教辅资料站
电子教辅　试卷练习
知识总结　备课资源
扫码关注获取更多学习资料

荣德基 主编

典中点®

综合应用创新题 典中点

按课时编写



九年级数学 上

（BS版）

按80:1配赠教师用书

登录荣德基官方网站
免费下载课件资源



典中点·不简单　你·不平凡

- 方法技巧48招
- 典型易错题33道
- 培优拔尖题65道
- 高频考点17个

典中点微课堂 扫一扫
全书微课精彩呈现
创新题目 讲透方法

陕西新华出版传媒集团
陕西人民教育出版社

综合应用创新题 典中点 九年级数学 上 BS版 荣德基 主编 陕西新华出版传媒集团 陕西人民教育出版社

练透方法 练出高分

本书方法规律索引

方法规律

频次	方法名称	首次页码
	思想方法	
2	转化思想	17
6	数形结合思想	17
4	整体思想	25
2	分类讨论思想	27
2	方程思想	51
1	函数思想	75
1	旋转思想	87
	解题方法	
1	判定一个四边形是菱形的方法	3
2	逆向思维法	4
1	矩形的判定方法	7
1	正方形的判定方法	11
1	轴对称变换法	16
1	固定位置法	17
1	判别一元二次方程的“两方法”	18
1	用估算法判断一元二次方程解的取值范围	20
1	换根法	21
1	夹逼法	21
1	用直接开平方法解一元二次方程的“三步法”	23
1	换元法	25
1	用公式法解一元二次方程的“四个步骤”	28
1	用因式分解法解一元二次方程的步骤	29
1	类比法	30
1	与一元二次方程根与系数的关系有关的几种常见式子变形	31
1	构造法	34
1	整体换元法	34
1	降次换元法	34
1	特殊值法	34
1	树状图法	43
1	列表法	46
1	判断四条线段是否是成比例线段的方法	52
1	利用平行线证比例式或等积式的方法	56
1	等线段代换法	56
1	等积代换法	56
1	等比例代换法	56
1	平行法	56
1	等比例过渡法	56
1	中间比代换法	56
1	利用三边成比例判定三角形相似的“三步骤”	63
1	计算法	65
1	定义法	65
1	利用相似三角形解决实际问题的方法	68
1	相似图形的周长、面积的计算方法	70
1	三视图的画法	84
1	构造直角三角形法	89
1	画反比例函数图象的一般步骤	95
1	根据反比例函数的增减性比较函数值大小的方法	97
1	用反比例函数解决实际问题的步骤	103
1	待定系数法	107

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

荣德基 主编

综合应用创新题 典中点

本册主编：程小恒



九年级数学 上

（BS 版）

陕西新华出版传媒集团
陕西人民教育出版社
·西安·

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



极速提分20招

书山有路 · 训练有法

思想 方法 技巧 应用

四类绝招速解百题，招招见效助拿高分

第 1 招　菱形的性质与判定的四种应用
第 2 招　利用矩形的性质巧解折叠问题
第 3 招　矩形的性质与判定的六种应用
第 4 招　特殊四边形的性质在动点问题中的巧用
第 5 招　特殊平行四边形的性质和判定的综合应用的三种题型
第 6 招　配方法的六种常见应用
第 7 招　根的判别式的八种常见应用
第 8 招　根与系数的关系的九种应用
第 9 招　一元二次方程中常见易错易混问题归类
第10招　降次思想在求代数式的值和解方程中的应用
第11招　求概率的四种方法
第12招　统计概率思想在实际中的应用
第13招　成比例线段的证明和计算的五种常用作辅助线的方法
第14招　巧作平行线构造相似三角形
第15招　利用相似三角形巧证线段的数量和位置关系
第16招　证比例式或等积式的七种技巧
第17招　根据物体的三视图计算其表面积和体积
第18招　反比例函数与一次函数的综合应用
第19招　反比例函数与几何的综合应用
第20招　建模思想应用的常见类型归类



提分一定有方法！

内容及详解请见夹册《极速提分法》

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

目录 CONTENTS

第一章 特殊平行四边形

1 菱形的性质与判定

第 1 课时 菱形及其性质 …… 1

第 2 课时 菱形的判定 …… 3

2 矩形的性质与判定

第 1 课时 矩形及其性质 …… 5

第 2 课时 矩形的判定 …… 7

3 正方形的性质与判定

第 1 课时 正方形及其性质 …… 9

第 2 课时 正方形的判定 …… 11

第 3 课时 **正方形的性质与判定的综合应用** … 13

阶段核心归类

特殊平行四边形间的关系的综合应用 …… 14

全章热门考点整合应用 …… 15

第二章 一元二次方程

1 认识一元二次方程

第 1 课时 一元二次方程 …… 18

第 2 课时 一元二次方程的解 …… 20

第 3 课时 **一元二次方程的定义及相关概念的五种常见应用** …… 22

2 用配方法求解一元二次方程

第 1 课时 直接开平方法 …… 23

第 2 课时 配方法 …… 24

3 用公式法求解一元二次方程

第 1 课时 根的判别式 …… 26

第 2 课时 公式法 …… 28

4 用因式分解法求解一元二次方程 …… 29

*5 一元二次方程的根与系数的关系 …… 31

阶段核心方法

一元二次方程的九种解法 …… 33

6 应用一元二次方程

第 1 课时 建立一元二次方程解几何问题 …… 35

第 2 课时 建立一元二次方程解百分率问题 …… 36

第 3 课时 建立一元二次方程解一般问题 …… 37

阶段核心归类

利用一元二次方程解实际问题的十种常见应用 …… 39

全章热门考点整合应用 …… 41

第三章 概率的进一步认识

1 用树状图或表格求概率

第 1 课时 用树状图法求概率 …… 43

第 2 课时 用列举法求概率 …… 45

第 3 课时 **利用概率判断游戏规则的公平性** …… 47

2 用频率估计概率 …… 48

阶段核心归类

概率与其他知识的综合应用类型 …… 50

全章热门考点整合应用 …… 51

第四章 图形的相似

1 成比例线段 …… 52

2 平行线分线段成比例 …… 54

阶段核心技巧

平行线分线段成比例常见应用的六种技巧 …… 56

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

目 录 CONTENTS

3 相似多边形 …… 57

4 探索三角形相似的条件

第 1 课时 利用角的关系判定两三角形相似 …… 59

第 2 课时 利用边角关系判定两三角形相似 …… 61

第 3 课时 利用三边关系判定两三角形相似 …… 63

第 4 课时 黄金分割 …… 65

*5 相似三角形判定定理的证明 …… 66

阶段核心归类

巧用“基本图形”探索相似条件 …… 67

6 利用相似三角形测高 …… 68

7 相似三角形的性质 …… 70

8 图形的位似

第 1 课时 位似图形 …… 72

第 2 课时 平面直角坐标系中的位似变换 … 74

阶段核心归类

巧用位似解三角形中的内接多边形问题 … 76

全章热门考点整合应用 …… 77

第五章 投影与视图

1 投影

第 1 课时 投影与中心投影 …… 79

第 2 课时 平行投影与正投影 …… 81

阶段核心归类

平行投影、中心投影、正投影的五种常见应用 …… 83

2 视图

第 1 课时 由几何体到三视图 …… 84

第 2 课时 由三视图到几何体 …… 86

第 3 课时 由三视图到几何体的展开图 …… 88

阶段核心归类

三视图与实物的互相转化 …… 90

全章热门考点整合应用 …… 91

第六章 反比例函数

1 反比例函数 …… 93

2 反比例函数的图象与性质

第 1 课时 反比例函数的图象 …… 95

第 2 课时 反比例函数的性质 …… 97

第 3 课时 **反比例函数图象与性质的应用题型** …… 99

阶段核心归类

用反比例函数比例系数 k 的几何意义解与面积相关的应用 …… 101

3 反比例函数的应用

第 1 课时 建立反比例函数模型解实际问题 …… 103

第 2 课时 建立反比例函数模型解跨学科问题 …… 105

阶段核心方法

求反比例函数表达式的六种方法 …… 107

全章热门考点整合应用 …… 108

达标检测卷

第一章达标检测卷 …… 109

第二章达标检测卷 …… 113

第三章达标检测卷 …… 117

第四章达标检测卷 …… 121

第五章达标检测卷 …… 125

第六章达标检测卷 …… 129

期末达标检测卷 …… 133

参考答案及点拨 …… 137

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

特殊平行四边形

1 菱形的性质与判定

第1课时 菱形及其性质

小贴士："*"表示该题的难度较大，综合性或技巧性较强。

名师点金

1. **菱形的性质**：菱形具有平行四边形的一切性质. 菱形的性质还有：
(1)菱形的每一条对角线平分一组对角.(2)菱形的四条边相等.(3)菱形是轴对称图形.(4)菱形的对角线互相垂直.
2. 利用菱形的对角线计算线段的长度时，通常要借助勾股定理来进行.
3. 菱形的面积等于两对角线乘积的一半.

注意：菱形的对角线互相垂直平分，但不一定相等.

Ⅰ 夯实基础·逐点练

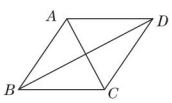
☞(答案见137页)

知识点1 菱形的定义及其对称性

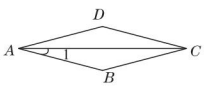
1. 如图，若要使$\square ABCD$成为菱形，则需要添加的条件是(　　)　　【导学号：7778062】

A. $AB=CD$　　B. $AD=AC$

C. $AB=BC$　　D. $AC=BD$



(第1题)



(第2题)

2. 【2019·河北】如图，菱形$ABCD$中，$\angle D=150°$，则$\angle 1=$(　　)

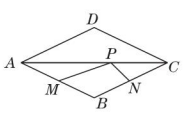
A. 30°　　B. 25°

C. 20°　　D. 15°

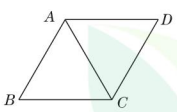
***3.** 【2018·新疆】如图，点P是边长为1的菱形$ABCD$对角线AC上的一个动点，点M,N分别是AB,BC边上的中点，则$MP+PN$的最小值是(　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1

C. $\sqrt{2}$　　D. 2



(第3题)



(第4题)

知识点2 菱形边的性质

4. 【2019·贵阳】如图，菱形$ABCD$的周长是4 cm，$\angle ABC=60°$，那么这个菱形的对角线AC的长是(　　)

A. 1 cm　　B. 2 cm

C. 3 cm　　D. 4 cm

知识点3 菱形对角线的性质

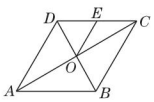
5. 【2019·玉林】菱形不具备的性质(　　)

A. 是轴对称图形　　B. 是中心对称图形

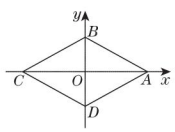
C. 对角线互相垂直　　D. 对角线一定相等

6. 【2018·宿迁】如图，菱形$ABCD$的对角线AC,BD相交于点O，点E为CD的中点，若菱形$ABCD$的周长为16，$\angle BAD=60°$，则$\triangle OCE$的面积是(　　)

A. $\sqrt{3}$　　B. 2　　C. $2\sqrt{3}$　　D. 4



(第6题)



(第8题)

7. 【2019·泸州】一个菱形的边长为6，面积为28，则该菱形的两条对角线的长度之和为(　　)

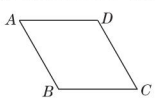
A. 8　　B. 12　　C. 16　　D. 32

***8.** 【2019·天津】如图，四边形$ABCD$为菱形，A,B两点的坐标分别是$(2,0),(0,1)$，点C,D在坐标轴上，则菱形$ABCD$的周长等于(　　)

A. $\sqrt{5}$　　B. $4\sqrt{3}$　　C. $4\sqrt{5}$　　D. 20

易错点 考虑问题不全导致错解

9. 【中考·怀化】如图，在菱形$ABCD$中，$\angle ABC=120°$，$AB=10$ cm，点P是这个菱形内部或边上的一点. 若以P,B,C为顶点的三角形是等腰三角形，则P,A(P,A两点不重合)两点间的最短距离为_____cm.



(第9题)

趣味数学 一位农夫请来了工程师、物理学家和数学家，想用最少的篱笆围出最大的面积. 工程师用篱笆围出一个圆，宣称这是最优设计. 物理学家将篱笆拉成一条长长的直线，假设篱笆有无限长.(待续)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

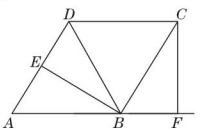
Ⅱ 整合方法·提升练 ☞（答案见137页）

考查角度① 利用菱形的性质证明线段相等

10. 【2019·百色】如图，菱形 $ABCD$ 中，作 $BE\perp AD$，$CF\perp AB$，分别交 AD，AB 的延长线于点 E，F.

（1）求证：$AE=BF$.

（2）若点 E 恰好是 AD 的中点，$AB=2$，求 BD 的长.



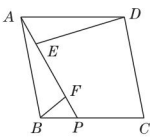
（第10题）

考查角度② 利用菱形边的性质证明线段的和差关系

11. 【2019·聊城】如图，在菱形 $ABCD$ 中，点 P 是 BC 边上一点，连接 AP，点 E，F 是 AP 上的两点，连接 DE，BF，使得 $\angle AED=\angle ABC$，$\angle ABF=\angle BPF$.

求证：（1）$\triangle ABF\cong\triangle DAE$；

（2）$DE=BF+EF$.



（第11题）

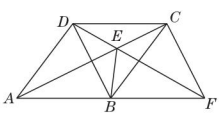
Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞（答案见137页）

拔尖角度① 利用菱形的性质解决有关角的问题

12. 如图，四边形 $ABCD$ 是菱形，点 E 为对角线 AC 上一点，连接 DE 并延长交 AB 的延长线于点 F. 连接 CF，BD，BE.

（1）求证：$\angle AFD=\angle EBC$.

（2）若 E 为 $\triangle BCD$ 的重心，求 $\angle ACF$ 的度数.



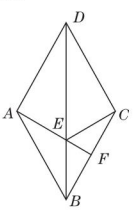
（第12题）

拔尖角度② 利用菱形的性质探究点的位置

13. 已知：如图，在菱形 $ABCD$ 中，F 是 BC 上任意一点，连接 AF 交对角线 BD 于点 E，连接 EC.

（1）求证：$AE=EC$.

（2）当 $\angle ABC=60°$，$\angle CEF=60°$ 时，点 F 在线段 BC 的什么位置？并说明理由.



（第13题）

微信公众号 教辅资料站

趣味数学

认为围起半个地球总够大了. 数学家好好嘲笑了他们一番，他用很少的篱笆把自己围起来，然后说："我现在站在篱笆里面. 除我站的之外就是围出的面积，用篱笆最少，面积最大."

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

第2课时　菱形的判定

名师点金

判定一个四边形是菱形的方法

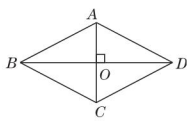
1. 若已知邻边相等要证明一个四边形是菱形，有两种方法：
   (1)证明四条边都相等；
   (2)先证明该四边形是平行四边形，再利用有一组邻边相等的平行四边形是菱形证明.
2. 若条件中出现两条对角线，要证明一个四边形是菱形，可考虑利用：
   (1)对角线互相垂直且平分的四边形是菱形；
   (2)对角线互相垂直的平行四边形是菱形.

Ⅰ 夯实基础·逐点练

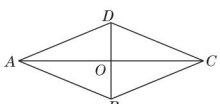
(答案见137页)

知识点1 由对角线的位置关系判定菱形

1. 如图，四边形 $ABCD$ 的对角线互相垂直，且 $OB=OD$，请你添加一个适当的条件_____，使四边形 $ABCD$ 成为菱形(只需添加一个即可).



(第1题)



(第2题)

2. 如图，在$\square ABCD$中，AC，BD交于点O，$AB=13$，$AC=24$，$DB=10$，则四边形$ABCD$是(　　)

A. 一般的平行四边形　　B. 长方形

C. 菱形　　D. 不能确定

知识点2 由边的关系判定菱形

3. 【2019·大庆】下列说法中不正确的是(　　)

A. 四边相等的四边形是菱形

B. 对角线垂直的平行四边形是菱形

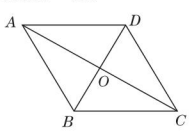
C. 菱形的对角线互相垂直且相等

D. 菱形的邻边相等

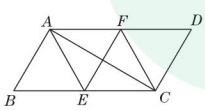
4. 【2019·宁夏】如图，四边形$ABCD$的两条对角线相交于点O，且互相平分，添加下列条件，仍不能判定四边形$ABCD$为菱形的是(　　)

A. $AC\perp BD$　　B. $AB=AD$

C. $AC=BD$　　D. $\angle ABD=\angle CBD$



(第4题)



(第5题)

5. 如图，在$\square ABCD$中，AE，CF分别是$\angle BAD$和$\angle BCD$的平分线，添加一个条件，仍无法判定四边形$AECF$为菱形的是(　　)

A. $AE=AF$　　B. $EF\perp AC$

C. $\angle B=60°$　　D. AC是$\angle EAF$的平分线

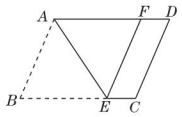
6. 如图，将$\square ABCD$沿AE翻折，使点B恰好落在AD上的点F处，则下列结论不一定成立的是(　　)

A. $AF=EF$

B. $AB=EF$

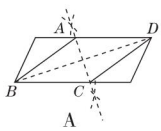
C. $AE=AF$

D. $AF=BE$

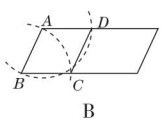


(第6题)

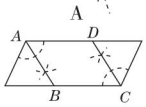
7. 【2018·舟山】用尺规在一个平行四边形内作菱形$ABCD$，下列作法中错误的是(　　)



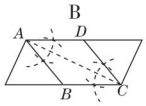
A



B



C

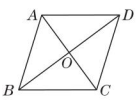


D

*8. 【2019·永州】如图，四边形$ABCD$的对角线相交于点O，且点O是BD的中点，若$AB=AD=5$，$BD=8$，$\angle ABD=\angle CDB$，则四边形$ABCD$的面积为(　　)

A. 40　　B. 24

C. 20　　D. 15



(第8题)

易错点 臆造菱形的判定方法导致出错

9. 下列命题中，正确的是_____(填序号).

①四边都相等的四边形是菱形；

②两组邻边分别相等的四边形是菱形；

③对角线互相垂直的平行四边形是菱形；

④对角线相等的四边形是菱形；

⑤一条对角线平分一组对角的平行四边形是菱形.

趣味数学　笛卡儿是法国数学家、哲学家、物理学家、神学家. 1596年3月31日生于法国图赖讷拉海，1650年2月11日卒于瑞典斯德哥尔摩.(待续)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

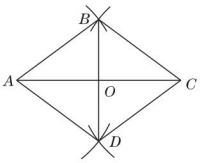
Ⅱ 整合方法·提升练 ☞（答案见137页）

考查角度1 利用平行四边形边的关系判定菱形

10. 【2019·兰州】如图，$AC=8$，分别以 A，C 为圆心，以长度5为半径作弧，两条弧分别相交于点 B 和 D，依次连接 A，B，C，D，连接 BD 交 AC 于点 O.

（1）判断四边形 $ABCD$ 的形状，并说明理由；

（2）求 BD 的长.



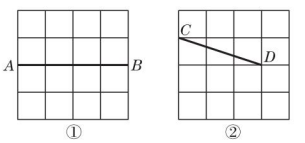
（第10题）

考查角度2 利用平行四边形对角线的位置关系画菱形

11. 【2019·吉林】图①、图②均为4×4的正方形网格，每个小正方形的顶点称为格点. 在图①中已画出线段 AB，在图②中已画出线段 CD，其中 A，B，C，D 均为格点. 按下列要求画图：

（1）在图①中，以 AB 为对角线画一个菱形 $AEBF$，且 E，F 为格点；

（2）在图②中，以 CD 为对角线画一个对边不相等的四边形 $CGDH$，且 G，H 为格点，$\angle CGD=\angle CHD=90°$.



（第11题）

Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞（答案见138页）

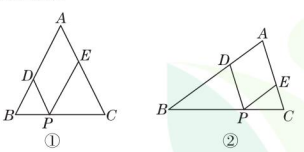
拔尖角度1 利用菱形的判定和性质探究菱形的条件（逆向思维法）

12. 如图①，$\triangle ABC$ 为等腰三角形，$AB=AC=a$，P 点是底边 BC 上的一个动点，$PD\parallel AC$，$PE\parallel AB$.

（1）用含 a 的代数式表示四边形 $ADPE$ 的周长为_____.

（2）点 P 运动到什么位置时，四边形 $ADPE$ 是菱形，请说明理由.

（3）如果 $\triangle ABC$ 不是等腰三角形（如图②），其他条件不变，点 P 运动到什么位置时，四边形 $ADPE$ 是菱形？请说明理由.



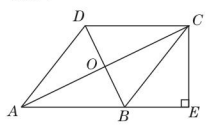
（第12题）

拔尖角度2 利用菱形的判定和性质求线段长

13. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB\parallel DC$，$AB=AD$，对角线 AC，BD 交于点 O，AC 平分 $\angle BAD$，过点 C 作 $CE\perp AB$ 交 AB 的延长线于点 E.

（1）求证：四边形 $ABCD$ 是菱形.

（2）若 $AB=\sqrt{5}$，$BD=2$，求 BE 的长.



（第13题）

更多提分招数详见《极速提分法》第1页。

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2　矩形的性质与判定

第1课时　矩形及其性质

名师点金

1. 矩形是特殊的平行四边形，具有平行四边形的所有性质，它的特殊性就是四个角都是直角和对角线相等.
2. 矩形的两条对角线将矩形分为两对全等的等腰三角形. 在解题时常用到等腰三角形的性质.
3. 矩形既是中心对称图形又是轴对称图形，有两条对称轴.

Ⅰ 夯实基础·逐点练 ☞(答案见138页)

知识点1　矩形的定义

1. 下列说法中，正确的是(　　)

A. 菱形是中心对称图形但不是轴对称图形

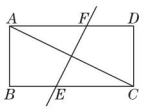
B. 平行四边形的邻边相等

C. 矩形是轴对称图形且有四条对称轴

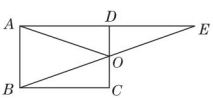
D. 菱形的面积等于两条对角线长度乘积的一半

2. 【2019·广州】如图，矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC 的垂直平分线 EF 分别交 BC，AD 于点 E，F，若 $BE=3$，$AF=5$，则 AC 的长为(　　)

A. $4\sqrt{5}$　　B. $4\sqrt{3}$　　C. 10　　D. 8



(第2题)



(第3题)

知识点2　矩形的边角性质

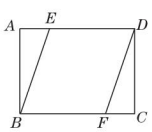
3. 如图，点 E 是矩形 $ABCD$ 的边 AD 延长线上的一点，且 $DE=AD$，连接 BE 交 CD 于点 O，连接 AO，下列结论中不正确的是(　　)

A. $\triangle AOB\cong\triangle BOC$　　B. $\triangle BOC\cong\triangle EOD$

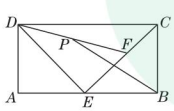
C. $\triangle AOD\cong\triangle EOD$　　D. $\triangle AOD\cong\triangle BOC$

4. 【2018·兰州】如图，矩形 $ABCD$ 中，$AB=3$，$BC=4$，$EB/\!/DF$，且 BE 与 DF 之间的距离为3，则 AE 的长是(　　)

A. $\sqrt{7}$　　B. $\frac{3}{8}$　　C. $\frac{7}{8}$　　D. $\frac{5}{8}$



(第4题)



(第5题)

*5. 【2019·泰安】如图，矩形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$AD=2$，E 为 AB 的中点，F 为 EC 上一动点，P 为 DF 的中点，连接 PB，则 PB 的最小值是(　　)

A. 2　　B. 4　　C. $\sqrt{2}$　　D. $2\sqrt{2}$

知识点3　矩形的对角线性质

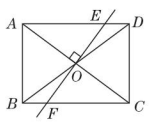
6. 【2019·十堰】矩形具有而平行四边形不一定具有的性质是(　　)

A. 对边相等　　B. 对角相等

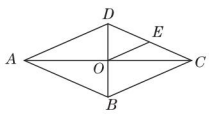
C. 对角线相等　　D. 对角线互相平分

*7. 【2019·眉山】如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=6$，$BC=8$，过对角线交点 O 作 $EF\perp AC$ 交 AD 于点 E，交 BC 于点 F，则 DE 的长是(　　)

A. 1　　B. $\frac{7}{4}$　　C. 2　　D. $\frac{12}{5}$



(第7题)



(第8题)

知识点4　直角三角形斜边上中线的性质

8. 【2019·赤峰】如图，菱形 $ABCD$ 的周长为20，对角线 AC，BD 相交于点 O，E 是 CD 的中点，则 OE 的长是(　　)

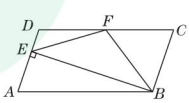
A. 2.5　　B. 3

C. 4　　D. 5

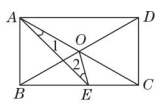
*9. 【2018·眉山】如图，在 $\square ABCD$ 中，$CD=2AD$，$BE\perp AD$ 于点 E，F 为 DC 的中点，连接 EF，BF. 下列结论中正确的数量是(　　)

① $\angle ABC=2\angle ABF$；② $EF=BF$；③ $S_{四边形DEBC}=2S_{\triangle EFB}$；④ $\angle CFE=3\angle DEF$.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4



(第9题)



(第10题)

易错点　不能灵活运用矩形的性质进行计算

10. 如图，矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC，BD 交于点 O，点 E 是 BC 上一点，且 $AB=BE$，$\angle 1=15°$，则 $\angle 2=$ _____.

趣味数学　神奇的古建筑：在南靖县，用夯土围合建造起来的楼房尚存10 000多座，有圆形、方形、五凤形、半月形、交椅形、凸字形等. 这些楼房千姿百态，气势非凡，给人感染力和震撼力.(待续)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

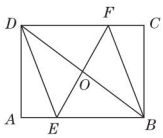
Ⅱ 整合方法·提升练 ☞（答案见138页）

考查角度1 利用矩形的边角性质求线段长

11. 【2019·鄂州】如图，矩形 $ABCD$ 中，$AB=8$，$AD=6$，点 O 是对角线 BD 的中点，过点 O 的直线分别交 AB，CD 边于点 E，F.

（1）求证：四边形 $DEBF$ 是平行四边形.

（2）当 $DE=DF$ 时，求 EF 的长.



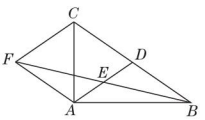
（第11题）

考查角度2 利用直角三角形斜边上中线的性质判断四边形形状

12. 【2018·安顺】如图，在 $\triangle ABC$ 中，AD 是 BC 边上的中线，E 是 AD 的中点，过点 A 作 BC 的平行线交 BE 的延长线于点 F，连接 CF.

（1）求证：$AF=DC$.

（2）若 $AB\perp AC$，试判断四边形 $ADCF$ 的形状，并证明你的结论.



（第12题）

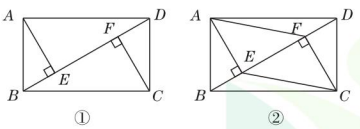
Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞（答案见139页）

拔尖角度1 利用矩形的性质探求面积关系

13. 【2019·哈尔滨】已知：在矩形 $ABCD$ 中，BD 是对角线，$AE\perp BD$ 于点 E，$CF\perp BD$ 于点 F.

（1）如图①，求证 $AE=CF$.

（2）如图②，当 $\angle ADB=30°$ 时，连接 AF，CE，在不添加任何辅助线的情况下，请直接写出图②中四个三角形，使写出的每个三角形的面积都等于矩形 $ABCD$ 面积的 $\frac{1}{8}$.



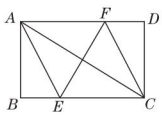
（第13题）

拔尖角度2 利用矩形的性质探究菱形的条件

14. 【2019·贺州】如图，在矩形 $ABCD$ 中，E，F 分别是 BC，AD 边上的点，且 $AE=CF$.

（1）求证：$\triangle ABE\cong\triangle CDF$.

（2）当 $AC\perp EF$ 时，四边形 $AECF$ 是菱形吗？请说明理由.



（第14题）

微信公众号 教辅资料站

如此奇妙的建构和变化多端的造型在世界民居建筑中是极其罕见的. 这些建筑对环境无公害、无污染，与现在的钢筋、水泥或化学材料建成的楼房相比，土楼显示了“人与自然和谐相处”的巨大优势.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第2课时　矩形的判定

名师点金

矩形的判定方法有三种

第一种是有三个角是直角的四边形为矩形；

第二种是定义，有一个角是直角的平行四边形是矩形；

第三种是对角线相等的平行四边形是矩形.

后面两种判定方法一定要满足两个条件，一个是这个四边形是平行四边形，这个条件不能漏掉，另一个是一个角为直角或对角线相等.

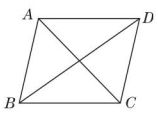
注意：对角线相等的四边形**不一定**是矩形，但是对角线互相平分且相等的四边形是矩形.

Ⅰ 夯实基础·逐点练 ☞（答案见139页）

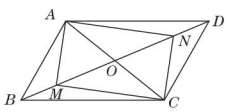
知识点1 由对角线的关系判定矩形

1. 如图，四边形 $ABCD$ 的对角线互相平分，要使它变为矩形，需要添加的条件是(　　)

A. $AB=CD$　B. $AD\parallel BC$　C. $AB=BC$　D. $AC=BD$



（第1题）



（第3题）

2. 【2019·永州】下列说法正确的是(　　)

A. 有两边和一角分别相等的两个三角形全等

B. 有一组对边平行，且对角线相等的四边形是矩形

C. 如果一个角的补角等于它本身，那么这个角等于45°

D. 点到直线的距离就是该点到该直线的垂线段的长度

*3. 【2019·临沂】如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，M,N 是 BD 上两点，$BM=DN$，连接 AM,MC,CN,NA，添加一个条件，使四边形 $AMCN$ 是矩形，这个条件是(　　)

A. $OM=\frac{1}{2}AC$　　B. $MB=MO$

C. $BD\perp AC$　　D. $\angle AMB=\angle CND$

知识点2 由直角的个数判定矩形

4. 【2019·重庆】下列命题正确的是(　　)

A. 有一个角是直角的平行四边形是矩形

B. 四条边相等的四边形是矩形

C. 有一组邻边相等的平行四边形是矩形

D. 对角线相等的四边形是矩形

5. 【2018·上海】已知平行四边形 $ABCD$，下列条件中，不能判定这个平行四边形为矩形的是(　　)

A. $\angle A=\angle B$　　B. $\angle A=\angle C$

C. $AC=BD$　　D. $AB\perp BC$

6. 四边形 $ABCD$ 的对角线 AC,BD 相交于点 O，下列各组条件中，不能判定四边形 $ABCD$ 为矩形的是(　　)

A. $AB=CD,AD=BC,AC=BD$

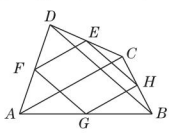
B. $AO=CO,BO=DO,\angle BAD=90°$

C. $AO=CO,BO=DO,\angle AOB=90°$

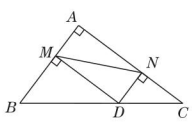
D. $\angle BAD=\angle ABC=\angle BCD=\angle CDA$

7. 如图，顺次连接四边形 $ABCD$ 各边中点得四边形 $EFGH$，要使四边形 $EFGH$ 为矩形，应添加的条件是(　　)

A. $AB\parallel DC$　B. $AC=BD$　C. $AC\perp BD$　D. $AB=DC$



（第7题）



（第9题）

8. 在 $\square ABCD$ 中，$AB=3,BC=4$，当 $\square ABCD$ 的面积最大时，下列结论正确的是(　　)

①$AC=5$；②$\angle BAD+\angle BCD=180°$；

③$AC\perp BD$；④$AC=BD$.

A. ①②③　B. ①②④　C. ②③④　D. ①③④

*9. 【2019·安顺】如图，在 Rt $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90°$，且 $BA=3,AC=4$，点 D 是斜边 BC 上的一个动点，过点 D 分别作 $DM\perp AB$ 于点 M，$DN\perp AC$ 于点 N，连接 MN，则线段 MN 的最小值为_____.

易错点 对矩形的判定方法理解错误导致出错

10. 在一组对边平行的四边形中，添加下列条件中的哪一个，可判定这个四边形是矩形(　　)

A. 另一组对边相等，对角线相等

B. 另一组对边相等，对角线互相垂直

C. 另一组对边平行，对角线相等

D. 另一组对边平行，对角线互相垂直

更多提分招数详见《极速提分法》第3页。

趣味数学　**缺一少十**：腊月的一天，郑板桥和蔡州官同游苏州城，见一家门上贴了一副对联：二三四五，六七八九. 郑板桥立即派人送去了一些衣服、米面和几斤肉.（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

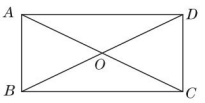
Ⅱ 整合方法·提升练 ☞（答案见139页）

考查角度1 利用对角线的关系判定矩形

11. 【2019·云南】如图，四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，$AO=OC$，$BO=OD$，且 $\angle AOB=2\angle OAD$.

（1）求证：四边形 $ABCD$ 是矩形.

（2）若 $\angle AOB:\angle ODC=4:3$，求 $\angle ADO$ 的度数.



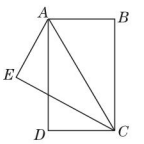
（第11题）

考查角度2 利用直角的数量判定矩形

12. 【中考·日照】如图，已知 $BA=AE=DC$，$AD=EC$，$CE\perp AE$，垂足为 E.

（1）求证：$\triangle DCA\cong\triangle EAC$；

（2）只需添加一个条件，即_____，可使四边形 $ABCD$ 为矩形. 请加以证明.



（第12题）

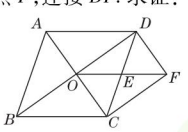
Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞（答案见139页）

拔尖角度1 利用矩形的定义判定矩形

13. 【2019·新疆】如图，在菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，E 是 CD 的中点，连接 OE. 过点 C 作 $CF\parallel BD$ 交 OE 的延长线于点 F，连接 DF. 求证：

（1）$\triangle ODE\cong\triangle FCE$；

（2）四边形 $OCFD$ 是矩形.



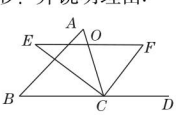
（第13题）

拔尖角度2 利用矩形的判定探究动点的位置（逆向思维法）

14. 【中考·达州】如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 O 是边 AC 上一个动点，过点 O 作直线 $EF\parallel BC$ 分别交 $\angle ACB$，外角 $\angle ACD$ 的平分线于点 E，F.

（1）若 $CE=8$，$CF=6$，求 OC 的长.

（2）连接 AE，AF. 问：当点 O 在边 AC 上运动到什么位置时，四边形 $AECF$ 是矩形？并说明理由.



（第14题）

更多提分招数详见《极速提分法》第5页。

趣味数学

蔡州官问郑板桥怎么知道这家人缺少衣服和粮食，郑板桥说："他家的门上不是明明白白写着嘛，你看那对联是'二三四五，六七八九'，这不就是缺一（衣）少十（食）吗？"

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

3　正方形的性质与判定

第1课时　正方形及其性质

名师点金

正方形同时具备平行四边形、菱形、矩形的所有性质，因此，正方形的四个角都是直角，四条边都相等，对角线互相垂直平分且相等，每一条对角线平分一组对角，正方形是轴对称图形，有四条对称轴. 这些性质为证明线段相等、垂直及角相等提供了重要的依据.

Ⅰ 夯实基础·逐点练 ☞(答案见139页)

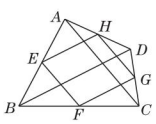
知识点1　正方形的定义

1. 【中考·兰州】$\square ABCD$的对角线AC与BD相交于点O，且$AC\perp BD$，请添加一个条件：_____，使得$\square ABCD$为正方形.

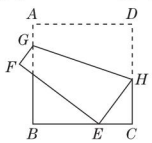
2. 【2018·临沂】如图，点E,F,G,H分别是四边形$ABCD$的边AB,BC,CD,DA的中点，则下列说法中正确的数量是(　　)

①若$AC=BD$，则四边形$EFGH$为矩形；②若$AC\perp BD$，则四边形$EFGH$为菱形；③若四边形$EFGH$是平行四边形，则AC与BD互相平分；④若四边形$EFGH$是正方形，则AC与BD互相垂直且相等.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4



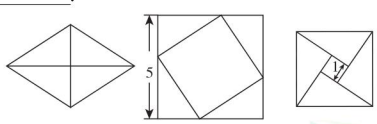
(第2题)



(第4题)

知识点2　正方形边的性质

3. 【2019·北京】把图①中的菱形沿对角线分成四个全等的直角三角形，将这四个直角三角形分别拼成如图②、图③所示的正方形，则图①中菱形的面积为_____.



(第3题)

*4. 【中考·毕节】如图，正方形$ABCD$的边长为9，将正方形折叠，使顶点D落在BC边上的点E处，折痕为GH. 若$BE:EC=2:1$，则线段CH的长是(　　)

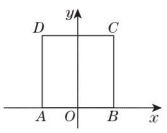
A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

知识点3　正方形角的性质

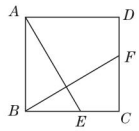
5. 【2019·黄石】在平面直角坐标系中，边长为2的正方形$ABCD$的边AB在x轴上，AB边的中点是坐标原点O，将正方形绕点C按逆时针方向旋转90°后，点B的对应点B'的坐标是(　　)

A. $(-1,2)$　　B. $(1,4)$

C. $(3,2)$　　D. $(-1,0)$



(第5题)



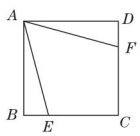
(第6题)

6. 【2019·河池】如图，在正方形$ABCD$中，点E,F分别在BC,CD上，$BE=CF$，则图中与$\angle AEB$相等的角的数量是(　　)

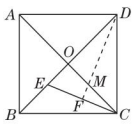
A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

7. 【2019·包头】如图，在正方形$ABCD$中，$AB=1$，点E,F分别在边BC和CD上，$AE=AF$，$\angle EAF=60°$，则CF的长是(　　)

A. $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\sqrt{3}-1$　　D. $\frac{2}{3}$



(第7题)



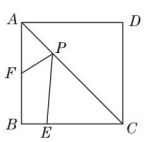
(第8题)

*8. 【2019·兰州】如图，边长为$\sqrt{2}$的正方形$ABCD$的对角线AC与BD交于点O，将正方形$ABCD$沿直线DF折叠，点C落在对角线BD上的点E处，折痕DF交AC于点M，则$OM=$(　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\sqrt{3}-1$　　D. $\sqrt{2}-1$

易错点　不能将两线段和转化为一条线段而致错

9. 【中考·安顺】如图，正方形$ABCD$的边长为4，E为BC上的一点，$BE=1$，F为AB上的一点，$AF=2$，P为AC上一个动点，则$PF+PE$的最小值为_____.



(第9题)

趣味数学　毕达哥拉斯有一次应邀参加一位富有政要的餐会，这位主人豪华宫殿般的餐厅铺的是正方形形状的美丽大理石地砖，由于大餐迟迟不上桌，这些饥肠辘辘的贵宾颇有怨言，(待续)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

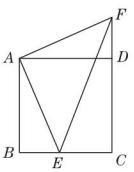
Ⅱ 整合方法·提升练 ☞（答案见139页）

考查角度1 利用正方形的性质求线段的长

10. 【2019·内江】如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 E 是 BC 上的一点，点 F 是 CD 延长线上的一点，且 $BE=DF$，连接 AE，AF，EF.

（1）求证：$\triangle ABE\cong\triangle ADF$.

（2）若 $AE=5$，请求出 EF 的长.



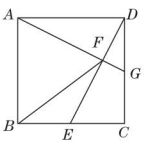
（第10题）

考查角度2 利用正方形的性质证明线段相等

11. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 E 是 BC 的中点，连接 DE，过点 A 作 $AG\perp ED$ 交 DE 于点 F，交 CD 于点 G.

（1）证明：$\triangle ADG\cong\triangle DCE$.

（2）连接 BF，证明：$AB=FB$.



（第11题）

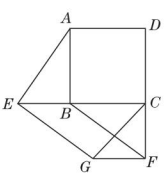
Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞（答案见140页）

拔尖角度1 利用正方形的性质判定平行四边形

12. 【2019·天门】如图，E，F 分别是正方形 $ABCD$ 的边 CB，DC 延长线上的点，且 $BE=CF$，过点 E 作 $EG/\!/BF$，交正方形外角的平分线 CG 于点 G，连接 GF，求证：

（1）$AE\perp BF$；

（2）四边形 $BEGF$ 是平行四边形.



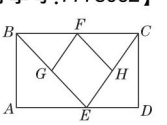
（第12题）

拔尖角度2 利用正方形的性质求图形的面积

13. 【2018·陇南】如图，已知矩形 $ABCD$ 中，E 是 AD 边上的一个动点，点 F，G，H 分别是 BC，BE，CE 的中点.

（1）求证：$\triangle BGF\cong\triangle FHC$.

（2）设 $AD=a$，当四边形 $EGFH$ 是正方形时，求矩形 $ABCD$ 的面积. 【导学号：7778062】



（第13题）

微信公众号 教辅资料站

但这位善于观察和理解的数学家却凝视脚下这些排列规则、美丽的方形地砖，毕达哥拉斯不只是欣赏地砖的美丽，还想到它们和“数”之间的关系.（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第2课时　正方形的判定

名师点金

正方形的判定方法：要判定一个四边形是正方形，最常用的方法就是先证明它是菱形(或矩形)，再证明这个菱形(或矩形)有一个角是直角(或有一组邻边相等)，其实质就是根据正方形的定义来判定. 当然也可以先证四边形是平行四边形，再证有一组邻边相等且有一个角是直角，或证这个平行四边形的对角线相等并且互相垂直.

Ⅰ 夯实基础·逐点练 ☞(答案见140页)

知识点1 正方形的对称性

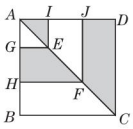
1. 【2019·攀枝花】下列说法错误的是(　　)

A. 平行四边形的对边相等

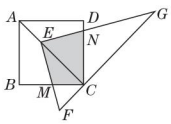
B. 对角线相等的四边形是矩形

C. 对角线互相垂直的平行四边形是菱形

D. 正方形既是轴对称图形又是中心对称图形



(第2题)



(第3题)

2. 【2018·宜昌】如图，正方形 $ABCD$ 的边长为1，点 E,F 分别是对角线 AC 上的两点，$EG\perp AB$，$EI\perp AD$，$FH\perp AB$，$FJ\perp AD$，垂足分别为 G,I,H,J，则图中阴影部分的面积等于(　　)

A. 1　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{4}$

*3. 如图，点 E 在正方形 $ABCD$ 的对角线 AC 上，且 $EC=2AE$，$\mathrm{Rt}\triangle FEG$ 的两条直角边 EF,EG 分别交 BC,DC 于点 M,N，若正方形 $ABCD$ 的边长为 a，则阴影部分即四边形 $EMCN$ 的面积为(　　)

A. $\frac{2}{3}a^2$　　B. $\frac{1}{4}a^2$　　C. $\frac{5}{9}a^2$　　D. $\frac{4}{9}a^2$

*4. 【中考·台州】小红用次数最少的对折方法验证了一条四边形丝巾的形状是正方形，她对折了(　　)

A. 1次　　B. 2次　　C. 3次　　D. 4次

知识点2 正方形的判定

5. 【2019·巴中】下列命题是真命题的是(　　)

A. 对角线相等的四边形是矩形

B. 对角线互相垂直的四边形是矩形

C. 对角线互相垂直的矩形是正方形

D. 四边相等的平行四边形是正方形

6. 下列说法正确的是(　　)

A. 四个角都相等的四边形是正方形

B. 四条边都相等的四边形是正方形

C. 对角线互相垂直的平行四边形是正方形

D. 对角线相等的菱形是正方形

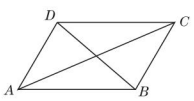
7. 【中考·日照】小明在学习了正方形之后，给同桌小文出了道题，从下列四个条件：①$AB=BC$，②$\angle ABC=90°$，③$AC=BD$，④$AC\perp BD$ 中选两个作为补充条件，使 $\square ABCD$ 为正方形(如图)，现有下列四种选法，你认为其中错误的是(　　)

A. ①②

B. ②③

C. ①③

D. ②④



(第7题)

*8. 【2019·北京】在矩形 $ABCD$ 中，M,N,P,Q 分别为边 AB,BC,CD,DA 上的点(不与端点重合)，对于任意矩形 $ABCD$，下面四个结论中，

①存在无数个四边形 $MNPQ$ 是平行四边形；

②存在无数个四边形 $MNPQ$ 是矩形；

③存在无数个四边形 $MNPQ$ 是菱形；

④至少存在一个四边形 $MNPQ$ 是正方形.

所有正确结论的序号是_____.

易错点 将特殊四边形的判定相混淆导致出错

9. 四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 和 BD 相交于点 O，假设有下列条件：①$AB=AD$；

②$\angle DAB=90°$；

③$AO=CO$，$BO=DO$；

④四边形 $ABCD$ 为矩形；

⑤四边形 $ABCD$ 为菱形；

⑥四边形 $ABCD$ 为正方形.

则下列推理不成立的是(　　)

A. ①④⇒⑥　　B. ①③⇒⑤

C. ①②⇒⑥　　D. ②③⇒④

趣味数学　于是拿出笔并且蹲在地板上，选了一块地砖，以它的对角线为边画一个正方形，他发现这个正方形面积恰好等于两块地砖的面积和.(待续)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

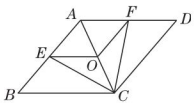
Ⅱ 整合方法·提升练 ☞（答案见140页）

考查角度1 以菱形为基础判定正方形

10. 【中考·青岛】如图，在菱形 $ABCD$ 中，点 E,O,F 分别为 AB,AC,AD 的中点，连接 CE,CF,OE,OF.

（1）求证：$\triangle BCE\cong\triangle DCF$.

（2）当 AB 与 BC 满足什么关系时，四边形 $AEOF$ 是正方形？请说明理由.



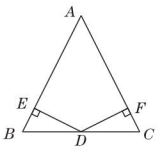
（第10题）

考查角度2 以矩形为基础判定正方形

11. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，D 为 BC 边的中点，过点 D 作 $DE\perp AB$，$DF\perp AC$，垂足分别为 E,F.

（1）求证：$\triangle BED\cong\triangle CFD$.

（2）若 $\angle A=90°$，求证：四边形 $DFAE$ 是正方形.



（第11题）

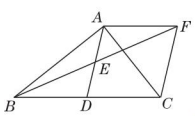
Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞（答案见141页）

拔尖角度1 利用特殊四边形的判定说明四边形的形状

12. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90°$，AD 是中线，E 是 AD 的中点，过点 A 作 $AF/\!/BC$ 交 BE 的延长线于点 F，连接 CF.

（1）求证：$AD=AF$.

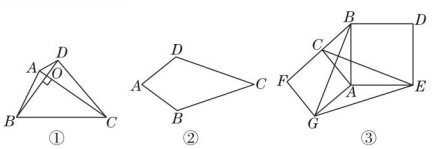
（2）如果 $AB=AC$，试判断四边形 $ADCF$ 的形状，并证明你的结论.



（第12题）

拔尖角度2 利用新定义判定特殊四边形

13. 【2019·天水】如图①，对角线互相垂直的四边形叫做垂美四边形.



（第13题）

（1）概念理解：如图②，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，$CB=CD$，问四边形 $ABCD$ 是垂美四边形吗？请说明理由.

（2）性质探究：如图①，四边形 $ABCD$ 的对角线 AC,BD 交于点 O，$AC\perp BD$. 试证明：$AB^2+CD^2=AD^2+BC^2$.

（3）解决问题：如图③，分别以 $\mathrm{Rt}\triangle ACB$ 的直角边 AC 和斜边 AB 为边向外作正方形 $ACFG$ 和正方形 $ABDE$，连接 CE,BG,GE. 已知 $AC=4,AB=5$，求 GE 的长.

微信公众号 教辅资料站

趣味数学

他很好奇，于是再以两块地砖拼成的矩形的对角线为边作另一个正方形，他发现这个正方形的面积等于五块地砖的面积和，也就是以两直角边为边作的正方形的面积之和.（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第3课时　正方形的性质与判定的综合应用 ☞(答案见141页)

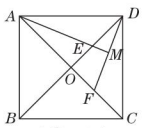
名师点金

正方形既是菱形，又是矩形，它具有菱形、矩形的所有性质，判定一个四边形是正方形，只需保证它既是菱形又是矩形即可.

类型1 利用正方形的性质证明线段位置关系

1. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，E，F 分别在 OD，OC 上，且 $DE=CF$，连接 DF，AE，并延长 AE 交 DF 于点 M.

求证：$AM\perp DF$.



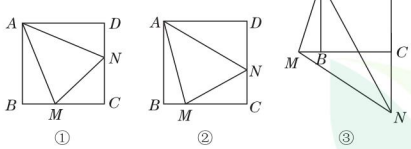
（第1题）

类型2 利用正方形的性质解决线段和差问题

2. 在正方形 $ABCD$ 中，$\angle MAN=45°$，$\angle MAN$ 绕点 A 顺时针旋转，它的两边分别交 CB，DC（或它们的延长线）于点 M，N.

(1) 如图①，当 $\angle MAN$ 绕点 A 旋转到 $BM=DN$ 时，易证：$BM+DN=MN$. 当 $\angle MAN$ 绕点 A 旋转到 $BM\neq DN$ 时，如图②，请问图①中的结论是否还成立？如果成立，请给予证明；如果不成立，请说明理由.

(2) 当 $\angle MAN$ 绕点 A 旋转到如图③所示的位置时，线段 BM，DN 和 MN 之间有怎样的数量关系？请写出你的猜想，并说明理由.



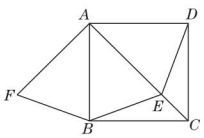
（第2题）

类型3 利用正方形的判定和性质探究动点问题

3. 如图，正方形 $ABCD$ 中，动点 E 在 AC 上，$AF\perp AC$，垂足为 A，$AF=AE$，连接 BE.

(1) 求证：$BF=DE$.

(2) 当点 E 运动到 AC 的中点时（其他条件都保持不变），问四边形 $AFBE$ 是正方形吗？请说明理由.



（第3题）

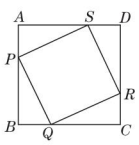
类型4 正方形的性质与判定的综合运用

4. 如图，P，Q，R，S 四个小球分别从正方形的四个顶点 A，B，C，D 同时出发，以同样的速度分别沿 AB，BC，CD，DA 的方向滚动，其终点分别是 B，C，D，A.

(1) 求证：在任何时刻，连接四个小球所得的四边形 $PQRS$ 总是正方形.

(2) 四边形 $PQRS$ 在什么时候面积最大？

(3) 四边形 $PQRS$ 在什么时候面积为正方形 $ABCD$ 面积的一半？



（第4题）

更多提分招数详见《极速提分法》第7页。

趣味数学　至此毕达哥拉斯作了大胆的假设：任何直角三角形，其斜边的平方恰好等于另两边平方之和. 那一顿饭，这位古希腊数学大师的视线都一直没有离开地面.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

阶段核心归类

特殊平行四边形间的关系的综合应用 ☞（答案见141页）

名师点金

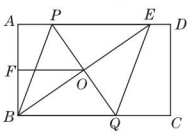
菱形、矩形、正方形都是特殊的平行四边形，其性质除具有平行四边形的一切性质外，还都有各自的性质. 它们的判定方法也各不相同，它们的性质和判定的应用很广泛，在应用中常常将不同的特殊平行四边形综合在同一题中进行考查，因此需正确区分各种特殊平行四边形的性质和判定.

应用① 菱形与矩形的综合应用

1. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，E 是 AD 上一点，PQ 垂直平分 BE，分别交 AD，BE，BC 于点 P，O，Q，连接 BP，EQ.

（1）求证：四边形 $BPEQ$ 是菱形.

（2）若 $AB=6$，F 为 AB 的中点，$OF+OB=9$，求 PQ 的长.



（第1题）

应用② 菱形与正方形的综合应用

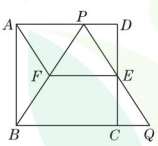
2. 【2019·海南】如图，在边长为1的正方形 $ABCD$ 中，E 是边 CD 的中点，点 P 是边 AD 上一点（与点 A，D 不重合），射线 PE 与 BC 的延长线交于点 Q.

（1）求证：$\triangle PDE \cong \triangle QCE$.

（2）过点 E 作 $EF \parallel BC$ 交 PB 于点 F，连接 AF，当 $PB=PQ$ 时.

①求证：四边形 $AFEP$ 是平行四边形.

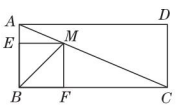
②请判断四边形 $AFEP$ 是否为菱形，并说明理由.



（第2题）

应用③ 矩形与正方形的综合应用

3. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，$\angle ABC$ 的平分线交对角线 AC 于点 M，$ME \perp AB$，$MF \perp BC$，垂足分别是 E，F，判定四边形 $MEBF$ 的形状，并证明你的结论.



（第3题）

应用④ 菱形、矩形、正方形的综合应用

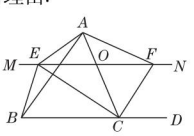
4. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 O 是 AC 边上一个动点，过点 O 作直线 $MN \parallel BC$，设 MN 交 $\angle BCA$ 的平分线于点 E，交 $\triangle ABC$ 的外角 $\angle ACD$ 的平分线于点 F.

（1）探究 OE 与 OF 的数量关系并加以证明.

（2）连接 BE，当点 O 在边 AC 上运动时，四边形 $BCFE$ 能否为菱形？若能，请证明；若不能，请说明理由.

（3）连接 AE，AF，当点 O 在 AC 上运动到什么位置时，四边形 $AECF$ 是矩形，请说明理由.

（4）在（3）的条件下，$\triangle ABC$ 满足什么条件时，四边形 $AECF$ 是正方形？请说明理由.



（第4题）

更多提分招数详见《极速提分法》第9页。

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

全章热门考点整合应用

☞(答案见142页)

名师点金

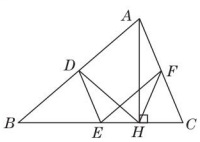
本章内容是中考的必考内容,主要考查与特殊平行四边形中菱形、矩形、正方形有关的计算和证明等问题. 近几年又出现了许多与特殊平行四边形有关的开放探索题、操作题以及与全等、相似(以后将学)、函数等知识相结合的综合题. 其主要考点可概括为:一个定理、三个图形、三个判定与性质、四个技巧、两种思想.

考点1 一个定理——直角三角形斜边上的中线定理

1. 如图,在△ABC中,点D,E,F分别是AB,BC,CA的中点,AH是边BC上的高. 求证:

(1)四边形$ADEF$是平行四边形;

(2)$\angle DHF=\angle DEF$.



(第1题)

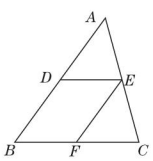
考点2 三个图形

图形1 菱形

2. 如图,在△ABC中,D,E分别是AB,AC的中点,过点E作$EF\parallel AB$,交BC于点F.

(1)求证:四边形$DBFE$是平行四边形.

(2)当△ABC满足什么条件时,四边形$DBFE$是菱形?并说明理由.



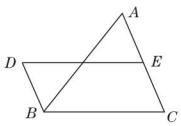
(第2题)

图形2 矩形

3. 【中考·安顺】如图,$DB\parallel AC$,且$DB=\frac{1}{2}AC$,E是AC的中点.

(1)求证:$BC=DE$.

(2)连接AD,BE,若要使四边形$DBEA$是矩形,则需给△ABC添加什么条件?为什么?



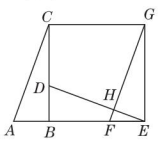
(第3题)

图形3 正方形

4. 如图,在Rt△ABC中,$\angle ABC=90°$,先把△ABC绕点B顺时针旋转90°后得到△DBE,再把△ABC沿射线AB平移至△FEG,DE,FG相交于点H.

(1)判断线段DE,FG的位置关系,并说明理由;

(2)连接CG,求证:四边形$CBEG$是正方形.



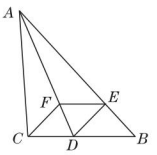
(第4题)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

考点3 三个判定与性质

判定与性质1 菱形

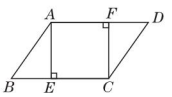
5. 如图，在△ABC中，∠BAC的平分线交BC于点D，E是AB上一点，且$AE=AC$，$EF/\!/BC$交AD于点F.
求证：四边形$CDEF$是菱形.



（第5题）

判定与性质2 矩形

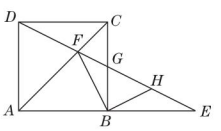
6. 【2019·怀化】如图，在▱$ABCD$中，$AE\perp BC$，$CF\perp AD$，E，F分别为垂足.
（1）求证：△ABE≌△CDF.
（2）求证：四边形$AECF$是矩形.



（第6题）

判定与性质3 正方形

7. 如图，E为正方形$ABCD$的边AB的延长线上一点，DE交AC于点F，交BC于点G，H为GE的中点.
求证：$FB\perp BH$.

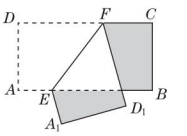


（第7题）

考点4 四个技巧

技巧1 解与四边形有关的折叠问题的技巧（轴对称变换法）

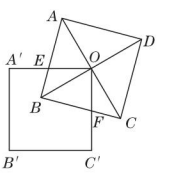
8. 如图，在矩形$ABCD$中，$AB=10$，$BC=5$，点E，F分别在AB，CD上，将矩形$ABCD$沿EF折叠，使点A，D分别落在矩形$ABCD$外部的点A_1，D_1处，求阴影部分的周长.



（第8题）

技巧2 解与四边形有关的旋转问题的技巧

9. 如图，正方形$ABCD$的对角线相交于点O，点O也是正方形$A'B'C'O$的一个顶点，如果两个正方形的边长都等于1，那么正方形$A'B'C'O$绕顶点O转动，两个正方形重叠部分的面积大小有什么规律？请说明理由.



（第9题）

聪明的马克·吐温： 在一个社交晚会上，一个慈善家得意洋洋地告诉马克·吐温："上个星期我根据困难程度将50枚银元施舍给了10个穷人，他们得到的银元数目各不相同."（待续）

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

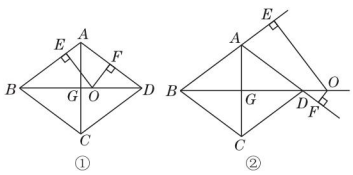
技巧3 解与四边形有关的动点问题的技巧（固定位置法）

10. 如图，在边长为10的菱形$ABCD$中，对角线$BD=16$，对角线AC，BD相交于点G，点O是直线BD上的动点，$OE\perp AB$于E，$OF\perp AD$于F.

（1）求对角线AC的长及菱形$ABCD$的面积.

（2）如图①，当点O在对角线BD上运动时，$OE+OF$的值是否发生变化？请说明理由.

（3）如图②，当点O在对角线BD的延长线上时，$OE+OF$的值是否发生变化？若不变，请说明理由；若变化，请探究OE，OF之间的数量关系.



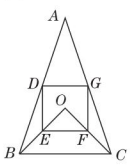
（第10题）

技巧4 解中点四边形的技巧

11. 如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，点O在$\triangle ABC$的内部，$\angle BOC=90°$，$OB=OC$，D，E，F，G分别是AB，OB，OC，AC的中点.

（1）求证：四边形$DEFG$是矩形.

（2）若$DE=2$，$EF=3$，求$\triangle ABC$的面积.

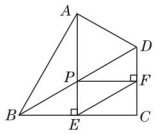


（第11题）

考点5 两种思想

思想1 转化思想

12. 如图，在四边形$ABCD$中，$\angle C=90°$，$\angle ABD=\angle CBD$，$AB=CB$，P是BD上一点，$PE\perp BC$，$PF\perp CD$，垂足分别为点E，F. 求证：$PA=EF$.



（第12题）

思想2 数形结合思想

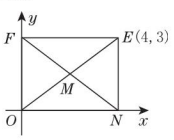
13. ［阅读］

在平面直角坐标系中，以任意两点$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$为端点的线段的中点坐标为$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$.

［运用］

（1）如图，矩形$ONEF$的对角线相交于点M，ON，OF分别在x轴和y轴上，O为坐标原点，点E的坐标为$(4,3)$，则点M的坐标为_____；

（2）在平面直角坐标系中，有$A(-1,2)$，$B(3,1)$，$C(1,4)$三点，另有一点D与点A，B，C构成平行四边形的顶点，求点D的坐标.



（第13题）

趣味数学　马克·吐温听了后笑起来，当场揭穿了慈善家的伪善面目. 你知道他是怎么知道的吗？答案：每人得到数目各不相同的银元，至少要$1+2+3+\cdots+10=55$（枚）.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1 认识一元二次方程

第1课时 一元二次方程

名师点金

判别一元二次方程的“两方法”

(1)**根据定义要把握三点**:一是整式方程;二是含有一个未知数;三是未知数的最高次数是2.

(2)**根据一般形式要把握两点**:一是能化成 $ax^2+bx+c=0$ 的形式,且 a 一定不能为0,而 b,c 都可以为0;二是判断是否为一元二次方程与其解的情况无关.

1 夯实基础·逐点练 (答案见143页)

知识点1 一元二次方程的定义

1. 下列关于 x 的方程一定是一元二次方程的是(　　)

A. $ax^2+bx+c=0$　　B. $x^2+1-x^2=0$

C. $x^2+\frac{1}{x}=2$　　D. $x^2-x-2=0$

***2.** 如果方程 $(m-3)x^{m^2-7}-x+3=0$ 是关于 x 的一元二次方程,那么 m 的值为(　　)

A. ±3　　B. 3

C. -3　　D. 无法确定

知识点2 一元二次方程的一般形式

3. 把方程 $x(x+2)=5(x-2)$ 化成一般形式,则 a,b,c 的值分别是(　　)

A. 1, -3, 10　　B. 1, 7, -10

C. 1, -5, 12　　D. 1, 3, 2

***4.** 若关于 x 的方程 $2x^2+mx=4x+2$ 中不含 x 的一次项,则 m 等于(　　)

A. 0　　B. 4

C. -4　　D. ±4

5. 关于 x 的一元二次方程 $(m-1)x^2+5x+|m|-1=0$ 的常数项为0,则 m 等于(　　)

A. 1　　B. -1

C. 1或-1　　D. 0

知识点3 利用一元二次方程建立实际问题模型

6. 【2019·遵义】新能源汽车节能、环保,越来越受消费者喜爱,各种品牌相继投放市场,我国新能源汽车近几年销量全球第一,2016年销量为50.7万辆,销量逐年增加,到2018年销量为125.6万辆,设年平均增长率为 x,可列方程为(　　)

A. $50.7(1+x)^2=125.6$　　B. $125.6(1-x)^2=50.7$

C. $50.7(1+2x)=125.6$　　D. $50.7(1+x^2)=125.6$

7. 【2019·日照】某省加快新旧动能转换,促进企业创新发展,某企业一月份的营业额是1 000万元,月平均增长率相同,第一季度的总营业额是3 990万元.若设月平均增长率是 x,那么可列出的方程是(　　)

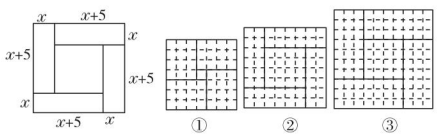
A. $1\,000(1+x)^2=3\,990$

B. $1\,000+1\,000(1+x)+1\,000(1+x)^2=3\,990$

C. $1000(1+2x)=3\,990$

D. $1\,000+1\,000(1+x)+1\,000(1+2x)=3\,990$

***8.** 【2019·宁夏】你知道吗,对于一元二次方程,我国古代数学家还研究过其几何解法呢!以方程 $x^2+5x-14=0$ 即 $x(x+5)=14$ 为例加以说明.数学家赵爽(公元3~4世纪)在其所著的《勾股圆方图注》中记载的方法是:构造图(如下面左图)中大正方形的面积是 $(x+x+5)^2$,其中它又等于四个矩形的面积加上中间小正方形的面积,即 $4\times14+5^2$,据此易得 $x=2$.那么在下面右边三个构图(矩形的顶点均落在边长为1的小正方形网格格点上)中,能够说明方程 $x^2-4x-12=0$ 的正确构图是_____.(只填序号)



(第8题)

易错点 忽视二次项系数不为零的条件而致错

9. 若关于 x 的方程 $(k-3)x^{|k|-1}-x-2=0$ 是一元二次方程,则不等式 $kx-2k+6\leqslant0$ 的解集为_____.

阿尔·花剌子模与一元二次方程:穆罕默德·本·穆萨·阿尔·花剌子模是阿拉伯阿拔斯王朝著名的数学家、天文学家、地理学家.(待续)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法·提升练 ☞(答案见143页)

考查角度1　利用一元二次方程及相关定义求字母的值

10. 已知关于 x 的方程 $(2k+1)x^2+4kx+k-1=0$.

(1) k 为何值时,此方程是一元一次方程?

(2) k 为何值时,此方程是一元二次方程?并写出这个一元二次方程的二次项系数、一次项系数及常数项.

考查角度2　利用一元二次方程的一般形式建立实际应用模型

11. 结合题意列出方程,并将其化成一元二次方程的一般形式(不用求解).

(1)【中考·梅州】用一条长 40 cm 的绳子围成一个面积为 64 cm^2 的矩形,求矩形的长;

(2)在元旦前夕,某班数学小组的同学互相赠送卡片,每两名同学之间都互相赠送一张,这样一共赠送了 90 张,求这个数学小组有多少名同学.

Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞(答案见144页)

拔尖角度1　利用一元二次方程的定义探究字母取值问题

12. 若 $x^{2a+b}-3x^{a-b}+1=0$ 是关于 x 的一元二次方程,求 a,b 的值.下面是两名同学的解法.

甲:根据题意,得 $\begin{cases}2a+b=2,\\a-b=1.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\b=0.\end{cases}$

乙:根据题意,得 $\begin{cases}2a+b=2,\\a-b=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2a+b=1,\\a-b=2.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=1,\\b=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=1,\\b=-1.\end{cases}$

你认为上面两名同学的解法是否正确?为什么?如果都不正确,请给出正确的解法.

拔尖角度2　利用一元二次方程的一般形式探究系数间的关系

13. 教材或资料会出现这样的题目:

把方程 $\frac{1}{2}x^2-x=2$ 化为一元二次方程的一般形式,并写出它的二次项系数、一次项系数和常数项.

现在把上面的题目改编为下面的两个小题,请解答.

(1)下列方程中,有哪几个是方程 $\frac{1}{2}x^2-x=2$ 所化的一元二次方程的一般形式?

①$\frac{1}{2}x^2-x-2=0$;②$-\frac{1}{2}x^2+x+2=0$;

③$x^2-2x=4$;④$-x^2+2x+4=0$;

⑤$\sqrt{3}x^2-2\sqrt{3}x-4\sqrt{3}=0$.

(2)方程 $\frac{1}{2}x^2-x=2$ 化为一元二次方程的一般形式,它的二次项系数、一次项系数、常数项之间具有什么关系?

趣味数学　在花剌子模的数学巨著《们尔热巴拉和阿尔穆卡巴拉》中,第一次以对称的方式揭示了二次方程的解法.该书中的单词"al-jabr"的意思是"复原"或"完成",指将负项从方程一边移到另一边.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

第2课时　一元二次方程的解

名师点金

用估算法判断一元二次方程解的取值范围的具体步骤如下

1. 列表，利用未知数的取值分别计算方程$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$中ax^2+bx+c的值；
2. 在表中找出使ax^2+bx+c的值可能等于0的未知数的大致范围；
3. 进一步在2中的范围内列表、计算、估计范围，直到符合题中精确度要求为止.

Ⅰ 夯实基础·逐点练

☞（答案见144页）

知识点1 一元二次方程的解

1. 【2019·资阳】a是方程$2x^2=x+4$的一个根，则代数式$4a^2-2a$的值是_____.

2. 若一元二次方程$x^2-2kx+k^2=0$的一根为$x=-1$，则k的值为（　　）

A. -1　　B. 0　　C. 1或-1　　D. 2或0

3. 老师出示了一道题目（如图）后，小敏回答："方程有一个根为-4."小聪回答："方程有一个根为3."你认为（　　）

方程$x^2+x-12=0$的根是_____.

（第3题）

A. 只有小敏回答正确　　B. 只有小聪回答正确

C. 小敏、小聪回答都正确　　D. 小敏、小聪回答都不正确

4. 下表是某同学求代数式x^2-x的值的情况，根据表格可知方程$x^2-x=2$的解是（　　）

x	-2	-1	0	1	2	3	…
x^2-x	6	2	0	0	2	6	…

A. $x=-1$　　B. $x=0$

C. $x=2$　　D. $x_1=-1,x_2=2$

***5.** 【中考·包头】若关于x的方程$x^2+(m+1)x+\frac{1}{2}=0$的一个实数根的倒数恰好是它本身，则m的值为（　　）

A. $-\frac{5}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $-\frac{5}{2}$或$\frac{1}{2}$　　D. 1

***6.** 【中考·温州】我们知道方程$x^2+2x-3=0$的解是$x_1=1,x_2=-3$，现给出另一个方程$(2x+3)^2+2(2x+3)-3=0$，它的解是（　　）

A. $x_1=1,x_2=3$　　B. $x_1=1,x_2=-3$

C. $x_1=-1,x_2=3$　　D. $x_1=-1,x_2=-3$

知识点2 一元二次方程解的估算

7. 若正数x满足$x^2=3$，则下列正确的是（　　）

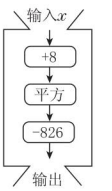
A. $1.7<x<1.71$　　B. $1.71<x<1.72$

C. $1.72<x<1.73$　　D. $1.73<x<1.74$

8. 【中考·青岛】输入一组数据，按如图所示的程序进行计算，输出结果见下表：

x	20.5	20.6	20.7	20.8	20.9
输出	-13.75	-8.04	-2.31	3.44	9.21

分析表格中的数据，估计方程$(x+8)^2-826=0$的一个正数解x的大致范围为（　　）



（第8题）

A. $20.5<x<20.6$

B. $20.6<x<20.7$

C. $20.7<x<20.8$

D. $20.8<x<20.9$

9. 方程$x^2+2x-10=0$的一个近似解（结果精确到0.1）是（　　）

A. 2.4　　B. -4.2

C. -4.3　　D. -4.4

10. 根据下表中的对应值，判断一元二次方程$x^2-4x+2=0$的解的取值范围是（　　）

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
x^2-4x+2	2	0.25	-1	-1.75	-2	-1.75	-1	0.25	2

A. $0<x<0.5$或$3.5<x<4$

B. $0.5<x<1$或$2<x<2.5$

C. $0.5<x<1$或$3<x<3.5$

D. $1<x<1.5$或$3.5<x<4$

易错点 对一元二次方程的解的意义理解不透导致漏解

11. 已知关于x的一元二次方程$(a-1)x^2-2x+a^2-1=0$有一个根为$x=0$，则a的值为（　　）

A. 0　　B. ±1

C. 1　　D. -1

开心游戏：先随便写一个五位数（每个数字不能重复，例如37 415），然后把这五个数字重新组合成一个新的五位数（例如75 314），再把这两个数相减（大数减小数，75 314−37 415=37 899）.（待续）

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞(答案见144页)

考查角度1　利用方程解的定义求一元二次方程

12. 若关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的一个根是1,且 a,b 满足等式 $b=\sqrt{a-2}+\sqrt{2-a}+1$,求此一元二次方程.

考查角度2　利用方程的解求三角形周长

(数形结合思想)

13. 一个三角形的两边长分别是2 cm和6 cm,第三条边的长是 a cm(其中 a 为整数),且 a 是方程 $x^2-9x+14=0$ 的一个根,求此三角形的周长.

Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞(答案见144页)

拔尖角度1　利用阅读定义法("换根法")求方程

14. 请阅读下列材料:

问题:已知方程 $x^2+x-3=0$,求一个一元二次方程,使它的根分别是已知方程根的2倍.

解:设所求方程的根为 y,则 $y=2x$,

所以 $x=\frac{y}{2}$.

把 $x=\frac{y}{2}$ 代入已知方程,得 $\left(\frac{y}{2}\right)^2+\frac{y}{2}-3=0$.

化简,得 $y^2+2y-12=0$. 故所求方程为 $y^2+2y-12=0$.

这种利用方程根的代换求新方程的方法,我们称为"换根法".

(1)已知方程 $x^2+x-1=0$,求一个一元二次方程,使它的根分别是已知方程根的3倍,则所求方程为_____;

(2)已知关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不等于零的实数根,求一个一元二次方程,使它的根分别是已知方程根的倒数;

(3)已知关于 x 的方程 $x^2-mx+n=0$ 有两个实数根,求一个方程,使它的根分别是已知方程根的平方.

拔尖角度2　利用"夹逼法"求所列方程的解

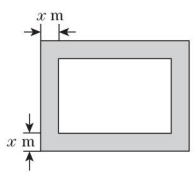
15. 某大学为改善校园环境,计划在一块长80 m,宽60 m的长方形场地中央建一个长方形网球场,网球场占地面积为3 500 m^2. 四周为宽度相等的人行走道,如图,若设人行走道宽为 x m.

(1)请列出相应的方程.

(2)x 的值可能小于0吗?说说你的理由.

(3)x 的值可能大于40吗?可能大于30吗?说说你的理由.

(4)你知道人行走道的宽是多少吗?说说你的求解过程.



(第15题)

趣味数学　请你的朋友记住所得的差37 899中的一个数字,然后让他把剩下的数字告诉你,例如,他记住了"7",把3 899告诉你.(待续)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

第3课时　一元二次方程的定义及相关概念的五种常见应用 ☞（答案见144页）

名师点金

巧用一元二次方程的定义及相关概念求值主要体现在
利用定义或项的概念求字母的值，利用根的概念求字母或代数式的值等.

应用1 利用一元二次方程的定义确定字母的取值

1. 向阳中学数学兴趣小组对关于 x 的方程 $(m+1)x^{m^2+1}+(m-2)x-1=0$ 提出了下列问题：

（1）是否存在 m，使方程为一元二次方程？若存在，求出 m 的值，并写出此方程；若不存在，请说明理由.

（2）是否存在 m，使方程为一元一次方程？若存在，求出 m 的值，并解此方程；若不存在，请说明理由.

应用2 利用一元二次方程的项的定义求字母的取值

2. 若关于 x 的一元二次方程 $(2ax+1)(x-a)=a-2$ 的二次项系数是 -4，求 a 的值.

应用3 利用一元二次方程的定义及一般形式解新定义问题

3. 将4个数 a,b,c,d 排成2行、2列，两边各加一条竖线，记成 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$，定义 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$，上述记号叫做二阶行列式. 那么 $\begin{vmatrix} x+1 & x+2 \\ x-2 & 2x \end{vmatrix}=1$ 表示的方程是一元二次方程吗？如果是，请写出它的一般形式.

应用4 利用一元二次方程的根的定义求代数式的值

4. 若 $n(n\neq 0)$ 是关于 x 的方程 $x^2+mx+2n=0$ 的一个根，求 $m+n$ 的值.

5. 已知实数 a 是一元二次方程 $x^2-2\,022x+1=0$ 的一个根，求代数式 $a^2-2\,021a-\dfrac{a^2+1}{2\,022}$ 的值.

应用5 利用一元二次方程的根的定义说明是根的理由

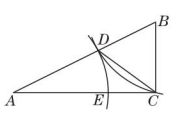
6. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，以点 B 为圆心，BC 长为半径画弧，交线段 AB 于点 D；以点 A 为圆心，AD 长为半径画弧，交线段 AC 于点 E，连接 CD.

（1）若 $\angle A=28°$，求 $\angle ACD$ 的度数.

（2）设 $BC=a$，$AC=4$.

①若 $AD=EC$，求 a 的值.

②线段 AD 的长是方程 $x^2+2ax-16=0$ 的一个根吗？说明理由.



（第6题）

趣味数学

你把3 899进行处理：3+8+9+9=29，所得的和是一个两位数，继续处理：2+9=11，再继续处理：1+1=2，得到一位数2以后，用最大的一位数9减去它，即9−2=7，那么你就猜到他心里记住的数字是7了.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2　用配方法求解一元二次方程

第1课时　直接开平方法



名师点金

用直接开平方法解一元二次方程的“三步法”

变形：将方程化为“含未知数的完全平方式＝非负常数”的形式；

开方：利用平方根的定义，将方程转化为两个一元一次方程；

求解：解一元一次方程，得出方程的根.

Ⅰ 夯实基础·逐点练 ☞(答案见144页)

知识点1　形如 $x^2=p(p\geqslant 0)$ 型方程的解法

1. 【2019·徐州】方程 $x^2-4=0$ 的解是_____.

2. 一元二次方程 $4x^2-9=0$ 的解为(　　)

A. $x=\frac{3}{2}$　　B. $x=\frac{2}{3}$

C. $x_1=\frac{3}{2},x_2=-\frac{3}{2}$　　D. $x_1=\frac{2}{3},x_2=-\frac{2}{3}$

3. 用直接开平方法解下列一元二次方程，其中无实数解的方程为(　　)

A. $x^2-1=0$　　B. $x^2=0$

C. $x^2+4=0$　　D. $-x^2+3=0$

4. 若代数式 $3x^2-6$ 的值为21，则 x 的值一定为(　　)

A. 3　　B. ± 3

C. -3　　D. $\pm\sqrt{3}$

知识点2　形如 $(mx+n)^2=p(p\geqslant 0)$ 型方程的解法

5. 【2019·吉林】若关于 x 的一元二次方程 $(x+3)^2=c$ 有实数根，则 c 的值可以为_____(写出一个即可).

6. 【中考·丽水】一元二次方程 $(x+6)^2=16$ 可转化为两个一元一次方程，其中一个一元一次方程是 $x+6=4$，则另一个一元一次方程是(　　)

A. $x-6=4$　　B. $x-6=-4$

C. $x+6=4$　　D. $x+6=-4$

*7. 已知一元二次方程 $(x-3)^2=1$ 的两个解恰好分别是等腰三角形 ABC 的底边长和腰长，则 $\triangle ABC$ 的周长为(　　)　　【导学号：7778062】

A. 10　　B. 10或8　　C. 9　　D. 8

Ⅱ 整合方法·提升练 ☞(答案见145页)

考查角度1　利用直接开平方法求字母的值

8. 已知关于 x 的方程 $(x-1)^2=k^2+2$ 的一个根是3，求 k 的值及另一个根.

考查角度2　利用直接开平方法所得根的特征求分式的值

9. 若关于 x 的一元二次方程 $ax^2=b(ab>0)$ 的两个根分别是 $m+1$ 与 $2m-4$，求 $\frac{b}{a}$ 的值.

趣味数学　数学家维纳的年龄：著名数学家诺伯特·维纳，在博士学位的授予仪式上，执行主席询问他的年龄.(待续)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第2课时　配方法

名师点金

二次三项式的配方过程与一元二次方程的配方过程有两大区别：**一是二次项系数化为1**，二次三项式是提出二次项的系数，一元二次方程是两边同时除以二次项的系数；**二是配方**，二次三项式是先加上一次项系数一半的平方再减去一次项系数一半的平方，一元二次方程是两边同时加上一次项系数一半的平方.

Ⅰ 夯实基础·逐点练 ☞（答案见145页）

知识点1 二次三项式的配方

1. 【2018·安顺】若$x^2+2(m-3)x+16$是关于x的完全平方式，则$m=$_____.

2. 将代数式a^2+4a-5变形，结果正确的是(　　)

A. $(a+2)^2-1$　　B. $(a+2)^2-5$

C. $(a+2)^2+4$　　D. $(a+2)^2-9$

3. 将代数式$x^2-10x+5$配方后，发现它的最小值为(　　)

A. -30　　B. -20

C. -5　　D. 0

4. 不论x,y为何实数，代数式$x^2+y^2+2x-4y+7$的值(　　)

A. 总不小于2　　B. 总不小于7

C. 可为任何实数　　D. 可能为负数

5. 【中考·扬州】已知$M=\frac{2}{9}a-1$，$N=a^2-\frac{7}{9}a$(a为任意实数)，则M,N的大小关系为(　　)

A. $M<N$　　B. $M=N$

C. $M>N$　　D. 不能确定

***6.** 已知a,b,c是$\triangle ABC$的三边长，且$a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$，则$\triangle ABC$的形状为(　　)

A. 钝角三角形　　B. 等边三角形

C. 直角三角形　　D. 等腰直角三角形

知识点2 用配方法解一元二次方程

7. 用配方法解下列方程，其中应在方程左右两边同时加上4的是(　　)

A. $x^2+4x=5$　　B. $2x^2-4x=5$

C. $x^2-2x=5$　　D. $x^2+2x=5$

8. 用配方法解一元二次方程$x^2-4x+1=0$时，下列变形正确的是(　　)

A. $(x-2)^2=1$　　B. $(x-2)^2=5$

C. $(x+2)^2=3$　　D. $(x-2)^2=3$

9. 一元二次方程$x^2-8x=48$可表示成$(x-a)^2=48+b$的形式，其中a,b为整数，则$a+b$的值为(　　)

A. 20　　B. 12　　C. -12　　D. -20

10. 用配方法解方程$x^2-8x+15=0$的过程中，配方正确的是(　　)

A. $x^2-8x+(-4)^2=1$

B. $x^2-8x+(-4)^2=31$

C. $(x+4)^2=1$

D. $(x-4)^2=-11$

11. 用配方法解下列方程时，配方正确的是(　　)

A. 方程$x^2-6x-5=0$，可化为$(x-3)^2=4$

B. 方程$y^2-2y-2\,020=0$，可化为$(y-1)^2=2\,020$

C. 方程$a^2+8a+9=0$，可化为$(a+4)^2=25$

D. 方程$2x^2-6x-7=0$，可化为$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{23}{4}$

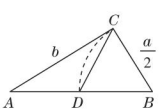
***12.** 【2018·舟山】欧几里得的《原本》记载，形如$x^2+ax=b^2$的方程的图解法是：如图，画$\mathrm{Rt}\triangle ABC$，使$\angle ACB=90°$，$BC=\frac{a}{2}$，$AC=b$，再在斜边AB上截取$BD=\frac{a}{2}$，则该方程的一个正根是(　　)

A. AC的长

B. AD的长

C. BC的长

D. CD的长



（第12题）

13. 【2018·益阳】规定：$a\otimes b=(a+b)b$，如$2\otimes 3=(2+3)\times 3=15$，若$2\otimes x=3$，则$x=$_____.

易错点 在配方时忽视等式的性质而致错

14. 【2019·齐齐哈尔】解方程：$x^2+6x=-7$.

更多提分招数详见《极速提分法》第12页。

趣味数学

维纳的回答十分巧妙："我今年岁数的立方是一个四位数，岁数的四次方是一个六位数，这两个数，刚好把十个数字0，1，2，3，4，5，6，7，8，9全都用上了，不重不漏.（待续）

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法·提升练 ☞(答案见145页)

考查角度1 利用配方法解非负数问题

15. 先阅读下面的内容,再解决问题.

例题:若 $m^2+2mn+2n^2-6n+9=0$,求 m 和 n 的值.

解:∵ $m^2+2mn+2n^2-6n+9=0$,

∴ $m^2+2mn+n^2+n^2-6n+9=0$.

∴ $(m+n)^2+(n-3)^2=0$.

∴ $m+n=0, n-3=0$.

∴ $m=-3, n=3$.

问题:已知 a,b,c 为正整数且是 $\triangle ABC$ 的三边长,c 是 $\triangle ABC$ 的最短边长,a,b 满足 $a^2+b^2=12a+8b-52$,求 c 的值.

考查角度2 利用配方法解决二次三项式的最值问题

16. 我们可以利用配方法求一些多项式的最值,如:$x^2+2x+3=(x^2+2x+1)+2=(x+1)^2+2$,当 $x=-1$ 时,x^2+2x+3 有最小值且最小值为2;再如:$-x^2+2x-2=-(x^2-2x+1)-1=-(x-1)^2-1$,当 $x=1$ 时,$-x^2+2x-2$ 有最大值且最大值为 -1.

(1)代数式 x^2+6x+m 有最小值且最小值为1,则 $m=$_____;

(2)代数式 $-x^2+4x+m$ 有最大值且最大值为2,则 $m=$_____;

(3)代数式 $x^2+(m+2)x+4m-7$ 有最小值且最小值为0,求 m 的值.

Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞(答案见145页)

拔尖角度1 利用配方法求代数式的值(整体思想、换元法)

17. 已知实数 x 满足 $x^2+\frac{1}{x^2}+2\left(x+\frac{1}{x}\right)=0$,求 $x+\frac{1}{x}$ 的值.

拔尖角度2 利用配方法探究新解法(整体思想)

18. 小明在解一元二次方程时,发现有这样一种解法:

如:解方程 $x(x+4)=6$.

解:原方程可变形,

得 $[(x+2)-2][(x+2)+2]=6$,

$(x+2)^2-2^2=6$,

$(x+2)^2=6+2^2$,

$(x+2)^2=10$.

直接开平方并整理,得 $x_1=-2+\sqrt{10}, x_2=-2-\sqrt{10}$.

我们称小明这种解法为"平均数法".

(1)下面是小明用"平均数法"解方程 $(x+3)(x+7)=5$ 时的解题过程.

解:原方程可变形,得 $[(x+a)-b][(x+a)+b]=5$,$(x+a)^2-b^2=5$,

$(x+a)^2=5+b^2$.

直接开平方并整理,得 $x_1=c, x_2=d(c>d)$.

上述解题过程中的 a,b,c,d 所表示的数分别是____,____,____,____.

(2)请用"平均数法"解方程:$(x-5)(x+3)=6$.

趣味数学　这意味着全体数字都向我俯首称臣,预祝我将来在数学领域里一定能干出一番惊天动地的大事业."(维纳当时的年龄为18岁)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

3 用公式法求解一元二次方程

第1课时 根的判别式

名师点金

根的判别式的应用

1. **直用**：不解方程，判断方程根的情况.

2. **逆用**：由方程根的情况，求字母系数的取值范围.

注意：一元二次方程有实数根，包含有两个相等的实数根和有两个不相等的实数根两种情况.

1 夯实基础·逐点练 ☞（答案见145页）

知识点1 一元二次方程根的判别式

1. 方程 $7x=2x^2-4$ 化为一般形式 $ax^2+bx+c=0$ 后，$a=$_____，$b=$_____，$c=$_____，$b^2-4ac=$_____.

2. 方程 $6x-8=5x^2$ 化为一般形式 $ax^2+bx+c=0$ 后，a,b,c 的值为（　　）

A. $a=5,b=6,c=-8$　　B. $a=5,b=-6,c=-8$

C. $a=5,b=-6,c=8$　　D. $a=6,b=5,c=8$

3. 在方程 $2x^2+3x=1$ 中，b^2-4ac 的值为（　　）

A. 1　　B. -1　　C. 17　　D. -17

4. 已知方程 $2x^2+mx+1=0$ 的根的判别式的值为16，则 m 的值为（　　）

A. $2\sqrt{6}$　　B. $-2\sqrt{6}$　　C. $\pm2\sqrt{6}$　　D. $\pm3\sqrt{6}$

知识点2 一元二次方程根的情况

5. 【2019·河南】一元二次方程 $(x+1)(x-1)=2x+3$ 的根的情况是（　　）

A. 有两个不相等的实数根

B. 有两个相等的实数根

C. 只有一个实数根

D. 没有实数根

6. 【2019·湘西州】一元二次方程 $x^2-2x+3=0$ 根的情况是（　　）

A. 有两个不相等的实数根

B. 有两个相等的实数根

C. 没有实数根

D. 无法判断

*7. 【2018·娄底】关于 x 的一元二次方程 $x^2-(k+3)x+k=0$ 的根的情况是（　　）

A. 有两个不相等的实数根

B. 有两个相等的实数根

C. 无实数根

D. 不能确定

知识点3 一元二次方程根的判别式的应用

8. 【2019·自贡】关于 x 的一元二次方程 $x^2-2x+m=0$ 无实数根，则实数 m 的取值范围是（　　）

A. $m<1$　　B. $m\geqslant1$　　C. $m\leqslant1$　　D. $m>1$

9. 【2019·荆州】若一次函数 $y=kx+b$ 的图象不经过第二象限，则关于 x 的方程 $x^2+kx+b=0$ 的根的情况是（　　）

A. 有两个不相等的实数根

B. 有两个相等的实数根

C. 无实数根

D. 无法确定

10. 【2018·安徽】若关于 x 的一元二次方程 $x(x+1)+ax=0$ 有两个相等的实数根，则实数 a 的值为（　　）

A. -1　　B. 1

C. -2 或2　　D. -3 或1

*11. 【2019·河北】小刚在解关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 时，只抄对了 $a=1,b=4$，解出其中一个根是 $x=-1$. 他核对时发现所抄的 c 比原方程的 c 值小2，则原方程的根的情况是（　　）

A. 不存在实数根

B. 有两个不相等的实数根

C. 有一个根是 $x=-1$

D. 有两个相等的实数根

易错点 应用根的判别式求字母的取值范围时忽视一元二次方程的隐含条件

12. 【2019·新疆】若关于 x 的一元二次方程 $(k-1)x^2+x+1=0$ 有两个实数根，则 k 的取值范围是（　　）

A. $k\leqslant\frac{5}{4}$　　B. $k>\frac{5}{4}$

C. $k<\frac{5}{4}$ 且 $k\neq1$　　D. $k\leqslant\frac{5}{4}$ 且 $k\neq1$

趣味数学

1707年，牛顿的代数讲义经整理后出版，定名为《普遍算术》. 其书中陈述了代数的基本概念与基本运算，同时对方程的根及其性质进行了深入的探讨，引出了方程论方面的丰硕成果.（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞(答案见145页)

考查角度1　利用方程的根的情况求字母的取值范围

13. 【2019 · 北京】关于 x 的方程 $x^2-2x+2m-1=0$ 有实数根，且 m 为正整数，求 m 的值及此时方程的根.

考查角度2　利用一元二次方程根的情况求字母的值

14. 【2019 · 衡阳】关于 x 的一元二次方程 $x^2-3x+k=0$ 有实数根.

(1)求 k 的取值范围；

(2)如果 k 是符合条件的最大整数，且一元二次方程 $(m-1)x^2+x+m-3=0$ 与方程 $x^2-3x+k=0$ 有一个相同的根，求此时 m 的值.

Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞(答案见145页)

拔尖角度1　利用一元二次方程根的情况解等腰三角形问题(分类讨论思想)

15. 已知关于 x 的方程 $x^2-(2k+1)x+4\left(k-\frac{1}{2}\right)=0$.

(1)求证：无论 k 取何值，这个方程总有实数根.

(2)若等腰三角形 ABC 的一边长 $a=4$，另两边长 b，c 恰好是这个方程的两个根，求 $\triangle ABC$ 的周长.

拔尖角度2　利用新定义中方程根的情况求字母的值

16. 对于实数 m，n，定义一种运算“$*$”：$m*n=mn+n$.

(1)求 $2*5$ 与 $2*(-5)$ 的值；

(2)如果关于 x 的方程 $x*(a*x)=-\frac{1}{4}$ 有两个相等的实数根，求实数 a 的值.

更多提分招数详见《极速提分法》第13页。

趣味数学　如，他得出了方程的根与其判别式之间的关系，指出可以利用方程系数确定方程根之幂的和数，即“牛顿幂和公式”.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第2课时　公式法

名师点金

用公式法解一元二次方程的“四个步骤”

1. 把一元二次方程化为一般形式. 2. 确定 a,b,c 的值. 3. 计算 b^2-4ac 的值. 4. 当 $b^2-4ac\geqslant 0$ 时，把 a,b,c 的值代入求根公式，求出方程的两个实数根；当 $b^2-4ac<0$ 时，方程无实数根.

Ⅰ 夯实基础 · 逐点练

☞（答案见146页）

知识点1 一元二次方程的求根公式

1. 方程 $3x^2-x=4$ 化为一般形式后 a,b,c 的值分别为(　　)

A. $3,1,4$　　B. $3,-1,-4$

C. $3,-4,-1$　　D. $-1,3,-4$

2. 一元二次方程 $\sqrt{2}x^2+4\sqrt{3}x=2\sqrt{2}$ 中，b^2-4ac 的值应是(　　)

A. 64　　B. -64　　C. 32　　D. -32

3. 以 $x=\dfrac{b\pm\sqrt{b^2+4c}}{2}$ 为根的一元二次方程可能是(　　)

A. $x^2+bx+c=0$　　B. $x^2+bx-c=0$

C. $x^2-bx+c=0$　　D. $x^2-bx-c=0$

知识点2 求根公式的应用

4. 【2019 · 威海】一元二次方程 $3x^2=4-2x$ 的解是_____.

***5.** 【2018 · 泰安】一元二次方程 $(x+1)(x-3)=2x-5$ 根的情况是(　　)

A. 无实数根

B. 有一个正根，一个负根

C. 有两个正根，且都小于3

D. 有两个正根，且有一根大于3

Ⅱ 整合方法 · 提升练

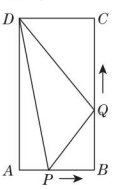
☞（答案见146页）

考查角度1 利用一元二次方程解与非负数综合问题

6. 已知 a,b,c 均为实数且 $\sqrt{a^2-2a+1}+|b+1|+(c+3)^2=0$，求方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根.

考查角度2 利用一元二次方程探究与几何综合问题（数形结合思想）

7. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=6$ cm，$BC=12$ cm，点 P 从点 A 出发沿边 AB 向点 B 以1 cm/s的速度移动；同时，点 Q 从点 B 出发沿边 BC 向点 C 以2 cm/s的速度移动，问几秒时 $\triangle PDQ$ 的面积为35 cm^2？



（第7题）

数学中的一些美丽定理具有这样的特性：它们极易从事实中归纳出来，证明却极难.　——高斯　趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4　用因式分解法求解一元二次方程

名师点金

用因式分解法解一元二次方程的步骤

1. 移项，将方程的右边化为0. 2. 将方程的左边分解为两个一次因式的积. 3. 令每个因式等于0，得两个一元一次方程. 4. 解这两个一元一次方程，得方程的两个根.

用因式分解法解方程的关键是将方程左边因式分解. 常用到的因式分解的方法有提公因式法、公式法、十字相乘法(即$x^2-(a+b)x+ab$型的因式分解).

Ⅰ 夯实基础·逐点练

☞(答案见146页)

知识点1 因式分解法的依据

1. 【中考·山西】我们解一元二次方程$3x^2-6x=0$时，可以运用因式分解法，将此方程化为$3x(x-2)=0$，从而得到一元一次方程$3x=0$或$x-2=0$，进而得到原方程的解为$x_1=0$，$x_2=2$. 这种解法体现的数学思想是(　　)

A. 转化思想　　B. 函数思想

C. 数形结合思想　　D. 公理化思想

2. 用因式分解法解方程，下列过程正确的是(　　)

A. $(2x-3)(3x-4)=0$化为$2x-3=0$或$3x-4=0$

B. $(x+3)(x-1)=1$化为$x+3=1$或$x-1=1$

C. $(x-2)(x-3)=2\times3$化为$x-2=2$或$x-3=3$

D. $x(x+2)=0$化为$x+2=0$

知识点2 用因式分解法解方程

3. 【2019·扬州】一元二次方程$x(x-2)=x-2$的根是_____.

4. 【2019·十堰】对于实数a，b，定义运算“◎”如下：$a◎b=(a+b)^2-(a-b)^2$，若$(m+2)◎(m-3)=24$，则$m=$_____.

5. 【中考·凉山州】若关于x的方程$x^2+2x-3=0$与$\frac{2}{x+3}=\frac{1}{x-a}$有一个解相同，则$a$的值为(　　)

A. 1　　B. 1或-3

C. -1　　D. -1或3

*6. 【2019·内江】一个等腰三角形的底边长是6，腰长是一元二次方程$x^2-8x+15=0$的一根，则此三角形的周长是(　　)

A. 16　　B. 12　　C. 14　　D. 12或16

*7. 【2019·通辽】一个菱形的边长是方程$x^2-8x+15=0$的一个根，其中一条对角线长为8，则该菱形的面积为(　　)

A. 48　　B. 24

C. 24或40　　D. 48或80

知识点3 用适当的方法解一元二次方程

*8. 解方程$(5x-1)^2=3(5x-1)$的最适当的方法是(　　)

A. 直接开平方法　　B. 配方法

C. 公式法　　D. 因式分解法

9. 已知下列方程，请把它们的序号填在最适当的解法后的横线上.

①$2(x-1)^2=6$；　②$(x-2)^2+x^2=4$；

③$(x-2)(x-3)=3$；　④$x^2-2x-1=0$；

⑤$x^2-\sqrt{2}x+\frac{1}{4}=0$；　⑥$x^2-2x-98=0$.

(1)直接开平方法：_____.

(2)配方法：_____.

(3)公式法：_____.

(4)因式分解法：_____.

易错点1 在方程两边同时除以含有未知数的式子导致失根

10. 【2018·齐齐哈尔】解方程：$2(x-3)=3x(x-3)$.

易错点2 用换元法解一元二次方程时，忽视实数这一条件而致错

11. 已知x为实数，且满足$(x^2+x+1)^2+2(x^2+x+1)-3=0$，那么$x^2+x+1$的值为(　　)

A. 1　　B. -3

C. -3或1　　D. -1或3

趣味数学　唐朝时，有一位懂数学的尚书主持了一场考试，其中一道题是：有一天，几个盗贼正在商议怎样分配偷来的布匹. 贼首说，每人分6匹布，还剩5匹布；每人分7匹布，还少8匹布.(待续)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法·提升练 ☞（答案见146页）

考查角度1 利用方程的特点选择适当的方法解方程

12. 解下列方程：

（1）$2x^2-4x-30=0$；

（2）$x^2-(\sqrt{2}+\sqrt{3})x+\sqrt{6}=0$；

（3）$x^2-8x+4=0$.

考查角度2 因式分解法解方程在求三角形周长中的应用

13. 已知关于 x 的方程 $(a-1)x^2-4x-1+2a=0$，$x=3$ 是方程的一个根.

（1）求 a 的值及方程的另一个根；

（2）一个三角形的三边长都是此方程的根，求这个三角形的周长.

Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞（答案见146页）

拔尖角度1 利用因式分解法解 $x^2+(a+b)x+ab=0$ 型的方程（类比法）

14. 【中考·湘潭】由多项式乘法得 $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$，将该式从右到左使用，即可得到“十字相乘法”进行因式分解的公式：$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$.

示例：分解因式：$x^2+5x+6=x^2+(2+3)x+2\times3=(x+2)(x+3)$.

（1）尝试：解因式：$x^2+6x+8=(x+____)(x+____)$.

（2）应用：请用上述方法解方程：$x^2-3x-4=0$.

拔尖角度2 利用换元法解方程（整体思想）

15. 阅读材料：

为了解方程 $(x^2-1)^2-5(x^2-1)+4=0$，我们可以将 x^2-1 看成一个整体，然后设 $x^2-1=y$，那么原方程可化为 $y^2-5y+4=0$ ①，解得 $y_1=1$，$y_2=4$. 当 $y=1$ 时，$x^2-1=1$，$\therefore x^2=2$，$\therefore x=\pm\sqrt{2}$；当 $y=4$ 时，$x^2-1=4$，$\therefore x^2=5$，$\therefore x=\pm\sqrt{5}$，故原方程的解为 $x_1=\sqrt{2}$，$x_2=-\sqrt{2}$，$x_3=\sqrt{5}$，$x_4=-\sqrt{5}$.

解答问题：

（1）上述解题过程，在由原方程得到方程①的过程中，利用_____法达到了降次的目的，体现了转化的数学思想；

（2）请利用以上知识解方程：$\dfrac{x+1}{x^2}-\dfrac{2x^2}{x+1}=1$.

趣味数学

贼首的话被躲在暗处的衙役听到了，他飞快地跑回官府，报告了知府. 但知府不知道有多少盗贼. 不知派多少人去抓捕他们. 请问盗贼几人，布几匹？（答案：盗贼13人，布83匹）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

*5　一元二次方程的根与系数的关系

名师点金

与一元二次方程根与系数的关系有关的几种常见式子变形

1. $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$；
2. $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$；
3. $(x_1+1)(x_2+1)=x_1x_2+(x_1+x_2)+1$；
4. $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}$；
5. $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}$；
6. $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$.

Ⅰ 夯实基础·逐点练

☞(答案见146页)

知识点1 一元二次方程的根与系数的关系

1. 【2019·黄冈】若 x_1,x_2 是一元二次方程 $x^2-4x-5=0$ 的两根，则 $x_1\cdot x_2$ 的值为(　　)

A. -5　　B. 5　　C. -4　　D. 4

2. 【2019·广东】已知 x_1,x_2 是一元二次方程 $x^2-2x=0$ 的两个实数根，下列结论错误的是(　　)

A. $x_1\neq x_2$　　B. $x_1^2-2x_1=0$

C. $x_1+x_2=2$　　D. $x_1\cdot x_2=2$

3. 【2018·贵港】已知 α,β 是一元二次方程 $x^2+x-2=0$ 的两个实数根，则 $\alpha+\beta-\alpha\beta$ 的值是(　　)

A. 3　　B. 1　　C. -1　　D. -3

4. 【2019·淄博】若 $x_1+x_2=3$，$x_1^2+x_2^2=5$，则以 x_1,x_2 为根的一元二次方程是(　　)

A. $x^2-3x+2=0$

B. $x^2+3x-2=0$

C. $x^2+3x+2=0$

D. $x^2-3x-2=0$

5. 【中考·怀化】设 x_1,x_2 是方程 $x^2+5x-3=0$ 的两个根，则 $x_1^2+x_2^2$ 的值是(　　)

A. 19　　B. 25　　C. 31　　D. 30

6. 【2018·眉山】若 α,β 是一元二次方程 $3x^2+2x-9=0$ 的两根，则 $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}$ 的值是(　　)

A. $\frac{4}{27}$　　B. $-\frac{4}{27}$　　C. $-\frac{58}{27}$　　D. $\frac{58}{27}$

***7.** 【中考·天门】若 α,β 为方程 $2x^2-5x-1=0$ 的两个实数根，则 $2\alpha^2+3\alpha\beta+5\beta$ 的值为(　　)

A. -13　　B. 12　　C. 14　　D. 15

知识点2 一元二次方程的根与系数的关系的应用

8. 【2019·天门】若方程 $x^2-2x-4=0$ 的两个实数根为 α,β，则 $\alpha^2+\beta^2$ 的值为(　　)

A. 12　　B. 10　　C. 4　　D. -4

9. 【中考·绵阳】若关于 x 的方程 $x^2-2x+c=0$ 有一根为 -1，则方程的另一根为(　　)

A. -1　　B. -3　　C. 1　　D. 3

10. 【2019·贵港】若 α,β 是关于 x 的一元二次方程 $x^2-2x+m=0$ 的两实根，且 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=-\frac{2}{3}$，则 m 等于(　　)

A. -2　　B. -3　　C. 2　　D. 3

***11.** 【2019·包头】已知等腰三角形的三边长分别为 $a,b,4$，且 a,b 是关于 x 的一元二次方程 $x^2-12x+m+2=0$ 的两根，则 m 的值是(　　)

A. 34　　B. 30

C. 30或34　　D. 30或36

***12.** 已知 m,n 是关于 x 的一元二次方程 $x^2-2tx+t^2-2t+4=0$ 的两实数根，则 $(m+2)(n+2)$ 的最小值是(　　)

A. 7　　B. 11　　C. 12　　D. 16

易错点 忽视判断一元二次方程的根的判别式的符号

13. 关于 x 的一元二次方程 $x^2-(k-1)x-k+2=0$ 有两个实数根 x_1,x_2，若 $(x_1-x_2+2)(x_1-x_2-2)+2x_1x_2=-3$，则 k 的值为(　　)

A. 0或2　　B. -2或2　　C. -2　　D. 2

趣味数学　在1825年，挪威学者阿贝尔终于证明：如果方程的次数 $n\geqslant 5$，那么此方程不可能用根式求解，即不存在一般五次方程的求根公式，这就是著名的阿贝尔定理.(待续)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法·提升练 ☞（答案见147页）

考查角度1 利用一元二次方程根与系数的关系求方程的根

14. 【2019·随州】已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-(2k+1)x+k^2+1=0$ 有两个不相等的实数根 x_1,x_2.

(1)求 k 的取值范围；

(2)若 $x_1+x_2=3$，求 k 的值及方程的根.

考查角度2 利用根与系数的关系求两根满足某关系式时字母的值

15. 【2019·绥化】已知关于 x 的方程 $kx^2-3x+1=0$ 有实数根.

(1)求 k 的取值范围；

(2)若该方程有两个实数根，分别为 x_1 和 x_2，当 $x_1+x_2+x_1x_2=4$ 时，求 k 的值.

Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞（答案见147页）

拔尖角度1 利用根与系数的关系及根的判别式求代数式的值

16. 【2019·南充】已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+(2m-1)x+m^2-3=0$ 有实数根.

(1)求实数 m 的取值范围；

(2)当 $m=2$ 时，方程的根为 x_1,x_2，求代数式 $(x_1^2+2x_1)(x_2^2+4x_2+2)$ 的值.

拔尖角度2 利用根与系数的关系及根的判别式解存在性问题

17. 【中考·鄂州】关于 x 的方程 $x^2-(2k-1)x+k^2-2k+3=0$ 有两个不相等的实数根.

(1)求实数 k 的取值范围；

(2)设方程的两个实数根分别为 x_1,x_2，存不存在这样的实数 k，使得 $|x_1|-|x_2|=\sqrt{5}$？若存在，求出这样的 k 值；若不存在，说明理由.

更多提分招数详见《极速提分法》第15页。

趣味数学

由于受阿贝尔定理的影响，绝大多数的数学家早已放弃了对一元五次方程求根公式的探索.但由于社会的发展，仍然有一群爱好数学的学者在不断地寻求突破！

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

阶段核心方法

一元二次方程的九种解法 ☞(答案见147页)

名师点金

解一元二次方程时,主要考虑降次,其解法有**直接开平方法**、**因式分解法**、**配方法**和**公式法**,有些特殊方程还可用**换元法**等方法求解. 在具体的解题过程中,结合方程的特点选择合适的方法,往往会达到事半功倍的效果.

方法1　形如$(x+m)^2=n(n\geqslant 0)$的一元二次方程用直接开平方法求解

1. 用直接开平方法解下列一元二次方程,其中无实数解的方程为(　　)

A. $x^2-5=5$　　B. $-3x^2=0$

C. $x^2+4=0$　　D. $(x+1)^2=0$

2. 解下列方程:

(1)$(4x-1)^2=225$;　　(2)$\frac{1}{3}(x-2)^2=8$.

方法2　当二次项系数为1,且一次项系数为偶数时,用配方法求解

3. 解方程:$x^2+4x-2=0$.

4. 已知$x^2-10x+y^2-16y+89=0$,求$\frac{x}{y}$的值.

方法3　能化成形如$(x+a)(x+b)=0$的一元二次方程用因式分解法求解

5. 【中考·宁夏】一元二次方程$x(x-2)=2-x$的根是(　　)

A. -1　　B. 2

C. 1和2　　D. -1和2

6. 解下列一元二次方程:

(1)$x^2-2x=0$;

(2)$16x^2-9=0$;

(3)$4x^2=4x-1$.

方法4　若一个一元二次方程易化为一般形式,则用公式法求解

7. 用公式法解一元二次方程$x^2-\frac{1}{4}=2x$,方程的解应是(　　)

A. $x=\frac{-2\pm\sqrt{5}}{2}$　　B. $x=\frac{2\pm\sqrt{5}}{2}$

C. $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$　　D. $x=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$

8. 用公式法解下列方程:

(1)$3(x^2+1)-7x=0$;

更多提分招数详见《极速提分法》第17页。

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

(2) $4x^2-3x-5=x-2$.

方法5 构造法解一元二次方程

9. 解方程：$6x^2+19x+10=0$.

10. 若 m,n,p 满足 $m-n=8$，$mn+p^2+16=0$，求 $m+n+p$ 的值.

方法6 整体换元法解方程

11. 解方程：$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=48$.

12. 解方程：$x^2+\frac{1}{x^2}-2\left(x+\frac{1}{x}\right)-1=0$.

方法7 降次换元法解方程

13. 解方程：$6x^4-35x^3+62x^2-35x+6=0$.

方法8 倒数换元法解分式方程

14. 解方程：$\frac{x-2}{x}-\frac{3x}{x-2}=2$.

方法9 特殊值法解一元二次方程

15. 解方程：$(x-2\,019)(x-2\,020)=2\,021\times2\,022$.

更多提分招数详见《极速提分法》第19页。

趣味数学

“七巧板”是我国古代的一种拼板玩具，由七块可以拼成一个大正方形的薄板组成，拼出来的图案变化万千. 后来传到国外，叫做“唐图”. “七巧板”流传到今天，成为人们喜爱的一种智力玩具.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6　应用一元二次方程

第1课时　建立一元二次方程解几何问题

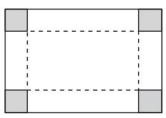
名师点金

建立一元二次方程解决几何图形问题应注意三点：一是图形的面积公式是基本的等量关系式；二是利用平移的性质（图形的面积不变）将零散的图形拼聚在一起；三是取舍根时，注意条件中对图形边长的限制.

Ⅰ 夯实基础·逐点练 ☞（答案见148页）

知识点1　规则图形的应用

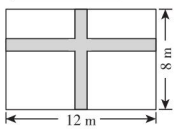
1. 【2019·徐州】如图，有一块矩形硬纸板，长30 cm，宽20 cm，在其四角各剪去一个同样的正方形，然后将四周突出部分折起，可制成一个无盖长方体盒子，当剪去正方形的边长取何值时，所得长方体盒子的侧面积为200 cm^2？



（第1题）

知识点2　不规则图形的应用

2. 【2019·山西】如图，在一块长12 m，宽8 m的矩形空地上，修建同样宽的两条互相垂直的道路（两条道路各与矩形的一条边平行），剩余部分栽种花草，且栽种花草的面积为77 m^2，设道路的宽为x m，则根据题意，可列方程为_____.



（第2题）

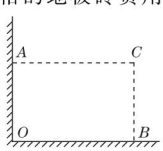
Ⅱ 整合方法·提升练 ☞（答案见148页）

考查角度1　利用一元二次方程解与方案有关的问题

3. 【中考·百色】如图，在直角墙角AOB（$OA\perp OB$，且OA，OB长度不限）中，要砌20 m长的墙，与直角墙角AOB围成地面为矩形的储仓，且矩形地面$AOBC$的面积为96 m^2.

（1）求这个矩形地面的长；

（2）有规格为0.80×0.80和1.00×1.00（单位：m）的地板砖价格分别为55元/块和80元/块，若只选其中一种地板砖都恰好能铺满储仓的矩形地面（不计缝隙），用哪一种规格的地板砖费用较少？



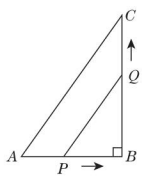
（第3题）

考查角度2　利用一元二次方程探究面积问题

4. 如图所示，在$\triangle ABC$中，$\angle B=90°$，$AB=5$ cm，$BC=7$ cm. 点P从点A开始沿AB边向点B以1 cm/s的速度移动，点Q从点B开始沿BC边向点C以2 cm/s的速度移动.

（1）如果点P，Q分别从点A，B同时出发，那么几秒后，$\triangle PBQ$的面积等于4 cm^2？

（2）如果点P，Q分别从点A，B同时出发，$\triangle PBQ$的面积能否等于7 cm^2？



（第4题）

趣味数学　当数学家导出方程式和公式时，如同看到雕像、美丽的风景，听到优美的曲调，得到充分的快乐.
——柯普宁

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第2课时　建立一元二次方程解百分率问题

名师点金

1. **增长率（或降低率）问题的规律**　（1）增长率问题：设某数为 a，平均增长率为 x，则一次增长后的值为 $a(1+x)$，两次增长后的值为 $a(1+x)^2$，依次类推，n 次增长后的值为 $a(1+x)^n$. （2）降低率问题：设某数为 a，平均降低率为 x，则一次降低后的值为 $a(1-x)$，两次降低后的值为 $a(1-x)^2$，依次类推，n 次降低后的值为 $a(1-x)^n$.

2. **解决利润问题常用的关系式**　（1）利润 = 售价 − 进价. （2）利润率 $=\frac{\text{利润}}{\text{进价}}\times 100\% =\frac{\text{售价}-\text{进价}}{\text{进价}}\times 100\%$.

（3）售价 = 进价 ×（1 + 利润率）. （4）总利润 = 单个利润 × 销售量 = 总收入 − 总支出.

Ⅰ 夯实基础 · 逐点练

☞（答案见 148 页）

知识点 1 增长率问题

1. 【2019 · 大连】某村 2016 年的人均收入为 20 000 元，2018 年的人均收入为 24 200 元.

（1）求 2016 年到 2018 年该村人均收入的年平均增长率；

（2）假设 2019 年该村人均收入的增长率与前两年的年平均增长率相同，请你预测 2019 年该村的人均收入是多少元.

知识点 2 降低率问题

2. 【2019 · 东营】为加快新旧动能转换，提高公司经济效益，某公司决定对近期研发出的一种电子产品进行降价促销，使生产的电子产品能够及时售出. 根据市场调查：这种电子产品销售单价定为 200 元时，每天可售出 300 个；若销售单价每降低 1 元，每天可多售出 5 个. 已知每个电子产品的固定成本为 100 元，问这种电子产品降价后的销售单价为多少元时，公司每天可获利 32 000 元？

Ⅱ 整合方法 · 提升练

☞（答案见 148 页）

考查角度 利用一元二次方程、不等式解决实际问题

3. 【2019 · 玉林】某养殖场为了响应党中央的扶贫政策，今年起采用“场内 + 农户”养殖模式，同时加强对蛋鸡的科学管理，使蛋鸡的产蛋率不断提高，三月份和五月份的产蛋量分别是 2.5 万千克与 3.6 万千克，现假定该养殖场蛋鸡产蛋量的月增长率相同.

（1）求该养殖场蛋鸡产蛋量的月平均增长率；

（2）假定当月产的鸡蛋当月在各销售点全部销售出去，且每个销售点每月平均销售量最多为 0.32 万千克，如果要完成六月份的鸡蛋销售任务，那么该养殖场在五月份已有的销售点的基础上至少再增加多少个销售点？

不管数学的任一分支是多么抽象，总有一天会应用在这实际世界上.　——罗巴切夫斯基　趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第3课时　建立一元二次方程解一般问题



名师点金

列一元二次方程解应用题的一般步骤可归结为六个字：审、设、列、解、验、答.

1. 一般情况下，步骤中的第一步“审”不写出来，但它是关键的一步，只有审清题意，明确了已知量、未知量及它们之间的关系，才能准确列出方程.
2. 设未知数有直接设元和间接设元两种方式，直接设元就是问什么，设什么；间接设元就是在直接设元比较困难，或所列方程较复杂时所采用的间接设未知数的方法.

Ⅰ 夯实基础·逐点练

（答案见148页）

知识点1 分裂问题

1. 【2019·鸡西】某校“研学”活动小组在一次野外实践时，发现一种植物的主干长出若干数目的支干，每个支干又长出同样数目的小分支，主干、支干和小分支的总数是43，则这种植物每个支干长出的小分支个数是(　　)

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

2. 【中考·贺州】某生物实验室需培育一群有益菌. 现有60个活体样本，经过两轮培植后，有益菌总和达24 000个，其中每个有益菌每一轮可分裂出若干个相同数目的有益菌.

(1) 每轮分裂中每个有益菌可分裂出多少个有益菌？

(2) 按照这样的分裂速度，经过三轮培植后共有多少个有益菌？

知识点2 传染问题

3. 2020年，在某地爆发了新型冠状病毒. 如果因1人感染了新型冠状病毒却没有及时隔离治疗，经过两轮传播，共有9人感染了新型冠状病毒，每轮传染中平均一个人传染了几个人？

知识点3 循环问题

4. 【2019·新疆】在某篮球邀请赛中，参赛的每两个队之间都要比赛一场，共比赛36场，设有x个队参赛，根据题意，可列方程为(　　)

A. $\frac{1}{2}x(x-1)=36$　　B. $\frac{1}{2}x(x+1)=36$

C. $x(x-1)=36$　　D. $x(x+1)=36$

5. 【中考·新疆】某市体育局要组织一次篮球赛，赛制为单循环形式(每两支球队之间都赛一场)，计划安排28场比赛，应邀请多少支球队参加比赛？

知识点4 数字问题

6. 一个两位数，它的十位数字比个位数字小4，若把这两个数字调换位置，所得的两位数与原两位数的乘积等于765，求原两位数.

趣味数学　美国著名数学家、教育学家乔治·波利亚曾出了一道数学趣题：“已知她是他的平方，求她和他.”因为波利亚是美国人，讲的是英语，所以要求解$(he)^2=she$.（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法·提升练 ☞（答案见148页）

考查角度1 利用一元二次方程解传播问题

7. 岳一中九年级某学生聆听了感恩励志主题演讲《不要让爱你的人失望》后，写了一份《改变，从现在开始》的倡议书在微信朋友圈传播，规则为：将倡议书发表在自己的朋友圈，再邀请 n 个好友转发倡议书，每个好友转发倡议书之后，又邀请 n 个互不相同的好友转发倡议书，以此类推，已知经过两轮传播后，共有421人参与了传播活动，求 n 的值.

考查角度2 利用一元二次方程解多边形的对角线问题

8. 我们知道，计算 n 边形的对角线条数公式为 $\frac{1}{2}n(n-3)$. 如果一个 n 边形共有20条对角线，那么可以得到方程 $\frac{1}{2}n(n-3)=20$. 整理得 $n^2-3n-40=0$，解得 $n=8$ 或 $n=-5$.

$\because n\geqslant 3$，$\therefore n=-5$ 不合题意，舍去. $\therefore n=8$，即该多边形是八边形.

根据以上内容，解答下列问题：

(1) 若一个多边形共有14条对角线，则这个多边形的边数是多少？

(2) A同学说：“我求得一个多边形共有10条对角线.”你认为A同学的说法正确吗？为什么？

Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞（答案见148页）

拔尖角度1 利用一元二次方程解与一次函数综合问题

9. 【2018·德州】为积极响应新旧动能转换，提高公司经济效益，某科技公司近期研发出一种新型高科技设备，每台设备成本价为30万元，经过市场调研发现，每台售价为40万元时，年销售量为600台；每台售价为45万元时，年销售量为550台. 假定该设备的年销售量 y（单位：台）和销售单价 x（单位：万元）成一次函数关系.

(1) 求年销售量 y 与销售单价 x 的函数关系式；

(2) 根据相关规定，此设备的销售单价不得高于70万元，如果该公司想获得10 000万元的年利润，则该设备的销售单价应是多少万元？

拔尖角度2 利用一元二次方程解与不等式综合问题

10. 为进一步促进义务教育均衡发展，某市加大了基础教育经费的投入，已知2017年该市投入基础教育经费5 000万元，2019年投入基础教育经费7 200万元.

(1) 求该市这两年投入基础教育经费的年平均增长率；

(2) 如果按(1)中基础教育经费投入的年平均增长率计算，该市计划2020年用不超过当年基础教育经费的5%购买电脑和实物投影仪共1 500台，并调配给农村学校，若购买一台电脑需3 500元，购买一台实物投影仪需2 000元，则最多可购买电脑多少台？

趣味数学

每个字母代表一个阿拉伯数字，由于he的尾数e的平方的尾数还是e，可知e只能是0,1,5,6中的某个数. 逐个计算后得出满足条件的答案是：she=625，he=25.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

阶段核心归类

利用一元二次方程解实际问题的十种常见应用 ☞(答案见148页)

名师点金

学习了一元二次方程的解法以后,就会经常遇到解决与一元二次方程有关的生活中的应用问题,即列一元二次方程解应用题.不少同学遇到这类问题总是左右为难,难以下笔.事实上,同学们只要能认真地阅读题目,分析题意,并能学会分解题目,各个击破,从而找到已知的条件和未知问题.必要时可通过画图、列表等方法来帮助我们理顺已知与未知之间的关系,找到一个或几个相等的式子,从而列出方程求解,同时还要及时地检验答案的正确性并作答.

应用1 增长率问题

1.【2019·宜昌】HW公司2018年使用自主研发生产的"QL"系列甲、乙、丙三类芯片共2 800万块,生产了2 800万部手机,其中乙类芯片的产量是甲类芯片的2倍,丙类芯片的产量比甲、乙两类芯片产量的和还多400万块,这些"QL"芯片解决了该公司2018年生产的全部手机所需芯片的10%.

(1)求2018年甲类芯片的产量;

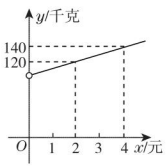
(2)HW公司计划2020年生产的手机全部使用自主研发的"QL"系列芯片,从2019年起逐年扩大"QL"芯片的产量,2019年、2020年这两年,甲类芯片每年的产量都比前一年增长一个相同的百分数$m\%$,乙类芯片的产量平均每年增长的百分数比$m\%$小1,丙类芯片的产量每年按相同的数量递增.2018年到2020年,丙类芯片三年的总产量达到1.44亿块,这样,2020年HW公司的手机产量比2018年全年的手机产量多10%,求丙类芯片2020年的产量及m的值.

应用2 销售问题

2.【2019·安顺】安顺市某商贸公司以每千克40元的价格购进一种干果,计划以每千克60元的价格销售,为了让顾客得到更大的实惠,现决定降价销售,已知这种干果销售量y(千克)与每千克降价x(元)$(0<x<20)$之间满足一次函数关系,其图象如图所示.

(1)求y与x之间的函数关系式;

(2)商贸公司要想获利2 090元,则这种干果每千克应降价多少元?



(第2题)

应用3 储蓄问题

3.王红梅同学将1 000元压岁钱第一次按一年定期存入银行,到期后将本金和利息取出,并将其中的500元捐给"希望工程",剩余的又全部按一年定期存入,这时存款的年利率已下调到第一次存款时年利率的90%,这样到期后,可得本金和利息共530元,求第一次存款时的年利率.(不计利息税)

应用4 趣味问题

4.一个醉汉拿着一根竹竿进城,横着怎么也拿不进去,量得竹竿长比城门宽4米.旁边一个醉汉嘲笑他:"你没看城门高吗?竖着拿就可以进去啦!"结果竹竿竖着比城门高2米.二人没办法,只好请教聪明人.聪明人教他们二人沿着城门的对角斜着拿,二人一试,不多不少刚好进城门.你知道竹竿有多长吗?

趣味数学　"小屠夫"问题:美国南北战争时北军总司令、第18任总统格兰特在路上相中了一匹马.马的主人是一位聪明的德国人,得知格兰特是美国总统后,以半价把马卖给了他.(待续)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

应用5 古诗问题

5. 读诗词解题：（通过列方程，算出周瑜去世时的年龄）
大江东去浪淘尽，千古风流数人物；
而立之年督东吴，早逝英年两位数；
十位恰小个位三，个位平方与寿符；
哪位学子算得快，多少年华属周瑜？

应用6 传播问题

6. 某种电脑病毒传播非常快，如果有一台电脑被感染，经过两轮感染后就会有 81 台电脑被感染. 请回答：每轮感染中平均一台电脑会感染几台电脑？若病毒得不到有效控制，三轮后被感染的电脑总数会不会超过 700 台？

应用7 情景问题

7. 收发微信红包已成为各类人群进行交流联系、增强感情的一部分. 如图是甜甜和她的双胞胎妹妹在六一儿童节期间的对话.



（第 7 题）

请问：
（1）2017 年到 2019 年甜甜和她的妹妹在六一收到红包的年平均增长率是多少？
（2）2019 年六一，甜甜和她的妹妹各收到了多少元微信红包？

应用8 几何问题

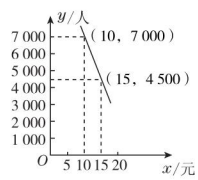
8. 【2019 · 襄阳】改善小区环境，争创文明家园. 如图所示，某社区决定在一块长（AD）16 m，宽（AB）9 m 的矩形场地 $ABCD$ 上修建三条同样宽的小路，其中两条与 AB 平行，另一条与 AD 平行，其余部分种草，要使草坪部分的总面积为 112 m^2，则小路的宽应为多少？



（第 8 题）

应用9 函数问题

9. 某博物馆每周都吸引大量中外游客前来参观. 如果游客过多，对馆中的珍贵文物会产生不利影响，因此博物馆采取了提高门票价格的方法来控制参观人数. 在该方法的实施过程中发现：每周参观人数 y（人）与票价 x（元）之间存在着如图所示的一次函数关系，在这种情况下，如果要保证每周 4 万元的门票收入，那么每周应限定参观人数为多少？门票价格应是多少？



（第 9 题）

应用10 新定义问题

10. 观察下列一组方程：①$x^2 - x = 0$；②$x^2 - 3x + 2 = 0$；③$x^2 - 5x + 6 = 0$；④$x^2 - 7x + 12 = 0$……它们的根有一定的规律，都是两个连续的自然数，我们称这类一元二次方程为“连根一元二次方程”.
（1）若 $x^2 + kx + 56 = 0$ 也是“连根一元二次方程”，写出实数 k 的值，并解这个一元二次方程；
（2）请写出第 n 个方程和它的根.

趣味数学

格兰特很喜爱它，给马取名为“小屠夫”. 几年之后，华尔街出现动乱，格兰特家族发生了严重的经济问题，他万不得已以 493.68 美元的价格把“小屠夫”和它的伙伴一起卖了.（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

全章热门考点整合应用

☞(答案见149页)

名师点金

一元二次方程题的类型非常丰富,常见的有一元二次方程的根、一元二次方程的解法、一元二次方程根的情况、一元二次方程根与系数的关系、一元二次方程的应用等,只要我们掌握了不同类型题的解法特点,就可以使问题变得简单明了.本章热门考点可概括为:两个概念,一个解法,两个关系,两个应用,三种思想.

考点1 两个概念

概念1 一元二次方程

1. 当 m 取何值时,方程 $(m-1)x^{m^2+1}+2mx+3=0$ 是关于 x 的一元二次方程?

概念2 一元二次方程的根

2. 若关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一根为 -1,且 $a=\sqrt{4-c}+\sqrt{c-4}-2$,求 $\dfrac{(a+b)^{2\,020}}{2\,019c}$ 的值.

考点2 一个解法——一元二次方程的解法

3. 选择适当的方法解下列方程:

(1) $(x-1)^2+2x(x-1)=0$;

(2) $x^2-6x-6=0$;

(3) $6\,000(1-x)^2=4\,860$;

(4) $(10+x)(50-x)=800$;

(5)【中考·山西】$(2x-1)^2=x(3x+2)-7$.

考点3 两个关系

关系1 一元二次方程的根的判别式与系数的关系

4. 【2019·烟台】当 $b+c=5$ 时,关于 x 的一元二次方程 $3x^2+bx-c=0$ 的根的情况为(　　)

A. 有两个不相等的实数根

B. 有两个相等的实数根

C. 没有实数根

D. 无法确定

5. 在等腰三角形 ABC 中,三边长分别为 a,b,c. 其中 $a=5$,若关于 x 的方程 $x^2+(b+2)x+(6-b)=0$ 有两个相等的实数根,求 $\triangle ABC$ 的周长.

关系2 一元二次方程根与系数的关系

6. 【2019·孝感】已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-2(a-1)x+a^2-a-2=0$ 有两个不相等的实数根 x_1,x_2.

(1)若 a 为正整数,求 a 的值;

(2)若 x_1,x_2 满足 $x_1^2+x_2^2-x_1x_2=16$,求 a 的值.

7. 【2019·黄石】已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-6x+(4m+1)=0$ 有实数根.

(1)求 m 的取值范围;

(2)若该方程的两个实数根为 x_1,x_2,且 $|x_1-x_2|=4$,求 m 的值.

趣味数学　格兰特对这个价格很不满意,朋友就劝慰他:"你在小屠夫身上赚了12%,在另外一匹马上亏了10%,加起来你还是赚了2%."格兰特说:"也许应该像你这样计算."你知道格兰特为什么这么说吗?(待续).

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

考点4 两个应用

应用1 一元二次方程的应用

8. 【2019·德州】习近平总书记说："读书可以让人保持思想活力，让人得到智慧启发，让人滋养浩然之气". 某校为响应我市全民阅读活动，利用节假日面向社会开放学校图书馆. 据统计，第一个月进馆128人次，进馆人次逐月增加，到第三个月末累计进馆608人次，若进馆人次的月平均增长率相同.

(1)求进馆人次的月平均增长率；

(2)因条件限制，学校图书馆每月接纳能力不超过500人次，在进馆人次的月平均增长率不变的条件下，校图书馆能否接纳第四个月的进馆人次，并说明理由.

应用2 配方法的应用

9. 阅读下面材料.

我们知道 x^2+6x+9 可以分解因式，结果为 $(x+3)^2$，其实 x^2+6x+8 也可以通过配方法分解因式，其过程如下：

$$\begin{aligned} x^2+6x+8 &= x^2+6x+9-9+8 \\ &= (x+3)^2-1 \\ &= (x+3+1)(x+3-1) \\ &= (x+4)(x+2). \end{aligned}$$

(1)请仿照上述过程填空：

$x^2+4x-5=[x+(\quad\quad)][x+(\quad\quad)]$；

$x^2-5x+6=[x+(\quad\quad)][x+(\quad\quad)]$；

$x^2-8x-9=[x+(\quad\quad)][x+(\quad\quad)]$.

(2)请观察(1)中横线上所填的数，每道题所填的两个数与一次项系数、常数项有什么关系？

10. 阅读材料：

把形如 $ax^2+bx+c(a,b,c$ 为常数$)$ 的二次三项式(或其一部分)配成完全平方式的方法叫做配方法. 配方法的基本形式是完全平方公式的逆写，即 $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$.

例如：$(x-1)^2+3$，$(x-2)^2+2x$，$\left(\frac{1}{2}x-2\right)^2+\frac{3}{4}x^2$ 是 x^2-2x+4 的三种不同形式的配方，即"余项"分别是常数项、一次项、二次项.

请根据阅读材料解决下列问题：

(1)仿照上面的例子，写出 x^2-4x+2 的三种不同形式的配方；

(2)已知 $a^2+b^2+c^2-ab-3b-2c+4=0$，求 $a+b+c$ 的值.

考点5 三种思想

思想1 整体思想

11. 已知 $x=a$ 是 $2x^2+x-2=0$ 的一个根，求代数式 $2a^4+a^3+2a^2+2a+1$ 的值.

思想2 转化思想

12. 解方程：$(2x+1)^2-3(2x+1)=-2$.

思想3 分类讨论思想

13. 已知关于 x 的方程 $x^2+2(a-1)x+a^2-7a-4=0$ 有两个实数根 x_1,x_2.

(1)求 a 的取值范围；

(2)若 $x_1^2=x_1x_2$，求方程的两个根及 a 的值.

理由："小屠夫"买进价格为264美元，以295.68美元卖出，赚了12%；另外一匹马买进价格为220美元，以198美元卖出，亏了10%. 买价总额为484美元，卖价总额为493.68美元，利润为2%.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

第一章达标检测卷

（120 分，90 分钟）

题　号	一	二	三	总　分
得　分				

姓名　学号　班级　学校

一、选择题（每题 3 分，共 30 分）

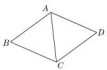
1. 菱形、矩形、正方形都具有的性质是（　　）

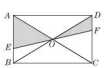
A. 四条边相等，四个角相等　　B. 对角线相等

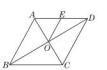
C. 对角线互相垂直　　D. 对角线互相平分

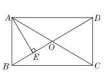
2. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，$AB=5$，$\angle BCD=120°$，则 $\triangle ABC$ 的周长等于（　　）

A. 20　　B. 15　　C. 10　　D. 5


（第 2 题）


（第 3 题）


（第 4 题）


（第 5 题）

3. 如图，EF 过矩形 $ABCD$ 对角线的交点 O，且分别交 AB，CD 于点 E，F，那么阴影部分的面积是矩形 $ABCD$ 面积的（　　）

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{3}{10}$

4. 如图，菱形 $ABCD$ 的周长为 24 cm，对角线 AC，BD 相交于点 O，点 E 是 AD 的中点，连接 OE，则线段 OE 的长等于（　　）

A. 3 cm　　B. 4 cm　　C. 2.5 cm　　D. 2 cm

5. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=3$，对角线 AC，BD 相交于点 O，AE 垂直平分 OB 于点 E，则 AD 的长为（　　）

A. 3　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{6}$　　D. $3\sqrt{3}$

6. 顺次连接四边形 $ABCD$ 各边的中点所得四边形是菱形，则四边形 $ABCD$ 一定是（　　）

A. 菱形　　B. 对角线互相垂直的四边形

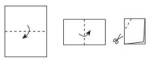
C. 矩形　　D. 对角线相等的四边形

7. 如图，把一张长方形纸片对折两次，然后剪下一个角，为了得到一个钝角为 120° 的菱形，剪口与第二次折痕所成角的度数应为（　　）

A. 15°或 30°　　B. 30°或 45°　　C. 45°或 60°　　D. 30°或 60°

8. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，$AE\perp BC$ 于点 E，$AF\perp CD$ 于点 F，且 E，F 分别为 BC，CD 的中点，则 $\angle EAF$ 等于（　　）

A. 75°　　B. 45°　　C. 60°　　D. 30°


（第 7 题）


（第 8 题）


（第 9 题）


（第 10 题）

9. 如图，在矩形纸片 $ABCD$ 中，$AB=4$，$BC=8$，将纸片沿 EF 折叠，使点 C 与点 A 重合，则下列结论错误的是（　　）

A. $AF=AE$　　B. $\triangle ABE\cong\triangle AGF$　　C. $EF=2\sqrt{5}$　　D. $AF=EF$

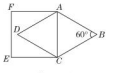
10. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 E，F 分别在 BC，CD 上，$\triangle AEF$ 是等边三角形，连接 AC 交 EF 于点 G，下列结论：①$BE=DF$；②$\angle DAF=15°$；③AC 垂直平分 EF；④$BE+DF=EF$；⑤$S_{\triangle CEF}=2S_{\triangle ABE}$. 其中正确结论有（　　）

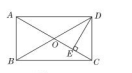
A. 2 个　　B. 3 个　　C. 4 个　　D. 5 个

二、填空题（每题 3 分，共 24 分）

11. 如图是一个平行四边形的活动框架，对角线是两根橡皮筋. 若改变框架的形状，则 $\angle\alpha$ 也随之变化，两条对角线长度也在发生改变. 当 $\angle\alpha$ 的度数为_____时，两条对角线长度相等.


（第 11 题）


（第 12 题）


（第 13 题）


（第 14 题）

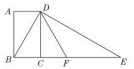
12. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，$\angle B=60°$，$AB=4$，则以 AC 为边的正方形 $ACEF$ 的周长为_____.

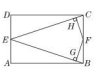
13. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，$DE\perp AC$ 于点 E，$\angle EDC:\angle EDA=1:2$，且 $AC=10$，则 EC 的长度是_____.

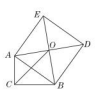
14. 如图，点 E 在正方形 $ABCD$ 的边 CD 上，若 $\triangle ABE$ 的面积为 18，$CE=4$，则线段 BE 的长为_____.

15. 菱形 $ABCD$ 在直角坐标系中的位置如图所示，其中点 A 的坐标为 $(1,0)$，点 B 的坐标为 $(0,\sqrt{3})$，动点 P 从点 A 出发，沿 $A\to B\to C\to D\to A\to B\to\cdots\cdots$ 的路径，在菱形的边上以每秒 0.5 个单位长度的速度移动，移动到第 2 019 s 时，点 P 的坐标为_____.


（第 15 题）


（第 16 题）


（第 17 题）


（第 18 题）

16. 如图，四边形 $ABCD$ 为矩形，过点 D 作对角线 BD 的垂线，交 BC 的延长线于点 E，取 BE 的中点 F，连接 DF，$DF=4$. 设 $AB=x$，$AD=y$，则 $x^2+(y-4)^2$ 的值为_____.

17. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=3$，$BC=2$，点 E 为 AD 的中点，点 F 为 BC 边上任一点，过点 F 分别作 EB，EC 的垂线，垂足分别为点 G，H，则 $FG+FH=$_____.

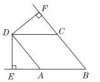
18. 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，以斜边 AB 为边向外作正方形 $ABDE$，且正方形的对角线交于点 O，连接 OC. 已知 $AC=5$，$OC=6\sqrt{2}$，则另一直角边 BC 的长为_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三、**解答题**(19,20 题每题 9 分,21 题 10 分,22,23 题每题 12 分,24 题 14 分,共 66 分)

19. 如图,四边形 $ABCD$ 是菱形,$DE \perp AB$ 交 BA 的延长线于点 E,$DF \perp BC$ 交 BC 的延长线于点 F.

求证:$DE = DF$.

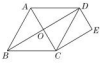


(第 19 题)

20. 如图,点 O 是菱形 $ABCD$ 对角线的交点,过点 C 作 $CE \parallel OD$,过点 D 作 $DE \parallel AC$,CE 与 DE 相交于点 E.

(1)求证:四边形 $OCED$ 是矩形.

(2)若 $AB = 4$,$\angle ABC = 60°$,求矩形 $OCED$ 的面积.



(第 20 题)

21. 如图,矩形 $ABCD$ 的对角线 AC,BD 相交于点 O,过点 B 作 AC 的平行线交 DC 的延长线于点 E.

(1)求证:$BD = BE$.

(2)若 $BE = 10$,$CE = 6$,连接 OE,求 $\triangle ODE$ 的面积.

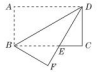


(第 21 题)

22. 如图,将矩形纸片 $ABCD$ 沿对角线 BD 折叠,使点 A 落在平面上的 F 点处,DF 交 BC 于点 E.

(1)求证:$\triangle DCE \cong \triangle BFE$.

(2)若 $CD = 2$,$\angle ADB = 30°$,求 BE 的长.

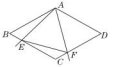


(第 22 题)

23. 如图,在菱形 $ABCD$ 中,$AB = 4$,$\angle BAD = 120°$,以点 A 为顶点的一个 $60°$ 的 $\angle EAF$ 绕点 A 旋转,$\angle EAF$ 的两边分别交 BC,CD 于点 E,F,且 E,F 不与 B,C,D 重合,连接 EF.

(1)求证:$BE = CF$.

(2)在 $\angle EAF$ 绕点 A 旋转的过程中,四边形 $AECF$ 的面积是否发生变化?如果不变,求出其定值;如果变化,请说明理由.



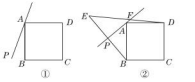
(第 23 题)

24. 在正方形 $ABCD$ 的外侧作直线 AP,点 B 关于直线 AP 的对称点为 E,连接 BE,DE,其中 DE 交直线 AP 于点 F.

(1)依题意补全图①;

(2)若 $\angle PAB = 20°$,求 $\angle ADF$ 的度数;

(3)如图②,若 $45° < \angle PAB < 90°$,用等式表示线段 AB,EF,FD 之间的数量关系,并给出证明.



(第 24 题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第二章达标检测卷

（120 分，90 分钟）

题　号	一	二	三	总　分
得　分				

姓名　学号　班级　学校

一、选择题（每题 3 分，共 30 分）

1. 下列等式中是关于 x 的一元二次方程的是(　　)

A. $3(x+1)^2=2(x+1)$　　B. $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-2=0$　　C. $ax^2+bx+c=0$　　D. $x^2+2x=x^2-1$

2. 一元二次方程 $x^2-6x+5=0$ 配方后可化为(　　)

A. $(x-3)^2=-14$　　B. $(x+3)^2=-14$　　C. $(x-3)^2=4$　　D. $(x+3)^2=14$

3. 关于 x 的一元二次方程 $(m-1)x^2-2x-1=0$ 有两个实数根，则实数 m 的取值范围是(　　)

A. $m\geqslant 0$　　B. $m>0$

C. $m\geqslant 0$ 且 $m\neq 1$　　D. $m>0$ 且 $m\neq 1$

4. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+mx-8=0$ 的一个实数根为 2，则另一个实数根及 m 的值分别为(　　)

A. 4，-2　　B. -4，-2　　C. 4，2　　D. -4，2

5. 已知 x 为实数，且满足 $(x^2+3x)^2+2(x^2+3x)-3=0$，那么 x^2+3x 的值为(　　)

A. 1　　B. -3 或 1　　C. 3　　D. -1 或 3

6. 某单位要组织一次篮球联赛，赛制为单循环形式（每两队之间都赛一场），计划安排 10 场比赛，则参加比赛的球队应有(　　)

A. 7 队　　B. 6 队　　C. 5 队　　D. 4 队

7. 关于 x 的方程 $x^2-ax+2a=0$ 的两根的平方和是 5，则 a 的值是(　　)

A. -1 或 5　　B. 1　　C. 5　　D. -1

8. 已知 $x=2$ 是关于 x 的方程 $x^2-2mx+3m=0$ 的一个根，并且等腰三角形 ABC 的腰长和底边长恰好是这个方程的两个根，则 $\triangle ABC$ 的周长为(　　)

A. 10　　B. 14　　C. 10 或 14　　D. 8 或 10

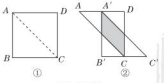
9. 若关于 x 的方程 $2x^2+mx+n=0$ 的两个根是 -2 和 1，则 n^m 的值为(　　)

A. -8　　B. 8　　C. 16　　D. -16

10. 如图，将边长为 2 cm 的正方形 $ABCD$ 沿其对角线 AC 剪开，再把 $\triangle ABC$ 沿着 AD 方向平移，得到 $\triangle A'B'C'$，若两个三角形重叠部分的面积为 1 cm^2，则它移动的距离 AA' 等于(　　)

A. 0.5 cm　　B. 1 cm

C. 1.5 cm　　D. 2 cm



（第 10 题）

二、填空题（每题 3 分，共 24 分）

11. 一元二次方程 $x(x-7)=0$ 的解是_____.

12. 若关于 x 的一元二次方程 $(a-1)x^2+x+a^2-1=0$ 的一个根是 0，则 $a=$_____.

13. 已知关于 x 的方程 $x^2-6x+k=0$ 的两根分别是 x_1，x_2，且满足 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=3$，则 $k=$_____.

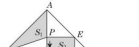
14. 某市加大了对雾霾的治理力度，2017 年第一季度投入资金 100 万元，第二季度和第三季度共投入资金 260 万元，求这两个季度投入资金的平均增长率. 设这两个季度投入资金的平均增长率为 x，根据题意可列方程为_____.

15. 关于 x 的两个方程 $x^2-4x+3=0$ 与 $\frac{1}{x-1}=\frac{2}{x+a}$ 有一个解相同，则 $a=$_____.

16. 已知线段 AB 的长为 2，以 AB 为边在 AB 的下方作正方形 $ABCD$，取 AB 边上一点 E（不与点 A，B 重合），以 AE 为边在 AB 的上方作正方形 $AENM$. 过点 E 作 $EF\perp CD$，垂足为点 F，如图. 若正方形 $AENM$ 与四边形 $EFCB$ 的面积相等，则 AE 的长为_____.



（第 16 题）



（第 18 题）

17. 已知 $(2a+2b+1)(2a+2b-1)=19$，则 $a+b=$_____.

18. 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90°$，$AB=AC=16$ cm，AD 为 BC 边上的高，动点 P 从点 A 出发，沿 $A\rightarrow D$ 方向以 $\sqrt{2}$ cm/s 的速度向点 D 运动. 设 $\triangle ABP$ 的面积为 S_1，矩形 $PDFE$ 的面积为 S_2，运动时间为 t s$(0<t<8)$，则 $t=$_____时，$S_1=2S_2$.

三、解答题（19 题 12 分，20 – 23 题每题 8 分，24 题 10 分，25 题 12 分，共 66 分）

19. 用适当的方法解下列方程.

(1) $x^2-x-1=0$；　　(2) $3x(x-2)=x-2$；

(3) $x^2-2\sqrt{2}x+1=0$；　　(4) $(x+8)(x+1)=-12$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

20. 已知关于 x 的一元二次方程 $(m-2)x^2+2mx+m+3=0$ 有两个不相等的实数根.

(1)求 m 的取值范围;

(2)当 m 取满足条件的最大整数时,求方程的根.

21. 解方程 $(x-1)^2-5(x-1)+4=0$ 时,我们可以将 $x-1$ 看成一个整体,设 $x-1=y$,则原方程可化为 $y^2-5y+4=0$,解得 $y_1=1$,$y_2=4$. 当 $y=1$ 时,即 $x-1=1$,解得 $x=2$;当 $y=4$ 时,即 $x-1=4$,解得 $x=5$,所以原方程的解为 $x_1=2$,$x_2=5$. 请利用这种方法求方程 $(2x+5)^2-4(2x+5)+3=0$ 的解.

22. 关于 x 的一元二次方程 $x^2+3x+m-1=0$ 的两个实数根分别为 x_1,x_2.

(1)求 m 的取值范围;

(2)若 $2(x_1+x_2)+x_1x_2+10=0$,求 m 的值.

23. 一个矩形周长为 56 cm.

(1)当矩形的面积为 180 cm^2 时,长和宽分别为多少?

(2)这个矩形的面积能为 200 cm^2 吗?请说明理由.

24. 如图,在 $\triangle ABC$ 中,$\angle B=90°$,$AB=6$ cm,$BC=8$ cm,若点 P 从点 A 出发沿 AB 边向点 B 以 1 cm/s 的速度移动,点 Q 从点 B 出发沿 BC 边向点 C 以 2 cm/s 的速度移动,两点同时出发.

(1)问几秒后,$\triangle PBQ$ 的面积为 8 cm^2?

(2)出发几秒后,线段 PQ 的长为 $4\sqrt{2}$ cm?

(3)$\triangle PBQ$ 的面积能否为 10 cm^2?若能,求出时间;若不能,请说明理由.



(第 24 题)

25. 某中学九年级准备组织学生去方特梦幻王国进行春游活动. 方特梦幻王国给出了学生团体门票的优惠价格:如果学生人数不超过 30 名,那么门票为每张 240 元;如果人数超过了 30 名,则每超过 1 名,每张门票就降低 2 元,但每张门票最低不能少于 200 元.

(1)若一班共有 40 名学生参加了春游活动,则需要交门票费多少元?

(2)若二班共有 52 名学生参加了春游活动,则需要交门票费多少元?

(3)若三班交了门票费 9 450 元,请问该班参加春游的学生有多少名?

荣德基 品质教辅

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

正文练习答案

第一章 特殊平行四边形

1 菱形的性质与判定

第1课时 菱形及其性质

1. C **2.** D

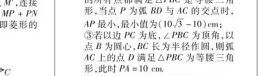
3. B **点拨**:如图,取 AD 的中点 M',连接 $M'N$,$M'P$,则有 $MP=M'P$,$MP+PN$ 的最小值为线段 $M'N$ 的长,即菱形的边长 1.故选 B.



(第 3 题)

4. A **5.** D **6.** A

7. C **点拨**:如图所示.



(第 7 题)

∵四边形 $ABCD$ 是菱形,

$\therefore OA=OC=\frac{1}{2}AC$,

$OD=OB=\frac{1}{2}BD$,$AC\perp BD$.

∵菱形的面积为 28,

$\therefore \frac{1}{2}AC\cdot BD=2OD\cdot OA=28$. ①

∵菱形的边长为 6,

$\therefore OD^2+OA^2=36$. ②

由①②两式可得 $(OD+OA)^2=OD^2+OA^2+2OD\cdot OA=36+28=64$,

$\therefore OD+OA=8$.

$\therefore 2(OD+OA)=16$,即该菱形的两条对角线的长度之和为 16.

8. C **点拨**:∵A,B 两点的坐标分别是 $(2,0)$,$(0,1)$,

$\therefore AB=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$.

∵四边形 $ABCD$ 是菱形,

∴菱形 $ABCD$ 的周长为 $4\sqrt{5}$.

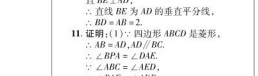
9. $(10\sqrt{3}-10)$ **点拨**:如图,连接 BD,AC,在菱形 $ABCD$ 中,

∵$\angle ABC=120°$,$AB=BC=AD=CD=10$ cm,

$\therefore \angle BAD=\angle BCD=60°$.

∴△ABD,△BCD 都是等边三角形.

①若以边 BC 为底,则 BC 的垂直平分线上(在菱形的边上及其内部)的点满足题意,此时就转化为"直线外一点与直线上所有点连接的线段中,垂线段最短",即当点 P 与点 D 重合时,PA 最小,最小值为 10 cm;



(第 9 题)

②若以边 PB 为底,$\angle PCB$ 为顶角,以点 C 为圆心,BC 长为半径作圆,与 AC 相交于一点,则弧 BD(除点 B 外)上的所有点都满足△PBC 是等腰三角形,当点 P 为弧 BD 与 AC 的交点时,AP 最小,最小值为 $(10\sqrt{3}-10)$ cm;

③若以边 PC 为底,$\angle PBC$ 为顶角,以点 B 为圆心,BC 长为半径作圆,则弧 AC 上的点 P 满足△PBC 为等腰三角形,此时 $PA=10$ cm.

综上所述,PA 的最小值为 $(10\sqrt{3}-10)$ cm.

10. (1)**证明**:∵四边形 $ABCD$ 是菱形,

$\therefore AB=BC$,$AD\parallel BC$.

∵$BE\perp AD$,$CF\perp AD$,

$\therefore \angle AEB=\angle BFC=90°$.

$\therefore$△$AEB\cong$△BFC(AAS).

$\therefore AE=BF$.

(2)**解**:∵E 是 AD 的中点,

且 $BE\perp AD$,

∴直线 BE 为 AD 的垂直平分线,

$\therefore BD=AB=2$.

11. **证明**:(1)∵四边形 $ABCD$ 是菱形,

$\therefore AB=AD$,$AD\parallel BC$.

∵$\angle BPA=\angle DAE$,

∴$\angle ABC=\angle AED$,

∴$\angle BAF=\angle ADE$.

∵$\angle ABF=\angle BPF$,

$\angle BPA=\angle DAE$,

∴$\angle ABF=\angle DAE$.

∵$AB=DA$,∴△$ABF\cong$△DAE(ASA).

(2)∵△$BAF\cong$△DAE,

∴$BF=AE$,$AF=DE$.

∴$AF=AE+EF=BF+EF$,

∴$DE=BF+EF$.

12. (1)**证明**:∵四边形 $ABCD$ 为菱形,

∴$DC=BC$,$\angle DCE=\angle BCE$.

又∵$CE=CE$,

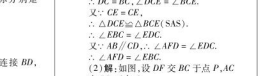
∴△$DCE\cong$△BCE(SAS).

∴$\angle EBC=\angle EDC$.

又∵$AB\parallel CD$,∴$\angle AFD=\angle EDC$.

∴$\angle AFD=\angle EBC$.

(2)**解**:如图,设 DF 交 BC 于点 P,AC 交 BD 于点 O.



(第 12 题)

∵E 为△BCD 的重心,

∴P 为 BC 的中点.

∴$BP=CP$.

又∵$\angle CDP=\angle BFP$,

∴$\angle CPD=\angle BPF$,

∴△$DPC\cong$△BPF(AAS).

∴$DP=FP$.

∴四边形 $BFCD$ 是平行四边形.

∴$FC\parallel BD$.

∴$\angle ACF=\angle AOB$.

∵四边形 $ABCD$ 为菱形,

∴$AC\perp BD$.

∴$\angle AOB=90°$.

∴$\angle ACF=\angle AOB=90°$.

13. (1)**证明**:如图,连接 AC.

∵BD 是菱形 $ABCD$ 的对角线,

∴线段 BD 所在直线是线段 AC 的垂直平分线.

∵E 是线段 BD 上一点,

∴$AE=EC$.



(第 13 题)

(2)**解**:点 F 在线段 BC 的中点.

理由如下:∵四边形 $ABCD$ 是菱形,

∴$AB=BC$.

又∵$\angle ABC=60°$,

∴△ABC 是等边三角形,

∴$\angle BAC=60°$,

∵$AE=EC$,∴$\angle EAC=\angle ACE$.

∵$\angle CEF=60°$,∴$\angle EAC=30°$,

∴$\angle BAE=\angle EAC=30°$.

∵AF 是△ABC 的角平分线,

∴$BF=CF$.

即点 F 在线段 BC 的中点.

第2课时 菱形的判定

1. $OA=OC$(答案不唯一) **2.** C

3. C **4.** C **5.** C **6.** C **7.** C

8. B **点拨**:根据等腰三角形的性质得到 $AE\perp BD$,根据三角形全等得到 $OA=OC$,从而推出四边形 $ABCD$ 是菱形,根据勾股定理得到 $AO=3$,于是得到结论.

9. **错解**:①②③⑤

诊断:②是最容易出错的,两组邻边分别相等的四边形不一定是菱形,如图,$AB=AD$,$BC=CD$,但四边形 $ABCD$ 不是菱形.判定菱形时,要区分是在四边形还是平行四边形的基础上进行判定的,要注意两者的区别与联系.



(第 9 题)

正解:①③⑤

10. **解**:(1)四边形 $ABCD$ 为菱形.理由如下:

由作法得 $AB=AD=CB=CD=5$,

∴四边形 $ABCD$ 为菱形.

(2)∵四边形 $ABCD$ 为菱形,

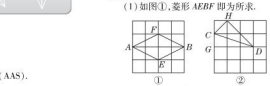
∴$OA=OC=4$,$OB=OD$,$AC\perp BD$.

在 Rt△AOB 中,$OB=\sqrt{5^2-4^2}=3$,

∴$BD=2OB=6$.

11. **解**:答案不唯一.

(1)如图①,菱形 $AEBF$ 即为所求.



(第 11 题)

(2)如图②,四边形 $CGDH$ 即为所求.

12. **解**:(1)$2a$

(2)点 P 运动到 BC 中点时,四边形 $ADPE$ 是菱形.

理由如下:

连接 AP,如图①.

∵$PD\parallel AC$,$PE\parallel AB$,

∴四边形 $ADPE$ 为平行四边形.

∵$AB=AC$,P 为 BC 中点,

∴$\angle PAD=\angle PAE$.

∵$PE\parallel AB$,

∴$\angle PAD=\angle APE$.

∴$\angle PAE=\angle APE$.

∴$EA=EP$.

∴四边形 $ADPE$ 是菱形.

(第 12 题)

(3)点 P 运动到 $\angle BAC$ 的平分线与 BC 的交点时,四边形 $ADPE$ 是菱形.

理由如下:如图②,连接 AP.

∵$PD\parallel AC$,$PE\parallel AB$,

∴四边形 $ADPE$ 是平行四边形.

∵AP 平分 $\angle BAC$,

∴$\angle 1=\angle 2$.

∵$AB\parallel EP$,

∴$\angle 1=\angle 3$,

∴$\angle 2=\angle 3$.

∴$AE=EP$.

∴四边形 $ADPE$ 是菱形.

13. (1)**证明**:∵$AB\parallel CD$,

∴$\angle OAB=\angle DCA$,

∵AC 平分 $\angle BAD$,

∴$\angle OAB=\angle DAC$.

∴$\angle DCA=\angle DAC$.

∴$CD=AD=AB$.

∵$AB\parallel CD$,

∴四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

∵$AD=AB$,

∴四边形 $ABCD$ 是菱形.

(2)**解**:∵四边形 $ABCD$ 是菱形,

∴$OA=OC$,$OB=OD$,$BD\perp AC$.

∵$BD=2$,

∴$OB=\frac{1}{2}BD=1$.

在 Rt△AOB 中,$AB=\sqrt{5}$,$OB=1$,

∴$OA=\sqrt{AB^2-OB^2}=2$.

∴$AC=4$.

∵$S_{菱形ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=AB\cdot CE$,

∴$\frac{1}{2}\times 4\times 2=\sqrt{5}CE$. ∴$CE=\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

在 Rt△BCE 中,$CE=\frac{4\sqrt{5}}{5}$,$BC=\sqrt{5}$,

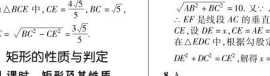
∴$BE=\sqrt{BC^2-CE^2}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

2 矩形的性质与判定

第1课时 矩形及其性质

1. D

2. A **点拨**:如图,连接 AE,由线段垂直平分线的性质得出 $OA=OC$,$AE=CE$,证明△$AFO\cong$△CEO,得出 $AF=CE=5$,从而得出 $AE=CE=5$,$BC=BE+CE=8$,由勾股定理求出 $AB=\sqrt{AE^2-BE^2}=4$,再由勾股定理求出 AC 即可.



(第 2 题)

3. A **点拨**:∵四边形 $ABCD$ 是矩形,

∴$AD=BC$,$\angle ADO=\angle EDO=\angle CEO=90°$.∵$AD=DE$,∴$BC=DE$.

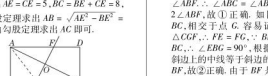
在△BOC 与△EOD 中,∠BOC = ∠EOD,∠C = ∠EDO = 90°,

$BC=DE$,∴△$BOC\cong$△EOD.故 B 选项正确.

由 B,C 知△$AOD\cong$△BOC,故 D 选项正确.由△$AOD\cong$△EOD 故 C 选项正确.

由 B,C 知△$AOD\cong$△BOC,故 D 选项正确.由 A 选项中两个三角形明显不全等.故应选 A.

4. C **点拨**:如图,过点 D 作 $DE\perp BE$,垂足为 G,则 $GD=AB$,



(第 4 题)

∵$\angle A=\angle G$,$\angle AEB=\angle GED$,$AB=GD=3$,

∴△$AEB\cong$△GED.∴$AE=GE$.

设 $AE=GE=x$,则 $ED=4-x$,

在 Rt△DEG 中,$ED^2=GE^2+GD^2$,

即 $x^2+3^2=(4-x)^2$,解得 $x=\frac{7}{8}$.

故选 C.

5. D **点拨**:本题考查了矩形的性质、垂线段最短等,综合性特别强,难度非常大.过点 P 作 $P_1P_2\perp CE$,分别交 DC,DE 于点 P_1,P_2,连接 BP_1,易得点 P_1,P_2 分别为 CD,DE 的中点,点 P 的运动轨迹是线段 P_1P_2,进而求出 $BP_1P_2=90°$,再根据垂线段最短可以得出 BP 垂直 P_1P_2,即当点 P 与点 P_1 重合时,PB 取最小值,根据勾股定理可以求得 $BP_1=\sqrt{BC^2+CP_1^2}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$,所以 PB 的最小值为 $2\sqrt{2}$.

6. C

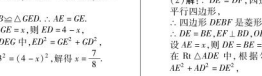
7. B **点拨**:由矩形的性质可知,$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=10$.又∵$\angle AOE=90°$,∴EF 是线段 AC 的垂直平分线,连接 CE,设 $DE=x$,$CE=AE=8-x$,

在△EDC 中,根据勾股定理得出方程 $DE^2+DC^2=CE^2$,解得 $x=\frac{7}{4}$.故选 B.

8. A

9. D **点拨**:∵在□$ABCD$ 中,$CD=2AD$,F 为 DC 的中点.∴$CF=\frac{1}{2}CD=AD=BC$.又∵$AB\parallel CD$,∴$\angle CBF=\angle CFB=\angle ABF$.∵$\angle ABC+\angle CBF=2\angle ABF$,故①正确.如图,连接 EF,BC,相交于点 G.容易证明△$DEF\cong$△CGF,∴$FE=FG$,∵$BE\perp AD$,$AD\parallel BC$,∴$\angle EBG=90°$,根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半得 $EF=BF$,故②正确.由于 BF 是△BEC 的中线,∴$S_{\triangle BEC}=2S_{\triangle BEF}$,又易知 $S_{\triangle DEF}=S_{\triangle CGF}$,∴$S_{\triangle BEC}=S_{四边形BDEC}$,

∵$S_{四边形BDEC}=2S_{\triangle EFB}$,故③正确.设 $\angle DEF=x$,∵$AD\parallel BC$,∴$\angle DEF=\angle G=x$,又∵$FG=FB$,∴$\angle G=\angle FBG=x$,∴$\angle EFB=2x$,$\angle CFB=\angle CBF=x$,∴$\angle CFE=\angle CFB+\angle BFE=x+2x=3x=3\angle DEF$,故④正确.故本题答案为 D.



(第 9 题)

10. $30°$ **点拨**:本题的关键是求出△AOB 是等边三角形,进而推出 $OB=BE$,从而求出 $\angle 2=30°$.本题易错点是对矩形的性质不能灵活应用.

11. (1)**证明**:∵四边形 $ABCD$ 是矩形,

∴$AB\parallel CD$,∴$\angle DFO=\angle BEO$.

∵$\angle DOF=\angle BOE$,$OD=OB$,

∴△$DOF\cong$△BOE(AAS).

∴$DF=BE$.

又∵$DF\parallel BE$,

∴四边形 $DEBF$ 是平行四边形.

(2)**解**:∵$DE=DF$,四边形 $DEBF$ 是平行四边形,

∴四边形 $DEBF$ 是菱形.

∴$DE=BE$,$EF\perp BD$,$OE=OF$.

设 $AE=x$,则 $DE=BE=8-x$.

在 Rt△ADE 中,根据勾股定理,有 $AE^2+AD^2=DE^2$,

∴$x^2+6^2=(8-x)^2$,解得 $x=\frac{7}{4}$.

∴$DE=8-\frac{7}{4}=\frac{25}{4}$.

在 Rt△ABD 中,根据勾股定理,有 $AB^2+AD^2=BD^2$,

∴$BD=\sqrt{6^2+8^2}=10$.

∴$OD=\frac{1}{2}BD=5$.

在 Rt△DOE 中,根据勾股定理,有 $DE^2-OD^2=OE^2$,

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$\therefore OE=\sqrt{\left(\frac{25}{4}\right)^2-5^2}=\frac{15}{4}$.

$\therefore EF=2OE=\frac{15}{2}$.

12. (1)**证明**：$\because AF/\!/DC$，

$\therefore \angle AFE=\angle DBE$.

在△AFE和△DBE中，

$\begin{cases}\angle AFE=\angle DBE,\\ \angle FEA=\angle BED,\\ AE=DE,\end{cases}$

$\therefore \triangle AFE\cong\triangle DBE$(AAS)，

$\therefore AF=BD$.

$\because AD$是BC边上的中线，

$\therefore DC=BD$，$\therefore AF=DC$.

(2)**解**：四边形$ADCF$是菱形，

证明：由(1)得$AF=DC$，

又$\because AF/\!/BC$，

$\therefore$四边形$ADCF$是平行四边形.

$\because AC\perp AB$，AD是边BC上的中线，

$\therefore AD=\frac{1}{2}BC=BC$，

$\therefore$□$ADCF$是菱形.

13. (1)**证明**：$\because$四边形$ABCD$是矩形，

$\therefore AB=CD$，$AB/\!/CD$.

$\therefore \angle ABE=\angle CDF$.

$\because AE\perp BD$于点E，$CF\perp BD$于点F，

$\therefore \angle AEB=\angle CFD=90°$.

在△ABE和△CDF中，

$\begin{cases}\angle ABE=\angle CDF,\\ \angle AEB=\angle CFD,\\ AB=CD,\end{cases}$

$\therefore \triangle ABE\cong\triangle CDF$(AAS).

$\therefore AE=CF$.

(2)**解**：△ABE，△CDF，△BCE，△ADF.

14. (1)**证明**：$\because$四边形$ABCD$是矩形，

$\therefore \angle B=\angle D=90°$，$AB=CD$，$AD=BC$，$AD/\!/BC$.

在Rt△ABE和Rt△CDF中，

$\begin{cases}AE=CF,\\ AB=CD,\end{cases}$

$\therefore$Rt△$ABE\cong$Rt△CDF(HL).

(2)**解**：当$AC\perp EF$时，四边形$AECF$是菱形. 理由如下：

$\because$△$ABE\cong\triangle CDF$，$\therefore BE=DF$.

$\because BC=AD$，$\therefore CE=AF$.

$\because CE/\!/AF$，

$\therefore$四边形$AECF$是平行四边形.

又$\because AC\perp EF$，

$\therefore$四边形$AECF$是菱形.

第2课时　矩形的判定

1. D　**2.** D

3. A　**点拨**：$\because$四边形$ABCD$是平行四边形，$\therefore OA=OC$，$OB=OD$，$\because$对角线BD上的两点M，N满足$BM=DN$，$\therefore OB-BM=OD-DN$，即$OM=ON$，$\therefore$四边形$AMCN$是平行四边形，$\because OM=\frac{1}{2}AC$，

$\therefore MN=AC$，$\therefore$四边形$AMCN$是矩形. 故选A.

4. A　**5.** B　**6.** C　**7.** C　**8.** B

9. $\frac{12}{5}$　**点拨**：连接AD. $\because \angle BAC=90°$，$BA=3$，$AC=4$，

$\therefore BC=\sqrt{BA^2+AC^2}=5$.

$\because DM\perp AB$，$DN\perp AC$，

$\therefore \angle DMA=\angle DNA=\angle BAC=90°$.

$\therefore$四边形$AMDN$是矩形.

$\therefore MN=AD$.

当$AD\perp BC$时，AD的值最小.

此时，△ABC的面积$=\frac{1}{2}AB\cdot AC=\frac{1}{2}BC\cdot AD$，

$\therefore AD=\frac{AB\cdot AC}{BC}=\frac{12}{5}$.

$\therefore MN$的最小值为$\frac{12}{5}$.

10. C　**点拨**：此题易因对矩形的判定方法理解错误而出错. 在一组对边平行的前提下，再找该组对边相等或另一组对边平行即可判定这个四边形为平行四边形，再结合对角线相等即可判定这个四边形是矩形.

11. (1)**证明**：$\because AO=OC$，$BO=OD$，

$\therefore$四边形$ABCD$是平行四边形.

$\because \angle AOB=\angle DAO+\angle ADO=2\angle OAD$，

$\angle DAO=\angle ADO$，

$\therefore AO=DO$，$\therefore AC=BD$.

$\therefore$四边形$ABCD$是矩形.

(2)**解**：$\because$四边形$ABCD$是矩形，

$\therefore AB/\!/CD$，$\angle BAO=\angle ABO$.

$\therefore \angle ADO=\angle CDO$.

$\because \angle AOB:\angle ODC=4:3$，

$\therefore \angle BAO:\angle AOB:\angle ABO=3:4:3$.

$\therefore \angle ABO=\frac{3}{3+4+3}\times 180°=54°$，

$\therefore \angle BAD=90°$，

$\therefore \angle ADO=90°-54°=36°$.

12. (1)**证明**：在△DCA和△EAC中，

$\begin{cases}DC=EA,\\ AD=CE,\\ AC=CA,\end{cases}$

$\therefore$△$DCA\cong\triangle EAC$(SSS).

(2)**解**：$AD=BC$

证明：$\because AB=DC$，$AD=BC$，

$\therefore$四边形$ABCD$是平行四边形.

$\because CE\perp AC$，$\therefore E=90°$.

由(1)得△$DCA\cong\triangle EAC$，

$\therefore \angle D=\angle E=90°$.

$\therefore$四边形$ABCD$为矩形.

点拨：第(2)题答案不唯一.

13. **证明**：(1)$\because CF/\!/BD$，

$\therefore \angle ODE=\angle FCE$.

$\because E$是CD的中点，$\therefore DE=CE$.

在△ODE和△FCE中，

$\begin{cases}\angle ODE=\angle FCE,\\ DE=CE,\\ \angle DEO=\angle CEF,\end{cases}$

$\therefore$△$ODE\cong\triangle FCE$(ASA).

(2)$\because$△$ODE\cong\triangle FCE$，

$\therefore OD=FC$.

$\because CF/\!/BD$，

$\therefore$四边形$OCFD$是平行四边形.

$\because$四边形$ABCD$是菱形，

$\therefore AC\perp BD$.

$\therefore \angle COD=90°$.

$\therefore$四边形$OCFD$是矩形.

14. **解**：(1)$\because EF$交$\angle ACB$，外角$\angle ACD$的平分线于点E，F，

$\therefore \angle OCE=\angle BCE$，$\angle OCF=\angle DCF$.

$\because EF/\!/BC$，

$\therefore \angle OEC=\angle BCE$，$\angle OFC=\angle DCF$.

$\therefore \angle OEC=\angle OCE$，$\angle OFC=\angle OCF$.

$\therefore OE=OC$，$OF=OC$.

$\therefore OE=OF=\frac{1}{2}EF$.

$\because \angle OCE+\angle BCE+\angle OCF+\angle DCF=180°$，

$\therefore \angle ECF=90°$.

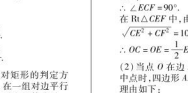
在Rt△CEF中，由勾股定理得$EF=\sqrt{CE^2+CF^2}=10$，

$\therefore OC=OE=\frac{1}{2}EF=5$.

(2)当点O在边AC上运动到AC的中点时，四边形$AECF$是矩形.

理由如下：

如图所示.



(第14题)

当O为AC的中点时，$AO=CO$，

$\because EO=FO$，

$\therefore$四边形$AECF$是平行四边形.

$\because \angle ECF=90°$，

$\therefore$平行四边形$AECF$是矩形.

3　正方形的性质与判定

第1课时　正方形及其性质

1. $AC=BD$　**点拨**：判定一个菱形是正方形，只需一个角是90°或对角线相等即可. 答案不唯一.

2. A　**3.** 12

4. B　**点拨**：根据折叠的性质可得$DH=EH$. 在Rt△CEH中，设$CH=x$，则$EH=DH=9-x$，易得$EC=3$，可以根据勾股定理列出方程，从而得出CH的长.

5. C

6. C　**点拨**：根据正方形的性质，利用SAS即可证明△$ABE\cong\triangle BCH$，再根据全等三角形的性质可得$\angle BFC=\angle AEB$，又易得$\angle DAE=\angle AEB$，$\angle BFC=\angle ABF$，从而求解.

7. C

8. D　**点拨**：本题考查了全等三角形的判定、正方形的性质、等腰三角形的性质、勾股定理. 在正方形$ABCD$中，$AC\perp BD$，$OA=OB=OC=OD$，由折叠可知$DE=DE$，$DF=DC=DF$，$\therefore \angle ODM=\angle OCE$，$\therefore$△$ODM\cong\triangle OCE$，$\therefore OE=OM$，由$DC=\sqrt{2}$，得到$OD=1$，$\therefore OM=OE=DE-DO=\sqrt{2}-1$.

9. $\sqrt{17}$　**点拨**：在AD上取一点M，使得$AM=2$，易知点F，M关于直线AC对称. 连接EM，交AC于点P'，连接$P'F$，易得$P'F+P'E$的值为$PF+PE$的最小值，即EM长为$PF+PE$的最小值. 过点M作$MN\perp BC$于N，由题意可知$EN=BN-BE=AM-BE=2-1=1$，$MN=4$，所以$EM=\sqrt{EN^2+MN^2}=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$.

此类问题容易出错的地方是不能将两条线段的和转化为一条线段.

10. (1)**证明**：$\because$四边形$ABCD$是正方形，

$\therefore AB=AD$，$\angle ABC=\angle ADC=\angle ADF=90°$.

在△ABE和△ADF中，

$\begin{cases}AB=AD,\\ \angle ABE=\angle ADF,\\ BE=DF,\end{cases}$

$\therefore$△$ABE\cong\triangle ADF$(SAS).

(2)**解**：$\because$△$ABE\cong\triangle ADF$，

$\therefore AE=AF$，$\angle BAE=\angle DAF$.

$\because \angle BAE+\angle EAD=90°$，

$\therefore \angle DAF+\angle EAD=90°$，

即$\angle EAF=90°$，

$\therefore EF=\sqrt{AE^2+AF^2}=5\sqrt{2}$.

11. **证明**：(1)$\because$四边形$ABCD$是正方形，

$\therefore \angle ADG=\angle C=90°$，$AD=DC$.

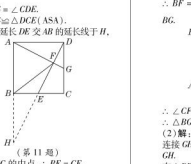
又$\because AG\perp DE$，

$\therefore \angle DAG+\angle ADF=90°=\angle CDE+\angle ADF$.

$\therefore \angle DAG=\angle CDE$.

$\therefore$△$ADG\cong\triangle DCE$(ASA).

(2)如图，延长DE交AB的延长线于H，



(第11题)

$\because E$是BC的中点，$\therefore BE=CE$.

又$\because \angle C=\angle HBE=90°$，$\angle DEC=\angle HEB$，

$\therefore$△$DCE\cong\triangle HBE$(ASA).

$\therefore BH=DC=AB$，

即B是AH的中点.

又$\because AF/\!/HD=$，

$\therefore BF=\frac{1}{2}AH=AB$. 即$AB=FB$.

12. **证明**：(1)$\because$四边形$ABCD$是正方形，

$\therefore AB=BC$，$\angle ABC=\angle BCD=90°$，

$\therefore \angle ABE=\angle BCF=90°$.

在△ABE和△BCF中，

$\begin{cases}AB=BC,\\ \angle ABE=\angle BCF,\\ BE=CF,\end{cases}$

$\therefore$△$ABE\cong\triangle BCF$(SAS)，

$\therefore AE=BF$，$\angle BAE=\angle CBF$.

$\because EG/\!/BF$，

$\therefore \angle CBF=\angle CEG$.

$\therefore \angle BAE=\angle BEA=90°$，

$\therefore \angle CEG+\angle BEA=90°$，

$\therefore AE\perp EG$，$\therefore AE\perp BF$.

(2)延长AB至点P，使$BP=BE$，连接EP，如图所示.

则$AP=CE$，$\angle EBP=90°$，

$\therefore \angle P=45°$.

$\because CG$为正方形$ABCD$外角的平分线，

$\therefore \angle ECG=45°$，

$\therefore \angle P=\angle ECG$.

由(1)知$\angle BAE=\angle CEG$，

在△APE和△ECG中，

$\begin{cases}\angle P=\angle ECG,\\ AP=CE,\\ \angle PAE=\angle CEG,\end{cases}$

$\therefore$△$APE\cong\triangle ECG$(ASA)，

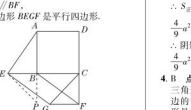
$\therefore AE=EG$.

$\because AE=BF$，

$\therefore EG=BF$，

$\therefore EG/\!/BF$，

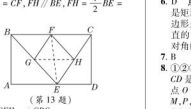
$\therefore$四边形$BEGF$是平行四边形.



(第12题)

13. (1)**证明**：如图，连接EF. $\because$点F，G，H分别是BC，BE，CE的中点，

$\therefore BF=CF$，$FH/\!/BE$，$FH=\frac{1}{2}BE=BG$.



(第13题)

$\therefore \angle CFH=\angle CBG$.

$\therefore$△$BGF\cong\triangle FHC$(SAS).

(2)**解**：当四边形$EGFH$是正方形时，连接GH，如图，可得$EF\perp GH$且$EF=GH$.

在△BEC中，点G，H分别是BE，CE的中点，

$\therefore GH=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}a$，

且$GH/\!/BC$，

$\therefore EF\perp BC$，

$\therefore AD/\!/BC$，$AB\perp BC$，

$\therefore AB+EF=GH+\frac{1}{2}a$.

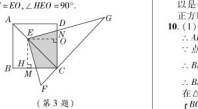
$\therefore$矩形$ABCD$的面积$=AB\cdot AD=\frac{1}{2}a\cdot a+\frac{1}{2}a^2$.

第2课时　正方形的判定

1. B　**2.** B

3. D　**点拨**：如图，过点E作$EO\perp CD$于点O，$EH\perp BC$于点H，显然四边形$EHCO$为正方形，

$\therefore EH=EO$，$\angle HEO=90°$.



(第3题)

$\because \angle GEF=\angle HEO=90°$，

$\therefore \angle OEN=\angle MEH$.

又$\because \angle EHM=\angle EON=90°$，

$\therefore \triangle EHM\cong\triangle EON$.

$\therefore S_{\triangle EHM}=S_{\triangle EON}$.

$\therefore S_{四边形EMCN}=S_{正方形EHCO}$.

$\because AB=BC=a$，$\angle B=90°$，

$\therefore AC=\sqrt{2}a$，$\because EC=2AE$，

$\therefore \frac{EC}{AC}=\frac{2}{3}$，$\therefore EC=\frac{2}{3}\times\sqrt{2}a=\frac{2\sqrt{2}}{3}a$.

$\therefore S_{正方形EHCO}=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}a\times\frac{2\sqrt{2}}{3}a=\frac{4}{9}a^2$.

$\therefore$阴影部分即四边形$EMCN$的面积为$\frac{4}{9}a^2$. 故选D.

4. B　**点拨**：先沿对角线对折，看两侧的三角形是否重合，再沿四边形一组对边的中点连线对折，看上下两个四边形是否重合，如果两次对折后都能重合，那么四边形经中的形状是正方形. 故选B.

5. C

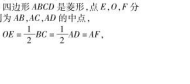
6. D　**点拨**：A. 四个角都相等的四边形是矩形，故错误；B. 四条边都相等的四边形是菱形，故错误；C. 对角线互相垂直的平行四边形是菱形，故错误；D. 对角线相等的菱形是正方形，正确.

7. B

8. ①②③　**点拨**：①如图，$\because$四边形$ABCD$是矩形，连接AC，BD交于点O，过点O作直线MP分别交AB，CD于点M，P，过点O作直线QN分别交AD，BC于点Q，N，则四边形$MNPQ$是平行四边形. 故当$MQ=PN$，$PQ=MN$时，四边形$MNPQ$是平行四边形，故存在无数个四边形$MNPQ$是平行四边形，故①正确. ②如图，当$PM=ON$时，四边形$MNPQ$是矩形，故存在无数个四边形$MNPQ$是矩形，故②正确. ③如图，当$PM\perp QN$时，四边形$MNPQ$是菱形，故存在无数个四边形$MNPQ$是菱形. 故③正确. ④当四边形$MNPQ$是正方形时，$MQ=PQ$，则△$AMQ\cong\triangle DQP$，$\therefore AM=QD$，$AQ=PD$，$\because AQ=BM$，$AB=AD$，$\therefore$四边形$MNPQ$是正方形与任意矩形$ABCD$矛盾，故④错误.



(第8题)



(第9题)

9. C　**点拨**：本题易将特殊四边形的判定相混淆导致出错，选项C的四边形可以是一个如图所示的梯形，不一定是正方形.

10. (1)**证明**：$\because$四边形$ABCD$是菱形，

$\therefore AB=BC=CD=DA$，$\angle B=\angle D$.

$\because E$，F分别为AB，AD的中点，

$\therefore BE=\frac{1}{2}AB$，$DF=\frac{1}{2}AD$.

$\therefore BE=DF$.

在△BCE和△DCF中，

$\begin{cases}BC=DC,\\ \angle B=\angle D,\\ BE=DF,\end{cases}$

$\therefore$△$BCE\cong\triangle DCF$(SAS).

(2)**解**：$AB\perp BC$，理由如下：

$\because$四边形$ABCD$是菱形，点E，O，F分别为AB，AC，AD的中点，

$\therefore OE=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AD=AF$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$OF=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}AB=AE,OE/\!/BC$.

$\therefore OE=OF=AF=AE$.

$\therefore$ 四边形 $AEOF$ 是菱形.

$\because AB\perp BC,OE/\!/BC$,

$\therefore AE\perp OE$.

$\therefore$ 四边形 $AEOF$ 是正方形.

11. **证明**:(1)$\because DE\perp AB,DF\perp AC$,

$\therefore \angle BED=\angle CFD=90°$.

$\because AB=AC,\therefore \angle B=\angle C$.

$\because D$ 是 BC 的中点,$\therefore BD=CD$.

$\therefore \triangle BED\cong\triangle CFD$.

(2)$\because DE\perp AB,DF\perp AC$,

$\therefore \angle AED=\angle AFD=90°$.

又$\because \angle A=90°$,

$\therefore$ 四边形 $DFAE$ 为矩形.

由(1)知,$\triangle BED\cong\triangle CFD$,

$\therefore DE=DF$.

$\therefore$ 四边形 $DFAE$ 是正方形.

12. (1)**证明**:$\because AF/\!/BC$,

$\therefore \angle EAF=\angle EDB$.

$\because E$ 是 AD 的中点,

$\therefore AE=DE$.

又$\because \angle AEF=\angle DEB$,

$\therefore \triangle AEF\cong\triangle DEB$(ASA).

$\therefore AF=DB$.

$\because$ 在 $\triangle ABC$ 中,$\angle BAC=90°$,AD 是中线,

$\therefore AD=BD=DC=\frac{1}{2}BC$.

$\therefore AD=AF$.

(2)**解**:当 $AB=AC$ 时,四边形 $ADCF$ 是正方形.证明如下:

由(1)可知,$AD=AF=DC$,

又$\because AF/\!/BC$,

$\therefore$ 四边形 $ADCF$ 是平行四边形.

$\because AB=AC,AD$ 是中线,

$\therefore AD\perp BC,\therefore \angle ADC=90°$.

又$\because AD=AF$,

$\therefore$ 四边形 $ADCF$ 是正方形.

13. (1)**解**:四边形 $ABCD$ 是垂美四边形.

理由:连接 BD,AC.$\because AD=AD$,

$\therefore A$ 在线段 BD 的垂直平分线上.

$\because CB=CD$,

$\therefore C$ 在线段 BD 的垂直平分线上,

$\therefore$ 直线 AC 是线段 BD 的垂直平分线,

$\therefore AC\perp BD$,即四边形 $ABCD$ 是垂美四边形.

(2)**证明**:$\because AC\perp BD$,

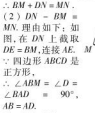
$\therefore \angle AOD=\angle AOB=\angle BOC=\angle COD=90°$.

由勾股定理,得 $AB^2+CD^2=AO^2+BO^2+CO^2+DO^2$,

$AD^2+BC^2=AO^2+DO^2+BO^2+CO^2$,

$\therefore AB^2+CD^2=AD^2+BC^2$.

(3)**解**:如图,连接 CG,BE,



(第 13 题)

CE 与 AB 交于点 M.

$\because \angle CAG=\angle BAE=90°$,

$\therefore \angle CAG+\angle BAC=\angle BAE+\angle BAC$,

即 $\angle GAB=\angle CAE$.

在 $\triangle GAB$ 和 $\triangle CAE$ 中,

$\begin{cases}AG=AC,\\ \angle GAB=\angle CAE,\\ AB=AE,\end{cases}$

$\therefore \triangle GAB\cong\triangle CAE$,

$\therefore \angle ABG=\angle AEC$.

又$\because \angle AEC+\angle AME=90°,\angle AME=\angle BMC$,

$\therefore \angle ABG+\angle BMC=90°$,

$\therefore CE\perp BG$.

由点 $CGEB$ 是垂美四边形.

由(2)得 $CG^2+BE^2=CB^2+GE^2$.

$\because AC=4,AB=5$,

$\therefore BC=3,CG=4\sqrt{2},BE=5\sqrt{2}$,

$\therefore GE^2=CG^2+BE^2-CB^2=(4\sqrt{2})^2+(5\sqrt{2})^2-3^2=73$,

$\therefore GE=\sqrt{73}$.

第 3 课时　正方形的性质与判定的综合应用

1. **证明**:$\because AC,BD$ 是正方形 $ABCD$ 的两条对角线,

$\therefore AC\perp BD,OA=OD=OC=OB$.

$\therefore \angle AOE=\angle DOF=90°$.

$\because DE=CF,\therefore OE=OF$.

$\therefore \triangle AOE\cong\triangle DOF$.

$\therefore \angle OAE=\angle ODF$.$\because \angle DOF=90°$,

$\therefore \angle DFO+\angle FDO=90°$.

$\therefore \angle DFO+\angle FAE=90°$.

$\therefore \angle AMF=90°$,即 $AM\perp DF$.

2. **解**:(1)仍有 $BM+DN=MN$ 成立.证明如下:过点 A 作 $AE\perp AN$,交 CB 的延长线于点 E,则 $\angle EAM=\angle NAM=45°$.易证 $\triangle ABE\cong\triangle ADN$,$\therefore DN=BE,AE=AN$.

又$\because AM=AM$,

$\therefore \triangle EAM\cong\triangle NAM.\therefore ME=MN$.

$\because ME=BE+BM=DN+BM$,

$\therefore BM+DN=MN$.

(2)$DN-BM=MN$.理由如下:如图,在 DN 上截取 $DE=BM$,连接 AE.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore \angle ABM=\angle D=\angle BAD=90°,AB=AD$.

又$\because BM=DE$,

$\therefore \triangle ABM\cong\triangle ADE$.

$\therefore AM=AE,\angle BAM=\angle DAE$.

$\therefore \angle DAB=90°,\therefore \angle MAE=90°$.

$\therefore \angle MAN=45°$,

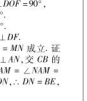
$\therefore \angle EAN=45°=\angle MAN$.

又$\because AM=AE,AN=AN$,

$\therefore \triangle AMN\cong\triangle AEN.\therefore MN=EN$.

$\therefore DN=DE+EN=BM+MN$.

$\therefore DN-BM=MN$.



(第 2 题)

3. (1)**证明**:由题意知 $AB=AD,\angle BAD=90°$,

$\therefore AF\perp AC,\perp EAF=90°$,

$\therefore \angle BAF=\angle EAD$.

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle ABF$ 中,

$\begin{cases}AD=AB,\\ \angle DAE=\angle BAF,\\ AE=AF,\end{cases}$

$\therefore \triangle ADE\cong\triangle ABF$(SAS),

$\therefore BF=DE$.

(2)**解**:当点 E 运动到 AC 的中点时,四边形 $AFBE$ 是正方形.

理由:$\because E$ 为 AC 的中点,$\therefore$ 在正方形 $ABCD$ 中,$BE=AE=\frac{1}{2}AC$.

$\because AF=AE,\therefore BE=AF=AE$.

又易知 $BE\perp AC,\therefore \angle BEC=90°$.

$\therefore \angle FAE=\angle BEC$,

$\therefore BE/\!/AF$.

$\because BE=AF$,

$\therefore$ 四边形 $AFBE$ 为平行四边形.

$\because \angle FAE=90°,AF=AE$,

$\therefore$ 平行四边形 $AFBE$ 是正方形.

4. (1)**证明**:$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore \angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90°,AB=BC=CD=DA$.又$\because$ 在任何时刻,$AP=BQ=CR=DS,\therefore PB=QC=RD=SA$.

$\therefore \triangle ASP\cong\triangle BPQ\cong\triangle CQR\cong\triangle DRS$.

$\therefore PS=QP=RQ=SR,\angle ASP=\angle BPQ$.

$\therefore$ 在任何时刻,四边形 $PQRS$ 是菱形.

又$\because \angle APS+\angle ASP=90°,\therefore \angle APS+\angle BPQ=90°$.$\therefore \angle QPS=180°-(\angle APS+\angle BPQ)=180°-90°=90°$.

$\therefore$ 在任何时刻,四边形 $PQRS$ 总是正方形.

(2)**解**:当 P,Q,R,S 四个小球刚出发时或到达终点时面积最大,此时的面积等于正方形 $ABCD$ 的面积.

(3)**解**:当 P,Q,R,S 四个小球滚动到正方形 $ABCD$ 四边中点时,四边形 $PQRS$ 的面积为正方形 $ABCD$ 面积的一半.

阶段核心归类

1. (1)**证明**:$\because PQ$ 垂直平分 BE,

$\therefore QB=QE,OB=OE$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore AD/\!/BC$,

$\therefore \angle PEO=\angle QBO$.

在 $\triangle BOQ$ 与 $\triangle EOP$ 中,

$\begin{cases}\angle PEO=\angle QBO,\\ OE=OB,\\ \angle POE=\angle QOB,\end{cases}$

$\therefore \triangle BOQ\cong\triangle EOP$(ASA),

$\therefore PE=QB$.

又$\because AD/\!/BC$,

$\therefore$ 四边形 $BPEQ$ 是平行四边形.

又$\because QB=QE$,

$\therefore$ 四边形 $BPEQ$ 是菱形.

(2)**解**:$\because O,F$ 分别为 BE,AB 的中点,

$\therefore AE+BE=2OF+2OB=18$.设 $AE=x$,则 $BE=18-x$.

在 Rt$\triangle ABE$ 中,$6^2+x^2=(18-x)^2$,

解得 $x=8$,则 $BE=18-x=10$,

$\therefore OB=\frac{1}{2}BE=5$.

设 $PE=y$,则 $AP=8-y,BP=PE=y$,

在 Rt$\triangle ABP$ 中,由勾股定理得 $6^2+(8-y)^2=y^2$,

解得 $y=\frac{25}{4}$,

在 Rt$\triangle BOP$ 中,$PO=\sqrt{\left(\frac{25}{4}\right)^2-5^2}=\frac{15}{4}$,

$\therefore PQ=2PO=\frac{15}{2}$.

2. (1)**证明**:$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore \angle D=\angle BCD=90°$,

$\therefore \angle ECQ=90°=\angle D$.

$\because E$ 是 CD 的中点,

$\therefore DE=CE$.

又$\because \angle DEP=\angle CEQ$,

$\therefore \triangle PDE\cong\triangle QCE$.

(2)①**证明**:如图,由(1)可知 $\triangle PDE\cong\triangle QCE$,$\therefore PE=QE=\frac{1}{2}PQ$.



(第 2 题)

$\therefore EF/\!/BC$,

$\because \angle 1=\angle PBC,\angle 2=\angle Q$.

$\therefore PB=PQ$,

$\therefore \angle PBC=\angle Q$.

$\therefore \angle 1=\angle 2$.

$\because PF=PE=\frac{1}{2}PQ=\frac{1}{2}PB=BF$.

$\therefore \angle BAP=90°$,

$\therefore AF=\frac{1}{2}BP=FP$,

$\therefore \angle 3=\angle 4$.

又$\because AD/\!/BC,EF/\!/BC$,

$\therefore AD/\!/EF$,

$\therefore \angle 1=\angle 4$,

$\therefore \angle 2=\angle 3$.

又$\because PF=FP$,

$\therefore \triangle APF\cong\triangle EFP$,

$\therefore AP=EF$.

又$\because AP/\!/EF$,

$\therefore$ 四边形 $AFEP$ 是平行四边形.

②四边形 $AFEP$ 不是菱形.理由如下:

设 $PD=x$,则 $AP=1-x$.

由(1)可知 $PE=\frac{1}{2}PQ=\frac{1}{2}CQ$,

$\therefore CQ=PD=x$,

$\therefore BQ=BC+CQ=1+x$.

$\because E,F$ 分别是 PQ,AB 的中点,

$\therefore EF$ 是 $\triangle PBQ$ 的中位线,

$\therefore EF=\frac{1}{2}BQ=\frac{1+x}{2}$.

由①可知 $AP=EF$,即 $1-x=\frac{1+x}{2}$,解得 $x=\frac{1}{3}$.

$\therefore PD=\frac{1}{3},AP=\frac{2}{3}$.

在 Rt$\triangle PDE$ 中,$DE=\frac{1}{2}$,则 $PE=\sqrt{PD^2+DE^2}=\frac{\sqrt{13}}{6}$,

$\therefore AP\neq PE$.

$\therefore$ 四边形 $AFEP$ 不是菱形.

3. **解**:四边形 $MEBF$ 是正方形.

证明如下:$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore \angle ABC=90°$.

$\because ME\perp AB,MF\perp BC$,

$\therefore \angle MEB=\angle MFB=90°$.

$\therefore$ 四边形 $MEBF$ 是矩形.

又$\because BM$ 是 $\angle ABC$ 的平分线,

$\therefore ME=MF$.

$\therefore$ 矩形 $MEBF$ 是正方形.

4. **解**:(1)$OE=OF$.

证明:$\because MN/\!/BC$,

$\therefore \angle OEC=\angle BCE,\angle OFC=\angle DCF$.

又$\because CE$ 平分 $\angle BCO,CF$ 平分 $\angle DCO$,

$\therefore \angle OCE=\angle BCE,\angle OCF=\angle DCF$,

$\therefore \angle OCE=\angle OEC,\angle OCF=\angle OFC$,

$\therefore EO=CO,FO=CO$,

$\therefore OE=OF$.

(2)不能为菱形.

理由:连接 BF,交 EC 于点 G.

$\because CE$ 平分 $\angle ACB,CF$ 平分 $\angle ACD$,

$\therefore \angle ECF=\frac{1}{2}\angle ACB+\frac{1}{2}\angle ACD=\frac{1}{2}(\angle ACB+\angle ACD)=90°$.

若四边形 $BCFE$ 是菱形,则 $BF\perp EC$,

在 $\triangle GFC$ 中,不可能存在两个角为 $90°$,

$\therefore$ 四边形 $BCFE$ 不可能为菱形.

(3)当点 O 运动到 AC 的中点时,四边形 $AECF$ 是矩形.

理由:当点 O 运动到 AC 的中点时,$AO=CO$.

又$\because EO=FO$,

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形.

$\because FO=CO$,

$\therefore AO=CO=EO=FO$.

$\because AO+CO=EO+FO$,即 $AC=EF$,

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是矩形.

(4)当 O 运动到 AC 的中点,且 $\triangle ABC$ 是以 $\angle ACB$ 为直角的直角三角形时,四边形 $AECF$ 是正方形.

理由:由(3)知,当点 O 运动到 AC 的中点时,四边形 $AECF$ 是矩形.

已知 $MN/\!/BC$,当 $\angle ACB=90°$ 时,

$\angle AOE=\angle ACB=90°$,

$\therefore AC\perp EF$,

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是正方形.

全章热门考点整合应用

1. **证明**:(1)$\because$ 点 D,E 分别是 AB,BC 的中点,

$\therefore DE/\!/AC$.同理可得 $EF/\!/AB$.

$\therefore$ 四边形 $ADEF$ 是平行四边形.

(2)由(1)知四边形 $ADEF$ 是平行四边形,

$\therefore \angle DAF=\angle DEF$.

在 Rt$\triangle AHB$ 中,$\because D$ 是 AB 的中点,

$\therefore DH=\frac{1}{2}AB=AD$.

$\therefore \angle DAH=\angle DHA$.

同理可得 $HF=\frac{1}{2}AC=AF$,

$\therefore \angle FAH=\angle FHA$.

$\therefore \angle DAH+\angle FAH=\angle DHA+\angle FHA$.

$\therefore \angle DAF=\angle DHF$.

$\therefore \angle DHF=\angle DEF$.

2. (1)**证明**:$\because D,E$ 分别是 AB,AC 的中点,$\therefore DE$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线.

$\therefore DE/\!/BC$.

又$\because EF/\!/AB$,

$\therefore$ 四边形 $DBFE$ 是平行四边形.

(2)**解**:当 $AB=BC$ 时,四边形 $DBFE$ 是菱形.

理由:$\because D$ 是 AB 的中点,

$\therefore BD=\frac{1}{2}AB$.

$\because DE$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线,

$\therefore DE=\frac{1}{2}BC$.

又$\because AB=BC,\therefore BD=DE$.

又$\because$ 四边形 $DBFE$ 是平行四边形,

$\therefore$ 四边形 $DBFE$ 是菱形.

3. (1)**证明**:$\because E$ 是 AC 的中点,

$\therefore EC=\frac{1}{2}AC$.

$\because DB=\frac{1}{2}AC$,

$\therefore DB=EC$,

又$\because DB/\!/EC$.

$\therefore$ 四边形 $DBCE$ 是平行四边形.

$\therefore BC=DE$.

(2)**解**:添加 $AB=BC$,

理由:易知 $DB\perp AE$,

$\therefore$ 四边形 $DBEA$ 是平行四边形.

$\because BC=DE,AB=BC$,

$\therefore AB=DE$.

$\therefore \square DBEA$ 是矩形.

4. (1)**解**:$DE\perp FG$.理由如下:

由题意,得 $\angle A=\angle DBE=\angle GFE$,$\angle ABC=\angle DBE=90°$,

$\therefore \angle BDE+\angle BED=90°$.

$\because \angle GFE+\angle BED=90°$.

$\therefore \angle FHE=90°$,即 $DE\perp FG$.

(2)**证明**:$\because \triangle ABC$ 沿射线 AB 平移至 $\triangle FEG$,

$\therefore CB/\!/GE,CB=GE$.

$\therefore$ 四边形 $CBEG$ 是平行四边形.

$\because DBE=\angle ABC=90°$,

$\therefore$ 四边形 $CBEG$ 是矩形.

又易知 $BC=BE$,

$\therefore$ 四边形 $CBEG$ 是正方形.

5. **证明**:如图,连接 CE,交 AD 于点 O.

$\because AC=AE$,

$\therefore \triangle ACE$ 为等腰三角形.

$\because AO$ 平分 $\angle CAE$,

$\therefore AO\perp CE$,且 $OC=OE$.

$\therefore EF/\!/CD$,

$\therefore \angle 2=\angle 1$.

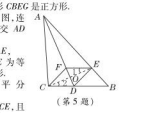
又$\because \angle DOC=\angle FOE=90°$,

$\therefore \triangle DOC\cong\triangle FOE$(ASA).

$\therefore OD=OF$.

即 CE 与 DF 互相垂直且平分,

$\therefore$ 四边形 $CDEF$ 是菱形.



(第 5 题)

6. **证明**:(1)$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore \angle B=\angle D,AB=CD,AD/\!/BC$.

$\because AE\perp BC,CF\perp AD$,

$\therefore \angle AEB=\angle AEC=\angle CFD=\angle AFC=90°$.

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CDF$ 中,

$\begin{cases}\angle B=\angle D,\\ \angle AEB=\angle CFD,\\ AB=CD,\end{cases}$

$\therefore \triangle ABE\cong\triangle CDF$(AAS).

(2)$\because AD/\!/BC$,

$\therefore \angle EAF=\angle AEB=90°$.

$\therefore \angle EAF=\angle AEC=\angle AFC=90°$.

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是矩形.

7. **证明**:$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore CD=CB$，$\angle DCF=\angle BCF=45°$，$\angle CBE=90°$.

又 $\because CF=CF$，$\therefore \triangle DCF\cong\triangle BCF$.

$\therefore \angle CDF=\angle CBF$.

$\because H$ 为 GE 的中点，

$\therefore HB=HG=\frac{1}{2}GE$.

$\because \angle HGB=\angle HBG$，

$\because \angle CDG+\angle CGD=90°$，$\angle CGD=\angle HGB=\angle HBG$，

$\therefore \angle FBG+\angle HBG=90°$.

即 $\angle FBH=90°$，$\therefore FB\perp BH$.

8. 解：$\because$ 在矩形 $ABCD$ 中，$AB=10$，$BC=5$，$\therefore CD=AB=10$，$AD=BC=5$.

又 $\because$ 将矩形 $ABCD$ 沿 EF 折叠，使点 A，D 分别落在矩形 $ABCD$ 外部的点 A_1，D_1 处，$\therefore$ 根据轴对称的性质可得 $A_1E=AE$，$A_1D_1=AD$，$D_1F=DF$.

设线段 D_1F 与线段 AB 交于点 M，则阴影部分的周长为 $(A_1E+EM+MD_1+A_1D_1)+(MB+MF+FC+CB)$

$=AE+EM+MD_1+AD+MB+MF+FC+CB$

$=(AE+EM+MB)+(MD_1+MF+FC)+AD+CB$

$=AB+(FD_1+FC)+10$

$=AB+(FD+FC)+10$

$=AB+CD+10=10+10=30$.

9. 解：两个正方形重叠部分的面积保持不变，始终是 $\frac{1}{4}$.

理由如下：

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore OB=OC$，$\angle OBE=\angle OCF=45°$，$\angle BOC=90°$.

$\because$ 四边形 $A'B'C'O$ 是正方形，

$\therefore \angle EOF=90°$，$\therefore \angle EOF=\angle BOC$.

$\therefore \angle EOF-\angle BOF=\angle BOC-\angle BOF$，即 $\angle BOE=\angle COF$.

$\therefore \triangle BOE\cong\triangle COF$. $\therefore S_{\triangle BOE}=S_{\triangle COF}$.

$\therefore$ 两个正方形重叠部分的面积等于 $S_{\triangle BOC}$.

$\because S_{\text{正方形}ABCD}=1\times1=1$，

$\therefore S_{\triangle BOC}=\frac{1}{4}S_{\text{正方形}ABCD}=\frac{1}{4}$.

$\therefore$ 两个正方形重叠部分的面积保持不变，始终是 $\frac{1}{4}$.

10. 解：(1) 在菱形 $ABCD$ 中，$AG=CG$，$AC\perp BD$，$BG=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}\times16=8$，

由勾股定理得 $AG=\sqrt{AB^2-BG^2}=\sqrt{10^2-8^2}=6$，

$\therefore AC=2AG=2\times6=12$.

$\because$ 菱形 $ABCD$ 的面积 $=\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}\times12\times16=96$.

(2) 不发生变化. 理由如下：如图①，连接 AO，则 $S_{\triangle AHO}=S_{\triangle ABO}+S_{\triangle AHO}$，

$\therefore \frac{1}{2}BD\cdot AG=\frac{1}{2}AB\cdot OE+\frac{1}{2}AD\cdot OF$，即 $\frac{1}{2}\times16\times6=\frac{1}{2}\times10\cdot OE+\frac{1}{2}\times10\cdot OF$.

$\therefore OE+OF=9.6$，是定值，不变.

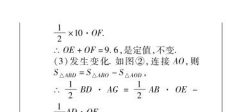
(3) 发生变化. 如图②，连接 AO，则 $S_{\triangle AHO}=S_{\triangle ABO}-S_{\triangle AHO}$，

$\therefore \frac{1}{2}BD\cdot AG=\frac{1}{2}AB\cdot OE-\frac{1}{2}AD\cdot OF$.

即 $\frac{1}{2}\times16\times6=\frac{1}{2}\times10\cdot OE-\frac{1}{2}\times10\cdot OF$.

$\therefore OE-OF=9.6$，是定值，不变.

$\because OE+OF$ 的值发生变化，OE，OF 之间的数量关系为 $OE-OF=9.6$.



(第 10 题)

11. (1) 证明：如图，连接 AO 并延长交 BC 于 H，

$\because AB=AC$，

$OB=OC$，

$\therefore AH$ 垂直平分 BC.

$\because D$，E，F，G 分别是 AB，OB，OC，AC 的中点，

$\therefore DG\parallel EF\parallel BC$，$DE\parallel HF\parallel GF$.

$\therefore$ 四边形 $DEFG$ 是平行四边形.

$\because EF\parallel BC$，

$AH\perp BC$，

$\therefore AH\perp EF$.

又 $\because DE\parallel AH$，

$\therefore EF\perp DE$.

$\therefore$ 四边形 $DEFG$ 是矩形.

(2) 解：$\because D$，E，F 分别是 AB，OB，OC 的中点，

$\therefore AO=2DE=4$，$BC=2EF=6$.

$\because \triangle BOC$ 是等腰直角三角形，

$\therefore OH=\frac{1}{2}BC=3$.

$\therefore AH=OA+OH=4+3=7$.

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times6\times7=21$.

(第 11 题)

12. 证明：如图，连接 PC.

$\because PE\perp BC$，$PF\perp CD$，$\angle CEP=\angle CFP=90°$，

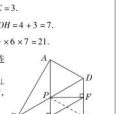
$\therefore$ 四边形 $PECF$ 是矩形.

$\therefore PC=EF$.

在 $\triangle ABP$ 和 $\triangle CBP$ 中，$\begin{cases}AB=CB,\\ \angle ABP=\angle CBP,\\ BP=BP,\end{cases}$

$\therefore \triangle ABP\cong\triangle CBP$(SAS).

$\therefore PA=PC$. $\therefore PA=EF$.



(第 12 题)

13. 解：(1) (2,1.5)

(2) 设点 D 的坐标为 (x,y).

以点 A，B，C，D 为顶点构成的四边形是平行四边形，

① 当 AB 为对角线时，

$\because A(-1,2)$，$B(3,1)$，$C(1,4)$，

$\therefore \frac{-1+3}{2}=\frac{1+x}{2}$，$\frac{2+1}{2}=\frac{4+y}{2}$.

$\therefore x=1$，$y=-1$.

$\therefore D$ 的坐标为 $(1,-1)$.

② 当 BC 为对角线时，

$\because A(-1,2)$，$B(3,1)$，$C(1,4)$，

$\therefore \frac{3+1}{2}=\frac{-1+x}{2}$，$\frac{1+4}{2}=\frac{2+y}{2}$.

$\therefore x=5$，$y=3$.

$\therefore D$ 的坐标为 $(5,3)$.

③ 当 AC 为对角线时，

$\because A(-1,2)$，$B(3,1)$，$C(1,4)$，

$\therefore \frac{-1+1}{2}=\frac{3+x}{2}$，$\frac{2+4}{2}=\frac{1+y}{2}$.

$\therefore x=-3$，$y=5$.

$\therefore D$ 的坐标为 $(-3,5)$.

综上所述，点 D 的坐标为 $(1,-1)$ 或 $(5,3)$ 或 $(-3,5)$.

第二章　一元二次方程

1　认识一元二次方程

第 1 课时　一元二次方程

1. D

2. C　**点拨：**$\begin{cases}m-3\neq0,\\ m^2-7=2,\end{cases}$ 解得 $m=-3$，

本题易忽略“一元二次方程的系数 $m-3\neq0$”这一条件而错选 A.

3. A

4. B　**点拨：**方程 $2x^2+mx=4x+2$ 整理得 $2x^2+(m-4)x-2=0$. $\because$ 不含 x 的一次项，故 $m-4=0$，$m=4$. 故选 B.

5. B

6. A　**点拨：**年平均增长率为 x，则可列方程为 $50.7(1+x)^2=125.6$.

故选 A.

7. B　**点拨：**月平均增长率是 x，则该企业二月份的营业额为 $1\,000(1+x)$ 万元，三月份的营业额为 $1\,000(1+x)^2$ 万元，依题意，得 $1\,000+1\,000(1+x)+1\,000(1+x)^2=3\,990$. 故选 B.

8. ②　**点拨：**$\because x^2-4x-12=0$ 即 $x(x-4)=12$，$\therefore$ 构图中大正方形的面积是 $(x+x-4)^2$，它又等于四个矩形的面积加上中间小正方形的面积，即 $4\times12+4^2$，据此易得 $x=6$. 故答案为②.

9. 错解：$x\leqslant0$ 或 $x\geqslant4$

诊断：当方程是一元二次方程时，不仅要使未知数最高次数是 2，还要使二次项的系数不为 0. 本题就是忽视了二次项的系数 $k-3\neq0$ 这一条件，而导致错解.

正解：$x\geqslant4$

10. 解：(1) 当 $2k+1=0$，且 $4k\neq0$，即 $k=-\frac{1}{2}$ 时，方程 $(2k+1)x^2+4kx+k-1=0$ 化为 $-2x-\frac{3}{2}=0$，此时为一元一次方程.

(2) 当 $2k+1\neq0$，即 $k\neq-\frac{1}{2}$ 时，此方程为一元二次方程.

$\because$ 方程的一个根是 1，$\therefore a+b+c=0$，$\therefore c=-3$.

$\therefore$ 此一元二次方程为 $2x^2+x-3=0$.

13. 解：由题意知可得 a 的取值范围为 $4<a<8$. 又因为 a 为整数，所以 a 的可能取值为 5，6，7. 当 $a=5$ 时，将其代入方程的左边，得 $5^2-9\times5+14\neq0$，故 5 不是方程的根. 同理可知，6 也不是方程的根，7 是方程的根，即三角形的第三条边的长为 7 cm. 所以三角形的周长是 $2+6+7=15$(cm).

点拨：根据三角形两边之和大于第三边，两边之差小于第三边，可知 $4<a<8$. 又由于 a 是整数，所以 a 的可能取值为 5，6，7，再逐个代入方程看哪个是方程的根.

14. 解：(1) $y^2+3y-9=0$

(2) 设所求方程的根为 y，则 $y=\frac{1}{x}(x\neq0)$，于是 $x=\frac{1}{y}(y\neq0)$，

把 $x=\frac{1}{y}$ 代入方程 $ax^2+bx+c=0$，

得 $a\left(\frac{1}{y}\right)^2+b\cdot\frac{1}{y}+c=0$，去分母，得 $a+by+cy^2=0$.

若 $c=0$，有 $ax^2+bx=0$，于是方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一个根为 0，不符合题意，

所以 $c\neq0$.

故所求方程为 $cy^2+by+a=0$ ($c\neq0$).

(3) 设所求方程的根为 y，则 $y=x^2$，所以 $x=\pm\sqrt{y}$.

① 当 $x=\sqrt{y}$ 时，把 $x=\sqrt{y}$ 代入已知方程，得 $(\sqrt{y})^2-m\sqrt{y}+n=0$，即 $y-m\sqrt{y}+n=0$；

② 当 $x=-\sqrt{y}$ 时，把 $x=-\sqrt{y}$ 代入已知方程，得 $(-\sqrt{y})^2+m\sqrt{y}+n=0$，即 $y+m\sqrt{y}+n=0$.

15. 解：(1) 由题意可知网球场的长和宽分别为 $(80-2x)$ m，$(60-2x)$ m，则可列方程 $(80-2x)(60-2x)=3\,500$，整理得 $x^2-70x+325=0$.

(2) x 的值不可能小于 0，因为人行走道的宽度不可能为负数.

(3) x 的值不可能大于 40，也不可能大于 30，因为当 $x>30$ 时，$60-2x<0$，这是不符合实际的. 当然 x 更不可能大于 40.

(4) 人行走道的宽为 5 m，求解过程如下：

x	…	1	2	3	4	5	6	7	…
$x^2-70x+325$		256	189	124	61	0	−59	−116	

显然，当 $x=5$ 时，$x^2-70x+325=0$，故人行走道的宽为 5 m.

第 3 课时　一元二次方程的定义及相关概念的五种常见应用

1. 解：(1) 存在. 根据一元二次方程的定义可得 $\begin{cases}m^2+1=2,\\ m+1\neq0,\end{cases}$ 解得 $m=1$，此时方程为 $2x^2-x-1=0$.

(2) 存在. 由题可知当 $\begin{cases}m^2+1=1,\\ m+1=m-2\neq0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m+1=0,\\ m-2\neq0\end{cases}$ 时，方程为一元一次方程.

当 $\begin{cases}m^2+1=1,\\ m+1=m-2\neq0\end{cases}$ 时，$m=0$，此时方程为 $-x-1=0$，解得 $x=-1$；

当 $\begin{cases}m+1=0,\\ m-2\neq0\end{cases}$ 时，$m=-1$，此时方程为 $-3x-1=0$，解得 $x=-\frac{1}{3}$.

2. 解：$(2ax+1)(x-a)=a-2$ 化为一般形式，得 $2ax^2+(1-2a^2)x+2-2a=0$.

所以该一元二次方程的二次项系数为 $2a$，依题意，得 $2a=-4$，

解得 $a=-2$.

3. 解：由题意可得 $(x+1)\times2x-(x+2)(x-2)=1$，它是一元二次方程，写成一般形式为 $x^2+2x+3=0$.

4. 解：由题意得 $m^2+mn+2n=0$，

$\because n\neq0$，$\therefore n+m+2=0$，

$\therefore m+n=-2$.

5. 解：$\because$ 实数 a 是一元二次方程 $x^2-2\,022x+1=0$ 的一个根，

$\therefore a^2-2\,022a+1=0$.

$\therefore a^2+1=2\,022a$，$a^2-2\,022a=-1$.

$\therefore a^2-2\,021a=\frac{a^2+1}{2\,022}$

$=a^2-2\,021a-\frac{2\,022a}{2\,022}$

$=a^2-2\,021a-a$

$=a^2-2\,022a=-1$.

6. 解：(1) $\because \angle ACB=90°$，$\angle A=28°$，

$\therefore \angle B=90°-28°=62°$.

$\because BD=BC$，

$\therefore \angle BCD=\angle BDC=\frac{180°-\angle B}{2}=59°$，

$\therefore \angle ACD=\angle ACB-\angle BCD=90°-59°=31°$.

(2) ① $\because AD=EC$，$AD=AE$，$AC=4$，

$\therefore AD=EC=AE=2$，

$\because BC=BD=a$，

$\therefore AB=2+a$，

$\because AB^2=BC^2+AC^2$，

即 $(a+2)^2=a^2+4^2$，$\therefore a=3$.

② 线段 AD 的长是方程 $x^2+2ax-16=0$ 的一个根. $\because BC=a$，$AC=4$，

$\therefore AB=\sqrt{16+a^2}$，

$\therefore AD=\sqrt{16+a^2}-a$.

$\because$ 当 $x=AD=\sqrt{16+a^2}-a$ 时，$x^2+2ax-16=(\sqrt{16+a^2}-a)^2+2a(\sqrt{16+a^2}-a)-16$

$=16+a^2-2a\sqrt{16+a^2}+a^2+2a\sqrt{16+a^2}-2a^2-16=0$，

$\therefore AD$ 的长是该方程的一个根.

2　用配方法求解一元二次方程

第 1 课时　直接开平方法

1. $x_1=2$，$x_2=-2$　**2.** C

3. C　**点拨：**方程 $x^2+4=0$，移项得 $x^2=$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

-4，由平方的非负性可得此方程无实数解. 故选 C.

4. B

5. 5(答案不唯一，只要 $c\geqslant 0$ 即可)

6. D

7. A　**点拨**：本题解得 $x=4$ 或 $x=2$，∵△ABC是等腰三角形，∴△ABC的三边分别是 2, 2, 4 或 4, 4, 2. 根据三角形的三边关系，2, 2, 4 不符合题意，故△ABC的周长为 10.

8. 解：把 $x=3$ 代入原方程，得 $k^2=2$，

∴ $k=\pm\sqrt{2}$，

则原方程为 $(x-1)^2=4$，

∴ $x-1=\pm 2$，∴ $x_1=3, x_2=-1$，

故另一个根为 -1.

9. 解：∵ $m+1$ 与 $2m-4$ 是关于 x 的一元二次方程 $ax^2=b(ab>0)$ 的两个根，

∴ $(m+1)+(2m-4)=0$，

∴ $m=1$，即方程的两根分别为 2 和 -2.

把 $x=2$ 或 $x=-2$ 代入 $ax^2=b$ 中，

得 $4a=b$，∴ $\dfrac{b}{a}=4$.

第 2 课时　配方法

1. -1 或 7

2. D　**3.** B　**4.** A　**5.** A

6. B　**点拨**：由题意得 $2a^2+2b^2+2c^2=2ab+2ac+2b$，配方整理得 $(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2=0$，

∴ $a=b=c$，∴△ABC是等边三角形

7. A　**8.** D　**9.** A　**10.** A　**11.** D

12. B　**点拨**：由题意可知 $AC^2+BC^2=AB^2$，即 $(\dfrac{a}{2})^2+b^2=(\sqrt{\dfrac{a}{2}}+AD)^2$，整理得 $AD^2+aAD=b^2$，∴方程的一个正根是 AD 的长.

13. 1 或 -3　**点拨**：依题意得 $(2+x)(x+3)$，整理，得 $x^2+2x=3$，

∴ $(x+1)^2=4$，∴ $x+1=\pm 2$，

∴ $x=1$ 或 $x=-3$.

14. 解：∵ $x^2+6x=-7$，

∴ $x^2+6x+9=-7+9$，即 $(x+3)^2=2$，

则 $x+3=\pm\sqrt{2}$，

∴ $x=-3\pm\sqrt{2}$，

即 $x_1=-3+\sqrt{2}, x_2=-3-\sqrt{2}$.

点拨：本题易在配方时，忽略等式的性质，把 $x^2+6x=-7$，配方成 $x^2+6x+9=-7$ 而致错.

15. 解：∵ $a^2+b^2=12a+8b-52$，

∴ $a^2-12a+b^2-8b+52=0$.

∴ $(a-6)^2+(b-4)^2=0$.

∴ $a-6=0$ 且 $b-4=0$.

∴ $a=6, b=4$.

又∵ a, b, c 为正整数且是△ABC的三边长，∴是△ABC的最短边长，

∴ $6-4<c\leqslant 4+6$ (是正整数)，

∴ $c=3$ 或 $c=4$.

即 c 的值是 3 或 4.

点拨：根据 $a^2+b^2=12a+8b-52$，可以求得 a, b 的值，由 a, b, c 为正整数且是△ABC的三边长，c 是△ABC的最短边长，即可求得 c 的值.

16. 解：(1) 10

(2) -2

(3) $x^2+(m+2)x+4m-7=\left(x+\dfrac{m+2}{2}\right)^2+4m-7-\dfrac{(m+2)^2}{4}$.

∵ 原代数式有最小值且最小值为 0，

∴ $4m-7-\dfrac{(m+2)^2}{4}=0$，

即 $m^2-12m+32=0$.

配方得 $(m-6)^2=4$，

∵ $m-6=\pm 2$，∴ $m_1=8, m_2=4$.

17. 解：将已知等式两边同时加上 2，

得 $x^2+\dfrac{1}{x^2}+2+2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=2$，

即 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=2$.

设 $x+\dfrac{1}{x}=y$，则 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=2$ 可化为 $y^2+2y=2$.

配方，得 $y^2+2y+1=2+1$，

∴ $(y+1)^2=3$.

直接开平方，得 $y+1=\pm\sqrt{3}$.

解得 $y_1=\sqrt{3}-1, y_2=-\sqrt{3}-1$.

即 $x+\dfrac{1}{x}=\sqrt{3}-1$ 或 $x+\dfrac{1}{x}=-\sqrt{3}-1$.

经检验，不存在实数 x 使 $x+\dfrac{1}{x}=\sqrt{3}-1$，故舍去.

∴ $x+\dfrac{1}{x}=-\sqrt{3}-1$.

点拨：本题在解答过程中应用了**换元法**和**整体思想**，即用 y 来代替 $x+\dfrac{1}{x}$，将已知等式转化成一元二次方程求解.

18. 解：(1) $5;2\sqrt{2}-1;\sqrt{2}-8$

(2) 原方程可变形，得 $[(x-1)-4][(x-1)+4]=6$，∴ $(x-1)^2-4^2=6$，

∴ $(x-1)^2=6+4^2$.

直接开平方并整理，得 $x_1=1+\sqrt{22}$，$x_2=1-\sqrt{22}$.

3　用公式法求解一元二次方程

第 1 课时　根的判别式

1. $2;-7;-4;81$

2. C　**3.** C　**4.** C　**5.** A　**6.** C

7. A　**点拨**：$\Delta=(k+3)^2-4k=k^2+2k+9=(k+1)^2+8$.

∵ $(k+1)^2\geqslant 0$，

∴ $(k+1)^2+8>0$，即 $\Delta>0$.

∴ 方程有两个不相等的实数根.

8. D　**9.** A

10. A　**点拨**：原方程可变形为 $x^2+(a+1)x=0$.

∵ 该方程有两个相等的实数根，

∴ $\Delta=(a+1)^2-4\times 1\times 0=0$，

解得 $a=-1$.

11. A　**点拨**：∵ 小刚在解关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0\,(a\neq 0)$ 时，只抄对了 $a=1, b=4$，解出其中一个根是 $x=-1$，

∴ $(-1)^2-4+c=0$，

解得 $c=3$，

故原方程中 $c=5$，

则 $b^2-4ac=16-4\times 1\times 5=-4<0$，

故原方程不存在实数根.

12. 错解：A　正解：D

点拨：本题易忽略一元二次方程二次项的系数 $k-1\neq 0$ 这一条件而错选 A.

13. 解：∵ 关于 x 的方程 $x^2-2x+2m-1=0$ 有实数根，

∴ $b^2-4ac=4-4(2m-1)\geqslant 0$，

解得 $m\leqslant 1$.

∵ m 为正整数，∴ $m=1$，

∴ $x^2-2x+1=0$，

则 $(x-1)^2=0$，

解得 $x_1=x_2=1$.

14. 解：(1) 根据题意得 $\Delta=(-3)^2-4k\geqslant 0$，解得 $k\leqslant\dfrac{9}{4}$.

(2) ∵ k 是符合条件的最大整数，

∴ $k=2$.

方程 $x^2-3x+k=0$ 即为 $x^2-3x+2=0$，解得 $x_1=1, x_2=2$.

∵ 一元二次方程 $(m-1)x^2+x+m-3=0$ 与方程 $x^2-3x+k=0$ 有一个相同的根，

∴ 当 $x=1$ 时，$m-1+1+m-3=0$，

解得 $m=\dfrac{3}{2}$；

当 $x=2$ 时，$4(m-1)+2+m-3=0$，

解得 $m=1$.

∵ $m-1\neq 0$，

∴ m 的值为 $\dfrac{3}{2}$.

15. (1) **证明**：因为 $\Delta=[-(2k+1)]^2-4\times 1\times 4\left(k-\dfrac{1}{4}\right)=4k^2-12k+9=(2k-3)^2\geqslant 0$，所以无论 k 取何值，这个方程总有实数根.

(2) 解：若 a 为等腰三角形 ABC 的底边长，则 b, c 为等腰三角形 ABC 的两腰长，由题意知方程有两个相等的实数根，所以 $\Delta=0$，即 $k=\dfrac{3}{2}$. 所以方程为 $x^2-4x+4=0$，解得 $x_1=x_2=2$.

即 $b=c=2$，不符合三角形三边关系，故舍去.

若 a 为等腰三角形 ABC 的一腰长，由题意知 4 是方程的一个根，所以 $4^2-(2k+1)\times 4+4\left(k-\dfrac{1}{2}\right)=0$，解得 $k=\dfrac{5}{2}$. 所以方程为 $x^2-6x+8=0$，

解得 $x_1=2, x_2=4$，符合题意. 所以△ABC的周长为 $2+4+4=10$.

点拨：本题需讨论 $a=4$ 这一条件是等腰三角形的腰还是底，进而做出判断.

16. 解：(1) $2;6\leqslant 5\times 2\times 5+5=15$；

$2;6\left(-\dfrac{5}{2}\right)\times 2\times\left(-\dfrac{5}{2}\right)+\left(-\dfrac{5}{2}\right)=-15$.

(2) $x\otimes(x\otimes x)=x\otimes(ax+x)=x\otimes[(a+1)x]=(a+1)x^2+(a+1)x=-\dfrac{1}{4}$，

整理，得 $4(a+1)x^2+4(a+1)x+1=0$.

∵ 关于 x 的方程 $x\otimes(a\otimes x)=-\dfrac{1}{4}$ 有两个相等的实数根，

∴ $\begin{cases}a+1\neq 0,\\ \Delta=16(a+1)^2-16(a+1)=0.\end{cases}$

解得 $a=0$.

第 2 课时　公式法

1. B　**2.** A　**3.** D

4. $x_1=\dfrac{-1+\sqrt{13}}{3}, x_2=\dfrac{-1-\sqrt{13}}{3}$

5. D　**点拨**：$(x+1)(x-3)=2x-5$，整理得 $x^2-4x+2=0$，

解得 $x_1=2+\sqrt{2}>3, x_2=2-\sqrt{2}$，故有两个正根，且有一根大于 3.

6. 解：依题意，得 $a^2-2a+1=0$ 且 $b+1=0$ 且 $c+3=0$，

∴ $a=1, b=-1, c=-3$，代入方程可得 $x^2-x-3=0$，∴ $x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$，即 $x_1=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}, x_2=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$.

7. 解：设 x s 时△PDQ 的面积为 35 cm^2，即 $S_{矩形ABCD}-S_{△ADP}-S_{△PCQ}-S_{△DCQ}=12\times 6-\dfrac{1}{2}x\times 12-\dfrac{1}{2}(6-x)\cdot 2x-\dfrac{1}{2}\times 6\times(12-2x)=35$，解得 $x_1=3+2\sqrt{2}, x_2=3-2\sqrt{2}$. 因为当点 P, Q 移动 $(3+2\sqrt{2})$ s 或 $(3-2\sqrt{2})$ s 时，均符合题意，所以 $(3+2\sqrt{2})$ s 或 $(3-2\sqrt{2})$ s 时△PDQ 的面积为 35 cm^2.

4　用因式分解法求解一元二次方程

1. A　**2.** A　**3.** $x_1=2, x_2=1$

4. -3 或 4　**5.** C

6. A　**点拨**：解方程 $x^2-8x+15=0$，得 $x=3$ 或 $x=5$，

若腰长为 3，则三角形的三边长为 3，3，6，显然不能构成三角形；

若腰长为 5，则三角形的三边长为 5，5，6，此时三角形的周长为 16.

故选 A.

7. B　**点拨**：$x^2-8x+15=0$ 的两个根分别为 $x_1=3, x_2=5$. ∵ 一条对角线的长为 8. 故菱形的边长为 5. 根据菱形的性质可得菱形的面积为 24.

8. D　**点拨**：方程右边看做一个整体，移项到左边，提取公因式 $5x-1$ 化为积的形式，然后利用两数相乘积的 0，两因式中至少一个为 0 转化为两个一元一次方程来求解. 故选 D.

9. (1) ① (2) ④⑥ (3) ③⑤ (4) ②

10. 解：移项，得 $2(x-3)-3x(x-3)=0$.

整理，得 $(x-3)(2-3x)=0$.

∴ $x-3=0$ 或 $2-3x=0$.

解得 $x_1=3, x_2=\dfrac{2}{3}$.

点拨：本题容易两边同时除以 $(x-3)$，忽略 $x-3=0$ 的情况而致错.

11. 错解：

诊断：设 $x^2+x+1=y$，则已知等式可化为 $y^2+2y-3=0$，分解因式得 $(y+3)(y-1)=0$，解得 $y_1=-3, y_2=1$.

当 $y=-3$ 时，$x^2+x+1=-3$ 无实数根；当 $y=1$ 时，$x^2+x+1=1$ 有实数根. 本题易因未讨论满足 $x^2+x+1=y$ 的实数 x 是否存在而错选 C.

正解：A

12. 解：(1) $2x^2-4x-30=0$，

∴ $x^2-2x-15=0$，

∴ $(x-5)(x+3)=0$.

∴ $x_1=5, x_2=-3$.

(2) $x^2-(\sqrt{2}+\sqrt{3})x+\sqrt{6}=0$，

∴ $(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{3})=0$，

∴ $x_1=\sqrt{2}, x_2=\sqrt{3}$.

(3) $x^2-8x+4=0$，∴ $x^2-8x+16=12$，

∴ $(x-4)^2=12$，∴ $x-4=\pm 2\sqrt{3}$，∴ $x_1=4+2\sqrt{3}, x_2=4-2\sqrt{3}$.

13. 解：(1) 将 $x=3$ 代入方程 $(a-1)x^2-4x-1+2a=0$，得 $9(a-1)-12+1+2a=0$，解得 $a=2$. 将 $a=2$ 代入原方程，得 $x^2-4x+3=0$，因式分解得 $(x-1)(x-3)=0$，∴ $x_1=1, x_2=3$.

∴ 方程的另一个根是 $x=1$.

(2) ∵ 三角形的三边长都是这个方程的根.

∴ ①当三边长都为 1 时，周长为 3；

②当三边长都为 3 时，周长为 9；

③当两边为 3，一边长为 1 时，周长为 7；

④当两边长为 1，一边长为 3 时，不满足三角形三边关系，不能构成三角形.

故三角形的周长为 3 或 9 或 7.

14. 解：(1) $2;4$

(2) ∵ $x^2-3x-4=0$，

∴ $(x+1)(x-4)=0$，

则 $x+1=0$ 或 $x-4=0$，

∴ $x_1=-1, x_2=4$.

15. 解：(1) 换元

(2) 设 $\dfrac{x+1}{x^2}=y$，

则原方程变形为 $y-\dfrac{2}{y}=1$，

解得 $y_1=-1, y_2=2$.

经检验，$y_1=-1, y_2=2$ 都为方程 $y-\dfrac{2}{y}=1$ 的解.

当 $y=-1$ 时，$\dfrac{x+1}{x^2}=-1$，

∴ $x^2+x+1=0$，

∴ $\Delta=1^2-4=-3<0$，

∴ $\dfrac{x+1}{x^2}=-1$ 无实数解；

当 $y=2$ 时，$\dfrac{x+1}{x^2}=2$，

∴ $2x^2-x-1=0$，

∴ $x_1=-\dfrac{1}{2}, x_2=1$.

经检验，$x_1=-\dfrac{1}{2}, x_2=1$ 是方程 $\dfrac{x+1}{x^2}=2$ 的解.

∴ 原方程的解为 $x_1=-\dfrac{1}{2}, x_2=1$.

点拨：本题运用了**换元法**和**整体思想**，先设 $\dfrac{x+1}{x^2}=y$，原方程可以变为 $y-\dfrac{2}{y}=1$，解方程求出 y 的值，再代入 $\dfrac{x+1}{x^2}=y$ 就可以求出 x 的值.

*5　一元二次方程的根与系数的关系

1. A　**2.** D

3. B　**点拨**：∵ α, β 是方程 $x^2+x-2=0$ 的两个实数根，

∴ $\alpha+\beta=-1, \alpha\beta=-2$.

∴ $\alpha+\beta-\alpha\beta=-1+2=1$.

4. A　**5.** C　**6.** C

7. B　**点拨**：由为 α, β 是方程 $2x^2-5x-1=0$ 的两个实数根，所以 $2\alpha^2-5\alpha-1=0$，所以 $2\alpha^2=5\alpha+1$，则 $2\alpha^2+3\alpha\beta+5\beta$ 可表示为 $5(\alpha+\beta)+3\alpha\beta+1$，再根据根与系数的关系可得到答案.

8. A　**点拨**：∵ 方程 $x^2-2x-4=0$ 的两个实数根为 α, β，

∴ $\alpha+\beta=2, \alpha\beta=-4$.

∴ $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4+8=12$.

故选 A.

9. D　**10.** B

11. A　**点拨**：当 $a=4$ 时，$b<8$，

∵ a, b 是关于 x 的一元二次方程 $x^2-12x+m=2=0$ 的两根，

∴ $4+b=12$，

∴ $b=8$，不符合题意；

当 $b=4$ 时，$a<8$，

∵ a, b 是关于 x 的一元二次方程 $x^2-12x+m=2=0$ 的两根，

∴ $4+a=12$，

∴ $a=8$，不符合题意；

当 $a=b$ 时，

∵ a, b 是关于 x 的一元二次方程 $x^2-12x+m+2=0$ 的两根，

∴ $12=a+b$，∴ $a=b=6$，

∴ $m+2=36$，∴ $m=34$.

12. D　**点拨**：由一元二次方程中根与系数的关系可知，$m+n=2t$，$mn=t^2-2t+4$.

又∵ m, n 是方程的两实数根，∴ $\Delta=4t^2-4(t^2-2t+4)\geqslant 0$，解得 $t\geqslant 2$.

因为 $(m+2)(n+2)=mn+2(m+n)+4$，将 mn 和 $m+n$ 代入代数式得 t^2-2t+8，∵ $t^2-2t+8=(t+1)^2+7$，∵ $t\geqslant 2$，故当 $t=2$ 时，$(m+2)(n+2)$ 取得最小值为 16.

13. D　**点拨**：∵ 关于 x 的一元二次方程 $x^2-(k-1)x-k+2=0$ 的两个实数根为 x_1, x_2，

∴ $x_1+x_2=k-1, x_1x_2=-k+2$.

∵ $(x_1-x_2)(x_1-x_2-2)+2x_1x_2=-3$，

即 $(x_1+x_2)^2-2x_1x_2-4=-3$，

∴ $(k-1)^2+2k-4-4=-3$，

解得 $k=\pm 2$.

∵ 关于 x 的一元二次方程 $x^2-(k-1)x-k+2=0$ 有实数根，

∴ $\Delta=[-(k-1)]^2-4\times 1\times(-k+2)\geqslant 0$，

解得 $k\geqslant 2\sqrt{2}-1$ 或 $k\leqslant -2\sqrt{2}-1$，

∴ $k=2$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

14. 解:(1)∵ 关于 x 的一元二次方程 $x^2-(2k+1)x+k^2+1=0$ 有两个不相等的实数根,∴ $\Delta>0$,

∴ $(2k+1)^2-4(k^2+1)>0$,

解得 $k>\frac{3}{4}$.

(2)∵ 方程的两个根分别为 x_1,x_2,

∴ $x_1+x_2=2k+1=3$,

解得 $k=1$,

∴ 原方程为 $x^2-3x+2=0$,

∴ $x_1=1,x_2=2$.

15. 解:(1)当 $k=0$ 时,原方程为 $-3x+1=0$,解得 $x=\frac{1}{3}$,

∴ $k=0$ 符合题意;

当 $k\neq0$ 时,原方程为一元二次方程,

∵ 该一元二次方程有实数根,

∴ $\Delta=(-3)^2-4\times k\times1\geqslant0$,

解得 $k\leqslant\frac{9}{4}$.

综上所述,k 的取值范围为 $k\leqslant\frac{9}{4}$.

(2)∵ x_1 和 x_2 是方程 $kx^2-3x+1=0$ 的两个根,

∴ $x_1+x_2=\frac{3}{k},x_1x_2=\frac{1}{k}$.

∵ $x_1+x_2+x_1x_2=4$,

∴ $\frac{3}{k}+\frac{1}{k}=4$,解得 $k=1$,

经检验,$k=1$ 是分式方程的解,且符合题意.

∴ k 的值为 1.

16. 解:(1)由题意得,$\Delta\geqslant0$,

∴ $(2m-1)^2-4(m^2-3)\geqslant0$,

∴ $m\leqslant\frac{13}{4}$.

(2)当 $m=2$ 时,方程为 $x^2+3x+1=0$,

∵ 方程的根为 x_1,x_2,

∴ $x_1+x_2=-3,x_1x_2=1$,

$x_1^2+3x_1+1=0,x_2^2+3x_2+1=0$.

∴ $(x_1^2+2x_1)(x_2^2+4x_2+2)$

$=(x_1^2+2x_1+x_1-x_1)(x_2^2+3x_2+x_2+2)$

$=(-1-x_1)(-1+x_2+2)$

$=(-1-x_1)(x_2+1)$

$=-x_2-x_1x_2-1-x_1$

$=-x_2-x_1-2$

$=3-2$

$=1$.

17. 解:(1)∵ 方程有两个不相等的实数根,

∴ $\Delta=[-(2k-1)]^2-4(k^2-2k+3)=4k-11>0$,

解得 $k>\frac{11}{4}$.

(2)存在.

∵ $x_1x_2=k^2-2k+3=(k-1)^2+2>0$,

∴ 将 $|x_1|-|x_2|=\sqrt{5}$ 两边平方可得 $x_1^2-2x_1x_2+x_2^2=5$,即 $(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=5$,

∵ $x_1+x_2=2k-1,x_1x_2=k^2-2k+3$,

∴ $(2k-1)^2-4(k^2-2k+3)=5$,

整理得 $4k-11=5$,

解得 $k=4$.



阶段核心方法

1. C

2. 解:(1)$(4x-1)^2=225$,

$4x-1=\pm15$,

∴ $x_1=4,x_2=-\frac{7}{2}$.

(2)$\frac{1}{2}(x-2)^2=8$,

$(x-2)^2=24$,

$x-2=\pm2\sqrt{6}$,

∴ $x_1=2+2\sqrt{6},x_2=2-2\sqrt{6}$.

3. 解:$x^2+4x-2=0$,

$x^2+4x=2$,

$(x+2)^2=6$,

$x+2=\pm\sqrt{6}$,

∴ $x_1=-2+\sqrt{6},x_2=-2-\sqrt{6}$.

4. 解:$x^2-10x+y^2-16y+89=0$,

$(x^2-10x+25)+(y^2-16y+64)=0$,

$(x-5)^2+(y-8)^2=0$,

∴ $x=5,y=8$,∴ $\frac{x}{y}=\frac{5}{8}$.

5. D

6. 解:(1)$x^2-2x=0$,

$x(x-2)=0$,

∴ $x_1=0,x_2=2$.

(2)$(16x^2-9=0$,

$(4x+3)(4x-3)=0$,

∴ $x_1=-\frac{3}{4},x_2=\frac{3}{4}$.

(3)$4x^2=4x-1$,

$4x^2-4x+1=0$,

$(2x-1)^2=0$,

∴ $x_1=x_2=\frac{1}{2}$.

7. B

8. 解:(1)$3(x^2+1)-7x=0$,

$3x^2-7x+3=0$,

∴ $\Delta=b^2-4ac=(-7)^2-4\times3\times3=13$.

∴ $x=\frac{7\pm\sqrt{13}}{2\times3}=\frac{7\pm\sqrt{13}}{6}$.

∴ $x_1=\frac{7+\sqrt{13}}{6},x_2=\frac{7-\sqrt{13}}{6}$.

(2)$4x^2-3x-5=x-2$,

$4x^2-4x-3=0$,

∴ $\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times4\times(-3)=64$.

∴ $x=\frac{4\pm\sqrt{64}}{2\times4}=\frac{1\pm2}{2}$

∴ $x_1=\frac{3}{2},x_2=-\frac{1}{2}$.

9. 解:将原方程两边同乘 6,得 $(6x)^2+19\times(6x)+60=0$. 解得 $6x=-15$ 或 $6x=-4$. ∴ $x_1=-\frac{5}{2},x_2=-\frac{2}{3}$.

10. 解:因为 $m-n=8$,所以 $m=n+8$.

将 $m=n+8$ 代入 $mn+p^2+16=0$ 中,得 $n(n+8)+p^2+16=0$,所以 $n^2+8n+16+p^2=0$,即 $(n+4)^2+p^2=0$.

又因为 $(n+4)^2\geqslant0,p^2\geqslant0$,

所以 $\begin{cases}n+4=0,\\p=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}n=-4,\\p=0.\end{cases}$

所以 $m=n+8=4$,

所以 $mn+n+p=4+(-4)+0=0$.

11. 解:原方程即为 $[(x-1)(x-4)]\cdot[(x-2)(x-3)]=48$,

即 $(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)=48$.

设 $y=x^2-5x+5$,则原方程变为 $(y-1)(y+1)=48$.

解得 $y_1=7,y_2=-7$.

当 $x^2-5x+5=7$ 时,解得 $x_1=\frac{5+\sqrt{33}}{2},x_2=\frac{5-\sqrt{33}}{2}$.

当 $x^2-5x+5=-7$ 时,$\Delta=(-5)^2-4\times1\times12=-23<0$,方程无实数根.

∴ 原方程的根为 $x_1=\frac{5+\sqrt{33}}{2}$,

$x_2=\frac{5-\sqrt{33}}{2}$.

12. 解:设 $x+\frac{1}{x}=y$,则原方程为 $y^2-2y-3=0$.

解得 $y_1=3,y_2=-1$.

当 $y=3$ 时,$x+\frac{1}{x}=3$,

∴ $x_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2},x_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

当 $y=-1$ 时,$x+\frac{1}{x}=-1$ 无实数根.

经检验,$x_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2},x_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ 都是原方程的根.

∴ 原方程的根为 $x_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2},x_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

13. 解:经验证 $x=0$ 不是方程的根,原方程两边同除以 x^2,

得 $6x^2-35x+62-\frac{35}{x}+\frac{6}{x^2}=0$,

即 $6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-35\left(x+\frac{1}{x}\right)+62=0$.

设 $y=x+\frac{1}{x}$,则 $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$,

原方程可变为 $6(y^2-2)-35y+62=0$.

解得 $y_1=\frac{5}{2},y_2=\frac{10}{3}$.

当 $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$ 时,

解得 $x_1=2,x_2=\frac{1}{2}$;

当 $x+\frac{1}{x}=\frac{10}{3}$ 时,

解得 $x_3=3,x_4=\frac{1}{3}$.

经检验,均符合题意.

∴ 原方程的根为 $x_1=2,x_2=\frac{1}{2}$,

$x_3=3,x_4=\frac{1}{3}$.

14. 解:设 $\frac{x-2}{x}=y$,则原方程化为 $y-\frac{3}{y}=2$,

整理得 $y^2-2y-3=0$,

∴ $y_1=3,y_2=-1$.

当 $y=3$ 时,$\frac{x-2}{x}=3$,

∴ $x=-1$.

当 $y=-1$ 时,$\frac{x-2}{x}=-1$,

∴ $x=1$.

经检验,$x=\pm1$ 都是原方程的根.

∴ 原方程的根为 $x_1=1,x_2=-1$.

15. 解:$\begin{cases}x-2\,019=2\,022,\\x-2\,020=2\,021\end{cases}$ 的解一定是原方程的解,

解得 $x=4\,041$.

$\begin{cases}x-2\,019=-2\,021,\\x-2\,020=-2\,022\end{cases}$ 的解也一定是原方程的解,

解得 $x=-2$.

∴ 原方程最多有四个实数根.

∴ 原方程的根为 $x_1=4\,041,x_2=-2$.

点拨:解本题也可采用**换元法**.设 $x-2\,020=t$,则 $x-2\,019=t+1$,原方程可化为 $t(t+1)=2\,021\times2\,022$,先求出 t,进而求出 x.

6 应用一元二次方程

第 1 课时 建立一元二次方程解决几何问题

1. 解:设剪去正方形的边长为 x cm,则制成无盖长方体盒子的底面为($30-2x$)cm,宽为($20-2x$)cm,高为 x cm,依题意得 $2\times[(30-2x)+(20-2x)]x=200$,

整理,得 $2x^2-25x+50=0$,

解得 $x_1=\frac{5}{2},x_2=10$.

当 $x=10$ 时,$20-2x=0$,不合题意,舍去.

答:当剪去正方形的边长为 $\frac{5}{2}$ cm 时,所得长方体盒子的侧面积为 200 cm^2.

2. $(12-x)(8-x)=77$

3. 解:(1)设这个矩形地面的长是 x m,则依题意得 $x(20-x)=96$.

解得 $x_1=12,x_2=8$(舍去).

答:这个矩形地面的长是 12 m.

(2)用地砖为 $0.80\times0.80=0.64$(单位:m)的地板砖所需的费用:$96\div(0.80\times0.80)\times55=8\,250$(元).

用规格为 1.00×1.00(单位:m)的地板砖所需的费用:$96\div(1.00\times1.00)\times80=7\,680$(元).

∵ $8\,250>7\,680$,

∴ 用规格为 1.00×1.00(单位:m)的地板砖所需的费用较少.

4. 解:(1)设 x 与后,△PBQ 的面积为 4 cm^2,

则$\frac{1}{2}\cdot2x\cdot(5-x)=4$,

解得 $x_1=1,x_2=4$.

当 $x=4$ 时,$2x=8>7$,不合题意,舍去,∴ $x=1$.

答:1 s 后,△PBQ 的面积等于 4 cm^2.

(2)设 y s 后,△PBQ 的面积是 7 cm^2.

由题意,得 $\frac{1}{2}\cdot2y\cdot(5-y)=7$,即 $y^2-5y+7=0$.

∵ $\Delta=(-5)^2-4\times7<0$,∴ 此方程无实数根.

∴ △PBQ 的面积不能等于 7 cm^2.

第 2 课时 建立一元二次方程解百分率问题

1. 解:(1)设 2016 年到 2018 年该村人均收入的年平均增长率为 x,

根据题意得 $20\,000(1+x)^2=24\,200$,

解得 $x_1=0.1=10\%,x_2=-2.1$(不合题意,舍去).

答:2016 年到 2018 年该村人均收入的年平均增长率为 10%.

(2)$24\,200\times(1+10\%)=26\,620$(元).

答:预测 2019 年该村的人均收入达 26 620 元.

2. 解:设降价后的销售单价为 x 元,则降价后每天可售出 $[300+5(200-x)]$ 个,

依题意,得 $(x-100)[300+5(200-x)]=32\,000$,

整理,得 $x^2-360x+32\,400=0$,

解得 $x_1=x_2=180$,

$180<200$,符合题意.

答:这种电子产品降价后的销售单价为 180 元时,公司每天可获利 32 000 元.

3. 解:(1)设该养殖场蛋鸡产蛋量的月平均增长率为 x,

根据题意得,$2.5(1+x)^2=3.6$,

解得 $x=0.2=20\%,x=-2.2$(不合题意,舍去).

答:该养殖场蛋鸡产蛋量的月平均增长率为 20%.

(2)根据题意可知每台设备的利润为 $(x-30)$ 万元,年销售量为 $(-10x+1\,000)$ 台.

则 $(x-30)(-10x+1\,000)=10\,000$,

整理,得 $x^2-130x+4\,000=0$,

解得 $x_1=50,x_2=80$.

∵ 此设备的销售单价不得高于 70 万元,

∴ $x=50$.

答:该设备的销售单价应是 50 万元.

4. 解:(1)设该市这两年投入基础教育经费的年平均增长率为 x,

根据题意,得 $5\,000(1+x)^2=7\,200$,

解得 $x_1=0.2=20\%,x_2=-2.2$(舍去).

答:该市这两年投入基础教育经费的年平均增长率为 20%.

(2)2020 年投入基础教育经费为 $7\,200\times(1+20\%)=8\,640$(万元),

设购买电脑 m 台,则购买实物投影仪 $(1\,500-m)$ 台,

根据题意,得 $3\,500m+2\,000(1\,500-m)\leqslant86\,400\,000\times5\%$,

解得 $m\leqslant880$.

答:最多可购买电脑 880 台.

阶段核心归类

1. 解:(1)设 2018 年甲类芯片的产量为 x 万块,

由题意得 $x+2x+(x+2x+400)=2\,800$,

解得 $x=400$.

答:2018 年甲类芯片的产量为 400 万块.

(2)2018 年丙类芯片的产量为 $3x+400=1\,600$(万块).

设丙类芯片的产量每年增加的数量为 y 万块,

则 $1\,600+1\,600+y+1\,600+2y=14\,400$,

解得 $y=3\,200$.

∴ 丙类芯片 2020 年的产量为 $1\,600+2\times3\,200=8\,000$(万块).

2018 年 HW 公司手机产量为 $2\,800\div10\%=28\,000$(万部),

$400(1+m\%)^2+2\times400(1+m\%-1)^2+8\,000=28\,000\times(1+10\%)$,

答:m 的值是 20.

8. 解:(1)设这个多边形的边数为 n,根据题意得 $\frac{1}{2}n(n-3)=14$,整理得 $n^2-3n-28=0$,解得 $n=7$ 或 $n=-4$.

∵ $n\geqslant3$,∴ $n=-4$ 不合题意,舍去.

∴ $n=7$,即这个多边形的边数是 7.

(2)A 同学的说法不正确.理由如下:

设这个多边形的边数为 n,则$\frac{1}{2}n(n-3)=10$,整理得 $n^2-3n-20=0$,解得 $n=\frac{3\pm\sqrt{89}}{2}$,

∴ 符合方程 $n^2-3n-20=0$ 的正整数 n 不存在,∴ 多边形的对角线不可能有 10 条,即 A 同学的说法不正确.

9. 解:(1)设年销售量与销售单价 x 的函数关系式为 $y=kx+b(k\neq0)$,

由题意得 $\begin{cases}40k+b=600,\\45k+b=550,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-10,\\b=1\,000.\end{cases}$

∴ 年销售量 y 与销售单价 x 的函数关系式为 $y=-10x+1\,000$.

(2)根据题意可知每台设备的利润为 $(x-30)$ 万元,年销售量为 $(-10x+1\,000)$ 台.

则 $(x-30)(-10x+1\,000)=10\,000$,

整理,得 $x^2-130x+4\,000=0$,

解得 $x_1=50,x_2=80$.

∵ 此设备的销售单价不得高于 70 万元,

∴ $x=50$.

答:该设备的销售单价应是 50 万元.

10. 解:(1)设该市这两年投入基础教育经费的年平均增长率为 x,

根据题意,得 $5\,000(1+x)^2=7\,200$,

解得 $x_1=0.2=20\%,x_2=-2.2$(舍去).

答:该市这两年投入基础教育经费的年平均增长率为 20%.

(2)2020 年投入基础教育经费为 $7\,200\times(1+20\%)=8\,640$(万元),

设购买电脑 m 台,则购买实物投影仪 $(1\,500-m)$ 台,

根据题意,得 $3\,500m+2\,000(1\,500-m)\leqslant86\,400\,000\times5\%$,

解得 $m\leqslant880$.

答:最多可购买电脑 880 台.

阶段核心归类

1. 解:(1)设 2018 年甲类芯片的产量为 x 万块,

由题意得 $x+2x+(x+2x+400)=2\,800$,

解得 $x=400$.

答:2018 年甲类芯片的产量为 400 万块.

(2)2018 年丙类芯片的产量为 $3x+400=1\,600$(万块).

设丙类芯片的产量每年增加的数量为 y 万块,

则 $1\,600+1\,600+y+1\,600+2y=14\,400$,

解得 $y=3\,200$.

∴ 丙类芯片 2020 年的产量为 $1\,600+2\times3\,200=8\,000$(万块).

2018 年 HW 公司手机产量为 $2\,800\div10\%=28\,000$(万部),

$400(1+m\%)^2+2\times400(1+m\%-1)^2+8\,000=28\,000\times(1+10\%)$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

设 $m\%=t$，化简得 $3t^2+2t-56=0$，

解得 $t=4$，或 $t=-\frac{14}{3}$（舍去）．

$\therefore t=4$．

$\therefore m=4$．

$\therefore m=400$．

答：两类芯片 2020 年的产量为 8 000 万块，$m=400$．

2. **解**：(1) 设 y 与 x 之间的函数关系式为 $y=kx+b$，将 $x=2, y=120$ 和 $x=4, y=140$ 分别代入得，

$$\begin{cases}2k+b=120,\\4k+b=140,\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}k=10,\\b=100.\end{cases}$

$\therefore y$ 与 x 之间的函数关系式为 $y=10x+100$．

(2) 由题意得：

$(60-40-x)(10x+100)\geqslant 2\,090$，

整理得 $x^2-10x+9\leqslant 0$，

解得 $x_1=1, x_2=9$．

∵要让顾客得到更大的实惠，

$\therefore x=9$．

答：这种干果每千克应降价 9 元．

3. **解**：设第一次存款时的年利率为 x．

则根据题意，得 $1\,000(1+x)+500(1+0.9x)=580$．整理，得 $90x^2+145x-3=0$．解这个方程，得 $x_1\approx 0.020\,4=2.04\%$，$x_2\approx -1.63$（舍去）．

答：第一次存款时的年利率约是 2.04%．

4. **解**：设竹竿长 x 米，

∵竹竿横着比城门宽 4 米，竖着比城门高2 米，

∴城门高为 $(x-2)$ 米，宽为 $(x-4)$ 米．

∵沿着城门的对角斜着拿刚好可以进城门，

∴可列方程为 $(x-2)^2+(x-4)^2=x^2$，

解得 $x_1=2$（舍去），$x_2=10$．

答：竹竿长 10 米．

5. **解**：设阅迪去世时的年龄的个位数字为 x，则十位数字为 $x-3$．

根据题意，得 $x^2=10(x-3)+x$．

即 $x^2-11x+30=0$，解这个方程，得 $x=5$ 或 $x=6$．

当 $x=5$ 时，周迪去世时的年龄为 25 岁，不合题意，舍去；

当 $x=6$ 时，周迪去世时的年龄为 36 岁，完全符合题意．

答：周迪去世时的年龄为 36 岁．

6. **解**：设每轮感染中平均一台电脑会感染 x 台电脑．

则 $1+x+x(1+x)=81$，

解得 $x_1=8, x_2=-10$（舍去），

二轮后被感染的电脑数量为 $81+81\times 8=729$（台）>700 台．

答：每轮感染中平均一台电脑会感染 8 台电脑，若病毒得不到有效控制，三轮后被感染的电脑总数会超过 700 台．

7. **解**：(1) 设 2017 年到 2019 年甜甜和她的妹妹在六一收到红包的年平均增长率是 x，

根据题意，得 $400(1+x)^2=484$，

解得 $x_1=-2.1$（舍去），$x_2=0.1=10\%$．

答：2017 年到 2019 年甜甜和她的妹妹在六一收到红包的年平均增长率是 10%．

(2) 设甜甜收到了 y 元微信红包，则她的妹妹收到了 $(2y+34)$ 元微信红包，

根据题意，得 $y+2y+34=484$，

解得 $y=150$，

则 $2y+34=334$．

答：2019 年六一，甜甜和她的妹妹分别收到了 150 元和 334 元微信红包．

8. **解**：设小路的宽应为 x m，

根据题意得 $(16-2x)(9-x)=112$，

整理得 $x^2-17x+16=0$，

解得 $x_1=1, x_2=16$．

∵$16>9$，∴$x=16$ 不符合题意，舍去．

$\therefore x=1$．

答：小路的宽应为 1 m．

9. **解**：设每周参观人数 y（人）与票价 x（元）之间的一次函数关系式为 $y=kx+b\,(x>0)$，

根据题意，得 $\begin{cases}10k+b=7\,000,\\15k+b=4\,500.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=-500,\\b=12\,000.\end{cases}$

$\therefore y=-500x+12\,000\,(x>0)$．

∵$xy=40\,000$，即 $x(-500x+12\,000)=40\,000$，

$\therefore x^2-24x+80=0$，

解得 $x_1=20, x_2=4$．

把 $x_1=20, x_2=4$ 分别代入 $y=-500x+12\,000$，得 $y_1=2\,000, y_2=10\,000$．

∵要控制参观人数，∴取 $x=20$，此时，$y=2\,000$．

答：每周应限定参观人数为 2 000 人，门票价格应是 20 元．

10. **解**：(1) 由题意可得 $k=-15$，则原方程为 $x^2-15x+56=0$，∴$(x-7)(x-8)=0$，解得 $x_1=7, x_2=8$．

(2) 第 n 个方程为 $x^2-(2n-1)x+n(n-1)=0$，它的根为 $x_1=n-1, x_2=n$．

全章热门考点整合应用

1. **解**：当 $m^2+1=2$ 且 $m-1\neq 0$ 时，方程 $(m-1)x^{m^2+1}+2mx+3=0$ 是关于 x 的一元二次方程．

由 $m^2+1=2$，得 $m^2=1$，所以 $m=\pm 1$．

由 $m-1\neq 0$，得 $m\neq 1$．

所以只能取 $m=-1$．

所以当 $m=-1$ 时，方程 $(m-1)x^{m^2+1}+2mx+3=0$ 是关于 x 的一元二次方程．

点拨：要准确理解一元二次方程的概念，需从次数和系数两方面考虑．

2. **解**：由题意得 $-4+3\neq 0$ 且 $4-c\geqslant 0$．

∴$c\leqslant 4$，则 $a=-2$．

又∵-1 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根，

∴$a-b+c=0$，∴$b=a+c=-2+4=2$．

∴原式 $=\frac{(-2+2)^{2\,020}}{2\,019\times 4}=0$．

3. **解**：(1) $(x-1)^2+2x(x-1)=0$，

$(x-1)(x-1+2x)=0$，

$(x-1)(3x-1)=0$，

$\therefore x_1=1, x_2=\frac{1}{3}$．

(2) $x^2-6x-6=0$，

$x^2-6x=6$，

$x^2-6x+9=15$，

$(x-3)^2=15$，

$x-3=\pm\sqrt{15}$，

∴$x_1=3+\sqrt{15}, x_2=3-\sqrt{15}$．

(3) $6\,000(1+x)^2=8\,460$，

$(1+x)^2=0.81$，

$1+x=\pm 0.9$，

∴$x_1=1.9, x_2=0.1$．

(4) $(10+x)(50-x)=800$，

$x^2-40x+300=0$，

$(x-10)(x-30)=0$，

∴$x_1=10, x_2=30$．

(5) $(2x-1)^2=x(3x+2)-7$，

$4x^2-4x+1=3x^2+2x-7$，

$x^2-6x+8=0$，

$(x-2)(x-4)=0$，

∴$x_1=2, x_2=4$．

4. A

5. **解**：关于 x 的方程 $x^2+(b+2)x+(6-b)=0$ 有两个相等的实数根，

∴$\Delta=(b+2)^2-4(6-b)=0$，

∴$b_1=2, b_2=-10$（舍去）．

当 b 取值时，$\triangle ABC$ 的周长为 $5+5+2=12$．

当 b 为腰长时，$2+2<5$，不能构成三角形．

∴$\triangle ABC$ 的周长为 12．

6. **解**：(1) ∵关于 x 的一元二次方程 $x^2-2(a+x^2+a-2=0$ 有两个不相等的实数根，

∴$\Delta=[-2(a-1)]^2-4(a^2+a-2)>0$，

解得 $a<3$．

∵a 为正整数，∴$a=1, 2$．

(2) ∵$x_1+x_2=2(a-1), x_1x_2=a^2+a-2$，

∴$x_1^2+x_2^2-x_1x_2=16$，

∴$(x_1+x_2)^2-3x_1x_2=16$，

∴$4(a-1)^2-3(a^2+a-2)=16$，

解得 $a_1=-1, a_2=6$，

∵$a<3$，

∴$a=-1$．

7. **解**：(1) ∵关于 x 的一元二次方程 $x^2-6x+(4m+1)=0$ 有实数根，

∴$\Delta=(-6)^2-4\times 1\times(4m+1)\geqslant 0$，

解得 $m\leqslant 2$．

(2) ∵方程 $x^2-6x+(4m+1)=0$ 的两个实数根为 x_1, x_2，

∴$x_1+x_2=6, x_1x_2=4m+1$，

∴$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=4^2$，

即 $32-16m=16$，

解得 $m=1$．

8. **解**：(1) 设进班人次的月平均增长率为 x，则由题意得

$128+128(1+x)+128(1+x)^2=608$，

化简得 $4x^2+12x-7=0$，

解得 $x=0.5=50\%$，

$x=-3.5$（舍去）．

答：进班人次的月平均增长率为 50%．

(2) ∵进班人次的月平均增长率为 50%，

∴第四个月的进班人次为 $128\,(1+50\%)^3=128\times\frac{27}{8}=432<500$．

答：校图书馆能接纳第四个月的进馆人次．

9. **解**：(1) $-1+5;-2+3;1\times -9$

(2) 这两个数的和等于一次项系数，积等于常数项．

10. **解**：(1) $(x-2)^2-2;(x-\sqrt{2})^2-(4-2\sqrt{2})x$（或 $(x+\sqrt{2})^2-(4+2\sqrt{2}x)$）；$2(x-1)^2-x^2$．

(2) $a^2+b^2+c^2-ab-3b-2c+4=\left(a-\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}(b-2)^2+(c-1)^2=0$，所以 $a-\frac{1}{2}b=0, b-2=0, c-1=0$．

所以 $a=1, b=2, c=1$．

所以 $a+b+c=4$．

11. **解**：∵$x=a$ 是 $2x^2+x-2=0$ 的一个根，

∴$2a^2+a-2=0$，即 $2a^2+a=2$．

∴原式 $=a^3(2a^2+a)+2a^2+2a+1=2a^2+2a^2+2a+1=2(2a^2+a)+1=2\times 2+1=5$．

12. **解**：设 $2x+1=y$，则原方程可化为 $y^2-3y=-2$．

解得 $y_1=1, y_2=2$．

当 $y=1$ 时，有 $2x+1=1$，所以 $x=0$；

当 $y=2$ 时，有 $2x+1=2$，所以 $x=\frac{1}{2}$．

所以原方程的解为 $x_1=0, x_2=-\frac{1}{2}$．

点拨：利用**换元思想**将复杂的一元二次方程转化为简单的一元二次方程来求解．

13. **解**：(1) 由题意得 $\Delta=4(a-1)^2-4(a^2-7a-4)=20a+20\geqslant 0$，

∴$a\geqslant -1$．

(2) 若 $x_1^2=x_1x_2$，则 $x_1(x_1-x_2)=0$，

故 $x_1=0$ 或 $x_1=x_2$．

当 $x_1=0$ 时，代入原方程得 $a^2-7a-4=0$，

解得 $a=\frac{7\pm\sqrt{65}}{2}$．

而此时 $x_1+x_2=-2(a-1)$，

∴$x_2=-2(a-1)$．

故 $x_2=-5-\sqrt{65}$ 或 $x_2=5-\sqrt{65}$．

当 $x_1=x_2$ 时，$\Delta=20a+20=0$，

∴$a=-1$．

原方程为 $x^2-4x+4=0$，

解得 $x_1=x_2=2$．

第三章　概率的进一步认识

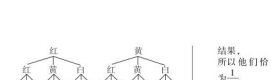
1　用树状图或表格求概率

第 1 课时　用树状图法求概率

1. D　**2.** A　**3.** D　**4.** B

5. D　**点拨**：如图，一共有 27 种等可能的结果，记两个三人投到球的颜色都不相同的有 6 种结果，

∴P（三人投到球的颜色都不相同）$=\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$．



（第 5 题）

6. D

7. **解**：(1) 根据题意画出如图所示的树状图．



（第 7 题）

(2) 由树状图可知，共有 8 种等可能的结果，其中三次正面朝上或三次反面朝上的情况有 2 种．所以 P（小刚任意挑选两球）$=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$．

(3) 这个规则对两个球队公平．理由如下：

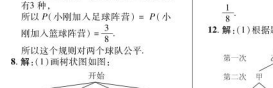
两次正面朝上一次正面朝下的情况有3 种，

两次反面朝上一次反面朝下的情况有3 种，

所以 P（小刚加入足球阵营）$=P$（小刚加入篮球阵营）$=\frac{3}{8}$．

所以这个规则对两个球队公平．

8. **解**：(1) 画树状图如图：



（第 8 题）

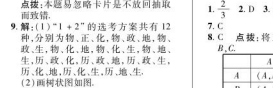
(2) 由树状图可知共有 12 种等可能的结果．由勾股数的定义可知 B, C, D 卡片上的数都是勾股数，故抽到的两张卡片上的数都是勾股数的情况有 6 种结果．

所以抽到的两张卡片上的数都是勾股数的概率为 $\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$．

点拨：本题易忽略卡片是不放回抽取而致错．

9. **解**：(1) “1 + 2”的选择方案共有 12 种，分别为物、正、化、物，政、地、物、政、生、物，化、地、物，化、生、物，地、生、历，政、地、历，政、生、历，地、生、历．

(2) 画树状图如图．



（第 9 题）

由树状图知，共有 9 种等可能的结果，其中他们恰好都选中政治的只有 1 种结果，

所以他们恰好都选中政治的概率为 $\frac{1}{9}$．

10. **解**：(1) 画树状图如图所示：



（第 10 题）

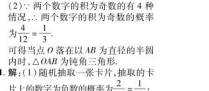
共有 12 种等可能的结果．

(2) ∵两个数字的积为奇数的有 4 种情况，∴两个数字的积为奇数的概率为 $\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$．

可得当点 O 落在以 AB 为直径的半圆内时，$\triangle OAB$ 为钝角三角形．

11. **解**：(1) 随机抽取一张卡片，抽取的卡片上的数字为负数的概率为 $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$；

(2) 画树状图如图所示：



（第 11 题）

共有 16 种等可能的结果，其中点 A 在直线 $y=2x$ 上的结果有 2 种，

∴点 A 在直线 $y=2x$ 上的概率为 $\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$．

12. **解**：(1) 根据题意，画出树状图如图．



（第 12 题）

(2) 由(1) 可知三次传球后，球回到甲脚下的概率为 $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$．

(3) 由(1) 可知三次传球后，球回到甲脚下的概率为 $\frac{1}{4}$，传到乙脚下的概率为 $\frac{3}{8}$，所以球传到乙脚下的概率大．

第 2 课时　用列举法求概率

1. $-\frac{2}{3}$　**2.** D　**3.** A　**4.** $\frac{1}{12}$　**5.** D　**6.** A

7. C

8. C　**点拨**：将三个小区分别记为 A，B，C．

	A	B	C
A	(A,A)	(B,A)	(C,A)
B	(A,B)	(B,B)	(C,B)
C	(A,C)	(B,C)	(C,C)

由表可知，共有 9 种等可能的结果，其中两个组恰好抽到同一个小区的有 3 种，所以两个组恰好抽到同一个小区的概率为 $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$．

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. D

10. B　**点拨**：列表如下：

	1	2	3	4
1	11	12	13	14
2	21	22	23	24
3	31	32	33	34
4	41	42	43	44

由表可知，共有 16 种可能，其中是 3 的倍数的有 12，21，24，33，42 共 5 种，所以概率是 $\frac{5}{16}$.

11. 错解：A

诊断：20 张商标牌中有奖的有 5 张，该参与者面两次翻牌均获奖，面翻过的牌不能再翻，因此剩下的 18 张商标牌中，有奖的商标牌有 3 张，故他第三次翻牌获奖的概率是 $\frac{3}{18}=\frac{1}{6}$，而不是 $\frac{1}{4}$.

正解：C

12. 解：(1) 8 名学生中至少有三类垃圾投放正确的概率为 $\frac{5}{8}$.

(2) 列表如下：

	A	C	F	G
A		CA	FA	GA
C	AC		FC	EG
F	AF	CF		GF
G	AG	CG	FG	

13. 解：(1) 补全表格如下：

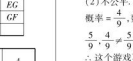
乙 / 甲、积	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	6	8
3	3	6	9	12

(2) $\frac{1}{12}$；$\frac{2}{3}$；(3) $\frac{1}{3}$

14. 解：(1) 这个班级有 $15+30\%\times50=50$(名) 同学，

选择 C 饮品的人数为 $50-(10+15+5)=20$，

补全条形统计图如下图.



(第 14 题)

(2) $\frac{10\times0+15\times2+20\times3+5\times4}{50}=2.2$(元).

则该班同学每天用于饮品的人均花费是 2.2 元.

(3) 列表如下：

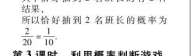
	A	B	C	D	E
A		BA	CA	DA	EA
B	AB		CB	DB	EB
C	AC	BC		DC	EC
D	AD	BD	CD		ED
E	AE	BE	CE	DE	

由表可知共有 20 种等可能的结果，其中恰好抽到 2 名班长的有 2 种结果，

所以恰好抽到 2 名班长的概率为 $\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$.

第 3 课时　利用概率判断游戏规则的公平性

1. 解：(1) 画树状图如图所示.



(第 1 题)

由图可知 (x,y) 所有可能出现的结果共有 16 种.

(2) 公平. 理由：$x+y$ 为奇数的结果有 8 种，$x+y$ 为偶数的结果有 8 种，

∴ 甲获胜的概率 $=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$，乙获胜的概率 $=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$，

∴ 甲获胜的概率 = 乙获胜的概率.

∴ 这个游戏对双方公平.

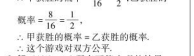
2. 解：(1) (m,n) 所有可能出现的结果：$(1,1)$，$(1,2)$，$(1,3)$，$(2,1)$，$(2,2)$，$(2,3)$，$(3,1)$，$(3,2)$，$(3,3)$.

(2) 不公平. 理由：数字之和为奇数的概率 $=\frac{4}{9}$，数字之和为偶数的概率 $=\frac{5}{9}\neq\frac{4}{9}$，

∴ 这个游戏不公平.

3. 解：(1) $\frac{1}{3}$

(2) 不公平. 理由：画树状图如图.



(第 3 题)

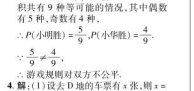
积共有 9 种等可能的情况，其中偶数有 5 种，奇数有 4 种，

∴ P(小明胜) $=\frac{5}{9}$，P(小华胜) $=\frac{4}{9}$.

∴ $\frac{5}{9}\neq\frac{4}{9}$，

∴ 游戏规则对双方不公平.

4. 解：(1) 设去 D 地的车票有 x 张，则 $x=(x+20+40+30)\times10\%$，解得 $x=10$，即去 D 地的车票有 10 张，补全统计图如图所示.



(第 4 题)

(2) 小明抽到去 A 地的概率为 $\frac{20}{20+40+30+10}=\frac{1}{5}$.

(3) 列表如下：

小王 \ 小李	1	2	3	4
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)

由表可知共有 16 种等可能的结果，其中小王掷得着地一面的数字比小李掷得着地一面的数字小的有 6 种，分别为 $(1,2)$，$(1,3)$，$(1,4)$，$(2,3)$，$(2,4)$，$(3,4)$.

所以小王掷得着地一面的数字比小李掷得着地一面的数字小的概率为 $\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$，

小王掷得着地一面的数字不小于小李掷得着地一面的数字的概率为 $\frac{10}{16}=\frac{5}{8}$. 因为 $\frac{3}{8}\neq\frac{5}{8}$，所以这个规则不公平.

2　用频率估计概率

1. 0.92　**2.** C　**3.** D

4. D　**点拨**：本题用频率估计概率，在 100 人中不低于 180 cm 的有 15 人，故概率为 0.15.

5. 100　**6.** C

7. D　**点拨**：由题图可知，事件发生的概率是 0.53 左右，A 选项发生的概率为 0.5，B 选项发生的概率为 0.17，C 选项发生的概率是 0.25，只有 D 选项符合条件.

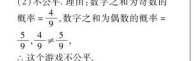
8. 错解：A

诊断：用频率估计概率时，要注意试验的次数越多，事件发生的频率就会越接近这个事件发生的概率，试验的次数太少易受偶然性因素影响，此时的频率不能用来估计概率.

正解：D

9. 解：(1) 100；600

(2) 补全条形统计图如图所示.　108°



(第 9 题)

(3) $\frac{3}{10}$

10. 解：(1) "1 台机器在三年使用期内维修次数不大于 10" 的概率为 $\frac{10+30}{100}=0.6$.

(2) 购买 10 次时，

某台机器使用期内维修次数	8	9	10	11	12
该台机器维修费用/元	24 000	24 500	25 000	30 000	35 000

此时这 100 台机器维修费用的平均数

$y_1=\frac{1}{100}(24\,000\times10+24\,500\times20+25\,000\times30+30\,000\times30+35\,000\times10)=27\,300$(元).

购买 11 次时，

某台机器使用期内维修次数	8	9	10	11	12
该台机器维修费用/元	26 000	26 500	27 000	27 500	32 500

此时这 100 台机器维修费用的平均数

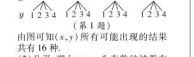
$y_2=\frac{1}{100}(26\,000\times10+26\,500\times20+27\,000\times30+27\,500\times30+32\,500\times10)=27\,500$(元).

∵ $27\,300<27\,500$，

∴ 购买 1 台该机器的同时应一次性额外购买 10 次维修服务.

阶段核心归类

1. 解：(1) 画树状图如图所示：



(第 1 题)

(2) ∵ m,n 都是方程 $x^2-5x+6=0$ 的解，

∴ $m=2$，$n=3$，或 $m=3$，$n=2$，

由树状图得：共有 12 种等可能的结果，m,n 都是方程 $x^2-5x+6=0$ 的解的结果有 2 种，

m,n 都不是方程 $x^2-5x+6=0$ 的解的结果有 2 种，

故小明获胜的概率为 $\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$，小利获胜的概率为 $\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$，

∴ 小明、小利获胜的概率一样大.

2. 解：(1) $\frac{1}{2}$

(2) 画树状图如图：

(第 2 题)

共有 12 种等可能的结果，其中 $k<0$，$b>0$ 的情况有 4 种，所以这个一次函数的图象经过第一、二、四象限的概率为 $\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$.

3. 解：(1) $\frac{1}{4}$

(2) 列表如下：

	−2	−1	0	1
−2	(−2,−2)	(−1,−2)	(0,−2)	(1,−2)
−1	(−2,−1)	(−1,−1)	(0,−1)	(1,−1)
0	(−2,0)	(−1,0)	(0,0)	(1,0)
1	(−2,1)	(−1,1)	(0,1)	(1,1)

由表知，共有 16 种等可能的结果，其中点 M 落在四边形 $ABCD$ 所围成的部分内(含边界)的有：$(-2,0)$，$(-1,-1)$，$(-1,0)$，$(0,-2)$，$(0,-1)$，$(0,0)$，$(0,1)$，$(1,0)$ 这 8 种，所以点 M 落在四边形 $ABCD$ 所围成的部分内(含边界)的概率为 $\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$.

4. 解：(1) $30+15\%=200$(名).

故本次随机调查了 200 名学生.

(2) 补全条形统计图，如图：

(第 4 题)

(3) 估计全校学生选择"戏曲"类的人数约为 $1\,200\times\frac{40}{200}=240$.

(4) 列表得：

	A	B	C	D
A		AB	AC	AD
B	BA		BC	BD
C	CA	CB		CD
D	DA	DB	DC	

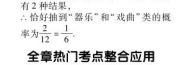
由表可知，共有 12 种等可能的结果，其中恰好抽到"器乐"和"戏曲"类的有 2 种结果，

∴ 恰好抽到"器乐"和"戏曲"类的概率为 $\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.

全章热门考点整合应用

1. $\frac{4}{9}$

2. 解：(1) 画树状图如图所示.



(第 2 题)

共有 12 种等可能的结果，其中有一天是星期二的结果有 6 种，

∴ 甲同学随机选择两天，其中有一天是星期二的概率为 $\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$.

(2) $\frac{2}{3}$

3. 解：(1) 2 点剧上的频率 $=\frac{9}{60}=\frac{3}{20}$；

5 点剧上的频率 $=\frac{20}{60}=\frac{1}{3}$.

∴ 的频率为 $\frac{1}{10}$，不能说明 3 点剧上这一事件发生的概率就是 $\frac{1}{10}$，只有当试验的次数足够多时，该事件发生的频率才稳定在事件发生的概率附近，才可以将这个频率的稳定值作为该事件发生的概率.

(3) 小刚的说法不正确，因为随机事件的发生具有随机性，所以出现 6 点朝上的次数不一定是 100 次.

4. C　**点拨**：根据表画展开图，得出三组相对的面分别是 6 对 3，4 对 2，8 对 1. 故 P(朗上一面的数字恰好等于朝下一面的数字的 2 倍) $=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$. 故选 C.

5. 解：(1) 设口袋中红球有 x 个，则黑球有 $(x-1)$ 个，白球有 $(x+3)$ 个，共有球 $x+(x-1)+(x+3)=(3x+2)$ 个.

根据题意，得 $\frac{x-1}{3x+2}=\frac{1}{4}$，

解得 $x=6$.

经检验，$x=6$ 是原方程的解且符合题意.

所以 $x-1=5$.

因此估计口袋中有 5 个黑球.

(2) $6+5+6+3=20$(个)，故口袋中共有球 20 个. 小王取出第 1 个球后不放回，还剩下 19 个球，红球仍是 6 个，所以小王从口袋中余下的球中再任意取出 1 个球是红球的概率是 $\frac{6}{19}$.

第四章　图形的相似

1　成比例线段

1. B　**2.** D　**3.** A　**4.** C　**5.** D

6. D　**点拨**：根据宽与长的比是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 的矩形是黄金矩形来判断.

7. B

8. A　**点拨**：由 $a:b=3:4$ 知 $3b=4a$，$b=\frac{4a}{3}$，由 $a+b=14$ 得到 $a+\frac{4a}{3}=14$，解得 $a=6$. ∴ $b=8$. ∴ $2a-b+2\times6-8=4$.

9. A

10. 12　**点拨**：因为 $\frac{a}{b}=\frac{k}{5}=\frac{c}{4}$，

所以 $a:b:c=6:5:4$，设 $a=6k$，则 $b=5k$，$c=4k$，故 $a+b-2c=6k+5k-8k=3k=6$，

故 $k=2$，则 $a=12$.

11. D　**点拨**：本题易忽略线段成比例的顺序性而漏解.

12. 解：(1) ∵ $AB=8$ cm，$BC=12$ cm，$A'B'=4$ cm，$B'C'=6$ cm，

∴ $\frac{A'B'}{AB}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$，

$\frac{B'C'}{BC}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$，

(2) 由 (1) 知 $\frac{A'B'}{AB}=\frac{1}{2}$，$\frac{B'C'}{BC}=\frac{1}{2}$，

∴ $\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}$，∴ 线段 $A'B'$，AB，$B'C'$，BC 是成比例线段.

13. 解：(1) 设 $\frac{a}{3}=\frac{b}{4}=\frac{c}{6}=k$，

∴ $a=3k$，$b=2k$，$c=6k$.

∵ $a+2b+c=26$，

∴ $3k+4k+6k=26$.

∴ $k=2$. ∴ $a=6$，$b=4$，$c=12$.

(2) ∵ 线段 a 是线段 a，b 的比例中项，

∴ $a^2=ab$.

又∵ $a=6$，$b=4$，

∴ $x=2\sqrt{6}$(负值舍去).

14. 解：(1) ∵ $\frac{a+4}{3}=\frac{b+3}{2}=\frac{c+8}{4}$，

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$\therefore \dfrac{a+4+b+3+c+8}{3+2+4}=\dfrac{a+4}{3}$，即 $\dfrac{a+b+c+15}{9}=\dfrac{a+4}{3}$.

又∵$a+b+c=12$，

∴$\dfrac{12+15}{9}=\dfrac{a+4}{3}$，即$\dfrac{a+4}{3}=3$，

解得 $a=5$.

由$\dfrac{b+3}{2}=\dfrac{c+8}{4}=3$，解得 $b=3$，$c=4$.

(2)∵$3^2+4^2=5^2$，即 $b^2+c^2=a^2$，

∴△ABC 是直角三角形.

15. 解：(1) 矩形 $BCFE$，矩形 $AEML$，矩形 $GMFH$，矩形 $LGPN$ 的长和宽的比不变.

理由如下：设矩形 $ABCD$ 的宽为 a，则长为$\sqrt{2}a$，

∴$BC=a$，$BE=AE=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$，$ME=MF=\dfrac{a}{2}$，$HF=LG=\dfrac{\sqrt{2}}{4}a$，$LN=\dfrac{a}{4}$.∴$\dfrac{BC}{BE}=\dfrac{a}{\frac{\sqrt{2}}{2}a}=\sqrt{2}$，$\dfrac{AE}{ME}=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\frac{a}{2}}=\sqrt{2}$，$\dfrac{MF}{HF}=\dfrac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{4}a}=\sqrt{2}$，$\dfrac{LG}{LN}=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{4}a}{\frac{a}{4}}=\sqrt{2}$，∴矩形 $BCFE$，矩形 $AEML$，矩形 $GMFH$，矩形 $LGPN$ 的长和宽的比不变.

(2)有成比例的线段，如线段 AB：$AD=BC$；BE(答案不唯一).

2 平行线分线段成比例

1. C **2.** C **3.** 4

4. B　**点拨**：∵$DE\parallel BC$，∴$\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}$

∵$AD=1$，$DB=2$，∴$AB=3$，∴$\dfrac{1}{3}=\dfrac{AE}{AC}$，即$\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{1}{3}$，故选 B.

5. C

6. C　**点拨**：∵$DE\parallel BC$，∴$AE:EC=AD:DB=1:2$；∵$EF\parallel AB$，∴$BF:FC=AE:EC=1:2$.∵$CF=6$，∴$BF=3$，故选 C.

7. C　**点拨**：延长 GH 及 AD 于点 P，证明△APH≌△FGH，用与相似类证明理想 PG.

8. D

9. B　**点拨**：过 O 作 $OG\parallel BC$，交 AC 于 G.

∵O 是 BD 的中点，

∴BE 是 DC 的中点.

又∵$AD:DC=1:2$，

∴$AD=DG=GC$.

∴$AG:GC=2:1$，∴$AO:OE=2:1$.

∴$S_{\triangle AOB}:S_{\triangle BOE}=2:1$.

设 $S_{\triangle BOE}=S_{\triangle AOB}=2S$，又 $BO=OD$，

∴$S_{\triangle AOD}=2S$，∴$S_{\triangle ABD}=4S$.

∵$AD:DC=1:2$，

∴$S_{\triangle DBC}=2S_{\triangle ABD}=8S$，

∴$S_{四边形EODC}=7S$.

∴$S_{\triangle AEC}=9S$，$S_{\triangle ABE}=3S$.

∴$BE:EC=S_{\triangle ABE}:S_{\triangle AEC}=3S:9S=1:3$.

10. 解：(1)∵$a\parallel b\parallel c$，

∴$\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{DE}{EF}$，即$\dfrac{3}{5}=\dfrac{4}{EF}$，

解得 $EF=\dfrac{20}{3}$.

(2)∵$a\parallel b\parallel c$，

∴$\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{DE}{EF}=\dfrac{2}{5}$，

∴$\dfrac{DE+EF}{EF}=\dfrac{2+5}{5}$，即$\dfrac{10}{EF}=\dfrac{7}{5}$，

解得 $EF=\dfrac{50}{7}$.

11. 证明：∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，∴$AB\parallel CD$，$AD\parallel BC$.

∴$\dfrac{BO}{OE}=\dfrac{AO}{OC}=\dfrac{AO}{OC'}=\dfrac{BO}{BO'}$，即 $BO^2=OF\cdot OE$.

12. 证明：如图，过点 D 作 $DE\parallel BN$，交 AC 于点 E.

∵AD 是 BC 边上的中线，

∴$BD=DC$.

∵$DE\parallel BN$，

∴$CE=NE$.

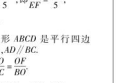
∵M 是 AD 的中点，$DE\parallel MN$，

∴$AN=NE$.

∴$AN=NE=CE$.

∴$CN=NE+CE=2AN$.

∴$AN=\dfrac{1}{2}CN$.



(第 12 题)

13. 证明：如图，过点 C 作 $CE\parallel DA$，交 BA 的延长线于点 E.

∴$\angle 1=\angle E$，$\angle 2=\angle 3$.

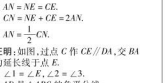
∵AD 是△ABC 的角平分线，

∴$\angle 1=\angle 2$，∴$\angle 3=\angle E$.

∴$AC=AE$.

又∵$AD\parallel CE$，∴$\dfrac{AB}{AE}=\dfrac{BD}{DC}$

即$\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BD}{DC}$



(第 13 题)

阶段核心技巧

1. 证明：(1)在菱形 $ABCD$ 中，$AD=BC$，$AB=CD$，$\angle A=\angle C$.

∵$BE=DF$，∴$AE=CF$.

∴△ADE≌△CBF.

(2)∵△ADE≌△CBF，∴$DE=BF$.

∵在菱形 $ABCD$ 中，$BC=CD$，$AB\parallel CD$，

∴$\dfrac{GE}{DE}=\dfrac{BC}{DC}$，$\dfrac{GF}{BF}=\dfrac{BC}{CD}$

∴$\dfrac{GE}{DE}=\dfrac{GF}{BF}$.

2. 证明：∵$DE\parallel BC$，

∴$\dfrac{PD}{PB}=\dfrac{PE}{PC}$.

∴$PD\cdot PC=PE\cdot PB$.

∵$DF\parallel AC$，

∴$\dfrac{PF}{PC}=\dfrac{PD}{PA}$.

∴$PD\cdot PC=PF\cdot PA$.

∴$PE\cdot PB=PF\cdot PA$.

∴$\dfrac{PE}{PF}=\dfrac{PA}{PB}$.

3. 证明：∵$EF\parallel CD$，

∴$\dfrac{AF}{AD}=\dfrac{AE}{AC}$.

∵$DE\parallel BC$，

∴$\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}$.

∴$\dfrac{AF}{AD}=\dfrac{AD}{AB}$.

4. 证明：(1)∵△ABC 与△DCE 都是等边三角形，

∴$AC=BC$，$CE=CD$，$\angle ACB=\angle DCE=60°$.

∴$\angle ACB+\angle ACD=\angle DCE+\angle ACD$，即 $\angle ACE=\angle BCD$.

∴△ACE≌△BCD(SAS).

(2)∵△ACE≌△BCD，

∴$\angle BDC=\angle AEC$.

又∵$\angle GCD=180°-\angle ACB-\angle DCE=60°=\angle FCE$，$CD=CE$，

∴△GCD≌△FCE(ASA).

∴$CG=CF$.

∴△CFG 为等边三角形.

∴$\angle CFG=60°$.

∵$\angle CFG=\angle DCE$.

∴$GF\parallel CE$.

∴$\dfrac{AG}{GC}=\dfrac{AF}{FE}$

5. 证明：∵$DE\parallel BC$，∴$\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$

∵点 D 为 AB 的中点，

∴$AD=DB$，即$\dfrac{AD}{DB}=1$.

∵$CF\parallel BA$，∴$\dfrac{DE}{EF}=\dfrac{AE}{EC}=\dfrac{AD}{DB}=1$.

∴$DE=EF$.

6. 证明：∵$AC\parallel EF$，∴$\dfrac{BE}{BC}=\dfrac{BF}{BA}$①.

∵$FE\parallel BD$，

∴$\dfrac{AE}{AD}=\dfrac{AF}{AB}$②.　①＋②，得$\dfrac{BE}{BC}+\dfrac{AE}{AD}=\dfrac{BF}{BA}+\dfrac{AF}{BA}=\dfrac{AB}{AB}=1$，

即$\dfrac{AE}{AD}+\dfrac{BE}{BC}=1$.

3 相似以多边形

1. D　**2.** A　**3.** D　**4.** B

5. C　**解析**：∵多边形 $ABCDEF$∽多边形 $A'B'C'D'E'F'$，

∴$\angle A$ 与 $\angle A'$ 是对应角.

∵$\angle A=68°$，∴$\angle A'=\angle A=68°$.

点拨：本题考查的是相似多边形的性质，即相似多边形的对应角相等，对应边成比例.

6. C　**点拨**：∵四边形 $ABCD$ 与四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 相似，∴$\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{CD}{C_1D_1}$.

∵$AB=12$，$CD=15$，$A_1B_1=9$，

∴$C_1D_1=\dfrac{9\times 15}{12}=\dfrac{45}{4}$，故选 C.

7. B　**点拨**：设 $AD=x$，易知 $FD=x-2$，$BE=2$.

∵四边形 $EFDC$ 与矩形 $ABCD$ 相似，

∴$\dfrac{EF}{FD}=\dfrac{AD}{AB}$，即$\dfrac{2}{x-2}=\dfrac{x}{2}$.

解得 $x_1=1+\sqrt{5}$，$x_2=1-\sqrt{5}$(不合题意，舍去)，故选 B.

8. C　**点拨**：边长扩大 3 倍，面积扩大 9 倍.

9. C　**10.** B　**11.** A

12. D　**点拨**：把一个图形按一定比例扩大或缩小，各边都相应地扩大或缩小，各角不变.

13. 解：∵四边形 $ABCD$∽四边形 $EFGH$，

∴$\angle E=\angle A=62°$，$\angle F=\angle B=70°$.

∵$\angle H=140°$，$\angle E+\angle F+\angle G+\angle H=360°$，∴$\angle G=88°$.

∵四边形 $ABCD$∽四边形 $EFGH$，

∴$\dfrac{AD}{EH}=\dfrac{AB}{EF}=\dfrac{BC}{FG}$.

又∵$AD=18$，$EF=15$，$FG=14$，$EH=12$，

∴$AB=22.5$，$BC=21$.

14. 解：(1)∵多边形 $ABCDEF$ 和多边形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 相似，且 $\angle C$ 和 $\angle C_1$，$\angle D$ 和 $\angle D_1$，$\angle E$ 和 $\angle E_1$ 是对应角，

∴$\angle C=95°$，$\angle D=135°$，

$\angle E=120°$.

由多边形内角和定理，知六边形的内角和为 $720°$，∴$\angle C=720°-(135°+120°+95°+135°+120°)=115°$.

(2)∵多边形 $ABCDEF$ 和多边形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的相似比是 1∶1.5，且 $CD=15$ cm，∴$C_1D_1=15\times 1.5=22.5$(cm).

15. (1)证明：∵菱形 $AEFG$∽菱形 $ABCD$，

∴$\angle EAG=\angle BAD$，

∴$\angle EAG+\angle GAB=\angle BAD+\angle GAB$，

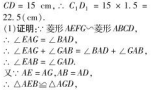
∴$\angle EAB=\angle GAD$.

∵$AE=AG$，$AB=AD$，

∴△AEB≌△AGD，

∴$EB=GD$.

(2)解：如图所示，连接 BD 交 AC 于点 P，则 $BP\perp AC$.



(第 15 题)

∵$\angle DAB=60°$，∴$\angle PAB=30°$，

∴$BP=\dfrac{1}{2}AB=1$，

∴$AP=\sqrt{AB^2-BP^2}=\sqrt{3}$，

又∵$AE=AG=\sqrt{3}$，

∴$EP=2\sqrt{3}$，∴$EB=\sqrt{EP^2+BP^2}=\sqrt{12+1}=\sqrt{13}$，

∴$GD=EB=\sqrt{13}$.

16. 解：(1)如果四周的小路的宽度均相等，那么小路四周所围成的矩形 $A'B'C'D'$ 和矩形 $ABCD$ 相似.理由如下：

∵$\dfrac{30+2a}{30}=\dfrac{15+a}{15}$，$\dfrac{20+2a}{20}=\dfrac{10+a}{10}$，

∴$\dfrac{30+2a}{30}=\dfrac{20+2a}{20}$.

∴小路四周所围成的矩形 $A'B'C'D'$ 和矩形 $ABCD$ 不相似.

(2)当$\dfrac{20+2x}{20}=\dfrac{30+2x}{30}$时，小路四周所围成的矩形 $A'B'C'D'$ 和矩形 $ABCD$ 相似，

化简$\dfrac{20+2x}{20}=\dfrac{30+2y}{30}$，得$\dfrac{x}{y}=\dfrac{2}{3}$.

∴x 与 y 的比值为$\dfrac{2}{3}$时，能使小路四周所围成的矩形 $A'B'C'D'$ 和矩形 $ABCD$ 相似.

4 探索三角形相似的条件

第 1 课时　利用角的关系判定两三角形相似

1. B　**2.** B　**3.** A

4. C　**点拨**：图中三角形有 △AEG，△ADC，△CFG，△CBA. 由 $AD\parallel EF\parallel DC$，$AD\parallel BC$，可得△$ADC$∽△$EFC$∽△$CFG$∽△$CBA$，则相似三角形共有 6 对.

5. B

6. C　**点拨**：∵$\angle ADE=\angle ACB$，$\angle A=\angle A$，∴△ADE∽△ACB.∴$\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{AE}{AB}$，即$\dfrac{2}{4}=\dfrac{AE}{6}$，解得 $AE=3$.

7. C

8. B　**点拨**：∵$\angle C=90°$，$AB=5$，$BC=4$，∴$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=3$.∵$PQ\parallel AB$，∴$\angle ABD=\angle BDQ$，又 $\angle ABD=\angle QBD$，∴$\angle QBD=\angle BDQ$.∴$QB=QD$. 又∵D 为线段 PQ 的中点，∴$QP=2QB$. 由 $PQ\parallel AB$，易得△CPQ∽△CAB.

∴$\dfrac{CP}{CA}=\dfrac{CQ}{CB}=\dfrac{PQ}{AB}$，即$\dfrac{CP}{3}=\dfrac{4-QB}{4}=\dfrac{2QB}{5}$，解得 $CP=\dfrac{24}{13}$.

∴$AP=CA-CP=\dfrac{15}{13}$.

9. D　**点拨**：设 $AF=x$，则 $AC=3x$，利用正方形的性质知 $EF=CF=2x$，再证△AEF∽△ABC，利用相似比得 $BC=6x$，所以 $AB=3\sqrt{3}x=30$，解得 $x=2\sqrt{3}$，再由△ABC 的面积减去正方形 $EFCD$ 的面积即可.

10. 错解：D

诊断：不能准确找出相似三角形的对应边，从而不能准确写出对应线段所成的比例式.

正解：A

11. 证明：(1)∵△ABC 和△DCE 都是等边三角形，

∴$AC=BC$，$CD=CE$，$\angle ACB=\angle DCE=60°$.

∴$\angle ACB+\angle ACE=\angle ACE+\angle DCE$，即 $\angle BCE=\angle ACD$.

在△BCE 和△ACD 中，

$\begin{cases}BC=AC,\\ \angle BCE=\angle ACD,\\ CE=CD,\end{cases}$

∴△BCE≌△ACD(SAS)，

∴$AD=BE$.

(2)由(1)知，△BCE≌△ACD，

∴$\angle CBE=\angle CAD$.

∵$\angle BMC=\angle AMF$，

∴$\angle AFB=\angle ACB=60°=\angle ABC$.

又∵$\angle BAF=\angle DAB$，

∴△ABF∽△ADB.

12. (1)证明：∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$AD\parallel BC$，$AD=BC$.

∵$\angle EBF=\angle AED$，

∴△EBF∽△AED.

∴$\dfrac{BF}{AD}=\dfrac{EB}{EA}=\dfrac{1}{2}$.

∴$BF=\dfrac{1}{2}AD=\dfrac{1}{2}BC$.

∴$BF=CF$.

(2)解：∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$AD\parallel BC$.

∵$\angle FCG=\angle DAG$.

又∵$\angle FGC=\angle DGA$，

∴△FGC∽△DGA.

∴$\dfrac{FG}{DG}=\dfrac{FC}{AD}$，即$\dfrac{FG}{4}=\dfrac{1}{2}$，

解得 $FG=2$.

13. (1)证明：∵$BF\perp DE$，

∴$\angle GFD=90°$.

∵$BCG=90°$，$\angle BGC=\angle DGF$，

∴$\angle CBG=\angle CDE$.

在△BCG 与△DCE 中，

$\begin{cases}\angle CBG=\angle CDE,\\ BC=CD,\\ \angle BCG=\angle DCE=90°,\end{cases}$

∴△BCG≌△DCE(ASA).

∴$BG=DE$.

(2)解：设 $CG=1$，

∵点 G 为 CD 的中点，

∴$GD=CG=1$.

由(1)可知△BCG≌△DCE，

∴$CG=CE=1$.

由勾股定理可知 $DE=BG=\sqrt{5}$.

∵$\angle GDF=\angle EDC$，

$\angle DCE=\angle DFG=90°$，

∴△DGF∽△DEC.

∴$\dfrac{GF}{EC}=\dfrac{DG}{DE}$，即$\dfrac{GF}{1}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

∴$GF=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

∵$AB\parallel CG$，

∴$\angle GCH=\angle HAB$.

∵$\angle BHA=\angle CHG$，

∴△ABH∽△CGH.

∴$\dfrac{AB}{CG}=\dfrac{BH}{GH}=\dfrac{2}{1}$，

∴$BH=\dfrac{2}{3}\sqrt{5}$，$GH=\dfrac{1}{3}\sqrt{5}$.

∴$\dfrac{HG}{GF}=\dfrac{5}{3}$.

14. 解：(1)由旋转知，$AB=AD$，$\angle DAB=90°$，

∴$\angle ABD=\angle ADB=45°$.

由平移知 $DF\parallel AB$，

∴$\angle BDF=\angle ABD$，

∴$\angle BDF=45°$.

(2)由平移知 $EG\parallel AC$，$EG=AC$，

∴四边形 $ACGE$ 是平行四边形.

∵$\angle C=90°$，

∴四边形 $ACGE$ 是矩形，

∴$\angle EAC=90°$，$AE=CG$.

∵$\angle DAB=90°$，

∴$\angle EAB+\angle EAD=\angle CAB+\angle EAB$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \angle DAE = \angle CAB$，

由(1)知 $DF // AB$，

$\therefore \angle EDA + \angle DAB = 180°$，

$\therefore \angle EDA = 90° = \angle EDA = \angle C$，

$\therefore \triangle AED \backsim \triangle ABC$，$\therefore \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AD}{AC}$，

$\therefore \dfrac{AE}{10} = \dfrac{10}{8}$，$\therefore AE = \dfrac{25}{2}$，

$\therefore CG = \dfrac{25}{2}$.

第 2 课时　利用边角关系判定两三角形相似

1. C　**2.** C　**3.** B　**4.** C　**5.** B

6. $DF // AC$(答案不唯一)

7. C

8. C　**点拨**：∵四边形 $EFGB$ 是正方形，$EB = 2$，

$\therefore FG = EB = 2$，$\angle FGB = 90°$.

$\therefore \angle FGN = 90°$.

∵四边形 $ABCD$ 是正方形，H 为 AD 的中点，

$\therefore AD = 4$，$AH = 2$，$\angle BAD = 90°$.

$\therefore HAN = \angle FGN$，$AH = GF$.

又∵ $\angle ANH = \angle GNF$，

$\therefore \triangle ANH \cong \triangle CNF$(AAS)，故①正确.

$\therefore \angle AHN = \angle HFG$.

$\therefore AG = FG = 2 = AH$，

$\therefore AF = \sqrt{2}FG = \sqrt{2}AH$.

$\therefore \angle AFH \neq \angle HFG$.

$\therefore \angle AFN \neq \angle HFG$，故②错误.

$\therefore \triangle ANH \backsim \triangle CNF$，

$\therefore AN = GN = \dfrac{1}{2}AG = 1$.

$\therefore GM = BC = 4$，

$\therefore \dfrac{AH}{AN} = \dfrac{GM}{AG} = 2$.

又∵ $\angle HAN = \angle AGM = 90°$，

$\therefore \triangle AHN \backsim \triangle GMA$.

$\therefore \angle AHN = \angle AMG$.

$\therefore AD // GM$.

$\therefore \angle HAK = \angle AMG$.

$\therefore \angle AHK = \angle HAK$.

$\therefore AK = HK = NK$.

$\therefore \triangle ANH \backsim \triangle GNF$，$\therefore FN = HN$，

$\therefore FN = 2NA$，故③正确.

易知四边形 $ADMG$ 是矩形.

$\therefore DM = AG = 2$.

$\therefore S_{\triangle AFN} = \dfrac{1}{2}AN \cdot FG = \dfrac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1$，$S_{\triangle ADM} = \dfrac{1}{2}AD \cdot DM = \dfrac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$，

$\therefore S_{\triangle AFN} : S_{\triangle ADM} = 1 : 4$，故④正确.

故选 C.

9. $\dfrac{12}{5}$ 或 $\dfrac{5}{3}$　**点拨**：当 $\dfrac{AE}{AD} = \dfrac{AB}{AC}$ 时，

$\because A = A$，$\therefore \triangle AED \backsim \triangle ABC$.

此时 $AE = \dfrac{AB \cdot AD}{AC} = \dfrac{6 \times 2}{5} = \dfrac{12}{5}$.

当 $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{AB}{AD}$ 时，$\because A = A$，

$\therefore \triangle ADE \backsim \triangle ABC$.

此时 $AE = \dfrac{AC \cdot AD}{AB} = \dfrac{5 \times 2}{6} = \dfrac{5}{3}$.

故答案为 $\dfrac{12}{5}$ 或 $\dfrac{5}{3}$.

易错总结：当 $\dfrac{AE}{AD} = \dfrac{AB}{AC}$ 或 $\dfrac{AD}{AE} = \dfrac{AB}{AC}$ 时，以 A，D，E 为顶点的三角形与 $\triangle ABC$ 相似，本题容易考虑问题不全面出现漏解.

10. **证明**：(1)如图，∵四边形 $ABCD$ 为正方形，

$\therefore AB = AD$，$\angle BAD = 90°$.

$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 90°$.

$\because BE \perp AP$，$DF \perp AP$，

$\therefore \angle BEA = \angle AFD = 90°$.

$\therefore \angle 2 + \angle 3 = 90°$，$\therefore \angle 1 = \angle 3$.

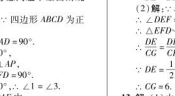
在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle DAF$ 中，

$\begin{cases} \angle BEA = \angle AFD, \\ \angle 1 = \angle 3, \\ AB = DA, \end{cases}$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle DAF$，$\therefore BE = AF$，

$\therefore EF = AF - AE = AE - BE$.

(2)如图，



(第 10 题)

$\because \dfrac{AF}{BF} = \dfrac{DF}{AD}$，

$AF = BE$，

$\therefore \dfrac{BE}{BF} = \dfrac{DF}{AD}$，

$\therefore \dfrac{BE}{DF} = \dfrac{BF}{AD}$.

设 $\dfrac{BE}{BF} = \dfrac{DF}{AD} = k$，则 $BE = kBF$，$DF = kAD$，$\therefore EF = \sqrt{BF^2 - BE^2} = \sqrt{1 - k^2}BF$，$AF = \sqrt{AD^2 - DF^2} = \sqrt{1 - k^2}AD$.

$\therefore \dfrac{EF}{AF} = \dfrac{BF}{AD}$.　$\because \dfrac{BE}{DF} = \dfrac{EF}{AF}$.

又∵ $BEF = \angle AFD = 90°$，

$\therefore \triangle BEF \backsim \triangle DFA$，

$\therefore \angle 4 = \angle 3$.　∵ $\angle 1 = \angle 3$，

$\therefore \angle 4 = \angle 1$.

∵ $\angle 1 + \angle BPA = 90°$，$\angle 5 + \angle BPA = 90°$，$\therefore \angle 5 = \angle 1$，$\therefore \angle 4 = \angle 5$.

即 BE 平分 $\angle FBP$，而 $BE \perp EP$，

$\therefore EF = EP$.

11. **证明**：(1)∵ $\angle ACD = \angle B$，$\angle CAD = \angle BAC$，

$\therefore \triangle ACD \backsim \triangle ABC$.

∵ $AC : AB = AD : AC$.

∵ $AC^2 = AD \cdot AB$.

(2)∵ $\triangle ACD \backsim \triangle ABC$，

$\therefore \angle ADF = \angle ACG$.

又∵ $\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{DF}{CG}$，∴ $\triangle ADF \backsim \triangle ACG$.

∴ $\angle DAF = \angle CAF$，即 $\angle BAG = \angle CAG$.

过点 B 作 $BH \perp AC$，交 AG 的延长线于点 E，则 $\angle E = \angle CAG$.

又∵ $\angle BGE = \angle AGC$，

∴ $\triangle ACG \backsim \triangle EBG$.　∴ $\dfrac{AC}{BE} = \dfrac{CG}{BG}$.

又∵ $\angle BAG = \angle CAG$，∴ $\angle BAG = \angle E$.　∴ $BA = BE$.　∴ $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{CG}{BG}$.

又∵ $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AD}{AC}$，

∴ $\dfrac{DF}{CG} = \dfrac{CG}{BG}$.　∴ $CG^2 = DF \cdot BG$.

12. (1)**证明**：在正方形 $ABCD$ 中，$\angle A = \angle D = 90°$，$AB = AD = CD$.

∴ $AE = ED = \dfrac{1}{2}AB$，$DF = \dfrac{1}{4}AB$.

∵ $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AD}{DF}$.　∴ $\triangle ABE \backsim \triangle DEF$.

(2)解：∵ $AD // CG$，

∴ $\angle DEF = \angle G$，$\angle D = \angle DCG$.

∴ $\triangle EFD \backsim \triangle GFC$.

∴ $\dfrac{DE}{CG} = \dfrac{DF}{CF} = \dfrac{1}{3}$.

∴ $DE = \dfrac{1}{2}AB = 2$，

∴ $CG = 6$.　∴ $BG = 10$.

13. **解**：(1)由题意知，$AB = 10$ cm，$BP = 5t$ cm，$CQ = 4t$ cm，

$BQ = (8 - 4t)$ cm.

当 $\triangle PBQ \backsim \triangle ABC$ 时，有 $\dfrac{PB}{AB} = \dfrac{BQ}{BC}$，

即 $\dfrac{5t}{10} = \dfrac{8 - 4t}{8}$.

解得 $t = 1$.

当 $\triangle QBP \backsim \triangle ABC$ 时，有 $\dfrac{QB}{AB} = \dfrac{BP}{BC}$，

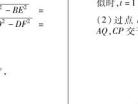
即 $\dfrac{8 - 4t}{10} = \dfrac{5t}{8}$，



解得 $t = \dfrac{32}{41}$.

∴ 当 $\triangle BPQ$ 与 $\triangle ABC$ 相似时，$t = 1$ 或 $t = \dfrac{32}{41}$.

(2)过点 P 作 $PM \perp BC$ 于点 M，设 AQ，CP 交于点 N，如图所示.



(第 13 题)

易知 $\triangle BMP \backsim \triangle BCA$，

∴ $\dfrac{BP}{BA} = \dfrac{PM}{AC} = \dfrac{BM}{BC}$，∴ $\dfrac{5t}{10} = \dfrac{PM}{6} = \dfrac{BM}{8}$.

∴ $PM = 3t$ cm，$BM = 4t$ cm，

则 $CM = (8 - 4t)$ cm.

∵ $AQ \perp PC$，∴ $\angle ANC = 90°$.

∵ $\angle QAC + \angle NCA = 90°$，

∵ $\angle PCM + \angle NCA = 90°$，

∴ $\angle QAC = \angle PCM$.

又∵ $\angle ACQ = \angle PMC = 90°$，

∴ $\triangle ACQ \backsim \triangle CMP$.

∴ $\dfrac{AC}{CM} = \dfrac{CQ}{MP}$，∴ $\dfrac{6}{8 - 4t} = \dfrac{4t}{3t}$.

解得 $t = \dfrac{7}{8}$.

第 3 课时　利用三边关系判定两三角形相似

1. B　**2.** D　**3.** C　**4.** D

5. B　**点拨**：分以下两种情况讨论：

(1)若截 45 cm 的铝材，设截下的两段长分别为 x cm，y cm($x < y$)，由题意得 $\dfrac{24}{x} = \dfrac{30}{y} = \dfrac{36}{27}$.　①或 $\dfrac{24}{x} = \dfrac{30}{27} = \dfrac{36}{y}$.　②(注：27 cm 不可能是最小边长)，由①解得 $x = 18$，$y = 22.5$，符合题意，由②解得 $x = \dfrac{108}{5}$，$y = \dfrac{162}{5}$，则 $x + y = \dfrac{108}{5} + \dfrac{162}{5} = \dfrac{270}{5} = 54 > 45$，不合题意，舍去.

(2)若截 27 cm 的铝材，设截下的两段长分别为 a cm，b cm($a < b$)，由题意得 $\dfrac{24}{a} = \dfrac{30}{b} = \dfrac{36}{45}$(注：45 cm 只能是最大边长)，解得 $a = 30$，$b = 37.5$，而 $a + b = 30 + 37.5 = 67.5 > 27$，不合题意，舍去. 综上可知，截法只有 1 种.

6. C　**点拨**：设网格中每个小正方形的边长为 1. 由题图①中的三角形的各边长分别为 $2\sqrt{2}$，$\sqrt{10}$，③中的三角形的各边长分别为 $2\sqrt{2}$，2，$2\sqrt{5}$，∵ $\dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{10}}{2\sqrt{5}}$，∴ 两个三角形的三边对应成比例，∴ ①和③相似. 故选 C.

7. C

8. B　**点拨**：设各个小正方形的边长为 1，则“帅”“相”“兵”所在位置的格点构成的三角形的三边长分别为 2，$2\sqrt{5}$，$4\sqrt{2}$. “车”与“炮”之间的距离为 1，“炮”与②之间的距离为 $\sqrt{5}$，“车”与②之间的距离为 $2\sqrt{2}$，∴ $\dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$，∴ “马”应该落在②处.

9. B　**点拨**：当直角三角形的直角边长分别为 6，8，且另一个与它相似的直角三角形的直角边长分别为 3，4 时，x 的值为 5；当 8，4 为对应边的长且为两直角三角形的斜边长时，x 的值为 $\sqrt{7}$，故 x 的值可以为 5 或 $\sqrt{7}$. 此题易忽略第二种情况.

10. **证明**：∵ $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{BC}{DE} = \dfrac{AC}{AE}$，

∴ $\triangle ABC \backsim \triangle ADE$.

∴ $\angle BAC = \angle DAE$.

∴ $\angle BAC - \angle CAD = \angle DAE - \angle CAD$，

即 $\angle BAD = \angle CAE$.

11. **证明**：设正方形 $ABCD$ 的边长为 a，

∴ $AD = BC = CD = a$.

设∵ Q 是 CD 的中点，

∴ $DQ = CQ = \dfrac{1}{2}a$.

∵ $BP = 3PC$，∴ $PC = \dfrac{1}{4}a$.

∴ $AQ = \sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{5}a}{2}$，$PQ = \sqrt{\dfrac{a^2}{4} + \dfrac{a^2}{16}} = \dfrac{\sqrt{5}a}{4}$.

∴ $\dfrac{AD}{CQ} = \dfrac{DQ}{PC} = \dfrac{AQ}{PQ} = 2$.

∴ $\triangle ADQ \backsim \triangle QCP$.

12. **解**：(1) $\triangle ACF \backsim \triangle GCA$. 理由：可设正方形 $ABCD$，正方形 $CDEF$，正方形 $EFGH$ 的边长为 a，则 $\triangle ACF$ 的三边长分别为 $AC = \sqrt{2}a$，$CF = a$，$AF = \sqrt{5}a$，$\triangle ACG$ 的三边长分别为 $AC = \sqrt{2}a$，$CG = 2a$，$AG = \sqrt{10}a$.

∴ $\dfrac{CF}{AC} = \dfrac{a}{\sqrt{2}a} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\dfrac{AC}{CG} = \dfrac{\sqrt{2}a}{2a} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\dfrac{AF}{AG} = \dfrac{\sqrt{5}a}{\sqrt{10}a} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

∴ $\dfrac{CF}{AC} = \dfrac{AC}{CG} = \dfrac{AF}{AG}$.

∴ $\triangle ACF \backsim \triangle GCA$.

(2)∵ $\triangle ACF \backsim \triangle GCA$，

∴ $\angle 1 = \angle CAF$.

∴ $\angle 1 + \angle 2 = \angle CAF + \angle 2 = \angle ACB = 45°$.

13. (1)**证明**：根据勾股定理，得 $AB = 2\sqrt{5}$，$AC = \sqrt{5}$，$BC = 5$.

显然有 $AB^2 + AC^2 = BC^2$，

根据勾股定理的逆定理得 $\triangle ABC$ 为直角三角形.

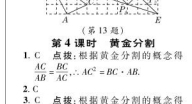
(2)解：$\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 相似.

理由如下：根据勾股定理，得 $AB = 2\sqrt{5}$，$AC = \sqrt{5}$，$BC = 5$，$DE = 4\sqrt{2}$，$DF = 2\sqrt{2}$，$EF = 2\sqrt{10}$.

∴ $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{\sqrt{10}}{4}$.

∴ $\triangle ABC \backsim \triangle DEF$.

(3)解：如图，连接 P_1P_2，P_2P_4，P_4P_5，则 $\triangle P_1P_2P_4$ 符合要求.



(第 13 题)

第 4 课时　黄金分割

1. C　**点拨**：根据黄金分割的概念得 $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{BC}{AC}$，∴ $AC^2 = BC \cdot AB$.

2. C

3. C　**点拨**：根据黄金分割的概念得 $AC = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}AB = 4(\sqrt{5} - 1)$ cm.

4. D

5. A　**点拨**：如图所示，$AP < BP$，



(第 5 题)

∴ $BP = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}AB = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2} \times 12 = (6\sqrt{5} - 6)$ 米，

∴ $AP = AB - BP = (18 - 6\sqrt{5})$ 米.

故选 A.

6. (1)**证明**：∵ $AC = 36°$，$AB = AC$，

∴ $\angle ABC = \angle C = 72°$.

又∵ BD 平分 $\angle ABC$，

∴ $\angle DBC = \angle ABD = 36°$.

在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle BDC$ 中，$\angle A = \angle DBC$，$\angle C = \angle C$，

∴ $\triangle ABC \backsim \triangle BDC$.

∴ $\dfrac{DC}{BC} = \dfrac{BC}{AC}$，即 $BC^2 = DC \cdot AC$.

易得 $\angle C = \angle BDC = 72°$.

又∵ $\angle A = \angle ABD = 36°$，

∴ $BC = BD = AD$，∴ $AD^2 = DC \cdot AC$.

∴ 点 D 是线段 AC 的黄金分割点.

(2)解：设 $AC = x$. 由(1)中的结论得，$(\sqrt{5} - 1)^2 = x(x - \sqrt{5} + 1)$，即 $x^2 - (\sqrt{5} - 1)x + 2\sqrt{5} - 6 = 0$，解得 $x_1 = 2$，$x_2 = \sqrt{5} - 3$(舍去)，∴ $AB = AC = 2$.

7. **解**：(1)∵ 正方形 $ABCD$ 的边长是 2，点 P 是 AB 的中点，

∴ $AB = AD = 2$，$AP = 1$，$\angle BAD = 90°$.

∴ $PD = \sqrt{AP^2 + AD^2} = \sqrt{5}$.

∴ $PF = PD$，∴ $AF = \sqrt{5} - 1$.

在正方形 $AMEF$ 中，$AM = AF = \sqrt{5} - 1$，

∴ $DM = AD - AM = 3 - \sqrt{5}$.

(2)点 M 是线段 AD 的黄金分割点.

理由如下：由(1)得 $AD \cdot DM = 2(3 - \sqrt{5}) = 6 - 2\sqrt{5}$，$AM^2 = (\sqrt{5} - 1)^2 = 6 - 2\sqrt{5}$，∴ $AM^2 = AD \cdot DM$.

∴ 点 M 是 AD 的黄金分割点.

*5　相似三角形判定定理的证明

1. (1)75；$4\sqrt{3}$　**点拨**：∵ $BD // AC$，

∴ $\angle ADB = \angle OAC = 75°$.

∵ $BOD = \angle COA$，

∴ $\triangle BOD \backsim \triangle COA$，

∴ $\dfrac{OD}{OA} = \dfrac{OB}{OC} = \dfrac{1}{3}$.

又∵ $AO = 3\sqrt{3}$，

∴ $OD = \dfrac{1}{3}AO = \sqrt{3}$，

∴ $AD = AO + OD = 4\sqrt{3}$.

∵ $\angle BAD = 30°$，$\angle ADB = 75°$，

∴ $\angle ABD = 180° - \angle BAD - \angle ADB = 75° = \angle ADB$.

∴ $AB = AD = 4\sqrt{3}$.

(2)解：过点 B 作 $BE // AD$ 交 AC 于点 E，如图所示.

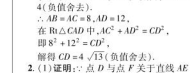
∵ $AC \perp AD$，$BE // AD$，

∴ $DAC = \angle BEA = 90°$.

∵ $AOD = \angle EOB$，

∴ $\triangle AOD \backsim \triangle EOB$，

∴ $\dfrac{BO}{DO} = \dfrac{EO}{AO} = \dfrac{BE}{AD}$.



(第 1 题)

∵ $BO : OD = 1 : 3$，

∴ $\dfrac{EO}{AO} = \dfrac{BE}{AD} = \dfrac{1}{3}$.

∵ $AO = 3\sqrt{3}$，

∴ $EO = \sqrt{3}$，

∴ $AE = 4\sqrt{3}$.

∵ $ABC = \angle ACB = 75°$，

∴ $BAC = 30°$，$AB = AC$，

∴ $AB = 2BE$.

在 Rt $\triangle AEB$ 中，$AE^2 + BE^2 = AB^2$，即 $(4\sqrt{3})^2 + BE^2 = (2BE)^2$，解得 $BE = 4$(负值舍去).

∴ $AB = AC = 8$，$AD = 12$，

在 Rt $\triangle CAD$ 中，$AC^2 + AD^2 = CD^2$，即 $8^2 + 12^2 = CD^2$，

解得 $CD = 4\sqrt{13}$(负值舍去).

2. (1)**证明**：∵ 点 D 与点 F 关于直线 AE 对称，∴ $AD = AF$，$\angle DAE = \angle FAE = \alpha$.

∵ $DAF = 2\alpha = \angle BAC$.

∴ $AB = AC$，$AD = AF$，

∴ $\dfrac{AB}{AF} = \dfrac{AC}{AD} = 1$.

∴ $\triangle ADF \backsim \triangle ABC$.

(2)**证明**：∵ $\angle DAF = 2\alpha = \angle BAC$，

∴ $\angle DAF - \angle DAC = \angle BAC - \angle DAC$，

即 $\angle BAD = \angle CAF$.

又∵ $AB = AC$，$AD = AF$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAF$.

$\because BD = CF, \angle ACF = \angle ABD$.

$\because \angle BAC = 2\alpha = 2 \times 45^\circ = 90^\circ$,

$AB = AC$,

$\therefore \angle ABD = \angle ACB = 45^\circ$.

$\therefore \angle ACF = 45^\circ$.

$\therefore \angle ECF = \angle ACB + \angle ACF = 90^\circ$.

$\therefore EF^2 = CE^2 + CF^2$.

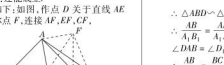
$\because D$ 点与点 F 关于直线 AE 对称，

$\therefore DE = EF$.

$\therefore DE^2 = BD^2 + CE^2$.

(3)**解**：还能成立.

理由如下：如图，作点 D 关于直线 AE 的对称点 F，连接 AF，EF，CF，



（第 2 题）

$\therefore AD = AF, DE = EF$,

$\angle FAE = \angle DAE = \alpha$,

$\therefore \angle DAF = 2\alpha = \angle BAC$.

$\therefore \angle DAF - \angle DAC = \angle BAC - \angle DAC$,

即 $\angle CAF = \angle BAD$.

又$\because AB = AC, AD = AF$,

$\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAF$.

$\therefore BD = CF, \angle ACF = \angle ABD$.

$\because \angle BAC = 2\alpha = 2 \times 45^\circ = 90^\circ, AB = AC$,

$\therefore \angle ABD = \angle ACB = 45^\circ$.

$\therefore \angle ACF = 45^\circ$.

$\therefore \angle ECF = 180^\circ - \angle ACB - \angle ACF = 90^\circ$.

$\therefore EF^2 = CF^2 + CE^2$.

$\therefore EF = DE, CF = BD$,

$\therefore DE^2 = BD^2 + CE^2$.

3. (1)**证明**：$\because D, E$ 分别是线段 AC, BC 的中点，

$\therefore DE$ 为 $\triangle ABC$ 的中位线，

$\therefore DE // AB$，即 $EG // AB$，

$\therefore \angle FDG = \angle A$.

$\because F$ 为线段 AD 的中点，

$\therefore AF = DF$.

在 $\triangle ABF$ 与 $\triangle DGF$ 中，

$$\begin{cases} \angle A = \angle FDG, \\ AF = DF, \\ \angle AFB = \angle DFG, \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABF \cong \triangle DGF$（ASA），

$\therefore AB = GD$.

(2)**解**：$\because DE$ 为 $\triangle ABC$ 的中位线，

$\therefore DE = \frac{1}{2}AB$.

$\therefore DG = AB$,

$\therefore EG = DE + DG = \frac{3}{2}AB$.

$\therefore DE // AB$,

$\therefore \angle GEC = \angle CBA$.

$\therefore AC = BC, CG = EC$,

$\therefore \angle CGE = \angle GEC = \angle CBA = \angle A$,

$\therefore \triangle GEC \sim \triangle CBA$,

$\therefore \frac{CE}{AB} = \frac{EG}{BC}$

$\because CE = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AC$,

$\therefore \frac{\frac{1}{2}AC}{AB} = \frac{\frac{3}{2}AB}{AC}$，$\therefore \frac{AC}{AB} = \sqrt{3}$.

4. (1)①假；②假；③真

(2)**证明**：如图，连接 BD, B_1D_1，

$\because \angle BCD \sim \angle B_1C_1D_1$，$\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1}$，

$\therefore \triangle BCD \sim \triangle B_1C_1D_1$，

$\therefore \angle CBD = \angle C_1B_1D_1$，$\angle CDB = \angle C_1D_1B_1$，$\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{BD}{B_1D_1}$.

又$\because \angle ABC = \angle A_1B_1C_1$，$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$，

$\therefore \angle ABD = \angle A_1B_1D_1$，$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BD}{B_1D_1}$.

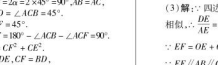
$\therefore \triangle ABD \sim \triangle A_1B_1D_1$.

$\therefore \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AD}{A_1D_1}$，$\angle ADB = \angle A_1D_1B_1$，

$\angle DAB = \angle D_1A_1B_1$.

$\therefore \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{AD}{A_1D_1}$，$\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$，$\angle BCD = \angle B_1C_1D_1$，$\angle ADC = \angle A_1D_1C_1$，$\angle DAB = \angle D_1A_1B_1$.

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 与四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 相似.



（第 4 题）

(3)**解**：$\because$ 四边形 $ABFE$ 与四边形 $EFCD$ 相似，$\therefore \frac{DE}{AE} = \frac{EF}{AB}$.

$\therefore EF = OE + OF$，$\therefore \frac{DE}{AE} = \frac{OE + OF}{AB}$.

$\therefore EF // AB // CD$，

$\therefore \frac{DE}{AD} = \frac{OE}{AC} = \frac{OF}{AB}$.

$\therefore \frac{DE}{AD} = \frac{AE}{AD} - \frac{OE}{AB} = \frac{AB}{AB} - \frac{OF}{AB}$.

$\therefore \frac{2DE}{AD} = \frac{AE}{AB} = \frac{DE}{AE}$.

$\therefore AD = DE + AE$，

$\therefore \frac{2}{DE + AE} = \frac{1}{AE}$.

$\therefore 2AE = DE + AE$，

即 $AE = DE$.

$\therefore \frac{S_2}{S_1} = 1$.



阶段核心归类

1. (1)**证明**：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore OA = OC, AB // CD$.

$\therefore \angle OAE = \angle OCF$.

在 $\triangle AOE$ 和 $\triangle COF$ 中，

$$\begin{cases} \angle OAE = \angle OCF, \\ OA = OC, \\ \angle AOE = \angle COF, \end{cases}$$

$\therefore \triangle AOE \cong \triangle COF$（ASA）.

$\therefore OE = OF$.

(2)**解**：如图，过点 O 作 $ON // BC$ 交 AB 于点 N，易得 $\triangle AON \sim \triangle ACB$.

$\therefore \frac{OA}{AC} = \frac{ON}{BC} = \frac{AN}{AB}$.

$\therefore OA = OC$,

$\therefore ON = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AD = 2$,



（第 1 题）

$BN = \frac{1}{2}AB = 3$.

$\because ON // BC, \therefore \angle ONE = \angle MBE$.

又$\because \angle OEN = \angle MEB$,

$\therefore \triangle ONE \sim \triangle MBE$.

$\therefore \frac{ON}{BM} = \frac{NE}{BE}$，即 $\frac{2}{1} = \frac{3 - BE}{BE}$，

解得 $BE = 1$.

2. **解**：相似. 理由如下：$\because \frac{EO}{BO} = \frac{DO}{CO}$，

$\angle BOE = \angle COD, \angle DOE = \angle COB$，

$\therefore \triangle BOE \sim \triangle COD, \triangle DOE \sim \triangle COB$.

$\therefore \angle EBO = \angle DCO, \angle DEO = \angle CBO$.

$\because \angle ADE = \angle DCO + \angle DEO$，

$\angle ABC = \angle EBO + \angle CBO$，

$\therefore \angle ADE = \angle ABC$.

又$\because \angle A = \angle A, \therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$.

3. **证明**：$\because \angle BAC = 90^\circ, AD \perp BC$，

$\therefore \angle BAC = \angle ADB = 90^\circ$.

又$\because \angle CBA = \angle ADO$（公共角），

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle DBA$.

$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DA}$，$\angle BAD = \angle C$.

$\because AD \perp BC, E$ 为 AC 的中点，

$\therefore DE = EC$，$\therefore \angle BDE = \angle CDE = \angle C$.

$\therefore \angle BDF = \angle BAD$.

又$\because \angle F = \angle F$，

$\therefore \triangle DBF \sim \triangle ADF$.

$\therefore \frac{DB}{AD} = \frac{DF}{AF}$.

$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{DF}{AF}$.



（第 3 题）

点拨：当所证等积式或比例式运用“三点定型法”不能定型或能定型而不相似，条件又不具备或比例线段时，可考虑用中间比“搭桥”，称为“等比替换法”，有时还可用“等积替换法”，例如：如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AD \perp BC$ 于点 D，$DE \perp AB$ 于点 E，$DF \perp AC$ 于点 F，求证：$AE \cdot AB + AF \cdot AC$ 可由两组“射影图”得 $AE \cdot AB = AD^2$，$AF \cdot AC = AD^2$，$\therefore AE \cdot AB = AF \cdot AC$.

4. **证明**：(1)$\because \angle DAB = \angle EAC$，

$\therefore \triangle DAE \sim \triangle BAC$.

又$\because \angle ADE = \angle ABC, \therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$.

(2)$\because \triangle ADE \sim \triangle ABC, \therefore \frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC}$.

$\therefore \angle DAB = \angle EAC, \therefore \triangle ADB \sim \triangle AEC$.

$\therefore \frac{AD}{AE} = \frac{BD}{CE}$.

5. (1)**证明**：$\because \angle A = \angle B = \angle DEC = 90^\circ$，

$\therefore \angle DEA + \angle CEB = 90^\circ, \angle DEA + \angle D = 90^\circ$，

$\therefore \angle D = \angle CEB$，

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle BEC$.

(2)**解**：同意，选择图②（或图③）说明理由：

$\because \angle A = \angle B = \angle DEC, \angle A + \angle D = \angle DEC + \angle CEB$，

$\therefore \angle D = \angle CEB, \therefore \triangle ADE \sim \triangle BEC$.

6 利用相似三角形测高

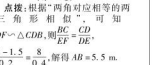
1. B

2. C **点拨**：如图，设 BD 是 BC 在地面上的影子，设树高为 x m. 根据竹竿的高与其影子长度的比值和树高与其影子长度的比值相等，得 $\frac{CE}{BD} = \frac{1}{0.8}$，而 $CE = 1.2$ m，$\therefore BD = 0.96$ m.

$\because$ 树在地面上的实际影长是 $0.96 + 2.6 = 3.56$(m)，

则 $\frac{x}{3.56} = \frac{1}{0.8}$，$\therefore x = 4.45$.

$\therefore$ 树高是 4.45 m.



（第 2 题）

3. 5.5 **点拨**：根据“两角对应相等的两个三角形相似”，可知 $\triangle EDF \sim \triangle CDB$，则 $\frac{BC}{EF} = \frac{CD}{DE}$，

即 $\frac{AB - 1.5}{0.2} = \frac{8}{0.4}$，解得 $AB = 5.5$ m.

4. B **5**. C **6**. 8 m

7. A **点拨**：由题意知 $\angle AGC = \angle FGE$，

$\because \angle ACG = \angle FEG = 90^\circ$，

$\therefore \triangle ACG \sim \triangle FEG$.

$\therefore \frac{AC}{FE} = \frac{CG}{EG}$，即 $\frac{AC}{1.6} = \frac{15}{3}$，$\therefore AC = 8$ m.

$\therefore AB = AC + BC = 8 + 0.5 = 8.5$(m).

8. 解：设 $OE = x$ m，$OA = a$ m，$BC = b$ m，则 $AB = (2 - b)$ m，$CD = (2.1 - b)$ m，$CO = (2 + a)$ m.

由光的反射原理可知 $\triangle AFB \sim \triangle AEO$，$\triangle CDC \sim \triangle COE$，

$\therefore \frac{BF}{OE} = \frac{AB}{OA}$，即 $\frac{1.6}{x} = \frac{2 - b}{a}$，①

$\frac{DG}{OE} = \frac{CD}{CO}$，即 $\frac{1.6}{x} = \frac{2.1 - b}{2 + a}$，②

由①②得 $a = 20(2 - b)$，③

将③代入①，得 $\frac{1.6}{x} = \frac{2 - b}{20(2 - b)}$，解得 $x = 32$.

答：楼的高度 OE 为 32 m.

9. 解：(1)设楼前的影长为 x cm.

由题意得 $\frac{150}{x} = \frac{90}{60}$，

解得 $x = 100$.

经检验，$x = 100$ 是分式方程的解.

答：楼前的影长为 100 cm.

(2)如图，连接 AE，作 $FB // EA$，交 AC 于 B.



（第 9 题）

$\therefore AB // EF$，

$\therefore$ 四边形 $ABFE$ 是平行四边形.

$\therefore AB = EF = 150$ cm.

设 $BC = y$ cm，由题意知 BC 落在地面上的影长为 120 cm，

$\therefore \frac{y}{120} = \frac{90}{60}$，解得 $y = 180$.

$\therefore AC = AB + BC = 150 + 180 = 330$(cm).

答：高国柱的高度为 330 cm.

10. **解**：(1)如图，沿着旗杆的影子竖立标杆，使标杆影子的顶端正好与旗杆影子的顶端重合.



（第 10 题）

(2)用皮尺测量旗杆的影长 $BE = a$ m，标杆 CD 的影长 $DE = b$ m，标杆高 $CD = c$ m.

根据 $\triangle EBA \sim \triangle EDA$，得 $\frac{CD}{AB} = \frac{ED}{EB}$，

即 $\frac{c}{AB} = \frac{b}{a}$，所以 $AB = \frac{ac}{b}$ m，

即旗杆 AB 的高为 $\frac{ac}{b}$ m.（设计方案不唯一）

11. **解**：由题意得 $\angle CAD = \angle MND = 90^\circ$，$\angle CDA = \angle MDN$，

$\therefore \triangle CAD \sim \triangle MND$. $\therefore \frac{CA}{MN} = \frac{AD}{ND}$.

$\therefore \frac{1.6}{MN} = \frac{1 \times 0.8}{(5 + 1) \times 0.8}$.

$\therefore MN = 9.6$ m.

又$\because \angle EBF = \angle MNF = 90^\circ, \angle EFB = \angle MFN$，

$\therefore \triangle EFB \sim \triangle MFN$. $\therefore \frac{EB}{MN} = \frac{BF}{NF}$.

$\therefore \frac{EB}{9.6} = \frac{2 \times 0.8}{(2 + 9) \times 0.8}$.

$\therefore EB = 1.75$ m.

$\therefore$ 小华的身高 EB 约为 1.75 m.

7 相似三角形的性质

1. A **2**. C **3**. A **4**. B **5**. C **6**. A

7. 10

8. C **点拨**：$\because \angle CAD = \angle B, \angle ACD = \angle BCA$，

$\therefore \triangle ACD \sim \triangle BCA$.

$\therefore \frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle BCA}} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2$，即 $\frac{a}{S_{\triangle BCA}} = \frac{1}{4}$，

则 $S_{\triangle BCA} = 4a$.

$\because S_{\triangle ABD} = S_{\triangle BCA} - S_{\triangle ACD} = 4a - a = 3a$.

9. C

10. B **点拨**：在 $\triangle ABCD$ 中，$\angle BAD = \angle BCD = 60^\circ$，$\angle ADC = 120^\circ$.

$\because DE$ 平分 $\angle ADC$，

$\therefore \angle ADE = \angle CDE = 60^\circ = \angle AED$，

$\therefore \triangle ADE$ 是等边三角形，

$\therefore AD = AE = DE$. $\because AD = \frac{1}{2}AB$，

$\therefore AE = \frac{1}{2}AB = BE$，

$\therefore DE = BE$，$\therefore \angle BDE = \angle DBE$，

$\therefore \angle BDE = \frac{1}{2}\angle AED = 30^\circ$.

$\therefore \angle ADB = 90^\circ$，即 $AD \perp BD$，

$\because S_{\triangle BCD} = CD \cdot BD$，故①正确；

$\because \angle CDE = 60^\circ, \angle BDE = 30^\circ$，

$\therefore \angle CDB = \angle BDE = 30^\circ$，

$\therefore DB$ 平分 $\angle CDE$，故②正确；

$\because$ 在 $\text{Rt}\triangle AOD$ 中，$AO > AD$，

$\therefore AO > DE$，故③错误；

$\because$ 仅当 BD 的中点 E 是 AB 的中点，

$\therefore OE$ 是 $\triangle ABD$ 的中位线，

$\therefore OE // AD, OE = \frac{1}{2}AD$，

$\therefore \triangle DAF \sim \triangle FOE, \triangle ADF \sim \triangle OEF$，

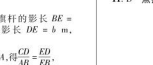
$\therefore \triangle DEF \sim \triangle ADF$，

$\because S_{\triangle ADF} = 4S_{\triangle OEF}$，且 $AF = 2OF$，

$\therefore S_{\triangle ADF} = 2S_{\triangle DEF}$，

$\therefore S_{\triangle DEF} = 6S_{\triangle OEF}$，故④错误. 故选 B.

11. D **点拨**：如图所示.



（第 11 题）

根据题意得 $\triangle AFH \sim \triangle ADE$，

$\therefore \frac{S_{\triangle AFH}}{S_{\triangle ADE}} = \left(\frac{FH}{DE}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$，

设 $S_{\triangle AFH} = 9x$，则 $S_{\triangle ADE} = 16x$，

$\therefore 16x - 9x = 7$，解得 $x = 1$.

$\therefore S_{\triangle ADE} = 16$.

$\because$ 四边形 $DBEF$ 的面积为 $42 - 16 = 26$.

本题易忽略相似三角形性质的适用条件而致错.

12. (1)**证明**：$\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形，

$\therefore BD$ 平分 $\angle ABC$，

$\therefore \angle ABC = 2\angle ABM$.

又$\because \angle ABC = 2\angle BAM$，

$\therefore \angle BAG = \angle ABG$.

$\therefore AG = BG$.

(2)**解**：$\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形，

$\therefore AD // BC$ 且 $AD = BC$.

$\therefore \angle GAD = \angle BGM$，

$\therefore \triangle BGM \sim \triangle DGA$.

$\therefore M$ 为 BC 的中点，

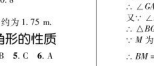
$\therefore BM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AD$.

即 $\triangle BGM$ 与 $\triangle DGA$ 的相似比为 1∶2，

$\therefore S_{\triangle BGM} : S_{\triangle DGA} = 1 : 4$.

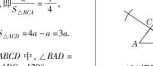
$\because S_{\triangle BGM} = 1$，$\therefore S_{\triangle DGA} = 4$.

13. (1)**解**：如图①所示.



（第 13 题①）

(2)**证明**：如图②所示.



（第 13 题②）

$\because D, E, F$ 分别是 $\triangle ABC$ 三边 AB, BC, AC 的中点，

$\therefore DE = \frac{1}{2}AC, DF = \frac{1}{2}BC, EF = \frac{1}{2}AB$.

$\therefore \triangle DEF \sim \triangle CAB$.

同理，$\triangle D'E'F' \sim \triangle C'A'B'$.

由(1)可知 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$，

$\therefore \triangle DEF \sim \triangle D'E'F'$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

14. 解：问题 1：

(1) $\frac{3}{16}$　**点拨：**$\because AB=4, AD=3$，

$\therefore BD=4-3=1$.

$\because DE/\!/BC$，

$\therefore \frac{CE}{EA}=\frac{BD}{AD}=\frac{1}{3}$，

$\therefore \frac{S_{\triangle DEC}}{S_{\triangle ADC}}=\frac{EC}{AE}=\frac{1}{3}$.

$\because DE/\!/BC, \therefore \angle ADE=\angle B$.

又$\because \angle A=\angle A$，

$\therefore \triangle ADE\backsim\triangle ABC$，

$\therefore \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=\left(\frac{AD}{AB}\right)^2=\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$，

$\therefore \frac{S_{\triangle DEC}}{S_{\triangle ADC}}=\frac{3}{16}$，即$\frac{S'}{S}=\frac{3}{16}$.

(2) 方法一：$\because AB=4, AD=m$，

$\therefore BD=4-m$.

$\because DE/\!/BC$，

$\therefore \frac{CE}{EA}=\frac{BD}{AD}=\frac{4-m}{m}$，

$\therefore \frac{S_{\triangle DEC}}{S_{\triangle ADC}}=\frac{CE}{AE}=\frac{4-m}{m}$.

$\because \triangle ADE\backsim\triangle ABC$，

$\therefore \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=\left(\frac{AD}{AB}\right)^2=\left(\frac{m}{4}\right)^2=\frac{m^2}{16}$，

$\therefore \frac{S_{\triangle DEC}}{S_{\triangle ADC}}=\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{4-m}{m}$，

$\frac{m^2}{16}=\frac{-m^2+4m}{16}$，

即$\frac{S'}{S}=\frac{-m^2+4m}{16}$.

方法二：如图①，过点 B 作 $BH\perp AC$ 于 H，过点 D 作 $DF\perp AC$ 于 F，则 $DF/\!/BH$，$\angle BHA=90°$.

又$\because \angle A=\angle A$，

$\therefore \triangle ADF\backsim\triangle ABH$，

$\therefore \frac{DF}{BH}=\frac{AD}{AB}=\frac{m}{4}$.

$\because DE/\!/BC, \therefore \frac{CE}{AC}=\frac{BD}{AB}=\frac{4-m}{4}$，

$\therefore \frac{S_{\triangle DEC}}{S_{\triangle ADC}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot CE\cdot DF}{\frac{1}{2}\cdot CA\cdot BH}=\frac{4-m}{4}\times\frac{m}{4}=\frac{-m^2+4m}{16}$，

即$\frac{S'}{S}=\frac{-m^2+4m}{16}$.


第14题图①②




③

(第 14 题)

问题 2：

方法一：如图②，分别延长 BA，CD 交于点 O，

$\because AD/\!/BC, \therefore \angle OAD=\angle B$.

$\because \angle O=\angle O, \therefore \triangle OAD\backsim\triangle OBC$，

$\therefore \frac{OA}{OB}=\frac{AD}{BC}=\frac{1}{2}$，

$\therefore OA=AB=4, \therefore OB=8$.

$\because AE=n, \therefore OE=4+n$.

$\because EF/\!/BC$，

$\therefore$ 由问题 1 的解法可知，$\frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle OBC}}=\frac{S_{\triangle OEF}}{S_{\triangle OBC}}=\frac{4-n}{4+n}=\left(\frac{4+n}{8}\right)^2=\frac{16-n^2}{64}$.


(第 9 题)

$\therefore \frac{S_{\triangle OAD}}{S_{\triangle OBC}}=\left(\frac{OA}{OB}\right)^2=\frac{1}{4}$，

$\therefore \frac{S_{四边形ABCD}}{S_{\triangle OBC}}=\frac{3}{4}$，

$\therefore \frac{S_{\triangle CEF}}{S_{四边形ABCD}}=\frac{S_{\triangle CEF}}{\frac{3}{4}S_{\triangle OBC}}=\frac{4}{3}\times\frac{16-n^2}{64}=\frac{16-n^2}{48}$，即$\frac{S'}{S}=\frac{16-n^2}{48}$.

方法二：如图③，连接 AC 交 EF 于 M，

$\because AD/\!/BC$，且 $AD=\frac{1}{2}BC$，

$\therefore \frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle BDC}}=\frac{1}{2}$，

$\therefore S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}S_{\triangle BDC}$，

$\therefore S_{\triangle ADC}=\frac{1}{3}S, S_{\triangle BDC}=\frac{2}{3}S$.

由问题 1 的结论可知，$\frac{S_{\triangle EMC}}{S_{\triangle ADC}}=\frac{-n^2+4n}{16}$，$\therefore S_{\triangle EMC}=\frac{-n^2+4n}{16}$，$\frac{2}{3}S=\frac{(-2n^2+8n)S}{48}$.

$\because EF/\!/BC, \therefore \frac{CF}{CD}=\frac{BE}{BA}=\frac{4-n}{4}$，

$\because MF/\!/AD, \therefore \angle CFM=\angle D$.

又$\because \angle MCF=\angle MCD$，

$\therefore \triangle CFM\backsim\triangle CDA$，

$\therefore \frac{S_{\triangle CFM}}{S_{\triangle CDA}}=\left(\frac{CF}{CD}\right)^2=\left(\frac{4-n}{4}\right)^2$.

又$\because \frac{S_{\triangle CFM}}{S_{\triangle CDA}}=\frac{S_{\triangle CFM}}{\frac{1}{3}S}=\frac{3S_{\triangle CFM}}{S}$，

$\therefore \frac{3S_{\triangle CFM}}{S}=\left(\frac{4-n}{4}\right)^2$，

$\therefore S_{\triangle CFM}=\frac{(4-n)^2S}{48}$.

$\therefore S_{\triangle EFC}=S_{\triangle EMC}+S_{\triangle CFM}=\frac{(-2n^2+8n)S}{48}+\frac{(4-n)^2S}{48}=\frac{(16-n^2)S}{48}$，

$\therefore \frac{S'}{S}=\frac{16-n^2}{48}$.

8　图形的位似

第 1 课时　位似图形

1. D　2. D　3. C　4. $\frac{2}{5}$　5. C　6. C

7. D

8. C　**点拨：**$\triangle ABC$ 与 $\triangle OEF$ 的周长比是 2∶1，只有③错误.

9. 解：如图.

易错总结：此题易忽略其中一种情况，当题中对位似图形的位置没有限制条件时，一定要考虑全面.


(第 9 题)

10. 解：是　理由：$\because$ 点 E, F 分别是 OA，OB 的中点，$\therefore FE=\frac{1}{2}AB, EF/\!/AB$.

$\because$ 点 G, H 分别是 OC, OD 的中点，

$\therefore HG=\frac{1}{2}CD, HG/\!/CD$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AB=CD, AB/\!/CD$.

$\therefore EF=HG, EF/\!/HG$.

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

$\because FE/\!/AB, \therefore \angle OEF=\angle OAB$.

同理 $\angle OEH=\angle OAD$，

$\therefore \angle HEF=\angle DAB$，

同理 $\angle EFG=\angle ABC$，

$\angle FGH=\angle BCD, \angle GHE=\angle CDA$.

又易得 $\frac{EF}{AB}=\frac{FG}{BC}=\frac{GH}{CD}=\frac{HE}{AD}=\frac{1}{2}$，

$\therefore \triangle EFGH\backsim\triangle ABCD$.

又$\because$ 它们的对应顶点的连线相交于点 O，

$\therefore \triangle ABCD$ 与四边形 $EFGH$ 是位似图形，O 为位似中心.

11. 证明：$\because \triangle DEO$ 与 $\triangle ABO$ 是位似图形，$\therefore \frac{OE}{OA}=\frac{OD}{OB}$.

$\because \triangle OEF$ 与 $\triangle OBC$ 是位似图形，

$\therefore \frac{OE}{OB}=\frac{OF}{OC}, \frac{OD}{OA}=\frac{OF}{OC}$.

即 $OD\cdot OC=OF\cdot OA$.

12. 解：(1) $\triangle ABC$ 与 $\triangle FGC$ 是位似图形，位似中心是点 C.

在矩形 $ABCD$ 中，$AD/\!/BC$，

$\therefore \triangle AFD\backsim\triangle CFE, \therefore \frac{CF}{AF}=\frac{CE}{AD}$.

又$\because AD=BC, \therefore \frac{CF}{AF}=\frac{CE}{BC}$.

$\because \angle ABC=90°, OE\perp BC$，

$\therefore AB/\!/OE$.

又$\because OA=OC, \therefore CE=\frac{1}{2}BC$，

$\therefore \frac{CF}{AF}=\frac{1}{2}$.　$\therefore \frac{CF}{AC}=\frac{1}{3}$，即 $\triangle ABC$ 与 $\triangle FGC$ 的相似比为 3∶1.

(2) CE 长 1 cm.

13. 解：(1) 如图所示，线段 A_1B_1 即为所求；

(2) 如图所示，线段 A_2B_1 即为所求；

(3) 20

(第 13 题)

第 2 课时　平面直角坐标系中的位似变换

1. C　2. A　3. A

4. $(2,2\sqrt{3})$　**点拨：**$\triangle OAB$ 与 $\triangle OCD$ 位似，相似比为 3∶4，其中点 B 的坐标为 $(6,0)$，故点 O 的坐标为 $(8,0)$ 故 $OC=4$，作 $CE\perp OD$ 于点 E，在 $Rt\triangle OCE$ 中，$OE=\frac{1}{2}OC=2, CE=2\sqrt{3}$，故 C 点坐标为 $(2,2\sqrt{3})$.

5. $(-1,2)$ 或 $(1,-2)$　**点拨：**以原点 O 为位似中心，考虑位似图形是在原点的同侧和异侧两种情况，本题易丢掉其中一种情况而致错.

6. $(4,6)$ 或 $(-4,-6)$

7. 解：(1) $\triangle A_1B_1C_1$ 与 $\triangle ABC$ 的相似比是 2∶1.

(2) 如图所示.

(第 7 题)

(3)∵ 点 $P(a,b)$ 为 $\triangle ABC$ 内一点，∴ 依上述两次变换后，点 P 在 $\triangle A_2B_2C_2$ 内的对应点 P_2 的坐标是 $(-2a,2b)$.

8. B　**点拨：**点 $P(m,n)$ 是线段 AB 上一点，以原点 O 为位似中心把 $\triangle AOB$ 放大到原来的两倍，则点 P 的对应点的坐标为 $(m\times2,n\times2)$ 或 $(m\times(-2),n\times(-2))$，即 $(2m,2n)$ 或 $(-2m,-2n)$. 故选 B.

易错总结：本题易忽略其中一种情况，应考虑全面.

9. 解：(1) 如图，$\triangle A_1B_1C$ 就是所要画的三角形，点 A_1 的坐标为 $(3,-3)$.

(第 9 题)

(2) 如图，$\triangle A_2B_2C$ 就是所要画的三角形.

(3) $CB=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$，

点 B 经过的路径长为 $\frac{1}{4}\times2\pi\times\sqrt{17}=\frac{\sqrt{17}}{2}\pi$.

10. 解：(1) 如图，$\triangle A_1B_1C_1$ 就是所要画的三角形.

(2) 如图，$\triangle A_2B_2C$ 就是所要画的三角形，点 A_2 的坐标为 $(-2,-2)$.

(第 10 题)

11. 解：(1) 图略.

(2) 将点 $(0,4)$，$(1,0)$，$(2,4)$，$(3,0)$，$(4,4)$ 的横坐标保持不变，纵坐标分别乘 -1，得 $(0,-4)$，$(1,0)$，$(2,-4)$，$(3,0)$，$(4,-4)$，然后描点连线，图略.

(3) 将点 $(0,4)$，$(1,0)$，$(2,4)$，$(3,0)$，$(4,4)$ 的纵坐标保持不变，横坐标分别乘 -1，得 $(0,4)$，$(-1,0)$，$(-2,4)$，$(-3,0)$，$(-4,4)$，然后描点连线，图略.

(4) 图案①与图案②关于 x 轴对称，图案①与图案③关于 y 轴对称.

(第 12 题)

12. 解：(1) 由已知得 $k=-2$，

把点 $(3,1)$ 的坐标和 $k=-2$ 代入 $y=kx+b$，得 $1=-2\times3+b$，

$\therefore b=7$.

(2) 如图，根据相似比为 1∶2 得函数 $y=kx+b$ 的图象有两种情况，

①不经过第三象限时，过点 $(1,0)$ 和 $(0,2)$，这时函数解析式为 $y=-2x+2$；

②不经过第一象限时，过点 $(-1,0)$ 和点 $(0,-2)$，这时函数解析式为 $y=-2x-2$.

点拨：本题考查了一次函数的应用，根据数形结合思想利用待定系数法进行分类讨论，即可求出函数解析式.

阶段核心归类

1. 证明：$\because EC'/\!/ED_1, \therefore \angle CE'O=\angle CED$.

又$\because \angle COE=\angle C'OE'$，

$\therefore \triangle OCE\backsim\triangle OC'E'$.

$\therefore \frac{CE}{C'E'}=\frac{OE}{OE'}$.

又$\because E'D'/\!/ED$，

$\therefore \triangle D'E'O\backsim\triangle DEO$.

又$\because \angle DOE=\angle D'OE'$，

$\therefore \triangle DOE\backsim\triangle D'OE'$.

$\therefore \frac{DE}{D'E'}=\frac{OE}{OE'}$.

$\therefore \triangle CED=\angle C'E'D', \frac{CE}{C'E'}=\frac{DE}{D'E'}$.

$\therefore \triangle CDE\backsim\triangle C'D'E'$.

又$\because \triangle CDE$ 是等边三角形，

$\therefore \triangle C'D'E'$ 是等边三角形.

2. 解：如图，在 AB 边上任取一点 D'，过点 D' 作 $D'E'\perp BC$ 于点 E'，在 BC 上截取 $E'F'=DE$，过点 F' 作 $F'G'\perp BC$，过点 D' 作 $D'E'/\!/BC$ 交 $F'G'$ 于点 G'，则四边形 $DEFG$ 为 $\triangle ABC$ 的内接矩形，且 $DE:EF=1:2$.

(第 2 题)

3. 解：设符合要求的正方形 $PQMN$ 的边 PN 与 $\triangle ABC$ 的高 AD 相交于点 E，易知 AE 为 $\triangle APN$ 的边 PN 上的高.

设正方形 $PQMN$ 的边长为 x mm，

$\because PN/\!/BC, \therefore \triangle APN\backsim\triangle ABC$.

$\therefore \angle C=\angle APN, \angle ANP=\angle C$.　$\therefore \triangle APN\backsim\triangle ABC$.

$\therefore \frac{AE}{AD}=\frac{PN}{BC}$，

即$\frac{80-x}{80}=\frac{x}{120}$，解得 $x=48$，

即这个正方形零件的边长是 48 mm.

4. (1) 证明：$\because DP/\!/BQ$，

$\therefore \angle ADP=\angle B, \angle APD=\angle AQB$.

$\therefore \triangle ADP\backsim\triangle ABQ$.

$\therefore \frac{DP}{BQ}=\frac{AP}{AQ}$.

同理 $\triangle AEP\backsim\triangle ACQ$，

$\therefore \frac{PE}{QC}=\frac{AP}{AQ}\therefore \frac{DP}{BQ}=\frac{PE}{QC}$.

(2)①猜：$MN=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

②证明：$\because \angle B+\angle C=90°, \angle CEF+\angle C=90°, \therefore \angle B=\angle CEF$.

又$\because \angle BGD=\angle EFC=90°$，

$\therefore \triangle BGD\backsim\triangle EFC, \therefore \frac{DG}{CF}=\frac{BG}{EF}$.

$\therefore DG\cdot EF=CF\cdot BG$. 又$\because DG=GF=EF, \therefore GF^2=CF\cdot BG$. 由(1)易得 $\frac{DM}{BG}=\frac{MN}{GF}$，$\frac{MN}{GF}=\frac{EN}{CF}\therefore\left(\frac{MN}{GF}\right)^2=\frac{DM}{BG}\cdot\frac{EN}{CF}$，

即 $\frac{MN^2}{FG^2}=\frac{DM\cdot EN}{BG\cdot CF}\therefore MN^2=DM\cdot EN$.

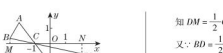
全章热门考点整合应用

1. C　2. 20 m

3. 解：四边形 $ABCD$ 与四边形 $A'B'C'D'$ 相似. 理由如下：由已知条件易得，$\angle ADC=\angle A'D'C', \angle C=\angle C', \angle ABC=\angle A'B'C', \angle A=\angle A'$，且 $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DA}{D'A'}=\frac{4}{3}$，所以四边形 $ABCD$ 与四边形 $A'B'C'D'$ 相似.

4. 解：如图，过点 B 作 $BM\perp x$ 轴于点 M，过点 B' 作 $B'N\perp x$ 轴于点 N，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



（第 4 题）

易证得 $\triangle CBM\backsim\triangle C'B'N$.

$\because MC:NC=BM:B'N=BC:B'C$. 又由已知条件知 $NC=a+1$, $B'N=-b$, $BC:B'C=1:2$,

$\therefore MC:(a+1)=BM:(-b)=1:2$.

$\therefore MC=\frac{1}{2}(a+1)$, $BM=-\frac{b}{2}$.

$\therefore MO=\frac{1}{2}(a+1)+1=\frac{a+3}{2}$.

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $\left(-\frac{a+3}{2},-\frac{b}{2}\right)$.

5. 解：(1) $\because DE/\!/BC$,

$\therefore \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$,

$\therefore \frac{8-2x}{8}=\frac{y}{6}$.

$\therefore y=-\frac{3}{2}x+6\,(0\leqslant x\leqslant 4)$.

(2) $\because S_{\triangle BAE}=\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot y=$

$\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot\left(6-\frac{3}{2}x\right)=$

$-\frac{3}{2}(x-2)^2+6$,

且 $-\frac{3}{2}(x-2)^2\leqslant 0$,

$\therefore -\frac{3}{2}(x-2)^2+6\leqslant 6$.

$\therefore$ 当 $x=2$ 时, $S_{\triangle BAE}$ 有最大值, 最大值为 6.

6. (1) **证明**：$\because D$ 是 BC 边上的中点, $DE\perp BC$,

$\therefore EB=EC$. $\therefore\angle B=\angle 1$.

又 $\because AD=AC$, $\therefore\angle ACB=\angle 2$.

$\therefore\triangle ABC\backsim\triangle FCD$.



（第 6 题）

(2) **解**：如图, 过点 A 作 $AM\perp CB$ 于点 M.

$\because D$ 是 BC 边上的中点, $\therefore BC=2CD$.

由(1)知 $\triangle ABC\backsim\triangle FCD$,

$\therefore \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle FCD}}=\left(\frac{BC}{CD}\right)^2=\frac{4}{1}$.

又 $\because S_{\triangle FCD}=5$, $\therefore S_{\triangle ABC}=20$.

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AM$,

$\therefore AM=\frac{2S_{\triangle ABC}}{BC}=\frac{2\times 20}{10}=4$.

$\because DE\perp BC$, $AM\perp BC$,

$\therefore EDM=\angle AMB=90°$.

又 $\because\angle B=\angle B$,

$\therefore\triangle BDE\backsim\triangle BMA$. $\therefore\frac{DE}{AM}=\frac{BD}{BM}$

由 $AD=AC$, $AM\perp BC$,

知 $DM=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{4}BC=\frac{5}{2}$.

又 $\because BD=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\times 10=5$,

$\therefore\frac{DE}{4}=\frac{5}{5+\frac{5}{2}}$. $\therefore DE=\frac{8}{3}$.

7. (1) **证明**：$\because DE$ 平分 $\angle ADC$,

$\therefore\angle ADE=\angle CDB$.

又 $\because\angle ABD=\angle BCD=90°$,

$\therefore\triangle ABD\backsim\triangle BCD$.

$\therefore\frac{AD}{BD}=\frac{BD}{CD}$. $\therefore BD^2=AD\cdot CD$.

(2) **解**：$\because BM/\!/CD$, $\therefore\angle MBC=180°-\angle BCD=90°$, $\angle MBD=\angle BDC$.

又 $\because\angle ADB=\angle CDB$, $\therefore\angle ADB=\angle MBD$. $\therefore BM=MD$.

$\because\angle ABD=90°$,

$\therefore\angle ABM+\angle MBD=90°$, $\angle DAB+\angle ADB=90°$, $\therefore\angle MAB=\angle MBA$.

$\therefore AM=BM$.

$\therefore BM=MD=AM=4$.

$\because BD^2=AD\cdot CD$, $CD=6$, $AD=8$,

$\therefore BD^2=48$. $\therefore BC^2=BD^2-CD^2=12$.

$\therefore MC^2=MB^2+BC^2=28$.

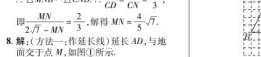
$\therefore MC=2\sqrt{7}$.

$\because\angle MNB=\angle CND$, $\angle MBN=\angle CDN$,

$\therefore\triangle MNB\backsim\triangle CND$. $\therefore\frac{BM}{CD}=\frac{MN}{CN}=\frac{2}{3}$,

即 $\frac{MN}{2\sqrt{7}-MN}=\frac{2}{3}$, 解得 $MN=\frac{4}{5}\sqrt{7}$.

8. 解：(方法一)作延长线, 延长 AD, 与地面交于点 M, 如图①所示.



（第 8 题）

由 $AM/\!/FH$ 知 $\angle AMB=\angle FHG$.

$\because AB\perp BG$, $FG\perp BG$, $DC\perp BG$,

$\therefore\angle ABC=\angle DCM=\angle FGH=90°$.

又 $\because\angle AMB=\angle DMC=\angle FHG$,

$\therefore\triangle ABM\backsim\triangle DCM\backsim\triangle FGH$.

$\therefore\frac{AB}{BM}=\frac{CD}{CM}=\frac{FG}{GH}$.

$\because CD=2$ m, $FG=1.2$ m, $GH=2$ m,

$\therefore\frac{2}{CM}=\frac{1.2}{2}$, 解得 $CM=\frac{10}{3}$ m.

$\therefore BC=4$ m,

$\therefore BM=BC+CM=4+\frac{10}{3}=\frac{22}{3}$(m).

$\therefore\frac{AB}{\frac{22}{3}}=\frac{1.2}{2}$, 解得 $AB=4.4$ m.

故这棵树的高度是 4.4 m.

(方法二:作垂线)过点 D 作 $DM\perp AB$ 于点 M, 如图②所示.

易知 $\triangle AMD\backsim\triangle FGH$. $\therefore\frac{AM}{DM}=\frac{FG}{GH}$.

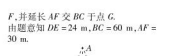
而 $DM=BC=4$ m, $AM=AB-CD=(AB-2)$ m, $FG=1.2$ m, $GH=2$ m,

$\therefore\frac{AB-2}{4}=\frac{1.2}{2}$, 解得 $AB=4.4$ m.

故这棵树的高度是 4.4 m.

9. 解：如图, 过点 A 作 $AF\perp DE$, 垂足为 F, 并延长 AF 交 BC 于点 G.

由题意知 $DE=24$ m, $BC=60$ m, $AF=30$ m.



（第 9 题）

$\because DE/\!/BC$,

$\therefore\angle ADE=\angle ABC$, $\angle AED=\angle ACB$.

$\therefore\triangle ADE\backsim\triangle ABC$.

$\therefore AF\perp DE$, $DE/\!/BC$,

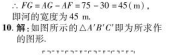
$\therefore AG\perp BC$. $\therefore\frac{AF}{AG}=\frac{DE}{BC}$, 即 $\frac{30}{AG}=\frac{24}{60}$.

解得 $AG=75$ m.

$\therefore FG=AG-AF=75-30=45$(m),

即河的宽度为 45 m.

10. 解：如图所示的 $\triangle A'B'C'$ 即为所求作的图形.



（第 10 题）

11. (1) **解**：$\because AP$ 平分 $\angle BAC$,

$\therefore\angle PAC=\frac{1}{2}\angle BAC$.

又 $\because AQ$ 平分 $\angle CAD$,

$\therefore\angle CAQ=\frac{1}{2}\angle CAD$.

$\therefore\angle PAC+\angle CAQ=\frac{1}{2}\angle BAC+$

$\frac{1}{2}\angle CAD=\frac{1}{2}(\angle BAC+\angle CAD)$.

又 $\because\angle BAC+\angle CAD=180°$,

$\therefore\angle PAC+\angle CAQ=90°$,

即 $\angle PAQ=90°$.

(2) **证明**：由(1)知 $\angle PAQ=90°$.

又 $\because M$ 是线段 PQ 的中点,

$\therefore PM=AM$.

$\because\angle APM=\angle PAM$,

$\because\angle APM=\angle B+\angle BAP$, $\angle PAM=\angle CAM+\angle PAC$, $\angle BAP=\angle PAC$,

$\therefore\angle B=\angle CAM$.

又 $\because\angle AMC=\angle BMA$,

$\therefore\triangle ACM\backsim\triangle BAM$. $\therefore\frac{CM}{AM}=\frac{AM}{BM}$

$\therefore AM^2=CM\cdot BM$,

即 $PM^2=CM\cdot BM$.

第五章　投影与视图

1　投影

第 1 课时　投影与中心投影

1. 解：如图.



（第 1 题）

2. C　**3.** A　**4.** C　**5.** B　**6.** B

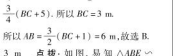
7. B　**点拨**：当王华在点 C 处时, 由 $AB/\!/GC$ 易证得 $Rt\triangle ABD\backsim Rt\triangle GCD$, 所以 $\frac{AB}{BD}=\frac{GC}{CD}$, 因为 $GC=1.5$ m, $CD=1$ m, $BD=BC+CD=(BC+1)$ m, 所以 $\frac{AB}{BC+1}=\frac{1.5}{1}$, 所以 $AB=\frac{3}{2}(BC+1)$ m. 当王华在点 E 处时, 易证得 $Rt\triangle ABF\backsim Rt\triangle HEF$, 所以 $\frac{AB}{HE}=\frac{BF}{EF}$.

因为 $HE=1.5$ m, $EF=2$ m, $BF=BC+CE+EF=(BC+5)$ m,

所以 $\frac{AB}{BC+5}=\frac{1.5}{2}$, 所以 $AB=\frac{3}{4}(BC+5)$ m, 则 $\frac{3}{4}(BC+5)=\frac{3}{2}(BC+1)$, $\frac{3}{4}(BC+5)$. 所以 $BC=3$ m.

所以 $AB=\frac{3}{2}(BC+1)=6$ m, 故选 B.

8. 3 m　**点拨**：如图, 易知 $\triangle ABE\backsim\triangle CDE$, $\triangle ABF\backsim\triangle MNF$, 根据相似三角形的性质知道 $\frac{CD}{AB}=\frac{DE}{BE}$, $\frac{MN}{AB}=\frac{NF}{BF}$, 即可得到结论.



（第 8 题）

9. 错误答案：C

正确答案：B

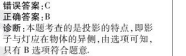
诊断：本题考查的是投影的特点, 即影子与灯应在物体的异侧, 由选项可知, 只有 B 选项符合题意.

10. 解：如图.



（第 10 题）

11. 解：(1) 如图, 点 P 是路灯的位置.



（第 11 题）

(2) 如图, 线段 MC 表示小树.

12. 解：(1) 如图, 点 M 即为所求点.

$\because DC/\!/AB$,

$\therefore\angle ABM=\angle DCM$, $\angle BAM=\angle CDM$.

$\therefore\triangle ABM\backsim\triangle DCM$.

$\therefore\frac{DC}{AB}=\frac{MC}{MB}$, 即 $\frac{24}{MC+30}=\frac{MC}{MC}$,



（第 12 题）

解得 $MC=20$ m.

$\therefore$ 从 A 处能够看到的地面上的距离点 C 最近的点为点 M, 点 M 与点 C 之间的距离是 20 m.

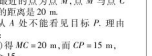
(2) 从 A 处不能看见目标 P. 理由如下：

由(1)得 $MC=20$ m, 而 $CP=15$ m,

$\therefore 20>15$,

$\therefore$ 从 A 处不能看见目标 P.

13. 解：(1) 如图.



（第 13 题）

(2) 设小明原来的速度为 x m/s, 则 $CE=2x$ m, $AM=AF-MF=(4x-1.2)$ m, $EG=2\times 1.5x=3x$(m), $BM=AB-AM=12-(4x-1.2)=(13.2-4x)$ m.

由题易知 $\triangle OCE\backsim\triangle OAM$, $\triangle OEG\backsim\triangle OMB$.

$\therefore\frac{CE}{AM}=\frac{OE}{OM}=\frac{EG}{BM}=\frac{OE}{OM}$.

$\therefore\frac{CE}{AM}=\frac{EG}{BM}$,

即 $\frac{2x}{4x-1.2}=\frac{3x}{13.2-4x}$, 解得 $x_1=1.5$, $x_2=0$. $x_1=1.5$, $x_2=0$ 经检验 $x_1=1.5$, $x_2=0$ 都为方程的解, 但 $x_2=0$ 不符合题意, 舍去. $\therefore x=1.5$,

即小明原来的速度为 1.5 m/s.

第 2 课时　平行投影与正投影

1. A　**2.** D　**3.** B　**4.** C

5. B　**点拨**：根据题意, 太阳是从东方升起, 故影子指向的方向为西方, 然后依次为西北、北、东北、东, 故分析可得, 先后顺序为④①②③.

6. A

7. D　**点拨**：正方形的正投影应是平行四边形或特殊的平行四边形或线段, 故正方形的正投影不可能是梯形, 故选 D.

8. A　**9.** B　**10.** A

11. $S_1=S<S_2$

12. 解：不正确.

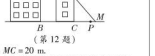
诊断：同一时刻, 太阳光下物体上的点和影子上对应点的连线互相平行. 这一点非常重要, 解题时常忽略这一点而造成错误.

13. 解：(1) 上面的图为路灯下的情形, 下面的图为阳光下的情形.

(2) 如图.

（第 13 题）

14. 解：(1) 如图.



（第 14 题）

EF 为此时 DE 在阳光下的影子.

(2) 由题易得 $\triangle ABC\backsim\triangle DEF$,

$\therefore\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}$,

即 $\frac{5}{DE}=\frac{3}{6}$, 解得 $DE=10$ m.

$\therefore DE$ 的长为 10 m.

15. 解：(1) 画 $ABCD$ 的正投影是线段 MQ, 画 $A_1B_1C_1D_1$ 的正投影是线段 NP, 画 AA_1D_1D 与画 DD_1C_1C 的正投影是矩形 $EFPQ$, 画 ABB_1A_1 与画 BCC_1B_1 的正投影是矩形 $MNFE$.

(2)$\because$ 正方体的棱长为 a cm,

$\therefore BD=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}a$(cm),

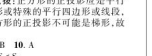
由题意可知, $BD=MQ$.

$\therefore$ 投影 $MNPQ$ 的面积为 $\sqrt{2}a\times a=\sqrt{2}a^2$(cm^2).

16. 解：(1) 当 $\alpha=60°$ 时, 在 $Rt\triangle ABE$ 中, 易知 $\angle ABE=30°$, $\therefore BE=2AE=20$ m, $\therefore AB=\sqrt{20^2-10^2}=10\sqrt{3}\approx 17.3$(m). 故楼房的高度约为 17.3 m.

(2) 当 $\alpha=45°$ 时, 小猫能躺到太阳. 理由如下：

假设没有台阶, 如图, 当 $\alpha=45°$ 时, 从点 B 射下的光线与地面 AD 的交点为点 F, 与 MC 的交点为点 H.



（第 16 题）

$\because\angle BFA=45°$,

$\therefore\angle ABF=\angle BFA=45°$.

$\therefore AF=AB$.

此时的影长 $AF=AB=17.3$ m.

$\because CF=AF-AC\approx 17.3-3-2=0.1$(m). 易知 $CH=CF=0.1$ m.

$\therefore$ 楼房的影子落在台阶 MC 这个侧面上. $\therefore$ 小猫能晒到太阳.

阶段核心归类

1. B　**点拨**：题图①中影子的方向不同, 是在灯光下的影子；题图②中影子的方向相同, 且影长与树高成正比例, 是在阳光下的影子.

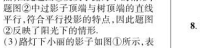
2. 解：(1) 题图②反映了阳光下的情形,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题图①反映了路灯下的情形.

(2)题图①中过影子顶端与树顶端的直线相交于一点,符合中心投影的特点,因此题图①反映了路灯下的情形;题图②中过影子顶端与树顶端的直线平行,符合平行投影的特点,因此题图②反映了阳光下的情形.

(3)路灯下小丽的影子如图①所示,表示影子的线段为 AB;阳光下小丽的影子如图②所示,表示影子的线段为 CD.



(第 2 题)

3. C

4. 解:(1)如图所示.



(第 4 题)

(2)由题意得 $\triangle ABC \backsim \triangle GHC$,

$\therefore \frac{AB}{GH}=\frac{BC}{HC}$,即 $\frac{1.6}{GH}=\frac{3}{6+3}$,

$\therefore GH=4.8$ m.

(3)如图所示,连接 GA_1 并延长交 HC 于点 C_1,连接 GA_2 并延长交 HC 于点 C_2.

同(2)可得 $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle GHC_1$,

$\therefore \frac{A_1B_1}{GH}=\frac{B_1C_1}{HC_1}$.

设 $B_1C_1=x$ m,则 $\frac{1.6}{4.8}=\frac{x}{x+3}$,解得 $x=\frac{3}{2}$,即 $B_1C_1=\frac{3}{2}$ m.

同理,$\frac{1.6}{4.8}=\frac{B_2C_2}{B_2C_2+2}$,解得 $B_2C_2=1$ m.

5. 解:设图(a)中的树高 x 米.

根据题意得 $\triangle CDE \backsim \triangle ABE$,

$\therefore \frac{CD}{AB}=\frac{CE}{AE}$,即 $\frac{0.8}{x}=\frac{1}{2.4}$,解得 $x=1.92$.

设图(b)中的树高 y 米,

则 $\frac{y-1.2}{2.8}=\frac{0.8}{1}$,解得 $y=3.44$.

∴图(a)和图(b)中的树高分别为 1.92 米和 3.44 米.

2 视图

第 1 课时 由几何体到三视图

1. B **2.** C **3.** A **4.** C

5. A **点拨**:几何体从前向后观察得到的图形中,左侧有 3 个正方形,中间有 2 个正方形,右侧有 1 个正方形.

6. B **点拨**:注意三视图的观察方向.

7. 解:(1)主视图正确,左视图、俯视图如图①所示.

(2)主视图正确,左视图、俯视图如图②所示.

(第 7 题)

8. 解:三视图如图所示.



(第 8 题)

知识梳理:三视图的长、宽、高的关系:主视图和俯视图长度相等,主视图和左视图高度相等,俯视图和左视图宽度相等.

9. A **点拨**:本题易忽略被遮挡的部分的轮廓线而错选 C.

10. (1)③;②;①

(2)**解**:这个几何体的表面积为 $2\times(20\times20+20\times20+20\times20)=2\times1\,200=2\,400(cm^2)$.

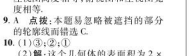
11. 解:(1)4 (2)如图所示.



(第 11 题)

12. 解:(1)如图①所示.

(2)如图②所示.



(第 12 题)

13. 解:(1)画图,如图所示.



(第 13 题)

(2)最多可以再添加 4 个小正方体.

第 2 课时 由三视图到几何体

1. C **2.** D **3.** C **4.** A

5. C **点拨**:观察发现该几何体为圆锥和圆柱的组合体,

其体积为 $3^2\pi\times4+\frac{1}{3}\times3^2\pi\times(7-4)=45\pi(cm^3)$.

6. D

点拨:由三视图可知,该几何体是长方体,中间是空心圆柱体,长方体的长、宽、高分别为 4,4,3,圆柱体的直径为 2,高为 3.

长方体的表面积为 $4\times4\times2+4\times3\times4=80$,圆柱体侧面积为 $2\pi\times3=6\pi$,上下表面空心圆面积和为 2π,

∴这个几何体的表面积是 $80+6\pi-2\pi=80+4\pi$.

7. A **点拨**:∵$S_{甲}=x^2+2x=x(x+2)$,

$S_{乙}=x^2+x=x(x+1)$,

∴俯视图的长为 $x+2$,宽为 $x+1$.

∴$S_{丙}=(x+2)(x+1)=x^2+3x+2$.

8. 解:(1)——B;(2)——C;(3)——A.

9. 解:直径和宽相等的圆柱和长方体的组合图形.如图所示.

(第 9 题)

10. 解:(1)正六棱柱.

(2)如图.(答案不唯一)



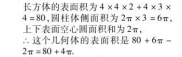
(第 10 题)

(3)由三视图可知该几何体的上、下底面是边长为 5 cm 的正六边形,侧面是 6 个边长为 5 cm 的正方形,则

该几何体的表面积为 $6\times5^2\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times2+6\times5\times5=75\sqrt{3}+150=75(\sqrt{3}+2)\approx280(cm^2)$.

答:制作一个纸盒所需纸板的面积为 $280\ cm^2$.

11. 解:**探究**:直三棱柱.



(第 11 题)

拓展:当容器向左旋转时,如图①.

∵液体体积不变,

∴$\frac{1}{2}(x+BQ)\times4\times4=\frac{1}{2}\times3\times4\times4$,

∴$BQ=(-x+3)$ dm.

当容器向右旋转时,如图②.

同理可得 $\frac{1}{2}\times(4-x)\times BQ\times4=\frac{1}{2}\times3\times4\times4$,∴$BQ=\frac{12}{4-x}$ dm.

第 3 课时 由三视图到几何体的展开图

1. D

2. B **点拨**:∵圆锥的底面圆半径为 3,

∴圆锥的底面周长为 6π.

∵圆锥的高是 $6\sqrt{2}$,∴圆锥的母线长为 $\sqrt{3^2+(6\sqrt{2})^2}=9$.

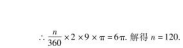
设扇形的圆心角为 $n°$,

∴$\frac{n}{360}\times2\times9\times\pi=6\pi$.解得 $n=120$.

∴圆锥侧面展开图的扇形圆心角的大小为 120°.故选 B.

3. C **4.** c_1a_1b **5.** C

6. C **点拨**:根据侧面的主视图,无缓圆弧,可知该圆锥的轴截面是一个底边长为 8,高为 3 的等腰三角形,如图,过点 A 作 $AC\perp BD$ 于点 C,则 $BC=\frac{1}{2}BD=4$.



(第 6 题)

∴$AB=\sqrt{3^2+4^2}=5$,圆锥底面周长为 8π.

∴侧面积 $=\frac{8\pi}{2\times5\times\pi}\times\pi\times5^2=20\pi$.

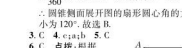
7. D

8. D **点拨**:由三视图可知,几何体是由一个圆柱和一个长方体组成,圆柱底面直径为 20,高为 8,长方体的长为 30,宽为 20,高为 5,故该几何体的体积为 $\pi\times10^2\times8+30\times20\times5=800\pi+3\,000$,故选 D.

9. C **点拨**:由三视图知该几何体是圆柱,且底面直径是 2 cm,高是 3 cm,则其侧面积为 $2\pi\times3=6\pi(cm^2)$.

10. 解:(1)正三棱柱.

(2)如图.(答案不唯一)



(第 10 题)

(3)$10\times4\times3=120(cm^2)$.

11. 思路导引:(1)过点 E 作 $EH\perp FG$ 于点 H,根据题意可得出 $EH=AB$,然后由勾股定理即可得出答案.

(2)根据直三棱柱的体积等于底面积乘它的高进行计算即可.

解:(1)过点 E 作 $EH\perp FG$ 于点 H,

如图.

在 Rt $\triangle EHF$ 中,

$EF=4$ cm,$\angle EFH=45°$,

∴$\angle EFH=\angle EFH=45°$.

∴$FH=EH$.

∴由勾股定理得,$2EH^2=EF^2$,

∴$EH=2\sqrt{2}$ cm.

由图形可知 $AB=EH=2\sqrt{2}$ cm.

(2)直三棱柱的体积 $=S_{\triangle EFG}\cdot AD=\frac{1}{2}\times12\times2\sqrt{2}\times8=96\sqrt{2}(cm^3)$.

12. 解:(1)此模型由两个长方体组成:

上面是一个小长方体,下面是一个大长方体.

(2)模型的体积 $=5\times6\times10+2\times3\times1.5=309(cm^3)$,则该模型的质量是 $309\times360=111\,240(kg)$.

(3)模型的表面积 $=2\times3\times2+2\times1.5\times2+10\times5\times2+5\times6\times2+6\times10\times2=298(m^2)$,

需要油漆 $298\div4=74.5(kg)$.

13. 解:(1)圆锥.

(2)$S_{侧}=\frac{4\times\pi}{2\times6\times\pi}\times\pi\times6^2=12\pi(cm^2)$.

$S_{底}=\pi\times2^2=4\pi(cm^2)$.

表面积 $=S_{侧}+S_{底}=12\pi+4\pi=16\pi(cm^2)$. (第 13 题)

(3)如图,将圆锥侧面展开,线段 BD 的长为所求的最短路程,因为 $\angle BAB'=360°\times\frac{4\times\pi}{2\times6\times\pi}=120°$,$C$ 为弧 BB' 的中点,所以 $\angle BAD=60°$.连接 BC,易知 $\triangle ABC$ 为等边三角形,又因为 D 为 AC 的中点,所以 $BD\perp AC$.从而可求得 $BD=3\sqrt{3}$ cm.

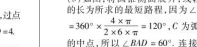


阶段核心归类

1. D **点拨**:A 中圆柱的主视图为矩形,俯视图为圆;B 中圆锥的主视图为三角形,俯视图为带圆心的圆;C 中三棱柱的主视图为矩形且中间有一条竖直的虚线,俯视图为三角形;D 中长方体的主视图和俯视图都为矩形.故选 D.

2. C

3. 解:如图.



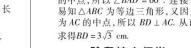
(第 3 题)

方法点拨:画三视图时,要根据几何体合理想象,看得见的轮廓线用实线画,看不见的轮廓线用虚线画.

4. B

5. 解:如图.

技巧点拨:该物体是一个长方体切去了右上角后剩余的部分,还原物体的,还要根据实线和虚线确定切去部分的位置.



(第 5 题)

6. B

7. 解:这样的几何体不是只有一种,它最少需要 10 个小立方块,最多需要 16 个小立方块.

全章热门考点整合应用

1. A

2. 解:由题意知 $EF//BC$,

∴$\angle OEF=\angle OBC$,$\angle OFE=\angle OCB$.

∴$\triangle OEF\backsim\triangle OBC$.∴$\frac{EF}{BC}=\frac{OE}{OB}$.

易知 $EN//OM$,∴$\frac{OE}{OB}=\frac{MN}{MB}$.

∴$\frac{EF}{BC}=\frac{MN}{MB}$,即 $\frac{0.32}{BC}=\frac{0.1}{20}$.

解得 $BC=44$ m.

∴建筑物 A 的高度为 44 m.

3. D

4. A **点拨**:A. 当圆柱侧面与桌面接触时,主视图和左视图有一个是长方形,另一个是圆,故选项符合题意;B. 桌面上放置的正方体的主视图和左视图一定相同,故选项不符合题意;C. 球的主视图和左视图都是圆,一定相同,故选项不符合题意;D. 直立圆锥的主视图和左视图都是等腰三角形,一定相同,故选项不符合题意.故选 A.

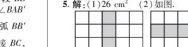
5. 解:(1)26 cm^2 (2)如图.



(第 5 题)

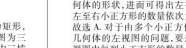
6. A **点拨**:由题中俯视图可以想象出几何体的形状,进而可得出左视图中从左至右小正方形的数量依次为 1,3,2,故选 A.对于由多个小正方体堆成的几何体的左视图的问题,要想象出左视图中每列小正方形的数量.

7. 解:这种容器的三视图如图所示.



(第 7 题)

8. 解:(1)如图,AB 即为所求.



(第 8 题)

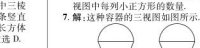
(2)设小丽的身高为 x m,利用三角形相似列方程 $\frac{1.60}{2}=\frac{x}{1.75}$,解得 $x=1.4$,即小丽的身高为 1.4 m.

9. 解:(1)如图.

(2)由题意得 $\triangle ABC\backsim\triangle GHC$.

∴$\frac{AB}{GH}=\frac{BC}{HC}$,即 $\frac{1.6}{GH}=\frac{3}{6+3}$.

∴$GH=4.8$ m.



(第 9 题)

(3)如图,易知 $\triangle A_1B_1C_1\backsim\triangle GHC_1$,

∴$\frac{A_1B_1}{GH}=\frac{B_1C_1}{HC_1}$.设 B_1C_1 的长为 x m,

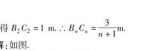
则 $\frac{1.6}{4.8}=\frac{x}{x+3}$,解得 $x=\frac{3}{2}$,

即 $B_1C_1=\frac{3}{2}$ m.同理 $\frac{1.6}{4.8}=\frac{B_2C_2}{B_2C_2+2}$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解得 $B_2C_2=1$ m. ∴ $B_nC_n=\frac{3}{n+1}$m.

10. 解：如图.



（第 10 题）

11. 解：设路灯的高为 x m，∵ $GH\perp BD$，$AB\perp BD$，∴ $\angle ABH=\angle GHE=90°$.
又∵ $\angle GEH=\angle AEB$，
∴ $\triangle EGH\sim\triangle EAB$.
∴ $\frac{GH}{AB}=\frac{EH}{EB}$ ①.

同理 $\triangle FGH\sim\triangle FCD$，∴ $\frac{GH}{x}=\frac{FH}{FD}$ ②.

∵ $\frac{EH}{FD}=\frac{FH}{EB+FD}=\frac{EH+FH}{EB+FD}$

∴ $\frac{3}{EB}=\frac{4.5}{12+4.5}$.

解得 $EB=11$ m，代入①得 $\frac{1.8}{x}=\frac{3}{11}$，

解得 $x=6.6$. ∴ 路灯的高为 6.6 m.

12. 解：由题意得 $\angle BAD=\angle BCE$，

又∵ $\angle ABD=\angle CBE=90°$，

∴ $\triangle BAD\sim\triangle BCE$. ∴ $\frac{BD}{BE}=\frac{AB}{CB}$，

即 $\frac{BD}{9.6}=\frac{1.7}{1.2}$. 解得 $BD=13.6$ m.

∴ 河宽 BD 是 13.6 m.

第六章　反比例函数

1　反比例函数的图象与性质

1. D　**2.** D　**3.** D

4. A　**点拨**：先根据关于 x 轴对称的点的坐标特征确定 A'的坐标为 $(1,3)$，再把 A'的坐标代入 $y=\frac{k}{x}$，即可得到 k 的值.

5. A

6. B　**点拨**：根据反比例函数图象上点的坐标特征可得出 $mn=6$，列表找出所有 m、n 的值，根据表格中 $mn=6$ 所占比例即可得出结果.

7. C　**点拨**：设点 A 的坐标为 $(a,0)$，点 C 的坐标为 $\left(c,\frac{k}{c}\right)$，则 $a\cdot\frac{k}{c}=12$，点 D 的坐标为 $\left(\frac{a+c}{2},\frac{k}{2c}\right)$.

∴ $\begin{cases}a\cdot\frac{k}{c}=12,\\ \frac{k}{2c}=\frac{\frac{k}{c}}{\frac{a+c}{2}},\end{cases}$ 解得 $k=4$.

8. A

9. A　**点拨**：A 选项中设三角形面积为 S，一边长为 a，该边上的高为 h，则有 $a=\frac{2S}{h}$，B 选项中设三角形周长为 C，底边长为 a，腰长为 b，则有 $C=a+2b$；C 选项中设圆的周长为 C，半径为 r，则有 $C=2\pi r$；D 选项中设圆的面积为 S，半径为 r，则有 $S=\pi r^2$. 观察可得，只有 A 选项中的两个变量满足反比例关系.

10. D

11. A　**点拨**：本题易忽略反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 中 $k\neq0$，而直接由 $a^2-2=-1$ 得 $a=\pm1$.

12. 解：(1) 设 $y_1=k_1x^2$，$y_2=\frac{k_2}{x}$（k_1，$k_2\neq0$），

则 $y=k_1x^2+\frac{k_2}{x}$.

将 $x=1$，$y=3$ 和 $x=-1$，$y=1$ 分别代入，

得 $\begin{cases}k_1+k_2=3,\\ k_1-k_2=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k_1=2,\\ k_2=1.\end{cases}$

∴ y 与 x 之间的函数表达式为 $y=2x^2+\frac{1}{x}$.

(2) 当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，$y=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{-\frac{1}{2}}=-\frac{3}{2}$.

13. 解：(1) 假设 y 与 x 是正比例函数关系，则可设 $y=k_1x$（$k_1\neq0$），把 $x=-2$，$y=\frac{3}{2}$ 代入，得 $k_1=-\frac{3}{4}$，所以 $y=-\frac{3}{4}x$.

把 $x=4$，$y=-\frac{3}{4}$ 代入 $y=-\frac{3}{4}x$，等式不成立，所以 y 不是 x 的正比例函数.

假设 y 与 x 是反比例函数关系，则可设 $y=\frac{k_2}{x}$（$k_2\neq0$），把 $x=-2$，$y=\frac{3}{2}$ 代入，得 $k_2=-3$，所以 $y=-\frac{3}{x}$. 把 $x=4$，$y=-\frac{3}{4}$ 代入 $y=-\frac{3}{x}$，等式成立，所以 y 是 x 的反比例函数.

(2) 该函数的表达式为 $y=-\frac{3}{x}$.

补充表格如下：

x	-3	-2	-1	1	2	3	4
y	1	$\frac{3}{2}$	3	-3	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{3}{4}$

14. 解：(1) 电流 $I(A)$ 与电阻 $R(\Omega)$ 之间的函数表达式为 $I=\frac{220}{R}(R>0)$，它是我们学过的反比例函数.

(2) 填表如下：

R/Ω	20	40	60	80	100
I/A	11	$\frac{11}{2}$	$\frac{11}{3}$	$\frac{11}{4}$	$\frac{11}{5}$

(3) 当 R 越来越大时，I 越来越小；当 R 越来越小时，I 越来越大.

15. 解：(1) ∵ $S_{\triangle ABF}+S_{\triangle AOE}+S_{\triangle CEF}=S_{正方形ABCD}-S_{\triangle ABF}=3$，

∴ $\frac{1}{2}\times2y+\frac{1}{2}\times2x+\frac{1}{2}(2-x)(2-y)=3$，∴ $xy=2$，∴ $y=\frac{2}{x}$.

(2) 反比例函数.　(3) $0<x<2$.

2　反比例函数的图象与性质

第 1 课时　反比例函数的图象

1. A　**2.** D

3. B　**点拨**：在函数 $y=\frac{k}{x}$ 和 $y=kx+2(k\neq0)$ 中，当 $k>0$ 时，函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象在第一、三象限，函数 $y=kx+2$ 的图象在第一、二、三象限，故选项 A、D 错误，选项 B 正确；当 $k<0$ 时，函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象在第二、四象限，函数 $y=kx+2$ 的图象在第一、二、四象限，故选项 C 错误.

4. A　**点拨**：易知函数 $y=\begin{cases}\frac{1}{x}(x>0),\\ -\frac{1}{x}(x<0)\end{cases}$ 的图象关于 y 轴对称，且图象位于 x 轴上方，所以点 M 是原点.

5. A　**点拨**：将点 $(-1,4)$ 的坐标代入 $y=\frac{k}{x}$，得 $k=-4$，∴ $y=\frac{-4}{x}$，∴ 点 $(4,-1)$ 在函数图象上.

6. A　**点拨**：函数 $y=\frac{2\,019}{x}$ 的图象在第一、三象限，在每个象限内 y 随 x 的增大而减小，且在第一象限大于零，在第三象限小于零.

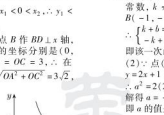
∵ $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 都在函数 $y=\frac{2\,019}{x}$ 的图象上，且 $x_1<0<x_2$，∴ $y_1<0$，$y_2>0$，∴ $y_1<y_2$.

7. D　**点拨**：如图，过点 B 作 $BD\perp x$ 轴，垂足为 D，∵ A、C 的坐标分别是 $(0,3)$，$(3,0)$，∴ $OA=OC=3$，∴ 在 Rt△AOC 中，$AC=\sqrt{OA^2+OC^2}=3\sqrt{2}$，又∵ $AC=2BC$，

∴ $BC=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，

又 ∵ $\angle AOC=\angle ACB=90°$，

∴ $\angle OAC=\angle OCA=45°=\angle BCD=\angle CBD$，



（第 7 题）

∴ $CD=BD=\frac{3}{2}$，

∴ $OD=3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$，

∴ 点 B 的坐标是 $\left(\frac{9}{2},\frac{3}{2}\right)$.

将点 $B\left(\frac{9}{2},\frac{3}{2}\right)$ 的坐标代入 $y=\frac{k}{x}$，得 $k=\frac{27}{4}$.

8. C

9. C　**点拨**：∵ 反比例函数 $y=-\frac{2}{x}$ 的图象上的点关于 y 轴的对称点在反比例函数 $y=\frac{2}{x}$ 的图象上，∴ 由方程组 $\begin{cases}y=\frac{2}{x},\\ y=-x+m\end{cases}$ 得 $x^2-mx+2=0$.

∵ 反比例函数 $y=\frac{2}{x}$ 的图象与一次函数 $y=-x+m$ 的图象有两个不同的交点，

∴ 方程 $x^2-mx+2=0$ 有两个不相等的实数根.

∴ $\Delta=m^2-8>0$.

∴ $m>2\sqrt{2}$ 或 $m<-2\sqrt{2}$.

10. C　**点拨**：∵ 一次函数 $y=x+b$ 的图象经过第一、三、四象限，∴ $b<0$. 又 ∵ 反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（$k\neq0$）的图象在第二、四象限，∴ $k<0$.

综上所述，$k<0$，$b<0$.

11. 解：(1) ∵ $OA=2\sqrt{2}$，$\angle AOC=45°$，

∴ 易得 $A(2,2)$，

∵ 反比例函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 的图象经过点 A，

∴ $k=4$.

(2) ∵ 四边形 $OABC$ 是平行四边形，

∴ $OC\parallel AB$.

∵ $OC\perp x$ 轴，

∴ $AB\perp x$ 轴，

∴ B 点的横坐标为 2，

∵ 点 D 是 BC 的中点，

∴ D 点的横坐标为 1，

又∵ D 点在函数 $y=\frac{4}{x}$ 的图象上，

∴ $D(1,4)$.

12. 解：(1) ∵ 一次函数 $y=kx+b(k,b$ 是常数，$k\neq0)$ 的图象过 $A(1,3)$，$B(-1,-1)$ 两点，

∴ $\begin{cases}k+b=3,\\ -k+b=-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=2,\\ b=1.\end{cases}$

即该一次函数的表达式是 $y=2x+1$.

(2) ∵ 点 $(2a+2,a^2)$ 在该一次函数 $y=2x+1$ 的图象上，

∴ $a^2=2(2a+2)+1$，

解得 $a=-1$ 或 $a=5$.

即 a 的值是 -1 或 5.

(3) 反比例函数 $y=\frac{m+1}{x}$ 的图象在第一、三象限.

理由：∵ 点 $C(x_1,y_1)$ 和点 $D(x_2,y_2)$ 在该一次函数 $y=2x+1$ 的图象上，

∴ $m=(x_1-x_2)(y_1-y_2)$.

∵ 假设 $x_1<x_2$，则 $y_1<y_2$，

此时 $m=(x_1-x_2)(y_1-y_2)>0$，

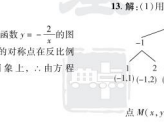
假设 $x_1>x_2$，则 $y_1>y_2$，

此时 $m=(x_1-x_2)(y_1-y_2)>0$.

由以上可得，$m>0$，∴ $m+1>0$，

∴ 反比例函数 $y=\frac{m+1}{x}$ 的图象在第一、三象限.

13. 解：(1) 用树状图表示，如下图.



（第 13 题）

点 $M(x,y)$ 的所有可能结果：$(-1,1)$，$(-1,2)$，$(1,-1)$，$(1,2)$，$(2,-1)$，$(2,1)$ 共 6 种.

(2) 在点 M 的 6 种可能结果中，只有 $(-1,2)$，$(2,-1)$ 2 种在双曲线 $y=-\frac{2}{x}$ 上，

∴ $P=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

因此，点 $M(x,y)$ 在双曲线 $y=-\frac{2}{x}$ 上的概率为 $\frac{1}{3}$.

14. 解：(1) 把点 $A(3,2)$ 的坐标代入反比例函数 $y=\frac{m}{x}$，可得 $m=3\times2=6$，

∴ 反比例函数的表达式为 $y=\frac{6}{x}$.

∵ $OB=4$，∴ $B(0,-4)$.

把点 $A(3,2)$，$B(0,-4)$ 的坐标代入一次函数 $y=kx+b$，可得 $\begin{cases}3k+b=2,\\ b=-4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=2,\\ b=-4.\end{cases}$

∴ 一次函数的表达式为 $y=2x-4$.

(2) 不等式组 $0<\frac{6}{x}<kx+b$ 的解集为 $x>3$.

第 2 课时　反比例函数的性质

1. A　**点拨**：A. 该函数图象是直线，位于第一、二象限，y 随 x 的增大而增大，故本选项正确.

B. 该函数图象是直线，位于第二、四象限，y 随 x 的增大而减小，故本选项错误.

C. 该函数图象是双曲线，位于第一、三象限，在每一象限内，y 随 x 的增大而减小，故本选项错误.

D. 该函数图象是双曲线，位于第二、四象限，在每一象限内，y 随 x 的增大而增大，故本选项错误.

2. D　**点拨**：由于点 $(1,-3)$ 的坐标满足反比例函数 $y=-\frac{3}{x}$，故 A 是正确的；

由于 $k=-3<0$，双曲线位于第二、四象限，故 B 是正确的；

由反比例函数图象的对称性，可知反比例函数 $y=-\frac{3}{x}$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称，故 C 是正确的；

由反比例函数的性质可知，$k<0$ 时，在每个象限内 y 随 x 的增大而增大，不在同一象限则不具有此性质，故 D 是不正确的.

3. B

4. A　**点拨**：反比例函数 $y=\frac{6}{x}$ 中 $k=6>0$，∴ 该反比例函数在 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而减小. 当 $x=3$ 时，$y=\frac{6}{3}=2$；

当 $x=1$ 时，$y=\frac{6}{1}=6$. ∴ 当 $1<x<3$ 时，$2<y<6$. ∴ y 的最小整数值是 3. 故选 A.

5. D

6. D　**点拨**：如图，过点 C 作 $CD\perp x$ 轴于 D，设 $OB=a(a>0)$.

∵ $S_{\triangle AOB}=S_{\triangle BOC}$，

∴ $AB=BC$.



（第 6 题）

∵ $\triangle AOB$ 的面积为 1，

∴ $\frac{1}{2}OA\cdot OB=1$，∴ $OA=\frac{2}{a}$.

∵ $CD\parallel OB$，$AB=BC$，

∴ $OD=OA=\frac{2}{a}$，$CD=2OB=2a$，

∴ $C\left(\frac{2}{a},2a\right)$.

∵ 反比例函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 的图象经过点 C，

∴ $k=\frac{2}{a}\times2a=4$.

7. C　**点拨**：由于点 A、C 位于反比例函数图象上且关于原点对称，故 $S_{\triangle OBA}=S_{\triangle OBC}$. 由题意得 $S_{\triangle OBA}=\frac{1}{2}|k|$.

所以 $\triangle ABC$ 的面积等于 $2\times\frac{1}{2}|k|=|k|=4$.

8. B　**点拨**：∵ $BD\parallel x$ 轴，$D(0,4)$，

∴ B、D 两点纵坐标相同，都为 4，

∴ 可设 $B(x,4)$，

∵ 矩形 $ABCD$ 的对角线的交点为 E，

∴ E 为 BD 的中点，∴ $\angle DAB=90°$，

∴ $E\left(\frac{1}{2}x,4\right)$，$AD^2+AB^2=BD^2$.

∵ $A(2,0)$，$D(0,4)$，$B(x,4)$，

∴ $2^2+4^2+(x-2)^2+4^2=x^2$，

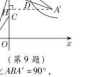
解得 $x=10$.

∴ $E(5,4)$.

∵ 反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k>0,x>0)$ 的图象经过点 E，

∴ $k=5\times4=20$.

9. C　**点拨**：如图，过点 A'作 $A'H\perp y$ 轴于 H.



（第 9 题）

∵ $\angle AOB=\angle ABA'=90°$，

∴ $\angle ABO+\angle A'BH=90°$，$\angle ABO+\angle BAO=90°$.

∴ $\angle BAO=\angle A'BH$.

又∵ $BA=BA'$，$\angle AOB=\angle BHA'=90°$，

∴ $\triangle AOB\cong\triangle BHA'$(AAS).

∴ $OA=BH$，$OB=A'H$.

∵ 点 A 的坐标是 $(-2,0)$，点 B 的坐标是 $(0,6)$，

∴ $OA=2$，$OB=6$.

∴ $BH=OA=2$，$A'H=OB=6$.

∴ $OH=OB-BH=4$.

∴ $A'(6,4)$.

∵ $BD=A'D$，∴ $D(3,5)$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∵反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象经过点 D，

∴ $k=3\times5=15$.

10. -5　**点拨**：由 k 的几何意义可知 $|k|=|xy|=AB\cdot BC=5$. 又由图象可知，其一个分支在第四象限，所以 $k<0$. 因此 $k=-5$.

易错总结：已知形成三角形的面积求反比例函数中 k 的值时，要注意图象的位置. 当图象在第一、三象限时，k 取正数；当图象在第二、四象限时，k 取负数；当未给出图象的位置时，k 取两个值. 本题中，易出现的错误是误认为 $k=xy=AB\cdot BC=5$.

11. 解：(1)∵ $A(n,-2)$，$B(-1,4)$ 是一次函数 $y=kx+b$ 的图象和反比例函数 $y=\frac{m}{x}$ 的图象的两个交点，

∴ $4=\frac{m}{-1}$，解得 $m=-4$.

∴ $y=-\frac{4}{x}$.

∴ $-2=-\frac{4}{n}$，解得 $n=2$.

∴ $A(2,-2)$.

将 $A(2,-2)$，$B(-1,4)$ 的坐标分别代入 $y=kx+b$，

得 $\begin{cases}2k+b=-2,\\-k+b=4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-2,\\b=2.\end{cases}$

∴ 反比例函数的表达式为 $y=-\frac{4}{x}$，一次函数的表达式为 $y=-2x+2$.

(2)设直线 $y=-2x+2$ 与 y 轴的交点为 C，当 $x=0$ 时，$y=-2\times0+2=2$，∴点 C 的坐标是 $(0,2)$.

∵ $A(2,-2)$，$B(-1,4)$，

∴ $S_{\triangle AOB}=S_{\triangle AOC}+S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}\times2\times2+\frac{1}{2}\times2\times1=3$.

12. 解：(1)∵四边形 $OABC$ 是矩形，

∴ $\angle B=\angle OAB=90°$.

∵ $AB=DB$，

∴ $\angle BAD=\angle ADB=45°$，

∴ $\angle OAD=45°$，

又∵ $AD\perp x$ 轴，

∴ $\angle OAD=\angle DOA=45°$，

∴ $OD=AD$.

∵ $D(3,0)$，

∴ $OD=AD=3$，即 $A(3,3)$.

把点 $A(3,3)$ 的坐标代入 $y=\frac{k}{x}(x>0)$，得 $k=9$.

∴反比例函数的表达式为 $y=\frac{9}{x}$.

(2)如图，过点 B 作 $BE\perp AD$，垂足为 E.

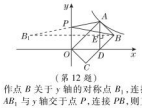
∵ $\angle ABD=90°$，$AB=BD$，$BE\perp AD$，

∴ $AE=ED=\frac{1}{2}AD=\frac{3}{2}$，

∴ $BE=\frac{3}{2}$.

∴ $OD+BE=3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$，

∴ $B\left(\frac{9}{2},\frac{3}{2}\right)$.



(第 12 题)

作点 B 关于 y 轴的对称点 B_1，连接 AB_1 与 y 轴交于点 P，连接 PB，则直线 AB_1 与 y 轴的交点就是所求点 P，此时 $PA+PB$ 最小. 易得 $B_1\left(-\frac{9}{2},\frac{3}{2}\right)$.

设直线 AB_1 的函数表达式为 $y=ax+b$，将 $A(3,3)$，$B_1\left(-\frac{9}{2},\frac{3}{2}\right)$ 的坐标代入，得

$\begin{cases}3a+b=3,\\-\frac{9}{2}a+b=\frac{3}{2},\end{cases}$

解得 $a=\frac{1}{5}$，$b=\frac{12}{5}$.

∴直线 AB_1 的函数表达式为 $y=\frac{1}{5}x+\frac{12}{5}$.

当 $x=0$ 时，$y=\frac{12}{5}$，∴点 $P\left(0,\frac{12}{5}\right)$.

13. 解：(1)∵顶点 A 的坐标是 $(0,2)$，顶点 C 的纵坐标是 -4，

∴ $AE=6$，

又∵ $\square ABCD$ 的面积是 24，

∴ $AD=BC=4$，

∴ $D(4,2)$，∴ $k=4\times2=8$，

∴反比例函数的表达式为 $y=\frac{8}{x}$.

(2)由题意知 B 的纵坐标为 -4，且在 $y=\frac{8}{x}$ 上，

∴其横坐标为 -2，

∴ $B(-2,-4)$.

设 AB 所在直线的函数表达式为 $y=ax+b$，

将 $A(0,2)$，$B(-2,-4)$ 的坐标代入，得 $\begin{cases}b=2,\\-2a+b=-4,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=3,\\b=2,\end{cases}$

∴ AB 所在直线的函数表达式为 $y=3x+2$.

14. 解：(1)∵点 $C(2,4)$ 在反比例函数 $y=\frac{k_2}{x}$ 的图象上，

∴ $k_2=2\times4=8$，

∴ $y=\frac{8}{x}$.

∵ $C(2,4)$，点 B 是线段 AC 的中点，

∴ $B(0,2)$.

∵ B，C 在 $y=k_1x+b$ 的图象上，

∴ $\begin{cases}2k_1+b=4,\\b=2,\end{cases}$ 解得 $k_1=1$，$b=2$.

∴一次函数的表达式为 $y=x+2$.

(2)由 $\begin{cases}y=x+2,\\y=\frac{8}{x},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=2,\\y=4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-4,\\y=-2.\end{cases}$

∴ $D(-4,-2)$，

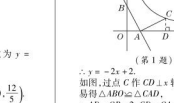
∴ $S_{\triangle COD}=S_{\triangle BOC}+S_{\triangle BOD}=\frac{1}{2}\times2\times2+\frac{1}{2}\times2\times4=6$.

(3)由图象可得，当 $0<x<2$ 或 $x<-4$ 时，$k_1x+b<\frac{k_2}{x}$.

第 3 课时　反比例函数图象与性质的应用题型

1. 解：(1)设直线 AB 的表达式为 $y=mx+b$，将点 $A(1,0)$，点 $B(0,2)$ 的坐标代入 $y=mx+b$，

得 $\begin{cases}m+b=0,\\b=2.\end{cases}$ $\begin{cases}m=-2,\\b=2.\end{cases}$



(第 1 题)

∴ $y=-2x+2$.

如图，过点 C 作 $CD\perp x$ 轴，

易得 $\triangle ABO\backsim\triangle CAD$，

∴ $AD=OB=2$，$CD=OA=1$，

∴ $C(3,1)$，∴ $k=3$，∴ $y=\frac{3}{x}$.

(2)设经过点 P 且与 AB 平行的直线的函数表达式为 $y=-2x+b$，

与反比例函数表达式联立，得 $-2x+b=\frac{3}{x}$，

∴ $-2x^2+bx-3=0$，

∴ $\Delta=b^2-24=0$ 时，直线与 $y=\frac{3}{x}$ 相切，点 P 到直线 AB 的距离最短.

此时 $b=\pm2\sqrt{6}$.

又∵ $x>0$，

∴ $b=2\sqrt{6}$.

代入 $-2x^2+bx-3=0$，

解得 $x_1=x_2=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

∴ $P\left(\frac{\sqrt{6}}{2},\sqrt{6}\right)$.

2. 解：(1)∵反比例函数 $y=\frac{m}{x}$ 的图象经过点 $B(2,-1)$，

∴ $m=2\times(-1)=-2$.

∵点 $A(-1,n)$ 在 $y=\frac{-2}{x}$ 的图象上，

∴ $n=\frac{-2}{-1}=2$.

∴ $A(-1,2)$.

把 A，B 的坐标代入 $y=kx+b$，

得 $\begin{cases}-k+b=2,\\2k+b=-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-1,\\b=1.\end{cases}$

∴一次函数的表达式为 $y=-x+1$，反比例函数的表达式为 $y=-\frac{2}{x}$.

(2)∵直线 $y=-x+1$ 交 y 轴于点 C，

∴ $C(0,1)$.

∵ D，C 两点关于 x 轴对称，

∴ $D(0,-1)$.

又∵ $B(2,-1)$，

∴ $BD\parallel x$ 轴.

∴ $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}\times2\times(2+1)=3$.

(3)∵ $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$ 是反比例函数 $y=-\frac{2}{x}$ 图象上的两点，在同一象限内，y 随 x 的增大而增大，且 $x_1<x_2<0$，∴ $y_1<y_2$.

3. 解：(1)设直线 AD 对应的函数表达式为 $y=ax+b$.

∵直线 AD 过点 $A(3,5)$，$E(-2,0)$，

∴ $\begin{cases}3a+b=5,\\-2a+b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\b=2.\end{cases}$

∴直线 AD 对应的函数表达式为 $y=x+2$.

∵点 C 与点 $A(3,5)$ 关于原点对称，

∴点 C 的坐标为 $(-3,-5)$.

∵ $CD\parallel y$ 轴，∴点 D 的横坐标为 -3，

把 $x=-3$ 代入 $y=x+2$ 得 $y=-1$.

∴点 D 的坐标为 $(-3,-1)$.

∵点 D 在函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象上，

∴ $k=(-3)\times(-1)=3$.

(2)12.

4. 解：(1)∵点 $A(-1,a)$ 在反比例函数 $y=\frac{-8}{x}$ 的图象上，

∴ $a=\frac{-8}{-1}=8$.

∴ $A(-1,8)$.

∵点 $B(0,7)$，

∴设直线 AB 的表达式为 $y=kx+7$.

∵直线 AB 过点 $A(-1,8)$，

∴ $8=-k+7$，解得 $k=-1$.

∴直线 AB 的表达式为 $y=-x+7$.

(2)∵将直线 AB 向下平移 9 个单位长度后得到直线 CD 的表达式为 $y=-x+2$，

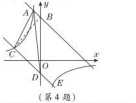
∴ $D(0,-2)$.

∴ $BD=7+2=9$.

联立得 $\begin{cases}y=-x-2,\\y=-\frac{8}{x},\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=-4,\\y=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=2,\\y=-4.\end{cases}$

∴ $C(-4,2)$，$E(2,-4)$.



(第 4 题)

如图，连接 BC，则 $\triangle BCD$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times9\times4=18$.

由平行线间的距离处处相等，可得 $\triangle ACD$ 与 $\triangle BCD$ 面积相等，

∴ $\triangle ACD$ 的面积为 18.

(3)不等式 $mx+n\le\frac{-8}{x}$ 的解集是 $-4\le x<0$ 或 $x\ge2$.

5. 解：(1)∵点 $A\left(-\frac{1}{2},m\right)$，$B(1,n)$ 在直线 $y=-2x+b$ 上，

∴ $\begin{cases}m+b=m-2,\\-2+b=n,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=-2,\\n=-4.\end{cases}$

∴ $B(1,-4)$，

将点 $B(1,-4)$ 的坐标代入反比例函数的表达式 $y=\frac{k}{x}$ 中，

得 $-4=\frac{k}{1}$，

∴ $k=-4$.

(2)直线 AB 的表达式为 $y=-2x-2$，令 $x=0$，解得 $y=-2$，令 $y=0$，解得 $x=-1$，

∴ $C(-1,0)$，$D(0,-2)$.

∵点 E 为 CD 的中点，

∴ $E\left(-\frac{1}{2},-1\right)$，

∴ $S_{\triangle BOE}=S_{\triangle ODE}+S_{\triangle OBE}=\frac{1}{2}OD\cdot(x_B-x_E)=\frac{1}{2}\times2\times\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$.

6. 解：(1)∵点 $A(2,a)$，

∴ $AC=4$，

∵ $S_{\triangle AOC}=4$，即 $\frac{1}{2}OC\cdot AC=4$，

∴ $OC=2$.

∵点 $A(a,4)$ 在第二象限，

∴ $a=-2$，∴ $A(-2,4)$.

将 $A(-2,4)$ 的坐标代入 $y=\frac{k}{x}$，得 $k=-8$，

∴反比例函数的表达式为 $y=-\frac{8}{x}$.

把 $B(8,b)$ 的坐标代入，得 $b=-1$.

(2)由图象可以看出 $mx+n<-\frac{k}{x}$ 的解集为 $-2<x<0$ 或 $x>8$.

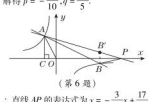
(3)如图，作点 B 关于 x 轴的对称点 B'，直线 AB' 与 x 轴交于 P'，此时 $PA-PB$ 最大.

∵ $B(8,-1)$，

∴ $B'(8,1)$.

设直线 AB' 的表达式为 $y=px+q$，将 $A(-2,4)$，$B'(8,1)$ 的坐标代入得 $\begin{cases}-2p+q=4,\\8p+q=1.\end{cases}$

解得 $p=-\frac{3}{10}$，$q=\frac{17}{5}$.



(第 6 题)

∴直线 AB' 的表达式为 $y=-\frac{3}{10}x+\frac{17}{5}$.

当 $y=0$ 时，即 $-\frac{3}{10}x+\frac{17}{5}=0$，解得 $x=\frac{34}{3}$，∴ $P\left(\frac{34}{3},0\right)$.

7. 解：(1)将 $A(2,4)$ 的坐标代入 $y=-x+m$ 与 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 中，得 $4=-2+m$，$4=\frac{k}{2}$，

∴ $m=6$，$k=8$，

∴一次函数的表达式为 $y=-x+6$，反比例函数的表达式为 $y=\frac{8}{x}$.

(2)解方程组 $\begin{cases}y=-x+6,\\y=\frac{8}{x},\end{cases}$

得 $\begin{cases}x=2,\\y=4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=4,\\y=2.\end{cases}$

∴ $B(4,2)$.

(3)设直线 $y=-x+6$ 与 y 轴交于 D 点，易得 $D(0,6)$，

∴ $OD=6$.

∴ $S_{\triangle AOB}=S_{\triangle BOD}-S_{\triangle AOD}=\frac{1}{2}\times6\times6-\frac{1}{2}\times6\times2=6$.

8. (1)解：∵ $\triangle OAP$ 的面积为 1，

∴ $S_{\triangle OPA}=\frac{1}{2}|k|=1$，∴ $|k|=2$.

∵反比例函数的图象在第一象限，

∴ $k=2$，

∴反比例函数的表达式为 $y=\frac{2}{x}$.

∵反比例函数 $y=\frac{2}{x}$ 的图象过点 $P(1,m)$，

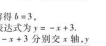
∴ $m=\frac{2}{1}=2$，∴ $P(1,2)$，

∵一次函数 $y=-x+b$ 的图象过点 $P(1,2)$，

∴ $2=-1+b$，解得 $b=3$，

∴一次函数的表达式为 $y=-x+3$.

(2)设直线 $y=-x+3$ 分别交 x 轴，y 轴于 C，D 两点，易得 $C(3,0)$，$D(0,3)$.



解方程组 $\begin{cases}y=-x+3,\\y=\frac{2}{x},\end{cases}$

得 $\begin{cases}x=1,\\y=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=2,\\y=1.\end{cases}$ ∴ $M(2,1)$.

∴ $P(1,2)$，

∴ $PA=1$，$AD=3-2=1$，$BM=1$，$BC=3-2=1$，

∴五边形 $OAPMB$ 的面积 $=S_{\triangle COD}-S_{\triangle BCM}-S_{\triangle ADP}=\frac{1}{2}\times3\times3-\frac{1}{2}\times1\times1-\frac{1}{2}\times1\times2=\frac{7}{2}$.

阶段核心归类

1. C

2. 解：(1)由 $\begin{cases}y=\frac{1}{2}x+5,\\y=-2x,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=-2,\\y=4,\end{cases}$

∴ $A(-2,4)$，

∵反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象经过点 A，

∴ $k=-2\times4=-8$，

∴反比例函数的表达式是 $y=-\frac{8}{x}$.

(2)解方程组 $\begin{cases}y=\frac{1}{2}x+5,\\y=-\frac{8}{x},\end{cases}$

得 $\begin{cases}x=-2,\\y=4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-8,\\y=1.\end{cases}$

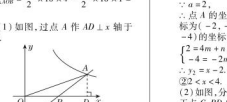
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore B(-8,1)$.

由直线 AB 的表达式为 $y=\frac{1}{2}x+5$ 得到直线与 x 轴的交点为 $(-10,0)$，

$\therefore S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times10\times4-\frac{1}{2}\times10\times1=15$.

3. **解：**(1) 如图，过点 A 作 $AD\perp x$ 轴于点 D.



（第 3(1) 题）

$\because B(5,0)$，$\therefore OB=5$.

$\because S_{\triangle OAB}=\frac{15}{2}$，

$\therefore \frac{1}{2}\times5\cdot AD=\frac{15}{2}$.

$\therefore AD=3$，$\therefore OB=AB$，$\therefore AB=5$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADB$ 中，$BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=4$，

$\therefore OD=OB+BD=9$.

$\therefore A(9,3)$.

将点 A 的坐标代入 $y=\frac{m}{x}$，得 $m=9\times3=27$，

$\therefore$ 反比例函数的表达式为 $y=\frac{27}{x}$.

将点 A，B 的坐标代入 $y=kx+b$，得 $\begin{cases}9k+b=3,\\5k+b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=\frac{3}{4},\\b=-\frac{15}{4}.\end{cases}$

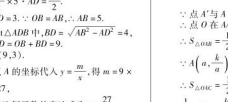
$\therefore$ 一次函数的表达式为 $y=\frac{3}{4}x-\frac{15}{4}$.

(2) 由 (1) 知 $AB=5$，$\because \triangle ABP$ 是等腰三角形，

$\therefore$ (Ⅰ) 当 $AB=PB$ 时，$PB=5$.

$\because P(0,0)$ 或 $P(10,0)$，

(Ⅱ) 当 $AB=AP$ 时，如图，



（第 3(2) 题）

由 (1) 知 $BD=4$，

易知点 P 与点 B 关于 AD 对称，

$\therefore DP=BD=4$.

$\therefore OP=5+4+4=13$. $\therefore P(13,0)$.

(Ⅲ) 当 $BP=AP$ 时，设 $P(a,0)$，

$\because A(9,3)$，$B(5,0)$，

$\therefore AP^2=(9-a)^2+9$，$BP^2=(5-a)^2$.

$\therefore (9-a)^2+9=(5-a)^2$.

解得 $a=\frac{65}{8}$.

$\therefore P\left(\frac{65}{8},0\right)$.

综上，满足条件的点 P 的坐标为 $(0,0)$ 或 $(10,0)$ 或 $(13,0)$ 或 $\left(\frac{65}{8},0\right)$.

4. **解：**(1) ① 由已知，点 $B(4,2)$ 在 $y_1=\frac{k}{x}(x>0)$ 的图象上，

$\therefore k=8$，$\therefore y_1=\frac{8}{x}$.

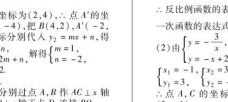
$\because a=2$，

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(2,4)$，$\therefore$ 点 A' 的坐标为 $(-2,-4)$，把 $B(4,2)$，$A'(-2,-4)$ 的坐标分别代入 $y_2=mx+n$，得 $\begin{cases}2=4m+n,\\-4=-2m+n,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=1,\\n=-2,\end{cases}$

$\therefore y_2=x-2$.

② $2<x<4$.

(2) 如图，分别过点 A，B 作 $AC\perp x$ 轴于点 C，$BD\perp x$ 轴于点 D，连接 BO.



（第 4 题）

$\because$ 点 A' 与 A 关于点 O 对称，

$\therefore$ 点 O 在 AA' 上，且 $OA=OA'$，

$\therefore S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}S_{\triangle AA'B}=8$.

$\because A\left(a,\frac{k}{a}\right)$，$B\left(3a,\frac{k}{3a}\right)$，

$\therefore S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}a\cdot\frac{k}{a}=\frac{1}{2}k$，$S_{\triangle BOD}=\frac{1}{2}\times3a\times\frac{k}{3a}=\frac{1}{2}k$.

$\therefore S_{\triangle AOC}=S_{\triangle BOD}$.

$\because S_{四边形OBDE}-S_{\triangle BOD}=S_{四边形OBDE}-S_{\triangle AOC}$，

$\therefore S_{四边形ACDE}=S_{\triangle AOB}=8$.

$\therefore \frac{1}{2}\left(\frac{k}{a}+\frac{k}{3a}\right)(3a-a)=8$，

$\therefore k=6$.

(3) $\because$ 点 A 的坐标为 $\left(a,\frac{k}{a}\right)$，点 A' 与点 A 关于点 O 对称，

$\therefore A'\left(-a,-\frac{k}{a}\right)$.

将点 A' 的坐标代入 $y_2=\frac{1}{2}x+n$，得 $n=\frac{1}{2}(-a)-\frac{k}{a}$，

$\therefore y_2=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}a-\frac{k}{a}$.

$\because AD\perp x$ 轴，$\therefore x_D=a$，$\therefore y_D=a-\frac{k}{a}$，

$\therefore AD=\frac{k}{a}-\left(a-\frac{k}{a}\right)=\frac{2k}{a}-a$.

$\because$ 四边形 $ADEF$ 是正方形，

$\therefore DE=AD=\frac{2k}{a}-a$，

$\therefore x_P=x_E=a+\frac{2k}{a}-a=\frac{2k}{a}$.

将 $x_P=\frac{2k}{a}$ 代入 $y_2=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}a-\frac{k}{a}$，得 $y_P=\frac{1}{2}\cdot\frac{2k}{a}+\frac{1}{2}a-\frac{k}{a}=\frac{1}{2}a$，

$\therefore P\left(\frac{2k}{a},\frac{1}{2}a\right)$.

将 $x_P=\frac{2k}{a}$ 代入 $y_1=\frac{k}{x}$，得 $y_1=\frac{k}{\frac{2k}{a}}=\frac{1}{2}a=y_P$.

$\therefore$ 点 P 一定在函数 y_1 的图象上.

5. **解：**(1) 由图象知 $k<0$，由已知条件得 $1\cdot|k|=3$，$\therefore k=-3$.

$\therefore$ 反比例函数的表达式为 $y=-\frac{3}{x}$.

一次函数的表达式为 $y=-x+2$.

(2) 由 $\begin{cases}y=-\frac{3}{x},\\y=-x+2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_1=-1,\\y_1=3,\end{cases}\begin{cases}x_2=3,\\y_2=-1.\end{cases}$

$\therefore$ 点 A，C 的坐标分别为 $(-1,3)$，$(3,-1)$.

(3) 设点 P 的坐标为 $(0,m)$，直线 $y=-x+2$ 与 y 轴的交点为 M，则 M 的坐标为 $(0,2)$.

$\because S_{\triangle APC}=S_{\triangle AMP}+S_{\triangle CMP}=\frac{1}{2}\times PM\times(1-11+|3|)=5$，

$\therefore PM=\frac{5}{2}$，即 $|m-2|=\frac{5}{2}$.

$\therefore m=\frac{9}{2}$ 或 $m=-\frac{1}{2}$.

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $\left(0,\frac{9}{2}\right)$ 或 $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$.

点拨：依据图象及已知条件求 k 的值是解本题的关键，只有求出 k 的值，才能通过解方程组求 A，C 两点的坐标，然后才能解决第(3)问.

6. **解：**(1) $\because$ 点 $B(m,2)$ 在直线 $y=x+1$ 上，

$\therefore 2=m+1$，得 $m=1$.

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(1,2)$.

$\because$ 点 $B(1,2)$ 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 的图象上，

$\therefore 2=\frac{k}{1}$，得 $k=2$，

即反比例函数的表达式是 $y=\frac{2}{x}$.

(2) 将 $x=0$ 代入 $y=x+1$，得 $y=1$，

则点 A 的坐标为 $(0,1)$.

又 $\because$ 点 B 的坐标为 $(1,2)$，

$\therefore \triangle AOB$ 的面积是 $\frac{1\times1}{2}=\frac{1}{2}$.

7. **解：**由反比例函数图象的对称性可知，两条坐标轴将矩形 $ABCD$ 分成四个全等的小矩形.

$\because$ 点 A 为 $y=\frac{6}{x}$ 的图象上的一点，

$\therefore S_{矩形AEOH}=6$.

$\therefore S_{矩形ABCD}=4\times6=24$.

$\because$ 总费用为 $25\times24=600$ (元)，

$\therefore$ 所需钢条一共花 600 元.

8. **解：**(1) $\because$ 一次函数 $y=kx+b(k,b$ 为常数，$k\neq0)$ 的图象与反比例函数 $y=-\frac{12}{x}$ 的图象交于 A，B 两点，

A 点的横坐标与 B 点的纵坐标都是 3，

$\therefore 3=-\frac{12}{x}$，$y=-\frac{12}{3}$.

解得 $x=-4$，$y=-4$，

故 $B(-4,3)$，$A(3,-4)$，

把 A，B 点的坐标分别代入 $y=kx+b$，得 $\begin{cases}-4k+b=3,\\3k+b=-4,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=-1,\\b=-1,\end{cases}$

故一次函数的表达式为 $y=-x-1$.

(2) $y=-x-1$，当 $y=0$ 时，$x=-1$，故 C 点坐标为 $(-1,0)$，

$\therefore \triangle AOB$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times1\times3+\frac{1}{2}\times1\times4=\frac{7}{2}$.

(3) 不等式 $kx+b>-\frac{12}{x}$ 的解集为 $x<-4$ 或 $0<x<3$.

3 反比例函数的应用

第 1 课时　建立反比例函数模型解实际问题

1. $y=\frac{4\,500}{x}$　**2.** B　**3.** A　**4.** A　**5.** D

6. B

7. C　**点拨：**由题图可知，当 $0\leqslant x\leqslant5$ 时，$y=2x$，当 $5<x<15$ 时，$y=-\frac{1}{5}x+11$，当 $x\geqslant15$ 时，$y=\frac{120}{x}$. 由图象知，A 正确，当 $x=4$ 时，$y=8$，所以室内空气含药量不低于 8 mg/m³ 的持续时间达到了 11 min，B 正确. 当 $y=5$ 时，$x=2.5$ 或 24，$24-2.5=21.5<35$. C 错误. 当 $y=2$ 时，$x=1$ 或 $x\geqslant60$，$60-1=59$(min)，D 正确.

8. D　**点拨：**本题易忽视三角形的底边长与高均为正数，而错选 B 选项.

9. **解：**(1) $\because r=480$，且全程速度限定为不超过 120 千米/时，$\therefore$ 关于 t 的函数表达式为 $v=\frac{480}{t}(t\geqslant4)$.

(2) ① 8 点至 12 点 48 分时间长为 $\frac{24}{5}$ 小时，8 点至 14 点时间长为 6 小时，

将 $t=6$ 代入 $v=\frac{480}{t}$，得 $v=80$；

将 $t=\frac{24}{5}$ 代入 $v=\frac{480}{t}$，得 $v=100$.

$\therefore$ 小汽车行驶速度 v 的范围为 $80\leqslant v\leqslant100$.

② 方方不能在当天 11 点 30 分前到达地. 理由如下：

8 点至 11 点 30 分时间长为 $\frac{7}{2}$ 小时，

将 $t=\frac{7}{2}$ 代入 $v=\frac{480}{t}$，得 $v=\frac{960}{7}>120$，超速了.

故方方不能在当天 11 点 30 分前到达 B 地.

10. **解：**(1) 画图略. 由图象猜测 y 与 x 之间的函数关系式为反比例函数关系式.

$\because$ 设 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$.

把 $x=4$，$y=12$ 代入，得 $k=48$，

$\therefore y=\frac{48}{x}$.

将其余各点的坐标代入验证，均适合，$\therefore y$ 与 x 之间的函数关系式为 $y=\frac{48}{x}$.

(2) 把 $y=5$ 代入 $y=\frac{48}{x}$，得 $x=9.6$.

$\therefore$ 当弹簧秤的示数为 5 N 时，弹簧秤所以药物燃烧时 y 关于 x 的函数关系式为 $y=\frac{3}{4}x(0\leqslant x\leqslant9)$，

药物燃烧后 y 关于 x 的函数关系式为 $y=\frac{108}{x}(x>9)$.

(2) 结合实际，令 $y=\frac{108}{x}$ 中，$y\leqslant0.45$，解得 $x\geqslant240$.

即从药物燃烧开始，至少需要经过 240 分钟后，学生才能进入.

11. **解：**(1) 由题意得 $xy=24$，

$\therefore y=\frac{24}{x}$.

(2) 当 $y=3$ 时，$x=8$；当 $y=6$ 时，$x=4$，

$\therefore 3<y<6$ 时 x 的取值范围为 $4<x<8$.

12. **解：**(1) $510-200=310$(元)，即应付 310 元.

(2) $p=\frac{200}{x}(400\leqslant x<600)$，

$\therefore p$ 随 x 的增大而减小.

(3) 购买 a(200 ≤ a < 400) 元商品在甲商场的优惠金额是 100 元，在乙商场的优惠金额是 $a-0.6a=0.4a$(元).

当 $0.4a<100$，即 $200\leqslant a<250$ 时，选择甲商场购买商品花钱较少；

当 $0.4a=100$，即 $a=250$ 时，选择甲、乙两家商场购买商品花钱一样多；

当 $0.4a>100$，即 $250<a<400$ 时，选择乙商场购买商品花钱较少.

第 2 课时　建立反比例函数模型解跨学科问题

1. C　**2.** B　**3.** C　**4.** A　**5.** D

6. B

7. C　**点拨：**因为 $I=\frac{V}{R}$，电压 U 为定值，所以 I 关于 R 的函数是反比例函数，因为电阻值和电流值均大于 0，所以图象在第一象限，故选 C.

8. C　**点拨：**本题易忽略反比例函数的增减性而致错.

9. **解：**(1) $U=IR=4\times5=20$(V).

所以函数表达式是 $I=\frac{20}{R}$.

(2) 当 $I=5$ A 时，$R=4$ Ω.

(3) 当 $R=10$ Ω 时，$I=2$ A.

(4) 因为电流不超过 10 A，由 $I=\frac{20}{R}$，可得 $\frac{20}{R}\leqslant10$，解得 $R\geqslant2$，所以可变电阻应该大于或等于 2 Ω.

10. **解：**(1) 画图略. 由图象猜测 y 与 x 之间的函数关系为反比例函数关系式.

$\because$ 设 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$.

把 $x=4$，$y=12$ 代入，得 $k=48$，

$\therefore y=\frac{48}{x}$.

将其余各点的坐标代入验证，均适合，$\therefore y$ 与 x 之间的函数关系式为 $y=\frac{48}{x}$.

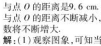
(2) 把 $y=5$ 代入 $y=\frac{48}{x}$，得 $x=9.6$.

$\therefore$ 当弹簧秤的示数为 5 N 时，弹簧秤与点 O 的距离是 9.6 cm. 随着弹簧秤与点 O 的距离不断减小，弹簧秤的示数将不断增大.

11. **解：**(1) 观察图象，可知当 $x=7$ 时，水温 $y=100$，

当 $0\leqslant x\leqslant7$ 时，

设 y 关于 x 的函数关系式为 $y=kx+b$，



第 11 题图

由题意得 $\begin{cases}b=30,\\7k+b=100,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=10,\\b=30,\end{cases}$

即当 $0\leqslant x\leqslant7$ 时，y 关于 x 的函数关系式为 $y=10x+30$.

当 $x>7$ 时，设 $y=\frac{a}{x}$，

由题意得 $100=\frac{a}{7}$，解得 $a=700$，

即当 $x>7$ 时，y 关于 x 的函数关系式为 $y=\frac{700}{x}$，

当 $y=30$ 时，$x=\frac{700}{30}=\frac{70}{3}$，

$\therefore y$ 与 x 之间的函数关系式为 $y=\begin{cases}10x+30(0\leqslant x\leqslant7),\\\frac{700}{x}\left(7<x\leqslant\frac{70}{3}\right).\end{cases}$

(2) 将 $y=50$ 代入 $y=10x+30$，得 $x=2$，

将 $y=50$ 代入 $y=\frac{700}{x}$，得 $x=14$.

$\because 14-2=12$(min)，$\frac{70}{3}-12=\frac{34}{3}$(min)，

$\therefore$ 怡宣同学想喝高于 50 ℃ 的水，她最多需要等待 $\frac{34}{3}$ min.

阶段核心方法

1. **解：**由反比例函数的定义可知 $\begin{cases}m^2-10=-1,\\m+3\neq0,\end{cases}\therefore m=3$.

$\therefore$ 此反比例函数的表达式为 $y=\frac{6}{x}$.

点拨：该题容易忽略 $m+3\neq0$ 这一条件，得出 $m=\pm3$ 的错误结论.

2. **解：**由题意得 $\begin{cases}n^2+2n-9=-1,\\n+3>0.\end{cases}$

解得 $n=2$.

$\therefore$ 此函数的表达式是 $y=\frac{5}{x}$.

3. **解：**(1) 过点 A 作 $AH\perp x$ 轴，垂足为点 H，AH 交 OC 于点 M，如图所示.



（第 3 题）

$\because OA=AB$，$AH\perp OB$，

$\therefore OH=BH=\frac{1}{2}OB=2$.

$\therefore AH=\sqrt{OA^2-OH^2}=6$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∴点 A 的坐标为 $(2,6)$.

∵ A 为反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 图象上的一点，∴ $k=2\times6=12$.

(2) ∵ $BC\perp x$ 轴，$OB=4$，点 C 在反比例函数 $y=\frac{12}{x}$ 的图象上，

∴ $BC=\frac{k}{OB}=3$.

易得 $AH\parallel BC$，

∵ $OH=BH$，

∴ $OM=MC$，

∴ $MH=\frac{1}{2}BC=\frac{3}{2}$.

∴ $AM=AH-MH=\frac{9}{2}$.

∵ $AM\parallel BC$，

∴ $\angle DAM=\angle DBC$.

又∵ $\angle AOM=\angle BDC$，

∴ $\triangle ADM\backsim\triangle BDC$.

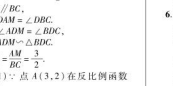
∴ $\frac{AD}{DB}=\frac{AM}{BC}=\frac{3}{2}$.

4. 解：(1) ∵点 $A(3,2)$ 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 的图象上，

∴ $k=3\times2=6$.

∴该反比例函数的表达式为 $y=\frac{6}{x}$.

(2) 如图，过点 A 作 $AE\perp OC$，垂足为点 E.



(第 4 题)

设直线 OA 的函数表达式为 $y=ax$，将 $A(3,2)$ 的坐标代入，得 $a=\frac{2}{3}$，

∴直线 OA 的函数表达式为 $y=\frac{2}{3}x$.

∵点 $C(a,0)$，

∴把 $x=a$ 代入 $y=\frac{2}{3}x$，得 $y=\frac{2}{3}a$.

把 $x=a$ 代入 $y=\frac{6}{x}$，得 $y=\frac{6}{a}$，

∴ $B\left(a,\frac{2}{3}a\right)$，即 $BC=\frac{2}{3}a$，

$D\left(a,\frac{6}{a}\right)$，即 $CD=\frac{6}{a}$.

∵ $S_{\triangle BCD}=\frac{3}{2}$，

∴ $\frac{1}{2}CD\cdot EC=\frac{3}{2}$，

即 $\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{a}\cdot(a-3)=\frac{3}{2}$，

解得 $a=6$.

∴ $BD=BC-CD=\frac{2}{3}a-\frac{6}{a}=4-1=3$.

即线段 BD 的长为 3.

5. 解：(1)由点 C 的坐标为 $(1,\sqrt{3})$，得到 $OC=2$，

∵四边形 $OABC$ 为菱形，

∴ $BC=OC=OA=2$，$BC\parallel x$ 轴，

∴ $B(3,\sqrt{3})$.

设反比例函数的表达式为 $y=\frac{k}{x}$，

把点 B 的坐标代入得：$k=3\sqrt{3}$，

∴反比例函数的表达式为 $y=\frac{3\sqrt{3}}{x}$.

(2)设直线 AB 的函数表达式为 $y=mx+n$，

把 $A(2,0)$，$B(3,\sqrt{3})$ 的坐标分别代入得：$\begin{cases}2m+n=0,\\3m+n=\sqrt{3},\end{cases}$

解得：$\begin{cases}m=\sqrt{3},\\n=-2\sqrt{3},\end{cases}$

∴直线 AB 的表达式为 $y=\sqrt{3}x-2\sqrt{3}$.

(3)自变量 x 的取值范围为 $2<x<3$.

6. 解：(1)由已知得 $vt=300$.

∴ t 与 v 之间的函数表达式为 $t=\frac{300}{v}(v>0)$.

(2)运了一半物资后还剩 $300\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=150(t)$，$150+2=75(t/h)$.

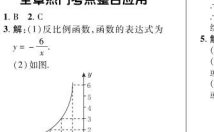
∴剩下的物资要在 2 h 之内运到汉边，∴运输速度至少为 75 t/h.

全章热门考点整合应用

1. B　**2.** C

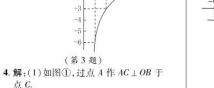
3. 解：(1)反比例函数，函数的表达式为 $y=-\frac{6}{x}$.

(2)如图.



(第 3 题)

4. 解：(1)如图①，过点 A 作 $AC\perp OB$ 于点 C.



①　②　③

(第 4 题)

∵ $\triangle OAB$ 是等边三角形，

∴ $\angle AOB=60°$，$OC=\frac{1}{2}OB$.

∵ $B(4,0)$，

∴ $OB=OA=4$.

∴ $OC=2$，$AC=2\sqrt{3}$.

把点 $A(2,2\sqrt{3})$ 的坐标代入 $y=\frac{k}{x}$，得 $k=4\sqrt{3}$，

∴反比例函数的表达式为 $y=\frac{4\sqrt{3}}{x}$.

(2)分两种情况讨论：

(Ⅰ)如图②，点 D 是 $A'B'$ 的中点，过点 D 作 $DE\perp x$ 轴于点 E.

由题意得 $A'B'=4$，$\angle A'B'O'=60°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle DEB'$ 中，

$B'D=2$，$B'E=1$，$DE=\sqrt{3}$，

∴ $O'E=3$.

把 $y=\sqrt{3}$ 代入 $y=\frac{4\sqrt{3}}{x}$，得 $x=4$，

∴ $OE=4$，∴ $a=OO'=1$.

(Ⅱ)如图③，点 F 是 $A'O'$ 的中点，过点 F 作 $FH\perp x$ 轴于点 H.

由题意得 $A'O'=4$，$\angle A'O'B'=60°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle FO'H$ 中，$O'H=1$，$FH=\sqrt{3}$.

把 $y=\sqrt{3}$ 代入 $y=\frac{4\sqrt{3}}{x}$，得 $x=4$，

∴ $OH=4$.

∴ $a=OO'=3$.

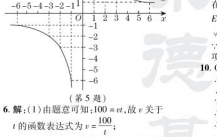
综上所述，a 的值为 1 或 3.

5. 解：如图.

(1)当 $y=-2$ 时，$x=-3$；

(2)当 $-2\le x<1$ 且 $x\neq0$ 时，$y<-3$ 或 $y>6$；

(3)当 $-3<y<2$ 且 $y\neq0$ 时，$x<-2$ 或 $x>3$.



(第 5 题)

6. 解：(1)由题意可知：$100=vt$，故 t 关于 t 的函数表达式为 $v=\frac{100}{t}$；

(2)∵不超过 5 小时卸完船上的这批货物，

∴ $t\le5$，

则 $v\ge\frac{100}{5}=20$.

答：平均每小时至少要卸货 20 吨.

7. 3　**点拨**：连接 AO，BO，由题可得 $S_{\triangle BC}=S_{\triangle ABO}=S_{\triangle APO}+S_{\triangle BPO}$，又易知 $S_{\triangle APO}=\frac{1}{2}\times2=1$，$S_{\triangle BPO}=\frac{1}{2}\times1-4|=2$，∴ $S_{\triangle ABC}=3$. 故答案为 3.

第一章达标检测卷

一、**1.** D　**2.** B　**3.** B

4. A　**点拨**：∵菱形 $ABCD$ 的周长为 24 cm，∴ $AB=24\div4=6$ (cm)，$OB=OD$.

又∵ E 为 AD 边的中点，

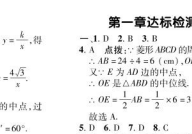
∴ OE 是 $\triangle ABD$ 的中位线.

∴ $OE=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times6=3$ (cm).

故选 A.

5. D　**6.** D　**7.** D　**8.** C

9. D　**点拨**：如图，由折叠的性质得 $\angle1=\angle2$.



(第 9 题)

∵ $AD\parallel BC$，∴ $\angle3=\angle1$，∴ $\angle2=\angle3$.

∴ $AE=AB$. 故选项 A 正确.

由折叠的性质得 $CD=AG$，$\angle D=\angle G=90°$.

∵ $AB=CD$，∴ $AB=AG$.

又∵ $AE=AF$，$\angle B=90°$，

∴ $\mathrm{Rt}\triangle ABE\cong\mathrm{Rt}\triangle AGF(\mathrm{HL})$.

故选项 B 正确.

设 $DF=x$，则 $GF=x$，$AF=8-x$.

又∵ $AG=AB=4$，

∴在 $\mathrm{Rt}\triangle AGF$ 中，根据勾股定理得 $(8-x)^2=4^2+x^2$.

解得 $x=3$. ∴ $AF=8-x=5$.

则 $AE=AF=5$，

∴ $BE=\sqrt{AE^2-AB^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$.

过点 E 作 $EM\perp BC$ 于点 M，则 $FM=4$，$EM=5-3=2$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle EFM$ 中，根据勾股定理得 $EF=\sqrt{EM^2+FM^2}=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$，则选项 C 正确.

∵ $AF=5$，$EF=2\sqrt{5}$，∴ $AF\neq EF$. 故选项 D 错误.

10. C　**点拨**：∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴ $AB=BC=CD=AD$，$\angle B=\angle BCD=\angle D=\angle BAD=90°$.

∵ $\triangle AEF$ 是等边三角形，

∴ $AE=EF=AF$，$\angle EAF=60°$.

∴ $\angle BAE+\angle DAF=30°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle ADF$ 中，$\begin{cases}AE=AF,\\AB=AD,\end{cases}$

∴ $\mathrm{Rt}\triangle ABE\cong\mathrm{Rt}\triangle ADF(\mathrm{HL})$.

∴ $BE=DF$(故①正确)，

$\angle BAE=\angle DAF$.

∴ $\angle DAF+\angle DAF=30°$，即 $\angle DAF=15°$(故②正确).

∵ $BC=CD$，

∴ $BC-BE=CD-DF$，即 $CE=CF$，

∴ $AE=AF$，

∴ AC 垂直平分 EF(故③正确).

设 $EC=x$，由勾股定理，得 $EF=AE=\sqrt{2}x$，∴ $EG=CG=\frac{\sqrt{2}}{2}x$. ∴ $AG=\frac{\sqrt{6}}{2}x$.

∴ $AC=\frac{\sqrt{6}x+\sqrt{2}x}{2}$.

∴ $AB=BC=\frac{\sqrt{3}x+x}{2}$.

∴ $BE=\frac{\sqrt{3}x+x}{2}-x=\frac{\sqrt{3}x-x}{2}$. ∴ $BE+DF=\sqrt{3}x-x\neq\sqrt{2}x$(故④错误).

易知 $S_{\triangle CEF}=\frac{x^2}{2}$，$S_{\triangle ABE}=\frac{\frac{\sqrt{3}x-x}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}x+x}{2}}{2}=\frac{x^2}{4}$，

∴ $2S_{\triangle ABE}=\frac{x^2}{2}=S_{\triangle CEF}$(故⑤正确).

综上所述，正确的有 4 个.

二、**11.** 90°　**12.** 16　**13.** 2.5

14. 2 $\sqrt{13}$　**点拨**：设正方形的边长为 a，∵ $S_{\triangle ABE}=18$，

∴ $S_{\text{正方形}ABCD}=2S_{\triangle ABE}=36$，

∴ $a^2=36$. ∵ $a>0$，∴ $a=6$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BCE$ 中，

∵ $BC=6$，$CE=4$，$\angle C=90°$，

∴ $BE=\sqrt{BC^2+CE^2}=\sqrt{6^2+4^2}=2\sqrt{13}$.

15. $\left(\frac{1}{4},\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)$

16. 16　**点拨**：∵四边形 $ABCD$ 是矩形，$AB=x$，$AD=y$，∴ $CD=AB=x$，$BC=AD=y$，$\angle BCD=90°$. 又∵ $BD\perp DE$，点 F 是 BD 的中点，$DF=4$，∴ $BF=DF=EF=4$，∴ $CF=4-BC=4-y$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle DCF$ 中，$DC^2+CF^2=DF^2$，即 $x^2+(4-y)^2=4^2=16$. ∴ $x^2+(y-4)^2=16$.

17. $\frac{3\sqrt{10}}{5}$　**点拨**：如图，连接 EF，

(第 17 题)

∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴ $CD=AB=3$，$AD=BC=2$，$\angle A=\angle D=90°$.

∵点 E 为 AD 的中点，∴ $AE=DE=1$，

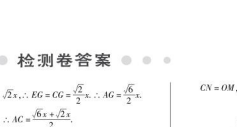
∴ $BE=\sqrt{AE^2+AB^2}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$，$CE=\sqrt{DE^2+DC^2}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$，

∴ $CE=BE$.

∵ $S_{\triangle BCE}=S_{\triangle BHF}+S_{\triangle CEF}$，

∴ $\frac{1}{2}BC\cdot AB=\frac{1}{2}BE\cdot FG+\frac{1}{2}CE\cdot FH$，∴ $BC\cdot AB=BE(FG+FH)$，即 $2\times3=\sqrt{10}(FG+FH)$，解得 $FG+FH=\frac{3\sqrt{10}}{5}$.

18. 7　**点拨**：如图，过点 O 作 $OM\perp CA$，交 CA 的延长线于点 M，过点 O 作 $ON\perp BC$ 于点 N，易证 $\triangle OMA\cong\triangle ONB$，$CN=OM$，∴ $OM=ON$，$MA=NB$.



(第 18 题)

又∵ $\angle ACB=90°$，$\angle OMA=\angle ONB=90°$，$OM=ON$，

∴四边形 $OMCN$ 是正方形.

∴ $\triangle OCM$ 为等腰直角三角形.

∵ $OC=6\sqrt{2}$，∴ $CM=OM=6$.

∵ $MA=CM-AC=6-5=1$.

∴ $BC=CN+NB=OM+MA=6+1=7$.

故答案为 7.

三、**19.** 证明：连接 DB. ∵四边形 $ABCD$ 是菱形，∴ BD 平分 $\angle ABC$.

又∵ $DE\perp AB$，$DF\perp BC$，∴ $DE=DF$.

20. (1)证明：∵ $CE\perp OD$，$DF\perp AC$，

∴四边形 $OCKD$ 是平行四边形.

又∵四边形 $ABCD$ 是菱形，

∴ $AC\perp BD$，即 $\angle COD=90°$，

∴四边形 $OCKD$ 是矩形.

(2)解：∵在菱形 $ABCD$ 中，$AB=4$，

∴ $AB=BC=CD=4$.

∵ $\angle ABC=60°$，

∴ $\triangle ABC$ 是等边三角形，

∴ $AC=4$，∴ $OC=\frac{1}{2}AC=2$，

∴ $OD=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$，

∴矩形 $OCED$ 的面积是 $2\sqrt{3}\times2=4\sqrt{3}$.

21. (1)证明：∵四边形 $ABCD$ 是菱形，

∴ $AC=BD$，$AB\parallel CD$.

又∵ $BE\parallel AC$，E 在 DC 的延长线上，

∴四边形 $ABEC$ 是平行四边形，

∴ $AC=BE$，∴ $BD=BE$.

(2)解：如图，过点 O 作 $OF\perp CD$ 于点 F.



(第 21 题)

∵四边形 $ABCD$ 是菱形，

∴ $\angle BCD=90°$，

∴ $\angle BCE=90°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BCE$ 中，根据勾股定理可得 $BE=8$. ∵ $BE=BD$，∴ $CD=CE=6$，

∴ $DE=12$.

∵ $OD=OC$，∴ $CF=DF$，

又 $OB=OD$，

∴ OF 为 $\triangle BCD$ 的中位线，

∴ $OF=\frac{1}{2}BC=4$，

∴ $S_{\triangle ODE}=\frac{1}{2}DE\cdot OF=\frac{1}{2}\times12\times$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$4=24$.

22. (1) **证明**：∵ 在矩形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，$\angle A=\angle C=90°$，

∴ $\angle ADB=\angle DBC$.

根据折叠的性质得 $\angle ADB=\angle FDB$，

$\angle F=\angle A=90°$，

∴ $\angle DBC=\angle FDB$，$\angle C=\angle F$.

∵ $BE=DE$.

在△DCE 和△BFE 中，

$\begin{cases}\angle DEC=\angle BEF,\\ \angle C=\angle F,\\ DE=BE,\end{cases}$

∴ △$DCE\cong$△BFE.

(2) **解**：在 Rt△BCD 中，

∵ $CD=2$，$DBC=\angle ADB=30°$，

∴ $BD=4$，∴ $BC=2\sqrt{3}$.

在 Rt△ECD 中，易得 $EDC=30°$.

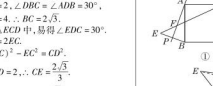
∴ $DE=2EC$.

∴ $(2EC)^2-EC^2=CD^2$.

又∵ $CD=2$，∴ $CE=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

∴ $BE=BC-EC=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

23. (1) **证明**：如图，连接 AC.



（第 23 题）

∵ 四边形 $ABCD$ 为菱形，

$\angle BAD=120°$，∴ $AB=BC=CD=DA$，

∴ $\angle BAC=\angle DAC=60°$，∴ △$ABC$ 和△ADC 都是等边三角形，

∴ $\angle ABE=\angle ACF=60°$，

$\angle 1+\angle 2=60°$.

∵ $\angle 3+\angle 2=\angle EAF=60°$，

∴ $\angle 1=\angle 3$.

∵ $\angle ABC=60°$，$AB=BC$，

∴ △ABC 为等边三角形.

∴ $AB=AC$，∴ △$ABE\cong$△ACF.

∴ $BE=CF$.

(2) **解**：四边形 $AECF$ 的面积不变.

由(1)知△$ABE\cong$△ACF，

则 $S_{\triangle ABE}=S_{\triangle ACF}$，

故 $S_{四边形AECF}=S_{\triangle AEC}+S_{\triangle ACF}=S_{\triangle AEC}+S_{\triangle ABE}=S_{\triangle ABC}$.

如图，过点 A 作 $AM\perp BC$ 于点 M，则 $BM=MC=2$，

∴ $AM=\sqrt{AB^2-BM^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$.

∴ $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}BC\cdot AM=\dfrac{1}{2}\times4\times2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$. 故 $S_{四边形AECF}=4\sqrt{3}$.

24. **解**：(1) 如图①.

(2) 如图②，连接 AE，∵ 点 E 是点 B 关于直线 AP 的对称点，

∴ $\angle PAE=\angle PAB=20°$，$AE=AB$.

∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴ $AE=AB=AD$，$\angle BAD=90°$.

∴ $\angle AED=\angle ADE=\angle EAD=\angle DAB+\angle BAP+\angle PAE=130°$.

∴ $\angle ADE=\dfrac{180°-130°}{2}=25°$.

(3) $EF^2+FD^2=2AB^2$.

证明如下：如图③，连接 AE，BF，BD，由轴对称和正方形的性质可得，$EF=BF$，$AE=AB=AD$，易得 $\angle ABF=\angle AEF=\angle ADF$.∵ $\angle BAD=90°$，

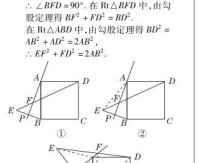
∴ $\angle ABF+\angle FBD+\angle ADB=90°$.

∴ $\angle ADF+\angle ADB+\angle FBD=90°$.

∴ $\angle BFD=90°$. 在 Rt△BFD 中，由勾股定理得 $BF^2+FD^2=BD^2$.

在 Rt△ABD 中，由勾股定理得 $BD^2=AB^2+AD^2=2AB^2$，

∴ $EF^2+FD^2=2AB^2$.



（第 24 题）

第二章达标检测卷

一.**1.** A **2.** C **3.** C **4.** D **5.** A **6.** C **7.** D **8.** B **9.** C

10. B　**点拨**：设 AC 交 $A'B'$ 于 H.

∵ $\angle DAC=45°$，$\angle AA'H=90°$，

∴ △$AA'H$ 是等腰直角三角形.

设 $AA'=x$ cm，则 $A'H=x$ cm，$A'D=(2-x)$ cm.

∴ $x(2-x)=1$，解得 $x_1=x_2=1$，

即 $AA'=1$ cm. 故选 B.

二.**11.** $x_1=0$，$x_2=7$　**12.** -1

13. 2　**点拨**：∵ $x^2-6x+k=0$ 的两根分别为 x_1，x_2，

∴ $x_1+x_2=6$，$x_1x_2=k$.

∴ $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\dfrac{6}{k}=3$.

解得 $k=2$. 经检验，$k=2$ 满足题意.

14. $100(1+x)+100(1+x)^2=260$

点拨：根据题意知：第二季度投入资金 $100(1+x)$ 万元，第三季度投入资金 $100(1+x)^2$ 万元，

∴ $100(1+x)+100(1+x)^2=260$.

15. 1　**点拨**：由方程 $x^2-4x+3=0$，得 $(x-1)(x-3)=0$，

∴ $x-1=0$ 或 $x-3=0$.

解得 $x_1=1$，$x_2=3$.

当 $x=1$ 时，分式方程 $\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{2}{x+a}$ 无意义；

当 $x=3$ 时，$\dfrac{1}{3-1}=\dfrac{2}{3+a}$，解得 $a=1$.

经检验，$a=1$ 是方程 $\dfrac{1}{3-1}=\dfrac{2}{3+a}$ 的解.

16. $\sqrt{5}-1$　**点拨**：本题主要考查了根据几何图形列一元二次方程，根据关键是根据已知条件和图形找出等量关系，列出方程.

17. $\pm\sqrt{5}$　**点拨**：设 $t=2(a+b)$，则原方程可化为 $(t+1)(t-1)=19$，整理，得 $t^2=20$，解得 $t=\pm2\sqrt{5}$，则 $a+b=\dfrac{t}{2}=\pm\sqrt{5}$.

技巧点拨：换元法的一般步骤是：(1) 设新元，即根据问题的特点或关系，引进适当的辅助元作为新元；(2) 换元，用新元去代替原问题中的代数式或归元；(3) 求解新元，将解出的新元代回原设的换元式，求解原问题的未知元.

18. 6　**点拨**：∵ 在 Rt△ABC 中，$\angle BAC=90°$，$AB=AC=16$ cm，AD 为 BC 边上的高，∴ $AD=BD=CD=8\sqrt{2}$ cm.

又∵ $AP=\sqrt{2}t$ cm，

∴ $S_{\triangle}=\dfrac{1}{2}AP\cdot BD=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}t\times8\sqrt{2}=8t(\text{cm}^2)$，$PD=(8\sqrt{2}-\sqrt{2}t)$ cm. 易知 $PE=AP=\sqrt{2}t$ cm，∴ $S_{\triangle}=PD\cdot PE=(8\sqrt{2}-\sqrt{2}t)\cdot\sqrt{2}t\text{cm}^2$.

∴ $S_{\triangle}=2S_{\triangle}$，即 $8=2(8\sqrt{2}-\sqrt{2}t)\cdot\sqrt{2}t$.

解得 $t_1=0$（舍去），$t_2=6$.

三.19. **解**：(1) (公式法) $a=1$，$b=-1$，$c=-1$，

∴ $\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\times1\times(-1)=5$.

∴ $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$，

即原方程的根为 $x_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，

$x_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

(2) (因式分解法) 移项，得 $3x(x-2)-(x-2)=0$，

即 $(3x-1)(x-2)=0$，

∴ $x_1=\dfrac{1}{3}$，$x_2=2$.

(3) (配方法) 配方，得 $(x-\sqrt{5})^2=1$，

∴ $x-\sqrt{5}=\pm1$，

∴ $x_1=\sqrt{5}+1$，$x_2=\sqrt{5}-1$.

(4) (公式分解法) 原方程可化为 $x^2+9x+20=0$，

即 $(x+4)(x+5)=0$，

解得 $x_1=-4$，$x_2=-5$.

20. **解**：(1)∵ 关于 x 的一元二次方程 $(m-2)x^2+2mx+m+3=0$ 有两个不相等的实数根，

∴ $m-2\neq0$ 且 $\Delta=(2m)^2-4(m-2)(m+3)=-4(m-6)>0$，

解得 $m<6$ 且 $m\neq2$.

∴ m 的取值范围是 $m<6$ 且 $m\neq2$.

(2) 在 $m<6$ 且 $m\neq2$ 的范围内，最大整数为 5.

此时，方程化为 $3x^2+10x+8=0$，

解得 $x_1=-2$，$x_2=-\dfrac{4}{3}$.

21. **解**：设 $2x+5=y$，则原方程可化为 $y^2-4y+3=0$，所以 $(y-1)(y-3)=0$，解得 $y_1=1$，$y_2=3$. 当 $y=1$ 时，即 $2x+5=1$，解得 $x=-2$；当 $y=3$ 时，即 $2x+5=3$，解得 $x=-1$，所以原方程的解为 $x_1=-2$，$x_2=-1$.

22. **解**：(1) 由题意得 $\Delta=9-4(m-1)\geqslant0$，∴ $m\leqslant\dfrac{13}{4}$.

(2) 由根与系数的关系得 $x_1+x_2=-3$，$x_1x_2=m-1$.

∵ $2(x_1+x_2)+x_1x_2+10=0$，

∴ $-6+(m-1)+10=0$，∴ $m=-3$，

∵ $m\leqslant\dfrac{13}{4}$，∴ m 的值为 -3.

23. **解**：(1) 设矩形的长为 x cm，则宽为 $(28-x)$ cm，

由题意列方程，得 $x(28-x)=180$，

整理，得 $x^2-28x+180=0$，

解得 $x_1=10$（舍去），$x_2=18$.

答：矩形的长为 18 cm，宽为 10 cm.

(2) 不能. 理由如下：设矩形的长为 y cm，则宽为 $(28-y)$ cm，

由题意列方程，得 $y(28-y)=200$，

整理，得 $y^2-28y+200=0$，

则 $\Delta=(-28)^2-4\times200=784-800=-16<0$.

∴ 该方程无实数解.

故这个矩形的面积不能为 200 cm².

24. **解**：(1) 设 t s 后，△PBQ 的面积为 8 cm²，则 $PB=(6-t)$ cm，$BQ=2t$ cm，

∵ $\angle B=90°$，

∴ $\dfrac{1}{2}(6-t)\times2t=8$，

解得 $t_1=2$，$t_2=4$，

∴ 2 s 或 4 s 后，△PBQ 的面积为 8 cm².

(2) 设出发 x s 后，$PQ=4\sqrt{2}$ cm，由题意，得 $(6-x)^2+(2x)^2=(4\sqrt{2})^2$，解得 $x_1=\dfrac{2}{5}$，$x_2=2$，故出发 $\dfrac{2}{5}$ s 或 2 s 后，线段 PQ 的长为 $4\sqrt{2}$ cm.

(3) 不能. 理由：设经过 y s，△PBQ 的面积等于 10 cm²，则 $\dfrac{1}{2}\times(6-y)\times2y=10$，即 $y^2-6y+10=0$，

∵ $\Delta=b^2-4ac=36-4\times10=-4<0$，

∴ 该方程无实数根.

∴ △PBQ 的面积不能为 10 cm².

25. **解**：(1) $240-(40-30)\times2=220$(元)，

$220\times40=8\,800$(元).

答：若二班共有 40 名学生参加了春游活动，则需要交门票费 8 800 元.

(2) $240-(52-30)\times2=196$(元)，

∵ $196<200$，∴ 每张门票 200 元.

$200\times52=10\,400$(元).

答：若二班共有 52 名学生参加了春游活动，则需要交门票费 10 400 元.

(3)∵ 9 450 不是 200 的整数倍，且 $240\times30=7\,200$(元) $<9\,450$ 元，

∴ 每张门票的价格高于 200 元且低于 240 元.

设二班参加春游的学生有 x 名，则每张门票的价格为 $[240-2(x-30)]$ 元，

根据题意，得 $[240-2(x-30)]x=9\,450$，

整理，得 $x^2-150x+4\,725=0$，

解得 $x_1=45$，$x_2=105$，

∵ $240-2(x-30)>200$，

∴ $x<50$. ∴ $x=45$.

答：若二班交了门票费 9 450 元，则该班参加春游的学生有 45 名.

第三章达标检测卷

一.**1.** C **2.** B **3.** A **4.** C **5.** C

6. A　**点拨**：根据题意画出树状图，如图所示：

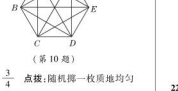


（第 6 题）

由树状图可知，共有 6 种等可能的情况，其中小红获胜的情况有 2 种，小明获胜的情况有 2 种，所以 $P_1=P_2=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$，故选 A.

7. D **8.** C **9.** A

10. B　**点拨**：如图，正六边形中连接任意两点可得 15 条线段，其中 AC，AE，BD，BF，CE，DF 这 6 条线段的长度为 $\sqrt{3}$，∴ 所求概率为 $\dfrac{6}{15}=\dfrac{2}{5}$.



（第 10 题）

二.**11.** $\dfrac{3}{4}$　**点拨**：随机掷一枚质地均匀的硬币两次，可能出现的结果有 (正，正)，(正，反)，(反，正)，(反，反) 4 种，且每种结果出现的可能性相同，至少有一次正面朝上的结果有 3 种，故所求概率是 $\dfrac{3}{4}$.

12. 20　**13.** $\dfrac{1}{3}$　**14.** $\dfrac{3}{4}$　**15.** $\dfrac{1}{5}$

16. $\dfrac{3}{8}$　**点拨**：列表如下：

	A	B	D	E
C	(A,C)	(B,C)	(D,C)	(E,C)
F	(A,F)	(B,F)	(D,F)	(E,F)
G	(A,G)	(B,G)	(D,G)	(E,G)
H	(A,H)	(B,H)	(D,H)	(E,H)

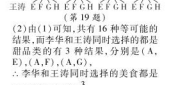
由表格可知共有 16 种等可能情况，参加首场比赛的两个队都来自县区学校的有 6 种情况，所以概率为 $\dfrac{6}{16}=\dfrac{3}{8}$.

17. $\dfrac{1}{3}$　**18.** $\dfrac{1}{3}$

三.**19.** **解**：(1) 列表如下：

李华	王诗			
	E	F	G	H
A	(A,E)	(A,F)	(A,G)	(A,H)
B	(B,E)	(B,F)	(B,G)	(B,H)
C	(C,E)	(C,F)	(C,G)	(C,H)
D	(D,E)	(D,F)	(D,G)	(D,H)

或画树状图如下：



（第 19 题）

(2) 由 (1) 可知，共有 16 种等可能的结果，画李华和王诗同时选择的都是甜品类的有 3 种结果，分别是 (A，E)，(A，F)，(A，G)，

∴ 李华和王诗同时选择的美食都是甜品类的概率为 $\dfrac{3}{16}$.

20. **解**：设口袋中的白球有 x 个.

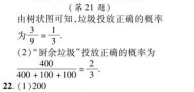
根据题意，得 $\dfrac{x}{x+6}=\dfrac{40}{100}$，

解得 $x=6$，

经检验，$x=6$ 是原方程的根.

答：口袋中的白球约有 6 个.

21. **解**：(1) 三类垃圾随机投入三类垃圾箱的树状图如图所示.



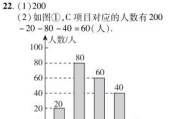
（第 21 题）

由树状图可知，垃圾投放正确的概率为 $\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$.

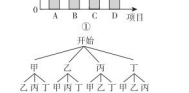
(2) “厨余垃圾”投放正确的概率为 $\dfrac{400}{400+100+100}=\dfrac{2}{3}$.

22. (1) 200

(2) 如图①，C 项目对应的人数有 $200-20-80-40=60$(人).



①



②

（第 22 题）

(3) 画树状图如图②所示；

由树状图可知，共有 12 种等可能的情况，恰好同时选中甲、乙两位同学的情况有 2 种，

所以 P(恰好同时选中甲、乙两位同学) $=\dfrac{2}{12}=\dfrac{1}{6}$.

23. **解**：(1) 列表略，一共出现 16 种等可能结果，其中在同一层出电梯的有 4 种结果，则 P(甲，乙二人在同一层出电梯) $=\dfrac{4}{16}=\dfrac{1}{4}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)游戏不公平. 甲、乙在同一层或相邻楼层出电梯的有 10 种结果,故

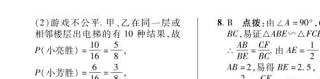
P(小花胜)$=\frac{10}{16}=\frac{5}{8}$,

P(小芳胜)$=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$,

$\because \frac{5}{8}>\frac{3}{8}$,∴游戏不公平.

修改规则为:若甲、乙在同一层或相隔两层出电梯,则小亮胜;若甲、乙相隔一层或三层出电梯,则小芳胜(修改规则不唯一).

24. 解:(1)画树状图如图所示:



(第 24 题)

或列表如下:

甲厂家 / 乙厂家	高档	中档	低档
精装	(高档,精装)	(中档,精装)	(低档,精装)
简装	(高档,简装)	(中档,简装)	(低档,简装)

共有 6 种选购方案:(高档,精装),(高档,简装),(中档,精装),(中档,简装),(低档,精装),(低档,简装).

(2)因为选中甲厂家的高档柜子的方案有 2 种,即(高档,精装),(高档,简装),所以甲厂家的高档柜子被选中的概率为 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

(3)由(2)可知,当选用方案(高档,精装)时,设分别购买高档柜子、精装柜子 x_1 盒、y_1 盒,根据题意,得 $\begin{cases}x_1+y_1=32,\\60x_1+50y_1=1\,200.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x_1=-40,\\y_1=72.\end{cases}$

经检验,不符合题意,舍去.

当选用方案(高档,简装)时,设分别购买高档柜子、简装柜子 x_2 盒、y_2 盒,根据题意,得 $\begin{cases}x_2+y_2=32,\\60x_2+20y_2=1\,200.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x_2=14,\\y_2=18.\end{cases}$ 经检验,符合题意. 故该中学购买了 14 盒甲厂家的高档柜子.

第四章达标检测卷

一、**1.** B **2.** A

3. C　**点拨**:因为 $a/\!/b/\!/c$,所以 $\frac{BD}{BF}=\frac{AC}{AE}=\frac{3}{3+4}=\frac{3}{7}$.

4. A　**5.** D

6. B　**点拨**:$\because AB\perp BC$,$CD\perp BC$,

$\therefore \angle ABE=\angle DCE=90°$.

又$\because \angle AEB=\angle DEC$,

$\therefore \triangle ABE\backsim\triangle DCE$.

$\therefore \frac{AB}{DC}=\frac{BE}{CE}$,即 $\frac{AB}{20}=\frac{20}{10}$.

$\therefore AB=40$ m.

7. B

8. B　**点拨**:由 $\angle A=90°$,$CF\perp BE$,$AD/\!/BC$,易证 $\triangle ABE\backsim\triangle FCB$.

$\therefore \frac{AB}{BC}=\frac{CF}{BE}$,由 $AE=\frac{1}{2}\times 3=1.5$,

$AB=2$,易得 $BE=2.5$,

$\therefore \frac{2}{2.5}=\frac{CF}{3}$,$\therefore CF=2.4$.

9. D

10. C　**点拨**:设 $AP=x$,则 $BP=8-x$,当 $\triangle PAE\backsim\triangle PBC$ 时,$\frac{AE}{BC}=\frac{PA}{PB}$,

$\therefore AE\cdot PB=BC\cdot PA$,即 $3(8-x)=4x$,解得 $x=\frac{24}{7}$.

当 $\triangle PAE\backsim\triangle CBP$ 时,$\frac{AE}{PB}=\frac{PA}{BC}$,

$\therefore AE\cdot BC=PA\cdot PB$,即 $3\times 4=x(8-x)$,解得 $x=2$ 或 6.

故满足条件的点 P 的数量为 3 个.

二、**11.** 160 km　**点拨**:设小明所居住的城市与 A 地的实际距离为 x km,根据题意可列比例式为 $\frac{1}{500\,000}=\frac{32}{x\times 10^5}$,解得 $x=160$.

12. 2　**点拨**:$\because \frac{a+b}{c}=\frac{b+c}{a}=\frac{c+a}{b}=k$,

$\therefore \frac{2a+2b+2c}{a+b+c}=k$,故 $k=2$.

易错提醒:在运用等比性质时,注意分母的和不等于 0 这个条件.

13. $S_1=S_2$　**点拨**:$\because$ 点 C 是线段 AB 的黄金分割点,且 $BC>AC$,

$\therefore BC^2=AC\cdot AB$.又$\because S_1=BC^2$,$S_2=AC\cdot AD+AC\cdot AB$,$\therefore S_1=S_2$.

14. 2;1 : 2;1 : 6

15. (2,1)或(0,−1)　**点拨**:如图,以点 A 为位似中心,把正方形 $ABCD$ 的各边缩小为原来的一半,得正方形 $A'B'C'D'$,根据图形可得点 C' 的坐标为(2,1)或(0,−1).



(第 15 题)

易错提醒:此类题要注意多种可能:位似图形可能位于位似中心的同侧,也可能位于位似中心的两侧,要分情况进行讨论.

16. 2.5　**点拨**:由题意得 $CE=5$ m,$AB=2$ m,$DE=4$ m,

$\because AD/\!/BE$,$\therefore \frac{BC}{AB}=\frac{CE}{ED}$,即 $\frac{BC}{2}=\frac{5}{4}$,

解得 $BC=2.5$ m,即窗口底端 B 距离墙脚 C 2.5 m.

17. $\frac{16}{3}$ 或 3　**点拨**:$\because \angle ABC=\angle FBP=90°$,$\therefore \angle ABP=\angle CBF$.当 $\triangle MBC\backsim\triangle ABP$ 时,$BM:AB=BC:BP$,得 $BM=4\times 4\div 3=\frac{16}{3}$;当 $\triangle CBM\backsim\triangle ABP$ 时,$BM:BP=CB:AB$,得 $BM=4\div 4\times 3=3$.

18. $\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(\frac{3}{4}\right)^n$　**点拨**:在正三角形 ABC 中,$AB_1\perp BC$,$\therefore BB_1=\frac{1}{2}BC=1$.

在 Rt$\triangle ABB_1$ 中,$AB_1=\sqrt{AB^2-BB_1^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$,

根据题意可得 $\triangle AB_2B_1\backsim\triangle AB_1B$,记 $\triangle AB_1B$ 的面积为 S,

$\therefore \frac{S_1}{S}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$,$\therefore S_1=\frac{3}{4}S$.

同理可得 $S_2=\frac{3}{4}S_1$,$S_3=\frac{3}{4}S_2$,$S_4=\frac{3}{4}S_3$,…

又$\because S=\frac{1}{2}\times 1\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore S_1=\frac{3}{4}S=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{3}{4}$,

$S_2=\frac{3}{4}S_1=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(\frac{3}{4}\right)^2$,$S_3=\frac{3}{4}S_2=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(\frac{3}{4}\right)^3$,$S_4=\frac{3}{4}S_3=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(\frac{3}{4}\right)^4$,…,$S_n=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

三、**19.** (1)**证明**:$\because FG\perp BC$,$EF\perp BC$,

$\therefore EF/\!/CD$.$\because \angle BFE=\angle CFD$.

又$\because \angle B=\angle C=90°$,

$\therefore \triangle BFE\backsim\triangle CDF$.

(2)**解**:设 $CF=x$ cm,则 $BF=(26-x)$ cm,

$\because AB=13$ cm,$AE=6$ cm,

$\therefore BE=7$ cm,

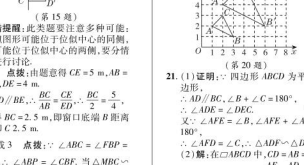
由(1)得,$\triangle BFE\backsim\triangle CDF$,

$\therefore \frac{BE}{DF}=\frac{BF}{CF}$,即 $\frac{7}{13}=\frac{26-x}{x}$,

解得 $x=16.9$,即 $CF=16.9$ cm.

20. **解**:(1)如图.

(2)$S_{\triangle A'B'C'}=4\times 4-\frac{1}{2}\times 2\times 2-\frac{1}{2}\times 2\times 4-\frac{1}{2}\times 2\times 4=6$.



(第 20 题)

21. (1)**证明**:由边形 $ABCD$ 为平行四边形,

$\therefore AD/\!/BC$,$\angle B+\angle C=180°$,

$\therefore \angle B=\angle DEC$.

又$\because \angle AFE=\angle B$,$\angle AFE+\angle AFD=180°$,

$\therefore \angle AFD=\angle C$,$\therefore \triangle ADF\backsim\triangle DEC$.

(2)**解**:在 $\triangle ABCD$ 中,$CD=AB=8$.

$\because \triangle ADF\backsim\triangle DEC$,$\therefore \frac{AD}{CD}=\frac{AF}{DE}$,

即 $\frac{4\sqrt{3}}{8}=\frac{6\sqrt{3}}{DE}$,解得 $DE=12$.

$\because AE\perp BC$,$AD/\!/BC$,$\therefore AE\perp AD$.

在 Rt$\triangle AED$ 中,由勾股定理,得 $AE=\sqrt{12^2-(6\sqrt{3})^2}=6$.

22. **解**:由题意得,$CD=DG=EF=2$ 米,$DF=52$ 米,$FH=4$ 米.

$\because AB\perp BH$,$CD\perp BH$,$EF\perp BH$,

$\therefore \angle ABH=\angle CDG=\angle EFH=90°$.

又$\because \angle CGD=\angle AGB$,$\angle EHF=\angle AHB$,

$\therefore \triangle CDG\backsim\triangle ABG$,$\triangle EFH\backsim\triangle ABH$,

$\therefore \frac{CD}{AB}=\frac{DG}{BG}$,$\frac{EF}{AB}=\frac{FH}{BH}$.

即 $\frac{CD}{AB}=\frac{DG}{DG+BD}$,

$\frac{EF}{AB}=\frac{FH}{FH+DF+BD}$,

$\therefore \frac{2}{AB}=\frac{2}{2+BD}$,$\frac{2}{AB}=\frac{4}{4+52+BD}$,

$\therefore \frac{2}{2+BD}=\frac{4}{4+52+BD}$,

解得 $BD=52$ 米,

$\therefore \frac{2}{AB}=\frac{2}{2+52}$,解得 $AB=54$ 米.

答:建筑物 AB 的高度为 54 米.

23. **解**:(1)由题意知 $AP=2t$,$DQ=t$,$QA=6-t$,当 $QA=AP$ 时,

$\triangle QAP$ 是等腰直角三角形,

所以 $6-t=2t$,解得 $t=2$.

(2)四边形 $QAPC$ 的面积 $=S_{\triangle ADC}+S_{\triangle APC}=\frac{1}{2}AQ\cdot CD+\frac{1}{2}AP\cdot BC=(36-6t)+6t=36$($cm^2$).在 P,Q 两点移动的过程中,四边形 $QAPC$ 的面积始终保持不变.

(3)分两种情况:

①当 $\frac{AQ}{BC}=\frac{AP}{AB}$ 时,$\triangle QAP\backsim\triangle ABC$,则 $\frac{6-t}{12}=\frac{2t}{6}$,即 $t=1.2$;

②当 $\frac{AQ}{BC}=\frac{AP}{AB}$ 时,$\triangle PAQ\backsim\triangle ABC$,则 $\frac{6-t}{6}=\frac{2t}{12}$,即 $t=3$.

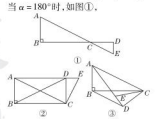
所以当 $t=1.2$ 或 3 时,以点 Q,A,P 为顶点的三角形与 $\triangle ABC$ 相似.

24. **解**:(1)当 $\alpha=0°$ 时,$BC=2AB=8$,$AB=4$.$\because$ 点 D,E 分别是边 BC,AC 的中点,$\therefore BD=4$,$AE=EC=\frac{1}{2}AC$.

$\because \angle B=90°$,$\therefore AC=\sqrt{8^2+4^2}=4\sqrt{5}$.

$\therefore AE=CE=2\sqrt{5}$.$\therefore \frac{AB}{AE}=\frac{2\sqrt{5}}{4}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

当 $\alpha=180°$ 时,如图①.



(第 24 题)

易得 $AC=4\sqrt{5}$,$CE=2\sqrt{5}$,$CD=4$,

$\therefore \frac{AE}{BD}=\frac{AC+CE}{BC+CD}=\frac{4\sqrt{5}+2\sqrt{5}}{8+4}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

品质教辅

(2)无变化. 证明:在题图①中,

$\because DE$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线,

$\therefore DE/\!/AB$.

$\therefore \frac{CE}{CA}=\frac{CD}{CB}$,$\angle EDC=\angle B=90°$.

在题图②中,$\because \triangle EDC$ 在旋转过程中形状大小不变,

$\therefore \frac{CE}{CA}=\frac{CD}{CB}$ 仍然成立.

又$\because \angle ACE=\angle BCD=\alpha$,

$\therefore \triangle ACE\backsim\triangle BCD$.$\therefore \frac{AE}{BD}=\frac{AC}{BC}$.

由(1)可知 $AC=4\sqrt{5}$.

$\therefore \frac{AC}{BC}=\frac{4\sqrt{5}}{8}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.$\therefore \frac{AE}{BD}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

即 $\frac{AE}{BD}$ 的大小不变.

(3)当 $\triangle EDC$ 在 BC 上方,且 A,D,E 三点共线时,四边形 $ABCD$ 为矩形,如图②,$\because BD=AC=4\sqrt{5}$,当 $\triangle EDC$ 在 BC 下方,且 A,E,D 三点共线时,$\triangle ADC$ 为直角三角形,如图③,由勾股定理可得 $AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=8$.

又易知 $DE=2$,$\therefore AE=6$.$\therefore \frac{AE}{BD}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.$\therefore BD=\frac{12\sqrt{5}}{5}$.

综上,BD 的长为 $4\sqrt{5}$ 或 $\frac{12\sqrt{5}}{5}$.

第五章达标检测卷

一、**1.** D　**2.** B　**3.** B

4. B　**点拨**:设所求投影三角形的对应边长为 x cm,则有 $\frac{2}{5}=\frac{8}{x}$,解得 $x=20$.

5. B

6. D　**点拨**:移走之前,主视图为



,俯视图为



,左视图为



;移走之后,主视图为



,俯视图为



,左视图为



,故只有左视图不变.

7. C　**8.** A

9. A　**点拨**:当货架上的方便面桶数最少时,如图所示,数字表示该位置叠放的方便面桶数,则此架少有 7 桶.



俯视图

(第 9 题)

10. B　**点拨**:如图,分别延长 AC,BD 交于点 E.

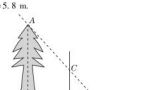
$\because BD=3.6$ m,$CD=1.8$ m,且同一时刻测得一身高为 1.5 m 的同学的影长为 1.35 m,

$\therefore \frac{CD}{DE}=\frac{1.5}{1.35}$,即 $\frac{1.8}{DE}=\frac{1.5}{1.35}$.

$\therefore DE=1.62$ m.

$\because CD/\!/AB$,$\therefore \angle ABD=\angle CDE$,$\angle BAC=\angle DCE$.$\therefore \triangle ABE\backsim\triangle CDE$.

$\therefore \frac{CD}{AB}=\frac{DE}{BE}$,即 $\frac{1.8}{AB}=\frac{1.62}{1.62+3.6}$,解得 $AB=5.8$ m.



(第 10 题)

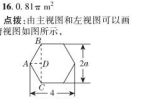
二、**11.** 正方体(答案不唯一)

12. 等于　**13.** 18

14. 7　**点拨**:根据题意得搭成该几何体的小正方体最多有 1 + 1 + 1 + 2 + 2 = 7(个).

15. ①　**16.** 0.81 m^2

17. $\sqrt{3}$　**点拨**:由主视图和左视图可以画出俯视图如图所示,



(第 17 题)

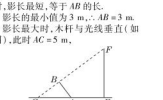
连接 BC,过点 A 作 $AD\perp BC$ 于点 D,在 $\triangle ABC$ 中,$AB=AC$,$\angle BAC=120°$,

$\therefore \angle ACD=30°$,$\therefore AD=\frac{1}{2}AC$,从而易知 $2AD+AC=4$,$\therefore AC=AB=2$,在 Rt$\triangle ACD$ 中,由勾股定理可得 $CD=\sqrt{3}$,故 $a=\sqrt{3}$.

18. 7.5 m　**点拨**:当木杆旋转到达地面时,影长最短,等于 AB 的长.

○影长的最小值为 3 m,∴$AB=3$ m.

○影长最大时,木杆与光线垂直(如图),此时 $AC=5$ m,



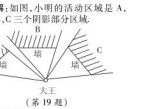
(第 18 题)

$\therefore BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=4$ m.

$\because \angle CBA=\angle CEF=90°$,$\angle BCA=\angle ECF$,$\therefore \triangle CAB\backsim\triangle CFE$.$\therefore \frac{CB}{CE}=\frac{BA}{EF}$.

即 $\frac{4}{4+5}=\frac{3}{EF}$,$\therefore EF=7.5$ m.

三、**19.** **解**:如图,小明的活动区域是 A,B,C 三个阴影部分区域.



(第 19 题)

20. **解**:(1)主视图

(2)这个组合几何体的表面积为 $2\times(8\times 5+8\times 2+5\times 2)+4\times\pi\times 6\approx 132+4\times 3.14\times 6\approx 207.4$($cm^2$).

21. **解**:(1)作图,如图所示.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



（第 21 题）

（2）大楼 AB 建成后会影响温室 CD 的采光。

理由：如图，BE 交 DC 于点 N，

由题意，得 $\frac{AB}{AE}=\frac{DC}{CE}$，所以 $\frac{12}{AE}=\frac{3}{2}$，

解得 $AE=8$ m，

由 $AC=7$ m，可得 $CE=1$ m，

由 $CN//AB$，可知 $\frac{12}{AE}=\frac{CN}{1}$，

解得 $CN=1.5$ m，

因为 $1.5>1$，

故大楼 AB 建成后会影响温室 CD 的采光。

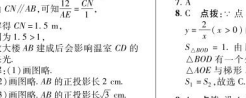
22. 解：（1）画图略.

（2）画图略. AB 的正投影长 2 cm.

（3）画图略. AB 的正投影长$\sqrt{3}$ cm.

23. 解：（1）直三棱柱

（2）如图所示.


（第 23 题）

（3）由题可得 $a=\frac{h}{\sqrt{2}}=\frac{20}{\sqrt{2}}=10\sqrt{2}$（cm），

所以该几何体的表面积为 $\frac{1}{2}\times(10\sqrt{2})^2\times2+2\times10\sqrt{2}\times20+20^2=600+400\sqrt{2}$（cm^2）.

点拨：在画或判断三视图时，一定要注意几何体的边缘、棱、顶点，看得见的轮廓线画成实线，看不见的轮廓线画成虚线. 同时一视图之间应遵循“主与俯长对正，主与左高平齐，左与俯宽相等”.

24. 解：（1）∵ $AB=CD=30$ m，$BA\perp AC$，$CD\perp AC$，

∴四边形 $ABDC$ 是矩形.

∵ $BD=AC=24$ m，$\angle BDE=90°$.

∵ $\angle DBE=30°$，

∴设 $DE=x$ m，则 $BE=2x$ m.

∴在 Rt△BDE 中，$BD=\sqrt{BE^2-DE^2}=\sqrt{(2x)^2-x^2}=\sqrt{3}x$(m).

∴ $\sqrt{3}x=24$，解得 $x=8\sqrt{3}$.

∴ $EC=CD-DE=(30-8\sqrt{3})$ m，

即甲楼的影子落在乙楼上有 $(30-8\sqrt{3})$ m高.

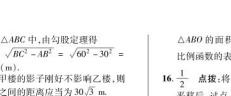
（2）如图. 当太阳光照射到点 C 时，甲楼的影子刚好不影响乙楼，

在 Rt△ABC 中，$AB=30$ m，

∠$ACB=30°$，∴ $BC=2AB=60$ m.

在 Rt△ABC 中，由勾股定理得 $AC=\sqrt{BC^2-AB^2}=\sqrt{60^2-30^2}=30\sqrt{3}$(m).

∴若甲楼的影子刚好不影响乙楼，则两楼之间的距离应当为 $30\sqrt{3}$ m.



（第 24 题）

第六章达标检测卷

一.1. C　2. B　3. D　4. C　5. D

6. D　**点拨**：由题意知，反比例函数图象在第二、四象限，所以 $3+m<0$，即 $m<-3$.

7. A

8. C　**点拨**：∵点 A，B 均在反比例函数 $y=\frac{2}{x}(x>0)$ 的图象上，∴ $S_{\triangle AOC}=S_{\triangle BOD}=1$. 由题图可知，△$AOC$ 与△BOD 有一个公共部分△COE，因此△AOE 与梯形 $ECDB$ 的面积相等，即 $S_1=S_2$，故选 C.

9. A　**点拨**：设 A 点的坐标为 $\left(m,\frac{k_1}{m}\right)$，$B$ 点的坐标为 $\left(n,\frac{k_1}{n}\right)$，则 C 点的坐标为 $\left(m,\frac{k_2}{m}\right)$，$D$ 点的坐标为 $\left(n,\frac{k_2}{n}\right)$，由题意，得 $\begin{cases}n-m=\frac{10}{3},\\ \frac{k_1-k_2}{m}=2,\\ \frac{k_2-k_1}{n}=3,\end{cases}$ 解得 $k_2-k_1=4$.

10. D　**点拨**：①由于点 A，B 在同一反比例函数 $y=\frac{2}{x}$ 的图象上，∴ $S_{\triangle OBE}=S_{\triangle OCA}=\frac{1}{2}\times2=1$，∴①正确；②由于矩形 $OCMD$，△ODB，△OCA 的面积为定值，∴四边形 $OAMB$ 的面积不会发生变化，∴②正确；③连接 OM，当点 A 是 MC 的中点时，$S_{\triangle OAM}=S_{\triangle OAC}$，∵ $S_{\triangle OBM}=S_{\triangle OCM}=\frac{a}{2}$，$S_{\triangle OBM}=S_{\triangle OCA}$，∴ $S_{\triangle OBM}=S_{\triangle OAM}$，∴ $S_{\triangle OBD}=S_{\triangle OBM}$，∴点 B 一定是 MD 的中点，∴③正确.

二.11. $y=\frac{2}{x}$　12. <

13. $(-1,-2)$　**点拨**：∵反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象关于原点成中心对称，一次函数 $y=mx$ 的图象经过原点，且关于原点成中心对称，∴它们的交点也关于原点成中心对称. 又∵点 $(1,2)$ 关于原点成中心对称的点为 $(-1,-2)$，∴它们的另一个交点的坐标为 $(-1,-2)$.

14. $48<p<120$

15. $y=\frac{12}{x}$　**点拨**：连接 OA，则△ABP 与△ABO 的面积相等，都等于 6，∴反比例函数的表达式为 $y=\frac{12}{x}$.

16. $\frac{1}{2}$　**点拨**：设矩形 $ABCD$ 沿 x 轴向右平移后，过点 M 作 $ME\perp AB$ 于点 E，则 $AE=\frac{1}{2}AB=\frac{3}{2}$，$ME=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}$，设 $OA=m$，则 $OE=OA+AE=m+\frac{3}{2}$，∴ $M\left(m+\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$. ∵点 M 在反比例函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图象上，∴ $\frac{1}{2}=\frac{1}{m+\frac{3}{2}}$，解得 $m=\frac{1}{2}$.

17. 12

18. $S_1\frac{10n}{n+1}$　**点拨**：∵点 A_1，A_2 在反比例函数 $y=\frac{10}{x}(x>0)$ 的图象上，∴ $A_1\left(2,5\right)$，$A_2\left(4,\frac{5}{2}\right)$，∴ $S_1=2\times\left(5-\frac{5}{2}\right)=5$. 易知 $A_n\left(2n,\frac{10}{2n}\right)$，$A_{n+1}\left(2n+2,\frac{10}{2n+2}\right)$，∴ $S_2=2\times\left(\frac{10}{4}-\frac{10}{6}\right)=\frac{5}{3}$，$S_3=2\times\left(\frac{10}{6}-\frac{10}{8}\right)=\frac{5}{6}$，…，$S_n=2\times\left(\frac{10}{2n}-\frac{10}{2n+2}\right)=\frac{10}{n(n+1)}$.

∵ $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，∴ $S_1+S_2+S_3+\cdots+S_n=10\times\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]=10\times\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{10n}{n+1}$.

三.19. 解：(1) 根据表中的数据，可画出 v 关于 t 的函数图象，根据图象形状，选择反比例函数模型进行尝试.

设 v 与 t 的函数表达式为 $v=\frac{k}{t}$.

∵当 $v=75$ 时，$t=4$，∴ $k=4\times75=300$，∴ $v=\frac{300}{t}$.

经点 $(3.75,80)$，$(3.53,85)$，$(3.33,90)$，$(3.16,95)$ 的坐标代入 $v=\frac{300}{t}$ 验证：$\frac{300}{3.75}=80$，$\frac{300}{3.53}\approx85$，$\frac{300}{3.33}=90$，$\frac{300}{3.16}\approx95$，∴ v 与 t 的函数表达式为 $v=\frac{300}{t}(t\geqslant3)$.

(2) 不能. 理由：10 时 −7 时 30 分 $=2.5$ 时，$v=\frac{300}{2.5}=120>100$.

∴汽车上午 7 时 30 从丽水出发，不能在上午 10:00 之前到达杭州市场.

(3) 由图象或反比例函数的性质，得当 $3.5\leqslant t\leqslant4$ 时，$75\leqslant v\leqslant\frac{600}{7}$.

答：平均速度 v 的取值范围是 $75\leqslant v\leqslant\frac{600}{7}$.

易错点拨：解此类问题容易出错的地方是建立数学模型时，没出的函数表达式不符合题意而导致解答错误.

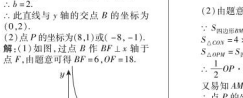
20. 解：(1) ∵双曲线 $y=\frac{m}{x}$ 经过点 $A(2,4)$，∴ $m=8$.

∵直线 $y=x+b$ 经过点 $A(2,4)$，∴ $b=2$.

∴此直线与 y 轴的交点 B 的坐标为 $(0,2)$.

(2) 点 P 的坐标为 $(8,1)$ 或 $(-8,-1)$.

21. 解：(1) 如图，过点 B 作 $BF\perp x$ 轴于点 F，由题意可得 $BF=6$，$OF=18$.



（第 21 题）

∵四边形 $OABC$ 是菱形，∴ $OC=BC$.

在 Rt△BCF 中，$6^2+(18-BC)^2=BC^2$，解得 $BC=10$，

∴点 A 的坐标为 $(8,6)$，

将点 $A(8,6)$ 的坐标代入 $y=\frac{k}{x}$，解得 $k=48$.

(2) 由(1) 知 $y=\frac{48}{x}$，可设 $E\left(a,\frac{48}{a}\right)$，如图，过点 E 作 $EG\perp x$ 轴于点 G，则 $OG=a$，$EG=\frac{48}{a}$.

∵ $EG\perp x$ 轴，$BF\perp x$ 轴，∴ $EG//BF$，易得△$OGE\sim$△OFB，∴ $\frac{EG}{BF}=\frac{OG}{OF}$，即 $\frac{\frac{48}{a}}{6}=\frac{a}{18}$，解得 $a=12$.

∵ $\frac{OE}{OB}=\frac{OG}{OF}=\frac{12}{18}=\frac{2}{3}$，∴ $\frac{OE}{EB}=\frac{2}{1}$.

22. 解：(1) 根据题意，把 $A(-2,b)$ 的坐标分别代入一次函数和反比例函数的表达式，得 $\begin{cases}b=-2k+5,\\ b=-\frac{4}{2},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=4,\\ k=\frac{1}{2}.\end{cases}$

∴一次函数的表达式为 $y=\frac{1}{2}x+5$.

(2) 将直线 AB 向下平移 $m(m>0)$ 个单位长度后，直线 AB 对应的函数表达式为 $y=\frac{1}{2}x+5-m$.

由 $\begin{cases}y=-\frac{8}{x},\\ y=\frac{1}{2}x+5-m,\end{cases}$ 得 $\frac{1}{2}x^2+(5-m)x+8=0$.

$\Delta=(5-m)^2-4\times\frac{1}{2}\times8=0$，解得 $m=1$ 或 $m=9$.

23. 解：(1) 由题意易得点 M 的纵坐标为 2.

将 $y=2$ 代入 $y=-\frac{1}{2}x+3$，得 $x=2$.

∴ $M(2,2)$. 把点 M 的坐标代入 $y=\frac{k}{x}$，得 $k=4$，

∴反比例函数的表达式是 $y=\frac{4}{x}$.

(2) 由题意得 $S_{\triangle OPM}=\frac{1}{2}OP\cdot AM$，

∵ $S_{四边形AMON}=S_{\triangle BOE\triangle AOC}-S_{\triangle BOM}-S_{\triangle COEN}=4\times2-2-2=4$，

$S_{\triangle OPM}=S_{四边形AMON}$，

∴ $\frac{1}{2}OP\cdot AM=4$.

又易知 $AM=2$，∴ $OP=4$.

∴点 P 的坐标是 $(0,4)$ 或 $(0,-4)$.

24. 解：(1) 设从 1 月到 5 月，y 与 x 的函数表达式为 $y=\frac{k}{x}$，

把 $(1,2\,000)$ 的坐标代入，得 $k=2\,000$，

即当 $1\leqslant x\leqslant5$ 时，$y=\frac{2\,000}{x}$.

当 $x=5$ 时，$y=400$，

设当 $x>5$ 时，$y=200x+b$，

将 $(5,400)$ 的坐标代入，得 $200\times5+b=400$，解得 $b=-600$，

即当 $x>5$ 时，$y=200x-600$.

(2) 对于 $y=200x-600$，

当 $y=2\,000$ 时，$200x-600=2\,000$，

解得 $x=13$.

$13-5=8$，

所以技术改造工程顺利完工后经过 8 个月，该市钢铁行业的月利润才能达到 2 000 万元.

(3) 对于 $y=\frac{2\,000}{x}$，当 $y=1\,000$ 时，$x=2$.

对于 $y=200x-600$，当 $y=1\,000$ 时，$x=8$.

故该市钢铁行业资金紧张期为 3 月、4 月、5 月、6 月、7 月，共有 5 个月.

25. 解：(1) ∵正比例函数图象与反比例函数图象的两个交点关于原点对称，

∴ $S_{\triangle AOC}=S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=1$.

又∵AC 垂直于 x 轴，∴ $k=2$.

(2) 假设存在这样的点 D，设点 D 的坐标为 $(m,0)$，

由 $\begin{cases}y=2x,\\ y=\frac{2}{x},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_1=1,\\ y_1=2,\end{cases}\begin{cases}x_2=-1,\\ y_2=-2.\end{cases}$

∴ $A(1,2)$，$B(-1,-2)$.

∴ $AD=\sqrt{(1-m)^2+2^2}$，

$BD=\sqrt{(m+1)^2+2^2}$，

$AB=\sqrt{(1+1)^2+(2+2)^2}=2\sqrt{5}$.

当 D 为直角顶点时，

∵ $AB=2\sqrt{5}$，∴ $OD=\frac{1}{2}AB=\sqrt{5}$.

∴点 D 的坐标为 $(\sqrt{5},0)$ 或 $(-\sqrt{5},0)$.

当 A 为直角顶点时，

由 $AB^2+AD^2=BD^2$，得 $(2\sqrt{5})^2+(1-m)^2+2^2=(m+1)^2+2^2$，

解得 $m=5$，即 $D(5,0)$.

当 B 为直角顶点时，

由 $BD^2+AB^2=AD^2$，得 $(m+1)^2+2^2+(2\sqrt{5})^2=(1-m)^2+2^2$，

解得 $m=-5$，即 $D(-5,0)$.

∴存在这样的点 D，使△ABD 为直角三角形，点 D 的坐标为 $(\sqrt{5},0)$ 或 $(-\sqrt{5},0)$ 或 $(5,0)$ 或 $(-5,0)$.

期末达标检测卷

一.1. D　2. C　3. C

4. B　**点拨**：把点 $(m,3m)$ 的坐标代入 $y=\frac{k}{x}$，得到 $k=3m^2$，因为 $m\neq0$，所以 $k>0$，所以图象在第一、三象限.

5. D　**6.** C　**7.** B　**8.** C

9. D　**点拨**：由题意得 $xy=4$，当等腰直角三角形 ABC 的斜边长为 x 时，$x=2y$，所以 $2y^2=4$，解得 $y=\sqrt{2}$ 或 $y=-\sqrt{2}$（不合题意，舍去），所以 $x=2\sqrt{2}$，所以 $x+y=3\sqrt{2}$；当等腰直角三角形 ABC 的一条直角边长为 x 时，$x=y$，所以 $y^2=4$，解得 $y=2$ 或 $y=-2$（不合题意，舍去），所以 $x=2$，所以 $x+y=4$.

故 $x+y$ 的值为 4 或 $3\sqrt{2}$. 故选 D.

10. C　**点拨**：①设 $\angle EDC=x$，则 $\angle DEF=90°-x$，从而可得到 $\angle DBE=\angle DEB=180°-(90°-x)-45°=45°+x$，$\angle DBM=\angle DBE-\angle MBE=45°+x-45°=x$，从而可得 $\angle DBM=\angle CDE$，所以①正确.

②可证明△$BDM\cong$△DEF，然后可证明△$BDN\sim S_{四边形NMFE}$，所以 $S_{\triangle BDM}+S_{\triangle BDN}=S_{四边形NMFE}+S_{\triangle BDM}$，即 $S_{\triangle BDE}=S_{四边形BMFE}$，所以②错误.

③可证明△$DBC\sim$△NEB，所以 $\frac{CD}{BD}=\frac{BN}{EN}$，即 $CD\cdot EN=BN\cdot BD$. 所以③正确.

④由△$BDM\cong$△DEF，可知 $DF=BM$，由直角三角形斜边上的中线的性质可知 $BM=\frac{1}{2}AC$，所以 $DF=\frac{1}{2}AC$，即 $AC=2DF$. 所以④正确. 故选 C.

二.11. −2　12. 8 cm

13. 5　**点拨**：综合左视图和主视图知，这个几何体有两层，底层最少有 $2+1=3$(个) 小正方体，第二层有 2 个小正方体，因此组成这个几何体的小正方体最少有 $3+2=5$(个).

14. 50　**点拨**：设药物燃完后 y 与 x 之间的函数表达式为 $y=\frac{k}{x}$，把点 $(10,8)$ 的坐标代入 $y=\frac{k}{x}$，得 $8=\frac{k}{10}$，解得 $k=80$，所以药物燃完后 y 与 x 之间的函数表达式为 $y=\frac{80}{x}$. 当 $y=1.6$ 时，由 $y=\frac{80}{x}$ 得 $x=50$，所以从消毒开始，经过 50 min 后教室内的空气才能达

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

荣德基 主编

典中点

综合应用创新题 典中点

极速提分法

思想 方法 技巧 应用



九年级 数学 上 (BS版)

陕西新华出版传媒集团
陕西人民教育出版社

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

极速提分20招

思想 方法 技巧 应用 四类绝招速解百题，招招见效助拿高分

第1招 菱形的性质与判定的四种应用 …… 1 ▶第一章
第2招 利用矩形的性质巧解折叠问题 …… 3 ▶第一章
第3招 矩形的性质与判定的六种应用 …… 5 ▶第一章
第4招 特殊四边形的性质在动点问题中的巧用 …… 7 ▶第一章
第5招 特殊平行四边形的性质和判定的综合应用的三种题型 …… 9 ▶第一章
第6招 配方法的六种常见应用 …… 12 ▶第二章
第7招 根的判别式的八种常见应用 …… 13 ▶第二章
第8招 根与系数的关系的九种应用 …… 15 ▶第二章
第9招 一元二次方程中常见易错易混问题归类 …… 17 ▶第二章
第10招 降次思想在求代数式的值和解方程中的应用 …… 19 ▶第二章
第11招 求概率的四种方法 …… 21 ▶第三章
第12招 统计概率思想在实际中的应用 …… 23 ▶第三章
第13招 成比例线段的证明和计算的五种常用作辅助线的方法 …… 26 ▶第四章
第14招 巧作平行线构造相似三角形 …… 28 ▶第四章
第15招 利用相似三角形巧证线段的数量和位置关系 …… 29 ▶第四章
第16招 证比例式或等积式的七种技巧 …… 30 ▶第四章
第17招 根据物体的三视图计算其表面积和体积 …… 33 ▶第五章
第18招 反比例函数与一次函数的综合应用 …… 34 ▶第六章
第19招 反比例函数与几何的综合应用 …… 36 ▶第六章
第20招 建模思想应用的常见类型归类 …… 39 ▶第六章
参考答案及点拨 …… 42

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第1招　菱形的性质与判定的四种应用

教你一招

菱形具有一般平行四边形的所有性质，同时又具有一些特性，可以归纳为三个方面：

1. **从边看**：对边平行，四边相等. 2. **从角看**：对角相等，邻角互补. 3. **从对角线看**：对角线互相垂直平分，并且每一条对角线平分一组对角.

判定一个四边形是菱形，可先判定这个四边形是平行四边形，再判定一组邻边相等或对角线互相垂直，也可直接判定四边相等.

典例剖析

例 ［易错题］如图 1-1，在菱形 $ABCD$ 中，$\angle BAD=120°$，$AC=6$ cm. 求此菱形的周长和面积.

解题秘方：要求菱形的周长，需先求菱形的边长，而边长可通过菱形一对角线分菱形所得的两个等边三角形求出. 要求菱形的面积，可以先求菱形的另一条对角线长，再利用菱形的面积等于对角线乘积的一半求出.

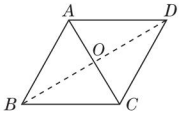


图 1-1

解：如图 1-1，连接 BD，BD 与 AC 交于点 O.

∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形，$\angle BAD=120°$，

∴ $AB=BC$，$\angle BAC=60°$，$AC\perp BD$，$AO=OC$，$BO=OD$.

∴ $\triangle ABC$ 是等边三角形.

∵ $AC=6$ cm，

∴ $AB=BC=AC=6$ cm.

∴ 菱形的周长为 $6\times4=24$(cm).

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABO$ 中，$AB=6$ cm，

$AO=\frac{1}{2}AC=3$ cm，

∴ $BO=\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3}$(cm).

∴ $BD=2BO=6\sqrt{3}$ cm.

∴ $S_{菱形ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}\times6\times6\sqrt{3}=18\sqrt{3}$(cm^2).

分类训练

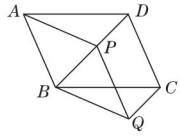
☞(答案见 42 页)

应用 1　利用菱形的判定判断图形的形状

1. 【2018·毕节】如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，P 是对角线 BD 上的一点，过点 C 作 $CQ\parallel DB$，且 $CQ=DP$，连接 AP，BQ，PQ.

(1) 求证：$\triangle APD\cong\triangle BQC$.

(2) 若 $\angle ABP+\angle BQC=180°$，求证：四边形 $ABQP$ 为菱形.

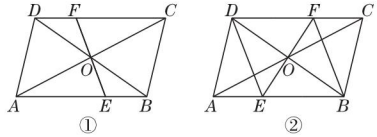


(第 1 题)

2. 在 $\square ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，EF 过点 O 且与 AB，CD 分别相交于点 E，F.

(1) 如图①，求证：$OE=OF$.

(2) 如图②，若 $EF\perp DB$，求证：四边形 $BEDF$ 是菱形.



(第 2 题)

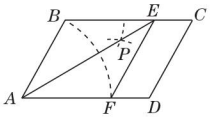
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

应用 2 利用菱形的性质与判定求角的度数

3. 【中考·滨州】如图,在$\square ABCD$中,以点A为圆心,AB长为半径画弧交AD于点F,再分别以点B,F为圆心,大于$\frac{1}{2}BF$的相同长为半径画弧,两弧交于点P,连接AP并延长交BC于点E,连接EF,则所得四边形$ABEF$是菱形.

(1)根据以上尺规作图的过程,求证:四边形$ABEF$是菱形;

(2)若菱形$ABEF$的周长为16,$AE=4\sqrt{3}$,求$\angle C$的大小.



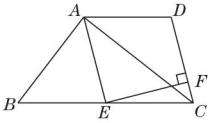
(第3题)

应用 3 利用菱形的性质与判定求线段长

4. 【2018·乌鲁木齐】如图,在四边形$ABCD$中,$\angle BAC=90°$,E是BC的中点,$AD\parallel BC$,$AE\parallel DC$,$EF\perp CD$于点F.

(1)求证:四边形$AECD$是菱形.

(2)若$AB=6$,$BC=10$,求EF的长.



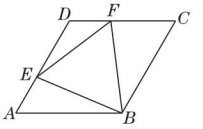
(第4题)

应用 4 利用菱形的性质求最值

5. 如图,在边长为m的菱形$ABCD$中,$\angle DAB=60°$,E是AD上不同于A,D两点的一动点,F是CD上一动点,且$AE+CF=m$.

(1)证明:无论E,F怎样移动,$\triangle BEF$总是等边三角形.

(2)求$\triangle BEF$面积的最小值.



(第5题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第2招　利用矩形的性质巧解折叠问题

教你一招

折叠问题往往通过图形的折叠找出线段或角与原图形之间的联系，从而得到折叠部分与原图形或其他图形之间的关系；在计算时，常常通过设未知数列方程求解.

典例剖析

例 如图 2-1，纸片 $ABCD$ 为平行四边形. 把纸片 $ABCD$ 折叠，使点 B 恰好落在 CD 边上的 E 处，折痕为 AF. 已知 $AB=10$，$AD=8$，$DE=6$.

(1) 求证：$\square ABCD$ 是矩形；

(2) 求 BF 的长；

(3) 求折痕 AF 的长.

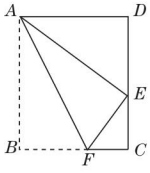


图 2-1

解题秘方： (1) 根据折叠变换的对称性可知 $AE=AB$，在 $\triangle ADE$ 中，利用勾股定理的逆定理证明 $\angle D=90°$，再根据有一个角是直角的平行四边形是矩形证明 $\square ABCD$ 是矩形即可；

(2) 设 $BF=x$，在 $\mathrm{Rt}\triangle EFC$ 中利用勾股定理列方程求解即可；

(3) 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABF$ 中，利用勾股定理求解即可.

(1) **证明：** ∵ 把纸片 $ABCD$ 折叠，点 B 恰好落在 CD 边上的 E 处，∴ $AE=AB=10$，即 $AE^2=10^2=100$.

又∵ $AD^2+DE^2=8^2+6^2=100$，

∴ $AD^2+DE^2=AE^2$.

∴ $\triangle ADE$ 是直角三角形，且 $\angle D=90°$.

∴ $\square ABCD$ 是矩形（有一个角是直角的平行四边形是矩形）.

(2) **解：** 由题意易知 $EC=4$. 设 $BF=x$，则 $EF=BF=x$，$FC=BC-BF=8-x$.

由 (1) 可知 $\square ABCD$ 是矩形，∴ $\angle C=90°$.

∴ 在 $\mathrm{Rt}\triangle EFC$ 中，$EC^2+FC^2=EF^2$，

即 $4^2+(8-x)^2=x^2$.

解得 $x=5$，故 $BF=5$.

(3) **解：** 由 (1) 可知 $\square ABCD$ 是矩形，

∴ $\angle B=90°$.

∴ 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABF$ 中，$AB^2+BF^2=AF^2$.

∵ $AB=10$，$BF=5$，

∴ $AF=\sqrt{10^2+5^2}=5\sqrt{5}$.

分类训练

☞(答案见 43 页)

技巧 1　利用矩形的性质巧求折叠中的角

1. 当身边没有量角器时，怎样得到一些特定度数的角呢？动手操作有时可以解“燃眉之急”. 如图，已知矩形纸片 $ABCD$（矩形纸片要足够长），我们按如下步骤操作可以得到一个特定的角：

(1) 以点 A 所在直线为折痕，折叠纸片，使点 B 落在边 AD 上，折痕与 BC 交于点 E；

(2) 将纸片展平后，再次折叠纸片，以点 E 所在直线为折痕，使点 A 落在边 BC 上，折痕交 AD 于点 F.

求 $\angle AFE$ 的度数.



（第 1 题）

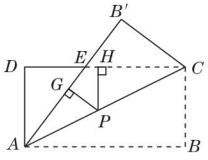
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

技巧 2 利用矩形的性质巧求折叠中线段的和

2. 如图,将矩形纸片 $ABCD$ 沿对角线 AC 折叠,使点 B 落到点 B' 的位置,AB' 与 CD 交于点 E.

(1)试找出一个与 $\triangle AED$ 全等的三角形,并加以证明;

(2)若 $AB=8$,$DE=3$,P 为线段 AC 上的任意一点,$PG\perp AB'$ 于点 G,$PH\perp DC$ 于点 H,试求 $PG+PH$ 的值.



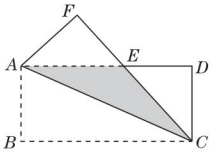
(第 2 题)

技巧 3 利用矩形的性质巧求折叠中重叠的面积

3. 【中考·鄂州】如图,将矩形 $ABCD$ 沿对角线 AC 翻折,点 B 落在点 F 处,FC 交 AD 于 E.

(1)求证:$\triangle AFE\cong\triangle CDE$.

(2)若 $AB=4$,$BC=8$,求图中阴影部分的面积.



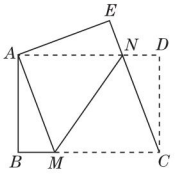
(第 3 题)

技巧 4 利用矩形的性质巧求折叠中线段的比

4. 如图,将一张矩形纸片 $ABCD$ 沿直线 MN 折叠,使点 C 落在点 A 处,点 D 落在点 E 处,直线 MN 交 BC 于点 M,交 AD 于点 N.

(1)求证:$CM=CN$.

(2)若 $\triangle CMN$ 的面积与 $\triangle CDN$ 的面积比为 3∶1,求 $\dfrac{MN}{DN}$ 的值.



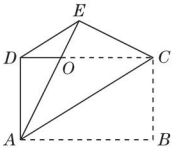
(第 4 题)

技巧 5 利用矩形的性质巧证折叠中的平行线

5. 如图,四边形 $ABCD$ 是矩形,把矩形沿 AC 折叠,点 B 落在点 E 处,AE 与 CD 的交点为 O,连接 DE.

求证:(1)$\triangle ADE\cong\triangle CED$;

(2)$DE/\!/AC$.



(第 5 题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第3招　矩形的性质与判定的六种应用

教你一招

矩形是特殊的平行四边形，它具有一般平行四边形的所有性质，同时还具有一些独特的性质. 它的性质可归纳为三个方面：1. **从边看**：矩形的对边平行且相等. 2. **从角看**：矩形的四个角都是直角. 3. **从对角线看**：矩形的对角线互相平分且相等.

判定一个四边形是矩形可从两个角度考虑：一是判定它有三个角为直角；二是先判定它为平行四边形，再判定它有一个角为直角或两条对角线相等.

典例剖析

例 ［一题多解］如图3-1，直线 EF 过矩形 $ABCD$ 对角线的交点 O，分别交 AB，CD 于点 E，F，若 $AB=3$，$BC=4$，那么阴影部分的面积为_____.

解题秘方：利用矩形的对称性将阴影部分的面积转化为规则的几何图形的面积进行计算.

方法一：∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴ 由矩形中心对称的性质知 $S_{\triangle EBO}=S_{\triangle FDO}$.

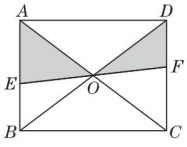


图3-1

∴ $S_{\text{阴影部分}}=S_{\triangle ABO}=\frac{1}{4}S_{\text{矩形}ABCD}=\frac{1}{4}\times3\times4=3$.

方法二：在矩形 $ABCD$ 中，$OB=OD$，$\angle EBO=\angle FDO$.

在$\triangle OEB$与$\triangle OFD$中，$\begin{cases}\angle EBO=\angle FDO,\\ OB=OD,\\ \angle EOB=\angle FOD,\end{cases}$

∴ $\triangle OEB\cong\triangle OFD$.

∴ $S_{\triangle EBO}=S_{\triangle FDO}$.

∴ $S_{\text{阴影部分}}=S_{\triangle ABO}=\frac{1}{4}S_{\text{矩形}ABCD}=\frac{1}{4}\times3\times4=3$.

答案：3

分类训练

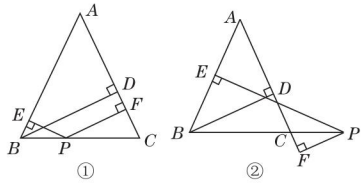
☞（答案见44页）

应用1　利用矩形的判定和性质解和差问题

1. 如图①，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，点 P 是 BC 上任意一点（不与 B，C 重合），$PE\perp AB$，$PF\perp AC$，$BD\perp AC$，垂足分别为 E，F，D.

（1）求证：$BD=PE+PF$.

（2）当点 P 在 BC 的延长线上时，其他条件不变，如图②，BD，PE，PF 之间的上述关系还成立吗？若不成立，请说明理由.



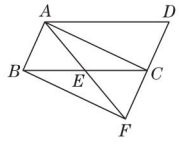
（第1题）

应用2　利用矩形的判定和性质解面积问题

2. 如图，已知点 E 是$\square ABCD$中 BC 边的中点，连接 AE 并延长交 DC 的延长线于点 F.

（1）连接 AC，BF，若$\angle AEC=2\angle ABC$，求证：四边形 $ABFC$ 为矩形；

（2）在（1）的条件下，若$\triangle AFD$是等边三角形，且边长为4，求四边形 $ABFC$ 的面积.



（第2题）

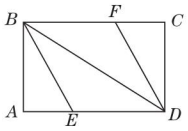
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

应用 3 利用矩形的性质判定菱形

3. 【中考·盐城】如图,在矩形 $ABCD$ 中,$\angle ABD$,$\angle CDB$ 的平分线 BE,DF 分别交边 AD,BC 于点 E,F.

(1)求证:四边形 $BEDF$ 是平行四边形.

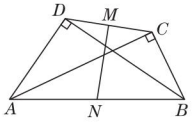
(2)当 $\angle ABE$ 为多少度时,四边形 $BEDF$ 是菱形?请说明理由.



(第 3 题)

应用 4 利用直角三角形斜边上中线性质判断直线位置关系

4. 如图,已知 $\angle ACB=\angle ADB=90°$,$N$,$M$ 分别是 AB,CD 的中点,判断 MN 与 CD 的位置关系,并说明理由.



(第 4 题)

应用 5 利用矩形的性质探究与菱形相关的折叠问题

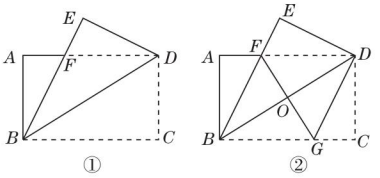
5. 【中考·兰州】如图①,将一张矩形纸片 $ABCD$ 沿着对角线 BD 向上折叠,顶点 C 落到点 E 处,BE 交 AD 于点 F.

(1)求证:$\triangle BDF$ 是等腰三角形.

(2)如图②,过点 D 作 $DG/\!/BE$,交 BC 于点 G,连接 FG 交 BD 于点 O.

①判断四边形 $BFDG$ 的形状,并说明理由;

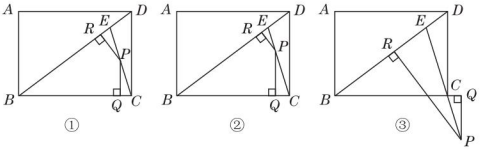
②若 $AB=6$,$AD=8$,求 FG 的长.



(第 5 题)

应用 6 利用矩形的性质探究动点问题

6. 已知点 E 是矩形 $ABCD$ 的对角线 BD 上的一点,且 $BE=BC$,$AB=3$,$BC=4$,点 P 是 EC 上的一动点,且 $PQ\perp BC$ 于点 Q,$PR\perp BD$ 于点 R.



(第 6 题)

(1)如图①,当点 P 为线段 EC 的中点时,求证:$PR+PQ=\dfrac{12}{5}$.

(2)如图②,当点 P 为线段 EC 上任意一点(不与点 E,点 C 重合)时,其他条件不变,则(1)中的结论是否仍成立?若成立,请给予证明;若不成立,请说明理由.

(3)如图③,当点 P 为线段 EC 的延长线上任意一点时,其他条件不变,则 PR 与 PQ 之间又具有怎样的数量关系?请直接写出你的猜想.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第4招　特殊四边形的性质在动点问题中的巧用

教你一招

利用特殊四边形的性质解动点问题，一般将动点看成特殊点解决问题，再运用**从特殊到一般的思想**，将特殊点转化为一般点（动点）来解答.

典例剖析

例 如图4-1，在△ABC中，点O是AC边上一动点，过点O作直线$MN\parallel BC$，设MN交∠BCA的平分线于点E，交△ABC的外角∠ACH的平分线于点F.

（1）证明：$EO=FO$.

（2）当点O运动到何处时，四边形$AECF$是矩形？并说明理由.

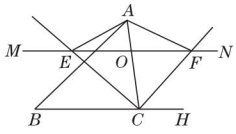


图4-1

解题秘方：求点O运动到何处时四边形$AECF$是矩形，可以先把矩形当作已知条件，求出O点与AC的位置关系，然后添加条件，经过说理，证明四边形$AECF$是矩形. 这是条件探索题的一般思路.

（1）**证明：**∵ $MN\parallel BC$，

∴ ∠CEO=∠ECB，∠CFO=∠FCH.

∵ CE，CF分别是∠BCA，∠ACH的平分线，

∴ ∠ECO=∠ECB，∠FCO=∠FCH.

∴ ∠CEO=∠ECO，∠CFO=∠FCO.

∴ $EO=OC$，$FO=OC$.

∴ $EO=FO$.

（2）**解：**当点O运动到AC的中点时，四边形$AECF$是矩形.

理由如下：由（1）知$OE=OF$.

∵ $AO=CO$，

∴ 四边形$AECF$是平行四边形.

∵ $OE=OC$，

∴ $AC=EF$.

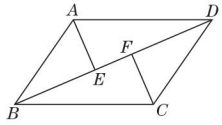
∴ 四边形$AECF$是矩形.

分类训练

☞（答案见45页）

技巧1　巧用平行四边形的性质解动点问题

1. 如图，在▱$ABCD$中，E，F两点在对角线BD上运动（E，F不重合），且保持$BE=DF$，连接AE，CF. 请你猜想AE与CF有怎样的数量关系和位置关系，并说明理由.



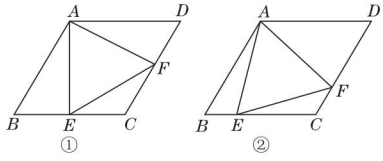
（第1题）

技巧2　巧用菱形的性质解动点问题

2. 如图，在菱形$ABCD$中，∠B=60°，动点E在边BC上，动点F在边CD上.

（1）如图①，若E是BC的中点，∠AEF=60°，求证：$BE=DF$；

（2）如图②，若∠EAF=60°，求证：△AEF是等边三角形.



（第2题）

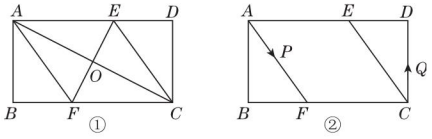
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

技巧 3 巧用矩形的性质解动点问题

3. 在矩形 $ABCD$ 中，$AB=4$ cm，$BC=8$ cm，AC 的垂直平分线 EF 分别交 AD，BC 于点 E，F，垂足为 O.

(1) 如图①，连接 AF，CE. 试说明四边形 $AFCE$ 为菱形，并求 AF 的长.

(2) 如图②，动点 P，Q 分别从 A，C 两点同时出发，沿△AFB 和△CDE 的边匀速运动一周，即点 P 自 $A\to F\to B\to A$ 停止，点 Q 自 $C\to D\to E\to C$ 停止. 在运动过程中，已知点 P 的速度为 5 cm/s，点 Q 的速度为 4 cm/s，运动时间为 t s，当以 A，C，P，Q 四点为顶点的四边形是平行四边形时，求 t 的值.



(第 3 题)

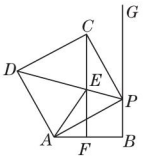
技巧 4 巧用正方形的性质解动点问题

4. 【2019·泰州】如图，线段 $AB=8$，射线 $BG\perp AB$，P 为射线 BG 上一点，以 AP 为边作正方形 $APCD$，且点 C，D 与点 B 在 AP 两侧. 在线段 DP 上取一点 E，使 $\angle EAP=\angle BAP$. 直线 CE 与线段 AB 相交于点 F(点 F 与点 A，B 不重合).

(1) 求证：△AEP≌△CEP；

(2) 判断 CF 与 AB 的位置关系，并说明理由；

(3) 求△AEF 的周长.



(第 4 题)

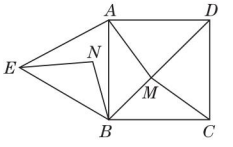
5. 如图，四边形 $ABCD$ 是正方形，△ABE 是等边三角形，M 为对角线 BD 上任意一点(不与点 B 重合)，将 BM 绕点 B 逆时针旋转 60° 得到 BN，连接 EN，AM，CM.

(1) 求证：△AMB≌△ENB.

(2) ①当点 M 在何处时，$AM+CM$ 的值最小？

②当点 M 在何处时，$AM+BM+CM$ 的值最小？并说明理由.

(3) 当 $AM+BM+CM$ 的最小值为 $\sqrt{3}+1$ 时，求正方形 $ABCD$ 的边长.



(第 5 题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第5招　特殊平行四边形的性质和判定的综合应用的三种题型

教你一招

特殊平行四边形的性质主要从边、角及对角线三个方面进行区分；而判定主要从在其他特殊四边形的基础上再附加什么条件进行判定. 应用特殊平行四边形的性质和判定解决的问题主要有折叠问题、操作型问题、探究型问题、阅读理解型问题等.

典例剖析

例 如图5-1，正方形 $ABCD$ 的边长为6. 菱形 $EFGH$ 的三个顶点 E,G,H 分别在正方形 $ABCD$ 的边 AB,CD,DA 上，且 $AH=2$，连接 CF.

(1) 当 $DG=2$ 时，求证：菱形 $EFGH$ 为正方形.

(2) 设 $DG=x$，试用含 x 的代数式表示 $\triangle FCG$ 的面积.

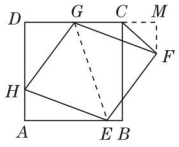


图5-1

解题秘方：特殊平行四边形的性质和判定的综合应用，就是从四边形边、角、对角线的特征进行判断和应用. 本题中(1)由于四边形 $EFGH$ 为菱形，只需再证有一个内角是直角即可；(2)解题的关键是作辅助线：过 F 作 $FM\perp DC$，交 DC 的延长线于 M，连接 GE，构造全等三角形.

(1) **证明：** $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore \angle D=\angle A=90^\circ$.

$\because$ 四边形 $EFGH$ 是菱形，$\therefore HG=EH$.

$\because DG=AH=2$，$\therefore \mathrm{Rt}\triangle DGH\cong\mathrm{Rt}\triangle AHE$，

$\therefore \angle DHG=\angle AEH$.

$\because \angle AEH+\angle AHE=90^\circ$，

$\therefore \angle DHG+\angle AHE=90^\circ$，

$\therefore \angle GHE=90^\circ$，

$\therefore$ 菱形 $EFGH$ 为正方形.

(2) **解：** 过 F 作 $FM\perp CD$，交 DC 的延长线于 M，连接 GE，如图5-1所示.

$\because CD/\!/AB$，$\therefore \angle AEG=\angle MGE$.

$\because GF/\!/HE$，$\therefore \angle HEG=\angle FGE$，

$\therefore \angle AEH=\angle FGM$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AHE$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle MFG$ 中，

$$\because \begin{cases}\angle A=\angle M=90^\circ,\\ \angle AEH=\angle MGF,\\ HE=FG,\end{cases}$$

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle AHE\cong\mathrm{Rt}\triangle MFG$，

$\therefore MF=AH=2$.

$\because DG=x$，$\therefore CG=6-x$，

$$\therefore S_{\triangle FCG}=\frac{1}{2}CG\cdot MF=6-x.$$

分类训练

☞(答案见47页)

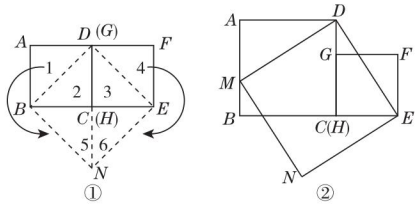
类型1　特殊平行四边形中的操作型问题

1. 对于边长均为 a 的两个正方形 $ABCD$ 和 $EFGH$，按图①所示的方式摆放，沿虚线 BD,EG 剪开后，可以按图中所示的移动方式拼接为四边形 $BNED$.

从拼接的过程容易得到结论：

①四边形 $BNED$ 是正方形.

②$S_{\text{正方形}ABCD}+S_{\text{正方形}EFGH}=S_{\text{正方形}BNED}$.



(第1题)

实践与操作

(1) 对于边长分别为 $a,b(a>b)$ 的两个正方形 $ABCD$ 和 $EFGH$，按图②所示的方式摆放，连接 DE，过点 D 作 $DM\perp DE$，交 AB 于点 M，过点 M 作 $MN\perp DM$，过点 E 作 $EN\perp DE$，MN 与 EN 相交于点 N.

①证明四边形 $MNED$ 是正方形，并用含 a,b 的代数式表示正方形 $MNED$ 的面积；

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

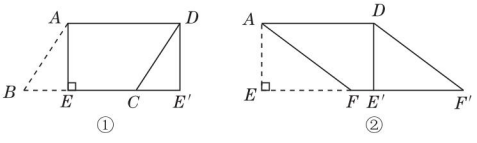
②在图②中，将正方形 $ABCD$ 和正方形 $EFGH$ 剪开后，能够拼接成正方形 $MNED$，请简略说明你的拼接方法(类比图①，用数字表示对应的图形).

(2)对于 n(n 是大于 2 的自然数)个任意的正方形，能否通过若干次拼接，将其拼接为一个正方形？请简略说明你的理由.

2. (1)如图①，在平行四边形纸片 $ABCD$ 中，$AD=5$，$S_{\square ABCD}=15$. 过点 A 作 $AE\perp BC$，垂足为 E，沿 AE 剪下 $\triangle ABE$，将它平移至 $\triangle DCE'$ 的位置，拼成四边形 $AEE'D$，则四边形 $AEE'D$ 的形状为(　　)

A. 平行四边形　　B. 菱形

C. 矩形　　D. 正方形



(第 2 题)

(2)如图②，在(1)的四边形纸片 $AEE'D$ 中，在 EE' 上取一点 F，使 $EF=4$，剪下 $\triangle AEF$，将它平移至 $\triangle DE'F'$ 的位置，拼成四边形 $AFF'D$.

①求证：四边形 $AFF'D$ 是菱形；

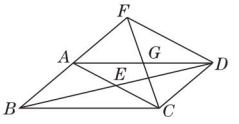
②求四边形 $AFF'D$ 的两条对角线的长.

类型 2 特殊平行四边形中的探究型问题

3. 【2018·青岛】已知：如图，$\square ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 E，点 G 为 AD 的中点，连接 CG，CG 的延长线交 BA 的延长线于点 F，连接 FD.

(1)求证：$AB=AF$；

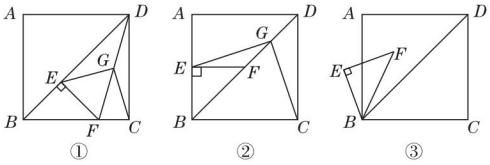
(2)若 $AG=AB$，$\angle BCD=120^\circ$，判断四边形 $ACDF$ 的形状，并证明你的结论.



(第 3 题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. 如图①，已知正方形 $ABCD$ 中，点 E 为对角线 BD 上一点，过点 E 作 $EF\perp BD$ 交 BC 于点 F，连接 DF，点 G 为 DF 的中点，连接 EG，CG.



（第 4 题）

（1）求证：$EG=CG$.

（2）将图①中的 $\triangle BEF$ 绕点 B 逆时针旋转 $45°$，如图②，取 DF 的中点 G，连接 EG，CG. 问（1）中的结论是否仍然成立？若成立，请给出证明；若不成立，请说明理由.

（3）将图①中的 $\triangle BEF$ 绕点 B 旋转任意角度，如图③，其他条件不变，问（1）中的结论是否仍然成立？通过观察你还能得出什么结论？（均不要求证明）

类型 3 特殊平行四边形中的阅读理解型问题

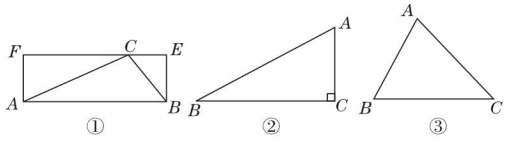
5. 阅读以下材料，然后解决问题：

如果一个三角形和一个矩形满足条件：三角形的一边与矩形的一边重合，且三角形的这边所对的顶点在矩形这边的对边上，则称这样的矩形为三角形的“友好矩形”. 如图①所示，矩形 $ABEF$ 为 $\triangle ABC$ 的“友好矩形”，显然，当 $\triangle ABC$ 是钝角三角形时，其“友好矩形”只有一个.

（1）仿照以上叙述，说明什么是一个三角形的“友好平行四边形”；

（2）如图②，若 $\triangle ABC$ 为直角三角形，且 $\angle C=90°$，在图②中画出 $\triangle ABC$ 的所有“友好矩形”，并比较这些矩形面积的大小；

（3）若 $\triangle ABC$ 是锐角三角形，且 $BC>AC>AB$，在图③中画出 $\triangle ABC$ 的所有“友好矩形”，指出其中周长最小的矩形并加以证明.



（第 5 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第6招 配方法的六种常见应用

教你一招

配方的应用有两个大的方面:二次三项式的配方和用配方法解一元二次方程,其依据是完全平方公式 $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$,还广泛应用于求最值、求待定系数的值等,是一个重要的数学方法.

典例剖析

例 当 x 取何值时,代数式 $2x^2 - 6x + 7$ 的值最小?并求出这个最小值.

解题秘方:求代数式的最值,用配方法就要先将代数式转化成 $a(x+m)^2 + n$ 的形式,然后根据完全平方式的非负性求代数式的最值.

解:$2x^2 - 6x + 7 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}$.

$\because 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \geqslant 0$,$\therefore 2x^2 - 6x + 7 \geqslant \frac{5}{2}$.

$\therefore$ 当 $x = \frac{3}{2}$ 时,$2x^2 - 6x + 7$ 的值最小,最小值为 $\frac{5}{2}$.

方法提醒:代数式 $ax^2 + bx + c(a \neq 0)$ 配成 $a(x+m)^2 + n$ 的形式后,若 $a > 0$,则当 $x = -m$ 时,代数式取得最小值 n;若 $a < 0$,则当 $x = -m$ 时,代数式取得最大值 n.

分类训练

☞(答案见48页)

应用1 配方法在解方程中的应用

1. 解方程:$x^2 - 2x - 2\,019 = 0$.

应用2 配方法在求二次三项式中的待定系数的应用

2. 已知关于 x 的二次三项式 $x^2 + (k+1)x + k^2 - 2k + 1$ 是完全平方式,求 k 的值.

应用3 配方法在求二次三项式的最大(小)值中的应用

3. 求多项式 $-2x^2 - 4x + 7$ 的最大值.

4. 用配方法说明代数式 $x^2 - 8x + 17$ 的值恒大于零.再求出当 x 取何值时,这个代数式的值最小,最小值是多少?

应用4 配方法在判定一元二次方程中的应用

5. 试证明关于 x 的方程 $(a^2 - 8a + 20)x^2 + 2ax + 1 = 0$,无论 a 为何值,该方程都是一元二次方程.

应用5 配方法在求多个未知数的值中的应用

6. 已知 a,b,c 是 $\triangle ABC$ 的三边,且 $a^2 + b^2 + c^2 - 6a - 8b - 10c + 50 = 0$.

(1)求 a,b,c 的值;

(2)判断 $\triangle ABC$ 的形状.

应用6 配方法在比较两个二次三项式大小中的应用

7. 设 $A = 2x^2 - 4x - 1$,$B = x^2 - 6x - 6$,试比较 A 与 B 的大小.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第7招　根的判别式的八种常见应用

教你一招

1. 对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$，式子 b^2-4ac 的值决定了一元二次方程的根的情况，利用根的判别式可以不解方程直接判断方程根的情况，反过来，利用方程根的情况可以确定方程中待定系数的值或取值范围.
2. 对于反比例函数与一次函数的图象的公共点问题，可转化为一元二次方程根的情况，用判别式来辅助计算. 判别式大于0，则有两个公共点；判别式等于0，则有一个公共点；判别式小于0，则没有公共点.

典例剖析

例 【中考·岳阳】已知关于 x 的方程 $x^2-(2m+1)x+m(m+1)=0$.

(1)求证：方程总有两个不等的实数根；

(2)已知方程的一个根为 $x=0$，求代数式 $(2m-1)^2+(3+m)(3-m)+7m-5$ 的值(要求先化简再求值).

解题秘方：一元二次方程根的判别式的应用主要有以下三种情况：

1. 不解方程，由根的判别式的正负性及是否为0可直接判定根的情况.

2. 根据方程根的情况，结合根的判别式来确定方程中待定字母的取值范围，若二次项系数中含有字母，则应注意检验二次项系数是否为零.

3. 应用判别式证明方程根的情况(有实根、无实根、有两个不等的实根、有两个相等的实根).

(1)**证明**：∵关于 x 的方程 $x^2-(2m+1)x+m(m+1)=0$ 是一元二次方程，

∴$\Delta=[-(2m+1)]^2-4m(m+1)=1>0$.

∴方程总有两个不等的实数根.

(2)**解**：∵$x=0$ 是此方程的一个根，

∴把 $x=0$ 代入方程中得到 $m(m+1)=0$.

∴$m=0$ 或 $m=-1$.

$(2m-1)^2+(3+m)(3-m)+7m-5$

$=4m^2-4m+1+9-m^2+7m-5$

$=3m^2+3m+5$，

把 $m=0$ 代入 $3m^2+3m+5$ 得 $3m^2+3m+5=5$；

把 $m=-1$ 代入 $3m^2+3m+5$ 得 $3m^2+3m+5=3\times1-3+5=5$.

综上，原代数式的值为5.

分类训练

☞(答案见49页)

应用1　利用根的判别式判断不含字母系数的方程的根的情况：

1. 判断下列方程的根的情况

(1)$x^2+x+\frac{1}{4}=0$；(2)$x^2+2x-1=0$；

(3)$x^2+x+2=0$.

应用2　利用根的判别式判断含字母系数的方程根的情况

2. 已知关于 x 的方程 $x^2-2x-m=0$ 没有实数根，其中 m 是实数，试判断关于 x 的方程 $x^2+2mx+m(m+1)=0$ 有无实数根.

应用3　利用根的判别式求方程的字母系数的值或取值范围

3. 已知关于 x 的一元二次方程 $mx^2-(m+2)x+2=0$.

(1)证明：不论 m 为何值，方程总有实数根.

(2)m 为何整数时，方程有两个不相等的正整数根？

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

应用 4 利用根的判别式求代数式的值

4. 已知关于 x 的方程 $x^2+(2m-1)x+4=0$ 有两个相等的实数根，求 $\dfrac{m-1}{(2m-1)^2+2m}$ 的值.

应用 5 利用根的判别式确定三角形的形状

5. 已知关于 x 的一元二次方程 $(a+c)x^2+2bx+(a-c)=0$，其中 a,b,c 分别为 $\triangle ABC$ 三边的长.

(1) 如果 $x=-1$ 是方程的根，试判断 $\triangle ABC$ 的形状，并说明理由；

(2) 如果方程有两个相等的实数根，试判断 $\triangle ABC$ 的形状，并说明理由；

(3) 如果 $\triangle ABC$ 是等边三角形，试求这个一元二次方程的根.

应用 6 利用根的判别式探求菱形条件

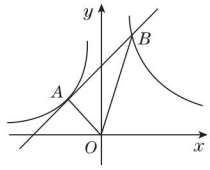
6. 已知 $\square ABCD$ 的两边 AB,AD 的长是关于 x 的方程 $x^2-mx+\dfrac{m}{2}-\dfrac{1}{4}=0$ 的两个根.

(1) m 为何值时，$\square ABCD$ 是菱形？并求出菱形的边长.

(2) 若 AB 的长为 2，求 $\square ABCD$ 的周长是多少.

应用 7 利用根的判别式解反比例函数图象与一次函数图象有一个交点问题

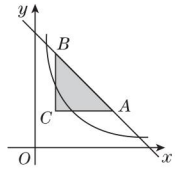
7. 如图，将直线 $y=x$ 沿 x 轴负方向平移 4 个单位长度后，恰好与双曲线 $y=\dfrac{m}{x}(x<0)$ 有唯一公共点 A，并交双曲线 $y=\dfrac{n}{x}(x>0)$ 于点 B，若 y 轴平分 $\triangle AOB$ 的面积，求 n 的值.



(第 7 题)

应用 8 利用根的判别式解反比例函数图象与一次函数图象有交点问题

8. 如图，过点 $C(1,2)$ 分别作 x 轴、y 轴的平行线，交直线 $y=-x+6$ 于点 A,B，若反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}(x>0)$ 的图象与 $\triangle ABC$ 有公共点，求 k 的取值范围.



(第 8 题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第8招　根与系数的关系的九种应用

教你一招

如果一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的两实数根为 x_1,x_2，那么 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$，这就是一元二次方程的根与系数的关系，也称为**韦达定理**.

反过来，如果 x_1,x_2 满足 $x_1+x_2=p$，$x_1x_2=q$，那么 x_1,x_2 是一元二次方程 $x^2-px+q=0$ 的两个根.

一元二次方程的韦达定理，揭示了根与系数的一种必然联系，利用这个关系，我们可以解决诸如已知一根求另一根、求有关两根的代数式的值、构造方程、证明等式和不等式等问题，它是中学数学中的一个重要工具.

典例剖析

例 已知关于 x 的方程 $(a-5)x^2-4x-1=0$，

(1)若方程有实数根，求 a 的取值范围；

(2)是否存在这样的实数 a，使方程的两根 x_1,x_2 满足 $x_1+x_2+x_1x_2=3$？若存在，求出实数 a 的值；若不存在，请说明理由.

解题秘方：1. 对于二次项系数含有字母的方程，当方程未指明是一元二次方程或有两个根时，必须将方程按二次项系数为 0 和不为 0 两种情况进行分类讨论；2. 解答涉及一元二次方程根的存在性问题，一般先假设存在，根据根与系数的关系列出关于字母系数的方程，求出字母系数的值，再看它是否满足根的判别式大于或等于零，最后确定字母值的存在性.

解：(1)当 $a=5$ 时，方程为 $-4x-1=0$，方程有实数根；

当 $a\neq5$ 时，方程为一元二次方程，

$\Delta=16+4(a-5)=4a-4\geqslant0$，解得 $a\geqslant1$.

$\therefore a$ 的取值范围为 $a\geqslant1$.

(2)根据题意得：$x_1+x_2=\frac{4}{a-5}$，$x_1x_2=-\frac{1}{a-5}$.

$\because x_1+x_2+x_1x_2=3$，

$\therefore \frac{4}{a-5}-\frac{1}{a-5}=3$.

解这个方程得 $a=6$.

经检验，$a=6$ 是方程的解.

又$\because a=6$ 满足 $\Delta\geqslant0$，

$\therefore$ 存在实数 a，使方程的两根 x_1,x_2 满足 $x_1+x_2+x_1x_2=3$，此时 $a=6$.

分类训练 ☞(答案见 50 页)

技巧 1　已知方程一根，求另一根及待定系数

1. 已知方程 $x^2+kx-6=0$ 的一个根为 2，求它的另一个根及 k 的值.

技巧 2　已知方程，求有关两根的代数式的值

2. 已知 x_1,x_2 是方程 $x^2-4x+2=0$ 的两根，求：

(1)$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ 的值；(2)$(x_1-x_2)^2$ 的值.

技巧 3　已知两方程，求含两未知数的代数式的值

3. 已知方程 $2m^2-5m-1=0$ 与 $2n^2-5n-1=0$，且 $m\neq n$，求 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

技巧4 已知方程,求字母系数的取值范围

4. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-3x+k+1=0$ 的两根的平方和小于5,求 k 的取值范围.

技巧5 已知方程,求字母系数的值

5. 已知关于 x 的方程 $x^2+2(m-2)x+m^2+4=0$ 有两个实数根,且两个根的平方和比两个根的积大21,求 m 的值.

技巧6 已知方程,判断根的符号

6. 不解方程,判断方程 $2x^2+3x-7=0$ 两根的符号.

技巧7 已知两根,求一元二次方程

7. 已知 -1 和3是关于 x 的某个一元二次方程的根,且方程中二次项系数为1,请写出这个方程.

技巧8 结合根的判别式证明等式

8. 已知实数 x,y,z 满足 $x=6-y,z^2=xy-9$. 求证:$x=y$.

技巧9 结合根的判别式证明不等式

9. 已知实数 a,b,c 满足 $\begin{cases}a^2-a-bc+1=0,\\2a^2-2bc-b-c+2=0.\end{cases}$ 求证:$a\geqslant 1$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第9招　一元二次方程中常见易错易混问题归类

教你一招

一元二次方程是初中数学的重要内容，是刻画某些实际问题中数量关系的有效的数学模型，可以利用其解决某些实际问题. **方程思想**是各类考试必考的数学思想. 由于部分学生的思维不缜密，常会出现各类错误，通过归类练习，以示警示.

典例剖析

例 已知6是关于x的方程$x^2-(m+2)x+2m=0$的一个实数根，并且这个方程的两个实数根恰好是等腰三角形ABC的两条边的长，则三角形ABC的周长为多少？

解题秘方：本题考查了一元二次方程的解、解一元二次方程及三角形三边的关系，掌握数形结合思想是解题关键.

解：把$x=6$代入方程得$36-6(m+2)+2m=0$，解得$m=6$，

则原方程为$x^2-8x+12=0$，解得$x_1=2$，$x_2=6$.

由这个方程的两个根恰好是等腰三角形ABC的两条边的长，可知：

①当$\triangle ABC$的腰长为6，底边长为2时，$\triangle ABC$的周长为$6+6+2=14$；

②当$\triangle ABC$的腰长为2，底边长为6时，因为$2+2<6$，不合题意，舍去.

综上所述，$\triangle ABC$的周长为14.

分类训练

☞(答案见51页)

易错1　忽视二次项系数不为零的条件而致错

1. 若关于x的方程$(k-3)x^{|k|-1}-x-2=0$是一元二次方程，求不等式$kx-2k+6\leqslant 0$的解集.

易错2　将多项式进行配方时与方程配方相混淆而致错

2. 将$2y^2-6y+1$进行配方.

易错3　应用根的判别式求字母的取值范围时忽视一元二次方程的隐含条件

3. 已知关于x的方程$k^2x^2+(2k-1)x+1=0$有两个不相等的实数根，求k的取值范围.

易错4　在方程两边同时除以含有未知数的式子，导致失根

4. 解方程：$3(2x+5)=2x(2x+5)$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

易错5 利用根与系数的关系时未考虑“Δ”

5. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-6x+(2m+1)=0$ 有实数根.

(1) 求 m 的取值范围;

(2) 如果方程的两个实数根为 x_1, x_2, 且 $2x_1x_2+x_1+x_2\geqslant 20$, 求 m 的取值范围.

易错6 忽视几何图形对方程根的要求

6. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-(3k+1)x+2k^2+2k=0$.

(1) 求证: 无论 k 取何实数值, 方程总有实数根.

(2) 若等腰三角形 ABC 的一边长 $a=6$, 另两边长 b, c 恰好是这个方程的两个根, 求此三角形的另两边长.

易错7 忽略实际问题对方程根的要求

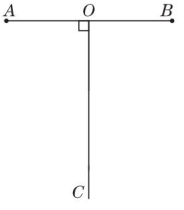
7. 某商场销售一批名牌衬衫, 平均每天可售出 20 件, 每件盈利 40 元. 为了扩大销售, 尽快减少库存, 商场决定采取适当的降价措施, 经调查发现, 如果每件衬衫降价 4 元, 商场平均每天可多售出 8 件.

(1) 若商场平均每天销售这种衬衫的盈利要达到 1 200 元, 每件衬衫应降价多少元?

(2) 每件衬衫降价多少元时, 商场每天盈利最多?

易错8 考虑问题不全面, 出现漏解

8. 如图, $AO=OB=50$ cm, OC 是一条射线, $OC\perp AB$, 蚂蚁甲由 A 点以 2 cm/s 的速度向 B 点爬行, 同时蚂蚁乙由 O 点以 3 cm/s 的速度沿 OC 方向爬行, 是否存在这样的时刻, 使两只蚂蚁与 O 点组成的三角形的面积为 450 cm^2?



(第 8 题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 10 招　降次思想在求代数式的值和解方程中的应用

教你一招

解一元二次方程的基本思路是将一元二次方程降次，转化为一元一次方程求解，这种解题思路实质就是应用降次转化思想. 应用**降次转化思想**也能把某些高次方程转化为一元二次方程求解. 在求一些代数式值时也常用降次思想求解.

典例剖析

例 已知 $2x^2 - x = 1$，求代数式 $6x^3 + x^2 - 5x + 2\,020$ 的值.

解题秘方：利用降次思想，将已知等式变式为 $x^2 = \frac{1}{2}(x+1)$ 后，反复运用 $x^2 = \frac{1}{2}(x+1)$ 进行降次化简，将“x”的三次式转化为“x”的一次式，然后代入求解.

解：$\because 2x^2 - x = 1$，$\therefore x^2 = \frac{1}{2}(x+1)$.

$\therefore x^3 = \frac{1}{2}(x+1)\cdot x = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{2}x = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$.

$\therefore 6x^3 + x^2 - 5x + 2\,020$

$= 6\left(\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}(x+1) - 5x + 2\,020$

$= 2\,022$.

分类训练 ☞（答案见 52 页）

技巧 1　利用降次思想解一元二次方程

方法 1：开方降次法

1. 用直接开平方法解下列方程：

(1) $3(x+1)^2 = \frac{1}{3}$；

(2) $(2x+3)^2 - 12 = 0$.

方法 2：配方降次法

2. 用配方法解下列方程：

(1) $3x^2 - 12x + 9 = 0$；

(2) $2x^2 - 3 = 4x$.

方法 3：因式分解降次法

3. 解下列方程：

(1) $4x^2 - 4x + 1 = 3x^2 - 6x + 9$；

(2) $(3x+1)^2 + 4(3x+1) + 4 = 0$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

技巧2 利用降次思想解高次方程

4. 解方程:$x^3-2x^2-4x+8=0$.

技巧3 利用降次思想求代数式的值

方法1:降次代换法

5. 已知 $x=2-\sqrt{5}$,求 $x^4-8x^3+16x^2-x+1$ 的值.

方法2:整体代换法

6. 若 $x^2+x-1=0$,求 x^3+2x^2+3 的值.

方法3:方程的根及根与系数的关系降次法

7. 设 x_1,x_2 是一元二次方程 $x^2+x-3=0$ 的两个根,求 ${x_1}^3-4{x_2}^2+19$ 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

参考答案及点拨

第1招 菱形的性质与判定的四种应用

1. **证明**:(1)∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴ $AD=BC$,$AD\parallel BC$,

∴ $\angle ADB=\angle DBC$.

∵ $CQ\parallel DB$,

∴ $\angle BCQ=\angle DBC$,

∴ $\angle ADB=\angle BCQ$.

∵ $DP=CQ$,

∴ $\triangle APD\cong\triangle BQC$.

(2)∵ $CQ\parallel DB$,且 $CQ=DP$,

∴ 四边形 $CQPD$ 是平行四边形,

∴ $CD=PQ$,$CD\parallel PQ$.

∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴ $AB=CD$,$AB\parallel CD$,

∴ $AB=PQ$,$AB\parallel PQ$.

∴ 四边形 $ABQP$ 是平行四边形.

∵ $\triangle APD\cong\triangle BQC$,

∴ $\angle APD=\angle BQC$.

∵ $\angle APD+\angle APB=180°$,$\angle ABP+\angle BQC=180°$,

∴ $\angle ABP=\angle APB$,

∴ $AB=AP$.

∴ 四边形 $ABQP$ 为菱形.

点拨:先判定四边形 $ABQP$ 是平行四边形,再根据一组邻边相等($AB=AP$)的平行四边形是菱形判定四边形 $ABQP$ 是菱形.

2. **证明**:(1)∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴ $OB=OD$,$AB\parallel CD$.

∴ $\angle EBO=\angle FDO$.

在$\triangle OBE$与$\triangle ODF$中,$\begin{cases}\angle EBO=\angle FDO,\\ OB=OD,\\ \angle BOE=\angle DOF,\end{cases}$

∴ $\triangle OBE\cong\triangle ODF$(ASA),

∴ $OE=OF$.

(2)∵ $OB=OD$,$OE=OF$,

∴ 四边形 $BEDF$ 是平行四边形.

∵ $EF\perp BD$,

∴ 四边形 $BEDF$ 是菱形.

3. (1)**证明**:由作图过程可知,$AB=AF$,AE 平分$\angle BAD$.

∴ $\angle BAE=\angle EAF$.

∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴ $BC\parallel AD$. ∴ $\angle AEB=\angle EAF$.

∴ $\angle BAE=\angle AEB$. ∴ $BE=AB$.

∴ $BE=AF$. ∵ $AF\parallel BE$,

∴ 四边形 $ABEF$ 是平行四边形.

∵ $AB=BE$,∴ 四边形 $ABEF$ 是菱形.

(2)**解**:如图,连接 BF,交 AE 于 G,

∵ 菱形 $ABEF$ 的周长为 16,$AE=4\sqrt{3}$,

∴ $AB=BE=EF=AF=4$,$AG=\frac{1}{2}AE=2\sqrt{3}$,$AE\perp BF$.

在 Rt$\triangle ABG$ 中,$AB^2=AG^2+BG^2$,

∴ $4^2=(2\sqrt{3})^2+BG^2$. ∴ $BG=2$.

∴ $BF=2BG=4$.

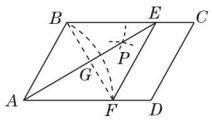
∴ $AB=AF=BF=4$.

∴ $\triangle ABF$ 为等边三角形.

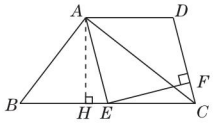
∴ $\angle BAF=60°$.

∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴ $\angle C=\angle BAF=60°$.



(第3题)



(第4题)

4. (1)**证明**:∵ $AD\parallel BC$,$AE\parallel DC$,

∴ 四边形 $AECD$ 是平行四边形.

∵ 在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle BAC=90°$,E 是 BC 的中点,

∴ $BE=EC=AE$,∴ 四边形 $AECD$ 是菱形.

(2)**解**:如图,过点 A 作 $AH\perp BC$ 于点 H,在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle BAC=90°$,$AB=6$,$BC=10$,由勾股定理得 $AC=8$.

∵ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AH=\frac{1}{2}AB\cdot AC$,

∴ $AH=\frac{24}{5}$.

∵ 点 E 是 BC 的中点,$BC=10$,四边形 $AECD$ 是菱形,

∴ $CD=CE=5$.

∵ $S_{菱形AECD}=CD\cdot EF=CE\cdot AH$,∴ $EF=AH=\frac{24}{5}$.

点拨:(1)根据平行四边形和菱形的判定证明即可;(2)利用面积公式可求出 EF 的长.

5. (1)**证明**:连接 BD.

∵ 四边形 $ABCD$ 为菱形,

∴ $AB=AD$,$AB\parallel CD$.

又∵ $\angle DAB=60°$,

∴ $\triangle ABD$ 是等边三角形,

∴ $\angle ABD=\angle BDF=60°$,$AB=DB$.

又∵ $AE+CF=m$,$CF+DF=m$,

∴ $AE=DF$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

在△ABE和△DBF中，$\begin{cases} AB=DB, \\ \angle A=\angle BDF=60°, \\ AE=DF, \end{cases}$

∴ △ABE≌△DBF.

∴ $BE=BF$，$\angle ABE=\angle DBF$.

又∵ $\angle ABE+\angle EBD=\angle ABD=60°$，

∴ $\angle EBF=\angle DBF+\angle EBD=\angle ABD=60°$，

∴ △BEF是等边三角形.

(2)**解**：由(1)知，△BEF是等边三角形，其边长最小时，面积最小，即当$BE\perp AD$时，△BEF的面积最小.

此时$BE=\sqrt{m^2-\left(\frac{1}{2}m\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}m$，

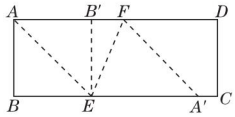
△BEF的边BE上的高为$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}m\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{4}m\right)^2}=\frac{3}{4}m$，

∴ △BEF面积的最小值为$\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}m\cdot\frac{3}{4}m=\frac{3\sqrt{3}}{16}m^2$.

点拨：作辅助线构造等边三角形和全等三角形，结合菱形的性质和等边三角形的性质求解.

第2招 利用矩形的性质巧解折叠问题

1. **解**：设折叠后，点A的对应点为点A'，点B的对应点为点B'，如图，由折叠的性质得$\angle AEF=\angle A'EF$，$\angle BEA=\angle AEB'$，$\angle B=\angle AB'E$.



（第1题）

∵ 四边形$ABCD$为矩形，

∴ $AD/\!/BC$，$\angle BAB'=\angle B=90°$.

∴ $\angle AB'E=90°$.

∴ $\angle BEB'=90°$.

∴ $\angle BEA=\angle AEB'=45°$.

又∵ $\angle BEA+\angle AEF+\angle FEA'=180°$，

∴ $\angle FEA'=67.5°$.

∵ $AD/\!/BC$，∴ $\angle AFE=\angle FEA'=67.5°$.

点拨：本题主要根据折叠的性质及矩形的性质，求出相关角的度数.

2. **解**：(1) △AED≌△CEB'.

证明：∵ 四边形$ABCD$是矩形，

∴ $BC=DA$，$\angle B=\angle D$.

由折叠的性质，知$BC=B'C$，$\angle B=\angle B'$，

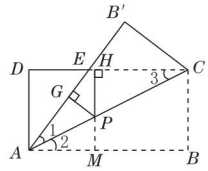
∴ $B'C=DA$，$\angle B'=\angle D$.

在△AED和△CEB'中，

$\begin{cases} \angle DEA=\angle B'EC, \\ \angle D=\angle B', \\ DA=B'C, \end{cases}$

∴ △AED≌△CEB'.

(2)如图，延长HP交AB于点M.



（第2题）

∵ 四边形$ABCD$为矩形，

∴ $CD=AB=8$，$CD/\!/AB$.

∴ $\angle 2=\angle 3$.

由折叠的性质可知$\angle 1=\angle 2$，

∴ $\angle 1=\angle 3$.

∴ $AE=CE=8-3=5$.

在Rt△ADE中，$DE=3$，$AE=5$，

∴ $AD=\sqrt{5^2-3^2}=4$.

∵ $PH\perp CD$，$AB/\!/CD$，∴ $PM\perp AB$.

又∵ $PG\perp AB'$，∴ $PM=PG$.

∵ $PH+PM=AD$，

∴ $PG+PH=AD=4$.

3. (1)**证明**：由折叠的性质可得$AF=AB$，$\angle F=\angle B$.

∵ 四边形$ABCD$为矩形，

∴ $AB=CD$，$\angle B=\angle D=90°$.

∴ $AF=CD$，$\angle F=\angle D=90°$.

又∵ $\angle AEF=\angle CED$，

∴ △AFE≌△CDE(AAS).

(2)**解**：∵ △AFE≌△CDE，

∴ $AE=CE$，$EF=ED$.

根据折叠的性质可知$FC=BC=8$，$AF=AB=4$.

在Rt△AFE中，$AE^2=AF^2+EF^2$，即$(8-EF)^2=4^2+EF^2$.

解得$EF=3$. ∴ $EC=5$.

∴ 阴影部分的面积为$\frac{1}{2}EC\cdot AF=\frac{1}{2}\times5\times4=10$.

4. (1)**证明**：由折叠的性质可得点A，C关于直线MN对称，

∴ $\angle ANM=\angle CNM$. ∵ 四边形$ABCD$是矩形，

∴ $AD/\!/BC$. ∴ $\angle ANM=\angle CMN$.

∴ $\angle CMN=\angle CNM$. ∴ $CM=CN$.

(2)**解**：过点N作$NH\perp BC$于点H，则四边形$NHCD$是矩形，

∴ $HC=DN$，$NH=DC$.

∵ △CMN的面积与△CDN的面积比为3∶1，

∴ $\frac{S_{\triangle CMN}}{S_{\triangle CDN}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot MC\cdot NH}{\frac{1}{2}\cdot DN\cdot DC}=\frac{MC}{DN}=3$.

∴ $MC=3DN=3HC$.

∴ $MH=2HC$. 设$DN=x$，

则$HC=x$，$MH=2x$，$CM=CN=3x$.

在Rt△CDN中，$DC=\sqrt{CN^2-DN^2}=2\sqrt{2}x$，

∴ $NH=2\sqrt{2}x$. 在Rt△MNH中，$MN=\sqrt{MH^2+NH^2}=2\sqrt{3}x$.

∴ $\frac{MN}{DN}=\frac{2\sqrt{3}x}{x}=2\sqrt{3}$.

点拨：(1)根据折叠的性质得$\angle ANM=\angle CNM$，再由$AD/\!/BC$得到$\angle ANM=\angle CMN$，最后根据等角对等边得到$CM=CN$；

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)根据两个等高的三角形的面积之比等于对应底边长之比得到$\frac{MC}{DN}=3$,再根据勾股定理求得 MN 的长,从而求得 $\frac{MN}{DN}=2\sqrt{3}$.

5. **证明**:(1)∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

∴ $AD=BC$,$AB=CD$.

由折叠的性质,得 $BC=CE$,$AB=AE$,

∴ $AD=CE$,$AE=CD$.

又∵ $DE=ED$,∴ $\triangle ADE\cong\triangle CED$.

(2)∵ $\triangle ADE\cong\triangle CED$,∴ $\angle DEA=\angle EDC$.

由折叠的性质,得$\angle OAC=\angle CAB$.

∵ $AB/\!/CD$,∴ $\angle OCA=\angle CAB$,∴ $\angle OAC=\angle OCA$.

又∵ $\angle AOC=\angle DOE$,∴ $\angle OAC=\angle DEA$,∴ $DE/\!/AC$.

第3招 矩形的性质与判定的六种应用

1. (1)**证明**:如图,作 $BH\perp FP$ 交 FP 的延长线于点 H. ∵ $BD\perp AC$,$PF\perp AC$,$BH\perp PF$,

∴ 四边形$BDFH$ 是矩形.

∴ $BD=HF$.

∵ $AB=AC$,

∴ $\angle ABC=\angle C$.

∵ $PE\perp AB$,$PF\perp AC$,

∴ $\angle PEB=\angle PFC=90°$.

∴ $\angle EPB=\angle FPC$.

又∵ $\angle HPB=\angle FPC$,

∴ $\angle EPB=\angle HPB$.

∵ $PE\perp AB$,$PH\perp BH$,

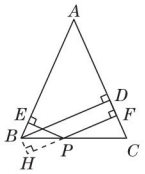
∴ $\angle PEB=\angle PHB=90°$.

又∵ $PB=PB$,

∴ $\triangle PEB\cong\triangle PHB$. ∴ $PE=PH$.

∴ $BD=HF=PF+PH=PF+PE$,

即 $BD=PE+PF$.



(第1题)

(2)**解**:不成立.

理由如下:作 $BH\perp PF$ 交 PF 的延长线于点 H. 与(1)同理可得 $PE=PH$,$BD=HF$.

∴ $PE=PH=HF+PF=BD+PF$.

点拨:先作辅助线构造矩形 $BDFH$ 得出 $BD=HF$,再证 $\triangle PEB\cong\triangle PHB$ 得出 $PE=PH$,从而得出 BD,PE,PF 之间的关系.

2. (1)**证明**:∵ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形,

∴ $AB/\!/DC$.

∴ $\angle ABE=\angle ECF$.

∵ 点 E 为 BC 的中点,∴ $BE=CE$.

又∵ $\angle AEB=\angle FEC$,

∴ $\triangle ABE\cong\triangle FCE$.

∴ $AB=CF$,$AE=EF$.

又∵ $AB/\!/CF$,

∴ 四边形 $ABFC$ 为平行四边形.

∵ $\angle AEC$ 为$\triangle ABE$ 的外角,

∴ $\angle AEC=\angle ABC+\angle EAB$.

又∵ $\angle AEC=2\angle ABC$,

∴ $\angle ABC=\angle EAB$. ∴ $AE=BE$.

∴ $AE+EF=BE+CE$,即 $AF=BC$.

∴ 四边形 $ABFC$ 为矩形.

(2)**解**:∵ 四边形 $ABFC$ 是矩形,

∴ $AC\perp DF$.

又∵ $\triangle AFD$ 是等边三角形,且边长为4,

∴ $AF=DF=4$,$CF=CD=\frac{DF}{2}=2$.

∴ $AC=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$.

∴ $S_{矩形ABFC}=2\sqrt{3}\times2=4\sqrt{3}$.

点拨:先判定四边形 $ABFC$ 是平行四边形,再证出 $AF=BC$,最后根据对角线相等的平行四边形是矩形判定四边形 $ABFC$ 是矩形.

3. (1)**证明**:∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

∴ $AB/\!/DC$,$AD/\!/BC$.

∴ $\angle ABD=\angle CDB$.

∵ BE 平分$\angle ABD$,DF 平分$\angle CDB$,

∴ $\angle EBD=\frac{1}{2}\angle ABD$,$\angle FDB=\frac{1}{2}\angle CDB$.

∴ $\angle EBD=\angle FDB$.

∴ $BE/\!/DF$. 又∵ $AD/\!/BC$,

∴ 四边形 $BEDF$ 是平行四边形.

(2)**解**:当$\angle ABE=30°$时,四边形 $BEDF$ 是菱形.

理由如下:∵ BE 平分$\angle ABD$,

∴ $\angle ABD=2\angle ABE=60°$,$\angle EBD=\angle ABE=30°$.

∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

∴ $\angle A=90°$.

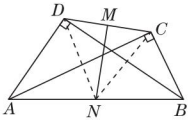
∴ $\angle EDB=90°-\angle ABD=30°$.

∴ $\angle EDB=\angle EBD=30°$. ∴ $EB=ED$.

又∵ 四边形 $BEDF$ 是平行四边形,

∴ 四边形 $BEDF$ 是菱形.

4. **解**:$MN\perp CD$. 理由如下:



(第4题)

如图,连接 ND,NC.

在 Rt$\triangle ABD$中,

$\angle ADB=90°$,N 是 AB 的中点,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore ND=\frac{1}{2}AB$. 同理可证 $NC=\frac{1}{2}AB$.

$\therefore ND=NC$. $\therefore \triangle NDC$ 是等腰三角形.

$\because M$ 是 CD 的中点，$\therefore MN\perp CD$.

点拨：本题利用直角三角形的斜边上的中线等于斜边的一半这一性质得到 $DN=CN$，再根据等腰三角形底边上的中线与高互相重合得到 $MN\perp CD$.

5. (1) **证明**：由折叠的性质，知 $\triangle BDC\cong\triangle BDE$，

$\therefore \angle DBC=\angle DBE$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore AD/\!/BC$. $\therefore \angle DBC=\angle FDB$.

$\therefore \angle DBE=\angle FDB$. $\therefore DF=BF$.

$\therefore \triangle BDF$ 是等腰三角形.

(2) **解**：①四边形 $BFDG$ 是菱形. 理由如下：

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore FD/\!/BG$. 又 $\because DG/\!/BE$，

$\therefore$ 四边形 $BFDG$ 是平行四边形.

又 $\because DF=BF$，

$\therefore$ 四边形 $BFDG$ 是菱形.

②$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore \angle A=90°$.

$\therefore BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$.

$\because$ 四边形 $BFDG$ 是菱形，

$\therefore GF\perp BD$，$FG=2OF$，$OB=\frac{1}{2}BD=5$.

设 $DF=BF=x$，则 $AF=AD-DF=8-x$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABF$ 中，$AB^2+AF^2=BF^2$，

即 $6^2+(8-x)^2=x^2$，解得 $x=\frac{25}{4}$.

$\therefore BF=\frac{25}{4}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle FOB$ 中，$FO=\sqrt{BF^2-OB^2}=\sqrt{\left(\frac{25}{4}\right)^2-5^2}=\frac{15}{4}$，

$\therefore FG=2FO=\frac{15}{2}$.

6. (1) **证明**：连接 BP，作 $CH\perp BD$ 于点 H.

在矩形 $ABCD$ 中，$\angle BCD=90°$，$BC=4$，$CD=AB=3$，

$\therefore BD=\sqrt{BC^2+CD^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$.

由 $S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}BC\cdot CD=\frac{1}{2}BD\cdot CH$，得 $CH=\frac{BC\cdot CD}{BD}=\frac{4\times3}{5}=\frac{12}{5}$.

$\because S_{\triangle PBE}+S_{\triangle PBC}=S_{\triangle BCE}$，

$\therefore \frac{1}{2}BE\cdot PR+\frac{1}{2}BC\cdot PQ=\frac{1}{2}BE\cdot\frac{12}{5}$.

又 $\because BE=BC$，

$\therefore PR+PQ=\frac{12}{5}$.

(2) **解**：(1) 中的结论 $PR+PQ=\frac{12}{5}$ 仍成立.

证明：连接 BP，作 $CH\perp BD$ 于点 H.

$\because S_{\triangle PBE}+S_{\triangle PBC}=S_{\triangle BCE}$，

$\therefore \frac{1}{2}BE\cdot PR+\frac{1}{2}BC\cdot PQ=\frac{1}{2}BE\cdot CH$.

又 $\because BE=BC$，

$\therefore PR+PQ=CH$. 而 $CH=\frac{12}{5}$，

$\therefore PR+PQ=\frac{12}{5}$.

$\therefore$ (1) 中的结论仍成立.

(3) **解**：猜想：$PR-PQ=\frac{12}{5}$.

点拨：本题根据三角形的面积之间的数量关系证明 PR 与 PQ 之间的数量关系.

第 4 招　特殊四边形的性质在动点问题中的巧用

1. **解**：$AE=CF$，$AE/\!/CF$. 理由如下：

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AB=CD$，$AB/\!/CD$.

$\therefore \angle ABE=\angle CDF$.

又 $\because BE=DF$，

$\therefore \triangle ABE\cong\triangle CDF$.

$\therefore AE=CF$，$\angle AEB=\angle CFD$.

$\because \angle AEB+\angle AED=\angle CFD+\angle CFB=180°$，

$\therefore \angle AED=\angle CFB$.

$\therefore AE/\!/CF$.

点拨：由 $\triangle ABE\cong\triangle CDF$ 得到 $AE=CF$，即得到数量关系，由 $\angle AED=\angle CFB$ 得到 $AE/\!/CF$，即得到位置关系.

2. **证明**：(1) 连接 AC. $\because$ 在菱形 $ABCD$ 中，$\angle B=60°$，$AB=BC$，

$\therefore \angle BCD=180°-\angle B=120°$，$\triangle ABC$ 是等边三角形.

又 $\because E$ 是 BC 的中点，$\therefore AE\perp BC$.

$\because \angle AEF=60°$，$\therefore \angle FEC=90°-\angle AEF=30°$.

$\therefore \angle CFE=180°-\angle FEC-\angle BCD=180°-30°-120°=30°$.

$\therefore \angle FEC=\angle CFE$. $\therefore EC=CF$.

又 $\because BC=CD$，$\therefore BC-EC=CD-CF$. $\therefore BE=DF$.

(2) 连接 AC. 由 (1) 知 $\triangle ABC$ 是等边三角形，

$\therefore AB=AC$，$\angle ACB=\angle BAC=\angle EAF=60°$.

$\therefore \angle BAE=\angle CAF$.

$\because \angle BCD=120°$，$\angle ACB=60°$，

$\therefore \angle ACF=60°=\angle B$.

$\therefore \triangle ABE\cong\triangle ACF$.

$\therefore AE=AF$. $\therefore \triangle AEF$ 是等边三角形.

3. **解**：(1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore AD/\!/BC$.

$\therefore \angle OAE=\angle OCF$，$\angle AEO=\angle CFO$.

$\because EF$ 垂直平分 AC，垂足为 O，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore OA = OC$.

$\therefore \triangle AOE \cong \triangle COF$. $\therefore OE = OF$.

$\therefore$ 四边形 $AFCE$ 为平行四边形.

又$\because EF \perp AC$,$\therefore$ 四边形 $AFCE$ 为菱形.

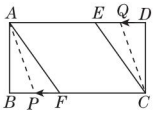
设 $AF = CF = x$ cm,则 $BF = (8 - x)$ cm,

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABF$ 中,$AB = 4$ cm,由勾股定理得 $4^2 + (8 - x)^2 = x^2$,

解得 $x = 5$,

$\therefore AF = 5$ cm.

(2)显然当 P 点在 AF 上,Q 点在 CD 上时,以 A, C, P, Q 四点为顶点不可能构成平行四边形;同理 P 点在 AB 上,Q 点在 DE 或 CE 上时,也不可能构成平行四边形. 因此只有当 P 点在 BF 上,Q 点在 ED 上时,才能构成平行四边形,如图,连接 AP, CQ. 若以 A, C, P, Q 四点为顶点的四边形是平行四边形,则 $PC = QA$.



(第 3 题)

$\because$ 四边形 $AFCE$ 是菱形,点 P 的速度为 5 cm/s,点 Q 的速度为 4 cm/s,运动时间为 t s,

$\therefore PC = PF + FC = PF + FA = 5t$ cm,$QA = (AD + CD) - (QD + CD) = (12 - 4t)$ cm.

$\therefore 5t = 12 - 4t$,解得 $t = \frac{4}{3}$.

$\therefore$ 以 A, C, P, Q 四点为顶点的四边形是平行四边形时,$t = \frac{4}{3}$.

点拨:本题考查了矩形的性质、菱形的判定、勾股定理、平行四边形的性质,是一道综合性较强的题目. 注意建立方程求解.

4. (1)**证明**:$\because$ 四边形 $APCD$ 是正方形,

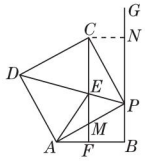
$\therefore DP$ 平分 $\angle APC$,$PC = PA$,$\angle APC = 90°$,

$\therefore \angle APD = \angle CPD = 45°$,

在 $\triangle AEP$ 和 $\triangle CEP$ 中,$\begin{cases} AP = CP, \\ \angle APE = \angle CPE, \\ PE = PE, \end{cases}$

$\therefore \triangle AEP \cong \triangle CEP$(SAS).

(2)**解**:$CF \perp AB$. 理由如下:如图.



(第 4 题)

$\because \triangle AEP \cong \triangle CEP$,

$\therefore \angle EAP = \angle ECP$.

$\because \angle EAP = \angle BAP$.

$\therefore \angle BAP = \angle FCP$.

$\because \angle FCP + \angle CMP = 90°$,$\angle AMF = \angle CMP$,

$\therefore \angle AMF + \angle PAB = 90°$,

$\therefore \angle AFM = 90°$,

$\therefore CF \perp AB$.

(3)**解**:如图,过点 C 作 $CN \perp BG$ 于 N,

则 $\angle CNP = \angle B = 90°$.

$\therefore \angle CPN + \angle PCN = 90°$,

$\because \angle APC = 90°$,

$\therefore \angle CPN + \angle APB = 90°$,

$\therefore \angle PCN = \angle APB$.

在 $\triangle PCN$ 和 $\triangle APB$ 中,$\begin{cases} \angle PCN = \angle APB, \\ \angle PNC = \angle B, \\ PC = PA, \end{cases}$

$\therefore \triangle PCN \cong \triangle APB$(AAS),

$\therefore CN = PB$,$PN = AB$.

$\because \triangle AEP \cong \triangle CEP$,$\therefore AE = CE$.

$\because \angle CNP = \angle B = \angle CFB = 90°$,

$\therefore$ 四边形 $CNBF$ 是矩形,

$\therefore BN = CF = CE + EF$,$BF = CN$,

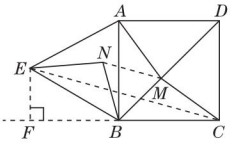
$\therefore \triangle AEF$ 的周长 $= AE + EF + AF = CE + EF + AF = BN + AF = PN + PB + AF = AB + CN + AF = AB + BF + AF = 2AB = 16$.

5. (1)**证明**:$\because \triangle ABE$ 是等边三角形,$\therefore BA = BE$,$\angle ABE = 60°$.

$\because \angle MBN = 60°$,$\therefore \angle MBN - \angle ABN = \angle ABE - \angle ABN$,即 $\angle MBA = \angle NBE$. 又$\because BM = BN$,$\therefore \triangle AMB \cong \triangle ENB$(SAS).

(2)**解**:①当点 M 在 BD 的中点时,A, M, C 三点共线,此时 $AM + CM$ 的值最小.

②如图,连接 CE,当点 M 在 BD 与 CE 的交点时,$AM + BM + CM$ 的值最小.



(第 5 题)

理由如下:连接 MN,由(1)知,$\triangle AMB \cong \triangle ENB$,

$\therefore AM = EN$. $\because \angle MBN = 60°$,$MB = NB$,

$\therefore \triangle BMN$ 是等边三角形,$\therefore BM = MN$.

$\therefore AM + BM + CM = EN + MN + CM$.

根据"两点之间线段最短"可知,当 E, N, M, C 四点在同一条直线上时,$EN + MN + CM$ 有最小值,最小值为 EC 的长.

$\therefore$ 当点 M 在 BD 与 CE 的交点时,$AM + BM + CM$ 的值最小,即等于 EC 的长.

(3)**解**:如图,过点 E 作 $EF \perp BC$ 交 CB 的延长线于点 F,由题意,知 $\angle EBF = \angle ABF - \angle ABE = 90° - 60° = 30°$.

设正方形 $ABCD$ 的边长为 x,则 $BE = BA = x$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle BEF$ 中,$\angle EBF = 30°$,$\therefore EF = \frac{x}{2}$,$BF = \frac{\sqrt{3}}{2}x$. 由②知,$EC = \sqrt{3} + 1$,在

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

Rt△EFC 中，∵ $EF^2+FC^2=EC^2$，∴ $\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x+x\right)^2=(\sqrt{3}+1)^2$，解得 $x=\sqrt{2}$（负值舍去），∴ 正方形 $ABCD$ 的边长为$\sqrt{2}$.

第5招 特殊平行四边形的性质和判定的综合应用的三种题型

1. **解**：(1)①由作图的过程可知四边形 $MNED$ 是矩形.

∵ $\angle ADM+\angle MDC=\angle CDE+\angle MDC=90°$，

∴ $\angle ADM=\angle CDE$.

在△ADM 与△CDE 中，$\begin{cases}\angle A=\angle DCE=90°,\\ AD=CD,\\ \angle ADM=\angle CDE,\end{cases}$

∴ △ADM≌△CDE(ASA)，

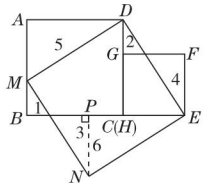
∴ $DM=DE$，

∴ 矩形 $MNED$ 是正方形.

∵ $DE^2=CD^2+CE^2=a^2+b^2$，

∴ 正方形 $MNED$ 的面积为 a^2+b^2.

②如图，过点 N 作 $NP\perp BE$，垂足为 P.



（第1题）

可证明图中的6与5位置的两个直角三角形全等，4与3位置的两个直角三角形全等，1与2位置的两个直角三角形全等，因此将5放到6的位置，将4放到3的位置，将1放到2的位置，恰好拼接成正方形 $MNED$.

(2)能. 理由如下：

从上述拼接过程可以看出：任意两个正方形都可以拼接为一个正方形，而拼接出的这个正方形可以与第三个正方形再拼接为一个正方形……以此类推，对于 n(n 是大于2的自然数)个任意的正方形，可以通过($n-1$)次拼接，得到一个正方形.

点拨：本题考查了正方形的性质以及正方形的判定定理在操作型问题中的应用.

2. (1)C

(2)①**证明**：∵ $AF\parallel DF'$，

∴ 四边形 $AFF'D$ 是平行四边形.

∵ $S_{□ABCD}=AD\cdot AE=15$，$AD=5$，

∴ $AE=3$.

∵ $EF=4$，$\angle E=90°$，

∴ $AF=\sqrt{AE^2+EF^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

又∵ $AD=5$，∴ $AD=AF$.

∴ 四边形 $AFF'D$ 是菱形.

②**解**：如图，连接 AF'，DF.

在 Rt△AEF' 中，$AE=3$，$EF'=EF+FF'=4+5=9$，

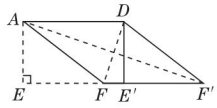
由勾股定理可得 $AF'=3\sqrt{10}$.

在 Rt△DFE' 中，$FE'=EE'-EF=5-4=1$，

$DE'=AE=3$，

由勾股定理得 $DF=\sqrt{10}$.

∴ 四边形 $AFF'D$ 的两条对角线的长分别是 $3\sqrt{10}$ 和 $\sqrt{10}$.



（第2题）

3. (1)**证明**：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AB\parallel CD$.

∴ $\angle FAG=\angle CDG$.

又∵ $AG=DG$，$\angle AGF=\angle DGC$，

∴ △AFG≌△DCG.

∴ $AF=CD$，∴ $AB=AF$.

(2)**解**：四边形 $ACDF$ 是矩形.

证明如下：∵ $AF\parallel CD$，$AF=CD$，

∴ 四边形 $ACDF$ 是平行四边形.

∴ $CG=FG$.

在▱$ABCD$ 中，$\angle BCD=120°$，

∴ $\angle BAD=120°$，∴ $\angle FAG=60°$.

∵ $AG=AB$，$AB=AF$，

∴ $AG=AF$.

∴ △AFG 是等边三角形，

∴ $AG=FG$. 又∵ $AG=DG$，

∴ $AD=CF$.

∴ 四边形 $ACDF$ 是矩形.

4. (1)**证明**：在 Rt△FCD 中，

∵ 点 G 为 DF 的中点，

∴ $CG=\frac{1}{2}DF$. 同理，$EG=\frac{1}{2}DF$.

∴ $EG=CG$.

(2)**解**：成立. 证明如下：

如图，连接 AG，过点 G 作直线 $MN\perp AD$ 交 AD 于点 M，与 EF 的延长线交于点 N.

易知四边形 $AENM$ 为矩形.

在△DMG 与△FNG 中，

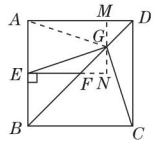
∵ $\angle DGM=\angle FGN$，$DG=FG$，

$\angle DMG=\angle FNG=90°$，

∴ △DMG≌△FNG，

∴ $MG=NG$.

在矩形 $AENM$ 中，$AM=EN$.



（第4题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

在△AMG与△ENG中，

∵ $AM=EN$，$\angle AMG=\angle ENG=90°$，$MG=NG$，

∴ △AMG≌△ENG，

∴ $AG=EG$.

∵ 四边形$ABCD$为正方形，BD为对角线，

∴ $\angle ADG=\angle CDG$，$AD=CD$.

又∵ $DG=DG$，

∴ △ADG≌△CDG，

∴ $AG=CG$，

∴ $EG=CG$.

(3)**解**：(1)中的结论仍然成立，即$EG=CG$，

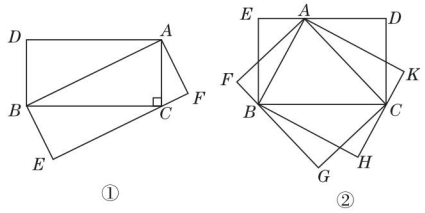
其他结论还有$EG\perp CG$.

5. **解**：(1)如果一个三角形和一个平行四边形满足条件：三角形的一边与平行四边形的一边重合，且三角形的这边所对的顶点在平行四边形这边的对边上，则称这样的平行四边形为三角形的“友好平行四边形”.

(2)如图①，共有两个“友好矩形”，分别为矩形$BCAD$，矩形$ABEF$.

易知，矩形$BCAD$，矩形$ABEF$的面积都等于△ABC面积的2倍，

∴ △ABC的两个“友好矩形”的面积相等.



(第5题)

(3)如图②，共有3个“友好矩形”，分别为矩形$BCDE$，矩形$CAFG$和矩形$ABHK$，其中矩形$ABHK$的周长最小.

证明：易知这三个矩形面积相等，设为S.

设矩形$BCDE$、矩形$CAFG$和矩形$ABHK$的周长分别为L_1，L_2，L_3，$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，则

$$L_1=\frac{2S}{a}+2a,L_2=\frac{2S}{b}+2b,L_3=\frac{2S}{c}+2c.$$

$$L_1-L_2=\left(\frac{2S}{a}+2a\right)-\left(\frac{2S}{b}+2b\right)=\frac{2S}{ab}(b-a)+2(a-b)=2(a-b)\cdot\frac{ab-S}{ab}.$$

∵ $a-b>0$，$ab>S>0$，

∴ $L_1-L_2>0$，即$L_1>L_2$，

同理可得，$L_2>L_3$，∴ $L_1>L_2>L_3$，

∴ L_3最小，即矩形$ABHK$的周长最小.

点拨：理解该题中的新定义，能根据新定义正确画出符合要求的图形，掌握三角形和矩形的面积公式，能够运用作差法比较大小.

第6招 配方法的六种常见应用

1. **解**：$x^2-2x-2\,019=0$，

$(x-1)^2-2\,020=0$，

$(x-1)^2=2\,020$，

∴ $x_1=1+2\sqrt{505}$，$x_2=1-2\sqrt{505}$.

2. **解**：$x^2+(k+1)x+k^2-2k+1=\left(x+\frac{k+1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}k^2-\frac{5}{2}k+\frac{3}{4}$.

∵ 关于x的二次三项式$x^2+(k+1)x+k^2-2k+1$是完全平方式，

∴ $\frac{3}{4}k^2-\frac{5}{2}k+\frac{3}{4}=0$，解得$k=3$或$k=\frac{1}{3}$.

点拨：本题利用配方法将$x^2+(k+1)x+k^2-2k+1$配方得到$\left(x+\frac{k+1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}k^2-\frac{5}{2}k+\frac{3}{4}$，由$x^2+(k+1)x+k^2-2k+1$是完全平方式，可知$\frac{3}{4}k^2-\frac{5}{2}k+\frac{3}{4}$的值为0，即可求得$k$的值.

3. **解**：原式$=-2(x^2+2x)+7$

$=-2[(x+1)^2-1]+7$

$=-2(x+1)^2+9$.

∵ $-2(x+1)^2\leqslant 0$，

∴ $-2x^2-4x+7$的最大值是9.

点拨：本题利用配方法将$-2x^2-4x+7$配方得$-2(x+1)^2+9$，从而可知，当$x=-1$时原式有最大值为9.

4. **解**：∵ $x^2-8x+17=(x-4)^2+1>0$，

∴ 不论x取何值，这个代数式的值恒大于零.

当$(x-4)^2=0$时，

此代数式的值最小，

即当$x=4$时，这个代数式的值最小，最小值是1.

5. **证明**：∵ $a^2-8a+20=(a-4)^2+4\neq 0$，∴ 无论$a$取何值，该方程都是一元二次方程.

6. **解**：(1)由$a^2+b^2+c^2-6a-8b-10c+50=0$，得$(a-3)^2+(b-4)^2+(c-5)^2=0$.

∵ $(a-3)^2\geqslant 0$，$(b-4)^2\geqslant 0$，$(c-5)^2\geqslant 0$，

∴ $a-3=0$，$b-4=0$，$c-5=0$，

∴ $a=3$，$b=4$，$c=5$.

(2)∵ $3^2+4^2=5^2$，即$a^2+b^2=c^2$，

∴ △ABC是直角三角形.

点拨：本题运用了配方法将原式整理求出a，b，c的值，再由勾股定理的逆定理判断三角形的形状.

7. **解**：$A-B=2x^2-4x-1-x^2+6x+6=x^2+2x+5=(x+1)^2+4$.

∵ $(x+1)^2\geqslant 0$，

∴ $(x+1)^2+4>0$.

∴ $A>B$.

点拨：本题用作差法比较大小，将$A-B$的结果配方得到$(x+1)^2+4$，由此式的值恒大于0，即可得到A与B的大小

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

关系.

第7招 根的判别式的八种常见应用

1. **解**:(1)$\Delta=0$,方程有两个相等的实数根;

(2)$\Delta=2^2+4>0$,方程有两个不相等的实数根;

(3)$\Delta<0$,方程无实数根.

点拨:直接利用根的判别式判断方程根的情况即可.

2. **解**:$\because x^2-2x-m=0$ 没有实数根,

$\therefore \Delta_1=(-2)^2-4\cdot(-m)=4+4m<0$,即 $m<-1$.

$\therefore$ 对于方程 $x^2+2mx+m(m+1)=0$,

$\Delta_2=(2m)^2-4\cdot m(m+1)=-4m>4$,

$\therefore$ 方程 $x^2+2mx+m(m+1)=0$ 有两个不相等的实数根.

点拨:由 $x^2-2x-m=0$ 无实数根得出 $m<-1$,从而得到方程 $x^2+2mx+m(m+1)=0$ 的根的判别式的值 $-4m>4$,故该方程有两个不相等的实数根.

3. (1) **证明**:$\Delta=[-(m+2)]^2-8m=m^2-4m+4=(m-2)^2$.

$\because (m-2)^2\geqslant 0$,即 $\Delta\geqslant 0$,

$\therefore$ 不论 m 为何值,方程总有实数根.

(2)**解**:解关于 x 的一元二次方程

$mx^2-(m+2)x+2=0$,得

$x=\dfrac{m+2\pm(m-2)}{2m}$.

$\therefore x_1=\dfrac{2}{m}$,$x_2=1$.

$\because$ 方程的两个根都是正整数,

$\therefore \dfrac{2}{m}$是正整数,

$\therefore m=1$ 或 $m=2$.

又$\because$ 方程的两个根不相等,

$\therefore m\neq 2$,$\therefore m=1$.

点拨:(1)求出方程根的判别式,根据平方的非负性证明即可.(2)利用公式法求出方程的两个根.再根据方程有两个不相等的正整数根求得 $m=1$.

4. **解**:$\because$ 关于 x 的方程 $x^2+(2m-1)x+4=0$ 有两个相等的实数根,

$\therefore \Delta=(2m-1)^2-4\times1\times4=0$,即 $2m-1=\pm4$.

$\therefore m=\dfrac{5}{2}$或 $m=-\dfrac{3}{2}$.

当 $m=\dfrac{5}{2}$时,$\dfrac{m-1}{(2m-1)^2+2m}=\dfrac{\frac{5}{2}-1}{16+5}=\dfrac{1}{14}$;

当 $m=-\dfrac{3}{2}$时,$\dfrac{m-1}{(2m-1)^2+2m}=\dfrac{-\frac{3}{2}-1}{16-3}=-\dfrac{5}{26}$.

5. **解**:(1)$\triangle ABC$ 是等腰三角形.理由:$\because x=-1$ 是方程的根,

$\therefore (a+c)\times(-1)^2-2b+(a-c)=0$.

$\therefore a+c-2b+a-c=0$.$\therefore a-b=0$.$\therefore a=b$.

$\therefore \triangle ABC$ 是等腰三角形.

(2)$\triangle ABC$ 是直角三角形.理由:

$\because$ 方程有两个相等的实数根,

$\therefore (2b)^2-4(a+c)(a-c)=0$,

$\therefore 4b^2-4a^2+4c^2=0$,$\therefore a^2=b^2+c^2$,

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形.

(3)如果 $\triangle ABC$ 是等边三角形,那么 $a=b=c$.

当 $a=b=c$ 时,原方程可整理为 $2ax^2+2ax=0$.

$\therefore x^2+x=0$.解得 $x_1=0$,$x_2=-1$.

点拨:本题将方程根的判别式与三角形结合在一起进行考查,解题时根据给出的条件灵活运用即可.

6. **解**:(1)由题意,得 $\Delta=0$,

即 $m^2-4\left(\dfrac{m}{2}-\dfrac{1}{4}\right)=m^2-2m+1=0$.

解得 $m_1=m_2=1$.

故当 m 为1时,$\square ABCD$ 是菱形.

此时原方程为 $x^2-x+\dfrac{1}{4}=0$,解得 $x_1=x_2=\dfrac{1}{2}$.

即菱形 $ABCD$ 的边长为 $\dfrac{1}{2}$.

(2)由题意知 $x=2$ 是关于 x 的方程 $x^2-mx+\dfrac{m}{2}-\dfrac{1}{4}=0$ 的一个根,$\therefore$ 将 $x=2$ 代入原方程得 $4-2m+\dfrac{m}{2}-\dfrac{1}{4}=0$,

解得 $m=\dfrac{5}{2}$,故原方程为 $x^2-\dfrac{5}{2}x+1=0$,

解得 $x_1=2$,$x_2=\dfrac{1}{2}$.$\therefore AD=\dfrac{1}{2}$.

故 $\square ABCD$ 的周长为 $2\times\left(2+\dfrac{1}{2}\right)=5$.

点拨:本题将方程根的判别式与平行四边形、菱形相结合,灵活利用给出的条件进行求解即可.

7. **解**:直线 $y=x$ 沿 x 轴负方向平移4个单位长度后是直线 $y=x+4$,

由 $x+4=\dfrac{m}{x}$,可得 $x^2+4x-m=0$,根据题意知此方程有两个相等的实数根.

$\therefore \Delta=16+4m=0$.

解得 $m=-4$.

解方程组$\begin{cases}y=-\dfrac{4}{x},\\ y=x+4,\end{cases}$

得$\begin{cases}x=-2,\\ y=2.\end{cases}$

则 A 的坐标是 $(-2,2)$.

$\because y$ 轴平分 $\triangle AOB$ 的面积,

$\therefore B$ 的横坐标是2.

在 $y=x+4$ 中,令 $x=2$,得 $y=6$,

则 B 的坐标是 $(2,6)$,

代入 $y=\dfrac{n}{x}$,得 $n=12$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. 解:∵ 点 $C(1,2)$,$BC\parallel y$ 轴,$AC\parallel x$ 轴,

∴ A 点的纵坐标为 2,B 点的横坐标为 1.

当 $x=1$ 时,$y=-1+6=5$,

当 $y=2$ 时,$-x+6=2$,解得 $x=4$,

∴ 点 A,B 的坐标分别为 $A(4,2)$,$B(1,5)$.

当反比例函数图象过点 C 时,k 值最小.

此时 $k=1\times2=2$.

当反比例函数图象与线段 AB 只有一个公共点时,k 值最大.

设此公共点坐标为 $(x,-x+6)$,则 $1\leqslant x\leqslant4$. 由 $\frac{k}{x}=-x+6$,得 $x^2-6x+k=0$,当 $\Delta=(-6)^2-4k=0$,即 $k=9$ 时,直线与双曲线有且只有一个公共点,且易得公共点坐标为 $(3,3)$,恰在线段 AB 上.

因此,k 的取值范围是 $2\leqslant k\leqslant9$.

第 8 招 根与系数的关系的九种应用

1. 解:设方程的另一个根为 x_1.

由题意得 $\begin{cases}x_1+2=-k,\\2x_1=-6,\end{cases}$

解得 $x_1=-3$,$k=1$.

∴ 方程的另一个根为 -3,k 的值是 1.

点拨:利用根与系数的关系联立方程求解即可.

2. 解:由已知得 $x_1+x_2=4$,$x_1x_2=2$.

(1) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{4}{2}=2$.

(2) $(x_1-x_2)^2=x_1^2+x_2^2-2x_1x_2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=4^2-4\times2=16-8=8$.

点拨:将代数式化简成关于 x_1+x_2 和 x_1x_2 的组合形式,然后利用根与系数的关系求解.

3. 解:由题意得 m,n 是 $2x^2-5x-1=0$ 的两个不相等的实数根.

由根与系数的关系得 $m+n=\frac{5}{2}$,$mn=-\frac{1}{2}$.

$$\therefore\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{m+n}{mn}=\frac{\frac{5}{2}}{-\frac{1}{2}}=-5.$$

4. 解:设方程的两根分别为 x_1,x_2,

则 $x_1+x_2=3$,$x_1x_2=k+1$.

∵ $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=3^2-2(k+1)<5$,

∴ $k>1$. ①

又∵ $\Delta=(-3)^2-4(k+1)\geqslant0$,

∴ $k\leqslant\frac{5}{4}$. ②

由①②得 $1<k\leqslant\frac{5}{4}$.

点拨:本题容易忽略 $\Delta\geqslant0$ 这个条件,做题时要注意方程有根的条件.

5. 解:∵ 方程有两个实数根,

∴ $\Delta=[2(m-2)]^2-4\times1\times(m^2+4)\geqslant0$.

解这个不等式,得 $m\leqslant0$.

设方程的两个实数根分别为 x_1,x_2,

则 $x_1+x_2=-2(m-2)$,$x_1x_2=m^2+4$.

∵ $x_1^2+x_2^2-x_1\cdot x_2=21$,

∴ $(x_1+x_2)^2-3x_1\cdot x_2=21$.

∴ $[-2(m-2)]^2-3(m^2+4)=21$.

整理得 $m^2-16m-17=0$.

解得 $m_1=17$,$m_2=-1$.

又∵ $m\leqslant0$,∴ $m=-1$.

点拨:利用根与系数的关系求得两根的和与两根的积,再根据已知条件得出关于 m 的二次方程,对其进行求解,本题易忽略 $\Delta\geqslant0$ 这一条件.

6. 解:∵ $2x^2+3x-7=0$,

∴ $\Delta=3^2-4\times2\times(-7)=65>0$.

∴ 方程有两个不相等的实数根.

设方程的两个根为 x_1,x_2,

∵ $x_1\cdot x_2=-\frac{7}{2}<0$,

∴ 原方程有两个异号的实数根.

点拨:先判断 $\Delta>0$,得出方程有两个实数根,再根据 $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$ 判断两个实数根是同号还是异号.

7. 解:设这个方程为 $x^2+ax+b=0$.

由已知得 $-1+3=-a$,$-1\times3=b$,

∴ $a=-2$,$b=-3$.

∴ 这个方程为 $x^2-2x-3=0$.

点拨:已知方程有两实数根且方程中二次项系数为 1,可设方程为 $x^2+ax+b=0$,根据根与系数的关系求此方程即可.

8. **证明**:由题意知 $x+y=6$,$xy=z^2+9$,

所以 x,y 是关于 t 的一元二次方程 $t^2-6t+z^2+9=0$ 的两个实数根,

从而 $\Delta=36-4(z^2+9)=-4z^2\geqslant0$,

所以 $z=0$,从而 $\Delta=0$.

故关于 t 的方程有两个相等的实数根,所以 $x=y$.

9. **证明**:由题意知 $bc=a^2-a+1$,

$b+c=2a^2-2bc+2=2a$.

于是,b,c 是关于 t 的一元二次方程 $t^2-2at+a^2-a+1=0$ 的两个实数根.

所以 $\Delta=4a^2-4(a^2-a+1)\geqslant0$,

解得 $a\geqslant1$.

点拨:解本题的关键是构造以 b,c 为两实数根的一元二次方程,a 含在这个方程的系数里,利用判别式 $\Delta\geqslant0$ 即可证得 $a\geqslant1$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第9招 一元二次方程中常见易错易混问题归类

1. **错解**：由题意知$|k|-1=2$，解得$k=\pm3$.

∴不等式为$3x-6+6\leqslant0$或$-3x+6+6\leqslant0$，∴$x\leqslant0$或$x\geqslant4$.

诊断：当方程是一元二次方程时，不仅要使未知数的最高次数是2，还要使二次项的系数不为0. 本题就是忽视了二次项的系数$k-3\neq0$这一条件，而导致错解.

正解：由题意知$\begin{cases}|k|-1=2,\\k-3\neq0,\end{cases}$∴$k=-3$.

∴不等式为$-3x+6+6\leqslant0$，∴$x\geqslant4$.

2. **常见错解**：错解1：将二次项系数化为1时，仍跟给方程配方时一样，各项都除以2，错得$2y^2-6y+1=y^2-3y+\frac{1}{2}=\left(y-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{7}{4}$.

错解2：配方时，加上一次项系数一半的平方后，为了保证代数式的值不变，必须再减去这个一次项系数一半的平方，不能“只加不减”. 错得$2y^2-6y+1=2\left[y^2-3y+\left(-\frac{3}{2}\right)^2\right]+1=2\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+1$.

正解：$2y^2-6y+1$

$=2\left[y^2-3y+\left(-\frac{3}{2}\right)^2-\left(-\frac{3}{2}\right)^2\right]+1$

$=2\left[\left(y-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right]+1$

$=2\left(y-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{2}+1$

$=2\left(y-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{7}{2}$.

3. **错解**：由题意，得$b^2-4ac=(2k-1)^2-4\times k^2\times1>0$，解得$k<\frac{1}{4}$.

诊断：对于一元二次方程$ax^2+bx+c=0$，隐含条件$a\neq0$很容易被忽视，所以二次项系数含字母时，一定要考虑二次项系数不能为0.

正解：由题意，得$b^2-4ac=(2k-1)^2-4\times k^2\times1>0$，且$k^2\neq0$，解得$k<\frac{1}{4}$且$k\neq0$. 所以$k$的取值范围是$k<\frac{1}{4}$且$k\neq0$.

4. **解**：原方程可化为$3(2x+5)-2x(2x+5)=0$.

则$(2x+5)(3-2x)=0$.

∴$2x+5=0$或$3-2x=0$.

解得$x_1=-\frac{5}{2}$，$x_2=\frac{3}{2}$.

点拨：在解方程时，不能在方程的两边同时除以含有未知数的代数式，否则会造成失根. 本题容易错误地在方程的两边同时除以公因式$2x+5$，而丢失一个根$x=-\frac{5}{2}$.

5. **解**：(1)根据题意，得$\Delta=(-6)^2-4(2m+1)\geqslant0$，解得$m\leqslant4$.

(2)根据题意，得$x_1+x_2=6$，$x_1x_2=2m+1$，而$2x_1x_2+x_1+x_2\geqslant20$，

所以$2(2m+1)+6\geqslant20$，解得$m\geqslant3$.

又$m\leqslant4$，所以m的取值范围为$3\leqslant m\leqslant4$.

6. (1)**证明**：由题意知$\Delta=(3k+1)^2-4(2k^2+2k)=9k^2+6k+1-8k^2-8k=k^2-2k+1=(k-1)^2\geqslant0$.

∴无论k取何实数值，方程总有实数根.

(2)**解**：∵$\triangle ABC$为等腰三角形，

∴有$a=b=6$，$a=c=6$或$b=c$三种情况.

①当$a=b=6$或$a=c=6$时，可知$x=6$为方程的一个根，

∴$6^2-6(3k+1)+2k^2+2k=0$，

解得$k=3$或$k=5$.

当$k=3$时，方程为$x^2-10x+24=0$，解得$x=4$或$x=6$，

∴三角形的另两边长为4，6.

当$k=5$时，方程为$x^2-16x+60=0$，

解得$x=6$或$x=10$，

∴三角形的另两边长为6，10.

②当$b=c$时，方程有两个相等的实数根，

∴$\Delta=0$，即$(k-1)^2=0$，

解得$k_1=k_2=1$，

∴方程为$x^2-4x+4=0$，

解得$x_1=x_2=2$，

此时三角形三边长为6，2，2，不满足三角形三边关系，舍去.

综上可知，三角形的另两边长为4，6或6，10.

7. **解**：(1)设每件衬衫应降价x元，

根据题意，得$(40-x)(20+2x)=1\ 200$，

整理得$x^2-30x+200=0$，

解得$x_1=20$，$x_2=10$.

因为要尽快减少库存，所以x应取20.

答：每件衬衫应降价20元.

(2)由(1)知$(40-x)(20+2x)=-2x^2+60x+800=-2(x-15)^2+1\ 250$.

因为$-2(x-15)^2\leqslant0$，所以当$-2(x-15)^2=0$，即$x=15$时，$-2(x-15)^2+1\ 250$的值最大.

答：每件衬衫降价15元时，商场每天盈利最多.

点拨：运用一元二次方程解决实际问题时，方程的解一般有两个，但由于实际情况的限制，有时会有所取舍，如果对实际情况不了解，就会出现多解的错误. 本题中，根据“尽快减少库存”的实际意义，要对方程的解进行合理取舍，忽略了这一点，结果就会出错.

8. **错解**：设t s后两只蚂蚁与O点组成的三角形的面积是450 cm². 根据题意，得$\frac{1}{2}(50-2t)\cdot3t=450$，整理得$t^2-$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$25t+150=0$,解得 $t_1=10$,$t_2=15$.

答:分别在 10 s 和 15 s 时,两只蚂蚁与 O 点组成的三角形的面积为 450 cm^2.

错因分析:此题考虑问题不够全面,漏掉了蚂蚁甲在 OB 上的情况.

正解:(1)当蚂蚁甲在 AO 段时,设 t s 后两只蚂蚁与 O 点组成的三角形的面积是 450 cm^2,根据题意,得 $\frac{1}{2}(50-2t)\cdot 3t=450$.

整理得 $t^2-25t+150=0$,解得 $t_1=10$,$t_2=15$.

(2)蚂蚁甲爬完 AO 这段距离用了 $50\div 2=25$(s),当它开始由 O 点向 B 点爬行时,设从 O 点开始 x s 后两只蚂蚁与 O 点组成的三角形的面积是 450 cm^2,根据题意,得 $\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot 3(x+25)=450$,

整理得 $x^2+25x-150=0$.

解得 $x_1=5$,$x_2=-30$(舍去).

当 $x=5$ 时,$x+25=30$,即这时蚂蚁爬了 30 s.

答:分别在 10 s,15 s,30 s 时,两只蚂蚁与 O 点组成的三角形的面积是 450 cm^2.

易错诊断:解动点问题要弄清点运动的特征,必要时要注意分类讨论. 如蚂蚁甲由 A 点向 B 点爬行表示蚂蚁甲既可以在线段 AO 上,又可以在线段 OB 上.

第 10 招 降次思想在求代数式的值和解方程中的应用

1. 解:(1)原方程可化为 $(x+1)^2=\frac{1}{9}$,

两边直接开平方,得 $x+1=\pm\frac{1}{3}$,

$\therefore x_1=-\frac{2}{3}$,$x_2=-\frac{4}{3}$.

(2)移项,得 $(2x+3)^2=12$,

两边直接开平方,得 $2x+3=\pm 2\sqrt{3}$,

$\therefore 2x+3=2\sqrt{3}$ 或 $2x+3=-2\sqrt{3}$,

$\therefore x_1=\frac{2\sqrt{3}-3}{2}$,$x_2=\frac{-2\sqrt{3}-3}{2}$.

点拨:本题用直接开平方法,如(1)将 $x+1$ 看成一个整体,得到关于 $x+1$ 的一次方程求解即可.

2. 解:(1)二次项系数化为 1,得 $x^2-4x+3=0$,

移项,得 $x^2-4x=-3$,

配方,得 $x^2-4x+4=-3+4$,

$\therefore (x-2)^2=1$,$\therefore x-2=1$ 或 $x-2=-1$,

$\therefore x_1=3$,$x_2=1$.

(2)原方程可化为 $2x^2-4x=3$,

二次项系数化为 1,得 $x^2-2x=\frac{3}{2}$,

配方,得 $x^2-2x+1=\frac{3}{2}+1$,

$\therefore (x-1)^2=\frac{5}{2}$,$\therefore x-1=\frac{\sqrt{10}}{2}$ 或 $x-1=-\frac{\sqrt{10}}{2}$,

$\therefore x_1=1+\frac{\sqrt{10}}{2}$,$x_2=1-\frac{\sqrt{10}}{2}$.

点拨:利用配方法进行配方求解即可.

3. 解:(1)移项、合并同类项,得 $x^2+2x-8=0$,

因式分解,得 $(x-2)(x+4)=0$,

$\therefore x-2=0$ 或 $x+4=0$,

$\therefore x_1=2$,$x_2=-4$.

(2)因式分解,得 $(3x+1+2)^2=0$,即 $(3x+3)^2=0$,

$\therefore x_1=x_2=-1$.

4. 解:原方程可变形为 $x^2(x-2)-4(x-2)=0$,

则 $(x-2)(x^2-4)=0$,则 $(x-2)^2(x+2)=0$.

所以 $x_1=x_2=2$,$x_3=-2$.

点拨:直接利用因式分解法进行降次求解即可.

5. 解:原式 $=x^2(x^2-8x+16)-(x-1)$

$=x^2(x-4)^2-(x-1)=[x(x-4)]^2-(x-1)$.

当 $x=2-\sqrt{5}$ 时,

原式 $=[(2-\sqrt{5})(2-\sqrt{5}-4)]^2-(2-\sqrt{5}-1)$

$=[(-\sqrt{5}+2)(-\sqrt{5}-2)]^2-1+\sqrt{5}$

$=1-1+\sqrt{5}=\sqrt{5}$.

6. 解:由 $x^2+x-1=0$ 得 $x^2=1-x$,$x^2+x=1$.

故 $x^3+2x^2+3=x^2(x+2)+3=(1-x)(x+2)+3=$

$-x^2-x+5=-(x^2+x)+5=-1+5=4$.

点拨:先将代数式转化成与已知条件有关的式子,再整体代入求值.

7. 解:$\because x_1$,x_2 是一元二次方程 $x^2+x-3=0$ 的两个根,

$\therefore x_1+x_2=-1$,$x_1^2+x_1-3=0$,$x_2^2+x_2-3=0$.

$\therefore x_1^2=3-x_1$,$x_2^2=3-x_2$.

$\therefore x_1^3-4x_2^2+19=x_1(3-x_1)-4(3-x_2)+19$

$=3x_1-x_1^2-12+4x_2+19=3x_1-(3-x_1)+4x_2+7=4x_1+4x_2+4=4(x_1+x_2)+4$

$=4\times(-1)+4=0$.

第 11 招 求概率的四种方法

1. 解:(1)P(从袋中摸出一个球是黄球)$=\frac{5}{5+13+22}=\frac{1}{8}$.

(2)设取出了 x 个黑球,则放入了 x 个黄球,由题意得 $\frac{5+x}{5+13+22}\geqslant\frac{1}{3}$,解得 $x\geqslant\frac{25}{3}$.

$\because x$ 为正整数,$\therefore x$ 最小取 9. $\therefore$ 至少取出了 9 个黑球.

点拨:本题直接利用公式法求出相应问题的概率.

2. 解:(1)由题中统计表和统计图可知被调查的学生中为“一

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

般”档次的有 13 人，所占百分比是 26%，所以共调查的学生人数是 $13\div26\%=50$（人），

则被调查学生中为“良好”档次的人数为 $50\times60\%=30$（人），所以 $x=30-(12+7)=11$，$y=50-(1+2+6+7+12+11+7+1)=3$.

（2）由样本数据可知“优秀”档次所占的百分比是 $\frac{3+1}{50}\times100\%=0.08\times100\%=8\%$.

所以，估计该校九年级 400 名学生中为“优秀”档次的人数为 $400\times8\%=32$（人）.

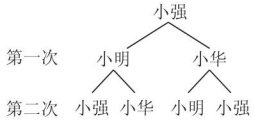
（3）用 A，B，C 表示阅读本数为 8 本的学生，用 D 表示阅读本数为 9 本的学生，列表如下：

	A	B	C	D
A	—	(A,B)	(A,C)	(A,D)
B	(B,A)	—	(B,C)	(B,D)
C	(C,A)	(C,B)	—	(C,D)
D	(D,A)	(D,B)	(D,C)	—

由表可知，共有 12 种等可能的情况，其中所抽取的 2 名学生中有 1 名阅读本数为 9 本的有 6 种. 所以抽取的 2 名学生中有 1 名阅读本数为 9 本的概率 $P=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$.

点拨：本题利用列表法将所有情况列出，共 12 种，找出符合条件的情况有 6 种，所以概率 $P=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$.

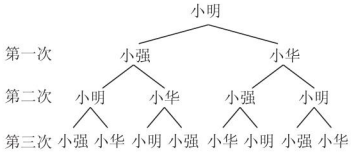
3. 解：（1）画树状图如图：



［第 3（1）题］

$\therefore P$（足球踢到了小华处）$=\frac{1}{4}$.

（2）应从小明开始踢. 理由如下，画树状图如图：



［第 3（2）题］

若从小明开始踢，P（踢三次后，足球踢到了小明处）$=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$，同理，若从小强开始踢，P（踢三次后，足球踢到了小明处）$=\frac{3}{8}$，若从小华开始踢，P（踢三次后，足球踢到了小明处）$=\frac{3}{8}$. 故应从小明开始踢.

4. 解：（1）“和为 7”出现的概率约为 0.33.

（2）列表如下：

和 ＼ 甲 / 乙	2	3	4	x
2	—	5	6	$2+x$
3	5	—	7	$3+x$
4	6	7	—	$4+x$
x	$x+2$	$x+3$	$x+4$	—

由表格可知，一共有 12 种等可能的结果，由（1）可知，“和为 7”出现的概率约为 0.33，

$\therefore$“和为 7”出现的次数约为 $0.33\times12=3.96\approx4$. 若 $2+x=7$，则 $x=5$，符合题意；若 $3+x=7$，则 $x=4$，不合题意；若 $4+x=7$，则 $x=3$，不合题意.

$\therefore x=5$.

第 12 招　统计概率思想在实际中的应用

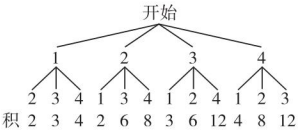
1. 解：问题 1：第三名同学的样本选取更合理.

理由：第三名同学的样本选取是从初一全体学生中随机选取的 20 名学生，样本容量在与其他两名同学相比时选取合理；第一名同学主要问题是样本容量小；第二名同学虽然样本容量合适，但是样本中的个体不具有代表性.

问题 2：读 4 本书的可能性大.

理由：由扇形统计图知，合理样本的 20 名学生中，“阅读动机”为“老师布置的任务不得不完成”和“读与不读都无所谓”的学生共有 $20\times(20\%+15\%)=7$（人），他们阅读书数量基本是 2 本或 3 本，而“阅读动机”在“40%”的群体，即“阅读动机”是“能够学到一些课外知识”的学生人数为 $20\times40\%=8$（人），他们的读书本数会比最低要求的读书本数略多，结合表 3 可知，他们暑期读 4 本书的可能性大.

2. 解：（1）画树状图如图所示：



（第 2 题）

$\because$ 共有 12 种等可能的结果，两人摸出的小球上的数字之积是 8 的有 2 种情况，

$\therefore$ 两数之积是 8 的概率为 $\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.

（2）$\because$ 两数之积是偶数的有 10 种情况，两数之积是奇数的有 2 种情况，

$\therefore P$（两数之积是偶数）$=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$，$P$（两数之积是奇数）$=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$，$\because\frac{5}{6}\times1\neq\frac{1}{6}\times3$，

$\therefore$ 此游戏不公平；

修改得分规则为：当两数之积是偶数时，甲得 1 分，当两数

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

之积是奇数时,乙得5分.(修改得分规则答案不唯一)

3. **解**:(1)∵ 共有4种等可能的结果,落回到圈 A 的只有1种情况,∴ 落回到圈 A 的概率 $P_1=\frac{1}{4}$;

(2)列表得:

	1	2	3	4
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)

∵ 共有16种等可能的结果,最后落回到圈 A 的有(1,3),(2,2),(3,1),(4,4),

∴ 最后落回到圈 A 的概率 $P_2=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$,

∴ 她与嘉嘉落回到圈 A 的可能性一样.

4. **解**:(1)根据题意,点 P 的横坐标有数字1,2,3,4四种选择,点 P 的纵坐标也有数字1,2,3,4四种选择,

所以构成点 P 的坐标共有 $4\times4=16$(种)情况,

设点 P 的坐标为 (x,y).

列表如下:

y \ x	1	2	3	4
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)

其中点(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)落在正方形 $ABCD$ 面上(含正方形内部和边界),

故所求的概率为 $\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$.

(2)存在.因为要使点 P 落在正方形 $ABCD$ 面上(含正方形内部和边界)的概率为 $\frac{3}{4}=\frac{12}{16}>\frac{1}{4}$,所以只能将正方形 $ABCD$ 向上或向右平移整数个单位,且使点 P 落在正方形 $ABCD$ 面上(含正方形内部和边界)的情况有12种.

所以存在满足题设要求的平移方式,例:先将正方形 $ABCD$ 上移2个单位,后右移1个单位.(平移方式不唯一)

第13招 成比例线段的证明和计算的五种常用作辅助线的方法

1. **证明**:过点 D 作 $DG\parallel BC$ 交 AB 于 G,易证得 $\triangle DFG\backsim\triangle EFB$,

$\therefore\frac{DG}{EB}=\frac{DF}{EF}$,∵ $EB=AD$,$\therefore\frac{DG}{AD}=\frac{DF}{EF}$.

由 $DG\parallel BC$ 易证得 $\triangle ADG\backsim\triangle ACB$,

$\therefore\frac{DG}{BC}=\frac{AD}{AC}$,即 $\frac{DG}{AD}=\frac{BC}{AC}$,$\therefore\frac{DF}{EF}=\frac{BC}{AC}$,

$\therefore EF\cdot BC=AC\cdot DF$.

点拨:通过作平行线证三角形相似,然后由相似三角形的对应边成比例证等积式.

2. **证明**:过点 P 作 $PE\perp AC$ 于 E,$PF\perp CB$ 于 F,则四边形 $CEPF$ 为矩形.

$\therefore PF=EC$.

易得 $\angle A=\angle B=45^\circ$,$\angle AEP=\angle PFB=90^\circ$,

$\therefore$ Rt$\triangle AEP\backsim$Rt$\triangle PFB$.

$\therefore\frac{PA}{PB}=\frac{PE}{BF}$.

易得 $PF=BF=EC$,$\therefore\frac{PA}{PB}=\frac{PE}{EC}$. ①

∵ $CP\perp MN$ 于 Q,

$\therefore\angle QCN+\angle QNC=90^\circ$.

又∵ $\angle QCN+\angle QCM=90^\circ$,

$\therefore\angle QCM=\angle QNC$.

又易得 $\angle PEC=\angle MCN=90^\circ$,$\therefore$ Rt$\triangle PEC\backsim$Rt$\triangle MCN$.

$\therefore\frac{EP}{CM}=\frac{EC}{CN}$,即 $\frac{EP}{EC}=\frac{CM}{CN}$. ②

由①②得 $\frac{PA}{PB}=\frac{CM}{CN}$,即 $PA:PB=CM:CN$.

点拨:本题通过作垂线得到矩形 $CEPF$,再由矩形的性质和相似三角形的性质即可证得.

3. **证明**:延长 GF 与 AC,交于点 H,

∵ $CD\perp AB$,$FG\perp AB$,

$\therefore CD\parallel FG$,

$\therefore\angle AGF=\angle ADE$,$\angle AFG=\angle AED$,$\angle AHF=\angle ACE$,$\angle AFH=\angle AEC$.

$\therefore\triangle AFG\backsim\triangle AED$,$\triangle AFH\backsim\triangle AEC$.

$\therefore\frac{AF}{AE}=\frac{FG}{ED}$,$\frac{AF}{AE}=\frac{FH}{EC}$.

$\therefore\frac{FG}{ED}=\frac{FH}{EC}$.

又 $ED=EC$,$\therefore FG=FH$.

易证得 Rt$\triangle CFH\backsim$Rt$\triangle GFB$,

$\therefore\frac{CF}{FG}=\frac{FH}{BF}$.$\therefore FG\cdot FH=CF\cdot BF$.

∵ $FG=FH$,$\therefore FG^2=CF\cdot BF$.

点拨:通过作延长线构造相似三角形,再由相似三角形的性质和等量代换得到几个比例式或等积式,从而得到结论.

4. **解**:取 BC 的中点 M,连接 AM.

∵ $AB\perp AC$,$\therefore AM=CM$,

$\therefore\angle MAC=\angle C$.

∵ $BD=DC$,$\therefore\angle DBC=\angle C$.

$\therefore\angle MAC=\angle DBC$.

又∵ $\angle C=\angle C$,

$\therefore\triangle MAC\backsim\triangle DBC$.

$\therefore\frac{MC}{DC}=\frac{AC}{BC}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

又 $DC=1$，$MC=\frac{1}{2}BC$，

$\therefore AC=\frac{MC\cdot BC}{DC}=\frac{1}{2}BC^2$. ①

易得 $\mathrm{Rt}\triangle AEC\backsim\mathrm{Rt}\triangle BAC$，

$\therefore \frac{AC}{BC}=\frac{EC}{AC}$，

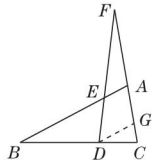
又$\because EC=1$，

$\therefore AC^2=CE\cdot BC=BC$. ②

由①②得，$AC=\frac{1}{2}AC^4$，$\therefore AC=\sqrt[3]{2}$.

点拨：通过作中线构造相似三角形，进而得到相关线段的数量关系，最终求得 AC 的长.

5. **解**：如图，过点 D 作 AB 的平行线交 AC 于 G.



（第 5 题）

$\because \frac{BD}{DC}=\frac{FE}{ED}=2$，

$\therefore \frac{CD}{CB}=\frac{1}{3}$，$\frac{EF}{FD}=\frac{2}{3}$.

易得 $\triangle FAE\backsim\triangle FGD$，$\triangle CGD\backsim\triangle CAB$.

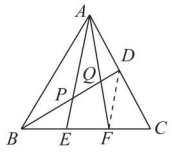
$\therefore \frac{AE}{DG}=\frac{EF}{FD}=\frac{2}{3}$，$\frac{DG}{AB}=\frac{CD}{CB}=\frac{1}{3}$.

$\therefore AE=\frac{2}{3}DG$，$AB=3DG$，$\therefore BE=\frac{7}{3}DG$，

$\therefore BE:AE=7:2=\frac{7}{2}$.

第 14 招　巧作平行线构造相似三角形

1. **解**：如图，连接 DF，$\because E$，F 是边 BC 上的两个三等分点，



（第 1 题）

$\therefore BE=EF=FC$.

$\because D$ 是 AC 的中点，$\therefore AD=CD$.

$\therefore DF$ 是 $\triangle ACE$ 的中位线.

$\therefore DF\parallel AE$，且 $DF=\frac{1}{2}AE$.

$\therefore DF\parallel PE$.

$\therefore \frac{BE}{BF}=\frac{BP}{BD}$.

$\because BF=2BE$，$\therefore BD=2BP$.

$\therefore BP=PD$.

$\therefore DF=2PE$.

$\because DF\parallel AE$，

$\therefore \angle APQ=\angle FDQ$，$\angle PAQ=\angle DFQ$.

$\therefore \triangle APQ\backsim\triangle FDQ$. $\therefore \frac{PQ}{QD}=\frac{AP}{DF}$.

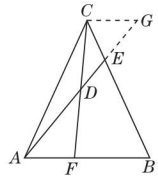
设 $PE=a$，则 $DF=2a$，$AP=3a$.

$\therefore PQ:QD=AP:DF=3:2$.

$\therefore BP:PQ:QD=5:3:2$.

点拨：给出边的三等分点或中点，求相关线段的比值时，通常连接这些点中的某些点找平行关系，构造相似三角形求解.

2. **解**：如图，过点 C 作 $CG\parallel AB$ 交 AE 的延长线于点 G.



（第 2 题）

$\because CG\parallel AB$，$\therefore \angle DAF=\angle G$.

$\because D$ 为 CF 的中点，$\therefore CD=DF$.

在 $\triangle ADF$ 和 $\triangle GDC$ 中，

$$\begin{cases}\angle DAF=\angle G,\\ \angle ADF=\angle GDC,\\ DF=DC,\end{cases}$$

$\therefore \triangle ADF\cong\triangle GDC(\mathrm{AAS})$. $\therefore AF=CG$.

$\because BF:AF=3:2$，$\therefore AB:AF=5:2$.

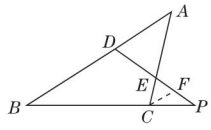
$\because \angle CGE=\angle BAE$，$\angle CEG=\angle BEA$.

$\therefore \triangle ABE\backsim\triangle GCE$.

$\therefore \frac{BE}{EC}=\frac{AB}{CG}=\frac{AB}{AF}=\frac{5}{2}$.

点拨：过顶点 C 作 $CG\parallel AB$ 交 AE 的延长线于点 G，构造相似三角形，得到相关线段的比.

3. **证明**：如图，过点 C 作 $CF\parallel AB$ 交 DP 于点 F，



（第 3 题）

$\therefore \angle PFC=\angle PDB$，

$\angle PCF=\angle PBD$.

$\therefore \triangle PCF\backsim\triangle PBD$. $\therefore \frac{BP}{CP}=\frac{BD}{CF}$.

$\because AD\parallel CF$，$\therefore \angle ADE=\angle EFC$.

$\because AD=AE$，$\therefore \angle ADE=\angle AED$.

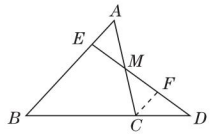
$\because \angle AED=\angle CEP$，

$\therefore \angle EFC=\angle CEP$.

$\therefore EC=CF$.

$\therefore \frac{BP}{CP}=\frac{BD}{EC}$.

4. **证明**：方法一：如图①，过点 C 作 $CF\parallel AB$，交 DE 于点 F，



（第 4 题①）

$\therefore \angle FCD=\angle B$.

又$\because \angle D$ 为公共角，

$\therefore \triangle CDF\backsim\triangle BDE$.

$\therefore \frac{CF}{BE}=\frac{CD}{BD}$.

$\because$ 点 M 为 AC 边的中点，

$\therefore AM=CM$.

$\because CF\parallel AB$，

$\therefore \angle A=\angle MCF$.

又$\because \angle AME=\angle CMF$，

$\therefore \triangle AME\cong\triangle CMF$.

$\therefore AE=CF$.

$\because AE=\frac{1}{4}AB$，$BE=AB-AE$，

$\therefore BE=3AE$. $\therefore \frac{AE}{BE}=\frac{1}{3}$.

$\because \frac{CF}{BE}=\frac{CD}{BD}$，

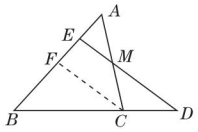
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \frac{AE}{BE}=\frac{CD}{BD}=\frac{1}{3}$,即 $BD=3CD$.

又∵ $BD=BC+CD$,

∴ $BC=2CD$.

方法二:如图②,过点 C 作 $CF\parallel DE$,交 AB 于点 F,



(第4题②)

∴ $\frac{AE}{AF}=\frac{AM}{AC}$.

又∵ 点 M 为 AC 边的中点,

∴ $AC=2AM$.

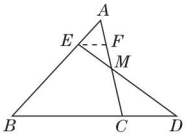
∴ $2AE=AF$. ∴ $AE=EF$.

又∵ $\frac{AE}{AB}=\frac{1}{4}$, ∴ $\frac{BF}{EF}=2$.

又∵ $CF\parallel DE$, ∴ $\frac{BF}{FE}=\frac{BC}{CD}=2$.

∴ $BC=2CD$.

方法三:如图③,过点 E 作 $EF\parallel BC$,交 AC 于点 F,



(第4题③)

∴ $\angle AEF=\angle B$.

又∵ $\angle A$ 为公共角,

∴ $\triangle AEF\backsim\triangle ABC$.

∴ $\frac{EF}{BC}=\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}$.

由 $AE=\frac{1}{4}AB$,知

$\frac{EF}{BC}=\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{1}{4}$,

∴ $EF=\frac{1}{4}BC$, $AF=\frac{1}{4}AC$.

由 $EF\parallel CD$,易证得 $\triangle EFM\backsim\triangle DCM$,

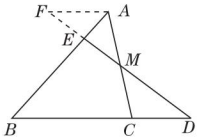
∴ $\frac{EF}{CD}=\frac{MF}{MC}$.

又∵ $AM=MC$, ∴ $MF=\frac{1}{2}MC$.

∴ $EF=\frac{1}{2}CD$.

∴ $BC=2CD$.

方法四:如图④,过点 A 作 $AF\parallel BD$,交 DE 的延长线于点 F,



(第4题④)

∴ $\angle F=\angle D$, $\angle FAE=\angle B$.

∴ $\triangle AEF\backsim\triangle BED$.

∴ $\frac{AE}{BE}=\frac{AF}{BD}$.

∵ $AE=\frac{1}{4}AB$,

∴ $AE=\frac{1}{3}BE$. ∴ $AF=\frac{1}{3}BD$.

由 $AF\parallel CD$,易证得 $\triangle AFM\backsim\triangle CDM$.

又∵ $AM=MC$, ∴ $AF=CD$.

∴ $CD=\frac{1}{3}BD$. ∴ $BC=2CD$.

点拨:由已知线段的比,求证另外两线段的比,通常作平行线,构造相似三角形来求解.

第15招 利用相似三角形巧证线段的数量和位置关系

1. 证明:∵ $DE\parallel BC$,

∴ $\angle NEO=\angle MBO$, $\angle ENO=\angle BMO$.

∴ $\triangle NEO\backsim\triangle MBO$. ∴ $\frac{NE}{MB}=\frac{ON}{OM}$.

同理可得 $\frac{DN}{MC}=\frac{ON}{OM}$. ∴ $\frac{DN}{MC}=\frac{NE}{BM}$.

∴ $\frac{DN}{NE}=\frac{MC}{BM}$.

∵ $DE\parallel BC$,

∴ $\angle ANE=\angle AMC$, $\angle AEN=\angle ACM$.

∴ $\triangle ANE\backsim\triangle AMC$. ∴ $\frac{AN}{AM}=\frac{NE}{MC}$.

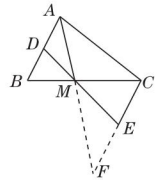
同理可得 $\frac{AN}{AM}=\frac{DN}{BM}$. ∴ $\frac{DN}{BM}=\frac{NE}{MC}$.

∴ $\frac{DN}{NE}=\frac{BM}{MC}$. ∴ $\frac{MC}{BM}=\frac{BM}{MC}$.

∴ $MC^2=BM^2$. ∴ $BM=MC$.

点拨:通过证 $\triangle NEO\backsim\triangle MBO$, $\triangle DNO\backsim\triangle CMO$, $\triangle AND\backsim\triangle AMB$ 和 $\triangle ANE\backsim\triangle AMC$,从而得到相关线段的比相等,最后证得 $BM=MC$.

2. 证明:如图,延长 CE,交 AM 的延长线于 F.



(第2题)

∵ $AB\parallel CF$, ∴ $\angle BAM=\angle F$.

易证得 $\triangle BDM\backsim\triangle CEM$, $\triangle BAM\backsim\triangle CFM$,

∴ $\frac{BD}{CE}=\frac{BM}{MC}$, $\frac{BA}{CF}=\frac{BM}{MC}$. ∴ $\frac{BD}{CE}=\frac{BA}{CF}$.

又∵ $BA=2BD$, ∴ $CF=2CE$.

又∵ AM 平分 $\angle BAC$,

∴ $\angle BAM=\angle CAM$.

∴ $\angle CAM=\angle F$.

∴ $AC=CF$.

∴ $AC=2CE$.

点拨:通过作辅助线证三角形相似,由三角形相似的相关性质证两线段的倍分关系.

3. 解:(1) $MN\parallel AC\parallel ED$. 理由如下:由 $EF\parallel BC$,易证得 $\triangle AEM\backsim\triangle ABD$, $\triangle AMF\backsim\triangle ADC$. ∴ $\frac{EM}{BD}=\frac{AM}{AD}$, $\frac{AM}{AD}=\frac{MF}{DC}$.

∴ $\frac{EM}{BD}=\frac{MF}{DC}$.

∵ E 为 AB 的中点, $EF\parallel BC$,

∴ F 为 AC 的中点.

又∵ $DF\parallel AB$, ∴ D 为 BC 的中点.

∴ $BD=CD$. ∴ $EM=MF$.

∵ F 为 AC 的中点, $FN\parallel AE$,

∴ N 为 EC 的中点. 从而 $MN\parallel AC$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

又∵ D 为 BC 的中点，E 为 AB 的中点，

∴ $ED \parallel AC$. ∴ $MN \parallel AC \parallel ED$.

(2) $MN \parallel AC$. 理由如下：

由 $EF \parallel BC$，易证得 $\triangle AEM \backsim \triangle ABD$，$\triangle AMF \backsim \triangle ADC$.

∴ $\frac{EM}{BD}=\frac{AM}{AD}$，$\frac{AM}{AD}=\frac{MF}{DC}$. ∴ $\frac{EM}{BD}=\frac{MF}{DC}$. ∴ $\frac{EM}{MF}=\frac{BD}{DC}$.

又∵ $DF \parallel AB$，∴ $\frac{BD}{DC}=\frac{EN}{NC}$.

∴ $\frac{EM}{MF}=\frac{EN}{NC}$. ∴ $\frac{EM}{EF}=\frac{EN}{EC}$.

又∵ $\angle MEN=\angle FEC$，

∴ $\triangle MEN \backsim \triangle FEC$.

∴ $\angle EMN=\angle EFC$.

∴ $MN \parallel AC$.

点拨：(1)先证点 F 是线段 AC 的中点，再证明 $EM=MF$，然后证明 MN 是 $\triangle EFC$ 的中位线，再结合 D，E 分别是 BC，AB 的中点，从而得到最终结论；(2)通过证三角形相似，证 $\angle EMN=\angle EFC$，再根据同位角相等两直线平行证得 $MN \parallel AC$.

4. 证明：∵ $AD=\frac{1}{3}AB$，点 E，F 把 AB 三等分，

∴ 设 $AE=EF=FB=AD=k(k>0)$，则 $AB=CD=3k$.

∵ $CD \parallel AB$，

∴ $\angle DCG=\angle FAG$，$\angle CDG=\angle AFG$.

∴ $\triangle AFG \backsim \triangle CDG$. ∴ $\frac{FG}{DG}=\frac{AF}{CD}=\frac{2}{3}$.

设 $FG=2m$，则 $DG=3m$，

∴ $DF=FG+DG=2m+3m=5m$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AFD$ 中，$DF^2=AD^2+AF^2=5k^2$，∴ $DF=\sqrt{5}k$.

∴ $5m=\sqrt{5}k$. ∴ $m=\frac{\sqrt{5}}{5}k$.

∴ $FG=\frac{2}{5}\sqrt{5}k$.

∴ $\frac{AF}{FG}=\frac{2k}{\frac{2}{5}\sqrt{5}k}=\sqrt{5}$，$\frac{DF}{EF}=\frac{\sqrt{5}k}{k}=\sqrt{5}$.

∴ $\frac{AF}{FG}=\frac{DF}{EF}$.

又∵ $\angle AFD=\angle GFE$，

∴ $\triangle AFD \backsim \triangle GFE$.

∴ $\angle EGF=\angle DAF=90°$. ∴ $EG \perp DF$.

点拨：通过证三角形相似，由相似三角形的性质得到相关角相等，都等于 90°，进而证得垂直.

第 16 招　证比例式或等积式的七种技巧

1. 证明：过点 C 作 $CM \parallel AB$，交 DF 于点 M.

∵ $CM \parallel AB$，

∴ $\angle FCM=\angle B$，$\angle FMC=\angle FDB$.

∴ $\triangle CMF \backsim \triangle BDF$.

∴ $\frac{BF}{CF}=\frac{BD}{CM}$.

又∵ $CM \parallel AD$，

∴ $\angle A=\angle ECM$，$\angle ADE=\angle CME$.

∴ $\triangle ADE \backsim \triangle CME$.

∴ $\frac{AE}{EC}=\frac{AD}{CM}$.

∵ D 为 AB 的中点，∴ $BD=AD$.

∴ $\frac{BD}{CM}=\frac{AD}{CM}$.

∴ $\frac{BF}{CF}=\frac{AE}{EC}$，即 $AE \cdot CF=BF \cdot EC$.

点拨：过某一点作平行线，构造出“A”型或“X”型的基本图形，通过相似三角形转化线段的比，从而解决问题.

2. 证明：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AE \parallel DC$，$\angle A=\angle C$.

∴ $\angle CDF=\angle E$.

∴ $\triangle FCD \backsim \triangle DAE$. ∴ $\frac{DC}{AE}=\frac{CF}{AD}$.

3. 证明：∵ $DM \perp BC$，$\angle BAC=90°$，

∴ $\angle B+\angle BEM=90°$，$\angle D+\angle DEA=90°$.

∵ $\angle BEM=\angle DEA$，∴ $\angle B=\angle D$.

∵ M 为 BC 的中点，$\angle BAC=90°$，

∴ $BM=AM$.

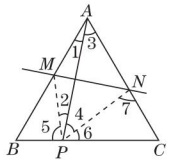
∴ $\angle B=\angle BAM$.

∴ $\angle BAM=\angle D$，即 $\angle EAM=\angle D$.

又∵ $\angle AME=\angle DMA$.

∴ $\triangle AME \backsim \triangle DMA$.

∴ $\frac{AM}{MD}=\frac{ME}{AM}$，即 $AM^2=MD \cdot ME$.



（第 4 题）

4. 证明：如图，连接 PM，PN.

∵ MN 是 AP 的垂直平分线，

∴ $MA=MP$，$NA=NP$.

∴ $\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$.

又∵ $\triangle ABC$ 是等边三角形，

∴ $\angle B=\angle C=\angle 1+\angle 3=60°$.

∴ $\angle 2+\angle 4=60°$.

∴ $\angle 5+\angle 6=120°$.

又∵ $\angle 6+\angle 7=180°-\angle C=120°$，

∴ $\angle 5=\angle 7$. ∴ $\triangle BPM \backsim \triangle CNP$.

∴ $\frac{BP}{CN}=\frac{BM}{CP}$，即 $BP \cdot CP=BM \cdot CN$.

5. 证明：∵ $AB \parallel DN$，∴ $\angle MBA=\angle MDN$，$\angle MAB=\angle MND$.

∴ $\triangle AMB \backsim \triangle NMD$.

∴ $\frac{AM}{NM}=\frac{BM}{DM}$.

又∵ $AD \parallel BP$，

∴ $\angle MAD=\angle P$，$\angle MDA=\angle MBP$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \triangle BMP \backsim \triangle DMA$.

$\therefore \frac{MP}{AM}=\frac{BM}{DM}$.

$\therefore \frac{AM}{MN}=\frac{MP}{AM}$.

$\therefore AM^2=MN\cdot MP$.

点拨:利用平行线得到角相等,从而判定三角形相似,再由相似三角形对应边的比相等,可求某些线段的长或证明比例式和等积式. 当直接利用相似三角形对应边的比相等或平行线截得的对应线段成比例无法解决时,可找中间比进行过渡,而找"中间比"是证比例关系常用的方法.

6. 证明:由题意得$\angle BDF=\angle BAE=90°$.

$\because BE$平分$\angle ABC$,$\therefore \angle DBF=\angle ABE$.

$\therefore \triangle BDF \backsim \triangle BAE$. $\therefore \frac{BD}{AB}=\frac{BF}{BE}$.

$\because \angle BAC=\angle BDA=90°$,

$\angle ABC=\angle DBA$.

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle DBA$.

$\therefore \frac{AB}{BC}=\frac{BD}{AB}$.

$\therefore \frac{BF}{BE}=\frac{AB}{BC}$.

7. 证明:(1)$\because$ 四边形$ABCD$为平行四边形,$\therefore \angle B=\angle D$.

$\because AM\perp BC$,$AN\perp CD$,

$\therefore \angle AMB=\angle AND=90°$.

$\therefore \triangle AMB \backsim \triangle AND$.

(2)由$\triangle AMB \backsim \triangle AND$得$\frac{AM}{AN}=\frac{AB}{AD}$,$\angle BAM=\angle DAN$.

又$\because AD=BC$,

$\therefore \frac{AM}{AN}=\frac{AB}{BC}$. $\therefore \frac{AM}{AB}=\frac{AN}{BC}$.

$\because AM\perp BC$,$AD/\!/BC$,

$\therefore \angle MAD=\angle AMB=90°$.

$\therefore \angle B+\angle BAM=\angle MAN+\angle NAD=90°$.

$\therefore \angle B=\angle MAN$.

$\therefore \triangle AMN \backsim \triangle BAC$.

$\therefore \frac{AM}{AB}=\frac{MN}{AC}$.

8. 证明:$\because BG\perp AP$,$PE\perp AB$,

$\therefore \angle AEP=\angle DEB=\angle AGB=90°$.

$\therefore \angle P+\angle PAB=90°$,

$\angle PAB+\angle ABG=90°$.

$\therefore \angle P=\angle ABG$. $\therefore \triangle AEP \backsim \triangle DEB$.

$\therefore \frac{AE}{DE}=\frac{PE}{BE}$,即$AE\cdot BE=PE\cdot DE$.

$\because \angle CEA=\angle BEC=90°$,

$\therefore \angle CAB+\angle ACE=90°$.

$\because \angle ACB=90°$,

$\therefore \angle CAB+\angle CBE=90°$.

$\therefore \angle ACE=\angle CBE$.

$\therefore \triangle AEC \backsim \triangle CEB$.

$\therefore \frac{AE}{CE}=\frac{CE}{BE}$,即$CE^2=AE\cdot BE$.

$\therefore CE^2=DE\cdot PE$.

9. 证明:$\because AD\perp BC$,$DE\perp AB$,

$\therefore \angle ADB=\angle AED=90°$.

又$\because \angle BAD=\angle DAE$,

$\therefore \triangle ABD \backsim \triangle ADE$.

$\therefore \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AD}$,即$AD^2=AE\cdot AB$.

同理可得$AD^2=AF\cdot AC$.

$\therefore AE\cdot AB=AF\cdot AC$. $\therefore \frac{AE}{AF}=\frac{AC}{AB}$.

10. 证明:如图,连接PC.

$\because AB=AC$,$AD\perp BC$,

$\therefore AD$垂直平分BC,$\angle ABC=\angle ACB$.

$\therefore BP=CP$. $\therefore \angle 1=\angle 2$.

$\therefore \angle ABC-\angle 1=\angle ACB-\angle 2$,

即$\angle 3=\angle 4$.

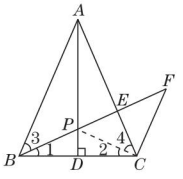
$\because CF/\!/AB$,$\therefore \angle 3=\angle F$. $\therefore \angle 4=\angle F$.

又$\because \angle CPF=\angle CPE$,

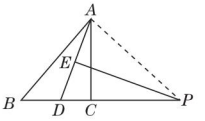
$\therefore \triangle CPF \backsim \triangle EPC$.

$\therefore \frac{CP}{PE}=\frac{PF}{CP}$,即$CP^2=PF\cdot PE$.

$\because BP=CP$,$\therefore BP^2=PE\cdot PF$.



(第10题)



(第11题)

11. 证明:如图,连接PA,

$\because EP$是AD的垂直平分线,

$\therefore PA=PD$.

$\therefore \angle PDA=\angle PAD$.

$\therefore \angle B+\angle BAD=\angle DAC+\angle CAP$.

又$\because AD$平分$\angle BAC$,

$\therefore \angle BAD=\angle DAC$. $\therefore \angle B=\angle CAP$.

又$\because \angle APC=\angle BPA$,

$\therefore \triangle PAC \backsim \triangle PBA$.

$\therefore \frac{PA}{PB}=\frac{PC}{PA}$,

即$PA^2=PB\cdot PC$.

$\because PA=PD$,

$\therefore PD^2=PB\cdot PC$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

第 17 招 根据物体的三视图计算其表面积和体积

1. D　**点拨**：设三个正方体的棱长按从大到小排列依次为 a,b,c，根据三视图的定义可得 $S_1=a^2+b^2+c^2$，$S_2=a^2$，$S_3=a^2+b^2$，则 $S_1>S_3>S_2$，故选 D.

2. **解**：(1) 主；俯

(2) 表面积 $=2\times(11\times7+11\times2+7\times2)+4\times\pi\times6\approx301.36(\text{cm}^2)$.

3. **解**：圆锥的高为 $\sqrt{13^2-5^2}=12(\text{cm})$，

则不倒翁的容积为 $\frac{1}{3}\pi\times5^2\times12+\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi\times5^3=100\pi+\frac{250\pi}{3}=\frac{550\pi}{3}(\text{cm}^3)$.

点拨：本题通过三视图可知该几何体是由圆锥和半球组合而成的.

4. **解**：(1) $CQ\parallel BE$；3 dm

(2) $V_{液体}=\frac{1}{2}\times3\times4\times4=24(\text{dm}^3)$.

点拨：(1) 易知 CQ 与 BE 平行，利用勾股定理即可求得 BQ 的长；(2) 液体正好是一个以 $\triangle BCQ$ 为底面的直棱柱，据此即可求得液体的体积.

第 18 招 反比例函数与一次函数的综合应用

1. A　**2.** B

3. C　**点拨**：把点 $A(1,2)$ 的坐标分别代入 $y_1=k_1x$，$y_2=\frac{k_2}{x}$ 中，得 $k_1=2$，$k_2=2$. ∴ ①是错误的. 易知点 B 的坐标为 $(-1,-2)$，由图象可知，②④是正确的. 当 $y_1>y_2$ 时，$x>1$ 或 $-1<x<0$，∴ ③是错误的. 故选 C.

4. ①②④⑤

5. **解**：(1) ∵ 点 $B(-2,n)$，$D(3-3n,1)$ 在反比例函数 $y=\frac{m}{x}$ $(x<0)$ 的图象上，

∴ $-2n=3-3n$，解得 $n=3$.

∴ $m=-2n=-6$.

(2) 由(1)知反比例函数的表达式为 $y=-\frac{6}{x}$.

∵ $n=3$，∴ 点 $B(-2,3)$，$D(-6,1)$.

如图，过点 D 作 $DE\perp BC$ 于点 E，延长 DE 交 AB 于点 F.

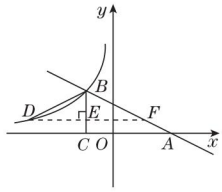
在 $\triangle DBE$ 和 $\triangle FBE$ 中，

$$\begin{cases}\angle DBE=\angle FBE,\\ BE=BE,\\ \angle BED=\angle BEF=90^\circ,\end{cases}$$

∴ $\triangle DBE\cong\triangle FBE(\text{ASA})$.

∴ $DE=FE=4$. ∴ 点 $F(2,1)$.

将点 $B(-2,3)$，$F(2,1)$ 的坐标分别代入 $y=kx+b$，



（第 5 题）

得 $\begin{cases}-2k+b=3,\\ 2k+b=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-\frac{1}{2},\\ b=2.\end{cases}$

∴ 一次函数的表达式为 $y=-\frac{1}{2}x+2$.

点拨：(1) 将点 B,D 的坐标代入反比例函数的表达式求解 m 的值；(2) 通过作辅助线求点 F 的坐标，再由点 B,F 的坐标求一次函数的表达式.

6. **解**：(1) 把点 $C(1,m)$ 的坐标代入 $y=\frac{4}{x}$，得 $m=\frac{4}{1}$，

∴ $m=4$.

∴ 点 C 的坐标为 $(1,4)$.

把点 $C(1,4)$ 的坐标代入 $y=2x+n$，

得 $4=2\times1+n$，解得 $n=2$.

(2) 对于 $y=2x+2$，令 $x=3$，则 $y=2\times3+2=8$，

∴ 点 P 的坐标为 $(3,8)$.

令 $y=0$，则 $2x+2=0$，得 $x=-1$，

∴ 点 A 的坐标为 $(-1,0)$.

对于 $y=\frac{4}{x}$，令 $x=3$，则 $y=\frac{4}{3}$.

∴ 点 Q 的坐标为 $\left(3,\frac{4}{3}\right)$.

∴ $\triangle APQ$ 的面积 $=\frac{1}{2}AD\cdot PQ=\frac{1}{2}\times(3+1)\times\left(8-\frac{4}{3}\right)=\frac{40}{3}$.

点拨：注意反比例函数与一次函数图象的交点坐标满足两个函数的表达式，解答这类题通常运用方程思想.

7. **解**：(1) 将点 $A(1,0)$ 的坐标代入 $y=ax+2$，得 $0=a+2$，

∴ $a=-2$，

∴ 直线 AB 对应的函数表达式为 $y=-2x+2$.

将 $x=0$ 代入上式，得 $y=2$，

∴ $b=2$.

(2) 由(1)知，$b=2$，∴ $B(0,2)$，

由平移可得：点 $C(2,t)$，$D(1,2+t)$.

将点 $C(2,t)$，$D(1,2+t)$ 的坐标分别代入 $y=\frac{k}{x}$，

得 $\begin{cases}t=\frac{k}{2},\\ 2+t=\frac{k}{1},\end{cases}$

∴ $\begin{cases}k=4,\\ t=2.\end{cases}$

∴ 反比例函数的表达式为 $y=\frac{4}{x}$，点 $C(2,2)$，点 $D(1,4)$.

如图①，连接 BC,AD.

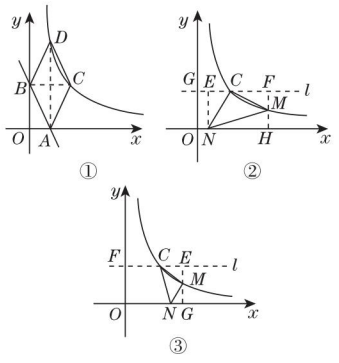
∵ $B(0,2)$，$C(2,2)$. ∴ $BC\parallel x$ 轴，$BC=2$.

∵ $A(1,0)$，$D(1,4)$，

∴ $AD\perp x$ 轴，$AD=4$. ∴ $BC\perp AD$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore S_{四边形ABDC}=\frac{1}{2}\times BC\times AD=\frac{1}{2}\times 2\times 4=4.$



(第7题)

(3)①当$\angle NCM=90°$,$CM=CN$时,

如图②,过点C作直线$l/\!/x$轴,交y轴于点G,过点M作$HF\perp$直线l于点F,交x轴于点H,过点N作$NE\perp$直线l于点E.

$\because \angle MCN=90°$,

$\therefore \angle MCF+\angle NCE=90°$.

$\because NE\perp$直线l于点E,

$\therefore \angle ENC+\angle NCE=90°$,

$\therefore \angle MCF=\angle ENC$.

又$\because \angle MFC=\angle NEC=90°$,$CN=CM$,

$\therefore \triangle NEC\cong\triangle CFM$.

$\therefore CF=EN=2$,

$\therefore FG=CG+CF=2+2=4$.

将$x=4$代入$y=\frac{4}{x}$,得$y=1$,

$\therefore$点$M(4,1)$.

②当$\angle NMC=90°$,$MC=MN$时,

如图③,过点C作直线$l\perp y$轴于点F,则$CF=2$.

过点M作$EG\perp x$轴于点G,交直线l于点E,则$EG\perp$直线l于点E,$EG=2$.

$\because \angle CMN=90°$,$\therefore \angle CME+\angle NMG=90°$.

$\because GE\perp$直线l于点E,

$\therefore \angle ECM+\angle CME=90°$.

$\therefore \angle NMG=\angle ECM$.

又$\because \angle CEM=\angle NGM=90°$,$CM=NM$,

$\therefore \triangle CEM\cong\triangle MGN$.

$\therefore CE=MG$,$EM=NG$.

设$CE=MG=n$,则$y_M=n$,$x_M=CF+CE=2+n$,

$\therefore$点$M(2+n,n)$,

将点$M(2+n,n)$的坐标代入$y=\frac{4}{x}$,得$n=\frac{4}{2+n}$,解得$n_1=\sqrt{5}-1$,$n_2=-\sqrt{5}-1$(不合题意,舍去),

$\therefore x_M=2+n=\sqrt{5}+1$,

$\therefore$点$M(\sqrt{5}+1,\sqrt{5}-1)$,

综合①②可知:点M的坐标为$(4,1)$或$(\sqrt{5}+1,\sqrt{5}-1)$.

8. 解:(1)将$B(4,1)$的坐标代入$y=\frac{k}{x}$,得$1=\frac{k}{4}$,$\therefore k=4$.

$\therefore y=\frac{4}{x}$. 将$B(4,1)$的坐标代入$y=mx+5$,得$1=4m+5$,

$\therefore m=-1$. $\therefore y=-x+5$.

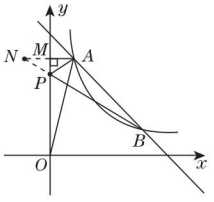
(2)$\because$点A在反比例函数$y=\frac{4}{x}$的图象上,

$\therefore n=\frac{4}{1}$,即$n=4$.

$\therefore A(1,4)$.

$\therefore S=\frac{1}{2}\times 1\times 4=2$.

(3)如图,作点A关于y轴的对称点N,连接BN交y轴于点P,连接AP,此时$PA+PB$最小,易得$N(-1,4)$.



(第8题)

设直线BN对应的函数表达式为$y=ax+b$,

由$\begin{cases}4a+b=1,\\-a+b=4,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=-\frac{3}{5},\\b=\frac{17}{5}.\end{cases}$

$\therefore y=-\frac{3}{5}x+\frac{17}{5}$. $\therefore P\left(0,\frac{17}{5}\right)$.

点拨:本题主要考查了用待定系数法求一次函数与反比例函数的表达式以及对称点问题,根据已知得出对称点是解题的关键.

第19招 反比例函数与几何的综合应用

1. 解:(1)$\because A(m,6)$,$B(3,n)$两点在反比例函数$y=\frac{6}{x}(x>0)$的图象上,

$\therefore m=1$,$n=2$,即$A(1,6)$,$B(3,2)$.

$\because$点$A(1,6)$,$B(3,2)$在一次函数$y=kx+b$的图象上,

$\therefore \begin{cases}6=k+b,\\2=3k+b,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=-2,\\b=8,\end{cases}$

故一次函数的表达式为$y=-2x+8$.

(2)根据图象可知使$kx+b<\frac{6}{x}$成立的x的取值范围是$0<x<1$或$x>3$.

(3)如图,分别过点A,B作$AE\perp x$轴,$BC\perp x$轴,垂足分别为

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

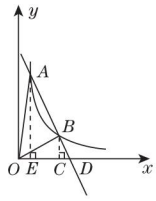
E,C，设直线 AB 交 x 轴于点 D.

令 $-2x+8=0$，得 $x=4$，即 $D(4,0)$.

$\therefore OD=4$.

$\because A(1,6),B(3,2)$，$\therefore AE=6,BC=2$.

$\therefore S_{\triangle AOB}=S_{\triangle AOD}-S_{\triangle ODB}=\frac{1}{2}\times4\times6-\frac{1}{2}\times4\times2=8$.



（第 1 题）

点拨：(1)用待定系数法求出一次函数表达式；(2)根据图象直接得出 x 的取值范围；(3)作辅助线利用作差法巧求 $\triangle AOB$ 的面积.

2. (1)**证明**：$\because$ 点 A,B 分别在 x 轴、y 轴上，点 D 在第一象限内，$DC\perp x$ 轴于点 C，$\therefore\angle AOB=\angle DCA=90°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AOB$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle DCA$ 中，

$\begin{cases}AO=DC,\\AB=DA,\end{cases}$

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle AOB\cong\mathrm{Rt}\triangle DCA(\mathrm{HL})$.

(2) **解**：在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 中，$\because CD=2,DA=\sqrt{5}$，$\therefore AC=\sqrt{DA^2-CD^2}=1$.

$\therefore OC=OA+AC=2+1=3$.

$\therefore D$ 点的坐标为 $(3,2)$.

$\because$ 点 E 为 CD 的中点，

$\therefore$ 点 E 的坐标为 $(3,1)$.

$\therefore k=3\times1=3$.

(3)**解**：点 G 在反比例函数的图象上.

理由如下：$\because\triangle BFG$ 和 $\triangle DCA$ 关于某点成中心对称，

$\therefore\triangle BFG\cong\triangle DCA$.

$\therefore FG=CA=1,BF=DC=2,\angle BFG=\angle DCA=90°$.

易知 $OB=AC=1$，$\therefore OF=OB+BF=1+2=3$.

$\therefore G$ 点的坐标为 $(1,3)$.

$\because 1\times3=3$，

$\therefore$ 点 $G(1,3)$ 在反比例函数的图象上.

3. **解**：设点 A 的坐标为 $\left(a,\frac{6}{a}\right)$，由题易知四边形 $ABCO$ 是平行四边形，

$\therefore AB=OC=3$.

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $\left(a-3,\frac{6}{a}\right)$.

$\therefore(a-3)\cdot\frac{6}{a}=-3$.

$\therefore a=2$.

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(2,3)$，点 B 的坐标为 $(-1,3)$.

$\because$ 点 C 的坐标为 $(-3,0)$，

$\therefore$ 易得直线 BC 对应的函数表达式为 $y=\frac{3}{2}x+\frac{9}{2}$.

由 $\begin{cases}y=\frac{3}{2}x+\frac{9}{2},\\y=-\frac{3}{x},\end{cases}$

得 $\begin{cases}x_1=-1,\\y_1=3,\end{cases}\begin{cases}x_2=-2,\\y_2=\frac{3}{2}.\end{cases}$

$\therefore D\left(-2,\frac{3}{2}\right)$.

$\therefore$ 易得直线 AD 对应的函数表达式为 $y=\frac{3}{8}x+\frac{9}{4}$.

$\therefore OE=\frac{9}{4}$.

4. $\frac{15}{4}$ **点拨**：$\because C(0,2),A(4,0)$，由矩形的性质可得 $P(2,1)$，把点 P 的坐标代入反比例函数的表达式可得 $k=2$，$\therefore$ 反比例函数的表达式为 $y=\frac{2}{x}$. 易知点 D 的坐标为 $\left(4,\frac{1}{2}\right)$，

$\therefore AD=\frac{1}{2}$. $\therefore BD=\frac{3}{2}$. 又易知点 E 的坐标为 $(1,2)$，$\therefore CE=1$. $\therefore BE=3$. $\therefore S_{\triangle ODE}=S_{矩形OABC}-S_{\triangle OCE}-S_{\triangle BED}-S_{\triangle OAD}=8-1-\frac{9}{4}-1=\frac{15}{4}$.

5. (1)**证明**：$\because BE/\!/AC,AE/\!/OB$，

$\therefore$ 四边形 $AEBD$ 是平行四边形.

$\because$ 四边形 $OABC$ 是矩形，

$\therefore DA=\frac{1}{2}AC,DB=\frac{1}{2}OB,AC=BO$.

$\therefore DA=DB$.

$\therefore$ 四边形 $AEBD$ 是菱形.

(2)**解**：连接 DE，交 AB 于点 F，

易知 $DE=OA=3$.

$\because$ 四边形 $AEBD$ 是菱形，

$\therefore EF=DF=\frac{1}{2}DE=\frac{3}{2}$，

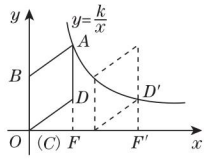
$AF=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}OC=1$. $\therefore E\left(\frac{9}{2},1\right)$.

设经过点 E 的双曲线对应的函数表达式为 $y=\frac{k}{x}$，

把点 $E\left(\frac{9}{2},1\right)$ 的坐标代入得 $1=\frac{k}{\frac{9}{2}}$，解得 $k=\frac{9}{2}$.

$\therefore$ 经过点 E 的双曲线对应的函数表达式为 $y=\frac{9}{2x}$.

6. **解**：(1)如图，过点 D 作 x 轴的垂线，垂足为 F，易知点 A,D,F 在同一条直线上.



（第 6 题）

$\because$ 点 D 的坐标为 $(4,3)$，

$\therefore OF=4,DF=3$.

$\therefore OD=5$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∴易得 $AD=OD=5$.

∴点 A 的坐标为 $(4,8)$.

∴$k=xy=4\times8=32$.

(2)如图,将菱形 $ABCD$ 沿 x 轴正方向平移,使得点 D 落在反比例函数 $y=\frac{32}{x}(x>0)$ 的图象上的点 D' 处,过点 D' 作 x 轴的垂线,垂足为 F'.

∵$DF=3$,∴$D'F'=3$.

∴点 D' 的纵坐标为 3.

∵点 D' 在 $y=\frac{32}{x}(x>0)$ 的图象上,

∴$3=\frac{32}{x}$,解得 $x=\frac{32}{3}$,

即 $OF'=\frac{32}{3}$.∴$FF'=\frac{32}{3}-4=\frac{20}{3}$.

∴菱形 $ABCD$ 沿 x 轴正方向平移的距离为 $\frac{20}{3}$.

7. **解**:(1)∵正方形 $OABC$ 的边 OA,OC 分别在 x 轴、y 轴上,点 B 的坐标为 $(2,2)$,∴$C(0,2)$.

∵点 D 是 BC 的中点,∴$D(1,2)$.

∵反比例函数 $y=\frac{k}{x}(x>0,k\neq0)$ 的图象经过点 D,

∴$k=2$.

(2)当点 P 在直线 BC 的上方,即 $0<x<1$ 时,

∵点 $P(x,y)$ 在该反比例函数的图象上运动,

∴$y=\frac{2}{x}$.

∴$S_{四边形CQPR}=CQ\cdot PQ=x\cdot\left(\frac{2}{x}-2\right)=2-2x$.

当点 P 在直线 BC 的下方,即 $x>1$ 时,同理求出 $S_{四边形CQPR}=CQ\cdot PQ=x\cdot\left(2-\frac{2}{x}\right)=2x-2$.

综上,$S=\begin{cases}2x-2(x>1),\\2-2x(0<x<1).\end{cases}$

点拨:(1)由正方形的性质求出点 D 的坐标,代入函数表达式中利用待定系数法即可求出 k 值;(2)注意将 x 的取值范围分成 $0<x<1$ 和 $x>1$ 两部分进行分类讨论.

8. **解**:(1)①易知 A,B 两点在双曲线 $y=\frac{4}{x}$ 上.

当 $x=4$ 时,$y=1$,

∴$B(4,1)$,

易知 $A(2,2)$.

设直线 AB 对应的函数表达式为 $y=kx+b$,

∴$\begin{cases}2k+b=2,\\4k+b=1,\end{cases}$∴$\begin{cases}k=-\frac{1}{2},\\b=3,\end{cases}$

∴直线 AB 对应的函数表达式为 $y=-\frac{1}{2}x+3$.

②四边形 $ABCD$ 是菱形,

理由如下:易知 C,D 两点在双曲线 $y=\frac{20}{x}$ 上.由①知,

$B(4,1)$,

∵$BD\parallel y$ 轴,

∴$D(4,5)$.

∵点 P 是 BD 的中点,

∴$P(4,3)$,

当 $y=3$ 时,由 $y=\frac{4}{x}$ 得,$x=\frac{4}{3}$,

由 $y=\frac{20}{x}$ 得,$x=\frac{20}{3}$,故 $A\left(\frac{4}{3},3\right),C\left(\frac{20}{3},3\right)$.

∴$PA=4-\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$,$PC=\frac{20}{3}-4=\frac{8}{3}$,

∴$PA=PC$,

又∵$PB=PD$,

∴四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

又∵$BD\perp AC$,

∴四边形 $ABCD$ 是菱形.

(2)四边形 $ABCD$ 能成为正方形.

当四边形 $ABCD$ 是正方形时,

$BD=AC$,

当 $x=4$ 时,$y=\frac{m}{x}=\frac{m}{4}$,$y=\frac{n}{x}=\frac{n}{4}$,

∴$B\left(4,\frac{m}{4}\right),D\left(4,\frac{n}{4}\right)$,

∴$P\left(4,\frac{m+n}{8}\right)$,

∴$A\left(\frac{8m}{m+n},\frac{m+n}{8}\right),C\left(\frac{8n}{m+n},\frac{m+n}{8}\right)$.

∵$AC=BD$,

∴$\frac{8n}{m+n}-\frac{8m}{m+n}=\frac{n}{4}-\frac{m}{4}$,

∴$m+n=32$.

第 20 招 建模思想应用的常见类型归类

1. **解**:(1)四边形 $DHBG$ 是菱形.理由如下:

∵四边形 $ABCD,FBED$ 是完全相同的矩形,

∴$\angle A=\angle E=90°,AD=ED,AB=EB$.

在△DAB 和△DEB 中,$\begin{cases}AD=ED,\\\angle A=\angle E,\\AB=EB,\end{cases}$

∴△DAB≌△DEB(SAS),

∴$\angle ABD=\angle EBD$.

∵$AB\parallel CD,DF\parallel BE$,

∴四边形 $DHBG$ 是平行四边形,$\angle HDB=\angle EBD$,

∴$\angle HDB=\angle HBD$,

∴$DH=BH$,

∴▱$DHBG$ 是菱形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)由(1),设 $DH=BH=x$,则 $AH=8-x$,

在 $Rt\triangle ADH$ 中,$AD^2+AH^2=DH^2$,即 $4^2+(8-x)^2=x^2$,

解得 $x=5$,即 $BH=5$,

∴ 菱形 $DHBG$ 的面积为 $HB\cdot AD=5\times4=20$.

点拨:建立方程模型,将 DH,HB 的长设为 x,由勾股定理列方程求得 HB 的长,进而再求面积.

2. 不发生;在直角三角形中,斜边上的中线等于斜边的一半

点拨:连接 OP. ∵ $\angle AOB=90°$,点 P 是线段 AB 的中点,

∴ $OP=\frac{1}{2}AB$.

∵ 木棍(AB)的长度不发生改变,

∴ 滑动的过程中,点 P 到点 O 的距离不发生变化.

3. **解**:(1)四边形 $EFGH$ 还是平行四边形.

理由如下:连接 AC.

∵ E,F 分别是 AB,BC 的中点,

∴ $EF/\!/AC,EF=\frac{1}{2}AC$.

∵ G,H 分别是 CD,AD 的中点,

∴ $GH/\!/AC,GH=\frac{1}{2}AC$,

∴ $EF/\!/GH,EF=GH$,

∴ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

(2)(ⅰ)当 $AC=BD$ 时,四边形 $EFGH$ 是菱形.

证明:由(1)可知四边形 $EFGH$ 是平行四边形,

易知 $FG=\frac{1}{2}BD,EF=\frac{1}{2}AC$,

∵ $AC=BD$,

∴ $FG=EF$,

∴ 四边形 $EFGH$ 是菱形.

(ⅱ)当 $AC\perp BD$ 时,四边形 $EFGH$ 是矩形.

点拨:由(1)可知 $EF/\!/AC$,且四边形 $EFGH$ 是平行四边形,

∵ $AC\perp BD$,

∴ $EF\perp BD$,

∵ G,F 分别是 CD,BC 的中点,

∴ $FG/\!/BD$.

∵ $EF\perp BD$,

∴ $EF\perp FG$,即 $\angle EFG=90°$,

∴ $\square EFGH$ 是矩形.

4. **解**:(1)设每千克核桃应降价 x 元.

根据题意,得 $(60-x-40)\left(100+\frac{x}{2}\times20\right)=2\ 240$.

化简,得 $x^2-10x+24=0$.

解得 $x_1=4,x_2=6$.

答:每千克核桃应降价 4 元或 6 元.

(2)由(1)可知每千克核桃可降价 4 元或 6 元.

因为要尽可能让利于顾客,

所以每千克核桃应降价 6 元.

此时,售价为 $60-6=54$(元),

$\frac{54}{60}\times100\%=90\%$.

答:该店应该按原售价的九折出售.

点拨:设出未知数,利用平均每天的销售量 × 每千克的利润 = 平均每天的利润列出方程求解即可.

5. **解**:(1)结合题图可设日均销售量 p(桶)与销售单价 x(元)的函数关系式为 $p=kx+b(k\neq0)$,

根据题意得 $\begin{cases}7k+b=500,\\12k+b=250,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-50,\\b=850.\end{cases}$

所以日均销售量 p(桶)与销售单价 x(元)的函数关系式为 $p=-50x+850$.

(2)所提问题不唯一,如:"若该经营部希望日均获利 1 350 元,那么日均应销售多少桶水?"

根据题意得 $(x-5)(-50x+850)-250=1\ 350$,

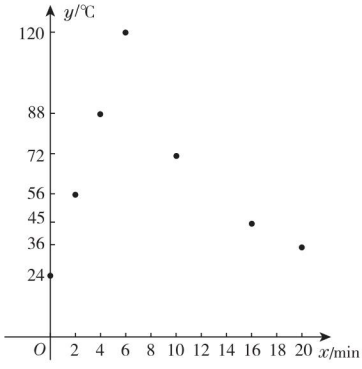
解得 $x_1=9,x_2=13$(不合题意,舍去),

当 $x=9$ 时,$p=-50x+850=400$.

答:若该经营部希望日均获利 1 350 元,那么日均应销售 400 桶水.

点拨:本题考查了一元二次方程及一次函数的应用,解题的关键是通过题目和图象建立合适的函数模型求解.

6. **解**:(1)在直角坐标系中描出相应的点如图所示.



(第 6 题)

(2)由(1)中图可知,加热过程中 y 与 x 满足一次函数关系,

设函数表达式为 $y=kx+b(k\neq0)$,

将点(0,24)的坐标代入,求得 $b=24$,

再将点(2,56)的坐标代入,求得 $k=16$.

所以加热过程中 y 与 x 的函数表达式为 $y=16x+24$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

由(1)中图可知,加工过程中 y 与 x 满足反比例函数关系,

设函数表达式为 $y=\frac{m}{x}(m\neq0)$,

将点(10,72)的坐标代入,得 $m=720$.

所以加工过程中 y 与 x 的函数表达式为 $y=\frac{720}{x}$.

(3)由于在加工过程中,$y=24$ 时,$x=\frac{720}{24}=30$,

所以每次加热后,进行加工的时间是 $30-6=24$(min).

7. **解**:(1)库存原料为 $2\times60=120$(吨),根据题意可知 y 与 x 之间的函数表达式为 $y=\frac{120}{x}$.

因为生产能力提高,每小时消耗的原料大于计划消耗的原料,所以自变量的取值范围是 $x>2$.

(2)根据题意,得 $y\geqslant24$,即 $\frac{120}{x}\geqslant24$.

解不等式,得 $x\leqslant5$,

由(1)得 $x>2$,所以 $2<x\leqslant5$.

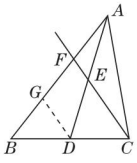
即每小时消耗的原料应控制在大于 2 吨且不大于 5 吨的范围内.

点拨:本题考查反比例函数的应用,解题的关键是正确建立反比例函数模型并求出反比例函数表达式.

8. **解**:(1)可以用模拟试验的方法,用 9 张扑克牌(一副牌中的 1~9)代替翻奖牌,规定其中 1 号~3 号牌代表未中奖,4 号~9 号牌代表中奖.

(2)"未中奖"的可能性为 $\frac{1}{3}$,"中奖"的可能性为 $\frac{2}{3}$,它们之间的关系是:未中奖的可能性 + 中奖的可能性 = 1.

9. **解**:如图,过点 D 作 $DG\parallel CF$ 交 AB 于点 G.



(第 9 题)

(1)$\because DG\parallel CF$,$\therefore \frac{BG}{GF}=\frac{BD}{DC}$,

又$\because BD=DC$,$\therefore BG=GF$.

$\because DG\parallel CF$,$\therefore \frac{AF}{FG}=\frac{AE}{ED}$,

又$\because AE=ED$,$\therefore AF=GF$,

$\therefore AF=FG=GB$,$\therefore \frac{AF}{BF}=\frac{1}{2}$.

(2)$\because DG\parallel CF$,$\therefore \frac{AF}{FG}=\frac{AE}{ED}$,

又$\because \frac{AE}{ED}=\frac{1}{k}$,$\therefore \frac{AF}{FG}=\frac{1}{k}$,

即 $FG=kAF$.

同(1)可知 $BG=GF$,

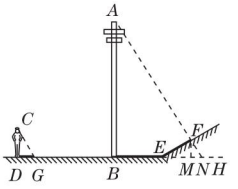
$\therefore BG=FG=kAF$,

$\therefore BF=2kAF$,

$\therefore \frac{AF}{BF}=\frac{1}{2k}$.

点拨:平行线分线段成比例的基本事实可将一条直线上的两条线段的比转换为另一条直线上两条线段的比,已知 BD 与 CD 的比、AE 与 DE 的比,过其中一分点作平行线,可实现比的转换.

10. 8.0 m **点拨**:如图,延长 AF 交 BH 于点 N,过点 F 作 $FM\perp BH$ 于点 M,$\because \angle FEH=30°$,$EF=1.7$ m,$\therefore FM=0.85$ m,$\therefore EM\approx1.47$ m. 由题易知 $\triangle FMN\backsim\triangle CDG$,$\therefore \frac{FM}{CD}=\frac{MN}{DG}$,$\because CD=1.6$ m,$DG=0.8$ m,$\therefore MN=0.425$ m,$\because BE=2.1$ m,$\therefore BN\approx2.1+1.47+0.425=3.995$(m),又易知 $\frac{AB}{BN}=\frac{CD}{DG}$,$\therefore \frac{AB}{3.995}\approx\frac{1.6}{0.8}$,解得 $AB\approx8.0$ m.



(第 10 题)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

典点

练准知识 练通考点
练透方法 练出高分





提分一定有方法！

绿色印刷产品

关注荣德基微信公众号，获取新资讯。
荣德基官方网站：http://www.rudder.com.cn
荣德基天猫旗舰店：http://rongdeji.tmall.com
客服热线：182 1039 5892

荣德基
初中频道

本书导学号
7778062

ISBN 978-7-5450-6636-4
9 787545 066364 01
定价：46.90元

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料