教辅资料站

电子教辅　试卷练习
知识总结　备课资源

扫码关注获取更多学习资料

荣德基 主编

典中点®

综合应用创新题 典中点

按课时编写



九年级数学 上

（JJ版）

按80:1配赠教师用书

登录荣德基官方网站
免费下载课件资源



典中点·不简单　你·不平凡

- 方法技巧37招
- 典型易错题41道
- 培优拔尖题79道
- 高频考点11个

典中点微课堂 扫一扫

全书微课精彩呈现
剖析题目 讲透方法

陕西新华出版传媒集团
陕西人民教育出版社

综合应用创新题 典中点 九年级数学 上 JJ版 荣德基 主编 陕西新华出版传媒集团 陕西人民教育出版社

练透方法 练出高分

本书方法规律索引

方法规律

频次	方法名称	首次页码
	思想方法	
2	整体思想	26
4	分类讨论思想	28
4	数形结合思想	29
1	整体思想	45
2	转化思想	45
2	方程思想	52
1	函数思想	69
	解题方法	
1	计算一组数据方差的一般方法	14
1	数据分析的方法	16
1	判别一元二次方程的两种方法	21
1	用直接开平方法解一元二次方程的“三步法”	24
2	换元法	26
1	类比法	31
1	直接开平方法	32
1	因式分解法	32
1	配方法	32
1	公式法	32
1	判断四条线段是否是成比例线段的方法	46
1	利用平行线证比例式或等积式的方法	50
1	确定相似三角形的对应边和对应角的方法	51
1	等比过渡法	52
1	三点定型法	53
1	相似三角形的周长、面积的计算方法	60
1	利用相似三角形解决实际问题的方法	62
3	等角代换法	74
1	求锐角三角函数值的三种方法	75
1	解答含有仰角、俯角问题的方法	85
1	特殊值法	98
1	特定系数法	108
1	全等法	111
1	同一圆中证明两弦相等的“四方法”	114
1	截长补短法	121
1	两类弓形面积的求法	125
1	作差法	129
1	等积变形法	129
1	割补法	130
1	平移法	130

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

荣德基 主编

综合应用创新题 典中点

本册主编：程小恒



九年级数学 上

（JJ 版）

陕西新华出版传媒集团
陕西人民教育出版社
·西安·

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



极速提分18招

书山有路 · 训练有法

思想 方法 技巧 应用

四类绝招速解百题，招招见效助拿高分

第 1 招　配方法的六种常见应用
第 2 招　根的判别式的六种常见应用
第 3 招　根与系数的关系的九种应用
第 4 招　一元二次方程与三角形的综合
第 5 招　一元二次方程中常见易错易混问题归类
第 6 招　降次思想在求代数式的值和解方程中的应用
第 7 招　成比例线段的证明和计算的五种常用作辅助线的方法
第 8 招　巧作平行线构造相似三角形
第 9 招　证比例式或等积式的七种技巧
第10招　求三角函数值的常见技巧
第11招　巧用构造法求几种特殊角的三角函数值
第12招　“化斜为直”构造直角三角形的方法
第13招　巧用根的判别式解图像的公共点问题
第14招　反比例函数与一次函数的综合应用
第15招　巧用圆的基本性质解圆的五种关系
第16招　巧用勾股定理解决求圆中线段长问题
第17招　求阴影部分面积的技巧
第18招　建模思想应用的常见类型归类



提分一定有方法！

内容及详解请见夹册《极速提分法》

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

目录 CONTENTS

第二十三章 数据分析

23.1 平均数与加权平均数
第1课时 算术平均数 …… 1
第2课时 加权平均数 …… 3
第3课时 **求平均数的应用** …… 6
23.2 中位数和众数
第1课时 中位数和众数的认识 …… 7
第2课时 用平均数、中位数和众数分析数据集中趋势 …… 9
阶段核心题型
平均数、中位数、众数实际应用的五种类型 …… 11
23.3 方 差
第1课时 方 差 …… 14
第2课时 **方差在数据分析中的应用** …… 16
23.4 用样本估计总体 …… 17
全章热门考点整合应用 …… 19

第二十四章 一元二次方程

24.1 一元二次方程
第1课时 认识一元二次方程 …… 21
第2课时 **一元二次方程的定义及相关概念的五种常见应用** …… 23
24.2 解一元二次方程
第1课时 配方法——直接开平方法解方程 …… 24
第2课时 配方法——配方法解方程 …… 25
第3课时 公式法——一元二次方程根的判别式 … 27
第4课时 公式法——公式法解方程 …… 29
第5课时 因式分解法 …… 30
阶段核心方法
一元二次方程的九种解法 …… 32
24.3 一元二次方程根与系数的关系* …… 34
24.4 一元二次方程的应用
第1课时 建立一元二次方程解几何问题 … 36
第2课时 建立一元二次方程解百分率问题 …… 37
第3课时 建立一元二次方程解一般问题 …… 38
阶段核心归类
一元二次方程解实际问题的十种常见应用 …… 40
全章热门考点整合应用 …… 43

第二十五章 图形的相似

25.1 比例线段 …… 46
25.2 平行线分线段成比例
第1课时 平行线分线段成比例的基本事实及推论 …… 48
第2课时 **平行线分线段成比例的应用** … 50
25.3 相似三角形 …… 51
25.4 相似三角形的判定
第1课时 用角的关系判定两三角形相似 … 53
第2课时 用边角关系判定两三角形相似 … 55
第3课时 用三边比例关系判定两三角形相似 …… 57
阶段核心归类
巧用“基本图形”探索相似条件 …… 59
25.5 相似三角形的性质 …… 60
25.6 相似三角形的应用 …… 62
25.7 相似多边形和图形的位似
第1课时 相似多边形 …… 64
第2课时 位似图形 …… 66
第3课时 平面直角坐标系中的位似 …… 68
阶段核心归类
巧用位似解三角形中的内接多边形问题 … 70
全章热门考点整合应用 …… 71

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

目 录 CONTENTS

第二十六章 解直角三角形

26.1 锐角三角函数

第 1 课时 正 切 …… 73

第 2 课时 正弦与余弦 …… 75

26.2 锐角三角函数的计算 …… 77

阶段核心方法

求锐角三角函数值的七种常用方法 …… 79

26.3 解直角三角形

第 1 课时 解直角三角形 …… 81

第 2 课时 **解直角三角形的七种常见类型** … 83

26.4 解直角三角形的应用

第 1 课时 用解直角三角形解视角的应用 …… 85

第 2 课时 用解直角三角形解方位角、坡角的应用 …… 87

第 3 课时 解直角三角形的一般应用 …… 89

阶段核心归类

构造三角函数基本图形解决实际问题的四种数学模型 …… 91

全章热门考点整合应用 …… 92

第二十七章 反比例函数

27.1 反比例函数 …… 94

27.2 反比例函数的图像和性质

第 1 课时 反比例函数的图像 …… 96

第 2 课时 反比例函数的性质 …… 98

第 3 课时 **反比例函数图像和性质的常见题型** …… 100

阶段核心归类

用反比例函数比例系数 k 的几何意义解与面积相关的应用 …… 102

27.3 反比例函数的应用

第 1 课时 建立反比例函数模型解实际应用问题 …… 104

第 2 课时 建立反比例函数模型解跨学科应用问题 …… 106

阶段核心方法

求反比例函数表达式的六种方法 …… 108

全章热门考点整合应用 …… 109

第二十八章 圆

28.1 圆的概念及性质 …… 110

28.2 过三点的圆 …… 112

28.3 圆心角和圆周角

第 1 课时 圆心角、弦、弧的关系 …… 114

第 2 课时 圆周角和圆心角、弧的关系 … 116

第 3 课时 圆周角和直径的关系 …… 118

第 4 课时 圆内接四边形 …… 120

28.4 垂径定理* …… 122

阶段核心技巧

构造圆的基本性质的基本图形的六种常用作辅助线的技巧 …… 124

28.5 弧长和扇形面积的计算

第 1 课时 弧长和扇形面积 …… 125

第 2 课时 圆锥的侧面积和表面积 …… 127

阶段核心题型

圆中常见的计算题型 …… 129

全章热门考点整合应用 …… 131

达标检测卷

第二十三章达标检测卷 …… 133

第二十四章达标检测卷 …… 137

第二十五章达标检测卷 …… 141

第二十六章达标检测卷 …… 145

第二十七章达标检测卷 …… 149

第二十八章达标检测卷 …… 153

参考答案及点拨 …… 157

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

23.1 平均数与加权平均数

第1课时 算术平均数

小贴士："*"表示该题的难度较大，综合性或技巧性较强。

名师点金

平均数的特点：(1)一组数据的平均数是**唯一**的，它不一定是数据中的某个数据；
(2)平均数是反映数据集中趋势的一个统计量，是反映数据的平均水平(或中等水平)的一个特征量；
(3)一般情况下，平均数能体现一组数据的整体性质.

1 夯实基础·逐点练 ☞(答案见157页)

知识点1 算术平均数的计算

1. 【中考·贺州】一组数据2,3,4,x,6的平均数是4，则x是(　　)
A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

2. 已知一组数据a_1,a_2,a_3,a_4,a_5的平均数为8，则另一组数据$a_1+10,a_2-10,a_3+10,a_4-10,a_5+10$的平均数为(　　)
A. 6　　B. 8
C. 10　　D. 12

3. 已知数据$x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n$的平均数为m，则数据$5x_1,5x_2,5x_3,\cdots,5x_n$的平均数为(　　)
A. m　　B. $5m$
C. $\frac{m}{5}$　　D. $10m$

4. 已知一个班级有40人，数学老师第一次统计这个班的平均成绩为85分，在复查时发现漏记了一个学生的成绩80分，那么这个班的实际平均成绩应为(　　)
A. 85分　　B. 84.875分
C. 87分　　D. 84.5分

5. 【中考·深圳】已知一组数据x_1,x_2,x_3,x_4的平均数是5，则数据x_1+3,x_2+3,x_3+3,x_4+3的平均数是_____. 【导学号:8934350】

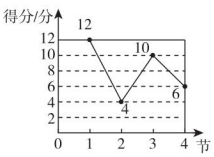
知识点2 用计算器求平均数

6. 利用计算器求一组数据的平均数时，一般步骤可分为三步：
①选择统计模式，进入_____状态；
②依次输入各_____；
③显示_____结果.

7. 【中考·巴中】用计算器计算数据13.49,13.53,14.07,13.51,13.84,13.98,14.67,14.80,14.61,14.60,14.41,14.31,14.38,14.02,14.17的平均数约为(　　)
A. 14.15　　B. 14.16　　C. 14.17　　D. 14.20

知识点3 算术平均数的应用

8. 某球员参加一场篮球比赛，比赛分4节进行，该球员每节得分如图所示，则该球员平均每节得分为(　　)



(第8题)

A. 7分　　B. 8分
C. 9分　　D. 10分

9. 为全力抗击新型冠状病毒疫情，响应政府"停课不停学"号召，某市教育局发布关于疫情防控期间开展在线课程教学的通知：从2月10日开始，全市中小学按照教学计划，开展在线课程教学和答疑. 据互联网后台数据显示，某中学九年级七科老师2月10日在线答疑问题总个数如下表：

学科	语文	数学	英语	物理	化学	道德与法制	历史
数量/个	26	28	28	26	24	21	22

则2月10日该中学九年级七科老师在线答疑问题总个数的平均数是(　　)
A. 22　　B. 24
C. 25　　D. 26

易错点! 对平均数的概念理解不透彻而致错

*10. 【中考·攀枝花】一辆货车送货上山，并按原路下山. 上山速度为a千米/时，下山速度为b千米/时. 则货车上、下山的平均速度为(　　)千米/时.
A. $\frac{1}{2}(a+b)$　　B. $\frac{ab}{a+b}$
C. $\frac{a+b}{2ab}$　　D. $\frac{2ab}{a+b}$

趣味数学 狐狸开公司招聘员工，说："本公司平均工资1 800元，名额有限，欲报从速."小老虎心想一个月1 800元工资还不错，于是到公司报名，狐狸马上录用了它，签订了1年的工作合同.(待续)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞（答案见157页）

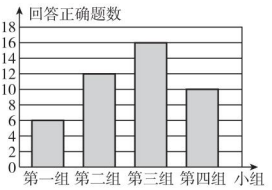
考查角度① 利用算术平均数求含字母式子的值

11. (1)已知2,4,$2x$,$4y$四个数的平均数是5,且5,7,$4x$,$6y$四个数的平均数是9,求x^2+y^3的值;

(2)如果x_1与x_2的平均数是4,求x_1+1与x_2+5的平均数.

考查角度② 利用统计图信息求平均数

12. 【中考 · 柳州】在一次“社会主义核心价值观”知识竞赛中,四个小组回答正确题数情况如图所示,求这四个小组回答正确题数的平均数.



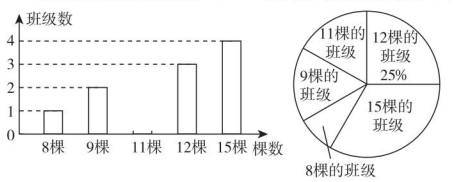
（第12题）

Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞（答案见157页）

拔尖角度① 利用不完整的统计图信息求平均数

13. 【中考 · 湘潭】今年我市将创建全国森林城市,提出了“共建绿色城”的倡议.某校积极响应,在3月12日植树节这天组织全校学生开展了植树活动,校团委对全校各班的植树情况进行了统计,并绘制了如图所示的两幅不完整的统计图.

植树班级数条形统计图　　植树班级数扇形统计图



（第13题）

(1)求该校的班级总数;

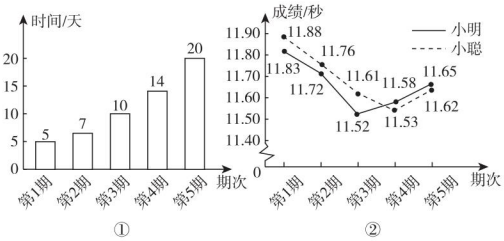
(2)将条形统计图补充完整;

(3)求该校各班在这一活动中植树的平均棵数.

拔尖角度② 利用求平均数分析数据

14. 【中考 · 绍兴】小明、小聪参加了100 m跑的5期集训,每期集训结束时进行测试,根据他们的集训时间、测试成绩绘制成如下两个统计图.

1~5期每期的集训时间统计图　1~5期每期小明、小聪测试成绩统计图



（第14题）

根据图中信息,解答下列问题:

(1)这5期的集训共有多少天?小聪5次测试的平均成绩是多少?

(2)根据统计数据,结合体育运动的实际,从集训时间和测试成绩这两方面,说说你的想法.

微信公众号 教辅资料站

第一个月,小老虎干得非常卖力,到了月底,小老虎高兴地去领工资,却只领到800元.（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第2课时　加权平均数

名师点金

算术平均数与加权平均数的联系与区别：

联系：若各个数据的权相同，则加权平均数就是算术平均数，因而算术平均数实质上是加权平均数的一种特例.

区别：算术平均数是用一组数据的和除以数据个数，在实际问题中，一组数据中各个数据的“重要程度”未必相同，即各个数据的权未必相同，因而加权平均数在计算上与算术平均数有所不同.

Ⅰ 夯实基础·逐点练

☞（答案见157页）

知识点1 加权平均数的计算

1. 从一组数据中取出 a 个 x_1，b 个 x_2，c 个 x_3 组成一个样本，那么这个样本的平均数是（　　）

A. $\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}$　　B. $\dfrac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c}$

C. $\dfrac{ax_1+bx_2+cx_3}{3}$　　D. $\dfrac{a+b+c}{3}$

2. 【中考·杭州】某计算机程序第一次算得 m 个数据的平均数为 x，第二次算得另外 n 个数据的平均数为 y，则这 $m+n$ 个数据的平均数等于_____.

知识点2 加权平均数的应用

应用1 用比例表示的权

3. 【中考·资阳】某单位定期对员工的专业知识、工作业绩、出勤情况三个方面进行考核（考核的满分均为100分），三个方面的重要性之比依次为3∶5∶2. 小王经过考核后所得的分数（单位：分）依次为：90，88，83，那么小王的最后得分是（　　）

A. 87分　　B. 87.5分　　C. 87.6分　　D. 88分

4. 某校广播站要招聘一名记者，小亮和小丽报名参加了三项素质测试，成绩如下：

	写作能力	普通话水平	计算机水平
小亮	90分	75分	51分
小丽	60分	84分	72分

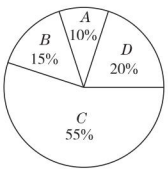
将写作能力、普通话水平、计算机水平这三项的总分由原来按3∶5∶2计算，变成按5∶3∶2计算，总分变化情况是（　　）

A. 小丽增加得多　　B. 小亮增加得多

C. 两人成绩不变化　　D. 变化情况无法确定

应用2 用百分数表示的权

5. 【中考·河南】某超市销售 A，B，C，D 四种矿泉水，它们的单价依次是5元、3元、2元、1元. 某天的销售情况如图所示，则这天销售的矿泉水的平均单价是（　　）



（第5题）

A. 1.95元　　B. 2.15元　　C. 2.25元　　D. 2.75元

应用3 用频（次）数表示单一数据的权

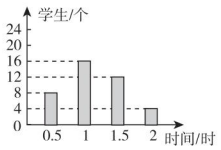
6. 【中考·临沂】小明记录了临沂市五月份某周每天的最高气温（单位：℃），列成下表：

天数/天	1	2	1	3
最高气温/℃	22	26	28	29

则这周最高气温的平均值是（　　）

A. 26.25 ℃　　B. 27 ℃　　C. 28 ℃　　D. 29 ℃

7. 【中考·宁夏】某校为了解某班学生体育锻炼的用时情况，收集了该班学生一天用于体育锻炼的时间（单位：时），整理成如图的统计图. 则该班学生这天用于体育锻炼的平均时间为_____小时.



（第7题）

应用4 用频数表示组中值的权

8. 下列各组数据中，组中值不是10的是（　　）

A. $0\leqslant x<20$　　B. $8\leqslant x<12$

C. $7\leqslant x<13$　　D. $3\leqslant x<7$

***9.** 对一组数据进行了整理，结果如下表：

分组	$0\leqslant x<10$	$10\leqslant x<20$
频数	8	12

则这组数据的平均数约是（　　）

A. 10　　B. 11　　C. 12　　D. 16

易错点！ 求加权平均数时，忽视数据与权的关系导致出错

***10.** 宾馆客房的标价影响入住百分率. 下表是某宾馆在近几年旅游周统计的平均数据. 在旅游周，要使宾馆客房收入最大，客房标价应选_____元.

客房标价/元	160	140	120	100
入住百分率	63.8%	74.3%	84.1%	95%

趣味数学 狐狸疲惫地一笑说：“我说的是员工平均工资是1 800元呀！既然是平均数，那自然就有高有低了.”（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法·提升练 ☞（答案见157页）

考查角度1 利用算术平均数及加权平均数作决策

11. 【中考·呼和浩特】学校准备从甲、乙两位选手中选择一位代表学校参加所在地区的汉字听写大赛，学校对两位选手从表达能力、阅读理解、综合素质和汉字听写四个方面做了测试，他们各自的成绩（百分制）如下表：

选手	表达能力	阅读理解	综合素质	汉字听写
甲	85	78	85	73
乙	73	80	82	83

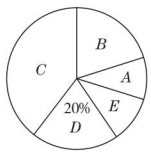
（1）由表中成绩已算得甲的平均成绩为80.25，请计算乙的平均成绩，从他们的这一成绩看，应选派谁？

（2）如果分别赋予表达能力、阅读理解、综合素质和汉字听写2，1，3和4的权，请分别计算两位选手的平均成绩，从他们的这一成绩看，应选派谁？

考查角度2 利用组中值估计加权平均数

12. 【中考·大庆】某校为了解七年级学生的体重情况，随机抽取了七年级 m 名学生进行调查，将抽取学生的体重情况绘制如下不完整的频数分布表和扇形统计图.

组别	体重/千克	人数
A	$37.5 \leqslant x < 42.5$	10
B	$42.5 \leqslant x < 47.5$	n
C	$47.5 \leqslant x < 52.5$	40
D	$52.5 \leqslant x < 57.5$	20
E	$57.5 \leqslant x < 62.5$	10



（第12题）

请根据图表信息回答下列问题：

（1）填空：①m = _____，②n = _____，③在扇形统计图中，C 组所在扇形的圆心角的度数等于_____度；

（2）若把每组中各个体重值用这组数据的中间值代替（例如：A 组数据中间值为40千克），则被调查学生的平均体重是多少千克？

（3）如果该校七年级有1 000名学生，请估算七年级体重低于47.5千克的学生大约有多少人？

微信公众号 教辅资料站

小老虎迷惑了："难道平均工资1 800元不是每个员工1 800元吗？"同学们，你能给小老虎讲讲吗？

趣味数学

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞(答案见157页)

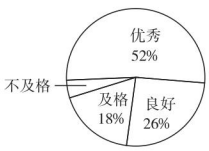
拔尖角度① 利用图表信息求平均数分析数据

13. 【中考 · 无锡】《国家学生体质健康标准》规定:体质测试成绩达到90.0分及以上的为优秀;达到80.0分至89.9分的为良好;达到60.0分至79.9分的为及格;59.9分及以下的为不及格.某校为了了解九年级学生的体质健康状况,从该校九年级学生中随机抽取了10%的学生进行体质测试,测试结果如下面的统计表和扇形统计图所示.

各等级学生平均分统计表

等级	优秀	良好	及格	不及格
平均分/分	92.1	85.0	69.2	41.3

各等级学生人数分布扇形统计图



(第13题)

(1)扇形统计图中“不及格”所占的百分比为_____;

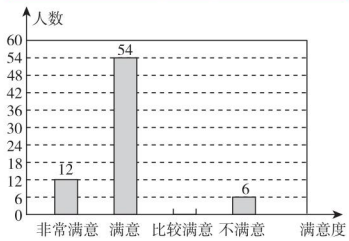
(2)计算所抽取的学生的测试成绩的平均分;

(3)若所抽取的学生中所有不及格等级学生的总分恰好等于某一个良好等级学生的分数,请估计该校九年级学生中约有多少人达到优秀等级.

拔尖角度② 利用图表信息补图求数据

14. 【中考 · 成都】为了给游客提供更好的服务,某景区随机对部分游客进行了关于“景区服务工作满意度”的调查,并根据调查结果绘制成如下不完整的统计图表.

满意度	人数	所占百分比
非常满意	12	10%
满意	54	m
比较满意	n	40%
不满意	6	5%



(第14题)

根据图表信息,解答下列问题:

(1)本次调查的总人数为_____,表中m的值为_____;

(2)请补全条形统计图;

(3)据统计,该景区平均每天接待游客约3 600人,若将“非常满意”和“满意”作为游客对景区服务工作的肯定,请你估计该景区服务工作平均每天得到多少名游客的肯定.

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第3课时　求平均数的应用 ☞（答案见157页）

类型1 权为百分比的加权平均数的应用

1. 【中考·恩施州】某中学规定学生的学期体育成绩满分为100分，其中早锻炼及体育课外活动占20%，期中考试成绩占30%，期末考试成绩占50%．小桐的三项成绩（百分制）依次为95，90，85．小桐这学期的体育成绩是（　　）

A. 88.5　　B. 86.5

C. 90　　D. 90.5

类型2 权为整数比的加权平均数的应用

2. 某单位需招聘一名技术员，对甲、乙、丙三名候选人进行了笔试和面试两项测试，其成绩如下表所示，根据录用程序，该单位又组织了100名评议人员对三人进行投票测评，三人得票率如扇形统计图所示，每票1分．（没有弃权票，每人只能投1票）

测试项目	测试成绩/分		
	甲	乙	丙
笔试	80	85	95
面试	98	75	73



（第2题）

（1）请算出三人的民主评议得分；

（2）该单位将笔试、面试、民主评议三项得分按2∶2∶1确定综合成绩，谁将被录用？请说明理由．

类型3 权为频数的加权平均数的应用

3. 【中考·南京】为了了解某区初中学生的视力情况，随机抽取了该区500名初中学生进行调查．整理样本数据，得到下表：

视力	4.7以下	4.7	4.8	4.9	4.9以上
人数	102	98	80	93	127

根据抽样调查结果，估计该区12 000名初中学生视力不低于4.8的人数是_____．

类型4 与组中值有关的加权平均数的应用

4. 为了解某校九年级学生的体能，随机抽取部分学生进行1 min的跳绳测试，并指定甲、乙、丙、丁四名同学对这次测试结果的数据作出整理，下面是这四名同学提供的部分信息：

甲：将全部测试结果的数据分成6组绘成频数分布直方图如图所示；

乙：跳绳次数不少于105次的同学占96%；

丙：①②两组的频率之和为0.12，且第②组与第⑥组的频数都是12；

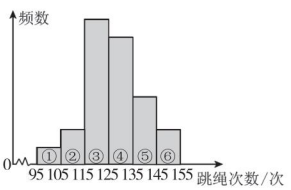
丁：第②③④组的频数之比为4∶17∶15．

根据这四名同学提供的信息，请解答如下问题：

（1）这次跳绳测试共抽取了多少人？各组有多少人？

（2）如果跳绳次数不少于135次为优秀，那么这次跳绳测试中达到优秀的有多少人？

（3）以每组的组中值（每组的中点对应的数据）作为这组跳绳次数的代表，估计这批学生1 min跳绳次数的平均数．



（每组数据含左端点值，不含右端点值）

（第4题）

微信公众号 教辅资料站

趣味数学

如果比尔·盖茨和十几个穷光蛋在一个房间里，那么这个房间里十几个人的平均收入都超过了亿元，这是因为比尔·盖茨和穷光蛋的收入差距过大，导致平均数缺乏实际参考意义．（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

23.2　中位数和众数

第1课时　中位数和众数的认识

名师点金

平均数、中位数、众数之间的关系：

联系：平均数、中位数、众数都是描述一组数据集中趋势的量，平均数是最重要的量.

区别：1. 平均数的大小与一组数据里的每个数据均有关系，任何一个数据的变动都会引起平均数的变动；

2. 中位数与数据大小的排列顺序有关，某些数据的变动对中位数没有影响，当一组数据中的个别数据变动较大时，可用中位数来描述其集中趋势；

3. 众数主要研究各数据出现的频数，其大小只与这组数据中的某些数据有关，当一组数据中某些数据多次重复出现时，我们往往关心众数.

Ⅰ 夯实基础·逐点练

☞（答案见158页）

知识点1　中位数

1. 【中考·宜昌】李大伯前年在驻村扶贫工作队的帮助下种了一片果林，今年收获一批成熟的果子. 他选取了5棵果树，采摘后分别称重，每棵果树果子总质量（单位：kg）分别为90，100，120，110，80. 这五个数据的中位数是（　　）

A. 120　　B. 110　　C. 100　　D. 90

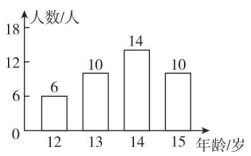
2. 【中考·南充】某校共有40名初中生参加足球兴趣小组，他们的年龄统计情况如图所示，则这40名学生年龄的中位数是（　　）

A. 12岁

B. 13岁

C. 14岁

D. 15岁



（第2题）

3. 某班七个兴趣小组人数如下：5，6，6，x，7，8，9，已知这组数据的平均数是7，则这组数据的中位数是（　　）

A. 6　　B. 6.5　　C. 7　　D. 8

4. 【中考·镇江】根据下表中的信息解决问题：

数据	37	38	39	40	41
频数	8	4	5	a	1

若该组数据的中位数不大于38，则符合条件的正整数a的取值共有（　　）

A. 3个　　B. 4个　　C. 5个　　D. 6个

知识点2　众数

5. 【中考·辽阳】某校七年级举办“诵读大赛”，10名学生的参赛成绩分别为85分，90分，94分，85分，90分，95分，90分，96分，95分，100分，则这10名学生成绩的众数是（　　）

A. 85分　　B. 90分

C. 92分　　D. 95分

6. 【中考·铜仁】某班17名女同学的跳远成绩如下表所示：

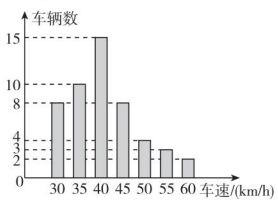
成绩/m	1.50	1.60	1.65	1.70	1.75	1.80	1.85	1.90
人数	2	3	2	3	4	1	1	1

这些女同学跳远成绩的众数和中位数分别是（　　）

A. 1.70 m，1.75 m　　B. 1.75 m，1.70 m

C. 1.70 m，1.70 m　　D. 1.75 m，1.725 m

7. 【中考·安徽】在某时段有50辆车通过一个雷达测速点，工作人员将测得的车速绘制成如图所示的条形统计图，则这50辆车的车速的众数（单位：km/h）为（　　）



（第7题）

A. 60　　B. 50　　C. 40　　D. 15

*8. 【中考·十堰】一次数学测试，某小组5名同学的成绩统计如下（有两个数据被遮盖）：

组员	甲	乙	丙	丁	戊	平均成绩	众数
得分	81	77	■	80	82	80	■

则被遮盖的两个数据依次是（　　）

A. 80，80　　B. 81，80　　C. 80，82　　D. 81，82

易错点　误以为众数是唯一的，造成漏解

9. 给出一组数据：5，2，1，5，3，5，2，2，则这组数据的众数是_____.

趣味数学　但如果用中位数来衡量，中位数为0，就知道这个房间里起码有一半的人是穷光蛋.（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞（答案见158页）

考查角度1 利用中位数的意义分析数据

10. 【中考 · 呼和浩特】在一次男子马拉松长跑比赛中，随机抽得12名选手所用的时间（单位：分）得到如下样本数据：140，146，143，175，125，164，134，155，152，168，162，148.

（1）计算该样本数据的中位数和平均数；

（2）如果一名选手的成绩是147分，请你依据样本数据中位数，推断他的成绩如何.

考查角度2 利用统计表中的信息分析数据

11. 【中考 · 宜昌】宜昌市首批一次性投放公共自行车700辆供市民租用出行，由于投入数量不够，导致出现需要租用却未租到车的现象，现将随机抽取的某五天在同一时段的调查数据绘成如下表格.

时间	第一天 7:00～8:00	第二天 7:00～8:00	第三天 7:00～8:00	第四天 7:00～8:00	第五天 7:00～8:00
需要租用却未租到车的人数/人	1 500	1 200	1 300	1 300	1 200

请回答下列问题：

（1）表格中的五个数据（人数）的中位数是多少？

（2）由随机抽样估计，平均每天在7:00～8:00需要租用公共自行车的人数是多少？

Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞（答案见158页）

拔尖角度1 利用统计表中的信息说明中位数、众数的意义

12. 【中考 · 温州】车间有20名工人，某一天他们生产的零件个数统计如下表.

生产零件的个数（个）	9	10	11	12	13	15	16	19	20
工人人数（人）	1	1	6	4	2	2	2	1	1

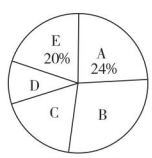
（1）求这一天20名工人生产零件的平均个数；

（2）为了提高大多数工人的积极性，管理者准备实行“每天定额生产，超产有奖”的措施. 如果你是管理者，从平均数、中位数、众数的角度进行分析，你将如何确定这个“定额”？

拔尖角度2 利用图表信息分析数据

13. 【中考 · 连云港】随着我国经济社会的发展，人民对于美好生活的追求越来越高. 某社区为了了解家庭对于文化教育的消费情况，随机抽取部分家庭，对每户家庭的文化教育年消费金额进行问卷调查，根据调查结果绘制成如下不完整的统计图表.

组别	家庭文化教育年消费金额 x/元	户数/户
A	$x \leqslant 5\,000$	36
B	$5\,000 < x \leqslant 10\,000$	m
C	$10\,000 < x \leqslant 15\,000$	27
D	$15\,000 < x \leqslant 20\,000$	15
E	$x > 20\,000$	30



（第13题）

请你根据统计图表提供的信息，解答下列问题：

（1）本次被调查的家庭有_____户，表中 m = _____；

（2）本次调查数据的中位数出现在_____组；扇形统计图中，D组所在扇形的圆心角是_____度；

（3）这个社区有2 500户家庭，请你估计家庭文化教育年消费10 000元以上的家庭有多少户.

微信公众号 教辅资料站

由此可见，中位数有助于了解普通民众的收入水平，而中位数与平均数的差异，则有助于了解全体民众的收入集中度.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第2课时　用平均数、中位数和众数分析数据集中趋势

名师点金

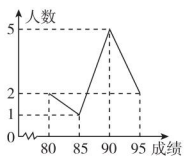
统计图中觅“三数”：平均数、中位数和众数，它们是描述一组数据的集中趋势的基本特征量，“三数”在实际问题中有着广泛的应用，是中考的热门考点. 题目中经常出现给出统计图，根据统计图求“三数”，这时要充分从统计图中获取信息，根据各统计图的特点求“三数”.

1 夯实基础·逐点练 ☞(答案见158页)

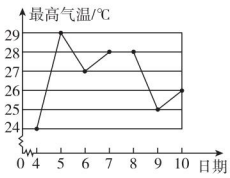
知识点1 从折线统计图中获取数据信息

1. 【中考·邵阳】在学校演讲比赛中，10名选手的成绩统计图如图所示，则这10名选手成绩的众数是(　　)

A. 95　　B. 90　　C. 85　　D. 80



(第1题)



(第2题)

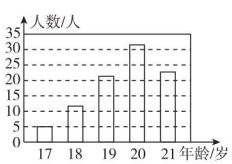
2. 【中考·通辽】如图是我市6月份某7天的最高气温折线统计图，则这些最高气温的中位数是_____℃.

知识点2 从条形统计图中获取数据信息

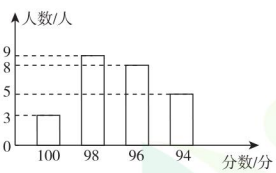
3. 【中考·宜昌】在6月26日“国际禁毒日”来临之际，华明中学围绕“珍爱生命，远离毒品”主题，组织师生到当地戒毒所开展相关问题的问卷调查活动，其中“初次吸毒时的年龄”在17至21岁的统计结果如图所示，则这些年龄的众数是(　　)

A. 18　　B. 19

C. 20　　D. 21



(第3题)



(第4题)

4. 【中考·聊城】在光明中学组织的全校师生迎“五四”诗词大赛中，来自不同年级的25名参赛同学的得分情况如图所示. 这些成绩的中位数和众数分别是(　　)

A. 96分、98分

B. 97分、98分

C. 98分、96分

D. 97分、96分

知识点3 从扇形统计图中获取数据信息

5. 某电脑公司销售部为了制订下个月的销售计划，对20位销售员本月的销售量进行了统计，绘制成如图所示的统计图，则这20位销售员本月销售量的平均数、中位数、众数分别是(　　)



(第5题)

A. 19，20，14　　B. 19，20，20

C. 18.4，20，20　　D. 18.4，25，20

*6. 【中考·河北】甲、乙两组各有12名学生，各组组长绘制了本组5月份家庭用水量的统计图和统计表(如下). 比较5月份两组家庭用水量的中位数，下列说法正确的是(　　)

A. 甲组比乙组大

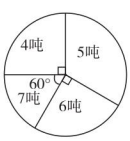
B. 甲、乙两组相同

C. 乙组比甲组大

D. 无法判断

甲组12户家庭用水量统计表　乙组12户家庭用水量统计图

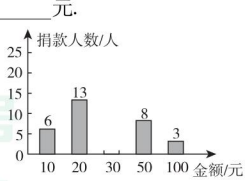
用水量/吨	4	5	6	9
户数	4	5	2	1



(第6题)

易错点 对众数的概念认识模糊

7. 某校八年级(3)班50名学生自发组织献爱心捐款活动. 班长将捐款情况进行了统计，并绘制成了统计图(如图，不完整). 根据图中提供的信息，捐款金额的众数是_____元.



(第7题)

微信公众号 教辅资料站

趣味数学　数据分析的数学基础在20世纪早期就已确立，但直到计算机的出现才使得实际操作成为可能，并使得数据分析得以推广. 数据分析是数学与计算机科学相结合的产物.

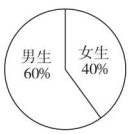
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法·提升练 ☞（答案见158页）

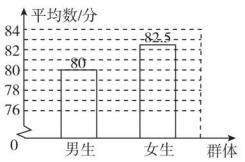
考查角度1 利用平均数分析数据

8. 【中考·南京】某校九年级有24个班，共1 000名学生，他们参加了一次数学测试. 学校统计了所有学生的成绩，得到下列统计图.

某校九年级男、女人数分布扇形统计图



某校九年级数学测试男、女成绩平均数条形统计图



（第8题）

（1）求该校九年级学生本次数学测试成绩的平均数；

（2）下列关于本次数学测试说法正确的是（　　）

A. 九年级学生成绩的众数与平均数相等

B. 九年级学生成绩的中位数与平均数相等

C. 随机抽取一个班，该班学生成绩的平均数等于九年级学生成绩的平均数

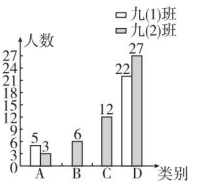
D. 随机抽取300名学生，可以用他们成绩的平均数估计九年级学生成绩的平均数

考查角度2 利用中位数分析数据

9. 【中考·镇江】陈老师对他所教的九（1）、九（2）两个班级的学生进行了一次检测，批阅后对最后一道试题的得分情况进行了归类统计（各类别的得分如下表），并绘制了如下每班各类别得分人数的条形统计图（不完整）.

各类别的得分表

得分	类别
0	A：没有作答
1	B：解答但没有正确答案
3	C：只得到一个正确答案
6	D：得到两个正确答案，解答完全正确



（第9题）

已知两个班一共有50%的学生得到两个正确答案，解答完全正确，九（1）班学生这道试题的平均得分为3.78分，请解决如下问题：

（1）九（2）班学生得分的中位数是_____；

（2）九（1）班学生中这道试题作答情况属于B类和C类的人数各是多少？

Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞（答案见158页）

拔尖角度 利用平均数、中位数和众数分析数据

10. 为了提高学生对毒品危害性的认识，我市相关部门每个月都要对学生进行“禁毒知识应知应会”测评. 为了激发学生的积极性，某校对达到一定成绩的学生授予“禁毒小卫士”的荣誉称号. 为了确定一个适当的奖励目标，该校随机选取了七年级20名学生在5月份测评的成绩，数据如下：

90　91　89　96　90　98　90　97　91　98　99　97　91　88　90　97　95　90　95　88

（1）根据上述数据，将下列表格补充完整.

整理、描述数据如左下表：

成绩/分	88	89	90	91	95	96	97	98	99
学生人数	2	1	___	3	2	1	___	2	1

平均数	众数	中位数
93	_____	91

数据分析：样本数据的平均数、众数和中位数如右上表.

（2）得出结论：根据所给数据，如果该校想确定七年级前50%的学生为“良好”等次，你认为“良好”等次的测评成绩应定为_____分；

（3）数据应用：根据数据分析，该校决定在七年级授予测评成绩前30%的学生“禁毒小卫士”荣誉称号，请估计评选该荣誉称号的最低分数，并说明理由.

微信公众号 教辅资料站

数据分析有极其广泛的应用范围，如：在产品的整个寿命周期，包括从市场调研到售后服务和最终处置的各个过程，都需要适当的数据分析，以提升有效性.（待续）

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

阶段核心题型

平均数、中位数、众数实际应用的五种类型 ☞(答案见158页)

名师点金

利用统计量中“三数”的实际意义解决实际生活中的一些问题时，关键要理解“三数”的特征，然后根据题目中的已知条件或统计图表中的相关信息，通过计算相关数据解答.

类型1 平均数的应用

角度1 平均数在商业营销中的决策作用

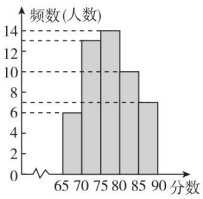
1. 一种什锦糖果是由甲、乙、丙三种不同价格的糖果混合而成的，已知甲种糖果的价格为9元/千克，乙种糖果的价格为10元/千克，丙种糖果的价格为12元/千克.
   (1)若甲、乙、丙三种糖果的质量按2:5:3的比例混合，则混合后得到的什锦糖果的价格定为每千克多少元才能保证获得的利润不变？
   (2)若甲、乙、丙三种糖果的质量按6:3:1的比例混合，则混合后得到的什锦糖果的价格定为每千克多少元才能保证获得的利润不变？

角度2 平均数在人员招聘中的决策作用

2. 【中考·呼伦贝尔】某市招聘教师，对应聘者分别进行教学能力、科研能力、组织能力三项测试，其中甲、乙两人的成绩(单位:分)如下表:

项目 / 应聘者	教学能力	科研能力	组织能力
甲	86	93	73
乙	81	95	79

   (1)根据实际需要，将教学能力、科研能力、组织能力三项测试得分按5:3:2的比例确定最后成绩，若按此成绩在甲、乙两人中录用一人，谁将被录用？
   (2)按照(1)中的方法计算成绩，将每位应聘者的最后成绩绘制成如图所示的频数直方图(每组分数段均包含左端数值，不包含右端数值)，并决定由高分到低分录用8人. 甲、乙两人能否被录用？请说明理由.

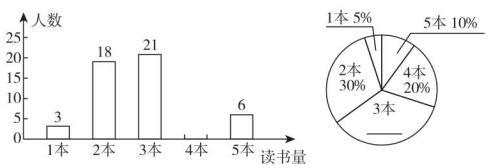


(第2题)

角度3 平均数在样本估计总体中的作用

3. 【中考·陕西】本学期初，某校为迎接中华人民共和国建国七十周年，开展了以“不忘初心，缅怀革命先烈，奋斗新时代”为主题的读书活动，校德育处对本校七年级学生四月份“阅读该主题相关书籍的读书量”(下面简称:“读书量”)进行了随机抽样调查，并对所有随机抽取学生的“读书量”(单位:本)进行了统计，如图所示:

所抽取该校七年级学生四月份“读书量”的统计图



(第3题)

根据以上信息，解答下列问题:
(1)补全上面两幅统计图，本次所抽取学生四月份“读书量”的众数为_____；
(2)求本次所抽取学生四月份“读书量”的平均数；
(3)已知该校七年级有1 200名学生，请你估计该校七年级学生中，四月份“读书量”为5本的学生人数.

趣味数学 再如开普勒通过分析行星位置的观测数据，找出了行星运动规律. 又如，一个企业的领导人要通过市场调查，分析所得数据以判断市场动向，从而制订合适的生产及销售计划.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

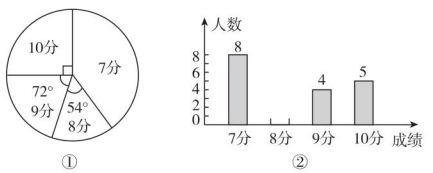
类型2 平均数和中位数的应用

4. 甲、乙两校参加区教育局举办的学生英语口语竞赛，两校参赛人数相等. 比赛结束后，发现学生成绩分别为7分、8分、9分、10分（满分为10分）. 依据统计数据绘制了如下尚不完整的统计图和统计表：

甲校成绩统计表

成绩	7分	8分	9分	10分
人数	11	0		8

乙校成绩扇形统计图　　乙校成绩条形统计图



（第4题）

（1）在图①中，“7分”所在扇形的圆心角等于_____；

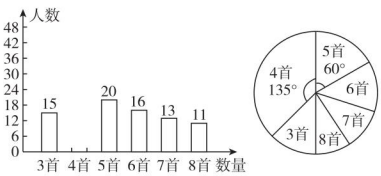
（2）请你将如图②所示的统计图补充完整；

（3）经计算，乙校学生成绩的平均数是8.3分，中位数是8分，请写出甲校学生成绩的平均数、中位数，并从平均数和中位数的角度分析哪所学校的成绩较好；

（4）如果该教育局要组织8人的代表队参加市级团体赛，为便于管理，决定从这两所学校中的一所挑选参赛选手，请你分析，应选哪所学校？

类型3 中位数和众数的应用

5. 【中考·威海】为积极响应“弘扬传统文化”的号召，某学校倡导全校1 200名学生进行经典诗词诵背活动，并在活动之后举办经典诗词大赛. 为了解本次系列活动的持续效果，学校团委在活动启动之初，随机抽取部分学生调查“一周诗词诵背数量”，根据调查结果绘制成的统计图（部分）如图所示.



（第5题）

大赛结束后一个月，再次抽查这部分学生“一周诗词诵背数量”，绘制成如下统计表：

一周诗词诵背数量	3首	4首	5首	6首	7首	8首
人数	10	10	15	40	25	20

请根据调查的信息分析：

（1）活动启动之初学生“一周诗词诵背数量”的中位数为_____；

（2）估计大赛结束后一个月该校学生一周诗词诵背6首（含6首）以上的人数；

（3）选择适当的统计量，从两个不同的角度分析两次调查的相关数据，评价该校经典诗词诵背系列活动的效果.

微信公众号 教辅资料站

一门科学，只有当它成功地运用数学时，才能达到真正完善的地步.

——马克思

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型4　平均数和中位数的综合应用

6. 在预防新型冠状病毒期间，某校为了了解学生掌握新型冠状病毒的预防知识的情况进行调查，对全校学生进行在线相关知识测试. 该校七年级、八年级分别有300人，现从中各随机抽取20名学生的测试成绩进行调查分析，成绩的数据如下：

七年级	68	88	100	100	79	94	89	85	100	88
	100	90	98	97	77	94	96	100	92	67
八年级	69	97	96	89	98	100	99	100	95	100
	99	69	97	100	99	94	79	99	98	79

(1) 根据上述数据，将下列表格补充完整.

整理、描述数据：

分数段	$60\leqslant x\leqslant 69$	$70\leqslant x\leqslant 79$	$80\leqslant x\leqslant 89$	$90\leqslant x\leqslant 100$
七年级人数	2	2	4	12
八年级人数	2	2	1	15

分析数据：样本数据的平均数、中位数、满分率如下表：

年级	平均数	中位数	满分率
七年级	90.1	93	25%
八年级	92.8		20%

得出结论：

(2) 估计该校七年级、八年级学生在本次测试成绩中可以得到满分的人数为_____；

(3) 你认为哪个年级掌握新型冠状病毒预防知识的总体水平较好？说明理由. 【导学号：8934350】

类型5　平均数、中位数和众数的综合应用

7. 【中考·广西】红树林学校在七年级新生中举行了全员参加的“防溺水”安全知识竞赛，试卷题目共10题，每题10分. 现分别从三个班中各随机取10名同学的成绩(单位：分)，收集数据如下：

1班：90，70，80，80，80，80，80，90，80，100；

2班：70，80，80，80，60，90，90，90，100，90；

3班：90，60，70，80，80，80，80，90，100，100.

整理数据：

分数 / 人数 / 班级	60	70	80	90	100
1班	0	1	6	2	1
2班	1	1	3	a	1
3班	1	1	4	2	2

分析数据：

	平均数	中位数	众数
1班	83	80	80
2班	83	c	d
3班	b	80	80

根据以上信息回答下列问题：

(1) 请直接写出表格中a，b，c，d的值；

(2) 比较这三组样本数据的平均数、中位数和众数，你认为哪个班的成绩比较好？请说明理由；

(3) 为了让学生重视安全知识的学习，学校将给竞赛成绩满分的同学颁发奖状，该校七年级新生共570人，试估计需要准备多少张奖状？

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

23.3 方 差

第1课时 方 差

名师点金

1. **计算一组数据方差的一般方法：**
（1）计算这组数据的平均数；（2）计算各数据相对于平均数的差的平方；（3）求（2）中各数的平均数，即为所求的方差.
2. **方差的意义：**方差反映了一组数据的**波动程度**（或离散程度），一组数据的方差越大，说明各数据与平均数的偏差越大，即各数据的波动程度越大；反之，越小.

1 夯实基础·逐点练 ☞（答案见159页）

知识点1 方差的计算

1. 【中考·台州】方差是刻画数据波动程度的量，对于一组数据 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$，可用如下算式计算方差：$s^2=\frac{1}{n}[(x_1-5)^2+(x_2-5)^2+(x_3-5)^2+\cdots+(x_n-5)^2]$，其中“5”是这组数据的（　　）

A. 最小值　B. 平均数　C. 中位数　D. 众数

2. 【中考·梧州】某校九年级模拟考试中，1班的六名学生的数学成绩如下：96，108，102，110，108，82. 下列关于这组数据的描述不正确的是（　　）

A. 众数是108　　B. 中位数是105

C. 平均数是101　　D. 方差是93

3. 【中考·鄂州】已知一组数据为7，2，5，x，8，它们的平均数是5，则这组数据的方差为（　　）

A. 3　　B. 4.5　　C. 5.2　　D. 6

4. 【中考·遵义】如果一组数据 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的方差是4，则另一组数据 $x_1+3, x_2+3, \cdots, x_n+3$ 的方差是（　　）

A. 4　　B. 7　　C. 8　　D. 19

知识点2 方差的应用

5. 【中考·湘西州】从甲、乙、丙、丁四人中选一人参加射击比赛，经过三轮初赛，他们的平均成绩都是9环，方差分别是 $s^2_{甲}=0.25$，$s^2_{乙}=0.3$，$s^2_{丙}=0.4$，$s^2_{丁}=0.35$，你认为派谁去参赛更合适（　　）

A. 甲　　B. 乙　　C. 丙　　D. 丁

6. 【中考·烟台】某班有40人，一次体能测试后，老师对测试成绩进行了统计. 由于小亮没有参加本次集体测试，因此计算其他39人的平均分为90分，方差 $s^2=41$，后来小亮进行了补测，成绩为90分，关于该班40人的测试成绩，下列说法正确的是（　　）

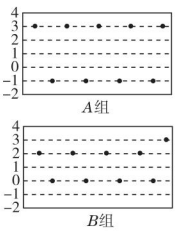
A. 平均分不变，方差变大

B. 平均分不变，方差变小

C. 平均分和方差都不变

D. 平均分和方差都改变

7. 【中考·攀枝花】如图，比较 A 组、B 组中两组数据的平均数及方差，以下说法正确的是（　　）



（第7题）

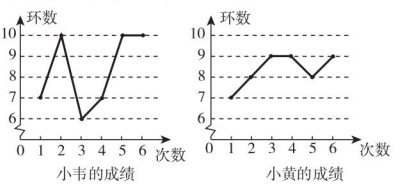
A. A 组、B 组平均数及方差分别相等

B. A 组、B 组平均数相等，B 组方差大

C. A 组比 B 组的平均数、方差都大

D. A 组、B 组平均数相等，A 组方差大

***8.** 【中考·百色】小韦和小黄进行射击比赛，各射击6次，根据成绩绘制的两幅折线统计图如图所示，以下判断正确的是（　　）



（第8题）

A. 小黄的成绩比小韦的成绩更稳定

B. 两人成绩的众数相同

C. 小韦的成绩比小黄的成绩更稳定

D. 两人的平均成绩不相同

易错点 对方差的意义理解不透导致出错

9. 小明等五位同学以他们的年龄为一组数据，计算出这组数据的方差是0.5，则10年后小明等五位同学年龄的方差（　　）

A. 增大　　B. 不变

C. 减小　　D. 无法确定

微信公众号 教辅资料站

趣味数学

方差在艺术欣赏中的应用：白居易《琵琶行》“大弦嘈嘈如急雨，小弦切切如私语. 嘈嘈切切错杂弹，大珠小珠落玉盘.”生动地描述出艺术的特性，即方差大就是波动性强.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法·提升练 ☞(答案见159页)

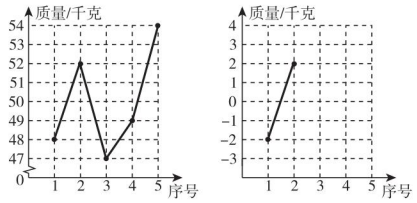
考查角度① 利用方差公式求方差

10. 【中考·杭州】称量五筐水果的质量,若每筐以50千克为基准,超过基准部分的千克数记为正数,不足基准部分的千克数记为负数,甲组为实际称量读数,乙组为记录数据,并把所得数据整理成如下统计表和未完成的统计图(单位:千克).

实际称量读数和记录数据统计表

组别 \ 序号	1	2	3	4	5
甲组	48	52	47	49	54
乙组	−2	2	−3	−1	4

实际称量读数折线统计图　　记录数据折线统计图



(第10题)

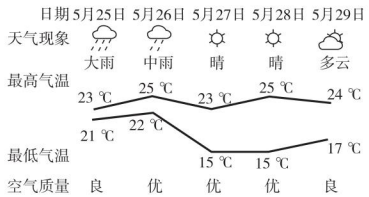
(1)补充完整乙组数据的折线统计图;

(2)①甲,乙两组数据的平均数分别为$\bar{x}_{甲}$,$\bar{x}_{乙}$,写出$\bar{x}_{甲}$与$\bar{x}_{乙}$之间的等量关系;

②甲,乙两组数据的方差分别为$s^2_{甲}$,$s^2_{乙}$,比较$s^2_{甲}$与$s^2_{乙}$的大小,并说明理由.

考查角度② 利用方差分析数据

11. 【中考·南京】如图是某市连续5天的天气情况.



(第11题)

(1)利用方差判断该市这5天的日最高气温波动大还是日最低气温波动大;

(2)根据如图提供的信息,请再写出两个不同类型的结论.

Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞(答案见159页)

拔尖角度✓ 利用统计表数据信息分析数据

12. 【中考·吉林】为了调查甲、乙两台包装机分装标准质量为400 g奶粉的情况,质检员进行了抽样调查,过程如下,请补全表一、表二中的空白,并回答提出的问题.

收集数据:

从甲、乙包装机分装的奶粉中各自随机抽取10袋,测得实际质量(单位:g)如下:

甲:400,400,408,406,410,409,400,393,394,395.

乙:403,404,396,399,402,402,405,397,402,398.

整理数据:

表一

种类 \ 质量/g 频数	$393\leqslant x<396$	$396\leqslant x<399$	$399\leqslant x<402$	$402\leqslant x<405$	$405\leqslant x<408$	$408\leqslant x<411$
甲	3	0	_____	0	1	3
乙	0	_____	1	5	_____	0

分析数据:

表二

种类	平均数	中位数	众数	方差
甲	401.5	_____	400	36.85
乙	400.8	402	_____	8.56

得出结论:

包装机分装情况比较好的是_____(填"甲"或"乙"),说明你的理由.

趣味数学　真正的数学"天才"是珊瑚虫.珊瑚虫在自己的身上记下"日历",它们每年在自己的体壁上"刻画"出365条斑纹,显然是一天"画"一条.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

第2课时　方差在数据分析中的应用 ☞（答案见159页）

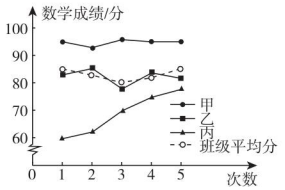
名师点金

数据分析的方法：

1. 理解平均数、中位数、众数反映的是数据的集中趋势，方差反映的是数据的波动程度.
2. 在具体问题中，根据实际问题灵活选择合适的数据解决相关问题.

类型1 利用方差与平均数分析数据

1. 【中考·福建】如图是某班甲、乙、丙三位同学最近5次数学成绩及其所在班级相应平均分的折线统计图，则下列判断错误的是（　　）



（第1题）

A. 甲的数学成绩高于班级平均分，且成绩比较稳定

B. 乙的数学成绩在班级平均分附近波动，且比丙好

C. 丙的数学成绩低于班级平均分，但成绩逐次提高

D. 就甲、乙、丙三个人而言，乙的数学成绩最不稳

类型2 利用方差与中位数分析数据

2. 某校八年级学生开展踢毽子比赛活动，每个班派5名学生参加，按团体总分多少排列名次，在规定时间内每人踢100个以上（含100个）为优秀，下表是成绩最好的甲班和乙班5名学生的比赛成绩（单位：个）：

	1号	2号	3号	4号	5号	总成绩
甲班	100	98	110	89	103	500
乙班	89	100	95	119	97	500

经统计发现两个班总成绩相等，此时有学生建议，可以通过考察数据中的其他信息作为参考.

请你回答下列问题：

（1）计算甲、乙两个班的优秀率.

（2）求两个班比赛成绩的中位数.

（3）估计两个班比赛成绩的方差哪个班较小.

（4）根据以上信息，你认为应该把冠军奖状发给哪个班？简述理由.

类型3 利用方差与统计表的信息分析数据

3. 【中考·荆州】为了参加“荆州市中小学生首届诗词大会”，某校八年级的2个班学生进行了预选，其中班上前5名学生的成绩（百分制）分别为：

八（1）班　86，85，77，92，85；

八（2）班　79，85，92，85，89.

通过数据分析，列表如下：

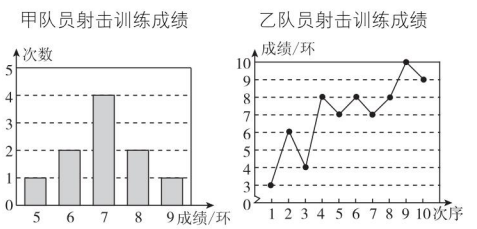
班级	平均分	中位数	众数	方差
八（1）	85	b	c	22.8
八（2）	a	85	85	19.2

（1）直接写出表中a，b，c的值.

（2）根据以上数据分析，你认为哪个班前5名学生的成绩较好？说明理由.

类型4 利用方差与统计图表的信息分析数据

4. 【中考·青岛】甲、乙两名队员参加射击训练，成绩分别被制成下列两个统计图：



（第4题）

根据以上信息，整理分析数据如下：

	平均成绩/环	中位数/环	众数/环	方差
甲	a	7	7	1.2
乙	7	b	8	c

（1）写出表中a，b，c的值.

（2）分别运用表中的四个统计量，简要分析这两名队员的射击训练成绩. 若选派其中一名参赛，你认为应选哪名队员？

谜语：1+2+3（打一成语）　谜底：接二连三　趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

23.4　用样本估计总体

名师点金

抽样调查体现的样本估计总体的数学思想是统计的基本思想，一般是用样本的某些特征估计总体的某些特征. 同一组数据，所选取的样本不同，平均数、方差等统计量结果一般也不相同.

1 夯实基础·逐点练

(答案见160页)

知识点1 用样本平均数估计总体平均数

1. 【中考·福建】某校征集校运会会徽，遴选出甲、乙、丙三种图案. 为了解何种图案更受欢迎，随机调查了该校100名学生，其中60名同学喜欢甲图案，若该校共有2 000人，根据所学的统计知识可以估计该校喜欢甲图案的学生有_____人.

2. 【中考·日照】积极行动起来，共建节约型社会！我市某居民小区200户居民参加了节水行动，现统计了10户家庭一个月的节水情况，将有关数据整理如下：

节水量/吨	0.5	1	1.5	2
家庭数/户	2	3	4	1

请你估计该200户家庭这个月节约用水的总量是(　　)

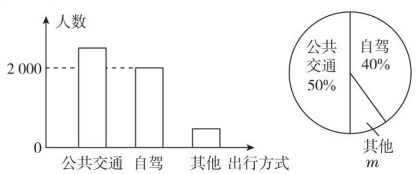
A. 240吨　　B. 360吨

C. 180吨　　D. 200吨

3. 【中考·绵阳】要估计鱼塘中的鱼数，养鱼者首先从鱼塘中打捞了50条鱼，在每条鱼身上做好记号后把这些鱼放归鱼塘，再从鱼塘中打捞出100条鱼，发现只有两条鱼是做了记号的鱼. 假设鱼在鱼塘内均匀分布，那么估计这个鱼塘的鱼数约为(　　)

A. 5 000条　B. 2 500条　C. 1 750条　D. 1 250条

4. 【中考·荆州】荆州古城是闻名遐迩的历史文化名城. 五一期间相关部门对到荆州观光的游客的出行方式进行了随机抽样调查，整理后绘制了两幅统计图(尚不完整). 根据图中信息，下列结论错误的是(　　)



(第4题)

A. 本次抽样调查的样本容量是5 000

B. 扇形图中的m为10%

C. 样本中选择公共交通出行的有2 500人

D. 若五一期间到荆州观光的游客有50万人，则选择自驾方式出行的有25万人

知识点2 用样本方差估计总体方差

5. 样本方差的大小，可以反映(　　)

A. 样本的平均水平

B. 总体的平均水平

C. 众数的情况

D. 总体的波动大小

6. 为了考察某班普通话测试情况，从中抽查了10人的成绩如下(单位：分)：87，90，98，74，89，90，85，80，90，93. 估计该班普通话测试成绩的方差是(　　)

A. 40.64　　B. 4.064

C. 6.38　　D. 63.8

7. 【中考·宁波】去年某果园随机从甲、乙、丙、丁四个品种的葡萄树中各采摘了10棵，每棵产量的平均数$\bar{x}$(单位：千克)及方差s^2(单位：千克^2)如下表所示：

	甲	乙	丙	丁
$\bar{x}$	24	24	23	20
s^2	2.1	1.9	2	1.9

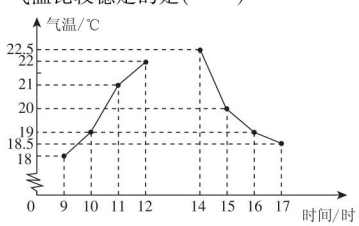
今年准备从四个品种中选出一种产量既高又稳定的葡萄树进行种植，应选的品种是(　　)

A. 甲　　B. 乙

C. 丙　　D. 丁

易错点 利用样本估计总体时仅凭想当然致错

***8.** 如图是小强同学根据沧州城区某天上午和下午各四个整时点的气温绘制成的折线统计图，该天上午和下午气温比较稳定的是(　　)



(第8题)

A. 上午　　B. 下午

C. 上午与下午稳定情况相同　　D. 无法确定

趣味数学　一向与人无争的平均数这几天突然和众数、中位数争吵起来了，在整个数王国引起了轩然大波. 三人都认为自己在统计中表示的量才是最公平、最可靠的！平均数、众数、中位数各不相让.(待续)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞（答案见160页）

考查角度① 利用样本平均数估计总体分析数据

9. 为保护环境，创建绿色鹰潭，某环保小组随机调查了某市区30个家庭一天丢弃塑料袋的情况，统计结果如下表：

塑料袋数/个	0	1	2	3	4	5	6
家庭数/个	1	1	11	7	5	4	1

（1）这种调查方式属于普查还是抽样调查？答：_____.

（2）这30个家庭一天丢弃塑料袋个数的众数是_____个，中位数是_____个.

（3）该市区人口数约44万，假设平均一个家庭有4个人. 若根据30个家庭这一天丢弃塑料袋个数的平均数估算，则全市一天丢弃塑料袋的总数约是多少个？通过该环保小组的统计和你的估算，写出你的感想或对市民提一条科学的建议.

考查角度② 利用样本方差估计总体分析数据

10. 某农科院为了选择出适合某地种植的甜玉米种子，对甲、乙两个品种各用10块试验田进行试验，得到各试验田每公顷的产量如下表：

品种	各块试验田每公顷产量/t				
甲	7.65	7.50	7.62	7.59	7.65
	7.64	7.50	7.40	7.41	7.41
乙	7.55	7.56	7.53	7.57	7.49
	7.58	7.58	7.46	7.56	7.49

根据这些数据，应为农科院选择甜玉米种子提出怎样的建议呢？

Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞（答案见160页）

拔尖角度 利用样本估计总体求数据

11. 钟南山院士谈到防护新型冠状病毒肺炎时说：“我们需要重视防护，但也不必恐慌，尽量少去人员密集的场所，出门戴口罩，在室内注意通风，勤洗手，多运动，少熬夜.”某社区为了加强社区居民对新型冠状病毒肺炎防护知识的了解，通过微信群宣传新型冠状病毒肺炎的防护知识，并鼓励社区居民在线参与作答《2020年新型冠状病毒防治全国统一考试（全国卷）》试卷（满分100分），社区管理员随机从甲、乙两个小区各抽取20名人员的答卷成绩，并对他们的成绩（单位：分）进行统计、分析，过程如下.

收集数据

甲小区：85 80 95 100 90 95 85 65 75 85 90 90 70 90 100 80 80 90 95 75

乙小区：80 60 80 95 65 100 90 85 85 80 95 75 80 90 70 80 95 75 100 90

整理数据

小区 \ 成绩 x/分 人数	$60\leqslant x\leqslant 70$	$70<x\leqslant 80$	$80<x\leqslant 90$	$90<x\leqslant 100$
甲小区	2	5	a	b
乙小区	3	7	5	5

分析数据

小区 \ 统计量 成绩/分	平均数	中位数	众数
甲小区	85.75	87.5	c
乙小区	83.5	d	80

应用数据

（1）填空：$a=$_____，$b=$_____，$c=$_____，$d=$_____；

（2）若甲小区共有800人参与答卷，请估计甲小区成绩大于90分的人数；

（3）社区管理员看完统计数据，认为甲小区对新型冠状病毒肺炎防护知识掌握更好，请你写出社区管理员的理由.

趣味数学

最王国老国王说：“平均数受数据中所有数的影响，尤其出现较大或较小数据时，它也会偏大或偏小. 如果个别数据较大或较小，中位数却不受影响，那么用中位数表示就比较合适.（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

全章热门考点整合应用

☞(答案见160页)

名师点金

分析数据主要是根据数据的特征,恰当选择平均数、中位数、众数作出符合实际需要的分析,善于利用样本的数据估算总体的数据.本章的主要考点可概括为四个概念,三个应用.

考点1 四个概念

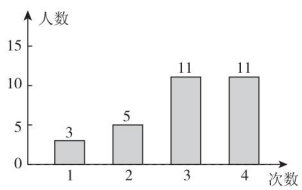
概念1 平均数

1. 【中考·无锡】某种蔬菜按品质分成三个等级销售,销售情况如下表:

等级	价格/(元/kg)	销售量/kg
一等	5.0	20
二等	4.5	40
三等	4.0	40

则售出蔬菜的平均价格为_____元/kg.

2. 【中考·防城港】学校抽查了30名学生参加"学雷锋社会实践"活动的次数,并根据数据绘成了条形图(如图),则30名学生参加活动的平均次数是(　　)



(第2题)

A. 2　　B. 2.8　　C. 3　　D. 3.3

概念2 中位数

3. 学校团委组织"阳光助残"捐款活动,九年级一班学生捐款情况如下表:

捐款金额/元	5	10	20	50
人数/人	10	13	12	15

则学生捐款金额的中位数是(　　)

A. 13元　　B. 12元　　C. 10元　　D. 20元

概念3 众数

4. 【中考·荆州】在一次体检中,甲、乙、丙、丁四位同学的平均身高为1.65米,而甲、乙、丙三位同学的平均身高为1.63米,下列说法一定正确的是(　　)

A. 四位同学身高的中位数一定是其中一位同学的身高

B. 丁同学的身高一定高于其他三位同学的身高

C. 丁同学的身高为1.71米

D. 四位同学身高的众数一定是1.65米

概念4 方差

5. 在一次数学测试中,某小组五名同学的成绩(单位:分)如下表(有两个数据被遮盖).

组员	甲	乙	丙	丁	戊	方差	平均成绩
得分	81	79	■	80	82	■	80

那么被遮盖的两个数据依次是(　　)

A. 80,2　　B. 80,10　　C. 78,2　　D. 78,10

6. 【中考·莆田】在一次定点投篮训练中,五位同学投中的个数分别为3,4,4,6,8,则关于这组数据的说法不正确的是(　　)

A. 平均数是5　　B. 中位数是6

C. 众数是4　　D. 方差是3.2

考点2 三个应用

应用1 平均数、中位数、众数的应用

7. 某乡镇企业生产部有技术工人15人,生产部为了合理确定产品的每月生产定额,统计了这15人某月的加工零件个数:

每人加工零件个数/个	540	450	300	240	210	120
人数	1	1	2	6	3	2

(1)直接写出这15人该月加工零件个数的平均数、中位数和众数.

(2)假如生产部负责人把每位工人的月加工零件个数定为260个,你认为这个定额是否合理?为什么?

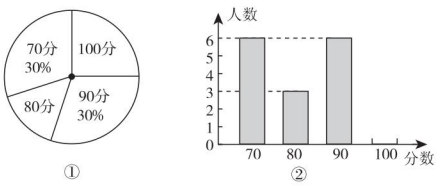
趣味数学　如果个别数据较大或较小,也不影响众数,且某些数据出现次数较多,毫无疑问,用众数来表示数据特征比较合适.(待续)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

应用2 方差的应用

8. 【中考·贵港】某市团委举办以“我的中国梦”为主题的知识竞赛，甲、乙两所学校参赛人数相等，比赛结束后，发现学生成绩分别为70分、80分、90分、100分，并根据统计数据绘制了如下不完整的统计图表：

甲校成绩扇形统计图　　甲校成绩条形统计图



（第8题）

乙校成绩统计表

分数	人数
70	7
80	
90	1
100	8

(1) 在图①中，“80分”所在扇形的圆心角度数为_____；

(2) 请你将图②补充完整；

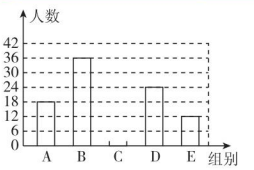
(3) 求乙校成绩的平均分；

(4) 经计算知 $s_{甲}^2=135$，$s_{乙}^2=175$，请你根据这两个数据，对甲、乙两校成绩作出合理评价.

应用3 用样本估计总体的应用

9. 随着某市社会经济的发展和交通状况的改善，该市的旅游业得到了高速发展. 某旅游公司对该市一企业个人旅游年消费情况进行问卷调查，随机抽查部分员工，记录每个人年消费金额，并将调查数据适当整理，绘制成尚不完整的统计表和统计图（如图）.

组别	个人年消费金额 x/元	频数（人数）
A	$x\leqslant 2\,000$	18
B	$2\,000<x\leqslant 4\,000$	a
C	$4\,000<x\leqslant 6\,000$	b
D	$6\,000<x\leqslant 8\,000$	24
E	$x>8\,000$	12
合计		120



（第9题）

根据以上信息解答下列问题：

(1) $a=$_____，$b=$_____，并将条形统计图补充完整；

(2) 在这次调查中，个人年消费金额的中位数出现在_____组；

(3) 若这个企业有3 000名员工，请你估计个人旅游年消费金额在6 000元以上的人数.

所以你们各有所长，也各有所短！”听了老国王的话，平均数和众数、中位数都明白了，三人的手紧紧握在了一起.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

24.1 一元二次方程

第1课时 认识一元二次方程

名师点金

判别一元二次方程的两种方法：

1. **根据定义要把握三点**：一是整式方程；二是只含有一个未知数；三是未知数的最高次数是2.
2. **根据一般形式要把握两点**：一是能化成 $ax^2+bx+c=0$ 的形式，且 a 一定不能为0，而 b，c 都可以为0；二是判断是否为一元二次方程与其解的情况无关.

Ⅰ 夯实基础·逐点练 ☞(答案见160页)

知识点1 一元二次方程的定义

1. 下列关于 x 的方程一定是一元二次方程的是(　　)

A. $ax^2+bx+c=0$　　B. $x^2+1-x^2=0$

C. $x^2+\frac{1}{x}=2$　　D. $x^2-x-2=0$

2. 如果方程 $(m-3)x^{m^2-7}-x+3=0$ 是关于 x 的一元二次方程，那么 m 的值为(　　)

A. ±3　　B. 3

C. -3　　D. 以上都不对

知识点2 一元二次方程的一般形式

3. 把方程 $x(x+2)=5(x-2)$ 化成一般形式，则 a，b，c 的值分别是(　　)

A. 1，-3，10　　B. 1，7，-10

C. 1，-5，12　　D. 1，3，2

4. 若方程 $2x^2+mx=4x+2$ 中不含 x 的一次项，则 $m=$(　　)

A. 0　　B. 4　　C. -4　　D. ±4

5. 关于 x 的一元二次方程 $(m-1)x^2+5x+|m|-1=0$ 的常数项为0，则 m 等于(　　)

A. 1　　B. -1　　C. 1或-1　　D. 0

知识点3 一元二次方程的解(根)

6. 【中考·资阳】a 是方程 $2x^2=x+4$ 的一个根，则代数式 $4a^2-2a$ 的值是_____.

7. 【中考·甘肃】若一元二次方程 $x^2-2kx+k^2=0$ 的一根为 $x=-1$，则 k 的值为(　　)

A. -1　　B. 0　　C. 1或-1　　D. 2或0

8. 老师出示了小黑板上的题目(如图)，小敏回答："方程有一个根为-4."小聪回答："方程有一个根为3."则你认为(　　)

方程 $x^2+x-12=0$ 的根是_____.

A. 只有小敏回答正确　　B. 只有小聪回答正确

C. 小敏、小聪回答都正确　　D. 小敏、小聪回答都不正确

知识点4 利用一元二次方程建立实际问题模型

9. 【中考·日照】某省加快新旧动能转换，促进企业创新发展，某企业一月的营业额是1 000万元，月平均增长率相同，第一季度的总营业额是3 990万元. 若设月平均增长率是 x，那么可列出的方程是(　　)

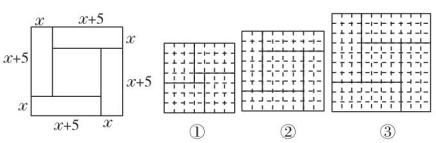
A. $1\,000(1+x)^2=3\,990$

B. $1\,000+1\,000(1+x)+1\,000(1+x)^2=3\,990$

C. $1000(1+2x)=3\,990$

D. $1\,000+1\,000(1+x)+1\,000(1+2x)=3\,990$

10. 【中考·宁夏】你知道吗，对于一元二次方程，我国古代数学家还研究过其几何解法呢！以方程 $x^2+5x-14=0$ 即 $x(x+5)=14$ 为例加以说明. 数学家赵爽(公元3～4世纪)在其所著的《勾股圆方图注》中记载的方法是：构造图(如下面左图)中大正方形的面积是 $(x+x+5)^2$，其中它又等于四个矩形的面积加上中间小正方形的面积，即 $4\times14+5^2$，据此易得 $x=2$. 那么在下面右边的三个构图(矩形的顶点均落在边长为1的小正方形网格格点上)中，能够说明方程 $x^2-4x-12=0$ 的正确构图是_____.(只填序号)



(第10题)

易错点 忽视二次项系数不为零的条件而致错

***11.** 已知关于 x 的一元二次方程 $(a-1)x^2-2x+a^2-1=0$ 有一个根为 $x=0$，则 a 的值为(　　)

A. 0　　B. ±1

C. 1　　D. -1

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞（答案见160页）

考查角度1 利用一元二次方程的定义求字母的值

12. 已知关于 x 的方程 $(2k+1)x^2+4kx+k-1=0$，问：

(1) k 为何值时，此方程是一元一次方程？

(2) k 为何值时，此方程是一元二次方程？并写出这个一元二次方程的二次项系数、一次项系数及常数项.

考查角度2 利用一元二次方程的根求等腰三角形的周长

13. 若2是关于 x 的方程 $x^2-(3+k)x+12=0$ 的一个根，求以2和 k 为两边长的等腰三角形的周长.

Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞（答案见161页）

拔尖角度1 利用一元二次方程的定义探究字母系数问题

14. 若 $x^{2a+b}-3x^{a-b}+1=0$ 是关于 x 的一元二次方程，求 a,b 的值. 下面是两位同学的解法.

甲：根据题意，得 $\begin{cases}2a+b=2,\\ a-b=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\ b=0.\end{cases}$

乙：根据题意，得 $\begin{cases}2a+b=2,\\ a-b=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2a+b=1,\\ a-b=2,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=1,\\ b=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=1,\\ b=-1.\end{cases}$

你认为上述两位同学的解法是否正确？为什么？如果都不正确，请给出正确的解法.

拔尖角度2 利用夹逼法求所列方程的解

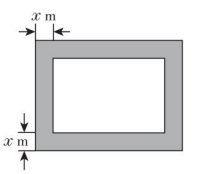
15. 某大学为改善校园环境，计划在一块长80 m，宽60 m的长方形场地中央建一个长方形网球场，网球场占地面积为3 500 m^2. 四周为宽度相等的人行走道，如图，若设人行走道宽为 x m.

(1) 请列出相应的方程；

(2) x 的值可能小于0吗？说说你的理由；

(3) x 的值可能大于40吗？可能大于30吗？说说你的理由；

(4) 你知道人行走道的宽是多少吗？说说你的求解过程.



（第15题）

谜语：数字虽小，却在百万之上（打一数字）

谜底：一 趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第2课时　一元二次方程的定义及相关概念的五种常见应用 ☞(答案见161页)

名师点金

巧用一元二次方程的定义及相关概念求值主要体现在利用定义或项的概念求字母的值,利用根的概念求字母或代数式的值等.

应用1　利用一元二次方程的定义求字母的值

1. 向阳中学数学兴趣小组对关于 x 的方程 $(m+1)x^{m^2+1}+(m-2)x-1=0$ 提出了下列问题:

(1)是否存在 m,使方程为一元二次方程?若存在,求出 m 的值,并写出此方程;若不存在,请说明理由;

(2)是否存在 m,使方程为一元一次方程?若存在,求出 m 的值,并解此方程;若不存在,请说明理由.

应用2　利用一元二次方程的相关概念求字母的值

2. 若关于 x 的一元二次方程 $(2ax+1)(x-a)=a-2$ 的二次项系数是 -4,求 a 的值.

应用3　利用一元二次方程的定义及一般式解新定义问题

3. 将4个数 a,b,c,d 排成2行、2列,两边各加一条竖线,记成 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$,定义 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$,上述记号叫做二阶行列式.那么 $\begin{vmatrix} x+1 & x+2 \\ x-2 & 2x \end{vmatrix}=1$ 表示的方程是一元二次方程吗?请写出它的一般形式.

应用4　利用一元二次方程根的定义求代数式的值

4. 若 $n(n\neq 0)$ 是关于 x 的方程 $x^2+mx+2n=0$ 的根,求 $m+n$ 的值.　【导学号:8934350】

5. 已知实数 a 是一元二次方程 $x^2-2\,022x+1=0$ 的一个根,求代数式 $a^2-2\,021a-\dfrac{a^2+1}{2\,022}$ 的值.

应用5　利用一元二次方程根的定义说明某数是根的理由

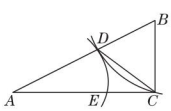
6. 如图,在 $\triangle ABC$ 中,$\angle ACB=90°$,以点 B 为圆心,BC 长为半径画弧,交线段 AB 于点 D;以点 A 为圆心,AD 长为半径画弧,交线段 AC 于点 E,连接 CD.

(1)若 $\angle A=28°$,求 $\angle ACD$ 的度数.

(2)设 $BC=a,AC=4$.

①若 $AD=EC$,求 a 的值.

②线段 AD 的长是方程 $x^2+2ax-16=0$ 的一个根吗?说明理由.



(第6题)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

24.2 解一元二次方程

第1课时 配方法——直接开平方法解方程

名师点金

用直接开平方法解一元二次方程的“三步法”：

变形：将方程化为“含未知数的完全平方式 = 非负常数”的形式；

开方：利用平方根的定义，将方程转化为两个一元一次方程；

求解：解一元一次方程，得出方程的根.

Ⅰ 夯实基础 · 逐点练 ☞（答案见161页）

知识点1 形如 $x^2=p(p\geqslant 0)$ 型方程的解法

1. 【中考 · 徐州】方程 $x^2-4=0$ 的解是_____.

2. 一元二次方程 $4x^2-9=0$ 的解为(　　)

A. $x=\frac{3}{2}$　　B. $x=\frac{2}{3}$

C. $x_1=\frac{3}{2}, x_2=-\frac{3}{2}$　　D. $x_1=\frac{2}{3}, x_2=-\frac{2}{3}$

3. 用直接开平方法解下列一元二次方程，其中无实数解的方程为(　　)

A. $x^2-1=0$　　B. $x^2=0$

C. $x^2+4=0$　　D. $-x^2+3=0$

4. 若代数式 $3x^2-6$ 的值为21，则 x 的值一定为(　　)

A. 3　　B. ± 3

C. -3　　D. $\pm\sqrt{3}$

知识点2 形如 $(mx+n)^2=p(p\geqslant 0)$ 型方程的解法

5. 【中考 · 吉林】若关于 x 的一元二次方程 $(x+3)^2=c$ 有实数根，则 c 的值可以为_____（写出一个即可）.

6. 【中考 · 丽水】一元二次方程 $(x+6)^2=16$ 可化为两个一元一次方程，其中一个一元一次方程是 $x+6=4$，则另一个一元一次方程是(　　)

A. $x-6=4$　　B. $x-6=-4$

C. $x+6=4$　　D. $x+6=-4$

7. 已知一元二次方程 $(x-3)^2=1$ 的两个解恰好分别是等腰三角形 ABC 的底边长和腰长，则 $\triangle ABC$ 的周长为(　　)

A. 10　　B. 10或8　　C. 9　　D. 8

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞（答案见161页）

考查角度1 利用直接开平方法求字母的值

8. 已知关于 x 的方程 $(x-1)^2=k^2+2$ 的一个根是3，求 k 的值及另一个根.

考查角度2 利用直接开平方法所得根的特征求分式的值

9. 若关于 x 的一元二次方程 $ax^2=b(ab>0)$ 的两个根分别是 $m+1$ 与 $2m-4$，求 $\frac{b}{a}$ 的值.

趣味数学

数学家维纳的年龄：著名数学家诺伯特 · 维纳，在博士学位的授予仪式上，执行主席问他的年龄.（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第2课时　配方法——配方法解方程

名师点金

二次三项式的配方过程与一元二次方程的配方过程有两大区别：

一是二次项系数化为1，二次三项式是提出二次项的系数，一元二次方程是两边同时除以二次项的系数；**二是配方**，二次三项式是先加上一次项系数一半的平方再减去一次项系数一半的平方，一元二次方程是两边同时加上一次项系数一半的平方.

Ⅰ 夯实基础·逐点练 ☞(答案见161页)

知识点1 二次三项式的配方

1. 【中考·安顺】若$x^2+2(m-3)x+16$是关于x的完全平方式，则$m=$_____.

2. 将代数式a^2+4a-5变形，结果正确的是(　　)
A. $(a+2)^2-1$　　B. $(a+2)^2-5$
C. $(a+2)^2+4$　　D. $(a+2)^2-9$

3. 将代数式$x^2-10x+5$配方后，发现它的最小值为(　　)
A. -30　　B. -20　　C. -5　　D. 0

4. 对于任意实数x，多项式x^2-2x+3的值一定是(　　)
A. 非负数　　B. 正数
C. 负数　　D. 无法确定

5. 不论x,y为何实数，代数式$x^2+y^2+2x-4y+7$的值(　　)
A. 总不小于2　　B. 总不小于7
C. 可为任何实数　　D. 可能为负数

6. 【中考·扬州】已知$M=\frac{2}{9}a-1$，$N=a^2-\frac{7}{9}a$(a为任意实数)，则M,N的大小关系为(　　)
A. $M<N$　　B. $M=N$
C. $M>N$　　D. 不能确定

知识点2 用配方法解一元二次方程

7. 用配方法解下列方程，其中应在方程左右两边同时加上4的是(　　)
A. $x^2+4x=5$　　B. $2x^2-4x=5$
C. $x^2-2x=5$　　D. $x^2+2x=5$

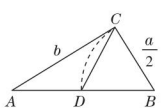
8. 用配方法解一元二次方程$x^2-4x+1=0$时，下列变形正确的是(　　)
A. $(x-2)^2=1$　　B. $(x-2)^2=5$
C. $(x+2)^2=3$　　D. $(x-2)^2=3$

9. 一元二次方程$x^2-8x=48$可表示成$(x-a)^2=48+b$的形式，其中a,b为整数，$a+b$的值为(　　)
A. 20　　B. 12
C. -12　　D. -20

10. 用配方法解方程$x^2-8x+15=0$的过程中，配方正确的是(　　)
A. $x^2-8x+(-4)^2=1$
B. $x^2-8x+(-4)^2=31$
C. $(x+4)^2=1$
D. $(x-4)^2=-11$

11. 用配方法解下列方程时，配方正确的是(　　)
A. 方程$x^2-6x-5=0$，可化为$(x-3)^2=4$
B. 方程$y^2-2y-2\,020=0$，可化为$(y-1)^2=2\,020$
C. 方程$a^2+8a+9=0$，可化为$(a+4)^2=25$
D. 方程$2x^2-6x-7=0$，可化为$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{23}{4}$

12. 【中考·舟山】欧几里得的《原本》记载，形如$x^2+ax=b^2$的方程的图解法是：如图，画$\mathrm{Rt}\triangle ABC$，使$\angle ACB=90°$，$BC=\frac{a}{2}$，$AC=b$，再在斜边AB上截取$BD=\frac{a}{2}$，则该方程的一个正根是(　　)
A. AC的长
B. AD的长
C. BC的长
D. CD的长



(第12题)

*13. 【中考·益阳】规定：$a\otimes b=(a+b)b$，如：$2\otimes 3=(2+3)\times 3=15$，若$2\otimes x=3$，则$x=$_____.

易错点 在配方时忽视等式的性质而致错

14. 【中考·齐齐哈尔】解方程：$x^2+6x=-7$.

趣味数学　他的回答十分巧妙："我今年岁数的立方是四位数，四次方是六位数，这两个数，刚好把十个数字0，1，2，3，4，5，6，7，8，9全都用上了，不重不漏.(待续)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞（答案见161页）

考查角度1 利用配方法解非负数问题

15. 先阅读下面的内容，再解决问题.

例题：若 $m^2+2mn+2n^2-6n+9=0$，求 m 和 n 的值.

解：$\because m^2+2mn+2n^2-6n+9=0$，

$\therefore m^2+2mn+n^2+n^2-6n+9=0$.

$\therefore (m+n)^2+(n-3)^2=0$.

$\therefore m+n=0, n-3=0$.

$\therefore m=-3, n=3$.

问题：已知 a,b,c 为正整数且是 $\triangle ABC$ 的三边长，c 是 $\triangle ABC$ 的最短边长，a,b 满足 $a^2+b^2=12a+8b-52$，求 c 的值.

考查角度2 利用配方法解决二次三项式的最值问题

16. 我们可以利用配方法解决一些多项式的最值，如：$x^2+2x+3=(x^2+2x+1)+2=(x+1)^2+2$，当 $x=-1$ 时，x^2+2x+3 有最小值为2；再如：$-x^2+2x-2=-(x^2-2x+1)-1=-(x-1)^2-1$，当 $x=1$ 时，$-x^2+2x-2$ 有最大值为 -1.

(1) 代数式 x^2+6x+m 有最小值为1，则 $m=$_____；

(2) 代数式 $-x^2+4x+m$ 有最大值为2，则 $m=$_____；

(3) 代数式 $x^2+(m+2)x+4m-7$ 有最小值为0，求 m 的值.

Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞（答案见162页）

拔尖角度1 利用配方法求代数式的值（整体思想、换元法）

17. 已知实数 x 满足 $x^2+\frac{1}{x^2}+2\left(x+\frac{1}{x}\right)=0$，求 $x+\frac{1}{x}$ 的值.

拔尖角度2 巧借配方法判断三角形的形状

18. 已知 a,b,c 是 $\triangle ABC$ 的三边长，且 $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0$，试判断三角形的形状.

更多提分招数详见《极速提分法》第1页.

这意味着全体数字都向我俯首称臣，预祝我将来在数学领域里一定能干出一番惊天动地的大事业.”（维纳当时的年龄为18岁）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第3课时　公式法——一元二次方程根的判别式

名师点金

根的判别式的应用：

1. **直用**：不解方程，判断方程根的情况.　　2. **逆用**：由方程根的情况，求字母系数的取值范围.

注意：一元二次方程有实数根，包含有两个相等的实数根和有两个不相等的实数根两种情况.

1 夯实基础·逐点练

☞(答案见162页)

知识点1 一元二次方程根的判别式

1. 方程 $7x=2x^2-4$ 化为一般形式 $ax^2+bx+c=0$ 后，$a=$_____，$b=$_____，$c=$_____，$b^2-4ac=$_____.

2. 方程 $6x-8=5x^2$ 化为一般形式 $ax^2+bx+c=0$ 后，a,b,c 的值为(　　)

A. $a=5,b=6,c=-8$

B. $a=5,b=-6,c=-8$

C. $a=5,b=-6,c=8$

D. $a=5,b=6,c=8$

3. 在方程 $2x^2+3x=1$ 中，b^2-4ac 的值为(　　)

A. 1　　B. -1

C. 17　　D. -17

4. 已知方程 $2x^2+mx+1=0$ 的根的判别式的值为16，则 m 的值为(　　)

A. $2\sqrt{6}$　　B. $-2\sqrt{6}$

C. $\pm2\sqrt{6}$　　D. $\pm3\sqrt{6}$

知识点2 一元二次方程根的类别

5. 【中考·河南】一元二次方程 $(x+1)(x-1)=2x+3$ 的根的情况是(　　)

A. 有两个不相等的实数根

B. 有两个相等的实数根

C. 只有一个实数根

D. 没有实数根

6. 【中考·湘西州】一元二次方程 $x^2+2x+3=0$ 根的情况是(　　)

A. 有两个不相等的实数根

B. 有两个相等的实数根

C. 没有实数根

D. 无法判断

7. 【中考·娄底】关于 x 的一元二次方程 $x^2-(k+3)x+k=0$ 的根的情况是(　　)

A. 有两个不相等的实数根

B. 有两个相等的实数根

C. 无实数根

D. 不能确定

知识点3 一元二次方程根的判别式的应用

8. 【中考·自贡】关于 x 的一元二次方程 $x^2-2x+m=0$ 无实数根，则实数 m 的取值范围是(　　)

A. $m<1$　　B. $m\geqslant1$　　C. $m\leqslant1$　　D. $m>1$

9. 【中考·荆州】若一次函数 $y=kx+b$ 的图像不经过第二象限，则关于 x 的方程 x^2+kx+b 的根的情况是(　　)

A. 有两个不相等的实数根

B. 有两个相等的实数根

C. 无实数根

D. 无法确定

10. 【中考·安徽】若关于 x 的一元二次方程 $x(x+1)+ax=0$ 有两个相等的实数根，则实数 a 的值为(　　)

A. -1　　B. 1

C. -2 或2　　D. -3 或1

***11.** 【中考·河北】小刚在解关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 时，只抄对了 $a=1,b=4$，解出其中一个根是 $x=-1$. 他核对时发现所抄的 c 比原方程的 c 值小2，则原方程的根的情况是(　　)

A. 不存在实数根

B. 有两个不相等的实数根

C. 有一个根是 $x=-1$

D. 有两个相等的实数根

易错点 应用根的判别式求字母的取值范围时忽视一元二次方程的隐含条件

***12.** 【中考·新疆】若关于 x 的一元二次方程 $(k-1)x^2+x+1=0$ 有两个实数根，则 k 的取值范围是(　　)

A. $k\leqslant\frac{5}{4}$

B. $k>\frac{5}{4}$

C. $k<\frac{5}{4}$ 且 $k\neq1$

D. $k\leqslant\frac{5}{4}$ 且 $k\neq1$

趣味数学　1707年，牛顿的代数讲义经整理后出版，定名为《普遍算术》，其书中陈述了代数基本概念与基本运算，同时对方程的根及其性质进行了深入的探讨，引出了方程论方面的丰硕成果.(待续)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法·提升练 ☞（答案见162页）

考查角度1 利用方程的根的情况求字母的范围

13. 【中考·北京】关于 x 的方程 $x^2-2x+2m-1=0$ 有实数根，且 m 为正整数，求 m 的值及此时方程的根.

考查角度2 利用一元二次方程的根的情况求代数式的值

14. 【中考·衡阳】关于 x 的一元二次方程 $x^2-3x+k=0$ 有实数根.

(1)求 k 的取值范围；

(2)如果 k 是符合条件的最大整数，且一元二次方程 $(m-1)x^2+x+m-3=0$ 与方程 $x^2-3x+k=0$ 有一个相同的根，求此时 m 的值.

Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞（答案见162页）

拔尖角度1 利用一元二次方程的根的情况解等腰三角形问题（分类讨论思想）

15. 已知关于 x 的方程 $x^2-(2k+1)x+4\left(k-\frac{1}{2}\right)=0$.

(1)求证：无论 k 取何值，这个方程总有实数根；

(2)若等腰三角形 ABC 的一边长 $a=4$，另两边长 b，c 恰好是这个方程的两个根，求 $\triangle ABC$ 的周长.

拔尖角度2 利用新定义中方程的根的情况求字母的取值

16. 对于实数 m，n，定义一种运算“$*$”：$m*n=mn+n$.

(1)求 $2*5$ 与 $2*(-5)$ 的值；

(2)如果关于 x 的方程 $x*(a*x)=-\frac{1}{4}$ 有两个相等的实数根，求实数 a 的值.

更多提分招数详见《极速提分法》第2页.

如，他得出了方程的根与其判别式之间的关系，指出可以利用方程系数确定方程根之幂的和数，即“牛顿幂和公式”.

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第4课时　公式法——公式法解方程

名师点金

用公式法解一元二次方程的四个步骤：

1. 把一元二次方程化为一般形式. 2. 确定 a,b,c 的值. 3. 计算 b^2-4ac 的值. 4. 当 $b^2-4ac\geqslant 0$ 时，把 a,b,c 的值代入求根公式，求出方程的两个实数根；当 $b^2-4ac<0$ 时，方程无实数根.

Ⅰ 夯实基础·逐点练 ☞(答案见162页)

知识点1 一元二次方程的求根公式

1. 方程 $3x^2-x=4$ 化为一般形式后 a,b,c 的值分别为(　　)

A. 3,1,4　　B. 3,−1,−4

C. 3,−4,−1　　D. −1,3,−4

2. 一元二次方程 $\sqrt{2}x^2+4\sqrt{3}x=2\sqrt{2}$ 中，b^2-4ac 的值应是(　　)

A. 64　　B. −64　　C. 32　　D. −32

3. 以 $x=\dfrac{b\pm\sqrt{b^2+4c}}{2}$ 为根的一元二次方程可能是(　　)

A. $x^2+bx+c=0$　　B. $x^2+bx-c=0$

C. $x^2-bx+c=0$　　D. $x^2-bx-c=0$

知识点2 求根公式的应用

4. 【中考·威海】一元二次方程 $3x^2=4-2x$ 的解是_____.

*5. 【中考·泰安】一元二次方程 $(x+1)(x-3)=2x-5$ 的根的情况是(　　)

A. 无实数根

B. 有一个正根，一个负根

C. 有两个正根，且都小于3

D. 有两个正根，且有一根大于3

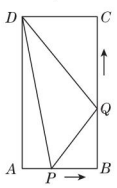
Ⅱ 整合方法·提升练 ☞(答案见162页)

考查角度1 利用一元二次方程解与非负数综合问题

6. 已知 a,b,c 均为实数且 $\sqrt{a^2-2a+1}+|b+1|+(c+3)^2=0$，求方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根.

考查角度2 利用一元二次方程探究与几何综合问题(数形结合思想)

7. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=6$ cm，$BC=12$ cm，点 P 从点 A 出发沿边 AB 向点 B 以1 cm/s的速度移动；同时，点 Q 从点 B 出发沿边 BC 向点 C 以2 cm/s的速度移动，问：几秒时 $\triangle PDQ$ 的面积为35 cm^2？



(第7题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第5课时　因式分解法

名师点金

用因式分解法解一元二次方程的步骤：

1. 移项，将方程的右边化为0.
2. 将方程的左边分解为两个一次因式的乘积.
3. 令每个因式等于0，得两个一元一次方程.
4. 解这两个一元一次方程，得方程的两个根.

用因式分解法解方程的关键是将方程左边因式分解. 常用到的因式分解的方法有：**提公因式法**、**公式法**、**十字相乘法**（即$x^2-(a+b)x+ab$型的因式分解）.

Ⅰ 夯实基础·逐点练

（答案见163页）

知识点1 因式分解法的依据

1. 【中考·山西】我们解一元二次方程$3x^2-6x=0$时，可以运用因式分解法，将此方程化为$3x(x-2)=0$，从而得到两个一元一次方程$3x=0$或$x-2=0$，进而得到原方程的解为$x_1=0$，$x_2=2$. 这种解法体现的数学思想是（　　）

A. 转化思想　　B. 函数思想

C. 数形结合思想　　D. 公理化思想

2. 用因式分解法解方程，下列过程正确的是（　　）

A. $(2x-3)(3x-4)=0$化为$2x-3=0$或$3x-4=0$

B. $(x+3)(x-1)=1$化为$x+3=1$或$x-1=1$

C. $(x-2)(x-3)=2\times3$化为$x-2=2$或$x-3=3$

D. $x(x+2)=0$化为$x+2=0$

知识点2 用因式分解法解方程

3. 【中考·扬州】一元二次方程$x(x-2)=x-2$的根是_____.

4. 对于实数a，b，定义运算“※”如下：$a※b=(a+b)^2-(a-b)^2$，若$(m+2)※(m-3)=24$，则$m=$_____.

5. 【中考·凉山州】若关于x的方程$x^2+2x-3=0$与$\frac{2}{x+3}=\frac{1}{x-a}$有一个解相同，则$a$的值为（　　）

A. 1　　B. 1或-3

C. -1　　D. -1或3

6. 【中考·内江】一个等腰三角形的底边长是6，腰长是一元二次方程$x^2-8x+15=0$的一根，则此三角形的周长是（　　）

A. 16　　B. 12

C. 14　　D. 12或16

7. 一个菱形的边长是方程$x^2-18x+65=0$的一个根，其中一条对角线长为24，则该菱形的面积为（　　）

A. 240　　B. 120

C. 120或312　　D. 240或624

知识点3 用适当的方法解一元二次方程

8. 解方程$(5x-1)^2=3(5x-1)$的最适当的方法是（　　）

A. 直接开平方法　　B. 配方法

C. 公式法　　D. 因式分解法

9. 已知下列方程，请把它们的序号填在最适当的解法后的横线上.

①$2(x-1)^2=6$；　②$(x-2)^2+x^2=4$；

③$(x-2)(x-3)=3$；　④$x^2-2x-1=0$；

⑤$x^2-\sqrt{2}x+\frac{1}{4}=0$；　⑥$x^2-2x-98=0$.

(1)直接开平方法：_____；

(2)配方法：_____；

(3)公式法：_____；

(4)因式分解法：_____.

易错点1 在方程两边同时除以含有未知数的式子导致失根

10. 【中考·齐齐哈尔】解方程：$2(x-3)=3x(x-3)$.

易错点2 用换元法解一元二次方程时，忽视实数这一条件而致错

11. 已知x为实数，且满足$(x^2+x+1)^2+2(x^2+x+1)-3=0$，那么$x^2+x+1$的值为（　　）

A. 1　　B. -3　　C. -3或1　　D. -1或3

趣味数学

唐朝时，有一位懂数学的尚书主持了一场考试，其中有一道题是：有一天，几个盗贼正在商议怎样分配偷来的布匹. 贼首说，每人分6匹布，还剩5匹布；每人分7匹布，还少8匹布.（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法·提升练 ☞(答案见163页)

考查角度1　利用方程的特点选择适当的方法解方程

12. 解下列方程:

(1)【中考·梧州】$2x^2-4x-30=0$;

(2)$x^2-(\sqrt{2}+\sqrt{3})x+\sqrt{6}=0$;

(3)$x^2-8x+4=0$.

考查角度2　利用因式分解法解$x^2+(a+b)x+ab=0$型的方程(类比法)

13. 【中考·湘潭】由多项式乘法得$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$,将该式从右到左使用,即可得到用"十字相乘法"进行因式分解的公式:$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$.

示例:分解因式:$x^2+5x+6=x^2+(2+3)x+2\times3=(x+2)(x+3)$.

(1)尝试:分解因式:$x^2+6x+8=(x+____)(x+____)$;

(2)应用:请用上述方法解方程:$x^2-3x-4=0$.

Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞(答案见163页)

拔尖角度1　利用换元法解方程

14. 阅读材料:

为了解方程$(x^2-1)^2-5(x^2-1)+4=0$,我们可以将x^2-1看成一个整体,然后设$x^2-1=y$,那么原方程可化为$y^2-5y+4=0$ ①,解得$y_1=1$,$y_2=4$,当$y=1$时,$x^2-1=1$,$\therefore x^2=2$,$\therefore x=\pm\sqrt{2}$;当$y=4$时,$x^2-1=4$,$\therefore x^2=5$,$\therefore x=\pm\sqrt{5}$,故原方程的解为$x_1=\sqrt{2}$,$x_2=-\sqrt{2}$,$x_3=\sqrt{5}$,$x_4=-\sqrt{5}$.

解答问题:

(1)上述解题过程,在由原方程得到方程①的过程中,利用_____法达到了降次的目的,体现了转化的数学思想;

(2)请利用以上知识解方程:$\dfrac{x+1}{x^2}-\dfrac{2x^2}{x+1}=1$.

拔尖角度2　利用因式分解法解与根有关的三角形问题

15. 已知关于x的方程$(a-1)x^2-4x-1+2a=0$,$x=3$是方程的一个根.

(1)求a的值及方程的另一个根;

(2)一个三角形的三边长是此方程的根,求这个三角形的周长.

趣味数学　贼首的话被躲在暗处的衙役听到了,他飞快地跑回官府,报告了知府,但知府因不知道有多少盗贼,所以不知派多少人去抓捕他们.请问有盗贼几人?布几匹?(待续)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

阶段核心方法

一元二次方程的九种解法 ☞（答案见163页）

名师点金

解一元二次方程时，主要考虑降次，其解法有**直接开平方法**、**因式分解法**、**配方法和公式法**，有些特殊方程还可用**换元法**等. 在具体的解题过程中，结合方程的特点选择合适的方法，往往会达到事半功倍的效果.

方法1 形如$(x+m)^2=n(n\geqslant 0)$的一元二次方程用直接开平方法求解

1. 用直接开平方法解下列一元二次方程，其中无实数解的方程为（　　）

A. $x^2-5=5$　　B. $-3x^2=0$

C. $x^2+4=0$　　D. $(x+1)^2=0$

2. 解方程：$\frac{1}{3}(x-2)^2=8$.

方法2 当二次项系数为1，且一次项系数为偶数时，用配方法求解

3. 解方程：$x^2+4x-2=0$.

4. 已知$x^2-10x+y^2-16y+89=0$，求$\frac{x}{y}$的值.

方法3 能化成形如$(x+a)(x+b)=0$的一元二次方程用因式分解法求解

5. 【中考·宁夏】一元二次方程$x(x-2)=2-x$的根是（　　）

A. -1　　B. 0

C. 1和2　　D. -1和2

6. 解下列一元二次方程：

(1) $x^2-3x=0$；

(2) $16x^2-9=0$；

(3) 【中考·巴中】$3x(x-2)=x-2$.

方法4 如果一个一元二次方程易化为一般形式，则用公式法求解

7. 用公式法解一元二次方程$x^2-\frac{1}{4}=2x$，方程的解应是（　　）

A. $x=\frac{-2\pm\sqrt{5}}{2}$　　B. $x=\frac{2\pm\sqrt{5}}{2}$

C. $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$　　D. $x=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$

8. 【中考·绵阳】已知$a>b>0$，且$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}+\frac{3}{b-a}=0$，则$\frac{b}{a}=$_____.

9. 用公式法解下列方程：

(1) $3(x^2+1)-7x=0$；

答案：盗贼13人，布83匹

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2) $4x^2-3x-5=x-2$.

方法5　用构造法解一元二次方程

10. 解方程：$6x^2+19x+10=0$.

11. 若 m,n,p 满足 $m-n=8$，$mn+p^2+16=0$，求 $m+n+p$ 的值.

方法6　用整体换元法解方程

12. 解方程：$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=48$.

13. 解方程：$x^2+\frac{1}{x^2}-2\left(x+\frac{1}{x}\right)-1=0$.

方法7　用降次换元法解方程

14. 解方程：$6x^4-35x^3+62x^2-35x+6=0$.

方法8　用倒数换元法解分式方程

15. 解方程：$\frac{x-2}{x}-\frac{3x}{x-2}=2$.

方法9　用特殊值法解一元二次方程

16. 解方程：$(x-2\,019)(x-2\,020)=2\,021\times2\,022$.

趣味数学　在数学中，我们发现真理的主要工具是归纳和模拟.

——拉普拉斯

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

24.3 一元二次方程根与系数的关系*

名师点金

与一元二次方程根与系数的关系有关的几种常见式子变形：

1. $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$；
2. $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$；
3. $(x_1+1)(x_2+1)=x_1x_2+(x_1+x_2)+1$；
4. $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}$；
5. $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}$；
6. $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$.

1 夯实基础·逐点练 ☞（答案见164页）

知识点1 一元二次方程根与系数的关系

1. 【中考·黄冈】若 x_1,x_2 是一元二次方程 $x^2-4x-5=0$ 的两根，则 $x_1\cdot x_2$ 的值为（　　）

A. -5　　B. 5　　C. -4　　D. 4

2. 【中考·广东】已知 x_1,x_2 是一元二次方程 $x^2-2x=0$ 的两个实数根，下列结论错误的是（　　）

A. $x_1\neq x_2$　　B. $x_1^2-2x_1=0$

C. $x_1+x_2=2$　　D. $x_1\cdot x_2=2$

3. 【中考·贵港】已知 α,β 是一元二次方程 $x^2+x-2=0$ 的两个实数根，则 $\alpha+\beta-\alpha\beta$ 的值是（　　）

A. 3　　B. 1

C. -1　　D. -3

4. 【中考·淄博】若 $x_1+x_2=3$，$x_1^2+x_2^2=5$，则以 x_1,x_2 为根的一元二次方程是（　　）

A. $x^2-3x+2=0$

B. $x^2+3x-2=0$

C. $x^2+3x+2=0$

D. $x^2-3x-2=0$

5. 【中考·怀化】设 x_1,x_2 是方程 $x^2+5x-3=0$ 的两个根，则 $x_1^2+x_2^2$ 的值是（　　）

A. 19　　B. 25

C. 31　　D. 30

6. 【中考·眉山】若 α,β 是一元二次方程 $3x^2+2x-9=0$ 的两根，则 $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}$ 的值是（　　）

A. $\frac{4}{27}$　　B. $-\frac{4}{27}$

C. $-\frac{58}{27}$　　D. $\frac{58}{27}$

7. 【中考·天门】若 α,β 为方程 $2x^2-5x-1=0$ 的两个实数根，则 $2\alpha^2+3\alpha\beta+5\beta$ 的值为（　　）

A. -13　　B. 12

C. 14　　D. 15

知识点2 一元二次方程根与系数的关系的应用

8. 【中考·天门】若方程 $x^2-2x-4=0$ 的两个实数根为 α,β，则 $\alpha^2+\beta^2$ 的值为（　　）

A. 12　　B. 10

C. 4　　D. -4

9. 【中考·绵阳】若关于 x 的方程 $x^2-2x+c=0$ 有一根为 -1，则方程的另一根为（　　）

A. -1　　B. -3

C. 1　　D. 3

10. 【中考·贵港】若 α,β 是关于 x 的一元二次方程 $x^2-2x+m=0$ 的两实根，且 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=-\frac{2}{3}$，则 m 等于（　　）

A. -2　　B. -3

C. 2　　D. 3

***11.** 【中考·包头】已知等腰三角形的三边长分别为 $a,b,4$，且 a,b 是关于 x 的一元二次方程 $x^2-12x+m+2=0$ 的两根，则 m 的值是（　　）

A. 34　　B. 30

C. 30或34　　D. 30或36

12. 已知 m,n 是关于 x 的一元二次方程 $x^2-2tx+t^2-2t+4=0$ 的两实数根，则 $(m+2)(n+2)$ 的最小值是（　　）

A. 7　　B. 11

C. 12　　D. 16

易错点 忽视判断一元二次方程的根的判别式的符号而致错

***13.** 关于 x 的一元二次方程 $x^2-(k-1)x-k+2=0$ 有两个实数根 x_1,x_2，若 $(x_1-x_2+2)(x_1-x_2-2)+2x_1x_2=-3$，则 k 的值为（　　）

A. 0或2　　B. -2或2

C. -2　　D. 2

谜语：一米（打一字）　　谜底：来　　趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法·提升练 ☞(答案见164页)

考查角度1　利用一元二次方程根与系数的关系求方程的根

14. 【中考·随州】已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-(2k+1)x+k^2+1=0$ 有两个不相等的实数根 x_1,x_2.

(1)求 k 的取值范围;

(2)若 $x_1+x_2=3$,求 k 的值及方程的根.

考查角度2　利用根与系数的关系求两根满足某关系式时字母的值

15. 【中考·绥化】已知关于 x 的方程 $kx^2-3x+1=0$ 有实数根.

(1)求 k 的取值范围;

(2)若该方程有两个实数根,分别为 x_1 和 x_2,当 $x_1+x_2+x_1x_2=4$ 时,求 k 的值.

Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞(答案见165页)

拔尖角度1　利用根与系数的关系及根的判别式解求代数式值问题

16. 【中考·南充】已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+(2m-1)x+m^2-3=0$ 有实数根.

(1)求实数 m 的取值范围;

(2)当 $m=2$ 时,方程的根为 x_1,x_2,求代数式 $(x_1^2+2x_1)(x_2^2+4x_2+2)$ 的值.

拔尖角度2　利用根与系数的关系及根的判别式解存在性问题

17. 【中考·鄂州】关于 x 的方程 $x^2-(2k-1)x+k^2-2k+3=0$ 有两个不相等的实数根.

(1)求实数 k 的取值范围;

(2)设方程的两个实数根分别为 x_1,x_2,存不存在这样的实数 k,使得 $|x_1|-|x_2|=\sqrt{5}$? 若存在,求出这样的 k 值;若不存在,说明理由.

更多提分招数详见《极速提分法》第4页.

趣味数学　数学是打开科学大门的钥匙,轻视数学必将造成对一切知识的损害,因为轻视数学的人不可能掌握其他学科和理解万物.
——弗朗西斯·培根

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

24.4 一元二次方程的应用

第1课时 建立一元二次方程解几何问题

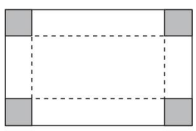
名师点金

建立一元二次方程解决几何图形问题应注意三点：**一是**图形的面积公式是基本的等量关系式；**二是**利用平移的性质（图形的面积不变）将零散的图形拼聚在一起；**三是**取舍根时，注意条件中对图形边长的限制.

Ⅰ 夯实基础·逐点练 ☞（答案见165页）

知识点1 规则图形的应用

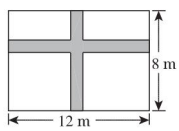
1. 【中考·徐州】如图，有一块矩形硬纸板，长30 cm，宽20 cm，在其四角各剪去一个同样的正方形，然后将四周突出部分折起，可制成一个无盖长方体盒子，当剪去正方形的边长取何值时，所得长方体盒子的侧面积为200 cm^2？



（第1题）

知识点2 不规则图形的应用

2. 【中考·山西】如图，在一块长12 m，宽8 m的矩形空地上，修建同样宽的两条互相垂直的道路（两条道路各与矩形的一条边平行），剩余部分栽种花草，且栽种花草的面积为77 m^2，设道路的宽为x m，则根据题意，可列方程为_____.



（第2题）

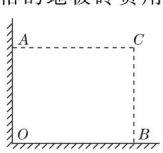
Ⅱ 整合方法·提升练 ☞（答案见165页）

考查角度1 利用一元二次方程解与方案有关的问题

3. 【中考·百色】如图，在直角墙角AOB（$OA \perp OB$，且OA，OB长度不限）中，要砌20 m长的墙，与直角墙角AOB围成地面为矩形的储仓，且矩形地面$AOBC$的面积为96 m^2.

（1）求这个矩形地面的长；

（2）有规格为0.80×0.80和1.00×1.00（单位：m）的地板砖价格分别为55元/块和80元/块，若只选其中一种地板砖都恰好能铺满储仓的矩形地面（不计缝隙），用哪一种规格的地板砖费用较少？



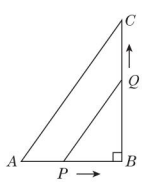
（第3题）

考查角度2 利用一元二次方程探究面积问题

4. 如图所示，在$\triangle ABC$中，$\angle B = 90°$，$AB = 5$ cm，$BC = 7$ cm. 点P从点A开始沿AB边向点B以1 cm/s的速度移动，点Q从点B开始沿BC边向点C以2 cm/s的速度移动.

（1）如果点P，Q分别从点A，B同时出发，那么几秒后，$\triangle PBQ$的面积等于4 cm^2？

（2）如果点P，Q分别从点A，B同时出发，$\triangle PBQ$的面积能否等于7 cm^2？



（第4题）

更多提分招数详见《极速提分法》第6页.

国王的怪题：一位国王想为王子招聘一位算术先生，就出了这样一道怪题：分给每个应试者1 000颗珍珠和10个精致的木盒.（待续）

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第2课时　建立一元二次方程解百分率问题



名师点金

1. **增长率(或降低率)问题的规律**:(1)**增长率问题**:设某数为 a,平均增长率为 x,则一次增长后的值为 $a(1+x)$,两次增长后的值为 $a(1+x)^2$,依次类推,n 次增长后的值为 $a(1+x)^n$. (2)**降低率问题**:设某数为 a,平均降低率为 x,则一次降低后的值为 $a(1-x)$,两次降低后的值为 $a(1-x)^2$,依次类推,n 次降低后的值为 $a(1-x)^n$.
2. **解决利润问题常用的关系式**:(1)利润 = 售价 − 进价. (2)利润率 $=\frac{\text{利润}}{\text{进价}}\times 100\% =\frac{\text{售价}-\text{进价}}{\text{进价}}\times 100\%$.
(3)售价 = 进价 × (1 + 利润率). (4)总利润 = 单个利润 × 销售量 = 总收入 − 总支出.

Ⅰ 夯实基础 · 逐点练

☞(答案见 165 页)

知识点1 增长率问题

1. 某村 2017 年的人均收入为 20 000 元,2019 年的人均收入为 24 200 元.
(1)求 2017 年到 2019 年该村人均收入的年平均增长率;
(2)假设 2020 年该村人均收入的增长率与前两年的年平均增长率相同,请你预测 2020 年该村的人均收入是多少元.

知识点2 降低率问题

2. 【中考 · 东营】为加快新旧动能转换,提高公司经济效益,某公司决定对近期研发出的一种电子产品进行降价促销,使生产的电子产品能够及时售出. 根据市场调查,这种电子产品销售单价定为 200 元时,每天可售出 300 个;若销售单价每降价 1 元,每天可多售出 5 个. 已知每个电子产品的固定成本为 100 元,问这种电子产品降价后的销售单价为多少元时,公司每天可获利 32 000 元?

Ⅱ 整合方法 · 提升练

☞(答案见 165 页)

考查角度 利用一元二次方程、不等式解实际问题

3. 【中考 · 玉林】某养殖场为了响应党中央的扶贫政策,今年起采用“场内 + 农户”养殖模式,同时加强对蛋鸡的科学管理,蛋鸡的产蛋率不断提高,三月份和五月份的产蛋量分别是 2.5 万 kg 与 3.6 万 kg,现假定该养殖场蛋鸡产蛋量的月增长率相同.
(1)求该养殖场蛋鸡产蛋量的月平均增长率;
(2)假定当月产的鸡蛋当月在各销售点全部销售出去,且每个销售点每月平均销售量最多为 0.32 万 kg,如果要完成六月份的鸡蛋销售任务,那么该养殖场在五月份已有的销售点的基础上至少再增加多少个销售点?

趣味数学　国王说:“你们可将 1 000 颗珍珠分别装进 10 个木盒里,每个盒中随意装多少都可以.(待续)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第3课时　建立一元二次方程解一般问题



名师点金

列一元二次方程解应用题的一般步骤可归结为六个字：审、设、列、解、验、答.

1. 一般情况下，步骤中的第一步“审”不写出来，但它是关键的一步，只有审清题意，明确了已知量、未知量及它们之间的关系，才能准确列出方程.
2. 设未知数有直接设元和间接设元两种方式，直接设元就是问什么，设什么；间接设元就是在直接设元比较困难，或所列方程较复杂时所采用的间接设未知数的方法.

Ⅰ 夯实基础·逐点练

☞（答案见165页）

知识点1 传播问题

1. 【中考·鸡西】某校“研学”活动小组在一次野外实践时，发现一种植物的主干长出若干数目的支干，每个支干又长出同样数目的小分支，主干、支干和小分支的总数是43，则这种植物每个支干长出的小分支个数是（　　）

A. 4　　B. 5

C. 6　　D. 7

2. 【中考·贺州】某生物实验室需培育一群有益菌. 现有60个活体样本，经过两轮培植后，有益菌总和达24 000个，其中每个有益菌每一轮可分裂出若干个相同数目的有益菌.

(1) 每轮分裂中每个有益菌可分裂出多少个有益菌？

(2) 按照这样的分裂速度，经过三轮培植后共有多少个有益菌？

知识点2 循环问题

3. 【中考·新疆】在某篮球邀请赛中，参赛的每两个队之间都要比赛一场，共比赛36场，设有x个队参赛，根据题意，可列方程为（　　）

A. $\frac{1}{2}x(x-1)=36$　　B. $\frac{1}{2}x(x+1)=36$

C. $x(x-1)=36$　　D. $x(x+1)=36$

4. 【中考·新疆】某市体育局要组织一次篮球赛，赛制为单循环形式（每两支球队之间都赛一场），计划安排28场比赛，应邀请多少支球队参加比赛？

知识点3 数字问题

5. 一个两位数，它的十位数字比个位数字小4，若把这两个数字调换位置，所得的两位数与原两位数的乘积等于765，求原两位数.

只是有个要求：我从1至999的数字中，任意说出一个数字来，你们就能整盒整盒地端出与我说的数字相等的珍珠来，不得临时拆盒拼凑.”（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法·提升练 ☞(答案见165页)

考查角度1 利用一元二次方程解传播问题

6. 岳一中九年级某学生聆听了感恩励志主题演讲《不要让爱你的人失望》后,写了一份《改变,从现在开始》的倡议书在微信朋友圈传播,规则为:将倡议书发表在自己的朋友圈,再邀请 n 个好友转发倡议书,每个好友转发倡议书之后,又邀请 n 个互不相同的好友转发倡议书,以此类推,已知经过两轮传播后,共有421人参与了传播活动,求 n 的值.

考查角度2 利用一元二次方程解循环问题

7. 我们知道,计算 n 边形的对角线条数公式为:$\frac{1}{2}n(n-3)$. 如果一个 n 边形共有20条对角线,那么可以得到方程 $\frac{1}{2}n(n-3)=20$. 整理得 $n^2-3n-40=0$,解得 $n=8$ 或 $n=-5$.

$\because n\geqslant 3$,$\therefore n=-5$ 不合题意,舍去. $\therefore n=8$,即该多边形是八边形.

根据以上内容,解答下列问题:

(1)若一个多边形共有14条对角线,则这个多边形的边数是多少?

(2)A同学说:"我求得一个多边形共有10条对角线."你认为A同学的说法正确吗?为什么?

Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞(答案见166页)

拔尖角度1 利用一元二次方程解与一次函数综合问题

8. 【中考·德州】为积极响应新旧动能转换,提高公司经济效益,某科技公司近期研发出一种新型高科技设备,每台设备成本价为30万元,经过市场调研发现,每台售价为40万元时,年销售量为600台;每台售价为45万元时,年销售量为550台. 假定该设备的年销售量 y(单位:台)和销售单价 x(单位:万元)成一次函数关系.

(1)求年销售量 y 与销售单价 x 的函数关系式;

(2)根据相关规定,此设备的销售单价不得高于70万元,如果该公司想获得10 000万元的年利润,则该设备的销售单价应是多少万元?

拔尖角度2 利用一元二次方程解与不等式综合问题

9. 【中考·桂林】为进一步促进义务教育均衡发展,某市加大了基础教育经费的投入,已知2015年该市投入基础教育经费5 000万元,2017年投入基础教育经费7 200万元.

(1)求该市这两年投入基础教育经费的年平均增长率;

(2)如果按(1)中基础教育经费投入的年平均增长率计算,该市计划2018年用不超过当年基础教育经费的5%购买电脑和实物投影仪共1 500台调配给农村学校,若购买一台电脑需3 500元,购买一台实物投影仪需2 000元,则最多可购买电脑多少台?

趣味数学　大家听了,一个个皱眉瞪眼,不知如何分装. 正在这时,应试者中有一个十多岁的男孩不但分装好了,而且符合国王的要求. 就这样,他被聘为王子的算术先生. (待续)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

阶段核心归类

一元二次方程解实际问题的十种常见应用 ☞（答案见166页）

名师点金

同学们知道，学习了一元二次方程的解法以后，就会经常遇到解决与一元二次方程有关的生活中的应用问题，即列一元二次方程解应用题. 不少同学遇到这类问题总是左右为难，难以下笔. 事实上，同学们只要能认真地阅读题目，分析题意，并能学会分解题目，各个击破，从而找到已知的条件和未知问题，必要时可通过画图、列表等方法来帮助我们理顺已知与未知之间的关系，找到一个或几个相等的式子，从而列出方程求解，同时还要及时地检验答案的正确性并作答. 现就列一元二次方程解应用题中遇到的常见的十大典型题目，举例说明.

应用1 增长率问题

1. 【中考·宜昌】HW公司2018年使用自主研发生产的“QL”系列甲、乙、丙三类芯片共2 800万块，生产了2 800万部手机，其中乙类芯片的产量是甲类芯片的2倍，丙类芯片的产量比甲、乙两类芯片产量的和还多400万块，这些“QL”芯片解决了该公司2018年生产的全部手机所需芯片的10%.

(1) 求2018年甲类芯片的产量；

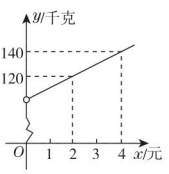
(2) HW公司计划2020年生产的手机全部使用自主研发的“QL”系列芯片，从2019年起逐年扩大“QL”芯片的产量，2019年、2020年这两年，甲类芯片每年的产量都比前一年增长一个相同的百分数$m\%$，乙类芯片的产量平均每年增长的百分数比$m\%$小1，丙类芯片的产量每年按相同的数量递增，2018年到2020年，丙类芯片三年的总产量达到1.44亿块，这样，2020年的HW公司的手机产量比2018年全年的手机产量多10%，求丙类芯片2020年的产量及m的值.

应用2 销售问题

2. 某商贸公司以每千克40元的价格购进一种干果，计划以每千克60元的价格销售，为了让顾客得到更大的实惠，现决定降价销售，已知这种干果销售量y（千克）与每千克降价x（元）$(0<x<20)$之间满足一次函数关系，其图像如图所示.

(1) 求y与x之间的函数关系式；

(2) 近期爆发了“新型冠状病毒肺炎”疫情，该商贸公司想通过销售这些干果获利2 090元，并全部捐赠给疫情最严重的湖北武汉，则这种干果每千克应降价多少元？



（第2题）

你能知道这位聪明的男孩是怎样分装的吗？根据题意我们知道国王说的数字是一盒珍珠的数量或几盒珍珠的数量的和.（待续）

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

应用3　储蓄问题

3. 王红梅同学将1 000元压岁钱第一次按一年定期存入“少儿银行”，到期后将本金和利息取出，并将其中的500元捐给“希望工程”，剩余的又全部按一年定期存入，这时存款的年利率已下调到第一次存款时年利率的90%，这样到期后，可得本金和利息共530元，求第一次存款时的年利率.（不计利息税）

应用4　趣味问题

4. 一个醉汉拿着一根竹竿进城，横看怎么也拿不进去，量竹竿长比城门宽4米. 旁边一个醉汉嘲笑他：“你没看城门高吗？竖着拿就可以进去啦！”结果竹竿竖着比城门高2米，两人没办法，只好请教聪明人，聪明人教他们两人沿着城门的对角斜着拿，两人一试，不多不少刚好进城门，你知道竹竿有多长吗？

应用5　古诗问题

5. 读诗词解题：（通过列方程式，算出周瑜去世时的年龄）.

大江东去浪淘尽，千古风流数人物；
而立之年督东吴，早逝英年两位数；
十位恰小个位三，个位平方与寿符；
哪位学子算得快，多少年华属周瑜？

应用6　传播问题

6. 某种电脑病毒传播非常快，如果有一台电脑被感染，经过两轮感染后就会有81台电脑被感染. 请回答：每轮感染中平均一台电脑会感染几台电脑？若病毒得不到有效控制，三轮后被感染的电脑总数会不会超过700台？

趣味数学　那么根据这个思路很容易我出1，2，3=1+2，而4=1+2+1，因不能有重复，故4作为一个整盒中的珍珠数，那么5=4+1，6=4+2，7=4+2+1……可以看出规律1，2，4，…，64，128，256.（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

应用7 情景问题

7. 收发微信红包已成为各类人群进行交流联系、增强感情的一部分. 如图是甜甜和她的妹妹在六一儿童节期间的对话.



（第7题）

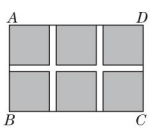
请问：

(1) 2018年到2020年甜甜和她的妹妹在六一收到微信红包的年平均增长率是多少？

(2) 2020年六一，甜甜和她的妹妹各收到了多少钱的微信红包？

应用8 几何问题

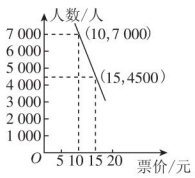
8. 【中考·襄阳】改善小区环境，争创文明家园. 如图所示，某社区决定在一块长（AD）16 m，宽（AB）9 m的矩形场地 $ABCD$ 上修建三条同样宽的小路，其中两条与 AB 平行，另一条与 AD 平行，其余部分种草，要使草坪部分的总面积为 112 m^2，则小路的宽应为多少？



（第8题）

应用9 函数问题

9. 某博物馆每周都吸引大量中外游客前来参观. 如果游客过多，对馆中的珍贵文物会产生不利影响，因此博物馆采取了提高门票价格的方法来控制参观人数，在该方法的实施过程中发现：每周参观人数 y（人）与票价 x（元）之间存在着如图所示的一次函数关系，在这种情况下，如果要保证每周4万元的门票收入，那么每周应限定参观人数为多少？门票价格应是多少？ 【导学号：8934350】



（第9题）

应用10 新定义问题

10. 观察下列一组方程：①$x^2-x=0$；②$x^2-3x+2=0$；③$x^2-5x+6=0$；④$x^2-7x+12=0$……它们的根有一定的规律，都是两个连续的自然数，我们称这类一元二次方程为“连根一元二次方程”.

(1) 若 $x^2+kx+56=0$ 也是“连根一元二次方程”，写出实数 k 的值，并解这个一元二次方程；

(2) 请写出第 n 个方程和它的根.

更多提分招数详见《极速提分法》第7页.

这就9个盒子了，第十个盒子就是489. 因此男孩的分装数为1，2，4，8，16，32，64，128，256，489.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

全章热门考点整合应用

☞(答案见167页)

名师点金

一元二次方程题的类型非常丰富,常见的有一元二次方程的根、一元二次方程的解法、一元二次方程根的情况、一元二次方程根与系数的关系、一元二次方程的应用等,只要我们掌握了不同类型题的解法特点,就可以使问题变得简单明了.本章热门考点可概括为:两个概念,一个解法,两个关系,两个应用,三种思想.

考点1 两个概念

概念1 一元二次方程

1. 当 m 取何值时,方程 $(m-1)x^{m^2+1}+2mx+3=0$ 是关于 x 的一元二次方程?

概念2 一元二次方程的根

2. 若关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一根为 -1,且 $a=\sqrt{4-c}+\sqrt{c-4}-2$,求 $\dfrac{(a+b)^{2\,020}}{2\,019c}$ 的值.

考点2 一个解法——一元二次方程的解法

3. 选择适当的方法解下列方程:

(1) $(x-1)^2+2x(x-1)=0$;

(2) $x^2-6x-6=0$;

(3) $6\,000(1-x)^2=4\,860$;

(4) $(10+x)(50-x)=800$;

(5)【中考·山西】$(2x-1)^2=x(3x+2)-7$.

趣味数学　美国著名数学家、教育学家乔治·波利亚曾设计了一道数学趣题:"已知她是他的平方,求她和他."因为波利亚是美国人,讲的是英语,所以要求解 $(\text{he})^2=\text{she}$.(待续)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

考点3 两个关系

关系1 一元二次方程的根的判别式与系数的关系

4. 【中考·烟台】当 $b+c=5$ 时，关于 x 的一元二次方程 $3x^2+bx-c=0$ 的根的情况为(　　)

A. 有两个不相等的实数根

B. 有两个相等的实数根

C. 没有实数根

D. 无法确定

5. 在等腰三角形 ABC 中，三边长分别为 a,b,c. 其中 $a=5$，若关于 x 的方程 $x^2+(b+2)x+(6-b)=0$ 有两个相等的实数根，求 $\triangle ABC$ 的周长.

关系2 一元二次方程根与系数的关系

6. 【中考·孝感】已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-2(a-1)x+a^2-a-2=0$ 有两个不相等的实数根 x_1,x_2.

(1)若 a 为正整数，求 a 的值；

(2)若 x_1,x_2 满足 $x_1^2+x_2^2-x_1x_2=16$，求 a 的值.

7. 【中考·黄石】已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-6x+(4m+1)=0$ 有实数根.

(1)求 m 的取值范围；

(2)若该方程的两个实数根为 x_1,x_2，且 $|x_1-x_2|=4$，求 m 的值.

考点4 两个应用

应用1 一元二次方程的应用

8. 【中考·德州】习近平总书记说："读书可以让人保持思想活力，让人得到智慧启发，让人滋养浩然之气". 某校为响应我市全民阅读活动，利用节假日面向社会开放学校图书馆. 据统计，第一个月进馆128人次，进馆人次逐月增加，到第三个月累计进馆608人次，若进馆人次的月平均增长率相同.

(1)求进馆人次的月平均增长率；

(2)因条件限制，学校图书馆每月接纳力不超过500人次，在进馆人次的月平均增长率不变的条件下，校图书馆能否接纳第四个月的进馆人次，并说明理由.

应用2 配方法的应用

9. 阅读下面的材料：

我们知道 x^2+6x+9 可以分解因式，结果为 $(x+3)^2$，其实 x^2+6x+8 也可以通过配方法分解因式，其过程如下：

$x^2+6x+8=x^2+6x+9-9+8$

$=(x+3)^2-1$

$=(x+3+1)(x+3-1)$

$=(x+4)(x+2)$.

(1)请仿照上述过程填空：

$x^2+4x-5=[x+(\quad\quad)][x+(\quad\quad)]$；

$x^2-5x+6=[x+(\quad\quad)][x+(\quad\quad)]$；

$x^2-8x-9=[x+(\quad\quad)][x+(\quad\quad)]$.

(2)请观察(1)中横线上所填的数，每道题所填的两个数与一次项系数、常数项有什么关系？

趣味数学

每个字母代表一个不同的阿拉伯数字，由于 he 的尾数 e 的平方的尾数还是 e，可知 e 只能是 0，1，5，6 中的某个数. 逐个计算最后得出满足条件的答案是 she=625，he=25.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

10. 阅读材料：

把形如 $ax^2+bx+c(a,b,c$ 为常数$)$ 的二次三项式（或其一部分）配成完全平方式的方法叫做配方法. 配方法的基本形式是完全平方公式的逆写，即 $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$.

例如：$(x-1)^2+3$，$(x-2)^2+2x$，$\left(\frac{1}{2}x-2\right)^2+\frac{3}{4}x^2$ 是 x^2-2x+4 的三种不同形式的配方，即“余项”分别是常数项、一次项、二次项.

请根据阅读材料解决下列问题：

(1) 仿照上面的例子，写出 x^2-4x+2 的三种不同形式的配方；

(2) 已知 $a^2+b^2+c^2-ab-3b-2c+4=0$，求 $a+b+c$ 的值.

考点5　三种思想

思想1　整体思想

11. 已知 $x=a$ 是方程 $2x^2+x-2=0$ 的一个根，求代数式 $2a^4+a^3+2a^2+2a+1$ 的值.

思想2　转化思想

12. 解方程：$(2x+1)^2-3(2x+1)=-2$.

思想3　分类讨论思想

13. 已知关于 x 的方程 $x^2+2(a-1)x+a^2-7a-4=0$ 有两个实数根 x_1,x_2.

(1) 求 a 的取值范围；

(2) 若 $x_1^2=x_1x_2$，求方程的两个根及 a 的值.

更多提分招数详见《极速提分法》第9页.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第二十三章达标检测卷 (120 分,120 分钟)

题 号	一	二	三	总 分
得 分				

姓名 学号 班级 学校

一、选择题(1~10 题每题 3 分,11~16 题每题 2 分,共 42 分)

1. 一组数据 6,3,9,4,3,5,12 的中位数是(　　)

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

2. 有一组数据 58,53,44,36,30,29,22,21,20,18,这组数据的平均数是(　　)

A. 33　　B. 33.1　　C. 34.1　　D. 35

3. 某市 6 月份某周气温(单位:℃)为 23,25,28,25,28,31,28,则这组数据的众数和中位数分别是(　　)

A. 25,25　　B. 28,28

C. 25,28　　D. 28,31

4. 在端午节到来之前,学校食堂推荐了 A,B,C 三家粽子专卖店,对全校师生爱吃哪家店的粽子作调查,以决定最终向哪家店采购,下面的统计量最值得关注的是(　　)

A. 方差　　B. 平均数　　C. 中位数　　D. 众数

5. 某中学规定学生的学期体育成绩满分为 100 分,其中课外体育占 20%,期中考试成绩占 30%,期末考试成绩占 50%. 小彤的这三项成绩(百分制)分别为 95 分,90 分,88 分,则小彤这学期的体育成绩为(　　)

A. 89 分　　B. 90 分　　C. 92 分　　D. 93 分

6. 制鞋厂准备生产一批皮鞋,经抽样,得知所需鞋号和人数如下:

鞋号/cm	20	22	23	24	25	26	27
人数	8	15	20	25	30	20	2

并求出鞋号的中位数是 24 cm,众数是 25 cm,平均数约是 24 cm,下列说法正确的是(　　)

A. 因为需要鞋号为 27 cm 的人数太少,所以鞋号为 27 cm 的鞋可以不生产

B. 因为平均数约是 24 cm,所以这批鞋可以一律按 24 cm 的鞋生产

C. 因为中位数是 24 cm,所以 24 cm 的鞋的生产量应占首位

D. 因为众数是 25 cm,所以 25 cm 的鞋的生产量应占首位

7. 已知一组数据 2,3,4,x,1,4,3 有唯一的众数 4,则这组数据的平均数、中位数分别是(　　)

A. 4,4　　B. 3,4　　C. 4,3　　D. 3,3

8. 济南某中学足球队的 18 名队员的年龄如下表所示:

年龄/岁	12	13	14	15
人数	3	5	6	4

这 18 名队员年龄的众数和中位数分别是(　　)

A. 13 岁,14 岁　　B. 14 岁,14 岁

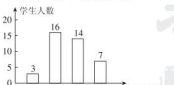
C. 14 岁,13 岁　　D. 14 岁,15 岁

9. 小伟 5 次引体向上的测试成绩(单位:个)分别为:16,18,20,18,18,对比成绩描述错误的是(　　)

A. 平均数为 18　　B. 众数为 18

C. 方差为 0　　D. 中位数为 18

10. 如图是根据某班 40 名同学一周的体育锻炼情况绘制的条形统计图,那么关于该班 40 名同学一周参加体育锻炼时间的说法错误的是(　　)



(第 10 题)

A. 平均数是 8.625 小时

B. 中位数是 8 小时

C. 众数是 8 小时

D. 锻炼时间超过 8 小时的有 21 人

11. 小华所在的九年级一班共有 50 名学生,一次体检测量了全班学生的身高,由此求得该班学生的平均身高是 1.65 米,而小华的身高是1.66米,下列说法错误的是(　　)

A. 1.65 米是该班学生身高的平均水平

B. 班上比小华高的学生人数不会超过 25 人

C. 这组身高数据的中位数不一定是 1.65 米

D. 这组身高数据的众数不一定是 1.65 米

12. 2022 年将在北京—张家口举办冬季奥运会,北京将成为世界上第一个既举办夏季奥运会又举办冬季奥运会的城市,某校开设了冰球选修课,12 名同学被分成甲、乙两组进行训练,他们的身高(单位:cm)如下表所示.

	队员 1	队员 2	队员 3	队员 4	队员 5	队员 6
甲组	176	177	175	176	177	175
乙组	178	175	170	174	183	176

设两组队员身高的平均数依次为 $\bar{x}_{甲}$,$\bar{x}_{乙}$,方差依次为 $s^2_{甲}$,$s^2_{乙}$,下列关系中正确的是(　　)

A. $\bar{x}_{甲}=\bar{x}_{乙}$,$s^2_{甲}<s^2_{乙}$

B. $\bar{x}_{甲}=\bar{x}_{乙}$,$s^2_{甲}>s^2_{乙}$

C. $\bar{x}_{甲}<\bar{x}_{乙}$,$s^2_{甲}<s^2_{乙}$

D. $\bar{x}_{甲}>\bar{x}_{乙}$,$s^2_{甲}>s^2_{乙}$

13. 某校要从四名学生中选拔一名参加“风华小主播”大赛,将多轮选拔赛的成绩的数据进行分析得到每名学生的平均成绩 $\bar{x}$ 及其方差 s^2 如下表,如果要选择一名成绩高且发挥稳定的学生参赛,那么应选择的学生是(　　)

	甲	乙	丙	丁
$\bar{x}$	8	9	9	8
s^2	1	1	1.2	1.3

A. 甲　　B. 乙　　C. 丙　　D. 丁

14. 如果一组数据 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$ 的方差是 2,那么一组新数据 $2a_1,2a_2,\cdots,2a_n$ 的方差是(　　)

A. 2　　B. 4

C. 8　　D. 16

15. 已知某校女子田径队 23 人年龄的平均数和中位数都是 13 岁,但是后来发现其中有一位同学的年龄登记错误,将 14 岁写成了 15 岁. 经重新计算后,正确的平均数为 a 岁,中位数为 b 岁,则下列结论中正确的是(　　)

A. $a<13,b=13$　　B. $a<13,b<13$

C. $a>13,b<13$　　D. $a>13,b=13$

16. 某校在开展“节约每一滴水”的活动中,从八年级的 100 名同学中任选 20 名学生汇总了各自家庭一个月的节水情况,将有关数据(每人上报的节水量都是整数)整理如下表:

节水量/t	0.5~1.5	1.5~2.5	2.5~3.5	3.5~4.5
人数/名	6	2	8	4

请你估计这 100 名同学的家庭一个月节约用水的总量大约是(　　)

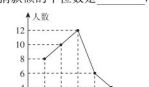
A. 180 t　　B. 230 t

C. 250 t　　D. 300 t

二、填空题(每题 3 分,共 9 分)

17. 某中学举行歌咏比赛,六名评委对某歌手打分(单位:分)如下:77,82,78,95,83,75,去掉一个最高分和一个最低分后的平均分是_____.

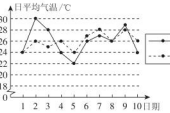
18. 某班 40 名学生参加了一次“献爱心一日捐”活动,捐款人数与捐款额如图所示,根据图中所提供的信息,你认为这次捐款活动中 40 个捐款额的中位数是_____.



(第 18 题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

19. 甲、乙两地 9 月上旬的日平均气温如图所示，则甲、乙两地这 10 天日平均气温方差大小关系为 $s^2_{甲}$_____ $s^2_{乙}$（填“＞”或“＜”）.



（第 19 题）

三、解答题（20～22 题每题 10 分，23，24 题每题 12 分，25 题 15 分，共 69 分）

20. 八(2)班组织了一次经典诵读比赛，甲、乙两队各 10 人，他们的比赛成绩如下表(10 分制)：

甲	7	8	9	7	10	10	9	10	10	10
乙	10	8	7	9	8	10	10	9	10	9

(1) 甲队成绩的中位数是_____分，乙队成绩的众数是_____分；

(2) 计算乙队的平均成绩和方差.

21. 某学校招聘教师，王明、李红和张丽参加了考试，评委从三个方面对他们进行打分，结果如下表所示(各项的满分为 30 分)，最后总分的计算按课堂教学效果的分数：教学理念的分数：教材处理能力的分数 = 5∶2∶3 的比例计算，如果你是该学校的教学校长，你会录用哪一位应聘者？试说明理由.

	王明	李红	张丽
课堂教学效果	25	26	25
教学理念	23	24	25
教材处理能力	24	26	25

22. 在某市开展的“好书伴我成长”读书活动中，某中学为了解八年级 300 名学生读书情况，随机调查了八年级 50 名学生读书的册数，统计数据如下表所示：

册数	0	1	2	3	4
人数	3	13	16	17	1

(1) 求这 50 个样本数据的平均数、众数和中位数；

(2) 根据样本数据，估计该校八年级 300 名学生在本次活动中读书多于 2 册的人数.

23. 某工厂甲、乙两名工人参加操作技能培训. 现分别从他们在培训期间参加的若干次测试成绩中随机抽取 8 次，记录如下：

甲	95	82	88	81	93	79	84	78
乙	83	92	80	95	90	80	85	75

(1) 请你计算这两组数据的平均数；

(2) 现要从中选派一人参加操作技能比赛，从稳定性的角度考虑，你认为选派谁参加比较合适？请说明理由.

24. 某市需调查该市九年级男生的体能状况，为此抽取了 50 名九年级男生进行引体向上个数测试，测试情况绘制成如下表格：

个数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
人数	1	1	6	18	10	6	2	2	1	1	2

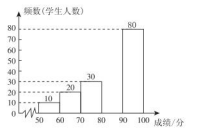
(1) 求这次抽样测试数据的平均数、众数和中位数.

(2) 在平均数、众数和中位数中，你认为用哪一个统计量作为该市九年级男生引体向上项目测试的合格标准个数较为合适？简要说明理由.

(3) 如果该市今年有 3 万名九年级男生，根据(2)中你认为合格的标准，试估计该市九年级男生引体向上项目测试的合格人数是多少.

25. 中华文明，源远流长；中华汉字，寓意深广. 为了传承优秀传统文化，某校团委组织了一次全校 3 000 名学生参加的“汉字听写”大赛，赛后发现所有参赛学生的成绩均不低于 50 分. 为了更好地了解本次大赛的成绩分布情况，随机抽取了其中 200 名学生的成绩(成绩 x 取整数，总分 100 分)作为样本进行整理，得到下列不完整的统计图表：

成绩 x/分	频数	频率
$50 \leqslant x < 60$	10	0.05
$60 \leqslant x < 70$	20	0.10
$70 \leqslant x < 80$	30	b
$80 \leqslant x < 90$	a	0.30
$90 \leqslant x \leqslant 100$	80	0.40



（第 25 题）

请根据所给信息，解答下列问题：

(1) a = _____，b = _____；

(2) 请补全频数分布直方图；

(3) 这次比赛成绩的中位数会落在_____分数段；

(4) 若成绩在 90 分以上(包括 90 分)的为“优”等，则该校参加这次比赛的 3 000 名学生中成绩为“优”等的大约有多少人？

荣德基 品质教辅

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第二十四章达标检测卷 (120 分,120 分钟)

题 号	一	二	三	总 分
得 分				

姓名 学号 班级 学校

一、选择题(1~10 题每题 3 分,11~16 题每题 2 分,共 42 分)

1. 下列方程是一元二次方程的是(　　)
A. $9x+2=0$　　B. $z^2+x=1$
C. $3x^2-8=0$　　D. $\frac{1}{x}+x^2=0$

2. 若关于 x 的一元二次方程 $(k-2)x^2+2(k+1)x+2k-1=0$ 的一次项系数是 2,则 k 的值为(　　)
A. 4　　B. 0　　C. 2　　D. $\frac{3}{2}$

3. 解方程 $x^2-10x=85$,较简便的解法是(　　)
A. 直接开平方法　　B. 配方法
C. 公式法　　D. 因式分解法

4. 如果 2 是方程 $x^2-3x+k=0$ 的一个根,那么常数 k 的值为(　　)
A. 1　　B. 2
C. -1　　D. -2

5. 方程 $x^2-5x=0$ 的解是(　　)
A. $x_1=0, x_2=-5$　　B. $x=5$
C. $x_1=0, x_2=5$　　D. $x=0$

6. 用配方法解一元二次方程 $x^2-6x-10=0$ 时,下列变形正确的为(　　)
A. $(x+3)^2=1$　　B. $(x-3)^2=1$
C. $(x+3)^2=19$　　D. $(x-3)^2=19$

7. 若关于 x 的一元二次方程 $x^2-2x+m=0$ 有两个不相等的实数根,则 m 的取值范围是(　　)
A. $m<-1$　　B. $m<1$
C. $m>-1$　　D. $m>1$

8. 等腰三角形的两边长为方程 $x^2-7x+10=0$ 的两根,则它的周长为(　　)
A. 12　　B. 12 或 9
C. 9　　D. 7

9. 某景点的参观人次逐年增加,据统计,2017 年为 10.8 万人次,2019 年为 16.8 万人次. 设参观人次的年平均增长率为 x,则根据题意列出的方程为(　　)
A. $10.8(1+x)=16.8$
B. $16.8(1-x)=10.8$
C. $10.8(1+x)^2=16.8$
D. $10.8[(1+x)+(1+x)^2]=16.8$

10. 已知 x 是实数且满足方程 $(x^2+3x)^2+2(x^2+3x)-3=0$,那么 x^2+3x 的值为(　　)
A. 3　　B. -3 或 1
C. 1　　D. -1 或 3

11. 定义运算"★",对于任意实数 a, b,都有 a★$b=a^2-3a+b$,如:3★5=$3^2-3\times3+5$. 若 x★2=6,则实数 x 的值是(　　)
A. 4　　B. -1
C. 4 或 -1　　D. 1 或 -4

12. 有一个两位数,它的十位上的数字比个位上的数字小 2,十位上的数字与个位上的数字的积的 3 倍刚好等于这个两位数,则这个两位数是(　　)
A. 42　　B. 24
C. 23　　D. 32

13. 如图是某月的月历表,在此月历表上可以用一个矩形圈出 3×3 个位置相邻的数(如 6,7,8,13,14,15,20,21,22). 若圈出的 9 个数中,最大数与最小数的积为 192,则这 9 个数的和为(　　)

日	一	二	三	四	五	六
			1	2	3	4
			一二	二	三	四
5	6	7	8	9	10	11
五一	六	七	八	九	十	十一
12	13	14	15	16	17	18
十二	十三	十四	十五	十六	十七	十八
19	20	21	22	23	24	25
十九	二十	廿一	廿二	廿三	廿四	廿五
26	27	28	29	30	31	
廿六	廿七	廿八	廿九	三十	十一月	

(第 13 题)

A. 32　　B. 126　　C. 135　　D. 144

14. 如图,在 $\square ABCD$ 中,$AE\perp BC$ 于 E,$AE=EB=EC=a$,且 a 是一元二次方程 $x^2+2x-3=0$ 的一个根,则 $\square ABCD$ 的周长为(　　)



(第 14 题)

A. $4+2\sqrt{2}$　　B. $12+6\sqrt{2}$
C. $2+2\sqrt{2}$　　D. $2+\sqrt{2}$ 或 $12+6\sqrt{2}$

15. 已知关于 x 的一元二次方程 $mx^2-(m+2)x+\frac{m}{4}=0$ 有两个不相等的实数根 x_1, x_2. 若 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=4m$,则 m 的值是(　　)
A. 2　　B. -1
C. 2 或 -1　　D. 不存在

16. 西瓜经营户以 2 元/千克的价格购进一批小型西瓜,以 3 元/千克的价格出售,每天可售出 200 千克. 为了促销,该经营户决定降价销售,经调查发现,这种小型西瓜每降价 0.1 元/千克,每天可多售出 40 千克. 另外,每天的房租等固定成本共 24 元,为了减少库存,该经营户要想每天盈利 200 元,应将小型西瓜的售价每千克降低(　　)
A. 0.5 元　　B. 0.4 元
C. 0.3 元　　D. 0.2 元

二、填空题(17,18 题每题 3 分,19 题 4 分,共 10 分)

17. 若关于 x 的方程 $(m-1)x^{|m+1|}+3x-2=0$ 是一元二次方程,则 m 的值为_____.

18. 若 x_1, x_2 是一元二次方程 $x^2+x-2=0$ 的两个实数根,则 $x_1+x_2+x_1x_2=$_____.

19. 在方程 x^2+_____$+4=0$ 的空线上添加一个关于 x 的一次项,使方程有两个相等的正实数根,方程的根为_____.

三、解答题(20,21 题每题 8 分,22~25 题每题 10 分,26 题 12 分,共 68 分)

20. 用适当的方法解下列方程:
(1) $x^2-2x=5$;
(2) $(7x+3)^2=2(7x+3)$;
(3) $x^2-\sqrt{3}x-\frac{9}{4}=0$;
(4) $(y+1)(y-1)=2y-1$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

21. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+kx-2=0$ 的一个解与方程 $\frac{x+2}{x-1}=4$ 的解相同.

(1)求 k 的值;

(2)求方程 $x^2+kx-2=0$ 的另一个解.

22. 已知关于 x 的方程 $(a-1)x^2-4x-1+2a=0$ 的一个根为 $x=3$.

(1)求 a 的值及方程的另一个根;

(2)如果一个三角形的三边长都是这个方程的根,求这个三角形的周长.

23. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-(2k-1)x+k^2+k-1=0$ 有实数根.

(1)求 k 的取值范围;

(2)若此方程的两实数根 x_1, x_2 满足 $x_1^2+x_2^2=11$,求 k 的值.

24. 我市"建设社会主义新农村"工作组到某乡大棚蔬菜生产基地指导菜农修建大棚种植蔬菜. 通过调查得知:平均修建每公顷大棚要用支架、农膜等材料费 2.7 万元,购置滴灌设备,其费用 ρ(万元)与大棚面积 x(公顷)的函数关系式为 $\rho=0.9x^2$,另外每公顷种植蔬菜需种子、化肥、农药等开支 0.3 万元. 每公顷蔬菜年均可卖 7.5 万元. 若某菜农期望通过种植大棚蔬菜当年获得 5 万元收益(扣除修建和种植成本后),从投入的角度考虑应建议他修建多少公顷大棚?

25. 某商场以每件 280 元的价格购进一批商品,当每件商品售价为 360 元时,每月可售出 60 件,为了扩大销售,商场决定采取适当降价的方式促销,经调查发现,如果每件商品降价 1 元,那么商场每月就可以多售出 5 件.

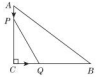
(1)降价前商场每月销售该商品的利润是多少元?

(2)要使商场每月销售这种商品的利润达到 7 200 元,且更有利于减少库存,则每件商品应降价多少元?

26. 如图,在 $\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$,$AC=6$ cm,$BC=8$ cm,点 P 从 A 点开始沿着 AC 边向 C 点以 1 cm/s 的速度移动,在 C 点停止,点 Q 从 C 点开始沿 CB 边向点 B 以 2 cm/s 的速度移动,在 B 点停止.

(1)如果点 P,Q 分别从 A,C 同时出发,经过几秒后 $S_{\triangle QPC}=8$ cm^2?

(2)如果点 P 从点 A 先出发 2 s,点 Q 再从点 C 出发,经过几秒后 $S_{\triangle QPC}=4$ cm^2?



(第 26 题)

荣德基 品质教辅

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

正文练习答案

第二十三章 数据分析

23.1 平均数与加权平均数

第 1 课时 算术平均数

1. D　2. C　3. B　4. C　5. 8

6. 一元统计；数据及其频数；统计

7. B　8. B　9. C

10. 错解：A

正解：D

误区诊断：造成错误的原因是对平均数的意义理解不透彻. 根据平均数的定义，来回的平均速度应为$\frac{\text{来回所走的总路程}}{\text{来回所用的总时间}}$

11. **解**：(1)因为 2，4，2x，4y 四个数的平均数是 5，

所以 $2+4+2x+4y=5\times4$，

即 $x+2y=7$　①.

因为 5，7，4x，6y 四个数的平均数是 9，所以 $5+7+4x+6y=9\times4$，即 $2x+3y=12$　②.

解由①②构成的二元一次方程组，

可得$\begin{cases}x=3,\\y=2.\end{cases}$

所以 $x^2+y^3=3^2+2^3=17$.

(2)因为$\frac{x_1+x_2}{2}=4$，所以 $x_1+x_2=8$，

所以$\frac{x_1+1+x_2+5}{2}=\frac{8+1+5}{2}=7$，

即 x_1+1 与 x_2+5 的平均数是 7.

12. **解**：$(6+12+16+10)\div4=44\div4=11$.

点拨：平均数的计算方法是先求出所有数据的和，然后除以数据的总个数.

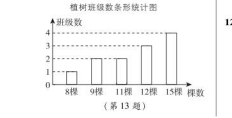
13. **解**：(1)$3\div25\%=12$.



答：该校的班级总数是 12.

(2)植树 11 棵的班级数为 $12-1-2-3-4=2$.

补全条形统计图如图所示.



(第 13 题)

(3)$(8\times1+9\times2+11\times2+12\times3+15\times4)\div12=12$(棵).

答：该校各班在这一活动中植树的平均棵数是 12 棵.

14. **解**：(1)这 5 期的集训共有 $5+7+10+14+20=56$(天).

小聪 5 次测试的平均成绩是 $(11.88+11.76+11.61+11.53+11.62)\div5=11.68$(秒).

答：这 5 期的集训共有 56 天，小聪 5 次测试的平均成绩是 11.68 秒.

(2)略.

第 2 课时 加权平均数

1. B　2. $\frac{mx+ny}{m+n}$　3. C　4. B

5. C　**点拨**：这天销售的矿泉水的平均单价是 $5\times10\%+3\times15\%+2\times55\%+1\times20\%=2.25$(元). 故选 C.

6. B　7. 1.15　8. D

9. B　**点拨**：根据题意分析发现，取每一组首尾两数的平均数乘该组的频数，再全部加起来除以总数即可解答.

$[(0+10)\div2\times8+(10+20)\div2\times12]\div(8+12)=(40+180)\div20=11$. 故选 B.

10. 140　**点拨**：本题不但要考虑客房标价，还要考虑人住百分率.

11. **解**：(1)乙的平均成绩为

$\frac{73+80+82+83}{4}=79.5$.

因为 80.25＞79.5，

所以应选乘甲.

(2)甲的平均成绩为

$\frac{85\times2+78\times1+85\times3+73\times4}{2+1+3+4}=79.5$，

乙的平均成绩为

$\frac{73\times2+80\times1+82\times3+83\times4}{2+1+3+4}=80.4$.

因为 79.5＜80.4，

所以应选乘乙.

12. **解**：(1)①100　②20　③144

(2)被调查学生的平均体重是

$\frac{1}{100}(40\times10+45\times20+50\times40+55\times20+60\times10)=50$(千克).

答：被调查学生的平均体重是 50 千克.

(3)$1\,000\times\frac{10+20}{100}=300$(人).

答：七年级体重低于 47.5 千克的学生大约有 300 人.

13. **解**：(1)4%

(2)$92.1\times52\%+85.0\times26\%+69.2\times18\%+41.3\times4\%=84.1$(分).

答：所抽取的学生的测试成绩的平均分为 84.1 分.

(3)设抽取的总人数为 n，

则 $80.0\leqslant41.3\times n\times4\%\leqslant89.9$，

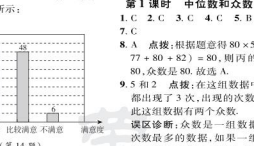
所以 $48\frac{176}{413}\leqslant n\leqslant54\frac{173}{413}$，

又因为 4% n 为整数，所以 $n=50$.

所以估计该校九年级学生中达到优秀等级的约有 $52\%\times50\div10\%=260$(人).

14. **解**：(1)120；45%

(2)$n=120\times40\%=48$. 补全条形统计图如图所示：



(第 14 题)

(3)$3\,600\times(10\%+45\%)=1\,980$(名).

所以估计该景区服务工作平均每天得到 1 980 名游客的肯定.

第 3 课时 求平均数的应用

1. A　**点拨**：由题意可得，小桐这学期的体育成绩是 $95\times20\%+90\times30\%+85\times50\%=19+27+42.5=88.5$.

2. **解**：(1)甲民主评议得分：$100\times25\%=25$(分)；乙民主评议得分：$100\times40\%=40$(分)；丙民主评议得分：$100\times35\%=35$(分).

(2)甲将被录用. 理由：甲的成绩：$\frac{2\times80+2\times98+1\times25}{2+2+1}=76.2$(分)；

乙的成绩：$\frac{2\times85+2\times75+1\times40}{2+2+1}=72$(分)；

丙的成绩：$\frac{2\times95+2\times73+1\times35}{2+2+1}=74.2$(分).

因为 $76.2>74.2>72$，所以甲将被录用.

3. 7 200

4. **解**：(1)∵ 第①组的频率为 $1-96\%=4\%=0.04$，

∴ 总体的频率为 $0.12\div0.04=0.08$.

∴ 这次跳绳测试共抽取了 $12\div0.08=150$(人).

∴ 第①组有 $150\times0.04=6$(人).

∵ 第②③④组的频数之比为 4∶17∶15，第②组的频数为 12，

∴ 第③④组分别有 51 人，45 人.

∴ 第⑤组有 $150-(6+12+51+45+12)=24$(人).

综上：这次跳绳测试共抽取了 150 人，第①～⑥组分别有 6 人，12 人，51 人，45 人，24 人，12 人.

(2)$24+12=36$(人).

(3)估计这批学生 1 min 跳绳次数的平均数为$\frac{100\times6+110\times12+120\times51+130\times45+140\times24+150\times12}{150}=127$(次).

23.2 中位数和众数

第 1 课时 中位数和众数的认识

1. C　2. C　3. C　4. C　5. B　6. B

7. C

8. A　**点拨**：根据题意得 $80\times5-(81+77+80+82)=80$，则丙的得分是 80，众数是 80. 故选 A.

9. 5 和 2　**点拨**：在这组数据中，5 和 2 都出现了 3 次，出现的次数最多，因此这组数据有两个众数.

误区诊断：众数是一组数据中出现次数最多的数据，如果一组数据有几个数据重复出现的次数相同，并且次数是最多的，那么这几个数据都是这组数据的众数，即一组数据的众数不一定唯一.

10. **解**：(1)将这组数据按照从小到大的顺序排列：125，134，140，143，146，148，152，155，162，164，168，175，则中位数为$\frac{148+152}{2}=150$(分)，平均数为$\frac{125+134+140+143+146+148+152+155+162+164+168+175}{12}=151$(分).

(2)由(1)可得，中位数为 150 分，可以估计在这次马拉松长跑比赛中，大约有一半选手的成绩快于 150 分，有一半选手的成绩慢于 150 分，这名选手的成绩为 147 分，快于中位数 150 分，可以推断他的成绩比一半以上选手的成绩好.

11. **解**：(1)表格中的五个数据(人数)的中位数是 1 300.

(2)平均每天在 7：00～8：00 需要租用自行车却未租到车的人数为 $(1\,500+1\,200+1\,300+1\,300+1\,200)\times5=1\,300$(人)，

$1\,300+700=2\,000$(人).

答：平均每天在 7：00～8：00 需要租用公共自行车的人数是 2 000 人.

12. **解**：(1)$\bar{x}=\frac{1}{20}\times(9\times1+10\times1+11\times6+12\times4+13\times2+15\times2+16\times2+19\times1+20\times1)=13$(个).

答：这一天 20 名工人生产零件的平均个数为 13 个.

(2)中位数为$\frac{12+12}{2}=12$，众数为 11.

当定额为 13 个时，有 8 人达标，6 人获奖，不利于提高工人的积极性；

当定额为 12 个时，有 12 人达标，8 人获奖，不利于提高大多数工人的积极性；

当定额为 11 个时，有 18 人达标，12 人获奖，有利于提高大多数工人的积极性.

∴ 定额为 11 个时，有利于提高大多数工人的积极性.

13. **解**：(1)150；42　(2)B；36

(3)$2\,500\times\frac{27+15+30}{150}=1\,200$(户).

估计家庭文化教育年消费 10 000 元以上的家庭有 1 200 户.

第 2 课时 用平均数、中位数和众数分析数据集中趋势

1. B　2. 27　3. C　4. A　5. C

6. B　**点拨**：甲组 5 月份家庭用水量的中位数为$\frac{5+5}{2}=5$(吨).

乙组 5 月份家庭用水量为 4 吨的有 $12\times\frac{90}{360}=3$(户)，

6 吨的有 $12\times\frac{90}{360}=3$(户)，

7 吨的有 $12\times\frac{60}{360}=2$(户)，

∴ 5 吨的有 $12-(3+3+2)=4$(户).

∴ 乙组 5 月份家庭用水量的中位数为$\frac{5+5}{2}=5$(吨).

∴ 甲组和乙组 5 月份家庭用水量的中位数相同，故选 B.

7. 30　**点拨**：在求众数时，将众数出现的次数误认为是众数. 众数是一组数据中出现次数最多的数，容易混淆的是“次数”和“出现次数最多的数”. 本题中，条形统计图的高度表示捐款人数，是相对应的捐款金额出现的次数，易知本题捐款金额的众数是 30 元.

8. **解**：(1)$(80\times1\,000\times60\%+82.5\times1\,000\times40\%)\div1\,000=81$(分).

答：该校九年级学生本次数学测试成绩的平均数是 81 分.

(2)D

9. **解**：(1)6 分

(2)两个班一共有学生：$(22+27)\div50\%=98$(人)，

九(1)班有学生：$98-(3+6+12+27)=50$(人).

设九(1)班学生中这道试题作答情况属于 B 类和 C 类的人数分别是 x 人和 y 人，由题意，得

$\begin{cases}5+x+y+27=50,\\0\times5+x+3y+6\times22=3.78\times50.\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=6,\\y=17.\end{cases}$

答：九(1)班学生中这道试题作答情况属于 B 类和 C 类的人数分别是 6 人和 17 人.

点拨：(1)由条形统计图可知九(2)班一共有学生 $3+6+12+27=48$(人)，将 48 个数据按从小到大的顺序排列，第 24，25 个数据都在 D 类，所以中位数是 6 分；(2)先求出两个班一共有多少学生，减去九(2)班的学生数，得出九(1)班的学生数，再根据条形统计图，用九(1)班的学生数分别减去该班 A，D 两类的学生数得到 B 类和 C 类的人数和，再结合九(1)班学生这道试题的平均得分为 3.78 分，即可求解.

10. **解**：(1)5；3；90　(2)91

(3)估计评选该荣誉称号的最低分数为 97 分. 理由如下：

∵ $20\times30\%=6$，∴ 估计评选该荣誉称号的最低分数为 97 分.

阶段核心题型

1. **解**：(1)$\frac{9\times2+10\times5+12\times3}{2+5+3}=10.4$(元)，

所以混合后得到的什锦糖果的价格定为每千克 10.4 元才能保证获得的利润不变.

(2)$\frac{9\times6+10\times3+12\times1}{6+3+1}=9.6$(元)，

所以混合后得到的什锦糖果的价格定为每千克 9.6 元才能保证获得的利润不变.

2. **解**：(1)甲的成绩为

$\frac{86\times5+93\times3+73\times2}{5+3+2}=85.5$(分)，

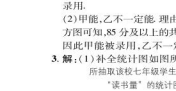
乙的成绩为$\frac{81\times5+95\times3+79\times2}{5+3+2}=84.8$(分)，85.5＞84.8，所以甲将被

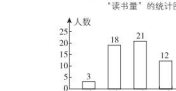
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

录用.

(2)甲能,乙不一定能. 理由:由频数直方图可知,85 分及以上的共有 7 人,因此甲能被录用,乙不一定能被录用.

3. 解:(1)补全统计图如图所示.





(第 3 题)

3 本

(2)平均数 $=\frac{3\times1+18\times2+21\times3+12\times4+6\times5}{3+18+21+12+6}=$

3(本).

(3)四月份"读书量"为 5 本的学生人数为 $1\ 200\times\frac{6}{3+18+21+12+6}=120$.

4. 解:(1)144°

(2)补全统计图如图所示.



(第 4 题)

(3)由(2)知乙校参赛的有 20 人. 因为两校参赛人数相等,所以甲校参赛的也有 20 人,所以甲校得 9 分的有 1 人,甲校学生成绩的平均数为 $(7\times11+8\times0+9\times1+10\times8)\times\frac{1}{20}=8.3$(分),中位数为 7 分.

由于两所学校学生成绩的平均数一样,因此从中位数的角度进行分析. 因为乙校学生成绩的中位数为 8 分,大于甲校学生成绩的中位数,所以乙校的成绩较好.

(4)甲校的前 8 名学生成绩都是 10 分,而乙校的前 8 名学生中只有 5 人的成绩是 10 分,所以应选甲校.

5. 解:(1)4.5 首

(2)大赛后一个月该校学生一周诗词诵背 6 首(含 6 首)以上的有

$1\ 200\times\frac{40+25+20}{10+10+15+40+25+20}=850$

(人).

(3)(答案不唯一)活动启动之初"一周诗词诵背数量"的中位数是 4.5 首,众数是 4 首,大赛结束后一个月"一周诗词诵背数量"的中位数是 6 首,众数是 6 首.

由大赛前后的中位数和众数看,大赛后学生诵背诗词的积极性明显提高,这次大赛举办的效果比较理想.

6. 解:(1)补全表格如下:

年级	平均数	中位数	满分率
七年级	90.1	93	25%
八年级	92.8	97.5	20%

(2)135

(3)八年级掌握新型冠状病毒预防知识的总体水平较好.

因为八年级成绩的平均数比七年级高,说明八年级平均水平高,且八年级成绩的中位数比七年级大,说明八年级得高分的人数多于七年级,所以八年级掌握新型冠状病毒预防知识的总体水平较好.

7. 解:(1)$a=4$;$b=83$;$c=85$;$d=90$.

(2)从平均数看三个班都一样;

从中位数看,1 班和 3 班一样,是 80,2 班最高,是 85;

从众数看,1 班和 3 班都是 80,2 班是 90.

综上所述,2 班成绩比较好.

(3)$570\times\frac{4}{30}=76$(张),

答:估计需要准备 76 张奖状.

23.3 方 差

第 1 课时 方 差

1. B **2.** D **3.** C **4.** A **5.** A **6.** B **7.** D

8. A **点拨**:A,由方差公式计算可知,小黄成绩的方差小于小韦成绩的方差,故小黄的成绩波动幅度小,成绩更稳定,此选项正确,C 选项错误;B,小韦成绩的众数为 10 环,小黄成绩的众数为 9 环,此选项错误;D,小韦的平均成绩为 $\frac{6+7\times2+10\times3}{6}=\frac{25}{3}$(环),小黄的平均成绩为 $\frac{7+8\times2+9\times3}{6}=\frac{25}{3}$(环),此选项错误. 故选 A.

9. B **点拨**:可分别计算前后的方差比较.

误区诊断:本题易因对方差意义的理解不透彻,认为年龄增大,方差随之增大,而错选 A 选项.

10. 解:(1)乙组数据的折线统计图如图所示:



(第 10 题)

(2)①$\bar{x}_{甲}=50+\bar{x}_{乙}$.

②$s_{甲}^2=s_{乙}^2$. 理由:$x_{甲}=50$,$\bar{x}_{乙}=0$.

$\because s_{甲}^2=\frac{1}{5}[(48-50)^2+(52-50)^2+(47-50)^2+(49-50)^2+(54-50)^2]=6.8$,

$s_{乙}^2=\frac{1}{5}[(-2-0)^2+(2-0)^2+(-3-0)^2+(-1-0)^2+(4-0)^2]=6.8$,

$\therefore s_{甲}^2=s_{乙}^2$.

11. 解:(1)这 5 天的日最高气温和日最低气温的平均数分别是

$\bar{x}_{高}=\frac{23+25+23+25+24}{5}=24$(℃),

$\bar{x}_{低}=\frac{21+22+15+15+17}{5}=18$(℃),

方差分别是

$s_{高}^2=\frac{(23-24)^2+(25-24)^2+(23-24)^2+(25-24)^2+(24-24)^2}{5}=0.8$,

$s_{低}^2=\frac{(21-18)^2+(22-18)^2+(15-18)^2+(15-18)^2+(17-18)^2}{5}=8.8$,

$\because s_{高}^2<s_{低}^2$,

∴ 该市这 5 天的日最低气温波动大.

(2)略.

12. 解:表一:3;3;1

表二:400;402 乙(答案不唯一)

理由:由表二知,乙包装机分装的奶粉质量的方差小,分装质量比较稳定,所以包装机分装情况比较好的是乙.

第 2 课时 方差在数据分析中的应用

1. D **点拨**:A,甲的数学成绩高于班级平均分,且成绩比较稳定,正确;B,乙的数学成绩在班级平均分附近波动,且比丙好,正确;C,丙的数学成绩低于班级平均分,但成绩逐次提高,正确;D,就甲、乙、丙三个人而言,丙的数学成绩最不稳定,故错误. 故选 D.

2. 解:(1)甲班的优秀率为 $\frac{3}{5}\times100\%=60\%$;乙班的优秀率为 $\frac{2}{5}\times100\%=40\%$.

(2)甲、乙两个班比赛成绩的中位数分别是 100 个和 97 个.

(3)估计甲班的方差较小.

(4)甲班. 因为甲班 5 人比赛成绩的优秀率比乙班高,中位数比乙班大,方差比乙班小,综合评定甲班成绩较好.

3. 解:(1)$a=86$,$b=85$,$c=85$.

(2)根据以上数据分析,八(2)班前 5 名学生的成绩较好. 理由:因为八(2)班的平均分高于八(1)班的平均分,且八(2)班成绩的方差小于八(1)班成绩的方差,说明八(2)班的成绩更稳定,而中位数和众数两个班是一样的,所以八(2)班前 5 名学生的成绩较好.

4. 解:(1)$a=7$,$b=7.5$,$c=4.2$.

(2)从平均成绩看,甲、乙二人的平均成绩相等,均为 7 环,从中位数看,甲成绩的中位数小于乙成绩的中位数,从众数看,甲射中 7 环的次数最多而乙射中 8 环的次数最多,从方差看甲的成绩比乙的成绩稳定.

综合以上各因素,若选派一名队员参赛,可选择乙参赛,因为乙获得较好成绩的可能性更大. (答案不唯一)

23.4 用样本估计总体

1. 1 200

2. A

3. B

4. D

5. D

6. A **点拨**:样本平均数 $=(87+90+98+74+89+90+85+80+90+93)\div10=876\div10=87.6$(分),方差 $=[(87-87.6)^2+(90-87.6)^2+(98-87.6)^2+(74-87.6)^2+(89-87.6)^2+(90-87.6)^2+(85-87.6)^2+(80-87.6)^2+(90-87.6)^2+(93-87.6)^2]\div10=40.64$,

估计该班普通话测试成绩的方差是 40.64.

7. B

8. 错解:C

误区诊断:错解的原因是仅凭想当然而缺乏根据,只看到上午的温差与下午的温差相同,而误选 C. 实际上,经计算得上午温度的方差为 2.5,下午温度的方差为 2.375,所以下午气温比较稳定.

正解:B

9. 解:(1)抽样调查

(2)2;3

(3)∵样本平均数 $=\frac{1\times0+1\times1+11\times2+7\times3+5\times4+4\times5+1\times6}{30}=3$(个),

∴ 全市一天丢弃塑料袋的总数为 $\frac{44}{4}\times3\times10^4=3.3\times10^5$(个).

建议:少用一次性塑料袋,多用健康环保袋;爱护环境,从我做起(或人人有责). (答案不唯一)

10. 解:$\bar{x}_{甲}=\frac{1}{10}\times(7.65+7.50+7.62+7.59+7.65+7.64+7.50+7.40+7.41+7.41)=7.537(1)$,

$\bar{x}_{乙}=\frac{1}{10}\times(7.55+7.56+7.53+7.57+7.49+7.58+7.58+7.46+7.56+7.49)=7.537(1)$.

$s_{甲}^2=\frac{1}{10}\times[(7.65-7.537)^2+(7.50-7.537)^2+\cdots+(7.41-7.537)^2]=0.009\ 961$,

$s_{乙}^2=\frac{1}{10}\times[(7.55-7.537)^2+(7.56-7.537)^2+\cdots+(7.49-7.537)^2]=0.001\ 641$.

因为$\bar{x}_{甲}=\bar{x}_{乙}$,$s_{甲}^2>s_{乙}^2$,所以综合考虑甲、乙两个品种的产量和产量的稳定性,可以推测在该地更适合种植乙种甜玉米.



11. 解:(1)8;5;90;82.5

(2)800 $\times\frac{20}{20}\times\frac{5}{5}=200$(人),

答:甲小区成绩大于 90 分的人数约有 200 人.

(3)理由:甲小区成绩的平均数和中位数均大于乙小区.

全章热门考点整合应用

1. 4.4

2. C

3. D **点拨**:因为 10 + 13 + 12 + 15 = 50(人),指放全额按照从小到大的顺序排列第 25 个和第 26 个都是 20 元,

所以中位数 $=\frac{20+20}{2}=20$(元).

4. C

5. C **点拨**:根据题意得丙的得分为 $80\times5-(81+79+80+82)=78$(分),方差为 $\frac{1}{5}\times[(81-80)^2+(79-80)^2+(78-80)^2+(80-80)^2+(82-80)^2]=2$. 故选 C.

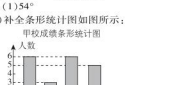
6. B

7. 解:(1)平均数是 260 个,中位数是 240 个,众数是 240 个.

(2)不合理. 因为表中数据显示,每月能完成 260 个的一共有 4 人,还有 11 人不能达到此定额,尽管 260 个是平均数,但不利于调动多数员工的积极性,而 240 个既是中位数,又是众数,是大多数人能达到的定额,故定额为 240 个较为合理.

8. 解:(1)54°

(2)补全条形统计图如图所示:



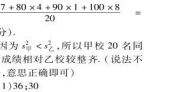
(第 8 题)

(3)$6+30\%=20$(人),乙校成绩中 80 分的人数为 $20-1-7-8=4$(人),所以乙校成绩的平均分是 $\frac{70\times7+80\times4+90\times1+100\times8}{20}=85$(分).

(4)因为 $s_{甲}^2<s_{乙}^2$,所以甲校 20 名同学的成绩相对乙校较整齐. (说法不唯一,意思正确即可)

9. 解:(1)36;30

补全条形统计图如图所示;



(第 9 题)

(2)C

(3)因为 $\frac{24}{120}=0.2$,$\frac{12}{120}=0.1$,

所以估计个人旅游年消费金额在 6 000 元以上的人数为 $3\ 000\times(0.1+0.2)=900$(人).

第二十四章 一元二次方程

24.1 一元二次方程

第 1 课时 认识一元二次方程

1. D **2.** C **3.** A **4.** B **5.** B **6.** 8

7. A **8.** C **9.** B **10.** ②

11. D **点拨**:∵关于 x 的一元二次方程 $(a-1)x^2-2x+a^2-1=0$ 有一个根为 $x=0$,

$\therefore a^2-1=0$,且 $a-1\neq0$,解得 $a=-1$.

故选 D.

12. 解:(1)当 $2k+1=0$,且 $4k\neq0$,即 $k=-\frac{1}{2}$ 时,方程 $(2k+1)x^2+4kx+k-1=0$ 化为 $-2x-\frac{3}{2}=0$,此时为一元一次方程.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

(2)当$2k+1\neq0$，即$k\neq-\frac{1}{2}$时，此方程为一元二次方程，其二次项系数是$2k+1$，一次项系数是$4k$，常数项是$k-1$。

13. 解：把$x=2$代入原方程得$4-2(3+k)+12=0$，解得$k=5$。

当以2为腰长时，等腰三角形的三边长分别为2，2，5，因为$2+2<5$，所以不能组成三角形，即此种情况不存在。

当以5为腰长时，等腰三角形的三边长分别为2，5，5，能够组成三角形。所以等腰三角形的周长为$5+5+2=12$。

点拨：确定三角形的三边长时，要注意“三角形任意两边之和大于第三边”这一条件，否则容易出现错误的解答。

14. 解：都不正确，均考虑不全面。正确解法如下：

令$y=x^{2n+k}$，则原方程变为$y^2-3y+1=0$是关于y的一元二次方程，

由$\begin{cases}2a+b=2,\\a-b=2\end{cases}$得$\begin{cases}a=2,\\b=0\end{cases}$

由$\begin{cases}2a+b=2,\\a-b=1\end{cases}$或$\begin{cases}2a+b=2,\\a-b=0\end{cases}$或$\begin{cases}2a+b=1,\\a-b=2\end{cases}$

或$\begin{cases}2a+b=0,\\a-b=2,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=\frac{4}{3},\\b=-\frac{2}{3}\end{cases}$或$\begin{cases}a=1,\\b=0\end{cases}$或

$\begin{cases}a=\frac{2}{3},\\b=\frac{2}{3}\end{cases}$或$\begin{cases}a=1,\\b=-1\end{cases}$或$\begin{cases}a=\frac{2}{3},\\b=-\frac{4}{3}.\end{cases}$

15. 解：(1)由题意可知网球场的长和宽分别为$(80-2x)$m，$(60-2x)$m，则可列方程为$(80-2x)(60-2x)=3\,500$，整理得$x^2-70x+325=0$。

(2)x的值不可能小于0，因为人行走道的宽度不可能为负数。

(3)x的值不可能小于40，也不可能大于30，因为当$x>30$时，网球场的宽$60-2x<0$，这是不符合实际的，当然x更不可能大于40。

(4)人行走道的宽为5 m，去掉过程如下：

x	…	1	2	3	4	5	6	7	…
$x^2-70x+325$	…	256	189	124	61	0	−59	−116	…

显然，当$x=5$时，$x^2-70x+325=0$，故人行走道的宽为5 m。

第2课时　一元二次方程的定义及相关概念的五种常见应用

1. 解：(1)存在。根据一元二次方程的定义可得$\begin{cases}m^2+1=2,\\m+1\neq0,\end{cases}$解得$m=1$，此时方程为$2x^2-x-1=0$。

(2)存在。由题可知当$\begin{cases}m^2+1=1,\\m+1=m-2\neq0\end{cases}$或$\begin{cases}m+1=0,\\m-2\neq0\end{cases}$时方程为一元一次方程。

当$\begin{cases}m^2+1=1,\\m+1=m-2\neq0\end{cases}$时，解得$m=0$，此时方程为$-x-1=0$，解得$x=-1$；

当$\begin{cases}m+1=0,\\m-2\neq0\end{cases}$时，解得$m=-1$，此时方程为$-3x-1=0$，解得$x=-\frac{1}{3}$。

2. 解：将$(2ax+1)(x-a)=a-2$化为一般形式，得$2ax^2+(1-2a^2)x+2-2a=0$。

所以该一元二次方程的二次项系数为$2a$，

依题意，得$2a=-4$，

解得$a=-2$。

3. 解：由题意可得$(x+1)\times2x-(x+2)(x-2)=1$，它是一元二次方程，写成一般形式为$x^2+2x+3=0$。

4. 解：由题意得$n^2+mn+2n=0$，

$\because n\neq0$，$\therefore n+m+2=0$，

$\therefore m+n=-2$。

5. 解：$\because$ 实数a是一元二次方程$x^2-2\,022x+1=0$的一个根，

$\therefore a^2-2\,022a+1=0$。

$\therefore a^2+1=2\,022a$，$a^2-2\,022a=-1$。

$\therefore a^2-2\,021a=\frac{-a^2+1}{2\,022}$

$=a^2-2\,021a-\frac{2\,022a}{2\,022}$

$=a^2-2\,021a-a$

$=a^2-2\,022a=-1$。

6. 解：(1)$\because\angle ACB=90°$，$\angle A=28°$，

$\therefore\angle B=90°-28°=62°$，

$\because BD=BC$，

$\therefore\angle BCD=\angle BDC=\frac{180°-\angle B}{2}=59°$，

$\therefore\angle ACD=\angle ACB-\angle BCD=90°-59°=31°$。

(2)①$\because AD=EC$，$AD=AE$，$AC=4$，

$\therefore AD=EC=AE=2$，

$\because BC=BD=a$，

$\therefore AB=2+a$，

$\because AB^2=BC^2+AC^2$，

即$(a+2)^2=a^2+4^2$，

$\therefore a=3$。

②$\because BC=a$，$AC=4$，

$\therefore AB=\sqrt{16+a^2}$，

$\therefore AD=\sqrt{16+a^2}-a$，

$\because$当$x=\sqrt{16+a^2}-a$时，

$x^2+2ax-16=(\sqrt{16+a^2}-a)^2+2a(\sqrt{16+a^2}-a)-16$

$=16+a^2-2a\sqrt{16+a^2}+a^2+2a\sqrt{16+a^2}-2a^2-16$

$=0$，

$\therefore AD$的长是该方程的一个根。

24.2　解一元二次方程

第1课时　配方法——直接开平方法解方程

1. $x_1=2$，$x_2=-2$

2. C

3. C　点拨：方程$x^2+4=0$，移项得$x^2=-4$，由平方的非负性可得此方程无实数解。故选C。

4. B

5. 5(答案不唯一，只要$c\geqslant0$即可)

6. D　7. A

8. 解：把$x=3$代入原方程，得$k^2=2$，

$\therefore k=\pm\sqrt{2}$，

由$(x-1)^2=4$，得$x-1=\pm2$，

$\therefore x_1=3$，$x_2=-1$，

故另一个根为-1。

9. 解：$\because m+1$与$2m-4$是关于x的一元二次方程$ax^2=b(ab>0)$的两个根，

$\therefore(m+1)+(2m-4)=0$，

$\therefore m=1$，即方程的两根分别为2和-2。

把$x=2$或$x=-2$代入$ax^2=b$中，得$4a=b$，$\therefore\frac{b}{a}=4$。

第2课时　配方法——配方法解方程

1. -1或7

2. D　**3.** B　**4.** B　**5.** A　**6.** A　7. A

8. D　**9.** A　**10.** A　**11.** D　**12.** B

13. 1或-3　**点拨：**依题意得$(2+x)(x+3)$，整理，得$x^2+2x=3$，

$\therefore(x+1)^2=4$，

$\therefore x+1=\pm2$，

$\therefore x=1$或$x=-3$。

14. 解：$\because x^2+6x=-7$，

$\therefore x^2+6x+9=-7+9$，

即$(x+3)^2=2$，

则$x+3=\pm\sqrt{2}$，

$\therefore x=-3\pm\sqrt{2}$，

即$x_1=-3+\sqrt{2}$，$x_2=-3-\sqrt{2}$。

点拨：本题的易错之处是在配方时忽视等式的性质，忘了在等号右边加9而致错。

15. 解：$\because a^2+b^2=12a+8b-52$，

$\therefore a^2-12a+b^2-8b+52=0$。

$\therefore(a-6)^2+(b-4)^2=0$。

$\therefore a-6=0$且$b-4=0$。

$\therefore a=6$，$b=4$。

又$\because a$，b，c为正整数且是$\triangle ABC$的三边长，c是$\triangle ABC$的最短边长，

$\therefore 6-4<c\leqslant6$($c$是正整数)。

$\therefore c=5$或$c=6$。

即c的值是3或4。

点拨：根据$a^2+b^2=12a+8b-52$，可以求得a，b的值，由a，b，c为正整数且是$\triangle ABC$的三边长，c是$\triangle ABC$的最短边长，即可求得c的值。

16. 解：(1)10　(2)-2

(3)$x^2+(m+2)x+4m-7=\left(x+\frac{m+2}{2}\right)^2+4m-7-\frac{(m+2)^2}{4}$，

$\because$原代数式有最小值为0，

$\therefore 4m-7-\frac{(m+2)^2}{4}=0$，

即$m^2-12m+32=0$。

配方得$(m-6)^2=4$，

$\therefore m-6=\pm2$，$\therefore m_1=8$，$m_2=4$。

17. 解：将已知等式两边同时加上2，

得$x^2+\frac{1}{x^2}+2=2+\left(x+\frac{1}{x}\right)=2$，

即$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)=2$。

设$x+\frac{1}{x}=y$，则$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)=2$可化为$y^2+2y=2$。

配方，得$y^2+2y+1=2+1$，

$\therefore(y+1)^2=3$。

直接开平方，得$y+1=\pm\sqrt{3}$。

解得$y_1=\sqrt{3}-1$，$y_2=-\sqrt{3}-1$。

即$x+\frac{1}{x}=\sqrt{3}-1$或$x+\frac{1}{x}=-\sqrt{3}-1$。

经检验，不存在实数x使$x+\frac{1}{x}=\sqrt{3}-1$，故舍去。

$\therefore x+\frac{1}{x}=-\sqrt{3}-1$。

点拨：本题在解答过程中应用了**换元法**和**整体思想**，即用y来代替$x+\frac{1}{x}$，将已知等式转化成一元二次方程求解。

18. 解：$\because a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0$，

$\therefore 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc=0$。

$\therefore a^2-2ab+b^2+a^2-2ac+c^2+b^2-2bc+c^2=0$。

$\therefore(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2=0$。

$\therefore a-b=0$，$a-c=0$，$b-c=0$。

$\therefore a=b=c$。

$\therefore\triangle ABC$为等边三角形。

第3课时　公式法——一元二次方程根的判别式

1. 2；-7；-4；81

2. C　**3.** C　**4.** C　**5.** A　**6.** C

7. A　**点拨：**$(k+3)^2-4k=k^2+2k+9=(k+1)^2+8$。

$\because(k+1)^2\geqslant0$，$\therefore(k+1)^2+8>0$，

$\therefore$方程有两个不相等的实数根。

8. D　**9.** A

10. A　**点拨：**原方程可变形为$x^2+(a+1)x=0$。

$\because$该方程有两个相等的实数根，

$\therefore(a+1)^2-4\times1\times0=0$，

解得$a=-1$。

11. A　**点拨：**$\because$小刚在解关于x的方程$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$时，只抄对了$a=1$，$b=4$，解出其中一个根是$x=-1$，

$\therefore(-1)^2-4+c=0$，

解得$c=3$，故原方程中$c=5$，

则$b^2-4ac=16-4\times1\times5=-4<0$，

故原方程不存在实数根。

12. D　**点拨：**本题忽视一元二次方程二次项系数不为0这一条件，而直接由根的判别式求得$k\leqslant\frac{5}{4}$。

13. 解：$\because$关于x的方程$x^2-2x+2m-1=0$有实数根，

$\therefore b^2-4ac=4-4(2m-1)\geqslant0$，

解得$m\leqslant1$。

$\because m$为正整数，$\therefore m=1$，

$\therefore x^2-2x+1=0$，则$(x-1)^2=0$，

解得$x_1=x_2=1$。

14. 解：(1)根据题意得$(-3)^2-4k\geqslant0$，

解得$k\leqslant\frac{9}{4}$。

(2)由题意得$k=2$，

方程$x^2-3x+k=0$变形为$x^2-3x+2=0$，解得$x_1=1$，$x_2=2$。

$\because$一元二次方程$(m-1)x^2+x+m-3=0$与方程$x^2-3x+k=0$有一个相同的根，

$\therefore$当$x=1$时，$m-1+1+m-3=0$，

解得$m=\frac{3}{2}$；

当$x=2$时，$4(m-1)+2+m-3=0$，解得$m=1$。

$\because m-1\neq0$，

$\therefore m$的值为$\frac{3}{2}$。

15. (1)**证明：**因为$[-(2k+1)]^2-4\times1\times\left(k-\frac{1}{2}\right)=4k^2-12k+9=(2k-3)^2\geqslant0$，所以无论$k$取何值，这个方程都有实数根。

(2)**解：**若a为等腰三角形ABC的底边长，则b，c为等腰三角形ABC的两腰长，由题意知方程有两个相等的实数根，所以$b^2-4ac=0$，即$k=\frac{3}{2}$。所以方程为$x^2-4x+4=0$，

解得$x_1=x_2=2$。

即$b=c=2$，不符合三角形三边关系，故舍去。

若a为等腰三角形ABC的一腰长，由题意知4是方程的一个根，所以$4^2-(2k+1)\times4+4\left(k-\frac{1}{2}\right)=0$，

解得$k=\frac{5}{2}$。所以方程为$x^2-6x+8=0$，解得$x_1=2$，$x_2=4$，符合题意。所以$\triangle ABC$的周长为$2+4+4=10$。

16. 解：(1)$2\times5=2\times5+5=15$；

$2\otimes(-5)=2\times(-5)+(-5)=-15$。

(2)$x\otimes(a\otimes x)=x\otimes(ax+x)=x\otimes[(a+1)x]=(a+1)x^2+(a+1)x=-\frac{1}{4}$，

整理，得$4(a+1)x^2+4(a+1)x+1=0$。

$\because$关于x的方程$x\otimes(a\otimes x)=-\frac{1}{4}$有两个相等的实数根，

$\therefore\begin{cases}a+1\neq0,\\16(a+1)^2-16(a+1)=0.\end{cases}$

解得$a=0$。

第4课时　公式法——公式法解方程

1. B　**2.** A　**3.** D

4. $x_1=\frac{-1+\sqrt{13}}{3}$，$x_2=\frac{-1-\sqrt{13}}{3}$

5. D　**点拨：**$(x+1)(x-3)=2x-5$，整理得$x^2-4x+2=0$，解得$x_1=2+\sqrt{2}>3$，$x_2=2-\sqrt{2}$，$0<2-\sqrt{2}<3$，故有两个正根，且有一根大于3。

6. 解：依题意，得$a^2-2a+1=0$且$b+3=0$，

$\therefore a=1$，$b=-1$，$c=-3$，代入方程可得$x^2-x-3=0$，$\therefore x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$，

即$x_1=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$，$x_2=\frac{1-\sqrt{13}}{2}$。

7. 解：设x与PDQ的面积为35 cm^2，即$S_{矩形ABCD}-S_{\triangle APQ}-S_{\triangle PCQ}-S_{\triangle BDQ}=12\times6-\frac{1}{2}\times12x-\frac{1}{2}(6-x)\cdot2x-\frac{1}{2}\times6\times(12-2x)=35$，解得$x_1=3+2\sqrt{2}$，$x_2=3-2\sqrt{2}$，因为当其移动$(3+2\sqrt{2})$s或$(3-2\sqrt{2})$s时均符合题意，所以$(3+2\sqrt{2})$s或$(3-2\sqrt{2})$s时$\triangle PDQ$的面积为35 cm^2。

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 5 课时　因式分解法

1. A　**2.** A　**3.** $x_1=2, x_2=1$

4. 4 或 −3

5. C

6. A　**点拨**：解方程 $x^2-8x+15=0$，得 $x=3$ 或 $x=5$，

若腰长为 3，则三角形的三边长为 3，3，6，显然不能构成三角形；

若腰长为 5，则三角形的三边长为 5，5，6，此时三角形的周长为 16.

故选 A.

7. B　**8.** D

9. (1) ①　(2) ④⑥　(3) ③⑤

(4) ②

10. 解：移项，得 $2(x-3)-3x(x-3)=0$. 整理，得 $(x-3)(2-3x)=0$.

$\therefore x-3=0$ 或 $2-3x=0$.



解得 $x_1=3, x_2=\frac{2}{3}$.

点拨：解方程时千万不能将方程两边同时除以 $x-3$，否则方程会漏掉解.

11. 错解：C

正解：A

误区诊断：设 $x^2+x+1=y$，则已知等式可化为 $y^2+2y-3=0$，分解因式得 $(y+3)(y-1)=0$，解得 $y_1=-3, y_2=1$.

当 $y=-3$ 时，$x^2+x+1=-3$ 无实数根；当 $y=1$ 时，$x^2+x+1=1$ 有实数根. 本题易因未讨论满足 $x^2+x+1=y$ 的实数 x 是否存在而错选 C.

12. 解：(1) $2x^2-4x-30=0$，

$x^2-2x-15=0$，

$(x-5)(x+3)=0$.

$\therefore x_1=5, x_2=-3$.

(2) $x^2-(\sqrt{2}+\sqrt{3})x+\sqrt{6}=0$，

$(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{3})=0$，

$\therefore x_1=\sqrt{2}, x_2=\sqrt{3}$.

(3) $x^2-8x+4=0$，$x^2-8x+16=12$，$(x-4)^2=12$，$x-4=\pm2\sqrt{3}$，

$\therefore x_1=4+2\sqrt{3}, x_2=4-2\sqrt{3}$.

13. 解：(1) 2;4

(2) $\because x^2-3x-4=0$，

$\therefore (x+1)(x-4)=0$，

则 $x+1=0$ 或 $x-4=0$，

$\therefore x_1=-1, x_2=4$.

14. 解：(1) 换元

(2) 设 $\frac{x+1}{x^2}=y$，则原方程变形为 $y-\frac{2}{y}=1$，

解得 $y_1=-1, y_2=2$.

经检验，$y_1=-1, y_2=2$ 都为方程 $y-\frac{2}{y}=1$ 的解.

当 $y=-1$ 时，$\frac{x+1}{x^2}=-1$，

$\therefore x^2+x+1=0$.

$\because 1-4=-3<0$，

$\therefore \frac{x+1}{x^2}=-1$ 无实数解；

当 $y=2$ 时，$\frac{x+1}{x^2}=2$，

$\therefore 2x^2-x-1=0$，

$\therefore x_1=-\frac{1}{2}, x_2=1$.

经检验，$x_1=-\frac{1}{2}$，$x_2=1$ 是方程 $\frac{x+1}{x^2}=2$ 的解.

∴ 原方程的解为 $x_1=-\frac{1}{2}, x_2=1$.

点拨：本题运用了**换元法**和**整体思想**，先设 $\frac{x+1}{x^2}=y$，原方程可以变为 $y-\frac{2}{y}=1$，解方程求出 y 的值，再代入 $\frac{x+1}{x^2}=y$ 就可以求出 x 的值.

15. 解：(1) 将 $x=3$ 代入方程 $(a-1)x^2-4x-1+2a=0$，得 $9(a-1)-12-1+2a=0$，解得 $a=2$.

将 $a=2$ 代入原方程，得 $x^2-4x+3=0$，因式分解得 $(x-1)(x-3)=0$，$\therefore x_1=1, x_2=3$.

∴ 方程的另一个根是 $x=1$.

(2) ∵ 三角形的三边长都是这个方程的根，

∴ ①当三边长都为 1 时，周长为 3；

②当三边长都为 3 时，周长为 9；

③当两边长为 3，一边长为 1 时，周长为 7；④当两边长为 1，一边长为 3 时，不满足三角形三边关系，不能构成三角形.

故三角形周长为 3 或 9 或 7.

阶段核心方法

1. C

2. 解：$\frac{1}{3}(x-2)^2=8$，

$(x-2)^2=24$，

$x-2=\pm2\sqrt{6}$，

$\therefore x_1=2+2\sqrt{6}, x_2=2-2\sqrt{6}$.

3. 解：$x^2+4x-2=0$，

$x^2+4x=2$，

$(x+2)^2=6$，

$x+2=\pm\sqrt{6}$，

$\therefore x_1=-2+\sqrt{6}, x_2=-2-\sqrt{6}$.

4. 解：$x^2-10x+y^2-16y+89=0$，

$(x^2-10x+25)+(y^2-16y+64)=0$，

$(x-5)^2+(y-8)^2=0$，

$\therefore x-5=0, y-8=0$，

$\therefore x=5, y=8$.

$\therefore \frac{x}{y}=\frac{5}{8}$.

5. D

6. 解：(1) $x^2-3x=0$，

$x(x-3)=0$，

$\therefore x_1=0, x_2=3$.

(2) $16x^2-9=0$，

$(4x+3)(4x-3)=0$，

$\therefore x_1=-\frac{3}{4}, x_2=\frac{3}{4}$.

(3) $3x(x-2)=x-2$，

$3x(x-2)-(x-2)=0$，

$(x-2)(3x-1)=0$，

$\therefore x-2=0$ 或 $3x-1=0$，

$\therefore x_1=2, x_2=\frac{1}{3}$.

7. B

8. $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$　**点拨**：由题意得 $2b(b-a)+a(b-a)+3ab=0$，

整理得 $2\left(\frac{b}{a}\right)^2+\frac{2b}{a}-1=0$，

解得 $\frac{b}{a}=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$，

$\because a>b>0$，

$\therefore \frac{b}{a}=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

9. 解：(1) $3(x^2+1)-7x=0$，

$3x^2-7x+3=0$.

其中 $a=3, b=-7, c=3$.

$\because b^2-4ac=(-7)^2-4\times3\times3=13$.

$\therefore x=\frac{7\pm\sqrt{13}}{6}$，

即 $x_1=\frac{7+\sqrt{13}}{6}, x_2=\frac{7-\sqrt{13}}{6}$.

(2) $4x^2-3x-5=x-2$，

$4x^2-4x-3=0$.

其中 $a=4, b=-4, c=-3$.

$\because b^2-4ac=(-4)^2-4\times4\times(-3)=64$.

$\therefore x=\frac{4\pm\sqrt{64}}{8}$，

即 $x_1=\frac{3}{2}, x_2=-\frac{1}{2}$.

10. 解：将原方程两边同乘 6，得 $(6x)^2+19\times(6x)+60=0$.

解得 $6x=-15$ 或 $6x=-4$.

$\therefore x_1=-\frac{5}{2}, x_2=-\frac{2}{3}$.

11. 解：因为 $mn-n=8$，所以 $m=n+8$.

将 $m=n+8$ 代入 $mn+n^2+16=0$ 中，得 $n(n+8)+n^2+16=0$，所以 $n^2+8n+16+n^2=0$，即 $(n+4)^2+n^2=0$.

又因为 $(n+4)^2\geqslant0, n^2\geqslant0$，

所以 $\begin{cases}n+4=0,\\ n=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}n=-4,\\ n=0.\end{cases}$

所以 $m=n+8=4$，

所以 $m+n+p=4+(-4)+0=0$.

12. 解：原方程即为 $[(x-1)(x-4)][(x-2)(x-3)]=48$，

即 $(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)=48$.

设 $y=x^2-5x+5$，则原方程变为 $(y-1)(y+1)=48$.

解得 $y_1=7, y_2=-7$.

当 $x^2-5x+5=7$ 时，解得 $x_1=\frac{5+\sqrt{33}}{2}, x_2=\frac{5-\sqrt{33}}{2}$；

当 $x^2-5x+5=-7$ 时，$(-5)^2-4\times1\times12=-23<0$，方程无实数根.

∴ 原方程的根为 $x_1=\frac{5+\sqrt{33}}{2}$，

$x_2=\frac{5-\sqrt{33}}{2}$.

13. 解：设 $x+\frac{1}{x}=y$，则原方程为 $y^2-2y-3=0$.

解得 $y_1=3, y_2=-1$.

当 $y=3$ 时，$x+\frac{1}{x}=3$，

∴ $x_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}, x_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

当 $y=-1$ 时，$x+\frac{1}{x}=-1$ 无实数根.

经检验，$x_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}, x_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ 都是原方程的根. ∴ 原方程的根为 $x_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}, x_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

14. 解：经验证 $x=0$ 不是方程的根，原方程两边同除以 x^2，

得 $6x^2-35x+62-\frac{35}{x}+\frac{6}{x^2}=0$，

即 $6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-35\left(x+\frac{1}{x}\right)+62=0$.

设 $y=x+\frac{1}{x}$，则 $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$，

原方程可变为 $6(y^2-2)-35y+62=0$.

解得 $y_1=\frac{5}{2}, y_2=\frac{10}{3}$.

当 $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$ 时，

解得 $x_1=2, x_2=\frac{1}{2}$；

当 $x+\frac{1}{x}=\frac{10}{3}$ 时，

解得 $x_3=3, x_4=\frac{1}{3}$.

经检验，均符合题意.

∴ 原方程的根为 $x_1=2, x_2=\frac{1}{2}$，

$x_3=3, x_4=\frac{1}{3}$.

15. 解：设 $\frac{x-2}{x}=y$，则原方程可化为 $y-\frac{3}{y}=2$，

整理得 $y^2-2y-3=0$，

∴ $y_1=3, y_2=-1$.

当 $y=3$ 时，$\frac{x-2}{x}=3$，

∴ $x=-1$.

当 $y=-1$ 时，$\frac{x-2}{x}=-1$，

∴ $x=1$.

经检验，$x=\pm1$ 都是原方程的根.

∴ 原方程的根为 $x_1=1, x_2=-1$.

16. 解：方程组 $\begin{cases}x-2\,019=2\,022,\\ x-2\,020=2\,021\end{cases}$ 的解一定是原方程的解，

解得 $x=4\,041$.

方程组 $\begin{cases}x-2\,019=-2\,021,\\ x-2\,020=-2\,022\end{cases}$ 的解也一定是原方程的解，

解得 $x=-2$.

∵ 原方程最多有两个实数解，

∴ 原方程的根为 $x_1=4\,041, x_2=-2$.

点拨：解本题也可采用**换元法**. 设 $x-2\,020=t$，则 $x-2\,019=t+1$，原方程可化为 $t(t+1)=2\,021\times2\,022$，先求出 t，进而求出 x.

24.3　一元二次方程根与系数的关系

1. A　**2.** D

3. B　**点拨**：$\because \alpha,\beta$ 是方程 $x^2+x-2=0$ 的两个实数根，

$\therefore \alpha+\beta=-1, \alpha\beta=-2$.

$\because \alpha+\beta-\alpha\beta=-1+2=1$.

4. A　**5.** C　**6.** C　**7.** B

8. A　**点拨**：∵ 方程 $x^2-2x-4=0$ 的两个实数根为 α,β，

$\therefore \alpha+\beta=2, \alpha\beta=-4$，

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4+8=12$.

故选 A.

9. D　**10.** B

11. A　**点拨**：当 $a=4$ 时，$b<8$，

∵ a, b 是关于 x 的一元二次方程 $x^2-12x+m+2=0$ 的两根，

$\therefore 4+b=12$，

∴ $b=8$ 不符合题意；

当 $b=4$ 时，$a<8$，

∵ a, b 是关于 x 的一元二次方程 $x^2-12x+m+2=0$ 的两根，

$\therefore 4+a=12$，

$\therefore a=8$ 不符合题意；

当 $a=b$ 时，

∵ a, b 是关于 x 的一元二次方程 $x^2-12x+m+2=0$ 的两根，

$\therefore 12=a+b$，

∴ $a=b=6$，

$\therefore m+2=36$，

∴ $m=34$.

12. D

13. D　**点拨**：∵ 关于 x 的一元二次方程 $x^2-(k-1)x-k+2=0$ 的两个实数根为 x_1, x_2，

$\therefore x_1+x_2=k-1, x_1x_2=-k+2$.

∵ $(x_1-x_2+2)(x_1-x_2-2)+2x_1x_2=-3$，

即 $(x_1+x_2)^2-2x_1x_2-4=-3$，

∴ $(k-1)^2+2k-4=-3$，

解得 $k=\pm2$.

∵ 关于 x 的一元二次方程 $x^2-(k-1)x-k+2=0$ 有实数根，

∴ $[-(k-1)]^2-4\times1\times(-k+2)\geqslant0$，

解得 $k\geqslant2\sqrt{2}-1$ 或 $k\leqslant-2\sqrt{2}-1$，

∴ $k=2$.

14. 解：(1) ∵ 关于 x 的一元二次方程 $x^2-(2k+1)x+k^2+1=0$ 有两个不相等的实数根，

∴ $(2k+1)^2-4(k^2+1)>0$，

解得 $k>\frac{3}{4}$，

故实数 k 的取值范围为 $k>\frac{3}{4}$.

(2) ∵ 方程的两个根分别为 x_1, x_2，

∴ $x_1+x_2=2k+1=3$，

解得 $k=1$，

∴ 原方程为 $x^2-3x+2=0$，

∴ $x_1=1, x_2=2$.

15. 解：(1) 当 $k=0$ 时，原方程为 $-3x+1=0$，

解得 $x=\frac{1}{3}$，

∴ $k=0$ 符合题意；

当 $k\neq0$ 时，原方程为一元二次方程，

∵ 该一元二次方程有实数根，

∴ $(-3)^2-4\times k\times1\geqslant0$，

解得 $k\leqslant\frac{9}{4}$.

综上所述，k 的取值范围为 $k\leqslant\frac{9}{4}$.

(2) ∵ x_1 和 x_2 是方程 $kx^2-3x+1=0$ 的两个根，

∴ $x_1+x_2=\frac{3}{k}, x_1x_2=\frac{1}{k}$.

∵ $x_1+x_2+x_1x_2=4$，

∴ $\frac{3}{k}+\frac{1}{k}=4$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解得 $k=1$，

经检验，$k=1$ 是分式方程的解，且符合题意，

∴ k 的值为 1.

16. 解：(1) 由题意得，$(2m-1)^2-4(m^2-3)\geqslant 0$，∴ $m\leqslant\frac{13}{4}$.

(2) 当 $m=2$ 时，方程为 $x^2+3x+1=0$，

∴ $x_1+x_2=-3$，$x_1x_2=1$，

∵ 方程的根为 x_1，x_2，

∴ $x_1^2+3x_1+1=0$，$x_2^2+3x_2+1=0$，

∴ $(x_1^2+2x_1)(x_2^2+4x_2+2)$

$=(x_1^2+2x_1+x_1-x_1)(x_2^2+3x_2+x_2+2)$

$=(-1-x_1)(-1+x_2+2)$

$=(-1-x_1)(x_2+1)$

$=-x_2-x_1x_2-1-x_1$

$=-x_2-x_1-2$

$=3-2$

$=1$.

17. 解：(1) ∵ 方程有两个不相等的实数根，

∴ $[-(2k-1)]^2-4(k^2-2k+3)=4k-11>0$，

解得 $k>\frac{11}{4}$.

(2) 存在.

∵ $x_1x_2=k^2-2k+3=(k-1)^2+2>0$，

∴ 将 $|x_1|-|x_2|=\sqrt{5}$ 两边平方可得 $x_1^2-2x_1x_2+x_2^2=5$，即 $(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=5$，

∵ $x_1+x_2=2k-1$，$x_1x_2=k^2-2k+3$，

∴ $(2k-1)^2-4(k^2-2k+3)=5$，

整理得 $4k-11=5$，

解得 $k=4$.

24.4 一元二次方程的应用

第 1 课时 建立一元二次方程解几何问题

1. 解：设剪去正方形的边长为 x cm，则做成无盖长方体盒子的底面长为 $(30-2x)$ cm，宽为 $(20-2x)$ cm，高为 x cm，

依题意，得 $2[(30-2x)+(20-2x)]x=200$，

整理，得 $2x^2-25x+50=0$，

解得 $x_1=\frac{5}{2}$，$x_2=10$.

当 $x=10$ 时，$20-2x=0$，不合题意，舍去. 故 $x=\frac{5}{2}$.

答：当剪去正方形的边长为 $\frac{5}{2}$ cm 时，所得长方体盒子的侧面积为 200 cm².

2. $(12-x)(8-x)=77$（或 $x^2-20x+19=0$）

3. 解：(1) 设这个矩形地面的长是 x m，则依题意得 $x(20-x)=96$.

解得 $x_1=12$，$x_2=8$（舍去）.

答：这个矩形地面的长是 12 m.

(2) 用规格为 0.80 × 0.80（单位：m）的地板砖所需的费用：$96\div(0.80\times0.80)\times55=8\,250$（元）.

用规格为 1.00 × 1.00（单位：m）的地板砖所需的费用：$96\div(1.00\times1.00)\times80=7\,680$（元）.

∵ 8 250 元 > 7 680 元，

∴ 用规格为 1.00 × 1.00（单位：m）的地板砖所需的费用较少.

4. 解：(1) 设 x s 后，$\triangle PBQ$ 的面积等于 4 cm²，

则 $\frac{1}{2}\cdot2x\cdot(5-x)=4$，

解得 $x_1=1$，$x_2=4$.

当 $x=4$ 时，$2x=8>7$，不合题意，舍去，∴ $x=1$.

答：1 s 后，$\triangle PBQ$ 的面积等于 4 cm².

(2) 设 y s 后，$\triangle PBQ$ 的面积等于 7 cm².

由题意，得 $\frac{1}{2}\cdot2y\cdot(5-y)=7$，即 $y^2-5y+7=0$.

∵ $(-5)^2-4\times7<0$，

∴ 此方程无实数根.

∴ $\triangle PBQ$ 的面积不能等于 7 cm².

第 2 课时 建立一元二次方程解百分率问题

1. 解：(1) 设 2017 年到 2019 年该村人均收入的年平均增长率为 x，根据题意得 $20\,000\times(1+x)^2=24\,200$，

解得 $x_1=0.1=10\%$，$x_2=-2.1$（不合题意，舍去）.

答：2017 年到 2019 年该村人均收入的年平均增长率为 10%.

(2) $24\,200\times(1+10\%)=26\,620$（元）.

答：预测 2020 年该村的人均收入是 26 620 元.

2. 解：设降价后的销售单价为 x 元，则降价后每天可售出 $[300+5(200-x)]$ 个，

依题意，得 $(x-100)[300+5(200-x)]=32\,000$，

整理，得 $x^2-360x+32\,400=0$，

解得 $x_1=x_2=180$，

180 元 < 200 元，符合题意.

答：这种电子产品降价后的销售单价为 180 元时，公司每天可获利 32 000 元.

3. 解：(1) 设该养殖场蛋鸡产蛋量的月平均增长率为 x，

根据题意得 $2.5(1+x)^2=3.6$，

解得 $x_1=0.2=20\%$，$x_2=-2.2$（不合题意，舍去）.

答：该养殖场蛋鸡产蛋量的月平均增长率为 20%.

(2) 设再增加 y 个销售点，

根据题意得 $3.6+0.32y\geqslant3.6\times(1+20\%)$，解得 $y\geqslant\frac{9}{4}$.

∵ y 为整数，∴ $y=3$.

答：至少再增加 3 个销售点.

第 3 课时 建立一元二次方程解一般问题

1. C

2. 解：(1) 设每轮分裂中每个有益菌可分裂出 x 个有益菌，根据题意，得 $60(1+x)^2=24\,000$.

解得 $x_1=19$，$x_2=-21$（不合题意，舍去）.

答：每轮分裂中每个有益菌可分裂出 19 个有益菌.

(2) $60\times(1+19)^3=60\times20^3=480\,000$（个）.

答：经过三轮培植后共有 480 000 个有益菌.

3. A

4. 解：设应邀请 x 支球队参加比赛，

根据题意，可列出方程 $\frac{x(x-1)}{2}=28$. 解这个方程，得 $x_1=8$，$x_2=-7$（舍去）.

答：应邀请 8 支球队参加比赛.

5. 解：设原两位数的十位数字为 x，则个位数字为 $x+4$，根据题意得 $(10x+x+4)[10(x+4)+x]=765$，整理得 $x^2+4x-5=0$，解得 $x_1=1$，$x_2=-5$（舍去），则 $x+4=5$，故原两位数为 $10x+x+4=10\times1+5=15$.

6. 解：由题意得 $n+n^2+1=421$，解得 $n_1=-21$（舍去），$n_2=20$.

答：n 的值是 20.

7. 解：(1) 设这个多边形的边数为 n，根据题意得 $\frac{1}{2}n(n-3)=14$，整理得 $n^2-3n-28=0$，解得 $n=7$ 或 $n=-4$.

∵ $n\geqslant3$，∴ $n=-4$，不合题意，舍去.

∴ $n=7$，即这个多边形的边数是 7.

(2) 人同学的说法是不正确的. 理由如下：设这个多边形的边数为 n，则 $\frac{1}{2}n(n-3)=10$，整理得 $n^2-3n-20=0$，解得 $n=\frac{3\pm\sqrt{89}}{2}$，

∴ 符合方程 $n^2-3n-20=0$ 的正整数 n 不存在，

∴ 多边形的对角线不可能有 10 条，即 A 同学的说法不正确.

8. 解：(1) 设年销售量 y 与销售单价 x 的函数关系式为 $y=kx+b(k\neq0)$，

由题意得 $\begin{cases}40k+b=600,\\45k+b=550,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=-10,\\b=1\,000.\end{cases}$

∴ 年销售量 y 与销售单价 x 的函数关系式为 $y=-10x+1\,000$.

(2) 根据题意可知每台设备的利润为 $(x-30)$ 万元，年销售量为 $(-10x+1\,000)$ 台.

则 $(x-30)(-10x+1\,000)=10\,000$，

整理，得 $x^2-130x+4\,000=0$，

解得 $x_1=50$，$x_2=80$.

∵ 此设备的销售单价不得高于 70 万元，∴ $x=50$.

答：该设备的销售单价应是 50 万元.

9. 解：(1) 设该市这两年投入基础教育经费的年平均增长率为 x，

根据题意，得 $5\,000(1+x)^2=7\,200$，

解得 $x_1=0.2=20\%$，$x_2=-2.2$（舍去）.

答：该市这两年投入基础教育经费的年平均增长率为 20%.

(2) 由题意知，2018 年投入基础教育经费为 $7\,200\times(1+20\%)=8\,640$（万元），

设购买电脑 m 台，则购买实物投影仪 $(1\,500-m)$ 台，

根据题意，得 $3\,500m+2\,000(1\,500-m)\leqslant86\,400\,000\times5\%$，

解得 $m\leqslant880$.

答：最多可购买电脑 880 台.

阶段核心归类

1. 解：(1) 设 2018 年甲类芯片的产量为 x 万块，

由题意得 $x+2x+(x+2x)+400=2\,800$，

解得 $x=400$.

答：2018 年甲类芯片的产量为 400 万块.

(2) 2018 年丙类芯片的产量为 $3\times400+400=1\,600$（万块）.

设丙类芯片的产量每年增加的数量为 y 万块，

则 $1\,600+1\,600+y+1\,600+2y=14\,400$，

解得 $y=3\,200$.

∴ 丙类芯片 2020 年的产量为 $1\,600+2\times3\,200=8\,000$（万块）.

2018 年 HW 公司手机产量为 $2\,800\div10\%=28\,000$（万部），由题意得 $400(1+m\%)^2+2\times400(1+m\%-1)^2+8\,000=28\,000\times(1+10\%)$，设 $m\%=t$，化简得 $3t^2+2t-56=0$，

解得 $t=4$ 或 $t=-\frac{14}{3}$（舍去）.

∴ $t=4$.

∴ $m\%=4$.

∴ $m=400$.

答：丙类芯片 2020 年的产量为 8 000 万块，m 的值为 400.

2. 解：(1) 设一次函数关系式为 $y=kx+b$，将 $x=2$，$y=120$ 和 $x=4$，$y=140$ 分别代入得 $\begin{cases}2k+b=120,\\4k+b=140,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=10,\\b=100.\end{cases}$

∴ y 与 x 之间的函数关系式为 $y=10x+100$.

(2) 由题意得 $(60-40-x)(10x+100)=2\,090$，

整理得 $x^2-10x+9=0$，

解得 $x_1=1$，$x_2=9$.

∵ 要让顾客得到更大的实惠，∴ $x=9$.

答：这种干果每千克应降价 9 元.

3. 解：设第一次存款时的年利率为 x.

则根据题意，得 $[1\,000(1+x)-500](1+0.9x)=530$.

整理，得 $90x^2+145x-3=0$.

解这个方程，得 $x_1\approx0.020\,4=2.04\%$，$x_2\approx-1.63$（舍去）.

答：第一次存款时的年利率约是 2.04%.

4. 解：设竹笋的长为 x 米，

∵ 横着比城门宽 4 米，竖着比城门高 2 米，

∴ 城门高为 $(x-2)$ 米，宽为 $(x-4)$ 米.

∵ 对角斜着拿刚好可以进城门，

∴ 可列方程为 $(x-2)^2+(x-4)^2=x^2$，

解得 $x_1=2$（舍去），$x_2=10$.

答：竹竿的长为 10 米.

5. 解：设周瑜去世时的年龄的个位数字为 x，则十位数字为 $x-3$.

根据题意，得 $x^2=10(x-3)+x$，即 $x^2-11x+30=0$，解这个方程，得 $x=5$ 或 $x=6$.

当 $x=5$ 时，周瑜去世时的年龄为 25 岁，不合题意，舍去；

当 $x=6$ 时，周瑜去世时的年龄为 36 岁，完全符合题意.

答：周瑜去世时的年龄为 36 岁.

6. 解：设每轮感染中平均一台电脑会感染 x 台电脑.

则 $1+x+x(1+x)=81$，

解得 $x_1=8$，$x_2=-10$（舍去），

三轮感染后的电脑总数为 $81+81\times8=729$（台），729 台 > 700 台.

答：每轮感染中平均一台电脑会感染 8 台电脑，若病毒得不到有效控制，三轮后被感染的电脑总数会超过 700 台.

7. 解：(1) 设收到微信红包的年平均增长率是 x，

根据题意，得 $400(1+x)^2=484$，

解得 $x_1=-2.1$（舍去），$x_2=0.1=10\%$.

答：2018 年到 2020 年甜甜和她的妹妹在六一收到微信红包的年平均增长率是 10%.

(2) 设甜甜收到了 y 元微信红包，则她的妹妹收到了 $(2y+34)$ 元微信红包.

根据题意，得 $y+2y+34=484$，

解得 $y=150$，

则 $2y+34=334$.

答：2020 年六一，甜甜和她的妹妹分别收到了 150 元和 334 元的微信红包.

8. 解：设小路的宽应为 x m，

根据题意得 $(16-2x)(9-x)=112$，

整理得 $x^2-17x+16=0$，

解得 $x_1=1$，$x_2=16$.

∵ $16>9$，∴ $x=16$ 不符合题意，舍去.

∴ $x=1$.

答：小路的宽应为 1 m.

9. 解：设每周多观人数 y（人）与票价 x（元）之间的一次函数表达式为 $y=kx+b(x>0)$，

根据题意，得 $\begin{cases}10k+b=7\,000,\\15k+b=4\,500,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=-500,\\b=12\,000.\end{cases}$

∴ $y=-500x+12\,000(x>0)$.

根据题意，得 $xy=40\,000$，

即 $x(-500x+12\,000)=40\,000$，

整理得 $x^2-24x+80=0$，

解得 $x_1=20$，$x_2=4$.

把 $x_1=20$，$x_2=4$ 分别代入 $y=-500x+12\,000$，得 $y_1=2\,000$，$y_2=10\,000$.

∵ 要控制参观人数，

∴ 取 $x=20$，

此时 $y=2\,000$.

答：每周应限定参观人数为 2 000 人，门票价格应是 20 元.

10. 解：(1) 由题意易得 $k=-15$，则原方程为 $x^2-15x+56=0$，

即 $(x-7)(x-8)=0$，

解得 $x_1=7$，$x_2=8$.

(2) 第 n 个方程为 $x^2-(2n-1)x+n(n-1)=0$，它的根为 $x_1=n-1$，$x_2=n$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

全章热门考点整合应用

1. 解：当 $m^2+1=2$ 且 $m-1\neq 0$ 时，方程 $(m-1)x^{m^2+1}+2mx+3=0$ 是关于 x 的一元二次方程.
由 $m^2+1=2$，得 $m^2=1$，
所以 $m=\pm 1$.
由 $m-1\neq 0$，得 $m\neq 1$，
所以只能取 $m=-1$.
所以当 $m=-1$ 时，方程 $(m-1)x^{m^2+1}+2mx+3=0$ 是关于 x 的一元二次方程.
点拨：要准确理解一元二次方程的概念，需从次数和系数两方面考虑.

2. 解：由题意得 $c-4\geqslant 0$ 且 $4-c\neq 0$.
$\therefore c=4$，则 $a=-2$.
又 $\because -1$ 是一元二次方程 $ax^2+bx+e=0$ 的一个根，
$\therefore a-b+e=0$，
$\therefore b=a+e=-2+4=2$.
$\therefore$ 原式 $=\frac{(-2+2)^{2020}}{2\,019\times 4}=0$.

3. 解：(1) $(x-1)^2+2x(x-1)=0$，
$(x-1)(x-1+2x)=0$，
$(x-1)(3x-1)=0$，
$\therefore x_1=1, x_2=\frac{1}{3}$.
(2) $x^2-6x-6=0$，
$x^2-6x=6$，
$x^2-6x+9=15$，
$(x-3)^2=15$，
$x-3=\pm\sqrt{15}$，
$\therefore x_1=3+\sqrt{15}, x_2=3-\sqrt{15}$.
(3) $6\,000(1-x)^2=4\,860$，
$(1-x)^2=0.81$，
$1-x=\pm 0.9$，
$\therefore x_1=1.9, x_2=0.1$.
(4) $(10+x)(50-x)=800$，
$x^2-40x+300=0$，
$(x-10)(x-30)=0$，
$\therefore x_1=10, x_2=30$.
(5) $(2x-1)^2=x(3x+2)-7$，
$4x^2-4x+1=3x^2+2x-7$，
$x^2-6x+8=0$，
$(x-2)(x-4)=0$，
$\therefore x_1=2, x_2=4$.

4. A

5. 解：$\because$ 关于 x 的方程 $x^2+(b+2)x+(6-b)=0$ 有两个相等的实数根，
$\therefore (b+2)^2-4(6-b)=0$，
$\therefore b_1=2, b_2=-10$（舍去）.
当 a 为腰长时，$\triangle ABC$ 的周长为 $5+5+2=12$；
当 b 为腰长时，$2+2<5$，不能构成三角形.
$\therefore \triangle ABC$ 的周长为 12.

6. 解：(1) $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2-2(a-1)x+a^2-a-2=0$ 有两个不相等的实数根，
$\therefore [-2(a-1)]^2-4(a^2-a-2)>0$，
解得 $a<3$，
$\because a$ 为正整数，$\therefore a=1,2$.
(2) 易得 $x_1+x_2=2(a-1)$，$x_1x_2=a^2-a-2$，
$\because x_1^2+x_2^2-x_1x_2=16$，
$\therefore (x_1+x_2)^2-3x_1x_2=16$，
$\therefore [2(a-1)]^2-3(a^2-a-2)=16$，
解得 $a_1=-1, a_2=6$，
$\because a<3$，$\therefore a=-1$.

7. 解：(1) $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2-6x+(4m+1)=0$ 有实数根，
$\therefore (-6)^2-4\times 1\times(4m+1)\geqslant 0$，
解得 $m\leqslant 2$.
(2) $\because$ 方程 $x^2-6x+(4m+1)=0$ 的两个实数根为 x_1, x_2，
$\therefore x_1+x_2=6, x_1x_2=4m+1$，
$\therefore (x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=4^2$，即 $32-16m=16$，
解得 $m=1$.

8. 解：(1) 设进馆人次的月平均增长率为 x，则由题意得
$128+128(1+x)+128(1+x)^2=608$，
化简得 $4x^2+12x-7=0$，
解得 $x_1=0.5=50\%, x_2=-3.5$（舍去）.
答：进馆人次的月平均增长率为 50%.
(2) 能，理由如下：
$\because$ 进馆人次的月平均增长率为 50%，
$\therefore$ 四个月的进馆人次为 $128(1+50\%)^3=128\times\frac{27}{8}=432<500$.
故校图书馆能接纳第四个月的进馆人次.

9. 解：(1) $-1;5;-2;-3;1;-9$
(2) 这两个数的和等于一次项系数，积等于常数项.

10. 解：(1) $(x-2)^2-2;(x-\sqrt{2})^2-(4-2\sqrt{2})x+2(x-1)^2-x^2$.
(2) $a^2+b^2+c^2-ab-3b-2c+4=\left(a-\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}(b-2)^2+(c-1)^2=0$，
所以 $a-\frac{1}{2}b=0, b-2=0, c-1=0$.
所以 $a=1, b=2, c=1$.
所以 $a+b+c=4$.

11. 解：$\because x=a$ 是方程 $2x^2+x-2=0$ 的一个根，
$\therefore 2a^2+a-2=0$，即 $2a^2+a=2$.
$\therefore$ 原式 $=a^2(2a^2+a)+2a^2+2a+1=2a^2+2a^2+2a+1=2(2a^2+a)+1=5$.

12. 解：设 $2x+1=y$，则原方程可化为 $y^2-3y=-2$.
解得 $y_1=1, y_2=2$.
当 $y=1$ 时，有 $2x+1=1$，
所以 $x=0$；
当 $y=2$ 时，有 $2x+1=2$，
所以 $x=\frac{1}{2}$.
所以原方程的解为 $x_1=0, x_2=\frac{1}{2}$.
点拨：利用**转化思想**将复杂的一元二次方程转化为简单的一元二次方程来求解.

13. 解：(1) 由题意得 $4(a-1)^2-4(a^2-7a-4)=20a+20\geqslant 0$，
$\therefore a\geqslant -1$.
(2) 若 $x_1^2=x_1x_2$，则 $x_1(x_1-x_2)=0$，故 $x_1=0$ 或 $x_1=x_2$.
当 $x_1=0$ 时，代入原方程得 $a^2-7a-4=0$，解得 $a=\frac{7\pm\sqrt{65}}{2}$.
而此时 $x_1+x_2=-2(a-1)$，
$\therefore x_2=-2(a-1)$.
故 $x_2=-5-\sqrt{65}$ 或 $x_2=-5+\sqrt{65}$；
当 $x_1=x_2$ 时，$20a+20=0$，
$\therefore a=-1$.
$\therefore$ 原方程为 $x^2-4x+4=0$，解得 $x_1=x_2=2$.



第二十五章　图形的相似

25.1　比例线段

1. D　**2.** D　**3.** A　**4.** B　**5.** D

6. C　**点拨：**根据比例线段的判断方法，让最短的线段和最长的线段相乘，另外两条线段相乘，看它们的积是否相等，即可得出答案.
A. $4\times 10=5\times 8$，能成比例；
B. $2\times 5=2\sqrt{5}\times\sqrt{5}$，能成比例；
C. $1\times 4\neq 2\times 3$，不能成比例；
D. $1\times 4=2\times 2$，能成比例. 故选 C.

7. B

8. A　**点拨：**由 $a:b=3:4$ 知 $3b=4a$，$\therefore b=\frac{4a}{3}$.　由 $a+b=14$ 得到 $a+\frac{4a}{3}=14$，解得 $a=6$.　$\therefore b=8$.　$\therefore 2a-b=2\times 6-8=4$.

9. 12

10. D　**点拨：**根据宽与长的比是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 的矩形是黄金矩形来判断.

11. C　**点拨：**设绳子的总长度为 x 米，由题意得 $x-\frac{\sqrt{5}-1}{2}x=3-\sqrt{5}$，解得 $x=2$.

12. D　**点拨：**本题易忽略线段成比例的顺序而漏解.

13. 解：(1) $\because AB=8$ cm，$BC=12$ cm，$A'B'=4$ cm，$B'C'=6$ cm，
$\therefore \frac{A'B'}{AB}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}, \frac{B'C'}{BC}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$.
(2) 由 (1) 知 $\frac{A'B'}{AB}=\frac{1}{2}, \frac{B'C'}{BC}=\frac{1}{2}$，
$\therefore \frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}$，$\therefore$ 线段 $A'B'$，AB，$B'C'$，BC 是成比例线段.

14. 解：(1) 设 $\frac{a}{3}=\frac{b}{4}=\frac{c}{6}=k$，
$\therefore a=3k, b=2k, c=6k$.
$\because a+2b+c=26$，
$\therefore 3k+4k+6k=26$.
$\therefore k=2$.　$\therefore a=6, b=4, c=12$.
(2) $\because$ 线段 x 是线段 a, b 的比例中项，$\therefore x^2=ab$.
又 $\because a=6, b=4$，$\therefore x=2\sqrt{6}$（负值舍去）.
$\therefore$ 线段 x 的长为 $2\sqrt{6}$.

15. 解：(1) $\because \frac{a+4}{3}=\frac{b+3}{2}=\frac{c+8}{4}$，
$\therefore \frac{a+4+b+3+c+8}{3+2+4}=\frac{a+4}{3}$，即 $\frac{a+b+c+15}{9}=\frac{a+4}{3}$.
又 $\because a+b+c=12$，
$\therefore \frac{12+15}{9}=\frac{a+4}{3}$，即 $\frac{a+4}{3}=3$，
解得 $a=5$.
由 $\frac{b+3}{2}=\frac{c+8}{4}=3$，解得 $b=3, c=4$.
(2) $\because b^2+4^2=5^2$，即 $b^2+c^2=a^2$，
$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形.

16. 解：(1) 在折叠过程中，这些矩形的长和宽的比不变.
理由如下：设矩形 $ABCD$ 的宽为 a，则长为 $\sqrt{2}a$，
$\therefore BC=a$，$BE=AE=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，$ME=MF=\frac{a}{2}$，$HF=LG=\frac{\sqrt{2}}{4}a$，$LN=\frac{a}{4}$，
$\therefore \frac{BC}{BE}=\frac{a}{\frac{\sqrt{2}}{2}a}=\sqrt{2}, \frac{AE}{ME}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\frac{a}{2}}=\sqrt{2}$，
$\frac{MF}{HF}=\frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{4}a}=\sqrt{2}, \frac{LG}{LN}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}a}{\frac{a}{4}}=\sqrt{2}$，
$\therefore$ 在折叠过程中，这些矩形的长和宽的比不变.
(2) 有成比例的线段，如 $AB:AD=BC:BE$.

25.2　平行线分线段成比例

第 1 课时　平行线分线段成比例的基本事实及推论

1. C　**2.** C　**3.** 4

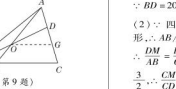
4. B　**点拨：**$\because DE\parallel BC$，
$\therefore \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$
$\because AD=1, BD=2$，
$\therefore AB=3$，
$\therefore \frac{1}{3}=\frac{AE}{AC}$，$\therefore \frac{AE}{AC}=\frac{1}{3}$. 故选 B.

5. C

6. C　**点拨：**$\because DE\parallel BC$，
$\therefore AE:EC=AD:DB=1:2$.
$\because EF\parallel AB$，
$\therefore BF:FC=AE:EC=1:2$.
$\because CF=6$，
$\therefore BF=3$. 故选 C.

7. A　**8.** C

9. B　**点拨：**如图，过 O 作 $OG\parallel BC$，交 AC 于 G.



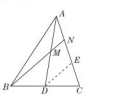
（第 9 题）

$\because O$ 是 BD 的中点，
$\therefore G$ 是 DC 的中点.
又 $\because AD:DC=1:2$，
$\therefore AD=DG=GC$.
$\because AG:GC=2:1$，
$\therefore AO:OE=2:1$.
$\therefore S_{\triangle AOB}:S_{\triangle BOE}=2:1$.
设 $S_{\triangle BOE}=S$，则 $S_{\triangle AOB}=2S$，$S_{\triangle ABE}=3S$. 又 $\because BO=OD$，
$\therefore S_{\triangle AOD}=2S$，
$\therefore S_{\triangle ABD}=4S$.
$\because AD:BC=1:2$，
$\therefore S_{\triangle ADC}=2S_{\triangle ABD}=8S$，
$\therefore S_{四边形CDOE}=7S$.
$\therefore S_{\triangle AEC}=9S$，
$\therefore \frac{BE}{EC}=\frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle AEC}}=\frac{3S}{9S}=\frac{1}{3}$.

10. 解：(1) $\because a\parallel b\parallel c$，
$\therefore \frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$，即 $\frac{3}{5}=\frac{4}{EF}$，
解得 $EF=\frac{20}{3}$.
(2) $\because a\parallel b\parallel c$，
$\therefore \frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}=\frac{2}{5}$，
$\therefore \frac{DE+EF}{EF}=\frac{2+5}{5}$，即 $\frac{10}{EF}=\frac{7}{5}$，
解得 $EF=\frac{50}{7}$.

11. 证明：$\because AD\parallel BC$，
$\therefore \frac{AM}{NC}=\frac{AO}{CO}=\frac{AD}{BC}=\frac{PD}{PC}=\frac{MD}{NC}$，
$\therefore \frac{AM}{NC}=\frac{MD}{NC}$，$\therefore AM=MD$.

12. 证明：如图，过点 D 作 $DE\parallel BN$，交 AC 于点 E.
$\because AD$ 是 BC 边上的中线，
$\therefore BD=DC$.
又 $\because DE\parallel BN$，
$\therefore CE=NE$.
又 $\because M$ 是 AD 的中点，$DE\parallel MN$，
$\therefore AN=NE$.
$\therefore AN=NE=CE$.
$\therefore CN=NE+CE=2AN$.
$\therefore AN=\frac{1}{2}CN$.



（第 12 题）

13. 解：(1) $\because GF\parallel BC$，$\therefore \frac{DF}{FC}=\frac{DG}{BC}$，
$\because BD=20$，$\frac{DF}{FC}=\frac{3}{2}$，$\therefore BC=8$.
(2) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\therefore AB\parallel CD$，$AB=CD$，
$\because \frac{DM}{AB}=\frac{DG}{GB}$，$\frac{DM}{AB}=\frac{3}{2}$，$\therefore \frac{DM}{CD}=\frac{3}{2}$，$\therefore \frac{CM}{CD}=\frac{1}{2}$.

第 2 课时　平行线分线段成比例的应用

1. 证明：(1) 在菱形 $ABCD$ 中，$AD=BC$，$\angle A=\angle C$.
$\because AB=CD$，$BE=DF$，$\therefore AE=CF$，
$\therefore \triangle ADE\cong\triangle CBF$.
(2) $\because \triangle ADE\cong\triangle CBF$，$\therefore DE=BF$.
$\because$ 在菱形 $ABCD$ 中，$BC=CD$，$AB\parallel CD$，
$\therefore \frac{GE}{DE}=\frac{GB}{BC}$，$\frac{GE}{BF}=\frac{GB}{CD}$.

2. 证明：$\because DE\parallel BC$，$\therefore \frac{PD}{PB}=\frac{PE}{PC}$.
$\because PD\cdot PC=PE\cdot PB$.
$\therefore DF\parallel AC$，
$\therefore \frac{PF}{PC}=\frac{PD}{PA}$.
$\therefore PD\cdot PC=PF\cdot PA$.
$\therefore PE\cdot PB=PF\cdot PA$.
$\therefore \frac{PE}{PF}=\frac{PA}{PB}$.

3. 证明：$\because EF\parallel CD$，
$\therefore \frac{AF}{AD}=\frac{AE}{AC}$.
$\because DE\parallel BC$，
$\therefore \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$.
$\therefore \frac{AD}{AB}=\frac{AF}{AD}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

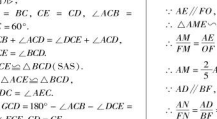
4. 证明：(1)∵ △*ABC* 与△*DCE* 都是等边三角形，
∴ *AC* = *BC*，*CE* = *CD*，∠*ACB* = ∠*DCE* = 60°.
∴ ∠*ACB* + ∠*ACD* = ∠*DCE* + ∠*ACD*，即∠*ACE* = ∠*BCD*.
∴ △*ACE*≌△*BCD*(SAS).
(2)∵ △*ACE*≌△*BCD*，
∴ ∠*BDC* = ∠*AEC*.
又∵ ∠*GCD* = 180° − ∠*ACB* − ∠*DCE* = 60° = ∠*FCE*，*CD* = *CE*，
∴ △*GCD*≌△*FCE*(ASA).
∴ *CG* = *CF*.
∴ △*CFG* 为等边三角形.
∴ ∠*CFG* = ∠*DCE* = 60°.
∴ *GF*∥*CE*.
∴ $\frac{AG}{GC}=\frac{AF}{FE}$.

5. 证明：∵ *DE*∥*BC*，∴ $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$.
∵ 点 *D* 为 *AB* 的中点，
∴ *AD* = *DB*，即$\frac{AD}{DB}=1$.
∵ *CF*∥*BA*，∴ $\frac{DE}{EF}=\frac{AE}{EC}=\frac{AD}{DB}=1$.
∴ *DE* = *EF*.

6. 证明：∵ *AC*∥*EF*，∴ $\frac{BE}{BC}=\frac{BF}{BA}$①.
∵ *FE*∥*BD*，
∴ $\frac{AE}{AD}=\frac{AF}{AB}$②. ① + ②，得$\frac{BE}{BC}+\frac{AE}{AD}=\frac{BF}{BA}+\frac{AF}{AB}=\frac{AB}{AB}=1$，
即$\frac{AE}{AD}+\frac{BE}{BC}=1$.

25.3 相似三角形

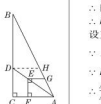
1. C　**2.** C　**3.** A　**4.** C　**5.** B　**6.** C
7. C　**点拨**：如图，过点 *F* 作 *FH*⊥*AD* 于点 *H*，交 *ED* 于 *O*，则 *FH* = *AB* = 2，



(第 7 题)

∵ *AE* = *EB*，*BF* = *FC*，*BC* = *AD* = 2，
∴ *AE* = *EH* = 1，*BF* = *AH* = 1，*FC* = *HD* = 1，
∴ $AF=\sqrt{FH^2+AH^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$.
∵ *OH*∥*AE*，
∴ △*DHO*∽△*DAE*.
∴ $\frac{HO}{AE}=\frac{DH}{AD}=\frac{1}{2}$.
∴ $OH=\frac{1}{2}AE=\frac{1}{2}$，
∴ $OF=FH-OH=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.
∵ *AE*∥*FO*，
∴ △*AME*∽△*FMO*，
∴ $\frac{AM}{FM}=\frac{AE}{OF}=\frac{2}{3}$，
∴ $AM=\frac{2}{5}AF=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.
∵ *AD*∥*BF*，∴ △*AND*∽△*FNB*，
∴ $\frac{AN}{FN}=\frac{AD}{BF}=2$，∴ $AN=\frac{2}{3}AF=\frac{2\sqrt{5}}{3}$，
∴ $MN=AN-AM=\frac{2\sqrt{5}}{3}-\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{4\sqrt{5}}{15}$.
故选 C.

8. B　**点拨**：如图，作 *DH*∥*EG* 交 *AB* 于点 *H*，则△*AEG*∽△*ADH*.



(第 8 题)

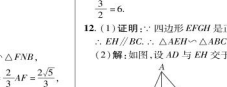
∴ $\frac{AE}{AD}=\frac{EG}{DH}$
∵ *EF*⊥*AC*，∠*C* = 90°，
∴ ∠*EFA* = ∠*C* = 90°.
∴ *EF*∥*CD*.
∴ △*AEF*∽△*ADC*.
∴ $\frac{AE}{AD}=\frac{EF}{CD}$.
∴ $\frac{EG}{DH}=\frac{EF}{CD}$
∴ *EG* = *EF*，
∴ *DH* = *CD*.
设 *DH* = *x*，则 *CD* = *x*.
∵ *BC* = 12，*AC* = 6，∴ *BD* = 12 − *x*.
∵ *EF*⊥*AC*，*EF*⊥*EG*，*DH*∥*EG*，
∴ *EG*∥*AC*∥*DH*. ∴ △*BDH*∽△*BCA*.
∴ $\frac{DH}{AC}=\frac{BD}{BC}$，即$\frac{x}{6}=\frac{12-x}{12}$，解得 *x* = 4. ∴ *CD* = 4.

9. 错解：D
正解：A
误区诊断：不能准确找出相似三角形的对应边，从而不能准确写出对应线段所成的比例式.

10. (1)证明：∵ 四边形 *ABCD* 为平行四边形，
∴ *AD*∥*BE*. ∴ △*AMD*∽△*EMB*.
(2)解：∵ *AD*∥*BC*，
∴ △*FND*∽△*ENB*. ∴ $\frac{FN}{NE}=\frac{DN}{BN}$.
∵ *M*，*N* 为 *BD* 的三等分点，∴ $\frac{DN}{BN}=\frac{1}{2}$，∴ $\frac{FN}{NE}=\frac{1}{2}$.

11. (1)证明：∵ 四边形 *ABCD* 是平行四边形，∴ *AD*∥*BC*.
∵ *DF* = *BE*，
∴ 四边形 *BEFD* 是平行四边形，
∴ *BD*∥*EF*.
(2)解：∵ *BE* = 4，∴ *DF* = 4.
∵ *DF*∥*EC*，
∴ △*DFG*∽△*CEG*，
∴ $\frac{DG}{CG}=\frac{DF}{CE}$，
∴ $EC=\frac{DF\cdot CG}{DG}=DF\cdot\frac{CG}{DG}=4\times\frac{3}{2}=6$.

12. (1)证明：∵ 四边形 *EFGH* 是正方形，∴ *EH*∥*BC*. ∴ △*AEH*∽△*ABC*.
(2)解：如图，设 *AD* 与 *EH* 交于点 *M*.



(第 12 题)

∵ ∠*EFD* = ∠*FEM* = ∠*FDM* = 90°，
∴ 四边形 *EFDM* 是矩形.
∴ *EF* = *DM*.
设正方形 *EFGH* 的边长为 *x*，
∵ △*AEH*∽△*ABC*，∴ $\frac{EH}{BC}=\frac{AE}{AB}$
∵ *EM*∥*BD*，∴ △*AEM*∽△*ABD*，
∴ $\frac{AE}{AB}=\frac{AM}{AD}$.
∴ $\frac{EH}{BC}=\frac{AM}{AD}$.
∴ $\frac{x}{40}=\frac{30-x}{30}$.
∴ $x=\frac{120}{7}$.
∴ 正方形 *EFGH* 的边长为$\frac{120}{7}$ cm，面积为$\frac{14\,400}{49}$ cm².

13. (1)证明：∵ ∠*OED* = ∠*OBA*，∠*OEF* = ∠*OBC*，
∴ *DE*∥*AB*，*EF*∥*BC*. 由 *DE*∥*AB*，
得△*ODE*∽△*OAB*，


第13题答案

∴ $\frac{OD}{OA}=\frac{OE}{OB}$
由 *EF*∥*BC*，得△*OFE*∽△*OCB*，
∴ $\frac{OF}{OC}=\frac{OE}{OB}$
∴ $\frac{OD}{OA}=\frac{OF}{OC}$
(2)解：是. 理由如下：
由△*OFE*∽△*OCB*，得$\frac{EF}{BC}=\frac{OE}{OB}$
由△*ODE*∽△*OAB*，得$\frac{DE}{AB}=\frac{OE}{OB}$.
∴ $\frac{DE}{AB}=\frac{EF}{BC}$.
∵ △*DEF* 是以 *DF* 为底边的等腰三角形，
∴ *DE* = *EF*.
∴ *AB* = *BC*，即△*ABC* 是以 *AC* 为底边的等腰三角形.

25.4 相似三角形的判定

第 1 课时　用角的关系判定两三角形相似

1. A
2. C　**点拨**：图中三角形有 △*AEG*，△*ADC*，△*CFG*，△*CBA*. 由 *AB*∥*EF*∥*DC*，*AD*∥*BC*，可得△*AEG*∽△*ADC*∽△*CFG*∽△*CBA*，有 6 种组合.
3. C
4. B
5. C　**点拨**：∵ ∠*ADE* = ∠*ACB*，∠*A* = ∠*A*，∴ △*ADE*∽△*ACB*. ∴ $\frac{AD}{AC}=\frac{AE}{AB}$，
即$\frac{2}{4}=\frac{AE}{6}$，解得 *AE* = 3.
6. B　**点拨**：∵ ∠*C* = 90°，*AB* = 5，*BC* = 4，
∴ $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=3$.
∵ *PQ*∥*AB*，
∴ ∠*ABD* = ∠*BDQ*.
又∵ ∠*ABD* = ∠*QBD*，
∴ ∠*QBD* = ∠*BDQ*.
∴ *QB* = *QD*. ∴ *QP* = 2*QB*.
由 *PQ*∥*AB*，可得 ∠*CPQ* = ∠*A*.
又∵ ∠*C* = ∠*C*，
∴ △*CPQ*∽△*CAB*.
∴ $\frac{CP}{CA}=\frac{CQ}{CB}=\frac{PQ}{AB}$.
即$\frac{CP}{3}=\frac{4-QB}{4}=\frac{2QB}{5}$，解得 $CP=\frac{24}{13}$.
∴ $AP=CA-CP=\frac{15}{13}$.
7. D
8. 错解：D
正解：A
误区诊断：不能准确找出相似三角形的对应边，从而不能准确写出对应线段所成的比例式.
9. 证明：(1)∵ △*ABC* 与△*DCE* 都是等边三角形，
∴ *AC* = *BC*，*CD* = *CE*，∠*ACB* = ∠*DCE* = 60°.
∴ ∠*ACB* + ∠*ACE* = ∠*ACE* + ∠*DCE*，即∠*BCE* = ∠*ACD*.
在△*BCE* 和△*ACD* 中，
$\begin{cases}BC=AC,\\ \angle BCE=\angle ACD,\\ CE=CD,\end{cases}$
∴ △*BCE*≌△*ACD*，∴ *AD* = *BE*.
(2)由(1)知，△*BCE*≌△*ACD*，
∴ ∠*CBE* = ∠*CAD*.
∴ ∠*BMC* = ∠*AMF*，
∴ ∠*AFB* = ∠*ACB* = 60° = ∠*ABD*.
又∵ ∠*BAF* = ∠*DAB*，
∴ △*ABF*∽△*ADB*.
10. (1)证明：∵ 四边形 *ABCD* 是平行四边形，
∴ *AD*∥*BC*，*AD* = *BC*.
∴ ∠*EBF* = ∠*AED*，
∴ △*EBF*∽△*EAD*.
∴ $\frac{BF}{AD}=\frac{EB}{EA}=\frac{1}{2}$.
∴ $BF=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}BC$.
∴ *BF* = *CF*.
(2)解：∵ 四边形 *ABCD* 是平行四边形，
∴ *AD*∥*BC*.
∴ ∠*FCG* = ∠*DAG*.
又∵ ∠*FGC* = ∠*DGA*，
∴ △*FGC*∽△*DGA*.
∴ $\frac{FG}{DG}=\frac{FC}{AD}$，即$\frac{FG}{4}=\frac{1}{2}$，
解得 *FG* = 2.
11. (1)解：∵ 在矩形 *ABCD* 中，*AD*∥*CF*，
∴ ∠*DAF* = ∠*AFC*.
∵ *AF* 平分 ∠*DAC*，
∴ ∠*DAF* = ∠*CAF*.
∴ ∠*FAC* = ∠*AFC*.
∴ *AC* = *CF*.
∵ *AB* = 4，*BC* = 3，
∴ $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$.
∴ *CF* = 5.
由 *AD*∥*CF*，可得 ∠*EAD* = ∠*EFC*，∠*ADE* = ∠*FCE*，
∴ △*ADE*∽△*FCE*.
∴ $\frac{AD}{CF}=\frac{DE}{CE}$.
设 *DE* = *x*，则$\frac{3}{5}=\frac{x}{4-x}$，
解得 $x=\frac{3}{2}$. 经检验，$x=\frac{3}{2}$ 是分式方程的解.
∴ $DE=\frac{3}{2}$.
(2)证明：∵ *AD*∥*FH*，*AH*∥*DF*，
∴ 四边形 *ADHF* 是平行四边形.
∴ *AD* = *FH* = 3.
∵ *CH* = 2，*BH* = 5.
由 *AD*∥*BH*，可得 ∠*DAG* = ∠*BHG*，∠*ADG* = ∠*HBG*，
∴ △*ADG*∽△*HBG*.
∴ $\frac{DG}{BG}=\frac{AD}{BH}$
∴ $\frac{DG}{5-DG}=\frac{3}{5}$.
∴ $DG=\frac{15}{8}$.
∴ $DE=\frac{3}{2}$.
∴ $\frac{DE}{DG}=\frac{DC}{DB}=\frac{4}{5}$.
∴ *EG*∥*BC*.
∴ ∠*1* = ∠*AHC*.
又∵ *DF*∥*AH*，
∴ ∠*AHC* = ∠*DFC*.
∴ ∠*1* = ∠*DFC*.
12. 解：(1)由旋转知，*AB* = *AD*，∠*DAB* = 90°，
∴ ∠*ABD* = ∠*ADB* = 45°.
由平移知 *DF*∥*AB*，
∴ ∠*BDF* = ∠*ABD*，
∴ ∠*BDF* = 45°.
(2)由平移知 *EG*∥*AC*，*EG* = *AC*，
∴ 四边形 *ACGE* 是平行四边形.
又∵ ∠*C* = 90°，
∴ 四边形 *ACGE* 是矩形.
∴ ∠*EAC* = 90°，*AE* = *CG*.
又∵ ∠*DAB* = 90°，
∴ ∠*EAB* + ∠*EAD* = ∠*CAB* + ∠*EAB*，
∴ ∠*EAD* = ∠*CAB*，
由(1)知 *DF*∥*AB*，
∴ ∠*EDA* + ∠*DAB* = 180°，
∴ ∠*EDA* = 90°，∴ ∠*EDA* = ∠*C*，
∴ △*AED*∽△*ABC*，
∴ $\frac{AE}{AB}=\frac{AD}{AC}$，
∴ $\frac{AE}{10}=\frac{10}{8}$. ∴ $AE=\frac{25}{2}$，
∴ $CG=\frac{25}{2}$.

第 2 课时　用边角关系判定两三角形相似

1. C　**2.** C　**3.** B　**4.** C　**5.** B
6. *DF*∥*AC*(答案不唯一)
7. C
8. C　**点拨**：∵ 四边形 *EFGH* 是正方形，*EB* = 2，
∴ *FG* = *EB* = 2，∠*FGB* = 90°.
∵ 四边形 *ABCD* 是正方形，*H* 为 *AD* 的中点，*AD* = 4，
∴ *AH* = 2，∠*BAD* = 90°.
∴ ∠*HAN* = ∠*FGN*，*AH* = *GF*.
又∵ ∠*ANH* = ∠*GNF*，
∴ △*ANH*≌△*GNF*(AAS)，故①正确；
∴ ∠*AHN* = ∠*HFG*.
∵ *AG* = *FG* = 2 = *AH*，
∴ $AF=\sqrt{2}FG=\sqrt{2}AH$.
∴ ∠*AFH* ≠ ∠*HFB*.
∴ ∠*AFN* ≠ ∠*HFG*，故②错误；
∵ △*ANH*≌△*GNF*，
∴ $AN=\frac{1}{2}AG=1$.
∵ *GM* = *BC* = 4，
∴ $\frac{AH}{AN}=\frac{GM}{AG}=2$.
又∵ ∠*HAN* = ∠*AGM* = 90°，
∴ △*AHN*∽△*GMA*.
∴ ∠*AHN* = ∠*AMG*.
∵ *AD*∥*GM*，
∴ ∠*HAK* = ∠*AMG*.

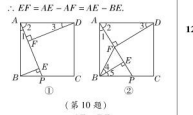
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \angle AHK = \angle HAK$.
$\therefore AK = HK$.
$\therefore AK = HK = NK$.
$\therefore FN = HN$,
$\therefore FN = 2NK$, 故③正确;
易知四边形 $ADMG$ 是矩形.
$\therefore DM = AG = 2$.
$\because S_{\triangle AFN} = \frac{1}{2}AN \cdot FG = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1$,
$S_{\triangle ADM} = \frac{1}{2}AD \cdot DM = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$,
$\therefore S_{\triangle AFN} : S_{\triangle ADM} = 1 : 4$, 故④正确.
故选 C.

9. $\frac{12}{5}$ 或 $\frac{5}{3}$　**点拨**：当 $\frac{AE}{AD} = \frac{AB}{AC}$ 时，
$\because \angle A = \angle A$, $\therefore \triangle AED \backsim \triangle ABC$.
此时 $AE = \frac{AB \cdot AD}{AC} = \frac{6 \times 2}{5} = \frac{12}{5}$;
当 $\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC}$ 时，$\because \angle A = \angle A$,
$\therefore \triangle ADE \backsim \triangle ABC$.
此时 $AE = \frac{AC \cdot AD}{AB} = \frac{5 \times 2}{6} = \frac{5}{3}$.
故答案为 $\frac{12}{5}$ 或 $\frac{5}{3}$.

误区诊断：当 $\frac{AE}{AD} = \frac{AB}{AC}$ 或 $\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC}$ 时，以 A, D, E 为顶点的三角形与 $\triangle ABC$ 相似，本题容易考虑问题不全面出现漏解.

10. **证明**：(1) 如图①，$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，
$\therefore AB = AD$, $\angle BAD = 90°$.
$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 90°$.
$\because BE \perp AP$, $DF \perp AP$,
$\therefore \angle BEA = \angle AFD = 90°$.
$\therefore \angle 2 + \angle 3 = 90°$.
$\therefore \angle 1 = \angle 3$.
在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle DAF$ 中，
$\begin{cases} \angle BEA = \angle AFD, \\ \angle 1 = \angle 3, \\ AB = DA, \end{cases}$
$\therefore \triangle ABE \cong \triangle DAF$.
$\therefore BE = AF$.
$\therefore EF = AE - AF = AE - BE$.

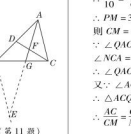


(第 10 题)

(2) 如图②，$\because \frac{AF}{BF} = \frac{DF}{AD}$, $AF = BE$,
$\therefore \frac{BE}{BF} = \frac{DF}{AD}$
$\therefore \frac{BE}{DF} = \frac{BF}{AD}$

设 $\frac{BE}{BF} = \frac{DF}{AD} = k$, 则 $BE = kBF$, $DF = kAD$,
$\therefore EF = \sqrt{BF^2 - BE^2} = \sqrt{1 - k^2}\,BF$,
$AF = \sqrt{AD^2 - DF^2} = \sqrt{1 - k^2}\,AD$.
$\therefore \frac{EF}{AF} = \frac{BF}{AD}$
$\therefore \frac{BE}{DF} = \frac{EF}{AF}$
又 $\because \angle BEF = \angle AFD = 90°$,
$\therefore \triangle BEF \backsim \triangle DFA$.
$\therefore \angle 4 = \angle 3$. $\because \angle 1 = \angle 3$,
$\therefore \angle 4 = \angle 1$.
$\because \angle 1 + \angle BPA = 90°$, $\angle 5 + \angle BPA = 90°$,
$\therefore \angle 5 = \angle 1$.
$\therefore \angle 4 = \angle 5$,
即 BE 平分 $\angle FBP$. 而 $BE \perp EP$,
$\therefore EF = EP$.

11. **证明**：(1) $\because \angle ACD = \angle B, \angle CAD = \angle BAC$,
$\therefore \triangle ACD \backsim \triangle ABC$.
$\therefore AC : AB = AD : AC$.
$\therefore AC^2 = AD \cdot AB$.
(2) $\because \triangle ACD \backsim \triangle ABC$,
$\therefore \angle ADF = \angle ACG$.
$\because \frac{AD}{AC} = \frac{DF}{CG}$, $\therefore \triangle ADF \backsim \triangle ACG$.
$\therefore \angle DAF = \angle CAF$,
即 $\angle BAG = \angle CAG$.
如图，过点 B 作 $BE \parallel AC$，交 AG 的延长线于点 E，则 $\angle E = \angle CAG$.
又 $\because \angle BGE = \angle AGC$,
$\therefore \triangle AGC \backsim \triangle EGB$.
$\therefore \frac{AC}{BE} = \frac{CG}{BG}$
又 $\because \angle BAG = \angle CAG$,
$\therefore \angle BAG = \angle E$.
$\therefore BA = BE$.
$\therefore \frac{AC}{AB} = \frac{CG}{BG}$
由(1)知 $AC : AB = AD : AC$,
$\therefore \frac{DF}{CG} = \frac{CG}{BC}$. $\therefore CG^2 = DF \cdot BC$.



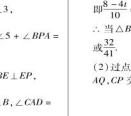
(第 11 题)

12. (1) **证明**：在正方形 $ABCD$ 中，$\angle A = \angle D = 90°$, $AB = AD = CD$.
$\therefore AE = ED, DF = \frac{1}{4}DC$,
$\therefore AE = ED = \frac{1}{2}AB, DF = \frac{1}{4}AB$.
$\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{AE}{DF}$. $\therefore \triangle ABE \backsim \triangle DEF$.
(2) **解**：$\because AD \parallel CG$,
$\therefore \angle DEF = \angle G, \angle D = \angle DCG$.
$\therefore \triangle EFD \backsim \triangle GFC$.
$\therefore \frac{DE}{CG} = \frac{DF}{CF} = \frac{1}{3}$.
$\because DE = \frac{1}{2}AB = 2$, $\therefore CG = 6$. $\therefore BG = 10$.

13. **解**：(1) 由题意知，$AB = 10$ cm, $BP = 5t$ cm, $CQ = 4t$ cm, 则 $BQ = (8 - 4t)$ cm.

第 13 题图改

当 $\triangle PBQ \backsim \triangle ABC$ 时，有 $\frac{AB}{PB} = \frac{BC}{BQ}$，即 $\frac{5t}{10} = \frac{8}{8-4t}$. 解得 $t = 1$;
当 $\triangle QBP \backsim \triangle ABC$ 时，有 $\frac{QB}{AB} = \frac{BP}{BC}$，即 $\frac{8-4t}{10} = \frac{5t}{8}$，解得 $t = \frac{32}{41}$.
$\therefore$ 当 $\triangle BPQ$ 与 $\triangle ABC$ 相似时，$t = 1$ 或 $\frac{32}{41}$.
(2) 过点 P 作 $PM \perp BC$ 于点 M，设 AQ, CP 交于点 N，如图所示.



(第 13 题)

易知 $\triangle BMP \backsim \triangle BCA$,
$\because \frac{BP}{BA} = \frac{PM}{AC} = \frac{BM}{BC}$,
$\therefore \frac{5t}{10} = \frac{PM}{6} = \frac{BM}{8}$.
$\therefore PM = 3t$ cm, $BM = 4t$ cm,
则 $CM = (8 - 4t)$ cm.
$\because \angle QAC + \angle NCA = 90°$, $\angle PCM + \angle NCA = 90°$,
$\therefore \angle QAC = \angle PCM$.
又 $\because \angle ACQ = \angle PMC$,
$\therefore \triangle ACQ \backsim \triangle CMP$,
$\therefore \frac{AC}{CM} = \frac{CQ}{MP}$，即 $\frac{6}{8-4t} = \frac{4t}{3t}$.
解得 $t = \frac{7}{8}$.

第 3 课时　用三边比例关系判定两三角形相似

1. B　**2.** D　**3.** C　**4.** D

5. B　**点拨**：分以下两种情况讨论：(1) 若截 45 cm 的铝材，设截下的两段长分别为 x cm, y cm $(x < y)$，由题意得 $\frac{24}{x} = \frac{30}{y} = \frac{36}{27}$ ①或 $\frac{24}{x} = \frac{30}{27} = \frac{36}{y}$ ②(注：27 cm 不可能是最小边长)，由①解得 $x = 18$, $y = 22.5$，符合题意，由②解得 $x = \frac{108}{5}$, $y = \frac{162}{5}$，而 $x + y = \frac{108}{5} + \frac{162}{5} = \frac{270}{5} = 54 > 45$，不合题意，舍去；(2) 若截 27 cm 的铝材，设截下的两段长分别为 a cm, b cm $(a < b)$，由题意得 $\frac{24}{a} = \frac{30}{b} = \frac{36}{45}$ (注：45 cm 只能是最大边长)，解得 $a = 30$, $b = 37.5$，而 $a + b = 30 + 37.5 = 67.5 > 27$，不合题意，舍去. 综上可知，截法只有 1 种.

6. C　**点拨**：设阿姆中每个小正方形的边长为 1. 由题图得①中的三角形的各边长分别为 $2, \sqrt{2}, \sqrt{10}$，③中的三角形的各边长分别为 $2\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{5}$.
$\therefore \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{5}}$,
$\therefore$ 两个三角形的三边对应成比例.
$\therefore$ ①和③相似. 故选 C.

7. C

8. B　**点拨**：设小正方形的边长为 1，则“帅”“相”“兵”所在位置的格点构成的三角形的三边长分别为 $2\sqrt{2}, \sqrt{5}, 4\sqrt{2}$.“车”“炮”之间的距离为 1，“炮”与②之间的距离为 $\sqrt{5}$，“车”与②之间的距离为 $2\sqrt{2}$.
$\because \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$,
$\therefore$ “马”应落在②处.

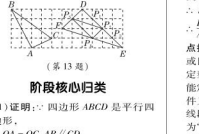
9. B　**点拨**：当直角三角形的两直角边分别为 6, 8，且另一个与它相似的直角三角形的两直角边长分别为 3, 4 时，x 的值为 5；当 8, 4 为对应边的长且为两直角三角形的斜边长时，x 的值为 $\sqrt{7}$，故 x 的值可以为 5 或 $\sqrt{7}$. 此题易忽略第二种情况.

10. **证明**：$\because \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} = \frac{AC}{AE}$,
$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle ADE$.
$\therefore \angle BAC = \angle DAE$.
$\therefore \angle BAC - \angle CAD = \angle DAE - \angle CAD$, 即 $\angle BAD = \angle CAE$.

11. **证明**：设正方形 $ABCD$ 的边长为 a，$\therefore AD = BC = CD = a$.
又 $\because Q$ 是 CD 的中点，
$\therefore DQ = CQ = \frac{1}{2}a$.
$\because BP = 3PC$, $\therefore PC = \frac{1}{4}a$.
$\therefore AQ = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{5}a}{2}$, $PQ = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{16}} = \frac{\sqrt{5}a}{4}$.
$\therefore \frac{AD}{CQ} = \frac{DQ}{PC} = \frac{AQ}{PQ} = 2$.
$\therefore \triangle ADQ \backsim \triangle QCP$.

12. **解**：(1) $\triangle ACF \backsim \triangle GCA$. 理由：设正方形 $ABCD$，正方形 $CDEF$，正方形 $EFGH$ 的边长为 a，则 $\triangle ACF$ 的三边长分别为 $AC = \sqrt{2}a$, $CF = a$, $AF = \sqrt{5}a$，$\triangle ACG$ 的三边长分别为 $AC = \sqrt{2}a$, $CG = 2a$, $AG = \sqrt{10}a$.
$\therefore \frac{CF}{AC} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{AC}{CG} = \frac{\sqrt{2}a}{2a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,
$\frac{AF}{AG} = \frac{\sqrt{5}a}{\sqrt{10}a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
$\therefore \frac{CF}{AC} = \frac{AC}{CG} = \frac{AF}{AG}$
$\therefore \triangle ACF \backsim \triangle GCA$.
(2) $\because \triangle ACF \backsim \triangle GCA$,
$\therefore \angle 1 = \angle CAF$.
$\because \angle 1 + \angle 2 = \angle CAF + \angle 2 = \angle ACB = 45°$.

13. (1) **证明**：根据勾股定理，得 $AB = 2\sqrt{5}$, $AC = \sqrt{5}$, $BC = 5$,
显然有 $AB^2 + AC^2 = BC^2$,
根据勾股定理的逆定理得 $\triangle ABC$ 为直角三角形.
(2) **解**：$\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 相似.
理由如下：由(1)知 $AB = 2\sqrt{5}$, $AC = \sqrt{5}$, $BC = 5$，根据勾股定理，得 $DE = 4\sqrt{2}$, $DF = 2\sqrt{2}$, $EF = 2\sqrt{10}$.
$\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = \frac{\sqrt{10}}{4}$.
$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle DEF$.
(3) **解**：如图，连接 P_1P_4，P_1P_4，P_4P_5，则 $\triangle P_1P_4P_5$ 符合要求.



(第 13 题)

阶段核心归类

1. (1) **证明**：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，
$\therefore OA = OC, AB \parallel CD$.
$\therefore \angle OAE = \angle OCF$.
在 $\triangle AOE$ 和 $\triangle COF$ 中，
$\begin{cases} \angle OAE = \angle OCF, \\ OA = OC, \\ \angle AOE = \angle COF, \end{cases}$
$\therefore \triangle AOE \cong \triangle COF$(ASA).
$\therefore OE = OF$.
(2) **解**：由题，过点 O 作 $ON \perp BC$ 交 AB 于点 N，易得 $\triangle AON \backsim \triangle ACB$.



(第 1 题)

$\because OA = OC$,
$\therefore ON = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AD = 2$, $BN = \frac{1}{2}AB = 3$. $\because ON \perp BC$,
$\therefore \angle ONE = \angle MBE$.
又 $\because \angle OEN = \angle MEB$,
$\therefore \triangle ONE \backsim \triangle MBE$.
$\therefore \frac{ON}{BM} = \frac{NE}{BE}$，即 $\frac{2}{1} = \frac{3 - BE}{BE}$,
解得 $BE = 1$.

2. **解**：相似. 理由如下：$\because \frac{EO}{BO} = \frac{DO}{CO}$, $\angle BOE = \angle COD$, $\angle DOE = \angle COB$,
$\therefore \triangle BOE \backsim \triangle COD$, $\triangle DOE \backsim \triangle COB$.
$\therefore \angle EBO = \angle DCO$, $\angle DEO = \angle CBO$.
$\because \angle ADE = \angle DCO + \angle DEO$, $\angle ABC = \angle EBO + \angle CBO$,
$\therefore \angle ADE = \angle ABC$.
又 $\because \angle A = \angle A$,
$\therefore \triangle ADE \backsim \triangle ABC$.

3. **证明**：$\because \angle BAC = 90°, AD \perp BC$,
$\therefore \angle BAC = \angle ADB = 90°$.
又 $\because \angle CBA = \angle ABD$(公共角)，
$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle DBA$.
$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DA}$, $\angle BAD = \angle C$.
$\because AD \perp BC, E$ 为 AC 的中点，
$\therefore DE = EC$.
$\therefore \angle BDF = \angle CDE = \angle C$.
$\therefore \angle BDF = \angle BAD$.
又 $\because \angle F = \angle F$,
$\therefore \triangle DBF \backsim \triangle ADF$.
$\therefore \frac{DB}{AD} = \frac{DF}{AF}$，$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{DF}{AF}$

点拨：当所证等积式或比例式运用“三点定型法”不能定型或能定型而不相似，条件又不具备成比例线段时，可考虑用中间比“搭桥”，称为“等比转换法”，有时还可用“等积替换法”，例如：如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AD \perp BC$ 于点 D，$DE \perp AB$ 于点 E，$DF \perp AC$ 于点 F，求证：$AE \cdot AB = AF \cdot AC$. 可由两组“射影图”得 $AE \cdot AB = AD^2$, $AF \cdot AC = AD^2$，
$\therefore AE \cdot AB = AF \cdot AC$.



(第 3 题)

4. **证明**：(1) $\because \angle DAB = \angle EAC$,
$\therefore \angle DAB + \angle BAE = \angle EAC + \angle BAE$,
$\therefore \angle DAE = \angle BAC$.
又 $\because \angle ADE = \angle ABC$,
$\therefore \triangle ADE \backsim \triangle ABC$.
(2) $\because \triangle ADE \backsim \triangle ABC$，$\therefore \frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC}$
$\because \angle DAB = \angle EAC$，$\therefore \triangle ADB \backsim \triangle AEC$.
$\therefore \frac{AD}{AE} = \frac{BD}{CE}$.

5. (1) **证明**：$\because \angle A = \angle B = \angle DEC = 90°$,
$\therefore \angle DEA + \angle CEB = 90°$, $\angle DEA + \angle D = 90°$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \angle D=\angle CEB$,

$\therefore \triangle ADE\backsim\triangle BEC$.

(2)**解**:同意,选择图②(或图③)说理理由:

$\because \angle A=\angle B=\angle DEC$, $\angle A+\angle D=\angle DEC+\angle CEB$,

$\therefore \angle D=\angle CEB$, $\therefore \triangle ADE\backsim\triangle BEC$.

25.5 相似三角形的性质

1. A **2**. C **3**. A **4**. B **5**. C **6**. A **7**. D

8. C **点拨**:$\because \angle CAD=\angle B$, $\angle ACD=\angle BCA$,

$\therefore \triangle ACD\backsim\triangle BCA$.

$\therefore \frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle BCA}}=\left(\frac{AC}{BC}\right)^2$,即$\frac{a}{S_{\triangle BCA}}=\frac{1}{4}$,

则 $S_{\triangle BCA}=4a$.

$\therefore S_{\triangle ABD}=S_{\triangle BCA}-S_{\triangle ACD}=4a-a=3a$.

9. C

10. B **点拨**:$\because$ 在$\square ABCD$中,$\angle BAD=\angle BCD=60°$,

$\therefore \angle ADC=120°$.

$\because DE$平分$\angle ADC$,

$\therefore \angle ADE=\angle DAE=60°=\angle AED$,

$\therefore \triangle ADE$是等边三角形,

$\therefore AD=AE=DE$. $\because AD=\frac{1}{2}AB$,

$\therefore AE=\frac{1}{2}AB=BE$,

$\therefore DE=BE$,$\therefore \angle BDE=\angle DBE$,

$\therefore \angle BDE=\frac{1}{2}\angle AED=30°$,

$\therefore \angle ADB=90°$,即$AD\perp BD$,

$\therefore S_{\square ABCD}=AD\cdot BD$,故①正确;

$\because \angle CDE=60°$,$\angle BDE=30°$,

$\therefore \angle CDB=\angle BDE=30°$,

$\therefore DB$平分$\angle CDE$,故②正确;

$\because$ 在Rt$\triangle AOD$中,$AO>AD$,

$\therefore AO>DE$,故③错误;

$\because O$是BD的中点,E是AB的中点,

$\therefore OE$是$\triangle ABD$的中位线,

$\therefore OE//AD$,$OE=\frac{1}{2}AD$,

$\therefore DAF=\angle FOE$,$\angle ADF=\angle OEF$,

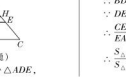
$\therefore \triangle OEF\backsim\triangle ADF$,

$\therefore S_{\triangle ADF}=4S_{\triangle OEF}$,且$AF=2OF$,

$\therefore S_{\triangle AEF}=2S_{\triangle OEF}$,

$\therefore S_{\triangle ADE}=6S_{\triangle OEF}$,故④错误.故选B.

11. D **点拨**:如图所示.



(第11题)

根据题意得$\triangle AFH\backsim\triangle ADE$,

$\therefore \frac{S_{\triangle AFH}}{S_{\triangle ADE}}=\left(\frac{FH}{DE}\right)^2=\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$.

设$S_{\triangle AFH}=9x$,则$S_{\triangle ADE}=16x$,

$\therefore 16x-9x=7$,解得$x=1$.

$\therefore S_{\triangle ADE}=16$.

$\therefore$ 四边形$DBCE$的面积为$42-16=26$.

12. (1)**证明**:$\because$ 四边形$ABCD$为菱形,

$\therefore BD$平分$\angle ABC$.

$\therefore \angle ABC=2\angle ABG$.

又$\because \angle ABC=2\angle BAM$,

$\therefore \angle BAG=\angle ABG$.

$\therefore AG=BG$.

(2)**解**:$\because$ 四边形$ABCD$为菱形,

$\therefore AD//BC$,$AD=BC$.

$\therefore \angle GAD=\angle GMB$.

$\therefore \angle AGD=\angle BGM$,

$\therefore \triangle BGM\backsim\triangle DGA$.

$\therefore M$为BC的中点,

$\therefore BM=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AD$,

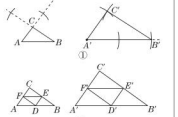
即$\triangle BGM$与$\triangle DGA$的相似比为1∶2,

$\therefore S_{\triangle BGM}:S_{\triangle DGA}=1:4$.

$\because S_{\triangle BGM}=1$,$\therefore S_{\triangle DGA}=4$.

13. (1)**解**:如图①,$\triangle A'B'C'$即为所求.

(2)**证明**:如图②所示.



(第13题)

$\because D$,E,F分别是$\triangle ABC$三边AB,BC,AC的中点,

$\therefore DE=\frac{1}{2}AC$,$DF=\frac{1}{2}BC$,$EF=\frac{1}{2}AB$.

$\therefore \triangle DEF\backsim\triangle CAB$.

同理,$\triangle D'E'F'\backsim\triangle C'A'B'$.

由(1)可知$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$,

$\therefore \triangle DEF\backsim\triangle D'E'F'$.

14. **解**:问题1:

(1)$\frac{3}{16}$ **点拨**:$\because AB=4$,$AD=3$,

$\therefore BD=4-3=1$.

$\because DE//BC$,

$\therefore \frac{CE}{EA}=\frac{BD}{AD}=\frac{1}{3}$,

$\therefore \frac{S_{\triangle DEC}}{S_{\triangle ADE}}=\frac{EC}{AE}=\frac{1}{3}$.

$\because DE//BC$,

$\therefore \triangle ADE\backsim\triangle ABC$.

$\therefore \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=\left(\frac{AD}{AB}\right)^2=\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$,

$\therefore \frac{S_{\triangle DEC}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{3}{16}$,即$\frac{S'}{S}=\frac{3}{16}$.

(2)(方法1)$\because AB=4$,$AD=m$,

$\therefore BD=4-m$.

$\because DE//BC$,

$\therefore \triangle ADE\backsim\triangle ABC$.

$\therefore \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=\left(\frac{AD}{AB}\right)^2=\left(\frac{m}{4}\right)^2=\frac{m^2}{16}$,

$\therefore \frac{S_{\triangle DEC}}{S_{\triangle ADE}}=\frac{S_{\triangle DEC}}{S_{\triangle ABC}}\cdot\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADE}}=\frac{4-m}{m}$,

$\frac{m^2}{16}\cdot\frac{-m^2+4m}{16}$,

即$\frac{S'}{S}=\frac{-m^2+4m}{16}$.

(方法2)如图①,过点B作$BH\perp AC$于H,过点D作$DF\perp AC$于F,则$\angle DFA=\angle BHA=90°$.

$\because \angle A=\angle A$,

$\therefore \triangle ADF\backsim\triangle ABH$,

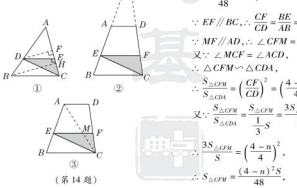
$\therefore \frac{DF}{BH}=\frac{AD}{AB}=\frac{m}{4}$.

$\because DE//BC$,

$\therefore \frac{CE}{AE}=\frac{BD}{AD}=\frac{4-m}{4}$,

$\therefore \frac{S_{\triangle DEC}}{S_{\triangle ADE}}=\frac{\frac{1}{2}CE\cdot DF}{\frac{1}{2}CA\cdot BH}=\frac{4-m}{4}\times\frac{m}{4}=\frac{-m^2+4m}{16}$,

即$\frac{S'}{S}=\frac{-m^2+4m}{16}$.



(第14题)

问题2:

(方法1)如图②,分别延长BA,CD交于点O,

$\because AD//BC$,$\therefore \angle OAD=\angle B$.

$\because \angle O=\angle O$,

$\therefore \triangle OAD\backsim\triangle OBC$,

$\therefore \frac{OA}{OB}=\frac{AD}{BC}=\frac{1}{2}$.

$\therefore OA=AB=4$,

$\therefore OB=8$.

$\because AE=n$,$\therefore OE=4+n$.

$\because EF//BC$,

$\therefore$ 由问题1的解法可知:$\frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle OBC}}=\frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle OEF}}\cdot\frac{S_{\triangle OEF}}{S_{\triangle OBC}}=\frac{4-n}{4+n}\times\left(\frac{4+n}{8}\right)^2=\frac{16-n^2}{64}$.

$\because \frac{S_{\triangle OAD}}{S_{\triangle OBC}}=\left(\frac{OA}{OB}\right)^2=\frac{1}{4}$,

$\therefore \frac{S_{四边形ABCD}}{S_{\triangle OBC}}=\frac{3}{4}$,

$\therefore \frac{S_{\triangle CEF}}{S_{四边形ABCD}}=\frac{S_{\triangle CEF}}{\frac{3}{4}S_{\triangle OBC}}=\frac{4}{3}\times\frac{16-n^2}{64}=\frac{16-n^2}{48}$,即$\frac{S'}{S}=\frac{16-n^2}{48}$.

(方法2)如图③,连接AC交EF于M,

$\because AD//BC$,且$AD=\frac{1}{2}BC$,

$\therefore \frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{1}{2}$,

$\therefore \frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$,

$\therefore S_{\triangle ADC}=\frac{1}{3}S$,$S_{\triangle ABC}=\frac{2}{3}S$.

由问题1的结论可知:$\frac{S_{\triangle CMC}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{-n^2+4n}{16}$,$\therefore S_{\triangle CMC}=\frac{-n^2+4n}{16}$,

$S_{\triangle ABC}=\frac{-n^2+4n}{16}\cdot\frac{2}{3}S=\frac{(-2n^2+8n)S}{48}$.

$\because EF//BC$,$\therefore \frac{CF}{CD}=\frac{BE}{AB}=\frac{4-n}{4}$.

$\because MF//AD$,$\therefore CFM=\angle D$.

又$\because MCF=\angle ACD$,

$\therefore \triangle CFM\backsim\triangle CDA$,

$\therefore \frac{S_{\triangle CFM}}{S_{\triangle CDA}}=\left(\frac{CF}{CD}\right)^2=\left(\frac{4-n}{4}\right)^2$.

又$\because \frac{S_{\triangle CFM}}{S_{\triangle CDA}}=\frac{S_{\triangle CFM}}{\frac{3}{8}S}=\frac{3S_{\triangle CFM}}{S}$,

$\therefore \frac{3S_{\triangle CFM}}{S}=\left(\frac{4-n}{4}\right)^2$,

$\therefore S_{\triangle CFM}=\frac{(4-n)^2S}{48}$.

$\therefore S_{\triangle EFC}=S_{\triangle EMC}+S_{\triangle CFM}=\frac{(-2n^2+8n)S}{48}+\frac{(4-n)^2S}{48}=\frac{(16-n^2)S}{48}$.$\therefore \frac{S'}{S}=\frac{16-n^2}{48}$.

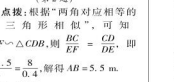
25.6 相似三角形的应用

1. B

2. C **点拨**:如图,设BD是BC落在地面上的影子,设树高为x m.根据竹竿的高与其影子长度的比值和CB与BD的比值相等,得$\frac{CB}{BD}=\frac{1}{0.8}$,而$CB=1.2$ m,$\therefore BD=0.96$ m.

$\because$ 树落在地面上的实际影长$AD=0.96+2.6=3.56$(m).

$\therefore \frac{x}{3.56}=\frac{1}{0.8}$,$\therefore x=4.45$.$\therefore$ 树高是4.45 m.



(第2题)

3. 5.5 **点拨**:根据"两角对应相等的两个三角形相似",可知$\triangle EDF\backsim\triangle CDB$,则$\frac{BC}{EF}=\frac{CD}{DE}$,即$\frac{AB-1.5}{0.2}=\frac{8}{0.4}$,解得$AB=5.5$ m.

4. B **5**. C **6**. 8 m

7. A **点拨**:由题意知$\angle AGC=\angle FGE$,

$\because \angle ACG=\angle FEG=90°$,

$\therefore \triangle ACG\backsim\triangle FEG$.

$\therefore \frac{AC}{FE}=\frac{CG}{EG}$,$\frac{AC}{1.6}=\frac{15}{3}$.$\therefore AC=8$ m.

$\therefore AB=AC+BC=8+0.5=8.5$(m).

8. **解**:设$OE=x$ m,$OA=a$ m,$BC=b$ m,则$AB=(2-b)$ m,$CD=(2.1-b)$ m,$CO=(2+a)$ m.

由题意易知$\triangle AFB\backsim\triangle AEO$,$\triangle CDG\backsim\triangle COE$,

$\therefore \frac{BF}{OE}=\frac{AB}{OA}$,即$\frac{1.6}{x}=\frac{2-b}{a}$,①

$\frac{DG}{OE}=\frac{CD}{CO}$,即$\frac{1.6}{x}=\frac{2.1-b}{2+a}$,②

由①②得$a=20(2-b)$.③

将③代入①,得$\frac{1.6}{x}=\frac{2-b}{20(2-b)}$,解得$x=32$.经检验,$x=32$是分式方程的解.

答:楼的高度OE为32 m.

9. **解**:(1)设敏敏的影长为x cm.

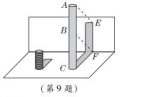
由题意得$\frac{150}{x}=\frac{90}{60}$,

解得$x=100$.

经检验,$x=100$是分式方程的解.

答:敏敏的影长为100 cm.

(2)如图,连接AE,作$FB//EA$,交AC于B.



(第9题)

$\because AB//EF$,

$\therefore$ 四边形$ABFE$是平行四边形.

$\therefore AB=EF=150$ cm.

设$BC=y$ cm,由题意知BC落在地面上的影长为120 cm,

$\therefore \frac{y}{120}=\frac{90}{60}$.

解得$y=180$.

$\therefore AC=AB+BC=150+180=330$(cm).

答:高园柱的高度为330 cm.

10. **解**:(1)如图,A沿着旗杆的影子竖立标杆,使标杆影子的顶端正好与旗杆影子的顶端重合.



(第10题)

(2)用皮尺测量旗杆的影长$BE=a$ m,标杆CD的影长$DE=b$ m,标杆高$CD=c$ m.

根据$\triangle EDC\backsim\triangle EBA$,得$\frac{CD}{AB}=\frac{ED}{EB}$,

即$\frac{c}{AB}=\frac{b}{a}$,所以$AB=\frac{ac}{b}$ m,

即旗杆AB的高为$\frac{ac}{b}$ m.(设计方案不唯一)

11. **解**:由题意得$\angle CAD=\angle MND=90°$,$\angle CDA=\angle MDN$,

$\therefore \triangle CAD\backsim\triangle MND$.

$\therefore \frac{CA}{MN}=\frac{AD}{ND}$,

$\therefore \frac{1.6}{MN}=\frac{1\times0.8}{(5+1)\times0.8}$,

$\therefore MN=9.6$ m.

又$\because \angle EBF=\angle MNF=90°$,$\angle EFB=\angle MFN$,

$\therefore \triangle EFB\backsim\triangle MFN$.

$\therefore \frac{EB}{MN}=\frac{BF}{NF}$,

$\therefore \frac{EB}{9.6}=\frac{2\times0.8}{(2+9)\times0.8}$,

$\therefore EB=1.75$ m.

$\therefore$ 小军的身高BE约为1.75 m.

25.7 相似多边形和图形的位似

第1课时 相似多边形

1. D **2**. A **3**. D **4**. B

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

5. C　**点拨**：∵ 多边形 $ABCDEF \backsim$ 多边形 $A'B'C'D'E'F'$，

∴ $\angle A$ 与 $\angle A'$ 是对应角.

∵ $\angle A = 68°$，

∴ $\angle A' = \angle A = 68°$.

6. C　**点拨**：∵ 四边形 $ABCD$ 与四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 相似，

∴ $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{CD}{C_1D_1}$.

又∵ $AB = 12$，$CD = 15$，$A_1B_1 = 9$，

∴ $C_1D_1 = \dfrac{9 \times 15}{12} = \dfrac{45}{4}$. 故选 C.

7. B　**点拨**：设 $AD = x$，易知 $FD = x - 2$，$FE = 2$.

∵ 四边形 $EFDC$ 与矩形 $ABCD$ 相似，

∴ $\dfrac{EF}{FD} = \dfrac{AD}{AB}$，即 $\dfrac{2}{x-2} = \dfrac{x}{2}$.

解得 $x_1 = 1 + \sqrt{5}$，$x_2 = 1 - \sqrt{5}$（不合题意，舍去），故选 B.

8. C　**9.** C　**10.** B　**11.** A

12. D　**点拨**：把一个图形按一定比例扩大或缩小，各边都相应地扩大或缩小，各角不变.

13. **解**：∵ 四边形 $ABCD \backsim$ 四边形 $EFGH$，

∴ $\angle E = \angle A = 62°$，$\angle F = \angle B = 70°$.

又∵ $\angle H = 140°$，$\angle E + \angle F + \angle G + \angle H = 360°$，∴ $\angle G = 88°$.

∵ 四边形 $ABCD \backsim$ 四边形 $EFGH$，

∴ $\dfrac{AD}{EH} = \dfrac{AB}{EF} = \dfrac{BC}{FG}$.

又∵ $AD = 18$，$EF = 15$，$FG = 14$，$EH = 12$，

∴ $AB = 22.5$，$BC = 21$.

14. **解**：(1) ∵ 多边形 $ABCDEF$ 与多边形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 相似，且 $\angle C$ 和 $\angle C_1$，$\angle D$ 和 $\angle D_1$，$\angle E$ 和 $\angle E_1$ 是对应角，

∴ $\angle C = 95°$，$\angle D = 135°$，$\angle E = 120°$.

由多边形内角和定理，知六边形的内角和为 720°，

∴ $\angle F = 720° - (135° + 120° + 95° + 135° + 120°) = 115°$.

(2) ∵ 多边形 $ABCDEF$ 和多边形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的相似比是 1∶1.5，且 $CD = 15$ cm，

∴ $C_1D_1 = 15 \times 1.5 = 22.5$ (cm).

15. (1) **证明**：∵ 菱形 $AEFG \backsim$ 菱形 $ABCD$，

∴ $\angle EAG = \angle BAD$，

∴ $\angle EAG + \angle GAB = \angle BAD + \angle GAB$，

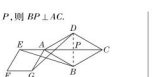
∴ $\angle EAB = \angle GAD$.

∵ $AE = AG$，$AB = AD$，

∴ $\triangle AEB \cong \triangle AGD$，

∴ $EB = GD$.

(2) **解**：如图所示，连接 BD 交 AC 于点 P，则 $BP \perp AC$.



(第 15 题)

∵ $\angle DAB = 60°$，∴ $\angle PAB = 30°$，

∴ $BP = \dfrac{1}{2}AB = 1$，

$AP = \sqrt{AB^2 - BP^2} = \sqrt{3}$.

∴ $AE = AG = \sqrt{3}$，

∴ $EP = 2\sqrt{3}$，∴ $EB = \sqrt{EP^2 + BP^2} = \sqrt{12 + 1} = \sqrt{13}$.

∴ $GD = EB = \sqrt{13}$.

16. **解**：(1) 如果四周的小路的宽度均相等，那么小路四周所围成的矩形 $A'B'C'D'$ 和矩形 $ABCD$ 不相似. 理由如下：

∵ $\dfrac{30 + 2a}{30} = \dfrac{15 + a}{15}$，$\dfrac{20 + 2a}{20} = \dfrac{10 + a}{10}$，

∴ $\dfrac{30 + 2a}{30} \neq \dfrac{20 + 2a}{20}$，

∴ 小路四周所围成的矩形 $A'B'C'D'$ 和矩形 $ABCD$ 不相似.

(2) 当 $\dfrac{20 + 2x}{20} = \dfrac{30 + 2x}{30}$ 时，小路四周所围成的矩形 $A'B'C'D'$ 和矩形 $ABCD$ 相似，

化简 $\dfrac{20 + 2x}{20} = \dfrac{30 + 2x}{30}$，得 $\dfrac{x}{y} = \dfrac{2}{3}$.

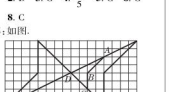
∴ x 与 y 的比值为 $\dfrac{2}{3}$ 时，能使小路四周所围成的矩形 $A'B'C'D'$ 和矩形 $ABCD$ 相似.

第 2 课时　位似图形

1. D　**2.** D　**3.** C　**4.** $\dfrac{2}{5}$　**5.** C　**6.** C

7. D　**8.** C

9. **解**：如图.



(第 9 题)

误区诊断：此题易忽略其中一种情况，当题中对位似图形的位置没有限制条件时，一定要考虑全面.

10. **解**：是.　理由：∵ 点 E，F 分别是 OA，OB 的中点，∴ $FE = \dfrac{1}{2}AB$，$FE /\!/ AB$.

∵ 点 G，H 分别是 OC，OD 的中点，

∴ $HG = \dfrac{1}{2}CD$，$HG /\!/ CD$.

∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AB = CD$，$AB /\!/ CD$.

∴ $EF = HG$，$FE /\!/ HG$.

∴ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

∵ $FE /\!/ AB$，∴ $\angle OEF = \angle OAB$.

同理 $\angle OEH = \angle OAD$，

∴ $\angle HEF = \angle DAB$，

同理 $\angle EFG = \angle ABC$，

$\angle FGH = \angle BCD$，$\angle GHE = \angle CDA$.

又易得 $\dfrac{EF}{AB} = \dfrac{FG}{BC} = \dfrac{GH}{CD} = \dfrac{HE}{AD} = \dfrac{1}{2}$，

∴ $\square EFGH \backsim \square ABCD$.

∵ 它们的对应顶点的连线相交于点 O，

∴ $\square ABCD$ 与四边形 $EFGH$ 是位似图形，O 为位似中心.

11. **证明**：∵ $\triangle DEO$ 与 $\triangle ABO$ 是位似图形，

∴ $\dfrac{OD}{OA} = \dfrac{OE}{OB}$.

∵ $\triangle OKF$ 与 $\triangle OBC$ 是位似图形，

∴ $\dfrac{OE}{OB} = \dfrac{OF}{OC}$，

∴ $\dfrac{OD}{OA} = \dfrac{OF}{OC}$，即 $OD \cdot OC = OF \cdot OA$.

12. **解**：(1) $\triangle ABC$ 与 $\triangle FGC$ 是位似图形，位似中心是点 C.

在矩形 $ABCD$ 中，$AD /\!/ BC$，

∴ $\triangle AFD \backsim \triangle CFE$，∴ $\dfrac{CF}{AF} = \dfrac{CE}{AD}$.

又∵ $AD = BC$，∴ $\dfrac{CF}{AF} = \dfrac{CE}{BC}$.

∵ $\angle ABC = 90°$，$OE \perp BC$，

∴ $OE /\!/ AB$.

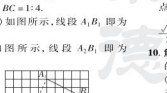
又∵ $OA = OC$，∴ $CE = \dfrac{1}{2}BC$，

∴ $\dfrac{CF}{AF} = \dfrac{1}{2}$，∴ $\dfrac{CF}{AC} = \dfrac{1}{3}$，即 $\triangle ABC$ 与 $\triangle FGC$ 的位似比为 3∶1.

(2) CF：$BC = 1$：4.

13. **解**：(1) 如图所示，线段 A_1B_1 即为所求；

(2) 如图所示，线段 A_2B_1 即为所求；



(第 13 题)

(3) 20

第 3 课时　平面直角坐标系中的位似

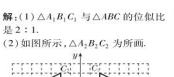
1. C　**2.** A　**3.** A

4. $(-1, 2)$ 或 $(1, -2)$　**5.** $(2, 2\sqrt{3})$

6. $(4, 6)$ 或 $(-4, -6)$

7. **解**：(1) $\triangle A_1B_1C_1$ 与 $\triangle ABC$ 的位似比是 2∶1.

(2) 如图所示，$\triangle A_2B_2C_2$ 为所画.



(第 7 题)

(3) ∵ 点 $P(a, b)$ 为 $\triangle ABC$ 内一点，

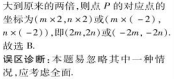
∴ 依上述两次变换后，点 P 在 $\triangle A_2B_2C_2$ 内的对应点 P_2 的坐标是 $(-2a, 2b)$.

8. B　**点拨**：点 $P(m, n)$ 是线段 AB 上一点，以原点 O 为位似中心把 $\triangle AOB$ 放大到原来的两倍，则点 P 的对应点的坐标为 $(m \times 2, n \times 2)$ 或 $(m \times (-2), n \times (-2))$，即 $(2m, 2n)$ 或 $(-2m, -2n)$. 故选 B.

误区诊断：本题易忽略其中一种情况，应考虑全面.

9. **解**：(1) 如图，$\triangle A_1B_1C$ 为所作，点 A_1 的坐标为 $(3, -3)$.

(2) 如图，$\triangle A_2B_2C$ 为所作.



(第 9 题)

(3) $CB = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$，

点 B 经过的路径长为 $\dfrac{90 \cdot \pi \cdot \sqrt{17}}{180} = \dfrac{\sqrt{17}}{2}\pi$.

10. **解**：(1) 如图，$\triangle A_1B_1C_1$ 就是所要画的三角形.

(2) 如图，$\triangle A_2B_2C$ 就是所要画的三角形，

点 A_2 的坐标为 $(-2, -2)$.



(第 10 题)

11. **解**：(1) 图略.

(2) 将点 $(0, 4)$，$(1, 0)$，$(2, 4)$，$(3, 0)$，$(4, 4)$ 的横坐标保持不变，纵坐标分别乘 -1，得 $(0, -4)$，$(1, 0)$，$(2, -4)$，$(3, 0)$，$(4, -4)$，然后描点连线，图略.

(3) 将点 $(0, 4)$，$(1, 0)$，$(2, 4)$，$(3, 0)$，$(4, 4)$ 的纵坐标保持不变，横坐标分别乘 -1，得 $(0, 4)$，$(-1, 0)$，$(-2, 4)$，$(-3, 0)$，$(-4, 4)$，然后描点连线，图略.

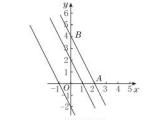
(4) 图案①与图案②关于 x 轴对称，图案②与图案③位似，且位似中心为原点 O.

12. **解**：(1) 由已知得 $k = -2$，把点 $(3, 1)$ 的坐标和 $k = -2$ 代入 $y = kx + b$ 中，得 $1 = -2 \times 3 + b$，∴ $b = 7$.



第 12 题答案

(2) 如图，根据位似比为 1∶2 得函数 $y = kx + b$ 的图像有两种情况：



(第 12 题)

①不经过第三象限时，过点 $(1, 0)$ 和 $(0, 2)$，这时函数表达式为 $y = -2x + 2$；

②不经过第一象限时，过点 $(-1, 0)$ 和 $(0, -2)$，这时函数表达式为 $y = -2x - 2$.

点拨：本题考查了一次函数的应用，根据数形结合思想，利用待定系数法进行分类讨论，即可求出函数表达式.

阶段核心归类

1. **证明**：∵ $EC' /\!/ BC$，∴ $\angle C'EO = \angle CEO$.

又∵ $\angle COE = \angle C'OE'$，

∴ $\triangle OCE \backsim \triangle OC'E'$，∴ $\dfrac{CE}{C'E'} = \dfrac{OE}{OE'}$.

又∵ $E'D' /\!/ ED$，∴ $\angle D'E'O = \angle DEO$.

又∵ $\angle DOE = \angle D'OE'$，

∴ $\triangle DOE \backsim \triangle D'OE'$，∴ $\dfrac{DE}{D'E'} = \dfrac{OE}{OE'}$.

∴ $\angle CED = \angle C'E'D'$，$\dfrac{CE}{C'E'} = \dfrac{DE}{D'E'}$.

∴ $\triangle CDE \backsim \triangle C'D'E'$.

∵ $\triangle CDE$ 是等边三角形，

∴ $\triangle C'D'E'$ 是等边三角形.

2. **解**：如图，在 AB 边上任取一点 D'，过点 D' 作 $D'E' \perp BC$ 于点 E'，在 BC 上截取 $E'F'$，使 $E'F' = 2D'E'$，过点 F' 作 $F'G' \perp BC$，过点 D' 作 $D'G' /\!/ BC$ 交 $F'G'$ 于点 G'，作射线 BG' 交 AC 于点 G，过点 G 作 $GF /\!/ G'F'$，$DG /\!/ D'G'$，GF 交 BC 于点 F，DG 交 AB 于点 D，过点 D 作 $DE /\!/ D'E'$ 交 BC 于点 E，则四边形 $DEFG$ 为 $\triangle ABC$ 的内接矩形，且 $DE : EF = 1 : 2$.（作法不唯一）



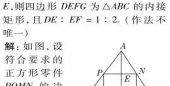
(第 2 题)

3. **解**：如图，设符合要求的正方形零件 $PQMN$ 的边 PN 与 $\triangle ABC$ 的高 AD 相交于点 E，易知 AE 为 $\triangle APN$ 的边 PN 上的高. 设正方形零件 $PQMN$ 的边长为 x mm，∵ $PN /\!/ BC$，∴ $\angle APN = \angle B$，$\angle ANP = \angle C$.

∴ $\triangle APN \backsim \triangle ABC$，∴ $\dfrac{AE}{AD} = \dfrac{PN}{BC}$，

即 $\dfrac{80 - x}{80} = \dfrac{x}{120}$，解得 $x = 48$，

即这个正方形零件的边长是 48 mm.



(第 3 题)

4. (1) **证明**：∵ $DP /\!/ BQ$，

∴ $\angle ADP = \angle B$，$\angle APD = \angle AQB$.

∴ $\triangle ADP \backsim \triangle ABQ$. ∴ $\dfrac{DP}{BQ} = \dfrac{AP}{AQ}$.

同理 $\triangle AEP \backsim \triangle ACQ$，

∴ $\dfrac{PE}{QC} = \dfrac{AP}{AQ}$，$\dfrac{DP}{BQ} = \dfrac{PE}{QC}$.

(2) ①**解**：$MN = \dfrac{\sqrt{2}}{9}$.

②**证明**：∵ $\angle B + \angle C = 90°$，$\angle CEF + \angle C = 90°$，∴ $\angle B = \angle CEF$.

又∵ $\angle BGD = \angle EFC = 90°$，

∴ $\triangle BGD \backsim \triangle EFC$. ∴ $\dfrac{GF}{CF} = \dfrac{BG}{EF}$.

∵ $DG \cdot EF = CF \cdot BG$. 又∵ $DG = GF = EF$，∴ $GF^2 = CF \cdot BG$.

由 (1) 易得 $\dfrac{DM}{BC} = \dfrac{MN}{GF} = \dfrac{EN}{CF}$，

∴ $\left(\dfrac{MN}{GF}\right)^2 = \dfrac{DM}{BG} \cdot \dfrac{EN}{CF}$，即 $\dfrac{MN^2}{FG^2} = \dfrac{DM \cdot EN}{BG \cdot CF}$，∴ $MN^2 = DM \cdot EN$.

全章热门考点整合应用

1. C　**2.** 20 m

3. **解**：四边形 $ABCD$ 与四边形 $A'B'C'D'$ 相似. 理由：由已知条件易得 $\angle ADC = \angle A'D'C'$，$\angle C = \angle C'$，$\angle ABC = \angle A'B'C'$，$\angle A = \angle A'$，且 $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CD}{C'D'} = \dfrac{DA}{D'A'} = \dfrac{4}{3}$，所以四边形 $ABCD$ 与四边形 $A'B'C'D'$ 相似.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. 解：如图，过点 B 作 $BM\perp x$ 轴于点 M，过点 B' 作 $B'N\perp x$ 轴于点 N，



（第 4 题）

易证得 $\triangle CBM\backsim\triangle CB'N$.

$\therefore MC:NC=BM:B'N=BC:B'C$.

又由已知条件知 $NC=a+1$，$B'N=-b$，$BC:B'C=1:2$，

$\therefore MC:(a+1)=BM:(-b)=1:2$.

$\therefore MC=\frac{1}{2}(a+1)$，$BM=-\frac{b}{2}$.

$\therefore MO=\frac{1}{2}(a+1)+1=\frac{a+3}{2}$.

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $\left(-\frac{a+3}{2},-\frac{b}{2}\right)$.

5. 解：(1)$\because DE/\!/BC$，

$\therefore \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$，$\therefore \frac{8-2x}{8}=\frac{y}{6}$，

$\therefore y=-\frac{3}{2}x+6(0\leqslant x\leqslant 4)$.

(2)$\because S_{\triangle BDE}=\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot y=$

$\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot\left(6-\frac{3}{2}x\right)=-\frac{3}{2}(x-2)^2+6$，且 $-\frac{3}{2}(x-2)^2+6\leqslant 6$，

$\therefore -\frac{3}{2}(x-2)^2+6\leqslant 6$.

$\therefore$ 当 $x=2$ 时，$S_{\triangle BDE}$ 有最大值，最大值为 6.

6. (1) 证明：$\because D$ 是 BC 边上的中点，$DE\perp BC$，

$\therefore EB=EC$，

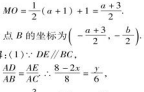
$\therefore \angle B=\angle 1$.

又$\because AD=AC$，

$\therefore \angle ACB=\angle 2$.

$\therefore \triangle ABC\backsim\triangle FCD$.

(2) 解：如图，过点 A 作 $AM\perp CB$ 于点 M.



（第 6 题）

$\because D$ 是 BC 边上的中点，

$\therefore BC=2CD$.

由(1)知 $\triangle ABC\backsim\triangle FCD$，

$\therefore \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle FCD}}=\left(\frac{BC}{CD}\right)^2=\frac{4}{1}$.

又$\because S_{\triangle FCD}=5$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=20$.

$\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AM$，

$\therefore AM=\frac{2S_{\triangle ABC}}{BC}=\frac{2\times 20}{10}=4$.

$\because DE\perp BC$，$AM\perp BC$，

$\therefore \angle EDB=\angle AMB=90°$.

又$\because \angle B=\angle B$，

$\therefore \triangle BDE\backsim\triangle BMA$. $\therefore \frac{DE}{AM}=\frac{BD}{BM}$.

由 $AD=AC$，$AM\perp BC$，

知 $DM=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{4}BC=\frac{5}{2}$.

又$\because BD=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\times 10=5$，

$\therefore \frac{DE}{4}=\frac{5}{5+\frac{5}{2}}$. $\therefore DE=\frac{8}{3}$.

7. (1) 证明：$\because DB$ 平分 $\angle ADC$，

$\therefore \angle ADB=\angle CDB$.

$\because \angle ABD=\angle BCD=90°$，

$\therefore \triangle ABD\backsim\triangle BCD$.

$\therefore \frac{AD}{BD}=\frac{BD}{CD}$. $\therefore BD^2=AD\cdot CD$.

(2) 解：$\because BM/\!/CD$，$\therefore \angle MBD=\angle BDC$.

又$\because \angle ADB=\angle CDB$，

$\therefore \angle ADB=\angle MBD$.

$\therefore \angle ABD=90°$，

$\therefore BM=MD$，$\angle MAB=\angle MBA$.

$\therefore BM=MD=AM=4$.

$\because BD^2=AD\cdot CD$，且 $CD=6$，$AD=8$，

$\therefore BD^2=48$.

$\because BC^2=BD^2-CD^2=12$.

$\because MC^2=MB^2+BC^2=28$.

$\therefore MC=2\sqrt{7}$（负值舍去）.

$\because BM/\!/CD$，

$\therefore \angle BMN=\angle DCN$.

又$\because \angle MNB=\angle CND$，

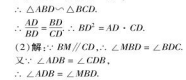
$\therefore \triangle MNB\backsim\triangle CND$.

$\therefore \frac{BM}{CD}=\frac{MN}{CN}=\frac{2}{3}$，

即$\frac{MN}{2\sqrt{7}-MN}=\frac{2}{3}$，

解得 $MN=\frac{4\sqrt{7}}{5}$.

8. 解：(方法一：作延长线) 延长 AD，与地面交于点 M，如图①所示.



（第 8 题）

由 $AM/\!/FH$ 知 $\angle AMB=\angle FHG$.

$\because AB\perp BG$，$FG\perp BG$，$DC\perp BG$，

$\therefore \angle ABC=\angle DCM=\angle FGH=90°$.

又$\because \angle AMB=\angle DMC=\angle FHG$，

$\therefore \triangle ABM\backsim\triangle DCM\backsim\triangle FGH$.

$\therefore \frac{AB}{BM}=\frac{CD}{CM}=\frac{FG}{GH}$.

$\because CD=2$ m，$FG=1.2$ m，$GH=2$ m，

$\therefore \frac{2}{CM}=\frac{1.2}{2}$. 解得 $CM=\frac{10}{3}$ m.

$\because BC=4$ m，

$\therefore BM=BC+CM=4+\frac{10}{3}=\frac{22}{3}$(m).

$\therefore \frac{AB}{\frac{22}{3}}=\frac{1.2}{2}$. 解得 $AB=4.4$ m.

故这棵树的高度是 4.4 m.

(方法二：作垂线) 过点 D 作 $DM\perp AB$ 于点 M，如图②所示.

易知 $\triangle AMD\backsim\triangle FGH$，

$\therefore \frac{AM}{DM}=\frac{FG}{GH}$

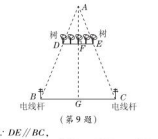
而 $DM=BC=4$ m，$AM=AB-CD=(AB-2)$ m，$FG=1.2$ m，$GH=2$ m，

$\therefore \frac{AB-2}{4}=\frac{1.2}{2}$，解得 $AB=4.4$ m.

故这棵树的高度是 4.4 m.

9. 解：如图，过点 A 作 $AF\perp DE$，垂足为 F，并延长 AF 交 BC 于点 G.

由题意知 $DE=24$ m，$BC=60$ m，$AF=30$ m.



（第 9 题）

$\because DE/\!/BC$，

$\therefore \angle ADE=\angle ABC$，$\angle AED=\angle ACB$.

$\therefore \triangle ADE\backsim\triangle ABC$.

$\because AF\perp DE$，$DE/\!/BC$，$\therefore AG\perp BC$.

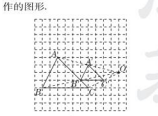
$\therefore \frac{AF}{AG}=\frac{DE}{BC}$，即$\frac{30}{AG}=\frac{24}{60}$.

解得 $AG=75$ m，

$\therefore FG=AG-AF=75-30=45$(m)，

即河的宽度为 45 m.

10. 解：如图所示的 $\triangle A'B'C'$ 即为所求作的图形.



（第 10 题）

11. (1) 解：$\because AP$ 平分 $\angle BAC$，

$\therefore \angle PAC=\frac{1}{2}\angle BAC$.

又$\because AQ$ 平分 $\angle CAD$，

$\therefore \angle CAQ=\frac{1}{2}\angle CAD$.

$\therefore \angle PAC+\angle CAQ=\frac{1}{2}\angle BAC+\frac{1}{2}\angle CAD=\frac{1}{2}(\angle BAC+\angle CAD)$.

又$\because \angle BAC+\angle CAD=180°$，

$\therefore \angle PAC+\angle CAQ=90°$，

即 $\angle PAQ=90°$.

(2) 证明：由(1)知 $\angle PAQ=90°$.

又$\because M$ 是线段 PQ 的中点，

$\therefore PM=AM$.

$\because \angle APM=\angle PAM$.

$\because \angle APM=\angle B+\angle BAP$，$\angle PAM=\angle CAM+\angle PAC$，$\angle BAP=\angle PAC$，

$\therefore \angle B=\angle CAM$.

又$\because \angle AMC=\angle BMA$，

$\therefore \triangle ACM\backsim\triangle BAM$.

$\therefore \frac{CM}{AM}=\frac{AM}{BM}$.

$\therefore AM^2=CM\cdot BM$，

即 $PM^2=CM\cdot BM$.

第二十六章　解直角三角形

26.1　锐角三角函数

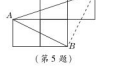
第 1 课时　正　切

1. B　**2.** D　**3.** A　**4.** C

5. B　**点拨**：如图，连接 BC，根据勾股定理可以计算出 $AB=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，$AC=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$，$BC=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，$\therefore AB=BC$.

又$\because AB^2+BC^2=(\sqrt{5})^2+(\sqrt{5})^2=10$，$AC^2=(\sqrt{10})^2=10$，

$\therefore AB^2+BC^2=AC^2$. 由勾股定理的逆定理可得 $\triangle ABC$ 为直角三角形，且 $\angle ABC=90°$. $\therefore$ 在 Rt $\triangle ABC$ 中，$\tan\angle BAC=\frac{BC}{AB}=1$.

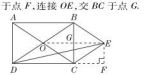


（第 5 题）

6. A

7. A　**点拨**：设 $AB=3x$，$BC=2x$.

如图，过点 E 作 $EF\perp DC$，交 DC 的延长线于点 F，连接 OE，交 BC 于点 G.



（第 7 题）

$\because BE/\!/AC$，$CE/\!/DB$，

$\therefore$ 四边形 $BOCE$ 是平行四边形.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore OB=OC$. $\therefore$ 四边形 $BOCE$ 是菱形.

$\therefore OE$ 与 BC 互相垂直平分.

$\because EF\perp DC$，$BC\perp DC$，$OE\perp BC$，

$\therefore$ 四边形 $CFEG$ 是矩形.

$\therefore EF=GC=\frac{1}{2}BC=x$，$OE/\!/DC/\!/AB$.

$\therefore$ 四边形 $AOEB$ 是平行四边形.

$\therefore OE=AB$.

$\therefore CF=GE=\frac{1}{2}OE=\frac{1}{2}AB=\frac{3}{2}x$.

$\therefore \tan\angle EDC=\frac{EF}{DF}=\frac{x}{3x+\frac{3}{2}x}=\frac{2}{9}$.

8. B　**9.** A　**10.** C

11. $\frac{4}{3}$　**点拨**：本题易忽略求正切值的前提是将 $\angle B$ 放在一个直角三角形中.

12. 解：$\because (2b)^2=4(c-a)(c+a)$，

$\therefore a^2+b^2=c^2$.

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形，且 $\angle C=90°$.

$\because 5a-3c=0$，$\therefore 5a=3c$.

设 $a=3k$，则 $c=5k$，$\therefore b=4k$.

$\therefore \tan A+\tan B=\frac{3}{4}+\frac{4}{3}=\frac{25}{12}$.

13. 解：$\because AC\perp CD$，$BD\perp CD$，

$\therefore \angle ACE=\angle BDE=90°$.

又$\because$ 入射角等于反射角，

$\therefore \angle A=\angle B=\alpha$.



第13题视频

$\therefore \triangle ACE\backsim\triangle BDE$. $\therefore \frac{AC}{BD}=\frac{CE}{ED}$.

又$\because AC=3$，$BD=6$，$CD=12$，

$\therefore \frac{3}{CE}=\frac{6}{12-CE}$. $\therefore CE=4$.

$\therefore \tan\alpha=\tan A=\frac{CE}{AC}=\frac{4}{3}$.

点拨：利用等角代换法将 α 用 $\angle A$ 代替，求出 $\angle A$ 的正切值即可.

14. (1) 证明：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore AB=AD$，$AC\perp BD$.

$\because BE=DF$，$\therefore AE=AF$.

$\because AE:BE=AF:DF$.

$\therefore EF/\!/BD$.

$\therefore AC\perp EF$.

(2) 解：$\because$ 延长 EF 交 CD 的延长线于点 G，$EF/\!/BD$，

$\therefore EG/\!/BD$，$\therefore \angle G=\angle CDB$.

又$\because \angle ADO=\angle CDB$，

$\therefore \angle G=\angle ADO$.

$\therefore \tan G=\tan\angle ADO=\frac{OA}{OD}=\frac{1}{2}$.

$\therefore OA=\frac{1}{2}OD$.

$\therefore BD=4$，$\therefore OD=2$.

$\therefore OA=1$，即 AO 的长为 1.

15. (1) 证明：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AB=AD$.

又$\because BMA=\angle DNA=90°$，$AM=AN$，

$\therefore$ Rt $\triangle ABM\cong$ Rt $\triangle ADN$(HL).

(2) 解：$\because$ Rt $\triangle ABM\cong$ Rt $\triangle ADN$，

$\therefore BM=DN$，$BAM=\angle DAN$.

$\because \angle BAD=90°$，

$\therefore \angle MAN=90°$.

$\because AM=AN$，

$\therefore \angle AMF=\angle ANM=45°$.

又$\angle DNA=90°$，

$\therefore \angle DNF=45°$.

$\therefore \angle AMN=\angle DNF$.

又$\angle ATM=\angle DTN$，

$\therefore \triangle AMT\backsim\triangle DNT$.

$\therefore \frac{AT}{DT}=\frac{AM}{DN}$.

$\because AT=\frac{1}{4}AD$，

$\therefore \frac{AT}{DT}=\frac{1}{3}$.

$\therefore \frac{AM}{DN}=\frac{1}{3}$.

$\therefore$ 在 Rt $\triangle ABM$ 中，$\tan\angle ABM=\frac{AM}{BM}=\frac{AM}{DN}=\frac{1}{3}$.

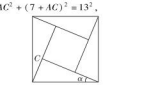
第 2 课时　正弦与余弦

1. C　**2.** A　**3.** D　**4.** A

5. D　**点拨**：$\because$ 小正方形的面积为 49，大正方形的面积为 169，

$\therefore$ 小正方形的边长是 7，大正方形的边长是 13.

如图，在 Rt $\triangle ABC$ 中，$AC^2+BC^2=AB^2$，即 $AC^2+(7+AC)^2=13^2$，



（第 5 题）

整理得 $AC^2+7AC-60=0$，解得 $AC=5$ 或 $AC=-12$(舍去).

$\therefore BC=12$.

在 Rt $\triangle ABC$ 中，$AC=5$，$BC=12$，$AB=13$，

$\therefore \sin\alpha-\cos\alpha=\frac{5}{13}-\frac{12}{13}=-\frac{7}{13}$.

6. C　**7.** A　**8.** 0.35　**9.** C　**10.** A

11. A　**12.** B

13. 解：解方程 $2x^2-5x+2=0$ 得 $x_1=2$，$x_2=\frac{1}{2}$.

$\because 0<\cos\alpha<1$，

$\therefore \cos\alpha=\frac{1}{2}$.

误区诊断：解方程 $2x^2-5x+2=0$ 得 $x_1=2$，$x_2=\frac{1}{2}$，

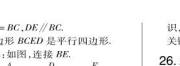
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

此时易忽略 $\cos\alpha(\alpha$ 为锐角$)$的取值范围是 $0<\cos\alpha<1$，而错得 $\cos\alpha=2$ 或 $\cos\alpha=\frac{1}{2}$.

14. (1)**证明**：∵ 四边形 $ABCD$ 为正方形，∴ $AB=AD$，$\angle BAD=90°$.
∴ $\angle BAF+\angle DAE=90°$.
∵ $DE\perp AM$，$BF\perp AM$，
∴ $\angle DEA=\angle AFB=90°$.
∴ $\angle ADE+\angle DAE=90°$，
∴ $\angle BAF=\angle ADE$.
在 $\triangle DEA$ 和 $\triangle AFB$ 中，
$\begin{cases}\angle ADE=\angle BAF,\\ \angle DEA=\angle AFB,\\ DA=AB,\end{cases}$
∴ $\triangle DEA\cong\triangle AFB$. ∴ $AE=BF$.
(2)**解**：设 $AE=x$，则 $BF=x$.
∵ $\triangle DEA\cong\triangle AFB$，
∴ $DE=AF=2$.
∵ 四边形 $ABED$ 的面积为 24，
∴ $\frac{1}{2}AE\cdot BF+\frac{1}{2}AE\cdot ED=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\times2x=24$，
解得 $x_1=6$，$x_2=-8$(舍去).
∴ $AE=BF=6$.
∴ $EF=AE-AF=6-2=4$.
在 $\mathrm{Rt}\triangle EFB$ 中，$BE=\sqrt{EF^2+BF^2}=\sqrt{6^2+4^2}=2\sqrt{13}$，
∴ $\sin\angle EBF=\frac{EF}{BE}=\frac{4}{2\sqrt{13}}=\frac{2\sqrt{13}}{13}$.

15. **解**：(1) 在 $\triangle ABC$ 中，∵ $\angle ACB=90°$，$BC=8$，$\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{4}{5}$，
∴ $AB=10$. ∵ D 是 AB 的中点，
∴ $CD=\frac{1}{2}AB=5$.
(2) 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，
∵ $AB=10$，$BC=8$，
∴ $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=6$.
∵ D 是 AB 的中点，
∴ $BD=5$，$S_{\triangle BDC}=S_{\triangle ADC}$.
∵ $S_{\triangle BDC}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$，
即 $\frac{1}{2}CD\cdot BE=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}AC\cdot BC$.
∴ $BE=\frac{6\times8}{2\times5}=\frac{24}{5}$.
在 $\mathrm{Rt}\triangle BDE$ 中，$\cos\angle DBE=\frac{BE}{BD}=\frac{\frac{24}{5}}{5}=\frac{24}{25}$，即 $\cos\angle ABE=\frac{24}{25}$.

16. (1)**证明**：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，
∴ $AD=BC$，$AD\parallel BC$.
∵ 点 E 在 AD 延长线上，$DE=AD$，
∴ $DE=BC$，$DE\parallel BC$.
∴ 四边形 $BCED$ 是平行四边形.
(2)**解**：如图，连接 BE.



(第 16 题)

∵ $DA=DB=2$，$DE=AD$，
∴ $DE=2$，$BD=\frac{1}{2}AE$.
∴ $\angle ABE=90°$，$AE=4$.
∵ $\cos A=\frac{AB}{AE}=\frac{1}{4}$，
∴ $AB=\frac{1}{4}AE=\frac{1}{4}\times4=1$.
∴ $BE=\sqrt{AE^2-AB^2}=\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$，即点 B 到点 E 的距离为 $\sqrt{15}$.

17. **解**：(1) 如图，过点 A 作 $AD\perp x$ 轴，垂足为 D.



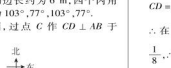
(第 17 题)

∵ $OA=2$，$\angle AOB=60°$，
∴ 在 $\mathrm{Rt}\triangle OAD$ 中，$\cos60°=\frac{AD}{OA}$，
$\cos60°=\frac{OD}{OA}$. ∴ $AD=OA\cdot\sin60°=2\sin60°=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，
$OD=OA\cdot\cos60°=2\cos60°=2\times\frac{1}{2}=1$.
∴ 点 A 的坐标是 $(1,\sqrt{3})$.
(2) 设直线 AB 的表达式为 $y=kx+b$. ∵ 直线 AB 过点 $A(1,\sqrt{3})$ 和 $B(3,0)$，
∴ $\begin{cases}k+b=\sqrt{3},\\3k+b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-\frac{\sqrt{3}}{2},\\b=\frac{3\sqrt{3}}{2}.\end{cases}$
∴ 直线 AB 的表达式为 $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{3\sqrt{3}}{2}$. 令 $x=0$，则 $y=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.
∴ $OC=\frac{3\sqrt{3}}{2}$. ∴ $S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}OC\cdot OD=\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{3}}{2}\times1=\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

点拨：过平面直角坐标系中的一点向 x 轴或向 y 轴作垂线是求点的坐标及三角形的面积的主要方法. 在直角三角形中运用三角函数的知识，求出相关线段的长是解题的关键.

26.2 锐角三角函数的计算

1. A　**2.** A　**3.** D　**4.** D　**5.** A
6. D　**点拨**：易得 $\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{5}{13}$，再用科学计算器求 $\angle A$.
7. 27.8°　**8.** C　**9.** C　**10.** A
11. **解**：$\sin35°29'\approx0.580$.
点拨：易误认为 $35°29'=35.29°$ 而导致出错.
12. **解**：(1) 题图 ① 中，$\angle B_1AC_1<\angle B_2AC_2<\angle B_3AC_3$，易知 $\frac{B_1C_1}{AB_1}<\frac{B_2C_2}{AB_2}<\frac{B_3C_3}{AB_3}$，即 $\sin\angle B_1AC_1<\sin\angle B_2AC_2<\sin\angle B_3AC_3$. 题图 ② 中，$\angle B_1AC<\angle B_2AC<\angle B_3AC$，易知 $\frac{AC}{AB_1}>\frac{AC}{AB_2}>\frac{AC}{AB_3}$，
即 $\cos\angle B_1AC>\cos\angle B_2AC>\cos\angle B_3AC$. 综上可得，锐角的正弦值随锐角度数的增大而增大，余弦值随锐角度数的增大而减小.
(2) $\sin18°<\sin34°<\sin50°<\sin62°<\sin88°$，$\cos88°<\cos62°<\cos50°<\cos34°<\cos18°$.
(3) $=$，$<$，$>$
(4) ∵ $\cos30°=\sin60°$，$\cos70°=\sin20°$，
∴ $\sin10°<\cos70°<\sin50°<\cos30°$.
13. **解**：(1) ∵ $PE\perp AB$，$PF\perp BC$，
∴ $\sin\angle EBP=\frac{PE}{BP}=\sin40°$，
$\sin\angle FBP=\frac{PF}{BP}=\sin20°$.
又∵ $\sin40°>\sin20°$，
∴ $\frac{PE}{BP}>\frac{PF}{BP}$. ∴ $PE>PF$.
(2) ∵ α，β 都是锐角，且 $\alpha>\beta$，
∴ $\sin\alpha>\sin\beta$.
又∵ $\sin\angle EBP=\frac{PE}{PB}=\sin\alpha$，$\sin\angle FBP=\frac{PF}{PB}=\sin\beta$，∴ $\frac{PE}{PB}>\frac{PF}{PB}$. ∴ $PE>PF$.
14. **解**：∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形，
∴ $AC\perp BD$，$OA=\frac{1}{2}AC=4$ m.
在 $\mathrm{Rt}\triangle AOB$ 中，$\tan\angle BAO=\frac{OB}{OA}$，
∴ $OB=OA\cdot\tan\angle BAO=4\times\frac{5}{4}=5$(m).
∴ $AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=6$ m.
又用计算器求得当 $\tan\angle BAO=\frac{5}{4}=1.25$ 时，$\angle BAO\approx51.3°$，
由菱形的性质知 $\angle BCD=\angle BAD=2\angle BAO\approx102.6°=360°$，则 $\angle ABC=\angle ADC=77°$.
∴ 菱形的边长约为 6 m，四个内角分别约为 103°，77°，103°，77°.
15. **解**：如图，过点 C 作 $CD\perp AB$ 于点 D.

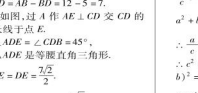


(第 15 题)

∵ 丙地位于甲地北偏西 30°方向，距离甲地 480 km，
∴ 在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 中，$\angle ACD=30°$，$AC=480$ km. ∴ $AD=\frac{1}{2}AC=240$ km，
$CD=\frac{\sqrt{3}}{2}AC=240\sqrt{3}$ km.
∵ 丙地位于乙地北偏东 66°方向，
∴ 在 $\mathrm{Rt}\triangle BCD$ 中，$\angle CBD=24°$.
∴ $BD=\frac{CD}{\tan24°}=\frac{240\sqrt{3}}{\tan24°}\approx\frac{1\,600\sqrt{3}}{3}$(km).
∴ $AB=AD+BD\approx\left(240+\frac{1\,600\sqrt{3}}{3}\right)$ km.
答：甲、乙两地之间直达高速公路的长 AB 约为 $\left(240+\frac{1\,600\sqrt{3}}{3}\right)$km.

阶段核心方法

1. **解**：(1) ∵ $\angle B=90°$，$\angle BDC=45°$，
∴ $BD=BC=5$.
∵ $\sin A=\frac{5}{13}=\frac{BC}{AC}$，∴ $AC=13$.
∴ $AB=\sqrt{AC^2-BC^2}=12$.
∴ $AD=AB-BD=12-5=7$.
(2) 如图，过 A 作 $AE\perp CD$ 交 CD 的延长线于点 E.
∵ $\angle ADE=\angle CDB=45°$，
∴ $\triangle ADE$ 是等腰直角三角形.
∴ $AE=DE=\frac{7\sqrt{2}}{2}$.
∴ $\sin\angle ACD=\frac{AE}{AC}=\frac{\frac{7\sqrt{2}}{2}}{13}=\frac{7\sqrt{2}}{26}$.



(第 1 题)

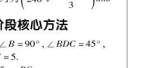
2. **解**：(1) 过点 A 作 $AD\perp BC$，交 BC 的延长线于点 D，如图所示.
∵ $\angle ACB=150°$，∴ $\angle ACD=30°$.
∴ 在 $\mathrm{Rt}\triangle ADC$ 中，$AD=\frac{1}{2}AC=2$，
$CD=AC\cdot\cos30°=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$.
∴ 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，$\tan B=\frac{AD}{BD}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$. ∴ $BD=16$.
∴ $BC=BD-CD=16-2\sqrt{3}$.



(第 2 题)

(2) 在 BC 边上取一点 M，使得 $CM=AC$，连接 AM，如图所示.
∵ $\angle ACB=150°$，∴ $\angle AMC=\angle MAC=15°$. 由(1) 可知，$AD=2$，$CD=2\sqrt{3}$，
∴ $\tan15°=\tan\angle AMD=\frac{AD}{MD}=\frac{2}{4+2\sqrt{3}}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}\approx\frac{1}{2+1.7}\approx0.3$.

3. D
4. (1)**证明**：如图，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\sin A=\frac{a}{c}$，$\cos A=\frac{b}{c}$，根据勾股定理，得 $a^2+b^2=c^2$，∴ $\sin^2A+\cos^2A=\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{c^2}=1$.



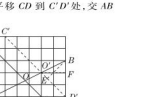
(第 4 题)

(2)**解**：如图，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\sin A=\frac{a}{c}$，$\cos A=\frac{b}{c}$，根据勾股定理，得 $a^2+b^2=c^2$. ∴ $\sin A\cdot\cos A=\frac{1}{2}$，
∴ $\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{c}=\frac{1}{2}$.
∴ $c^2=2ab$. ∵ $a^2+b^2=2ab$，即 $(a-b)^2=0$. ∴ $a=b$. ∴ 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\tan A=\frac{a}{b}=1$. ∴ $\angle A=45°$.
5. **解**：∵ $b^2=(c+a)(c-a)$，
∴ $b^2=c^2-a^2$，即 $c^2=a^2+b^2$.
∴ $\triangle ABC$ 是直角三角形，且 $\angle C=90°$.
∵ $5b-4c=0$，∴ $5b=4c$.
∴ $\frac{b}{c}=\frac{4}{5}$. 设 $b=4k$，$c=5k$，则 $a=3k$.
∴ $\sin A+\sin B=\frac{3k}{5k}+\frac{4k}{5k}=\frac{7}{5}$.
6. **解**：如图，连接 EF，设 $CF=k$，由题意可得 $CD=AD=AB=BC=4k$，$BE=EC=2k$，$DF=3k$.
根据勾股定理得 $AF=\sqrt{AD^2+DF^2}=\sqrt{(4k)^2+(3k)^2}=5k$，$EF=\sqrt{CF^2+CE^2}=\sqrt{k^2+(2k)^2}=\sqrt{5}k$，$AE=\sqrt{AB^2+BE^2}=\sqrt{(4k)^2+(2k)^2}=2\sqrt{5}k$.
∵ $EF^2+AE^2=AF^2$.
∴ $\triangle AEF$ 是直角三角形，$\angle AEF=90°$.



(第 6 题)

∴ $\sin\angle EAF=\frac{EF}{AF}=\frac{\sqrt{5}k}{5k}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，
$\cos\angle EAF=\frac{AE}{AF}=\frac{2\sqrt{5}k}{5k}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.
7. (1)**证明**：∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，
∴ $\angle BAD=90°$.
∵ $EF\perp AM$，∴ $\angle AFE=90°$.
∵ $\angle EAF+\angle BAM=\angle EAF+\angle AEF=90°$.
∴ $\angle BAM=\angle AEF$.
(2)**解**：在 $\mathrm{Rt}\triangle ABM$ 中，
∵ $\angle B=90°$，$AB=4$，
$\cos\angle BAM=\frac{4}{5}$，
∴ $AM=\frac{AB}{\cos\angle BAM}=4\times\frac{5}{4}=5$.
∵ F 为 AM 的中点，∴ $AF=\frac{5}{2}$.
∵ $\angle BAM=\angle AEF$，
∴ $\cos\angle AEF=\cos\angle BAM=\frac{4}{5}$.
∴ $\sin\angle AEF=\frac{3}{5}$.
在 $\mathrm{Rt}\triangle AEF$ 中，
∵ $\angle AFE=90°$，$AF=\frac{5}{2}$，$\sin\angle AEF=\frac{3}{5}$，
∴ $AE=\frac{AF}{\sin\angle AEF}=\frac{5}{2}\times\frac{5}{3}=\frac{25}{6}$.
∴ $DE=AD-AE=6-\frac{25}{6}=\frac{11}{6}$.
8. **解**：如图，平移 CD 到 $C'D'$ 处，交 AB 于 O'，



(第 8 题)

则 $\angle BO'D'=\angle BOD$，
∴ $\tan\angle BOD=\tan\angle BO'D'$.
由图可知 O' 在格点处.
设每个小正方形的边长为 a，
则 $O'B=\sqrt{a^2+(2a)^2}=\sqrt{5}a$，
$O'D'=\sqrt{(2a)^2+(2a)^2}=2\sqrt{2}a$，$BD'=3a$. 过 B 作 $BE\perp O'D'$ 于 E，过 O' 作 $O'F\perp BD'$ 于 F，∴ $O'F=2a$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

易知 $BE=\frac{BD'\cdot O'F}{O'D'}=\frac{3a\cdot 2a}{2\sqrt{2}a}=\frac{3\sqrt{2}}{2}a$.

$\therefore O'E=\sqrt{O'B^2-BE^2}$

$=\sqrt{(\sqrt{5}a)^2-\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}a\right)^2}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

$\therefore \tan\angle BO'E=\frac{BE}{O'E}=\frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}a}{\frac{\sqrt{2}}{2}a}=3$.

$\therefore \tan\angle BOD=3$.

9. 解：由题图知 $\angle AFE+\angle EFC+\angle BFC=180°$，

根据折叠的性质，知 $\angle EFC=\angle D=90°$，

$\therefore \angle AFE+\angle BFC=90°$.

又在 Rt△BCF 中，$\angle BCF+\angle BFC=90°$，

$\therefore \angle AFE=\angle BCF$.

根据折叠的性质，得 $CF=CD=AB=10$.

在 Rt△BFC 中，$BC=8$，$CF=10$，

由勾股定理，得 $BF=6$，

$\therefore \tan\angle BCF=\frac{BF}{BC}=\frac{3}{4}$.

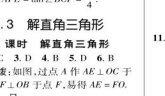
$\therefore \tan\angle AFE=\tan\angle BCF=\frac{3}{4}$.

26.3　解直角三角形

第 1 课时　解直角三角形

1. D　**2.** C　**3.** D　**4.** B　**5.** D　**6.** B

7. D　**点拨**：如图，过点 A 作 $AE\perp OC$ 于点 E，$AF\perp OB$ 于点 F，易得 $AE=FO$.



（第 7 题）

∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore BC=AD=b$，$\angle ABC=90°$.

又∵ $\angle BOC=90°$，

$\therefore \angle FBA+\angle OBC=\angle BCO+\angle OBC=90°$.

$\therefore \angle FBA=\angle BCO=\alpha$. 又∵ $AB=a$，

$\therefore AE=FO=FB+BO=a\cos\alpha+b\sin\alpha$.

8. 2　**点拨**：过点 A 作 $AD\perp BC$，垂足为 D，如图所示.



（第 8 题）

设 $AC=x$，则 $AB=\sqrt{2}x$.

在 Rt△ACD 中，$AD=AC\cdot\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}x$，$CD=AC\cdot\cos C=\frac{\sqrt{2}}{2}x$；

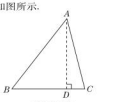
在 Rt△ABD 中，$AB=\sqrt{2}x$，$AD=\frac{\sqrt{2}}{2}x$，

$\therefore BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}x$，

$\therefore BC=BD+CD=\frac{\sqrt{6}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}x=\sqrt{6}+\sqrt{2}$. ∴ $x=2$，即 $AC=2$.

9. $\frac{16}{5}$

10. D　**点拨**：过点 A 作 $AD\perp BC$，垂足为 D，如图所示.



（第 10 题）

在 Rt△ACD 中，$CD=CA\cdot\cos C=1$，

$\therefore AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=\sqrt{15}$.

在 Rt△ABD 中，$BD=CB-CD=3$，$AD=\sqrt{15}$，

$\therefore AB=\sqrt{BD^2+AD^2}=2\sqrt{6}$.

$\therefore \sin B=\frac{AD}{AB}=\frac{\sqrt{10}}{4}$.

11. 解：在 Rt△ABC 中，$\angle B=90°$，$\therefore AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}$.

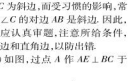
$\therefore \tan A=\frac{BC}{AB}=\frac{3}{5}$，$\cos A=\frac{AB}{AC}=\frac{5}{\sqrt{34}}=\frac{5\sqrt{34}}{34}$.



第 11 题答案

误区诊断：本题中已指出 $\angle B=90°$，所以 AC 为斜边，而受习惯的影响，常误以为 $\angle C$ 的对边 AB 是斜边. 因此，解题时应认真审题，注意所给条件，分清斜边和直角边，以防出错.

12. 解：(1) 如图，过点 A 作 $AE\perp BC$ 于点 E.



（第 12 题）

在 Rt△ACE 中，∵ $\cos C=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore \angle C=45°$，$CE=AC\cdot\cos C=1$，

$\therefore AE=CE=1$.

在 Rt△ABE 中，∵ $\tan B=\frac{1}{3}$，

$\therefore \frac{AE}{BE}=\frac{1}{3}$，$\therefore BE=3AE=3$.

$\therefore BC=BE+CE=4$.

(2) ∵ AD 是 △ABC 的中线，

$\therefore CD=\frac{1}{2}BC=2$.

$\therefore DE=CD-CE=1$. $\therefore DE=AE$.

又∵ $AE\perp BC$，$\therefore \angle ADC=45°$.

$\therefore \sin\angle ADC=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

13. 解：过点 A 作 $AE\perp BC$ 于点 E，过点 D 作 $DF\perp BC$ 于点 F，易得四边形 $AEFD$ 是矩形.

$\therefore AE=DF=6$ m，$EF=AD=3$ m.

∵ 倾斜角 $\alpha=45°$，$\beta=30°$，

$\therefore BE=\frac{AE}{\tan\alpha}=\frac{6}{\tan 45°}=\frac{6}{1}=6$(m)，$CF=\frac{DF}{\tan\beta}=\frac{6}{\tan 30°}=\frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=6\sqrt{3}$(m).

$\therefore BC=BE+EF+CF=6+3+6\sqrt{3}=9+6\sqrt{3}$(m).

即 BC 的长为 $(9+6\sqrt{3})$ m.

14. (1) **证明**：∵ $\angle M=\angle ARC=90°$，

$\therefore \angle MAB+\angle MBA=\angle NBC+\angle MBA=90°$. $\therefore \angle MAB=\angle NBC$.

又∵ $\angle M=\angle N=90°$，

$\therefore \triangle ABM\sim\triangle BCN$.

(2) 解：如图，过 P 点作 $PN\perp AP$ 交 AC 于 N 点，过 N 点作 $NM\perp BC$ 于 M 点.

∵ $\angle BAP+\angle APB=90°$，$\angle APB+\angle NPC=90°$，$\therefore \angle BAP=\angle NPC$.

又∵ $\angle B=\angle NMP=90°$，

$\therefore \triangle BAP\sim\triangle MPN$.

$\therefore \frac{AP}{PN}=\frac{BA}{MP}=\frac{BP}{MN}$.

又∵ $\tan\angle PAC=\frac{PN}{PA}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore \frac{MP}{BA}=\frac{MN}{BP}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

设 $MN=2\sqrt{5}a$，$PM=2\sqrt{5}b$，则 $BP=5a$，$AB=5b$. ∵ $\angle BAP=\angle C$，

$\therefore \angle C=\angle NPC$. $\therefore NP=NC$.

又∵ $NM\perp PC$，$\therefore PM=MC$.

$\therefore PC=2PM=4\sqrt{5}b$.

∵ $\angle BAP=\angle C$，$\angle B=\angle B$，

$\therefore \triangle BAP\sim\triangle BCA$. $\therefore \frac{BA}{BP}=\frac{BC}{BA}$.

$\therefore BA^2=BP\cdot BC$.

$\therefore (5b)^2=5a\cdot(5a+4\sqrt{5}b)$.

又 $a>0$，$b>0$，$\therefore a=\frac{\sqrt{5}}{5}b$.

$\therefore \tan C=\frac{MN}{MC}=\frac{2\sqrt{5}a}{2\sqrt{5}b}=\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.



（第 14 题）

(3) 解：$\tan\angle CEB=\frac{3}{14}$.

第 2 课时　解直角三角形的七种常见类型

1. 解：(1) ∵ $\tan A=\frac{a}{b}=\frac{6\sqrt{15}}{6.5}=\sqrt{3}$，

$\therefore \angle A=60°$.

$\therefore \angle B=90°-\angle A=30°$.

$\therefore c=2b=12.5$.

(2) ∵ $\cos A=\frac{b}{c}=\frac{2.5}{2.5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore \angle A=45°$.

$\therefore \angle B=90°-\angle A=45°$.

$\therefore a=b=2.5$.

2. 解：∵ $AD=2$，$AC=\sqrt{3}$，$\angle C=90°$，

$\therefore \cos\angle DAC=\frac{AC}{AD}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\therefore \angle DAC=30°$.

∵ AD 为 $\angle BAC$ 的平分线，

$\therefore \angle BAC=2\angle DAC=60°$.

$\therefore BC=AC\cdot\tan\angle BAC=\sqrt{3}\cdot\tan 60°=\sqrt{3}\times\sqrt{3}=3$.

3. 解：(1) $a=c\cdot\sin A=10\cdot\sin 60°=5\sqrt{3}$，$b=c\cdot\cos A=10\cdot\cos 60°=5$.

(2) $b=\frac{a}{\tan A}=\frac{4}{\tan 60°}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，$\angle B=90°-\angle A=30°$.

4. 解：(1) 在 Rt△CDE 中，$\angle CDE=30°$，$DE=80$ cm，

$\therefore CD=DE\cdot\cos 30°=80\times\frac{\sqrt{3}}{2}=40\sqrt{3}$(cm).

故支架 CD 的长为 $40\sqrt{3}$ cm.

(2) 在 Rt△OAC 中，$\angle BAC=30°$，$AC=165$ cm，∴ $OC=AC\cdot\tan 30°=165\times\frac{\sqrt{3}}{3}=55\sqrt{3}$(cm)，

$OA=\frac{AC}{\cos 30°}=\frac{165}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=110\sqrt{3}$(cm).

$\therefore OD=OC-CD=55\sqrt{3}-40\sqrt{3}=15\sqrt{3}$(cm).

∴ $AB=OA-OB=OA-OD=110\sqrt{3}-15\sqrt{3}=95\sqrt{3}$(cm).

故真空热水管 AB 的长为 $95\sqrt{3}$ cm.

5. 解：(1) 在 Rt△ACB 中，$\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{3}{5}$，即 $\frac{15}{AB}=\frac{3}{5}$，

解得 $AB=25$.

∴ D 是边 AB 的中点，

∴ $CD=\frac{AB}{2}=\frac{25}{2}$.

(2) 由(1) 易得 $BD=CD=\frac{25}{2}$，

由勾股定理得 $CB=\sqrt{AB^2-AC^2}=20$.

设 $DE=x$，$EB=y$ $(x>0,y>0)$，

则 $\begin{cases}y^2+x^2=\frac{625}{4},\\ \left(x+\frac{25}{2}\right)^2+y^2=400,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=\frac{7}{2},\\ y=12.\end{cases}$

∴ $\sin\angle DBE=\frac{DE}{BD}=\frac{7}{25}$.

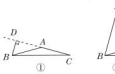
6. 解：分三种情况：

① 如图①，当 $\angle BAC$ 为钝角，$AB=AC$ 时，在 Rt△ABD 中，

∵ $BD=1$，$\tan\angle ABD=\sqrt{3}$，

∴ $AD=\sqrt{3}$，$AB=2$.

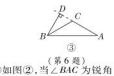
∴ $AC=2$. ∴ $CD=2+\sqrt{3}$.



①



②



③

（第 6 题）

② 如图②，当 $\angle BAC$ 为锐角，$AB=AC$ 时，在 Rt△ABD 中，

∵ $BD=1$，$\tan\angle ABD=\sqrt{3}$，

∴ $AD=\sqrt{3}$，$AB=2$. ∴ $AC=2$.

∴ $CD=2-\sqrt{3}$.

③ 如图③，当 $BC=AC$ 时，

∵ $\tan\angle ABD=\sqrt{3}$，∴ $\angle ABD=60°$.

∵ 在 Rt△ABD 中，$\angle A=90°-\angle ABD=30°$.

∵ $BC=AC$，∴ $\angle CBA=\angle A=30°$.

∴ $\angle BCD=60°$.

在 Rt△BCD 中，$BD=1$，$\angle BCD=60°$，$\tan\angle BCD=\frac{BD}{CD}$，

∴ $\frac{1}{CD}=\tan 60°=\sqrt{3}$. ∴ $CD=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

综上所述，CD 的长为 $2+\sqrt{3}$ 或 $2-\sqrt{3}$ 或 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

7. 解：∵ $AC\perp BD$，∴ $\angle ACB=\angle ACD=90°$. ∵ E 是 AB 的中点，$CE=1$，

∴ $AB=2CE=2$. ∵ $\frac{BC}{CD}=\frac{3}{2}$，

∴ 设 $BC=3x$，$CD=2x$.

在 Rt△ACD 中，∵ $\tan D=2$，

∴ $\frac{AC}{CD}=2$，∴ $AC=4x$，

在 Rt△ACB 中，由勾股定理得 $AB=5x$，∴ $5x=2$，∴ $x=\frac{2}{5}$，

∴ $AD=\sqrt{AC^2+CD^2}=2\sqrt{5}x=\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

易知 $BE=CE$，

∴ $\angle ABC=\angle ECB$.

在 Rt△ABC 中，$AC=\frac{8}{5}$，$AB=2$，

∴ $\sin\angle ABC=\frac{4}{5}$，

∴ $\sin\angle ECB=\frac{4}{5}$.

故 $\sin\angle ECB$ 的值为 $\frac{4}{5}$，AD 的长为 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

8. 解：∵ AD，CE 是 △ABC 的高，

∴ $\angle ADB=\angle CEB=90°$.

∵ $\angle B=\angle B$，

∴ △$ADB\sim$△CEB.

∴ $\frac{BD}{BE}=\frac{BA}{BC}$，即 $\frac{BD}{BA}=\frac{BE}{BC}$.

∵ $\angle B=\angle B$，

∴ △$DBE\sim$△ABC.

∴ $\angle ACB=\angle DEB$.

设 $CD=x$，则 $DB=6-x$.

在 Rt△ABD 中，$AD^2=AB^2-DB^2$，

在 Rt△ACD 中，$AD^2=AC^2-CD^2$，

∴ $AB^2-DB^2=AC^2-CD^2$.

∵ $AB=4$，$AC=5$，∴ $4^2-(6-x)^2=5^2-x^2$，解得 $x=\frac{15}{4}$.

∴ 在 Rt△ACD 中，$\cos\angle ACB=\frac{CD}{AC}=\frac{\frac{15}{4}}{5}=\frac{3}{4}$. ∵ $\angle ACB=\angle DEB$，

∴ $\cos\angle DEB=\frac{3}{4}$.

9. (1) **证明**：由题意可得 $\angle A=\angle D=\angle C=\angle BFE=90°$，

∴ $\angle ABF=90°-\angle AFB$，$\angle DFE=180°-\angle BFE-\angle AFB=90°-\angle AFB$.

∴ $\angle ABF=\angle DFE$.

∴ △$ABF\sim$△DFE.

(2) 解：由折叠可得 $FB=BC$，$EF=EC$.

∵ $\sin\angle DFE=\frac{1}{3}$，∴ $\frac{DE}{EF}=\frac{1}{3}$，

∴ $EC=EF=3DE$.

∴ $AB=CD=DE+EC=4DE$，$DF=\sqrt{EF^2-DE^2}=2\sqrt{2}DE$.

∵ △$ABF\sim$△DFE，

∴ $\frac{EF}{DF}=\frac{FB}{AB}$，

∴ $FB=\frac{EF\cdot AB}{DF}=\frac{3DE\cdot 4DE}{2\sqrt{2}DE}=3\sqrt{2}DE$. ∴ $BC=3\sqrt{2}DE$.

∴ $\tan\angle EBC=\frac{EC}{BC}=\frac{3DE}{3\sqrt{2}DE}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

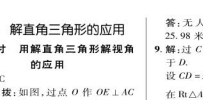
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

26.4　解直角三角形的应用

第 1 课时　用解直角三角形解视角的应用

1. B　**2.** C

3. C　**点拨**：如图，过点 O 作 $OE \perp AC$ 于点 E，连接 BD，延长 BD 交 OE 于点 F. 易得 $EF = AB = 1.5$ 米.



（第 3 题）

设 $DF = x$ 米，则 $BF = (3 + x)$ 米，

在 Rt$\triangle ODF$ 中，$\tan 65° = \dfrac{OF}{DF}$，

$\therefore OF = x\tan 65°$ 米.

在 Rt$\triangle OBF$ 中，$\tan 35° = \dfrac{OF}{BF}$，

$\therefore OF = (3 + x)\tan 35°$ 米.

$\therefore x\tan 65° = (3 + x)\tan 35°$，

解得 $x \approx 1.5$.

$\therefore OF \approx 1.5 \times 2.1 = 3.15$（米）.

$\therefore OE \approx 3.15 + 1.5 \approx 4.7$（米）.

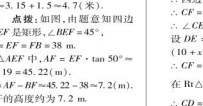
4. 7.2 m　**点拨**：如图，由题意知四边形 $CDEF$ 是矩形，$\angle BEF = 45°$，

$\therefore CD = EF = FB = 38$ m.

在 Rt$\triangle AEF$ 中，$AF = EF \cdot \tan 50° \approx 38 \times 1.19 = 45.22$（m）.

$\therefore AB = AF - BF \approx 45.22 - 38 \approx 7.2$（m）.

∴ 旗杆的高度约为 7.2 m.



（第 4 题）

5. C

6. $1\,200(\sqrt{3} - 1)$

7. $40\sqrt{3}$

8. 解：设 $AD = x$ 米.

$\because \angle EAB = 60°$，$\angle EAC = 30°$，

$\therefore \angle DBA = 60°$，$\angle DCA = 30°$.

在 Rt$\triangle ADB$ 中，$BD = \dfrac{AD}{\tan 60°} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x$ 米.

在 Rt $\triangle DAC$ 中，$CD = \dfrac{AD}{\tan 30°} = \sqrt{3}x$ 米.

$\because BC = CD - BD = 30$ 米，

$\therefore \sqrt{3}x - \dfrac{\sqrt{3}}{3}x = 30$，

解得 $x = 15\sqrt{3} \approx 25.98$.

答：无人机飞行的高度 AD 约为 25.98 米.

9. 解：过 C 作 $CD \perp AB$，交 AB 延长线于 D.

设 $CD = x$ 米.

在 Rt$\triangle ACD$ 中，$AD = \dfrac{x}{\tan 30°} = \sqrt{3}x$（米）.

在 Rt$\triangle BCD$ 中，$BD = \dfrac{x}{\tan 45°} = x$（米）.

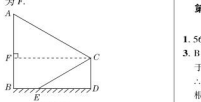
根据题意，得 $AD - BD = 4$ 米，

即 $\sqrt{3}x - x = 4$.

解得 $x = 2\sqrt{3} + 2$.

答：雕塑的高为 $(2\sqrt{3} + 2)$ 米.

10. 解：如图，过点 C 作 $CF \perp AB$，垂足为 F.



（第 10 题）

$\because AB \perp BD$，$CD \perp BD$，

$\therefore$ 四边形 $CDBF$ 是矩形.

$\therefore CF = BD$，$CD = BF$，$CF \parallel BD$，

$\therefore \angle CED = \angle ECF = 30°$.

设 $DE = x$ 米，则 $BD = BE + DE = (10 + x)$ 米.

$\therefore CF = (10 + x)$ 米.

在 Rt$\triangle CDE$ 中，$\tan \angle CED = \dfrac{CD}{DE}$，

$\therefore CD = x\tan 30°$ 米.

在 Rt$\triangle ACF$ 中，$\tan \angle ACF = \dfrac{AF}{CF}$，

$\therefore AF = (10 + x)\tan 30°$ 米.

$\because AB = 30$ 米，$AB = AF + BF = AF + CD$，

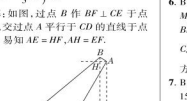
$\therefore x\tan 30° + (10 + x)\tan 30° = 30$，

解得 $x = 15\sqrt{3} - 5$.

$\therefore x\tan 30° = 15 - \dfrac{5}{3}\sqrt{3}$，即 $CD = \left(15 - \dfrac{5}{3}\sqrt{3}\right)$ 米.

答：立柱 CD 的高为 $\left(15 - \dfrac{5}{3}\sqrt{3}\right)$ 米.

11. 解：如图，过点 B 作 $BF \perp CE$ 于点 F，交过点 A 平行于 CD 的直线于点 H. 易知 $AE = HF$，$AH = EF$.



（第 11 题）

在 Rt $\triangle BCF$ 中，$BF = BC \cdot \sin \angle BCF \approx 5 \times 0.64 = 3.20$（m），$CF = BC \cdot \cos \angle BCF \approx 5 \times 0.77 = 3.85$（m）.

在 Rt$\triangle ADE$ 中，$DE = \dfrac{AE}{\tan \angle ADE} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \approx 1.73$（m）.

$\therefore BH = BF - AE \approx 3.20 - 3 = 0.20$（m），$AH = EF = CD + DE - CF \approx 2.77 + 1.73 - 3.85 = 0.58$（m）.

$\therefore AB = \sqrt{BH^2 + AH^2} \approx \sqrt{0.20^2 + 0.58^2} \approx 0.6$（m）.

答：AB 的长约为 0.6 m.

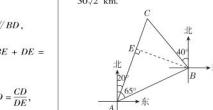
第 2 课时　用解直角三角形解实际生活、坡角的应用

1. 566　**2.** B

3. B　**点拨**：如图，过点 B 作 $BE \perp AC$ 于点 E，

$\therefore \angle AEB = \angle CEB = 90°$.

根据题意，得 $\angle CAB = 65° - 20° = 45°$，$\angle ACB = 40° + 20° = 60°$，$AB = 30\sqrt{2}$ km.



（第 3 题）

在 Rt$\triangle ABE$ 中，

$\because \angle EAB = 45°$，$AB = 30\sqrt{2}$ km，

$\therefore AE = BE = AB \cdot \sin 45° = 30\sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 30$（km）.

在 Rt$\triangle CBE$ 中，$\because \angle ACB = 60°$，

$\therefore CE = \dfrac{BE}{\tan 60°} = \dfrac{30}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{3}$（km）.

$\therefore AC = AE + CE = (30 + 10\sqrt{3})$ km.

4. A　**5.** A

6. B　**点拨**：延长 AB 交 ED 的延长线于 M，过点 C 作 $CJ \perp DM$ 于 J，则四边形 $BMJC$ 是矩形，在 Rt$\triangle CDJ$ 中求出 CJ，DJ，再根据 $\tan \angle AEM = \dfrac{AM}{EM}$ 构建方程即可解决问题.

7. B　**点拨**：由题意可得 $\angle APB = 60° - 15° = 45°$，$\angle PBH = 60°$，则可由锐角三角函数求得 PB 的长，又由山坡的坡度 i 为 $1 : \sqrt{3}$，可求得 $\angle ABC$ 的度数，从而得出 $\triangle ABP$ 是等腰直角三角形，进而求得答案.

8. 解：依题意可知 $\angle DCB = 45°$，$\angle DCA = 60°$.

$\therefore BD = CD = 200$ m.

在 Rt$\triangle ACD$ 中，$AD = CD \cdot \tan \angle DCA = 200\sqrt{3}$ m.

$\therefore AB = 200\sqrt{3} - 200 \approx 200 \times (\sqrt{3} - 1) \approx 146$（m）.

∴ 实际车速约为 $146 \div 10 = 14.6$（m/s）.

$\because 14.6 < 16$，

∴ 此车没有超过该路段 16 m/s 的限制速度.

9. 解：（1）30；45

（2）$\because BP \perp AC$，

$\therefore \angle BPA = \angle BPC = 90°$.

$\because \angle C = 45°$，

$\therefore \angle CBP = 45°$.

$\therefore BP = CP$.

$\because \angle BAC = 30°$，

$\therefore AP = \dfrac{BP}{\tan 30°} = \sqrt{3}BP$.

$\because CP + AP = AC$，

$\therefore BP + \sqrt{3}BP = 10$，

解得 $BP = (5\sqrt{3} - 5)$ 海里.

答：现测站 B 到 AC 的距离 BP 为 $(5\sqrt{3} - 5)$ 海里.

10. 解：∵ 斜坡 AB 的坡度为 $1 : \sqrt{3}$，

$\therefore \tan \angle ABE = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

$\therefore \angle ABE = 30°$.

在 Rt$\triangle AEB$ 中，$AB = 200$ 米，

$\therefore AE = \dfrac{1}{2}AB = 100$ 米.

$\therefore AC = 20$ 米，

$\therefore CE = AE - AC = 80$ 米.

∵ 斜坡 CD 的坡度为 $1 : 4$，

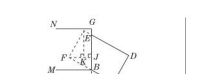
$\therefore \dfrac{CE}{DE} = \dfrac{1}{4}$，

即 $\dfrac{80}{DE} = \dfrac{1}{4}$，解得 $DE = 320$ 米.

$\therefore CD = \sqrt{CE^2 + DE^2} = \sqrt{80^2 + 320^2} = 80\sqrt{17}$（米）.

答：斜坡 CD 的长是 $80\sqrt{17}$ 米.

11. 解：∵ $BH = 0.6$ 米，$\sin \alpha = \dfrac{3}{5}$，∴ $AB = \dfrac{BH}{\sin \alpha} = \dfrac{0.6}{\frac{3}{5}} = 1$（米）. ∴ $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{1^2 - 0.6^2} = 0.8$（米）.


第 11 题解答

$\because FC = 2$ 米，$\therefore BF = 1$ 米 $= AB$.

如图，过点 F 作 $FJ \perp BG$ 于点 J，过点 E 作 $EK \perp FJ$ 于点 K.

（第 11 题）

$\because \angle EKF = \angle AHB = 90°$，易得 $\angle EFK = \angle FBJ = \angle ABH$，

$\therefore \triangle EFK \backsim \triangle ABH$，

$\therefore \dfrac{EF}{AB} = \dfrac{EK}{AH}$，

$\therefore \dfrac{1.6}{1} = \dfrac{EK}{0.8}$，解得 $EK = 1.28$ 米.

$\because \angle FJB = \angle AHB = 90°$，$\angle FBJ = \angle ABH$，$BF = AB$，

$\therefore \triangle FBJ \cong \triangle ABH$.

$\therefore BJ = BH = 0.6$ 米.

易知木箱上部顶点 E 距货厢底面的高度为 $BJ + EK = 0.6 + 1.28 = 1.88$（米）.

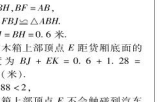
∵ $1.88 < 2$，

∴ 木箱上部顶点 E 不会触碰到汽车货厢顶部.

第 3 课时　解直角三角形的一般应用

1. 69　**2.** C　**3.** B　**4.** $\sqrt{3}$

5. $6\sqrt{2}$　**点拨**：如图，延长 AD 交地面于 E，



（第 5 题）

过点 D 作 $DF \perp CE$ 于点 F，则 $DF /\!/ AB$.

$\therefore \angle A = \angle FDE = 60°$.

$\because \angle DCF = 45°$，$CD = 4$ m，

$\therefore CF = DF = 2\sqrt{2}$ m.

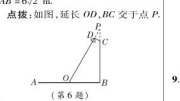
$\therefore EF = DF \cdot \tan 60° = 2\sqrt{6}$ m.

$\therefore BE = BC + CF + EF = 6\sqrt{6}$ m.

$\therefore \dfrac{BE}{AB} = \tan 60° = \sqrt{3}$，

$\therefore AB = 6\sqrt{2}$ m.

6. D　**点拨**：如图，延长 OD，BC 交于点 P.



（第 6 题）

易知 $\angle ODC = \angle B = 90°$，$\angle P = 30°$，$OB = 11$ m，$CD = 2$ m，

∴ 在 Rt$\triangle CPD$ 中，$DP = \dfrac{DC}{\tan 30°} = 2\sqrt{3}$ m，$PC = \dfrac{CD}{\sin 30°} = 4$ m.

$\because \angle P = \angle P$，$\angle PDC = \angle B = 90°$，

$\therefore \triangle PDC \backsim \triangle PBO$. ∴ $\dfrac{PD}{PB} = \dfrac{CD}{OB}$

$\therefore PB = \dfrac{PD \cdot OB}{CD} = \dfrac{2\sqrt{3} \times 11}{2} = 11\sqrt{3}$（m），

$\therefore BC = PB - PC = (11\sqrt{3} - 4)$ m.

7. 解：由题意可知 $AC = 45.54 - 2.34 = 43.2$（m）.

在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ABC = \alpha = 8°35'$，

$\tan \angle ABC = \dfrac{AC}{BC}$，

$\therefore BC = \dfrac{AC}{\tan \angle ABC} = \dfrac{43.2}{\tan 8°35'} \approx 286$（m）.

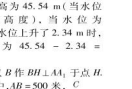
因此观察所 A 与船只 B 的水平距离约为 286 m.

误区诊断：解题时容易弄错 AC 的高度，A 处的标高为 45.54 m（当水位为 0 m 时的高度），当水位为 +2.34 m，即水位上升了 2.34 m 时，AC 的高度为 $45.54 - 2.34 = 43.2$（m）.

8. 解：如图，过点 B 作 $BH \perp AA_1$ 于点 H.

在 Rt$\triangle ABH$ 中，$AB = 500$ 米，$\angle BAH = 30°$，

$\therefore BH = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{1}{2} \times 500 = 250$（米）.



（第 8 题）

易得 $A_1B_1 = BH = 250$ 米.

在 Rt $\triangle BB_1C$ 中，$BC = 800$ 米，$\angle CBB_1 = 60°$，∴ $\dfrac{B_1C}{BC} = \sin \angle CBB_1 = \sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. ∴ $B_1C = \dfrac{\sqrt{3}}{2}BC = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times 800 = 400\sqrt{3}$（米）.

∴ 检修人员上升的垂直高度 $CA_1 = CB_1 + A_1B_1 = 400\sqrt{3} + 250 \approx 943$（米）.

答：检修人员上升的垂直高度 CA_1 约为 943 米.

点拨：测不易直接测量的物体的高度，关键在于画出直角三角形，通过测量角的度数和边的长度，计算出所要求的物体的高度. 根据题目已知条件选用适当锐角三角函数或边角关系去解直角三角形，得到数学问题的答案，再转化得到实际问题的答案.

9. 解：（1）如图①，过点 E 作 $EM \perp CD$ 于点 M.

由题意知 $\angle BCM = 64°$，$EC = BC + BE = 60 + 15 = 75$（cm），

$\therefore EM = EC \cdot \sin \angle BCM = 75 \times \sin 64° \approx 67.5$（cm）.

荣德基 质量精品

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

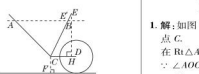
$\because CD$ 与地面 l 平行，

$\therefore CF = 32$ cm.

∴ 坐垫 E 到地面的距离为 $EM + CF \approx 67.5 + 32 = 99.5$(cm).



①



②

（第 9 题）

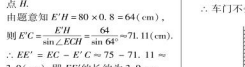
（2）如图②，过点 E' 作 $E'H \perp CD$ 于点 H.

由题意知 $E'H = 80 \times 0.8 = 64$(cm)，

则 $E'C = \dfrac{E'H}{\sin\angle ECH} = \dfrac{64}{\sin 64°} \approx 71.11$(cm).

$\therefore EE' = EC - E'C \approx 75 - 71.11 \approx 3.9$(cm)，即 EE' 的长约为 3.9 cm.

10. **解**：(1) 如图，



（第 10 题）

过点 E 作 $EM \perp AB$，垂足为 M.

设 AB 为 x 米.

在 Rt△ABF' 中，$\angle AFB = 45°$，

$\therefore BF = AB = x$ 米.

$\therefore BC = BF + FC = (x + 25)$ 米.

在 Rt△AEM 中，$\angle AEM = 22°$，$AM = AB - BM = AB - CE = (x - 2)$ 米，$ME = BC = (x + 25)$ 米，

$\tan 22° = \dfrac{AM}{ME}$，则 $\dfrac{x-2}{x+25} \approx \dfrac{2}{5}$，

解得 $x \approx 20$.

即办公楼 AB 的高度约为 20 米.

（2）由（1）可得 $ME \approx x + 25 \approx 20 + 25 = 45$(米)，

在 Rt△AME 中，$\cos 22° = \dfrac{ME}{AE}$，

$\therefore AE = \dfrac{ME}{\cos 22°} \approx \dfrac{45}{\frac{15}{16}} = 48$(米).

即 A，E 之间的距离约为 48 米.

11. **解**：设 $OE = OB = 2x$ cm，

则 $OD = DE + OE = (190 + 2x)$ cm.

$\because \angle ADE = 30°$，

$\therefore OC = \dfrac{1}{2}OD = (95 + x)$ cm.

$\therefore BC = OC - OB = 95 + x - 2x = (95 - x)$ cm.

$\because \tan\angle BAC = \dfrac{BC}{AC}$，

$\therefore 2.14 \approx \dfrac{95 - x}{40}$，

解得 $x \approx 9.4$.

$\therefore OB \approx 9.4 \times 2 \approx 19$(cm).

即 OB 的长度约为 19 cm.

阶段核心归类

1. **解**：如图，过点 A 作 $AC \perp OB$，垂足为点 C.

在 Rt△ACO 中，

$\because \angle AOC = 40°$，$AO = 1.2$ m，

$\therefore AC = AO \cdot \sin\angle AOC \approx 1.2 \times 0.64 = 0.768$(m).

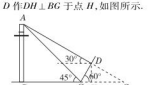
∵汽车靠墙——侧 OB 与墙 MN 平行且距离为 0.8 m，0.768 < 0.8，

∴车门不会碰到墙.



（第 1 题）

2. **解**：延长 AD 交 BC 的延长线于点 G，过 D 作 $DH \perp BG$ 于点 H，如图所示.



（第 2 题）

在 Rt△DHC 中，$\angle DCH = 60°$，$CD = 4$ m，则 $CH = CD \cdot \cos\angle DCH = 4 \times \cos 60° = 2$(m)，$DH = CD \cdot \sin\angle DCH = 4 \times \sin 60° = 2\sqrt{3}$(m).

$\because DH \perp BG$，易知 $\angle G = 30°$，

$\therefore HG = \dfrac{DH}{\tan G} = \dfrac{2\sqrt{3}}{\tan 30°} = 6$(m).

$\therefore CG = CH + HG = 2 + 6 = 8$(m).

设 $AB = x$ m，

$\because AB \perp BG$，$\angle G = 30°$，$\angle BCA = 45°$，

$\therefore BC = x$ m，$BG = \dfrac{AB}{\tan G} = \dfrac{x}{\tan 30°} = \sqrt{3}x$(m).

$\because BG - BC = CG$，

$\therefore \sqrt{3}x - x = 8$，解得 $x = 11$.

答：电线杆的高约为 11 m.

3. **解**：如图，过 B 作 $BD \perp AC$，垂足为 D，设 $AD = x$ km. 在 Rt△ABD 中，$\tan\angle BAD = \dfrac{BD}{AD}$，即 $\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{BD}{x}$，

$\therefore BD = \sqrt{3}x$ km.

在Rt△BCD中，$\angle CBD = 90° - 37° = 53°$，$\tan\angle CBD = \dfrac{CD}{BD}$，即 $\dfrac{4}{3} \approx \dfrac{CD}{\sqrt{3}x}$，

$\therefore CD \approx \dfrac{4\sqrt{3}x}{3}$ km. $\because AC = CD + AD$，

$\therefore \dfrac{4\sqrt{3}x}{3} + x = 13$，解得 $x = 4\sqrt{3} - 3$.

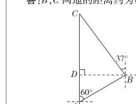
$\therefore BD \approx (12 - 3\sqrt{3})$ km.

在Rt△BCD 中，$\cos\angle CBD = \dfrac{BD}{BC}$，

即 $\dfrac{3}{5} \approx \dfrac{12 - 3\sqrt{3}}{BC}$，

$\therefore BC \approx (20 - 5\sqrt{3})$ km.

答：B，C 两地的距离约为 $(20 - 5\sqrt{3})$ km.



（第 3 题）

4. **解**：设每层楼高为 x m，由题意得 $MC' = MC - CC' \approx 2.5 - 1.5 = 1$(m)，则 $DC' = (5x + 1)$ m，$EC' = (4x + 1)$ m.

在 Rt△$DC'A'$ 中，$\angle DA'C' = 60°$，

$\therefore C'A' = \dfrac{DC'}{\tan 60°} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}(5x + 1)$ m.

在 Rt△$EC'B'$ 中，$\angle EB'C' = 30°$，

$\therefore C'B' = \dfrac{EC'}{\tan 30°} = \sqrt{3}(4x + 1)$ m.

$\because A'B' = C'B' - C'A' = AB$，

$\therefore \sqrt{3}(4x + 1) - \dfrac{\sqrt{3}}{3}(5x + 1) = 14$，

解得 $x = 2\sqrt{3} - \dfrac{2}{7} \approx 3.17$.

$\therefore DC = DC' + CC' = 5x + 1 + 1.5 \approx 18.4$(m).

答：居民楼的高度约为 18.4 m.

全章热门考点整合应用

1. **解**：在 Rt△ABC 中，$\because \angle ACB = 90°$，

$\therefore \angle BCD + \angle ACD = 90°$.

$\because CD \perp AB$，$\therefore \angle ACD + \angle A = 90°$.

$\therefore \angle BCD = \angle A$.

在 Rt△ABC 中，由勾股定理，得 $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 10$，

$\therefore \sin\angle BCD = \sin A = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$，

$\cos\angle BCD = \cos A = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$，

$\tan\angle BCD = \tan A = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3}$.

2. **解**：$\because \sin B = \dfrac{3}{5}$，$\angle ACB = 90°$，$DE \perp AB$，

$\therefore \sin B = \dfrac{DE}{DB} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{3}{5}$.

设 $DE = CD = 3k$，则 $DB = 5k$，

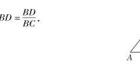
$\therefore CB = 8k$，$AC = 6k$，$AB = 10k$.

$\because AC + CD = 9$，$\therefore 6k + 3k = 9$.

$\therefore k = 1$. $\therefore DE = 3$，$DB = 5$，$BC = 8$.

$\therefore BE = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$.

如图，过点 C 作 $CF \perp AB$ 于点 F.



（第 2 题）

则 $CF /\!/ DE$，$\therefore \triangle BDE \backsim \triangle BCF$.

$\therefore \dfrac{DE}{CF} = \dfrac{BE}{BF} = \dfrac{BD}{BC} = \dfrac{5}{8}$. $\therefore CF = \dfrac{24}{5}$，

$BF = \dfrac{32}{5}$. $\therefore EF = BF - BE = \dfrac{12}{5}$.

在 Rt△CEF 中，$CE = \sqrt{CF^2 + EF^2} = \dfrac{12}{5}\sqrt{5}$.

点拨：方程思想是一种重要的思想方法，运用方程思想可以建立已知量和待求量之间的关系式，平时学习时，应该不断积累用方程思想解题的方法.

3. **解**：(1) 原式 $= \dfrac{\sqrt{3}}{3} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \times 1$

$= \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{2}$

$= \dfrac{3}{4}$.

(2) 原式 $= \dfrac{1}{4} \times 1^2 + \dfrac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} - 3 \times \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2}}$

$= \dfrac{1}{4} + 4 - 3 \times \dfrac{3}{4} + 2 - 1$

$= 3$.

4. **解**：(1) 设 $CE = y$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore BC = AD = 5$，

$\because B = \angle BCD = 90°$.

$\therefore \angle APB + \angle BAP = 90°$.

$\because BP = a$，$\therefore PC = 5 - a$.

$\because AP \perp PE$，$\therefore \angle APE = 90°$.

$\therefore \angle APB + \angle CPE = 90°$.

$\therefore \angle CPE = \angle BAP$.

$\therefore \triangle ABP \backsim \triangle PCE$. $\therefore \dfrac{BP}{CE} = \dfrac{AB}{PC}$

$\therefore y = \dfrac{-a^2 + 5a}{4}$，即 $CE = \dfrac{-a^2 + 5a}{4}$.

(2) 四边形 $APFD$ 是菱形，理由如下：

当 $a = 3$ 时，$y = \dfrac{-3^2 + 5 \times 3}{4} = \dfrac{3}{2}$，

即 $CE = \dfrac{3}{2}$，易知 $CD = 4$，

$\therefore DE = DC - CE = \dfrac{5}{2}$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore AD /\!/ BF$，$\therefore \triangle AED \backsim \triangle FEC$.

$\therefore \dfrac{AD}{CF} = \dfrac{DE}{CE}$. $\therefore CF = 3$.

$\therefore BP = a = 3$，$\therefore PC = 2$.

$\therefore PF = PC + CF = 5$. $\therefore PF = AD$.

$\therefore$ 四边形 $APFD$ 是平行四边形.

在Rt△APB中，$AB = 4$，$BP = 3$，$\angle B = 90°$，$\therefore AP = 5 = PF$.

$\therefore$ 四边形 $APFD$ 是菱形.

(3) 根据 $\tan\angle PAE = \dfrac{1}{2}$ 可得 $\dfrac{AP}{PE} = 2$，由(1)得 $\triangle ABP \backsim \triangle PCE$，

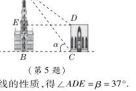
$\therefore \dfrac{AB}{PC} = \dfrac{AP}{PE} = 2$，得 $\dfrac{4}{5-a} = 2$ 或 $\dfrac{4}{a-5} = 2$，解得 $a = 3$ 或 $a = 7$.

5. **解**：在 Rt△ABC 中，

$\because \angle ACB = \alpha = 53°$，$BC = 60$ m，

$\therefore AB = BC \cdot \tan\alpha = 60 \times \tan 53° \approx 60 \times \dfrac{3}{2} = 80$(m).

如图，过点 D 作 $DE \perp AB$，垂足为 E.



（第 5 题）

由平行线的性质，得 $\angle ADE = \beta = 37°$.

易得四边形 $BCDE$ 是矩形，

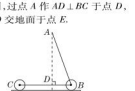
$\therefore DE = BC = 60$ m，$DC = BE$.

$\therefore AE = DE \cdot \tan\beta = 60 \times \tan 37° \approx 60 \times \dfrac{3}{4} = 45$(m).

$\therefore CD = BE = AB - AE \approx 80 - 45 = 35$(m).

答：两座建筑物 AB 与 CD 的高度分别约是 80 m，35 m.

6. **解**：如图，过点 A 作 $AD \perp BC$ 于点 D，延长 AD 交地面于点 E.



（第 6 题）

$\because \sin\angle ABD = \dfrac{AD}{AB}$，

$\therefore AD = AB \cdot \sin\angle ABD \approx 92 \times 0.94 = 86.48$(cm). 易知 $DE = 6$ cm，

$\therefore AE = AD + DE \approx 86.48 + 6 = 92.5$(cm).

答：把手 A 离地面的高度约为 92.5 cm.

7. **解**：如图，过点 C 作 $CD \perp AB$ 于点 D.



（第 7 题）

在 Rt△BCD 中，$\because \angle B = 30°$，$BC = 12$，

$\therefore CD = BC \times \sin 30° = 6$，$BD = BC \times \cos 30° = 6\sqrt{3}$.

在 Rt△ACD 中，

$\because \tan A = \dfrac{CD}{AD} = \dfrac{3}{4}$，$CD = 6$，

$\therefore AD = 8$.

$\therefore AC = \sqrt{CD^2 + AD^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$，

$AB = AD + BD = 8 + 6\sqrt{3}$.

8. **解**：方法 1：如图①，过点 B 作 $BE /\!/ AD$ 交 DC 于点 E，过点 E 作 $EF /\!/ AB$ 交 AD 于点 F，则 $BE \perp AB$，$EF \perp AD$.

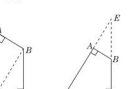
$\therefore$ 四边形 $ABEF$ 是矩形.

$\therefore EF = AB$，$AF = BE$.

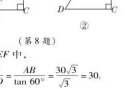
$\because \angle ABC = 120°$，$\therefore \angle CBE = 120° - 90° = 30°$，$\angle D = 180° - 120° = 60°$.

在 Rt△BCE 中，$BE = \dfrac{BC}{\cos\angle CBE} = \dfrac{50\sqrt{3}}{\cos 30°} = \dfrac{50\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 100$，

$EC = BC \cdot \tan\angle CBE = 50\sqrt{3} \times \tan 30° = 50\sqrt{3} \times \dfrac{\sqrt{3}}{3} = 50$.



①



②

（第 8 题）

在 Rt△DEF 中，

$DF = \dfrac{EF}{\tan D} = \dfrac{AB}{\tan 60°} = \dfrac{30\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 30$.

$\therefore AD = AF + DF = BE + DF = 100 + 30 = 130$.

$\therefore S_{四边形ABCD} = S_{矩形ABED} + S_{\triangle BCE} = \dfrac{1}{2}(AD + BE) \cdot AB + \dfrac{1}{2}BC \cdot EC = \dfrac{1}{2} \times (130 + 100) \times 30\sqrt{3} + \dfrac{1}{2} \times 50\sqrt{3} \times 50 = 4\,700\sqrt{3}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

方法 2：如图②，延长 DA，CB 交于点 E，

则 $\angle ABE = 180° - \angle ABC = 60°$，$\angle E = 90° - \angle ABE = 30°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 中，

$AE = AB \cdot \tan 60° = 30\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 90$，

$BE = \dfrac{AB}{\cos 60°} = \dfrac{30\sqrt{3}}{\dfrac{1}{2}} = 60\sqrt{3}$.

$\therefore CE = BE + BC = 60\sqrt{3} + 50\sqrt{3} = 110\sqrt{3}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle DCE$ 中，$DC = CE \cdot \tan 30° =$

$110\sqrt{3} \times \dfrac{\sqrt{3}}{3} = 110$.

$\therefore S_{\text{四边形}ABCD} = S_{\triangle DCE} - S_{\triangle ABE} = \dfrac{1}{2} \cdot DC \cdot CE - \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot AE = \dfrac{1}{2} \times 110 \times 110\sqrt{3} - \dfrac{1}{2} \times 30\sqrt{3} \times 90 = 4\,700\sqrt{3}$.

点拨：求不规则图形的面积要将其转化为直角三角形或特殊的四边形的面积来求．可适当添加辅助线，本题利用分割法将不规则四边形分割为直角三角形和直角梯形，或者利用补形法把不规则四边形转化为直角三角形求解．

第二十七章　反比例函数

27.1　反比例函数

1. D　**2.** C　**3.** D　**4.** D

5. A　**点拨**：先根据关于 x 轴对称的点的坐标特征确定 A' 的坐标为 $(1,3)$，再把 A' 的坐标代入 $y = \dfrac{k}{x}$，即可得到 k 的值．

6. D

7. C　**点拨**：设点 A 的坐标为 (a,b)，点 C 的坐标为 $\left(c, \dfrac{k}{c}\right)$，则 $a \cdot \dfrac{k}{c} = 12$，点 D 的坐标为 $\left(\dfrac{a+c}{2}, \dfrac{k}{2c}\right)$．

$\therefore \begin{cases} a \cdot \dfrac{k}{c} = 12, \\ \dfrac{k}{2c} = \dfrac{k}{\dfrac{a+c}{2}}. \end{cases}$ 解得 $k = 4$.

8. A

9. A　**点拨**：A 选项中设三角形面积为 S，一边长为 a，该边上的高为 h，则有 $a = \dfrac{2S}{h}$；B 选项中设三角形周长为 C，底边长为 a，腰长为 b，则有 $C = a + 2b$；C 选项中设圆的周长为 C，半径为 r，则有 $C = 2\pi r$；D 选项中设圆的面积为 S，半径为 r，则有 $S = \pi r^2$．观察可得，只有 A 选项中的两个变量间满足反比例关系．

10. D

11. A　**点拨**：本题易忽略反比例函数 $y = \dfrac{k}{x}$ 中 $k \neq 0$，而直接由 $a^2 - 2 = -1$ 得 $a = \pm 1$.

12. **解**：(1) 设 $y_1 = k_1 x^2$，$y_2 = \dfrac{k_2}{x}$ $(k_1, k_2 \neq 0)$，

则 $y = k_1 x^2 + \dfrac{k_2}{x}$.

将 $x = 1$，$y = 3$ 和 $x = -1$，$y = 1$ 分别代入，

得 $\begin{cases} k_1 + k_2 = 3, \\ k_1 - k_2 = 1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k_1 = 2, \\ k_2 = 1. \end{cases}$

$\therefore y$ 与 x 之间的函数表达式为 $y = 2x^2 + \dfrac{1}{x}$.

(2) 当 $x = -\dfrac{1}{2}$ 时，$y = 2 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{-\dfrac{1}{2}} = -\dfrac{3}{2}$.

13. **解**：(1) 假设 y 与 x 是正比例函数关系，则可设 $y = k_1 x$ $(k_1 \neq 0)$，把 $x = -2$，$y = \dfrac{3}{2}$ 代入，得 $k_1 = -\dfrac{3}{4}$，所以 $y = -\dfrac{3}{4}x$.

把 $x = 4$，$y = -\dfrac{3}{4}$ 代入 $y = -\dfrac{3}{4}x$，等式不成立，所以 y 不是 x 的正比例函数．

假设 y 与 x 是反比例函数关系，则可设 $y = \dfrac{k_2}{x}$ $(k_2 \neq 0)$，把 $x = -2$，$y = \dfrac{3}{2}$ 代入，得 $k_2 = -3$，所以 $y = -\dfrac{3}{x}$．把 $x = 4$，$y = -\dfrac{3}{4}$ 代入 $y = -\dfrac{3}{x}$，等式成立，所以 y 是 x 的反比例函数．

(2) 该函数的表达式为 $y = -\dfrac{3}{x}$.

补充表格如下：

x	-3	-2	-1	1	2	3	4
y	1	$\dfrac{3}{2}$	3	-3	$-\dfrac{3}{2}$	-1	$-\dfrac{3}{4}$

14. **解**：(1) 电流 I (A) 与电阻 R (Ω) 之间的函数表达式为 $I = \dfrac{220}{R}$ $(R > 0)$，它是我们学过的反比例函数．

(2) 填表如下：

R/Ω	20	40	60	80	100
I/A	11	$\dfrac{11}{2}$	$\dfrac{11}{3}$	$\dfrac{11}{4}$	$\dfrac{11}{5}$

(3) 当 R 越来越大时，I 越来越小；当 R 越来越小时，I 越来越大．

15. **解**：(1) $\because S_{\triangle ADF} + S_{\triangle ABE} + S_{\triangle CEF} = S_{\text{正方形}ABCD} - S_{\triangle AEF} = 3$，

$\therefore \dfrac{1}{2} \times 2y + \dfrac{1}{2} \times 2x + \dfrac{1}{2}(2-x)(2-y) = 3$．$\therefore xy = 2$．$\therefore y = \dfrac{2}{x}$.

(2) 反比例函数．

(3) $0 < x < 2$.

27.2　反比例函数的图像和性质

第 1 课时　反比例函数的图像

1. A　**2.** D

3. B　**点拨**：在函数 $y = \dfrac{k}{x}$ 和 $y = kx + 2$ $(k \neq 0)$ 中，当 $k > 0$ 时，函数 $y = \dfrac{k}{x}$ 的图像在第一、三象限，函数 $y = kx + 2$ 的图像经过第一、二、三象限，故选项 A，D 错误，选项 B 正确，当 $k < 0$ 时，函数 $y = \dfrac{k}{x}$ 的图像在第二、四象限，函数 $y = kx + 2$ 的图像经过第一、二、四象限，故选项 C 错误．

4. A　**点拨**：由题意知函数 $y = \begin{cases} \dfrac{1}{x}(x > 0), \\ -\dfrac{1}{x}(x < 0) \end{cases}$ 的图像关于 y 轴对称，且图像位于 x 轴上方，所以点 M 是原点．

5. A　**点拨**：将点 $(-1,4)$ 代入 $y = \dfrac{k}{x}$，得 $k = -4$，$\therefore y = \dfrac{-4}{x}$．$\therefore$ 点 $(4,-1)$ 在函数图像上．

6. A　**点拨**：函数 $y = \dfrac{2\,019}{x}$ 的图像在第一、三象限，且 y 在第一象限内大于零，在第三象限小于零．

$\because A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$ 都在函数 $y = \dfrac{2\,019}{x}$ 的图像上，且 $x_1 < 0 < x_2$，

$\therefore y_1 < 0$，$y_2 > 0$．$\therefore y_1 < y_2$.

7. D　**点拨**：过点 B 作 $BD \perp x$ 轴，垂足为 D．

$\because A$，C 的坐标分别是 $(0,3)$，$(3,0)$，$\therefore OA = OC = 3$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AOC$ 中，$AC = \sqrt{OA^2 + OC^2} = 3\sqrt{2}$，

又 $\because AC = 2BC$，$\therefore BC = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

又 $\because \angle ACB = 90°$，

$\therefore \angle OAC = \angle OCA = 45° = \angle BCD = \angle CBD$，

$\therefore CD = BD = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{3}{2}$.

$\therefore OD = 3 + \dfrac{3}{2} = \dfrac{9}{2}$.

$\therefore$ 点 B 的坐标是 $\left(\dfrac{9}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$.

将 $B\left(\dfrac{9}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$ 代入 $y = \dfrac{k}{x}$，得 $k = \dfrac{27}{4}$.

8. C　**点拨**：双曲线 $y = \dfrac{1}{x}$ 和 $y = -\dfrac{1}{x}$ 关于 x 轴对称，根据图形的对称性，把第一象限和第二象限的阴影部分拼到第三象限和第四象限的阴影中，可以得到阴影部分就是一个半圆形，所以 $S_{\text{阴影}} = \dfrac{1}{2} \times \pi \times 2^2 = 2\pi$.

9. C　**点拨**：$\because$ 反比例函数 $y = -\dfrac{2}{x}$ 的图像上有两个不同的点关于 y 轴的对称点在一次函数 $y = -x + m$ 的图像上，$\therefore$ 由方程组 $\begin{cases} y = \dfrac{2}{x}, \\ y = -x + m \end{cases}$ 得 $x^2 - mx + 2 = 0$.

$\because$ 反比例函数 $y = \dfrac{2}{x}$ 的图像与一次函数 $y = -x + m$ 的图像有两个不同的交点，

$\therefore$ 方程 $x^2 - mx + 2 = 0$ 有两个不相等的实数根．

$\therefore b^2 - 4ac = m^2 - 8 > 0$.

$\therefore m > 2\sqrt{2}$ 或 $m < -2\sqrt{2}$.

10. C　**点拨**：$\because$ 一次函数 $y = x + b$ 的图像经过第一、三、四象限，$\therefore b < 0$.

$\because$ 反比例函数 $y = \dfrac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ 的图像在第二、四象限，$\therefore k < 0$.

综上所述，$k < 0$，$b < 0$.

11. **解**：(1) $\because OA = 2\sqrt{2}$，$\angle AOC = 45°$，

$\therefore A(2,2)$．将 $A(2,2)$ 代入 $y = \dfrac{k}{x}$，得 $k = 4$.

(2) $\because$ 四边形 $OABC$ 是平行四边形，

$\therefore AB \perp x$ 轴．

$\therefore$ 点 B 的横坐标为 2.

$\because$ 点 D 是 BC 的中点，

$\therefore$ 点 D 的横坐标为 1.

又 $\because$ 点 D 在反比例函数 $y = \dfrac{4}{x}$ 的图像上，$\therefore D(1,4)$.

12. **解**：(1) $\because$ 一次函数 $y = kx + b$ $(k, b$ 是常数，$k \neq 0)$ 的图像过 $A(1,3)$，$B(-1,-1)$ 两点，

$\therefore \begin{cases} k + b = 3, \\ -k + b = -1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k = 2, \\ b = 1. \end{cases}$

$\therefore$ 该一次函数的表达式是 $y = 2x + 1$.

(2) $\because$ 点 $(2a + 2, a^2)$ 在一次函数 $y = 2x + 1$ 的图像上，

$\therefore a^2 = 2(2a + 2) + 1$，

解得 $a = -1$ 或 $a = 5$，

即 a 的值是 -1 或 5.

(3) 反比例函数 $y = \dfrac{m+1}{x}$ 的图像在第一、三象限．

理由：$\because$ 点 $C(x_1, y_1)$ 和点 $D(x_2, y_2)$ 在一次函数 $y = 2x + 1$ 的图像上，$m = (x_1 - x_2)(y_1 - y_2)$，

$\therefore$ 假设 $x_1 < x_2$，则 $y_1 < y_2$，此时 $m = (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) > 0$；

假设 $x_1 > x_2$，则 $y_1 > y_2$，此时 $m = (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) > 0$.

综上可得 $m > 0$，

$\therefore m + 1 > 0$.

$\therefore$ 反比例函数 $y = \dfrac{m+1}{x}$ 的图像在第一、三象限．

13. **解**：(1) 把点 $A(3,2)$ 的坐标代入反比例函数 $y = \dfrac{m}{x}$，可得 $m = 3 \times 2 = 6$，

$\therefore$ 反比例函数的表达式为 $y = \dfrac{6}{x}$.

$\because OB = 4$，$\therefore B(0,-4)$.

把点 $A(3,2)$，$B(0,-4)$ 的坐标代入一次函数 $y = kx + b$，可得 $\begin{cases} 3k + b = 2, \\ b = -4, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k = 2, \\ b = -4. \end{cases}$

$\therefore$ 一次函数的表达式为 $y = 2x - 4$.

(2) 不等式组 $0 < \dfrac{m}{x} < kx + b$ 的解集为 $x > 3$.

14. **解**：(1) 在 $\mathrm{Rt}\triangle OAB$ 中，$OA = 4$，$AB = 5$，

$\therefore OB = \sqrt{AB^2 - OA^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(0,3)$．$\therefore OP = 7$，

$\therefore PB = OB + OP = 3 + 7 = 10$.

(2) 过点 D 作 $DE \perp OB$，垂足为 E．由 $DA \perp OA$ 可得四边形 $OADE$ 为矩形．

$\therefore DE = OA = 4$，$\angle BED = 90°$.

$\therefore \angle BDE + \angle EBD = 90°$.

又 $\because \angle BDP = 90°$，

$\therefore \angle BDE + \angle EDP = 90°$.

$\therefore \angle EBD = \angle EDP$.

又 $\because \angle BED = \angle PED = 90°$，

$\therefore \triangle BED \backsim \triangle DEP$．$\therefore \dfrac{BE}{DE} = \dfrac{DE}{EP}$.

设点 D 的坐标为 $(4,m)$，由 $k > 0$ 得 $m > 0$，则有 $OE = AD = m$，$BE = 3 - m$，$EP = m + 7$，$\therefore \dfrac{3-m}{4} = \dfrac{4}{m+7}$，解得 $m = 1$ 或 $m = -5$（不合题意，舍去）．

$\therefore$ 点 D 的坐标为 $(4,1)$.

又 $\because$ 点 D 在反比例函数 $y = \dfrac{k}{x}$ 的图像上，

$\therefore k = 4$．故反比例函数的表达式为 $y = \dfrac{4}{x}$.

第 2 课时　反比例函数的性质

1. A　**点拨**：反比例函数图像是直线，经过第一、三象限，y 随 x 的增大而增大，故本选项正确．

B. 该函数图像是直线，经过第二、四象限，y 随 x 的增大而减小，故本选项错误．

C. 该函数图像是双曲线，位于第一、三象限，在每一象限内，y 随 x 的增大而减小，故本选项错误．

D. 该函数图像是双曲线，位于第二、四象限，在每一象限内，y 随 x 的增大而增大，故本选项错误．

2. D　**点拨**：由于点 $(1,-3)$ 的坐标满足反比例函数 $y = -\dfrac{3}{x}$，故 A 是正确的；

由于 $k = -3 < 0$，双曲线位于第二、四象限，故 B 是正确的；

由反比例函数图像的对称性，可知反比例函数 $y = -\dfrac{3}{x}$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称，故 C 是正确的；

由反比例函数的性质可知，$k < 0$ 时，在每个象限内，y 随 x 的增大而增大，不在同一象限则不具有此性质，故 D 是不正确的．

3. B

4. A　**点拨**：反比例函数 $y = \dfrac{6}{x}$ 中，$k = 6 > 0$，$\therefore$ 该反比例函数在 $x > 0$ 内，y 随 x 的增大而减小．当 $x = 3$ 时，$y = \dfrac{6}{3} = 2$；当 $x = 1$ 时，$y = \dfrac{6}{1} = 6$，$\therefore$ 当 $1 < x < 3$ 时，$2 < y < 6$．$\therefore y$ 的最小整数值是 3．故选 A．

5. D

6. D　**点拨**：作 $CD \perp x$ 轴于 D，设 $OB = a\,(a > 0)$．由 $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle BOC}$，根据三角形的面积公式得出 $AB = BC$．根据相似三角形性质即可表示出点 C 的坐标，把点 C 坐标代入反比例函数表达式即可求得 k.

如图，作 $CD \perp x$ 轴于 D，设 $OB = a\,(a > 0)$.



（第 6 题）

$\because S_{\triangle AOB} = S_{\triangle BOC}$，

$\therefore AB = BC$.

$\because \triangle AOB$ 的面积为 1，

$\therefore \dfrac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = 1$.

$\therefore OA = \dfrac{2}{a}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\because CD/\!/OB, AB=BC$,

$\therefore OD=OA=\frac{2}{a}, CD=2OB=2a$.

$\therefore C\left(\frac{2}{a},2a\right)$.

$\because$ 反比例函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 的图像经过点 C,

$\therefore k=\frac{2}{a}\times 2a=4$.

7. C　**点拨**：由于点 A, C 位于反比例函数图像上且关于原点对称，故 $S_{\triangle OBA}=S_{\triangle OBC}$. 设点 A 坐标为 (x_1, y_1)，则 $S_{\triangle OBA}=\frac{1}{2}x_1y_1=\frac{1}{2}|k|$. 所以 $\triangle ABC$ 的面积 $=2\times\frac{1}{2}|k|=|k|=4$.

8. D　**点拨**：如图，过点 C 作 $CD\perp x$ 轴于 D，连接 BD, OC.

$\because AB=BC, CD\perp AD$,

$\therefore BD=AB=\frac{1}{2}AC$.

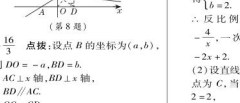
易证 $\mathrm{Rt}\triangle ABO\cong\mathrm{Rt}\triangle DBO$.

$\therefore AO=DO$.

$\therefore S_{\triangle COD}=S_{\triangle AOC}=2S_{\triangle AOB}=2$.

$\because S_{\triangle COD}=\frac{|k|}{2}$,

$\therefore k=4$. 故选 D.



（第 8 题）

9. $-\frac{16}{3}$　**点拨**：设点 B 的坐标为 (a, b)，则 $DO=-a, BD=b$.

$\because AC\perp x$ 轴，$BD\perp x$ 轴，

$\therefore BD/\!/AC$.

$\because OC=CD$,

$\therefore CE=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}b$,

$CD=\frac{1}{2}DO=-\frac{1}{2}a$.

$\because$ 四边形 $BDCE$ 的面积为 2，

$\therefore \frac{1}{2}\cdot(BD+CE)\cdot CD=2$，

即 $\frac{1}{2}\cdot\left(b+\frac{1}{2}b\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}a\right)=2$.

$\therefore ab=-\frac{16}{3}$.

设点 $B(a, b)$ 的坐标代入 $y=\frac{k}{x}$ 中，

得 $k=ab=-\frac{16}{3}$.

故答案为 $-\frac{16}{3}$.

一般地，若点 A 是双曲线 $y=\frac{k}{x}(k\neq 0)$ 上任意一点，$AB\perp x$ 轴于点 B，$AC\perp y$ 轴于点 C，坐标原点为点 O，则 $S_{\text{矩形}ABOC}=|k|, S_{\triangle AOB}=S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}|k|$（即各面积均为常数）.

10. -5　**点拨**：由 k 的几何意义可知 $\frac{1}{2}|k|=\frac{1}{2}xy=AB\cdot BC=5$. 又由图像可知，其一个分支在第四象限，所以 $k<0$. 因此 $k=-5$.

误区诊断：已知矩形或三角形的面积求反比例函数中 k 的值时，要注意图像的位置. 当图像在第一、三象限时，k 取正数；当图像在第二、四象限时，k 取负数；当未给出图像的位置时，k 取两个值. 本题中，易出现的错误是认为 $k=xy=AB\cdot BC=5$.

11. **解**：(1) $\because A(n,-2), B(-1,4)$ 是一次函数 $y=kx+b$ 和反比例函数 $y=\frac{m}{x}$ 的图像的两个交点，

$\therefore 4=\frac{m}{-1}$. $\therefore m=-4$.

$\therefore y=-\frac{4}{x}$.

$\therefore -2=-\frac{4}{n}$. $\therefore n=2$.

$\therefore A(2,-2)$.

将 A, B 两点的坐标代入一次函数 $y=kx+b$，可得 $\begin{cases}2k+b=-2,\\-k+b=4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-2,\\b=2.\end{cases}$

$\therefore$ 反比例函数的表达式为 $y=-\frac{4}{x}$，一次函数的表达式为 $y=-2x+2$.

(2) 设直线 $y=-2x+2$ 与 y 轴的交点为 C，当 $x=0$ 时，$y=-2\times 0+2=2$，

$\therefore$ 点 C 的坐标是 $(0,2)$.

$\because A(2,-2), B(-1,4)$，

$\therefore S_{\triangle AOB}=S_{\triangle AOC}+S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}\times 2\times 2+\frac{1}{2}\times 2\times 1=3$.

12. **解**：(1) $\because$ 四边形 $OABC$ 是矩形，

$\therefore \angle B=\angle AOB=90°$.

$\because AB=DB, \therefore \angle BAD=\angle ADB=45°$.

$\therefore \angle OAD=45°$.

又 $\because AD\perp x$ 轴，

$\therefore \angle OAD=\angle DOA=45°$.

$\therefore OD=AD$. $\therefore D(3,0)$，

$\therefore OD=AD=3$，即 $A(3,3)$.

把点 $A(3,3)$ 的坐标代入 $y=\frac{k}{x}$，得 $k=9$.

$\therefore$ 反比例函数的表达式为 $y=\frac{9}{x}$.

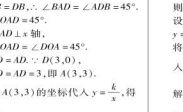
(2) 如图，过点 B 作 $BE\perp AD$ 于 E.

$\because \angle ABD=90°, AB=BD, BE\perp AD$，

$\therefore AE=ED=\frac{1}{2}AD=\frac{3}{2}$.

$\therefore OD+BE=3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$.

$\therefore B\left(\frac{9}{2},\frac{3}{2}\right)$.



（第 12 题）

作点 B 关于 y 轴的对称点 B_1，则 B_1 的坐标为 $\left(-\frac{9}{2},\frac{3}{2}\right)$，连接 AB_1，直线 AB_1 与 y 轴的交点就是所求点 P，连接 PB，此时 $PA+PB$ 最小.

设直线 AB_1 的表达式为 $y=ax+b$，将 $A(3,3), B_1\left(-\frac{9}{2},\frac{3}{2}\right)$ 的坐标代入，得 $\begin{cases}3a+b=3,\\-\frac{9}{2}a+b=\frac{3}{2}.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=\frac{1}{5},\\b=\frac{12}{5}.\end{cases}$

$\therefore$ 直线 AB_1 的表达式为 $y=\frac{1}{5}x+\frac{12}{5}$.

当 $x=0$ 时，$y=\frac{12}{5}$.

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $\left(0,\frac{12}{5}\right)$.

13. **解**：(1) $\because$ 顶点 A 的坐标是 $(0,2)$，顶点 C 的纵坐标是 -4，

$\therefore AE=6$. 又 $\because ABCD$ 的面积是 24，

$\therefore AD=BC=4$，

则 $D(4,2)$.

$\therefore k=4\times 2=8$.

$\therefore$ 反比例函数的表达式为 $y=\frac{8}{x}$.

(2) 由题意知 B 的纵坐标为 -4，且在 $y=\frac{8}{x}$ 的图像上.

$\therefore$ 其横坐标为 -2，

则 $B(-2,-4)$.

设 AB 所在直线的函数表达式为 $y=ax+b$，

将 $A(0,2), B(-2,-4)$ 的坐标代入，得 $\begin{cases}b=2,\\-2a+b=-4,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=3,\\b=2.\end{cases}$

$\therefore AB$ 所在直线的函数表达式为 $y=3x+2$.

14. **解**：(1) $\because$ 点 $C(2,4)$ 在反比例函数 $y=\frac{k_2}{x}$ 的图像上，$\therefore k_2=2\times 4=8$.

第 14 题答案

$\therefore$ 反比例函数的表达式为 $y=\frac{8}{x}$.

如图，作 $CE\perp x$ 轴于 E，

$\because C(2,4)$，点 B 是线段 AC 的中点，

$\therefore B(0,2)$.

$\because B, C$ 在一次函数 $y=k_1x+b$ 的图像上，$\therefore \begin{cases}2k_1+b=4,\\b=2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k_1=1,\\b=2.\end{cases}$

$\therefore$ 一次函数的表达式为 $y=x+2$.



（第 14 题）

(2) 由 $\begin{cases}y=x+2,\\y=\frac{8}{x},\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=2,\\y=4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-4,\\y=-2,\end{cases}$

$\therefore D(-4,-2)$.

$\therefore S_{\triangle COD}=S_{\triangle BOC}+S_{\triangle BOD}=\frac{1}{2}\times 2\times 2+\frac{1}{2}\times 2\times 4=6$.

(3) 由图可得，当 $0<x<2$ 或 $x<-4$ 时，$k_1x+b<\frac{k}{x}$.

第 3 课时　反比例函数图像和性质的常见题型

1. **解**：(1) 由题意得点 B 的对应点 B' 的坐标为 $(1,3)$，

设图像过点 B' 的反比例函数的表达式为 $y=\frac{k}{x}$，$\therefore k=3\times 1=3$.

$\therefore$ 图像过点 B' 的反比例函数的表达式为 $y=\frac{3}{x}$.

(2) 连接 OC, OC'.

$\because$ 点 C 的坐标为 $(-1,2)$，

$\therefore OC=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$.

$\because \triangle ABC$ 以坐标原点 O 为旋转中心，顺时针旋转 90°，得到 $\triangle A'B'C'$，点 C' 是点 C 的对应点，

$\therefore OC'=OC=\sqrt{5}, \angle COC'=90°$.

$\therefore CC'=\sqrt{OC^2+OC'^2}=\sqrt{10}$.

2. **解**：(1) $\because$ 反比例函数 $y=\frac{m}{x}$ 的图像经过点 $B(2,-1)$，

$\therefore m=2\times(-1)=-2$.

$\because$ 点 $A(-1,n)$ 在 $y=\frac{-2}{x}$ 的图像上，

$\therefore n=\frac{-2}{-1}=2$.

$\therefore A(-1,2)$.

把 A, B 的坐标代入 $y=kx+b$，

则有 $\begin{cases}-k+b=2,\\2k+b=-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-1,\\b=1.\end{cases}$

$\therefore$ 一次函数的表达式为 $y=-x+1$，反比例函数的表达式为 $y=-\frac{2}{x}$.

(2) $\because$ 直线 $y=-x+1$ 交 y 轴于点 $C, \therefore C(0,1)$.

$\because D, C$ 两点关于 x 轴对称，

$\therefore D(0,-1)$.

又 $\because B(2,-1)$，

$\therefore BD/\!/x$ 轴.

$\therefore S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}\times 2\times(2+1)=3$.

(3) $\because -2<0$. $\therefore$ 反比例函数 $y=-\frac{2}{x}$ 在每一象限内，y 随 x 的增大而增大.

$\therefore x_1<x_2<0, \therefore y_1<y_2$.

3. **解**：(1) 设直线 AD 对应的函数表达式为 $y=ax+b$.

$\because$ 直线 AD 过点 $A(3,5), E(-2,0)$，

$\therefore \begin{cases}3a+b=5,\\-2a+b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\b=2.\end{cases}$

$\therefore$ 直线 AD 对应的函数表达式为 $y=x+2$.

$\because$ 点 C 与点 $A(3,5)$ 关于原点 O 对称，

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(-3,-5)$.

$\because CD/\!/y$ 轴，

$\therefore$ 点 D 的横坐标为 -3，

把 $x=-3$ 代入 $y=x+2$ 得 $y=-1$.

$\therefore$ 点 D 的坐标为 $(-3,-1)$.

$\therefore$ 点 D 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图像上，

$\therefore k=(-3)\times(-1)=3$.

(2) 12.

4. **解**：(1) $\because$ 点 $A(-1,a)$ 在反比例函数 $y=\frac{-8}{x}$ 的图像上，

$\therefore a=\frac{-8}{-1}=8$.

$\therefore A(-1,8)$.

$\because B(0,7)$，

$\therefore$ 设直线 AB 的表达式为 $y=kx+7$.

$\therefore$ 直线 AB 过点 $A(-1,8)$，

$\therefore 8=-k+7$，解得 $k=-1$.

$\therefore$ 直线 AB 的表达式为 $y=-x+7$.

(2) $\because$ 将直线 AB 向下平移 9 个单位长度后得到直线 CD，$\therefore$ 直线 CD 的表达式为 $y=-x-2$，

$\therefore D(0,-2)$.

$\because BD=7+2=9$.

解 $\begin{cases}y=-x-2,\\y=-\frac{8}{x},\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=-4,\\y=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=2,\\y=-4.\end{cases}$

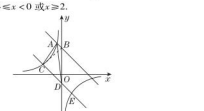
$\therefore C(-4,2), E(2,-4)$.

如图，连接 BC，则 $\triangle BCD$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times 9\times 4=18$.

由平行线间的距离处处相等，可得 $\triangle ACD$ 与 $\triangle BCD$ 面积相等，

$\therefore \triangle ACD$ 的面积为 18.

(3) 不等式 $mx+n\leqslant\frac{-8}{x}$ 的解集是 $-4\leqslant x<0$ 或 $x\geqslant 2$.



（第 4 题）

5. **解**：(1) $\because$ 点 $A\left(-\frac{1}{2}m, m-2\right), B(1, n)$ 在直线 $y=-2x+b$ 上，

$\therefore \begin{cases}m+b=m-2,\\-2+b=n,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}b=-2,\\n=-4.\end{cases}$

$\therefore B(1,-4)$.

将 $(1,-4)$ 代入 $y=\frac{k}{x}$，得 $-4=\frac{k}{1}$，

$\therefore k=-4$.

(2) 由 (1) 得直线 AB 的表达式为 $y=-2x-2$，

令 $x=0$，解得 $y=-2$，令 $y=0$，解得 $x=-1$，

$\therefore C(-1,0), D(0,-2)$.

$\because$ 点 E 为 CD 的中点，

$\therefore E\left(-\frac{1}{2},-1\right)$.

$\therefore S_{\triangle BOE}=S_{\triangle DOB}+S_{\triangle OEB}=\frac{1}{2}OD\cdot(x_B-x_E)=\frac{1}{2}\times 2\times\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$.

6. **解**：(1) $\because$ 点 $A(a,4)$，

$\therefore AC=4$.

$\therefore S_{\triangle AOC}=4$，即 $\frac{1}{2}OC\cdot AC=4$，

$\therefore OC=2$.

$\because$ 点 $A(a,4)$ 在第二象限，

$\therefore a=-2, A(-2,4)$.

将 $(-2,4)$ 代入 $y=\frac{k}{x}$，得 $k=-8$.

$\therefore$ 反比例函数的表达式为 $y=-\frac{8}{x}$.

把 $(8,b)$ 代入 $y=-\frac{8}{x}$，得 $b=-1$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

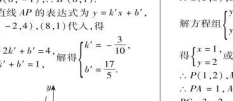
综上，$a=-2$，$b=-1$.

(2)由图像可以看出 $mx+n<\frac{k}{x}$ 的解集为 $-2<x<0$ 或 $x>8$.

(3)如图，作点 B 关于 x 轴的对称点 B'，过点 A，B' 作直线 AB'，直线 AB' 与 x 轴交于点 P，连接 PB，易得此时 $PA-PB$ 最大.

$\because B(8,-1)$，$\therefore B'(8,1)$.

设直线 AP 的表达式为 $y=k'x+b'$，将 $(-2,4)$，$(8,1)$ 代入，得 $\begin{cases}-2k'+b'=4,\\8k'+b'=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k'=-\frac{3}{10},\\b'=\frac{17}{5}.\end{cases}$



(第6题)

$\therefore$ 直线 AP 的表达式为 $y=-\frac{3}{10}x+\frac{17}{5}$.

当 $y=0$ 时，$-\frac{3}{10}x+\frac{17}{5}=0$，解得 $x=\frac{34}{3}$，$\therefore P\left(\frac{34}{3},0\right)$.

7. 解：(1)将 $(2,4)$ 代入 $y=-x+m$ 与 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 中，得 $4=-2+m$，$4=\frac{k}{2}$，$\therefore m=6$，$k=8$.

$\therefore$ 一次函数的表达式为 $y=-x+6$，反比例函数的表达式为 $y=\frac{8}{x}$.

(2)解方程组 $\begin{cases}y=-x+6,\\y=\frac{8}{x},\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=2,\\y=4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=4,\\y=2,\end{cases}$

$\therefore B(4,2)$.

(3)设直线 $y=-x+6$ 与 y 轴交于 D 点，当 $x=0$ 时，$y=6$，$\therefore D(0,6)$.

$\because OD=6$.

$\therefore S_{\triangle BOM}=S_{\triangle DOM}-S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times6\times4-\frac{1}{2}\times6\times2=6$.

8. 解：(1)$\because \triangle OAP$ 的面积为 1，

$\therefore S_{\triangle OPA}=\frac{1}{2}|k|=1$，

$\therefore |k|=2$. $\because k>0$，$\therefore k=2$.

$\therefore$ 反比例函数的表达式为 $y=\frac{2}{x}$.

$\because$ 反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k>0)$ 的图像过点 $P(1,m)$，

$\therefore m=\frac{2}{1}=2$. $\therefore P(1,2)$.

$\because$ 一次函数 $y=-x+b$ 的图像过点 $P(1,2)$，

$\therefore 2=-1+b$，解得 $b=3$.

$\therefore$ 一次函数的表达式为 $y=-x+3$.

(2)设直线 $y=-x+3$ 分别交 x 轴，y 轴于 C，D 两点，

$\because C(3,0)$，$D(0,3)$.

解方程组 $\begin{cases}y=-x+3,\\y=\frac{2}{x},\end{cases}$

得 $\begin{cases}x=1,\\y=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=2,\\y=1,\end{cases}$

$\therefore P(1,2)$，$M(2,1)$.

$\therefore PA=1$，$AD=3-2=1$，$BM=1$，$BC=3-2=1$.

$\therefore$ 五边形 $OAPMB$ 的面积为 $S_{\triangle COD}-S_{\triangle BMC}-S_{\triangle APF}=\frac{1}{2}\times3\times3-\frac{1}{2}\times1\times1-\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{7}{2}$.

阶段核心归类

1. C　**2.** A

3. A　**点拨**：设 $\triangle ABC$ 的边 AB 上的高为 h，则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot h$

$=\frac{1}{2}(AP+BP)\cdot h$

$=\frac{1}{2}(AP\cdot h+BP\cdot h)$

$=\frac{1}{2}(|-4|+|2|)$

$=\frac{1}{2}\times6$

$=3$.

4. A

5. 解：(1)$\because$ 点 $B(4,2)$ 在 $y_1=\frac{k}{x}(x>0)$ 的图像上，$\therefore k=8$. $\therefore y_1=\frac{8}{x}$.

$\because a=2$，$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(2,4)$，

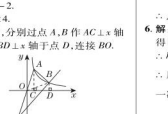
$\therefore$ 点 A' 的坐标为 $(-2,-4)$，

把 $B(4,2)$，$A'(-2,-4)$ 的坐标分别代入 $y_2=mx+n$，得 $\begin{cases}2=4m+n,\\-4=-2m+n,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=1,\\n=-2,\end{cases}$

$\therefore y_2=x-2$.

②$2<x<4$.

(2)如图，分别过点 A，B 作 $AC\perp x$ 轴于点 C，$BD\perp x$ 轴于点 D，连接 BO.



(第5题)

$\because$ 点 A' 与 A 关于点 O 对称，

$\therefore$ 点 O 在 AA' 上，且 $OA=OA'$.

$\therefore S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}S_{\triangle AA'B}=8$.

$\because A\left(a,\frac{k}{a}\right)$，$B\left(3a,\frac{k}{3a}\right)$，

$\therefore S_{\triangle OAC}=\frac{1}{2}a\cdot\frac{k}{a}=\frac{1}{2}k$，$S_{\triangle OBD}=\frac{1}{2}\times3a\times\frac{k}{3a}=\frac{1}{2}k$.

$\therefore S_{\triangle OAC}=S_{\triangle OBD}$.

$\therefore S_{四边形ACBD}-S_{\triangle OBD}=S_{四边形OABD}-S_{\triangle OAC}$.

$\therefore S_{四边形ACBD}=S_{\triangle OAB}=8$.

$\because\frac{1}{2}\left(\frac{k}{a}+\frac{k}{3a}\right)(3a-a)=8$.

$\therefore k=6$.

(3)$\because$ 点 A 的坐标为 $\left(a,\frac{k}{a}\right)$，点 A' 与点 A 关于点 O 对称，

$\therefore A'\left(-a,-\frac{k}{a}\right)$.

将点 A' 的坐标代入 $y_2=\frac{1}{2}x+n$，得 $n=\frac{1}{2}a-\frac{k}{a}$.

$\therefore y_2=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}a-\frac{k}{a}$.

$\because AD\perp x$ 轴，$\therefore x_D=a$.

$\therefore y_D=a-\frac{k}{a}$.

$\therefore AD=\frac{k}{a}-\left(a-\frac{k}{a}\right)=\frac{2k}{a}-a$.

$\because$ 四边形 $ADEF$ 是正方形，

$\therefore DE=AD=\frac{2k}{a}-a$.

$\because x_P=x_E=a+\frac{2k}{a}-a=\frac{2k}{a}$.

将 $x_P=\frac{2k}{a}$ 代入 $y_2=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}a-\frac{k}{a}$ 得 $y_P=\frac{1}{2}\cdot\frac{2k}{a}+\frac{1}{2}a-\frac{k}{a}=\frac{1}{2}a$，

$\therefore P\left(\frac{2k}{a},\frac{1}{2}a\right)$.

将 $x_P=\frac{2k}{a}$ 代入 $y_1=\frac{k}{x}$，得 $\frac{k}{\frac{2k}{a}}=\frac{1}{2}a=y_P$.

$\therefore$ 点 P 一定在函数 y_1 的图像上.

6. 解：(1)由图像知 $k<0$，由已知条件得 $|k|=3$，

$\therefore k=-3$.

$\therefore$ 反比例函数的表达式为 $y=-\frac{3}{x}$，

一次函数的表达式为 $y=-x+2$.

(2)由 $\begin{cases}y=-\frac{3}{x},\\y=-x+2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_1=-1,\\y_1=3,\end{cases}\begin{cases}x_2=3,\\y_2=-1.\end{cases}$

$\therefore$ 点 A，C 的坐标分别为 $(-1,3)$，$(3,-1)$.

(3)设点 P 的坐标为 $(0,m)$，直线 $y=-x+2$ 与 y 轴的交点为 M，则 M 的坐标为 $(0,2)$.

$\because S_{\triangle APC}=S_{\triangle MPA}+S_{\triangle MPC}=\frac{1}{2}\times PM\times(1+1)+|3|)=5$.

$\therefore PM=\frac{5}{2}$，即 $|m-2|=\frac{5}{2}$.

$\therefore m=\frac{9}{2}$ 或 $m=-\frac{1}{2}$.

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $\left(0,\frac{9}{2}\right)$ 或 $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$.

点拨：依据图像及已知条件求 k 的值是解本题的关键，只有求出 k 的值，才能通过解方程组求 A，C 两点的坐标，然后才能解决第(3)问.

7. 解：由题意，易得出 $S_{\triangle OAB}=S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}\times1-4|=2$. 易知 $OC=OD$，$AC=BD$，所以 $S_{\triangle AOC}=S_{\triangle OAB}=S_{\triangle OBD}=S_{\triangle BOC}=2$. 所以四边形 $ACBD$ 的面积为 $S_{\triangle AOC}+S_{\triangle OAB}+S_{\triangle OBD}+S_{\triangle BOC}=8$.

8. 解：由反比例函数图像的对称性可知，两条坐标轴将矩形 $ABCD$ 分成四个全等的小矩形.

$\because$ 点 A 为 $y=\frac{6}{x}$ 的图像上的一点，

$\therefore S_{矩形AEOH}=6$.

$\therefore S_{矩形ABCD}=4\times6=24$.

$\therefore$ 总费用为 $25\times24=600$(元).

答：所需钢条一共花 600 元.

9. 解：(1)$\because$ 一次函数 $y=kx+b(k,b$ 为常数，$k\neq0)$ 的图像与反比例函数 $y=-\frac{12}{x}$ 的图像交于 A，B 两点，

$\therefore A$ 的横坐标与 B 点的纵坐标都是 3，

$\therefore 3=-\frac{12}{x_B}$，

解得 $x_B=-4$，

$\therefore y_A=-\frac{12}{3}=-4$，

故 $B(-4,3)$，$A(3,-4)$，

把 A，B 点的坐标代入 $y=kx+b$，得 $\begin{cases}-4k+b=3,\\3k+b=-4,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=-1,\\b=-1,\end{cases}$

故一次函数的表达式为 $y=-x-1$.

(2)好于 $y=-x-1$，当 $y=0$ 时，$x=-1$，故 C 点坐标为 $(-1,0)$，

则 $\triangle AOB$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times1\times3+\frac{1}{2}\times1\times4=\frac{7}{2}$.

(3)不等式 $kx+b>-\frac{12}{x}$ 的解集为 $x<-4$ 或 $0<x<3$.

27.3　反比例函数的应用

第 1 课时　建立反比例函数模型解实际应用问题

1. $y=\frac{4\,500}{x}$　**2.** B　**3.** A　**4.** A　**5.** D

6. B　**7.** C

8. D　**点拨**：本题易忽视三角形的底边长和高均为正数，而错选 B.

9. 解：(1)$\because vt=480$，且全程速度限定为不超过 120 千米/时，

$\therefore v$ 关于 t 的函数表达式为 $v=\frac{480}{t}(t\geqslant4)$.

(2)①8 点至 12 点 48 分时间长为 $\frac{24}{5}$ 小时，8 点至 14 点时间长为 6 小时，将 $t=6$ 代入 $v=\frac{480}{t}$，得 $v=80$；

将 $t=\frac{24}{5}$ 代入 $v=\frac{480}{t}$，得 $v=100$.

$\therefore$ 小汽车行驶速度 v 的范围为 $80\leqslant v\leqslant100$.

②方方不能在当天 11 点 30 分前到达 B 地. 理由如下：

8 点至 11 点 30 分时间长为 $\frac{7}{2}$ 小时，

将 $t=\frac{7}{2}$ 代入 $v=\frac{480}{t}$，得 $v=\frac{960}{7}>120$，超速了.

故方方不能在当天 11 点 30 分前到达 B 地.

10. 解：(1)设函数表达式为 $V=\frac{k}{t}$，把 $(6,3\,000)$ 代入 $V=\frac{k}{t}$，得 $3\,000=\frac{k}{6}$.

解得 $k=18\,000$，所以 V 与 t 之间的函数表达式为 $V=\frac{18\,000}{t}$.

(2)把 $t=2$ 代入 $V=\frac{18\,000}{t}$，得 $V=9\,000$.

答：每小时的排水量应该是 $9\,000\ m^3$；

(3)把 $V=4\,000$ 代入 $V=\frac{18\,000}{t}$，得 $t=4.5$，

根据反比例函数的性质，V 随 t 的增大而减小，因此水池中的水至少要 4.5 h 才能排完.

11. 解：(1)由题意得 $xy=24$，

$\therefore y=\frac{24}{x}$.

(2)当 $y=3$ 时，$x=8$；当 $y=6$ 时，$x=4$，

$\therefore$ 当 $3<y<6$ 时 x 的取值范围为 $4<x<8$.

12. 解：(1)当 $0\leqslant x<4$ 时，设 y 与 x 的函数表达式为 $y=kx$，将 $(4,8)$ 代入得 $8=4k$，解得 $k=2$，故表达式为 $y=2x$；

第12题图

当 $4\leqslant x\leqslant10$ 时，设 y 与 x 的函数表达式为 $y=\frac{a}{x}$，将 $(4,8)$ 代入得 $8=\frac{a}{4}$，解得 $a=32$，故表达式为 $y=\frac{32}{x}$.

因此血液中药物浓度上升阶段的函数表达式为 $y=2x(0\leqslant x<4)$，下降阶段的函数表达式为 $y=\frac{32}{x}(4\leqslant x\leqslant10)$.

(2)当 $0\leqslant x<4$ 时，令 $y=4$，得 $4=2x$，解得 $x=2$；

当 $4\leqslant x\leqslant10$ 时，令 $y=4$，得 $4=\frac{32}{x}$，解得 $x=8$.

$\because 8-2=6(h)$，$\therefore$ 血液中药物浓度不低于 4 μg/mL 的持续时间是 6 h.

第 2 课时　建立反比例函数模型解跨学科应用问题

1. C　**2.** B　**3.** C　**4.** A　**5.** D

6. A　**7.** C

8. C　**点拨**：本题易忽略反比例函数的增减性而致错.

9. 解：(1)观察图像，可知当 $x=7$ min 时，水温 $y=100$ ℃.

当 $0\leqslant x\leqslant7$ 时，设 y 与 x 的函数关系式为 $y=kx+b$，

则 $\begin{cases}b=30,\\7k+b=100,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=10,\\b=30,\end{cases}$

即当 $0\leqslant x\leqslant7$ 时，y 与 x 的函数关系式为 $y=10x+30$.

当 $x>7$ 时，设 $y=\frac{a}{x}$，

则 $100=\frac{a}{7}$，

解得 $a=700$，

即当 $x>7$ 时，y 与 x 的函数关系式为 $y=\frac{700}{x}$，当 $y=30$ 时，$x=\frac{70}{3}$.

$\therefore y$ 与 x 的函数关系式为 $y=\begin{cases}10x+30(0\leqslant x\leqslant7),\\\frac{700}{x}\left(7<x\leqslant\frac{70}{3}\right).\end{cases}$

(2)将 $y=50$ 代入 $y=10x+30$，得 $x=2$，

将 $y=50$ 代入 $y=\frac{700}{x}$，得 $x=14$.

$\because 14-2=12$，$\frac{70}{3}-12=\frac{34}{3}$(min)，

$\therefore$ 怡宣同学想喝高于 50 ℃ 的水，她最多需要等待 $\frac{34}{3}$ min.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. 解：(1) 画图略. 由图像猜测 y 与 x 之间的函数关系为反比例函数关系，∴ 设 $y=\frac{k}{x}(k\neq 0)$.

把 $x=4$，$y=12$ 代入，得 $k=48$，

∴ $y=\frac{48}{x}$.

将其余各点的坐标代入验证，均适合，∴ y 与 x 之间的函数关系式为 $y=\frac{48}{x}$.

(2) 把 $y=5$ 代入 $y=\frac{48}{x}$，得 $x=9.6$.

∴ 当弹簧秤的示数为 5 N 时，弹簧秤与点 O 的距离是9.6 cm. 随着弹簧秤与点 O 的距离不断减小，弹簧秤的示数将不断增大.

11. 解：(1) 设线段 AB 的表达式为 $y=k_1x+b(k_1\neq 0)$.

∵ 线段 AB 过点 $(0,10)$，$(2,14)$，

∴ $\begin{cases}b=10,\\2k_1+b=14,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k_1=2,\\b=10.\end{cases}$

∴ 线段 AB 的表达式为 $y=2x+10$ $(0\leqslant x<5)$.

∵ 点 B 在线段 AB 上，当 $x=5$ 时，$y=20$，

∴ 点 B 的坐标为 $(5,20)$.

∴ 线段 BC 的函数表达式为 $y=20$ $(5\leqslant x<10)$，

设双曲线 CD 的表达式为 $y=\frac{k_2}{x}$ $(k_2\neq 0)$. ∵ $C(10,20)$，∴ $k_2=200$.

∴ 双曲线 CD 的表达式为 $y=\frac{200}{x}$ $(10\leqslant x\leqslant 24)$.

∴ y 关于 x 的函数表达式为

$y=\begin{cases}2x+10(0\leqslant x<5),\\20(5\leqslant x<10),\\\frac{200}{x}(10\leqslant x\leqslant 24).\end{cases}$

(2) 由(1) 知恒温系统设定的恒定温度为 20 ℃.

(3) 把 $y=10$ 代入 $y=\frac{200}{x}$ 中，

解得 $x=20.20-10=10$(h).

答：恒温系统最多可以关闭 10 h，才能使蔬菜避免受到伤害.

阶段核心方法

1. 解：由反比例函数的定义可知

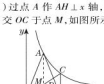
$\begin{cases}m^2-10=-1,\\m+3\neq 0,\end{cases}$ ∴ $m=3$.

∴ 此反比例函数的表达式为 $y=\frac{6}{x}$.

易错点拨：该题容易忽略 $m+3\neq 0$ 这一条件，得出 $m=\pm 3$ 的错误结论.

2. 解：由题意得 $\begin{cases}n^2+2n-9=-1,\\n+3>0.\end{cases}$ 解得 $n=2$. ∴ 此函数的表达式是 $y=\frac{5}{x}$.

3. 解：(1) 过点 A 作 $AH\perp x$ 轴，垂足为 H，AH 交 OC 于点 M，如图所示.



(第 3 题)

∵ $OA=AB$，$AH\perp OB$，

∴ $OH=BH=\frac{1}{2}OB=2$.

∴ $AH=\sqrt{OA^2-OH^2}=6$.

∴ 点 A 的坐标为 $(2,6)$.

∵ 点 A 为反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 图像上的一点，∴ $k=2\times 6=12$.

(2) ∵ $BC\perp x$ 轴，$OB=4$，点 C 在反比例函数 $y=\frac{12}{x}$ 的图像上，

∴ $BC=\frac{12}{OB}=3$.

∵ $AH/\!/BC$，$OH=BH$，

∴ $MH=\frac{1}{2}BC=\frac{3}{2}$.

∴ $AM=AH-MH=\frac{9}{2}$.

∵ $AM/\!/BC$，

∴ $\angle DAM=\angle DBC$.

又∵ $\angle ADM=\angle BDC$，

∴ $\triangle ADM\backsim\triangle BDC$.

∴ $\frac{AD}{DB}=\frac{AM}{BC}=\frac{3}{2}$.

4. 解：(1) ∵ 点 $A(3,2)$ 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 的图像上，

∴ $k=3\times 2=6$.

∴ 该反比例函数的表达式为 $y=\frac{6}{x}$.

(2) 如图，过点 A 作 $AE\perp OC$，垂足为 E.



(第 4 题)

设直线 OA 的表达式为 $y=mx$，将 $A(3,2)$ 的坐标代入，得 $m=\frac{2}{3}$，

∴ 直线 OA 的表达式为 $y=\frac{2}{3}x$.

∵ 点 $C(a,0)$，

∴ 把 $x=a$ 代入 $y=\frac{2}{3}x$，得 $y=\frac{2}{3}a$；

把 $x=a$ 代入 $y=\frac{6}{x}$，得 $y=\frac{6}{a}$，

∴ $B\left(a,\frac{2}{3}a\right)$，即 $BC=\frac{2}{3}a$；

$D\left(a,\frac{6}{a}\right)$，即 $CD=\frac{6}{a}$.

∵ $S_{\triangle ACD}=\frac{3}{2}$，

∴ $\frac{1}{2}CD\cdot EC=\frac{3}{2}$，

即 $\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{a}\cdot(a-3)=\frac{3}{2}$，解得 $a=6$.

∴ $BD=BC-CD=\frac{2}{3}a-\frac{6}{a}=4-1=3$.

即线段 BD 的长为 3.

5. 解：(1) 依题意，点 $C(1,2)$ 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq 0)$ 的图像上，

∴ $k=1\times 2=2$.

∵ $A(3,0)$，

∴ $OA=3$.

∵ 四边形 $OABC$ 是平行四边形，

∴ $BC=OA=3$.

又∵ $BC/\!/x$ 轴，

∴ $B(4,2)$.

设直线 OB 的表达式为 $y=ax$，

∴ $2=4a$. ∴ $a=\frac{1}{2}$.

∴ 直线 OB 的表达式为 $y=\frac{1}{2}x$.

(2) 如图，作 $CD\perp OA$ 于点 D.



(第 5 题)

∵ $C(1,2)$，

∴ $OC=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$.

在平行四边形 $OABC$ 中，$CB=OA=3$，$AB=OC=\sqrt{5}$，

∴ 四边形 $OABC$ 的周长为 $3+3+\sqrt{5}+\sqrt{5}=6+2\sqrt{5}$.

6. 解：(1) 由已知得 $vt=300$.

∴ t 与 v 之间的函数表达式为 $t=\frac{300}{v}$ $(v>0)$.

(2) 运了一半物资后还剩 $300\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=150(t)$，$150\div 2=75(t/h)$.

∵ 剩下的物资要在 2 h 之内运到江边，

∴ 运输速度至少为75 t/h.

全章热门考点整合应用

1. B　**2.** C

3. 解：(1) 反比例函数，函数的表达式为 $y=-\frac{6}{x}$.

(2) 如图.



(第 3 题)

4. 解：(1) 如图①，过点 A 作 $AC\perp OB$ 于点 C.

∵ $\triangle OAB$ 是等边三角形，

∴ $OC=\frac{1}{2}OB$.

∵ $B(4,0)$，

∴ $OB=OA=4$.

∴ $OC=2$，$AC=2\sqrt{3}$.

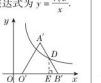
∴ $A(2,2\sqrt{3})$.

把点 $A(2,2\sqrt{3})$ 的坐标代入 $y=\frac{k}{x}$，得 $k=4\sqrt{3}$，

∴ 反比例函数的表达式为 $y=\frac{4\sqrt{3}}{x}$.



①



②



③

(第 4 题)

(2) 分两种情况讨论：

① 如图②，点 D 是 $A'B'$ 的中点，过点 D 作 $DE\perp x$ 轴于点 E.

由题意得 $A'B'=4$，$\angle A'B'O'=60°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle DEB'$ 中，$B'D=2$，$B'E=1$，$DE=\sqrt{3}$，∴ $O'E=3$.

把 $y=\sqrt{3}$ 代入 $y=\frac{4\sqrt{3}}{x}$，得 $x=4$，

∴ $OH=4$.

∴ $a=OO'=3$.

综上所述，a 的值为 1 或 3.

5. 解：如图.

(1) 当 $y=-2$ 时，$x=-3$；

(2) 当 $-2<x<1$ 且 $x\neq 0$ 时，$y<-3$ 或 $y>6$；

(3) 当 $-3<y<2$ 且 $y\neq 0$ 时，$x<-2$ 或 $x>3$.



(第 5 题)

6. 解：(1) 由题意可得 $100=vt$，

则 $v=\frac{100}{t}$.

(2) 由于不超过 5 小时卸完船上的这批货物，即 $t\leqslant 5$，

故 $v\geqslant\frac{100}{5}=20$(吨/时).

答：平均每小时至少要卸货 20 吨.

7. 3　**点拨：**连接 AO，BO，由题可得 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle BEO}=S_{\triangle APO}+S_{\triangle BPO}$，



第7题答案

又易知 $S_{\triangle APO}=\frac{1}{2}\times 2=1$，$S_{\triangle BPO}=\frac{1}{2}\times 1-4\times 1=2$，

∴ $S_{\triangle ABC}=3$. 故答案为 3.

第二十八章　圆

28.1　圆的概念及性质

1. B　**2.** A　**3.** B　**4.** B　**5.** A　**6.** C

7. C　**8.** D　**9.** C

10. C　**点拨：**本题分点 P 在 $\odot O$ 内和点 P 在 $\odot O$ 外两种情况，易考虑问题不全面漏掉一种情况.

11. 解：$OE=OF$.

证明：如图，连接 OA，OB，

∴ $OE=4$.

∴ $a=OO'=1$.

②如图③，点 F 是 $A'O'$ 的中点，过点 F 作 $FH\perp x$ 轴于点 H.

由题意得 $A'O'=4$，$\angle A'O'B'=60°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle FO'H$ 中，$O'H=1$，$FH=\sqrt{3}$.

把 $y=\sqrt{3}$ 代入 $y=\frac{4\sqrt{3}}{x}$，得 $x=4$，

∴ $OH=4$.

∴ $a=OO'=3$.

综上所述，a 的值为 1 或 3.

5. 解：如图.

(1) 当 $y=-2$ 时，$x=-3$；

(2) 当 $-2<x<1$ 且 $x\neq 0$ 时，$y<-3$ 或 $y>6$；

(3) 当 $-3<y<2$ 且 $y\neq 0$ 时，$x<-2$ 或 $x>3$.

(第 5 题)

6. 解：(1) 由题意可得 $100=vt$，

则 $v=\frac{100}{t}$.

(2) 由于不超过 5 小时卸完船上的这批货物，即 $t\leqslant 5$，

故 $v\geqslant\frac{100}{5}=20$(吨/时).

答：平均每小时至少要卸货 20 吨.

7. 3　**点拨：**连接 AO，BO，由题可得 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle BEO}=S_{\triangle APO}+S_{\triangle BPO}$，

第7题答案

又易知 $S_{\triangle APO}=\frac{1}{2}\times 2=1$，$S_{\triangle BPO}=\frac{1}{2}\times 1-4\times 1=2$，

∴ $S_{\triangle ABC}=3$. 故答案为 3.

第二十八章　圆

28.1　圆的概念及性质

1. B　**2.** A　**3.** B　**4.** B　**5.** A　**6.** C

7. C　**8.** D　**9.** C

10. C　**点拨：**本题分点 P 在 $\odot O$ 内和点 P 在 $\odot O$ 外两种情况，易考虑问题不全面漏掉一种情况.

11. 解：$OE=OF$.

证明：如图，连接 OA，OB，



(第 11 题)

∵ $OA=OB$，

∴ $\angle OAB=\angle OBA$.

又∵ $AE=BF$，$OA=OB$，

∴ $\triangle OAE\cong\triangle OBF$(SAS).

∴ $OE=OF$.

12. (1) **证明：**如图，连接 OD，OE，

则 $OD=OE$，

又∵ $OCD=\angle OFE=90°$，$DC=EF$，

∴ $\mathrm{Rt}\triangle ODC\cong\mathrm{Rt}\triangle OEF$(HL).

∴ $OC=OF$.



(第 12 题)

(2) 解：如图，连接 OH，

∵ $CF=EF=2$，$OC=OF$，

∴ $OF=1$.

∵ $\triangle EFO$ 是直角三角形，

∴ $OH^2=OE^2=OF^2+EF^2=1^2+2^2=5$. 设 $FG=GH=x$，

∵ $OG^2+GH^2=OH^2$，

∴ $(x+1)^2+x^2=5$.

∴ $x^2+x-2=0$，

解得 $x_1=1$，$x_2=-2$(舍去).

∴ $S_{\text{五边形}FCHDE}=1^2=1$.

13. 解：(1) ∵ $OB=OC$，

∴ $\angle C=\angle CBO$.

设 $\angle PBO=\angle C=x$，

∵ $PC=OC$，

∴ $\angle COP=\angle CPO=\angle B+\angle BOA=x+30°$.

在 $\triangle POC$ 中，$x+2(x+30°)=180°$，

∴ $x=40°$，

∴ $\angle PBO=40°$.

(2) $100°$　**点拨：**设 $\angle BOC=y$，

∵ $PC=OC$，

∴ $\angle CPO=\angle COP=y+30°$.

∵ $OB=OC$，

∴ $\angle OCP=\angle OBC=\angle BOA+\angle OPC=30°+(30°+y)=60°+y$，

在 $\triangle OBC$ 中，$y+2(60°+y)=180°$，

∴ $y=20°$，

∴ $\angle OBC=80°$，

∴ $\angle PBO=100°$.

14. 解：(1) 点 C 在以 AB 为直径的圆上.

理由：如图，连接 MC，MD.

由折叠的性质知 $\angle DAC=\angle BAC$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$AD=AM$.

$\because AB//CD$, $\therefore \angle DCA=\angle BAC$.

$\therefore \angle DAC=\angle DCA$.

$\therefore AD=CD$.

$\because AD=AM$,

$\therefore CD=AM$,

$\therefore$ 四边形 $AMCD$ 是平行四边形,

$\therefore MC=AD$.

$\because AM=BM$,

$\therefore CD=BM$.

$\therefore$ 四边形 $BCDM$ 是平行四边形,

$\therefore MD=BC$.

$\because AD=BC$,

$\therefore MC=MD=MA=MB$,

$\therefore$ 点 C 在以 AB 为直径的圆上.

(2)由(1)易得 $\triangle AMD$ 是等边三角形,$AM=\frac{1}{2}AB=2$. 如图,过点 D 作 $DE\perp AB$ 于点 E,则 $AE=EM=1$. 由勾股定理得 $DE=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$,

$\therefore$ 梯形 $ABCD$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times(2+4)\times\sqrt{3}=3\sqrt{3}$.



(第 14 题)

28.2 过三点的圆

1. D **2.** D **3.** C **4.** B **5.** B **6.** D **7.** B **8.** B

9. B **点拨**:由折叠的性质得

$\angle DMC=\angle EMC$,

$\angle AMP=\angle EMP$,

$\therefore \angle EMP+\angle EMC=\frac{1}{2}\times180^\circ=90^\circ$.

$\therefore \triangle CMP$ 是直角三角形,故①正确.由折叠的性质得

$\angle MEC=\angle D=90^\circ$,

$\angle MEG=\angle A=90^\circ$,

$\therefore \angle GEC=180^\circ$.

$\therefore$ 点 C,E,G 在同一条直线上,故②错误.

设 $AB=x$,则 $AD=2\sqrt{2}x$,

$\therefore DM=\frac{1}{2}AD=\sqrt{2}x$.

$\therefore CM=\sqrt{DM^2+CD^2}=\sqrt{3}x$.

$\because \angle PMC=90^\circ$,$MN\perp PC$,

$\therefore CM^2=CN\cdot CP$.

$\therefore CP=\frac{3x^2}{\sqrt{2}x}=\frac{3\sqrt{2}}{2}x$.

$\therefore PN=CP-CN=\frac{\sqrt{2}}{2}x$.

$\therefore MP=\sqrt{MN^2+PN^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}x$.

$\therefore \frac{PC}{MP}=\frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}x}{\frac{\sqrt{6}}{2}x}=\sqrt{3}$.

$\therefore PC=\sqrt{3}MP$,故③错误.

$\because BP=BC-PC=\frac{\sqrt{2}}{2}x$,

$\therefore \frac{BP}{AB}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}x}{x}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\therefore BP=\frac{\sqrt{2}}{2}AB$,故④正确.

$\because CE=CD$,$EG=AB$,$AB=CD$,

$\therefore CE=EG$.

$\because \angle CEM=\angle G=90^\circ$,

$\therefore FE//PG$. $\therefore CF=PF$.

$\because \angle PMC=90^\circ$,

$\therefore CF=PF=MF$.

$\therefore$ 点 F 是 $\triangle CMP$ 外接圆的圆心,故⑤正确.

10. C **点拨**:由题意可得,存在两种情况,当 $\triangle ABC$ 为钝角三角形时,如图中的 $\triangle A_1BC$,

$\because$ 点 O 是等腰三角形 A_1BC 的外心,且 $\angle BOC=60^\circ$,底边 $BC=2$,$OB=OC$,

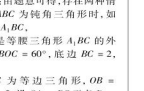
$\therefore \triangle OBC$ 为等边三角形,$OB=OC=BC=2$. 设 $OA_1\perp BC$ 于点 D,

$\therefore CD=1$,

$\therefore OD=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$.

$\therefore S_{\triangle A_1BC}=\frac{BC\cdot A_1D}{2}=\frac{2\times(2-\sqrt{3})}{2}=2-\sqrt{3}$.

当 $\triangle ABC$ 为锐角三角形时,如图中的 $\triangle A_2BC$,



(第 10 题)

$\because$ 点 O 是等腰三角形 A_2BC 的外心,且 $\angle BOC=60^\circ$,底边 $BC=2$,$OB=OC$,

$\therefore \triangle OBC$ 为等边三角形,$OB=OC=BC=2$. 设 $OA_2\perp BC$ 于点 D,

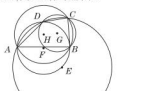
$\therefore CD=1$,

$\therefore OD=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$.

$\therefore S_{\triangle A_2BC}=\frac{BC\cdot A_2D}{2}=\frac{2\times(2+\sqrt{3})}{2}=2+\sqrt{3}$.

$\therefore \triangle ABC$ 的面积为 $2-\sqrt{3}$ 或 $2+\sqrt{3}$.故选 C.

11. 解:一共能画出四个圆,其中,过点 A,C,D 的是 $\odot E$,过点 A,B,D 的是 $\odot F$,过点 B,C,D 的是 $\odot G$,过点 A,B,C 的是 $\odot H$,如图所示.



(第 11 题)

12. 解:(1)如图所示,$\odot O$ 即为所求的 $\triangle ABC$ 的外接圆.



(第 12 题)

(2)如图,连接 AO,BO,

$\because AB=AC=6$ cm,$\angle BAC=120^\circ$,

$\therefore \angle BAO=\angle CAO=60^\circ$,

$\because AO=BO$,$\therefore \triangle ABO$ 是等边三角形,

$\therefore AB=AO=6$ cm,

即 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 6 cm.

13. 证明:(1)$\because AB=AC$,

$\therefore \angle B=\angle ACB$.

$\because AE//BC$,

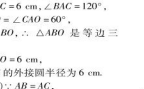
$\therefore \angle EAC=\angle ACB$.

$\therefore \angle B=\angle EAC$.

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CAE$ 中,$\begin{cases}AB=CA,\\ \angle B=\angle EAC,\\ BD=AE,\end{cases}$

$\therefore \triangle ABD\cong\triangle CAE$(SAS).

$\therefore AD=CE$.



(第 13 题)

(2)如图,过 A 作 $AH\perp BC$,垂足为 H.

在 Rt$\triangle ABH$ 和 Rt$\triangle ACH$ 中,

$\because AB=AC$,$AH=AH$,

$\therefore$ Rt$\triangle ABH\cong$Rt$\triangle ACH$.

$\therefore BH=CH$.

同理可得 $BH=GH$.

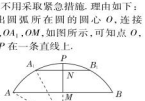
$\therefore BH-DH=CH-GH$,即 $BD=CG$.

$\because BD=AE$,$\therefore CG=AE$.

又$\because CG//AE$,

$\therefore$ 四边形 $AGCE$ 是平行四边形.

14. 解:不用采取紧急措施.理由如下:作出圆弧所在圆的圆心 O,连接 OA,OA_1,OM,如图所示,可知点 O,M,P 在一条直线上.



(第 14 题)

$AB=60$ m,$PM=18$ m,$PN=4$ m,

$OA=OA_1=OP+OP\perp AB$,$OP\perp A_1B_1$.

由圆的对称性可得:$AM=MB=30$ m.在 Rt$\triangle AMO$ 中,由勾股定理可得:

$AO^2=AM^2+MO^2$,即 $AO^2=30^2+(AO-18)^2$,

$\therefore AO=34$ m.

$\because PN=4$ m,$OP=AO=34$ m,

$\therefore ON=30$ m.

在 Rt$\triangle ONA_1$ 中,由勾股定理可得:

$A_1N^2=A_1O^2-ON^2$,

可得 $A_1N=16$ m,

故 $A_1B_1=32$ m>30 m,故不用采取紧急措施.

28.3 圆心角和圆周角

第 1 课时 圆心角、弦、弧的关系

1. D **2.** C **3.** C **4.** D **5.** C **6.** D **7.** D **8.** A

9. B **点拨**:$\because AB//CD$,$\angle BAC=52^\circ$,

$\therefore \angle C=52^\circ$.

$\because OC=OD$,

$\therefore \angle D=\angle C=52^\circ$,

$\therefore \angle AOD=104^\circ$.

又$\because E$ 是 $\overset{\frown}{AD}$ 的中点,

$\therefore \overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{DE}$,

$\therefore \angle AOE=\angle DOE=52^\circ$.

10. 错解:A 或 B

正解:C

误区诊断:对于"在同圆或等圆中,如果两个圆心角、两条弧、两条弦、两个弦心距中有一组量相等,那么它们所对应的其余各组量都相等"这一性质中反映的各组量之间的关系判断不准,从而导致错误.

11. 解:(1)相等.理由如下:

$\because AOB=\angle COD$,$\therefore AB=CD$.

$\because OE\perp AB$,$OF\perp CD$,$OA=OB$,$OC=OD$,

$\therefore AE=\frac{1}{2}AB$,$CF=\frac{1}{2}CD$,

$\therefore AE=CF$.

又$\because OA=OC$,

$\therefore$ Rt$\triangle AOE\cong$Rt$\triangle COF$(HL),

$\therefore OE=OF$.

(2)$AB=CD$,$\angle AOB=\angle COD$,

$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$.

理由:$\because OE\perp AB$,$OF\perp CD$,

$\therefore \angle AEO=\angle CFO=90^\circ$.

在 Rt$\triangle AOE$ 和 Rt$\triangle COF$ 中,$OE=OF$,$OA=OC$,

$\therefore$ Rt$\triangle AOE\cong$Rt$\triangle COF$(HL).

$\therefore AE=CF$.

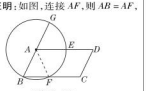
$\because OA=OB$,$OC=OD$,$OE\perp AB$,$OF\perp CD$,

$\therefore AE=\frac{1}{2}AB$,$CF=\frac{1}{2}CD$,

$\therefore AB=CD$,

$\therefore \angle AOB=\angle COD$,$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$.

12. (1)**证明**:如图,连接 AF,则 $AB=AF$,



(第 12 题)

$\therefore \angle ABF=\angle AFB$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AD//BC$.

$\therefore \angle EAF=\angle AFB$,$\angle GAE=\angle ABF$.

$\therefore \angle GAE=\angle EAF$.

$\therefore \overset{\frown}{GE}=\overset{\frown}{EF}$.

(2)**解**:$\because \overset{\frown}{BF}$ 的度数为 50°,

$\therefore \angle BAF=50^\circ$.

$\therefore \angle ABF=\angle AFB=65^\circ$.

又$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AB//CD$,

$\therefore \angle ABF+\angle C=180^\circ$.

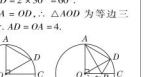
$\therefore \angle C=180^\circ-\angle ABF=115^\circ$.

解题策略:在同圆中,圆心角、弧、弦之间的关系是证弧相等、角相等、线段相等的依据,一般在分析时,哪一组量与所证同题最贴近,就应构造那一组量,再证明相等.

13. 解:(1)30°

(2)如图①所示,易知 $\angle AOD=2\angle COD=2\times30^\circ=60^\circ$.

又$\because OA=OD$,$\therefore \triangle AOD$ 为等边三角形,$\therefore AD=OA=4$.



(第 13 题)

(3)如图②,延长 AO 交 $\odot O$ 于点 B,连接 BD 交 OC 于点 P,此时 $AP+PD$ 的值最小.

理由如下:$\because OA\perp OC$,$OA=OB$,

$\therefore PA=PB$.

$\therefore PA+PD=PB+PD$.

$\because$ 两点之间,线段最短,

$\therefore AP+PD$ 的最小值为 BD 的长.

如图②,过点 O 作 $OH\perp BD$ 于 H.由(2)知 $\angle AOD=60^\circ$.

$\because OD=OB$,

$\therefore \angle B=\angle ODB=\frac{1}{2}\angle AOD=30^\circ$.

在 Rt$\triangle OBH$ 中,$\because OB=4$,

$\therefore OH=\frac{1}{2}OB=2$.

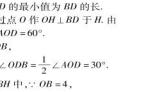
$\therefore BH=\sqrt{OB^2-OH^2}=2\sqrt{3}$.

$\because OH\perp BD$,

$\therefore BH=DH$,

$\therefore BD=2BH=4\sqrt{3}$,即 $AP+PD$ 的最小值为 $4\sqrt{3}$.

14. (1)**证明**:如图,连接 BD,CD.



(第 14 题)

$\because AB=AC$,$\therefore \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$.

$\because AD$ 是 $\odot O$ 的直径,

$\therefore \overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{CD}$,

$\therefore BD=CD$.

又$\because AD=AD$,

$\therefore \triangle ABD\cong\triangle ACD$,

$\therefore BAD=\angle CAD$.

$\therefore$ 直径 AD 平分 $\angle BAC$.

(2)**解**:如图,连接 BO,CO,GO,FO.

由(1)可知 $AD\perp BC$,

又$\because$ 点 E 是 OA 的中点,

$\therefore BA=BO=AC=OC=OA$,

$\therefore \angle BOA=\angle AOC=60^\circ$.

$\because \overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{CD}$,

$\therefore \angle BOD=\angle COD=180^\circ-\angle AOC=120^\circ$.

又$\because F$ 是 $\overset{\frown}{CD}$ 的中点,

$\therefore \angle COF=\angle FOD=\frac{1}{2}\angle COD=60^\circ$,

$\therefore \angle BOF=180^\circ$,

$\therefore BF$ 是 $\odot O$ 的直径.

又$\because$ 点 G 是 $\overset{\frown}{BF}$ 的中点,

$\therefore \angle FOG=90^\circ$.

$\because \odot O$ 的半径是 1,

$\therefore GF=\sqrt{2}OF=\sqrt{2}$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

第 2 课时　圆周角和圆心角、弧的关系

1. C

2. 4；$\angle C$ 与 $\angle D_1$；$\angle A$ 与 $\angle B$

3. B　**4**. B

5. B　**点拨**：∵ $\angle BOC = 40°$，

∴ $\angle AOC = 180° - 40° = 140°$，

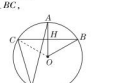
∴ $\angle D = \frac{1}{2} \times (360° - 140°) = 110°$，

故选 B.

6. A　**7**. D　**8**. D　**9**. B

10. D　**点拨**：如图，设 BC 交 OA 于点 H，连接 OC，则 $OB = OC$.

∵ $OA \perp BC$，



（第 10 题）

∴ $CH = BH$，$\angle COA = \angle AOB$，

∴ $\angle AOB = \angle AOC = 2\angle CDA = 60°$，

∴ $\angle B = 30°$，

∴ $OH = \frac{1}{2}OB = \frac{1}{2} \times 2 = 1$，

∴ $BH = \sqrt{OB^2 - OH^2} = \sqrt{3}$，

∴ $BC = 2BH = 2\sqrt{3}$，

故选 D.

11. A　**点拨**：∵ 直径 AB 垂直于弦 CD，

∴ $CE = DE$.

∵ $\angle A = 22.5°$，∴ $\angle COE = 45°$.

∴ $\angle OCE = 45° = \angle COE$.

∴ $CE = OE$.

∵ $OC = 6$，

∴ 由勾股定理得 $CE = 3\sqrt{2}$，

∴ $CD = 6\sqrt{2}$，故选 A.

本题容易忽视勾股定理的应用而致错.

12. **证明**：连接 AC，因为圆周角 $\angle BAC$ 与圆心角 $\angle BOC$ 同是 $\overset{\frown}{BC}$ 所对的角，所以 $\angle BOC = 2\angle BAC$. 因为圆周角 $\angle ACD$ 与圆心角 $\angle AOD$ 同是 $\overset{\frown}{AD}$ 所对的角，所以 $\angle AOD = 2\angle ACD$.

在 Rt△ACE 中，$\angle BAC + \angle ACD = 90°$，

所以 $\angle BOC + \angle AOD = 2\angle BAC + 2\angle ACD = 2(\angle BAC + \angle ACD) = 2 \times 90° = 180°$.

点拨：利用圆周角定理可使问题转化，如本题中，利用圆周角定理，可把证明“$\angle BOC + \angle AOD = 180°$”转化为证明“$\angle BAC + \angle ACD = 90°$”，而证明后者，利用“直角三角形的两锐角互余”即可轻松解决.

13. **证明**：(1) ∵ $AB = CD$，

∴ $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$，即 $\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{AC}$.

∴ $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC}$.

(2) ∵ $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC}$，

∴ $AD = BC$.

∵ $\angle ADE = \angle CBE$，$\angle DAE = \angle BCE$，

∴ △ADE≌△CBE（ASA）.

∴ $AE = CE$.

14. (1) **解**：∵ $BC = DC$，

∴ $\angle CBD = \angle CDB = 39°$.

∴ $\angle BAC = \angle CDB = 39°$，$\angle CAD = \angle CBD = 39°$.

∴ $\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD = 39° + 39° = 78°$.

(2) **证明**：∵ $EC = BC$，

∴ $\angle CEB = \angle CBE$.

而 $\angle CEB = \angle 2 + \angle BAE$，$\angle CBE = \angle 1 + \angle CBD$，

∴ $\angle 2 + \angle BAE = \angle 1 + \angle CBD$.

∵ $\angle BAE = \angle BDC = \angle CBD$，

∴ $\angle 1 = \angle 2$.

15. **解**：(1) 等边三角形

(2) $PA + PB = PC$.

理由：如图①，在 PC 上截取 $PD = PA$，连接 AD.

∵ $\angle APC = 60°$，

∴ △PAD 是等边三角形.

∴ $PA = AD$，$\angle PAD = 60°$.

∵ $\angle BAC = 60°$，

∴ $\angle PAD = \angle BAC$.

∴ $\angle PAB = \angle DAC$.

又∵ △ABC 是等边三角形，

∴ $AB = AC$，

∴ △PAB≌△DAC，

∴ $PB = DC$.

∵ $PD + DC = PC$，

∴ $PA + PB = PC$.

(3) 当点 P 为 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点时，四边形 $APBC$ 的面积最大.

如图②，过点 P 作 $PE \perp AB$，垂足为 E，过点 C 作 $CF \perp AB$，垂足为 F.

∵ △ABC 是等边三角形，

∴ 点 F 为 AB 的中点，且 CF 过圆心 O.

∵ $S_{△PAB} = \frac{1}{2}AB \cdot PE$，$S_{△ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CF$，

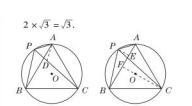
∴ $S_{四边形APBC} = \frac{1}{2}AB \cdot (PE + CF)$.

当点 P 为 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点时，点 E 与点 F 重合，$PE + CF = PC$，PC 为 ⊙O 的直径.

∴ 此时四边形 $APBC$ 的面积最大.

易求得 $AB = \sqrt{3}$，

∴ 四边形 $APBC$ 的最大面积为 $\frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$.



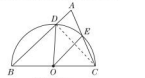
①　②

（第 15 题）

第 3 课时　圆周角和直径的关系

1. D　**2**. C

3. C　**点拨**：如图，连接 CD. 由圆周角定理的推论得出 $\angle BDC = 90°$，求出 $\angle ACD = 90° - \angle A = 20°$，再由圆周角定理得出 $\angle DOE = 2\angle ACD = 40°$.

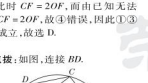


（第 3 题）

4. D　**点拨**：∵ AB 是 ⊙O 的直径，∴ $\angle ADB = 90°$，即 $AD \perp BD$，因此①正确；∵ $\angle AOC = 2\angle ABC$，$\angle AEC = \angle ABC + \angle BAD$，若 $\angle AOC = \angle AEC$，则 $\angle BAD = \angle ABC$，则 $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$，而由已知无法推出 $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$，因此②错误；∵ $OC // BD$，$AO = BO$，∴ $AF = DF$，∴ $BD = 2OF$，因此③正确；若△CEF≌△BED 成立，则 $CF = BD$，此时 $CF = 2OF$，而由已知无法推出 $CF = 2OF$，故④错误，因此①③一定成立，故选 D.

5. A

6. C　**点拨**：如图，连接 BD.



（第 6 题）

∵ AB 为直径，

∴ $\angle ADB = \angle ACB = 90°$.

∵ $AD = CD$，

∴ $\angle DAC = \angle DCA$.

又∵ $\angle DCA = \angle ABD$，

∴ $\angle DAC = \angle ABD$.

∵ $DE \perp AB$，

∴ $\angle ABD + \angle BDE = 90°$.

又∵ $\angle ADE + \angle BDE = 90°$，

∴ $\angle ABD = \angle ADE$.

∴ $\angle ADE = \angle DAC$.

∴ $FA = FD = 5$.

在 Rt△AEF 中，

∵ $\sin\angle FAE = \frac{EF}{AF} = \frac{3}{5}$，

∴ $EF = 3$.

∴ $AE = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$，$DE = 5 + 3 = 8$.

∵ $\angle ADE = \angle DBE$，$\angle AED = \angle DEB$，

∴ △ADE∽△DBE.

∴ $DE : BE = AE : DE$，

即 $8 : BE = 4 : 8$.

∴ $BE = 16$.

∴ $AB = 4 + 16 = 20$.

在 Rt△ABC 中，

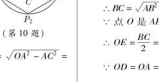
∵ $\sin\angle CAB = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{5}$，

∴ $BC = 20 \times \frac{3}{5} = 12$.

7. D　**8**. B　**9**. D

10. **60°或 120°**

点拨：如图，当点 $P(P_1)$ 在劣弧 AB 所对的优弧上时，过点 O 作 $OC \perp AB$ 于点 C，连接 OA，OB. 易得 $AC = 2\sqrt{3}$.



（第 10 题）

在 Rt△OAC 中，$OC = \sqrt{OA^2 - AC^2} = 2 = \frac{1}{2}OA$，

所以 $\angle OAC = 30°$.

所以 $\angle AOB = 120°$.

所以 $\angle AP_1B = 60°$.

当点 $P(P_2)$ 在弦 AB 所对的劣弧上时，易得 $\angle AP_2B = 120°$.

误区诊断：对于“图形不明确型”问题，在解答时一般要进行分类讨论. 一条弦（非直径）所对的圆周角有两种情况：顶点在优弧上的圆周角和顶点在劣弧上的圆周角，解题时要分情况求解，否则容易漏解. 例如本题应分两种情况：点 P 在弦 AB 所对的优弧上和点 P 在弦 AB 所对的劣弧上.

11. **解**：(1) 如图，连接 AD，

∵ AD 为直径，

∴ $\angle ADB = \angle AEB = 90°$，

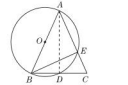
∴ 易得 $\angle CBE = \angle CAD$.

∵ $\angle ADB = 90°$，∴ $AD \perp BC$.

∵ $AB = AC$，

∴ $\angle BAD = \angle CAD = \angle CBE$，

∴ $\angle CBE = \frac{1}{2}\angle BAC$.



（第 11 题）

(2) 由 (1) 易知 $BD = CD$，

∴ $BC = 4\sqrt{5}$.

∵ $CE = 4$，

∴ $BE = \sqrt{BC^2 - CE^2} = 8$.

设 $AE = x$，则 $AB = AC = x + 4$，

在 Rt△ABE 中，$(x+4)^2 = x^2 + 8^2$，

∴ $x = 6$，∴ $AB = 10$，

∴ ⊙O 的半径为 5.

12. **解**：(1) ∵ $OD // BC$，

∴ $\angle DOA = \angle B = 70°$.

又∵ $OA = OD$，

∴ $\angle DAO = \angle ADO = \frac{1}{2} \times (180° - 70°) = 55°$.

∵ AB 是半圆 O 的直径，

∴ $\angle ACB = 90°$.

∴ $\angle CAB = 90° - \angle B = 20°$.

∴ $\angle CAD = 55° - 20° = 35°$.

(2) ∵ 在 Rt△ACB 中，$AB = 4$，$AC = 3$，

∴ $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$.

∵ 点 O 是 AB 的中点，$OD // BC$，

∴ $OE = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

∵ $OD = OA = \frac{1}{2}AB = 2$，

∴ $DE = OD - OE = 2 - \frac{\sqrt{7}}{2}$.

13. (1) **证明**：如图，连接 FA.



第 13 题微课

∵ $\angle FEB = 90°$，

∵ $EF \perp AB$，$\angle FEA = 90°$，

∵ $BE = AE$，∴ $BF = AF$.

∵ $\angle FEA = 90°$，∴ AF 是 ⊙O 的直径.

∴ $AF = DE$，∴ $BF = ED$.

∵ DE 是 ⊙O 的直径，

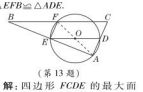
∴ $\angle EAD = 90°$.

在 Rt△EFB 和 Rt△ADE 中，

$\begin{cases} BE = AE, \\ BF = DE, \end{cases}$

∴ Rt△EFB≌Rt△ADE，

即△EFB≌△ADE.



（第 13 题）

(2) **解**：四边形 $FCDE$ 的最大面积 $= 4 \times 2 = 8$.

14. (1) **证明**：如图，连接 AE.



（第 14 题）

∵ $\angle BAC = 90°$，

∵ CF 是 ⊙O 的直径.

∵ $AC = EC$，∴ $CF \perp AE$.

∵ AD 是 ⊙O 的直径，

∴ $\angle AED = \angle ACD = 90°$，

即 $DG \perp AE$. ∴ $CF // DG$.

∵ $\angle BAC + \angle ACD = 180°$，

∴ $AB // CD$.

∴ 四边形 $DCFG$ 是平行四边形.

(2) **解**：由 (1) 知 $CD // AB$，

设 $CD = 3x$，$AB = 8x$.

∵ 四边形 $DCFG$ 是平行四边形，

∴ $FG = CD = 3x$. ∵ $\angle AOF = \angle COD$，

∴ $AF = CD = 3x$.

∴ $BC = 8x - 3x - 3x = 2x$.

∵ $EG // CF$，∴ $\frac{BE}{EC} = \frac{BG}{GF} = \frac{2}{3}$.

∵ $BE = 4$，∴ $AC = EC = 6$.

∴ $BC = 6 + 4 = 10$.

∴ $AB = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 = 8x$.

∴ $x = 1$.

在 Rt△ACF 中，$AF = 3$，$AC = 6$，

∴ $CF = \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5}$，

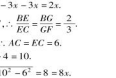
即 ⊙O 的直径长为 $3\sqrt{5}$.

第 4 课时　圆内接四边形

1. B　**2**. A　**3**. C　**4**. D　**5**. A　**6**. B

7. B

8. D　**点拨**：如图，连接 AC.



（第 8 题）

∵ BA 平分 $\angle DBE$，∴ $\angle 1 = \angle 2$.

∵ $\angle 1 = \angle CDA$，$\angle 2 = \angle 3$，

∴ $\angle 3 = \angle CDA$.

∴ $AC = AD = 5$. ∵ $AE \perp CB$，

∴ $\angle AEC = 90°$.

∴ $AE = \sqrt{AC^2 - CE^2} = \sqrt{5^2 - (\sqrt{13})^2} = 2\sqrt{3}$.

9. C　**10**. C　**11**. C

12. D　**点拨**：点 B 可能在弦 AC 所对的优弧上，也可能在弦 AC 所对的劣弧上. 本题没有给出图形，其易错之处在于画图时考虑不全而漏解.

13. **解**：连接 AB. 由圆内接四边形 $AOMB$ 为 ⊙C 的内接四边形，

∴ $\angle BAO = 180° - \angle BMO = 180° - 120° = 60°$.

∴ $\angle ABO = 90° - \angle BAO = 90° - 60° = 30°$.

在 Rt△ABO 中，易知 $OA = 3$，∴ $AB = 2OA = 6$. ∵ $\angle AOB = 90°$，∴ AB 为 ⊙O 的直径.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore AC=BC=3$.

易知 $OB=\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3}$.

$\therefore \odot C$ 的半径为 3，点 B 的坐标是 $(-3\sqrt{3},0)$.

14. 证明：(1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$，

$\therefore \angle ADC=180^\circ-\angle B=130^\circ$.

$\because \angle ACD=25^\circ$，

$\therefore \angle DAC=180^\circ-\angle ADC-\angle ACD=180^\circ-130^\circ-25^\circ=25^\circ$.

$\therefore \angle DAC=\angle ACD$.

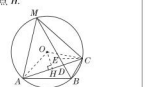
$\therefore AD=CD$.

(2) $\because \angle BAC=\angle BAD-\angle DAC=65^\circ-25^\circ=40^\circ$，$\angle B=50^\circ$，

$\therefore \angle ACB=180^\circ-\angle B-\angle BAC=180^\circ-50^\circ-40^\circ=90^\circ$.

$\therefore AB$ 是 $\odot O$ 的直径.

15. (1) **解：**如图，连接 OA，OC，作 $OH\perp AC$ 于点 H.



(第 15 题)

$\because \angle ABC=120^\circ$，

$\therefore \angle AMC=180^\circ-\angle ABC=60^\circ$.

$\therefore \angle AOC=2\angle AMC=120^\circ$.

$\therefore \angle AOH=\frac{1}{2}\angle AOC=60^\circ$.

$\because AH=\frac{1}{2}AC=\sqrt{3}$，

$\therefore OA=\frac{AH}{\sin 60^\circ}=2$，

即 $\odot O$ 半径的长为 2.

(2) **证明：**如图，在 BM 上截取 $BE=BC$，连接 CE.

$\because BM$ 平分 $\angle ABC$，$\angle ABC=120^\circ$，

$\therefore \angle MBC=\frac{1}{2}\angle ABC=60^\circ$.

又 $\because BE=BC$，

$\therefore \triangle EBC$ 是等边三角形.

$\therefore CE=CB=BE$，$\angle CEB=60^\circ$.

$\therefore \angle MEC=180^\circ-\angle CEB=120^\circ$.

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle MEC$ 中，

$\begin{cases}\angle ABC=\angle MEC=120^\circ,\\ \angle BAC=\angle EMC,\\ CB=CE,\end{cases}$

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle MEC$(AAS).

$\therefore AB=ME$. $\because ME+EB=BM$，

$\therefore AB+BC=BM$.

16. 证明：(1) $\because$ 在 Rt$\triangle ABC$ 中，点 M 是 AC 的中点，

$\therefore MA=MB$，$\therefore \angle A=\angle MBA$.

连接 DE，则四边形 $ABED$ 是 $\odot O$ 的内接四边形，

$\therefore \angle MDE=\angle MBA$，$\angle MED=\angle A$，

$\therefore \angle MDE=\angle MED$，$\therefore MD=ME$.

(2) $\because \angle C=30^\circ$，$\angle ABC=90^\circ$，

$\therefore \angle A=60^\circ$，$\therefore \angle ABM=60^\circ$.

$\because OB=OE$，$\therefore \triangle OBE$ 为等边三角形，

$\therefore \angle BOE=60^\circ$，$\therefore \angle BOE=\angle A$，

$\therefore OE/\!/AC$，同理可得 $OD/\!/BM$，

$\therefore$ 四边形 $ODME$ 为平行四边形，

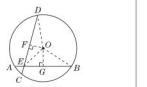
而 $OD=OE$，

$\therefore$ 四边形 $ODME$ 是菱形.

28.4 垂径定理*

1. B　**2.** A　**3.** B

4. C　**点拨：**如图，过点 O 作 $OF\perp CD$ 于点 F，$OG\perp AB$ 于点 G，连接 OB，OD，OE.



(第 4 题)

则 $CF=DF$，$AG=BG=\frac{1}{2}AB=3$，

$\therefore EG=AG-AE=3-1=2$.

在 Rt$\triangle BOG$ 中，$OG=\sqrt{OB^2-BG^2}=\sqrt{13-9}=2$，

$\therefore EG=OG$.

$\therefore \angle OEG=45^\circ$，$OE=\sqrt{2}OG=2\sqrt{2}$.

$\therefore \angle DEB=75^\circ$，$\therefore \angle OEF=30^\circ$.

$\therefore OF=\frac{1}{2}OE=\sqrt{2}$.

在 Rt$\triangle ODF$ 中，$DF=\sqrt{OD^2-OF^2}=\sqrt{13-2}=\sqrt{11}$，

$\therefore CD=2DF=2\sqrt{11}$.

5. D　**6.** $\frac{7}{2}$　**7.** A　**8.** C

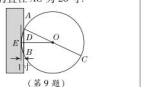
9. 26　**点拨：**如图，设 $\odot O$ 的半径为 r 寸.

在 Rt$\triangle ADO$ 中，$AD=\frac{1}{2}AB=5$ 寸，$OD=OE-DE=(r-1)$ 寸，$OA=r$ 寸，

则有 $r^2=5^2+(r-1)^2$，

解得 $r=13$.

$\therefore \odot O$ 的直径 AC 为 26 寸.



(第 9 题)

10. C　**点拨：**如图，连接 AO，

$\because \odot O$ 的直径 $CD=10$ cm，

$\therefore OA=OD=OC=5$ cm.

$\because AB\perp CD$，$AB=8$ cm，

$\therefore AM=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 8=4$(cm).

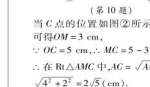
当 C 点的位置如图①所示时，

$\because OA=5$ cm，$AM=4$ cm，$CD\perp AB$，

$\therefore OM=\sqrt{OA^2-AM^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$(cm)，

$\therefore CM=OC+OM=5+3=8$(cm)，

$\therefore AC=\sqrt{AM^2+CM^2}=\sqrt{4^2+8^2}=4\sqrt{5}$(cm)；



① ②

(第 10 题)

当 C 点的位置如图②所示时，同理可得 $OM=3$ cm，

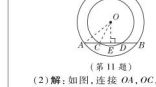
$\because OC=5$ cm，$\therefore MC=5-3=2$(cm)，

$\therefore$ 在 Rt$\triangle AMC$ 中，$AC=\sqrt{AM^2+MC^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$(cm).

11. (1) **证明：**如图，过点 O 作 $OE\perp AB$ 于点 E，则 $CE=DE$，$AE=BE$.

$\therefore AE-CE=BE-DE$，

即 $AC=BD$.



(第 11 题)

(2) **解：**如图，连接 OA，OC，由(1)可知，$OE\perp AB$，

$\because$ 圆心 O 到直线 AB 的距离为 6，

$\therefore OE=6$.

$\because CE=\sqrt{OC^2-OE^2}=\sqrt{8^2-6^2}=2\sqrt{7}$，$AE=\sqrt{OA^2-OE^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$.

$\therefore AC=AE-CE=8-2\sqrt{7}$.

12. 解：(1) 如图，连接 OB.



(第 12 题)

$\because OD$ 过圆心，且 D 是弦 BC 的中点，

$\therefore OD\perp BC$，$BD=\frac{1}{2}BC=6$.

在 Rt$\triangle BOD$ 中，由勾股定理得 $OD^2+BD^2=BO^2$，

$\therefore OD^2+6^2=8^2$，$\therefore OD=2\sqrt{7}$.

(2) 设 $BE=x$，则 $EO=\sqrt{2}x$，$ED=6-x$. 在 Rt$\triangle EOD$ 中，由勾股定理得 $OD^2+ED^2=EO^2$，

$\therefore (2\sqrt{7})^2+(6-x)^2=(\sqrt{2}x)^2$.

解得 $x_1=-16$(舍去)，$x_2=4$.

$\therefore ED=2$.

13. (1) **证明：**$\because$ 点 C 是 $\overset{\frown}{BD}$ 的中点，

$\therefore \overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{BC}$.

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径，且 $CF\perp AB$，

$\therefore \overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BF}$，$\therefore \overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{BF}$，

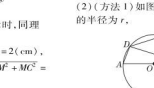
$\therefore CD=BF$.

在 $\triangle BFG$ 和 $\triangle CDG$ 中，

$\begin{cases}\angle BFG=\angle CDG,\\ \angle FGB=\angle DGC,\\ BF=CD,\end{cases}$

$\therefore \triangle BFG\cong\triangle CDG$(AAS)；

(2) (方法 1) 如图，连接 OF，设 $\odot O$ 的半径为 r，



(第 13 题)

在 Rt$\triangle ADB$ 中，$BD^2=AB^2-AD^2$，

即 $BD^2=(2r)^2-2^2$，

在 Rt$\triangle OEF$ 中，$OF^2=OE^2+EF^2$，

即 $EF^2=r^2-(r-2)^2$.

$\because \overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BF}$，

$\therefore \overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{CF}$，$\therefore BD=CF$，

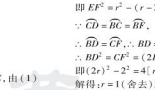
$\therefore BD^2=CF^2=(2EF)^2=4EF^2$，

即 $(2r)^2-2^2=4[r^2-(r-2)^2]$，

解得 $r=1$(舍去)或 $r=3$，

$\therefore BE^2=EF^2+BE^2=3^2-(3-2)^2+2^2=12$，$\therefore BE=2\sqrt{3}$.

(方法 2) 如图，连接 OC，交 BD 于 H，



(第 13 题)

$\because C$ 是 $\overset{\frown}{BD}$ 的中点，

$\therefore OC\perp BD$，$\therefore DH=BH$.

$\because OA=OB$，$\therefore OH=\frac{1}{2}AD=1$.

$\because \angle COE=\angle BOH$，$\angle OEC=\angle OHB=90^\circ$，$OC=OB$，

$\therefore \triangle COE\cong\triangle BOH$(AAS)，

$\therefore OH=OE=1$，

$\therefore CE=EF=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$，

$\therefore BF=\sqrt{BE^2+EF^2}=\sqrt{2^2+(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{3}$.

14. 解：(1) 如图，过点 A 作 $AD\perp ON$ 于点 D.

$\because \angle NOM=30^\circ$，$AO=80$ 米，

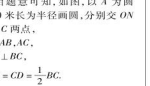
$\therefore AD=40$ 米，即对学校 A 的噪声影响最大时卡车 P 与学校 A 的距离为 40 米.

(2) 由题意可知，如图，以 A 为圆心，50 米长为半径画圆，分别交 ON 于 B，C 两点，

连接 AB，AC，

$\because AD\perp BC$，

$\therefore BD=CD=\frac{1}{2}BC$.



(第 14 题)

在 Rt$\triangle ABD$ 中，$AB=50$ 米，$AD=40$ 米，

由勾股定理得 $BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=\sqrt{50^2-40^2}=30$(米)，

$\therefore BC=2\times 30=60$(米).

$\because$ 重型运输卡车 P 的速度为 18 千米/时，

即 $\frac{18\,000}{60}=300$(米/分)，

$\therefore$ 重型运输卡车 P 经过 BC 时需要 $60\div 300=0.2$(分)$=12$(秒).

答：卡车 P 沿道路 ON 方向行驶一次给学校 A 带来噪声影响的时间为 12 秒.

阶段核心技巧

1. 解：如图，连接 OB，$\because$ 点 B，E 在 $\odot O$ 上，CD 为直径，

$\therefore OB=OE=OC$.



(第 1 题)

又 $\because AB=OC$，

$\therefore OB=AB=OE$，

$\therefore \angle A=\angle AOB$，$\angle E=\angle EBO$.

又 $\because \angle EBO=\angle A+\angle AOB$，

$\therefore \angle EBO=\angle E=2\angle A$.

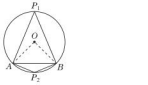
又 $\because \angle DOE=\angle A+\angle E$，

$\therefore \angle DOE=\angle A+2\angle A=72^\circ$，

$\therefore \angle A=24^\circ$.

2. 解：(1) 90°

(2) 如图，连接 OA，OB.



(第 2 题)

在 $\triangle AOB$ 中，$OA^2+OB^2=1^2+1^2=2$，$AB^2=(\sqrt{2})^2=2$，

$\therefore OA^2+OB^2=AB^2$，

$\therefore \angle AOB=90^\circ$，

当点 $P(P_1)$ 在优弧 AB 上时，

$\angle AP_1B=\frac{1}{2}\angle AOB=45^\circ$，

当点 $P(P_2)$ 在劣弧 AB 上时，

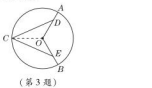
$\angle AP_2B=180^\circ-45^\circ=135^\circ$，

$\therefore \angle APB$ 的度数是 45°或 135°.

3. 证明：如图，连接 OC，

$\because$ 点 C 为优弧 AB 的中点，

$\therefore \angle AOC=\angle BOC$.



(第 3 题)

$\because AD=BE$，$OA=OB$，

$\therefore OD=OE$.

在 $\triangle COD$ 与 $\triangle COE$ 中，

$\begin{cases}OD=OE,\\ \angle DOC=\angle EOC,\\ OC=OC,\end{cases}$

$\therefore \triangle COD\cong\triangle COE$(SAS)，

$\therefore CD=CE$.

4. 解：(1) 如图，连接 OC.

$\because$ 点 A，B，C 是 $\odot O$ 的三等分点.

$\therefore \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{AC}$，

$\therefore \angle AOB=\angle BOC=\angle AOC=\frac{1}{3}\times 360^\circ=120^\circ$.

(2) 如图，过点 O 作 $OD\perp AB$ 于点 D，

则 $\angle ODB=90^\circ$，$BD=\frac{1}{2}AB$，

$\because OA=OB$，$\therefore \angle OAB=\angle OBA=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle AOB)=30^\circ$.

在 Rt$\triangle BOD$ 中，$\angle OBA=30^\circ$，

$\therefore OD=\frac{1}{2}OB=2$，

$\therefore BD=\sqrt{OB^2-OD^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$，$\therefore AB=2BD=4\sqrt{3}$.

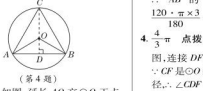
$\because OA=OB=OC$，$\angle AOB=\angle BOC=\angle AOC$，

$\therefore \triangle AOB\cong\triangle BOC\cong\triangle AOC$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore S_{\triangle OAB}=S_{\triangle OBC}=S_{\triangle OAC}$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=3S_{\triangle OAB}=3\times\frac{1}{2}\cdot AB\cdot OD=\frac{3}{2}\times4\sqrt{3}\times2=12\sqrt{3}$.



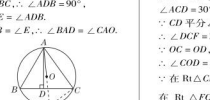
（第4题）

5.（1）**证明**：如图，延长 AO 交 $\odot O$ 于点 E，连接 CE，∴ $\angle ACE=90°$.

∵ $AD\perp BC$，∴ $\angle ADB=90°$，

∴ $\angle ACE=\angle ADB$.

又∵ $\angle B=\angle E$，∴ $\angle BAD=\angle CAO$.



（第5题）

（2）**解**：∵ $\angle E=\angle B=60°$，$\angle ACE=90°$，

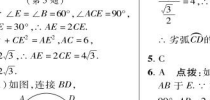
∴ $\angle CAE=30°$，∴ $AE=2CE$.

又∵ $AC^2+CE^2=AE^2$，$AC=6$，

∴ $CE=2\sqrt{3}$，∴ $AE=2CE=4\sqrt{3}$.

∴ $OA=2\sqrt{3}$.

6. **证明**：（1）如图，连接 BD，



（第6题）

∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴ $\angle BAD=\angle BCD=90°$，$AB=AD$，

∴ BD 为 $\odot O$ 的直径，

∴ $\angle BED=\angle BFD=90°$，∵ $DF\parallel BE$，∴ $\angle EBF=180°-\angle DFB=90°$，

∴ $\angle BED=\angle EBF=\angle BFD=90°$，

∴ 四边形 $EBFD$ 是矩形.

（2）如图，连接 OA，∵ $AB=AD$，$OB=OD$，∴ $AO\perp BD$，∴ $\angle AOB=\angle AOD=90°$，∴ $\angle AFD=\frac{1}{2}\angle AOD=45°$.

又∵ 四边形 $BEDF$ 是矩形，

∴ $\angle EDF=90°$，$BE=DF$，

∴ $\angle DGF=90°-\angle DFA=45°=\angle DFA$，

∴ $DG=DF$，∴ $DG=BE$.

28.5 弧长和扇形面积的计算

第1课时 弧长和扇形面积

1. C **2.** D

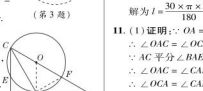
3. C **点拨**：如图，连接 OA，OB，作 $OC\perp AB$ 于 C，由题意得 $OC=\frac{1}{2}OA$，

∴ $\angle OAC=30°$.

∵ $OA=OB$，

∴ $\angle OBA=\angle OAC=30°$，∴ $\angle AOB=120°$.

∴ $\overset{\frown}{AB}$ 的长 $=\frac{120\cdot\pi\times3}{180}=2\pi$.



（第3题）

4. $\frac{4}{3}\pi$ **点拨**：如图，连接 DF，OD，∵ CF 是 $\odot O$ 的直径，∴ $\angle CDF=90°$.

∵ $\angle ADC=60°$，$\angle A=90°$，∴ $\angle ACD=30°$.

∵ CD 平分 $\angle ACB$ 交 AB 于点 D，

∴ $\angle DCF=30°$.

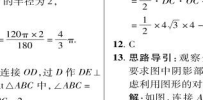
∴ $OC=OD$，∴ $\angle OCD=\angle ODC=30°$，

∴ $\angle COD=120°$.

∵ 在 Rt△CAD 中，$CD=2AD=2\sqrt{3}$，

在 Rt △FCD 中，$CF=\frac{CD}{\cos30°}=\frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=4$，∴ $\odot O$ 的半径为 2，

∴ 劣弧 $\overset{\frown}{CD}$ 的长 $=\frac{120\pi\times2}{180}=\frac{4}{3}\pi$.



（第4题）

5. C

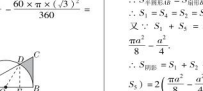
6. A **点拨**：如图，连接 OD，过 D 作 $DE\perp AB$ 于 E. ∵ 在 Rt△ABC 中，$\angle ABC=90°$，$AB=2\sqrt{3}$，$BC=2$，

∴ $\tan A=\frac{BC}{AB}=\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

∴ $\angle A=30°$，∴ $\angle DOB=60°$.

∵ $OD=\frac{1}{2}AB=\sqrt{3}$，∴ $DE=OD\cdot\sin\angle DOE=\frac{3}{2}$，∴ 阴影部分的面积是：

$\frac{2\sqrt{3}\times2}{2}-\frac{\sqrt{3}\times\frac{3}{2}}{2}-\frac{60\times\pi\times(\sqrt{3})^2}{360}=\frac{5\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{2}$.



（第6题）

7. C

8. B **9.** $\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{4}$

10. **解**：∵ $\overset{\frown}{AB}$ 所对的圆周角为 30°，

∴ $\overset{\frown}{AB}$ 所对的圆心角为 60°，

∴ $\overset{\frown}{AB}$ 的长 $l=\frac{60\times\pi\times30}{180}=10\pi$(cm).

误区诊断：在公式 $l=\frac{n\pi R}{180}$，$S_{扇形}=\frac{n\pi R^2}{360}$ 中，n° 是圆心角的度数，而题干给出的是圆周角的度数，不能直接代入公式计算，要求出圆心角的度数后再代入公式计算. 本题易错

解为 $l=\frac{30\times30\times30}{180}=5\pi$(cm).

11.（1）**证明**：∵ $OA=OC$，

∴ $\angle OAC=\angle OCA$.

∵ AC 平分 $\angle BAE$，

∴ $\angle OAC=\angle CAE$.

∴ $\angle OCA=\angle CAE$.

∴ $OC\parallel AE$，∴ $AE\perp DC$，

∴ $OC\perp DE$.

（2）**解**：∵ $AE=6$，$CD=30°$，

∴ $DO=2OC=DB+BO$，

且 $AD=2AE=12$，$\angle BOC=60°$，

∴ $OC=BO=DB=\frac{1}{3}AD=4$.


第11题图

由勾股定理，得 $DC=\sqrt{DO^2-OC^2}=\sqrt{8^2-4^2}=4\sqrt{3}$.

∴ $S_{阴影}=S_{\triangle OBC}-S_{扇形BOC}$

$=\frac{1}{2}\cdot DC\cdot OC-\frac{1}{6}\cdot\pi\cdot OC^2$

$=\frac{1}{2}\times4\sqrt{3}\times4-\frac{8}{3}\pi=8\sqrt{3}-\frac{8\pi}{3}$.

12. C

13. **思路导引**：观察分析图形的特点，要求图中阴影部分的面积，可以考虑利用图形的对称性解决问题.

解：如图，连接 AE 并延长交弧 BD 于点 F，连接 BE. 由轴对称的性质可知 $S_{弓形BAF}=S_{弓形BEF}$，$S_1=S_2=S_3$，$S_3=S_4$.

$S_{半圆BEAB}=\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{\pi a^2}{8}$，

∵ $\angle BAE=\angle DAE=45°$，

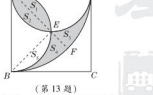
∴ $S_{扇形BAF}=\frac{45\pi a^2}{360}=\frac{\pi a^2}{8}$.

∴ $S_{半圆BEAB}=S_{扇形BAF}$，

∴ $S_1=S_4=S_2=S_3=S_4$.

又∵ $S_1+S_2=S_{半圆BEAB}-S_{\triangle ABE}=\frac{\pi a^2}{8}-\frac{a^2}{4}$，

∴ $S_{阴影}=S_1+S_2+S_3+S_4=2(S_1+S_2)=2\left(\frac{\pi a^2}{8}-\frac{a^2}{4}\right)=\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)a^2$.



（第13题）

14.（1）**证明**：∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，AB 为 $\odot O$ 的直径，∴ $\angle ABE=\angle BCG=\angle AFB=90°$，$AB=BC$，

∴ $\angle BAF+\angle ABF=90°$，$\angle ABF+\angle EBF=90°$，∴ $\angle BAF=\angle EBF$.

在 $\triangle ABF$ 与 $\triangle BCG$ 中，

$\begin{cases}\angle BAF=\angle EBF,\\ AB=BC,\\ \angle ABE=\angle BCG,\end{cases}$

∴ $\triangle ABF\cong\triangle BCG$.

（2）**解**：连接 OF，如图.

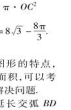
∵ $\angle ABE=90°$，$\angle AEB=55°$，

∴ $\angle BAE=90°-55°=35°$，

∴ $\angle BOF=2\angle BAE=70°$.

∵ $OA=3$，

∴ $\overset{\frown}{BF}$ 的长 $=\frac{70\cdot\pi\times3}{180}=\frac{7\pi}{6}$.



（第14题）

15. **解**：（1）∵ 四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形，

∴ $\angle ABC+\angle D=180°$.

∵ $\angle ABC=2\angle D$，

∴ $\angle D=60°$.

∴ $\angle AOC=2\angle D=120°$.

∵ $OA=OC$，

∴ $\angle OCA=\angle OAC=30°$.

（2）∵ $\angle COB=3\angle AOB$，$\angle AOC=120°$，

∴ $\angle AOC=\angle COB+\angle AOB$，

∴ $\angle AOB=30°$，

∴ $\angle COB=90°$，

在 Rt△OCE 中，$OC=2\sqrt{3}$，

设 $OE=x$，则 $CE=2x$，

∴ $x^2+(2\sqrt{3})^2=(2x)^2$，

解得 $x_1=2$，$x_2=-2$（舍去），

∴ $OE=2$.

∴ $S_{阴影}=S_{扇形BOC}-S_{\triangle OEC}=\frac{90\pi\times(2\sqrt{3})^2}{360}-\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{3}=3\pi-2\sqrt{3}$.

点拨：在求不规则图形的面积时，常常将其转化为几个规则几何图形的面积的和或差.

第2课时 圆锥的侧面积和表面积

1. A **2.** D **3.** D **4.** A **5.** A **6.** B

7. D

8. 错解：B

正解：C

误区诊断：误认为以斜边所在的直线为轴将直角三角形旋转一周所形成的几何体的表面积是两个共底面的圆锥的侧面积与一个底面积之和.

9. **解**：（1）设此圆锥的底面半径为 r cm，母线长 $AB=l$ cm.

∵ $2\pi r=\pi l$，

∴ $l=2r$，即 $r:2:1$.

∴ 圆锥的母线长与底面半径之比为 2∶1.

（2）由（1）知 $AB=AC=2BO=2CO$.

∴ $AB=AC=BC$.

∴ △ABC 是等边三角形.

∴ $\angle BAC=60°$.

（3）设 $OB=x$ cm，则 $AB=2x$ cm. 由题意得 $x^2+(3\sqrt{3})^2=(2x)^2$，

解得 $x_1=3$，$x_2=-3$（舍去）.

∴ $OB=3$ cm，$AB=6$ cm.

∴ 圆锥的侧面积为 $\frac{1}{2}\times(2\pi\times3)\times6=18\pi$(cm^2).

10. **解**：（1）∵ 在等腰 △ABC 中，$\angle BAC=120°$，

∴ $\angle B=30°$.

∵ AD 是 $\angle BAC$ 的平分线，

∴ $AD\perp BC$，$BD=CD$，

∴ $AB=2AD=12$，∴ $BD=6\sqrt{3}$，

∴ $BC=2BD=12\sqrt{3}$，

∴ 由弧 EF 及线段 FC，CB，BE 围成图形的面积 $=S_{\triangle ABC}-S_{扇形EAF}=\frac{1}{2}\times6\times12\sqrt{3}-\frac{120\cdot\pi\cdot6^2}{360}=36\sqrt{3}-12\pi$.

（2）根据题意得 $2\pi r=\frac{120\cdot\pi\cdot6}{180}$，

解得 $r=2$，

∴ 这个圆锥的高 $h=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$.

11.（1）**证明**：在正方形 $ABCD$ 中，$AB=BC=AD=2$，$\angle ABC=90°$.

∵ △BEC 绕点 B 逆时针旋转 90° 得到 △BFA，

∴ △$ABF\cong\triangle CBE$.

∴ $\angle FAB=\angle ECB$，$\angle ABF=\angle CBE=90°$，$AF=CE$.

∴ $\angle AFB+\angle FAB=90°$.

∵ 线段 FA 绕点 F 顺时针旋转 90° 得线段 FG，

∴ $\angle AFB+\angle CFG=\angle AFG=90°$.

∴ $\angle CFG=\angle FAB=\angle ECB$.

∴ $EC\parallel FG$.

∵ $AF=CE$，$AF=FG$，

∴ $EC=FG$.

∴ 四边形 $EFGC$ 是平行四边形.

∴ $EF\parallel CG$.

（2）**解**：由（1）知 △$ABF\cong\triangle CBE$，

∴ $BF=BE$.

∵ $AB=AD=2$，E 是 AB 的中点，

∴ $BF=BE=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times2=1$.

∴ $AF=\sqrt{AB^2+BF^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$.

由平行四边形的性质得，$S_{FECG}=2S_{\triangle CGF}$，∵ $S_{\triangle FEC}=S_{\triangle CGF}$，

∴ $S_{阴影}=S_{扇形ABC}+S_{\triangle ABF}+S_{\triangle FGC}-S_{扇形AFC}=\frac{90\cdot\pi\cdot2^2}{360}+\frac{1}{2}\times2\times1+\frac{1}{2}\times(1+2)\times1-\frac{90\cdot\pi\cdot(\sqrt{5})^2}{360}=\frac{5}{2}-\pi$.

12. **解**：（1）如图，连接 AO 并延长，分别交扇形 BAC、$\odot O$ 于点 E，F.

∵ BC 是 $\odot O$ 的直径，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$，

∴ $AE\perp BC$，∴ $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$，$AF\perp BC$.

当 $\odot O$ 的半径为 2 时，易得 $AC=AB=2\sqrt{2}$，

∴ $S_{阴影}=\frac{90\pi\cdot(2\sqrt{2})^2}{360}=2\pi$.

（2）不能. 理由如下：

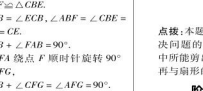
当 $\odot O$ 的半径为 $R(R>0)$ 时，易得 $AC=AB=\sqrt{2}R$.

则 阴 影 部 分 扇 形 的 弧 长 为 $\frac{90\pi\cdot\sqrt{2}R}{180}=\frac{\sqrt{2}}{2}R\pi$，$EF=2R-\sqrt{2}R$.

如图，以 EF 为直径作圆，是剩余材料③中所作的最大的圆，其圆的周长为 $(2-\sqrt{2})R\pi$.

∵ $\frac{\sqrt{2}}{2}R\pi>(2-\sqrt{2})R\pi$，

∴ 不能从第③块余料中剪出一个圆作为底面与此扇形围成一个圆锥.



（第12题）

点拨：本题的难点在于第（2）问，解决问题的关键是找到剩下的余料中所能剪出的最大圆并求其周长，再与扇形的弧长比较大小来判断.

阶段核心题型

1. 29 **2.** D **3.** A

4.（1）**证明**：∵ AD 平分 $\angle BAC$，

∴ $\angle BAD=\angle CAD$，

又∵ $\angle CAD=\angle CBD$，

∴ $\angle BAD=\angle CBD$；

（2）**解**：连接 OD，∵ $\angle AEB=125°$，

∴ $\angle AEC=55°$.

∵ AB 为 $\odot O$ 的直径，

∴ $\angle ACE=90°$，∴ $\angle CAE=35°$，

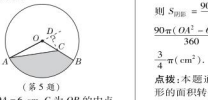
∴ $\angle DAB=35°$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

则$\overset{\frown}{BD}$所对圆心角$\angle DOB=70°$，

$\therefore \overset{\frown}{BD}$的长为$\frac{70}{180}\times\pi\times\frac{6}{2}=\frac{7}{6}\pi$.

5. 解：如图，过点 C 作 $CD\perp AO$，交 AO 的延长线于点 D.



（第 5 题）

$\because OB=OA=6$ cm，C 为 OB 的中点，

$\therefore OC=3$ cm.

$\because \angle AOB=120°$，

$\therefore \angle COD=60°$.

$\therefore \angle OCD=30°$.

在 $Rt\triangle CDO$ 中，$OD=\frac{1}{2}OC=\frac{3}{2}$ cm.

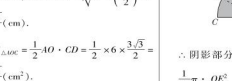
$\therefore CD=\sqrt{OC^2-OD^2}=\sqrt{3^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$（cm）.

$\therefore S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}AO\cdot CD=\frac{1}{2}\times6\times\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{2}$（cm^2）.

又 $\because S_{扇形AOB}=\frac{120\pi\cdot6^2}{360}=12\pi$（cm^2），

$\therefore S_{阴影}=S_{扇形AOB}-S_{\triangle AOC}=12\pi-\frac{9\sqrt{3}}{2}=\frac{24\pi-9\sqrt{3}}{2}$（cm^2）.

6. 解：如图，连接 OA，OB.



（第 6 题）

$\because AB//CD$，$\therefore S_{\triangle ABE}=S_{\triangle AOB}$，

$\therefore S_{阴影}=S_{扇形AOB}$.

$\because AB=\frac{1}{2}CD=AO=OB=2$ cm，

$\therefore \triangle OAB$ 是等边三角形，

$\therefore \angle AOB=60°$.

$\therefore S_{扇形AOB}=\frac{60\pi\cdot2^2}{360}=\frac{2}{3}\pi$（cm^2）.

即阴影部分的面积为$\frac{2}{3}\pi$ cm^2.

7. （1）**证明**：$\because \angle AOB=\angle COD=90°$，

即 $\angle AOC+\angle AOD=\angle BOD+\angle AOD$，

$\therefore \angle AOC=\angle BOD$.

又 $\because AO=BO$，$CO=DO$，

$\therefore \triangle AOC\cong\triangle BOD$.

$\therefore AC=BD$.

（2）**解**：由（1）知 $\triangle AOC\cong\triangle BOD$，

$\therefore$ 阴影部分的面积 = 扇形 AOB 的面积 − 扇形 COD 的面积.

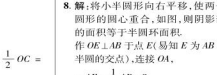
则 $S_{阴影}=\frac{90\pi\cdot OA^2}{360}-\frac{90\pi\cdot OC^2}{360}=\frac{90\pi(OA^2-OC^2)}{360}=\frac{90\pi(2^2-1^2)}{360}=\frac{3}{4}\pi$（cm^2）.

点拨：本题通过**割补法**将不规则图形的面积转化为两个规则图形的面积的差的形式.

8. 解：将小半圆形向右平移，使两个半圆形的圆心重合，如图，则阴影部分的面积等于半圆环面积.

作 $OE\perp AB$ 于点 E（易知 E 为 AB 与小半圆的交点），连接 OA，

$\therefore AE=\frac{1}{2}AB=9$.



（第 8 题）

$\therefore$ 阴影部分的面积 $=\frac{1}{2}\pi\cdot OA^2-\frac{1}{2}\pi\cdot OE^2=\frac{1}{2}\pi(OA^2-OE^2)=\frac{1}{2}\pi\cdot AE^2=\frac{1}{2}\pi\cdot9^2=\frac{81}{2}\pi$.

点拨：观察图形可知阴影部分的面积等于大半圆形的面积减去小半圆形的面积，因此当小半圆形在大半圆形盘面内左右移动时，阴影部分面积不改变，所以我们可以通过平移，使两个半圆形圆心重合，这样就能运用已知条件求出阴影部分的面积.

9. 解：（1）A 城会受到这次台风的影响. 理由如下：

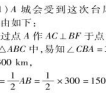
如图，过点 A 作 $AC\perp BF$ 于点 C.

在 $Rt\triangle ABC$ 中，易知 $\angle CBA=30°$，又 $BA=300$ km，

$\therefore AC=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times300=150$（km），

$\because 150<200$，

$\therefore A$ 城会受到这次台风的影响.



（第 9 题）

（2）如图，设 BF 上 D，E 两点到 A 的距离为 200 km，则台风中心在线段 DE 上时，对 A 城均有影响，而在线段 DE 以外时，对 A 城没有影响.

$\because AC=150$ km，$AD=AE=200$ km，

$\therefore DC=\sqrt{AD^2-AC^2}=\sqrt{200^2-150^2}=50\sqrt{7}$（km）.

$\therefore DE=2DC=100\sqrt{7}$ km.

$\therefore \frac{100\sqrt{7}}{10\sqrt{7}}=10$（h）.

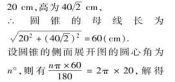
$\therefore A$ 城遭受这次台风影响的时间为 10 h.

10. C

11. 解：$\because$ 圆锥形漏斗的底面半径为 20 cm，高为 $40\sqrt{2}$ cm，

$\therefore$ 圆锥的母线长为 $\sqrt{20^2+(40\sqrt{2})^2}=60$（cm）.

设圆锥的侧面展开图的圆心角为 $n°$，则有 $\frac{n\pi\times60}{180}=2\pi\times20$，解得 $n=120$.



（第 11 题）

方案一：如图①，扇形的半径为 60 cm，矩形的宽为 60 cm，易求得矩形的长为 $60\sqrt{3}$ cm. 当 $AB=60$ cm，$BC=60\sqrt{3}$ cm 时，$S_{矩形ABCD}=3\,600\sqrt{3}$ cm^2.

方案二：如图②，扇形与矩形的两边相切，有一边重合，易求得矩形的宽为 60 cm，长为 $30+60=90$（cm），此时矩形的面积为 $90\times60=5\,400$（cm^2）.

$\because 3\,600\sqrt{3}>5\,400$，

$\therefore$ 方案二所用材料最省. 即选长为 90 cm，宽为 60 cm 的矩形铁皮，才能使所用材料最省.

全章热门考点整合应用

1. D

2. 解：$\because \angle AOC=40°$，

$\therefore \angle BOC=180°-40°=140°$.

$\because AO=CO$，

$\therefore \angle ACO=\frac{1}{2}\times(180°-40°)=70°$.

如图，连接 OD. $\because D$ 是 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点，

$\therefore \angle COD=\frac{1}{2}\angle BOC=70°$.

$\because CO=DO$，

$\therefore \angle OCD=\frac{180°-70°}{2}=55°$.

$\therefore \angle ACD=\angle ACO+\angle OCD=70°+55°=125°$.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 解：（1）$2\sqrt{3}$

（2）如图，连接 OA. $\because OA=OB$，$OA=OD$，

$\therefore \angle BAO=\angle B$，$\angle DAO=\angle D$.

$\therefore \angle BAD=\angle BAO+\angle DAO=\angle B+\angle D$.

又 $\because \angle B=30°$，$\angle D=20°$，

$\therefore \angle BAD=50°$.

$\therefore \angle BOD=2\angle BAD=100°$.

4. （1）**证明**：$\because AB$ 为半圆的直径，

$\therefore \angle AEB=90°$.

$\because AB=AC$，$\therefore CE=BE$.

又 $\because EF=AE$，

$\therefore$ 四边形 $ABFC$ 是平行四边形.

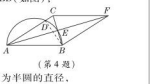
又 $\because AB=AC$，

$\therefore$ 平行四边形 $ABFC$ 是菱形.

（2）**解**：设 $CD=x$，则 $AB=AC=7+x$，

$\because CE=BE=2$，$\therefore BC=4$.

连接 BD（如图），



（第 4 题）

$\because AB$ 为半圆的直径，

$\therefore \angle ADB=90°$，

$\therefore AB^2-AD^2=CB^2-CD^2$，

$\therefore (7+x)^2-7^2=4^2-x^2$.

解得 $x=1$ 或 $x=-8$（舍去）.

$\therefore AB=AC=8$，

$\therefore BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=\sqrt{8^2-7^2}=\sqrt{15}$.

$\therefore S_{半圆形}=\frac{1}{2}\times\pi\times4^2=8\pi$，

$S_{矩形BFCE}=8\times\sqrt{15}=8\sqrt{15}$.

5. （1）**证明**：$\because BM\perp AB$，$CD//BM$，

$\therefore CD\perp AB$.

$\because \overset{\frown}{DA}=\overset{\frown}{AC}$.

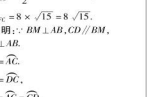
$\therefore \overset{\frown}{DA}=\overset{\frown}{DC}$，

$\therefore \overset{\frown}{DA}=\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CD}$.

$\therefore AD=AC=CD$.

$\therefore \triangle ACD$ 是等边三角形.

（2）**解**：如图，过 O 作 $ON\perp AD$ 于 N.



（第 5 题）

由（1）知 $\triangle ACD$ 是等边三角形，

$\therefore \angle DAC=60°$.

$\because AD=AC$，$CD\perp AB$，

$\therefore \angle DAB=30°$.

$\therefore BE=\frac{1}{2}AE$，$ON=\frac{1}{2}AO$.

设 $\odot O$ 的半径为 r，则 $ON=\frac{1}{2}r$，

$AN=DN=\frac{\sqrt{3}}{2}r$，

$\therefore EN=2+\frac{\sqrt{3}}{2}r$，$AE=2+\sqrt{3}r$.

$\therefore BE=\frac{1}{2}AE=\frac{\sqrt{3}r+2}{2}$. 在 $Rt\triangle NEO$ 与 $Rt\triangle BEO$ 中，$OE^2=ON^2+NE^2=OB^2+BE^2$，即 $\left(\frac{r}{2}\right)^2+\left(2+\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)^2=r^2+\left(\frac{\sqrt{3}r+2}{2}\right)^2$，$\therefore r=2\sqrt{3}$（$r=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 舍去）. $\therefore OE^2=\left(\frac{r}{2}\right)^2+\left(2+\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)^2=28$. $\therefore OE=2\sqrt{7}$.

6. 解：（1）在 $\odot O$ 中，$\angle A=\angle D$.

$\because \angle AEB=\angle DEC$，$AE=DE$，

$\therefore \triangle AEB\cong\triangle DEC$.

$\therefore EB=EC$.

又 $\because BC=CE$，

$\therefore BE=CE=BC$.

$\therefore \triangle EBC$ 为等边三角形.

$\therefore \angle BCE=60°$.

（2）$\because OF\perp AC$，$\therefore AF=CF$.

$\therefore \triangle EBC$ 为等边三角形，

$\therefore \angle CEF=60°$.

$\therefore \angle EGF=30°$.

$\therefore EG=2$，

$\therefore EF=1$.

又 $\because AE=ED=3$，

$\therefore CF=AF=4$.

$\therefore AC=8$，$CE=5$.

$\therefore BC=5$.

如图，作 $BM\perp AC$ 于点 M，

$\therefore \angle BCM=60°$，

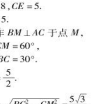
$\therefore \angle MBC=30°$.

$\therefore CM=\frac{5}{2}$.

$\therefore BM=\sqrt{BC^2-CM^2}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$，

$AM=AC-CM=\frac{11}{2}$.

$\therefore AB=\sqrt{AM^2+BM^2}=7$.



（第 6 题）

7. B　**点拨**：由题图可知，点 P 运动的路径长是题图中六个扇形的弧长之和，每个扇形的圆心角均为 60°，半径从 12 cm 依次减 2 cm，所以点 P 运动的路径长为$\frac{60\pi\times12}{180}+\frac{60\pi\times10}{180}+\frac{60\pi\times8}{180}+\frac{60\pi\times6}{180}+\frac{60\pi\times4}{180}+\frac{60\pi\times2}{180}=\frac{\pi}{3}\times(12+10+8+6+4+2)=14\pi$（cm）. 故选 B.

8. B　**9.** A　**10.** B　**11.** C

12. （1）**证明**：如图，连接 AE，

$\because AC$ 为直径，$\therefore \angle AEC=90°$.

$\therefore AE\perp BC$.

$\because AB=AC$，

$\therefore BE=CE$.

（2）**解**：如图，连接 OD，OE，

在 $Rt\triangle ABE$ 中，$\angle BAE=90°-\angle B=90°-70°=20°$，

$\therefore \angle DOE=2\angle DAE=40°$.

$\therefore \overset{\frown}{DE}$的度数为 40°.

（3）**解**：如图，连接 CD，$BC=2BE=6$，

设 $AC=x$，则 $AD=x-2$.

$\because AC$ 为直径，

$\therefore \angle ADC=90°$.

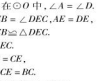
在 $Rt\triangle BCD$ 中，$CD^2=BC^2-BD^2=6^2-2^2=32$.

在 $Rt\triangle ADC$ 中，

$\because AD^2+CD^2=AC^2$，

$\therefore (x-2)^2+32=x^2$.

解得 $x=9$. 即 AC 的长为 9.



（第 12 题）

13. 15° 或 75°　**点拨**：如图，当圆心 O 在 $\angle CAB$ 的外部时，过点 A 作直径 AD，连接 OC，OB，过点 O 作 $OE\perp AB$，$OF\perp AC$，垂足分别为 E，F. 由垂径定理和勾股定理可求得 $OE=\frac{1}{2}OA$，$OF=FA$，

$\therefore \angle BAO=30°$，$\angle CAO=45°$，

$\therefore \angle CAB=15°$.

同理可得，当圆心 O 在 $\angle CAB_1$ 的内部时，$\angle CAB_1=75°$.



（第 13 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第二十三章达标检测卷

一、1. C　2. B　3. B　4. D　5. B　6. D　7. D　8. B　9. C

10. B　**点拨**：众数是一组数据中出现次数最多的数据，故众数是 8 小时；将这组数据按从小到大的顺序排列后，处于中间位置的两个数的平均数是 9，故中位数是 9 小时；平均数是 $\frac{7\times3+8\times16+9\times14+10\times7}{40}=8.625$（小时）；锻炼时间超过 8 小时的有 14 + 7 = 21（人），故选 B.

11. B　12. A　13. B　14. C　15. A

16. C　**点拨**：$\frac{1\times6+2\times2+3\times8+4\times4}{20}=2.5$（t），$2.5\times100=250$（t）. 故选 C.

二、17. 80 分　18. 15 元　19. >

三、20. **解**：(1) 9.5；10

(2) 乙队的平均成绩是 $\frac{1}{10}\times(10\times4+8\times2+7+9\times3)=9$（分）.

则乙队的方差是 $\frac{1}{10}\times[4\times(10-9)^2+2\times(8-9)^2+(7-9)^2+3\times(9-9)^2]=1$（分^2）.

21. **解**：王明的最后总分为 $\frac{25\times5+23\times2+24\times3}{5+2+3}=24.3$（分），李红的最后总分为 $\frac{26\times5+24\times2+26\times3}{5+2+3}=25.6$（分），张丽的最后总分为 $\frac{25\times5+25\times2+25\times3}{5+2+3}=25$（分）.

∵ 25. 6 > 25 > 24. 3，∴ 李红将被录用.

22. **解**：(1) 观察表格，可知这组样本数据的平均数是 $\frac{0\times3+1\times13+2\times16+3\times17+4\times1}{50}=2$（册），

∴ 这组样本数据的平均数为 2 册.

∵ 在这组样本数据中，3 出现了 17 次，出现的次数最多，

∴ 这组数据的众数为 3 册.

∵ 将这组样本数据按从小到大的顺序排列，其中处于中间的两个数都是 2，有 $\frac{2+2}{2}=2$，

∴ 这组数据的中位数为 2 册.

(2) ∵ 在 50 名学生中，读书多于 2 册的学生有 18 名，

∴ $300\times\frac{18}{50}=108$（名）.

∴ 根据样本数据，可以估计该校八年级 300 名学生在本次活动中读书多于 2 册的约有 108 名.

23. **解**：(1) $\overline{x_{甲}}=\frac{1}{8}\times(95+82+88+81+93+79+84+78)=85$；

$\overline{x_{乙}}=\frac{1}{8}\times(83+92+80+95+90+80+85+75)=85$.

(2) 选派甲参加比较合适. 理由如下：由(1) 知 $\overline{x_{甲}}=\overline{x_{乙}}=85$，则 $s_{甲}^2=\frac{1}{8}\times[(78-85)^2+(79-85)^2+(81-85)^2+(82-85)^2+(84-85)^2+(88-85)^2+(93-85)^2+(95-85)^2]=35.5$，$s_{乙}^2=\frac{1}{8}\times[(75-85)^2+(80-85)^2+(80-85)^2+(83-85)^2+(85-85)^2+(90-85)^2+(92-85)^2+(95-85)^2]=41$，∴ $s_{甲}^2<s_{乙}^2$，∴ 甲的成绩较稳定，∴ 选派甲参加比较合适.

24. **解**：(1) 平均数为 $(1\times1+1\times2+6\times3+18\times4+10\times5+6\times6+2\times7+2\times8+1\times9+1\times10+2\times11)\div50=5$（个）.

众数为 4 个，中位数为 4 个.

(2) 用中位数或众数（4 个）作为合格标准个数较为合适，因为大部分同学都能达到 4 个.

(3) $30\,000\times\frac{42}{50}=25\,200$（人）.

所以估计该市九年级男生引体向上项目测试的合格人数是 25 200 人.

25. **解**：(1) 60；0. 15

(2) 略.

(3) $80\leqslant x<90$

(4) $3\,000\times0.4=1\,200$（人）.

答：该校参加这次比赛的 3 000 名学生中成绩为“优”等的大约有 1 200 人.

第二十四章达标检测卷

一、1. C　2. B　3. B　4. B　5. C　6. D　7. B　8. A　9. C　10. C　11. C　12. B　13. D

14. A　**点拨**：∵ $x^2+2x-3=0$ 的两根是 $x_1=-3$，$x_2=1$，

∴ $a=1$，

∴ 在 Rt △ABE 中，$AB=\sqrt{AE^2+BE^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，且 $BC=BE+EC=2$，

∴ □$ABCD$ 的周长为 $2(AB+BC)=2\times(2+\sqrt{2})=4+2\sqrt{2}$.

15. A　**点拨**：∵ 关于 x 的一元二次方程 $mx^2-(m+2)x+\frac{m}{4}=0$ 有两个不相等的实数根 x_1，x_2，

∴ $\begin{cases}m\neq0,\\ b^2-4ac=[-(m+2)]^2-4m\cdot\frac{m}{4}>0,\end{cases}$

解得 $m>-1$ 且 $m\neq0$.

∵ x_1，x_2 是方程 $mx^2-(m+2)x+\frac{m}{4}=0$ 的两个实数根，

∴ $x_1+x_2=\frac{m+2}{m}$，$x_1x_2=\frac{1}{4}$.

∵ $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=4m$，

∴ $\frac{\frac{m+2}{m}}{\frac{m}{4}}=4m$.

∴ $m=2$ 或 -1.

∵ $m>-1$，

∴ $m=2$.

16. C　**点拨**：设应将小型西瓜的售价每千克降低 x 元. 根据题意，得 $(3-2-x)(200+\frac{40x}{0.1})-24=200$，

解这个方程，得 $x_1=0.2$，$x_2=0.3$.

∵ $200+\frac{40\times0.3}{0.1}>200+\frac{40\times0.2}{0.1}$，

∴ 应将小型西瓜的售价每千克降低 0. 3 元.

二、17. −3　18. −3

19. $(-4x)$；2

三、20. **解**：(1) 配方，得 $x^2-2x+1=6$，即 $(x-1)^2=6$.

由此可得 $x-1=\pm\sqrt{6}$.

∴ $x_1=1+\sqrt{6}$，$x_2=1-\sqrt{6}$.

(2) 原方程可变形为 $(7x+3)^2-2(7x+3)=0$.

因式分解得 $(7x+3)(7x+3-2)=0$.

∴ $x_1=-\frac{3}{7}$，$x_2=-\frac{1}{7}$.

(3) ∵ $a=1$，$b=-\sqrt{3}$，$c=-\frac{9}{4}$，

∴ $b^2-4ac=(-\sqrt{3})^2-4\times1\times\left(-\frac{9}{4}\right)=12$.

∴ $x=\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{12}}{2}=\frac{\sqrt{3}\pm2\sqrt{3}}{2}$.

∴ $x_1=\frac{3}{2}\sqrt{3}$，$x_2=-\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

(4) 原方程化为一般形式为 $y^2-2y=0$.

∴ $y_1=2$，$y_2=0$.

21. **解**：(1) 解方程 $\frac{x+2}{x-1}=4$，得 $x=2$. 经检验 $x=2$ 是分式方程 $\frac{x+2}{x-1}=4$ 的解.

∴ $x=2$ 是 $x^2+kx-2=0$ 的一个解.

∴ $4+2k-2=0$，解得 $k=-1$.

(2) 由(1) 知一元二次方程为 $x^2-x-2=0$. 解得 $x_1=2$，$x_2=-1$.

∵ 方程 $x^2+kx-2=0$ 的另一个解为 $x=-1$.

∴ 方程没有实数根.

22. **解**：(1) 将 $x=3$ 代入方程 $(a-1)x^2-4x-1+2a=0$ 中，得 $9(a-1)-12-1+2a=0$，解得 $a=2$.

将 $a=2$ 代入原方程中得 $x^2-4x+3=0$，

因式分解得 $(x-1)(x-3)=0$，

∴ $x_1=1$，$x_2=3$.

∴ 方程的另一个根是 $x=1$.

(2) ∵ 三角形的三边长都是这个方程的根，

∴ ①当三边长都为 1 时，周长为 3；

②当三边长都为 3 时，周长为 9；

③当两边长为 3，一边长为 1 时，周长为 7；

④当两边长为 1，一边长为 3 时，不满足三角形三边关系，不能构成三角形，故三角形的周长为 3 或 9 或 7.

23. **解**：(1) ∵ 关于 x 的一元二次方程 $x^2-(2k-1)x+k^2+k-1=0$ 有实数根，

∴ $b^2-4ac\geqslant0$，即 $[-(2k-1)]^2-4\times1\times(k^2+k-1)=-8k+5\geqslant0$，

解得 $k\leqslant\frac{5}{8}$.

(2) 由根与系数的关系可得 $x_1+x_2=2k-1$，$x_1x_2=k^2+k-1$，

∴ $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(2k-1)^2-2(k^2+k-1)=2k^2-6k+3$.

∵ $x_1^2+x_2^2=11$，∴ $2k^2-6k+3=11$，解得 $k=4$ 或 $k=-1$.

∵ $k\leqslant\frac{5}{8}$，∴ $k=-1$.

24. **解**：根据题意，得 $7.5x-(2.7x+0.9x^2+0.3x)=5$，即 $9x^2-45x+50=0$，解得 $x_1=\frac{5}{3}$，$x_2=\frac{10}{3}$.

∴ 从投入的角度考虑应建议他修建 $\frac{5}{3}$ 公顷大棚.

25. **解**：(1) 由题意得 $60\times(360-280)=4\,800$（元），

即降价前商场每月销售该商品的利润是 4 800 元.

(2) 设每件商品应降价 x 元，由题意得 $(360-x-280)(5x+60)=7\,200$，解得 $x_1=8$，$x_2=60$. 因为要更有利于减少库存，则 $x=60$. 故要使商场每月销售这种商品的利润达到 7 200 元，且要有利于减少库存，则每件商品应降价 60 元.

26. **解**：(1) 设经过 t s 后 $S_{△OPC}=8$ cm^2，

由题意得 $\frac{1}{2}(6-t)\cdot2t=8$，

解得 $t_1=2$，$t_2=4$. 又∵ $\begin{cases}6-t\geqslant0,\\ 2t\leqslant8,\end{cases}$

∴ $t\leqslant4$. ∴ 经过 2 s 或 4 s 后 $S_{△OPC}=8$ cm^2.

(2) 设点 Q 出发经过 a s 后 $S_{△OPC}=4$ cm^2.

由题意得 $\frac{1}{2}\times2a\times(6-2-a)=4$，

解得 $a_1=a_2=2$，即点 Q 出发经过 2 s 后 $S_{△OPC}=4$ cm^2.

第二十五章达标检测卷

一、1. D　2. D　3. C　4. B　5. C　6. A　7. C

8. A　**点拨**：∵ $BE\parallel CD$，

∴ △AEB∽△ADC，

∴ $\frac{AE}{AD}=\frac{BE}{CD}$，即 $\frac{8}{8+22}=\frac{3.2}{CD}$，

解得 $CD=12$ m. 故旗杆 CD 的高度为 12 m. 故选 A.

9. D　10. C

11. B　**点拨**：∵ 点 D，E 分别是边 AC，AB 的中点，

∴ DE 是△ABC 的中位线，

∴ $DE\parallel BC$ 且 $\frac{DE}{BC}=\frac{1}{2}$，②正确；

∴ $\angle ODE=\angle OBC$，$\angle OED=\angle OCB$，

∴ △ODE∽△OBC，

∴ $\frac{OE}{OB}=\frac{OD}{OC}=\frac{DE}{BC}=\frac{1}{2}$，①错误；

$\frac{S_{△DOE}}{S_{△BOC}}=\left(\frac{DE}{BC}\right)^2=\frac{1}{4}$，③错误；

∵ $\frac{S_{△DOE}}{S_{△BOE}}=\frac{\frac{1}{2}OD\cdot h}{\frac{1}{2}OB\cdot h}=\frac{OD}{OB}=\frac{1}{2}$，

∴ $\frac{S_{△DOE}}{S_{△DBE}}=\frac{1}{3}$，④正确. 故选 B.

12. B

13. B　**点拨**：由题意知，$\angle APB=\angle CPD$.

又∵ $AB\perp BD$，$CD\perp BD$，

∴ Rt △ABP∽Rt △CDP，

∴ $\frac{AB}{CD}=\frac{BP}{PD}$.

∵ $AB=1.2$ m，$BP=1.8$ m，$PD=12$ m，

∴ $CD=\frac{AB\cdot PD}{BP}=\frac{1.2\times12}{1.8}=8$（m）.

故选 B.

14. D　**点拨**：(方法 1)∵ $\angle ACB=90°$，$\angle ADC=90°$，

又∠A 是公共角，

∴ Rt △ABC∽Rt △ACD.

∴ $\frac{AC}{AB}=\frac{AD}{AC}$，

∵ $AC^2=AD\cdot AB$.

∵ $\angle ACB=90°$，$\angle BDC=90°$，

又∠B 是公共角，

∴ Rt △ABC∽Rt △CBD，

∴ $\frac{BC}{BD}=\frac{AB}{BC}$，

∴ $BC^2=BD\cdot AB$.

∴ $\left(\frac{AC}{BC}\right)^2=\frac{AD\cdot AB}{BD\cdot AB}=\frac{AD}{BD}=\frac{9}{4}$.

∴ $AC:BC=3:2$.

(方法 2) 易证△ACD∽△CBD，

∴ $\frac{S_{△ACD}}{S_{△CBD}}=\left(\frac{AC}{BC}\right)^2$.

又∵ $CD\perp AB$，

∴ $\frac{S_{△ACD}}{S_{△CBD}}=\frac{\frac{1}{2}AD\cdot CD}{\frac{1}{2}BD\cdot CD}=\frac{AD}{BD}=\frac{9}{4}$，

∴ $\frac{AC}{BC}=\frac{3}{2}$.

15. D　**点拨**：如图，过点 A 作 $AM\perp BC$ 于点 M，交 DG 于点 N，延长 GF 交 BC 于点 H.

∵ $AB=AC$，$AD=AG$，∴ $AD:AB=AG:AC$.

又∵ $\angle BAC=\angle DAG$，

∴ △ADG∽△ABC.

∴ $\angle ADG=\angle B$.

∴ $DG\parallel BC$.

∴ $AN\perp DG$.

∵ 四边形 $DEFG$ 是正方形，

∴ $FG\perp DG$.

∴ $FH\perp BC$.

∵ $AB=AC=18$，$BC=12$，

∴ $BM=\frac{1}{2}BC=6$.

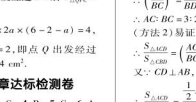
∴ $AM=\sqrt{AB^2-BM^2}=12\sqrt{2}$.

∵ $\frac{AN}{AM}=\frac{DG}{BC}$，即 $\frac{AN}{12\sqrt{2}}=\frac{6}{12}$，

∴ $AN=6\sqrt{2}$.

∴ $MN=AM-AN=6\sqrt{2}$.

∴ $FH=MN-GF=6\sqrt{2}-6$. 故选 D.



（第 15 题）

16. D　**点拨**：∵ △ABE 是等腰直角三角形，EM 平分∠AEB，

∴ EM 是 AB 边上的中线.

∴ $EM=\frac{1}{2}AB$.

∵ 点 D，点 N 分别是 BC，AC 的中点，

∴ DN 是△ABC 的中位线.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore DN=\frac{1}{2}AB, DN/\!/AB$.

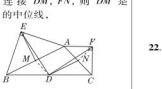
$\therefore EM=DN$. ①正确；

由 $DN/\!/AB$，易证 $\triangle CDN\backsim\triangle CBA$.

$\because \frac{S_{\triangle CND}}{S_{\triangle CAB}}=\left(\frac{DN}{AB}\right)^2=\frac{1}{4}$.

$\therefore S_{\triangle CND}=\frac{1}{3}S_{四边形ABDN}$. ②正确；

如图，连接 DM，FN，则 DM 是 $\triangle ABC$ 的中位线，



（第 16 题）

$\therefore DM=\frac{1}{2}AC, DM/\!/AC$，

∴四边形 $AMDN$ 是平行四边形.

$\therefore \angle AMD=\angle AND$.

易知 $\angle ANF=90°$，$\angle AME=90°$，

$\therefore \angle EMD=\angle DNF$.

$\because FN$ 是 AC 边上的中线，

$\therefore FN=\frac{1}{2}AC$.

$\therefore DM=FN$.

又 $\because EM=DN$，$\therefore \triangle DEM\cong\triangle FDN$.

$\therefore DE=DF$，$\angle FDN=\angle DEM$. ③正确；

$\because \angle MDN+\angle AMD=180°$，

$\therefore \angle EDF=\angle MDN-(\angle EDM+\angle FDN)=180°-\angle AMD-(\angle EDM+\angle DEM)=180°-(\angle AMD+\angle EDM+\angle DEM)=180°-(180°-\angle AMD)=180°-(180°-90°)=90°$，

$\therefore DE\perp DF$. ④正确. 故选 D.

二.17. 2 **18.** 1∶3 **19.** $\frac{60}{17}$

三.20. **解**：因为四边形 $ABCD\backsim$四边形 $EFGH$，所以 $\angle H=\angle D=95°$，则 $\alpha=360°-95°-118°-67°=80°$. 再由 $x:7=12:6$，解得 $x=14$.

21. **解**：(1)如图，$\triangle A_1B_1C_1$ 就是所要画的三角形.

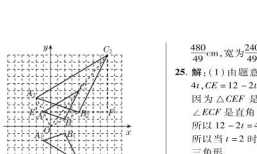
(2)如图，$\triangle A_2B_2C_2$ 就是所要画的三角形.

分别过点 A_2，C_2 作 y 轴的平行线，过点 B_2 作 x 轴的平行线，交点分别为 E，F.

$\because A(-1,2)$，$B(2,1)$，$C(4,5)$，$\triangle A_2B_2C_2$ 与 $\triangle ABC$ 位似，且位似比为 $2:1$，

$\therefore A_2(-2,4)$，$B_2(4,2)$，$C_2(8,10)$.

$\therefore S_{\triangle A_2B_2C_2}=\frac{1}{2}\times(2+8)\times10-\frac{1}{2}\times2\times6-\frac{1}{2}\times4\times8=28$.



（第 21 题）

22. (1)**证明**：$\because \angle ABC=\angle ACD$，$\angle A=\angle A$，$\therefore \triangle ABC\backsim\triangle ACD$.

(2)**解**：由(1)知 $\triangle ABC\backsim\triangle ACD$，

$\therefore \frac{AC}{AD}=\frac{AB}{AC}$

$\because AD=2, AB=5$，$\therefore \frac{AC}{2}=\frac{5}{AC}$，

$\therefore AC=\sqrt{10}$（负值舍去）.

23. **解**：由题意可得 $DE/\!/BC$，

所以 $\triangle ADE\backsim\triangle ABC$.

所以 $\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}$，即 $\frac{AD}{AD+DB}=\frac{DE}{BC}$

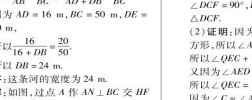
因为 $AD=16$ m，$BC=50$ m，$DE=20$ m，

所以 $\frac{16}{16+DB}=\frac{20}{50}$.

所以 $DB=24$ m.

答：这条河的宽度为 24 m.

24. **解**：如图，过点 A 作 $AN\perp BC$ 交 HF 于点 M，交 BC 于点 N.



（第 24 题）

$\because \angle BAC=90°$，$\therefore \angle BNA=\angle BAC$，$BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=20$(cm).

又 $\because \angle B=\angle B$，

$\therefore \triangle ABN\backsim\triangle CBA$，$\therefore \frac{AN}{AC}=\frac{AB}{BC}$，

$\therefore AN=\frac{AC\times AB}{BC}=\frac{48}{5}$(cm).

$\because$ 四边形 $EFHD$ 是矩形，

$\therefore HF/\!/ED$，

$\therefore \angle AHF=\angle B$，$\angle AFM=\angle C$，

$\therefore \triangle AHF\backsim\triangle ABC$，$\therefore \frac{AM}{AN}=\frac{HF}{BC}$

设 $EF=x$，则 $MN=x$，由截出的矩形的长与宽的比为 $2:1$，可知 $HF=2x$，$\therefore \frac{\frac{48}{5}-x}{\frac{48}{5}}=\frac{2x}{20}$，解得 $x=\frac{240}{49}$，

$\therefore 2x=\frac{480}{49}$. 故所截矩形的长为 $\frac{480}{49}$m，宽为 $\frac{240}{49}$m.

25. **解**：(1)由题意可知 $BE=2t$，$CF=4t$，$CE=12-2t$.

因为 $\triangle CEF$ 是等腰直角三角形，$\angle ECF$ 是直角，所以 $CE=CF$.

所以 $12-2t=4t$，解得 $t=2$.

所以当 $t=2$ 时，$\triangle CEF$ 是等腰直角三角形.

(2)根据题意，可分为两种情况：

①若 $\triangle EFC\backsim\triangle ACD$，则 $\frac{EC}{AD}=\frac{FC}{CD}$，

所以 $\frac{12-2t}{12}=\frac{4t}{24}$，解得 $t=3$，

即当 $t=3$ 时，$\triangle EFC\backsim\triangle ACD$；

②若 $\triangle FEC\backsim\triangle ACD$，则 $\frac{FC}{AD}=\frac{EC}{CD}$，

所以 $\frac{4t}{12}=\frac{12-2t}{24}$，解得 $t=1.2$，

即当 $t=1.2$ 时，$\triangle FEC\backsim\triangle ACD$.

因此，当 t 为 3 或 1.2 时，以点 E，C，F 为顶点的三角形与 $\triangle ACD$ 相似.

26. (1)**证明**：由 $AD=DC$，$\angle ADE=\angle DCF=90°$，$DE=CF$，得 $\triangle ADE\cong\triangle DCF$.

(2)**证明**：因为四边形 $AEHG$ 是正方形，所以 $\angle AEH=90°$.

所以 $\angle QEC+\angle AED=90°$.

又因为 $\angle AED+\angle EAD=90°$，

所以 $\angle QEC=\angle EAD$.

因为 $\angle C=\angle ADE=90°$，

所以 $\triangle ECQ\backsim\triangle ADE$.

所以 $\frac{CQ}{DE}=\frac{EC}{AD}$.

因为 E 是 CD 的中点，$CD=AD$，

所以 $EC=DE=\frac{1}{2}AD$.

所以 $\frac{EC}{AD}=\frac{1}{2}$.

因为 $DE=CF$，所以 $\frac{CQ}{DE}=\frac{CQ}{CF}=\frac{1}{2}$，

即 Q 是 CF 的中点.

(3)**解**：$S_1+S_2=S_3$ 成立.

理由：因为 $\triangle ECQ\backsim\triangle ADE$，

所以 $\frac{CQ}{DE}=\frac{QE}{AE}$. 所以 $\frac{CQ}{CE}=\frac{QE}{AE}$.

因为 $\angle C=\angle AEQ=90°$，

所以 $\triangle ECQ\backsim\triangle AEQ$.

所以 $\triangle AEQ\backsim\triangle ECQ\backsim\triangle ADE$.

所以 $\frac{S_1}{S_3}=\left(\frac{EQ}{AQ}\right)^2$，$\frac{S_2}{S_3}=\left(\frac{AE}{AQ}\right)^2$.

所以 $\frac{S_1}{S_3}+\frac{S_2}{S_3}=\left(\frac{EQ}{AQ}\right)^2+\left(\frac{AE}{AQ}\right)^2=\frac{EQ^2+AE^2}{AQ^2}$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle AEQ$ 中，由勾股定理得 $EQ^2+AE^2=AQ^2$，

所以 $\frac{S_1}{S_3}+\frac{S_2}{S_3}=1$，即 $S_1+S_2=S_3$.

第二十六章达标检测卷

一.1. C **2.** A **3.** C

4. D **点拨**：如图，根据勾股定理可知，$AB=\sqrt{8^2+15^2}=17$.

$\because \angle BCD+\angle B=90°$，$\angle A+\angle B=90°$，$\therefore \angle BCD=\angle A=\alpha$，在 $\mathrm{Rt}\triangle ACB$ 中，$\cos\alpha=\frac{AC}{AB}=\frac{15}{17}$. 故选 D.



（第 4 题）

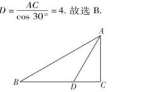
5. C

6. B **点拨**：如图，由题意知，$AC=AB\sin B=AB\sin 30°=2\sqrt{3}$.

$\because AD$ 是 $\angle BAC$ 的平分线，

$\therefore \angle CAD=\frac{\angle BAC}{2}=\frac{90°-30°}{2}=30°$.

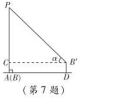
$\therefore AD=\frac{AC}{\cos 30°}=4$. 故选 B.



（第 6 题）

7. A **点拨**：如图，设 $PA=PB=PB'=x$ 米，在 $\mathrm{Rt}\triangle PCB'$ 中，$\sin\alpha=\frac{PC}{PB'}$，

$\therefore \sin\alpha=\frac{x-1}{x}$. $\therefore x=\frac{1}{1-\sin\alpha}$.



（第 7 题）

8. D

9. C **点拨**：对于①，可由 $AB=BC\cdot\tan\angle ACB$ 求出 AB，PA 两点间的距离；对于②，由 $BC=\frac{AB}{\tan\angle ACB}$，$AB=\frac{AB}{\tan\angle ADB}$，$BD=BC+CD$，可求出 AB 的长；对于③，易知 $\triangle DEF\backsim\triangle DBA$，则 $\frac{DE}{EF}=\frac{BD}{AB}$，可求出 AB 的长；对于④无法求得 AB 的长，故有①②③共 3 组，故选 C.

10. D **11.** C

12. A **点拨**：过点 A 作 $AE\perp BC$ 于点 E，过点 D 作 $DF\perp BC$，交 BC 的延长线于点 F，解 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 可得 $AE=4\sqrt{2}$，易证 $DF=AE$，

$\therefore DF=4\sqrt{2}$，再解 $\mathrm{Rt}\triangle DCF$ 即可求出 CD.

13. C **点拨**：过点 B 作 $BF\perp CD$ 于 F，过点 B' 作 $B'E\perp BD$ 于 E. 于是得到 $AB=A'B'=CF=1.6$ m，易知点 B' 在 BF 上，$\angle B'DF=90°-67.5°=22.5°$，$\angle BDB'=67.5°-45°=22.5°$，$\therefore \angle B'DF=\angle BDB'$.

$\therefore B'F=B'E=BB'\cdot\sin 45°\approx14.14$(m)，易知 $\triangle BFD$ 为等腰直角三角形，则 $CD=CF+FD=CF+BF=CF+BB'+B'F\approx35.7$ m.

14. B **15.** A **16.** A

二.17. 2 **18.** $\sqrt{3}$，$\frac{3\sqrt{2}}{2}$

19. 750$\sqrt{2}$ m **点拨**：过点 A 作 $AD\perp BC$，垂足为 D，在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 中，$\angle ACD=75°-30°=45°$，$AC=30\times25=750$(m)，

$\therefore AD=AC\cdot\sin 45°=375\sqrt{2}$ m.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，易知 $\angle B=30°$，

$\therefore AB=2AD=750\sqrt{2}$ m.

即小山东西两侧 A，B 两点间的距离为 $750\sqrt{2}$ m.

三.20. **解**：(1)$2^{-1}-\sqrt{3}\tan 60°+(\pi-2\,022)^0+\left|-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}-3+1+\frac{1}{2}=-1$.

(2)$(\pi-\sqrt{5})^0+\sqrt{4}+(-1)^{2\,023}-\sqrt{3}\tan 60°=1+2-1-3=-1$.

21. **解**：(1)$\because \angle C=90°$，$\angle A=60°$，

$\therefore \angle B=30°$.

$\because \sin A=\frac{a}{c}$，$\sin B=\frac{b}{c}$，

$\therefore a=c\cdot\sin A=8\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=12$，

$b=c\cdot\sin B=8\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=4\sqrt{3}$.

(2)$\because \angle C=90°$，$\angle A=45°$，

$\therefore \angle B=45°$，$\therefore a=b=3\sqrt{6}$.

$\therefore c=\sqrt{a^2+b^2}=6\sqrt{3}$.

22. **解**：(1)在 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 中，

$\because \angle A=60°$，$\angle ABE=90°$，$AB=6$，

$\therefore \frac{BE}{AB}$，

$\therefore \angle E=30°$，$BE=AB\cdot\tan A=6\times\tan 60°=6\sqrt{3}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle CDE$ 中，$\because \angle CDE=90°$，$CD=4$，$\sin E=\frac{CD}{CE}$，$\angle E=30°$，

$\therefore CE=\frac{CD}{\sin E}=\frac{4}{\frac{1}{2}}=8$.

$\therefore BC=BE-CE=6\sqrt{3}-8$.

(2)$\because \angle ABE=90°$，$\sin A=\frac{4}{5}=\frac{BE}{AE}$，

∴可设 $BE=4x(x>0)$，则 $AE=5x$.

由勾股定理可得 $AB=3x$，

又 $\because AB=6$，$\therefore 3x=6$，解得 $x=2$.

$\therefore BE=8$，$AE=10$.

$\because \tan E=\frac{AB}{BE}=\frac{6}{8}=\frac{CD}{DE}=\frac{4}{DE}$，

解得 $DE=\frac{16}{3}$.

$\therefore AD=AE-DE=10-\frac{16}{3}=\frac{14}{3}$.

23. **解**：设 $AD=x$ m，则 $BC=6x$ m.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADE$ 中，$\because \angle AED=30°$，

$\therefore AE=\frac{AD}{\tan 30°}=\frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\sqrt{3}x$(m)，

$DE=2AD=2x$ m.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BCE$ 中，$\because \angle BEC=60°$，

$\therefore BE=\frac{BC}{\tan 60°}=\frac{6x}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}x$(m)，

$EC=2BE=4\sqrt{3}x$ m. $\because AE+BE=AB$，$\therefore \sqrt{3}x+2\sqrt{3}x=90$，解得 $x=10\sqrt{3}$. $\therefore DE=20\sqrt{3}$ m，$EC=120$ m.

在 $\triangle DEC$ 中，$\angle DEC=180°-30°-60°=90°$，根据勾股定理，得 $CD=\sqrt{(20\sqrt{3})^2+120^2}=20\sqrt{39}$(m).

答：这两座建筑物顶端 C，D 间的距离为 $20\sqrt{39}$ m.

24. **解**：过点 B 作 $BF\perp AD$ 于点 F，则四边形 $BFEC$ 是矩形，

$\therefore BF=CE=5$ m，$EF=BC=10$ m.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABF$ 中，$\angle BAF=35°$，$\tan\angle BAF=\frac{BF}{AF}$，

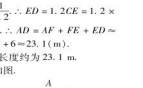
$\therefore AF=\frac{BF}{\tan 35°}\approx\frac{5}{0.70}\approx7.14$(m).

$\because$ 斜坡 CD 的坡度 $i=1:1.2$，

$\therefore \frac{CE}{ED}=\frac{1}{1.2}$. $\therefore ED=1.2CE=1.2\times5=6$(m). $\therefore AD=AF+FE+ED\approx7.14+10+6=23.1$(m).

故 AD 的长度约为 23.1 m.

25. **解**：(1)如图.



（第 25 题）

(2)如图，连接 BD.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\because \angle BED = 90°, BE = DE = 1,$

$\therefore \angle EBD = \angle EDB = 45°,$

$BD = \sqrt{BE^2 + DE^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$

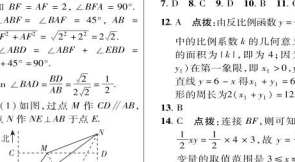
易知 $BF = AF = 2, \angle BFA = 90°.$

$\therefore \angle ABF = \angle BAF = 45°, AB = \sqrt{BF^2 + AF^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}.$

$\therefore \angle ABD = \angle ABF + \angle EBD = 45° + 45° = 90°.$

$\therefore \tan \angle BAD = \frac{BD}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$

26. 解：(1) 如图，过点 M 作 $CD \parallel AB$，过点 N 作 $NE \perp AB$ 于点 E.



(第 26 题)

$\therefore$ 四边形 $AEDC$ 为矩形，

$\therefore AC = DE, AE = DC.$

在 Rt $\triangle ACM$ 中，$\because \angle CAM = 36.5°$，$AM = 5$ 千米，

$\sin \angle CAM = \frac{CM}{AM} \approx 0.6,$

$\cos \angle CAM = \frac{AC}{AM} \approx 0.8,$

$\therefore CM \approx 3$ 千米，$AC \approx 4$ 千米.

在 Rt $\triangle ANE$ 中，$\because \angle AEN = 90° - 53.5° = 36.5°$，$AN = 10$ 千米，

$\sin \angle NAE = \frac{NE}{AN} \approx 0.6,$

$\cos \angle NAE = \frac{AE}{AN} \approx 0.8,$

$\therefore NE \approx 6$ 千米，$AE \approx 8$ 千米.

在 Rt $\triangle MND$ 中，$MD = CD - CM = AE - CM \approx 5$ 千米，$ND = NE - DE = NE - AC \approx 2$ 千米，

$\therefore MN = \sqrt{MD^2 + ND^2} \approx \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$ (千米).

(2) 如图，作点 N 关于 AB 的对称点 G，连接 MG 交 AB 于点 P，连接 NP，点 P 即为站点.

$\because PM + PN = PM + PG = MG, NG = 2NE = 12$ 千米，$DG = NG - DN = 10$ 千米.

在 Rt $\triangle MDG$ 中，

$MG = \sqrt{MD^2 + DG^2} \approx \sqrt{5^2 + 10^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$ (千米).

$\therefore$ 最短距离之和约为 $5\sqrt{5}$ 千米.

第二十七章达标检测卷

一、**1.** C **2.** A **3.** B **4.** D **5.** B **6.** B **7.** D **8.** C **9.** D **10.** B **11.** C

12. A **点拨**：由反比例函数 $y = \frac{k}{x}(k \neq 0)$ 中的比例系数 k 的几何意义知矩形的面积为 $|k|$，即为 4，因为 $A(x_1, y_1)$ 在第一象限，即 $x_1 > 0, y_1 > 0$，由直线 $y = 6 - x$ 得 $x_1 + y_1 = 6$，所以矩形的周长为 $2(x_1 + y_1) = 12$.

13. B

14. C **点拨**：连接 BF，则可知 $S_{\triangle AFB} = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2} \times 4 \times 3$，故 $y = \frac{12}{x}$，其自变量的取值范围是 $3 \leqslant x \leqslant 5$，对应的函数值的范围为 $\frac{12}{5} \leqslant y \leqslant 4$，故选 C.

15. A

16. A **点拨**：分别过点 A, B 作 $AC \perp x$ 轴，$BD \perp x$ 轴，垂足分别为点 C, D.

易知 $\angle AOC + \angle BOD = 90°, \angle BOD + \angle OBD = 90°,$

$\therefore \angle OBD = \angle AOC.$

又 $\angle BDO = \angle OCA = 90°,$

$\therefore \triangle ODB \backsim \triangle CAO.$

$\therefore \frac{OD}{AC} = \frac{BD}{OC} = \frac{OB}{OA} = 2.$

设点 A 的坐标是 (m, n)，

$\because$ 点 A 在反比例函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图像上，$\therefore mn = 1.$

易知 $AC = n, OC = m,$

$\therefore BD = 2m, OD = 2n.$

$\because B$ 点的坐标是 $(-2n, 2m)$.

$\because$ 点 B 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图像上，

$\therefore 2m = \frac{k}{-2n}$，即 $k = -4mn = -4.$

二、**17.** $t = \frac{24\,000}{v}(v > 0)$

18. $-1 < y < 0$ 或 $y \leqslant -5$ 或 $x > 0$

19. $2\sqrt{5}$，6 **点拨**：易知点 $B(k, 1)$，点 $C\left(2, \frac{1}{2}k\right)$，则 $AB = k - 2, AC = \frac{1}{2}k - 1, BC = \sqrt{(k-2)^2 + \left(\frac{1}{2}k - 1\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}(k-2)$，则 $AB : BC = 2 : \sqrt{5}$；

$\triangle ABC$ 的面积 $= \frac{1}{2} \times AB \times AC = \frac{1}{2}(k-2)\left(\frac{1}{2}k - 1\right) = 4$，解得 $k = 6$ 或 $k = -2$(舍去 -2).

三、**20.** 解：$\because$ 点 $A(-2, 0)$ 和 $B(2, 0)$，$\therefore AB = 4$. 设点 P 的坐标为 (a, b)，则点 P 到 x 轴的距离是 $|b|$，又 $\triangle PAB$ 的面积是 6，

$\therefore \frac{1}{2} \times 4 \times |b| = 6.$

$\therefore |b| = 3.$ $\therefore b = \pm 3.$

当 $b = 3$ 时，$a = -\frac{1}{3}$；

当 $b = -3$ 时，$a = \frac{1}{3}$.

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $\left(-\frac{1}{3}, 3\right)$ 或 $\left(\frac{1}{3}, -3\right)$.

21. 解：(1) 把 $x = -\frac{1}{3}, y = -6$ 代入 $y = \frac{k}{x}$，中，得 $-6 = \frac{k}{-\frac{1}{3}}$，则 $k = 2$，即反比例函数的表达式为 $y = \frac{2}{x}$.

因为 $k > 0$，所以这个函数的图像位于第一、第三象限，在每个象限内，y 随 x 的增大而减小.

(2) 将 $x = \frac{1}{2}$ 代入表达式中得 $y = 4$，将 $x = 4$ 代入表达式中得 $y = \frac{1}{2}$，

所以 y 的取值范围为 $\frac{1}{2} < y < 4.$

22. 解：(1) 由题意可得 $y = \frac{5\,000}{x}$，

(2) 把 $x = 200$ 代入 $y = \frac{5\,000}{x}$，

得 $y = 25.$

故这些电煤能用 25 天.

(3) 前 10 天共用电煤 $10 \times 200 = 2\,000(t)$，还剩电煤 $5\,000 - 2\,000 = 3\,000(t)$，

还可以使用的天数为 $\frac{3\,000}{300} = 10$(天)，

$10 + 10 = 20$(天)，

故这些电煤一共可用 20 天.

23. 解：(1) 根据题意，把 $A(-2, b)$ 的坐标分别代入一次函数和反比例函数表达式，得 $\begin{cases} b = -2k + 5, \\ b = \frac{-8}{-2}. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} b = 4, \\ k = \frac{1}{2}. \end{cases}$ 所以一次函数的表达式为 $y = \frac{1}{2}x + 5.$

(2) 将直线 AB 向下平移 $m(m > 0)$ 个单位长度后，直线 AB 对应的函数表达式为 $y = \frac{1}{2}x + 5 - m.$

由 $\begin{cases} y = -\frac{8}{x}, \\ y = \frac{1}{2}x + 5 - m \end{cases}$ 得，$\frac{1}{2}x^2 + (5 - m)x + 8 = 0.$

$\because$ 直线 AB 向下平移 $m(m > 0)$ 个单位长度后与反比例函数的图像有且只有一个公共点，

$\therefore (5 - m)^2 - 4 \times \frac{1}{2} \times 8 = 0$，解得 $m = 1$ 或 9.

24. 解：(1) 由题意易得点 M 的纵坐标为 2.

将 $y = 2$ 代入 $y = -\frac{1}{2}x + 3$，得 $x = 2.$

$\therefore M(2, 2).$ 把点 M 的坐标代入 $y = \frac{k}{x}$，得 $k = 4,$

$\therefore$ 反比例函数的表达式是 $y = \frac{4}{x}.$

(2) 由题意得 $S_{\triangle OPM} = \frac{1}{2}OP \cdot AM,$

$\because S_{四边形BMON} = S_{矩形BOAC} - S_{\triangle AOM} - S_{\triangle CON} = 4 \times 2 - 2 - 4 = 2,$

$S_{\triangle OPM} = S_{四边形BMON},$

$\therefore \frac{1}{2}OP \cdot AM = 4.$

又易知 $AM = 2,$

$\therefore OP = 4.$

$\therefore P$ 点的坐标是 $(0, 4)$ 或 $(0, -4)$.

25. 解：(1) 设 $y = k_1x(k_1 \neq 0)$，

$\because$ 点 $(15, 9)$ 在直线 $y = k_1x$ 上，

$\therefore 15k_1 = 9,$

$\therefore k_1 = \frac{3}{5}.$

$\therefore$ 装修期间 y 与 x 之间的函数关系式为 $y = \frac{3}{5}x(0 \leqslant x \leqslant 15).$

(2) 设装修后 y 与 x 之间的函数关系式为 $y = \frac{k_2}{x}(k_2 \neq 0).$

$\therefore$ 点 $(15, 9)$ 在其上，

$\therefore 9 = \frac{k_2}{15},$

$\therefore k_2 = 135.$

$\therefore$ 装修后 y 与 x 之间的关系式为 $y = \frac{135}{x}(x > 15).$

装修后 30 天，即 $x = 45.$

当 $x = 45$ 时，$y = \frac{135}{45} = 3 > 2.7.$

$\therefore$ 该住户在装修后 30 天搬入居住不受.

当 $y = 2.7$ 时，即 $2.7 = \frac{135}{x}.$

$\therefore x = 50.$

$\therefore 50 - 15 = 35(天).$

$\therefore$ 装修后需要经过 35 天方可入住.

26. 解：(1) $\because$ 正比例函数图像与反比例函数图像的两个交点关于原点对称，

$\therefore S_{\triangle AOC} = S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC} = 1.$

又 $\because AC \perp x$ 轴，

$\therefore k = 2.$

(2) 在 x 轴上存在这样的点 D，使 $\triangle ABD$ 为直角三角形.

设点 D 的坐标为 $(m, 0)$.

由 $\begin{cases} y = 2x, \\ y = \frac{2}{x} \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 2, \end{cases} \begin{cases} x_2 = -1, \\ y_2 = -2. \end{cases}$

$\therefore A(1, 2), B(-1, -2).$

$\therefore AD = \sqrt{(1-m)^2 + 2^2},$

$BD = \sqrt{(m+1)^2 + 2^2},$

$AB = \sqrt{(1+1)^2 + (2+2)^2} = 2\sqrt{5}.$

当 D 为直角顶点时，

$\because AB = 2\sqrt{5},$

$\therefore OD = \frac{1}{2}AB = \sqrt{5}.$

$\therefore D$ 的坐标为 $(\sqrt{5}, 0)$ 或 $(-\sqrt{5}, 0)$.

当 A 为直角顶点时，

由 $AB^2 + AD^2 = BD^2$，得 $(2\sqrt{5})^2 + (1-m)^2 + 2^2 = (m+1)^2 + 2^2,$

解得 $m = 5$，即 $D(5, 0)$.

当 B 为直角顶点时，

由 $BD^2 + AB^2 = AD^2$，得 $(m+1)^2 + 2^2 + (2\sqrt{5})^2 = (1-m)^2 + 2^2,$

解得 $m = -5$，即 $D(-5, 0)$.

$\therefore$ 存在这样的点 D，使 $\triangle ABD$ 为直角三角形，点 D 的坐标为 $(\sqrt{5}, 0)$ 或 $(-\sqrt{5}, 0)$ 或 $(5, 0)$ 或 $(-5, 0)$.

第二十八章达标检测卷

一、**1.** C **2.** C **3.** C **4.** A **5.** D **6.** D **7.** C **8.** D **9.** C **10.** D **11.** B **12.** C

13. B **14.** C

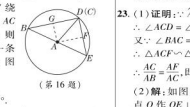
15. B **点拨**：$\because$ 留下的扇形的弧长为 $\frac{2}{3} \times 2\pi \times 9 = 12\pi$(cm).

$\therefore$ 围成圆锥的底面圆半径 $r = \frac{12\pi}{2\pi} = 6$(cm). 又 $\because$ 圆锥母线长 $l = 9$ cm，

$\therefore$ 圆锥的高 $h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{9^2 - 6^2} = 3\sqrt{5}$(cm).

16. D **点拨**：$\because \angle BAC + \angle EAD = 180°,$

$\therefore$ 可将 $\triangle ABC$ 绕点 A 旋转，让 AC 和 AD 重合，则 AB 和 AE 在一条直线上，如图所示.



(第 16 题)

$\because BE$ 为直径，

$\therefore \angle BDE = 90°.$

作 $AF \perp DE$，垂足为 $F, AG \perp BD$，垂足为 G，则四边形 $AFDG$ 为矩形，

$\therefore AG = DF = \frac{1}{2}DE = 3.$

$\therefore$ 弦 BC 的弦心距等于 3.

二、**17.** 100° **18.** $3\sqrt{2}$ cm

19. $\frac{\pi}{2}$ **点拨**：过 O' 作 $O'M \perp OA$ 于 M，则 $\angle O'MA = 90°,$

$\because$ 点 O' 的坐标是 $(1, \sqrt{3})$，

$\therefore O'M = \sqrt{3}, OM = 1.$

$\therefore AO = 2,$

$\therefore AM = 2 - 1 = 1.$

$\therefore \tan \angle O'AM = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}.$

$\therefore \angle O'AM = 60°$. 即旋转角为 60°.

$\because \angle CAC' = \angle OAO' = 60°.$

$\because$ 把 $\triangle OAC$ 绕点 A 按顺时针方向转到 $\triangle O'AC'$，

$\therefore S_{\triangle OAC} = S_{\triangle O'AC'}.$

$\therefore$ 阴影部分的面积 $S = S_{扇形OAO'} + S_{\triangle O'AC'} - S_{\triangle OAC} - S_{扇形COC'} = S_{扇形OAO'} - S_{扇形COC'} = \frac{60\pi \times 2^2}{360} - \frac{60\pi \times 1^2}{360} = \frac{\pi}{2}.$

三、**20.** 解：(1) $\because OD \perp AB, \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DB}.$

$\therefore \angle DEB = \frac{1}{2}\angle AOD = 26°.$

(2) 在 Rt $\triangle AOC$ 中，$OC = 3, OA = 5$，由勾股定理得 $AC = 4$. $\because OD \perp AB,$

$\therefore AB = 2AC = 8.$

21. 解：(1) $\because$ 扇形的半径 $R = 30$ cm，面积 $S = 300\pi$ cm^2，

$\therefore$ 扇形的弧长 $l = \frac{2S}{R} = \frac{600\pi}{30} = 20\pi$(cm).

设圆锥的底面圆半径为 r cm，根据题意，得 $2\pi r = 20\pi,$

$\therefore r = 10.$

$\therefore$ 圆锥的高为 $\sqrt{30^2 - 10^2} = 20\sqrt{2}$(cm).

22. 证明：连接 BM.

$\because AP \perp BC$ 于 $P,$

$\therefore \angle CAP = 90° - \angle C.$

$\because AM$ 为 $\odot O$ 的直径，

$\therefore \angle ABM = 90°,$

$\therefore \angle BAM = 90° - \angle M.$

又 $\because \angle M = \angle C,$

$\therefore \angle BAM = \angle CAP.$

23. (1) 证明：$\because \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{AC},$

$\therefore \angle ACD = \angle B.$

又 $\because \angle BAC = \angle CAF,$

$\therefore \triangle ACF \backsim \triangle ABC,$

$\therefore \frac{AC}{AB} = \frac{AF}{AC}$，即 $AC^2 = AB \cdot AF.$

(2) 解：如图所示，连接 OA, OC，过点 O 作 $OE \perp AC$，垂足为点 $E.$

$\because \angle ABC = 60°,$

$\therefore \angle AOC = 120°.$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

荣德基 主编

典中点

综合应用创新题 典中点

极速提分法

思想 方法 技巧 应用



九年级 数学 上 (JJ版)

陕西新华出版传媒集团
陕西人民教育出版社

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

极速提分18招

思想 方法 技巧 应用 四类绝招速解百题，招招见效助拿高分

第1招 配方法的六种常见应用 …… 1 ▶第二十四章
第2招 根的判别式的六种常见应用 …… 2 ▶第二十四章
第3招 根与系数的关系的九种应用 …… 4 ▶第二十四章
第4招 一元二次方程与三角形的综合 …… 6 ▶第二十四章
第5招 一元二次方程中常见易错易混问题归类 …… 7 ▶第二十四章
第6招 降次思想在求代数式的值和解方程中的应用 …… 9 ▶第二十四章
第7招 成比例线段的证明和计算的五种常用作辅助线的方法 …… 11 ▶第二十五章
第8招 巧作平行线构造相似三角形 …… 13 ▶第二十五章
第9招 证比例式或等积式的七种技巧 …… 14 ▶第二十五章
第10招 求三角函数值的常见技巧 …… 17 ▶第二十六章
第11招 巧用构造法求几种特殊角的三角函数值 …… 18 ▶第二十六章
第12招 “化斜为直”构造直角三角形的方法 …… 19 ▶第二十六章
第13招 巧用根的判别式解图像的公共点问题 …… 20 ▶第二十七章
第14招 反比例函数与一次函数的综合应用 …… 21 ▶第二十七章
第15招 巧用圆的基本性质解圆的五种关系 …… 24 ▶第二十八章
第16招 巧用勾股定理解决求圆中线段长问题 …… 25 ▶第二十八章
第17招 求阴影部分面积的技巧 …… 27 ▶第二十八章
第18招 建模思想应用的常见类型归类 …… 29 ▶第二十四～二十七章
参考答案及点拨 …… 32

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第1招　配方法的六种常见应用

教你一招

配方的应用有两个大的方面：二次三项式的配方和用配方法解一元二次方程，其依据是完全平方公式 $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$，还广泛应用于求最值、求待定系数的值等，是一个重要的数学方法.

典例剖析

例 当 x 取何值时，代数式 $2x^2 - 6x + 7$ 的值最小？并求出这个最小值.

解题秘方：求代数式的最值，用配方法就要先将代数式转化成 $a(x+m)^2 + n$ 的形式，然后根据完全平方式的非负性求代数式的最值.

解：$2x^2 - 6x + 7 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}$.

$\because 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \geqslant 0$，$\therefore 2x^2 - 6x + 7 \geqslant \frac{5}{2}$.

$\therefore$ 当 $x = \frac{3}{2}$ 时，$2x^2 - 6x + 7$ 的值最小，最小值为 $\frac{5}{2}$.

方法提醒：代数式 $ax^2 + bx + c(a \neq 0)$ 配成 $a(x+m)^2 + n$ 的形式后，若 $a > 0$，则当 $x = -m$ 时，代数式取得最小值 n；若 $a < 0$，则当 $x = -m$ 时，代数式取得最大值 n.

分类训练

☞（答案见32页）

应用1　配方法在解方程中的应用

1. 解方程：$x^2 - 2x - 2\,019 = 0$.

应用2　配方法在求有关二次三项式的待定系数中的应用

2. 已知关于 x 的二次三项式 $x^2 + (k+1)x + k^2 - 2k + 1$ 是完全平方式，求 k 的值.

应用3　配方法在求二次三项式的最大（小）值中的应用

3. 求多项式 $-2x^2 - 4x + 7$ 的最大值.

4. 用配方法说明代数式 $x^2 - 8x + 17$ 的值恒大于零. 再求出当 x 取何值时，这个代数式的值最小，最小值是多少？

应用4　配方法在判定一元二次方程中的应用

5. 试证明关于 x 的方程 $(a^2 - 8a + 20)x^2 + 2ax + 1 = 0$，无论 a 为何值，该方程都是一元二次方程.

应用5　配方法在求多个未知数的值中的应用

6. 已知 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 的三边，且 $a^2 + b^2 + c^2 - 6a - 8b - 10c + 50 = 0$.

（1）求 a, b, c 的值；

（2）判断 $\triangle ABC$ 的形状.

应用6　配方法在比较两个二次三项式的大小中的应用

7. 设 $A = 2x^2 - 4x - 1$，$B = x^2 - 6x - 6$，试比较 A 与 B 的大小.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第2招 根的判别式的六种常见应用

教你一招

对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$,式子 b^2-4ac 的值决定了一元二次方程的根的情况,利用根的判别式可以不解方程直接判断方程根的情况,反过来,利用方程根的情况可以确定方程中待定系数的值或取值范围.

典例剖析

例 【中考·岳阳】已知关于 x 的方程 $x^2-(2m+1)x+m(m+1)=0$.

(1)求证:方程总有两个不等的实数根;

(2)已知方程的一个根为 $x=0$,求代数式 $(2m-1)^2+(3+m)(3-m)+7m-5$ 的值(要求先化简再求值).

解题秘方:一元二次方程根的判别式的应用主要有以下三种情况:

1. 不解方程,由根的判别式的正负性及是否为0可直接判定根的情况.

2. 根据方程根的情况,结合根的判别式来确定方程中待定字母的取值范围,若二次项系数中含有字母,则应注意检验二次项系数是否为零.

3. 应用判别式证明方程根的情况(有实根、无实根、有两个不等的实根、有两个相等的实根).

(1)**证明**:∵关于 x 的方程 $x^2-(2m+1)x+m(m+1)=0$ 是一元二次方程,

∴$[-(2m+1)]^2-4m(m+1)=1>0$.

∴方程总有两个不等的实数根.

(2)**解**:∵$x=0$ 是此方程的一个根,

∴把 $x=0$ 代入方程中得到 $m(m+1)=0$.

∴$m=0$ 或 $m=-1$.

$(2m-1)^2+(3+m)(3-m)+7m-5$

$=4m^2-4m+1+9-m^2+7m-5$

$=3m^2+3m+5$,

把 $m=0$ 代入 $3m^2+3m+5$,

得 $3m^2+3m+5=5$;

把 $m=-1$ 代入 $3m^2+3m+5$,

得 $3m^2+3m+5=3\times1-3+5=5$.

综上,原代数式的值为5.

分类训练

☞(答案见32页)

应用1 利用根的判别式判断不含字母系数的方程的根的情况

1. 判断下列方程的根的情况.

(1)$x^2+x+\frac{1}{4}=0$;

(2)$x^2+2x-1=0$;

(3)$x^2+x+2=0$.

应用2 利用根的判别式判断含字母系数的方程根的情况

2. 已知关于 x 的方程 $x^2-2x-m=0$ 没有实数根,其中 m 是实数,试判断关于 x 的方程 $x^2+2mx+m(m+1)=0$ 有无实数根.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

应用 3　利用根的判别式求方程的字母系数的值或取值范围

3. 已知关于 x 的一元二次方程 $mx^2-(m+2)x+2=0$.

(1)证明:不论 m 为何值,方程总有实数根;

(2)m 为何整数时,方程有两个不相等的正整数根?

应用 4　利用根的判别式求代数式的值

4. 已知关于 x 的方程 $x^2+(2m-1)x+4=0$ 有两个相等的实数根,求 $\dfrac{m-1}{(2m-1)^2+2m}$ 的值.

应用 5　利用根的判别式确定三角形的形状

5. 已知关于 x 的一元二次方程 $(a+c)x^2+2bx+(a-c)=0$,其中 a,b,c 分别为 $\triangle ABC$ 三边的长.

(1)如果 $x=-1$ 是方程的根,试判断 $\triangle ABC$ 的形状,并说明理由;

(2)如果方程有两个相等的实数根,试判断 $\triangle ABC$ 的形状,并说明理由;

(3)如果 $\triangle ABC$ 是等边三角形,试求这个一元二次方程的根.

应用 6　利用根的判别式探求菱形条件

6. 已知 $\square ABCD$ 的两边 AB,AD 的长是关于 x 的方程 $x^2-mx+\dfrac{m}{2}-\dfrac{1}{4}=0$ 的两个根.

(1)m 为何值时,$\square ABCD$ 是菱形?并求出菱形的边长.

(2)若 AB 的长为 2,求 $\square ABCD$ 的周长是多少?

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第3招 根与系数的关系的九种应用

教你一招

如果一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的两实数根为 x_1,x_2，那么 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$，这就是一元二次方程的根与系数的关系.

反过来，如果 x_1,x_2 满足 $x_1+x_2=p$，$x_1x_2=q$，那么 x_1,x_2 是一元二次方程 $x^2-px+q=0$ 的两个根.

利用一元二次方程的根与系数的关系，我们可以解决诸如已知一根求另一根、求有关两根的代数式的值、构造方程、证明等式和不等式等问题，它是中学数学中的一个重要工具.

典例剖析

例 已知关于 x 的方程 $(a-5)x^2-4x-1=0$，

(1)若方程有实数根，求 a 的取值范围；

(2)是否存在这样的实数 a，使方程的两根 x_1,x_2 满足 $x_1+x_2+x_1x_2=3$？若存在，求出实数 a 的值；若不存在，请说明理由.

解题秘方：1. 对于二次项系数含有字母的方程，当方程未指明是一元二次方程或有两个根时，必须将方程按二次项系数为 0 和不为 0 两种情况进行分类讨论；2. 解答涉及一元二次方程根的存在性问题，一般先假设存在，根据根与系数的关系列出关于字母系数的方程，求出字母系数的值，再看它是否满足根的判别式大于或等于 0，最后确定字母值的存在性.

解：(1)当 $a=5$ 时，方程为 $-4x-1=0$，方程有实数根；

当 $a\neq5$ 时，方程为一元二次方程，

$b^2-4ac=16+4(a-5)=4a-4\geqslant0$，解得 $a\geqslant1$.

$\therefore a$ 的取值范围为 $a\geqslant1$.

(2)根据题意得 $x_1+x_2=\frac{4}{a-5}$，$x_1x_2=-\frac{1}{a-5}$.

$\because x_1+x_2+x_1x_2=3$，

$\therefore \frac{4}{a-5}-\frac{1}{a-5}=3$.

解这个方程得 $a=6$.

经检验，$a=6$ 是方程的解.

又$\because a=6$ 满足 $b^2-4ac\geqslant0$，

$\therefore$ 存在实数 a，使方程的两根 x_1,x_2 满足 $x_1+x_2+x_1x_2=3$，此时 $a=6$.

分类训练

☞(答案见 33 页)

应用1 已知方程一根，求另一根及待定系数

1. 已知方程 $x^2+kx-6=0$ 的一个根为 2，求它的另一根及 k 的值.

应用2 已知方程，求有关两根的代数式的值

2. 已知 x_1,x_2 是方程 $x^2-4x+2=0$ 的两根，求：

(1)$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ 的值；

(2)$(x_1-x_2)^2$ 的值.

应用3 已知两方程，求含两未知数的代数式的值

3. 已知方程 $2m^2-5m-1=0$ 与 $2n^2-5n-1=0$，且 $m\neq n$，求 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

应用 4　已知方程，求字母系数的取值范围

4. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-3x+k+1=0$ 的两根的平方和小于 5，求 k 的取值范围.

应用 5　已知方程，求字母系数的值

5. 已知关于 x 的方程 $x^2+2(m-2)x+m^2+4=0$ 有两个实数根，且两个根的平方和比两个根的积大 21，求 m 的值.

应用 6　已知方程，判断根的符号

6. 不解方程，判断方程 $2x^2+3x-7=0$ 两根的符号.

应用 7　已知两根，求一元二次方程

7. 已知 -1 和 3 是关于 x 的某个一元二次方程的根，且方程中二次项系数为 1，请写出这个方程.

应用 8　结合根的判别式证明等式

8. 已知实数 x,y,z 满足 $x=6-y,z^2=xy-9$. 求证：$x=y$.

应用 9　结合根的判别式证明不等式

9. 已知实数 a,b,c 满足 $\begin{cases}a^2-a-bc+1=0,\\2a^2-2bc-b-c+2=0.\end{cases}$

求证：$a\geqslant 1$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第4招 一元二次方程与三角形的综合

教你一招

一元二次方程是初中数学重点内容之一,常常与其他知识结合,其中一元二次方程与三角形的综合应用就是非常重要的一种,主要考查一元二次方程的根的概念、根的判别式的应用、一元二次方程的解法及与等腰三角形、直角三角形的性质等知识的综合运用.

分类训练 ☞(答案见34页)

训练角度1 一元二次方程与三角形的三边关系的综合

1. 三角形的两边长分别为4和6,第三边长是方程 $x^2-7x+12=0$ 的解,则第三边的长为(　　)

A. 3　　B. 4

C. 3或4　　D. 无法确定

2. 根据一元二次方程根的定义,解答下列问题.

一个三角形两边长分别为3 cm和7 cm,第三边长为a cm,且整数a满足 $a^2-10a+21=0$,求三角形的周长.

解:由已知可得 $4<a<10$,则 a 可取5,6,7,8,9.(第一步)

当 $a=5$ 时,代入 $a^2-10a+21$,得 $5^2-10\times5+21\neq0$,故 $a=5$ 不是方程的根.

同理可知 $a=6$,$a=8$,$a=9$ 都不是方程的根,$a=7$ 是方程的根.(第二步)

∴ 三角形的周长是 $3+7+7=17$(cm).

上述过程中,第一步是根据_____

_____所得,第二步应用的数学思想是_____,确定a值的大小是根据_____.

训练角度2 一元二次方程与直角三角形的综合

3. 已知一个直角三角形的两条直角边的长恰好是方程 $x^2-17x+60=0$ 的两个根,则这个直角三角形的斜边长为_____.

4. 已知a,b,c分别是$\triangle ABC$的三边长,当 $m>0$ 时,关于x的一元二次方程 $c(x^2+m)+b(x^2-m)-2\sqrt{m}ax=0$ 有两个相等的实数根,试判断$\triangle ABC$的形状,并说明理由.

训练角度3 一元二次方程与等腰三角形的综合

5. 已知关于x的一元二次方程 $x^2-(2k+1)x+k^2+k=0$.

(1)求证:方程有两个不相等的实数根;

(2)若$\triangle ABC$的两边AB,AC的长是这个方程的两个实数根,第三边BC的长为5. 当$\triangle ABC$是等腰三角形时,求k的值.

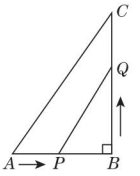
训练角度4 一元二次方程与动态几何的综合

6. 如图,在$\triangle ABC$中,$\angle B=90°$,$AB=5$ cm,$BC=7$ cm. 点P从点A开始沿AB边向点B以1 cm/s的速度移动,点Q从点B开始沿BC边向点C以2 cm/s的速度移动,当一点到达终点时另一点也停止运动.

(1)如果点P,Q分别从点A,B同时出发,那么几秒后,$\triangle PBQ$的面积为4 cm^2?

(2)如果点P,Q分别从点A,B同时出发,那么几秒后,PQ的长度为5 cm?

(3)在(1)中,$\triangle PBQ$的面积能否为7 cm^2?并说明理由.



(第6题)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

第5招　一元二次方程中常见易错易混问题归类

教你一招

一元二次方程是初中数学的重要内容，是刻画某些实际问题中数量关系的有效的数学模型，可以利用其解决某些实际问题. **方程思想**是各类考试必考的数学思想. 由于部分学生的思维不缜密，常会出现以下各类错误，通过归类练习，以示警示.

典例剖析

例 已知6是关于 x 的方程 $x^2-(m+2)x+2m=0$ 的一个实数根，并且这个方程的两个实数根恰好是等腰三角形 ABC 的两条边的长，则 $\triangle ABC$ 的周长为多少？

解题秘方：本题考查了一元二次方程的解、解一元二次方程及三角形三边的关系，掌握数形结合思想是解题关键.

解：把 $x=6$ 代入方程得 $36-6(m+2)+2m=0$，解得 $m=6$，

则原方程为 $x^2-8x+12=0$，解得 $x_1=2$，$x_2=6$.

由这个方程的两个根恰好是等腰三角形 ABC 的两条边的长，可知：

①当 $\triangle ABC$ 的腰长为6，底边长为2时，$\triangle ABC$ 的周长为 $6+6+2=14$；

②当 $\triangle ABC$ 的腰长为2，底边长为6时，因为 $2+2<6$，不合题意，舍去.

综上所述，$\triangle ABC$ 的周长为14.

分类训练

☞(答案见34页)

易错1　忽视二次项系数不为零的条件而致错

1. 若关于 x 的方程 $(k-3)x^{|k|-1}-x-2=0$ 是一元二次方程，求不等式 $kx-2k+6\leqslant 0$ 的解集.

易错2　将多项式进行配方时与方程配方相混淆而致错

2. 将 $2y^2-6y+1$ 进行配方.

易错3　应用根的判别式求字母的取值范围时忽视一元二次方程的隐含条件

3. 已知关于 x 的方程 $k^2x^2+(2k-1)x+1=0$ 有两个不相等的实数根，求 k 的取值范围.

易错4　在方程两边同时除以含有未知数的式子，导致失根

4. 解方程：$3(2x+5)=2x(2x+5)$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

易错5 利用根与系数的关系时未考虑根的判别式

5. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-6x+(2m+1)=0$ 有实数根.

(1) 求 m 的取值范围;

(2) 如果方程的两个实数根为 x_1, x_2, 且 $2x_1x_2+x_1+x_2\geqslant 20$, 求 m 的取值范围.

易错6 忽视几何图形对方程根的要求

6. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-(3k+1)x+2k^2+2k=0$.

(1) 求证: 无论 k 取何实数值, 方程总有实数根;

(2) 若等腰三角形 ABC 的一边长 $a=6$, 另两边长 b, c 恰好是这个方程的两个根, 求此三角形的另两边长.

易错7 忽略实际问题对方程根的要求

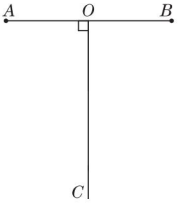
7. 某商场销售一批名牌衬衫, 平均每天可售出 20 件, 每件盈利 40 元, 为了扩大销售, 尽快减少库存, 商场决定采取适当的降价措施, 经调查发现, 如果每件衬衫降价 1 元, 商场平均每天可多售出 2 件.

(1) 若商场平均每天销售这种衬衫的盈利要达到 1 200 元, 每件衬衫应降价多少元?

(2) 每件衬衫降价多少元时, 商场每天盈利最多?

易错8 考虑问题不全面, 出现漏解

8. 如图, $AO=OB=50$ cm, OC 是一条射线, $OC\perp AB$, 蚂蚁甲由 A 点以 2 cm/s 的速度向 B 点爬行, 同时蚂蚁乙由 O 点以 3 cm/s 的速度沿 OC 方向爬行, 是否存在这样的时刻, 使两只蚂蚁与 O 点组成的三角形的面积是 450 cm^2?



(第 8 题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第6招　降次思想在求代数式的值和解方程中的应用

教你一招

解一元二次方程的基本思路是将一元二次方程降次，转化为一元一次方程求解，这种解题思路实质就是应用**降次思想**. 应用降次思想也能把某些高次方程转化为一元二次方程求解. 在求一些代数式的值时也常用降次思想求解.

典例剖析

例 已知：$2x^2-x=1$，求代数式 $6x^3+x^2-5x+2\,020$ 的值.

解题秘方：利用降次思想，将已知变式为 $x^2=\frac{1}{2}(x+1)$ 后，反复运用 $x^2=\frac{1}{2}(x+1)$ 进行降次化简，将“x”的三次式转化为“x”的一次式，然后代入求解.

解：$\because 2x^2-x=1$，$\therefore x^2=\frac{1}{2}(x+1)$.

$$\therefore x^3=\frac{1}{2}(x+1)\cdot x$$

$$=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1}{2}x$$

$$=\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}.$$

$$\therefore 6x^3+x^2-5x+2\,020$$

$$=6\left(\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}(x+1)-5x+2\,020$$

$$=2\,022.$$

分类训练

☞（答案见36页）

技巧1　利用降次思想解一元二次方程

方法1　开方降次法

1. 用直接开平方法解下列方程：

(1) $3(x+1)^2=\frac{1}{3}$；

(2) $(2x+3)^2-12=0$.

方法2　配方降次法

2. 用配方法解下列方程：

(1) $3x^2-12x+9=0$；

(2) $2x^2-3=4x$.

方法3　因式分解降次法

3. 解下列方程：

(1) $4x^2-4x+1=3x^2-6x+9$；

(2) $(3x+1)^2+4(3x+1)+4=0$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

技巧 2 利用降次思想解高次方程

方法 4 因式分解降次法

4. 解方程：$x^3-2x^2-4x+8=0$.

技巧 3 利用降次思想求代数式的值

方法 5 降次代换法

5. 已知 $x=2-\sqrt{5}$，求 $x^4-8x^3+16x^2-x+1$ 的值.

方法 6 整体代换法

6. 若 $x^2+x-1=0$，求 x^3+2x^2+3 的值.

方法 7 方程的根及根与系数的关系降次法

7. 设 x_1，x_2 是一元二次方程 $x^2+x-3=0$ 的两个根，求 ${x_1}^3-4{x_2}^2+19$ 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

参考答案及点拨

第1招 配方法的六种常见应用

1. 解：$x^2-2x-2\,019=0$，

$(x-1)^2-2\,020=0$，

$(x-1)^2=2\,020$，

$\therefore x_1=1+2\sqrt{505}$，$x_2=1-2\sqrt{505}$.

2. 解：$x^2+(k+1)x+k^2-2k+1$

$=\left(x+\frac{k+1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}k^2-\frac{5}{2}k+\frac{3}{4}$.

$\because$ 关于 x 的二次三项式 $x^2+(k+1)x+k^2-2k+1$ 是完全平方式，

$\therefore \frac{3}{4}k^2-\frac{5}{2}k+\frac{3}{4}=0$，解得 $k=3$ 或 $k=\frac{1}{3}$.

点拨： 本题利用配方法将 $x^2+(k+1)x+k^2-2k+1$ 配方得到 $\left(x+\frac{k+1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}k^2-\frac{5}{2}k+\frac{3}{4}$，由 $x^2+(k+1)x+k^2-2k+1$ 是完全平方式，可知 $\frac{3}{4}k^2-\frac{5}{2}k+\frac{3}{4}$ 的值为0，即可求得 k 的值.

3. 解：原式 $=-2(x^2+2x)+7$

$=-2[(x+1)^2-1]+7$

$=-2(x+1)^2+9$.

$\because -2(x+1)^2\leqslant 0$，

$\therefore -2x^2-4x+7$ 的最大值是9.

点拨： 本题利用配方法将 $-2x^2-4x+7$ 配方得 $-2(x+1)^2+9$，从而可知，当 $x=-1$ 时原式有最大值为9.

4. 解：$\because x^2-8x+17=(x-4)^2+1>0$，

$\therefore$ 不论 x 取何值，这个代数式的值恒大于零.

当 $(x-4)^2=0$ 时，

此代数式的值最小，

即当 $x=4$ 时，这个代数式的值最小，最小值是1.

5. 证明：$\because a^2-8a+20=(a-4)^2+4\neq 0$，$\therefore$ 无论 a 为何值，该方程都是一元二次方程.

6. 解：(1)由 $a^2+b^2+c^2-6a-8b-10c+50=0$，

得 $(a-3)^2+(b-4)^2+(c-5)^2=0$.

$\because (a-3)^2\geqslant 0$，$(b-4)^2\geqslant 0$，$(c-5)^2\geqslant 0$，

$\therefore a-3=0$，$b-4=0$，$c-5=0$，

$\therefore a=3$，$b=4$，$c=5$.

(2)$\because 3^2+4^2=5^2$，即 $a^2+b^2=c^2$，

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形.

点拨： 本题运用了配方法，由公式 $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ 将原式整理求出 a，b，c 的值，再由勾股定理的逆定理判断三角形形状.

7. 解：$A-B=2x^2-4x-1-x^2+6x+6=x^2+2x+5=(x+1)^2+4$.

$\because (x+1)^2\geqslant 0$，$\therefore (x+1)^2+4>0$. $\therefore A>B$.

点拨： 本题用作差法比较大小，将 $A-B$ 的结果配方得到 $(x+1)^2+4$，此式的值恒大于0，即可得到 A 与 B 的大小.

第2招 根的判别式的六种常见应用

1. 解：(1)$1^2-4\times\frac{1}{4}=0$，方程有两个相等的实数根.

(2)$2^2-4\times(-1)=8>0$，方程有两个不相等的实数根.

(3)$1^2-4\times 2=-7<0$，方程无实数根.

点拨： 直接利用根的判别式判断方程根的情况即可.

2. 解：$\because x^2-2x-m=0$ 没有实数根，

$\therefore (-2)^2-4\cdot(-m)=4+4m<0$，即 $m<-1$.

$\therefore$ 对于方程 $x^2+2mx+m(m+1)=0$，

$(2m)^2-4\cdot m(m+1)=-4m>4$，

$\therefore$ 方程 $x^2+2mx+m(m+1)=0$ 有两个不相等的实数根.

点拨： 由 $x^2-2x-m=0$ 无实数根得出 $m<-1$，从而得到方程 $x^2+2mx+m(m+1)=0$ 的根的判别式的值 $-4m>4$，故该方程有两个不相等的实数根.

3. (1)证明：$[-(m+2)]^2-8m=m^2-4m+4=(m-2)^2$.

$\because (m-2)^2\geqslant 0$，

$\therefore$ 不论 m 为何值，方程总有实数根.

(2)解：解关于 x 的一元二次方程 $mx^2-(m+2)x+2=0$，得 $x=\frac{m+2\pm(m-2)}{2m}$. $\therefore x_1=\frac{2}{m}$，$x_2=1$.

$\because$ 方程的两个根都是正整数，

$\therefore \frac{2}{m}$ 是正整数，$\therefore m=1$ 或 $m=2$.

又$\because$ 方程的两个根不相等，$\therefore m\neq 2$，$\therefore m=1$.

点拨： (1)求出方程根的判别式，根据平方的非负性证明即可. (2)利用公式法求出方程的两个根. 再根据方程有两个不相等的正整数根求得 $m=1$.

4. 解：$\because$ 关于 x 的方程 $x^2+(2m-1)x+4=0$ 有两个相等的实数根，

$\therefore (2m-1)^2-4\times 1\times 4=0$，即 $2m-1=\pm 4$.

$\therefore m=\frac{5}{2}$ 或 $m=-\frac{3}{2}$.

当 $m=\frac{5}{2}$ 时，$\frac{m-1}{(2m-1)^2+2m}=\frac{\frac{5}{2}-1}{16+5}=\frac{1}{14}$；

当 $m=-\frac{3}{2}$ 时，$\frac{m-1}{(2m-1)^2+2m}=\frac{-\frac{3}{2}-1}{16-3}=-\frac{5}{26}$.

5. 解：(1)$\triangle ABC$ 是等腰三角形，理由：$\because x=-1$ 是方程的根，$\therefore (a+c)\times(-1)^2-2b+(a-c)=0$.

$\therefore a+c-2b+a-c=0$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore a-b=0.\therefore a=b.$

$\therefore \triangle ABC$ 是等腰三角形.

(2) $\triangle ABC$ 是直角三角形. 理由:

∵ 方程有两个相等的实数根,

$\therefore (2b)^2-4(a+c)(a-c)=0,$

$\therefore 4b^2-4a^2+4c^2=0,\therefore a^2=b^2+c^2,$

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形.

(3) 如果 $\triangle ABC$ 是等边三角形,那么 $a=b=c.$

当 $a=b=c$ 时,原方程可整理为 $2ax^2+2ax=0.$

$\therefore x^2+x=0.$ 解得 $x_1=0,x_2=-1.$

点拨: 本题将方程根的判别式与三角形结合在一起进行考查,解题时根据给出的条件灵活运用即可.

6. 解: (1) 由题意,得 $m^2-4\left(\frac{m}{2}-\frac{1}{4}\right)=m^2-2m+1=0.$

解得 $m_1=m_2=1.$

故当 m 为 1 时,$\square ABCD$ 是菱形.

此时原方程为 $x^2-x+\frac{1}{4}=0$,解得 $x_1=x_2=\frac{1}{2}.$

即菱形 $ABCD$ 的边长为 $\frac{1}{2}.$

(2) 由题意知 $x=2$ 是关于 x 的方程 $x^2-mx+\frac{m}{2}-\frac{1}{4}=0$ 的一个根,∴ 将 $x=2$ 代入原方程得 $4-2m+\frac{m}{2}-\frac{1}{4}=0,$

解得 $m=\frac{5}{2}$,故原方程为 $x^2-\frac{5}{2}x+1=0,$

解得 $x_1=2,x_2=\frac{1}{2}.\therefore AD=\frac{1}{2}.$

故 $\square ABCD$ 的周长是 $2\times\left(2+\frac{1}{2}\right)=5.$

点拨: 本题将方程根的判别式与平行四边形、菱形相结合,灵活利用给出的条件进行求解即可.

第 3 招 根与系数的关系的九种应用

1. 解: 设方程的另一根为 $x_1.$

由题意得 $\begin{cases}x_1+2=-k,\\2x_1=-6,\end{cases}$ 解得 $x_1=-3,k=1.$

∵ 当 $k=1$ 时,$1^2-4\times(-6)=25>0,$

∴ 方程的另一根为 -3,k 的值是 1.

点拨: 利用根与系数的关系联立方程求解即可.

2. 解: 由已知得 $x_1+x_2=4,x_1x_2=2.$

(1) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{4}{2}=2.$

(2) $(x_1-x_2)^2=x_1^2+x_2^2-2x_1x_2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=4^2-4\times2=16-8=8.$

点拨: 将代数式化简成关于 x_1+x_2 和 x_1x_2 的组合形式,然后利用根与系数的关系求解.

3. 解: 由题意得 m,n 是 $2x^2-5x-1=0$ 的两个不相等的实数根. 由根与系数的关系得 $m+n=\frac{5}{2},mn=-\frac{1}{2}.$

$$\therefore \frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{m+n}{mn}=\frac{\frac{5}{2}}{\frac{-1}{2}}=-5.$$

4. 解: 设方程的两根分别为 x_1,x_2,则 $x_1+x_2=3,x_1x_2=k+1.$

∵ $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=3^2-2(k+1)<5,\therefore k>1.$ ①

又∵ $(-3)^2-4(k+1)\geqslant0,$

$\therefore k\leqslant\frac{5}{4}.$ ② 由①②得 $1<k\leqslant\frac{5}{4}.$

点拨: 本题容易忽略 $b^2-4ac\geqslant0$ 这个条件,做题时要注意方程有根的条件.

5. 解: ∵ 方程有两个实数根,

$\therefore [2(m-2)]^2-4\times1\times(m^2+4)\geqslant0.$

解这个不等式,得 $m\leqslant0.$

设方程的两个实数根分别为 x_1,x_2,

则 $x_1+x_2=-2(m-2),x_1x_2=m^2+4.$

∵ $x_1^2+x_2^2-x_1\cdot x_2=21,\therefore (x_1+x_2)^2-3x_1\cdot x_2=21.$

$\therefore [-2(m-2)]^2-3(m^2+4)=21.$

整理得 $m^2-16m-17=0.$ 解得 $m_1=17,m_2=-1.$

又∵ $m\leqslant0,\therefore m=-1.$

点拨: 利用根与系数的关系求得两根的和与两根的积,再根据已知条件求得关于 m 的二次方程,对其进行求解,本题易忽略 $b^2-4ac\geqslant0$ 这一条件.

6. 解: ∵ $2x^2+3x-7=0,$

$\therefore 3^2-4\times2\times(-7)=65>0.$

∴ 方程有两个不相等的实数根.

设方程的两个根为 x_1,x_2,

∵ $x_1\cdot x_2=-\frac{7}{2}<0,$

∴ 原方程有两个异号的实数根.

点拨: 先由 $b^2-4ac>0$ 判断有两实数根,再根据 $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$ 判断两实数根是同号还是异号.

7. 解: 设这个方程为 $x^2+ax+b=0.$

由已知得 $-1+3=-a,-1\times3=b,$

$\therefore a=-2,b=-3.$

∴ 这个方程为 $x^2-2x-3=0.$

点拨: 已知方程有两实数根,设方程为 $x^2+ax+b=0$,根据根与系数的关系求此方程即可.

8. 证明: 由题意知 $x+y=6,xy=z^2+9,$

所以 x,y 是关于 t 的一元二次方程 $t^2-6t+z^2+9=0$ 的两个实数根,从而 $36-4(z^2+9)=-4z^2\geqslant0,$

所以 $z=0$,从而 $b^2-4ac=0.$

故关于 t 的方程有两个相等的实数根,所以 $x=y.$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. **证明**:由题意知 $bc=a^2-a+1$,

$b+c=2a^2-2bc+2=2a$.

于是,b,c 是关于 t 的一元二次方程 $t^2-2at+a^2-a+1=0$ 的两个实数根.

所以 $4a^2-4(a^2-a+1)\geqslant 0$,解得 $a\geqslant 1$.

点拨: 解本题的关键是构造以 b,c 为两实数根的一元二次方程,a 含在这个方程的系数里,利用判别式大于等于 0 即可证得 $a\geqslant 1$.

第 4 招 一元二次方程与三角形的综合

1. C

2. 三角形任意两边之和大于第三边,任意两边之差小于第三边;分类讨论思想;方程根的定义

3. 13

4. **解**:$\triangle ABC$ 是直角三角形. 理由如下:

原方程可化为 $(b+c)x^2-2\sqrt{m}ax+cm-bm=0$,

$\because m>0$,且原方程有两个相等的实数根,

$\therefore (-2\sqrt{m}a)^2-4(b+c)(cm-bm)$

$=4ma^2-4m(c-b)(c+b)$

$=4m(a^2+b^2-c^2)$

$=0$.

$\therefore a^2+b^2-c^2=0$,即 $a^2+b^2=c^2$.

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形.

5. (1)**证明**:$\because a=1$,$b=-(2k+1)$,$c=k^2+k$,

$\therefore b^2-4ac=[-(2k+1)]^2-4(k^2+k)=1>0$.

$\therefore$ 方程有两个不相等的实数根.

(2)**解**:$\because \triangle ABC$ 的两边 AB,AC 的长是方程 $x^2-(2k+1)x+k^2+k=0$ 的两个实数根,

$\therefore$ 由(1)知,$AB\neq AC$.

$\because \triangle ABC$ 的第三边 BC 的长为 5,且 $\triangle ABC$ 是等腰三角形,

$\therefore AB=5$ 或 $AC=5$,即 $x=5$ 是方程 $x^2-(2k+1)x+k^2+k=0$ 的一个解.

将 $x=5$ 代入方程 $x^2-(2k+1)x+k^2+k=0$,得 $25-5(2k+1)+k^2+k=0$,解得 $k=4$ 或 $k=5$.

当 $k=4$ 时,原方程为 $x^2-9x+20=0$,

解得 $x_1=5$,$x_2=4$,以 5,5,4 为边长能构成等腰三角形;

当 $k=5$ 时,原方程为 $x^2-11x+30=0$,

解得 $x_1=5$,$x_2=6$,以 5,5,6 为边长能构成等腰三角形.

综上,k 的值为 4 或 5.

6. **解**:设点 P,Q 移动的时间为 x s,则由题意知 $AP=x$ cm,$BP=(5-x)$ cm,$BQ=2x$ cm,$CQ=(7-2x)$ cm.

(1)$S_{\triangle PBQ}=\frac{1}{2}\cdot PB\cdot BQ=\frac{1}{2}\times(5-x)\times 2x=4$.

整理,得 $x^2-5x+4=0$,

解得 $x_1=1$,$x_2=4$.

当 $x=1$ 时,$5-1>0$,$7-2\times 1>0$,满足题意;

当 $x=4$ 时,$5-4>0$,$7-2\times 4<0$,不满足题意,舍去.

故 1 s 后,$\triangle PBQ$ 的面积为 4 cm^2.

(2)由题意知 $PQ^2=PB^2+BQ^2=(5-x)^2+(2x)^2$,

若 $PQ=5$ cm,则 $(5-x)^2+(2x)^2=25$.

解得 $x_1=0$(舍去),$x_2=2$.

当 $x=2$ 时,$5-2>0$,$7-2\times 2>0$,满足题意.

故 2 s 后,PQ 的长度为 5 cm.

(3)不能. 理由如下:仿照(1),

得 $\frac{1}{2}(5-x)\cdot 2x=7$,整理,得 $x^2-5x+7=0$.

$\because 25-4\times 1\times 7=-3<0$,

$\therefore$ 此方程无实数解.

$\therefore \triangle PBQ$ 的面积不能为 7 cm^2.

第 5 招 一元二次方程中常见易错易混问题归类

1. **错解**:由题意知 $|k|-1=2$,解得 $k=\pm 3$.

$\therefore$ 不等式为 $3x-6+6\leqslant 0$ 或 $-3x+6+6\leqslant 0$,$\therefore x\leqslant 0$ 或 $x\geqslant 4$.

诊断:当方程是一元二次方程时,不仅要使未知数的最高次数是 2,还要使二次项的系数不为 0. 本题就是忽视了二次项的系数 $k-3\neq 0$ 这一条件,而导致错解.

正解:由题意知 $\begin{cases}|k|-1=2,\\ k-3\neq 0,\end{cases}\therefore k=-3$.

$\therefore$ 不等式为 $-3x+6+6\leqslant 0$,

$\therefore x\geqslant 4$.

2. **常见错解诊断**:(1)将二次项系数化为 1 时,仍跟给方程配方时一样,各项都除以 2,错得 $2y^2-6y+1=y^2-3y+\frac{1}{2}=\left(y-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{7}{4}$.

(2)配方时,加上一次项系数一半的平方后,为了保证代数式的值不变,必须再减去这个一次项系数一半的平方,不能“只加不减”. 错得 $2y^2-6y+1=2\left[y^2-3y+\left(-\frac{3}{2}\right)^2\right]+1=2\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+1$.

正解:$2y^2-6y+1$

$=2\left[y^2-3y+\left(-\frac{3}{2}\right)^2-\left(-\frac{3}{2}\right)^2\right]+1$

$=2\left[\left(y-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right]+1$

$=2\left(y-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{2}+1$

$=2\left(y-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{7}{2}$.

3. **错解**:由题意,得 $b^2-4ac=(2k-1)^2-4\times k^2\times 1>0$,解得 $k<\frac{1}{4}$.

诊断:对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$,隐含条件 $a\neq 0$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

很容易被忽视，所以二次项系数含字母时，一定要考虑二次项系数不能为0.

正解：由题意，得 $b^2-4ac=(2k-1)^2-4\times k^2\times 1>0$，且 $k^2\neq 0$，解得 $k<\frac{1}{4}$ 且 $k\neq 0$.

所以 k 的取值范围是 $k<\frac{1}{4}$ 且 $k\neq 0$.

4. 解：原方程可化为 $3(2x+5)-2x(2x+5)=0$.

因式分解，得 $(2x+5)(3-2x)=0$.

$\therefore 2x+5=0$ 或 $3-2x=0$.

解得 $x_1=-\frac{5}{2}$，$x_2=\frac{3}{2}$.

点拨： 在解方程时，不能在方程的两边同时除以含有未知数的代数式，否则会造成失根. 本题容易错误地在方程的两边同时除以公因式 $2x+5$，而丢失一个根 $x=-\frac{5}{2}$.

5. 解：(1) 根据题意，得 $(-6)^2-4(2m+1)\geqslant 0$，解得 $m\leqslant 4$.

(2) 根据题意，得 $x_1+x_2=6$，$x_1x_2=2m+1$，而 $2x_1x_2+x_1+x_2\geqslant 20$，

所以 $2(2m+1)+6\geqslant 20$，解得 $m\geqslant 3$.

又 $m\leqslant 4$，所以 m 的取值范围为 $3\leqslant m\leqslant 4$.

6. (1) **证明**：由题意知 $(3k+1)^2-4(2k^2+2k)=9k^2+6k+1-8k^2-8k=k^2-2k+1=(k-1)^2\geqslant 0$.

$\therefore$ 无论 k 取何实数值，方程总有实数根.

(2) **解**：$\because$ $\triangle ABC$ 为等腰三角形，

$\therefore$ 有 $a=b=6$，$a=c=6$ 或 $b=c$ 三种情况.

①当 $a=b=6$ 或 $a=c=6$ 时，可知 $x=6$ 为方程的一个根，

$\therefore 6^2-6(3k+1)+2k^2+2k=0$，解得 $k=3$ 或 $k=5$.

当 $k=3$ 时，方程为 $x^2-10x+24=0$，解得 $x=4$ 或 $x=6$，

$\therefore$ 三角形的另两边长为4，6.

当 $k=5$ 时，方程为 $x^2-16x+60=0$，

解得 $x=6$ 或 $x=10$，

$\therefore$ 三角形的另两边长为6，10.

②当 $b=c$ 时，方程有两个相等的实数根，

$\therefore (k-1)^2=0$，

解得 $k_1=k_2=1$，

$\therefore$ 方程为 $x^2-4x+4=0$，

解得 $x_1=x_2=2$，

此时三角形三边长为6，2，2，不满足三角形三边关系，舍去.

综上可知，三角形的另两边长为4，6或6，10.

7. 错解：(1) 设每件衬衫应降价 x 元，

根据题意，得 $(40-x)(20+2x)=1\ 200$，

整理得 $x^2-30x+200=0$.

解得 $x_1=20$，$x_2=10$.

答：每件衬衫应降价20元或10元.

(2) 由(1)知 $(40-x)(20+2x)=-2x^2+60x+800=-2(x-15)^2+1\ 250$.

因为 $-2(x-15)^2\leqslant 0$，所以当 $-2(x-15)^2=0$，即 $x=15$ 时，$-2(x-15)^2+1\ 250$ 的值最大，

即 $(40-x)(20+2x)$ 有最大值，为1 250.

答：每件衬衫降价15元时，商场每天盈利最多.

错因分析：此题条件是“尽快减少库存”，其含义是每天售出的衬衫越多越好. 因此 $x=10$ 不符合题意，舍去，所以 $x=20$.

正解：(1) 设每件衬衫应降价 x 元，

根据题意，得 $(40-x)(20+2x)=1\ 200$，

整理得 $x^2-30x+200=0$，

解得 $x_1=20$，$x_2=10$.

因为要尽快减少库存，所以 x 应取20.

答：每件衬衫应降价20元.

(2) 由(1)知 $(40-x)(20+2x)=-2x^2+60x+800=-2(x-15)^2+1\ 250$.

因为 $-2(x-15)^2\leqslant 0$，所以当 $-2(x-15)^2=0$，即 $x=15$ 时，$-2(x-15)^2+1\ 250$ 的值最大.

即 $(40-x)(20+2x)$ 有最大值，为1 250.

答：每件衬衫降价15元时，商场每天盈利最多.

易错诊断：运用一元二次方程解决实际问题时，方程的解一般有两个，但由于实际情况的限制，有时会有所取舍，如果对实际情况不了解，就会出现多解的错误. 本题中，根据“尽快减少库存”的实际意义，要对方程的解进行合理取舍，忽略了这一点，结果就会出错.

8. 错解：设 t s后两只蚂蚁与 O 点组成的三角形的面积是450 cm^2. 根据题意，得 $\frac{1}{2}(50-2t)\cdot 3t=450$，整理得 $t^2-25t+150=0$，解得 $t_1=10$，$t_2=15$.

答：分别在10 s和15 s时，两只蚂蚁与 O 点组成的三角形的面积是450 cm^2.

错因分析：此题考虑问题不够全面，漏掉了蚂蚁甲在 OB 上的情况.

正解：(1) 当蚂蚁甲在 AO 段时，设 t s后两只蚂蚁与 O 点组成的三角形的面积是450 cm^2，根据题意，得 $\frac{1}{2}(50-2t)\cdot 3t=450$.

整理得 $t^2-25t+150=0$，解得 $t_1=10$，$t_2=15$.

(2) 蚂蚁甲爬完 AO 这段距离用了 $50\div 2=25$(s)，当它开始由 O 点向 B 点爬行时，设从 O 点开始 x s后两只蚂蚁与 O 点组成的三角形的面积是450 cm^2，根据题意，得 $\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot 3(x+25)=450$，

整理得 $x^2+25x-150=0$.

解得 $x_1=5$，$x_2=-30$(舍去).

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

当 $x=5$ 时，$x+25=30$，即这时蚂蚁爬了 30 s.

答：分别在 10 s，15 s，30 s 时，两只蚂蚁与 O 点组成的三角形的面积是 450 cm^2.

易错诊断：解动点问题要弄清点运动的特征，必要时要注意分类讨论. 如蚂蚁甲由 A 点向 B 点爬行表示蚂蚁甲既可以在线段 AO 上，也可以在线段 OB 上.

第 6 招 降次思想在求代数式的值和解方程中的应用

1. 解：(1)原方程可化为 $(x+1)^2=\frac{1}{9}$，两边直接开平方，

得 $x+1=\pm\frac{1}{3}$，$\therefore x_1=-\frac{2}{3}$，$x_2=-\frac{4}{3}$.

(2)移项，得 $(2x+3)^2=12$，

两边直接开平方，得 $2x+3=\pm2\sqrt{3}$，

$\therefore 2x+3=2\sqrt{3}$ 或 $2x+3=-2\sqrt{3}$，

$\therefore x_1=\frac{2\sqrt{3}-3}{2}$，$x_2=\frac{-2\sqrt{3}-3}{2}$.

点拨：本题用直接开平方法，如(1)将 $x+1$ 看成一个整体，得到关于 $x+1$ 的一次方程求解即可.

2. 解：(1)二次项系数化为 1，得 $x^2-4x+3=0$，

移项，得 $x^2-4x=-3$，

配方，得 $x^2-4x+4=-3+4$，

$\therefore (x-2)^2=1$，

$\therefore x-2=1$ 或 $x-2=-1$，

$\therefore x_1=3$，$x_2=1$.

(2)原方程可化为 $2x^2-4x=3$，

二次项系数化为 1，得 $x^2-2x=\frac{3}{2}$，

配方，得 $x^2-2x+1=\frac{3}{2}+1$，

$\therefore (x-1)^2=\frac{5}{2}$，

$\therefore x-1=\frac{\sqrt{10}}{2}$ 或 $x-1=-\frac{\sqrt{10}}{2}$，

$\therefore x_1=1+\frac{\sqrt{10}}{2}$，$x_2=1-\frac{\sqrt{10}}{2}$.

点拨：利用配方法进行配方求解即可.

3. 解：(1)移项、合并同类项，得 $x^2+2x-8=0$，

因式分解，得 $(x-2)(x+4)=0$，

于是得 $x-2=0$ 或 $x+4=0$，

$\therefore x_1=2$，$x_2=-4$.

(2)因式分解，得 $(3x+1+2)^2=0$，即 $(3x+3)^2=0$，

于是得 $x_1=x_2=-1$.

4. 解：原方程可变形为

$x^2(x-2)-4(x-2)=0$，$(x-2)(x^2-4)=0$，$(x-2)^2(x+2)=0$. 所以 $x_1=x_2=2$，$x_3=-2$.

点拨：直接利用因式分解法进行降次求解即可.

5. 解：原式 $=x^2(x^2-8x+16)-(x-1)$

$=x^2(x-4)^2-(x-1)=[x(x-4)]^2-(x-1)$.

当 $x=2-\sqrt{5}$ 时，

原式 $=[(2-\sqrt{5})(2-\sqrt{5}-4)]^2-(2-\sqrt{5}-1)$

$=[(-\sqrt{5}+2)(-\sqrt{5}-2)]^2-1+\sqrt{5}$

$=1-1+\sqrt{5}=\sqrt{5}$.

6. 解：由 $x^2+x-1=0$ 得 $x^2=1-x$，$x^2+x=1$.

故 $x^3+2x^2+3=x^2(x+2)+3=(1-x)(x+2)+3$

$=-x^2-x+5=-(x^2+x)+5=-1+5=4$.

点拨：先将代数式转化成与已知条件有关的式子，再整体代入求值.

7. 解：$\because x_1$，x_2 是一元二次方程 $x^2+x-3=0$ 的两个根，

$\therefore x_1+x_2=-1$，$x_1^2+x_1-3=0$，$x_2^2+x_2-3=0$.

$\therefore x_1^2=3-x_1$，$x_2^2=3-x_2$.

$\therefore x_1^3-4x_2^2+19=x_1(3-x_1)-4(3-x_2)+19$

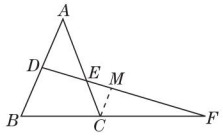
$=3x_1-x_1^2-12+4x_2+19=3x_1-(3-x_1)+4x_2+7$

$=4x_1+4x_2+4=4(x_1+x_2)+4$

$=4\times(-1)+4=0$.

第 7 招 成比例线段的证明和计算的五种常用作辅助线的方法

1. 证明：如图，过点 C 作 $CM/\!/AB$ 交 DF 于点 M.



(第 1 题)

$\because CM/\!/AB$，$\therefore \angle FCM=\angle B$，$\angle FMC=\angle FDB$.

$\therefore \triangle CMF\backsim\triangle BDF$. $\therefore \frac{BF}{CF}=\frac{BD}{CM}$.

又 $\because CM/\!/AD$，

$\therefore \angle A=\angle ECM$，$\angle ADE=\angle CME$.

$\therefore \triangle ADE\backsim\triangle CME$. $\therefore \frac{AE}{EC}=\frac{AD}{CM}$.

$\because D$ 为 AB 的中点，$\therefore BD=AD$.

$\therefore \frac{BD}{CM}=\frac{AD}{CM}$. $\therefore \frac{BF}{CF}=\frac{AE}{EC}$，

即 $AE\cdot CF=BF\cdot EC$.

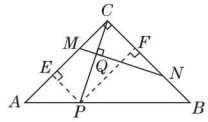
2. 证明：如图，过点 P 作 $PE\perp AC$ 于 E，$PF\perp CB$ 于 F，则四边形 $CEPF$ 为矩形.

$\therefore PF/\!/\!/EC$.

易得 $\angle A=\angle B=45°$，$\angle AEP=\angle PFB=90°$，

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle AEP\backsim\mathrm{Rt}\triangle BFP$.

$\therefore \frac{PA}{PB}=\frac{PE}{PF}$.



(第 2 题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

易得 $PF=BF=EC$，$\therefore \dfrac{PA}{PB}=\dfrac{PE}{EC}$. ①

$\because CP\perp MN$ 于 Q，$\therefore \angle QCN+\angle QNC=90°$.

又 $\because \angle QCN+\angle QCM=90°$，$\therefore \angle QCM=\angle QNC$.

又易得 $\angle PEC=\angle MCN=90°$，$\therefore \mathrm{Rt}\triangle PEC\backsim\mathrm{Rt}\triangle MCN$.

$\therefore \dfrac{EP}{CM}=\dfrac{EC}{CN}$，即 $\dfrac{EP}{EC}=\dfrac{CM}{CN}$. ②

由①②得 $\dfrac{PA}{PB}=\dfrac{CM}{CN}$，即 $PA:PB=CM:CN$.

点拨： 本题通过作垂线得到矩形 $CEPF$，再由矩形的性质和相似三角形的性质即可得证.

3. 证明： 如图，延长 GF 与 AC，交于点 H，

$\because CD\perp AB$，$FG\perp AB$，

$\therefore CD/\!/FG$.

$\therefore \angle AGF=\angle ADE$，$\angle AFG=\angle AED$，$\angle AHF=\angle ACE$，

$\angle AFH=\angle AEC$.

$\therefore \triangle AFG\backsim\triangle AED$，$\triangle AFH\backsim\triangle AEC$.

$\therefore \dfrac{AF}{AE}=\dfrac{FG}{ED}$，$\dfrac{AF}{AE}=\dfrac{FH}{EC}$.

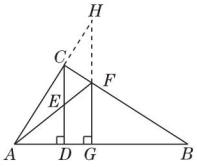
$\therefore \dfrac{FG}{ED}=\dfrac{FH}{EC}$.

又 $\because ED=EC$，$\therefore FG=FH$.

易证得 $\mathrm{Rt}\triangle CFH\backsim\mathrm{Rt}\triangle GFB$，

$\therefore \dfrac{CF}{FG}=\dfrac{FH}{BF}$. $\therefore FG\cdot FH=CF\cdot BF$.

$\because FG=FH$，$\therefore FG^2=CF\cdot BF$.



（第 3 题）

点拨： 通过作延长线构造相似三角形，再由相似三角形的性质和等量代换得到几个比例式或等积式，从而得到结论.

4. 解： 如图，取 BC 的中点 M，连接 AM.

$\because AB\perp AC$，$\therefore AM=CM$.

$\therefore \angle MAC=\angle C$.

又 $\because BD=DC$，

$\therefore \angle DBC=\angle C$.

$\therefore \angle MAC=\angle DBC$.

$\because \angle C=\angle C$，

$\therefore \triangle MAC\backsim\triangle DBC$. $\therefore \dfrac{MC}{DC}=\dfrac{AC}{BC}$.

又 $DC=1$，$MC=\dfrac{1}{2}BC$，

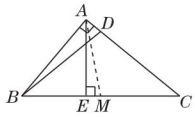
$\therefore AC=\dfrac{MC\cdot BC}{DC}=\dfrac{1}{2}BC^2$. ①

易得 $\mathrm{Rt}\triangle AEC\backsim\mathrm{Rt}\triangle BAC$，$\therefore \dfrac{AC}{BC}=\dfrac{EC}{AC}$.

又 $\because EC=1$，$\therefore AC^2=CE\cdot BC=BC$. ②

由①②得，$AC=\dfrac{1}{2}AC^4$，

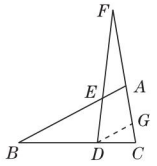
$\therefore AC=\sqrt[3]{2}$.



（第 4 题）

点拨： 通过作中线构造相似三角形，进而得到相关线段的数量关系，最终求得 AC 的长.

5. 解： 如图，过点 D 作 AB 的平行线交 AC 于 G.



（第 5 题）

$\because \dfrac{BD}{DC}=\dfrac{FE}{ED}=2$，$\therefore \dfrac{CD}{CB}=\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{EF}{FD}=\dfrac{2}{3}$.

易得 $\triangle FAE\backsim\triangle FGD$，$\triangle CGD\backsim\triangle CAB$.

$\therefore \dfrac{AE}{DG}=\dfrac{EF}{FD}=\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{DG}{AB}=\dfrac{CD}{CB}=\dfrac{1}{3}$.

$\therefore AE=\dfrac{2}{3}DG$，$AB=3DG$. $\therefore BE=\dfrac{7}{3}DG$，

$\therefore BE:EA=7:2=\dfrac{7}{2}$.

第 8 招　巧作平行线构造相似三角形

1. 解： 如图，连接 DF，$\because E$，F 是边 BC 上的两个三等分点，

$\therefore BE=EF=FC$.

$\because D$ 是 AC 的中点，$\therefore AD=CD$.

$\therefore DF$ 是 $\triangle ACE$ 的中位线.

$\therefore DF/\!/AE$，且 $DF=\dfrac{1}{2}AE$.

$\therefore DF/\!/PE$.

$\therefore \dfrac{BE}{BF}=\dfrac{BP}{BD}$.

$\because BF=2BE$，$\therefore BD=2BP$. $\therefore BP=PD$. $\therefore DF=2PE$.

$\because DF/\!/AE$，

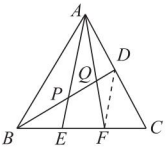
$\therefore \angle APQ=\angle FDQ$，$\angle PAQ=\angle DFQ$.

$\therefore \triangle APQ\backsim\triangle FDQ$. $\therefore \dfrac{PQ}{QD}=\dfrac{AP}{DF}$.

设 $PE=a$，则 $DF=2a$，$AE=2DF=4a$，$AP=3a$.

$\therefore PQ:QD=AP:DF=3:2$.

$\therefore BP:PQ:QD=5:3:2$.



（第 1 题）

点拨： 给出边的三等分点或中点，求相关线段的比值时，通常连接这些点中的某些点找平行关系，构造相似三角形求解.

2. 解： 如图，过点 C 作 $CG/\!/AB$ 交 AE 的延长线于点 G.

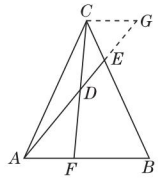
$\because CG/\!/AB$，$\therefore \angle DAF=\angle G$.

又 $\because D$ 为 CF 的中点，$\therefore CD=DF$.

在 $\triangle ADF$ 和 $\triangle GDC$ 中，

$$\begin{cases}\angle DAF=\angle G,\\ \angle ADF=\angle GDC,\\ DF=DC,\end{cases}$$

$\therefore \triangle ADF\cong\triangle GDC$(AAS).



（第 2 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore AF = CG.$

$\because BF : AF = 3 : 2,$

$\therefore AB : AF = 5 : 2.$

$\because AB // CG,$

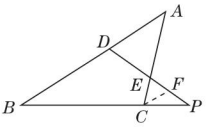
$\therefore \angle CGE = \angle BAE, \angle GCE = \angle ABE.$

$\therefore \triangle ABE \backsim \triangle GCE.$

$\therefore \frac{BE}{EC} = \frac{AB}{CG} = \frac{AB}{AF} = \frac{5}{2}.$

点拨： 过顶点 C 作 $CG // AB$ 交 AE 的延长线于点 G，构造相似三角形，得到相关线段的比.

3. **证明：** 如图，过点 C 作 $CF // AB$ 交 DP 于点 F，



（第 3 题）

$\therefore \angle PFC = \angle PDB,$

$\angle PCF = \angle PBD.$

$\therefore \triangle PCF \backsim \triangle PBD.$

$\therefore \frac{BP}{CP} = \frac{BD}{CF}.$

$\because AD // CF, \therefore \angle ADE = \angle EFC.$

$\because AD = AE, \therefore \angle ADE = \angle AED.$

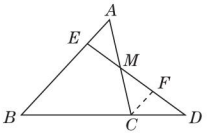
$\because \angle AED = \angle CEP,$

$\therefore \angle EFC = \angle CEP.$

$\therefore EC = CF.$

$\therefore \frac{BP}{CP} = \frac{BD}{EC}.$

4. **证明：** (方法 1) 如图①，过点 C 作 $CF // AB$，交 DE 于点 F，



（第 4 题①）

$\therefore \angle FCD = \angle B.$

又$\because \angle D$ 为公共角，

$\therefore \triangle CDF \backsim \triangle BDE.$

$\therefore \frac{CF}{BE} = \frac{CD}{BD}.$

$\because$ 点 M 为 AC 边的中点，

$\therefore AM = CM.$

$\because CF // AB,$

$\therefore \angle A = \angle MCF.$

又$\because \angle AME = \angle CMF,$

$\therefore \triangle AME \cong \triangle CMF.$

$\therefore AE = CF.$

$\because AE = \frac{1}{4}AB, BE = AB - AE,$

$\therefore BE = 3AE. \therefore \frac{AE}{BE} = \frac{1}{3}.$

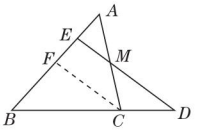
$\because \frac{CF}{BE} = \frac{CD}{BD},$

$\therefore \frac{AE}{BE} = \frac{CD}{BD} = \frac{1}{3}$，即 $BD = 3CD.$

又$\because BD = BC + CD,$

$\therefore BC = 2CD.$

(方法 2) 如图②，过点 C 作 $CF // DE$，交 AB 于点 F，



（第 4 题②）

$\therefore \frac{AE}{AF} = \frac{AM}{AC}.$

又$\because$ 点 M 为 AC 边的中点，

$\therefore AC = 2AM.$

$\therefore 2AE = AF. \therefore AE = EF.$

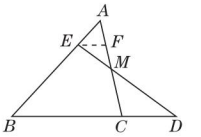
又$\because \frac{AE}{AB} = \frac{1}{4}, \therefore \frac{BF}{EF} = 2.$

又$\because CF // DE,$

$\therefore \frac{BF}{FE} = \frac{BC}{CD} = 2.$

$\therefore BC = 2CD.$

(方法 3) 如图③，过点 E 作 $EF // BC$，交 AC 于点 F，



（第 4 题③）

$\therefore \angle AEF = \angle B.$

又$\because \angle A$ 为公共角，

$\therefore \triangle AEF \backsim \triangle ABC.$

$\therefore \frac{EF}{BC} = \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}.$

由 $AE = \frac{1}{4}AB$，知

$\frac{EF}{BC} = \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{1}{4},$

$\therefore EF = \frac{1}{4}BC, AF = \frac{1}{4}AC.$

由 $EF // CD$，易证得 $\triangle EFM \backsim \triangle DCM,$

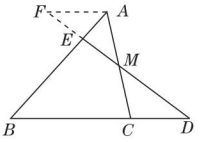
$\therefore \frac{EF}{CD} = \frac{MF}{MC}.$

又$\because AM = MC, \therefore MF = \frac{1}{2}MC.$

$\therefore EF = \frac{1}{2}CD.$

$\therefore BC = 2CD.$

(方法 4) 如图④，过点 A 作 $AF // BD$，交 DE 的延长线于点 F，



（第 4 题④）

$\therefore \angle F = \angle D, \angle FAE = \angle B.$

$\therefore \triangle AEF \backsim \triangle BED.$

$\therefore \frac{AE}{BE} = \frac{AF}{BD}.$

$\because AE = \frac{1}{4}AB,$

$\therefore AE = \frac{1}{3}BE. \therefore AF = \frac{1}{3}BD.$

由 $AF // CD$，易证得 $\triangle AFM \backsim \triangle CDM.$

又$\because AM = MC, \therefore AF = CD.$

$\therefore CD = \frac{1}{3}BD. \therefore BC = 2CD.$

点拨： 由已知两线段的比，求证另外两线段的比，通常作平行线，构造相似三角形来求解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第9招 证比例式或等积式的七种技巧

1. **证明**:如图,过点 D 作 $DG\parallel BC$,交 AC 于点 G,

易知$\triangle DGF\backsim\triangle ECF$,

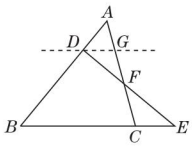
$\triangle ADG\backsim\triangle ABC$.

$\therefore\dfrac{EF}{DF}=\dfrac{CE}{DG},\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{AD}{DG}$.

$\because AD=CE,\therefore\dfrac{CE}{DG}=\dfrac{AD}{DG}$.

$\therefore\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{EF}{DF}$,

即 $AB\cdot DF=BC\cdot EF$.



(第1题)

点拨: 过某一点作平行线,构造出“A”型或“X”型的基本图形,通过相似三角形转化线段的比,从而解决问题.

2. **证明**:$\because DM\perp BC,\angle BAC=90°$,

$\therefore\angle B+\angle BEM=90°,\angle D+\angle DEA=90°$.

$\because\angle BEM=\angle DEA$,

$\therefore\angle B=\angle D$.

又$\because M$ 为 BC 的中点,$\angle BAC=90°$,

$\therefore BM=AM$.

$\therefore\angle B=\angle BAM$.

$\therefore\angle BAM=\angle D$,即$\angle EAM=\angle D$.

又$\because\angle AME=\angle DMA$,

$\therefore\triangle AME\backsim\triangle DMA$.

$\therefore\dfrac{AM}{MD}=\dfrac{ME}{AM}$,即 $AM^2=MD\cdot ME$.

3. **证明**:如图,连接 PM,PN.

$\because MN$ 是 AP 的垂直平分线,

$\therefore MA=MP,NA=NP$.

$\therefore\angle1=\angle2,\angle3=\angle4$.

又$\because\triangle ABC$ 是等边三角形,

$\therefore\angle B=\angle C=\angle1+\angle3=60°$.

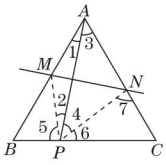
$\therefore\angle2+\angle4=60°$.

$\therefore\angle5+\angle6=120°$.

又$\because\angle6+\angle7=180°-\angle C=120°$,

$\therefore\angle5=\angle7$. $\therefore\triangle BPM\backsim\triangle CNP$.

$\therefore\dfrac{BP}{CN}=\dfrac{BM}{CP}$,即 $BP\cdot CP=BM\cdot CN$.



(第3题)

4. **证明**:$\because AB\parallel DN,\therefore\angle MBA=\angle MDN,\angle MAB=\angle MND$.

$\therefore\triangle AMB\backsim\triangle NMD$.

$\therefore\dfrac{AM}{NM}=\dfrac{BM}{DM}$.

又$\because AD\parallel BP$,

$\therefore\angle MAD=\angle P,\angle MDA=\angle MBP$.

$\therefore\triangle BMP\backsim\triangle DMA$.

$\therefore\dfrac{MP}{AM}=\dfrac{BM}{DM}$.

$\therefore\dfrac{AM}{MN}=\dfrac{MP}{AM}$.

$\therefore AM^2=MN\cdot MP$.

点拨: 利用平行线得到角相等,从而判定两三角形相似,再由相似三角形对应边的比相等,可求某些线段的长或证明比例式和等积式. 当直接利用相似三角形对应边的比相等或平行线截得的对应线段成比例无法解决时,可找中间比进行过渡,而找中间比是证比例关系常用的方法.

5. **证明**:由题意得$\angle BDF=\angle BAE=90°$.

$\because BE$ 平分$\angle ABC,\therefore\angle DBF=\angle ABE$.

$\therefore\triangle BDF\backsim\triangle BAE.\therefore\dfrac{BD}{AB}=\dfrac{BF}{BE}$.

$\because\angle BAC=\angle BDA=90°$,

$\angle ABC=\angle DBA$,

$\therefore\triangle ABC\backsim\triangle DBA$.

$\therefore\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{BD}{AB}$.

$\therefore\dfrac{BF}{BE}=\dfrac{AB}{BC}$.

6. **证明**:(1)$\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形,$\therefore\angle B=\angle D$.

$\because AM\perp BC,AN\perp CD$,

$\therefore\angle AMB=\angle AND=90°$.

$\therefore\triangle AMB\backsim\triangle AND$.

(2)由$\triangle AMB\backsim\triangle AND$得$\dfrac{AM}{AN}=\dfrac{AB}{AD},\angle BAM=\angle DAN$.

又$\because AD=BC$,

$\therefore\dfrac{AM}{AN}=\dfrac{AB}{BC}.\therefore\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{AN}{BC}$.

$\because AM\perp BC,AD\parallel BC,\therefore\angle MAD=\angle AMB=90°$.

$\therefore\angle B+\angle BAM=\angle MAN+\angle NAD=90°$.

$\therefore\angle B=\angle MAN$.

$\therefore\triangle AMN\backsim\triangle BAC$.

$\therefore\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{MN}{AC}$.

7. **证明**:$\because BG\perp AP,PE\perp AB$,

$\therefore\angle AEP=\angle DEB=\angle AGB=90°$.

$\therefore\angle P+\angle PAB=90°$,

$\angle PAB+\angle ABG=90°$.

$\therefore\angle P=\angle ABG.\therefore\triangle AEP\backsim\triangle DEB$.

$\therefore\dfrac{AE}{DE}=\dfrac{PE}{BE}$,即 $AE\cdot BE=PE\cdot DE$.

又$\because\angle CEA=\angle BEC=90°$,

$\therefore\angle CAB+\angle ACE=90°$.

又$\because\angle ACB=90°$,

$\therefore\angle CAB+\angle CBE=90°$.

$\therefore\angle ACE=\angle CBE.\therefore\triangle AEC\backsim\triangle CEB$.

$\therefore\dfrac{AE}{CE}=\dfrac{CE}{BE}$,即 $CE^2=AE\cdot BE$.

$\therefore CE^2=DE\cdot PE$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. 证明:∵ $AD\perp BC$,$DE\perp AB$,

∴ $\angle ADB=\angle AED=90°$.

又∵ $\angle BAD=\angle DAE$,

∴ $\triangle ABD\backsim\triangle ADE$.

∴ $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AD}$,即 $AD^2=AE\cdot AB$.

同理可得 $AD^2=AF\cdot AC$.

∴ $AE\cdot AB=AF\cdot AC$. ∴ $\frac{AE}{AF}=\frac{AC}{AB}$.

9. 证明:如图,连接 PC.

∵ $AB=AC$,$AD\perp BC$,

∴ AD 垂直平分 BC,$\angle ABC=\angle ACB$.

∴ $BP=CP$. ∴ $\angle 1=\angle 2$.

∴ $\angle ABC-\angle 1=\angle ACB-\angle 2$,

即 $\angle 3=\angle 4$.

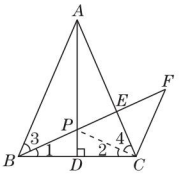
∵ $CF/\!/AB$,∴ $\angle 3=\angle F$.

∴ $\angle 4=\angle F$.

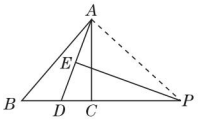
又∵ $\angle CPF=\angle CPE$,∴ $\triangle CPF\backsim\triangle EPC$.

∴ $\frac{CP}{PE}=\frac{PF}{CP}$,即 $CP^2=PF\cdot PE$.

∵ $BP=CP$,∴ $BP^2=PE\cdot PF$.



(第 9 题)



(第 10 题)

10. 证明:如图,连接 PA,

∵ EP 是 AD 的垂直平分线,

∴ $PA=PD$.

∴ $\angle PDA=\angle PAD$.

∴ $\angle B+\angle BAD=\angle DAC+\angle CAP$.

又∵ AD 平分 $\angle BAC$,

∴ $\angle BAD=\angle DAC$. ∴ $\angle B=\angle CAP$.

又∵ $\angle APC=\angle BPA$,

∴ $\triangle PAC\backsim\triangle PBA$.

∴ $\frac{PA}{PB}=\frac{PC}{PA}$,即 $PA^2=PB\cdot PC$.

∵ $PA=PD$,∴ $PD^2=PB\cdot PC$.

第 10 招 求三角函数值的常见技巧

1. 解:(方法 1)原式 $=\frac{(\sin A-3\cos A)\div\cos A}{(4\sin A+\cos A)\div\cos A}=\frac{\frac{\sin A}{\cos A}-3}{\frac{4\sin A}{\cos A}+1}=\frac{\tan A-3}{4\tan A+1}$.

∵ $\tan A=4$,∴ 原式 $=\frac{4-3}{4\times4+1}=\frac{1}{17}$.

(方法 2)∵ $\tan A=4$,∴ $\frac{\sin A}{\cos A}=4$,

∴ $\sin A=4\cos A$.

∴ 原式 $=\frac{4\cos A-3\cos A}{4\times4\cos A+\cos A}=\frac{\cos A}{17\cos A}=\frac{1}{17}$.

2. 解:∵ $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

∴ $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=\frac{1}{2}$,

即 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}$.

∴ $1-2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}$,即 $2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}$.

∴ $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

又∵ α 为锐角,∴ $\sin\alpha+\cos\alpha>0$.

∴ $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

3. C **点拨:** ∵ $(45°-\alpha)+(45°+\alpha)=90°$,

∴ $\sin(45°-\alpha)=\cos(45°+\alpha)$,$\sin^2(45°-\alpha)+\sin^2(45°+\alpha)=\cos^2(45°+\alpha)+\sin^2(45°+\alpha)=1$.

4. 解:$\tan1°\cdot\tan2°\cdot\tan3°\cdot\cdots\cdot\tan88°\cdot\tan89°=(\tan1°\cdot\tan89°)\cdot(\tan2°\cdot\tan88°)\cdot\cdots\cdot(\tan44°\cdot\tan46°)\cdot\tan45°=1$.

点拨: 互余的两角的正切值的积为 1,即若 $\alpha+\beta=90°$,则 $\tan\alpha\cdot\tan\beta=1$.

5. 解:∵ $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$,$\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{12}{25}$,

∴ $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=1+2\times\frac{12}{25}=\frac{49}{25}$.

∵ α 为锐角,∴ $\sin\alpha+\cos\alpha>0$.

∴ $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{7}{5}$.

又∵ $\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{12}{25}$,

∴ 以 $\sin\alpha$,$\cos\alpha$ 为根的一元二次方程为 $x^2-\frac{7}{5}x+\frac{12}{25}=0$.

点拨: 此题用到两方面的知识:(1)公式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 与完全平方公式的综合运用;(2)若 $x_1+x_2=p$,$x_1x_2=q$,则以 x_1,x_2 为两根的一元二次方程为 $x^2-px+q=0$. 本题答案不唯一.

6. 解:∵ $\sin\alpha$ 是方程 $2x^2-7x+3=0$ 的一个根,

$\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\times2\times3}}{2\times2}=\frac{7\pm5}{4}$.

∴ $\sin\alpha=\frac{1}{2}$或 $\sin\alpha=3$(不符合题意,舍去).

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\because \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\therefore \cos^2\alpha=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}.$

又$\because \alpha$为锐角,$\therefore \cos\alpha>0,\therefore \cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}.$

$\therefore \sqrt{1-2\sin\alpha\cos\alpha}=\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}=$

$\sqrt{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}=|\sin\alpha-\cos\alpha|=\left|\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=$

$\frac{\sqrt{3}-1}{2}.$

第 11 招 巧用构造法求几种特殊角的三角函数值

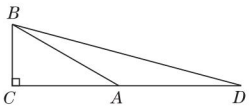
1. **解**:如图,在 Rt△ABC 中,∠$BAC=30°$,∠$C=90°$,延长 CA 到 D,使 $AD=AB$,连接 BD,则∠$D=15°$,设 $BC=a$,则 $AB=2a,AC=\sqrt{3}a,\therefore AD=2a,\therefore CD=(2+\sqrt{3})a.$

在 Rt△BCD 中,$BD=\sqrt{BC^2+CD^2}=\sqrt{a^2+(7+4\sqrt{3})a^2}=(\sqrt{6}+\sqrt{2})a.$

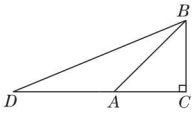
$\therefore \sin 15°=\sin D=\frac{BC}{BD}=\frac{a}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})a}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},$

$\cos 15°=\cos D=\frac{CD}{BD}=\frac{(2+\sqrt{3})a}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})a}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},$

$\tan 15°=\tan D=\frac{BC}{CD}=\frac{a}{(2+\sqrt{3})a}=2-\sqrt{3}.$



(第 1 题)



(第 2 题)

2. **解**:如图,在 Rt△ABC 中,∠$C=90°$,$AC=BC$,延长 CA 到 D,使 $DA=AB$,连接 BD,则∠$D=22.5°$,设 $AC=BC=a$,则 $AB=\sqrt{2}a,\therefore AD=\sqrt{2}a,\therefore DC=(\sqrt{2}+1)a,$

$\therefore \tan 22.5°=\tan D=\frac{BC}{CD}=\frac{a}{(\sqrt{2}+1)a}=\sqrt{2}-1.$

点拨: 通过构造含有 22.5°角的直角三角形,结合数形结合思想即可求得结论.

3. **解**:$\because$ 将矩形纸片 $ABCD$ 沿过点 B 的直线折叠,使点 A 落在 BC 边上的点 E 处,$\therefore AB=BE$,∠$AEB=$∠$EAB=45°$. $\because$ 还原后,再沿过点 E 的直线折叠,使点 A 落在 BC 边上的点 F 处,

$\therefore AE=EF$,∠$EAF=$∠$EFA=45°\div 2=22.5°$,

$\therefore$ ∠$FAB=67.5°$.

设 $AB=x$,则 $AE=EF=\sqrt{2}x$,

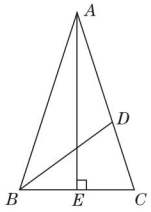
$\therefore \tan 67.5°=\tan\angle FAB=\frac{FB}{AB}=\frac{\sqrt{2}x+x}{x}=\sqrt{2}+1.$

4. **解**:如图,作△ABC,使∠$BAC=36°$,$AB=AC$,∠ABC 的平分线 BD 交 AC 于 D 点,过点 A 作 $AE\perp BC$ 于 E 点,则∠$BAE=18°$,∠$ABE=72°$. 设 $BC=a$,易知 $BE=\frac{1}{2}a$,$BD=AD=a$,△$ABC\backsim$△BCD,

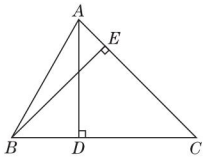
$\therefore \frac{AB}{BC}=\frac{BC}{CD},\therefore \frac{AB}{a}=\frac{a}{AB-a},$

即 $AB^2-a\cdot AB-a^2=0,\therefore AB=\frac{\sqrt{5}+1}{2}a$(负根舍去),

$\therefore \sin 18°=\sin\angle BAE=\frac{BE}{AB}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}.$



(第 4 题)



(第 5 题)

5. **解**:(方法 1)利用第 1 题的图形求解. 易知∠$CBD=75°$,

$\therefore \sin 75°=\frac{CD}{BD}=\frac{(2+\sqrt{3})a}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})a}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},$

$\cos 75°=\frac{BC}{BD}=\frac{a}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})a}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},$

$\tan 75°=\frac{CD}{BC}=\frac{(2+\sqrt{3})a}{a}=2+\sqrt{3}.$

(方法 2)如图,作△ABD,使∠$ADB=90°$,∠$DAB=30°$,延长 BD 到 C,使 $DC=DA$,连接 AC,过点 B 作 $BE\perp AC$ 于 E,则∠$ACD=$∠$DAC=45°$,∠$BAE=75°$,设 $AD=DC=a$,则 $AC=\sqrt{2}a,BD=\frac{\sqrt{3}}{3}a,AB=\frac{2\sqrt{3}}{3}a,$

$\therefore BC=BD+CD=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+1\right)a,$

$\therefore CE=BE=BC\cdot\sin 45°=\frac{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{6}a,$

$\therefore AE=AC-CE=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6}a,$

$\therefore \sin 75°=\sin\angle BAE=\frac{BE}{AB}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},$

$\cos 75°=\cos\angle BAE=\frac{AE}{AB}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},$

$\tan 75°=\tan\angle BAE=\frac{BE}{AE}=2+\sqrt{3}.$

点拨: 根据 30°+45°=75°,通过两个分别含 30°角的 Rt△ABD和含 45°角的 Rt△ADC 构造出含 75°角的△ABC,结合数形结合思想,即可求得结果.

第 12 招 “化斜为直”构造直角三角形的方法

1. **解**:如图,过点 A 作 $AD\perp BC$,垂足为 D.

设 $BD=x$,在 Rt△ABD 中,$AD=BD\cdot\tan B=x\cdot\tan 60°=\sqrt{3}x$.

在 Rt△ACD 中,$\because$ ∠$C=45°$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \angle CAD = 90° - \angle C = 45°$. $\therefore \angle C = \angle CAD$.

$\therefore CD = AD = \sqrt{3}x$.

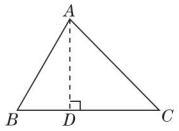
$\because BC = 1 + \sqrt{3}$, $\therefore \sqrt{3}x + x = 1 + \sqrt{3}$,

解得 $x = 1$, 即 $BD = 1$.

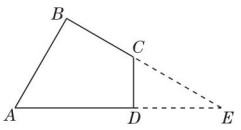
在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中, $\because \cos B = \dfrac{BD}{AB}$,

$\therefore AB = \dfrac{BD}{\cos B} = \dfrac{1}{\cos 60°} = 2$.

点拨: 通过作辅助线构造含特殊角的直角三角形, 即可得出结果.



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 解: 如图, 延长 BC, AD 交于点 E.

$\because \angle A = 60°$, $\angle B = 90°$, $\therefore \angle E = 30°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 中, $BE = \dfrac{AB}{\tan E} = \dfrac{2}{\tan 30°} = 2\sqrt{3}$,

在 $\mathrm{Rt}\triangle CDE$ 中, $EC = 2CD = 2$,

$\therefore DE = EC \cdot \cos 30° = 2 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

$\therefore S_{\text{四边形}ABCD} = S_{\triangle ABE} - S_{\triangle ECD} = \dfrac{1}{2}AB \cdot BE - \dfrac{1}{2}CD \cdot ED =$

$\dfrac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} - \dfrac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

点拨: 本题是四边形问题, 但注意到 $\angle B = 90°$, $\angle A = 60°$, 不难想到延长 BC, AD 交于点 E, 构造出直角三角形, 将所求问题转化为直角三角形问题来解决.

3. 解: 如图, 过点 B 作 $BE \perp CD$, 交 CD 的延长线于点 E.

$\because$ 点 D 是 AB 的中点, $\therefore AD = DB$.

又 $\because \angle ACD = \angle BED = 90°$, $\angle ADC = \angle BDE$,

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle BED$. $\therefore CD = DE$, $AC = BE$.

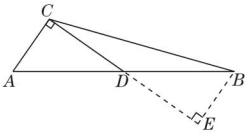
在 $\mathrm{Rt}\triangle CBE$ 中, $\sin \angle BCE = \dfrac{BE}{BC} = \dfrac{1}{3}$, $\therefore BC = 3BE$.

$\therefore CE = \sqrt{BC^2 - BE^2} = 2\sqrt{2}BE$.

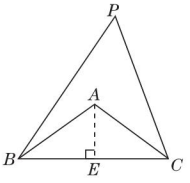
$\therefore CD = \dfrac{1}{2}CE = \sqrt{2}BE = \sqrt{2}AC$.

$\therefore \tan A = \dfrac{CD}{AC} = \dfrac{\sqrt{2}AC}{AC} = \sqrt{2}$.

点拨: 构造直角三角形, 把所要求的量与已知量建立关系是解题的关键.



(第 3 题)



(第 4 题)

4. 解: 如图, 过点 A 作 $AE \perp BC$ 于点 E.

$\because AB = AC = 5$,

$\therefore BE = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{1}{2} \times 8 = 4$, $\angle BAE = \dfrac{1}{2}\angle BAC$.

$\because \angle BPC = \dfrac{1}{2}\angle BAC$, $\therefore \angle BPC = \angle BAE$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BAE$ 中, 由勾股定理得

$AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$,

$\therefore \tan \angle BPC = \tan \angle BAE = \dfrac{BE}{AE} = \dfrac{4}{3}$.

第 13 招 巧用根的判别式解图像的公共点问题

1. $k < -1$ **点拨:** $\because$ 反比例函数 $y = \dfrac{k}{x}$ 与一次函数 $y = x + 2$ 的图像没有公共点,

$\therefore \begin{cases} y = \dfrac{k}{x}, \\ y = x + 2 \end{cases}$ 无解, 即 $\dfrac{k}{x} = x + 2$ 无解. 整理得 $x^2 + 2x - k = 0$,

$\therefore 4 + 4k < 0$, 解得 $k < -1$.

2. 没有实数根 **点拨:** 设 P 点坐标为 (m, n), 则 A 点坐标为 $(-m, -n)$, B 点坐标为 $(m, -n)$.

由题意得 $S_{\triangle PAB} = \dfrac{1}{2} \cdot 2m \cdot 2n = 2mn = 2(a + 4) > 12$, 解得 $a > 2$.

$\therefore (-1)^2 - 4(a - 1) \times \dfrac{1}{4} = 2 - a < 0$.

$\therefore$ 关于 x 的方程 $(a - 1)x^2 - x + \dfrac{1}{4} = 0$ 无实数根.

3. $(-2, -2)$; $2\sqrt{2}$

点拨: $\because$ 点 $P(a, b)$ 在反比例函数 $y = \dfrac{k}{x}$ 的图像上,

$\therefore ab = k$.

$\because a, b$ 为一元二次方程 $x^2 + kx + 4 = 0$ 的两根, $\therefore ab = 4$.

$\therefore k = 4$. $\therefore a = b = -2$. $\therefore P$ 点坐标为 $(-2, -2)$, 到原点的距离为 $2\sqrt{2}$.

4. 解: 直线 $y = x$ 沿 x 轴负方向平移 4 个单位长度后可得直线 $y = x + 4$, 由题意可得 $\begin{cases} y = x + 4, \\ y = \dfrac{m}{x}, \end{cases}$ 整理得 $x^2 + 4x - m = 0$.

由题意可知 $4^2 - 4 \cdot (-m) = 0$,

即 $m = -4$.

$\therefore$ 反比例函数 $y = \dfrac{m}{x}$ 的表达式是 $y = -\dfrac{4}{x}$.

将 $m = -4$ 代入 $x^2 + 4x - m = 0$,

解得 $x_1 = x_2 = -2$,

$\therefore A$ 点坐标为 $(-2, 2)$.

$\because$ 直线 $y = x$ 沿 x 轴负方向平移 4 个单位长度后与双曲

关注微信公众号 "教辅资料站" 获取更多学习资料

线$y=\frac{n}{x}(x>0)$交于B点且y轴平分$\triangle AOB$的面积，

$\therefore B$点坐标为$(2,6)$.

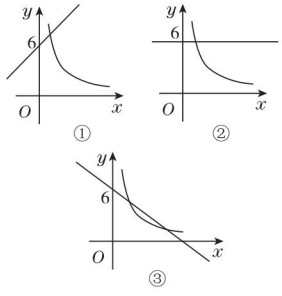
$\therefore 6=\frac{n}{2}$. $\therefore n=12$.

5. C　**点拨：**由不等式组可求得不等式组的解集为$a\leqslant -2$.

令$\frac{1}{4}x-a=\frac{2a+1}{x}$，整理得$\frac{1}{4}x^2-ax-2a-1=0$，

$\therefore (-a)^2-4\times\frac{1}{4}\times(-2a-1)=a^2+2a+1=(a+1)^2>0$，即直线与双曲线有两个交点.

6. A　**点拨：**本题考查了反比例函数与一次函数的图像交点问题，根据题中条件，交点在第一象限，对m进行分类讨论，当$m>0$时，如图①，一定有交点；当$m=0$时，如图②，也一定有交点；当$m<0$时，如图③，把函数图像的交点问题转化为解方程的问题，可列方程为$mx+6=\frac{n}{x}$，将其转化为一元二次方程，要使该方程有解，根的判别式要大于或等于0，由此求出mn的取值范围，综合上面三点，即可得出答案.



（第6题）

7. $\sqrt{3}\leqslant a\leqslant\sqrt{3}+1$

8. **解：**当点$C(1,2)$在反比例函数$y=\frac{k}{x}$的图像上时，$k=2$.

由$\frac{k}{x}=-x+6$，得$x^2-6x+k=0$，当$(-6)^2-4k=0$，即$k=9$时，直线与双曲线有且只有一个公共点$(3,3)$，点$(3,3)$在线段AB上. 因此反比例函数$y=\frac{k}{x}(x>0)$的图像与$\triangle ABC$有公共点时，k的取值范围是$2\leqslant k\leqslant 9$.

第14招　反比例函数与一次函数的综合应用

1. A　**2.** B

3. C　**点拨：**把点$A(1,2)$的坐标分别代入$y_1=k_1x$，$y_2=\frac{k_2}{x}$中，得$k_1=2$，$k_2=2$，

$\therefore$①是错误的.

易知点B的坐标为$(-1,-2)$，由图像可知，②④是正确的. 当$y_1>y_2$时，$x>1$或$-1<x<0$，$\therefore$③是错误的. 故选C.

4. ①②④⑤

5. **解：**(1)$\because$点$B(-2,n)$，$D(3-3n,1)$在反比例函数$y=\frac{m}{x}(x<0)$的图像上，

$\therefore -2n=3-3n$，解得$n=3$.

$\therefore m=-2n=-6$.

(2)由(1)知反比例函数的表达式为$y=-\frac{6}{x}$.

$\because n=3$，

$\therefore$点$B(-2,3)$，$D(-6,1)$.

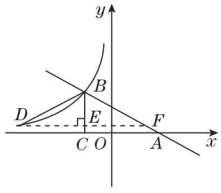
如图，过点D作$DE\perp BC$于点E，延长DE交AB于点F.

在$\triangle DBE$和$\triangle FBE$中，

$$\begin{cases}\angle DBE=\angle FBE,\\ BE=BE,\\ \angle BED=\angle BEF=90^\circ,\end{cases}$$

$\therefore \triangle DBE\cong\triangle FBE$(ASA).

$\therefore DE=FE=4$. $\therefore$点$F(2,1)$.



（第5题）

将点$B(-2,3)$，$F(2,1)$的坐标分别代入$y=kx+b$，

得$\begin{cases}-2k+b=3,\\ 2k+b=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=-\frac{1}{2},\\ b=2.\end{cases}$

$\therefore$一次函数的表达式为$y=-\frac{1}{2}x+2$.

点拨：(1)将点B，D的坐标代入反比例函数的表达式求解m的值；(2)通过作辅助线求点F的坐标，再由点B，F的坐标求一次函数的表达式.

6. **解：**(1)把点$C(1,m)$的坐标代入$y=\frac{4}{x}$，得$m=\frac{4}{1}$，

$\therefore m=4$.

$\therefore$点C的坐标为$(1,4)$.

把$C(1,4)$的坐标代入$y=2x+n$，

得$4=2\times1+n$，解得$n=2$.

(2)对于$y=2x+2$，令$x=3$，则$y=2\times3+2=8$，

$\therefore$点P的坐标为$(3,8)$.

令$y=0$，则$2x+2=0$，得$x=-1$，

$\therefore$点A的坐标为$(-1,0)$.

对于$y=\frac{4}{x}$，令$x=3$，则$y=\frac{4}{3}$.

$\therefore$点Q的坐标为$\left(3,\frac{4}{3}\right)$.

$\therefore \triangle APQ$的面积$=\frac{1}{2}AD\cdot PQ=\frac{1}{2}\times(3+1)\times\left(8-\frac{4}{3}\right)=\frac{40}{3}$.

点拨：注意反比例函数与一次函数图像的交点坐标满足两个函数的表达式，解答这类题通常运用方程思想.

7. **解：**(1)将点$A(1,0)$的坐标代入$y=ax+2$，得$0=a+2$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore a=-2$,

$\therefore$ 直线的表达式为 $y=-2x+2$.

将 $x=0$ 代入上式,得 $y=2$,

$\therefore b=2$.

(2)由(1)知,$b=2$,$\therefore B(0,2)$.

由平移可得点 $C(2,t)$,$D(1,2+t)$.

将点 $C(2,t)$,$D(1,2+t)$ 的坐标分别代入 $y=\frac{k}{x}$,

得 $\begin{cases}t=\frac{k}{2},\\2+t=\frac{k}{1},\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}k=4,\\t=2.\end{cases}$

$\therefore$ 反比例函数的表达式为 $y=\frac{4}{x}$,点 $C(2,2)$,点 $D(1,4)$.

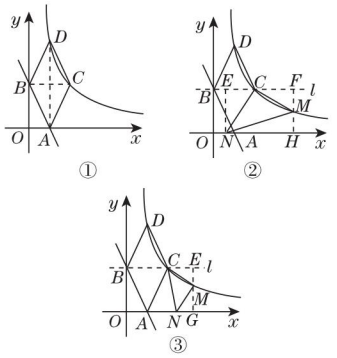
如图①,连接 BC,AD.

$\because B(0,2)$,$C(2,2)$. $\therefore BC\parallel x$ 轴,$BC=2$.

$\because A(1,0)$,$D(1,4)$,

$\therefore AD\perp x$ 轴,$AD=4$. $\therefore BC\perp AD$.

$\therefore S_{四边形ABDC}=\frac{1}{2}\times BC\times AD=\frac{1}{2}\times 2\times 4=4$.



(第 7 题)

(3)①当 $\angle NCM=90°$,$CM=CN$ 时,

如图②,过点 C 作直线 $l\parallel x$ 轴,易知直线 l 交 y 轴于点 B,过点 M 作 $HF\perp$ 直线 l 于点 F,交 x 轴于点 H,过点 N 作 $NE\perp$ 直线 l 于点 E.

$\because \angle MCN=90°$,

$\therefore \angle MCF+\angle NCE=90°$.

$\because NE\perp$ 直线 l 于点 E,

$\therefore \angle ENC+\angle NCE=90°$.

$\therefore \angle MCF=\angle ENC$.

又$\because \angle MFC=\angle NEC=90°$,$CN=CM$,

$\therefore \triangle NEC\cong\triangle CFM$.

$\therefore CF=EN=2$.

$\therefore FB=CB+CF=2+2=4$.

将 $x=4$ 代入 $y=\frac{4}{x}$,得 $y=1$,

$\therefore$ 点 $M(4,1)$;

②当 $\angle NMC=90°$,$MC=MN$ 时,

如图③,过点 C 作直线 $l\perp y$ 轴,易知直线 l 交 y 轴于点 B,$CB=2$.

过点 M 作 $EG\perp x$ 轴于点 G,交直线 l 于点 E,则 $ME\perp$ 直线 l,$EG=2$.

$\because \angle CMN=90°$,$\therefore \angle CME+\angle NMG=90°$.

$\because ME\perp$ 直线 l,

$\therefore \angle ECM+\angle CME=90°$.

$\therefore \angle NMG=\angle ECM$.

又$\because \angle CEM=\angle NGM=90°$,$CM=NM$,

$\therefore \triangle CEM\cong\triangle MGN$.

$\therefore CE=MG$,$EM=NG$.

设 $CE=MG=n$,则 $y_M=n$,$x_M=CB+CE=2+n$,

$\therefore$ 点 $M(2+n,n)$.

将点 $M(2+n,n)$ 的坐标代入 $y=\frac{4}{x}$,得 $n=\frac{4}{2+n}$,

解得 $n_1=\sqrt{5}-1$,$n_2=-\sqrt{5}-1$(不合题意,舍去),

$\therefore x_M=2+n=\sqrt{5}+1$.

$\therefore$ 点 $M(\sqrt{5}+1,\sqrt{5}-1)$.

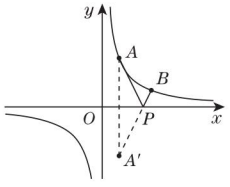
综合①②可知:点 M 的坐标为 $(4,1)$ 或 $(\sqrt{5}+1,\sqrt{5}-1)$.

8. **解**:(1)把 $A(1,3)$ 的坐标代入 $y=\frac{k}{x}$ 得 $k=1\times 3=3$,

$\therefore$ 反比例函数的表达式为 $y=\frac{3}{x}$;

把 $B(3,m)$ 的坐标代入 $y=\frac{3}{x}$ 得 $3m=3$,解得 $m=1$,

$\therefore B$ 点的坐标为 $(3,1)$.



(第 8 题)

(2)如图,作 A 点关于 x 轴的对称点 A',连接 BA' 交 x 轴于 P 点,连接 AP,则 $A'(1,-3)$.

易知 $PA+PB=PA'+PB=BA'$,

此时 $PA+PB$ 的值最小.

设直线 BA' 的表达式为 $y=ax+b$,

把 $A'(1,-3)$,$B(3,1)$ 的坐标分别代入 $y=ax+b$,得

$\begin{cases}a+b=-3,\\3a+b=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\b=-5,\end{cases}$

$\therefore$ 直线 BA' 的表达式为 $y=2x-5$.

当 $y=0$ 时,$2x-5=0$,解得 $x=\frac{5}{2}$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∴ 点 P 的坐标为 $\left(\frac{5}{2},0\right)$.

9. 解:(1)将 $B(4,1)$ 的坐标代入 $y=\frac{k}{x}$,得 $1=\frac{k}{4}$,

∴ $k=4$.

∴ $y=\frac{4}{x}$. 将 $B(4,1)$ 的坐标代入 $y=mx+5$,得 $1=4m+5$,

∴ $m=-1$.

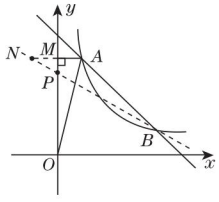
∴ $y=-x+5$.

(2)∵ 点 A 在反比例函数 $y=\frac{4}{x}$ 的图像上,

∴ $n=\frac{4}{1}$,即 $n=4$. ∴ $A(1,4)$.

∴ $S=\frac{1}{2}\times1\times4=2$.

(3)如图,作点 A 关于 y 轴的对称点 N,则 $N(-1,4)$,过 B,N 作直线 BN,交 y 轴于点 P,点 P 即为所求.



(第 9 题)

设直线 BN 对应的函数表达式为 $y=ax+b$,

将 $N(-1,4)$,$B(4,1)$ 的坐标代入得 $\begin{cases}4a+b=1,\\-a+b=4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-\frac{3}{5},\\b=\frac{17}{5}.\end{cases}$

∴ $y=-\frac{3}{5}x+\frac{17}{5}$. ∴ $P\left(0,\frac{17}{5}\right)$.

点拨:本题主要考查了用待定系数法求一次函数的表达式以及对称点问题,根据已知条件得出对称点的坐标是解题的关键.

第 15 招 巧用圆的基本性质解圆的五种关系

1. 证明:∵ $AD=BC$,根据"在同圆中,相等的弦所对的劣弧相等",可得 $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BC}$,∴ $\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{AC}$,即 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$.

点拨:在同圆或等圆中,等弦对等弧,等弧对等弦(劣弧等劣弧,优弧等优弧).

2. 证明:在⊙O 中,$\angle CAB$,$\angle COB$ 分别是 $\overset{\frown}{CB}$ 所对的圆周角和圆心角,

∴ $\angle COB=2\angle CAB$. 同理:$\angle COA=2\angle CBA$.

又∵ $\angle CAB=\angle CBA$,

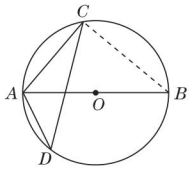
∴ $\angle COB=\angle COA$.

3. 解:如图,连接 BC,

∵ AB 是⊙O 的直径,

∴ $\angle ACB=90°$.

在 Rt△ABC 中,$\angle ABC=90°-\angle BAC=90°-50°=40°$.



(第 3 题)

又∵ $\angle ADC$,$\angle ABC$ 是 $\overset{\frown}{AC}$ 所对的圆周角,

∴ $\angle ADC=\angle ABC=40°$.

点拨:在同一个圆中,同弧所对的圆周角相等.

4. 解:$BD=DE=EC$. 理由如下:如图,连接 OD,OE.

∵ $OB=OD=OE=OC$,$\angle B=\angle C=60°$,

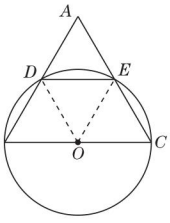
∴ △BOD 与 △COE 都是等边三角形.

∴ $\angle BOD=\angle COE=60°$.

∴ $\angle DOE=180°-\angle BOD-\angle COE=60°$.

∴ $\angle BOD=\angle DOE=\angle COE$.

∴ $BD=DE=EC$.



(第 4 题)

点拨:本题利用"在同圆中,相等的圆心角所对的弦相等"证明三条线段相等,因此,连接 OD,OE,构造弦所对的圆心角是解此题的关键.

5. 证明:如图,连接 AC,BD.

∵ C,D 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的三等分点,

∴ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{BD}$,

∴ $AC=CD=BD$,

∴ $\angle AOC=\angle COD=\angle BOD$.

又∵ $\angle AOB=90°$,

∴ $\angle AOC=\angle COD=\angle BOD=30°$.

∵ $OA=OB$,$\angle AOB=90°$,

∴ $\angle OAB=\angle OBA=45°$.

∴ $\angle AEC=\angle AOC+\angle OAB=75°$.

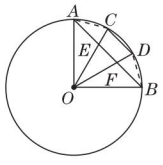
∵ $OA=OC$,$\angle AOC=30°$,

∴ $\angle ACE=\frac{1}{2}\times(180°-30°)=75°=\angle AEC$.

∴ $AE=AC$.

同理可得 $BF=BD$.

∴ $AE=BF=CD$.



(第 5 题)

点拨:本题解题的关键是证 $\angle AEC=\angle ACE$,从而证得 $AE=AC$,同理,$BF=BD$. 从而证得 $AE=BF=CD$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

第16招 巧用勾股定理理解决求圆中线段长问题

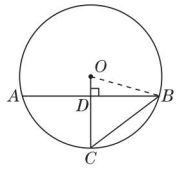
1. 解:在 $Rt\triangle OCE$ 中,$CE=\sqrt{OC^2-OE^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$.

$\because AB\perp CD$,AB 为直径,

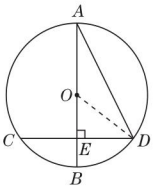
$\therefore CD=2CE=8$.

2. 解:如图,连接 OB,可知 $BD=\sqrt{BC^2-CD^2}=4$,设 $OB=R$,则 $OD=R-3$,$\therefore (R-3)^2+4^2=R^2$,

$\therefore R=\frac{25}{6}$. 即$\odot O$的半径为$\frac{25}{6}$.



(第2题)



(第3题)

3. 解:如图,连接 OD,设 $OA=OB=OD=R$,则 $OE=R-2$,

$AE=R+(R-2)=2R-2$,

$\because AD^2-AE^2=DE^2=OD^2-OE^2$,

$\therefore (4\sqrt{5})^2-(2R-2)^2=R^2-(R-2)^2$,

$\therefore R^2-R-20=0$,

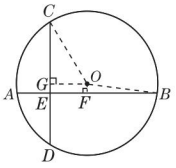
$\therefore R_1=5$,$R_2=-4$(舍去),

$\therefore DE=4$,

$\therefore CD=2DE=8$.

点拨: 解本题的关键是找出 $Rt\triangle ADE$ 与 $Rt\triangle ODE$ 之间的关系. 根据 $AD^2-AE^2=DE^2=OD^2-OE^2$ 这一关系,列方程求半径.

4. 解:如图,作 $OF\perp AB$ 于 F,$OG\perp CD$ 于 G,连接 OC,OB.



(第4题)

$\because AB=AE+BE=2+6=8$,

$\therefore BF=\frac{1}{2}AB=4$,

$\therefore EF=2=OG$,

设 $OF=EG=x$,则 $CG=4-x$,

$\because CG^2+OG^2=OC^2=OB^2=OF^2+BF^2$,

$\therefore (4-x)^2+2^2=x^2+4^2$,

$\therefore x=\frac{1}{2}$,

$\therefore OB=\frac{\sqrt{65}}{2}$,即$\odot O$的半径为$\frac{\sqrt{65}}{2}$.

点拨: 本题解题的关键是作辅助线构造直角三角形,根据勾股定理列出方程求半径.

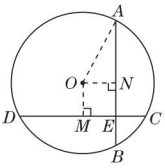
5. 解:如图,过点 O 作 $ON\perp AB$ 于 N,$OM\perp CD$ 于 M,连接 OA,

$\because CD=CE+DE=1+3=4$,

$\therefore AB=CD=4$,

$\therefore ON=ME=CM-CE=\frac{1}{2}CD-CE=\frac{1}{2}\times 4-1=1$,$AN=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 4=2$,

$\therefore OA=\sqrt{ON^2+AN^2}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$,即$\odot O$的半径为$\sqrt{5}$.



(第5题)

6. 解:如图,作 $OE\perp CD$ 于点 E,连接 OD,

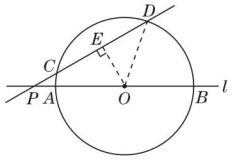
$\because PA=2$,$PB=14$,$\therefore AB=12$,

$\therefore OA=OB=OD=6$,

$\therefore OP=8$. $\because \angle DPB=30^\circ$,$\therefore OE=\frac{1}{2}OP=\frac{1}{2}\times 8=4$,

$\therefore DE=\sqrt{OD^2-OE^2}=\sqrt{6^2-4^2}=2\sqrt{5}$,

$\therefore CD=2DE=4\sqrt{5}$.



(第6题)

第17招 求阴影部分面积的技巧

1. 15

2. 解:(1)如图,连接 OD,OC,

$\because C$,D 是半圆 O 上的三等分点,

$\therefore \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{BC}$,

$\therefore \angle AOD=\angle DOC=\angle COB=60^\circ$,

$\therefore \angle CAB=30^\circ$,

$\because DE\perp AB$,

$\therefore \angle AEF=90^\circ$,

$\therefore \angle AFE=90^\circ-30^\circ=60^\circ$.

(2)由(1)知,$\angle AOD=60^\circ$,

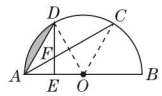
$\because OA=OD$,$AB=4$,

$\therefore \triangle AOD$ 是等边三角形,$OA=2$,

$\because DE\perp AO$,

$\therefore$ 易得 $DE=\sqrt{3}$,

$\therefore S_{阴影}=S_{扇形AOD}-S_{\triangle AOD}=\frac{60\pi\times 2^2}{360}-\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3}=\frac{2}{3}\pi-\sqrt{3}$.

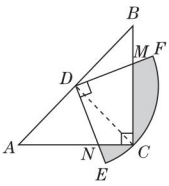


(第2题)

点拨: 利用作差法,根据 $S_{阴影}=S_{扇形AOD}-S_{\triangle AOD}$ 求出面积.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. 解：如图，连接 CD，设 DF 交 BC 于 M，DE 交 AC 于 N，



（第 3 题）

∵ 在△ABC 中，$CA=CB=4$，

$\angle ACB=90°$，

∴ $AB=4\sqrt{2}$.

∵ 以 AB 中点 D 为圆心，作圆心角为 90° 的扇形 EDF，点 C 恰好在弧 EF 上，

∴ $CD=2\sqrt{2}$，$\angle B=\angle DCN=45°$，

$CD=BD$.

∵ $\angle ADC=\angle BDC=\angle EDF=90°$，

∴ $\angle EDC+\angle CDF=90°$，$\angle CDF+\angle BDF=90°$，

∴ $\angle BDM=\angle CDN$.

在△BDM 和△CDN 中，

$$\begin{cases}\angle B=\angle DCN,\\ BD=CD,\\ \angle BDM=\angle CDN,\end{cases}$$

∴ △BDM≌△CDN(ASA)，

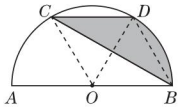
∴ △CDN 与△CDM 的面积之和等于△CDM 与△BDM 的面积之和，

∴ 四边形 $DNCM$ 的面积等于△CDB 的面积，

∴ 阴影部分的面积是 $\dfrac{90\cdot\pi\cdot(2\sqrt{2})^2}{360}-\dfrac{2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}}{2}=2\pi-4$.

4. 解：如图，连接 OC，OD，BD，

∵ 点 C，D 是半圆 O 上的三等分点，



（第 4 题）

∴ $\angle AOC=\angle COD=\angle DOB=60°$.

∵ $OC=OD=OB$，

∴ △COD，△OBD 是等边三角形，

∴ $\angle ODB=60°$，$OD=CD=2$.

又∵ $\angle COD=60°$，

∴ $\angle COD=\angle ODB$.

∴ $OC/\!/BD$，

∴ $S_{\triangle BDC}=S_{\triangle BDO}$，

∴ $S_{阴影}=S_{扇形BOD}=\dfrac{60\pi\cdot2^2}{360}=\dfrac{2\pi}{3}$.

点拨： 本题利用等积法将阴影部分的面积转化为扇形 OBD 的面积.

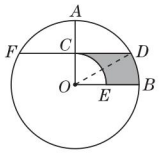
5. 解：因为三个扇形的半径都为 1，三个圆心角的和为 45° + 90° = 135°，所以阴影部分面积的和 = $\dfrac{135\times\pi\times1^2}{360}=\dfrac{3}{8}\pi$.

点拨： 将左下角阴影部分移到右上角，则图中阴影部分利用凑整法可拼成一个圆心角为 135°，半径是 1 的扇形.

6. 解：(1) 如图，连接 OD，∵ $OA\perp OB$，

$FD/\!/OB$，

∴ $OA\perp FD$，$\angle AOB=90°$.



（第 6 题）

∴ $\angle OCD=90°$.

设 $OC=a$，则 $OA=2a=OD$.

在 Rt△OCD 中，

由勾股定理，得 $CD^2+OC^2=OD^2$，即 $(\sqrt{3})^2+a^2=4a^2$，

解得 $a_1=1$，$a_2=-1$(舍去).

∴ ⊙O 的半径 OA 的长为 $2a=2$.

(2) $S_{\triangle OCD}=\dfrac{1}{2}OC\cdot CD=\dfrac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

在 Rt△OCD 中，∵ $OC=1$，$OD=2$，∴ $\angle ODC=30°$，

又∵ $FD/\!/OB$，∴ $\angle DOB=30°$.

∴ $S_{阴影}=S_{\triangle OCD}+S_{扇形OBD}-S_{扇形OCE}$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{30\pi}{360}\times2^2-\dfrac{90\pi}{360}\times1^2$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\pi}{12}$.

点拨： 连接 OD，本题中阴影部分的面积可以看成是△OCD 与扇形 OBD 面积的和减去扇形 OCE 的面积.

第 18 招　建模思想应用的常见类型归类

1. 解：(1) 四边形 $DHBG$ 是菱形. 理由如下：

∵ 四边形 $ABCD$，$FBED$ 是完全相同的矩形，

∴ $\angle A=\angle E=90°$，$AD=ED$，$AB=EB$.

在△DAB 和△DEB 中，$\begin{cases}AD=ED,\\ \angle A=\angle E,\\ AB=EB,\end{cases}$

∴ △DAB≌△DEB(SAS)，

∴ $\angle ABD=\angle EBD$.

∵ $AB/\!/CD$，$DF/\!/BE$，

∴ 四边形 $DHBG$ 是平行四边形，$\angle HDB=\angle EBD$，

∴ $\angle HDB=\angle HBD$，

∴ $DH=BH$，

∴ ▱$DHBG$ 是菱形.

(2) 由(1)，设 $DH=BH=x$，则 $AH=8-x$，

在 Rt△ADH 中，$AD^2+AH^2=DH^2$，

即 $4^2+(8-x)^2=x^2$，

解得 $x=5$，即 $BH=5$，

∴ 菱形 $DHBG$ 的面积为 $HB\cdot AD=5\times4=20$.

点拨： 建立方程模型，将 DH，HB 的长设为 x，由勾股定理列方程求得 HB 的长，进而再求面积.

2. 不发生；在直角三角形中，斜边上的中线等于斜边的一半

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点拨: 连接 OP.

$\because \angle AOB=90°$,点 P 是线段 AB 的中点,$\therefore OP=\frac{1}{2}AB$.

$\because$ 木棍(AB)的长度不发生改变,

$\therefore$ 滑动过程中,点 P 到点 O 的距离不发生变化.

3. **解:**(1)设每千克核桃应降价 x 元.

根据题意,得$(60-x-40)\left(100+\frac{x}{2}\times 20\right)=2\ 240$.

化简,得 $x^2-10x+24=0$. 解得 $x_1=4$,$x_2=6$.

答:每千克核桃应降价 4 元或 6 元.

(2)由(1)可知每千克核桃可降价 4 元或 6 元.

因为要尽可能让利于顾客,

所以每千克核桃应降价 6 元.

此时,售价为 $60-6=54$(元),

$\frac{54}{60}\times 100\%=90\%$.

答:该店应该按原售价的九折出售.

点拨: 设出未知数,利用平均每天的销售量 × 每千克的利润 = 2 240 元列出方程求解即可.

4. **解:**(1)结合题图可设日均销售量 p(桶)与销售单价 x(元)的函数关系式为 $p=kx+b(k\neq 0)$,

根据题意得$\begin{cases}7k+b=500,\\12k+b=250,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}k=-50,\\b=850.\end{cases}$

所以日均销售量 p(桶)与销售单价 x(元)的函数关系式为 $p=-50x+850$.

(2)所提问题不唯一,如:"若该经营部希望日均获利 1 350 元,那么日均应销售多少桶水?"

根据题意得$(x-5)(-50x+850)-250=1\ 350$,

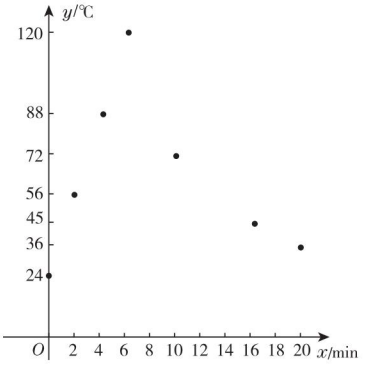
解得 $x_1=9$,$x_2=13$(不合题意,舍去),

当 $x=9$ 时,$p=-50x+850=400$.

答:若该经营部希望日均获利 1 350 元,那么日均应销售 400 桶水.

点拨: 本题考查了一元二次方程及一次函数的应用,解题的关键是通过题目和图像建立合适的函数模型求解.

5. **解:**(1)在直角坐标系中描出相应的点如图所示.



(第 5 题)

(2)由(1)中图可知,加热过程中 y 与 x 满足一次函数关系,设函数表达式为 $y=kx+b(k\neq 0)$,

将(0,24)代入,求得 $b=24$,

再将(2,56)代入,求得 $k=16$.

所以加热过程中 y 与 x 的函数表达式为 $y=16x+24$.

由(1)中图可知,加工过程中 y 与 x 满足反比例函数关系,设函数表达式为 $y=\frac{m}{x}(m\neq 0)$,

将(10,72)代入,得 $m=720$.

所以加工过程中 y 与 x 的函数表达式为 $y=\frac{720}{x}$.

(3)由于在加工过程中,当 $y=24$ 时,$x=\frac{720}{24}=30$,

所以每次加热后,进行加工的时间是 $30-6=24$(min).

6. **解:**(1)库存原料为 $2\times 60=120$(吨),根据题意可知 y 与 x 之间的函数表达式为 $y=\frac{120}{x}$.

因为生产能力提高,每小时消耗的原料大于计划消耗的原料,所以自变量的取值范围是 $x>2$.

(2)根据题意,得 $y\geqslant 24$,即$\frac{120}{x}\geqslant 24$.

解不等式,得 $x\leqslant 5$,

即每小时消耗的原料应控制在大于 2 吨且不大于 5 吨的范围内.

点拨: 本题考查反比例函数的应用,解题的关键是正确建立反比例函数模型并求出反比例函数表达式.

7. 8.0 m **点拨:** 如图,延长 AF 交 BH 于点 N,过点 F 作 $FM\perp BH$ 于点 M,

$\because \angle FEH=30°$,$EF=1.7$ m,

$\therefore FM=0.85$ m,

$\therefore EM\approx 1.47$ m. 由题易知 $\triangle FMN\backsim\triangle CDG$,

$\therefore \frac{FM}{CD}=\frac{MN}{DG}$,

$\because CD=1.6$ m,$DG=0.8$ m,

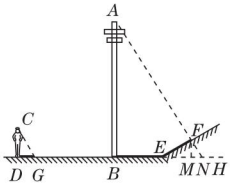
$\therefore MN=0.425$ m,

$\because BE=2.1$ m,

$\therefore BN\approx 2.1+1.47+0.425=3.995$(m),

又易知$\frac{AB}{BN}=\frac{CD}{DG}$,

$\therefore \frac{AB}{3.995}\approx\frac{1.6}{0.8}$,解得 $AB\approx 8.0$ m.



(第 7 题)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

典点

练准知识 练通考点
练透方法 练出高分





提分一定有方法！

绿色印刷产品

关注荣德基微信公众号，获取新资讯。

荣德基官方网站：http://www.rudder.com.cn
荣德基天猫旗舰店：http://rongdeji.tmall.com
客服热线：182 1039 5892

荣德基
初中频道

本书导学号
8934350

ISBN 978-7-5650-6634-0
定价：48.90元

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料