,若点 $E(4,2)$ 在抛物线上,则点 $C(-1,2)$ 不在抛物线上.

∴ C,E 两点不可能同时在抛物线 $y=a(x-1)^2+k(a>0)$ 上.

(2)**解**:点 A 不在抛物线上.

理由:若点 $A(1,0)$ 在抛物线 $y=a(x-1)^2+k(a>0)$ 上,则 $k=0$. ∴ $y=a(x-1)^2(a>0)$.

易知 $B(0,-1)$,$D(2,-1)$ 都不在抛物线上.

由(1)知 C,E 两点不可能同时在抛物线上,

∴ 与抛物线经过其中三个点矛盾.

∴ 点 A 不在抛物线上.

(3)**解**:由(2)可知点 A 不在抛物线上.结合(1)的结论易知 B,D 一定在抛物线 $y=a(x-1)^2+k(a>0)$ 上.

①若点 $C(-1,2)$ 在此抛物线上,

则 $\begin{cases}a+k=-1,\\4a+k=2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\k=-2.\end{cases}$

②若点 $E(4,2)$ 在此抛物线上,

则 $\begin{cases}a+k=-1,\\9a+k=2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\frac{3}{8},\\k=-\frac{11}{8}.\end{cases}$

综上可知,$\begin{cases}a=1,\\k=-2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=\frac{3}{8},\\k=-\frac{11}{8}.\end{cases}$

3. B

4. **解**:(1)由二次函数的图象经过点 $(1,-2)$,得 $(a+1)\cdot(-a)=-2$,解得 $a_1=-2$,$a_2=1$.

当 $a=-2$ 时,二次函数的解析式为 $y=(x-2)(x+2-1)$,

即 $y=x^2-x-2$;

当 $a=1$ 时,二次函数的解析式为 $y=(x+1)(x-2)$,

即 $y=x^2-x-2$.

综上所述,该二次函数的解析式为 $y=x^2-x-2$.

(2)当 $y=0$ 时,$(x+a)(x-a-1)=0$,

解得 $x=-a$ 或 $x=a+1$,

所以二次函数的图象与 x 轴的交点是 $(-a,0)$,$(a+1,0)$.

当 $y=ax+b$ 的图象经过 $(-a,0)$ 时,$-a^2+b=0$,即 $b=a^2$;

当 $y=ax+b$ 的图象经过 $(a+1,0)$ 时,$a^2+a+b=0$,即 $b=-a^2-a$.

(3)由题易知二次函数的图象的对称轴为直线 $x=\frac{1}{2}$.

当 P 在对称轴的左侧(含顶点)时,

因为 $(1,n)$ 与 $(0,n)$ 关于直线 $x=\frac{1}{2}$ 对称,所以由 $n<n$,得 $0<x_0\le\frac{1}{2}$;

当 P 在对称轴的右侧时,

由 $m<n$,得 $\frac{1}{2}<x_0<1$.

综上所述,x_0 的取值范围为 $0<x_0<1$.

5. **解**:(1)由 $x^2-4=0$ 得 $x_1=-2$,$x_2=2$,

∴ 点 A 位于点 B 的左侧,∴ $A(-2,0)$,

∵ 直线 $y=x+m$ 经过点 A,

∴ $-2+m=0$,

解得 $m=2$,

∴ 点 D 的坐标为 $(0,2)$,

∴ $AD=\sqrt{OA^2+OD^2}=2\sqrt{2}$.

(2)设新抛物线对应的函数解析式为 $y=x^2+bx+2$,

$y=x^2+bx+2=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+2-\frac{b^2}{4}$,

则点 C' 的坐标为 $\left(-\frac{b}{2},2-\frac{b^2}{4}\right)$,

∵ CC' 平行于直线 AD,且易知 C 的坐标为 $(0,-4)$,

∴ 直线 CC' 对应的函数解析式为 $y=x-4$,

∴ $2-\frac{b^2}{4}=-\frac{b}{2}-4$,

解得 $b_1=-4$,$b_2=6$.

∴ 新抛物线对应的函数解析式为 $y=x^2-4x+2$ 或 $y=x^2+6x+2$.

6. **解**:(1)由题意得 $\begin{cases}4a-2b+2=6,\\4a+2b+2=2.\end{cases}$

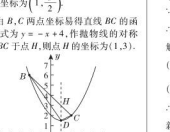
解得 $\begin{cases}a=\frac{1}{2},\\b=-1.\end{cases}$

∴ 抛物线的函数解析式为 $y=\frac{1}{2}x^2-x+2$.

(2)∵ $y=\frac{1}{2}x^2-x+2=\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{3}{2}$,

∴ 顶点坐标为 $\left(1,\frac{3}{2}\right)$.

如图,由 B,C 两点坐标易得直线 BC 的函数解析式为 $y=-x+4$,作抛物线的对称轴,交 BC 下点 H,则点 H 的坐标为 $(1,3)$.



(第 6 题)

∴ $S_{\triangle BCD}=S_{\triangle BHH}+S_{\triangle DHC}=\frac{1}{2}\times\left(3-\frac{3}{2}\right)\times[1-(-2)]+\frac{1}{2}\times\left(3-\frac{3}{2}\right)\times(2-1)=3$.

(3)由 $\begin{cases}y=-\frac{1}{2}x+c,\\y=\frac{1}{2}x^2-x+2,\end{cases}$

消去 y,得到 $x^2-x+4-2c=0$.

当 $\Delta=0$ 时,直线与抛物线相切,

$1-4(4-2c)=0$,

∴ $c=\frac{15}{8}$.

当直线 $y=-\frac{1}{2}x+c$ 经过点 B 时,$c=3$,

∵ 直线 $y=x+m$ 经过点 A,

∴ $-2+m=0$,

解得 $m=2$,

∴ 点 D 的坐标为 $(0,2)$,

∴ $AD=\sqrt{OA^2+OD^2}=2\sqrt{2}$.

(2)设新抛物线对应的函数解析式为 $y=x^2+bx+2$,

$y=x^2+bx+2=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+2-\frac{b^2}{4}$,

则点 C' 的坐标为 $\left(-\frac{b}{2},2-\frac{b^2}{4}\right)$,

∵ CC' 平行于直线 AD,且易知 C 的坐标为 $(0,-4)$,

∴ 直线 CC' 对应的函数解析式为 $y=x-4$,

∴ $2-\frac{b^2}{4}=-\frac{b}{2}-4$,

解得 $b_1=-4$,$b_2=6$.

∴ 新抛物线对应的函数解析式为 $y=x^2-4x+2$ 或 $y=x^2+6x+2$.

6. **解**:(1)由题意得 $\begin{cases}4a-2b+2=6,\\4a+2b+2=2.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=\frac{1}{2},\\b=-1.\end{cases}$

∴ 抛物线的函数解析式为 $y=\frac{1}{2}x^2-x+2$.

(2)∵ $y=\frac{1}{2}x^2-x+2=\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{3}{2}$,

∴ 顶点坐标为 $\left(1,\frac{3}{2}\right)$.

如图,由 B,C 两点坐标易得直线 BC 的函数解析式为 $y=-x+4$,作抛物线的对称轴,交 BC 下点 H,则点 H 的坐标为 $(1,3)$.

(第 6 题)

∴ $S_{\triangle BCD}=S_{\triangle BHH}+S_{\triangle DHC}=\frac{1}{2}\times\left(3-\frac{3}{2}\right)\times[1-(-2)]+\frac{1}{2}\times\left(3-\frac{3}{2}\right)\times(2-1)=3$.

(3)由 $\begin{cases}y=-\frac{1}{2}x+c,\\y=\frac{1}{2}x^2-x+2,\end{cases}$

消去 y,得到 $x^2-x+4-2c=0$.

当 $\Delta=0$ 时,直线与抛物线相切,

$1-4(4-2c)=0$,

∴ $c=\frac{15}{8}$.

当直线 $y=-\frac{1}{2}x+c$ 经过点 B 时,$c=3$,

∵ 直线 $y=x+m$ 经过点 A,

∴ $-2+m=0$,

解得 $m=2$,

∴ 点 D 的坐标为 $(0,2)$,

∴ $AD=\sqrt{OA^2+OD^2}=2\sqrt{2}$.

(2)设新抛物线对应的函数解析式为 $y=x^2+bx+2$,

$y=x^2+bx+2=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+2-\frac{b^2}{4}$,

则点 C' 的坐标为 $\left(-\frac{b}{2},2-\frac{b^2}{4}\right)$,

∵ CC' 平行于直线 AD,且易知 C 的坐标为 $(0,-4)$,

∴ 直线 CC' 对应的函数解析式为 $y=x-4$,

∴ $2-\frac{b^2}{4}=-\frac{b}{2}-4$,

解得 $b_1=-4$,$b_2=6$.

∴ 新抛物线对应的函数解析式为 $y=x^2-4x+2$ 或 $y=x^2+6x+2$.

阶段核心归类

1. C **2.** B **3.** D

4. **解**:(1)把点 $(1,k^2)$ 的坐标代入 $y=x^2-2(k-1)x+k^2-\frac{5}{2}k$,得 $k^2=1^2-2(k-1)+k^2-\frac{5}{2}k$,

解得 $k=\frac{3}{2}$.

(2)把点 $(2k,y_1)$ 的坐标代入 $y=x^2-2(k-1)x+k^2-\frac{5}{2}k$,得 $y_1=(2k)^2-2(k-1)\cdot 2k+k^2-\frac{5}{2}k=k^2+\frac{3}{2}k$.

把点 $(2,y_2)$ 的坐标代入 $y=x^2-2(k-1)x+k^2-\frac{5}{2}k$,得

$y_2=2^2-2(k-1)\times 2+k^2-\frac{5}{2}k=k^2-\frac{13}{2}k+8$.

∵ $y_1>y_2$,

∴ $k^2+\frac{3}{2}k>k^2-\frac{13}{2}k+8$,

解得 $k>1$.

(3)∵ $y=x^2-2(k-1)x+k^2-\frac{5}{2}k=(x-k+1)^2-\frac{1}{2}k-1$.

∴ 将抛物线向右平移 1 个单位长度得到新抛物线 $y=(x-k)^2-\frac{1}{2}k-1$.

当 $k<1$ 时,$1\le x\le 2$ 对应的新抛物线部分位于对称轴右侧,y 随 x 的增大而增大,

∴ $x=1$ 时,$y_{最小}=(1-k)^2-\frac{1}{2}k-1=k^2-\frac{5}{2}k=-\frac{3}{2}$,解得 $k_1=1$,$k_2=\frac{3}{2}$,都不符合题意,舍去;

当 $1\le k\le 2$ 时,$y_{最小}=-\frac{1}{2}k-1$,

∴ $-\frac{1}{2}k-1=-\frac{3}{2}$,解得 $k=1$;

当 $k>2$ 时,$1\le x\le 2$ 对应的新抛物线部分位于对称轴的左侧,y 随 x 的增大而减小,

∴ $x=2$ 时,$y_{最小}=(2-k)^2-\frac{1}{2}k-1=k^2-\frac{9}{2}k+3=-\frac{3}{2}$,解得 $k_1=3$,$k_2=\frac{3}{2}$(舍去),综上,$k=1$ 或 $k=3$.

5. D

6. **解**:(1)把点 $(1,0)$ 和 $\left(0,-\frac{3}{2}\right)$ 的坐标分别代入 $y=-\frac{1}{2}x^2+bx+c$,得 $\begin{cases}-\frac{1}{2}+b+c=0,\\c=\frac{3}{2},\end{cases}$

解得 $\begin{cases}b=-1,\\c=\frac{3}{2}.\end{cases}$

∴ 该抛物线的函数解析式为 $y=-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{2}$.

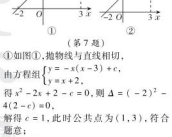
(2)∵ $y=-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}(x+1)^2+2$,

∴ 顶点坐标为 $(-1,2)$.

∴ 将抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{2}$ 平移,使其顶点恰好落在原点的一种平移方法:先向右平移 1 个单位长度,再向下平移 2 个单位长度.(平移方法不唯一)

平移后的函数解析式为 $y=-\frac{1}{2}x^2$.

7. D **点拨**:∵ 一段抛物线 l_1:$y=-x(x-3)+c(0\le x\le 3)$ 与直线 l_2:$y=x+2$ 有唯一公共点,∴ 分两种情况:



(第 7 题)

①如图①,抛物线与直线相切,

由方程组 $\begin{cases}y=-x(x-3)+c,\\y=x+2,\end{cases}$

得 $x^2-2x+2-c=0$,则 $\Delta=(-2)^2-4(2-c)=0$,

解得 $c=1$,此时公共点为 $(1,3)$,符合题意;

②如图②,抛物线与直线不相切,且当 $0\le x\le 3$ 时只有一个交点,

∴ $\begin{cases}-0\times(0-3)+c>0+2,\\-3\times(3-3)+c\le 3+2,\end{cases}$

∴ $2<c\le 5$.

又∵ c 为整数,∴ $c=3,4,5$.

综上,$c=1,3,4,5$.

故选 D.

8. (1)**解**:设 $y=0$,则 $0=ax^2+bx-(a+b)$,

∵ $\Delta=b^2-4a[-(a+b)]=b^2+4ab+4a^2=(2a+b)^2\ge 0$,

∴ 方程有两个不相等的实根或两个相等的实根.

∴ 二次函数图象与 x 轴的交点的个数有两个或一个.

(2)**证明**:当 $x=1$ 时,$y=a+b-(a+b)=0$.

∴ 抛物线不经过点 C.

把 $A(-1,4)$,$B(0,-1)$ 的坐标分别代入,得 $\begin{cases}4=a-b-(a+b),\\-1=-(a+b),\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=3,\\b=-2.\end{cases}$

∴ 该二次函数的解析式为 $y=3x^2-2x-1$.

(3)**证明**:当 $x=2$ 时,$y=m$,

∴ $m=4a+2b-(a+b)=3a+b>0$①,

∵ $a+b<0$.

∴ $-a-b>0$②,

①②相加得 $2a>0$,

∴ $a>0$.

9. **解**:(1)∵ 抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 经过点 $A(-1,0)$,$B(3,0)$,

∴ $\begin{cases}-1-b+c=0,\\-9+3b+c=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}b=2,\\c=3,\end{cases}$

∴ 抛物线的解析式为 $y=-x^2+2x+3$.

$y=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$.

∴ $D(1,4)$.

(2)$\sqrt{13}$ **点拨**:∵ $B(3,0)$,$D(1,4)$,

∴ 将抛物线 H 的坐标为 $(2,2)$,其关于 y 轴的对称点 H' 的坐标为 $(-2,2)$.

连接 $H'D$ 与 y 轴交于点 P,则 $PD+PH$ 最小,且最小值为 $\sqrt{(1+2)^2+(4-2)^2}=\sqrt{13}$.

10. **解**:(1)5;3

(2)∵ $\max\{3x+1,-x+1\}=-x+1$,

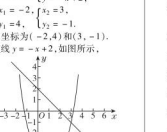
∴ $3x+1\le -x+1$,解得 $x\le 0$.

(3)联立方程组 $\begin{cases}y=x^2-2x-4,\\y=-x+2,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x_1=-2,\\y_1=4,\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=3,\\y_2=-1.\end{cases}$

∴ 交点坐标为 $(-2,4)$,$(3,-1)$.

画出直线 $y=-x+2$,如图所示,



(第 10 题)

观察函数图象可知,当 $x=3$ 时,$\max\{-x+2,x^2-2x-4\}$ 取得最小值 -1.

11. **解**:(1)设 $y=a(x-x_1)(x-x_2)$,

∵ $A(-1,0)$,$C(6,0)$,

∴ $y=a(x+1)(x-6)$,把点 $B(5,-6)$ 的坐标代入,得 $-6=a(5+1)(5-6)$,解得 $a=1$.

∴ $y=(x+1)(x-6)=x^2-5x-6$.

(2)存在.分别过点 P,B 作 $PM\perp x$ 轴,$BN\perp x$ 轴,垂足为 M,N,

设 $P(m,m^2-5m-6)$,四边形 $PACB$ 的面积是 S,则 $PM=-m^2+5m+6$,$AM=1+m$,$MN=5-m$,$CN=6-5=1$,$BN=6$.

∴ $S=S_{\triangle AMP}+S_{四边形PMNB}+S_{\triangle BNC}=\frac{1}{2}(-m^2+5m+6)(m+1)+\frac{1}{2}(6-m^2+5m+6)(5-m)+\frac{1}{2}\times 1\times 6=-3m^2+12m+36=-3(m-2)^2+48$.

∴ 当 $m=2$ 时,S 有最大值为 48.

∴ 存在点 $P(2,-12)$,即当 P 点的坐标是 $(2,-12)$ 时,四边形 $PACB$ 的面积最大.

12. **解**:(1)∵ 抛物线经过点 $B(6,0)$,$C(-2,0)$,

∴ 抛物线的解析式为 $y=a(x-6)(x+2)$,

将点 $A(0,6)$ 的坐标代入,得 $-12a=6$,

解得 $a=-\frac{1}{2}$,

∴ 抛物线的解析式为 $y=-\frac{1}{2}(x-6)(x+2)=-\frac{1}{2}x^2+2x+6$.

(2)如图①,过点 P 作 $PM\perp OB$ 于点 M,交 AB 于点 N,作 $AG\perp PM$ 于点 G,

(第 12 题)

设直线 AB 的解析式为 $y=kx+m$,

将点 $A(0,6)$,$B(6,0)$ 的坐标代入,得 $\begin{cases}m=6,\\6k+m=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=-1,\\m=6,\end{cases}$

则直线 AB 的解析式为 $y=-x+6$,

设 $P\left(t,-\frac{1}{2}t^2+2t+6\right)$,其中 $0<t<6$,

则 $N(t,-t+6)$,

∴ $PN=PM-MN=-\frac{1}{2}t^2+2t+6-(-t+6)=-\frac{1}{2}t^2+3t$,

∴ $S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PAN}+S_{\triangle PBN}=\frac{1}{2}PN\cdot AG+\frac{1}{2}PN\cdot BM$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$$=\frac{1}{2}PN\cdot(AG+BM)$$
$$=\frac{1}{2}PN\cdot OB$$
$$=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}t^2+3t\right)\times 6$$
$$=-\frac{3}{2}t^2+9t$$
$$=-\frac{3}{2}(t-3)^2+\frac{27}{2},$$

∴ 当 $t=3$ 时，$\triangle PAB$ 的面积有最大值. 此时点 P 的坐标是 $\left(3,\frac{15}{2}\right)$.

∴ 当点 P 运动到点 $\left(3,\frac{15}{2}\right)$ 的位置时，$\triangle PAB$ 的面积有最大值.

(3)存在.

如图②，若 $\triangle PDE$ 为等腰直角三角形，则 $PD=PE$，

设点 P 的横坐标为 $n(0<n<6)$，

$$\therefore PD=-\frac{1}{2}n^2+2n+6-(-n+6)=-\frac{1}{2}n^2+3n, PE=2|12-n|,$$

$$\therefore -\frac{1}{2}n^2+3n=2|12-n|,$$

解得 $n=4$ 或 $n=5-\sqrt{17}$，

$\therefore P(4,6)$ 或 $P(5-\sqrt{17},3\sqrt{17}-5)$.

13. 解：(1) 当 $n=5$ 时，

$$y=\begin{cases}-x^2+5x+5(x\geqslant 5),\\ -\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}x+\frac{5}{2}(x<5).\end{cases}$$

①将 $P(4,h)$ 的坐标代入 $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}x+\frac{5}{2}$，

可得 $h=\frac{9}{2}$.

②$n\geqslant 5$ 时，当 $x=5$ 时 y 取得最大值，为 5；

$x<5$ 时，当 $x=\frac{5}{2}$ 时 y 取得最大值，为 $\frac{45}{8}$，∴ 此函数的最大值为 $\frac{45}{8}$.

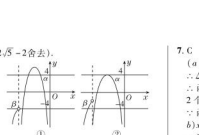
(2) 当 $2\leqslant n<\frac{8}{5}$ 或 $\frac{18}{5}<n<4$ 时，此函数的图象与线段 AB 只有一个交点.

(3) 当函数图象上有 4 个点到 x 轴的距离等于 4 时，此函数图象与直线 $y=4$，$y=-4$ 恰有 4 个交点.

设 $x<n$ 时图象为 β，$x\geqslant n$ 时图象为 α.

①当 n 很小时，函数图象与直线 $y=4$，$y=-4$ 始终有 4 个交点，不断增大 n，直到如图①所示的情况，此时 β 刚要经过直线 $y=-4$，则有 $-\frac{1}{2}n^2+\frac{n}{2}\cdot n+\frac{n}{2}=-4$，则 $n=-8$，故 $n\leqslant -8$ 时恒成立.

②在运动到如图②所示的情况之后的一段时间内，函数图象与直线 $y=4$，$y=-4$ 共有 5 个交点，直到运动到如图②所示的情况，α 的顶点落在直线 $y=4$ 上，即 $\frac{n^2}{4}+n=4$，解得 $n=-2\sqrt{5}-2$ ($n=2\sqrt{5}-2$ 舍去).



(第 13 题)

③在运动到如图③所示情况之后的一段时间内，不断增大 n(n 取正数)，直到如图③所示的情况.

对于 α，当 $x=n$ 时，$-n^2+n^2+n=4$，解得 $n=4$，

而此时 β 的顶点坐标恰好为 $(2,4)$，所以此时两函数图象与直线 $y=n$ 的距离等于 4 的点恰好有 4 个.

④在运动到如图③所示情况之后的一段时间内，不断增大 n，函数图象与直线 $y=4$，$y=-4$ 共有 5 个交点，直到运动到如图④所示的情况.

此时函数图象与直线 $y=4$，$y=-4$ 恰有 4 个交点，

解 $-\frac{1}{2}n^2+\frac{n}{2}\cdot n+\frac{n}{2}=4$，得 $n=8$.

随着 n 的不断增大，函数图象与直线 $y=4$，$y=-4$ 始终有 4 个交点，故 $n\geqslant 8$ 时恒成立.

综上所述，n 的取值范围是 $n\leqslant -8$ 或 $n=-2\sqrt{5}-2$ 或 $n=4$ 或 $n\geqslant 8$.

22.2 二次函数与一元二次方程

第 1 课时 二次函数与一元二次方程之间的关系

1. (1) 两；> (2) 一；= (3) 没有；<

2. D

3. A **点拨**：关于 x 的一元二次方程 $(x+1)(x-2)-m=0$ 的解 x_1,x_2 可以看作二次函数 $y=(x+1)(x-2)$ 的图象与直线 $y=m(m>0)$ 的交点的横坐标.

∵ 二次函数 $y=(x+1)(x-2)$ 的图象与 x 轴的交点坐标为 $(-1,0)$，$(2,0)$，

∴ 当 $m>0$ 时，就是抛物线位于 x 轴上方的部分，此时 $x<-1$ 或 $x>2$.

又∵ $x_1<x_2$，∴ $x_1<-1<2<x_2$.

4. B **点拨**：由题意知二次函数 $y=x^2+2x+c$ 有两个相异的不动点 x_1,x_2 是方程 $x^2+2x+c=x$ 的两个实数根，且 $x_1<1<x_2$，整理得 $x^2+x+c=0$，则 $\begin{cases}1-4c>0,\\ 1+1+c<0,\end{cases}$ 解得 $c<-2$.

5. C **6.** C

7. C **点拨**：∵ $y=(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab, a\neq b$，

$\therefore \Delta=(a+b)^2-4ab=(a-b)^2>0$.

∴ 函数 $y=(x+a)(x+b)$ 的图象与 x 轴有 2 个交点，即 $M=2$.

∵ 函数 $y=(ax+1)(bx+1)=abx^2+(a+b)x+1$，

∴ 当 $ab\neq 0$ 时，$\Delta=(a+b)^2-4ab=(a-b)^2>0$，此时函数 $y=(ax+1)(bx+1)$ 的图象与 x 轴有 2 个交点，即 $N=2$，则 $M=N$；

当 $ab=0$ 时，不妨令 $a=0$，∵ $a\neq b$，∴ $b\neq 0$，此时函数 $y=(ax+1)(bx+1)=bx+1$ 为一次函数，其图象与 x 轴有 1 个交点，即 $N=1$，则 $M=N+1$.

综上可知，$M=N$ 或 $M=N+1$.

8. B **点拨**：抛物线的解析式为 $y=a(x+1)(x-3)$，

即 $y=ax^2-2ax-3a$，

∴ $y=a(x-1)^2-4a$，

∴ 当 $x=1$ 时，二次函数有最小值 $-4a$，①正确；

当 $x=4$ 时，$y=5a$，

∴ 若 $-1\leqslant x_3\leqslant 4$，则 $-4a\leqslant y_3\leqslant 5a$，②错误；

∵ 点 $C(4,5a)$ 关于直线 $x=1$ 的对称点为 $(-2,5a)$，

∴ 若 $x_2>y_1$，则 $x_2>4$ 或 $x_2<-2$，③错误；

∵ $b=-2a, c=-3a$，

∴ 方程 $cx^2+bx+a=0$ 化为 $-3ax^2-2ax+a=0$，

整理得 $3x^2+2x-1=0$，解得 $x=-1$ 或 $x=\frac{1}{3}$，④正确. 故选 B.

9. A **点拨**：根据函数的图象与坐标轴有三个交点，可得 $\Delta=(-2)^2-4b>0$，解得 $b<1$. 但本题易忽略与 x 轴的交点不能在原点上，即 $b\neq 0$. 含测得与坐标轴只有两个交点，故选 A.

10. 解：(1) 将点 $A(3,0)$，点 $B(-1,0)$ 的坐标代入 $y=x^2+bx+c$，

得 $\begin{cases}9+3b+c=0,\\ 1-b+c=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=-2,\\ c=-3.\end{cases}$

∴ 抛物线的解析式为 $y=x^2-2x-3$.

(2) 点 P 的坐标为 $(4,3)$ 或 $(8,3)$.

11. 解：(1) 由题意得 $A\left(0,-\frac{1}{a}\right)$，

点 A 向右平移 2 个单位长度，得到点 $B\left(2,-\frac{1}{a}\right)$.

(2)∵ 点 A 与点 B 关于直线 $x=1$ 对称，

∴ 抛物线的对称轴为直线 $x=1$.

(3) ①当 $a>0$ 时，$-\frac{1}{a}<0$.

分析图象可得：抛物线不可能同时经过点 A 和点 P，也不可能同时经过点 B 和点 Q，∴ 此时抛物线与线段 PQ 没有公共点.

②当 $a<0$ 时，$-\frac{1}{a}>0$.

分析图象可得：抛物线不可能同时经过点 A 和点 P_1(但当点 Q 在点 B 上方或与点 B 重合时，抛物线与线段 PQ 恰有一个公共点，此时 $-\frac{1}{a}\leqslant 2$，即 $a\leqslant -\frac{1}{2}$.

综上所述，当 $a\leqslant -\frac{1}{2}$ 时，抛物线与线段 PQ 恰有一个公共点.

12. 解：(1)∵ $y=x^2-4$ 的图象的顶点坐标为 $(0,-4)$，

且 $y=x^2-4$ 是 $y=-x+p$ 的伴随函数，

∴ 点 $(0,-4)$ 在一次函数 $y=-x+p$ 的图象上.

∴ $-4=0+p$，即 $p=-4$.

∴ 一次函数为 $y=-x-4$.

∵ 直线 $y=-x-4$ 与两坐标轴的交点分别为 $(0,-4)$，$(-4,0)$，

∴ 直线 $y=-x-4$ 与两坐标轴围成的三角形的面积为 $\frac{1}{2}\times 4\times 4=8$.

(2) 设函数 $y=x^2+2x+n$ 的图象与 x 轴两个交点的横坐标分别为 x_1,x_2，则 $x_1+x_2=-2, x_1x_2=n$，

∴ $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{4-4n}$.

由题意得 $\sqrt{4-4n}=4$，解得 $n=-3$.

∴ 二次函数为 $y=x^2+2x-3=(x+1)^2-4$，

其图象的顶点坐标为 $(-1,-4)$.

∵ $y=x^2+2x-3$ 是 $y=mx-3(m\neq 0)$ 的伴随函数，

∴ $-4=-m-3$，解得 $m=1$.

13. 解：(1)∵ 抛物线 $y=x^2-3x+\frac{5}{4}$ 与 x 轴相交于 A,B 两点，与 y 轴相交于点 C，

∴ 令 $y=0$，得 $x=\frac{1}{2}$ 或 $x=\frac{5}{2}$，

令 $x=0$，得 $y=\frac{5}{4}$，

∴ $A\left(\frac{1}{2},0\right), B\left(\frac{5}{2},0\right), C\left(0,\frac{5}{4}\right)$.

设直线 BC 的解析式为 $y=kx+h$，

则有 $\begin{cases}\frac{5}{2}k+h=0,\\ h=\frac{5}{4}.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=-\frac{1}{2},\\ h=\frac{5}{4}.\end{cases}$


第13题精讲

∴ 直线 BC 的解析式为 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}$.

(2) 设点 D 的横坐标为 m，则点 D 的坐标为 $\left(m,m^2-3m+\frac{5}{4}\right)$，

点 E 的坐标为 $\left(m,-\frac{1}{2}m+\frac{5}{4}\right)$，

设 DE 的长度为 d，

∵ 点 D 是直线 BC 下方抛物线上一点，

∴ $d=-\frac{1}{2}m+\frac{5}{4}-\left(m^2-3m+\frac{5}{4}\right)$，

整理得 $d=-m^2+\frac{5}{2}m$，

∵ $-1<0$，

∴ 当 $m=-\frac{\frac{5}{2}}{2\times(-1)}=\frac{5}{4}$ 时，

$d_{最大}=\frac{0-\frac{25}{4}}{-4}=\frac{25}{16}$.

∴ 点 D 的坐标为 $\left(\frac{5}{4},-\frac{15}{16}\right)$.

第 2 课时 利用函数的图象解一元二次方程

1. D **2.** B **3.** C

4. D **点拨**：由 $\begin{cases}y=4x,\\ y=2x^2+2,\end{cases}$ 消去 y 得到 $x^2-2x+1=0$，∴ $\Delta=0$，∴ 直线 $y_1=4x$ 与抛物线 $y_2=2x^2+2$ 只有一个公共点，如图所示，

观察图象可知 $y_1\leqslant y_2$，故选 D.

(第 4 题)

5. B **点拨**：∵ 抛物线开口向下，∴ $a<0$.

∵ 抛物线的对称轴为直线 $x=1$，

∴ $-\frac{b}{2a}=1$，∴ $b=-2a>0$.

∵ 抛物线与 y 轴的交点在 x 轴上方，

∴ $c>0$.

∴ $abc<0$，故①正确.

∵ $b=-2a$，∴ $a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{4}c=a-a+0$.

∴ $c>0$，∴ $a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{4}c>0$，故②错误.

∵ $C(0,c)$，$OA=OC$，

∴ $A(-c,0)$.

把 $A(-c,0)$ 的坐标代入 $y=ax^2+bx+c$，得 $ac^2-bc+c=0$，

∴ $ac-b+1=0$，故③错误.

∵ $A(-c,0)$，对称轴为直线 $x=1$，

∴ $B(2+c,0)$.

∴ $2+c$ 是关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根，故④正确.

6. (1) $x_1=-1, x_2=2$

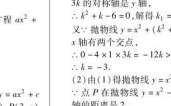
(2) $-1<x<2$

(3) $x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 2$

7. $x<-1$ 或 $x>4$

8. $x<-3$ 或 $x>1$ **点拨**：抛物线 $y=ax^2+c$ 与直线 $y=mx+n$ 交于 $A(-1,p),B(3,q)$ 两点，∴ 抛物线 $y=ax^2+c$ 与直线 $y=-mx+n$ 交于 $(1,p),(-3,q)$ 两点，由图可知当 $x<-3$ 或 $x>1$ 时，不等式 $ax^2+mx+c>n$.

9. 解：画出抛物线 $y=x^2-x+\frac{1}{4}$(如图). 由图象可知抛物线与 x 轴只有一个公共点，为 $\left(\frac{1}{2},0\right)$，所以原方程的解为 $x_1=x_2=\frac{1}{2}$.



(第 9 题)

10. 解：(1) 将点 $A(-3,-3)$，$B(1,-1)$ 的坐标代入 $y=kx+b$，得 $\begin{cases}-3k+b=-3,\\ k+b=-1,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=\frac{1}{2},\\ b=-\frac{3}{2}.\end{cases}$

∴ 直线 l_1 为 $y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$.

联立 $y=ax^2-2x+1$ 与 $y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$，整有 $2ax^2-3x+1=0$.

∵ 抛物线 C_1 与直线 l 有交点，

∴ $\Delta=9-8a\geqslant 0$，解得 $a\leqslant\frac{9}{8}$ 且 $a\neq 0$.

(2) 根据题意可得抛物线 C_1：$y=-x^2+2x-1$.

∵ $a<0$，

∴ 抛物线开口向下，对称轴为直线 $x=1$.

当 $y=-4$ 时，有 $-x^2+2x-1=-4$，解得 $x=-1$ 或 $x=3$.

①在在直线 $x=1$ 左侧，y 随 x 的增大而增大，

∴ $x=m+2=-1$ 时，y 有最大值 -4，

则 $m=-3$；

②在在直线 $x=1$ 右侧，y 随 x 的增大而减小，

∴ $x=m=3$ 时，y 有最大值 -4.

综上所述，$m=-3$ 或 $m=3$.

(3) a 的取值范围为 $-\frac{9}{8}\leqslant a<-\frac{9}{16}$ 或 $a\leqslant -2$.

11. 解：(1)∵ 抛物线 $y=ax^2+(k^2+k-6)x+3k$ 的对称轴是 y 轴，

∴ $k^2+k-6=0$，解得 $k_1=-3, k_2=2$.

又∵ 抛物线 $y=ax^2+(k^2+k-6)x+3k$ 与 x 轴有两个交点，

∴ $0-4\times 1\times 3k=-12k>0$，即 $k<0$.

∴ $k=-3$.

(2) 由(1) 得抛物线 $y=x^2-9$.

∴ 点 P 在抛物线 $y=x^2-9$ 上，且 P 到 y 轴的距离是 2.

∴ 点 P 的横坐标为 2 或 -2.

当 $x=2$ 时，$y=-5$；

当 $x=-2$ 时，$y=-5$，

∴ 点 P 的坐标为 $(2,-5)$ 或 $(-2,-5)$.

12. 解：(1) 由甲同学提供的数据可知 $c=3$.

选 $x=-1$，$y=6$；$x=1$，$y=2$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

有$\begin{cases}6=a-b+3,\\2=a+b+3,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=1,\\b=-2.\end{cases}$

由甲同学只写错了一次项的系数可知$a=1$,$c=3$是正确的.

由乙同学提供的数据可知$c=-1$,

选$x=-1$,$y=-2$;$x=1$,$y=2$,

有$\begin{cases}-2=a-b-1,\\2=a+b-1,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=1,\\b=-2.\end{cases}$

由乙同学只写错了常数项可知$a=1$,$b=2$是正确的.

$\therefore a=1$,$b=2$,$c=3$.

$\therefore y=x^2+2x+3$.

(2)$\geqslant -1$

(3)若方程$ax^2+bx+c=k(a\neq 0)$有两个不相等的实数根,即$x^2+2x+3-k=0$有两个不相等的实数根,

则$\Delta=4-4(3-k)>0$,

解得$k>2$.

第3课时　二次函数图象信息题的四种常见类型

1. D　**2.** B　**3.** D　**4.** A

5. $x_1=0$,$x_2=2$　**6.** D

7. 解:(1)由题意得$B(-1,1)$或$(-1,9)$,

$\therefore -\dfrac{m}{2\times(-1)}=-1$,

$\dfrac{4\times(-1)\cdot n-m^2}{4\times(-1)}=1$或9.

解得$m=-2$,$n=0$或8.

$\therefore y_1$的解析式为$y_1=-x^2-2x$或$y_1=-x^2-2x+8$.

(2)①当$y_1=-x^2-2x$时,解$-x^2-2x=0$,得$x=0$或-2,

$\therefore$抛物线与x轴的交点是$(0,0)$和$(-2,0)$,

$\because y_1$随着x的增大而增大,且y_2过点$A(-1,5)$,

$\therefore y_1$与y_2都经过A的同一点$(-2,0)$.

把点$(-1,5)$,$(-2,0)$的坐标分别代入$y_2=kx+b$,得$\begin{cases}-k+b=5,\\-2k+b=0,\end{cases}$

解得$\begin{cases}k=5,\\b=10.\end{cases}$

$\therefore y_2=5x+10$.

②当$y_1=-x^2-2x+8$时,解$-x^2-2x+8=0$,得$x=-4$或2.

$\therefore$抛物线与x轴的交点是$(-4,0)$和$(2,0)$.

$\because y_2$随着x的增大而增大,且y_2过点$A(-1,5)$,

$\therefore y_1$与y_2都经过x轴上的同一点$(-4,0)$.

把点$(-1,5)$,$(-4,0)$的坐标分别代入$y_2=kx+b$,得$\begin{cases}-k+b=5,\\-4k+b=0,\end{cases}$

解得$\begin{cases}k=\dfrac{5}{3},\\b=\dfrac{20}{3}.\end{cases}$

$\therefore y_2=\dfrac{5}{3}x+\dfrac{20}{3}$.

综上,y_2的解析式为$y_2=5x+10$或$y_2=\dfrac{5}{3}x+\dfrac{20}{3}$.

22.3　实际问题与二次函数

第1课时　利用二次函数求几何图形面积的最值问题

1. B　**2.** B　**3.** D

4. $-\dfrac{7}{2}\leqslant y\leqslant 21$

5. $-4\leqslant m\leqslant -2$　**点拨:**根据对称轴求出a,再根据二次函数的增减性和最值解答.

6. B　**7.** D

8. 150　**点拨:**设$AB=x$m,矩形$ABCD$的面积为Sm^2,则$BC=\dfrac{1}{2}(900-3x)$m,

由题意可得$S=x\times\dfrac{1}{2}(900-3x)=-\dfrac{3}{2}(x^2-300x)=-\dfrac{3}{2}(x-150)^2+33\,750$,

$\therefore$当$x=150$时,S取得最大值,此时,$S=33\,750$,

$\therefore AB=150$ m.

9. (1)88 m^2

(2)$\dfrac{5}{2}$ m

点拨:(1)小狗活动的区域面积为以B为圆心,10为半径的$\dfrac{3}{4}$圆,以C为圆心,6为半径的$\dfrac{1}{4}$圆和以A为圆心,4为半径的$\dfrac{1}{4}$圆的面积和;(2)小狗活动的区域面积为以B为圆心,10为半径的$\dfrac{3}{4}$圆,以A为圆心,BC长为半径的$\dfrac{1}{4}$圆,以C为圆心,$10-BC$为半径的$\dfrac{30}{360}$圆的面积和,列出函数解析式,由二次函数的性质解答即可.

10. 解:(1)设$AB=m$米,则$AD=BC=(100-2m)$米,

根据题意得$m(100-2m)=450$,解得$m_1=5$,$m_2=45$,

当$m=5$时,$100-2m=90>20$,不合题意,舍去;

当$m=45$时,$100-2m=10$,

答:AD的长为10米.

(2)设$AD=x$米,矩形菜园$ABCD$的面积为S平方米,

则$S=\dfrac{1}{2}x(100-x)=-\dfrac{1}{2}(x-50)^2+1\,250$,

若$a\geqslant 50$,则当$x=50$时,S的最大值为$1\,250$;

若$0<a<50$,则当$0<x\leqslant a$时,S随x的增大而增大,$\therefore$当$x=a$时,S的最大值为$50a-\dfrac{1}{2}a^2$.

综上所述,当$a\geqslant 50$时,矩形菜园$ABCD$面积的最大值为$1\,250$平方米;当$0<a<50$时,矩形菜园$ABCD$面积的最大值为$\left(50a-\dfrac{1}{2}a^2\right)$平方米.

11. 解:(1)$\because$矩形的一边长为x米,周长为16米,

$\therefore$其邻边长为$(8-x)$米,

$\therefore S=x(8-x)=-x^2+8x$,其中$0<x<8$;

(2)能,理由如下:

若设计费能达到24 000元,

则当设计费为24 000元时,面积为$24\,000\div 2\,000=12$(平方米),

即$-x^2+8x=12$,

解得$x=2$或$x=6$,

$\therefore$设计费能达到24 000元.

(3)$\because S=-x^2+8x=-(x-4)^2+16$,

$\therefore$当$x=4$时,$S_{最大}=16$,

$\therefore$当$x=4$时,矩形的面积最大,为16平方米,设计费最多,最多是32 000元.

12. 解:由题意可知,$BP=(12-2t)$cm,$BQ=4t$ cm.

$\therefore S=\dfrac{1}{2}BP\cdot BQ=\dfrac{1}{2}(12-2t)\cdot 4t$,整理,得$S=-4t^2+24t$,易知$0<t<6$.

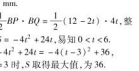
$\because S=-4t^2+24t=-4(t-3)^2+36$,

$\therefore$当$t=3$时,S取得最大值,为36.

故S关于t的函数解析式为$S=-4t^2+24t(0<t<6)$.

当$t=3$时,$\triangle PBQ$的面积最大,为36 cm^2.

13. 解:(1)如图所示.



(第13题)

设裁掉的正方形的边长为x分米,

由题意可得$(12-2x)(8-2x)=32$,

即$x^2-10x+16=0$,

解得$x=2$或$x=8$(舍去),

答:裁掉的正方形的边长为2分米.

(2)设总费用为y元,

则$y=2(12-2x)(8-2x)+0.5\times[2x(12-2x)+2x(8-2x)]$

$=4x^2-60x+192$

$=4(x-7.5)^2-33$,

又$\because 12-2x\leqslant 5(8-2x)$,

$\therefore x\leqslant 3.5$,

$\because a=4>0$,

$\therefore$当$x<7.5$时,y随x的增大而减小,

$\therefore$当$x=3.5$时,y取得最小值,最小值为31.

答:裁掉的正方形边长为3.5分米时,总费用最低,最低费用为31元.

第2课时　利用二次函数求实际中最值问题

1. B　**2.** D

3. 解:(1)$y=300+20x$

(2)$W=(300+20x)(60-40-x)=-20x^2+100x+6\,000$.

4. C

5. 解:(1)$y=2x+40$;

(2)根据题意得$w=(145-x-80-5)(2x+40)=-2x^2+80x+2\,400=-2(x-20)^2+3\,200$,

$\because -2<0$,

$\therefore$函数有最大值,

$\because$当$x=20$时,w有最大值,为3 200,

$\therefore$第20天的利润最大,最大利润是3 200元.

6. 解:(1)设y与x的函数关系式为$y=kx+b(k\neq 0)$,

由题意得$\begin{cases}44k+b=72,\\48k+b=64,\end{cases}$

解得$\begin{cases}k=-2,\\b=160,\end{cases}$

所以y与x之间的函数关系式是$y=-2x+160(40\leqslant x\leqslant 80)$.

(2)由题意得,W与x的函数关系式为$W=(x-40)\cdot(-2x+160)=-2x^2+240x-6\,400=-2(x-60)^2+800$,

当$x=60$时,W最大,是800,

所以当销售单价为60元时,日销售利润最大,最大日销售利润是800元.

点拨:本题易将销售额当销售利润,错得$W=x(-2x+160)$.

7. 解:(1)根据题意,得$y=250-10(x-25)=-10x+500(30\leqslant x\leqslant 38)$.

(2)设每天扣除捐赠后可获得利润w元,

则$w=(x-20-a)(-10x+500)=-10x^2+(10a+700)x-500a-10\,000(30\leqslant x\leqslant 38)$.

易知,此二次函数图象的对称轴为直线$x=35+\dfrac{1}{2}a$,且$0<a\leqslant 6$,则$35<35+\dfrac{1}{2}a\leqslant 38$,

$\therefore$当$x=35+\dfrac{1}{2}a$时,w取得最大值.

$\because\left(35+\dfrac{1}{2}a-20-a\right)\left[-10\left(35+\dfrac{1}{2}a\right)+500\right]=1\,960$,

解得$a_1=2$,$a_2=58$(不合题意,舍去).

$\therefore a=2$.

8. 解:(1)$q=-x+14$,其中$2\leqslant x\leqslant 10$.

(2)①当每天的半成品食材能全部售出时,有$p\leqslant q$,即$\dfrac{1}{2}x+8\leqslant -x+14$,解得$x\leqslant 4$.

又$2\leqslant x\leqslant 10$,$\therefore 2\leqslant x\leqslant 4$.

②由①可知,当$2\leqslant x\leqslant 4$时,$y=(x-2)p=(x-2)\cdot\left(-\dfrac{1}{2}x+8\right)=-\dfrac{1}{2}x^2+7x-16$;

当$4<x\leqslant 10$时,$y=(x-2)q-2(p-q)=(x-2)(-x+14)-2\left[-\dfrac{1}{2}x+8-(-x+14)\right]=-x^2+13x-16$.

$\therefore y=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}x^2+7x-16(2\leqslant x\leqslant 4),\\-x^2+13x-16(4<x\leqslant 10).\end{cases}$

(3)$\dfrac{13}{2}$.5　**点拨:**当$2\leqslant x\leqslant 4$时,$y=-\dfrac{1}{2}x^2+7x-16=-\dfrac{1}{2}(x+7)^2-\dfrac{81}{2}$,

$\therefore$当$2\leqslant x\leqslant 4$时,y随x的增大而增大.

$\therefore$当$x=4$时,y有最大值,$y_{最大}=-\dfrac{1}{2}\times 4^2+7\times 4-16=20$.

当$4<x\leqslant 10$时,$y=-x^2+13x-16=-\left(x-\dfrac{13}{2}\right)^2+\dfrac{105}{4}$,

$\therefore -1<0$,$4<\dfrac{13}{2}<10$,

$\therefore$当$x=\dfrac{13}{2}$时,y有最大值$\dfrac{105}{4}$.

$\because 20<\dfrac{105}{4}$,

$\therefore$当x为$\dfrac{13}{2}$元/千克时,利润y有最大值.

要使每天的利润不低于24百元,则当$2\leqslant x\leqslant 4$时,显然不符合.

故$y=-\left(x-\dfrac{13}{2}\right)^2+\dfrac{105}{4}\geqslant 24$,解得$5\leqslant x\leqslant 8$.

$\because$要尽可能减少平成品食材的浪费,

$\therefore x$应定为5元/千克.

9. 解:(1)当$6\leqslant x\leqslant 10$时,设y与x的函数解析式为$y=kx+b(k\neq 0)$.

根据题意,得$\begin{cases}1\,000=6k+b,\\200=10k+b,\end{cases}$

解得$\begin{cases}k=-200,\\b=2\,200.\end{cases}$

$\therefore y=-200x+2\,200$.

当$10\leqslant x\leqslant 12$时,$y=200$.

故y与x的函数解析式为$y=\begin{cases}-200x+2\,200(6\leqslant x\leqslant 10),\\200(10<x\leqslant 12).\end{cases}$

(2)由已知得$W=(x-6)y$.

当$6\leqslant x\leqslant 10$时,$W=(x-6)(-200x+2\,200)=-200\left(x-\dfrac{17}{2}\right)^2+1\,250$.

$\because -200<0$,即抛物线的开口向下,

$\therefore$当$x=\dfrac{17}{2}$时,W取得最大值1 250.

当$10<x\leqslant 12$时,$W=(x-6)\cdot 200x-1\,200=1\,200<1\,250$.

答:这一天销售西瓜获得的利润W(元)的最大值为1 250.

第3课时　利用建立坐标系解“抛物线”型问题

1. C　**2.** B

3. 20 s　**点拨:**$s=60t-\dfrac{3}{2}t^2=-\dfrac{3}{2}(t-20)^2+600$,当飞机着陆后滑行的距离$s$取最大值时,飞机着陆后滑行的时间最长为20 s.

4. 4　**5.** D　**6.** B

7. 解:(1)根据题意得$B(0,4)$,$C\left(3,\dfrac{17}{2}\right)$.

把$B(0,4)$,$C\left(3,\dfrac{17}{2}\right)$的坐标分别代入$y=-\dfrac{1}{6}x^2+bx+c$,得$\begin{cases}c=4,\\-\dfrac{1}{6}\times 3^2+3b+c=\dfrac{17}{2}.\end{cases}$

解得$\begin{cases}b=2,\\c=4.\end{cases}$

所以该抛物线对应的函数解析式为$y=-\dfrac{1}{6}x^2+2x+4$,

即$y=-\dfrac{1}{6}(x-6)^2+10$.

所以$D(6,10)$.

所以拱顶D到地面OA的距离为10 m.

(2)当$x=\dfrac{12}{2}-4=2$或$x=\dfrac{12}{2}+4=10$时,$y=\dfrac{22}{3}>6$,

所以这辆货运汽车能安全通过.

(3)令$y=8$,则$-\dfrac{1}{6}(x-6)^2+10=8$,解得$x_1=6+2\sqrt{3}$,$x_2=6-2\sqrt{3}$,则$x_1-x_2=4\sqrt{3}$.

所以两排灯的水平距离最小是$4\sqrt{3}$ m.

8. 解:(1)设水柱所在抛物线(第一象限部分)的函数解析式为$y=a(x-3)^2+5(0<x<8)$.

将点$(8,0)$的坐标代入$y=a(x-3)^2+5$,得$25a+5=0$,

解得$a=-\dfrac{1}{5}$.

$\therefore$水柱所在抛物线(第一象限部分)的函数解析式为$y=-\dfrac{1}{5}(x-3)^2+5(0<x<8)$.

(2)当$y=1.8$时,有$-\dfrac{1}{5}(x-3)^2+5=1.8$,

解得$x_1=-1$(舍去),$x_2=7$,

$\therefore$为了不被淋湿,身高1.8米的王师傅站立时必须在离水池中心7米以内(不包括7米).

(3)当$x=0$时,$y=-\dfrac{1}{5}(x-3)^2+5=\dfrac{16}{5}$.

设改造后水柱所在抛物线(第一象限部分)的函数解析式为$y=-\dfrac{1}{5}x^2+bx+\dfrac{16}{5}$.

$\because$该函数图象过点$(16,0)$,

$\therefore 0=-\dfrac{1}{5}\times 16^2+16b+\dfrac{16}{5}$,解得$b=3$,

$\therefore$改造后水柱所在抛物线(第一象限部

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

分)的函数解析式为 $y=-\frac{1}{5}x^2+3x+\frac{16}{5}=-\frac{1}{5}\left(x-\frac{15}{2}\right)^2+\frac{289}{20}$.

∴扩建改造后喷水池水柱的最大高度为 $\frac{289}{20}$ 米.

9. 解:(1)当 $y=15$ 时,$15=-5x^2+20x$,

解得 $x_1=1$,$x_2=3$,

答:在飞行过程中,当小球的飞行高度为 15 m 时,飞行时间是 1 s 或 3 s.

(2)当 $y=0$ 时,$0=-5x^2+20x$,

解得 $x_1=0$,$x_2=4$.

$4-0=4(s)$,

答:在飞行过程中,小球从飞出到落地所用时间是 4 s.

(3)$y=-5x^2+20x=-5(x-2)^2+20$,

∴当 $x=2$ 时,y 取得最大值,$y_{最大}=20$.

答:在飞行过程中,小球飞行高度第 2 s 时最大,最大高度是 20 m.

阶段核心归类

1. 解:(1)$y=-\frac{3}{64}x^2+11$

(2)当顶点 C 与水面的距离不大于 5 m 时,$h\geqslant 6$,把 $h=6$ 代入 $h=-\frac{1}{128}(t-19)^2+8\ (0\leqslant t\leqslant 40)$,解得 $t_1=35$,$t_2=3$.

$35-3=32(h)$.

答:需 32 h 禁止船只通行.

2. 解:(1)根据题意知此时抛物线的顶点 G 的坐标为(7,3.2),

∴设抛物线对应的函数解析式为 $y=a(x-7)^2+3.2$.

将点 $C(0,1.8)$ 的坐标代入,得 $49a+3.2=1.8$,解得 $a=-\frac{1}{35}$.

∴排球飞行的高度 y 与水平距离 x 的函数解析式为 $y=-\frac{1}{35}(x-7)^2+3.2=-\frac{1}{35}x^2+\frac{2}{5}x+\frac{16}{5}$.

(2)由题意知,当 $x=9.5$ 时,$y=-\frac{1}{35}(9.5-7)^2+\frac{16}{5}=3.02<3.1$,

故这次他可以把网成功.

(3)设抛物线对应的函数解析式为 $y=a(x-7)^2+h$,将点 $C(0,1.8)$ 的坐标代入,得 $49a+h=1.8$,即 $a=\frac{1.8-h}{49}$,

∴此时抛物线对应的函数解析式为 $y=\frac{1.8-h}{49}(x-7)^2+h$.

根据题意,得 $\begin{cases}\frac{4(1.8-h)}{49}+h>2.43,\\ \frac{121(1.8-h)}{49}+h\leqslant 0,\end{cases}$

解得 $h\geqslant 3.025$.故排球飞行的最大高度 h 的取值范围是 $h\geqslant 3.025$.

3. 解:(1)$y=-\frac{1}{2}x+55$

(2)依题意,得 $W=(y-18)\cdot m$,

$\therefore W=\begin{cases}(40-18)(5x+50)\ (1\leqslant x\leqslant 30),\\ \left(-\frac{1}{2}x+55-18\right)(5x+50)\ (31\leqslant x\leqslant 50).\end{cases}$

整理,得 $W=\begin{cases}110x+1\ 100\ (1\leqslant x\leqslant 30),\\ -\frac{5}{2}x^2+160x+1\ 850\ (31\leqslant x\leqslant 50).\end{cases}$

当 $1\leqslant x\leqslant 30$ 时,

W 随 x 的增大而增大,

∴当 $x=30$ 时,W 取得最大值,为 $110\times 30+1\ 100=4\ 400$;

当 $31\leqslant x\leqslant 50$ 时,

$W=-\frac{5}{2}x^2+160x+1\ 850=-\frac{5}{2}(x-32)^2+4\ 410$,

$\because -\frac{5}{2}<0$,

∴当 $x=32$ 时,W 取得最大值 4 410.

综上所述,x 为 32 时,当天的销售利润 $W(元)$最大,最大利润为 4 410 元.

4. 解:(1)$y=300-10(x-44)$,

即 $y=-10x+740\ (44\leqslant x\leqslant 52)$.

(2)根据题意,得 $(x-40)(-10x+740)=2\ 400$,

解得 $x_1=50$,$x_2=64$(舍去).

答:当每本足球纪念册销售单价是 50 元时,商店每天获利 2 400 元.

(3)$w=(x-40)(-10x+740)=-10x^2+1\ 140x-29\ 600=-10(x-57)^2+2\ 890$,

∵当 $x<57$ 时,w 随 x 的增大而增大,

而 $44\leqslant x\leqslant 52$,

所以当 $x=52$ 时,w 有最大值,最大值为 $-10(52-57)^2+2\ 890=2\ 640$.

答:将足球纪念册销售单价定为 52 元时,商店每天销售纪念册获得的利润 $w(元)$最大,最大利润是 2 640 元.

5. 解:(1)设 $AE=m$ m,由题意得 $AE\cdot AD=2BE\cdot BC$,$AD=BC$,

$\therefore BE=\frac{1}{2}a\ \text{m}$,$AB=\frac{3}{2}a\ \text{m}$.

由题意得 $2x+3a+2\cdot\frac{1}{2}a=80$,

$\therefore a=20-\frac{1}{2}x$.

$\because y=AB\cdot BC=\frac{3}{2}a\cdot x=\frac{3}{2}\left(20-\frac{1}{2}x\right)x$.

即 $y=-\frac{3}{4}x^2+30x\ (0<x<40)$.

(2)$\because y=-\frac{3}{4}x^2+30x=-\frac{3}{4}(x-20)^2+300$,

∴当 $x=20$ 时,y 有最大值,最大值是 300.

6. 解:(1)由题意可知,$\angle B=60°$,$BP=(3-t)\ \text{cm}$,$BQ=t\ \text{cm}$.若△PBQ 是直角三角形,则 $\angle BPQ=30°$ 或 $\angle BQP=30°$,于是 $BQ=\frac{1}{2}BP$ 或 $BP=\frac{1}{2}BQ$,即 $t=\frac{1}{2}(3-t)$ 或 $3-t=\frac{1}{2}t$.解得 $t=1$ 或 $t=2$,即当 t 为 1 或 2 时,△PBQ 是直角三角形.

(2)过点 P 作 $PM\perp BC$ 于点 M,易知 $BM=\frac{1}{2}BP=\frac{1}{2}(3-t)\ \text{cm}$.

$\therefore PM=\sqrt{BP^2-BM^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}(3-t)\ \text{cm}$.

$\therefore S_{四边形APQC}=S_{△ABC}-S_{△PBQ}=\frac{1}{2}\times 3\times\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}t\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}(3-t)=\frac{\sqrt{3}}{4}t^2-\frac{3\sqrt{3}}{4}t+\frac{9\sqrt{3}}{4}$,即 $y=\frac{\sqrt{3}}{4}t^2-\frac{3\sqrt{3}}{4}t+\frac{9\sqrt{3}}{4}$,易知 $0<t<3$.

$\because y=\frac{\sqrt{3}}{4}t^2-\frac{3\sqrt{3}}{4}t+\frac{9\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{27\sqrt{3}}{16}$,

∴当 $t=\frac{3}{2}$ 时,y 取得最小值,为 $\frac{27\sqrt{3}}{16}$.

即当 t 为 $\frac{3}{2}$ 时,四边形 $APQC$ 的面积最小,最小面积为 $\frac{27\sqrt{3}}{16}\ \text{cm}^2$.

7. 解:(1)由题意可知,空调的采购数量为 x_1 台,冰箱的采购数量为 $(20-x_1)$ 台,则

$\begin{cases}x_1\geqslant\frac{11}{9}(20-x_1),\\ -20x_1+1\ 500\geqslant 1\ 200,\end{cases}$

解得 $11\leqslant x_1\leqslant 15$.∵$x_1$ 为整数,

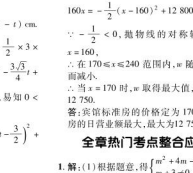
∴x_1 可取的值为 11,12,13,14,15.

∴该商家共有 5 种进货方案.

(2)设总利润为 W 元,$y_2=-10x_2+1\ 300=-10(20-x_1)+1\ 300=10x_1+1\ 100$,则 $W=(1\ 760-y_1)x_1+(1\ 700-y_2)x_2=1\ 760x_1-(-20x_1+1\ 500)x_1+(1\ 700-10x_1-1\ 100)(20-x_1)=1\ 760x_1+20x_1^2-1\ 500x_1+10x_1^2-800x_1+12\ 000=30x_1^2-540x_1+12\ 000=30(x_1-9)^2+9\ 570$.当 $x_1>9$ 时,W 随 x_1 的增大而增大,∵$11\leqslant x_1\leqslant 15$,∴当 $x_1=15$ 时,$W_{最大}=30\times(15-9)^2+9\ 570=10\ 650$.

答:采购空调 15 台时总利润最大,最大利润为 10 650 元.

8. 解:(1)如图所示.



(第 8 题)

(2)设 $y=kx+b$,将 $(200,60)$,$(220,50)$ 的坐标代入,得 $\begin{cases}200k+b=60,\\ 220k+b=50,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=-\frac{1}{2},\\ b=160.\end{cases}$

∴$y=-\frac{1}{2}x+160\ (170\leqslant x\leqslant 240)$.

(3)$w=xy=x\left(-\frac{1}{2}x+160\right)=-\frac{1}{2}x^2+160x=-\frac{1}{2}(x-160)^2+12\ 800$.

∵$-\frac{1}{2}<0$,抛物线的对称轴为直线 $x=160$,

∴在 $170\leqslant x\leqslant 240$ 范围内,w 随 x 的增大而减小,

∴当 $x=170$ 时,w 取得最大值,最大值为 12 750.

答:宾馆标准房的价格定为 170 元时,客房的日营业额最大,最大为 12 750 元.

全章热门考点整合应用

1. 解:(1)根据题意,得 $\begin{cases}m^2+4m-3=2,\\ m+3\neq 0.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}m=-5\text{ 或 }1,\\ m\neq -3.\end{cases}$

∴$m=-5$ 或 $m=1$.

(2)∵函数图象的开口向上,

∴$m+3>0$,∴$m>-3$.

∴$m=1$.

∴当 $m=1$ 时,该函数图象的开口向上.

(3)∵函数有最大值,∴$m+3<0$,∴$m<-3$.∴$m=-5$.

∴当 $m=-5$ 时,该函数有最大值.

2. D

3. C　**点拨**:根据函数图象开口向下可得 $a<0$,所以①错误;由与抛物线与 x 轴的交点坐标为(-1,0),(3,0),所以其对称轴为直线 $x=1$.所以 $-\frac{b}{2a}=1$.因此 $2a+b=0$,所以②正确;当 $x=1$ 时,$y=a+b+c>0$,所以③正确;当 $-1<x<3$ 时,$y>0$,所以④正确.所以选 C.

4. (1)证明:∵$\Delta=(1-5m)^2-4m\times(-5)=1+25m^2-10m+20m=25m^2+10m+1=(5m+1)^2\geqslant 0$,

∴无论 m 为任何非零实数,此方程总有两个实数根;

(2)解:解方程 $mx^2+(1-5m)x-5=0$,

得 $x=-\frac{1}{m}$ 或 $x=5$,由 $|x_1-x_2|=6$,

得 $\left|-\frac{1}{m}-5\right|=6$,

解得 $m=1$ 或 $m=-\frac{1}{11}$;

(3)解:由(2)得,当 $m>0$ 时,$m=1$,此时抛物线的解析式为 $y=x^2-4x-5$,其中题号知,点 P,Q 关于直线 $x=2$ 对称,∴$\frac{a+a+n}{2}=2$,即 $2a=4-n$,

∴$4a^2-n^2+8n=(4-n)^2-n^2+8n=16$.

5. 解:(1)∵$AB=x\ \text{m}$,∴$BC=(24-3x)\ \text{m}$,

此时 $S=x(24-3x)=-3x^2+24x$.

(2)由已知得 $-3x^2+24x=45$,整理可得 $x^2-8x+15=0$.解得 $x_1=5$,$x_2=3$.∵$0<24-3x\leqslant 10$,得 $\frac{14}{3}\leqslant x<8$,∴$x=3$ 不符合题意,故 $AB=5\ \text{m}$.

(3)能.$S=-3x^2+24x=-3(x^2-8x)=-3(x-4)^2+48$.∵$\frac{14}{3}\leqslant x<8$,∴当 $x=\frac{14}{3}$ 时,$S_{最大}=46\frac{2}{3}$.∴能围成面积比 $45\ \text{m}^2$ 更大的鸡舍.围法是:BC 的长是 10 m,AB 的长是 $4\frac{2}{3}$ m,这时鸡舍的面积最大,为 $46\frac{2}{3}\ \text{m}^2$.

6. 解:(1)由题意得点 $E(1,1.4)$,$B(6,0.9)$,将它们的坐标分别代入 $y=ax^2+bx+0.9$,得 $\begin{cases}a+b+0.9=1.4,\\ 36a+6b+0.9=0.9.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=-0.1,\\ b=0.6.\end{cases}$

∴所求的抛物线对应的函数解析式是 $y=-0.1x^2+0.6x+0.9$.

(2)把 $x=3$ 代入 $y=-0.1x^2+0.6x+0.9$,得 $y=-0.1\times 3^2+0.6\times 3+0.9=1.8$.

即小华的身高是 1.8 m.

(3)当 $y=1.4$ 时,$-0.1x^2+0.6x+0.9=1.4$.

解得 $x_1=1$,$x_2=5$.∴$1<x<5$.

7. 解:(1)在给定的直角坐标系下,设最高点为 A,入水点为 B,抛物线对应的函数解析式为 $y=ax^2+bx+c$.由题意,知 $O(0,0)$,$B(2,-10)$,且顶点 A 的纵坐标为 $\frac{2}{3}$.

∴$\begin{cases}c=0,\\ \frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{2}{3},\\ 4a+2b+c=-10.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=-\frac{25}{6},\\ b=\frac{10}{3},\\ c=0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-\frac{3}{2},\\ b=-2,\\ c=0.\end{cases}$

∵$-\frac{b}{2a}>0$,$a<0$,∴$b>0$,

∴$a=-\frac{25}{6}$,$b=\frac{10}{3}$,$c=0$.

∴这条抛物线对应的函数解析式为 $y=-\frac{25}{6}x^2+\frac{10}{3}x$.

(2)当运动员在空中距池边的水平距离为 $3\frac{3}{5}$ m 时,$x=3\frac{3}{5}-2=\frac{8}{5}$,$y=-\frac{25}{6}\times\left(\frac{8}{5}\right)^2+\frac{10}{3}\times\frac{8}{5}=-\frac{16}{3}$.

∴此时运动员距水面的高度为 $10-\frac{16}{3}=\frac{14}{3}$(m).

∵$\frac{14}{3}<5$,∴此次跳水会出现失误.

8. 解:(1)设 y 与 x 的函数关系式为 $y=kx+b$,将 $(30,100)$,$(35,50)$ 代入 $y=kx+b$,

得 $\begin{cases}30k+b=100,\\ 35k+b=50,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-10,\\ b=400,\end{cases}$

∴y 与 x 的函数关系式为 $y=-10x+400$.

(2)设该款电动牙刷每天的销售利润为 w 元,由题意得

$w=(x-20)\cdot y$

$=(x-20)(-10x+400)$

$=-10x^2+600x-8\ 000$

$=-10(x-30)^2+1\ 000$,

∵$-10<0$,

∴当 $x=30$ 时,w 有最大值,w 最大值为 1 000.

答:该款电动牙刷销售单价定为 30 元时,每天销售利润最大,最大销售利润为 1 000 元.

(3)设超出后每天剩余利润为 z 元,由题意可得

$z=-10x^2+600x-8\ 000-200$

$=-10x^2+600x-8\ 200$,

令 $z=550$,即

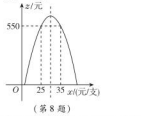
$-10x^2+600x-8\ 200=550$,

$-10(x^2-60x+900)=-250$,

$x^2-60x+900=25$,

解得 $x_1=25$,$x_2=35$.

画出每天剩余利润 z 关于销售单价 x 的函数关系图象如图,由图象可得:当该款电动牙刷的销售单价每支不低于 25 元,且不高于 35 元时,可保证剩款后每天剩余利润不低于 550 元.



(第 8 题)

9. 解:(1)当 $1\leqslant x\leqslant 10$ 时,设 $n=kx+b$,由题意得 $\begin{cases}12=k+b,\\ 30=10k+b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=2,\\ b=10.\end{cases}$

∴$n=2x+10$.

同理可得,当 $10<x\leqslant 30$ 时,$n=-1.4x+44$.

∴销售量 n 与第 x 天之间的函数关系式为 $n=\begin{cases}2x+10\ (1\leqslant x\leqslant 10),\\ -1.4x+44\ (10<x\leqslant 30).\end{cases}$

(2)∵$y=mn-80$,

∴$y=\begin{cases}(2x+10)(3x+15)-80\ (1\leqslant x\leqslant 10),\\ (-1.4x+44)(3x+15)-80\ (10<x\leqslant 15),\\ (-1.4x+44)(-x+75)-80\ (15<x\leqslant 30).\end{cases}$

整理,得 $y=\begin{cases}6x^2+60x+70\ (1\leqslant x\leqslant 10),\\ -4.2x^2+111x+580\ (10<x\leqslant 15),\\ 1.4x^2-149x+3\ 220\ (15<x\leqslant 30).\end{cases}$

(3)当 $1\leqslant x\leqslant 10$ 时,

∵抛物线 $y=6x^2+60x+70$ 的对称轴是直线 $x=-\frac{60}{2\times 6}=-5$,

∴当 $x=10$ 时,y 取得最大值,为 1 270;

当 $10<x\leqslant 15$ 时,

∵抛物线 $y=-4.2x^2+111x+580$ 的对称轴是直线 $x=-\frac{111}{-4.2\times 2}=\frac{111}{8.4}=13.2$,

∴当 $x=13$ 时,y 取得最大值,为 1 313.2;

当 $15<x\leqslant 30$ 时,

∵抛物线 $y=1.4x^2-149x+3\ 220$ 的对称轴是直线 $x=\frac{149}{2.8}=149\div$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∴当 $x=16$ 时，y 取得最大值，为 1 194.4.
综上，草莓销售第 13 天，即 $x=13$ 时，日销售利润 y 最大，最大值是 1 313.2 元.

10. 解：设 $AC=x\,(0<x<2)$，则 $BC=2-x$.
∵△ACD 和△BCE 都是等腰直角三角形，
∴ $CD=\frac{\sqrt{2}}{2}x$，$CE=\frac{\sqrt{2}}{2}(2-x)$，$\angle DCA=\angle ECB=45°$.
∴ $\angle DCE=180°-45°-45°=90°$.
在 Rt△DCE 中，由勾股定理，得 $DE^2=DC^2+CE^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2+\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(2-x)\right]^2=x^2-2x+2=(x-1)^2+1$.
∴当 $x=1$ 时，DE^2 有最小值 1，此时 $DE=1$. 故 DE 长的最小值为 1.

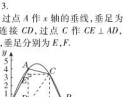
11. 解：(1) $y=7.5x-(2.7x+0.9x^2+0.3x)=-0.9x^2+4.5x$.
(2)设 3 年内每年的平均收益为 z 万元，根据题意，得
$z=7.5x-(0.9x+0.3x^2+0.3x)=-0.3x^2+6.3x=-0.3(x-10.5)^2+33.075$.
∵开不是修建大棚面积越大收益就越大，当修建面积为 10.5 公顷时可以获得最大收益.
建议略.

12. 三　**点拨**：本题运用**数形结合思想**，从图象可得出 a,b,c 的符号，从而判断点 P 所在的象限.

13. C　**点拨**：根据题意画出图象，当 $x=0$ 时，$z=c=-2$；当 $z=1$ 时，$y=a+b-2=-2$，∴ $a+b=0$，即 $b=-a$.
∴ $y=ax^2-ax-2$.
∵ $abc=a\cdot(-a)\cdot(-2)=2a^2>0$，故①正确.
由表知对称轴是直线 $x=\frac{1}{2}$，且当 $x=-2$ 时，$y=t$，则当 $x=3$ 时，$y=t$.
∴ -2 和 3 是关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=t$ 的两个根，故②正确.
$m+n+a-2$，$n=4a-2a-2$，∴ $m+n=2a-2$.
∴ $m+n=4a-4$.
∵当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，$y>0$，∴ $\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}a-2>0$，即 $a>\frac{8}{3}$.
∴ $m+n>\frac{20}{3}$，故③错误.

14. 解：(1)∵二次函数 $y=-x^2+bx+3$ 的图象与 x 轴的一个交点为 $A(4,0)$，
∴ $0=-4^2+4b+3$，解得 $b=\frac{13}{4}$.
∴此二次函数的解析式为 $y=-x^2+\frac{13}{4}x+3$，点 B 的坐标为 $(0,3)$.
(2)存在. 假设在 x 轴上存在点 P，使得 $S_{\triangle PAB}=S_{\triangle ABC}$.
当 AB 为底边时，设点 $P(x,0)$，则根据图形和已知条件可得 $x^2+3^2=(4-x)^2$，解得 $x=\frac{7}{8}$，
∴点 P 的坐标为 $\left(\frac{7}{8},0\right)$.
当 BP 为底边时，$AP=AB=\sqrt{4^2+3^2}=5$，
∴点 P 的坐标为 $(-1,0)$或$(9,0)$；
当 AP 为底边时，易知点 P 的坐标为 $(-4,0)$.
综上可知，在 x 轴上存在点 P，使得 $S_{\triangle PAB}$ 是等腰三角形，点 P 的坐标为 $\left(\frac{7}{8},0\right)$或$(-1,0)$或$(9,0)$或$(-4,0)$.
点拨：本题运用**分类讨论思想**，遇到等腰三角形没有说明腰和底，则必须分情况讨论.

15. 解：(1)将点 $A(2,4)$ 与 $B(6,0)$ 的坐标分别代入 $y=ax^2+bx$ 中，
得 $\begin{cases}4a+2b=4,\\36a+6b=0.\end{cases}$
解得 $\begin{cases}a=-\frac{1}{4},\\b=3.\end{cases}$
(2)如图，过点 A 作 x 轴的垂线，垂足为 $D(2,0)$，连接 CD，过点 C 作 $CE\perp AD$，$CF\perp x$ 轴，垂足分别为 E,F.



(第 15 题)

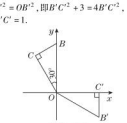
$S_{\triangle OAD}=\frac{1}{2}OD\cdot AD=\frac{1}{2}\times2\times4=4$；
$S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}AD\cdot CE=\frac{1}{2}\times4\times(x-2)=2x-4$；
$S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}BD\cdot CF=\frac{1}{2}\times4\times\left(-\frac{1}{2}x^2+3x\right)=-x^2+6x$.
则 $S=S_{\triangle OAD}+S_{\triangle ACD}+S_{\triangle BCD}=4+2x-4-x^2+6x=-x^2+8x$，
∴ S 关于 x 的函数解析式为 $S=-x^2+8x\,(2<x<6)$.
∵ $S=-x^2+8x=-(x-4)^2+16$，
∴当 $x=4$ 时，四边形 $OACB$ 的面积 S 有最大值，最大值为 16.

第二十三章　旋　转

23.1　图形的旋转

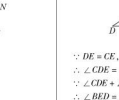
第 1 课时　图形的旋转及性质

1. C　**2.** C
3. D　**点拨**：作 $PQ\perp y$ 轴于点 Q，点 P 绕原点 O 顺时针旋转 90° 相当于把△OPQ 绕原点 O 顺时针旋转 90°，由旋转的性质可确定点 P' 的坐标.
4. D　**5.** A
6. A　**点拨**：如图，旋转后点 C' 在 x 轴上，点 B' 在第四象限，且 $OC'=OC=\sqrt{3}$，$\angle B'OC'=\angle BOC=30°$.
在 Rt△$B'OC'$ 中，$OB'=2B'C'$，$OC'^2+B'C'^2=OB'^2$，即 $B'C'^2+3=4B'C'^2$，
∴ $B'C'=1$.



(第 6 题)

∴点 B' 的坐标为 $(\sqrt{3},-1)$.
7. A　**点拨**：∵四边形 $OABC$ 是正方形，且 $OA=1$，
∴ $A(0,1)$.
依题意可得 $A_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$A_2(1,0)$，$A_3\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，…，
由题可知每 8 次一个循环.
∵ $2\,019\div8=252……3$，
∴点 $A_{2\,019}$ 的坐标是 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
8. C　**点拨**：本题中将△ABC 绕点 O 旋转 75°，并未指明旋转方向，故应分两种情况，常出现只考虑其中一种情况的错解.
9. (1)证明：∵$\angle CAF=\angle BAE$，
∴$\angle EAF=\angle BAC$.
∵将线段 AC 绕 A 点旋转到 AF 的位置，
∴$AF=AC$.
在△AEF 和△ABC 中，$\begin{cases}AE=AB,\\\angle EAF=\angle BAC,\\AF=AC,\end{cases}$
∴△$AEF\cong$△ABC(SAS).
∴$EF=BC$.
(2)解：∵$AB=AE$，$\angle ABC=65°$，
∴$\angle BAE=180°-65°\times2=50°$.
∴$\angle FAG=50°$.
∵△$AEF\cong$△ABC，
∴$\angle F=\angle ACB=28°$.
∴$\angle FGC=\angle FAG+\angle F=50°+28°=78°$.
10. (1)证明：∵△AEF 是由△ABC 绕点 A 按顺时针方向旋转得到的，
∴$AE=AB$，$AF=AC$，$\angle EAF=\angle BAC$.
∴$\angle EAF+\angle BAC=\angle BAC+\angle BAF$，即 $\angle EAB=\angle FAC$.
∵$AB=AC$，
∴$AE=AF$.
∴△$AEB\cong$△AFC.
∴$BE=CF$.
(2)解：∵四边形 $ACDE$ 的四边相等，$AB=AC=1$，
∴四边形 $ACDE$ 为菱形，$DE=AE=AC=AB=1$.
∴$AC\parallel DE$，$\angle AEB=\angle ABE$.
∵$\angle ABE+\angle BAC=45°$.
∴$\angle AEB=\angle ABE=45°$.
∴△ABE 为等腰直角三角形.
∴$BE=\sqrt{AE^2+AB^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.
∴$BD=BE-DE=\sqrt{2}-1$.
11. 解：(1) $BM+DN=MN$. 理由如下：如图，将△ADN 绕点 A 按顺时针方向旋转 90° 得到△ABE，由旋转的性质可得 $\angle EAN=90°$，$BE=DN$，$AE=AN$，$\angle ABE=\angle D=90°$，
∴E,B,C 三点共线.
∵$\angle MAN=45°$，
∴$\angle EAM=\angle NAM=45°$.
又∵$AM=AM$，
∴△$AEM\cong$△ANM.
∴$ME=MN$.
又 $ME=BE+BM=DN+BM$，
∴$BM+DN=MN$.

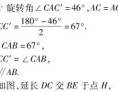


(第 11 题)

(2) $DN-BM=MN$.
12. (1)解：$90°-\alpha$.
(2) $AF=DE$. 证明：
∵四边形 $ABCD$ 为正方形，
∴$\angle AOD=\angle COD=90°$，$OA=OD$.
∵$\angle DOF=\angle COE=\alpha$，
∴$\angle AOF=\angle DOE$.
∵△EOD 为等腰直角三角形，
∴$OF=OE$.
在△AOF 和△DOE 中，$\begin{cases}AO=DO,\\\angle AOF=\angle DOE,\\OF=OE,\end{cases}$
∴△$AOF\cong$△DOE(SAS).
∴$AF=DE$.

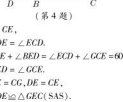
第 2 课时　旋转的性质在证明线段(角)关系中的应用

1. 证明：∵$\angle BCE=90°+\angle DCE$，$\angle DCG=90°+\angle DCE$，
∴$\angle BCE=\angle DCG$.
又∵$BC=CD$，$CE=CG$，
∴△$BCE\cong$△DCG(SAS)，
∴$BE=DG$.
2. 证明：∵旋转角 $\angle CAC'=46°$，$AC=AC'$，
∴$\angle ACC'=\frac{180°-46°}{2}=67°$.
又∵$\angle CAB=67°$，
∴$\angle ACC'=\angle CAB$，
∴$CC'\parallel AB$.
3. 证明：如图，延长 DC 交 BE 于点 H，



(第 3 题)

∵$\angle BAE=\angle DAC=90°-\angle EAC$，$AB=AC$，$AE=AD$，
∴△$ABE\cong$△ACD(SAS).
∴$\angle AEB=\angle ADC$.
设 AE，DH 交于点 O，则 $\angle AOD=\angle EOH$，
∴$\angle EHO=\angle DAO=90°$.
∴$CD\perp BE$.
4. 证明：如图，过点 E 作 $EG\parallel BC$ 交 AC 于点 G，易得△AEG 为等边三角形.
∴$AE=EG=AC$.
∵△ABC 是等边三角形，
∴$AB=AC$，$\angle ABC=\angle ACB=60°$.
∴$AC-AG=AB-AE$.
∴$BE=CG$.

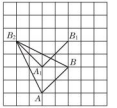


(第 4 题)

∵$DE=CE$，
∴$\angle CDE=\angle ECD$.
∵$\angle CDE+\angle BED=\angle ECD+\angle GCE=60°$，
∴$\angle BED=\angle GCE$.
又∵$BE=CG$，$DE=CE$，
∴△$BDE\cong$△GEC(SAS).
∴$BD=GE=AE$.
又易知 $AF=BE$，
∴$AB=BE+AE=AF+BD$.

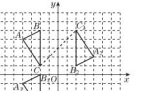
第 3 课时　旋转作图

1. C　**2.** B　**3.** D
4. 解：(1)如图所示.
(2)如图所示.



(第 4 题)

(3)如图，$S_{\triangle AB_2}=4\times4-\frac{1}{2}\times2\times4-\frac{1}{2}\times2\times2-\frac{1}{2}\times2\times4=6$.
5. 解：(1)如图所示，△$A_1B_1C_1$ 为所求作的三角形，$A_1(-4,-1)$，$B_1(-2,0)$.
(2)如图所示，△$A_2B_2C_2$ 为所求作的三角形.
(3)连接 CC_2，如图，点 C 经过的路径是以点 $(0,3)$ 为圆心，以 CC_2 为直径的半圆，由勾股定理得 $CC_2=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$，
∴点 C 经过的路径长为 $\frac{1}{2}\times\pi\times4\sqrt{2}=2\sqrt{2}\pi$.

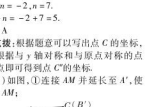


(第 5 题)

23.2　中心对称

第 1 课时　中心对称

1. D　**2.** A　**3.** B
4. C　**点拨**：∵点 $P(m-1,5)$ 与点 $Q(3,2-n)$ 关于原点对称，
∴$m-1=-3$，$2-n=-5$，
解得 $m=-2$，$n=7$.
∴$m+n=-2+7=5$.
5. B　**6.** A
7. A　**点拨**：根据题意可以写出点 C 的坐标，然后根据与 x 轴对称和与原点对称的点的特点即可得到点 C''的坐标.
8. 解：(1)如图，①连接 AM 并延长至 A'，使 $A'M=AM$；



(第 8 题)

②点 B 关于点 M 的对称点 B'即为点 C，点 C 关于点 M 的对称点 C'即为点 B；
③连接 $A'B'$，$A'C'$，则△$A'B'C'$即为所求.
(2)如图，①连接 AO，BO，CO，并分别延长至 A'，B''，C''，使 $A'O=AO$，$B''O=BO$，$C''O=CO$；
②连接 $A'B''$，$A''C'$，$B''C'$，则△$A''B''C''$即为所求.
点拨：解答两与已知图形成中心对称的图形的问题，思路较为简单，只需画出已知图形中各个关键点关于对称中心的对称点，然后顺次连接即可.
9. 错解：①②③④
诊断：判断两个图形是否成中心对称不能凭直观感觉，应根据中心对称的定义进行判断.
正解：①②③
10. 解：(1)根据中心对称的定义，可得对称中心是 D_1D 的中点，
∵点 D_1，D 的坐标分别是 $(0,3)$，$(0,2)$，
∴对称中心的坐标是 $(0,2.5)$.
(2)∵点 A，D 的坐标分别是 $(0,4)$，$(0,2)$，
∴正方形 $ABCD$ 与正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的边长都是 $4-2=2$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∴点 B,C 的坐标分别是 $(-2,4),(-2,2)$，

∵ $A_1D_1=2$，点 D_1 的坐标是 $(0,3)$，

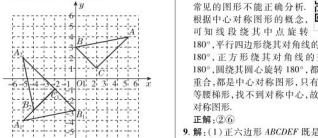
∴点 A_1 的坐标是 $(0,1)$.

∵点 B_1，C_1 的坐标分别是 $(2,1)$，$(2,3)$.

综上，可得顶点 B,C,B_1,C_1 的坐标分别是 $(-2,4),(-2,2),(2,1),(2,3)$.

11. 解：(1) 如图，$\triangle A_1B_1C_1$ 即为所求，其中点 C_1 的坐标为 $(-2,-1)$.

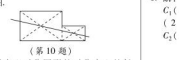
(2) 如图，$\triangle A_2B_2C_1$ 即为所求.



(第 11 题)

12. 解：∵点 D 为 BC 的中点，

∴ $BD=CD$. 作△BDE 关于点 D 成中心对称的△CDM，如图所示.



(第 12 题)

由中心对称的性质可得 $CM=BE$，$MD=ED$，$\angle DCM=\angle B$.

又∵$\angle B+\angle ACB=90°$，

∴$\angle DCM+\angle ACB=90°$，

即$\angle FCM=90°$.

连接 FM. 在△FME 中，$MD=ED$，$FD\perp ME$，

∴$FM=FE$.

又∵在 Rt△FCM 中，$FC^2+CM^2=FM^2$，

∴$FC^2+BE^2=EF^2$.

点拨：通过几何图形的中心对称变换，可以将线段进行等长的位置转移，使分散的几何元素集中起来.

13. (1) **证明**：∵△ABM 与△ACM 关于直线 AF 成轴对称，∴$AB=AC$.

又∵△ABE 与△DCE 关于点 E 成中心对称，

∴$AB=CD$，$AC=CD$.

(2) **解**：∵$F=\angle MCD$.

理由：由题意可得 $\angle BAE=\angle CAE=\angle CDE$，$\angle CMA=\angle BMA$.

∵$\angle BAC=2\angle MPC$，

∴设 $\angle MPC=\alpha$，则 $\angle BME=\angle CAE=\angle CDE=\alpha$.

设 $\angle BMA=\beta$，则 $\angle PME=\angle CMA=\beta$，

∴$\angle F=\angle CPM-\angle PMF=\alpha-\beta$，

$\angle MCD=\angle CDE-\angle DMC=\alpha-\beta$.

∴$\angle F=\angle MCD$.

第 2 课时　中心对称图形

1. A　**2.** C　**3.** B　**4.** B　**5.** D

6. A　**点拨**：利用旋转的性质得出 $AB=CD$，$AD=BC$，然后证明四边形 $ABCD$ 是平行四边形，接下来利用关于原点 O 对称的点的坐标规律即可求得点 D 的坐标.

7. C

8. 错解：①②③

诊断：错解的原因是对一些常见的图形不能正确分析. 根据中心对称图形的概念，可知线段既关于点旋转 180°，平行四边形绕其对角线的交点旋转 180°，正方形绕其对角线的交点旋转 180°，圆绕其圆心旋转 180°，都能与自身重合，都是中心对称图形，只有三角形和等腰梯形，找不到对称中心，故不是中心对称图形.



知识链接

正解：②⑥

9. 解：(1) 正六边形 $ABCDEF$ 既是中心对称图形，又是轴对称图形，有 6 条对称轴.

(2) 旋转 60° 的正整数倍可与自身重合.

(3) 只要边数是偶数的正多边形都是中心对称图形，如正方形、正六边形等.

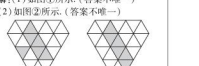
10. 解：如图.

(第 10 题)

点拨：过中心对称图形的对称中心的任意一条直线都能把图形分成面积相等的两部分. 本题答案不唯一.

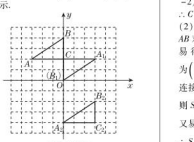
11. 解：(1) 如图①所示. (答案不唯一)

(2) 如图②所示. (答案不唯一)



(第 11 题)

12. 解：(1) 画出△A_1B_1C 和△$A_2B_2C_2$ 如图所示.



(第 12 题)

(2) 旋转中心的坐标为 $\left(\frac{3}{2},-1\right)$.

(3) 点 P 的坐标为 $(-2,0)$.

点拨：本题考查的是旋转变换及平移变换，解题的关键是作图要准确.

第 3 课时　关于原点对称的点的坐标

1. C　**2.** C　**3.** D　**4.** C

5. B　**点拨**：如图，连接 OA，OD，过点 A 作 $AF\perp x$ 轴于点 F，过点 D 作 $DE\perp x$ 轴于点 E.

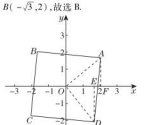
易证△$AFO\cong$△OED(AAS)，

∴$OE=AF=\sqrt{3}$，$DE=OF=2$，

∴$D(\sqrt{3},-2)$.

∵B,D 关于原点对称，

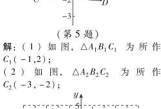
∴$B(-\sqrt{3},2)$，故选 B.



(第 5 题)

6. 解：(1) 如图，△$A_1B_1C_1$ 为所作，$C_1(-1,2)$；

(2) 如图，△$A_2B_2C_2$ 为所作，$C_2(-3,-2)$；



(第 6 题)

(3) 直线 l 的函数解析式为 $y=-x$.

7. 解：(1)∵点 C 与点 A 关于原点对称，点 D 与点 B 关于原点对称，$A(-2,1)$，$B(-3,-2)$，

∴$C(2,-1)$，$D(3,2)$.

(2) 由 $A(-2,1)$，$B(-3,-2)$ 可得直线 AB 对应的函数解析式为 $y=3x+7$，于是易得直线 AB 与 x 轴的交点坐标为 $\left(-\frac{7}{3},0\right)$.

连接 AO，BO.

则 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times\frac{7}{3}\times(1+2)=\frac{7}{2}$.

又易知 $S_{\triangle BOD}=4S_{\triangle AOB}$，

∴$S_{\square ABOD}=4\times\frac{7}{2}=14$.

点拨：本题运用了**数形结合思想**，由图形的对称情况得点的坐标，体现了由“形”到“数”，根据点的坐标情况可求出平行四边形的面积，又体现了“数”与“形”的结合.

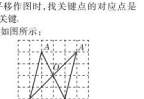
第 4 课时　图形变换的四种作图

1. 解：如图，△$A_1B_1C_1$ 即为所求.

(第 1 题)

点拨：平移作图时，找关键点的对应点是解题的关键.

2. (1) 解：如图所示；



(第 2 题)

(2) **证明**：∵$AB//A'B'$，

∴$\angle BAO=\angle A'B'O$，$\angle ABO=\angle B'A'O$，

在△AOB 和△$B'OA'$中，

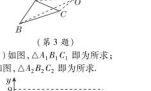
$$\begin{cases}\angle BAO=\angle A'B'O,\\ AB=B'A',\\ \angle ABO=\angle B'A'O,\end{cases}$$

∴△$AOB\cong$△$B'OA'$.

3. 解：作法：(1) 连接 OA，OD，OB，OC；

(2) 分别以 OB，OC 为一边按顺时针方向作 $\angle BOE$，$\angle COF$，使得 $\angle BOE=\angle COF=\angle AOD$ 且 $OE=OB$，$OF=OC$；

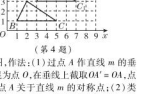
(3) 连接 EF，ED，FD，△DEF 就是所求作的三角形，如图.



(第 3 题)

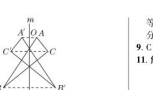
4. 解：(1) 如图，△$A_1B_1C_1$ 即为所求；

(2) 如图，△$A_2B_2C_2$ 即为所求.



(第 4 题)

5. 解：如图，作法：(1) 过点 A 作直线 m 的垂线，垂足为点 O，在垂线上截取 $OA'=OA$，点 A' 就是点 A 关于直线 m 的对称点；(2) 类似地，可以分别作出点 B,C 关于直线 m 的对称点 B',C'；(3) 连接 $A'B'$，$B'C'$，$C'A'$，得到的△$A'B'C'$ 就是所要求作的图形.

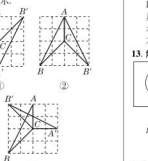


(第 5 题)

6. 解：(1) 如图①所示. (答案不唯一)

(2) 如图②所示. (答案不唯一)

(3) 如图③所示.



(第 6 题)

点拨：(1) 以 C 为对称中心，作点 A，B 关于 C 的对称点 A'，B'，连接 $A'C$，$B'C$，$A'B'$ 即可画出三角形；或以 AB 的中点为对称中心，作出点 C 关于 AB 的中点的对称点 C'，连接 BC'，AC' 即可画出三角形；

(2) 以 AC 所在直线为对称轴，作点 B 关于直线 AC 的对称点 B'，连接 AB'，$B'C$ 即可画出三角形；或以 BC 所在直线为对称轴，作点 A 关于直线 BC 的对称点 A'，连接 $A'C$，$A'B$ 即可画出三角形；

(3) 根据旋转的性质作点 A 和点 B 绕点 C 顺时针旋转 90° 的对应点 A'，B'，连接 $A'C$，$B'C$，$A'B'$ 即可画出旋转后的三角形.

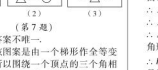
23.3　课题学习　图案设计

1. B　**2.** A　**3.** B

4. C　**点拨**：试着作出图中阴影部分关于某条直线轴对称且不与原图重叠的图形，若这两个正方形组成的图形是中心对称图形，则是满足题意的图形.

5. B　**6.** C

7. 解：如图所示.



(第 7 题)

点拨：本题答案不唯一.

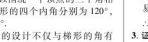
8. 错解：因为该图案是由一个梯形作全等变换形成的，所以图像一个顶点的三个角相等，所以该梯形的四个内角分别为 120°，120°，60°，60°.

诊断：该图案的设计不仅与梯形的角有关，而且与梯形的上、下底和腰都有关.

正解：该梯形从边来说应符合：上底等于腰长等于下底的一半；从角来说应符合：四个内角分别为 120°，120°，60°，60°.

9. C　**10.** C

11. 解：如图所示. (答案不唯一)



(第 11 题)

12. 解：甲从平移的角度，以一个正六边形为基本图案进行分析；乙从轴对称的角度，以图案的一半为基本图案进行分析；丙从中心对称的角度，以图案的一半为基本图案进行分析. 虽然各自分析的角度不同，但是他们的观点都是正确的.

13. 解：如图所示.

(第 13 题)

点拨：答案不唯一.

阶段核心技巧

1. 解：(1)∵四边形 $ABCD$ 是正方形，∴$\angle ABC=90°$，∵把△ABP 绕点 B 顺时针旋转得到△CBP'，∴△$ABP\cong$△CBP'，$BP=BP'$，$\angle ABC=\angle PBP'=90°$. 在 Rt△$BPP'$中，$PP'=\sqrt{BP^2+PP^2}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$.

(2)∵$PB=P'B$，$\angle PBP'=90°$，∴$\angle BP'P=\angle BPP'=45°$.∴△$ABP\cong$△$CBP'$，∴$AP=CP'=1$，$\angle APB=\angle BP'C$. 在△$P'PC$ 中，$P'P^2+P'C^2=(2\sqrt{2})^2+1^2=9$，$PC^2=3^2=9$，∴$P'P^2+P'C^2=PC^2$，∴$\angle PP'C=90°$，∴$\angle BP'C=\angle BP'P+\angle PP'C=45°+90°=135°$，∴$\angle APB=\angle BP'C=135°$.

2. (1) **证明**：由旋转的性质得：△$ABC\cong$△ADE，∴$\angle BAC=\angle DAE$，$AB=AD$，$AC=AE$. 又∵$AB=AC$，∴$AE=AD$.

由 $\angle BAC=\angle DAE$ 得 $\angle BAC+\angle BAE=\angle DAE+\angle BAE$，即 $\angle BAE=\angle CAD$.

在△AEC 和△ADB 中，

$$\begin{cases}AE=AD,\\ \angle CAE=\angle BAD,\\ AC=AB,\end{cases}$$

∴△$AEC\cong$△ADB(SAS).

(2) **解**：∵四边形 $ADFC$ 是菱形，

∴$DF//AC$.

又∵$\angle BAC=45°$，

∴$\angle DBA=\angle BAC=45°$.

由(1)得 $AB=AD$，

∴$\angle DBA=\angle BDA=45°$.

∴$\angle DAB=90°$.

∴△ABD 是直角边长为 2 的等腰直角三角形.

∴$BD^2=2AB^2$，即 $BD=2\sqrt{2}$.

易知 $DF=AB=2$，

∴$BF=BD-DF=2\sqrt{2}-2$.

3. **证明**：由题意可知 $BM=MC$，

∴可将△BFM 绕点 M 旋转 180° 得到△CNM，如图所示.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

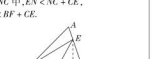
$\therefore BF=CN, FM=MN.$

连接 EN，又 $\because ME\perp MF$，

$\therefore EN=EF.$

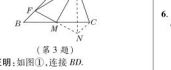
在 $\triangle ENC$ 中，$EN<NC+CE$，

$\therefore EF<BF+CE.$

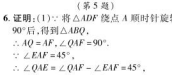


（第 3 题）

4.（1）**证明**：如图①，连接 BD.



①



②

（第 4 题）

$\because AB=BC, \angle ABC=90°$，$D$ 是斜边 AC 的中点，

$\therefore BD\perp AC, \angle A=\angle C=45°, \angle ABD=\frac{1}{2}\angle ABC=45°, BD=AD=CD=\frac{1}{2}AC.$

$\therefore \angle ABD=\angle A=\angle C=45°.$

$\because \angle EDF=90°=\angle MDB+\angle BDN, \angle BDC=90°=\angle BDN+\angle CDN, \angle MDB=\angle NDC.$

又 $\because BD=CD, \angle ABD=\angle C, \therefore \triangle BMD\cong\triangle CND, \therefore DM=DN.$

（2）**解**：$DM=DN$ 仍然成立，证明如下：如图②，连接 BD，由（1）知 $BD\perp AC, BD=CD, \angle ABD=\angle ACB=45°.$

$\because \angle ABD+\angle MBD=\angle ACB+\angle NCD=180°, \therefore \angle MBD=\angle NCD.$ $\because \angle BDM+\angle MDC=90°=\angle MDC+\angle CDN,$

$\therefore \angle BDM=\angle CDN.$ 又 $\because BD=CD,$

$\therefore \triangle BDM\cong\triangle CDN, \therefore DM=DN.$

5. **解**：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore \angle ABC=90°.$

$\because$ 把边 BC 绕点 B 逆时针旋转 $30°$ 得到线段 BP，

$\therefore PB=BC=AB, \angle PBC=30°,$

$\therefore \angle ABP=60°,$

$\therefore \triangle ABP$ 是等边三角形，

$\therefore \angle BAP=60°, AP=AB=2\sqrt{3}.$

$\because$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle ADE$ 中，$\angle EAD=90°-\angle BAP=30°, AD=2\sqrt{3}, \therefore AE=4, DE=2,$

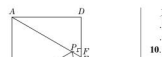
$\therefore CE=2\sqrt{3}-2, PE=4-2\sqrt{3}.$ 如图，过点 P 作 $PF\perp CD$ 于 F，

$\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle PEF$ 中，$\angle FPE=\angle EAD=30°,$

$\therefore EF=\frac{1}{2}PE=2-\sqrt{3},$

$\therefore PF=\sqrt{PE^2-EF^2}=2\sqrt{3}-3,$

$\therefore S_{\triangle PCE}=\frac{1}{2}CE\cdot PF=\frac{1}{2}\times(2\sqrt{3}-2)\times(2\sqrt{3}-3)=9-5\sqrt{3}.$



（第 5 题）

6. **证明**：（1）$\because$ 将 $\triangle ADF$ 绕点 A 顺时针旋转 $90°$ 后，得到 $\triangle ABQ$，

$\therefore AQ=AF, \angle QAF=90°.$

$\because \angle EAF=45°,$

$\therefore \angle QAE=\angle QAF-\angle EAF=45°,$

$\therefore \angle QAE=\angle FAE.$

在 $\triangle AQE$ 和 $\triangle AFE$ 中，

$\begin{cases}AQ=AF,\\ \angle QAE=\angle FAE,\\ AE=AE,\end{cases}$

$\therefore \triangle AQE\cong\triangle AFE.$

$\therefore \angle AEQ=\angle AEF,$

即 EA 是 $\angle QED$ 的平分线.

（2）易知 $QB=DF$，由（1）知 $\triangle AQE\cong\triangle AFE,$

$\therefore QE=EF.$

由题易知 $\angle ABQ=\angle ADF=\angle ABD=45°,$

$\therefore \angle QBE=\angle ABQ+\angle ABD=45°+45°=90°.$

$\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle QBE$ 中，$QB^2+BE^2=QE^2,$

$\therefore EF^2=BE^2+DF^2.$

7.（1）**证明**：$\because \triangle ACE, \triangle ABD$ 都是等边三角形，$\therefore AB=AD, AE=AC, \angle BAD=\angle CAE=60°, \therefore \angle BAD+\angle DAE=\angle CAE+\angle DAE,$

即 $\angle BAE=\angle DAC, \therefore \triangle BAE\cong\triangle DAC,$

$\therefore BE=CD.$

（2）**解**：$\angle 60$

②当 $AC=2AB$ 时，$\triangle BDD'$ 与 $\triangle CPD'$ 全等.

证明：由旋转和等边三角形的知识可知 $AB=BD=DD'=AD', \therefore$ 四边形 $ABDD'$ 是菱形，

$\therefore \angle ABD'=\angle DBD'=\frac{1}{2}\angle ABD=30°,$

$DP\parallel BC. \therefore \triangle ACE$ 是等边三角形，$\therefore AC=AE=CE, \angle ACE=60°. \therefore AC=2AB, \therefore AE=2AD'. \therefore \angle PCD'=\angle ACD'=\frac{1}{2}\angle ACE=30°.$

$\therefore DP'\parallel BC, \therefore \angle ABD'=\angle DBD'=\angle BD'D=\angle ACD'=\angle PCD'=\angle PD'C=30°,$

$\therefore BD'=CD', \therefore \triangle BDD'\cong\triangle CPD'.$

8.（1）**证明**：由题可知，$AB=AF, \angle BAM=\angle FAN, \angle B=\angle F=60°,$

$\therefore \triangle ABM\cong\triangle AFN$（ASA），$\therefore AM=AN.$

（2）**解**：当旋转角 $\alpha=30°$ 时，四边形 $ABPF$ 是菱形. 理由：$\because \alpha=30°, \therefore \angle FAB=120°. \because \angle B=60°, \therefore \angle FAB+\angle B=180°,$

$\therefore AF\parallel BP$，$\therefore \angle F=\angle FPC=60°,$

$\therefore \angle FPC=\angle B=60°, \therefore AB//FP$，$\therefore$ 四边形 $ABPF$ 是平行四边形. 又 $\because AB=AF,$

$\therefore$ 平行四边形 $ABPF$ 是菱形.

9. **解**：（1）可以通过旋转的方法，使 $\triangle ABE$ 变到 $\triangle ADF$ 的位置.

（2）$BE=DF, BE\perp DF.$ 证明如下：

$\because \triangle ABE\cong\triangle ADF,$

$\therefore BE=DF, \angle AHE=\angle ADF.$

又 $\angle AEB=\angle DEH,$

$\therefore \angle DHE=\angle EAB=90°,$

$\therefore BE\perp DF.$

10. **解**：（1）$BE=AD, BE\perp AD.$

（2）$BE=AD, BE\perp AD$ 仍然成立. 证明：设 BE 与 AC 的交点为点 F，BE 与 AD 的交点为点 G，

$\because \mathrm{Rt}\triangle ABC$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle ECD$ 都是等腰直角三角形，

$\therefore AC=BC, CD=CE, \angle ACB=\angle ECD=90°,$

$\therefore \angle ACE=\angle BCE.$

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BCE$ 中，

$\begin{cases}AC=BC,\\ \angle ACD=\angle BCE,\\ CD=CE,\end{cases}$

$\therefore \triangle ACD\cong\triangle BCE$（SAS）.

$\therefore AD=BE, \angle CAD=\angle CBE.$

$\because \angle BFC=\angle AFG, \angle BFC+\angle CBE=90°,$

$\therefore \angle AFG+\angle CAD=90°.$

$\therefore \angle AGF=90°.$

$\therefore BE\perp AD.$

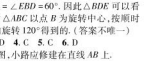
全章热门考点整合应用

1. **解**：由题易知 $AB=BC=BE=BD, \angle ABC=\angle CBE=\angle EBD=60°.$ 因此 $\triangle BDE$ 可以看成是由 $\triangle ABC$ 以点 B 为旋转中心，按顺时针方向旋转 $120°$ 得到的.（答案不唯一）

2. D　**3.** D　**4.** C　**5.** C　**6.** D

7. **解**：如图，小路应修建在直线 AB 上.

点拨：平行四边形和圆都是中心对称图形，根据中心对称图形的性质，小路的位置应在平行四边形的对称中心 A 和圆的对称中心 B 的连线上.



（第 7 题）

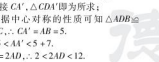
8. **解**：（1）如图，延长 AD 至点 A'，使 $DA'=AD$，连接 CA'，$\triangle CDA'$ 即为所求；

（2）根据中心对称的性质可知 $\triangle ADB\cong\triangle A'DC, \therefore CA'=AB=5.$

$\therefore 7-5<AA'<5+7,$

$\therefore AA'=2AD, \therefore 2<2AD<12.$

$\therefore 1<l<6.$



（第 8 题）

9. ①④；③；②

10. **解**：如图所示，答案不唯一.



（第 10 题）

11.（1）**证明**：$\because \triangle DAE$ 绕点 D 逆时针旋转 $90°$ 得到 $\triangle DCM, \therefore DE=DM, \angle EDM=90°, \therefore \angle EDF+\angle FDM=90°.$

$\because \angle EDF=45°, \therefore \angle FDM=45°.$

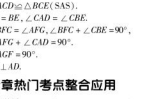
$\because \angle EDF=\angle FDM$，又 $\because DF=DF, DE=DM, \therefore \triangle DEF\cong\triangle DMF. \therefore EF=MF.$

（2）**解**：设 $EF=x$. 易知 $CM=AE=1,$

$\therefore EB=2, BF=BM-MF=BM-EF=4-x.$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle EBF$ 中，由勾股定理，得 $EF^2+BF^2=EF^2$，即 $2^2+(4-x)^2=x^2.$ 解得 $x=\frac{5}{2}.$ 即 EF 的长为 $\frac{5}{2}$.

点拨：本题利用旋转的性质或由旋转而得到的全等关系来解决问题.

12. **解**：（1）如图，延长 AE 到点 M，使 $EM=AE$. 连接 CM，则 $\triangle MCE$ 即为所求.



（第 12 题）

（2）$AB=AF+CF.$

证明：$\because \triangle MCE$ 为 $\triangle ABE$ 关于点 E 成中心对称的图形，

$\therefore AB=MC, \angle BAE=\angle M, \therefore AB//MC.$

又 $\because AB//CD, \therefore$ 点 D, C, F, M 共线.

又 $\because \angle BAE=\angle EAF, \therefore \angle EAF=\angle M.$

$\therefore MF=AF.$

$\because MC=MF+CF, \therefore AB=AF+CF.$

13. **D**　**点拨**：本题运用**数形结合思想**，根据题意画出图形，然后再进行判断.

14. **证明**：如图，将 $\triangle ABQ$ 绕点 A 逆时针旋转 $90°$ 后得到 $\triangle ADE.$

$\therefore \angle EAQ=90°, \triangle AED\cong\triangle AQB.$

$\therefore \angle E=\angle AQB, DE=BQ$，又 $ADE=\angle B=90°. \therefore E, D, P$ 三点共线.

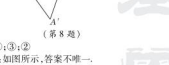
又 $\because BAP$ 的平分线交边 BC 于点 Q，$AD\parallel BC,$

$\therefore \angle BAQ=\angle PAQ, \angle DAQ=\angle AQB.$

$\therefore \angle PAE=90°-\angle PAQ=90°-\angle BAQ=\angle DAQ=\angle AQB=\angle E.$

$\therefore AP=PE=DP+DE=DP+BQ.$

点拨：本题可以将 $\triangle ABQ$ 旋转到 $\triangle ADE$ 的位置，将线段的和 $DP+BQ$ 表示成一条线段 PE，再证明 $PE=AP.$



（第 14 题）

第二十四章　圆

24.1　圆的有关性质

第 1 课时　圆

1. D　**2.** A　**3.** B　**4.** B　**5.** A

6. C　**7.** C　**8.** D

9. C　**点拨**：过点 C 作 $CB\perp OA$ 于点 B，

$\because \angle COA=45°,$

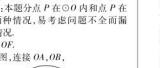
$\therefore \triangle BCO$ 为等腰直角三角形.

$\because OC=2, \therefore OB=BC=\sqrt{2}.$ 又 $\because$ 点 C 位于第二象限，$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}).$

10. C　**点拨**：本题分点 P 在 $\odot O$ 内和点 P 在 $\odot O$ 外两种情况，易考虑问题不全而漏掉一种情况.

11. **解**：$OE=OF.$

证明：如图，连接 $OA, OB,$



（第 11 题）

$\because OA=OB,$

$\therefore \angle OAB=\angle OBA.$

又 $\because AE=BF, OA=OB,$

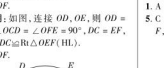
$\therefore \triangle OAE\cong\triangle OBF$（SAS）.

$\therefore OE=OF.$

12.（1）**证明**：如图，连接 OD, OE，则 $OD=OE$，又 $\angle OCD=\angle OFE=90°, DC=EF,$

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ODC\cong\mathrm{Rt}\triangle OEF$（HL）.

$\therefore OC=OF.$



（第 12 题）

（2）**解**：如图，连接 $OH, \because CF=EF=2, OC=OF, \therefore OF=1. \therefore OH^2=OF^2+EF^2=1^2+2^2=5.$ 设 $FG=GH=x, \therefore OG^2+GH^2=OH^2,$

$\therefore (x+1)^2+x^2=5. \therefore x^2+x-2=0,$

解得 $x_1=1, x_2=-2$（舍去）.

$\therefore S_{\triangle EFH}=\mathrm{HL}^2=1^2=1.$

13. **证明**：$\because$ $OB=OC, \therefore \angle C=\angle CBO.$

设 $\angle PBO=\angle C=x, \therefore PC=OC,$

$\therefore \angle COP=\angle CPO=\angle B+\angle BOA=x+30°.$

在 $\triangle POC$ 中，$x+2(x+30°)=180°,$

$\therefore x=40°, \therefore \angle POB=40°.$

（2）$100°$　**点拨**：设 $\angle BOC=y, \therefore PC=OC, \therefore \angle CPO=\angle COP=x+30°. \therefore OB=OC, \therefore \angle OCP=\angle OBC=\angle BOA+\angle OPC=30°+(30°+y)=60°+y.$ 在 $\triangle OBC$ 中，$y+2(60°+y)=180°,$

$\therefore y=20°, \therefore \angle OBC=80°,$

$\therefore \angle POB=100°.$

14. **解**：（1）点 C 在以 AB 为直径的圆上.

理由：如图，连接 MC, MD. 由折叠的性质知 $\angle DAC=\angle BAC, AD=AM.$

$\because AB//CD, \therefore \angle DCA=\angle BAC,$

$\therefore \angle DAC=\angle DCA,$

$\therefore AD=CD.$

$\because AD=AM,$

$\therefore CD=AM,$

$\therefore$ 四边形 $AMCD$ 是平行四边形，

$\therefore MC=AD.$

$\because AM=BM,$

$\therefore CD=BM,$

$\therefore$ 四边形 $BCDM$ 是平行四边形，

$\therefore MD=BC.$

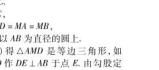
$\because AD=BC,$

$\therefore MC=MD=MA=MB,$

$\therefore$ 点 C 在以 AB 为直径的圆上.

（2）由（1）得 $\triangle AMD$ 是等边三角形，如图，过点 D 作 $DE\perp AM$ 于点 E. 由勾股定理得 $DE=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3},$

$\therefore$ 梯形 $ABCD$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times(2+4)\times\sqrt{3}=3\sqrt{3}.$

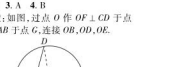


（第 14 题）

第 2 课时　垂直于弦的直径

1. A　**2.** B　**3.** A　**4.** B

5. C　**点拨**：如图，过点 O 作 $OF\perp CD$ 于点 $F, OG\perp AB$ 于点 G，连接 $OB, OD, OE.$



（第 5 题）

则 $CF=DF, AG=BG=\frac{1}{2}AB=3,$

$\therefore EG=AG-AE=3-1=2.$

在 $\mathrm{Rt}\triangle BOG$ 中，$OG=\sqrt{OB^2-BG^2}=\sqrt{13-9}=2,$

$\therefore EG=OG.$

$\therefore \angle OEG=45°, OE=\sqrt{2}OG=2\sqrt{2}.$

$\because \angle DEB=75°,$

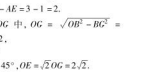
$\therefore \angle OEF=30°.$

$\therefore OF=\frac{1}{2}OE=\sqrt{2}.$

在 $\mathrm{Rt}\triangle ODF$ 中，$DF=\sqrt{OD^2-OF^2}=\sqrt{13-2}=\sqrt{11},$

$\therefore CD=2DF=2\sqrt{11}.$

6. $\frac{1}{2}$　**点拨**：连接 OD，如图，



（第 6 题）

$\therefore CD\perp OC,$

$\therefore \angle DCO=90°,$

$\therefore CD=\sqrt{OD^2-OC^2}=\sqrt{r^2-OC^2},$

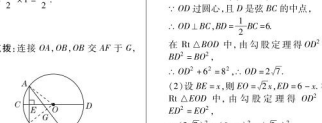
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

当 OC 的值最小时，CD 的值最大，
而 $OC \perp AB$ 时，OC 最小，此时 $OC=\sqrt{r^2-\left(\frac{1}{2}AB\right)^2}$，
$\therefore CD$ 的最大值为 $\sqrt{r^2-\left[r^2-\left(\frac{1}{2}AB\right)^2\right]}=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$.

7. C

8. 26

9. $\frac{48}{5}$　**点拨**：连接 OA，OB，OB 交 AF 于 G，如图，

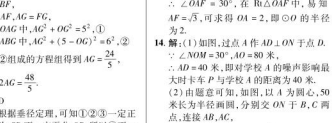


（第 9 题）

$\because AB \perp CD$，
$\therefore AE=BE=\frac{1}{2}AB=3$，
设 $\odot O$ 的半径为 r，则 $OE=r-1$，$OA=r$，
在 $\mathrm{Rt}\triangle OAE$ 中，$3^2+(r-1)^2=r^2$，解得 $r=5$，
$\therefore \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BF}$，
$\therefore OB \perp AF$，$AG=FG$，
在 $\mathrm{Rt}\triangle OAG$ 中，$AG^2+OG^2=5^2$，①
在 $\mathrm{Rt}\triangle ABG$ 中，$AG^2+(5-OG)^2=6^2$，②
解由①②组成的方程组得到 $AG=\frac{24}{5}$，
$\therefore AF=2AG=\frac{48}{5}$.

10. 错解；D
诊断：根据垂径定理，可知①②③一定正确；因为 CD 不一定平分 OB，所以④不一定正确. 本题的易错之处是对垂径定理理解不透，并且图形画得比较特殊，因而误认为 CD 平分 OB.
正解：C

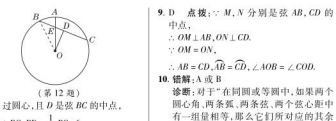
11. (1) **证明**：如图，过点 O 作 $OE \perp AB$ 于点 E，则 $CE=DE$，$AE=BE$.
$\therefore AE-CE=BE-DE$，即 $AC=BD$.



（第 11 题）

(2) **解**：如图，连接 OA，OC，由 (1) 可知，$OE \perp AB$，
$\because$ 圆心 O 到直线 AB 的距离为 6，
$\therefore OE=6$.
$\therefore CE=\sqrt{OC^2-OE^2}=\sqrt{8^2-6^2}=2\sqrt{7}$，
$AE=\sqrt{OA^2-OE^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$.
$\therefore AC=AE-CE=8-2\sqrt{7}$.

12. **解**：(1) 如图，连接 OB.

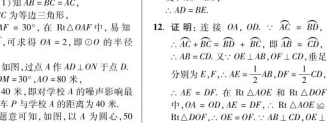


（第 12 题）

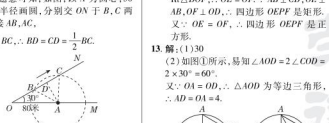
$\because OD$ 过圆心，且 D 是弦 BC 的中点，
$\therefore OD \perp BC$，$BD=\frac{1}{2}BC=6$.
在 $\mathrm{Rt}\triangle BOD$ 中，由勾股定理得 $OD^2+BD^2=BO^2$，
$\therefore OD^2+6^2=8^2$，$\therefore OD=2\sqrt{7}$.
(2) 设 $BE=x$，则 $EO=\sqrt{2}x$，$ED=6-x$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle EOD$ 中，由勾股定理得 $OD^2+ED^2=EO^2$，
$\therefore (2\sqrt{7})^2+(6-x)^2=(\sqrt{2}x)^2$.
解得 $x_1=-16$（舍去），$x_2=4$.
$\therefore ED=2$.

13. **解**：(1) 连接 AC，$\because CD$ 为 $\odot O$ 的直径，$CD \perp AB$，
$\therefore AF=BF$，$\therefore AC=BC$. 又 $\because AD \perp BC$，
$\therefore BE=CE$，$\therefore AC=AB$，$\therefore AB=BC=2\sqrt{3}$.
(2) 由 (1) 知 $AB=BC=AC$，
$\therefore \triangle ABC$ 为等边三角形，
$\therefore \angle OAF=30°$，在 $\mathrm{Rt}\triangle OAF$ 中，易知 $AF=\sqrt{3}$，可求得 $OA=2$，即 $\odot O$ 的半径为 2.

14. **解**：(1) 如图，过点 A 作 $AD \perp ON$ 于点 D.
$\because \angle NOM=30°$，$AO=80$ 米，
$\therefore AD=40$ 米，即学校 A 的噪声影响最大时卡车 P 与学校 A 的距离为 40 米.
(2) 由题意可知，如图，以 A 为圆心，50 米长为半径画圆，分别交 ON 于 B，C 两点，连接 AB，AC，



$\because AD \perp BC$，$\therefore BD=CD=\frac{1}{2}BC$.



（第 14 题）

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，$AB=50$ 米，$AD=40$ 米，
由勾股定理得 $BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=\sqrt{50^2-40^2}=30$（米），
$\therefore BC=2\times 30=60$（米）.
$\because$ 重型运输卡车的速度为 18 千米/时，即 $\frac{18\,000}{60}=300$（米/分），
$\therefore$ 重型运输卡车经过 BC 时需要 $60+300=0.2$（分）$=12$（秒）.
答：卡车 P 沿道路 ON 方向行驶一次给学校 A 带来噪声影响的时间为 12 秒.

第 3 课时　弧、弦、圆心角

1. B　**2.** A　**3.** C　**4.** C　**5.** D　**6.** B　**7.** C　**8.** D

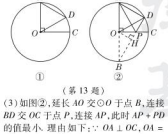
9. D　**点拨**：$\because M$，N 分别是弦 AB，CD 的中点，
$\therefore OM \perp AB$，$ON \perp CD$.
$\because OM=ON$，
$\therefore \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，$\angle AOB=\angle COD$.

10. **错解**：A 或 B
诊断：对于“在同圆或等圆中，如果两个圆心角、两条弧、两条弦、两个弦心距中有一组量相等，那么它们所对应的其余各组量都相等”这一性质中反映的各组量之间的关系判断不准，从而导致错误.
正解：C

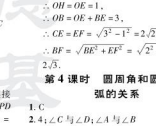
11. **证明**：连接 OC.
$\because \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CB}$，
$\therefore \angle AOC=\angle BOC$.
$\because CD \perp OA$ 于点 D，$CE \perp OB$ 于点 E，
$\therefore \angle CDO=\angle CEO=90°$.
在 $\triangle COD$ 和 $\triangle COE$ 中，
$\begin{cases}\angle DOC=\angle EOC,\\ \angle CDO=\angle CEO,\\ CO=CO,\end{cases}$
$\therefore \triangle COD \cong \triangle COE$(AAS).
$\therefore OD=OE$.
又 $\because AO=BO$，
$\therefore AD=BE$.

12. **证明**：连接 OA，OD. $\because \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$，
$\therefore \overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BD}+\overset{\frown}{BC}$，即 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，
$\therefore AB=CD$. 又 $\because OE \perp AB$，$OF \perp CD$，垂足分别为 E，F，$\therefore AE=\frac{1}{2}AB$，$DF=\frac{1}{2}CD$，
$\therefore AE=DF$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle AOE$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle DOF$ 中，$OA=OD$，$AE=DF$，$\therefore \mathrm{Rt}\triangle AOE \cong \mathrm{Rt}\triangle DOF$，$\therefore OE=OF$. $\because AB \perp CD$，$OE \perp AB$，$OF \perp OD$，$\therefore$ 四边形 $OEPF$ 是矩形. 又 $\because OE=OF$，$\therefore$ 四边形 $OEPF$ 是正方形.

13. **解**：(1) 30
(2) 如图①所示，易知 $\angle AOD=2\angle COD=2\times 30°=60°$.
又 $\because OA=OD$，$\therefore \triangle AOD$ 为等边三角形，
$\therefore AD=OA=4$.



①

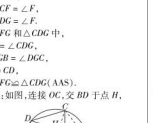


②

（第 13 题）

(3) 如图②，延长 AO 交 $\odot O$ 于点 B，连接 BD 交 OC 于点 P，连接 AP，此时 $AP+PD$ 的值最小. 理由如下：$\because OA \perp OC$，$OA=OB$，$\therefore PA=PB$，$\therefore PA+PD=PB+PD$，
$\because$ 两点之间，线段最短，$\therefore AP+PD$ 的最小值为 BD 的长. 过点 O 作 $OH \perp BD$ 于 H. 由 (2) 知 $\angle AOD=60°$，$\because OD=OB$，
$\therefore \angle B=\angle ODB=\frac{1}{2}\angle AOD=30°$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle OBH$ 中，$OB=4$，$OH=\frac{1}{2}OB=2$，
$\therefore BH=\sqrt{OB^2-OH^2}=2\sqrt{3}$，$\therefore OH \perp BD$，
$\therefore BH=DH$，$\therefore BD=2BH=4\sqrt{3}$，即 $AP+PD$ 的最小值为 $4\sqrt{3}$.

14. (1) **证明**：如图，连接 BC. $\because C$ 是 $\overset{\frown}{BD}$ 的中点，$\therefore \overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{BC}$.
$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径，且 $CF \perp AB$，
$\therefore \overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BF}$，
$\therefore \overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BF}$，$\therefore CD=BC=BF$，$BD=CF$.
在 $\triangle BCD$ 和 $\triangle FBC$ 中，
$\begin{cases}CB=BF,\\ CD=BC,\\ BD=FC,\end{cases}$
$\therefore \triangle BCD \cong \triangle FBC$(SSS)，
$\therefore \angle CDG=\angle BCF$.
$\therefore BC=BF$，
$\therefore \angle BCF=\angle F$，
$\therefore \angle CDG=\angle F$.
在 $\triangle BFG$ 和 $\triangle CDG$ 中，
$\begin{cases}\angle F=\angle CDG,\\ \angle FGB=\angle DGC,\\ BF=CD,\end{cases}$
$\therefore \triangle BFG \cong \triangle CDG$(AAS).
(2) **解**：如图，连接 OC，交 BD 于点 H，

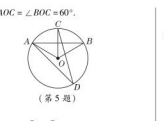


（第 14 题）

$\because C$ 是 $\overset{\frown}{BD}$ 的中点，
$\therefore OC \perp BD$，
$\therefore DH=BH$.
$\therefore OA=OB$，
$\therefore OH=\frac{1}{2}AD=1$.
$\therefore OC=OB$，$\angle COE=\angle BOH$，$\angle OEC=\angle OHB=90°$，
$\therefore \triangle COE \cong \triangle BOH$(AAS)，
$\therefore OH=OE=1$，
$\therefore OB=OE+BE=3$，
$\therefore CE=EF=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$，
$\therefore BF=\sqrt{BE^2+EF^2}=\sqrt{2^2+(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{3}$.

第 4 课时　圆周角和圆心角、弧的关系

1. C
2. $4\downarrow C$ 与 $\downarrow D$；$\downarrow A$ 与 $\downarrow B$
3. C
4. B
5. D　**点拨**：如图，$\because \angle ADC=30°$，
$\therefore \angle AOC=2\angle ADC=60°$.
$\because AB$ 是 $\odot O$ 的弦，$OC \perp AB$ 交 $\odot O$ 于点 C，$\therefore \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$.



（第 5 题）

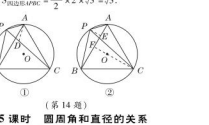
$\therefore \angle AOC=\angle BOC=60°$.
6. A
7. B　**点拨**：$\because \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，
$\therefore \angle COD=\angle AOB=40°$.
$\therefore \angle COB=100°$.
$\therefore \angle BPC=50°$.
8. D
9. D
10. A　**点拨**：$\because$ 直径 AB 垂直于弦 CD，
$\therefore CE=DE$.
$\because \angle A=22.5°$，
$\therefore$ 易得 $\angle COE=45°$.
$\therefore \angle OCE=45°=\angle COE$.
$\therefore CE=OE$.
$\because OC=6$，
$\therefore$ 由勾股定理得 $CE=3\sqrt{2}$，
$\therefore CD=6\sqrt{2}$，故选 A.
本题容易忽视勾股定理的应用而致错.
11. **证明**：连接 AC，因为圆周角 $\angle BAC$ 与圆心角 $\angle BOC$ 同是 $\overset{\frown}{BC}$ 所对的角，所以 $\angle BOC=2\angle BAC$. 因为圆周角 $\angle ACD$ 与圆心角 $\angle AOD$ 同是 $\overset{\frown}{AD}$ 所对的角，所以 $\angle AOD=2\angle ACD$.
在 $\mathrm{Rt}\triangle ACE$ 中，$\angle BAC+\angle ACD=90°$，所以 $\angle BOC+\angle AOD=2\angle BAC+2\angle ACD=2(\angle BAC+\angle ACD)=2\times 90°=180°$.
点拨：利用圆周角定理可使问题转化，如本题中，利用圆周角定理，可把证明“$\angle BOC+\angle AOD=180°$”转化为证明“$\angle BAC+\angle ACD=90°$”，而证明后者，利用“直角三角形的两锐角互余”即可轻松解决.
12. **证明**：(1) $\because AB=CD$，
$\therefore \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，即 $\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{AC}$.
$\therefore \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BC}$.
(2) $\because \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BC}$，
$\therefore AD=BC$.
$\because \angle ADE=\angle CBE$，$\angle DAE=\angle BCE$，
$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CBE$(ASA).
$\therefore AE=CE$.
13. (1) **解**：$\because BC=DC$，
$\therefore \angle CBD=\angle CDB=39°$.
$\because \angle BAC=\angle CDB=39°$，$\angle CAD=\angle CBD=39°$，
$\therefore \angle BAD=\angle BAC+\angle CAD=39°+39°=78°$.
(2) **证明**：$\because EC=BC$，
$\therefore \angle CEB=\angle CBE$.
而 $\angle CEB=\angle 2+\angle BAE$，$\angle CBE=\angle 1+\angle CBD$，
$\therefore \angle 2+\angle BAE=\angle 1+\angle CBD$.
$\because \angle BAE=\angle BDC=\angle CBD$，
$\therefore \angle 1=\angle 2$.

14. **解**：(1) 等边三角形
(2) $PA+PB=PC$.
理由：如图①，在 PC 上截取 $PD=PA$，连接 AD.



第 14 题答图

$\because \angle APC=60°$，
$\therefore \triangle PAD$ 是等边三角形.
$\therefore PA=AD$，$\angle PAD=60°$.
$\because \angle BAC=60°$，
$\therefore \angle PAD=\angle BAC$.
$\therefore \angle PAB=\angle DAC$.
又 $\because AB=AC$，
$\therefore \triangle PAB \cong \triangle DAC$，
$\therefore PB=DC$.
$\therefore PD+DC=PC$，
$\therefore PA+PB=PC$.
(3) 当点 P 为 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点时，四边形 $APBC$ 的面积最大.
如图②，过点 P 作 $PE \perp AB$，垂足为 E，过点 C 作 $CF \perp AB$，垂足为 F.
$\because \triangle ABC$ 是等边三角形，
$\therefore$ 点 P 为 AB 的中点，且 CF 过圆心 O.
可 $\because S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}AB \cdot PE$，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB \cdot CF$，
$\therefore S_{四边形APBC}=\frac{1}{2}AB \cdot (PE+CF)$.
当点 P 为 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点时，点 E 与点 F 重合，$PE+CF=PC$，PC 为 $\odot O$ 的直径.
$\therefore$ 此时四边形 $APBC$ 的面积最大.
易求得 $AB=\sqrt{3}$，
$\therefore S_{四边形APBC}=\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$.



①　②

（第 14 题）

第 5 课时　圆周角和直径的关系

1. D　**2.** C　**3.** C　**4.** A
5. D　**点拨**：$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径，$\therefore \angle ADB=90°$，即 $AD \perp BD$. 因此①正确；$\angle AOC=2\angle ABC$，$\angle AEC=\angle ABC+\angle BAD$，若 $\angle AOC=\angle AEC$，则 $\angle BAD=\angle ABC$，则 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$，而由已知无法推断出 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$，因此②错误；$\because BD \perp AD$，$BD /\!/ OC$，$\therefore OC \perp AD$.
$\because \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CD}$，$\therefore \angle ABC=\angle CBD$. 因此③正确；$\because OC \perp AD$，$\therefore AE=DE$. 因此④正确；$\because AF=DF$，$AO=BO$，$\therefore BD=2OF$. 因此⑤正确；若点 CEF 或 $\triangle BED$ 成立，则 $CF=BD$，此时 $CF=2OF$，而由已知无法推断出 $CF=2OF$，故⑥错误，因此①③④⑤一定成立，故选 D.
6. B　**点拨**：将 $\triangle COD$ 以点 O 为中心，顺时

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

针旋转∠BOC的度数，使点C与点B重合. 由∠AOB + ∠COD = 180°可知旋转后点A，O，D在同一直线上，故∠AHD = 90°，∴ AB = 8.

7. D　**8.** B

9. B　**点拨：**∵ ∠AOB = 90°，∴ AB为⊙P的直径.

∴ ∠ACB = 90°.

10. 60°或120°

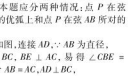
点拨：如图，当点P（P_1）在弦AB所对的优弧上时，过点O作OC⊥AB于点C，连接OA，OB. 由垂径定理可得AC = $2\sqrt{3}$. 在Rt △OAC 中，$OC=\sqrt{OA^2-AC^2}=2=\frac{1}{2}OA$，所以∠$OAC$ = 30°. 所以∠AOB = 120°. 所以∠AP_1B = 60°. 当点P（P_2）在弦AB所对的劣弧上时，易得∠AP_2B = 120°.



（第 10 题）

易错点拨：对于“图形不明确型”问题，在解答时一般要进行分类讨论. 一条弦（非直径）所对的圆周角有两种情况，顶点在优弧上的圆周角和顶点在劣弧上的圆周角，解题时要分情况求解，否则容易漏解. 例如本题应分两种情况：点P在弦AB所对的优弧上和点P在弦AB所对的劣弧上.

11. **解：**(1)如图，连接AD，∵ AB为直径，∴ AD ⊥ DC，BE ⊥ AC，易得∠CBE = ∠CAD. ∵ AB = AC，AD ⊥ BC，∴ ∠BAD = ∠CAD = ∠CBE，∴ ∠$CBE=\frac{1}{2}$∠BAC.



（第 11 题）

(2)由(1)易知BD = CD，∴ BC = 4$\sqrt{5}$.

∵ CE = 4，∴ $BE=\sqrt{BC^2-CE^2}$ = 8.

设AE = x，

则AB = AC = x + 4，在Rt △ABE中，$(x+4)^2=x^2+8^2$，∴ x = 6，

∴ AB = 10，∴ ⊙O的半径长为5.

12. (1)**证明：**∵ AB是直径，

∴ ∠AEB = 90°，

∴ AE ⊥ BC.

∵ AB = AC，

∴ BE = CE.

∵ AE = EF，

∴ 四边形$ABFC$是平行四边形.

∵ AC = AB，

∴ 四边形$ABFC$是菱形.

(2)**解：**设CD = x. 则AB = AC = 7 + x.

由(1)知BC = $2BE$ = 4.

如图，连接BD.

∵ AB是直径，

∴ ∠ADB = ∠BDC = 90°，

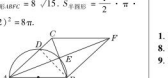
∴ $AB^2-AD^2=CB^2-CD^2$，

∴ $(7+x)^2-7^2=4^2-x^2$，

解得x = 1或x = −8(舍去).

∴ AB = 8，∴ $BD=\sqrt{8^2-7^2}=\sqrt{15}$，

∴ $S_{\text{弓形}ABFC}=8\sqrt{15}$，$S_{\text{半圆形}}=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot(8\div2)^2=8\pi$.



（第 12 题）

点拨：如果题目中有直径，常常添加辅助线，构造直径所对的圆周角，利用题转化为直角三角形问题.

13. (1)**证明：**如图，连接FA.

∵ ∠FEB = 90°，∴ EF ⊥ AB.

∵ ∠FEA = 90°，

∴ BE = AE，∴ BF = AF.

∵ ∠FEA = 90°，∴ AF是⊙O的直径.

∴ AF = DE.

∴ BF = ED.

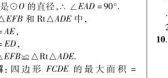
∵ DE是⊙O的直径，∴ ∠EAD = 90°.

在Rt △EFB和Rt △ADE中，

$\begin{cases}BE=AE,\\BF=ED,\end{cases}$

∴ Rt △EFB≌Rt △ADE.

(2)**解：**四边形$FCDE$的最大面积 = 4 × 2 = 8.



（第 13 题）

14. **解：**(1)①∵ AB为⊙O的直径，

∴ ∠ACB = ∠ADB = 90°.

∵ CD平分∠ACB，

∴ ∠ACD = ∠BCD = 45°，

∴ AD = BD.

∵ AC = 6，BC = 8，

∴ $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=10$.

又∵ $AD^2+BD^2=AB^2$，

∴ AD = BD = 5$\sqrt{2}$，

∴ $S_{\text{四边形}ADBC}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}\times6\times8+\frac{1}{2}\times5\sqrt{2}\times5\sqrt{2}=49$.

②如图，作AE ⊥ CD于点E，由(1)知∠ACD = 45°，

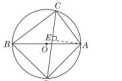
∴ ∠CAE = 45° = ∠ACD.

∴ CE = AE.

又∵ AC = 6，

∴ CE = $AE=3\sqrt{2}$.

∴ $DE=\sqrt{AD^2-AE^2}=4\sqrt{2}$，∴ CD = CE + DE = 7$\sqrt{2}$.



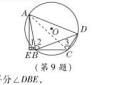
（第 14 题）

(2)CA + CB的最大值为10$\sqrt{2}$.

第 6 课时　圆内接四边形

1. B　**2.** A　**3.** C　**4.** D　**5.** A　**6.** B　**7.** B　**8.** C

9. D　**点拨：**如图，连接AC.



（第 9 题）

∵ BA平分∠DBE，

∴ ∠1 = ∠2.

∵ ∠1 = ∠CDA，∠2 = ∠3，

∴ ∠3 = ∠CDA.

∴ AC = AD = 5.

∵ AE ⊥ CD，

∴ ∠AEC = 90°.

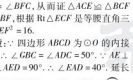
∴ $AE=\sqrt{AC^2-CE^2}=\sqrt{5^2-(\sqrt{13})^2}=2\sqrt{3}$.

10. C　**点拨：**由四边形$BCDE$内接于⊙O知∠EFC = ∠ABC = 45°，据此得AC = BC，由EF是⊙O的直径知∠EBF = ∠ECF = ∠ACB = 90°，∠BCF = ∠ACE，再根据四边形$BECF$是⊙O的内接四边形知∠AEC = ∠BFC，从而证△ACE≌△BCF得AE = BF，根据Rt △ECF是等腰直角三角形知EF^2 = 16.

11. C　**点拨：**∵ 四边形$ABCD$为⊙O的内接四边形，∴ ∠GBC = ∠ADC = 50°. ∵ AE ⊥ CD，∴ ∠AED = 90°. ∴ ∠EAD = 40°. 延长AE交⊙O于点M，∵ AO ⊥ CD，∴ $\overset{\frown}{CM}=\overset{\frown}{DM}$，∴ ∠$DBC$ = 2∠EAD = 80°.

12. D　**点拨：**点B可能在弦AC所对的优弧上，也可能在弦AC所对的劣弧上. 本题没有给出图形，其易错之处在于画图时考虑不全而漏解.

13. (1)**解：**如图，连接OA，OC，作OH ⊥ AC于点H.



（第 13 题）

∵ ∠ABC = 120°，

∴ ∠AMC = 180° − ∠ABC = 60°.

∴ ∠AOC = 2∠AMC = 120°.

∴ ∠$AOH=\frac{1}{2}$∠AOC = 60°.

∴ ∠OAH = 30°. ∴ $OH=\frac{1}{2}OA$.

易得$AH=\frac{1}{2}AC=\sqrt{3}$，

∴ OA = 2，

即⊙O半径的长为2.

(2)**证明：**如图，在BM上截取BE = BC，连接CE.

∵ BM平分∠ABC，∠ABC = 120°，

∴ ∠$MBC=\frac{1}{2}$∠ABC = 60°.

又∵ BE = BC，

∴ △EBC是等边三角形.

∴ CE = CB = BE，∠CEB = 60°.

∴ ∠MEC = 180° − ∠CEB = 120°.

在△ABC和△MEC中，

$\begin{cases}\angle ABC=\angle MEC,\\\angle BAC=\angle EMC,\\CB=CE,\end{cases}$

∴ △ABC≌△MEC(AAS).

∴ AB = ME.

∵ ME + EB = BM，

∴ AB + BC = BM.

14. (1)**证明：**连接OD.

∵ AB是直径，AB ⊥ CD，

∴ $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BD}$，

∴ ∠COB = ∠$DOB=\frac{1}{2}$∠COD.

又∵ ∠$CPD=\frac{1}{2}$∠COD，

∴ ∠CPD = ∠COB.

(2)**解：**∠$CP'D$ + ∠COB = 180°.

证明：∵ 四边形$PCP'D$是圆内接四边形，

∴ ∠CPD + ∠$CP'D$ = 180°.

∴ ∠$CP'D$ + ∠COB = 180°.

15. (1)**证明：**∵ 四边形$ABCD$内接于⊙O，

∴ ∠DCB + ∠BAD = 180°.

∵ ∠BAD = 105°，

∴ ∠DCB = 180° − 105° = 75°.

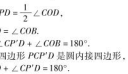
∵ ∠DBC = 75°，

∴ ∠DCB = ∠DBC = 75°，

∴ BD = CD.

(2)**解：**∵ ∠DCB = ∠DBC = 75°，

∴ ∠BDC = 30°. 如图，连接OB，OC，



（第 15 题）

由圆周角定理，得∠BOC = 60°.

∵ $\overset{\frown}{BC}$的长等于圆周长的$\frac{1}{6}$.

∴ $\overset{\frown}{BC}$的长为$\frac{1}{6}\times2\pi\times3=\pi$.

16. **证明：**(1)在Rt △ABC中，点M是AC的中点，∴ MA = MB，

∴ ∠A = ∠MBA.

连接DE，则四边形$ABED$是⊙O的内接四边形，

∴ ∠ADE + ∠ABE = 180°.

而∠ADE + ∠MDE = 180°，

∴ ∠MDE = ∠MBA.

同理可得∠MED = ∠A，

∴ ∠MDE = ∠MED，

∴ MD = ME.

(2)∵ ∠C = 30°，

∴ ∠A = 60°，

∴ ∠ABM = 60°，

∴ △OAD和△OBE均为等边三角形，

∴ ∠BOE = 60°，

∴ BOE = ∠A，

∴ OE // AC，

同理可得OD // BM，

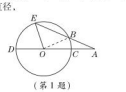
∴ 四边形$DOEM$为平行四边形.

又∵ OD = OE，

∴ 四边形$ODME$是菱形.

阶段核心技巧

1. **解：**如图，连接OB，∵ 点B，E在⊙O上，CD为直径，



（第 1 题）

∴ OB = OE = OC.

又∵ AB = OC，

∴ OB = AB = OE.

∴ △AOB，△EBO，△EAO是等边三角形.

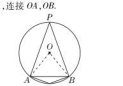
又∵ ∠DOE = ∠A + ∠AOB，

∴ ∠DOE = ∠A + 2∠A = 72°，

∴ ∠A = 24°.

2. **解：**(1)90°

(2)如图，连接OA，OB.



（第 2 题）

在△AOB中，$OA^2+OB^2=1^2+1^2=2$，

$AB^2=(\sqrt{2})^2=2$，

∴ $OA^2+OB^2=AB^2$，

∴ ∠AOB = 90°，

当点P在优弧AB上时，

∠$APB=\frac{1}{2}$∠AOB = 45°，

当点P在劣弧AB上时，

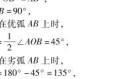
∠APB = 180° − 45° = 135°，

∴ ∠APB的度数是45°或135°.

3. **证明：**如图，连接OC，

∵ 点C为优弧AB的中点，

∴ ∠AOC = ∠BOC.



（第 3 题）

∵ AD = BE，OA = OB，∴ OD = OE.

在△COD与△COE中，

$\begin{cases}OD=OE,\\\angle DOC=\angle EOC,\\OC=OC,\end{cases}$

∴ △COD≌△COE(SAS)，

∴ CD = CE.

4. **解：**(1)如图，连接OC.

∵ 点A，B，C是⊙O的三等分点.

∴ $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{AC}$，

∴ ∠AOB = ∠BOC = ∠$AOC=\frac{1}{3}\times360°$ = 120°.

(2)如图，过点O作OD ⊥ AB于点D，

则∠ODB = 90°，$BD=\frac{1}{2}AB$，

∵ OA = OB，∴ ∠OAB = ∠$OBA=\frac{1}{2}$(180° − ∠AOB) = 30°.

在Rt △BOD中，∠OBA = 30°，

∴ $OD=\frac{1}{2}OB$ = 2，

∴ $BD=\sqrt{OB^2-OD^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$，

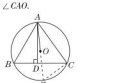
∴ AB = 2BD = 4$\sqrt{3}$.

∵ OA = OB = OC，∠AOB = ∠BOC = ∠AOC，

∴ △AOB≌△BOC≌△AOC，

∴ $S_{\triangle AOB}=S_{\triangle BOC}=S_{\triangle AOC}$，

∴ $S_{\triangle ABC}=3S_{\triangle AOB}=3\times\frac{1}{2}\cdot AB\cdot OD=\frac{3}{2}\times4\sqrt{3}\times2=12\sqrt{3}$.



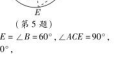
（第 4 题）

5. (1)**证明：**如图，延长AO交⊙O于点E，连接CE，

∴ ∠ACE = 90° = ∠ADB.

又∵ ∠B = ∠E，

∴ ∠BAD = ∠CAO.



（第 5 题）

(2)**解：**∵ ∠E = ∠B = 60°，∠ACE = 90°，

∴ ∠CAE = 30°，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore AE=2CE$.

又 $\because AC^2+CE^2=AE^2, AC=6$,

$\therefore CE=2\sqrt{3}$,

$\therefore AE=2CE=4\sqrt{3}$.

$\therefore OA=2\sqrt{3}$.

6. **证明:** (1) 如图,连接 BD,



(第 6 题)

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore \angle BAD=\angle BCD=90^\circ, AB=AD$,

$\therefore BD$ 为 $\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle BED=\angle BFD=90^\circ$.

$\therefore DF/\!/BE$,

$\therefore \angle EBF=180^\circ-\angle DFB=90^\circ$,

$\therefore \angle BED=\angle EBF=\angle BFD=90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $EBFD$ 是矩形.

(2) 如图,连接 OA,$\because AB=AD$,

$\therefore \angle AOB=\angle AOD=\frac{1}{2}\angle BOD=90^\circ$,

$\therefore \angle AFD=\frac{1}{2}\angle AOD=45^\circ$.

又 $\because$ 四边形 $BEDF$ 是矩形,

$\therefore \angle EDF=90^\circ, BE=DF$,

$\therefore \angle DGF=90^\circ-\angle DFA=45^\circ=\angle DFA$,

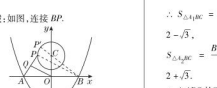
$\therefore DG=DF$,即 $DG=BE$.

24.2 点和圆、直线和圆的位置关系

第 1 课时 点和圆的位置关系

1. A

2. C　**点拨:** 如图,连接 BP.



(第 2 题)

当 $y=0$ 时,$\frac{1}{4}x^2-4=0$,解得 $x_1=4$,

$x_2=-4$,

则 $A(-4,0), B(4,0)$.

$\because Q$ 是线段 PA 的中点,

$\therefore OQ$ 为 $\triangle ABP$ 的中位线.

$\therefore OQ=\frac{1}{2}BP$.

当 BP 最大时,OQ 最大.

而 BP 过圆心 C 时,BP 最大,

即点 P 运动到 P' 位置时,BP 最大.

$\therefore BC=\sqrt{3^2+4^2}=5$,

$\therefore BP'=5+2=7$.

$\therefore$ 线段 OQ 的最大值是 $\frac{7}{2}$.

3. C

4. C　**5.** B　**6.** B　**7.** C

8. $6+3\sqrt{3}$

点拨: 过点 O 作 $OM\perp AC$ 于点 M,延长 MO 交 $\odot O$ 于点 P,

则此时点 P 到 AC 的距离最大,且点 P 到 AC 距离的最大值为 PM.

$\because OM\perp AC, \angle A=\angle BPC=60^\circ, \odot O$ 的半径为 6,

$\therefore \angle AOM=30^\circ, \therefore AM=\frac{1}{2}OA=3$.

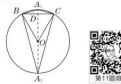
$\therefore OM=3\sqrt{3}$.

$\therefore PM=OP+OM=6+3\sqrt{3}$.

9. D　**10.** D

11. C　**点拨:** 由题意可得,存在两种情况,当 $\triangle ABC$ 为钝角三角形时,如图中的 $\triangle A_1BC$,

当 $\triangle ABC$ 为锐角三角形时,如图中的 $\triangle A_2BC$.



(第 11 题)



第11题解答

连接 A_1A_2,交 BC 于 D.

$\because A_1B=A_1C, A_2B=A_2C$,

$\therefore A_1A_2$ 垂直平分 BC. $\because A_1A_2$ 为 $\odot O$ 的直径,$BD=CD=1$. $\because \angle BOC=60^\circ, OB=OC$,

$\therefore \triangle OBC$ 为等边三角形. $\therefore OB=OC=BC=2$.

$\therefore OD=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$.

$\therefore S_{\triangle A_1BC}=\frac{BC\cdot A_1D}{2}=\frac{2\times(2-\sqrt{3})}{2}=2-\sqrt{3}$,

$S_{\triangle A_2BC}=\frac{BC\cdot A_2D}{2}=\frac{2\times(2+\sqrt{3})}{2}=2+\sqrt{3}$.

$\therefore \triangle ABC$ 的面积为 $2-\sqrt{3}$ 或 $2+\sqrt{3}$.

故选 C.

12. (1) **证明:** $\because AD$ 平分 $\angle BAC$,BE 平分 $\angle ABC$,

$\therefore \angle BAE=\angle CAD, \angle ABE=\angle CBE$,

$\therefore \widehat{BD}=\widehat{CD}$,

$\therefore \angle DBC=\angle BAE$.

$\because \angle BEF=\angle CBE+\angle DBC$,

$\angle DEB=\angle ABE+\angle BAE$,

$\therefore \angle DBE=\angle DEB$,

$\therefore DE=DB$.

(2) **解:** 连接 CD,如图所示.



(第 12 题)

$\because AD$ 平分 $\angle BAC$,

$\therefore \angle BAD=\angle CAD$,

$\therefore \widehat{BD}=\widehat{CD}$.

$\therefore CD=BD=4$.

$\because \angle BAC=90^\circ$,

$\therefore BC$ 是直径,

$\therefore \angle BDC=90^\circ$.

$\therefore BC=\sqrt{BD^2+CD^2}=4\sqrt{2}$,

$\therefore \triangle ABC$ 的外接圆的半径 $=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.

13. (1) **证明:** $\because AB=AC, \angle BAC=90^\circ$,

$\therefore \angle C=\angle ABC=45^\circ$.

$\because \angle AEP=\angle ABP=45^\circ$.

$\therefore PE$ 是 $\odot O$ 的直径,

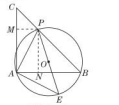
$\therefore \angle PAE=90^\circ$,

$\therefore \angle APE=\angle AEP=45^\circ$.

$\therefore AP=AE$. $\therefore \triangle APE$ 是等腰直角三角形.

(2) **解:** 如图,作 $PM\perp AC$ 于 M,$PN\perp AB$ 于 N,易得四边形 $PMAN$ 是矩形,

$\therefore PM=AN$,易知 $\triangle PCM, \triangle PNB$ 都是等腰直角三角形.



(第 13 题)

$\therefore PC=\sqrt{2}PM, PB=\sqrt{2}PN$.

$\therefore PC^2+PB^2=2(PM^2+PN^2)=2(AN^2+PN^2)=2PA^2=PE^2=2^2=4$.

14. **证明:** $\because AB$ 是直径,

$\therefore \angle ACB=90^\circ$.

$\therefore AB\perp CE, AB$ 是直径,

$\therefore \widehat{AC}=\widehat{AE}$.

又 $\because \widehat{AC}=\widehat{CD}, \therefore \widehat{CD}=\widehat{AE}$.

$\therefore \angle ACP=\angle CAP$.

$\therefore AP=PC$. 又 $\angle QCP+\angle ACP=\angle CAP+\angle CQP=90^\circ$,

$\therefore \angle PCQ=\angle CQP$.

$\therefore CP=PQ$.

$\therefore CP=AP=PQ$,即点 P 是 $\triangle ACQ$ 的外心.

15. (1) **证明:** $\because \triangle ABC$ 为正三角形,

$\therefore \angle ABC=\angle BAC=60^\circ$.

$\therefore \angle APC=\angle BPC=60^\circ$.

$\because PC$ 为 $\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle PAC=\angle PBC=90^\circ$.

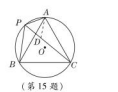
$\therefore \angle ACP=\angle BCP=30^\circ$.

$\therefore AP=BP=\frac{1}{2}PC$.

$\therefore AP+BP=PC$.

(2) **解:** 成立. 证明:如图,在 PC 上取一点 D,使 $PD=PA$,连接 AD.

$\because \angle APD=\angle ABC=60^\circ$,



(第 15 题)

$\therefore \triangle APD$ 为等边三角形.

$\therefore AP=AD, \angle PAD=60^\circ$.

又 $\because \angle BAC=60^\circ$,

$\therefore \angle PAB=\angle DAC$.

又 $\because AP=AD, AB=AC$,

$\therefore \triangle APB\cong\triangle ADC$.

$\therefore PB=DC$.

$\therefore PA+PB=PD+DC=PC$.

第 2 课时 直线和圆的位置关系
——相交、相切、相离

1. C　**2.** A　**3.** B　**4.** D

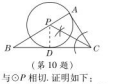
5. C　**6.** C　**7.** A

8. B　**点拨:** 分圆 P 在 y 轴的左侧与 y 轴相切、圆 P 在 y 轴的右侧与 y 轴相切两种情况,根据切线的判定定理解答.

9. (1,1) 或 (3,1) 或 (2,0) 或 (2,2)

点拨: 本题易因考虑圆与哪三条边相切不周而致错.

10. **解:** (1) 如图所示.



(第 10 题)

(2) BC 与 $\odot P$ 相切. 证明如下:

如图,过 P 作 $PD\perp BC$,交 BC 于点 D.

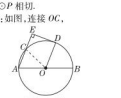
$\because CP$ 为 $\angle ACB$ 的平分线,且 $PA\perp AC$,

$PD\perp CB$,$\therefore PD=PA$.

$\therefore$ 点 P 到 BC 的距离等于 $\odot P$ 的半径.

$\therefore BC$ 与 $\odot P$ 相切.

11. (1) **证明:** 如图,连接 OC,



(第 11 题)

$\because D$ 为 $\widehat{BC}$ 的中点,

$\therefore \widehat{CD}=\widehat{BD}$,

$\therefore \angle BOD=\frac{1}{2}\angle BOC$,

$\therefore \angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC$,

$\therefore \angle A=\angle DOB$.

(2) **解:** DE 与 $\odot O$ 相切.

理由:$\because \angle A=\angle DOB$,

$\therefore AE/\!/OD$.

$\therefore DE\perp AE$,

$\therefore OD\perp DE$,

$\therefore$ 圆心 O 到 DE 的距离等于半径,

$\therefore DE$ 与 $\odot O$ 相切.

12. **解:** (1) 如图①,过 O 点作 $OF\perp AM$ 于点 F,当 $OF=r=2$ 时,$\odot O$ 与 AM 相切,此时 $OA=4$,故 $AD=2$. 即当 $x=2$ 时,$\odot O$ 与 AM 相切.

(第 12 题)

(2) 如图②,过 O 点作 $OG\perp AM$ 于 G,

$\because OB=OC=2, \angle BOC=90^\circ$,

$\therefore BC=2\sqrt{2}$. $\because BG=CG=\sqrt{2}$. $\therefore OG=\sqrt{2}$.

$\because \angle A=30^\circ, \therefore OA=2\sqrt{2}$.

$\therefore AD=2\sqrt{2}-2$. 即当 $x=2\sqrt{2}-2$ 时,$\odot O$ 与 AM 相交于 B, C 两点,且 $\angle BOC=90^\circ$.

13. (1) **解:** 结论:DE 与半圆 O 相切.

理由:$\because CD\perp AD, \therefore \angle D=90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $OABC$ 是矩形,作 $OF\perp AB$ 于点 F,

$\therefore AD/\!/OC, \therefore \angle D=\angle OCE=90^\circ$.

$\therefore CO\perp DE$.

又 $\because CO$ 为半径,

$\therefore DE$ 与半圆 O 相切.

(2) ① **证明:** 如图,连接 OB.

$\because OA=OC$,

$\therefore$ 四边形 $OABC$ 是菱形.

$\therefore OA=OB=AB$.

$\therefore \triangle AOB$ 为等边三角形.

$\therefore \angle BAO=60^\circ$.

$\therefore AD/\!/OC$,

$\therefore \angle COF=\angle BAO=60^\circ$.

$\therefore OC=OF$.

$\therefore \triangle OCF$ 是等边三角形,

$\therefore CF=OC$.

② **解:** 在 $\mathrm{Rt}\triangle OCE$ 中,$\because OC=12, \angle COE=60^\circ, \angle OCE=90^\circ$,

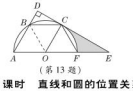
$\therefore OE=2OC=24$. $\therefore EC=12\sqrt{3}$.

$\therefore OF=12$,

$\therefore EF=12$.

则 $\widehat{CF}$ 的长 $=12\times 2\pi\times\frac{60}{360}=4\pi$,

$\therefore$ 阴影部分的周长为 $4\pi+12+12\sqrt{3}$.



(第 13 题)

第 3 课时 直线和圆的位置关系
——切线的判定和性质

1. C　**2.** A　**3.** D

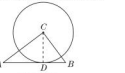
4. $2\sqrt{6}$　**点拨:** 连接 OC,过点 O 作 $OE\perp AB$ 于点 E. 由题意可得四边形 $OEAC$ 为矩形,$\therefore AC=OE, OC=AE$. 根据勾股定理可求解.

5. A　**6.** B　**7.** B　**8.** A

9. A　**点拨:** 由切线的性质得 $AC\perp OD$,由 $AD=\sqrt{3}OD$ 可得 $AO=2OD, \angle A=30^\circ$,

$\therefore AB=3OD=12, \therefore OD=4, AD=4\sqrt{3}$. 由 BD 平分 $\angle ABC$ 可得 $OD/\!/BC, \therefore \angle C=90^\circ$. $\therefore BC=6$. $\therefore AC=6\sqrt{3}$. $\therefore CD=2\sqrt{3}$.

10. B　**点拨:** 如图,设切点为 D,连接 CD.



(第 10 题)

$\because AB$ 是 $\odot C$ 的切线,

$\therefore CD\perp AB$.

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CD$.

在 $\triangle ABC$ 中,$\because AB=5, BC=3, AC=4$,

$\therefore AC^2+BC^2=4^2+3^2=5^2=AB^2$.

$\therefore \angle ACB=90^\circ$.

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}AB\cdot CD$.

$\therefore CD=\frac{AC\cdot BC}{AB}=\frac{4\times 3}{5}=2.4$.

$\therefore \odot C$ 的半径为 2.4,故选 B.

11. (1) **证明:** 如图,连接 OC,

$\because OE/\!/AC$,

$\therefore \angle 1=\angle ACB$.

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle 1=\angle ACB=90^\circ$,

$\because OD\perp BC$,由垂径定理得 OD 垂直平分 BC,

$\therefore DB=DC$,

$\therefore \angle DBE=\angle DCE$.

又 $\because OC=OB$,

$\therefore \angle OBE=\angle OCE$,

即 $\angle DBO=\angle OCD$.

$\because DB$ 为 $\odot O$ 的切线,OB 是半径,

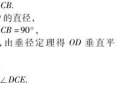
$\therefore \angle DBO=90^\circ$,

$\therefore \angle OCD=\angle DBO=90^\circ$,

即 $OC\perp DC$.

$\because OC$ 是 $\odot O$ 的半径,

$\therefore DC$ 是 $\odot O$ 的切线.



(第 11 题)

(2) **解:** 如图,在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,$\angle BAC=30^\circ$,

$\because \angle 3=60^\circ$,又 $OA=OC$,

$\therefore \triangle AOC$ 是等边三角形.

$\therefore \angle COF=60^\circ, \therefore \angle F=30^\circ$.

$\therefore OF=2OC=8$.

$\therefore CF=4\sqrt{3}$.

12. (1) **证明:** 如图,连接 OD, OA,作 $OF\perp AC$ 于 F,

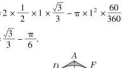
$\because \triangle ABC$ 为等腰三角形,O 是底边 BC 的中点,

$\therefore AO\perp BC, AO$ 平分 $\angle BAC$.

$\therefore AB$ 与 $\odot O$ 相切于点 D,

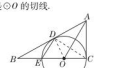
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore OD \perp AB$.
而 $OF \perp AC$,
$\therefore OF = OD$,
$\therefore AC$ 是 $\odot O$ 的切线.
(2)**解**:设 $\odot O$ 的半径为 r,则 $OD = OE = r$. 则 $OB = r + 1$. 在 Rt $\triangle BOD$ 中,$OD^2 + BD^2 = OB^2$,
$\therefore r^2 + (\sqrt{3})^2 = (r+1)^2$,解得 $r = 1$,
$\therefore OD = 1, OB = 2$,
$\therefore \angle B = 30°$,$\therefore \angle BOD = 60°$,
$\therefore \angle AOD = 30°$,
在 Rt $\triangle AOD$ 中,设 $AD = x$,则 $AO = 2x$,根据勾股定理得 $AD^2 + DO^2 = AO^2$,即 $x^2 + 1^2 = (2x)^2$,求得 $x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$(负值舍去),
$\therefore AD = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
在 Rt $\triangle AOD$ 和 Rt $\triangle AOF$ 中,
$OD = OF, OA = OA$,
$\therefore$ Rt $\triangle AOD \cong$ Rt $\triangle AOF$.
$\therefore \angle AOD = \angle AOF = 30°, S_{\triangle AOD} = S_{\triangle AOF}$,
$\therefore \angle DOF = 60°$.
$\therefore$ 阴影部分的面积 $= 2S_{\triangle AOD} - S_{\text{扇形}DOF}$
$= 2 \times \dfrac{1}{2} \times 1 \times \dfrac{\sqrt{3}}{3} - \pi \times 1^2 \times \dfrac{60}{360}$
$= \dfrac{\sqrt{3}}{3} - \dfrac{\pi}{6}$.



(第 12 题)

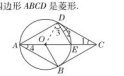
13. (1)**证明**:如图,连接 OD, CD,
$\because OD = OE$,
$\therefore \angle OED = \angle ODE$,
$\because DE // OA$,
$\therefore \angle ODE = \angle AOD, \angle DEO = \angle AOC$,
$\therefore \angle AOD = \angle AOC$,
$\because AC$ 是切线,
$\therefore \angle ACB = 90°$.
在 $\triangle AOD$ 和 $\triangle AOC$ 中,
$\begin{cases} OD = OC, \\ \angle AOD = \angle AOC, \\ OA = OA, \end{cases}$
$\therefore \triangle AOD \cong \triangle AOC$(SAS),
$\therefore \angle ADO = \angle ACB = 90°$,
$\therefore OD$ 是半径,
$\therefore AB$ 是 $\odot O$ 的切线.



(第 13 题)

(2)**解**:$\because BD = 4, EC = 6$,
$\therefore OD = 3$,$\therefore OB = 5$,
$\therefore BE = 2$,
$\therefore BC = BE + EC = 8$.
设 $AD = AC = y$,
在 Rt $\triangle ABC$ 中,$AB^2 = AC^2 + BC^2$,
$\therefore (4 + y)^2 = y^2 + 8^2$,
解得 $y = 6$,
$\therefore AC$ 的长为 6.

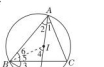
14. **证明**:(1)如图,连接 OD,
$\because CD$ 是 $\odot O$ 的切线,
$\therefore OD \perp CD$,
$\because \angle 2 + \angle 3 = \angle 1 + \angle COD = 90°$.
$\because DE = EC$,
$\therefore \angle 1 = \angle 2$,
$\therefore \angle 3 = \angle COD$,
$\therefore DE = OE$.
(2)$\because OD = OE, DE = OE$,
$\therefore OD = DE = OE$,
$\therefore \triangle ODE$ 是等边三角形,
$\therefore \angle 3 = \angle COD = \angle DEO = 60°$,
$\therefore \angle 2 = \angle 1 = 30°$.
$\because OA = OB = OE, OE = DE = EC$,
$\therefore OA = OB = DE = EC$.
$\because AB // CD$,
$\therefore \angle 4 = \angle 1$,
$\therefore \angle 1 = \angle 2 + \angle 4 = \angle OBA = 30°$,
$\therefore \triangle ABO \cong \triangle CDE$,
$\therefore AB = CD$,
$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.
$\because \angle DAE = \dfrac{1}{2} \angle DOE = 30°$,
$\therefore \angle 1 = \angle DAE$,
$\therefore CD = AD$,
$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形.



(第 14 题)

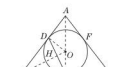
第 4 课时　直线和圆的位置关系
——切线长和三角形的内切圆

1. B　**2**. D　**3**. C　**4**. D
5. C　**6**. A
7. A　**点拨**:连接 BI,如图,
$\because \triangle ABC$ 的内心为 I,
$\therefore \angle 1 = \angle 2, \angle 5 = \angle 6$.
$\because \angle 3 = \angle 1$,
$\therefore \angle 3 = \angle 2$.
$\because \angle 4 = \angle 2 + \angle 6 = \angle 3 + \angle 5$,
$\therefore \angle 4 = \angle DBI$,
$\therefore DI = DB$.



(第 7 题)

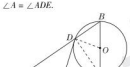
8. D　**点拨**:连接 OA, OE, OD, OB, OB 交 DE 于 H,如图.



(第 8 题)

$\because$ 等腰 $\triangle ABC$ 的内切圆 $\odot O$ 与 AB, BC, CA 分别相切于点 D, E, F,
$\therefore AO$ 平分 $\angle BAC$,$OE \perp BC$,$OD \perp AB$,
$BE = BD$.
$\because AB = AC$,
$\therefore AO \perp BC$,
$\therefore$ 点 A, O, E 共线,
即 $AE \perp BC$,
$\therefore BE = CE = 3$.
$\therefore$ 在 Rt $\triangle ABE$ 中,$AE = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$.
$\because BD = BE = 3$,
$\therefore AD = 2$.
设 $\odot O$ 的半径为 r,则 $OD = OE = r, AO = 4 - r$,
在 Rt $\triangle AOD$ 中,$r^2 + 2^2 = (4 - r)^2$,
解得 $r = \dfrac{3}{2}$,
在 Rt $\triangle BOE$ 中,$OB = \sqrt{3^2 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2} = \dfrac{3\sqrt{5}}{2}$.
$\because BE = BD, OE = OD$,
$\therefore OB$ 垂直平分 DE,
$\therefore DH = EH, OB \perp DE$.
易知 $\dfrac{1}{2} HE \cdot OB = \dfrac{1}{2} OE \cdot BE$,
$\therefore HE = \dfrac{OE \cdot BE}{OB} = \dfrac{\frac{3}{2} \times 3}{\frac{3\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{5}$,
$\therefore DE = 2EH = \dfrac{6\sqrt{5}}{5}$.

9. C
10. (1)**证明**:如图,连接 OD,
$\because DE$ 是 $\odot O$ 的切线,
$\therefore \angle ODE = 90°$.
$\because \angle ADE + \angle BDO = 90°$.
$\because \angle ACB = 90°$,
$\therefore \angle A + \angle B = 90°$.
$\because OD = OB$,
$\therefore \angle B = \angle BDO$.
$\therefore \angle A = \angle ADE$.

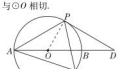


(第 10 题)

(2)**解**:如图,连接 CD.
$\because \angle ADE = \angle A$,
$\therefore AE = DE$.
$\because BC$ 是 $\odot O$ 的直径,$\angle ACB = 90°$,
$\therefore EC$ 是 $\odot O$ 的切线.
$\therefore ED = EC$.
$\therefore AE = EC = DE$.
$\because DE = 10$,
$\therefore AC = 2DE = 20$.
$\because BC$ 是 $\odot O$ 的直径,
$\therefore \angle BDC = \angle ADC = 90°$.
在 Rt $\triangle ADC$ 中,$DC = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12$,
设 $BD = x$,在 Rt $\triangle BDC$ 中,$BC^2 = x^2 + 12^2$,在 Rt $\triangle ABC$ 中,$BC^2 = (x + 16)^2 - 20^2$,
$\therefore x^2 + 12^2 = (x + 16)^2 - 20^2$,解得 $x = 9$.
$\therefore BC = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15$.

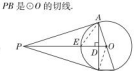
11. **解**:(1)$\because PA$ 切 $\odot O$ 于点 A, PB 切 $\odot O$ 于点 B,
$\therefore PA = PB, \angle PAC = 90°$.
$\because \angle APB = 60°$,$\therefore \triangle APB$ 是等边三角形,
$\therefore \angle BAP = 60°$,
$\therefore \angle BAC = 90° - \angle BAP = 30°$.
(2)作 $OD \perp AB$ 于 D,
则 $AD = BD = \dfrac{1}{2} AB$.
由(1)得 $\triangle APB$ 是等边三角形,
$\therefore AB = PA = 1$,$\therefore AD = \dfrac{1}{2}$.
$\because \angle BAC = 30°$,$\therefore AO = 2OD$,
$\therefore OD^2 + AD^2 = (2OD)^2$,
$\therefore OD = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$,
即点 O 到弦 AB 的距离为 $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

12. **证明**:(1)连接 OB,如图.
$\because AO = BO, AB \perp PO$,
$\therefore \angle AOP = 2 \angle ACP = 120°$.
$\because OA = OP$,$\therefore \angle OAP = \angle OPA = 30°$.
$\because PA = PD$,$\therefore \angle OAP = \angle D = 30°$,
$\therefore \angle OPB = 180° - \angle OAP - \angle OPA - \angle B = 90°$,即 $OP \perp PD$.
又$\because OP$ 是半径,
$\therefore PD$ 与 $\odot O$ 相切.



(第 2 题)

3. **证明**:如图,连接 OE, CE,$\because AC$ 是 $\odot O$ 的直径,
$\therefore \angle AEC = 90°$,
$\therefore \angle BEC = 180° - \angle AEC = 90°$.
在 Rt $\triangle BEC$ 中,点 D 是斜边 BC 的中点,
$\therefore BD = CD = DE = \dfrac{1}{2} BC$,
$\therefore \angle DEC = \angle DCE$.
又$\because OE = OC$,
$\therefore \angle OEC = \angle OCE$,
$\therefore \angle DEC + \angle OEC = \angle DCE + \angle OCE = \angle DCO = 90°$,即 $\angle DEO = 90°$,
$\therefore DE \perp OE$.
又$\because OE$ 是半径,
$\therefore DE$ 是 $\odot O$ 的切线.

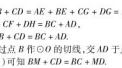


(第 12 题)

(2)连接 AE,如图.
$\because PA$ 为 $\odot O$ 的切线,
$\therefore \angle PAE + \angle OAE = 90°$.
$\because AD \perp ED$,$\therefore \angle EAD + \angle AED = 90°$.
$\because OE = OA$,$\therefore \angle OAE = \angle AED$,
$\therefore \angle PAE = \angle DAE$,即 AE 平分 $\angle PAD$.
$\because PA, PB$ 为 $\odot O$ 的切线,
$\therefore PD$ 平分 $\angle APB$ 交 $\angle PAD$ 的平分线于 E,
$\therefore E$ 为 $\triangle PAB$ 的内心.
13. **解**:(1)由切线长定理,得 $AE = AH$,
$BE = BF, CF = CG, DG = DH$,
$\therefore AB + CD = AE + BE + CG + DG = AH + BF + CF + DH = BC + AD$,
即 $AB + CD = BC + AD$.
(2)过点 B 作 $\odot O$ 的切线,交 AD 于点 M.
由(1)可知 $BM + CD = BC + MD$.
$\therefore AB < AM + BM$,
$\therefore AB + BM + CD < AM + BM + BC + MD$,
即 $AB + CD < BC + AD$.

阶段核心方法

1. **证明**:如图,连接 OC,

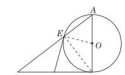


(第 1 题)

$\because \odot O$ 的直径 $AB = 12$,
$\therefore OB = OC = 6$.
$\because PB = 4$,$\therefore PO = 10$.
在 $\triangle POC$ 中,$PC^2 + OC^2 = 8^2 + 6^2 = 100$,
$PO^2 = 10^2 = 100$,
$\therefore PC^2 + OC^2 = PO^2$,
$\therefore \angle OCP = 90°$,
即 $OC \perp PC$. 又$\because OC$ 是半径,$\therefore PC$ 是 $\odot O$ 的切线.
2. **解**:PD 与 $\odot O$ 相切,理由如下:如图,连接 PO,
$\because \overset{\frown}{AP} = \overset{\frown}{AP}$,
$\therefore \angle AOP = 2 \angle ACP = 120°$.
$\therefore \angle OAP = \angle OPA = 30°$.
$\because PA = PD$,$\therefore \angle DAP = \angle D = 30°$,
$\therefore \angle OPD = 180° - \angle OAP - \angle OPA - \angle D = 90°$,即 $OP \perp PD$.
又$\because OP$ 是半径,
$\therefore PD$ 与 $\odot O$ 相切.

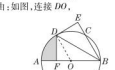
(第 2 题)

3. **证明**:如图,连接 OE, CE,$\because AC$ 是 $\odot O$ 的直径,
$\therefore \angle AEC = 90°$,
$\therefore \angle BEC = 180° - \angle AEC = 90°$.
在 Rt $\triangle BEC$ 中,点 D 是斜边 BC 的中点,
$\therefore BD = CD = DE = \dfrac{1}{2} BC$,
$\therefore \angle DEC = \angle DCE$.
又$\because OE = OC$,
$\therefore \angle OEC = \angle OCE$,
$\therefore \angle DEC + \angle OEC = \angle DCE + \angle OCE = \angle DCO = 90°$,即 $\angle DEO = 90°$,
$\therefore DE \perp OE$.
又$\because OE$ 是半径,
$\therefore DE$ 是 $\odot O$ 的切线.



(第 3 题)

4. **解**:(1)DE 与 $\odot O$ 相切.
理由:如图,连接 DO,



(第 4 题)

$\because DO = BO$,
$\therefore \angle ODB = \angle OBD$.
$\because \angle ABC$ 的平分线交 $\odot O$ 于点 D,
$\therefore \angle EBD = \angle DBO$,
$\therefore \angle EBD = \angle BDO$,
$\therefore DO // BE$.
$\because DE \perp BC, \therefore \angle DEB = 90°$,
$\therefore \angle EDO = 90°$,即 $OD \perp DE$.
又$\because OD$ 是半径,$\therefore DE$ 与 $\odot O$ 相切.
(2)$\because \angle ABC$ 的平分线交 $\odot O$ 于点 D,
$DE \perp BE, DF \perp AB$,
$\therefore DE = DF = 3$.
$\because BE = 3\sqrt{3}$,
$\therefore BD = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{3})^2} = 6$,
$\therefore DE = \dfrac{1}{2} BD$,
$\therefore \angle DBE = \angle DBA = 30°$,
$\therefore \angle DOF = 60°$,
$\therefore \angle ODF = 30°$,$\therefore OD = 2OF$.
又$\because DF^2 + OF^2 = OD^2$,
$\therefore OF = \sqrt{3}$,则 $OD = 2\sqrt{3}$.
故图中阴影部分的面积为 $\dfrac{60}{360} \times \pi \times (2\sqrt{3})^2 - \dfrac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 3 = 2\pi - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

5. (1)**证明**:如图,连接 OC,$\because PB$ 是 $\odot O$ 的切线,$\therefore \angle OBP = 90°$.
$\because OA = OC, \therefore \angle OAC = \angle OCA$.
$\because AC // OP$,
$\therefore \angle OAC = \angle POB, \angle POC = \angle OCA$.
$\therefore \angle POB = \angle POC$.
$\because OC = OB, OP = OP, \therefore \triangle POC \cong \triangle POB$.
$\therefore \angle OBP = \angle OCP = 90°$.
即 $OC \perp PC$. 又$\because OC$ 是半径,
$\therefore PC$ 是 $\odot O$ 的切线.

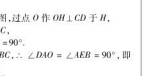


(第 5 题)

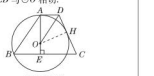
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)解：∵ $AB=4$，∴ $OB=2$.
∵ $\angle A=60°$，$\angle POB=\angle A$，
∴ $\angle POB=60°$. 在 Rt△POB 中，$\angle OPB=90°-\angle POB=30°$，∴ $PO=2OB=4$，
∴ $PB=\sqrt{OP^2-BO^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$.
∵ PB，PC 切⊙O 于 B，C，∴ $PC=PB=2\sqrt{3}$.

6. 证明：如图，过点 O 作 $OH\perp CD$ 于 H，
∵ $AE\perp BC$，
∴ $\angle AEB=90°$.
∵ $AD\parallel BC$，∴ $\angle DAO=\angle AEB=90°$，即 $OA\perp DA$.
∵ DO 平分 $\angle ADC$，$OH\perp DC$，$OA\perp DA$，
∴ $OH=OA$. 又∵ $OH\perp DC$，∴ DC 是⊙O 的切线，即 CD 与⊙O 相切.


（第 6 题）

7. 证明：如图所示，连接 OE，OA，OC，过点 O 作 $OF\perp CD$ 于 F.

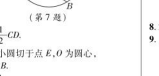

（第 7 题）

∴ $CF=\frac{1}{2}CD$.
∵ AB 与小圆切于点 E，O 为圆心，
∴ $OE\perp AB$.
∴ $AE=\frac{1}{2}AB$.
又∵ $AB=CD$，∴ $AE=CF$.
在 Rt△AEO 和 Rt△CFO 中，
$AE=CF$，$AO=CO$，
∴ Rt△AEO≌Rt△CFO，
∴ $OE=OF$.
∴ CD 是小圆的切线.

24.3 正多边形和圆

1. B

2. C　**点拨**：如图，连接 AC，

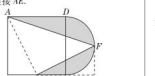

（第 2 题）

设正方形的边长为 a，
∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，
∴ $\angle B=90°$，
∴ AC 为⊙O 的直径，
易得 $AC=\sqrt{2}a$，
则正方形桌面与翻折成的圆形桌面的面积之比为 $\frac{a^2}{\pi\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2}=\frac{2}{\pi}\approx\frac{2}{3}$.

3. B　**4.** D　**5.** C

6. A

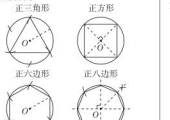
7. C　**点拨**：如图，作 $FH\perp BC$ 交 BC 延长线于 H，连接 AE.


（第 7 题）

∵ 四边形 $ABCD$ 为正方形，$AB=12$，点 E 为 BC 的中点，点 F 为半圆的中点，
∴ $BE=CE=CH=FH=6$，
∴ $AE=\sqrt{6^2+12^2}=6\sqrt{5}$.
易得△ABE≌△EHF，
∴ $AE=EF=6\sqrt{5}$，$\angle AEB=\angle EFH$.
而 $\angle EFH+\angle FEH=90°$，
∴ $\angle AEB+\angle FEH=90°$，
∴ $\angle AEF=90°$.
∴ 图中阴影部分的面积 $=S_{正方形ABCD}+S_{半圆形}-S_{△ABE}-S_{△AEF}=12\times12+\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot6^2-\frac{1}{2}\times12\times6-\frac{1}{2}\times6\sqrt{5}\times6\sqrt{5}=18+18\pi$.
故选 C.

8. $2\sqrt{3}$

9. 解：如图所示.



（第 9 题）

10. 错解：B
诊断：设正多边形的边数为 n. 因为正多边形内角和为 $(n-2)\cdot180°$，正多边形外角和为 360°，根据题意得 $(n-2)\cdot180°=360°\times2$，解得 $n=6$，故正多边形为正六边形. 边长为 2 的正六边形可以分成六个边长为 2 的正三角形，所以正多边形的半径等于 2. 产生错误的原因是认为正多边形的边心距即是正多边形的半径，计算得出错误的结果.
正解：A

11. (1) 证明：∵ 六边形 $ABCDEF$ 为正六边形，
∴ $AB=BC$，$\angle ABC=\angle C=120°$.
在△ABG 与△BCH 中，

$$\begin{cases}AB=BC,\\ \angle ABG=\angle C,\\ BG=CH,\end{cases}$$

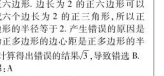
∴ △ABG≌△BCH.
(2)解：由(1)知△ABG≌△BCH，
∴ $\angle BAG=\angle HBC$.
∵ $\angle APH=\angle ABP+\angle BAG=\angle ABP+\angle HBC=\angle ABC=120°$.

12. 解：(1) 如图，首先作直径 AD，然后分别以 A，D 为圆心，OA 长为半径画弧，分别交⊙O 于点 B，F，C，E，连接 AB，BC，CD，DE，EF，AF，则正六边形 $ABCDEF$ 即为所求.

(2) 四边形 $BCEF$ 是矩形.
证明：如图，
∵ 六边形 $ABCDEF$ 是正六边形，
∴ $\angle DEF=\angle EDC=\frac{180°\times(6-2)}{6}=120°$，
$AB=AF=DE=DC=FE=BC$.
∵ $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AF}=\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{DC}$.
∴ $\overset{\frown}{BF}=\overset{\frown}{CE}$. ∴ $BF=CE$.
∴ 四边形 $BCEF$ 是平行四边形.
又∵ $DE=DC$，
∴ $\angle DEC=\angle DCE=30°$.
∴ $\angle CEF=\angle DEF-\angle DEC=90°$.
∴ 四边形 $BCEF$ 是矩形.

（第 12 题）

13. (1) 证明：连接 OF，如图.
∵ 在正六边形 $ABCDEF$ 中，$AB=AF=EF$，
∴ $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AF}=\overset{\frown}{EF}$，
又∵ $\angle BAF=\frac{(6-2)\times180°}{6}=120°$，
∴ $\angle ABF=\angle AFB=\angle EBF=30°$.
∵ $OB=OF$，
∴ $\angle OBF=\angle BFO=30°$，
∴ $\angle ABF=\angle OFB$，
∴ $AB\parallel OF$.
∵ $FG\perp BA$，
∴ $OF\perp FG$.
又∵ OF 是半径，
∴ FG 是⊙O 的切线.


（第 13 题）

(2)解：连接 AO，如图.
∵ $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AF}=\overset{\frown}{EF}$，
∴ $\angle AOF=60°$.
∵ $OA=OF$，
∴ △AOF 是等边三角形，
∵ $AF=OA=OF$，$\angle AFO=60°$.
∵ $\angle GFO=90°$，
∴ $\angle AFG=30°$. ∴ $AG=\frac{1}{2}AF$.
∵ $FG=2\sqrt{3}$，$AG^2+FG^2=AF^2$，
∴ $AF=4$，
∴ $AO=4$. ∵ $\angle AFB=\angle FBE$，
∴ $AF\parallel BE$，
∴ $S_{△ABF}=S_{△AOF}$，
∴ 图中阴影部分的面积为 $\frac{60}{360}\times\pi\times4^2=\frac{8\pi}{3}$.

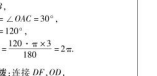
14. 解：(1) 60°　(2) 90°；108°
(3) $\angle APN=\frac{(n-2)\cdot180°}{n}$.

24.4 弧长和扇形面积

第 1 课时　弧长和扇形面积

1. C　**2.** D

3. C　**点拨**：如图，连接 OA，OB，作 $OC\perp AB$ 于 C，

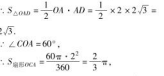

（第 3 题）

由题意得 $OC=\frac{1}{2}OA$，
∴ $\angle OAC=30°$.
∵ $OA=OB$，
∴ $\angle OBA=\angle OAC=30°$，
∴ $\angle AOB=120°$，
∴ $\overset{\frown}{AB}$ 的长 $=\frac{120\times\pi\times3}{180}=2\pi$.

4. $\frac{4}{3}\pi$　**点拨**：连接 DF，OD，
∵ CF 是⊙O 的直径，∴ $\angle CDF=90°$.
∵ $\angle ADC=60°$，$\angle A=90°$，
∴ $\angle ACD=30°$.
∵ CD 平分 $\angle ACB$ 交 AB 于点 D，
∴ $\angle DCF=30°$. ∵ $OC=OD$，
∴ $\angle OCD=\angle ODC=30°$，
∴ $\angle COD=120°$.
∵ 在 Rt△CAD 中，$CD=2AD=2\sqrt{3}$，
在 Rt △FCD 中，$CF=2DF$，$CF^2=CD^2+DF^2$，
∴ $CF=4$.
∴ ⊙O 的半径为 2，
∴ 劣弧 CD 的长 $=\frac{120\pi\times2}{180}=\frac{4}{3}\pi$.

5. C

6. A　**点拨**：如图，连接 OD，作 $DE\perp AB$ 于 E.
∵ 在 Rt△ABC 中，$\angle ABC=90°$，$AB=2\sqrt{3}$，$BC=2$，
∴ $AC=4$，
∴ $\angle BAC=30°$，
∴ $\angle DOB=60°$.
易知 $OD=\sqrt{3}$，$DE=\frac{3}{2}$，
∴ 阴影部分的面积是 $\frac{2\sqrt{3}\times2}{2}-\frac{\sqrt{3}\times\frac{3}{2}}{2}-\frac{60\times\pi\times(\sqrt{3})^2}{360}=\frac{5\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{2}$.


（第 6 题）

7. C　**8.** B

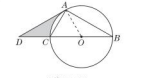
9. $\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{4}$　**点拨**：图中阴影部分的面积 $=S_{△ABC}-S_{扇形ADE}-S_{△CEF}-(S_{△BCD}-S_{扇形CDF})$.

10. 解：∵ $\overset{\frown}{AB}$ 所对的圆周角为 30°，
∴ $\overset{\frown}{AB}$ 所对的圆心角为 60°，
∴ $\overset{\frown}{AB}$ 的长 $l=\frac{60\times\pi\times30}{180}=10\pi$(cm).

第10题答案

易错总结：在公式 $l=\frac{n\pi R}{180}$，$S_{扇形}=\frac{n\pi R^2}{360}$ 中，n° 是圆心角的度数，而题干给出的是圆周角的度数，不能直接代入公式计算，要求出圆心角的度数后再代入公式计算.
本题易错解为 $l=\frac{30\times\pi\times30}{180}=5\pi$(cm).

11. (1) 证明：如图，连接 OA，则 $\angle COA=2\angle B$.

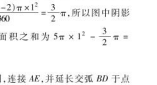

（第 11 题）

∵ $AD=AB$，$\angle D=30°$，
∴ $\angle B=\angle D=30°$，
∴ $\angle COA=60°$，
∴ $\angle OAD=180°-60°-30°=90°$，
∴ $OA\perp AD$.
又∵ OA 是半径，
∴ 直线 AD 是⊙O 的切线.
(2)解：∵ $BC=4$，∴ $OA=OC=2$.
在 Rt△OAD 中，$OA=2$，$\angle D=30°$，
∴ $OD=2OA=4$，∴ $AD=2\sqrt{3}$，
∴ $S_{△OAD}=\frac{1}{2}OA\cdot AD=\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$.
∵ $\angle COA=60°$，
∴ $S_{扇形OCA}=\frac{60\pi\cdot2^2}{360}=\frac{2}{3}\pi$，
∴ $S_{阴影}=S_{△OAD}-S_{扇形OCA}=2\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3}$.

点拨：计算不规则图形的面积时，常常通过**割补法**将不规则图形的面积转化为几个规则图形面积的和或差的形式.

12. C　**点拨**：本题运用**整体思想**，五个圆的空白部分的面积之和 $S=\frac{180\times(5-2)\pi\times1^2}{360}=\frac{3}{2}\pi$，所以图中阴影部分的面积之和为 $5\pi\times1^2-\frac{3}{2}\pi=\frac{7}{2}\pi$.

13. 解：如图，连接 AE，并延长交弧 BD 于点 F，连接 BE. 由轴对称的性质可知 $S_{扇形ABF}=S_{扇形ADF}$，$S_1=S_2=S_4$，$S_3=S_4$.

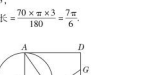

（第 13 题）

易知 $\angle BAE=\angle DAE=45°$，∴ $S_{扇形ABF}=\frac{45\pi a^2}{360}=\frac{\pi a^2}{8}$.
又∵ $S_{半圆形AB}=\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{\pi a^2}{8}$，
∴ $S_{半圆形AB}=S_{扇形ABF}$.
∴ $S_1=S_4=S_2=S_3=S_5$.
又∵ $S_1+S_3=S_{半圆形AB}-S_{△ABE}=\frac{\pi a^2}{8}-\frac{a^2}{4}$，
∴ $S_{阴影}=S_1+S_2+S_3+S_4=2(S_1+S_2)=2\left(\frac{\pi a^2}{8}-\frac{a^2}{4}\right)=\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)a^2$.

14. (1) 证明：∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，AB 为⊙O 的直径，
∴ $\angle ABF=\angle BCG=\angle AFB=90°$，$AB=BC$，
∴ $\angle BAF+\angle ABF=90°$，$\angle ABF+\angle EBF=90°$，
∴ $\angle BAF=\angle EBF$.
在△ABE 与△BCG 中，

$$\begin{cases}\angle BAE=\angle CBG,\\ AB=BC,\\ \angle ABE=\angle BCG,\end{cases}$$

∴ △ABE≌△BCG.
(2)解：连接 OF，如图.
∵ $\angle ABE=90°$，$\angle AEB=55°$，
∴ $\angle BAE=90°-55°=35°$，
∴ $\angle BOF=2\angle BAE=70°$.
∵ $OA=3$，
∴ $\overset{\frown}{BF}$ 的长 $=\frac{70\times\pi\times3}{180}=\frac{7\pi}{6}$


（第 14 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

15. (1)**证明**:连接 OB,交 CA 于 E,如图.

$\because \angle C=30°$,

$\therefore \angle BOA=60°$.

$\because OA=OC=30$,

$\therefore \angle AEO=90°$.

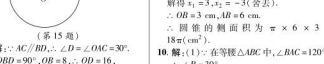
$\because BD/\!/AC$,

$\therefore \angle DBE=\angle AEO=90°$,

$\therefore OB\perp BD$.

又$\because OB$ 是半径,

$\therefore BD$ 是$\odot O$ 的切线.



(第 15 题)

(2)**解**:$\because AC/\!/BD$,$\therefore \angle D=\angle OAC=30°$.

$\because OBD=90°$,$OB=8$,$\therefore OD=16$,

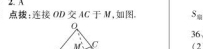
$\therefore BD=8\sqrt{3}$,

$\therefore S_{\text{阴影}}=S_{\triangle BDO}-S_{\text{扇形}OAB}=\frac{1}{2}\times 8\times 8\sqrt{3}-\frac{60\times\pi\times 8^2}{360}=32\sqrt{3}-\frac{32\pi}{3}$.

第 2 课时　圆锥的侧面积和全面积

1. A　**2.** A

3. D　**点拨**:连接 OD 交 AC 于 M,如图.



(第 3 题)

由折叠的知识可得,$OM=\frac{1}{2}OD=\frac{1}{2}\text{-}OA$,

$\angle OMA=90°$,

$\therefore \angle OAM=30°$,$\therefore \angle AOM=60°$.

$\because \overset{\frown}{BD}:\overset{\frown}{AD}=1:3$,

$\therefore \angle AOB=80°$.

设圆锥的底面半径为 r,母线长为 l,

则 $\frac{80\pi l}{180}=2\pi r$,

$\therefore r:l=2:9$.

4. D　**5.** A　**6.** B

7. D　**点拨**:$\because \angle A=90°$,$AB=AD$,

$\therefore \triangle ABD$ 为等腰直角三角形,

$\therefore \angle ABD=45°$,$BD=\sqrt{2}AB$.

$\because \angle ABC=105°$,$\therefore \angle DBC=60°$,

而 $CB=CD$,

$\therefore \triangle CBD$ 为等边三角形,

$\therefore BC=BD=\sqrt{2}AB$.

上面圆锥和下面圆锥的底面相同,

上面圆锥的侧面积与下面圆锥的侧面积的比等于 $AB:CB$,

下面圆锥的侧面积 $=\sqrt{2}\times 1=\sqrt{2}$.

8. 错解:B

诊断:误认为以斜边所在的直线为轴将直角三角形旋转一周所形成的几何体的表面积是两个共底面的圆锥的侧面积与一个底面积之和.

正解:C

9. **解**:(1)设此圆锥的底面半径为 r cm,母线长 $AB=l$ cm.

$\because 2\pi r=\pi l$,

$\therefore l=2r$,即 $l:r=2:1$.

$\therefore$ 圆锥的母线长与底面半径之比为 $2:1$.

(2)由(1)知 $AB=AC=2BO=2CO$.

$\therefore AB=AC=BC$.

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形.

$\therefore \angle BAC=60°$.

(3)设 $OB=x$ cm,则 $AB=2x$ cm. 由题意得 $x^2+(3\sqrt{3})^2=(2x)^2$.

解得 $x_1=3$,$x_2=-3$(舍去).

$\therefore OB=3$ cm,$AB=6$ cm.

$\therefore$ 圆锥的侧面积为 $\pi\times 6\times 3=18\pi(\text{cm}^2)$.

10. **解**:(1)$\because$ 在等腰 $\triangle ABC$ 中,$\angle BAC=120°$,

$\therefore \angle B=30°$,

$\because AD$ 是 $\angle BAC$ 的平分线,

$\therefore AD\perp BC$,$BD=CD$,$\angle AB=2AD=12$,

$\therefore BD=6\sqrt{3}$,

$\therefore BC=2BD=12\sqrt{3}$,

$\therefore$ 由弧 EF 及线段 FC,CB,BE 围成图形(图中阴影部分)的面积 $=S_{\triangle ABC}-S_{\text{扇形}AEF}=\frac{1}{2}\times 6\times 12\sqrt{3}-\frac{120\cdot\pi\cdot 6^2}{360}=36\sqrt{3}-12\pi$.

(2)设圆锥的底面圆的半径为 r,

根据题意得 $2\pi r=\frac{120\cdot\pi\cdot 6}{180}$,解得 $r=2$,

又$\because h^2+r^2=AD^2$,

$\therefore$ 这个圆锥的高 $h=4\sqrt{2}$.

11. (1)**证明**:在正方形 $ABCD$ 中,$AB=BC=AD=2$,$\angle ABC=90°$.

$\because \triangle BEC$ 绕点 B 逆时针旋转 $90°$ 得到 $\triangle BFA$,

$\therefore \triangle ABF\cong\triangle CBE$.

$\therefore \angle FAB=\angle ECB$,$\angle ABF=\angle CBE=90°$,$AF=CE$.

$\therefore \angle AFB+\angle FAB=90°$.

$\therefore$ 线段 FA 绕点 F 顺时针旋转 $90°$ 得线段 FG,

$\therefore \angle AFB+\angle CFG=\angle AFG=90°$.

$\therefore \angle CFG=\angle FAB=\angle ECB$.$\therefore EC/\!/FG$.

$\because AF=CE$,$AF=FG$.$\therefore EC=FG$.

$\therefore$ 四边形 $EFGC$ 是平行四边形.

$\therefore EF/\!/CG$.

(2)**解**:由(1)知 $\triangle ABF\cong\triangle CBE$,

$\therefore BF=BE$.

$\because AB=AD=2$,E 是 AB 的中点,

$\therefore BF=BE=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 2=1$.

$\therefore AF=\sqrt{AB^2+BF^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$.

由平行四边形的性质得,$\triangle FEC\cong\triangle CGF$,$\therefore S_{\triangle FEC}=S_{\triangle CGF}$.

$\therefore S_{\text{阴影}}=S_{\text{扇形}BAC}+S_{\triangle ABF}+S_{\triangle FGC}-S_{\text{扇形}FAG}=\frac{90\cdot\pi\cdot 2^2}{360}+\frac{1}{2}\times 2\times 1+\frac{1}{2}\times(1+2)\times 1-\frac{90\cdot\pi\cdot(\sqrt{5})^2}{360}=\frac{5}{2}-\frac{\pi}{4}$.

12. **解**:(1)如图,连接 AO 并延长,分别交扇形 ABC,$\odot O$ 于点 E,F.

$\because BC$ 是 $\odot O$ 的直径,$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$,

$\therefore \angle BAC=90°$,$AB=AC$,$AF\perp BC$.

当 $\odot O$ 的半径为 2 时,易得 $AC=AB=2\sqrt{2}$,

$\therefore S_{\text{阴影}}=\frac{90\pi\cdot(2\sqrt{2})^2}{360}=2\pi$.

(2)不能. 理由如下:

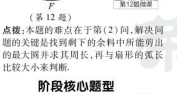
当 $\odot O$ 的半径为 $R(R>0)$ 时,易得 $AC=AB=\sqrt{2}R$.

则阴影部分扇形的弧长为 $\frac{90\pi\cdot\sqrt{2}R}{180}=\frac{\sqrt{2}}{2}R\pi$,$EF=2R-\sqrt{2}R$.

如图,以 EF 为直径作圆,是在第③块余料中所作的最大的圆,其圆的周长为 $(2-\sqrt{2})R\pi$.

$\because \frac{\sqrt{2}}{2}R\pi>(2-\sqrt{2})R\pi$,

$\therefore$ 不能从第③块余料中剪出一个圆作为底面与此扇形围成一个圆锥.



(第 12 题)

第12题视频

点拨:本题的难点在于第(2)问,解决问题的关键是找到剩下的余料中所能剪出的最大圆并求其周长,再与扇形的弧长比较大小来判断.

阶段核心题型

1. (1)**证明**:$\because AB$,CD 是直径,

$\therefore \angle ADB=\angle CBD=90°$.

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 和 $\text{Rt}\triangle CDB$ 中,$\begin{cases}AB=CD,\\BD=DB.\end{cases}$

$\therefore \text{Rt}\triangle ABD\cong\text{Rt}\triangle CDB(\text{HL})$.

(2)**解**:$\because BE$ 是 $\odot O$ 的切线,

$\therefore AB\perp BE$.

$\therefore \angle ABE=90°$.

$\therefore \angle DBE=37°$,

$\therefore \angle ABD=53°$.

$\because OD=OA$,

$\therefore \angle ODA=\angle BAD=90°-53°=37°$.

即 $\angle ADC$ 的度数为 $37°$.

2. A

3. (1)**证明**:$\because AD$ 平分 $\angle BAC$,

$\therefore \angle BAD=\angle CAD$.

又$\because \angle CBD=\angle CAD$,$\therefore \angle BAD=\angle CBD$.

(2)**解**:$\because \angle AEB=125°$,$\therefore \angle AEC=55°$.

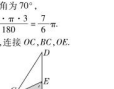
$\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径,$\therefore \angle ACE=90°$,

$\therefore \angle CAE=35°$,$\therefore \angle DAB=35°$,

$\because \overset{\frown}{BD}$ 所对圆心角为 $70°$,

$\therefore \overset{\frown}{BD}$ 的长为 $\frac{70\cdot\pi\cdot 3}{180}=\frac{7}{6}\pi$.

4. (1)**证明**:如图,连接 OC,BC,OE.



(第 4 题)

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,$\therefore \angle ACB=90°$.

$\because \angle BCD=90°$.

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中,点 E 是 BD 的中点,

$\therefore CE=BE$.

又$\because OB=OC$,$OE=OE$,$\therefore \triangle OBE\cong\triangle OCE$.

$\therefore BD$ 是 $\odot O$ 的切线,

$\therefore \angle OBE=\angle OCE=90°$,即 $OC\perp CE$.

又$\because OC$ 是半径,

$\therefore EC$ 是 $\odot O$ 的切线.

(2)**解**:$\because \angle D=30°$,$\angle DBO=90°$,

$\therefore \angle A=60°$,$\angle BOC=120°$.

$\therefore AB=4\sqrt{3}$,

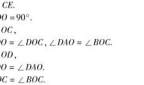
$\therefore AD=8\sqrt{3}$,$OB=2\sqrt{3}$,$\therefore BD=12$,

$\therefore BE=6$,

$\therefore S_{\text{阴影}}=2\times\frac{1}{2}\times 6\times 2\sqrt{3}-\frac{120\times\pi\times(2\sqrt{3})^2}{360}=12\sqrt{3}-4\pi$.

点拨:本题运用**作差法**,通过作辅助线,将阴影部分的面积转化为四边形 $OBEC$ 与扇形 OBC 的面积之差求解.

5. (1)**证明**:如图,连接 OD,与 AF 相交于点 G,



(第 5 题)

$\because CE$ 与 $\odot O$ 相切于点 D,

$\therefore OD\perp CE$.

$\therefore \angle CDO=90°$.

$\because AD/\!/OC$,

$\therefore \angle ADO=\angle DOC$,$\angle DAO=\angle BOC$.

$\because OA=OD$,

$\therefore \angle ADO=\angle DAO$.

$\therefore \angle DOC=\angle BOC$.

在 $\triangle CDO$ 和 $\triangle CBO$ 中,

$\begin{cases}CO=CO,\\\angle DOC=\angle BOC,\\OD=OB,\end{cases}$

$\therefore \triangle CDO\cong\triangle CBO$.

$\therefore \angle CBO=\angle CDO=90°$,即 $OB\perp BC$.

又$\because OB$ 是半径,$\therefore CB$ 是 $\odot O$ 的切线.

(2)**解**:由(1)可知 $\angle DOC=\angle BOC$,$\angle DCO=\angle BCO$.

$\because \angle ECB=60°$,

$\therefore \angle DCO=\angle BCO=\frac{1}{2}\angle ECB=30°$.

$\therefore \angle DOC=\angle BOC=60°$.

$\therefore \angle DOA=60°$.

$\because OA=OD$,

$\therefore \triangle OAD$ 是等边三角形.

$\therefore AD=OD=OF$.

由(1)可知 $\angle GOF=\angle GDA$.

在 $\triangle FOG$ 和 $\triangle ADG$ 中,

$\begin{cases}\angle GOF=\angle GDA,\\\angle FGO=\angle AGD,\\OF=DA,\end{cases}$

$\therefore \triangle FOG\cong\triangle ADG$.

$\therefore S_{\triangle AOG}=S_{\triangle FOG}$.

$\therefore AB=6$,

$\therefore \odot O$ 的半径 $=3$.

$\therefore S_{\text{阴影}}=S_{\text{扇形}OBF}=\frac{60\pi\times 3^2}{360}=\frac{3}{2}\pi$.

点拨:本题运用**转积法**,通过证三角形全等,将所求阴影部分的面积转化为扇形的面积.

6. **解**:将小半圆向右平移,使两个半圆的圆心重合,如图,则阴影部分的面积等于半圆环的面积.

作 $OE\perp AB$ 于点 E(易知 E 为切点),连接 OA,

$\therefore AE=\frac{1}{2}AB=9$.



(第 6 题)

$\therefore$ 阴影部分的面积 $=\frac{1}{2}\pi\cdot OA^2-\frac{1}{2}\pi\cdot OE^2=\frac{1}{2}\pi(OA^2-OE^2)=\frac{1}{2}\pi\cdot AE^2=\frac{1}{2}\pi\cdot 9^2=\frac{81}{2}\pi$.

7. (1)**证明**:$\because \angle AOB=\angle COD=90°$,

即 $\angle AOC+\angle AOD=\angle BOD+\angle AOD$,

$\therefore \angle AOC=\angle BOD$.

又$\because AO=BO$,$CO=DO$,$\therefore \triangle AOC\cong\triangle BOD$.

$\therefore AC=BD$.

(2)**解**:由(1)知 $\triangle AOC\cong\triangle BOD$,$\therefore$ 阴影部分的面积 $=$ 扇形 OAB 的面积 $-$ 扇形 OCD 的面积.

则 $S_{\text{阴影}}=\frac{90\pi\cdot OA^2}{360}-\frac{90\pi\cdot OC^2}{360}=\frac{90\pi(OA^2-OC^2)}{360}=\frac{90\pi(2^2-1^2)}{360}=\frac{3}{4}\pi(\text{cm}^2)$.

点拨:本题通过**割补法**将不规则图形的面积转化为两个规则图形的面积的差的形式.

8. **解**:(1)A 城会受到这次台风的影响. 理由如下:

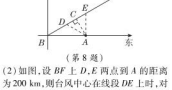
如图,过点 A 作 $AC\perp BF$ 于点 C.

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中,易知 $\angle CBA=30°$,又 $BA=300$ km,

$\therefore AC=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 300=150(\text{km})$.

$\because 150<200$,

$\therefore A$ 城会受到这次台风的影响.



(第 8 题)

(2)如图,设 $BF\perp D$,E 两点到 A 的距离为 200 km,则台风中心在线段 DE 上时,对 A 城均有影响,而在线段 DE 以外时,对 A 城没有影响.

$\because AC=150$ km,$AD=AE=200$ km,

$\therefore DC=\sqrt{AD^2-AC^2}=\sqrt{200^2-150^2}=50\sqrt{7}(\text{km})$.

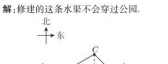
$\because DE=2DC=100\sqrt{7}$ km.

$\therefore \frac{100\sqrt{7}}{10\sqrt{7}}=10(\text{h})$.

$\therefore A$ 城遭受这次台风影响的时间为 10 h.

9. C

10. **解**:修建的这条水渠不会穿过公园.



(第 10 题)

理由:如图,过点 C 作 $CD\perp AB$,垂足为 D.

由题易得 $\angle CBA=45°$,

$\therefore \angle BCD=45°$.

$\therefore CD=BD$.

设 $CD=x$ km,则 $BD=x$ km.

由题易得 $\angle CAB=30°$,

$\therefore AC=2CD=2x$ km,

$\therefore AD=\sqrt{(2x)^2-x^2}=\sqrt{3}x(\text{km})$,

$\therefore \sqrt{3}x+x=1$. 解得 $x=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

即 $CD=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\approx 0.366(\text{km})=366(\text{m})$.

$366\text{ m}>350\text{ m}$,

也就是说,以点 C 为圆心,350 m 为半径的圆与 AB 相离.

$\therefore$ 修建的这条水渠不会穿过公园.

11. **解**:$\because$ 圆锥形漏斗的底面半径为 20 cm,高为 $40\sqrt{2}$ cm,

$\therefore$ 圆锥的母线长为 $\sqrt{20^2+(40\sqrt{2})^2}=60(\text{cm})$.

设圆锥的侧面展开图的圆心角为 $n°$,则 $\frac{n\pi\times 60}{180}=2\pi\times 20$,解得 $n=120$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



（第 11 题）

方案一：如图①，扇形的半径为60 cm，矩形的宽为 60 cm，易求得矩形的长为 $60\sqrt{3}$ cm. 当 $AB=60$ cm，$BC=60\sqrt{3}$ cm 时，$S_{矩形ABCD}=3\,600\sqrt{3}$ cm^2.

方案二：如图②，扇形与矩形的两边相切，有一边重合，易求得矩形的宽为 60 cm，长为 $30+60\pi\approx190$（cm），此时矩形的面积为 $90\times60\approx5\,400$（cm^2）.

$\because 3\,600\sqrt{3}>5\,400$，

∴方案二所用材料最省. 即选长为 90 cm，宽为 60 cm 的矩形铁皮，才能使所用材料最省.

全章热门考点整合应用

1. D

2. (1) **证明**：$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径，BM 是 $\odot O$ 的切线，$\therefore AB\perp BE$.

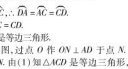
$\because CD/\!/BE$，$\therefore CD\perp AB$. $\therefore \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{AC}$.

$\because \overset{\frown}{DA}=\overset{\frown}{DC}$，$\therefore \overset{\frown}{DA}=\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CD}$.

$\therefore AD=AC=CD$.

∴△ACD是等边三角形.

(2)**解**：如图，过点 O 作 $ON\perp AD$ 于点 N. $\because AN=DN$，由(1)知△ACD是等边三角形，$\therefore \angle DAC=60°$.



（第 2 题）

$\because AD=AC$，$CD\perp AB$，$\therefore \angle DAB=30°$，

$\therefore BE=\frac{1}{2}AE$，$ON=\frac{1}{2}AO$. 设 $\odot O$ 的半径为 r，

$\therefore ON=\frac{1}{2}r$，$\therefore AN=DN=\frac{\sqrt{3}}{2}r$，

$\therefore EN=2+\frac{\sqrt{3}}{2}r$，$AE=2+\sqrt{3}r$，

$\therefore BE=\frac{1}{2}AE=\frac{\sqrt{3}r+2}{2}$. 在 Rt△$BEO$ 与 Rt△BEO' 中，$OE^2=ON^2+NE^2=OB^2+BE^2$，即 $\left(\frac{r}{2}\right)^2+\left(2+\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)^2=r^2+\left(\frac{\sqrt{3}r+2}{2}\right)^2$，$\therefore r=2\sqrt{3}$（$r=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 舍去）.

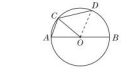
$\therefore OE^2=\left(\frac{r}{2}\right)^2+\left(2+\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)^2=28$.

又 $\because OE>0$，

$\therefore OE=2\sqrt{7}$.

3. **解**：$\because \angle AOC=40°$，$OC=OA$，

$\therefore \angle BOC=180°-40°=140°$，$\angle CAO=\angle ACO=\frac{1}{2}\times(180°-40°)=70°$. 如图，连接 OD. $\because D$ 是 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点，$\therefore \angle COD=\frac{1}{2}\angle BOC=70°$.



（第 3 题）

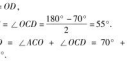
又 $\because OC=OD$，

$\therefore \angle ODC=\angle OCD=\frac{180°-70°}{2}=55°$.

$\therefore \angle ACD=\angle ACO+\angle OCD=70°+55°=125°$.

4. **解**：(1)$2\sqrt{3}$

(2)如图，连接 OA.



（第 4 题）

$\because OA=OB$，$OA=OD$，

$\therefore \angle BAO=\angle B$，$\angle DAO=\angle D$.

$\therefore \angle BAD=\angle BAO+\angle DAO=\angle B+\angle D$.

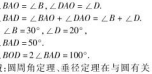
又 $\because \angle B=30°$，$\angle D=20°$，

$\therefore \angle BAD=50°$.

$\therefore \angle BOD=2\angle BAD=100°$.

点拨：圆周角定理、垂径定理在与圆有关的证明、计算题中经常出现，要牢固掌握.

5. **解**：如图，



（第 5 题）

过点 A 作 $AC\perp ON$，垂足为 C.

$\because \angle MON=30°$，$OA=80$ m，

$\therefore AC=40$ m.

以点 A 为圆心，50 m 为半径作圆，交 ON 于 B，D 两点，连接 AB，AD.

当第一台掘拉机到 B 点时对小学产生噪音影响，$\because AB=50$ m，∴由勾股定理得 $BC=30$ m.

当第一台掘拉机到 D 点时对小学产生的噪音消失，易得 $CD=30$ m.

∴两台掘拉机相距 30 m.

∴第一台掘拉机到 D 点时第二台掘拉机在 C 点，还需前行 30 m 后才对小学没有噪音影响.

∴影响时间应是 $90\div5=18$(s).

即这两台掘拉机沿 ON 方向行驶时给小学带来噪音影响的时间是 18 s.

6. **解**：(1)根据平行线间的距离相等，知点 O 到 CD 的距离即为点 A 到 CD 的距离. 过点 A 作 $AE\perp CD$ 于点 E. 根据 $\angle D=60°$，$AD=m$，利用直角三角形中“30°角所对的直角边等于斜边的一半”及勾股定理，得 $AE=\frac{\sqrt{3}}{2}m$，即点 O 到 CD 的距离是 $\frac{\sqrt{3}}{2}m$.

(2)由题可得 $OA=5$. 当 $m=6$ 时，$\frac{\sqrt{3}}{2}m=3\sqrt{3}>5$，故 $\odot O$ 与 CD 相离.

(3)若 $\odot O$ 与线段 CD 有两个公共点，则该圆和线段 CD 相交，当点 C 在 $\odot O$ 上时，易得 $m=\frac{1}{2}AB=5$；

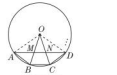
当线段 CD 与 $\odot O$ 相切时，有 $\frac{\sqrt{3}}{2}m=5$，

$m=\frac{10}{3}\sqrt{3}$.

所以 m 的取值范围是 $5\leqslant m<\frac{10}{3}\sqrt{3}$.

7. **证明**：(1)如图，连接 OA，OD，则 $\angle AOB=\angle BOC=\angle COD=360°\div10=36°$，

$\therefore \angle AOD=\angle AOB+\angle BOC+\angle COD=108°$.



（第 7 题）

又 $\because OA=OD$，

$\therefore \angle OAD=\angle ODA=36°$.

$\therefore \angle ANO=\angle COD+\angle ODA=36°+36°=72°$.

$\because \angle BOC=36°$，$OB=OC$，

$\therefore \angle BCO=\angle OBC=72°$.

$\therefore \angle ANO=\angle BCO$.

$\therefore MN/\!/BC$.

(2)$\because \angle AON=\angle AOB+\angle BOC=72°$，$\angle ANO=72°$，

$\therefore AN=AO=OB$.

$\therefore MN/\!/BC$，

$\therefore \angle AMB=\angle OBC=72°$.

又 $\because \angle ABM=\frac{180°-36°}{2}=72°$，

$\therefore \angle ABM=\angle AMB$. $\therefore AB=AM$.

又 $AB=BC$，$\therefore AN=AM+MN=AB+MN=BC+MN$.

$\therefore MN+BC=OB$.

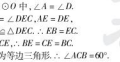
8. **解**：(1)在 $\odot O$ 中，$\angle A=\angle D$.

$\because \angle AEB=\angle DEC$，$AE=DE$，

$\therefore \triangle AEB\cong\triangle DEC$. $\therefore EB=EC$.

又 $\because BC=CE$，$\therefore BE=CE=BC$.

∴△EBC为等边三角形. $\therefore \angle ACB=60°$.



（第 8 题）

(2)$\because OF\perp AC$，$\therefore AF=CF$.

$\because \triangle EBC$为等边三角形，

$\therefore \angle GEF=60°$.

$\therefore \angle EGF=30°$.

$\therefore EG=2\triangle EF=1$. 又 $\because AE=ED=3$，

$\therefore CF=AF=4$，

$\therefore AC=8$，$CE=5$.

$\because BC=5$. 如图，过点 B 作 $BM\perp AC$ 于点 M，$\therefore \angle BCM=60°$，

$\therefore \angle MBC=30°$. $\therefore CM=\frac{5}{2}$. $\therefore BM=\sqrt{BC^2-CM^2}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$，$\therefore AM=AC-CM=\frac{11}{2}$.

$\therefore AB=\sqrt{AM^2+BM^2}=7$.

9. 7

10. C　**点拨**：设 $\odot O$ 的半径为 r，连接 AO，OD，OE，易得 A，O，D 三点共线，$AD=2$，$AO=2-r$，$\angle AEO=90°$，$\angle AOE=30°$，

$\therefore AE=\frac{1}{2}AO=\frac{1}{2}(2-r)$.

又根据已知条件易求得 $AE=4-2\sqrt{3}$，

$\therefore 4-2\sqrt{3}=\frac{1}{2}(2-r)$，

$\therefore r=4\sqrt{3}-6$，

即内切圆 $\odot O$ 的半径是 $4\sqrt{3}-6$.

11. C

12. B　**点拨**：由题图可知，点 P 运动的路径长是题图中六个扇形的弧长之和. 每个扇形的圆心角均为 60°，半径从 12 cm 依次减 2 cm，所以点 P 运动的路径长为 $\frac{60\pi\times12}{180}+\frac{60\pi\times10}{180}+\frac{60\pi\times8}{180}+\frac{60\pi\times6}{180}+\frac{60\pi\times4}{180}+\frac{60\pi\times2}{180}=\frac{\pi}{3}\times(12+10+8+6+4+2)=14\pi$(cm). 故选 B.

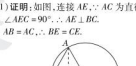
13. A　**点拨**：在矩形 $ABCD$ 中，$AB=2BC$，$AB=8$ cm，$\therefore AD=BC=4$ cm，$DAF=90°$. $\therefore S_{扇形AFD}=\frac{1}{4}\pi\cdot AD^2=4\pi$(cm^2).

$S_{矩形ABCD}=AB\cdot AD=8\times4=32$(cm^2). 又 $\because AF=AD=4$ cm，$\therefore BF=AF+AB=4+8=12$(cm). $\therefore S_{△BCF}=\frac{1}{2}BF\cdot BC=\frac{1}{2}\times12\times4=24$(cm^2). $\therefore S_{阴影}=S_{扇形AFD}+S_{矩形ABCD}-S_{△BCF}=4\pi+32-24=(4\pi+8)$(cm^2). 故选 A.

14. B　**15.** B　**16.** C

17. (1)**证明**：如图，连接 AE，$\because AC$ 为直径，$\therefore \angle AEC=90°$. $\therefore AE\perp BC$.

$\because AB=AC$，$\therefore BE=CE$.



（第 17 题）

(2)**解**：如图，连接 OD，OE，在 Rt△ABE 中，$\because BAC=90°-\angle B=90°-70°=20°$，

$\therefore \angle DOE=2\angle DAE=40°$.

$\because \overset{\frown}{DE}$的度数为 40°.

(3)**解**：如图，连接 CD，由(1)知 $BE=CE$，$\because BC=2BE=6$，设 $AC=x$，则 $AD=x-2$.

$\because AC$ 为直径，$\therefore \angle ADC=90°$.

在 Rt△BCD 中，$CD^2=BC^2-BD^2=6^2-2^2=32$.

在 Rt△ADC 中，$\because AD^2+CD^2=AC^2$，

$\therefore (x-2)^2+32=x^2$. 解得 $x=9$. 即 AC 的长为 9.

18. (1)**证明**：如图，连接 OE，

$\because OA=OE$，$\therefore \angle OEA=\angle OAE$.

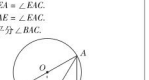
$\because PQ$ 切 $\odot O$ 于点 E，$\therefore OE\perp PQ$.

又 $\because AC\perp PQ$，$\therefore OE/\!/AC$.

$\therefore \angle OEA=\angle EAC$.

$\therefore \angle OAE=\angle EAC$.

$\therefore AE$ 平分 $\angle BAC$.



（第 18 题）

(2)**解**：如图，连接 BE，

$\because AB$ 是直径，$\therefore \angle AEB=90°$.

$\because BAC=60°$，

$\therefore \angle C=\angle EAC=30°$.

$\therefore AB=2BE$.

$\because AC/\!/PQ$，$\therefore \angle ACE=90°$.

$\therefore AE=2CE$.

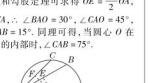
$\therefore CE=\sqrt{3}$，$\therefore AE=2\sqrt{3}$.

设 $BE=x$，则 $AB=2x$.

由勾股定理得 $x^2+(2\sqrt{3})^2=4x^2$，解得 $x_1=2$，$x_2=-2$(舍去).

$\therefore AB=4$，$\therefore \odot O$ 的半径为 2.

19. 15° 或 75°　**点拨**：如图，当圆心 O 在 $\angle CAB$ 的外部时，连接 OA，过点 O 作 $OE\perp AB$，$OF\perp AC$，垂足分别为 E，F，由垂径定理和勾股定理可求得 $OE=\frac{1}{2}OA$，$OF=FA$，$\therefore \angle BAO=30°$，$\angle CAO=45°$，$\therefore \angle CAB=15°$. 同理可得，当圆心 O 在 $\angle CAB$ 的内部时，$\angle CAB=75°$.



（第 19 题）

20. **解**：(1)$\because BC$ 是 $\odot O$ 的直径，$AB\perp BC$，$DC\perp BC$，

$\therefore AB$，CD 都是 $\odot O$ 的切线.

$\because AE$ 切 $\odot O$ 于点 F，

$\therefore AF=AB=4$.

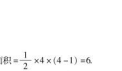
设 $EC=x$，

易得 $EF=x$，$DE=4-x$，

$\therefore 4^2+(4-x)^2=(4+x)^2$，

解得 $x=1$.

∴△ADE的面积 $=\frac{1}{2}\times4\times(4-1)=6$.



（第 20 题）

(2)如图，连接 AO 交 BF 于点 M，连接 OF. 则 $AO=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$.

$\because OB\perp AB$，$OF\perp AF$，且 $OB=OF$，

$\therefore AO$ 为 $\angle BAF$ 的平分线.

$\therefore AB=AF$，

∴$AM\perp BF$，$BM=MF$，

$\therefore BF=2BM$.

$\because S_{△ABO}=\frac{1}{2}AO\cdot BM=\frac{1}{2}OB\cdot AB$，

$\therefore BM=\frac{AB\cdot OB}{AO}=\frac{4\times2}{2\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore BF=\frac{8\sqrt{5}}{5}$.

点拨：在圆中进行计算时，常需要依据特殊的位置关系得出直角三角形，然后利用勾股定理列方程求解.

第二十五章　概率初步

25.1　随机事件与概率

第 1 课时　随机事件

1. B　**2.** D　**3.** D　**4.** D

5. A　**点拨**：根据必然事件、抽样调查、众数、中位数以及方差的概念进行判断即可.

6. (4)↓(3)↑(6)↓(1)　**7.** D　**8.** D

9. C　**点拨**：本题易对随机事件发生的可能性大小理解不透彻而致错，李东夺冠的可能性是 80% 表示李东有可能夺冠，且夺冠的可能性较大.

10. **解**：按事件名称划分为不可能事件：①⑤⑦；随机事件：②③④⑥. 按事件的确定性划分为确定性事件：①⑤⑦；不确定性事件：②③④⑥.

11. **解**：(1)红色，因为红球最多.

(2)不一定.

(3)取 2 个红球出来，或放 2 个白球进去.

点拨：(3)题答案不唯一，合理即可.

12. **解**：(1)四个舞蹈演员 A_1，A_2，A_3，A_4 跳舞，画对观众作队形变化的情况有 24 种，A_1 和 A_2 相邻的情况有：$A_1A_2A_3A_4$，$A_1A_2A_4A_3$，　$A_3A_4A_1A_2$，　$A_3A_4A_2A_1$，　$A_4A_3A_1A_2$，　$A_4A_3A_2A_1$，　$A_1A_3A_4A_2$，　$A_1A_4A_3A_2$，　$A_2A_3A_4A_1$，　$A_2A_4A_3A_1$，　$A_3A_1A_2A_4$，　$A_4A_1A_2A_3$，共 12 种，∴演员 A_1 和 A_2 相邻的可能性是 $\frac{1}{2}$.

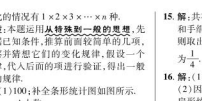
(2)n 个舞蹈演员跳舞，画对观众作队形

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

变化的情况有 $1\times2\times3\times\cdots\times n$ 种.

点拨：本题运用**从特殊到一般的思想**，先根据已知条件，推算前面较简单的几项，观察并猜想它们的变化规律，假设一个规律，代入后面的项进行验证，得出一般性的规律.

13. 解：(1)100；补全条形统计图如图所示.



(第 13 题)

(2)30；10；144°

(3)由扇形统计图可知，参加跳绳的学生所占百分比最大，故小明参加跳绳的可能性最大.

第 2 课时　概　率

1. D　**点拨**：本事件是随机事件，正面朝上和反面朝上的概率都为 0.5，故选 D.

2. C　**3.** A

4. (1)1　(2)0　(3)$0<P(A)<1$

5. D　**点拨**：必然事件的概率为 1，不可能事件的概率为 0，随机事件的概率大于 0 且小于 1. 故选 D.

6. A　**7.** A　**8.** C　**9.** C　**10.** D

11. B　**点拨**：根据菱形的判定定理可推出平行四边形 $ABCD$ 是菱形的有①③，故选 B.

12. A　**点拨**：本题易对概率的含义理解不透彻而致错，明天的降水概率为 95% 意味着明天有可能会下雨，只是可能性比较大而已.



13. 解：(1)发生的可能性很大，但不一定发生. 0.9.

(2)发生的可能性很小. 0.1.

(3)发生与不发生的可能性一样. 0.5.

14. 解：(1)1 或 2

(2)所有可能的密码是 911，912，913，914，915，916，917，918，919，920；能被 3 整除的有 912，915，918.

密码数能被 3 整除的概率是 $\frac{3}{10}$.

(3)小张同学是 6 月份出生，6 月份只有 30 天，

∴第一个转轮设置的数字是 6，第二个转轮设置的数字可能是 0，1，2，3；第三个转轮设置的数字可能是 0，1，2，…，9(第二个转轮设置的数字是 0 时，第三个转轮设置的数字不能是 0；第二个转轮设置的数字是 3 时，第三个转轮设置的数字只能是 0)，

∴9＋10＋10＋1＝30，

∴用小张生日设置的密码的所有可能个数为 30(也可以直接根据 6 月份只有 30 天，有 30 个不同的数，得出设置的密码的所有可能个数为 30).

15. 解：共有 4 种可能结果，其中取出的扇子和手绢都是红色的有 1 种结果，

则取出的扇子和手绢都是红色的概率为 $\frac{1}{4}$.

16. 解：(1)21；21.5

(2)因为低于 20 ℃的天数有 3 天，所以扇形统计图中扇形 A 的圆心角的度数为 $360°\times\frac{3}{8}=135°$.

(3)将该市 5 月 1 日至 5 日的 5 天中午 12 时的气温依次记为 A_1，A_2，A_3，A_4，A_5，

随机抽取 2 天中午 12 时的气温，共有 (A_1,A_2)，(A_1,A_3)，(A_1,A_4)，(A_1,A_5)，(A_2,A_3)，(A_2,A_4)，(A_2,A_5)，(A_3,A_4)，(A_3,A_5)，(A_4,A_5)10 种不同的取法，

其中抽到 2 天中午 12 时的气温均低于 20 ℃的有 (A_1,A_2)，(A_1,A_4)，(A_2,A_4)3 种不同的取法，

因此恰好抽到 2 天中午 12 时的气温均低于 20 ℃的概率为 $\frac{3}{10}$.

25.2　用列举法求概率

第 1 课时　用列表法求概率

1. $\frac{2}{3}$

2. D　**点拨**：令 3 张用 A_1，A_2，A_3 表示，1 张用 B 表示，

一共有 12 种可能，两张卡片正面图案相同的有 6 种，

故从中随机抽取两张，这两张卡片正面图案相同的概率是 $\frac{1}{2}$.

3. A　**4.** $\frac{1}{12}$　**5.** D　**6.** A　**7.** C

8. C　**点拨**：将三个小区分别记为 A，B，C，则列表如下：

	A	B	C
A	(A,A)	(B,A)	(C,A)
B	(A,B)	(B,B)	(C,B)
C	(A,C)	(B,C)	(C,C)

由表可知，共有 9 种等可能的结果，其中两个组恰好抽到同一个小区的有 3 种，所以两个组恰好抽到同一个小区的概率为 $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

9. D　**点拨**：共有 12 种等可能的结果，任取两个不同的数，满足 $a^2+b^2>19$ 的有 4 种结果，故选 D.

10. B

11. 错解：A

诊断：20 张商标牌中有奖的有 5 张，该参与者面两次翻牌均获奖，面翻过的牌不能再翻，因此剩下的 18 张商标牌中，有奖的商标牌有 3 张，故他第三次翻牌获奖的概率是 $\frac{3}{18}=\frac{1}{6}$，而不是 $\frac{1}{4}$.

正解：C

12. 解：(1)8 名学生中至少有三类垃圾投放正确的概率为 $\frac{5}{8}$.

(2)列表如下：

	A	C	F	G
A		CA	FA	GA
C	AC		FC	GC
F	AF	CF		GF
G	AG	CG	FG	

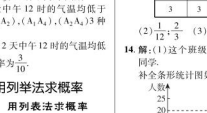
13. (1)

甲＼乙	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	6	8
3	3	6	9	12

(2)$\frac{1}{12}$；$\frac{2}{3}$　(3)$\frac{1}{3}$

14. 解：(1)这个班级有 $15\div30\%=50$(名)同学.

补全条形统计图如图.



(第 14 题)

(2) $\frac{10\times0+15\times2+20\times3+5\times4}{50}=2.2$(元).

答：该班同学每天用于饮品的人均花费是 2.2 元.

(3)共有 20 种等可能的结果，即 AB，AC，AD，AE，BA，BC，BD，BE，CA，CB，CD，CE，DA，DB，DC，DE，EA，EB，EC，ED. 其中恰好抽到 2 名班长的有 2 种结果，

所以恰好抽到 2 名班长的概率为 $\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$.

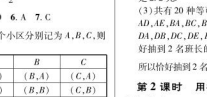
第 2 课时　用树状图法求概率

1. D　**2.** A

3. D　**点拨**：共有 36 种等可能的结果，其中使 $a^2-4b\geqslant0$ 的有 19 种，故选 D.

4. B　**5.** D　**6.** D

7. 解：(1)根据题意画出如图所示的树状图：



(第 7 题)

(2)由树状图可知，共有 8 种等可能的结果：

正正正，正正反，正反正，正反反，反正正，反正反，反反正，反反反.

其中三次正面朝上或三次反面朝上的情况有 2 种，所以 P(小刚任意挑选两球队)$=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$.

(3)这个规则对两个球队公平. 理由如下：

两次正面朝上或一次正面朝下的情况有 3 种，正正反，正反正，反反正.

两次反面朝上或一次反面朝下的情况有 3 种，正反反，反正反，反反正.

所以 P(小刚加入足球阵容)$=P$(小刚加入篮球阵容)$=\frac{3}{8}$.

所以这个规则对两个球队公平.

8. 解：(1)画树状图如图：



(第 8 题)

共有 12 种等可能的结果.

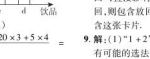
(2)由勾股数的定义可知 B，C，D 卡片上的数都是勾股数，故抽到的两张卡片上的数都是勾股数的有 6 种结果，

所以抽到的两张卡片上的数都是勾股数的概率为 $\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$.

点拨：本题易忽略“放回”与“不放回”这一过程而致错，第一次“放回”与“不放回”，直接影响第二次等可能的结果，若放回，则包含放回的卡片；若不放回，则不包含这张卡片.

9. 解：(1)“1＋2”的选考方案共有 12 种. 所有可能的选法有“物、政、化”“物、政、地”“物、政、生”“物、化、地”“物、化、生”“物、地、生”“历、政、化”“历、政、地”“历、政、生”“历、化、地”“历、化、生”“历、地、生”.

(2)画树状图如图：



(第 9 题)

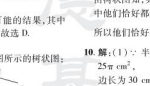
由树状图知，共有 9 种等可能的结果，其中他们恰好都选中政治的只有 1 种结果，所以他们恰好都选中政治的概率为 $\frac{1}{9}$.

10. 解：(1)∵半径为 5 cm 的圆的面积为 $25\pi\ cm^2$，

边长为 30 cm 的正方形 $ABCD$ 的面积为 $900\ cm^2$，

∴P(飞镖落在圆内)$=\frac{25\pi}{900}=\frac{\pi}{36}$.

(2)如图，



(第 10 题)

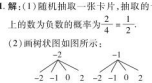
可得当点 O 落在以 AB 为直径的半圆形内时，$\triangle OAB$ 为钝角三角形.

∵$S_{半圆形}=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot15^2=\frac{225}{2}\pi(cm^2)$，

∴P(△OAB为钝角三角形)$=\frac{\frac{225}{2}\pi}{900}=\frac{\pi}{8}$.

11. 解：(1)随机抽取一张卡片，抽取的卡片上的数为负数的概率为 $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

(2)画树状图如图所示：



(第 11 题)

共有 16 种等可能的结果，点 A 在直线 $y=2x$ 上的结果有 2 种，

∴点 A 在直线 $y=2x$ 上的概率为 $\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$.

12. 解：(1)根据题意，画出树状图如图：



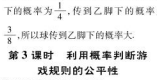
(第 12 题)

(2)由(1)可知三次传球后，球回到甲脚下的概率为 $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$.

(3)由(1)可知三次传球后，球回到甲脚下的概率为 $\frac{1}{4}$，传到乙脚下的概率为 $\frac{3}{8}$，所以球传到乙脚下的概率大.

第 3 课时　利用概率判断游戏规则的公平性

1. 解：(1)画树状图如图所示：



(第 1 题)

共有 16 种等可能的结果.

(2)公平. 理由：$x+y$ 为奇数的结果数为 8，$x+y$ 为偶数的结果数为 8，

∴甲获胜的概率为 $\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$，乙获胜的概率为 $\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$，

∴甲获胜的概率＝乙获胜的概率.

∴这个游戏对双方公平.

2. 解：(1)(m,n)所有可能出现的结果：(1，1)，(1，2)，(1，3)，(2，1)，(2，2)，(2，3)，(3，1)，(3，2)，(3，3).

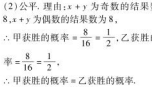
(2)不公平. 理由：∵数字之和为奇数的概率为 $\frac{4}{9}$，数字之和为偶数的概率为 $\frac{5}{9}$，

$\frac{4}{9}\neq\frac{5}{9}$，

∴这个游戏不公平.

3. 解：(1)$\frac{1}{3}$.

(2)不公平. 理由：画树状图如图：



(第 3 题)

乘积共有 9 种等可能的情况，其中偶数有 5 种，含数有 4 种，

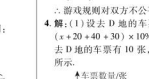
∴P(小明胜)$=\frac{5}{9}$，

P(小华胜)$=\frac{4}{9}$，

∵$\frac{5}{9}\neq\frac{4}{9}$，

∴游戏规则对双方不公平.

4. 解：(1)设去 D 地的车票有 x 张，则 $x=(x+20+40+30)\times10\%$，解得 $x=10$，即去 D 地的车票有 10 张，补全统计图如图所示.



(第 4 题)

(2)小明抽到去 A 地的概率为 $\frac{20}{20+40+30+10}=\frac{1}{5}$.

(3)列表如下：

小李＼小王	1	2	3	4
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)

可知共有 16 种等可能的结果，其中小王掷得着地一面的数字比小李掷得着地一面的数字小的有 6 种，分别为(1，2)，(1，3)，(1，4)，(2，3)，(2，4)，(3，4).

所以小王掷得着地一面的数字比小李掷得着地一面的数字小的概率为 $\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$.

小王掷得着地一面的数字不小于小李掷得着地一面的数字的概率为 $\frac{10}{16}=\frac{5}{8}$，因为 $\frac{3}{8}\neq\frac{5}{8}$，所以这个规则不公平.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

25.3　用频率估计概率

1. 0.92　**2.** D　**3.** C

4. D　**点拨**：先计算出样本中身高不低于180 cm的频率，然后根据用频率估计概率求解.

5. 100　**6.** C

7. D　**点拨**：利用折线统计图可得出试验的频率在0.33左右，进而得出答案.

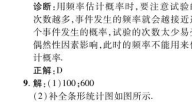
8. 错解：A

诊断：用频率估计概率时，要注意试验的次数越多，事件发生的频率就会越接近这个事件发生的概率，试验的次数太少易受偶然性因素影响，此时的频率不能用来估计概率.

正解：D

9. 解：(1)100；600

(2)补全条形统计图如图所示.



(第9题)

108°

(3)$\frac{3}{10}$

10. 解：(1)“1台机器在三年使用期内维修次数不大于10”的概率$=\frac{60}{100}=0.6$.

(2)购买10次时，

某台机器使用期内维修次数	8	9	10	11	12
该台机器的维修费用/元	240	240	250	250	300

某台机器使用期内维修次数	13	14	15	16	17
该台机器的维修费用/元	300	300	300	300	350

此时这100台机器维修费用的平均数

$y_1=\frac{1}{100}(24\ 000\times10+24\ 500\times20+25\ 000\times30+30\ 000\times30+35\ 000\times10)=27\ 300$(元).

购买11次时，

某台机器使用期内维修次数	8	9	10	11	12
该台机器的维修费用/元	26 000	26 500	27 000	27 500	32 500

某台机器使用期内维修次数	13	14	15	16	17
该台机器的维修费用/元	32 500	32 500	32 500	32 500	35 000

此时这100台机器维修费用的平均数

$y_2=\frac{1}{100}(26\ 000\times10+26\ 500\times20+27\ 000\times30+27\ 500\times30+32\ 500\times10)=27\ 500$(元).

∵27 300<27 500，

∴购买1台该机器的同时应一次性额外购买10次维修服务.

阶段核心归类

1. 解：(1)画树状图如图所示：



(第1题)

(2)∵m,n都是方程$x^2-5x+6=0$的解，

∴$m=2$，$n=3$或$m=3$，$n=2$.

由树状图得：共有12种等可能的结果，m，n都是方程$x^2-5x+6=0$的解的结果有2种，

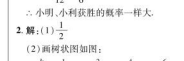
∴m,n都不是方程$x^2-5x+6=0$的解的结果有2种，

小明获胜的概率为$\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$，小科获胜的概率为$\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$，

∴小明、小科获胜的概率一样大.

2. 解：(1)$\frac{1}{2}$

(2)画树状图如图：



(第2题)

共有12种等可能的结果，其中$k<0$，$b>0$的情况有4种，所以这个一次函数的图象经过第一、二、四象限的概率为$\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$.

3. 解：(1)$\frac{1}{4}$

(2)列表如下：

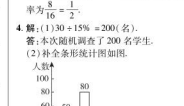
	−2	−1	0	1
−2	(−2，−2)	(−1，−2)	(0，−2)	(1，−2)
−1	(−2，−1)	(−1，−1)	(0，−1)	(1，−1)
0	(−2，0)	(−1，0)	(0，0)	(1，0)
1	(−2，1)	(−1，1)	(0，1)	(1，1)

由表知，共有16种等可能的结果，其中点M落在四边形$ABCD$内(含边界)的有：(−2，0)，(−1，−1)，(−1，0)，(0，−2)，(0，−1)，(0，0)，(0，1)，(1，0)，(1，1)8种，所以点M落在四边形$ABCD$内(含边界)的概率为$\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$.

4. 解：(1)30÷15%＝200(名).

答：本次随机调查了200名学生.

(2)补全条形统计图如图.



(第4题)

(3)估计全校学生选择“戏曲”类的有1 200×$\frac{40}{200}$=240(名).

(4)列表得：

	A	B	C	D
A		AB	AC	AD
B	BA		BC	BD
C	CA	CB		CD
D	DA	DB	DC	

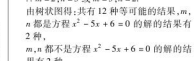
∵共有12种等可能的结果，其中恰好抽到“器乐”和“戏曲”类的有2种结果，

∴恰好抽到“器乐”和“戏曲”类的概率为$\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.

全章热门考点整合应用

1. C　**2.** C　**3.** B

4. 解：(1)画树状图如图所示：



(第4题)

共有12种等可能的结果，其中有一天是星期二的结果有6种，

∴甲同学随机选择两天，其中有一天是星期二的概率为$\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$.

(2)$\frac{2}{3}$

5. 解：(1)2点则上的频率$=\frac{9}{60}=\frac{3}{20}$；5点则上的频率$=\frac{20}{60}=\frac{1}{3}$.

(2)小军的说法不正确，因为3点则上的频率为$\frac{1}{4}$，不能说明3点则上这一事件发生的概率就是$\frac{1}{10}$，只有当试验的次数足够多时，该事件发生的频率稳定在事件发生的概率附近，才可以将这个频率的稳定值作为该事件发生的概率.

(3)小明的说法不正确，因为随机事件的发生并不随机性，所以出现6点则上的次数不一定是100次.

6. C　**点拨**：根据其表面展开图，得出二组相对的面分别是6对3，4对2，8对1. 故P(朝上一面的数字恰好等于朝下一面的数字的2倍)$=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$. 故选C.

7. 解：(1)设口袋中红球有x个，则黑球有$(x-1)$个，白球有$(x+3)$个，共有球$x+(x-1)+(x+3)=3x+2$(个)，

根据题意，得$\frac{x-1}{3x+2}=\frac{1}{4}$，解得$x=6$. 经检验$x=6$是原方程的解且符合题意.

所以$x-1=5$.

因此估计口袋中黑球的个数是5.

(2)6×5＋6×3＝20(个)，口袋中共有球20个，小王取出第一个球后不放回，还剩下19个球，红球仍是6个，所以小王从口袋中余下的球中再任意取出1个球是红球的概率是$\frac{6}{19}$.

第二十一章达标检测卷

一、**1.** D　**2.** B　**3.** A　**4.** C　**5.** A　**6.** D

7. A　**8.** B　**9.** B　**10.** C

二、**11.** $x^2-12x+14=0$；-12

12. 6或10或12

13. -1　**点拨**：将$x=1$代入方程$x^2+ax+b=0$，得$1+a+b=0$，∴$a+b=-1$，∴$(a+b)^{2\,023}=-1$.

14. 4

15. $\frac{21}{4}$　**点拨**：由根与系数的关系，得$x_1+x_2=5$，$x_1\cdot x_2=a$. 由$x_1^2-x_2^2=10$得，$(x_1+x_2)(x_1-x_2)=10$，∴$x_1-x_2=2$，∴$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1\cdot x_2=25-4a=4$，∴$a=\frac{21}{4}$.

16. -6或1　**17.** ①②③　**18.** 直角

19. $\frac{1}{8}$　**点拨**：由$x^2-3x+1=0$，得$x^2=3x-1$，则$\frac{x^2}{x^4+x^2+1}=\frac{x^2}{(3x-1)^2+x^2+1}=\frac{x^2}{10x^2-6x+2}=\frac{3x-1}{10(3x-1)-6x+2}=\frac{3x-1}{24x-8}=\frac{3x-1}{8(3x-1)}=\frac{1}{8}$.

20. 4

三、**21.** 解：(1)原方程可化为$(x-4)(x+5)=0$，

∴$x-4=0$或$x+5=0$，

解得$x=4$或$x=-5$.

(2)原方程可化为$(2x+1+2)^2=0$，

即$(2x+3)^2=0$，

解得$x_1=x_2=-\frac{3}{2}$.

(3)∵$a=1$，$b=-2$，$c=-2$，

∴$\Delta=4-4\times1\times(-2)=12>0$，

∴$x=\frac{2\pm\sqrt{12}}{2}=\frac{2\pm2\sqrt{3}}{2}=1\pm\sqrt{3}$.

∴$x_1=1+\sqrt{3}$，$x_2=1-\sqrt{3}$.

(4)原方程化为一般形式为$y^2-2y=0$.

因式分解，得$y(y-2)=0$.

∴$y_1=2$，$y_2=0$.

22. (1)证明：在关于x的一元二次方程$x^2-(t-1)x+t-2=0$中，

$\Delta=[-(t-1)]^2-4\times1\times(t-2)=t^2-6t+9=(t-3)^2\geqslant0$，

∴对于任意实数t，方程都有实数根.

(2)解：设方程的两根分别为m，n，则$mn=t-2$.

∵方程的两个根互为倒数，

∴$mn=t-2=1$，解得$t=3$.

∴当$t=3$时，方程的两个根互为倒数.

23. 解：(1)$a\neq0$，

$\Delta=b^2-4a=(a+2)^2-4a=a^2+4a+4-4a=a^2+4$.

∵$a^2>0$，∴$\Delta>0$.

∴方程有两个不相等的实数根.

(2)∵方程有两个相等的实数根，

∴$\Delta=b^2-4a=0$，

若$b=2$，$a=1$，则方程为$x^2+2x+1=0$，

解得$x_1=x_2=-1$.(答案不唯一)

24. 解：(1)∵原方程有两个不相等的实数根，

∴$\Delta=(2k+1)^2-4(k^2+1)=4k^2+4k+1-4k^2-4=4k-3>0$，

解得$k>\frac{3}{4}$.

(2)∵$k>\frac{3}{4}$，∴$x_1+x_2=-(2k+1)<0$.

又∵$x_1\cdot x_2=k^2+1>0$，∴$x_1<0$，$x_2<0$，

∴$|x_1|+|x_2|=-x_1-x_2=-(x_1+x_2)=2k+1$.

∵$|x_1|+|x_2|=x_1\cdot x_2$，∴$2k+1=k^2+1$，解得$k_1=0$，$k_2=2$.

又∵$k>\frac{3}{4}$，

∴$k=2$.

25. 解：(1)设该社区从2017年至2019年图书借阅总量的年平均增长率为x，

根据题意，得7 500×(1＋x)²＝10 800，

即(1＋x)²＝1.44，

解得$x_1=0.2=20\%$，$x_2=-2.2$(舍去).

因此该社区从2017年至2019年图书借阅总量的年平均增长率为20%.

(2)10 800×(1＋0.2)＝12 960(本)，

10 800÷1 350＝8(本)，12 960÷1 440＝9(本).

(9－8)÷8×100%＝12.5%，

故a的值至少是12.5.

26. 解：(1)设P，Q两点出发xs后，四边形$PBCQ$的面积是33 cm²，则由题意得$(16-3x+2x)\times6\times\frac{1}{2}=33$，解得$x=5$.

即P，Q两点出发5 s后，四边形$PBCQ$的面积是33 cm².

(2)设P，Q两点出发ts后，点P与点Q之间的距离是10 cm，过点Q作$QH\perp AB$于点H. 在Rt△PQH中，有$(16-5t)^2+6^2=10^2$，解得$t_1=1.6$，$t_2=4.8$. 因P，Q两点出发1.6 s或4.8 s后，点P与点Q之间的距离是10 cm.

第二十二章达标检测卷

一、**1.** A　**2.** A　**3.** D　**4.** C　**5.** D　**6.** C

7. C　**8.** C　**9.** B

10. B　**点拨**：∵抛物线$y=ax^2+bx+c(a\neq0)$过点$(-1,0)$和点$(0,-3)$，

∴$0=a-b+c$，$-3=c$，

∴$b=a-3$.

∴$P=a+b+c=a+a-3-3=2a-6$.

∵抛物线的顶点在第四象限，$a>0$，

∴$b=a-3<0$，∴$a<3$，∴$0<a<3$，

∴$-6<2a-6<0$，即$-6<P<0$.

故选B.

二、**11.** 上；(6，3)　**12.** >

13. 12.5　**点拨**：设其中一段铁丝的长度为x cm，两个正方形的面积之和为S cm²，则另一段铁丝的长度为$(20-x)$cm，

∴$S=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{16}(20-x)^2=\frac{1}{8}(x-10)^2+12.5$，∴当$x=10$时，$S$有最小值，最小值为12.5.

14. 15

15. $x_1=-1$，$x_2=3$　**点拨**：由题意，得$a+2a+c=0$，∴$c=-3a$，∴$ax^2-2ax-3a=0$. ∵$a\neq0$，∴$x^2-2x-3=0$. 解得$x_1=-1$，$x_2=3$.

16. $-1<x<3$　**17.** $2\sqrt{6}$ m

18. $\frac{27}{2}$　**点拨**：连接OP，OQ，设平移后的抛物线m的函数解析式为$y=-\frac{1}{2}x^2+bx+c$，将点$A(6,0)$和原点$O(0,0)$的坐标分别代入，可得抛物线m的函数解析式为$y=-\frac{1}{2}x^2+3x$，所以$P\left(3,\frac{9}{2}\right)$，$Q\left(3,-\frac{9}{2}\right)$，所以点$P$，$Q$关于$x$轴对称，所以$S_{\text{阴影部分}}=S_{\triangle POQ}=\frac{3\times9}{2}=\frac{27}{2}$.

19. -4

20. 2　**点拨**：抛物线开口向下，顶点坐标为$(-1,4)$，故二次函数$y=ax^2+bx+c$的最大值为4，当$x\geqslant2$时，对应的点在x轴下方，由$4a+4b+c<0$，二次函数的图象与x轴的交点为$(1,0)$，$(-3,0)$，则抛物线的解析式为$y=a(x+3)(x-1)$，将点$(0,3)$的坐标代入可得$a=-1$，令$-(x+3)(x-1)=1$，化简可得$x^2+2x-2=0$，它的两根之和为-2；当$y\leqslant3$时，x的取值范围为$x\leqslant-2$或$x\geqslant0$. 综上所述，结论①②正确.

三、**21.** 解：(1)∵点C的图象过$A(1,0)$，$B(0,3)$，

∴$\begin{cases}0=-1+b+c,\\3=c,\end{cases}$解得$\begin{cases}b=-2,\\c=3.\end{cases}$

故抛物线的解析式为$y=-x^2-2x+3$.

(2)抛物线的对称轴为直线$x=-1$，且当$x=0$时，$y=3$，∴当$x=-2$时，$y=3$，故当$y<3$时，x的取值范围是$x<-2$或$x>0$.

22. (1)证明：由题意，知$m,-3m$是一元二次方程$x^2+bx-c=0$的两根，根据一元二次方程根与系数的关系，得$m+(-3m)=-b$，$m\cdot(-3m)=-c$，∴$b=2m$，$c=3m^2$，∴$4c=12m^2$，$3b^2=12m^2$，∴$4c=3b^2$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)解:由题意得 $-\frac{b}{2}=1$,∴ $b=-2$,由

(1)得 $c=\frac{3}{4}-b^2=\frac{3}{4}-(-2)^2=-3$,

∴ $y=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$,∴ 二次函数的最小值为 -4.

23. 解:(1)根据题意,得点 A 的坐标为 $(-1,0)$,点 B 的坐标为 $(0,-3)$.

又∵ 抛物线的对称轴为直线 $x=1$,

∴ $\begin{cases}-\frac{b}{2a}=1,\\ a-b+c=0,\\ c=-3,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=1,\\ b=-2,\\ c=-3,\end{cases}$

故抛物线的解析式是 $y=x^2-2x-3$.

(2)存在. 如图,设抛物线与 x 轴的另一个交点是 C,由抛物线的对称性可知点 A 与点 C 关于抛物线的对称轴对称,连接 BC,则 BC 与对称轴的交点即为点 P.

∵ 点 A 的坐标为 $(-1,0)$,抛物线的对称轴为直线 $x=1$,

∴ 点 C 的坐标为 $(3,0)$.

设直线 BC 的解析式是 $y=kx-3$,

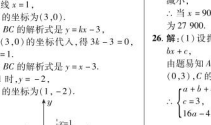
将点 $C(3,0)$ 的坐标代入,得 $3k-3=0$,

解得 $k=1$.

∴ 直线 BC 的解析式是 $y=x-3$.

当 $x=1$ 时,$y=-2$,

∴ 点 P 的坐标为 $(1,-2)$.



(第 23 题)

24. 解:(1)∵ 抛物线 $y=(x+2)^2+m$ 经过点 $A(-1,0)$,

∴ $0=1+m$,

∴ $m=-1$,

∴ 二次函数的解析式为 $y=(x+2)^2-1=x^2+4x+3$,

∴ 点 C 的坐标为 $(0,3)$.

又∵ 抛物线的对称轴为直线 $x=-2$,

点 B,C 关于抛物线的对称轴对称,

∴ 点 B 的坐标为 $(-4,3)$.

∵ 直线 $y=kx+b$ 经过点 A,B,

∴ $\begin{cases}-k+b=0,\\ -4k+b=3,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=-1,\\ b=-1,\end{cases}$

∴ 一次函数的解析式为 $y=-x-1$.

(2)由图象可知,满足 $(x+2)^2+m\geqslant kx+b$ 的 x 的取值范围为 $x\leqslant-4$ 或 $x\geqslant-1$.

25. 解:(1)$k_1=30$,$k_2=20$,$b=6\,000$.

(2)当 $0\leqslant x<600$ 时,

$W=30x+(-0.01x^2-20x+30\,000)=-0.01x^2+10x+30\,000=-0.01(x-500)^2+32\,500$,

∵ $-0.01<0$,

∴ 当 $x=500$ 时,W 取得最大值,最大值为 32 500.

当 $600\leqslant x\leqslant1\,000$ 时,

$W=20x+6\,000+(-0.01x^2-20x+30\,000)=-0.01x^2+36\,000$.

∵ $-0.01<0$,

∴ 当 $600\leqslant x\leqslant1\,000$ 时,W 随 x 的增大而减小,

∴ 当 $x=600$ 时,W 取得最大值,为 32 400.

∵ 32 400<32 500,

∴ W 的最大值为 32 500.

(3)由题意,得 $1\,000-x\geqslant100$,

解得 $x\leqslant900$.

又 $x\geqslant700$,

∴ $700\leqslant x\leqslant900$.

∵ 当 $700\leqslant x\leqslant900$ 时,W 随 x 的增大而减小,

∴ 当 $x=900$ 时,W 取得最小值,最小值为 27 900.

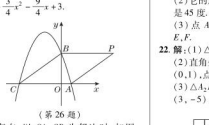
26. 解:(1)设抛物线的解析式为 $y=ax^2+bx+c$.

由题易知 A 的坐标为 $(1,0)$,B 的坐标为 $(0,3)$,C 的坐标为 $(-4,0)$,

∴ $\begin{cases}a+b+c=0,\\ c=3,\\ 16a-4b+c=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=-\frac{3}{4},\\ b=-\frac{9}{4},\\ c=3.\end{cases}$

∴ 经过 A,B,C 三点的抛物线的解析式为 $y=-\frac{3}{4}x^2-\frac{9}{4}x+3$.



(第 26 题)

(2)存在. 以 CA,CB 为邻边时,如图,∵ $OB=3$,$OC=4$,$OA=1$,∴ $BC=AC=5$,当 BP 平行且等于 AC 时,四边形 $ACBP$ 为菱形,∴ $BP=AC=5$,且点 P 到 x 轴的距离等于 OB 的长,∴ 点 P 的坐标为 $(5,3)$;以 AB,AC 为邻边时,$AC\neq AB$,∴ 不存在点 P 使四边形 $ABPC$ 为菱形;以 BA,BC 为邻边时,$BA=BC$,

∴ 不存在点 P 使四边形 $ABCP$ 为菱形. 故符合题意的点 P 的坐标为 $(5,3)$.

(3)设直线 PA 的函数解析式为 $y=kx+m(k\neq0)$,

∵ $A(1,0)$,$P(5,3)$,

∴ $\begin{cases}5k+m=3,\\ k+m=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=\frac{3}{4},\\ m=-\frac{3}{4},\end{cases}$

∴ 直线 PA 的函数解析式为 $y=\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}$,当点 M 与点 P,A 不在同一直线上时,根据三角形的三边关系知 $|PM-AM|<PA$,当点 M 与点 P,A 在同一直线上时,$|PM-AM|=PA$,∴ 当点 M 与点 P,A 在同一直线上时,$|PM-AM|$ 的值最大,即点 M 为直线 PA 与抛物线的交点,解方程组

$\begin{cases}y=\frac{3}{4}x-\frac{3}{4},\\ y=-\frac{3}{4}x^2-\frac{9}{4}x+3,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x_1=1,\\ y_1=0,\end{cases}$

$\begin{cases}x_2=-5,\\ y_2=-\frac{9}{2},\end{cases}$ ∴ 当 M 的坐标为 $(1,0)$ 或 $\left(-5,-\frac{9}{2}\right)$ 时,$|PM-AM|$ 的值最大,

$|PM-AM|$ 的最大值为 5.

第二十三章达标检测卷

一.1. B　2. A　3. B　4. D　5. C　6. B　7. A　8. A　9. B　10. B

二.11. 平行四边形(答案不唯一)

12. 60°

13. —　**14.** 20°　**15.** $4\sqrt{5}$

16. 1　**17.** $y=-\frac{3}{4}(x-2)^2+1$

18. $(5,2)$ 或 $(-1,-2)$

19. $1-\frac{\sqrt{3}}{3}$　**20.** $(6\,066,2)$

三.**21.** 解:(1)它的旋转中心为点 A.

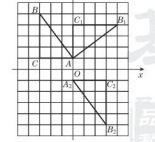
(2)它的旋转方向为逆时针方向,旋转角是 45 度.(答案不唯一)

(3)点 A,B,C 的对应点分别为点 A,E,F.

22. 解:(1)△AB_1C_1 如图所示.

(2)直角坐标系如图所示,点 A 的坐标为 $(0,1)$,点 C 的坐标为 $(-3,1)$.

(3)△$A_2B_2C_2$ 如图所示,点 B_2 的坐标为 $(3,-5)$,点 C_2 的坐标为 $(3,-1)$.



(第 22 题)

23. 解:(1)连接 PP'. 由旋转的性质知 $AP'=AP=6$,$\angle P'AB=\angle PAC$,

∴ $\angle P'AP=\angle BAC=60°$.

∴ △$P'AP$ 是等边三角形.

∴ $PP'=PA=6$.

(2)∵ $P'B=PC=10$,$PB=8$,$PP'=6$,

∴ $P'B^2=P'P^2+PB^2$.

∴ △$P'PB$ 为直角三角形,且 $\angle P'PB=90°$.

由(1)知△$P'AP$ 是等边三角形,

∴ $\angle APP'=60°$.

∴ $\angle APB=\angle P'PB+\angle P'PA=90°+60°=150°$.

24. (1)证明:∵ $AB=BC$,∴ $\angle A=\angle C$.∵ 将等腰三角形 ABC 绕顶点 B 按逆时针方向旋转角 α 到△A_1BC_1 的位置,∴ $A_1B=AB=BC$,$\angle A_1=\angle A=\angle C$,$\angle A_1BD=\angle CBF$.

在△BCF 与△BA_1D 中,$\begin{cases}\angle C=\angle A_1,\\ BC=BA_1,\\ \angle CBF=\angle A_1BD,\end{cases}$

∴ △$BCF\cong$△BA_1D.

(2)解:四边形 A_1BCE 是菱形. 理由:由题意知,$\angle A_1BD=\alpha$. ∵ $\angle A_1=\angle A$,$\angle ADE=\angle A_1DB$,∴ $\angle AED=\angle A_1BD=\alpha$. ∴ $\angle DEC=180°-\alpha$. ∵ $\angle C=\alpha$,∴ $\angle A_1+\alpha=\angle ABC=360°-\angle A_1-\angle C-\angle A_1BC=180°-\alpha$. ∴ $\angle A_1BC=\angle A_1EC$. ∵ $\angle A_1=\angle C$,∴ 四边形 A_1BCE 是平行四边形. 又∵ $A_1B=BC$,∴ 四边形 A_1BCE 是菱形.

25. 解:(1)∵ $\angle ABD=30°-\frac{1}{2}\alpha$.

(2)△ABE 为等边三角形. 证明如下:连接 AD,CD,

∵ 线段 BC 绕点 B 逆时针旋转 60°得到线段 BD,∴ $BC=BD$,$\angle DBC=60°$,∴ △BCD 为等边三角形. ∴ $BD=CD$. 又∵ $AB=AC$,$AD=AD$,∴ △$ABD\cong$△ACD(SSS).

∴ $\angle BAD=\angle CAD=\frac{1}{2}\angle BAC=\frac{1}{2}\alpha$.

∵ $\angle ABE=\angle DBC=60°$,∴ $\angle EBC=\angle ABD=30°-\frac{1}{2}\alpha$. 又∵ $\angle BCE=150°$,

∴ $\angle BEC=180°-\left(30°-\frac{1}{2}\alpha\right)-150°=\frac{1}{2}\alpha$. ∴ $\angle BAD=\angle BEC$. 又 $BC=BD$,

∴ △$EBC\cong$△ABD(AAS). ∴ $AB=BE$.

又∵ $\angle ABE=60°$,∴ △ABE 为等边三角形.

(3)∵ $\angle BCD=60°$,$\angle BCE=150°$,∴ $\angle DCE=150°-60°=90°$. ∵ $\angle DEC=45°$,∴ △DCE 为等腰直角三角形,∴ $CE=DC=BC$. ∴ $\angle EBC=\angle BEC$. ∵ $\angle BCE=150°$,∴ $\angle EBC=\frac{180°-150°}{2}=15°$.

∴ $30°-\frac{1}{2}\alpha=15°$,∴ $\alpha=30°$.

26. 解:(1)60

点拨:如图①,连接 PQ. 设 QE 与 PC 交于点 M.

∵ 线段 CP 绕点 C 顺时针旋转 60°得到线段 CQ,∴ $PC=CQ$,$\angle PCQ=60°$,

∴ △ABC 是等边三角形,∴ $\angle ACB=60°$,$BC=AC$,

∴ $\angle PCQ=\angle ACB$,

∴ $\angle PCQ-\angle PCB=\angle ACB-\angle PCB$,即 $\angle BCQ=\angle ACP$.

在△CQB 和△CPA 中,

$\begin{cases}CQ=CP,\\ \angle BCQ=\angle ACP,\\ BC=AC,\end{cases}$

∴ △$CQB\cong$△CPA,

∴ $\angle CQB=\angle CPA$.

又∵ 在△PEM 和△QCM 中,

$\angle EMP=\angle CMQ$,

∴ $\angle QEP=\angle QCP=60°$.

(2)∠$QEP=60°$.

以∠DAC 是锐角为例进行证明.

证明如下:如图②,易知 $CP=CQ$,$\angle PCQ=60°$,∴ △ABC 是等边三角形,∴ $AC=BC$,$\angle ACB=60°$,

∴ $\angle ACB+\angle BCP=\angle BCP+\angle PCQ$,

即∠$ACP=\angle BCQ$.

在△CQB 和△CPA 中,

$\begin{cases}CQ=CP,\\ \angle BCQ=\angle ACP,\\ BC=AC,\end{cases}$

∴ △$CQB\cong$△CPA,∴ $\angle Q=\angle CPA$.

∵ $\angle1=\angle2$,

∴ $\angle QEP=\angle QCP=60°$.

(3)如图③,过点 C 作 $CH\perp AD$ 交射线 AD 的反向延长线于点 H,

易证△$CQB\cong$△CPA,

∴ $BQ=AP$.

∵ $\angle DAC=135°$,∴ $\angle CAP=15°$,

∴ $\angle APC=30°$,∴ $\angle CAH=45°$,

∴ △ACH 为等腰直角三角形,

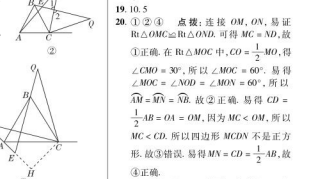
∴ $AH=CH=\frac{\sqrt{2}}{2}AC=\frac{\sqrt{2}}{2}\times4=2\sqrt{2}$.

∵ $\angle CPH=30°$,∴ $CP=2CH=4\sqrt{2}$.

由勾股定理可得,$PH=\sqrt{PC^2-CH^2}=\sqrt{(4\sqrt{2})^2-(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{6}$,

∴ $PA=PH-AH=2\sqrt{6}-2\sqrt{2}$,

∴ $BQ=2\sqrt{6}-2\sqrt{2}$.



(第 26 题)

第二十四章达标检测卷

一.1. B　2. C　3. B　4. A　5. B　6. B

7. A　**点拨:**连接 OE,OG,易得 $OE\perp AB$,$OG\perp AD$. ∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形,∴ $\angle A=90°$,∴ $\angle EOG=90°$,∴ $\angle P=\frac{1}{2}\angle EOG=45°$.

8. B　**点拨:**∵ $\angle ACB=90°$,$\angle ABC=30°$,$AB=2$,∴ $AC=\frac{1}{2}AB=1$. ∴ $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$. ∴ 点 B 转过的路径长为 $\frac{60\pi\cdot\sqrt{3}}{180}=\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$.

9. C

10. D　**点拨:**∵ 正六边形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的边长为 $2=\frac{(\sqrt{3})^{1-1}}{2^{1-2}}$,∴ 正六边形 $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$ 的外接圆的半径为 $\sqrt{3}$,则正六边形 $A_1B_1C_2D_2E_2F_2$ 的边长为 $\sqrt{3}=\frac{(\sqrt{3})^{2-1}}{2^{2-2}}$,同理,正六边形 $A_3B_3C_3D_3E_3F_3$ 的边长为 $\frac{3}{2}=\frac{(\sqrt{3})^{3-1}}{2^{3-2}}$……正六边形 $A_nB_nC_nD_nE_nF_n$ 的边长为 $\frac{(\sqrt{3})^{n-1}}{2^{n-2}}$,则当 $n=10$ 时,正六边形 $A_{10}B_{10}C_{10}D_{10}E_{10}F_{10}$ 的边长为 $\frac{(\sqrt{3})^{10-1}}{2^{10-2}}=\frac{(\sqrt{3})^9\cdot\sqrt{3}}{2^8}=\frac{3^4\cdot\sqrt{3}}{2^8}=\frac{81\sqrt{3}}{2^8}$,故选 D.

二.**11.** 120°　**12.** $\frac{4}{3}\pi$　**13.** 45°

14. 35°　**15.** 12

16. 215　**点拨:**∵ A,B,C,D 四点共圆,∴ $\angle B+\angle ADC=180°$. ∵ $\angle A$,C,D,E 四点共圆,∴ $\angle E+\angle ADC=180°$. ∴ $\angle ACD+\angle ADC+\angle B+\angle E=360°$. ∵ $\angle ACD+\angle ADC=180°-145°=145°$. ∴ $\angle B+\angle E=360°-145°=215°$.

17. 15π

18. $\frac{5}{3}\pi-2\sqrt{3}$

19. 10.5

20. ①②④　**点拨:**连接 OM,ON,易证 Rt△$OMC\cong$Rt△OND. 可得 $MC=ND$,故①正确. 在 Rt△MOC 中,$CO=\frac{1}{2}MO$,得 $\angle CMO=30°$,所以 $\angle MOC=60°$. 易得 $\angle MOC=\angle NOD=\angle MON=60°$,所以 $\overset{\frown}{MN}=\overset{\frown}{NB}=\overset{\frown}{NB}$. 故②正确. 易得 $CD=\frac{1}{2}AB=OA=OM$,因为 $MC<OM$,所以 $MC<CD$. 所以四边形 $MCDN$ 不是正方形. 故③错误. 易得 $MN=CD=\frac{1}{2}AB$,故④正确.

三.**21.** (1)证明:∵ AB 是圆 O 的直径,CD 为弦,$AB\perp CD$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BD}$,

$\therefore BC = BD$.



(第 21 题)

(2)**解**:如图,连接 OC.

$\because AB$ 是圆 O 的直径,CD 为弦,$AB \perp CD$,

$CD = 6$,

$\therefore CH = 3$,

$\therefore OC = \sqrt{OH^2 + CH^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$,

即圆 O 的半径长为 $\sqrt{13}$.

22. **解**:设经过 A,B 两点的直线对应的函数解析式为 $y = kx + b$.

$\because A(2,3)$,$B(-3,-7)$,

$\therefore \begin{cases} 2k + b = 3, \\ -3k + b = -7. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k = 2, \\ b = -1. \end{cases}$

$\therefore$ 经过 A,B 两点的直线对应的函数解析式为 $y = 2x - 1$.

当 $x = 2$ 时,$y = 2 \times 5 - 1 = 9 \neq 11$,

$\therefore$ 点 $C(5,11)$ 不在直线 AB 上,

即 A,B,C 三点不在同一条直线上.

$\therefore$ 平面直角坐标系内的三个点 $A(2,3)$,$B(-3,-7)$,$C(5,11)$ 可以确定一个圆.

23. (1)**证明**:如图,连接 OB.

$\because OA \perp l$,

$\therefore \angle PAC = 90°$,

$\therefore \angle APC + \angle ACP = 90°$.

$\because AB = AC$,$OB = OP$,

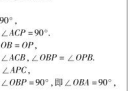
$\therefore \angle ABC = \angle ACB$,$\angle OBP = \angle OPB$.

$\therefore \angle BPO = \angle APC$,

$\therefore \angle ABC + \angle OBP = 90°$,即 $\angle OBA = 90°$,

$\therefore OB \perp AB$,

$\therefore AB$ 是 $\odot O$ 的切线.



(第 23 题)

(2)**解**:设 $\odot O$ 的半径为 r,则 $AP = 5 - r$,$OB = r$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle OBA$ 中,$AB^2 = OA^2 - OB^2 = 5^2 - r^2$,

在 $\mathrm{Rt}\triangle APC$ 中,$AC^2 = PC^2 - AP^2 = (2\sqrt{5})^2 - (5 - r)^2$.

$\because AB = AC$,

$\therefore 5^2 - r^2 = (2\sqrt{5})^2 - (5 - r)^2$,

解得 $r = 3$,即 $\odot O$ 的半径为 3.

24. (1)**证明**:连接 OC.

$\because AB$ 与 $\odot O$ 相切于点 C,

$\therefore OC \perp AB$.

$\because CD = CE$,

$\therefore \angle AOC = \angle BOC$.

在 $\triangle AOC$ 和 $\triangle BOC$ 中,

$\begin{cases} \angle AOC = \angle BOC, \\ OC = OC, \\ \angle ACO = \angle BCO = 90°. \end{cases}$

$\therefore \triangle AOC \cong \triangle BOC$,$\therefore OA = OB$.

(2)**解**:$\because \triangle AOC \cong \triangle BOC$,$\therefore AC = BC = \frac{1}{2}AB = 2\sqrt{3}$.

$\because OB = OA = 4$,且 $\triangle OCB$ 是直角三角形,

$\therefore$ 根据勾股定理,得 $OC = \sqrt{OB^2 - BC^2} = 2$,$\therefore OC = \frac{1}{2}OB$,$\therefore \angle B = 30°$,

$\therefore \angle BOC = 60°$.

$\therefore S_{\text{阴影}} = S_{\triangle BOC} - S_{\text{扇形}OCE} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} - \frac{60\pi \times 2^2}{360} = 2\sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi$.

25. **解**:(1) 如图,设点 E 是桥拱所在圆的圆心.

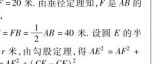
过点 E 作 $EF \perp AB$ 于点 F,延长 EF 交 $\odot E$ 于点 C,连接 AE,

则 $CF = 20$ 米. 由垂径定理知,F 是 AB 的中点,

$\therefore AF = FB = \frac{1}{2}AB = 40$ 米. 设圆 E 的半径是 r 米,由勾股定理,得 $AE^2 = AF^2 + EF^2 = AF^2 + (CE - CF)^2$,

即 $r^2 = 40^2 + (r - 20)^2$,解得 $r = 50$.

$\therefore$ 桥拱的半径为 50 米.



(第 25 题)

(2)这艘轮船能顺利通过. 理由如下:如图,设 $MN = 60$ 米,$MN /\!/ AB$,EC 与 MN 的交点为 D,连接 EM,

易知 $DE \perp MN$,

$\therefore MD = 30$ 米,$\therefore DE = \sqrt{EM^2 - DM^2} = \sqrt{50^2 - 30^2} = 40$(米).

$\therefore EF = EC - CF = 50 - 20 = 30$(米),

$\therefore DF = DE - EF = 40 - 30 = 10$(米).

$\because 10$ 米 > 9.6 米,$\therefore$ 这艘轮船能顺利通过.

26. **解**:(1)$\because$ 直线 CD 与半圆 O 相切,

$\therefore \angle OCD = 90°$.

$\because OC = OA$,$CD = OA$,

$\therefore OC = CD$,

$\therefore \angle DOC = \angle CDO = 45°$,

即 $\angle DOC$ 的度数是 45°.

(2)①$AE = OD$.

理由如下:

如图,连接 OE.

$\because OC = OA$,$CD = OA$,

$\therefore OC = CD$,

$\therefore \angle COD = \angle CDO$.

$\because AE /\!/ OC$,

$\therefore \angle EAD = \angle COD$,

$\therefore \angle EAD = \angle CDO$,

$\therefore AE = DE$.

$\because OA = OE$,$OC = CD$,

$\therefore \angle OAE = \angle OEA$,$\angle COD = \angle CDO$,

$\therefore \angle DOE = 2\angle EAD$,$\angle OCE = 2\angle CDO$,

$\therefore \angle DOE = \angle OCE$.

$\therefore OC = DE$,

$\therefore \angle DEO = \angle OCE$,

$\therefore \angle DOE = \angle DEO$,

$\therefore OD = DE$,

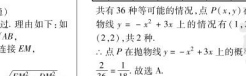
$\therefore AE = OD$.

②由①得,$\angle DOE = \angle DEO = 2\angle ODC$.

$\because \angle DOE + \angle DEO + \angle ODC = 180°$,

$\therefore 2\angle ODC + 2\angle ODC + \angle ODC = 180°$,

$\therefore \angle ODC = 36°$.



(第 26 题)

第二十五章达标检测卷

一.**1**. A　**2**. B　**3**. D　**4**. B　**5**. B　**6**. C　**7**. B　**8**. B　**9**. B

10. A　**点拨**:列表如下:

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

共有 36 种等可能的情况,点 $P(x,y)$ 在抛物线 $y = -x^2 + 3x$ 上的情况有 $(1,2)$,$(2,2)$,共 2 种.

$\therefore$ 点 P 在抛物线 $y = -x^2 + 3x$ 上的概率为 $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$,故选 A.

二.**11**. (1) 随机事件　(2) 不可能事件　(3) 必然事件

12. $\frac{1}{4}$　**13**. 15

14. $\frac{2}{3}$.

15. $\frac{2}{\pi}$　**点拨**:设 $\odot O$ 的半径为 1,则 $AD = \sqrt{2}$,故 $S_{\odot O} = \pi$,阴影部分的面积为 $\pi \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \times 2 + \sqrt{2} \times \sqrt{2} - \pi = 2$,则 $P_1 = \frac{2}{\pi + 2}$,$P_2 = \frac{\pi}{\pi + 2}$,故 $\frac{P_1}{P_2} = \frac{2}{\pi}$.

16. **40**　**点拨**:估计摸出黑棋子的概率为 $\frac{1 + 3 + 0 + 2 + 3 + 4 + 2 + 1 + 1 + 3}{10 \times 10} = \frac{1}{5}$,

棋子总数为 $10 \div \frac{1}{5} = 50$(枚).

所以白棋子的数量 $= 50 - 10 = 40$(枚).

17. $\frac{3}{4}$　**18**. $\frac{1}{5}$　**19**. $\frac{1}{3}$

20. $\frac{1}{4}$　**点拨**:$\because$ 一次函数 $y = 2x + a$ 的图象与 x 轴,y 轴分别交于点 $\left(-\frac{a}{2}, 0\right)$,$(0, a)$,$\therefore$ 一次函数 $y = 2x + a$ 的图象与 x 轴,y 轴围成的三角形的面积为 $\frac{1}{2} \left| -\frac{a}{2} \right| \times |a| = \frac{a^2}{4}$,$\therefore \frac{a^2}{4} = 1$,解得 $a = \pm 1$. 当 $a = 1$ 时,不等式组 $\begin{cases} x + 2 \leqslant 1, \\ 1 - x \leqslant 2 \end{cases}$ 的解集为 $-1 \leqslant x \leqslant -1$,即 $x = -1$,$\therefore$ 该不等式组有解. 当 $a = -1$ 时,不等式组 $\begin{cases} x + 2 \leqslant -1, \\ 1 - x \leqslant -2 \end{cases}$ 无解,$\therefore$ 当 $a = 1$ 时,符合要求,故所求概率为 $\frac{1}{4}$.

三.**21**. **解**:(1)4;2,3

(2)根据题意得 $\frac{5 + m}{10} = \frac{4}{5}$,解得 $m = 2$,所以 m 的值为 2.

22. **解**:(1)正确,理由:当试验次数很大时可以用频率估计概率.

(2)不正确,理由:当试验次数不够大时,频率不一定接近概率.

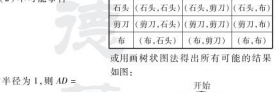
23. **解**:(1)从袋中摸出 1 个球是黄球的概率为 $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$.

(2)设取出 x 个黑球,由题意得 $\frac{8 + x}{20 - x} = \frac{1}{3}$,解得 $x = 2$. 经检验 $x = 2$ 是方程的解且符合题意,即从袋中取出黑球的个数为 2.

24. **解**:(1)用列表法将出所有可能的结果如下:

甲 \ 乙	石头	剪刀	布
石头	(石头,石头)	(石头,剪刀)	(石头,布)
剪刀	(剪刀,石头)	(剪刀,剪刀)	(剪刀,布)
布	(布,石头)	(布,剪刀)	(布,布)

或用画树状图法得出所有可能的结果如图:



(第 24 题)

(2)裁判员的这种做法对甲,乙双方公平,

理由如下:由(1)知 P(甲获胜) $= \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$,

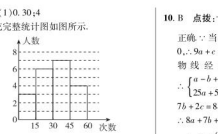
P(乙获胜) $= \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$,

$\therefore P$(甲获胜) $= P$(乙获胜).

$\therefore$ 裁判员的这种做法对甲,乙双方公平.

25. **解**:(1)0.30;4

补充完整统计图如图所示.



(第 25(1) 题)

(2)$180 \times (0.35 + 0.20) = 99$(人).

$\therefore$ 估计仰卧起坐能够一分钟完成 30 次或 30 次以上的女学生有 99 人.

(3)由题意可画树状图如图:



(第 25(3) 题)

由树状图可知,共有 12 种等可能的情况,其中所选两人正好都是甲班学生的情况有 3 种,故 P(所选两人正好都是甲班学生) $= \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.

26. **解**:(1)30;0.250　(2)0.25

(3)列表如下:

和 \ 方块 红桃	1	2	3
1	2	3	4
2	3	4	5
3	4	5	6

所有等可能的结果有 9 种,其中甲方赢的结果有 2 种,乙方赢的结果有 3 种,

$\therefore P$(甲方赢) $= \frac{2}{9}$,P(乙方赢) $= \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$,

$\therefore P$(乙方赢) $> P$(甲方赢).

$\therefore$ 这个游戏对双方是不公平的,有利于乙方.

期末达标检测卷

一.**1**. C　**2**. C　**3**. B　**4**. C

5. A　**点拨**:连接 BD,$\because OD$ 是 $\odot O$ 的直径,$\therefore \angle DBC = 90°$,$\therefore \angle BDC = 90° - \angle BCD = 90° - 54° = 36°$,$\therefore \angle A = \angle BDC = 36°$.

6. B

7. C　**点拨**:$\because$ 正方形 $ODEF$ 是由正方形 $OABC$ 绕点 O 逆时针旋转 40° 得到的,$\therefore \angle AOC = 90°$,$\angle COF = 40°$,$OA = OF$,$\therefore \angle AOF = 90° + 40° = 130°$,$\therefore \angle OFA = \frac{180° - 130°}{2} = 25°$.

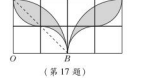
8. A　**9**. D

10. B　**点拨**:$\because -\frac{b}{2a} = 2$,$\therefore 4a + b = 0$. 故(1)正确. $\because$ 当 $x = -3$ 时,$y < 0$,$\therefore 9a - 3b + c < 0$,$\therefore 9a + c < 3b$. 故(2)错误. 由图象可知抛物线经过 $(-1,0)$ 和 $(5,0)$,$\therefore \begin{cases} a - b + c = 0, \\ 25a + 5b + c = 0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} b = -4a, \\ c = -5a. \end{cases}$ $\therefore 8a + 7b + 2c = 8a - 28a - 10a = -30a$. $\because a < 0$,$\therefore 8a + 7b + 2c > 0$. 故(3)正确. $\because$ 点 $A(-3, y_1)$,点 $B\left(-\frac{1}{2}, y_2\right)$,点 $C\left(\frac{7}{2}, y_3\right)$ 在该函数图象上,且 $\frac{7}{2} - 2 = \frac{3}{2}$,$2 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}$,$\frac{3}{2} < \frac{5}{2}$,$\therefore$ 点 C 离对称轴的距离近,$\therefore y_3 > y_2$. $\because a < 0$,$-3 < -\frac{1}{2} < 2$,$\therefore y_1 < y_2$. $\because y_1 < y_2 < y_3$. 故(4)错误. $\because a < 0$,$\therefore (x + 1)(x - 5) = -\frac{3}{a} > 0$,即 $(x + 1)(x - 5) > 0$,故 $x < -1$ 或 $x > 5$,故(5)正确. 正确的结论有 3 个,故选 B.

二.**11**. 0　**12**. $(3,-2)$　**13**. 2 016

14. 50°　**15**. $\frac{1}{3}$　**16**. 105°

17. $2\pi - 4$　**点拨**:该学生身边图所示,连接 AB,由题意得,阴影部分的面积 $= 2(S_{\text{扇形}OAB} - S_{\triangle AOB}) = 2 \times \left(\frac{90\pi \times 2^2}{360} - \frac{1}{2} \times 2 \times 2\right) = 2\pi - 4$.



(第 17 题)

18. 3　**点拨**:扇形的弧长等于圆锥底面圆的周长,设扇形的半径为 r cm,则 $\frac{120}{180} \times \pi r = 2\pi \times 1$,解得 $r = 3$.

19. $2r$　**点拨**:连接 OD,OE. 易知 $BD = BE = OD = OE = r$,$\because MN$ 与 $\odot O$ 相切于点 P,且 $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的内切圆,$\therefore MD = MP$,$NP = NE$. $\therefore \triangle MBN$ 的周长 $= BM + MP + PN + BN = BM + MD + NE + BN = BD + BE = 2r$.

20. $\left(\frac{3 + \sqrt{17}}{2}, 2\right)$或$\left(\frac{3 - \sqrt{17}}{2}, 2\right)$

点拨:连接 OD,由题意可知,四边形 $OFDE$ 是矩形,则 $OD = EF$. 根据垂线段最短,可得当 $OD \perp AC$ 时,OD 最短,此时 EF 最短. 在 $\mathrm{Rt}\triangle AOC$ 中,易知 $OC = OA = 4$,$\therefore$ 当 D 是 AC 的中点时,$OD \perp AC$. 易得 $DF /\!/ OC$,$DF = \frac{1}{2}OC = 2$,$\therefore$ 点 P 的纵坐

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

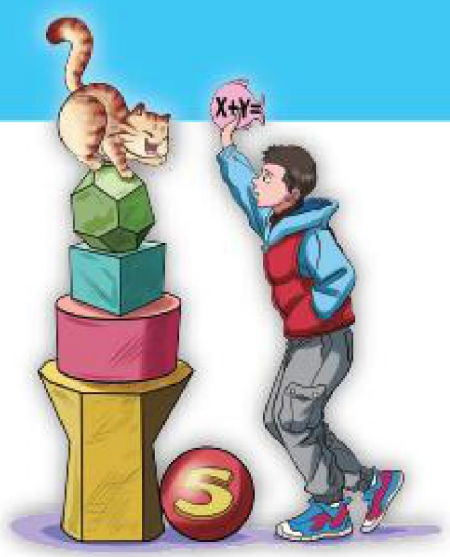
荣德基 主编

典中点

综合应用创新题 典中点

极速提分法

思想 方法 技巧 应用



九年级 数学 上 (R版)

陕西新华出版传媒集团
陕西人民教育出版社

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

极速提分17招

思想 方法 技巧 应用 四类绝招速解百题，招招见效助拿高分

第 1 招　一元二次方程的六种解法 …… 1 ▶第二十一章

第 2 招　配方法的六种常见应用 …… 3 ▶第二十一章

第 3 招　根的判别式的八种常见应用 …… 4 ▶第二十一章

第 4 招　一元二次方程中常见易错易混问题归类 …… 6 ▶第二十一章

第 5 招　降次思想在整式和解方程中的应用 …… 8 ▶第二十一章

第 6 招　根与系数的关系的十一种应用 …… 10 ▶第二十一章

第 7 招　二次函数的图象与系数的七种关系 …… 12 ▶第二十二章

第 8 招　求二次函数解析式的九种方法 …… 14 ▶第二十二章

第 9 招　二次函数的五种解题技巧 …… 17 ▶第二十二章

第10招　旋转问题中作辅助线的技巧 …… 19 ▶第二十三章

第11招　巧用圆的基本性质解圆的五种关系 …… 21 ▶第二十四章

第12招　巧用勾股定理解决圆的直径问题 …… 22 ▶第二十四章

第13招　与圆的切线有关的计算与证明的常见类型 …… 24 ▶第二十四章

第14招　求阴影部分面积的技巧 …… 26 ▶第二十四章

第15招　求概率的四种方法 …… 28 ▶第二十五章

第16招　概率的应用类型 …… 30 ▶第二十五章

第17招　统计概率思想在实际中的应用 …… 31 ▶第二十五章

参考答案及点拨 …… 34

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第1招　一元二次方程的六种解法

教你一招

解一元二次方程时，主要考虑降次，其解法有**直接开平方法**、**因式分解法**、**配方法**和**公式法**，有些特殊方程还可用**换元法**等. 当题目中要求用某一种方法求解时，则根据要求进行求解，如果没有要求，则按照直接开平方法→因式分解法→配方法→公式法的顺序选一种运算比较简便的方法进行求解.

典例剖析

例 用公式法解下列方程.

(1) $2x^2-7x+4=0$；　(2) $3x^2-2\sqrt{3}x=-1$；

(3) $x^2-2x+3=0$；　(4) $-3x^2-5x+2=0$.

解题秘方：用公式法解一元二次方程时，先将方程整理成一元二次方程的一般形式，确定 a，b，c 的值，再求出 Δ 的值，当 $\Delta\geqslant 0$ 时，可代入求根公式求解，当 $\Delta<0$ 时，方程无实数根，这时，若将 a，b，c 的值直接代入求根公式，则算式无意义. 另外，当 a，b，c 中含有分数时，一般先化为整数再计算.

解：(1)∵ $a=2$，$b=-7$，$c=4$，

∴ $\Delta=(-7)^2-4\times2\times4=17$.

∴ $x_1=\dfrac{7+\sqrt{17}}{4}$，$x_2=\dfrac{7-\sqrt{17}}{4}$.

(2) 方程可化为 $3x^2-2\sqrt{3}x+1=0$.

∵ $a=3$，$b=-2\sqrt{3}$，$c=1$，

∴ $\Delta=(-2\sqrt{3})^2-4\times3\times1=0$.

∴ $x_1=x_2=-\dfrac{-2\sqrt{3}}{2\times3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

(3)∵ $a=1$，$b=-2$，$c=3$，

∴ $\Delta=(-2)^2-4\times1\times3=-8<0$.

∴ 方程无实数根.

(4)∵ $a=-3$，$b=-5$，$c=2$，

∴ $\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\times(-3)\times2=49$.

∴ $x=\dfrac{5\pm\sqrt{49}}{2\times(-3)}=-\dfrac{5\pm7}{6}$. ∴ $x_1=-2$，$x_2=\dfrac{1}{3}$.

分类训练

☞(答案见34页)

方法1　用直接开平方法解方程

1. 解方程：$(4x-1)^2=225$.

2. 解方程：$\dfrac{1}{3}(x-1)^2=8$.

方法2　用配方法解方程

3. 【2018·梧州】解方程：$2x^2-4x-48=0$.

4. 解方程：$(2x-1)^2=x(3x+2)-7$.

方法3　用公式法解方程

5. 解方程：$x^2=6x+1$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6. 解方程：$\sqrt{2}x-2=2x^2$.

方法4 用因式分解法解方程

7. 解方程：$2(x-2)=3x(x-2)$.

8. 解方程：$(x+2)^2-10(x+2)+25=0$.

方法5 用适当的方法解方程

9. 解方程：$3(x-5)^2=x^2-25$.

10. 解方程：$(x+1)(x-1)+2(x+3)=8$.

方法6 用换元法解方程

11. 阅读下面的材料：

为解方程$(x^2-1)^2-5(x^2-1)+4=0$，我们可以将x^2-1视为一个整体，然后可设$x^2-1=y$，则$(x^2-1)^2=y^2$，原方程可化为$y^2-5y+4=0$，解得$y_1=1$，$y_2=4$.

当$y=1$时，$x^2-1=1$，$x^2=2$，$\therefore x=\pm\sqrt{2}$；

当$y=4$时，$x^2-1=4$，$x^2=5$，$\therefore x=\pm\sqrt{5}$.

$\therefore$原方程的解为$x_1=\sqrt{2}$，$x_2=-\sqrt{2}$，$x_3=\sqrt{5}$，$x_4=-\sqrt{5}$.

（1）根据材料解方程：$x^4+x^2-6=0$；

（2）已知实数a，b满足$(a+2b)(a+2b-2)=2a+4b-4$，求$4a+8b-1$的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第2招　配方法的六种常见应用

教你一招

配方法的应用有两个大的方面：二次三项式的配方和用配方法解一元二次方程，其依据是完全平方公式 $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$；另外还广泛应用于求最值、求待定系数的值等，是一个重要的数学方法.

典例剖析

例 当 x 取何值时，代数式 $2x^2 - 6x + 7$ 的值最小？并求出这个最小值.

解题秘方： 求代数式的最值，用配方法就要先将代数式转化成 $a(x+m)^2 + n$ 的形式，然后根据完全平方式的非负性求代数式的最值.

解： $2x^2 - 6x + 7 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}$.

$\because 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \geqslant 0, \therefore 2x^2 - 6x + 7 \geqslant \frac{5}{2}$.

$\therefore$ 当 $x = \frac{3}{2}$ 时，$2x^2 - 6x + 7$ 的值最小，最小值为 $\frac{5}{2}$.

方法提醒： 本例也可以用求二次函数的极值求最小值，代数式 $ax^2 + bx + c(a \neq 0)$ 配成 $a(x+m)^2 + n$ 的形式后，若 $a > 0$，则当 $x = -m$ 时，代数式取得最小值 n；若 $a < 0$，则当 $x = -m$ 时，代数式取得最大值 n.

分类训练

☞(答案见34页)

应用1　配方法在识别方程中的应用

1. 求证：无论 m 为何值，关于 x 的方程 $(m^2 - 4m + 5)x^2 + 2x - 7 = 0$ 是一元二次方程.

应用2　配方法在解方程中的应用

2. 根据要求，解答下列问题.

(1) 解下列方程(直接写出方程的解即可)：

①方程 $x^2 - 2x + 1 = 0$ 的解为_____；

②方程 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 的解为_____；

③方程 $x^2 - 4x + 3 = 0$ 的解为_____；

……

(2) 根据以上方程特征及其解的特征，请猜想：

①方程 $x^2 - 9x + 8 = 0$ 的解为_____；

②关于 x 的方程_____的解为 $x_1 = 1, x_2 = n$；

(3) 请用配方法解方程 $x^2 - 9x + 8 = 0$，以验证猜想结论的正确性.

应用3　配方法在求二次三项式中的待定系数的应用

3. 已知关于 x 的二次三项式 $x^2 + (k+1)x + k^2 - 2k + 1$ 是完全平方式，求 k 的值.

应用4　配方法在求二次三项式的最大(小)值中的应用

4. 求多项式 $2x^2 - 4x + 7$ 的最小值.

应用5　配方法在求多个未知数的值中的应用

5. 已知 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 的三边长，且 $a^2 + b^2 + c^2 - 6a - 8b - 10c + 50 = 0$.

(1) 求 a, b, c 的值；

(2) 判断 $\triangle ABC$ 的形状.

应用6　配方法在比较两个二次三项式大小中的应用

6. 设 $A = 2x^2 - 4x - 1, B = x^2 - 6x - 6$，试比较 A 和 B 的大小.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第3招 根的判别式的八种常见应用

教你一招

对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$,式子 b^2-4ac 的值决定了一元二次方程的根的情况,利用根的判别式可以不解方程直接判断方程根的情况,反过来,利用方程根的情况可以确定方程中待定系数的值或取值范围.

典例剖析

例 【中考·岳阳】已知关于 x 的方程 $x^2-(2m+1)x+m(m+1)=0$.

(1)求证:方程总有两个不等的实数根;

(2)已知方程的一个根为 $x=0$,求代数式 $(2m-1)^2+(3+m)(3-m)+7m-5$ 的值(要求先化简再求值).

解题秘方:一元二次方程根的判别式的应用主要有以下三种情况:

1. 不解方程,由根的判别式的正负性及是否为 0 可直接判定根的情况.

2. 根据方程根的情况,结合根的判别式来确定方程中待定字母的取值范围,若二次项系数中含有字母,则应注意检验二次项系数是否为零.

3. 应用判别式证明方程根的情况(有实根、无实根、有两个不等的实根、有两个相等的实根).

(1)**证明**:∵ 关于 x 的方程 $x^2-(2m+1)x+m(m+1)=0$ 是一元二次方程,

∴ $\Delta=[-(2m+1)]^2-4m(m+1)=1>0$.

∴ 方程总有两个不等的实数根.

(2)**解**:∵ $x=0$ 是此方程的一个根,

∴ 把 $x=0$ 代入方程中得到 $m(m+1)=0$.

∴ $m=0$ 或 $m=-1$.

$(2m-1)^2+(3+m)(3-m)+7m-5$

$=4m^2-4m+1+9-m^2+7m-5$

$=3m^2+3m+5$,

把 $m=0$ 代入 $3m^2+3m+5$ 得 $3m^2+3m+5=5$;

把 $m=-1$ 代入 $3m^2+3m+5$ 得 $3m^2+3m+5=3\times1-3+5=5$.

综上,原代数式的值为 5.

分类训练

☞(答案见 35 页)

应用1 利用根的判别式判断不含字母系数的方程的根的情况

1. 判断下列方程的根的情况.

(1)$x^2+x+\frac{1}{4}=0$;

(2)$x^2+4x-1=0$;

(3)$x^2+x+2=0$.

应用2 利用根的判别式判断含字母系数的方程的根的情况

2. 已知方程 $x^2-2x-m=0$ 没有实数根,其中 m 是实数,试判断方程 $x^2+2mx+m(m+1)=0$ 有无实数根.

应用3 利用根的判别式求方程的字母系数的值或取值范围

3. 已知关于 x 的一元二次方程 $mx^2-(m+2)x+2=0$.

(1)证明:不论 m 为何值,方程总有实数根;

(2)m 为何整数时,方程有两个不相等的正整数根?

应用4 利用根的判别式求代数式的值

4. 已知关于 x 的方程 $x^2+(2m-1)x+4=0$ 有两个相等的实数根,求 $\frac{m-1}{(2m-1)^2+2m}$ 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

应用5 利用根的判别式确定三角形的形状

5. 已知关于 x 的一元二次方程 $(a+c)x^2+2bx+(a-c)=0$，其中 a,b,c 分别为 $\triangle ABC$ 三边的长.

(1) 如果 $x=-1$ 是方程的根，试判断 $\triangle ABC$ 的形状，并说明理由；

(2) 如果方程有两个相等的实数根，试判断 $\triangle ABC$ 的形状，并说明理由；

(3) 如果 $\triangle ABC$ 是等边三角形，试求这个一元二次方程的根.

应用6 利用根的判别式探求菱形条件

6. 已知 $\square ABCD$ 的两边 AB,AD 的长是关于 x 的方程 $x^2-mx+\frac{m}{2}-\frac{1}{4}=0$ 的两个根.

(1) m 为何值时，$\square ABCD$ 是菱形？并求出菱形的边长；

(2) 若 AB 的长为 2，求 $\square ABCD$ 的周长是多少？

应用7 利用根的判别式解二次函数图象与 x 轴的交点问题

7. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+(k-5)x+1-k=0$，其中 k 为常数.

(1) 求证：无论 k 为何值，方程总有两个不相等的实数根；

(2) 已知函数 $y=x^2+(k-5)x+1-k$ 的图象不经过第三象限，求 k 的取值范围；

(3) 若原方程的一个根大于 3，另一个根小于 3，求 k 的最大整数值.

应用8 利用根的判别式解二次函数图象与一次函数图象的交点问题

8. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-(m+1)x+\frac{1}{2}(m^2+1)=0$ 有实数根.

(1) 求 m 的值；

(2) 先作 $y=x^2-(m+1)x+\frac{1}{2}(m^2+1)$ 的图象关于 x 轴对称的图象，然后将所作图象向左平移 3 个单位长度，再向上平移 2 个单位长度，写出变化后图象的解析式；

(3) 在(2)的条件下，当直线 $y=2x+n(n\geqslant m)$ 与变化后的图象有公共点时，求 n^2-4n 的最大值和最小值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第4招 一元二次方程中常见易错易混问题归类

教你一招

一元二次方程是初中数学的重要内容,是刻画某些实际问题中数量关系的有效的数学模型,可以利用其解决某些实际问题. 方程思想是各类考试必考的数学思想. 由于部分学生的思维不缜密,常会出现以下各类错误,通过归类练习,以示警示.

典例剖析

例 已知6是关于 x 的方程 $x^2-(m+2)x+2m=0$ 的一个实数根,并且这个方程的两个实数根恰好是等腰 $\triangle ABC$ 的两条边的长,则 $\triangle ABC$ 的周长为多少?

解题秘方: 本题考查了一元二次方程的解、解一元二次方程及三角形三边的关系,掌握数形结合思想是解题关键.

解: 把 $x=6$ 代入方程得 $36-6(m+2)+2m=0$,解得 $m=6$,

则原方程为 $x^2-8x+12=0$,解得 $x_1=2$,$x_2=6$.

由这个方程的两个根恰好是等腰 $\triangle ABC$ 的两条边的长,可知:

①当 $\triangle ABC$ 的腰长为6,底边长为2时,$\triangle ABC$ 的周长为 $6+6+2=14$;

②当 $\triangle ABC$ 的腰长为2,底边长为6时,因为 $2+2<6$,不合题意,舍去.

综上所述,$\triangle ABC$ 的周长为14.

分类训练

☞(答案见36页)

易错1 忽视二次项系数不为零的条件而致错

1. 若关于 x 的方程 $(k-3)x^{|k|-1}-x-2=0$ 是一元二次方程,求不等式 $kx-2k+6\leqslant 0$ 的解集.

易错2 将多项式进行配方时与方程配方相混淆而致错

2. 将 $2y^2-6y+1$ 进行配方.

易错3 应用根的判别式求字母的取值范围时忽视一元二次方程的隐含条件

3. 已知关于 x 的方程 $k^2x^2+(2k-1)x+1=0$ 有两个不相等的实数根,求 k 的取值范围.

易错4 在方程两边同时除以含有未知数的式子,导致失根

4. 解方程:$3(2x+5)=2x(2x+5)$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

易错5 利用根与系数的关系时未考虑“Δ”

5. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-6x+(2m+1)=0$ 有实数根.

(1)求 m 的取值范围;

(2)如果方程的两个实数根为 x_1,x_2,且 $2x_1x_2+x_1+x_2\geqslant 20$,求 m 的取值范围.

易错6 忽视几何图形对方程根的要求

6. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-(3k+1)x+2k^2+2k=0$.

(1)求证:无论 k 取何实数值,方程总有实数根;

(2)若等腰△ABC 的一边长 $a=6$,另两边长 b,c 恰好是这个方程的两个根,求此三角形的另两边长.

易错7 忽略实际问题对方程根的要求

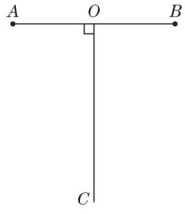
7. 某商场销售一批名牌衬衫,平均每天可售出 20 件,每件盈利 40 元,为了扩大销售,尽快减少库存,商场决定采取适当的降价措施,经调查发现,如果每件衬衫降价 4 元,商场平均每天可多售出 8 件.

(1)若商场平均每天销售这种衬衫的盈利要达到 1 200 元,每件衬衫应降价多少元?

(2)每件衬衫降价多少元时,商场每天盈利最多?

易错8 考虑问题不全面,出现漏解

8. 如图,$AO=OB=50$ cm,OC 是一条射线,$OC\perp AB$,蚂蚁甲由 A 点以 2 cm/s 的速度向 B 点爬行,同时蚂蚁乙由 O 点以 3 cm/s 的速度沿 OC 方向爬行,是否存在这样的时刻,使两只蚂蚁与 O 点组成的三角形的面积为 450 cm^2?



(第 8 题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第5招 降次思想在整式和解方程中的应用

教你一招

解一元二次方程的基本思路是将一元二次方程降次,转化为一元一次方程求解,这种解题思路实质就是**降次思想**. 应用降次思想也能把某些高次方程转化为一元二次方程求解. 在求一些代数式的值时也常用降次思想求解.

典例剖析

例 已知:$2x^2-x=1$,求代数式 $6x^3+x^2-5x+2\,020$ 的值.

解题秘方:利用降次思想,将已知变形为 $x^2=\frac{1}{2}(x+1)$ 后,反复运用 $x^2=\frac{1}{2}(x+1)$ 进行降次化简,将关于 x 的三次式转化为关于 x 的一次式,然后代入求解.

解:∵ $2x^2-x=1$,

∴ $x^2=\frac{1}{2}(x+1)$.

∴ $x^3=\frac{1}{2}(x+1)\cdot x=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1}{2}x$

$=\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}$.

∴ $6x^3+x^2-5x+2\,020$

$=6\left(\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}(x+1)-5x+2\,020$

$=2\,022$.

分类训练

☞(答案见37页)

应用1 利用降次思想解一元二次方程

方法1:开方降次法

1. 用直接开平方法解下列方程:

(1) $3(x+1)^2=\frac{1}{3}$;

(2) $(2x+3)^2-12=0$.

方法2:配方降次法

2. 用配方法解下列方程:

(1) $3x^2-12x+9=0$;

(2) $2x^2-3=4x$.

方法3:因式分解降次法

3. 解下列方程:

(1) $4x^2-4x+1=3x^2-6x+9$;

(2) $(3x+1)^2+4(3x+1)+4=0$.

应用2 利用降次思想解高次方程

4. 解方程:$x^3-2x^2-4x+8=0$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

应用 3　利用降次思想求代数式的值

方法 1：整体代换降次法

5. 已知 $x=2-\sqrt{5}$，求 $x^4-8x^3+16x^2-x+1$ 的值.

6. 若 $x^2+x-1=0$，求 x^3+2x^2+3 的值.

方法 2：利用方程的根及根与系数的关系降次法

7. 设 x_1,x_2 是一元二次方程 $x^2+x-3=0$ 的两个根，求 $x_1^3-4x_2^2+19$ 的值.

应用 4　利用降次思想解二次函数问题

8. 若抛物线 $y=x^2+(2a+1)x+2a+\frac{5}{4}$ 与 x 轴只有一个公共点.

(1)求 a 的值；

(2)求 $a^{18}+323a^{-6}$ 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第6招　根与系数的关系的十一种应用

教你一招

如果一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的两实根为 x_1,x_2，那么 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$，这就是一元二次方程根与系数的关系.

反过来，如果 x_1,x_2 满足 $x_1+x_2=p$，$x_1x_2=q(p^2-4q\geqslant0)$，那么 x_1,x_2 是一元二次方程 $x^2-px+q=0$ 的两个根.

一元二次方程根与系数的关系揭示了根与系数的一种必然联系，利用这个关系，我们可以解决诸如已知一根求另一根、求涉根代数式的值、构造方程、证明等式和不等式等问题，它是中学数学中的一个重要工具.

典例剖析

例 已知关于 x 的方程 $(a-5)x^2-4x-1=0$，

(1)若方程有实数根，求 a 的取值范围；

(2)是否存在这样的实数 a，使方程的两根 x_1,x_2 满足 $x_1+x_2+x_1x_2=3$？若存在，求出实数 a 的值；若不存在，请说明理由.

解题秘方：1. 对于二次项系数含有字母的方程，当方程未指明是一元二次方程或有两个根时，必须将方程按二次项系数为 0 和不为 0 两种情况进行分类讨论；2. 解答涉及一元二次方程根的存在性问题，一般先假设存在，根据根与系数的关系列出关于字母系数的方程，求出字母系数的值，再看它是否满足根的判别式大于或等于零，最后确定字母值的存在性.

解：(1)当 $a=5$ 时，方程为 $-4x-1=0$，方程有实数根；

当 $a\neq5$ 时，方程为一元二次方程，

$\Delta=16+4(a-5)=4a-4\geqslant0$，解得 $a\geqslant1$.

$\therefore a$ 的取值范围为 $a\geqslant1$.

(2)根据题意得：$x_1+x_2=\frac{4}{a-5}$，$x_1x_2=-\frac{1}{a-5}$.

$\because x_1+x_2+x_1x_2=3$，$\therefore \frac{4}{a-5}-\frac{1}{a-5}=3$.

解这个方程得 $a=6$.

经检验，$a=6$ 是方程的解.

又$\because a=6$ 满足 $\Delta\geqslant0$，$\therefore$ 存在实数 a，使方程的两根 x_1,x_2 满足 $x_1+x_2+x_1x_2=3$，此时 $a=6$.

分类训练

☞(答案见38页)

应用1　已知方程一根，求另一根及待定系数

1. 已知方程 $x^2+kx-6=0$ 的一个根为 2，求它的另一根及 k 的值.

应用2　已知方程，求有关两根的代数式的值

2. 已知 x_1,x_2 是方程 $x^2-4x+2=0$ 的两根，求：

(1)$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ 的值；

(2)$(x_1-x_2)^2$ 的值.

应用3　已知两方程，求含两未知数的代数式的值

3. 已知方程 $2m^2-5m-1=0$ 与 $2n^2-5n-1=0$，且 $m\neq n$，求 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ 的值.

应用4　已知方程，求字母系数的取值范围

4. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-3x+k+1=0$ 的两根的平方和小于 5，求 k 的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

应用 5 已知方程，求字母系数的值

5. 已知关于 x 的方程 $x^2+2(m-2)x+m^2+4=0$ 有两个实数根，且两个根的平方和比两个根的积大 21，求 m 的值.

应用 6 已知方程，判断根的符号

6. 不解方程，判断方程 $2x^2+3x-7=0$ 两根的符号.

应用 7 已知两根，求一元二次方程

7. 已知 -1 和 3 是关于 x 的某个一元二次方程的根，且方程中二次项系数为 1，请写出这个方程.

应用 8 结合根的判别式证明等式

8. 已知实数 x,y,z 满足 $x=6-y,z^2=xy-9$.
求证：$x=y$.

应用 9 结合根的判别式证明不等式

9. 已知实数 a,b,c 满足 $\begin{cases}a^2-a-bc+1=0,\\2a^2-2bc-b-c+2=0,\end{cases}$
求证：$a\geqslant 1$.

应用 10 结合抛物线求字母值

10. 已知关于 x 的二次函数 $y=x^2-(2k-1)x+k^2+1$ 的图象与 x 轴有两个交点.
(1) 求 k 的取值范围；
(2) 若该函数图象与 x 轴交点的横坐标为 x_1，x_2，且它们的倒数之和是 $-\frac{3}{2}$，求 k 的值.

应用 11 结合一元二次方程求抛物线与 x 轴两交点间的距离

11. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-4x+m=0$.
(1) 若方程有实数根，求实数 m 的取值范围；
(2) 若方程的两实数根分别为 x_1,x_2，且满足 $5x_1+2x_2=2$，求二次函数 $y=x^2-4x+m$ 的图象与 x 轴的两个交点间的距离.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第7招　二次函数的图象与系数的七种关系

教你一招

二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的系数 a,b,c 与图象有着密切的关系：a 的取值决定了抛物线开口方向和开口大小，a,b 的取值影响抛物线对称轴的位置，c 的取值决定了抛物线与 y 轴的交点位置，所以 a,b,c 这三个系数共同决定着抛物线的位置和形状，反之也可以根据二次函数图象的情况确定 a,b,c 的符号或大小.

典例剖析

例 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图7－1，有下列结论：

①$a+b+c<0$；②$a-b+c>0$；

③$abc>0$；④$b=2a$，

其中正确的结论有(　　)

A. 4个　　B. 3个　　C. 2个　　D. 1个

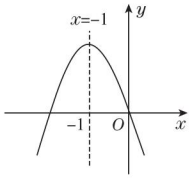


图7－1

解题秘方：对于二次函数 $y=ax^2+bx+c$，当 $x=1$ 时，$y=a+b+c$，此时，若 $y=0$，则 $a+b+c=0$；若 $y>0$，则 $a+b+c>0$；若 $y<0$，则 $a+b+c<0$. 当 $x=-1$ 时，$y=a-b+c$，此时，若 $y=0$，则 $a-b+c=0$；若 $y>0$，则 $a-b+c>0$；若 $y<0$，则 $a-b+c<0$.

解：当 $x=1$ 时，对应的函数值 $y=a+b+c$，观察图象可知此时 $y<0$，即 $a+b+c<0$，故①正确；

当 $x=-1$ 时，对应的函数值 $y>0$，即 $a-b+c>0$，故②正确；

观察图象知抛物线与 y 轴交于原点，所以 $c=0$，故 $abc=0$，故③错误；

因为此抛物线的对称轴是直线 $x=-1$，所以 $-\dfrac{b}{2a}=-1$，所以 $b=2a$，故④正确.

答案：B

分类训练

☞(答案见39页)

关系1　a 与图象的关系

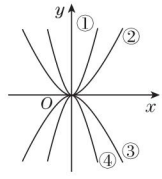
1. 如图，四个函数的图象分别对应的函数解析式是：①$y=ax^2$；②$y=bx^2$；③$y=cx^2$；④$y=dx^2$. 则 a,b,c,d 的大小关系为(　　)

A. $a>b>c>d$

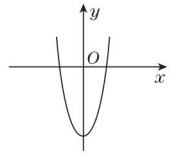
B. $a>b>d>c$

C. $b>a>c>d$

D. $b>a>d>c$



(第1题)



(第2题)

关系2　b 与图象的关系

2. 若二次函数 $y=3x^2+(b-3)x-4$ 的图象如图所示，则 b 的值是(　　)

A. -5　　B. 0

C. 3　　D. 4

3. 当抛物线 $y=x^2-nx+2$ 的对称轴是 y 轴时，n _____0；当对称轴在 y 轴左侧时，n _____0；当对称轴在 y 轴右侧时，n _____0.（填“>”“<”或“=”）

关系3　c 与图象的关系

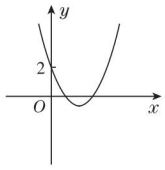
4. 【2018·襄阳】已知二次函数 $y=x^2-x+\dfrac{1}{4}m-1$ 的图象与 x 轴有交点，则 m 的取值范围是(　　)

A. $m\leqslant5$　　B. $m\geqslant2$

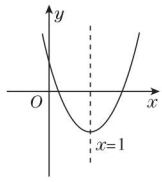
C. $m<5$　　D. $m>2$

5. 若将抛物线 $y=ax^2+bx+c-3$ 向上平移4个单位长度后得到的抛物线如图所示，则 $c=$ _____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



（第 5 题）



（第 6 题）

关系 4 a,b 与图象的关系

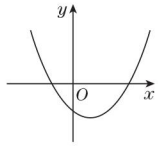
6. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图所示，则下列结论中不正确的是（　　）

A. $a>0$　　B. $b<0$

C. $3a+b>0$　　D. $b>-2a$

关系 5 a,c 与图象的关系

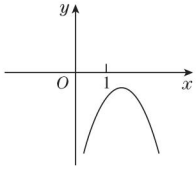
7. 二次函数 $y=(3-m)x^2-x+n+5$ 的图象如图所示，试求 $\sqrt{(m-3)^2}+\sqrt{n^2}-|m+n|$ 的值.



（第 7 题）

关系 6 b,c 与图象的关系

8. 【中考·六盘水】已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图所示，则（　　）



（第 8 题）

A. $b>0,c>0$　　B. $b>0,c<0$

C. $b<0,c<0$　　D. $b<0,c>0$

关系 7 a,b,c 与图象的关系

9. 【2018·达州】如图，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴交于点 $A(-1,0)$，与 y 轴的交点 B 在 $(0,2)$ 与 $(0,3)$ 之间（不包括这两点），对称轴为直线 $x=2$.

下列结论：

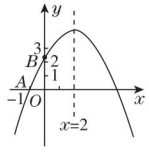
①$abc<0$；

②$9a+3b+c>0$；

③若点 $M\left(\frac{1}{2},y_1\right)$，点 $N\left(\frac{5}{2},y_2\right)$ 是函数图象上的两点，则 $y_1<y_2$；

④$-\frac{3}{5}<a<-\frac{2}{5}$，

其中正确的有（　　）



（第 9 题）

A. 1 个　　B. 2 个

C. 3 个　　D. 4 个

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第8招　求二次函数解析式的九种方法

教你一招

求二次函数的解析式是解决二次函数问题的重要保证，在求二次函数的解析式时，一般选用**待定系数法**，但在具体题目中要根据不同条件，设出恰当的解析式，往往可以给解题过程带来方便.

典例剖析

例 已知二次函数图象的顶点坐标为(1，−3)，且过点$P(2,0)$，求这个二次函数的解析式.

解题秘方：用待定系数法，结合已知条件设出顶点式，再将点P的坐标代入求解.

解：设所求二次函数的解析式为$y=a(x-h)^2+k(a\neq0)$，

∵ 图象的顶点坐标为(1，−3)，

∴ $h=1,k=-3$.

∴ 这个二次函数的解析式为$y=a(x-1)^2-3$.

又∵ 函数图象过点$P(2,0)$，

∴ $a(2-1)^2-3=0$，解得$a=3$.

∴ 这个二次函数的解析式为$y=3(x-1)^2-3$，即$y=3x^2-6x$.

分类训练

☞(答案见39页)

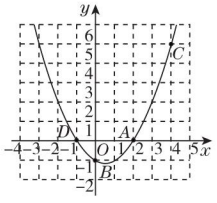
方法1　利用一般式(三点式)求二次函数解析式

1. 如图，已知二次函数$y=ax^2+bx+c$的图象过$A(2,0)$，$B(0,-1)$和$C(4,5)$三点.

(1)求二次函数的解析式；

(2)设二次函数的图象与x轴的另一个交点为D，求点D的坐标；

(3)在同一坐标系中画出直线$y=x+1$，并写出当x在什么范围内时，一次函数的值大于二次函数的值.



(第1题)

方法2　利用顶点式求二次函数解析式

2. 已知抛物线$C:y_1=-x^2+mx+n$，直线$l:y_2=kx+b$，抛物线C的对称轴与直线l交于点$A(-1,5)$，点A与抛物线C的顶点B的距离是4.

(1)求抛物线C的解析式；

(2)若y_2随着x的增大而增大，且抛物线C与直线l都经过x轴上的同一点，求直线l的解析式.

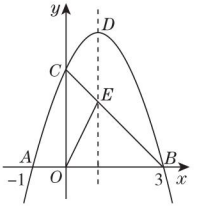
方法3　利用交点式求二次函数解析式

3. 如图，已知抛物线$y=-x^2+bx+c$与x轴交于点$A(-1,0)$和点$B(3,0)$，与y轴交于点C，连接BC交抛物线的对称轴于点E，D是抛物线的顶点.

(1)求此抛物线的解析式；

(2)直接写出点C和点D的坐标；

(3)若点P在第一象限内的抛物线上，且$S_{\triangle ABP}=4S_{\triangle COE}$，求$P$点的坐标.



(第3题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

方法4 利用平移法求二次函数解析式

4. 【2018·贵阳】六盘水市梅花山国际滑雪场自建成以来，吸引了大批滑雪爱好者，一滑雪者从山坡滑下，测得滑行距离 y（单位：cm）与滑行时间 x（单位：s）之间的关系可以近似地用二次函数来表示.

滑行时间 x/s	0	1	2	3	…
滑行距离 y/cm	0	4	12	24	…

(1) 根据表中数据求出二次函数的解析式. 现测量出滑雪者的出发点与终点的距离大约是800 m，他需要多长时间才能到达终点？

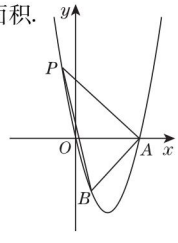
(2) 将得到的二次函数图象补充完整后，向左平移2个单位长度，再向上平移5个单位长度，求平移后的函数解析式.

方法5 利用对称轴求二次函数解析式

5. 【2018·昆明】如图，抛物线 $y=ax^2+bx$ 过点 $B(1,-3)$，对称轴是直线 $x=2$，且抛物线与 x 轴的正半轴交于点 A.

(1) 求抛物线的解析式，并根据图象直接写出当 $y\leqslant 0$ 时，自变量 x 的取值范围；

(2) 在第二象限内的抛物线上有一点 P，当 $PA\perp BA$ 时，求 $\triangle PAB$ 的面积.



（第5题）

方法6 利用图象中的信息求二次函数解析式

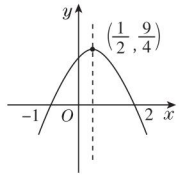
6. 如图是某二次函数的图象，根据图象可知，该二次函数的解析式是(　　)

A. $y=x^2-x-2$

B. $y=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+2$

C. $y=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+1$

D. $y=-x^2+x+2$



（第6题）

方法7 利用表格信息求二次函数解析式

7. 下表给出了代数式 $-x^2+bx+c$ 与 x 的一些对应值：

x	…	-2	-1	0	1	2	3	…
$-x^2+bx+c$	…	5	n	c	2	-3	-10	…

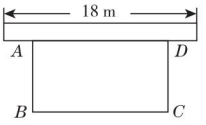
(1) 根据表格中的数据，确定 b,c,n 的值；

(2) 设 $y=-x^2+bx+c$，直接写出 $0\leqslant x\leqslant 2$ 时 y 的最大值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

方法8 利用几何建模求二次函数解析式

8. 【2018·荆州】为响应荆州市“创建全国文明城市”号召，某单位不断美化环境，拟在一块矩形空地上修建绿色植物园，其中一边靠墙，可利用的墙长不超过18 m，另外三边由36 m长的栅栏围成. 设矩形$ABCD$空地中，垂直于墙的边$AB=x$ m，面积为y m^2（如图）.



（第8题）

（1）求y与x之间的函数关系式，并写出自变量x的取值范围；

（2）若矩形空地的面积为160 m^2，求x的值；

（3）若该单位用8 600元购买了甲、乙、丙三种绿色植物共400棵（每种植物的单价和每棵栽种的合理用地面积如下表）.

	甲	乙	丙
单价/元	14	16	28
合理用地面积/（m^2/棵）	0.4	1	0.4

问丙种植物最多可以购买多少棵？此时，这批植物可以全部栽种到这块空地上吗？请说明理由.

方法9 利用建立实际问题模型求二次函数解析式

9. 【中考·葫芦岛】五一期间，恒大影城隆重开业，影城每天运营成本为1 000元，试营业期间统计发现，影城每天售出的电影票张数y（张）与电影票售价x（元/张）之间满足一次函数关系式：$y=-4x+220$（$10\leqslant x\leqslant 50$，且$x$是整数），设影城每天的利润为$w$（元）（利润=票房收入-运营成本）.

（1）试求w与x之间的函数关系式；

（2）影城将电影票售价定为每张多少元时，每天获利最大？最大利润是多少元？

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第9招　二次函数的五种解题技巧

教你一招

用二次函数及其性质解题，要全面审视题目中的所有条件和答题要求，整体把握题目的结构、特点、认识条件和结论之间的关系，图形的几何特征与数、式的数量、结构特征的关系，挖掘隐蔽的条件和内在联系，巧妙地利用所学的相关性质，确定解题思路和方法.

典例剖析

例 【中考·泰安】如图9－1，在△ABC中，$\angle C=90°$，$AB=10$ cm，$BC=8$ cm，点P从点A沿AC向点C以1 cm/s的速度运动，同时点Q从点C沿CB向点B以2 cm/s的速度运动（点Q运动到点B时两点均停止运动），在运动过程中，四边形$PABQ$的面积最小值为（　　）

A. 19 cm^2　B. 16 cm^2　C. 15 cm^2　D. 12 cm^2

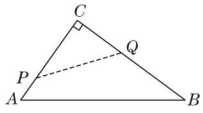


图9－1

解题秘方：用二次函数的性质解几何图形面积的最值问题的方法：通常先根据图形的特点，结合相关联的几何性质，运用“面积法”和“勾股法”建立有关等式，进而转化为函数关系式，再运用求函数最值的方法求解.

解：在Rt△ABC中，$\angle C=90°$，

$AB=10$ cm，$BC=8$ cm，

$\therefore AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=6$ cm.

设运动时间为t s$(0\leqslant t\leqslant 4)$，则$PC=(6-t)$cm，$CQ=2t$ cm.

$\therefore S_{四边形PABQ}=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle CPQ}=\frac{1}{2}AC\cdot BC-\frac{1}{2}PC\cdot CQ=\frac{1}{2}\times 6\times 8-\frac{1}{2}(6-t)\times 2t=t^2-6t+24=(t-3)^2+15$.

$\therefore$ 当$t=3$时，四边形$PABQ$的面积取最小值，最小值为15 cm^2.

答案：C

分类训练

☞（答案见41页）

技巧1　巧用二次函数的定义求字母的值

1. 已知函数$y=(n^2-1)x^2+(n^2-2n-3)x-n-1$.

（1）当n为何值时，y是x的一次函数？

（2）当n为何值时，y是x的二次函数？

技巧2　巧配方求抛物线的对称轴与顶点坐标

2. 通过配方，写出下列抛物线的开口方向、对称轴与顶点坐标.

（1）$y=\frac{1}{3}x^2-2x-1$；

（2）$y=-4(x+1)(x+3)$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

技巧 3 巧用顶点式求二次函数的最值

3. 已知抛物线 $y=a(x-3)^2+2$ 经过点 $(1,-2)$.
   (1) 求 a 的值.
   (2) 函数 y 有最大值还是最小值? 并求出这个最值.
   (3) 若点 $A(m,y_1)$, $B(n,y_2)$ $(m<n<3)$ 都在该抛物线上, 试比较 y_1 与 y_2 的大小.

技巧 4 巧用待定系数法求二次函数的解析式

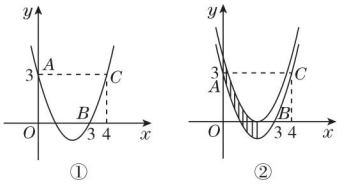
4. 根据下列条件, 分别求出对应的二次函数的解析式.
   (1) 已知抛物线的顶点坐标是 $(1,2)$ 且过点 $(2,3)$;
   (2) 已知抛物线过点 $(-1,0)$, $(3,0)$, $(2,-6)$;
   (3) 已知抛物线过点 $(-1,2)$, $(0,1)$, $(2,-7)$.

5. 已知二次函数图象的对称轴为直线 $x=1$, 最高点到 x 轴的距离为 6, 且经过点 $(2,-8)$, 求此二次函数的解析式.

技巧 5 巧用顶点坐标处理抛物线移动问题

6. 将抛物线 $y=2x^2-4x+5$ 作下列运动, 求所得到的抛物线的解析式.
   (1) 先向左平移 2 个单位长度, 再向下平移 3 个单位长度;
   (2) 以 x 轴为对称轴, 将抛物线开口反向.

7. 如图①所示, 已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过点 $A(0,3)$, $B(3,0)$, $C(4,3)$.
   (1) 求抛物线的解析式;
   (2) 求抛物线的顶点坐标和对称轴;
   (3) 把抛物线向上平移, 使得顶点落在 x 轴上, 直接写出两条抛物线、对称轴和 y 轴围成的图形的面积 S (图②中阴影部分).



(第 7 题)

关注微信公众号 "教辅资料站" 获取更多学习资料

参考答案及点拨

第1招 一元二次方程的六种解法

1. 解： $(4x-1)^2=225$，$4x-1=\pm15$.

$\therefore x_1=4$，$x_2=-\frac{7}{2}$.

点拨： 利用直接开平方法求得 $4x-1=\pm15$，从而进行求解.

2. 解： $\frac{1}{3}(x-1)^2=8$，

$(x-1)^2=24$，

$x-1=\pm2\sqrt{6}$.

$\therefore x_1=1+2\sqrt{6}$，$x_2=1-2\sqrt{6}$.

3. 解： $2x^2-4x-48=0$，

$x^2-2x=24$，

$x^2-2x+1=24+1$，

$(x-1)^2=25$，

$x-1=\pm5$.

$\therefore x_1=6$，$x_2=-4$.

4. 解： $(2x-1)^2=x(3x+2)-7$，

$x^2-6x=-8$，

$x^2-6x+9=9-8$，

$(x-3)^2=1$，

$x-3=\pm1$.

$\therefore x_1=4$，$x_2=2$.

点拨： 本题化简后配方得到 $(x-3)^2=1$，再直接开平方求解.

5. 解： $x^2=6x+1$，

$x^2-6x-1=0$，

$\Delta=(-6)^2-4\times1\times(-1)=36+4=40$，

$x=\frac{6\pm\sqrt{40}}{2}$，

$\therefore x_1=3+\sqrt{10}$，$x_2=3-\sqrt{10}$.

点拨： 本题直接利用公式法求解即可.

6. 解： $\sqrt{2}x-2=2x^2$，

$2x^2-\sqrt{2}x+2=0$，

$\Delta=(-\sqrt{2})^2-4\times2\times2=2-16<0$，

$\therefore$ 原方程无实数根.

7. 解： $2(x-2)=3x(x-2)$，

$2(x-2)-3x(x-2)=0$，

$(x-2)(2-3x)=0$，

$x-2=0$ 或 $2-3x=0$.

$\therefore x_1=2$，$x_2=\frac{2}{3}$.

点拨： 本题先利用因式分解法将方程变形为 $(x-2)(2-3x)=0$，再进行求解.

8. 解： $(x+2)^2-10(x+2)+25=0$，

$(x+2-5)^2=0$，

$(x-3)^2=0$.

$\therefore x_1=x_2=3$.

9. 解： $3(x-5)^2=x^2-25$，

$3(x-5)^2-(x+5)(x-5)=0$，

$(x-5)[3(x-5)-(x+5)]=0$，

$(x-5)(2x-20)=0$，

$\therefore x_1=5$，$x_2=10$.

10. 解： $(x+1)(x-1)+2(x+3)=8$，

$x^2-1+2x+6=8$，

$x^2+2x=3$，

$x^2+2x+1=3+1$，

$(x+1)^2=4$，

$x+1=\pm2$，

$\therefore x_1=1$，$x_2=-3$.

11. 解： (1) 设 $x^2=y$，则原方程变为 $y^2+y-6=0$，

解得 $y_1=-3$，$y_2=2$.

当 $y=-3$ 时，$x^2=-3$，无实数根；

当 $y=2$ 时，$x^2=2$，$\therefore x=\pm\sqrt{2}$.

$\therefore$ 原方程的解为 $x_1=\sqrt{2}$，$x_2=-\sqrt{2}$.

(2) 令 $a+2b=x$，则 $x(x-2)=2x-4$，解得 $x_1=x_2=2$，

即 $a+2b=2$.

$\therefore 4a+8b-1=4(a+2b)-1=4\times2-1=7$.

点拨： 本题利用换元的思想求方程的解和代数式的值. (1) 中将 x^2 看成一个整体进行换元. (2) 中将 $a+2b$ 看成一个整体进行换元，从而达到运算简便的目的.

第2招 配方法的六种常见应用

1. 证明： $\because m^2-4m+5=(m-2)^2+1>0$，$\therefore m^2-4m+5\neq0$.

$\therefore$ 无论 m 为何值，该方程都是关于 x 的一元二次方程.

点拨： 本题利用配方法将关于 x 的方程中 x^2 的系数 m^2-4m+5 配方得到 $(m-2)^2+1$，判断此系数的值不可能为 0，进而判断出关于 x 的方程是一元二次方程.

2. 解： (1) ① $x_1=x_2=1$；② $x_1=1$，$x_2=2$；③ $x_1=1$，$x_2=3$

(2) ① $x_1=1$，$x_2=8$；② $x^2-(1+n)x+n=0$

(3) $x^2-9x+8=0$，

$x^2-9x=-8$，

$x^2-9x+\frac{81}{4}=-8+\frac{81}{4}$，

$\left(x-\frac{9}{2}\right)^2=\frac{49}{4}$.

$\therefore x-\frac{9}{2}=\pm\frac{7}{2}$.

$\therefore x_1=1$，$x_2=8$.

3. 解： $\because$ 关于 x 的二次三项式 $x^2+(k+1)x+k^2-2k+1$ 是完全平方式，

$\therefore x^2+(k+1)x+k^2-2k+1=\left(x+\frac{k+1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}k^2-\frac{5}{2}k+\frac{3}{4}$ 中 $\frac{3}{4}k^2-\frac{5}{2}k+\frac{3}{4}=0$，解得 $k=3$ 或 $k=\frac{1}{3}$.

点拨： 本题利用配方法将 $x^2+(k+1)x+k^2-2k+1$ 配方得到 $\left(x+\frac{k+1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}k^2-\frac{5}{2}k+\frac{3}{4}$，由条件可知该式是完全

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

平方式，故$\frac{3}{4}k^2-\frac{5}{2}k+\frac{3}{4}$的值为0，即可求得$k$的值.

4. 解： $2x^2-4x+7=2(x^2-2x+1)+5=2(x-1)^2+5\geqslant 5$.

∴ 多项式$2x^2-4x+7$的最小值为5.

点拨： 本题利用配方法将$2x^2-4x+7$配方得到$2(x-1)^2+5$，所以当$x=1$时有最小值为5.

5. 解： (1)由$a^2+b^2+c^2-6a-8b-10c+50=0$，

得$(a-3)^2+(b-4)^2+(c-5)^2=0$.

∵ $(a-3)^2\geqslant 0,(b-4)^2\geqslant 0,(c-5)^2\geqslant 0$，

∴ $a-3=0,b-4=0,c-5=0$，∴ $a=3,b=4,c=5$.

(2)∵ $3^2+4^2=5^2$，即$a^2+b^2=c^2$，

∴ $\triangle ABC$是直角三角形.

点拨： 本题可利用配方法将原式整理后求出a,b,c的值，再由勾股定理的逆定理判断三角形形状.

6. 解： $A-B=2x^2-4x-1-x^2+6x+6=x^2+2x+5=(x+1)^2+4$.

∵ $(x+1)^2\geqslant 0$，∴ $(x+1)^2+4>0$，∴ $A>B$.

点拨： 本题用作差法比较大小，将$A-B$的式子配方得到$(x+1)^2+4$，由此式的值恒大于0，即可比较出A与B的大小.

第3招 根的判别式的八种常见应用

1. 解： (1)$\Delta=0$，方程有两个相等的实根；

(2)$\Delta=16+4>0$，方程有两个不相等的实根；

(3)$\Delta<0$，方程无实根.

点拨： 直接利用根的判别式判断方程根的情况即可.

2. 解： ∵ $x^2-2x-m=0$没有实数根，

∴ $\Delta_1=(-2)^2-4\cdot(-m)=4+4m<0$，即$m<-1$.

对于方程$x^2+2mx+m(m+1)=0$，

$\Delta_2=(2m)^2-4\cdot m(m+1)=-4m>4$，

∴ 方程$x^2+2mx+m(m+1)=0$有两个不相等的实数根.

点拨： 由$x^2-2x-m=0$无实数根得出$m<-1$，从而得到方程$x^2+2mx+m(m+1)=0$的根的判别式的值$-4m>4$，故该方程有两个不相等的实数根.

3. (1) 证明： $\Delta=[-(m+2)]^2-8m=m^2-4m+4=(m-2)^2$.

∵ $(m-2)^2\geqslant 0$，即$\Delta\geqslant 0$，

∴ 不论m为何值，方程总有实数根.

(2)**解：** 解关于x的一元二次方程

$mx^2-(m+2)x+2=0$，得

$x=\frac{m+2\pm(m-2)}{2m}$.

∴ $x_1=\frac{2}{m},x_2=1$.

∵ 方程的两个根都是正整数，

∴ $\frac{2}{m}$是正整数，

∴ $m=1$或$m=2$.

又∵ 方程的两个根不相等，

∴ $m\neq 2$，∴ $m=1$.

点拨： (1)求出方程根的判别式，根据平方式的非负性证明即可. (2)利用公式法解得方程的两个根为$x_1=\frac{2}{m},x_2=1$，再根据方程有两个不相等的正整数根求得$m=1$.

4. 解： ∵ 关于x的方程$x^2+(2m-1)x+4=0$有两个相等的实数根，

∴ $\Delta=(2m-1)^2-4\times 1\times 4=0$，即$2m-1=\pm 4$.

∴ $m=\frac{5}{2}$或$m=-\frac{3}{2}$.

当$m=\frac{5}{2}$时，$\frac{m-1}{(2m-1)^2+2m}=\frac{\frac{5}{2}-1}{16+5}=\frac{1}{14}$；

当$m=-\frac{3}{2}$时，$\frac{m-1}{(2m-1)^2+2m}=\frac{-\frac{3}{2}-1}{16-3}=-\frac{5}{26}$.

点拨： 本题利用根的判别式求得m的值，再将m的值代入代数式求值即可.

5. 解： (1)$\triangle ABC$是等腰三角形. 理由：∵ $x=-1$是方程的根，

∴ $(a+c)\times(-1)^2-2b+(a-c)=0$.

∴ $a+c-2b+a-c=0$. ∴ $a-b=0$. ∴ $a=b$.

∴ $\triangle ABC$是等腰三角形.

(2)$\triangle ABC$是直角三角形. 理由：

∵ 方程有两个相等的实数根，

∴ $(2b)^2-4(a+c)(a-c)=0$，

∴ $4b^2-4a^2+4c^2=0$，∴ $a^2=b^2+c^2$，

∴ $\triangle ABC$是直角三角形.

(3)如果$\triangle ABC$是等边三角形，那么$a=b=c$.

当$a=b=c$时，原方程可整理为$2ax^2+2ax=0$.

∴ $x^2+x=0$. 解得$x_1=0,x_2=-1$.

点拨： 本题将方程根的判别式与三角形结合在一起进行考查，解题时根据给出的条件灵活运用即可.

6. 解： (1)由题意，得$\Delta=0$，

即$m^2-4\left(\frac{m}{2}-\frac{1}{4}\right)=m^2-2m+1=0$.

解得$m_1=m_2=1$.

故当m为1时，$\square ABCD$是菱形.

此时原方程为$x^2-x+\frac{1}{4}=0$，解得$x_1=x_2=\frac{1}{2}$.

即菱形$ABCD$的边长为$\frac{1}{2}$.

(2)由题意知$x=2$是关于x的方程$x^2-mx+\frac{m}{2}-\frac{1}{4}=0$的一个根，∴ 将$x=2$代入原方程得$4-2m+\frac{m}{2}-\frac{1}{4}=0$，

解得$m=\frac{5}{2}$，故原方程为$x^2-\frac{5}{2}x+1=0$，

解得$x_1=2,x_2=\frac{1}{2}$.

∴ $AD=\frac{1}{2}$.

故$\square ABCD$的周长为$2\times\left(2+\frac{1}{2}\right)=5$.

点拨： 本题将方程与平行四边形、菱形相结合考查，灵活利用给出的条件进行求解即可.

7. (1) 证明： ∵ $\Delta=(k-5)^2-4(1-k)=k^2-6k+21=(k-3)^2+12>0$，

∴ 无论k为何值，方程总有两个不相等的实数根.

(2)**解：** 由题意知抛物线开口方向向上，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∵ $b^2-4ac=(k-3)^2+12>0$，

∴ 抛物线与 x 轴有两个交点，

设抛物线与 x 轴的交点的横坐标分别为 x_1，x_2，

∵ 抛物线不经过第三象限，

∴ $x_1+x_2=5-k>0$，$x_1\cdot x_2=1-k\geqslant 0$，

解得 $k\leqslant 1$，即 k 的取值范围是 $k\leqslant 1$.

(3)**解**：设原方程的两个根分别是 x_1'，x_2'，

根据题意，得 $(x_1'-3)(x_2'-3)<0$，

即 $x_1'\cdot x_2'-3(x_1'+x_2')+9<0$，

又 $x_1'+x_2'=5-k$，$x_1'\cdot x_2'=1-k$，

∴ $1-k-3(5-k)+9<0$，

解得 $k<\frac{5}{2}$.

则 k 的最大整数值为 2.

点拨：本题主要考查了二次函数的图象与性质和二次函数与一元二次方程的关系，运用根的判别式和根与系数的关系进行求解.

8. 解：(1)对于一元二次方程 $x^2-(m+1)x+\frac{1}{2}(m^2+1)=0$，

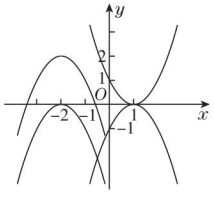
$\Delta=(m+1)^2-2(m^2+1)=-m^2+2m-1=-(m-1)^2$，

∵ 方程有实数根，

∴ $-(m-1)^2\geqslant 0$，∴ $m=1$.

(2)由(1)可知 $y=x^2-2x+1=(x-1)^2$.

如图所示：



（第 8 题）

平移后图象的解析式为 $y=-(x+2)^2+2=-x^2-4x-2$.

(3)由 $\begin{cases}y=2x+n,\\ y=-x^2-4x-2,\end{cases}$ 消去 y 得到 $x^2+6x+n+2=0$，

由题意知 $\Delta\geqslant 0$，

∴ $36-4n-8\geqslant 0$，

∴ $n\leqslant 7$.

∵ $n\geqslant m$，$m=1$，

∴ $1\leqslant n\leqslant 7$.

令 $y'=n^2-4n=(n-2)^2-4$，

∴ 当 $n=2$ 时，y' 的值最小，最小值为 -4，

当 $n=7$ 时，y' 的值最大，最大值为 21，

∴ n^2-4n 的最大值为 21，最小值为 -4.

点拨：(1)由题意知 $\Delta\geqslant 0$，列出不等式求解即可；(2)画出轴对称、平移后的图象，根据顶点坐标即可写出解析式；(3)首先确定 n 的取值范围，再利用二次函数的性质解决问题.

第 4 招　一元二次方程中常见易错易混问题归类

1. 错解：由题意知 $|k|-1=2$，解得 $k=\pm 3$.

∴ 不等式为 $3x-6+6\leqslant 0$ 或 $-3x+6+6\leqslant 0$，∴ $x\leqslant 0$ 或 $x\geqslant 4$.

诊断：当方程是一元二次方程时，不仅要使未知数的最高次数是 2，还要使二次项的系数不为 0. 本题就是忽视了二次项的系数 $k-3\neq 0$ 这一条件，而导致错解.

正解：由题意知 $\begin{cases}|k|-1=2,\\ k-3\neq 0,\end{cases}$

∴ $k=-3$. ∴ 不等式为 $-3x+6+6\leqslant 0$，∴ $x\geqslant 4$.

2. 错解 1：配方时，仍跟给方程配方时一样，各项都除以 2，错得

$2y^2-6y+1=y^2-3y+\frac{1}{2}=\left(y-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{7}{4}$.

错解 2：$2y^2-6y+1=2\left[y^2-3y+\left(-\frac{3}{2}\right)^2\right]+1=2\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+1$.

诊断：配方时，加上一次项系数一半的平方后，为了保持代数式的值不变，必须再减去一次项系数一半的平方，不能“只加不减”.

正解：$2y^2-6y+1$

$=2\left[y^2-3y+\left(-\frac{3}{2}\right)^2-\left(-\frac{3}{2}\right)^2\right]+1$

$=2\left[\left(y-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right]+1$

$=2\left(y-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{2}+1$

$=2\left(y-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{7}{2}$.

3. 错解：由题意，得 $b^2-4ac=(2k-1)^2-4\times k^2\times 1>0$，解得 $k<\frac{1}{4}$.

诊断：对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$，隐含条件 $a\neq 0$ 很容易被忽视，所以二次项系数含字母时，一定要考虑二次项系数不能为 0.

正解：由题意，得 $b^2-4ac=(2k-1)^2-4\times k^2\times 1>0$，且 $k^2\neq 0$，解得 $k<\frac{1}{4}$ 且 $k\neq 0$. 所以 k 的取值范围是 $k<\frac{1}{4}$ 且 $k\neq 0$.

4. 解：原方程可化为 $3(2x+5)-2x(2x+5)=0$.

因式分解，得 $(2x+5)(3-2x)=0$.

∴ $2x+5=0$ 或 $3-2x=0$.

解得 $x_1=-\frac{5}{2}$，$x_2=\frac{3}{2}$.

点拨：在解方程时，不能在方程的两边同时除以含有未知数的代数式，否则会造成失根. 本题容易错误地在方程的两边同时除以公因式 $2x+5$，而丢失一个根 $x=-\frac{5}{2}$.

5. 解：(1)根据题意，得 $\Delta=(-6)^2-4(2m+1)\geqslant 0$，解得 $m\leqslant 4$.

(2)根据题意，得 $x_1+x_2=6$，$x_1x_2=2m+1$，而 $2x_1x_2+x_1+x_2\geqslant 20$，

∴ $2(2m+1)+6\geqslant 20$，解得 $m\geqslant 3$.

又∵ $m\leqslant 4$，∴ m 的取值范围为 $3\leqslant m\leqslant 4$.

6. (1)**证明**：对于一元二次方程 $x^2-(3k+1)x+2k^2+2k=0$，

$\Delta=(3k+1)^2-4(2k^2+2k)=9k^2+6k+1-8k^2-8k=k^2-2k+1=(k-1)^2\geqslant 0$.

∴ 无论 k 取何实数值，方程总有实数根.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)**解**：∵ $\triangle ABC$ 为等腰三角形，

∴ 有 $a=b=6$，$a=c=6$ 或 $b=c$ 三种情况.

①当 $a=b=6$ 或 $a=c=6$ 时，可知 $x=6$ 为方程的一个根，

∴ $6^2-6(3k+1)+2k^2+2k=0$，

解得 $k=3$ 或 $k=5$.

当 $k=3$ 时，方程为 $x^2-10x+24=0$，解得 $x=4$ 或 $x=6$，

∴ 三角形的另两边长为 4，6.

当 $k=5$ 时，方程为 $x^2-16x+60=0$，

解得 $x=6$ 或 $x=10$，

∴ 三角形的另两边长为 6，10.

②当 $b=c$ 时，方程有两个相等的实数根，

∴ $\Delta=0$，即 $(k-1)^2=0$，解得 $k_1=k_2=1$，

∴ 方程为 $x^2-4x+4=0$，

解得 $x_1=x_2=2$，

此时三角形三边长为 6，2，2，不满足三角形三边关系，舍去.

综上可知，三角形的另两边长为 4，6 或 6，10.

7. **错解**：(1)设每件衬衫应降价 x 元，

根据题意，得 $(40-x)(20+2x)=1\ 200$，

整理得 $x^2-30x+200=0$.

解得 $x_1=20$，$x_2=10$.

答：每件衬衫应降价 20 元或 10 元.

(2)由(1)知 $(40-x)(20+2x)=-2x^2+60x+800=-2(x-15)^2+1\ 250$.

因为 $-2(x-15)^2\leqslant 0$，所以当 $-2(x-15)^2=0$，即 $x=15$ 时，$-2(x-15)^2+1\ 250$ 的值最大.

即 $(40-x)(20+2x)$ 有最大值，为 1 250.

答：每件衬衫降价 15 元时，商场每天盈利最多.

错因分析：此题条件是“尽快减少库存”，其含义是每天售出的衬衫越多越好. 因此 $x=10$ 不符合题意，舍去，所以 $x=20$.

正解：(1)设每件衬衫应降价 x 元，

根据题意，得 $(40-x)(20+2x)=1\ 200$，

整理得 $x^2-30x+200=0$，解得 $x_1=20$，$x_2=10$.

因为要尽快减少库存，所以 x 应取 20.

答：每件衬衫应降价 20 元.

(2)由(1)知 $(40-x)(20+2x)=-2x^2+60x+800=-2(x-15)^2+1\ 250$.

因为 $-2(x-15)^2\leqslant 0$，所以当 $-2(x-15)^2=0$，即 $x=15$ 时，$-2(x-15)^2+1\ 250$ 的值最大.

即 $(40-x)(20+2x)$ 有最大值，为 1 250.

答：每件衬衫降价 15 元时，商场每天盈利最多.

易错诊断：运用一元二次方程解决实际问题时，方程的解一般有两个，但由于实际情况的限制，有时会有所取舍，如果对实际情况不了解，就会出现多解的错误. 本题中，根据“尽快减少库存”的实际意义，要对方程的解进行合理取舍，忽略了这一点，结果就会出错.

8. **错解**：设 t s 后两只蚂蚁与 O 点组成的三角形的面积是 450 cm². 根据题意，得 $\frac{1}{2}(50-2t)\cdot 3t=450$，整理得 $t^2-25t+150=0$，解得 $t_1=10$，$t_2=15$.

答：分别在 10 s 和 15 s 时，两只蚂蚁与 O 点组成的三角形的面积为 450 cm².

错因分析：此题考虑问题不够全面，漏掉了蚂蚁甲在 OB 上的情况.

正解：(1)当蚂蚁甲在 AO 段时，设 t s 后两只蚂蚁与 O 点组成的三角形的面积是 450 cm²，根据题意，得 $\frac{1}{2}(50-2t)\cdot 3t=450$，

整理得 $t^2-25t+150=0$，解得 $t_1=10$，$t_2=15$.

(2)蚂蚁甲爬完 AO 这段用了 $50\div 2=25$(s)，当它开始由 O 点向 B 点爬行时，设从 O 点开始 x s 后两只蚂蚁与 O 点组成的三角形的面积是 450 cm²，根据题意，得 $\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot 3(x+25)=450$，

整理得 $x^2+25x-150=0$.

解得 $x_1=5$，$x_2=-30$(舍去).

当 $x=5$ 时，$x+25=30$，即这时蚂蚁爬了 30 s.

答：分别在 10 s，15 s，30 s 时，两只蚂蚁与 O 点组成的三角形的面积是 450 cm².

易错诊断：解动点问题要弄清点运动的特征，必要时要注意分类讨论. 如蚂蚁甲由 A 点向 B 点爬行表示蚂蚁甲既可以在线段 AO 上，又可以在线段 OB 上.

第 5 招　降次思想在整式和解方程中的应用

1. **解**：(1)原方程可化为 $(x+1)^2=\frac{1}{9}$，

两边直接开平方，得 $x+1=\pm\frac{1}{3}$，

∴ $x+1=\frac{1}{3}$ 或 $x+1=-\frac{1}{3}$，

∴ $x_1=-\frac{2}{3}$，$x_2=-\frac{4}{3}$.

(2)移项，得 $(2x+3)^2=12$，

两边直接开平方，得 $2x+3=\pm 2\sqrt{3}$，

∴ $2x+3=2\sqrt{3}$ 或 $2x+3=-2\sqrt{3}$，

∴ $x_1=\frac{2\sqrt{3}-3}{2}$，$x_2=\frac{-2\sqrt{3}-3}{2}$.

点拨：本题用直接开平方法解方程，如(1)将 $x+1$ 看成一个整体，得到关于 $x+1$ 的一次方程再求解即可.

2. **解**：(1)二次项系数化为 1，得 $x^2-4x+3=0$，

移项，得 $x^2-4x=-3$，

配方，得 $x^2-4x+4=-3+4$，

∴ $(x-2)^2=1$，∴ $x-2=1$ 或 $x-2=-1$，

∴ $x_1=3$，$x_2=1$.

(2)原方程可化为 $2x^2-4x=3$，

二次项系数化为 1，得 $x^2-2x=\frac{3}{2}$，

配方，得 $x^2-2x+1=\frac{3}{2}+1$，

∴ $(x-1)^2=\frac{5}{2}$，∴ $x-1=\frac{\sqrt{10}}{2}$ 或 $x-1=-\frac{\sqrt{10}}{2}$，

∴ $x_1=1+\frac{\sqrt{10}}{2}$，$x_2=1-\frac{\sqrt{10}}{2}$.

点拨：利用配方法进行配方求解即可.

3. **解**：(1)移项、合并同类项，得 $x^2+2x-8=0$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

因式分解，得$(x-2)(x+4)=0$，

于是得$x-2=0$或$x+4=0$，

$\therefore x_1=2, x_2=-4$.

(2)因式分解，得$(3x+1+2)^2=0$，即$(3x+3)^2=0$，

于是得$x_1=x_2=-1$.

4. 解： 原方程可变形为

$x^2(x-2)-4(x-2)=0$，$(x-2)(x^2-4)=0$，

$(x-2)^2(x+2)=0$.

所以$x_1=x_2=2, x_3=-2$.

点拨： 直接利用因式分解法进行降次.

5. 解： 由$x=2-\sqrt{5}$，得$x-2=-\sqrt{5}$，

两边平方，得$x^2-4x+4=5$，

$\therefore x^2-4x-1=0$，

$\therefore x^4-8x^3+16x^2-x+1$

$=(x^2-4x-1)(x^2-4x+1)+(-x+2)$

$=2-x$

$=\sqrt{5}$.

6. 解： $\because x^2+x-1=0$，

$\therefore x^2+x=1$，

$\therefore x^3+2x^2+3=x(x^2+x)+x^2+3=x+x^2+3=4$.

点拨： 先将代数式转化成与$x^2+x=1$有关的式子，再整体代入求值.

7. 解： 由题意得$x_1^2+x_1-3=0$，

$x_2^2+x_2-3=0$，

即$x_1^2=3-x_1$，$x_2^2=3-x_2$，

$\therefore x_1^3-4x_2^2+19$

$=x_1(3-x_1)-4(3-x_2)+19$

$=3x_1-x_1^2+4x_2+7$

$=3x_1-(3-x_1)+4x_2+7$

$=4(x_1+x_2)+4$.

根据根与系数的关系知$x_1+x_2=-1$，

$\therefore$ 原式$=4\times(-1)+4=0$.

8. 解： (1)$\because$ 抛物线$y=x^2+(2a+1)x+2a+\frac{5}{4}$与$x$轴只有一个公共点，

$\therefore (2a+1)^2-4\times1\times\left(2a+\frac{5}{4}\right)=0$，

化简得$a^2-a-1=0$.

解得$a=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

(2)由(1)知a满足$a^2-a-1=0$. $\therefore a^2=a+1$.

$\therefore a^4=(a^2)^2=(a+1)^2=a^2+2a+1=3a+2$，

$a^6=a^4\cdot a^2=(3a+2)(a+1)=3a^2+5a+2=8a+5$，

$a^8=(a^4)^2=(3a+2)^2=9a^2+12a+4=21a+13$，

$a^{16}=(a^8)^2=(21a+13)^2=441a^2+546a+169=987a+610$，

$a^{18}=a^{16}\cdot a^2=(987a+610)(a+1)$

$=987a^2+1\,597a+610$

$=2\,584a+1\,597$.

$\because a^2-a-1=0$，

$\therefore 64a^2-64a-65=-1$，

即$(8a+5)(8a-13)=-1$，

$\therefore a^{-6}=\frac{1}{a^6}=\frac{1}{8a+5}=-8a+13$.

故$a^{18}+323a^{-6}=2\,584a+1\,597+323(-8a+13)=5\,796$.

点拨： 本题是将数形与降次两种思想完美地结合在一起进行求值. (2)问中多次利用(1)问中$a^2-a-1=0$进行降次，以简化运算.

第6招 根与系数的关系的十一种应用

1. 解： 设方程的另一根为x_1.

由题意得$\begin{cases}x_1+2=-k,\\2x_1=-6,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x_1=-3,\\k=1.\end{cases}$

$\therefore$ 方程的另一根为-3，k的值是1.

点拨： 利用根与系数的关系联立方程组求解即可.

2. 解： 由已知得$x_1+x_2=4$，$x_1x_2=2$.

(1)$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{4}{2}=2$；

(2)$(x_1-x_2)^2=x_1^2+x_2^2-2x_1x_2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=4^2-4\times2=16-8=8$.

点拨： 将代数式变形成关于x_1+x_2和x_1x_2的组合形式，然后利用根与系数的关系求解.

3. 解： 由题意得m，n是方程$2x^2-5x-1=0$的两根，则$m+n=\frac{5}{2}$，$mn=-\frac{1}{2}$.

$\therefore \frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{m+n}{mn}=\frac{\frac{5}{2}}{-\frac{1}{2}}=-5$.

4. 解： 设方程的两根分别为x_1，x_2，则$x_1+x_2=3$，$x_1x_2=k+1$.

$\because x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=3^2-2(k+1)<5$，

$\therefore k>1$. ①

又$\because \Delta=(-3)^2-4(k+1)\geqslant0$，

$\therefore k\leqslant\frac{5}{4}$. ②

由①②得$1<k\leqslant\frac{5}{4}$.

点拨： 本题容易忽略$\Delta\geqslant0$这个条件，做题时要注意方程有根的条件.

5. 解： $\because$ 方程有两个实数根，

$\therefore \Delta=[2(m-2)]^2-4\times1\times(m^2+4)\geqslant0$.

解这个不等式，得$m\leqslant0$.

设方程两根为x_1，x_2，

则$x_1+x_2=-2(m-2)$，$x_1x_2=m^2+4$.

$\because x_1^2+x_2^2-x_1x_2=21$，

$\therefore (x_1+x_2)^2-3x_1x_2=21$.

$\therefore [-2(m-2)]^2-3(m^2+4)=21$.

整理得$m^2-16m-17=0$.

解得$m_1=-1$，$m_2=17$.

又$\because m\leqslant0$，$\therefore m=-1$.

点拨： 利用根与系数的关系求出两根的和与两根的积，代入$(x_1+x_2)^2-3x_1x_2=21$得到关于m的一元二次方程，再解

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

方程即可，本题易忽略 $\Delta\geqslant 0$ 这一条件.

6. 解： 对于 $2x^2+3x-7=0$，$\Delta=3^2-4\times 2\times(-7)=65>0$.

$\therefore$ 方程有两个不相等的实数根.

设方程的两个根为 x_1,x_2，则 $x_1x_2=-\dfrac{7}{2}<0$，

$\therefore$ 原方程的两个实数根异号.

点拨： 先根据 $\Delta>0$ 判断方程有两个不相等的实数根，再根据 $x_1x_2=\dfrac{c}{a}$ 判断两实数根是同号还是异号.

7. 解： 设这个方程为 $x^2+ax+b=0$.

由已知得 $-1+3=-a$，$-1\times 3=b$，

$\therefore a=-2,b=-3$.

$\therefore$ 这个方程为 $x^2-2x-3=0$.

点拨： 已知方程的两实数根，可设方程为 $x^2+ax+b=0$，根据根与系数的关系即可求出此方程.

8. 证明： 由题设知 $x+y=6,xy=z^2+9$，

$\therefore x,y$ 是关于 t 的一元二次方程 $t^2-6t+z^2+9=0$① 的两个实根，

从而 $\Delta=36-4(z^2+9)=-4z^2\geqslant 0$，

于是 $z=0$，从而 $\Delta=0$.

故方程① 有两个相等的实数根，$\therefore x=y$.

9. 证明： 由题设条件知 $bc=a^2-a+1$，

$b+c=2a^2-2bc+2=2a$.

于是 b,c 是关于 t 的一元二次方程 $t^2-2at+a^2-a+1=0$ 的两个实根.

$\therefore\Delta=4a^2-4(a^2-a+1)\geqslant 0$，

解得 $a\geqslant 1$.

点拨： 本题关键是构造以 b,c 为两实根的一元二次方程，利用判别式 $\Delta\geqslant 0$ 即可证得 $a\geqslant 1$.

10. 解： (1)$\because$ 二次函数 $y=x^2-(2k-1)x+k^2+1$ 的图象与 x 轴有两个交点，

$\therefore$ 关于 x 的方程 $x^2-(2k-1)x+k^2+1=0$ 有两个不相等的实数根.

$\therefore\Delta=b^2-4ac=[-(2k-1)]^2-4\times 1\times(k^2+1)>0$，

解得 $k<-\dfrac{3}{4}$.

(2) 由题知 $x_1+x_2=2k-1,x_1x_2=k^2+1$.

$\because\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}=-\dfrac{3}{2}$，

$\therefore\dfrac{2k-1}{k^2+1}=-\dfrac{3}{2}$，

解得 $k=-1$ 或 $k=-\dfrac{1}{3}$(舍去)，

$\therefore k=-1$.

点拨： 本题利用数形结合思想将抛物线与一元二次方程结合，利用根的判别式和根与系数的关系进行求解.

11. 解： (1)$\because$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2-4x+m=0$ 有实数根，

$\therefore\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4m\geqslant 0$，

解得 $m\leqslant 4$.

(2)$\because$ 方程的两实数根分别为 x_1,x_2，

$\therefore x_1+x_2=4$，又 $5x_1+2x_2=2$，

$\therefore x_1=-2,x_2=6$.

$\therefore$ 二次函数 $y=x^2-4x+m$ 的图象与 x 轴的两个交点间的距离为 $|x_1-x_2|=|-2-6|=8$.

第 7 招　二次函数的图象与系数的七种关系

1. A

2. C　**点拨：** $\because$ 二次函数 $y=3x^2+(b-3)x-4$ 的图象关于 y 轴对称，$\therefore b-3=0$，即 $b=3$.

3. $=$；$<$；$>$　**4.** A　**5.** 1　**6.** D

7. 解： 由图象知 $\begin{cases}3-m>0,\\ n+5<0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}m<3,\\ n<-5.\end{cases}$

$\therefore m-3<0,m+n<-2$.

$\therefore\sqrt{(m-3)^2}+\sqrt{n^2}-|m+n|=3-m-n+m+n=3$.

8. B

9. D　**点拨：** ① 由抛物线的开口方向可知 $a<0$，

又对称轴为直线 $x=-\dfrac{b}{2a}>0$，

$\therefore b>0$，

由抛物线与 y 轴的交点可知 $c>0$，

$\therefore abc<0$，故① 正确.

② $\because$ 抛物线与 x 轴交于点 $A(-1,0)$，

对称轴为直线 $x=2$，

$\therefore$ 抛物线与 x 轴的另外一个交点为 $(5,0)$，

$\therefore x=3$ 时，$y>0$，

$\therefore 9a+3b+c>0$，故② 正确.

③ 由于 $\dfrac{1}{2}<2<\dfrac{5}{2}$，

且点 $\left(\dfrac{5}{2},y_2\right)$ 关于直线 $x=2$ 的对称点的坐标为 $\left(\dfrac{3}{2},y_2\right)$.

$\because\dfrac{1}{2}<\dfrac{3}{2}$，

$\therefore y_1<y_2$，故③ 正确.

④ $\because-\dfrac{b}{2a}=2$，$\therefore b=-4a$.

$\because x=-1,y=0$，$\therefore a-b+c=0$，

$\therefore c=-5a$.

$\because 2<c<3$，

$\therefore 2<-5a<3$，

$\therefore-\dfrac{3}{5}<a<-\dfrac{2}{5}$，故④ 正确.

故选 D.

第 8 招　求二次函数解析式的九种方法

1. 解： (1)$\because$ 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象过 $A(2,0)$，$B(0,-1)$ 和 $C(4,5)$ 三点，

$\therefore\begin{cases}4a+2b+c=0,\\ c=-1,\\ 16a+4b+c=5.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\dfrac{1}{2},\\ b=-\dfrac{1}{2},\\ c=-1.\end{cases}$

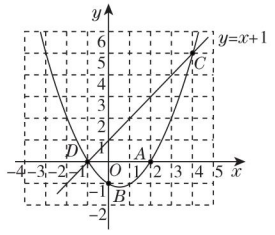
$\therefore$ 二次函数的解析式为 $y=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}x-1$.

(2) 当 $y=0$ 时，$\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}x-1=0$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解得 $x_1=2, x_2=-1$，∴ 点 D 的坐标为 $(-1,0)$.

(3) 如图.



（第 1 题）

当 $-1<x<4$ 时，一次函数的值大于二次函数的值.

点拨： 本题用待定系数法将 A,B,C 三点的坐标代入 $y=ax^2+bx+c$，求出二次函数的解析式. 根据图象利用数形结合思想可求出 x 的取值范围.

2. 解： (1)∵ 抛物线 $C: y_1=-x^2+mx+n$ 的对称轴与直线 $l: y_2=kx+b$ 交于点 $A(-1,5)$，点 A 与抛物线 C 的顶点 B 的距离是 4，

∴ $B(-1,1)$ 或 $(-1,9)$，∴ $y_1=-(x+1)^2+1$ 或 $y_1=-(x+1)^2+9$，

即抛物线 C 的解析式为 $y_1=-x^2-2x$ 或 $y_1=-x^2-2x+8$.

(2)①当 $y_1=-x^2-2x$ 时，抛物线 C 与 x 轴的交点坐标是 $(0,0)$ 和 $(-2,0)$.

∵ y_2 随着 x 的增大而增大，

∴ 直线 l 过点 $(-1,5)$，$(-2,0)$，将这两个点的坐标分别代入 $y_2=kx+b$，得 $\begin{cases}-k+b=5,\\-2k+b=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=5,\\b=10,\end{cases}$

∴ $y_2=5x+10$.

②当 $y_1=-x^2-2x+8$ 时，抛物线 C 与 x 轴的交点坐标是 $(-4,0)$ 和 $(2,0)$. 同理可得直线 l 过点 $(-1,5)$，$(-4,0)$，将这两个点的坐标分别代入 $y_2=kx+b$，得 $\begin{cases}-k+b=5,\\-4k+b=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=\dfrac{5}{3},\\b=\dfrac{20}{3}.\end{cases}$

∴ $y_2=\dfrac{5}{3}x+\dfrac{20}{3}$.

综上所述，直线 l 的解析式为 $y_2=5x+10$ 或 $y_2=\dfrac{5}{3}x+\dfrac{20}{3}$.

点拨： 根据题目条件，利用两点之间的距离公式求出抛物线 C 的顶点 B 的坐标，然后利用顶点式求其解析式.

3. 解： (1) 由抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 过点 $A(-1,0)$ 和点 $B(3,0)$，可知抛物线的解析式为 $y=-(x+1)(x-3)$，

即 $y=-x^2+2x+3$.

(2) $C(0,3)$，$D(1,4)$.

(3) 设 $P(x,y)\ (x>0, y>0)$，

$S_{\triangle COE}=\dfrac{1}{2}\times1\times3=\dfrac{3}{2}$，$S_{\triangle ABP}=\dfrac{1}{2}\times4y=2y$.

∵ $S_{\triangle ABP}=4S_{\triangle COE}$，∴ $2y=4\times\dfrac{3}{2}$，

∴ $y=3$，令 $-x^2+2x+3=3$，

解得 $x_1=0$（不合题意，舍去），$x_2=2$.

∴ 点 P 的坐标为 $(2,3)$.

点拨： 当遇到抛物线与 x 轴交于某两个点求抛物线解析式的问题时，设交点式可简便运算.

4. 解： (1)∵ 当 $x=0$ 时，$y=0$，

∴ 可设二次函数的解析式为 $y=ax^2+bx$.

将 $x=1, y=4$；$x=2, y=12$ 分别代入 $y=ax^2+bx$，得 $\begin{cases}a+b=4,\\4a+2b=12,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\b=2.\end{cases}$

∴ 二次函数的解析式为 $y=2x^2+2x$.

当 $y=80\ 000$ 时，$2x^2+2x=80\ 000$，

解得 $x\approx199.5$（负值舍去）.

即他大约需要 199.5 s 才能到达终点.

(2)∵ $y=2x^2+2x=2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}$，

∴ 将二次函数的图象向左平移 2 个单位长度，再向上平移 5 个单位长度后得到的图象对应的函数解析式为 $y=2\left(x+2+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}+5=2\left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{9}{2}$.

点拨： (1) 利用待定系数法求出函数解析式，再求出 $y=80\ 000$ 时 x 的值即可；(2) 根据函数图象平移规则“上加下减，左加右减”进行解答即可.

5. 解： (1) 由题意得 $\begin{cases}a+b=-3,\\-\dfrac{b}{2a}=2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\b=-4.\end{cases}$

∴ 抛物线的解析式为 $y=x^2-4x$.

当 $y\leqslant0$ 时，自变量 x 的取值范围是 $0\leqslant x\leqslant4$.

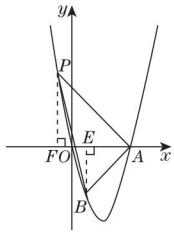
(2) 如图，过 P 点作 $PF\perp x$ 轴于点 F，过 B 点作 $BE\perp x$ 轴于点 E，由点 P 在抛物线上，可设 P 点的坐标为 (t,t^2-4t)，易知 $F(t,0)$，$E(1,0)$，$AE=3$，$BE=3$，$AF=4-t$，$PF=t^2-4t$，

∴ $\triangle ABE$ 为等腰直角三角形，∴ $\angle BAE=45°$.

∵ $PA\perp BA$，∴ $\angle PAB=90°$，∴ $\angle PAO=45°$，∴ $\triangle PAF$ 为等腰直角三角形，即 $AF=PF$，∴ $4-t=t^2-4t$，解得 $t_1=4$（不合题意，舍去），$t_2=-1$，∴ $P(-1,5)$.

∵ $PA=\sqrt{PF^2+AF^2}=\sqrt{5^2+5^2}=5\sqrt{2}$，$AB=\sqrt{BE^2+AE^2}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$.

∴ $\triangle PAB$ 的面积 $=\dfrac{1}{2}\times PA\times AB=\dfrac{1}{2}\times5\sqrt{2}\times3\sqrt{2}=15$.



（第 5 题）

6. D

7. 解： (1) 根据表格数据可得 $\begin{cases}-4-2b+c=5,\\-1+b+c=2,\end{cases}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解得$\begin{cases}b=-2,\\c=5.\end{cases}$

$\therefore -x^2+bx+c=-x^2-2x+5.$

当$x=-1$时，$-x^2-2x+5=6$，即$n=6$.

(2)当$0\leqslant x\leqslant 2$时，y的最大值是5.

8. 解：(1)$y=x(36-2x)=-2x^2+36x(9\leqslant x<18)$.

(2)由题意得$-2x^2+36x=160$，

解得$x=10$或$x=8$.

$\because x$的取值范围为$9\leqslant x<18$，

$\therefore x$的值为10.

(3)$\because y=-2x^2+36x=-2(x-9)^2+162$，

$\therefore$当$x=9$时，y取得最大值162.

设购买了乙种绿色植物a棵，购买了丙种绿色植物b棵，

由题意得$14(400-a-b)+16a+28b=8\ 600$，

$\therefore a+7b=1\ 500$.

$\therefore b$的最大值为214，

此时$a=2$.

需要种植的面积$=0.4\times(400-214-2)+1\times 2+0.4\times 214=161.2(m^2)$，$\because 161.2\ m^2<162\ m^2$，

$\therefore$两种植物最多可以购买214棵，此时这批植物可以全部栽种到这块空地上.

点拨：(1)先用含x的式子表示BC的长，再根据矩形的面积公式即可求出函数关系式，最后由BC的长大于0 m且不大于18 m列不等式组求解即可得到x的取值范围；(2)令$y=160$，列出关于x的一元二次方程求解即可；(3)根据题意求出丙的最大棵数，并计算出这批植物所需的种植面积，然后与这块地的最大面积比较即可.

9. 解：(1)根据题意，得$w=(-4x+220)x-1\ 000=-4x^2+220x-1\ 000$.

(2)$\because w=-4x^2+220x-1\ 000=-4(x-27.5)^2+2\ 025$，且$10\leqslant x\leqslant 50$，$x$是整数，

$\therefore$当$x=27$或28时，w取得最大值，最大值为2 024.

故影城将电影票售价定为27元/张或28元/张时，每天获利最大，最大利润是2 024元.

点拨：(1)根据“利润=票房收入-运营成本”可得函数关系式；(2)将函数关系式配方成顶点式，由$10\leqslant x\leqslant 50$，且$x$为整数，可求最大利润.

第9招 二次函数的五种解题技巧

1. 解：(1)由题意，得$\begin{cases}n^2-1=0,\\n^2-2n-3\neq 0,\end{cases}$解得$n=1$，

$\therefore$当$n=1$时，y是x的一次函数.

(2)由题意，得$n^2-1\neq 0$，即$n\neq\pm 1$，

$\therefore$当$n\neq\pm 1$时，y是x的二次函数.

点拨：根据二次函数和一次函数的定义，求相关字母的值.

2. 解：(1)$y=\frac{1}{3}x^2-2x-1$

$=\frac{1}{3}(x^2-6x)-1$

$=\frac{1}{3}(x^2-6x+9-9)-1$

$=\frac{1}{3}(x-3)^2-4$，

所以抛物线的开口向上，对称轴为直线$x=3$，

顶点坐标为$(3,-4)$.

(2)$y=-4(x+1)(x+3)$

$=-4(x^2+4x+3)$

$=-4(x^2+4x+4-1)$

$=-4(x+2)^2+4$，

所以抛物线的开口向下，对称轴为直线$x=-2$，

顶点坐标为$(-2,4)$.

点拨：本题用配方法可直接得到抛物线的对称轴和顶点坐标.

3. 解：(1)$\because$抛物线$y=a(x-3)^2+2$经过点$(1,-2)$.

$\therefore a(1-3)^2+2=-2$，$\therefore a=-1$.

(2)由(1)得$y=-(x-3)^2+2$，$\therefore$抛物线开口向下，函数y有最大值，最大值为2.

(3)方法1：由(2)知抛物线的开口向下，在对称轴直线$x=3$的左侧，y随x的增大而增大.

$\because m<n<3$，$\therefore y_1<y_2$.

方法2：由(1)得$y=-(x-3)^2+2$，

$\therefore$当$x=m$时，$y_1=-(m-3)^2+2$，

当$x=n$时，$y_2=-(n-3)^2+2$，

$\therefore y_1-y_2=(n-3)^2-(m-3)^2=(n-m)(m+n-6)$.

$\because m<n<3$，$\therefore n-m>0$，$m+n<6$，即$m+n-6<0$，

$\therefore (n-m)(m+n-6)<0$. $\therefore y_1<y_2$.

4. 解：(1)因为抛物线的顶点坐标是$(1,2)$，所以设其对应的解析式为$y=a(x-1)^2+2(a\neq 0)$.

又因为此抛物线过点$(2,3)$，所以$a(2-1)^2+2=3$，解得$a=1$，

所以该抛物线的解析式为$y=(x-1)^2+2$，即$y=x^2-2x+3$.

(2)由已知可设该抛物线所对应的解析式为$y=a(x+1)\cdot(x-3)(a\neq 0)$，又该抛物线经过点$(2,-6)$，所以把点$(2,-6)$的坐标代入上式中得$-6=a(2+1)\times(2-3)$，解得$a=2$，即$y=2(x+1)(x-3)$，所以所求二次函数的解析式为$y=2x^2-4x-6$.

(3)设此抛物线的解析式为$y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，由抛物线过$(-1,2)$，$(0,1)$，$(2,-7)$三点，

得$\begin{cases}a-b+c=2,\\c=1,\\4a+2b+c=-7.\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-1,\\b=-2,\\c=1.\end{cases}$

所以所求二次函数的解析式为$y=-x^2-2x+1$.

5. 解：设二次函数的解析式为$y=a(x-h)^2+k$.

由题意知二次函数的图象的顶点坐标为$(1,6)$或$(1,-6)$.

当顶点为$(1,6)$，即$h=1$，$k=6$时，代入点$(2,-8)$的坐标得$-8=a(2-1)^2+6$，解得$a=-14$，

$\therefore y=-14(x-1)^2+6$，

当顶点为$(1,-6)$，即$h=1$，$k=-6$时，代入点$(2,-8)$的坐标得

$-8=a(2-1)^2-6$，解得$a=-2$，

$\therefore y=-2(x-1)^2-6$，

$\therefore$此二次函数的解析式为$y=-14(x-1)^2+6$或$y=-2(x-1)^2-6$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点拨： 本题考查的是用待定系数法求二次函数的解析式，根据题意得出抛物线的顶点坐标，设出其顶点式是解答此题的关键，解答时注意分类讨论思想的运用.

6. 解： $y=2x^2-4x+5$

$=2(x^2-2x)+5$

$=2(x^2-2x+1-1)+5$

$=2(x-1)^2+3.$

(1) $y=2(x+1)^2$；

(2) $y=-2(x-1)^2-3.$

点拨： 本题先将二次函数的解析式化为顶点式，然后再求解比较简便.

7. 解： (1)把点 $A(0,3)$，$B(3,0)$，$C(4,3)$ 的坐标代入 $y=ax^2+bx+c$，得 $\begin{cases}c=3,\\9a+3b+c=0,\\16a+4b+c=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\b=-4,\\c=3.\end{cases}$

所以抛物线的解析式为 $y=x^2-4x+3$.

(2)因为 $y=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$，所以抛物线的顶点坐标为 $(2,-1)$，对称轴是直线 $x=2$.

(3)通过割补得阴影部分的面积等于一个底边长为 1，且该底边上的高为 2 的平行四边形的面积，所以阴影部分的面积为 $1\times2=2$.

点拨： 若抛物线的顶点要平移至 x 轴上，则抛物线需向上平移 1 个单位长度，且平移不改变图形的形状.

第 10 招　旋转问题中作辅助线的技巧

1.【尝试解决】(1)等边三角形

点拨： 由旋转的性质可得 $BD=B'D$，旋转角 $\angle BDB'=60°$，$\angle DAB'=\angle C$.

又∵ $\angle ABC+\angle ADC=180°$，∴ $\angle BAD+\angle C=180°$，

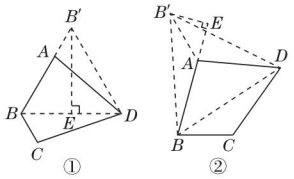
∴ $\angle BAD+\angle DAB'=180°$，即点 B，A，B' 三点共线，

∴ $\triangle BDB'$ 是等边三角形.

(2)**解：** 由(1)知，$\triangle BCD\cong\triangle B'AD$，∴ $S_{四边形ABCD}=S_{\triangle BDB'}$，$AB'=BC=1$，∴ $BD=BB'=AB+AB'=2+1=3.$

如图①，过点 B' 作 $B'E\perp BD$ 于点 E，则易知 $BE=\frac{1}{2}BD=\frac{3}{2}$，则 $B'E=\sqrt{B'B^2-BE^2}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$，

∴ $S_{四边形ABCD}=S_{\triangle BDB'}=\frac{1}{2}\times3\times\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{4}.$



（第 1 题）

【类比应用】如图②，连接 BD，由于 $AD=CD$，$\angle ADC=60°$，因此可将 $\triangle BCD$ 绕点 D 顺时针方向旋转 60°，得到 $\triangle B'AD$，连接 BB'，过点 B' 作 $B'E\perp AB$，交 BA 的延长线于 E，

由旋转的性质可得 $\triangle BCD\cong\triangle B'AD$，

∴ $S_{四边形ABCD}=S_{四边形BDB'A}$.

∵ $\angle ABC=75°$，$\angle ADC=60°$，

∴ $\angle BCD+\angle BAD=360°-\angle ABC-\angle ADC=360°-75°-60°=225°$，∴ $\angle B'AD+\angle BAD=225°$，∴ $\angle BAB'=360°-(\angle B'AD+\angle BAD)=360°-225°=135°$，

∴ $\angle B'AE=180°-\angle BAB'=180°-135°=45°$，

∴ $\triangle B'EA$ 是等腰直角三角形.

∵ $B'A=BC=\sqrt{2}$，∴ $B'E=AE=1$，∴ $BE=AB+AE=2+1=3$，∴ $BB'=\sqrt{BE^2+B'E^2}=\sqrt{10}$，

∴ $S_{\triangle ABB'}=\frac{1}{2}AB\cdot B'E=\frac{1}{2}\times2\times1=1.$

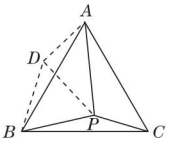
又∵ $\angle BDB'=60°$，$BD=B'D$，∴ $\triangle BDB'$ 为等边三角形.

易知 $\triangle BDB'$ 的高为 $\frac{\sqrt{30}}{2}$，

∴ $S_{\triangle BDB'}=\frac{1}{2}\times\sqrt{10}\times\frac{\sqrt{30}}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$，

∴ $S_{四边形ABCD}=S_{四边形BDB'A}=S_{\triangle BDB'}-S_{\triangle ABB'}=\frac{5\sqrt{3}}{2}-1.$

2. 解： 如图，将 $\triangle BPC$ 绕点 B 逆时针旋转 60° 得到 $\triangle BDA$，连接 PD，



（第 2 题）

由旋转的性质得，$BD=PB=4$，$AD=PC=3$，

$\angle BPC=\angle BDA$，$\angle DBP=\angle ABC=60°$，

∴ $\triangle BDP$ 是等边三角形，

∴ $PD=PB=4$，$\angle BDP=60°$.

∵ $AD^2+DP^2=3^2+4^2=25$，$PA^2=5^2=25$，

∴ $AD^2+DP^2=PA^2$，

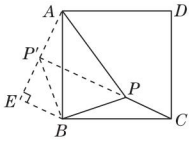
∴ $\triangle ADP$ 是直角三角形，且 $\angle ADP=90°$，

∴ $\angle BDA=\angle BDP+\angle ADP=60°+90°=150°$，

∴ $\angle BPC=\angle BDA=150°$.

点拨： 利用旋转作辅助线构造出直角三角形和等边三角形是解本题的关键.

3. 解： 如图，将 $\triangle BPC$ 绕点 B 逆时针旋转 90°，得 $\triangle BP'A$，则 $\triangle BPC\cong\triangle BP'A$.



（第 3 题）

∴ $\angle BPC=\angle AP'B$，$AP'=PC=1$，$BP'=PB=\sqrt{2}$.

连接 PP'，在 Rt$\triangle BP'P$ 中，

∵ $PB=BP'=\sqrt{2}$，$\angle PBP'=90°$，∴ $PP'=2$，$\angle BP'P=45°$.

在 $\triangle AP'P$ 中，$AP'=1$，$PP'=2$，$PA=\sqrt{5}$，

∵ $1^2+2^2=(\sqrt{5})^2$，即 $AP'^2+PP'^2=PA^2$，

∴ $\triangle AP'P$ 是直角三角形，即 $\angle AP'P=90°$.

∴ $\angle AP'B=135°$，∴ $\angle BPC=\angle AP'B=135°$.

过点 B 作 $BE\perp AP'$，交 AP' 的延长线于点 E，易得 $\triangle BEP'$ 是

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

等腰直角三角形.

又∵ $BP'=\sqrt{2}$,∴ $EP'=BE=1$. ∴ $AE=2$.

在 Rt△ABE 中,∵ $BE=1$,$AE=2$,

∴ 由勾股定理得 $AB=\sqrt{5}$.

综上可得,∠$BPC=135°$,正方形 $ABCD$ 的边长为$\sqrt{5}$.

4. 解: (1) $EF=BE+FD$

(2)结论:$EF=BE+FD$ 仍然成立.

理由:延长 FD 到点 G,使 $DG=BE$. 连接 AG.

∵ ∠B + ∠ADC = 180°, ∠ADC + ∠ADG = 180°,

∴ ∠B = ∠ADG.

在△ABE 和△ADG 中,

$$\begin{cases} BE=DG, \\ \angle B=\angle ADG, \\ AB=AD, \end{cases}$$

∴ △ABE≌△ADG,

∴ $AE=AG$, ∠BAE = ∠DAG.

∵ $\angle EAF=\frac{1}{2}\angle BAD$,

∴ $\angle GAF=\angle DAG+\angle DAF=\angle BAE+\angle DAF=\angle BAD-\angle EAF=\frac{1}{2}\angle BAD$,

∴ ∠EAF = ∠GAF.

在△AEF 和△AGF 中,

$$\begin{cases} AE=AG, \\ \angle EAF=\angle GAF, \\ AF=AF, \end{cases}$$

∴ △AEF≌△AGF,∴ $EF=FG$.

∵ $FG=DG+FD=BE+FD$,∴ $EF=BE+FD$.

5. 解: (1) △CMF≌△CMN.

理由:∵ 将△BCN 绕点 C 逆时针旋转 90°得到△ACF,

∴ $CF=CN$, ∠ACF = ∠BCN.

∵ ∠DCE = 45°, △ABC 是等腰直角三角形,

∴ ∠ACM + ∠BCN = 45°,

∴ ∠ACM + ∠ACF = 45°,即 ∠MCF = 45°.

∴ ∠MCF = ∠MCN.

在△CMF 和△CMN 中,

$$\begin{cases} CF=CN, \\ \angle MCF=\angle MCN, \\ CM=CM, \end{cases}$$

∴ △CMF≌△CMN(SAS).

(2) $AM^2+NB^2=MN^2$.

理由:∵ △CMF≌△CMN,∴ $FM=MN$.

∵ ∠CAF = ∠B = 45°,

∴ ∠FAM = ∠CAF + ∠BAC = 45° + 45° = 90°.

∴ $AM^2+AF^2=FM^2$. 易知 $AF=BN$,

∴ $AM^2+NB^2=MN^2$.

第 11 招 巧用圆的基本性质解圆的五种关系

1. 证明: 因为 $AD=BC$,根据"在同圆中,相等的弦所对的劣弧相等",可得$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BC}$,所以$\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{AC}$,即$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$.

点拨: 在同圆或等圆中,等弦对等弧,等弧对等弦(劣弧等劣弧,优弧等优弧).

2. 证明: 在⊙O 中, ∠CAB, ∠COB 分别是$\overset{\frown}{CB}$所对的圆周角和圆心角,

∴ ∠COB = 2∠CAB. 同理可得 ∠COA = 2∠CBA.

又∵ ∠CAB = ∠CBA,

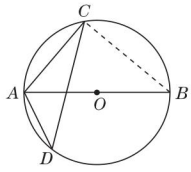
∴ ∠COB = ∠COA.

3. 解: 如图,连接 BC,

∵ AB 是⊙O 的直径,

∴ ∠ACB = 90°.

在 Rt△ABC 中, ∠ABC = 90° − ∠BAC = 90° − 50° = 40°.



(第 3 题)

又∵ ∠ADC, ∠ABC 是$\overset{\frown}{AC}$所对的圆周角,

∴ ∠ADC = ∠ABC = 40°.

点拨: 在同一个圆中,同弧所对的圆周角相等.

4. 解: $BD=DE=EC$. 理由如下:如图,连接 OD,OE.

∵ $OB=OD=OE=OC$, ∠B = ∠C = 60°,

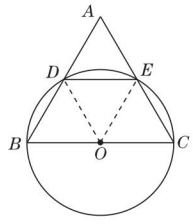
∴ △BOD 与 △COE 都是等边三角形.

∴ ∠BOD = ∠COE = 60°.

∴ ∠DOE = 180° − ∠BOD − ∠COE = 60°.

∴ ∠BOD = ∠DOE = ∠COE.

∴ $BD=DE=EC$.



(第 4 题)

点拨: 本题利用"在同圆中,相等的圆心角所对的弦相等"去证明三条线段相等,因此,连接 OD,OE,构造弦所对的圆心角是解此题的关键.

5. 证明: 如图,连接 AC,BD.

∵ C,D 是$\overset{\frown}{AB}$的三等分点,

∴ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{BD}$,

∴ $AC=CD=BD$,

∴ ∠AOC = ∠COD = ∠BOD.

又∵ ∠AOB = 90°,

∴ ∠AOC = ∠COD = ∠BOD = 30°.

∵ $OA=OB$, ∠AOB = 90°,

∴ ∠OAB = ∠OBA = 45°.

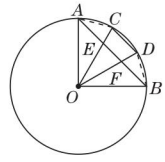
∴ ∠AEC = ∠AOC + ∠OAB = 75°.

∵ $OA=OC$, ∠AOC = 30°,

∴ $\angle ACE=\frac{1}{2}\times(180°-30°)=75°=\angle AEC$.

∴ $AE=AC$. 同理可得 $BF=BD$.

∴ $AE=BF=CD$.



(第 5 题)

点拨: 本题解题的关键是证∠AEC = ∠ACE,从而证得 $AE=$

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

AC，同理证得 $BF=BD$. 从而证得 $AE=BF=CD$.

第 12 招 巧用勾股定理解决圆的直径问题

1. 解： 在 $\mathrm{Rt}\triangle OCE$ 中，$CE=\sqrt{OC^2-OE^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$.

$\because AB\perp CD$，AB 为直径，

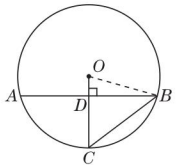
$\therefore CD=2CE=8$.

2. 解： 如图，连接 OB，可知 $BD=\sqrt{BC^2-CD^2}=4$，

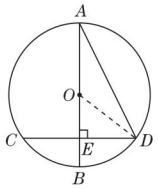
设 $OB=R$，则 $OD=R-3$，

$\therefore (R-3)^2+4^2=R^2$，

$\therefore R=\dfrac{25}{6}$.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 解： 如图，连接 OD，设 $OA=OB=OD=R$，

则 $OE=R-2$，$AE=R+(R-2)=2R-2$.

$\because$ 直径 $AB\perp$ 弦 CD 于点 E，

$\therefore AD^2-AE^2=DE^2=OD^2-OE^2$，

$\therefore (4\sqrt{5})^2-(2R-2)^2=R^2-(R-2)^2$，

$\therefore R^2-R-20=0$，

$\therefore R_1=5$，$R_2=-4$（舍去），

$\therefore DE=4$，

$\therefore CD=2DE=8$.

点拨： 解本题的关键是找出 $\mathrm{Rt}\triangle ADE$ 与 $\mathrm{Rt}\triangle ODE$ 之间的关系. 根据 $AD^2-AE^2=DE^2=OD^2-OE^2$ 这一关系，列方程求半径.

4. 解： 如图，作 $OF\perp AB$ 于 F，作 $OG\perp CD$ 于 G，连接 OC，OB.

$\because AB=AE+BE=2+6=8$，

$\therefore BF=\dfrac{1}{2}AB=4$，

易得四边形 $GEFO$ 是矩形，

$\therefore EF=2=OG$，$OF=EG$.

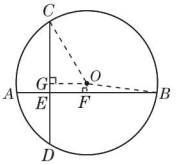
设 $OF=EG=x$，则 $CG=4-x$.

$\because CG^2+OG^2=OC^2=OB^2=OF^2+BF^2$，

$\therefore (4-x)^2+2^2=x^2+4^2$，

$\therefore x=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore OB=\dfrac{\sqrt{65}}{2}$，即 $\odot O$ 的半径为 $\dfrac{\sqrt{65}}{2}$.



（第 4 题）

点拨： 本题解题的关键是作辅助线构造直角三角形，根据勾股定理列出方程求半径.

5. 解： 如图，过点 O 作 $ON\perp AB$ 于 N，$OM\perp CD$ 于 M，连接 OA.

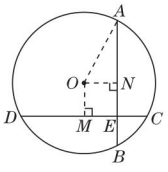
$\because CD=CE+DE=1+3=4$，

$\therefore AB=CD=4$，

易知四边形 $OMEN$ 为矩形，

$\therefore ON=ME=CM-CE=\dfrac{1}{2}CD-CE=\dfrac{1}{2}\times 4-1=1$，$AN=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{1}{2}\times 4=2$，

$\therefore OA=\sqrt{ON^2+AN^2}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，即 $\odot O$ 的半径为 $\sqrt{5}$.



（第 5 题）

6. 解： 如图，作 $OE\perp CD$ 于点 E，连接 OD.

$\because PA=2$，$PB=14$，

$\therefore AB=12$，

$\therefore OA=OB=OD=6$，

$\therefore OP=8$.

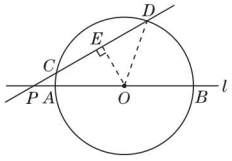
$\because \angle DPB=30°$，

$\therefore OE=\dfrac{1}{2}OP=\dfrac{1}{2}\times 8=4$，

$\therefore DE=\sqrt{OD^2-OE^2}=\sqrt{6^2-4^2}=2\sqrt{5}$.

$\because OE\perp CD$ 于点 E，

$\therefore CD=2DE=4\sqrt{5}$.



（第 6 题）

第 13 招 与圆的切线有关的计算与证明的常见类型

1. 证明：（1）如图，连接 OB.

$\because PA$，PB 是 $\odot O$ 的切线，

$\therefore OA\perp AP$，$OB\perp BP$.

又 $OA=OB$，$OP=OP$，

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle AOP\cong\mathrm{Rt}\triangle BOP$，

$\therefore \angle APO=\angle BPO$，$\therefore PO$ 平分 $\angle APC$.

（2）$\because OA\perp AP$，$OB\perp BP$，

$\therefore \angle CAP=\angle OBP=90°$.

$\because \angle C=30°$，

$\therefore \angle APC=90°-\angle C=90°-30°=60°$.

$\because PO$ 平分 $\angle APC$，

$\therefore \angle OPC=\dfrac{1}{2}\angle APC=\dfrac{1}{2}\times 60°=30°$，

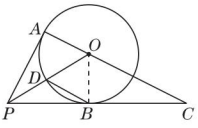
$\therefore \angle POB=90°-\angle OPC=90°-30°=60°$.

又 $\because OD=OB$，

$\therefore \triangle ODB$ 是等边三角形，$\therefore \angle OBD=60°$，

$\therefore \angle DBP=\angle OBP-\angle OBD=90°-60°=30°$，

$\therefore \angle DBP=\angle C$，$\therefore DB/\!/AC$.



（第 1 题）

点拨：（1）连接 OB，根据切线的性质和角平分线的定义可证明；（2）先证 $\triangle OBD$ 是等边三角形，再通过计算得 $\angle DBP=\angle C$，最后根据平行线的判定可证得.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. 解：(1)∵ AM 为⊙O 的切线，

∴ $\angle OAM=90°$.

又∵ $BD\perp AM$，

∴ $\angle BDM=90°$，

∴ $\angle OAM=\angle BDM$，

∴ $OA/\!/BD$，

∴ $\angle AOC=\angle OCB$.

∵ $OB=OC$，

∴ $\angle OCB=\angle OBC$，

∴ $\angle AOC=\angle OCB=\angle OBC$.

∵ OC 平分$\angle AOB$，

∴ $\angle AOC=\angle BOC$，

∴ $\angle AOC=\angle BOC=\angle OCB=\angle OBC$，

∴ △BOC 为等边三角形，

∴ $\angle BOC=60°$，

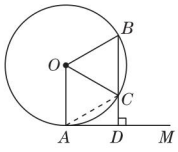
∴ $\angle AOB=120°$.

(2)如图，连接 AC，由(1)易得△AOC 是等边三角形，

∴ $AC=OA=2$ cm，$\angle OAC=60°$，

∴ $\angle CAD=30°$，

∴ 在 Rt△ACD 中，$CD=\frac{1}{2}AC=1$ cm.



(第 2 题)

点拨：(1)先证明 $OA/\!/BD$，然后根据角平分线的定义证得$\angle AOC=\angle BOC$，再证得 △BOC 为等边三角形，即可求得$\angle AOB$ 的度数；(2)利用等边三角形和含 30°角的直角三角形的性质，即可求出 CD 的长度.

3. 解：(1)如图①，连接 AC.

∵ AT 是⊙O 的切线，AB 是⊙O 的直径，

∴ $AT\perp AB$，即$\angle TAB=90°$.

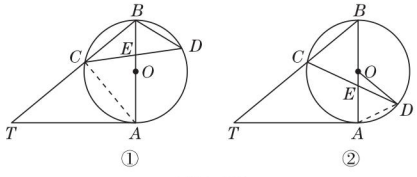
又∵ $\angle ABT=50°$，

∴ $\angle T=90°-\angle ABT=40°$.

由 AB 是⊙O 的直径，得$\angle ACB=90°$.

∴ $\angle CAB=90°-\angle ABC=40°$.

∴ $\angle CDB=\angle CAB=40°$.



(第 3 题)

(2)如图②，连接 AD.

在△BCE 中，$BE=BC$，$\angle EBC=50°$，

∴ $\angle BCE=\angle BEC=65°$，

∴ $\angle BAD=\angle BCD=65°$.

∵ $OA=OD$，

∴ $\angle ODA=\angle OAD=65°$.

∵ $\angle ADC=\angle ABC=50°$，

∴ $\angle CDO=\angle ODA-\angle ADC=15°$.

4. (1)**证明：**如图，连接 OD，CD.

∵ AC 是⊙O 的直径，

∴ $\angle ADC=90°$，

∴ $\angle BDC=90°$.

又∵ E 为 BC 的中点，

∴ $DE=\frac{1}{2}BC=CE$.

∴ $\angle EDC=\angle ECD$.

∵ $OD=OC$，

∴ $\angle ODC=\angle OCD$，

∴ $\angle EDC+\angle ODC=\angle ECD+\angle OCD=\angle ACB=90°$，

∴ $\angle ODE=90°$，即 $OD\perp DE$，

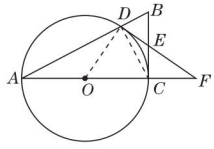
∴ DE 是⊙O 的切线.

(2)**解：**设⊙O 的半径为 x，

在 Rt△ODF 中，$OD^2+DF^2=OF^2$，

即 $x^2+4^2=(x+2)^2$，解得 $x=3$，

∴ ⊙O 的直径的长为 6.



(第 4 题)

5. (1)**证明：**∵ $AB=AC$，

∴ $\angle ABC=\angle DCB$.

∵ $CF/\!/AB$，

∴ $\angle ABC=\angle FCB$，

∴ $\angle DCB=\angle FCB$.

∵ AB 是⊙O 的直径，

∴ $\angle ADB=90°$，

∴ $\angle BDC=90°$.

∵ BF 是⊙O 的切线，

∴ $BF\perp AB$.

∵ $CF/\!/AB$，

∴ $BF\perp CF$，

∴ $\angle BFC=90°$，

∴ $\angle BDC=\angle BFC$.

又∵ $BC=BC$，

∴ △$BDC\cong$△BFC，

∴ $BD=BF$.

(2)**解：**∵ $AC=AB=10$，$CD=4$，

∴ $AD=AC-CD=10-4=6$.

在 Rt△ABD 中，$BD^2=AB^2-AD^2=10^2-6^2=64$.

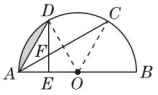
在 Rt△BDC 中，$BC=\sqrt{BD^2+CD^2}=\sqrt{64+4^2}=4\sqrt{5}$，

即 BC 的长为 $4\sqrt{5}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 14 招 求阴影部分面积的技巧

1. 解：（1）如图，连接 OD，OC.



（第 1 题）

$\because C,D$ 是半圆 O 上的三等分点，

$\therefore \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{BC}$，

$\therefore \angle AOD=\angle DOC=\angle COB=60°$，

$\therefore \angle CAB=30°$.

$\because DE\perp AB$，$\therefore \angle AEF=90°$，

$\therefore \angle AFE=90°-30°=60°$.

（2）由（1）知，$\angle AOD=60°$.

$\because OA=OD$，$AB=4$，

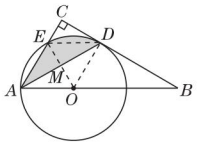
$\therefore \triangle AOD$ 是等边三角形，$OA=2$.

$\because DE\perp AO$，$\therefore$ 易得 $DE=\sqrt{3}$，

$\therefore S_{阴影}=S_{扇形OAD}-S_{\triangle AOD}=\dfrac{60\times\pi\times2^2}{360}-\dfrac{1}{2}\times2\times\sqrt{3}=\dfrac{2}{3}\pi-\sqrt{3}$.

点拨： 利用作差法，根据 $S_{阴影}=S_{扇形OAD}-S_{\triangle AOD}$ 求出面积.

2.（1）**证明：** 如图，连接 OD. $\because \odot O$ 切 BC 于 D，



（第 2 题）

$\therefore OD\perp BC$.

$\because AC\perp BC$，

$\therefore AC/\!/OD$，

$\therefore \angle CAD=\angle ADO$.

$\because OA=OD$，

$\therefore \angle OAD=\angle ADO$.

$\therefore \angle OAD=\angle CAD$，即 AD 平分 $\angle BAC$.

（2）**解：** 如图，连接 ED，OE，OE 与 AD 交于点 M.

$\because \angle BAC=60°$，$OA=OE$，

$\therefore \triangle AEO$ 是等边三角形，

$\therefore AE=OA$，$\angle AOE=60°$，

$\therefore AE=AO=OD$.

又由（1）知 $AC/\!/OD$，即 $AE/\!/OD$，

$\therefore$ 四边形 $AEDO$ 是菱形，

$\therefore \angle EOD=60°$，

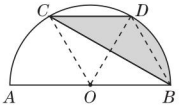
易得 $\triangle AEM\cong\triangle DOM$，

$\therefore S_{\triangle AEM}=S_{\triangle DOM}$，

$\therefore S_{阴影}=S_{扇形OED}=\dfrac{60\times\pi\times2^2}{360}=\dfrac{2\pi}{3}$.

点拨： 本题利用割补法将不规则图形的面积转化为规则图形的面积.

3. 解： 如图，连接 OC，OD，BD.



（第 3 题）

$\because$ 点 C,D 是半圆 O 上的三等分点，

$\therefore \angle AOC=\angle COD=\angle DOB=60°$.

$\because OC=OD=OB$，

$\therefore \triangle COD$，$\triangle OBD$ 是等边三角形.

$\therefore \angle ODB=60°$，$OD=CD=2$.

又$\because \angle COD=60°$，

$\therefore \angle COD=\angle ODB$.

$\therefore OC/\!/BD$.

$\therefore S_{\triangle BDC}=S_{\triangle BDO}$.

$\therefore S_{阴影}=S_{扇形OBD}=\dfrac{60\times\pi\times2^2}{360}=\dfrac{2\pi}{3}$.

点拨： 本题利用等积法将阴影部分的面积转化为扇形 OBD 的面积.

4. 解：（1）3；（2，1）；6

（2）如图，连接 AC，过点 A 作 $AD\perp BC$ 于点 D，

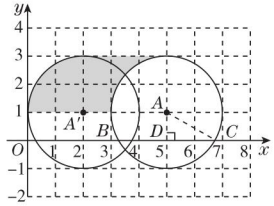
则 $BC=2DC$.

由 $A(5,1)$ 可得 $AD=1$.

又$\because$ 半径 $AC=2$，

$\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle ADC$ 中，$DC=\sqrt{AC^2-AD^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$.

$\therefore BC=2\sqrt{3}$.



（第 4 题）

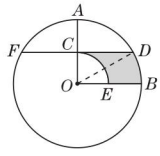
点拨： 本题利用平移法将图中阴影部分的面积转化为底为 3，高为 2 的平行四边形的面积.

5. 解： 因为三个扇形的半径都为 1，三个圆心角的和为 $45°+90°=135°$，所以阴影部分面积的和 $=\dfrac{135\times\pi\times1^2}{360}=\dfrac{3}{8}\pi$.

点拨： 图中阴影部分利用凑整法可拼成一个圆心角为 135°，半径是 1 的扇形.

6. 解：（1）如图，连接 OD. $\because OA\perp OB$，$FD/\!/OB$，

$\therefore OA\perp FD$，$\angle AOB=90°$.



（第 6 题）

$\therefore \angle OCD=90°$.

设 $OC=a$，则 $OA=2a=OD$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle OCD$ 中，由勾股定理，得 $CD^2+OC^2=OD^2$，

即 $(\sqrt{3})^2+a^2=4a^2$，

解得 $a_1=1$，$a_2=-1$（舍去）.

$\therefore OA=2OC=2$.

$\therefore \odot O$ 的半径 OA 的长为 2.

（2）$S_{\triangle OCD}=\dfrac{1}{2}OC\cdot CD=\dfrac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle OCD$ 中，$\because OC=1$，$OD=2$，

$\therefore \angle ODC=30°$.

又$\because FD/\!/OB$，$\therefore \angle DOB=30°$.

$\therefore S_{阴影}=S_{\triangle OCD}+S_{扇形OBD}-S_{扇形OCE}$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{30\pi}{360}\times2^2-\dfrac{90\pi}{360}\times1^2$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\pi}{12}$.

点拨： 连接 OD，本题中阴影部分的面积可以看成是 $\triangle OCD$ 的面积与扇形 OBD 面积的和减去扇形 OCE 的面积.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 15 招 求概率的四种方法

1. 解：(1)P(摸出一个球是黄球)$=\frac{5}{5+13+22}=\frac{1}{8}$.

(2)设取出了 x 个黑球，则放入了 x 个黄球，由题意得 $\frac{5+x}{5+13+22}\geqslant\frac{1}{3}$，

解得 $x\geqslant\frac{25}{3}$.

∵ x 为正整数，∴ x 最小取 9.

∴ 至少取出了 9 个黑球.

点拨：本题直接利用公式法求出相应问题的概率.

2. 解：(1)由题中图表可知被调查学生中“一般”档次的有 13 人，所占百分比是 26%，所以共调查的学生人数是 $13\div26\%=50$(人).

则被调查学生中“良好”档次的人数为 $50\times60\%=30$(人)，

所以 $x=30-(12+7)=11$.

所以 $y=50-(1+2+6+7+12+11+7+1)=3$.

(2)由样本数据可知“优秀”档次所占的百分比是 $\frac{3+1}{50}\times100\%=0.08\times100\%=8\%$.

所以估计该校九年级 400 名学生中为“优秀”档次的人数为 $400\times8\%=32$(人).

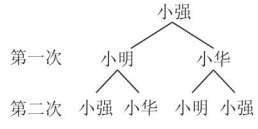
(3)用 A，B，C 表示阅读本数是 8 本的学生，用 D 表示阅读本数是 9 本的学生，列表如下：

	A	B	C	D
A		(A,B)	(A,C)	(A,D)
B	(B,A)		(B,C)	(B,D)
C	(C,A)	(C,B)		(C,D)
D	(D,A)	(D,B)	(D,C)	

由列表可知，共有 12 种等可能的情况，其中所抽取的 2 名学生中有 1 名阅读本数为 9 本的有 6 种. 所以抽取的 2 名学生中有 1 名阅读本数为 9 本的概率 $P=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$.

点拨：本题利用列表法将所有情况列出，共 12 种，找出符合条件的情况有 6 种，所以概率 $P=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$.

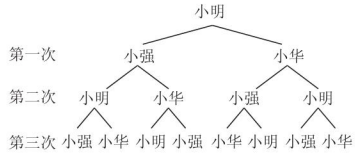
3. 解：(1)画树状图如图：



[第 3(1)题]

∴ P(踢到小华处)$=\frac{1}{4}$.

(2)应从小明开始踢. 理由如下：画树状图如图：



[第 3(2)题]

若从小明开始踢，P(踢到小明处)$=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$，

同理，若从小强开始踢，P(踢到小明处)$=\frac{3}{8}$，

若从小华开始踢，P(踢到小明处)$=\frac{3}{8}$.

故应从小明开始踢.

4. 解：(1)“和为 7”出现的概率约为 0.33.

(2)列表如下：

和 / 甲 / 乙	2	3	4	x
2	/	5	6	$2+x$
3	5	/	7	$3+x$
4	6	7	/	$4+x$
x	$x+2$	$x+3$	$x+4$	/

由上表可知，一共有 12 种等可能的结果，由(1)可知，“和为 7”出现的概率约为 0.33，

∴ “和为 7”出现的次数约为 $0.33\times12=3.96\approx4$.

若 $2+x=7$，则 $x=5$，符合题意.

若 $3+x=7$，则 $x=4$，不合题意.

若 $4+x=7$，则 $x=3$，不合题意.

∴ $x=5$.

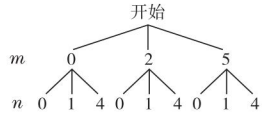
第 16 招 概率的应用类型

1. 解：关于 x 的一元二次方程 $x^2-2mx+n^2=0$ 有实数根，

则 $\Delta=(-2m)^2-4n^2=4(m^2-n^2)\geqslant0$，

∴ $m^2\geqslant n^2$，

画树状图如图：

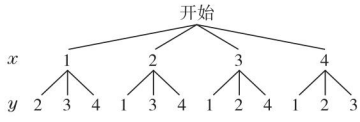


(第 1 题)

由图可知共有 9 种等可能的结果，$m^2\geqslant n^2$ 的情况有 6 种，

∴ 关于 x 的一元二次方程 $x^2-2mx+n^2=0$ 有实数根的概率为 $\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$.

2. 解：(1)画树状图如图：



(第 2 题)

共有 12 种等可能的结果. 点 M 所有可能的坐标有(1,2)，(1,3)，(1,4)，(2,1)，(2,3)，(2,4)，(3,1)，(3,2)，(3,4)，(4,1)，(4,2)，(4,3).

(2)∵ 在所有 12 种等可能的结果中，在函数 $y=x+1$ 的图象上的有(1,2)，(2,3)，(3,4)这 3 种结果，

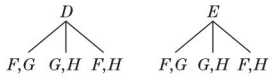
∴ 点 $M(x,y)$ 在函数 $y=x+1$ 的图象上的概率为 $\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. 解：（1）△*DHF* 或△*GFD*

（2）画树状图如图，共有 6 种等可能的结果，其中与△*ABC* 面积相等的是△*DFG*，△*DFH*，△*EFG*，共有 3 种结果，

∴ P（所画三角形与△*ABC* 面积相等）$=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.



（第 3 题）

4. 解：（1）50；30%

（2）他不能获奖. 理由如下：他的成绩位于“69. 5 ~ 79. 5”之间，而“59. 5 ~ 69. 5”和“69. 5 ~ 79. 5”这两组人数占总参赛人数的百分比为 10% ＋30% ＝40%，因为成绩由高到低前 60% 的参赛选手获奖，他位于后 40%，所以他不能获奖.

（3）画树状图如图：



（第 4 题）

共有 12 种等可能的结果，其中恰好选中 1 男 1 女的有 8 种，

∴ 恰好选中 1 男 1 女的概率为$\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$.

第 17 招 统计概率思想在实际中的应用

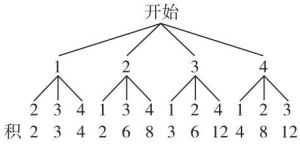
1. 解： 问题 1：第三名同学的样本选取更合理.

理由：第三名同学选取的样本是从七年级全体学生中随机选取的 20 名学生，样本容量与其他两名同学相比选取更合理；第一名同学主要问题是样本容量小；第二名同学虽然样本容量合适，但是样本中的个体不具有代表性.

问题 2：读 4 本书的可能性大.

理由：由扇形统计图知，合理样本的 20 名学生中，“阅读动机”为“老师布置的任务不得不完成”和“读与不读都无所谓”的学生共有 20 ×（20% ＋15%）＝7（人），他们的读书数量基本是 2 本或 3 本，而“阅读动机”在“40%”的群体，即“阅读动机”是“能够学到一些课外知识”的学生人数为 20 ×40% ＝8（人），他们的读书本数会比最低要求的读书本数略多，结合表 3 可知，他们暑期读 4 本书的可能性大.

2. 解：（1）画树状图如图所示：



（第 2 题）

共有 12 种等可能的结果，两人摸出的小球上的数字之积是 8 的有 2 种情况，

∴ 两数之积是 8 的概率为$\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.

（2）不公平. 理由：

∵ 两数之积是偶数的有 10 种情况，两数之积是奇数的有 2 种情况，

∴ P（两数之积是偶数）$=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$，$P$（两数之积是奇数）$=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.

∵ $\frac{5}{6}\times1\neq\frac{1}{6}\times3$，

∴ 此游戏不公平.

修改得分规则为：当两数之积是偶数时，甲得 1 分，当两数之积是奇数时，乙得 5 分.（修改得分规则不唯一）

3. 解：（1）∵ 共有 4 种等可能的结果，落回到圈 *A* 的只有 1 种情况，

∴ 落回到圈 *A* 的概率 $P_1=\frac{1}{4}$.

（2）列表得：

	1	2	3	4
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)

共有 16 种等可能的结果，最后落回到圈 *A* 的有（1，3），（2，2），（3，1），（4，4），

∴ 最后落回到圈 *A* 的概率 $P_2=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$.

∴ 她与嘉嘉落回到圈 *A* 的可能性一样.

4. 解：（1）根据题意，点 *P* 的横坐标有数字 1，2，3，4 四种选择，点 *P* 的纵坐标也有数字 1，2，3，4 四种选择，

∴ 构成点 *P* 的坐标共有 4 ×4 ＝16（种）情况，

设点 *P* 的坐标为（*x*，*y*），列表如下：

y \ *x*	1	2	3	4
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)

其中（1，1），（1，2），（2，1），（2，2）落在正方形 *ABCD* 面上（含正方形内部和边界），

故所求的概率为$\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$.

（2）∵ 要使点 *P* 落在正方形 *ABCD* 面上（含正方形内部和边界）的概率为$\frac{3}{4}=\frac{12}{16}>\frac{1}{4}$，

∴ 只能将正方形 *ABCD* 向上或向右平移整数个单位长度，且使点 *P* 落在正方形 *ABCD* 面上（含正方形内部和边界）的情况有 12 种.

∴ 存在满足题设要求的平移方式：先将正方形 *ABCD* 向上平移 2 个单位长度，再向右平移 1 个单位长度.（平移方式不唯一）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

典点

练准知识 练通考点
练透方法 练出高分





提分一定有方法！

绿色印刷产品

关注荣德基微信公众号，获取新资讯。
荣德基官方网站：http://www.rudder.com.cn
荣德基天猫旗舰店：http://rongdeji.tmall.com
客服热线：182 1039 5892

荣德基
初中频道

本书导学号
7574456

ISBN 978-7-5450-6650-0
01>
定价：46.90元

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料