教辅资料站

电子教辅　试卷练习
知识总结　备课资源

扫码关注获取更多学习资料

荣德基 主编

典中点®

综合应用创新题 典中点

按课时编写



九年级数学 上

（HS版）

按80:1配赠教师用书

登录荣德基官方网站
免费下载课件资源



典中点·不简单　你·不平凡

- 方法技巧57招
- 典型易错题36道
- 培优拔尖题70道
- 高频考点15个

典中点微课堂 扫一扫

全书微课精彩呈现
创新题目 快速方法

陕西新华出版传媒集团
陕西人民教育出版社

练透方法 练出高分

本书方法规律索引

方法规律

频次	方法名称	首次页码
	思想方法	
6	数形结合思想	4
1	从特殊到一般的思想	6
2	类比思想	6
6	整体思想	11
3	分类讨论思想	30
1	转化思想	43
2	方程思想	52
2	函数思想	72
	解题方法	
1	二次根式的识别方法	1
1	比较两个二次根式大小的方法	5
3	配方法	6
1	利用商的算术平方根化简二次根式的方法	7
2	平方法	9
1	作商法	9
1	分子有理化法	9
1	分母有理化法	9
1	作差法	9
4	倒数法	9
2	特殊值法	9
2	定义法	9
1	估算法	15
1	拆项法	15
1	约分法	15
6	换元法	16
1	整体带入法	16
1	先判后算法	16
1	辅元法	16
1	判别一元二次方程的两种方法	19
1	夹逼法	20
1	用直接开平方法解一元二次方程的“三步法”	22
1	类比法	24
1	用公式法解一元二次方程的“四个步骤”	27
1	构造法	34
1	判断四条线段是否成比例线段的方法	44
1	利用平行线证比例式或等积式的方法	48
1	等线段代换法	48
1	等积代换法	48
1	等比例代换法	48
1	平行法	48
2	等比例过渡法	48
1	中间比代换法	48
1	确定相似三角形的对应边和对应角的方法	51
1	相似图形的周长、面积的计算方法	61
1	利用相似三角形解决实际问题的方法	63
1	运用中位线定理证明线段相等或计算线段长度的方法	65
1	构造中位线法	66
1	构造平行四边形法	66
1	常用的测量方法	77
2	等角代换法	82
1	巧记特殊锐角三角函数值的方法	83
2	化斜为直法	92
1	参数法	92
1	等比代换法	92
1	解答含有仰角、俯角问题的方法	95
1	割补法	101
1	枚举法	112
1	列表法	112

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

荣德基 主编

综合应用创新题 典中点

本册主编：程小恒



九年级数学 上

（HS 版）

陕西新华出版传媒集团
陕西人民教育出版社
·西安·

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



极速提分18招

书山有路 · 训练有法

思想 方法 技巧 应用

四类绝招速解百题，招招见效助拿高分

第 1 招　利用二次根式的性质解相关问题
第 2 招　巧用二次根式的有关概念求字母或代数式的值
第 3 招　配方法的七种常见应用方法
第 4 招　降次思想在整式中的应用
第 5 招　可化为一元二次方程的分式方程的应用
第 6 招　一元二次方程的六种解法
第 7 招　一元二次方程中常见易错易混问题归类
第 8 招　证比例式或等积式的七种技巧
第 9 招　巧作平行线构造相似三角形
第10招　成比例线段的证明和计算的五种常用作辅助线的方法
第11招　同角或互余两角的三角函数关系的应用
第12招　巧用构造法求几种特殊角的三角函数值
第13招　解直角三角形的五种常见类型
第14招　利用三角函数解实际问题
第15招　统计概率思想在实际中的应用
第16招　概率的应用类型
第17招　求概率的四种方法
第18招　建模思想应用的常见类型归类



提分一定有方法！

内容及详解请见夹册《极速提分法》

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

目录 CONTENTS

第21章 二次根式

21.1 二次根式

第1课时 二次根式的定义 …… 1

第2课时 二次根式的性质 …… 3

21.2 二次根式的乘除

第1课时 二次根式的乘法 …… 5

第2课时 二次根式的除法 …… 7

阶段核心方法

比较含二次根式的式子的大小的八种方法 …… 9

21.3 二次根式的加减

第1课时 二次根式的加减 …… 10

第2课时 二次根式的混合运算 …… 12

第3课时 **二次根式运算常见的题型** …… 14

阶段核心技巧

常见二次根式化简求值的十一种技巧 …… 15

全章热门考点整合应用 …… 17

第22章 一元二次方程

22.1 一元二次方程

第1课时 认识一元二次方程 …… 19

第2课时 **一元二次方程的定义及相关概念的常见应用** …… 21

22.2 一元二次方程的解法

第1课时 直接开平方法 …… 22

第2课时 因式分解法 …… 23

第3课时 配方法 …… 25

第4课时 公式法 …… 27

第5课时 一元二次方程根的判别式 …… 29

* 第6课时 一元二次方程的根与系数的关系 …… 31

阶段核心方法

一元二次方程的九种解法 …… 33

22.3 实践与探索

第1课时 用一元二次方程解几何问题 … 35

第2课时 用一元二次方程解百分率问题 … 36

第3课时 用一元二次方程解一般应用问题 …… 37

阶段核心应用

一元二次方程解实际问题的十种常见应用 …… 39

全章热门考点整合应用 …… 42

第23章 图形的相似

23.1 成比例线段

第1课时 成比例线段 …… 44

第2课时 平行线分线段成比例 …… 46

阶段核心技巧

平行线分线段成比例常见应用的六种技巧 …… 48

23.2 相似图形 …… 49

23.3 相似三角形

第1课时 相似三角形 …… 51

第2课时 相似三角形的判定——利用角的关系 …… 53

第3课时 相似三角形的判定——利用边角关系 …… 55

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

目 录 CONTENTS

第 4 课时　相似三角形的判定
——利用三边关系 …… 57
第 5 课时　**相似三角形判定定理的应用** … 59
阶段核心归类
巧用“基本图形”探索相似条件 …… 60
第 6 课时　相似三角形的性质 …… 61
第 7 课时　相似三角形的应用 …… 63
23.4　中位线 …… 65
23.5　位似图形 …… 67
23.6　图形与坐标
第 1 课时　用坐标确定位置 …… 69
第 2 课时　图形的变换与坐标 …… 71
第 3 课时　**位似变换的四种常见题型** …… 73
阶段核心归类
巧用位似解三角形中的内接多边形问题 … 74
全章热门考点整合应用 …… 75

第 24 章　解直角三角形

24.1　测量 …… 77
24.2　直角三角形的性质 …… 79
24.3　锐角三角函数
第 1 课时　锐角三角函数 …… 81
第 2 课时　特殊角的三角函数值 …… 83
第 3 课时　用计算器求锐角三角函数值 … 85
阶段核心方法
求锐角三角函数值的七种常用方法 …… 87
24.4　解直角三角形
第 1 课时　解直角三角形 …… 89
第 2 课时　**解直角三角形的八种常见类型** … 91
第 3 课时　解直角三角形在实际中的
一般应用 …… 93
第 4 课时　用解直角三角形解视角问题 … 95
第 5 课时　用解直角三角形解方向角、
坡角问题 …… 97
阶段核心归类
构造三角函数基本图形解实际问题的
四种数学模型 …… 99
全章热门考点整合应用 …… 100

第 25 章　随机事件的概率

25.1　在重复试验中观察不确定现象
第 1 课时　事件的认识 …… 102
第 2 课时　频率的稳定性 …… 104
25.2　随机事件的概率
第 1 课时　概率及其意义 …… 106
第 2 课时　频率与概率 …… 108
第 3 课时　列举所有机会均等的结果
——用树状图求概率 …… 110
第 4 课时　列举所有机会均等的结果
——用列表法求概率 …… 112
第 5 课时　列举所有机会均等的结果——利用
概率判断游戏规则的公平性 …… 114
阶段核心归类
概率与其他知识的综合应用类型 …… 115
全章热门考点整合应用 …… 116

达标检测卷

第 21 章达标检测卷 …… 117
第 22 章达标检测卷 …… 121
第 23 章达标检测卷 …… 125
第 24 章达标检测卷 …… 129
第 25 章达标检测卷 …… 133
期末达标检测卷 …… 137

参考答案及点拨 …… 141

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

21.1 二次根式

小贴士："★"表示该题的难度较大，综合性或技巧性较强。

第1课时 二次根式的定义

名师点金

1. 二次根式的识别方法：
一个式子是二次根式必须具备二次根式的两个特征：一是含有二次根号；二是被开方数必须是非负数.
2. 二次根式的双重非负性：一是$\sqrt{a}\geqslant 0$；二是$a\geqslant 0$.

1 夯实基础·逐点练 ☞(答案见141页)

知识点1 二次根式的定义

1. 下列式子一定是二次根式的是(　　)

A. $\sqrt{-x-2}$　　B. $\sqrt{x}$

C. $\sqrt{x^2+2}$　　D. $\sqrt{x^2-2}$

2. 下列式子不一定是二次根式的是(　　)

A. $\sqrt{a}$　　B. $\sqrt{b^2+1}$

C. $\sqrt{0}$　　D. $\sqrt{(a+b)^2}$

3. 下列各式中，二次根式的个数为(　　)

①$\sqrt{\frac{1}{3}}$；② $\sqrt{-3}$；③ $\sqrt{x^2+1}$；④$\sqrt[3]{8}$；⑤$\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2}$；⑥$\sqrt{x^2+2x+3}$.

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

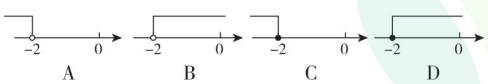
知识点2 二次根式有意义的条件

4. 【中考·武汉】式子$\sqrt{x-1}$在实数范围内有意义，则x的取值范围是(　　)

A. $x>0$　　B. $x\geqslant -1$

C. $x\geqslant 1$　　D. $x\leqslant 1$

5. 【中考·苏州】若$\sqrt{x+2}$在实数范围内有意义，则x的取值范围在数轴上表示正确的是(　　)



6. 【中考·济宁】若$\sqrt{2x-1}+\sqrt{1-2x}+1$在实数范围内有意义，则$x$满足的条件是(　　)

A. $x\geqslant\frac{1}{2}$　　B. $x\leqslant\frac{1}{2}$

C. $x=\frac{1}{2}$　　D. $x\neq\frac{1}{2}$

7. 已知$y=\sqrt{x-4}+\sqrt{4-x}+3$，则$\frac{y}{x}$的值为(　　)

A. $\frac{4}{3}$　　B. $-\frac{4}{3}$

C. $\frac{3}{4}$　　D. $-\frac{3}{4}$

8. 若式子$\sqrt{x-1}$有意义，则$x-2$的最小值是(　　)

A. 1　　B. -1　　C. 0　　D. -2

知识点3 二次根式的"双重"非负性($\sqrt{a}\geqslant 0, a\geqslant 0$)

9. 【中考·安顺】若实数a,b满足$|a+1|+\sqrt{b-2}=0$，则$a+b=$_____.

10. 【中考·桂林】若$|3x-2y-1|+\sqrt{x+y-2}=0$，则x,y的值为(　　)

A. $\begin{cases}x=1,\\y=4\end{cases}$　　B. $\begin{cases}x=2,\\y=0\end{cases}$

C. $\begin{cases}x=0,\\y=2\end{cases}$　　D. $\begin{cases}x=1,\\y=1\end{cases}$

***11.** 【中考·宿迁】若实数m,n满足等式$|m-2|+\sqrt{n-4}=0$，且m,n恰好是等腰三角形ABC的两条边的长，则$\triangle ABC$的周长是(　　)

A. 12　　B. 10　　C. 8　　D. 6

易错点! 考虑不全造成答案不完整

12. 【中考·黄石】若式子$\frac{\sqrt{x-1}}{x-2}$在实数范围内有意义，则x的取值范围是(　　)　【导学号:9401294】

A. $x\geqslant 1$且$x\neq 2$　　B. $x\leqslant 1$

C. $x>1$且$x\neq 2$　　D. $x<1$

微信公众号 教辅资料站

趣味数学　数学，科学的皇后；算术，数学的皇后.

——高斯

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法·提升练 ☞（答案见141页）

考查角度1 利用二次根式的非负性求字母的值

13. 已知 $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+y-2}=0$，求 x,y 的值.

考查角度2 利用二次根式被开方数的非负性求最值

14. 当 x 取什么实数时，式子 $\sqrt{3x-1}+2$ 的取值最小？并求出这个最小值.

Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞（答案见141页）

拔尖角度1 利用二次根式的非负性解分式化简求值问题

15. 【中考·德州】先化简，再求值：

$\left(\frac{2}{m}-\frac{1}{n}\right)\div\left(\frac{m^2+n^2}{mn}-\frac{5n}{m}\right)\cdot\left(\frac{m}{2n}+\frac{2n}{m}+2\right)$，其中 $\sqrt{m+1}+(n-3)^2=0$.

拔尖角度2 利用二次根式的非负性求含字母式子的值

16. 请认真阅读下面这道例题的解法，并完成后面两问的作答.

例：已知 $y=\sqrt{2\,021-x}+\sqrt{x-2\,021}+2\,022$，求 $\frac{y}{x}$ 的值.

解：由 $\begin{cases}x-2\,021\geqslant 0,\\ 2\,021-x\geqslant 0\end{cases}$ 解得 $x=2\,021$，$\therefore y=2\,022$.

$\therefore \frac{y}{x}=\frac{2\,022}{2\,021}$.

（1）若 x,y 为实数，且 $y>\sqrt{x-3}+\sqrt{3-x}+2$，化简：$\frac{|1-y|}{y-1}$；

（2）若 $y\cdot\sqrt{2x-2}+\sqrt{1-x}=y+2$，求 $\sqrt{y^2+5x}$ 的值.

微信公众号 教辅资料站

谜语：两牛相斗（猜一数学概念）

趣味数学

谜底：对顶角

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第2课时　二次根式的性质

名师点金

$(\sqrt{a})^2$ 与 $\sqrt{a^2}$ 的异同点

		$(\sqrt{a})^2$	$\sqrt{a^2}$
不同点	a 的取值范围不同	a 只能取非负数，即 $a\geqslant 0$	a 可以取全体实数
	运算顺序不同	先求非负数 a 的算术平方根，然后再进行平方运算	先求实数 a 的平方，再求 a^2 的算术平方根
相同点	(1)都要进行平方和开平方两种运算；(2)运算的结果都是非负数，即 $(\sqrt{a})^2\geqslant 0$，$\sqrt{a^2}\geqslant 0$		

1 夯实基础·逐点练

☞(答案见141页)

知识点1　性质1：$(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant 0)$

1. 下列计算正确的是(　　)

A. $-(\sqrt{6})^2=-6$

B. $(\sqrt{3})^2=9$

C. $(\sqrt{16})^2=\pm 16$

D. $-\left(-\sqrt{\frac{16}{25}}\right)^2=\frac{16}{25}$

2. 把 $4\frac{1}{4}$ 写成一个正数的平方的形式是(　　)

A. $\left(2\frac{1}{2}\right)^2$　　B. $\left(\sqrt{\frac{17}{4}}\right)^2$

C. $\left(\pm 2\frac{1}{2}\right)^2$　　D. $\left(\pm\sqrt{\frac{17}{4}}\right)^2$

3. 化简 $|a-3|+(\sqrt{1-a})^2$ 的结果为(　　)

A. -2　　B. 2

C. $2a-4$　　D. $4-2a$

4. 【中考·常州】下列各数中与 $2+\sqrt{3}$ 的积是有理数的是(　　)

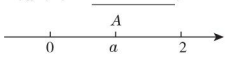
A. $2+\sqrt{3}$　　B. 2

C. $\sqrt{3}$　　D. $2-\sqrt{3}$

知识点2　性质2：$\sqrt{a^2}=a(a\geqslant 0)$

5. 若 $\sqrt{(a-2)^2}=2-a$，则 a 的取值范围是_____.

6. 【中考·广州】如图，数轴上点 A 表示的数为 a，化简：$a+\sqrt{a^2-4a+4}=$_____.



(第6题)

7. 【中考·凉山州】下列各式正确的是(　　)

A. $2a^2+3a^2=5a^4$

B. $a^2\cdot a=a^3$

C. $(a^2)^3=a^5$

D. $\sqrt{a^2}=a$

8. 【中考·绵阳】若 $\sqrt{a}=2$，则 a 的值为(　　)

A. -4　　B. 4

C. -2　　D. $\sqrt{2}$

9. 若式子 $\sqrt{(2-x)^2}+\sqrt{(x-4)^2}$ 的值是常数2，则 x 的取值范围是(　　)

A. $x\geqslant 4$

B. $x\leqslant 2$

C. $2\leqslant x\leqslant 4$

D. $x=2$ 或 $x=4$

***10.** 在 $\triangle ABC$ 中，a，b，c 为三角形的三边长，化简 $\sqrt{(a-b+c)^2}-2|c-a-b|$ 的结果为(　　)

A. $3a+b-c$

B. $-a-3b+3c$

C. $a+3b-c$

D. $2a$

易错点　运用 $\sqrt{a^2}=a(a\geqslant 0)$ 时，忽略 $a\geqslant 0$

11. 化简 $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$.

微信公众号
教辅资料站

趣味数学　数学对观察自然做出了重要的贡献，它解释了规律结构中简单的原始元素，而天体就是用这些原始元素建立起来的.
——开普勒

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞（答案见141页）

考查角度1 利用二次根式的性质进行计算

12. 计算：

(1) $\sqrt{5^2}-(-\sqrt{6})^2$；

(2) $\sqrt{2\times8}-\sqrt{(-3)^2}+3\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2}$；

(3) $(-1)^{101}+(\pi-3)^0+\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}-\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$.

考查角度2 利用二次根式的性质进行化简、求值

13. (1) 若已知 x,y,z 为实数，且 $\sqrt{x+3}+\sqrt{(y-1)^2}+\sqrt{z^2-2z+1}=0$，试求 $(x+y+z)^{2\,021}$ 的值.

(2) 若 x,y 为实数，且 $y>\sqrt{x-2}+\sqrt{2-x}+2$，化简：$\frac{1}{2-y}\sqrt{y^2-4y+4}+\sqrt{2x}$.

Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞（答案见141页）

拔尖角度1 利用二次根式的性质进行类比计算

14. 【中考 · 枣庄】观察下列各式：

$$\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}=1+\frac{1}{1\times2}=1+\left(1-\frac{1}{2}\right),$$

$$\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}=1+\frac{1}{2\times3}=1+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right),$$

$$\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}=1+\frac{1}{3\times4}=1+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right),$$

……

请利用你发现的规律，计算：

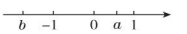
$$\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{2\,018^2}+\frac{1}{2\,019^2}},$$

其结果为_____.

拔尖角度2 利用二次根式的性质进行化简

（数形结合思想）

15. 已知实数 a,b 在数轴上对应点的位置如图所示，化简下面的式子：



（第15题）

$$\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}+\sqrt{(a-b)^2}+\sqrt{(b-1)^2}-\sqrt{(a-1)^2}.$$

微信公众号 教辅资料站

趣味数学

数学研究主要的目标是公众的利益和自然现象的解释.

——傅立叶

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

21.2　二次根式的乘除

第1课时　二次根式的乘法

名师点金

比较两个二次根式大小的方法

1. **被开方数比较法**，即先将根号外的非负因式平方后移到根号内，当两个二次根式都是正数时，被开方数大的二次根式大；
2. **平方法**，即把两个二次根式分别平方，当两个二次根式都是正数时，平方大的二次根式大；
3. **计算器求近似值法**，即先利用计算器求出两个二次根式的近似值，再进行比较.

Ⅰ 夯实基础·逐点练

☞(答案见141页)

知识点1　二次根式的乘法法则

1. 【中考·株洲】$\sqrt{2}\times\sqrt{8}=$(　　)

A. $4\sqrt{2}$　　B. 4

C. $\sqrt{10}$　　D. $2\sqrt{2}$

2. 【中考·海南】下列各数中，与$\sqrt{3}$的积为有理数的是(　　)

A. $\sqrt{2}$　　B. $3\sqrt{2}$　　C. $2\sqrt{3}$　　D. $2-\sqrt{3}$

3. 若等式$\sqrt{x-3}\cdot\sqrt{x-4}=\sqrt{(x-3)(x-4)}$成立，则$x$的取值范围是(　　)

A. $x\geqslant 3$　　B. $x\geqslant 4$

C. $3\leqslant x\leqslant 4$　　D. $x\leqslant 4$

4. 【中考·长沙】下列计算正确的是(　　)

A. $\sqrt{2}\times\sqrt{5}=\sqrt{10}$

B. $x^8\div x^2=x^4$

C. $(2a)^3=6a^3$

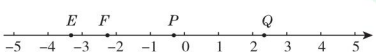
D. $3a^3\cdot 2a^2=6a^6$

5. 【中考·重庆】估计$(2\sqrt{30}-\sqrt{24})\cdot\sqrt{\frac{1}{6}}$的值应在(　　)

A. 1和2之间　　B. 2和3之间

C. 3和4之间　　D. 4和5之间

6. 如图，在数轴上表示数$\frac{\sqrt{5}}{5}\times(-5)$的点可能是(　　)



(第6题)

A. 点E　　B. 点F

C. 点P　　D. 点Q

知识点2　积的算术平方根的性质

7. 【中考·威海】计算$(\sqrt{12}-3)^0+\sqrt{27}-\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{-1}$的结果是(　　)

A. $1+\frac{8}{3}\sqrt{3}$　　B. $1+2\sqrt{3}$

C. $\sqrt{3}$　　D. $1+4\sqrt{3}$

8. 若$\sqrt{(x+3)(x-2)}=\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{x-2}$，则$x$的取值范围是(　　)

A. $x\geqslant -3$　　B. $x\geqslant 2$

C. $x>-3$　　D. $x>2$

9. 若$\sqrt{44}=2\sqrt{a}$，$\sqrt{54}=3\sqrt{b}$，则$a+b$之值为(　　)

A. 13　　B. 17　　C. 24　　D. 40

10. 下列计算正确的是(　　)

A. $\sqrt{(-16)\times(-9)}=\sqrt{-16}\times\sqrt{-9}$

B. $\sqrt{25a^4b^2}=5a^2b$

C. $\sqrt{8^2+5^2}=8+5$

D. $\sqrt{25^2-24^2}=7$

*11. 已知$a=\sqrt{2}$，$b=\sqrt{10}$，用含a，b的代数式表示$\sqrt{20}$，这个代数式是(　　)

A. $a+b$　　B. ab　　C. $2a$　　D. $2b$

易错点　忽视隐含条件，误将负数直接移到根号内

12. 将$a\sqrt{-\frac{1}{a}}$根号外的因式移到根号内为(　　)

A. $\sqrt{-a}$　　B. $-\sqrt{-a}$

C. $-\sqrt{a}$　　D. $\sqrt{a}$

趣味数学　腊月的一天，郑板桥和蔡州官同游苏州，见有一户人家贴了这样一副对联：二三四五，六七八九.郑板桥立即派人送来了一些衣服、米面和几斤肉.(待续)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞（答案见142页）

考查角度1 利用二次根式的乘法法则及性质进行计算

13. 计算：

(1)$(-2)^2-\sqrt{9}+(\sqrt{2}-1)^0+\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$；

(2)$\frac{3}{2}\sqrt{20}\times(-\sqrt{15})\times\left(-\frac{1}{3}\sqrt{48}\right)$；

(3)$\frac{2}{b}\sqrt{ab^3}\cdot\left(-\frac{3}{2}\sqrt{a^3b}\cdot3\sqrt{\frac{a}{b}}\right)(a>0,b>0)$.

考查角度2 利用二次根式的相关性质求值

14. 已知 x 为奇数，且 $\sqrt{(10-x)(x-8)}=\sqrt{10-x}\cdot\sqrt{x-8}$，求 $\sqrt{1+2x+x^2}\cdot\sqrt{\frac{x^2-6x+9}{x+1}}$ 的值.

考查角度3 利用二次根式的乘法性质比较大小

15. 比较大小：

(1)$5\sqrt{3}$ 和 $3\sqrt{5}$；　　(2)$3-6\sqrt{5}$ 和 $3-5\sqrt{6}$.

Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞（答案见142页）

拔尖角度1 利用二次根式的性质探究规律（从特殊到一般的思想）

16. 观察下列按一定规律排列的二次根式：

$\sqrt{2},\sqrt{6},\sqrt{12},\sqrt{20},\cdots$.

(1)根据你发现的规律猜想第 n（n 是正整数）个二次根式是多少；

(2)求前6个二次根式的积.

拔尖角度2 利用二次根式的性质巧化简（配方法、类比思想）

17. 先阅读下面的解答过程，然后再解题：

形如 $\sqrt{m\pm2\sqrt{n}}$ 的化简，只要我们找到两个正数 a，$b(a>b)$，使 $(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2=m$，$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{n}$，那么便有：$\sqrt{m\pm2\sqrt{n}}=\sqrt{(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})^2}=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$.

例如：化简 $\sqrt{7+2\sqrt{12}}$.

解：$\sqrt{7+2\sqrt{12}}$，这里 $m=7,n=12$.

$\because(\sqrt{4})^2+(\sqrt{3})^2=7,\sqrt{4}\times\sqrt{3}=\sqrt{12}$，

$\therefore\sqrt{7+2\sqrt{12}}=\sqrt{(\sqrt{4}+\sqrt{3})^2}=2+\sqrt{3}$.

利用上面的方法化简：$\sqrt{13-2\sqrt{42}}$.

微信公众号 教辅资料站

蔡州官问郑板桥怎么知道这家人缺少衣服和粮食，郑板桥说："他家大门上不明白写着嘛，你看那副对联是'二三四五，六七八九'，这不是缺一（衣）少十（食）吗？"

趣味数学

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

第2课时　二次根式的除法

名师点金

利用商的算术平方根化简二次根式的方法

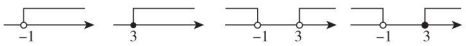
1. 若被开方数的分母是一个完全平方数(式),则可以直接利用商的算术平方根的性质将分子、分母分别开平方,然后再求商;
2. 若被开方数的分母不是完全平方数(式),则可根据分数(式)的基本性质,将分数(式)的分子、分母同时乘一个不等于零的数(整式),使分母变成一个完全平方数(式),然后利用商的算术平方根的性质进行化简.

1 夯实基础·逐点练 ☞(答案见142页)

知识点1 二次根式的除法法则

1. 【中考·安徽】计算$\sqrt{18}\div\sqrt{2}$的结果是_____.

2. 【中考·绵阳】等式$\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+1}}=\sqrt{\frac{x-3}{x+1}}$成立的$x$的取值范围在数轴上可表示为(　　)



A　　B　　C　　D

3. 计算$\sqrt{\frac{3}{4}}\div\sqrt{\frac{1}{6}}$的结果是(　　)

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$　　C. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. 【中考·包头】下列计算结果正确的是(　　)

A. $2+\sqrt{3}=2\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{8}\div\sqrt{2}=2$

C. $(-2a^2)^3=-6a^6$　　D. $(a+1)^2=a^2+1$

5. 小明的作业本上有以下四题:①$\sqrt{16a^4}=4a^2$;②$\sqrt{5a}\cdot\sqrt{10a}=5\sqrt{2}a$;③$a\sqrt{\frac{1}{a}}=\sqrt{a^2\cdot\frac{1}{a}}=\sqrt{a}$;④$\sqrt{8a}\div\sqrt{2a}=4$. 做错的题是(　　)

A. ①　　B. ②　　C. ③　　D. ④

6. 计算$\sqrt{12}\div\sqrt{\frac{27}{2}}\times\sqrt{\frac{1}{36}}$的值为(　　)

A. $\sqrt{3}$　　B. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{9}$　　D. $\frac{3}{2}$

知识点2 商的算术平方根的性质

7. 【中考·临安区】下列各式计算正确的是(　　)

A. $a^{12}\div a^6=a^2$　　B. $(x+y)^2=x^2+y^2$

C. $\frac{x-2}{4-x^2}=\frac{1}{2+x}$　　D. $\sqrt{\frac{3}{5}}\div\sqrt{5}=\frac{\sqrt{3}}{5}$

8. 若$\sqrt{\frac{1-a}{a^2}}=\frac{\sqrt{1-a}}{a}$,则$a$的取值范围是(　　)

A. $a\leqslant 0$　　B. $a<0$

C. $a>0$　　D. $0<a\leqslant 1$

9. 【中考·达州】下列判断正确的是(　　)

A. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}<0.5$

B. 若$ab=0$,则$a=b=0$

C. $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

D. $3a$可以表示边长为a的等边三角形的周长

10. 【中考·南充】下列计算正确的是(　　)

A. $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\sqrt{-x^3}=x\sqrt{-x}$　　D. $\sqrt{x^2}=x$

***11.** 设$\sqrt{5}=a$,$\sqrt{6}=b$,用含a,b的式子表示$\sqrt{2.7}$,则下列表示正确的是(　　)

A. $0.3ab$　　B. $3ab$　　C. $0.1ab^2$　　D. $0.1a^2b$

知识点3 最简二次根式

12. 【中考·山西】下列二次根式是最简二次根式的是(　　)

A. $\sqrt{\frac{1}{2}}$　　B. $\sqrt{\frac{12}{7}}$　　C. $\sqrt{8}$　　D. $\sqrt{3}$

13. 【中考·锦州】下列二次根式中属于最简二次根式的是(　　)

A. $\sqrt{24}$　　B. $\sqrt{36}$　　C. $\sqrt{\frac{a}{b}}$　　D. $\sqrt{a+4}$

***14.** 已知$xy<0$,化简二次根式$x\sqrt{-\frac{y}{x^2}}$的正确结果为(　　)

A. $\sqrt{y}$　　B. $\sqrt{-y}$　　C. $-\sqrt{y}$　　D. $-\sqrt{-y}$

易错点 在计算过程中由于弄错运算顺序导致错误

15. 计算:$\sqrt{2^3\times 3}\div\sqrt{2\times 3}\times\frac{1}{\sqrt{2\times 3}}$.

微信公众号 教辅资料站

趣味数学　笑话:老师发现一名学生作业本上的姓名是"木(123)".老师问:"这是谁的作业本?"一名学生说:"是我的!"老师:"你叫什么名字?"(待续)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法·提升练 ☞（答案见142页）

考查角度1 利用二次根式的乘除法法则计算

16. 计算：

(1) $\sqrt{45}\div\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{5}}\times\frac{3}{2}\sqrt{5}$；

(2) $3\sqrt{2\frac{1}{3}}\times\left(-\frac{1}{8}\sqrt{15}\right)\div\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{5}}$.

考查角度2 利用商的算术平方根的性质求代数式的值

17. 已知 $\sqrt{\frac{x-6}{9-x}}=\frac{\sqrt{x-6}}{\sqrt{9-x}}$，且 x 为奇数，求 $(1+x)\sqrt{\frac{x^2-5x+4}{x^2-1}}$ 的值.

Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞（答案见142页）

拔尖角度1 灵活运用二次根式的性质将给定的数用含有字母的代数式表示出来

18. 老师在讲解“二次根式及其性质”时，在黑板上写下了下面的一题作为练习：

已知 $\sqrt{7}=a$，$\sqrt{70}=b$，用含有 a，b 的代数式表示 $\sqrt{4.9}$.

甲的解法：$\sqrt{4.9}=\sqrt{\frac{49}{10}}=\sqrt{\frac{49\times10}{10\times10}}=\frac{\sqrt{7\times70}}{10}=\frac{\sqrt{7}\times\sqrt{70}}{10}=\frac{ab}{10}$；

乙的解法：$\sqrt{4.9}=\sqrt{49\times0.1}=7\sqrt{0.1}$，

因为 $\sqrt{0.1}=\sqrt{\frac{1}{10}}=\sqrt{\frac{7}{70}}=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{70}}=\frac{a}{b}$，

所以 $\sqrt{4.9}=7\sqrt{0.1}=7\cdot\frac{a}{b}=\frac{7a}{b}$.

请你解答下面的问题：

(1) 甲、乙两人的解法都正确吗？

(2) 请你再给出一种不同于上面两人的解法.

拔尖角度2 利用二次根式的乘除法法则进行分母有理化（类比思想）

19. 【中考·随州】“分母有理化”是我们常用的一种化简的方法，如：$\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{(2+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=7+4\sqrt{3}$，除此之外，我们也可以用平方之后再开方的方式来化简一些有特点的无理数，如：对于 $\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}$，设 $x=\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}$，易知 $\sqrt{3+\sqrt{5}}>\sqrt{3-\sqrt{5}}$，故 $x>0$，由 $x^2=(\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}})^2=3+\sqrt{5}+3-\sqrt{5}-2\sqrt{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}=2$，解得 $x=\sqrt{2}$，即 $\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}=\sqrt{2}$. 根据以上方法，化简 $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\sqrt{6-3\sqrt{3}}-\sqrt{6+3\sqrt{3}}$ 后的结果为（　　）

A. $5+3\sqrt{6}$　　B. $5+\sqrt{6}$

C. $5-\sqrt{6}$　　D. $5-3\sqrt{6}$

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

阶段核心方法

比较含二次根式的式子的大小的八种方法 ☞(答案见142页)

名师点金

含二次根式的数(或式)的大小比较,是教与学的一个难点,如能根据二次根式的特征,灵活地、有针对性地采用不同的方法,将会得到简捷的解法.较常见的比较方法有:**平方法、作商法、分子有理化法、分母有理化法、作差法、倒数法、特殊值法、定义法.**

方法1　平方法

1. 比较$\sqrt{6}+\sqrt{11}$与$\sqrt{14}+\sqrt{3}$的大小.

方法2　作商法

2. 比较$\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+2}$与$\frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}+3}$的大小.

方法3　分子有理化法

3. 比较$\sqrt{15}-\sqrt{14}$与$\sqrt{14}-\sqrt{13}$的大小.

方法4　分母有理化法

4. 比较$\frac{1}{2-\sqrt{3}}$与$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$的大小.

方法5　作差法

5. 比较$\frac{\sqrt{19}-1}{3}$与$\frac{2}{3}$的大小.

方法6　倒数法

6. 已知$x=\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}$,$y=\sqrt{n+2}-\sqrt{n}$,试比较x,y的大小.

方法7　特殊值法

7. 用“<”将x,$\frac{1}{x}$,x^2,$\sqrt{x}$连接起来为_____(0<x<1).

方法8　定义法

8. 比较$\sqrt{5-a}$与$\sqrt[3]{a-6}$的大小.

微信公众号
教辅资料站

趣味数学　钻石大盗:大仲马,法国著名作家,作品有《基督山伯爵》和《三个火枪手》等.在一篇描写一桩离奇偷盗案件的小说里,提到一名首饰匠.(待续)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

21.3 二次根式的加减

第1课时 二次根式的加减

名师点金

二次根式加减运算的步骤

化简：将二次根式化成最简二次根式；

判别：找出被开方数相同的二次根式；

合并：类似于合并同类项，将同类二次根式合并.

Ⅰ 夯实基础·逐点练 ☞（答案见143页）

知识点1 同类二次根式

1. 【中考·巴中】下列二次根式中，与$\sqrt{3}$是同类二次根式的是（　　）

A. $\sqrt{18}$　　B. $\sqrt{\frac{1}{3}}$　　C. $\sqrt{24}$　　D. $\sqrt{0.3}$

2. 以下二次根式：① $\sqrt{24}$；② $\sqrt{2^2}$；③ $\sqrt{\frac{2}{3}}$；④ $\sqrt{27}$中，是同类二次根式的是（　　）

A. ①和②　　B. ②和③

C. ①和③　　D. ③和④

3. 下列各组二次根式化简成最简二次根式后是同类二次根式的是（　　）

A. $\sqrt{ab}$和$\sqrt{ab^2}$　　B. $\sqrt{mn}$和$\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}$

C. $\sqrt{m^2+n^2}$和$\sqrt{m^2-n^2}$　　D. $\sqrt{\frac{8}{9}a^3b^2}$和$\sqrt{\frac{8}{9}a^3b^4}$

4. 下列说法不正确的是（　　）

A. $\sqrt{2}+\sqrt{3}<\pi$

B. 全体实数与数轴上的点一一对应

C. 当$x<0$时，$\sqrt{x^2}=-x$

D. $\sqrt{12}$与$4\sqrt{\frac{1}{3}}$是同类二次根式

5. 如果最简二次根式$\sqrt{x+2}$与$\sqrt{3x}$是同类二次根式，那么x的值是（　　）

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

6. 若最简二次根式$\sqrt{2m+n}$与$\sqrt[m-n-1]{m+1}$是同类二次根式，则$\sqrt{m+n}$的值为（　　）

A. 1　　B. 4　　C. 5　　D. $\sqrt{5}$

知识点2 二次根式的加减法

7. 【中考·河南】下列计算正确的是（　　）

A. $2a+3a=6a$　　B. $(-3a)^2=6a^2$

C. $(x-y)^2=x^2-y^2$　　D. $3\sqrt{2}-\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

8. 【中考·兰州】计算：$\sqrt{12}-\sqrt{3}=$（　　）

A. $\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{3}$

C. 3　　D. $4\sqrt{3}$

9. 【中考·自贡】下列计算正确的是（　　）

A. $(a-b)^2=a^2-b^2$　　B. $x+2y=3xy$

C. $\sqrt{18}-3\sqrt{2}=0$　　D. $(-a^3)^2=-a^6$

10. 【中考·常德】下列运算正确的是（　　）

A. $\sqrt{3}+\sqrt{4}=\sqrt{7}$　　B. $\sqrt{12}=3\sqrt{2}$

C. $\sqrt{(-2)^2}=-2$　　D. $\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{21}}{3}$

11. 【中考·聊城】下列各式不成立的是（　　）

A. $\sqrt{18}-\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{7}{3}\sqrt{2}$

B. $\sqrt{2+\frac{2}{3}}=2\sqrt{\frac{2}{3}}$

C. $\frac{\sqrt{8}+\sqrt{18}}{2}=\sqrt{4}+\sqrt{9}=5$

D. $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$

***12.** 若$\sqrt{19}$的整数部分是a，小数部分是b，则$\sqrt{19}a+b=$_____.

易错点 忽视二次根式的隐含条件而致错

13. 化简$\sqrt{-a^3}-a\sqrt{-\frac{1}{a}}$.

微信公众号 教辅资料站

此人曾偷过许多贵妇人的珍贵宝石，他用过的一个办法是改变宝石的位置，即使是少了几颗宝石也叫人难以察觉.（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞(答案见 143 页)

考查角度 1　利用二次根式的加减法法则计算

14. 计算:

(1)【中考 · 大连】$(\sqrt{3}+2)^2-\sqrt{48}+2^{-2}$;

(2)$(-1)^{2n}+\sqrt{8}-|\sqrt{2}|-(\pi-3.14)^0$($n$ 为正整数);

(3)$\frac{2}{3}\sqrt{9x}+6\sqrt{\frac{x}{4}}-2x\sqrt{\frac{1}{x}}$.

考查角度 2　利用二次根式的运算法则解分式化简求值问题

15. 【中考 · 绵阳】先化简,再求值:$\left(\frac{a}{a^2-b^2}-\frac{1}{a+b}\right)\div\frac{b}{b-a}$,其中 $a=\sqrt{2}$,$b=2-\sqrt{2}$.

Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞(答案见 143 页)

拔尖角度 1　利用二次根式的运算法则求代数式的值(整体思想)

16. 已知 $x=\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$,$y=\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$,求 x^2+y^2 的值.

拔尖角度 2　利用二次根式的运算法则求代数式的值

17. 已知 $7+\sqrt{5}$ 和 $7-\sqrt{5}$ 的小数部分分别为 a,b,试求代数式 $ab-a+4b-3$ 的值.

拔尖角度 3　利用二次根式的性质解三角形问题

18. 已知 a,b,c 满足 $|a-\sqrt{8}|+\sqrt{b-\sqrt{18}}+(c-\sqrt{32})^2=0$.

(1)求 a,b,c 的值.

(2)以 a,b,c 的值为边长的三条线段能构成三角形吗?并说明你的理由.

微信公众号
教辅资料站

趣味数学　一位贵妇人有一枚镶有 25 颗钻石的十字形古代别针,她平日里总喜欢点数别针上的钻石,从上往下数到中央,然后向左、向右和向下数下去,这三种情况的结果都是 13.(待续)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

第2课时　二次根式的混合运算 ☞（答案见143页）

名师点金

二次根式的混合运算与有理数运算类似，先乘方，再乘除，最后加减，有括号的先算括号里面的，运用运算定律可以改变运算顺序. 整式的运算法则在二次根式运算中仍然适用. 多项式乘法法则及乘法公式在二次根式运算中仍然适用.

题型1 二次根式的混合运算

1. 【中考·十堰】下列运算正确的是(　　)

A. $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{5}$　　B. $2\sqrt{2}\times3\sqrt{2}=6\sqrt{2}$

C. $\sqrt{8}\div\sqrt{2}=2$　　D. $3\sqrt{2}-\sqrt{2}=3$

2. 【中考·聊城】下列计算正确的是(　　)

A. $3\sqrt{10}-2\sqrt{5}=\sqrt{5}$

B. $\sqrt{\frac{7}{11}}\cdot\left(\sqrt{\frac{11}{7}}\div\sqrt{\frac{1}{11}}\right)=\sqrt{11}$

C. $(\sqrt{75}-\sqrt{15})\div\sqrt{3}=2\sqrt{5}$

D. $\frac{1}{3}\sqrt{18}-3\sqrt{\frac{8}{9}}=\sqrt{2}$

3. 计算$\left(5\sqrt{\frac{1}{5}}-2\sqrt{45}\right)\div(-\sqrt{5})$的结果为(　　)

A. 5　　B. -5　　C. 7　　D. -7

4. 【中考·十堰】如图是按一定规律排成的三角形数阵，按图中数阵的排列规律，第9行从左至右第5个数是(　　)

1

$\sqrt{2}$　$\sqrt{3}$

2　$\sqrt{5}$　$\sqrt{6}$

$\sqrt{7}$　$2\sqrt{2}$　3　$\sqrt{10}$

……

（第4题）

A. $2\sqrt{10}$　　B. $\sqrt{41}$　　C. $5\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{51}$

5. 计算下列各题：

(1) $(-2)^2-|-3|+\sqrt{2}\times\sqrt{8}+(-6)^0$；

(2) $\sqrt{18}-\sqrt{\frac{9}{2}}-\frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{\sqrt{3}}+(\sqrt{3}-2)^0+\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$.

题型2 乘法公式在二次根式中的应用

6. 【中考·滨州】下列计算：

①$(\sqrt{2})^2=2$；②$\sqrt{(-2)^2}=2$；

③$(-2\sqrt{3})^2=12$；④$(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})=-1$.

其中结果正确的个数为(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

7. 【中考·荆州】下列运算正确的是(　　)

A. $x-\frac{1}{3}x=\frac{2}{3}$　　B. $a^3\cdot(-a^2)=-a^6$

C. $(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)=4$　　D. $-(a^2)^2=a^4$

8. 【中考·孝感】已知$x=2-\sqrt{3}$，则代数式$(7+4\sqrt{3})x^2+(2+\sqrt{3})x+\sqrt{3}$的值是(　　)

A. 0　　B. $\sqrt{3}$

C. $2+\sqrt{3}$　　D. $2-\sqrt{3}$

9. 【中考·益阳】观察下列等式：

①$3-2\sqrt{2}=(\sqrt{2}-1)^2$，

②$5-2\sqrt{6}=(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$，

③$7-2\sqrt{12}=(\sqrt{4}-\sqrt{3})^2$，

……

请你根据以上规律，写出第6个等式：_____.

10. 计算：

(1) $(2-\sqrt{3})^{2022}\times(2+\sqrt{3})^{2021}-2\left|-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|-(-\sqrt{2})^0$；

(2) 【中考·大庆】$(\sqrt{2}+1)^2-\pi^0-|1-\sqrt{2}|$；

微信公众号 教辅资料站

这位贵妇人将别针拿去修理时，无意中向首饰匠透露了点数钻石的方式. 交还别针时，首饰匠彬彬有礼地当面点数给她看.（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(3)$(a+2\sqrt{ab}+b)\div(\sqrt{a}+\sqrt{b})-(\sqrt{b}-\sqrt{a})$;

(4)【中考·盐城】$(3-\sqrt{7})(3+\sqrt{7})+\sqrt{2}(2-\sqrt{2})$.

题型 3 乘法公式在二次根式中的巧算

11. 已知 $a=\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}$,$b=\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}$,求 $\sqrt{a^2+b^2+7}$ 的值.

12. 已知 $x=\sqrt{3}-\sqrt{2}$,$y=\sqrt{3}+\sqrt{2}$,求 x^3y+xy^3 的值.

题型 4 整体思想在二次根式求值中的巧用

13. 利用乘法公式的变形解决下面的问题:

已知 $\sqrt{2\,021+x}+\sqrt{9+x}=1\,006$,求 $\sqrt{2\,021+x}-\sqrt{9+x}$ 的值.

题型 5 二次根式的混合运算在计算求值中的应用

14. 【中考·呼和浩特】

(1)计算:$\left(1\dfrac{1}{2}\right)\div\left(-\dfrac{3}{4}\right)+\sqrt{3}\times\sqrt{12}-\left(\dfrac{1}{1-\sqrt{3}}\right)^{-2}$;

(2)先化简,再求值:$\left(\dfrac{5x+3y}{x^2-y^2}+\dfrac{2x}{y^2-x^2}\right)\div\dfrac{x}{3(x-y)}$,其中 $x=3\sqrt{3}$,$y=\dfrac{1}{2}$.

微信公众号 教辅资料站

趣味数学　岁月流逝,贵妇人依旧像往常一样,用这种方式点数她的钻石,每次的结果都是 13. 她丝毫不觉有异,但别针上 2 颗最好的钻石已经被偷走了.(待续)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第3课时　二次根式运算常见的题型 ☞（答案见144页）

名师点金

进行二次根式运算时的一般步骤

1. 先将二次根式适当化简；
2. 二次根式的乘法可以参照整式的乘法进行运算；
3. 对于二次根式的除法运算，通常先将其写成分数（或分式）的形式，然后通过分母有理化进行运算；
4. 二次根式的加减法与整式的加减法类似，即在化简的基础上去括号与合并被开方数相同的二次根式；
5. 运算结果一般要化成最简形式.

题型1 利用运算法则进行计算

1. 计算：

(1) $(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)-\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}+|1-\sqrt{2}|-(\pi-2)^{0}+\sqrt{8}$；

(2) $(\sqrt{6}-\sqrt{5})^{2\,021}\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{5})^{2\,022}-2\left|-\frac{\sqrt{5}}{2}\right|$.

题型2 利用公式进行计算

2. 计算：

(1) $(\sqrt{3}-1)^{2}+(\sqrt{3}+2)^{2}-2(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+2)$；

(2) $\frac{a\sqrt{a}-a\sqrt{b}}{a-\sqrt{ab}}-\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

题型3 利用二次根式的运算法则求代数式的值

3. 已知 $5+\sqrt{3}$ 和 $5-\sqrt{3}$ 的小数部分分别为 a,b，试求代数式 $ab-a+4b-3$ 的值.

题型4 利用化简求值

4. 【中考·桂林】先化简，再求值：$\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)\div\frac{x^{2}-2xy+y^{2}}{2xy}-\frac{1}{y-x}$，其中 $x=2+\sqrt{2}$，$y=2$.

题型5 利用整体思想巧求值

5. 已知 $x=1-\sqrt{2}$，$y=1+\sqrt{2}$，求 $x^{2}+y^{2}-xy-2x+2y$ 的值.

题型6 利用倒数法求值

6. 已知 $x+\frac{1}{x}=\sqrt{5}$，求 $\frac{x^{2}}{x^{4}+x^{2}+1}$ 的值.

更多提分招数详见《极速提分法》第1页.

试问：这个疫猾的首饰匠是用什么办法改变钻石的排列以掩盖他的罪行的呢？
答案：把左边、右边和下边的钻石各拿走1颗，然后在上面添上1颗.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

阶段核心技巧

常见二次根式化简求值的十一种技巧 ☞(答案见 144 页)

名师点金

在有理数中学习的法则、性质、运算律、公式等在二次根式中仍然适用,运算的最后结果一定要化简到最简形式. 化简时要注意题中所给出的条件和隐含条件,根据题目的特点,选取适当的解题方法.

技巧 1 估算法

1. 估计 $\sqrt{32}\times\sqrt{\frac{1}{4}}+\sqrt{18}$ 的运算结果应在(　　)

A. 5 到 6 之间　　B. 6 到 7 之间

C. 7 到 8 之间　　D. 8 到 9 之间

技巧 2 公式法

2. 计算:$(5+\sqrt{6})\times(5\sqrt{2}-2\sqrt{3})$.

技巧 3 拆项法

3. 计算:$\dfrac{\sqrt{6}+4\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{(\sqrt{6}+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$. [提示:$\sqrt{6}+4\sqrt{3}+3\sqrt{2}=(\sqrt{6}+\sqrt{3})+3(\sqrt{3}+\sqrt{2})$]

技巧 4 倒数法

4. 化简:$\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}+2}{\sqrt{3}+2\sqrt{2}+1}$.

技巧 5 约分法

5. 计算:$\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2+\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{15}}$.

技巧 6 配方法

6. 若 a,b 为实数,且 $b=\sqrt{3-5a}+\sqrt{5a-3}+15$,试求 $\sqrt{\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+2}-\sqrt{\frac{b}{a}+\frac{a}{b}-2}$ 的值.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

技巧7 平方法

7. 化简：$\dfrac{\sqrt{\sqrt{10}+3}+\sqrt{\sqrt{10}-3}}{\sqrt{\sqrt{10}+1}}$.

技巧8 换元法

8. 已知 $n=\sqrt{2}+1$，求 $\dfrac{n+2+\sqrt{n^2-4}}{n+2-\sqrt{n^2-4}}+\dfrac{n+2-\sqrt{n^2-4}}{n+2+\sqrt{n^2-4}}$ 的值.

技巧9 整体代入法

9. 已知 $x=\dfrac{1}{3-2\sqrt{2}}$，$y=\dfrac{1}{3+2\sqrt{2}}$，求 $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}-4$ 的值.

技巧10 先判后算法

10. 已知 $a+b=-6$，$ab=5$，求 $b\sqrt{\dfrac{b}{a}}+a\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ 的值.

技巧11 辅元法

11. 已知 $x:y:z=1:2:3$（$x>0$，$y>0$，$z>0$），求 $\dfrac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x+z}+\sqrt{x+2y}}$ 的值.

更多提分招数详见《极速提分法》第2页.

谜语：修路不能坑坑洼洼（猜一数学名词）

谜底：平行

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

全章热门考点整合应用

☞(答案见 145 页)

名师点金

中考主要考查二次根式的有关概念及性质,二次根式的计算与化简,多以填空题、选择题或计算题的形式出现,有时也与其他知识结合在一起综合考查. 二次根式的内容是中考热点之一,其主要考点可概括为:三个概念、四个性质、一个运算、两个技巧.

考点(1) 三个概念

概念 1 二次根式

1. 若 $\sqrt{x-3}-\sqrt{3-x}=(x+y)^2$,求 $x-y$ 的值.

概念 2 最简二次根式

2. 二次根式 4 $\sqrt{5a}$, $\sqrt{2a^3}$, $\sqrt{8a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{\frac{1}{3}}$(其中 a, b 均大于或等于 0)中,是最简二次根式的有(　　)

A. 4 个　　B. 3 个　　C. 2 个　　D. 1 个

概念 3 同类二次根式

3. 下列式子中,与$\sqrt{2}$是同类二次根式的是(　　)

A. $\sqrt{4}$　　B. $\sqrt{\frac{1}{2}}$

C. $\sqrt{2}-1$　　D. $\sqrt{20}$

4. 若最简二次根式 $\sqrt[a+b]{b}$ 与 $\sqrt{3a+b}$ 是同类二次根式,则 $a=$_____, $b=$_____.

考点(2) 四个性质

性质 1 $(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant 0)$

5. 下列计算正确的是(　　)

A. $-(\sqrt{7})^2=-7$　　B. $(\sqrt{5})^2=25$

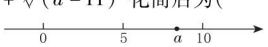
C. $(\sqrt{9})^2=\pm 9$　　D. $-\left(-\sqrt{\frac{9}{16}}\right)^2=\frac{9}{16}$

6. 在实数范围内分解因式:$x^4-9=$_____.

7. 要使等式$(\sqrt{8-x})^2=x-8$成立,则 $x=$_____.

性质 2 $\sqrt{a^2}=a(a\geqslant 0)$

8. 实数 a 在数轴上对应点的位置如图所示,则 $\sqrt{(a-4)^2}+\sqrt{(a-11)^2}$ 化简后为(　　)



(第 8 题)

A. 7　　B. -7

C. $2a-15$　　D. 无法确定

9. 已知三角形的两边长分别为 3 和 5,第三边长为 c,化简:$\sqrt{c^2-4c+4}-\sqrt{\frac{1}{4}c^2-4c+16}$.

10. 先化简再求值:当 $a=5$ 时,求 $a+\sqrt{1-2a+a^2}$ 的值,甲、乙两人的解答如下.

甲的解答:原式$=a+\sqrt{(1-a)^2}=a+(1-a)=1$;

乙的解答:原式$=a+\sqrt{(1-a)^2}=a+(a-1)=2a-1=9$.

请问谁的解答正确?请说明理由.

性质 3 积的算术平方根

11. 化简$\sqrt{24}$的结果是(　　)

A. $4\sqrt{6}$　　B. $2\sqrt{6}$　　C. $6\sqrt{2}$　　D. $8\sqrt{3}$

12. 能使$\sqrt{(3-a)(a+1)}=\sqrt{3-a}\cdot\sqrt{a+1}$成立的所有整数 a 的和是_____.

趣味数学　纯数学这门科学在现代发展阶段,可以说是人类精神之最具独创性的创造.

——怀德海

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

性质4 商的算术平方根

13. 化简下列二次根式：

(1) $\sqrt{4\frac{4}{9}}$；　(2) $\sqrt{\frac{121b^5}{16a^2}}(a<0,b>0)$.

考点3 一个运算——二次根式的运算

14. 计算：

(1) $(3\sqrt{3}+\sqrt{32})\times(\sqrt{27}-4\sqrt{2})$；

(2)【中考·临沂】$(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-\sqrt{2}+1)$；

(3) $\frac{3}{10}\sqrt{\frac{5ab}{c}}\div\left(\frac{3}{5}\sqrt{\frac{b}{2ac}}\right)\times\left(-2\sqrt{\frac{15bc}{a}}\right)+\sqrt{abc}$.

考点4 两个技巧

技巧1 倒数法比较大小

15. 比较 $\sqrt{2\,022}-\sqrt{2\,021}$ 与 $\sqrt{2\,021}-\sqrt{2\,020}$ 的大小.

技巧2 整体代入求值

16.【中考·菏泽】已知 $x=\sqrt{6}+\sqrt{2}$，那么 $x^2-2\sqrt{2}x$ 的值是_____.

17. 已知 $x=\sqrt{2}-1,y=\sqrt{2}+1$，求 $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$ 的值.

18. 已知 $x+y=-8,xy=8$，求 $y\sqrt{\frac{y}{x}}+x\sqrt{\frac{x}{y}}$ 的值.

19. 已知 $a-b=\sqrt{3}+\sqrt{2},b-c=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，求 $2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$ 的值.

在数学领域中，提出问题比解答问题更为重要。

趣味数学

——康托尔

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

22.1 一元二次方程

第1课时 认识一元二次方程

名师点金

判别一元二次方程的两种方法

1. **根据定义要把握三点**：一是整式方程；二是含有一个未知数；三是未知数的最高次数是2.
2. **根据一般形式要把握两点**：第一，能化成 $ax^2+bx+c=0$ 的形式，且 a 一定不能为0，而 b，c 都可以为0；第二，判断是否为一元二次方程与其解的情况无关.

Ⅰ 夯实基础·逐点练 (答案见146页)

知识点1 一元二次方程的定义

1. 下列关于 x 的方程一定是一元二次方程的是(　　)

A. $ax^2+bx+c=0$　　B. $x^2+1-x^2=0$

C. $x^2+\frac{1}{x}=2$　　D. $x^2-x-2=0$

***2.** 如果方程 $(m-3)x^{m^2-7}-x+3=0$ 是关于 x 的一元二次方程，那么 m 的值为(　　)

A. ±3　　B. 3

C. -3　　D. 以上都不对

知识点2 一元二次方程的一般形式

3. 把方程 $x(x+2)=5(x-2)$ 化成一般形式，则 a，b，c 的值分别是(　　)

A. 1，-3，10　　B. 1，7，-10

C. 1，-5，12　　D. 1，3，2

4. 若方程 $2x^2+mx=4x+2$ 中不含 x 的一次项，则 $m=$(　　)

A. 0　　B. 4　　C. -4　　D. ±4

知识点3 一元二次方程的解(根)

5. 【中考·资阳】a 是方程 $2x^2=x+4$ 的一个根，则代数式 $4a^2-2a$ 的值是_____.

6. 若一元二次方程 $x^2-2kx+k^2=0$ 的一根为 $x=-1$，则 k 的值为(　　)

A. -1　　B. 0　　C. 1或-1　　D. 2或0

7. 老师出示了小黑板上的题目(如图)后，小敏回答："方程有一个根为-4."小聪回答："方程有一个根为3."你认为(　　)

方程 $x^2+x-12=0$ 的根是_____.

(第7题)

A. 只有小敏回答正确　　B. 只有小聪回答正确

C. 小敏、小聪回答都正确　　D. 小敏、小聪回答都不正确

知识点4 利用一元二次方程建立实际问题模型

8. 【中考·日照】某省加快新旧动能转换，促进企业创新发展，某企业一月份的营业额是1 000万元，月平均增长率相同，第一季度的总营业额是3 990万元. 若设月平均增长率是 x，那么可列出的方程是(　　)

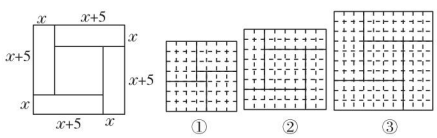
A. $1\,000(1+x)^2=3\,990$

B. $1\,000+1\,000(1+x)+1\,000(1+x)^2=3\,990$

C. $1000(1+2x)=3\,990$

D. $1\,000+1\,000(1+x)+1\,000(1+2x)=3\,990$

***9.** 【中考·宁夏】你知道吗，对于一元二次方程，我国古代数学家还研究过其几何解法呢！以方程 $x^2+5x-14=0$ 即 $x(x+5)=14$ 为例加以说明. 数学家赵爽(公元3世纪~4世纪)在其所著的《勾股圆方图注》中记载的方法是：构造图(如下面左图)中大正方形的面积是 $(x+x+5)^2$，其中它又等于四个矩形的面积加上中间小正方形的面积，即 $4\times14+5^2$，据此易得 $x=2$. 那么在下面右边的三个构图(矩形的顶点均落在边长为1的小正方形网格格点上)中，能够说明方程 $x^2-4x-12=0$ 的正确构图是_____.(只填序号)　　【导学号:9401294】



(第9题)

易错点 忽视二次项系数不为零的条件而致错

10. 【中考·遂宁】已知关于 x 的一元二次方程 $(a-1)x^2-2x+a^2-1=0$ 有一个根为 $x=0$，则 a 的值为(　　)

A. 0　　B. ±1

C. 1　　D. -1

趣味数学 阿尔·花剌子模与一元二次方程：穆罕默德·本·穆萨·阿尔·花剌子模是著名的数学家、天文学家、地理学家.(待续)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法·提升练 ☞（答案见146页）

考查角度1 利用一元二次方程的定义求字母的取值范围

11. 已知关于 x 的方程 $(2k+1)x^2+4kx+k-1=0$.

(1) k 为何值时，此方程是一元一次方程？

(2) k 为何值时，此方程是一元二次方程？并写出这个一元二次方程的二次项系数、一次项系数及常数项.

考查角度2 利用一元二次方程的根求等腰三角形的周长

12. 若 2 是关于 x 的方程 $x^2-(3+k)x+12=0$ 的一个根，求以 2 和 k 为两边长的等腰三角形的周长.

Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞（答案见146页）

拔尖角度1 利用一元二次方程的定义探究字母取值问题

13. 若 $x^{2a+b}-3x^{a-b}+1=0$ 是关于 x 的一元二次方程，求 a，b 的值. 下面是两名同学的解法.

甲：根据题意，得 $\begin{cases}2a+b=2,\\ a-b=1.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\ b=0.\end{cases}$

乙：根据题意，得 $\begin{cases}2a+b=2,\\ a-b=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2a+b=1,\\ a-b=2.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=1,\\ b=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=1,\\ b=-1.\end{cases}$

你认为上述两名同学的解法是否正确？为什么？如果都不正确，请给出正确的解法.

拔尖角度2 利用“夹逼法”求所列方程的解

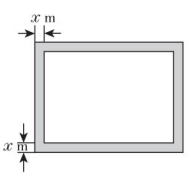
14. 某大学为改善校园环境，计划在一块长 80 m，宽 60 m 的长方形场地中央建一个长方形网球场，网球场占地面积为 3 500 m^2. 四周为宽度相等的人行走道，如图，若设人行走道宽为 x m.

(1) 请列出相应的方程.

(2) x 的值可能小于 0 吗？说说你的理由.

(3) x 的值可能大于 40 吗？可能大于 30 吗？说说你的理由.

(4) 你知道人行走道的宽是多少吗？说说你的求解过程.



（第 14 题）

趣味数学

花剌子模在他的数学巨著《们尔热巴拉和阿尔穆卡巴拉》中，第一次以对称的方式揭示了二次方程的解法.（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 2 课时　一元二次方程的定义及相关概念的常见应用 ☞(答案见 146 页)

名师点金

巧用一元二次方程的定义及相关概念求值主要体现在:利用定义或项的概念求字母的值,利用根的概念求字母或代数式的值等.

应用 1　利用一元二次方程的定义确定字母的取值

1. 向阳中学数学兴趣小组对关于 x 的方程 $(m+1)x^{m^2+1}+(m-2)x-1=0$ 提出了下列问题:

(1)是否存在 m,使方程为一元二次方程?若存在,求出 m 的值,并写出此方程;若不存在,请说明理由.

(2)是否存在 m,使方程为一元一次方程?若存在,求出 m 的值,并解此方程;若不存在,请说明理由.

应用 2　利用一元二次方程的项的定义求字母的取值

2. 若关于 x 的一元二次方程 $(2ax+1)(x-a)=a-2$ 的二次项系数是 -4,求 a 的值.

应用 3　利用一元二次方程的定义及一般形式解新定义问题

3. 将 4 个数 a,b,c,d 排成 2 行、2 列,两边各加一条竖线,记成 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$,定义 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$,上述记号叫做二阶行列式.那么 $\begin{vmatrix} x+1 & x+2 \\ x-2 & 2x \end{vmatrix}=1$ 表示的方程是一元二次方程吗?若是,请写出它的一般形式.

应用 4　利用一元二次方程的根的定义求代数式的值

4. 若 $n(n\neq 0)$ 是关于 x 的方程 $x^2+mx+2n=0$ 的一个根,求 $m+n$ 的值.

5. 已知实数 a 是一元二次方程 $x^2-2\,022x+1=0$ 的一个根,求代数式 $a^2-2\,021a-\dfrac{a^2+1}{2\,022}$ 的值.

应用 5　利用一元二次方程的根的定义判断方程的根

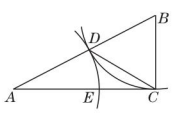
6. 如图,在 $\triangle ABC$ 中,$\angle ACB=90°$,以点 B 为圆心,BC 长为半径画弧,交线段 AB 于点 D;以点 A 为圆心,AD 长为半径画弧,交线段 AC 于点 E,连结 CD.

(1)若 $\angle A=28°$,求 $\angle ACD$ 的度数.

(2)设 $BC=a$,$AC=4$.

①若 $AD=EC$,求 a 的值.

②线段 AD 的长是方程 $x^2+2ax-16=0$ 的一个根吗?说明理由.



(第 6 题)

趣味数学　该书中的单词 "al-jabr" 的意思是 "复原" 或 "完成",指将负项从方程一边移到另一边,如通过两边加 $4x^2$,将 $x^2=40-4x^2$ 转化为 $5x^2=40$.

关注微信公众号 "教辅资料站" 获取更多学习资料

22.2 一元二次方程的解法

第1课时 直接开平方法

名师点金

用直接开平方法解一元二次方程的“三步法”

变形：将方程化为“含未知数的完全平方式=非负常数”的形式.

开方：利用平方根的定义，将方程转化为两个一元一次方程.

求解：解一元一次方程，得出方程的根.

Ⅰ 夯实基础·逐点练 ☞（答案见146页）

知识点1 $x^2=p(p\geqslant 0)$型方程的解法

1. 【中考·徐州】方程$x^2-4=0$的解是_____.

2. 一元二次方程$4x^2-9=0$的解为(　　)

A. $x=\frac{3}{2}$　　B. $x=\frac{2}{3}$

C. $x_1=\frac{3}{2},x_2=-\frac{3}{2}$　　D. $x_1=\frac{2}{3},x_2=-\frac{2}{3}$

3. 用直接开平方法解下列一元二次方程，其中无实数解的方程为(　　)

A. $x^2-1=0$　　B. $x^2=0$

C. $x^2+4=0$　　D. $-x^2+3=0$

4. 若代数式$3x^2-6$的值为21，则x的值一定为(　　)

A. 3　　B. ± 3　　C. -3　　D. $\pm\sqrt{3}$

知识点2 $(mx+n)^2=p(p\geqslant 0)$型方程的解法

5. 【中考·吉林】若关于x的一元二次方程$(x+3)^2=c$有实数根，则c的值可以为_____（写出一个即可）.

6. 【中考·丽水】一元二次方程$(x+6)^2=16$可转化为两个一元一次方程，其中一个一元一次方程是$x+6=4$，则另一个一元一次方程是(　　)

A. $x-6=4$　　B. $x-6=-4$

C. $x+6=4$　　D. $x+6=-4$

*7. 已知一元二次方程$(x-3)^2=1$的两个解恰好分别是等腰三角形ABC的底边长和腰长，则$\triangle ABC$的周长为(　　)

A. 10　　B. 10或8　　C. 9　　D. 8

Ⅱ 整合方法·提升练 ☞（答案见147页）

考查角度1 利用直接开平方法求字母的值

8. 已知关于x的方程$(x-1)^2=k^2+2$的一个根是3，求k的值及另一个根.

考查角度2 利用直接开平方法所得根的特征求分式的值

9. 若关于x的一元二次方程$ax^2=b(ab>0)$的两个根分别是$m+1$与$2m-4$，求$\frac{b}{a}$的值.

趣味数学

数学神童维纳的年龄：在著名数学家诺伯特·维纳的博士学位授予仪式上，执行主席问他的年龄.（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第2课时　因式分解法

名师点金

用因式分解法解一元二次方程的步骤

(1)移项,将方程的右边化为0;(2)将方程的左边分解为两个一次因式的积;(3)令每个因式都等于0,得两个一元一次方程;(4)解这两个一元一次方程,得方程的两个根.

用因式分解法解方程的关键是将方程左边因式分解.常用到的因式分解的方法:**提公因式法、公式法、十字相乘法**(即 $x^2-(a+b)x+ab$ 型多项式的因式分解).

Ⅰ 夯实基础·逐点练 ☞(答案见147页)

知识点1 因式分解法的依据

1. 【中考·山西】我们解一元二次方程 $3x^2-6x=0$ 时,可以运用因式分解法,将此方程化为 $3x(x-2)=0$,从而得到一元一次方程 $3x=0$ 或 $x-2=0$,进而得到原方程的解为 $x_1=0,x_2=2$.这种解法体现的数学思想是(　　)

A. 转化思想　　B. 函数思想

C. 数形结合思想　　D. 公理化思想

2. 用因式分解法解方程,下列过程正确的是(　　)

A. $(2x-3)(3x-4)=0$ 化为 $2x-3=0$ 或 $3x-4=0$

B. $(x+3)(x-1)=1$ 化为 $x+3=1$ 或 $x-1=1$

C. $(x-2)(x-3)=2\times3$ 化为 $x-2=2$ 或 $x-3=3$

D. $x(x+2)=0$ 化为 $x+2=0$

3. 解方程 $9(x+1)^2-4(x-1)^2=0$ 的正确解法是(　　)

A. 直接开平方得 $3(x+1)=2(x-1)$

B. 化为一般形式为 $13x^2+5=0$

C. 分解因式得 $[3(x+1)+2(x-1)][3(x+1)-2(x-1)]=0$

D. 直接得 $x+1=0$ 或 $x-1=0$

4. 【中考·河南】方程 $(x-2)(x+3)=0$ 的解是(　　)

A. $x=2$　　B. $x=-3$

C. $x_1=-2,x_2=3$　　D. $x_1=2,x_2=-3$

知识点2 用因式分解法解方程

5. 【中考·扬州】一元二次方程 $x(x-2)=x-2$ 的根是_____.

6. 【中考·十堰】对于实数 a,b,定义运算"◎"如下:$a◎b=(a+b)^2-(a-b)^2$.若 $(m+2)◎(m-3)=24$,则 $m=$_____.

7. 【中考·怀化】一元二次方程 $x^2+2x+1=0$ 的解是(　　)

A. $x_1=1,x_2=-1$　　B. $x_1=x_2=1$

C. $x_1=x_2=-1$　　D. $x_1=-1,x_2=2$

8. 【中考·凉山州】若关于 x 的方程 $x^2+2x-3=0$ 与 $\frac{2}{x+3}=\frac{1}{x-a}$ 有一个解相同,则 a 的值为(　　)

A. 1　　B. 1或-3

C. -1　　D. -1或3

9. 【中考·内江】一个等腰三角形的底边长是6,腰长是一元二次方程 $x^2-8x+15=0$ 的一根,则此三角形的周长是(　　)

A. 16　　B. 12

C. 14　　D. 12或16

10. 【中考·通辽】一个菱形的边长是方程 $x^2-8x+15=0$ 的一个根,其中一条对角线长为8,则该菱形的面积为(　　)

A. 48　　B. 24

C. 24或40　　D. 48或80

易错点1 在方程两边同时除以含有未知数的式子,导致漏解

11. 【中考·齐齐哈尔】解方程:$2(x-3)=3x(x-3)$.

易错点2 用因式分解法解一元二次方程时,忽略了方程右边应该为0

12. 用因式分解法解方程 $(x-1)(x+3)=12$.

趣味数学　他不愧为数学神童,回答十分巧妙:"我今年岁数的立方是一个四位数,四次方是一个六位数,这两个数刚好把十个数字0,1,2,3,4,5,6,7,8,9全都用上了,不重不漏.(待续)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法·提升练 ☞（答案见147页）

考查角度1 利用因式分解法解方程

13. 解下列方程：

（1）【中考·东莞】$x^2-3x+2=0$；

（2）【中考·丽水】$(x-3)(x-1)=3$；

（3）$x^2-(\sqrt{2}+\sqrt{3})x+\sqrt{6}=0$.

考查角度2 利用因式分解法解与几何相关的问题

14. 已知关于x的方程$(a-1)x^2-4x-1+2a=0$的一个根为$x=3$.

（1）求a的值及方程的另一个根；

（2）如果一个三角形的三边长都是这个方程的根，求这个三角形的周长.

Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞（答案见147页）

拔尖角度1 利用因式分解法解$x^2+(a+b)x+ab=0$型方程（类比法）

15. 【中考·湘潭】由多项式乘法：$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$，将该式从右到左使用，即可得到“十字相乘法”进行因式分解的公式：$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$.

示例：分解因式：$x^2+5x+6=x^2+(2+3)x+2\times3=(x+2)(x+3)$.

（1）尝试：分解因式：$x^2+6x+8=(x+_____)\cdot(x+_____)$；

（2）应用：请用上述方法解方程：$x^2-3x-4=0$.

拔尖角度2 利用换元法解方程（整体思想）

16. 阅读材料：

为了解方程$(x^2-1)^2-5(x^2-1)+4=0$，我们可以将x^2-1看成一个整体，然后设$x^2-1=y$，那么原方程可化为$y^2-5y+4=0$ ①，解得$y_1=1$，$y_2=4$. 当$y=1$时，$x^2-1=1$，$\therefore x^2=2$，$\therefore x=\pm\sqrt{2}$；当$y=4$时，$x^2-1=4$，$\therefore x^2=5$，$\therefore x=\pm\sqrt{5}$. 故原方程的解为$x_1=\sqrt{2}$，$x_2=-\sqrt{2}$，$x_3=\sqrt{5}$，$x_4=-\sqrt{5}$.

解答问题：

（1）上述解题过程，在由原方程得到方程①的过程中，利用_____法达到了降次的目的，体现了转化的数学思想；

（2）请利用以上知识解方程：$\frac{x+1}{x^2}+\frac{12x^2}{x+1}=8$.

这意味着全体数字都向我俯首称臣，预祝我在数学领域里干出一番惊天动地的大事业.”

维纳的年龄：18岁.

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第3课时　配方法

名师点金

二次三项式的配方过程与一元二次方程的配方过程的区别

第一，二次项系数化为1的区别. 二次三项式是提出二次项的系数，一元二次方程是两边同时除以二次项的系数.

第二，配方. 二次三项式是先加上一次项系数一半的平方再减去一次项系数一半的平方，一元二次方程是两边同时加上一次项系数一半的平方.

Ⅰ 夯实基础·逐点练

☞(答案见147页)

知识点1 二次三项式的配方

1. 【中考·安顺】若 $x^2+2(m-3)x+16$ 是关于 x 的完全平方式，则 $m=$_____.

2. 将代数式 a^2+4a-5 变形，结果正确的是(　　)

A. $(a+2)^2-1$　　B. $(a+2)^2-5$

C. $(a+2)^2+4$　　D. $(a+2)^2-9$

3. 将代数式 $x^2-10x+5$ 配方后，发现它的最小值为(　　)

A. -30　　B. -20　　C. -5　　D. 0

4. 不论 x,y 为何实数，代数式 $x^2+y^2+2x-4y+7$ 的值(　　)

A. 总不小于2　　B. 总不小于7

C. 可为任何实数　　D. 可能为负数

5. 【中考·扬州】已知 $M=\frac{2}{9}a-1$，$N=a^2-\frac{7}{9}a$(a 为任意实数)，则 M,N 的大小关系为(　　)

A. $M<N$　　B. $M=N$

C. $M>N$　　D. 不能确定

*6. 已知 a,b,c 是 $\triangle ABC$ 的三边长，且 $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ac$，则 $\triangle ABC$ 的形状为(　　)

A. 钝角三角形　　B. 等边三角形

C. 直角三角形　　D. 等腰直角三角形

知识点2 用配方法解一元二次方程

7. 用配方法解下列方程，其中应在方程左右两边同时加上4的是(　　)

A. $x^2+4x=5$　　B. $2x^2-4x=5$

C. $x^2-2x=5$　　D. $x^2+2x=5$

8. 【中考·南通】用配方法解方程 $x^2+8x+9=0$，变形后的结果正确的是(　　)

A. $(x+4)^2=-9$　　B. $(x+4)^2=-7$

C. $(x+4)^2=25$　　D. $(x+4)^2=7$

9. 一元二次方程 $x^2-8x=48$ 可表示成 $(x-a)^2=48+b$ 的形式，其中 a,b 为整数，则 $a+b$ 的值为(　　)

A. 20　　B. 12　　C. -12　　D. -20

10. 用配方法解方程 $x^2-8x+15=0$ 的过程中，配方正确的是(　　)

A. $x^2-8x+(-4)^2=1$

B. $x^2-8x+(-4)^2=31$

C. $(x+4)^2=1$

D. $(x-4)^2=-11$

11. 用配方法解下列方程时，配方正确的是(　　)

A. 方程 $x^2-6x-5=0$，可化为 $(x-3)^2=4$

B. 方程 $y^2-2y-2\,022=0$，可化为 $(y-1)^2=2\,022$

C. 方程 $a^2+8a+9=0$，可化为 $(a+4)^2=25$

D. 方程 $2x^2-6x-7=0$，可化为 $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{23}{4}$

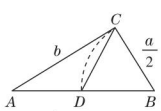
*12. 【中考·舟山】欧几里得的《原本》记载，形如 $x^2+ax=b^2$ 的方程的图解法是：如图，画 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$，使 $\angle ACB=90°$，$BC=\frac{a}{2}$，$AC=b$，再在斜边 AB 上截取 $BD=\frac{a}{2}$，则该方程的一个正根是(　　)

A. AC 的长

B. AD 的长

C. BC 的长

D. CD 的长



(第12题)

13. 【中考·益阳】规定：$a\otimes b=(a+b)b$，如：$2\otimes 3=(2+3)\times 3=15$，若 $2\otimes x=3$，则 $x=$_____.

易错点 在配方时忽视等式的性质而致错

14. 【中考·齐齐哈尔】解方程：$x^2+6x=-7$.

趣味数学　有个“聪明的”乞丐要到一块面包，他想，天天要饭太辛苦了，如果我第一天吃这块面包的一半，第二天再吃剩余面包的一半，以后每天都吃前一天剩余面包的一半，这样下去，我就永远不用去要饭了！

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法·提升练 ☞（答案见147页）

考查角度1 利用配方法解非负数问题

15. 先阅读下面的内容，再解决问题.

例题：若 $m^2+2mn+2n^2-6n+9=0$，求 m 和 n 的值.

解：$\because m^2+2mn+2n^2-6n+9=0$，

$\therefore m^2+2mn+n^2+n^2-6n+9=0$.

$\therefore (m+n)^2+(n-3)^2=0$.

$\therefore m+n=0, n-3=0$.

$\therefore m=-3, n=3$.

问题：已知 a,b,c 为正整数且是 $\triangle ABC$ 的三边长，c 是 $\triangle ABC$ 的最短边长，a,b 满足 $a^2+b^2=12a+8b-52$，求 c 的值.

考查角度2 利用配方法解决二次三项式的最值问题

16. 我们可以利用配方法解决一些多项式的最值，如：$x^2+2x+3=(x^2+2x+1)+2=(x+1)^2+2$，当 $x=-1$ 时，x^2+2x+3 有最小值为2；再如：$-x^2+2x-2=-(x^2-2x+1)-1=-(x-1)^2-1$，当 $x=1$ 时，$-x^2+2x-2$ 有最大值为 -1.

(1) 代数式 x^2+6x+m 有最小值为1，则 $m=$_____；

(2) 代数式 $-x^2+4x+m$ 有最大值为2，则 $m=$_____；

(3) 代数式 $x^2+(m+2)x+4m-7$ 有最小值为0，求 m 的值.

Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞（答案见148页）

拔尖角度1 利用配方法求代数式的值（整体思想、换元法）

17. 已知实数 x 满足 $x^2+\frac{1}{x^2}+2\left(x+\frac{1}{x}\right)=0$，求 $x+\frac{1}{x}$ 的值.

拔尖角度2 利用配方法探究新定义问题

18. 小明在解一元二次方程时，发现有这样一种解法.

如：解方程 $x(x+4)=6$.

解：原方程可变形，

得 $[(x+2)-2][(x+2)+2]=6$，

$(x+2)^2-2^2=6$，

$(x+2)^2=6+2^2$，

$(x+2)^2=10$.

直接开平方并整理，得 $x_1=-2+\sqrt{10}, x_2=-2-\sqrt{10}$.

我们称小明这种解法为“平均数法”.

(1) 下面是小明用“平均数法”解方程 $(x+3)(x+7)=5$ 时的解题过程.

解：原方程可变形，得 $[(x+a)-b][(x+a)+b]=5$，$(x+a)^2-b^2=5$，

$(x+a)^2=5+b^2$.

直接开平方并整理，得 $x_1=c, x_2=d(c>d)$.

上述解题过程中的 a,b,c,d 所表示的数分别是____，____，____，____.

(2) 请用“平均数法”解方程：$(x-5)(x+3)=6$.

更多提分招数详见《极速提分法》第3页.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第4课时　公式法

名师点金

用公式法解一元二次方程的“四个步骤”

(1)把一元二次方程化为一般形式.

(2)确定 a,b,c 的值.

(3)计算 b^2-4ac 的值.

(4)当 $b^2-4ac\geqslant 0$ 时,把 a,b,c 的值代入求根公式,求出方程的两个实数根;当 $b^2-4ac<0$ 时,方程无实数根.

1 夯实基础·逐点练 ☞(答案见148页)

知识点1 一元二次方程的求根公式

1. 方程 $3x^2-x=4$ 化为一般形式后的 a,b,c 的值分别为(　　)

A. $3,1,4$　　B. $3,-1,-4$

C. $3,-4,-1$　　D. $-1,3,-4$

2. 一元二次方程 $2x^2+3x=1$ 中,b^2-4ac 的值应是(　　)

A. 17　　B. -17

C. 1　　D. -1

3. 以 $x=\dfrac{b\pm\sqrt{b^2+4c}}{2}$ 为根的一元二次方程可能是(　　)

A. $x^2+bx+c=0$　　B. $x^2+bx-c=0$

C. $x^2-bx+c=0$　　D. $x^2-bx-c=0$

4. 用公式法解方程 $3x^2+4=12x$,下列代入求根公式正确的是(　　)

A. $x=\dfrac{12\pm\sqrt{12^2-3\times4}}{2}$

B. $x=\dfrac{-12\pm\sqrt{12^2-3\times4}}{2\times3}$

C. $x=\dfrac{12\pm\sqrt{12^2+3\times4}}{2}$

D. $x=\dfrac{-(-12)\pm\sqrt{(-12)^2-4\times3\times4}}{2\times3}$

知识点2 求根公式的应用

5. 【中考·威海】一元二次方程 $3x^2=4-2x$ 的解是_____.

6. 若方程 $(m-2)x^{|m|}-2x+1=0$ 是一元二次方程,则方程的根是(　　)

A. $x_1=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2},x_2=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$

B. $x_1=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4},x_2=\dfrac{-\sqrt{5}-1}{4}$

C. $x_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},x_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

D. 以上都不对

知识点3 用适当的方法解一元二次方程

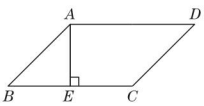
***7.** 如图,在 $\square ABCD$ 中,$AE\perp BC$ 于点 E,$AE=EB=EC=a$,且 a 是一元二次方程 $x^2+2x-3=0$ 的根,则 $\square ABCD$ 的周长为(　　)

A. $4+2\sqrt{2}$

B. $12+6\sqrt{2}$

C. $2+2\sqrt{2}$

D. $2+\sqrt{2}$ 或 $12+6\sqrt{2}$



(第7题)

8. 解方程 $(5x-1)^2=3(5x-1)$ 的最适当的方法是(　　)

A. 直接开平方法　　B. 配方法

C. 公式法　　D. 因式分解法

9. 已知下列方程,请把它们的序号填在最适当的解法后的横线上.

①$2(x-1)^2=6$;②$(x-2)^2+x^2=4$;③$(x-2)(x-3)=3$;④$x^2-2x-1=0$;⑤$x^2-\sqrt{2}x+\dfrac{1}{4}=0$;⑥$x^2-2x-98=0$.

(1)直接开平方法:_____;

(2)因式分解法:_____;

(3)配方法:_____;

(4)公式法:_____.

易错点1 未将方程化为一般形式,导致错解

10. 解方程:$\sqrt{2}x^2+4\sqrt{3}x=2\sqrt{2}$.

易错点2 用换元法解一元二次方程时,忽视变量取值范围的变化而致错

11. 已知 x 为实数,且满足 $(x^2+x+1)^2+2(x^2+x+1)-3=0$,那么 x^2+x+1 的值为(　　)

A. 1　　B. -3　　C. -3 或 1　　D. -1 或 3

趣味数学　在1825年,挪威学者阿贝尔终于证明了:如果方程的次数 $n\geqslant 5$,那么此方程不可能用根式求解,即不存在求解一般五次方程的求根公式.这就是著名的阿贝尔定理.(待续)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法·提升练 ☞（答案见148页）

考查角度1 根据方程的特点选择适当的方法解方程

12. 解下列方程：

（1）【中考·无锡】$x^2-2x-5=0$；

（2）$x^2-8x+4=0$.

考查角度2 利用求根公式解求值问题

13. 已知 a 是一元二次方程 $x^2-4x+1=0$ 的两个实数根中较小的根.

（1）求 $a^2-4a+2\,022$ 的值；

（2）化简求值 $\dfrac{1-2a+a^2}{a-1}-\dfrac{\sqrt{a^2-2a+1}}{a^2-a}-\dfrac{1}{a}$.

Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞（答案见148页）

拔尖角度1 利用解一元二次方程解新定义问题

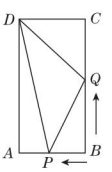
14. 【中考·张家界】阅读材料：对于任何实数，我们规定符号 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 的意义是 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$. 例如：$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=1\times4-2\times3=-2$，$\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=(-2)\times5-4\times3=-22$.

（1）按照这个规定请你计算 $\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$ 的值；

（2）按照这个规定请你计算：当 $x^2-4x+4=0$ 时，$\begin{vmatrix} x+1 & 2x \\ x-1 & 2x-3 \end{vmatrix}$ 的值.

拔尖角度2 利用一元二次方程解几何中的动点问题（数形结合思想）

15. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=6$ cm，$BC=12$ cm. 点 P 从点 B 开始沿 BA 边向点 A 以 1 cm/s 的速度移动，点 Q 从点 B 开始沿 BC 边向点 C 以 2 cm/s 的速度移动. 如果 P，Q 分别从点 B 同时出发，问几秒时，$\triangle DPQ$ 的面积等于 12 cm^2？



（第15题）

趣味数学

由于受阿贝尔定理的影响，绝大多数的数学家早已放弃了对一元五次方程求根公式的探索，但由于社会的发展，仍然有一群爱好数学的学者在不断地寻求突破！

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第5课时　一元二次方程根的判别式

名师点金

根的判别式的应用

1. **直用**：不解方程，判断方程根的情况.

2. **逆用**：由方程根的情况，求字母系数的取值范围.

注意：一元二次方程有实数根，包含有两个相等的实数根和有两个不相等的实数根两种情况.

Ⅰ 夯实基础·逐点练 ☞(答案见148页)

知识点1 一元二次方程根的判别式

1. 方程 $7x=2x^2-4$ 化为一般形式 $ax^2+bx+c=0$ 后，$a=$_____，$b=$_____，$c=$_____，$b^2-4ac=$_____.

2. 方程 $6x-8=5x^2$ 化为一般形式 $ax^2+bx+c=0$ 后，a,b,c 的值为(　　)

A. $a=5,b=6,c=-8$

B. $a=5,b=-6,c=-8$

C. $a=5,b=-6,c=8$

D. $a=6,b=5,c=8$

3. 在方程 $2x^2+3x=2$ 中，b^2-4ac 的值为(　　)

A. 1　　B. -1　　C. 25　　D. -25

4. 已知方程 $2x^2+mx+1=0$ 的根的判别式的值为16，则 m 的值为(　　)

A. $2\sqrt{6}$　　B. $-2\sqrt{6}$　　C. $\pm2\sqrt{6}$　　D. $\pm3\sqrt{6}$

知识点2 一元二次方程根的情况

5. 【中考·河南】一元二次方程 $(x+1)(x-1)=2x+3$ 的根的情况是(　　)

A. 有两个不相等的实数根

B. 有两个相等的实数根

C. 只有一个实数根

D. 没有实数根

6. 【中考·湘西州】一元二次方程 $x^2-2x+3=0$ 的根的情况是(　　)

A. 有两个不相等的实数根

B. 有两个相等的实数根

C. 没有实数根

D. 无法判断

***7.** 【中考·娄底】关于 x 的一元二次方程 $x^2-(k+3)x+k=0$ 的根的情况是(　　)

A. 有两个不相等的实数根

B. 有两个相等的实数根

C. 无实数根

D. 不能确定

知识点3 一元二次方程根的判别式的应用

8. 【中考·自贡】关于 x 的一元二次方程 $x^2-2x+m=0$ 无实数根，则实数 m 的取值范围是(　　)

A. $m<1$　　B. $m\geqslant1$

C. $m\leqslant1$　　D. $m>1$

9. 【中考·荆州】若一次函数 $y=kx+b$ 的图象不经过第二象限，则关于 x 的一元二次方程 $x^2+kx+b=0$ 的根的情况是(　　)

A. 有两个不相等的实数根

B. 有两个相等的实数根

C. 无实数根

D. 无法确定

10. 【中考·安徽】若关于 x 的一元二次方程 $x(x+1)+ax=0$ 有两个相等的实数根，则实数 a 的值为(　　)

A. -1　　B. 1

C. -2 或2　　D. -3 或1

***11.** 【中考·河北】小刚在解关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 时，只抄对了 $a=1,b=4$，解出其中一个根是 $x=-1$. 他核对时发现所抄的 c 比原方程的 c 值小2，则原方程的根的情况是(　　)

A. 不存在实数根

B. 有两个不相等的实数根

C. 有一个根是 $x=-1$

D. 有两个相等的实数根

易错点 应用根的判别式求字母的取值范围时忽视一元二次方程的隐含条件

12. 【中考·新疆】若关于 x 的一元二次方程 $(k-1)x^2+x+1=0$ 有两个实数根，则 k 的取值范围是(　　)

A. $k\leqslant\frac{5}{4}$　　B. $k>\frac{5}{4}$

C. $k<\frac{5}{4}$ 且 $k\neq1$　　D. $k\leqslant\frac{5}{4}$ 且 $k\neq1$

趣味数学　数学是打开科学大门的钥匙.

——培根

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法·提升练 ☞（答案见148页）

考查角度1 利用方程的根的情况求字母的值

13. 【中考·北京】关于 x 的方程 $x^2-2x+2m-1=0$ 有实数根，且 m 为正整数，求 m 的值及此时方程的根.

考查角度2 利用一元二次方程根的情况求字母的取值范围

14. 【中考·衡阳】关于 x 的一元二次方程 $x^2-3x+k=0$ 有实数根.

(1) 求 k 的取值范围；

(2) 如果 k 是符合条件的最大整数，且一元二次方程 $(m-1)x^2+x+m-3=0$ 与方程 $x^2-3x+k=0$ 有一个相同的根，求此时 m 的值.

Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞（答案见148页）

拔尖角度1 利用一元二次方程根的情况解等腰三角形问题（分类讨论思想）

15. 已知关于 x 的方程 $x^2-(2k+1)x+4\left(k-\frac{1}{2}\right)=0$.

(1) 求证：无论 k 取何值，这个方程总有实数根；

(2) 若等腰三角形 ABC 的一边长 $a=4$，另两边长 b，c 恰好是这个方程的两个根，求 $\triangle ABC$ 的周长.

拔尖角度2 利用新定义中方程根的情况求字母的值

16. 对于实数 m，n，定义一种运算“ * ”：$m*n=mn+n$.

(1) 求 $2*5$ 与 $2*(-5)$ 的值；

(2) 如果关于 x 的方程 $x*(a*x)=-\frac{1}{4}$ 有两个相等的实数根，求实数 a 的值.

数学是人类思考中最高的成就.

——米斯拉

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

* 第6课时　一元二次方程的根与系数的关系

名师点金

与一元二次方程根与系数的关系有关的几种常见变形

1. $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$;
2. $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$;
3. $(x_1+1)(x_2+1)=x_1x_2+(x_1+x_2)+1$;
4. $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}$;
5. $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}$;
6. $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$.

Ⅰ 夯实基础·逐点练 ☞(答案见149页)

知识点1 一元二次方程的根与系数的关系

1. 【中考·黄冈】若x_1,x_2是一元二次方程$x^2-4x-5=0$的两根,则$x_1\cdot x_2$的值为(　　)

A. -5　　B. 5　　C. -4　　D. 4

2. 【中考·广东】已知x_1,x_2是一元二次方程$x^2-2x=0$的两个实数根,下列结论错误的是(　　)

A. $x_1\neq x_2$　　B. $x_1^2-2x_1=0$

C. $x_1+x_2=2$　　D. $x_1\cdot x_2=2$

3. 【中考·贵港】已知α,β是一元二次方程$x^2+x-2=0$的两个实数根,则$\alpha+\beta-\alpha\beta$的值是(　　)

A. 3　　B. 1

C. -1　　D. -3

4. 【中考·淄博】若$x_1+x_2=3$,$x_1^2+x_2^2=5$,则以x_1,x_2为根的一元二次方程是(　　)

A. $x^2-3x+2=0$　　B. $x^2+3x-2=0$

C. $x^2+3x+2=0$　　D. $x^2-3x-2=0$

5. 【中考·怀化】设x_1,x_2是方程$x^2+5x-3=0$的两个根,则$x_1^2+x_2^2$的值是(　　)

A. 19　　B. 25　　C. 31　　D. 30

6. 【中考·眉山】若α,β是一元二次方程$3x^2+2x-9=0$的两根,则$\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}$的值是(　　)

A. $\frac{4}{27}$　　B. $-\frac{4}{27}$

C. $-\frac{58}{27}$　　D. $\frac{58}{27}$

***7.** 【中考·天门】若α,β为方程$2x^2-5x-1=0$的两个实数根,则$2\alpha^2+3\alpha\beta+5\beta$的值为(　　)

A. -13　　B. 12

C. 14　　D. 15

知识点2 一元二次方程的根与系数的关系的应用

8. 【中考·天门】若方程$x^2-2x-4=0$的两个实数根为α,β,则$\alpha^2+\beta^2$的值为(　　)

A. 12　　B. 10　　C. 4　　D. -4

9. 【中考·绵阳】若关于x的方程$x^2-2x+c=0$有一根为-1,则方程的另一根为(　　)

A. -1　　B. -3　　C. 1　　D. 3

10. 【中考·贵港】若α,β是关于x的一元二次方程$x^2-2x+m=0$的两实根,且$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=-\frac{2}{3}$,则$m$等于(　　)

A. -2　　B. -3　　C. 2　　D. 3

***11.** 【中考·包头】已知等腰三角形的三边长分别为$a,b,4$,且a,b是关于x的一元二次方程$x^2-12x+m+2=0$的两根,则m的值是(　　)

A. 34　　B. 30

C. 30或34　　D. 30或36

12. 【中考·烟台】若x_1,x_2是方程$x^2-2mx+m^2-m-1=0$的两个根,且$x_1+x_2=1-x_1x_2$,则m的值为(　　)

A. -1或2　　B. 1或-2

C. -2　　D. 1

易错点 忘记判断一元二次方程根的判别式的符号而致误

13. 【中考·呼和浩特】关于x的一元二次方程$x^2+(a^2-2a)x+a-1=0$的两个实数根互为相反数,则a的值为(　　)

A. 2　　B. 0

C. 1　　D. 2或0

趣味数学　黄金分割在建筑、艺术、美学和实际生产中有着广泛的应用. 著名的法国巴黎埃菲尔铁塔第二层顶部到地面的距离和它到塔顶的距离之比约为0.618.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法·提升练 ☞（答案见149页）

考查角度1 利用一元二次方程根与系数的关系求方程的根

14. 【中考·随州】已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-(2k+1)x+k^2+1=0$ 有两个不相等的实数根 x_1,x_2.

(1)求 k 的取值范围；

(2)若 $x_1+x_2=3$，求 k 的值及方程的根.

考查角度2 利用根与系数的关系求两根满足某关系式时字母的值

15. 【中考·绥化】已知关于 x 的方程 $kx^2-3x+1=0$ 有实数根.

(1)求 k 的取值范围；

(2)若该方程有两个实数根，分别为 x_1 和 x_2，当 $x_1+x_2+x_1x_2=4$ 时，求 k 的值.

Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞（答案见149页）

拔尖角度1 利用根与系数的关系及根的判别式解代数式求值问题

16. 【中考·南充】已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+(2m-1)x+m^2-3=0$ 有实数根.

(1)求实数 m 的取值范围；

(2)当 $m=2$ 时，方程的根为 x_1,x_2，求代数式 $(x_1^2+2x_1)(x_2^2+4x_2+2)$ 的值.

拔尖角度2 利用根与系数的关系及根的判别式解存在性问题

17. 【中考·鄂州】关于 x 的方程 $x^2-(2k-1)x+k^2-2k+3=0$ 有两个不相等的实数根.

(1)求实数 k 的取值范围；

(2)设方程的两个实数根分别为 x_1,x_2，存不存在这样的实数 k，使得 $|x_1|-|x_2|=\sqrt{5}$？若存在，求出这样的 k 值；若不存在，说明理由.

更多提分招数详见《极速提分法》第4页.

趣味数学

古希腊人认为，当人的眼眉到咽喉的距离与头顶到咽喉的距离之比接近0.618时，人的头部最美.因此，当时的人体绘画、雕塑等艺术品多是按这个比例创作的.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

阶段核心方法

一元二次方程的九种解法 (答案见149页)

名师点金

解一元二次方程时，主要考虑降次，其解法有**直接开平方法**、**因式分解法**、**配方法和公式法**，有些特殊方程还可用**换元法**等. 在具体的解题过程中，结合方程的特点选择合适的方法，往往会达到事半功倍的效果.

方法1　形如$(x+m)^2=n(n\geqslant 0)$的一元二次方程用直接开平方法求解

1. 用直接开平方法解下列一元二次方程，其中无实数解的方程为(　　)

A. $x^2-5=5$　　B. $-3x^2=0$

C. $x^2+7=0$　　D. $(x+1)^2=0$

2. 解方程：$\frac{1}{3}(x-2)^2=8$.

方法2　当二次项系数为1，且一次项系数为偶数时，用配方法求解

3. 解方程：$x^2+4x-2=0$.

4. 已知$x^2-10x+y^2-16y+89=0$，求$\frac{x}{y}$的值.

方法3　能化成形如$(x+a)(x+b)=0$的一元二次方程用因式分解法求解

5. 【中考·宁夏】一元二次方程$x(x-2)=2-x$的根是(　　)

A. -1　　B. 2

C. 1和2　　D. -1和2

6. 解下列一元二次方程：

(1)$x^2-2x=0$；

(2)$16x^2-9=0$；

(3)【中考·巴中】$3x(x-2)=x-2$.

方法4　如果一个一元二次方程易化为一般形式，则用公式法求解

7. 用公式法解一元二次方程$x^2-\frac{1}{4}=2x$，方程的解应是(　　)

A. $x=\frac{-2\pm\sqrt{5}}{2}$　　B. $x=\frac{2\pm\sqrt{5}}{2}$

C. $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$　　D. $x=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$

8. 【中考·绵阳】已知$a>b>0$，且$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}+\frac{3}{b-a}=0$，则$\frac{b}{a}=$_____.

9. 用公式法解下列方程：

(1)$3(x^2+1)-7x=0$；

趣味数学　数学是符号加逻辑.

——罗素

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2) $4x^2-3x-5=x-2$.

方法5 用构造法解一元二次方程

10. 解方程：$6x^2+19x+10=0$.

11. 若 m,n,p 满足 $m-n=8$，$mn+p^2+16=0$，求 $m+n+p$ 的值.

方法6 用整体换元法解方程

12. 解方程：$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=48$.

13. 解方程：$x^2+\frac{1}{x^2}-2\left(x+\frac{1}{x}\right)-1=0$.

方法7 用降次换元法解方程

14. 解方程：$6x^4-35x^3+62x^2-35x+6=0$.

方法8 用倒数换元法解分式方程

15. 解方程：$\frac{x-2}{x}-\frac{3x}{x-2}=2$.

方法9 用特殊值法解一元二次方程

16. 解方程：$(x-2\,019)(x-2\,020)=2\,021\times2\,022$.

更多提分招数详见《极速提分法》第7页.

数学是一种会不断进化的文化.

——魏尔德

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

22.3　实践与探索

第 1 课时　用一元二次方程解几何问题

名师点金

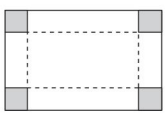
建立一元二次方程解决几何图形问题应注意三点

一是图形的面积公式是基本的等量关系式；二是利用平移的性质（图形的面积不变）将零散的图形拼聚在一起；三是取舍根时，注意条件中对图形边长的限制.

Ⅰ 夯实基础 · 逐点练 ☞（答案见 150 页）

知识点 1　求解有关规则图形的问题

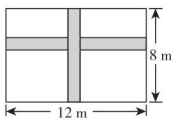
1. 【中考 · 徐州】如图，有一块矩形硬纸板，长 30 cm，宽 20 cm，在其四角各剪去一个同样大小的正方形，然后将四周突出部分折起，可制成一个无盖长方体盒子，当剪去正方形的边长取何值时，所得长方体盒子的侧面积为 200 cm^2？



（第 1 题）

知识点 2　求解有关不规则图形的问题

2. 【中考 · 山西】如图，在一块长 12 m，宽 8 m 的矩形空地上，修建同样宽的两条互相垂直的道路（两条道路各与矩形的一条边平行），剩余部分栽种花草，且栽种花草的面积为 77 m^2，设道路的宽为 x m，则根据题意，可列方程为_____. 【导学号：9401294】



（第 2 题）

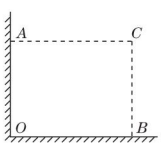
Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞（答案见 150 页）

考查角度 1　利用一元二次方程解与方案有关的问题

3. 【中考 · 百色】如图，在直角墙角 AOB（$OA \perp OB$，且 OA，OB 长度不限）中，要砌 20 m 长的墙，与直角墙角 AOB 围成地面为矩形的储仓，且矩形地面 $AOBC$ 的面积为 96 m^2.

（1）求这个矩形地面的长；

（2）有规格为 0.80 × 0.80 和 1.00 × 1.00（单位：m）的地板砖价格分别为 55 元/块和 80 元/块，若只选其中一种地板砖都恰好能铺满储仓的矩形地面（不计缝隙），用哪一种规格的地板砖费用较少？



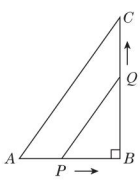
（第 3 题）

考查角度 2　利用一元二次方程探究面积问题

4. 如图所示，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B = 90°$，$AB = 5$ cm，$BC = 7$ cm. 点 P 从点 A 开始沿 AB 边向点 B 以 1 cm/s 的速度移动，点 Q 从点 B 开始沿 BC 边向点 C 以 2 cm/s 的速度移动.

（1）如果点 P，Q 分别从点 A，B 同时出发，那么几秒后，$\triangle PBQ$ 的面积等于 4 cm^2？

（2）如果点 P，Q 分别从点 A，B 同时出发，$\triangle PBQ$ 的面积能否等于 7 cm^2？



（第 4 题）

趣味数学　舞台上的报幕员常常不是站在舞台的正中央，而是站在一侧，这是因为站在舞台长度的黄金分割点上观众的视觉和听觉效果最好.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第2课时　用一元二次方程解百分率问题



名师点金

1. **增长率（或降低率）问题的规律**

（1）**增长率问题**：设某数为 a，平均增长率为 x，则一次增长后的值为 $a(1+x)$，两次增长后的值为 $a(1+x)^2$，依次类推，n 次增长后的值为 $a(1+x)^n$．（2）**降低率问题**：设某数为 a，平均降低率为 x，则一次降低后的值为 $a(1-x)$，两次降低后的值为 $a(1-x)^2$，依次类推，n 次降低后的值为 $a(1-x)^n$．

2. **解决利润问题常用的关系式**

（1）利润 = 售价 − 进价．（2）利润率 $=\frac{\text{利润}}{\text{进价}}\times 100\% =\frac{\text{售价}-\text{进价}}{\text{进价}}\times 100\%$．

（3）售价 = 进价 ×（1 + 利润率）．（4）总利润 = 单个利润 × 销售量 = 总收入 − 总支出．

Ⅰ 夯实基础 · 逐点练

☞（答案见 151 页）

知识点1 增长率问题

1. 某村 2017 年的人均收入为 20 000 元，2019 年的人均收入为 24 200 元．

（1）求 2017 年到 2019 年该村人均收入的年平均增长率；

（2）假设 2020 年该村人均收入的增长率与前两年的年平均增长率相同，请你预测 2020 年该村的人均收入是多少元？

知识点2 降低率问题

2. 【中考 · 东营】为加快新旧动能转换，提高公司经济效益，某公司决定对近期研发出的一种电子产品进行降价促销，使生产的电子产品能够及时售出，根据市场调查：这种电子产品销售单价定为 200 元时，每天可售出 300 个；若销售单价每降低 1 元，每天可多售出 5 个．已知每个电子产品的固定成本为 100 元，问这种电子产品降价后的销售单价为多少元时，公司每天可获利 32 000 元？

Ⅱ 整合方法 · 提升练

☞（答案见 151 页）

考查角度 利用一元二次方程、不等式解决实际问题

3. 【中考 · 玉林】某养殖场为了响应党中央的扶贫政策，今年起采用“场内 + 农户”养殖模式，同时加强对蛋鸡的科学管理，蛋鸡的产蛋率不断提高，三月份和五月份的产蛋量分别是 2.5 万千克与 3.6 万千克，现假定该养殖场蛋鸡产蛋量的月增长率相同．

（1）求该养殖场蛋鸡产蛋量的月增长率；

（2）假定当月产的鸡蛋当月在各销售点全部销售出去，且每个销售点每月平均销售量最多为 0.32 万千克，如果要完成六月份的鸡蛋销售任务，那么该养殖场在五月份已有的销售点的基础上至少再增加多少个销售点？

趣味数学

1707 年，牛顿的代数讲义经整理后出版，定名为《普遍算术》．书中陈述了代数的基本概念与基本运算，同时对方程的根及其性质进行了深入探讨，引出了方程论方面的丰硕成果．（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第3课时　用一元二次方程解一般应用问题

名师点金

列一元二次方程解应用题的一般步骤可归结为六个字：审、设、列、解、验、答.

1. 一般情况下，步骤中的第一步“审”不写出来，但它是关键的一步，只有审清题意，明确了已知量、未知量及它们之间的关系，才能准确列出方程.
2. 设未知数有直接设元和间接设元两种方式，直接设元就是问什么，设什么；间接设元就是在直接设元比较困难、所列方程较复杂时所采用的间接设未知数的方法.

1 夯实基础·逐点练

(答案见151页)

知识点1 分裂问题

1. 【中考·鸡西】某校“研学”活动小组在一次野外实践时，发现一种植物的主干长出若干数目的支干，每个支干又长出同样数目的小分支，主干、支干和小分支的总数是43，则这种植物每个支干长出的小分支个数是(　　)

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

2. 【中考·贺州】某生物实验室需培育一群有益菌. 现有60个活体样本，经过两轮培植后，有益菌总和达24 000个，其中每个有益菌每一轮可分裂成若干个相同数目的有益菌.

(1) 每轮分裂中每个有益菌可分裂成多少个有益菌？

(2) 按照这样的分裂速度，经过三轮培植后共有多少个有益菌？

知识点2 传染问题

3. 2020年，某地爆发新型冠状病毒，并迅速蔓延. 如果1人患病没有及时隔离治疗，经过两轮传播，共有9人患病. 问：每轮传染中平均一个人传染了几个人？

知识点3 循环问题

4. 【中考·新疆】在某篮球邀请赛中，参赛的每两个队之间都要比赛一场，共比赛36场，设有x个队参赛，根据题意，可列方程为(　　)

A. $\frac{1}{2}x(x-1)=36$　　B. $\frac{1}{2}x(x+1)=36$

C. $x(x-1)=36$　　D. $x(x+1)=36$

5. 【中考·新疆】某市体育局要组织一次篮球赛，赛制为单循环形式(每两支球队之间都赛一场)，计划安排28场比赛，应邀请多少支球队参加比赛？

知识点4 数字问题

6. 一个两位数，它的十位数字比个位数字小4，若把这两个数字调换位置，所得的两位数与原两位数的乘积等于765，求原两位数.

趣味数学　他得出了方程的根与其判别式之间的关系，指出可以利用方程系数确定方程根之幂的和数，即“牛顿幂和公式”.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法·提升练 ☞（答案见151页）

考查角度1 利用一元二次方程解传播问题

7. 岳一中九年级某学生聆听了感恩励志主题演讲《不要让爱你的人失望》后，写了一份《改变，从现在开始》的倡议书在微信朋友圈传播，规则为：将倡议书发表在自己的朋友圈，再邀请 n 个好友转发倡议书，每个好友转发倡议书之后，又邀请 n 个互不相同的好友转发倡议书，以此类推，已知经过两轮传播后，共有421人参与了传播活动，求 n 的值.

考查角度2 利用一元二次方程解计数问题

8. 我们知道，计算 n 边形的对角线条数公式为：$\frac{1}{2}n(n-3)$. 如果一个 n 边形共有20条对角线，那么可以得到方程 $\frac{1}{2}n(n-3)=20$. 整理得 $n^2-3n-40=0$，解得 $n=8$ 或 $n=-5$.

$\because n\geqslant 3$，$\therefore n=-5$ 不合题意，舍去. $\therefore n=8$，即该多边形是八边形.

根据以上内容，解答下列问题：

(1) 若一个多边形共有14条对角线，则这个多边形的边数是多少？

(2) A同学说：“我求得一个多边形共有10条对角线.”你认为A同学的说法正确吗？为什么？

Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞（答案见151页）

拔尖角度1 利用一元二次方程解与一次函数有关的综合问题

9. 【中考·德州】为积极响应新旧动能转换，提高公司经济效益，某科技公司近期研发出一种新型高科技设备，每台设备成本价为30万元，经过市场调研发现，每台售价为40万元时，年销售量为600台；每台售价为45万元时，年销售量为550台. 假定该设备的年销售量 y（单位：台）和销售单价 x（单位：万元）成一次函数关系.

(1) 求年销售量 y 与销售单价 x 的函数关系式；

(2) 根据相关规定，此设备的销售单价不得高于70万元，如果该公司想获得10 000万元的年利润，则该设备的销售单价应是多少万元？

拔尖角度2 利用一元二次方程解与不等式有关的综合问题

10. 为进一步促进义务教育均衡发展，某市加大了基础教育经费的投入，已知2018年该市投入基础教育经费5 000万元，2020年投入基础教育经费7 200万元.

(1) 求该市这两年投入基础教育经费的年平均增长率；

(2) 如果按(1)中基础教育经费投入的年平均增长率计算，该市计划2021年用不超过当年基础教育经费的5%购买电脑和实物投影仪共1 500台调配给农村学校，若购买一台电脑需3 500元，购买一台实物投影仪需2 000元，则最多可购买电脑多少台？

趣味数学

唐朝时，有一位懂数学的尚书主持了一场考试，其中有一道题是这样的：有一天，几个盗贼正在商议怎样分配偷来的布匹. 贼首说，每人分6匹布，还剩5匹布；每人分7匹布，还少8匹布.（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

阶段核心应用

一元二次方程解实际问题的十种常见应用 ☞(答案见 151 页)

名师点金

同学们知道,学习了一元二次方程的解法以后,就会经常遇到解决与一元二次方程有关的生活中的应用问题,即列一元二次方程解应用题. 不少同学遇到这类问题总是左右为难,难以下笔. 事实上,同学们只要能认真地阅读题目,分析题意,并能学会分解题目,各个击破,从而找到已知条件和未知问题,必要时可通过画图、列表等方法来帮助自己理顺已知与未知之间的关系,找到一个或几个相等的式子,从而列出方程求解,同时还要及时地检验答案的正确性、合理性,并作答.

应用 1 增长率问题

1. 【中考·宜昌】HW 公司 2018 年使用自主研发生产的“QL”系列甲、乙、丙三类芯片共 2 800 万块,生产了2 800万部手机,其中乙类芯片的产量是甲类芯片的 2 倍,丙类芯片的产量比甲、乙两类芯片产量的和还多 400 万块,这些“QL”芯片解决了该公司 2018 年生产的全部手机所需芯片的 10%.

(1)求 2018 年甲类芯片的产量;

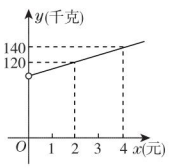
(2)HW 公司计划 2020 年生产的手机全部使用自主研发的“QL”系列芯片,从 2019 年起逐年扩大“QL”芯片的产量,2019 年、2020 年这两年,甲类芯片每年的产量都比前一年增长一个相同的百分数 $m\%$,乙类芯片的产量平均每年增长的百分数比 $m\%$ 小 1,丙类芯片的产量每年按相同的数量递增. 2018 年到 2020 年,丙类芯片三年的总产量达到 1.44 亿块,这样,2020 年 HW 公司的手机产量比 2018 年全年的手机产量多 10%,求丙类芯片 2020 年的产量及 m 的值.

应用 2 销售问题

2. 【中考·安顺】安顺市某商贸公司以每千克 40 元的价格购进一种干果,计划以每千克 60 元的价格销售,为了让顾客得到更大的实惠,现决定降价销售,已知这种干果的销售量 y(千克)与每千克降价 x(元)$(0<x<20)$之间满足一次函数关系,其图象如图所示.

(1)求 y 与 x 之间的函数关系式;

(2)商贸公司要想获利 2 090 元,则这种干果每千克应降价多少元?



(第 2 题)

趣味数学　贼首的话被躲在暗处的衙役听到了,他飞快地跑回官府,报告了知府,但知府不知道有多少盗贼,不知派多少人去抓捕他们. 请问有盗贼几人,布几匹?　(答案:盗贼 13 人,布 83 匹)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

应用3 储蓄问题

3. 王红梅同学将1 000元压岁钱第一次按一年定期存入“少儿银行”，到期后将本金和利息取出，并将其中的500元捐给“希望工程”，剩余的又全部按一年定期存入，这时存款的年利率已下调到第一次存款时年利率的90%，这样到期后，可得本金和利息共530元，求第一次存款时的年利率.（不计利息税）

应用4 趣味问题

4. 一个醉汉拿着一根竹竿进城，横着怎么也拿不进去，量得竹竿长比城门宽4米. 旁边一个醉汉嘲笑他：“你没看城门高吗？竖着拿就可以进去啦!”结果竹竿竖着比城门高2米，二人没办法，只好请教聪明人，聪明人教他们二人沿着城门的对角斜着拿，二人一试，不多不少刚好进城门，你知道竹竿有多长吗？

应用5 古诗问题

5. 读诗词解题：（通过列方程，算出周瑜去世时的年龄）
大江东去浪淘尽，千古风流数人物；
而立之年督东吴，早逝英年两位数；
十位恰小个位三，个位平方与寿符；
哪位学子算得快，多少年华属周瑜？

应用6 传播问题

6. 某种电脑病毒传播非常快，如果有一台电脑被感染，经过两轮感染后就会有81台电脑被感染. 请回答：每轮感染中平均一台电脑会感染几台电脑？若病毒得不到有效控制，三轮感染后被感染的电脑总数会不会超过700台？

数学中的一些定理具有这样的特性：它们极易从事实中归纳出来，但证明却隐藏得极深.
——高斯

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

应用 7　情景问题

7. 收发微信红包已成为各类人群进行交流联系、增强感情的一部分. 如图是甜甜和她的双胞胎妹妹在六一儿童节期间的对话.



（第 7 题）

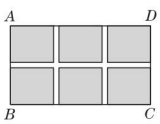
请问：

(1) 2018 年到 2020 年甜甜和她的妹妹在六一收到微信红包的年平均增长率是多少?

(2) 2020 年六一，甜甜和她的妹妹各收到了多少钱的微信红包?

应用 8　几何问题

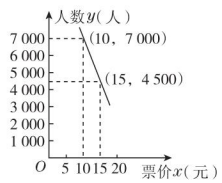
8. 【中考·襄阳】改善小区环境，争创文明家园. 如图所示，某社区决定在一块长 (AD) 16 m，宽 (AB) 9 m 的矩形场地 $ABCD$ 上修建三条同样宽的小路，其中两条与 AB 平行，另一条与 AD 平行，其余部分种草，要使草坪部分的总面积为 112 m^2，则小路的宽应为多少?



（第 8 题）

应用 9　函数问题

9. 某博物馆每周都吸引大量中外游客前来参观. 如果游客过多，对馆中的珍贵文物会产生不利影响，因此博物馆采取了提高门票价格的方法来控制参观人数，在该方法的实施过程中发现：每周参观人数 y(人) 与票价 x(元) 之间存在着如图所示的一次函数关系，在这种情况下，如果要保证每周 4 万元的门票收入，那么每周应限定参观人数为多少? 门票价格应是多少?



（第 9 题）

应用 10　新定义问题

10. 观察下列一组方程：①$x^2 - x = 0$；②$x^2 - 3x + 2 = 0$；③$x^2 - 5x + 6 = 0$；④$x^2 - 7x + 12 = 0$……它们的根有一定的规律，都是两个连续的自然数，我们称这类一元二次方程为“连根一元二次方程”.

(1) 若 $x^2 + kx + 56 = 0$ 也是“连根一元二次方程”，写出实数 k 的值，并解这个一元二次方程；

(2) 请写出第 n 个方程和它的根.

更多提分招数详见《极速提分法》第 6 页.

趣味数学　也许听起来奇怪，数学的力量在于它规避了一切不必要的思考和惊人地节省了脑力劳动.

——恩斯特·马赫

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

全章热门考点整合应用

☞（答案见152页）

名师点金

关于一元二次方程的题型非常丰富，常见的有一元二次方程的根、一元二次方程的解法、一元二次方程根的情况、一元二次方程根与系数的关系、一元二次方程的应用等，只要我们掌握了不同题型的解法特点，就可以使问题变得简单明了. 本章热门考点可概括为：两个概念，一个解法，两个关系，两个应用，三种思想.

考点1 两个概念

概念1 一元二次方程

1. 当 m 取何值时，方程 $(m-1)x^{m^2+1}+2mx+3=0$ 是关于 x 的一元二次方程？ 【导学号：9401294】

概念2 一元二次方程的根

2. 若关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一根为 -1，且 $a=\sqrt{4-c}+\sqrt{c-4}-2$，求 $\dfrac{(a+b)^{2\,022}}{2\,021c}$ 的值.

考点2 一个解法——一元二次方程的解法

3. 选择适当的方法解下列方程：

(1) $(x-1)^2+2x(x-1)=0$；

(2) $x^2-6x-6=0$；

(3) $6\,000(1-x)^2=4\,860$；

(4) $(10+x)(50-x)=800$；

(5) 【中考·山西】$(2x-1)^2=x(3x+2)-7$.

考点3 两个关系

关系1 一元二次方程根的判别式与系数的关系

4. 【中考·烟台】当 $b+c=5$ 时，关于 x 的一元二次方程 $3x^2+bx-c=0$ 的根的情况为（　　）

A. 有两个不相等的实数根

B. 有两个相等的实数根

C. 没有实数根

D. 无法确定

5. 在等腰三角形 ABC 中，三边长分别为 a,b,c. 其中 $a=5$，若关于 x 的方程 $x^2+(b+2)x+(6-b)=0$ 有两个相等的实数根，求 $\triangle ABC$ 的周长.

关系2 一元二次方程根与系数的关系

6. 【中考·孝感】已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-2(a-1)x+a^2-a-2=0$ 有两个不相等的实数根 x_1,x_2.

(1) 若 a 为正整数，求 a 的值；

(2) 若 x_1,x_2 满足 $x_1^2+x_2^2-x_1x_2=16$，求 a 的值.

7. 【中考·黄石】已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-6x+(4m+1)=0$ 有实数根.

(1) 求 m 的取值范围；

(2) 若该方程的两个实数根为 x_1,x_2，且 $|x_1-x_2|=4$，求 m 的值.

为了创造一种健康的哲学，你应该抛弃形而上学，但要成为一位好数学家.

——伯特兰·罗素

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考点4　两个应用

应用1　一元二次方程的应用

8. 【中考·德州】习近平总书记说："读书可以让人保持思想活力，让人得到智慧启发，让人滋养浩然之气."某校为响应我市全民阅读活动，利用节假日面向社会开放学校图书馆. 据统计，第一个月进馆128人次，进馆人次逐月增加，到第三个月末累计进馆608人次，若进馆人次的月平均增长率相同.

(1)求进馆人次的月平均增长率；

(2)因条件限制，学校图书馆每月接纳能力不超过500人次，在进馆人次的月平均增长率不变的条件下，校图书馆能否接纳第四个月的进馆人次，并说明理由.

应用2　配方法的应用

9. 阅读下面材料.

我们知道 x^2+6x+9 可以分解因式，结果为 $(x+3)^2$，其实 x^2+6x+8 也可以通过配方法分解因式，其过程如下：

$$\begin{aligned} x^2+6x+8 &= x^2+6x+9-9+8\\ &=(x+3)^2-1\\ &=(x+3+1)(x+3-1)\\ &=(x+4)(x+2). \end{aligned}$$

(1)请仿照上述过程填空：

$x^2+4x-5=[x+_____][x+_____]$；

$x^2-5x+6=[x+_____][x+_____]$；

$x^2-8x-9=[x+_____][x+_____]$.

(2)请观察(1)中横线上所填的数，每道题所填的两个数与一次项系数、常数项有什么关系？

10. 阅读材料：

把形如 $ax^2+bx+c(a,b,c$ 为常数$)$ 的二次三项式(或其中一部分)配成完全平方式的方法叫做配方法. 配方法的依据是 $a^2\pm2ab+b^2=(a\pm b)^2$.

例如：$(x-1)^2+3$，$(x-2)^2+2x$，$\left(\frac{1}{2}x-2\right)^2+\frac{3}{4}x^2$ 是 x^2-2x+4 的三种不同形式的配方，即"余项"分别是常数项、一次项、二次项.

请根据阅读材料解决下列问题：

(1)仿照上面的例子，写出 x^2-4x+2 的三种不同形式的配方；

(2)已知 $a^2+b^2+c^2-ab-3b-2c+4=0$，求 $a+b+c$ 的值.

考点5　三种思想

思想1　整体思想

11. 已知 $x=a$ 是 $2x^2+x-2=0$ 的一个根，求代数式 $2a^4+a^3+2a^2+2a+1$ 的值.

思想2　转化思想

12. 解方程：$(2x+1)^2-3(2x+1)=-2$.

思想3　分类讨论思想

13. 已知关于 x 的方程 $x^2+2(a-1)x+a^2-7a-4=0$ 有两个实数根 x_1,x_2.

(1)求 a 的取值范围；

(2)若 $x_1^2=x_1x_2$，求方程的两个根及 a 的值.

更多提分招数详见《极速提分法》第9页.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

第21章达标检测卷

（120分，90分钟）

题　号	一	二	三	总　分
得　分				

姓名　学号　班级　学校

一、选择题（每题3分，共30分）

1. 下列式子一定是二次根式的是（　　）

A. $\sqrt{a}$　　B. $\sqrt[3]{a}$　　C. $-\sqrt{a}$　　D. $\sqrt{a^2}$

2. 二次根式 $\sqrt{2x+4}$ 中的 x 的取值范围是（　　）

A. $x<-2$　　B. $x\leqslant -2$　　C. $x>-2$　　D. $x\geqslant -2$

3. 下列二次根式中，最简二次根式是（　　）

A. $\sqrt{25a}$　　B. $\sqrt{a^2+b^2}$　　C. $\sqrt{\frac{a}{2}}$　　D. $\sqrt{0.5}$

4. 下列二次根式中能与 $2\sqrt{3}$ 合并的是（　　）

A. $\sqrt{8}$　　B. $\sqrt{\frac{1}{3}}$　　C. $\sqrt{18}$　　D. $\sqrt{9}$

5. 下列计算正确的是（　　）

A. $5\sqrt{3}-2\sqrt{3}=3$　　B. $2\sqrt{2}\times 3\sqrt{2}=6\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}+2\sqrt{3}=3$　　D. $3\sqrt{3}\div\sqrt{3}=3$

6. 下列各式中，一定成立的是（　　）

A. $\sqrt{(-2.5)^2}=(\sqrt{2.5})^2$　　B. $\sqrt{a^2}=(\sqrt{a})^2$

C. $\sqrt{x^2-2x+1}=x-1$　　D. $\sqrt{x^2-9}=\sqrt{x-3}\cdot\sqrt{x+3}$

7. 若 k,m,n 都是整数，且 $\sqrt{135}=k\sqrt{15}$，$\sqrt{450}=15\sqrt{m}$，$\sqrt{180}=6\sqrt{n}$，则下列关于 k,m,n 的大小关系，正确的是（　　）

A. $k<m=n$　　B. $m=n<k$　　C. $m<n<k$　　D. $m<k<n$

8. 已知 a,b,c 为 $\triangle ABC$ 的三边长，且 $\sqrt{a^2-2ab+b^2}+|b-c|=0$，则 $\triangle ABC$ 的形状是（　　）

A. 等腰三角形　　B. 等边三角形　　C. 直角三角形　　D. 等腰直角三角形

9. 对于任意的正数 m,n，定义新运算※：$m※n=\begin{cases}\sqrt{m}-\sqrt{n}\,(m\geqslant n),\\ \sqrt{m}+\sqrt{n}\,(m<n),\end{cases}$ 则(3※2)(8※12)的结果为（　　）

A. $2-4\sqrt{6}$　　B. 2　　C. $2\sqrt{5}$　　D. 20

10. 已知实数 x,y 满足：$y=\frac{\sqrt{x^2-16}+\sqrt{16-x^2}+24}{x-4}$，则 $\sqrt{xy+13}$ 的值为（　　）

A. 0　　B. $\sqrt{37}$　　C. $\sqrt{13}$　　D. 5

二、填空题（每题3分，共30分）

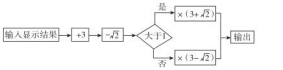
11. 计算：$\sqrt{12}\times\sqrt{3}=$ _____.

12. 若最简二次根式 $\sqrt{3a-1}$ 与 $\sqrt{2a+3}$ 可以合并，则 a 的值为_____.

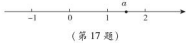
13. 已知 $x-\frac{1}{x}=\sqrt{6}$，则 $x^2+\frac{1}{x^2}=$ _____.

14. 当 $x=\sqrt{5}-1$ 时，代数式 x^2+2x+3 的值是_____.

15. 用计算器进行计算，开机后依次按下 3 x^2 =，把显示结果输入如图所示的程序中，则输出的结果是_____.



（第15题）



（第17题）

16. 一个三角形的三边长分别为 $\sqrt{48}$ cm，$\sqrt{12}$ cm，$\sqrt{27}$ cm，则它的周长是_____cm.

17. 实数 a 在数轴上对应点的位置如图所示，化简 $|a-1|+\sqrt{(a-2)^2}=$ _____.

18. 若实数 m 满足 $\sqrt{(m-2)^2}=m+1$，且 $0<m<\sqrt{3}$，则 m 的值为_____.

19. 若 $xy>0$，则二次根式 $\frac{1}{x}\sqrt{-\frac{x^2}{y}}$ 化简的结果为_____.

20. 观察下列各式：$\sqrt{1+\frac{1}{3}}=2\sqrt{\frac{1}{3}}$，$\sqrt{2+\frac{1}{4}}=3\sqrt{\frac{1}{4}}$，$\sqrt{3+\frac{1}{5}}=4\sqrt{\frac{1}{5}}$，…，请你将发现的规律用含正整数 n 的式子表示出来：_____.

三、解答题（21题12分，26，27题每题10分，其余每题7分，共60分）

21. 计算：

(1) $3\sqrt{12}-2\sqrt{48}+\sqrt{8}$；　　(2) $\left(\sqrt{\frac{1}{3}}+\sqrt{27}\right)\times\sqrt{3}$；

(3) $\sqrt{48}\div\sqrt{3}-2\sqrt{\frac{1}{5}}\times\sqrt{30}+(2\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$；

(4) $(2-\sqrt{3})^{2\,021}(2+\sqrt{3})^{2\,022}-|-\sqrt{3}|-(-\sqrt{2})^0$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

22. 先化简，再求值：$\frac{a^2-b^2}{a}\div\left(a-\frac{2ab-b^2}{a}\right)$，其中 $a=\sqrt{5}+2$，$b=\sqrt{5}-2$.

23. 已知 a,b,c 是 $\triangle ABC$ 的三边长，化简：$\sqrt{(a+b+c)^2}-\sqrt{(b+c-a)^2}+\sqrt{(c-b-a)^2}$.

24. 已知 $a+b=-2$，$ab=\frac{1}{2}$，求 $\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{\frac{a}{b}}$ 的值.

25. 某小区有一块长为 $\sqrt{243}$ m，宽为 $\sqrt{128}$ m 的空地，现要在该空地上种植草坪进行绿化，解答下面的问题：

(1)求该空地的周长；

(2)若种植草坪的造价为 12 元/m^2，求绿化该空地所需的总费用.

26. 先阅读材料，然后回答问题.

在进行二次根式化简时，我们有时会遇到形如 $\frac{3}{\sqrt{5}}$，$\sqrt{\frac{2}{3}}$，$\frac{2}{\sqrt{3}+1}$ 的式子，其实我们还可以将其进一步化简：

$\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{3}{5}\sqrt{5}$；(Ⅰ)

$\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{2\times3}{3\times3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$；(Ⅱ)

$\frac{2}{\sqrt{3}+1}=\frac{2\times(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\frac{2(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3})^2-1^2}=\sqrt{3}-1$.(Ⅲ)

以上这种化简的方法叫做分母有理化.

$\frac{2}{\sqrt{3}+1}$ 还可以用以下方法化简：

$\frac{2}{\sqrt{3}+1}=\frac{3-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{(\sqrt{3})^2-1^2}{\sqrt{3}+1}=\frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{3}-1$.(Ⅳ)

(1)请用不同的方法化简 $\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.

①参照(Ⅲ)式化简 $\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$；②参照(Ⅳ)式化简 $\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.

(2)化简：$\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$.

27. (1)已知 $|2\,021-x|+\sqrt{x-2\,022}=x$，求 $x-2\,022^2$ 的值；

(2)已知 $a>0$，$b>0$ 且 $\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})=3\sqrt{b}(\sqrt{a}+5\sqrt{b})$，求 $\frac{2a+3b+\sqrt{ab}}{a-b+\sqrt{ab}}$ 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 22 章达标检测卷

（120 分，90 分钟）

题　号	一	二	三	总　分
得　分				

姓名　学号　班级　学校

一、选择题（每题 3 分，共 30 分）

1. 下列方程是一元二次方程的是（　　）

A. $9x+2=0$　　B. $x^2+x=1$　　C. $3x^2-8=0$　　D. $\frac{1}{x}+x^2=0$

2. 若关于 x 的一元二次方程 $8x^2-16x-25+a^2=0$ 没有常数项，则 a 的值是（　　）

A. 5　　B. -5　　C. ±5　　D. 0 或 2

3. 方程 $x^2-2=0$ 的根为（　　）

A. $x_1=x_2=2$　　B. $x_1=x_2=\sqrt{2}$　　C. $x_1=-2, x_2=2$　　D. $x_1=-\sqrt{2}, x_2=\sqrt{2}$

4. 已知关于 x 的方程 $x^2+mx-6=0$ 的一个根为 2，则 m 的值及另一个根是（　　）

A. 1，3　　B. -1，3　　C. 1，-3　　D. -1，-3

5. 一个等腰三角形的两条边长分别为方程 $x^2-7x+10=0$ 的两根，则该等腰三角形的周长是（　　）

A. 12　　B. 9　　C. 13　　D. 12 或 9

6. 某城市 2017 年底已有绿化面积 300 公顷，经过两年绿化，绿化面积逐年增加，到 2019 年底增加到 363 公顷，设绿化面积平均每年的增长率为 x. 由题意，所列方程正确的是（　　）

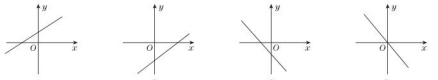
A. $300(1+x)=363$　　B. $300(1+x)^2=363$

C. $300(1+2x)=363$　　D. $363(1-x)^2=300$

7. 在等腰三角形 ABC 中，$BC=8$，AB，AC 的长是关于 x 的方程 $x^2-10x+m=0$ 的两根，则 m 的值是（　　）

A. 16　　B. 24　　C. 25　　D. 16 或 25

8. 若关于 x 的一元二次方程 $x^2-2x+kb+1=0$ 有两个不相等的实数根，则一次函数 $y=kx+b$ 的大致图象可能是（　　）



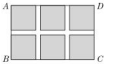
A　　B　　C　　D

9. 若关于 x 的一元二次方程 $x^2-3x+p=0(p\neq0)$ 的两个不相等的实数根分别为 a 和 b，且 $a^2-ab+b^2=18$，则 $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ 的值是（　　）

A. 3　　B. -3　　C. 5　　D. -5

10. 如图，某小区规划在一个长为 40 m，宽为 26 m 的矩形场地 $ABCD$ 上修建三条同样宽的路，使其中两条与 AB 平行，另一条与 AD 平行，其余部分种植草坪，若使每块草坪（阴影部分）的面积都为 144 m^2，则路的宽为（　　）

A. 3 m　　B. 4 m　　C. 2 m　　D. 5 m



（第 10 题）

二、填空题（每题 3 分，共 30 分）

11. 把方程 $(2x+1)(x-2)=5-3x$ 整理成一般形式后，得_____.

12. 方程 $x^2-2x-3=0$ 的解为_____.

13. 已知 $x=1$ 是一元二次方程 $x^2+ax+b=0$ 的一个根，则 $(a+b)^{2\,022}$ 的值为_____.

14. 若关于 x 的一元二次方程 $(a-1)x^2-x+1=0$ 有实数根，则 a 的取值范围是_____.

15. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+(m+3)x+m+1=0$ 的两个实数根为 x_1，x_2，若 $x_1^2+x_2^2=4$，则 m 的值为_____.

16. 对于任意实数 a，b，定义：$a*b=a(a+b)+b$，已知 $a*2.5=28.5$，则实数 a 的值是_____.

17. 若 x，y 满足 $(x^2+y^2+2)(x^2+y^2-2)=0$，则 x^2+y^2 的值为_____.

18. 已知 a，b，c 是 $\triangle ABC$ 的三边长，若方程 $(a-c)x^2+2bx+a+c=0$ 有两个相等的实数根，则 $\triangle ABC$ 是_____三角形.

19. 若 $x^2-3x+1=0$，则 $\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$ 的值为_____.

20. 一个两位数，十位上的数字比个位上的数字的平方少 9. 如果把十位上的数字与个位上的数字对调，得到的两位数比原来的两位数小 27，则原来的两位数是_____.

三、解答题（21，26 题每题 12 分，22，23 题每题 8 分，其余每题 10 分，共 60 分）

21. 用适当的方法解下列方程：

(1) $x^2-2x=5$；　　(2) $(7x+3)^2=2(7x+3)$；

(3) $x^2-\sqrt{3}x-\frac{9}{4}=0$；　　(4) $(y+1)(y-1)=2y-1$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

22. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-(2m-1)x+3=0$.

(1)当 $m=2$ 时,判断方程根的情况;

(2)当 $m=-2$ 时,求出方程的根.

23. 已知关于 x 的方程 $(k-2)x^{k^2-2}+3x-5=0$ 是一元二次方程,求直线 $y=kx-k$ 与两坐标轴围成的三角形的面积.

24. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-(2m-2)x+(m^2-2m)=0$.

(1)求证:方程有两个不相等的实数根;

(2)如果方程的两实数根为 x_1,x_2,且 $x_1^2+x_2^2=10$,求 m 的值.

25. 手机下载一个软件,缴纳一定数额的押金,就能以每小时 0.5 元到 1 元的价格解锁一辆自行车任意骑行. 最近的网红非"共享单车"莫属. 共享单车为解决市民出行的"最后一千米"难题帮了大忙,人们在享受科技进步、共享经济带来的便利的同时,随意停放、加装私锁等毁坏单车的行为也层出不穷. 某共享单车公司一月份投入部分自行车进入市场,一月底发现损坏率不低于 10%,二月初又投入 1 200 辆进入市场,使可使用的自行车达到 7 500 辆.

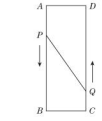
(1)一月份该公司投入市场的自行车至少有多少辆?

(2)二月份的损坏率达到 20%,进入三月份,该公司新投入市场的自行车比二月份增长 $4a\%$,由于媒体的关注,毁坏共享单车的行为引起了一场国民素质的大讨论,三月份的损坏率下降为 $\frac{1}{4}a\%$,三月底可使用的自行车达到 7 752 辆,求 a 的值.

26. 如图,已知 A,B,C,D 为矩形的四个顶点,$AB=16$ cm,$AD=6$ cm,动点 P,Q 分别从点 A,C 同时出发,点 P 以 3 cm/s 的速度向点 B 移动,一直到点 B 为止,点 Q 以 2 cm/s 的速度向点 D 移动. 问:

(1)P,Q 两点出发多长时间后,四边形 $PBCQ$ 的面积是 33 cm^2?

(2)P,Q 两点出发多长时间后,点 P 与点 Q 之间的距离是 10 cm?



(第 26 题)

荣德基 品质教辅

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

正文练习答案

第21章 二次根式

21.1 二次根式

第1课时 二次根式的定义

1. C

2. A　点拨：根据二次根式的定义进行识别，$\sqrt{a}$中$a<0$时不是二次根式.

3. C　点拨：二次根式必须满足两个条件：一是被开方数为非负数，二是根指数为2. $\sqrt{-3}$无意义，$\sqrt[3]{8}$的根指数不是2，故②④不是二次根式. 二次根式有①③⑤⑥，共4个.

4. C　5. D

6. C　点拨：由题意可知：$\begin{cases}2x-1\geqslant 0,\\1-2x\geqslant 0,\end{cases}$

解得$x=\frac{1}{2}$.

7. C　8. B　9. 1　10. D

11. B　点拨：根据$|m-2|+\sqrt{n-4}=0$得$m=2,n=4$，再根据三角形三边关系定理得：三角形三边长分别为4,4,2. 故选B.

12. A　点拨：本题易错在漏掉分母不为0这个条件，由题意知$x-1\geqslant 0$且$x-2\neq 0$，解得$x\geqslant 1$且$x\neq 2$.

13. 解：因为$\sqrt{x+1}\geqslant 0$，$\sqrt{x+y-2}\geqslant 0$，且其和为0，所以$x+1=0,x+y-2=0$，解得$x=-1,y=3$.
所以x,y的值分别为$-1,3$.
方法总结：$a^2,|a|,\sqrt{a}$都为非负数，即$a^2\geqslant 0,|a|\geqslant 0,\sqrt{a}\geqslant 0(a\geqslant 0)$. 可利用“若几个非负数之和为零，则这几个非负数同时为零”解决问题.

14. 解：由二次根式有意义的条件得$3x-1\geqslant 0$，即$x\geqslant\frac{1}{3}$，所以当$x=\frac{1}{3}$时，式子$\sqrt{3x-1}+2$的取值最小，最小值为2.

15. 解：$\left(\frac{2}{m}-\frac{1}{n}\right)\div\left(\frac{m^2+n^2}{mn}-\frac{5n}{m}\right)\cdot\left(\frac{m}{2n}+\frac{2n}{m}+2\right)$
$=\frac{2n-m}{mn}\div\frac{m^2+n^2-5n^2}{mn}\cdot\frac{m^2+4n^2+4mn}{2mn}$
$=\frac{2n-m}{mn}\cdot\frac{mn}{(m+2n)(m-2n)}\cdot\frac{(m+2n)^2}{2mn}$
$=-\frac{m+2n}{2mn}$.
$\because\sqrt{m+1}+(n-3)^2=0$，
$\therefore m+1=0,n-3=0$，
$\therefore m=-1,n=3$.
$\therefore$原式$=-\frac{m+2n}{2mn}=\frac{-1+2\times 3}{2\times(-1)\times 3}=\frac{5}{6}$.

16. 解：(1)由$\begin{cases}x-3\geqslant 0,\\3-x\geqslant 0\end{cases}$解得$x=3$，
$\therefore y>2$. $\therefore\frac{|1-y|}{y-1}=\frac{y-1}{y-1}=1$.
(2)由$\begin{cases}2x-2\geqslant 0,\\1-x\geqslant 0\end{cases}$解得$x=1$，
$\therefore y=-2$. $\therefore\sqrt{x^2+5x}=3$.

第2课时 二次根式的性质

1. A　2. B　3. D　4. D

5. $a\leqslant 2$　点拨：$\because\sqrt{(a-2)^2}=2-a$，
$\therefore 2-a\geqslant 0$，即$a\leqslant 2$.

6. 2　7. B　8. B　9. C

10. B　点拨：$\because a,b,c$为三角形的三边长，$\therefore a+c>b,a+b>c$，
即$a-b+c>0,c-a-b<0$.
$\therefore\sqrt{(a-b+c)^2}-2|c-a-b|=(a-b+c)+2(c-a-b)=-a-3b+3c$. 故选B.

11. 错解：$\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}=1-\sqrt{2}$.
诊断：在运用$\sqrt{a^2}=a(a\geqslant 0)$时，易忽略$a\geqslant 0$这个条件，导致错误. 解决此类问题时，我们既可以先判断a的符号，再脱去$\sqrt{a^2}$中的根号，也可以先化成绝对值，即$\sqrt{a^2}=|a|$，再进一步化简.
正解：因为$1-\sqrt{2}<0$，
所以$\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}=\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}=\sqrt{2}-1$.

12. 解：(1)原式$=5-6=-1$.
(2)原式$=4-3+3\times\frac{1}{3}=2$.
(3)原式$=-1+1+2-(\sqrt{2}-1)=3-\sqrt{2}$.

13. 解：(1)$\because\sqrt{x+3}+\sqrt{(y-1)^2}+\sqrt{x^2-2x+1}=0$，
$\therefore x+3=0,(y-1)^2=0,x^2-2x+1=0$. $\therefore x=-3,y=1,z=1$.
$\therefore(x+y+z)^{2021}=(-3+1+1)^{2021}=(-1)^{2021}=-1$.
(2)由$\begin{cases}x-2\geqslant 0,\\2-x\geqslant 0,\end{cases}$得$x=2$，
$\therefore y>2$. $\therefore$原式$=\frac{y-2}{2-y}+2=1$.

14. 2 018 $\frac{2\,018}{2\,019}$　点拨：$\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{2\,018^2}+\frac{1}{2\,019^2}}$
$=1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+1+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+1+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+1+\left(\frac{1}{2\,018}-\frac{1}{2\,019}\right)$
$=2\,018+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2\,018}-\frac{1}{2\,019}$
$=2\,018+1-\frac{1}{2\,019}$
$=2\,018\frac{2\,018}{2\,019}$.


第14题图

15. 解：由数轴上点的位置可知，$a>b$，$0<a<1,b<-1$，
$\therefore a-b>0,b-1<0,a-1<0$.
$\therefore$原式$=a-b+(a-b)-(b-1)+(a-1)=3a-3b$.

21.2 二次根式的乘除

第1课时 二次根式的乘法

1. B　2. C　3. B　4. A　5. B
6. B　7. D　8. B　9. B

10. D　点拨：$\sqrt{(-16)\times(-9)}=\sqrt{16\times 9}$，故A错误；$\sqrt{25a^2b^2}=|5a^2b|$，当$b\geqslant 0$时，$\sqrt{25a^2b^2}=5a^2b$，当$b<0$时，$\sqrt{25a^2b^2}=-5a^2b$，故B错误；$\sqrt{8^2+5^2}=\sqrt{89}\neq 8+5$，故C错误；$\sqrt{25^2-24^2}=\sqrt{(25+24)\times(25-24)}=\sqrt{49}=7$，故D正确.

11. B　点拨：$\sqrt{20}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}=ab$.

12. 错解：A　诊断：本题学生容易把直接从根号外平方后移到根号内化简，即$a\sqrt{-\frac{1}{a}}=\sqrt{a^2\cdot\left(-\frac{1}{a}\right)}=\sqrt{-a}$. 忽视了$a$的取值为负数，应先留负号在根号外，然后再平方后移到根号内化简.
正解：B　点拨：题意可得$a<0$.
$\therefore a\sqrt{-\frac{1}{a}}=-\sqrt{a^2\cdot\left(-\frac{1}{a}\right)}=-\sqrt{-a}$.

13. 解：(1)原式$=4-3+1+3=5$.
(2)原式$=\frac{3}{2}\times(-1)\times\left(-\frac{1}{3}\right)\times\sqrt{20\times 15\times 48}=\frac{1}{2}\times 120=60$.
(3)原式$=\left[\frac{2}{b}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot 3\right]\cdot\sqrt{ab^3\cdot a^3b\cdot\frac{a}{b}}=\left(-\frac{9}{b}\right)\sqrt{a^2b^2}=-9a^2\sqrt{ab}$.

14. 解：由已知条件得$\begin{cases}10-x\geqslant 0,\\x-8\geqslant 0,\end{cases}$所以$8\leqslant x\leqslant 10$. 因为$x$为奇数，所以$x=9$.
所以$\sqrt{1+2x+x^2}\cdot\sqrt{\frac{x^2-6x+9}{x+1}}=\sqrt{(1+x)^2}\cdot\frac{(x-3)^2}{x+1}=(x-3)\sqrt{x+1}=6\sqrt{10}$.

15. 解：(1)$5\sqrt{3}=\sqrt{5^2\times 3}=\sqrt{75}$，$3\sqrt{5}=\sqrt{3^2\times 5}=\sqrt{45}$，
$\because 75>45$，$\therefore\sqrt{75}>\sqrt{45}$，
$\therefore 5\sqrt{3}>3\sqrt{5}$.
(2)$3-6\sqrt{5}=3-\sqrt{6^2\times 5}=3-\sqrt{180}$，$3-5\sqrt{6}=3-\sqrt{5^2\times 6}=3-\sqrt{150}$.
$\because 180>150$，
$\therefore -\sqrt{180}<-\sqrt{150}$.
$\therefore 3-\sqrt{180}<3-\sqrt{150}$，
即$3-6\sqrt{5}<3-5\sqrt{6}$.
方法总结：比较两个含二次根式的式子的大小可以将其转化成比较两个被开方数的大小，即可以将根号外的正因数平方后移到根号内，计算出被开方数后，再比较被开方数的大小. 被开方数大的，其算术平方根也大. 如果是两个正数相比较，也可以采用平方法，如$(5\sqrt{3})^2=75$，$(3\sqrt{5})^2=45$，$\because 75>45$，
$\therefore 5\sqrt{3}>3\sqrt{5}$.

16. 解：(1)$\because\sqrt{2}=\sqrt{1\times 2}$，$\sqrt{6}=\sqrt{2\times 3}$，$\sqrt{12}=\sqrt{3\times 4}$，$\sqrt{20}=\sqrt{4\times 5}$，…，
$\therefore$第n(n是正整数)个二次根式是$\sqrt{n(n+1)}$.
(2)由(1)发现的规律，可知第5个二次根式为$\sqrt{5\times 6}$，第6个二次根式为$\sqrt{6\times 7}$，
则前6个二次根式的积为$\sqrt{1\times 2}\times\sqrt{2\times 3}\times\sqrt{3\times 4}\times\sqrt{4\times 5}\times\sqrt{5\times 6}\times\sqrt{6\times 7}$
$=1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6\times\sqrt{7}$
$=720\sqrt{7}$.

17. 解：$\sqrt{13-2\sqrt{42}}$，这里$m=13$，$n=42$.
$\because(\sqrt{7})^2+(\sqrt{6})^2=13$，$\sqrt{7}\times\sqrt{6}=\sqrt{42}$，
$\therefore\sqrt{13-2\sqrt{42}}=\sqrt{(\sqrt{7}-\sqrt{6})^2}=\sqrt{7}-\sqrt{6}$.
点拨：根据给出的材料，利用**悉地思想**，找出满足$(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2=13$和$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{42}$两个式子的$a,b$的值即可.


第17题图

第2课时 二次根式的除法

1. 3
2. B　3. C　4. B　5. D　6. C　7. D
8. D　点拨：由题意得$1-a\geqslant 0$且$a>0$，解得$0<a\leqslant 1$. 此题容易忽略$1-a\geqslant 0$这个条件.
9. D　10. A

11. A　点拨：$\sqrt{2.7}=\sqrt{\frac{270}{100}}=\sqrt{\frac{5\times 6\times 3^2}{100}}=\frac{3}{10}\times 5\times\sqrt{6}=0.3ab$，故选A.

12. D　13. D

14. B　点拨：$\because xy<0$，
$\therefore x>0,y<0$或$x<0,y>0$.
又$\because x\sqrt{-\frac{y}{x^2}}$有意义，
$\therefore y<0$. $\therefore x>0,y<0$.
当$x>0,y<0$时，$x\sqrt{-\frac{y}{x^2}}=\sqrt{-y}$，故选B.

15. 错解：$\sqrt{2^2\times 3}\div\sqrt{2\times 3}\times\frac{1}{\sqrt{2\times 3}}=\sqrt{2^2\times 3}\div 1=2\sqrt{6}$.
诊断：$\sqrt{2\times 3}$与$\frac{1}{\sqrt{2\times 3}}$互为倒数，在计算时容易感觉后两个式子方便计算，就先计算后面的乘法运算，从而得出错误答案$2\sqrt{6}$.
正解：原式$=2\sqrt{2\times 3}\times\frac{1}{\sqrt{2\times 3}}\times\frac{1}{\sqrt{2\times 3}}=\frac{2}{\sqrt{2\times 3}}=\frac{2\sqrt{2\times 3}}{2\times 3}=\frac{\sqrt{2\times 3}}{3}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

16. 解：(1)原式$=\left(1\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}\right)\sqrt{45}\div\frac{1}{5}\times 5=\sqrt{45\times 5\times 5}=15\sqrt{5}$.
(2)原式$=\left(-3\times\frac{1}{8}\div\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{7}{3}\times 15\div\frac{2}{5}}=-\frac{3}{4}\sqrt{\frac{7\times 5\times 5}{2}}=-\frac{15}{8}\sqrt{14}$.

17. 解：$\because\sqrt{\frac{x-6}{9-x}}=\frac{\sqrt{x-6}}{\sqrt{9-x}}$，
$\therefore\begin{cases}x-6\geqslant 0,\\9-x>0,\end{cases}\therefore 6\leqslant x<9$.
又$\because x$是奇数，$\therefore x=7$.
$\therefore(1+x)\sqrt{\frac{x^2-5x+4}{x^2-1}}=(1+x)\sqrt{\frac{(x-1)(x-4)}{(x+1)(x-1)}}=(1+x)\sqrt{\frac{x-4}{x+1}}=\sqrt{(x+1)(x-4)}$.
当$x=7$时，原式$=\sqrt{(7+1)\times(7-4)}=2\sqrt{6}$.

18. 解：(1)都正确.
(2)(解法不唯一)：$\because\sqrt{10}=\frac{\sqrt{70}}{7}=\frac{\sqrt{70}}{\sqrt{7}}=\frac{b}{a}$，$\because 4.9=\frac{49}{10}=\frac{\sqrt{49\times 10}}{\sqrt{10\times 10}}=\frac{7}{10}\sqrt{10}=\frac{7}{10}\cdot\frac{b}{a}=\frac{7b}{10a}$.

19. D　点拨：设$x=\sqrt{6-3\sqrt{3}}-\sqrt{6+3\sqrt{3}}$，易知$\sqrt{6+3\sqrt{3}}>\sqrt{6-3\sqrt{3}}$，$\therefore x<0$，
由$x^2=6-3\sqrt{3}-2\sqrt{(6-3\sqrt{3})(6+3\sqrt{3})}+6+3\sqrt{3}=12-2\times 3=6$，
解得$x=-\sqrt{6}$，即$\sqrt{6-3\sqrt{3}}-\sqrt{6+3\sqrt{3}}=-\sqrt{6}$.
$\because\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=5-2\sqrt{6}$，
$\therefore$原式$=5-2\sqrt{6}-\sqrt{6}=5-3\sqrt{6}$.

阶段核心方法

1. 解：因为$(\sqrt{6}+\sqrt{11})^2=17+2\sqrt{66}$，$(\sqrt{14}+\sqrt{3})^2=17+2\sqrt{42}$，
$17+2\sqrt{66}>17+2\sqrt{42}$，所以$(\sqrt{6}+\sqrt{11})^2>(\sqrt{14}+\sqrt{3})^2$. 又因为$\sqrt{6}+\sqrt{11}>0$，$\sqrt{14}+\sqrt{3}>0$，所以$\sqrt{6}+\sqrt{11}>\sqrt{14}+\sqrt{3}$.

2. 解：因为$\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+2}<\frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}+3}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\frac{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}+3)}{(\sqrt{a}+2)^2}=\frac{a+4\sqrt{a}+3}{a+4\sqrt{a}+4}<1$，易知$\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+3}>0$，$\frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}+3}>0$，所以$\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+2}<\frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}+3}$.

方法总结：当两个式子（均为正数）均由分母和分子两部分组成时，常通过作商比较它们的大小，先计算两个式子的商，然后比较商与1的大小关系. 已知$a>0,b>0$，若$\frac{a}{b}>1$，则$a>b$；若$\frac{a}{b}=1$，则$a=b$；若$\frac{a}{b}<1$，则$a<b$.

3. 解：$\frac{\sqrt{15}-\sqrt{14}}{1}=\frac{(\sqrt{15}-\sqrt{14})(\sqrt{15}+\sqrt{14})}{\sqrt{15}+\sqrt{14}}=\frac{1}{\sqrt{15}+\sqrt{14}}$，$\frac{1}{\sqrt{14}-\sqrt{13}}=\frac{(\sqrt{14}-\sqrt{13})(\sqrt{14}+\sqrt{13})}{\sqrt{14}+\sqrt{13}}=\frac{1}{\sqrt{14}+\sqrt{13}}$，

∵ $\sqrt{15}+\sqrt{14}>\sqrt{14}+\sqrt{13}$，$\sqrt{15}+\sqrt{14}>0$，$\sqrt{14}+\sqrt{13}>0$，

∴ $\frac{1}{\sqrt{15}+\sqrt{14}}<\frac{1}{\sqrt{14}+\sqrt{13}}$，即$\sqrt{15}-\sqrt{14}<\sqrt{14}-\sqrt{13}$.

4. 解：∵ $\frac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$，$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$，$2+\sqrt{3}>\sqrt{3}+\sqrt{2}$，

∴ $\frac{1}{2-\sqrt{3}}>\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

5. 解：因为$\frac{\sqrt{19}-1}{3}-\frac{2}{3}=\frac{\sqrt{19}-3}{3}$，$\sqrt{19}-3>0$，所以$\frac{\sqrt{19}-3}{3}>0$，所以$\frac{\sqrt{19}-1}{3}>\frac{2}{3}$.

点拨：利用作差法比较两个式子的大小的方法，即：若$a-b>0$，则$a>b$；若$a-b<0$，则$a<b$；若$a-b=0$，则$a=b$.

6. 解：$\frac{1}{x}=\frac{1}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}}{2}>0$，

$\frac{1}{y}=\frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{2}>0$，

∵ $\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}>\sqrt{n+2}+\sqrt{n}>0$，

∴ $\frac{1}{x}>\frac{1}{y}>0$，∴ $x<y$.

7. 解：取特殊值$x=\frac{1}{4}$，则$\frac{1}{x}=4$，$x^2=\frac{1}{16}$，$\sqrt{x}=\frac{1}{2}$，∴ $x^2<x<\sqrt{x}<\frac{1}{x}$.

8. 解：∵ $5-a\geqslant 0$，∴ $a\leqslant 5$. ∴ $a-6<0$.

∴ $\sqrt[3]{a-6}<0$.

又∵ $\sqrt{5-a}\geqslant 0$，∴ $\sqrt{5-a}>\sqrt[3]{a-6}$.

21.3　二次根式的加减

第 1 课时　二次根式的加减

1. B　**点拨**：A. $\sqrt{18}=3\sqrt{2}$，与$\sqrt{3}$不是同类二次根式，故此选项错误；B. $\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，与$\sqrt{3}$是同类二次根式，故此选项正确；C. $\sqrt{24}=2\sqrt{6}$，与$\sqrt{3}$不是同类二次根式，故此选项错误；D. $\sqrt{0.3}=\sqrt{\frac{3}{10}}=\frac{\sqrt{30}}{10}$，与$\sqrt{3}$不是同类二次根式，故此选项错误.

2. C　**点拨**：$\sqrt{24}=\sqrt{2^2\times 6}=2\sqrt{6}$，$\sqrt{2^2}=2$，$\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，$\sqrt{27}=\sqrt{3^2\times 3}=3\sqrt{3}$，故选 C.

3. D　**4.** A　**5.** C　**6.** A

7. D　**8.** A　**9.** C　**10.** D　**11.** C

12. $5\sqrt{19}-4$　**点拨**：因为$4<\sqrt{19}<5$，所以$a=4,b=\sqrt{19}-4$. 所以$\sqrt{19}a+b=4\sqrt{19}+\sqrt{19}-4=5\sqrt{19}-4$.

13. 解：∵ $-a^3\geqslant 0$，$-\frac{1}{a}>0$，∴ $a<0$，∴ 原式$=-a\sqrt{-a}+\sqrt{-a}=(1-a)\sqrt{-a}$.

14. 解：(1) 原式$=3+4\sqrt{3}+4-4\sqrt{3}+\frac{1}{4}=\frac{29}{4}$.

(2) 原式$=1+2\sqrt{2}-\sqrt{2}-1=\sqrt{2}$.

(3) 原式$=2\sqrt{x}+3\sqrt{x}-2\sqrt{x}=3\sqrt{x}$.

15. 解：原式$=\frac{a}{(a+b)(a-b)}\times\frac{b-a}{b}-\frac{1}{a+b}\times\frac{b-a}{b}=-\frac{a}{b(a+b)}-\frac{b-a}{b(a+b)}=-\frac{b}{b(a+b)}=-\frac{1}{a+b}$.

当$a=\sqrt{2}$，$b=2-\sqrt{2}$时，原式$=-\frac{1}{\sqrt{2}+2-\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}$.

16. 解：因为$x=\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=7+4\sqrt{3}$，

$y=\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=7-4\sqrt{3}$，

所以$x+y=14$，$xy=1$.

所以$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=14^2-2\times 1=194$.

17. 解：因为$\sqrt{5}$的整数部分为 2，

所以$7+\sqrt{5}=9+a,7-\sqrt{5}=4+b$，即$a=-2+\sqrt{5},b=3-\sqrt{5}$.

所以$ab-a+4b-3=(-2+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})-(-2+\sqrt{5})+4(3-\sqrt{5})-3=-11+5\sqrt{5}+2-\sqrt{5}+12-4\sqrt{5}-3=0$.

18. 解：(1) 由非负数的性质知$a-\sqrt{8}=0,b-\sqrt{18}=0,c-\sqrt{32}=0$，所以$a=2\sqrt{2},b=3\sqrt{2},c=4\sqrt{2}$.

(2) 能. 理由：因为$a<b<c,a+b=2\sqrt{2}+3\sqrt{2}=5\sqrt{2},c=4\sqrt{2}$，所以以$a+b>c$，所以以$a,b,c$的值为边长的三条线段能构成三角形.

第 2 课时　二次根式的混合运算

1. C　**点拨**：A. $\sqrt{2}$与$\sqrt{3}$不能合并，所以 A 选项错误；

B. 原式$=6\times 2=12$，所以 B 选项错误；

C. 原式$=\sqrt{8\div 2}=2$，所以 C 选项正确；

D. 原式$=2\sqrt{2}$，所以 D 选项错误.

2. B　**3.** A

4. B　**点拨**：由题图可知，第n行最后一个数为$\sqrt{1+2+3+\cdots+n}=\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}$，所以第 8 行最后一个数为$\sqrt{\frac{8\times 9}{2}}=\sqrt{36}=6$，则第 9 行从左至右第 5 个数是$\sqrt{36+5}=\sqrt{41}$，故选 B.

5. 解：(1) 原式$=4-3+4+1=6$.

(2) 原式$=3\sqrt{2}-\frac{3}{2}\sqrt{2}-(1+\sqrt{2})+1+11-\sqrt{2}1=\frac{3}{2}\sqrt{2}-1-\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1=\frac{3}{2}\sqrt{2}-1$.

6. D　**7.** C　**8.** C

9. $13-2\sqrt{42}=(\sqrt{7}-\sqrt{6})^2$　**点拨**：第n个等式左边的第 1 个数为$2n+1$，左边根号下的数为$n(n+1)$，利用完全平方公式得到第n个等式右边的式子为$(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^2(n\geqslant 1$且$n$为整数$)$.

10. 解：(1) 原式$=(2-\sqrt{3})^{[(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})]^{2021}}-\sqrt{3}-1=2-\sqrt{3}-\sqrt{3}-1=1-2\sqrt{3}$.

(2) 原式$=(3+2\sqrt{2})-1-(\sqrt{2}-1)=3+2\sqrt{2}-1-\sqrt{2}+1=3+\sqrt{2}$.

(3) 原式$=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2\div(\sqrt{a}+\sqrt{b})-(\sqrt{b}-\sqrt{a})=\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{b}+\sqrt{a}=2\sqrt{a}$.

(4) 原式$=2+2\sqrt{2}-2=2\sqrt{2}$.

11. 解：由已知得$a=\sqrt{5}+2,b=\sqrt{5}-2$，所以$a+b=2\sqrt{5},ab=1$.

所以原式$=\sqrt{(a+b)^2-2ab+7}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-2+7}=5$.

12. 解：因为$x=\sqrt{3}-\sqrt{2},y=\sqrt{3}+\sqrt{2}$，所以$x+y=(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{3}+\sqrt{2})=1$，$x+y+xy^3+yx^3=xy(x^2+y^2)=xy[(x+y)^2-2xy]=1\times[(2\sqrt{3})^2-2\times 1]=10$.

13. 解：因为$(\sqrt{2021+x}+\sqrt{9+x})\cdot(\sqrt{2021+x}-\sqrt{9+x})=(\sqrt{2021+x})^2-(\sqrt{9+x})^2=2021+x-9-x=2012$，

$\sqrt{2021+x}+\sqrt{9+x}=1006$，

所以$\sqrt{2021+x}-\sqrt{9+x}=2$.

14. 解：(1) $\left(1-\frac{1}{2}\right)\div\left(-\frac{3}{4}\right)+\sqrt{3}\times\sqrt{12}-\left(\frac{1}{1-\sqrt{3}}\right)^{-2}=-\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}+\sqrt{3\times 12}-(1-\sqrt{3})^2=-2+6-4+2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$；

(2) $\left(\frac{5x+3y}{x^2-y^2}+\frac{2x}{y^2-x^2}\right)\div\frac{x}{3(x-y)}=\frac{5x+3y-2x}{x^2-y^2}\div\frac{x}{3(x-y)}=\frac{3(x+y)}{(x+y)(x-y)}\cdot\frac{3(x-y)}{x}=\frac{9}{x}$.

当$x=3\sqrt{3},y=\frac{1}{2}$时，

原式$=\frac{9}{3\sqrt{3}}=\sqrt{3}$.

第 3 课时　二次根式运算常见的题型

1. 解：(1) 原式$=4-9+\sqrt{2}-1+1+2\sqrt{2}=-7+3\sqrt{2}$.

(2) 原式$=[(\sqrt{6}-\sqrt{5})(\sqrt{6}+\sqrt{5})]^{2021}\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{5})-2\times\frac{\sqrt{5}}{2}=\sqrt{6}+\sqrt{5}-\sqrt{5}=\sqrt{6}$.

2. 解：(1) 原式$=[(\sqrt{3}-1)-(\sqrt{3}+2)]^2=(\sqrt{3}-1-\sqrt{3}-2)^2=9$.

(2) 原式$=\frac{a(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}-\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\sqrt{a}-(\sqrt{a}-\sqrt{b})=\sqrt{a}-\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{b}$.

点拨：在进行二次根式的混合运算时，灵活运用乘法公式可简化计算过程.

3. 思路导引：先明确$\sqrt{3}$的整数部分是 1，然后得出$5+\sqrt{3}$的整数部分，再由$5+\sqrt{3}=6+a,5-\sqrt{3}=3+b$可求得$a,b$的值，最后代入求值即可.

解：∵ $\sqrt{3}$的整数部分为 1，

∴ $5+\sqrt{3}=6+a,5-\sqrt{3}=3+b$，即$a=\sqrt{3}-1,b=2-\sqrt{3}$.

∴ $ab-a+4b-3=(\sqrt{3}-1)(2-\sqrt{3})-(\sqrt{3}-1)+4\times(2-\sqrt{3})-3=-5+3\sqrt{3}-\sqrt{3}+1+8-4\sqrt{3}-3=1-2\sqrt{3}$.

方法总结：确定二次根式整数部分和小数部分，先采用缩放的方法确定二次根式的整数部分，然后用二次根式与整数部分的差确定小数部分，即由$n<\sqrt{x}<n+1$（x开方开不尽，n为非负整数）可以确定$\sqrt{x}$的整数部分为n，小数部分为$\sqrt{x}-n$.

4. 解：原式$=\frac{x}{xy}\cdot\frac{2xy}{(x-y)^2}+\frac{1}{x-y}=\frac{2}{x-y}+\frac{1}{x-y}=\frac{3}{x-y}$.

当$x=2+\sqrt{2},y=2$时，

原式$=\frac{3}{2+\sqrt{2}-2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

5. 解：∵ $x=1-\sqrt{2},y=1+\sqrt{2}$，

∴ $x-y=(1-\sqrt{2})-(1+\sqrt{2})=-2\sqrt{2},xy=(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})=-1$，

∴ $x^2+y^2-xy-2x+2y=(x-y)^2-2(x-y)+xy=(-2\sqrt{2})^2-2\times(-2\sqrt{2})+(-1)=7+4\sqrt{2}$.

6. 解：原式取倒数得$\frac{x^4+x^2+1}{x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}+1=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-1=(\sqrt{5})^2-1=4$.

∴ 原式$=\frac{1}{4}$.

阶段核心技巧

1. C

2. 解：原式$=(5+\sqrt{6})\times(5\sqrt{2}-\sqrt{2}\times\sqrt{6})=(5+\sqrt{6})\times[\sqrt{2}\times(5-\sqrt{6})]=\sqrt{2}\times[(5+\sqrt{6})\times(5-\sqrt{6})]=\sqrt{2}\times(25-6)=19\sqrt{2}$.

3. 解：原式$=\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{3})+3(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{(\sqrt{6}+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}+\frac{3(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{6}-\sqrt{3}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$.

4. 解：设原式$=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)}=x$，则$\frac{1}{x}=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{2}-1=\sqrt{3}-1$.

所以原式$=x=\frac{1}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

5. 解：原式$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}(\sqrt{2}+\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{5})}=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$.

6. 解：由二次根式的定义，得

$\begin{cases}5-5a\geqslant 0,\\5a-3\geqslant 0,\end{cases}$

∴ $3-5a=0$，∴ $a=\frac{3}{5}$.

∴ $b=15$.

∴ $ab>0,a+b>0,a-b<0$.

∴ $\sqrt{\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+2}-\sqrt{\frac{b}{a}+\frac{a}{b}-2}=\sqrt{\frac{(a+b)^2}{ab}}-\sqrt{\frac{(a-b)^2}{ab}}=\frac{a+b}{ab}\sqrt{ab}-\frac{b-a}{ab}\sqrt{ab}=\left(\frac{a+b}{ab}-\frac{b-a}{ab}\right)\sqrt{ab}=\frac{2}{b}\sqrt{ab}$.

当$a=\frac{3}{5},b=15$时，原式$=\frac{2}{15}\times\sqrt{\frac{3}{5}\times 15}=\frac{2}{5}$.

点拨：对于形如$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+2$或$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}-2$的代数式一般要将其变形为$\frac{(a+b)^2}{ab}$或$\frac{(a-b)^2}{ab}$的形式，当它们作为被开方式进行化简时，要注意$a+b$和$a-b$以及$ab$的符号.

7. 解：设原式$=x$，则$x^2=\frac{2\sqrt{10}+2}{\sqrt{10}+1}=2$，

又因为$x>0$，

所以原式$=x=\sqrt{2}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. 解：设 $x=n+2+\sqrt{n^2-4}$，$y=n+2-\sqrt{n^2-4}$，

则 $x+y=2n+4$，$xy=4n+8$.

则原式 $=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{x^2+y^2}{xy}=\dfrac{(x+y)^2-2xy}{xy}$

$=\dfrac{(x+y)^2}{xy}-2=\dfrac{(2n+4)^2}{4n+8}-2=n.$

当 $n=\sqrt{2}+1$ 时，原式 $=\sqrt{2}+1$.

9. 解：由已知得 $x=3+2\sqrt{2}$，$y=3-2\sqrt{2}$，则 $x+y=6$，$xy=1$.

所以原式 $=\dfrac{x^2+y^2-4xy}{xy}=\dfrac{(x+y)^2-6xy}{xy}=30.$

10. 解：∵ $a+b=-6$，$ab=5$，

∴ $a<0$，$b<0$.

∴ $b\sqrt{\dfrac{b}{a}}+a\sqrt{\dfrac{a}{b}}=-\dfrac{b}{a}\sqrt{ab}-\dfrac{a}{b}\sqrt{ab}=-\sqrt{ab}\cdot\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\right)=-\dfrac{(a+b)^2-2ab}{\sqrt{ab}}=-\dfrac{36-10}{\sqrt{5}}=-\dfrac{26}{\sqrt{5}}$

$=-\dfrac{26\sqrt{5}}{5}.$

点拨：解此类题，应先考虑字母取值的正负情况，再进行二次根式的化简，同时运用整体思想代入求值，应避免执着于单一字母的求值，从而导致问题复杂化，甚至无法求解.

11. 解：设 $x=k(k>0)$，则 $y=2k$，$z=3k$.

∴ 原式 $=\dfrac{\sqrt{3k}}{\sqrt{4k}+\sqrt{5k}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{5}}=\sqrt{15}-2\sqrt{3}.$

全章热门考点整合应用

1. 解：∵ $x-3\geqslant 0$，$3-x\geqslant 0$，∴ $x=3$，

∴ $y=-3$，∴ $x-y=6$.

2. C　**点拨**：根据最简二次根式的定义可知，只有 4 $\sqrt{3a}$，$\sqrt{b}$ 这两个二次根式是最简二次根式. 故选 C.

3. B　**4.** $0;2$　**5.** A

6. $(x^2+3)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

7. 8　**8.** A

9. 解：根据题意，得 $2<c<8$，

∴ $\sqrt{c^2-4c+4}-\sqrt{\dfrac{1}{4}c^2-4c+16}=\sqrt{(c-2)^2}-\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}c-4\right)^2}=c-2-\left(4-\dfrac{1}{2}c\right)=\dfrac{3}{2}c-6.$

10. 解：乙的解答正确. 理由如下：

∵ $\sqrt{(1-a)^2}=|1-a|$，且 $a=5$.

∴ $1-a<0$.

∴ $|1-a|=a-1$.

甲在去绝对值符号时忽略了 1 与 a 的大小关系，导致错误.

11. B

12. 5　**点拨**：由题意，得 $\begin{cases}3-a\geqslant 0,\\ a+1\neq 0,\end{cases}$ 解得 $-1\leqslant a\leqslant 3$. 又 ∵ a 是整数，

∴ a 可以取 $-1,0,1,2,3$.

∵ 它们的和是 $-1+0+1+2+3=5$.

13. 解：(1) $\sqrt{4\dfrac{4}{9}}=\sqrt{\dfrac{40}{9}}=\dfrac{\sqrt{40}}{\sqrt{9}}=\dfrac{2\sqrt{10}}{3}$.

(2) $\sqrt{\dfrac{121b^5}{16a^2}}=\dfrac{\sqrt{121b^4\cdot b}}{\sqrt{16a^2}}=\dfrac{11b^2\sqrt{b}}{-4a}$.

14. 解：(1) 方法一（先将根号外的因数移到根号内，再计算）：原式 $=(\sqrt{3^2\times 3}+\sqrt{32})\times(\sqrt{27}-\sqrt{4^2\times 2})=(\sqrt{27}+\sqrt{32})\times(\sqrt{27}-\sqrt{32})=27-32=-5.$

方法二（先化简，再计算）：原式 $=(3\sqrt{3}+4\sqrt{2})\times(3\sqrt{3}-4\sqrt{2})=(3\sqrt{3})^2-(4\sqrt{2})^2=27-32=-5.$

(2) 原式 $=[\sqrt{3}+(\sqrt{2}-1)][\sqrt{3}-(\sqrt{2}-1)]=(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2}-1)^2=3-(3-2\sqrt{2})=2\sqrt{2}.$

(3) 原式 $=\dfrac{3}{10}\sqrt{\dfrac{5ab}{c}}\times\dfrac{5}{3}\sqrt{\dfrac{2ac}{b}}\times\left(-2\sqrt{\dfrac{15bc}{a}}\right)+\sqrt{abc}=-\dfrac{3}{5}\times 2\times\sqrt{\dfrac{5ab}{c}\times\dfrac{2ac}{b}\times\dfrac{15bc}{a}}+\sqrt{abc}=-\sqrt{5\times 2\times 5\times 3abc}+\sqrt{abc}=-5\sqrt{6abc}+\sqrt{abc}.$

15. 思路导引：因为 $\sqrt{2022}-\sqrt{2021}>0$，$\sqrt{2021}-\sqrt{2020}>0$，所以可以先比较 $\sqrt{2022}-\sqrt{2021}$ 与 $\sqrt{2021}-\sqrt{2020}$ 的倒数的大小，再来比较它们的大小.

解：$\dfrac{1}{\sqrt{2022}-\sqrt{2021}}$

$=\dfrac{\sqrt{2022}+\sqrt{2021}}{(\sqrt{2022}-\sqrt{2021})\times(\sqrt{2022}+\sqrt{2021})}$

$=\dfrac{\sqrt{2022}+\sqrt{2021}}{(\sqrt{2022})^2-(\sqrt{2021})^2}$

$=\sqrt{2022}+\sqrt{2021}$，

$\dfrac{1}{\sqrt{2021}-\sqrt{2020}}$

$=\dfrac{\sqrt{2021}+\sqrt{2020}}{(\sqrt{2021}-\sqrt{2020})\times(\sqrt{2021}+\sqrt{2020})}$

$=\dfrac{\sqrt{2021}+\sqrt{2020}}{(\sqrt{2021})^2-(\sqrt{2020})^2}$

$=\sqrt{2021}+\sqrt{2020}$，

而 $\sqrt{2022}+\sqrt{2021}>\sqrt{2021}+\sqrt{2020}$，

所以 $\dfrac{1}{\sqrt{2022}-\sqrt{2021}}>\dfrac{1}{\sqrt{2021}-\sqrt{2020}}$

又因为 $\sqrt{2022}-\sqrt{2021}>0$，$\sqrt{2021}-\sqrt{2020}>0$，

所以 $\sqrt{2022}-\sqrt{2021}<\sqrt{2021}-\sqrt{2020}$.

点拨：一般地，已知 $a>0$，$b>0$，如果 $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$，那么 $a<b$；如果 $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$，那么 $a>b$.

16. 4

17. 思路导引：先将 $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$ 变形为 $\dfrac{(x+y)^2-2xy}{xy}$，然后将 $x+y$ 和 xy 的值整体代入计算即可.

解：因为 $x+y=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}+1)=2\sqrt{2}$，

$xy=(\sqrt{2}-1)\times(\sqrt{2}+1)=1$，

所以 $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{x^2+y^2}{xy}=\dfrac{(x+y)^2-2xy}{xy}=\dfrac{(2\sqrt{2})^2-2}{1}=6.$

18. 解：∵ $x+y=-8$，$xy=8$，

∴ $x<0$，$y<0$，∴ $-x>0$，$-y>0$.

∴ 原式 $=y\sqrt{\dfrac{x}{y^3}}+x\sqrt{\dfrac{y}{x^3}}=y\sqrt{\dfrac{xy}{(-x)^2}}+x\sqrt{\dfrac{xy}{(-y)^2}}=-\dfrac{x}{x}\sqrt{xy}-\dfrac{x}{y}\sqrt{xy}=-\dfrac{(x+y)^2-2xy}{8}\sqrt{xy}=-\dfrac{(-8)^2-2\times 8}{8}\times\sqrt{8}=-12\sqrt{2}.$

19. 解：∵ $a-b=\sqrt{3}+\sqrt{2}$，$b-c=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，

∴ $(a-b)+(b-c)=(\sqrt{3}+\sqrt{2})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})$，即 $a-c=2\sqrt{3}$.

∴ $2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)=(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(a^2-2ac+c^2)=(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2+(2\sqrt{3})^2=5+2\sqrt{6}+5+2\sqrt{6}+12=22.$

第 22 章　一元二次方程

22.1　一元二次方程

第 1 课时　认识一元二次方程

1. D

2. C　**点拨**：由题可知 $\begin{cases}m-3\neq 0,\\ m^2-7=2,\end{cases}$ 解得 $m=-3$. 本题易忽略一元二次方程的二次项系数 $m-3\neq 0$ 这一条件而错选 A.

3. A　**4.** B　**5.** 8　**6.** A　**7.** C　**8.** B

9. ②　**点拨**：因为 $x^2-4x-12=0$，即 $x(x-4)=12$，所以构图中大正方形的面积是 $(x+x-4)^2$，它又等于四个矩形的面积加上中间小正方形的面积，即 $4\times 12+4^2$，据此易得 $x=6$. 故答案为②.

10. D　**点拨**：∵ 关于 x 的一元二次方程 $(a-1)x^2-2x+a^2-1=0$ 有一个根为 $x=0$，

∴ $a^2-1=0$，且 $a-1\neq 0$，

解得 $a=-1$. 故选 D.

11. 解：(1) 当 $2k+1=0$，且 $4k\neq 0$，即 $k=-\dfrac{1}{2}$ 时，方程 $(2k+1)x^2+4kx+k-1=0$ 可化为 $-2x-\dfrac{3}{2}=0$，此时方程为一元一次方程.

(2) 当 $2k+1\neq 0$，即 $k\neq -\dfrac{1}{2}$ 时，此方程为一元二次方程，其二次项系数是 $2k+1$，一次项系数是 $4k$，常数项是 $k-1$.

12. 解：把 $x=2$ 代入原方程得 $4-2(3+k)+12=0$，解得 $k=5$.

当以 2 为腰长时，等腰三角形的三边长分别为 2，2，5，因为 $2+2<5$，所以不能组成三角形，即此种情况不存在.

当以 5 为腰长时，等腰三角形的三边长分别为 2，5，5，能够组成三角形. 所以等腰三角形的周长为 $5+5+2=12$.

点拨：确定三角形的三边长时，要注意“三角形任意两边之和大于第三边”这一条件，否则容易出现错误的解答.

13. 解：都不正确，均考虑不全面. 正确解法如下：

依题 $x^{2n+3}-3x^{n+3}+1=0$ 是关于 x 的一元二次方程，则 $\begin{cases}2n+3=2,\\ a-b\neq 2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2n+3=2,\\ a-b=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2n+3=1,\\ a-b=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2n+3=0,\\ a-b=2.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=\dfrac{4}{3},\\ b=-\dfrac{2}{3},\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=1,\\ b=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=\dfrac{2}{3},\\ b=\dfrac{2}{3}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=1,\\ b=-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=\dfrac{2}{3},\\ b=-\dfrac{4}{3}.\end{cases}$

14. 解：(1) 由题意可知网球场的长和宽分别为 $(80-2x)$ m，$(60-2x)$ m，则可列方程为 $(80-2x)(60-2x)=3500$，整理得 $x^2-70x+325=0$.

(2) x 的值不可能为 0，因为人行走道的宽度不可能为负数.

(3) x 的值不可能大于 40，也不可能大于 30，因为当 $x>30$ 时，$60-2x<0$，这是不符合实际的，当然 x 更不可能大于 40.

(4) 人行走道的宽为 5 m，求解过程如下：

x	…	1	2	3	4	5	6	7	…
$x^2-70x+325$	…	256	189	124	61	0	−59	−116	…

显然，当 $x=5$ 时，$x^2-70x+325=0$，故人行走道的宽为 5 m.

点拨：本题运用夹逼法，根据实际情况确定 x 的取值范围，在 x 范围内取整数值，能够使方程左边等于 0，这个数就是方程的一个解. 若没有一个数能使方程左边等于 0，则找一个使方程左边最接近 0 的数，这个数就是方程的近似解.

第 2 课时　一元二次方程的定义及相关概念的常见应用

1. 解：(1) 存在. 根据一元二次方程的定义可得 $\begin{cases}m^2+1=2,\\ m+1\neq 0,\end{cases}$ 解得 $m=1$，此时方程为 $2x^2-x-1=0$.

(2) 存在.

由题可知当 $\begin{cases}m^2+1=1,\\ m+1+m-2\neq 0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m+1=0,\\ m-2\neq 0\end{cases}$ 时方程为一元一次方程.

当 $\begin{cases}m^2+1=1,\\ m+1+m-2\neq 0\end{cases}$ 时，解得 $m=0$，此时方程为 $-x-1=0$，解得 $x=-1$；

当 $\begin{cases}m+1=0,\\ m-2\neq 0\end{cases}$ 时，解得 $m=-1$，此时方程为 $-3x-1=0$，解得 $x=-\dfrac{1}{3}$.

2. 解：将 $(2ax+1)(x-a)=a-2$ 化为一般形式，得 $2ax^2+(1-2a^2)x+2a=0$.

所以该一元二次方程的二次项系数为 $2a$，

依题意，得 $2a=-4$，

解得 $a=-2$.

3. 解：由题意可得 $(x+1)\times 2x-(x+2)(x-2)=1$，化为一元二次方程，写成一般形式为 $x^2+2x+3=0$.

4. 解：由题意得 $n^2+mn+2n=0$，

∵ $n\neq 0$，

∴ $n+m+2=0$，

∴ $m+n=-2$.

5. 解：∵ 实数 a 是一元二次方程 $x^2-2022x+1=0$ 的一个根，

∴ $a^2-2022a+1=0$.

∴ $a^2+1=2022a$，$a^2-2022a=-1$.

∴ $a^2-2021a-\dfrac{a^2+1}{2022}$

$=a^2-2021a-\dfrac{2022a}{2022}$

$=a^2-2021a-a$

$=a^2-2022a=-1$.

6. 解：(1) ∵ $\angle ACB=90°$，$\angle A=28°$，

∴ $\angle B=90°-28°=62°$.

∵ $BD=BC$，

∴ $\angle BCD=\angle BDC=\dfrac{180°-\angle B}{2}=59°$，

∴ $\angle ACD=\angle ACB-\angle BCD=90°-59°=31°$.

(2) ①∵ $AD=EC$，$AD=AE$，$AC=4$，

∴ $AD=EC=AE=2$.

∵ $BC=BD=a$，

∴ $AB=2+a$.

∵ $\angle ACB=90°$，

∴ $AB^2=BC^2+AC^2$，

即 $(a+2)^2=a^2+4^2$，

∴ $a=3$.

②线段 AD 的长是方程 $x^2+2ax-16=0$ 的一个根.

理由：∵ $BC=a$，$AC=4$，

∴ $AB=\sqrt{16+a^2}$，

∴ $AD=\sqrt{16+a^2}-a$.

∵ 当 $x=AD=\sqrt{16+a^2}-a$ 时，

$x^2+2ax-16=(\sqrt{16+a^2}-a)^2+2a(\sqrt{16+a^2}-a)-16$

$=16+a^2-2a\sqrt{16+a^2}+a^2+2a\sqrt{16+a^2}-2a^2-16$

$=0$，

∴ 线段 AD 的长是该方程的一个根.

22.2　一元二次方程的解法

第 1 课时　直接开平方法

1. $x_1=2$，$x_2=-2$

2. C

3. C　**点拨**：方程 $x^2+4=0$，移项得 $x^2=-4$，由平方的非负性可得此方程无实数解. 故选 C.

4. B

5. 5（答案不唯一，只要 $c\geqslant 0$ 即可）

6. D

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7. A　**点拨**：由 $(x-3)^2=1$，解得 $x=4$ 或 $x=2$. 因为 $\triangle ABC$ 是等腰三角形，所以边长为 2，2，4 或 4，4，2，其中 2，2，4 不符合三角形三边关系的条件. 故 $\triangle ABC$ 的周长为 $4+4+2=10$.

8. 解：把 $x=3$ 代入方程，得 $k^2=2$，$\therefore k=\pm\sqrt{2}$，

由 $(x-1)^2=4$，得 $x-1=\pm2$，

$\therefore x_1=3, x_2=-1$，

故另一个根为 -1.

9. 解：$\because m+1$ 与 $2m-4$ 是关于 x 的一元二次方程 $ax^2=b(ab>0)$ 的两个根，

$\therefore (m+1)+(2m-4)=0$，

$\therefore m=1$，即方程的两根分别为 2 和 -2.

把 $x=2$ 或 $x=-2$ 代入 $ax^2=b$ 中，

得 $4a=b$，$\therefore \dfrac{b}{a}=4$.

第 2 课时　因式分解法

1. A　**2.** A　**3.** C　**4.** D

5. $x_1=2, x_2=1$　**6.** -3 或 4

7. C　**8.** C

9. A　**点拨**：解方程 $x^2-8x+15=0$，得 $x=3$ 或 $x=5$，

若腰长为 3，则三角形的三边长为 3，3，6，显然不能构成三角形；

若腰长为 5，则三角形的三边长为 5，5，6，此时三角形的周长为 16.

故选 A.

10. B

11. 解：移项，得 $2(x-3)-3x(x-3)=0$，

整理，得 $(x-3)(2-3x)=0$.

$x-3=0$ 或 $2-3x=0$.

解得 $x_1=3, x_2=\dfrac{2}{3}$.

点拨：解方程时千万不能将方程两边同时除以 $x-3$，否则方程会漏掉一解.

12. 解：将 $(x-1)(x+3)=12$ 化为一般形式为 $x^2+2x-15=0$.

因式分解，得 $(x+5)(x-3)=0$，

$\therefore x+5=0$ 或 $x-3=0$. 解得 $x_1=-5, x_2=3$.

点拨：用因式分解法解一元二次方程的依据是“若 $a\cdot b=0$，则 $a=0$ 或 $b=0$”. 若 $ab=c(c\neq0)$，则 a, b 都不能为零，即 $a\neq0, b\neq0$. 本题易将 $(x-1)\cdot(x+3)=12$ 与 $(x-1)\cdot(x+3)=0$ 混淆，从而出现 $x-1=0$ 或 $x+3=0$ 的错误.

13. 解：$(1)x^2-3x+2=0$，因式分解，得 $(x-1)(x-2)=0$，

$\therefore x_1=1, x_2=2$.

$(2)(x-3)(x-1)=3$，则 $x^2-4x=0$，因式分解，得 $x(x-4)=0$，

$\therefore x_1=0, x_2=4$.

$(3)x^2-(\sqrt{2}+\sqrt{3})x+\sqrt{6}=0$，因式分解，得 $(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{3})=0$，

$\therefore x_1=\sqrt{2}, x_2=\sqrt{3}$.

14. 解：(1) 将 $x=3$ 代入方程 $(a-1)x^2-4x-1+2a=0$ 中，得 $9(a-1)-12-1+2a=0$，解得 $a=2$.

将 $a=2$ 代入原方程中得 $x^2-4x+3=0$，

因式分解，得 $(x-1)(x-3)=0$，

$\therefore x_1=1, x_2=3$.

∴ 方程的另一个根是 $x=1$.

$(2)\because$ 三角形的三边长都是这个方程的根.

∴ ①当三边长都为 1 时，周长为 3；

②当三边长都为 3 时，周长为 9；

③当两边长为 3，一边长为 1 时，周长为 7；

④当两边长为 1，一边长为 3 时，不满足三角形三边关系，不能构成三角形.

故三角形的周长为 3 或 9 或 7.

15. 解：$(1)2;4$

$(2)\because x^2-3x-4=0$，

$\therefore (x+1)(x-4)=0$，

则 $x+1=0$ 或 $x-4=0$，

$\therefore x_1=-1, x_2=4$.

16. 解：(1) 换元

(2) 设 $\dfrac{x+1}{x^2}=y$，则原方程可化为 $y+\dfrac{12}{y}=8$，


第16题图

解得 $y_1=2, y_2=6$.

经检验，$y_1=2, y_2=6$ 都是方程 $y+\dfrac{12}{y}=8$ 的解.

当 $y=2$ 时，$\dfrac{x+1}{x^2}=2$，

$\therefore 2x^2-x-1=0$，

$\therefore x_1=-\dfrac{1}{2}, x_2=1$；

经检验，$x_1=-\dfrac{1}{2}, x_2=1$ 都是 $\dfrac{x+1}{x^2}=2$ 的解.

当 $y=6$ 时，$\dfrac{x+1}{x^2}=6$，

$\therefore 6x^2-x-1=0$，

$\therefore x_3=\dfrac{1}{2}, x_4=-\dfrac{1}{3}$.

经检验，$x_3=\dfrac{1}{2}, x_4=-\dfrac{1}{3}$ 都是 $\dfrac{x+1}{x^2}=6$ 的解.

∴ 原方程的解为 $x_1=-\dfrac{1}{2}, x_2=1$，$x_3=\dfrac{1}{2}, x_4=-\dfrac{1}{3}$.

点拨：本题运用了**换元法**和**整体思想**. 先设 $\dfrac{x+1}{x^2}=y$，将原方程可化为 $y+\dfrac{12}{y}=8$，解方程求出 y 的值，再分别代入 $\dfrac{x+1}{x^2}=y$ 就可以求出 x 的值.

第 3 课时　配方法

1. -1 或 7

2. D　**3.** B　**4.** A　**5.** A

6. B　**点拨**：已知 $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ac$，故 $2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac=0$，整理得 $(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2=0$，故 $a=b=c$，所以 $\triangle ABC$ 的形状为等边三角形.

7. A　**8.** D　**9.** A　**10.** A　**11.** D

12. B　**点拨**：因为 $\triangle ABC$ 为直角三角形，且 $\angle ACB=90°$，所以 $AB^2=AC^2+BC^2$，即 $\left(AD+\dfrac{a}{2}\right)^2=b^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2$，整理得 $AD^2+aAD+b^2$，所以 AD 的长是方程 $x^2+ax=b^2$ 的一个正根. 故选 B.

13. 1 或 -3　**点拨**：依题意得 $(2+x)x=3$，整理，得 $x^2+2x=3$，

$\therefore (x+1)^2=4$，

$\therefore x+1=\pm2$，

$\therefore x=1$ 或 $x=-3$.

14. 解：$\because x^2+6x=-7$，

$\therefore x^2+6x+9=-7+9$，即 $(x+3)^2=2$，

则 $x+3=\pm\sqrt{2}$，$\therefore x=-3\pm\sqrt{2}$，

即 $x_1=-3+\sqrt{2}, x_2=-3-\sqrt{2}$.

点拨：本题的易错之处是在配方时忽视等式的性质，忘了在等号右边加 9.

15. 解：$\because a^2+b^2=12a+8b-52$，

$\therefore a^2-12a+b^2-8b+52=0$.

$\therefore (a-6)^2+(b-4)^2=0$.

$\therefore a-6=0$ 且 $b-4=0$.

$\therefore a=6, b=4$.

又 $\because a, b, c$ 为正整数且是 $\triangle ABC$ 的三边长，c 是 $\triangle ABC$ 的最短边长，$\therefore 6-4<c\leqslant4$（$c$ 是正整数）.

$\therefore c=3$ 或 $c=4$.

即 c 的值是 3 或 4.

点拨：根据 $a^2+b^2=12a+8b-52$，可以求得 a, b 的值，由 a, b, c 为正整数且是 $\triangle ABC$ 的三边长，c 是 $\triangle ABC$ 的最短边长，即可求得 c 的值.

16. 解：$(1)10$　$(2)-2$

$(3)x^2+(m+2)x+4m-7=\left(x+\dfrac{m+2}{2}\right)^2+4m-7-\dfrac{(m+2)^2}{4}$

∴ 原代数式有最小值为 0，

$\therefore 4m-7-\dfrac{(m+2)^2}{4}=0$，

即 $m^2-12m+32=0$. 配方得 $(m-6)^2=4$，

$\therefore m-6=\pm2$，$\therefore m_1=8, m_2=4$.

17. 解：将已知等式两边同时加上 2，

得 $x^2+\dfrac{1}{x^2}+2+2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=2$，

即 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=2$.

设 $x+\dfrac{1}{x}=y$，则 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=2$ 可化为 $y^2+2y=2$.

配方，得 $y^2+2y+1=2+1$，

$\therefore (y+1)^2=3$.

直接开平方，得 $y+1=\pm\sqrt{3}$.

解得 $y_1=\sqrt{3}-1, y_2=-\sqrt{3}-1$.

即 $x+\dfrac{1}{x}=\sqrt{3}-1$ 或 $x+\dfrac{1}{x}=-\sqrt{3}-1$.

经检验，不存在实数 x 使 $x+\dfrac{1}{x}=\sqrt{3}-1$，故舍去.

$\therefore x+\dfrac{1}{x}=-\sqrt{3}-1$.

点拨：本题在解答过程中应用了**换元法**和**整体思想**，即用 y 来代替 $x+\dfrac{1}{x}$，将已知等式转化成一元二次方程求解.

18. 解：$(1)5;2;-2;-8$

(2) 原方程可变形，得 $[(x-1)-4]\cdot[(x-1)+4]=6$，$(x-1)^2-4^2=6$，

$(x-1)^2=6+4^2$.

直接开平方并整理，得 $x_1=1+\sqrt{22}, x_2=1-\sqrt{22}$.

第 4 课时　公式法

1. B　**2.** A　**3.** D　**4.** D

5. $x_1=\dfrac{-1+\sqrt{13}}{3}, x_2=\dfrac{-1-\sqrt{13}}{3}$

6. B

7. A　**点拨**：由 $x^2+2x-3=0$ 得 $(x+3)\cdot(x-1)=0$，$x_1=-3, x_2=1$.

$\because AE=EB=EC=a$，且 a 是一元二次方程 $x^2+2x-3=0$ 的根，$\therefore BC=2BE=AD=2$，$AB=CD=\sqrt{2}a=\sqrt{2}$.

$\therefore \square ABCD$ 的周长为 $2\sqrt{2}+4$.

8. D

9. $(1)①$　$(2)②$

$(3)③④⑥$　$(4)③⑤$

10. 解：移项，得 $\sqrt{2}x^2+\sqrt{3}x-2\sqrt{2}=0$.

$\because a=\sqrt{2}, b=\sqrt{3}, c=-2\sqrt{2}$，$\therefore b^2-4ac=(\sqrt{3})^2-4\times\sqrt{2}\times(-2\sqrt{2})=64>0$，$\therefore x=\dfrac{-\sqrt{3}\pm\sqrt{64}}{2\times\sqrt{2}}=-\sqrt{6}\pm2\sqrt{2}$，$\therefore x_1=-\sqrt{6}+2\sqrt{2}, x_2=-\sqrt{6}-2\sqrt{2}$.

点拨：本题易因没有将方程化为一元二次方程的形式，误认为 $c=2\sqrt{2}$，从而导致错解.

11. 错解：C

诊断：设 $x^2+x+1=y$，则原方程可化为 $y^2+2y-3=0$，分解因式得 $(y+3)(y-1)=0$，解得 $y_1=-3$，$y_2=1$.

当 $y=-3$ 时，$x^2+x+1=-3$ 无实数根；当 $y=1$ 时，$x^2+x+1=1$ 有实数根. 本题错在未分类讨论而错选 C.

正解：A

12. 解：$(1)x^2-2x-5=0$，

$(x-1)^2=6, x-1=\pm\sqrt{6}$，

$\therefore x_1=1+\sqrt{6}, x_2=1-\sqrt{6}$.

$(2)x^2-8x+4=0, x^2-8x+16=12, (x-4)^2=12, x-4=\pm2\sqrt{3}$，

$\therefore x_1=4+2\sqrt{3}, x_2=4-2\sqrt{3}$.

13. 解：$(1)\because a$ 是方程 $x^2-4x+1=0$ 的实数根，$\therefore a^2-4a+1=0$，

$\therefore a^2-4a+2022=a^2-4a+1+2021=2021$.

(2) 解方程 $x^2-4x+1=0$，得 $x_1=2+\sqrt{3}, x_2=2-\sqrt{3}$.

$\therefore a=2-\sqrt{3}$，$\therefore a-1<0$，

∴ 原式 $=\dfrac{(a-1)^2}{a-1}-\dfrac{\sqrt{(a-1)^2}}{a(a-1)}-\dfrac{1}{a}$

$=a-1-\dfrac{-(a-1)}{a(a-1)}-\dfrac{1}{a}$

$=a-1+\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a}$

$=a-1$.

当 $a=2-\sqrt{3}$ 时，原式 $=2-\sqrt{3}-1=1-\sqrt{3}$.

14. 解：$(1)\begin{vmatrix}5&6\\7&8\end{vmatrix}=5\times8-6\times7=-2$.

$(2)x^2-4x+4=0$，即 $(x-2)^2=0$，解得 $x_1=x_2=2$，

$\therefore \begin{vmatrix}x+1&2x\\x-1&2x-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&4\\1&1\end{vmatrix}=3\times1-4\times1=-1$.

15. 解：设 x s 时，$\triangle DPQ$ 的面积等于 12 cm^2.

由题意，得 $12\times6-\dfrac{12(6-x)}{2}-x^2=\dfrac{6(12-2x)}{2}=12$.

解得 $x_1=6+2\sqrt{6}$（不合题意，舍去），$x_2=6-2\sqrt{6}$，

∴ $(6-2\sqrt{6})$ s 时，$\triangle DPQ$ 的面积等于 12 cm^2.

第 5 课时　一元二次方程根的判别式

1. 2；-7；-4；81

2. C　**3.** C　**4.** C　**5.** A　**6.** C

7. A　**点拨**：$\Delta=(k+3)^2-4k=k^2+2k+9=(k+1)^2+8$.

$\because (k+1)^2\geqslant0$，

$\therefore (k+1)^2+8>0$，即 $\Delta>0$.

∴ 方程有两个不相等的实数根.

8. D　**9.** A

10. A　**点拨**：原方程可变形为 $x^2+(a+1)x=0$.

∵ 该方程有两个相等的实数根，

∴ $\Delta=(a+1)^2-4\times1\times0=0$，

解得 $a=-1$.

11. A　**点拨**：∵ 小刚在解关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 时，只抄对了 $a=1, b=4$，解出其中一个根是 $x=-1$，

$\therefore (-1)^2-4+c=0$，解得 $c=3$，

故原方程中 $c=5$，

则 $b^2-4ac=16-4\times1\times5=-4<0$，

故原方程不存在实数根.

12. D　**点拨**：本题易忽视一元二次方程二次项系数不为 0 这一条件，而直接由根的判别式求得 $k\leqslant\dfrac{5}{4}$.

13. 解：∵ 关于 x 的方程 $x^2-2x+2m-1=0$ 有实数根，

$\therefore b^2-4ac=4-4(2m-1)\geqslant0$，

解得 $m\leqslant1$.

∵ m 为正整数，

∴ $m=1$，

∴ $x^2-2x+1=0$，

则 $(x-1)^2=0$，

解得 $x_1=x_2=1$.

14. 解：(1) 根据题意得 $\Delta=(-3)^2-4k\geqslant0$，

解得 $k\leqslant\dfrac{9}{4}$.

$(2)k$ 的最大整数值为 2，

此时方程 $x^2-3x+k=0$ 即为 $x^2-3x+2=0$，解得 $x_1=1, x_2=2$.

∵ 一元二次方程 $(m-1)x^2+x+m-3=0$ 与方程 $x^2-3x+k=0$ 有一个相同的根，

∴ 当 $x=1$ 时，$m-1+1+m-3=0$，

解得 $m=\dfrac{3}{2}$；

当 $x=2$ 时，$4(m-1)+2+m-3=0$，解得 $m=1$.

∵ $m-1\neq0$，

∴ m 的值为 $\dfrac{3}{2}$.

15. (1) **证明**：因为 $\Delta=[-(2k+1)]^2-4\times1\times4\left(k-\dfrac{1}{2}\right)=4k^2-12k+9=$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$(2k-3)^2 \geqslant 0$，所以无论 k 取何值，这个方程总有实数根.

(2)**解**：若 a 为等腰三角形 ABC 的底边长，则 b，c 为等腰三角形 ABC 的两腰长，所以方程有两个相等的实数根，所以 $\Delta=0$，即 $k=\frac{3}{2}$. 所以方程为 $x^2-4x+4=0$，解得 $x_1=x_2=2$.

即 $b=c=2$，不符合三角形三边关系，故舍去.

若 a 为等腰三角形 ABC 的一腰长，由题意知 4 是方程的一个根，所以 $4^2-(2k+1)\times 4+4\left(k-\frac{1}{2}\right)=0$，

解得 $k=\frac{5}{2}$. 所以方程为 $x^2-6x+8=0$，解得 $x_1=2$，$x_2=4$，符合题意. 所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $2+4+4=10$.

点拨：等腰三角形的边分腰和底边，若没有说明，则必须分类讨论，同时注意三角形的三边关系.

16. **解**：(1) $2\otimes 5=2\times 5+5=15$；

$2\otimes(-5)=2\times(-5)+(-5)=-15$.

(2) $x\otimes(a\otimes x)=x\otimes(ax+x)=x\otimes[(a+1)x]=(a+1)x^2+(a+1)x=-\frac{1}{4}$，整理，

得 $4(a+1)x^2+4(a+1)x+1=0$.

∵ 关于 x 的方程 $x\otimes(a\otimes x)=-\frac{1}{4}$ 有两个相等的实数根，

$\therefore\begin{cases}a+1\neq 0,\\ \Delta=16(a+1)^2-16(a+1)=0.\end{cases}$

解得 $a=0$.

第 6 课时　一元二次方程的根与系数的关系

1. A　**2.** D

3. B　**点拨**：∵ α,β 是方程 $x^2+x-2=0$ 的两个实数根，

$\therefore\alpha+\beta=-1$，$\alpha\beta=-2$.

$\therefore\alpha+\beta-\alpha\beta=-1+2=1$.

4. A　**5.** C　**6.** C

7. B　**点拨**：∵ α,β 是方程 $2x^2-5x-1=0$ 的两个实数根，∴ $2\alpha^2=5\alpha+1$，$\alpha+\beta=\frac{5}{2}$，$\alpha\beta=-\frac{1}{2}$. ∴ $2\alpha^2+3\alpha\beta+5\beta=5(\alpha+\beta)+3\alpha\beta+1=5\times\frac{5}{2}+3\times\left(-\frac{1}{2}\right)+1=12$. 故选 B.

8. A　**点拨**：∵ 方程 $x^2-2x-4=0$ 的两个实数根为 α,β，

$\therefore\alpha+\beta=2$，$\alpha\beta=-4$.

$\therefore\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4+8=12$. 故选 A.

9. D　**10.** B

11. A　**点拨**：当 $a=4$ 时，$b<8$，

∵ a,b 是关于 x 的一元二次方程 $x^2-12x+m+2=0$ 的两根，

$\therefore 4+b=12$，

∴ $b=8$，不符合题意；

当 $b=4$ 时，$a<8$，

∵ a,b 是关于 x 的一元二次方程 $x^2-12x+m+2=0$ 的两根，

$\therefore 4+a=12$，

∴ $a=8$，不符合题意；

当 $a=b$ 时，

∵ a,b 是关于 x 的一元二次方程 $x^2-12x+m+2=0$ 的两根，

∴ $12=a+b$，

$\therefore a=b=6$，

∴ $m+2=36$，

∴ $m=34$.

12. D

13. B　**易错点睛**：在利用一元二次方程的根与系数的关系时，要注意它成立的前提，即方程有实数根的前提 $\Delta\geqslant 0$. 本题如果取 $a=2$，则 $\Delta<0$，方程无实数根，不符合题意.

14. **解**：(1) ∵ 关于 x 的一元二次方程 $x^2-(2k+1)x+k^2+1=0$ 有两个不相等的实数根，

$\therefore\Delta>0$，

∴ $(2k+1)^2-4(k^2+1)>0$，

解得 $k>\frac{3}{4}$.

故 k 的取值范围为 $k>\frac{3}{4}$.

(2)∵ 方程的两个根分别为 x_1,x_2，

$\therefore x_1+x_2=2k+1=3$，

解得 $k=1$，

∴ 原方程为 $x^2-3x+2=0$，

∴ $x_1=1$，$x_2=2$.

15. **解**：(1)当 $k=0$ 时，原方程为 $-3x+1=0$，

解得 $x=\frac{1}{3}$，

∴ $k=0$ 符合题意；

当 $k\neq 0$ 时，原方程为一元二次方程，

∵ 该一元二次方程有实数根，

$\therefore\Delta=(-3)^2-4\times k\times 1\geqslant 0$，

解得 $k\leqslant\frac{9}{4}$.

综上所述，k 的取值范围为 $k\leqslant\frac{9}{4}$.

(2)∵ x_1 和 x_2 是方程 $kx^2-3x+1=0$ 的两个根，

$\therefore x_1+x_2=\frac{3}{k}$，$x_1x_2=\frac{1}{k}$.

∵ $x_1+x_2+x_1x_2=4$，

∴ $\frac{3}{k}+\frac{1}{k}=4$，

解得 $k=1$，

经检验，$k=1$ 是分式方程的解，且符合题意，

∴ k 的值为 1.

16. **解**：(1) 由题意得，$\Delta\geqslant 0$，

∴ $(2m-1)^2-4(m^2-3)\geqslant 0$，

∴ $m\leqslant\frac{13}{4}$.

(2)当 $m=2$ 时，方程为 $x^2+3x+1=0$，

∵ 方程的根为 x_1,x_2，

∴ $x_1+x_2=-3$，$x_1x_2=1$，

$x_1^2+3x_1+1=0$，$x_1^2+3x_1+1=0$，

$\therefore(x_1^2+2x_1)(x_2^2+4x_2+2)$

$=(x_1^2+2x_1+x_1-x_1)(x_2^2+3x_2+x_2+2)$

$=(-1-x_1)(-1+x_2+2)$

$=(-1-x_1)(x_2+1)$

$=-x_2-x_1x_2-1-x_1$

$=-x_2-x_1-2$

$=3-2$

$=1$.

17. **解**：(1) ∵ 方程有两个不相等的实数根，

∴ $\Delta=[-(2k-1)]^2-4(k^2-2k+3)=4k-11>0$，

解得 $k>\frac{11}{4}$.


第17题答图

(2)存在.

∵ $x_1x_2=k^2-2k+3=(k-1)^2+2>0$，

∴ 将 $|x_1|-|x_2|=1=\sqrt{5}$ 两边平方可得 $x_1^2-2x_1x_2+x_2^2=5$，即 $(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=5$，

∵ $x_1+x_2=2k-1$，$x_1x_2=k^2-2k+3$，

∴ $(2k-1)^2-4(k^2-2k+3)=5$，

整理得 $4k-11=5$，解得 $k=4$.

阶段核心方法

1. C

2. **解**：$\frac{1}{3}(x-2)^2=8$，

$(x-2)^2=24$，

$x-2=\pm 2\sqrt{6}$，

∴ $x_1=2+2\sqrt{6}$，$x_2=2-2\sqrt{6}$.

3. **解**：$x^2+4x-2=0$，

$x^2+4x=2$，

$(x+2)^2=6$，

$x+2=\pm\sqrt{6}$，

∴ $x_1=-2+\sqrt{6}$，$x_2=-2-\sqrt{6}$.

4. **解**：$x^2-10x+y^2-16y+89=0$，

$(x^2-10x+25)+(y^2-16y+64)=0$，

$(x-5)^2+(y-8)^2=0$，

∴ $x=5$，$y=8$. ∴ $\frac{x}{y}=\frac{5}{8}$.

5. D

6. **解**：(1) $x^2-2x=0$，$x(x-2)=0$，

∴ $x_1=0$，$x_2=2$.

(2) $16x^2-9=0$，

$(4x+3)(4x-3)=0$，

∴ $x_1=-\frac{3}{4}$，$x_2=\frac{3}{4}$.

(3) $3x(x-2)=x-2$，

$3x(x-2)-(x-2)=0$，

$(x-2)(3x-1)=0$，

∴ $x-2=0$ 或 $3x-1=0$，

∴ $x_1=2$，$x_2=\frac{1}{3}$.

7. B

8. $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$　**点拨**：由题意得 $2b(b-a)+a(b+a)+3ab=0$，

整理得 $2\left(\frac{b}{a}\right)^2+\frac{2b}{a}-1=0$，

解得 $\frac{b}{a}=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$，

∵ $a>b>0$，

∴ $\frac{b}{a}=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

9. **解**：(1) $3(x^2+1)-7x=0$，

$3x^2-7x+3=0$，

其中 $a=3$，$b=-7$，$c=3$.

∴ $\Delta=(-7)^2-4\times 3\times 3=13$.

∴ $x=\frac{7\pm\sqrt{13}}{6}$.

即 $x_1=\frac{7+\sqrt{13}}{6}$，$x_2=\frac{7-\sqrt{13}}{6}$.

(2) $4x^2-3x-5=x-2$，$4x^2-4x-3=0$.

其中 $a=4$，$b=-4$，$c=-3$.

∴ $\Delta=(-4)^2-4\times 4\times(-3)=64$.

∴ $x=\frac{4\pm\sqrt{64}}{8}$，即 $x_1=\frac{3}{2}$，$x_2=-\frac{1}{2}$.

10. **解**：将原方程两边同乘 6，得 $(6x)^2+19\times(6x)+60=0$. 解得 $6x=-15$ 或 $6x=-4$. ∴ $x_1=-\frac{5}{2}$，$x_2=-\frac{2}{3}$.

点拨：本题将原方程两边同时乘 6，构造符合因式分解法的一元二次方程求解.

11. **解**：因为 $m-n=8$，所以 $m=n+8$. 将 $m=n+8$ 代入 $mn+p^2+16=0$ 中，得 $n(n+8)+p^2+16=0$，所以 $n^2+8n+16+p^2=0$，即 $(n+4)^2+p^2=0$.

又因为 $(n+4)^2\geqslant 0$，$p^2\geqslant 0$，

所以 $\begin{cases}n+4=0,\\ p=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}n=-4,\\ p=0.\end{cases}$

所以 $m=n+8=4$，

所以 $m+n+p=4+(-4)+0=0$.

12. **解**：原方程即为 $[(x-1)(x-4)]\cdot[(x-2)(x-3)]=48$，

即 $(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)=48$.

设 $y=x^2-5x+5$，则原方程变为 $(y-1)(y+1)=48$.

解得 $y_1=7$，$y_2=-7$.

当 $x^2-5x+5=7$ 时，解得 $x_1=\frac{5+\sqrt{33}}{2}$，$x_2=\frac{5-\sqrt{33}}{2}$；

当 $x^2-5x+5=-7$ 时，$\Delta=(-5)^2-4\times 1\times 12=-23<0$，方程无实数根.

∴ 原方程的根为 $x_1=\frac{5+\sqrt{33}}{2}$，$x_2=\frac{5-\sqrt{33}}{2}$.

点拨：运用换元法解方程时，先要找出相同的整体进行换元，使方程变得更简明，解完方程后还要注意还元.

13. **解**：设 $x+\frac{1}{x}=y$，则原方程为 $y^2-2y-3=0$.

解得 $y_1=3$，$y_2=-1$.

当 $y=3$ 时，$x+\frac{1}{x}=3$，

∴ $x_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$，$x_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

当 $y=-1$ 时，$x+\frac{1}{x}=-1$ 无实数根.

经检验，$x_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$，$x_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ 都是原方程的根.

∴ 原方程的根为 $x_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$，$x_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

点拨：本题的解题关键是将原方程转化为只含 $\left(x+\frac{1}{x}\right)$ 这样的未知项的方程，再把 $x+\frac{1}{x}$ 看成一个整体用换元法求解.

14. **解**：经验证 $x=0$ 不是方程的根，原方程两边同除以 x^2，

得 $6x^2-35x+62-\frac{35}{x}+\frac{6}{x^2}=0$，

即 $6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-35\left(x+\frac{1}{x}\right)+62=0$.

设 $y=x+\frac{1}{x}$，则 $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$，

原方程可变为 $6(y^2-2)-35y+62=0$.

解得 $y_1=\frac{5}{2}$，$y_2=\frac{10}{3}$.

当 $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$ 时，

解得 $x_1=2$，$x_2=\frac{1}{2}$；

当 $x+\frac{1}{x}=\frac{10}{3}$ 时，

解得 $x_3=3$，$x_4=\frac{1}{3}$.

经检验，均符合题意.

∴ 原方程的根为 $x_1=2$，$x_2=\frac{1}{2}$，$x_3=3$，$x_4=\frac{1}{3}$.

15. **解**：设 $\frac{x-2}{x}=y$，则原方程化为 $y-\frac{3}{y}=2$，

整理得 $y^2-2y-3=0$，

解得 $y_1=3$，$y_2=-1$.

当 $y=3$ 时，$\frac{x-2}{x}=3$，

∴ $x=-1$.

当 $y=-1$ 时，$\frac{x-2}{x}=-1$，

∴ $x=1$.

经检验，$x=\pm 1$ 都是原方程的根.

∴ 原方程的根为 $x_1=1$，$x_2=-1$.

点拨：本题利用倒数换元法将所求方程转化为一元二次方程，解方程求出根后要检验.

16. **解**：方程组 $\begin{cases}x-2\,019=2\,022,\\ x-2\,020=2\,021\end{cases}$ 的解一定是原方程的解，

解得 $x=4\,041$.

方程组 $\begin{cases}x-2\,019=-2\,021,\\ x-2\,020=-2\,022\end{cases}$ 的解也一定是原方程的解，

解得 $x=-2$.

∵ 原方程最多有两个实数解，

∴ 原方程的根为 $x_1=4\,041$，$x_2=-2$.

点拨：解本题也可采用**换元法**. 设 $x-2\,020=t$，则 $x-2\,019=t+1$，原方程可化为 $t(t+1)=2\,021\times 2\,022$，先求出 t，进而求出 x.

22.3　实践与探索

第 1 课时　用一元二次方程解几何问题

1. **解**：设剪去正方形的边长为 x cm，则制成无盖长方体盒子的长为 $(30-2x)$ cm，宽为 $(20-2x)$ cm，高为 x cm，

依题意，得 $2\times[(30-2x)+(20-2x)]\times x=200$，

整理，得 $2x^2-25x+50=0$，

解得 $x_1=\frac{5}{2}$，$x_2=\frac{10}{3}$.

当 $x=\frac{5}{2}$ 时，$20-2x=15$，不合题意，舍去.

当 $x=10$ 时，$20-2x=0$，不合题意，舍去.

答：当剪去正方形的边长为 $\frac{5}{2}$ cm 时，所得长方体盒子的侧面积为 200 cm².

2. $(12-x)(8-x)=77$

3. **解**：(1) 设这个矩形地面的长是 x m，则依题意得 $x(20-x)=96$.

解得 $x_1=12$，$x_2=8$(舍去).

答：这个矩形地面的长是 12 m.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)用规格为 0.80 米×0.80(单位:m)的地板砖所需的费用:96÷(0.80×0.80)×55=8 250(元).
用规格为 1.00 米×1.00(单位:m)的地板砖所需的费用:96÷(1.00×1.00)×80=7 680(元).
∵8 250>7 680,
∴用规格为 1.00 米×1.00(单位:m)的地板砖所需的费用较少.

4. 解:(1)设 x s 后,$\triangle PBQ$ 的面积为 4 cm^2,则 $\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot(5-x)=4$,
解得 $x_1=1$,$x_2=4$.
当 $x=4$ 时,$2x=8>7$,不合题意,舍去,∴$x=1$.
答:1 s 后,$\triangle PBQ$ 的面积是 7 cm^2.
(2)设 y s 后,$\triangle PBQ$ 的面积是 7 cm^2.
由题意,得 $\frac{1}{2}\cdot 2y\cdot(5-y)=7$,即 $y^2-5y+7=0$.
$\Delta=(-5)^2-4\times 7<0$,∴此方程无实数根.
∴$\triangle PBQ$ 的面积不能等于 7 cm^2.

第 2 课时　用一元二次方程解百分率问题

1. 解:(1)设 2017 年到 2019 年该村人均收入的年平均增长率为 x,
根据题意得 $20\ 000\times(1+x)^2=24\ 200$,
解得 $x_1=0.1=10\%$,$x_2=-2.1$(不合题意,舍去).
答:2017 年到 2019 年该村人均收入的年平均增长率为 10%.
(2)$24\ 200\times(1+10\%)=26\ 620$(元).
答:预测 2020 年该村的人均收入是 26 620 元.

2. 解:设降价后的销售单价为 x 元,则降价后每天可售出 $[300+5\times(200-x)]$ 个,
依题意,得 $(x-100)[300+5\times(200-x)]=32\ 000$,
整理,得 $x^2-360x+32\ 400=0$,
解得 $x_1=x_2=180$,
$180<200$,符合题意.
答:这种电子产品降价后的销售单价为 180 元时,公司每天可获利 32 000 元.

3. 解:(1)设该养殖场蛋鸡产蛋量的月增长率为 x,
根据题意得,$2.5(1+x)^2=3.6$,
解得 $x_1=0.2=20\%$,$x_2=-2.2$(不合题意,舍去).
答:该养殖场蛋鸡产蛋量的月增长率为 20%.
(2)设月增加 y 个销售点,
根据题意得,$3.6+0.3y\geqslant 3.6\times(1+20\%)$,
解得 $y\geqslant\frac{9}{4}$.
答:至少再增加 3 个销售点.

第 3 课时　用一元二次方程解一般应用问题

1. C

2. 解:(1)设每轮分裂中每个有益菌可分裂成 x 个有益菌,根据题意,得 $60x^2=24\ 000$.
解得 $x_1=20$,$x_2=-20$(不合题意,舍去).
答:每轮分裂中每个有益菌可分裂成 20 个有益菌.
(2)$60\times 20^3=480\ 000$(个).
答:经过三轮培植后共有 480 000 个有益菌.

3. 解:每轮传染中平均一个人传染了 x 个人.
$(1+x)+x(1+x)=9$
$(1+x)^2=9$(左边分解因式)
$1+x=3$
$x=2$
答:每轮传染中平均一个人传染了 2 个人.

4. A

5. 解:设应邀请 x 支球队参加比赛,
根据题意,可列出方程 $\frac{x(x-1)}{2}=28$.
解这个方程,得 $x_1=8$,$x_2=-7$(舍去).
答:应邀请 8 支球队参加比赛.

6. 解:设原两位数的十位数字为 x,则个位数字为 $x+4$,根据题意得 $(10x+x+4)[10(x+4)+x]=765$,整理得 $x^2+4x-5=0$,解得 $x_1=1$,$x_2=-5$(舍去),则 $x+4=5$,故原两位数为 15.

7. 解:由题意得 $n+n^2+1=421$,解得 $n_1=-21$(舍去),$n_2=20$.
答:n 的值是 20.

8. 解:(1)设这个多边形的边数为 n,根据题意得 $\frac{1}{2}n(n-3)=14$,整理得 $n^2-3n-28=0$,解得 $n=7$ 或 $n=-4$.
∵$n\geqslant 3$,∴$n=-4$ 不合题意,舍去.
∴$n=7$,即这个多边形的边数是 7.
(2)A 同学的说法不正确.理由如下:设这个多边形的边数为 n,则 $\frac{1}{2}n(n-3)=10$,整理得 $n^2-3n-20=0$,解得 $n=\frac{3\pm\sqrt{89}}{2}$,
∴符合方程 $n^2-3n-20=0$ 的正整数 n 不存在,∴多边形的对角线不可能有 10 条,即 A 同学的说法不正确.

9. 解:(1)设年销售量 y 与销售价单价 x 的函数关系式为 $y=kx+b(k\neq 0)$,
由题意得 $\begin{cases}40k+b=600,\\45k+b=550,\end{cases}$解得 $\begin{cases}k=-10,\\b=1\ 000.\end{cases}$
∴年销售量 y 与销售单价 x 的函数关系式为 $y=-10x+1\ 000$.
(2)根据题意可知每台设备的利润为 $(x-30)$ 万元,年销售量为 $(-10x+1\ 000)$ 台.
则 $(x-30)(-10x+1\ 000)=10\ 000$,
整理,得 $x^2-130x+4\ 000=0$,
解得 $x_1=50$,$x_2=80$.
∵此设备的销售单价不得高于 70 万元,
∴$x=50$.
答:该设备的销售单价应是 50 万元.

10. 解:(1)设该市这两年投入基础教育经费的年平均增长率为 x,
根据题意,得 $5\ 000(1+x)^2=7\ 200$,
解得 $x_1=0.2=20\%$,$x_2=-2.2$(舍去).
答:该市这两年投入基础教育经费的年平均增长率为 20%.
(2)2021 年投入基础教育经费为 $7\ 200\times(1+20\%)=8\ 640$(万元),设购买电脑 m 台,则购买实物投影仪 $(1\ 500-m)$ 台,
根据题意,得 $3\ 500m+2\ 000(1\ 500-m)\leqslant 86\ 400\ 000\times 5\%$,
解得 $m\leqslant 880$.
答:最多可购买电脑 880 台.

阶段核心应用

1. 解:(1)设 2018 年甲类芯片的产量为 x 万块,
由题意得 $x+2x+(x+2x)+400=2\ 800$,解得 $x=400$.
答:2018 年甲类芯片的产量为 400 万块.
(2)2018 年丙类芯片的产量为 $400+2\times 400+400=1\ 600$(万块).
设丙类芯片的产量每年增加的数量为 y 万块,
则 $1\ 600+1\ 600+y+1\ 600+2y=14\ 400$,
解得 $y=3\ 200$.
∴丙类芯片 2020 年的产量为 $1\ 600+2\times 3\ 200=8\ 000$(万块).
2018 年 HW 公司手机产量为 $2\ 800\times 10\%=280\ 000$(万部),
$400(1+m\%)^2+2\times 400(1+m\%-1)^2+8\ 000=28\ 000\times(1+10\%)$,
设 $m\%=t$,化简得 $3t^2+2t-56=0$,
解得 $t=4$ 或 $t=-\frac{14}{3}$(舍去).
∴$m\%=4$.∴$m=400$.
答:丙类芯片 2020 年的产量为 8 000 万块,m 的值为 400.

2. 解:(1)设 y 与 x 之间的函数关系式为 $y=kx+b$,将 $x=2$,$y=120$ 和 $x=4$,$y=140$ 分别代入得
$\begin{cases}2k+b=120,\\4k+b=140,\end{cases}$
解得 $\begin{cases}k=10,\\b=100.\end{cases}$
∴y 与 x 之间的函数关系式为 $y=10x+100$.
(2)由题意得
$(60-40-x)(10x+100)=2\ 090$,
整理得 $x^2-10x+9=0$,
解得 $x_1=1$,$x_2=9$.
∵让顾客得到更大的实惠,
∴$x=9$.
答:这种干果每千克应降价 9 元.

3. 解:设第一次存款时的年利率为 x.
则根据题意,得 $[1\ 000(1+x)-500](1+0.9x)=530$,整理,得 $90x^2+145x-3=0$.
解这个方程,得 $x_1\approx 0.0204=2.04\%$,$x_2\approx -1.63$(舍去).
答:第一次存款时的年利率约是 2.04%.

4. 解:设竹竿的长为 x 米,
∵横着比城门宽 4 米,竖着比城门高 2 米,
∴城门高为 $(x-2)$ 米,宽为 $(x-4)$ 米.
∵沿着对角斜着拿刚好可以进城门,∴可列方程为 $(x-2)^2+(x-4)^2=x^2$.
解得 $x_1=2$(舍去),$x_2=10$.
答:竹竿长为 10 米.

5. 解:设周瑜去世时的年龄的个位数字为 x,则十位数字为 $x-3$.
根据题意,得 $x^2=10(x-3)+x$,即 $x^2-11x+30=0$,解这个方程,得 $x=5$ 或 $x=6$.
当 $x=5$ 时,周瑜去世时的年龄为 25 岁,不合题意,舍去;
当 $x=6$ 时,周瑜去世时的年龄为 36 岁,符合题意.
答:周瑜去世时的年龄为 36 岁.

6. 解:设每轮感染中平均一台电脑会感染 x 台电脑.
则 $1+x+x(1+x)=81$,
解得 $x_1=8$,$x_2=-10$(舍去),
三轮感染后被感染的电脑总数为 $81+81\times 8=729$(台),729 台 >700 台.
答:每轮感染中平均一台电脑会感染 8 台电脑,若病毒得不到有效控制,三轮感染后被感染的电脑总数会超过 700 台.

7. 解:(1)设收到微信红包的年平均增长率是 x,
根据题意,得 $400(1+x)^2=484$,
解得 $x_1=-2.1$(舍去),$x_2=0.1=10\%$.
答:2018 年到 2020 年甲甜和她的妹妹在六一收到微信红包的年平均增长率是 10%.
(2)设甜甜收到了 y 元微信红包,则她的妹妹收到了 $(2y+34)$ 元微信红包,
根据题意,得 $y+2y+34=484$,
解得 $y=150$,
则 $2y+34=334$.
答:2020 年六一,甜甜和她的妹妹分别收到了 150 元和 334 元微信红包.

8. 解:设小路的宽应为 x m,
根据题意得 $(16-2x)(9-x)=112$,
整理得 $x^2-17x+16=0$,
解得 $x_1=1$,$x_2=16$.
∵$16>9$,
∴$x=16$ 不符合题意,舍去.
∴$x=1$.
答:小路的宽应为 1 m.

9. 解:设每周参观人数 y(人)与票价 x(元)之间的一次函数关系式为 $y=kx+b(k\neq 0)$,
根据题意,得 $\begin{cases}10k+b=7\ 000,\\15k+b=4\ 500.\end{cases}$
解得 $\begin{cases}k=-500,\\b=12\ 000.\end{cases}$
∴$y=-500x+12\ 000(x>0)$.
∵$xy=40\ 000$,即 $x(-500x+12\ 000)=40\ 000$,
∴$x^2-24x+80=0$,
解得 $x_1=20$,$x_2=4$.
当 $x=20$ 时,$y=-500x+12\ 000=2\ 000$,当 $x=4$ 时,$y=-500x+12\ 000=10\ 000$.
∵要控制参观人数,∴取 $x=20$,此时,$y=2\ 000$.
答:每周应限定参观人数为 2 000 人,门票价格应是 20 元.

10. 解:(1)由题意可得 $k=-15$,则原方程为 $x^2-15x+56=0$,∴$(x-7)\cdot(x-8)=0$,解得 $x_1=7$,$x_2=8$.
(2)第 n 个方程为 $x^2-(2n-1)x+n(n-1)=0$,它的根为 $x_1=n-1$,$x_2=n$.

全章热门考点整合应用

1. 解:当 $m^2+1=2$ 且 $m-1\neq 0$ 时,方程 $(m-1)x^{m^2+1}+2mx+3=0$ 是关于 x 的一元二次方程.
由 $m^2+1=2$,得 $m^2=1$,所以 $m=\pm 1$.
由 $m-1\neq 0$,得 $m\neq 1$,
所以 $m=-1$.
所以当 $m=-1$ 时,方程 $(m-1)x^{m^2+1}+2mx+3=0$ 是关于 x 的一元二次方程.
点拨:要准确理解一元二次方程的概念,需从次数和系数两方面考虑.

2. 解:由题意得 $e-4\geqslant 0$ 且 $4-e\geqslant 0$.
∴$e=4$,则 $a=-2$.
又∵-1 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根,
∴$a-b+c=0$.
∴$b=a+c=-2+4=2$.
∴原式 $=\frac{(-2+2)^{2\ 022}}{2\ 021\times 4}=0$.

3. 解:(1)$(x-1)^2+2x(x-1)=0$,
$(x-1)(x-1+2x)=0$,
$(x-1)(3x-1)=0$,
∴$x_1=1$,$x_2=\frac{1}{3}$.
(2)$x^2-6x-6=0$,
$x^2-6x=6$,
$x^2-6x+9=15$,
$(x-3)^2=15$,
$x-3=\pm\sqrt{15}$,
∴$x_1=3+\sqrt{15}$,$x_2=3-\sqrt{15}$.
(3)$6\ 000(1-x)^2=4\ 860$,
$(1-x)^2=0.81$,
$1-x=\pm 0.9$,
∴$x_1=1.9$,$x_2=0.1$.
(4)$(10+x)(50-x)=800$,
$x^2-40x+300=0$,
$(x-10)(x-30)=0$,
∴$x_1=10$,$x_2=30$.
(5)$(2x-1)^2=x(3x+2)-7$,
$4x^2-4x+1=3x^2+2x-7$,
$x^2-6x+8=0$,
$(x-2)(x-4)=0$,
∴$x_1=2$,$x_2=4$.

4. A

5. 解:∵关于 x 的方程 $x^2+(b+2)x+(6-b)=0$ 有两个相等的实数根,
∴$\Delta=(b+2)^2-4(6-b)=0$,
∴$b_1=2$,$b_2=-10$(舍去).
当 a 为腰长时,$\triangle ABC$ 的周长为 $5+5+2=12$.
当 b 为腰长时,$2+2<5$,不能构成三角形.
∴$\triangle ABC$ 的周长为 12.

6. 解:(1)∵关于 x 的一元二次方程 $x^2-2(a-1)x+a^2-a-2=0$ 有两个不相等的实数根,
∴$\Delta=[-2(a-1)]^2-4(a^2-a-2)>0$,
解得 $a<3$,
∵a 为正整数,
∴$a=1$,2.
(2)∵x_1,x_2 是一元二次方程 $x^2-2(a-1)x+a^2-a-2=0$ 的两个根,
∴$x_1+x_2=2(a-1)$,$x_1x_2=a^2-a-2$,
∵$x_1^2+x_2^2-x_1x_2=16$,
∴$(x_1+x_2)^2-3x_1x_2=16$,
∴$[2(a-1)]^2-3(a^2-a-2)=16$,
解得 $a_1=-1$,$a_2=6$,
∵$a<3$,
∴$a=-1$.

7. 解:(1)∵关于 x 的一元二次方程 $x^2-6x+(4m+1)=0$ 有实数根,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \Delta=(-6)^2-4\times1\times(4m+1)\geqslant0$，

解得 $m\leqslant2$.

(2)∵ 方程 $x^2-6x+(4m+1)=0$ 的两个实数根为 x_1,x_2，

$\therefore x_1+x_2=6, x_1x_2=4m+1$，

$\therefore (x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=4^2$，即 $6^2-4(4m+1)=16$，

解得 $m=1$.

8. 解：(1) 设进馆人次的月平均增长率为 x，则由题意得

$128+128(1+x)+128(1+x)^2=608$，

化简得 $4x^2+12x-7=0$，

解得 $x_1=0.5=50\%, x_2=-3.5$（舍去），

答：进馆人次的月平均增长率为 50%.

(2)∵ 进馆人次的月平均增长率为 50%，

∴ 第四个月的进馆人次为 $128(1+50\%)^3=128\times\frac{27}{8}=432<500$.

答：校图书馆能接纳第四个月的进馆人次.

9. 解：(1)(-1)；5；(-2)；(-3)；1；(-9)

(2)这两个常数项的和等于一次项系数，积等于常数项.

10. 解：(1)$(x-2)^2-2$；$(x-\sqrt{2})^2-(4-2\sqrt{2})x$ 或 $(x+\sqrt{2})^2-(4+2\sqrt{2})x$；$2(x-1)^2-x^2$.

(2)$a^2+b^2+c^2-ab-3b-2c+4=\left(a-\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}(b-2)^2+(c-1)^2=0$，所以 $a-\frac{1}{2}b=0, b-2=0, c-1=0$.

所以 $a=1, b=2, c=1$.

所以 $a+b+c=4$.

11. 解：∵ $x=a$ 是 $2x^2+x-2=0$ 的一个根，

$\therefore 2a^2+a-2=0$，即 $2a^2+a=2$.

∴ 原式 $=a^2(2a^2+a)+2a^2+2a+1=2a^2+2a^2+2a+1=2(2a^2+a)+1=5$.

点拨：将 $x=a$ 代入 $2x^2+x-2=0$ 中，再对等式变形，利用整体代入法求代数式的值.

12. 解：设 $2x+1=y$，则原方程可化为 $y^2-3y=-2$.

解得 $y_1=1, y_2=2$.

当 $y=1$ 时，有 $2x+1=1$，所以 $x=0$；

当 $y=2$ 时，有 $2x+1=2$，所以 $x=\frac{1}{2}$.

所以原方程的解为 $x_1=0, x_2=\frac{1}{2}$.

点拨：利用**转化思想**将复杂的一元二次方程转化为简单的一元二次方程来求解.

13. 解：(1) 由题意得 $\Delta=4(a-1)^2-4(a^2-7a-4)=20a+20\geqslant0$，

$\therefore a\geqslant-1$.

(2) 若 $x_1^2=x_1x_2$，则 $x_1(x_1-x_2)=0$，

故 $x_1=0$ 或 $x_1=x_2$.

当 $x_1=0$ 时，代入原方程得 $a^2-7a-4=0$，解得 $a=\frac{7\pm\sqrt{65}}{2}$.

而此时 $x_1+x_2=-2(a-1)$，

$\therefore x_2=-2(a-1)$.

故 $x_2=-5-\sqrt{65}$ 或 $x_2=-5+\sqrt{65}$.

当 $x_1=x_2$ 时，$\Delta=20a+20=0$，

$\therefore a=-1$.

原方程为 $x^2-4x+4=0$，解得 $x_1=x_2=2$.

点拨：本题运用分类讨论思想，解题的关键是利用根与系数的关系以及根的判别式建立方程或不等式.

第23章 图形的相似

23.1 成比例线段

第1课时 成比例线段

1. B **2.** D **3.** A **4.** C **5.** D

6. D **点拨：**根据宽与长的比是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 的矩形是黄金矩形来判断.

7. B

8. A **点拨：**由 $a:b=3:4$ 知 $3b=4a$，

$\therefore b=\frac{4a}{3}$，由 $a+b=14$ 得到 $a+\frac{4a}{3}=14$，解得 $a=6$. $\therefore b=8$. $\therefore 2a-b=2\times6-8=4$.

9. C **点拨：**根据比例线段的概念，用最短的线段和最长的线段相乘，另外两条线段相乘，看它们的积是否相等，即可得出答案.

A. $4\times10=5\times8$，能成比例；

B. $2\times5=2\sqrt{5}\times\sqrt{5}$，能成比例；

C. $1\times4\neq2\times3$，不能成比例；

D. $1\times4=2\times2$，能成比例.

故选 C.

10. 12 **点拨：**已知 $\frac{a}{6}=\frac{b}{5}=\frac{c}{4}$，故 $a:b:c=6:5:4$，所以设 $a=6k$，则 $b=5k, c=4k$，所以 $a+b-2c=6k+5k-8k=3k=6$，解得 $k=2$，故 $a=6k=12$.

11. D

12. 解：(1)∵ $AB=8$ cm，$BC=12$ cm，$A'B'=4$ cm，$B'C'=6$ cm，

$\therefore \frac{A'B'}{AB}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}, \frac{B'C'}{BC}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$.

(2)由(1)知 $\frac{A'B'}{AB}=\frac{1}{2}, \frac{B'C'}{BC}=\frac{1}{2}$，

$\therefore \frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}$，∵ 线段 $A'B', AB, B'C', BC$ 是成比例线段.

13. 解：(1) 设 $\frac{a}{3}=\frac{b}{2}=\frac{c}{6}=k$，

$\therefore a=3k, b=2k, c=6k$.

∵ $a+2b+c=26$，

∴ $3k+4k+6k=26$.

∴ $k=2$.

∴ $a=6, b=4, c=12$.

(2)∵ 线段 x 是线段 a, b 的比例中项，∴ $x^2=ab$.

又∵ $a=6, b=4$，

∴ $x=2\sqrt{6}$（负值舍去）.

14. 解：(1)∵ $\frac{a+4}{3}=\frac{b+3}{2}=\frac{c+8}{4}$，

∴ $\frac{a+4+b+3+c+8}{3+2+4}=\frac{a+4}{3}$，即 $\frac{a+b+c+15}{9}=\frac{a+4}{3}$.

又∵ $a+b+c=12$，

∴ $\frac{12+15}{9}=\frac{a+4}{3}$，即 $\frac{a+4}{3}=3$，

解得 $a=5$.

由 $\frac{b+3}{2}=\frac{c+8}{4}=3$，解得 $b=3, c=4$.

(2)∵ $3^2+4^2=5^2$，即 $b^2+c^2=a^2$，

∴ $\triangle ABC$ 是直角三角形.

15. 解：(1) 矩形 $BCFE$，矩形 $AEML$，矩形 $GMFH$，矩形 $LGPN$ 的长和宽的比不变.

理由如下，设矩形 $ABCD$ 的宽为 a，则长为 $\sqrt{2}a$，

∵ $BC=a, BE=AE=\frac{\sqrt{2}}{2}a, ME=MF=\frac{a}{2}, HF=LG=\frac{\sqrt{2}}{4}a, LN=\frac{a}{4}$，∴ $\frac{BC}{BE}=\frac{a}{\frac{\sqrt{2}}{2}a}=\sqrt{2}, \frac{AE}{ME}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\frac{a}{2}}=\sqrt{2}, \frac{MF}{HF}=\frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{4}a}=\sqrt{2}, \frac{LG}{LN}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}a}{\frac{a}{4}}=\sqrt{2}$，∴ 矩形 $BCFE$，矩形 $AEML$，矩形 $GMFH$，矩形 $LGPN$ 的长和宽的比不变.

(2) 有成比例的线段，如线段 BC：$BE=AE:ME$.

第2课时 平行线分段成比例

1. C **2.** C **3.** 4

4. B **点拨：**∵ $DE//BC$，∴ $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$

∵ $AD=1, DB=2$，∴ $AB=3$，∴ $\frac{1}{3}=\frac{AE}{AC}$，即 $\frac{AE}{AC}=\frac{1}{3}$，故选 B.

5. C

6. C **点拨：**∵ $DE//BC$，∴ $AE:EC=AD:DB=1:2$，∴ $EF//AB$，∴ $BF:FC=AE:EC=1:2$，∵ $CF=6$，

∴ $BF=3$，故选 C.

7. C **点拨：**延长 GH 交 AD 于点 P，证明 $\triangle APH\cong\triangle FGH$，再利用勾股定理求出 PG 的长，进而求出 GH 的长.

8. D

9. B **点拨：**如图，过 O 作 $OG//BC$，交 AC 于 G.



（第9题）

∵ O 是 BD 的中点，

∴ G 是 DC 的中点.

又∵ $AD:DC=1:2$，

∴ $AD=DG=GC$.

∵ $AG:GC=2:1, AO:OE=2:1$.

∴ $S_{\triangle AOB}:S_{\triangle BOE}=2:1$.

设 $S_{\triangle BOE}=S, S_{\triangle AOB}=2S$，又 $BO=OD$，

∴ $S_{\triangle AOD}=2S, S_{\triangle ABD}=4S$.

∵ $AD:DC=1:2$，

∴ $S_{\triangle ADC}=2S_{\triangle ABD}=8S, S_{四边形GDOE}=7S$.

∴ $S_{\triangle AEG}=9S$，∴ $S_{\triangle AEE}=3S$，

∴ $\frac{BE}{EC}=\frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle AEC}}=\frac{3S}{9S}=\frac{1}{3}$.

10. 解：(1)∵ $a//b//c$，

∴ $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$，即 $\frac{3}{5}=\frac{4}{EF}$，

解得 $EF=\frac{20}{3}$.

(2)∵ $a//b//c$，

∴ $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}=\frac{2}{5}$，

∴ $\frac{DE+EF}{EF}=\frac{2+5}{5}=\frac{7}{5}$，即 $\frac{10}{EF}=\frac{7}{5}$，

解得 $EF=\frac{50}{7}$.

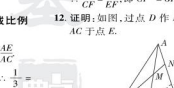
11. 证明：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AD//BC, AB//CD$，

∴ $\frac{GF}{GF}=\frac{DF}{BF}, \frac{CF}{EF}=\frac{DF}{BF}$，

∴ $\frac{GF}{GF}=\frac{CF}{EF}$，即 $CF^2=GF\cdot EF$.

12. 证明：如图，过点 D 作 $DE//BN$，交 AC 于点 E.



（第12题）

∵ AD 是 BC 边上的中线，

∴ $BD=DC$.

又∵ $DE//BN$，∴ $CE=NE$.

∵ M 是 AD 的中点，$DE//MN$，

∴ $AN=NE$.

∴ $AN=NE=CE$.

∴ $CN=NE+CE=2AN$.

∴ $AN=\frac{1}{2}CN$.

13. 证明：如图，过点 C 作 $CE//DA$，交 BA 的延长线于点 E.

（第13题）



则 $\angle1=\angle E, \angle2=\angle3$.

∵ AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，

∴ $\angle1=\angle2, \angle3=\angle E$，

∴ $AC=AE$.

又∵ $AD//CE$，

∴ $\frac{AB}{AE}=\frac{BD}{DC}$，

∴ $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$.

阶段核心技巧

1. 证明：过点 A 作 $AM//DF$ 交 BD 于 M，则 $\frac{AE}{EC}=\frac{MD}{DC}, \frac{FA}{FB}=\frac{DM}{BD}$，又 $BD=DC$，

∴ $\frac{AE}{EC}=\frac{FA}{FB}$.

点拨：证明比例式时用等线段去代换是常用的方法.

2. 证明：∵ $DE//BC$，

∴ $\frac{PD}{PB}=\frac{PE}{PC}$，

∵ $PD\cdot PC=PE\cdot PB$.

∵ $DF//AC$，

∴ $\frac{PF}{PC}=\frac{PD}{PA}$，

∴ $PD\cdot PC=PF\cdot PA$.

∴ $PE\cdot PB=PF\cdot PA$.

∴ $\frac{PE}{PF}=\frac{PA}{PB}$.

3. 证明：∵ $EF//CD$，

∴ $\frac{AF}{AD}=\frac{AE}{AC}$，

∵ $DE//BC$，

∴ $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$，

∴ $\frac{AD}{AB}=\frac{AF}{AD}$.

4. 证明：(1)∵ $\triangle ABC$ 与 $\triangle DCE$ 都是等边三角形，

∴ $AC=BC, CE=CD, \angle ACB=\angle DCE=60°$.

∵ AD 是 BC 边上的中线，

∴ $BD=DC$.

又∵ $DE//BN$，∴ $CE=NE$.

∵ M 是 AD 的中点，$DE//MN$，

∴ $AN=NE$.

∴ $AN=NE=CE$.

∴ $CN=NE+CE=2AN$.

∴ $AN=\frac{1}{2}CN$.

5. 证明：∵ $DE//BC$，∴ $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$

∵ 点 D 为 AB 的中点，

∴ $AD=DB$，即 $\frac{AD}{DB}=1$.

∵ $CF//BA$，

∴ $\frac{DE}{EF}=\frac{AE}{EC}=\frac{AD}{DB}=1$.

∴ $DE=EF$.

6. 证明：∵ $AC//EF$，∴ $\frac{BE}{BC}=\frac{BF}{BA}$①.

∵ $FE//BD$，

∴ $\frac{AE}{AD}=\frac{AF}{AB}$②. ①+②，得 $\frac{BE}{BC}+\frac{AE}{AD}=\frac{BF}{BA}+\frac{AF}{AB}=\frac{AB}{AB}=1$，

即 $\frac{AE}{AD}+\frac{BE}{BC}=1$.

23.2 相似图形

1. D **2.** A **3.** D **4.** B

5. C **点拨：**本题考查的是相似多边形的性质，即相似多边形的对应角相等，对应边成比例.

6. C **点拨：**∵ 四边形 $ABCD$ 与四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 相似，∴ $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{CD}{C_1D_1}$.

又∵ $AB=12, CD=15, A_1B_1=9$，

∴ $C_1D_1=\frac{9\times15}{12}=\frac{45}{4}$. 故选 C.

7. B **点拨：**设 $AD=x$，易知 $FD=x-2$，$FE=2$.

∵ 四边形 $EFDC$ 与矩形 $ABCD$ 相似，

∴ $\frac{EF}{FD}=\frac{AD}{AB}$，即 $\frac{2}{x-2}=\frac{x}{2}$.

解得 $x_1=1+\sqrt{5}, x_2=1-\sqrt{5}$（不合题意，舍去），故选 B.

8. C **点拨：**边长扩大为原来的 3 倍，面积扩大为原来的 9 倍.

9. 解：这种说法不正确. 例如，如图所示的两个菱形，每个菱形的边长都是相等的，但它们的各角并不是对应相等的，所以它们不相似.（举例不唯一）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



（第9题）

10. D　**点拨**：把一个图形按一定的比例扩大或缩小，各边都相应地扩大或缩小，各角不变.

11. **解**：∵ 四边形 $ABCD$ 与四边形 $EFGH$ 相似，

∴ $\angle E=\angle A=62°$，$\angle F=\angle B=70°$.

又∵ $\angle H=140°$，$\angle E+\angle F+\angle G+\angle H=360°$，∴ $\angle G=88°$.

∵ 四边形 $ABCD$ 与四边形 $EFGH$ 相似，

∴ $\frac{AD}{EH}=\frac{AB}{EF}=\frac{BC}{FG}$.

又∵ $AD=18$，$EF=15$，$FG=14$，$EH=12$，

∴ $AB=22.5$，$BC=21$.

12. **解**：(1)∵ 多边形 $ABCDEF$ 和多边形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 相似，且 $\angle C$ 和 $\angle C_1$，$\angle D$ 和 $\angle D_1$，$\angle E$ 和 $\angle E_1$ 是对应角，

∴ $\angle C=95°$，$\angle D=135°$，$\angle E=120°$.

由多边形内角和定理，知六边形的内角和为 $720°$，∴ $\angle F=720°-(135°+120°+95°+135°+120°)=115°$.

(2)∵ 多边形 $ABCDEF$ 和多边形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的对应边的比是 1∶1.5，且 $CD=15$ cm，∴ $C_1D_1=15\times1.5=22.5$(cm).

13. (1)**证明**：∵ 菱形 $AEFG$ 与菱形 $ABCD$ 相似，

∴ $\angle EAG=\angle BAD$，

∴ $\angle EAG+\angle GAB=\angle BAD+\angle GAB$，

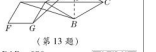
即 $\angle EAB=\angle GAD$.

又易知 $AE=AG$，$AB=AD$，

∴ $\triangle AEB\cong\triangle AGD$，

∴ $EB=GD$.

(2)**解**：如图所示，连结 BD 交 AC 于点 P，则 $BP\perp AC$.



（第13题）



∵ $\angle DAB=60°$，

∴ $\angle PAB=30°$，

∴ $BP=\frac{1}{2}AB=1$，

$AP=\sqrt{AB^2-BP^2}=\sqrt{3}$，

又 $AE=AG=\sqrt{3}$，

∴ $EP=2\sqrt{3}$，

∴ $EB=\sqrt{EP^2+BP^2}=\sqrt{12+1}=\sqrt{13}$，

∴ $GD=EB=\sqrt{13}$.

14. **解**：(1)如果四周的小路的宽均相等，那么小路四周所围成的矩形 $A'B'C'D'$ 和矩形 $ABCD$ 不相似. 理由如下：

∵ $\frac{30+2a}{30}=\frac{15+a}{15}$，$\frac{20+2a}{20}=\frac{10+a}{10}$，

∴ $\frac{30+2a}{30}\neq\frac{20+2a}{20}$，

∴ 小路四周所围成的矩形 $A'B'C'D'$ 和矩形 $ABCD$ 不相似.

(2)当 $\frac{20+2x}{20}=\frac{30+2x}{30}$ 时，小路四周所围成的矩形 $A'B'C'D'$ 和矩形 $ABCD$ 相似，

化简 $\frac{20+2x}{20}=\frac{30+2x}{30}$，得 $\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$.

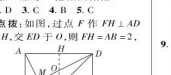
∴ x 与 y 的比值为 $\frac{2}{3}$ 时，能使小路四周所围成的矩形 $A'B'C'D'$ 和矩形 $ABCD$ 相似.

23.3　相似三角形

第1课时　相似三角形

1. C　**2.** D　**3.** C　**4.** B　**5.** C

6. C　**点拨**：如图，过点 F 作 $FH\perp AD$ 于点 H，交 ED 于 O，则 $FH=AB=2$，



（第6题）

∵ $AE=EB$，$BF=FC$，$BC=AD=2$，

∴ $AE=EB=1$，$BF=AH=1$，$FC=HD=1$，

∴ $AF=\sqrt{FH^2+AH^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，

易知 $OH\parallel AE$，

∴ $\triangle DHO\backsim\triangle DAE$.

∴ $\frac{HO}{AE}=\frac{DH}{AD}=\frac{1}{2}$，

∴ $OH=\frac{1}{2}AE=\frac{1}{2}$，

∴ $OF=FH-OH=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

∵ $AE\parallel FO$，∴ $\triangle AME\backsim\triangle FMO$.

∴ $\frac{AM}{FM}=\frac{AE}{OF}=\frac{2}{3}$，

∴ $AM=\frac{2}{5}AF=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

∵ $AD\parallel BF$，∴ $\triangle AND\backsim\triangle FNB$，

∴ $\frac{AN}{FN}=\frac{AD}{BF}=2$，∴ $AN=\frac{2}{3}AF=\frac{2\sqrt{5}}{3}$，

∴ $MN=AN-AM=\frac{2\sqrt{5}}{3}-\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{4\sqrt{5}}{15}$，故选 C.

7. B　**点拨**：如图，作 $DH\parallel EG$ 交 AB 于点 H，则 $\triangle AEG\backsim\triangle ADH$.



（第7题）

∵ $EF\perp AC$，$\angle C=90°$，

∴ $\angle EFA=\angle C=90°$.

∴ $EF\parallel CD$.

∴ $\triangle AEF\backsim\triangle ADC$.

∴ $\frac{AE}{AD}=\frac{EF}{CD}$，

∴ $\frac{EG}{DH}=\frac{EF}{CD}$

∴ $EG=EF$，

∴ $DH=CD$.

设 $DH=x$，则 $CD=x$.

∵ $BC=12$，$AC=6$，∴ $BD=12-x$.

∵ $EF\perp AC$，$EF\perp EG$，$DH\parallel EG$，

∴ $EG\parallel AC\parallel DH$. ∴ $\triangle BDH\backsim\triangle BCA$.

∴ $\frac{DH}{AC}=\frac{BD}{BC}$，即 $\frac{x}{6}=\frac{12-x}{12}$，解得 $x=4$，∴ $CD=4$.

8. 错误答案：D

诊断：不能准确找出相似三角形的对应边，从而不能准确写出对应线段所成的比例式.

正确答案：A

9. (1)**证明**：∵ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

∴ $AD\parallel BE$. ∴ $\triangle AMD\backsim\triangle EMB$.

(2)**解**：∵ $AD\parallel BC$，

∴ $\triangle FND\backsim\triangle ENB$. ∴ $\frac{FN}{NE}=\frac{DN}{BN}$.

∵ M，N 为 BD 的三等分点，

∴ $\frac{DN}{BN}=\frac{1}{2}$. ∴ $\frac{FN}{NE}=\frac{1}{2}$.

10. (1)**证明**：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，∴ $AD\parallel BC$.

∵ $DF=BE$，

∴ 四边形 $BEFD$ 是平行四边形，

∴ $BD\parallel EF$.

(2)**解**：∵ $BE=4$，∴ $DF=4$.

∵ $DF\parallel EC$，∴ $\triangle DFG\backsim\triangle CEG$，

∴ $\frac{DG}{CG}=\frac{DF}{CE}$.

∴ $EC=\frac{DF\cdot CG}{DG}=DF\cdot\frac{CG}{DG}=4\times\frac{3}{2}=6$.

11. (1)**证明**：∵ 四边形 $EFGH$ 是正方形，

∴ $EH\parallel BC$. ∴ $\triangle AEH\backsim\triangle ABC$.

(2)**解**：如图，设 AD 与 EH 交于点 M.

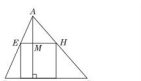
∵ $\angle EFD=\angle FEM=\angle FDM=90°$，

∴ 四边形 $EFDM$ 是矩形.

∴ $EF=DM$.

设正方形 $EFGH$ 的边长为 x cm，

∵ $\triangle AEH\backsim\triangle ABC$，∴ $\frac{EH}{BC}=\frac{AE}{AB}$



（第11题）

∵ $EM\parallel BD$，∴ $\triangle AEM\backsim\triangle ABD$，

∴ $\frac{AE}{AB}=\frac{AM}{AD}$. ∴ $\frac{EH}{BC}=\frac{AM}{AD}$.

即 $\frac{x}{40}=\frac{30-x}{30}$. ∵ $x=\frac{120}{7}$.

∴ 正方形 $EFGH$ 的边长为 $\frac{120}{7}$ cm，面积为 $\frac{14\,400}{49}$ cm^2.

12. (1)**证明**：∵ $\angle OED=\angle OBA$，$\angle OEF=\angle OBC$，

∴ $DE\parallel AB$，$EF\parallel BC$. 由 $DE\parallel AB$，得 $\frac{OD}{OA}=\frac{OE}{OB}$.

由 $EF\parallel BC$，得 $\frac{OF}{OC}=\frac{OE}{OB}$. ∴ $\frac{OD}{OA}=\frac{OF}{OC}$.

(2)**解**：是. 理由如下：由 $EF\parallel BC$ 得 $\triangle OFE\backsim\triangle OCB$，∴ $\frac{EF}{BC}=\frac{OE}{OB}$.

由 $DE\parallel AB$ 得 $\triangle ODE\backsim\triangle OAB$，

∴ $\frac{DE}{AB}=\frac{OE}{OB}$.

∴ $\frac{DE}{AB}=\frac{EF}{BC}$.

∵ $\triangle DEF$ 是以 DF 为底边的等腰三角形，∴ $DE=EF$，

∴ $AB=BC$，即 $\triangle ABC$ 是以 AC 为底边的等腰三角形.

第2课时　相似三角形的判定——利用角的关系

1. A　**2.** C　**3.** C　**4.** C

5. C　**点拨**：∵ $\angle ADE=\angle ACB$，$\angle A=\angle A$，∴ $\triangle ADE\backsim\triangle ACB$. ∴ $\frac{AD}{AC}=\frac{AE}{AB}$，

即 $\frac{2}{4}=\frac{AE}{6}$，解得 $AE=3$.

6. B

7. B　**点拨**：∵ $\angle C=90°$，$AB=5$，$BC=4$，∴ $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=3$. ∵ $PQ\parallel AB$，∴ $\angle ABD=\angle BDQ$，又 $\angle ABD=\angle QBD$，∴ $\angle QBD=\angle BDQ$. ∴ $QB=QD$. ∵ $QP=2QD$，∴ $QP=2QB$. 又易知 $\triangle CPQ\backsim\triangle CAB$，∴ $\frac{CP}{CA}=\frac{CQ}{CB}=\frac{PQ}{AB}$，即 $\frac{CP}{3}=\frac{4-QB}{4}=\frac{2QB}{5}$，解得 $CP=\frac{24}{13}$.

∴ $AP=CA-CP=\frac{15}{13}$.

8. D　**点拨**：设 $AF=x$ cm，则 $AC=3x$ cm，利用正方形的性质知 $EF=CF=2x$ cm，再证 $\triangle AEF\backsim\triangle ABC$，利用相似比得 $BC=6x$ cm，所以 $AB=3\sqrt{5}x$ cm. 即 $3\sqrt{5}x=30$，解得 $x=2\sqrt{5}$，再由 $\triangle ABC$ 的面积减去正方形 $EFCD$ 的面积即可求出答案.

9. 错误答案：2

诊断：根据题意，$\triangle AEF$ 与 $\triangle ABC$ 相似，但本题没有说明对应关系，故采用分类讨论思想，有两种可能：(1)$\triangle AEF\backsim\triangle ABC$，(2)$\triangle AEF\backsim\triangle ACB$.

正确答案：2 或 4.5

10. **证明**：(1)∵ $\triangle ABC$ 与 $\triangle DCE$ 都是等边三角形，

∴ $AC=BC$，$CD=CE$，$\angle ACB=\angle DCE=60°$.

∴ $\angle ACB+\angle ACE=\angle ACE+\angle DCE$，即 $\angle BCE=\angle ACD$.

在 $\triangle BCE$ 和 $\triangle ACD$ 中，

$\begin{cases}BC=AC,\\ \angle BCE=\angle ACD,\\ CE=CD,\end{cases}$

∴ $\triangle BCE\cong\triangle ACD$，∴ $AD=BE$.

(2)由(1)知，$\triangle BCE\cong\triangle ACD$，

∴ $\angle CBE=\angle CAD$.

∵ $\angle BMC=\angle AMF$，

∴ $\angle AFB=\angle ACB=60°=\angle ABC$.

又∵ $\angle BAF=\angle DAB$，

∴ $\triangle ABF\backsim\triangle ADB$.

11. (1)**证明**：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AD\parallel BC$，$AD=BC$.

∵ $\angle EBF=\angle EAD$.

又∵ $\angle BEF=\angle AED$，

∴ $\triangle EBF\backsim\triangle EAD$.

∴ $\frac{BF}{AD}=\frac{EB}{EA}=\frac{1}{2}$.

∴ $BF=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}BC$.

∴ $BF=CF$.

(2)**解**：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AD\parallel BC$.

∴ $\angle FCG=\angle DAG$.

又∵ $\angle FGC=\angle DGA$，

∴ $\triangle FGC\backsim\triangle DGA$.

∴ $\frac{FC}{DG}=\frac{FG}{AG}$，即 $\frac{FG}{4}=\frac{1}{2}$.

解得 $FG=2$.

12. (1)**证明**：∵ $BF\perp DE$，

∴ $\angle GFD=90°$.

∵ $\angle BCG=90°$，$\angle BGC=\angle DGF$，

∴ $\angle CBG=\angle CDE$.

在 $\triangle CBG$ 与 $\triangle DCE$ 中，

$\begin{cases}\angle CBG=\angle CDE,\\ BC=CD,\\ \angle BCG=\angle DCE,\\ \angle BCG\cong\angle DCE.\end{cases}$

∴ $BG=DE$.

(2)**解**：设 $CG=1$，

∵ G 为 CD 的中点，

∴ $GD=CG=1$.

由(1)可知 $\triangle BCG\cong\triangle DCE$，

∴ $CG=CE=1$.

∴ $DE=BG=\sqrt{5}$.

∵ $\angle GDF=\angle EDC$，$\angle DCE=\angle DFG$，

∴ $\triangle DGF\backsim\triangle DEC$.



第12题答案

∴ $\frac{GF}{EC}=\frac{DG}{DE}$

即 $\frac{GF}{1}=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

∴ $GF=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

∵ $AB\parallel CG$，

∴ $\triangle ABH\backsim\triangle CGH$.

∴ $\frac{AB}{CG}=\frac{BH}{GH}=\frac{2}{1}$.

∴ $GH=\frac{1}{3}\sqrt{5}$.

∴ $\frac{HG}{GF}=\frac{5}{3}$.

13. **解**：(1)由旋转知，$AB=AD$，$\angle DAB=90°$，

∴ $\angle ABD=\angle ADB=45°$.

由平移知 $DF\parallel AB$，

∴ $\angle BDF=\angle ABD$，

∴ $\angle BDF=45°$.

(2)由平移知 $EG\parallel AC$，$EG=AC$，

∴ 四边形 $ACGE$ 是平行四边形.

又∵ $\angle C=90°$，

∴ 四边形 $ACGE$ 是矩形，

∴ $\angle EAC=90°$，$AE=CG$.

又∵ $\angle DAB=90°$，

∴ $\angle EAB+\angle EAD=\angle CAB+\angle EAB$，

∴ $\angle DAE=\angle CAB$，

由(1)知 $DF\parallel AB$，

∴ $\angle EDA+\angle DAB=180°$，

∴ $\angle EDA=90°$，∴ $\angle EDA=\angle C$，

∴ $\triangle AED\backsim\triangle ABC$，∴ $\frac{AE}{AC}=\frac{AD}{AC}$.

即 $\frac{AE}{10}=\frac{10}{8}$，∴ $AE=\frac{25}{2}$，

∴ $CG=\frac{25}{2}$.

第3课时　相似三角形的判定——利用边角关系

1. C　**2.** C　**3.** B　**4.** C　**5.** B

6. $DF\parallel AC$(答案不唯一)

7. C

8. C　**点拨**：∵ 四边形 $EFGB$ 是正方形，$EB=2$，

∴ $FG=EB=2$，$\angle FGB=90°$.

∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，H 为 AD 的中点，

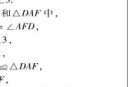
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore AD=4, AH=2, \angle BAD=90°$.
$\therefore \angle HAN=\angle FGN, AH=GF$.
又$\because \angle ANH=\angle GNF$,
$\therefore \triangle ANH\cong\triangle GNF$, 故①正确.
$\therefore \angle AHN=\angle HFG$.
$\because AG=FG=2=AH$,
$\therefore AF=\sqrt{2}FG=\sqrt{2}AH$.
$\therefore \angle AFH\neq\angle AHF$.
$\therefore \angle AFN\neq\angle HFG$, 故②错误.
$\because \triangle ANH\cong\triangle GNF$,
$\therefore AN=GN, NH=NF$.
$\because OA=\frac{1}{2}AG=1$.
$\because GM=BC=4$,
$\therefore \frac{AH}{AN}=\frac{GM}{AG}=2$.
又$\because \angle HAN=\angle AGM=90°$,
$\therefore \triangle AHN\sim\triangle GMA$.
$\therefore \angle AHN=\angle AMG$.
$\therefore AD/\!/GM$,
$\therefore \angle HAK=\angle AMG$.
$\therefore \angle AHK=\angle HAK$.
$\therefore AK=HK$.
$\therefore AK=HK=NK$.
$\therefore FN=HN$,
$\therefore FN=2NK$, 故③正确.
易知四边形 $ADMG$ 是矩形.
$\therefore DM=AG=2$.
$\therefore S_{\triangle AFN}=\frac{1}{2}AN\cdot FG=\frac{1}{2}\times1\times2=1$, $S_{\triangle ADM}=\frac{1}{2}AD\cdot DM=\frac{1}{2}\times4\times2=4$,
$\therefore S_{\triangle AFN}:S_{\triangle ADM}=1:4$, 故④正确.
故选 C.

9. $\frac{12}{5}$或$\frac{5}{3}$ **点拨:** 当$\frac{AE}{AD}=\frac{AB}{AC}$时, $\because \angle A=\angle A$, $\therefore \triangle AED\sim\triangle ABC$.
此时 $AE=\frac{AB\cdot AD}{AC}=\frac{6\times2}{5}=\frac{12}{5}$.
当$\frac{AE}{AB}=\frac{AB}{AC}$时, $\because \angle A=\angle A$, $\therefore \triangle ADE\sim\triangle ABC$.
此时 $AE=\frac{AC\cdot AD}{AB}=\frac{5\times2}{6}=\frac{5}{3}$.
故答案为$\frac{12}{5}$或$\frac{5}{3}$.

易错点拨: 当$\frac{AE}{AD}=\frac{AB}{AC}$或$\frac{AD}{AE}=\frac{AB}{AC}$时, 以 A, D, E 为顶点的三角形与$\triangle ABC$相似, 本题容易考虑问题不全面出现漏解.

10. **证明:** (1) 如图,$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形,
$\therefore AB=AD, \angle BAD=90°$.
$\therefore \angle1+\angle2=90°$,
$\because BE\perp AP, DF\perp AP$,
$\therefore \angle BEA=\angle AFD=90°$.



(第 10 题)

$\therefore \angle2+\angle3=90°$,
$\therefore \angle1=\angle3$.
在$\triangle ABE$ 和$\triangle DAF$ 中,
$\begin{cases}\angle BEA=\angle AFD,\\ \angle1=\angle3,\\ AB=DA,\end{cases}$
$\therefore \triangle ABE\cong\triangle DAF$,
$\therefore BE=AF$,
$\therefore EF=AE-AF=AE-BE$.
(2) 如图,$\because \frac{AF}{BF}=\frac{DF}{AD}, AF=BE$,



(第 10 题)

$\therefore \frac{BE}{BF}=\frac{DF}{AD}$,
$\therefore \frac{BE}{DF}=\frac{BF}{AD}$.
设$\frac{BE}{BF}=\frac{DF}{AD}=k$, 则 $BE=kBF, DF=kAD$,
$\therefore EF=\sqrt{BF^2-BE^2}=\sqrt{1-k^2}BF, AF=\sqrt{AD^2-DF^2}=\sqrt{1-k^2}AD$,
$\therefore \frac{EF}{AF}=\frac{BF}{AD}$. $\because \frac{BE}{DF}=\frac{BF}{AF}$,
又$\because \angle BEF=\angle AFD=90°$,
$\therefore \triangle BEF\sim\triangle DFA$,
$\therefore \angle4=\angle3$. $\because \angle1=\angle3$,
$\therefore \angle4=\angle1$.
$\because \angle1+\angle BPA=90°, \angle5+\angle BPA=90°$,
$\therefore \angle5=\angle1$,
$\therefore \angle4=\angle5$.
即 BE 平分$\angle FBP$, 而 $BE\perp EP$,
$\therefore EF=EB$.

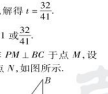
11. **证明:** (1)$\because \angle ACD=\angle B, \angle CAD=\angle BAC$,
$\therefore \triangle ACD\sim\triangle ABC$.
$\therefore AC:AB=AD:AC$.
$\therefore AC^2=AD\cdot AB$.
(2)$\because \triangle ACD\sim\triangle ABC$,
$\therefore \angle ADF=\angle ACG$.
$\because \frac{AD}{AC}=\frac{DF}{CG}$, $\therefore \triangle ADF\sim\triangle ACG$.
$\therefore \angle DAF=\angle CAF$, 即 $\angle BAG=\angle CAG$,
过点 B 作 $BE/\!/AC$, 交 AG 的延长线于点 E, 则$\angle E=\angle CAG$.
又$\because \angle BGE=\angle AGC$,
$\therefore \triangle ACG\sim\triangle EBG$. $\therefore \frac{AC}{BE}=\frac{CG}{BG}$.
又$\because \angle BAG=\angle CAG$, $\therefore \angle BAG=\angle E$. $\therefore BA=BE$. $\therefore \frac{AC}{AB}=\frac{CG}{BG}$.
又$\because \frac{AC}{AB}=\frac{AD}{AC}$, $\frac{AC}{AB}=\frac{DF}{CG}$,
$\therefore \frac{DF}{CG}=\frac{CG}{BG}$. $\therefore CG^2=DF\cdot BG$.

12. (1) **证明:** 在正方形 $ABCD$ 中, $\angle A=\angle D=90°, AB=AD=CD$.
$\because AE=ED, DF=\frac{1}{4}DC$,
$\therefore AE=ED=\frac{1}{2}AB, DF=\frac{1}{4}AB$.
$\therefore \frac{AB}{DE}=\frac{AE}{DF}$. $\therefore \triangle ABE\sim\triangle DEF$.
(2) **解:** $\because AD/\!/CG$,
$\therefore \angle DEF=\angle G, \angle D=\angle DCG$.
$\therefore \triangle EFD\sim\triangle GFC$.
$\therefore \frac{DE}{CG}=\frac{DF}{CF}=\frac{1}{3}$.
$\therefore DE=\frac{1}{2}AB=2$,
$\therefore CG=6$. $\therefore BG=10$.

13. **解:** (1) 由题意知,$AB=10$ cm, $BP=5t$ cm, $CQ=4t$ cm.
$BQ=(8-4t)$ cm.
当 $\triangle PBQ\backsim\triangle ABC$ 时,


第 13 题答图

有$\frac{PB}{AB}=\frac{BQ}{BC}$,
即$\frac{5t}{10}=\frac{8-4t}{8}$,
解得 $t=1$.
当$\triangle QBP\backsim\triangle ABC$ 时, 有$\frac{QB}{AB}=\frac{BP}{BC}$,
即$\frac{8-4t}{10}=\frac{5t}{8}$, 解得 $t=\frac{32}{41}$.
综上所知,$t=1$ 或$\frac{32}{41}$.
(2) 过点 P 作 $PM\perp BC$ 于点 M, 设 AQ, CP 交于点 N, 如图所示.



(第 13 题)

易知$\triangle BMP\backsim\triangle BCA$,
$\therefore \frac{BP}{BA}=\frac{PM}{AC}=\frac{BM}{BC}$,
即$\frac{5t}{10}=\frac{PM}{6}=\frac{BM}{8}$.
$\therefore PM=3t$ cm, $BM=4t$ cm,
则 $CM=(8-4t)$ cm.
$\therefore AQ\perp CP$,
$\therefore \angle QAC+\angle NCA=90°$.
$\because \angle PCM+\angle NCA=90°$,
$\therefore \angle QAC=\angle PCM$.
又$\because \angle ACQ=\angle PMC$,
$\therefore \triangle ACQ\sim\triangle CMP$,
$\therefore \frac{AC}{CM}=\frac{CQ}{MP}$, 即$\frac{6}{8-4t}=\frac{4t}{3t}$,
解得 $t=\frac{7}{8}$.

第 4 课时　相似三角形的判定——利用三边关系

1. B　**2.** D　**3.** C　**4.** D

5. B　**点拨:** 分以下两种情况讨论: (1) 若截 45 cm 的铝材, 设截下的两段长分别为 x cm, y cm$(x<y)$, 由题意得$\frac{24}{x}=\frac{30}{y}=\frac{36}{27}$　①;或$\frac{24}{x}=\frac{30}{27}=\frac{36}{y}$　②(注:27 cm 不可能是最小边长), 由①解得 $x=18, y=22.5$, 符合题意, 由②解得 $x=\frac{108}{5}, y=\frac{162}{5}$, 而 $x+y=\frac{108}{5}+\frac{162}{5}=\frac{270}{5}=54>45$, 不合题意, 舍去. (2) 若截 27 cm 的铝材, 设截下的两段长分别为 a cm, b cm$(a<b)$, 由题意得$\frac{24}{a}=\frac{30}{b}=\frac{36}{45}$(注:45 cm 只能是最大边长), 解得 $a=30, b=37.5$, 而 $a+b=30+37.5=67.5>27$, 不合题意, 舍去. 综上可知, 截法只有 1 种.

6. C　**点拨:** 设网格中每个小正方形的边长为 1. 由题图得$\triangle$中的三角形的各边长分别为 $2, \sqrt{2}, \sqrt{10}$,③中的三角形的各边长分别为 $2\sqrt{2}, 2, \sqrt{5}$,
$\because \frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{5}}$, $\therefore$ 两个三角形的三边对应成比例, $\therefore$ ①③ 相似. 故选 C.

7. C

8. B　**点拨:** 设小正方形的边长为 1, 则"帅""相""兵"所在位置的格点构成的三角形的三边长分别 $2, 2\sqrt{5}, 4\sqrt{2}$."车""炮"之间的距离为 1,"炮"②之间的距离为$\sqrt{5}$,"车"②之间的距离为$2\sqrt{2}$, $\because \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$, $\therefore$ 马应该落在②的位置.

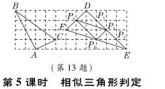
9. B　**点拨:** 当直角三角形的直角边长分别为 6.8, 且另一个与它相似的直角三角形的直角边长分别为 3.4 时, x 的值为 5; 当 8.4 为对应边的长且为两直角三角形的斜边长时, x 的值为$\sqrt{7}$. 故 x 的值可以为 5 或$\sqrt{7}$. 此题易忽略第二种情况.

10. **证明:** $\because \frac{AD}{AB}=\frac{BC}{DE}=\frac{AC}{AE}$,
$\therefore \triangle ABC\backsim\triangle ADE$.
$\therefore \angle BAC=\angle DAE$.
$\therefore \angle BAC-\angle CAD=\angle DAE-\angle CAD$, 即$\angle BAD=\angle CAE$.

11. **证明:** 设正方形 $ABCD$ 的边长为 a,
$\therefore AD=BC=CD=a$.
又$\because Q$ 是 CD 的中点,
$\therefore DQ=CQ=\frac{1}{2}a$.
$\because BP=3PC$,$\therefore PC=\frac{1}{4}a$.
$\therefore AQ=\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}=\frac{\sqrt{5}a}{2}$, $PQ=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}}=\frac{\sqrt{5}a}{4}$.
$\therefore \frac{AD}{CQ}=\frac{DQ}{PC}=\frac{AQ}{PQ}=2$.
$\therefore \triangle ADQ\backsim\triangle QCP$.

12. **解:** (1) $\triangle ACF\backsim\triangle GCA$. 理由: 可设正方形 $ABCD$, 由于正方形 $CDEF$, 正方形 $EFGH$ 的边长为 a, 则$\triangle ACF$ 的三边长分别为 $AC=\sqrt{2}a, CF=a, AF=\sqrt{5}a$,$\triangle ACG$ 的三边长分别为 $AC=\sqrt{2}a, CG=2a, AG=\sqrt{10}a$.
$\therefore \frac{CF}{AC}=\frac{a}{\sqrt{2}a}=\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{AC}{CG}=\frac{\sqrt{2}a}{2a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,
$\frac{AF}{AG}=\frac{\sqrt{5}a}{\sqrt{10}a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.
$\therefore \frac{CF}{AC}=\frac{AC}{CG}=\frac{AF}{AG}$.
$\therefore \triangle ACF\backsim\triangle GCA$.
(2)$\because \triangle ACF\backsim\triangle GCA$,
$\therefore \angle1=\angle CAF$.
$\therefore \angle1+\angle2=\angle CAF+\angle2=\angle ACB=45°$.

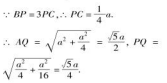
13. (1) **证明:** 根据勾股定理, 得 $AB=2\sqrt{5}, AC=\sqrt{5}, BC=5$,
显然有 $AB^2+AC^2=BC^2$,
根据勾股定理的逆定理得 $\triangle ABC$ 为直角三角形.
(2) **解:** $\triangle ABC$ 和$\triangle DEF$ 相似.
理由如下: 根据勾股定理, 得 $AB=2\sqrt{5}, AC=\sqrt{5}, BC=5, DE=4\sqrt{2}, DF=2\sqrt{2}, EF=2\sqrt{10}$.
$\therefore \frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}=\frac{BC}{EF}=\frac{\sqrt{10}}{4}$.
$\therefore \triangle ABC\backsim\triangle DEF$.
(3) **解:** 如图, 连结 P_1P_3, P_2P_4, P_1P_5, 则$\triangle P_1P_3P_5$ 符合要求.



(第 13 题)

第 5 课时　相似三角形判定定理的应用

1. (1)75;4$\sqrt{3}$　**点拨:** $\because BD/\!/AC$,
$\therefore \angle ADB=\angle DAC=75°$.
$\because \angle BOD=\angle COA$,
$\therefore \triangle BOD\sim\triangle COA$.
$\therefore \frac{OD}{OA}=\frac{OB}{OC}=\frac{1}{3}$.
又$\because AO=3\sqrt{3}$,
$\therefore OD=\frac{1}{3}AO=\sqrt{3}$.
$\therefore AD=AO+OD=4\sqrt{3}$.
$\because \angle BAD=30°, \angle ADB=75°$,
$\therefore \angle ABD=180°-\angle BAD-\angle ADB=75°=\angle ADB$.
$\therefore AB=AD=4\sqrt{3}$.
(2) **解:** 过点 B 作 $BE/\!/AD$ 交 AC 于点 E, 如图所示.



(第 1 题)

$\because AC\perp AD, BE/\!/AD$,
$\therefore \angle DAC=\angle BEA=90°$.
$\because \angle AOD=\angle EOB$,
$\therefore \triangle AOD\sim\triangle EOB$,
$\therefore \frac{BO}{DO}=\frac{EO}{AO}=\frac{BE}{DA}$.
$\because BO:OD=1:3$,
$\therefore \frac{EO}{AO}=\frac{BE}{DA}=\frac{1}{3}$.
$\therefore AO=3\sqrt{3}$,
$\therefore EO=\sqrt{3}$,
$\therefore AE=4\sqrt{3}$.
$\because \angle ABC=\angle ACB=75°$,
$\therefore \angle BAC=30°, AB=AC$,
$\therefore AB=2BE$.
在 Rt$\triangle AEB$ 中, $AE^2+BE^2=AB^2$, 即$(4\sqrt{3})^2+BE^2=(2BE)^2$, 解得 $BE=4$(负值舍去).
$\therefore AB=AC=8, AD=12$,
在 Rt$\triangle CAD$ 中, $AC^2+AD^2=CD^2$, 即$8^2+12^2=CD^2$,
解得 $CD=4\sqrt{13}$(负值舍去).

2. (1) **证明:** $\because$ 点 D 与点 F 关于直线 AE 对称,
$\therefore AD=AF, \angle DAE=\angle FAE=\alpha$.
$\because \angle DAF=2\alpha=\angle BAC$.
$\therefore AB=AC, AD=AF$,
$\therefore \frac{AD}{AB}=\frac{AF}{AC}$.
$\therefore \triangle ADF\sim\triangle ABC$.
(2) **证明:** $\because \angle DAF=2\alpha=\angle BAC$,
$\therefore \angle DAF-\angle DAC=\angle BAC-\angle DAC$,
即$\angle BAD=\angle CAF$.
又$\because AB=AC, AD=AF$,
$\therefore \triangle BAD\cong\triangle CAF$.
$\therefore BD=CF, \angle ACF=\angle ABD$.
$\because \angle BAC=2\alpha=2\times45°=90°$,
$AB=AC$,
$\therefore \angle ABD=\angle ACB=45°$.
$\therefore \angle ACF=45°$.
$\therefore \angle ECF=\angle ACB+\angle ACF=90°$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

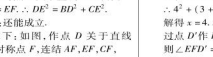
$\therefore EF^2 = CF^2 + CE^2$.

$\because$ 点 D 与点 F 关于直线 AE 对称，

$\therefore DE = EF$. $\therefore DE^2 = BD^2 + CE^2$.

(3)**解**：还能成立.

理由如下：如图，作点 D 关于直线 AE 的对称点 F，连结 AF，EF，CF，



（第 2 题）

$\therefore AD = AF$，$DE = EF$，

$\angle FAE = \angle DAE = \alpha$.

$\therefore \angle DAF = 2\alpha = \angle BAC$.

$\therefore \angle DAF - \angle DAC = \angle BAC - \angle DAC$，即 $\angle CAF = \angle BAD$.

又 $\because AB = AC$，$AD = AF$，

$\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAF$.

$\therefore BD = CF$，$\angle ACF = \angle ABD$.

$\because \angle BAC = 2\alpha = 2 \times 45° = 90°$，$AB = AC$，

$\therefore \angle ABD = \angle ACB = 45°$.

$\therefore \angle ACF = 45°$.

$\therefore \angle ECF = 180° - \angle ACB - \angle ACF = 90°$.

$\therefore EF^2 = CF^2 + CE^2$.

$\therefore EF = DE$，$CF = BD$，

$\therefore DE^2 = BD^2 + CE^2$.

3. **证明**：(1) 在 $\triangle ACB$ 中，$AB = 3\sqrt{5}$，$BC = 6$，$AC = 3$；

在 $\triangle DCE$ 中，$DE = 2\sqrt{5}$，

$EC = 4$，$DC = 2$；

$\therefore \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EC} = \dfrac{AC}{DC} = \dfrac{3}{2}$.

$\therefore \triangle ACB \backsim \triangle DCE$.

(2)$\because \triangle ACB \backsim \triangle DCE$，

$\therefore \angle ABC = \angle DEC$.

又 $\because \angle ABC + \angle BAC = 90°$，

$\therefore \angle DEC + \angle BAC = 90°$.

$\therefore \angle EFA = 90°$. $\therefore EF \perp AB$.

4. **解**：(1) 矩形（答案不唯一）.

(2) $AC = BD$. 理由如下：

如图①，连结 PD，PC.

$\because PE$ 是 AD 的中垂线，PF 是 BC 的中垂线，

$\therefore PA = PD$，$PC = PB$.

$\therefore \angle PAD = \angle PDA$，$\angle PBC = \angle PCB$.

$\because \angle DPB = 2\angle PAD$，

$\angle APC = 2\angle PBC$，

而 $\angle PAD + \angle PBC = 90°$，

$\therefore \angle APC + \angle DPB = 180°$，

$\therefore \triangle APC \cong \triangle DPB$.

$\therefore AC = BD$.

(3)（ⅰ）如图②，当 $\angle AD'B = \angle D'BC$ 时，延长 AD'，CB 交于 E，则 $\angle ED'B = \angle EBD'$. $\therefore EB = ED'$.

设 $EB = ED' = x$.

（第 4 题）

阶段核心归类

1. (1)**证明**：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore OA = OC$，$AB \parallel CD$，$BC = AD$.

$\therefore \angle OAE = \angle OCF$.

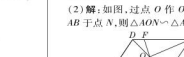
在 $\triangle AOE$ 和 $\triangle COF$ 中，

$$\begin{cases} \angle OAE = \angle OCF, \\ OA = OC, \\ \angle AOE = \angle COF, \end{cases}$$

$\therefore \triangle AOE \cong \triangle COF$.

$\therefore OE = OF$.

(2)**解**：如图，过点 O 作 $ON \perp BC$ 交 AB 于点 N，则 $\triangle AON \backsim \triangle ACB$.



（第 1 题）

$\because OA = OC$，

$\therefore ON = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{1}{2}AD = 2$，

$BN = \dfrac{1}{2}AB = 3$.

$\because ON \perp BC$，$\therefore \angle ONE = \angle MBE$.

又 $\because \angle OEN = \angle MEB$，

$\therefore \triangle ONE \backsim \triangle MBE$.

$\therefore \dfrac{ON}{BM} = \dfrac{NE}{BE}$，即 $\dfrac{2}{1} = \dfrac{3 - BE}{BE}$.

解得 $BE = 1$.

2. **解**：相似. 理由如下：$\because \dfrac{EO}{BO} = \dfrac{DO}{CO}$，

$\angle BOE = \angle COD$，$\angle DOE = \angle COB$，

$\therefore \triangle BOE \backsim \triangle COD$，$\triangle DOE \backsim \triangle COB$.

$\therefore \angle EBO = \angle DCO$，$\angle DEO = \angle CBO$.

$\because \angle ADE = \angle DCO + \angle DEO$，$\angle ABC = \angle EBO + \angle CBO$，

$\therefore \angle ADE = \angle ABC$.

又 $\because \angle A = \angle A$，

$\therefore \triangle ADE \backsim \triangle ABC$.

3. **证明**：$\because \angle BAC = 90°$，$AD \perp BC$，

$\therefore \angle BAC = \angle ADB = 90°$.

又 $\because \angle CBA = \angle ABD$（公共角），

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle DBA$.

$\therefore \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{DB}{DA}$，$\angle BAD = \angle C$.

$\because AD \perp BC$，E 为 AC 的中点，

$\therefore DE = EC$.

$\therefore \angle BDF = \angle CDE = \angle C$.

$\therefore \angle BDF = \angle BAD$.

又 $\because \angle F = \angle F$，

$\therefore \triangle DBF \backsim \triangle ADF$.

$\therefore \dfrac{DB}{AD} = \dfrac{DF}{AF}$. $\therefore \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{DF}{AF}$.

点拨：当所证等积式或比例式运用“三点定型法”不能定型或能定型而不相似，条件又不具备成比例线段

（第 3 题）

时，可考虑用中间比“搭桥”，称为“等比替换法”，有时还可用“等积替换法”. 例如：如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AD \perp BC$ 于点 D，$DE \perp AB$ 于点 E，$DF \perp AC$ 于点 F，求证：$AE \cdot AB = AF \cdot AC$. 可由两组“射影图”得 $AE \cdot AB = AD^2$，$AF \cdot AC = AD^2$，$\therefore AE \cdot AB = AF \cdot AC$.

4. **证明**：(1)$\because \angle DAB = \angle EAC$，

$\therefore \angle DAE = \angle BAC$.

又 $\because \angle ADE = \angle ABC$，

$\therefore \triangle ADE \backsim \triangle ABC$.

(2)$\because \triangle ADE \backsim \triangle ABC$，$\therefore \dfrac{AD}{AE} = \dfrac{AB}{AC}$.

$\therefore \angle DAB = \angle EAC$，

$\therefore \triangle ADB \backsim \triangle AEC$. $\therefore \dfrac{AD}{AE} = \dfrac{BD}{CE}$.

5. (1)**证明**：$\because \angle A = \angle B = \angle DEC = 90°$，

$\therefore \angle DEA + \angle CEB = 90°$，$\angle DEA + \angle D = 90°$，$\therefore \angle D = \angle CEB$，

$\therefore \triangle ADE \backsim \triangle BEC$.

(2)**解**：同意，选择图②（或图③）说明理由：

$\because \angle A = \angle B = \angle DEC$，$\angle A + \angle D = \angle DEC + \angle CEB$，

$\therefore \angle D = \angle CEB$，$\therefore \triangle ADE \backsim \triangle BEC$.

第 6 课时　相似三角形的性质

1. A　**2**. C　**3**. A　**4**. B　**5**. C　**6**. A

7. D

8. C　**点拨**：$\because \angle CAD = \angle B$，$\angle ACD = \angle BCA$，

$\therefore \triangle ACD \backsim \triangle BCA$.

$\therefore \dfrac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle BCA}} = \left(\dfrac{AC}{BC}\right)^2$，即 $\dfrac{a}{S_{\triangle BCA}} = \dfrac{1}{4}$，

则 $S_{\triangle BCA} = 4a$.

$\because S_{\triangle ABD} = S_{\triangle BCA} - S_{\triangle ACD} = 4a - a = 3a$.

9. C

10. B　**点拨**：$\because$ 在 $\square ABCD$ 中，$\angle BAD = \angle BCD = 60°$，$\therefore \angle ADC = 120°$.

$\because DF$ 平分 $\angle ADC$，

$\therefore \angle CDE = \angle ADE = \angle DAE = 60° = \angle AED$，

$\therefore \triangle ADE$ 是等边三角形，

$\therefore AD = AE = DE$. $\because AD = \dfrac{1}{2}AB$，

$\therefore AE = \dfrac{1}{2}AB = BE$，

$\therefore DE = BE$，$\therefore \angle BDE = \angle DBE$，

$\therefore \angle BDE = \dfrac{1}{2}\angle AED = 30°$，

$\therefore \angle ADB = 90°$，即 $AD \perp BD$，

$\because S_{\square ABCD} = AD \cdot BD$，故①正确.

$\because \angle CDE = 60°$，$\angle BDE = 30°$，

$\therefore \angle CDB = \angle BDE = 30°$.

$\therefore DB$ 平分 $\angle CDE$，故②正确；

$\therefore$ 在 Rt$\triangle AOD$ 中，$AO > AD$，

$\therefore AO > DE$，故③错误.

$\because O$ 是 BD 的中点，E 是 AB 的中点，

$\therefore OB : DB = EB : AB = 1 : 2$.

又 $\because \angle OBE = \angle DBA$，

$\therefore \triangle BEO \backsim \triangle BAD$，

$\therefore \dfrac{S_{\triangle BEO}}{S_{\triangle BAD}} = \left(\dfrac{BE}{BA}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$.

$\because S_{\triangle BAD} = \dfrac{1}{2}S_{\square ABCD}$，

$\therefore \dfrac{S_{\triangle BEO}}{S_{\square ABCD}} = \dfrac{1}{8}$，故④正确. 故选 B.

11. D　**点拨**：如图所示.



（第 11 题）

根据题意得 $\triangle AFH \backsim \triangle ADE$，

$\therefore \dfrac{S_{\triangle AFH}}{S_{\triangle ADE}} = \left(\dfrac{FH}{DE}\right)^2 = \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{9}{16}$.

设 $S_{\triangle AFH} = 9x$，则 $S_{\triangle ADE} = 16x$，

$\therefore 16x - 9x = 7$，解得 $x = 1$.

$\therefore S_{\triangle ADE} = 16$.

$\because$ 四边形 $DBCE$ 的面积为 $42 - 16 = 26$.

易错分析：本题易忽略三角形相似性质的适用条件而致错.

12. (1)**证明**：$\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形，

$\therefore BD$ 平分 $\angle ABC$.

$\therefore \angle ABC = 2\angle ABG$.

又 $\because \angle ABC = 2\angle BAM$，

$\therefore \angle BAG = \angle ABG$.

$\therefore AG = BG$.

(2)**解**：$\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形，

$\therefore AD \parallel BC$，$AD = BC$.

$\therefore \angle GAD = \angle GMB$.

又 $\because \angle AGM = \angle BGM$，

$\therefore \triangle BGM \backsim \triangle DGA$.

$\because M$ 为 BC 的中点，

$\therefore BM = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{1}{2}AD$.

即 $\triangle BGM$ 与 $\triangle DGA$ 的相似比为 1∶2，

$\therefore S_{\triangle BGM} : S_{\triangle ADG} = 1 : 4$.

$\therefore S_{\triangle BGM} = 1$.

$\therefore S_{\triangle ADG} = 4$.

13. (1)**解**：如图①所示.

(2)**证明**：如图②所示.





（第 13 题）

$\because D$，E，F 分别是 $\triangle ABC$ 三边 AB，BC，AC 的中点，

$\therefore DE = \dfrac{1}{2}AC$，$DF = \dfrac{1}{2}BC$，$EF = \dfrac{1}{2}AB$.

$\therefore \triangle DEF \backsim \triangle CAB$.

同理，$\triangle D'E'F' \backsim \triangle C'A'B'$.

由(1)可知 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，

$\therefore \triangle DEF \backsim \triangle D'E'F'$.

14. **解**：

问题 1：

(1)$\dfrac{3}{16}$　**点拨**：$\because AB = 4$，$AD = 3$，

$\therefore BD = 4 - 3 = 1$.

$\because DE \parallel BC$，$\therefore \dfrac{CE}{EA} = \dfrac{BD}{AD} = \dfrac{1}{3}$，

$\therefore \dfrac{S_{\triangle DEC}}{S_{\triangle ADC}} = \dfrac{EC}{AC} = \dfrac{1}{3}$.

$\because DE \parallel BC$，$\therefore \angle ADE = \angle B$.

又 $\because \angle A = \angle A$，

$\therefore \triangle ADE \backsim \triangle ABC$，

$\therefore \dfrac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\dfrac{AD}{AB}\right)^2 = \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{9}{16}$，

$\therefore \dfrac{S_{\triangle DEC}}{S_{\triangle ABC}} = \dfrac{3}{16}$，

即 $\dfrac{S'}{S} = \dfrac{3}{16}$.

(2)方法一：$\because AB = 4$，$AD = m$，

$\therefore BD = 4 - m$.

$\because DE \parallel BC$，

$\therefore \dfrac{CE}{EA} = \dfrac{BD}{AD} = \dfrac{4-m}{m}$，

$\therefore \dfrac{S_{\triangle DEC}}{S_{\triangle ADE}} = \dfrac{CE}{AE} = \dfrac{4-m}{m}$.

$\because \triangle ADE \backsim \triangle ABC$，

$\therefore \dfrac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\dfrac{AD}{AB}\right)^2 = \left(\dfrac{m}{4}\right)^2 = \dfrac{m^2}{16}$，

$\therefore \dfrac{S_{\triangle DEC}}{S_{\triangle ABC}} = \dfrac{S_{\triangle DEC}}{S_{\triangle ADE}} \cdot \dfrac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \dfrac{4-m}{m}$，

$\dfrac{m^2}{16} = \dfrac{-m^2+4m}{16}$，

即 $\dfrac{S'}{S} = \dfrac{-m^2+4m}{16}$.

方法二：如图①，过点 B 作 $BH \perp AC$ 于 H，过点 D 作 $DF \perp AC$ 于 F，则 $\angle DFA = \angle BHA = 90°$.



$\therefore \angle A = \angle A$，

$\therefore \triangle ADF \backsim \triangle ABH$，

$\therefore \dfrac{DF}{BH} = \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{m}{4}$.

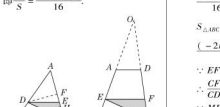
$\therefore DF \parallel BC$，

$\therefore \dfrac{CE}{AC} = \dfrac{BD}{AB} = \dfrac{4-m}{4}$，

$\therefore \dfrac{S_{\triangle DEC}}{S_{\triangle ABC}} = \dfrac{\frac{1}{2}CE \cdot DF}{\frac{1}{2}CA \cdot BH} = \dfrac{4-m}{4} \times \dfrac{m}{4} = \dfrac{-m^2+4m}{16}$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

即$\frac{S'}{S}=\frac{-n^2+4m}{16}$.



①　②　③

（第 14 题）

问题 2：

方法一：如图②，分别延长 BA，CD 交于点 O，

$\because AD/\!/BC$，$\therefore \angle OAD=\angle B$.

$\because \angle O=\angle O$，

$\therefore \triangle OAD\backsim\triangle OBC$，

$\therefore \frac{OA}{OB}=\frac{AD}{BC}=\frac{1}{2}$.

$\because OA=AB=4$，

$\therefore OB=8$.

$\because AE=n$，

$\therefore OE=4+n$.

$\because EF/\!/BC$，

$\therefore$ 由问题 1 的解法可知 $\frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle OBC}}=\frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle OEF}}\cdot\frac{S_{\triangle OEF}}{S_{\triangle OBC}}=\frac{4-n}{4+n}\times\left(\frac{4+n}{8}\right)^2=\frac{16-n^2}{64}$.

$\therefore \frac{S_{\triangle OAD}}{S_{\triangle OBC}}=\left(\frac{OA}{OB}\right)^2=\frac{1}{4}$，

$\therefore \frac{S_{四边形ABCD}}{S_{\triangle OBC}}=\frac{3}{4}$.

$\therefore \frac{S_{\triangle CEF}}{S_{四边形ABCD}}=\frac{S_{\triangle CEF}}{\frac{3}{4}S_{\triangle OBC}}=\frac{4}{3}\times\frac{16-n^2}{64}=\frac{16-n^2}{48}$，即$\frac{S'}{S}=\frac{16-n^2}{48}$.

方法二：如图③，连结 AC 交 EF 于 M，

$\because AD/\!/BC$，且 $AD=\frac{1}{2}BC$，

$\therefore \frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{1}{2}$，

$\therefore S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$，

$\therefore S_{\triangle ADC}=\frac{1}{3}S$，$S_{\triangle ABC}=\frac{2}{3}S$.

由问题 1 的结论可知 $\frac{S_{\triangle EMC}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{-n^2+4n}{16}$，$\therefore S_{\triangle EMC}=\frac{-n^2+4n}{16}$.

$S_{\triangle ABC}=\frac{-n^2+4n}{16}\cdot\frac{2}{3}S=\frac{(-2n^2+8n)S}{48}$.

$\because EF/\!/BC$，

$\therefore \frac{CF}{CD}=\frac{BE}{AB}=\frac{4-n}{4}$.

$\because MF/\!/AD$，$\therefore \angle CFM=\angle D$.

又$\because \angle MCF=\angle ACD$，

$\therefore \triangle CFM\backsim\triangle CDA$，

$\therefore \frac{S_{\triangle CFM}}{S_{\triangle CDA}}=\left(\frac{CF}{CD}\right)^2=\left(\frac{4-n}{4}\right)^2$.

又$\because \frac{S_{\triangle CFM}}{S_{\triangle CDA}}=\frac{S_{\triangle CFM}}{\frac{1}{3}S}=\frac{3S_{\triangle CFM}}{S}$，

$\therefore \frac{3S_{\triangle CFM}}{S}=\left(\frac{4-n}{4}\right)^2$，

$\therefore S_{\triangle CFM}=\frac{(4-n)^2S}{48}$，

$\therefore S_{\triangle EFC}=S_{\triangle EMC}+S_{\triangle CFM}=\frac{(-2n^2+8n)S}{48}+\frac{(4-n)^2S}{48}=\frac{(16-n^2)S}{48}$，

$\therefore \frac{S'}{S}=\frac{16-n^2}{48}$.

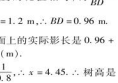
第 7 课时　相似三角形的应用

1. B

2. C　**点拨**：如图，设 BD 是 BC 在地面上的影子，设树高为 x m. 根据竹竿的高与其影子长度的比值和树高与其影子长度的比值相等，得 $\frac{CB}{BD}=\frac{1}{0.8}$，而 $CB=1.2$ m，$\therefore BD=0.96$ m.

$\therefore$ 树在地面上的实际影长是 $0.96+2.6=3.56$(m).

则 $\frac{x}{3.56}=\frac{1}{0.8}$，$\therefore x=4.45$. $\therefore$ 树高是 4.45 m.



（第 2 题）

3. 5.5　**点拨**：根据“两角对应相等的两个三角形相似”，可知 $\triangle EDF\backsim\triangle CDB$，则 $\frac{BC}{EF}=\frac{CD}{DE}$，即 $\frac{AB-1.5}{0.2}=\frac{8}{0.4}$，$\therefore AB=5.5$ m.

4. B　**5**. C　**6**. 8 m

7. A　**点拨**：由题意知 $\angle AGC=\angle FGE$，

$\because \angle ACG=\angle FEG=90°$，

$\therefore \triangle ACG\backsim\triangle FEG$.

$\therefore \frac{AC}{FE}=\frac{CG}{EG}$. $\therefore \frac{AC}{1.6}=\frac{15}{3}$.

$\therefore AC=8$ m.

$\therefore AB=AC+BC=8+0.5=8.5$(m).

8. **解**：设 $OE=x$ m，$OA=a$ m，$BC=b$ m，则 $AB=(2-b)$ m，$CD=(2.1-b)$ m，$CO=(2+a)$ m.

$\because \angle FAB=\angle EAO$，$\angle FBA=\angle EOA=90°$，

$\therefore \triangle AFB\backsim\triangle AEO$，

$\therefore \frac{BF}{OE}=\frac{AB}{OA}$，即 $\frac{1.6}{x}=\frac{2-b}{a}$；①

$\because \angle GCD=\angle ECO$，$\angle GDC=\angle EOC=90°$，

$\therefore \triangle CDG\backsim\triangle COE$，

$\therefore \frac{DG}{OE}=\frac{CD}{CO}$，即 $\frac{1.6}{x}=\frac{2.1-b}{2+a}$. ②

由①②得 $a=20(2-b)$. ③

将③代入①，得 $\frac{1.6}{x}=\frac{2-b}{20(2-b)}$，

解得 $x=32$. 即 $OE=32$ m.

答：楼的高度 OE 为 32 m.

9. **解**：(1) 设敏敏的影长为 x cm.

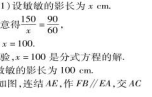
由题意得 $\frac{150}{x}=\frac{90}{60}$，

解得 $x=100$.

经检验，$x=100$ 是分式方程的解.

答：敏敏的影长为 100 cm.

(2) 如图，连结 AE，作 $FB/\!/EA$，交 AC 于 B.



（第 9 题）

$\because AB/\!/EF$，

$\therefore$ 四边形 $ABFE$ 是平行四边形.

$\therefore AB=EF=150$ cm.

设 $BC=y$ cm，由题意知 BC 的影子落在地面上且影长为 120 cm，

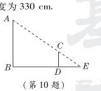
$\therefore \frac{y}{120}=\frac{90}{60}$.

解得 $y=180$.

$\therefore AC=AB+BC=150+180=330$(cm).

答：高圆柱的高度为 330 cm.

10. **解**：(1) 如图，沿着旗杆的影子竖立标杆，使标杆影子的顶端正好与旗杆影子的顶端重合.



（第 10 题）

(2) 用皮尺测量旗杆的影长 $BE=a$ m，标杆 CD 的影长 $DE=b$ m，标杆高 $CD=c$ m.

根据 $\triangle EDC\backsim\triangle EBA$，得 $\frac{CD}{AB}=\frac{ED}{EB}$，

即 $\frac{c}{AB}=\frac{b}{a}$，所以 $AB=\frac{ac}{b}$ m，

即旗杆 AB 的高为 $\frac{ac}{b}$ m.

（设计方案不唯一）

11. **解**：由题意得 $\angle CAD=\angle MND=90°$，$\angle CDA=\angle MDN$，

$\therefore \triangle CAD\backsim\triangle MND$. $\therefore \frac{CA}{MN}=\frac{AD}{ND}$，

$\therefore \frac{1.6}{MN}=\frac{1\times0.8}{(5+1)\times0.8}$，

$\therefore MN=9.6$ m.

又$\because EBF=\angle MNF=90°$，$\angle EFB=\angle MFN$，

$\therefore \triangle EFB\backsim\triangle MFN$. $\therefore \frac{EB}{MN}=\frac{BF}{NF}$，

$\therefore \frac{EB}{9.6}=\frac{2\times0.8}{(2+1)\times0.8}$，

$\therefore EB=1.75$ m.

$\therefore$ 小军的身高 BE 约为 1.75 m.

23.4　中位线

1. D　**2**. B

3. A　**点拨**：$\because BD\perp CD$，$BD=4$，$CD=3$，

$\therefore BC=\sqrt{BD^2+CD^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$.

$\because E$，F，G，H 分别是 AB，BD，CD，AC 的中点，

$\therefore EH=FG=\frac{1}{2}BC$，$EF=GH=\frac{1}{2}AD$.

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 的周长 $=EF+GH+FG+EH=AD+BC$.

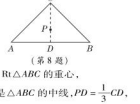
又$\because AD=7$，

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 的周长 $=7+5=12$.

4. B　**5**. 16

6. D　**7**. A

8. A　**点拨**：如图，连结 CP 并延长，交 AB 于 D，



（第 8 题）

$\because P$ 是 Rt$\triangle ABC$ 的重心，

$\therefore CD$ 是 $\triangle ABC$ 的中线，$PD=\frac{1}{3}CD$，

$\therefore AD=BD=\frac{1}{2}AB=3$.

$\because \angle ACB=90°$，$AC=BC$，

$\therefore CD\perp AB$，$\angle A=\angle ACD=45°$，

$\therefore CD=AD=3$.

$\therefore PD=1$，即点 P 到 AB 所在直线的距离等于 1，故选 A.

9. 3　**点拨**：$\because AC+BD=24$ cm，$OA=OC$，$OB=OD$，E，F 分别是线段 AO，OB 的中点，$\therefore OE+OF=6$ cm.

$\because \triangle OAB$ 的周长是 18 cm，$\therefore$ 根据中位线定理，可知 $\triangle OEF$ 的周长是 9 cm，$\therefore EF=3$ cm. 本题易忽视运用整体思想而求不出中位线的长.

10. (1) **证明**：$\because D$，E，F 分别是 AB，BC，AC 的中点，$\therefore DF/\!/BC$，$EF/\!/AB$.

$\therefore$ 四边形 $BEFD$ 是平行四边形.

(2) **解**：$\because \angle AFB=90°$，

$\therefore BF\perp AC$. $\because F$ 为 AC 的中点，

$\therefore AB=BC$.

$\because D$，E 分别为 AB，BC 的中点，$AB=6$，$\therefore BD=BE=3$.

$\therefore$ 四边形 $BEFD$ 是平行四边形.

$\therefore$ 四边形 $BEFD$ 是菱形.

$\therefore$ 四边形 $BEFD$ 的周长为 $3\times4=12$.

11. **解**：$AB/\!/OF$，$OF=\frac{1}{2}AB$.

证明：如图，连结 BE，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore OA=OC$，$AB=DC$，$AB/\!/DE$，

又$\because CE=DC$，

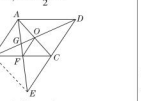
$\therefore AB=CE$.

$\therefore$ 四边形 $ABEC$ 是平行四边形.

$\therefore BF=CF$.

$\therefore OF$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线.

$\therefore AB/\!/OF$，$OF=\frac{1}{2}AB$.



（第 11 题）

12. **证明**：如图，连结 AC，取 AC 的中点 M，连结 HM，GM.



（第 12 题）

$\because H$ 是 AD 的中点，M 是 AC 的中点，$\therefore HM$ 是 $\triangle ADC$ 的中位线.

$\therefore HM/\!/CD$，$HM=\frac{1}{2}CD$.

$\therefore \angle MHG=\angle F$.

同理，$GM/\!/AB$，$GM=\frac{1}{2}AB$.

$\therefore \angle MGH=\angle AEH$.

又$\because AB=CD$，

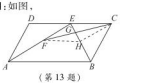
$\therefore GM=HM$.

$\therefore \angle MGH=\angle MHG$.

$\therefore \angle AEH=\angle F$.

点拨：当几个中点不是一个三角形的各边中点时，可设法再取一个中点，使它与已知中点相连能构成三角形的中位线. 此题中 H，G 分别是四边形 $ABCD$ 两条对边的中点，这时需连结对角线，将四边形转化为两个三角形，再取对角线中点，与已知中点相连，就会产生三角形的中位线，使问题迎刃而解.

13. **证明**：如图，



（第 13 题）

取 BE 的中点 H，连结 FH，CH.

$\because F$ 是 AE 的中点，H 是 BE 的中点，

$\therefore FH$ 是 $\triangle ABE$ 的中位线.

$\therefore FH/\!/AB$ 且 $FH=\frac{1}{2}AB$.

在$\square ABCD$ 中，$AB/\!/DC$，$AB=DC$.

又$\because$ 点 E 是 DC 的中点，

$\therefore EC=\frac{1}{2}DC=\frac{1}{2}AB$，

$\therefore FH=EC$.

又$\because AB/\!/DC$，$FH/\!/AB$，

$\therefore FH/\!/EC$，

$\therefore$ 四边形 $EFHC$ 是平行四边形.

$\therefore GF=GC$.

23.5　位似图形

1. D　**2**. D　**3**. C

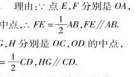
4. $\frac{2}{5}$

5. C　**6**. C　**7**. D

8. C　**点拨**：$\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的周长比为 2∶1.

9. **解**：如图.

易错总结：此题易忽略其中一种情况，当题中对位似图形的位置没有限制时，一定要考虑全面.



（第 9 题）

10. **解**：是　理由：$\because$ 点 E，F 分别是 OA，OB 的中点，$\therefore FE=\frac{1}{2}AB$，$FE/\!/AB$.

$\therefore$ 点 G，H 分别是 OC，OD 的中点，

$\therefore HG=\frac{1}{2}CD$，$HG/\!/CD$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AB=CD$，$AB/\!/CD$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore EF=HG, FE/\!/HG$.

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

$\because FE/\!/AB, \therefore \angle OEF=\angle OAB$.

同理 $\angle OEH=\angle OAD$,

$\therefore \angle HEF=\angle DAB$,

同理 $\angle EFG=\angle ABC$,

$\angle FGH=\angle BCD, \angle GHE=\angle CDA$.

又易得 $\frac{EF}{AB}=\frac{FG}{BC}=\frac{GH}{CD}=\frac{HE}{AD}=\frac{1}{2}$,

$\therefore \square EFGH\sim\square ABCD$.

又∵ 它们的对应顶点的连线相交于点 O,

$\therefore \square ABCD$ 与四边形 $EFGH$ 是位似图形, O 为位似中心.

11. 证明: ∵ $\triangle DEO$ 与 $\triangle ABO$ 是位似图形,

$\therefore \frac{OD}{OA}=\frac{OE}{OB}$

∵ $\triangle OEF$ 与 $\triangle OBC$ 是位似图形,

$\therefore \frac{OE}{OB}=\frac{OF}{OC}$

$\therefore \frac{OD}{OA}=\frac{OF}{OC}$, 即 $OD\cdot OC=OF\cdot OA$.

12. 解: (1) $\triangle ABC$ 与 $\triangle FGC$ 是位似图形, 位似中心是点 C.

在矩形 $ABCD$ 中, $AD/\!/BC$,

$\therefore \triangle AFD\sim\triangle CFE$. $\therefore \frac{CF}{AF}=\frac{CE}{AD}$

又∵ $AD=BC$, $\therefore \frac{CF}{AF}=\frac{CE}{BC}$

∵ $\angle ABC=90^\circ$, $OE\perp BC$,

∴ $OE/\!/AB$.

又∵ $OA=OC$, $\therefore CE=\frac{1}{2}BC$,

$\therefore \frac{CF}{AF}=\frac{1}{2}$.

$\therefore \frac{CF}{AC}=\frac{1}{3}$, 即 $\triangle ABC$ 与 $\triangle FGC$ 的相似比为 3∶1.

(2) $CE:BC=1:4$.

13. 解: (1) 如图所示, 线段 A_1B_1 即为所求;

(2) 如图所示, 线段 A_2B_1 即为所求;



(第 13 题)

(3) 20

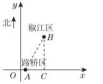
23.6 图形与坐标

第 1 课时 用坐标确定位置

1. (3,0)

2. B **点拨:** 根据表示太和门的点的坐标为 $(0,-1)$, 表示九龙壁的点的坐标为 $(4,1)$, 从而可确定出中和殿的位置为坐标原点, 然后进行判断即可.

3. $(10,8\sqrt{3})$ **点拨:** 如图, 连结 AB, 作 $BC\perp x$ 轴于 C 点, 由题意, 得 $AB=16$ km, $\angle ABC=30^\circ$, 则 $AC=8$ km, $BC=8\sqrt{3}$ km. 故 $OC=OA+AC=10$ km, 所以 $B(10,8\sqrt{3})$.



(第 3 题)

4. D **5.** D

6. C **点拨:** ∵ 点 A 的坐标为 $(0,a)$,

∴ 点 A 在该平面直角坐标系的 y 轴上

∵ 点 C,D 的坐标为 $(b,m),(c,m)$,

∴ 点 C,D 关于 y 轴对称.

∵ 正五边形 $ABCDE$ 是轴对称图形,

∴ 该平面直角坐标系的 y 轴是正五边形 $ABCDE$ 的一条对称轴,

∴ 点 B,E 也关于 y 轴对称.

∵ 点 B 的坐标为 $(-3,2)$,

∴ 点 E 的坐标为 $(3,2)$. 故选 C.

7. A **点拨:** 本题易因不能准确地确定原点而出现错误.

8. 解: (1) 平平所建立的平面直角坐标系如图所示.

(2) 慢羊羊所在位置的坐标是 $(-1,-1)$, 沸羊羊所在位置的坐标是 $(0,2)$.

(3) 美羊羊和灰太狼的位置如图所示.



(第 8 题)

9. 解: (1) 学校和公园.

(2) 商场: 北偏西 30°; 学校: 北偏东 45°; 公园和停车场都是南偏东 60°. 公园与停车场的方位相同.

(3) 商场距离小明家 500 m, 停车场距离小明家 800 m.

10. 解: (1) 答案不唯一. 若以海底世界为原点, 水平向右方向为 x 轴的正方向, 竖直向上方向为 y 轴的正方向, 一个方格的边长为一个单位长度, 则人口处 $(4,-1)$, 童趣花园 $(4,2)$, 梦幻艺馆 $(1,3)$, 球幕电影 $(2,-4)$, 激光战车 $(-2,-3)$, 太空秩千 $(-4,1)$, 海底世界 $(0,0)$.

(2) 海底世界位于人口处偏西约 76°方向上, 在同一方向上还有太空秋千.

(3) 球幕电影到入口处的图上距离约为 1.2 cm, 实际距离约为 $1.2\div\frac{1}{10\,000}=12\,000(\text{cm})=120(\text{m})$.

11. 解: (1) 点 B 在点 A 的右边时, $-1+3=2$, 点 B 在点 A 的左边时, $-1-3=-4$, 所以点 B 的坐标为 $(2,0)$ 或 $(-4,0)$.

(2) $\triangle ABC$ 的面积 $=\frac{1}{2}\times3\times4=6$.

(3) 存在.

设点 P 到 x 轴的距离为 h,

则 $\frac{1}{2}\times3h=10$,

解得 $h=\frac{20}{3}$,

点 P 在 y 轴正半轴时, $P\left(0,\frac{20}{3}\right)$,

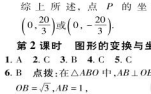
点 P 在 y 轴负半轴时, $P\left(0,-\frac{20}{3}\right)$.

综上所述, 点 P 的坐标为 $\left(0,\frac{20}{3}\right)$ 或 $\left(0,-\frac{20}{3}\right)$.

第 2 课时 图形的变换与坐标

1. A **2.** C **3.** B **4.** C **5.** C

6. B **点拨:** 在 $\triangle ABO$ 中, $AB\perp OB$, $OB=\sqrt{3}, AB=1$,



(第 6 题)

$\triangle ABO$ 绕点 O 顺时针旋转 90°后得到 $\triangle A_1B_1O$, 如图①, 则易求得 $A_1(1,-\sqrt{3})$;

$\triangle ABO$ 绕点 O 逆时针旋转 90°后得到 $\triangle A_1B_1O$, 如图②, 则易求得 $A_1(-1,\sqrt{3})$. 故选 B.

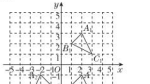
7. D **8.** A

9. $(-1,2)$ 或 $(1,-2)$ **点拨:** 在平面直角坐标系中, 如果以坐标原点为位似中心, 相似比为 k, 那么位似图形对应点的坐标的比等于 k 或 $-k$. 本题易忽略其中的一种情况.

10. B **点拨:** 本题易因考虑不全漏掉 $(-2m,-2n)$ 这一结果而致错.

11. 解: (1) 如图所示, $\triangle A_1B_1C_1$ 即为所求;

(2) 如图所示, $\triangle A_2B_2C_2$ 即为所求;

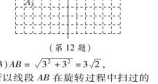


(第 11 题)

(3) $A_1(2,3), A_2(-2,-1)$.

12. 解: (1) 如图, $\triangle A_1B_1C_1$ 即为所求;

(2) 如图, $\triangle A_2BC_2$ 即为所求;

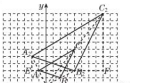


(第 12 题)

(3) $AB=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$,

所以线段 AB 在旋转过程中扫过的图形面积 $=\frac{1}{4}\pi\cdot(3\sqrt{2})^2=\frac{9}{2}\pi$.

13. 解: (1) 如图, $\triangle A_1B_1C_1$ 就是所求三角形.



(第 13 题)

(2) 如图, $\triangle A_2B_2C_2$ 就是所求三角形.

分别过点 A_2, C_2 作 y 轴的平行线, 过点 B_2 作 x 轴的平行线, 交点分别为 E,F.

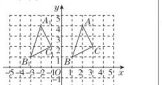
∵ $A(-1,2), B(2,1), C(4,5)$,

$\triangle A_2B_2C_2$ 与 $\triangle ABC$ 位似, 位似中心为点 O, 且相似比为 2,

$\therefore A_2(-2,4), B_2(4,2), C_2(8,10)$.

$\therefore S_{\triangle A_2B_2C_2}=\frac{1}{2}\times(2+8)\times10-\frac{1}{2}\times2\times6-\frac{1}{2}\times4\times8=28$.

14. 解: (1) 如图, $\triangle A_1B_1C_1$ 即为所求, $C_1(-1,2)$;



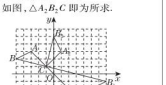
(第 14 题)

(2) 直线 l 的函数表达式为 $y=-x$.

第 3 课时 位似变换的四种常见题型

1. 解: (1) 如图, $\triangle A_1B_1C$ 即为所求, 点 A_1 的坐标为 $(3,-3)$.

(2) 如图, $\triangle A_2B_2C$ 即为所求.



(第 1 题)

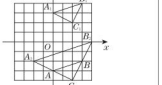
(3) $CB=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$,

点 B 经过的路径为 $\frac{1}{4}\times2\pi\times\sqrt{17}=\frac{\sqrt{17}}{2}\pi$.

2. 解: (1) 如图, $\triangle A_1B_1C_1$ 就是所要画的三角形.

(2) 如图, $\triangle A_2B_2C$ 就是所要画的三角形,

点 A_2 的坐标为 $(-2,-2)$.



(第 2 题)

3. 解: (1) 图略.

(2) 将点 $(0,4),(1,0),(2,4),(3,0),(4,4)$ 的横坐标保持不变, 纵坐标分别乘 -1, 得 $(0,-4),(1,0),(2,-4),(3,0),(4,-4)$, 然后描点连线, 图略.

(3) 将点 $(0,4),(1,0),(2,4),(3,0),(4,4)$ 的纵坐标保持不变, 横坐标分别乘 -1, 得 $(0,4),(-1,0),(-2,4),(-3,0),(-4,4)$, 然后描点连线, 图略.

(4) 图案①与图案②关于 x 轴对称, 图案①与图案③关于 y 轴对称.

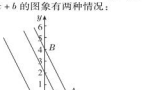
4. 解: (1) 由已知得 $k=-2$,

把点 $(3,1)$ 的坐标和 $k=-2$ 代入 $y=kx+b$,

得 $1=-2\times3+b$,

∴ $b=7$.

(2) 如图, 根据相似比为 1∶2 得函数 $y=kx+b$ 的图象有两种情况:



(第 4 题)

①不经过第三象限时, 过点 $(1,0)$ 和 $(0,2)$, 这时函数表达式为 $y=-2x+2$;

②不经过第一象限时, 过点 $(-1,0)$ 和 $(0,-2)$, 这时函数表达式为 $y=-2x-2$.

点拨: 本题考查了一次函数的应用, 根据数形结合思想利用待定系数法进行分类讨论, 即可求出函数表达式.

阶段核心归类

1. 证明: ∵ $EC'/\!/EC$,

∴ $\angle C'EO=\angle CEO$.

∵ $\angle COE=\angle C'OE'$,

∴ $\triangle OCE\sim\triangle OC'E'$.

$\therefore \frac{CE}{C'E'}=\frac{OE}{OE'}$

∵ $E'D'/\!/ED$,

∴ $\angle D'E'O=\angle DEO$.

∵ $\angle CED=\angle C'E'D'$,

∵ $\angle DOE=\angle D'OE'$,

∴ $\triangle DOE\sim\triangle D'OE'$.

$\therefore \frac{OE}{D'E'}=\frac{OE}{OE'}$.

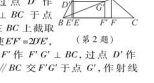
$\therefore \frac{CE}{C'E'}=\frac{DE}{D'E'}$

∴ $\triangle CDE\sim\triangle C'D'E'$.

∵ $\triangle CDE$ 是等边三角形,

∴ $\triangle C'D'E'$ 是等边三角形.

2. 解: 如图, 在 AB 边上任取一点 D', 过点 D' 作 $D'E'\perp BC$ 于点 E', 在 BC 上截取 EF', 使 $EF'=2D'E'$,



(第 2 题)

过点 F' 作 $F'G'\perp BC$, 过点 D' 作 $D'G'/\!/BC$ 交 $F'G'$ 于点 G', 作射线

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

BG'交AC于点G，过点G作$GF\parallel G'F'$，$DG\parallel D'G'$，GF交BC于点F，DG交AB于点D，过点D作$DE\parallel D'E'$交BC于点E，则四边形$DEFG$为$\triangle ABC$的内接矩形，且$DE:EF=1:2$.

3. 解：设符合要求的正方形$PQMN$的边PN与$\triangle ABC$的高AD相交于点E，易知AE为$\triangle APN$的边PN上的高.

设正方形$PQMN$的边长为x mm，

$\because PN\parallel BC$，

$\therefore \angle APN=\angle B$，$\angle ANP=\angle C$.

$\therefore \triangle APN\backsim\triangle ABC$.

$\therefore \dfrac{AE}{AD}=\dfrac{PN}{BC}$，

即$\dfrac{80-x}{80}=\dfrac{x}{120}$，解得$x=48$，

即这个正方形零件的边长是48 mm.

4. (1)证明：$\because DP\parallel BQ$，

$\therefore \angle ADP=\angle B$，$\angle APD=\angle AQB$.

$\therefore \triangle ADP\backsim\triangle ABQ$.

$\therefore \dfrac{DP}{BQ}=\dfrac{AP}{AQ}$.

同理$\triangle AEP\backsim\triangle ACQ$，

$\therefore \dfrac{PE}{QC}=\dfrac{AP}{AQ}$，$\therefore \dfrac{DP}{BQ}=\dfrac{PE}{QC}$.

(2)①解：$MN=\dfrac{\sqrt{2}}{9}$.

②证明：$\because \angle B+\angle C=90°$，$\angle CEF+\angle C=90°$，$\therefore \angle B=\angle CEF$.

又$\because \angle BGD=\angle EFC=90°$，

$\therefore \triangle BGD\backsim\triangle EFC$.

$\therefore \dfrac{DG}{CF}=\dfrac{BG}{EF}$，

$\therefore DG\cdot EF=CF\cdot BG$.

又$\because DG=GF=EF$，

$\therefore GF^2=CF\cdot BG$. 由(1)易得$\dfrac{DM}{BG}=\dfrac{MN}{GF}$，$\dfrac{MN}{CF}=\dfrac{EN}{CF}$，$\therefore \left(\dfrac{MN}{GF}\right)^2=\dfrac{DM}{BG}\cdot\dfrac{EN}{CF}$，

即$\dfrac{MN^2}{FG^2}=\dfrac{DM\cdot EN}{BG\cdot CF}$，$\therefore MN^2=DM\cdot EN$.

全章热门考点整合应用

1. C　**2.** 20 m

3. 解：四边形$ABCD$与四边形$A'B'C'D'$相似. 理由：由已知条件知，$\angle ADC=\angle A'D'C'$，$\angle C=\angle C'$，$\angle ABC=\angle A'B'C'$，$\angle A=\angle A'$，且$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{CD}{C'D'}=\dfrac{DA}{D'A'}=\dfrac{4}{3}$，所以四边形$ABCD$与四边形$A'B'C'D'$相似.

4. B

5. 解：(1)$\because DE\parallel BC$，

$\therefore \dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}$，

$\therefore \dfrac{8-2x}{8}=\dfrac{y}{6}$.

$\therefore y=-\dfrac{3}{2}x+6(0\leqslant x\leqslant 4)$.

(2)$\because S_{\triangle BME}=\dfrac{1}{2}\cdot 2x\cdot y$

$=\dfrac{1}{2}\cdot 2x\cdot\left(6-\dfrac{3}{2}x\right)$

$=-\dfrac{3}{2}(x-2)^2+6$，

且$-\dfrac{3}{2}(x-2)^2\leqslant 0$，

$\therefore -\dfrac{3}{2}(x-2)^2+6\leqslant 6$.

$\therefore$当$x=2$时，$S_{\triangle BME}$有最大值，最大值为6.

6. (1)证明：如图，$\because D$是BC边的中点，$DE\perp BC$，

$\therefore EB=EC$. $\therefore \angle B=\angle 1$.

又$\because AD=AC$，

$\therefore \angle ACB=\angle 2$.

$\therefore \triangle ABC\backsim\triangle FCD$.



(第6题)

(2)解：如图，过点A作$AM\perp CB$于点M.

$\because D$是BC边上的中点，$\therefore BC=2CD$.

由(1)知$\triangle ABC\backsim\triangle FCD$，

$\therefore \dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle FCD}}=\left(\dfrac{BC}{CD}\right)^2=\dfrac{4}{1}$.

又$\because S_{\triangle FCD}=5$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=20$.

$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}BC\cdot AM$，

$\therefore AM=\dfrac{2S_{\triangle ABC}}{BC}=\dfrac{2\times 20}{10}=4$.

$\because DE\perp BC$，$AM\perp BC$，

$\therefore \angle EDB=\angle AMB$.

又$\because \angle B=\angle B$，$\therefore \triangle BDE\backsim\triangle BMA$.

$\therefore \dfrac{DE}{AM}=\dfrac{BD}{BM}$.

由$AD=AC$，$AM\perp BC$，

知$DM=\dfrac{1}{2}CD=\dfrac{1}{4}BC=\dfrac{5}{2}$.

又$\because BD=\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{1}{2}\times 10=5$，

$\therefore \dfrac{DE}{4}=\dfrac{5}{5+\dfrac{5}{2}}$，$\therefore DE=\dfrac{8}{3}$.

7. 证明：如图，取CF的中点G，连结DG.

$\because AD$是$\triangle ABC$的中线，

$\therefore DG$是$\triangle CFB$的中位线，

$\therefore DG=\dfrac{1}{2}BF$.

$\because AF=\dfrac{1}{3}AC$，$FG=GC$.

$\therefore$点F为AG的中点.

又$\because$点E为AD的中点.

$\therefore EF$为$\triangle ADG$的中位线，

$\therefore EF=\dfrac{1}{2}DG$. 故$EF=\dfrac{1}{4}BF$.



(第7题)

8. (1)证明：$\because DB$平分$\angle ADC$，

$\therefore \angle ADB=\angle CDB$.

$\because \angle ABD=\angle BCD=90°$，

$\therefore \triangle ABD\backsim\triangle BCD$.

$\therefore \dfrac{AD}{BD}=\dfrac{BD}{CD}$，

$\therefore BD^2=AD\cdot CD$.

(2)解：$\because BM\perp CD$，

$\therefore \angle MBD=\angle BDC$，$\angle MBC=180°-\angle BCD=90°$.

$\therefore \angle ADB=\angle MBD$. $\therefore BM=MD$.

$\because \angle ABD=90°$，

$\therefore \angle MAB+\angle ADB=\angle ABM+\angle MBD$，

$\therefore \angle MAB=\angle MBA$.

$\therefore BM=AM$. $\because AD=8$，

$\therefore BM=\dfrac{1}{2}AD=4$.

$\because BD^2=AD\cdot CD$，且$CD=6$，$AD=8$，

$\therefore BD^2=48$.

$\therefore BC^2=BD^2-CD^2=12$.

$\because MC^2=MB^2+BC^2=28$.

$\therefore MC=2\sqrt{7}$.

$\because BM\perp CD$，

$\therefore \angle BMN=\angle DCN$.

又$\because \angle MNB=\angle CND$，

$\therefore \triangle MNB\backsim\triangle CND$.

$\therefore \dfrac{BM}{CD}=\dfrac{MN}{CN}=\dfrac{2}{3}$，

即$\dfrac{MN}{2\sqrt{7}-MN}=\dfrac{2}{3}$，

$\therefore MN=\dfrac{4}{5}\sqrt{7}$.

9. 解：(方法一：作延长线)延长AD，与地面交于点M，如图①所示.



(第9题)

由$AM\parallel FH$知$\angle AMB=\angle FHG$.

因为$AB\perp BG$，$FG\perp BG$，$DC\perp BG$，

所以$\angle ABC=\angle DCM=\angle FGH=90°$.

又因为$\angle AMB=\angle DMC$，

所以$\triangle ABM\backsim\triangle DCM\backsim\triangle FGH$.

所以$\dfrac{AB}{BM}=\dfrac{CD}{CM}=\dfrac{FG}{GH}$.

因为$CD=2$ m，$FG=1.2$ m，$GH=2$ m，

所以$\dfrac{2}{CM}=\dfrac{1.2}{2}$，所以$CM=\dfrac{10}{3}$ m.

因为$BC=4$ m，

所以$BM=BC+CM=4+\dfrac{10}{3}=\dfrac{22}{3}$(m).

所以$\dfrac{AB}{\dfrac{22}{3}}=\dfrac{1.2}{2}$，所以$AB=4.4$ m.

答：这棵树的高度是4.4 m.

(方法二：作垂线)过点D作$DM\perp AB$于点M，如图②所示.

易知$\triangle AMD\backsim\triangle FGH$.

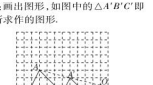
所以$\dfrac{AM}{DM}=\dfrac{FG}{GH}$.

而$DM=BC=4$ m，$AM=AB-CD=(AB-2)$ m，$FG=1.2$ m，$GH=2$ m，

所以$\dfrac{AB-2}{4}=\dfrac{1.2}{2}$，所以$AB=4.4$ m.

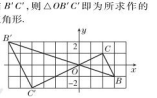
答：这棵树的高度是4.4 m.

10. 解：画出图形，如图中的$\triangle A'B'C'$即为所求作的图形.



(第10题)

11. 解：(1)如图，分别延长BO，CO到B'，C'，使$OB'=2OB$，$OC'=2OC$，连结$B'C'$，则$\triangle OB'C'$即为所求作的三角形.



(第11题)

(2)$B'(-6,2)$，$C'(-4,-2)$.

(3)M'的坐标为$(-2x,-2y)$.

第24章　解直角三角形

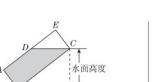
24.1　测量

1. D　**2.** D　**3.** 50

4. A　**点拨**：过点C作$CF\perp BG$于F，如图所示.

设$DE=x$，则$AD=8-x$，

根据题意得$\dfrac{1}{2}(8-x+8)\times 3\times 3=3\times 3\times 6$，解得$x=4$，$\therefore DE=4$.



(第4题)

$\because \angle E=90°$，

$\therefore$由勾股定理得$CD=\sqrt{DE^2+CE^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$.

$\because \angle BCE=\angle DCF=90°$，

$\therefore \angle DCE=\angle BCF$.

$\because \angle DEC=\angle BFC=90°$，

$\therefore \triangle CDE\backsim\triangle CBF$，

$\therefore \dfrac{CE}{CF}=\dfrac{CD}{CB}$，

即$\dfrac{3}{CF}=\dfrac{5}{8}$，

$\therefore CF=\dfrac{24}{5}$.

故选A.

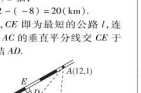
5. A

6. (1)20　(2)13

点拨：(1)由A，B两点的纵坐标相同可知：$AB\parallel x$轴，

$\therefore AB=12-(-8)=20$(km).

(2)如图，CE即为最短的公路l，连结AC，作AC的垂直平分线交CE于点D，连结AD.



(第6题)

由(1)可知$CE=1-(-17)=18$(km)，

$AE=12$ km.

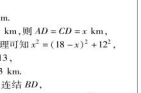
设$CD=x$ km，则$AD=CD=x$ km，

由勾股定理可知$x^2=(18-x)^2+12^2$，

解得$x=13$，

$\therefore CD=13$ km.

7. 解：如图，连结BD，



(第7题)

在Rt$\triangle ABD$中，$BD^2=AB^2+AD^2=3^2+4^2=5^2$，

在$\triangle CBD$中，$CD^2=13^2$，$BC^2+BD^2=12^2+5^2$，

而$12^2+5^2=13^2$，

即$BC^2+BD^2=CD^2$，

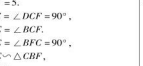
$\therefore \angle DBC=90°$，

$\therefore S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle DBC}=\dfrac{1}{2}\cdot AD\cdot AB+\dfrac{1}{2}DB\cdot BC=\dfrac{1}{2}\times 4\times 3+\dfrac{1}{2}\times 12\times 5=36$(m^2).

$\therefore$要投入$36\times 200=7\,200$(元).

答：要投入7 200元.

8. 解：(1)如图，作$AD\perp BC$于D，则$AD=10$ m.



(第8题)

在Rt$\triangle ACD$中，$\because \angle C=45°$，

$\therefore AD=CD=10$ m.

在Rt$\triangle ABD$中，$\because \angle B=30°$，

$\therefore AB=2AD=20$(m).

$\therefore BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=10\sqrt{3}$(m).

$\therefore BC=BD+DC=(10+10\sqrt{3})$(m).

(2)这辆汽车超速.

理由：$\because BC=(10+10\sqrt{3})$ m≈ 27(m)，

$\therefore$汽车的速度$\approx\dfrac{27}{0.9}=30$(m/s).

30 m/s$=108$ km/h，

$\because 108>80$，

$\therefore$这辆汽车超速.

9. 解：$\because AB\perp BH$，$CD\perp BH$，$EF\perp BH$，

$\therefore AB\parallel CD\parallel EF$，

$\therefore \triangle CDG\backsim\triangle ABG$，

$\triangle EFH\backsim\triangle ABH$，

$\therefore \dfrac{CD}{AB}=\dfrac{DG}{BG+BD}$，

$\dfrac{EF}{AB}=\dfrac{FH}{BH+DF+BD}$.

$\because CD=DG=EF=2$米，$DF=52$米，$FH=4$米，

$\therefore \dfrac{2}{AB}=\dfrac{2}{2+BD}$，$AB=\dfrac{4}{4+52+BD}$，

$\therefore \dfrac{2}{2+BD}=\dfrac{4}{4+52+BD}$，

$\therefore BD=52$米，$\therefore \dfrac{2}{AB}=\dfrac{2}{2+52}$，

$\therefore AB=54$米.

答：建筑物高为54米.

10. 解：根据反射定律可以推出$\angle ACB=\angle EGF$，$\angle ABC=\angle GDH$，

$\because AB\perp BC$，$EF\perp BC$，$GH\perp BC$，

$\therefore \triangle BAC\backsim\triangle FEC$，

$\triangle ADB\backsim\triangle GDH$，

设$AB=x$ m，$BC=y$ m，

$\therefore \begin{cases}\dfrac{1.7}{x}=\dfrac{1.8}{y},\\ \dfrac{1.7}{x}=\dfrac{3.8}{y+12},\end{cases}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解得$\begin{cases}x=10.2,\\y=10.8.\end{cases}$

答:这棵松树的高为 10.2 m.

24.2 直角三角形的性质

1. B　**2**. B

3. A　**点拨**:如图,过 A 点作 $AF\perp BC$ 于 F,连结 AP,



(第 3 题)

在 $\triangle ABC$ 中,

$\because AB=AC=5,BC=8,$

$\therefore BF=4$,在 $Rt\triangle ABF$ 中,$AF=\sqrt{AB^2-BF^2}=3$,$\therefore \frac{1}{2}\times 8\times 3=\frac{1}{2}\times 5\times PD+\frac{1}{2}\times 5\times PE$,$\therefore 12=\frac{1}{2}\times 5\times(PD+PE)$,即 $PD+PE=4.8$.

4. D　**5**. C　**6**. A

7. 3

8. C

9. B　**点拨**:如图,作 $EF\perp AB$ 于 F,

则 $EF=BC$,$\because AB=2BC$,$AE=AB$,

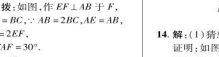
$\therefore AE=2EF$,

$\therefore \angle EAF=30°$.

$\because AE=AB$,

$\therefore \angle ABE=\angle AEB=75°$.

$\because \angle EBC=90°-75°=15°$. 故选 B.



(第 9 题)

10. **错误答案**:A

诊断:在 $Rt\triangle AOB$ 中,$\angle AOB=30°$,它所对的直角边是 AB,并不是 OB.

正确答案:B

11. **证明**:$\because AE\perp BD,G$ 是 AB 的中点,

$\therefore EG=\frac{1}{2}AB=BG$,

$\therefore \angle GBE=\angle GBE$.

同理,$FH=\frac{1}{2}DC=DH$,

$\therefore \angle DFH=\angle FDH$.

$\because$ 在 $\square ABCD$ 中,$AB=CD$,$AB/\!/CD$,

$\therefore EG=FH$,$\angle GBE=\angle FDH$.

$\therefore \angle GEB=\angle DFH$,

$\therefore EG/\!/FH$.

$\therefore$ 四边形 $EGFH$ 为平行四边形.

12. **解**:(1)$\because AD\perp BC$ 于点 D,

$\therefore \angle ADC=90°$.

又$\because \angle C=30°$,$AD=1$,

$\therefore AC=2AD=2$.

$\therefore CD=\sqrt{AC^2-AD^2}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$.

(2)$\because \angle B=45°$,

$\therefore BD=AD=1$.

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AD$

$=\frac{1}{2}\times(1+\sqrt{3})\times 1$

$=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

13. **解**:(1)$\because DB\perp BC$,$BC=4$,$CD=5$,

$\therefore BD=\sqrt{5^2-4^2}=3$.

(2)如图,过点 A 作 $AE\perp CB$,交 CB 的延长线于点 E,

$\because DB\perp BC$,$AE\perp BC$,

$\therefore AE/\!/DB$,

$\because D$ 为 AC 边的中点,

$\therefore BD$ 为 $\triangle AEC$ 的中位线,

$\therefore BD=\frac{1}{2}AE$,

$\therefore AE=6$,即 BC 边上高的长为 6.



(第 13 题)

14. **解**:(1)猜想:$AE^2+BF^2=EF^2$.

证明:如图①,延长 FD 到 M,使得 $DM=DF$,连结 AM,EM.

在 $\triangle ADM$ 和 $\triangle BDF$ 中,

$AD=DB$,$\angle ADM=\angle BDF$,

$DM=DF$,

$\therefore \triangle ADM\cong\triangle BDF$,

$\therefore AM=BF$,$\angle MAD=\angle B$,

$\therefore AM/\!/BC$,则 $\angle C+\angle EAM=180°$.

$\because \angle C=90°$,

$\therefore \angle EAM=90°$.

$\because EDF=90°$,

$\therefore ED\perp FM$.

又$\because DM=DF$,

$\therefore EM=EF$.

在 $Rt\triangle AEM$ 中,$AE^2+AM^2=EM^2$,

$\therefore AE^2+BF^2=EF^2$.



①



②

(第 14 题)

(2)画图如图②,结论不变,

即 $AE^2+BF^2=EF^2$.

24.3 锐角三角函数

第 1 课时　锐角三角函数

1. A　**2**. A　**3**. A　**4**. A　**5**. B　**6**. D

7. A　**8**. 0.35　**9**. A　**10**. C

11. B　**点拨**:如图,作 $AD\perp BC$ 于点 D,



(第 11 题)

则 $BD=\frac{3}{2}+0.3=\frac{9}{5}$(m).

$\because \cos\alpha=\frac{BD}{AB}$,$\therefore \cos\alpha=\frac{9}{5AB}$,

$\therefore AB=\frac{9}{5\cos\alpha}$ m.

12. **解**:$\because$ 方程 $2x^2-5x+2=0$ 的解是 $x_1=2,x_2=\frac{1}{2}$,

又$\because 0<\cos\alpha<1$(α 为锐角),

$\therefore \cos\alpha=\frac{1}{2}$.

常见错解:$\because$ 方程 $2x^2-5x+2=0$ 的解是 $x_1=2,x_2=\frac{1}{2}$,

$\therefore \cos\alpha=2$ 或 $\cos\alpha=\frac{1}{2}$. 忽略了 $\cos\alpha$(α 为锐角)的取值范围是 $0<\cos\alpha<1$.

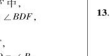
13. **解**:(1)$\frac{4}{5}:\frac{3}{5}:1=\frac{4}{5}:\frac{3}{5}:1$

规律:对于任意锐角 α,

有 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

证明如下:如图,在 $Rt\triangle A'B'C'$ 中,

$\angle C'=90°$,$\sin\alpha=\frac{a}{c}$,$\cos\alpha=\frac{b}{c}$,



(第 13 题)

$\therefore \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\frac{a^2+b^2}{c^2}$.

$\because a^2+b^2=c^2$,

$\therefore \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\frac{c^2}{c^2}=1$.

(2)$\because \beta$ 为锐角,

$\therefore \sin\beta>0,\cos\beta>0$.

由 $\begin{cases}\sin^2\beta+\cos^2\beta=1,\\ \sin\beta=3\cos\beta,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}\sin\beta=\frac{3\sqrt{10}}{10},\\ \cos\beta=\frac{\sqrt{10}}{10}.\end{cases}$

14. (1)**证明**:连结 BD,如图①所示.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$\therefore AB=AD$,$AC\perp BD$.

$\because BE=DF$,$\therefore AE=AF$.

$\therefore AE:AB=AF:AD$.

又$\because \angle EAF=\angle BAD$,

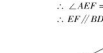
$\therefore \triangle AEF\sim\triangle ABD$,

$\therefore \angle AEF=\angle ABD$.

$\therefore EF/\!/BD$. $\therefore AC\perp EF$.



①



②

(第 14 题)

(2)**解**:如图②所示.

由(1)得 $EG/\!/BD$,$\therefore \angle G=\angle CDB$.

又$\because \angle ADO=\angle CDB$,

$\therefore \angle G=\angle ADO$.

$\therefore \tan G=\tan\angle ADO=\frac{OA}{OD}=\frac{1}{2}$.

$\therefore OA=\frac{1}{2}OD$.

$\because BD=4$,$\therefore OD=2$.

$\therefore OA=1$,

即 AO 的长为 1.

15. **解**:(1)$\because a,b$ 是关于 x 的一元二次方程 $x^2-(c+4)x+4c+8=0$ 的两个根,

$\therefore a+b=c+4$,$ab=4c+8$.

$\because a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(c+4)^2-2(4c+8)$,即 $a^2+b^2=c^2$.

$\therefore \triangle ABC$ 为直角三角形.

$\because (a-b)^2=(a+b)^2-4ab=(c+4)^2-4(4c+8)=c^2-8c-16$,不能确定 $(a-b)^2$ 的值是否为 0,

$\therefore$ 不能确定 $a=b$.

综上所述,$\triangle ABC$ 为直角三角形.

(2)$\because \triangle ABC$ 是直角三角形,且 $\angle C=90°$,

$\therefore \sin A=\frac{a}{c}$.

将其代入 $9c=25a\sin A$,

得 $9c=25a\cdot\frac{a}{c}$,

$\therefore 9c^2=25a^2$. $\therefore 3c=5a$. $\therefore c=\frac{5}{3}a$.

$\therefore b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{\left(\frac{5}{3}a\right)^2-a^2}=\frac{4}{3}a$.

将 $b=\frac{4}{3}a$,$c=\frac{5}{3}a$ 代入 $a+b=c+4$,解得 $a=6$.

$\therefore b=\frac{4}{3}\times 6=8$,$c=\frac{5}{3}\times 6=10$,

即 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 6,8,10.

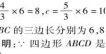
16. (1)**证明**:$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AD=BC$,$AD/\!/BC$.

$\because DE=AD$,$\therefore DE=BC$. $\because DE/\!/BC$.

$\therefore$ 四边形 $BCED$ 是平行四边形.

(2)**解**:如图,连结 BE.



(第 16 题)

$\because DA=DB$,$\therefore \angle A=\angle ABD$.

$\because DE=AD$,

$\therefore DE=BD$,

$\therefore \angle DBE=\angle DEB$.

$\because \angle A+\angle ABD+\angle DBE+\angle DEB=180°$,

$\therefore \angle ABD+\angle DBE=90°$,

$\therefore \angle ABE=90°$.

$\because DA=BD=2$,$DE=AD$,$\therefore AE=4$.

$\because \cos A=\frac{AB}{AE}=\frac{1}{4}$,

$\therefore AB=\frac{1}{4}AE=\frac{1}{4}\times 4=1$.

$\therefore BE=\sqrt{AE^2-AB^2}=\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$,即点 B 到点 E 的距离为 $\sqrt{15}$.

第 2 课时　特殊角的三角函数值

1. C　**2**. D　**3**. A　**4**. C

5. B　**点拨**:解决本题的关键是判断出重叠部分的三角形是等边三角形.

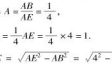
6. A　**7**. B　**8**. B　**9**. A　**10**. C　**11**. B

12. **错解**:在 $\triangle ABC$ 中,$\because \frac{BC}{AB}=\sin A$,

$\therefore BC=AB\cdot\sin A=2\sin 60°=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

诊断:错解忽视了锐角三角函数使用的前提是在直角三角形中. 本题中没有明确指出 $\triangle ABC$ 是直角三角形,因此不能直接得到 $\frac{BC}{AB}=\sin A$,必须通过添加辅助线,构造出直角三角形,再利用锐角三角函数的定义来解决.

正解:如图,过点 C 作 $CD\perp AB$ 于点 D.



(第 12 题)

在 $Rt\triangle ADC$ 中,

$\because \cos A=\frac{AD}{AC}$,$\sin A=\frac{CD}{AC}$,

$\therefore AD=AC\cdot\cos A=1\times\cos 60°=\frac{1}{2}$,

$CD=AC\cdot\sin A=1\times\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

在 $Rt\triangle BDC$ 中,$BD=AB-AD=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$,

$\therefore BC=\sqrt{BD^2+CD^2}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{12}{4}}=\sqrt{3}$.

13. **解**:$\because \angle BDC=45°$,$\angle C=90°$,

$\therefore \triangle BCD$ 为等腰直角三角形.

$\therefore BC=CD$.

又$\because BD=10\sqrt{2}$,$\therefore BC=10$.

又$\because AB=20$,

$\therefore \sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$.

$\therefore \angle A=30°$.

14. **解**:(1)$\because$ 新坡面的坡度为 $1:\sqrt{3}$,

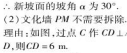
$\therefore \tan\alpha=\tan\angle CAB=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$\therefore \alpha=30°$.

$\therefore$ 新坡面的坡角 α 为 30°.

(2)文化墙 PM 不需要拆除.

理由:如图,过点 C 作 $CD\perp AB$ 于点 D,则 $CD=6$ m.



(第 14 题)

$\because$ 坡面 BC 的坡度为 $1:1$,新坡面的坡度为 $1:\sqrt{3}$,$\therefore BD=CD=6$ m,$AD=6\sqrt{3}$ m.

$\therefore AB=AD-BD=(6\sqrt{3}-6)$ m<8 m.

$\therefore$ 文化墙 PM 不需要拆除.

15. **解**:(1)2

(2)如图①,连结格点 A,B,可得 $AB//MC$,连结 BN,$\therefore \angle CPN=\angle BAN$. 易知 $\triangle ABN$ 为直角三角形. 在 $Rt\triangle ABN$ 中,$AB=BN=\sqrt{5}$,$AN=\sqrt{10}$,$\therefore \cos\angle CPN=\cos\angle BAN=\frac{AB}{AN}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(3)设 BC 的长为单位 1,构造如图②所示的网格图,连结格点 A,D,可得 $AD//CM$,连结 DN.

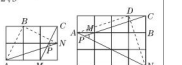
$\therefore \angle CPN=\angle DAN$.

易知 $\triangle ADN$ 为直角三角形. 在 $Rt\triangle ADN$ 中,$AD=DN=\sqrt{10}$,$AN=2\sqrt{5}$,

$\therefore \cos\angle CPN=\cos\angle DAN=\frac{AD}{AN}=$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. ∴ ∠$CPN$ = 45°.



①　②

(第 15 题)

第 3 课时　用计算器求锐角三角函数值

1. A　**2.** A　**3.** D　**4.** A　**5.** D　**6.** A

7. D　**点拨**:易得 $\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{5}{13}$,再用科学计算器求∠$A$.

8. 27.8°

9. C　**10.** C

11. A　**点拨**:通过计算找出规律,进而判断出 α 的范围.

12. **解**:$\sin 35°29'\approx 0.580$.

点拨:误认为 35°29′≈35.29°而导致出错.

13. **解**:(1)锐角的正弦值随锐角度数的增大而增大,余弦值随锐角度数的增大而减小.

(2)$\sin 18°<\sin 34°<\sin 50°<\sin 62°<\sin 88°$,

$\cos 88°<\cos 62°<\cos 50°<\cos 34°<\cos 18°$.

(3)=;<;>

(4)$\sin 10°<\cos 70°<\sin 50°<\cos 30°$.

14. **解**:(1)∵ $PE\perp AB$,$PF\perp BC$,

∴ $\sin\angle EBP=\frac{PE}{BP}=\sin 40°$,

$\sin\angle FBP=\frac{PF}{BP}=\sin 20°$.

又∵ $\sin 40°>\sin 20°$,

∴ $\frac{PE}{BP}>\frac{PF}{BP}$. ∴ $PE>PF$.

(2)∵ α,β 都是锐角,且 $\alpha>\beta$,

∴ $\sin\alpha>\sin\beta$.

又∵ $\sin\angle EBP=\frac{PE}{PB}=\sin\alpha$,$\sin\angle FBP=\frac{PF}{PB}=\sin\beta$,

∴ $\frac{PE}{PB}>\frac{PF}{PB}$. ∴ $PE>PF$.

15. **解**:∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

∴ $AC\perp BD$,$OA=\frac{1}{2}AC=4$ m.

在 Rt△AOB 中,$\tan\angle BAO=\frac{OB}{OA}$,

∴ $OB=OA\cdot\tan\angle BAO=4\times\frac{5}{4}=5$(m).

∴ $AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=\sqrt{41}\approx 6$(m).

用计算器求得当 $\tan\angle BAO=\frac{5}{4}=1.25$ 时,∠$BAO\approx 51.3°$.

由菱形的性质知∠$BCD=\angle BAD=2\angle BAO\approx 102.6°\approx 103°$,则∠$ABC=\angle ADC\approx 77°$.

∵ 菱形的边长约为 6 m,四个内角分别约为 103°,77°,103°,77°.

16. **解**:如图,过点 C 作 $CD\perp AB$ 于点 D.



(第 16 题)

∵ 两地位于甲地北偏西 30°方向,距离甲地 460 km,

∴ 在 Rt△ACD 中,∠$ACD=30°$.

∴ $AD=\frac{1}{2}AC=230$ km,

$CD=\frac{\sqrt{3}}{2}AC=230\sqrt{3}$ km.

∵ 两地位于乙地北偏东 66°方向,

∴ 在 Rt△BCD 中,∠$CBD=24°$.

∴ $BD=\frac{CD}{\tan 24°}=\frac{230\sqrt{3}}{\tan 24°}$ km.

∴ $AB=AD+BD=\left(230+\frac{230\sqrt{3}}{\tan 24°}\right)$ km.

答:甲乙两地之间直达高速公路的长 AB 为 $\left(230+\frac{230\sqrt{3}}{\tan 24°}\right)$ km.

阶段核心方法

1. **解**:(1)∵ ∠$B=90°$,∠$BDC=45°$,

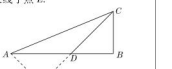
∴ $BC=BD=5$.

∵ $\sin A=\frac{5}{13}$,∴ $AC=13$,

∴ $AB=12$,

∴ $AD=AB-BD=12-5=7$.

(2)如图,过 A 作 $AE\perp CD$ 交 CD 的延长线于点 E.



(第 1 题)

∵ ∠$ADE=\angle CDB=45°$,

∴ △ADE 是等腰直角三角形,

∴ $AE=DE=\frac{7\sqrt{2}}{2}$,

则 $\sin\angle ACD=\frac{AE}{AC}=\frac{\frac{7\sqrt{2}}{2}}{13}=\frac{7\sqrt{2}}{26}$.

2. **解**:(1)过点 A 作 $AD\perp BC$,交 BC 的延长线于点 D,如图所示.

在 Rt△ADC 中,$AC=4$.

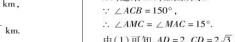
∵ ∠$ACB=150°$,∴ ∠$ACD=30°$,

∴ $AD=\frac{1}{2}AC=2$,$CD=AC\cdot\cos 30°=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$.

在 Rt△ABD 中,$\tan B=\frac{AD}{BD}=\frac{2}{BD}=\frac{1}{8}$,

∴ $BD=16$,

∴ $BC=BD-CD=16-2\sqrt{3}$.



(第 2 题)

(2)在 BC 边上取一点 M,使得 $CM=AC$,连结 AM,如图所示.

∵ ∠$ACB=150°$,

∴ ∠$AMC=\angle MAC=15°$.

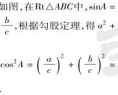
由(1)可知,$AD=2$,$CD=2\sqrt{3}$,

∴ $\tan 15°=\tan\angle AMD=\frac{AD}{MD}=\frac{2}{4+2\sqrt{3}}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\frac{1}{2+1.7}\approx 0.3$.

3. D

4. (1)**证明**:如图,在 Rt△ABC 中,$\sin A=\frac{a}{c}$,$\cos A=\frac{b}{c}$,根据勾股定理,得 $a^2+b^2=c^2$.

∴ $\sin^2 A+\cos^2 A=\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{c^2}=1$.



(第 4 题)

(2)**解**:如图,在 Rt△ABC 中,$\sin A=\frac{a}{c}$,$\cos A=\frac{b}{c}$,根据勾股定理,得 $a^2+b^2=c^2$.

∵ $\sin A\cdot\cos A=\frac{1}{2}$,∴ $\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{c}=\frac{1}{2}$.

∴ $c^2=2ab$,∴ $a^2+b^2=2ab$,

即 $(a-b)^2=0$,∴ $a=b$.

在 Rt△ABC 中,$\tan A=\frac{a}{b}=1$,

∴ ∠$A=45°$.

5. **解**:∵ $b^2=(c+a)(c-a)$,

∴ $b^2=c^2-a^2$,

即 $c^2=a^2+b^2$,

∴ △ABC 是直角三角形,且∠$C=90°$.

∵ $5b-4c=0$,

∴ $5b=4c$,

∴ $\frac{b}{c}=\frac{4}{5}$,

设 $b=4k$,$c=5k$,那么 $a=3k$.

∴ $\sin A+\sin B=\frac{3k}{5k}+\frac{4k}{5k}=\frac{7}{5}$.

6. **解**:连结 EF,设 $CF=k$,由题意可得 $CD=AD=AB=BC=4k$,$BE=EC=2k$,$DF=3k$.

根据勾股定理得 $AF=5k$,$EF=\sqrt{5}k$,$AE=2\sqrt{5}k$.

∵ $EF^2+AE^2=AF^2$.

∴ △AEF 是直角三角形,且∠$AEF=90°$.

∴ $\sin\angle EAF=\frac{EF}{AF}=\frac{\sqrt{5}k}{5k}=\frac{\sqrt{5}}{5}$,

$\cos\angle EAF=\frac{AE}{AF}=\frac{2\sqrt{5}k}{5k}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

7. (1)**证明**:∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

∴ ∠$B=\angle BAD=90°$.

∵ $EF\perp AM$,∴ ∠$AFE=90°$.

∴ ∠$EAF+\angle BAM=\angle EAF+\angle AEF=90°$.

∴ ∠$BAM=\angle AEF$.

(2)**解**:在 Rt△ABM 中,

∵ ∠$B=90°$,$AB=4$,

$\cos\angle BAM=\frac{4}{5}$,

∴ $AM=5$.

∵ F 为 AM 的中点,∴ $AF=\frac{5}{2}$.

∵ ∠$BAM=\angle AEF$,

∴ $\cos\angle AEF=\cos\angle BAM=\frac{4}{5}$.

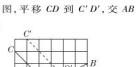
∴ $\sin\angle AEF=\frac{3}{5}$.

在 Rt△AEF 中,

∵ ∠$AFE=90°$,$AF=\frac{5}{2}$,$\sin\angle AEF=\frac{3}{5}$,∴ $AE=\frac{25}{6}$.

∴ $DE=AD-AE=6-\frac{25}{6}=\frac{11}{6}$.

8. **解**:如图,平移 CD 到 $C'D'$,交 AB 于 O',



(第 8 题)

则∠$BO'D'=\angle BOD$,

∴ $\tan\angle BOD=\tan\angle BO'D'$,

由图易知 O' 在格点处.

设每个小正方形的边长为 a,

则 $O'B=\sqrt{a^2+(2a)^2}=\sqrt{5}a$,

$O'D'=\sqrt{(2a)^2+(2a)^2}=2\sqrt{2}a$,$BD'=3a$.

过 B 作 $BE\perp O'D'$于点 E,$O'F\perp BD'$于点 F,

则 $BE=\frac{BD'\cdot O'F}{O'D'}=\frac{3a\cdot 2a}{2\sqrt{2}a}=\frac{3\sqrt{2}}{2}a$,

∴ $O'E=\sqrt{O'B^2-BE^2}=\sqrt{(\sqrt{5}a)^2-\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}a\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$,

∴ $\tan\angle BO'E=\frac{BE}{O'E}=\frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}a}{\frac{\sqrt{2}}{2}a}=3$,

∴ $\tan\angle BOD=3$.

9. **解**:根据图形有 ∠$AFE+\angle EFC+\angle BFC=180°$,

根据折叠的性质,知∠$EFC=\angle D=90°$,

∴ ∠$AFE+\angle BFC=90°$.

在 Rt△BCF 中,∠$BCF+\angle BFC=90°$,

∴ ∠$AFE=\angle BCF$.

根据折叠的性质,有 $CF=CD=10$.

在 Rt△BFC 中,$BC=8$,$CF=10$,

由勾股定理得 $BF=6$,

∴ $\tan\angle BCF=\frac{BF}{BC}=\frac{3}{4}$.

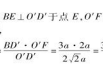
∴ $\tan\angle AFE=\tan\angle BCF=\frac{3}{4}$.

24.4　解直角三角形

第 1 课时　解直角三角形

1. D　**2.** C　**3.** D　**4.** B　**5.** D　**6.** B

7. D　**点拨**:如图,作 $AE\perp OC$ 于点 E,作 $AF\perp OB$ 于点 F.



(第 7 题)

∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

∴ ∠$ABC=90°$.

∴ ∠$ABC=\angle AEC$. ∵ ∠$BCO=x$,

∴ ∠$EAB=x$.

∴ ∠$FBA=x$.

∵ $AB=a$,$BC=AD=b$,

∴ $AE=FO=FB+BO=a\cos x+b\sin x$.

8. A　**点拨**:∵ 在 Rt△ABC 中,$AC\perp BC$,∠$ABC=30°$,

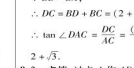
∴ $AB=2AC$,$BC=\frac{AC}{\tan 30°}=\sqrt{3}AC$.

∵ $BD=BA$,

∴ $DC=BD+BC=(2+\sqrt{3})AC$.

∴ $\tan\angle DAC=\frac{DC}{AC}=\frac{(2+\sqrt{3})AC}{AC}=2+\sqrt{3}$.

9. 2　**点拨**:过点 A 作 $AD\perp BC$,垂足为点 D,如图所示.



(第 9 题)

设 $AC=x$,则 $AB=\sqrt{2}x$.

在 Rt△ACD 中,∠$AD=AC\cdot\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}x$,$CD=AC\cdot\cos C=\frac{\sqrt{2}}{2}x$;

在 Rt△ABD 中,$AB=\sqrt{2}x$,$AD=\frac{\sqrt{2}}{2}x$,

∴ $BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}x$.

∴ $BC=BD+CD=\frac{\sqrt{6}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}x=\sqrt{6}+\sqrt{2}$.

∴ $x=2$,即 $AC=2$.

10. $\frac{16}{5}$

11. D　**点拨**:过点 A 作 $AD\perp BC$,垂足为 D,如图所示.



(第 11 题)

在 Rt△ACD 中,$CD=CA\cdot\cos C=1$,

∴ $AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=\sqrt{15}$.

在 Rt△ABD 中,$BD=CB-CD=3$,

$AD=\sqrt{15}$,

∴ $AB=\sqrt{BD^2+AD^2}=2\sqrt{6}$.

∴ $\sin B=\frac{AD}{AB}=\frac{\sqrt{10}}{4}$.

12. **解**:在 Rt△ABC 中,∠$B=90°$,

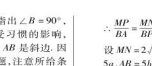
∴ $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}$.

∴ $\tan A=\frac{BC}{AB}=\frac{3}{5}$,$\cos A=\frac{AB}{AC}=\frac{5}{\sqrt{34}}=\frac{5\sqrt{34}}{34}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

易错总结:本题中已指出$\angle B=90°$,所以AC为斜边,而受习惯的影响,常误以为$\angle C$的对边AB是斜边.因此,解题时应认真审题,注意所给条件,分清斜边和直角边,以防出错.

13. **解**:(1)如图,过点A作$AE\perp BC$于点E,



(第13题)

$\because \cos C=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$\therefore \angle C=45°$.

在$\mathrm{Rt}\triangle ACE$中,$CE=AC\cdot\cos C=1$,

$\therefore AE=CE=1$.在$\mathrm{Rt}\triangle ABE$中,$\tan B=\frac{1}{3}$,即$\frac{AE}{BE}=\frac{1}{3}$,

$\therefore BE=3AE=3$,$\therefore BC=BE+CE=4$.

(2)$\because AD$是$\triangle ABC$的中线,

$\therefore CD=\frac{1}{2}BC=2$,

$\therefore DE=CD-CE=1$.

$\because AE\perp BC$,$DE=AE$,

$\therefore \angle ADC=45°$,

$\therefore \sin\angle ADC=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

14. 解:由$AE\perp BC$,$DF\perp BC$,易得四边形$AEFD$是矩形.

$\because AD=EF=3$ m.

$\because$坡角$\alpha=45°$,$\beta=30°$,$AE=DF=6$ m,

$\therefore BE=\frac{AE}{\tan\alpha}=\frac{6}{\tan 45°}=\frac{6}{1}=6$(m),

$CF=\frac{DF}{\tan\beta}=\frac{6}{\tan 30°}=\frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=6\sqrt{3}$(m).

$\therefore BC=BE+EF+CF=6+3+6\sqrt{3}=9+6\sqrt{3}$(m).

即BC的长为$(9+6\sqrt{3})$m.

15. (1)**证明**:$\because \angle M=\angle ABC=90°$,

$\therefore \angle MAB+\angle MBA=\angle NBC+\angle MBA=90°$,

$\therefore \angle MAB=\angle NBC$.

又$\because \angle M=\angle N=90°$,

$\therefore \triangle ABM\backsim\triangle BCN$.

(2)**解**:如图,过P点作$PN\perp AP$交AC于N点,过N作$NM\perp BC$于M点.

$\because \angle BAP+\angle APB=90°$,$\angle APB+\angle NPC=90°$,

$\therefore \angle BAP=\angle NPC$.

又$\because \angle B=\angle NMP=90°$,

$\therefore \triangle BAP\backsim\triangle MPN$.

$\because \frac{AP}{PN}=\frac{BA}{MP}=\frac{BP}{MN}$,

又$\because \tan\angle PAC=\frac{PN}{PA}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,

$\therefore \frac{MP}{BA}=\frac{MN}{BP}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

设$MN=2\sqrt{5}a$,$PM=2\sqrt{5}b$,则$BP=5a$,$AB=5b$.

$\because \angle BAP=\angle C$,$\therefore \angle C=\angle NPC$.

$\therefore NP=NC$.

$\because NM\perp PC$,$\therefore PM=MC$.

$\therefore PC=2PM=4\sqrt{5}b$.

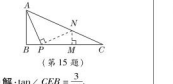
又易知$\triangle BAP\backsim\triangle BCA$,$\therefore \frac{BA}{BP}=\frac{BC}{BA}$,

$\therefore BA^2=BP\cdot BC$.

$\therefore (5b)^2=5a\cdot(5a+4\sqrt{5}b)$.

又$a>0$,$b>0$,$\therefore a=\sqrt{5}b$.

$\therefore \tan C=\frac{MN}{MC}=\frac{2\sqrt{5}a}{2\sqrt{5}b}=\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.



(第15题)

(3)**解**:$\tan\angle CEB=\frac{3}{14}$.

第2课时　解直角三角形的八种常见类型

1. **解**:(1)$\because \tan A=\frac{a}{b}=\sqrt{3}$,

$\therefore \angle A=60°$,

$\therefore \angle B=30°$.$\therefore c=2b=12\sqrt{5}$.

(2)$\because \tan A=\frac{a}{b}=\sqrt{3}$,

$\therefore \angle A=60°$,

$\therefore \angle B=30°$.$\therefore c=2b=20$.

2. **解**:(1)$a=c\cdot\sin A=10\cdot\sin 60°=5\sqrt{3}$,$b=c\cdot\cos A=10\cdot\cos 60°=5$;

(2)$b=\frac{a}{\tan A}=\frac{4}{\tan 60°}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$,$\angle B=90°-\angle A=30°$.

3. **解**:(1)在$\mathrm{Rt}\triangle CDE$中,$\angle CDE=30°$,$DE=80$ cm,

$\therefore CD=DE\cdot\cos 30°=80\times\frac{\sqrt{3}}{2}=40\sqrt{3}$(cm).

故支架CD的长为$40\sqrt{3}$ cm.

(2)在$\mathrm{Rt}\triangle OAC$中,$\angle BAC=30°$,$AC=165$ cm,

$\therefore OC=AC\cdot\tan 30°=165\times\frac{\sqrt{3}}{3}=55\sqrt{3}$(cm),

$OA=\frac{AC}{\cos 30°}=\frac{165}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=110\sqrt{3}$(cm).

$\therefore OD=OC-CD=55\sqrt{3}-40\sqrt{3}=15\sqrt{3}$(cm).

$\therefore AB=OA-OB=OA-OD=110\sqrt{3}-15\sqrt{3}=95\sqrt{3}$(cm).

故真空热水管AB的长为$95\sqrt{3}$ cm.

4. **解**:(1)在$\mathrm{Rt}\triangle ACB$中,$\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{3}{5}$,

即$\frac{15}{AB}=\frac{3}{5}$,解得$AB=25$,$\because D$是边$AB$的中点,$\therefore CD=\frac{AB}{2}=\frac{25}{2}$.

(2)由(1)可得$AD=BD=CD=\frac{25}{2}$,

由勾股定理知$CB=\sqrt{AB^2-AC^2}=20$.

设$DE=x$,$EB=y\ (x>0,y>0)$,

则$\begin{cases}y^2+x^2=\frac{625}{4},\\ \left(x+\frac{25}{2}\right)^2+y^2=400,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=\frac{7}{2},\\ y=12.\end{cases}$

$\therefore \sin\angle DBE=\frac{DE}{BD}=\frac{7}{25}$.

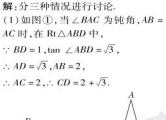
5. **解**:分三种情况进行讨论.

(1)如图①,当$\angle BAC$为钝角,$AB=AC$时,在$\mathrm{Rt}\triangle ABD$中,

$\because BD=1$,$\tan\angle ABD=\sqrt{3}$,

$\therefore AD=\sqrt{3}AB=2$,

$\therefore AC=2$,$\therefore CD=2+\sqrt{3}$.



(第5题)

(2)如图②,当$\angle BAC$为锐角,$AB=AC$时,在$\mathrm{Rt}\triangle ABD$中,

$\because BD=1$,$\tan\angle ABD=\sqrt{3}$,

$\therefore AD=\sqrt{3}AB=2$,

$\therefore AC=2$,$\therefore CD=2-\sqrt{3}$.

(3)如图③,当$BC=AC$时,

$\because \tan\angle ABD=\sqrt{3}$,$\therefore \angle ABD=60°$.

在$\mathrm{Rt}\triangle ABD$中,$\angle A=90°-\angle ABD=30°$.

$\therefore BC=AC$,$\therefore \angle CBA=\angle A=30°$.

$\therefore \angle BCD=60°$.

在$\mathrm{Rt}\triangle BCD$中,$BD=1$,$\angle BCD=60°$,$\tan\angle BCD=\frac{BD}{CD}$,

$\therefore \frac{1}{CD}=\tan 60°=\sqrt{3}$.$\therefore CD=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

综上所述,CD的长为$2+\sqrt{3}$或$2-\sqrt{3}$或$\frac{\sqrt{3}}{3}$.

6. **解**:(1)$\because \triangle ABD$是等边三角形,$AB=10$.

$\because AD=AB=10$.

$\because DH\perp AB$,$\therefore AH=\frac{1}{2}AB=5$.

$\therefore DH=\sqrt{AD^2-AH^2}=\sqrt{10^2-5^2}=5\sqrt{3}$.

$\because \triangle ABC$是等腰直角三角形,

$\therefore \angle CAB=45°$.

$\therefore \angle AEH=45°$,$\therefore EH=AH=5$.

$\therefore DE=DH-EH=5\sqrt{3}-5$.

(2)$\because DH\perp AB$且$AH=HDB=\frac{3}{4}$,

$\therefore$可设$BH=3k\ (k>0)$,则$DH=4k$,$DB=5k$.

$\because BD=AB=10$,

$\therefore 5k=10$,解得$k=2$.

$\therefore DH=8$,$BH=6$,$\therefore AH=4$.

又易知$EH=AH=4$,

$\therefore DE=DH-EH=4$.

7. **解**:$\because AD$,CE是$\triangle ABC$的高,

$\therefore \angle ADB=\angle CEB=90°$.

又$\because B=B$,$\therefore \triangle ADB\backsim\triangle CEB$,

$\therefore \frac{BD}{BE}=\frac{BA}{BC}$,即$\frac{BD}{BA}=\frac{BE}{BC}$.

又$\because B=B$,$\therefore \triangle DBE\backsim\triangle ABC$.

$\therefore \angle ACB=\angle DEB$.

设$CD=x$,则$DB=6-x$.

在$\mathrm{Rt}\triangle ABD$中,$AD^2=AB^2-DB^2$,

在$\mathrm{Rt}\triangle ACD$中,$AD^2=AC^2-CD^2$,

$\therefore AB^2-DB^2=AC^2-CD^2$.

$\because AB=4$,$AC=5$,$\therefore 4^2-(6-x)^2=5^2-x^2$,解得$x=\frac{15}{4}$.

$\therefore$在$\mathrm{Rt}\triangle ACD$中,$\cos\angle ACB=\frac{CD}{AC}=\frac{\frac{15}{4}}{5}=\frac{3}{4}$.

$\because \angle ACB=\angle DEB$,$\therefore \cos\angle DEB=\frac{3}{4}$.

点拨:利用等角代换法,将求$\angle DEB$的余弦值转化为求角度相同的$\angle ACB$的余弦值.

8. (1)**证明**:由题意可得$\angle A=\angle D=\angle C=\angle BFE=90°$,

$\therefore \angle ABF=90°-\angle AFB$,$\angle DFE=180°-\angle BFE-\angle AFB=90°-\angle AFB$.

$\therefore \angle ABF=\angle DFE$.

$\therefore \triangle ABF\backsim\triangle DFE$.

(2)**解**:由折叠可得$FB=BC$,$EF=EC$.

$\because \sin\angle DFE=\frac{1}{3}$,$\therefore \frac{DE}{EF}=\frac{1}{3}$,

即$EF=3DE$.

$\because AB=CD=DE+EC=DE+EF=4DE$,$DF=\sqrt{EF^2-DE^2}=2\sqrt{2}DE$.

$\because \triangle ABF\backsim\triangle DFE$,$\therefore \frac{EF}{DF}=\frac{FB}{AB}$,即$FB=\frac{EF\cdot AB}{DF}=\frac{3DE\cdot 4DE}{2\sqrt{2}DE}=3\sqrt{2}DE$.

又$\because FB=BC$,$EF=EC$,

$\therefore \tan\angle EBC=\frac{EC}{BC}=\frac{3DE}{3\sqrt{2}DE}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

9. **解**:(1)$\because \tan\angle ABO=\frac{1}{2}=\frac{OE}{EB}$,$EB=EO+OB=6$,

$\therefore CE=3$,$\therefore C(-2,3)$,

于是可求得反比例函数的解析式为$y=-\frac{6}{x}$.

(2)$\because \tan\angle ABO=\frac{1}{2}=\frac{OA}{OB}$,$OB=4$,

$\therefore OA=2$,$B(4,0)$.

$\therefore A(0,2)$.设直线AB对应的函数解析式为$y=kx+b$,

将点$A(0,2)$,$B(4,0)$的坐标分别代入$y=kx+b$,

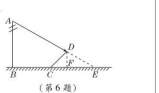
可得$b=2$,$k=-\frac{1}{2}$,

$\therefore$直线AB对应的函数解析式为$y=-\frac{1}{2}x+2$.

第3课时　解直角三角形在实际中的一般应用

1. 69　**2.** B　**3.** A　**4.** C　**5.** $\sqrt{3}$

6. $6\sqrt{2}$　**点拨**:如图,延长AD交地面于点E,



(第6题)

过点D作$DF\perp CE$于点F,则$DF//AB$.

$\therefore \angle A=\angle FDE=60°$.

$\because \angle DCF=45°$,$CD=4$ m,

$\therefore CF=DF=2\sqrt{2}$ m.

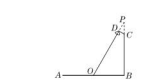
$\therefore EF=DF\cdot\tan 60°=2\sqrt{6}$ m.

$\therefore BE=6\sqrt{6}$ m.

$\therefore \frac{BE}{AB}=\tan 60°=\sqrt{3}$,

$\therefore AB=2\sqrt{2}$ m.

7. D　**点拨**:如图,延长EO,BC交于点P.



(第7题)

易知$\angle ODC=\angle B=90°$,$\angle P=30°$,$OB=11$ m,$CD=2$ m,

$\therefore$在$\mathrm{Rt}\triangle CPD$中,$DP=\frac{DC}{\tan 30°}=2\sqrt{3}$ m,$PC=\frac{CD}{\sin 30°}=4$ m.

$\because \angle P=\angle P$,$\angle PDC=\angle B=90°$,

$\therefore \triangle PDC\backsim\triangle PBO$.

$\therefore \frac{PD}{PB}=\frac{CD}{OB}$,

$\therefore PB=\frac{PD\cdot OB}{CD}=\frac{2\sqrt{3}\times 11}{2}=11\sqrt{3}$(m),

$\therefore BC=PB-PC=(11\sqrt{3}-4)$m.

8. **解**:由题意可知$AC=45.54-2.34=43.2$(m).

在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中,$\angle ABC=\alpha=8°35'$,

$\tan\angle ABC=\frac{AC}{BC}$,

$\therefore BC=\frac{AC}{\tan\angle ABC}=\frac{43.2}{\tan 8°35'}\approx 286$(m).

易错总结:解题时容易弄错AC的高度,A处的标高为45.54 m(当水位为0 m时的高度),当水位为$+2.34$ m时,即水位上升了2.34 m,则AC的高度为$45.54-2.34=43.2$(m).

9. **解**:过点B作$BH\perp AA_1$于点H.

在$\mathrm{Rt}\triangle ABH$中,$AB=500$米,$\angle BAH=30°$,

$\therefore BH=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 500=250$(米).

$\because A_1B_1=BH=250$米.

在$\mathrm{Rt}\triangle BB_1C$中,$BC=800$米,$\angle CBB_1=60°$,

$\therefore \frac{B_1C}{BC}=\sin\angle CBB_1=\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\therefore B_1C=\frac{\sqrt{3}}{2}BC=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 800=400\sqrt{3}$(米).

$\therefore$检修人员上升的垂直高度$CA_1=CB_1+A_1B_1=400\sqrt{3}+250\approx 943$(米).

答:检修人员上升的垂直高度CA_1约为943米.

点拨:测不易直接测量的物体的高度,测河宽等,关键在于构造出直角三角形,通过测量角的度数和测量边的长度,计算出所要求的物体的高度或长度.根据题目已知特点选用适当锐角三角函数或边角关系去

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解直角三角形，得到数学问题的答案，再转化得到实际问题的答案.

10. 解：(1)如图①，过点 E 作 $EM \perp CD$ 于点 M.

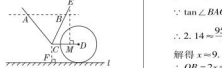
由题意知 $\angle BCM = 64°$，$EC = BE + BE = 60 + 15 = 75$(cm)，

$\therefore EM = EC \cdot \sin\angle BCM = 75 \times \sin 64° \approx 67.5$(cm).

$\because CD$ 与地面 l 平行，

$\therefore CF = 32$ cm.

则坐垫 E 到地面的距离为 $EM + CF \approx 67.5 + 32 = 99.5$(cm).



(第 10 题)

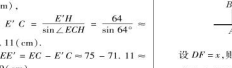
(2)如图②，过点 E' 作 $E'H \perp CD$ 于点 H.

由题意知 $E'H = 80 \times 0.8 = 64$(cm)，

则 $E'C = \dfrac{E'H}{\sin\angle ECH} = \dfrac{64}{\sin 64°} \approx 71.11$(cm).

$\therefore EE' = EC - E'C \approx 75 - 71.11 \approx 3.9$(cm).

11. 解：(1)如图，



(第 11 题)

过点 E 作 $EM \perp AB$，垂足为点 M.

设 AB 为 x 米.

在 Rt△ABF 中，$\angle AFB = 45°$，

$\therefore BF = AB = x$ 米.

$\therefore BC = BF + FC = (x + 25)$ 米.

在 Rt△AEM 中，$\angle AEM = 22°$，$AM = AB - BM = AB - CE = (x - 2)$ 米，$ME = BC = (x + 25)$ 米，

$\tan 22° = \dfrac{AM}{ME}$，



第 11 题答案

则 $\dfrac{x-2}{x+25} \approx \dfrac{2}{5}$，

解得 $x \approx 20$.

即办公楼 AB 的高度约为 20 米.

(2)由(1)可得 $ME = x + 25 \approx 20 + 25 = 45$(米).

在 Rt△AME 中，$\cos 22° = \dfrac{ME}{AE}$，

$\therefore AE = \dfrac{ME}{\cos 22°} \approx \dfrac{45}{\dfrac{15}{16}} = 48$(米).

即 A，E 之间的距离约为 48 米.

12. 解：设 $OE = OB = 2x$ cm，

则 $OD = DE + OE = (190 + 2x)$ cm.

$\because \angle ADE = 30°$，

$\therefore OC = \dfrac{1}{2}OD = (95 + x)$ cm.

$\therefore BC = OC - OB = 95 + x - 2x = (95 - x)$ cm.

$\because \tan\angle BAC = \dfrac{BC}{AC}$，

$\therefore 2.14 \approx \dfrac{95 - x}{40}$，

解得 $x \approx 9.4$.

$\therefore OB = 2x \approx 19$(cm)，

即 OB 的长度约为 19 cm.

第 4 课时　用解直角三角形解视角问题

1. B　**2.** C

3. C　**点拨**：如图，过点 O 作 $OE \perp AC$ 于点 E，延长 BD 交 OE 于点 F. 易知 $BF \perp OE$.



(第 3 题)

设 $DF = x$，则 $BF = 3 + x$，

在 Rt△ODF 中，$\tan 65° = \dfrac{OF}{DF}$，

$\therefore OF = DF \cdot \tan 65° \approx 2x$.

在 Rt△OBF 中，$\tan 35° = \dfrac{OF}{BF}$，

$\therefore OF = (3 + x)\tan 35°$，

$\therefore 2x \approx (3 + x)\tan 35°$，

解得 $x \approx 1.5$.

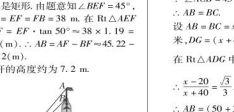
$\therefore OF \approx 1.5 \times 2.1 = 3.15$(米).

$\therefore OE \approx 3.15 + 1.5 = 4.7$(米).

4. 7.2 m　**点拨**：如图，易知四边形 $CDEF$ 是矩形. 由题意知 $\angle BEF = 45°$，

$\therefore CD = EF = FB = 38$ m. 在 Rt△AEF 中，$AF = EF \cdot \tan 50° \approx 38 \times 1.19 = 45.22$(m)，$\therefore AB = AF - BF \approx 45.22 - 38 \approx 7.2$(m).

$\therefore$ 旗杆的高度约为 7.2 m.



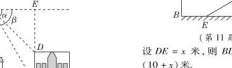
(第 4 题)

5. C　**6.** $1\,200(\sqrt{3} - 1)$

7. $(15\sqrt{3} + 15)$

8. $40\sqrt{3}$

9. 解：如图，延长 CD，交 AE 于点 E，可得 $DE \perp AE$.



(第 9 题)

在 Rt△AED 中，$AE = BC = 40$ m，$\angle EAD = 45°$，

$\therefore ED = 40$ m.

在 Rt△ABC 中，$\angle ACB = 60°$，$BC = 40$ m，

$\therefore AB = BC \cdot \tan 60° = 40\sqrt{3} \approx 69.3$(m).

$\therefore CD = EC - ED = AB - ED \approx 69.3 - 40 = 29.3$(m).

答：这两座建筑物 AB，CD 的高度分别约为 69.3 m，29.3 m.

10. 解：在 Rt△DEC 中，$\because i = \dfrac{DE}{EC} = \dfrac{1}{2}$，

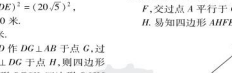
$DE^2 + EC^2 = CD^2$，$CD = 20\sqrt{5}$ 米，

$\therefore DE^2 + (2DE)^2 = (20\sqrt{5})^2$，

解得 $DE = 20$ 米.

$\therefore EC = 40$ 米.

如图，过点 D 作 $DG \perp AB$ 于点 G，过点 C 作 $CH \perp DG$ 于点 H，则四边形 $DEBG$，四边形 $DECH$，四边形 $BCHG$ 都是矩形.



(第 10 题)

$\because \angle ACB = 45°$，$AB \perp BC$，

$\therefore AB = BC$.

设 $AB = BC = x$ 米，则 $AG = (x - 20)$ 米，$DG = (x + 40)$ 米.

在 Rt△ADG 中，$\tan\angle ADG = \dfrac{AG}{DG}$，

$\therefore \dfrac{x - 20}{x + 40} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$，解得 $x = 50 + 30\sqrt{3}$.

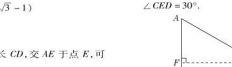
$\therefore AB = (50 + 30\sqrt{3})$ 米.

答：楼 AB 的高度为 $(50 + 30\sqrt{3})$ 米.

11. 解：如图，作 $CF \perp AB$，垂足为点 F.

$\because AB \perp BD$，$CD \perp BD$，

$\therefore$ 四边形 $CDBF$ 是矩形. $\therefore CF = BD$，$CD = BF$，$CF /\!/ BD$，$\therefore \angle ECF = \angle CED = 30°$.



(第 11 题)

设 $DE = x$ 米，则 $BD = BE + DE = (10 + x)$ 米.

$\because CF = (10 + x)$ 米.

在 Rt△CDE 中，$\tan\angle CED = \dfrac{CD}{DE}$，

$\therefore CD = x\tan 30°$ 米. 在 Rt△ACF 中，$\tan\angle CAF = \dfrac{AF}{CF}$，$\therefore AF = (10 + x)\tan 30°$ 米.

$\because AB = 30$ 米，$AB = AF + BF = AF + CD$，

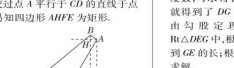
$\therefore x\tan 30° + (10 + x)\tan 30° = 30$，

解得 $x = 15\sqrt{3} - 5$.

$\therefore x\tan 30° = 15 - \dfrac{5}{3}\sqrt{3}$，即 $CD = \left(15 - \dfrac{5}{3}\sqrt{3}\right)$ 米.

答：立柱 CD 的高为 $\left(15 - \dfrac{5}{3}\sqrt{3}\right)$ 米.

12. 解：如图，过点 B 作 $BF \perp CE$ 于点 F，交过点 A 平行于 CD 的直线于点 H. 易知四边形 $AHFE$ 为矩形.



(第 12 题)

在 Rt△BCF 中，$BF = BC \cdot \sin\angle BCF \approx 5 \times 0.64 = 3.2$(m)，$CF = BC \cdot \cos\angle BCF \approx 5 \times 0.77 = 3.85$(m).

在 Rt△ADE 中，$DE = \dfrac{AE}{\tan\angle ADE} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \approx 1.73$(m).

$\therefore BH = BF - HF = BF - AE \approx 3.2 - 3 = 0.2$(m)，$AH = EF = CD + DE - CF \approx 2.7 + 1.73 - 3.85 = 0.58$(m).

$\therefore AB \approx \sqrt{BH^2 + AH^2} \approx \sqrt{0.2^2 + 0.58^2} \approx 0.6$(m).

答：AB 的长约为 0.6 m.

第 5 课时　用解直角三角形解方向角、坡角问题

1. 566　**2.** B

3. B　**点拨**：根据题意，得 $\angle CAB = 65° - 20° = 45°$，$\angle ACB = 40° + 20° = 60°$，$AB = 30\sqrt{2}$ km.

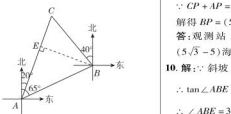
如图，过点 B 作 $BE \perp AC$ 于点 E，

$\therefore \angle AEB = \angle CEB = 90°$.

在 Rt△ABE 中，

$\because \angle EAB = 45°$，$AB = 30\sqrt{2}$ km，

$\therefore AE = BE = AB \cdot \sin 45° = 30\sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 30$(km).



(第 3 题)

在 Rt△CBE 中，$\because \angle ACB = 60°$，

$\therefore CE = \dfrac{BE}{\tan 60°} = \dfrac{30}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{3}$(km).

$\therefore AC = AE + CE = (30 + 10\sqrt{3})$ km.

4. 1. 02

5. 8　**点拨**：分别过 A，D 作下底的垂线，设垂足分别为 F，G. 在 Rt△ABF 中，已知坡面长和坡角的度数，可求得铅直高度 AF 的值，也就得到了 DG 的长；在 Rt△CDG 中，由勾股定理求 CG 的长，在 Rt△DEG 中，根据正切函数的定义得到 GE 的长；根据 $CE = GE - CG$ 即可求解.

6. B　**点拨**：延长 AB 交 ED 的延长线于 M，作 $CJ \perp DM$ 于 J，则四边形 $BMJC$ 是矩形，在 Rt△CDJ 中求出 CJ，DJ，再根据 $\tan\angle AEM = \dfrac{AM}{EM}$ 构建方程即可解决问题.

7. B　**点拨**：由题意可得：$\angle APB = 60° - 15° = 45°$，$\angle PBH = 60°$，则可由锐角三角函数求得 PB 的长，又由山坡的坡度 i 为 $1 : \sqrt{3}$，可求得 $\angle ABC$ 的度数，从而得出 $\triangle ABP$ 是等腰直角三角形，则可求得答案.

8. 解：依题意可知，$\angle DCB = 45°$，$\angle DCA = 60°$.

$\because BD = CD = 200$ m.

在 Rt△ACD 中，$AD = CD \cdot \tan\angle DCA = 200\sqrt{3}$ m.

$\therefore AB = 200\sqrt{3} - 200 = 200 \times (\sqrt{3} - 1) \approx 146$(m).

$\therefore$ 实际车速约为 $146 \div 10 = 14.6$(m/s).

$\because 14.6 < 16$，

$\therefore$ 此车没有超过该路段 16 m/s 的限制速度.

9. 解：(1)30；45

(2)$\because BP \perp AC$，

$\therefore \angle BPA = \angle BPC = 90°$.

易知 $\triangle BPC$ 为等腰直角三角形，

$\therefore BP = CP$.

$\because \angle BAC = 30°$，

$\therefore AP = \dfrac{BP}{\tan 30°} = \sqrt{3}BP$.

$\because CP + AP = AC$，$\therefore BP + \sqrt{3}BP = 10$，

解得 $BP = (5\sqrt{3} - 5)$ 海里.

答：观测站 B 到 AC 的距离 BP 为 $(5\sqrt{3} - 5)$ 海里.

10. 解：$\because$ 斜坡 AB 的坡度为 $1 : \sqrt{3}$，

$\therefore \tan\angle ABE = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

$\therefore \angle ABE = 30°$.

在 Rt△AEB 中，$AB = 200$ 米，

$\therefore AE = \dfrac{1}{2}AB = 100$ 米.

$\therefore AC = 20$ 米，

$\therefore CE = AE - AC = 80$ 米.

$\because$ 斜坡 CD 的坡度为 $1 : 4$，

$\therefore \dfrac{CE}{DE} = \dfrac{1}{4}$，即 $\dfrac{80}{DE} = \dfrac{1}{4}$，

解得 $DE = 320$.

$\therefore CD = \sqrt{CE^2 + DE^2} = \sqrt{80^2 + 320^2} = 80\sqrt{17}$(米).

答：斜坡 CD 的长是 $80\sqrt{17}$ 米.

11. 解：$\because BH = 0.6$ 米，$\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$，

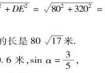
$\therefore AB = \dfrac{BH}{\sin\alpha} = \dfrac{0.6}{\dfrac{3}{5}} = 1$(米).

$\therefore AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{1^2 - 0.6^2} = 0.8$(米).

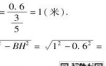
$\therefore AF = FC = 2$ 米，

$\therefore BF = 1$ 米.

如图，作 $FJ \perp BG$ 于点 J，作 $EK \perp FJ$ 于点 K.



第 11 题答案



(第 11 题)

$\because \angle EKF = \angle FJB = \angle AHB = 90°$，

$\angle EFK = \angle FBJ = \angle ABH$，$BF = AB$，

$\therefore \triangle EFK \cong \triangle ABH$，$\triangle FBJ \cong \triangle ABH$.

$\therefore \dfrac{EF}{AB} = \dfrac{EK}{AH}$，$BJ = BH = 0.6$ 米.

$\therefore \dfrac{1.6}{1} = \dfrac{EK}{0.8}$，解得 $EK = 1.28$.

$\therefore BJ + EK = 0.6 + 1.28 = 1.88$(米).

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∵ 1.88 < 2，∴ 木箱上部顶点 E 不会触碰到汽车货厢顶部.

阶段核心归类

1. **解**：当车门打开角度 $\angle AOB$ 为 40° 时，车门不会碰到墙. 理由如下：

如图，过点 A 作 $AC \perp OB$，垂足为点 C，

在 Rt△ACO 中，

∵ $\angle AOC = 40°$，$AO = 1.2$ m，

∴ $AC = AO \cdot \sin\angle AOC \approx 1.2 \times 0.64 = 0.768$(m).

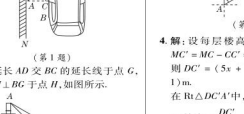
∵ 汽车靠墙一侧 OB 与墙 MN 平行且距离为 0.8 m，$0.768 < 0.8$，

∴ 车门不会碰到墙.



（第 1 题）

2. **解**：延长 AD 交 BC 的延长线于点 G，作 $DH \perp BC$ 于点 H，如图所示.



（第 2 题）

在 Rt△DHC 中，$\angle DCH = 60°$，$CD = 4$ m，

则 $CH = CD \cdot \cos\angle DCH = 4 \times \cos 60° = 2$(m)，

$DH = CD \cdot \sin\angle DCH = 4 \times \sin 60° = 2\sqrt{3}$(m).

∵ $DH \perp BG$，又易知 $\angle G = 30°$，

∴ $HG = \dfrac{DH}{\tan G} = \dfrac{2\sqrt{3}}{\tan 30°} = 6$(m).

∴ $CG = CH + HG = 2 + 6 = 8$(m).

设 $AB = x$ m，

∵ $AB \perp BG$，$\angle G = 30°$，$\angle BCA = 45°$，

∴ $BC = x$ m，$BG = \dfrac{AB}{\tan G} = \dfrac{x}{\tan 30°} = \sqrt{3}x$ m.

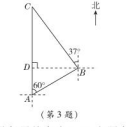
∵ $BG - BC = CG$，∴ $\sqrt{3}x - x = 8$.

解得 $x = 11$.

答：电线杆的高约为 11 m.

3. **解**：如图，过点 B 作 $BD \perp AC$，垂足为点 D，设 $AD = x$ km，在 Rt△ABD 中，$\tan\angle BAD = \dfrac{BD}{AD}$，即 $\sqrt{3} = \dfrac{BD}{x}$，∴ $BD = \sqrt{3}x$ km. 在 Rt△BCD 中，$\angle CBD = 90° - 37° = 53°$，$\tan\angle CBD = \dfrac{CD}{BD}$，即 $\dfrac{4}{3} \approx \dfrac{CD}{\sqrt{3}x}$，∴ $CD \approx \dfrac{4\sqrt{3}x}{3}$ km. ∴ $\dfrac{4\sqrt{3}x}{3} + x \approx 13$，解得 $x \approx 4\sqrt{3} - 3$. ∴ $BD \approx (12 - 3\sqrt{3})$ km. 在 Rt△BCD 中，$\cos\angle CBD = \dfrac{BD}{BC}$，即 $\dfrac{3}{5} = \dfrac{12 - 3\sqrt{3}}{BC}$，∴ $BC \approx (20 - 5\sqrt{3})$ km.

答：B，C 两地的距离约为 $(20 - 5\sqrt{3})$ km.



（第 3 题）

4. **解**：设每层楼高为 x m，由题意得 $MC = AC - CC' = 2.5 - 1.5 = 1$(m)，则 $DC' = (5x + 1)$ m，$EC' = (4x + 1)$ m.

在 Rt△$DC'A'$ 中，$\angle DA'C' = 60°$，

∴ $C'A' = \dfrac{DC'}{\tan 60°} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}(5x + 1)$ m.

在 Rt△$EC'B'$ 中，$\angle EB'C' = 30°$，

∴ $C'B' = \dfrac{EC'}{\tan 30°} = \sqrt{3}(4x + 1)$ m.

∵ $A'B' = C'B' - C'A' = AB$，

∴ $\sqrt{3}(4x + 1) - \dfrac{\sqrt{3}}{3}(5x + 1) = 14$.

解得 $x = 2\sqrt{3} - \dfrac{2}{7} \approx 3.17$.

∴ $DC = DC' + CC' \approx 5x + 1 + 1.5 \approx 18.4$(m).

答：居民楼的高度约为 18.4 m.

全章热门考点整合应用

1. **思路导引**：求 $\angle BCD$ 的三个三角函数值，关键要弄清它们的定义. 由于 $\angle BCD$ 是 Rt△BCD 中的一个内角，根据定义，仅一边 BC 是已知的. 此时有两条路可走，一是设法求出 BD 或 CD，二是把 $\angle BCD$ 转化成 $\angle A$. 显然走第二条路较为便，因为在 Rt△ABC 中，三边均可得出，利用三角函数的定义即可求出答案.

解：在 Rt△ABC 中，∵ $\angle ACB = 90°$，

∴ $\angle BCD + \angle ACD = 90°$.

∵ $CD \perp AB$，∴ $\angle ACD + \angle A = 90°$.

∴ $\angle BCD = \angle A$.

（1）原式 $= \dfrac{1}{4} \times 1^2 + \dfrac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} - 3 \times \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{\frac{1}{2}} - 1 = \dfrac{1}{4} + 4 - 3 \times \dfrac{3}{4} + 2 - 1 = 3$.

（2）原式 $= \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 1 \times \dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} = 0$.

2. **思路导引**：由 $\sin B = \dfrac{DE}{DB} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{3}{5}$，可设 $DE = CD = 3k$，则 $DB = 5k$，求得 $BC = 8k$，$AC = 6k$，$AB = 10k$. 再由 $AC + CD = 9$，可列出以 k 为未知数的方程，进而求出各边的长. 在 Rt△BDE 中，由勾股定理求 BE 的长，过点 C 作 $CF \perp AB$ 于点 F，再用勾股定理求出 CE 的长.

解：∵ $\sin B = \dfrac{3}{5}$，$\angle ACB = 90°$，

$DE \perp AB$，

∴ $\sin B = \dfrac{DE}{DB} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{3}{5}$.

设 $DE = CD = 3k$，则 $DB = 5k$.

∴ $CB = 8k$，$AC = 6k$，$AB = 10k$.

∵ $AC + CD = 9$，∴ $6k + 3k = 9$.

∴ $k = 1$.

∴ $DE = 3$，$DB = 5$.

∴ $BE = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$.

过点 C 作 $CF \perp AB$ 于点 F，则 $CF /\!/ DE$.

∴ $\triangle BDE \backsim \triangle BCF$. ∴ $\dfrac{DE}{CF} = \dfrac{BE}{BF} = \dfrac{BD}{BC} = \dfrac{5}{8}$，求得 $CF = \dfrac{24}{5}$，$BF = \dfrac{32}{5}$.

∴ $EF = \dfrac{12}{5}$.

在 Rt△CEF 中，$CE = \sqrt{CF^2 + EF^2} = \dfrac{12}{5}\sqrt{5}$.

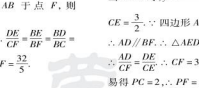
点拨：**方程思想**是一种重要的思想方法，运用方程思想可以建立已知量和待求量之间的关系式. 同学们在平时学习时，应该不断积累用方程思想解题的经验.

3. **解**：(1) 原式 $= \dfrac{\sqrt{3}}{3} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \times 1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{4}$.

（2）原式 $= \dfrac{1}{4} \times 1^2 + \dfrac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} - 3 \times \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{\frac{1}{2}} - 1 = \dfrac{1}{4} + 4 - 3 \times \dfrac{3}{4} + 2 - 1 = 3$.

4. **解**：$MN \perp CD$. 理由如下：

如图，连结 ND，NC. 在 △ABD 中，$\angle ADB = 90°$，N 是 AB 的中点，



（第 4 题）

∴ $ND = \dfrac{1}{2}AB$. 同理 $NC = \dfrac{1}{2}AB$.

∴ $ND = NC$.

∵ 在 △DNC 中，$ND = NC$，M 是 CD 的中点，∴ $MN \perp CD$.

5. **解**：设 $CE = y$，(1)∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴ $AB = CD = 4$，$BC = AD = 5$，$\angle B = \angle BCD = \angle D = 90°$.

∵ $BP = a$，$CE = y$，

∴ $PC = 5 - a$，$DE = 4 - y$.

∵ $AP \perp PE$，∴ $\angle APE = 90°$.

∴ $\angle APB + \angle CPE = 90°$.

∵ $\angle APB + \angle BAP = 90°$，

∴ $\angle CPE = \angle BAP$.

∴ $\triangle ABP \backsim \triangle PCE$. ∴ $\dfrac{BP}{CE} = \dfrac{AB}{PC}$，即 $y = \dfrac{-a^2 + 5a}{4}$，即 $CE = \dfrac{-a^2 + 5a}{4}$.

（2）四边形 $APFD$ 是菱形. 理由如下：

当 $a = 3$ 时，$y = \dfrac{-3^2 + 5 \times 3}{4} = \dfrac{3}{2}$，即 $CE = \dfrac{3}{2}$.

∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴ $AD /\!/ BF$，∴ $\triangle AED \backsim \triangle FEC$.

∴ $\dfrac{AD}{CF} = \dfrac{DE}{CE}$，∴ $CF = 3$.

易得 $PC = 2$，∴ $PF = PC + CF = 5$.

∵ $PF = AD$，∴ 四边形 $APFD$ 是平行四边形. 在 Rt△APB 中，$AB = 4$，$BP = 3$，$\angle B = 90°$，∴ $AP = 5 = PF$.

∴ 四边形 $APFD$ 是菱形.

（3）根据 $\tan\angle PAE = \dfrac{1}{2}$ 可得 $\dfrac{AP}{PE} = 2$.

易得 $\triangle ABP \backsim \triangle PCE$，∴ $\dfrac{BP}{CE} = \dfrac{AB}{PC} = \dfrac{AP}{PE} = 2$.

∴ $\dfrac{a}{y} = \dfrac{4}{5 - a} = 2$ 或 $\dfrac{a}{y} = \dfrac{4}{a - 5} = 2$，

解得 $a = 3$，$y = 1.5$ 或 $a = 7$，$y = 3.5$.

∴ $a = 3$ 或 $a = 7$.

6. **解**：在 Rt△ABC 中，

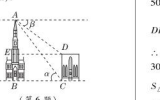
∵ $\angle ACB = \alpha = 53°$，$BC = 60$ m，

∴ $AB = BC \cdot \tan\alpha = 60 \times \tan 53° \approx 60 \times \dfrac{4}{3} = 80$(m).

如图，过点 D 作 $DE \perp AB$，垂足为 E. 由平行线的性质，得 $\angle ADE = \beta = 37°$. 易得四边形 $BCDE$ 是矩形，

∴ $DE = BC = 60$ m，$DC = BE$.

∴ $AE = DE \cdot \tan\beta = 60 \times \tan 37° \approx 60 \times \dfrac{3}{4} = 45$(m).



（第 6 题）

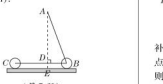
∴ $CD = BE = AB - AE \approx 80 - 45 = 35$(m).

答：两座建筑物 AB 与 CD 的高度分别约是 80 m，35 m.

7. **解**：如图，过点 A 作 $AD \perp BC$ 于点 D，延长 AD 交地面于点 E.

∵ $\sin\angle ABD = \dfrac{AD}{AB}$，

∴ $AD = AB \cdot \sin\angle ABD \approx 92 \times 0.94 = 86.48$(cm).



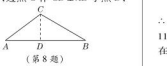
（第 7 题）

∵ $DE = 6$ cm，

∴ $AE = AD + DE \approx 86.48 + 6 = 92.5$(cm).

答：把手 A 离地面的高度约为 92.5 cm.

8. **解**：如图，过点 C 作 $CD \perp AB$ 于点 D，



（第 8 题）

在 Rt△BDC 中，

∵ $\angle B = 30°$，$BC = 12$，

∴ $CD = BC \times \sin 30° = 6$，$BD = BC \times \cos 30° = 6\sqrt{3}$.

在 Rt△ACD 中，

∵ $\tan A = \dfrac{CD}{AD} = \dfrac{3}{4}$，$CD = 6$，

∴ $AD = 8$.

∴ $AC = \sqrt{CD^2 + AD^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.

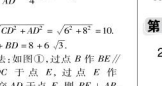
$AB = AD + BD = 8 + 6\sqrt{3}$.

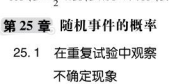
9. **解**：分割法：如图①，过点 B 作 $BE //$ AD 交 DC 于点 E，过点 E 作 $EF // AB$ 交 AD 于点 F，则 $BE \perp AB$，$EF \perp AD$. ∴ 四边形 $ABEF$ 是矩形. ∴ $EF = AB$，$AF = BE$. ∵ $\angle ABC = 120°$，∴ $\angle CBE = 120° - 90° = 30°$，$\angle D = 180° - 120° = 60°$.

在 Rt△BCE 中，

$BE = \dfrac{BC}{\cos\angle CBE} = \dfrac{50\sqrt{3}}{\cos 30°} = \dfrac{50\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 100$，$EC = BC \cdot \tan\angle CBE = 50\sqrt{3} \times \tan 30° = 50\sqrt{3} \times \dfrac{\sqrt{3}}{3} = 50$. 在 Rt△$DEF$ 中，$DF = \dfrac{EF}{\tan D} = \dfrac{AB}{\tan 60°} = \dfrac{30\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 30$.

∴ $AD = AF + DF = BE + DF = 100 + 30 = 130$. ∴ $S_{四边形ABCD} = S_{矩形ABED} + S_{\triangle BCE} = \dfrac{1}{2}(AD + BE) \cdot AB + \dfrac{1}{2}BC \cdot EC = \dfrac{1}{2} \times (130 + 100) \times 30\sqrt{3} + \dfrac{1}{2} \times 50\sqrt{3} \times 50 = 4700\sqrt{3}$.





（第 9 题）

补形法：如图②，延长 DA，CB 交于点 E，

则 $\angle ABE = 180° - \angle ABC = 60°$，

$\angle E = 90° - \angle ABE = 30°$.

在 Rt△ABE 中，

$AE = AB \cdot \tan 60° = 30\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 90$，

$BE = \dfrac{AB}{\cos 60°} = \dfrac{30\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = 60\sqrt{3}$.

∴ $CE = BE + BC = 60\sqrt{3} + 50\sqrt{3} = 110\sqrt{3}$.

在 Rt△DCE 中，$DC = CE \cdot \tan 30° = 110\sqrt{3} \times \dfrac{\sqrt{3}}{3} = 110$.

∴ $S_{四边形ABCD} = S_{\triangle DCE} - S_{\triangle ABE} = \dfrac{1}{2}DC \cdot CE - \dfrac{1}{2}AB \cdot AE = \dfrac{1}{2} \times 110 \times 110\sqrt{3} - \dfrac{1}{2} \times 30\sqrt{3} \times 90 = 4700\sqrt{3}$.

第 25 章 随机事件的概率

25.1 在重复试验中观察不确定现象

第 1 课时 事件的认识

1. B　**2.** D　**3.** D　**4.** D　**5.** A

6. (4)；(3)(6)；(1)

7. D

8. D　**点拨**：要想取出红球的可能性大，红球的数量只要多于 5 个即可.

9. C　**点拨**：本题易对随机事件发生的可能性大小理解不透彻而致错，李

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

东夺冠的可能性是 80% 表示李东有可能夺冠，且夺冠的可能性是 80%．

10. 解：按事件名称划分为不可能事件：①⑤⑦；随机事件：②③④⑥．按事件的确定性划分为确定事件：①⑤⑦；不确定事件：②③④⑥．

11. 解：(1) 红色，因为红球最多．

(2) 不一样．

(3) 取 2 个红球出来，或放 2 个白球进去．

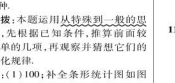
点拨：(3) 题答案不唯一，合理即可．

12. 解：(1) 四个舞蹈演员 A_1，A_2，A_3，A_4 跳舞，面对观众作队形变化的情况有 24 种，A_1 和 A_2 相邻的情况有：$A_1A_2A_3A_4$，$A_1A_2A_4A_3$，$A_3A_4A_2A_1$，$A_4A_3A_2A_1$，$A_4A_3A_1A_2$，$A_3A_4A_1A_2$，$A_2A_1A_3A_4$，$A_2A_1A_4A_3$，$A_3A_2A_1A_4$，$A_4A_2A_1A_3$，$A_1A_2A_3A_4$，$A_1A_2A_4A_3$，共 12 种，∴ 演员 A_1 和 A_2 相邻的可能性是 $\frac{1}{2}$．

(2) n 个舞蹈演员跳舞，面对观众作队形变化的情况有 $1\times2\times3\times\cdots\times n$ 种．

点拨：本题运用**从特殊到一般的思想**，先根据已知条件，推算前面较简单的几项，再观察并猜想它们的变化规律．

13. 解：(1) 100；补全条形统计图如图所示．



(第 13 题)

(2) 30；10；144°

(3) 由扇形统计图可知，参加跳绳的人所占百分比最大，故小明参加跳绳的可能性最大．

第 2 课时　频率的稳定性

1. B　**2.** D

3. D　**点拨**：由题图可知，共有 $4+12+6+20+8=50$(人)，

其中最喜欢篮球的学生有 20 人，

故最喜欢篮球的学生的频率是 $20\div50=40\%$，故选 D．

4. 100

5. D　**6.** C　**7.** B

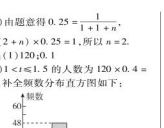
8. 解：(1) 当 $n=1$ 时，袋中红球数量和白球数量相同，故摸到两种颜色的球的可能性相同．

(2) 由题意得 $0.25=\frac{1}{1+1+n}$，

即 $(2+n)\times0.25=1$，所以 $n=2$．

9. 解：(1) 120；0.1

(2) $1<t\leqslant1.5$ 的人数为 $120\times0.4=48$，补全频数分布直方图如下：



(第 9 题)

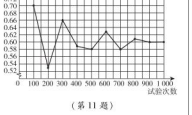
(3) 估计该校学生每天课外阅读时间超过 1 h 的人数为 $1\,200\times(0.4+0.1)=600$(人)．

10. 解：(1) 15；90　(2) 50；10

(3) 易知成绩等级为“良好”的男生人数占被测试男生总人数的百分比为 40%，故估计该校八年级男生成绩等级为“良好”的学生人数为 $180\times40\%=72$(人)．

11. 解：(1) 0.70；0.53；0.66；0.59；0.58；0.63；0.58；0.61；0.60；0.60．画出的折线统计图如图所示．

(2) 任意摸出一个球是白色球的频率约为 0.6．(答案合理即可)



(第 11 题)

25.2　随机事件的概率

第 1 课时　概率及其意义

1. D　**点拨**：本事件是随机事件，正面朝上和反面朝上的概率都为 0.5，故选 D．

2. C　**3.** A

4. (1) 1　(2) 0　(3) $0<P(A)<1$

5. D　**点拨**：必然事件的概率为 1，不可能事件的概率为 0，随机事件的概率大于 0 且小于 1．故选 D．

6. A　**7.** A　**8.** C　**9.** C　**10.** D

11. B　**点拨**：只有①③符合条件．故选 B．

12. A　**点拨**：本题易对概率的含义理解不透彻而致错，明天的降水概率为 95% 意味着明天有可能会下雨，只是可能性比较大而已．

13. 解：(1) 发生的可能性很大，但不一定发生，0.9．

(2) 发生的可能性很小，0.1．

(3) 发生与不发生的可能性一样，0.5．

14. 解：(1) 1 或 2

(2) 所有可能的密码是：911，912，913，914，915，916，917，918，919，920；

能被 3 整除的有 912，915，918．

密码能被 3 整除的概率是 $\frac{3}{10}$．

(3) 小张同学是 6 月份出生，6 月份只有 30 天，

∴ 第一个转轮设置的数字是 6，第二个转轮设置的数字可能是 0，1，2，3；第三个转轮设置的数字可能是 0，1，2，…，9(第二个转轮设置的数字是 0 时，第三个转轮设置的数字不能是 0；第二个转轮设置的数字是 3 时，第三个转轮设置的数字只能是 0)

∴ 一共有 $9+10+10+1=30$(个)，

∴ 用小张生日设置的密码的所有可能个数为 30 个．(也可以直接根据 6 月份只有 30 天，有 30 个不同的数，得出设置的密码的所有可能个数为 30 个)

15. 解：共有 4 种等可能的结果，其中取出的扇子和手绢都是红色的有 1 种结果，

则取出的扇子和手绢都是红色的概率为 $\frac{1}{4}$．

16. 解：(1) 21；21．5

(2) 因为低于 20 ℃的天数有 3 天，所以扇形统计图中扇形 A 的圆心角的度数为 $360^\circ\times\frac{3}{8}=135^\circ$．

答：扇形统计图中扇形 A 的圆心角的度数为 135°．

(3) 将该市 5 月 1 日至 5 日的 5 天中气温低于 12 时的气温依次记为 A_1，A_2，A_3，A_4，A_5，

则抽到 2 天中气温低于 12 时的气温的有 (A_1A_2)，(A_1A_3)，(A_1A_4)，(A_1A_5)，(A_2A_3)，(A_2A_4)，(A_2A_5)，(A_3A_4)，(A_3A_5)，(A_4A_5)，共 10 种不同的取法，

其中抽到 2 天中气温低于 12 时的气温均低于 20 ℃的有 (A_1A_2)，(A_1A_3)，(A_2A_3)，共 3 种不同的取法，

因此恰好抽到 2 天中气温低于 12 时的气温均低于 20 ℃的概率为 $\frac{3}{10}$．

第 2 课时　频率与概率

1. 0.92　**2.** D　**3.** D　**4.** D

5. C

6. D　**点拨**：由题图可知，事件发生的概率在 0.33 左右，A 选项中的事件发生的概率是 0.5，B 选项中的事件发生的概率是 $\frac{1}{6}$，C 选项中的事件发生的概率是 0.25，D 选项中的事件发生的概率是 $\frac{1}{3}$，故选 D．

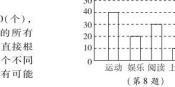
7. 错解：A

诊断：用频率估计概率时，要注意试验的次数越多，事件发生的频率就会越接近这个事件发生的概率，试验的次数太少易受偶然性因素影响，此时的频率不能用来估计概率．

正解：D

8. 解：(1) 100；600

(2) 补全条形统计图，如图所示，



(第 8 题)

108°

(3) $\frac{3}{10}$

9. 解：(1) “1 台机器在三年使用期内维修次数不大于 10”的概率 $=\frac{60}{100}=0.6$．

(2) 购买 10 次时，

某台机器使用期内维修次数	8	9	10	11	12
该台机器的维修费用(元)	24 000	24 500	25 000	30 000	35 000

此时这 100 台机器维修费用的平均数

$y_1=\frac{1}{100}(24\,000\times10+24\,500\times20+25\,000\times30+30\,000\times30+35\,000\times10)=27\,300$(元)．

购买 11 次时，

某台机器使用期内维修次数	8	9	10	11	12
该台机器的维修费用(元)	26 000	26 500	27 000	27 500	32 500

此时这 100 台机器维修费用的平均数

$y_2=\frac{1}{100}(26\,000\times10+26\,500\times20+27\,000\times30+27\,500\times30+32\,500\times10)=27\,500$(元)．

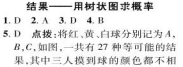
∵ $27\,300<27\,500$，

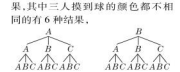
∴ 购买 1 台该机器的同时应一次性额外购买 10 次维修服务．

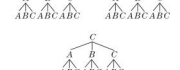
第 3 课时　列举所有机会均等的结果——用树状图求概率

1. D　**2.** A　**3.** D　**4.** B

5. D　**点拨**：将红、黄、蓝球分别记为 A，B，C，如图，一共有 27 种等可能的结果，其中三人摸到球的颜色都不相同的有 6 种结果，







(第 5 题)

∴ P(三人摸到球的颜色都不相同) $=\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$．

6. D

7. 解：(1) 根据题意画出如图所示的树状图．



(第 7 题)

(2) 由树状图可知，共有 8 种等可能的结果；

正正正，正正反，正反正，正反反，反正正，反正反，反反正，反反反．

其中三次正面朝上或三次反面朝上的情况有 2 种．所以 P(小刚任意挑选两球队) $=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$．

(3) 这个规则对两个球队公平．理由如下：

两次正面朝上一次正面朝下的情况有 3 种；正正反，正反正，反正正．

两次反面朝上一次反面朝下的情况有 3 种；正反反，反正反，反反正．

所以 P(小刚加入足球阵营) $=\frac{3}{8}$．

所以这个规则对两个球队公平．

8. 解：(1) 画树状图如图：



(第 8 题)

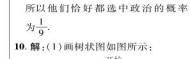
(2) 由树状图可知共有 12 种等可能的结果．

由勾股数的定义可知 B，C，D 卡片上的数都是勾股数，故抽到的两张卡片上的数都是勾股数的有 6 种结果，所以抽到的两张卡片上的数都是勾股数的概率为 $\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$．

点拨：本题易忽略“放回”与“不放回”这一过程而致错，第一次“放回”与“不放回”，直接影响第二次等可能的结果，若放回，则包含放回的卡片；若不放回，则不包含这张卡片．

9. 解：(1) “1 + 2”的选考方案共有 12 种，所有可能的选法有“物、政、化”“物、政、地”“物、政、生”“物、化、地”“物、化、生”“物、地、生”“政、化、地”“政、化、生”“政、地、生”“化、地、生”．

(2) 画树状图如下．

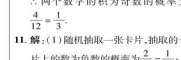


(第 9 题)

由树状图知，共有 9 种等可能的结果，其中他们恰好都选中政治的只有 1 种结果，

所以他们恰好都选中政治的概率为 $\frac{1}{9}$．

10. 解：(1) 画树状图如图所示：



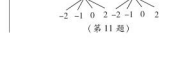
(第 10 题)

(2) ∵ 共有 12 种等可能的结果，两个数字的积为奇数的有 4 种结果，

∴ 两个数字的积为奇数的概率为 $\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$．

11. 解：(1) 随机抽取一张卡片，抽取的卡片上的数为负数的概率为 $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$；

(2) 画树状图如图所示：



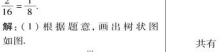
(第 11 题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

共有 16 种等可能的结果，点 A 在直线 $y=2x$ 上的结果有 2 种，

∴ 点 A 在直线 $y=2x$ 上的概率为 $\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$.

12. 解：(1) 根据题意，画出树状图如图.



(第 12 题)

(2) 由 (1) 可知三次传球后，球回到甲脚下的概率为 $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$.

(3) 由 (1) 可知三次传球后，球回到甲脚下的概率为 $\frac{1}{4}$，传到乙脚下的概率为 $\frac{3}{8}$，所以球传到乙脚下的概率大.

第 4 课时　列举所有机会均等的结果——用列表法求概率

1. $\frac{2}{3}$

2. D　**点拨**：令 3 张  用 A_1，A_2，A_3 表示，1 张  用 B 表示，

一共有 12 种等可能的结果，两张卡片正面图案相同的有 6 种，

故从中随机抽取两张，这两张卡片正面图案相同的概率是 $\frac{1}{2}$.

3. A

4. $\frac{1}{12}$

5. D　**6.** A　**7.** C

8. C　**点拨**：将三个小区分别记为 A，B，C，列表如下：

	A	B	C
A	(A,A)	(B,A)	(C,A)
B	(A,B)	(B,B)	(C,B)
C	(A,C)	(B,C)	(C,C)

由上表可知，共有 9 种等可能的结果，其中两个组恰好抽到同一个小区的有 3 种，所以两个组恰好抽到同一个小区的概率为 $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

9. D

10. B　**点拨**：列表如下：

	1	2	3	4
1	11	12	13	14
2	21	22	23	24
3	31	32	33	34
4	41	42	43	44

共有 16 种等可能的结果，其中是 3 的倍数的有 12，21，24，33，42，共 5 种情况，则组成的两位数是 3 的倍数的概率为 $\frac{5}{16}$，故选 B.

11. 错解：A

诊断：20 张商标牌中有奖的有 5 张，该参与者面两次翻牌均获奖，而翻过的牌不能再翻，因此剩下的 18 张商标牌中，有奖的商标牌有 3 张，故他第三次翻牌获奖的概率是 $\frac{3}{18}=\frac{1}{6}$，而不是 $\frac{1}{4}$.

正解：C

12. 解：(1) 8 名学生中至少有三类垃圾投放正确的概率为 $\frac{5}{8}$.

(2) 列表如下：

	A	C	F	G
A		CA	FA	GA
C	AC		FC	GC
F	AF	CF		GF
G	AG	CG	FG	

13. 解：(1) 补全表格如下：

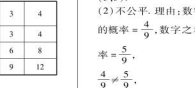
甲＼乙	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	6	8
3	3	6	9	12

(2) $\frac{1}{12}$；$\frac{2}{3}$.

(3) $\frac{1}{3}$

14. 解：(1) 这个班级有 $15\div30\%=50$(名) 同学，

补全条形统计图如图：



(第 14 题)

(2) $\frac{10\times0+15\times2+20\times3+5\times4}{50}=2.2$(元).

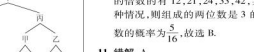
答：该班同学每天用于饮品的人均花费是 2.2 元；

(3) 共有 20 种等可能的结果，即 AB，AC，AD，AE，BA，BC，BD，BE，CA，CB，CD，CE，DA，DB，DC，DE，EA，EB，EC，ED，其中恰好抽到 2 名班长的有 2 种结果，

所以恰好抽到 2 名班长的概率为 $\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$.

第 5 课时　列举所有机会均等的结果——利用概率判断游戏规则的公平性

1. 解：(1) 画树状图如图所示.



(第 1 题)

(x,y) 所有可能出现的结果总数为 16.

(2) 公平. 理由：$x+y$ 为奇数的结果数为 8，$x+y$ 为偶数的结果数为 8，

∴ 甲获胜的概率 $=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$，乙获胜的概率 $=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$，

∴ 甲获胜的概率 = 乙获胜的概率.

∴ 这个游戏对双方公平.

2. 解：(1) (m,n) 所有可能出现的结果：$(1,1)$，$(1,2)$，$(1,3)$，$(2,2)$，$(2,1)$，$(2,3)$，$(3,1)$，$(3,2)$，$(3,3)$.

(2) 不公平. 理由：数字之和为奇数的概率 $=\frac{4}{9}$，数字之和为偶数的概率 $=\frac{5}{9}$，

$\frac{4}{9}\neq\frac{5}{9}$，

∴ 这个游戏不公平.

3. 解：(1) $\frac{1}{3}$.

(2) 不公平. 理由：画树状图如图.

(第 3 题)

乘积共有 9 种等可能的情况，其中偶数有 5 种，奇数有 4 种，

∴ P(小明胜) $=\frac{5}{9}$，P(小华胜) $=\frac{4}{9}$.

∵ $\frac{5}{9}\neq\frac{4}{9}$，

∴ 游戏规则对双方不公平.

4. 解：(1) 设去 D 地的车票有 x 张，则 $x=(x+20+40+30)\times10\%$，解得 $x=10$，即去 D 地的车票有 10 张，补全统计图如图所示.

(第 4 题)

(2) 小胡抽到去 A 地的概率为 $\frac{20}{20+40+30+10}=\frac{1}{5}$.

(3) 列表如下：

小李＼小王	1	2	3	4
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)

可知共有 16 种等可能的结果，其中小王掷得着地一面的数字比小李掷得着地一面的数字小的有 6 种，分别为 $(1,2)$，$(1,3)$，$(1,4)$，$(2,3)$，$(2,4)$，$(3,4)$.

所以小王掷得着地一面的数字比小李掷得着地一面的数字小的概率为 $\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$，

小王掷得着地一面的数字不小于小李掷得着地一面的数字的概率为 $\frac{10}{16}=\frac{5}{8}$. 因为 $\frac{3}{8}\neq\frac{5}{8}$，所以这个规则不公平.

阶段核心归类

1. 解：(1) 画树状图如图所示：

(第 1 题)

(2) ∵ m，n 都是方程 $x^2-5x+6=0$ 的解，

∴ $m=2$，$n=3$，或 $m=3$，$n=2$，

由树状图得：共有 12 种等可能的结果，m，n 都是方程 $x^2-5x+6=0$ 的解的结果有 2 种，

m，n 都不是方程 $x^2-5x+6=0$ 的解的结果有 2 种，

小明获胜的概率为 $\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$，小利获胜的概率为 $\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$，

∴ 小明、小利获胜的概率一样大.

2. 解：(1) $\frac{1}{2}$

(2) 画树状图如图：

(第 2 题)

共有 12 种等可能的结果，其中 $k<0$，$b>0$ 有 4 种结果，所以这个一次函数的图象经过第一、二、四象限的概率为 $\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$.

3. 解：(1) $\frac{1}{4}$

(2) 列表如下：

	−2	−1	0	1
−2	(−2,−2)	(−1,−2)	(0,−2)	(1,−2)
−1	(−2,−1)	(−1,−1)	(0,−1)	(1,−1)
0	(−2,0)	(−1,0)	(0,0)	(1,0)
1	(−2,1)	(−1,1)	(0,1)	(1,1)

由上表可知，共有 16 种等可能的结果，其中点 M 落在四边形 $ABCD$ 内 (含边界) 的有：$(-2,0)$，$(-1,-1)$，$(-1,0)$，$(0,-2)$，$(0,-1)$，$(0,0)$，$(0,1)$，$(1,0)$，共 8 个，所以点 M 落在四边形 $ABCD$ 内 (含边界) 的概率为 $\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$.

4. 解：(1) $30\div15\%=200$(名).

答：本次随机调查了 200 名学生.

(2) 补全条形统计图如图：

(第 4 题)

(3) 估计全校学生选择“戏曲”类的有 $1\,200\times\frac{40}{200}=240$(名).

(4) 列表如下：

	A	B	C	D
A		BA	CA	DA
B	AB		CB	DB
C	AC	BC		DC
D	AD	BD	CD	

由上表可知，共有 12 种等可能的结果，其中恰好抽到“器乐”和“戏曲”类的有 2 种结果，

∴ 恰好抽到“器乐”和“戏曲”类的概率为 $\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.

全章热门考点整合应用

1. C　**2.** C

3. 解：(1) 将星期一至四分别记为 1，2，3，4，画树状图如图所示：

(第 3 题)

共有 12 种等可能的结果，其中有一天是星期二的结果有 6 种，

∴ 甲同学随机选择两天，其中有一天是星期二的概率为 $\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$.

(2) $\frac{2}{3}$

4. 解：(1) 2 点钟上的频率 $=\frac{9}{60}=\frac{3}{20}$；5 点钟上的频率 $=\frac{20}{60}=\frac{1}{3}$.

(2) 小军的说法不正确，因为 3 点钟上的频率为 $\frac{1}{10}$，不能说明 3 点钟上这一事件发生的概率就是 $\frac{1}{10}$，只有当试验的次数足够多时，该事件发生的频率稳定在事件发生的概率附近，才可以将这个频率的稳定值作为该事件发生的概率.

(3) 小刚的说法不正确，因为随机事件的发生具有随机性，所以出现 6 点朝上的次数不一定是 100 次.

5. C　**点拨**：根据其表面展开图，得出三组相对的面分别是 6 对 3，4 对 2，8 对 1. 故 P(朝上一面的数字恰好等于朝下一面的数字的 2 倍) $=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$. 故选 C.

6. 解：(1) 设口袋中红球有 x 个，则黑球有 $(x-1)$ 个，白球有 $(x+3)$ 个，共有球 $x+(x-1)+(x+3)=3x+2$(个).

根据题意，得 $\frac{x-1}{3x+2}=\frac{1}{4}$，解得 $x=6$.

经检验 $x=6$ 是原方程的解且符合题意.

所以 $x-1=5$.

因此估计口袋中黑球的个数是 5.

(2) $6+5+6+3=20$(个). 口袋中共有球 20 个，小王取出第一个球后不放回，还剩下 19 个球，红球仍是 6 个，所以小王从口袋中余下的球中再任意取出 1 个球是红球的概率是 $\frac{6}{19}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 21 章达标检测卷

一、1. D　2. D　3. B　4. B　5. D　6. A　7. D

8. B　**点拨**：原等式可化为 $|a-b|+|b-c|=0$，∴ $a-b=0$ 且 $b-c=0$，∴ $a=b=c$，即 $\triangle ABC$ 是为正三角形.

9. B　**点拨**：原式 $=(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{8}+\sqrt{12})=(\sqrt{3}-\sqrt{2})(2\sqrt{2}+2\sqrt{3})=2(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})=2[(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2]=2(3-2)=2$.

10. D

二、11. 6

12. 4　**点拨**：∵ 最简二次根式 $\sqrt{3a-1}$ 与 $\sqrt{2a+3}$ 可以合并，∴ 它们是同类二次根式，即 $3a-1=2a+3$，解得 $a=4$.

13. 8　**点拨**：$x^2+\frac{1}{x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}-2+2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2=(\sqrt{6})^2+2=6+2=8$.

14. 7　15. $34+9\sqrt{2}$

16. $9\sqrt{3}$　17. 1　18. $\frac{1}{2}$

19. $\frac{\sqrt{-xy}}{y}$　**点拨**：由题意知 $x<0, y<0$，所以 $\frac{1}{x}\sqrt{-\frac{x^2y}{y}}=\frac{1}{x}\cdot(-x)\cdot\sqrt{\frac{1}{-y}}=\frac{-xy}{y}$. 解此类题要注意二次根式的隐含条件；被开方数是非负数.

20. $\sqrt{n+\frac{1}{n+2}}=(n+1)\sqrt{\frac{1}{n+2}}$

点拨：$\sqrt{1+\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{4}{3}}=2\sqrt{\frac{1}{3}}$，$\sqrt{2+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{9}{4}}=3\sqrt{\frac{1}{4}}$，$\sqrt{3+\frac{1}{5}}=\sqrt{\frac{16}{5}}=4\sqrt{\frac{1}{5}}$，…，由此可得到 $\sqrt{n+\frac{1}{n+2}}=\sqrt{\frac{n^2+2n+1}{n+2}}=\sqrt{(n+1)^2\cdot\frac{1}{n+2}}=(n+1)\sqrt{\frac{1}{n+2}}$.

三、21. **解**：(1) 原式 $=-2\sqrt{3}+2\sqrt{2}$.

(2) 原式 $=10$.

(3) 原式 $=15+2\sqrt{6}$.

(4) 原式 $=1$.

22. **解**：原式 $=\frac{(a+b)(a-b)}{a}\div\frac{a^2-2ab+b^2}{a}\cdot\frac{(a+b)(a-b)}{a}\cdot\frac{a}{(a-b)^2}\cdot\frac{a+b}{a-b}$，当 $a=\sqrt{3}+2, b=\sqrt{3}-2$ 时，原式 $=\frac{\sqrt{3}+2+\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+2-\sqrt{3}+2}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

23. **解**：∵ a, b, c 是 $\triangle ABC$ 的三边，∴ $a+b+c>0, b+c-a>0, c-b-a<0$，∴ 原式 $=a+b+c-(b+c-a)+(a+b-c)=3a+b-c$.

24. **解**：由题意，知 $a<0, b<0$，所以原式 $=\sqrt{\frac{ab}{a^2}}+\sqrt{\frac{ab}{b^2}}=\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a^2}}+\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{b^2}}=\frac{\sqrt{ab}}{-a}+\frac{\sqrt{ab}}{-b}=-\frac{(a+b)\sqrt{ab}}{ab}=-\frac{(-2)\times\sqrt{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}$.

点拨：此题易出现 $\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{a+b}{\sqrt{ab}}=\frac{-2}{\sqrt{\frac{1}{2}}}=-2\sqrt{2}$ 的错误. 出错的原因在于忽视了隐含条件，进而导致在解答过程中进行了非等价变形. 事实上，由 $a+b=-2, ab=\frac{1}{2}$，可知 $a<0, b<0$，所以将 $\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{\frac{a}{b}}$ 变形成 $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ 是不对的.

25. **解**：(1) $(\sqrt{243}+\sqrt{128})\times2=(9\sqrt{3}+8\sqrt{2})\times2=(18\sqrt{3}+16\sqrt{2})$(m).

故该空地的周长是 $(18\sqrt{3}+16\sqrt{2})$ m.

(2) $\sqrt{243}\times8\sqrt{2}\times12=9\sqrt{3}\times8\sqrt{2}\times12=864\sqrt{6}$(元).

故绿化该空地所需的总费用是 $864\sqrt{6}$ 元.

26. **解**：(1) ①$\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}=\frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}=\sqrt{5}-\sqrt{3}$.

②$\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{5-3}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\sqrt{5}-\sqrt{3}$.

(2) 原式 $=\frac{\sqrt{3}-1}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})}+\cdots+\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}+\cdots+\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{2}=\frac{\sqrt{2n+1}-1}{2}$.

27. **解**：(1) ∵ $x-2022\geqslant0$，∴ $x\geqslant2022$，∴ 原等式可化为 $x-2021+\sqrt{x-2022}=x$，∴ $\sqrt{x-2022}=2021$. ∴ $x-2022=2021^2$. ∴ $x=2021^2+2022$.

∴ $x-2022^2=2021^2-2022^2+2022=(2021-2022)\times(2021+2022)+2022=-(2021+2022)+2022=-2021$.

(2) ∵ $\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})=3\sqrt{b}(\sqrt{a}+5\sqrt{b})$，∴ $a+\sqrt{ab}=3\sqrt{ab}+15b$，∴ $a-2\sqrt{ab}-15b=0$，∴ $(\sqrt{a}-5\sqrt{b})(\sqrt{a}+3\sqrt{b})=0$. ∵ $a>0, b>0$，∴ $\sqrt{a}+3\sqrt{b}>0$，∴ $\sqrt{a}-5\sqrt{b}=0$，∴ $a=25b$.

∴ 原式 $=\frac{2\times25b+3b+\sqrt{25b^2}}{25b-b+\sqrt{25b^2}}=\frac{58b}{29b}=2$.

第 22 章达标检测卷

一、1. C　2. C　3. D　4. C　5. A

6. B　7. D　8. B　9. D　10. C

二、11. $2x^2-7=0$　12. $x_1=3, x_2=-1$

13. 1　**点拨**：将 $x=1$ 代入方程 $x^2+ax+b=0$，得 $1+a+b=0$，∴ $a+b=-1$，∴ $(a+b)^{2022}=1$.

14. $a\leqslant\frac{5}{4}$ 且 $a\neq1$

点拨：∵ 一元二次方程 $(a-1)x^2-x+1=0$ 有实数根，∴ $a-1\neq0$，即 $a\neq1$，且 $\Delta\geqslant0$，即 $(-1)^2-4(a-1)=5-4a\geqslant0$，解得 $a\leqslant\frac{5}{4}$，∴ a 的取值范围是 $a\leqslant\frac{5}{4}$ 且 $a\neq1$.

15. −1 或 −3

16. $-\frac{13}{2}$ 或 4　17. 2　18. 直角

19. $\frac{1}{8}$　**点拨**：由 $x^2-3x+1=0$ 得 $x^2=3x-1$，则 $\frac{x^2}{x^4+x^2+1}=\frac{x^2}{(3x-1)^2+x^2+1}=\frac{x^2}{10x^2-6x+2}=\frac{3x-1}{10(3x-1)-6x+2}=\frac{3x-1}{24x-8}=\frac{3x-1}{8(3x-1)}=\frac{1}{8}$.

20. 74

三、21. **解**：(1) 配方，得 $x^2-2x+1=6$. 即 $(x-1)^2=6$.

由此可得 $x-1=\pm\sqrt{6}$.

∴ $x_1=1+\sqrt{6}, x_2=1-\sqrt{6}$.

(2) 原方程变形为 $(7x+3)^2-2(7x+3)=0$. 因式分解，得 $(7x+3)(7x+3-2)=0$.

∴ $x_1=-\frac{3}{7}, x_2=-\frac{1}{7}$.

(3) ∵ $a=1, b=-\sqrt{3}, c=-\frac{9}{4}$.

∴ $\Delta=b^2-4ac=(-\sqrt{3})^2-4\times1\times\left(-\frac{9}{4}\right)=12$.

∴ $x=\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{12}}{2}=\frac{\sqrt{3}\pm2\sqrt{3}}{2}$.

∴ $x_1=\frac{3}{2}\sqrt{3}, x_2=-\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

(4) 原方程化为一般形式为 $y^2-2y=0$. 分解因式，得 $y(y-2)=0$.

∴ $y_1=2, y_2=0$.

22. **解**：(1) 当 $m=2$ 时，方程为 $x^2-3x+3=0, \Delta=(-3)^2-4\times1\times3=-3<0$，∴ 此方程没有实数根.

(2) 当 $m=-2$ 时，方程为 $x^2+5x+3=0, \Delta=25-12=13$，∴ $x=\frac{-5\pm\sqrt{13}}{2}$，故方程的根为 $x_1=\frac{-5+\sqrt{13}}{2}, x_2=\frac{-5-\sqrt{13}}{2}$.

23. **解**：∵ $(k-2)x^{k^2-2}+3x-5=0$ 是关于 x 的一元二次方程，∴ $\begin{cases}k^2-2=2,\\ k-2\neq0,\end{cases}$ 解得 $k=-2$.

∴ 直线对应的函数表达式为 $y=-2x+2$.

把 $x=0$ 代入直线对应的函数表达式，得 $y=2$；

把 $y=0$ 代入直线对应的函数表达式，得 $x=1$.

∴ 直线 $y=-2x+2$ 与两坐标轴的交点坐标分别为 $(1,0), (0,2)$.

∴ 直线与两坐标轴围成的三角形的两直角边的长分别为 1 和 2.

∴ 所求面积为 $\frac{1}{2}\times1\times2=1$.

24. (1) **证明**：∵ $\Delta=[-(2m-2)]^2-4(m^2-2m)=4>0$，∴ 该方程有两个不相等的实数根.

(2) **解**：由一元二次方程根与系数的关系，得 $x_1+x_2=2m-2, x_1\cdot x_2=m^2-2m$.

∵ $x_1^2+x_2^2=10$，∴ $(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=10$，即 $(2m-2)^2-2(m^2-2m)=10$，化简，得 $m^2-2m-3=0$，解得 $m_1=3, m_2=-1$，故 m 的值为 3 或 −1.

25. **解**：(1) 设一月份该公司投入市场的自行车有 x 辆，根据题意，得 $x-(7500-1200)\geqslant10\%x$，解得 $x\geqslant7000$.

答：一月份该公司投入市场的自行车至少有 7 000 辆.

(2) 根据题意，得 $[7500\times(1-20\%)+1200](1+4a\%)](1-\frac{1}{4}a\%)=7752$.

整理，得 $a^2-250a+4600=0$，解得 $a_1=230, a_2=20$.

因为 $\frac{1}{4}a\%<20\%$，所以 $a<80$，所以 $a=20$.

答：a 的值是 20.

26. **解**：(1) 设 P, Q 两点出发 x 秒后，四边形 $PBCQ$ 的面积是 33 cm^2，则由题意得 $\frac{1}{2}(16-3x+2x)\times6=33$，解得 $x=5$. 即 P, Q 两点出发 5 秒后，四边形 $PBCQ$ 的面积是 33 cm^2.

(2) 设 P, Q 两点出发 t 秒后，点 P 与点 Q 之间的距离是 10 cm，过点 Q 作 $QH\perp AB$ 于点 H. 在 Rt△PQH 中，有 $(16-5t)^2+6^2=10^2$，解得 $t_1=1.6, t_2=4.8$. 即 P, Q 两点出发 1.6 s 或 4.8 s 后，点 P 与点 Q 之间的距离是 10 cm.

第 23 章达标检测卷

一、1. B　2. A　3. C　4. D　5. A

6. D　**点拨**：易证△$DEF\backsim\triangle ABC$，所以 $\frac{DF}{AC}=\frac{EF}{BC}$，即 $\frac{1.5}{AC}=\frac{1}{6}$，解得 $AC=9$ m. 故选 D.

7. B

8. B　**点拨**：由 $\angle A=\angle ABC=90°$，$CF\perp BE$，易证△$ABE\backsim\triangle FCB$.

∴ $\frac{AB}{BE}=\frac{CF}{BC}$，由 $AE=\frac{1}{2}\times3=1.5$，$AB=2$，得 $BE=2.5$，∴ $\frac{2}{2.5}=\frac{CF}{3}$，∴ $CF=2.4$.

9. D

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. A　**点拨：**由题意可得 $AC=\sqrt{2}AB$，$AD=\sqrt{2}AE$，∴ $\frac{AC}{AB}=\frac{AD}{AE}$，∵ $\angle BAC=\angle EAD=45°$，∴ $\angle BAE=\angle CAD$，∴ $\triangle BAE\backsim\triangle CAD$，故结论①正确；∵ $\triangle BAE\backsim\triangle CAD$，∴ $\angle BEA=\angle CDA$，又∠$PME=\angle AMD$，∴ $\triangle PME\backsim\triangle AMD$，∴ $\frac{MP}{MA}=\frac{ME}{MD}$，即 $MP\cdot MD=MA\cdot ME$，故结论②正确．

∵ $\frac{MP}{MA}=\frac{ME}{MD}$，

∴ $\frac{MP}{ME}=\frac{MA}{MD}$，又∠$PMA=\angle EMD$，

∴ $\triangle PMA\backsim\triangle EMD$，

∴ $\angle APM=\angle MED=90°$．

∵ $\angle CAE=180°-\angle BAC-\angle EAD=90°=\angle APC$，$\angle ACP=\angle MCA$，

∴ $\triangle CAP\backsim\triangle CMA$，

∴ $\frac{AC}{MC}=\frac{CP}{AC}$，即 $AC^2=CP\cdot CM$．

∵ $AC=\sqrt{2}CB$，∴ $2CB^2=CP\cdot CM$，故结论③正确．综上，正确的结论是①②③，故选 A．

二、11. 4

12. 160 km　**点拨：**设小明所居住的城市与 A 地的实际距离为 x km，根据题意可列比例式为 $\frac{1}{500\,000}=\frac{32}{x\times10^5}$，解得 $x=160$．

13. 14　**点拨：**由 $\frac{a}{5}=\frac{b}{7}=\frac{c}{8}$，可设 $a=5k$，$b=7k$，$c=8k$．∵ $3a-2b+c=9$，

∴ $3\times5k-2\times7k+8k=9$，∴ $k=1$．

∴ $2a+4b-3c=10k+28k-24k=14k=14$．

14. $S_1=S_2$　**点拨：**∵ 点 C 是线段 AB 的黄金分割点，且 $BC>AC$，

∴ $BC^2=AC\cdot AB$．

又∵ $S_1=BC^2$，$S_2=AC\cdot AD=AC\cdot AB$，∴ $S_1=S_2$．

15. 2∶1∶2∶1∶6

16. $(\sqrt{3},\sqrt{3})$

17. 2 020

18. 14　**点拨：**作 $CH\perp AB$ 于 H，交 EF 于 P，如图，则 $CH=DA=42$ m，由题意知，$CP=45$ cm $=0.45$ m，$EF=15$ cm $=0.15$ m．

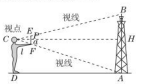
∵ $EF/\!/AB$，

∴ $\triangle CEF\backsim\triangle CBA$，

∴ $\frac{EF}{AB}=\frac{CP}{CH}$，即 $\frac{0.15}{AB}=\frac{0.45}{42}$，

∴ $AB=14$ m，

即铁塔的高度为 14 m．



（第 18 题）

19. $\frac{16}{3}$ 或 3　**点拨：**∵ $\angle ABC=\angle FBP=90°$，∴ $\angle ABP=\angle CBF$．当 $\triangle MBC\backsim\triangle ABP$ 时，$BM:AB=BC:BP$，得 $BM=4\times4\div3=\frac{16}{3}$；当 $\triangle CBM\backsim\triangle ABP$ 时，$BM:BP=CB:AB$，得 $BM=4\times3\div4=3$．

20. $\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(\frac{3}{4}\right)^n$　**点拨：**在正三角形 ABC 中，$AB_1\perp BC$，

∴ $BB_1=\frac{1}{2}BC=1$．

在 Rt△ABB_1 中，$AB_1=\sqrt{AB^2-BB_1^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$，

根据题意可得 $\triangle AB_2B_1\backsim\triangle AB_1B$，记△$AB_1B$ 的面积为 S，

∴ $\frac{S_1}{S}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$，∴ $S_1=\frac{3}{4}S$．

同理可得 $S_2=\frac{3}{4}S_1$，$S_3=\frac{3}{4}S_2$，$S_4=\frac{3}{4}S_3$，……

又∵ $S=\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

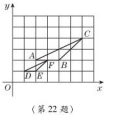
∴ $S_1=\frac{3}{4}S=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{3}{4}$，

$S_2=\frac{3}{4}S_1=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(\frac{3}{4}\right)^2$，$S_3=\frac{3}{4}S_2=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(\frac{3}{4}\right)^3$，$S_4=\frac{3}{4}S_3=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(\frac{3}{4}\right)^4$，…，$S_n=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(\frac{3}{4}\right)^n$．

三、21. 解：因为四边形 $ABCD\backsim$四边形 $EFGH$，所以∠$A=\angle D=95°$，则∠$\alpha=360°-95°-118°-67°=80°$．

因为四边形 $ABCD\backsim$四边形 $EFGH$，所以 $x:7=12:6$，解得 $x=14$．

22. 解：(1) △DEF 如图所示．



（第 22 题）

(2)(2,1.5)

(3) △DEF 的周长是 $DE+EF+DF=1+\sqrt{2}+\sqrt{5}$．

23. (1) **证明：**∵ $AB=AC$，$BD=CD$，

∴ $AD\perp BC$，$\angle B=\angle C$．

又∵ $DE\perp AB$，

∴ $\angle DEB=\angle ADC=90°$，

∴ △$BDE\backsim$△CAD．

(2) **解：**∵ $AB=AC$，$BD=CD$，

∴ $AD\perp BC$，$BD=\frac{1}{2}BC=5$．

在 Rt△ADB 中，$AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{13^2-5^2}=12$，

又易知 $\frac{1}{2}\cdot AD\cdot BD=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot DE$，

∴ $DE=\frac{60}{13}$．

24. 解：∵ $CB\perp AD$，$ED\perp AD$，

∴ $\angle ABC=\angle ADE=90°$．

∵ $\angle BAC=\angle DAE$，

∴ △$ABC\backsim$△ADE，

∴ $\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{DE}$．

∵ $BC=1$ m，$DE=1.5$ m，$BD=8.5$ m，

∴ $\frac{AB}{AB+8.5}=\frac{1}{1.5}$．

解得 $AB=17$ m．

故河宽 AB 为 17 m．

25. 解：(1) 设经过 t s $S_{△PCQ}=2$ cm²，则 $AP=2t$ cm，$CQ=t$ cm，所以 $PC=(8-2t)$ cm，

由题意得 $\frac{1}{2}\times(8-2t)t=2$，

整理得 $t^2-4t+2=0$，

解得 $t=2\pm\sqrt{2}$，

所以点 P，Q 同时出发，经过 $(2+\sqrt{2})$ s 或 $(2-\sqrt{2})$ s $S_{△PCQ}=2$ cm²．

(2) 设点 P 移动 a s 时△PCQ 与△ACB 相似，则 $AP=2a$ cm，$CQ=(2+a)$ cm，

所以 $PC=(8-2a)$ cm，

当△$PCQ\backsim$△ACB 时，$\frac{CP}{CA}=\frac{CQ}{CB}$，即 $\frac{8-2a}{8}=\frac{2+a}{6}$，

解得 $a=\frac{8}{5}$．

当△$PCQ\backsim$△BCA 时，$\frac{CP}{CB}=\frac{CQ}{CA}$，即 $\frac{8-2a}{6}=\frac{2+a}{8}$，

解得 $a=\frac{26}{11}$．

综上所述，点 P 移动 $\frac{8}{5}$ s 或 $\frac{26}{11}$ s 时△PCQ 与△ACB 相似．

26. 解：(1) 当 $\alpha=0°$ 时，

∵ $BC=2AB=8$，∴ $AB=4$．

∵ 点 D，E 分别是边 BC，AC 的中点，

∴ $BD=4$，$AE=EC=\frac{1}{2}AC$．

∵ $\angle B=90°$，

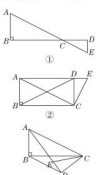
∴ $AC=\sqrt{8^2+4^2}=4\sqrt{5}$，

∴ $AE=CE=2\sqrt{5}$，

∴ $\frac{AE}{BD}=\frac{2\sqrt{5}}{4}=\frac{\sqrt{5}}{2}$．

当 $\alpha=180°$ 时，如图①，易得 $AC=4\sqrt{5}$，$CE=2\sqrt{5}$，$CD=4$，

∴ $\frac{AE}{BD}=\frac{AC+CE}{CD+CD}=\frac{4\sqrt{5}+2\sqrt{5}}{8+4}=\frac{\sqrt{5}}{2}$．



（第 26 题）

(2) 无变化．

证明：在题图①中，∵ DE 是△ABC 的中位线，

∴ $DE/\!/AB$，

∴ $\frac{CE}{CA}=\frac{CD}{CB}$，∠$EDC=\angle ABC=90°$．

如题图②，

∵ △EDC 在旋转过程中形状大小不变，

∴ $\frac{CE}{CA}=\frac{CD}{CB}$ 仍然成立．

又∵ $\angle ACE=\angle BCD=\alpha$，

∴ △$ACE\backsim$△BCD，∴ $\frac{AE}{BD}=\frac{AC}{BC}$．

在 Rt△ABC 中，$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{4^2+8^2}=4\sqrt{5}$．

∴ $\frac{AC}{BC}=\frac{4\sqrt{5}}{8}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，

∴ $\frac{AE}{BD}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，

∴ $\frac{AE}{BD}$ 的大小不变．

(3) 当△EDC 在 BC 上方，且 A，D，E 三点共线时，四边形 $ABCD$ 为矩形，如图②，∴ $BD=AC=4\sqrt{5}$；当△EDC 在 BC 下方，且 A，E，D 三点共线时，△ADC 为直角三角形，如图③，由勾股定理可得 $AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=8$．又易知 $DE=2$，∴ $AE=6$．∵ $\frac{AE}{BD}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，∴ $BD=\frac{12\sqrt{5}}{5}$．

综上，BD 的长为 $4\sqrt{5}$ 或 $\frac{12\sqrt{5}}{5}$．

第 24 章达标检测卷

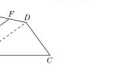
一、1. B　**2.** C　**3.** A

4. B　**点拨：**因为 $AD=DC$，所以∠$DAC=\angle DCA$．又因为 $AD/\!/BC$，所以∠$DAC=\angle ACB$．所以∠$DCA=\angle ACB$．在 Rt△ACB 中，$AC=BC\cdot\cos\angle BCA=10\times\frac{4}{5}=8$，则 $AB=\sqrt{BC^2-AC^2}=6$．

5. C　**点拨：**对于①，可由 $AB=BC\cdot\tan\angle ACB$ 求出 A，B 两点间的距离；对于②，由 $BC=\frac{AB}{\tan\angle ACB}$，$BD=\frac{AB}{\tan\angle ADB}$，$BD=BC$ 已可求出 AB 的长；对于③，易知△$DEF\backsim$△DBA，则 $\frac{DE}{EF}=\frac{BD}{AB}$，可求出 AB 的长；对于④，无法求得 AB 的长，故有①②③共 3 组，故选 C．

6. D

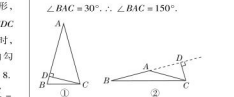
7. B　**点拨：**如图，连结 BD，由三角形中位线定理得 $BD=2EF=2\times2=4$．又 $BC=5$，$CD=3$，∴ $CD^2+BD^2=BC^2$．∴ △BDC 是直角三角形，且∠$BDC=90°$．∴ $\tan C=\frac{BD}{CD}=\frac{4}{3}$．



（第 7 题）

8. B

9. D　**点拨：**有两种情况：当顶角为锐角时，如图①，$\sin A=\frac{1}{2}$，∴ ∠$A=30°$；当顶角为钝角时，如图②，$\sin(180°-\angle BAC)=\frac{1}{2}$，∴ $180°-\angle BAC=30°$．∴ ∠$BAC=150°$．



（第 9 题）

10. C

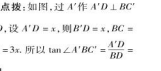
二、11. $\frac{12}{5}$　**12.** $2+\sqrt{3}$　**13.** 12　**14.** 5

15. $\frac{4}{3}$

16. $3<k<\frac{10}{3}$　**点拨：**因为 x 为锐角，$\sin x=3k-9$，所以 $0<3k-9<1$，解得 $3<k<\frac{10}{3}$．

17. $2-\sqrt{3}$

18. $\frac{1}{3}$　**点拨：**如图，过 A'作 $A'D\perp BC'$于点 D，设 $A'D=x$，则 $B'D=x$，$BC=2x$，$BD=3x$．所以 $\tan\angle A'BC'=\frac{A'D}{BD}=\frac{x}{3x}=\frac{1}{3}$．



（第 18 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

19. $\sqrt{2}$　**点拨**：由题意知 $BD'=BD=2\sqrt{2}$.

在 Rt△ABD' 中，$\tan\angle BAD'=\frac{BD'}{AB}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$.

20. $y=2\sqrt{3}x-\sqrt{3}$　**点拨**：$\tan 45°=1$，$\tan 60°=\sqrt{3}$，$-\cos 60°=-\frac{1}{2}$，$-6\tan 30°=-2\sqrt{3}$. 设 $y=kx+b$ 的图象经过点 $(1,\sqrt{3})$，$\left(-\frac{1}{2},-2\sqrt{3}\right)$，则用待定系数法可求出 $k=2\sqrt{3}$，$b=-\sqrt{3}$.

三、21. 解：(1) 原式 $=\sqrt{2}\times\left(2\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{\sqrt{6}}{2}=2-\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}=2$.

(2) 原式 $=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}\times\sqrt{3}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{4}-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

22. 解：(1) △ABC 是等腰直角三角形.

理由：$\because\ (\sqrt{2}\sin A-1)^2+\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}-\cos B}=0$，

$\therefore\begin{cases}\sqrt{2}\sin A-1=0,\\ \frac{\sqrt{2}}{2}-\cos B=0,\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2},\\ \cos B=\frac{\sqrt{2}}{2},\end{cases}$

$\therefore\angle A=\angle B=45°$，

$\therefore AC=BC$，$\angle C=90°$，

$\therefore$ △ABC 是等腰直角三角形.

(2) $\because$ 在△ABC 中，$\angle C=90°$，

$\therefore\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{BC}{10}$，

$\therefore BC=10\sin 45°=10\times\frac{\sqrt{2}}{2}=5\sqrt{2}$.

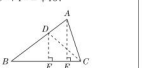
23. 解：(1) 过 A 作 $AE\perp BC$ 于点 E，如图，

在 Rt△ABE 中，$\tan\angle ABC=\frac{AE}{BE}=\frac{3}{4}$，$AB=5$，

$\therefore$ 易知 $AE=3$，$BE=4$，

$\therefore CE=BC-BE=5-4=1$.

在 Rt△AEC 中，根据勾股定理得 $AC=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$.



(第 23 题)

(2) 作 BC 的垂直平分线 DF，交 AB 于点 D，交 BC 于点 F，连结 CD，如图，

$\because DF$ 垂直平分 BC，

$\therefore BD=CD$，$BF=CF=\frac{5}{2}$.

$\because\tan\angle DBF=\frac{DF}{BF}=\frac{3}{4}$，

$\therefore DF=\frac{15}{8}$.

在 Rt△BFD 中，根据勾股定理得 $BD=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{15}{8}\right)^2}=\frac{25}{8}$，

$\therefore AD=5-\frac{25}{8}=\frac{15}{8}$，

则 $\frac{AD}{BD}=\frac{3}{5}$.

24. 证明：(1) $\because M$ 为 AB 边的中点，$AD\perp BC$，$BE\perp AC$，

$\therefore ME=\frac{1}{2}AB$，$MD=\frac{1}{2}AB$.

$\therefore ME=MD$，

$\therefore\triangle MED$ 为等腰三角形.

$\because M$ 为 AB 边的中点，$AD\perp BC$，

$\therefore MD=BM=\frac{1}{2}AB$，

$\therefore\triangle BMD$ 是等腰三角形.

(2) 由(1) 知 $ME=\frac{1}{2}AB=MA$，

$\therefore\angle MAE=\angle MEA$，

$\therefore\angle BME=\angle MAE+\angle MEA=2\angle MAE$.

同理可得 $MD=\frac{1}{2}AB=MA$，

$\therefore\angle MAD=\angle MDA$，

$\therefore\angle BMD=\angle MAD+\angle MDA=2\angle MAD$，

$\therefore\angle EMD=\angle BME-\angle BMD=2\angle MAE-2\angle MAD=2\angle DAC$.

25. 解：分别过点 E，D 作 $EG\perp AB$，$DH\perp AB$，垂足分别为点 G，H.

由题意可知，$EG=DH=10$ m，$GH=ED=3$ m.

在 Rt△ADH 中，$AH=\frac{DH}{\tan\angle DAH}=\frac{10}{\tan 45°}=10$(m).

在 Rt△FGE 中，$i=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{EG}{FG}$，

所以 $FG=\sqrt{3}EG=10\sqrt{3}$ m，

所以 $AF=FG+GH-AH=10\sqrt{3}+3-10=(10\sqrt{3}-7)$(m)，

故加固后坝底增加的宽度 AF 为 $(10\sqrt{3}-7)$ m.

26. 解：(1) 过点 B 作 $BF\parallel AD$，交 DC 于点 F，

$\therefore\angle BFE=\angle D=30°$.

$\because AB\parallel DF$，

$\therefore$ 四边形 $ABFD$ 为平行四边形，

$\therefore DF=AB=1$ m，$AD=BF$，

$\therefore EF=DE-DF=4$ m.

在 Rt△BCF 中，设 $BC=x$ m，则 $BF=2x$ m，$CF=\sqrt{3}x$ m.

在 Rt△BCE 中，$\angle BEC=60°$，

$\therefore CE=\frac{\sqrt{3}x}{3}$m，

$\therefore\sqrt{3}x-\frac{\sqrt{3}x}{3}=4$，

解得 $x=2\sqrt{3}$，

$\therefore BC=2\sqrt{3}$ m，

$\therefore AD=BF=4\sqrt{3}$ m.

(2) 由题意知，$\angle BCE=45°$.

在 Rt△BCG 中，$CG=BC=2\sqrt{3}$ m，

$\because EC=\frac{\sqrt{3}}{3}\times 2\sqrt{3}=2$(m)，

$\therefore GE=GC-EC=(2\sqrt{3}-2)$ m，

$\therefore DG=DE-GE=(7-2\sqrt{3})$ m，

即应放置直径是 $(7-2\sqrt{3})$ m 的遮阳伞.

第 25 章达标检测卷

一、1. B　2. B　3. A　4. B　5. C　6. D　7. B　8. C　9. B　10. C

二、11. ③⑤；①④；②

12. $\frac{2}{5}$　**13.** 18　**14.** $\frac{2}{3}$　**15.** C

16. 10　**点拨**：$\because$ 当试验次数很大时可以用频率估计概率，$\therefore$ 估计摸出黑球的概率为 $\frac{50\,007}{100\,000}\approx\frac{1}{2}$，

$\therefore\frac{5}{n}\approx\frac{1}{2}$，

$\therefore n\approx 10$.

17. $\frac{3}{4}$　**18.** $\frac{1}{5}$　**19.** $\frac{1}{3}$

20. $\frac{2}{5}$　**点拨**：不等式组 $\begin{cases}2x+3<4,\\ 3x-1>-11\end{cases}$ 的解集为 $-\frac{10}{3}<x<\frac{1}{2}$，要使函数 $y=\frac{1}{3x^2+2x}$ 有意义，则 $2x^2+2x\neq 0$，解得 $x\neq 0$ 且 $x\neq -1$. 在所给的五个数 -3，-2，-1，0，4 中，-3 与 -2 既满足 $-\frac{10}{3}<x<\frac{1}{2}$，又满足 $x\neq 0$ 且 $x\neq -1$，故所求概率为 $\frac{2}{5}$.

三、21. 解：(1) 可能发生，也可能不发生，是随机事件.

(2) 一定不会发生，是不可能事件.

(3) 可能发生，也可能不发生，是随机事件.

(4) 可能发生，也可能不发生，是随机事件.

22. 解：(1) 正确，因为当试验次数很大时可以用频率估计概率.

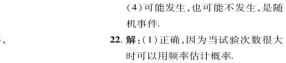
(2) 不正确，因为当试验次数不够多时，频率不一定接近概率.

23. 解：(1) 摸出 1 个球是黄球的概率为 $\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$.

(2) 设取出 x 个黑球，

由题意得 $\frac{8-x}{20-x}=\frac{1}{3}$，解得 $x=2$. 经检验 $x=2$ 是方程的解且符合题意，即从袋中取出黑球的个数为 2.

24. 解：(1) 画树状图如下：



(第 24 题)

由树状图可知共有 16 种等可能的结果，第一次摸到绿球，第二次摸到红球的结果有 4 种，所以 P(第一次摸到绿球，第二次摸到红球) $=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$.

②由树状图可知两次摸到的球中有 1 个绿球和 1 个红球的结果有 8 种，所以 P(两次摸到的球中有 1 个绿球和 1 个红球) $=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$.

(2) 两次摸到的球中有 1 个绿球和 1 个红球的概率是 $\frac{2}{3}$.

25. 解：(1) 40；20

(2) 列表如下：

	A	B	C	D	E
A		(A,B)	(A,C)	(A,D)	(A,E)
B	(B,A)		(B,C)	(B,D)	(B,E)
C	(C,A)	(C,B)		(C,D)	(C,E)
D	(D,A)	(D,B)	(D,C)		(D,E)
E	(E,A)	(E,B)	(E,C)	(E,D)	

所以 B 一定能参加决赛的概率为 $\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$.

26. 解：(1) 列表如下：

和 \ 幸运数	1	2	3	4
吉祥数				
0	0	0	0	0
1	1	2	3	4
3	3	6	9	12

由表格可知共有 12 种等可能的结果，其中积为 0 的结果有 4 种，所以 P(积为 0) $=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$.

(2) 游戏不公平.

P(积为奇数) $=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$，$P$(积不为奇数) $=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$.

因为 $\frac{1}{3}<\frac{2}{3}$，所以游戏不公平.

游戏规则修改为：若这两个数的积为 0，则小亮赢；若积为奇数，则小红赢. (答案不唯一)

期末达标检测卷

一、1. B　2. D　3. C　4. B　5. B

6. B　**点拨**：易证△$ADC\backsim$△CDB，所以 $\frac{CD}{BD}=\frac{AD}{CD}$，所以 $CD^2=AD\cdot BD=32$，所以 $CD=4\sqrt{2}$. 在 Rt△ACD 中，$\tan A=\frac{CD}{AD}=\frac{4\sqrt{2}}{8}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故选 B.

7. A

8. D　**点拨**：因为 $\angle ABD=148°$，所以 $\angle DBE=32°$. 又 $\angle D=58°$，所以 $\angle E=90°$，因为 $\frac{DE}{BD}=\cos 58°$，所以 $DE=BD\cdot\cos 58°=600\cos 58°$(米).

9. D

10. D　**点拨**：设 $CF=x$，则 $BF=3-x$，由折叠的性质得 $B'F=BF=3-x$. 在 Rt△FCB' 中，由勾股定理得 $CF^2+CB'^2=FB'^2$，即 $x^2+1^2=(3-x)^2$，解得 $x=\frac{4}{3}$.

由已知可证 Rt△$FCB'\backsim$ Rt△$B'DG$，所以 $\frac{S_{\triangle FCB'}}{S_{\triangle B'DG}}=\left(\frac{FC}{B'D}\right)^2=\left(\frac{\frac{4}{3}}{1}\right)^2=\frac{16}{9}$.

二、11. $x\leqslant\frac{5}{2}$

12. 5

13. 20%　**点拨**：设平均每月增长的百分率是 x，依题意得 $36(1+x)^2=36(1+44\%)$，$\therefore 1+x=\pm 1.2$，解得 $x=0.2=20\%$，或 $x=-2.2$(舍去)，

$\therefore$ 平均每月增长的百分率是 20%.

14. -1　**15.** $\frac{2}{3}$

16. $(1,0)$ 或 $(-5,-2)$　**17. 8**

18. $(22-x)(17-x)=300$　**19.** $\sqrt{2}-1$

20. 1 或 $2\sqrt{2}-2$　**点拨**：易证△$PCQ\backsim$△ABP，$\therefore\frac{CQ}{BP}=\frac{PC}{AB}$，即 $\frac{CQ}{BP}=\frac{2\sqrt{2}-BP}{2}$，$\therefore CQ=\frac{(2\sqrt{2}-BP)\cdot BP}{2}$.

当△ABP 为等腰三角形时，$BP=\sqrt{2}$ 或 2，代入上式，得 $CQ=1$ 或 $2\sqrt{2}-2$.

三、21. 解：(1) 原式 $=3\sqrt{5}+3\sqrt{3}+\frac{2}{3}\sqrt{3}-5\sqrt{5}=-2\sqrt{5}+\frac{11}{3}\sqrt{3}$.

(2) 原式 $=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}-\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{\sqrt{2}-1}{2}-1$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

荣德基 主编

典中点

综合应用创新题 典中点

极速提分法

思想 方法 技巧 应用



九年级
数学 上 (HS版)

陕西新华出版传媒集团
陕西人民教育出版社

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

极速提分18招

思想 方法 技巧 应用 四类绝招速解百题，招招见效助拿高分

第1招 利用二次根式的性质解相关问题 …… 1 ▶第21章

第2招 巧用二次根式的有关概念求字母或代数式的值 …… 2 ▶第21章

第3招 配方法的七种常见应用方法 …… 3 ▶第22章

第4招 降次思想在整式中的应用 …… 4 ▶第22章

第5招 可化为一元二次方程的分式方程的应用 …… 6 ▶第22章

第6招 一元二次方程的六种解法 …… 7 ▶第22章

第7招 一元二次方程中常见易错易混问题归类 …… 9 ▶第22章

第8招 证比例式或等积式的七种技巧 …… 11 ▶第23章

第9招 巧作平行线构造相似三角形 …… 14 ▶第23章

第10招 成比例线段的证明和计算的五种常用作辅助线的方法 …… 15 ▶第23章

第11招 同角或互余两角的三角函数关系的应用 …… 17 ▶第24章

第12招 巧用构造法求几种特殊角的三角函数值 …… 18 ▶第24章

第13招 解直角三角形的五种常见类型 …… 19 ▶第24章

第14招 利用三角函数解实际问题 …… 21 ▶第24章

第15招 统计概率思想在实际中的应用 …… 24 ▶第25章

第16招 概率的应用类型 …… 27 ▶第25章

第17招 求概率的四种方法 …… 28 ▶第25章

第18招 建模思想应用的常见类型归类 …… 30 ▶第25章

参考答案及点拨 …… 33

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第1招　利用二次根式的性质解相关问题

教你一招

对于二次根式$\sqrt{a}$，有两个“非负”：一个是$a\geqslant 0$，另一个是$\sqrt{a}\geqslant 0$. 这两个“非负”在解二次根式的有关题目中经常用到. 二次根式的被开方数和值均为非负数是常见的隐含条件.

典例剖析

例 【中考·枣庄】实数a,b在数轴上对应点的位置如图1-1，化简$|a|+\sqrt{(a-b)^2}$的结果是(　　)

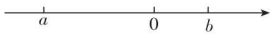


图1-1

A. $-2a+b$　　B. $2a-b$　　C. $-b$　　D. b

解题秘方：此题主要考查了二次根式的性质、实数与数轴等知识，正确得出各项符号是解题关键.

解：由图1-1可知$a<0,a-b<0$，

则$|a|+\sqrt{(a-b)^2}=-a-(a-b)=-2a+b$.

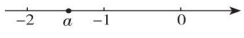
答案：A

分类训练

☞(答案见33页)

技巧1　利用被开方数$a\geqslant 0$及二次根式的性质解决有关问题

1. 【中考·黔南州】实数a在数轴上对应点的位置如图所示，化简$\sqrt{(a-1)^2}+a=$_____.



(第1题)

2. 已知x,y为实数，且$\sqrt{x-5}+\sqrt{5-x}=(x+y)^2$，求$x-y$的值.

技巧2　利用$\sqrt{a}\geqslant 0$求代数式的值或平方根

3. 若$\sqrt{a+b+5}+|2a-b+1|=0$，则$(b-a)^{2\,022}=$(　　)

A. -1　　B. 1　　C. $5^{2\,022}$　　D. $-5^{2\,022}$

4. 若$\sqrt{x-3}$与$\sqrt{y+2}$互为相反数，求$6x+y$的平方根.

技巧3　利用$\sqrt{a}\geqslant 0$求最值

5. 当x取何值时，$\sqrt{9x+1}+3$的值最小，最小值是多少？

技巧4　利用二次根式的非负性解决代数式化简求值问题

6. 设等式$\sqrt{a(x-a)}+\sqrt{a(y-a)}=\sqrt{x-a}-\sqrt{a-y}=0$成立，且$x,y,a$互不相等，求$\dfrac{3x^2+xy-y^2}{x^2-xy+y^2}$的值.

技巧5　利用被开方数的非负性解与三角形有关的问题

7. 已知实数x,y,a满足：$\sqrt{x+y-8}+\sqrt{8-x-y}=\sqrt{3x-y-a}+\sqrt{x-2y+a+3}$，试问长度分别为$x,y,a$的三条线段能否组成一个三角形？如果能，请求出该三角形的周长；如果不能，请说明理由.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第2招 巧用二次根式的有关概念求字母或代数式的值

教你一招

理解二次根式的定义要明确被开方数是非负数. 最简二次根式的特征：一是被开方数中不含分母，二是被开方数中不含能开得尽方的因数或因式. 被开方数相同的最简二次根式要确保在最简二次根式这一前提下看其被开方数是否相同.

典例剖析

例 若 $\sqrt{12-n}$ 为一个整数，试求自然数 n 的值.

解题秘方：用二次根式的有关概念求值就是根据概念定义的条件列式求值，本题中“$\sqrt{12-n}$ 为一个整数”给我们提供了如下信息：它是二次根式，所以有 $12-n\geqslant 0$；被开方数 $12-n$ 是一个完全平方数.“自然数 n”给我们提供了 $n\geqslant 0$ 且 n 为整数这一条件.

解：由题意，得 $12-n\geqslant 0$ 且 $n\geqslant 0$，

$\therefore 0\leqslant n\leqslant 12$.

$\therefore 0\leqslant 12-n\leqslant 12$.

又 $\sqrt{12-n}$ 为一个整数，即 $12-n$ 是一个完全平方数，在 0～12 之间的完全平方数有 0，1，4，9.

$\therefore$ 当 $12-n=0$ 时，$n=12$；

当 $12-n=1$ 时，$n=11$；

当 $12-n=4$ 时，$n=8$；

当 $12-n=9$ 时，$n=3$.

$\therefore$ 自然数 n 的值为 3 或 8 或 11 或 12.

分类训练

☞（答案见 33 页）

训练角度1 利用二次根式的定义判定二次根式

1. 下列式子中为二次根式的是（　　）

A. $\sqrt[3]{8}$　　B. $\sqrt{-1}$

C. $\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{x}\,(x<0)$

训练角度2 利用二次根式有意义的条件求字母的取值范围

2. 无论 x 取何实数，式子 $\sqrt{x^2-4x+m}$ 都有意义，化简式子 $\sqrt{(m-3)^2}+\sqrt{(4-m)^2}$.

训练角度3 利用最简二次根式的定义识别最简二次根式

3. 下列二次根式中，哪些是最简二次根式？哪些不是最简二次根式？不是最简二次根式的请说明理由.

$\sqrt{41^2-40^2}$，$\sqrt{8-x^2}$，$\sqrt{22}$，$\sqrt{x^2-4x+4}\,(x>2)$，$-x\sqrt{\dfrac{1}{2x}}$，$\sqrt{0.75ab}$，$\sqrt{ab^2}\,(b>0,a>0)$，$\sqrt{9x^2+16y^2}$，$\sqrt{(a+b)^2(a-b)}\,(a>b>0)$，$\sqrt{\dfrac{x}{3}}$，$\dfrac{\sqrt{x}}{3}$.

训练角度4 利用被开方数相同的最简二次根式的条件求字母的值

4. 如果最简根式 $\sqrt[b-a]{3b}$ 和 $\sqrt{2b-a+2}$ 是被开方数相同的最简二次根式，那么（　　）

A. $a=0,b=2$　　B. $a=2,b=0$

C. $a=-1,b=1$　　D. $a=1,b=-2$

5. 如果最简二次根式 $\sqrt{3a-8}$ 与 $\sqrt{17-2a}$ 在二次根式加减运算中可以合并，求使 $\sqrt{4a-2x}$ 有意义的 x 的取值范围.

6. 若 m,n 均为有理数，且 $\sqrt{3}+\sqrt{12}+\sqrt{\dfrac{3}{4}}=m+n\sqrt{3}$，求 $(m-n)^2+2n$ 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第3招　配方法的七种常见应用方法

教你一招

配方法主要应用于二次三项式的配方和用配方法解一元二次方程，其依据是完全平方公式 $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$. 另外，配方法还广泛应用于求最值、求待定系数的值等，是一个重要的数学方法.

典例剖析

例 当 x 取何值时，代数式 $2x^2 - 6x + 7$ 的值最小？并求出这个最小值.

解题秘方：求代数式的最值，用配方法就要先将代数式转化成 $a(x+m)^2 + n$ 的形式，然后根据完全平方式的非负性求代数式的最值.

解：$2x^2 - 6x + 7 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}$.

$\because 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \geqslant 0$，$\therefore 2x^2 - 6x + 7 \geqslant \frac{5}{2}$.

$\therefore$ 当 $x = \frac{3}{2}$ 时，$2x^2 - 6x + 7$ 的值最小，最小值为 $\frac{5}{2}$.

方法提醒：将代数式 $ax^2 + bx + c(a \neq 0)$ 配成 $a(x+m)^2 + n$ 的形式：若 $a > 0$，则当 $x = -m$ 时，代数式取得最小值 n；若 $a < 0$，则当 $x = -m$ 时，代数式取得最大值 n.

分类训练

☞(答案见33页)

应用1　配方法在识别方程中的应用

1. 求证：无论 m 为何值，关于 x 的方程 $(m^2 - 4m + 5)x^2 + 2x - 7 = 0$ 是一元二次方程.

应用2　配方法在解方程中的应用

2. 根据要求，解答下列问题.

(1) 解下列方程(直接写出方程的解即可)：

①方程 $x^2 - 2x + 1 = 0$ 的解为_____；

②方程 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 的解为_____；

③方程 $x^2 - 4x + 3 = 0$ 的解为_____；

……

(2) 根据以上方程特征及其解的特征，请猜想：

①方程 $x^2 - 9x + 8 = 0$ 的解为_____；

②关于 x 的方程_____的解为 $x_1 = 1$，$x_2 = n$；

(3) 请用配方法解方程 $x^2 - 9x + 8 = 0$，以验证猜想结论的正确性.

应用3　配方法在求二次三项式中的待定系数的应用

3. 已知关于 x 的二次三项式 $x^2 + (k+1)x + k^2 - 2k + 1$ 是完全平方式，求 k 的值.

应用4　配方法在求二次三项式的最大(小)值中的应用

4. 求多项式 $2x^2 - 4x + 7$ 的最小值.

应用5　配方法在判定一元二次方程中的应用

5. 试证明关于 x 的方程 $(a^2 - 8a + 20)x^2 + 2ax + 1 = 0$，无论 a 为何值，该方程都是一元二次方程.

应用6　配方法在求多个未知数的值中的应用

6. 已知 a，b，c 是 $\triangle ABC$ 的三边长，且 $a^2 + b^2 + c^2 - 6a - 8b - 10c + 50 = 0$.

(1) 求 a，b，c 的值；

(2) 判断 $\triangle ABC$ 的形状.

应用7　配方法在比较两个二次三项式大小中的应用

7. 设 $A = 2x^2 - 4x - 1$，$B = x^2 - 6x - 6$，试比较 A 和 B 的大小.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第4招　降次思想在整式中的应用

教你一招

解一元二次方程的基本思路是将一元二次方程降次，转化为一元一次方程求解，这种解题思路实质就是降次思想. 应用**降次思想**也能把某些高次方程转化为一元二次方程求解. 在求一些代数式的值时也常会用到降次思想.

典例剖析

例 已知 $2x^2-x=1$，求代数式 $6x^3+x^2-5x+2\,020$ 的值.

解题秘方：利用降次思想，将已知等式变形为 $x^2=\frac{1}{2}(x+1)$ 后，反复运用 $x^2=\frac{1}{2}(x+1)$ 进行降次化简，将 x 的三次式转化为 x 的一次式，然后代入求解.

解：$\because 2x^2-x=1$，

$\therefore x^2=\frac{1}{2}(x+1)$.

$\therefore x^3=\frac{1}{2}(x+1)\cdot x=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1}{2}x$

$=\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}$.

$\therefore 6x^3+x^2-5x+2\,020$

$=6\left(\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}(x+1)-5x+2\,020$

$=2\,022$.

分类训练

☞（答案见34页）

技巧1　利用降次思想解一元二次方程

方法1 开方降次法

1. 用直接开平方法解下列方程：

(1) $3(x+1)^2=\frac{1}{3}$；

(2) $(2x+3)^2-12=0$.

方法2 配方降次法

2. 用配方法解下列方程：

(1) $3x^2-12x+9=0$；

(2) $2x^2-3=4x$.

方法3 因式分解降次法

3. 解下列方程：

(1) $4x^2-4x+1=3x^2-6x+9$；

(2) $(3x+1)^2+4(3x+1)+4=0$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

技巧2 利用降次思想解高次方程

4. 解方程：$x^3-2x^2-4x+8=0$.

技巧3 利用降次思想求代数式的值

方法1 降次代换法

5. 已知 $x=2-\sqrt{5}$，求 $x^4-8x^3+16x^2-x+1$ 的值.

方法2 整体代换降次法

6. 若 $x^2+x-1=0$，求 x^3+2x^2+3 的值.

方法3 利用方程的根及根与系数的关系降次法

7. 设 x_1,x_2 是一元二次方程 $x^2+x-3=0$ 的两个根，求 ${x_1}^3-4{x_2}^2+19$ 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第5招 可化为一元二次方程的分式方程的应用

教你一招

可化为一元二次方程的分式方程的实际应用较广泛，一般应用于营销、行程、工程等问题中，解分式方程的基本思路就是化归，去掉分母后将其转化为一元二次方程，但最后一定要验根，有时可能会产生增根或不符合题意的根.

典例剖析

例 【中考·深圳】施工队要铺设一段全长2 000米的管道，因在中考期间需停工两天，实际每天施工量需比原计划多50米，才能按时完成任务，求原计划每天施工多少米. 设原计划每天施工 x 米，则根据题意所列方程正确的是(　　)

A. $\frac{2\,000}{x}-\frac{2\,000}{x+50}=2$　　B. $\frac{2\,000}{x+50}-\frac{2\,000}{x}=2$

C. $\frac{2\,000}{x}-\frac{2\,000}{x-50}=2$　　D. $\frac{2\,000}{x-50}-\frac{2\,000}{x}=2$

解题秘方：根据题意可知，原计划施工天数比实际多2天. 由等量关系即可列方程.

答案：A

分类训练

☞(答案见35页)

应用1 营销问题

1. 小明的爸爸下岗后，做起了经营水果的生意. 一天，他先去水果批发市场，用100元购甲种水果，用150元购乙种水果，乙种水果比甲种水果多购进10千克，乙种水果的批发价比甲种水果的批发价每千克高0.50元，然后到零售市场，都按每千克2.8元零售，结果乙种水果很快售完，甲种水果售出$\frac{4}{5}$时，出现滞销，他便按原售价的5折售完剩下的水果. 请你帮小明的爸爸算一算，这一天卖水果是赔钱了还是赚钱了(不考虑其他因素)？若赔钱，赔多少？若赚钱，赚多少？

应用2 租车问题

2. 【中考·盘锦】十一期间，几名同学共同包租一辆中巴车去红海滩游玩，中巴车的租价为480元，出发时又有4名同学参加进来，结果每名同学比原来少分摊了4元车费. 设原来游玩的同学有 x 名，则可列方程为(　　)

A. $\frac{480}{x+4}-\frac{480}{x}=4$　　B. $\frac{480}{x}-\frac{480}{x-4}=4$

C. $\frac{480}{x-4}-\frac{480}{x}=4$　　D. $\frac{480}{x}-\frac{480}{x+4}=4$

应用3 行程问题

3. 【中考·莱芜】电动车每小时比自行车多行驶了25千米，自行车行驶30千米比电动车行驶40千米多用了1小时，求两车的平均速度各为多少. 设自行车的平均速度为 x 千米/时，应列方程为(　　)

A. $\frac{30}{x}-1=\frac{40}{x-25}$　　B. $\frac{30}{x}-1=\frac{40}{x+25}$

C. $\frac{30}{x}+1=\frac{40}{x-25}$　　D. $\frac{30}{x}+1=\frac{40}{x+25}$

应用4 工程问题

4. 【中考·呼和浩特】某一公路的道路维修工程，准备从甲、乙两个工程队选一个队单独完成. 根据两队每天的工程费用和每天完成的工程量可知，若由两队合做此项维修工程，6天可以完成，共需工程费用385 200元. 若单独完成此项维修工程，甲队比乙队少用5天，每天的工程费用甲队比乙队多4 000元. 从节省资金的角度考虑，应选哪个工程队？

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第6招　一元二次方程的六种解法



教你一招

解一元二次方程时，主要考虑降次，其解法有**直接开平方法**、**因式分解法**、**配方法**和**公式法**，有些特殊方程还可用**换元法**等. 当题目中要求用某一种方法求解时，则根据要求进行计算，如果没有，则应根据题目特点选取适当的解法，以避免复杂运算.

典例剖析

例 用公式法解下列方程.

(1) $2x^2-7x+4=0$；　(2) $3x^2-2\sqrt{3}x=-1$；

(3) $x^2-2x+3=0$；　(4) $-3x^2-5x+2=0$.

解题秘方：用公式法解一元二次方程时，先将方程整理成一元二次方程的一般形式，确定 a,b,c 的值，再求出 Δ 的值. 当 $\Delta\geqslant 0$ 时，可代入求根公式求解；当 $\Delta<0$ 时，方程无实数根. 这时，若将 a,b,c 的值直接代入求根公式，则算式无意义. 另外，当 a,b,c 中含有分数时，一般先化为整数再计算.

解：(1) $\because a=2,b=-7,c=4$，

$\therefore \Delta=(-7)^2-4\times2\times4=17$.

$\therefore x_1=\dfrac{7+\sqrt{17}}{4},x_2=\dfrac{7-\sqrt{17}}{4}$.

(2) 原方程可化为 $3x^2-2\sqrt{3}x+1=0$.

$\because a=3,b=-2\sqrt{3},c=1$，

$\therefore \Delta=(-2\sqrt{3})^2-4\times3\times1=0$.

$\therefore x_1=x_2=-\dfrac{-2\sqrt{3}}{2\times3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

(3) $\because a=1,b=-2,c=3$，

$\therefore \Delta=(-2)^2-4\times1\times3=-8<0$.

$\therefore$ 方程无实数根.

(4) $\because a=-3,b=-5,c=2$，

$\therefore \Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\times(-3)\times2=49$.

$\therefore x=\dfrac{5\pm\sqrt{49}}{2\times(-3)}=-\dfrac{5\pm7}{6}$. $\therefore x_1=-2,x_2=\dfrac{1}{3}$.

分类训练

☞(答案见35页)

方法1　用直接开平方法解方程

1. 解方程：$(4x-1)^2=225$.

2. 解方程：$\dfrac{1}{3}(x-1)^2=8$.

方法2　用配方法解方程

3. 【中考·梧州】解方程：$2x^2-4x-48=0$.

4. 解方程：$(2x-1)^2=x(3x+2)-7$.

方法3　用公式法解方程

5. 解方程：$x^2=6x+1$.

6. 解方程：$\sqrt{2}x-2=2x^2$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

方法4 用因式分解法解方程

7. 解方程：$2(x-2)=3x(x-2)$.

8. 解方程：$(x+2)^2-10(x+2)+25=0$.

方法5 用适当的方法解方程

9. 解方程：$3(x-5)^2=x^2-25$.

10. 解方程：$(x+1)(x-1)+2(x+3)=8$.

方法6 用换元法解方程

11. 阅读下面的材料：

为解方程$(x^2-1)^2-5(x^2-1)+4=0$，我们可以将x^2-1视为一个整体，然后可设$x^2-1=y$，则$(x^2-1)^2=y^2$，原方程可化为$y^2-5y+4=0$，解得$y_1=1$，$y_2=4$.

当$y=1$时，$x^2-1=1$，$x^2=2$，$\therefore x=\pm\sqrt{2}$；

当$y=4$时，$x^2-1=4$，$x^2=5$，$\therefore x=\pm\sqrt{5}$.

$\therefore$原方程的解为$x_1=\sqrt{2}$，$x_2=-\sqrt{2}$，$x_3=\sqrt{5}$，$x_4=-\sqrt{5}$.

（1）根据材料解方程：$x^4+x^2-6=0$；

（2）已知实数a，b满足$(a+2b)(a+2b-2)=2a+4b-4$，求$4a+8b-1$的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第7招　一元二次方程中常见易错易混问题归类



教你一招

一元二次方程是初中数学的重要内容，是刻画某些实际问题中数量关系的有效的数学模型，可以利用其解决某些实际问题. **方程思想**是一种重要的数学思想，也是各类考试的必考内容. 由于部分学生的思维不缜密，常会出现以下错误，本节通过归类练习，以示警示.

典例剖析

例 已知6是关于 x 的方程 $x^2-(m+2)x+2m=0$ 的一个实数根，并且这个方程的两个实数根恰好是等腰 $\triangle ABC$ 的两条边的长，则 $\triangle ABC$ 的周长为多少？

解题秘方：本题考查了一元二次方程的解、解一元二次方程，以及三角形三边的关系. 掌握数形结合思想是解题关键.

解：把 $x=6$ 代入方程得 $36-6(m+2)+2m=0$，解得 $m=6$，

则原方程为 $x^2-8x+12=0$，解得 $x_1=2$，$x_2=6$.

由这个方程的两个根恰好是等腰 $\triangle ABC$ 的两条边的长，可知：

①当 $\triangle ABC$ 的腰长为6，底边长为2时，$\triangle ABC$ 的周长为 $6+6+2=14$；

②当 $\triangle ABC$ 的腰长为2，底边长为6时，$2+2<6$，不合题意，舍去.

综上所述，$\triangle ABC$ 的周长为14.

分类训练

☞(答案见36页)

易错1　忽视二次项系数不为零的条件而致错

1. 若关于 x 的方程 $(k-3)x^{|k|-1}-x-2=0$ 是一元二次方程，求不等式 $kx-2k+6\leqslant 0$ 的解集.

易错2　将多项式进行配方时与方程配方相混淆而致错

2. 将 $2y^2-6y+1$ 进行配方.

易错3　应用根的判别式求字母的取值范围时忽视一元二次方程的隐含条件

3. 已知关于 x 的方程 $k^2x^2+(2k-1)x+1=0$ 有两个不相等的实数根，求 k 的取值范围.

易错4　在方程两边同时除以含有未知数的式子，导致失根

4. 解方程：$3(2x+5)=2x(2x+5)$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

易错5 利用根与系数的关系时未考虑“Δ”

5. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-6x+(2m+1)=0$ 有实数根.

(1)求 m 的取值范围；

(2)如果方程的两个实数根为 x_1,x_2，且 $2x_1x_2+x_1+x_2\geqslant 20$，求 m 的取值范围.

易错6 忽视几何图形对方程根的要求

6. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-(3k+1)x+2k^2+2k=0$.

(1)求证：无论 k 取何实数值，方程总有实数根.

(2)若等腰△ABC 的一边长 $a=6$，另两边长 b,c 恰好是这个方程的两个根，求此三角形的另两边长.

易错7 忽略实际问题对方程根的要求

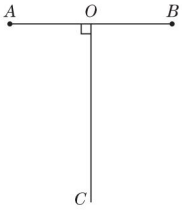
7. 某商场销售一批名牌衬衫，平均每天可售出 20 件，每件盈利 40 元，为了扩大销售，尽快减少库存，商场决定采取适当的降价措施，经调查发现，如果每件衬衫降价 4 元，商场平均每天可多售出 8 件.

(1)若商场平均每天销售这种衬衫的盈利要达到 1 200 元，每件衬衫应降价多少元？

(2)每件衬衫降价多少元时，商场每天盈利最多？

易错8 考虑问题不全面，出现漏解

8. 如图，$AO=OB=50$ cm，OC 是一条射线，$OC\perp AB$，蚂蚁甲由 A 点以 2 cm/s 的速度向 B 点爬行，同时蚂蚁乙由 O 点以 3 cm/s 的速度沿 OC 方向爬行，是否存在这样的时刻，使两只蚂蚁与 O 点组成的三角形的面积为 450 cm^2？



（第 8 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

参考答案及点拨

第1招 利用二次根式的性质解相关问题

1. 1

2. 解：由题意，得$\begin{cases}x-5\geqslant 0,\\5-x\geqslant 0,\end{cases}$∴ $\begin{cases}x\geqslant 5,\\x\leqslant 5.\end{cases}$

∴ $x=5$. ∴ $(x+y)^2=0$，即$(5+y)^2=0$，∴ $y=-5$.

∴ $x-y=5-(-5)=10$.

3. B

4. 解：由题意，得$\sqrt{x-3}+\sqrt{y+2}=0$，

∴ $x-3=0$，$y+2=0$，解得$x=3$，$y=-2$，则$6x+y=16$，

∴ $6x+y$的平方根为± 4.

5. 解：∵ $\sqrt{9x+1}\geqslant 0$，∴ 当$9x+1=0$，即$x=-\frac{1}{9}$时，式子$\sqrt{9x+1}+3$的值最小，最小值为3.

点拨： 涉及二次根式的最小(大)值问题，要根据题目的具体情况来决定用什么方法. 一般情况下利用二次根式的非负性求解.

6. 解：因为$\sqrt{a(x-a)}+\sqrt{a(y-a)}=0$，

所以$a(x-a)=0$且$a(y-a)=0$.

又因为x，y，a互不相等，

所以$x-a\neq 0$，$y-a\neq 0$，

所以$a=0$.

所以$\sqrt{x}-\sqrt{-y}=0$，

所以$\sqrt{x}=\sqrt{-y}$. 所以$x=-y\neq 0$.

所以$\frac{3x^2+xy-y^2}{x^2-xy+y^2}=\frac{3x^2-x^2-x^2}{x^2+x^2+x^2}=\frac{x^2}{3x^2}=\frac{1}{3}$.

7. 解：能. 根据二次根式的被开方数的非负性，得$\begin{cases}x+y-8\geqslant 0,\\8-x-y\geqslant 0,\end{cases}$解得$x+y=8$，

∴ $\sqrt{3x-y-a}+\sqrt{x-2y+a+3}=0$.

则$\begin{cases}x+y=8,\\3x-y-a=0,\\x-2y+a+3=0,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=3,\\y=5,\\a=4.\end{cases}$

∴ 长度分别为x，y，a的三条线段能组成一个三角形，该三角形的周长为$3+5+4=12$.

第2招 巧用二次根式的有关概念求字母或代数式的值

1. C

2. 解：∵ $\sqrt{x^2-4x+m}=\sqrt{(x-2)^2+m-4}$，

且无论x取何实数，式子$\sqrt{x^2-4x+m}$都有意义，

∴ $m-4\geqslant 0$，∴ $m\geqslant 4$.

当$m\geqslant 4$时，$\sqrt{(m-3)^2}+\sqrt{(4-m)^2}=(m-3)+(m-4)=2m-7$.

3. 解：$\sqrt{8-x^2}$，$\sqrt{22}$，$\sqrt{9x^2+16y^2}$，$\frac{\sqrt{x}}{3}$是最简二次根式. 其余式子都不是最简二次根式.

∵ $\sqrt{41^2-40^2}=\sqrt{(41-40)\times(41+40)}=\sqrt{81}=9$，

$\sqrt{x^2-4x+4}=\sqrt{(x-2)^2}=x-2(x>2)$，

$-x\sqrt{\frac{1}{2x}}=\frac{-x\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}\cdot\sqrt{2x}}=-\frac{1}{2}\sqrt{2x}$，

$\sqrt{0.75ab}=\sqrt{0.25\times 3ab}=\frac{1}{2}\sqrt{3ab}$，

$\sqrt{ab^2}=b\sqrt{a}(b>0,a>0)$，

$\sqrt{(a+b)^2(a-b)}=(a+b)\sqrt{a-b}(a>b>0)$，

$\sqrt{\frac{x}{3}}=\frac{\sqrt{3x}}{3}$，

∴ $\sqrt{41^2-40^2}$，$\sqrt{x^2-4x+4}(x>2)$，$-x\sqrt{\frac{1}{2x}}$，$\sqrt{0.75ab}$，$\sqrt{ab^2}(b>0,a>0)$，$\sqrt{(a+b)^2(a-b)}(a>b>0)$，$\sqrt{\frac{x}{3}}$不是最简二次根式.

4. A **点拨：** 由题意得$\begin{cases}b-a=2,\\3b=2b-a+2,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=0,\\b=2.\end{cases}$故选A.

5. 解：由题意得$3a-8=17-2a$.

∴ $a=5$. ∴ $\sqrt{4a-2x}=\sqrt{20-2x}$.

要使$\sqrt{4a-2x}$有意义，只需$\sqrt{20-2x}$有意义即可.

∴ $20-2x\geqslant 0$，∴ $x\leqslant 10$.

6. 解：∵ $\sqrt{3}+\sqrt{12}+\sqrt{\frac{3}{4}}=\sqrt{3}+2\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{7}{2}\sqrt{3}=m+n\sqrt{3}$，$m$，$n$均为有理数，∴ $m=0$，$n=\frac{7}{2}$.

∴ $(m-n)^2+2n=\left(0-\frac{7}{2}\right)^2+2\times\frac{7}{2}=\frac{49}{4}+7=\frac{77}{4}$.

第3招 配方法的七种常见应用方法

1. **证明：** ∵ $m^2-4m+5=(m-2)^2+1>0$，∴ $m^2-4m+5\neq 0$. ∴ 无论m为何值，该方程都是关于x的一元二次方程.

点拨： 本题利用配方法将关于x的方程中x^2的系数m^2-4m+5配方得到$(m-2)^2+1$，判断此系数的值不可能为0，进而判断出关于x的方程是一元二次方程.

2. 解：(1)①$x_1=x_2=1$ ②$x_1=1$，$x_2=2$ ③$x_1=1$，$x_2=3$

(2)①$x_1=1$，$x_2=8$ ②$x^2-(1+n)x+n=0$

(3)$x^2-9x+8=0$，

$x^2-9x=-8$，

$x^2-9x+\frac{81}{4}=-8+\frac{81}{4}$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\left(x-\frac{9}{2}\right)^2=\frac{49}{4}$.

$\therefore x-\frac{9}{2}=\pm\frac{7}{2}$.

$\therefore x_1=1, x_2=8$.

3. 解：∵ 关于 x 的二次三项式 $x^2+(k+1)x+k^2-2k+1$ 是完全平方式，

$\therefore x^2+(k+1)x+k^2-2k+1$

$=\left(x+\frac{k+1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}k^2-\frac{5}{2}k+\frac{3}{4}$ 中 $\frac{3}{4}k^2-\frac{5}{2}k+\frac{3}{4}=0$，解得 $k=3$ 或 $k=\frac{1}{3}$.

点拨： 本题利用配方法将 $x^2+(k+1)x+k^2-2k+1$ 配方得到 $\left(x+\frac{k+1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}k^2-\frac{5}{2}k+\frac{3}{4}$，由条件知该式是完全平方式，故 $\frac{3}{4}k^2-\frac{5}{2}k+\frac{3}{4}$ 的值为 0，即可求得 k 的值.

4. 解：$2x^2-4x+7=2(x^2-2x+1)+5=2(x-1)^2+5\geqslant 5$.

$\therefore$ 多项式 $2x^2-4x+7$ 的最小值为 5.

点拨： 本题利用配方法将 $2x^2-4x+7$ 配方得到 $2(x-1)^2+5$，进而求出其最小值为 5.

5. 证明：∵ $a^2-8a+20=(a-4)^2+4>0$，$\therefore a^2-8a+20\neq 0$. $\therefore$ 无论 a 取何值，该方程都是关于 x 的一元二次方程.

6. 解：(1) 由 $a^2+b^2+c^2-6a-8b-10c+50=0$，得 $(a-3)^2+(b-4)^2+(c-5)^2=0$.

∵ $(a-3)^2\geqslant 0, (b-4)^2\geqslant 0, (c-5)^2\geqslant 0$，

$\therefore a-3=0, b-4=0, c-5=0$，$\therefore a=3, b=4, c=5$.

(2) ∵ $3^2+4^2=5^2$，即 $a^2+b^2=c^2$，

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形.

点拨： 本题利用配方法将原式整理后求出 a, b, c 的值，再由勾股定理的逆定理判断三角形形状.

7. 解：$A-B=2x^2-4x-1-x^2+6x+6=x^2+2x+5=(x+1)^2+4$.

∵ $(x+1)^2\geqslant 0$，$\therefore (x+1)^2+4>0$，$\therefore A>B$.

点拨： 本题用作差法比较大小，将 $A-B$ 的式子配方得到 $(x+1)^2+4$，由此式的值恒大于 0，即可比较出 A 与 B 的大小.

第 4 招　降次思想在整式中的应用

1. 解：(1) 原方程可化为 $(x+1)^2=\frac{1}{9}$，

两边直接开平方，得 $x+1=\pm\frac{1}{3}$，

$\therefore x+1=\frac{1}{3}$ 或 $x+1=-\frac{1}{3}$，

$\therefore x_1=-\frac{2}{3}, x_2=-\frac{4}{3}$.

(2) 移项，得 $(2x+3)^2=12$，

两边直接开平方，得 $2x+3=\pm 2\sqrt{3}$，

$\therefore 2x+3=2\sqrt{3}$ 或 $2x+3=-2\sqrt{3}$，

$\therefore x_1=\frac{2\sqrt{3}-3}{2}, x_2=\frac{-2\sqrt{3}-3}{2}$.

点拨： 本题用直接开平方法解方程，如 (1) 将 $x+1$ 看成一个整体，得到关于 $x+1$ 的一次方程再求解即可.

2. 解：(1) 二次项系数化为 1，得 $x^2-4x+3=0$，

移项，得 $x^2-4x=-3$，

配方，得 $x^2-4x+4=-3+4$，

$\therefore (x-2)^2=1$，$\therefore x-2=1$ 或 $x-2=-1$，

$\therefore x_1=3, x_2=1$.

(2) 原方程可化为 $2x^2-4x=3$，

二次项系数化为 1，得 $x^2-2x=\frac{3}{2}$，

配方，得 $x^2-2x+1=\frac{3}{2}+1$，

$\therefore (x-1)^2=\frac{5}{2}$，$\therefore x-1=\frac{\sqrt{10}}{2}$ 或 $x-1=-\frac{\sqrt{10}}{2}$，

$\therefore x_1=1+\frac{\sqrt{10}}{2}, x_2=1-\frac{\sqrt{10}}{2}$.

点拨： 利用配方法进行配方求解即可.

3. 解：(1) 移项、合并同类项，得 $x^2+2x-8=0$，

因式分解，得 $(x-2)(x+4)=0$，

$\therefore x-2=0$ 或 $x+4=0$，

$\therefore x_1=2, x_2=-4$.

(2) 因式分解，得 $(3x+1+2)^2=0$，即 $(3x+3)^2=0$，

$\therefore x_1=x_2=-1$.

4. 解：原方程可变形为

$x^2(x-2)-4(x-2)=0$，$(x-2)(x^2-4)=0$，

$(x-2)^2(x+2)=0$.

所以 $x_1=x_2=2, x_3=-2$.

点拨： 直接利用因式分解法进行降次.

5. 解：由 $x=2-\sqrt{5}$，得 $x-2=-\sqrt{5}$，

两边平方，得 $x^2-4x+4=5$，

$\therefore x^2-4x-1=0$，

$\therefore x^4-8x^3+16x^2-x+1$

$=(x^2-4x-1)(x^2-4x+1)+(-x+2)$

$=2-x$

$=\sqrt{5}$.

6. 解：∵ $x^2+x-1=0$，

$\therefore x^2+x=1$，

$\therefore x^3+2x^2+3=x(x^2+x)+x^2+3=x+x^2+3=4$.

7. 解：由题意得 $x_1^2+x_1-3=0, x_2^2+x_2-3=0$，

即 $x_1^2=3-x_1, x_2^2=3-x_2$，

$\therefore x_1^3-4x_2^2+19$

$=x_1(3-x_1)-4(3-x_2)+19$

$=3x_1-x_1^2+4x_2+7$

$=3x_1-(3-x_1)+4x_2+7$

$=4(x_1+x_2)+4$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

又根据根与系数的关系知道 $x_1+x_2=-1$，

$\therefore$ 原式 $=4\times(-1)+4=0$.

第5招 可化为一元二次方程的分式方程的应用

1. 解：设小明的爸爸购进乙种水果 x 千克，则购进甲种水果 $(x-10)$ 千克，所以甲种水果的批发价为每千克 $\frac{100}{x-10}$ 元，乙种水果的批发价为每千克 $\frac{150}{x}$ 元.

根据题意得 $\frac{150}{x}-\frac{100}{x-10}=0.5$，

整理得 $x^2-110x+3\,000=0$，

解得 $x_1=50, x_2=60$.

经检验，$x_1=50, x_2=60$ 都是方程的根.

当 $x=50$ 时，乙种水果的批发价为每千克 $\frac{150}{50}=3$（元），高于水果零售价，不合题意，舍去.

当 $x=60$ 时，乙种水果的批发价为每千克 $\frac{150}{60}=2.5$（元），符合题意；甲种水果的批发价为每千克 $\frac{100}{60-10}=2$（元），也符合题意.

因此，小明的爸爸购进乙种水果 60 千克，购进甲种水果 $60-10=50$（千克），小明的爸爸这一天卖水果盈利：

$$\left(50\times\frac{4}{5}\times2.8+50\times\frac{1}{5}\times2.8\times\frac{1}{2}+60\times2.8\right)-(100+150)=44\text{（元）}.$$

所以小明的爸爸这一天卖水果赚钱了，赚了 44 元.

2. D　**3.** B

4. 解：设甲队单独做 x 天完成，则乙队单独做 $(x+5)$ 天完成，根据题意，得 $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+5}=\frac{1}{6}$，

整理，得 $x^2-7x-30=0$，

解得 $x_1=10, x_2=-3$.

经检验，$x_1=10, x_2=-3$ 都是原方程的根，但 $x_2=-3$ 不合题意，舍去，此时 $x+5=15$，即单独做甲、乙两队分别需要 10 天、15 天完成任务.

设乙队每天的工程费用为 y 元，则甲队每天的工程费用为 $(y+4\,000)$ 元，根据题意，得 $6(y+y+4\,000)=385\,200$，

解得 $y=30\,100$.

$\therefore y+4\,000=34\,100$，

即甲、乙两队每天的工程费用分别为 34 100 元、30 100元.

$\because 34\,100\times10=341\,000$（元），

$30\,100\times15=451\,500$（元），

$341\,000<451\,500$，

$\therefore$ 从节省资金的角度考虑，应选甲工程队.

第6招 一元二次方程的六种解法

1. 解：$(4x-1)^2=225, 4x-1=\pm15$.

$\therefore x_1=4, x_2=-\frac{7}{2}$.

点拨：利用直接开平方法求得 $4x-1=\pm15$，从而进行求解.

2. 解：$\frac{1}{3}(x-1)^2=8$，

$(x-1)^2=24$，

$x-1=\pm2\sqrt{6}$.

$\therefore x_1=1+2\sqrt{6}, x_2=1-2\sqrt{6}$.

3. 解：$2x^2-4x-48=0$，

$x^2-2x=24$，

$x^2-2x+1=24+1$，

$(x-1)^2=25$，

$x-1=\pm5$.

$\therefore x_1=6, x_2=-4$.

4. 解：$(2x-1)^2=x(3x+2)-7$，

$x^2-6x=-8$，

$x^2-6x+9=9-8$，

$(x-3)^2=1$，

$x-3=\pm1$.

$\therefore x_1=4, x_2=2$.

点拨：本题化简后配方得到 $(x-3)^2=1$，再直接开平方求解.

5. 解：$x^2=6x+1, x^2-6x-1=0$，

$\Delta=(-6)^2-4\times1\times(-1)=36+4=40$，

$x=\frac{6\pm\sqrt{10}}{2}$，

$\therefore x_1=3+\sqrt{10}, x_2=3-\sqrt{10}$.

点拨：本题直接利用公式法求解即可.

6. 解：$\sqrt{2}x-2=2x^2$，

$2x^2-\sqrt{2}x+2=0$，

$\Delta=(-\sqrt{2})^2-4\times2\times2=2-16<0$，

$\therefore$ 原方程无实数根.

7. 解：$2(x-2)=3x(x-2)$，

$2(x-2)-3x(x-2)=0$，

$(x-2)(2-3x)=0$，

$x-2=0$ 或 $2-3x=0$.

$\therefore x_1=2, x_2=\frac{2}{3}$.

点拨：本题先利用因式分解法将方程变形为 $(x-2)(2-3x)=0$，再进行求解.

8. 解：$(x+2)^2-10(x+2)+25=0$，

$(x+2-5)^2=0$，

$(x-3)^2=0$.

$\therefore x_1=x_2=3$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. 解：$3(x-5)^2=x^2-25$，

$3(x-5)^2-(x+5)(x-5)=0$，

$(x-5)[3(x-5)-(x+5)]=0$，

$(x-5)(2x-20)=0$，

$\therefore x_1=5, x_2=10$.

10. 解：$(x+1)(x-1)+2(x+3)=8$，

$x^2-1+2x+6=8$，

$x^2+2x=3$，

$x^2+2x+1=3+1$，

$(x+1)^2=4$，

$x+1=\pm 2$，

$\therefore x_1=1, x_2=-3$.

11. 解：(1) 设 $x^2=y$，则原方程变为 $y^2+y-6=0$，

解得 $y_1=-3, y_2=2$.

当 $y=-3$ 时，$x^2=-3$，无实数根；

当 $y=2$ 时，$x^2=2$，$\therefore x=\pm\sqrt{2}$.

$\therefore$ 原方程的解为 $x_1=\sqrt{2}, x_2=-\sqrt{2}$.

(2) 令 $a+2b=x$，则 $x(x-2)=2x-4$，解得 $x_1=x_2=2$，

即 $a+2b=2$.

$\therefore 4a+8b-1=4(a+2b)-1=4\times 2-1=7$.

点拨： 本题利用换元的思想求方程的解和代数式的值. (1) 中将 x^2 看成一个整体进行换元. (2) 中将 $a+2b$ 看成一个整体进行换元，从而达到简便运算的目的.

第 7 招　一元二次方程中常见易错易混问题归类

1. 错解：由题意知 $|k|-1=2$，解得 $k=\pm 3$.

$\therefore$ 不等式为 $3x-6+6\leqslant 0$ 或 $-3x+6+6\leqslant 0$，$\therefore x\leqslant 0$ 或 $x\geqslant 4$.

诊断：当方程是一元二次方程时，不仅要使未知数的最高次数是 2，还要使二次项的系数不为 0. 本题就是忽视了二次项的系数 $k-3\neq 0$ 这一条件，而导致错解.

正解：由题意知 $\begin{cases}|k|-1=2,\\ k-3\neq 0,\end{cases}\therefore k=-3$.

$\therefore$ 不等式为 $-3x+6+6\leqslant 0$，$\therefore x\geqslant 4$.

2. 错解 1：将二次项系数化为 1 时，给各项都除以 2，错得 $2y^2-6y+1=y^2-3y+\frac{1}{2}=\left(y-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{7}{4}$.

错解 2：配方时，加上一次项系数一半的平方后，为了保持代数式的值不变，必须再减去一次项系数一半的平方，不能“只加不减”. 错得 $2y^2-6y+1=2\left[y^2-3y+\left(-\frac{3}{2}\right)^2\right]+1=2\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+1$.

正解：$2y^2-6y+1$

$=2\left[y^2-3y+\left(-\frac{3}{2}\right)^2-\left(-\frac{3}{2}\right)^2\right]+1$

$=2\left[\left(y-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right]+1$

$=2\left(y-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{2}+1$

$=2\left(y-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{7}{2}$.

3. 错解：由题意，得 $b^2-4ac=(2k-1)^2-4\times k^2\times 1>0$，解得 $k<\frac{1}{4}$.

诊断：对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$，隐含条件 $a\neq 0$ 很容易被忽视，所以二次项系数含字母时，一定不要遗忘二次项系数不能为 0.

正解：由题意，得 $b^2-4ac=(2k-1)^2-4\times k^2\times 1>0$，且 $k^2\neq 0$，解得 $k<\frac{1}{4}$ 且 $k\neq 0$. 所以 k 的取值范围是 $k<\frac{1}{4}$ 且 $k\neq 0$.

4. 解：原方程可化为 $3(2x+5)-2x(2x+5)=0$.

因式分解，得 $(2x+5)(3-2x)=0$.

$\therefore 2x+5=0$ 或 $3-2x=0$.

解得 $x_1=-\frac{5}{2}, x_2=\frac{3}{2}$.

点拨： 在解方程时，不能在方程的两边同时除以含有未知数的代数式，否则会造成失根. 本题容易错误地在方程的两边同时除以公因式 $2x+5$，而丢失一个根 $x=-\frac{5}{2}$.

5. 解：(1) 根据题意，得 $\Delta=(-6)^2-4(2m+1)\geqslant 0$，解得 $m\leqslant 4$.

(2) 根据题意，得 $x_1+x_2=6, x_1x_2=2m+1$，而 $2x_1x_2+x_1+x_2\geqslant 20$，

$\therefore 2(2m+1)+6\geqslant 20$，解得 $m\geqslant 3$.

又 $\because m\leqslant 4$，$\therefore m$ 的取值范围为 $3\leqslant m\leqslant 4$.

6. (1) **证明：** 对于一元二次方程 $x^2-(3k+1)x+2k^2+2k=0$，

$\Delta=(3k+1)^2-4(2k^2+2k)=9k^2+6k+1-8k^2-8k=k^2-2k+1=(k-1)^2\geqslant 0$.

$\therefore$ 无论 k 取何实数值，方程总有实数根.

(2) 解：$\because \triangle ABC$ 为等腰三角形，

$\therefore$ 有 $a=b=6$，$a=c=6$ 或 $b=c$ 三种情况.

①当 $a=b=6$ 或 $a=c=6$ 时，可知 $x=6$ 为方程的一个根，

$\therefore 6^2-6(3k+1)+2k^2+2k=0$，

解得 $k=3$ 或 $k=5$.

当 $k=3$ 时，方程为 $x^2-10x+24=0$，解得 $x=4$ 或 $x=6$，

$\therefore$ 三角形的另两边长为 4，6.

当 $k=5$ 时，方程为 $x^2-16x+60=0$，

解得 $x=6$ 或 $x=10$，

$\therefore$ 三角形的另两边长为 6，10.

②当 $b=c$ 时，方程有两个相等的实数根，

$\therefore \Delta=0$，即 $(k-1)^2=0$，解得 $k_1=k_2=1$，

$\therefore$ 方程为 $x^2-4x+4=0$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解得 $x_1=x_2=2$，

此时三角形三边长为 6，2，2，不满足三角形三边关系，舍去.

综上可知，三角形的另两边长为 4，6 或 6，10.

7. 错解：(1) 设每件衬衫应降价 x 元，

根据题意，得 $(40-x)(20+2x)=1\ 200$，

整理得 $x^2-30x+200=0$.

解得 $x_1=20$，$x_2=10$.

答：每件衬衫应降价 20 元或 10 元.

(2) 由 (1) 知 $(40-x)(20+2x)=-2x^2+60x+800=-2(x-15)^2+1\ 250$.

因为 $-2(x-15)^2\leqslant 0$，所以当 $-2(x-15)^2=0$，即 $x=15$ 时，$-2(x-15)^2+1\ 250$ 的值最大.

即 $(40-x)(20+2x)$ 有最大值，为 1 250.

答：每件衬衫降价 15 元时，商场每天盈利最多.

错因分析：此题条件是“尽快减少库存”，其含义是每天售出的衬衫越多越好. 因此 $x=10$ 不符合题意，舍去，所以 $x=20$.

正解：(1) 设每件衬衫应降价 x 元，

根据题意，得 $(40-x)(20+2x)=1\ 200$，

整理得 $x^2-30x+200=0$，

解得 $x_1=20$，$x_2=10$.

因为要尽快减少库存，所以 x 应取 20.

答：每件衬衫应降价 20 元.

(2) 由 (1) 知 $(40-x)(20+2x)=-2x^2+60x+800=-2(x-15)^2+1\ 250$.

因为 $-2(x-15)^2\leqslant 0$，所以当 $-2(x-15)^2=0$，即 $x=15$ 时，$-2(x-15)^2+1\ 250$ 的值最大.

即 $(40-x)(20+2x)$ 有最大值，为 1 250.

答：每件衬衫降价 15 元时，商场每天盈利最多.

易错诊断：运用一元二次方程解决实际问题时，方程的解一般有两个，但由于实际情况的限制，需要有所取舍，如果对实际情况不了解，就会出现多解的错误. 本题中，根据“尽快减少库存”的实际意义，要对方程的解进行合理取舍，忽略了这一点，结果就会出错.

8. 错解：设 t s 后两只蚂蚁与 O 点组成的三角形的面积是 450 cm^2. 根据题意，得 $\frac{1}{2}(50-2t)\cdot 3t=450$，整理得 $t^2-25t+150=0$，解得 $t_1=10$，$t_2=15$.

答：分别在 10 s 和 15 s 时，两只蚂蚁与 O 点组成的三角形的面积为 450 cm^2.

错因分析：此题考虑问题不够全面，漏掉了蚂蚁甲在 OB 上的情况.

正解：(1) 当蚂蚁甲在 AO 段时，设 t s 后两只蚂蚁与 O 点组成的三角形的面积是 450 cm^2，根据题意，得 $\frac{1}{2}(50-2t)\cdot 3t=450$.

整理得 $t^2-25t+150=0$，解得 $t_1=10$，$t_2=15$.

(2) 蚂蚁甲爬完 AO 这段用了 $50\div 2=25$ (s)，当它开始由 O 点向 B 点爬行时，设从 O 点开始 x s 后两只蚂蚁与 O 点组成的三角形的面积是 450 cm^2，根据题意，得 $\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot 3(x+25)=450$，

整理得 $x^2+25x-150=0$.

解得 $x_1=5$，$x_2=-30$ (舍去).

当 $x=5$ 时，$x+25=30$，即这时蚂蚁爬了 30 s.

答：分别在 10 s，15 s，30 s 时，两只蚂蚁与 O 点组成的三角形的面积是 450 cm^2.

易错诊断：解动点问题要弄清点运动的特征，必要时要注意分类讨论. 如蚂蚁甲由 A 点向 B 点爬行表示蚂蚁甲既可以在线段 AO 上，又可以在线段 OB 上.

第 8 招　证比例式或等积式的七种技巧

1. 证明：过点 D 作 $DG\parallel BC$，交 AC 于点 G，

易知 $\triangle DGF\backsim\triangle ECF$，$\triangle ADG\backsim\triangle ABC$.

$\therefore\frac{EF}{DF}=\frac{CE}{DG}$，$\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DG}$.

$\because AD=CE$，$\therefore\frac{CE}{DG}=\frac{AD}{DG}$，$\therefore\frac{AB}{BC}=\frac{EF}{DF}$，

即 $AB\cdot DF=BC\cdot EF$.

点拨：过某一点作平行线，构造出“A”型或“X”型的基本图形，通过相似三角形转化线段的比，从而解决问题.

2. 证明：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AE\parallel DC$，$\angle A=\angle C$.

$\therefore\angle CDF=\angle E$.

$\therefore\triangle FCD\backsim\triangle DAE$. $\therefore\frac{DC}{AE}=\frac{CF}{AD}$.

3. 证明：$\because DM\perp BC$，$\angle BAC=90°$，

$\therefore\angle B+\angle BEM=90°$，$\angle D+\angle DEA=90°$.

$\because\angle BEM=\angle DEA$，$\therefore\angle B=\angle D$.

$\because M$ 为 BC 的中点，$\angle BAC=90°$，

$\therefore BM=AM$.

$\therefore\angle B=\angle BAM$.

$\therefore\angle BAM=\angle D$，即 $\angle EAM=\angle D$.

又$\because\angle AME=\angle DMA$.

$\therefore\triangle AME\backsim\triangle DMA$.

$\therefore\frac{AM}{MD}=\frac{ME}{AM}$，即 $AM^2=MD\cdot ME$.

4. 证明：如图，连结 PM，PN.

$\because MN$ 是 AP 的垂直平分线，

$\therefore MA=MP$，$NA=NP$.

$\therefore\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$.

又$\because\triangle ABC$ 是等边三角形，

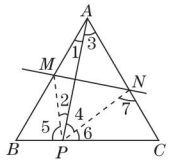
$\therefore\angle B=\angle C=\angle 1+\angle 3=60°$.

$\therefore\angle 2+\angle 4=60°$.

$\therefore\angle 5+\angle 6=120°$.

又$\because\angle 6+\angle 7=180°-\angle C=120°$，

$\therefore\angle 5=\angle 7$. $\therefore\triangle BPM\backsim\triangle CNP$.



（第 4 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \frac{BP}{CN}=\frac{BM}{CP}$，即 $BP\cdot CP=BM\cdot CN$.

5. 证明：$\because AB\parallel DN$，$\therefore \angle MBA=\angle MDN$，$\angle MAB=\angle MND$.

$\therefore \triangle AMB\backsim\triangle NMD$.

$\therefore \frac{AM}{NM}=\frac{BM}{DM}$.

又$\because AD\parallel BP$，

$\therefore \angle MAD=\angle P$，$\angle MDA=\angle MBP$.

$\therefore \triangle BMP\backsim\triangle DMA$.

$\therefore \frac{MP}{AM}=\frac{BM}{DM}$.

$\therefore \frac{AM}{MN}=\frac{MP}{AM}$.

$\therefore AM^2=MN\cdot MP$.

点拨：利用平行线得到角相等，从而判定三角形相似，再由相似三角形对应边的比相等，可求某些线段的长或证明比例式和等积式. 当直接利用相似三角形对应边的比相等或平行线截得的对应线段成比例无法解决问题时，可找中间比进行过渡，而找“中间比”是证比例关系常用的方法.

6. 证明：由题意得$\angle BDF=\angle BAE=90°$.

$\because BE$ 平分$\angle ABC$，$\therefore \angle DBF=\angle ABE$.

$\therefore \triangle BDF\backsim\triangle BAE$. $\therefore \frac{BD}{AB}=\frac{BF}{BE}$.

$\because \angle BAC=\angle BDA=90°$，

$\angle ABC=\angle DBA$.

$\therefore \triangle ABC\backsim\triangle DBA$. $\therefore \frac{AB}{BC}=\frac{BD}{AB}$.

$\therefore \frac{BF}{BE}=\frac{AB}{BC}$.

7. 证明：(1)$\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，$\therefore \angle B=\angle D$.

$\because AM\perp BC$，$AN\perp CD$，

$\therefore \angle AMB=\angle AND=90°$.

$\therefore \triangle AMB\backsim\triangle AND$.

(2)由$\triangle AMB\backsim\triangle AND$得$\frac{AM}{AN}=\frac{AB}{AD}$，$\angle BAM=\angle DAN$.

又$\because AD=BC$，

$\therefore \frac{AM}{AN}=\frac{AB}{BC}$. $\therefore \frac{AM}{AB}=\frac{AN}{BC}$.

$\because AM\perp BC$，$AD\parallel BC$，

$\therefore \angle MAD=\angle AMB=90°$.

$\therefore \angle B+\angle BAM=\angle MAN+\angle NAD=90°$.

$\therefore \angle B=\angle MAN$.

$\therefore \triangle AMN\backsim\triangle BAC$. $\therefore \frac{AM}{AB}=\frac{MN}{AC}$.

8. 证明：$\because BG\perp AP$，$PE\perp AB$，

$\therefore \angle AEP=\angle DEB=\angle AGB=90°$.

$\therefore \angle P+\angle PAB=90°$，

$\angle PAB+\angle ABG=90°$.

$\therefore \angle P=\angle ABG$. $\therefore \triangle AEP\backsim\triangle DEB$.

$\therefore \frac{AE}{DE}=\frac{PE}{BE}$，即 $AE\cdot BE=PE\cdot DE$.

$\because \angle CEA=90°$，

$\therefore \angle CAB+\angle ACE=90°$.

又$\because \angle ACB=90°$，

$\therefore \angle CAB+\angle CBE=90°$.

$\therefore \angle ACE=\angle CBE$.

又$\because \angle CEA=\angle BEC=90°$，

$\therefore \triangle AEC\backsim\triangle CEB$.

$\therefore \frac{AE}{CE}=\frac{CE}{BE}$，即 $CE^2=AE\cdot BE$.

$\therefore CE^2=DE\cdot PE$.

9. 证明：$\because AD\perp BC$，$DE\perp AB$，

$\therefore \angle ADB=\angle AED=90°$.

又$\because \angle BAD=\angle DAE$，

$\therefore \triangle ABD\backsim\triangle ADE$.

$\therefore \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AD}$，即 $AD^2=AE\cdot AB$.

同理可得 $AD^2=AF\cdot AC$.

$\therefore AE\cdot AB=AF\cdot AC$. $\therefore \frac{AE}{AF}=\frac{AC}{AB}$.

10. 证明：如图，连结 PC.

$\because AB=AC$，$AD\perp BC$，

$\therefore AD$ 垂直平分 BC，$\angle ABC=\angle ACB$.

$\therefore BP=CP$. $\therefore \angle 1=\angle 2$.

$\therefore \angle ABC-\angle 1=\angle ACB-\angle 2$，

即$\angle 3=\angle 4$.

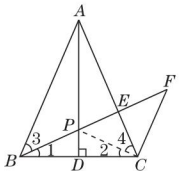
$\because CF\parallel AB$，$\therefore \angle 3=\angle F$. $\therefore \angle 4=\angle F$.

又$\because \angle CPF=\angle CPE$，

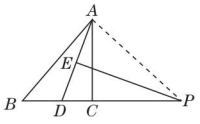
$\therefore \triangle CPF\backsim\triangle EPC$.

$\therefore \frac{CP}{PE}=\frac{PF}{CP}$，即 $CP^2=PF\cdot PE$.

$\because BP=CP$，$\therefore BP^2=PE\cdot PF$.



（第 10 题）



（第 11 题）

11. 证明：如图，连结 PA，

$\because EP$ 是 AD 的垂直平分线，$\therefore PA=PD$.

$\therefore \angle PDA=\angle PAD$.

$\therefore \angle B+\angle BAD=\angle DAC+\angle CAP$.

又$\because AD$ 平分$\angle BAC$，

$\therefore \angle BAD=\angle DAC$. $\therefore \angle B=\angle CAP$.

又$\because \angle APC=\angle BPA$，

$\therefore \triangle PAC\backsim\triangle PBA$.

$\therefore \frac{PA}{PB}=\frac{PC}{PA}$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

即 $PA^2 = PB \cdot PC$.

$\because PA = PD, \therefore PD^2 = PB \cdot PC$.

第 9 招 巧作平行线构造相似三角形

1. 解：如图，连结 DF，$\because E, F$ 是边 BC 上的两个三等分点，

$\therefore BE = EF = FC$.

$\because D$ 是 AC 的中点，$\therefore AD = CD$.

$\therefore DF$ 是 $\triangle ACE$ 的中位线.

$\therefore DF /\!/ AE$，且 $DF = \frac{1}{2}AE$.

$\therefore DF /\!/ PE$.

$\therefore \frac{BE}{BF} = \frac{BP}{BD}$.

$\because BF = 2BE, \therefore BD = 2BP$.

$\therefore BP = PD$.

$\therefore DF = 2PE$.

$\because DF /\!/ AE$，

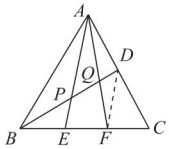
$\therefore \angle APQ = \angle FDQ, \angle PAQ = \angle DFQ$.

$\therefore \triangle APQ \backsim \triangle FDQ. \therefore \frac{PQ}{QD} = \frac{AP}{DF}$.

设 $PE = a$，则 $DF = 2a, AP = 3a$.

$\therefore PQ : QD = AP : DF = 3 : 2$.

$\therefore BP : PQ : QD = 5 : 3 : 2$.



（第 1 题）

点拨： 给出边的三等分点或中点，求相关线段的比值时，通常连结这些点中的某些点找平行关系，构造相似三角形求解.

2. 解：如图，过点 C 作 $CG /\!/ AB$ 交 AE 的延长线于点 G.

$\because CG /\!/ AB, \therefore \angle DAF = \angle G$.

$\because D$ 为 CF 的中点，$\therefore CD = DF$.

在 $\triangle ADF$ 和 $\triangle GDC$ 中，

$$\begin{cases} \angle DAF = \angle G, \\ \angle ADF = \angle GDC, \\ DF = DC, \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADF \cong \triangle GDC$(AAS).

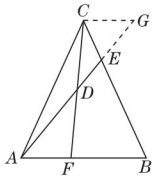
$\therefore AF = CG$.

$\because BF : AF = 3 : 2, \therefore AB : AF = 5 : 2$.

$\because \angle CGE = \angle BAE, \angle CEG = \angle BEA$,

$\therefore \triangle ABE \backsim \triangle GCE$.

$\therefore \frac{BE}{EC} = \frac{AB}{CG} = \frac{AB}{AF} = \frac{5}{2}$.



（第 2 题）

点拨： 过顶点 C 作 $CG /\!/ AB$ 交 AE 的延长线于点 G，构造相似三角形，得到相关线段的比.

3. 证明：如图，过点 C 作 $CF /\!/ AB$ 交 DP 于点 F，

$\therefore \angle PFC = \angle PDB$，

$\angle PCF = \angle PBD$.

$\therefore \triangle PCF \backsim \triangle PBD$.

$\therefore \frac{BP}{CP} = \frac{BD}{CF}$.

$\because AD /\!/ CF, \therefore \angle ADE = \angle EFC$.

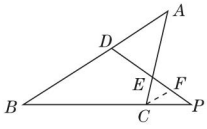
$\because AD = AE, \therefore \angle ADE = \angle AED$.

$\because \angle AED = \angle CEP$，

$\therefore \angle EFC = \angle CEP$.

$\therefore EC = CF$.

$\therefore \frac{BP}{CP} = \frac{BD}{EC}$.



（第 3 题）

4. 证明：方法一：如图①，过点 C 作 $CF /\!/ AB$，交 DE 于点 F，

$\therefore \angle FCD = \angle B$.

又 $\because \angle D$ 为公共角，

$\therefore \triangle CDF \backsim \triangle BDE$.

$\therefore \frac{CF}{BE} = \frac{CD}{BD}$.

$\because$ 点 M 为 AC 边的中点，

$\therefore AM = CM$.

$\because CF /\!/ AB$，

$\therefore \angle A = \angle MCF$.

又 $\because \angle AME = \angle CMF$，

$\therefore \triangle AME \cong \triangle CMF$.

$\therefore AE = CF$.

$\because AE = \frac{1}{4}AB, BE = AB - AE$，

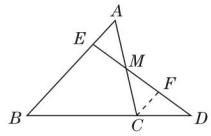
$\therefore BE = 3AE. \therefore \frac{AE}{BE} = \frac{1}{3}$.

$\because \frac{CF}{BE} = \frac{CD}{BD}$，

$\therefore \frac{AE}{BE} = \frac{CD}{BD} = \frac{1}{3}$，即 $BD = 3CD$.

又 $\because BD = BC + CD$，

$\therefore BC = 2CD$.



（第 4 题①）

方法二：如图②，过点 C 作 $CF /\!/ DE$，交 AB 于点 F，

$\therefore \frac{AE}{AF} = \frac{AM}{AC}$.

又 $\because$ 点 M 为 AC 边的中点，

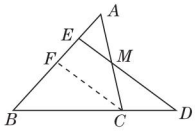
$\therefore AC = 2AM$.

$\therefore 2AE = AF. \therefore AE = EF$.

又 $\because \frac{AE}{AB} = \frac{1}{4}, \therefore \frac{BF}{EF} = 2$.

又 $\because CF /\!/ DE, \therefore \frac{BF}{FE} = \frac{BC}{CD} = 2$.

$\therefore BC = 2CD$.



（第 4 题②）

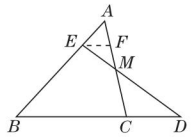
方法三：如图③，过点 E 作 $EF /\!/ BC$，交 AC 于点 F，

$\therefore \angle AEF = \angle B$.

又 $\because \angle A$ 为公共角，

$\therefore \triangle AEF \backsim \triangle ABC$.

$\therefore \frac{EF}{BC} = \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$.



（第 4 题③）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

由 $AE=\frac{1}{4}AB$，知

$\frac{EF}{BC}=\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{1}{4}$，

$\therefore EF=\frac{1}{4}BC, AF=\frac{1}{4}AC.$

由 $EF\parallel CD$，易证得 $\triangle EFM\backsim\triangle DCM$，

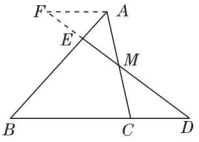
$\therefore \frac{EF}{CD}=\frac{MF}{MC}.$

又 $\because AM=MC, \therefore MF=\frac{1}{2}MC.$

$\therefore EF=\frac{1}{2}CD.$

$\therefore BC=2CD.$

方法四：如图④，过点 A 作 $AF\parallel BD$，交 DE 的延长线于点 F，



（第 4 题④）

$\therefore \angle F=\angle D, \angle FAE=\angle B.$

$\therefore \triangle AEF\backsim\triangle BED.$

$\therefore \frac{AE}{BE}=\frac{AF}{BD}.$

$\because AE=\frac{1}{4}AB,$

$\therefore AE=\frac{1}{3}BE. \therefore AF=\frac{1}{3}BD.$

由 $AF\parallel CD$，易证得 $\triangle AFM\backsim\triangle CDM.$

又 $\because AM=MC, \therefore AF=CD.$

$\therefore CD=\frac{1}{3}BD. \therefore BC=2CD.$

点拨： 由已知线段的比，求证另外两线段的比，通常作平行线，构造相似三角形来求解.

第 10 招 成比例线段的证明和计算的五种常用作辅助线的方法

1. 证明：过点 D 作 $DG\parallel BC$ 交 AB 于 G，易证得 $\triangle DFG\backsim\triangle EFB$，

$\therefore \frac{DG}{EB}=\frac{DF}{EF}. \because EB=AD, \therefore \frac{DG}{AD}=\frac{DF}{EF}.$

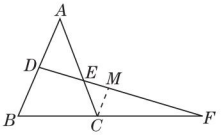
由 $DG\parallel BC$ 易证得 $\triangle ADG\backsim\triangle ACB$，

$\therefore \frac{DG}{BC}=\frac{AD}{AC}$，即 $\frac{DG}{AD}=\frac{BC}{AC}, \therefore \frac{DF}{EF}=\frac{BC}{AC}$，

$\therefore EF\cdot BC=AC\cdot DF.$

点拨： 通过作平行线证三角形相似，然后由相似三角形的对应边成比例证等积式.

2. 证明：如图，过点 C 作 $CM\parallel AB$ 交 DF 于点 M.



（第 2 题）

$\because CM\parallel AB, \therefore \angle FCM=\angle B, \angle FMC=\angle FDB.$

$\therefore \triangle CMF\backsim\triangle BDF.$

$\therefore \frac{BF}{CF}=\frac{BD}{CM}.$

又 $\because CM\parallel AD,$

$\therefore \angle A=\angle ECM, \angle ADE=\angle CME.$

$\therefore \triangle ADE\backsim\triangle CME. \therefore \frac{AE}{EC}=\frac{AD}{CM}.$

$\because D$ 为 AB 的中点，$\therefore BD=AD.$

$\therefore \frac{BD}{CM}=\frac{AD}{CM}. \therefore \frac{BF}{CF}=\frac{AE}{EC}$，

即 $AE\cdot CF=BF\cdot EC.$

3. 证明：过点 P 作 $PE\perp AC$ 于 E，$PF\perp CB$ 于 F，则四边形 $CEPF$ 为矩形.

$\therefore PF=EC.$

易得 $\angle A=\angle B=45°, \angle AEP=\angle PFB=90°,$

$\therefore \angle APE=45°=\angle B.$

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle AEP\backsim\mathrm{Rt}\triangle PFB.$

$\therefore \frac{PA}{PB}=\frac{PE}{BF}.$

易得 $PF=BF=EC, \therefore \frac{PA}{PB}=\frac{PE}{EC}.$ ①

$\because CP\perp MN$ 于 $Q,$

$\therefore \angle QCN+\angle QNC=90°.$

又 $\because \angle QCN+\angle QCM=90°,$

$\therefore \angle QCM=\angle QNC.$

又易得 $\angle PEC=\angle MCN=90°, \therefore \mathrm{Rt}\triangle PEC\backsim\mathrm{Rt}\triangle MCN.$

$\therefore \frac{EP}{CM}=\frac{EC}{CN}$，即 $\frac{EP}{EC}=\frac{CM}{CN}.$ ②

由①②得 $\frac{PA}{PB}=\frac{CM}{CN}$，即 $PA:PB=CM:CN.$

点拨： 本题通过作垂线得到矩形 $CEPF$，再由矩形的性质、相似三角形的判定和性质即可证得.

4. 证明：延长 GF 与 AC，交于点 H，

$\because CD\perp AB, FG\perp AB,$

$\therefore CD\parallel FG, \therefore \angle AGF=\angle ADE, \angle AFG=\angle AED, \angle AHF=\angle ACE, \angle AFH=\angle AEC.$

$\therefore \triangle AFG\backsim\triangle AED, \triangle AFH\backsim\triangle AEC.$

$\therefore \frac{AF}{AE}=\frac{FG}{ED}, \frac{AF}{AE}=\frac{FH}{EC}. \therefore \frac{FG}{ED}=\frac{FH}{EC}.$

又 $ED=EC, \therefore FG=FH.$

易证得 $\mathrm{Rt}\triangle CFH\backsim\mathrm{Rt}\triangle GFB,$

$\therefore \frac{CF}{FG}=\frac{FH}{BF}. \therefore FG\cdot FH=CF\cdot BF.$

$\because FG=FH, \therefore FG^2=CF\cdot BF.$

点拨： 通过作延长线构造相似三角形，再由相似三角形的性质和等量代换得到几个比例式或等积式，从而得到结论.

5. 解：取 BC 的中点 M，连结 AM.

$\because AB\perp AC, \therefore AM=CM, \therefore \angle MAC=\angle C.$

$\because BD=DC, \therefore \angle DBC=\angle C.$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \angle MAC=\angle DBC$.

又$\because \angle C=\angle C$,

$\therefore \triangle MAC\backsim\triangle DBC$.

$\therefore \dfrac{MC}{DC}=\dfrac{AC}{BC}$.

又$DC=1$,$MC=\dfrac{1}{2}BC$,

$\therefore AC=\dfrac{MC\cdot BC}{DC}=\dfrac{1}{2}BC^2$. ①

易得$\mathrm{Rt}\triangle AEC\backsim\mathrm{Rt}\triangle BAC$,

$\therefore \dfrac{AC}{BC}=\dfrac{EC}{AC}$.

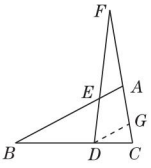
又$\because EC=1$,

$\therefore AC^2=CE\cdot BC=BC$. ②

由①②得,$AC=\dfrac{1}{2}AC^4$,$\therefore AC=\sqrt[3]{2}$.

点拨: 通过作中线构造相似三角形,进而得到相关线段的数量关系,最终求得AC的长.

6. 解:如图,过点D作AB的平行线交AC于G.



(第6题)

$\because \dfrac{BD}{DC}=\dfrac{FE}{ED}=2$,

$\therefore \dfrac{CD}{CB}=\dfrac{1}{3}$,$\dfrac{EF}{FD}=\dfrac{2}{3}$.

易得$\triangle FAE\backsim\triangle FGD$,$\triangle CGD\backsim\triangle CAB$.

$\therefore \dfrac{AE}{DG}=\dfrac{EF}{FD}=\dfrac{2}{3}$,$\dfrac{DG}{AB}=\dfrac{CD}{CB}=\dfrac{1}{3}$.

$\therefore AE=\dfrac{2}{3}DG$,$AB=3DG$,$\therefore BE=\dfrac{7}{3}DG$,

$\therefore BE:AE=7:2=\dfrac{7}{2}$.

第11招 同角或互余两角的三角函数关系的应用

1. 分析:本题可利用$\dfrac{\sin A}{\cos A}$求解,在原式的分子、分母上同时除以$\cos A$,把原式化为关于$\dfrac{\sin A}{\cos A}$的代数式,再整体代入,求解即可. 也可直接由$\dfrac{\sin A}{\cos A}=4$,得到$\sin A$与$\cos A$之间的数量关系,代入式子中求值.

解:(方法一)原式$=\dfrac{(\sin A-3\cos A)\div\cos A}{(4\sin A+\cos A)\div\cos A}=\dfrac{\dfrac{\sin A}{\cos A}-3}{\dfrac{4\sin A}{\cos A}+1}$.

$\because \dfrac{\sin A}{\cos A}=4$,

$\therefore$ 原式$=\dfrac{4-3}{4\times4+1}=\dfrac{1}{17}$.

(方法二)$\because \dfrac{\sin A}{\cos A}=4$,$\therefore \sin A=4\cos A$.

$\therefore$ 原式$=\dfrac{4\cos A-3\cos A}{4\times4\cos A+\cos A}=\dfrac{\cos A}{17\cos A}=\dfrac{1}{17}$.

2. 分析:要求$\sin\alpha+\cos\alpha$的值,必须利用锐角三角函数之间的关系找出它与已知条件的关系再求解.

解:$\because \sin\alpha-\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore (\sin\alpha-\cos\alpha)^2=\dfrac{1}{2}$,

即$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$,

$\therefore 1-2\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$,

即$2\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$.

$\therefore (\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$.

又$\because \alpha$为锐角,$\therefore \sin\alpha+\cos\alpha>0$.

$\therefore \sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

3. C **点拨:** $\because (45°-\alpha)+(45°+\alpha)=90°$,$\therefore \sin(45°-\alpha)=\cos(45°+\alpha)$. $\therefore \sin^2(45°-\alpha)+\sin^2(45°+\alpha)=\cos^2(45°+\alpha)+\sin^2(45°+\alpha)=1$.

4. 分析:因为$\tan1°\cdot\tan89°=1$,$\tan2°\cdot\tan88°=1$,…,$\tan44°\cdot\tan46°=1$,所以运用乘法的交换律后,本题易求.

解:$\tan1°\cdot\tan2°\cdot\tan3°\cdot\cdots\cdot\tan88°\cdot\tan89°=(\tan1°\cdot\tan89°)\cdot(\tan2°\cdot\tan88°)\cdot\cdots\cdot(\tan44°\cdot\tan46°)\cdot\tan45°=1$.

点拨: 互余的两角的正切值的积为1,即若$\alpha+\beta=90°$,则$\tan\alpha\cdot\tan\beta=1$.

5. 解:$\because \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$,

$\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\dfrac{12}{25}$,

$\therefore (\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=1+2\times\dfrac{12}{25}=\dfrac{49}{25}$.

$\because \alpha$为锐角,$\therefore \sin\alpha+\cos\alpha>0$.

$\therefore \sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{7}{5}$.

又$\because \sin\alpha\cdot\cos\alpha=\dfrac{12}{25}$,

$\therefore$ 以$\sin\alpha$,$\cos\alpha$为两根的关于x且二次项系数为1的一元二次方程为$x^2-\dfrac{7}{5}x+\dfrac{12}{25}=0$.

点拨: 此题运用到两方面的知识:(1)公式$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$与完全平方公式的综合运用;(2)若$x_1+x_2=p$,$x_1x_2=q$,则以$x_1$,$x_2$为两根的关于$x$且二次项系数为1

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

的一元二次方程为 $x^2-px+q=0$.

6. 解：∵ $\sin\alpha$ 是方程 $2x^2-7x+3=0$ 的一个根，

∴ 由求根公式，得 $\sin\alpha=\dfrac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\times2\times3}}{2\times2}$

$=\dfrac{7\pm5}{4}$.

∴ $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$ 或 $\sin\alpha=3$（不符合题意，舍去）.

∵ $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，

∴ $\cos^2\alpha=1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{3}{4}$.

又∵ α 为锐角，∴ $\cos\alpha>0$，

∴ $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

∴ $\sqrt{1-2\sin\alpha\cos\alpha}=\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}=\sqrt{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}=|\sin\alpha-\cos\alpha|=\left|\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right|=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

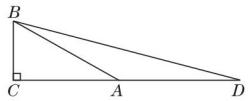
第 12 招 巧用构造法求几种特殊角的三角函数值

1. 解：如图，作 Rt△ABC，使∠$BAC=30°$，∠$C=90°$，延长 CA 到 D，使 $AD=AB$，连结 BD. 则∠$D=15°$，设 $BC=a$，则 $AB=2a$，$AC=\sqrt{3}a$，∴ $AD=2a$，∴ $CD=(2+\sqrt{3})a$.

在 Rt△BCD 中，$BD=\sqrt{BC^2+CD^2}=\sqrt{a^2+(7+4\sqrt{3})a^2}=(\sqrt{6}+\sqrt{2})a$.

∴ $\sin15°=\sin D=\dfrac{BC}{BD}=\dfrac{a}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})a}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，

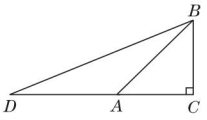
$\cos15°=\cos D=\dfrac{CD}{BD}=\dfrac{(2+\sqrt{3})a}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})a}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.



（第 1 题）

2. 解：如图，作 Rt△ABC，使∠$C=90°$，$AC=BC$，延长 CA 到 D，使 $DA=AB$，连结 BD. 则∠$D=22.5°$，设 $AC=BC=a$，则 $AB=\sqrt{2}a$，∴ $AD=\sqrt{2}a$，∴ $DC=(\sqrt{2}+1)a$，

∴ $\tan22.5°=\tan D=\dfrac{BC}{CD}=\dfrac{a}{(\sqrt{2}+1)a}=\sqrt{2}-1$.



（第 2 题）

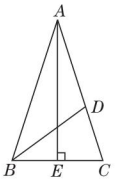
3. 解：∵ 将矩形纸片 $ABCD$ 沿过点 B 的直线折叠，使点 A 落在 BC 边上的点 E 处，∴ $AB=BE$，∠$AEB=$∠$EAB=45°$，还原后，再沿过点 E 的直线折叠，使点 A 落在 BC 边上的点 F 处，

∴ $AE=EF$，∠$EAF=$∠$EFA=45°\div2=22.5°$，

∴ ∠$FAB=67.5°$. 设 $AB=BE=x$，则 $AE=EF=\sqrt{2}x$，

∴ $\tan67.5°=\tan$∠$FAB=\dfrac{FB}{AB}=\dfrac{\sqrt{2}x+x}{x}=\sqrt{2}+1$.

4. 解：如图，作△ABC，使∠$BAC=36°$，$AB=AC$，作∠ABC 的平分线 BD 交 AC 于 D 点，过点 A 作 $AE\perp BC$ 于 E 点，设 $BC=a$，易知 $BE=EC=\dfrac{a}{2}$，∠$BAE=$∠$CAE=18°$，$BD=AD=a$，△ABC∽△BCD，∴ $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{BC}{CD}$，即 $\dfrac{AB}{a}=\dfrac{a}{AB-a}$，则 $AB^2-a\cdot AB-a^2=0$，

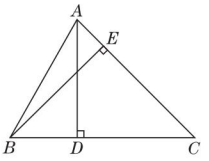


（第 4 题）

∴ $AB=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}a$（负根舍去），

∴ $\sin18°=\sin$∠$BAE=\dfrac{BE}{AB}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

5. 解：如图，作△ABC，使∠$ABC=60°$，∠$ACB=45°$. 则∠$BAC=75°$. 过点 A 作 $AD\perp BC$ 于点 D，过点 B 作 $BE\perp AC$ 于点 E，则 $AD=CD$，设 $AD=DC=a$，



（第 5 题）

则 $AC=\sqrt{2}a$，$BD=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$，$AB=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}a$，

∴ $BC=BD+CD=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}+1\right)a$.

则 $CE=BE=BC\cdot\sin45°=\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{6}a$，∴ $AE=AC-CE=\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6}a$，

∴ $\sin75°=\sin$∠$BAE=\dfrac{BE}{AB}=\dfrac{\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{6}a}{\frac{2\sqrt{3}}{3}a}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，

$\cos75°=\cos$∠$BAE=\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6}a}{\frac{2\sqrt{3}}{3}a}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，

$\tan75°=\tan$∠$BAE=\dfrac{BE}{AE}=\dfrac{\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{6}a}{\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6}a}=2+\sqrt{3}$.

第 13 招 解直角三角形的五种常见类型

1. 解：∵ $a=2\sqrt{3}$，$b=6$，

∴ $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{12+36}=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$.

∵ $\tan A=\dfrac{a}{b}=\dfrac{2\sqrt{3}}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，∴ ∠$A=30°$，∴ ∠$B=60°$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. 解：∵ $AB=13, AC=12, \angle ACB=90°$，

∴ $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{169-144}=\sqrt{25}=5$，

∴ $\sin\angle BAC=\frac{BC}{AB}=\frac{5}{13}$.

设点 B 到直线 MC 的距离为 d，

∵ $\angle BCM=\angle BAC$，

∴ $\sin\angle BAC=\sin\angle BCM$.

∵ $\sin\angle BCM=\frac{d}{BC}$，

∴ $\frac{d}{5}=\frac{5}{13}$，∴ $d=\frac{25}{13}$.

即点 B 到直线 MC 的距离为 $\frac{25}{13}$.

3. 解：由题意知 $\sin C=\frac{AB}{AC}$，即 $\frac{1}{2}=\frac{3}{AC}$，则 $AC=6$；

由题意知 $\tan C=\frac{AB}{BC}$，即 $\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{3}{BC}$，则 $BC=3\sqrt{3}$.

4. 解：∵ $\angle C=90°, \angle BDC=45°, BC=3$，∴ $CD=3$.

∵ $\angle C=90°, \angle A=30°, BC=3$，

∴ $\tan A=\frac{BC}{AC}=\frac{3}{AC}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

则 $AC=3\sqrt{3}$. ∴ $AD=AC-CD=3\sqrt{3}-3$.

5. 解：∵ $\angle B=45°, \angle C=90°$，

∴ $\angle A=45°$. ∵ $\sin B=\frac{b}{c}=\frac{b}{10}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

∴ $b=5\sqrt{2}$.

又∵ $\tan B=\frac{b}{a}=\frac{5\sqrt{2}}{a}=1$，

∴ $a=5\sqrt{2}$.

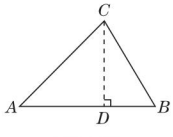
6. 解：∵ $\angle C=90°, \angle B=30°, AB=4\sqrt{3}$，

∴ $\angle CAB=60°, AC=AB\cdot\sin 30°=4\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=2\sqrt{3}$.

又∵ AD 是 $\angle BAC$ 的平分线，∴ $\angle CAD=30°$.

∵ $\cos\angle CAD=\frac{AC}{AD}=\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{AD}$，∴ $AD=4$.

7. 解：过点 C 作 $CD\perp AB$ 于点 D，如图.



（第 7 题）

在 Rt△ADC 和 Rt△CDB 中，设 $BD=x$，则 $AD=\sqrt{3}+1-x$.

由勾股定理，知 $BC^2-BD^2=CD^2=AC^2-AD^2$，

即 $2^2-x^2=(\sqrt{6})^2-(\sqrt{3}+1-x)^2$，解得 $x=1$.

∴ $AD=\sqrt{3}, BD=1$.

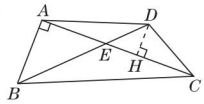
∵ $\cos B=\frac{BD}{CB}=\frac{1}{2}$，$\cos A=\frac{AD}{AC}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，且 $\angle A, \angle B$ 均为锐角，

∴ $\angle B=60°, \angle A=45°$.

又∵ $\angle A+\angle B+\angle ACB=180°$，∴ $\angle ACB=75°$.

点拨：添加辅助线 CD，利用化斜为直法构造直角三角形.

8. 解：如图，过点 D 作 $DH\perp AC$ 于点 H.



（第 8 题）

∵ $\angle CED=45°$，

$DH\perp EC, DE=\sqrt{2}$，

∴ $EH=DE\cdot\cos 45°=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=1$，

$DH=DE\cdot\sin 45°=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=1$.

又∵ $\angle DCE=30°$，

∴ $HC=\frac{DH}{\tan 30°}=\sqrt{3}, CD=\frac{DH}{\sin 30°}=2$.

∵ $\angle AEB=\angle CED=45°, \angle BAC=90°, BE=2\sqrt{2}$，

∴ $AB=AE=2$，∴ $AC=2+1+\sqrt{3}=3+\sqrt{3}$，

∴ $S_{四边形ABCD}=\frac{1}{2}\times 2\times(3+\sqrt{3})+\frac{1}{2}\times 1\times(3+\sqrt{3})=\frac{3\sqrt{3}+9}{2}$.

点拨：题目中所给的角有直角和 30°，45° 角，因此我们可以通过构造直角三角形，然后运用特殊角的三角函数值求出某些边的长，进而求出四边形的面积.

9. 解：(1) 将方程整理，得 $(c-a)x^2+2bx+(a+c)=0$，则

$\Delta=(2b)^2-4(c-a)(a+c)=4(b^2+a^2-c^2)$.

∵ 方程有两个相等的实数根，

∴ $\Delta=0$，即 $b^2+a^2=c^2$.

∴ △ABC 为直角三角形，且 $\angle C$ 为直角.

(2) 由 $3c=a+3b$，得 $a=3c-3b$. ①

将①代入 $a^2+b^2=c^2$，

得 $(3c-3b)^2+b^2=c^2$.

∴ $4c^2-9bc+5b^2=0$，即 $(4c-5b)(c-b)=0$.

由①可知，$b\neq c$，∴ $4c=5b$.

∴ $b=\frac{4}{5}c$. ②

将②代入①，得 $a=\frac{3}{5}c$.

∴ 在 Rt△ABC 中，$\sin A+\sin B=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}=\frac{7}{5}$.

点拨：解决本题的突破口是由一元二次方程根与判别式的关系得到一个关于 a, b, c 的等式. 从解题过程可以看出，求三角函数值时，只分析出直角三角形中三边的比例关系即可求出其值.

第 14 招　利用三角函数解实际问题

1. 解：根据题意，得 $\angle ACB=90°$，$\angle ABC=\alpha=43°$，$AC=1\ 200$ m.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

在 Rt△ABC 中，

∵ $\sin\angle ABC=\dfrac{AC}{AB}$，

∴ $AB=\dfrac{AC}{\sin\angle ABC}=\dfrac{1\,200}{\sin 43°}\approx\dfrac{1\,200}{0.68}\approx 1\,765$(m).

答：飞机 A 与指挥台 B 的距离约为 1 765 m.

点拨：本题解题的关键是结合图形利用锐角三角函数解直角三角形. 显然，$\angle ABC=\alpha=43°$，利用 $\sin\angle ABC=\dfrac{AC}{AB}$即可求出 AB.

2. **解**：过点 D 作 $DE\perp AB$ 于 E. 由题意，得 $DE=BC=27$ 米，$BE=DC=1.5$ 米，$\angle ADE=47°$.

在 Rt△ADE 中，$AE=DE\cdot\tan\angle ADE\approx 27\times 1.072=28.944$(米)，

所以 $AB=AE+BE\approx 30.4$ 米.

答：纪念碑的高度约为30.4 米.

点拨：解题的关键是作辅助线，构造含已知角的直角三角形. 过点 D 作 $DE\perp AB$ 于点 E，根据正切的概念求出 AE 的长，再利用 $AB=AE+BE$ 即可求出纪念碑的高度.

3. **解**：设 $BD=x$ 米，易得 $BC=x$ 米，

$BE=(x+2)$米.

在 Rt△BDE 中，∵ $\dfrac{BE}{DB}=\tan\angle EDB$，

∴ $\dfrac{x+2}{x}\approx 1.33$，

∴ $x\approx 6.06$.

∵ $\dfrac{BE}{ED}=\sin\angle EDB$，

∴ $ED=\dfrac{EB}{\sin\angle EDB}\approx\dfrac{2+6.06}{0.80}\approx 10$(米).

答：钢缆 ED 的长度约为 10 米.

点拨：①因为本题中有两个直角三角形，其中△DCB 是等腰直角三角形，所以先设 $BD=x$ 米，再用含 x 的代数式表示出 BC 与 BE 的长度；②在 Rt△BDE 中，借助 $\angle EDB$ 的正切列方程求 x；③在 Rt△BDE 中借助 $\angle EDB$ 的正弦求出 ED 的长度.

4. **解**：根据题意，可知 $AA'\parallel BC$，又 $AC\perp BC$，

∴ $AC\perp AA'$.

(1)在 Rt△ABC 中，$\angle BAC=90°-30°=60°$，

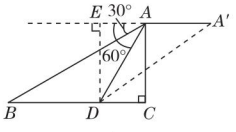
$AC=60$ m，

∴ $AB=\dfrac{AC}{\cos 60°}=60\div\dfrac{1}{2}=120$(m)，

即 A，B 之间的距离为 120 m.

(2)如图，过点 D 作 $DE\perp AA'$于点 E，连结 $A'D$.

易得$DE=AC=60$ m.



（第 4 题）

在 Rt△ADE 中，$\tan\angle DAE=\dfrac{DE}{AE}$，

∴ $AE=\dfrac{60}{\sqrt{3}}=20\sqrt{3}$(m).

∴ $A'E=AA'+AE=30\sqrt{3}+20\sqrt{3}=50\sqrt{3}$(m).

在 Rt△$A'ED$ 中，$\tan A'=\dfrac{DE}{A'E}=\dfrac{60}{50\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$.

故从无人机 A'上看目标 D 的俯角的正切值为$\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$.

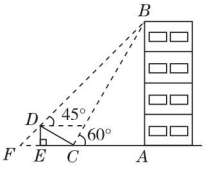
点拨：(1)在 Rt△ABC 中，求出 $\angle BAC$ 或 $\angle B$ 的度数，又知一边 AC 的长度，可通过解 Rt△ABC 直接得到 AB 的长度. (2)连结 $A'D$. ①从无人机 A'上看目标 D 的俯角为 $\angle AA'D$，要求其正切值，可直接把它构造在一个直角三角形中，于是作 $DE\perp AA'$于点 E；②通过解 Rt△ADE 求得 AE 的长，进而可知 $A'E$ 的长；③在 Rt△$A'ED$ 中，计算 $\tan A'$的值即为所求.

5. **解**：(1)在 Rt△DCE 中，$\angle DCE=30°$，

∴ $\sin\angle DCE=\dfrac{DE}{CD}=\sin 30°$.

∴ $DE=CD\cdot\sin 30°=4\times\dfrac{1}{2}=2$(米).

(2)如图，延长 BD，交 AE 的延长线于点 F. 由题意知，$\angle F=45°$.



（第 5 题）

∵ $\angle DEF=90°$，

∴ $\angle EDF=\angle F=45°$.

∴ $EF=DE=2$ 米. 设 $AC=x$ 米，

则 $AB=AC\cdot\tan\angle ACB=x\cdot\tan 60°=\sqrt{3}x$ 米.

在 Rt△DCE 中，$CE=\sqrt{CD^2-DE^2}=2\sqrt{3}$米，

∴ $AF=EF+EC+CA=(2+2\sqrt{3}+x)$米.

在 Rt△ABF 中，$\tan F=\dfrac{AB}{AF}$，

∴ $\tan 45°=\dfrac{\sqrt{3}x}{2+2\sqrt{3}+x}=1$.

∴ $x=4+2\sqrt{3}$.

∴ $AB=(6+4\sqrt{3})$米，

即大楼 AB 的高度为$(6+4\sqrt{3})$米.

点拨：(1)在 Rt△DCE 中，根据 $\angle DCE=30°$，$CD=4$ 米，可知 $DE=CD\cdot\sin 30°$，求出 DE；(2)延长 BD，交 AE 的延长线于点 F，构成 Rt△ABF，根据已知条件解此三角形即可.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 15 招 统计概率思想在实际中的应用

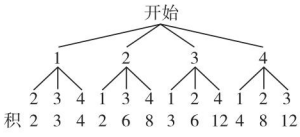
1. 解：问题 1：第三名同学的样本选取更合理.

理由：第三名同学选取的样本是从七年级全体学生中随机选取的 20 名学生，样本具有代表性；第一名同学主要问题是样本容量小；第二名同学虽然样本容量合适，但是样本中的个体不具有代表性.

问题 2：读 4 本书的可能性大.

理由：由扇形统计图知，合理样本的 20 名学生中，“阅读动机”为“老师布置的任务不得不完成”和“读与不读都无所谓”的学生共有 $20\times(20\%+15\%)=7$（人），他们阅读书数量基本是 2 本或 3 本，而“阅读动机”在“40%”的群体，即“阅读动机”是“能够学到一些课外知识”的学生人数为 $20\times40\%=8$（人），他们的读书本数会比最低要求的读书本数略多，结合表 3 可知，他们暑期读 4 本书的可能性大.

2. 解：(1) 画树状图如图所示：



（第 2 题）

共有 12 种等可能的结果，两人摸出的小球上的数字之积是 8 的有 2 种情况，

∴ 两数之积是 8 的概率为 $\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.

(2) 不公平. 理由：∵ 两数之积是偶数的有 10 种情况，两数之积是奇数的有 2 种情况，

∴ P(两数之积是偶数) $=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$，

P(两数之积是奇数) $=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.

∵ $\frac{5}{6}\times1\neq\frac{1}{6}\times3$，∴ 此游戏不公平.

修改得分规则为：当两数之积是偶数时，甲得 1 分，当两数之积是奇数时，乙得 5 分.（修改得分规则不唯一）

3. 解：(1) ∵ 共有 4 种等可能的结果，落回到圈 A 的只有 1 种情况，∴ 落回到圈 A 的概率 $P_1=\frac{1}{4}$；

(2) 列表得：

	1	2	3	4
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)

共有 16 种等可能的结果，最后落回到圈 A 的有(1,3)，(2,2)，(3,1)，(4,4)4 种情况，

∴ 最后落回到圈 A 的概率 $P_2=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$，

∴ 她与嘉嘉落回到圈 A 的可能性一样.

4. 解：(1) 根据题意，点 P 的横坐标有数字 1，2，3，4 四种选择，点 P 的纵坐标也有数字 1，2，3，4 四种选择，

∴ 构成点 P 的坐标共有 $4\times4=16$（种）情况，

设点 P 的坐标为 (x,y)，列表如下：

y \ x	1	2	3	4
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)

其中点(1,1)，(1,2)，(2,1)，(2,2)落在正方形 $ABCD$ 面上（含正方形内部和边界），故所求的概率为 $\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$.

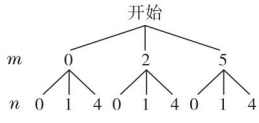
(2) ∵ 要使点 P 落在正方形 $ABCD$ 面上（含正方形内部和边界）的概率为 $\frac{3}{4}=\frac{12}{16}>\frac{1}{4}$，

∴ 只能将正方形 $ABCD$ 向上或向右平移整数个单位，且使点 P 落在正方形 $ABCD$ 面上（含正方形内部和边界）的情况有 12 种.

∴ 存在满足题设要求的平移方式：先将正方形 $ABCD$ 向上平移 2 个单位，再向右平移 1 个单位.（平移方式不唯一）

第 16 招 概率的应用类型

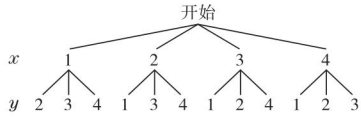
1. 解：关于 x 的一元二次方程 $x^2-2mx+n^2=0$ 有实数根，则 $\Delta=(-2m)^2-4n^2=4(m^2-n^2)\geqslant0$，∴ $m^2\geqslant n^2$，画树状图如图：



（第 1 题）

由图可知共有 9 种等可能的结果，其中 $m^2\geqslant n^2$ 的情况有 6 种，∴ 关于 x 的一元二次方程 $x^2-2mx+n^2=0$ 有实数根的概率为 $\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$.

2. 解：(1) 画树状图如图：



（第 2 题）

共有 12 种等可能的结果. 点 M 所有可能的坐标有(1,2)，(1,3)，(1,4)，(2,1)，(2,3)，(2,4)，(3,1)，(3,2)，(3,4)，(4,1)，(4,2)，(4,3).

(2) ∵ 在所有 12 种等可能的结果中，在函数 $y=x+1$ 的

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

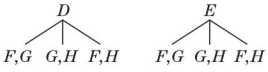
图象上的有(1,2),(2,3),(3,4)这3种结果,

∴点 $M(x,y)$ 在函数 $y=x+1$ 的图象上的概率为 $\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$.

3. 解:(1)△DHF(答案不唯一)

(2)画树状图如图,共有6种等可能的结果,其中与△ABC面积相等的是△DFG,△DFH,△EFG,共有3种结果,

∴ P(所画三角形与△ABC面积相等)$=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.



(第3题)

4. 解:(1)0.25;0.25

(2)设袋中白球有 x 个,根据题意,得$\frac{1}{1+x}=0.25$,

解得 $x=3$. 所以估计袋中有3个白球.

第17招 求概率的四种方法

1. 解:(1)P(从袋中摸出一个球是黄球)$=\frac{5}{5+13+22}=\frac{1}{8}$.

(2)设取出了 x 个黑球,则放入了 x 个黄球,由题意得 $\frac{5+x}{5+13+22}\geqslant\frac{1}{3}$,解得 $x\geqslant\frac{25}{3}$.

∵ x 为正整数,∴ x 最小取9. ∴至少取出了9个黑球.

点拨: 本题直接利用公式法求出相应问题的概率.

2. 解:(1)由题中图表可知被调查学生中"一般"档次的有13人,所占百分比是26%,所以共调查的学生人数是 $13\div26\%=50$(人),

则被调查学生中"良好"档次的人数为 $50\times60\%=30$(人),

所以 $x=30-(12+7)=11$,

所以 $y=50-(1+2+6+7+12+11+7+1)=3$.

(2)由样本数据可知"优秀"档次所占的百分比是 $\frac{3+1}{50}\times100\%=0.08\times100\%=8\%$.

所以估计该校九年级400名学生中为"优秀"档次的人数为 $400\times8\%=32$(人).

(3)用A,B,C表示阅读本数是8本的学生,用D表示阅读本数是9本的学生,列表如下:

	A	B	C	D
A		(A,B)	(A,C)	(A,D)
B	(B,A)		(B,C)	(B,D)
C	(C,A)	(C,B)		(C,D)
D	(D,A)	(D,B)	(D,C)	

由列表可知,共有12种等可能的情况,其中所抽取的2名学生中有1名阅读本数为9本的有6种. 所以抽取的2名学生中有1名阅读本数为9本的概率 $P=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$.

点拨: 本题利用列表法将所有情况列出,共12种,找出符合条件的情况有6种,所以概率 $P=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$.

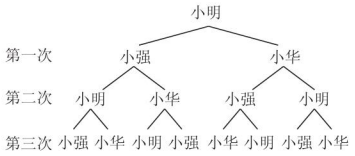
3. 解:(1)画树状图如图:



[第3(1)题]

∴ P(足球踢到小华处)$=\frac{1}{4}$.

(2)应从小明开始踢. 理由如下:画树状图如图:



[第3(2)题]

若从小明开始踢,P(足球踢到小明处)$=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$,

同理,若从小强开始踢,P(足球踢到小明处)$=\frac{3}{8}$,

若从小华开始踢,P(足球踢到小明处)$=\frac{3}{8}$.

故应从小明开始踢.

4. 解:(1)"和为7"出现的概率约为0.33.

(2)列表如下:

和 / 甲 / 乙	2	3	4	x
2	/	5	6	$2+x$
3	5	/	7	$3+x$
4	6	7	/	$4+x$
x	$x+2$	$x+3$	$x+4$	/

由上表可知,一共有12种等可能的结果,由(1)可知,"和为7"出现的概率约为0.33,

∴"和为7"出现的次数约为 $0.33\times12=3.96\approx4$. 若 $2+x=7$,则 $x=5$,符合题意,若 $3+x=7$,则 $x=4$,不合题意.

若 $4+x=7$,则 $x=3$,不合题意.

∴ $x=5$.

第18招 建模思想应用的常见类型归类

1. 解:(1)四边形 $DHBG$ 是菱形. 理由如下:

∵四边形 $ABCD$,$FBED$ 是完全相同的矩形,

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$\therefore \angle A=\angle E=90°, AD=ED, AB=EB.$

在$\triangle DAB$和$\triangle DEB$中，$\begin{cases} AD=ED, \\ \angle A=\angle E, \\ AB=EB, \end{cases}$

$\therefore \triangle DAB\cong\triangle DEB(\mathrm{SAS})$，

$\therefore \angle ABD=\angle EBD.$

$\because AB/\!/CD, DF/\!/BE$，

$\therefore$ 四边形$DHBG$是平行四边形，$\angle HDB=\angle EBD$，

$\therefore \angle HDB=\angle HBD$，

$\therefore DH=BH$，

$\therefore \square DHBG$是菱形.

(2)由(1)，设$DH=BH=x$，则$AH=8-x$，

在$\mathrm{Rt}\triangle ADH$中，$AD^2+AH^2=DH^2$，即$4^2+(8-x)^2=x^2$，

解得$x=5$，即$BH=5$，

$\therefore$ 菱形$DHBG$的面积为$HB\cdot AD=5\times4=20$.

点拨： 建立方程模型，将DH, HB的长设为x，由勾股定理列方程求得HB的长，进而求出四边形$DHBG$的面积.

2. 不发生；在直角三角形中，斜边上的中线等于斜边的一半

点拨： 连结OP. $\because \angle AOB=90°$，点P是线段AB的中点，

$\therefore OP=\frac{1}{2}AB.$

$\because$ 木棍(AB)的长度不发生改变，

$\therefore$ 滑动过程中，点P到点O的距离不发生变化.

3. 解：(1)四边形$EFGH$还是平行四边形.

理由如下：连结AC.

$\because E, F$分别是AB, BC的中点，

$\therefore EF/\!/AC, EF=\frac{1}{2}AC.$

$\because G, H$分别是CD, AD的中点，

$\therefore GH/\!/AC, GH=\frac{1}{2}AC$，

$\therefore EF/\!/GH, EF=GH$，

$\therefore$ 四边形$EFGH$是平行四边形.

(2)(ⅰ)当$AC=BD$时，四边形$EFGH$是菱形.

证明：由(1)可知四边形$EFGH$是平行四边形，

易知$FG=\frac{1}{2}BD, EF=\frac{1}{2}AC$，

$\because AC=BD$，

$\therefore FG=EF$，

$\therefore$ 四边形$EFGH$是菱形.

(ⅱ)当$AC\perp BD$时，四边形$EFGH$是矩形.

点拨： 由(1)可知$EF/\!/AC$，且四边形$EFGH$是平行四边形，

$\because AC\perp BD$，

$\therefore EF\perp BD$，

$\because G, F$分别是CD, BC的中点，

$\therefore FG/\!/BD.$

$\because EF\perp BD$，

$\therefore EF\perp FG$，即$\angle EFG=90°$，

$\therefore \square EFGH$是矩形.

4. 解：(1)设每千克核桃应降价x元.

根据题意，得$(60-x-40)\left(100+\frac{x}{2}\times20\right)=2\,240.$

化简，得$x^2-10x+24=0$.

解得$x_1=4, x_2=6$.

答：每千克核桃应降价4元或6元.

(2)由(1)可知每千克核桃可降价4元或6元.

因为要尽可能让利于顾客，

所以每千克核桃应降价6元.

此时，售价为$60-6=54$(元)，

$\frac{54}{60}\times100\%=90\%$.

答：该店应该按原售价的九折出售.

点拨： 设出未知数，利用“平均每天的销售量×每千克的利润=2 240元”列出方程求解即可.

5. 解：(1)结合题图可设日均销售量p(桶)与销售单价x(元)的函数关系式为$p=kx+b(k\neq0)$，

根据题意得$\begin{cases} 7k+b=500, \\ 12k+b=250, \end{cases}$解得$\begin{cases} k=-50, \\ b=850. \end{cases}$

所以日均销售量p(桶)与销售单价x(元)的函数关系式为$p=-50x+850$.

(2)所提问题不唯一，如：“若该经营部希望日均获利1 350元，那么日均应销售多少桶水？”

根据题意得$(x-5)(-50x+850)-250=1\,350$，

解得$x_1=9, x_2=13$(不合题意，舍去)，

当$x=9$时，$p=-50x+850=400$.

答：若该经营部希望日均获利1 350元，那么日均应销售400桶水.

点拨： 本题考查了一元二次方程及一次函数的应用，解题的关键是通过题目和图象建立合适的函数模型求解.

6. 解：(1)在直角坐标系中描出相应的点如图所示.

(2)由(1)中图可知，加热过程中y与x满足一次函数关系，设函数解析式为$y=kx+b(k\neq0)$，

将点$(0,24)$的坐标代入，求得$b=24$，

再将点$(2,56)$的坐标代入，求得$k=16$.

所以加热过程中y与x的函数解析式为$y=16x+24$.

由(1)中图可知，加工过程中y与x满足反比例函数关系，设函数解析式为$y=\frac{m}{x}(m\neq0)$，

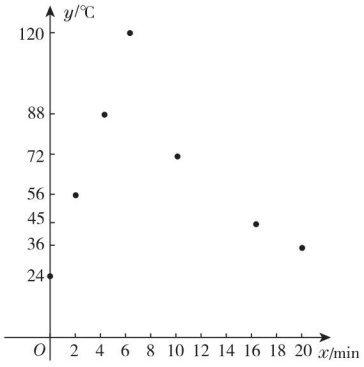
将点$(10,72)$的坐标代入，得$m=720$.

所以加工过程中y与x的函数解析式为$y=\frac{720}{x}$.

(3)由于在加工过程中，$y=24$时，$x=\frac{720}{24}=30$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

所以每次加热后，进行加工的时间是 $30-6=24$（min）.



（第 6 题）

7. 解：（1）库存原料为 $2\times60=120$（吨），根据题意可知 y 与 x 之间的函数解析式为 $y=\dfrac{120}{x}$.

因为生产能力提高，每小时消耗的原料大于计划消耗的原料，所以自变量的取值范围是 $x>2$.

（2）根据题意，得 $y\geqslant24$，即 $\dfrac{120}{x}\geqslant24$.

解不等式，得 $x\leqslant5$，

所以 $2<x\leqslant5$，即每小时消耗的原料应控制在大于 2 吨且不大于 5 吨的范围内.

点拨： 本题考查反比例函数的应用，解题的关键是正确建立反比例函数模型并求出反比例函数解析式.

8. 解：（1）可以用模拟试验的方法，用 9 张扑克牌（一副牌中的 1～9）代替翻奖牌，规定其中 1～3 代表未中奖，4～9 代表中奖.（答案不唯一）

（2）“未中奖”的可能性为 $\dfrac{1}{3}$，“中奖”的可能性为 $\dfrac{2}{3}$，它们之间的关系是：未中奖的可能性 + 中奖的可能性 = 1.

9. 8.0 m　**点拨：** 如图，延长 AF 交 BH 于点 N，过点 F 作 $FM\perp BH$ 于点 M，$\because\angle FEH=30°$，$EF=1.7$ m，

$\therefore FM=0.85$ m，$EM=EF\cdot\cos\angle FEH=1.7\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\approx1.47$（m）.

由题易知 $\triangle FMN\backsim\triangle CDG$，$\therefore\dfrac{FM}{CD}=\dfrac{MN}{DG}$.

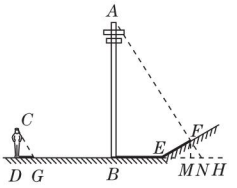
$\because CD=1.6$ m，$DG=0.8$ m，$FM=0.85$ m，

$\therefore MN=0.425$ m. 又 $\because BE=2.1$ m，

$\therefore BN\approx2.1+1.47+0.425=3.995$（m）.

又易知 $\dfrac{AB}{BN}=\dfrac{CD}{DG}$，

$\therefore\dfrac{AB}{3.995}\approx\dfrac{1.6}{0.8}$，解得 $AB\approx8.0$ m.



（第 9 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

典点

练准知识 练通考点
练透方法 练出高分





提分一定有方法！

绿色印刷产品

关注荣德基微信公众号，获取新资讯。

荣德基官方网站：http://www.rudder.com.cn
荣德基天猫旗舰店：http://rongdeji.tmall.com
客服热线：182 1039 5892

荣德基
初中频道

本书导学号
9401294

ISBN 978-7-5450-6663-0
定价：45.90元

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料