教辅资料站
电子教辅　试卷练习
知识总结　备课资源
扫码关注获取更多学习资料

荣德基 主编

典中点®

综合应用创新题 典中点

按课时编写



九年级数学 上

（HK版）

按80:1配赠教师用书

登录荣德基官方网站
免费下载课件资源



典中点·不简单　你·不平凡

- 方法技巧31招
- 典型易错题30道
- 培优拔尖题56道
- 高频考点11个

典中点微课堂
扫一扫
全书微课精彩呈现
解析题目 讲透方法

陕西新华出版传媒集团
陕西人民教育出版社

练透方法 练出高分

本书方法规律索引

方法规律

频次	方法名称	首次页码
	思想方法	
6	分类讨论思想	4
1	建模思想	10
3	数形结合思想	46
3	方程思想	46
1	函数思想	72
	解题方法	
1	解二次函数 $y=ax^2$ 应用问题的三个步骤	3
1	抛物线 $y=ax^2$ 平移得到抛物线 $y=a(x+h)^2+k$ 的方法“八字诀”	9
1	利用二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象信息判断各项系数符号的方法	11
1	用待定系数法求二次函数表达式，选择表达式类型的方法	13
1	判断抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴交点个数的方法	16
1	利用图象求一元二次方程根的方法	18
1	反比例函数值比较大小的方法	31
1	用反比例函数解决实际问题的步骤	39
1	求函数最值的方法	41
1	求反比例函数表达式的六种方法	42
1	判断四条线段是否是成比例线段的方法	49
1	计算法	51
1	定义法	51
1	利用平行线证明比例式或等积式的方法	54
1	确定相似三角形对应边和对应角的方法	55
1	等比例过渡法	56
1	三点定型法	57
1	利用三边成比例判定三角形相似的三个步骤	61
1	相似图形的周长、面积的计算方法	67
1	利用相似三角形解决实际问题的方法	73
2	等角代换法	79
1	求锐角三角函数值的三种方法	80
1	折叠法	81
1	巧记特殊锐角三角函数值的方法	82
1	利用解直角三角形的知识解决实际问题的一般过程	92
1	解答含有仰角、俯角问题的方法	94

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

荣德基 主编

综合应用创新题典中点

本册主编：程小恒



九年级数学 上

（HK 版）

陕西新华出版传媒集团
陕西人民教育出版社
·西安·

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



极速提分16招

书山有路 · 训练有法

思想 | 方法 | 技巧 | 应用

四类绝招速解百题，招招见效助拿高分

第 1 招　二次函数图象与系数的七种关系

第 2 招　一元二次方程根与系数关系的十一种应用

第 3 招　求二次函数表达式的九种方法

第 4 招　二次函数的五种解题技巧

第 5 招　降次思想在求代数式的值及方程、函数中的应用

第 6 招　反比例函数与一次函数、二次函数的综合应用

第 7 招　反比例函数与几何的综合应用

第 8 招　证明和计算成比例线段的五种常用作辅助线的方法

第 9 招　巧作平行线构造相似三角形

第10招　证明比例式或等积式的七种技巧

第11招　求三角函数值的常见技巧

第12招　巧用构造法求几种特殊角的三角函数值

第13招　解直角三角形的五种常见类型

第14招　“化斜为直”构造直角三角形的方法

第15招　利用三角函数解决实际问题

第16招　应用建模思想的常见类型



提分一定有方法！

内容及详解请见夹册《极速提分法》

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

目录 CONTENTS

第21章 二次函数与反比例函数

21.1 二次函数 …… 1

21.2 二次函数的图象和性质

第1课时 二次函数 $y=ax^2$ 的图象和性质 … 3

第2课时 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象和性质——$y=ax^2+k$ 型 …… 5

第3课时 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象和性质——$y=a(x+h)^2$ 型 …… 7

第4课时 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象和性质——$y=a(x+h)^2+k$ 型 … 9

第5课时 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象和性质 …… 11

*第6课时 二次函数表达式的确定 …… 13

阶段核心归类

二次函数的图象和性质的九种常见类型 … 14

21.3 二次函数与一元二次方程

第1课时 二次函数与一元二次方程之间的关系 …… 16

第2课时 由二次函数的图象认识一元二次不等式的解集 …… 18

第3课时 **二次函数图象信息题的四种常见类型** …… 20

21.4 二次函数的应用

第1课时 求几何图形面积的最值问题 … 21

第2课时 与“抛物线”型有关的最值问题 … 23

第3课时 实际应用中的一般最值问题 …… 25

阶段核心归类

用二次函数解决实际问题的六种常见类型 …… 27

21.5 反比例函数

第1课时 认识反比例函数 …… 29

第2课时 反比例函数的图象和性质 …… 31

第3课时 反比例函数的几何性质 …… 33

第4课时 **用反比例函数比例系数 k 的几何意义解决与面积相关的问题** … 35

第5课时 **反比例函数图象与性质的常见应用** …… 37

第6课时 反比例函数的实际应用 …… 39

21.6 综合与实践 获取最大利润 …… 41

阶段核心方法

求反比例函数表达式的六种方法 …… 42

全章热门考点整合应用 …… 43

第22章 相似形

22.1 比例线段

第1课时 相似图形 …… 47

第2课时 成比例线段 …… 49

第3课时 比例的性质 …… 50

第4课时 平行线分线段成比例 …… 52

阶段核心技巧

解决平行线分线段成比例常见问题的六种技巧 …… 54

22.2 相似三角形的判定

第1课时 相似三角形及平行线截相似三角形 …… 55

第2课时 利用角的关系判定两个三角形相似 …… 57

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

目 录 CONTENTS

第 3 课时　利用边角关系判定两个三角形相似 …… 59

第 4 课时　利用三边关系判定两个三角形相似 …… 61

第 5 课时　利用斜边、直角边判定两个直角三角形相似 …… 63

第 6 课时　相似三角形判定定理的应用 … 65

阶段核心方法

巧用基本图形探索相似条件 …… 66

22.3　相似三角形的性质 …… 67

22.4　图形的位似变换

第 1 课时　图形的位似变换 …… 69

第 2 课时　阅读与思考——平面直角坐标系中图形的位似变换 …… 71

22.5　综合与实践　测量与误差 …… 73

阶段核心方法

巧用位似解决三角形中的内接多边形问题 … 75

全章热门考点整合应用 …… 76

第 23 章　解直角三角形

23.1　锐角的三角函数

第 1 课时　锐角的三角函数——正切 …… 78

第 2 课时　锐角的三角函数——正弦与余弦 …… 80

第 3 课时　30°,45°,60°角的三角函数值 … 82

第 4 课时　一般锐角的三角函数值 …… 84

阶段核心方法

求锐角三角函数值的七种常用方法 …… 86

23.2　解直角三角形及其应用

第 1 课时　解直角三角形 …… 88

第 2 课时　解直角三角形的八种常见类型 …… 90

第 3 课时　解直角三角形在实际问题中的应用 …… 92

第 4 课时　视角在解直角三角形中的应用 …… 94

第 5 课时　用解直角三角形解方位角、坡角的应用 …… 96

阶段核心归类

构造三角函数基本图形解决实际问题的四种数学模型 …… 98

全章热门考点整合应用 …… 99

达标检测卷

第 21 章达标检测卷 …… 101

第 22 章达标检测卷 …… 105

第 23 章达标检测卷 …… 109

期末达标检测卷 …… 113

参考答案及点拨 …… 117

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

21.1 二次函数

小贴士："*"表示该题的难度较大，综合性或技巧性较强。

名师点金

关于二次函数的定义要理解三点：

1. 函数表达式必须是整式，自变量的取值是全体实数，而在实际应用中，自变量的取值必须符合实际意义.
2. 确定二次函数表达式的系数及常数项时，要把函数表达式化为一般式.
3. 二次项系数不为0.

1 夯实基础·逐点练 ☞(答案见117页)

知识点1 二次函数的定义

1. 下列各式中，y 是 x 的二次函数的是(　　)

A. $y=\frac{1}{x^2}$　　B. $y=x^2+\frac{1}{x}+1$

C. $y=2x^2-1$　　D. $y=\sqrt{x^2-1}$

2. 下列各式中，y 是 x 的二次函数的是(　　)

A. $y=ax^2+bx+c$

B. $x^2+y-2=0$

C. $y^2-ax=2$

D. $x^2-y^2+1=0$

3. 若函数 $y=(m-2)x^2+4x-5$(m 是常数)是二次函数，则 m 的取值范围是(　　)

A. $m\neq-2$　　B. $m\neq2$

C. $m\neq3$　　D. $m\neq-3$

4. 对于任意实数 m，下列函数一定是二次函数的是(　　)

A. $y=mx^2+3x-1$

B. $y=(m-1)x^2$

C. $y=(m-1)^2x^2$

D. $y=(-m^2-1)x^2$

知识点2 二次函数的一般形式及函数值

5. 已知二次函数 $y=1-3x+5x^2$，则它的二次项系数 a，一次项系数 b，常数项 c 分别是(　　)

A. $a=1,b=-3,c=5$

B. $a=1,b=3,c=5$

C. $a=5,b=3,c=1$

D. $a=5,b=-3,c=1$

6. 对于二次函数 $y=-x^2-1$ 的二次项系数 a，一次项系数 b，常数项 c，描述正确的是(　　)

A. $a=-1,b=-1,c=0$

B. $a=-1,b=0,c=1$

C. $a=-1,b=0,c=-1$

D. $a=1,b=0,c=-1$

7. 关于函数 $y=(500-10x)(40+x)$，下列说法不正确的是(　　)

A. y 是 x 的二次函数

B. 二次项系数是 -10

C. 一次项是100

D. 常数项是20 000

8. 已知 x 是实数，且满足 $(x-2)(x-3)\sqrt{1-x}=0$，则相应的函数 $y=x^2+x+1$ 的值为(　　)

A. 13或3　　B. 7或3

C. 3　　D. 13或7或3

知识点3 利用二次函数的表达式表示实际问题

9. 某农机厂四月份生产零件60万个，设该厂第二季度平均每月的增长率为 x，如果第二季度共生产零件 y 万个，那么 y 与 x 满足的函数关系式是(　　)

A. $y=60(1+x)^2$

B. $y=60+60(1+x)+60(1+x)^2$

C. $y=60(1+x)+60(1+x)^2$

D. $y=60+60(1+x)$

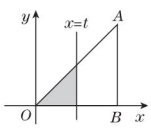
***10.** 如图，在 $\mathrm{Rt}\triangle AOB$ 中，$AB\perp OB$，且 $AB=OB=3$，设直线 $x=t(0<t<3)$ 截此三角形所得阴影部分的面积为 S，则 S 与 t 之间的函数表达式为(　　)

A. $S=t$

B. $S=\frac{1}{2}t^2$

C. $S=t^2$

D. $S=\frac{1}{2}t^2-1$



(第10题)

易错点! 利用二次函数的定义求字母的值时，易忽略二次项系数不为0而致错

11. 若 $y=(m-1)x^{m^2+1}$ 是二次函数，则 m 的值是(　　)

A. 1　　B. -1

C. 1或-1　　D. 2

趣味数学　谜语：1+2+3(打一成语)　　谜底：接二连三

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法·提升练 ☞（答案见117页）

考查角度1 利用二次函数的表达式解决实际问题

12. 某果园有100棵橙子树，平均每棵结600个橙子. 现在准备多植一些橙子树以提高产量，但是如果多植树，那么树之间的距离和每棵树所接受的阳光就会减少. 根据经验估计，每多植一棵树，平均每棵树就会少结5个橙子.

（1）假设果园多植x棵橙子树，那么果园共有_____棵橙子树，这时平均每棵树结_____个橙子；

（2）如果果园橙子的总产量为y个，那么y与x之间的函数表达式为_____；

（3）y是x的什么函数？自变量x的取值范围是什么？ 【导学号：5390328】

考查角度2 利用二次函数探究图形排列规律问题

13. 观察如图所示的图形规律.

（1）如果第n个图中有S个圆，试写出S与n的函数表达式；

（2）这个函数是不是二次函数？



（第13题）

Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞（答案见117页）

拔尖角度1 利用二次函数探究最值问题

14. 某广告公司设计一个周长为12 m的矩形广告牌，设计费为每平方米1 000元. 设矩形一边的长为x m，面积为S m^2.

（1）求S与x之间的函数表达式，并确定自变量x的取值范围；

（2）若要求设计的广告牌的边长为整数，请你填写下表，并探究当x取何值时，广告牌的设计费最高.

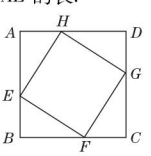
x/m					
S/m^2					
设计费/元					

拔尖角度2 利用二次函数解几何问题

15. 如图，正方形$EFGH$的顶点在边长为2的正方形$ABCD$的边上. 设$AE=x$，正方形$EFGH$的面积为y.

（1）求y与x之间的函数关系式；

（2）若正方形$EFGH$的面积为2，求AE的长.



（第15题）

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

21.2　二次函数的图象和性质

第 1 课时　二次函数 $y=ax^2$ 的图象和性质

名师点金

解二次函数 $y=ax^2$ 应用问题的三个步骤：

1. **审题建模**：审查题目特点，建立 $y=ax^2$ 模型.
2. **确定表达式**：根据图象或者其他条件，确定点的坐标，用待定系数法确定二次函数表达式.
3. **解决问题**：利用表达式，根据纵坐标求横坐标，或根据横坐标求纵坐标解决问题.

Ⅰ 夯实基础·逐点练 ☞（答案见 117 页）

知识点 1　二次函数 $y=ax^2$ 的图象

1. 关于二次函数 $y=3x^2$ 的图象，下列说法错误的是(　　)

A. 它是一条抛物线

B. 它的开口向上，且关于 y 轴对称

C. 它的顶点是抛物线的最高点

D. 它与 $y=-3x^2$ 的图象关于 x 轴对称

2. 关于二次函数 $y=2x^2$ 与 $y=-2x^2$，下列叙述正确的有(　　)

①它们的图象都是抛物线；

②它们的图象的对称轴都是 y 轴；

③它们的图象都经过点(0,0)；

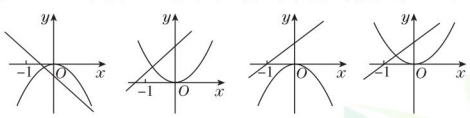
④二次函数 $y=2x^2$ 的图象开口向上，二次函数 $y=-2x^2$ 的图象开口向下；

⑤它们的图象关于 x 轴对称.

A. 5 个　　B. 4 个

C. 3 个　　D. 2 个

3. 【中考·呼和浩特】二次函数 $y=ax^2$ 与一次函数 $y=ax+a$ 在同一坐标系中的大致图象可能是(　　)



A　　B　　C　　D

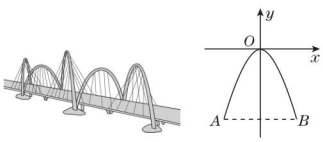
4. 【中考·山西】北中环桥是省城太原的一座跨汾河大桥(如图①)，它由五个高度不同，跨径也不同的抛物线形钢拱通过吊杆、拉索与主梁相连. 最高的钢拱如图②所示，此钢拱(近似看成二次函数的图象——抛物线)在同一竖直平面内，与拱脚所在的水平面相交于 A，B 两点. 拱高为 78 m(即最高点 O 到 AB 的距离为 78 m)，跨径为 90 m(即 $AB=90$ m)，以最高点 O 为坐标原点，以平行于 AB 的直线为 x 轴建立平面直角坐标系. 则此抛物线形钢拱的函数表达式为(　　)

A. $y=\frac{26}{675}x^2$

B. $y=-\frac{26}{675}x^2$

C. $y=\frac{13}{1\,350}x^2$

D. $y=-\frac{13}{1\,350}x^2$



①　　②

(第 4 题)

知识点 2　二次函数 $y=ax^2$ 的性质

5. 下列关于函数 $y=36x^2$ 的叙述中，错误的是(　　)

A. 图象的对称轴是 y 轴

B. 图象的顶点是原点

C. 当 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而增大

D. y 有最大值

6. 【中考·连云港】已知抛物线 $y=ax^2(a>0)$ 经过 $A(-2,y_1)$，$B(1,y_2)$ 两点，则下列关系式一定正确的是(　　)

A. $y_1>0>y_2$　　B. $y_2>0>y_1$

C. $y_1>y_2>0$　　D. $y_2>y_1>0$

7. 对于二次函数：①$y=3x^2$，②$y=\frac{1}{3}x^2$，③$y=\frac{4}{3}x^2$，若将它们的图象画在同一坐标系中，开口大小的顺序用序号来表示应是(　　)

A. ②>③>①　　B. ②>①>③

C. ③>①>②　　D. ③>②>①

***8.** 【中考·玉林】抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$，$y=x^2$，$y=-x^2$ 的共同性质是：①都是开口向上；②都以点(0,0)为顶点；③都以 y 轴为对称轴；④都关于 x 轴对称.

其中正确的有(　　)

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

易错点 1　不能准确掌握二次函数 $y=ax^2$ 的图象与性质而致错

9. 已知二次函数 $y=x^2$，在 $-1\leqslant x\leqslant 4$ 这个范围内，求函数的最值.

趣味数学　**雨后的彩虹**：残虹收度雨，鞍岸上新流. 云销雨霁，彩彻区明. 虹收青嶂雨，鸟没夕阳天. 这是诗人赞美彩虹的诗句.(待续)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞（答案见117页）

考查角度1 利用二次函数 $y=ax^2$ 的图象的特征解相关问题

10. 已知函数 $y=(m+3)x^{m^2+3m-2}$ 是关于 x 的二次函数.

（1）求 m 的值；

（2）当 m 为何值时，该函数图象的开口向下？

（3）当 m 为何值时，该函数有最小值？

考查角度2 利用二次函数 $y=ax^2$ 的性质解相关问题

11. 根据下列条件分别求 a 的值或 a 的取值范围.

（1）函数 $y=(a-2)x^2$，当 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而减小；当 $x<0$ 时，y 随 x 的增大而增大；

（2）函数 $y=(3a-2)x^2$ 有最大值；

（3）抛物线 $y=(a+2)x^2$ 与抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的形状相同；

（4）函数 $y=ax^{a^2+a}$ 的图象是开口向上的抛物线.

Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞（答案见117页）

拔尖角度1 利用二次函数图象的几何特征求点的坐标

12. 已知函数 $y=ax^2(a\neq0)$ 的图象与直线 $y=2x-3$ 交于点 $A(1,b)$.

（1）求 a 和 b 的值；

（2）当 x 取何值时，二次函数 $y=ax^2(a\neq0)$ 中的 y 随 x 的增大而增大？

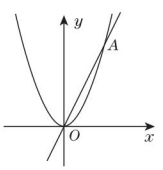
（3）求二次函数 $y=ax^2(a\neq0)$ 的图象与直线 $y=2x-3$ 的另一个交点 B 的坐标.

拔尖角度2 利用函数的图象探究存在性问题（分类讨论思想）

13. 如图，抛物线 $y=ax^2$ 与直线 $y=kx$ 在第一象限内交于点 $A(2,4)$.

（1）求抛物线对应的函数表达式；

（2）在 x 轴上是否存在一点 P，使 $\triangle AOP$ 为等腰三角形？若存在，请你求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.



（第13题）

微信公众号 教辅资料站

彩虹在雨后出现在天空中，它是一道横跨天空的七色彩带，红、橙、黄、绿、蓝、靛、紫，宛如一座彩色的拱桥飞架天空.这是人们眼中的彩虹.（待续）

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第2课时　二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象和性质——$y=ax^2+k$ 型

名师点金

解二次函数 $y=ax^2+k$ 的问题要注意两点：

1. 二次项系数的符号⇔图象的开口方向；二次项系数的绝对值相等⇔抛物线的形状相同；k⇔顶点的纵坐标.
2. 抛物线 $y=ax^2+k$ 可由抛物线 $y=ax^2$ 向上或向下平移得到，可简记为“上加下减”.

1 夯实基础·逐点练 ☞(答案见117页)

知识点1 二次函数 $y=ax^2+k$ 的图象

1. 抛物线 $y=2x^2-3$ 的顶点在(　　)

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. x 轴上　　D. y 轴上

2. 在平面直角坐标系中，抛物线 $y=x^2-1$ 与 x 轴的交点的个数是(　　)

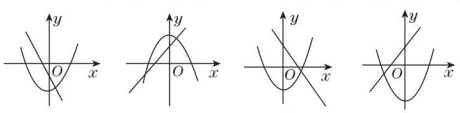
A. 3　　B. 2　　C. 1　　D. 0

3. 在二次函数：①$y=3x^2$，②$y=\frac{1}{2}x^2+1$，③$y=-\frac{4}{3}x^2-3$ 中，图象开口大小顺序用序号表示为(　　)

A. ①>②>③　　B. ①>③>②

C. ②>③>①　　D. ②>①>③

4. 【中考·泰安】在同一平面直角坐标系中，一次函数 $y=-mx+n^2$ 与二次函数 $y=x^2+m$ 的图象可能是(　　)



A　　B　　C　　D

5. 【中考·宜宾】已知抛物线 $y=x^2-1$ 与 y 轴相交于点 A，与直线 $y=kx$(k 为任意实数)相交于 B,C 两点，则下列结论不正确的是(　　)

A. 存在实数 k，使得 $\triangle ABC$ 为等腰三角形

B. 存在实数 k，使得 $\triangle ABC$ 的内角中有两角分别为30°和60°

C. 任意实数 k，使得 $\triangle ABC$ 都为直角三角形

D. 存在实数 k，使得 $\triangle ABC$ 为等边三角形

知识点2 二次函数 $y=ax^2+k$ 的性质

6. 对于二次函数 $y=3x^2+2$，下列说法错误的是(　　)

A. 最小值为2

B. 图象与 x 轴没有公共点

C. 当 $x<0$ 时，y 随 x 的增大而增大

D. 图象的对称轴是 y 轴

7. 【中考·绍兴】已知点 (x_1,y_1)，(x_2,y_2) 均在抛物线 $y=x^2-1$ 上，下列说法正确的是(　　)

A. 若 $y_1=y_2$，则 $x_1=x_2$　　B. 若 $x_1=-x_2$，则 $y_1=-y_2$

C. 若 $0<x_1<x_2$，则 $y_1>y_2$　　D. 若 $x_1<x_2<0$，则 $y_1>y_2$

***8.** 点 $A(-1,y_1)$，$B(2,y_2)$，$C(3,y_3)$ 都在二次函数 $y=(a^2+1)x^2+2$ 的图象上，则 y_1,y_2,y_3 的大小关系是(　　)

A. $y_1<y_2<y_3$　　B. $y_1>y_2>y_3$

C. $y_2>y_1>y_3$　　D. $y_2<y_1<y_3$

知识点3 二次函数 $y=ax^2+k$ 与 $y=ax^2$ 之间的关系

9. 抛物线 $y=2x^2+1$ 是由抛物线 $y=2x^2$(　　)得到的.

A. 向上平移2个单位长度

B. 向下平移2个单位长度

C. 向上平移1个单位长度

D. 向下平移1个单位长度

10. 二次函数 $y=-3x^2+1$ 的图象是将(　　)

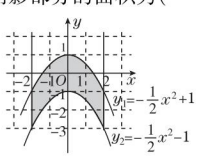
A. 抛物线 $y=3x^2$ 向左平移1个单位长度得到的

B. 抛物线 $y=-3x^2$ 向左平移1个单位长度得到的

C. 抛物线 $y=3x^2$ 向上平移1个单位长度得到的

D. 抛物线 $y=-3x^2$ 向上平移1个单位长度得到的

11. 如图，两条抛物线 $y_1=-\frac{1}{2}x^2+1$，$y_2=-\frac{1}{2}x^2-1$ 与分别经过点 $(-2,0)$，$(2,0)$ 且平行于 y 轴的两条平行线围成的阴影部分的面积为(　　)



(第11题)

A. 8　　B. 6　　C. 10　　D. 4

易错点 对平移的规律理解不透彻而致错

12. 能否通过上下平移二次函数 $y=\frac{1}{3}x^2$ 的图象，使得到的新函数图象过点 $(3,-3)$？若能，说出平移的方向和距离；若不能，说明理由.

趣味数学　在数学家的眼中，彩虹是一条开口向下的弧线，这条弧线就像我们抛出物体后物体下落的轨迹——抛物线.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞（答案见118页）

考查角度1 利用二次函数 $y=ax^2$ 与 $y=ax^2+k$ 的关系求函数表达式

13. 抛物线 $y=ax^2+c$ 的顶点坐标是(0,2)，且形状及开口方向与抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 相同.

(1)确定 a，c 的值；

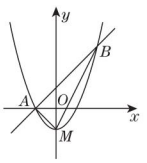
(2)画出抛物线 $y=ax^2+c$.

考查角度2 利用二次函数图象上点的坐标求函数表达式

14. 【中考 · 衡阳】如图，顶点 M 在 y 轴上的抛物线与直线 $y=x+1$ 相交于 A，B 两点，且点 A 在 x 轴上，点 B 的横坐标为2，连接 AM，BM.

(1)求抛物线对应的函数表达式；

(2)判断△ABM 的形状，并说明理由.



（第14题）

Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞（答案见118页）

拔尖角度1 利用抛物线的特征探究存在性问题

15. 已知二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2+1$，$A(2,m)$ 是这个二次函数图象上的一点，点 B 与点 A 关于该函数图象的对称轴对称.

(1)画出这个二次函数的图象及点 A，B；

(2)求△AOB 的面积；

(3)在这个函数图象上是否存在一点 P，使△APB 的面积是△AOB 的面积的一半？若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.

拔尖角度2 利用二次函数的图象和性质求最值问题

16. 【中考 · 安徽】一次函数 $y=kx+4$ 与二次函数 $y=ax^2+c$ 的图象的一个交点坐标为(1,2)，另一个交点是该二次函数图象的顶点.

(1)求 k，a，c 的值；

(2)过点 $A(0,m)$ $(0<m<4)$ 且垂直于 y 轴的直线与二次函数 $y=ax^2+c$ 的图象相交于 B，C 两点，点 O 为坐标原点，记 $W=OA^2+BC^2$，求 W 关于 m 的函数表达式，并求 W 的最小值.

微信公众号 教辅资料站

趣味数学

在一次战役后，一位长官气急败坏地质问士兵："在打仗的时候，你为什么向后撤而不向前冲？"这个士兵理直气壮地回答："长官，这完全不怪我，地球是圆的，我想从后面打他们."

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

第3课时　二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象和性质——$y=a(x+h)^2$ 型

名师点金

1. 将抛物线 $y=ax^2$ 沿 x 轴左右平移可以得到抛物线 $y=a(x+h)^2$. 抛物线 $y=ax^2$ 的顶点坐标是(0,0)，抛物线 $y=a(x+h)^2$ 的顶点坐标是$(-h,0)$，顶点始终在 x 轴上.
2. 对于函数 $y=a(x+h)^2$，若 $a>0$，则 $x<-h$ 时，y 随 x 的增大而减小，$x>-h$ 时，y 随 x 的增大而增大，函数有最小值0；若 $a<0$，则 $x<-h$ 时，y 随 x 的增大而增大，$x>-h$ 时，y 随 x 的增大而减小，函数有最大值0.

Ⅰ 夯实基础·逐点练 (答案见118页)

知识点1 二次函数 $y=a(x+h)^2$ 的图象

1. 抛物线 $y=-5(x-2)^2$ 的顶点坐标是(　　)

A. $(-2,0)$　　B. $(2,0)$

C. $(0,-2)$　　D. $(0,2)$

2. 【中考·兰州】在下列二次函数中，其图象的对称轴为直线 $x=-2$ 的是(　　)

A. $y=(x+2)^2$　　B. $y=2x^2-2$

C. $y=-2x^2-2$　　D. $y=2(x-2)^2$

3. 对于抛物线 $y=2(x-1)^2$，下列说法正确的有(　　)

①开口向上；②顶点坐标为$(0,-1)$；③对称轴为直线 $x=1$；④与 x 轴的交点坐标为$(1,0)$.

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

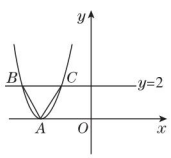
*4. 如图，平面直角坐标系上有一顶点为 A 的抛物线，此抛物线与直线 $y=2$ 交于 B,C 两点，$\triangle ABC$ 为正三角形. 若 A 点坐标为$(-3,0)$，则此抛物线与 y 轴的交点坐标为(　　)

A. $\left(0,\frac{9}{2}\right)$

B. $\left(0,\frac{27}{2}\right)$

C. $(0,9)$

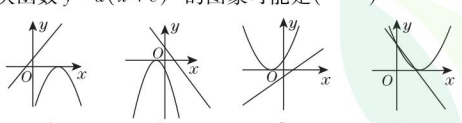
D. $(0,19)$



(第4题)

知识点2 二次函数 $y=a(x+h)^2$ 的性质

5. 在同一平面直角坐标系中，一次函数 $y=ax+c$ 和二次函数 $y=a(x+c)^2$ 的图象可能是(　　)



A　　B　　C　　D

6. 关于二次函数 $y=-2(x+3)^2$，下列说法中正确的是(　　)

A. 其图象的开口向上

B. 其图象的对称轴是直线 $x=3$

C. 其图象的顶点坐标是$(0,3)$

D. 当 $x>-3$ 时，y 随 x 的增大而减小

7. 已知抛物线 $y=-(x+1)^2$ 上的两点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，如果 $x_1<x_2<-1$，那么下列结论成立的是(　　)

A. $y_1<y_2<0$　　B. $0<y_1<y_2$

C. $0<y_2<y_1$　　D. $y_2<y_1<0$

8. 已知二次函数 $y=-2(x+m)^2$，当 $x<-3$ 时，y 随 x 的增大而增大；当 $x>-3$ 时，y 随 x 的增大而减小，则当 $x=1$ 时，y 的值为(　　)

A. -12　　B. 12　　C. 32　　D. -32

*9. 【中考·黄冈】当 $a\leqslant x\leqslant a+1$ 时，函数 $y=x^2-2x+1$ 的最小值为1，则 a 的值为(　　)

A. -1　　B. 2

C. 0或2　　D. -1 或2

知识点3 二次函数 $y=a(x+h)^2$ 与 $y=ax^2$ 之间的关系

10. 【中考·海南】把抛物线 $y=x^2$ 平移得到抛物线 $y=(x+2)^2$，则这个平移过程正确的是(　　)

A. 向左平移2个单位长度

B. 向右平移2个单位长度

C. 向上平移2个单位长度

D. 向下平移2个单位长度

11. 对于任何实数 h，抛物线 $y=-x^2$ 与抛物线 $y=-(x-h)^2$ 的相同点是(　　)

A. 形状与开口方向相同　　B. 对称轴相同

C. 顶点相同　　D. 都有最低点

易错点 函数 $y=ax^2+c$ 与 $y=a(x+h)^2$ 的图象与性质区别不清而致错

12. 对于二次函数 $y=3x^2+1$ 和 $y=3(x-1)^2$，以下说法：

①它们的图象都是开口向上；

②它们图象的对称轴都是 y 轴，顶点坐标都是(0,0)；

③当 $x>0$ 时，它们的函数值 y 都是随着 x 的增大而增大；

④它们图象的开口的大小是一样的.

其中正确的说法有(　　)

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

趣味数学　每个人都是一条抛物线，天赋决定其开口，而要达到最高点则需后天的努力.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法·提升练 ☞（答案见118页）

考查角度1 利用二次函数的图象和性质求函数表达式

13. 已知抛物线 $y=a(x-h)^2$ 的对称轴为直线 $x=-2$，且过点$(1,-3)$.

(1)求抛物线对应的函数表达式；

(2)画出函数的图象；

(3)从图象上观察，当 x 取何值时，y 随 x 的增大而增大？当 x 取何值时，函数有最大值(或最小值)？

考查角度2 利用二次函数的图象平移求函数表达式

14. 已知抛物线 $y=a(x-h)^2$ 向右平移 3 个单位长度后得到抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2$.

(1)求 a，h 的值；

(2)写出抛物线 $y=a(x-h)^2$ 的对称轴及顶点坐标.

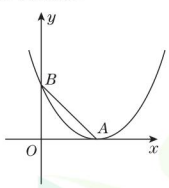
Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞（答案见118页）

拔尖角度1 利用二次函数图象的位置变换探究几何问题

15. 如图，将抛物线 $y=x^2$ 向右平移 a 个单位长度后，顶点为 A，与 y 轴交于点 B，且 $\triangle AOB$ 为等腰直角三角形.

(1)求 a 的值；

(2)在图中的抛物线上是否存在点 C，使 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形？若存在，直接写出点 C 的坐标，并求 $S_{\triangle ABC}$；若不存在，请说明理由.



(第15题)

拔尖角度2 利用二次函数的图象和性质解几何问题

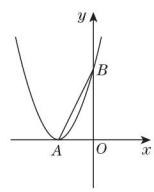
16. 如图，已知二次函数 $y=(x+2)^2$ 的图象与 x 轴交于点 A，与 y 轴交于点 B.

(1)写出点 A，B 的坐标；

(2)求 $S_{\triangle AOB}$；

(3)求出抛物线的对称轴；

(4)在对称轴上是否存在点 P，使以 P，A，O，B 为顶点的四边形为平行四边形？若存在，求出 P 点的坐标；若不存在，请说明理由.



(第16题)

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 4 课时　二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象和性质——$y=a(x+h)^2+k$ 型

名师点金

抛物线 $y=ax^2$ 平移得到抛物线 $y=a(x+h)^2+k$ 的方法“八字诀”——“上加下减，左加右减”.

1. “**上加下减**”是指抛物线 $y=ax^2$ 向上平移，则在 ax^2 后加上一个正数；向下平移，则在 ax^2 后减去一个正数.

2. “**左加右减**”是指抛物线 $y=ax^2$ 向左平移，则括号内 x 后面加上一个正数；向右平移，则括号内 x 后面减去一个正数.

1 夯实基础 · 逐点练

☞(答案见 119 页)

知识点 1　二次函数 $y=a(x+h)^2+k$ 与 $y=ax^2$ 之间的关系

1. 【中考 · 广安】抛物线 $y=(x-2)^2-1$ 可以由抛物线 $y=x^2$ 平移而得到，下列平移正确的是(　　)

A. 先向左平移 2 个单位长度，然后向上平移 1 个单位长度

B. 先向左平移 2 个单位长度，然后向下平移 1 个单位长度

C. 先向右平移 2 个单位长度，然后向上平移 1 个单位长度

D. 先向右平移 2 个单位长度，然后向下平移 1 个单位长度

2. 【中考 · 哈尔滨】将抛物线 $y=2x^2$ 向上平移 3 个单位长度，再向右平移 2 个单位长度，所得到的抛物线为(　　)

A. $y=2(x+2)^2+3$

B. $y=2(x-2)^2+3$

C. $y=2(x-2)^2-3$

D. $y=2(x+2)^2-3$

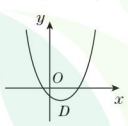
*3. 【中考 · 玉林】已知抛物线 C：$y=\frac{1}{2}(x-1)^2-1$，顶点为 D(如图)，将 C 沿水平方向向右(或向左)平移 $|m|$ 个单位长度，得到抛物线 C_1，顶点为 D_1，C 与 C_1 相交于点 Q，若 $\angle DQD_1=60°$，则 m 等于(　　)

A. $\pm4\sqrt{3}$

B. $\pm2\sqrt{3}$

C. -2 或 $2\sqrt{3}$

D. -4 或 $4\sqrt{3}$



(第 3 题)

知识点 2　二次函数 $y=a(x+h)^2+k$ 的图象

4. 【中考 · 衢州】二次函数 $y=(x-1)^2+3$ 图象的顶点坐标是(　　)

A. $(1,3)$　　B. $(1,-3)$

C. $(-1,3)$　　D. $(-1,-3)$

5. 【中考 · 益阳】若抛物线 $y=(x-m)^2+(m+1)$ 的顶点在第一象限，则 m 的取值范围为(　　)

A. $m>1$　　B. $m>0$

C. $m>-1$　　D. $-1<m<0$

6. 下列二次函数中，图象以直线 $x=2$ 为对称轴，且经过点 $(0,1)$ 的是(　　)

A. $y=(x-2)^2+1$　　B. $y=(x+2)^2+1$

C. $y=(x-2)^2-3$　　D. $y=(x+2)^2-3$

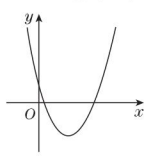
7. 二次函数 $y=a(x+m)^2+n$ 的图象如图所示，则一次函数 $y=mx+n$ 的图象经过(　　)

A. 第一、二、三象限

B. 第一、二、四象限

C. 第二、三、四象限

D. 第一、三、四象限



(第 7 题)

知识点 3　二次函数 $y=a(x+h)^2+k$ 的性质

8. 【中考 · 泰安】对于抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2+3$，下列结论：

①抛物线的开口向下；

②对称轴为直线 $x=1$；

③顶点坐标为 $(-1,3)$；

④$x>1$ 时，y 随 x 的增大而减小.

其中正确的个数为(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

9. 【中考 · 凉山州】当 $0\leqslant x\leqslant3$ 时，直线 $y=a$ 与抛物线 $y=(x-1)^2-3$ 有交点，则 a 的取值范围是_____.

易错点　对顶点式 $y=a(x+h)^2+k$ 在指定条件下的最值理解不透而致错

10. 【中考 · 舟山】二次函数 $y=-(x-1)^2+5$，当 $m\leqslant x\leqslant n$ 且 $mn<0$ 时，y 的最小值为 $2m$，最大值为 $2n$，则 $m+n$ 的值为(　　)

A. $\frac{5}{2}$　　B. 2　　C. $\frac{3}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

趣味数学　哥尼斯堡七桥问题：18 世纪时，欧洲有一个风景秀丽的小城哥尼斯堡(今俄罗斯加里宁格勒)，那里的普雷格尔河上有七座桥，将河中的两个岛与河岸连接起来.(待续)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

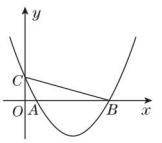
Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞（答案见119页）

考查角度1 利用抛物线的特征求二次函数的表达式

11. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，二次函数图象的顶点坐标为$(4,-3)$，该图象与x轴相交于点A，B，与y轴相交于点C，其中点A的横坐标为1.

（1）求该二次函数的表达式；

（2）求$\triangle OBC$的面积.



（第11题）

考查角度2 利用抛物线的平移求二次函数的表达式

12. 把二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象先向左平移2个单位长度，再向上平移4个单位长度，得到二次函数 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2-1$ 的图象.

（1）试确定a，h，k的值；

（2）指出二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 图象的开口方向、对称轴和顶点坐标.

Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞（答案见119页）

拔尖角度1 利用二次函数图象解决实际问题

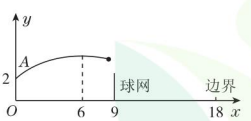
（建模思想）

13. 【中考 · 天水】如图，排球运动员站在点O处练习发球，将球从O点正上方2 m的A处发出，把球看成点，其运行的高度y(m)与运行的水平距离x(m)满足关系式 $y=a(x-6)^2+h$. 已知球网与O点的水平距离为9 m，高度为2.43 m，球场的边界距O点的水平距离为18 m.

（1）当$h=2.6$时，求y与x的关系式（不要求写出自变量x的取值范围）；

（2）当$h=2.6$时，球能否越过球网？球会不会出边界？请说明理由；

（3）若球一定能越过球网，又不出边界，求h的取值范围.



（第13题）

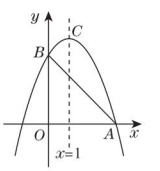
拔尖角度2 利用二次函数的图象探究动点问题

（分类讨论思想）

14. 如图，已知抛物线 $y=a(x-h)^2+k$ 与x轴的一个交点为$A(3,0)$，与y轴的交点为$B(0,3)$，对称轴为直线$x=1$.

（1）求抛物线对应的函数表达式；

（2）已知点M为y轴上的一个动点，当$\triangle ABM$为等腰三角形时，求点M的坐标.



（第14题）

微信公众号 教辅资料站

趣味数学

有人提出了一个问题：一个人怎样才能一次走遍七座桥，且每座桥只走过一次，最后回到出发点？欧拉研究并解决了此问题，他把此问题归结为“一笔画”问题，证明达到上述要求的走法是不存在的.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 5 课时　二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象和性质

名师点金

利用二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象信息判断各项系数符号的方法：

1. a 决定抛物线的开口方向，简记为“上正下负”.
2. c 决定抛物线与 y 轴的交点位置，简记为“上正下负原点 0”.
3. a,b 的符号共同决定对称轴的位置，简记为“左同右异，y 轴 b 的值为 0”. 另外还要注意特殊值的意义，如 x 为 1，−1，2 时 y 的值的符号. 可以由图象的位置来判断各项系数的符号，也可以由各项系数的符号来判断图象的位置.

Ⅰ 夯实基础 · 逐点练

☞（答案见 119 页）

知识点 1　二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 与 $y=a(x+h)^2+k$ 之间的关系

1. 【中考 · 山西】用配方法将二次函数 $y=x^2-8x-9$ 化为 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式为（　　）

A. $y=(x-4)^2+7$　　B. $y=(x-4)^2-25$

C. $y=(x+4)^2+7$　　D. $y=(x+4)^2-25$

2. 【中考 · 眉山】若抛物线 $y=x^2-2x+3$ 不动，将平面直角坐标系 xOy 先沿水平方向向右平移一个单位长度，再沿竖直方向向上平移三个单位长度，则原抛物线的表达式应变为（　　）

A. $y=(x-2)^2+3$　　B. $y=(x-2)^2+5$

C. $y=x^2-1$　　D. $y=x^2+4$

3. 【中考 · 济宁】将抛物线 $y=x^2-6x+5$ 向上平移两个单位长度，再向右平移一个单位长度后，得到的抛物线的表达式是（　　）

A. $y=(x-4)^2-6$　　B. $y=(x-1)^2-3$

C. $y=(x-2)^2-2$　　D. $y=(x-4)^2-2$

知识点 2　二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象和性质

4. 【中考 · 重庆】抛物线 $y=-3x^2+6x+2$ 的对称轴是（　　）

A. 直线 $x=2$　　B. 直线 $x=-2$

C. 直线 $x=1$　　D. 直线 $x=-1$

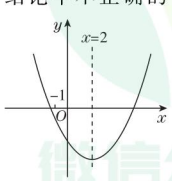
5. 【中考 · 遂宁】二次函数 $y=x^2-ax+b$ 的图象如图所示，对称轴为直线 $x=2$，下列结论中不正确的是（　　）

A. $a=4$

B. 当 $b=-4$ 时，顶点的坐标为 $(2,-8)$

C. 当 $x=-1$ 时，$b>-5$

D. 当 $x>3$ 时，y 随 x 的增大而增大



（第 5 题）

6. 【中考 · 温州】已知二次函数 $y=x^2-4x+2$，关于该函数在 $-1\leqslant x\leqslant 3$ 的取值范围内，下列说法中正确的是（　　）

A. 有最大值 −1，有最小值 −2

B. 有最大值 0，有最小值 −1

C. 有最大值 7，有最小值 −1

D. 有最大值 7，有最小值 −2

***7.** 【中考 · 福建】若二次函数 $y=|a|x^2+bx+c$ 的图象经过 $A(m,n)$，$B(0,y_1)$，$C(3-m,n)$，$D(\sqrt{2},y_2)$，$E(2,y_3)$，则 y_1,y_2,y_3 的大小关系是（　　）

A. $y_1<y_2<y_3$　　B. $y_1<y_3<y_2$

C. $y_3<y_2<y_1$　　D. $y_2<y_3<y_1$

知识点 3　二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 a,b,c 之间的关系

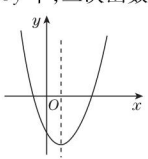
8. 【中考 · 成都】在平面直角坐标系 xOy 中，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图所示，下列说法中正确的是（　　）

A. $abc<0$，$b^2-4ac>0$

B. $abc>0$，$b^2-4ac>0$

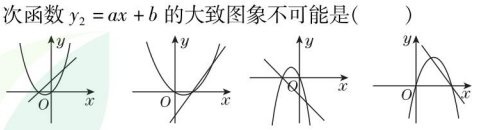
C. $abc<0$，$b^2-4ac<0$

D. $abc>0$，$b^2-4ac<0$



（第 8 题）

***9.** 【中考 · 湖州】已知 a,b 是非零实数，$|a|>|b|$，在同一平面直角坐标系中，二次函数 $y_1=ax^2+bx$ 与一次函数 $y_2=ax+b$ 的大致图象不可能是（　　）



易错点 不善于结合方程根的知识而致错

10. 【中考 · 黄石】以 x 为自变量的二次函数 $y=x^2-2(b-2)x+b^2-1$ 的图象不经过第三象限，则实数 b 的取值范围是（　　）

A. $b\geqslant\frac{5}{4}$　　B. $b\geqslant 1$ 或 $b\leqslant -1$

C. $b\geqslant 2$　　D. $1\leqslant b\leqslant 2$

趣味数学　在运动会上进行铅球比赛时，如何能用巧劲把沉重的铅球扔得最远呢？经过实验和计算人们发现，当铅球抛出的弧线与水平线的夹角为 45°时，铅球扔得最远.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法·提升练 ☞（答案见120页）

考查角度1 利用二次函数的特征判断二次函数的图象与 x 轴的交点情况

11. 【中考·云南】已知二次函数 $y=-\frac{3}{16}x^2+bx+c$ 的图象经过 $A(0,3)$，$B\left(-4,-\frac{9}{2}\right)$ 两点.

（1）求 b，c 的值；

（2）二次函数 $y=-\frac{3}{16}x^2+bx+c$ 的图象与 x 轴是否有公共点？若有，求出公共点的坐标；若没有，请说明理由.

考查角度2 利用二次函数的图象和性质求字母的取值范围

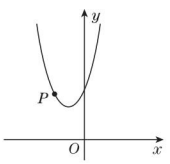
12. 【中考·宁波】如图，已知二次函数 $y=x^2+ax+3$ 的图象经过点 $P(-2,3)$.

（1）求 a 的值和图象的顶点坐标；

（2）点 $Q(m,n)$ 在该二次函数图象上.

①当 $m=2$ 时，求 n 的值；

②若点 Q 到 y 轴的距离小于2，请根据图象直接写出 n 的取值范围.



（第12题）

Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞（答案见120页）

拔尖角度1 利用二次函数的图象和性质求交点图形的面积

13. 【中考·黄冈】已知直线 l：$y=kx+1$ 与抛物线 $y=x^2-4x$.

（1）求证：直线 l 与该抛物线总有两个交点；

（2）设直线 l 与该抛物线的两个交点为 A、B，O 为原点，当 $k=-2$ 时，求 $\triangle OAB$ 的面积.

拔尖角度2 利用二次函数的图象和性质求最值问题（分类讨论思想）

14. 【中考·台州】已知函数 $y=x^2+bx+c$（b，c 为常数）的图象经过点 $(-2,4)$.

（1）求 b，c 满足的关系式；

（2）设该函数图象的顶点坐标是 (m,n)，当 b 的值变化时，求 n 关于 m 的函数表达式；

（3）若该函数的图象不经过第三象限，且当 $-5\leqslant x\leqslant 1$ 时，函数的最大值与最小值之差为16，求 b 的值.

微信公众号 教辅资料站

更多提分招数详见《极速提分法》第1页。

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

* 第 6 课时　二次函数表达式的确定

名师点金

用待定系数法求二次函数表达式，选择表达式类型的方法：

若已知图象上任意三个点的坐标，则利用一般式 $y=ax^2+bx+c$ 求；若已知图象的顶点坐标（或对称轴或函数的最值），则利用顶点式 $y=a(x+h)^2+k$ 求；若已知图象与 x 轴的两个交点，则利用交点式 $y=a(x-x_1)(x-x_2)$ 求.

Ⅰ 夯实基础 · 逐点练

☞（答案见 120 页）

知识点　用点的坐标确定二次函数的表达式

1. 【中考 · 烟台】已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$，y 与 x 的部分对应值如下表：

x	-1	0	2	3	4
y	5	0	-4	-3	0

下列结论：①抛物线的开口向上；

②抛物线的对称轴为直线 $x=2$；

③当 $0<x<4$ 时，$y>0$；

④抛物线与 x 轴的两个交点间的距离是 4；

⑤若 $A(x_1,2)$，$B(x_2,3)$ 是抛物线上两点，则 $x_1<x_2$.

其中正确的个数是（　　）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

2. 在平面直角坐标系中，设二次函数为 $y=(x+a)(x-a-1)$，其中 $a\neq0$.

（1）若此二次函数的图象经过点 $(1,-2)$，求该二次函数的表达式；

（2）若一次函数 $y=ax+b$ 的图象与二次函数的图象经过 x 轴上同一点，探究实数 a，b 满足的关系式；

（3）已知点 $P(x_0,m)$ 和 $Q(1,n)$ 在二次函数的图象上，若 $m<n$，求 x_0 的取值范围.

Ⅱ 整合方法 · 提升练

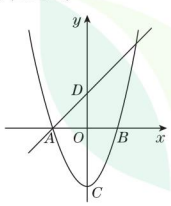
☞（答案见 120 页）

考查角度 1　利用二次函数图象的平移求函数的表达式

3. 【中考 · 苏州】如图，已知抛物线 $y=x^2-4$ 与 x 轴交于点 A，B（点 A 位于点 B 的左侧），C 为顶点，直线 $y=x+m$ 经过点 A，与 y 轴交于点 D.

（1）求线段 AD 的长；

（2）平移该抛物线得到一条新抛物线，设新抛物线的顶点为 C'，若新抛物线经过点 D，并且新抛物线的顶点和原抛物线的顶点的连线 CC' 平行于直线 AD，求新抛物线对应的函数表达式.



（第 3 题）

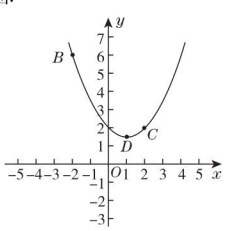
考查角度 2　利用直线的平移与二次函数图象的交点情况求字母的取值范围

4. 【中考 · 菏泽】如图，在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y=ax^2+bx+2$ 过 $B(-2,6)$，$C(2,2)$ 两点.

（1）试求抛物线的函数表达式；

（2）记抛物线的顶点为 D，求 $\triangle BCD$ 的面积；

（3）若直线 $y=-\frac{1}{2}x$ 向上平移 c 个单位长度所得的直线与抛物线段 BDC（包括端点 B，C）部分有两个交点，求 c 的取值范围.



（第 4 题）

更多提分招数详见《极速提分法》第 5 页。

趣味数学　1998 年，我国长江发生了大洪水，期间，为了确保武汉、南京等大工业城市的安全，有关部门面临荆江分洪的问题. 20 吨炸药已经装好，爆破进入倒计时，但这一方案在最后一刻被放弃.（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

阶段核心归类

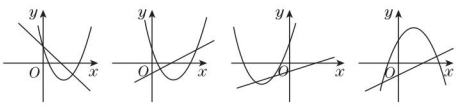
二次函数的图象和性质的九种常见类型 ☞（答案见121页）

名师点金

二次函数的图象和性质是对一次函数的图象和性质的拓展，是对一次函数图象和性质的一次升华，是后面二次函数与一元二次方程、二次函数的应用的预备知识，也是各类考试的必考内容. 它的最大特点是结合图象来研究二次函数的性质，考题所涉及的内容主要有图象的顶点坐标、开口方向、对称轴、函数的增减性，图象的平移及求二次函数的表达式等.

类型1 二次函数的图象在解题中的应用

1. 【中考·德州】函数 $y=ax^2-2x+1$ 和 $y=ax-a$（a 是常数，且 $a\neq0$）在同一平面直角坐标系中的图象可能是（　　）



A　　B　　C　　D

类型2 二次函数的性质在解题中的应用

2. 【中考·南通】在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线 $y=x^2-2(k-1)x+k^2-\frac{5}{2}k$（$k$ 为常数）.

（1）若抛物线经过点 $(1,k^2)$，求 k 的值；

（2）若抛物线经过点 $(2k,y_1)$ 和点 $(2,y_2)$，且 $y_1>y_2$，求 k 的取值范围；

（3）若将抛物线向右平移1个单位长度得到新抛物线，当 $1\leqslant x\leqslant2$ 时，新抛物线对应的函数有最小值 $-\frac{3}{2}$，求 k 的值.

类型3 二次函数图象的平移在解题中的应用

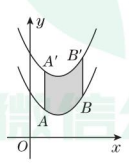
3. 【中考·盐城】如图，将函数 $y=\frac{1}{2}(x-2)^2+1$ 的图象沿 y 轴向上平移得到一条新函数的图象，其中点 $A(1,m)$，$B(4,n)$ 平移后的对应点分别为点 A'，B'，若曲线段 AB 扫过的面积（图中的阴影部分）为9，则新图象的函数表达式是（　　）

A. $y=\frac{1}{2}(x-2)^2-2$

B. $y=\frac{1}{2}(x-2)^2+7$

C. $y=\frac{1}{2}(x-2)^2-5$

D. $y=\frac{1}{2}(x-2)^2+4$



（第3题）

类型4 二次函数图象上点的坐标特征在解题中的应用

4. 【中考·河北】对于题目“一段抛物线 $L:y=-x(x-3)+c(0\leqslant x\leqslant3)$ 与直线 $l:y=x+2$ 有唯一公共点，若 c 为整数，确定所有 c 的值.”甲的结果是 $c=1$，乙的结果是 $c=3$ 或 $c=4$，则（　　）

A. 甲的结果正确

B. 乙的结果正确

C. 甲、乙的结果合在一起才正确

D. 甲、乙的结果合在一起也不正确

5. 【中考·杭州】设二次函数 $y=ax^2+bx-(a+b)$（a，b 是常数，$a\neq0$）.

（1）判断该二次函数图象与 x 轴的交点的个数，说明理由；

（2）若该二次函数图象经过 $A(-1,4)$，$B(0,-1)$，$C(1,1)$ 三个点中的两个，求该二次函数的表达式；

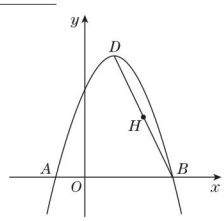
（3）若 $a+b<0$，点 $P(2,m)$（$m>0$）在该二次函数图象上，求证：$a>0$.

类型5 二次函数图象上的线段在解题中的应用

6. 【中考·牡丹江】如图，抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 经过 $A(-1,0)$，$B(3,0)$ 两点，点 D 为抛物线的顶点，连接 BD，点 H 为 BD 的中点.

（1）求抛物线的表达式及顶点 D 的坐标；

（2）在 y 轴上找一点 P，使 $PD+PH$ 的值最小，则 $PD+PH$ 的最小值为_____.



（第6题）

微信公众号 教辅资料站

趣味数学

据当时的新闻报道，由多方专家组成的水利专家组用数学里的有限元法对荆江大堤的体积渗漏进行了测算，确定出一个安全系数. 按这个计算结果，水位即使涨到45.3米，也能对长江大堤严防死守，不用分洪.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

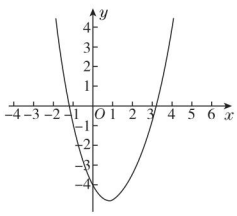
类型 6　二次函数图象上的直线在解题中的应用

7. 【中考·郴州】设 a,b 是任意两个实数，用 $\max\{a,b\}$ 表示 a,b 两数中较大者，例如：$\max\{-1,-1\}=-1$，$\max\{1,2\}=2$，$\max\{4,3\}=4$. 参照上面的材料，解答下列问题：

(1) $\max\{5,2\}=$_____，$\max\{0,3\}=$_____；

(2) 若 $\max\{3x+1,-x+1\}=-x+1$，求 x 的取值范围；

(3) 求函数 $y=x^2-2x-4$ 与 $y=-x+2$ 的图象的交点坐标. 函数 $y=x^2-2x-4$ 的图象如图所示，请你在图中作出函数 $y=-x+2$ 的图象，并根据图象直接写出 $\max\{-x+2,x^2-2x-4\}$ 的最小值.



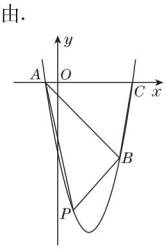
（第 7 题）

类型 7　二次函数图象上的四边形在解题中的应用

8. 【中考·娄底节选】如图，抛物线 $y=ax^2+bx+c(a,b,c$ 为常数，$a\neq0)$ 经过点 $A(-1,0)$，$B(5,-6)$，$C(6,0)$.

(1) 求抛物线的表达式；

(2) 如图，在直线 AB 下方的抛物线上是否存在点 P 使四边形 $PACB$ 的面积最大？若存在，请求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.



（第 8 题）

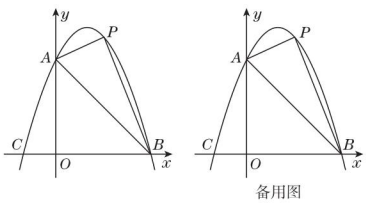
类型 8　二次函数的最值在解题中的应用

9. 【中考·资阳】已知：如图，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与坐标轴分别交于点 $A(0,6)$，$B(6,0)$，$C(-2,0)$，点 P 是线段 AB 上方抛物线上的一个动点.

(1) 求抛物线的表达式；

(2) 当点 P 运动到什么位置时，$\triangle PAB$ 的面积有最大值？

(3) 过点 P 作 x 轴的垂线，交线段 AB 于点 D，再过点 P 作 $PE/\!/x$ 轴交抛物线于点 E，连接 DE，请问是否存在点 P 使 $\triangle PDE$ 为等腰直角三角形？若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，说明理由.



备用图

（第 9 题）

类型 9　求字母的取值范围在解题中的应用

10. 【中考·长春】已知函数

$$y=\begin{cases}-x^2+nx+n(x\geqslant n),\\ -\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{n}{2}x+\dfrac{n}{2}(x<n).\end{cases}$$（n 为常数）

(1) 当 $n=5$ 时：

①点 $P(4,b)$ 在此函数图象上，求 b 的值；

②求此函数的最大值；

(2) 已知线段 AB 的两个端点坐标分别为 $A(2,2)$，$B(4,2)$，当此函数的图象与线段 AB 只有一个交点时，直接写出 n 的取值范围；

(3) 当此函数图象上有 4 个点到 x 轴的距离等于 4 时，求 n 的取值范围.

更多提分招数详见《极速提分法》第 8 页。

趣味数学　在清代乾隆五十年的时候，乾隆皇帝在乾清宫摆下千叟宴，约三千位老年人应邀参加宴会. 其中有一位客人的年纪特别大，到底多大呢？（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

21.3 二次函数与一元二次方程

第1课时 二次函数与一元二次方程之间的关系

名师点金

判断抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴交点个数的方法：

当 $b^2-4ac>0$ 时，有两个交点；当 $b^2-4ac=0$ 时，有一个交点；当 $b^2-4ac<0$ 时，没有交点.

1 夯实基础·逐点练 ☞（答案见123页）

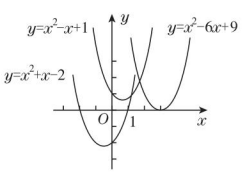
知识点1 二次函数与一元二次方程之间的关系

1. 观察图象（如图）填空：

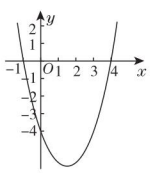
（1）二次函数 $y=x^2+x-2$ 的图象与 x 轴有_____个交点，则一元二次方程 $x^2+x-2=0$ 的根的判别式 Δ _____ 0；

（2）二次函数 $y=x^2-6x+9$ 的图象与 x 轴有_____个交点，则一元二次方程 $x^2-6x+9=0$ 的根的判别式 Δ _____ 0；

（3）二次函数 $y=x^2-x+1$ 的图象与 x 轴_____交点，则一元二次方程 $x^2-x+1=0$ 的根的判别式 Δ _____ 0.



（第1题）



（第2题）

2. 【中考·柳州】小兰画了一个函数 $y=x^2+ax+b$ 的图象如图所示，则关于 x 的方程 $x^2+ax+b=0$ 的解是（　　）

A. 无解　　B. $x=1$

C. $x=-4$　　D. $x=-1$ 或 $x=4$

3. 【中考·梧州】已知 $m>0$，关于 x 的一元二次方程 $(x+1)(x-2)-m=0$ 的解为 x_1，x_2（$x_1<x_2$），则下列结论中正确的是（　　）

A. $x_1<-1<2<x_2$　　B. $-1<x_1<2<x_2$

C. $-1<x_1<x_2<2$　　D. $x_1<-1<x_2<2$

4. 【中考·岳阳】对于一个函数，当自变量 x 取 a 时，函数值 y 也等于 a，我们称 a 为这个函数的不动点. 如果二次函数 $y=x^2+2x+c$ 有两个相异的不动点 x_1，x_2，且 $x_1<1<x_2$，则 c 的取值范围是（　　）

A. $c<-3$　　B. $c<-2$

C. $c<\frac{1}{4}$　　D. $c<1$

知识点2 二次函数与其图象与 x 轴的交点个数之间的关系

5. 【中考·杭州】在平面直角坐标系中，已知 $a\neq b$，设函数 $y=(x+a)(x+b)$ 的图象与 x 轴有 M 个交点，函数 $y=(ax+1)(bx+1)$ 的图象与 x 轴有 N 个交点，则（　　）

A. $M=N-1$ 或 $M=N+1$　　B. $M=N-1$ 或 $M=N+2$

C. $M=N$ 或 $M=N+1$　　D. $M=N$ 或 $M=N-1$

6. 【中考·荆门】抛物线 $y=-x^2+4x-4$ 与坐标轴的交点个数为（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

7. 【中考·天津】已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$（a，b，c 为常数，$a\neq0$）经过点（-1，0），（0，3），其对称轴在 y 轴右侧. 有下列结论：

①抛物线经过点（1，0）；②方程 $ax^2+bx+c=2$ 有两个不相等的实数根；③ $-3<a+b<3$.

其中，正确结论的个数为（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

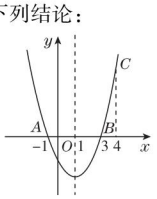
***8.** 【中考·大庆】如图，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象经过点 $A(-1,0)$、点 $B(3,0)$、点 $C(4,y_1)$，若点 $D(x_2,y_2)$ 是抛物线上任意一点，有下列结论：

①二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的最小值为 $-4a$；

②若 $-1\leqslant x_2\leqslant4$，则 $0\leqslant y_2\leqslant5a$；

③若 $y_2>y_1$，则 $x_2>4$；

④一元二次方程 $cx^2+bx+a=0$ 的两个根为 -1 和 $\frac{1}{3}$.



（第8题）

其中正确结论的个数是（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

易错点 混淆“与 x 轴交点”与“与坐标轴交点”而致错

9. 【中考·徐州】若函数 $y=x^2-2x+b$ 的图象与坐标轴有三个交点，则 b 的取值范围是（　　）

A. $b<1$ 且 $b\neq0$　　B. $b>1$

C. $0<b<1$　　D. $b<1$

趣味数学

乾隆皇帝说了，不过不是明说，而是出了一副对联的上联：花甲重开，外加三七岁月. 大臣纪昀在一旁凑热闹，用下联说出了这位老人的岁数：古稀双庆，内多一个春秋.（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

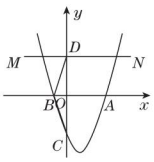
Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞(答案见 123 页)

考查角度 1 利用抛物线与 x 轴的交点情况求点的坐标

10. 【中考 · 黑龙江】如图,在平面直角坐标系中,抛物线 $y=x^2+bx+c$ 与 x 轴交于点 $A(3,0)$、点 $B(-1,0)$,与 y 轴交于点 C.

(1)求抛物线的函数表达式;

(2)过点 $D(0,3)$ 作直线 $MN/\!/x$ 轴,点 P 在直线 MN 上且 $S_{\triangle PAC}=S_{\triangle DBC}$,直接写出点 P 的坐标.



(第 10 题)

考查角度 2 利用抛物线与线段的交点情况求字母的取值范围

11. 【中考 · 北京】在平面直角坐标系 xOy 中,抛物线 $y=ax^2+bx-\frac{1}{a}$ 与 y 轴交于点 A,将点 A 向右平移 2 个单位长度,得到点 B,点 B 在抛物线上.

(1)求点 B 的坐标(用含 a 的式子表示);

(2)求抛物线的对称轴;

(3)已知点 $P\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{a}\right)$,$Q(2,2)$,若抛物线与线段 PQ 恰有一个公共点,结合函数图象,求 a 的取值范围.

Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞(答案见 123 页)

拔尖角度 1 利用抛物线与 x 轴的交点之间的距离解新定义问题

12. 【中考 · 荆州】若二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 图象的顶点在一次函数 $y=kx+t(k\neq0)$ 的图象上,则称 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 为 $y=kx+t(k\neq0)$ 的伴随函数,如:$y=x^2+1$ 是 $y=x+1$ 的伴随函数.

(1)若 $y=x^2-4$ 是 $y=-x+p$ 的伴随函数,求直线 $y=-x+p$ 与两坐标轴围成的三角形的面积;

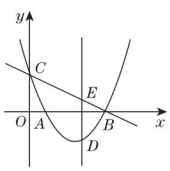
(2)若函数 $y=mx-3(m\neq0)$ 的伴随函数 $y=x^2+2x+n$ 的图象与 x 轴两个交点间的距离为 4,求 m,n 的值.

拔尖角度 2 利用抛物线与坐标轴的交点求点的坐标

13. 【中考 · 大连】如图,抛物线 $y=x^2-3x+\frac{5}{4}$ 与 x 轴相交于 A,B 两点,与 y 轴相交于点 C,点 D 是直线 BC 下方抛物线上一点,过点 D 作 y 轴的平行线,与直线 BC 相交于点 E.

(1)求直线 BC 的表达式;

(2)当线段 DE 的长度最大时,求点 D 的坐标.



(第 13 题)

更多提分招数详见《极速提分法》第 3 页。

趣味数学　请你算一算,这位老人的岁数究竟是多少呢?　(答案:141 岁)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第2课时　由二次函数的图象认识一元二次不等式的解集

名师点金

利用图象求一元二次方程根的方法：

直接画出函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象，则图象与 x 轴交点的横坐标就是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根. 其步骤一般为：1. 作出二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象. 2. 观察图象与 x 轴交点的个数. 3. 若图象与 x 轴有交点，估计出图象与 x 轴交点的横坐标即可得到一元二次方程的近似根.

1 夯实基础 · 逐点练

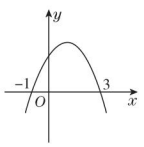
（答案见123页）

知识点1 利用二次函数的图象解一元二次方程

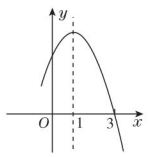
1. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图所示，则一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根为（　　）

A. $x_1=1, x_2=-3$　　B. $x_1=x_2=-1$

C. $x_1=x_2=3$　　D. $x_1=-1, x_2=3$



（第1题）



（第2题）

2. 二次函数 $y=-x^2+2x+k$ 的部分图象如图所示，且关于 x 的一元二次方程 $-x^2+2x+k=0$ 的一个解是 $x_1=3$，另一个解是 $x_2=$（　　）

A. 1　　B. -1　　C. -2　　D. 0

3. 已知二次函数 $y=x^2+2x-10$，小明利用计算器列出了下表：

x	-4.1	-4.2	-4.3	-4.4
$x^2+2x-10$	-1.39	-0.76	-0.11	0.56

那么方程 $x^2+2x-10=0$ 的一个近似根是（　　）

A. -4.1　　B. -4.2　　C. -4.3　　D. -4.4

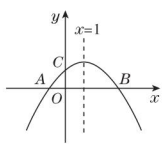
***4.** 【中考 · 包头】已知一次函数 $y_1=4x$，二次函数 $y_2=2x^2+2$，在实数范围内，对于 x 的同一个值，这两个函数所对应的函数值分别为 y_1 与 y_2，则下列关系正确的是（　　）

A. $y_1>y_2$　　B. $y_1\geqslant y_2$

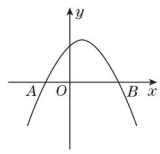
C. $y_1<y_2$　　D. $y_1\leqslant y_2$

***5.** 【中考 · 随州】如图，已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴交于 A, B 两点，与 y 轴交于点 C，$OA=OC$，对称轴为直线 $x=1$，则下列结论：①$abc<0$；②$a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{4}c=0$；③$ac+b+1=0$；④$2+c$ 是关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根. 其中正确的有（　　）

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个



（第5题）



（第6题）

知识点2 利用二次函数的图象解一元二次不等式

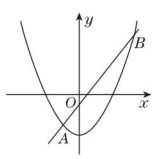
6. 如图，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴交于点 $A(-1,0)$，$B(2,0)$.

（1）方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解为_____；

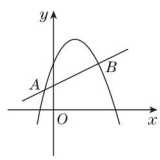
（2）不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为_____；

（3）不等式 $ax^2+bx+c\leqslant 0$ 的解集为_____.

7. 【中考 · 济宁】如图，抛物线 $y=ax^2+c$ 与直线 $y=mx+n$ 交于 $A(-1,p)$，$B(3,q)$ 两点，则不等式 $ax^2+mx+c>n$ 的解集是_____.



（第7题）



（第8题）

8. 【中考 · 咸宁】如图，直线 $y=mx+n$ 与抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 交于 $A(-1,p)$，$B(4,q)$ 两点，则关于 x 的不等式 $mx+n>ax^2+bx+c$ 的解集是_____.

易错点 不考虑方程根的情况盲目作图而致错

9. 用图象法求 $x^2-x+\frac{1}{4}=0$ 的解.

聪明的马克 · 吐温：在一个社交舞会上，一个慈善家得意洋洋地告诉马克 · 吐温：“上个星期我根据困难程度将50枚银元施舍给了10个穷人，他们得到的数目各不相同.”（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞(答案见 124 页)

考查角度 1　二次函数的图象与线段的交点情况在求字母范围中的应用

10. 【中考 · 天门】在平面直角坐标系中,已知抛物线 $C:y=ax^2+2x-1(a\neq0)$ 和直线 $l:y=kx+b$,点 $A(-3,-3)$,$B(1,-1)$ 均在直线 l 上.

(1)若抛物线 C 与直线 l 有交点,求 a 的取值范围;

(2)当 $a=-1$,二次函数 $y=ax^2+2x-1$ 的自变量 x 满足 $m\leqslant x\leqslant m+2$ 时,y 的最大值为 -4,求 m 的值;

(3)若抛物线 C 与线段 AB 有两个不同的交点,请直接写出 a 的取值范围.

考查角度 2　二次函数的图象与点到坐标轴的距离在求点的坐标中的应用

11. 【中考 · 云南】已知 k 是常数,抛物线 $y=x^2+(k^2+k-6)x+3k$ 的对称轴是 y 轴,并且与 x 轴有两个交点.

(1)求 k 的值;

(2)若点 P 在抛物线 $y=x^2+(k^2+k-6)x+3k$ 上,且 P 到 y 轴的距离是 2,求点 P 的坐标.

Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞(答案见 124 页)

拔尖角度　利用表格求二次函数表达式

12. 【中考 · 威海】在画二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图象时,甲写错了一次项的系数,列表如下:

x	…	−1	0	1	2	3	…
$y_{甲}$	…	6	3	2	3	6	…

乙写错了常数项,列表如下:

x	…	−1	0	1	2	3	…
$y_{乙}$	…	−2	−1	2	7	14	…

通过上述信息,解决以下问题:

(1)求原二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的表达式;

(2)对于二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$,当 x _____ 时,y 的值随 x 值的增大而增大;

(3)若关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=k(a\neq0)$ 有两个不相等的实数根,求 k 的取值范围.

更多提分招数详见《极速提分法》第 10 页。

趣味数学　马克 · 吐温听了笑了起来,当场揭穿了慈善家的伪善面目.你知道他是怎么知道的吗?
[答案:若每人得到数目各不相同的银元,则至少要 1+2+3+…+10=55(枚)银元.]

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第3课时　二次函数图象信息题的四种常见类型 ☞（答案见124页）

名师点金

本章是中考的必考内容之一，所占分值较高，对于二次函数的概念、增减性、图象的顶点坐标、对称轴及平移等性质多以选择题、填空题的形式出现；对于二次函数的应用，主要考查函数的建模思想及考生分析问题、解决问题的能力，多以解答题的形式出现；对于求二次函数表达式及与一元二次方程的关系，综合性较强；对于二次函数与图形的变化、图形的面积等相结合的一些探究性问题，则常以压轴题的形式出现.

类型1 根据二次函数图象的特征确定 a,b,c 及与其有关的代数式的符号

1. 【中考·毕节】已知二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图象如图所示，下列结论：

①$abc>0$；

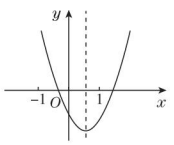
②$2a+b>0$；

③$b^2-4ac>0$；

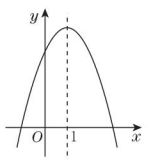
④$a-b+c>0$.

其中正确的个数是（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4



（第1题）



（第2题）

类型2 利用二次函数的图象比较大小

2. 二次函数 $y=-x^2+bx+c$ 的图象如图所示，若点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 在此函数图象上，且 $x_1<x_2<1$，则 y_1 与 y_2 的大小关系是（　　）

A. $y_1\leqslant y_2$　　B. $y_1<y_2$

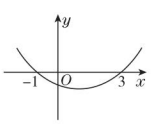
C. $y_1\geqslant y_2$　　D. $y_1>y_2$

类型3 利用二次函数的图象求方程的解或不等式的解集

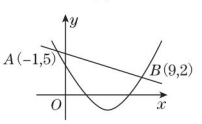
3. 【中考·黄石】二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图象如图所示，则当函数值 $y>0$ 时，x 的取值范围是（　　）

A. $x<-1$　　B. $x>3$

C. $-1<x<3$　　D. $x<-1$ 或 $x>3$



（第3题）



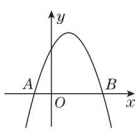
（第4题）

4. 如图，一次函数 $y_1=kx+n$ 与二次函数 $y_2=ax^2+bx+c$ 的图象相交于 $A(-1,5)$，$B(9,2)$ 两点，则关于 x 的不等式 $kx+n\geqslant ax^2+bx+c$ 的解集为（　　）

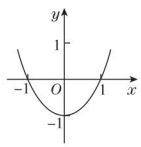
A. $-1\leqslant x\leqslant9$　　B. $-1\leqslant x<9$

C. $-1<x\leqslant9$　　D. $x\leqslant-1$ 或 $x\geqslant9$

5. 【中考·阜新】如图，二次函数 $y=ax^2+bx+3$ 的图象经过点 $A(-1,0)$，$B(3,0)$，那么关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx=0$ 的根是_____.



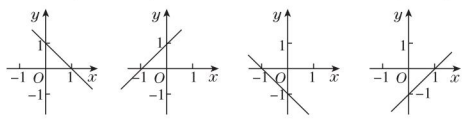
（第5题）



（第6题）

类型4 根据二次函数图象的特征确定其他函数的图象

6. 已知函数 $y=(x-a)(x-b)$（其中 $a>b$）的图象如图所示，则函数 $y=ax+b$ 的图象正确的是（　　）



A　　B　　C　　D

7. 已知抛物线 $y_1=-x^2+mx+n$，直线 $y_2=kx+b$，y_1 的对称轴与 y_2 交于点 $A(-1,5)$，点 A 与 y_1 的顶点 B 的距离是4.

（1）求 y_1 的解析式；

（2）若 y_2 随着 x 的增大而增大，且 y_1 与 y_2 都经过 x 轴上的同一点，求 y_2 的解析式.

趣味数学

宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之变，生物之谜，日用之繁，无处不用数学.

——华罗庚

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

21.4　二次函数的应用

第 1 课时　求几何图形面积的最值问题

名师点金

利用二次函数求几何图形面积的最值是二次函数应用的重点之一，解决此类问题的基本方法是借助已知条件，分析几何图形的性质，确定二次函数表达式，再根据二次函数的图象和性质求出最值，从而解决问题.

Ⅰ 夯实基础 · 逐点练 ☞（答案见 124 页）

知识点 1　二次函数的最值

1. 二次函数 $y = x^2 - 4x + c$ 的最小值为 0，则 c 的值为（　　）

A. 2　　B. 4

C. -4　　D. 16

2. 已知 $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$，那么函数 $y = -2x^2 + 8x - 6$ 的最大值是（　　）

A. -6　　B. -2.5

C. 2　　D. 不能确定

3. 二次函数 $y = 2x^2 - 6x + 1$，当 $0 \leqslant x \leqslant 5$ 时，y 的取值范围是_____.

4. 若二次函数 $y = x^2 + ax + 5$ 的图象关于直线 $x = -2$ 对称，且当 $m \leqslant x \leqslant 0$ 时，y 有最大值 5，最小值 1，则 m 的取值范围是_____.

知识点 2　几何图形面积的最值

5. 已知一个直角三角形两直角边长之和为 20 cm，则这个直角三角形的最大面积为（　　）

A. 25 cm^2　　B. 50 cm^2

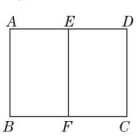
C. 100 cm^2　　D. 不确定

6. 用一条长为 40 cm 的绳子围成一个面积为 a cm^2 的长方形，a 的值不可能为（　　）

A. 20　　B. 40

C. 100　　D. 120

***7.** 【中考 · 沈阳】如图，一块矩形土地 $ABCD$ 由篱笆围着，并且由一条与 CD 边平行的篱笆 EF 分开，已知篱笆的总长为 900 m（篱笆的厚度忽略不计），当 $AB =$ _____m 时，矩形土地 $ABCD$ 的面积最大.

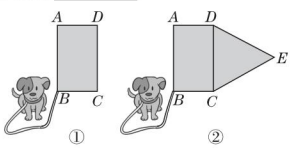


（第 7 题）

8. 【中考 · 金华】在一块空旷场的地上设计一个底部为矩形 $ABCD$ 的小屋，$AB + BC = 10$ m，拴住小狗的 10 m 长的绳子一端固定在 B 点处，小狗在不能进入小屋内的条件下活动，其可以活动的区域面积为 S m^2.

（1）如图①，若 $BC = 4$ m，则 $S =$ _____；

（2）如图②，现考虑在（1）中矩形 $ABCD$ 小屋的右侧以 CD 为边拓展一等边三角形 CDE 区域，使之变成底部为五边形 $ABCED$ 的小屋，其他条件不变，则在 BC 的变化过程中，当 S 取得最小值时，边 BC 的长为_____.

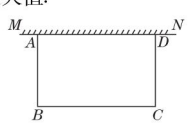


（第 8 题）

9. 【中考 · 福建】如图，在一块足够大的空地上有一段长为 a 米的旧墙 MN，某人利用旧墙和木栏围成一个矩形菜园 $ABCD$，其中 $AD \leqslant MN$，已知矩形菜园的一边靠墙，另三边一共用了 100 米木栏.

（1）若 $a = 20$，所围成的矩形菜园的面积为 450 平方米，求所利用旧墙 AD 的长；

（2）求矩形菜园 $ABCD$ 面积的最大值.



（第 9 题）

趣味数学　在学习中要敢于做减法，就是减去前人已经解决的部分，看看还有哪些问题没有解决，需要我们去探索解决. ——华罗庚

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法·提升练 ☞（答案见125页）

考查角度1 利用二次函数解决实际中面积的最值问题

10. 【中考·包头】某广告公司设计一幅周长为16米的矩形广告牌，广告设计费为每平方米2 000元，设矩形一边长为x米，面积为S平方米.

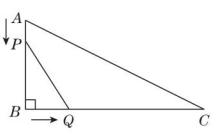
（1）求S与x之间的函数关系式，并写出自变量x的取值范围；

（2）设计费能达到24 000元吗？为什么？

（3）当x是多少时，设计费最多？最多是多少元？

考查角度2 利用二次函数解决动态几何面积的最值问题

11. 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle B = 90°$，$AB = 12$ mm，$BC = 24$ mm，动点P从点A开始沿边AB向B以2 mm/s的速度移动，动点Q从点B开始沿边BC向C以4 mm/s的速度移动. 已知P，Q分别从A，B同时出发，求$\triangle PBQ$的面积S（mm^2）关于出发时间t（s）的函数表达式，并求出t为何值时，$\triangle PBQ$的面积最大？最大值是多少？



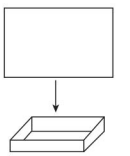
（第11题）

考查角度3 利用二次函数解决与一次函数、一元二次方程相关的几何应用问题

12. 【中考·巴彦淖尔】工人师傅用一块长为12分米，宽为8分米的矩形铁皮制作一个无盖长方体容器，需要将四角各裁掉一个正方形.（厚度不计）

（1）请在图中画出裁剪示意图，用实线表示裁剪线，虚线表示折痕；并求当长方体底面面积为32平方分米时，裁掉的正方形边长是多少？

（2）若要求制作的长方体的底面长不大于底面宽的5倍（长大于宽），并将容器外表面进行防锈处理，侧面每平方分米的费用为0.5元，底面每平方分米的费用为2元，求裁掉的正方形边长为多少时，总费用最低，最低费用为多少元？



（第12题）

鲁班造锯与类比思维：鲁班是我国古代的一位出色的发明家，两千多年以来，他的名字和有关他的故事，在广大人民群众中广为流传. 我国的土木工匠们都尊称他为祖师.（待续）

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第2课时　与“抛物线”型有关的最值问题

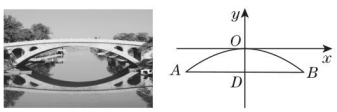
名师点金

1. **抛物线型建筑物问题**：几种常见的抛物线型建筑物有拱形桥洞、隧道洞口、拱形门等. 解决这类问题的关键是根据已知条件选择合理的位置建立直角坐标系，结合问题中的数据求出函数表达式，然后利用函数表达式解决问题.
2. **运动问题**：(1)运动中的距离、时间、速度问题，多根据运动规律中的公式求解. (2)解决物体的运动路线(轨迹)问题的思想方法是利用数形结合思想和函数思想，合理建立直角坐标系，根据已知数据，运用待定系数法求出运动轨迹(抛物线)的表达式，再利用二次函数的性质去分析、解决问题.

Ⅰ 夯实基础·逐点练 (答案见125页)

知识点1 建立坐标系解抛物线型建筑物问题

1. 【中考·铜仁】河北省赵县的赵州桥，其桥拱是近似的抛物线型，如图①，建立如图②所示的平面直角坐标系，其函数关系式为 $y=-\frac{1}{25}x^2$，当水面离桥拱顶的高度 DO 是4 m时，水面宽度 AB 为(　　)

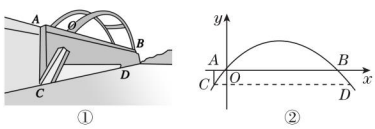


(第1题)

A. -20 m　　B. 10 m

C. 20 m　　D. -10 m

***2.** 【中考·金华】图②是图①中拱形大桥的示意图，桥拱与桥面的交点为 O，B，以点 O 为原点，水平直线 OB 为 x 轴，建立平面直角坐标系，桥的拱形可近似看成抛物线 $y=-\frac{1}{400}(x-80)^2+16$，桥拱与桥墩 AC 的交点 C 恰好在水面，且 $AC\perp x$ 轴，若 $OA=10$ m，则桥面离水面的高度 AC 为(　　)



(第2题)

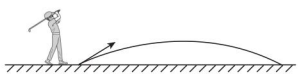
A. $16\frac{9}{40}$ m　　B. $\frac{17}{4}$ m

C. $16\frac{7}{40}$ m　　D. $\frac{15}{4}$ m

知识点2 建立坐标系解运动中的最值问题

3. 【中考·天门】飞机着陆后的滑行距离 s(单位：m)关于滑行时间 t(单位：s)的函数表达式是 $s=60t-\frac{3}{2}t^2$，则飞机着陆后滑行的最长时间为_____.

4. 【中考·襄阳】如图，若被击打的小球飞行高度 h(单位：m)与飞行时间 t(单位：s)之间具有的关系为 $h=20t-5t^2$，则小球从飞出到落地所用的时间为_____s.



(第4题)

5. 【中考·临沂】从地面竖直向上抛出一小球，小球的高度 h(单位：m)与小球运动时间 t(单位：s)之间的函数关系如图所示. 给出下列结论：

①小球在空中经过的路程是40 m；

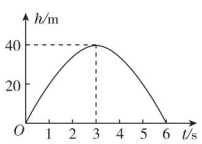
②小球抛出3 s后，速度越来越快；

③小球抛出3 s时速度为0；

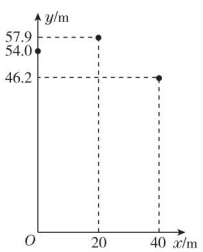
④小球的高度 $h=30$ m时，$t=1.5$ s.

其中正确的是(　　)

A. ①④　　B. ①②　　C. ②③④　　D. ②③



(第5题)



(第6题)

6. 【中考·北京】跳台滑雪是冬季奥运会比赛项目之一，运动员起跳后的飞行路线可以看作是抛物线的一部分，运动员起跳后的竖直高度 y(单位：m)与水平距离 x(单位：m)近似满足函数关系 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$，如图记录了某运动员起跳后 x 与 y 的三组数据，根据上述函数模型和数据，可推断出该运动员起跳后飞行到最高点时，水平距离为(　　)

A. 10 m　　B. 15 m　　C. 20 m　　D. 22.5 m

趣味数学　鲁班造锯是我们熟悉的一个历史故事，当鲁班的手不慎被一片小草割破后，他仔细观察，发现小草叶子边布满了有序的小齿.(待续)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法·提升练 ☞（答案见125页）

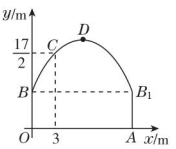
考查角度① 利用二次函数的图象和性质解车过拱桥（隧道）问题

7. 【中考·青岛】如图，隧道的截面由抛物线和长方形构成，长方形的长是12 m，宽是4 m. 按照图中所示的直角坐标系，抛物线可以用 $y=-\frac{1}{6}x^2+bx+c$ 表示，且抛物线上的点 C 到墙面 OB 的水平距离为3 m，到地面 OA 的距离为 $\frac{17}{2}$ m.

(1) 求该抛物线对应的函数表达式，并计算出拱顶 D 到地面 OA 的距离；

(2) 一辆货运汽车载一长方体集装箱后高为6 m，宽为4 m，如果隧道内设双向行车道，那么这辆货运汽车能否安全通过？

(3) 在抛物线型拱壁上需要安装两排灯，使它们离地面的高度相等，如果灯离地面的高度不超过8 m，那么两排灯的水平距离最小是多少米？



（第7题）

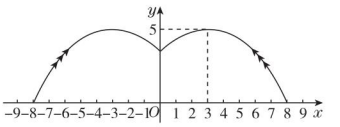
考查角度② 利用二次函数的图象和性质解生活中的抛物线型问题

8. 【中考·衢州】某游乐园有一个直径为16米的圆形喷水池，喷水池的周边有一圈喷水头，喷出的水柱为抛物线，在距水池中心3米处达到最高，高度为5米，且各方向喷出的水柱恰好在喷水池中心的装饰物处汇合，如图所示，以水平方向为 x 轴，喷水池中心为原点建立直角坐标系.

(1) 求水柱所在抛物线（第一象限部分）的函数表达式；

(2) 王师傅在喷水池内维修设备期间，喷水管意外喷水，为了不被淋湿，身高1.8米的王师傅站立时必须在离水池中心多少米以内？

(3) 经检修评估，游乐园决定对喷水设施做如下设计改进：在喷出水柱的形状不变的前提下，把水池的直径扩大到32米，各方向喷出的水柱仍在喷水池中心保留的原装饰物（高度不变）处汇合，请探究扩建改造后喷水池水柱的最大高度.



（第8题）

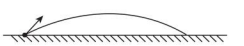
考查角度③ 利用数据信息建立二次函数模型解运动中抛物线型问题

9. 【中考·滨州】如图，一个小球沿与地面成一定角度的方向飞出，小球的飞行路线是一条抛物线. 如果不考虑空气阻力，小球的飞行高度 y（单位：m）与飞行时间 x（单位：s）之间具有函数关系 $y=-5x^2+20x$，请根据要求解答下列问题：

(1) 在飞行过程中，当小球的飞行高度为15 m时，飞行时间是多少？

(2) 在飞行过程中，小球从飞出到落地所用时间是多少？

(3) 在飞行过程中，小球飞行高度何时最大？最大高度是多少？



（第9题）

后来，他据此发明了铁锯. 鲁班在这里用了类比思维方法. 类比思维是从要解决的问题联想到与它类似的熟悉的问题，用熟悉问题的解法思考所要解决的问题.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 3 课时　实际应用中的一般最值问题

名师点金

利润问题的基本关系式：总利润 = 单件利润 × 销售总量.

若销售单价每提高 m 元，销售量相应减少 n 件，设单价提高了 x 元，则：现销售量 = 原销售量 $-\frac{x}{m}n$.

Ⅰ 夯实基础 · 逐点练

☞（答案见 126 页）

知识点 1　用二次函数表示实际问题

1. 某工厂 2018 年产品的产量为 100 吨，该产品产量的年平均增长率为 $x(x>0)$，设 2020 年该产品的产量为 y 吨，则 y 关于 x 的函数表达式为（　　）

A. $y=100(1-x)^2$

B. $y=100(1+x)^2$

C. $y=\dfrac{100}{(1+x)^2}$

D. $y=100+100(1+x)+100(1+x)^2$

2. 心理学家发现：学生对概念的接受能力 y 与提出概念的时间 x（min）之间是二次函数关系，当提出概念 13 min 时，学生对概念的接受能力最大，为 59.9；当提出概念 30 min 时，学生对概念的接受能力就剩下 31，则 y 与 x 满足的二次函数关系式为（　　）

A. $y=-(x-13)^2+59.9$

B. $y=-0.1x^2+2.6x+31$

C. $y=0.1x^2-2.6x+76.8$

D. $y=-0.1x^2+2.6x+43$

3. 某商场购进一种单价为 40 元的商品，如果以单价 60 元售出，那么每天可卖出 300 个. 根据销售经验，每降价 1 元，每天可多卖出 20 个. 假设每个降价 x（元），每天销售 y（个），每天获得利润 W（元）.

（1）写出 y 与 x 之间的函数关系式：_____；

（2）求出 W 与 x 之间的函数关系式（不必写出 x 的取值范围）.

知识点 2　用二次函数的最值解决实际问题

4. 某旅行社在五一期间接团去外地旅游，经计算，所获营业额 y（元）与旅行团人数 x（人）满足关系式 $y=-x^2+100x+28\,400$，要使所获营业额最大，则此旅行团应有（　　）

A. 30 人　　B. 40 人　　C. 50 人　　D. 55 人

***5.** 【中考 · 兰州】某商家销售一款商品，进价每件 80 元，售价每件 145 元，每天销售 40 件，每销售一件需支付给商场管理费 5 元. 未来一个月（按 30 天计算），这款商品将开展“每天降价 1 元”的促销活动，即从第一天开始每天的单价均比前一天降低 1 元. 通过市场调查发现，该商品单价每降 1 元，每天销售量增加 2 件，设第 x 天（$1\leqslant x\leqslant 30$ 且 x 为整数）的销售量为 y 件.

（1）直接写出 y 与 x 之间的函数关系式；

（2）设第 x 天的利润为 w 元，试求出 w 与 x 之间的函数关系式，并求出哪一天的利润最大？最大利润是多少元？

易错点 将销售额当销售利润而致错

6. 【中考 · 毕节】某商店销售一款进价为每件 40 元的护肤品，调查发现，销售单价不低于 40 元且不高于 80 元时，该商品的日销售量 y（件）与销售单价 x（元）之间存在一次函数关系. 当销售单价为 44 元时，日销售量为 72 件；当销售单价为 48 元时，日销售量为 64 件.

（1）求 y 与 x 之间的函数关系式；

（2）设该护肤品的日销售利润为 W（元），当销售单价为多少时，日销售利润最大？最大日销售利润是多少？

趣味数学　**花瓣知多少**：百合花的花瓣是 3 瓣，梅花是 5 瓣，飞燕草是 8 瓣，万寿菊是 13 瓣，向日葵是 21 或 34 瓣，雏菊是 34，55 或 89 瓣. 这些花的花瓣数不正是斐波那契数列中的数吗？（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法·提升练 ☞（答案见126页）

考查角度① 利用二次函数解与方程（组）相关的问题

7. 【中考·通辽】当今，越来越多的青少年在观看影片《流浪地球》后，喜欢再读一读同名科幻小说，该小说销量急剧上升. 书店为满足广大顾客需求，订购该科幻小说若干本，每本进价为20元. 根据以往经验：当销售单价是25元时，每天的销售量是250本；销售单价每上涨1元，每天的销售量就减少10本. 书店要求每本书的利润不低于10元且不高于18元.

(1) 直接写出书店销售该科幻小说时每天的销售量 y（本）与销售单价 x（元）之间的函数关系式及自变量的取值范围；

(2) 书店决定每销售1本该科幻小说，就捐赠 a（$0<a\leqslant 6$）元给困难职工，每天扣除捐赠后可获得的最大利润为1 960元，求 a 的值.

考查角度② 利用二次函数解与不等式（组）相关的问题

8. 【中考·随州】某食品厂生产一种半成品食材，成本为2元/千克，每天的产量 p（百千克）与销售价格 x（元/千克）满足函数关系式 $p=\frac{1}{2}x+8$. 从市场反馈的信息发现，该半成品食材每天的市场需求量 q（百千克）与销售价格 x（元/千克）满足一次函数关系，部分数据如下表：

销售价格 x/（元/千克）	2	4	…	10
市场需求量 q/百千克	12	10	…	4

已知按物价部门规定，销售价格不低于2元/千克且不高于10元/千克.

(1) 直接写出 q 与 x 之间的函数关系式，并注明自变量 x 的取值范围.

(2) 当每天的产量小于或等于市场需求量时，这种半成品食材能全部售出；而当每天的产量大于市场需求量时，只能售出符合市场需求量的半成品食材，剩余的食材由于保质期短而只能废弃.

①当每天的半成品食材能全部售出时，求 x 的取值范围；

②求厂家每天获得的利润 y（百元）与销售价格 x 的函数关系式.

(3) 在(2)的条件下，当 x 为_____元/千克时，利润 y 有最大值；若要使每天的利润不低于24百元，并尽可能地减少半成品食材的浪费，则 x 应定为_____元/千克.

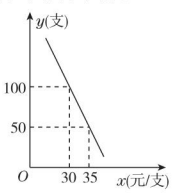
考查角度③ 利用图中的信息解函数问题

9. 某网店销售一款电动牙刷，其成本为20元，销售中发现，该商品每天的销售量 y（支）与销售单价 x（元/支）之间存在如图所示的关系.

(1) 请求出 y 与 x 的函数关系式；

(2) 这款电动牙刷销售单价定为多少元时，每天销售利润最大？最大利润是多少元？

(3) 面对2020年初，全国爆发的新冠肺火疫情，该网店店主决定从每天获得的利润中抽出200元捐赠给武汉，为了保证捐款后每天剩余利润不低于550元，如何确定这款电动牙刷的销售单价？



（第9题）

西位法国物理学家于1992年将花瓣形成过程的参数考虑进去，设计了一套计算机仿真技术，同时做了仿真实验.（待续）

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

阶段核心归类

用二次函数解决实际问题的六种常见类型 ☞(答案见 126 页)

名师点金

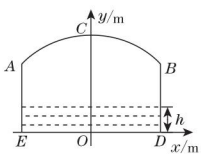
利用二次函数解决实际问题时,要注意数形结合,巧妙地建立二次函数模型,从而达到利用二次函数的某些性质来解决问题的目的.

类型 1 拱桥问题

1. 如图,小河上有一拱桥,拱桥及河道的截面轮廓线由抛物线的一部分 ACB 和矩形的三边 AE,ED,DB 组成,已知河底 ED 是水平的,且 $ED=16$ m,$AE=8$ m,抛物线的顶点 C 到 ED 的距离是 11 m,以 ED 所在的直线为 x 轴,抛物线的对称轴为 y 轴建立平面直角坐标系.

(1)抛物线对应的函数表达式是_____;

(2)已知从某时刻开始的 40 h 内,水面与河底 ED 的距离 h(m)随时间 t(h)的变化满足函数关系 $h=-\frac{1}{128}(t-19)^2+8(0\leqslant t\leqslant 40)$,且当顶点 C 与水面的距离不大于 5 m 时,需禁止船只通行. 请通过计算说明:在这一时段内,需多少小时禁止船只通行?



(第 1 题)

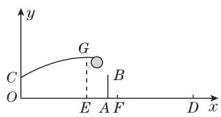
类型 2 运动问题

2. 为备战 2021 年东京奥运会,中国女排的姑娘们刻苦训练. 如图,已知排球场的长度 OD 为18 m,位于球场中线处球网的高度 AB 为 2.43 m,一名队员站在点 O 处发球,排球从点 O 的正上方 1.8 m 的 C 点向正前方飞出,排球的飞行路线是一条抛物线. 当排球运行至离点 O 的水平距离 OE 为 7 m 时,到达最高点 G,建立如图所示的平面直角坐标系.

(1)当排球上升的最大高度为 3.2 m 时,求排球飞行的高度 y(单位:m)与水平距离 x(单位:m)之间的函数表达式(不要求写自变量 x 的取值范围);

(2)在(1)的条件下,对方距球网 0.5 m 的点 F 处有一名队员,她起跳后的最大高度为 3.1 m,问这次她是否可以拦网成功?请通过计算说明;

(3)若队员发球既要过球网,又不出边界,问排球飞行的最大高度 h 的取值范围是多少(排球压线属于没出界)?



(第 2 题)

类型 3 利润问题

3. 某超市拟于中秋节前 50 天里销售某品牌月饼,其进价为 18 元/kg,设第 x 天的销售价格为 y(元/kg),销售量为 m(kg). 该超市根据以往的销售经验得出以下的销售规律:①当 $1\leqslant x\leqslant 30$ 时,$y=40$. 当 $31\leqslant x\leqslant 50$ 时,y 与 x 之间满足一次函数关系,且当 $x=36$ 时,$y=37$;当 $x=44$ 时,$y=33$. ②m 与 x 之间的关系为 $m=5x+50$.

(1)当 $31\leqslant x\leqslant 50$ 时,y 与 x 之间的关系式为_____;

(2)x 为多少时,当天的销售利润 W(元)最大?最大利润为多少?

趣味数学 结果证实,在自然界定律的要求下(系统保持在最低能量状态),花朵会以斐波那契数列长出花瓣. 其实,这些类似花瓣数目的大自然模式,都有深层的数学规律.

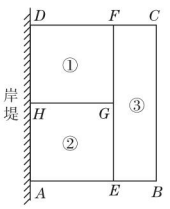
关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

类型4 面积问题

4. 为了节省材料，某水产养殖户利用水库的岸堤（岸堤足够长）为一边，用总长为 80 m 的围网在水库中围成了如图所示的①②③三块矩形区域，而且这三块矩形区域的面积相等. 设 BC 的长度是 x m，矩形区域 $ABCD$ 的面积为 y m^2.

（1）求 y 与 x 之间的函数关系式，并注明自变量 x 的取值范围；

（2）x 取何值时，y 有最大值？最大值是多少？



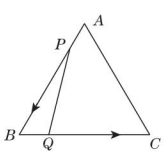
（第 4 题）

类型5 动点问题

5. 如图，$\triangle ABC$ 是边长为 3 cm 的等边三角形，动点 P，Q 同时从 A，B 两点出发，分别沿 AB，BC 方向匀速移动，它们的速度都是 1 cm/s，当点 P 运动到点 B 时，两点均停止运动，设点 P 的运动时间为 t s.

（1）当 t 为何值时，$\triangle PBQ$ 是直角三角形？

（2）设四边形 $APQC$ 的面积为 y cm^2，求 y 关于 t 的函数表达式；t 取何值时，四边形 $APQC$ 的面积最小？并求出最小面积.



（第 5 题）

类型6 决策问题

6. 【中考·资阳】某商家计划从厂家采购空调和冰箱两种产品共 20 台，空调的采购单价 y_1（元）与采购数量 x_1（台）满足 $y_1 = -20x_1 + 1\,500$（$0 < x_1 < 20$，x_1 为整数）；冰箱的采购单价 y_2（元）与采购数量 x_2（台）满足 $y_2 = -10x_2 + 1\,300$（$0 < x_2 < 20$，x_2 为整数）.

（1）经商家与厂家协商，采购空调的数量不少于冰箱数量的 $\frac{11}{9}$ 倍，且空调采购单价不低于 1 200 元，问该商家共有几种进货方案？

（2）该商家分别以 1 760 元和 1 700 元的销售单价售出空调和冰箱，且全部售完. 在（1）的条件下，问采购空调多少台时总利润最大？并求最大利润.

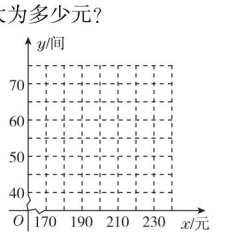
7. 【中考·衢州】某宾馆有若干间标准房，当每间标准房的价格为 200 元时，每天入住的房间数为60 间. 经市场调查表明，该宾馆每间标准房的价格在 170 ~ 240 元之间（含 170 元、240 元）浮动时，每天入住的房间数 y（间）与每间标准房的价格 x（元）的数据如下表：

x/元	…	190	200	210	220	…
y/间	…	65	60	55	50	…

（1）根据所给数据在如图所示的坐标系中描出相应的点，并画出图象；

（2）求 y 关于 x 的函数表达式，并写出自变量 x 的取值范围；

（3）设客房的日营业额为 w（元）. 若不考虑其他因素，问宾馆每间标准房的价格定为多少元时，客房的日营业额最大？最大为多少元？



（第 7 题）

漫谈抛物线：炮弹发射之后飞行的路线是怎样的？火炮发明之后，人们对这个问题并不十分明白. 发射炮弹的一方认为炮弹离开炮筒后是沿着炮筒所在的射线飞出的.（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

21.5　反比例函数

第 1 课时　认识反比例函数

名师点金

1. 反比例函数有三种表达形式：(1) $y=\frac{k}{x}$. (2) $y=kx^{-1}$. (3) $xy=k$，其中 k 是常数，且 $k\neq0$.

2. 判断一个函数是否是反比例函数，先看它是否符合反比例函数的三种表达形式之一，再看 k 是否是常数，且 $k\neq0$.

1 夯实基础 · 逐点练 ☞(答案见 127 页)

知识点 1　反比例函数的定义

1. 下列函数中，表示 y 是 x 的反比例函数的是(　　)

A. $y=\sqrt{3}x$　　B. $y=\frac{a}{x}$　　C. $y=\frac{1}{x^2}$　　D. $y=\frac{1}{3x}$

2. 函数 $y=-\frac{1}{4x}$ 的比例系数是(　　)

A. 4　　B. -4　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $-\frac{1}{4}$

3. 若 $y=\frac{k(k-3)}{x}$ 是反比例函数，则 k 必须满足(　　)

A. $k\neq3$　　B. $k\neq0$

C. $k\neq3$ 或 $k\neq0$　　D. $k\neq3$ 且 $k\neq0$

知识点 2　确定反比例函数的表达式

4. 【中考 · 安徽】已知点 $A(1,-3)$ 关于 x 轴的对称点 A' 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象上，则实数 k 的值为(　　)

A. 3　　B. $\frac{1}{3}$

C. -3　　D. $-\frac{1}{3}$

5. 【中考 · 温州】验光师测得一组关于近视眼镜的度数 y(度)与镜片焦距 x(米)的对应数据，见下表. 根据表中数据，可得 y 关于 x 的函数表达式为(　　)

近视眼镜的度数 y/度	200	250	400	500	1 000
镜片焦距 x/米	0.50	0.40	0.25	0.20	0.10

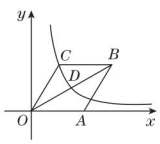
A. $y=\frac{100}{x}$　　B. $y=\frac{x}{100}$

C. $y=\frac{400}{x}$　　D. $y=\frac{x}{400}$

6. 【中考 · 枣庄】从 $-1,2,3,-6$ 这四个数中任取两个数，分别记为 m,n，那么点 (m,n) 在函数 $y=\frac{6}{x}$ 的图象上的概率是(　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{8}$

***7.** 【中考 · 滨州】如图，在平面直角坐标系中，菱形 $OABC$ 的边 OA 在 x 轴的正半轴上，反比例函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 的图象经过对角线 OB 的中点 D 和顶点 C. 若菱形 $OABC$ 的面积为 12，则 k 的值为(　　)



(第 7 题)

A. 6　　B. 5

C. 4　　D. 3

知识点 3　建立反比例函数的模型

8. 【中考 · 自贡】回顾初中阶段函数的学习过程，从函数表达式到函数图象，再到利用函数图象研究函数的性质. 这种研究方法主要体现的数学思想是(　　)

A. 数形结合　　B. 类比

C. 演绎　　D. 公理化

9. 下列各组的两个变量间满足反比例关系的是(　　)

A. 三角形面积一定时，它的一边长与该边上的高

B. 等腰三角形的周长一定时，它的底边长与腰长

C. 圆的周长与它的半径

D. 圆的面积与它的半径

10. 购买 x 只茶杯需 15 元，则购买一只茶杯的价格 y(元)与 x 的函数表达式为(　　)

A. $y=\frac{15}{x}$(x 取实数)　　B. $y=\frac{15}{x}$(x 取整数)

C. $y=\frac{x}{15}$(x 取自然数)　　D. $y=\frac{15}{x}$(x 取正整数)

易错点　忽视反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 中 k 不能为 0 而致错

11. 【中考 · 安顺】若 $y=(a+1)x^{a^2-2}$ 是反比例函数，则 a 的取值为(　　)　　【导学号:5390328】

A. 1　　B. -1　　C. ±1　　D. 任意实数

趣味数学　被袭击的一方也认为炮弹是从空中沿直线方向飞下来的. 于是，在当时，人们认为炮弹飞行的路线是一条折线. 意大利著名学者伽利略更正了这种错误认识. (待续)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞（答案见127页）

考查角度1 利用数量关系信息求函数表达式

12. 已知 $y=y_1+y_2$，y_1 与 x^2 成正比例函数关系，y_2 与 x 成反比例函数关系，且 $x=1$ 时，$y=3$；$x=-1$ 时，$y=1$.

（1）求 y 与 x 之间的函数表达式；

（2）当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，求 y 的值.

考查角度2 利用表格信息求函数表达式（分类讨论思想）

13. 已知 y 是关于 x 的函数，下表给出了 x 与 y 的一些值.

x	-3	-2		1		3	4
y		$\frac{3}{2}$	3		$-\frac{3}{2}$		$-\frac{3}{4}$

请探索：

（1）y 是 x 的正比例函数还是反比例函数？

（2）写出该函数的表达式，并将表格补充完整.

Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞（答案见128页）

拔尖角度1 利用反比例函数解电学问题

14. 在直流电路中，电流 I（A）、电阻 R（Ω）、电压 U（V）之间满足关系式 $U=IR$，已知 $U=220$ V.

（1）请写出电流 I（A）与电阻 R（Ω）之间的函数表达式，并判断它是我们学过的哪种函数；

（2）利用写出的函数表达式完成下表：

R/Ω	20	40	60	80	100
I/A					

（3）当 R 越来越大时，I 怎样变化？当 R 越来越小呢？

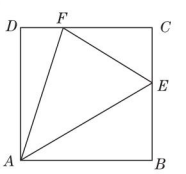
拔尖角度2 利用反比例函数解与几何相关的问题

15. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长是2，E，F 分别在 BC，CD 两边上，且 E，F 与 BC，CD 两边的端点不重合，$\triangle AEF$ 的面积是1，设 $BE=x$，$DF=y$.

（1）求 y 关于 x 的函数表达式；

（2）判断（1）中，y 关于 x 的函数是什么函数？

（3）写出此函数自变量 x 的范围.



（第15题）

趣味数学

他指出，炮弹并不是沿着折线飞行的，而是沿着一条曲线飞行的，他把这条曲线叫“抛物线”. 就像斜抛一个物体后，物体在空中划过的曲线，“抛物”的名称正是从此而来. （待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第2课时　反比例函数的图象和性质

名师点金

反比例函数值比较大小的方法：

1. **代入法**：若已知点的横坐标及函数表达式，可先直接代入求函数值，再比较.
2. **图象法**：可画草图，利用数形结合的思想直接观察，比较函数值的大小.
3. **性质法**：若点在同一支曲线上，直接利用函数的增减性比较；若不在，则应结合图象判断 y 的正负，再比较.

1 夯实基础·逐点练 ☞(答案见128页)

知识点1 反比例函数的图象

1. 【中考·兰州】反比例函数 $y=\frac{2}{x}$ 的图象在(　　)

A. 第一、二象限　　B. 第一、三象限

C. 第二、三象限　　D. 第二、四象限

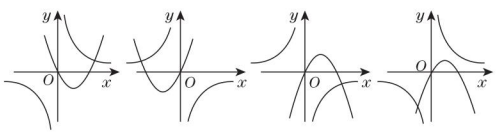
2. 【中考·海南】如果反比例函数 $y=\frac{a-2}{x}$(a 是常数)的图象在第一、三象限，那么 a 的取值范围是(　　)

A. $a<0$　　B. $a>0$　　C. $a<2$　　D. $a>2$

3. 【中考·咸宁】已知点 $A(-1,m)$，$B(1,m)$，$C(2,m-n)$($n>0$)在同一个函数的图象上，这个函数可能是(　　)

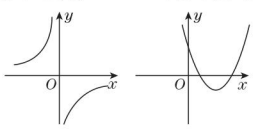
A. $y=x$　　B. $y=-\frac{2}{x}$　　C. $y=x^2$　　D. $y=-x^2$

4. 【中考·永州】在同一平面直角坐标系中，反比例函数 $y=\frac{b}{x}(b\neq0)$ 与二次函数 $y=ax^2+bx(a\neq0)$ 的图象大致是(　　)

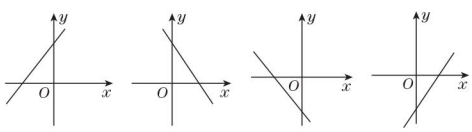


A　　B　　C　　D

5. 【中考·德州】若函数 $y=\frac{k}{x}$ 与 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图所示，则函数 $y=kx+b$ 的大致图象为(　　)



(第5题)



A　　B　　C　　D

知识点2 反比例函数的性质

6. 【中考·赤峰】点 $A(1,y_1)$，$B(3,y_2)$ 是反比例函数 $y=\frac{9}{x}$ 的图象上的两点，则 y_1，y_2 的大小关系是(　　)

A. $y_1>y_2$　　B. $y_1=y_2$

C. $y_1<y_2$　　D. 不能确定

7. 【中考·衡阳】对于反比例函数 $y=-\frac{2}{x}$，下列说法中不正确的是(　　)

A. 图象分布在第二、四象限

B. 当 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而增大

C. 图象经过点 $(1,-2)$

D. 若点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 都在图象上，且 $x_1<x_2$，则 $y_1<y_2$

8. 【中考·天津】若点 $A(-3,y_1)$，$B(-2,y_2)$，$C(1,y_3)$ 都在反比例函数 $y=-\frac{12}{x}$ 的图象上，则 y_1，y_2，y_3 的大小关系是(　　)

A. $y_2<y_1<y_3$　　B. $y_3<y_1<y_2$

C. $y_1<y_2<y_3$　　D. $y_3<y_2<y_1$

***9.** 【中考·黑龙江】已知反比例函数 $y=\frac{6}{x}$，当 $1<x<3$ 时，y 的最小整数值是(　　)

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

易错点 忽略点在“同一象限”这一条件运用性质比较大小而致错

10. 【中考·黑龙江】反比例函数 $y=\frac{3}{x}$ 的图象上三个点的坐标为 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，(x_3,y_3)，若 $x_1<x_2<0<x_3$，则 y_1，y_2，y_3 的大小关系是(　　)

A. $y_1<y_2<y_3$　　B. $y_2<y_1<y_3$

C. $y_2<y_3<y_1$　　D. $y_1<y_3<y_2$

趣味数学　在现实生活中，有许多曲线的形状是抛物线状，如喷泉喷出的水滴行进的路线，跳水运动员起跳后至入水前运动的路线，某些桥梁的桥拱等.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

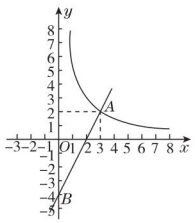
Ⅱ 整合方法·提升练 ☞（答案见128页）

考查角度1 利用反比例函数的图象和性质说明函数式间的关系

11. 【中考·湘西州】如图，一次函数 $y=kx+b$ 的图象与反比例函数 $y=\frac{m}{x}$ 的图象在第一象限交于点 $A(3,2)$，与 y 轴的负半轴交于点 B，且 $OB=4$.

(1)求函数 $y=\frac{m}{x}$ 和 $y=kx+b$ 的表达式；

(2)结合图象直接写出不等式组 $0<\frac{m}{x}<kx+b$ 的解集.



（第11题）

考查角度2 利用反比例函数的图象和性质说明图象的位置

12. 【中考·杭州】设一次函数 $y=kx+b$（k,b 是常数，$k\neq0$）的图象过 $A(1,3)$，$B(-1,-1)$ 两点.

(1)求该一次函数的表达式；

(2)若点 $(2a+2,a^2)$ 在该一次函数的图象上，求 a 的值；

(3)已知点 $C(x_1,y_1)$ 和点 $D(x_2,y_2)$ 在该一次函数的图象上，设 $m=(x_1-x_2)(y_1-y_2)$，判断反比例函数 $y=\frac{m+1}{x}$ 的图象所在的象限，并说明理由.

Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞（答案见128页）

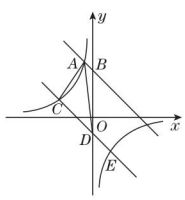
拔尖角度1 利用图象的性质解与直线平移相关的问题

13. 【中考·广元】如图，在平面直角坐标系中，直线 AB 与 y 轴交于点 $B(0,7)$，与反比例函数 $y=\frac{-8}{x}$ 在第二象限内的图象相交于点 $A(-1,a)$.

(1)求直线 AB 的表达式；

(2)将直线 AB 向下平移9个单位长度后与反比例函数 $y=\frac{-8}{x}$ 的图象交于点 C 和点 E，与 y 轴交于点 D，求 $\triangle ACD$ 的面积；

(3)设直线 CD 的表达式为 $y=mx+n$，根据图象直接写出不等式 $mx+n\leqslant\frac{-8}{x}$ 的解集.



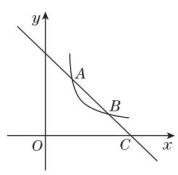
（第13题）

拔尖角度2 利用图象的性质解与面积相关的问题

14. 【中考·常德】如图，一次函数 $y=-x+3$ 的图象与反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$ 在第一象限的图象交于 $A(1,a)$ 和 B 两点，与 x 轴交于点 C.

(1)求反比例函数的表达式；

(2)若点 P 在 x 轴上，且 $\triangle APC$ 的面积为5，求点 P 的坐标.



（第14题）

趣味数学

徐庶离开刘备之后，又拍马而回，向刘备推荐了在卧龙岗的诸葛亮. 刘备听说此人才智过人，上通天文，下知地理，虽得其主，不得其时，感觉这样的贤士如果不重用，就太可惜了.（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 3 课时　反比例函数的几何性质

名师点金

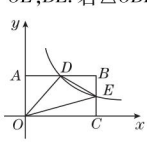
1. **反比例函数中 k 的几何性质**：过双曲线 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$ 上任一点向两条坐标轴作垂线所得的矩形面积等于 $|k|$；向一条坐标轴作垂线且与原点连线所得的三角形面积等于 $\frac{1}{2}|k|$.
2. 双曲线关于直线 $y=x$ 和直线 $y=-x$ 成轴对称，关于原点 O 成中心对称.

1 夯实基础 · 逐点练

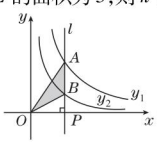
☞(答案见 129 页)

知识点 1　反比例函数中 k 的几何性质

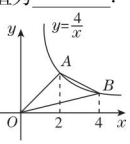
1. 【中考 · 随州】如图，矩形 $OABC$ 的顶点 A，C 分别在 y 轴，x 轴的正半轴上，D 为 AB 的中点，反比例函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 的图象经过点 D，且与 BC 交于点 E，连接 OD，OE，DE. 若 $\triangle ODE$ 的面积为 3，则 k 的值为_____.



(第 1 题)



(第 2 题)



(第 3 题)

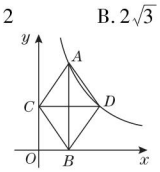
2. 【中考 · 安顺】如图，直线 $l\perp x$ 轴于点 P，且与反比例函数 $y_1=\frac{k_1}{x}(x>0)$ 及 $y_2=\frac{k_2}{x}(x>0)$ 的图象分别交于 A，B 两点，连接 OA，OB，已知 $\triangle OAB$ 的面积为 4，则 $k_1-k_2=$_____.

3. 【中考 · 郴州】如图，A，B 是反比例函数 $y=\frac{4}{x}$ 在第一象限内的图象上的两点，且 A，B 两点的横坐标分别是 2 和 4，则 $\triangle OAB$ 的面积是(　　)

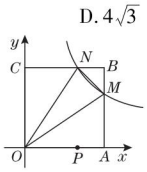
A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

4. 【中考 · 衢州】如图，在平面直角坐标系中，点 A 在函数 $y=\frac{4}{x}(x>0)$ 的图象上，$AB\perp x$ 轴于点 B，AB 的垂直平分线与 y 轴交于点 C，与函数 $y=\frac{4}{x}(x>0)$ 的图象交于点 D，连接 AC，CB，BD，DA，则四边形 $ACBD$ 的面积等于(　　)

A. 2　　B. $2\sqrt{3}$　　C. 4　　D. $4\sqrt{3}$



(第 4 题)



(第 5 题)

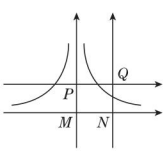
*5. 【中考 · 临沂】如图，在平面直角坐标系中，反比例函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 的图象与边长是 6 的正方形 $OABC$ 的两边 AB，BC 分别相交于 M，N 两点，$\triangle OMN$ 的面积为 10. 若动点 P 在 x 轴上，则 $PM+PN$ 的最小值是(　　)

A. $6\sqrt{2}$　　B. 10　　C. $2\sqrt{26}$　　D. $2\sqrt{29}$

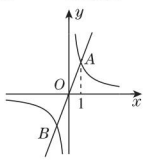
知识点 2　反比例函数图象的对称性

6. 【中考 · 河北】如图，函数 $y=\begin{cases}\frac{1}{x}(x>0),\\-\frac{1}{x}(x<0)\end{cases}$ 的图象所在坐标系的原点是(　　)

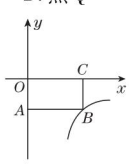
A. 点 M　　B. 点 N　　C. 点 P　　D. 点 Q



(第 6 题)



(第 8 题)



(第 10 题)

7. 【中考 · 天门】反比例函数 $y=-\frac{3}{x}$，下列说法中不正确的是(　　)

A. 图象经过点 $(1,-3)$

B. 图象位于第二、四象限

C. 图象关于直线 $y=x$ 对称

D. y 随 x 的增大而增大

8. 【中考 · 临沂】如图，正比例函数 $y_1=k_1x$ 与反比例函数 $y_2=\frac{k_2}{x}$ 的图象相交于 A，B 两点，其中点 A 的横坐标为 1，当 $y_1<y_2$ 时，x 的取值范围是(　　)

A. $x<-1$ 或 $x>1$　　B. $-1<x<0$ 或 $x>1$

C. $-1<x<0$ 或 $0<x<1$　　D. $x<-1$ 或 $0<x<1$

*9. 【中考 · 扬州】若反比例函数 $y=-\frac{2}{x}$ 的图象上有两个不同的点关于 y 轴的对称点都在一次函数 $y=-x+m$ 的图象上，则 m 的取值范围是(　　)

A. $m>2\sqrt{2}$　　B. $m<-2\sqrt{2}$

C. $m>2\sqrt{2}$ 或 $m<-2\sqrt{2}$　　D. $-2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$

易错点　已知图形面积求反比例函数中比例系数 k 的值时，易忽视图象的位置

10. 如图，面积为 5 的矩形 $OABC$ 的一个顶点 B 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象上，另三个顶点在坐标轴上，则 $k=$_____.

趣味数学　于是几日之后刘备就带着关羽、张飞二人前去拜访. 一路打听得知诸葛亮居住在卧龙岗前疏林内的茅草屋中. 在途中，他们遇到一片十几米宽的烂泥湿地. (待续)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

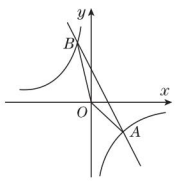
Ⅱ 整合方法·提升练 ☞（答案见129页）

考查角度1 利用反比例函数的几何性质求面积

11. 【中考·广安】如图，已知$A(n,-2)$，$B(-1,4)$是一次函数$y=kx+b$和反比例函数$y=\frac{m}{x}$的图象的两个交点.

（1）求反比例函数和一次函数的表达式；

（2）求$\triangle AOB$的面积.



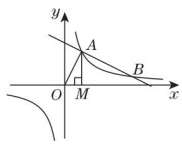
（第11题）

考查角度2 利用反比例函数的几何性质求最值

12. 【中考·绵阳】如图，一次函数$y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$的图象与反比例函数$y=\frac{k}{x}(k>0)$的图象交于$A$，$B$两点，过点$A$作$x$轴的垂线，垂足为点$M$，$\triangle AOM$的面积为1.

（1）求反比例函数的表达式；

（2）在y轴上求一点P，使$PA+PB$的值最小，并求出其最小值和点P的坐标.



（第12题）

Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞（答案见129页）

拔尖角度1 利用反比例函数的几何性质解与旋转相关的问题

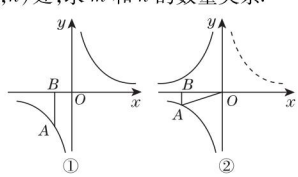
13. 【中考·武汉】已知点$A(a,m)$在双曲线$y=\frac{8}{x}$上且$m<0$，过点A作x轴的垂线，垂足为点B.

（1）如图①，当$a=-2$时，$P(t,0)$是x轴上的动点，将点B绕点P顺时针旋转90°至点C，

①若$t=1$，直接写出点C的坐标；

②若双曲线$y=\frac{8}{x}$经过点C，求t的值；

（2）如图②，将图①中的双曲线$y=\frac{8}{x}(x>0)$沿y轴折叠得到双曲线$y=-\frac{8}{x}(x<0)$，将线段OA绕点O旋转，点A刚好落在双曲线$y=-\frac{8}{x}(x<0)$上的点$D(d,n)$处，求m和n的数量关系.



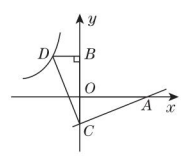
（第13题）

拔尖角度2 利用反比例函数的几何性质解与不等式相关的问题

14. 【中考·菏泽】如图，已知点D在反比例函数$y=\frac{a}{x}$的图象上，过点D作$DB\perp y$轴，垂足为点$B(0,3)$，直线$y=kx+b$经过点$A(5,0)$，与y轴交于点C，且$BD=OC$，$OC:OA=2:5$.

（1）求反比例函数$y=\frac{a}{x}$和一次函数$y=kx+b$的表达式；

（2）直接写出关于x的不等式$\frac{a}{x}>kx+b$的解集.



（第14题）

为了安全、迅速通过这片湿地到达卧龙岗，刘备让关羽和张飞沿着前进路线铺了若干块木板，搭成一条临时通道.（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 4 课时　用反比例函数比例系数 k 的几何意义解与面积相关的问题

☞(答案见 130 页)

名师点金

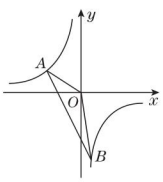
反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的比例系数 k 具有一定的几何意义：$|k|$ 等于反比例函数图象上任意一点向两坐标轴所作的垂线段与两坐标轴所围成的矩形的面积. 在反比例函数的图象中，涉及三角形或矩形的面积时，常用比例系数 k 的几何意义解决问题.

应用 1　反比例函数的比例系数 k 与面积的关系

1. 【中考·宜宾】如图，一次函数 $y=kx+b$ 的图象与反比例函数 $y=\frac{m}{x}$ 的图象交于 $A(-3,m+8)$，$B(n,-6)$ 两点.

(1)求一次函数与反比例函数的表达式；

(2)求 $\triangle AOB$ 的面积.



(第 1 题)

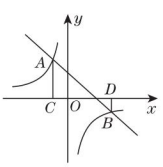
应用 2　已知三角形的面积关系求点的坐标

2. 【中考·巴彦淖尔】如图，直线 $y=-x+2$ 与反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq 0)$ 的图象交于 $A(a,3)$，$B(3,b)$ 两点，过点 A 作 $AC\perp x$ 轴于点 C，过点 B 作 $BD\perp x$ 轴于点 D.

(1)求 a，b 的值及反比例函数的表达式；

(2)若点 P 在直线 $y=-x+2$ 上，且 $S_{\triangle ACP}=S_{\triangle BDP}$，请求出此时点 P 的坐标；

(3)在 x 轴正半轴上是否存在点 M，使得 $\triangle MAB$ 为等腰三角形？若存在，请直接写出点 M 的坐标；若不存在，说明理由.



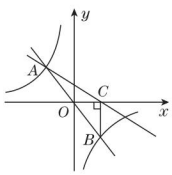
(第 2 题)

应用 3　已知三角形面积求函数表达式

3. 【中考·东营】如图，在平面直角坐标系中，直线 $y=mx$ 与双曲线 $y=\frac{n}{x}$ 相交于 $A(-2,a)$，B 两点，$BC\perp x$ 轴，垂足为点 C，$\triangle AOC$ 的面积是 2.

(1)求 m，n 的值；

(2)求直线 AC 的表达式.



(第 3 题)

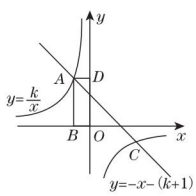
应用 4　已知四边形面积求函数表达式

4. 如图，矩形 $ABOD$ 的顶点 A 是函数 $y=-x-(k+1)$ 的图象与函数 $y=\frac{k}{x}$ 在第二象限的图象的交点，B，D 两点在坐标轴上，且矩形 $ABOD$ 的面积为 3.

(1)求两个函数的表达式；

(2)求两个函数图象的交点 A，C 的坐标；

(3)若点 P 是 y 轴上一个动点，且 $S_{\triangle APC}=5$，求点 P 的坐标.



(第 4 题)

趣味数学　关羽和张飞不明白刘备让他们这样做的原因，就问："大哥，你这是何故？"刘备微微一笑，解释道："如果我们不铺木板走过湿地，便会陷入泥中."(待续)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

应用5 已知反比例函数表达式求图形的面积

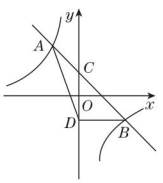
题型1 利用函数表达式求面积

5. 【中考·甘肃】如图，一次函数 $y=kx+b$ 的图象与反比例函数 $y=\frac{m}{x}$ 的图象相交于 $A(-1,n)$，$B(2,-1)$ 两点，与 y 轴相交于点 C.

(1) 求一次函数与反比例函数的表达式；

(2) 若点 D 与点 C 关于 x 轴对称，求 $\triangle ABD$ 的面积；

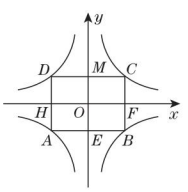
(3) 若 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$ 是反比例函数 $y=\frac{m}{x}$ 图象上的两点，当 $x_1<x_2<0$ 时，比较 y_1 与 y_2 的大小关系.



（第5题）

题型2 利用对称性求面积

6. 如图是由四条曲线围成的广告标志，建立平面直角坐标系，双曲线对应的函数表达式分别为 $y=-\frac{6}{x}$，$y=\frac{6}{x}$. 现用四根钢条固定这四条曲线，这种钢条按所加工成矩形产品的面积计算费用，现知每单位面积25元，请你帮助工人师傅计算一下，所需钢条一共需要多少钱？



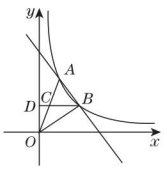
（第6题）

题型3 利用点的坐标及面积公式求面积

7. 【中考·菏泽】如图，一次函数 $y=kx+b$ 与反比例函数 $y=\frac{a}{x}$ 的图象在第一象限交于 A，B 两点，点 B 的坐标为 $(3,2)$，连接 OA，OB，过点 B 作 $BD\perp y$ 轴，垂足为点 D，交 OA 于点 C，若 $OC=CA$，求：

(1) 一次函数和反比例函数的表达式；

(2) $\triangle AOB$ 的面积.



（第7题）

更多提分招数详见《极速提分法》第15页。

趣味数学

“当我们在湿地上铺上木板之后，木板对地面的压强就是木板面积的反比例函数，也就是说，当木板面积增大时，木板对地面的压强反而减小.”

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第5课时　反比例函数图象与性质的常见应用 ☞(答案见131页)

题型1 利用反比例函数解与图形旋转相关的问题

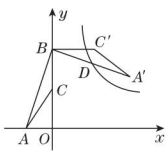
1. 【中考·济宁】如图,点A的坐标是$(-2,0)$,点B的坐标是$(0,6)$,C为OB的中点,将$\triangle ABC$绕点B逆时针旋转90°后得到$\triangle A'BC'$. 若反比例函数$y=\frac{k}{x}$的图象恰好经过$A'B$的中点D,则k的值是(　　)

A. 9

B. 12

C. 15

D. 18



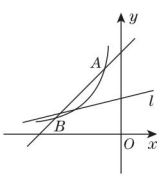
(第1题)

题型2 利用反比例函数解与图形的轴对称相关的问题

2. 【中考·茂名】如图,一次函数$y=x+b$的图象与反比例函数$y=\frac{k}{x}$(k为常数,$k\neq 0$)的图象交于点$A(-1,4)$和点$B(a,1)$.

(1)求反比例函数的表达式和a,b的值;

(2)若A,O两点关于直线l对称,请连接AO,并求出直线l与线段AO的交点坐标.



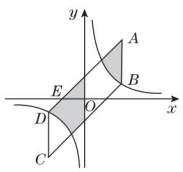
(第2题)

题型3 利用反比例函数解与图形的中心对称相关的问题

3. 如图,点$A(3,5)$关于原点O的对称点为点C,分别过点A,C作y轴的平行线,与反比例函数$y=\frac{k}{x}(0<k<15)$的图象交于点B,D,连接AD,BC,AD与x轴交于点$E(-2,0)$.

(1)求k的值;

(2)直接写出阴影部分面积之和.



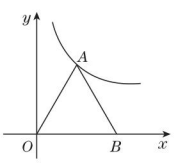
(第3题)

题型4 利用反比例函数解与图形的平移相关的问题

4. 【中考·嘉兴】如图,在平面直角坐标系中,已知点$B(4,0)$,等边三角形OAB的顶点A在反比例函数$y=\frac{k}{x}$的图象上.

(1)求反比例函数的表达式;

(2)把$\triangle OAB$向右平移a个单位长度,对应得到$\triangle O'A'B'$,当这个函数图象经过$\triangle O'A'B'$一边的中点时,求a的值.



(第4题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

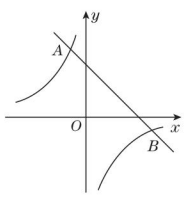
题型5 利用反比例函数解与图象交点相关的问题

5. 【中考·广东】如图，一次函数 $y=k_1x+b$ 的图象与反比例函数 $y=\frac{k_2}{x}$ 的图象相交于 A,B 两点，其中点 A 的坐标为 $(-1,4)$，点 B 的坐标为 $(4,n)$.

(1) 根据图象，直接写出满足 $k_1x+b>\frac{k_2}{x}$ 的 x 的取值范围；

(2) 求这两个函数的表达式；

(3) 点 P 在线段 AB 上，且 $S_{\triangle AOP}:S_{\triangle BOP}=1:2$，求点 P 的坐标.



（第5题）

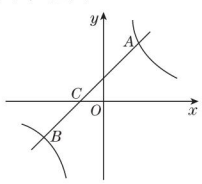
题型6 利用反比例函数解与最值相关的问题

6. 【中考·自贡】如图，在平面直角坐标系中，一次函数 $y_1=kx+b(k\neq0)$ 的图象与反比例函数 $y_2=\frac{m}{x}(m\neq0)$ 的图象相交于第一、三象限内的 $A(3,5)$，$B(a,-3)$ 两点，与 x 轴交于点 C.

(1) 求该反比例函数和一次函数的表达式；

(2) 在 y 轴上找一点 P 使 $PB-PC$ 最大，求 $PB-PC$ 的最大值及点 P 的坐标；

(3) 直接写出当 $y_1>y_2$ 时，x 的取值范围.



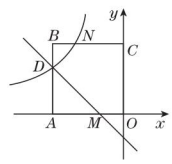
（第6题）

题型7 利用反比例函数解与图形面积相关的问题

7. 【中考·泰安】如图，在平面直角坐标系中，正方形 $OABC$ 的顶点 O 与坐标原点重合，点 C 的坐标为 $(0,3)$，点 A 在 x 轴的负半轴上，点 D,M 分别在边 AB,OA 上，且 $AD=2DB$，$AM=2MO$，一次函数 $y=kx+b$ 的图象过点 D 和 M，反比例函数 $y=\frac{m}{x}$ 的图象经过点 D，与 BC 的交点为 N.

(1) 求反比例函数和一次函数的表达式；

(2) 若点 P 在直线 DM 上，且使 $\triangle OPM$ 的面积与四边形 $OMNC$ 的面积相等，求点 P 的坐标.



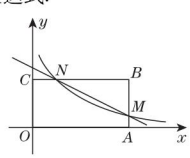
（第7题）

题型8 利用反比例函数解与一次函数、几何相关的问题

8. 【中考·威宁】如图，在平面直角坐标系中，矩形 $OABC$ 的顶点 B 的坐标为 $(4,2)$，直线 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ 与边 AB,BC 分别相交于点 M,N，函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 的图象过点 M.

(1) 试说明点 N 也在函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 的图象上；

(2) 将直线 MN 沿 y 轴的负方向平移得到直线 $M'N'$，当直线 $M'N'$ 与函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 的图象仅有一个交点时，求直线 $M'N'$ 的表达式.



（第8题）

趣味数学

公元前3世纪，古希腊科学家阿基米德发现了著名的杠杆定律：若两物体与支点的距离反比于其质量，则杠杆平衡. 通俗一点可以描述为：阻力 $\times$ 阻力臂 = 动力 $\times$ 动力臂.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第6课时　反比例函数的实际应用

名师点金

用反比例函数解决实际问题的步骤：

1. 审清题意，找出问题中的常量、变量（有时常量、变量以图象的形式给出），并且理清常量与变量之间的关系.
2. 根据常量与变量之间的关系，设出反比例函数表达式.
3. 利用**待定系数法**确定函数表达式，并注意自变量的取值范围.
4. 利用反比例函数的图象与性质解决实际问题.

Ⅰ 夯实基础·逐点练

☞（答案见132页）

知识点1 实际问题中的反比例函数表达式

1. 将某汽车的油箱加满，可加汽油45 L，行驶 y km，设该汽车每行驶100 km耗油 x L，则 y 关于 x 的函数表达式为_____.

2. 电是商品，可以提前预购. 小明家用购电卡购买800 kW·h的电，那么这些电能够用的天数 n（天）与小明家平均每天的用电量 m（kW·h）之间的函数表达式为_____；如果平均每天用电4 kW·h，那么这些电可用_____天.

3. 【中考·临沂】已知甲、乙两地相距20 km，汽车从甲地匀速行驶到乙地，则汽车行驶时间 t（单位：h）关于行驶速度 v（单位：km/h）的函数表达式是（　　）

A. $t=20v$　　B. $t=\dfrac{20}{v}$　　C. $t=\dfrac{v}{20}$　　D. $t=\dfrac{10}{v}$

4. 小华以每分钟 x 个字的速度书写，y 分钟写了300个字，则 y 与 x 的函数表达式为（　　）

A. $y=\dfrac{300}{x}$　　B. $y=300x$

C. $y=300-x$　　D. $y=\dfrac{300-x}{x}$

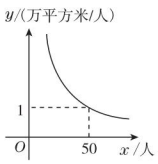
5. 用规格为50 cm×50 cm的地板砖密铺客厅恰好需要60块. 如果改用规格为 a cm×a cm的地板砖 y 块也恰好能密铺该客厅，那么 y 与 a 之间的关系式为（　　）

A. $y=\dfrac{150\,000}{a^2}$　　B. $y=\dfrac{150\,000}{a}$

C. $y=150\,000a^2$　　D. $y=150\,000a$

知识点2 实际问题中的反比例函数图象

6. 【中考·海南】某村耕地总面积为50万平方米，且该村人均耕地面积 y（单位：万平方米/人）与总人口 x（单位：人）的函数图象如图所示，则下列说法正确的是（　　）



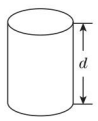
（第6题）

A. 该村人均耕地面积随总人口的增多而增多

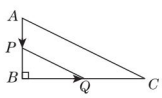
B. 该村人均耕地面积 y 与总人口 x 成正比例

C. 若该村人均耕地面积为2万平方米，则总人口有100人

D. 当该村总人口为50人时，人均耕地面积为1万平方米

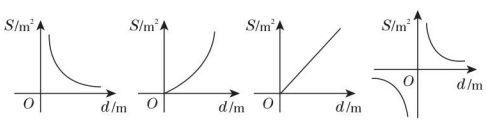


（第7题）



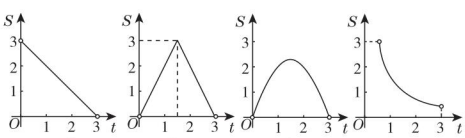
（第8题）

7. 【中考·宜昌】如图，市煤气公司计划在地下修建一个容积为 10^4 m^3 的圆柱形煤气储存室，则储存室的底面积 S（单位：m^2）与其深度 d（单位：m）的函数图象大致是（　　）



A　　B　　C　　D

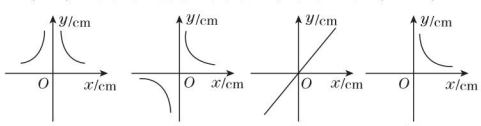
***8.** 【中考·孝感】如图，在△ABC中，∠B=90°，AB=3 cm，BC=6 cm，动点 P 从点 A 开始沿 AB 向点 B 以1 cm/s的速度移动，动点 Q 从点 B 开始沿 BC 向点 C 以2 cm/s的速度移动. 若 P，Q 两点分别从 A，B 两点同时出发，点 P 到达点 B 运动停止，则△PBQ的面积 S（cm^2）与出发时间 t（s）的函数关系图象大致是（　　）



A　　B　　C　　D

易错点 忽视自变量的实际意义而致错

9. 三角形的面积为8 cm^2，底边上的高 y（cm）与底边长 x（cm）之间的函数关系用图象来表示是（　　）



A　　B　　C　　D

趣味数学　伟大的成功和辛勤的劳动是成正比的. 有一分劳动就有一分收获. 日积月累，从少到多，奇迹就可以创造出来. ——鲁迅

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞（答案见132页）

考查角度1 利用反比例函数解行程问题

10. 【中考 · 杭州】方方驾驶小汽车匀速地从A地行驶到B地，行驶里程为480千米，设小汽车的行驶时间为t（单位：时），行驶速度为v（单位：千米/时），且全程速度限定为不超过120千米/时.

（1）求v关于t的函数表达式；

（2）方方上午8时驾驶小汽车从A地出发；

①方方需在当天12时48分至14时（含12时48分和14时）到达B地，求小汽车行驶速度v的范围；

②方方能否在当天11时30分前到达B地？说明理由.

考查角度2 利用反比例函数解工程问题

11. 【中考 · 杭州】已知一艘轮船上装有100吨货物，轮船到达目的地后开始卸货，设平均卸货速度为v（单位：吨/时），卸完这批货物所需的时间为t（单位：时）.

（1）求v关于t的函数表达式；

（2）若要求不超过5小时卸完船上的这批货物，那么平均每小时至少要卸货多少吨？

Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞（答案见133页）

拔尖角度1 利用反比例函数解几何问题

12. 【中考 · 杭州】在面积都相等的所有矩形中，当其中一个矩形的一边长为1时，它的邻边长为3.

（1）设该矩形的相邻两边长分别为x，y.

①求y关于x的函数表达式；

②当$y\geqslant 3$时，求x的取值范围.

（2）圆圆说其中有一个矩形的周长为6，方方说有一个矩形的周长为10，你认为圆圆和方方的说法对吗？为什么？

拔尖角度2 利用反比例函数解销售问题

13. 甲、乙两家商场进行促销活动，甲商场采用“每满200元减100元”的促销方式，即购买商品的总金额满200元但不足400元，少付100元；满400元但不足600元，少付200元……乙商场按顾客购买商品的总金额打六折促销.

（1）若顾客在甲商场购买了510元的商品，付款时应付多少钱？

（2）若顾客在甲商场购买商品的总金额为x（$400\leqslant x<600$）元，优惠后得到商家的优惠率为$p\left(p=\dfrac{\text{优惠金额}}{\text{购买商品的总金额}}\right)$，写出$p$与$x$之间的函数表达式，并说明$p$随$x$的变化情况；

（3）品牌、质量、规格等都相同的某种商品，在甲、乙两家商场的标价都是a（$200\leqslant a<400$）元，你认为选择哪家商场购买该商品花钱较少？请说明理由.

趣味数学

怎样改变“女性跑得比男性慢”的说法：若比较两性赛跑的速度时，加入“身高”的因素，会对选手的表现产生什么变化？（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

21.6　综合与实践　获取最大利润 ☞(答案见 133 页)

名师点金

求函数最值的方法：

对于分段函数，已知函数值求自变量取值时，要分别代入各段函数中，并检验求出的自变量是否在其取值范围内，若不在应舍去；若函数是反比例函数或一次函数，一般情况下没有最值，但当自变量的取值范围有特殊的规定时，可根据自变量范围的端点值确定函数的最值.

类型 1　利用一次函数的性质求实际生活中的最值问题

1. 【中考·乐山】六一期间，小张购进 100 只两种型号的文具进行销售，其进价和售价之间的关系如下表：

型号	进价/(元/只)	售价/(元/只)
A 型	10	12
B 型	15	23

(1) 小张如何进货，可使进货款恰好为 1 300 元？

(2) 要使销售文具所获利润最大，且所获利润不超过进货价格的 40%，请你帮小张设计一个进货方案，并求出其所获利润的最大值.

类型 2　利用二次函数的性质求实际生活中的最值问题

2. 湖北省恩施土家族苗族自治州政府出台了一系列“三农”优惠政策，使农民收入大幅度增加. 某农户生产经销一种农副产品，已知这种产品的成本价为 20 元/千克. 市场调查发现，该产品每天的销售量 w(千克)与销售价 x(元/千克)有如下关系：$w=-2x+80$. 设这种产品每天的销售利润为 y(元).

(1) 求 y 与 x 之间的函数表达式；

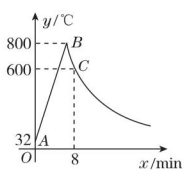
(2) 当销售价定为多少时，每天销售这种产品所获利润最大？最大利润是多少？

类型 3　利用反比例函数的性质求跨学科问题

3. 工匠制作某种金属工具要进行材料煅烧和锻造两个工序，即需要将材料煅烧到 800 ℃，然后停止煅烧进行锻造操作，经过 8 min，材料温度降为 600 ℃. 煅烧时，温度 y(℃)与时间 x(min)成一次函数关系；锻造时，温度 y(℃)与时间 x(min)成反比例函数关系，如图. 已知该材料初始温度是 32 ℃.

(1) 分别求出材料煅烧和锻造时 y 与 x 的函数表达式，并且写出自变量 x 的取值范围；

(2) 根据工艺要求，当材料温度低于 480 ℃时，需停止操作，那么锻造的操作时间有多长？



(第 3 题)

类型 4　利用多种函数的性质求最值问题

4. 【中考·抚顺】一个批发商销售成本为 20 元/千克的某产品，根据物价部门规定：该产品每千克售价不得超过 90 元. 在销售过程中批发商发现，销售量 y(千克)与售价 x(元/千克)满足一次函数关系，对应关系如下表：

售价 x/(元/千克)	…	50	60	70	80	…
销售量 y/千克	…	100	90	80	70	…

(1) 求 y 与 x 的函数表达式；

(2) 该批发商若想获得 4 000 元的利润，应将售价定为多少？

(3) 该产品每千克售价为多少元时，批发商获得的利润 W(元)最大？此时的最大利润为多少元？

趣味数学　体育专栏作家按照这个想法，计算出男子、女子一百米世界纪录的每秒身高比(速度除以其身高)分别为 5.55 和 5.64. 因此，他的结论是跑得最快的女人比跑得最快的男人还要快.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

阶段核心方法

求反比例函数表达式的六种方法

☞（答案见133页）

名师点金

求反比例函数的表达式，关键是确定比例系数 k 的值. 求比例系数 k 的值，可以根据反比例函数的定义及性质列方程、不等式求解，可以根据图象中点的坐标求解，可以直接根据数量关系列表达式，也可以利用待定系数法求解，还可以利用比例系数 k 的几何意义求解. 其中**待定系数法**是常用方法.

方法1 利用反比例函数的定义求表达式

1. 若 $y=(m+3)x^{m^2-10}$ 是反比例函数，试求其函数表达式.

方法2 利用反比例函数的性质求表达式

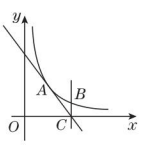
2. 已知函数 $y=(n+3)x^{n^2+2n-9}$ 是反比例函数，且其图象所在的每一个象限内，y 随 x 的增大而减小，求此函数的表达式.

方法3 利用反比例函数的图象求表达式

3. 【中考·黄冈】如图，反比例函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 过点 $A(3,4)$，直线 AC 与 x 轴交于点 $C(6,0)$，过点 C 作 x 轴的垂线 BC 交反比例函数的图象于点 B.

(1) 求 k 的值与点 B 的坐标；

(2) 在平面内有一点 D，使得以 A,B,C,D 四点为顶点的四边形为平行四边形，试写出符合条件的所有点 D 的坐标.



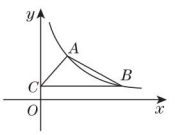
（第3题）

方法4 利用待定系数法求表达式

4. 【中考·岳阳】如图，某反比例函数图象的一支经过点 $A(2,3)$ 和点 B（点 B 在点 A 的右侧），作 $BC\perp y$ 轴，垂足为点 C，连接 AB,AC.

(1) 求该反比例函数的表达式；

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为6，求直线 AB 的表达式.



（第4题）

方法5 利用几何图形的性质求表达式

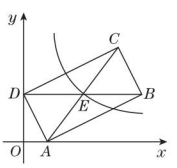
5. 【中考·重庆】如图，在平面直角坐标系中，矩形 $ABCD$ 的顶点 A,D 分别在 x 轴、y 轴上，对角线 $BD\parallel x$ 轴，反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k>0,x>0)$ 的图象经过矩形对角线的交点 E. 若点 $A(2,0)$，$D(0,4)$，则 k 的值为（　　）

A. 16

B. 20

C. 32

D. 40



（第5题）

方法6 利用实际问题中的数量关系求表达式

6. 某运输队要运300 t物资到江边防洪.

(1) 运输时间 t（单位：h）与运输速度 v（单位：t/h）之间有怎样的函数关系？

(2) 运了物资的一半时，运输队接到防洪指挥部命令，剩下的物资要在2 h之内运到江边，则运输速度至少为多少？

趣味数学

相传公元1896年，挪威生理学家古德贝尔对闭眼走路打转的问题进行了深入研究. 他收集了大量事例后得出结论，这一切都是由于人的两条腿在作怪！（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

全章热门考点整合应用

☞(答案见 134 页)

名师点金

二次函数和反比例函数是中考的必考内容,难度大,综合性强,既可以与代数知识相结合,也可以与几何知识相结合.有关二次函数和反比例函数的问题,中考一般以三种形式出现:一是以选择题或填空题的形式出现,重在考查二次函数和反比例函数的基本概念和基本性质;二是以实际应用题的形式出现,重在考查函数建模思想;三是以综合题的形式出现,往往是压轴题,考查学生分析问题和解决问题的能力.全章主要热门考点可概括为两个概念,两个性质,三种关系,四个应用,三个技巧,三种思想.

考点 1 两个概念

概念 1 二次函数的定义

1. 已知函数 $y=(m+3)x^{m^2+4m-3}+5$ 是关于 x 的二次函数.

(1)求 m 的值;

(2)当 m 为何值时,该函数图象的开口向上?

(3)当 m 为何值时,该函数有最大值?

概念 2 反比例函数的定义

2. 若 $y=(m-1)x^{|m|-2}$ 是反比例函数,则 m 的取值为(　　)

A. 1　　B. -1　　C. ±1　　D. 任意实数

3. 下面的函数表达式:

①$xy=-\frac{1}{3}$;②$y=5-x$;③$y=\frac{-2}{5x}$;④$y=\frac{2a}{x}$(a 为常数且 $a\neq0$).

其中_____是反比例函数(填序号).

考点 2 两个性质

性质 1 二次函数的图象与性质

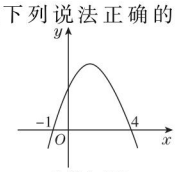
4. 【中考·阜新】如图,抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 交 x 轴于点(-1,0)和(4,0),那么下列说法正确的是(　　)

A. $ac>0$

B. $b^2-4ac<0$

C. 对称轴是直线 $x=2.5$

D. $b>0$



(第 4 题)

性质 2 反比例函数的图象与性质

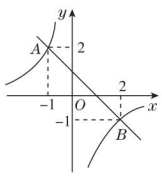
5. 【中考·衡阳】如图,一次函数 $y_1=kx+b(k\neq0)$ 的图象与反比例函数 $y_2=\frac{m}{x}$(m 为常数且 $m\neq0$)的图象都经过 $A(-1,2)$,$B(2,-1)$,结合图象,则不等式 $kx+b>\frac{m}{x}$ 的解集是(　　)

A. $x<-1$

B. $-1<x<0$

C. $x<-1$ 或 $0<x<2$

D. $-1<x<0$ 或 $x>2$



(第 5 题)

6. 画出反比例函数 $y=\frac{6}{x}$ 的图象,并根据图象回答问题:

(1)根据图象指出当 $y=-2$ 时 x 的值;

(2)根据图象指出当 $-2<x<1$ 且 $x\neq0$ 时 y 的取值范围;

(3)根据图象指出当 $-3<y<2$ 且 $y\neq0$ 时 x 的取值范围.

趣味数学　人的一条腿伸出的步子,要比另一条腿伸出的步子长一点点.而正是这微不足道的很小的步差 x,导致了人走出一个半径为 y 的大圆子!我们来研究一下 x 与 y 之间的函数关系.(待续)

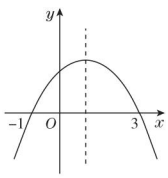
关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

考点3 三种关系

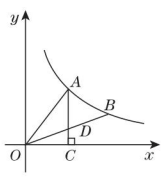
关系1 抛物线的位置与二次函数各项系数的关系

7. 【中考·安顺】如图为二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图象，则下列说法：①$a>0$；②$2a+b=0$；③$a+b+c>0$；④当 $-1<x<3$ 时，$y>0$. 其中正确的个数为(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4



（第7题）



（第8题）

关系2 反比例函数比例系数 k 与面积的关系

8. 【中考·眉山】如图，A,B 是双曲线 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$ 上的两点，过点 A 作 $AC\perp x$ 轴，交 OB 于点 D，垂足为点 C. 若 $\triangle ADO$ 的面积为 1，D 为 OB 的中点，则 k 的值为(　　)

A. $\frac{4}{3}$　　B. $\frac{8}{3}$　　C. 3　　D. 4

关系3 二次函数与一元二次方程的关系

9. 已知关于 x 的函数 $y=(a^2+3a+2)x^2+(a+1)x+\frac{1}{4}$ 的图象与 x 轴总有交点.

(1) 求 a 的取值范围；

(2) 设该函数的图象与 x 轴有两个不同的交点，分别为 $A(x_1,0)$，$B(x_2,0)$，当 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=a^2-3$ 时，求 a 的值.

考点4 四个应用

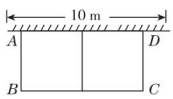
应用1 最大面积的应用

10. 如图，有长为 24 m 的栅栏，一面利用墙（墙的最大可用长度为 10 m），围成中间隔有一道栅栏的长方形鸡舍（栅栏厚度不计）. 设鸡舍的一边 AB 为 x m，面积为 S m^2.

(1) 求 S 与 x 的函数表达式（不必写出 x 的取值范围）；

(2) 如果围成面积为 45 m^2 的鸡舍，AB 的长是多少米？

(3) 能围成面积比 45 m^2 更大的鸡舍吗？如果能，请求出最大面积；如果不能，请说明理由.



（第10题）

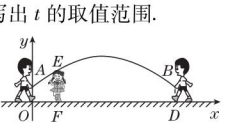
应用2 抛物线形的几何应用

11. 跳绳时，绳甩到最高处时的形状可近似看作抛物线. 正在甩绳的甲、乙两名同学拿绳的手间距（A 与 B 间的水平距离）为 6 m，到地面的距离 AO 和 BD 均为 0.9 m，身高为 1.4 m 的小丽站在距点 O 的水平距离为 1 m 的点 F 处，绳子甩到最高处时刚好通过她的头顶点 E. 以点 O 为原点建立如图所示的平面直角坐标系，设此抛物线对应的函数表达式为 $y=ax^2+bx+0.9$.

(1) 求该抛物线对应的函数表达式（不考虑自变量的取值范围）；

(2) 如果小华站在 O,D 之间，且离点 O 的距离为 3 m，当绳子甩到最高处时刚好通过他的头顶，请你算出小华的身高；

(3) 如果身高为 1.4 m 的小丽站在 O,D 之间，且离点 O 的距离为 t m，绳子甩到最高处时超过她的头顶，请结合图象，写出 t 的取值范围.



（第11题）

假设某人两脚踏线相隔为 d. 当人在打圆子时，两只脚实际上走出了两个半径相差为 d 的同心圆.（待续）

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

应用 3 跨学科中的应用

12. 【中考·孝感】公元前 3 世纪，古希腊科学家阿基米德发现了杠杆平衡条件，后来人们把它归纳为“杠杆原理”，即阻力 × 阻力臂 = 动力 × 动力臂. 小伟欲用撬棍撬动一块大石头，已知阻力和阻力臂分别是1 200 N和0.5 m，则动力 F（单位：N）关于动力臂 l（单位：m）的函数表达式正确的是(　　)

A. $F=\dfrac{1\,200}{l}$　　B. $F=\dfrac{600}{l}$

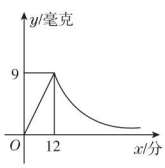
C. $F=\dfrac{500}{l}$　　D. $F=\dfrac{0.5}{l}$

应用 4 实际生活中的应用

13. 2020 年初，新冠肺炎疫情的爆发夺去了许多人的生命. 某公司为了员工们的身心健康，在休息日用药熏消毒法对办公场所进行消毒. 已知药物燃烧时，室内每立方米空气中的含药量 y（毫克）与时间 x（分）成正比例，药物释放过程中，y 与 x 成反比例. 如图所示，根据题中提供的信息，答案下列问题：

(1) 写出从药物燃烧到释放过程中，y 与 x 之间的两个函数关系式及相应的自变量的取值范围；

(2) 据测定，当空气中每立方米的含药量低于 0.45 毫克以下时，人员方可入室，那么从药物燃烧开始，至少需要经过多少分钟后，人员才能进入室内？

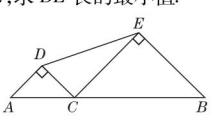


（第 13 题）

考点 5 三个技巧

技巧 1 巧用二次函数求几何最值

14. 如图，线段 AB 的长为 2，点 C 为 AB 上一个动点，分别以 AC，BC 为斜边在 AB 的同侧作等腰直角三角形 ACD 和等腰直角三角形 BCE，求 DE 长的最小值.



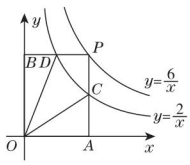
（第 14 题）

技巧 2 巧用比例系数 k 求面积

15. 【中考·东营】如图是函数 $y=\dfrac{3}{x}$ 与函数 $y=\dfrac{6}{x}$ 在第一象限内的图象，点 P 是 $y=\dfrac{6}{x}$ 的图象上一动点，$PA\perp x$ 轴于点 A，交 $y=\dfrac{3}{x}$ 的图象于点 C，$PB\perp y$ 轴于点 B，交 $y=\dfrac{3}{x}$ 的图象于点 D.

(1) 求证：D 是 BP 的中点；

(2) 求四边形 $ODPC$ 的面积.



（第 15 题）

技巧 3 巧用二次函数设计方案

16. 某市“建设社会主义新农村”工作组到某县大棚蔬菜生产基地指导菜农修建大棚种植蔬菜. 通过调查得知，修建大棚平均每公顷需支架、农膜等材料费 2.7 万元；购置滴灌设备的费用（万元）与大棚面积（公顷）的平方成正比，比例系数为 0.9；另外，种植蔬菜每公顷需种子、化肥、农药等开支 0.3 万元. 每公顷蔬菜年均可卖 7.5 万元.

(1) 该基地的菜农共修建大棚 x 公顷，当年收益（扣除修建和种植成本后）为 y 万元，写出 y 关于 x 的函数表达式；

(2) 除种子、化肥、农药等投资只能当年使用外，其他设施 3 年内不需要增加投资仍可继续使用. 如果按 3 年计算，是否修建大棚面积越大，收益就越大？如果不是，修建面积为多少时可以获得最大收益？请帮助工作组为基地修建大棚提一条合理化的建议.

趣味数学　设该人的平均步长为 l，那么一方面这个人“外脚”比“内脚”多走的路程为 $2\pi d$，另一方面，这段路程又等于这个人走一圈的步数与步差的乘积，即 $2\pi d=\left(\dfrac{2\pi y}{2l}\right)\cdot x$，化简得 $y=\dfrac{2dl}{x}$.（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考点6 三种思想

思想1 数形结合思想

17. 【中考·天津】二次函数 $y=ax^2+bx+c(a,b,c$ 是常数，$a\neq0)$ 的自变量 x 与函数值 y 的部分对应值如下表：

x	…	-2	-1	0	1	2	…
$y=ax^2+bx+c$	…	t	m	-2	-2	n	…

且当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，与其对应的函数值 $y>0$，有下列结论：

①$abc>0$；②-2 和 3 是关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=t$ 的两个根；③$0<m+n<\frac{20}{3}$.

其中，正确结论的个数是（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

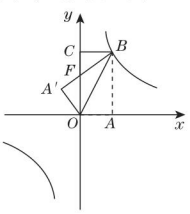
思想2 分类讨论思想

18. 如图，把矩形 $OABC$ 放入平面直角坐标系中，使 OA，OC 分别落在 x 轴、y 轴上，连接 OB，将矩形 $OABC$ 沿 OB 折叠，使点 A 落在点 A' 处，$A'B$ 与 y 轴交于点 F. 已知 $OA=1$，$AB=2$.

(1) 设 $CF=x$，则 $OF=$ _____；

(2) 求 BF 的长；

(3) 设过点 B 的双曲线为 l，试问：双曲线 l 上是否存在点 M，使得 $\triangle OBM$ 的面积等于 1？若存在，试求出点 M 的横坐标；若不存在，试说明理由.



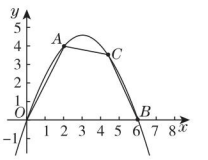
（第 18 题）

思想3 方程思想

19. 【中考·安徽】如图，二次函数 $y=ax^2+bx$ 的图象经过点 $A(2,4)$ 与 $B(6,0)$.

(1) 求 a，b 的值；

(2) 点 C 是该二次函数图象上 A，B 两点之间的一个动点，横坐标为 $x(2<x<6)$，写出四边形 $OACB$ 的面积 S 关于点 C 的横坐标 x 的函数表达式，并求 S 的最大值.



（第 19 题）

更多提分招数详见《极速提分法》第 12 页。

趣味数学

对一般的人来说，$d=0.1$ 米，$l=0.7$ 米，将其代入得 $y=\frac{0.14}{x}$，这就是所求的迷路人打圈子的半径公式，这是一个反比例函数.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

22.1 比例线段

第1课时 相似图形

名师点金

1. 相似多边形的定义是判断两个多边形是否相似的依据，即在多边形中，只有“边数相同”“角分别相等”“对应边长度的比相等”这三个条件同时成立时，才能说明这两个多边形是相似多边形.
2. 相似比的值与两个多边形的前后顺序有关. 3. 相似比为1的两个相似多边形是全等多边形.

Ⅰ 夯实基础·逐点练 ☞(答案见136页)

知识点1 相似图形

1. 下列说法中不正确的是(　　)

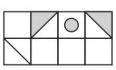
A. 同一版的8开中国地图与32开中国地图相似

B. 亮亮4岁时的照片与16岁时的照片相似

C. 用放大镜看到的图形与原图形相似

D. 所有的圆都相似

2. 和如图所示的图形形状相似的是(　　)



(第2题)

A 　B 

C 　D 

知识点2 相似多边形的定义

3. 下列说法中正确的是(　　)

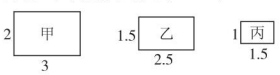
A. 对应角相等的多边形一定是相似多边形

B. 对应边的比相等的多边形是相似多边形

C. 边数相同的多边形是相似多边形

D. 边数相同，对应角相等，对应边长度的比相等的多边形是相似多边形

4. 如图，三个矩形中，相似的是(　　)



(第4题)

A. 甲和丙　　B. 甲和乙

C. 乙和丙　　D. 甲、乙和丙

知识点3 相似多边形的性质

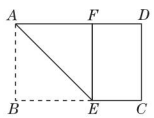
5. 【中考·重庆】要制作两个形状相同的三角形框架，其中一个三角形的三边长分别为5 cm，6 cm和9 cm，另一个三角形的最短边长为2.5 cm，则它的最长边长为(　　)

A. 3 cm　　B. 4 cm

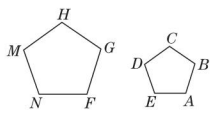
C. 4.5 cm　　D. 5 cm

***6.** 如图，已知矩形$ABCD$中，$AB=2$，在BC上取一点E，沿AE将$\triangle ABE$向上折叠，使B点落在AD上的F点处，若四边形$EFDC$与矩形$ABCD$相似，则AD等于(　　)

A. $\sqrt{5}$　　B. $\sqrt{5}+1$　　C. 4　　D. $2\sqrt{3}$



(第6题)



(第7题)

7. 如图，正五边形$FGHMN$与正五边形$ABCDE$相似，若$AB:FG=2:3$，则下列结论正确的是(　　)

A. $2DE=3MN$　　B. $3DE=2MN$

C. $3\angle A=2\angle F$　　D. $2\angle A=3\angle F$

知识点4 相似比

8. 如果两个相似多边形的一组对应边长分别为3 cm和2 cm，那么它们的相似比是(　　)

A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{6}{5}$　　C. $\frac{3}{2}$　　D. $\frac{9}{4}$

9. 六边形$ABCDEF$相似于六边形$A'B'C'D'E'F'$，若对应边AB与$A'B'$的长分别为50厘米和40厘米，则六边形$A'B'C'D'E'F'$与六边形$ABCDEF$的相似比是(　　)

A. 5:4　　B. 4:5　　C. $\sqrt{5}:2$　　D. $2:\sqrt{5}$

易错点! 对相似多边形的定义理解不透彻致错

10. 把一个多边形按1:3的比例缩小，则下列说法正确的是(　　)　　【导学号:5390328】

A. 各边都扩大到原来的3倍

B. 各边和各角都缩小到原来的$\frac{1}{3}$

C. 各边和各角都扩大到原来的3倍

D. 各边都缩小到原来的$\frac{1}{3}$，各角不变

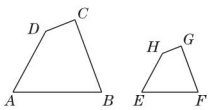
趣味数学 几何学的发展史：几何学和算术一样产生于实践，也可以说几何学产生的历史和算术是相似的.(待续)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞（答案见136页）

考查角度1 利用相似多边形的性质求边和角

11. 如图，四边形 $ABCD$ 与四边形 $EFGH$ 相似，$\angle A=62°$，$\angle B=70°$，$\angle H=140°$，$AD=18$，$EF=15$，$FG=14$，$EH=12$，求 $\angle G$ 的度数及 AB，BC 的长.



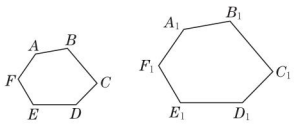
（第11题）

考查角度2 利用相似多边形的相似比求边长

12. 如图，多边形 $ABCDEF$ 与多边形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 相似，$\angle A=\angle D_1=135°$，$\angle B=\angle E_1=120°$，$\angle C_1=95°$.

(1) 求 $\angle F$ 的度数；

(2) 如果多边形 $ABCDEF$ 和多边形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的相似比是 1∶1.5，且 $CD=15$ cm，求 C_1D_1 的长度.



（第12题）

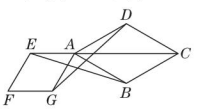
Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞（答案见136页）

拔尖角度1 利用相似多边形的性质求线段长

13. 如图所示，点 E 是菱形 $ABCD$ 对角线 CA 的延长线上任意一点，以线段 AE 为边作一个菱形 $AEFG$，且菱形 $AEFG$ 与菱形 $ABCD$ 相似，连接 EB，GD.

(1) 求证：$EB=GD$；

(2) 若 $\angle DAB=60°$，$AB=2$，$AG=\sqrt{3}$，求 GD 的长.



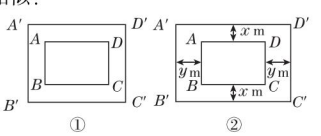
（第13题）

拔尖角度2 利用相似多边形的定义和性质探究实际问题（数形结合思想）

14. 在 $AB=20$ m，$AD=30$ m 的矩形花坛四周修筑小路.

(1) 如果四周的小路的宽均相等，都是 x m，如图①，那么小路四周所围成的矩形 $A'B'C'D'$ 和矩形 $ABCD$ 相似吗？请说明理由；

(2) 如果相对着的两条小路的宽均相等，宽度分别为 x m，y m，如图②，试问 x 与 y 的比值为多少时，能使得小路四周所围成的矩形 $A'B'C'D'$ 和矩形 $ABCD$ 相似？



（第14题）

趣味数学

在远古时代，人们在实践中积累了十分丰富的各种平面、直线、方、圆、长、短、宽、窄、厚、薄等概念，并且逐步认识了这些概念之间的关系及各种位置关系和数量关系，这些后来就成了几何学的基本概念.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 2 课时　成比例线段

名师点金

判断四条线段是否是成比例线段的方法：

先将线段长度统一单位并按长度的大小排序. 方法 1：判断前两条线段的比是否与后两条线段的比相等；方法 2：判断最长的线段与最短的线段的乘积是否与另外两条线段的乘积相等. 若相等，则这四条线段为成比例线段；若不相等，则这四条线段为不成比例线段. 可简记为："一排（排顺序）、二算（算比值或乘积）、三判（判断是否为成比例线段）".

Ⅰ 夯实基础 · 逐点练

☞（答案见 136 页）

知识点 1　两条线段的比

1. 在 1∶1 000 000 的地图上，A，B 两地之间的距离是 5 cm，则 A，B 两地的实际距离是（　　）

A. 5 km　　B. 50 km　　C. 500 km　　D. 5 000 km

2. 正方形的对角线的长与它的边长之比是（　　）

A. 2∶1　　B. 1∶2

C. 1∶$\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{2}$∶1

3. 已知线段 AB，在 BA 的延长线上取一点 C，使 $CA=3AB$，则线段 CA 与线段 CB 的比为（　　）

A. 3∶4　　B. 2∶3　　C. 3∶5　　D. 1∶2

4. 【中考 · 娄底】湖南地图出版社首发的竖版《中华人民共和国地图》，将南海诸岛与中国大陆按同比例尺 1∶6 700 000 表示出来，使读者能够全面、直观地认识我国版图. 若在这种地图上量得我国南北的图上距离是 82.09 厘米，则我国南北的实际距离大约是_____千米.（结果精确到 1 千米）

知识点 2　成比例线段

5. 下列各组长度的线段（单位：cm）中，是成比例线段的是（　　）

A. 1，2，3，4　　B. 1，2，2，4

C. 3，5，9，13　　D. 1，2，2，3

6. 四条线段 a，b，c，d 为成比例线段$\left(即\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\right)$，其中 $a=3$ cm，$d=4$ cm，$c=6$ cm，则 b 等于（　　）

A. 8 cm　　B. $\frac{9}{2}$ cm　　C. $\frac{2}{9}$ cm　　D. 2 cm

7. 如果线段 $a=8$ cm，$b=2$ cm，那么 a 和 b 的比例中项是（　　）

A. 8 cm　　B. 6 cm　　C. 4 cm　　D. 2 cm

易错点　忽视线段成比例的顺序性而致错

8. 已知线段 $a=3$，$b=5$，$c=7$，则 a，b，c 的第四比例项的值为_____.

Ⅱ 整合方法 · 提升练

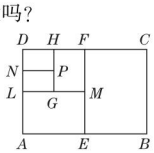
☞（答案见 136 页）

考查角度 1　利用成比例线段的定义判断线段成比例

9. 如图，将一张长宽之比为$\sqrt{2}$的矩形纸片 $ABCD$ 依次不断对折，可以得到矩形 $BCFE$，矩形 $AEML$，矩形 $GMFH$，矩形 $LGPN$.

（2）在折叠过程中，这些矩形的长和宽的比变了吗？请说明理由；

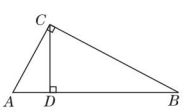
（2）在这些矩形中，有成比例的线段吗？



（第 9 题）

考查角度 2　利用三角形的面积证明直角三角形中的成比例线段

10. 如图，在 Rt△ABC 中，CD 是斜边 AB 上的高，试猜想线段 AB，AC，BC，CD 是否对应成比例？如果对应成比例，请写出这个比例式，并进行验证；如果不成比例，请说明理由.



（第 10 题）

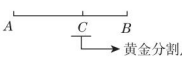
趣味数学　欧几里得的《原本》中，在系统地建立了与全等形有关的知识体系后，专门有两卷研究比例论和相似图形.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

第3课时　比例的性质

名师点金

如图，如果$\frac{AC}{AB}=\frac{BC}{AC}$，那么称线段$AB$被点$C$黄金分割，$AC$与$AB$的比叫做黄金比. 黄金比$AC:AB=\frac{\sqrt{5}-1}{2}:1\approx0.618:1$.



注意：1. 黄金分割是一种分割线段的方法，每条线段有两个黄金分割点.

2. 在实际问题中，应明确哪条是较长线段，哪条是较短线段.

Ⅰ 夯实基础·逐点练

☞（答案见136页）

知识点1 基本性质

1. 【中考·白银】已知$\frac{a}{2}=\frac{b}{3}(a\neq0,b\neq0)$，下列变形错误的是（　　）

A. $\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$　　B. $2a=3b$

C. $\frac{b}{a}=\frac{3}{2}$　　D. $3a=2b$

2. 【中考·雅安】若$a:b=3:4$，且$a+b=14$，则$2a-b$的值是（　　）

A. 4　　B. 2

C. 20　　D. 14

知识点2 合比性质

3. 【中考·东营】若$\frac{y}{x}=\frac{3}{4}$，则$\frac{x+y}{x}$的值为（　　）

A. 1　　B. $\frac{4}{7}$　　C. $\frac{5}{4}$　　D. $\frac{7}{4}$

4. 【中考·牡丹江】若$x:y=1:3$，$2y=3z$，则$\frac{2x+y}{z-y}$的值是（　　）

A. -5　　B. $-\frac{10}{3}$　　C. $\frac{10}{3}$　　D. 5

5. 已知$3x=4y(x\neq0)$，则下列各式不成立的是（　　）

A. $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}$　　B. $\frac{x+4}{4}=\frac{y+3}{3}$

C. $\frac{x+y}{4+3}=\frac{x}{4}$　　D. $\frac{4-x}{x}=\frac{3-y}{y}$

知识点3 等比性质

6. 【中考·成都】已知$\frac{a}{6}=\frac{b}{5}=\frac{c}{4}$，且$a+b-2c=6$，则$a$的值为_____.

7. 已知$x:y:z=3:4:6$，则$\frac{x+y-z}{x-y+z}$的值为（　　）

A. $\frac{1}{5}$　　B. 1

C. $\frac{13}{5}$　　D. $\frac{1}{13}$

知识点4 黄金分割

8. 已知点C是线段AB的黄金分割点，且$AC>BC$，则下列各式成立的是（　　）

A. $AB^2=AC\cdot CB$

B. $CB^2=AC\cdot AB$

C. $AC^2=BC\cdot AB$

D. $AC^2=2BC\cdot AB$

9. 若点C是线段AB的黄金分割点，$AB=8$ cm，$AC>BC$，则AC的长为（　　）

A. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ cm

B. $2(\sqrt{5}-1)$ cm

C. $4(\sqrt{5}-1)$ cm

D. $6(\sqrt{5}-1)$ cm

***10.** 若点C为线段AB的黄金分割点，且$AC>BC$，则①$AB=\frac{\sqrt{5}-1}{2}AC$；②$AC=\frac{3-\sqrt{5}}{2}AB$；③$AB:AC=AC:CB$；④$AC\approx0.618AB$. 其中正确的有（　　）

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

11. 【中考·通辽】美是一种感觉，人体下半身长与身高的比值越接近0.618，越给人一种美感. 如图，某女士的身高为160 cm，下半身长x与身高l的比值是0.60，为尽可能达到好的效果，她应穿的高跟鞋的高度大约为（　　）



（第11题）

A. 6 cm　　B. 10 cm　　C. 4 cm　　D. 8 cm

易错点！ 忽视运用等比性质的条件而致错

12. 【中考·兰州】如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k(b+d+f\neq0)$，且$a+c+e=3(b+d+f)$，那么$k=$_____.

攀登科学高峰，就像登山运动员攀登珠穆朗玛峰一样，要克服无数艰难险阻，懦夫和懒汉是不可能享受到胜利的喜悦和幸福的.——陈景润

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞(答案见 136 页)

考查角度 1 利用比例的性质求与比例中项有关的问题

13. 已知线段 a,b,c 满足 $\frac{a}{3}=\frac{b}{2}=\frac{c}{6}\neq 0$,且 $a+2b+c=26$.

(1)求线段 a,b,c 的长;

(2)若线段 x 是线段 a,b 的比例中项,求 x.

考查角度 2 利用等比性质求与三角形的周长有关的问题

14. 已知 a,b,c 是 $\triangle ABC$ 的三边长,且 $\frac{a}{5}=\frac{b}{4}=\frac{c}{6}\neq 0$,

(1)求 $\frac{2a+b}{3c}$ 的值;

(2)若 $\triangle ABC$ 的周长为 90,求各边的长.

Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞(答案见 137 页)

拔尖角度 1 利用等比的性质判断三角形的形状

15. 已知 a,b,c 是 $\triangle ABC$ 的三边长,且满足 $\frac{a+4}{3}=\frac{b+3}{2}=\frac{c+8}{4}$,$a+b+c=12$.

(1)试求 a,b,c 的值;

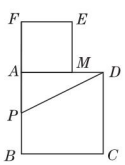
(2)判断 $\triangle ABC$ 的形状.

拔尖角度 2 利用黄金分割的定义找黄金分割点(计算法、定义法)

16. 如图,以长为 2 的定线段 AB 为边作正方形 $ABCD$,取 AB 的中点 P,连接 PD,在 BA 的延长线上取点 F,使 $PF=PD$,以 AF 为边作正方形 $AMEF$,点 M 在 AD 上.

(1)求 AM,DM 的长;

(2)点 M 是 AD 的黄金分割点吗?为什么?



(第 16 题)

趣味数学　烧一根不均匀的绳子,从头到尾总共需要 1 个小时.那么如何用烧绳子的方法来确定半小时的时间呢?(答案:两边一起烧)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

第4课时　平行线分线段成比例

名师点金

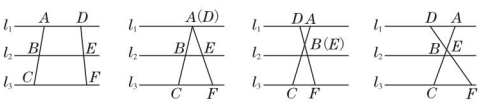
平行线除了具备“三线八角”相等或互补的功能外，还可以分线段成比例，而利用平行线得线段成比例的基本思路是：

1. 善于从较复杂的几何图形中分离出基本图形：“△”型或“⧖”型，得到相应的比例式.
2. 平行是前提条件，没有平行线可以添加辅助线，一般从分点或中点处作平行线.

1 夯实基础·逐点练 ☞（答案见137页）

知识点1 平行线等分线段定理

1. 下列用平行线等分线段定理的图形中，错误的是（　　）



2. 数学作业本的纸上都是等距离的横线，小明在上面任意画一条不与这些横线平行的直线，那么这条直线被这些横线所截得的线段（　　）

A. 平行　　B. 相等

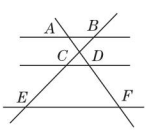
C. 平行或相等　　D. 不相等

知识点2 平行线分线段成比例的基本事实

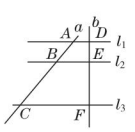
3. 如图，已知 $AB \parallel CD \parallel EF$，那么下列结论中正确的是（　　）

A. $\frac{CD}{EF}=\frac{AD}{AF}$　　B. $\frac{AB}{CD}=\frac{BC}{EC}$

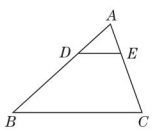
C. $\frac{AD}{AF}=\frac{BC}{BE}$　　D. $\frac{CE}{BE}=\frac{AF}{AD}$



（第3题）



（第4题）



（第5题）

4. 【中考·淮安】如图，$l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$，直线 a，b 与 l_1，l_2，l_3 分别相交于点 A，B，C 和点 D，E，F. 若 $AB=3$，$DE=2$，$BC=6$，则 $EF=$ _____.

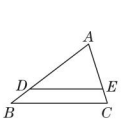
知识点3 平行线分线段成比例的基本事实的推论

5. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D，E 分别在 AB，AC 上，且 $DE \parallel BC$，$AD=1$，$BD=2$，那么 $\frac{AE}{AC}$ 的值为（　　）

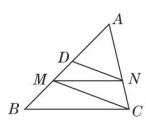
A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{2}{3}$

6. 【中考·内江】如图，在 $\triangle ABC$ 中，$DE \parallel BC$，$AD=9$，$DB=3$，$CE=2$，则 AC 的长为（　　）

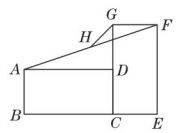
A. 6　　B. 7　　C. 8　　D. 9



（第6题）



（第7题）



（第8题）

7. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D，M 都是 AB 上的点，点 N 是 AC 上的点，已知 $MN \parallel BC$，$DN \parallel MC$，下列结论：①$\frac{AN}{AC}=\frac{AM}{AB}$；②$\frac{AD}{AM}=\frac{AN}{AC}$；③$\frac{AD}{AM}=\frac{AM}{AB}$. 其中正确的有（　　）

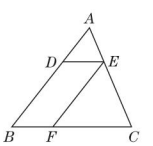
A. 0个　　B. 1个　　C. 2个　　D. 3个

8. 【中考·威海】矩形 $ABCD$ 与 $CEFG$ 如图放置，点 B，C，E 共线，点 C，D，G 共线，连接 AF，取 AF 的中点 H，连接 GH，若 $BC=EF=2$，$CD=CE=1$，则 GH 为（　　）

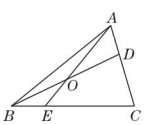
A. 1　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

***9.** 如图，已知在 $\triangle ABC$ 中，点 D，E，F 分别是边 AB，AC，BC 上的点，$DE \parallel BC$，$EF \parallel AB$，且 $AD:DB=1:2$，$CF=6$，那么 BF 等于（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4



（第9题）



（第10题）

易错点 忽视等高三角形面积和底的比例关系导致求不出线段的比

10. 【中考·凉山州】如图，在 $\triangle ABC$ 中，D 在 AC 边上，$AD:DC=1:2$，O 是 BD 的中点，连接 AO 并延长交 BC 于点 E，则 $BE:EC$ 的值为（　　）

A. 1:2　　B. 1:3　　C. 1:4　　D. 2:3

谜语：看谁力量大（打一数学名词）　　谜底：比例（力）.　　趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

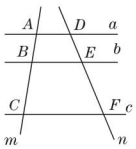
Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞(答案见 137 页)

考查角度 1　利用平行线分线段成比例的基本事实求线段的长

11. 如图,$a \parallel b \parallel c$,直线 m,n 与 a,b,c 分别相交于点 A,B,C 和点 D,E,F.

(1)若 $AB=3$,$BC=5$,$DE=4$,求 EF 的长;

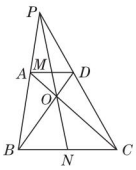
(2)若 $AB:BC=2:5$,$DF=10$,求 EF 的长.



(第 11 题)

考查角度 2　利用平行线分线段成比例的基本事实的推论证明线段相等

12. 如图,在四边形 $ABCD$ 中,$AD \parallel BC$,BA 和 CD 的延长线交于点 P,AC 和 BD 交于点 O,连接 PO 并延长,分别交 AD,BC 于点 M,N. 求证:$AM=DM$.



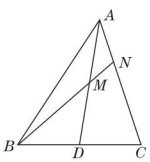
(第 12 题)

Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞(答案见 137 页)

拔尖角度 1　利用构造平行线分线段成比例的基本图形证明线段的倍分关系

13. 如图,在 $\triangle ABC$ 中,AD 是 BC 边上的中线,M 是 AD 的中点,BM 的延长线交 AC 于点 N.

求证:$AN=\frac{1}{2}CN$.



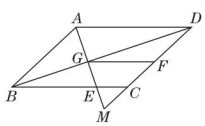
(第 13 题)

拔尖角度 2　利用平行线分线段成比例的基本事实的推论求线段的长

14. 如图,在平行四边形 $ABCD$ 中,点 E 为边 BC 上一点,连接 AE 并延长交 DC 的延长线于点 M,交 BD 于点 G,过点 G 作 $GF \parallel BC$ 交 DC 于点 F,$\frac{DF}{FC}=\frac{3}{2}$.

(1)若 $BD=20$,求 BG 的长;

(2)求 $\frac{CM}{CD}$ 的值.



(第 14 题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

阶段核心技巧

解决平行线分线段成比例常见问题的六种技巧

☞（答案见137页）

名师点金

利用平行线证明比例式或等积式的方法：

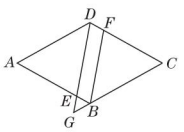
当比例式或等积式中的线段不在平行线上时，若平行线为一组（两条以上），可直接利用平行线分线段成比例的基本事实证明；若平行线只有两条，则利用平行线分线段成比例的基本事实的推论证明；当比例式或等积式中的线段不是对应线段时，利用**转化思想，用等线段、等比例、等积替换**进行证明.

技巧1 等线段代换法证明比例式相等

1. 已知：如图，在菱形 $ABCD$ 中，E，F 分别是 AB，CD 上的点，且 $BE=DF$，DE 和 CB 的延长线相交于点 G.

求证：(1) $\triangle ADE\cong\triangle CBF$；

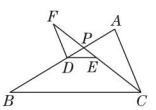
(2) $\dfrac{GE}{BF}=\dfrac{GB}{CD}$.



（第1题）

技巧2 等积代换法证明比例式相等

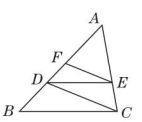
2. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，D 是 AB 上一点，E 是 $\triangle ABC$ 内一点，$DE/\!/BC$，过点 D 作 AC 的平行线交 CE 的延长线于点 F，CF 与 AB 交于点 P. 求证：$\dfrac{PE}{PF}=\dfrac{PA}{PB}$.



（第2题）

技巧3 等比例代换法证明比例式相等

3. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$DE/\!/BC$，$EF/\!/CD$. 求证：$\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AF}{AD}$.

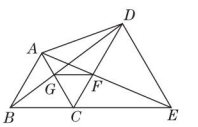


（第3题）

技巧4 平行法证明比例式相等

4. 【中考·滨州】如图，已知 B，C，E 三点在同一条直线上，$\triangle ABC$ 与 $\triangle DCE$ 都是等边三角形. 其中线段 BD 交 AC 于点 G，线段 AE 交 CD 于点 F，连接 GF.

求证：(1) $\triangle ACE\cong\triangle BCD$；(2) $\dfrac{AG}{GC}=\dfrac{AF}{FE}$.

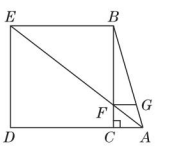


（第4题）

技巧5 等比例过渡法证明线段相等

5. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，以 BC 为边向外作正方形 $BEDC$，连接 AE 交 BC 于点 F，过点 F 作 $FG/\!/BE$ 交 AB 于点 G.

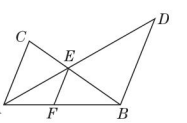
求证：$FG=FC$.



（第5题）

技巧6 同分母的中间比代换法证两个比的值的和为1

6. 如图，已知 $AC/\!/FE/\!/BD$，求证：$\dfrac{AE}{AD}+\dfrac{BE}{BC}=1$.



（第6题）

更多提分招数详见《极速提分法》第21页。

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

22.2　相似三角形的判定

第 1 课时　相似三角形及平行线截相似三角形

名师点金

确定相似三角形对应边和对应角的方法：

1. 有公共角的，公共角一般是对应角.
2. 有对顶角的，对顶角一般是对应角.
3. 相似三角形对应角所对的边是对应边，两个对应角所夹的边是对应边.
4. 相似三角形对应边所对的角是对应角，两条对应边所夹的角是对应角.

Ⅰ 夯实基础 · 逐点练 ☞(答案见 138 页)

知识点 1　相似三角形及其相似比

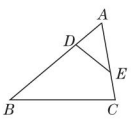
1. 如图，$\triangle ABC \backsim \triangle AED$，$\angle ADE = 80°$，$\angle A = 60°$，则 $\angle B$ 等于(　　)

A. 40°

B. 60°

C. 80°

D. 100°



(第 1 题)

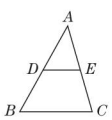
2. 【中考 · 兰州】已知 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，$AB = 8$，$A'B' = 6$，则 $\dfrac{BC}{B'C'}$ 的值为(　　)

A. 2　　B. $\dfrac{4}{3}$　　C. 3　　D. $\dfrac{16}{9}$

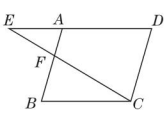
知识点 2　平行线判定两个三角形相似

3. 【中考 · 河南】如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D，E 分别是 AB，AC 的中点，则下列结论：①$BC = 2DE$；②$\triangle ADE \backsim \triangle ABC$；③$\dfrac{AD}{AE} = \dfrac{AB}{AC}$. 其中正确的有(　　)

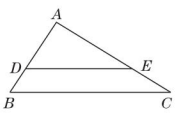
A. 3 个　　B. 2 个　　C. 1 个　　D. 0 个



(第 3 题)



(第 4 题)



(第 5 题)

4. 【中考 · 盐城】如图，点 F 在平行四边形 $ABCD$ 的边 AB 上，射线 CF 交 DA 的延长线于点 E. 在不添加辅助线的情况下，与 $\triangle AEF$ 相似的三角形有(　　)

A. 0 个　　B. 1 个　　C. 2 个　　D. 3 个

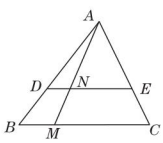
5. 【中考 · 贺州】如图，在 $\triangle ABC$ 中，D，E 分别是 AB，AC 边上的点，$DE \parallel BC$，若 $AD = 2$，$AB = 3$，$DE = 4$，则 BC 等于(　　)

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

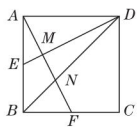
6. 【中考 · 杭州】如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D，E 分别在 AB 和 AC 上，$DE \parallel BC$，M 为 BC 边上一点(不与点 B，C 重合)，连接 AM 交 DE 于点 N，则(　　)

A. $\dfrac{AD}{AN} = \dfrac{AN}{AE}$　　B. $\dfrac{BD}{MN} = \dfrac{MN}{CE}$

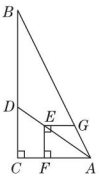
C. $\dfrac{DN}{BM} = \dfrac{NE}{MC}$　　D. $\dfrac{DN}{MC} = \dfrac{NE}{BM}$



(第 6 题)



(第 7 题)



(第 8 题)

*7. 【中考 · 南通】如图，正方形 $ABCD$ 的边长 $AB = 2$，E 为 AB 的中点，F 为 BC 的中点，AF 分别与 DE，BD 相交于点 M，N，则 MN 的长为(　　)

A. $\dfrac{5\sqrt{5}}{6}$　　B. $\dfrac{2\sqrt{5}}{3} - 1$　　C. $\dfrac{4\sqrt{5}}{15}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

*8. 【中考 · 安徽】如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB = 90°$，$AC = 6$，$BC = 12$，点 D 在边 BC 上，点 E 在线段 AD 上，$EF \perp AC$ 于点 F，$EG \perp EF$ 交 AB 于点 G. 若 $EF = EG$，则 CD 的长为(　　)

A. 3.6　　B. 4　　C. 4.8　　D. 5

易错点 ! 对相似三角形的对应关系理解模糊而出错

9. 如图，$\triangle AOB \backsim \triangle COD$，下列各式中正确的有(　　)

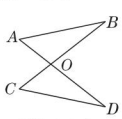
①$\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{BO}{CO}$；②$\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{AO}{DO}$；③$\dfrac{AO}{OD} = \dfrac{BO}{CO}$；④$\dfrac{AO}{CO} = \dfrac{BO}{DO}$.

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个



(第 9 题)

趣味数学　人类对相似形的研究和应用，有着悠久的历史. 古希腊数学家泰勒斯是希腊几何学的先驱，他对全等三角形和相似三角形的研究，比欧几里得早约 300 年.(待续)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

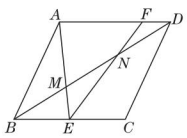
Ⅱ 整合方法·提升练 ☞（答案见138页）

考查角度1 先利用平行线判定三角形相似再求线段的比

10. 如图，在$\square ABCD$中，M，N为对角线BD的三等分点，连接AM并延长交BC于点E，连接EN并延长交AD于点F.

（1）求证：$\triangle AMD\backsim\triangle EMB$；

（2）求$\dfrac{FN}{NE}$的值.



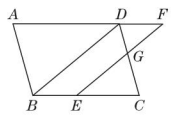
（第10题）

考查角度2 先利用平行线判定三角形相似再求边长

11. 【中考·长春】如图，在$\square ABCD$中，点E在边BC上，点F在边AD的延长线上，且$DF=BE$，EF与CD交于点G.

（1）求证：$BD\parallel EF$；

（2）若$\dfrac{DG}{GC}=\dfrac{2}{3}$，$BE=4$，求$EC$的长.



（第11题）

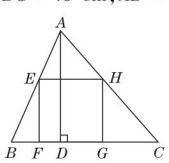
Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞（答案见138页）

拔尖角度1 先判定相似三角形再求面积（方程思想）

12. 【中考·怀化】如图，$\triangle ABC$为锐角三角形，AD是BC边上的高，正方形$EFGH$的一边FG在BC上，顶点E，H分别在AB，AC上，已知$BC=40$ cm，$AD=30$ cm.

（1）求证：$\triangle AEH\backsim\triangle ABC$；

（2）求这个正方形的边长与面积.



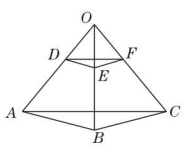
（第12题）

拔尖角度2 先判定相似三角形再探究图形的形状（等比例过渡法）

13. 如图，在四边形$OABC$中，D，E，F分别是OA，OB，OC上的点，连接DE，EF，DF，AC，若$\angle OED=\angle OBA$，$\angle OEF=\angle OBC$.

（1）求证：$\dfrac{OD}{OA}=\dfrac{OF}{OC}$；

（2）请你探究：如果$\triangle DEF$是以DF为底边的等腰三角形，则$\triangle ABC$是否是以AC为底边的等腰三角形，为什么？



（第13题）

趣味数学

在他提出的为数不多的几何命题中，就有“两角及其夹边分别相等的两个三角形全等”这一命题.他根据相似三角形的原理，计算出了埃及金字塔的高度.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 2 课时　利用角的关系判定两个三角形相似

名师点金

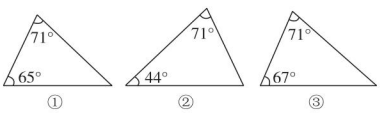
“三点定型法”是证明线段等积式或比例式以及利用等积式、比例式求线段长时找相似三角形最常用的方法，即设法找出比例式或等积式（或变化后的式子）中所包含的几个字母，看是否存在可由“三点”确定的两个相似三角形. 通常通过“横看”“竖看”两种方法找相似三角形. 横看：看两个比例前项、两个比例后项是否分别在两个相似三角形中. 竖看：看比例式等号两边各自的前项、后项是否分别在两个相似三角形中.

1 夯实基础 · 逐点练

☞（答案见 138 页）

知识点 1　相似三角形的判定定理 1

1. 如图所示的三个三角形中，相似的是（　　）



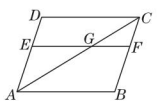
（第 1 题）

A. ①和②　　B. ②和③

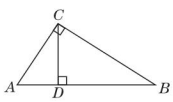
C. ①和③　　D. ①②和③

2. 【中考 · 玉林】如图，$AB \parallel EF \parallel DC$，$AD \parallel BC$，$EF$ 与 AC 交于点 G，则相似三角形共有（　　）

A. 3 对　　B. 5 对　　C. 6 对　　D. 8 对



（第 2 题）



（第 3 题）

知识点 2　相似三角形的判定定理 1 的应用

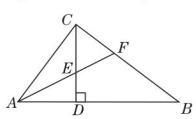
3. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB = 90°$，$CD \perp AB$ 于点 D，下列结论：

①$AC \cdot BC = AB \cdot CD$；②$AC^2 = AD \cdot DB$；③$BC^2 = BD \cdot BA$；④$CD^2 = AD \cdot DB$. 正确的个数是（　　）

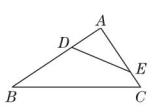
A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

4. 【中考 · 枣庄】如图，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle ACB = 90°$，$CD \perp AB$，垂足为点 D，AF 平分 $\angle CAB$，交 CD 于点 E，交 CB 于点 F. 若 $AC = 3$，$AB = 5$，则 CE 的长为（　　）

A. $\frac{3}{2}$　　B. $\frac{4}{3}$　　C. $\frac{5}{3}$　　D. $\frac{8}{5}$



（第 4 题）



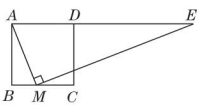
（第 5 题）

5. 【中考 · 赤峰】如图，D，E 分别是 $\triangle ABC$ 边 AB，AC 上的点，$\angle ADE = \angle ACB$，若 $AD = 2$，$AB = 6$，$AC = 4$，则 AE 的长是（　　）

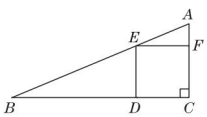
A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

6. 【中考 · 泰安】如图，正方形 $ABCD$ 中，M 为 BC 上一点，$ME \perp AM$，ME 交 AD 的延长线于点 E. 若 $AB = 12$，$BM = 5$，则 DE 的长为（　　）

A. 18　　B. $\frac{109}{5}$　　C. $\frac{96}{5}$　　D. $\frac{25}{3}$



（第 6 题）



（第 7 题）

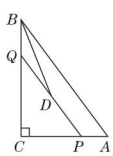
7. 【中考 · 黔东南州】如图，在一斜边长 30 cm 的直角三角形木板（即 $\mathrm{Rt}\triangle ACB$）中截取一个正方形 $CDEF$，点 D 在边 BC 上，点 E 在斜边 AB 上，点 F 在边 AC 上. 若 $AF : AC = 1 : 3$，则这块木板截取正方形 $CDEF$ 后，剩余部分的面积为（　　）

A. 200 cm^2　　B. 170 cm^2

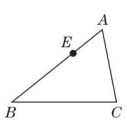
C. 150 cm^2　　D. 100 cm^2

***8.** 【中考 · 海南】如图，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$，$AB = 5$，$BC = 4$. 点 P 是边 AC 上一动点，过点 P 作 $PQ \parallel AB$ 交 BC 于点 Q，D 为线段 PQ 的中点，当 BD 平分 $\angle ABC$ 时，AP 的长度为（　　）

A. $\frac{8}{13}$　　B. $\frac{15}{13}$　　C. $\frac{25}{13}$　　D. $\frac{32}{13}$



（第 8 题）



（第 9 题）

易错点　对相似三角形的对应关系考虑不全面而致错（分类讨论思想）

9. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB = 9$，$AC = 6$，点 E 在 AB 上，且 $AE = 3$，点 F 在 AC 上，连接 EF，若 $\triangle AEF$ 与 $\triangle ABC$ 相似，则 $AF =$ _____.

趣味数学　一位数学家觉得自己已经够了数学，于是跑到消防队去宣布他想当消防员. 消防队队长说：“您看上去不错，可是我得先给您做一个测试.”消防队队长问：“假设货栈起火，您怎么办？”（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

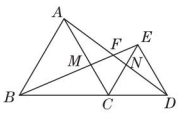
Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞（答案见139页）

考查角度1 利用两角相等判定两个三角形相似

10. 如图，B,C,D 在同一直线上，$\triangle ABC$ 和 $\triangle DCE$ 都是等边三角形，且在直线 BD 的同侧，BE 交 AD 于点 F，交 AC 于点 M，AD 交 CE 于点 N.

（1）求证：$AD=BE$；

（2）求证：$\triangle ABF\backsim\triangle ADB$.



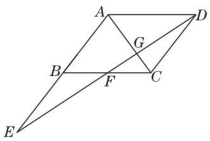
（第10题）

考查角度2 利用相似三角形的性质求线段长

11. 【中考 · 张家界】如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，连接对角线 AC，延长 AB 至点 E，使 $BE=AB$，连接 DE，分别交 BC,AC 于点 F,G.

（1）求证：$BF=CF$；

（2）若 $BC=6,DG=4$，求 FG 的长.



（第11题）

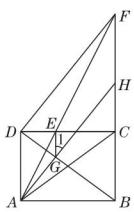
Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞（答案见139页）

拔尖角度1 利用相似三角形的判定和性质求线段长和角的关系

12. 【中考 · 梧州】如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=4,BC=3$，AF 平分 $\angle DAC$，分别交 DC,BC 的延长线于点 E,F，连接 DF，过点 A 作 $AH/\!/DF$，分别交 BD,BF 于点 G,H.

（1）求 DE 的长；

（2）求证：$\angle 1=\angle DFC$.



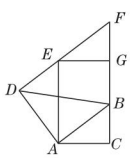
（第12题）

拔尖角度2 利用相似三角形的判定和性质探究旋转图形中的线段长

13. 【中考 · 福建】如图，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°,AB=10,AC=8$. 线段 AD 由 AB 绕点 A 按逆时针方向旋转 $90°$ 得到，$\triangle EFG$ 由 $\triangle ABC$ 沿 CB 方向平移得到，且直线 EF 经过点 D.

（1）求 $\angle BDF$ 的大小；

（2）求 CG 的长.



（第13题）

数学家回答："我把消防栓接到软管上，打开水龙头，把火浇灭."消防队队长说："完全正确！下一个问题：假设您走进小巷，而货栈没有起火，您怎么办？"（待续）

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

第3课时　利用边角关系判定两个三角形相似

名师点金

1. “相似于(∽)”和“谁和谁相似”的区别：虽然它们都表示两个图形相似，但前者对应关系固定，后者对应关系不固定.
2. 如果已知两个三角形相似，当边的对应关系不明确时，从对应角入手，相等的角或公共角为对应角，则夹对应角的两边成比例，根据对应关系分两种情况讨论.

1 夯实基础·逐点练 ☞(答案见139页)

知识点1 相似三角形的判定定理2

1. 下列各组条件中，一定能推得$\triangle ABC$与$\triangle EFD$相似的是(　　)

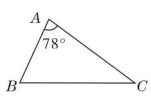
A. $\angle A=\angle E$且$\angle D=\angle F$

B. $\angle A=\angle B$且$\angle D=\angle F$

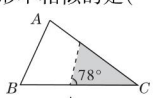
C. $\angle A=\angle E$且$\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{EF}{ED}$

D. $\angle A=\angle E$且$\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{DF}{ED}$

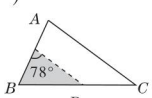
2. 【中考·枣庄】如图，在$\triangle ABC$中，$\angle A=78°$，$AB=4$，$AC=6$. 将$\triangle ABC$沿图示中的虚线剪开，剪下的阴影三角形与原三角形不相似的是(　　)



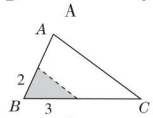
(第2题)



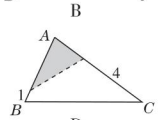
A



B



C



D

3. 【中考·雅安】如图，每个小正方形的边长均为1，则下列图形中的三角形(阴影部分)与$\triangle A_1B_1C_1$相似的是(　　)



(第3题)


A


B


C


D

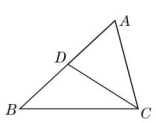
4. 如图，给出下列条件：①$\angle B=\angle ACD$；②$\angle ADC=\angle ACB$；③$\dfrac{AC}{CD}=\dfrac{AB}{BC}$；④$AC^2=AD\cdot AB$. 其中能够判定$\triangle ABC\backsim\triangle ACD$的有(　　)

A. 1个

B. 2个

C. 3个

D. 4个



(第4题)

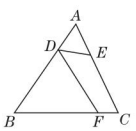
5. 在等边三角形ABC中，点D，E分别在AC，AB上，且$\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{1}{3}$，$AE=BE$，则有(　　)

A. $\triangle AED\backsim\triangle BED$　　B. $\triangle AED\backsim\triangle CBD$

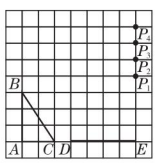
C. $\triangle AED\backsim\triangle ABD$　　D. $\triangle BAD\backsim\triangle BCD$

知识点2 相似三角形的判定定理2的应用

6. 【中考·潍坊】如图，在$\triangle ABC$中，$AB\neq AC$，D，E分别为AB，AC上的点，$AC=3AD$，$AB=3AE$，点F为BC边上一点，添加一个条件：_____，可以使得$\triangle FDB$与$\triangle ADE$相似. (只需写出一个)



(第6题)

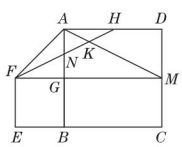


(第7题)

7. 如图，在方格纸中，$\triangle ABC$和$\triangle EPD$的顶点均在格点上，要使$\triangle ABC\backsim\triangle EPD$，则点$P$所在的格点为(　　)

A. P_1　　B. P_2　　C. P_3　　D. P_4

***8.** 【中考·广东】如图，正方形$ABCD$的边长为4，延长CB至E使$EB=2$，以EB为边在上方作正方形$EFGB$，延长FG交DC于M，连接AM，AF，H为AD的中点，连接FH分别与AB，AM交于点N，K，则下列结论：①$\triangle ANH\cong\triangle GNF$；②$\angle AFN=\angle HFG$；③$FN=2NK$；④$S_{\triangle AFN}:S_{\triangle ADM}=1:4$. 其中正确的结论有(　　)



(第8题)

A. 1个　　B. 2个

C. 3个　　D. 4个

易错点 在应用三角形相似的判定定理2时，考虑问题不全面导致漏解

9. 【中考·随州】在$\triangle ABC$中，$AB=6$，$AC=5$，点D在边AB上，且$AD=2$，点E在边AC上，当$AE=$_____时，以A，D，E为顶点的三角形与$\triangle ABC$相似.

趣味数学　数学家疑惑地思索了半天，答道：“我就把货找点着.”消防队队长大叫起来：“什么？太可怕了！您为什么要把货找点着？”数学家回答：“这样我就把问题转化为一个我已经解决过的问题了.”

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

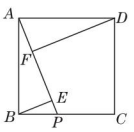
Ⅱ 整合方法·提升练 ☞（答案见139页）

考查角度1 利用相似三角形的判定和性质证明线段相等

10. 【中考·上海】已知：如图，正方形 $ABCD$ 中，P 是 BC 上一点，$BE\perp AP$，$DF\perp AP$，垂足分别是点 E，F.

（1）求证：$EF=AE-BE$；

（2）连接 BF，如果 $\frac{AF}{BF}=\frac{DF}{AD}$，求证：$EF=EP$.



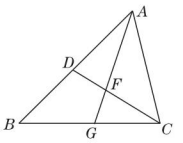
（第10题）

考查角度2 利用相似三角形的判定和性质证明比例关系

11. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D，G 分别在边 AB，BC 上，$\angle ACD=\angle B$，AG 与 CD 相交于点 F.

（1）求证：$AC^2=AD\cdot AB$；

（2）若 $\frac{AD}{AC}=\frac{DF}{CG}$，求证：$CG^2=DF\cdot BG$.



（第11题）

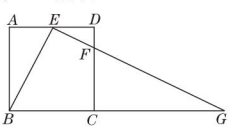
Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞（答案见140页）

拔尖角度1 利用相似三角形的性质求正方形中线段的长

12. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，E，F 分别是边 AD，CD 上的点，$AE=ED$，$DF=\frac{1}{4}DC$，连接 EF 并延长，交 BC 的延长线于点 G，连接 BE.

（1）求证：$\triangle ABE\backsim\triangle DEF$；

（2）若正方形的边长为4，求 BG 的长.



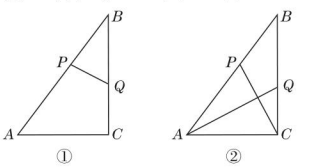
（第12题）

拔尖角度2 利用相似三角形的判定和性质探究有关相似中的动点问题

13. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$AC=6$ cm，$BC=8$ cm. 如图①，动点 P 从点 B 出发，在 BA 边上以每秒5 cm的速度向点 A 匀速运动，同时动点 Q 从点 C 出发，在 CB 边上以每秒4 cm的速度向点 B 匀速运动，运动时间为 t 秒（$0<t<2$），连接 PQ.

（1）若 $\triangle BPQ$ 与 $\triangle ABC$ 相似，求 t 的值；

（2）如图②，连接 AQ，CP，若 $AQ\perp CP$，求 t 的值.



（第13题）

趣味数学

著名的科学家阿基米德讲过："给我一个支点，我就能撬起整个地球."假想有一根很长的杠杆，加上支点、地球、施力物体，可以组成两个三角形，这就是相似三角形的应用.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

第 4 课时　利用三边关系判定两个三角形相似

名师点金

利用三边成比例判定三角形相似的三个步骤：

1. 排序：将三角形的边按大小顺序排列.
2. 计算：分别计算它们对应边的比值.
3. 判断：通过比较比值是否相等判断两个三角形是否相似.

1 夯实基础 · 逐点练

☞(答案见 140 页)

知识点 1 三边成比例的两个三角形相似

1. 若△ABC 和△$A'B'C'$满足下列条件，其中使△ABC与△$A'B'C'$相似的是(　　)

A. $AB=2.5$ cm，$BC=2$ cm，$AC=3$ cm；$A'B'=3$ cm，$B'C'=4$ cm，$A'C'=6$ cm

B. $AB=2$ cm，$BC=3$ cm，$AC=4$ cm；$A'B'=3$ cm，$B'C'=6$ cm，$A'C'=\frac{9}{2}$ cm

C. $AB=10$ cm，$BC=AC=8$ cm；$A'B'=\sqrt{6}$ cm，$B'C'=A'C'=\sqrt{5}$ cm

D. $AB=1$ cm，$BC=\sqrt{5}$ cm，$AC=3$ cm；$A'B'=\sqrt{15}$ cm，$B'C'=2\sqrt{3}$ cm，$A'C'=\sqrt{6}$ cm

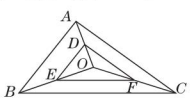
2. 如图，点 O 是△ABC 内任一点，点 D，E，F 分别为 OA，OB，OC 的中点，则图中相似三角形有(　　)

A. 1 对

B. 2 对

C. 3 对

D. 4 对



(第 2 题)

3. 一个三角形三边的长分别为 3，5，7，另一个与它相似的三角形的最长边的长是 21，则其他两边长的和是(　　)

A. 19　　B. 17　　C. 24　　D. 21

4. 要制作两个形状相同的三角形框架，其中一个三角形框架的三边长分别为 4，5，6，另一个三角形框架的一边长为 2，另外两边长分别为(　　)

A. 2.5，3　　B. $\frac{4}{3}$，$\frac{5}{3}$

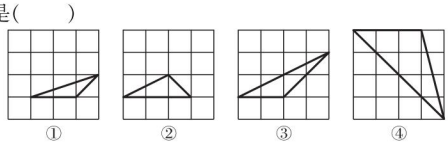
C. 1.6，2.4　　D. 2.5，3 或 $\frac{4}{3}$，$\frac{5}{3}$ 或 1.6，2.4

*5. 一个铝质三角形框架的三条边长分别为 24 cm，30 cm，36 cm，要做一个与它相似的铝质三角形框架，现有长为 27 cm，45 cm 的两根铝材，要求以其中的一根为一边，从另一根上截下两段(允许有余料)作为另外两边，则截法有(　　)

A. 0 种　　B. 1 种　　C. 2 种　　D. 3 种

知识点 2 网格上相似三角形的判定

6. 如图，在 4×4 的正方形网格中，是相似三角形的是(　　)

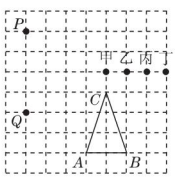


(第 6 题)

A. ①和②　　B. ②和③

C. ①和③　　D. ②和④

7. 如图，若 A，B，C，P，Q，甲，乙，丙，丁都是方格纸中的格点，为使△PQR∽△ABC，则点 R 应是甲，乙，丙，丁四点中的(　　)

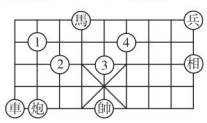


(第 7 题)

A. 甲　　B. 乙　　C. 丙　　D. 丁

*8. 【中考·连云港】在如图所示的象棋盘示意图(各个小正方形的边长均相等)中，根据“馬”走日的规则，“馬”应落在下列哪个位置处，能使“馬”“車”“炮”所在位置的格点构成的三角形与“帥”“相”“兵”所在位置的格点构成的三角形相似(　　)

A. ①处　　B. ②处　　C. ③处　　D. ④处



(第 8 题)

易错点 考虑问题不全面而致错

9. 【中考·东营】如果一个直角三角形的两条边长分别是 6 和 8，另一个与它相似的直角三角形的边长分别是 3，4 及 x，那么 x 的值(　　)

A. 只有 1 个　　B. 可以有 2 个

C. 可以有 3 个　　D. 有无数个

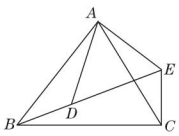
趣味数学　自相似是近乎或确实和物体自身的一部分相似. 自然界中存在很多自相似现象，如树木的根，又如雪花、海岸线等. 后来，出现了一个专门的数学分支来研究像这样的自相似图形，那就是分形几何.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞（答案见140页）

考查角度1 利用两个三角形三边的比判定两个三角形相似

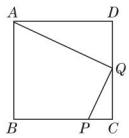
10. 如图，已知$\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{DE}=\frac{AC}{AE}$，证明：$\angle BAD=\angle CAE$.



（第10题）

考查角度2 利用正方形的性质证明三角形相似

11. 如图，在正方形$ABCD$中，P是BC上一点，且$BP=3PC$，Q是CD的中点，求证：$\triangle ADQ\backsim\triangle QCP$.



（第11题）

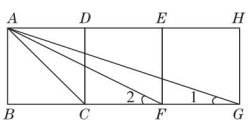
Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞（答案见141页）

拔尖角度1 利用正方形的特征探究三角形相似

12. 如图，四边形$ABCD$，$CDEF$，$EFGH$都是相同的正方形.

（1）$\triangle ACF$与$\triangle GCA$相似吗？说说你的理由；

（2）求$\angle 1+\angle 2$的度数.



（第12题）

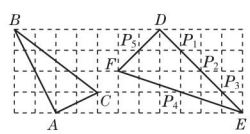
拔尖角度2 利用相似三角形的判定探究网格中的三角形相似

13. 【中考 · 菏泽】如图，在边长为1的小正方形组成的网格中，$\triangle ABC$和$\triangle DEF$的顶点都在格点上，P_1，P_2，P_3，P_4，P_5是$\triangle DEF$边上的5个格点，请按要求完成下列各题：

（1）试证明$\triangle ABC$为直角三角形；

（2）判断$\triangle ABC$和$\triangle DEF$是否相似，并说明理由；

（3）画一个三角形，使它的三个顶点为P_1，P_2，P_3，P_4，P_5中的3个格点并且与$\triangle ABC$相似.（不写作法与证明）



（第13题）

时间是个常数，但对勤奋者来说，是个‘变数’.用‘分’来计算时间的人比用‘小时’来计算时间的人时间多59倍.——雷巴柯夫

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第5课时　利用斜边、直角边判定两个直角三角形相似

名师点金

要找三角形相似的条件，关键抓住以下几点：

1. 已知角相等时，找两对对应角相等，若只能找到一对对应角相等，则需判断相等的角的两边是否对应成比例.
2. 无法找到角相等时，判断三边是否对应成比例.
3. 若有平行线，可考虑平行线截三角形相似及相似三角形的传递性.
4. 对于直角三角形，可考虑它们的斜边、直角边是否成比例.

Ⅰ 夯实基础·逐点练

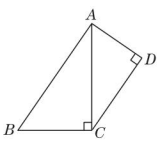
☞（答案见141页）

知识点1 斜边、直角边成比例的两个直角三角形相似

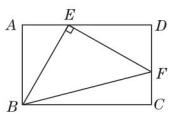
1. 在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，$\angle C=\angle C'=90°$，$AC=12$，$AB=15$，$A'C'=8$，则当$A'B'=$_____时，$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

2. 如图，$\angle ACB=\angle ADC=90°$，$BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，要使$\triangle ABC\backsim\triangle CAD$，只要$CD$的值为（　　）

A. $\frac{b^2}{c}$　　B. $\frac{b^2}{a}$　　C. $\frac{ab}{c}$　　D. $\frac{a^2}{c}$



（第2题）



（第4题）

3. 下列说法：①所有的直角三角形都相似；②所有的等腰直角三角形都相似；③有一个锐角相等的两个直角三角形相似；④有两边对应成比例的两个直角三角形相似. 其中正确的有（　　）

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

4. 如图，在矩形$ABCD$中，$\angle BEF=90°$，在$\triangle ABE$，$\triangle BEF$，$\triangle EDF$，$\triangle FBC$中，一定相似的是（　　）

A. $\triangle ABE\backsim\triangle EFB$　　B. $\triangle ABE\backsim\triangle DEF$

C. $\triangle BEF\backsim\triangle FDE$　　D. $\triangle BEF\backsim\triangle FBC$

5. 在平面直角坐标系中，$A(-3,0)$，$B(0,-4)$，$C(0,1)$，过点C作直线l交x轴于点D，使得以点D，C，O为顶点的三角形与$\triangle AOB$相似，这样的直线一共可以作出（　　）

A. 1条　　B. 2条　　C. 3条　　D. 4条

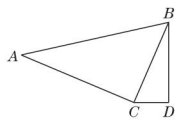
知识点2 相似三角形的综合应用

6. 下列条件不能判定$\triangle ABC\backsim\triangle DEF$的是（　　）

A. $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{AC}{DF}$　　B. $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}$，$\angle A=\angle D$

C. $\angle A=\angle D$，$\angle B=\angle E$　　D. $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}$，$\angle B=\angle E$

7. 如图所示，已知$\angle ACB=\angle D=90°$，下列条件中不能判断$\triangle ABC$和$\triangle BCD$相似的是（　　）

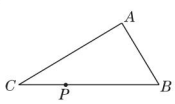


（第7题）

A. $AB/\!/CD$　　B. BC平分$\angle ABD$

C. $\angle ABD=90°$　　D. $AB:BC=BD:CD$

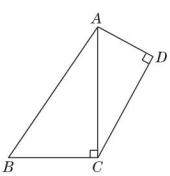
***8.** 如图，已知点P是Rt$\triangle ABC$的斜边BC上任意一点，若过点P作直线PD与直角边AB或AC相交于点D，截得的小三角形与$\triangle ABC$相似，那么D点的位置最多有（　　）



（第8题）

A. 2处　　B. 3处　　C. 4处　　D. 5处

9. 如图所示，在Rt$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，$AB=5$，$AC=4$，以AC为斜边向外作直角三角形ACD，当AD为何值时，这两个直角三角形相似？



（第9题）

趣味数学　济公想了个绝妙的办法来测一棵古树的高度. 他用一根竹竿直立于地上，然后调整竹竿的位置，使他的眼睛与竹竿的顶端、树的顶端在一条直线上，就测量出了古树的高度.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

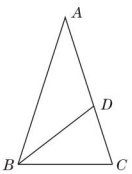
Ⅱ 整合方法·提升练 ☞（答案见141页）

考查角度1 利用三角形相似求角的角度

10. 【中考·福州】如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC=1$，$BC=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，在AC边上截取$AD=BC$，连接BD.

（1）通过计算，判断AD^2与$AC\cdot CD$的大小关系；

（2）求$\angle ABD$的度数.



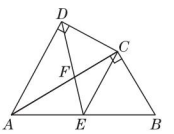
（第10题）

考查角度2 利用三角形相似求比值

11. 如图，在四边形$ABCD$中，AC平分$\angle DAB$，$\angle ADC=\angle ACB=90°$，$E$为$AB$的中点，连接$DE$，$CE$，$DE$与$AC$交于点$F$.

（1）求证：$AC^2=AB\cdot AD$；

（2）若$AD=4$，$AB=6$，求$\frac{AC}{AF}$的值.



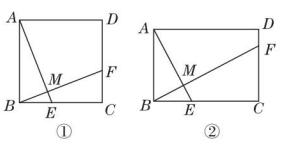
（第11题）

Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞（答案见141页）

拔尖角度1 利用三角形相似探究线段的关系

12. 【中考·河池】（1）如图①，在正方形$ABCD$中，点E，F分别在BC，CD上，$AE\perp BF$于点M，求证：$AE=BF$；

（2）如图②，将（1）中的正方形$ABCD$改为矩形$ABCD$，$AB=2$，$BC=3$，$AE\perp BF$于点M，探究AE与BF的数量关系，并证明你的结论.



（第12题）

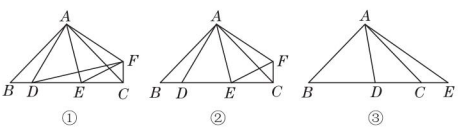
拔尖角度2 利用三角形相似探究平方关系

13. 【中考·黄石】在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，$\angle BAC=2\angle DAE=2\alpha$.

（1）如图①，若点D关于直线AE的对称点为F，求证：$\triangle ADF\backsim\triangle ABC$；

（2）如图②，在（1）的条件下，若$\alpha=45°$，求证：$DE^2=BD^2+CE^2$；

（3）如图③，若$\alpha=45°$，点E在BC的延长线上，则等式$DE^2=BD^2+CE^2$还能成立吗？请说明理由.



（第13题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 6 课时　相似三角形判定定理的应用 ☞(答案见 142 页)

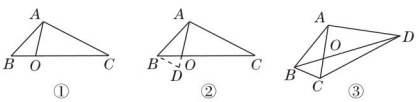
题型 1　角的关系在判定三角形相似问题中的应用

1. 【中考·东营】(1)某学校“智慧方园”数学社团遇到这样一个题目:如图①,在△ABC中,点O在线段BC上,$\angle BAO=30°$,$\angle OAC=75°$,$AO=3\sqrt{3}$,$BO:CO=1:3$,求AB的长. 经过社团成员讨论发现,过点B作$BD\parallel AC$,交AO的延长线于点D,通过构造△ABD就可以解决问题(如图②).

请回答:$\angle ADB=$_____°,$AB=$_____.

(2)请参考以上解决思路,解决问题:

如图③,在四边形$ABCD$中,对角线AC与BD相交于点O,$AC\perp AD$,$AO=3\sqrt{3}$,$\angle ABC=\angle ACB=75°$,$BO:OD=1:3$,求$DC$的长.



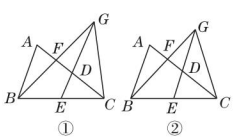
(第 1 题)

题型 2　三边关系在判定三角形相似问题中的应用

2. 如图①,在△ABC中,$AC=BC$,点D,E,F分别是线段AC,BC,AD的中点,BF,ED的延长线交于点G,连接GC.

(1)求证:$AB=GD$;

(2)如图②,当$CG=EG$时,求$\dfrac{AC}{AB}$的值.



(第 2 题)

题型 3　相似三角形的判定和性质在多边形中的应用

3. 【中考·长沙】根据相似多边形的定义,我们把四个角分别相等,四条边成比例的两个凸四边形叫做相似四边形. 相似四边形对应边的比叫做相似比.

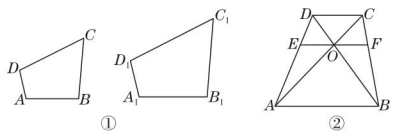
(1)某同学在探究相似四边形的判定时,得到如下三个命题,请判断它们是否正确(直接在横线上填写“真”或“假”).

①四条边成比例的两个凸四边形相似;(_____命题)

②三个角分别相等的两个凸四边形相似;(_____命题)

③两个大小不同的正方形相似.(_____命题)

(2)如图①,在四边形$ABCD$和四边形$A_1B_1C_1D_1$中,$\angle ABC=\angle A_1B_1C_1$,$\angle BCD=\angle B_1C_1D_1$,$\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{BC}{B_1C_1}=\dfrac{CD}{C_1D_1}$. 求证:四边形$ABCD$与四边形$A_1B_1C_1D_1$相似.



(第 3 题)

(3)如图②,四边形$ABCD$中,$AB\parallel CD$,AC与BD相交于点O,过点O作$EF\parallel AB$分别交AD,BC于点E,F. 记四边形$ABFE$的面积为S_1,四边形$EFCD$的面积为S_2,若四边形$ABFE$与四边形$EFCD$相似,求$\dfrac{S_2}{S_1}$的值.

趣味数学　数学学科中有许多奇妙而有趣的现象,也有很多秘密等待我们去探索,比如,对于每一个 3 的倍数,求这个数每一个数位上的数字的立方和,将所得的和重复上述操作.(待续)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

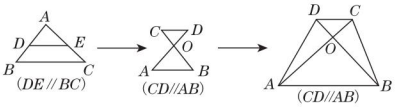
阶段核心方法

巧用基本图形探索相似条件 ☞（答案见142页）

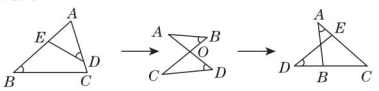
名师点金

几何图形大多数由基本图形复合而成，因此熟悉三角形相似的基本图形，有助于快速、准确地识别相似三角形，从而顺利找到解题思路和方法. 相似三角形的四类结构图见下：

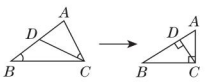
1. 平行线类



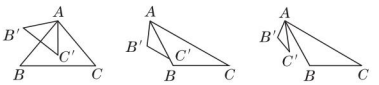
2. 相交线类



3. 子母类



4. 旋转类

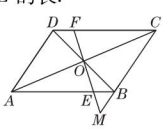


基本图形1 平行线类

1. 【中考·雅安】如图，$\square ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，EF 经过点 O，分别交 AB，CD 于点 E，F，FE 的延长线交 CB 的延长线于点 M.

（1）求证：$OE = OF$；

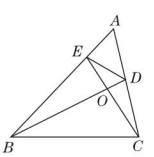
（2）若 $AD = 4$，$AB = 6$，$BM = 1$，求 BE 的长.



（第1题）

基本图形2 相交线类

2. 如图，D，E 分别为 $\triangle ABC$ 的边 AC，AB 上的点，BD，CE 交于点 O，且 $\frac{EO}{BO} = \frac{DO}{CO}$，试问 $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 相似吗？请说明理由.

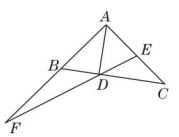


（第2题）

基本图形3 子母类

3. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC = 90°$，$AD \perp BC$ 于点 D，E 为 AC 的中点，ED 的延长线交 AB 的延长线于点 F.

求证：$\frac{AB}{AC} = \frac{DF}{AF}$.



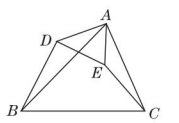
（第3题）

基本图形4 旋转类

4. 如图，已知 $\angle DAB = \angle EAC$，$\angle ADE = \angle ABC$.

求证：（1）$\triangle ADE \backsim \triangle ABC$；

（2）$\frac{AD}{AE} = \frac{BD}{CE}$.

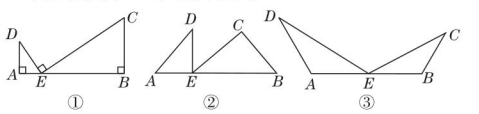


（第4题）

基本图形5 一线三等角型

5. （1）尝试：如图①，已知 A，E，B 三点在同一直线上，且 $\angle A = \angle B = \angle DEC = 90°$，求证：$\triangle ADE \backsim \triangle BEC$；

（2）一名同学做完上题后还发现：如图②③，只要 A，E，B 三点在同一直线上，且 $\angle A = \angle B = \angle DEC$，则（1）中的结论总成立. 你同意吗？请从图②③中选择其中一个说明理由.



（第5题）

更多提分招数详见《极速提分法》第19页。

这样一直继续下去，结果最终得到一个固定不变的数 R，这个固定不变的数 $R =$ _____.（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

22.3　相似三角形的性质

名师点金

相似图形的周长、面积的计算方法：

1. **常用图形结构**："A"型图与"X"型图，应用平行线构造相似三角形，多与平行四边形联系在一起.
2. **解题关键**：一是准确把握相似三角形周长的比与面积的比和相似比的关系；二是掌握同底等高或等底同高的三角形面积之间的关系.

Ⅰ 夯实基础·逐点练

（答案见 143 页）

知识点 1　相似三角形对应线段之比

1. 【中考·兰州】已知 $\triangle ABC \backsim \triangle DEF$，若 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的相似比为 $\frac{3}{4}$，则 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 对应中线的比为（　　）

A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{4}{3}$　　C. $\frac{9}{16}$　　D. $\frac{16}{9}$

2. 已知 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，$BD$ 和 $B'D'$ 分别是两个三角形对应角的平分线，且 $AC : A'C' = 2 : 3$，若 $BD = 4$ cm，则 $B'D'$ 的长是（　　）

A. 3 cm　　B. 4 cm　　C. 6 cm　　D. 8 cm

3. 【中考·重庆 A 卷】若 $\triangle ABC \backsim \triangle DEF$，相似比为 3∶2，则对应高的比为（　　）

A. 3∶2　　B. 3∶5　　C. 9∶4　　D. 4∶9

知识点 2　相似三角形周长之比

4. 【中考·常州】若 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，相似比为 1∶2，则 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的周长之比为（　　）

A. 2∶1　　B. 1∶2　　C. 4∶1　　D. 1∶4

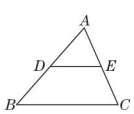
5. 【中考·沈阳】已知 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，$AD$ 和 $A'D'$ 是它们的对应中线，若 $AD = 10$，$A'D' = 6$，则 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的周长之比是（　　）

A. 3∶5　　B. 9∶25　　C. 5∶3　　D. 25∶9

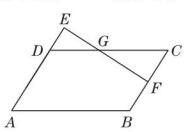
知识点 3　相似三角形面积之比

6. 【中考·西藏】如图，在 $\triangle ABC$ 中，D，E 分别为 AB，AC 边上的中点，则 $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 的面积之比是（　　）

A. 1∶4　　B. 1∶3　　C. 1∶2　　D. 2∶1



（第 6 题）



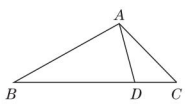
（第 7 题）

7. 【中考·巴中】如图，在 $\square ABCD$ 中，F 为 BC 的中点，延长 AD 至点 E，使 $DE : AD = 1 : 3$，连接 EF 交 DC 于点 G，则 $S_{\triangle DEG} : S_{\triangle CFG}$ 为（　　）

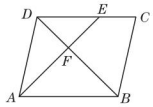
A. 2∶3　　B. 3∶2　　C. 9∶4　　D. 4∶9

8. 【中考·淄博】如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AC = 2$，$BC = 4$，D 为 BC 边上的一点，且 $\angle CAD = \angle B$. 若 $\triangle ADC$ 的面积为 a，则 $\triangle ABD$ 的面积为（　　）

A. $2a$　　B. $\frac{5}{2}a$　　C. $3a$　　D. $\frac{7}{2}a$



（第 8 题）

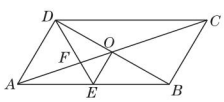


（第 9 题）

9. 【中考·毕节】如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，E 是 DC 上的点，$DE : EC = 3 : 2$，连接 AE 交 BD 于点 F，则 $\triangle DEF$ 与 $\triangle BAF$ 的面积之比为（　　）

A. 2∶5　　B. 3∶5　　C. 9∶25　　D. 4∶25

***10.** 【中考·通辽】如图，$\square ABCD$ 的对角线 AC，BD 交于点 O，DE 平分 $\angle ADC$ 交 AB 于点 E，$\angle BCD = 60°$，$AD = \frac{1}{2}AB$，连接 OE. 下列结论：①$S_{\square ABCD} = AD \cdot BD$；②$DB$ 平分 $\angle CDE$；③$AO = DE$；④$S_{\triangle ADE} = 5S_{\triangle OFE}$，其中正确的有（　　）

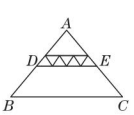


（第 10 题）

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

易错点　忽略相似三角形性质的适用条件导致错误

11. 【中考·常德】如图，在等腰三角形 ABC 中，$AB = AC$，图中所有三角形均相似，其中最小的三角形面积为 1，$\triangle ABC$ 的面积为 42，则四边形 $DBCE$ 的面积是（　　）



（第 11 题）

A. 20　　B. 22　　C. 24　　D. 26

趣味数学　比如 3，3 的立方为 27，则 2 的立方加上 7 的立方得 351. 而 3 的立方加上 5 的立方再加上 1 的立方得 153. 1 的立方加上 5 的立方再加上 3 的立方仍得 153. 所以这个不变的数为 153.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

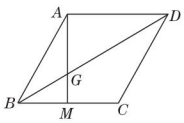
Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞（答案见143页）

考查角度1 利用相似三角形的性质解面积问题

12. 【中考 · 德阳】如图，四边形 $ABCD$ 为菱形，M 为 BC 上一点，连接 AM 交对角线 BD 于点 G，并且 $\angle ABC=2\angle BAM$.

（1）求证：$AG=BG$；

（2）若 M 为 BC 的中点，同时 $S_{\triangle BGM}=1$，求 $\triangle ADG$ 的面积.



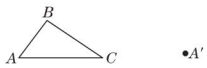
（第12题）

考查角度2 利用相似多边形的性质作图

13. 【中考 · 福建】已知 $\triangle ABC$ 和点 A'，如图所示.

（1）以点 A' 为一个顶点作 $\triangle A'B'C'$，使 $\triangle A'B'C'\backsim\triangle ABC$，且 $\triangle A'B'C'$ 的面积等于 $\triangle ABC$ 的面积的4倍；（要求：尺规作图，不写作法，保留作图痕迹）

（2）设 D,E,F 分别是 $\triangle ABC$ 三边 AB,BC,AC 的中点，D',E',F' 分别是你所作的 $\triangle A'B'C'$ 三边 $A'B',B'C',C'A'$ 的中点，求证：$\triangle DEF\backsim\triangle D'E'F'$.



（第13题）

Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞（答案见143页）

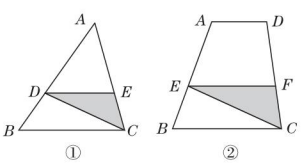
拔尖角度 利用相似三角形的性质解与代数式相关的综合问题

14. 【中考 · 苏州】**问题1**：如图①，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=4$，D 是 AB 上一点（不与 A,B 重合），$DE/\!/BC$，交 AC 于点 E，连接 CD，设 $\triangle ABC$ 的面积为 S，$\triangle DEC$ 的面积为 S'.

（1）当 $AD=3$ 时，$\dfrac{S'}{S}=$_____；

（2）设 $AD=m$，请你用含字母 m 的代数式表示 $\dfrac{S'}{S}$.

问题2：如图②，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$AD/\!/BC$，$AD=\dfrac{1}{2}BC$，E 是 AB 上一点（不与 A,B 重合），$EF/\!/BC$，交 CD 于点 F，连接 CE，设 $AE=n$，四边形 $ABCD$ 的面积为 S，$\triangle EFC$ 的面积为 S'. 请你利用问题1的解法或结论，用含字母 n 的代数式表示 $\dfrac{S'}{S}$.



（第14题）

公元前287年，阿基米德出生在意大利半岛南端西西里岛的叙拉古，他的父亲是一位数学家兼天文学家. 阿基米德有良好的家庭教养，11岁就被送到当时被称为希腊文化中心的亚历山大城去学习.（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

22.4　图形的位似变换

第 1 课时　图形的位似变换

名师点金

位似图形的概念包括四层内容：

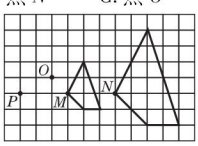
1. 位似图形是针对两个图形而言的.
2. 位似图形是相似图形.
3. 位似图形的每组对应点所在的直线都必须经过同一个点.
4. 位似图形反映了两个图形特殊的形状和位置关系，位似图形一定是相似图形，而相似图形未必是位似图形. 两者的区别在于：位似图形有位似中心，而相似图形不一定有位似中心.

1 夯实基础 · 逐点练 ☞（答案见 144 页）

知识点 1　位似图形的认识

1. 如图所示的两个四边形是位似图形，它们的位似中心是(　　)

A. 点 M　　B. 点 N　　C. 点 O　　D. 点 P

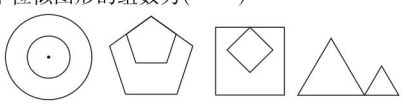


（第 1 题）

2. 【中考 · 德州】对于平面图形上的任意两点 P，Q，如果经过某种变换得到新图形上的对应点 P'，Q'，保持 $PQ = P'Q'$，我们把这种变换称为“等距变换”，下列变换中不一定是等距变换的是(　　)

A. 平移　　B. 旋转　　C. 轴对称　　D. 位似

3. 如图所示的四组图形为两个圆或相似的正多边形，其中位似图形的组数为(　　)

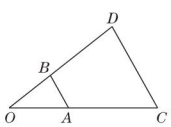


（第 3 题）

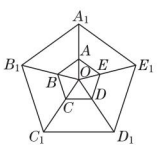
A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

知识点 2　位似图形的性质

4. 【中考 · 河池】如图，以点 O 为位似中心，将 $\triangle OAB$ 放大后得到 $\triangle OCD$，$OA = 2$，$AC = 3$，则 $\dfrac{AB}{CD} =$ _____.



（第 4 题）



（第 5 题）

5. 如图，点 O 是五边形 $ABCDE$ 和五边形 $A_1B_1C_1D_1E_1$ 的位似中心，若 $OA : OA_1 = 1 : 3$，则 $C_1D_1 : CD$ 等于(　　)

A. 1 : 2　　B. 1 : 3　　C. 3 : 1　　D. 1 : 4

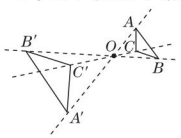
6. 【中考 · 邵阳】如图，以点 O 为位似中心，把 $\triangle ABC$ 放大为原图形的 2 倍得到 $\triangle A'B'C'$，以下说法中错误的是(　　)

A. $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$

B. C、O、C' 三点在同一直线上

C. $AO : AA' = 1 : 2$

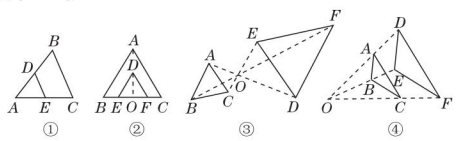
D. $AB \parallel A'B'$



（第 6 题）

知识点 3　位似图形的画法

7. 如图是与 $\triangle ABC$ 位似的图形的几种画法，其中正确的有(　　)

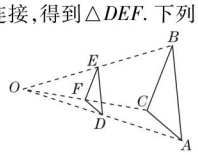


（第 7 题）

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

***8.** 如图，已知 $\triangle ABC$，任取一点 O，连接 AO，BO，CO，并取它们的中点 D，E，F 顺次连接，得到 $\triangle DEF$. 下列结论：① $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 是位似图形；② $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 是相似图形；③ $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的周长比为 1 : 2；④ $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的面积比为 4 : 1. 其中结论正确的个数是(　　)

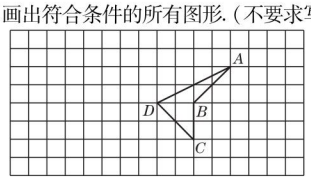
A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4



（第 8 题）

易错点　对位似变换时图形的位置考虑不全而漏解

9. 如图，正方形网格中有一条简笔画“鱼”，请你以点 D 为位似中心将其放大，使新图形与原图形的对应线段的比是 2 : 1，画出符合条件的所有图形.（不要求写作法）



（第 9 题）

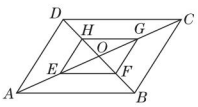
趣味数学　在这座号称“智慧之都”的名城里，阿基米德博览群书，汲取了许多知识，并且做了欧几里得的学生埃拉托塞和卡农的门生，钻研《几何原本》.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞（答案见144页）

考查角度1 利用位似图形的定义判别位似图形

10. 如图，$\square ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，点 E，F，G，H 分别是线段 OA，OB，OC，OD 的中点，那么 $\square ABCD$ 与四边形 $EFGH$ 是否是位似图形？为什么？

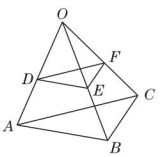


（第10题）

考查角度2 利用位似图形的性质证明等积式

11. 如图，已知 $\triangle DEO$ 与 $\triangle ABO$ 是位似图形，$\triangle OEF$ 与 $\triangle OBC$ 是位似图形.

求证：$OD \cdot OC = OF \cdot OA$.



（第11题）

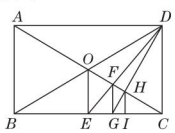
Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞（答案见144页）

拔尖角度1 利用位似图形的定义和性质探究位似变换问题

12. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O.

（1）过点 O 作 $OE \perp BC$ 于点 E，连接 DE 交 OC 于点 F，作 $FG \perp BC$ 于点 G，则 $\triangle ABC$ 与 $\triangle FGC$ 是位似图形吗？若是，请写出位似中心，并求出相似比；若不是，请说明理由.

（2）连接 DG 交 OC 于点 H，作 $HI \perp BC$ 于点 I，试确定 $CI : BC$ 的值（直接写出结果）.



（第12题）

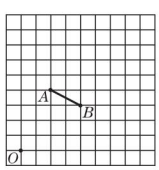
拔尖角度2 利用位似作图进行计算

13. 【中考 · 安徽】如图，在由边长为1个单位长度的小正方形组成的 10×10 网格中，已知点 O，A，B 均为网格线的交点.

（1）在给定的网格中，以点 O 为位似中心，将线段 AB 放大为原来的2倍，得到线段 A_1B_1（点 A，B 的对应点分别为 A_1，B_1），画出线段 A_1B_1；

（2）将线段 A_1B_1 绕点 B_1 逆时针旋转 $90°$ 得到线段 A_2B_1，画出线段 A_2B_1；

（3）以 A，A_1，B_1，A_2 为顶点的四边形 $AA_1B_1A_2$ 的面积是_____个平方单位.



（第13题）

趣味数学

幻灯机是老师常用的教具之一，它能把精制的画片投到银幕上，能够在一定程度上激发同学们的学习兴趣，它的工作原理是利用位似图形的性质.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第2课时　阅读与思考——平面直角坐标系中图形的位似变换

名师点金

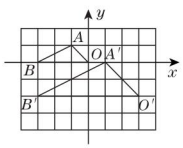
1. 以原点为位似中心的位似图形的坐标变化一定要注意符号的变化：若两个图形在原点同侧，则符号相同；若两个图形在原点异侧，则符号相反.
2. 以原点为位似中心时，变换前后两个图形对应点的横坐标或纵坐标之比的绝对值等于相似比.

1 夯实基础·逐点练 ☞(答案见145页)

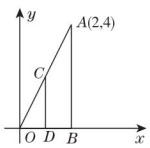
知识点1 位似图形的坐标变化规律

1. 【中考·辽阳】如图，在由边长为1的小正方形组成的网格中，建立平面直角坐标系，$\triangle ABO$与$\triangle A'B'O'$是以点P为位似中心的位似图形，它们的顶点均在格点(网格线的交点)上，则点P的坐标为(　　)

A. (0,0)　B. (0,1)　C. (−3,2)　D. (3,−2)



(第1题)



(第2题)

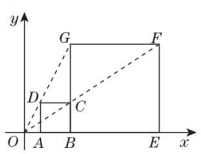
2. 【中考·邵阳】如图，在平面直角坐标系中，已知点$A(2,4)$，过点A作$AB\perp x$轴于点B. 将$\triangle AOB$以坐标原点O为位似中心缩小为原图形的$\frac{1}{2}$，得到$\triangle COD$，则CD的长度是(　　)

A. 2　B. 1　C. 4　D. $2\sqrt{5}$

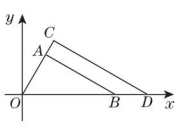
3. 【中考·烟台】如图，在平面直角坐标系中，正方形$ABCD$与正方形$BEFG$是以原点O为位似中心的位似图形，且相似比为$\frac{1}{3}$，点A,B,E在x轴上，若正方形$BEFG$的边长为6，则C点的坐标为(　　)

A. (3,2)　B. (3,1)

C. (2,2)　D. (4,2)



(第3题)



(第5题)

4. 【中考·滨州】在平面直角坐标系中，$\triangle ABO$的三个顶点的坐标分别为$A(-2,4)$，$B(-4,0)$，$O(0,0)$，以原点O为位似中心，把这个三角形缩小为原来的$\frac{1}{2}$，得到$\triangle CDO$，则点A的对应点C的坐标是_____.

5. 【中考·菏泽】如图，$\triangle OAB$与$\triangle OCD$是以点O为位似中心的位似图形，相似比为3∶4，$\angle OCD=90°$，$\angle AOB=60°$，若点B的坐标是(6,0)，则点C的坐标是_____.

知识点2 在平面直角坐标系中画位似图形

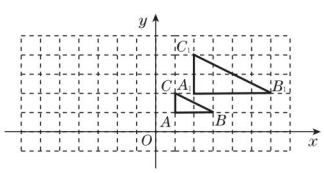
6. 【中考·滨州】在平面直角坐标系中，点C,D的坐标分别为$C(2,3)$，$D(1,0)$，现以原点为位似中心，将线段CD放大得到线段AB. 若点D的对应点B在x轴上且$OB=2$，则点C的对应点A的坐标为_____.

***7.** 如图，在平面直角坐标系中，将$\triangle ABC$进行位似变换得到$\triangle A_1B_1C_1$.

(1)求$\triangle A_1B_1C_1$与$\triangle ABC$的相似比；

(2)画出$\triangle A_1B_1C_1$关于y轴对称的$\triangle A_2B_2C_2$；

(3)设点$P(a,b)$为$\triangle ABC$内一点，则依上述两次变换后，点P在$\triangle A_2B_2C_2$内的对应点P_2的坐标是多少？



(第7题)

易错点 忽视位似变换的另一种位置关系致错

8. 【中考·潍坊】在平面直角坐标系中，点$P(m,n)$是线段AB上一点，以原点O为位似中心把$\triangle AOB$放大到原来的两倍，则点P的对应点的坐标为(　　)

A. $(2m,2n)$

B. $(2m,2n)$或$(-2m,-2n)$

C. $\left(\frac{1}{2}m,\frac{1}{2}n\right)$

D. $\left(\frac{1}{2}m,\frac{1}{2}n\right)$或$\left(-\frac{1}{2}m,-\frac{1}{2}n\right)$

趣味数学　真正的数学“天才”是珊瑚虫，它们会在自己的身上记下“日历”. 它们每年在自己的体壁上“刻画”出365条斑纹，显然是一天“画”一条.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法·提升练 ☞（答案见145页）

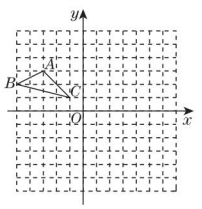
考查角度1 利用旋转、位似的特征作图

9. 【中考·巴中】△ABC在边长为1的正方形网格中如图所示.

(1) 以点C为位似中心，作出△ABC的位似图形△A_1B_1C，使其相似比为1∶2，且△A_1B_1C位于点C的异侧，并表示出A_1的坐标；

(2) 作出△ABC绕点C顺时针旋转90°后的图形△A_2B_2C；

(3) 在(2)的条件下求出点B经过的路径长.



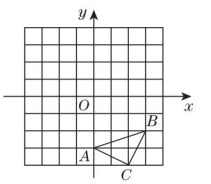
（第9题）

考查角度2 利用平移、位似的特征作图

10. 【中考·眉山】如图，已知△ABC的三个顶点的坐标分别为$A(0,-3)$，$B(3,-2)$，$C(2,-4)$.（正方形网格中，每个小正方形的边长是1个单位长度）

(1) 画出△ABC向上平移6个单位长度后得到的△$A_1B_1C_1$；

(2) 以点C为位似中心，在网格中画出△A_2B_2C，使△A_2B_2C与△ABC位似，且△A_2B_2C与△ABC的相似比为2∶1，并直接写出点A_2的坐标.



（第10题）

Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞（答案见145页）

拔尖角度1 利用点的坐标变化判断图形的变化

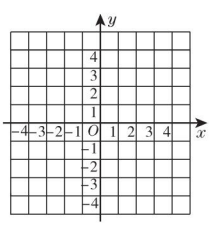
11. 在平面直角坐标系中，将坐标是(0,4)，(1,0)，(2,4)，(3,0)，(4,4)的点用线段依次连接起来形成一个图案.

(1) 在如图所示的坐标系中画出这个图案（图案①）；

(2) 若将上述各点的横坐标保持不变，纵坐标分别乘−1，再将所得的各点用线段依次连接起来，画出所得的图案（图案②）；

(3) 若将上述各点的纵坐标保持不变，横坐标分别乘−1，再将所得的各点用线段依次连接起来，画出所得的图案（图案③）；

(4) 图案①与图案②有什么位置关系？图案①与图案③有什么位置关系？



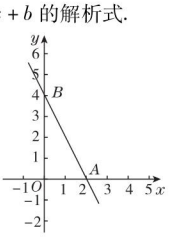
（第11题）

拔尖角度2 利用位似变换解与一次函数相关的综合问题（函数思想、数形结合思想）

12. 【中考·盐城】如果两个一次函数$y=k_1x+b_1$和$y=k_2x+b_2$满足$k_1=k_2$，$b_1\neq b_2$，那么称这两个一次函数为“平行一次函数”. 如图，已知函数$y=-2x+4$的图象与x轴、y轴分别交于A，B两点，一次函数$y=kx+b$与$y=-2x+4$是“平行一次函数”.

(1) 若函数$y=kx+b$的图象过点(3,1)，求b的值；

(2) 若函数$y=kx+b$的图象与两坐标轴围成的三角形和△AOB构成位似图形，位似中心为原点，相似比为1∶2，求函数$y=kx+b$的解析式.



（第12题）

缺一少十：腊月的一天，郑板桥和蔡州官同游苏州，见一家门上贴了一副对联：二三四五，六七八九. 郑板桥立即派人送来了一些衣服、米面和几斤肉.（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

22.5　综合与实践　测量与误差

名师点金

利用相似三角形解决实际问题的方法：

1. 利用太阳光线平行构造相似三角形，利用同一时刻物高与影长成比例构造比例式，画数学图形找相似三角形.
2. 没有相似三角形时可以构造直角三角形.
3. 对于不易测量的长度或高度，可以用易测量的对应线段通过成比例来计算.

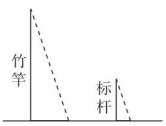
1 夯实基础 · 逐点练

☞（答案见 145 页）

知识点 1　利用光照下的影子

1. 【中考 · 长春】《孙子算经》是中国古代重要的数学著作，成书大约在一千五百年前，其中有道算题：今有竿不知其长，量得影长一丈五尺，立一标杆，长一尺五寸，影长五寸，问竿长几何？意即：如图，有一根竹竿不知道有多长，量出它在太阳下的影子长一丈五尺，同时立一根一尺五寸的小标杆，它的影长五寸（提示：1 丈 = 10 尺，1 尺 = 10 寸），则竹竿的长为（　　）

A. 五丈　　B. 四丈五尺　　C. 一丈　　D. 五尺



（第 1 题）



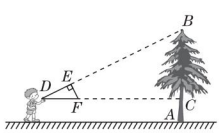
（第 2 题）

2. 如图，数学兴趣小组的小颖想测量教学楼前的一棵树的高度，下午课外活动时她测得一根长为 1 m 的竹竿的影长是 0.8 m. 但当她马上测量树高时，发现树的影子不全落在地面上，有一部分影子落在教学楼的墙壁上，她先测得留在墙壁上的影高为 1.2 m，又测得地面上的影长为 2.6 m. 请你帮她算一下，树高是（　　）

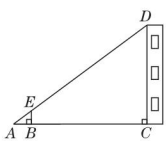
A. 3.25 m　　B. 4.25 m　　C. 4.45 m　　D. 4.75 m

知识点 2　利用工具

3. 如图，小明同学用自制的直角三角形纸板 DEF 测量树的高度 AB，他调整自己的位置，设法使斜边 DF 保持水平，并且边 DE 与点 B 在同一直线上. 已知纸板的两条直角边 $DE = 40$ cm，$EF = 20$ cm，测得边 DF 离地面的高度 $AC = 1.5$ m，$CD = 8$ m，则树高 $AB =$ _____m.



（第 3 题）



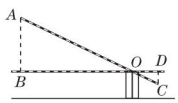
（第 4 题）

4. 【中考 · 临沂】如图，利用标杆 BE 测量建筑物的高度，已知标杆 BE 高 1.2 m，测得 $AB = 1.6$ m，$BC = 12.4$ m，则建筑物 CD 的高是（　　）

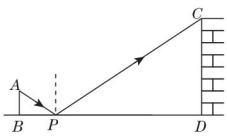
A. 9.3 m　　B. 10.5 m　　C. 12.4 m　　D. 14 m

5. 【中考 · 绍兴】学校门口的栏杆如图所示，栏杆从水平位置 BD 绕 O 点旋转到 AC 位置. 已知 $AB \perp BD$，$CD \perp BD$，垂足分别为 B，D，$AO = 4$ m，$AB = 1.6$ m，$CO = 1$ m，则栏杆 C 端应下降的垂直距离 CD 为（　　）

A. 0.2 m　　B. 0.3 m　　C. 0.4 m　　D. 0.5 m



（第 5 题）

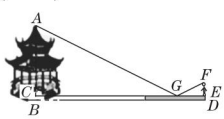


（第 6 题）

知识点 3　利用镜子反射

6. 【中考 · 天水】如图是一位同学设计的用手电筒来测量某古城墙高度的示意图，点 P 处放一水平的平面镜，光线从点 A 出发经平面镜反射后刚好到古城墙 CD 的顶端 C 处，已知 $AB \perp BD$，$CD \perp BD$，测得 $AB = 2$ m，$BP = 3$ m，$PD = 12$ m，那么该古城墙 CD 的高度是_____.

***7.** 【中考 · 兰州】如图，小明为了测量一座凉亭的高度 AB（顶端 A 到水平地面 BD 的距离），在凉亭的旁边放置一个与凉亭台阶 BC 等高的台阶 DE（$DE = BC = 0.5$ m，A，B，C 三点共线），把一面镜子水平放置在平台上的点 G 处，测得 $CG = 15$ m. 然后沿直线 CG 后退到点 E 处，这时恰好在镜子里看到凉亭的顶端 A，测得 $EG = 3$ m，小明身高 $EF = 1.6$ m，则凉亭的高度 AB 约为（　　）



（第 7 题）

A. 8.5 m　　B. 9 m　　C. 9.5 m　　D. 10 m

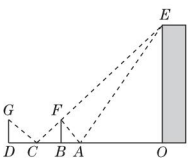
趣味数学　蔡州官问郑板桥怎么知道这家人缺少衣服和粮食，郑板桥说："他家门上的对联上不明白写着嘛，'二三四五，六七八九'，缺一（衣）少十（食）."

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法·提升练 ☞（答案见145页）

考查角度1 利用镜子反射测高

8. 【中考·荆门】如图，为了测量一栋楼的高度 OE，小明同学先在操场上 A 处放一面镜子，向后退到 B 处，恰好在镜子中看到楼的顶部 E；再将镜子放到 C 处，然后后退到 D 处，恰好再次在镜子中看到楼的顶部 E（O，A，B，C，D 在同一条直线上），测得 $AC=2$ m，$BD=2.1$ m. 如果小明眼睛距地面高度 BF（即 DG）为 1.6 m，试确定楼的高度 OE.



（第8题）

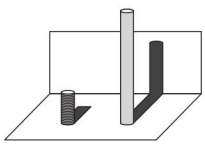
考查角度2 利用光线照射测距离

9. 在公园有两个垂直于水平地面且高度不一的圆柱，两个圆柱后面有一堵与地面互相垂直的墙，且圆柱与墙的距离皆为 120 cm. 敏敏观察到高度 90 cm 矮圆柱的影子落在地面上，其影长为 60 cm；而高圆柱的部分影子落在墙上，如图所示.

已知落在地面上的影子皆与墙面互相垂直，并视太阳光为平行光，在不计圆柱厚度与影子宽度的情况下，请回答下列问题：

（1）若敏敏的身高为 150 cm，且此刻她的影子完全落在地面上，则影长为多少厘米？

（2）若同一时间量得高圆柱落在墙上的影长为 150 cm，则高圆柱的高度为多少厘米？请详细解释或完整写出你的解题过程，并求出答案.



（第9题）

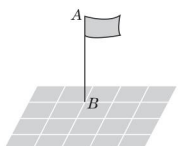
Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞（答案见146页）

拔尖角度1 利用指定工具设计测高方案

10. 某中学平整的操场上有一根旗杆（如图），数学兴趣小组的同学们欲测量其高度，现有测量工具（皮尺、标杆）可供选用，请你用所学的知识，帮助他们设计测量方案. 要求：

（1）画出你设计的测量平面图；

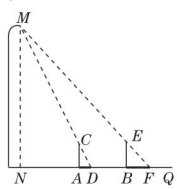
（2）简述测量方法，写出测量的数据并计算出旗杆的高度（长度用 a，b，c，…表示）.



（第10题）

拔尖角度2 利用测量的数据信息求高

11. 【中考·陕西】晚饭后，小聪和小军在社区广场散步，小聪问小军：“你有多高？”小军一时语塞. 小聪思考片刻，提议用广场照明灯下的影长及地砖长来测量小军的身高. 于是，两人在灯下沿直线 NQ 移动，如图. 当小聪正好站在广场的 A 点（距 N 点 5 块地砖长）时，其影长 AD 恰好为 1 块地砖长；当小军正好站在广场的 B 点（距 N 点 9 块地砖长）时，其影长 BF 恰好为 2 块地砖长. 已知广场地面由边长为 0.8 m 的正方形地砖铺成，小聪的身高 AC 为 1.6 m，$MN\perp NQ$，$AC\perp NQ$，$BE\perp NQ$. 请你根据以上信息，求出小军的身高 BE（结果精确到 0.01 m）.



（第11题）

趣味数学

笛卡儿是法国著名的哲学家、物理学家和数学家. 他对现代数学的发展做出了重要的贡献，因其将几何坐标体系公式化而被认为是解析几何之父.（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

阶段核心方法

巧用位似解决三角形中的内接多边形问题

☞(答案见 146 页)

名师点金

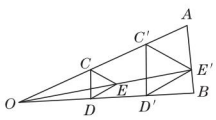
位似图形是特殊位置的相似图形,它具有相似图形的所有性质. 位似图形必须具备三个条件:1. 两个图形相似;2. 对应点的连线相交于一点;3. 对应边互相平行或在同一直线上.

训练角度 1　三角形的内接正三角形问题

1. 如图,用下面的方法可以画 $\triangle AOB$ 的内接等边三角形,阅读后证明相应问题.

画法:①在 $\triangle AOB$ 内画等边三角形 CDE,使点 C 在 OA 上,点 D 在 OB 上;②连接 OE 并延长,交 AB 于点 E',过点 E' 作 $E'C' /\!/ EC$,交 OA 于点 C',作 $E'D' /\!/ ED$,交 OB 于点 D';③连接 $C'D'$,则 $\triangle C'D'E'$ 是 $\triangle AOB$ 的内接等边三角形.

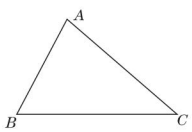
求证:$\triangle C'D'E'$ 是等边三角形.



(第 1 题)

训练角度 2　三角形的内接矩形问题

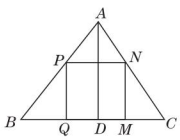
2. 如图,求作:内接于已知 $\triangle ABC$ 的矩形 $DEFG$,使它的边 EF 在 BC 上,顶点 D,G 分别在 AB,AC 上,并且有 $DE : EF = 1 : 2$.



(第 2 题)

训练角度 3　三角形的内接正方形问题(方程思想)

3. 如图,$\triangle ABC$ 是一块锐角三角形余料,边 $BC = 120$ mm,高 $AD = 80$ mm,要把它加工成正方形零件,使正方形的一边 QM 在 BC 上,其余两个顶点 P,N 分别在 AB,AC 上,则这个正方形零件的边长是多少?



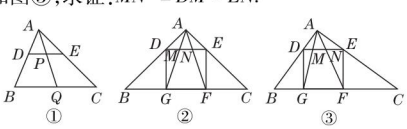
(第 3 题)

4. (1)如图①,在 $\triangle ABC$ 中,点 D,E,Q 分别在 AB,AC,BC 上,且 $DE /\!/ BC$,AQ 交 DE 于点 P. 求证:$\dfrac{DP}{BQ} = \dfrac{PE}{QC}$;

(2)在 $\triangle ABC$ 中,$\angle BAC = 90°$,正方形 $DEFG$ 的四个顶点在 $\triangle ABC$ 的边上,连接 AG,AF,分别交 DE 于 M,N 两点.

①如图②,若 $AB = AC = 1$,直接写出 MN 的长;

②如图③,求证:$MN^2 = DM \cdot EN$.



(第 4 题)

趣味数学　笛卡儿是二元论的代表,留下名言"我思故我在",提出了"普遍怀疑"的主张,是欧洲近代资产阶级哲学的奠基人之一,黑格尔称他为现代哲学之父.(待续)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

全章热门考点整合应用

☞（答案见146页）

名师点金

本章的主要内容为平行线分线段成比例，相似三角形的判定及性质，位似图形及其画法等，涉及的考点和考法较多，是中考的高频考点. 其主要考点可概括为：三个概念、三个性质、一个判定、两个应用、一个作图、一个技巧.

考点1 三个概念

概念1 成比例线段

1. 下列各组长度的线段，是成比例线段的是（　　）

A. 3 cm，6 cm，7 cm，9 cm

B. 2 cm，5 cm，0.6 dm，8 cm

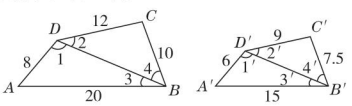
C. 3 cm，9 cm，6 cm，1.8 dm

D. 1 cm，2 cm，3 cm，4 cm

2. 有一块三角形的草地，它的一条边长为25 m，在图纸上，这条边的长为5 cm，其他两条边的长都为4 cm，则其他两条边的实际长度都是_____.

概念2 相似多边形

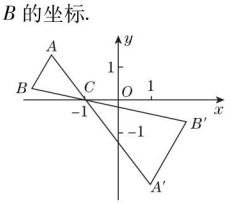
3. 如图，已知$\angle 1'=\angle 1$，$\angle 2'=\angle 2$，$\angle 3'=\angle 3$，$\angle 4'=\angle 4$，$\angle C'=\angle C$，试判断四边形$A'B'C'D'$与四边形$ABCD$是否相似，并说明理由.



（第3题）

概念3 位似图形

4. 如图，在$\triangle ABC$中，A，B两个顶点在x轴的上方，点C的坐标是$(-1,0)$. 以点C为位似中心，在x轴的下方作$\triangle ABC$的位似图形，并把$\triangle ABC$的边放大到原来的2倍，记所得的图形为$\triangle A'B'C$. 设点B的对应点B'的坐标是(a,b)，求点B的坐标.



（第4题）

考点2 三个性质

性质1 比例的性质

5. 已知$\frac{a}{b}=\frac{5}{8}$，则$\frac{b-a}{b+a}$的值是（　　）

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{3}{2}$　　C. $\frac{13}{3}$　　D. $\frac{3}{13}$

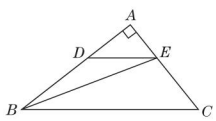
6. 已知$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=2$，且$b-2d+3f\neq 0$，求$\frac{a-2c+3e}{b-2d+3f}$的值.

性质2 平行线分线段成比例的性质

7. 如图，在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$\angle A=90°$，$AB=8$，$AC=6$. 若动点D从点B出发，沿线段BA运动到点A为止，运动速度为每秒2个单位长度. 过点D作$DE\parallel BC$交AC于点E，设动点D运动的时间为x s，AE的长为y.

(1) 求出y关于x的函数表达式，并写出自变量x的取值范围；

(2) 当x为何值时，$\triangle BDE$的面积有最大值？最大值为多少？



（第7题）

趣味数学

同时，笛卡儿又是一位勇于探索的科学家，他所建立的解析几何在数学史上具有划时代的意义. 堪称17世纪对欧洲哲学界和科学界最有影响的巨匠，被誉为近代科学的始祖.

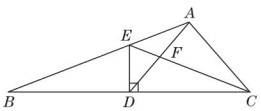
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

性质 3 相似三角形的性质

8. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，已知 D 是 BC 边上的中点，且 $AD=AC$，$DE\perp BC$，DE 与 BA 相交于点 E，EC 与 AD 相交于点 F.

(1) 求证：$\triangle ABC\backsim\triangle FCD$；

(2) 若 $S_{\triangle FCD}=5$，$BC=10$，求 DE 的长.



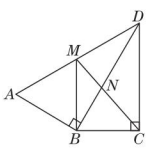
（第 8 题）

考点 3 一个判定——相似三角形的判定

9. 【中考·凉山州】如图，$\angle ABD=\angle BCD=90°$，$DB$ 平分 $\angle ADC$，过点 B 作 $BM\parallel CD$ 交 AD 于点 M，连接 CM 交 DB 于点 N.

(1) 求证：$BD^2=AD\cdot CD$；

(2) 若 $CD=6$，$AD=8$，求 MN 的长.

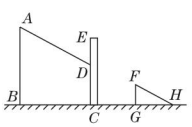


（第 9 题）

考点 4 两个应用

应用 1 测高度的应用

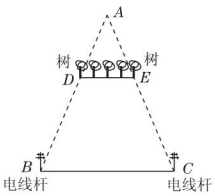
10. 如图，在离某建筑物 CE 4 m 处有一棵树 AB，在某时刻，1.2 m 的竹竿 FG 垂直地面放置，影子 GH 长为2 m，此时树的影子有一部分落在地面上，还有一部分落在建筑物的墙上，墙上的影子 CD 高为 2 m，那么这棵树的高度是多少？



（第 10 题）

应用 2 测宽度的应用

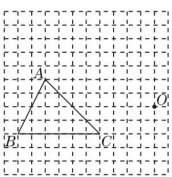
11. 如图，一条小河的两岸有一段是平行的，在河的一岸每隔 6 m 有一棵树，在河的对岸每隔 60 m 有一根电线杆，在有树的一岸离岸边 30 m 处可看到对岸相邻的两根电线杆恰好被这岸的两棵树遮住，并且在这两棵树之间还有三棵树，求河的宽度.



（第 11 题）

考点 5 一个作图——作一个图形的位似图形

12. 如图，在方格纸中（每个小方格的边长都是 1 个单位长度）有一点 O 和 $\triangle ABC$. 请以点 O 为位似中心，把 $\triangle ABC$ 缩小为原来的一半（不改变方向），画出 $\triangle ABC$ 的位似图形（$\triangle A'B'C'$）.



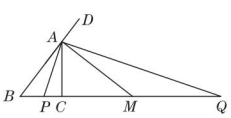
（第 12 题）

考点 6 一个技巧——证明四条线段成比例的技巧

13. 如图，已知 $\triangle ABC$，$\angle BAC$ 的平分线与 $\triangle ABC$ 的外角 $\angle DAC$ 的平分线分别交 BC 及 BC 的延长线于点 P，Q.

(1) 求 $\angle PAQ$ 的度数；

(2) 若 M 为 PQ 的中点，连接 AM，求证：$PM^2=CM\cdot BM$.



（第 13 题）

更多提分招数详见《极速提分法》第 22 页。

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第21章达标检测卷

(150分,120分钟)

题 号	一	二	三	总 分
得 分				

姓名 学号 班级 学校

一、**选择题**(每题4分,共40分)

1. 下列函数中不属于二次函数的是(　　)

A. $y=(x-1)(x+2)$　　B. $y=\frac{1}{2}(x+1)^2$　　C. $y=1-\sqrt{3}x^2$　　D. $y=2(x+3)^2-2x^2$

2. 为了更好地保护水资源,造福人类,某工厂计划建一个容积$V(m^3)$一定的污水处理池,池的底面积$S(m^2)$与其深度$h(m)$满足表达式$V=Sh(V\neq0)$,则S关于h的函数图象大致是(　　)



A　　B　　C　　D

3. 对于反比例函数$y=\frac{3}{x}$,下列结论中不正确的是(　　)

A. 图象经过点$(-1,-3)$　　B. 图象在第一、三象限

C. 当$x>1$时,$0<y<3$　　D. 当$x<0$时,y随着x的增大而增大

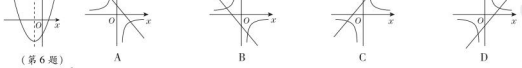
4. 在平面直角坐标系中,将抛物线$y=x^2-4$先向右平移2个单位长度,再向上平移2个单位长度,得到的抛物线对应的函数表达式为(　　)

A. $y=(x+2)^2+2$　　B. $y=(x-2)^2-2$　　C. $y=(x-2)^2+2$　　D. $y=(x+2)^2-2$

5. 已知点$(3,y_1)$,$(4,y_2)$,$(5,y_3)$在函数$y=2x^2+8x+7$的图象上,则y_1,y_2,y_3的大小关系是(　　)

A. $y_1>y_2>y_3$　　B. $y_2>y_1>y_3$　　C. $y_3>y_2>y_1$　　D. $y_2>y_3>y_1$

6. 二次函数$y=ax^2+bx+c$的图象如图所示,则反比例函数$y=\frac{a}{x}$与一次函数$y=ax+b$在同一坐标系内的大致图象是(　　)



(第6题)　　A　　B　　C　　D

7. 抛物线$y=-x^2+bx+c$上,部分点的横坐标x,纵坐标y的对应值如下表所示:

x	…	−2	−1	0	1	2	…
y	…	0	4	6	6	4	…

从上表可知,下列说法中错误的是(　　)

A. 抛物线与x轴的一个交点坐标为$(-2,0)$　　B. 抛物线与y轴的交点坐标为$(0,6)$

C. 抛物线的对称轴是直线$x=0$　　D. 抛物线在对称轴左侧部分是上升的

8. 在平面直角坐标系中,有$M(2,1)$,$N(2,6)$两点,过反比例函数$y=\frac{k}{x}$的图象上任意一点P作y轴的垂线PG,G为垂足,O为坐标原点.若反比例函数$y=\frac{k}{x}$的图象与线段MN相交,则$\triangle OGP$的面积S的取值范围是(　　)

A. $\frac{1}{2}\leqslant S\leqslant 3$　　B. $1\leqslant S\leqslant 6$　　C. $2\leqslant S\leqslant 12$　　D. $S\leqslant 2$或$S\geqslant 12$

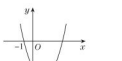
9. 某海滨浴场有100把遮阳伞,每把伞每天收费10元时,可全部租出;若每把伞每天收费提高2元,则减少10把伞租出;若每把伞每天收费再提高2元,则再减少10把伞租出……要使投资少而获利大,每把伞每天应提高(　　)

A. 4元或6元　　B. 4元　　C. 6元　　D. 8元

10. 如图,抛物线$y=ax^2+bx+c(a\neq0)$过点$(-1,0)$和点$(0,-3)$,且顶点在第四象限,设$P=a+b+c$,则P的取值范围是(　　)

A. $-3<P<-1$　　B. $-6<P<0$

C. $-3<P<0$　　D. $-6<P<-3$

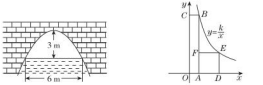


(第10题)

二、**填空题**(每题5分,共20分)

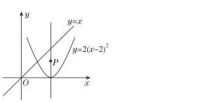
11. 小磊要制作一个三角形的钢架模型,在这个三角形中,长度为x的边与这条边上的高之和为40,这个三角形的面积S随x的变化而变化.则S与x之间的函数表达式为_____.

12. 如图所示是一个横断面为抛物线形的拱桥,当水面宽6 m时,拱顶(拱桥洞的最高点)距离水面3 m,当水面下降1 m时,水面的宽度为_____.



(第12题)

(第13题)



(第14题)

13. 如图,四边形$OABC$是矩形,$ADEF$是正方形,点A,D在x轴的正半轴上,点C在y轴的正半轴上,点F在AB上,点B,E在反比例函数$y=\frac{k}{x}$的图象上,且$OA=1$,$OC=6$,则正方形$ADEF$的边长为_____.

14. 如图,P是抛物线$y=2(x-2)^2$的对称轴上的一个动点,直线$x=t$平行于y轴,分别与直线$y=x$,抛物线交于点A,B.若$\triangle ABP$是以点A或点B为直角顶点的等腰直角三角形,则满足条件的t的值为_____.

三、**解答题**(15~18题,每题8分;19,20题,每题10分;21,22题,每题12分;23题,14分.共90分)

15. 已知二次函数的图象经过点$(0,-4)$,且当$x=2$时,y有最大值-2.求该二次函数的表达式.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

16. 如图，已知反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 与一次函数 $y=x+b$ 的图象交于 $A(1,-k+4)$，$B(k-4,-1)$ 两点.

(1) 试确定这两个函数的表达式；

(2) 根据图象写出使反比例函数的值大于一次函数的值的 x 的取值范围.



(第 16 题)

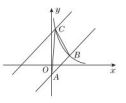
17. (1) 在同一直角坐标系中，画出函数 $y=x^2$，$y=(x+3)^2$，$y=(x-3)^2$ 的图象；

(2) 比较(1)中的三个函数图象之间的位置关系，写出这三个函数图象的顶点坐标和对称轴.

18. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y=x-2$ 与 y 轴相交于点 A，与反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 在第一象限内的图象相交于点 $B(m,2)$.

(1) 求该反比例函数的表达式；

(2) 若直线 $y=x-2$ 向上平移后与反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 在第一象限内的图象相交于点 C，且 $\triangle ABC$ 的面积为 18，求平移后的直线所对应的函数表达式.



(第 18 题)

19. 已知二次函数 $y=x^2+bx-c$ 的图象与 x 轴两个交点的坐标分别为 $(m,0)$ 和 $(-3m,0)$ $(m\neq 0)$.

(1) 求证：$4c=3b^2$；

(2) 若该函数图象的对称轴为直线 $x=1$，试求该二次函数的最小值.

20. 已知二次函数 $y=ax^2+bx-(a+b)$，a，b 是常数，且 $a\neq 0$.

(1) 判断该二次函数图象与 x 轴交点的个数；

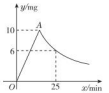
(2) 若该二次函数的图象过 $A(-1,4)$，$B(0,-1)$，$C(1,1)$ 三个点中的两个点，求该二次函数的表达式；

(3) 若 $a+b<0$，点 $P(2,m)$ $(m>0)$ 在该二次函数的图象上，求证：$a>0$.

21. 合肥市第三十八中学为预防秋季呼吸道疾病的传播，对教室进行“熏药消毒”. 已知药物在燃烧释放过程中，室内空气中每立方米含药量 y(mg)与燃烧时间 x(min)之间的关系如图所示(即图中线段 OA 和双曲线在 A 点右侧的部分). 根据图象所示信息，解答下列问题：

(1) 写出药物释放过程中，y 与 x 之间的函数表达式及自变量的取值范围；

(2) 据测定，只有当空气中每立方米的含药量不低于 5 mg 时，且至少持续作用 20 min 以上对预防才有作用，请问这次消毒是否有作用？



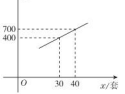
(第 21 题)

22. 国家推行“节能减排，低碳经济”政策后，某环保节能设备生产企业的产品供不应求. 若该企业的某种环保设备每月的产量保持在一定的范围内，每套产品的生产成本不高于 50 万元，每套产品的售价不低于 90 万元. 已知这种设备的月产量 x(套)与每套的售价 y_1(万元)之间的关系是 $y_1=170-2x$，月产量 x(套)与生产总成本 y_2(万元)之间存在如图所示的函数关系.

(1) 直接写出 y_2 与 x 之间的函数表达式；

(2) 求月产量 x 的范围；

(3) 当月产量为多少时，这种设备的月利润最大？最大月利润是多少？



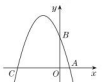
(第 22 题)

23. 如图所示，在平面直角坐标系 xOy 中，点 A，B，C 分别为坐标轴上的三个点，且 $OA=1$，$OB=3$，$OC=4$.

(1) 求经过 A，B，C 三点的抛物线所对应的函数表达式；

(2) 在平面直角坐标系 xOy 中是否存在一点 P，使得以点 A，B，C，P 为顶点的四边形为菱形？若存在，请求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由；

(3) 若点 M 为该抛物线上一动点，在(2)的条件下，求出当 $|PM-AM|$ 取最大值时点 M 的坐标，并直接写出 $|PM-AM|$ 的最大值.



(第 23 题)

荣德基 品质教辅

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 22 章达标检测卷

(150 分,120 分钟)

题 号	一	二	三	总 分
得 分				

姓名 学号 班级 学校

一、选择题(每题 4 分,共 40 分)

1. 下面给出的图形是相似图形的有(　　)

A. 两张孪生兄弟的照片　　B. 三角板的内、外三角形

C. 行书的"中"与楷书的"中"　　D. 同一棵树上摘下的两片树叶

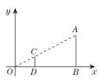
2. 在△ABC 中,点 D,E 分别为边 AB,AC 的中点,则四边形 $BDEC$ 与△ABC 的面积之比为(　　)

A. 1∶2　　B. 1∶3　　C. 3∶4　　D. 1∶4

3. 如图,AD 是直角三角形 ABC 斜边上的中线,$AE \perp AD$ 交 CB 的延长线于点 E,则图中一定相似的三角形是(　　)

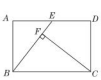
A. △AED 与△ACB　　B. △AEB 与△ACD　　C. △BAE 与△ACE　　D. △AEC 与△DAC


(第 3 题)


(第 4 题)


(第 6 题)


(第 7 题)


(第 8 题)

4. 如图,在平面直角坐标系中,有点 $A(6,3)$,$B(6,0)$,以原点 O 为位似中心,相似比为 $\frac{1}{3}$,在第一象限内把线段 AB 缩小后得到线段 CD,则点 C 的坐标为(　　)

A. (2,1)　　B. (2,0)　　C. (3,3)　　D. (3,1)

5. 已知 P 为线段 AB 的黄金分割点,且 $AP < PB$,则(　　)

A. $AP^2 = AB \cdot PB$　　B. $AB^2 = AP \cdot PB$

C. $PB^2 = AP \cdot AB$　　D. $AP^2 + BP^2 = AB^2$

6. 如图,为估算某河面的宽度(河两岸平行),在河对岸选定一个目标点 A,在近岸取点 B,C,D,使得 $AB \perp BC$,$CD \perp BC$,点 E 在 BC 上,并且点 A,E,D 在同一条直线上. 若测得 $BE = 20$ m,$CE = 10$ m,$CD = 20$ m,则河的宽度 AB 等于(　　)

A. 60 m　　B. 40 m　　C. 30 m　　D. 20 m

7. 如图,点 A,B,C,D 的坐标分别是(1,7),(1,1),(4,1),(6,1),以 C,D,E 为顶点的三角形与△ABC 相似,则点 E 的坐标不可能是(　　)

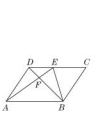
A. (6,0)　　B. (6,3)　　C. (6,5)　　D. (4,2)

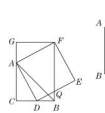
8. 如图,在矩形 $ABCD$ 中,$AB = 2$,$BC = 3$,点 E 是 AD 的中点,$CF \perp BE$ 于点 F,则 CF 等于(　　)

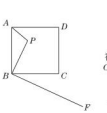
A. 2　　B. 2.4　　C. 2.5　　D. 2.25

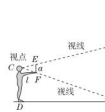
9. 如图,在平行四边形 $ABCD$ 中,E 是 CD 上的一点,$DE : EC = 2 : 3$,连接 AE,BE,BD,且 AE,BD 交于点 F,则 $S_{\triangle DEF} : S_{\triangle EBF} : S_{\triangle ABF}$ 为(　　)

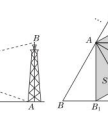
A. 2∶5∶25　　B. 4∶9∶25　　C. 2∶3∶5　　D. 4∶10∶25


(第 9 题)


(第 10 题)


(第 12 题)


(第 13 题)


(第 14 题)

10. 如图,在△ABC 中,$CB = CA$,$\angle ACB = 90°$,点 D 在边 BC 上(不与 B,C 重合),四边形 $ADEF$ 为正方形,过点 F 作 $FG \perp CA$,交 CA 的延长线于点 G,连接 FB,交 DE 于点 Q,给出以下结论:①$AC = FG$;②$S_{\triangle FAB} : S_{四边形CBFG} = 1 : 2$;③$\angle ABC = \angle ABF$;④$AD^2 = FQ \cdot AC$,其中正确的结论有(　　)

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

二、填空题(每题 5 分,共 20 分)

11. 假期,爸爸带小明去 A 地旅游. 小明想知道他所居住的城市与 A 地之间的距离,他在比例尺为 1∶500 000 的地图上测得所居住的城市距 A 地 32 cm,则小明所居住的城市与 A 地之间的实际距离为 _____ km.

12. 如图,已知点 P 是边长为 4 的正方形 $ABCD$ 内一点,且 $PB = 3$,$BF \perp BP$,垂足是点 B,若在射线 BF 上找一点 M,使以点 B,M,C 为顶点的三角形与△ABP 相似,则 BM 的长为 _____.

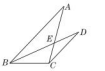
13. 如图,小明把手臂水平向前伸直,手持小尺竖直,瞄准小尺的两端 E,F,不断调整站立的位置,使其站立在点 D 处恰好能看到铁塔的顶部 B 和底部 A,设小明的手臂长 $l = 45$ cm,小尺长 $a = 15$ cm,点 D 到铁塔底部 A 的距离 $AD = 42$ m,则铁塔的高度是 _____ m.

14. 如图,正△ABC 的边长为 2,以 BC 边上的高 AB_1 为边作正△AB_1C_1,△ABC 与△AB_1C_1 公共部分的面积记为 S_1,再以正△AB_1C_1 的边 B_1C_1 上的高 AB_2 为边作正△AB_2C_2,△AB_1C_1 与△AB_2C_2 公共部分的面积记为 S_2,…,以此类推,则 S_n = _____. (用含 n 的式子表示)

三、解答题(15 ~ 18 题,每题 8 分;19,20 题,每题 10 分;21,22 题,每题 12 分;23 题,14 分. 共 90 分)

15. 若 $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} \neq 0$,且 $3x + 2y - z = 14$,求 x,y,z 的值.

16. 如图,在△ABC 中,$AB = 8$,$BC = 4$,$CA = 6$,$CD /\!/ AB$,BD 是 $\angle ABC$ 的平分线,BD 交 AC 于点 E,求 AE 的长.


(第 16 题)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

17. 如图，在边长为 a 的正方形 $ABCD$ 中，M 是 AD 的中点，能否在边 AB 上找一点 N（不与 A，B 重合），使得 $\triangle CDM$ 与 $\triangle MAN$ 相似？若能，请求出 AN 的长；若不能，请说明理由.

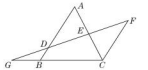


（第 17 题）

18. 如图，$AB /\!/ FC$，D 是 AB 上一点，DF 交 AC 于点 E，且 $DE = FE$，分别延长 FD 和 CB，相交于点 G.

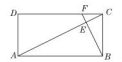
（1）求证：$\triangle ADE \backsim \triangle CFE$；

（2）若 $GB = 2$，$BC = 4$，$BD = 1$，求 AB 的长.



（第 18 题）

19. 如图，已知在矩形 $ABCD$ 中，F 是 DC 上一点，$BF \perp AC$，垂足为 E，$\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{1}{2}$，$\triangle FCE$ 的面积为 S_1，$\triangle BAE$ 的面积为 S_2，求 $\dfrac{S_1}{S_2}$ 的值.



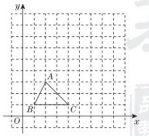
（第 19 题）

20. 如图，在边长为 1 个单位长度的小正方形网格中：

（1）画出 $\triangle ABC$ 向上平移 6 个单位长度，再向右平移 5 个单位长度后的 $\triangle A_1B_1C_1$；

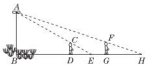
（2）以点 B 为位似中心，将 $\triangle ABC$ 放大为原来的 2 倍，得到 $\triangle A_2BC_2$，请在网格中画出 $\triangle A_2BC_2$；

（3）求 $\triangle CC_1C_2$ 的面积.



（第 20 题）

21. 如图，花丛中有一根路灯杆 AB. 在灯光下，小明在 D 点处的影长 $DE = 3$ m，沿 BD 方向行走到 G 点，$DG = 5$ m，这时小明的影长 $GH = 5$ m. 如果小明的身高为 1.7 m，求这根路灯杆 AB 的高度（结果精确到 0.1 m）.



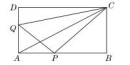
（第 21 题）

22. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB = 12$ cm，$BC = 6$ cm，点 P 沿 AB 边从点 A 开始向点 B 以 2 cm/s 的速度移动，点 Q 沿 DA 边从点 D 开始向点 A 以 1 cm/s 的速度移动. 如果 P，Q 同时出发，用 t（s）表示移动的时间（$0 \leqslant t \leqslant 6$），那么：

（1）当 t 为何值时，$\triangle QAP$ 是等腰直角三角形？

（2）根据四边形 $QAPC$ 面积的计算结果，能得出什么结论？

（3）当 t 为何值时，以点 Q，A，P 为顶点的三角形与 $\triangle ABC$ 相似？



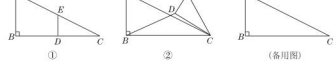
（第 22 题）

23. 如图①，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle B = 90°$，$BC = 2AB = 8$，点 D，E 分别是边 BC，AC 的中点，连接 DE. 将 $\triangle EDC$ 绕点 C 按顺时针方向旋转，记旋转角为 α.

（1）当 $\alpha = 0°$ 和 $\alpha = 180°$ 时，求 $\dfrac{AE}{BD}$ 的值；

（2）试判断当 $0° \leqslant \alpha < 360°$ 时，$\dfrac{AE}{BD}$ 的值有无变化？请仅就图②的情况给出证明；

（3）当 $\triangle EDC$ 旋转至 A，D，E 三点共线时，求线段 BD 的长.



（第 23 题）

荣德基 品质教辅

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

正文练习答案

第21章 二次函数与反比例函数

21.1 二次函数

1. C　2. B　3. B　4. D　5. D　6. C
7. C　8. C　9. B
10. B　**点拨**：设直线 $x=t$ 与 OA 交于点 C，与 OB 交于点 D. ∵ $AB\perp OB$，$AB=OB$，∴ $\angle AOB=45°$，∴ $\triangle OCD$ 是等腰三角形，即 $CD=OD=t$，
∴ $S=\frac{1}{2}\cdot t\cdot t=\frac{1}{2}t^2$. 故选 B.
11. B　**点拨**：由题意得 $\begin{cases}m^2+1=2,\\ m-1\neq 0,\end{cases}$
即 $\begin{cases}m=\pm 1,\\ m\neq 1,\end{cases}$
∴ $m=-1$. 故选 B.
12. **解**：(1) $(100+x)\quad(600-5x)$
(2) $y=-5x^2+100x+60\,000$
(3) y 是 x 的二次函数. 因为每棵树结的橙子数应不小于 0，所以自变量 x 的取值范围是 $0\le x\le 120$，且 x 为自然数.
13. **解**：(1) $S=n^2+1$. (2) 是二次函数.
14. **解**：(1) $S=x\left(\frac{12}{2}-x\right)$，即 $S=-x^2+6x\,(0<x<6)$.
(2)

x/m	1	2	3	4	5
S/m^2	5	8	9	8	5
设计费/元	5 000	8 000	9 000	8 000	5 000

由表格可得，当 $x=3$ 时，广告牌的设计费最高.
15. **解**：(1) ∵ 四边形 $ABCD$ 和 $EFGH$ 都是正方形，
∴ $\angle A=\angle D=\angle EHG=90°$
$EH=HG$，
∴ $\angle AEH+\angle AHE=\angle AHE+\angle DHG=90°$，
∴ $\angle AEH=\angle DHG$，
∴ $\triangle AEH\cong\triangle DHG$，
∴ $AE=DH=x$，
∴ $AH=AD-DH=2-x$，
∴ $EH=\sqrt{x^2+(2-x)^2}$，
∴ $y=EH^2=x^2+(2-x)^2$，
∴ $y=2x^2-4x+4$.
(2) 令 $y=2$，则 $2x^2-4x+4=2$，
整理得 $x^2-2x+1=0$，
解得 $x_1=x_2=1$，即 AE 的长为 1.

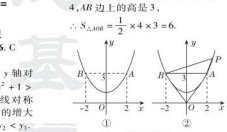
21.2 二次函数的图象和性质

第1课时　二次函数 $y=ax^2$ 的图象和性质

1. C　2. A　3. D　4. B　5. D
6. C　7. A
8. B　**点拨**：抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$，$y=x^2$ 的开口向上，抛物线 $y=-x^2$ 的开口向下，①错误；抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$，$y=x^2$，$y=-x^2$ 的顶点坐标都为 $(0,0)$，对称轴都为 y 轴，②③正确；④错误. 故选 B.
9. **错解**：当 $x=-1$ 时，$y=(-1)^2=1$；
当 $x=4$ 时，$y=4^2=16$.
∴ 在 $-1\le x\le 4$ 这个范围内，函数 $y=x^2$ 的最小值是 1，最大值是 16.
诊断：$-1\le x\le 4$ 既包含了正数、零，又包含了负数，因此在这个范围内对应的函数值 y 随 x 的变化情况要分段研究. 实际上，当 $x=0$ 时，函数取得最小值 0. 而当 $x=-1$ 时，$y=1$；当 $x=4$ 时，$y=16$，所以最大值为 16.
正解：∵ $-1\le x\le 4$ 包含了 $x=0$，∴ 函数 $y=x^2$ 的最小值为 0. 当 $x=-1$ 时，$y=1$；当 $x=4$ 时，$y=16$.
∴ 当 $-1\le x\le 4$ 时，函数 $y=x^2$ 的最大值为 16，最小值为 0.
10. **解**：(1) 根据题意，得
$m^2+3m-2=2$，且 $m+3\neq 0$，
∴ $m=-4$ 或 $m=1$.
(2) ∵ 函数图象的开口向下，
∴ $m+3<0$.
∴ $m=-4$.
∴ 当 $m=-4$ 时，该函数图象的开口向下.
(3) ∵ 函数有最小值，
∴ $m+3>0$.
∴ $m>-3$.
∴ $m=1$.
∴ 当 $m=1$ 时，该函数有最小值.
11. **解**：(1) 由题意得 $a-2<0$，解得 $a<2$.
(2) 由题意得 $3a-2<0$，解得 $a<\frac{2}{3}$.
(3) 由题意得 $|a+2|=\left|-\frac{1}{2}\right|$，
解得 $a_1=-\frac{5}{2}$，$a_2=-\frac{3}{2}$.
(4) 由题意得 $a^2+a=2$，解得 $a_1=-2$，$a_2=1$.
又由题意得 $a>0$，∴ $a=1$.
12. **解**：(1) 把点 $A(1,b)$ 的坐标代入 $y=2x-3$ 得 $b=2\times 1-3=-1$，
把点 $A(1,-1)$ 的坐标代入 $y=ax^2$ 得 $a=-1$.
(2) ∵ $a=-1$，
∴ 二次函数为 $y=-x^2$，它的图象开口向下，对称轴为 y 轴，
∴ 当 $x<0$ 时，y 随 x 的增大而增大.
(3) 解方程组 $\begin{cases}y=2x-3,\\ y=-x^2,\end{cases}$
得 $\begin{cases}x_1=1,\\ y_1=-1,\end{cases}\begin{cases}x_2=-3,\\ y_2=-9.\end{cases}$
∴ 二次函数 $y=ax^2\,(a\neq 0)$ 的图象与直线 $y=2x-3$ 的另一个交点 B 的坐标是 $(-3,-9)$.
13. **解**：(1) 将 $A(2,4)$ 的坐标代入 $y=ax^2$ 得 $4=4a$，∴ $a=1$.
∴ 抛物线对应的函数表达式为 $y=x^2$.
(2) 存在. 设存在一点 $P(x,0)$，使 $\triangle AOP$ 为等腰三角形.
由题意知 $OA=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$.
当 $OA=OP$ 时，$OP=2\sqrt{5}$，
∴ $P(2\sqrt{5},0)$ 或 $P(-2\sqrt{5},0)$.
当 $OA=AP$ 时，$(x-2)^2+16=20$，
∴ $x=0$（舍去）或 $x=4$.
∴ $P(4,0)$.
当 $OP=AP$ 时，$x^2=(x-2)^2+16$，
∴ $x=5$. ∴ $P(5,0)$.
综上可知，当点 P 的坐标为 $(2\sqrt{5},0)$，$(-2\sqrt{5},0)$，$(4,0)$ 或 $(5,0)$ 时，$\triangle AOP$ 为等腰三角形.

第2课时　二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象和性质——$y=ax^2+k$ 型

1. D　2. B　3. C　4. D　5. D　6. C
7. D
8. A　**点拨**：点 $A(-1,y_1)$ 关于 y 轴对称的点的坐标是 $(1,y_1)$. ∵ $a^2+1>0$，∴ 抛物线开口向上. 抛物线对称轴是 y 轴，在 y 轴右侧 y 随 x 的增大而增大. ∵ $1<2<3$，∴ $y_1<y_2<y_3$. 故选 A.
9. C　10. D　11. A
12. **解**：能. 设平移后的图象对应的二次函数表达式为 $y=\frac{1}{3}x^2+h$，将点 $(3,-3)$ 的坐标代入表达式，得 $h=-6$.
所以平移的方向是向下，平移的距离是 6 个单位长度.
点拨：二次函数图象上下平移的规律："上加下减". 本题易因对平移变化规律理解不透彻而致错.
13. **解**：(1) 由题意易知 $a=-\frac{1}{2}$，把点 $(0,2)$ 的坐标代入 $y=-\frac{1}{2}x^2+c$，得 $c=2$.
(2) 略.
14. **解**：(1) ∵ 点 A 为直线 $y=x+1$ 与 x 轴的交点，
∴ $A(-1,0)$. ∵ 点 B 的横坐标为 2，∴ 将 $x=2$ 代入 $y=x+1$ 可求得 $y=3$，
∴ $B(2,3)$.
∵ 抛物线的顶点在 y 轴上，
∴ 可设抛物线对应的函数表达式为 $y=ax^2+c$，把 A，B 两点的坐标代入可得 $\begin{cases}a+c=0,\\ 4a+c=3.\end{cases}$
解得 $\begin{cases}a=1,\\ c=-1.\end{cases}$
∴ 抛物线对应的函数表达式为 $y=x^2-1$.
(2) △ABM 为直角三角形，理由如下：由(1)中求得的抛物线对应的函数表达式为 $y=x^2-1$ 可知，点 M 的坐标为 $(0,-1)$，
∴ $AM=\sqrt{2}$，$AB=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$，$BM=\sqrt{2^2+[3-(-1)]^2}=2\sqrt{5}$.
∵ $AM^2+AB^2=2+18=20=BM^2$.
∴ △ABM 为直角三角形.
15. **解**：(1) 当 $x=2$ 时，$y=\frac{1}{2}\times 2^2+1=3$，
∴ 点 $A(2,3)$.
∵ 这个二次函数的图象关于 y 轴对称，∴ 点 $B(-2,3)$.
画出的二次函数图象及点 A，B 如图①所示.
(2) 在△AOB 中，∵ $AB=2-(-2)=4$，AB 边上的高是 3，
∴ $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times 4\times 3=6$.

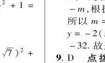


（第15题）

(3) 存在.
如图②，设点 $P\left(x,\frac{1}{2}x^2+1\right)$，则在 $\triangle APB$ 中，AB 边上的高为 $\left|\frac{1}{2}x^2+1-3\right|=\left|\frac{1}{2}x^2-2\right|$.
∵ $S_{\triangle APB}=\frac{1}{2}S_{\triangle AOB}$，
∴ $\left|\frac{1}{2}x^2-2\right|=\frac{1}{2}\times 3$，
解得 $x_1=1$，$x_2=-1$，$x_3=\sqrt{7}$，$x_4=-\sqrt{7}$.
当 $x=1$ 时，$y=\frac{1}{2}\times 1^2+1=\frac{3}{2}$；
当 $x=-1$ 时，$y=\frac{1}{2}\times(-1)^2+1=\frac{3}{2}$；
当 $x=\sqrt{7}$ 时，$y=\frac{1}{2}\times(\sqrt{7})^2+1=\frac{9}{2}$；
当 $x=-\sqrt{7}$ 时，$y=\frac{1}{2}\times(-\sqrt{7})^2+1=\frac{9}{2}$.
∴ 符合条件的点 P 有四个，分别是 $\left(1,\frac{3}{2}\right)$ 或 $\left(-1,\frac{3}{2}\right)$ 或 $\left(\sqrt{7},\frac{9}{2}\right)$ 或 $\left(-\sqrt{7},\frac{9}{2}\right)$.
16. **解**：(1) 由题意得 $k+4=2$，解得 $k=-2$.
易知 $y=ax^2+c$ 图象的顶点为 $(0,4)$，
∴ $c=4$.
把点 $(1,2)$ 的坐标代入 $y=ax^2+4$，得 $a+4=2$，解得 $a=-2$.
(2) 由(1)得二次函数表达式为 $y=-2x^2+4$，令 $y=m$，得 $2x^2+m-4=0$，
∴ $x=\pm\sqrt{\frac{4-m}{2}}\,(0<m<4)$.
设 B，C 两点的坐标分别为 (x_1,m)，(x_2,m)，则 $BC=|x_1|+|x_2|=2\sqrt{\frac{4-m}{2}}$.
∴ $W=OA^2+BC^2=m^2+4\cdot\frac{4-m}{2}=m^2-2m+8=(m-1)^2+7\,(0<m<4)$.
∴ 当 $m=1$ 时，W 取得最小值 7.

第3课时　二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象和性质——$y=a(x+h)^2$ 型

1. B　2. A　3. C
4. B　**点拨**：设 $B(-3-m,2)$，$C(-3+m,2)\,(m>0)$，则 $BC=2m$.
∵ △ABC 为正三角形，
∴ $AC=2m$，$\angle BAC=60°$.
易得 $2m\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=2$，解得 $m=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.
∴ $C\left(-3+\frac{2\sqrt{3}}{3},2\right)$.
设抛物线对应的函数表达式为 $y=a(x+3)^2$，将点 C 点坐标代入表达式，
有 $a\left(-3+\frac{2\sqrt{3}}{3}+3\right)^2=2$，
∴ $a=\frac{3}{2}$. ∴ $y=\frac{3}{2}(x+3)^2$.
当 $x=0$ 时，$y=\frac{27}{2}$.
∴ 此抛物线与 y 轴的交点坐标为 $\left(0,\frac{27}{2}\right)$.
5. B　6. D　7. A
8. D　**点拨**：由二次函数 $y=a(x+h)^2$ 的性质可知二次函数 $y=-2(x+m)^2$ 的图象的对称轴为直线 $x=-m$，根据题意，可知 $x=-m=-3$. 所以 $m=3$. 即二次函数的表达式为 $y=-2(x+3)^2$，所以当 $x=1$ 时，$y=-32$. 故选 D.
9. D　**点拨**：① 当 $x=0$ 或 $x=2$ 时，函数 $y=x^2-2x+1=(x-1)^2$ 的值为 1，∴ ①当 $x\le 0$ 时，y 有最小值 1；②当 $0<x<2$ 时，y 有最小值 0；③当 $x\ge 2$ 时，y 有最小值 1. ∵ 当 $a\le x\le a+1$ 时，函数 $y=x^2-2x+1$ 的最小值为 1，∴ $a+1=0$ 或 $a=2$. ∴ $a=-1$ 或 $a=2$.


（第9题答案）

10. A　11. A
12. B　**点拨**：二次函数 $y=3x^2+1$ 的图象开口向上，对称轴是 y 轴，顶点坐标是 $(0,1)$，当 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而增大；二次函数 $y=3(x-1)^2$ 的图象开口向上，对称轴是直线 $x=1$，顶点坐标是 $(1,0)$，当 $x>1$ 时，y 随 x 的增大而增大；二次函数 $y=3x^2+1$ 和 $y=3(x-1)^2$ 的图象的开口大小一样. 因此正确的说法有两个：①④. 故选 B.
13. **解**：(1) 由题意知 $h=-2$. 将点 $(1,-3)$ 的坐标代入 $y=a(x+2)^2$ 得 $a=-\frac{1}{3}$，所以抛物线对应的函数表达式为 $y=-\frac{1}{3}(x+2)^2$.
(2) 图象略.
(3) 当 $x<-2$ 时，y 随 x 的增大而增大；当 $x>-2$ 时，函数有最大值.
14. **解**：(1) $a=-\frac{1}{4}$，$h=-3$.
(2) 抛物线 $y=-\frac{1}{4}(x+3)^2$ 的对称轴为 $x=-3$，顶点坐标为 $(-3,0)$.
15. **解**：(1) 依题意将抛物线 $y=x^2$ 平移后为抛物线 $y=(x-a)^2$.
∵ $OA=OB$，点 A 的坐标为 $(a,0)$，点 B 的坐标为 $(0,a^2)$，
∴ $a^2=a$.
∵ $a\neq 0$，∴ $a=1$.
(2) 存在. 点 C 的坐标为 $(2,1)$，此时可得 $AB=AC$，$\angle BAC=90°$，
易知 $AB=AC=\sqrt{2}$，

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=1$.

16. 解:(1)在 $y=(x+2)^2$ 中,令 $y=0$,得 $x=-2$;令 $x=0$,得 $y=4$.

∴点 A,B 的坐标分别为 $(-2,0)$,$(0,4)$.

(2)∵点 A,B 的坐标分别为 $(-2,0)$,$(0,4)$,

∴ $OA=2,OB=4$.

$\therefore S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}OA\cdot OB=\frac{1}{2}\times2\times4=4$.

(3)抛物线的对称轴为直线 $x=-2$.

(4)存在.①以 OA 和 OB 为邻边可作平行四边形 P_1AOB,易求得 $P_1(-2,4)$;②以 AB 和 OA 为邻边可作平行四边形 P_2ABO,易求得 $P_2(-2,-4)$.

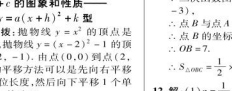
故点 P 的坐标为 $(-2,4)$或 $(-2,-4)$.

第4课时　二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象和性质——$y=a(x+h)^2+k$ 型

1. D　**点拨**:抛物线 $y=x^2$ 的顶点是 $(0,0)$,抛物线 $y=(x-2)^2-1$ 的顶点是 $(2,-1)$.由点 $(0,0)$ 到点 $(2,-1)$ 的平移方法可以是先向右平移 2 个单位长度,然后向下平移 1 个单位长度,故选 D.

2. B

3. A　**点拨**:如图,抛物线 $C_1:y=\frac{1}{2}(x-1)^2-1$ 沿水平方向向右平移 m 个单位长度,得到抛物线 $C_1:y=\frac{1}{2}(x-m-1)^2-1$,过点 Q 作 $QM\perp DD_1$ 于点 M.



(第3题)

∵ $D(1,-1),D_1(m+1,-1)$,

∴ Q 点的横坐标为 $\frac{m+2}{2}$,将 $x=\frac{m+2}{2}$ 代入 $y=\frac{1}{2}(x-1)^2-1$,得 $y=\frac{m^2}{8}-1$,

$\therefore Q\left(\frac{m+2}{2},\frac{m^2}{8}-1\right)$.

∵ $\angle DQD_1=60°$,

∴△ DQD_1 是等边三角形.

$\therefore QD=DD_1=1=m+1$.

在 Rt△QDM 中,由勾股定理得 $\left(\frac{m+2}{2}-1\right)^2+\left(\frac{m^2}{8}-1+1\right)^2=m^2$,解得 $m=\pm4\sqrt{3}$.

4. A

5. B　**点拨**:∵抛物线 $y=(x-m)^2+(m+1)$ 的顶点在第一象限,

$\therefore\begin{cases}m>0,\\m+1>0.\end{cases}\therefore m>0$.故选 B.

6. C　**7.** C　**8.** C

9. $-3\leqslant a\leqslant1$

10. D

11. 解:(1)由题意可设二次函数的表达式为 $y=a(x-4)^2-3(a\neq0)$.

易知点 A 坐标为 $(1,0)$,

把 $A(1,0)$ 的坐标代入,

得 $0=a(1-4)^2-3$,解得 $a=\frac{1}{3}$.

∴该二次函数的表达式为 $y=\frac{1}{3}(x-4)^2-3$.

(2)令 $x=0$,则 $y=\frac{1}{3}(0-4)^2-3=\frac{7}{3}$,∴$OC=\frac{7}{3}$.

∵二次函数图象的顶点坐标为 $(4,-3)$,

∴点 B 与点 A 关于直线 $x=4$ 对称.

∴点 B 的坐标为 $(7,0)$.

∴ $OB=7$.

$\therefore S_{\triangle OBC}=\frac{1}{2}\times7\times\frac{7}{3}=\frac{49}{6}$.

12. 解:(1)$a=\frac{1}{2},h=1,k=-5$.

(2)二次函数 $y=\frac{1}{2}-(x-1)^2-5$ 图象的开口向上,对称轴为直线 $x=1$,顶点坐标为 $(1,-5)$.

13. 解:(1)∵球从 O 点正上方 2 m 的 A 处发出,

∴抛物线 $y=a(x-6)^2+h$ 过点 $(0,2)$.

又∵$h=2.6$,

$\therefore2=a(0-6)^2+2.6$.

解得 $a=-\frac{1}{60}$.

故 y 与 x 的关系式为 $y=-\frac{1}{60}(x-6)^2+2.6$.

(2)当 $x=9$ 时,$y=-\frac{1}{60}\times(9-6)^2+2.6=2.45>2.43$,

∴球能越过球网.

当 $y=0$ 时,$-\frac{1}{60}(x-6)^2+2.6=0$,

解得 $x_1=6+2\sqrt{39},x_2=6-2\sqrt{39}$(舍去).

∵$6+2\sqrt{39}<18$,∴球会出边界.

[另解:将 $x=18$ 代入函数关系式得 $y=-\frac{1}{60}\times(18-6)^2+2.6=0.2>0$,此时球仍在空中运行,故会出边界]

(3)将 $x=0,y=2$ 代入 $y=a(x-6)^2+h$,得 $a=\frac{2-h}{36}$.

若球一定能越过球网,则当 $x=9$ 时,$y=\frac{2-h}{36}\cdot(9-6)^2+h=\frac{2+3h}{4}>2.43$①;

若球不出边界,则当 $x=18$ 时,$y=\frac{2-h}{36}\cdot(18-6)^2+h=8-3h\leqslant0$②.

由①②得 $h\geqslant\frac{8}{3}$.

14. 解:(1)由题意可知 $h=1$,则 $y=a(x-1)^2+k$.

将点 $(3,0)$,$(0,3)$ 的坐标分别代入上式,得 $\begin{cases}4a+k=0,\\a+k=3.\end{cases}$解得 $\begin{cases}a=-1,\\k=4.\end{cases}$

故抛物线对应的函数表达式为 $y=-(x-1)^2+4$.

(2)①当 $MA=MB$ 时,$M(0,0)$;

②当 $AB=AM$ 时,$M(0,-3)$;

③当 $AB=BM$ 时,$M(0,3+\sqrt{2})$或 $M(0,3-\sqrt{2})$.

所以点 M 的坐标为 $(0,0)$,$(0,-3)$,$(0,3+\sqrt{2})$或 $(0,3-\sqrt{2})$.

点拨:(1)利用待定系数法求出抛物线对应的函数表达式.(2)根据等腰三角形的两腰相等,利用分类讨论思想分成三种情况:①$MA=MB$,②$AB=AM$,③$AB=BM$,分别对这三种情况进行讨论.

第5课时　二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象和性质

1. B　**2.** C　**3.** D　**4.** C　**5.** C　**6.** D

7. D　**点拨**:由图象过 $A(m,n)$,$C(3-m,n)$ 可知,二次函数图象的对称轴为直线 $x=\frac{3}{2}$.由 $B(0,y_1)$,$D(\frac{7}{2},y_2)$,$E(2,y_3)$ 与对称轴的距离,即可判断 $y_1>y_3>y_2$.

8. B

9. D　**点拨**:由 $\begin{cases}y=ax^2+bx,\\y=ax+b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-\frac{a}{b},\\y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=1,\\y=a+b.\end{cases}$ 故二次函数 $y_1=ax^2+bx$ 与一次函数 $y_2=ax+b$ $(a\neq0)$ 的图象的交点为 $\left(-\frac{a}{b},0\right)$,$(1,a+b)$.

对于选项 A,由一次函数图象可知 $a>0,b>0$;由二次函数图象可知 $a>0,b>0$,则 $a+b>0$,不符合题意.

对于选项 B,由一次函数图象可知 $a>0,b<0$;由二次函数图象可知 $a>0,b<0$,由 $|a|>|b|$,可得 $a+b>0$,不符合题意.

对于选项 C,由一次函数图象可知 $a<0,b<0$;由二次函数图象可知 $a<0,b<0$,则 $a+b<0$,不符合题意.

对于选项 D,由一次函数图象可知 $a<0,b>0$;由二次函数图象可知 $a<0,b>0$,由 $|a|>|b|$,可得 $a+b<0$,符合题意.

10. A


第10题图

11. 解:(1)把 $A(0,3)$,$B\left(-4,-\frac{9}{2}\right)$ 的坐标分别代入 $y=-\frac{3}{16}x^2+bx+c$,得 $\begin{cases}c=3,\\-\frac{3}{16}\times16-4b+c=-\frac{9}{2},\end{cases}$

解得 $\begin{cases}b=\frac{9}{8},\\c=3.\end{cases}$

(2)有公共点.由(1)可得,该二次函数的表达式为 $y=-\frac{3}{16}x^2+\frac{9}{8}x+3$.

$b^2-4ac=\left(\frac{9}{8}\right)^2-4\times\left(-\frac{3}{16}\right)\times3=\frac{225}{64}>0$,

∴二次函数 $y=-\frac{3}{16}x^2+\frac{9}{8}x+3$ 的图象与 x 轴有两个公共点.

∵ $-\frac{3}{16}x^2+\frac{9}{8}x+3=0$ 的解为 $x_1=-2,x_2=8$,

∴公共点的坐标是 $(-2,0)$和$(8,0)$.

12. 解:(1)把点 $P(-2,3)$ 的坐标代入 $y=x^2+ax+3$,得 $3=(-2)^2-2a+3$,解得 $a=2$.

∵ $y=x^2+2x+3=(x+1)^2+2$.

∴图象的顶点坐标为 $(-1,2)$.

(2)①当 $m=2$ 时,$m^2+2=11$.

②$2\leqslant n\leqslant11$.

13. (1)证明:由题意得 $\begin{cases}y=kx+1,\\y=x^2-4x,\end{cases}$

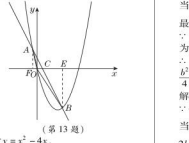
化简可得 $x^2-(4+k)x-1=0$,

∴ $\Delta=(4+k)^2+4>0$,

故直线 l 与该抛物线总有两个交点.

(2)解:当 $k=-2$ 时,$y=-2x+1$.

可设点 A 在点 B 左边,如图,过点 A 作 $AE\perp x$ 轴于点 F,过点 B 作 $BE\perp x$ 轴于点 E,



(第13题)

由 $\begin{cases}y=x^2-4x,\\y=-2x+1,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=1+\sqrt{2},\\y=-1-2\sqrt{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=1-\sqrt{2},\\y=2\sqrt{2}-1.\end{cases}$

∴ $A(1-\sqrt{2},2\sqrt{2}-1)$,$B(1+\sqrt{2},-1-2\sqrt{2})$.

∴ $AF=2\sqrt{2}-1$,$BE=1+2\sqrt{2}$,

易求得直线 $y=-2x+1$ 与 x 轴的交点 C 的坐标为 $\left(\frac{1}{2},0\right)$,

∴ $OC=\frac{1}{2}$.

$\therefore S_{\triangle OAB}=S_{\triangle AOC}+S_{\triangle BOC}$

$=\frac{1}{2}OC\cdot AF+\frac{1}{2}OC\cdot BE$

$=\frac{1}{2}OC\cdot(AF+BE)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times(2\sqrt{2}-1+1+2\sqrt{2})$

$=\sqrt{2}$.

14. 解:(1)将点 $(-2,4)$ 的坐标代入 $y=x^2+bx+c$,得 $4-2b+c=4$,∴$c=2b$.

(2)由题易知,$m=-\frac{b}{2},n=\frac{4c-b^2}{4}$,

∴ $n=\frac{8b-b^2}{4},b=-2m$.

∴ $n=-m^2-4m$.

(3)$y=x^2+bx+2b=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b^2}{4}+2b$,

图象的对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2}$.

当 $b\leqslant0$ 时,$c\leqslant0$,若函数的图象不经过第三象限,则 $c=0$.

此时 $y=x^2$,当 $-5\leqslant x\leqslant1$ 时,函数的最小值是 0,最大值是 25,

∴最大值与最小值之差是 25(不合题意,舍去).

当 $b>0$ 时,$c>0$,若函数的图象不经过第三象限,则 $b^2-4c\leqslant0$,

∴ $0<b\leqslant8$.

∴ $-4\leqslant-\frac{b}{2}<0$.

当 $-5\leqslant x\leqslant1$ 时,函数有最小值 $-\frac{b^2}{4}+2b$,

当 $-\frac{b}{2}\leqslant-2$,即 $b\geqslant4$ 时,函数有最大值 $1+3b$;

当 $-2<-\frac{b}{2}$,即 $b<4$ 时,函数有最大值 $25-3b$.

∵函数的最大值与最小值之差为 16,

∴当最大值为 $1+3b$ 时,$1+3b+\frac{b^2}{4}-2b=16$,

解得 $b=6$ 或 $b=-10$,

∵$4\leqslant b\leqslant8$,∴$b=6$.

当最大值为 $25-3b$ 时,$25-3b+\frac{b^2}{4}-2b=16$,

解得 $b=2$ 或 $b=18$,

∵$0<b<4$,∴$b=2$.

综上所述,$b=2$ 或 $b=6$.

* 第6课时　二次函数表达式的确定

1. B

2. 解:(1)由二次函数的图象经过点 $(1,-2)$,

得 $(a+1)(-a)=-2$,解得 $a_1=-2$,$a_2=1$.

当 $a=-2$ 时,二次函数的表达式为 $y=(x-2)(x+2-1)$,

即 $y=x^2-x-2$;

当 $a=1$ 时,二次函数的表达式为 $y=(x+1)(x-2)$,

即 $y=x^2-x-2$.

综上所述,该二次函数的表达式为 $y=x^2-x-2$.

(2)当 $y=0$ 时,$(x+a)(x-a-1)=0$,

解得 $x=-a$ 或 $x=a+1$,

所以二次函数的图象与 x 轴的交点是 $(-a,0)$,$(a+1,0)$.

当 $y=ax+b$ 的图象经过 $(-a,0)$ 时,$-a^2+b=0$,即 $b=a^2$;

当 $y=ax+b$ 的图象经过 $(a+1,0)$ 时,$a^2+a+b=0$,即 $b=-a^2-a$.

(3)由题易知二次函数图象的对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2}$.

当 P 在对称轴的左侧(含顶点)时,

因为 $(1,n)$ 与 $(0,n)$ 关于直线 $x=-\frac{1}{2}$ 对称,所以由 $m<n$,得 $0<x_0\leqslant-\frac{1}{2}$;

当 P 在对称轴的右侧时,

由 $m<n$,得 $-\frac{1}{2}<x_0<1$.

综上所述,x_0 的取值范围为 $0<x_0<1$.

3. 解:(1)由 $x^2-4=0$ 得,$x_1=-2,x_2=2$,

∵点 A 位于点 B 的左侧,

∴ $A(-2,0)$,

∵直线 $y=x+m$ 经过点 A,

∴ $-2+m=0$,

解得 $m=2$,

∴点 D 的坐标为 $(0,2)$,

∴ $AD=\sqrt{OA^2+OD^2}=2\sqrt{2}$.

(2)设新抛物线对应的函数表达式为 $y=x^2+bx+2$,

$y=x^2+bx+2=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+2-\frac{b^2}{4}$,

则点 C' 的坐标为 $\left(-\frac{b}{2},2-\frac{b^2}{4}\right)$,

∵CC' 平行于直线 AD,且易知 $C(0,-4)$,

∴直线 CC' 对应的函数表达式为 $y=x-4$,

∴ $2-\frac{b^2}{4}=-\frac{b}{2}-4$,

解得 $b_1=-4,b_2=6$.

∴新抛物线对应的函数表达式为 $y=x^2-4x+2$ 或 $y=x^2+6x+2$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. 解：(1) 由题意得 $\begin{cases}4a-2b+2=6,\\4a+2b+2=2.\end{cases}$

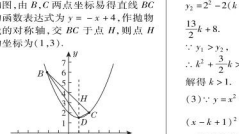
解得 $\begin{cases}a=\frac{1}{2},\\b=-1.\end{cases}$

∴ 抛物线的函数表达式为 $y=\frac{1}{2}x^2-x+2$.

(2) ∵ $y=\frac{1}{2}x^2-x+2=\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{3}{2}$，

∴ 顶点坐标为 $\left(1,\frac{3}{2}\right)$.

如图，由 B,C 两点坐标易得直线 BC 的函数表达式为 $y=-x+4$，作抛物线的对称轴，交 BC 于点 H，则点 H 的坐标为 $(1,3)$.



(第 4 题)

∴ $S_{\triangle BCD}=S_{\triangle BHD}+S_{\triangle DHC}=\frac{1}{2}\times\left(3-\frac{3}{2}\right)\times[1-(-2)]+\frac{1}{2}\times\left(3-\frac{3}{2}\right)\times(2-1)=3$.

即 $\triangle BCD$ 的面积为 3.

(3) 由 $\begin{cases}y=-\frac{1}{2}x+c,\\y=\frac{1}{2}x^2-x+2,\end{cases}$

消去 y 得到 $x^2-x+4-2c=0$.

当 $\Delta=0$ 时，直线与抛物线相切，

$1-4(4-2c)=0$，

∴ $c=\frac{15}{8}$.

当直线 $y=-\frac{1}{2}x+c$ 经过点 C 时，

$c=3$，

当直线 $y=-\frac{1}{2}x+c$ 经过点 B 时，

$c=5$.

∴ 直线 $y=-\frac{1}{2}x$ 向上平移 c 个单位长度所得的直线与抛物线段 BDC (包括端点 B,C) 部分有两个交点，

∴ $\frac{15}{8}<c\leqslant 3$.

阶段核心归类

1. B

2. 解：(1) 把点 $(1,k^2)$ 的坐标代入 $y=x^2-2(k-1)x+k^2-\frac{5}{2}k$，得 $k^2=1^2-2(k-1)+k^2-\frac{5}{2}k$，

解得 $k=\frac{2}{3}$.

(2) 把点 $(2k,y_1)$ 的坐标代入 $y=x^2-2(k-1)x+k^2-\frac{5}{2}k$，得 $y_1=(2k)^2-2(k-1)\cdot 2k+k^2-\frac{5}{2}k=k^2+\frac{3}{2}k$.

把点 $(2,y_2)$ 的坐标代入 $y=x^2-2(k-1)x+k^2-\frac{5}{2}k$，得

$y_2=2^2-2(k-1)\times 2+k^2-\frac{5}{2}k=k^2-\frac{13}{2}k+8$.

∵ $y_1>y_2$，

∴ $k^2+\frac{3}{2}k>k^2-\frac{13}{2}k+8$，

解得 $k>1$.

(3) ∵ $y=x^2-2(k-1)x+k^2-\frac{5}{2}k=(x-k+1)^2-\frac{1}{2}k-1$.

∴ 将抛物线向右平移 1 个单位长度得到新抛物线 $y=(x-k)^2-\frac{1}{2}k-1$.

当 $k<1$ 时，$1\leqslant x\leqslant 2$ 对应的新抛物线部分位于对称轴右侧，y 随 x 的增大而增大，

∴ 当 $x=1$ 时，$y_{最小}=(1-k)^2-\frac{1}{2}k-1=k^2-\frac{5}{2}k-\frac{1}{2}$，解得 $k_1=1$，$k_2=\frac{3}{2}$，都不符合题意，舍去；

当 $1\leqslant k\leqslant 2$ 时，$y_{最小}=-\frac{1}{2}k-1$，

∴ $-\frac{1}{2}k-1=-\frac{3}{2}$，解得 $k=1$；

当 $k>2$ 时，$1\leqslant x\leqslant 2$ 对应的新抛物线部分位于对称轴的左侧，y 随 x 的增大而减小，

∴ 当 $x=2$ 时，$y_{最小}=(2-k)^2-\frac{1}{2}k-1=k^2-\frac{9}{2}k+3=-\frac{3}{2}$，解得 $k_1=3$，$k_2=\frac{3}{2}$(舍去).

综上，$k=1$ 或 $k=3$.

3. D

4. D　**点拨**：∵一段抛物线 $L_1:y=-x(x-3)+c(0\leqslant x\leqslant 3)$ 与直线 $l_1:y=x+2$ 有唯一公共点，

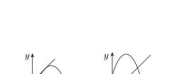
∴ 分两种情况：

①如图①，抛物线与直线相切，

由方程组 $\begin{cases}y=-x(x-3)+c,\\y=x+2,\end{cases}$

得 $x^2-2x+2-c=0$，则 $\Delta=(-2)^2-4(2-c)=0$，

解得 $c=1$，此时公共点为 $(1,3)$，符合题意.



①　②

(第 4 题)

②如图②，抛物线与直线不相切，且当 $0\leqslant x\leqslant 3$ 时只有一个交点，

∴ $\begin{cases}-0\times(0-3)+c>0+2,\\-3\times(3-3)+c\leqslant 3+2,\end{cases}$

∴ $2<c\leqslant 5$.

又 ∵ c 为整数，∴ c 为 3,4,5.

综上，c 为 1,3,4,5.

故选 D.

5. (1) 解：设 $y=0$，

则 $0=ax^2+bx-(a+b)$，

∵ $\Delta=b^2-4a[-(a+b)]=b^2+4ab+4a^2=(2a+b)^2\geqslant 0$，

∴ 方程有两个不相等的实根或两个相等的实根.

∴ 二次函数图象与 x 轴的交点的个数有两个或一个.

(2) 解：当 $x=1$ 时，$y=a+b-(a+b)=0$.

∴ 抛物线不经过点 C.

把 $A(-1,4)$，$B(0,-1)$ 的坐标分别代入，得 $\begin{cases}4=a-b-(a+b),\\-1=-(a+b),\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=3,\\b=-2,\end{cases}$

∴ 该二次函数的表达式为 $y=3x^2-2x-1$.

(3) 证明：当 $x=2$ 时，$y=m$，

∴ $m=4a+2b-(a+b)=3a+b>0$①，

∵ $a+b<0$.

∴ $-a-b>0$②，

①②相加得 $2a>0$，∴ $a>0$.

6. 解：(1) ∵ 抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 经过点 $A(-1,0)$，$B(3,0)$，

∴ $\begin{cases}-1-b+c=0,\\-9+3b+c=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}b=2,\\c=3,\end{cases}$

∴ 抛物线的表达式为 $y=-x^2+2x+3$.

$y=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$.

∴ $D(1,4)$.

(2) $\sqrt{13}$　**点拨**：∵ $B(3,0)$，$D(1,4)$，∴ BD 的中点 H 的坐标为 $(2,2)$，其关于 y 轴的对称点 H' 的坐标为 $(-2,2)$. 连接 $H'D$ 与 y 轴交于点 P，则 $PD+PH$ 最小，且最小值为 $\sqrt{(1+2)^2+(4-2)^2}=\sqrt{13}$.

7. 解：(1) 5；3

(2) ∵ $\max\{3x+1,-x+1\}=-x+1$，

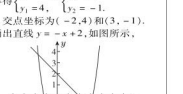
∴ $3x+1\leqslant -x+1$，解得 $x\leqslant 0$.

(3) 联立方程组 $\begin{cases}y=x^2-2x-4,\\y=-x+2,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x_1=-2,\\y_1=4,\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=3,\\y_2=-1.\end{cases}$

∴ 交点坐标为 $(-2,4)$ 和 $(3,-1)$.

画出直线 $y=-x+2$，如图所示，



(第 7 题)

观察函数图象可知，当 $x=3$ 时，$\max\{-x+2,x^2-2x-4\}$ 取得最小值 -1.

8. 解：(1) 设 $y=a(x-x_1)(x-x_2)$，

∵ $A(-1,0)$，$C(6,0)$，

∴ $y=a(x+1)(x-6)$，把点 $B(5,-6)$ 的坐标代入，得 $-6=a(5+1)(5-6)$，解得 $a=1$.

∴ $y=(x+1)(x-6)=x^2-5x-6$.

(2) 存在. 分别过点 P,B 作 $PM\perp x$ 轴，$BN\perp x$ 轴，垂足为点 M,N，

设点 $P(m,m^2-5m-6)$，四边形 $PACB$ 的面积是 S，则 $PM=-m^2+5m+6$，$AM=1+m$，$MN=5-m$，$CN=6-5=1$，$BN=6$.

∴ $S=S_{\triangle AMP}+S_{梯形PMNB}+S_{\triangle BNC}=\frac{1}{2}(-m^2+5m+6)(m+1)+\frac{1}{2}(6-m^2+5m+6)(5-m)+\frac{1}{2}\times 1\times 6=-3m^2+12m+36=-3(m-2)^2+48$.

∴ 当 $m=2$ 时，S 有最大值为 48.

∴ $P(2,-12)$，即当点 P 的坐标是 $(2,-12)$ 时，四边形 $PACB$ 的面积最大.

9. 解：(1) ∵ 抛物线过点 $B(6,0)$，$C(-2,0)$，

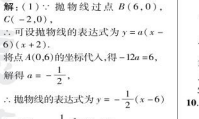
∴ 可设抛物线的表达式为 $y=a(x-6)(x+2)$.

将点 $A(0,6)$ 的坐标代入，得 $-12a=6$，

解得 $a=-\frac{1}{2}$，

∴ 抛物线的表达式为 $y=-\frac{1}{2}(x-6)(x+2)=-\frac{1}{2}x^2+2x+6$.

(2) 如图①，过点 P 作 $PM\perp OB$ 于点 M，交 AB 于点 N，作 $AG\perp PM$ 于点 G.



①　②

(第 9 题)

设直线 AB 的表达式为 $y=kx+m$，将点 $A(0,6)$，$B(6,0)$ 的坐标代入，得 $\begin{cases}m=6,\\6k+m=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-1,\\m=6,\end{cases}$

则直线 AB 的表达式为 $y=-x+6$，

设点 $P\left(t,-\frac{1}{2}t^2+2t+6\right)$，其中 $0<t<6$，则点 $N(t,-t+6)$，

∴ $PN=PM-MN=-\frac{1}{2}t^2+2t+6-(-t+6)=-\frac{1}{2}t^2+2t+6+t-6=-\frac{1}{2}t^2+3t$，

∴ $S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PAN}+S_{\triangle PBN}=\frac{1}{2}PN\cdot AG+\frac{1}{2}PN\cdot BM=\frac{1}{2}PN\cdot(AG+BM)=\frac{1}{2}PN\cdot OB=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}t^2+3t\right)\times 6=-\frac{3}{2}t^2+9t=-\frac{3}{2}(t-3)^2+\frac{27}{2}$.

∴ 当 $t=3$ 时，$\triangle PAB$ 的面积有最大值. 此时点 P 的坐标是 $\left(3,\frac{15}{2}\right)$.

∴ 当点 P 运动到点 $\left(3,\frac{15}{2}\right)$ 的位置时，$\triangle PAB$ 的面积有最大值.

(3) 存在.

如图②，若 $\triangle PDE$ 为等腰直角三角形，

则 $PD=PE$，

设点 P 的横坐标为 $n(0<n<6)$，

∴ $PD=-\frac{1}{2}n^2+2n+6-(-n+6)=-\frac{1}{2}n^2+3n$，$PE=\sqrt{2}|2-n|$，

∴ $-\frac{1}{2}n^2+3n=\sqrt{2}|2-n|$，

解得 $n=4$ 或 $n=5-\sqrt{17}$，

∴ $P(4,6)$ 或 $P(5-\sqrt{17},3\sqrt{17}-5)$.

10. 解：(1) 当 $n=5$ 时，

$y=\begin{cases}-x^2+5x+5(x\geqslant 5),\\-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}x+\frac{5}{2}(x<5).\end{cases}$

①将点 $P(4,b)$ 的坐标代入 $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}x+\frac{5}{2}$，可得 $b=\frac{9}{2}$.

②∵ $x\geqslant 5$ 时，当 $x=5$ 时 y 取得最大值，为 5；

$x<5$ 时，当 $x=\frac{5}{2}$ 时 y 取得最大值，为 $\frac{45}{8}$，

∴ 此函数的最大值为 $\frac{45}{8}$.

(2) 当 $2\leqslant n<\frac{8}{3}$ 或 $\frac{18}{5}<n<4$ 时，此函数的图象与线段 AB 只有一个交点.

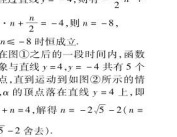
(3) 当函数图象上有 4 个点到 x 轴的距离等于 4 时，此函数图象与直线 $y=4$，$y=-4$ 恰有 4 个交点.

设 $x<n$ 时图象为 β，$x\geqslant n$ 时图象为 α.

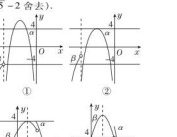
①当 n 很小时，函数图象与直线 $y=4$，$y=-4$ 始终有 4 个交点，不断增大 n，直到如图①所示的情况，此时 β 图要经过直线 $y=-4$，则有 $-\frac{1}{2}n^2+\frac{n}{2}\cdot n+\frac{n}{2}=-4$，则 $n=-8$，

故 $n\leqslant -8$ 时恒成立.

②在图①之后的一段时间内，函数图象与直线 $y=4$，$y=-4$ 共有 5 个交点，直到运动到如图②所示的情况，α 的顶点落在直线 $y=4$ 上，即 $\frac{n^2}{4}+n=4$，解得 $n=-2\sqrt{5}-2(n=2\sqrt{5}-2$ 舍去).



①　②



③　④

(第 10 题)

③在图②之后的一段时间内，不断增大 n(n 取正数)，直到如图③所示的情况.

对于 α，当 $x=n$ 时，$-n^2+n^2+n=4$，解得 $n=4$.

画此时 β 的顶点坐标好为 $(2,4)$，所以此时函数图象上到 x 轴的距离等于 4 的点恰好有 4 个.

④在图③之后的一段时间内，不断增大 n，函数图象与直线 $y=4$，$y=-4$ 共有 5 个点，直到运动到如图④所示的情况.

此时函数图象与直线 $y=4$，$y=-4$ 恰有 4 个交点，

解 $-\frac{1}{2}n^2+\frac{n}{2}\cdot n+\frac{n}{2}=4$，

得 $n=8$.

随着 n 的不断增大，函数图象与直线 $y=4$，$y=-4$ 始终有 4 个交点，故 $n\geqslant 8$ 时恒成立.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

综上所述，n 的取值范围是 $n\leqslant -8$ 或 $n=-2\sqrt{5}-2$ 或 $n=4$ 或 $n\geqslant 8$.

21.3 二次函数与一元二次方程

第 1 课时 二次函数与一元二次方程之间的关系

1. (1)两；　(2)一；=　(3)没有；<

2. D

3. A　**点拨**：关于 x 的一元二次方程 $(x+1)(x-2)-m=0$ 的解 x_1，x_2 可以看作二次函数 $y=(x+1)(x-2)$ 的图象与直线 $y=m(m>0)$ 的交点的横坐标.

∵二次函数 $y=(x+1)(x-2)$ 的图象与 x 轴的交点坐标为 $(-1,0)$，$(2,0)$，

∴当 $m>0$ 时，就是抛物线位于 x 轴上方的部分，此时 $x<-1$ 或 $x>2$.

又∵ $x_1<x_2$，∴ $x_1<-1<2<x_2$.

4. B

5. C　**点拨**：∵ $y=(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$，$a\neq b$，

∴ $(a+b)^2-4ab=(a-b)^2>0$.

∴函数 $y=(x+a)(x+b)$ 的图象与 x 轴有 2 个交点，即 $M=2$.

∵函数 $y=(ax+1)(bx+1)=abx^2+(a+b)x+1$，

∴当 $ab\neq 0$ 时，$(a+b)^2-4ab=(a-b)^2>0$，此时函数 $y=(ax+1)(bx+1)$ 的图象与 x 轴有 2 个交点，即 $N=2$，则 $M=N$.

当 $ab=0$ 时，令 $a=0$，∵ $a\neq b$，∴ $b\neq 0$，此时函数 $y=(ax+1)(bx+1)=bx+1$ 为一次函数，其图象与 x 轴有 1 个交点，即 $N=1$，则 $M=N+1$.

综上可知，$M=N$ 或 $M=N+1$.

6. C　**7.** C

8. B　**点拨**：抛物线的表达式为 $y=a(x+1)(x-3)$，

即 $y=ax^2-2ax-3a$，

∴ $y=a(x-1)^2-4a$，

∴当 $x=1$ 时，二次函数有最小值 $-4a$，①正确.

当 $x=4$ 时，$y=5a$，

∴若 $-1\leqslant x_0\leqslant 4$，则 $-4a\leqslant y_2\leqslant 5a$，②错误.

∵点 $C(4,5a)$ 关于直线 $x=1$ 的对称点为 $(-2,5a)$，

∴若 $y_2>y_1$，则 $x_2>4$ 或 $x_2<-2$，③错误.

∵ $b=-2a$，$c=-3a$，

∴方程 $cx^2+bx+a=0$ 化为 $-3ax^2-2ax+a=0$，

整理得 $3x^2+2x-1=0$，

解得 $x=-1$ 或 $x=\frac{1}{3}$，④正确.

故选 B.

9. A　**点拨**：根据函数的图象与坐标轴有三个交点，可得 $(-2)^2-4b>0$，解得 $b<1$. 但本题易忽略与 x 轴的交点不能在原点上，即 $b\neq 0$，否则将与坐标轴只有两个交点. 故选 A.

10. 解：(1)将点 $A(3,0)$，点 $B(-1,0)$ 的坐标分别代入 $y=x^2+bx+c$，

得 $\begin{cases}9+3b+c=0,\\1-b+c=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=-2,\\c=-3.\end{cases}$

∴抛物线的函数表达式为 $y=x^2-2x-3$.

(2)点 P 的坐标为 $(4,3)$ 或 $(8,3)$.

11. 解：(1)由题意得 $A\left(0,-\frac{1}{a}\right)$.

点 A 向右平移 2 个单位长度，得到点 $B\left(2,-\frac{1}{a}\right)$.

(2)∵点 A 与点 B 关于直线 $x=1$ 对称，

∴抛物线的对称轴为直线 $x=1$.

(3)①当 $a>0$ 时，$-\frac{1}{a}<0$.

分析图象可得：抛物线不可能同时经过点 A 和点 P，也不可能同时经过点 B 和点 Q，此时抛物线与线段 PQ 没有公共点.

②当 $a<0$ 时，$-\frac{1}{a}>0$.

分析图象可得：抛物线不可能同时经过点 A 和点 P；但当点 Q 在点 B 上方或与点 B 重合时，抛物线与线段 PQ 恰有一个公共点，此时 $-\frac{1}{a}\leqslant 2$，即 $a\leqslant -\frac{1}{2}$.

综上所述，当 $a\leqslant -\frac{1}{2}$ 时，抛物线与线段 PQ 恰有一个公共点.

12. 解：(1)∵ $y=x^2-4$ 的图象的顶点坐标为 $(0,-4)$，

且 $y=x^2-4$ 是 $y=-x+p$ 的伴随函数，

∴点 $(0,-4)$ 在一次函数 $y=-x+p$ 的图象上.

∴ $-4=0+p$，即 $p=-4$.

∴一次函数为 $y=-x-4$.

∵直线 $y=-x-4$ 与两坐标轴的交点分别为 $(0,-4)$，$(-4,0)$，

∴直线 $y=-x-4$ 与两坐标轴围成的三角形的面积为 $\frac{1}{2}\times 4\times 4=8$.

(2)设函数 $y=x^2+2x+n$ 的图象与 x 轴两个交点的横坐标分别为 x_1，x_2，则 $x_1+x_2=-2$，$x_1x_2=n$，

∴ $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{4-4n}$.

由题意得 $\sqrt{4-4n}=4$，解得 $n=-3$.

∴二次函数为 $y=x^2+2x-3=(x+1)^2-4$，

其图象的顶点坐标为 $(-1,-4)$.

∵ $y=x^2+2x-3$ 是 $y=mx-3(m\neq 0)$ 的伴随函数，

∴ $-4=-m-3$，解得 $m=1$.

13. 解：(1)∵抛物线 $y=x^2-3x+\frac{5}{4}$ 与 x 轴相交于 A，B 两点，与 y 轴相交于点 C，

∴令 $y=0$，得 $x=\frac{1}{2}$ 或 $x=\frac{5}{2}$，

令 $x=0$，得 $y=\frac{5}{4}$，

∴ $A\left(\frac{1}{2},0\right)$，$B\left(\frac{5}{2},0\right)$，$C\left(0,\frac{5}{4}\right)$.

设直线 BC 的表达式为 $y=kx+h$，

则有 $\begin{cases}\frac{5}{2}k+h=0,\\h=\frac{5}{4},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-\frac{1}{2},\\h=\frac{5}{4}.\end{cases}$

∴直线 BC 的表达式为 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}$.

(2)设点 D 的横坐标为 m，则点 D 的坐标为 $\left(m,m^2-3m+\frac{5}{4}\right)$，

点 E 的坐标为 $\left(m,-\frac{1}{2}m+\frac{5}{4}\right)$，

设 DE 的长度为 d，

∵点 D 是直线 BC 下方抛物线上一点，

∴ $d=-\frac{1}{2}m+\frac{5}{4}-\left(m^2-3m+\frac{5}{4}\right)$，

整理得 $d=-m^2+\frac{5}{2}m$，

∵ $-1<0$，

∴当 $m=-\frac{\frac{5}{2}}{2\times(-1)}=\frac{5}{4}$ 时，$d_{最大值}=\frac{0-\frac{25}{4}}{-4}=\frac{25}{16}$.

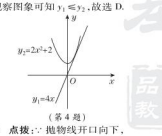
∴点 D 的坐标为 $\left(\frac{5}{4},-\frac{15}{16}\right)$.

第 2 课时 由二次函数的图象认识一元二次不等式的解集

1. D　**2.** B　**3.** C

4. D　**点拨**：由 $\begin{cases}y=4x,\\y=2x^2+2,\end{cases}$ 消去 y 得到 $x^2-2x+1=0$，∵ $\Delta=0$，∴直线 $y_1=4x$ 与抛物线 $y_2=2x^2+2$ 只有一个公共点，如图所示，

观察图象可知 $y_1\leqslant y_2$，故选 D.



(第 4 题)

5. B　**点拨**：∵抛物线开口向下，

∴ $a<0$.

∵抛物线的对称轴为直线 $x=1$，

∴ $-\frac{b}{2a}=1$.

∴ $b=-2a>0$.

∵抛物线与 y 轴的交点在 x 轴上方，

∴ $c>0$.

∴ $abc<0$，故①正确.

∵ $b=-2a$，

∴ $a+\frac{1}{2}b=a-a=0$.

∵ $c>0$，

∴ $a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{4}c>0$，故②错误.

∵ $C(0,c)$，$OA=OC$，

∴ $A(-c,0)$.

把 $A(-c,0)$ 的坐标代入 $y=ax^2+bx+c$，得 $ac^2-bc+c=0$，

∴ $ac-b+1=0$，故③错误.

∵ $A(-c,0)$，对称轴为直线 $x=1$，

∴ $B(2+c,0)$.

∴ $2+c$ 是关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根，故④正确.

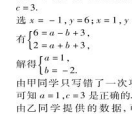
6. (1) $x_1=-1$，$x_2=2$

(2) $-1<x<2$

(3) $x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 2$

7. $x<-3$ 或 $x>1$　**8.** $x<-1$ 或 $x>4$

9. 解：画出抛物线 $y=x^2-x+\frac{1}{4}$(如图). 由图象可知抛物线与 x 轴只有一个公共点，为 $\left(\frac{1}{2},0\right)$，所以原方程的解为 $x_1=x_2=\frac{1}{2}$.



(第 9 题)

10. 解：(1)将点 $A(-3,-3)$，$B(1,-1)$ 的坐标分别代入 $y=kx+b$，

得 $\begin{cases}-3k+b=-3,\\k+b=-1,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=\frac{1}{2},\\b=-\frac{3}{2}.\end{cases}$

∴直线 l_1：$y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$.

联立 $y=ax^2+2x-1$ 与 $y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$，

得 $2ax^2+3x+1=0$.

∵抛物线 C 与直线 l 有交点，

∴ $9-8a\geqslant 0$，

解得 $a\leqslant \frac{9}{8}$ 且 $a\neq 0$.

(2)根据题意可得抛物线 C：$y=-x^2+2x-1$.

∴抛物线开口向下，对称轴为直线 $x=1$.

当 $y=-4$ 时，有 $-x^2+2x-1=-4$，

解得 $x=-1$ 或 $x=3$.

①在直线 $x=1$ 左侧，y 随 x 的增大而增大，

∴ $x=m+2=-1$ 时，y 有最大值 -4，

则 $m=-3$.

②在直线 $x=1$ 右侧，y 随 x 的增大而减小，

∴ $x=m+3$ 时，y 有最大值 -4.

综上所述，$m=-3$ 或 $m=3$.

(3)n 的取值范围为 $\frac{4}{9}\leqslant a<\frac{8}{9}$ 或 $a\leqslant -2$.

11. 解：(1)∵抛物线 $y=x^2+(k^2+k-6)x+3k$ 的对称轴是 y 轴，

∴ $k^2+k-6=0$，

解得 $k_1=-3$，$k_2=2$.

又∵抛物线 $y=x^2+(k^2+k-6)x+3k$ 与 x 轴最多有两个交点，

∴ $0-4\times 1\times 3k=-12k>0$，即 $k<0$.

∴ $k=-3$.

(2)由(1)得抛物线 $y=x^2-9$.

∵点 P 在抛物线 $y=x^2-9$ 上，且 P 到 y 轴的距离是 2，

∴点 P 的横坐标为 2 或 -2.

当 $x=2$ 时，$y=-5$；

当 $x=-2$ 时，$y=-5$，

∴点 P 的坐标为 $(2,-5)$ 或 $(-2,-5)$.

12. 解：(1)由甲同学提供的数据可知 $c=3$.

选 $x=-1$，$y=6$；$x=1$，$y=2$ 代入，

有 $\begin{cases}6=a-b+3,\\2=a+b+3,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=1,\\b=-2.\end{cases}$

由甲同学只写错了一次项的系数可知 $a=1$，$c=3$ 是正确的.

由乙同学提供的数据，可知 $c=-1$，

选 $x=-1$，$y=-2$；$x=1$，$y=2$ 代入，

有 $\begin{cases}-2=a-b-1,\\2=a+b-1,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=1,\\b=2.\end{cases}$

由乙同学只写错了常数项可知 $a=1$，$b=2$ 是正确的.

∴ $a=1$，$b=2$，$c=3$.

∴ $y=x^2+2x+3$.

(2) $\geqslant -1$

(3)方程 $ax^2+bx+c=k(a\neq 0)$ 有两个不相等的实数根，即 $x^2+2x+3-k=0$ 有两个不相等的实数根，则 $\Delta=4-4(3-k)>0$，

解得 $k>2$.

第 3 课时 二次函数图象信息题的四种常见类型

1. D　**2.** B　**3.** D　**4.** A

5. $x_1=0$，$x_2=2$　**6.** D

7. (1)由题意得 $B(-1,1)$ 或 $(-1,9)$，

∵ $-\frac{m}{2\times(-1)}=-1$，

$\frac{4\times(-1)\cdot n-m^2}{4\times(-1)}=1$ 或 $\frac{4\times(-1)\cdot n-m^2}{4\times(-1)}=9$.

解得 $m=-2$，$n=0$ 或 $n=8$.

∴ y_1 的解析式为 $y_1=-x^2-2x$ 或 $y_1=-x^2-2x+8$.

(2)①当 $y_1=-x^2-2x$ 时，解 $-x^2-2x=0$，得 $x=0$ 或 $x=-2$，

∴抛物线与 x 轴的交点是 $(0,0)$ 和 $(-2,0)$，

∵ y_2 随着 x 的增大而增大，且 y_2 过点 $A(-1,5)$，

∴ y_1 与 y_2 都经过 x 轴上的同一点 $(-2,0)$.

把点 $(-1,5)$，$(-2,0)$ 的坐标分别代入 $y_2=kx+b$，得 $\begin{cases}-k+b=5,\\-2k+b=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=5,\\b=10,\end{cases}$

∴ $y_2=5x+10$.

②当 $y_1=-x^2-2x+8$ 时，解 $-x^2-2x+8=0$，得 $x=-4$ 或 2，

∴抛物线与 x 轴的交点是 $(-4,0)$ 和 $(2,0)$.

∵ y_2 随着 x 的增大而增大，且 y_2 过点 $A(-1,5)$，∴ y_1 与 y_2 都经过 x 轴上的同一点 $(-4,0)$.

把点 $(-1,5)$，$(-4,0)$ 的坐标分别代入 $y_2=kx+b$，得 $\begin{cases}-k+b=5,\\-4k+b=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=\frac{5}{3},\\b=\frac{20}{3},\end{cases}$

∴ $y_2=\frac{5}{3}x+\frac{20}{3}$.

综上，y_2 的解析式为 $y_2=5x+10$ 或 $y_2=\frac{5}{3}x+\frac{20}{3}$.

21.4 二次函数的应用

第 1 课时 求几何图形面积的最值问题

1. B　**2.** B

3. $-\frac{7}{2}\leqslant m\leqslant 21$　**4.** $-4\leqslant m\leqslant -2$

5. B　**6.** D

7. 150　**点拨**：设 $AB=x$ m，矩形 $ABCD$ 的面积为 S m^2，则 $BC=\frac{1}{2}(900-3x)$m，

由题意可得 $S=x\times\frac{1}{2}(900-3x)=$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$-\frac{3}{2}(x^2-300x)=-\frac{3}{2}(x-150)^2+33\,750$，

∴当 $x=150$ 时，S 取得最大值，此时，$S=33\,750$。

∴ $AB=150$ m.

8. (1) 88 m²　(2) $\frac{5}{2}$ m

9. 解：(1) 设 $AB=m$ 米，则 $AD=BC=(100-2m)$ 米，

根据题意得 $m(100-2m)=450$，解得 $m_1=5$，$m_2=45$，

当 $m=5$ 时，$100-2m=90>20$，不合题意舍去；

当 $m=45$ 时，$100-2m=10$，

答：AD 的长为 10 米.

(2) 设 $AD=x$ 米，矩形菜园 $ABCD$ 的面积为 S 平方米，

则 $S=\frac{1}{2}x(100-x)=-\frac{1}{2}(x-50)^2+1\,250$，

若 $a\geqslant 50$，则当 $x=50$ 时，S 的最大值为 1 250；

若 $0<a<50$，则当 $0<x\leqslant a$ 时，S 随 x 的增大而增大，

∴当 $x=a$ 时，S 的最大值为 $50a-\frac{1}{2}a^2$.

综上所述，当 $a\geqslant 50$ 时，矩形菜园 $ABCD$ 面积的最大值为 1 250 平方米；当 $0<a<50$ 时，矩形菜园 $ABCD$ 面积的最大值为 $\left(50a-\frac{1}{2}a^2\right)$ 平方米.

10. 解：(1) ∵矩形的一边长为 x 米，周长为 16 米，

∴其邻边长为 $(8-x)$ 米，

∴ $S=x(8-x)=-x^2+8x$，其中 $0<x<8$.

(2) 能. 理由如下：

若设计费能达到 24 000 元，

则当设计费为 24 000 元时，面积为 $24\,000\div 2\,000=12$（平方米），

即 $-x^2+8x=12$，

解得 $x=2$ 或 $x=6$，

∴设计费能达到 24 000 元.

(3) ∵ $S=-x^2+8x=-(x-4)^2+16$，

∴当 $x=4$ 时，$S_{最大}=16$.

∴当 $x=4$ 时，矩形的面积最大，为 16 平方米；设计费最多，最多是 $2\,000\times 16+32\,000$（元）.

11. 解：由题意可知，$BP=(12-2t)$ mm，$BQ=4t$ mm.

∴ $S=\frac{1}{2}BP\cdot BQ=\frac{1}{2}(12-2t)\cdot 4t$，整理，得 $S=-4t^2+24t$，易知 $0<t<6$.

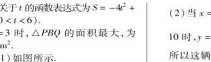
∵ $S=-4t^2+24t=-4(t-3)^2+36$，

∴当 $t=3$ 时，S 取得最大值，为 36.

故 S 关于 t 的函数表达式为 $S=-4t^2+24t(0<t<6)$.

当 $t=3$ 时，$\triangle PBQ$ 的面积最大，为 36 mm².

12. 解：(1) 如图所示.



（第 12 题）

设截掉的正方形边长为 x 分米，

由题意可得 $(12-2x)(8-2x)=32$，

即 $x^2-10x+16=0$，

解得 $x=2$ 或 $x=8$（舍去），

答：裁掉的正方形边长为 2 分米.

(2) 设总费用为 y 元，

则 $y=2(12-2x)(8-2x)+0.5\times[2x(12-2x)+2x(8-2x)]$

$=4x^2-60x+192$

$=4(x-7.5)^2-33$，

又∵ $12-2x\leqslant 5(8-2x)$，

∴ $x\leqslant 3.5$，

∴ $4>0$，

∴当 $x<7.5$ 时，y 随 x 的增大而减小，

∴当 $x=3.5$ 时，y 取得最小值，最小值为 31.

答：裁掉的正方形边长为 3.5 分米时，总费用最低，最低费用为 31 元.

第 2 课时　与“抛物线”型有关的最值问题

1. C

2. B　**点拨**：由题意得，当 $x=-10$ 时，$y=-\frac{1}{400}(-10-80)^2+16=-\frac{81}{4}+16=-\frac{17}{4}$.

故选 B.

3. 20 s　**4.** 4　**5.** D　**6.** B

7. 解：(1) 根据题意得 $B(0,4)$，$C\left(3,\frac{17}{2}\right)$.

把 $B(0,4)$，$C\left(3,\frac{17}{2}\right)$ 的坐标分别代入 $y=-\frac{1}{6}x^2+bx+c$，得

$\begin{cases}c=4,\\-\frac{1}{6}\times 3^2+3b+c=\frac{17}{2}.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}b=2,\\c=4.\end{cases}$

所以该抛物线对应的函数表达式为 $y=-\frac{1}{6}x^2+2x+4$，

即 $y=-\frac{1}{6}(x-6)^2+10$.

所以 $D(6,10)$.

所以拱顶 D 到地面 OA 的距离为 10 m.

(2) 当 $x=\frac{12}{2}-4=2$ 或 $x=\frac{12}{2}+4=10$ 时，$y=\frac{22}{3}>6$，

所以这辆货运汽车能安全通过.

(3) 令 $y=8$，则 $-\frac{1}{6}(x-6)^2+10=8$，解得 $x_1=6+2\sqrt{3}$，$x_2=6-2\sqrt{3}$，则 $x_1-x_2=4\sqrt{3}$.

所以两排灯的水平距离最小是 $4\sqrt{3}$ m.

8. 解：(1) 设水柱所在抛物线（第一象限部分）的函数表达式为 $y=a(x-3)^2+5(a\neq 0)$，

由题意，得 $0=9a+5$，

解得 $a=-\frac{5}{9}$，

∴水柱所在抛物线（第一象限部分）的函数表达式为 $y=-\frac{1}{5}(x-3)^2+5(0<x<8)$.

(2) 当 $y=1.8$ 时，有 $-\frac{1}{5}(x-3)^2+5=1.8$，

解得 $x_1=-1$（舍去），$x_2=7$，

∴为了不被淋湿，身高 1.8 米的王师傅站立时必须在离水池中心 7 米以内.

(3) 当 $x=0$ 时，$y=-\frac{1}{5}(x-3)^2+5=\frac{16}{5}$.

设改造后水柱所在抛物线（第一象限部分）的函数表达式为 $y=-\frac{1}{5}x^2+bx+\frac{16}{5}$，

∵该函数图象过点 $(16,0)$，

∴ $0=-\frac{1}{5}\times 16^2+16b+\frac{16}{5}$，解得 $b=3$，

∴改造后水柱所在抛物线（第一象限部分）的函数表达式为 $y=-\frac{1}{5}x^2+3x+\frac{16}{5}=-\frac{1}{5}\left(x-\frac{15}{2}\right)^2+\frac{289}{20}$.

∴扩建改造后喷水池水柱的最大高度为 $\frac{289}{20}$ 米.

9. 解：(1) 当 $y=15$ 时，$15=-5x^2+20x$，

解得 $x_1=1$，$x_2=3$，

答：在飞行过程中，当小球的飞行高度为 15 m 时，飞行时间是 1 s 或 3 s.

(2) 当 $y=0$ 时，$0=-5x^2+20x$，

解得 $x_1=0$，$x_2=4$. $4-0=4(s)$，

答：在飞行过程中，小球从飞出到落地所用时间是 4 s.

(3) $y=-5x^2+20x=-5(x-2)^2+20$，

∴当 $x=2$ 时，y 取得最大值，$y_{最大}=20$.

答：在飞行过程中，小球飞行高度第 2 s 时最大，最大高度是 20 m.

第 3 课时　实际应用中的一般最值问题

1. B　**2.** D

3. 解：(1) $y=300+20x$

(2) $W=(300+20x)(60-40-x)=-20x^2+100x+6\,000$.

4. C

5. 解：(1) $y=2x+40$.

(2) 根据题意得 $w=(145-x-80-5)(2x+40)=-2x^2+80x+2\,400=-2(x-20)^2+3\,200$，

∵ $-2<0$，∴函数有最大值，

∴当 $x=20$ 时，w 有最大值，为 3 200，

∴第 20 天的利润最大，最大利润是 3 200 元.

6. 解：(1) 设 y 与 x 之间的函数关系式为 $y=kx+b(k\neq 0)$，

由题意得 $\begin{cases}44k+b=72,\\48k+b=64,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=-2,\\b=160,\end{cases}$

所以 y 与 x 之间的函数关系式是 $y=-2x+160(40\leqslant x\leqslant 80)$.

(2) 由题意得，W 与 x 的函数关系式为

$W=(x-40)(-2x+160)=-2x^2+240x-6\,400=-2(x-60)^2+800$，

当 $x=60$ 时，W 最大，是 800，

所以当销售单价为 60 元时，日销售利润最大，最大日销售利润是 800 元.

7. 解：(1) $y=-10x+500(30\leqslant x\leqslant 38)$.

(2) 设每天扣除捐赠后可获得利润 w 元，

则 $w=(x-20-a)(-10x+500)=-10x^2+(10a+700)x-500a-10\,000(30\leqslant x\leqslant 38)$.

易知，此二次函数图象的对称轴为直线 $x=35+\frac{1}{2}a$，且 $0<a\leqslant 6$，则 $35<35+\frac{1}{2}a\leqslant 38$，

∴当 $x=35+\frac{1}{2}a$ 时，w 取得最大值.

∴ $\left(35+\frac{1}{2}a-20-a\right)\left[-10\left(35+\frac{1}{2}a\right)+500\right]=1\,960$，

解得 $a_1=2$，$a_2=58$（不合题意，舍去）.

∴ $a=2$.

8. 解：(1) $q=-x+14$，其中 $2\leqslant x\leqslant 10$.

(2) ①当每天的半成品食材能全部销售时，有 $p\leqslant q$，即 $\frac{1}{2}x+8\leqslant -x+14$，解得 $x\leqslant 4$.

又∵ $2\leqslant x\leqslant 10$，

∴ $2\leqslant x\leqslant 4$.

②由①可知，当 $2\leqslant x\leqslant 4$ 时，$y=(x-2)p=(x-2)\cdot\left(\frac{1}{2}x+8\right)=\frac{1}{2}x^2+7x-16$.

当 $4<x\leqslant 10$ 时，$y=(x-2)q-2(p-q)=(x-2)(-x+14)-2\left[\frac{1}{2}x+8-(-x+14)\right]$

$=-x^2+13x-16$.

∴ $y=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2+7x-16(2\leqslant x\leqslant 4),\\-x^2+13x-16(4<x\leqslant 10).\end{cases}$

(3) $\frac{13}{2}$ t；**点拨**：当 $2\leqslant x\leqslant 4$ 时，$y=\frac{1}{2}x^2+7x-16=\frac{1}{2}(x+7)^2-\frac{81}{2}$，

∴当 $2\leqslant x\leqslant 4$ 时，y 随 x 的增大而增大.

∴当 $x=4$ 时，y 有最大值，$y_{最大}=\frac{1}{2}\times 4^2+7\times 4-16=20$.

当 $4<x\leqslant 10$ 时，$y=-x^2+13x-16=-\left(x-\frac{13}{2}\right)^2+\frac{105}{4}$，

∴ $-1<0$，$4<\frac{13}{2}\leqslant 10$，

∴当 $x=\frac{13}{2}$ 时，y 有最大值 $\frac{105}{4}$.

∴ $20<\frac{105}{4}$，

∴当 x 为 $\frac{13}{2}$ 元/千克时，利润 y 有最大值.

要使每天的利润不低于 24 百元，则当 $2\leqslant x\leqslant 4$ 时，显然不符合.

故 $y=-\left(x-\frac{13}{2}\right)^2+\frac{105}{4}\geqslant 24$，解得 $5\leqslant x\leqslant 8$.

∵要尽可能地减少半成品食材的浪费，

∴ x 应定为 5 元/千克.

9. 解：(1) 与 x 的函数关系式为 $y=kx+b$，

将 $(30,100)$，$(35,50)$ 代入 $y=kx+b$，

得 $\begin{cases}30k+b=100,\\35k+b=50,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=-10,\\b=400.\end{cases}$

∴ y 与 x 的函数关系式为 $y=-10x+400$.



第 9 题答案

(2) 设这款电动牙刷每天的销售利润为 w 元，由题意得

$w=(x-20)(-10x+400)$

$=-10x^2+600x-8\,000$

$=-10(x-30)^2+1\,000$，

∵ $-10<0$，

∴当 $x=30$ 时，w 有最大值，w 最大值为 1 000.

答：这款电动牙刷销售单价定为 30 元时，每天销售利润最大，最大销售利润为 1 000 元.

(3) 设捐款后每天利润为 z 元，

由题意可得

$z=-10x^2+600x-8\,000-200$

$=-20x^2+600x-8\,200$，

令 $z=550$，即

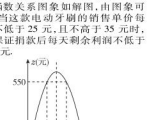
$-10x^2+600x-8\,200=550$，

$-10(x^2-60x+900)=-250$，

$x^2-60x+900=25$，

解得 $x_1=25$，$x_2=35$，

画出每天利润利润 z 关于销售单价 x 的函数关系图象如解图，由图象可得：当这款电动牙刷的销售单价每支不低于 25 元，且不高于 35 元时，可保证捐款后每天利润不低于 550 元.



（第 9 题）

阶段核心归类

1. 解：(1) $y=-\frac{3}{64}x^2+11$

(2) 设顶点 C 与水面的距离不大于 5 m 时，$h\geqslant 6$，把 $h=6$ 代入 $h=-\frac{1}{128}(t-19)^2+8(0\leqslant t\leqslant 40)$，解得 $t_1=35$，$t_2=3$.

$35-3=32$(h).

答：需 32 h 禁止船只通行.

2. 解：(1) 根据题意知此时抛物线的顶点 G 的坐标为 $(7,3.2)$，

∴设抛物线对应的函数表达式为 $y=a(x-7)^2+3.2$.

将点 $C(4,1.8)$ 的坐标代入，得 $49a+3.2=1.8$，解得 $a=-\frac{1}{35}$.

∴排球飞行的高度 y 与水平距离 x 之间的函数表达式为 $y=-\frac{1}{35}(x-7)^2+\frac{16}{5}$.

(2) 由题意知，当 $x=9.5$ 时，$y=-\frac{1}{35}(9.5-7)^2+\frac{16}{5}=3.02<3.1$，

故这次能可以拦网成功.

(3) 设抛物线对应的函数表达式为 $y=a(x-7)^2+h$，将点 $C(0,1.8)$ 的坐标代入，得 $49a+h=1.8$，即 $a=\frac{1.8-h}{49}$，

∴此时抛物线对应的函数表达式为 $y=\frac{1.8-h}{49}(x-7)^2+h$.

根据题意，得 $\begin{cases}\frac{4(1.8-h)}{49}+h>2.43,\\\frac{121(1.8-h)}{49}+h\leqslant 9,\end{cases}$

解得 $h\geqslant 3.025$. 故排球飞行的最大高度 h 的取值范围是 $h\geqslant 3.025$.

3. 解：(1) $y=-\frac{1}{2}x+55$

(2) 依题意，得 $W=(y-18)\cdot m$，

∴ $W=\begin{cases}(40-0.8)(5\leqslant x\leqslant 30),\\(40-0.8)(5x+30)(30\leqslant x\leqslant 50).\end{cases}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

整理，得 $W=$

$$\begin{cases}110x+1\,100 (1\leqslant x\leqslant 30),\\ -\dfrac{5}{2}x^2+160x+1\,850 (31\leqslant x\leqslant 50).\end{cases}$$

当 $1\leqslant x\leqslant 30$ 时，

W 随 x 的增大而增大，

∴当 $x=30$ 时，W 取得最大值，为 $110\times 30+1\,100=4\,400$.

当 $31\leqslant x\leqslant 50$ 时，

$W=-\dfrac{5}{2}x^2+160x+1\,850=-\dfrac{5}{2}(x-32)^2+4\,410$，

∵ $-\dfrac{5}{2}<0$，

∴当 $x=32$ 时，W 取得最大值 4 410.

综上所述，x 为 32 时，当天的销售利润 W（元）最大，最大利润为 4 410 元.

4. 解：(1) 设 $AE=a$ m，由题意得 $AE\cdot AD+2BE\cdot BC$，$AD=BC$，

∴ $BE=\dfrac{1}{2}a$ m，$AB=\dfrac{3}{2}a$ m.

由题意得 $2x+3a+2\cdot\dfrac{1}{2}a=80$，

∴ $a=20-\dfrac{1}{2}x$.

∴ $y=AB\cdot BC=\dfrac{3}{2}a\cdot x=\dfrac{3}{2}\left(20-\dfrac{1}{2}x\right)x$.

即 $y=-\dfrac{3}{4}x^2+30x (0<x<40)$.

(2) ∵ $y=-\dfrac{3}{4}x^2+30x=-\dfrac{3}{4}(x-20)^2+300$，

∴当 $x=20$ 时，y 有最大值，最大值为 300.

5. 解：(1) 由题意可知，$\angle B=60°$，$BP=(3-t)$ cm，$BQ=t$ cm. 若 $\triangle PBQ$ 是直角三角形，则 $\angle BPQ=30°$ 或 $\angle BQP=30°$，于是 $BQ=\dfrac{1}{2}BP$ 或 $BP=\dfrac{1}{2}BQ$，

即 $t=\dfrac{1}{2}(3-t)$ 或 $3-t=\dfrac{1}{2}t$，解得 $t=1$ 或 $t=2$，即当 t 为 1 或 2 时，$\triangle PBQ$ 是直角三角形.

(2) 过点 P 作 $PM\perp BC$ 于点 M，易知 $BM=\dfrac{1}{2}BP=\dfrac{1}{2}(3-t)$ cm.

∴ $PM=\sqrt{BP^2-BM^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(3-t)$ cm.

∴ $S_{四边形APQC}=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle PBQ}=\dfrac{1}{2}\times 3\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}t\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}(3-t)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}t^2-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}t+\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$，即 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{4}t^2-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}t+\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$，易知 $0<t<3$.

∵ $y=\dfrac{\sqrt{3}}{4}t^2-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}t+\dfrac{9\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(t-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{27\sqrt{3}}{16}$，

∴当 $t=\dfrac{3}{2}$ 时，y 取得最小值，为 $\dfrac{27\sqrt{3}}{16}$.

即当 t 为 $\dfrac{3}{2}$ 时，四边形 $APQC$ 的面积最小，最小面积为 $\dfrac{27\sqrt{3}}{16}$ cm^2.

6. 解：(1) 由题意可知，空调的采购数量为 x_1 台，冰箱的采购数量为 $(20-x_1)$ 台，则

$$\begin{cases}x_1\geqslant\dfrac{11}{9}(20-x_1),\\ -20x_1+1\,500\geqslant 1\,200,\end{cases}$$

解得 $11\leqslant x_1\leqslant 15$. ∵ x_1 为整数，

∴ x_1 可取的值为 11，12，13，14，15.

∴该商家共有 5 种进货方案.

(2) 设总利润为 W 元，$y_2=-10x_2+1\,300=-10(20-x_1)+1\,300=10x_1+1\,100$，

则 $W=(1\,760-y_1)x_1+(1\,700-y_2)x_2=1\,760x_1-(-20x_1+1\,500)x_1+(1\,700-10x_1-1\,100)(20-x_1)=1\,760x_1+20x_1^2-1\,500x_1+10x_1^2-8000x_1+12\,000=30(x_1-9)^2+9\,570$.

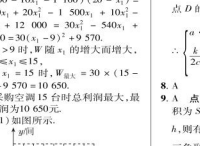
当 $x_1>9$ 时，W 随 x_1 的增大而增大，

∵ $11\leqslant x_1\leqslant 15$，

∴当 $x_1=15$ 时，$W_{最大}=30\times(15-9)^2+9\,570=10\,650$.

答：采购空调 15 台时总利润最大，最大利润为 10 650 元.

7. 解：(1) 如图所示.



(第 7 题)

(2) 设 $y=kx+b$，将 $(200,60)$，$(220,50)$ 代入，得 $\begin{cases}200k+b=60,\\ 220k+b=50,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=-\dfrac{1}{2},\\ b=160.\end{cases}$

∴ $y=-\dfrac{1}{2}x+160 (170\leqslant x\leqslant 240)$.

(3) $w=xy=x\left(-\dfrac{1}{2}x+160\right)=-\dfrac{1}{2}x^2+160x=-\dfrac{1}{2}(x-160)^2+12\,800$.

∵ $-\dfrac{1}{2}<0$，抛物线的对称轴为直线 $x=160$，

∴在 $170\leqslant x\leqslant 240$ 范围内，w 随 x 的增大而减小.

∴当 $x=170$ 时，w 取得最大值，最大值为 12 750.

答：宾馆每间标准房的价格定为 170 元时，客房的日营业额最大，最大为 12 750 元.

21.5 反比例函数

第 1 课时 认识反比例函数

1. D **2.** D **3.** D

4. A **点拨**：先根据关于 x 轴对称的点的坐标特征确定 A' 的坐标为 $(1,3)$，再把 A' 的坐标代入 $y=\dfrac{k}{x}$，即可得到 k 的值.

5. A

6. B **点拨**：根据反比例函数图象上点的坐标特征可得出 $mn=6$，列表找出所有 m，n 的值，根据表格中 $mn=6$ 所占比例即可得出结果.

7. C **点拨**：设点 A 的坐标为 $(a,0)$，点 C 的坐标为 $\left(c,\dfrac{k}{c}\right)$，则 $a\cdot\dfrac{k}{c}=12$，

点 D 的坐标为 $\left(\dfrac{a+c}{2},\dfrac{k}{2c}\right)$，

∴ $\begin{cases}a\cdot\dfrac{k}{c}=12,\\ \dfrac{k}{2c}=\dfrac{\frac{k}{a+c}}{2},\end{cases}$ 解得 $k=4$.

8. A

9. A **点拨**：对于选项 A，设三角形面积为 S，一边长为 a，该边上的高为 h，则有 $a=\dfrac{2S}{h}$；对于选项 B，设等腰三角形的周长为 C，底边长为 a，腰长为 b，则有 $a=C-2b$；对于选项 C，设圆的周长为 C，半径为 r，则有 $C=2\pi r$；对于选项 D，设圆的面积为 S，半径为 r，则有 $S=\pi r^2$. 观察可得，只有选项 A 中的两个变量满足反比例关系.

10. D

11. A **点拨**：本题易忽略反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 中 $k\neq 0$，而直接由 $a^2-2=-1$ 得 $a=\pm 1$.

12. 解：(1) 设 $y_1=k_1x^2$，$y_2=\dfrac{k_2}{x}$ $(k_1\neq 0,k_2\neq 0)$，

则 $y=k_1x^2+\dfrac{k_2}{x}$.

将 $x=1$，$y=3$ 和 $x=-1$，$y=1$ 分别代入，

得 $\begin{cases}k_1+k_2=3,\\ k_1-k_2=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k_1=2,\\ k_2=1.\end{cases}$

∴ y 与 x 之间的函数表达式为 $y=2x^2+\dfrac{1}{x}$.

(2) 当 $x=-\dfrac{1}{2}$ 时，$y=2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{-\frac{1}{2}}=-\dfrac{3}{2}$.

13. 解：(1) 假设 y 与 x 是正比例函数关系，则可设 $y=k_1x$ $(k_1\neq 0)$，把 $x=-2$，$y=-\dfrac{3}{2}$ 代入，得 $k_1=-\dfrac{3}{4}$，所以 $y=-\dfrac{3}{4}x$.

把 $x=4$，$y=-\dfrac{3}{4}$ 代入 $y=-\dfrac{3}{4}x$，等式不成立，所以 y 不是 x 的正比例函数.

假设 y 与 x 是反比例函数关系，则可设 $y=\dfrac{k_2}{x}$ $(k_2\neq 0)$，把 $x=-2$，$y=\dfrac{3}{2}$ 代入，得 $k_2=-3$，所以 $y=-\dfrac{3}{x}$. 把 $x=4$，$y=-\dfrac{3}{4}$ 代入 $y=-\dfrac{3}{x}$，等式成立，所以 y 是 x 的反比例函数.

(2) 该函数的表达式为 $y=-\dfrac{3}{x}$.

补充表格如下：

x	-3	-2	-1	1	2	3	4
y	1	$\frac{3}{2}$	3	-3	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{3}{4}$

14. 解：(1) 电流 I（A）与电阻 $R(\Omega)$ 之间的函数表达式为 $I=\dfrac{220}{R}(R>0)$，

它是我们学过的反比例函数.

(2) 填表如下：

R/Ω	20	40	60	80	100
$I/$A	11	$\frac{11}{2}$	$\frac{11}{3}$	$\frac{11}{4}$	$\frac{11}{5}$

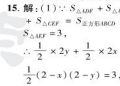
(3) 当 R 越来越大时，I 越来越小；当 R 越来越小时，I 越来越大.

15. 解：(1) ∵ $S_{\triangle ABF}+S_{\triangle ABE}+S_{\triangle CEF}=S_{矩形ABCD}-S_{\triangle AEF}=3$，

∴ $\dfrac{1}{2}\times 2y+\dfrac{1}{2}\times 2x+\dfrac{1}{2}(2-x)(2-y)=3$，

整理，得 $xy=2$，即 $y=\dfrac{2}{x}$.

(2) 反比例函数. (3) $0<x<2$.



第 15 题图

第 2 课时 反比例函数的图象和性质

1. B **2.** D

3. D **点拨**：∵ $A(-1,m)$，$B(1,m)$，∴点 A 与点 B 关于 y 轴对称.

∵ $y=x$，$y=-\dfrac{2}{x}$ 的图象都关于原点对称，∴选 A，B 错误.

∵ $n>0$，∴ $m-n<m$，

由 $B(1,m)$，$C(2,m-n)$ 可知，在对称轴的右侧，y 随 x 的增大而减小，

对于二次函数，只有 $a<0$ 时，在对称轴的右侧，y 随 x 的增大而减小，

∴选项 D 正确.

4. D

5. C **点拨**：根据反比例函数的图象位于第二、四象限知 $k<0$，根据二次函数的图象可知 $a>0$，$b<0$，∴函数 $y=kx+b$ 的大致图象经过第二、三、四象限. 故选 C.

6. A **7.** D **8.** B

9. A **点拨**：∵反比例函数 $y=\dfrac{6}{x}$ 中，$k=6>0$，∴该反比例函数在 $x>0$ 内，y 随 x 的增大而减小，当 $x=3$ 时，$y=\dfrac{6}{3}=2$；当 $x=1$ 时，$y=\dfrac{6}{1}=6$，∴当 $1<x<3$ 时，$2<y<6$.

∴ y 的最小整数值是 3. 故选 A.

10. B **点拨**：先根据反比例函数的表达式判断出函数图象所在的象限及在每个象限内函数的增减性，再根据 $x_1<x_2<0<x_3$ 即可得出结论.

∵反比例函数 $y=\dfrac{3}{x}$ 中，$k=3>0$，

∴此函数图象的两个分支分别位于第一、三象限，且在每一个象限内 y 随 x 的增大而减小.

∵ $x_1<x_2<0<x_3$，

∴点 (x_1,y_1)，(x_2,y_2) 在第三象限，点 (x_3,y_3) 在第一象限.

∴ $y_3<y_1<0<y_2$.

11. 解：(1) 把点 $A(3,2)$ 的坐标代入 $y=\dfrac{m}{x}$，可得 $m=3\times 2=6$，

∴反比例函数的表达式为 $y=\dfrac{6}{x}$.

∵ $OB=4$，∴ $B(0,-4)$.

把点 $A(3,2)$，$B(0,-4)$ 的坐标代入 $y=kx+b$，可得 $\begin{cases}3k+b=2,\\ b=-4,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=2,\\ b=-4.\end{cases}$

∴一次函数的表达式为 $y=2x-4$.

(2) 不等式组 $0<\dfrac{m}{x}<kx+b$ 的解集为 $x>3$.

12. 解：(1) ∵一次函数 $y=kx+b$ $(k,b$ 是常数，$k\neq 0)$ 的图象过 $A(1,3)$，$B(-1,-1)$ 两点，

∴ $\begin{cases}k+b=3,\\ -k+b=-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=2,\\ b=1.\end{cases}$

即该一次函数的表达式是 $y=2x+1$.

(2) ∵点 $(2a+2,a^2)$ 在一次函数 $y=2x+1$ 的图象上，

∴ $a^2=2(2a+2)+1$，解得 $a=-1$ 或 $a=5$.

即 a 的值是 -1 或 5.

(3) 反比例函数 $y=\dfrac{m+1}{x}$ 的图象在第一、三象限.

理由：∵点 $C(x_1,y_1)$ 和点 $D(x_2,y_2)$ 在一次函数 $y=2x+1$ 的图象上，$m=(x_1-x_2)(y_1-y_2)$，

∴假设 $x_1<x_2$，则 $y_1<y_2$，此时 $m=(x_1-x_2)(y_1-y_2)>0$，

假设 $x_1>x_2$，则 $y_1>y_2$，此时 $m=(x_1-x_2)(y_1-y_2)>0$.

由上可得，$m>0$，∴ $m+1>0$，

∴反比例函数 $y=\dfrac{m+1}{x}$ 的图象在第一、三象限.

13. 解：(1) ∵点 $A(-1,a)$ 在反比例函数 $y=\dfrac{-8}{x}$ 的图象上，

∴ $a=\dfrac{-8}{-1}=8$.

∴ $A(-1,8)$.

∵点 $B(0,7)$，

∴设直线 AB 的表达式为 $y=kx+7$.

∵直线 AB 过点 $A(-1,8)$，

∴ $8=-k+7$，解得 $k=-1$.

∴直线 AB 的表达式为 $y=-x+7$.

(2) ∵将直线 AB 向下平移 9 个单位长度后得到直线 CD 的表达式为 $y=-x-2$，

∴ $D(0,-2)$.

∴ $BD=7+2=9$.

联立得 $\begin{cases}y=-x-2,\\ y=-\dfrac{8}{x},\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=-4,\\ y=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=2,\\ y=-4.\end{cases}$

∴ $C(-4,2)$，$E(2,-4)$.

如图，连接 BC，则 $\triangle BCD$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}\times 9\times 4=18$.



(第 13 题)

由平行线间的距离处处相等，可得 $\triangle ACD$ 与 $\triangle BCD$ 面积相等，

∴ $\triangle ACD$ 的面积为 18.

(3) 不等式 $mx+n\leqslant\dfrac{-8}{x}$ 的解集是 $-4\leqslant x<0$ 或 $x\geqslant 2$.

14. 解：(1) 把点 $A(1,a)$ 的坐标代入 $y=-x+3$，得 $a=-1+3=2$，

∴ $A(1,2)$.

把 $A(1,2)$ 的坐标代入 $y=\dfrac{k}{x}$，得 $k=1\times 2=2$.

∴反比例函数的表达式为 $y=\dfrac{2}{x}$.

(2) ∵一次函数 $y=-x+3$ 的图象与 x 轴交于点 C，∴ $C(3,0)$.

设 $P(x,0)$，∴ $PC=|3-x|$.

∵ $S_{\triangle APC}=\dfrac{1}{2}|3-x|\times 2=5$，

∴ $x=-2$ 或 $x=8$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∴点 P 的坐标为 $(-2,0)$ 或 $(8,0)$.

第 3 课时　反比例函数的几何性质

1. A　**点拨**:∵四边形 $OABC$ 是矩形,

∴ $AB=OC$, $OA=BC$.

设点 B 的坐标为 (a,b),则点 E 的坐标为 $\left(a,\frac{k}{a}\right)$.

∵ D 为 AB 的中点,∴ $D\left(\frac{1}{2}a,b\right)$.

∵ D 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 的图象上,

∴ $\frac{1}{2}ab=k$,即 $ab=2k$.

∵ $S_{\triangle ODE}=S_{矩形OABC}-S_{\triangle AOD}-S_{\triangle OCE}-S_{\triangle BDE}=ab-\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}a\cdot\left(b-\frac{k}{a}\right)=3$,

∴ $ab-\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}k-\frac{1}{4}ab+\frac{1}{4}k=3$,

解得 $k=4$.

2. B　**点拨**:根据反比例函数 k 的几何意义可知:$\triangle AOP$ 的面积为 $\frac{1}{2}k_1$,$\triangle BOP$ 的面积为 $\frac{1}{2}k_2$,

∴ $\triangle AOB$ 的面积为 $\frac{1}{2}k_1-\frac{1}{2}k_2$.

∴ $\frac{1}{2}k_1-\frac{1}{2}k_2=4$,即 $k_1-k_2=8$.

3. B　**4.** C

5. C　**点拨**:由正方形 $OABC$ 的边长是 6,得到点 M 的横坐标和点 N 的纵坐标都为 6,可得 $M\left(6,\frac{k}{6}\right)$,$N\left(\frac{k}{6},6\right)$;根据 $S_{\triangle OAM}=S_{正方形OABC}-S_{\triangle ABM}-S_{\triangle OCN}-S_{\triangle OAN}$,列方程求得 $k=24$(负值舍去),从而得到 $M(6,4)$,$N(4,6)$.作点 M 关于 x 轴的对称点 M',连接 NM'交 x 轴于点 P,则 NM'的长即为 $PM+PN$ 的最小值,根据勾股定理即可得到结果.

6. A　**7.** D　**8.** D

9. C　**点拨**:∵反比例函数 $y=-\frac{2}{x}$ 的图象上的点关于 y 轴对称点在反比例函数 $y=\frac{2}{x}$ 的图象上,

∴由方程组 $\begin{cases}y=\frac{2}{x},\\y=-x+m\end{cases}$ 得 $x^2-mx+2=0$.

∵反比例函数 $y=\frac{2}{x}$ 的图象与一次函数 $y=-x+m$ 的图象有两个不同的交点,

∴方程 $x^2-mx+2=0$ 有两个不相等的实数根.

∴ $\Delta=m^2-8>0$.

∴ $m>2\sqrt{2}$ 或 $m<-2\sqrt{2}$.

10. -5　**点拨**:由 k 的几何意义可知 $|k|=|xy|=AB\cdot BC=5$.又由图象可知,其一个分支在第四象限,所以 $k<0$.因此 $k=-5$.

易错总结:已知矩形或三角形的面积求反比例函数中 k 的值时,要注意图象的位置.当图象在第一、三象限时,k 取正数;当图象在第二、四象限时,k 取负数;当未给出图象的位置时,k 取两个值.

11. 解:(1)∵ $A(n,-2)$,$B(-1,4)$ 是一次函数 $y=kx+b$ 和反比例函数 $y=\frac{m}{x}$ 的图象的两个交点,

∴ $4=\frac{m}{-1}$,解得 $m=-4$.

∴ $y=-\frac{4}{x}$.

∴ $-2=-\frac{4}{n}$,解得 $n=2$.

∴ $A(2,-2)$.

将 $A(2,-2)$,$B(-1,4)$ 两点的坐标代入 $y=kx+b$,得 $\begin{cases}2k+b=-2,\\-k+b=4,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=-2,\\b=2.\end{cases}$

∴反比例函数的表达式为 $y=-\frac{4}{x}$,一次函数的表达式为 $y=-2x+2$.

(2)设直线 $y=-2x+2$ 与 y 轴的交点为 C,当 $x=0$ 时,$y=-2\times0+2=2$.

∴点 C 的坐标是 $(0,2)$.

∵ $A(2,-2)$,$B(-1,4)$,

∴ $S_{\triangle AOB}=S_{\triangle AOC}+S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}\times2\times2+\frac{1}{2}\times2\times1=3$.

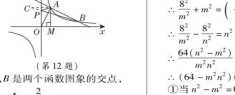
12. 解:(1)∵ $\triangle AOM$ 的面积为 1,

∴ $\frac{1}{2}|k|=1$,

∵ $k>0$,∴ $k=2$.

∴反比例函数的表达式为 $y=\frac{2}{x}$.

(2)如图,作点 A 关于 y 轴的对称点 C,连接 BC 交 y 轴于点 P,连接 PA,此时 $PA+PB$ 的值最小.



(第 12 题)

由 A,B 是两个函数图象的交点,

可联立 $\begin{cases}y=\frac{2}{x},\\y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2},\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x_1=1,\\y_1=2,\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=4,\\y_2=\frac{1}{2}.\end{cases}$

∴ $A(1,2)$,$B\left(4,\frac{1}{2}\right)$.

∴ $C(-1,2)$.

设 $y_{BC}=ax+b$,则 $\begin{cases}-a+b=2,\\4a+b=\frac{1}{2},\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=-\frac{3}{10},\\b=\frac{17}{10},\end{cases}$

∴ $y_{BC}=-\frac{3}{10}x+\frac{17}{10}$.∴ $P\left(0,\frac{17}{10}\right)$.

∴ $PA+PB=BC=\sqrt{5^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{109}}{2}$.

13. 解:(1)当 $a=-2$ 时,$A(-2,m)$.将点 A 的坐标代入 $y=\frac{8}{x}$ 中得:$m=\frac{8}{-2}=-4$,

∴ $A(-2,-4)$,$B(-2,0)$.

①$C(1,3)$.②∵ $B'(-2,0)$,$P(t,0)$.

第一种情况:当点 B 在点 P 的右边时,如图①,$BP=-2-t$,

∴ $x_C=x_{P'}=t$,$PC=BP=-2-t$,

∴ $C(t,t+2)$.

第二种情况:当点 B 在点 P 的左边时,如图②,$BP=2+t$,

∴ $x_C=x_{P'}=t$,$PC=BP=2+t$,

∴ $C(t,t+2)$.

综上,点 C 的坐标为 $(t,t+2)$.

∵点 C 在双曲线 $y=\frac{8}{x}$ 上,

∴ $t(t+2)=8$,解得 $t=2$ 或 $t=-4$.

(2)作 $DE\perp y$ 轴交 y 轴于点 E,

将 $y_A=m$ 代入 $y=\frac{8}{x}$ 得:$x_A=\frac{8}{m}$,

∴ $A\left(\frac{8}{m},m\right)$,

∴ $AO^2=OB^2+AB^2=\frac{8^2}{m^2}+m^2$,

将 $y_D=n$ 代入 $y=-\frac{8}{x}$ 得:$x_D=-\frac{8}{n}$,∴ $D\left(-\frac{8}{n},n\right)$,

∴ $DO^2=DE^2+OE^2=\left(-\frac{8}{n}\right)^2+n^2$,

∴ $\frac{8^2}{m^2}+m^2=\left(-\frac{8}{n}\right)^2+n^2$,

∴ $\frac{8^2}{m^2}-\frac{8^2}{n^2}=n^2-m^2$,

∴ $\frac{64(n^2-m^2)}{m^2n^2}=n^2-m^2$,

∴ $(64-m^2n^2)(n^2-m^2)=0$,

①当 $n^2-m^2=0$ 时,$n^2=m^2$,

∵ $m<0$,$n>0$,

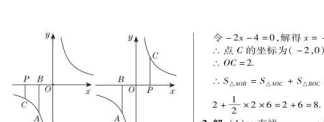
∴ $m+n=0$.

②当 $64-m^2n^2=0$ 时,$m^2n^2=64$,

∵ $m<0$,$n>0$,

∴ $mn=-8$.

综上可知:$m+n=0$ 或 $mn=-8$.



(第 13 题)

14. 解:(1)∵ $A(5,0)$,∴ $OA=5$,

又∵ $OC:OA=2:5$,

∴ $OC=5\times\frac{2}{5}=2$.

∴点 C 的坐标为 $(0,-2)$.

∵点 B 的坐标为 $(0,3)$,$BD=OC$,

∴点 D 的坐标为 $(-2,3)$.

将点 $D(-2,3)$ 的坐标代入 $y=\frac{a}{x}$,得 $a=-6$.

∴反比例函数的表达式为 $y=-\frac{6}{x}$.

将 $A(5,0)$,$C(0,-2)$ 的坐标分别代入 $y=kx+b$ 得

$\begin{cases}0=5k+b,\\-2=b.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=\frac{2}{5},\\b=-2.\end{cases}$

∴一次函数的表达式为 $y=\frac{2}{5}x-2$.

(2)$x<0$.

第 4 课时　用反比例函数比例系数 k 的几何意义解决与面积相关的问题

1. 解:(1)将点 $A(-3,m+8)$ 的坐标代入 $y=\frac{m}{x}$ 得,

$\frac{m}{-3}=m+8$,解得 $m=-6$.

∴ $m+8=-6+8=2$,反比例函数的表达式为 $y=-\frac{6}{x}$.

∴点 A 的坐标为 $(-3,2)$,

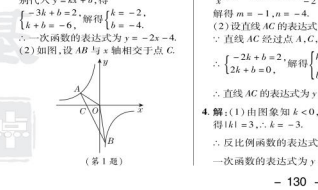
将点 $B(n,-6)$ 的坐标代入 $y=-\frac{6}{x}$,得 $-\frac{6}{n}=-6$,解得 $n=1$,

∴点 B 的坐标为 $(1,-6)$.

将点 $A(-3,2)$,$B(1,-6)$ 的坐标分别代入 $y=kx+b$,得 $\begin{cases}-3k+b=2,\\k+b=-6,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-2,\\b=-4.\end{cases}$

∴一次函数的表达式为 $y=-2x-4$.

(2)如图,设 AB 与 y 轴相交于点 C.



(第 1 题)

令 $-2x-4=0$,解得 $x=-2$,

∴点 C 的坐标为 $(-2,0)$,

∴ $OC=2$.

∴ $S_{\triangle AOB}=S_{\triangle AOC}+S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}\times2\times2+\frac{1}{2}\times2\times6=2+6=8$.

2. 解:(1)∵直线 $y=-x+2$ 与反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$ 的图象交于 $A(a,3)$,$B(3,b)$ 两点,

∴ $-a+2=3$,$-3+2=b$.

∴ $a=-1$,$b=-1$,

∴ $A(-1,3)$,$B(3,-1)$.

∴点 $A(-1,3)$ 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象上,

∴ $k=-1\times3=-3$,

∴反比例函数的表达式为 $y=-\frac{3}{x}$.

(2)设点 $P(n,-n+2)$,

∵ $A(-1,3)$,∴ $C(-1,0)$.

∵ $B(3,-1)$,∴ $D(3,0)$,

∴ $S_{\triangle ACP}=\frac{1}{2}AC\times|x_P-x_C|=\frac{1}{2}\times3\times|n+1|$,$S_{\triangle BDP}=\frac{1}{2}BD\times|x_B-x_P|=\frac{1}{2}\times1\times|3-n|$.

∵ $S_{\triangle ACP}=S_{\triangle BDP}$,

∴ $\frac{1}{2}\times3\times|n+1|=\frac{1}{2}\times1\times|3-n|$,

∴ $n=0$ 或 $n=-3$,

∴ $P(0,2)$ 或 $(-3,5)$.

(3)$M(-1+\sqrt{23},0)$ 或 $(3+\sqrt{31},0)$.

3. 解:(1)∵直线 $y=mx$ 与双曲线 $y=\frac{n}{x}$ 相交于 $A(-2,a)$,B 两点,

∴点 A 与点 B 关于原点对称.

∴ $B(2,-a)$.∴ $C(2,0)$.

∵ $S_{\triangle OBC}=2$,

∴ $\frac{1}{2}\times2\times a=2$,解得 $a=2$.

∴ $A(-2,2)$.

把 $A(-2,2)$ 的坐标代入 $y=mx$ 和 $y=\frac{n}{x}$,得 $-2m=2$,$2=\frac{n}{-2}$,

解得 $m=-1$,$n=-4$.

(2)设直线 AC 的表达式为 $y=kx+b$.

∵直线 AC 经过点 A,C,

∴ $\begin{cases}-2k+b=2,\\2k+b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-\frac{1}{2},\\b=1.\end{cases}$

∴直线 AC 的表达式为 $y=-\frac{1}{2}x+1$.

4. 解:(1)由图象知 $k<0$,由已知条件得 $|k|=3$,∴ $k=-3$.

∴反比例函数的表达式为 $y=-\frac{3}{x}$,

一次函数的表达式为 $y=-x+2$.

(2)由 $\begin{cases}y=-\frac{3}{x},\\y=-x+2,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x_1=-1,\\y_1=3,\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=3,\\y_2=-1.\end{cases}$

∴点 A,C 的坐标分别为 $(-1,3)$,$(3,-1)$.

(3)设点 P 的坐标为 $(0,m)$,直线 $y=-x+2$ 与 y 轴的交点为 M,则 M 的坐标为 $(0,2)$.

∵ $S_{\triangle APC}=S_{\triangle AMP}+S_{\triangle CMP}=\frac{1}{2}\times PM\times(|-1|+|3|)=5$,

∴ $PM=\frac{5}{2}$,即 $|m-2|=\frac{5}{2}$.

∴ $m=\frac{9}{2}$ 或 $m=-\frac{1}{2}$.

∴点 P 的坐标为 $\left(0,\frac{9}{2}\right)$ 或 $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$.

点拨:依据图象及已知条件求 k 的值是解本题的关键,只有求出 k 的值,再通过解方程组求 A,C 两点的坐标,才能解答第(3)问.

5. 解:(1)∵反比例函数 $y=\frac{m}{x}$ 的图象经过点 $B(2,-1)$,

∴ $m=2\times(-1)=-2$.

∵点 $A(-1,n)$ 在 $y=\frac{-2}{x}$ 的图象上,

∴ $n=\frac{-2}{-1}=2$.

∴ $A(-1,2)$.

把 A,B 的坐标代入 $y=kx+b$,得 $\begin{cases}-k+b=2,\\2k+b=-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-1,\\b=1.\end{cases}$

∴一次函数的表达式为 $y=-x+1$,

反比例函数的表达式为 $y=-\frac{2}{x}$.

(2)∵直线 $y=-x+1$ 交 y 轴于点 C,∴ $C(0,1)$.

∵ D,C 两点关于 x 轴对称,

∴ $D(0,-1)$.

∵ $B(2,-1)$,∴ $BD//x$ 轴.

∴ $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}\times2\times[2-(-1)]=3$.

(3)∵ $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$ 是反比例函数 $y=-\frac{2}{x}$ 图象上的两点,且 $x_1<x_2<0$,∴ $y_1<y_2$.

6. 解:由反比例函数图象的对称性可知,两条坐标轴将矩形 $ABCD$ 分成四个全等的小矩形.

∵点 A 为 $y=\frac{6}{x}$ 的图象上的一点,

∴ $S_{矩形ABOH}=6$.

∴ $S_{矩形ABCD}=4\times6=24$.

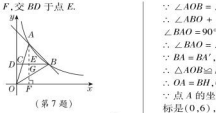
∴总费用为 $25\times24=600$(元).

答:所需钢条一共需要 600 元.

7. 解:(1)如图,过点 A 作 $AF\perp x$ 轴,垂

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

足为点 F，交 BD 于点 E.



（第 7 题）

∵ 点 $B(3,2)$ 在反比例函数 $y=\frac{a}{x}$ 的图象上，∴ $a=3\times2=6$.

∴ 反比例函数的表达式为 $y=\frac{6}{x}$.

∵ $B(3,2)$，∴ $EF=2$.

由 $BD\perp y$ 轴，$OE=CA$，

易知 $AE=EF=\frac{1}{2}AF$.

∴ $AF=4$.

∴ 点 A 的纵坐标为 4.

∵ 点 A 在反比例函数 $y=\frac{6}{x}$ 的图象上，

∴ 点 A 的横坐标为 $\frac{3}{2}$.

∴ $A\left(\frac{3}{2},4\right)$.

将 $A\left(\frac{3}{2},4\right)$，$B(3,2)$ 的坐标分别代入 $y=kx+b$，得 $\begin{cases}\frac{3}{2}k+b=4,\\3k+b=2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-\frac{4}{3},\\b=6.\end{cases}$

∴ 一次函数的表达式为 $y=-\frac{4}{3}x+6$.

（2）如图，设 AF 与 OB 交于点 G.

∵ $B(3,2)$，

∴ 直线 OB 对应的函数表达式为 $y=\frac{2}{3}x$.

∴ $G\left(\frac{3}{2},1\right)$.

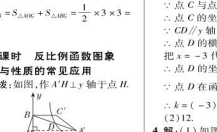
又∵ $A\left(\frac{3}{2},4\right)$，

∴ $AG=4-1=3$.

∴ $S_{\triangle OAB}=S_{\triangle AOG}+S_{\triangle ABG}=\frac{1}{2}\times3\times3=\frac{9}{2}$.

第 5 课时　反比例函数图象与性质的常见应用

1. C　**点拨**：如图，作 $A'H\perp y$ 轴于点 H.



（第 1 题）

∵ $\angle AOB=\angle A'HB=\angle ABA'=90°$，

∴ $\angle ABO+\angle A'BH=90°$，$\angle ABO+\angle BAO=90°$.

∴ $\angle BAO=\angle A'BH$.

∵ $BA=BA'$，

∴ $\triangle AOB\cong\triangle BHA'$.

∴ $OA=BH$，$OB=A'H$.

∵ 点 A 的坐标是 $(-2,0)$，点 B 的坐标是 $(0,6)$，

∴ $OA=2$，$OB=6$.

∴ $BH=OA=2$，$A'H=OB=6$.

∴ $OH=OB-BH=4$.

∴ $A'(6,4)$.

∵ $BD=A'D$，∴ $D(3,5)$.

∵ 点 D 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象经过点 D，

∴ $k=3\times5=15$.

2. **解**：（1）∵ 点 $A(-1,4)$ 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（k 为常数，$k\neq0$）的图象上，∴ $k=-1\times4=-4$.

∴ 反比例函数的表达式为 $y=-\frac{4}{x}$.

把点 $A(-1,4)$，$B(a,1)$ 的坐标分别代入 $y=x+b$，

得 $\begin{cases}4=-1+b,\\1=a+b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-4,\\b=5.\end{cases}$

（2）设直线 AO 与直线 l 相交于点 M.

∵ A，O 两点关于直线 l 对称，

∴ 点 M 为线段 OA 的中点.

∵ 点 $A(-1,4)$，$O(0,0)$，

∴ 点 M 的坐标为 $\left(-\frac{1}{2},2\right)$.

∵ 直线 l 与线段 AO 的交点是坐标为 $\left(-\frac{1}{2},2\right)$.

3. **解**：（1）设直线 AD 对应的函数表达式为 $y=ax+b$.

∵ 直线 AD 过点 $A(3,5)$，$E(-2,0)$，

∴ $\begin{cases}3a+b=5,\\-2a+b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\b=2.\end{cases}$

∴ 直线 AD 对应的函数表达式为 $y=x+2$.

∵ 点 C 与点 $A(3,5)$ 关于原点对称，

∴ 点 C 的坐标为 $(-3,-5)$.

∵ $CD\parallel y$ 轴，

∴ 点 D 的横坐标为 -3，

把 $x=-3$ 代入 $y=x+2$ 得 $y=-1$.

∴ 点 D 的坐标为 $(-3,-1)$.

∵ 点 D 在函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象上，

∴ $k=(-3)\times(-1)=3$.

（2）12.

4. **解**：（1）如图①，过点 A 作 $AC\perp OB$ 于点 C.

∵ $\triangle OAB$ 是等边三角形，

∴ $OA=OB$，$OC=\frac{1}{2}OB$.

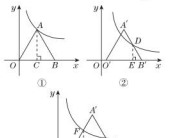
∵ $B(4,0)$，∴ $OB=OA=4$.

∴ $OC=2$，$AC=2\sqrt{3}$.

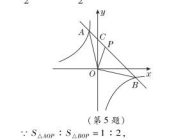
∴ 点 A 的坐标为 $(2,2\sqrt{3})$.

把点 $A(2,2\sqrt{3})$ 的坐标代入 $y=\frac{k}{x}$，得 $k=4\sqrt{3}$，

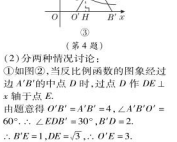
∴ 反比例函数的表达式为 $y=\frac{4\sqrt{3}}{x}$.



①



②



③

（第 4 题）

（2）分四种情况讨论：

①如图②，当反比例函数的图象经过 $A'B'$ 的中点 D 时，过点 D 作 $DE\perp x$ 轴于点 E.

由题意得 $OB'=A'B'=4$，$\angle A'B'O'=60°$.

∴ $\angle EDB'=30°$，$B'D=2$.

∴ $B'E=1$，$DE=\sqrt{3}$，∴ $O'E=3$.

把 $y=\sqrt{3}$ 代入 $y=\frac{4\sqrt{3}}{x}$，得 $x=4$，

∴ $OE=4$.

∴ $a=OO'=1$.

②如图③，当反比例函数的图象经过边 $A'O'$ 的中点 F 时，过点 F 作 $FM\perp x$ 轴于点 M.

由题意得 $A'O'=4$，$\angle A'O'B'=60°$.

∴ $\angle O'FH=30°$，$O'F=2$.

∴ $O'H=1$，$FH=\sqrt{3}$.

把 $y=\sqrt{3}$ 代入 $y=\frac{4\sqrt{3}}{x}$，得 $x=4$，

∴ $OH=4$.

∴ $a=OO'=3$.

综上所述，a 的值为 1 或 3.

5. **解**：（1）由图象可得，满足 $k_1x+b>\frac{k_2}{x}$ 的 x 的取值范围是 $x<-1$ 或 $0<x<4$.

（2）∵ 反比例函数 $y=\frac{k_2}{x}$ 的图象过点 $A(-1,4)$，$B(4,n)$，

∴ $k_2=-1\times4=-4$，$k_2=4n$.

∴ $n=-1$. ∴ $B(4,-1)$.

∵ 一次函数 $y=k_1x+b$ 的图象过点 A，B，

∴ $\begin{cases}-k_1+b=4,\\4k_1+b=-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k_1=-1,\\b=3.\end{cases}$

∴ 一次函数的表达式为 $y=-x+3$，

反比例函数的表达式为 $y=-\frac{4}{x}$.

（3）设直线 AB 与 y 轴的交点为 C，如图所示.

则 $C(0,3)$.

∴ $S_{\triangle AOB}=S_{\triangle AOC}+S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}\times3\times1+\frac{1}{2}\times3\times4=\frac{15}{2}$.

（第 5 题）

∵ $S_{\triangle AOP}:S_{\triangle BOP}=1:2$，

∴ $S_{\triangle AOP}=\frac{15}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{2}$.

∵ $S_{\triangle COP}=S_{\triangle AOP}-S_{\triangle AOC}=\frac{5}{2}-\frac{3}{2}=1$.

∴ $\frac{1}{2}\times3\cdot x_P=1$，则 $x_P=\frac{2}{3}$.

∴ 点 P 在线段 AB 上，

∴ $y_P=-\frac{2}{3}+3=\frac{7}{3}$.

∴ 点 P 的坐标为 $\left(\frac{2}{3},\frac{7}{3}\right)$.

6. **解**：（1）把 $A(3,5)$ 的坐标代入 $y_2=\frac{m}{x}(m\neq0)$，可得 $m=3\times5=15$，

∴ 反比例函数的表达式为 $y_2=\frac{15}{x}$.

把点 $B(a,-3)$ 的坐标代入 $y_2=\frac{15}{x}$，可得 $a=-5$，

∴ $B(-5,-3)$.

把 $A(3,5)$，$B(-5,-3)$ 的坐标代入 $y_1=kx+b$，可得 $\begin{cases}3k+b=5,\\-5k+b=-3,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=1,\\b=2.\end{cases}$

∴ 一次函数的表达式为 $y_1=x+2$.

（2）$y_1=x+2$ 中，令 $x=0$，则 $y_1=2$，

∴ 一次函数的图象与 y 轴的交点坐标为 $(0,2)$.

由题可知，当 P 为直线 AB 与 y 轴的交点时，$PB-PC\leqslant BC$ 最大，

∴ 点 P 的坐标为 $(0,2)$.

令 $y_1=0$，则 $x=-2$，

∴ $C(-2,0)$.

∴ $BC=\sqrt{(-5+2)^2+(-3)^2}=3\sqrt{2}$.

（3）当 $y_1>y_2$ 时，$-5<x<0$ 或 $x>3$.

7. **解**：（1）∵ 正方形 $OABC$ 的顶点 C 的坐标为 $(0,3)$，

∴ $OA=AB=BC=OC=3$，$\angle OAB=\angle B=\angle BCO=90°$.

∵ $AD=2DB$，

∴ $AD=\frac{2}{3}AB=2$，

∴ $D(-3,2)$.

把 $D(-3,2)$ 的坐标代入 $y=\frac{m}{x}$ 得 $2=\frac{m}{-3}$，解得 $m=-6$，

∴ 反比例函数的表达式为 $y=-\frac{6}{x}$.

∵ $AM=2MO$，

∴ $MO=\frac{1}{3}OA=1$，即 $M(-1,0)$，

把点 M 与点 D 的坐标分别代入 $y=kx+b$ 中，得 $\begin{cases}-k+b=0,\\-3k+b=2,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=-1,\\b=-1.\end{cases}$

∴ 一次函数的表达式为 $y=-x-1$；

（2）把 $y=3$ 代入 $y=-\frac{6}{x}$，得 $x=-2$.

∴ $N(-2,3)$，$NC=2$，设点 P 的坐标为 (x,y)，

∵ △OPM 的面积与四边形 $OMNC$ 的面积相等，

∴ $\frac{1}{2}(OM+NC)\cdot OC=\frac{1}{2}OM\cdot|y|$，

即 $\frac{1}{2}\times(1+2)\times3=\frac{1}{2}\times1\times|y|$，

解得 $y=\pm9$.

当 $y=9$ 时，$x=-10$，当 $y=-9$ 时，$x=8$，

∴ 点 P 的坐标为 $(-10,9)$ 或 $(8,-9)$.

8. **解**：（1）∵ 矩形 $OABC$ 的顶点 B 的坐标为 $(4,2)$，

∴ 点 M 的横坐标为 4，点 N 的纵坐标为 2.

把 $x=4$ 代入 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$，得 $y=\frac{1}{2}$，

∴ 点 M 的坐标为 $\left(4,\frac{1}{2}\right)$.

把 $y=2$ 代入 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$，得 $x=1$，

∴ 点 N 的坐标为 $(1,2)$.

∵ 函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 的图象过点 M，

∴ $k=4\times\frac{1}{2}=2$，

∴ $y=\frac{2}{x}(x>0)$.

把 $N(1,2)$ 的坐标代入 $y=\frac{2}{x}$，点 N 的坐标满足反比例函数表达式，

∴ 点 N 也在函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 的图象上.

（2）设直线 $M'N'$ 的表达式为 $y=-\frac{1}{2}x+b$，

联立 $\begin{cases}y=-\frac{1}{2}x+b,\\y=\frac{2}{x},\end{cases}$

得 $x^2-2bx+4=0$.

∵ 直线 $y=-\frac{1}{2}x+b$ 与函数 $y=\frac{2}{x}(x>0)$ 的图象仅有一个交点，

∴ $(-2b)^2-4\times4=0$.

解得 $b_1=2$，$b_2=-2$（舍去），

∴ 直线 $M'N'$ 的表达式为 $y=-\frac{1}{2}x+2$.

第 6 课时　反比例函数的实际应用

1. $y=\frac{4\,500}{x}$　**2**. $n=\frac{800}{m}$；200

3. B　**4**. A　**5**. A　**6**. D　**7**. A

8. C　**点拨**：由题意得 $AP=t$，$BQ=2t$，则 $BP=3-t$，∴ $S=\frac{1}{2}\times|BP|\times|BQ|=\frac{1}{2}\cdot(3-t)\cdot2t=-t^2+3t(0<t<3)$. 故选 C.

9. D　**点拨**：由题易忽略自变量的取值范围而错选 B.

10. **解**：（1）∵ $vt=480$，且全程速度限定为不超过 120 千米/时，

∴ v 关于 t 的函数表达式为 $v=\frac{480}{t}(t\geqslant4)$.

（2）[8 时至 12 时 48 分时间长为 $\frac{24}{5}$ 小时，8 时至 14 时时间长为 6 小时，

将 $t=6$ 代入 $v=\frac{480}{t}$，得 $v=80$；

将 $t=\frac{24}{5}$ 代入 $v=\frac{480}{t}$，得 $v=100$.

∴ 小汽车行驶速度 v 的范围为 $80\leqslant v\leqslant100$.

（2）方方不能在当天 11 时 30 分前到达 B 地. 理由如下：

8 时至 11 时 30 分时间长为 $\frac{7}{2}$ 小时，

将 $t=\frac{7}{2}$ 代入 $v=\frac{480}{t}$，得 $v=\frac{960}{7}>120$.

故方方不能在当天 11 时 30 分前到达 B 地.

11. **解**：（1）根据题意，得 $vt=100$（$t>0$），

所以 $v=\frac{100}{t}(t>0)$.

（2）由题意知，$v=\frac{100}{t}(0<t\leqslant5)$，

而 $100>0$，所以 $t>0$ 时，v 随着 t 的增大而减小，

当 $0<t\leqslant5$ 时，$v\geqslant\frac{100}{5}=20$，所以平

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

均每小时至少要卸货 20 吨.

12. **解**:(1)①由题意可得 $xy=3$,则 $y=\frac{3}{x}(x>0)$.

②当 $y\geqslant 3$ 时,$\frac{3}{x}\geqslant 3$.

解得 $x\leqslant 1$,

故 x 的取值范围是 $0<x\leqslant 1$.

(2)圆圆的说法不对,方方的说法对.理由如下:

∵一个矩形的周长为 6,

∴$x+y=3$.

∴$x+\frac{3}{x}=3$.

整理得 $x^2-3x+3=0$.

∵$b^2-4ac=9-12=-3<0$,

∴矩形的周长不可能是 6.

∴圆圆的说法不对.

∵一个矩形的周长为 10,

∴$x+y=5$.

∴$x+\frac{3}{x}=5$.

整理得 $x^2-5x+3=0$.

∵$b^2-4ac=25-12=13>0$,

∴矩形的周长可能是 10.

∴方方的说法对.

13. **解**:(1)$510-200=310$(元),即应付 310 元.

(2)$p=\frac{200}{x}(400\leqslant x<600)$,

∴p 随 x 的增大而减小.

(3)购买 a(200≤a<400)元商品在甲商场的优惠金额是 100 元,在乙商场的优惠金额是 $a-0.6a=0.4a$(元).

当 $0.4a<100$,即 200≤a<250 时,选择甲商场购买该商品花钱较少;

当 $0.4a=100$,即 $a=250$ 时,选择甲、乙两家商场购买该商品花钱一样多;

当 $0.4a>100$,即 250<a<400 时,选择乙商场购买该商品花钱较少.

21.6 综合与实践

获取最大利润

1. **解**:(1)设 A 型文具进货 m 只,则 B 型文具进货(100 − m)只,可得

$10m+15(100-m)=1\ 300$,解得 $m=40$.

故 A 型文具进货 40 只,B 型文具进货 60 只,可使进货款恰好为 1 300元.

(2)设 A 型文具购进 x 只,则 B 型文具购进(100 − x)只,可得

(12 − 10)x + (23 − 15)(100 − x) ≤ 40% [10x + 15(100 − x)],解得 $x\geqslant 50$,

设利润为 y 元,则可得 $y=(12-10)x+(23-15)(100-x)=2x+800-8x=-6x+800$,因为 y 随 x 的增大而减小,所以当x=50,即两种型号的文具各购进 50 只时,所获利润最大,利润最大值为 $-50\times 6+800=500$(元).

2. **解**:(1)由题意可知,$y=(x-20)w=(x-20)(-2x+80)=-2x^2+120x-1\ 600$.所以 y 与 x 之间的函数表达式为 $y=-2x^2+120x-1\ 600$.

(2)因为 $y=-2x^2+120x-1\ 600=-2(x-30)^2+200$,所以当销售价定为 30 元/千克时,每天销售这种产品所获利润最大,最大利润是 200 元.

3. **解**:(1)设锻造时 y 与 x 的函数表达式为 $y=\frac{k}{x}(k\neq 0)$,则600 $=\frac{k}{8}$.

∴$k=4\ 800$,

∴锻造时 y 与 x 的函数表达式为 $y=\frac{4\ 800}{x}$.

当 $y=800$ 时,$800=\frac{4\ 800}{x}$,解得 $x=6$,

∴点 B 的坐标为(6,800),即锻造时自变量的取值范围是 $x>6$.

设锻烧时 y 与 x 的函数表达式为 $y=ax+b(a\neq 0)$,

则$\begin{cases}b=32,\\6a+b=800.\end{cases}$解得$\begin{cases}a=128,\\b=32.\end{cases}$

∴锻烧时 y 与 x 的函数表达式为 $y=128x+32(0\leqslant x\leqslant 6)$.

(2)在 $y=\frac{4\ 800}{x}$中,当 $y=480$ 时,$x=\frac{4\ 800}{480}=10$,$10-6=4$(min),

∴锻造的操作时间有 4 min.

4. **解**:(1)设 y 与 x 的函数表达式为 $y=kx+b$($k\neq 0$),根据题意得$\begin{cases}50k+b=100,\\60k+b=90,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=-1,\\b=150,\end{cases}$

故 y 与 x 的函数表达式为 $y=-x+150$.

(2)根据题意得$(-x+150)(x-20)=4\ 000$,

解得 $x_1=70$,$x_2=100>90$(不合题意,舍去).

故该批发商若想获得 4 000 元的利润,应将售价定为 70 元/千克.

(3)W 与 x 的函数表达式为 $W=(-x+150)(x-20)=-x^2+170x-3\ 000=-(x-85)^2+200$,所以当销售价定为 85 元/千克时,每天销售这种产品所获利润最大,最大利润是 200 元.

5. **解**:(1)设锻造时 y 与 x 的函数表达式为 $y=\frac{k}{x}(x>0)$,则 $k=xy=3\times 4=12$,

故该反比例函数的表达式为 $y=\frac{12}{x}(x>0)$.

∵点 $C(6,0)$,$BC\perp x$ 轴,

∴把 $x=6$ 代入 $y=\frac{12}{x}$,得 $y=\frac{12}{6}=2$.

则 $B(6,2)$.

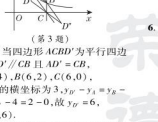
综上所述,k 的值是 12,点 B 的坐标是(6,2).

(2)①如图,当四边形 $ABCD$ 为平行四边形时,$AD=BC$ 且 $AD\parallel BC$,

∵$A(3,4)$,$B(6,2)$,$C(6,0)$,

∴点 D 的横坐标为 3,$y_A-y_D=y_B-y_C$ 即 $4-y_D=2-0$,故 $y_D=2$,

∴$D(3,2)$.



(第 3 题)

②如图,当四边形 $ACBD'$为平行四边形时,$AD'=CB$ 且 $AD'=CB$,

∵$A(3,4)$,$B(6,2)$,$C(6,0)$,

∴点 D'的横坐标为 3,$y_{D'}-y_A=y_B-y_C$ 即 $y_{D'}-4=2-0$,故 $y_{D'}=6$,

∴$D'(3,6)$.

③如图,当四边形 $ACD''B$ 为平行四边形时,$AC=BD''$且 $AC\parallel BD''$.

∵$A(3,4)$,$B(6,2)$,$C(6,0)$,

∴$x_{D''}-x_B=x_C-x_A$ 即 $x_{D''}-6=6-3$,故 $x_{D''}=9$.

$y_{D''}-y_B=y_C-y_A$ 即 $y_{D''}-2=0-4$,故 $y_{D''}=-2$.

∴$D''(9,-2)$.

综上所述,符合条件的点 D 的坐标是(3,2)或(3,6)或(9,−2).

4. **解**:(1)设反比例函数的表达式为 $y=\frac{k}{x}$.

由题意得,$k=xy=2\times 3=6$.

∴反比例函数的表达式为 $y=\frac{6}{x}$.

(2)设点 B 的坐标为(a,b),过点 A 作 $AD\perp BC$ 于点 D,则 $D(2,b)$.

∵反比例函数 $y=\frac{6}{x}$的图象经过点 $B(a,b)$,

∴$b=\frac{6}{a}$.∴$AD=3-\frac{6}{a}$.

∴$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AD=\frac{1}{2}a\left(3-\frac{6}{a}\right)=6$.解得 $a=6$.

∴$b=\frac{6}{a}=1$.∴$B(6,1)$.

设直线 AB 的表达式为 $y=mx+n$,将 $A(2,3)$,$B(6,1)$的坐标分别代入 $y=mx+n$,得$\begin{cases}2m+n=3,\\6m+n=1,\end{cases}$

解得$\begin{cases}m=-\frac{1}{2},\\n=4.\end{cases}$

∴直线 AB 的表达式为 $y=-\frac{1}{2}x+4$.

5. B **点拨**:∵$BD\parallel x$ 轴,$D(0,4)$,

∴B,D 两点纵坐标相同,都为 4.

∴可设 $B(x,4)$.

∵矩形 $ABCD$ 的对角线的交点为 E,

∴E 为 BD 的中点,∠DAB=90°.

∴$E\left(\frac{1}{2}x,4\right)$,且 $AD^2+AB^2=BD^2$.

∵$A(2,0)$,$D(0,4)$,$B(x,4)$,

∴$2^2+4^2+(x-2)^2+4^2=x^2$.

解得 $x=10$.

∴$E(5,4)$.

∵反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k>0,x>0)$的图象经过点 E,

∴$k=5\times 4=20$.

6. **解**:(1)由已知得 $vt=300$.

∴t 与 v 之间的函数表达式为 $t=\frac{300}{v}(v>0)$.

(2)运了一半物资后还剩 $300\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=150$(t),$150\div 2=75$(t/h).

∵剩下的物资要在 2 h 之内运到江边,∴运输速度至少为75 t/h.

全章热门考点整合应用

1. **解**:(1)根据题意,得

$\begin{cases}m^2+4m-3=2,\\m+3\neq 0.\end{cases}$

解得$\begin{cases}m=-5\text{ 或 }m=1,\\m\neq -3.\end{cases}$

∴$m=-5$ 或 $m=1$.

(2)∵函数图象的开口向上,

∴$m+3>0$.∴$m>-3$.

∴$m=1$.

∴当 $m=1$ 时,该函数图象的开口向上.

(3)∵函数有最大值,

∴$m+3<0$,

∴$m<-3$.

∴$m=-5$.

∴当 $m=-5$ 时,该函数有最大值.

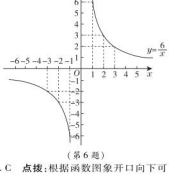
2. B **3.** ①③④ **4.** D **5.** C

6. **解**:如图.

(1)当 $y=-2$ 时,$x=-3$.

(2)当 $-2<x<1$ 且 $x\neq 0$ 时,$y<-3$ 或 $y>6$.

(3)当 $-3<y<2$ 且 $y\neq 0$ 时,$x<-2$ 或 $x>3$.



(第 6 题)

7. C **点拨**:根据函数图象开口向下可得 $a<0$,所以①错误.因为抛物线与 x 轴的交点坐标为(−1,0),(3,0),所以其对称轴为直线 $x=1$.所以$-\frac{b}{2a}=1$.因此 $2a+b=0$,所以②正确.当 $x=1$ 时,$y=a+b+c>0$,所以③正确.根据图象可知当 $-1<x<3$ 时,$y>0$,所以④正确.所以②③④正确.

8. B **点拨**:如图,过点 B 作 $BE\perp x$ 轴于点 E,∵D 为 OB 的中点,∴CD是△OBE 的中位线,则$CD=\frac{1}{2}BE$.设 $A\left(x,\frac{k}{x}\right)$,易得 $B\left(2x,\frac{k}{2x}\right)$,

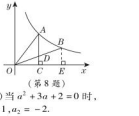
∴$CD=\frac{k}{4x}$

∴$AD=\frac{k}{x}-\frac{k}{4x}$.

∵△AOD 的面积为 1,

∴$\frac{1}{2}AD\cdot OC=1$,

即$\frac{1}{2}\left(\frac{k}{x}-\frac{k}{4x}\right)\cdot x=1$.解得 $k=\frac{8}{3}$.



(第 8 题)

9. **解**:(1)当 $a^2+3a+2=0$ 时,

$a_1=-1$,$a_2=-2$.

当 $a=-1$ 时,$y=-\frac{1}{4}$,图象与 x 轴无交点;

当 $a=-2$ 时,$y=-x+\frac{1}{4}$,图象与 x 轴有一个交点.

当 $a^2+3a+2\neq 0$,即 $a\neq -1$ 且 $a\neq -2$ 时,函数$y=(a^2+3a+2)x^2+(a+1)x+\frac{1}{4}$为二次函数.

要使函数图象与 x 轴有交点,则$(a+1)^2-4(a^2+3a+2)\times\frac{1}{4}\geqslant 0$,

解得 $a\leqslant -1$.∴$a<-1$ 且 $a\neq -2$.

故当 $a<-1$ 且 $a\neq -2$ 时,二次函数的图象与 x 轴总有交点.

综上所述,当 $a<-1$ 时,此函数的图象与 x 轴总有交点.

(2)由题知 $x_1+x_2=-\frac{a+1}{a^2+3a+2}$,

$x_1x_2=\frac{\frac{1}{4}}{a^2+3a+2}$,

∴$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=-4(a+1)$.

∴$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+a^2-3$.

∴$-4(a+1)=a^2-3$.

∴$a^2+4a+1=0$.

解得 $a_1=-2-\sqrt{3}$,$a_2=-2+\sqrt{3}$.

又∵$-2+\sqrt{3}>-1$,即当 $a=-2+\sqrt{3}$ 时,二次函数的图象与 x 轴无交点,故舍去此解.

∴$a=-2-\sqrt{3}$.

点拨:**分类讨论思想**是数学的常用思想,当问题中未明确是哪类函数时,通常要进行分类讨论.

10. **解**:(1)∵$AB=x$ m,

∴$BC=(24-3x)$ m,

∴$S=x(24-3x)=-3x^2+24x$.

(2)由已知得 $-3x^2+24x=45$,整理可得 $x^2-8x+15=0$.

解得 $x_1=5$,$x_2=3$.

∵$0<24-3x\leqslant 10$,得$\frac{14}{3}\leqslant x<8$,

∴$x=3$ 不符合题意,故 $AB=5$ m.

(3)能.

$S=-3x^2+24x=-3(x^2-8x)=-3(x-4)^2+48$.

∵$\frac{14}{3}\leqslant x<8$,

∴当 $x=\frac{14}{3}$时,$S_{最大}=46\frac{2}{3}$.

∴能围成面积比 45 m² 更大的鸡舍.

围法是:BC 的长是 10 m,AB 的长是 4$\frac{2}{3}$ m,这时鸡舍的面积最大,为 46$\frac{2}{3}$ m².

11. **解**:(1)由题意得点 $E(1,1.4)$,$B(6,0.9)$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

将它们的坐标分别代入 $y=ax^2+bx+0.9$ 得 $\begin{cases}a+b+0.9=1.4,\\36a+6b+0.9=0.9.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=-0.1,\\b=0.6.\end{cases}$

∴ 所求的抛物线对应的函数表达式是 $y=-0.1x^2+0.6x+0.9$.

(2) 把 $x=3$ 代入 $y=-0.1x^2+0.6x+0.9$，

得 $y=-0.1\times3^2+0.6\times3+0.9=1.8$.

即小华的身高是 1.8 m.

(3) 当 $y=1.4$ 时，$-0.1x^2+0.6x+0.9=1.4$.

解得 $x_1=1$，$x_2=5$.

∴ $1<t<5$.

12. B

13. **解**：(1) 设药物燃烧时 y 关于 x 的函数关系式为 $y=k_1x(k_1>0)$，

代入 $(12,9)$ 为 $9=12k_1$，

解得 $k_1=\frac{3}{4}$，

设药物燃烧后 y 关于 x 的函数关系式为 $y=\frac{k_2}{x}(k_2>0)$，

代入 $(12,9)$ 为 $9=\frac{k_2}{12}$，

解得 $k_2=108$.

所以药物燃烧时 y 关于 x 的函数关系式为 $y=\frac{3}{4}x(0\leqslant x\leqslant9)$，药物燃烧后 y 关于 x 的函数关系式为 $y=\frac{108}{x}(x>9)$；

(2) 结合实际，令 $y=\frac{108}{x}$ 中，$y\leqslant0.45$，解得 $x\geqslant240$.

即从药物燃烧开始，至少需要经过 240 分钟后，学生才能进入.

14. **解**：设 $AC=x$，则 $BC=2-x$.

∵ △ACD 和 △BCE 都是等腰直角三角形，

∴ $CD=\frac{\sqrt{2}}{2}x$，$CE=\frac{\sqrt{2}}{2}(2-x)$，

$\angle DCA=\angle ECB=45°$.

∴ $\angle DCE=180°-45°-45°=90°$.

在 Rt△DCE 中，由勾股定理，得 $DE^2=DC^2+CE^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2+\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(2-x)\right]^2=x^2-2x+2=(x-1)^2+1$.

∵ 当 $x=1$ 时，DE^2 有最小值 1，此时 $DE=1$. 故 DE 长的最小值为 1.

15. (1) **证明**：∵ 点 P 在双曲线 $y=\frac{6}{x}$ 上，

∴ 设点 P 的坐标为 $\left(\frac{6}{m},m\right)$.

∵ 点 D 在双曲线 $y=\frac{3}{x}$ 上，$BP\parallel x$ 轴，点 D 在 BP 上，

∴ 点 D 的坐标为 $\left(\frac{3}{m},m\right)$.

∴ $BD=\frac{3}{m}$，$BP=\frac{6}{m}$.

∴ $BD=\frac{1}{2}BP$.

∴ 点 D 是 BP 的中点.

(2) **解**：由题意可知 $S_{△BOD}=\frac{3}{2}$，

$S_{△AOC}=\frac{3}{2}$，$S_{四边形ODPA}=6$.

∵ $S_{四边形ODPA}=S_{四边形OMPA}-S_{△BOD}-S_{△AOC}=6-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}=3$.

16. **解**：(1) $y=7.5x-(2.7x+0.9x^2+0.3x)=-0.9x^2+4.5x$.

(2) 设 3 年内每年的平均收益为 z 万元，根据题意，得

$z=7.5x-(0.9x+0.3x^2+0.3x)=-0.3x^2+6.3x=-0.3(x-10.5)^2+33.075$.

所以开不是而积越大收益就越大，当修建面积为 10. 5 公顷时可以获得最大收益.

建议略.

17. C　**点拨**：当 $x=0$ 时，$y=c=-2$；当 $x=1$ 时，$y=a+b-2=-2$，

∴ $a+b=0$，即 $b=-a$.

∴ $y=ax^2-ax-2$.

∴ $abc=a\cdot(-a)\cdot(-2)=2a^2>0$，故①正确.

由表知对称轴是直线 $x=\frac{1}{2}$，且当 $x=-2$ 时，$y=t$，则当 $x=3$ 时，$y=t$.

∴ -2 和 3 是关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=t$ 的两个根，故②正确.

$m=a+a-2$，$n=4a-2a-2$，

∴ $m=n+2a-2$.

∴ $m+n=4a-4$.

∵ 当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，$y>0$，

∴ $\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}a-2>0$，即 $a>\frac{8}{3}$.

∴ $m+n>\frac{20}{3}$，故③错误.

18. **解**：(1) $2-x$

(2) 由题意，得 $\angle FBO=\angle OBA$.

在矩形 $OABC$ 中，$OC\parallel AB$，

∴ $\angle FOB=\angle OBA$.

∴ $\angle FBO=\angle FOB$.

∴ $BF=OF=2-x$.

在 Rt△FCB 中，$BC=OA=1$，

∴ $BF^2=CF^2+BC^2$，即 $(2-x)^2=x^2+1^2$.

解得 $x=\frac{3}{4}$.

∴ $BF=2-x=2-\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$.

(3) 双曲线 l 上存在点 M，使得 $S_{△OBM}$ 的面积等于 1.

由题意可知点 B 的坐标为 $(1,2)$.

设双曲线 l 对应的函数表达式为 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$.

∵ 双曲线过点 $B(1,2)$，

∴ $2=\frac{k}{1}$，∴ $k=2$，∴ $y=\frac{2}{x}$.

∵ $S_{△OCB}=S_{△OAB}=\frac{1}{2}OA\cdot AB=\frac{1}{2}\times1\times2=1$，

∴ 若双曲线上存在符合条件的点 M，则点 M 应在与 OB 平行的直线上且该直线与 OB 之间的距离等于点 C 到 OB 的距离.

∵ $O(0,0)$，$B(1,2)$，

∴ 线段 OB 所在的直线对应的函数表达式为 $y=2x$.

讨论：①点 M 可能是过点 C 且与 OB 平行的直线 $y=2x+2$ 与双曲线 l 的交点.

由 $\begin{cases}y=2x+2,\\y=\frac{2}{x},\end{cases}$ 解得 $x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

②由对称性可知，点 M 也可能是过点 A 且与 OB 平行的直线 $y=2x-2$ 与双曲线 l 的交点.

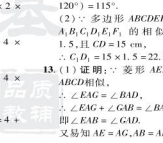
由 $\begin{cases}y=2x-2,\\y=\frac{2}{x},\end{cases}$ 解得 $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

∴ 点 M 的横坐标为 $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ 或 $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

点拨：已知三角形的一边时，可在这条边的两侧作三角形. 要注意**分类讨论**，不要漏掉任何一种情况.

19. **解**：(1) 将点 $A(2,4)$ 与 $B(6,0)$ 的坐标分别代入 $y=ax^2+bx$ 中，得 $\begin{cases}4a+2b=4,\\36a+6b=0.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-\frac{1}{2},\\b=3.\end{cases}$

(2) 如图，过点 A 作 x 轴的垂线，垂足为点 $D(2,0)$，连接 CD，过点 C 作 $CE\perp AD$，$CF\perp x$ 轴，垂足分别为点 E，F.



(第 19 题)

∴ $S_{△OAB}=\frac{1}{2}OD\cdot AD=\frac{1}{2}\times2\times4=4$；

$S_{△ACB}=\frac{1}{2}AD\cdot CE=\frac{1}{2}\times4\times(x-2)=2x-4$；

$S_{△BCD}=\frac{1}{2}BD\cdot CF=\frac{1}{2}\times4\times\left(-\frac{1}{2}x^2+3x\right)=-x^2+6x$.

则 $S=S_{△OAD}+S_{△ACB}+S_{△BCD}=4+2x-4-x^2+6x=-x^2+8x$，

∴ S 关于 x 的函数表达式为 $S=-x^2+8x(2<x<6)$.

∵ $S=-x^2+8x=-(x-4)^2+16$，

∴ 当 $x=4$ 时，四边形 $OACB$ 的面积 S 有最大值，最大值为 16.

第 22 章　相似形

22.1　比例线段

第 1 课时　相似图形

1. B　**2.** A　**3.** D　**4.** A　**5.** C

6. B　**点拨**：设 $AD=x$，由题意得 $FD=x-2$，$FE=2$，

∵ 四边形 $EFDC$ 与矩形 $ABCD$ 相似，

∴ $\frac{EF}{FD}=\frac{AD}{AB}$，即 $\frac{2}{x-2}=\frac{x}{2}$，

∴ $x^2-2x-4=0$.

解得 $x_1=1+\sqrt{5}$，$x_2=1-\sqrt{5}$（不合题意舍去），

经检验，$x_1=1+\sqrt{5}$ 是原方程的解.

故选 B.

7. B　**8.** C

9. B　**易错点拨**　相似比是有顺序的，求相似比或利用相似比解答问题时，要特别注意两个相似多边形的排列顺序.

10. D　**点拨**：把一个图形按一定的比例扩大或缩小，各边都相应地扩大或缩小，各角不变.

11. **解**：∵ 四边形 $ABCD$ 与四边形 $EFGH$ 相似，

∴ $\angle A=\angle A=62°$，$\angle F=\angle B=70°$，

又∵ $\angle H=140°$，$\angle E+\angle F+\angle G+\angle H=360°$，

∴ $\angle G=88°$. ∵ 四边形 $ABCD$ 与四边形 $EFGH$ 相似，

∴ $\frac{AD}{EH}=\frac{AB}{EF}=\frac{BC}{FG}$.

又∵ $AD=18$，$EF=15$，$FG=14$，$EH=12$，

∴ $AB=22.5$，$BC=21$.

12. **解**：(1) ∵ 多边形 $ABCDEF$ 与多边形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 相似，且 $\angle C$ 和 $\angle C_1$，$\angle D$ 和 $\angle D_1$，$\angle E$ 和 $\angle E_1$ 是对应角，

∴ $\angle C=95°$，$\angle D=135°$，$\angle E=120°$. 由多边形内角和定理，知 $\angle F=720°-(135°+120°+95°+135°+120°)=115°$.

(2) ∵ 多边形 $ABCDEF$ 和多边形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的相似比是 1∶1.5，且 $DE=15$ cm，

∴ $C_1D_1=15\times1.5=22.5$(cm).

13. (1) **证明**：∵ 菱形 $AEFG$ 与菱形 $ABCD$ 相似，

∴ $\angle EAG=\angle BAD$，

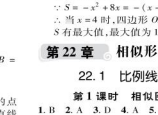
∴ $\angle EAG+\angle GAB=\angle BAD+\angle GAB$，即 $\angle EAB=\angle GAD$.

又易知 $AE=AG$，$AB=AD$，

∴ △AEB≌△AGD，

∴ $EB=GD$.

(2) **解**：如图所示，连接 BD 交 AC 于点 P，则 $BP\perp AC$.



(第 13 题)

∵ $\angle DAB=60°$，

∴ $\angle PAB=30°$，

∴ $BP=\frac{1}{2}AB=1$，

$AP=\sqrt{AB^2-BP^2}=\sqrt{3}$，

又∵ $AE=AG=\sqrt{3}$，

∴ $EP=2\sqrt{3}$，

∴ $EB=\sqrt{EP^2+BP^2}=\sqrt{12+1}=\sqrt{13}$，

∴ $GD=EB=\sqrt{13}$.

14. **解**：(1) 如果四周的小路的宽均相等，那么小路四周所围成的矩形 $A'B'C'D'$ 和矩形 $ABCD$ 不相似.

理由如下：

∵ $\frac{30}{30+2\times1}=\frac{15}{15+1}\neq\frac{20}{20+2\times1}=\frac{10}{10+1}$，

∴ $\frac{30+2x}{30}\neq\frac{20+2x}{20}$.

∴ 小路四周所围成的矩形 $A'B'C'D'$ 和矩形 $ABCD$ 不相似；

(2) ∵ 当 $\frac{30+2x}{20}=\frac{30+2x}{30}$ 时，小路四周所围成的矩形 $A'B'C'D'$ 和矩形 $ABCD$ 相似，

解得 $\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$.

∴ x 与 y 的比值为 $\frac{2}{3}$ 时，能使小路四周所围成的矩形 $A'B'C'D'$ 和矩形 $ABCD$ 相似.

点拨：本题把实际问题抽象到相似多边形中，利用相似多边形对应边的比相等，列出方程，求得 x 与 y 的比值. 注意**数形结合思想**与**方程思想**的应用.

第 2 课时　比例线段

1. B　**2.** D　**3.** A

4. 5 500　**5.** B　**6.** D　**7.** C

8. $\frac{35}{3}$　**点拨**：设第四比例项为 x，

由题意知 $a:b=c:x$，

∴ $x=\frac{bc}{a}$. 又∵ $a=3$，$b=5$，$c=7$，

∴ $x=\frac{5\times7}{3}=\frac{35}{3}$.

易错点拨　要求 a，b，c 的第四比例项 x，就有 $a:b=c:x$，所以 $x=\frac{bc}{a}$，切勿看到线段成比例就分类讨论，从而造成错误.

9. **解**：(1) 矩形 $BCFE$，矩形 $AEML$，矩形 $GMFH$，矩形 $LGPN$ 的长和宽的比不变.

(2) 有成比例的线段，如线段 $BC:BE=AE:ME$.

10. **解**：线段 AB，AC，BC，CD 对应成比例，且 $\frac{AB}{AC}=\frac{BC}{CD}$. 验证如下：根据三角形的面积公式，得 $\frac{1}{2}AB\cdot CD=\frac{1}{2}AC\cdot BC$，∴ $AB\cdot CD=AC\cdot BC$，即 $\frac{AB}{AC}=\frac{BC}{CD}$.

第 3 课时　比例的性质

1. B

2. A　**点拨**：由 $a:b=3:4$ 知 $3b=4a$，∴ $b=\frac{4a}{3}$. ∴ 由 $a+b=14$ 得到 $a+\frac{4a}{3}=14$，解得 $a=6$. ∴ $b=8$. ∴ $2a-b=2\times6-8=4$.

3. D　**4.** A　**5.** A　**6.** 12　**7.** A

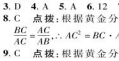
8. C　**点拨**：根据黄金分割的概念得 $\frac{BC}{AC}=\frac{AC}{AB}$，∴ $AC^2=BC\cdot AB$.

9. C　**点拨**：根据黄金分割的概念得 $AC=\frac{\sqrt{5}-1}{2}AB$，所以 $AC=4(\sqrt{5}-1)$ cm.

10. B　**点拨**：由点 C 为线段 AB 的黄金分割点，且 $AC>BC$，可得 $\frac{AC}{AB}=\frac{BC}{AC}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，由此可以判断仅③④正确，所以正确的有 2 个. 故选 B.

解题策略：解这类问题要明确在由黄金分割点分得的两条线段中，较长线段是较短线段和原线段的比例中项.

11. D



12. 3

13. **解**：(1) 设 $\frac{a}{3}=\frac{b}{2}=\frac{c}{6}=k(k\neq0)$，

∴ $a=3k$，$b=2k$，$c=6k$.

∵ $a+2b+c=26$，∴ $3k+4k+6k=$

不变.
理由如下：设矩形 $ABCD$ 的宽为 a，则长为 $\sqrt{2}a$，

∴ $BC=a$，$BE=AE=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，$ME=MF=\frac{a}{2}$，$HF=LG=\frac{\sqrt{2}}{4}a$，$LN=\frac{a}{4}$. ∴ $\frac{BC}{BE}=\frac{a}{\frac{\sqrt{2}}{2}a}=\sqrt{2}$，$\frac{AE}{ME}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\frac{a}{2}}=\sqrt{2}$，$\frac{MF}{HF}=\frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{4}a}=\sqrt{2}$，$\frac{LG}{LN}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}a}{\frac{a}{4}}=\sqrt{2}$，∴ 矩形 $BCFE$，矩形 $AEML$，矩形 $GMFH$，矩形 $LGPN$ 的长和宽的比不变.

(2) 有成比例的线段，如线段 $BC:BE=AE:ME$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

26，即 $k=2$. ∴ $a=6$，$b=4$，$c=12$.

(2) ∵ 线段 x 是线段 a，b 的比例中项，

∴ $x^2=ab$. 又∵ $a=6$，$b=4$，

∴ $x=2\sqrt{6}$（负值舍去）.

14. 解：(1) 设 $\frac{a}{4}=\frac{b}{4}=\frac{c}{6}=k(k\neq 0)$，

则 $a=5k$，$b=4k$，$c=6k$，所以 $\frac{2a+b}{3c}=\frac{10k+4k}{18k}=\frac{7}{9}$.

(2) 由题意得 $5k+4k+6k=90$，解得 $k=6$，所以 $a=30$，$b=24$，$c=36$.

15. 解：(1) ∵ $\frac{a+4}{3}=\frac{b+3}{2}=\frac{c+8}{4}$，

∴ $\frac{a+4+b+3+c+8}{3+2+4}=\frac{a+4}{3}$，

即 $\frac{a+b+c+15}{9}=\frac{a+4}{3}$.

又∵ $a+b+c=12$，

∴ $\frac{12+15}{9}=\frac{a+4}{3}$，即 $\frac{a+4}{3}=3$，

解得 $a=5$.

由 $\frac{b+3}{2}=\frac{c+8}{4}=3$，解得 $b=3$，$c=4$.

(2) ∵ $3^2+4^2=5^2$，即 $b^2+c^2=a^2$，

∴ △ABC 是直角三角形.

16. 解：(1) ∵ 正方形 $ABCD$ 的边长是 2，点 P 是 AB 的中点，

∴ $AB=AD=2$，$AP=1$，$\angle BAD=90°$.

∴ $PD=\sqrt{AP^2+AD^2}=\sqrt{5}$.

∵ $PF=PD$，∴ $AF=\sqrt{5}-1$.

在正方形 $AMEF$ 中，$AM=AF=\sqrt{5}-1$，$DM=AD-AM=3-\sqrt{5}$.

(2) 点 M 是 AD 的黄金分割点. 理由如下：由 (1) 得 $AD\cdot DM=2(3-\sqrt{5})=6-2\sqrt{5}$. 又∵ $AM^2=(\sqrt{5}-1)^2=6-2\sqrt{5}$，∴ $AM^2=AD\cdot DM$.

∴ 点 M 是 AD 的黄金分割点.

第 4 课时　平行线分线段成比例

1. C　**2.** B　**3.** C　**4.** 4

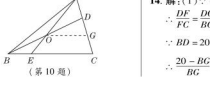
5. B　**点拨**：∵ $DE//BC$，∴ $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$

∵ $AD=1$，$DB=2$，∴ $AB=3$，∴ $\frac{AE}{AC}=\frac{1}{3}$，故选 B.

6. C　**7.** D　**8.** C

9. C　**点拨**：∵ $DE//BC$，∴ $AE:EC=AD:DB=1:2$，∵ $EF//AB$，∴ $BF:FC=AE:EC=1:2$，∴ $CF=6$，∴ $BF=3$，故选 C.

10. B　**点拨**：如图，过 O 作 $OG//BC$，交 AC 于 G.



(第 10 题)

∵ O 是 BD 的中点，

∴ G 是 DC 的中点.

又∵ $AD:DC=1:2$，

∴ $AD=DG=GC$.

∴ $AG:GC=2:1$，$AO:OE=2:1$.

∴ $S_{\triangle AOB}:S_{\triangle BOE}=2:1$.

设 $S_{\triangle AOE}=S$，$S_{\triangle AOB}=2S$，又 $BO=OD$，

∴ $S_{\triangle AOB}=2S$，$S_{\triangle ABD}=4S$.

∵ $AD:DC=1:2$，

∴ $S_{\triangle BDC}=2S_{\triangle ABD}=8S$，$S_{四边形EGOF}=7S$.

∵ $S_{\triangle AEC}=9S$，$S_{\triangle ABE}=3S$.

∴ $\frac{BE}{EC}=\frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle AEC}}=\frac{3S}{9S}=\frac{1}{3}$.

11. 解：(1) ∵ $a//b//c$，

∴ $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$，即 $\frac{3}{5}=\frac{4}{EF}$，

解得 $EF=\frac{20}{3}$.

(2) ∵ $a//b//c$，

∴ $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}=\frac{2}{5}$.

∵ $\frac{DE+EF}{EF}=\frac{2+5}{5}$，即 $\frac{10}{EF}=\frac{7}{5}$，

解得 $EF=\frac{50}{7}$.

12. 证明：∵ $AD//BC$，

∴ $\frac{AM}{NC}=\frac{AO}{CO}$.

∵ $AD//BC$，

∴ $\frac{AO}{OC}=\frac{AM}{BC}=\frac{PD}{PC}=\frac{MD}{NC}$，

∴ $\frac{AM}{NC}=\frac{MD}{NC}$，

∴ $AM=MD$.

13. 证明：如图，过点 D 作 $DE//BN$，交 AC 于点 E.



(第 13 题)

∵ AD 是 BC 边上的中线，

∴ $BD=DC$.

又∵ $DE//BN$，

∴ $CE=NE$.

∵ M 是 AD 的中点，$DE//MN$，

∴ $AN=NE$.

∴ $AN=NE=CE$.

∵ $CN=NE+CE=2AN$.

∴ $AN=\frac{1}{2}CN$.

14. 解：(1) ∵ $GF//BC$，

∴ $\frac{DF}{FC}=\frac{DG}{BG}$.

∵ $BD=20$，$\frac{DF}{FC}=\frac{3}{2}$，

∴ $\frac{20-BG}{BG}=\frac{3}{2}$，解得 $BG=8$.

(2) ∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AB//CD$，$AB=CD$，

∴ $\frac{DM}{AB}=\frac{DG}{GB}=\frac{3}{2}$，

∴ $\frac{DM}{CD}=\frac{3}{2}$，

∴ $\frac{CM}{CD}=\frac{1}{2}$.

阶段核心技巧

1. 证明：(1) 在菱形 $ABCD$ 中，$AD=BC$，$AD=CD$，$\angle A=\angle C$.

∵ $BE=BF$，∴ $AE=CF$.

∴ △ADE ≌ △CDF.

(2) ∵ △ADE ≌ △CBF，∴ $DE=BF$.

∵ 在菱形 $ABCD$ 中，$BC=CD$，$AB//CD$，

∴ $\frac{GE}{DE}=\frac{GB}{BC}$，∴ $\frac{GE}{BF}=\frac{GB}{CD}$.

2. 证明：∵ $DE//BC$，

∴ $\frac{PD}{PB}=\frac{PE}{PC}$.

∴ $PD\cdot PC=PE\cdot PB$.

∵ $DF//AC$，

∴ $\frac{PF}{PA}=\frac{PD}{PC}$.

∴ $PD\cdot PC=PF\cdot PA$.

∴ $PE\cdot PB=PF\cdot PA$.

∴ $\frac{PE}{PF}=\frac{PA}{PB}$.

3. 证明：∵ $EF//CD$，

∴ $\frac{AF}{AD}=\frac{AE}{AC}$.

∵ $DE//BC$，

∴ $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$.

∴ $\frac{AD}{AB}=\frac{AF}{AD}$.

4. 证明：(1) ∵ △ABC 与 △DCE 都是等边三角形，

∴ $AC=BC$，$CE=CD$，$\angle ACB=\angle DCE=60°$.

∴ $\angle ACB+\angle ACD=\angle DCE+\angle ACD$，即 $\angle ACE=\angle BCD$.

∴ △ACE ≌ △BCD(SAS).

(2) ∵ △ACE ≌ △BCD，

∴ $\angle BDC=\angle AEC$.

又∵ $\angle GCD=180°-\angle ACB-\angle DCE=60°=\angle FCE$，$CD=CE$，

∴ △GCD ≌ △FCE(ASA).

∴ $CG=CF$.

∴ △CFG 为等边三角形.

∴ $\angle CFG=\angle DCE=60°$.

∴ $GF//CE$，∴ $\frac{AG}{GC}=\frac{AF}{FE}$.

5. 证明：∵ $FG//BE$，∴ $\frac{FG}{EB}=\frac{AF}{AE}$.

∵ $FC//ED$，∴ $\frac{FC}{ED}=\frac{AF}{AE}$，

∴ $\frac{FG}{EB}=\frac{FC}{ED}$.

又∵ $EB=ED$，∴ $FG=FC$.

点拨：可根据等式的传递性和比例的性质证明 $FG=FC$. 由 $FG//BE$，可得 $\frac{FG}{EB}=\frac{AF}{AE}$. 由 $FC//ED$，可得 $\frac{FC}{ED}=\frac{AF}{AE}$，所以 $\frac{FG}{EB}=\frac{FC}{ED}$. 又因为 $EB=ED$，故问题得证.

6. 证明：∵ $AC//FE$，∴ $\frac{BE}{BC}=\frac{BF}{BA}$①.

∵ $FE//BD$，

∴ $\frac{AE}{AD}=\frac{AF}{AB}$②.

①+②，得 $\frac{BE}{BC}+\frac{AE}{AD}=\frac{BF}{BA}+\frac{AF}{AB}=\frac{AB}{AB}=1$，即 $\frac{AE}{AD}+\frac{BE}{BC}=1$.

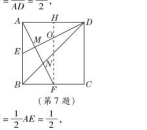
22.2　相似三角形的判定

第 1 课时　相似三角形及平行线截相似三角形

1. A　**2.** B　**3.** A　**4.** C　**5.** B　**6.** C

7. C　**点拨**：如图，过点 F 作 $FH\perp AD$ 于点 H，交 ED 于点 O，则 $FH=AB=2$，∴ $AE=EB$，$BF=FC$，$BC=AD=2$，∴ $AE=EB=1$，$BF=AH=1$，$FC=HD=1$，∴ $AF=\sqrt{FH^2+AH^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，∵ $OH//AE$，∴ △DHO ∽ △DAE.

∴ $\frac{HO}{AE}=\frac{DH}{DA}=\frac{1}{2}$，



(第 7 题)

∴ $OH=\frac{1}{2}AE=\frac{1}{2}$，

∴ $OF=FH-OH=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

∵ $AE//FO$，

∴ △AME ∽ △FMO.

∴ $\frac{AM}{FM}=\frac{AE}{OF}=\frac{2}{3}$，

∴ $AM=\frac{2}{5}AF=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

∵ $AD//BF$，∴ △AND ∽ △FNB，

∴ $\frac{AN}{FN}=\frac{AD}{BF}=2$，

∴ $AN=\frac{2}{3}AF=\frac{2\sqrt{5}}{3}$，

∴ $MN=AN-AM=\frac{2\sqrt{5}}{3}-\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{4\sqrt{5}}{15}$. 故选 C.

8. B　**点拨**：如图，过点 D 作 $DH//EG$ 交 AB 于点 H，则 △AEG ∽ △ADH.

∴ $\frac{AE}{AD}=\frac{EG}{DH}$



(第 8 题)

∵ $EF\perp AC$，$\angle C=90°$，

∴ $\angle EFA=\angle C=90°$.

∴ $EF//CD$. ∴ △AEF ∽ △ADC.

∴ $\frac{AE}{AD}=\frac{EF}{DC}=\frac{EG}{DH}=\frac{EF}{CD}$.

∵ $EG=EF$，∴ $DH=CD$.

设 $DH=x$，则 $CD=x$.

∵ $BC=12$，$AC=6$，

∴ $BD=12-x$.

∵ $EF\perp AC$，$FE\perp EG$，$DH//EG$，

∴ $EG//AC//DH$.

∴ △BDH ∽ △BCA.

∴ $\frac{DH}{AC}=\frac{BD}{BC}$，即 $\frac{x}{6}=\frac{12-x}{12}$，解得 $x=4$，∴ $CD=4$.

9. 错解：D

诊断：不能准确找出相似三角形的对应边，从而不能准确写出对应线段所成的比例式.

正解：A

10. (1) 证明：∵ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

∴ $AD//BE$，∴ △AMD ∽ △EMB.

(2) 解：∵ $AD//BC$，

∴ △FND ∽ △FNB.

∴ $\frac{FN}{NE}=\frac{DN}{BN}$.

∵ M，N 为 BD 的三等分点，

∴ $\frac{DN}{BN}=\frac{1}{2}$，∴ $\frac{FN}{NE}=\frac{1}{2}$.

11. (1) 证明：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，∴ $AD//BC$.

∵ $DF=BE$，∴ 四边形 $BEFD$ 是平行四边形，∴ $BD//EF$.

(2) 解：∵ $BE=4$，∴ $DF=4$.

∵ $DF//EC$，

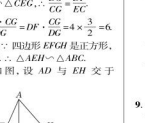
∴ △DFG ∽ △CEG，∴ $\frac{DG}{CG}=\frac{DF}{EC}$.

∴ $EC=\frac{DF\cdot CG}{DG}=DF\cdot\frac{CG}{DG}=4\times\frac{3}{2}=6$.

12. (1) 证明：∵ 四边形 $EFGH$ 是正方形，

∴ $EH//BC$. ∴ △AEH ∽ △ABC.

(2) 解：如图，设 AD 与 EH 交于点 M.



(第 12 题)

∵ $\angle EFD=\angle FEM=\angle FDM=90°$，

∴ 四边形 $EFDM$ 是矩形.

∴ $EF=DM$. 设正方形 $EFGH$ 的边长为 x cm，

∵ △AEH ∽ △ABC，∴ $\frac{EH}{BC}=\frac{AE}{AB}$

同理得 △AEM ∽ △ABD，

∴ $\frac{AE}{AB}=\frac{AM}{AD}$，∴ $\frac{EH}{BC}=\frac{AM}{AD}$.

∴ $\frac{x}{40}=\frac{30-x}{30}$，∴ $x=\frac{120}{7}$.

∴ 正方形 $EFGH$ 的边长为 $\frac{120}{7}$ cm，面积为 $\frac{14\,400}{49}$ cm^2.

13. (1) 证明：∵ $\angle OED=\angle OBA$，$\angle OEF=\angle OBC$，

∴ $DE//AB$，$EF//BC$. 由 $DE//AB$，得 △ODE ∽ △OAB，∴ $\frac{OD}{OA}=\frac{OE}{OB}$.

由 $EF//BC$，得 △OFE ∽ △OCB，

∴ $\frac{OF}{OC}=\frac{OE}{OB}$. ∵ $\frac{OD}{OA}=\frac{OF}{OC}$.

(2) 解：是. 理由如下：由 △OFE ∽ △OCB，得 $\frac{EF}{BC}=\frac{OE}{OB}$.

由 △ODE ∽ △OAB，得 $\frac{DE}{AB}=\frac{OE}{OB}$.

∴ $\frac{DE}{AB}=\frac{EF}{BC}$.

∵ △DEF 是以 DF 为底边的等腰三角形，∴ $DE=EF$，

∴ $AB=BC$，即 △ABC 是以 AC 为底边的等腰三角形.

第 2 课时　利用角的关系判定两个三角形相似

1. A　**2.** C　**3.** C　**4.** A

5. C　**点拨**：∵ $\angle ADE=\angle ACB$，$\angle A=\angle A$，∴ △ADE ∽ △ACB. ∴ $\frac{AD}{AE}=\frac{AE}{AB}$，即 $\frac{2}{4}=\frac{4}{6}$，解得 $AE=3$.

6. B　**7.** D

8. B　**点拨**：∵ $\angle C=90°$，$AB=5$，$BC=4$，∴ $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=3$. ∵ $PQ//AB$，∴ $\angle ABD=\angle BDQ$，又∵ BD 平分 $\angle ABC$，∴ $\angle ABD=\angle QBD$，∴ $\angle QBD=\angle BDQ$，∴ $QB=QD$. ∴ $QP=2QB$. 由 $PQ//AB$，易得 △CPQ ∽ △CAB. ∴ $\frac{CP}{CA}=\frac{CQ}{CB}=\frac{PQ}{AB}$，即 $\frac{CP}{3}=\frac{4-QB}{4}=\frac{2QB}{5}$，解得 $CP=\frac{24}{13}$，∴ $AP=CA-CP=\frac{15}{13}$.

9. 错解：2

诊断：根据题意，要使 △AEF 与 △ABC 相似，由于本题没有说明对应关系，故采用分类讨论思想. 有两种可能：(1) △AEF ∽ △ABC，(2) △AEF ∽ △ACB.

正解：2 或 4.5

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. 证明：(1)∵ △ABC 和△DCE 都是等边三角形，
∴ $AC=BC$，$CD=CE$，$\angle ACB=\angle ACE+\angle DCE=60°$，
∴ $\angle ACB-\angle ACE=\angle ACE+\angle DCE$，即 $\angle BCE=\angle ACD$.
在△BCE 和△ACD 中，
$\begin{cases}BC=AC,\\ \angle BCE=\angle ACD,\\ CE=CD,\end{cases}$
∴ △BCE≌△ACD，∴ $AD=BE$.
(2)由(1)知，△BCE≌△ACD，
∴ $\angle CBE=\angle CAD$.
∵ $\angle BMC=\angle AMF$，
∴ $\angle AFB=\angle ACB=60°=\angle ABD$.
又∵ $\angle BAF=\angle DAB$，
∴ △ABF∽△ADB.

11. (1)证明：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，
∴ $AD/\!/BC$，$AD=BC$.
∴ $\angle EBF=\angle EAD$.
又∵ $\angle BEF=\angle AED$，
∴ △EBF∽△EAD.
∴ $\frac{BF}{AD}=\frac{EB}{EA}=\frac{1}{2}$.
∴ $BF=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}BC$.
∴ $BF=CF$.
(2)解：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，
∴ $AD/\!/BC$.
∴ $\angle FCG=\angle DAG$.
又∵ $\angle FGC=\angle DGA$，
∴ △FGC∽△DGA，
∴ $\frac{FG}{DG}=\frac{CF}{AD}$，即 $\frac{FG}{4}=\frac{1}{2}$，
解得 $FG=2$.

12. (1)解：在矩形 $ABCD$ 中，$AD/\!/CF$，
∴ $\angle DAF=\angle AFC$.
∵ $AF\perp DAC$，
∴ $\angle DAF=\angle CAF$.
∴ $\angle CAF=\angle AFC$.
∴ $AC=CF$.
∵ $AB=4$，$BC=3$，
∴ 在 Rt△ABC 中，$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$.
∴ $CF=5$.
由 $AD/\!/CF$，易得△ADE∽△FCE.
∴ $\frac{AD}{CF}=\frac{DE}{CE}$.
设 $DE=x$，则 $CE=4-x$，
∴ $\frac{3}{5}=\frac{x}{4-x}$，
解得 $x=\frac{3}{2}$.
∴ $DE=\frac{3}{2}$.
(2)证明：∵ $AD/\!/FH$，$AH/\!/DF$，
∴ 四边形 $ADFH$ 是平行四边形.
∴ $AD=FH=3$.
∴ $CH=2$，$BH=5$.
由 $AD/\!/BH$，易得△ADG∽△HBG.
∵ $\frac{DG}{BG}=\frac{AD}{BH}$，
∴ $\frac{DG}{5-DG}=\frac{3}{5}$.
∴ $DG=\frac{15}{8}$.
∵ $DE=\frac{3}{2}$，
∴ $\frac{DE}{DG}=\frac{DC}{DB}=\frac{4}{5}$.
又∵ $\angle GDE=\angle BDC$，
∴ △DEG∽△DCB.
∴ $\angle DEG=\angle DCB$.
∴ $EG/\!/BC$.
∴ $\angle 1=\angle AHC$.
又∵ $DF/\!/AH$，
∴ $\angle AHC=\angle DFC$.
∴ $\angle 1=\angle DFC$.

13. 解：(1)由旋转的性质知，$AB=AD=10$，$\angle DAB=90°$，
∴ $\angle ABD=\angle ADB=45°$.
由平移的性质知，$DF/\!/AB$，
∴ $\angle BDF=\angle ABD$，∴ $\angle BDF=45°$.
(2)由平移的性质知，$EG/\!/AC$，$EG=AC$，
∴ 四边形 $ACGE$ 是平行四边形.
又∵ $\angle C=90°$，
∴ 四边形 $ACGE$ 是矩形，
∴ $\angle EAC=90°$，$AE=CG$.
又∵ $\angle DAB=90°$，
∴ $\angle EAB+\angle EAD=\angle CAB+\angle EAB$，
∴ $\angle EAD=\angle CAB$.
由(1)知 $DF/\!/AB$，
∴ $\angle EDA+\angle DAB=180°$，
∴ $\angle EDA=90°$，∴ $\angle EDA=\angle C$，
∴ △AED∽△ABC，∴ $\frac{AE}{AB}=\frac{AD}{AC}$.
∴ $\frac{AE}{10}=\frac{10}{8}$，∴ $AE=\frac{25}{2}$，
∴ $CG=\frac{25}{2}$.

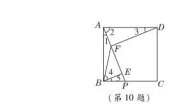
第 3 课时　利用边角关系判定两个三角形相似

1. C　2. C　3. B　4. C　5. B
6. $DF/\!/AC$(答案不唯一)　7. C
8. C　**点拨**：∵ 四边形 $EFGB$ 是正方形，$EB=2$，
∴ $FG=EB=2$，$\angle FGB=90°$.
∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，H 为 AD 的中点，
∴ $AD=4$，$AH=2$，$\angle BAD=90°$.
∵ $\angle HAN=\angle FGN$，$AH=GF$.
又∵ $\angle ANH=\angle GNF$，
∴ △ANH≌△GNF(AAS)，故①正确.
∴ $\angle AHN=\angle HFG$.
∵ $AG=FG=2=AH$，
∴ $AF=\sqrt{2}FG=\sqrt{2}AH$.
∴ $\angle AFH\neq\angle AHF$.
∴ $\angle AFN\neq\angle HFG$，故②错误.
∵ △ANH≌△GNF，
∴ $AN=\frac{1}{2}AG=1$.
∵ $GM=BC=4$，∴ $\frac{AH}{AN}=\frac{GM}{AG}=2$.
又∵ $\angle HAN=\angle AGM=90°$，
∴ △AHN∽△GMA.
∴ $\angle AHN=\angle AMG$.
∵ $AD/\!/GM$，
∴ $\angle HAK=\angle AMG$.
∵ $\angle AHK=\angle HAK$.
∴ $AK=HK$.
∴ $AK=HK=NK$.
∵ $FN=HN$，
∴ $FN=2NK$，故③正确.
易知四边形 $ADMG$ 是矩形.
∵ $DM=AG=2$.
∵ $S_{\triangle AFN}=\frac{1}{2}AN\cdot FG=\frac{1}{2}\times1\times2=1$，$S_{\triangle ADM}=\frac{1}{2}AD\cdot DM=\frac{1}{2}\times4\times2=4$，
∴ $S_{\triangle AFN}:S_{\triangle ADM}=1:4$，故④正确.
故选 C.

9. $\frac{12}{5}$ 或 $\frac{5}{3}$　**点拨**：当 $\frac{AE}{AD}=\frac{AB}{AC}$ 时，
∵ $\angle A=\angle A$，∴ △AED∽△ABC.
此时 $AE=\frac{AB\cdot AD}{AC}=\frac{6\times2}{5}=\frac{12}{5}$.
当 $\frac{AD}{AE}=\frac{AB}{AC}$ 时，∵ $\angle A=\angle A$，
∴ △ADE∽△ABC.
此时 $AE=\frac{AC\cdot AD}{AB}=\frac{5\times2}{6}=\frac{5}{3}$.
故答案为 $\frac{12}{5}$ 或 $\frac{5}{3}$.

易错警示 当 $\frac{AE}{AD}=\frac{AB}{AC}$ 或 $\frac{AD}{AE}=\frac{AB}{AC}$ 时，以 A，D，E 为顶点的三角形与△ABC 相似，本题容易考虑问题不全面出现漏解.

10. 证明：(1)如图，∵ 四边形 $ABCD$ 为正方形，
∴ $AB=AD$，$\angle BAD=90°$.
∵ $\angle1+\angle2=90°$，
∵ $BE\perp AP$，$DF\perp AP$，
∴ $\angle BEA=\angle AFD=90°$.
∵ $\angle2+\angle3=90°$，
∴ $\angle1=\angle3$.
在△ABE 和△DAF 中，
$\begin{cases}\angle BEA=\angle AFD,\\ \angle1=\angle3,\\ AB=DA,\end{cases}$
∴ △ABE≌△DAF，
∴ $BE=AF$，
∴ $EF=AE-AF=AE-BE$.
(2)如图，∴ $\frac{AF}{BF}=\frac{DF}{AD}$，$AF=BE$，


(第 10 题)

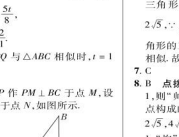
∴ $\frac{BE}{BF}=\frac{DF}{AD}$，∵ $\frac{BE}{BF}=\frac{BF}{AD}$
设 $\frac{BE}{BF}=\frac{DF}{AD}=k$，则 $BE=kBF$，$DF=kAD$，∴ $EF=\sqrt{BF^2-BE^2}=\sqrt{1-k^2}BF$，$AF=\sqrt{AD^2-DF^2}=\sqrt{1-k^2}AD$.
∴ $\frac{EF}{AF}=\frac{BF}{AD}$，∴ $\frac{BE}{DF}=\frac{EF}{AF}$.
又∵ $\angle BEF=\angle AFD=90°$，
∴ △BEF∽△DFA，
∴ $\angle4=\angle3$.∵ $\angle1=\angle3$，
∴ $\angle4=\angle1$.
∵ $\angle1+\angle BPA=90°$，$\angle5+\angle BPA=90°$，∴ $\angle5=\angle1$，∴ $\angle4=\angle5$.
即 BE 平分 $\angle FBP$，而 $BE\perp EF$，
∴ $EF=EP$.

11. 证明：(1)∵ $\angle ACD=\angle B$，$\angle CAD=\angle BAC$，
∴ △ACD∽△ABC.
∵ $AC:AB=AD:AC$.
∴ $AC^2=AD\cdot AB$.
(2)∵ △ACD∽△ABC，
∴ $\angle ADF=\angle ACG$.
∵ $\frac{AD}{DF}=\frac{AC}{CG}$，∴ △ADF∽△ACG.
∴ $\angle DAF=\angle CAF$，即 $\angle BAG=\angle CAG$.
过点 B 作 $BE/\!/AC$，交 AG 的延长线于点 E，则 $\angle E=\angle CAG$.
又∵ $\angle BGE=\angle AGC$，
∴ △ACG∽△EBG.∴ $\frac{AC}{BE}=\frac{CG}{BG}$.
又∵ $\angle BAG=\angle CAG$，
∴ $\angle BAG=\angle E$.∴ $BA=BE$.
∴ $\frac{AC}{AB}=\frac{CG}{BG}$.
∴ $\frac{DF}{CG}=\frac{CG}{BG}$.∴ $CG^2=DF\cdot BG$.

12. (1)证明：在正方形 $ABCD$ 中，$\angle A=\angle D=90°$，$AB=AD=CD$.
∵ $AE=ED$，$DF=\frac{1}{4}DC$，
∴ $AE=ED=\frac{1}{2}AB$，$DF=\frac{1}{4}AB$.
∴ $\frac{AB}{DF}=\frac{AE}{DF}$.
∴ △ABE∽△DEF.
(2)解：∵ $AD/\!/CG$，
∴ $\angle DEF=\angle G$，$\angle D=\angle DCG$.
∴ △EFD∽△GFC.
∴ $\frac{DE}{CG}=\frac{DF}{CF}=\frac{1}{3}$.

∵ $DE=\frac{1}{2}AB=2$，
∴ $CG=6$.∴ $BG=10$.

13. 解：(1)由题意知，$AB=10$ cm，$BP=5t$ cm，$CQ=4t$ cm，
$BQ=(8-4t)$ cm.
当 △PBQ∽△ABC 时，有 $\frac{PB}{AB}=\frac{BQ}{BC}$，即 $\frac{5t}{10}=\frac{8-4t}{8}$.
解得 $t=1$.
当△QBP∽△ABC 时，有 $\frac{QB}{AB}=\frac{BP}{BC}$，
即 $\frac{8-4t}{10}=\frac{5t}{8}$，
解得 $t=\frac{32}{41}$.
∴ 当△BPQ 与△ABC 相似时，$t=1$ 或 $t=\frac{32}{41}$.
(2)过点 P 作 $PM\perp BC$ 于点 M，设 AQ，CP 交于点 N，如图所示.


(第 13 题)

易知△BMP∽△BCA，
∴ $\frac{BP}{BA}=\frac{PM}{AC}=\frac{BM}{BC}$，
∴ $\frac{5t}{10}=\frac{PM}{6}=\frac{BM}{8}$.
∴ $PM=3t$ cm，$BM=4t$ cm，
则 $CM=(8-4t)$ cm.
∵ $AQ\perp PC$，∴ $\angle ANC=90°$，
∴ $\angle QAC+\angle NCA=90°$，
又∵ $\angle PCM+\angle NCA=90°$，
∴ $\angle QAC=\angle PCM$.
又∵ $\angle ACQ=\angle PMC$，
∴ △ACQ∽△CMP，
∴ $\frac{AC}{CM}=\frac{CQ}{MP}$，∴ $\frac{6}{8-4t}=\frac{4t}{3t}$，
解得 $t=\frac{7}{8}$.

第 4 课时　利用三边关系判定两个三角形相似

1. B　2. D　3. C　4. D
5. B　**点拨**：分以下两种情况讨论：(1)若最长为 45 cm 的铝材，设裁成的两段长分别为 x cm，y cm($x<y$)，由题意得 $\frac{24}{x}=\frac{30}{y}=\frac{36}{27}$①或 $\frac{24}{x}=\frac{30}{27}=\frac{36}{y}$②(注：27 cm 不可能是最小边长)，由①解得 $x=18$，$y=22.5$，符合题意.由②解得 $x=\frac{108}{5}$，$y=\frac{162}{5}$，而 $x+y=\frac{108}{5}+\frac{162}{5}=\frac{270}{5}=54>45$，不符合题意，舍去.
(2)若裁长为 27 cm 的铝材，设裁成的两段长分别为 a cm，b cm($a<b$)，由题意得 $\frac{24}{a}=\frac{30}{b}=\frac{36}{45}$(注：45 cm 只能是最大边长)，解得 $a=30$，$b=37.5$，而 $a+b=30+37.5=67.5>27$，不符合题意，舍去.
综上可知，裁法只有 1 种.
6. C　**点拨**：设网格中的每个小正方形的边长为 1.由题图得(1)中的三角形的各边长分别为 2，$\sqrt{2}$，$\sqrt{10}$，(3)中的三角形的各边长分别为 $2\sqrt{2}$，2，$2\sqrt{5}$，∴ $\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{5}}$，∴ 两个三角形的三边对应成比例，∴ ①和③相似.故选 C.
7. C
8. B　**点拨**：设各个小正方形的边长为 1，则“帅”“相”“兵”所在位置的格点构成的三角形的三边长分别为 2，$2\sqrt{5}$，$4\sqrt{2}$，“车”“炮”之间的距离为 1，“炮”与②之间的距离为 $\sqrt{5}$，“车”与②之间的距离为 $2\sqrt{2}$，∵ $\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$，∴ “马”应该落在②处.
9. B　**点拨**：当直角三角形的直角边长分别为 6，8，且另一个与它相似的直角三角形的直角边长分别为 3，4 时，x 的值为 5；当 8，4 为对应边的长且为两个直角三角形的斜边长时，x 的值为 $\sqrt{7}$，故 x 的值可以为 5 或 $\sqrt{7}$.此题易忽略第二种情况.
10. 证明：∵ $\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{DE}=\frac{AC}{AE}$，
∴ △ABC∽△ADE.
∴ $\angle BAC=\angle DAE$.
∴ $\angle BAC-\angle CAD=\angle DAE-\angle CAD$，即 $\angle BAD=\angle CAE$.
11. 证明：设正方形 $ABCD$ 的边长为 a.
∵ 四边形 $ABCD$ 为正方形，
∴ $AD=BC=CD=a$.
又∵ Q 是 CD 的中点，
∴ $DQ=CQ=\frac{1}{2}a$.
在 Rt △ADQ 中，$AQ=\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}=\frac{\sqrt{5}a}{2}$.
∵ $BP=3PC$，∴ $PC=\frac{1}{4}a$.
在 Rt △QCP 中，$PQ=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{16}}=\frac{\sqrt{5}a}{4}$.
∴ $\frac{AD}{CQ}=\frac{DQ}{PC}=\frac{AQ}{PQ}=2$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \triangle ADQ \backsim \triangle QCP$.

12. **解**:(1) 相似. 理由:可设正方形 $ABCD$,$CDEF$,$EFGH$ 的边长为 a,则 $\triangle ACF$ 的三边长分别为 $AC=\sqrt{2}a$,$CF=a$,$AF=\sqrt{5}a$,$\triangle ACG$ 的三边长分别为 $AC=\sqrt{2}a$,$CG=2a$,$AG=\sqrt{10}a$.

$\therefore \dfrac{CF}{AC}=\dfrac{a}{\sqrt{2}a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,$\dfrac{AC}{CG}=\dfrac{\sqrt{2}a}{2a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$\dfrac{AF}{AG}=\dfrac{\sqrt{5}a}{\sqrt{10}a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$\therefore \dfrac{CF}{AC}=\dfrac{AC}{CG}=\dfrac{AF}{AG}$

$\therefore \triangle ACF$ 与 $\triangle GCA$ 相似.

(2) $\therefore \triangle ACF \backsim \triangle GCA$,

$\therefore \angle 1=\angle CAF$.

$\therefore \angle 1+\angle 2=\angle CAF+\angle 2=\angle ACB=45°$.

13. (1) **证明**:根据勾股定理,得 $AB=2\sqrt{5}$,$AC=\sqrt{5}$,$BC=5$,

显然有 $AB^2+AC^2=BC^2$,

根据勾股定理的逆定理得 $\triangle ABC$ 为直角三角形.

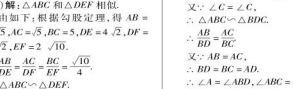
(2) **解**:$\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 相似.

理由如下:根据勾股定理,得 $AB=2\sqrt{5}$,$AC=\sqrt{5}$,$BC=5$,$DE=4\sqrt{2}$,$DF=2\sqrt{2}$,$EF=2\sqrt{10}$.

$\therefore \dfrac{AB}{DE}=\dfrac{AC}{DF}=\dfrac{BC}{EF}=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$.

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle DEF$.

(3) **解**:如图,连接 P_2P_5,P_2P_4,P_4P_5,则 $\triangle P_2P_4P_5$ 符合要求.



(第 13 题)

第 5 课时　利用斜边、直角边判定两个直角三角形相似

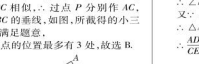
1. 10　**2.** A　**3.** C　**4.** B　**5.** D

6. B　**点拨**:三角形相似的判定有三种方法,①三边成比例的两个三角形相似;②两边成比例且夹角相等的两个三角形相似;③两角分别相等的两个三角形相似.画出图形,逐项分析.故选 B.

7. D

8. B　**点拨**:∵ 裁得的小三角形与 $\triangle ABC$ 相似,∴ 过点 P 分别作 AC,AB,BC 的垂线,如图,所裁得的小三角形满足题意,

则 D 点的位置最多有 3 处,故选 B.



(第 8 题)

9. **解**:设 $AD=x$,由勾股定理得 $BC=\sqrt{5^2-4^2}=3$.

①若 $\triangle ACD \backsim \triangle ABC$,则 $\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{AC}{AB}$,

即 $\dfrac{x}{4}=\dfrac{4}{5}$,得 $x=\dfrac{16}{5}$.

②若 $\triangle ACD \backsim \triangle BAC$,则 $\dfrac{AD}{BC}=\dfrac{AC}{BA}$,

即 $\dfrac{x}{3}=\dfrac{4}{5}$,得 $x=\dfrac{12}{5}$.

综上,当 AD 为 $\dfrac{16}{5}$ 或 $\dfrac{12}{5}$ 时,$\triangle ACD$ 与 $\triangle ABC$ 相似.

10. **解**:(1) $\because AD=BC=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$,

$\therefore AD^2=\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

$\therefore AC=1$,

$\therefore CD=1-\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

$\therefore AD^2=AC\cdot CD$.

(2) $\because AD^2=AC\cdot CD$,$AD=BC$,

$\therefore BC^2=AC\cdot CD$,即 $\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{CD}{BC}$

又 $\because \angle C=\angle C$,

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle BDC$.

$\therefore \dfrac{AB}{BD}=\dfrac{AC}{BC}$.

又 $\because AB=AC$,

$\therefore BD=BC=AD$.

$\therefore \angle A=\angle ABD$,$\angle ABC=\angle C=\angle BDC$.

设 $\angle A=\angle ABD=x$,

则 $\angle BDC=\angle A+\angle ABD=2x$,

$\therefore \angle ABC=\angle C=\angle BDC=2x$,

$\therefore \angle A+\angle ABC+\angle C=x+2x+2x=180°$,解得 $x=36°$.

$\therefore \angle ABD=36°$.

11. (1) **证明**:$\because AC$ 平分 $\angle DAB$,

$\therefore \angle DAC=\angle CAB$.

又 $\because \angle ADC=\angle ACB=90°$,

$\therefore \triangle ADC \backsim \triangle ACB$.

$\therefore \dfrac{AD}{AC}=\dfrac{AC}{AB}$,即 $AC^2=AB\cdot AD$.

(2) **解**:在 Rt$\triangle ACB$ 中,

$\because E$ 为 AB 的中点,$\angle ACB=90°$,

$\therefore CE=\dfrac{1}{2}AB=AE$.

$\therefore \angle EAC=\angle ECA$.

又 $\because AC$ 平分 $\angle DAB$,

$\therefore \angle DAC=\angle CAB$.

$\therefore \angle DAC=\angle ECA$.

$\therefore AFD=\angle CFE$,

$\therefore \triangle AFD \backsim \triangle CFE$.

$\therefore \dfrac{AD}{CE}=\dfrac{AF}{CF}$

$\because CE=\dfrac{1}{2}AB$,$AB=6$,

$\therefore CE=\dfrac{1}{2}\times 6=3$.

又 $\because AD=4$,

$\therefore \dfrac{4}{3}=\dfrac{AF}{CF}$.$\therefore \dfrac{AC}{CF}=\dfrac{7}{4}$.

12. (1) **证明**:$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore \angle ABC=\angle C$,$AB=BC$,

$\because AE\perp BF$,

$\therefore \angle AMB=\angle BAM+\angle ABM=90°$.

$\therefore \angle ABM+\angle CBF=90°$,

$\therefore \angle BAM=\angle CBF$.

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle BCF$ 中,

$\begin{cases}\angle BAE=\angle CBF,\\ AB=BC,\\ \angle ABE=\angle C,\end{cases}$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle BCF(ASA)$.

$\therefore AE=BF$.

(2) **解**:$AE=\dfrac{2}{3}BF$.

证明:∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore \angle ABC=\angle C$.

$\because AE\perp BF$,

$\therefore \angle AMB=\angle BAM+\angle ABM=90°$.

$\therefore \angle ABM+\angle CBF=90°$,

$\therefore \angle BAM=\angle CBF$.

$\therefore \triangle ABE \backsim \triangle BCF$.

$\therefore \dfrac{AE}{BF}=\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{2}{3}$.

$\therefore AE=\dfrac{2}{3}BF$.

13. (1) **证明**:∵ 点 D 与点 F 关于直线 AE 对称,

$\therefore AD=AF$,$\angle DAE=\angle FAE=\alpha$.

$\therefore \angle DAF=2\alpha=\angle BAC$.

$\therefore AB=AC$,$AD=AF$,

$\therefore \dfrac{AD}{AF}=\dfrac{AB}{AC}=1$.

$\therefore \triangle ADF \backsim \triangle ABC$.

(2) **证明**:$\because \angle DAF=2\alpha=\angle BAC$,

$\therefore \angle DAC=\angle BAC-\angle DAC$,

即 $\angle BAD=\angle CAF$.

又 $\because AB=AC$,$AD=AF$,

$\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAF$.

$\therefore BD=CF$,$\angle ACF=\angle ABD$.

$\because \angle BAC=2\alpha=2\times 45°=90°$,$AB=AC$,

$\therefore \angle ABD=\angle ACB=45°$.

$\therefore \angle ACF=45°$.

$\therefore \angle ECF=\angle ACB+\angle ACF=90°$.

$\therefore EF^2=CF^2+CE^2$.

$\because$ 点 D 与点 F 关于直线 AE 对称,

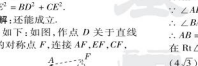
$\therefore DE=EF$.

又 $\because BD=CF$,

$\therefore DE^2=BD^2+CE^2$.

(3) **解**:还能成立.

理由如下:如图,作点 D 关于直线 AE 的对称点 F,连接 AF,EF,CF,



(第 13 题)

$\therefore AD=AF$,$DE=EF$,

$\angle FAE=\angle DAE=\alpha$.

$\therefore \angle DAF=2\alpha=\angle BAC$.

$\therefore \angle DAF-\angle DAC=\angle BAC-\angle DAC$,

即 $\angle CAF=\angle BAD$.

又 $\because AB=AC$,$AD=AF$,

$\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAF$.

$\therefore BD=CF$,$\angle ACF=\angle ABD$.

$\because \angle BAC=2\alpha=2\times 45°=90°$,$AB=AC$,

$\therefore \angle ABD=\angle ACB=45°$.

$\therefore \angle ACF=45°$.

$\therefore \angle ECF=\angle ACB+\angle ACF=90°$.

$\therefore EF^2=CF^2+CE^2$.

$\therefore DE=EF$,$CF=BD$,

$\therefore DE^2=BD^2+CE^2$.

第 6 课时　相似三角形判定定理的应用

1. (1) 75;4$\sqrt{3}$　**点拨**:∵ $BD\perp AC$,

$\therefore \angle ADB=\angle OAC=75°$.

$\therefore \angle BOD=\angle COA$,

$\therefore \triangle BOD \backsim \triangle COA$.

$\therefore \dfrac{OD}{OA}=\dfrac{OB}{OC}=\dfrac{1}{3}$.

又 $\because AO=3\sqrt{3}$,

$\therefore OD=\dfrac{1}{3}AO=\sqrt{3}$,

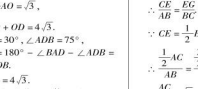
$\therefore AD=AO+OD=4\sqrt{3}$.

$\because \angle BAD=30°$,$\angle ADB=75°$,

$\therefore \angle ABD=180°-\angle BAD-\angle ADB=75°=\angle ADB$.

$\therefore AB=AD=4\sqrt{3}$.

(2) **解**:过点 B 作 $BE\parallel AD$ 交 AC 于点 E,如图所示.



(第 1 题)

$\because AC\perp AD$,$BE\parallel AD$,

$\therefore DAC=\angle BEA=90°$.

$\therefore \angle AOD=\angle EOB$,

$\therefore \triangle AOD \backsim \triangle EOB$,

$\therefore \dfrac{BO}{EO}=\dfrac{EO}{AO}=\dfrac{BE}{DA}$.

$\because BO:OD=1:3$,

$\therefore \dfrac{EO}{AO}=\dfrac{BE}{DA}=\dfrac{1}{3}$.

$\therefore AO=3\sqrt{3}$,

$\therefore EO=\sqrt{3}$,

$\therefore AE=4\sqrt{3}$.

$\because \angle ABC=\angle ACB=75°$,

$\therefore \angle BAC=30°$,$AB=AC$,

$\therefore AB=2BE$.

在 Rt$\triangle AEB$ 中,$AE^2+BE^2=AB^2$,即 $(4\sqrt{3})^2+BE^2=(2BE)^2$,解得 $BE=4$(负值舍去).

$\therefore AB=AC=8$,$AD=12$,

在 Rt$\triangle CAD$ 中,$AC^2+AD^2=CD^2$,即 $8^2+12^2=CD^2$,

解得 $CD=4\sqrt{13}$(负值舍去).

2. (1) **证明**:∵ 点 D,E 分别是线段 AC,BC 的中点,

∴ DE 为 $\triangle ABC$ 的中位线,

$\therefore DE\parallel AB$,即 $EG\parallel AB$,

$\therefore \angle FDG=\angle A$.

∵ 点 F 为线段 AD 的中点,

$\therefore AF=DF$.

在 $\triangle ABF$ 与 $\triangle DGF$ 中,

$\begin{cases}\angle A=\angle FDG,\\ AF=DF,\\ \angle AFB=\angle DFG,\end{cases}$

$\therefore \triangle ABF \cong \triangle DGF(ASA)$,

$\therefore AB=GD$.

(2) **解**:∵ DE 为 $\triangle ABC$ 的中位线,

$\therefore DE=\dfrac{1}{2}AB$.

$\therefore DG=AB$,

$\therefore EG=DE+DG=\dfrac{3}{2}AB$.

∵ $DE\parallel AB$,∴ $\angle GEC=\angle CBA$.

∵ $AC=BC$,$CG=EG$,

$\therefore \angle GCE=\angle GEC=\angle CBA=\angle A$,

$\therefore \triangle GEC \backsim \triangle CBA$,

$\therefore \dfrac{CE}{AB}=\dfrac{EG}{BC}$,

$\therefore CE=\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{1}{2}AC$,

$\therefore \dfrac{1}{2}\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{3}{2}\dfrac{AB}{AC}$,

$\therefore \dfrac{AC}{AB}=\sqrt{3}$.

3. (1) ①报;②报;③真

(2) **证明**:如图,连接 BD,B_1D_1,

$\because \angle BCD=\angle B_1C_1D_1$,$\dfrac{BC}{B_1C_1}=\dfrac{CD}{C_1D_1}$,

$\therefore \triangle BCD \backsim \triangle B_1C_1D_1$.

$\therefore \angle CBD=\angle C_1B_1D_1$,$\angle CDB=\angle C_1D_1B_1$,$\dfrac{BC}{B_1C_1}=\dfrac{BD}{B_1D_1}$.

又 $\because \angle ABC=\angle A_1B_1C_1$,$\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{BC}{B_1C_1}$,

$\therefore \angle ABD=\angle A_1B_1D_1$,$\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{BD}{B_1D_1}$.

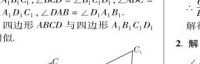
$\therefore \triangle ABD \backsim \triangle A_1B_1D_1$.

$\therefore \dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{AD}{A_1D_1}$,$\angle ADB=\angle A_1D_1B_1$,

$\angle DAB=\angle D_1A_1B_1$.

$\therefore \dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{BC}{B_1C_1}=\dfrac{CD}{C_1D_1}=\dfrac{AD}{A_1D_1}$,$\angle ABC=\angle A_1B_1C_1$,$\angle BCD=\angle B_1C_1D_1$,$\angle ADC=\angle A_1D_1C_1$,$\angle DAB=\angle D_1A_1B_1$.

∴ 四边形 $ABCD$ 与四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 相似.



(第 3 题)

(3) **解**:∵ 四边形 $ABFE$ 与四边形 $EFCD$ 相似,

$\therefore \dfrac{DE}{AE}=\dfrac{EF}{AF}$

$\therefore EF\cdot OF+OF$,

$\therefore \dfrac{DE}{AE}=\dfrac{OE+OF}{AB}$.

$\therefore EF/\!/AB/\!/CD$,

$\therefore \dfrac{DE}{AD}=\dfrac{OE}{AB}$,$\dfrac{DE}{AD}=\dfrac{OC}{AC}=\dfrac{OF}{AB}$.

$\therefore \dfrac{DE}{AD}=\dfrac{DF}{AB}=\dfrac{OE}{AB}+\dfrac{OF}{AB}$.

$\therefore \dfrac{2DE}{AD}=\dfrac{EF}{AB}=\dfrac{DE}{AE}$.

$\therefore AD=DE+AE$,

$\therefore \dfrac{2}{DE+AE}=\dfrac{1}{AE}$.

$\therefore 2AE=DE+AE$,即 $AE=DE$.

$\therefore \dfrac{S_2}{S_1}=1$.

阶段核心方法

1. (1) **证明**:∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore OA=OC$,$AB/\!/CD$.

$\therefore \angle OAE=\angle OCF$.

在 $\triangle AOE$ 和 $\triangle COF$ 中,

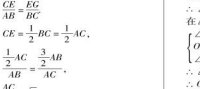
$\begin{cases}\angle OAE=\angle OCF,\\ OA=OC,\\ \angle AOE=\angle COF,\end{cases}$

$\therefore \triangle AOE \cong \triangle COF(ASA)$.

$\therefore OE=OF$.

(2) **解**:如图,过点 O 作 $ON/\!/BC$ 交 AB 于点 N,易得 $\triangle AON \backsim \triangle ACB$.

$\therefore \dfrac{OA}{AC}=\dfrac{ON}{BC}=\dfrac{AN}{AB}$.



(第 1 题)

$\because OA=OC$,

$\therefore ON=\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{1}{2}AD=2$,

$BN=AN=\dfrac{1}{2}AB=3$.

$\therefore ON/\!/BC$,

$\therefore \angle ONE=\angle MBE$.

又 $\because \angle OEN=\angle MEB$,

$\therefore \triangle ONE \backsim \triangle MBE$.

$\therefore \dfrac{ON}{BM}=\dfrac{NE}{BE}$,即 $\dfrac{2}{1}=\dfrac{3-BE}{BE}$,

解得 $BE=1$.

2. **解**:相似. 理由如下:$\because \dfrac{EO}{BO}=\dfrac{DO}{CO}$,

$\angle BOE=\angle COD$,$\angle DOE=\angle COB$,

$\therefore \triangle BOE \backsim \triangle COD$,$\triangle DOE \backsim \triangle COB$.

$\therefore \angle EBO=\angle DCO$,$\angle DEO=\angle CBO$.

$\because \angle ADE=\angle DCO+\angle DEO$,$\angle ABC=\angle EBO+\angle CBO$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∴ $\angle ADE = \angle ABC$.

又∵ $\angle A = \angle A$,

∴ $\triangle ADE \backsim \triangle ABC$.

3. 证明:∵ $\angle BAC = 90°$, $AD \perp BC$,

∴ $\angle BAC = \angle ADB = 90°$.

又∵ $\angle CBA = \angle ABD$(公共角),

∴ $\triangle ABC \backsim \triangle DBA$.

∴ $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DA}$, $\angle BAD = \angle C$.

∵ $AD \perp BC$, E 为 AC 的中点,

∴ $DE = EC$.

∴ $\angle BDF = \angle CDE = \angle C$.

∴ $\angle BDF = \angle BAD$.

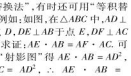
又∵ $\angle F = \angle F$,

∴ $\triangle DBF \backsim \triangle ADF$.

∴ $\frac{DB}{AD} = \frac{DF}{AF}$,

∴ $\frac{AB}{AC} = \frac{DF}{AF}$.

点拨:当所证等积式或比例式运用“三点定型法”不能定型或能定型却不相似,条件又不具备成比例线段时,可考虑用中间比“搭桥”,称为“等比算换法”,例如:如图,在 $\triangle ABC$ 中,$AD \perp BC$ 于点 D,$DE \perp AB$ 于点 E,$DF \perp AC$ 于点 F,求证:$AE \cdot AB = AF \cdot AC$. 可由两组“射影图”得 $AE \cdot AB = AD^2$,$AF \cdot AC = AD^2$,∴ $AE \cdot AB = AF \cdot AC$.



(第 3 题)

4. 证明:(1)∵ $\angle DAB = \angle EAC$,

∴ $\angle DAE = \angle BAC$.

又∵ $\angle ADE = \angle ABC$,

∴ $\triangle ADE \backsim \triangle ABC$.

(2)∵ $\triangle ADE \backsim \triangle ABC$,

∴ $\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC}$

∵ $\angle DAB = \angle EAC$,

∴ $\triangle ADB \backsim \triangle AEC$.

∴ $\frac{AD}{AE} = \frac{BD}{CE}$.

5. (1)证明:∵ $\angle A = \angle B = \angle DEC = 90°$,

∴ $\angle DEA + \angle CEB = 90°$, $\angle DEA + \angle D = 90°$,

∴ $\angle D = \angle CEB$,

∴ $\triangle ADE \backsim \triangle BEC$.

(2)解:同意,选择图(2)(或图③)说明理由:

∵ $\angle A = \angle B = \angle DEC$, $\angle A + \angle D = \angle DEC + \angle CEB$,

∴ $\angle D = \angle CEB$,

∴ $\triangle ADE \backsim \triangle BEC$.

22.3 相似三角形的性质

1. A **2.** C **3.** A **4.** B **5.** C **6.** A **7.** D

8. C **点拨**:∵ $\angle CAD = \angle B$, $\angle ACD = \angle BCA$,

∴ $\triangle ACD \backsim \triangle BCA$.

∴ $\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle BCA}} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2$, 即 $\frac{a}{S_{\triangle BCA}} = \frac{1}{4}$,

则 $S_{\triangle BCA} = 4a$.

∴ $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle BCA} - S_{\triangle ACD} = 4a - a = 3a$.

9. C

10. B **点拨**:∵ 在 $\square ABCD$ 中,$\angle BAD = \angle BCD = 60°$,∴ $\angle ADC = 120°$.

∵ DE 平分 $\angle ADC$,

∴ $\angle ADE = \angle DAE = 60° = \angle CDE$,

∴ $\triangle ADE$ 是等边三角形,

∴ $AD = AE = DE$.

∵ $AD = \frac{1}{2}AB$,

∴ $AE = \frac{1}{2}AB = BE$,

∴ $DE = BE$,

∴ $\angle BDE = \angle DBE$,

∴ $\angle BDE = \frac{1}{2}\angle AED = 30°$,

∴ $\angle ADB = 90°$,即 $AD \perp BD$,

∴ $S_{\square ABCD} = AD \cdot BD$,故①正确.

∵ $\angle CDE = 60°$, $\angle BDE = 30°$,

∴ $\angle CDB = \angle BDE = 30°$,

∴ DB 平分 $\angle CDE$,故②正确.

∵ 在 Rt△AOD 中,$AO > AD$,

∴ $AO > DE$,故③错误.

∵ O 是 BD 的中点,E 是 AB 的中点,

∴ OE 是△ABD 的中位线,

∴ $OE // AD$, $OE = \frac{1}{2}AD$,

∴ $\angle DAF = \angle FOE$, $\angle ADF = \angle OEF$,

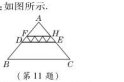
∴ $\triangle OEF \backsim \triangle ADF$,

∴ $S_{\triangle ADF} = 4S_{\triangle OEF}$,且 $AF = 2OF$,

∴ $S_{\triangle AEF} = 2S_{\triangle OEF}$,

∴ $S_{\triangle ADE} = 6S_{\triangle OEF}$,故④错误. 故选 B.

11. D **点拨**:如图所示.



(第 11 题)

根据题意,得△$AFH \backsim \triangle ADE$,

∴ $\frac{S_{\triangle AFH}}{S_{\triangle ADE}} = \left(\frac{FH}{DE}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$.

设 $S_{\triangle AFH} = 9x$,则 $S_{\triangle ADE} = 16x$,

∴ $16x - 9x = 7$,解得 $x = 1$.

∴ $S_{\triangle ADE} = 16$.

∴ 四边形 $DBCE$ 的面积为 $42 - 16 = 26$.

12. (1)证明:∵ 四边形 $ABCD$ 为菱形,

∴ BD 平分 $\angle ABC$.

∴ $\angle ABC = 2\angle ABC$.

又∵ $\angle ABC = 2\angle BAM$,

∴ $\angle BAG = \angle ABG$.

∴ $AG = BG$.

(2)解:∵ 四边形 $ABCD$ 为菱形,

∴ $AD // BC$, $AD = BC$.

∴ $\angle GAD = \angle GMB$.

∵ $\angle AGD = \angle BGM$,

∴ △$BGM \backsim$ △DGA.

∵ M 为 BC 的中点,

∴ $BM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AD$.

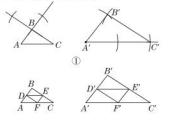
即△BGM 与△DGA 的相似比为 1∶2,

∴ $S_{\triangle BGM} : S_{\triangle ADG} = 1 : 4$.

∴ $S_{\triangle BGM} = 1$, ∴ $S_{\triangle ADG} = 4$.

13. (1)解:如图①所示.

(2)证明:如图②所示.



(第 13 题)

∵ D, E, F 分别是△ABC 三边 AB, BC, AC 的中点,

∴ $DE = \frac{1}{2}AC$, $DF = \frac{1}{2}BC$, $EF = \frac{1}{2}AB$.

∴ △$DEF \backsim$ △CAB.

同理得△$D'E'F' \backsim$ △$C'A'B'$.

由(1)可知△$ABC \backsim$ △$A'B'C'$,

∴ △$DEF \backsim$ △$D'E'F'$.

14. 解:问题 1

(1)$\frac{3}{16}$ **点拨**:∵ $AB = 4$, $AD = 3$,

∴ $BD = 4 - 3 = 1$.

∵ $DE // BC$,

∴ $\frac{CE}{EA} = \frac{BD}{AD} = \frac{1}{3}$,

∴ $\frac{S_{\triangle DEC}}{S_{\triangle AEC}} = \frac{CE}{AE} = \frac{1}{3}$.

∵ $DE // BC$,

∴ $\angle ADE = \angle B$.

又∵ $\angle A = \angle A$,

∴ △$ADE \backsim$ △ABC,

∴ $\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{AD}{AB}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$,

∴ $\frac{S_{\triangle DEC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{3}{16}$,即 $\frac{S'}{S} = \frac{3}{16}$.

(2)方法一 ∵ $AB = 4$, $AD = m$,

∴ $BD = 4 - m$.

∵ $DE // BC$,

∴ $\frac{CE}{EA} = \frac{BD}{AD} = \frac{4-m}{m}$,

∴ $\frac{S_{\triangle DEC}}{S_{\triangle ADE}} = \frac{CE}{AE} = \frac{4-m}{m}$.

∵ △$ADE \backsim$ △ABC,

∴ $\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{AD}{AB}\right)^2 = \left(\frac{m}{4}\right)^2 = \frac{m^2}{16}$.

∴ $\frac{S_{\triangle DEC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{S_{\triangle DEC}}{S_{\triangle ADE}} \cdot \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{4-m}{m} \cdot \frac{m^2}{16} = \frac{-m^2+4m}{16}$,

即 $\frac{S'}{S} = \frac{-m^2+4m}{16}$.

方法二 如图①,过点 B 作 $BH \perp AC$ 于点 H,过点 D 作 $DF \perp AC$ 于点 F,则 $\angle DFA = \angle BHA = 90°$.

又∵ $\angle A = \angle A$,

∴ △$ADF \backsim$ △ABH,

∴ $\frac{DF}{BH} = \frac{AD}{AB} = \frac{m}{4}$.

∵ $DE // BC$,

∴ $\frac{CE}{AC} = \frac{BD}{AB} = \frac{4-m}{4}$,

∴ $\frac{S_{\triangle DEC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{1}{2}CE \cdot DF}{\frac{1}{2}CA \cdot BH} = \frac{4-m}{4} \times \frac{m}{4} = \frac{-m^2+4m}{16}$,

即 $\frac{S'}{S} = \frac{-m^2+4m}{16}$.

问题 2

方法一 如图②,分别延长 BA, CD 交于点 O,

∵ $AD // BC$,∴ $\angle OAD = \angle B$.

∵ $\angle O = \angle O$,∴ △$OAD \backsim$ △OBC,

∴ $\frac{OA}{OB} = \frac{AD}{BC} = \frac{1}{2}$,∴ $OA = AB = 4$,

∴ $OB = 8$.

∵ $AE = n$,

∴ $OE = 4 + n$.

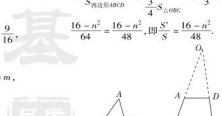
∵ $EF // BC$,

∴ 由问题 1 的解法可知:$\frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle OBC}} = \frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle OEF}} \cdot \frac{S_{\triangle OEF}}{S_{\triangle OBC}} = \frac{4-n}{4+n} \times \left(\frac{4+n}{8}\right)^2 = \frac{16-n^2}{64}$.

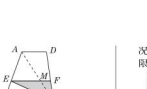
∵ $\frac{S_{\triangle OAD}}{S_{\triangle OBC}} = \left(\frac{OA}{OB}\right)^2 = \frac{1}{4}$,

∴ $\frac{S_{四边形ABCD}}{S_{\triangle OBC}} = \frac{3}{4}$,

∴ $\frac{S_{\triangle CEF}}{S_{四边形ABCD}} = \frac{S_{\triangle CEF}}{\frac{3}{4}S_{\triangle OBC}} = \frac{4}{3} \times \frac{16-n^2}{64} = \frac{16-n^2}{48}$,即 $\frac{S'}{S} = \frac{16-n^2}{48}$.



品质教辅



③

(第 14 题)

方法二 如图③,连接 AC 交 EF 于点 M,

∵ $AD // BC$,且 $AD = \frac{1}{2}BC$,

∴ $\frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{2}$,

∴ $S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2}S$, $S_{\triangle ABC} = \frac{2}{3}S$.

由问题 1 的结论可知:$\frac{S_{\triangle EMC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{-n^2+4n}{16}$,∴ $S_{\triangle EMC} = \frac{-n^2+4n}{16}$,

$S_{\triangle ADC} = \frac{-n^2+4n}{16} \cdot \frac{2}{3}S = \frac{(-2n^2+8n)S}{48}$.

∵ $EF // BC$,

∴ $\frac{CF}{CD} = \frac{BE}{AB} = \frac{4-n}{4}$.

∵ $MF // AD$,∴ $\angle CFM = \angle D$.

又∵ $\angle MCF = \angle ACD$,

∴ △$CFM \backsim$ △CDA,

∴ $\frac{S_{\triangle CFM}}{S_{\triangle CDA}} = \left(\frac{CF}{CD}\right)^2 = \left(\frac{4-n}{4}\right)^2$.

又∵ $\frac{S_{\triangle CFM}}{S_{\triangle CBA}} = \frac{S_{\triangle CFM}}{\frac{1}{3}S} = \frac{3S_{\triangle CFM}}{S}$,

∴ $\frac{3S_{\triangle CFM}}{S} = \left(\frac{4-n}{4}\right)^2$,

∴ $S_{\triangle CFM} = \frac{(4-n)^2S}{48}$,

∴ $S_{\triangle EFC} = S_{\triangle EMC} + S_{\triangle CFM} = \frac{(-2n^2+8n)S}{48} + \frac{(4-n)^2S}{48} = \frac{(16-n^2)S}{48}$,

∴ $\frac{S'}{S} = \frac{16-n^2}{48}$.

22.4 图形的位似变换

第 1 课时 图形的位似变换

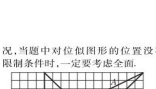
1. D **2.** D **3.** C **4.** $\frac{2}{5}$ **5.** C **6.** C

7. D

8. C **点拨**:由题意知①②均正确. ∵ △ABC 与△DEF 的相似比为 2∶1,∴ AB 与 DE 的周长比为 2∶1,面积比为 4∶1,故③错,④正确. 故选 C.

9. 解:如图.

易错易混 此题易忽略其中一种情况,当题中对位似图形的位置没有限制条件时,一定要考虑全面.



(第 9 题)

10. 解:是. 理由如下:

∵ 点 E, F 分别是 OA, OB 的中点,

∴ $EF = \frac{1}{2}AB$, $EF // AB$.

∵ 点 G, H 分别是 OC, OD 的中点,

∴ $HG = \frac{1}{2}CD$, $HG // CD$.

∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴ $AB = CD$, $AB // CD$.

∴ $EF = HG$, $EF // HG$.

∴ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

∵ $EF // AB$,

∴ $\angle OEF = \angle OAB$.

同理 $\angle OEH = \angle OAD$,

∴ $\angle HEF = \angle DAB$,

同理 $\angle EFG = \angle ABC$,

∴ $\angle FGH = \angle BCD$, $\angle GHE = \angle CDA$.

又易得 $\frac{EF}{AB} = \frac{FG}{BC} = \frac{GH}{CD} = \frac{HE}{AD} = \frac{1}{2}$,

∴ △$EFGH \backsim$ △$ABCD$.

又∵ 它们的对应顶点的连线相交于点 O,

∴ △$ABCD$ 与四边形 $EFGH$ 是位似图形,O 为位似中心.

11. 证明:∵ △DEO 与△ABO 是位似图形,

∴ $\frac{OD}{OA} = \frac{OE}{OB}$

∵ △OEF 与△OBC 是位似图形,

∴ $\frac{OE}{OB} = \frac{OF}{OC}$

∴ $\frac{OD}{OA} = \frac{OF}{OC}$,即 $OD \cdot OC = OF \cdot OA$.

12. 解:(1)△ABC 与△FGC 是位似图形,位似中心是点 C.


第 12 题答案

在矩形 $ABCD$ 中,$AD // BC$,

∴ △$AFD \backsim$ △CFE.

∴ $\frac{CF}{AF} = \frac{CE}{AD}$.

又∵ $AD = BC$,

∴ $\frac{CF}{AF} = \frac{CE}{BC}$.

∵ $\angle ABC = 90°$, $OE \perp BC$,

∴ $OE // AB$.

又∵ $OA = OC$,

∴ $CE = \frac{1}{2}BC$,

∴ $\frac{CF}{AF} = \frac{1}{2}$.

∴ $\frac{CF}{AC} = \frac{1}{3}$,

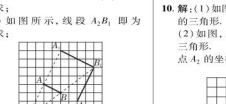
即△ABC 与△FGC 的相似比为 3∶1.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2) CI: $BC = 1:4$.

13. **解**:(1) 如图所示,线段 A_1B_1 即为所求;

(2) 如图所示,线段 A_2B_2 即为所求;



(第 13 题)

(3)20

第 2 课时　阅读与思考——平面直角坐标系中图形的位似变换

1. C　**2.** A　**3.** A

4. $(-1,2)$或$(1,-2)$

5. $(2,2\sqrt{3})$

6. $(4,6)$或$(-4,-6)$

7. **解**:(1) $\triangle A_1B_1C_1$ 与 $\triangle ABC$ 的相似比是 2∶1;

(2) 如图所示.



(第 7 题)

(3)∵点 $P(a,b)$ 为 $\triangle ABC$ 内一点,∴依上述两次变换后,点 P 在 $\triangle A_2B_2C_2$ 内的对应点 P_2 的坐标是 $(-2a,2b)$.

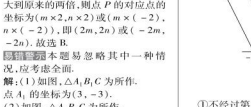
8. B　**点拨**:点 $P(m,n)$ 是线段 AB 上一点,以原点 O 为位似中心把 $\triangle AOB$ 放大到原来的两倍,则点 P 的对应点的坐标为$(m\times2,n\times2)$或$(m\times(-2),n\times(-2))$,即$(2m,2n)$或$(-2m,-2n)$.故选 B.

易错警示　本题易忽略其中一种情况,应考虑全面.

9. **解**:(1) 如图,$\triangle A_1B_1C$ 为所作.

点 A_1 的坐标为$(3,-3)$.

(2) 如图,$\triangle A_2B_2C$ 为所作.



(第 9 题)

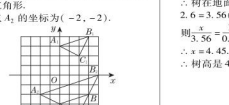
(3) $CB = \sqrt{1^2+4^2} = \sqrt{17}$,

点 B 经过的路径长为 $\frac{1}{4}\times2\pi\times\sqrt{17} = \frac{\sqrt{17}}{2}\pi$.

10. **解**:(1) 如图,$\triangle A_1B_1C_1$ 就是所要画的三角形.

(2) 如图,$\triangle A_2B_2C$ 就是所要画的三角形.

点 A_2 的坐标为$(-2,-2)$.



(第 10 题)

11. **解**:(1) 图略.

(2) 将点 $(0,4)$,$(1,0)$,$(2,4)$,$(3,0)$,$(4,4)$ 的横坐标保持不变,纵坐标分别乘 -1,得$(0,-4)$,$(1,0)$,$(2,-4)$,$(3,0)$,$(4,-4)$,然后描点连线,图略.

(3) 将点 $(0,4)$,$(1,0)$,$(2,4)$,$(3,0)$,$(4,4)$ 的纵坐标保持不变,横坐标分别乘 -1,得$(0,4)$,$(-1,0)$,$(-2,4)$,$(-3,0)$,$(-4,4)$,然后描点连线,图略.

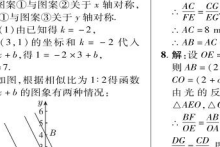
(4) 图案①与图案②关于 x 轴对称,图案①与图案③关于 y 轴对称.

12. **解**:(1) 由已知得 $k=-2$,

把点 $(3,1)$ 的坐标和 $k=-2$ 代入 $y=kx+b$,得 $1=-2\times3+b$,

∴ $b=7$.

(2) 如图,根据相似比为 1∶2 得函数 $y=kx+b$ 的图象有两种情况:



(第 12 题)

①不经过第三象限时,过点$(1,0)$和$(0,2)$,这时函数解析式为 $y=-2x+2$.

②不经过第一象限时,过点$(-1,0)$和$(0,-2)$,这时函数解析式为 $y=-2x-2$.

点拨:本题考查了一次函数的应用.根据数形结合思想利用待定系数法进行分类讨论,即可求出函数解析式.

22.5　综合与实践
测量与误差

1. B

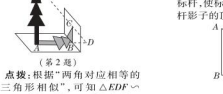
2. C　**点拨**:如图,设 BD 是 BC 在地面上的影子,设树高为 x m.根据竹竿的长与其影长的比值和树高与其影长的比值相等,得 $\frac{CB}{BD}=\frac{1}{0.8}$,而 $CB=1.2$ m,∴ $BD=0.96$ m.

∴树在地面上的实际影长是 $0.96+2.6=3.56$(m).

则 $\frac{x}{3.56}=\frac{1}{0.8}$,

∴ $x=4.45$.

∴树高是 4.45 m.



(第 2 题)

3. 5.5　**点拨**:根据"两角对应相等的两个三角形相似",可知 $\triangle EDF\backsim\triangle CDB$,则 $\frac{BC}{EF}=\frac{CD}{DE}$,即 $\frac{AB-1.5}{0.2}=\frac{8}{0.4}$,解得 $AB=5.5$ m.

4. B　**5.** C　**6.** 8 m

7. A　**点拨**:由题意知 $\angle AGC=\angle FGE$,

∵ $\angle ACG=\angle FEG=90°$,

∴ $\triangle ACG\backsim\triangle FEG$.

∴ $\frac{AC}{FE}=\frac{CG}{EG}$,∴ $\frac{AC}{1.6}=\frac{15}{3}$.

∴ $AC=8$ m.

∴ $AB=AC+BC=8+0.5=8.5$(m).

8. **解**:设 $OE=x$ m,$OA=a$ m,$BC=b$ m,则 $AB=(2-b)$ m,$CD=(2.1-b)$ m,$CO=(2+a)$ m.

由光的反射定律可知 $\triangle AFB\backsim\triangle AEO$,$\triangle CDC\backsim\triangle COE$,

∴ $\frac{BF}{OE}=\frac{AB}{OA}$,即 $\frac{1.6}{x}=\frac{2-b}{a}$;①

$\frac{DG}{OE}=\frac{GD}{CO}$,即 $\frac{1.6}{x}=\frac{2.1-b}{2+a}$.②

由①②得 $a=20(2-b)$.③

将③代入①中,得 $\frac{1.6}{x}=\frac{2-b}{20(2-b)}$,

解得 $x=32$.

故楼的高度 OE 为 32 m.

9. **解**:(1) 设敏敏的影长为 x cm.

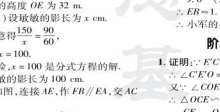
由题意得 $\frac{150}{x}=\frac{90}{60}$,

解得 $x=100$.

经检验 $x=100$ 是分式方程的解.

故敏敏的影长为 100 cm.

(2) 如图,连接 AE,作 $FH\perp EA$,交 AC 于 B.



(第 9 题)

∵ $AB\perp EF$,

∴四边形 $ABFE$ 是平行四边形.

∴ $AB=EF=150$ cm.

设 $BC=y$ cm,由题意知 BC 落在地面上的影长为 120 cm,

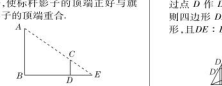
∴ $\frac{y}{120}=\frac{90}{60}$.

解得 $y=180$.

∵ $AC=AB+BC=150+180=330$(cm).

故高国样柱的高度为 330 cm.

10. **解**:(1) 如图,沿着旗杆的影子竖立标杆,使标杆影子的顶端正好与旗杆影子的顶端重合.



(第 10 题)

(2) 用皮尺测量旗杆的影长 $BE=a$ m,标杆 CD 的影长 $DE=b$ m,标杆高 $CD=c$ m.

根据 $\triangle EDC\backsim\triangle EBA$,得 $\frac{CD}{AB}=\frac{ED}{EB}$,

即 $\frac{c}{AB}=\frac{b}{a}$,所以 $AB=\frac{ac}{b}$ m,

即旗杆 AB 的高为 $\frac{ac}{b}$ m.(设计方案不唯一)

11. **解**:由题意得 $\angle CAD=\angle MND=90°$,$\angle CDA=\angle MDN$,

∴ $\triangle CAD\backsim\triangle MND$.

∴ $\frac{CA}{MN}=\frac{AD}{ND}$,

∴ $\frac{1.6}{MN}=\frac{1\times0.8}{(5+1)\times0.8}$,

∴ $MN=9.6$ m.

又∵ $\angle EBF=\angle MNF=90°$,$\angle EFB=\angle MFN$,

∴ $\triangle EFB\backsim\triangle MFN$.

∴ $\frac{EB}{MN}=\frac{BF}{NF}$,

∴ $\frac{EB}{9.6}=\frac{2\times0.8}{(2+9)\times0.8}$,

∴ $EB=1.75$ m.

∴小军的身高 BE 约为 1.75 m.

阶段核心方法

1. **证明**:∵ $EC'\perp EC$,

∴ $\angle C'EO=\angle CEO$.

又∵ $\angle COE=\angle C'OE'$,

∴ $\triangle OCE\backsim\triangle OC'E'$.

∴ $\frac{CE}{C'E'}=\frac{OE}{OE'}$.

又∵ $E'D'\perp ED$,

∴ $\angle D'E'O=\angle DEO$.

又∵ $\angle DOE=\angle D'OE'$,

∴ $\triangle DOE\backsim\triangle D'OE'$.

∴ $\frac{DE}{D'E'}=\frac{OE}{OE'}$.

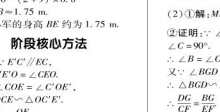
∴ $\angle CED=\angle C'E'D'$,$\frac{CE}{C'E'}=\frac{DE}{D'E'}$.

∴ $\triangle CDE\backsim\triangle C'D'E'$.

又∵ $\triangle CDE$ 是等边三角形,

∴ $\triangle C'D'E'$ 是等边三角形.

2. **解**:如图,在 AB 边上任取一点 D',过点 D'作 $D'E'\perp BC$ 于点 E',在 BC 上截取 $E'F'$,使 $E'F'=2D'E'$,过点 F'作 $F'G'\perp BC$,过点 D'作 $D'G'\parallel BC$ 交 $F'G'$于点 G',作射线 BG'交 AC 于点 G,过点 G 作 $GF\parallel G'F'$,$DG\parallel D'G'$,GF 交 BC 于点 F,DG 交 AB 于点 D,过点 D 作 $DE\parallel D'E'$ 交 BC 于点 E,则四边形 $DEFG$ 为 $\triangle ABC$ 的内接矩形,且 $DE:EF=1:2$.



(第 2 题)

∴ $\angle C'ED'=\angle CEF$.

又∵ $\angle BGD=\angle EFC=90°$,

∴ $\triangle BGD\backsim\triangle EFC$.

∴ $\frac{DG}{EF}=\frac{BG}{FC}$.

∴ $DG\cdot EF=CF\cdot BG$.

又∵ $DG=GF=EF$,

∴ $GF^2=CF\cdot BG$.

由(1)易得 $\frac{DM}{BG}=\frac{MN}{GF}$,$\frac{MN}{GF}=\frac{EN}{CF}$,

∴ $\left(\frac{MN}{GF}\right)^2=\frac{DM}{BG}\cdot\frac{EN}{CF}$,

即 $\frac{MN^2}{FG^2}=\frac{DM}{BG}\cdot\frac{EN}{CF}$.

∴ $MN^2=DM\cdot EN$.

全章热门考点整合应用

1. C　**2.** 20 m

3. **解**:四边形 $ABCD$ 与四边形 $A'B'C'D'$ 相似.由已知条件知,$\angle ADC=\angle A'D'C'$,$\angle C=\angle C'$,$\angle ABC=\angle A'B'C'$,$\angle A=\angle A'$,且 $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DA}{D'A'}=\frac{4}{3}$,所以四边形 $ABCD$ 与四边形 $A'B'C'D'$相似.

4. **解**:如图,过点 B 作 $BM\perp x$ 轴于点 M,过点 B'作 $B'N\perp x$ 轴于点 N,

则 $\triangle CBM\backsim\triangle CB'N$.

∵ $MC:NC=BM:B'N=BC:B'C$.

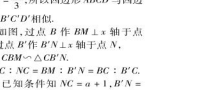
又由已知条件知 $NC=a+1$,$B'N=-b$,$BC:B'C=1:2$,

∴ $MC:(a+1)=BM:(-b)=1:2$.

∴ $MC=\frac{1}{2}(a+1)$,$BM=-\frac{b}{2}$.

∴ $MO=\frac{1}{2}(a+1)+1=\frac{a+3}{2}$.

∴点 B 的坐标为 $\left(-\frac{a+3}{2},-\frac{b}{2}\right)$.



(第 4 题)

5. D

6. **解**:∵ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=2$,

∴ $\frac{a}{b}=\frac{-2e}{-3f}=\frac{3e}{3f}=2$,

∴ $\frac{a-2c+3e}{b-2d+3f}=2$.

7. **解**:(1)∵ $DE\parallel BC$,

∴ $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$,

∴ $\frac{8-2x}{8}=\frac{y}{6}$.

∴ $y=-\frac{3}{2}x+6\,(0\leqslant x\leqslant4)$.

(2)∵ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot2x\cdot y=$

$\frac{1}{2}\cdot2x\cdot\left(6-\frac{3}{2}x\right)=$

$-\frac{3}{2}(x-2)^2+6$,

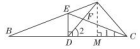
且 $-\frac{3}{2}(x-2)^2\leqslant0$,

∴ $-\frac{3}{2}(x-2)^2+6\leqslant6$.

∴当 $x=2$ 时,$S_{\triangle ABC}$ 有最大值,最大值为 6.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

8. (1) **证明**：∵ D 是 BC 边上的中点，
$DE \perp BC$，
∴ $EB = EC$.
∴ $\angle B = \angle 1$.
又∵ $AD = AC$，
∴ $\angle ACB = \angle 2$.
∴ $\triangle ABC \backsim \triangle FCD$.



（第 8 题）

(2) **解**：如图，过点 A 作 $AM \perp CB$ 于点 M.
∵ D 是 BC 边上的中点，
∴ $BC = 2CD$.
由(1)知 $\triangle ABC \backsim \triangle FCD$，
∴ $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle FCD}} = \left(\frac{BC}{CD}\right)^2 = \frac{4}{1}$.
又∵ $S_{\triangle FCD} = 5$，
∴ $S_{\triangle ABC} = 20$.
∵ $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AM$，
∴ $AM = \frac{2S_{\triangle ABC}}{BC} = \frac{2 \times 20}{10} = 4$.
∵ $DE \perp BC$，$AM \perp BC$，
∴ $\angle EDB = \angle AMB = 90°$.
又∵ $\angle B = \angle B$，
∴ $\triangle BDE \backsim \triangle BMA$.
∴ $\frac{DE}{AM} = \frac{BD}{BM}$.
由 $AD = AC$，$AM \perp BC$，
知 $DM = \frac{1}{2} CD = \frac{1}{4} BC = \frac{5}{2}$.
又∵ $BD = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \times 10 = 5$，
∴ $\frac{DE}{4} = \frac{5}{5 + \frac{5}{2}}$.
∴ $DE = \frac{8}{3}$.

9. (1) **证明**：∵ DB 平分 $\angle ADC$，
∴ $\angle ADB = \angle CDB$.
∵ $\angle ABD = \angle BCD = 90°$，
∴ $\triangle ABD \backsim \triangle BCD$.
∴ $\frac{AD}{BD} = \frac{BD}{CD}$.
∴ $BD^2 = AD \cdot CD$.
(2) **解**：∵ $BM \perp CD$，
∴ $\angle MBD = \angle BDC$.
∴ $\angle ADB = \angle MBD$.
∴ $BM = MD$，
又∵ $\angle ABD = 90°$，
∴ 易得 $\angle MAB = \angle MBA$.
∴ $BM = MD = AM = 4$.
∵ $BD^2 = AD \cdot CD$，且 $CD = 6$，$AD = 8$，
∴ $BD^2 = 48$.
∵ $BC^2 = BD^2 - CD^2 = 12$.
∵ $MC^2 = MB^2 + BC^2 = 28$.
∴ $MC = 2\sqrt{7}$.
∵ $BM \parallel CD$，
∴ $\triangle BMN \backsim \triangle DCN$.
又∵ $\angle MNB = \angle CND$，
∴ $\triangle MNB \backsim \triangle CND$.
∴ $\frac{BM}{CD} = \frac{MN}{CN} = \frac{2}{3}$.
即 $\frac{MN}{2\sqrt{7} - MN} = \frac{2}{3}$，
解得 $MN = \frac{4}{5}\sqrt{7}$.

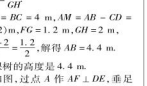
10. **解**：方法一　作延长线. 延长 AD 与地面交于点 M，如图①所示.



（第 10 题）

由 $AM \parallel FH$ 知 $\angle AMB = \angle FHG$.
∵ $AB \perp BG$，$FG \perp BG$，$DC \perp BG$，
∴ $\angle ABC = \angle DCM = \angle FGH = 90°$.
又∵ $\angle AMB = \angle DMC$，
∴ $\triangle ABM \backsim \triangle DCM \backsim \triangle FGH$.
∴ $\frac{AB}{BM} = \frac{CD}{CM} = \frac{FG}{GH}$.
∵ $CD = 2$ m，$FG = 1.2$ m，$GH = 2$ m，
∴ $\frac{2}{CM} = \frac{1.2}{2}$. 解得 $CM = \frac{10}{3}$ m.
∵ $BC = 4$ m，
∴ $BM = BC + CM = 4 + \frac{10}{3} = \frac{22}{3}$(m).
∴ $\frac{AB}{\frac{22}{3}} = \frac{1.2}{2}$. 解得 $AB = 4.4$ m.
故这棵树的高度是 4.4 m.
方法二　作垂线. 过点 D 作 $DM \perp AB$ 于点 M，如图②所示.
易知 $\triangle AMD \backsim \triangle FGH$.
∴ $\frac{AM}{DM} = \frac{FG}{GH}$.
∵ $DM = BC = 4$ m，$AM = AB - CD = (AB - 2)$ m，$FG = 1.2$ m，$GH = 2$ m，
∴ $\frac{AB - 2}{4} = \frac{1.2}{2}$，解得 $AB = 4.4$ m.
故这棵树的高度是 4.4 m.

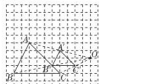
11. **解**：如图，过点 A 作 $AF \perp DE$，垂足为点 F，并延长 AF 交 BC 于点 G.
由题意知 $DE = 24$ m，$BC = 60$ m，$AF = 30$ m.



（第 11 题）

∵ $DE \parallel BC$，
∴ $\triangle ADE \backsim \triangle ABC$，$\angle AED = \angle ACB$.
∴ $\triangle ADE \backsim \triangle ABC$.
∵ $AF \perp DE$，$DE \parallel BC$，
∴ $AG \perp BC$.
∴ $\frac{AF}{AG} = \frac{DE}{BC}$，即 $\frac{30}{AG} = \frac{24}{60}$.
解得 $AG = 75$ m，
∴ $FG = AG - AF = 75 - 30 = 45$(m)，
即河的宽度为 45 m.

12. **解**：画出图形，如图中的 $\triangle A'B'C'$ 即为所求作的图形.



（第 12 题）

13. (1) **解**：∵ AP 平分 $\angle BAC$，
∴ $\angle PAC = \frac{1}{2} \angle BAC$.
又∵ AQ 平分 $\angle CAD$，
∴ $\angle CAQ = \frac{1}{2} \angle CAD$.
∴ $\angle PAC + \angle CAQ = \frac{1}{2} \angle BAC + \frac{1}{2} \angle CAD = \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle CAD)$.
又∵ $\angle BAC + \angle CAD = 180°$，
∴ $\angle PAC + \angle CAQ = 90°$，
即 $\angle PAQ = 90°$.
(2) **证明**：由(1)知 $\angle PAQ = 90°$.
∵ M 是线段 PQ 的中点，
∴ $PM = AM$.
∴ $\angle APM = \angle PAM$.
∵ $\angle APM = \angle B + \angle BAP$，$\angle PAM = \angle CAM + \angle PAC$，$\angle BAP = \angle PAC$，
∴ $\angle B = \angle CAM$.
又∵ $\angle AMC = \angle BMA$，
∴ $\triangle ACM \backsim \triangle BAM$.
∴ $\frac{CM}{AM} = \frac{AM}{BM}$.
∴ $AM^2 = CM \cdot BM$，
即 $PM^2 = CM \cdot BM$.

第 23 章　解直角三角形

23.1　锐角的三角函数

第 1 课时　锐角的三角函数——正切

1. C　**2.** D　**3.** A
4. B　**点拨**：如图，连接 BC，根据勾股定理可以计算出：$AB = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$，$AC = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$，$BC = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$，∴ $AB = BC$. 又∵ $AB^2 + BC^2 = (\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2 = 10$，$AC^2 = (\sqrt{10})^2 = 10$，∴ $AB^2 + BC^2 = AC^2$. 由勾股定理的逆定理可得 $\triangle ABC$ 为直角三角形，且 $\angle ABC = 90°$.
∴ 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\tan \angle BAC = \frac{BC}{AB} = 1$.



（第 4 题）

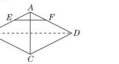
5. A
6. A　**点拨**：设 $AB = 3x$，$BC = 2x$.
如图，过点 E 作 $EF \perp DC$，交 DC 的延长线于点 F，连接 OE，交 BC 于点 G.



（第 6 题）

∵ $BE \parallel AC$，$CE \parallel DB$，
∴ 四边形 $BOCE$ 是平行四边形.
∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，
∴ $OB = OC$.
∴ 四边形 $BOCE$ 是菱形.
∴ OE 与 BC 互相垂直平分.
易知四边形 $CFEG$ 是矩形，
∴ $EF = GC = \frac{1}{2} BC = x$，$OE \parallel DC \parallel AB$.
∴ 四边形 $AOEB$ 是平行四边形.
∴ $OE = AB$.
∴ $CF = \frac{1}{2} OE = \frac{1}{2} AB = \frac{3}{2} x$.
∴ $\tan \angle EDC = \frac{EF}{DF} = \frac{x}{3x + \frac{3}{2} x} = \frac{2}{9}$.

7. B　**8.** D
9. $\frac{4}{3}$　**点拨**：本题易忽略求正切值的前提是应将 $\angle B$ 放在一个直角三角形中.
10. **解**：∵ $(2b)^2 = 4(c - a)(c + a)$，
∴ $a^2 + b^2 = c^2$.
∴ $\triangle ABC$ 是直角三角形，且 $\angle C = 90°$.
∴ $5a - 3c = 0$，
∴ $5a = 3c$.
设 $a = 3k(k \neq 0)$，则 $c = 5k$.
∴ $b = 4k$.
∴ $\tan A + \tan B = \frac{3}{4} + \frac{4}{3} = \frac{25}{12}$.
11. **解**：∵ $AC \perp CD$，$BD \perp CD$，
∴ $\angle ACE = \angle BDE = 90°$.
又∵ 入射角等于反射角，
∴ $\angle A = \angle B = \alpha$.
∴ $\triangle ACE \backsim \triangle BDE$.
∴ $\frac{AC}{CE} = \frac{BD}{ED}$.
又∵ $AC = 3$，$BD = 6$，$CD = 12$，
∴ $\frac{3}{CE} = \frac{6}{12 - CE}$.
∴ $CE = 4$.
∴ $\tan \alpha = \tan A = \frac{CE}{AC} = \frac{4}{3}$.
点拨：利用等角代换法将 α 用 $\angle A$ 代替，求出 $\angle A$ 的正切值即可.
12. (1) **证明**：连接 BD，如图①所示.
∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形，
∴ $AB = AD$，$AC \perp BD$.
∵ $BE = DF$，
∴ $AE = AF$.
∴ $AE : AB = AF : AD$.
又∵ $\angle EAF = \angle BAD$，
∴ $\triangle AEF \backsim \triangle ABD$.
∴ $\angle AEF = \angle ABD$.
∴ $EF \parallel BD$.
∴ $AC \perp EF$.



（第 12 题）

(2) **解**：如图②所示.
由(1)得 $EG \parallel BD$，
∴ $\angle G = \angle CDB$.
又∵ $\angle ADO = \angle CDB$，
∴ $\angle G = \angle ADO$.
∴ $\tan G = \tan \angle ADO = \frac{OA}{OD} = \frac{1}{2}$.
∴ $OA = \frac{1}{2} OD$.
∵ $BD = 4$，∴ $OD = 2$.
∴ $OA = 1$，即 AO 的长为 1.
13. (1) **证明**：∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，
∴ $AB = AD$. 又∵ $\angle BMA = \angle DNA = 90°$，$AM = AN$，
∴ Rt$\triangle ABM \cong$ Rt$\triangle ADN$(HL).
(2) **解**：∵ Rt$\triangle ABM \cong$ Rt$\triangle ADN$，
∴ $BM = DN$，$\angle BAM = \angle DAN$.
∵ $\angle BAD = 90°$，
∴ $\angle MAN = 90°$.
∵ $AM = AN$，
∴ $\angle AMT = \angle ANM = 45°$.
又∵ $\angle DNA = 90°$，
∴ $\angle DNT = 45°$.
∴ $\angle AMN = \angle DNT$.
又∵ $\angle ATM = \angle DTN$，
∴ $\triangle AMT \backsim \triangle DNT$.
∴ $\frac{AT}{DT} = \frac{AM}{DN}$.
∴ $AT = \frac{1}{4} AD$，∴ $\frac{AT}{DT} = \frac{1}{3}$.
∴ $\frac{AM}{DN} = \frac{1}{3}$.
∵ $BM = DN$，
∴ $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{3}$.
在 Rt$\triangle ABM$ 中，$\tan \angle ABM = \frac{AM}{BM} = \frac{1}{3}$.

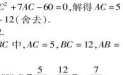
第 2 课时　锐角的三角函数——正弦与余弦

1. C　**2.** A　**3.** D　**4.** 1.5　**5.** A　**6.** A
7. D　**点拨**：∵ 小正方形的面积是 49，大正方形的面积是 169，
∴ 小正方形的边长是 7，大正方形的边长是 13.
如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$AC^2 + BC^2 = AB^2$，即 $AC^2 + (7 + AC)^2 = 13^2$，



（第 7 题）

整理得，$AC^2 + 7AC - 60 = 0$，解得 $AC = 5$ 或 $AC = -12$(舍去).
∴ $BC = 12$.
在 Rt$\triangle ABC$ 中，$AC = 5$，$BC = 12$，$AB = 13$，
∴ $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{5}{13} - \frac{12}{13} = -\frac{7}{13}$.
8. C
9. B　**点拨**：如图，作 $AD \perp BC$ 于点 D，



（第 9 题）

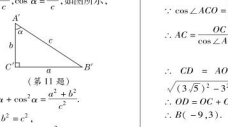
则 $BD = \frac{3}{2} + 0.3 = \frac{9}{5}$(m).
∵ $\cos \alpha = \frac{BD}{AB}$，
∴ $\cos \alpha = \frac{\frac{9}{5}}{AB}$.
解得 $AB = \frac{9}{5 \cos \alpha}$ m.
10. **解**：方程 $2x^2 - 5x + 2 = 0$ 的解是 $x_1 = 2$，$x_2 = \frac{1}{2}$.
∵ $0 < \cos \alpha < 1$，∴ $\cos \alpha = \frac{1}{2}$.
易错警示　方程 $2x^2 - 5x + 2 = 0$ 的解是 $x_1 = 2$，$x_2 = \frac{1}{2}$，
此时忽略了 $\cos \alpha$(α 为锐角)的取值范围是 $0 < \cos \alpha < 1$，而错得

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\cos\alpha=2$ 或 $\cos\alpha=\frac{1}{2}$.

11. 解：(1) $\frac{4}{5}$；$\frac{3}{5}$；1；$\frac{4}{5}$；$\frac{3}{5}$；1

规律：对于任意锐角 α，
有 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.
证明：在 Rt$\triangle A'B'C'$中，$\angle C'=90°$，
$\sin\alpha=\frac{a}{c}$，$\cos\alpha=\frac{b}{c}$，如图所示，



（第 11 题）

$\therefore \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\frac{a^2+b^2}{c^2}$.

$\because a^2+b^2=c^2$，

$\therefore \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\frac{c^2}{c^2}=1$.

(2) $\because \beta$ 为锐角，
$\therefore \sin\beta>0$，$\cos\beta>0$.
由 $\begin{cases}\sin^2\beta+\cos^2\beta=1,\\ \sin\beta=3\cos\beta,\end{cases}$
解得 $\begin{cases}\sin\beta=\frac{3\sqrt{10}}{10},\\ \cos\beta=\frac{\sqrt{10}}{10}.\end{cases}$

12. 解：(1) 在 $\triangle ABC$ 中，$\because \angle ACB=90°$，$BC=8$，$\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{4}{5}$，

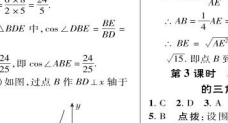
$\therefore AB=10$.
$\because D$ 是 AB 的中点，
$\therefore CD=\frac{1}{2}AB=5$.
(2) 在 Rt$\triangle ABC$ 中，
$\because AB=10$，$BC=8$，
$\therefore AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=6$.
$\because D$ 是 AB 的中点，
$\therefore BD=5$，$S_{\triangle BDC}=S_{\triangle ADC}$.
$\therefore S_{\triangle BDC}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$，

即 $\frac{1}{2}CD\cdot BE=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}AC\cdot BC$.

$\therefore BE=\frac{6\times8}{2\times5}=\frac{24}{5}$.

在 Rt$\triangle BDE$ 中，$\cos\angle DBE=\frac{BE}{BD}=\frac{24}{5}\div\frac{4}{25}=\frac{24}{25}$，即 $\cos\angle ABE=\frac{24}{25}$.

13. 解：(1) 如图，过点 B 作 $BD\perp x$ 轴于点 D.



（第 13 题）

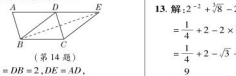
$\because CA\perp CB$，
$\therefore \angle BCD+\angle ACO=\angle BCD+\angle CBD=90°$.
$\therefore \angle ACO=\angle CBD$.
$\because \angle AOC=\angle CDB=90°$，$AC=CB$，
$\therefore \triangle AOC\cong\triangle CDB$(AAS).
$\therefore DB=OC=3$，$CD=AO$.
$\because \cos\angle ACO=\frac{OC}{AC}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore AC=\frac{OC}{\cos\angle ACO}=\frac{3}{\frac{\sqrt{5}}{5}}=3\sqrt{5}$.

$\therefore CD=AO=\sqrt{AC^2-OC^2}=\sqrt{(3\sqrt{5})^2-3^2}=6$.
$\therefore OD=OC+CD=3+6=9$.
$\therefore B(-9,3)$.
把 B 点的坐标代入 $y=\frac{m}{x}$，
得 $m=-9\times3=-27$，
$\therefore$ 反比例函数的表达式为 $y=-\frac{27}{x}$.

(2) 当 $x<0$ 时，$kx+b<\frac{m}{x}$ 的解集为 $-9<x<0$.

14. (1) 证明：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，
$\therefore AD=BC$，$AD//BC$.
$\because DE=AD$，
$\therefore DE=BC$，$DE//BC$.
$\therefore$ 四边形 $BCED$ 是平行四边形.
(2) 解：如图，连接 BE.



（第 14 题）

$\because DA=DB=2$，$DE=AD$，
$\therefore DE=2$，且 $BD=\frac{1}{2}AE$.
$\therefore \angle ABE=90°$，$AE=4$.
$\because \cos A=\frac{AB}{AE}=\frac{1}{4}$，

$\therefore AB=\frac{1}{4}AE=\frac{1}{4}\times4=1$.

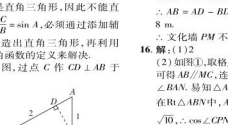
$\therefore BE=\sqrt{AE^2-AB^2}=\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$. 即点 B 到点 E 的距离为 $\sqrt{15}$.

第 3 课时　30°，45°，60°角的三角函数值

1. C　**2.** D　**3.** A　**4.** C
5. B　**点拨**：设圆成的等边三角形为 PQM，过点 P 作 $PN\perp MQ$ 交 MQ 于点 N，则 $\sin60°=\frac{2}{|PQ|}$，$\therefore |PQ|=\frac{2}{\sin60°}=2\times\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$. 故选 B.
6. A　**7.** B　**8.** B　**9.** A　**10.** C　**11.** B
12. 错解：在 $\triangle ABC$ 中，$\because \frac{BC}{AB}=\sin A$，
$\therefore BC=AB\cdot\sin A=2\sin60°=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

诊断：产生错解的原因是忽视了锐角三角函数使用的前提是在直角三角形中. 本题中没有明确指出 $\triangle ABC$ 是直三角形，因此不能直接得到 $\frac{BC}{AB}=\sin A$，必须通过添加辅助线，构造出直角三角形，再利用锐角三角函数的定义来解决.

正解：如图，过点 C 作 $CD\perp AB$ 于点 D.



（第 12 题）

在 Rt$\triangle ADC$ 中，
$\because \cos A=\frac{AD}{AC}$，$\sin A=\frac{CD}{AC}$，

$\therefore AD=AC\cdot\cos A=1\times\cos60°=\frac{1}{2}$，

$CD=AC\cdot\sin A=1\times\sin60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

在 Rt$\triangle BDC$ 中，$BD=AB-AD=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，

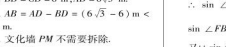
$\therefore BC=\sqrt{BD^2+CD^2}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{12}{4}}=\sqrt{3}$.

13. 解：$2^{-2}+\sqrt[3]{8}-2\sin60°+\left|-\sqrt{3}\right|$
$=\frac{1}{4}+2-2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}$
$=\frac{1}{4}+2-\sqrt{3}+\sqrt{3}$
$=\frac{9}{4}$.

14. 解：$\because \angle BDC=45°$，$\angle C=90°$，
$\therefore \triangle BCD$ 为等腰直角三角形.
$\therefore BC=CD$.
$\because BD=10\sqrt{2}$，
$\therefore BC=10$.
$\because AB=20$，
$\therefore \sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$.
$\therefore \angle A=30°$.


第 14 题视频

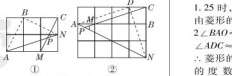
15. 解：(1) $\because$ 新坡面的坡度为 $1:\sqrt{3}$，
$\therefore \tan\alpha=\tan\angle CAB=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.
$\therefore \alpha=30°$.
$\therefore$ 新坡面的坡角 α 为 30°.
(2) 文化墙 PM 不需要拆除.
理由：如图，过点 C 作 $CD\perp AB$ 于点 D，则 $CD=6$ m.



（第 15 题）

$\because$ 坡面 BC 的坡度为 $1:1$，新坡面的坡度为 $1:\sqrt{3}$，
$\therefore BD=CD=6$ m，$AD=6\sqrt{3}$ m.
$\therefore AB+AD-BD=(6\sqrt{3}-6)$ m <8 m.
$\therefore$ 文化墙 PM 不需要拆除.

16. 解：(1) 2
(2) 如图①，取格点 B，连接格点 A，B，可得 $AB//MC$，连接 BN，$\therefore \angle CPN=\angle BAN$. 易知 $\triangle ABN$ 为直角三角形.
在 Rt$\triangle ABN$ 中，$AB=BN=\sqrt{5}$，$AN=\sqrt{10}$，$\therefore \cos\angle CPN=\cos\angle BAN=\frac{AB}{AN}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.
(3) 设 BC 的长为单位 1，构造如图②所示的网格图，取格点 D，连接格点 A，D，可得 $AD//CM$，连接 DN.
$\therefore \angle CPN=\angle DAN$.
易知 $\triangle ADN$ 为直角三角形.
在 Rt$\triangle ADN$ 中，$AD=DN=\sqrt{10}$，$AN=2\sqrt{5}$，
$\therefore \cos\angle CPN=\cos\angle DAN=\frac{AD}{AN}=\frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.
$\therefore \angle CPN=45°$.



（第 16 题）

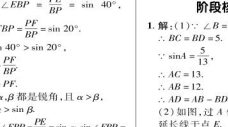
第 4 课时　一般锐角的三角函数值

1. A　**2.** A　**3.** A　**4.** D　**5.** D　**6.** A
7. D　**点拨**：易得 $\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{5}{13}$，再用科学计算器求 $\angle A$.
8. 27.8°　**9.** C　**10.** C
11. A　**点拨**：经过计算发现 $\sin\alpha$ 的值随锐角 α 的值的增大而增大.
$\because \sin30°=\frac{1}{2}$，$\sin60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$，
$\therefore 30°<\alpha<60°$. 故选 A.
12. 解：$\sin35°29'\approx0.580$.
易错点睛：易误认为 35° 29′ = 35.29°而导致出错.
13. 解：(1) 锐角的正弦值随锐角度数的增大而增大，余弦值随锐角度数的增大而减小.
(2) $\sin18°<\sin34°<\sin50°<\sin62°<\sin88°$，
$\cos88°<\cos62°<\cos50°<\cos34°<\cos18°$.
(3) = ; < ; >
(4) $\sin10°<\cos70°<\sin50°<\cos30°$.

14. 解：(1) $\because PE\perp AB$，$PF\perp BC$，
$\therefore \sin\angle EBP=\frac{PE}{BP}=\sin40°$，
$\sin\angle FBP=\frac{PF}{BP}=\sin20°$.
又 $\because \sin40°>\sin20°$，
$\therefore \frac{PE}{BP}>\frac{PF}{BP}$.
$\therefore PE>PF$.
(2) $\because \alpha$，β 都是锐角，且 $\alpha>\beta$，
$\therefore \sin\alpha>\sin\beta$.
又 $\because \sin\angle EBP=\frac{PE}{PB}=\sin\alpha$，$\sin\angle FBP=\frac{PF}{PB}=\sin\beta$，
$\therefore \frac{PE}{PB}>\frac{PF}{PB}$. $\therefore PE>PF$.

15. 解：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，
$\therefore AC\perp BD$，$OA=\frac{1}{2}AC=4$ m.
在 Rt$\triangle AOB$ 中，$\tan\angle BAO=\frac{OB}{OA}$，
$\therefore OB=OA\cdot\tan\angle BAO=4\times\frac{5}{4}=5$(m).
$\therefore AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=\sqrt{41}=6$(m).
又用计算器求得当 $\tan\angle BAO=\frac{5}{4}=1.25$ 时，$\angle BAO\approx51.3°$.
由菱形的性质知 $\angle BCD=\angle BAD=2\angle BAO\approx102.6°\approx103°$，则 $\angle ABC=\angle ADC\approx77°$.
$\therefore$ 菱形的边长约为 6 m，四个内角的度数分别约为 103°，77°，103°，77°.

16. 解：如图，过点 C 作 $CD\perp AB$ 于点 D.



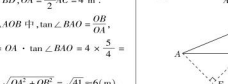
（第 16 题）

$\because$ 丙地位于甲地北偏西 30° 方向，距离甲地 460 km，
$\therefore$ 在 Rt$\triangle ACD$ 中，$\angle ACD=30°$.
$\therefore AD=\frac{1}{2}AC=230$ km，
$CD=\frac{\sqrt{3}}{2}AC=230\sqrt{3}$ km.
$\because$ 丙地位于乙地北偏东 66° 方向，
$\therefore$ 在 Rt$\triangle BCD$ 中，$\angle CBD=24°$.
$\therefore BD=\frac{CD}{\tan24°}\approx\frac{230\sqrt{3}}{\tan24°}$ km.
$\therefore AB=AD+BD\approx\left(230+\frac{230\sqrt{3}}{\tan24°}\right)$ km.
答：甲乙两地之间直达高速线路的长 AB 为 $\left(230+\frac{230\sqrt{3}}{\tan24°}\right)$km.

阶段核心方法

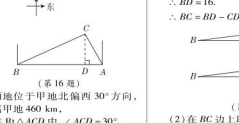
1. 解：(1) $\because \angle B=90°$，$\angle BDC=45°$，
$\therefore BC=BD=5$.
$\because \sin A=\frac{5}{13}$，
$\therefore AC=13$.
$\therefore AB=12$.
$\therefore AD=AB-BD=12-5=7$.
(2) 如图，过 A 作 $AE\perp CD$ 交 CD 的延长线于点 E.
$\because \angle ADE=\angle CDB=45°$，
$\therefore \triangle ADE$ 是等腰直角三角形.
$\therefore AE=DE=\frac{7\sqrt{2}}{2}$.

则 $\sin\angle ACD=\frac{AE}{AC}=\frac{\frac{7\sqrt{2}}{2}}{13}=\frac{7\sqrt{2}}{26}$.



（第 1 题）

2. 解：(1) 过点 A 作 $AD\perp BC$，交 BC 的延长线于点 D，如图①所示.
在 Rt$\triangle ADC$ 中，$AC=4$.
$\because \angle ACB=150°$，
$\therefore \angle ACD=30°$.
$\therefore AD=\frac{1}{2}AC=2$，$CD=AC\cdot\cos30°=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$.
在 Rt$\triangle ABD$ 中，$\tan B=\frac{AD}{BD}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$.
$\therefore BD=16$.
$\therefore BC=BD-CD=16-2\sqrt{3}$.



（第 2 题）

(2) 在 BC 边上取一点 M，使得 $CM=AC$，连接 AM，如图②所示.
$\because \angle ACB=150°$，
$\therefore \angle AMC=\angle MAC=15°$. 由 (1) 可知，$AD=2$，$CD=2\sqrt{3}$，
$\therefore \tan15°=\tan\angle AMD=\frac{AD}{MD}=\frac{2}{4+2\sqrt{3}}=$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$$\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\frac{1}{2+1.7}\approx 0.3.$$

3. D

4. (1) **证明**：如图，在 Rt△ABC 中，$\sin A=\frac{a}{c}$，$\cos A=\frac{b}{c}$，根据勾股定理，得 $a^2+b^2=c^2$.

$\therefore \sin^2 A+\cos^2 A=\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{c^2}=1.$



（第 4 题）

(2) **解**：如图，在 Rt△ABC 中，$\sin A=\frac{a}{c}$，$\cos A=\frac{b}{c}$，根据勾股定理，得 $a^2+b^2=c^2$.

$\because \sin A\cdot\cos A=\frac{1}{2}$，

$\therefore \frac{a}{c}\cdot\frac{b}{c}=\frac{1}{2}$.

$\therefore c^2=2ab$，$\therefore a^2+b^2=2ab$，

即 $(a-b)^2=0$，$\therefore a=b$.

在 Rt△ABC 中，$\tan A=\frac{a}{b}=1$，

$\therefore \angle A=45°$.

5. **解**：$\because b^2=(c+a)(c-a)$，

$\therefore b^2=c^2-a^2$，即 $c^2=a^2+b^2$.

$\because \triangle ABC$ 是直角三角形，且 $\angle C=90°$.

$\therefore 5b-4c=0$，

$\therefore 5b=4c$，

$\therefore \frac{b}{c}=\frac{4}{5}$，设 $b=4k$，$c=5k$，

那么 $a=3k$.

$\therefore \sin A+\sin B=\frac{3k}{5k}+\frac{4k}{5k}=\frac{7}{5}$.

6. **解**：连接 EF，设 $CF=k(k\neq 0)$，由题意可得 $CD=AD=AB=BC=4k$，$BE=EC=2k$，$DF=3k$.

根据勾股定理得 $AF=5k$，$EF=\sqrt{5}k$，$AE=2\sqrt{5}k$.

$\therefore EF^2+AE^2=AF^2$.

$\therefore \triangle AEF$ 是直角三角形，且 $\angle AEF=90°$.

$\therefore \sin\angle EAF=\frac{EF}{AF}=\frac{\sqrt{5}k}{5k}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

$\cos\angle EAF=\frac{AE}{AF}=\frac{2\sqrt{5}k}{5k}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

7. (1) **证明**：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore \angle B=\angle BAD=90°$.

$\therefore EF\perp AM$，

$\therefore \angle AFE=90°$.

$\therefore \angle EAF+\angle BAM=\angle EAF+\angle AEF=90°$.

$\therefore \angle BAM=\angle AEF$.

(2) **解**：在 Rt△ABM 中，

$\because \angle B=90°$，$AB=4$，

$\cos\angle BAM=\frac{4}{5}$，

$\therefore AM=5$.

$\because F$ 为 AM 的中点，

$\therefore AF=\frac{5}{2}$.

$\because \angle BAM=\angle AEF$，

$\therefore \cos\angle AEF=\cos\angle BAM=\frac{4}{5}$.

$\therefore \sin\angle AEF=\frac{3}{5}$.

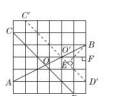
在 Rt△AEF 中，

$\because \angle AFE=90°$，$AF=\frac{5}{2}$，$\sin\angle AEF=\frac{3}{5}$，

$\therefore AE=\frac{25}{6}$.

$\therefore DE=AD-AE=6-\frac{25}{6}=\frac{11}{6}$.

8. **解**：如图，平移 CD 到 $C'D'$，交 AB 于点 O'，



（第 8 题）

则 $\angle BO'D'=\angle BOD$，

$\therefore \tan\angle BOD=\tan\angle BO'D'$.

由图易知 $O'E$ 保持点动.

设每个小正方形的边长为 a，

则 $O'B=\sqrt{a^2+(2a)^2}=\sqrt{5}a$，

$O'D'=\sqrt{(2a)^2+(2a)^2}=2\sqrt{2}a$，

$BD'=3a$.

过点 B 作 $BE\perp O'D'$ 于点 E，过点 O' 作 $O'F\perp BD'$ 于点 F，

则 $BE=\frac{BD'\cdot O'E}{O'D'}=\frac{3a\cdot 2a}{2\sqrt{2}a}=\frac{3\sqrt{2}}{2}a$，

$\therefore O'E=\sqrt{O'B^2-BE^2}$

$=\sqrt{(\sqrt{5}a)^2-\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}a\right)^2}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

$\therefore \tan\angle BO'E=\frac{BE}{O'E}=\frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}a}{\frac{\sqrt{2}}{2}a}=3$.

$\therefore \tan\angle BOD=3$.

9. **解**：根据图形有 $\angle AFE+\angle EFC+\angle BFC=180°$，

根据折叠的性质，知 $\angle EFC=\angle D=90°$，

$\therefore \angle AFE+\angle BFC=90°$.

而在 Rt△BCF 中，$\angle BCF+\angle BFC=90°$，

$\therefore \angle AFE=\angle BCF$.

根据折叠的性质，有 $CF=CD=10$.

在 Rt△EFC 中，$BC=8$，$CF=10$，

由勾股定理得 $BF=6$，

$\therefore \tan\angle BCF=\frac{BF}{BC}=\frac{3}{4}$.

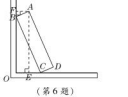
$\therefore \tan\angle AFE=\tan\angle BCF=\frac{3}{4}$.

23.2 解直角三角形及其应用

第 1 课时　解直角三角形

1. D　**2.** C　**3.** D　**4.** D　**5.** B

6. D　**点拨**：如图，过点 A 作 $AE\perp OC$ 于点 E，$AF\perp OB$ 于点 F.



（第 6 题）

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore \angle ABC=90°$.

$\because \angle ABC=\angle AEC=\angle BCO=x$，

$\therefore \angle EAB=x$.　$\therefore \angle FBA=x$.

$\therefore AB=a$，$BC=AD=b$，

$\therefore FO=FB+BO=a\cos x+b\sin x$.

7. A　**点拨**：$\because$ 在 Rt△ABC 中，$AC\perp BC$，$\angle ABC=30°$，

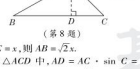
$\therefore AB=2AC$，$BC=\frac{AC}{\tan 30°}=\sqrt{3}AC$.

$\because BD=BA$，

$\therefore DC=BD+BC=(2+\sqrt{3})AC$.

$\therefore \tan\angle DAC=\frac{DC}{AC}=\frac{(2+\sqrt{3})AC}{AC}=2+\sqrt{3}$.

8. 2　**点拨**：过点 A 作 $AD\perp BC$，垂足为点 D，如图所示.



（第 8 题）

设 $AC=x$，则 $AB=\sqrt{2}x$.

在 Rt△ACD 中，$AD=AC\cdot\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}x$，$CD=AC\cdot\cos C=\frac{\sqrt{2}}{2}x$；

在 Rt△ABD 中，$AB=\sqrt{2}x$，$AD=\frac{\sqrt{2}}{2}x$，

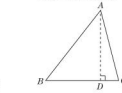
$\therefore BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}x$.

$\therefore BC=BD+CD=\frac{\sqrt{6}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}x=\sqrt{6}+\sqrt{2}$.

$\therefore x=2$，即 $AC=2$.

9. $\frac{16}{5}$

10. **D**　**点拨**：过点 A 作 $AD\perp BC$，垂足为点 D，如图所示.



（第 10 题）

在 Rt△ACD 中，$CD=CA\cdot\cos C=1$，

$\therefore AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=\sqrt{15}$.

在 Rt△ABD 中，$BD=CB-CD=3$，$AD=\sqrt{15}$，

$\therefore AB=\sqrt{BD^2+AD^2}=2\sqrt{6}$.

$\therefore \sin B=\frac{AD}{AB}=\frac{\sqrt{10}}{4}$.

11. **解**：在 Rt△ABC 中，$\angle B=90°$，

$\therefore AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{34}$.

$\therefore \tan A=\frac{BC}{AB}=\frac{3}{5}$，$\cos A=\frac{AB}{AC}=\frac{5}{\sqrt{34}}=\frac{5\sqrt{34}}{34}$.

易错警示　本题中已指出 $\angle B=90°$，所以 AC 为斜边，而受习惯的影响，部分同学常误以为 $\angle C$ 的对边 AB 是斜边. 因此，解题时应认真审题，注意所给条件，分清斜边和直角边，以防出错.

12. **解**：(1) 如图，过点 A 作 $AE\perp BC$ 于点 E.



（第 12 题）

$\because \cos C=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore \angle C=45°$.

在 Rt△ACE 中，$CE=AC\cdot\cos C=1$，

$\therefore AE=CE=1$. 在 Rt△ABE 中，$\tan B=\frac{1}{3}$，即 $\frac{AE}{BE}=\frac{1}{3}$，

$\therefore BE=3AE=3$，

$\therefore BC=BE+CE=4$.

(2) $\because AD$ 是△ABC 的中线，

$\therefore CD=\frac{1}{2}BC=2$，

$\therefore DE=CD-CE=1$.

$\therefore DE=AE=1$.

$\because AE\perp BC$，$\therefore \angle ADC=45°$，

$\therefore \sin\angle ADC=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

13. **解**：由 $AE\perp BC$，$DF\perp BC$，

易得四边形 $AEFD$ 是矩形.

$\therefore AE=DF=6$ m，$AD=EF=3$ m.

$\because$ 坡角 $\alpha=45°$，$\beta=30°$，

$\therefore BE=\frac{AE}{\tan\alpha}=\frac{6}{\tan 45°}=\frac{6}{1}=6$ (m)，

$CF=\frac{DF}{\tan\beta}=\frac{6}{\tan 30°}=\frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=6\sqrt{3}$ (m).

$\therefore BC=BE+EF+CF=6+3+6\sqrt{3}=9+6\sqrt{3}$ (m).

即 BC 的长为 $(9+6\sqrt{3})$ m.

14. (1) **证明**：$\because \angle M=\angle ABC=90°$，

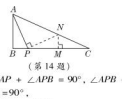
$\therefore \angle MAB+\angle MBA=\angle NBC+\angle MBA=90°$.

$\therefore \angle MAB=\angle NBC$.

又 $\because \angle M=\angle N=90°$，

$\therefore \triangle ABM\backsim\triangle BCN$.

(2) **解**：如图，过 P 点作 $PN\perp AP$ 交 AC 于 N 点，过 N 点作 $NM\perp BC$ 于 M 点.



（第 14 题）

$\because \angle BAP+\angle APB=90°$，$\angle APB+\angle NPC=90°$，

$\therefore \angle BAP=\angle NPC$.

又 $\because \angle B=\angle NMP=90°$，

$\therefore \triangle BAP\backsim\triangle MPN$.

$\therefore \frac{AP}{PN}=\frac{BA}{MP}=\frac{BP}{MN}$.

又 $\because \tan\angle PAC=\frac{PN}{PA}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore \frac{MP}{MN}=\frac{BA}{BP}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

设 $MN=2\sqrt{5}x$，$PM=2\sqrt{5}b$，

则 $BP=5a$，$AB=5b$.

又 $\because \angle BAP=\angle C$，

$\therefore \angle C=\angle NPC$.

$\therefore NP=NC$.

又 $\because NM\perp PC$，

$\therefore PM=MC$.

$\therefore PC=2PM=4\sqrt{5}b$.

又易知 $\triangle BAP\backsim\triangle BCA$，

$\therefore \frac{BA}{BP}=\frac{BC}{BA}$，

$\therefore BA^2=BP\cdot BC$.

$\therefore (5b)^2=5a\cdot(5a+4\sqrt{5}b)$.

又 $a>0$，$b>0$，$\therefore a=\frac{\sqrt{5}}{5}b$.

$\therefore \tan C=\frac{MN}{MC}=\frac{2\sqrt{5}a}{2\sqrt{5}b}=\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

(3) **解**：$\tan\angle CEB=\frac{3}{14}$.

第 2 课时　解直角三角形的八种常见类型

1. **解**：(1) $\because \tan A=\frac{a}{b}=\sqrt{3}$，

$\therefore \angle A=60°$. $\therefore \angle B=30°$.

$\therefore c=2b=12\sqrt{5}$.

(2) $\because \tan A=\frac{a}{b}=\sqrt{3}$，

$\therefore \angle A=60°$.

$\therefore \angle B=30°$. $\therefore c=2b=20$.

2. **解**：$\because AD=2$，$AC=\sqrt{3}$，$\angle C=90°$，

$\therefore \cos\angle DAC=\frac{AC}{AD}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore \angle DAC=30°$.

$\therefore AD$ 为 $\angle BAC$ 的平分线，

$\therefore \angle BAC=2\angle DAC=60°$.

$\therefore BC=AC\cdot\tan\angle BAC=\sqrt{3}\cdot\tan 60°=\sqrt{3}\times\sqrt{3}=3$.

3. **解**：(1) $a=c\cdot\sin A=10\cdot\sin 60°=5\sqrt{3}$，$b=c\cdot\cos A=10\cdot\cos 60°=5$；

(2) $b=\frac{a}{\tan A}=\frac{4}{\tan 60°}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，$\angle B=90°-\angle A=30°$.

4. **解**：$\because \angle C=90°$，$\angle BDC=45°$，$BC=3$，$\therefore CD=3$.

$\because \angle A=30°$，$BC=3$，

$\therefore \tan A=\frac{BC}{AC}=\frac{3}{AC}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，即 $AC=3\sqrt{3}$.

$\therefore AD=AC-CD=3\sqrt{3}-3$.

5. **解**：(1) 在 Rt△ABC 中，$\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{3}{5}$，即 $\frac{15}{AB}=\frac{3}{5}$，解得 $AB=25$，$\therefore D$ 是边 AB 的中点，$\therefore CD=\frac{AB}{2}=\frac{25}{2}$.

(2) 由(1)可得 $AD=BD=CD=\frac{25}{2}$，

由勾股定理知 $CB=\sqrt{AB^2-AC^2}=20$.

设 $DE=x$，$EB=y(x>0,y>0)$，

则 $\begin{cases}y^2+x^2=\frac{625}{4},\\ \left(x+\frac{25}{2}\right)^2+y^2=400,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=\frac{7}{2},\\ y=12.\end{cases}$

$\therefore \sin\angle DBE=\frac{DE}{BD}=\frac{7}{25}$.

6. **解**：分三种情况：

①如图①，当 $\angle BAC$ 为钝角，$AB=AC$ 时，在 Rt△ABD 中，

$\because BD=1$，$\tan\angle ABD=\sqrt{3}$，

$\therefore AD=\sqrt{3}$，$AB=2$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

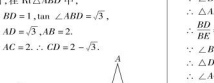
$\therefore AC=2$，$\therefore CD=2+\sqrt{3}$.

②如图②，当$\angle BAC$为锐角，$AB=AC$时，在Rt△ABD中，

$\because BD=1$，$\tan\angle ABD=\sqrt{3}$，

$\therefore AD=\sqrt{3}$，$AB=2$.

$\therefore AC=2$. $\therefore CD=2-\sqrt{3}$.



（第6题）

③如图③，当$BC=AC$时，

$\because \tan\angle ABD=\sqrt{3}$，$\therefore \angle ABD=60°$.

在Rt△ABD中，$\angle A=90°-\angle ABD=30°$.

$\because BC=AC$，$\therefore \angle CBA=\angle A=30°$.

$\therefore \angle BCD=60°$.

在Rt△BCD中，$BD=1$，$\angle BCD=60°$，$\tan\angle BCD=\dfrac{BD}{CD}$，

$\therefore \dfrac{1}{CD}=\tan60°=\sqrt{3}$.

$\therefore CD=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

综上所述，CD的长为$2+\sqrt{3}$或$2-\sqrt{3}$或$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

7. 解：(1)∵△ABD是等边三角形，$AB=10$.

∴ $AD=AB=10$.

∵ $DH\perp AB$，

∴ $AH=\dfrac{1}{2}AB=5$.

∴ $DH=\sqrt{AD^2-AH^2}=\sqrt{10^2-5^2}=5\sqrt{3}$.

∵△ABC是等腰直角三角形，

∴ $\angle CAB=45°$.

∵ $\angle AEH=45°$.

∴ $EH=AH=5$.

∴ $DE=DH-EH=5\sqrt{3}-5$.

(2)∵ $DH\perp AB$且$\tan\angle HDB=\dfrac{3}{4}$，

∴可设$BH=3k(k>0)$，则$DH=4k$，$DB=5k$.

∵ $BD=AB=10$，

∴ $5k=10$，解得$k=2$.

∴ $DH=8$，$BH=6$，

∴ $AH=4$.

又易知$EH=AH=4$，

∴ $DE=DH-EH=4$.

8. 解：∵ AD，CE是△ABC的高，

∴ $\angle ADB=\angle CEB=90°$.

∵ $\angle B=\angle B$，

∴△ADB∽△CEB.

∴ $\dfrac{BD}{BE}=\dfrac{BA}{BC}$，即$\dfrac{BD}{BA}=\dfrac{BE}{BC}$.

∵ $\angle B=\angle B$，

∴△DBE∽△ABC.

∴ $\angle ACB=\angle DEB$.

设$CD=x$，则$DB=6-x$.

在Rt△ABD中，$AD^2=AB^2-DB^2$，

在Rt△ACD中，$AD^2=AC^2-CD^2$，

∴ $AB^2-DB^2=AC^2-CD^2$.

∵ $AB=4$，$AC=5$，

∴ $4^2-(6-x)^2=5^2-x^2$，

解得$x=\dfrac{15}{4}$.

∴在Rt△ACD中，$\cos\angle ACB=\dfrac{CD}{AC}=\dfrac{\frac{15}{4}}{5}=\dfrac{3}{4}$.

∵ $\angle ACB=\angle DEB$，

∴ $\cos\angle DEB=\dfrac{3}{4}$.

9. (1)**证明**：由题意可得$\angle A=\angle D=\angle C=\angle BFE=90°$，

∵ $\angle ABF=90°-\angle AFB$，$\angle DFE=180°-\angle BFE-\angle AFB=90°-\angle AFB$.

∴ $\angle ABF=\angle DFE$.

∴△ABF∽△DFE.

(2)**解**：由折叠可得$FB=BC$，$EF=EC$.

∵ $\sin\angle DFE=\dfrac{1}{3}$，

∴ $\dfrac{DE}{EF}=\dfrac{1}{3}$，即$EF=3DE$.

∴ $AB=CD=DE+EC=DE+EF=4DE$，$DF=\sqrt{EF^2-DE^2}=2\sqrt{2}DE$.

∵△ABF∽△DFE，

∴ $\dfrac{EF}{DF}=\dfrac{FB}{AB}$，即$FB=\dfrac{EF\cdot AB}{DF}=\dfrac{3DE\cdot 4DE}{2\sqrt{2}DE}=3\sqrt{2}DE$.

又∵ $FB=BC$，$EF=EC$，

∴ $\tan\angle EBC=\dfrac{EC}{BC}=\dfrac{3DE}{3\sqrt{2}DE}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

10. 解：(1)∵ $\tan\angle ABO=\dfrac{1}{2}=\dfrac{OE}{EB}$，$EB=EO+OB=6$，

∴ $OE=3$. ∴ $C(-2,3)$.

即反比例函数的解析式为$y=-\dfrac{6}{x}$.

(2)∵ $\tan\angle ABO=\dfrac{1}{2}=\dfrac{OA}{OB}$，$OB=4$，

∴ $OA=2$，$B(4,0)$.

∴ $A(0,2)$. 设直线AB对应的函数解析式为$y=kx+b$，

将点$A(0,2)$，$B(4,0)$的坐标分别代入$y=kx+b$，

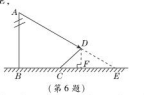
可得$b=2$，$k=-\dfrac{1}{2}$，

∴直线AB对应的函数解析式为$y=-\dfrac{1}{2}x+2$.

第3课时　解直角三角形在实际问题的应用

1. 69　**2.** B　**3.** A　**4.** C　**5.** $\sqrt{3}$

6. $6\sqrt{2}$　**点拨**：如图，延长AD交地面于点E，



（第6题）

过点D作$DF\perp CE$于点F，则$DF/\!/AB$.

∴ $\angle A=\angle FDE=60°$.

∵ $\angle DCF=45°$，$CD=4$ m，

∴ $CF=DF=2\sqrt{2}$ m.

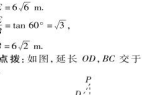
∵ $EF=DF\cdot\tan60°=2\sqrt{6}$ m.

∴ $BE=6\sqrt{6}$ m.

∵ $\dfrac{BE}{AB}=\tan60°=\sqrt{3}$，

∴ $AB=6\sqrt{2}$ m.

7. D　**点拨**：如图，延长OD，BC交于点P.



（第7题）

易知$\angle ODC=\angle B=90°$，$\angle P=30°$，$OB=11$ m，$CD=2$ m，

∴ 在Rt△CPD中，$DP=\dfrac{DC}{\tan30°}=2\sqrt{3}$ m，$PC=\dfrac{CD}{\sin30°}=4$ m.

∵ $\angle P=\angle P$，$\angle PDC=\angle B=90°$，

∴△PDC∽△PBO. ∴ $\dfrac{PD}{PB}=\dfrac{CD}{OB}$.

∴ $PB=\dfrac{PD\cdot OB}{CD}=\dfrac{2\sqrt{3}\times11}{2}=11\sqrt{3}$(m)，

∴ $BC=PB-PC=(11\sqrt{3}-4)$ m.

8. 解：由题意可知$AC=45.54-2.34=43.2$(m).

在Rt△ABC中，$\angle ABC=\alpha=8°35'$，

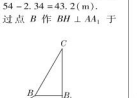
$\tan\angle ABC=\dfrac{AC}{BC}$，

∴ $BC=\dfrac{AC}{\tan\angle ABC}=\dfrac{43.2}{\tan8°35'}\approx286$(m).

因此观察所A与船只B的水平距离约为286 m.

易错点拨　解题时容易弄错AC的高度，A处的标高为45.54 m(当水位为0 m时的高度)，当水位为+2.34 m时，即水位上升了2.34 m，则AC的高度为$45.54-2.34=43.2$(m).

9. 解：如图，过点B作$BH\perp AA_1$于点H.



（第9题）

在Rt△ABH中，$AB=500$米，$\angle BAH=30°$，

∴ $BH=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{1}{2}\times500=250$(米).

∴ $A_1B_1=BH=250$米.

在Rt△BB_1C中，$BC=800$米，$\angle CBB_1=60°$，

∴ $\dfrac{B_1C}{BC}=\sin\angle CBB_1=\sin60°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

∴ $B_1C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}BC=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times800=400\sqrt{3}$(米).

∴检修人员上升的垂直高度$CA_1=CB_1+A_1B_1=400\sqrt{3}+250\approx943$(米).

答：检修人员上升的垂直高度CA_1约是943米.

点拨：测不易直接测量的物体的高度，河宽等，关键在于构造出直角三角形，通过测量角的度数和边的长度，计算出所要求的物体的高度或宽度. 根据题目已知特点选用适当锐角三角函数或边角关系去解直角三角形，得到数学问题的答案，再转化得到实际问题的答案.

10. 解：(1)如图①，过点E作$EM\perp CD$于点M.

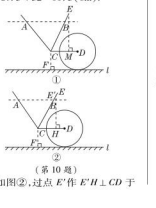
由题意知$\angle BCM=64°$，$EC=BC+BE=60+15=75$(cm)，

∴ $EM=EC\cdot\sin\angle BCM=75\times\sin64°\approx67.5$(cm).

∵ CD与地面l平行，

∴ $CF=32$ cm.

则坐垫E到地面的距离为$EM+CF=67.5+32=99.5$(cm).



（第10题）

(2)如图②，过点E'作$E'H\perp CD$于点H.

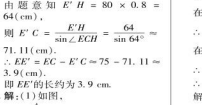
由题意知$E'H=80\times0.8=64$(cm)，

则$E'C=\dfrac{E'H}{\sin\angle ECH}=\dfrac{64}{\sin64°}\approx71.11$(cm).

∴ $EE'=EC-E'C\approx75-71.11\approx3.9$(cm).

即EE'的长约为3.9 cm.

11. 解：(1)如图，



（第11题）

过点E作$EM\perp AB$，垂足为点M.

设AB为x米.

在Rt△ADB中，$\angle AFB=45°$，

∴ $BF=AB=x$米.

∵ $BC=BF+FC=(x+25)$米.

在Rt△AEM中，$\angle AEM=22°$，$AM=AB-BM=AB-CE=(x-2)$米，$ME=BC=(x+25)$米，

$\tan22°=\dfrac{AM}{ME}$，

则$\dfrac{x-2}{x+25}\approx\dfrac{2}{5}$，解得$x\approx20$.

即A、B楼的高度约为20米.

(2)由(1)可得$ME=x+25\approx20+25=45$(米).

在Rt△AME中，$\cos22°=\dfrac{ME}{AE}$，

∴ $AE=\dfrac{ME}{\cos22°}\approx\dfrac{45}{\frac{15}{16}}=48$(米).

即A、E之间的距离约为48米.

12. 解：设$OE=OB=x$cm，则$OD=DE+OE=(190+2x)$cm.



第12题图

∵ $\angle ADE=30°$，

∴ $OC=\dfrac{1}{2}OD=(95+x)$cm.

∴ $BC=OC-OB=95+x-2x=(95-x)$cm.

∵ $\tan\angle BAC=\dfrac{BC}{AC}$，

∴ $2.14\approx\dfrac{95-x}{40}$，

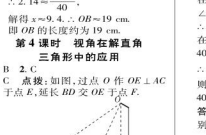
解得$x\approx9.4$. ∴ $OB\approx19$ cm.

即OB的长度约为19 cm.

第4课时　视角在解直角三角形中的应用

1. B　**2.** C

3. C　**点拨**：如图，过点O作$OE\perp AC$于点E，延长BD交OE于点F.



（第3题）

设$DF=x$米，则$BF=(3+x)$米，

在Rt△ODF中，$\tan65°=\dfrac{OF}{DF}$，

∴ $OF=DF\tan65°\approx x\tan65°$(米).

在Rt△OBF中，$\tan35°=\dfrac{OF}{BF}$，

∴ $OF=(3+x)\tan35°$米，

∴ $x\tan65°\approx(3+x)\tan35°$，

解得$x\approx1.5$.

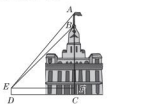
∴ $OF\approx1.5\times2.1=3.15$(米).

∴ $OE\approx3.15+1.5=4.7$(米).

4. 7.2 m　**点拨**：如图，易知四边形$CDEF$是矩形. 由题意知$\angle DEF=45°$，

∴ $CD=EF=FB=38$ m. 在Rt△AEF中，$AF=EF\cdot\tan50°\approx38\times1.19=45.22$(m). ∴ $AB=AF-BF\approx45.22-38=7.2$(m).

∴旗杆的高度约为7.2 m.



（第4题）

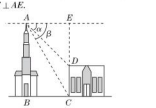
5. C

6. $1\,200(\sqrt{3}-1)$

7. $15\sqrt{3}+15$

8. $40\sqrt{3}$

9. 解：如图，延长CD，交AE于点E，可得$DE\perp AE$.



（第9题）

在Rt△AED中，$AE=BC=40$ m，$\angle EAD=45°$，

∴ $ED=40$ m.

在Rt△ABC中，$\angle ACB=60°$，$BC=40$ m，

∴ $AB=BC\cdot\tan60°=40\sqrt{3}\approx69.3$(m).

则$CD=EC-ED=AB-ED\approx40\sqrt{3}-40\approx29.3$(m).

答：这两座建筑物AB，CD的高度分别约为69.3 m，29.3 m.

10. 解：在Rt△DEC中，∵ $i=\dfrac{DE}{EC}=\dfrac{1}{2}$，

∴ $DE^2+EC^2=CD^2$，$CD=20\sqrt{5}$米，

∴ $DE^2+(2DE)^2=(20\sqrt{5})^2$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解得 $DE=20$ 米.

$\therefore EC=40$ 米.

如图，过点 D 作 $DG\perp AB$ 于点 G，过点 C 作 $CH\perp DG$ 于点 H，则四边形 $DEBG$、四边形 $DECH$、四边形 $BCHG$ 都是矩形.



（第 10 题）

$\because \angle ACB=45°$，$AB\perp BC$，

$\therefore AB=BC$.

设 $AB=BC=x$ 米，则 $AG=(x-20)$ 米，$DG=(x+40)$ 米.

在 Rt△ADG 中，$\tan\angle ADG=\dfrac{AG}{DG}$，

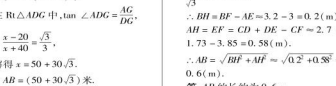
$\therefore \dfrac{x-20}{x+40}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

解得 $x=50+30\sqrt{3}$.

$\therefore AB=(50+30\sqrt{3})$ 米.

答：楼 AB 的高度为 $(50+30\sqrt{3})$ 米.

11. **解**：如图，作 $CF\perp AB$，垂足为 F.



（第 11 题）

$\because AB\perp BD$，$CD\perp BD$，

$\therefore$ 四边形 $CDBF$ 是矩形.

$\therefore CF=BD$，$CD=BF$，$CF/\!/BD$.

$\therefore \angle ECF=\angle CED=30°$.

设 $DE=x$ 米，则 $BD=BE+DE=(10+x)$ 米.

$\therefore CF=(10+x)$ 米.

在 Rt△CDE 中，$\tan\angle CED=\dfrac{CD}{DE}$，

$\therefore CD=x\tan30°$ 米.

在 Rt△ACF 中，$\tan\angle ACF=\dfrac{AF}{CF}$，

$\therefore AF=(10+x)\tan30°$ 米.

$\because AB=30$ 米，$AB=AF+BF=AF+CD$，

$\therefore x\tan30°+(10+x)\tan30°=30$，

解得 $x=15\sqrt{3}-5$.

$\therefore x\tan30°=15-\dfrac{5}{3}\sqrt{3}$.

即 $CD=\left(15-\dfrac{5}{3}\sqrt{3}\right)$ 米.

答：立柱 CD 的高为 $\left(15-\dfrac{5}{3}\sqrt{3}\right)$ 米.

12. **解**：如图，过点 B 作 $BF\perp CE$ 于点 F，交过点 A 平行于 CD 的直线于点 H.

（第 12 题）

在 Rt△BCF 中，$BF=BC\cdot\sin\angle BCF\approx5\times0.64=3.2$（m），$CF=BC\cdot\cos\angle BCF\approx5\times0.77=3.85$（m）.

在 Rt△ADE 中，$DE=\dfrac{AE}{\tan\angle ADE}=\dfrac{3}{\sqrt{3}}\approx1.73$（m）.

$\therefore BH=BF-AE\approx3.2-3=0.2$（m），$AH=EF=CD+DE-CF\approx2.7+1.73-3.85=0.58$（m）.

$\therefore AB=\sqrt{BH^2+AH^2}\approx\sqrt{0.2^2+0.58^2}\approx0.6$（m）.

答：AB 的长约为 0.6 m.

第 5 课时　用解直角三角形解方位角、坡角的应用

1. 566

2. B

3. B　**点拨**：根据题意，得 $\angle CAB=65°-20°=45°$，$\angle ACB=40°+20°=60°$，$AB=30\sqrt{2}$ km.

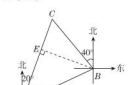
如图，过点 B 作 $BE\perp AC$ 于点 E，

$\therefore \angle AEB=\angle CEB=90°$.

在 Rt△ABE 中，

$\because \angle EAB=45°$，$AB=30\sqrt{2}$ km，

$\therefore AE=BE=AB\cdot\sin45°=30\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=30$（km）.



（第 3 题）

在 Rt△CBE 中，

$\because \angle ACB=60°$，

$\therefore CE=\dfrac{BE}{\tan60°}=\dfrac{30}{\sqrt{3}}=10\sqrt{3}$（km）.

$\therefore AC=AE+CE=(30+10\sqrt{3})$ km.

4. 1.02　**5.** A

6. B　**点拨**：延长 AB 交 ED 的延长线于点 M，作 $CJ\perp DM$ 于 J，则四边形 $BMJC$ 是矩形，在 Rt△CDJ 中求出 CJ，DJ，再根据 $\tan\angle AEM=\dfrac{AM}{EM}$ 构建方程即可解决问题.

7. B　**点拨**：由题意可得：$\angle APB=60°-15°=45°$，$\angle PBH=60°$，则可由锐角三角函数求得 PB 的长，又由山坡的坡度 i 为 $1:\sqrt{3}$，可求得 $\angle ABC$ 的度数，从而得出△ABP 是等腰直角三角形，则可求得答案.

8. **解**：依题意可知，$\angle DCB=45°$，$\angle DCA=60°$.

$\therefore BD=CD=200$ m.

在 Rt△ACD 中，$AD=CD\cdot\tan\angle DCA=200\sqrt{3}$ m.

$\therefore AB=200\sqrt{3}-200\approx200\times(\sqrt{3}-1)\approx146$（m）.

∴实际车速约为 $146\div10\approx14.6$（m/s）.

$\because 14.6<16$，

∴此车没有超过该路段 16 m/s 的限制速度.

9. **解**：（1）30；45

（2）∵ $BP\perp AC$，

$\therefore \angle BPA=\angle BPC=90°$.

$\because \angle C=45°$，

$\therefore \angle CBP=45°$.

$\therefore BP=CP$.

$\because \angle BAC=30°$，

$\therefore AP=\dfrac{BP}{\tan30°}=\sqrt{3}BP$.

$\because CP+AP=AC$，

$\therefore BP+\sqrt{3}BP=10$，

解得 $BP=5\sqrt{3}-5$（海里）.

答：观测站 B 到 AC 的距离 BP 为 $(5\sqrt{3}-5)$ 海里.

10. **解**：∵ 斜坡 AB 的坡度为 $1:\sqrt{3}$，

$\therefore \tan\angle ABE=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

$\therefore \angle ABE=30°$.

在 Rt△AEB 中，$AB=200$ 米，

$\therefore AE=\dfrac{1}{2}AB=100$ 米.

$\therefore AC=20$ 米，

$\because CE=AE-AC=80$ 米.

∵ 斜坡 CD 的坡度为 $1:4$，

$\therefore \dfrac{CE}{DE}=\dfrac{1}{4}$，即 $\dfrac{80}{DE}=\dfrac{1}{4}$，

解得 $DE=320$ 米.

$\therefore CD=\sqrt{CE^2+DE^2}=\sqrt{80^2+320^2}=80\sqrt{17}$（米）.

答：斜坡 CD 的长是 $80\sqrt{17}$ 米.

11. **解**：∵ $BH=0.6$ 米，$\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，

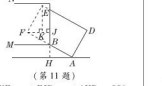
$\therefore AB=\dfrac{BH}{\sin\alpha}=\dfrac{0.6}{\frac{3}{5}}=1$（米）.

$\therefore AH=\sqrt{AB^2-BH^2}=\sqrt{1^2-0.6^2}=0.8$（米）.

∵ $AF=FC=2$ 米，

∴ $BF=1$ 米.

如图，作 $FJ\perp BG$ 于点 J，作 $EK\perp FJ$ 于点 K.



（第 11 题）

$\because \angle EKF=\angle FJB=\angle AHB=90°$，$\angle EFK=\angle FBJ=\angle ABH$，$BF=AB$，

∴ △$EFK\backsim$△ABH，△$FBJ\cong$△ABH.

$\therefore \dfrac{EF}{AB}=\dfrac{EK}{AH}$，$BJ=BH=0.6$ 米.

$\therefore \dfrac{1.6}{1}=\dfrac{EK}{0.8}$.

解得 $EK=1.28$ 米.

$\therefore BJ+EK=0.6+1.28=1.88$（米）.

$\because 1.88<2$，

∴ 木箱上部顶点 E 不会触碰到汽车货厢顶部.

阶段核心归类

1. **解**：车门不会碰到墙. 理由：如图，过点 A 作 $AC\perp OB$，垂足为点 C，

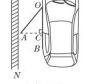
在 Rt△ACO 中，

$\because \angle AOC=40°$，$AO=1.2$ m，

$\therefore AC=AO\cdot\sin\angle AOC\approx1.2\times0.64=0.768$（m）.

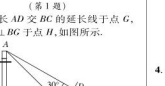
∵ 汽车靠墙一侧 OB 与墙 MN 平行且距离为 0.8 m，0.768 < 0.8，

∴ 车门不会碰到墙.



（第 1 题）

2. **解**：延长 AD 交 BC 的延长线于点 G，作 $DH\perp BG$ 于点 H，如图所示.



（第 2 题）

在 Rt△DHC 中，$\angle DCH=60°$，$CD=4$ m，

则 $CH=CD\cdot\cos\angle DCH=4\times\cos60°=2$（m），

$DH=CD\cdot\sin\angle DCH=4\times\sin60°=2\sqrt{3}$（m）.

∵ $DH\perp BG$，又易知 $\angle G=30°$，

∴ $HG=\dfrac{DH}{\tan G}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\tan30°}=6$（m）.

∴ $CG=CH+HG=2+6=8$（m）.

设 $AB=x$ m，

∵ $AB\perp BG$，$\angle G=30°$，$\angle BCA=45°$，

∴ $BC=x$ m，$BG=\dfrac{AB}{\tan G}=\dfrac{x}{\tan30°}=\sqrt{3}x$（m）.

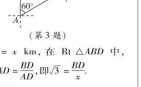
∵ $BG-BC=CG$，

∴ $\sqrt{3}x-x=8$.

解得 $x\approx11$.

答：电线杆的高约为 11 m.

3. **解**：如图，过 B 作 $BD\perp AC$，垂足为 D.



（第 3 题）

设 $AD=x$ km，在 Rt△ABD 中，$\tan\angle BAD=\dfrac{BD}{AD}$，即 $\sqrt{3}=\dfrac{BD}{x}$.

$\therefore BD=\sqrt{3}x$ km.

在 Rt△BCD 中，$\angle CBD=90°-37°=53°$，

$\tan\angle CBD=\dfrac{CD}{BD}$，即 $\dfrac{4}{3}\approx\dfrac{CD}{\sqrt{3}x}$，

$\therefore CD=\dfrac{4\sqrt{3}x}{3}$ km.

$\therefore \dfrac{4\sqrt{3}x}{3}+x\approx13$，解得 $x\approx4\sqrt{3}-3$.

$\therefore BD\approx(12-3\sqrt{3})$ km.

在 Rt△BCD 中，$\cos\angle CBD=\dfrac{BD}{BC}$，

即 $\dfrac{3}{5}\approx\dfrac{12-3\sqrt{3}}{BC}$，

$\therefore BC\approx(20-5\sqrt{3})$ km.

答：B，C 两地的距离约为 $(20-5\sqrt{3})$ km.

4. **解**：设每层楼高为 x m，由题意得 $MC'=MC-CC'=2.5-1.5=1$（m），则 $DC'=(5x+1)$ m，$EC'=(4x+1)$ m.

在 Rt△$DC'A'$ 中，$DA'=DC'\cdot\tan60°=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(5x+1)$ m.

在 Rt△$EC'B'$ 中，$\angle EB'C'=30°$，

$\therefore C'B'=\dfrac{EC'}{\tan30°}=\sqrt{3}(4x+1)$ m.

∵ $A'B'=C'B'-C'A'=AB$，

∴ $\sqrt{3}(4x+1)-\dfrac{\sqrt{3}}{3}(5x+1)=14$.

解得 $x=2\sqrt{3}-\dfrac{2}{7}\approx3.17$.

∴ $DC=DC'+CC'=5x+1+1.5\approx18.4$（m）.

答：居民楼的高度约为 18.4 m.

全章热门考点整合应用

1. **解**：在 Rt△ABC 中，∵ $\angle ACB=90°$，

∴ $\angle BCD+\angle ACD=90°$.

∵ $CD\perp AB$，

∴ $\angle ACD+\angle A=90°$，

∴ $\angle BCD=\angle A$.

在 Rt△ABC 中，由勾股定理，得 $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=10$，

∴ $\sin\angle BCD=\sin A=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{8}{10}=\dfrac{4}{5}$，

$\cos\angle BCD=\cos A=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$，

$\tan\angle BCD=\tan A=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{8}{6}=\dfrac{4}{3}$.

2. **解**：∵ $\sin B=\dfrac{3}{5}$，$\angle ACB=90°$，$DE\perp AB$，

∴ $\sin B=\dfrac{DE}{DB}=\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{3}{5}$.

设 $DE=CD=3k(k\neq0)$，则 $DB=5k$，

∴ $CB=8k$，$AC=6k$，$AB=10k$.

∵ $AC+CD=9$，

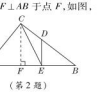
∴ $6k+3k=9$，

∴ $k=1$，

∴ $DE=3$，$DB=5$，$BC=8$，

∴ $BE=\sqrt{5^2-3^2}=4$.

过点 C 作 $CF\perp AB$ 于点 F，如图，



（第 2 题）

则 $CF/\!/DE$，

∴ △$BDE\backsim$△BCF，

∴ $\dfrac{DE}{CF}=\dfrac{BE}{BF}=\dfrac{BD}{BC}=\dfrac{5}{8}$.

求得 $CF=\dfrac{24}{5}$，

$BF=\dfrac{32}{5}$，

∴ $EF=\dfrac{12}{5}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

在 Rt△CEF 中，$CE=\sqrt{CF^2+EF^2}=\frac{12}{5}\sqrt{6}$.

点拨：方程思想是一种重要的思想方法，运用方程思想可以在已知量和待求量之间建立关系式，平时学习时，应该不断积累运用方程思想解题的方法.

3. **解：**(1) 原式 $=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\times1$

$=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}$

$=\frac{3}{4}$.

(2) 原式 $=\frac{1}{4}\times1^2+\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}-3\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{\frac{1}{2}}-1$

$=\frac{1}{4}+4-3\times\frac{3}{4}+2-1$

$=3$

4. **解：**设 $CE=y$.

(1)∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore AB=CD=4, BC=AD=5$，

$\angle B=\angle BCD=90°$.

∵ $BP=a, CE=y$，

∴ $PC=5-a, DE=4-y$.

∵ $AP\perp PE$，

∴ $\angle APE=90°$，

∴ $\angle APB+\angle CPE=90°$.

∵ $\angle APB+\angle BAP=90°$，

∴ $\angle CPE=\angle BAP$.

∴ △ABP∽△PCE.

∴ $\frac{BP}{CE}=\frac{AB}{PC}$

∴ $y=\frac{-a^2+5a}{4}$，即 $CE=\frac{-a^2+5a}{4}$.

(2) 四边形 $APFD$ 是菱形，理由如下：

当 $a=3$ 时，$y=\frac{-3^2+5\times3}{4}=\frac{3}{2}$，

即 $CE=\frac{3}{2}$.

∴ $DE=\frac{5}{2}$.

∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴ $AD/\!/BF$.

∴ △AED∽△FEC.

∴ $\frac{AD}{FC}=\frac{DE}{CE}$

∴ $FC=3$.

易知 $PC=2$，

∴ $PF=PC+CF=5$.

∴ $PF=AD$.

∴ 四边形 $APFD$ 是平行四边形.

在 Rt△APB 中，$AB=4$，$BP=3$，$\angle B=90°$，

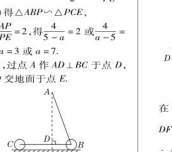
∴ $AP=5=PF$.

∴ 四边形 $APFD$ 是菱形.

(3) 根据 $\tan\angle PAE=\frac{1}{2}$ 可得 $\frac{AP}{PE}=2$，由(1)得△ABP∽△PCE，

即 $\frac{AB}{PC}=\frac{AP}{PE}=2$，得 $\frac{4}{5-a}=2$ 或 $\frac{4}{a-5}=2$，解得 $a=3$ 或 $a=7$.

5. **解：**如图，过点 A 作 $AD\perp BC$ 于点 D，延长 AD 交地面于点 E.



(第 5 题)

∵ $\sin\angle ABD=\frac{AD}{AB}$，

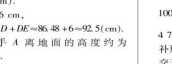
∴ $AD=AB\cdot\sin\angle ABD\approx92\times0.94=86.48$(cm).

∵ $DE=6$ cm，

∴ $AE=AD+DE\approx86.48+6=92.5$(cm).

答：把手 A 离地面的高度约为 92.5 cm.

6. **解：**如图，过点 C 作 $CD\perp AB$ 于点 D，



(第 6 题)

在 Rt△BCD 中，

∵ $\angle B=30°$，$BC=12$，

∴ $CD=BC\cdot\sin30°=6$，$BD=BC\cdot\cos30°=6\sqrt{3}$.

在 Rt△ACD 中，

∵ $\tan A=\frac{CD}{AD}=\frac{3}{4}$，$CD=6$，

∴ $AD=8$.

∴ $AC=\sqrt{CD^2+AD^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$.

$AB=AD+BD=8+6\sqrt{3}$.

7. **解：**分割法　如图①所示，过点 B 作 $BE//AD$ 交 DC 于点 E，过点 E 作 $EF//AB$ 交 AD 于点 F，则 $BE\perp AB$，$EF\perp AD$.

∴ 四边形 $ABEF$ 是矩形.

∴ $EF=AB, AF=BE$.

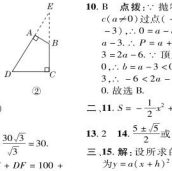
∵ $\angle ABC=120°$，

∴ $\angle CBE=120°-90°=30°$，$\angle D=180°-120°-60°$.

∴ $FC=3$.

在 Rt△BCE 中，$BE=\frac{BC}{\cos\angle CBE}=\frac{50\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{50\times\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=100$，

$EC=BC\cdot\tan\angle CBE=50\sqrt{3}\times\tan30°=50\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=50$.



①　②

(第 7 题)

在 Rt△DEF 中，

$DF=\frac{EF}{\tan D}=\frac{AB}{\tan60°}=\frac{30\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=30$.

∴ $AD=AF+DF=BE+DF=100+30=130$.

∴ $S_{四边形ABED}=S_{矩形ABED}+S_{△BEC}=\frac{1}{2}(AD+BE)\cdot AB+\frac{1}{2}BC\cdot EC=\frac{1}{2}\times(130+100)\times30\sqrt{3}+\frac{1}{2}\times50\sqrt{3}\times50=4\,700\sqrt{3}$.

补形法　如图②所示，延长 DA，CB 交于点 E，

则 $\angle ABE=180°-\angle ABC=60°$，$\angle E=90°-\angle ABE=30°$.

在 Rt△ABE 中，

$AE=AB\cdot\tan60°=30\sqrt{3}\times\sqrt{3}=90$，

$BE=\frac{AB}{\cos60°}=\frac{30\sqrt{3}}{\frac{1}{2}}=60\sqrt{3}$.

∴ $CE=BE+BC=60\sqrt{3}+50\sqrt{3}=110\sqrt{3}$.

在 Rt△DCE 中，$DC=CE\cdot\tan30°=110\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=110$.

∴ $S_{四边形ABCD}=S_{△DCE}-S_{△ABE}=\frac{1}{2}DC\cdot CE-\frac{1}{2}AB\cdot AE=\frac{1}{2}\times110\times110\sqrt{3}-\frac{1}{2}\times30\sqrt{3}\times90=4\,700\sqrt{3}$.

点拨：求不规则图形的面积要将其转化为求直角三角形或特殊四边形的面积. 可适当添加辅助线，本题利用**割补法**将不规则四边形分割为直角三角形和直角梯形，或者利用**补形法**把不规则四边形转化为直角三角形来求解.

第 21 章达标检测卷

一、**1.** D　**2.** C　**3.** D　**4.** B　**5.** C　**6.** C　**7.** C　**8.** B　**9.** C

10. B　**点拨：**∵ 抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 过点(−1，0)和点(0，−3)，∴ $0=a-b+c$，$-3=c$，∴ $b=a-3$，∴ $P=a+b+c=a+a-3-3=2a-6$. ∵ 顶点在第四象限，$a>0$，∴ $b=a-3<0$，∴ $a<3$，∴ $0<a<3$，∴ $-6<2a-6<0$，即 $-6<P<0$. 故选 B.

二、**11.** $S=-\frac{1}{2}x^2+20x$　**12.** $4\sqrt{3}$ m

13. 2　**14.** $\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$ 或 1 或 3

三、**15.** **解：**设所求的二次函数表达式为 $y=a(x+h)^2+k(a\neq0)$.

∵ 当 $x=2$ 时，y 有最大值 −2，

∴ 抛物线的顶点坐标为 $(-2,-2)$.

∵ 它的图象过点(0，−4)，

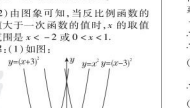
∴ $-4=a(0-2)^2-2$，解得 $a=-\frac{1}{2}$.

∴ $y=-\frac{1}{2}(x-2)^2-2$.

16. **解：**(1) 反比例函数的表达式为 $y=\frac{2}{x}$，一次函数的表达式为 $y=x+1$.

(2) 由图象可知，当反比例函数的值大于一次函数的值时，x 的取值范围是 $x<-2$ 或 $0<x<1$.

17. **解：**(1) 如图；



(第 17 题)

(2) 三条抛物线的形状相同. 抛物线 $y=(x+3)^2$ 是由抛物线 $y=x^2$ 向左平移 3 个单位长度而得到的；抛物线 $y=(x-3)^2$ 是由抛物线 $y=x^2$ 向右平移 3 个单位长度而得到的. 抛物线 $y=x^2$ 的顶点坐标是(0，0)，对称轴是 y 轴；抛物线 $y=(x+3)^2$ 的顶点坐标为(−3，0)，对称轴是直线 $x=-3$；抛物线 $y=(x-3)^2$ 的顶点坐标为(3，0)，对称轴是直线 $x=3$.

18. **解：**(1)∵ 点 $B(m,2)$ 在直线 $y=x-2$ 上，

∴ $m-2=2$，解得 $m=4$，

∴ 点 $B(4,2)$.

又∵ 点 $B(4,2)$ 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象上，

∴ $k=8$，

∴ 该反比例函数的表达式为 $y=\frac{8}{x}$.

(2) 设平移后的直线所对应的函数表达式为 $y=x+b$，点 C 的坐标为 $\left(x,\frac{8}{x}\right)$.

易知点 A 的坐标为(0，−2).

过点 C 作 $CD\perp y$ 轴于点 D，过点 B 作 $BE\perp y$ 轴于点 E.

∵ $S_{△ABC}=S_{四边形ACDE}+S_{△BDE}-S_{△ACD}=18$，

∴ $\frac{1}{2}(x+4)\left(\frac{8}{x}-2\right)+\frac{1}{2}\times4\times(2+2)-\frac{1}{2}x\left(\frac{8}{x}+2\right)=18$，

化简，得 $x^2+7x-8=0$，

解得 $x_1=-8, x_2=1$.

∵ $x>0$，∴ $x=1$，∴ 点 C 的坐标为(1，8).

把点 C 坐标(1，8)代入 $y=x+b$ 得 $8=1+b$，∴ $b=7$.

∴ 平移后的直线所对应的函数表达式为 $y=x+7$.

19. (1) **证明：**由题意知 $m,-3m$ 是一元二次方程 $x^2+bx-c=0$ 的两个根，根据一元二次方程根与系数的关系，得 $m+(-3m)=-b, m\cdot(-3m)=-c$，∴ $b=2m, c=3m^2$，

∴ $4c=12m^2, 3b^2=12m^2$，

∴ $4c=3b^2$.

(2) **解：**由题意得 $-\frac{b}{2}=1$，

∴ $b=-2$，由(1)得 $c=\frac{3}{4}b^2=\frac{3}{4}\times(-2)^2=3$，∴ $y=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$，

∴ 该二次函数的最小值为 −4.

20. (1) **解：**∵ $b^2+4a(a+b)=b^2+4ab+4a^2=(b+2a)^2$，

∵ 当 $b+2a=0$ 时，图象与 x 轴有一个交点；

当 $b+2a\neq0$ 时，图象与 x 轴有两个交点.

(2) **解：**∵ 当 $x=1$ 时，$y=a+b-(a+b)=0$，

∴ 图象不可能过点 $C(1,1)$.

∵ 该函数的图象经过 $A(-1,4)$，$B(0,-1)$ 两点，

可得 $\begin{cases}a-b-(a+b)=4,\\-(a+b)=-1,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=3,\\b=-2.\end{cases}$

∴ 该二次函数的表达式为 $y=3x^2-2x-1$.

(3) **证明：**∵ 点 $P(2,m)(m>0)$ 在该二次函数的图象上，

∴ $m=4a+2b-(a+b)=3a+b>0$.

又∵ $a+b<0$，

∴ $(3a+b)-(a+b)>0$，整理，得 $2a>0$，

∴ $a>0$.

21. **解：**(1) 设反比例函数的表达式为 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$，将点(25，6)的坐标代入 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$，得 $k=25\times6=150$，

则反比例函数的表达式为 $y=\frac{150}{x}$.

将 $y=10$ 代入 $y=\frac{150}{x}$，得 $10=\frac{150}{x}$，解得 $x=15$，

故 $A(15,10)$.

设正比例函数的表达式为 $y=nx(n\neq0)$，

将 $A(15,10)$ 的坐标代入 $y=nx(n\neq0)$，

得 $n=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$，

则正比例函数的表达式为 $y=\frac{2}{3}x$.

综上，可得 $y=\begin{cases}\frac{2}{3}x(0\leqslant x\leqslant15),\\\frac{150}{x}(x>15).\end{cases}$

(2) 将 $y=5$ 代入 $y=\frac{150}{x}$，得 $x=30$；

将 $y=5$ 代入 $y=\frac{2}{3}x$，得 $x=7.5$.

∵ $30-7.5=22.5(\min)$，$22.5>20$，

∴ 这次消毒有作用.

22. **解：**(1) y_2 与 x 之间的函数表达式为 $y_2=500+30x$.

(2) 依题意，得 $\begin{cases}500+30x\leqslant50x,\\170-2x\geqslant90.\end{cases}$

解得 $25\leqslant x\leqslant40$.

(3) 设这种设备的月利润为 w 万元，则 $w=xy_1-y_2=x(170-2x)-(500+30x)=-2x^2+140x-500$，

∴ $w=-2(x-35)^2+1\,950$.

∵ $-2<0, 25<35<40$，

∴ 当 $x=35$ 时，$w_{最大}=1\,950$.

即当月产量为 35 套时，这种设备的月利润最大，最大月利润是 1 950 万元.

23. **解：**(1) 设抛物线所对应的函数表达式为 $y=ax^2+bx+c$，由题易知 $A(1,0)$，$B(0,3)$，$C(-4,0)$.

∵ 点 A,B,C 在抛物线上，

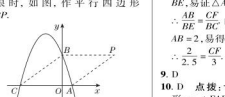
∴ $\begin{cases}a+b+c=0,\\c=3,\\16a-4b+c=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=-\frac{3}{4},\\b=-\frac{9}{4},\\c=3.\end{cases}$

∴ 经过 A,B,C 三点的抛物线对应的函数表达式为 $y=-\frac{3}{4}x^2-\frac{9}{4}x+3$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)存在. 理由如下:当点 P 在第一象限时,如图,作平行四边形 $ACBP$.



(第 23 题)

∵ $OB=3, OC=4, OA=1$, ∠BOC = 90°,

∴ $BC=AC=5$.

又∵四边形 $ACBP$ 是平行四边形,

∴ 四边形 $ACBP$ 为菱形.

∴ $BP=5$,

∴ 点 P 的坐标为(5,3).

当点 P 在第二、三象限时,以点 A, B, C, P 为顶点的四边形为菱形.

(3)设直线 PA 对应的函数表达式为 $y=kx+m\,(k\neq 0)$,

∵ $A(1,0)$, $P(5,3)$,

∴ $\begin{cases}5k+m=3,\\ k+m=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=\dfrac{3}{4},\\ m=-\dfrac{3}{4},\end{cases}$

∴ 直线 PA 所对应的函数表达式为 $y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{3}{4}$.

∵ 当点 M 与点 P, A 不在同一直线上时,根据三角形的三边关系知 $|PM-AM|<PA$,当点 M 与点 P, A 在同一直线上时, $|PM-AM|=PA$,

∴ 当点 M 与点 P, A 在同一直线上时, $|PM-AM|$ 的值最大,即点 M 为直线 PA 与抛物线的交点.

解方程组 $\begin{cases}y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{3}{4},\\ y=-\dfrac{3}{4}x^2-\dfrac{9}{4}x+3,\end{cases}$

得 $\begin{cases}x=1,\\ y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-5,\\ y=-\dfrac{9}{2}.\end{cases}$

∴ 当点 M 的坐标为 $(1,0)$ 或 $\left(-5,-\dfrac{9}{2}\right)$ 时, $|PM-AM|$ 的值最大,此时 $|PM-AM|$ 的最大值为 5.

第 22 章达标检测卷

一、1. B　2. C　3. C　4. A　5. C

6. B　**点拨**:∵ $AB\perp BC$, $CD\perp BC$,

∴ ∠ABE = ∠DCE = 90°.

又∵ ∠AEB = ∠DEC,

∴ △ABE∽△DCE.

∴ $\dfrac{AB}{DC}=\dfrac{BE}{CE}$,即 $\dfrac{AB}{20}=\dfrac{20}{10}$.

∴ $AB=40$ m.

7. B

8. B　**点拨**:由∠A = ∠ABC = 90°, $CF\perp BE$,易证△ABE∽△FCB.

∴ $\dfrac{AB}{BE}=\dfrac{CF}{BC}$,由 $AE=\dfrac{1}{2}\times 3=1.5$,

$AB=2$,易得 $BE=2.5$,

∴ $\dfrac{2}{2.5}=\dfrac{CF}{3}$. ∴ $CF=2.4$.

9. D

10. D　**点拨**:∵ 四边形 $ADEF$ 为正方形,∴ ∠FAD = 90°, $AD=AF=EF$,

∴ ∠CAD + ∠FAG = 90°.

∵ $FG\perp CA$,

∴ ∠G = 90° = ∠ACB.

∴ ∠AFG + ∠FAG = 90°.

∴ ∠DAC = ∠AFG.

在△FGA和△ACD中,$\begin{cases}\angle G=\angle C,\\ \angle AFG=\angle DAC,\\ AF=DA,\end{cases}$

∴ △FGA≌△ACD(AAS).

∴ $AC=FG$.故①正确.

∵ $BC=AC$,

∴ $FG=BC$.

∵ ∠ACB = 90°, $FG\perp CA$,

∴ $FG/\!/BC$.

∴ 四边形 $CBFG$ 是矩形.

∴ $CBF=90°$, $S_{△FAB}=\dfrac{1}{2}FB\cdot FG=\dfrac{1}{2}S_{四边形CBFG}$.故②正确.

∵ $CA=CB$, $\angle C=\angle CBF=90°$,

∴ ∠ABC = ∠ABF = 45°.故③正确.

易知∠FQE = ∠DQB = ∠ADC, ∠E = ∠C = 90°,

∴ △ACD∽△FFQ,

∴ $AC:AD=FE:FQ$.

∴ $AD\cdot FE=AD^2=FQ\cdot AC$.故④正确.

二、11. 160　**点拨**:设小明所居住的城市与 A 地之间的实际距离为 x km,

根据题意可列比例式为 $\dfrac{1}{500\,000}=\dfrac{32}{x\times 10^5}$,解得 $x=160$.

12. $\dfrac{16}{3}$或 3　**点拨**:由题意得∠ABC = ∠FBP = 90°,

∴ ∠ABP = ∠CBF.当△MBC∽△ABP 时, $BM:AB=BC:BP$,得 $BM=4\times 4\div 3=\dfrac{16}{3}$;当△$CBM$∽△$ABP$ 时, $BM:BP=CB:AB$,得 $BM=4\times 3\div 4=3$.

13. 14　**点拨**:过点 C 作 $CH\perp AB$ 于点 H,交 EF 于点 P,如图,则 $CH=DA=42$ m,由题意知, $CP=45$ cm -0.45 m $=EF=15$ cm $=0.15$ m.

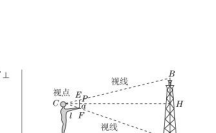
∵ $EF/\!/AH$,

∴ ∠CEF = ∠CBA, ∠CFE = ∠CAB.

∴ △CEF∽△CBA.

∴ $\dfrac{EF}{AB}=\dfrac{CP}{CH}$,即 $\dfrac{0.15}{AB}=\dfrac{0.45}{42}$.

∴ $AB=14$ m,即铁塔的高度是 14 m.



(第 13 题)

14. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$　**点拨**:在正△ABC 中, $AB_1\perp BC$, ∴ $BB_1=\dfrac{1}{2}BC=1$.在 Rt△ABB_1 中, $AB_1=\sqrt{AB^2-BB_1^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$,

根据题意可得△AB_2B_1∽△AB_1B,

记△AB_1B 的面积为 S,∴ $\dfrac{S_1}{S}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$,∴ $S_1=\dfrac{3}{4}S$.

同理可得 $S_2=\dfrac{3}{4}S_1$, $S_3=\dfrac{3}{4}S_2=\left(\dfrac{3}{4}\right)^2S_1$, $S_4=\dfrac{3}{4}S_3$, …, $S_n=\dfrac{3}{4}S_{n-1}$.

又∵ $S=\dfrac{1}{2}\times 1\times\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

∴ $S_1=\dfrac{3}{4}S=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{3}{4}$, $S_2=\dfrac{3}{4}S_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^2$,

$S_3=\dfrac{3}{4}S_2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^3$,

$S_4=\dfrac{3}{4}S_3=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^4$,

…,

$S_n=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

三、15. 解:设 $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z}{5}=k\,(k\neq 0)$,

则 $x=2k$, $y=3k$, $z=5k$,

∴ $3x+2y-z=14$,

∴ $6k+6k-5k=14$,解得 $k=2$,

∴ $x=4$, $y=6$, $z=10$.

16. 解:∵ BD 是△ABC 的平分线,

∴ ∠ABD = ∠CBD,

∵ $AB/\!/CD$,∴ ∠ADB = ∠ABD,

∴ ∠D = ∠CBD,∴ $BC=CD$,

∵ $BC=4$,∴ $CD=4$,

又∵ ∠AEB = ∠CED,

∴ △ABE∽△CDE,

∴ $\dfrac{AB}{CD}=\dfrac{AE}{CE}$,即 $\dfrac{8}{4}=\dfrac{AE}{CE}$.

∴ $AE=2CE$,∵ $AC=6=AE+CE$,

∴ $AE=4$.

17. 解:分两种情况讨论:

(1)若 $CDM\backsim AMN$,则 $\dfrac{DM}{AN}=\dfrac{CD}{MA}$.

∵ 正方形 $ABCD$ 的边长为 a, M 是 AD 的中点,∴ $AN=\dfrac{1}{4}a$.

(2)若 $CDM\backsim NAM$,则 $\dfrac{CD}{NA}=\dfrac{DM}{AM}$.

∵ 正方形 $ABCD$ 的边长为 a, M 是 AD 的中点,∴ $AN=a$,即 N 点与 B 点重合,不符合题意.

∴ 能在边 AB 上找一点 N(不与 A, B 重合),使得△CDM 与△MAN 相似,此时 $AN=\dfrac{1}{4}a$.

18. (1)证明:∵ $AB/\!/FC$,

∴ ∠A = ∠ECF.

又∵ ∠AED = ∠CEF,

且 $DE=FE$,

∴ △ADE≌△CFE(AAS).

(2)解:方法一　∵ $AE/\!/FC$,

∴ ∠GBD = ∠GCF, ∠GDB = ∠GFC.

∴ △GBD∽△GCF.

∴ $\dfrac{GB}{GC}=\dfrac{BD}{CF}$.

∴ $\dfrac{2}{2+4}=\dfrac{1}{CF}$.

∴ $CF=3$.

由(1)得△ADE≌△CFE,

∴ $AD=CF=3$.

∴ $AB=AD+BD=3+1=4$.

方法二　如图,取 BC 的中点 H,连接 EH.



(第 18 题)

∵ △ADE≌△CFE,∴ $AE=CE$.

∵ EH 是△ABC 的中位线.

∴ $EH/\!/AB$,且 $EH=\dfrac{1}{2}AB$.

∴ ∠GBD = ∠GHE, ∠GDB = ∠GEH.∴ △GBD∽△GHE.

∴ $\dfrac{DB}{EH}=\dfrac{GB}{GH}$,∴ $\dfrac{1}{EH}=\dfrac{2}{2+2}$.

∴ $EH=2$.∴ $AB=2EH=4$.

19. 解:∵ $BF\perp AC$,

∴ ∠ACB + ∠CBF = 90°.

∵ 四边形 $ABCD$ 为矩形,

∴ ∠BCF = ∠ABC = 90°, $AB/\!/CD$, $AD=BC$.

∴ ∠CAB + ∠ACB = 90°.

∴ ∠CAB = ∠CBF.

∴ △FCB∽△CBA.

∴ $CF:CB=CB:AB$,

又∵ $\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{1}{2}$,

∴ $CF:CB=CB:AB=AD:AB=1:2$.

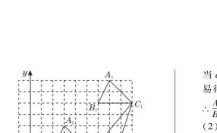
∵ $FC:AB=1:4$.

∵ $FC/\!/AB$,∴ △FCE∽△BAE.

∴ $\dfrac{S_1}{S_{△BAE}}=S_{△FCE}:\left(\dfrac{FC}{AB}\right)^2=\dfrac{1}{16}$.

20. 解:(1)如图所示.

(2)如图,△CC_1C_2 的面积为 $\dfrac{1}{2}\times 3\times 6=9$.



(第 20 题)

21. 解:根据题意得 $AB\perp BH$, $CD\perp BH$, $FG\perp BH$.

在 Rt△ABE 和 Rt△CDE 中,

∵ $AB\perp BH$, $CD\perp BH$,∴ $CD/\!/AB$,

可证得△CDE∽△ABE.

∴ $\dfrac{CD}{AB}=\dfrac{DE}{BE}$,①

同理得 $\dfrac{FG}{AB}=\dfrac{HG}{HG+GD+BD}$.②

又∵ $CD=FG=1.7$ m,

由①②可得 $\dfrac{DE}{DE+BD}=\dfrac{HG}{HG+GD+BD}$,

即 $\dfrac{3}{3+BD}=\dfrac{5}{10+BD}$,

解之得 $BD=7.5$ m,

将 $BD=7.5$ m 代入①得

$AB=5.95$ m ≈ 6.0 m.

故路灯杆 AB 的高度约为 6.0 m.

22. 解:(1)由题意知 $AP=2t$, $DQ=t$, $QA=6-t$,当 $QA=AP$ 时,

△QAP 是等腰直角三角形,

∴ $6-t=2t$,解得 $t=2$.

∴ 当 $t=2$ 时,△QAP 是等腰直角三角形.

(2)四边形 $QAPC$ 的面积 $S=S_{△QAC}+S_{△APC}=\dfrac{1}{2}AQ\cdot AB+\dfrac{1}{2}AP\cdot BC=(36-6t)+6t=36$.由计算结果发现:在 P, Q 两点移动的过程中,四边形 $QAPC$ 的面积始终保持不变.

(3)分两种情况:

①当 $\dfrac{AQ}{AB}=\dfrac{AP}{BC}$ 时,△$QAP\backsim$△ABC,

∴ $\dfrac{6-t}{12}=\dfrac{2t}{6}$,即 $t=1.2$;

②当 $\dfrac{CQ}{AB}=\dfrac{AP}{AB}$ 时,△$PAQ\backsim$△ABC,则 $\dfrac{6-t}{6}=\dfrac{2t}{12}$,即 $t=3$.

∴ 当 $t=1.2$ 或 $t=3$ 时,以点 Q, A, P 为顶点的三角形与△ABC 相似.

23. 解:(1)当 $\alpha=0°$ 时,∵ $BC=2AB=8$,

∴ $AB=4$.∵ 点 D, E 分别是边 BC, AC 的中点,∴ $BD=4$, $AE=EC=\dfrac{1}{2}AC$.∵ $\angle B=90°$,

∴ $AC=\sqrt{8^2+4^2}=4\sqrt{5}$,

∴ $AE=EC=2\sqrt{5}$,

∴ $\dfrac{AE}{BD}=\dfrac{2\sqrt{5}}{4}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

当 $\alpha=180°$ 时,如图①,

易得 $AC=4\sqrt{5}$, $CE=2\sqrt{5}$, $CD=4$,

∴ $\dfrac{AE}{BD}=\dfrac{AC+CE}{BC+CD}=\dfrac{4\sqrt{5}+2\sqrt{5}}{8+4}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

(2)无变化.

证明:在题图①中,∵ DE 是△ABC 的中位线,

∴ $DE/\!/AB$,

∴ $\dfrac{CE}{CA}=\dfrac{CD}{CB}$, ∠$EDC$ = ∠B = 90°.

如题图②,∵ △EDC 在旋转过程中的形状和大小不变,

∴ $\dfrac{CE}{CA}=\dfrac{CD}{CB}$仍然成立.

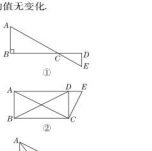
又∵ ∠ACE = ∠BCD = α,

∴ △ACE∽△BCD.∴ $\dfrac{AE}{BD}=\dfrac{AC}{BC}$.

在 Rt△ABC 中, $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{4^2+8^2}=4\sqrt{5}$.

∴ $\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{4\sqrt{5}}{8}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.∴ $\dfrac{AE}{BD}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

$\dfrac{AE}{BD}$ 的值无变化.



(第 23 题)

(3)当△EDC 在 BC 的上方,且 A, D, E 三点共线时,四边形 $ABCD$ 为矩形,如图②,∴ $BD=AC=4\sqrt{5}$;当△EDC 在 BC 的下方,且 A, E, D 三点共线时,△ADC 为直角三角形,如图③,由勾股定理可得 $AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=8$.又易知 $DE=2$,

∴ $AE=6$.∵ $\dfrac{AE}{BD}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$,∴ $BD=\dfrac{12\sqrt{5}}{5}$.

综上,BD 的长为 $4\sqrt{5}$ 或 $\dfrac{12\sqrt{5}}{5}$.

第 23 章达标检测卷

一、1. C

2. B　**点拨**:由余弦定义可得 $\cos A=\dfrac{AC}{AB}$,∵ $AB=10$, $AC=6$,∴ $\cos A=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$,故选 B.

3. D　4. D

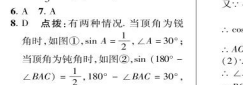
5. B　**点拨**:∵ $AD=DC$,∴ ∠DAC = ∠DCA.又∵ $AD/\!/BC$,∴ ∠DAC =

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\angle ACB$，$\therefore$ $\angle DCA = \angle ACB$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ACB$ 中，$AC = BC \cdot \cos\angle ACB = 10 \times \frac{4}{5} = 8$，则 $AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = 6$.

6. A　**7.** A

8. D　**点拨**：有两种情况. 当顶角为锐角时，如图①，$\sin A = \frac{1}{2}$，$\angle A = 30°$；当顶角为钝角时，如图②，$\sin(180° - \angle BAC) = \frac{1}{2}$，$180° - \angle BAC = 30°$，$\angle BAC = 150°$.



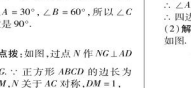
（第 8 题）

9. D　**10.** C

二、11. 90°　**点拨**：由题意得 $\sin A = \frac{1}{2}$，$\tan B = \sqrt{3}$，因为是在 $\triangle ABC$ 中，所以 $\angle A = 30°$，$\angle B = 60°$，所以 $\angle C$ 的度数是 90°.

12. 2

13. $\frac{4}{3}$　**点拨**：如图，过点 N 作 $NG \perp AD$ 于点 G. 正方形 $ABCD$ 的边长为 4，点 M、N 关于 AC 对称，$DM = 1$，$\therefore MC = NC = 3$，$\therefore GD = 3$. 而 $GN = AB = 4$，$\therefore \tan\angle ADN = \frac{GN}{GD} = \frac{4}{3}$.



（第 13 题）

14. 5　**点拨**：设直线 $y = x + b\,(b > 0)$ 与 x 轴交于点 C，易得 $C(-b, 0)$，$B(0, b)$，$\therefore OC = OB = b$，$\therefore \angle BCO = 45°$. 又$\because \alpha = 75°$，$\therefore \angle BAO = 30°$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle AOB$ 中，$\angle BAO = 30°$，又易知 $OA = 5\sqrt{3}$，$\therefore OB = OA \cdot \tan\angle BAO = 5\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 5$，$\therefore b = 5$.

三、15. **解**：(1) 原式 $= -2 + 1 + \sqrt{2} - 1 + 1 = \sqrt{2} - 1$.

(2) 原式 $= \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \div 1 + 2\sqrt{2} - 2 - 2(\sqrt{2} - 1) \times 1 = 2 + 2\sqrt{2} - 2 - 2\sqrt{2} + 2 = 2$.

16. **解**：(1) $\angle A = 90° - \angle B = 90° - 60° = 30°$.

$\because \sin A = \frac{BC}{AB}$，$BC = 8$，

$\therefore \sin 30° = \frac{8}{AB} = \frac{1}{2}$，

$\therefore AB = 16$，

又$\because \cos A = \frac{AC}{AB}$，

$\therefore \cos 30° = \frac{AC}{16} = \frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore AC = 8\sqrt{3}$.

(2) $\because \angle B = 45°$，$\angle C = 90°$，

$\therefore \angle A = 45°$，

$\therefore BC = AC = \sqrt{6}$，$\therefore AB = 2\sqrt{3}$.

17. **解**：$\because \angle B = 30°$，$\angle ACB = 90°$，$AB = 12$，

$\therefore AC = 6$. 易知 $BC // ED$，

$\therefore \angle AFC = \angle ADE = 45°$，

$\therefore AC = CF = 6$.

$\therefore S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} \times 6 \times 6 = 18$，

即阴影部分的面积为 18.

18. (1) **证明**：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AD // BC$，$\therefore \angle ADE = \angle DEC$.

又$\because \angle AFC = \angle DEC$，

$\therefore \angle AFC = \angle ADE$，$\therefore DE // FC$.

$\therefore$ 四边形 $DECF$ 是平行四边形.

(2) **解**：过点 D 作 $DH \perp BC$ 于点 H，如图.



（第 18 题）

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\therefore \angle BCD = \angle A$，$AB = CD = 13$.

又$\because \tan A = \frac{12}{5} = \tan\angle DCH = \frac{DH}{CH}$，

$\therefore DH = 12$，$CH = 5$.

$\because DF = 14$，$\therefore CE = 14$. $\therefore EH = 9$.

$\therefore DE = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15$.

$\therefore CF = DE = 15$.

19. **解**：在 $\mathrm{Rt}\triangle AFG$ 中，$\tan\angle AFG = \frac{AG}{FG}$，

$\therefore FG = \frac{AG}{\tan\angle AFG} = \frac{AG}{2}$(米)，

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACG$ 中，$\tan\angle ACG = \frac{AG}{CG}$，

$\therefore CG = \frac{AG}{\tan\angle ACG} = \frac{2}{3}AG$(米).

又$\because CG - FG = 24$(米)，

即 $\frac{2}{3}AG - \frac{1}{2}AG = 24$(米)，

$\therefore AG = 12\sqrt{3}$米，

$\therefore AB = 12\sqrt{3} + 1.6 \approx 22.4$(米).

即主教学楼 AB 的高度约为 22.4 米.

20. **解**：如图，延长 AB、DC 交于点 E，

$\because \angle ABC = \angle D = 90°$，

$\therefore \angle A + \angle DCB = 180°$，

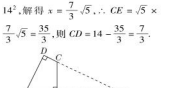
$\therefore \angle A = \angle ECB$，

$\therefore \tan A = \tan\angle ECB = 2$.

$\therefore AD = 7$，

$\therefore DE = AD \cdot \tan A = 14$，设 $BC = AB = x$，则 $BE = BC \cdot \tan\angle ECB = 2x$，

$\therefore AE = 3x$，$CE = \sqrt{5}x$，在 $\mathrm{Rt}\triangle ADE$ 中，由勾股定理得：$(3x)^2 = 7^2 + 14^2$，解得 $x = \frac{7}{3}\sqrt{5}$，$\therefore CE = \sqrt{5} \times \frac{7}{3}\sqrt{5} = \frac{35}{3}$，则 $CD = 14 - \frac{35}{3} = \frac{7}{3}$.



（第 20 题）

21. **解**：如图，过点 A 作 $AM \perp CD$，垂足为 M.



（第 21 题）

$\therefore AM = BD = 6$ 米，

$AB = MD = 1.5$(米).

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACM$ 中，$\tan 30° = \frac{CM}{AM}$，

$\therefore CM = AM \cdot \tan 30° = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$(米).

$\therefore CD = CM + MD = (2\sqrt{3} + 1.5)$米.

在 $\mathrm{Rt}\triangle CED$ 中，$\sin 60° = \frac{CD}{CE}$，

即 $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3} + 1.5}{CE}$，

$\therefore CE = (4 + \sqrt{3})$米.

故拉线 CE 的长为 $(4 + \sqrt{3})$ 米.

22. **解**：(1) 将点 A、B 的坐标分别代入抛物线 $y = -x^2 + ax + b$ 可得，

$\begin{cases} 0 = -1^2 + a + b, \\ 0 = -3^2 + 3a + b, \end{cases}$

解得 $a = 4$，$b = -3$，

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = -x^2 + 4x - 3$.

(2) $\because$ 点 C 在 y 轴上，

$\therefore C$ 点的横坐标为 0，

$\because$ 点 P 是线段 BC 的中点，

$\therefore$ 点 P 的横坐标 $x_P = \frac{0 + 3}{2} = \frac{3}{2}$，

$\therefore$ 点 P 在抛物线 $y = -x^2 + 4x - 3$ 上，

$\therefore y_P = -\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4 \times \frac{3}{2} - 3 = \frac{3}{4}$，

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right)$.

(3) $\because$ 点 P 的坐标为 $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right)$，且点 P 是线段 BC 的中点，

$\therefore$ 点 C 的纵坐标为 $2 \times \frac{3}{4} - 0 = \frac{3}{2}$，

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $\left(0, \frac{3}{2}\right)$，

$\therefore BC = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3^2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$，

$\therefore \sin\angle OCB = \frac{OB}{BC} = \frac{3}{\frac{3\sqrt{5}}{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

23. **解**：如图，作 $AD \perp BC$，交 BC 的延长线于点 D.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADH$ 中，$AD = AB \cdot \cos\angle BAD = 72 \times \cos 66° \approx 72 \times 0.4 = 28.8$(海里)，$BD = AB \cdot \sin\angle BAD = 72 \times \sin 66° \approx 72 \times 0.9 = 64.8$(海里).

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADC$ 中，$AC = \frac{AD}{\cos\angle DAC} \approx \frac{28.8}{\cos 37°} \approx \frac{28.8}{0.8} = 36$(海里).

$CD = AC \cdot \sin\angle CAD \approx 36 \times \sin 37° \approx 36 \times 0.6 = 21.6$(海里)，

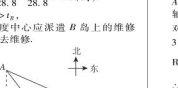
$\therefore BC = BD - CD \approx 64.8 - 21.6 = 43.2$(海里)，

$\therefore A$ 船上维修船赶到 C 处需要的时间 $t_1 = \frac{AC}{20} \approx \frac{36}{20} = 1.8$(时)，

B 岛上维修船赶到 C 处需要的时间 $t_B = \frac{BC}{28.8} \approx \frac{43.2}{28.8} = 1.5$(时)，

$\because t_1 > t_B$，

$\therefore$ 调度中心应派遣 B 岛上的维修船前去维修.



（第 23 题）

期末达标检测卷

一、1. B　**2.** D

3. C　**点拨**：$\because a < 0$，$\therefore$ 抛物线的开口向下，①正确；抛物线 $y = -\frac{1}{2}(x + 2)^2 + 3$ 的对称轴为直线 $x = -2$，②错误；顶点坐标为 $(-2, 3)$，③正确；④抛物线开口向下，当 $x > 2$ 时，图象是下降趋势，y 随 x 的增大而减小，④正确. 故选 C.

4. A　**点拨**：在 $\square ABCD$ 中，$AD = BC$，$AD // BC$，$\therefore E$ 是 AD 的中点，$\therefore DE = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BC$. 由 $AD // BC$ 可得，$\triangle EDF \sim \triangle BCF$. 它们的周长比等于相似比，所以周长比等于 $ED : BC = \frac{1}{2}BC : BC = 1 : 2$. 故选 A.

5. C　**点拨**：$\because$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle ACB = 90°$，$AC = \sqrt{5}$，$BC = 2$，

$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + 2^2} = 3$，

$\because \angle ACB = 90°$，$CD \perp AB$，

$\therefore \angle ACD + \angle BCD = 90°$，

$\angle B + \angle BCD = 90°$，$\therefore \angle ACD = \angle B$，

$\therefore \sin\angle ACD = \sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

故选 C.

6. C　**点拨**：$\because \angle CPD = \angle A$，$\angle D = \angle D$，$\therefore \triangle ADP \sim \triangle PDG$，$\therefore \angle APD = \angle PGD$，$\therefore \angle FPB = \angle AGP$，$\therefore \angle CPF = \angle B$，$\angle C = \angle C$，$\therefore \triangle CPF \sim \triangle CBP$，$\therefore \angle CFP = \angle CPB$，$\therefore \angle PFB = \angle APG$；在 $\triangle AGP$ 和 $\triangle BPF$ 中，$\angle AGP = \angle BPF$，$\angle APG = \angle BFP$，$\therefore \triangle AGP \sim \triangle BPF$. 故选 C.

7. C　**8.** B

9. B　**点拨**：延长 NP 交 EF 于点 G，设 $PG = x$，则 $PN = 4 - x$.

$\because PG // HF$，$\therefore \triangle PNG \sim \triangle ABF$，

$\therefore \frac{AG}{AF} = \frac{PG}{BF}$，即 $\frac{4G}{2} = \frac{x}{1}$，

解得 $AG = 2x$，

$\because MP = EG = EA + AG = 2 + 2x$，

$\therefore S_{\text{矩形}PNDM} = PM \cdot PN = (2 + 2x)(4 - x) = -2x^2 + 6x + 8 = -2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{25}{2}\,(0 \leqslant x \leqslant 1)$，当 $x = 1$ 时，函数有最大值 12，即矩形 $PNDM$ 面积的最大值为 12. 故选 B.

10. C　**点拨**：连接 AB，过点 P 作 $PC \perp AB$ 于点 C. 设抛物线的对称轴与 x 轴的交点为点 D. 易求出抛物线的对称轴为直线 $x = \sqrt{3}$，顶点 $A(\sqrt{3}, 3)$，故 $BD = OD = \sqrt{3}$，$AD = 3$，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，$\tan\angle BAD = \frac{BD}{AD} = \frac{\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore \angle BAD = 30°$，$\therefore PC = \frac{1}{2}AP$.

当 O、P、C 三点共线时，$OP + PC$ 的长最短，最短距离为 $\sin\angle OBC \cdot OB = \sin 60° \times 2\sqrt{3} = 3$.

$\therefore OP + \frac{1}{2}AP$ 的最小值为 3. 故选 C.

二、11. 2

12. $(0, 2\sqrt{3})$或$(0, 2)$或$\left(0, \frac{8\sqrt{3}}{3}\right)$或$(0, 8)$

13. ①②③　**点拨**：①∵ 图象开口向下，$\therefore a < 0$，

∵ 图象的对称轴在 y 轴左侧，

$\therefore -\frac{b}{2a} < 0$，而 $a < 0$，$\therefore b < 0$，

∵ 图象与 y 轴的交点在正半轴上，

$\therefore c > 0$，$\therefore abc > 0$，故结论正确.

②∵ $-2 < x_1 < -1$，

∴ 当 $x = -2$ 时，$y = 4a - 2b + c < 0$，故结论正确.

③∵ $-2 < x_1 < -1$，$0 < x_2 < 1$，

∴ $-\frac{b}{2a} > -1$，$\therefore a < 0$，

$\therefore 2a - b < 0$，故结论正确.

故正确的结论有①②③.

14. ①③④　**点拨**：∵ 点 C 是 BE 沿 BF 折叠点 C 恰好落在边 AD 上的点 F 处，

$\therefore \angle 1 = \angle 2$，$CE = FE$，$BF = BC = 10$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABF$ 中，$\because AB = 6$，$BF = 10$，

$\therefore AF = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$，$\therefore DF = AD - AF = 10 - 8 = 2$. 设 $EF = x$，则 $CE = x$，$DE = CD - CE = 6 - x$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle DEF$ 中，$\because DE^2 + DF^2 = EF^2$，$\therefore (6 - x)^2 + 2^2 = x^2$，解得 $x = \frac{10}{3}$，$\therefore DE = \frac{8}{3}$.

∵ 点 $\triangle ABG$ 沿 BG 折叠，点 A 恰好落在线段 BF 上的点 H 处，$\therefore \angle 3 = \angle 4$，$BH = BA = 6$，$AG = HG$，$\therefore \angle EBG = \angle 2 + \angle 3 = \frac{1}{2}\angle ABC = 45°$，∴ ①正确. $HF = BF - BH = 10 - 6 = 4$，设 $AG = y$，则 $GH = y$，$GF = 8 - y$，在 $\mathrm{Rt}\triangle HGF$ 中，$\because GH^2 + HF^2 = GF^2$，$\therefore y^2 + 4^2 = (8 - y)^2$，解得 $y = 3$，$\therefore AG = GH = 3$，$GF = 5$. $\because \angle A = \angle D$，$\frac{AB}{DE} = \frac{9}{4} \neq \frac{AG}{DF} = \frac{3}{2}$，$\therefore \frac{AB}{DE} \neq \frac{AG}{DF}$，∴ $\triangle ABG$ 与 $\triangle DEF$ 不相似，∴ ②错误. $\because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24$，$S_{\triangle FGB} = \frac{1}{2}GH \cdot HF = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$，$\therefore S_{\triangle ABC} = 3S_{\triangle FGB}$，∴ ③正确.

∵ $AG + DF = 3 + 2 = 5$，而 $FG = 5$，$\therefore AG + DF = FG$，∴ ④正确.

三、15. **解**：原式 $= 1 - 6 \times \frac{\sqrt{3}}{3} + 4 + \sqrt{3} - 1 = 4 - \sqrt{3}$.

16. **解**：(1) 联立得 $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 7, \\ y = \frac{1}{2}x, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x = 2, \\ y = 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 7, \\ y = \frac{7}{2}. \end{cases}$

$\therefore A(2, 1)$，$B\left(7, \frac{7}{2}\right)$.

(2) ∵ $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 7 = \frac{1}{2}(x - 4)^2 - 1$，

∴ 顶点 C 的坐标为 $(4, -1)$.

过顶点 C 作 $CD // x$ 轴交直线 $y = \frac{1}{2}x$ 于点 D，如图.



（第 16 题）

在 $y = \frac{1}{2}x$ 中，令 $y = -1$，得 $\frac{1}{2}x = -1$，解得 $x = -2$，$\therefore CD = 6$，

$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BCD} - S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \times 6 \times \left(\frac{7}{2} + 1\right) - \frac{1}{2} \times 6 \times (1 + 1) = 7.5$.

17. **解**：过点 A 作 $AD \perp BC$ 于点 D.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，$AD = AB \cdot \sin B = 4\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6$，

$BD = AB \cdot \cos B = 4\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 2\sqrt{3}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

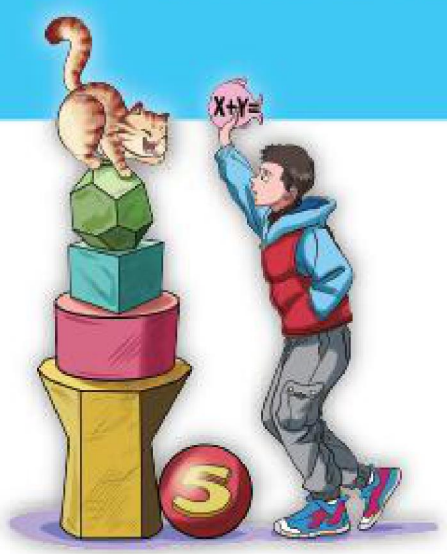
荣德基 主编

典中点

综合应用创新题 典中点

极速提分法

思想 方法 技巧 应用



九年级 数学 上 (HK版)

陕西新华出版传媒集团
陕西人民教育出版社

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

极速提分16招

思想 方法 技巧 应用 四类绝招速解百题，招招见效助拿高分

第1招 二次函数图象与系数的七种关系 …… 1 ▶第21章

第2招 一元二次方程根与系数关系的十一种应用 …… 3 ▶第21章

第3招 求二次函数表达式的九种方法 …… 5 ▶第21章

第4招 二次函数的五种解题技巧 …… 8 ▶第21章

第5招 降次思想在求代数式的值及方程、函数中的应用 …… 10 ▶第21章

第6招 反比例函数与一次函数、二次函数的综合应用 …… 12 ▶第21章

第7招 反比例函数与几何的综合应用 …… 15 ▶第21章

第8招 证明和计算成比例线段的五种常用作辅助线的方法 …… 19 ▶第22章

第9招 巧作平行线构造相似三角形 …… 21 ▶第22章

第10招 证明比例式或等积式的七种技巧 …… 22 ▶第22章

第11招 求三角函数值的常见技巧 …… 25 ▶第23章

第12招 巧用构造法求几种特殊角的三角函数值 …… 26 ▶第23章

第13招 解直角三角形的五种常见类型 …… 27 ▶第23章

第14招 “化斜为直”构造直角三角形的方法 …… 29 ▶第23章

第15招 利用三角函数解决实际问题 …… 30 ▶第23章

第16招 应用建模思想的常见类型 …… 32 ▶第23章

参考答案及点拨 …… 35

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第1招　二次函数图象与系数的七种关系

教你一招

二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的系数 a,b,c 与图象有着密切的关系：a 的取值决定了开口方向和开口大小，a,b 的取值影响对称轴的位置，c 的取值决定了抛物线与 y 轴的交点位置，所以 a,b,c 这三个系数共同决定着抛物线的位置和形状. 反之，也可以根据二次函数图象的情况确定 a,b,c 的符号或大小.

典例剖析

例 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图 1－1. 有下列结论：

①$a+b+c<0$；

②$a-b+c>0$；

③$abc>0$；

④$b=2a$，

其中正确的结论有(　　)

A. 4 个　　B. 3 个　　C. 2 个　　D. 1 个

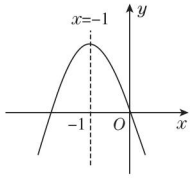


图 1－1

解题秘方：对于二次函数 $y=ax^2+bx+c$，当 $x=1$ 时，$y=a+b+c$. 此时，若 $y=0$，则 $a+b+c=0$；若 $y>0$，则 $a+b+c>0$；若 $y<0$，则 $a+b+c<0$. 当 $x=-1$ 时，$y=a-b+c$. 此时，若 $y=0$，则 $a-b+c=0$；若 $y>0$，则 $a-b+c>0$；若 $y<0$，则 $a-b+c<0$.

解：当 $x=1$ 时，对应的函数值 $y=a+b+c$，观察图象可知此时 $y<0$，即 $a+b+c<0$，故①正确；

当 $x=-1$ 时，对应的函数值 $y>0$，即 $a-b+c>0$，故②正确；

观察图象知抛物线与 y 轴交于原点，所以 $c=0$，故 $abc=0$，故③错误；

因为此抛物线的对称轴是直线 $x=-1$，所以 $-\dfrac{b}{2a}=-1$，所以 $b=2a$，故④正确.

答案：B

分类训练

☞(答案见 35 页)

关系 1　二次函数二次项系数与图象的关系

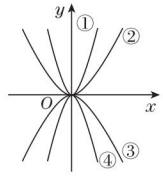
1. 如图，四个函数的图象分别对应的函数表达式是：①$y=ax^2$；②$y=bx^2$；③$y=cx^2$；④$y=dx^2$. 则 a,b,c,d 的大小关系为(　　)

A. $a>b>c>d$

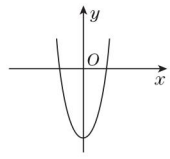
B. $a>b>d>c$

C. $b>a>c>d$

D. $b>a>d>c$



(第 1 题)



(第 2 题)

关系 2　二次函数一次项系数与图象的关系

2. 若二次函数 $y=3x^2+(b-3)x-4$ 的图象如图所示，则 b 的值是(　　)

A. -3　　B. 0

C. 3　　D. 4

3. 当抛物线 $y=x^2-nx+2$ 的对称轴是 y 轴时，n _____ 0；当对称轴在 y 轴左侧时，n _____ 0；当对称轴在 y 轴右侧时，n _____ 0. (填“>”“<”或“=”)

关系 3　二次函数常数项与图象的关系

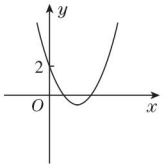
4. 【中考·襄阳】已知二次函数 $y=x^2-x+\dfrac{1}{4}m-1$ 的图象与 x 轴有交点，则 m 的取值范围是(　　)

A. $m\leqslant5$　　B. $m\geqslant2$

C. $m<5$　　D. $m>2$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

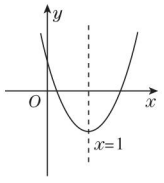
5. 若将抛物线 $y=ax^2+bx+c-3$ 向上平移4个单位长度后得到的抛物线如图所示，则 $c=$ _____.



（第5题）

关系4 二次函数二次项系数、一次项系数与图象的关系

6. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图所示，则下列结论中不正确的是(　　)



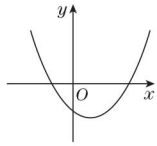
（第6题）

A. $a>0$　　B. $b<0$

C. $3a+b>0$　　D. $b>-2a$

关系5 二次函数二次项系数、常数项与图象的关系

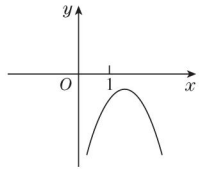
7. 二次函数 $y=(3-m)x^2-x+n+5$ 的图象如图所示，试求 $\sqrt{(m-3)^2}+\sqrt{n^2}-|m+n|$ 的值.



（第7题）

关系6 二次函数一次项系数、常数项与图象的关系

8. 【中考·六盘水】已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图所示，则(　　)



（第8题）

A. $b>0,c>0$　　B. $b>0,c<0$

C. $b<0,c<0$　　D. $b<0,c>0$

关系7 二次函数的系数与图象的关系

9. 【中考·达州】如图，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴交于点 $A(-1,0)$，与 y 轴的交点 B 在 $(0,2)$ 与 $(0,3)$ 之间(不包括这两点)，对称轴为直线 $x=2$. 下列结论：

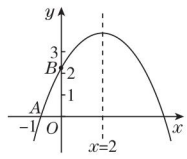
①$abc<0$；

②$9a+3b+c>0$；

③若点 $M\left(\frac{1}{2},y_1\right)$，点 $N\left(\frac{5}{2},y_2\right)$ 是函数图象上的两点，则 $y_1<y_2$；

④$-\frac{3}{5}<a<-\frac{2}{5}$.

其中正确的有(　　)



（第9题）

A. 1个　　B. 2个

C. 3个　　D. 4个

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第2招　一元二次方程根与系数关系的十一种应用

教你一招

如果一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的两个实数根为 x_1,x_2，那么 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$，这就是一元二次方程根与系数的关系. 反过来，如果 x_1,x_2 满足 $x_1+x_2=p$，$x_1x_2=q(p^2-4q\geqslant0)$，那么 x_1,x_2 是一元二次方程 $x^2-px+q=0$ 的两个根.

一元二次方程根与系数的关系揭示了根与系数的一种必然联系，利用这个关系，我们可以解决诸如已知一个根求另一个根、求涉根代数式的值、构造方程、证明等式和不等式等问题，它是中学数学中的一个重要工具.

典例剖析

例 已知关于 x 的方程 $(a-5)x^2-4x-1=0$.

(1)若方程有实数根，求 a 的取值范围；

(2)是否存在这样的实数 a，使方程的两根 x_1,x_2 满足 $x_1+x_2+x_1x_2=3$？若存在，求出实数 a 的值；若不存在，请说明理由.

解题秘方：对于二次项系数含有字母的方程，当方程未指明是一元二次方程或有两个根时，必须将方程对二次项系数为 0 或不为 0 两种情况分类讨论. 解答涉及一元二次方程根的存在性问题，一般先假设存在，根据根与系数的关系列出关于字母系数的方程，求出字母系数的值，再看它是否满足根的判别式大于或等于零，最后确定字母值的存在性.

解：(1)当 $a=5$ 时，方程为 $-4x-1=0$，方程有实数根；

当 $a\neq5$ 时，方程为一元二次方程，

$\Delta=16+4(a-5)=4a-4\geqslant0$，解得 $a\geqslant1$.

$\therefore a$ 的取值范围为 $a\geqslant1$.

(2)根据题意得：$x_1+x_2=\frac{4}{a-5}$，$x_1x_2=-\frac{1}{a-5}$.

$\because x_1+x_2+x_1x_2=3$，$\therefore \frac{4}{a-5}-\frac{1}{a-5}=3$.

解这个方程得 $a=6$.

经检验，$a=6$ 是方程的解.

又$\because a=6$ 满足 $\Delta\geqslant0$，$\therefore$ 存在实数 a，使方程的两根 x_1,x_2 满足 $x_1+x_2+x_1x_2=3$，此时 $a=6$.

分类训练

☞(答案见35页)

应用1　已知一个方程的一个根，求另一个根及待定系数

1. 已知方程 $x^2+kx-6=0$ 的一个根为 2，求它的另一个根及 k 的值.

应用2　已知一个方程，求与方程两个根有关的代数式的值

2. 已知 x_1,x_2 是方程 $x^2-4x+2=0$ 的两个根，求：

(1)$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ 的值；

(2)$(x_1-x_2)^2$ 的值.

应用3　已知两个方程，求含两个未知数的代数式的值

3. 已知一个方程 $2m^2-5m-1=0$ 与 $2n^2-5n-1=0$，且 $m\neq n$，求 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ 的值.

应用4　已知一个方程，求字母系数的取值范围

4. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-3x+k+1=0$ 的两个根的平方和小于 5，求 k 的取值范围.

应用5　已知方程，求字母系数的值

5. 已知关于 x 的方程 $x^2+2(m-2)x+m^2+4=0$ 有两个实数根，且两个根的平方和比两个根的积大 21，求 m 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

应用 6 已知方程,判断根的符号

6. 不解方程,判断方程 $2x^2+3x-7=0$ 两个根的符号.

应用 7 已知两个根,求一元二次方程

7. 已知 -1 和 3 是关于 x 的某个一元二次方程的根,且方程的二次项系数为 1,请写出这个方程.

应用 8 结合根的判别式证明等式

8. 已知实数 x,y,z 满足 $x=6-y,z^2=xy-9$.
求证:$x=y$.

应用 9 结合根的判别式证明不等式

9. 已知实数 a,b,c 满足 $\begin{cases}a^2-a-bc+1=0,\\2a^2-2bc-b-c+2=0,\end{cases}$
求证:$a\geqslant 1$.

应用 10 结合抛物线求字母的值

10. 已知关于 x 的二次函数 $y=x^2-(2k-1)x+k^2+1$ 的图象与 x 轴有两个交点.
(1)求 k 的取值范围;
(2)若该函数图象与 x 轴交点的横坐标为 x_1,x_2,且它们的倒数之和是 $-\frac{3}{2}$,求 k 的值.

应用 11 结合一元二次方程求抛物线与 x 轴两个交点间的距离

11. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-4x+m=0$.
(1)若方程有实数根,求实数 m 的取值范围;
(2)若方程的两个实数根分别为 x_1,x_2,且满足 $5x_1+2x_2=2$,求二次函数 $y=x^2-4x+m$ 的图象与 x 轴的两个交点间的距离.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第3招　求二次函数表达式的九种方法

教你一招

求二次函数的表达式是解决二次函数问题的重要保证，在求二次函数的表达式时，一般选用**待定系数法**. 但在具体题目中根据不同条件，设出恰当的表达式，往往可以给解题过程带来方便.

典例剖析

例 已知二次函数图象的顶点坐标为(1，−3)，且过点$P(2,0)$，求这个二次函数的表达式.

解题秘方：用顶点式设出二次函数的表达式，再将点P的坐标代入求解.

解：(顶点式)设所求二次函数的表达式为$y=a(x-h)^2+k(a\neq0)$，

∵ 图象的顶点坐标为(1，−3)，

∴ $h=1,k=-3$.

∴ 这个二次函数的表达式为$y=a(x-1)^2-3$.

又∵ 函数图象过点$P(2,0)$，

∴ $a(2-1)^2-3=0$，解得$a=3$.

∴ 这个二次函数的表达式为$y=3(x-1)^2-3$，即$y=3x^2-6x$.

分类训练

☞(答案见36页)

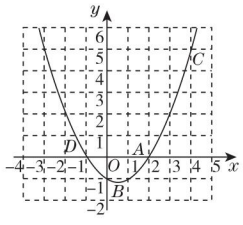
方法1　利用一般式(三点式)求二次函数的表达式

1. 如图，已知二次函数$y=ax^2+bx+c$的图象过$A(2,0)$，$B(0,-1)$和$C(4,5)$三点.

(1)求二次函数的表达式；

(2)设二次函数的图象与x轴的另一个交点为D，求点D的坐标；

(3)在同一坐标系中画出直线$y=x+1$，并写出当x在什么范围内，一次函数的值大于二次函数的值.



(第1题)

方法2　利用顶点式求二次函数的表达式

2. 已知抛物线$C:y_1=-x^2+mx+n$，直线$l:y_2=kx+b$，抛物线C的对称轴与直线l交于点$A(-1,5)$，点A与抛物线C的顶点B的距离是4.

(1)求抛物线C的表达式；

(2)若y_2随着x的增大而增大，且抛物线C与直线l都经过x轴上的同一点，求直线l的表达式.

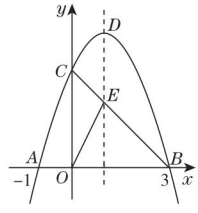
方法3　利用交点式求二次函数的表达式

3. 如图，已知抛物线$y=-x^2+bx+c$与x轴交于点$A(-1,0)$和点$B(3,0)$，与y轴交于点C，连接BC交抛物线的对称轴于点E，D是抛物线的顶点.

(1)求此抛物线的表达式；

(2)直接写出点C和点D的坐标；

(3)若点P在第一象限内的抛物线上，且$S_{\triangle ABP}=4S_{\triangle COE}$，求点$P$的坐标.



(第3题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

方法4 利用平移法求二次函数的表达式

4. 【中考·贵阳】六盘水市梅花山国际滑雪场自建成以来，吸引了大批滑雪爱好者，一名滑雪者从山坡滑下，测得滑行距离 y（单位：cm）与滑行时间 x（单位：s）之间的关系可以近似地用二次函数来表示.

滑行时间 x/s	0	1	2	3	…
滑行距离 y/cm	0	4	12	24	…

(1) 根据表中数据求出二次函数的表达式. 现测量出这名滑雪者的出发点与终点的距离大约是800 m，他需要多长时间才能到达终点？

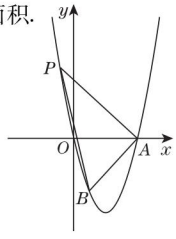
(2) 将得到的二次函数图象补充完整后，向左平移2个单位长度，再向上平移5个单位长度，求平移后的函数表达式.

方法5 利用对称轴求二次函数的表达式

5. 【中考·昆明】如图，抛物线 $y=ax^2+bx$ 过点 $B(1,-3)$，对称轴是直线 $x=2$，且抛物线与 x 轴的正半轴交于点 A.

(1) 求抛物线的表达式，并根据图象直接写出当 $y\leqslant 0$ 时，自变量 x 的取值范围；

(2) 在第二象限内的抛物线上有一点 P，当 $PA\perp BA$ 时，求 $\triangle PAB$ 的面积.



（第5题）

方法6 利用图象中的信息求二次函数的表达式

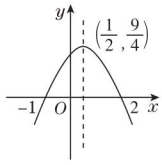
6. 如图是一个二次函数的图象，根据图象可知，该二次函数的表达式是(　　)

A. $y=x^2-x-2$

B. $y=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+2$

C. $y=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+1$

D. $y=-x^2+x+2$



（第6题）

方法7 利用表格信息求二次函数的表达式

7. 下表给出了代数式 $-x^2+bx+c$ 与 x 的一些对应值：

x	…	−2	−1	0	1	2	3	…
$-x^2+bx+c$	…	5	n	c	2	−3	−10	…

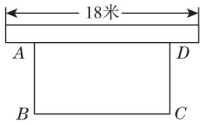
(1) 根据表格中的数据，确定 b，c，n 的值；

(2) 设 $y=-x^2+bx+c$，直接写出当 $0\leqslant x\leqslant 2$ 时，y 的最大值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

方法 8　利用几何建模求二次函数的表达式

8. 【中考·荆州】为响应荆州市“创建全国文明城市”的号召，某单位不断美化环境，拟在一块矩形空地上修建绿色植物园，其中一边靠墙，可利用的墙长不超过 18 米，另外三边由 36 米长的栅栏围成. 设矩形 $ABCD$ 空地中，垂直于墙的边 $AB=x$ 米，面积为 y 平方米（如图）.



（第 8 题）

（1）求 y 与 x 之间的函数表达式，并写出自变量 x 的取值范围；

（2）若矩形空地的面积为 160 平方米，求 x 的值；

（3）若该单位用 8 600 元购买了甲、乙、丙三种绿色植物共 400 棵（每种植物的单价和每棵植物栽种的合理用地面积如下表）.

	甲	乙	丙
单价/（元/棵）	14	16	28
合理用地/（平方米/棵）	0.4	1	0.4

问丙种植物最多可以购买多少棵？此时，这批植物可以全部栽种到这块空地上吗？请说明理由.

方法 9　利用建立实际问题模型求二次函数的表达式

9. 【中考·葫芦岛】五一期间，恒大影城隆重开业，影城每天运营成本为 1 000 元，试营业期间统计发现，影城每天售出的电影票张数 y（张）与电影票售价 x（元/张）之间满足一次函数表达式：$y=-4x+220$（$10\leqslant x\leqslant 50$，且 x 是整数），设影城每天的利润为 w（元）（利润 = 票房收入 − 运营成本）.

（1）试求 w 与 x 之间的函数表达式；

（2）影城将电影票售价定为每张多少元时，每天获利最大？最大利润是多少元？

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第4招　二次函数的五种解题技巧

教你一招

用二次函数及其性质解题，要全面审视题目中的所有条件和答题要求，整体把握题目的结构、特点，认识条件和结论之间的关系，图形的几何特征与数、式的数量、结构特征的关系，挖掘隐蔽的条件和内在联系，巧妙地利用所学的相关性质，确定解题思路和方法.

典例剖析

例 【中考·泰安】如图4－1，在△ABC中，$\angle C=90°$，$AB=10$ cm，$BC=8$ cm，点P从点A沿AC向点C以1 cm/s的速度运动，同时点Q从点C沿CB向点B以2 cm/s的速度运动（点Q运动到点B时两点均停止运动），在运动过程中，四边形$PABQ$面积的最小值为(　　)

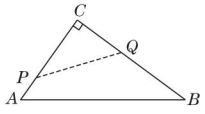


图4－1

A. 19 cm^2　B. 16 cm^2　C. 15 cm^2　D. 12 cm^2

解题秘方：用二次函数的性质解几何图形面积的最值问题，通常先根据图形的特点，结合相关联的几何性质，运用“面积法”“勾股法”等建立有关等式，进而转化为函数关系式，再运用求函数最值的方法求解.

解：在Rt△ABC中，$\angle C=90°$，

$AB=10$ cm，$BC=8$ cm，

$\therefore AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=6$ cm.

设运动时间为t s$(0\leqslant t\leqslant 4)$，则$PC=(6-t)$cm，$CQ=2t$ cm.

$\therefore S_{四边形PABQ}=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle CPQ}=\frac{1}{2}AC\cdot BC-\frac{1}{2}PC\cdot CQ=\frac{1}{2}\times 6\times 8-\frac{1}{2}(6-t)\times 2t=t^2-6t+24=(t-3)^2+15$.

$\therefore$ 当$t=3$时，四边形$PABQ$的面积有最小值，最小值为15 cm^2.

答案：C

分类训练

(答案见38页)

技巧1　巧用二次函数的定义求字母的值

1. 已知函数$y=(n^2-1)x^2+(n^2-2n-3)x-n-1$.

(1)当n为何值时，y是x的一次函数？

(2)当n为何值时，y是x的二次函数？

技巧2　巧用配方法求抛物线的对称轴与顶点坐标

2. 通过配方，写出下列抛物线的开口方向、对称轴与顶点坐标.

(1)$y=\frac{1}{3}x^2-2x-1$；

(2)$y=-4(x+1)(x+3)$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

技巧 3 巧用顶点式求二次函数的最值

3. 已知抛物线 $y=a(x-3)^2+2$ 经过点 $(1,-2)$.
   (1)求 a 的值;
   (2)函数 y 有最大值还是最小值?并求出这个最值;
   (3)若点 $A(m,y_1)$,$B(n,y_2)$ $(m<n<3)$ 都在该抛物线上,试比较 y_1 与 y_2 的大小.

技巧 4 巧用待定系数法求二次函数的表达式

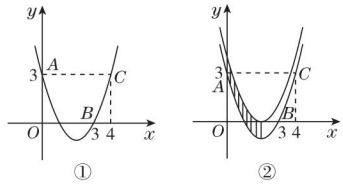
4. 分别求出下列条件所对应的二次函数的表达式.
   (1)已知抛物线的顶点坐标是(1,2)且过点(2,3);
   (2)已知抛物线过点 $(-1,0)$,$(3,0)$,$(2,-6)$;
   (3)已知抛物线过点 $(-1,2)$,$(0,1)$,$(2,-7)$.

5. 已知二次函数图象的对称轴为直线 $x=1$,最高点到 x 轴的距离为 6,且经过点 $(2,-8)$,求此二次函数的表达式.

技巧 5 巧用顶点坐标处理抛物线移动问题

6. 将抛物线 $y=2x^2-4x+5$ 作下列运动,求所得到的抛物线的表达式.
   (1)先向左平移 2 个单位长度,再向下平移 3 个单位长度;
   (2)以 x 轴为对称轴,将原抛物线开口反向.

7. 如图①所示,已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过点 $A(0,3)$,$B(3,0)$,$C(4,3)$.
   (1)求抛物线的表达式;
   (2)求抛物线的顶点坐标和对称轴;
   (3)把抛物线向上平移,使得顶点落在 x 轴上,直接写出两条抛物线、对称轴和 y 轴围成的图形的面积(图②中阴影部分).



① ②

(第 7 题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第5招　降次思想在求代数式的值及方程、函数中的应用

教你一招

解一元二次方程的基本思路是将一元二次方程降次，转化为一元一次方程求解，这种解题思路的实质就是降次思想. 应用**降次思想**也能把某些高次方程转化为一元二次方程求解. 在求一些代数式的值时也常用降次思想求解.

典例剖析

例 已知：$2x^2-x=1$，求代数式 $6x^3+x^2-5x+2\,020$ 的值.

解题秘方：利用降次思想，将已知变形为 $x^2=\frac{1}{2}(x+1)$ 后，反复运用 $x^2=\frac{1}{2}(x+1)$ 进行降次化简，将关于 x 的三次式转化为关于 x 的一次式，然后代入求解.

解：∵ $2x^2-x=1$，

∴ $x^2=\frac{1}{2}(x+1)$.

∴ $x^3=\frac{1}{2}(x+1)\cdot x=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1}{2}x$

$=\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}$.

∴ $6x^3+x^2-5x+2\,020$

$=6\left(\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}(x+1)-5x+2\,020$

$=2\,022$.

分类训练 ☞(答案见39页)

应用1　利用降次思想解一元二次方程

类型1　开方降次法

1. 用直接开平方法解下列方程：

(1) $3(x+1)^2=\frac{1}{3}$；

(2) $(2x+3)^2-12=0$.

类型2　配方降次法

2. 用配方法解下列方程：

(1) $3x^2-12x+9=0$；

(2) $2x^2-3=4x$.

类型3　因式分解降次法

3. 解下列方程：

(1) $4x^2-4x+1=3x^2-6x+9$；

(2) $(3x+1)^2+4(3x+1)+4=0$.

应用2　利用降次思想解高次方程

4. 解方程：$x^3-2x^2-4x+8=0$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

应用 3 利用降次思想求代数式的值

类型 1 整体代换降次法

5. 已知 $x=2-\sqrt{5}$，求 $x^4-8x^3+16x^2-x+1$ 的值.

6. 若 $x^2+x-1=0$，求 x^3+2x^2+3 的值.

类型 2 利用方程的根及根与系数的关系降次法

7. 设 x_1,x_2 是一元二次方程 $x^2+x-3=0$ 的两个根，求 $x_1^3-4x_2^2+19$ 的值.

应用 4 利用降次思想解二次函数问题

8. 若抛物线 $y=x^2+(2a+1)x+2a+\frac{5}{4}$ 与 x 轴只有一个公共点.

(1)求 a 的值；

(2)求 $a^{18}+323a^{-6}$ 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第6招　反比例函数与一次函数、二次函数的综合应用

教你一招

单独考查反比例函数的情形很少，将其与一次函数放在一起综合考查的情况较多，其考查形式主要有：两种函数的图象在同一坐标系中的情况，两种函数的图象与性质，两种函数图象的交点情况、交点坐标，用待定系数法求函数表达式及与函数图象有关的几何图形的面积等.

典例剖析

例 如图 6－1，设直线 $y=kx(k>0)$ 与双曲线 $y=\frac{5}{x}$ 相交于 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 两点，求 $x_1y_2-3x_2y_1$ 的值.

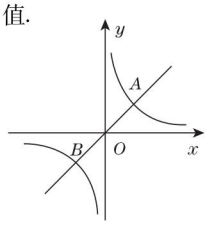


图 6－1

解题秘方：正比例函数和反比例函数的图象都关于原点对称，这两种函数图象的交点也关于原点对称. 解决与两个函数图象交点有关的问题时，利用函数图象的对称性非常方便.

解：因为直线 $y=kx$ 和双曲线 $y=\frac{5}{x}$ 的图象都是关于原点对称的，

所以 A，B 两点关于原点对称.

所以 $x_2=-x_1$，$y_2=-y_1$.

所以 $x_1y_2-3x_2y_1=x_1(-y_1)-3(-x_1)y_1=-x_1y_1+3x_1y_1=2x_1y_1$.

因为 $x_1y_1=5$，

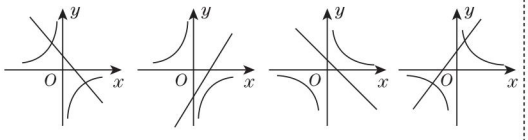
所以 $x_1y_2-3x_2y_1=2x_1y_1=10$.

分类训练

☞(答案见40页)

应用1　反比例函数图象与一次函数图象的位置判断

1. 在同一直角坐标系中，一次函数 $y=kx-k$ 与反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$ 的图象大致是(　　)



A　　B　　C　　D

应用2　反比例函数与一次函数的图象与性质

2. 已知函数 $y_1=x(x\geqslant0)$，$y_2=\frac{4}{x}(x>0)$ 的图象如图所示，则以下结论：

①两个函数图象交点 A 的坐标为(2,2)；

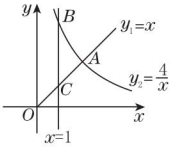
②当 $x>2$ 时，$y_1>y_2$；

③图中 $BC=2$；

④两个函数图象构成的图形是轴对称图形；

⑤当 x 逐渐增大时，y_1 随着 x 的增大而增大，y_2 随着 x 的增大而减小.

其中正确结论的序号是_____.



(第2题)

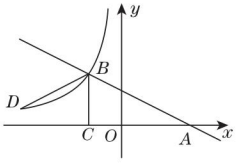
应用3　反比例函数与一次函数的有关计算

类型1　求函数表达式

3. 【中考·常州】如图，已知一次函数 $y=kx+b$ 的图象与 x 轴交于点 A，与反比例函数 $y=\frac{m}{x}(x<0)$ 的图象交于点 $B(-2,n)$，过点 B 作 $BC\perp x$ 轴于点 C，点 $D(3-3n,1)$ 是该反比例函数图象上一点.

(1)求 m 的值；

(2)若 $\angle DBC=\angle ABC$，求一次函数 $y=kx+b$ 的表达式.



(第3题)

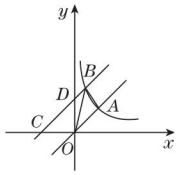
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 2 求面积

4. 【2019·资阳】如图，直线 $y=x$ 与双曲线 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 相交于点 A，且 $OA=\sqrt{2}$，将直线向左平移1个单位长度后与双曲线相交于点 B，与 x 轴、y 轴分别交于 C，D 两点.

(1)求直线 BC 的表达式及 k 的值；

(2)连接 OB，AB，求 $\triangle OAB$ 的面积.



(第4题)

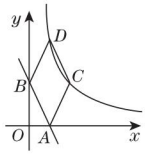
类型 3 求点的坐标

5. 如图，直线 $y=ax+2$ 与 x 轴交于点 $A(1,0)$，与 y 轴交于点 $B(0,b)$，将线段 AB 先向右平移1个单位长度，再向上平移 t $(t>0)$ 个单位长度，得到对应线段 CD，反比例函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 的图象恰好经过 C，D 两点，连接 AC，BD.

(1)求 a 和 b 的值；

(2)求反比例函数的表达式及四边形 $ABDC$ 的面积；

(3)点 N 在 x 轴正半轴上，点 M 是反比例函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 的图象上的一个点，若 $\triangle CMN$ 是以 CM 为直角边的等腰直角三角形，求所有满足条件的点 M 的坐标.



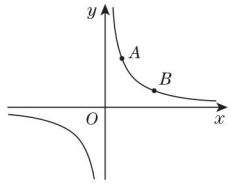
(第5题)

类型 4 有关最值的计算题

6. 【中考·湘西州】如图，反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（k 为常数，且 $k\neq0$）的图象经过点 $A(1,3)$，$B(3,m)$.

(1)求反比例函数的表达式及点 B 的坐标；

(2)在 x 轴上找一点 P，使 $PA+PB$ 的值最小，求满足条件的点 P 的坐标.

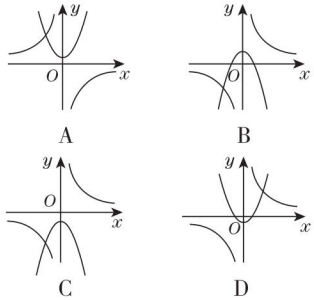


(第6题)

应用 4 反比例函数与二次函数的综合

类型 1 反比例函数与二次函数图象的位置判断

7. 函数 $y=\frac{k}{x}$ 与 $y=-kx^2+k(k\neq0)$ 在同一直角坐标系中的图象可能是(　　)



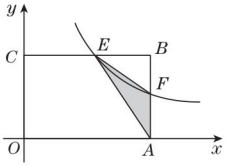
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型 2 反比例函数与二次函数综合求最值问题

8. 【中考·柳州】如图,在矩形 $OABC$ 中,$OA=3$,$OC=2$,F 是 AB 上的一个动点(F 不与 A,B 重合),过点 F 的反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k>0)$ 的图象与 BC 边交于点 E.

(1)当 F 为 AB 的中点时,求该函数的表达式;

(2)当 k 为何值时,$\triangle EFA$ 的面积最大?最大面积是多少?



(第 8 题)

类型 3 反比例函数与二次函数综合求代数式值的问题

9. 在平面直角坐标系中,反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象经过点 $A(1,4)$,$B(m,n)$.

(1)求代数式 mn 的值;

(2)若二次函数 $y=(x-1)^2$ 的图象经过点 B,求代数式 $m^3n-2m^2n+3mn-4n$ 的值;

(3)若反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象与二次函数 $y=a(x-1)^2$ 的图象只有一个交点,且该交点在直线 $y=x$ 的下方,结合函数图象,求 a 的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第7招　反比例函数与几何的综合应用

教你一招

解反比例函数与几何图形的综合题，一般先设出几何图形中的未知量，然后结合函数的图象用含未知数的代数式表示出几何图形与图象的交点坐标，再由函数表达式及几何图形的性质写出含未知数及待求字母系数的方程(组)，解方程(组)即可得所求几何图形中的未知量或函数表达式中待定字母的值.

典例剖析

例 【中考·山西】如图7－1，在平面直角坐标系中，正方形 $OABC$ 的顶点 O 与坐标原点重合，其边长为2，点 A，点 C 分别在 x 轴，y 轴的正半轴上，函数 $y=2x$ 的图象与 CB 交于点 D，函数 $y=\frac{k}{x}$(k 为常数，$k\neq0$)的图象经过点 D，与 AB 交于点 E，与函数 $y=2x$ 的图象在第三象限内交于点 F，连接 AF，EF.

(1)求函数 $y=\frac{k}{x}$ 的解析式，并直接写出 E，F 两点的坐标；

(2)求 $\triangle AEF$ 的面积.

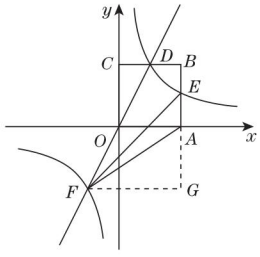


图7－1

解题秘方：根据正方形的性质以及函数图象上点的坐标特征可求出点 D 的坐标为(1，2)，根据待定系数法可求出反比例函数的解析式，进一步得到 E，F 两点的坐标；过点 F 作 $FG\perp AB$，与 BA 的延长线交于点 G，如图7－1，根据两点间的距离公式可求出 $AE=1$，$FG=3$，再根据三角形面积公式可求出 $\triangle AEF$ 的面积.

解：(1)∵正方形 $OABC$ 的边长为2，

∴点 D 的纵坐标为2，即 $y=2$，

将 $y=2$ 代入 $y=2x$，得 $x=1$，

∴点 D 的坐标为(1，2).

∵函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象经过点 D，

∴$2=\frac{k}{1}$，解得 $k=2$，

∴函数 $y=\frac{k}{x}$ 的解析式为 $y=\frac{2}{x}$.

$E(2,1)$，$F(-1,-2)$.

(2)如图7－1，过点 F 作 $FG\perp AB$，与 BA 的延长线交于点 G，

∵$E(2,1)$，$F(-1,-2)$，

∴$AE=1$，$FG=2-(-1)=3$，

∴$\triangle AEF$ 的面积 $=\frac{1}{2}AE\cdot FG=\frac{1}{2}\times1\times3=\frac{3}{2}$.

分类训练

☞(答案见43页)

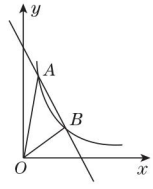
应用1　反比例函数与三角形的综合

1. 如图，一次函数 $y=kx+b$ 与反比例函数 $y=\frac{6}{x}$($x>0$)的图象交于 $A(m,6)$，$B(3,n)$ 两点.

(1)求一次函数的表达式；

(2)根据图象直接写出使 $kx+b<\frac{6}{x}$ 成立的 x 的取值范围；

(3)求 $\triangle AOB$ 的面积.



(第1题)

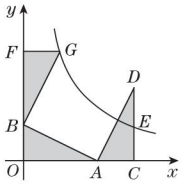
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. 如图，点 A，B 分别在 x 轴、y 轴上，点 D 在第一象限内，$DC \perp x$ 轴于点 C，$AO = CD = 2$，$AB = DA = \sqrt{5}$，反比例函数 $y = \frac{k}{x}(x > 0)$ 的图象过 CD 的中点 E.

(1) 求证：$\triangle AOB \cong \triangle DCA$；

(2) 求 k 的值；

(3) $\triangle BFG$ 和 $\triangle DCA$ 关于某点成中心对称，其中点 F 在 y 轴上，试判断点 G 是否在该反比例函数的图象上，并说明理由.

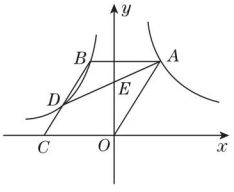


(第 2 题)

应用 2 反比例函数与四边形的综合

类型 1 反比例函数与平行四边形的综合

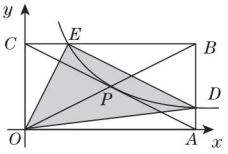
3. 如图，过反比例函数 $y = \frac{6}{x}(x > 0)$ 的图象上一点 A 作 x 轴的平行线，交双曲线 $y = -\frac{3}{x}(x < 0)$ 于点 B，过点 B 作 $BC // OA$ 交双曲线 $y = -\frac{3}{x}(x < 0)$ 于点 D，交 x 轴于点 C，连接 AD 交 y 轴于点 E. 若 $OC = 3$，求 OE 的长.



(第 3 题)

类型 2 反比例函数与矩形的综合

4. 如图，矩形 $OABC$ 的顶点 A，C 的坐标分别是 $(4,0)$ 和 $(0,2)$，反比例函数 $y = \frac{k}{x}(x > 0)$ 的图象过对角线 OB、AC 的交点 P 并且与 AB，BC 分别交于 D，E 两点，连接 OD，OE，DE，则 $\triangle ODE$ 的面积为_____.

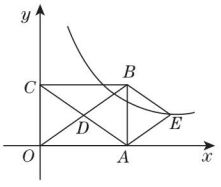


(第 4 题)

5. 如图，在平面直角坐标系中，矩形 $OABC$ 的对角线 OB，AC 相交于点 D，且 $BE // AC$，$AE // OB$.

(1) 求证：四边形 $AEBD$ 是菱形；

(2) 如果 $OA = 3$，$OC = 2$，求出经过点 E 的双曲线对应的函数表达式.



(第 5 题)

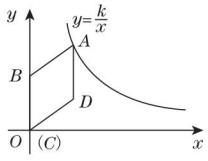
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型3 反比例函数与菱形的综合

6. 如图，在平面直角坐标系中，菱形 $ABCD$ 的顶点 C 与原点 O 重合，点 B 在 y 轴的正半轴上，点 A 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k>0,x>0)$ 的图象上，点 D 的坐标为 $(4,3)$.

(1)求 k 的值；

(2)若将菱形 $ABCD$ 沿 x 轴正方向平移，当菱形的顶点 D 落在反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k>0,x>0)$ 的图象上时，求菱形 $ABCD$ 沿 x 轴正方向平移的距离.



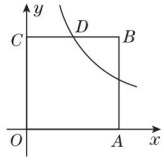
（第6题）

类型4 反比例函数与正方形的综合

7. 如图，在平面直角坐标系中，点 O 为坐标原点，正方形 $OABC$ 的边 OA，OC 分别在 x 轴、y 轴上，点 B 的坐标为 $(2,2)$，反比例函数 $y=\frac{k}{x}(x>0,k\neq0)$ 的图象经过线段 BC 的中点 D.

(1)求 k 的值；

(2)若点 $P(x,y)$ 在该反比例函数的图象上运动（不与点 D 重合），过点 P 作 $PR\perp y$ 轴于点 R，作 $PQ\perp BC$ 所在直线于点 Q，记四边形 $CQPR$ 的面积为 S，求 S 关于 x 的函数表达式，并写出 x 的取值范围.



（第7题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

应用 3 反比例函数与菱形、正方形的综合

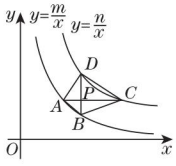
8. 【中考·金华】如图，四边形 $ABCD$ 的四个顶点分别在反比例函数 $y=\frac{m}{x}$ 与 $y=\frac{n}{x}$（$x>0$，$0<m<n$）的图象上，对角线 $BD\parallel y$ 轴，且 $BD\perp AC$ 于点 P，已知点 B 的横坐标为 4.

(1) 当 $m=4$，$n=20$ 时，

①若点 P 的纵坐标为 2，求直线 AB 的函数表达式；

②若点 P 是 BD 的中点，试判断四边形 $ABCD$ 的形状，并说明理由；

(2) 四边形 $ABCD$ 能否成为正方形？若能，求此时 m，n 之间的数量关系；若不能，试说明理由.



（第 8 题）

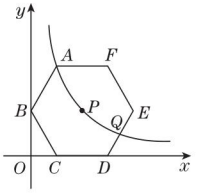
应用 4 反比例函数与正六边形的综合

9. 【2019·金华】如图，在平面直角坐标系中，正六边形 $ABCDEF$ 的对称中心 P 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（$k>0$，$x>0$）的图象上，边 CD 在 x 轴上，点 B 在 y 轴上，已知 $CD=2$.

(1) 点 A 是否在该反比例函数的图象上？请说明理由；

(2) 若该反比例函数的图象与 DE 交于点 Q，求点 Q 的横坐标；

(3) 平移正六边形 $ABCDEF$，使其一边的两个端点恰好都落在该反比例函数的图象上，试描述平移过程.



（第 9 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第8招　证明和计算成比例线段的五种常用作辅助线的方法

教你一招

在与比例有关的几何证明、计算的过程中，常常需要通过平行线分线段成比例、相似三角形对应边成比例得到比例关系. 而有些题中，这样的平行线、相似三角形并不是十分明显. 因此，我们需要通过添加辅助线，构造平行线或相似三角形来证明所需要的比例式.

典例剖析

例 如图 8－1，已知 AD 是 $\triangle ABC$ 的中线.

(1)若 E 为 AD 的中点，射线 CE 交 AB 于点 F，求 $\frac{AF}{BF}$；

(2)若 E 为 AD 上的一点(异于 A，D)，且 $\frac{AE}{ED}=\frac{1}{k}(k>0)$，射线 CE 交 AB 于点 F，求 $\frac{AF}{BF}$.

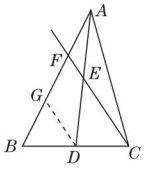


图 8－1

解题秘方：平行线分线段成比例的基本事实可将一条直线上的两条线段的比转换为另一条直线上两条线段的比，已知 BD 与 CD 的比，AE 与 DE 的比，过点 D 作 $DG\parallel CF$ 交 AB 于点 G，可实现比的转换.

解：如图 8－1，过点 D 作 $DG\parallel CF$ 交 AB 于点 G.

(1)$\because DG\parallel CF$，$\therefore \frac{BG}{GF}=\frac{BD}{DC}$.

$\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 的中线，

$\therefore BD=DC$. $\therefore BG=GF$.

$\because DG\parallel CF$，$\therefore \frac{AF}{FG}=\frac{AE}{ED}$.

$\because E$ 为 AD 的中点，

$\therefore AE=ED$. $\therefore AF=GF$.

$\therefore AF=FG=GB$. $\therefore \frac{AF}{BF}=\frac{1}{2}$.

(2)$\because DG\parallel CF$，$\therefore \frac{AF}{FG}=\frac{AE}{ED}$.

又$\because \frac{AE}{ED}=\frac{1}{k}$，$\therefore \frac{AF}{FG}=\frac{1}{k}$，即 $FG=kAF$.

由(1)知 $BG=GF$，$\therefore BG=FG=kAF$.

$\therefore BF=2kAF$. $\therefore \frac{AF}{BF}=\frac{1}{2k}$.

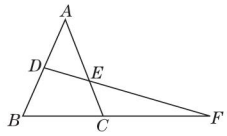
分类训练

☞(答案见 45 页)

方法1　作平行线

1. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，D 为 AB 的中点，DF 交 AC 于点 E，交 BC 的延长线于点 F.

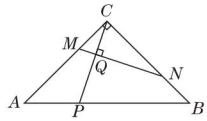
求证：$AE\cdot CF=BF\cdot EC$.



(第 1 题)

方法2　作垂线

2. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$AC=BC$，P 是 AB 上一点，Q 是 PC 上一点(不是中点)，MN 过点 Q 且 $MN\perp CP$，分别交 AC，BC 于点 M，N. 求证：$PA:PB=CM:CN$.



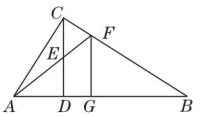
(第 2 题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

方法3 作延长线

3. 如图,在 Rt△ABC 中,∠ACB = 90°,CD 为斜边 AB 上的高,E 为 CD 的中点,AE 的延长线交 BC 于点 F,$FG \perp AB$ 于点 G.

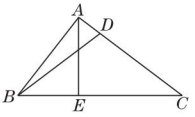
求证:$FG^2 = CF \cdot BF$.



(第 3 题)

方法4 作中线

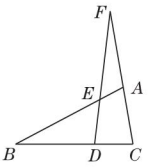
4. 如图,在△ABC 中,$AB \perp AC$,$AE \perp BC$ 于点 E,点 D 在 AC 边上,若 $BD = DC = EC = 1$,求 AC 的长.



(第 4 题)

方法5 作相似三角形

5. 如图,直线 DF 分别交△ABC 的 BC,AB 两边于 D,E,与 CA 的延长线交于点 F,若 $\frac{BD}{DC} = \frac{FE}{ED} = 2$,求 BE : EA 的值.



(第 5 题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第9招　巧作平行线构造相似三角形

教你一招

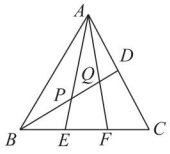
解题时，往往会遇到要证明的问题与相似三角形没有联系或者说图中根本不存在相似三角形的情况，此时，添加辅助线构造相似三角形便是解决这类几何证明题的一种重要方法.

常作的辅助线主要有：1. 有比例式，作平行线. 2. 有中点时，作中位线. 3. 根据比例式，构造相似三角形.

分类训练 ☞（答案见47页）

技巧1　巧连线段的中点构造相似三角形

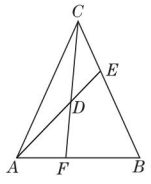
1. 如图，在$\triangle ABC$中，E，F是边BC上的两个三等分点，D是AC的中点，BD分别交AE，AF于点P，Q，求$BP:PQ:QD$.



（第1题）

技巧2　过顶点作平行线构造相似三角形

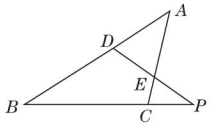
2. 如图，在$\triangle ABC$中，F为底边AB上一点，$BF:AF=3:2$，取CF的中点D，连接AD并延长交BC于点E，求$\dfrac{BE}{EC}$的值.



（第2题）

技巧3　过一边上的点作平行线构造相似三角形

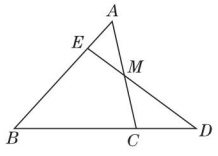
3. 如图，在$\triangle ABC$中，$AB>AC$，在边AB上取一点D，在边AC上取一点E，使$AD=AE$，直线DE和BC的延长线交于点P. 求证：$\dfrac{BP}{CP}=\dfrac{BD}{EC}$.



（第3题）

技巧4　过一点作平行线构造相似三角形

4. 如图，在$\triangle ABC$中，点M为AC边的中点，点E为AB上一点，且$AE=\dfrac{1}{4}AB$，连接EM并延长交BC的延长线于点D. 求证：$BC=2CD$.



（第4题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

参考答案及点拨

第1招 二次函数图象与系数的七种关系

1. A

2. C **点拨：** ∵ 二次函数 $y=3x^2+(b-3)x-4$ 的图象关于 y 轴对称，∴ $b-3=0$，即 $b=3$.

3. $=$；$<$；$>$

4. A

5. 1

6. D

7. **解：** 由图象知 $\begin{cases}3-m>0,\\ n+5<0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}m<3,\\ n<-5.\end{cases}$

∴ $m-3<0$，$m+n<-2$.

∴ $\sqrt{(m-3)^2}+\sqrt{n^2}-|m+n|=3-m-n+m+n=3$.

8. B

9. D **点拨：** ①由抛物线的开口方向可知 $a<0$，

又∵ 对称轴为直线 $x=-\dfrac{b}{2a}>0$，

∴ $b>0$，

由抛物线与 y 轴的交点可知 $c>0$，

∴ $abc<0$，故①正确；

②∵ 抛物线与 x 轴交于点 $A(-1,0)$，

对称轴为直线 $x=2$，

∴ 抛物线与 x 轴的另外一个交点为 $(5,0)$，

∴ 当 $x=3$ 时，$y>0$，

∴ $9a+3b+c>0$，故②正确；

③$\dfrac{1}{2}<2<\dfrac{5}{2}$，

且点 $\left(\dfrac{5}{2},y_2\right)$ 关于直线 $x=2$ 的对称点的坐标为 $\left(\dfrac{3}{2},y_2\right)$，

$\dfrac{1}{2}<\dfrac{3}{2}$，

∴ $y_1<y_2$，故③正确.

④∵ $-\dfrac{b}{2a}=2$，∴ $b=-4a$，

∵ 当 $x=-1$ 时，$y=0$，∴ $a-b+c=0$，

∴ $c=-5a$，

∵ $2<c<3$，

∴ $2<-5a<3$，

∴ $-\dfrac{3}{5}<a<-\dfrac{2}{5}$，故④正确.

故选 D.

第2招 一元二次方程根与系数关系的十一种应用

1. **解：** 设方程的另一个根为 x_1.

由题意得 $\begin{cases}x_1+2=-k,\\ 2x_1=-6,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_1=-3,\\ k=1.\end{cases}$

∴ 它的另一个根为 -3，k 的值是 1.

点拨： 利用一元二次方程根与系数的关系联立方程组求解即可.

2. **解：** 由已知得 $x_1+x_2=4$，$x_1x_2=2$.

(1)$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\dfrac{4}{2}=2$.

(2)$(x_1-x_2)^2=x_1^2+x_2^2-2x_1x_2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=4^2-4\times2=16-8=8$.

点拨： 将代数式变形成关于 x_1+x_2 和 x_1x_2 的组合形式，然后利用一元二次方程根与系数的关系求解.

3. **解：** 由题意得 m，n 是方程 $2x^2-5x-1=0$ 的两个根，

则 $m+n=\dfrac{5}{2}$，$mn=-\dfrac{1}{2}$.

∴ $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{m+n}{mn}=\dfrac{\frac{5}{2}}{-\frac{1}{2}}=-5$.

4. **解：** 设方程的两个根分别为 x_1，x_2，则 $x_1+x_2=3$，$x_1x_2=k+1$.

∵ $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=3^2-2(k+1)<5$，

∴ $k>1$. ①

又∵ $\Delta=(-3)^2-4(k+1)\geqslant0$，

∴ $k\leqslant\dfrac{5}{4}$. ②

由①②得 $1<k\leqslant\dfrac{5}{4}$.

点拨： 本题容易忽略 $\Delta\geqslant0$ 这个条件，做题时要注意方程有根的条件.

5. **解：** ∵ 方程有两个实数根，

∴ $\Delta=[2(m-2)]^2-4\times1\times(m^2+4)\geqslant0$.

解这个不等式，得 $m\leqslant0$.

设方程的两个根为 x_1，x_2，

则 $x_1+x_2=-2(m-2)$，$x_1x_2=m^2+4$.

∵ $x_1^2+x_2^2-x_1x_2=21$，

∴ $(x_1+x_2)^2-3x_1x_2=21$.

∴ $[-2(m-2)]^2-3(m^2+4)=21$.

整理得 $m^2-16m-17=0$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解得 $m_1=-1, m_2=17$.

又∵ $m\leqslant 0$, ∴ $m=-1$.

点拨: 利用根与系数的关系求出两个根的和与两个根的积,代入$(x_1+x_2)^2-3x_1x_2=21$得到关于 m 的一元二次方程,再解方程即可. 本题易忽略 $\Delta\geqslant 0$ 这一条件.

6. 解: 对于$2x^2+3x-7=0$,

∵ $\Delta=3^2-4\times 2\times(-7)=65>0$.

∴ 方程有两个不相等的实数根.

设方程的两个根为 x_1, x_2,

则 $x_1x_2=-\frac{7}{2}<0$,

∴ 原方程的两个实数根异号.

点拨: 先根据 $\Delta>0$ 判断方程有两个不相等的实数根,再根据 $x_1x_2=\frac{c}{a}$判断两实数根是同号还是异号.

7. 解: 设这个方程为 $x^2+ax+b=0$.

由已知得 $-1+3=-a$, $-1\times 3=b$,

∴ $a=-2, b=-3$.

∴ 这个方程为 $x^2-2x-3=0$.

点拨: 已知方程的两个实数根,可设方程为 $x^2+ax+b=0$,根据根与系数的关系即可求出此方程.

8. 证明: 由题设知 $x+y=6, xy=z^2+9$,

∴ x, y 是关于 t 的一元二次方程 $t^2-6t+z^2+9=0$① 的两个实数根,

∴ $\Delta=36-4(z^2+9)=-4z^2\geqslant 0$,

可知 $z=0$,故 $\Delta=0$.

故方程①有两个相等的实数根, ∴ $x=y$.

9. 证明: 由题设条件知 $bc=a^2-a+1$,

$b+c=2a^2-2bc+2=2a$.

∵ b, c 是关于 t 的一元二次方程 $t^2-2at+a^2-a+1=0$ 的两个实数根.

∴ $\Delta=4a^2-4(a^2-a+1)\geqslant 0$,

解得 $a\geqslant 1$.

点拨: 本题关键是构造以 b, c 为两个实数根的一元二次方程,利用判别式 $\Delta\geqslant 0$ 即可证得 $a\geqslant 1$.

10. 解: (1)∵ 二次函数 $y=x^2-(2k-1)x+k^2+1$ 的图象与 x 轴有两个交点,

∴ 关于 x 的方程 $x^2-(2k-1)x+k^2+1=0$ 有两个不相等的实数根.

∴ $\Delta=b^2-4ac=[-(2k-1)]^2-4\times 1\times(k^2+1)>0$,

解得 $k<-\frac{3}{4}$.

(2)由题知 $x_1+x_2=2k-1, x_1x_2=k^2+1$.

∵ $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=-\frac{3}{2}$,

∴ $\frac{2k-1}{k^2+1}=-\frac{3}{2}$,

解得 $k=-1$ 或 $k=-\frac{1}{3}$(舍去),

∴ $k=-1$.

点拨: 本题利用数形结合思想将抛物线与一元二次方程结合,再利用根的判别式和根与系数的关系求解.

11. 解: (1)∵ 关于 x 的一元二次方程 $x^2-4x+m=0$ 有实数根,

∴ $\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4m\geqslant 0$,

解得 $m\leqslant 4$.

(2)∵ 方程的两个实数根分别为 x_1, x_2,

∴ $x_1+x_2=4$.

又∵ $5x_1+2x_2=2$,

∴ $x_1=-2, x_2=6$.

∴ 二次函数 $y=x^2-4x+m$ 的图象与 x 轴的两个交点间的距离为$|x_1-x_2|=|-2-6|=8$.

第 3 招 求二次函数表达式的九种方法

1. 解: (1)∵ 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象过 $A(2,0)$, $B(0,-1)$ 和 $C(4,5)$ 三点,

∴ $\begin{cases}4a+2b+c=0,\\ c=-1,\\ 16a+4b+c=5.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\frac{1}{2},\\ b=-\frac{1}{2},\\ c=-1.\end{cases}$

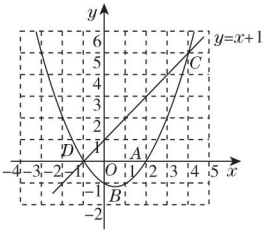
∴ 二次函数的表达式为 $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-1$.

(2)当 $y=0$ 时, $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-1=0$,

解得 $x_1=2, x_2=-1$,

∴ 点 D 的坐标为$(-1,0)$.

(3)如图.



(第 1 题)

当 $-1<x<4$ 时,一次函数的值大于二次函数的值.

点拨: 本题用待定系数法将 A, B, C 三点的坐标代入 $y=ax^2+bx+c$,求出二次函数的表达式. 根据图象利用数形结合思想可求出 x 的取值范围.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. **解**:(1)∵ 抛物线 $C:y_1=-x^2+mx+n$ 的对称轴与直线 $l:y_2=kx+b$ 交于点 $A(-1,5)$,点 A 与抛物线 C 的顶点 B 的距离是 4,

∴ $B(-1,1)$或$(-1,9)$,

∴ $y_1=-(x+1)^2+1$ 或 $y_1=-(x+1)^2+9$,

即抛物线 C 的表达式为 $y_1=-x^2-2x$ 或 $y_1=-x^2-2x+8$.

(2)①当 $y_1=-x^2-2x$ 时,抛物线 C 与 x 轴的交点坐标是$(0,0)$和$(-2,0)$.

∵ y_2 随着 x 的增大而增大,

∴ 直线 l 过点$(-1,5)$,$(-2,0)$,将这两个点的坐标分别代入 $y_2=kx+b$,得 $\begin{cases}-k+b=5,\\-2k+b=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=5,\\b=10,\end{cases}$

∴ $y_2=5x+10$.

②当 $y_1=-x^2-2x+8$ 时,抛物线 C 与 x 轴的交点坐标是$(-4,0)$和$(2,0)$.

同理可得直线 l 过点$(-1,5)$,$(-4,0)$,

将这两个点的坐标分别代入 $y_2=kx+b$,得 $\begin{cases}-k+b=5,\\-4k+b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=\dfrac{5}{3},\\b=\dfrac{20}{3}.\end{cases}$

∴ $y_2=\dfrac{5}{3}x+\dfrac{20}{3}$.

综上所述,直线 l 的表达式为 $y_2=5x+10$ 或 $y_2=\dfrac{5}{3}x+\dfrac{20}{3}$.

点拨: 根据题目条件,利用两点之间的距离公式求出抛物线 C 的顶点 B 的坐标,然后利用顶点式求其表达式.

3. **解**:(1)由抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 过点 $A(-1,0)$ 和点 $B(3,0)$,可知抛物线的表达式为 $y=-(x+1)(x-3)$,

即 $y=-x^2+2x+3$.

(2)$C(0,3)$,$D(1,4)$.

(3)设 $P(x,y)(x>0,y>0)$,

$S_{\triangle COE}=\dfrac{1}{2}\times1\times3=\dfrac{3}{2}$,$S_{\triangle ABP}=\dfrac{1}{2}\times4y=2y$.

∵ $S_{\triangle ABP}=4S_{\triangle COE}$,

∴ $2y=4\times\dfrac{3}{2}$,

∴ $y=3$,令 $-x^2+2x+3=3$,

解得 $x_1=0$(不合题意,舍去),$x_2=2$.

∴ 点 P 的坐标为$(2,3)$.

点拨: 当遇到抛物线与 x 轴交于某两个点求抛物线表达式的问题时,设交点式可使运算简便.

4. **解**:(1)∵ 当 $x=0$ 时,$y=0$,

∴ 可设二次函数的表达式为 $y=ax^2+bx$.

将 $x=1$,$y=4$;$x=2$,$y=12$ 分别代入 $y=ax^2+bx$,得 $\begin{cases}a+b=4,\\4a+2b=12,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\b=2.\end{cases}$

∴ 二次函数的表达式为 $y=2x^2+2x$.

当 $y=80\ 000$ 时,$2x^2+2x=80\ 000$,

解得 $x\approx199.5$(负值舍去).

即他大约需要 199.5 s 才能到达终点.

(2)∵ $y=2x^2+2x=2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}$,

∴ 将二次函数的图象向左平移 2 个单位长度,再向上平移 5 个单位长度后得到的图象所对应的函数表达式为 $y=2\left(x+2+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}+5=2\left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{9}{2}$.

点拨: (1)利用待定系数法求出函数表达式,再求出当 $y=80\ 000$ 时 x 的值即可.(2)根据函数图象平移规则"上加下减,左加右减"进行解答即可.

5. **解**:(1)由题意得 $\begin{cases}a+b=-3,\\-\dfrac{b}{2a}=2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\b=-4.\end{cases}$

∴ 抛物线的表达式为 $y=x^2-4x$.

当 $y\leqslant0$ 时,自变量 x 的取值范围是 $0\leqslant x\leqslant4$.

(2)如图,过点 P 作 $PF\perp x$ 轴于点 F,过点 B 作 $BE\perp x$ 轴于点 E.

由点 P 在抛物线上,可设点 P 的坐标为(t,t^2-4t),

易知 $F(t,0)$,$E(1,0)$,$AE=3$,$BE=3$,$AF=4-t$,$PF=t^2-4t$,

∴ $\triangle ABE$ 为等腰直角三角形,∴ $\angle BAE=45°$,

∵ $PA\perp BA$,∴ $\angle PAB=90°$,∴ $\angle PAO=45°$,

∴ $\triangle PAF$ 为等腰直角三角形,即 $AF=PF$,

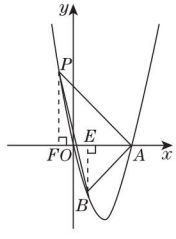
∴ $4-t=t^2-4t$,解得 $t_1=4$(不合题意,舍去),$t_2=-1$,

∴ $P(-1,5)$.

∵ $PA=\sqrt{PF^2+AF^2}=\sqrt{5^2+5^2}=5\sqrt{2}$,

$AB=\sqrt{BE^2+AE^2}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$.

∴ $\triangle PAB$ 的面积 $=\dfrac{1}{2}\times PA\times AB=\dfrac{1}{2}\times5\sqrt{2}\times3\sqrt{2}=15$.



(第 5 题)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

6. D

7. 解:(1)根据表格中的数据可得$\begin{cases}-4-2b+c=5,\\-1+b+c=2,\end{cases}$

解得$\begin{cases}b=-2,\\c=5.\end{cases}$

$\therefore -x^2+bx+c=-x^2-2x+5.$

当$x=-1$时,$-x^2-2x+5=6$,即$n=6$.

(2)当$0\leqslant x\leqslant 2$时,y的最大值是5.

8. 解:(1)$y=x(36-2x)=-2x^2+36x(9\leqslant x<18)$.

(2)由题意得$-2x^2+36x=160$,

解得$x=10$或$x=8$.

$\because x$的取值范围为$9\leqslant x<18$,$\therefore x$的值为10.

(3)$\because y=-2x^2+36x=-2(x-9)^2+162$,

$\therefore$当$x=9$时,y取得最大值162.

设购买了乙种绿色植物a棵,购买了丙种绿色植物b棵,

由题意得$14(400-a-b)+16a+28b=8\ 600$,

$\therefore a+7b=1\ 500$.

$\therefore b$的最大值为214,

此时$a=2$.

需要种植的面积$=0.4\times(400-214-2)+1\times 2+0.4\times 214=161.2$(平方米)$<162$平方米,

$\therefore$丙种植物最多可以购买214棵,此时,这批植物可以全部栽种到这块空地上.

点拨: (1)先用含x的式子表示BC的长,再根据矩形的面积公式求出函数表达式,最后由BC的长大于0米且不大于18米列不等式组并求解,即可得到x的取值范围.(2)令$y=160$,列出关于x的一元二次方程求解即可.(3)根据题意求出丙种植物的最大棵数,并计算出它们所需的种植面积,然后与这块空地的最大面积比较即可.

9. 解:(1)根据题意,得$w=(-4x+220)x-1\ 000=-4x^2+220x-1\ 000$.

(2)$\because w=-4x^2+220x-1\ 000=-4(x-27.5)^2+2\ 025$,且$10\leqslant x\leqslant 50$,$x$是整数,

$\therefore$当$x=27$或28时,w取得最大值,最大值为2 024.

故影城将电影票售价定为每张27元或每张28元时,每天获利最大,最大利润是2 024元.

点拨: (1)根据"利润=票房收入-运营成本"可得函数表达式.(2)将函数表达式写成顶点式,由$10\leqslant x\leqslant 50$,且$x$为整数,可求最大利润.

第4招 二次函数的五种解题技巧

1. 解:(1)由题意,得$\begin{cases}n^2-1=0,\\n^2-2n-3\neq 0,\end{cases}$解得$n=1$,

$\therefore$当$n=1$时,y是x的一次函数.

(2)由题意,得$n^2-1\neq 0$,即$n\neq\pm 1$,

$\therefore$当$n\neq\pm 1$时,y是x的二次函数.

点拨: 根据二次函数和一次函数的定义,即可求出相关字母的值.

2. 解:(1)$y=\frac{1}{3}x^2-2x-1$

$=\frac{1}{3}(x^2-6x)-1$

$=\frac{1}{3}(x^2-6x+9-9)-1$

$=\frac{1}{3}(x-3)^2-4$,

所以抛物线的开口向上,对称轴为直线$x=3$,

顶点坐标为$(3,-4)$.

(2)$y=-4(x+1)(x+3)$

$=-4(x^2+4x+3)$

$=-4(x^2+4x+4-1)$

$=-4(x+2)^2+4$,

所以抛物线的开口向下,对称轴为直线$x=-2$,

顶点坐标为$(-2,4)$.

点拨: 本题用配方法可直接得到抛物线的对称轴和顶点坐标.

3. 解:(1)$\because$抛物线$y=a(x-3)^2+2$经过点$(1,-2)$.

$\therefore a(1-3)^2+2=-2$,$\therefore a=-1$.

(2)由(1)得$y=-(x-3)^2+2$,

$\therefore$抛物线的开口向下,函数y有最大值,最大值为2.

(3)方法一 由(2)知抛物线的开口向下,在对称轴为直线$x=3$的左侧,y随x的增大而增大.

$\because m<n<3$,$\therefore y_1<y_2$.

方法二 由(1)得$y=-(x-3)^2+2$,

$\therefore$当$x=m$时,$y_1=-(m-3)^2+2$,

当$x=n$时,$y_2=-(n-3)^2+2$,

$\therefore y_1-y_2=(n-3)^2-(m-3)^2=(n-m)(m+n-6)$.

$\because m<n<3$,

$\therefore n-m>0$,$m+n<6$,即$m+n-6<0$,

$\therefore (n-m)(m+n-6)<0$.

$\therefore y_1<y_2$.

4. 解:(1)$\because$抛物线的顶点坐标是$(1,2)$,$\therefore$设其对应的表达式为$y=a(x-1)^2+2(a\neq 0)$.

又$\because$此抛物线过点$(2,3)$,

$\therefore a(2-1)^2+2=3$,解得$a=1$,

$\therefore$所求二次函数的表达式为$y=(x-1)^2+2$,即$y=x^2-2x+3$.

(2)由已知可设该抛物线所对应的表达式为$y=a(x+1)(x-3)(a\neq 0)$,

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

又∵该抛物线经过点(2,-6),

∴把点(2,-6)的坐标代入上式中,得$-6=a(2+1)\times(2-3)$,

解得$a=2$,即$y=2(x+1)(x-3)$,

∴所求二次函数的表达式为$y=2x^2-4x-6$.

(3)设此抛物线的表达式为$y=ax^2+bx+c(a\neq0)$,

由抛物线过$(-1,2),(0,1),(2,-7)$三点,

得$\begin{cases}a-b+c=2,\\c=1,\\4a+2b+c=-7.\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-1,\\b=-2,\\c=1.\end{cases}$

∴所求二次函数的表达式为$y=-x^2-2x+1$.

5. **解:**设二次函数的表达式为$y=a(x-h)^2+k$.

由题意知二次函数的图象的顶点坐标为(1,6)或(1,-6).

当顶点坐标为(1,6),即$h=1,k=6$时,代入点(2,-8)的坐标,得$-8=a(2-1)^2+6$,

解得$a=-14$,

∴$y=-14(x-1)^2+6$.

当顶点坐标为(1,-6),即$h=1,k=-6$时,代入点(2,-8)的坐标,得$-8=a(2-1)^2-6$,

解得$a=-2$,

∴$y=-2(x-1)^2-6$.

∴此二次函数的表达式为$y=-14(x-1)^2+6$或$y=-2(x-1)^2-6$.

点拨: 本题考查的是用待定系数法求二次函数的表达式,根据题意得出抛物线的顶点坐标,设出其顶点式是解答此题的关键,解答时要注意分类讨论思想的运用.

6. **解:**$\begin{aligned}y&=2x^2-4x+5\\&=2(x^2-2x)+5\\&=2(x^2-2x+1-1)+5\\&=2(x-1)^2+3.\end{aligned}$

(1)$y=2(x+1)^2$.

(2)$y=-2(x-1)^2-3$.

点拨: 本题先将二次函数的表达式化为顶点式,然后再求解比较简便.

7. **解:**(1)把点$A(0,3),B(3,0),C(4,3)$的坐标代入$y=ax^2+bx+c$,得$\begin{cases}c=3,\\9a+3b+c=0,\\16a+4b+c=3,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=1,\\b=-4,\\c=3.\end{cases}$

所以抛物线的表达式为$y=x^2-4x+3$.

(2)因为$y=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$,所以抛物线的顶点坐标为(2,-1),对称轴是直线$x=2$.

(3)通过割补得阴影部分的面积等于一个底边长为1,且该底边上的高为2的平行四边形的面积,所以阴影部分的面积为$1\times2=2$.

点拨: 若抛物线的顶点要平移至x轴上,则抛物线需向上平移1个单位长度,且平移不改变图形的形状.

第5招 降次思想在求代数式的值及方程、函数中的应用

1. **解:**(1)原方程可化为$(x+1)^2=\frac{1}{9}$,

两边直接开平方,得$x+1=\pm\frac{1}{3}$,

∴$x+1=\frac{1}{3}$或$x+1=-\frac{1}{3}$,

∴$x_1=-\frac{2}{3},x_2=-\frac{4}{3}$.

(2)移项,得$(2x+3)^2=12$,

两边直接开平方,得$2x+3=\pm2\sqrt{3}$,

∴$2x+3=2\sqrt{3}$或$2x+3=-2\sqrt{3}$,

∴$x_1=\frac{2\sqrt{3}-3}{2},x_2=\frac{-2\sqrt{3}-3}{2}$.

点拨: 本题用直接开平方法解方程,如(1)将$x+1$看成一个整体,得到关于$x+1$的一次方程再求解即可.

2. **解:**(1)二次项系数化为1,得$x^2-4x+3=0$,

移项,得$x^2-4x=-3$,

配方,得$x^2-4x+4=-3+4$,

∴$(x-2)^2=1$,

∴$x-2=1$或$x-2=-1$,

∴$x_1=3,x_2=1$.

(2)原方程可化为$2x^2-4x=3$,

二次项系数化为1,得$x^2-2x=\frac{3}{2}$,

配方,得$x^2-2x+1=\frac{3}{2}+1$,

∴$(x-1)^2=\frac{5}{2}$,

∴$x-1=\frac{\sqrt{10}}{2}$或$x-1=-\frac{\sqrt{10}}{2}$,

∴$x_1=1+\frac{\sqrt{10}}{2},x_2=1-\frac{\sqrt{10}}{2}$.

点拨: 利用配方法进行配方求解即可.

3. **解:**(1)移项、合并同类项,得$x^2+2x-8=0$,

因式分解,得$(x-2)(x+4)=0$,

于是得$x-2=0$或$x+4=0$,

∴$x_1=2,x_2=-4$.

(2)因式分解,得$(3x+1+2)^2=0$,

即$(3x+3)^2=0$,

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$\therefore x_1 = x_2 = -1.$

4. 解:原方程可变形为 $x^2(x-2)-4(x-2)=0$,

$\therefore (x-2)(x^2-4)=0$,

$\therefore (x-2)^2(x+2)=0.$

$\therefore x_1 = x_2 = 2, x_3 = -2.$

点拨: 直接利用因式分解法进行降次.

5. 解:由 $x = 2-\sqrt{5}$,得 $x-2 = -\sqrt{5}$,

两边平方,得 $x^2-4x+4=5$,

$\therefore x^2-4x-1=0$,

$\therefore \quad x^4-8x^3+16x^2-x+1$

$=(x^2-4x-1)(x^2-4x+1)+(-x+2)$

$=2-x$

$=\sqrt{5}.$

6. 解:$\because x^2+x-1=0$,

$\therefore x^2+x=1$,

$\therefore \quad x^3+2x^2+3$

$=x(x^2+x)+x^2+3$

$=x+x^2+3$

$=4.$

点拨: 先将代数式转化成与 $x^2+x=1$ 有关的式子,再整体代入求值.

7. 解:由题意得 $x_1^2+x_1-3=0$,

$x_2^2+x_2-3=0$,

即 $x_1^2=3-x_1, x_2^2=3-x_2$,

$\therefore \quad x_1^3-4x_2^2+19$

$=x_1(3-x_1)-4(3-x_2)+19$

$=3x_1-x_1^2+4x_2+7$

$=3x_1-(3-x_1)+4x_2+7$

$=4(x_1+x_2)+4.$

根据根与系数的关系知 $x_1+x_2=-1$,

$\therefore$ 原式 $=4\times(-1)+4=0.$

8. 解:(1)$\because$ 抛物线 $y=x^2+(2a+1)x+2a+\frac{5}{4}$ 与 x 轴只有一个公共点,

$\therefore (2a+1)^2-4\times1\times\left(2a+\frac{5}{4}\right)=0$,

化简得 $a^2-a-1=0.$

解得 $a=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$

(2)由(1)知 a 满足 $a^2-a-1=0.$

$\therefore a^2=a+1.$

$\therefore a^4=(a^2)^2=(a+1)^2=a^2+2a+1=3a+2$,

$a^6=a^4\cdot a^2=(3a+2)(a+1)=3a^2+5a+2=8a+5$,

$a^8=(a^4)^2=(3a+2)^2=9a^2+12a+4=21a+13$,

$a^{16}=(a^8)^2=(21a+13)^2=441a^2+546a+169=987a+610$,

$a^{18}=a^{16}\cdot a^2=(987a+610)(a+1)$

$=987a^2+1\,597a+610$

$=2\,584a+1\,597.$

$\because a^2-a-1=0$,

$\therefore 64a^2-64a-65=-1$,

即 $(8a+5)(8a-13)=-1$,

$\therefore a^{-6}=\frac{1}{a^6}=\frac{1}{8a+5}=-8a+13.$

故 $a^{18}+323a^{-6}=2\,584a+1\,597+323(-8a+13)=5\,796.$

点拨: 本题是将数形与降次两种思想完美地结合在一起进行求值的典范.(2)中多次利用(1)中 $a^2-a-1=0$ 进行降次,以简化运算.

第6招 反比例函数与一次函数、二次函数的综合应用

1. A

2. ①②④⑤

3. 解:(1)$\because$ 点 $B(-2,n), D(3-3n,1)$ 在反比例函数 $y=\frac{m}{x}(x<0)$ 的图象上,

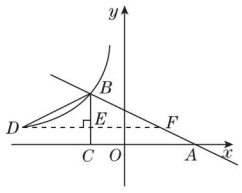
$\therefore -2n=3-3n$,解得 $n=3.$

$\therefore m=-2n=-6.$

(2)由(1)知反比例函数的表达式为 $y=-\frac{6}{x}.$

$\because n=3, \therefore$ 点 $B(-2,3), D(-6,1).$

如图,过点 D 作 $DE\perp BC$ 于点 E,延长 DE 交 AB 于点 F.



(第3题)

在△DBE 和△FBE 中,

$\begin{cases}\angle DBE=\angle FBE,\\ BE=BE,\\ \angle BED=\angle BEF=90^\circ,\end{cases}$

$\therefore \triangle DBE\cong\triangle FBE(ASA).$

$\therefore DE=FE=4.$

$\therefore$ 点 $F(2,1).$

将点 $B(-2,3), F(2,1)$ 的坐标分别代入 $y=kx+b$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

得$\begin{cases}-2k+b=3,\\2k+b=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=-\frac{1}{2},\\b=2.\end{cases}$

∴ 一次函数的表达式为$y=-\frac{1}{2}x+2$.

点拨:(1)将点B,D的坐标代入反比例函数的表达式求m的值.(2)通过作辅助线求点F的坐标.再由点B,F的坐标求一次函数的表达式.

4. 解:(1)根据平移的性质,将直线$y=x$向左平移1个单位长度后得到直线$y=x+1$,

∴ 直线BC的表达式为$y=x+1$.

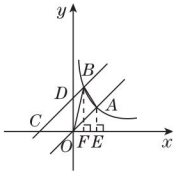
∵ 直线$y=x$与双曲线$y=\frac{k}{x}(x>0)$相交于点A,

∴ 点A的横坐标和纵坐标相等.

∵ $OA=\sqrt{2}$,∴ $A(1,1)$.

∴ $k=1\times1=1$.

(2)如图,作$AE\perp x$轴于点E,$BF\perp x$轴于点F.



(第4题)

由$\begin{cases}y=\frac{1}{x},\\y=x+1,\end{cases}$得$\begin{cases}x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\\y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\end{cases}$或$\begin{cases}x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2},\\y=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.\end{cases}$

∴ $B\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

∵ $S_{\triangle OAB}=S_{梯形AEFB}+S_{\triangle BOF}-S_{\triangle AOE}=S_{梯形AEFB}$,

∴ $S_{\triangle OAB}=S_{梯形AEFB}=\frac{1}{2}\times\left(1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\times\left(1-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{1}{2}$.

5. 解:(1)将点$A(1,0)$的坐标代入$y=ax+2$,

得$0=a+2$,

∴ $a=-2$,

∴ 直线的表达式为$y=-2x+2$.

将$x=0$代入上式,得$y=2$,

∴ $b=2$.

(2)由(1)知,$b=2$,∴ 点$B(0,2)$,

由平移可得点$C(2,t)$,点$D(1,2+t)$.

将点$C(2,t)$,点$D(1,2+t)$的坐标分别代入$y=\frac{k}{x}$,

得$\begin{cases}t=\frac{k}{2},\\2+t=\frac{k}{1},\end{cases}$解得$\begin{cases}k=4,\\t=2.\end{cases}$

∴ 反比例函数的表达式为$y=\frac{4}{x}$,点$C(2,2)$,点$D(1,4)$.

如图①,连接BC,AD.

∵ $B(0,2),C(2,2)$.

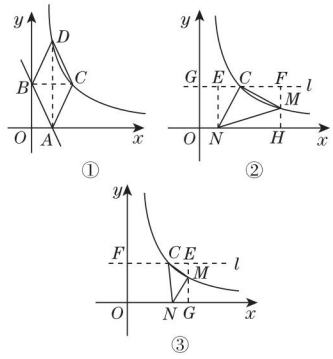
∴ $BC\parallel x$轴,$BC=2$.

∵ $A(1,0),D(1,4)$,

∴ $AD\perp x$轴,$AD=4$.

∴ $BC\perp AD$.

∴ $S_{四边形ABDC}=\frac{1}{2}\times BC\times AD=\frac{1}{2}\times2\times4=4$.



(第5题)

(3)①当$\angle NCM=90°$,$CM=CN$时,

如图②,过点C作直线$l\parallel x$轴,交y轴于点G,过点M作$HF\perp$直线l于点F,交x轴于点H,过点N作$NE\perp$直线l于点E.

设点$N(m,0)$(其中$m>0$),则$ON=m$,$CE=2-m$,

∵ $\angle MCN=90°$,

∴ $\angle MCF+\angle NCE=90°$.

∵ $NE\perp$直线l于点E,

∴ $\angle ENC+\angle NCE=90°$,

∴ $\angle MCF=\angle ENC$.

又∵ $\angle MFC=\angle NEC=90°$,$CN=CM$,

∴ $\triangle NEC\cong\triangle CFM$.

∴ $CF=EN=2$,$FM=CE=2-m$,

∴ $FG=CG+CF=2+2=4$.

将$x=4$代入$y=\frac{4}{x}$,得$y=1$,

∴ 点$M(4,1)$.

②当$\angle NMC=90°$,$MC=MN$时,

如图③,过点C作直线$l\perp y$轴于点F,则$CF=2$.

过点M作$EG\perp x$轴于点G,交直线l于点E,则$MG\perp$直线l于点E,$EG=2$.

∵ $\angle CMN=90°$,

∴ $\angle CME+\angle NMG=90°$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∵ $ME \perp$ 直线 l 于点 E,

∴ $\angle ECM + \angle CME = 90°$.

∴ $\angle NMG = \angle ECM$.

又∵ $\angle CEM = \angle NGM = 90°$, $CM = NM$,

∴ $\triangle CEM \cong \triangle MGN$.

∴ $CE = MG$, $EM = NG$.

设 $CE = MG = n$, 则 $y_M = n$, $x_M = CF + CE = 2 + n$,

∴ 点 $M(2+n, n)$,

将点 $M(2+n, n)$ 的坐标代入 $y = \frac{4}{x}$, 得 $n = \frac{4}{2+n}$,

解得 $n_1 = \sqrt{5} - 1$, $n_2 = -\sqrt{5} - 1$ (不合题意, 舍去),

∴ $x_M = 2 + n = \sqrt{5} + 1$,

∴ 点 $M(\sqrt{5}+1, \sqrt{5}-1)$.

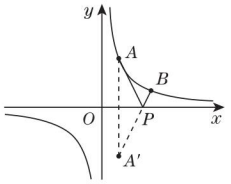
综合①②可知: 点 M 的坐标为 $(4,1)$ 或 $(\sqrt{5}+1, \sqrt{5}-1)$.

6. **解**: (1) 把点 $A(1,3)$ 的坐标代入 $y = \frac{k}{x}$ 得 $k = 1 \times 3 = 3$,

∴ 反比例函数的表达式为 $y = \frac{3}{x}$.

把点 $B(3,m)$ 的坐标代入 $y = \frac{3}{x}$ 得 $3m = 3$, 解得 $m = 1$,

∴ 点 B 的坐标为 $(3,1)$.



(第 6 题)

(2) 如图, 作点 A 关于 x 轴的对称点 A', 连接 BA' 交 x 轴于点 P, 连接 AP, 则 $A'(1, -3)$,

∵ $PA + PB = PA' + PB = BA'$,

∴ 此时 $PA + PB$ 的值最小.

设直线 BA' 的表达式为 $y = ax + b$,

把 $A'(1, -3)$, $B(3,1)$ 的坐标分别代入, 得 $\begin{cases} a + b = -3, \\ 3a + b = 1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a = 2, \\ b = -5, \end{cases}$

∴ 直线 BA' 的表达式为 $y = 2x - 5$.

当 $y = 0$ 时, $2x - 5 = 0$, 解得 $x = \frac{5}{2}$,

∴ 点 P 的坐标为 $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$.

点拨: 本题考查了用待定系数法求反比例函数的表达式, 同时考查了最短路径问题.

7. B

8. **解**: (1) ∵ 在矩形 $OABC$ 中, $OA = 3$, $OC = 2$, ∴ $A(3,0)$, $B(3,2)$. ∵ F 为 AB 的中点, ∴ $F(3,1)$. ∵ 点 F 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}(k > 0)$ 的图象上, ∴ $k = 3$. ∴ 该函数的表达式为 $y = \frac{3}{x}$.

(2) 由题意知 E, F 两点的坐标分别为 $\left(\frac{k}{2}, 2\right)$, $\left(3, \frac{k}{3}\right)$, ∴ $S_{\triangle EFA} = \frac{1}{2} AF \cdot BE = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} k \times \left(3 - \frac{1}{2}k\right) = \frac{1}{2}k - \frac{1}{12}k^2 = -\frac{1}{12}(k^2 - 6k + 9 - 9) = -\frac{1}{12}(k-3)^2 + \frac{3}{4}$. ∴ 当 $k = 3$ 时, $\triangle EFA$ 的面积最大, 最大面积是 $\frac{3}{4}$.

点拨: (1) 用待定系数法求反比例函数的表达式. (2) 利用三角形的面积公式求 $\triangle EFA$ 的面积与关于 k 的函数表达式, 再求二次函数的最大值以及此时 k 的值.

9. **解**: (1) ∵ 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象经过点 $A(1,4)$,

∴ $k = 4$.

∴ 反比例函数的表达式为 $y = \frac{4}{x}$.

又∵ 反比例函数 $y = \frac{4}{x}$ 的图象经过点 $B(m,n)$,

∴ $mn = 4$.

(2) ∵ 二次函数 $y = (x-1)^2$ 的图象经过点 $B(m,n)$,

∴ $n = (m-1)^2$,

∴ $n = m^2 - 2m + 1$.

∴ $m^2 - 2m = n - 1$.

由 (1) 得 $mn = 4$,

∴ $m^3n - 2m^2n + 3mn - 4n$

$= 4m^2 - 8m + 12 - 4n$

$= 4(m^2 - 2m) + 12 - 4n$

$= 4(n-1) + 12 - 4n$

$= 8$.

(3) 由 (1) 得反比例函数的表达式为 $y = \frac{4}{x}$.

令 $y = x$, 可得 $x^2 = 4$, 解得 $x = \pm 2$,

∴ 反比例函数 $y = \frac{4}{x}$ 的图象与直线 $y = x$ 交于点 $(2,2)$, $(-2,-2)$.

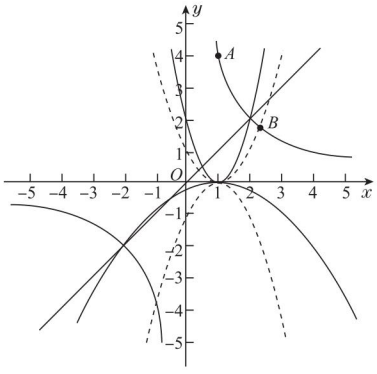
如图, 当二次函数 $y = a(x-1)^2$ 的图象经过点 $(2,2)$ 时, 可得 $a = 2$;

当二次函数 $y = a(x-1)^2$ 的图象经过点 $(-2,-2)$ 时, 可得 $a = -\frac{2}{9}$.

关注微信公众号 "教辅资料站" 获取更多学习资料

∵ 二次函数 $y=a(x-1)^2$ 图象的顶点为(1,0),

∴ 由图象可知,符合题意的 a 的取值范围是 $0<a<2$ 或 $a<-\frac{2}{9}$.



(第9题)

第7招 反比例函数与几何的综合应用

1. **解**:(1)∵ $A(m,6)$,$B(3,n)$ 两点在反比例函数 $y=\frac{6}{x}(x>0)$ 的图象上,

∴ $m=1$,$n=2$,即 A,B 两点的坐标分别为(1,6),(3,2).

∵ 点 $A(1,6)$,$B(3,2)$ 在一次函数 $y=kx+b$ 的图象上,

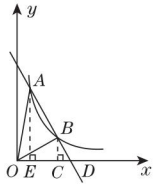
∴ $\begin{cases}6=k+b,\\2=3k+b,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=-2,\\b=8,\end{cases}$

∴ 一次函数的表达式为 $y=-2x+8$.

(2)根据图象可知使 $kx+b<\frac{6}{x}$ 成立的 x 的取值范围是 $0<x<1$ 或 $x>3$.

(3)如图,分别过点 A,点 B 作 $AE\perp x$ 轴,$BC\perp x$ 轴,垂足分别为点 E,点 C,设直线 AB 交 x 轴于点 D.



(第1题)

令 $-2x+8=0$,得 $x=4$,即 $D(4,0)$.

∴ $OD=4$.

∵ $A(1,6)$,$B(3,2)$,

∴ $AE=6$,$BC=2$.

∴ $S_{\triangle AOB}=S_{\triangle AOD}-S_{\triangle ODB}=\frac{1}{2}\times4\times6-\frac{1}{2}\times4\times2=8$.

点拨:(1)用待定系数法求出一次函数表达式.(2)根据图象可直接写出 x 的取值范围.(3)作辅助线利用作差法巧求 $\triangle AOB$ 的面积.

2. (1)**证明**:∵ 点 A,B 分别在 x 轴、y 轴上,点 D 在第一象限内,$DC\perp x$ 轴于点 C,

∴ $\angle AOB=\angle DCA=90°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AOB$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle DCA$ 中,

$\begin{cases}AO=DC,\\AB=DA,\end{cases}$

∴ $\mathrm{Rt}\triangle AOB\cong\mathrm{Rt}\triangle DCA(HL)$.

(2)**解**:在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 中,∵ $CD=2$,$DA=\sqrt{5}$,

∴ $AC=\sqrt{DA^2-CD^2}=1$.

∴ $OC=OA+AC=2+1=3$.

∴ 点 D 的坐标为(3,2).

∵ E 为 CD 的中点,

∴ 点 E 的坐标为(3,1).

∴ $k=3\times1=3$.

(3)**解**:点 G 在该反比例函数的图象上.

理由如下:∵ $\triangle BFG$ 和 $\triangle DCA$ 关于某点成中心对称,

∴ $\triangle BFG\cong\triangle DCA$.

∴ $FG=CA=1$,$BF=DC=2$,$\angle BFG=\angle DCA=90°$.

易知 $OB=AC=1$,

∴ $OF=OB+BF=1+2=3$.

∴ G 点的坐标为(1,3).

∵ $1\times3=3$,

∴ 点 G 在该反比例函数的图象上.

3. **解**:设点 A 的坐标为 $\left(a,\frac{6}{a}\right)$,由题易知四边形 $ABCO$ 是平行四边形,

∴ $AB=OC=3$.

∴ 点 B 的坐标为 $\left(a-3,\frac{6}{a}\right)$.

∴ $(a-3)\cdot\frac{6}{a}=-3$.

∴ $a=2$.

∴ 点 A 的坐标为(2,3),点 B 的坐标为(−1,3).

∵ 点 C 的坐标为(−3,0),

∴ 直线 BC 对应的函数表达式为 $y=\frac{3}{2}x+\frac{9}{2}$.

由 $\begin{cases}y=\frac{3}{2}x+\frac{9}{2},\\y=-\frac{3}{x},\end{cases}$

得 $\begin{cases}x_1=-1,\\y_1=3,\end{cases}\begin{cases}x_2=-2,\\y_2=\frac{3}{2}.\end{cases}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∴ 点 D 的坐标为$\left(-2,\frac{3}{2}\right)$.

∴ 直线 AD 对应的函数表达式为$y=\frac{3}{8}x+\frac{9}{4}$.

∴ $OE=\frac{9}{4}$.

4. $\frac{15}{4}$ **点拨:**∵ $C(0,2)$,$A(4,0)$,由矩形的性质可得 $P(2,1)$,把点 P 的坐标代入反比例函数的表达式可得 $k=2$,∴ 反比例函数的表达式为 $y=\frac{2}{x}$. 易知点 D 的横坐标为 4,∴ $AD=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$. ∴ $BD=\frac{3}{2}$. 又易知点 E 的纵坐标为 2,∴ $2=\frac{2}{CE}$. ∴ $CE=1$. ∴ $BE=3$.

∴ $S_{\triangle ODE}=S_{矩形OABC}-S_{\triangle OCE}-S_{\triangle BED}-S_{\triangle OAD}=8-1-\frac{9}{4}-1=\frac{15}{4}$.

5. (1)**证明:**∵ $BE/\!/AC$,$AE/\!/OB$,

∴ 四边形 $AEBD$ 是平行四边形.

∵ 四边形 $OABC$ 是矩形,

∴ $DA=\frac{1}{2}AC$,$DB=\frac{1}{2}OB$,$AC=BO$.

∴ $DA=DB$.

∴ 四边形 $AEBD$ 是菱形.

(2)**解:**连接 DE,交 AB 于点 F,

易知 $DE=OA=3$.

∵ 四边形 $AEBD$ 是菱形,

∴ $EF=DF=\frac{1}{2}DE=\frac{3}{2}$,$AF=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}OC=1$.

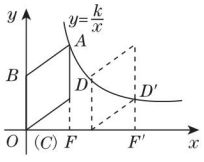
∴ $E\left(\frac{9}{2},1\right)$.

设所求反比例函数的表达式为 $y=\frac{k}{x}$,

把点 $E\left(\frac{9}{2},1\right)$的坐标代入得 $1=\frac{k}{\frac{9}{2}}$,解得$k=\frac{9}{2}$.

∴ 经过点 E 的双曲线对应的函数表达式为 $y=\frac{9}{2x}$.

6. **解:**(1)如图,过点 D 作 x 轴的垂线,垂足为 F,易知点 A,D,F 在同一条直线上.



(第 6 题)

∵ 点 D 的坐标为(4,3),

∴ $OF=4$,$DF=3$.

∴ $OD=5$.

∴ $AD=OD=5$.

∴ 点 A 的坐标为(4,8).

∴ $k=xy=4\times8=32$.

(2)如图,将菱形 $ABCD$ 沿 x 轴正方向平移,使得点 D 落在反比例函数$y=\frac{32}{x}(x>0)$的图象上的点 D' 处,过点 D'作 x 轴的垂线,垂足为 F'.

∵ $DF=3$,

∴ $D'F'=3$.

∴ 点 D'的纵坐标为 3.

∵ 点 D'在反比例函数 $y=\frac{32}{x}(x>0)$的图象上,

∴ $3=\frac{32}{x}$,解得 $x=\frac{32}{3}$,

即 $OF'=\frac{32}{3}$.

∴ $FF'=\frac{32}{3}-4=\frac{20}{3}$.

∴ 菱形 $ABCD$ 沿 x 轴正方向平移的距离为$\frac{20}{3}$.

7. **解:**(1)∵ 正方形 $OABC$ 的边 OA,OC 分别在 x 轴、y 轴上,点 B 的坐标为(2,2),

∴ $C(0,2)$.

∵ D 是 BC 的中点,

∴ $D(1,2)$.

∵ 反比例函数 $y=\frac{k}{x}(x>0,k\neq0)$的图象经过点 D,

∴ $k=2$.

(2)当点 P 在直线 BC 的上方,即 $0<x<1$ 时,

∵ 点 $P(x,y)$在该反比例函数的图象上运动,

∴ $y=\frac{2}{x}$.

∴ $S_{四边形CQPR}=CQ\cdot PQ=x\cdot\left(\frac{2}{x}-2\right)=2-2x$.

当点 P 在直线 BC 的下方,即 $x>1$ 时,同理求出 $S_{四边形CQPR}=CQ\cdot PQ=x\cdot\left(2-\frac{2}{x}\right)=2x-2$.

综上,$S=\begin{cases}2x-2(x>1),\\2-2x(0<x<1).\end{cases}$

点拨:(1)由正方形的性质求出点 D 的坐标,代入函数表达式中利用待定系数法即可求出 k 值. (2)注意将 x 的取值范围分成 $0<x<1$ 和 $x>1$ 两部分进行分类讨论.

8. **解:**(1)①易知 A,B 两点在双曲线 $y=\frac{4}{x}$上.

当 $x=4$ 时,$y=1$,

∴ $B(4,1)$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

当 $y=2$ 时，$2=\frac{4}{x}$，

$\therefore x=2$，

$\therefore A(2,2)$.

设直线 AB 的函数表达式为 $y=kx+b$，

$\therefore \begin{cases}2k+b=2,\\4k+b=1,\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}k=-\frac{1}{2},\\b=3,\end{cases}$

$\therefore$ 直线 AB 的函数表达式为 $y=-\frac{1}{2}x+3$；

②四边形 $ABCD$ 是菱形，

理由如下：易知 C,D 两点在双曲线 $y=\frac{20}{x}$ 上.

由①知，$B(4,1)$，

$\because BD/\!/y$ 轴，

$\therefore D(4,5)$.

$\because$ 点 P 是 BD 的中点，

$\therefore P(4,3)$.

当 $y=3$ 时，由 $y=\frac{4}{x}$ 得，$x=\frac{4}{3}$，

由 $y=\frac{20}{x}$ 得，$x=\frac{20}{3}$，故 $A\left(\frac{4}{3},3\right),C\left(\frac{20}{3},3\right)$.

$\therefore PA=4-\frac{4}{3}=\frac{8}{3},PC=\frac{20}{3}-4=\frac{8}{3}$，

$\therefore PA=PC$，

又$\because PB=PD$，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

又$\because BD\perp AC$，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形.

(2)四边形 $ABCD$ 能成为正方形.

理由：当四边形 $ABCD$ 是正方形时，$BD=AC$.

当 $x=4$ 时，$y=\frac{m}{x}=\frac{m}{4},y=\frac{n}{x}=\frac{n}{4}$，

$\therefore B\left(4,\frac{m}{4}\right),D\left(4,\frac{n}{4}\right)$，

$\therefore P\left(4,\frac{m+n}{8}\right)$，

$\therefore A\left(\frac{8m}{m+n},\frac{m+n}{8}\right),C\left(\frac{8n}{m+n},\frac{m+n}{8}\right)$.

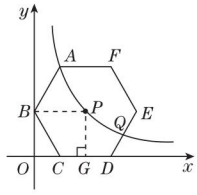
$\because AC=BD$，

$\therefore \frac{8n}{m+n}-\frac{8m}{m+n}=\frac{n}{4}-\frac{m}{4}$，

$\therefore m+n=32$.

9. **解**：(1)点 A 在该反比例函数的图象上. 理由如下：

如图，过点 P 作 x 轴的垂线 PG，垂足为 G，连接 BP.



(第9题)

$\because P$ 是正六边形 $ABCDEF$ 的对称中心，$CD=2$，

$\therefore BP=2$，G 是 CD 的中点.

$\therefore PG=\sqrt{3}$.

$\therefore P(2,\sqrt{3})$.

$\because P$ 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象上，

$\therefore k=2\sqrt{3}$.

$\therefore y=\frac{2\sqrt{3}}{x}$.

由正六边形的性质，得 $A(1,2\sqrt{3})$，

$\therefore$ 点 A 在该反比例函数的图象上.

(2)易得 $D(3,0),E(4,\sqrt{3})$.

设直线 DE 的表达式为 $y=mx+b$，

$\therefore \begin{cases}3m+b=0,\\4m+b=\sqrt{3},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=\sqrt{3},\\b=-3\sqrt{3}.\end{cases}$

$\therefore$ 直线 DE 的表达式为 $y=\sqrt{3}x-3\sqrt{3}$.

联立 $\begin{cases}y=\frac{2\sqrt{3}}{x},\\y=\sqrt{3}x-3\sqrt{3},\end{cases}$

解得 $x=\frac{3+\sqrt{17}}{2}$(负值舍去).

$\therefore$ 点 Q 的横坐标为 $\frac{3+\sqrt{17}}{2}$.

(3)$E(4,\sqrt{3}),F(3,2\sqrt{3})$.

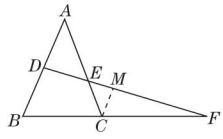
将正六边形向左平移 2 个单位长度后，点 E 的坐标变为 $(2,\sqrt{3})$，点 F 的坐标变为 $(1,2\sqrt{3})$，

则点 E 与点 F 都在该反比例函数的图象上.

(平移方法不唯一)

第 8 招　证明和计算成比例线段的五种常用作辅助线的方法

1. **证明**：如图，过点 C 作 $CM/\!/AB$ 交 DF 于点 M.



(第1题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\because CM \parallel AB$,

$\therefore \angle FCM = \angle B, \angle FMC = \angle FDB$.

$\therefore \triangle CMF \backsim \triangle BDF$.

$\therefore \frac{BF}{CF} = \frac{BD}{CM}$.

$\because CM \parallel AD$,

$\therefore \angle A = \angle ECM, \angle ADE = \angle CME$.

$\therefore \triangle ADE \backsim \triangle CME$.

$\therefore \frac{AE}{EC} = \frac{AD}{CM}$.

$\because D$ 为 AB 的中点,

$\therefore BD = AD$.

$\therefore \frac{BD}{CM} = \frac{AD}{CM}$.

$\therefore \frac{BF}{CF} = \frac{AE}{EC}$,

即 $AE \cdot CF = BF \cdot EC$.

2. 证明:过点 P 作 $PE \perp AC$ 于点 E, $PF \perp CB$ 于点 F,则四边形 $CEPF$ 为矩形.

$\therefore PF = EC$.

易得 $\angle A = \angle B = 45°, \angle AEP = \angle PFB = 90°$,

$\therefore \angle A = \angle BPF = 45°$,

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle AEP \backsim \mathrm{Rt}\triangle PFB$.

$\therefore \frac{PA}{PB} = \frac{PE}{BF}$.

易得 $PF = BF = EC$,

$\therefore \frac{PA}{PB} = \frac{PE}{EC}$. ①

$\because CP \perp MN$ 于点 Q,

$\therefore \angle QCN + \angle QNC = 90°$.

又 $\because \angle QCN + \angle QCM = 90°$,

$\therefore \angle QCM = \angle QNC$.

又易得 $\angle PEC = \angle MCN = 90°$,

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle PEC \backsim \mathrm{Rt}\triangle MCN$.

$\therefore \frac{EP}{CM} = \frac{EC}{CN}$,

即 $\frac{EP}{EC} = \frac{CM}{CN}$. ②

由①②得 $\frac{PA}{PB} = \frac{CM}{CN}$,即 $PA : PB = CM : CN$.

点拨:本题通过作垂线得到矩形 $CEPF$,再利用矩形的性质、相似三角形的判定和性质即可证得.

3. 证明:延长 GF 与 AC,交于点 H,

$\because CD \perp AB, FG \perp AB$,

$\therefore CD \parallel FG$,

$\therefore \triangle AFG \backsim \triangle AED, \triangle AFH \backsim \triangle AEC$.

$\therefore \frac{AF}{AE} = \frac{FG}{ED}, \frac{AF}{AE} = \frac{FH}{EC}$.

$\therefore \frac{FG}{ED} = \frac{FH}{EC}$.

又 $\because E$ 为 CD 的中点, $\therefore ED = EC$,

$\therefore FG = FH$.

易证得 $\mathrm{Rt}\triangle CFH \backsim \mathrm{Rt}\triangle GFB$,

$\therefore \frac{CF}{FG} = \frac{FH}{BF}$.

$\therefore FG \cdot FH = CF \cdot BF$.

$\because FG = FH$,

$\therefore FG^2 = CF \cdot BF$.

点拨:通过作延长线构造相似三角形,再由相似三角形的性质和等量代换得到几个比例式或等积式,从而得到结论.

4. 解:取 BC 的中点 M,连接 AM.

$\because AB \perp AC$,

$\therefore AM = CM$,

$\therefore \angle MAC = \angle C$.

又 $\because BD = DC$,

$\therefore \angle DBC = \angle C$.

$\therefore \angle MAC = \angle DBC$.

又 $\because \angle C = \angle C$,

$\therefore \triangle MAC \backsim \triangle DBC$.

$\therefore \frac{MC}{DC} = \frac{AC}{BC}$.

又 $\because DC = 1, MC = \frac{1}{2}BC$,

$\therefore AC = \frac{MC \cdot BC}{DC} = \frac{1}{2}BC^2$. ①

易得 $\mathrm{Rt}\triangle AEC \backsim \mathrm{Rt}\triangle BAC$,

$\therefore \frac{AC}{BC} = \frac{EC}{AC}$.

又 $\because EC = 1$,

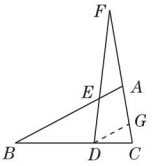
$\therefore AC^2 = CE \cdot BC = BC$. ②

由①②得, $AC = \frac{1}{2}AC^4$,

$\therefore AC = \sqrt[3]{2}$.

点拨:通过作中线构造相似三角形,进而得到相关线段的数量关系,最终求得 AC 的长.

5. 解:如图,过点 D 作 AB 的平行线交 AC 于点 G.



(第 5 题)

$\because \frac{BD}{DC} = \frac{FE}{ED} = 2$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \dfrac{CD}{CB}=\dfrac{1}{3},\dfrac{EF}{FD}=\dfrac{2}{3}.$

易得$\triangle FAE\backsim\triangle FGD,\triangle CGD\backsim\triangle CAB.$

$\therefore \dfrac{AE}{DG}=\dfrac{EF}{FD}=\dfrac{2}{3},\dfrac{DG}{AB}=\dfrac{CD}{CB}=\dfrac{1}{3}.$

$\therefore AE=\dfrac{2}{3}DG,AB=3DG,$

$\therefore BE=\dfrac{7}{3}DG,$

$\therefore BE:AE=7:2=\dfrac{7}{2}.$

第9招 巧作平行线构造相似三角形

1. 解:如图,连接DF,$\because E,F$是边BC上的两个三等分点,

$\therefore BE=EF=FC.$

$\because D$是AC的中点,

$\therefore AD=CD.$

$\therefore DF$是$\triangle ACE$的中位线.

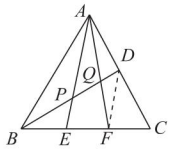
$\therefore DF/\!/AE$,且$DF=\dfrac{1}{2}AE.$

$\therefore DF/\!/PE.$

$\therefore \triangle BEP\backsim\triangle BFD$

$\therefore \dfrac{BE}{BF}=\dfrac{BP}{BD}=\dfrac{PE}{DF}.$

$\because BF=2BE,\therefore BD=2BP,DF=2PE.\therefore BP=PD.$



(第1题)

$\because DF/\!/AE,$

$\therefore \angle APQ=\angle FDQ,\angle PAQ=\angle DFQ.$

$\therefore \triangle APQ\backsim\triangle FDQ.$

$\therefore \dfrac{PQ}{QD}=\dfrac{AP}{DF}.$

设$PE=a$,则$DF=2a,AP=AE-PE=3a.$

$\therefore PQ:QD=AP:DF=3:2.$

$\therefore BP:PQ:QD=5:3:2.$

点拨:给出边的三等分点或中点,求相关线段的比值时,通常连接这些点中的某些点找平行关系,构造相似三角形求解.

2. 解:如图,过点C作$CG/\!/AB$交AE的延长线于点$G.$

$\because CG/\!/AB,\therefore \angle DAF=\angle G.$

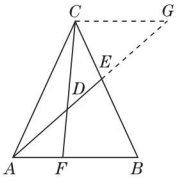
又$\because D$为CF的中点,$\therefore CD=DF.$

在$\triangle ADF$和$\triangle GDC$中,

$$\begin{cases}\angle DAF=\angle G,\\ \angle ADF=\angle GDC,\\ DF=DC,\end{cases}$$

$\therefore \triangle ADF\cong\triangle GDC(AAS).$

$\therefore AF=CG.$



(第2题)

$\because BF:AF=3:2,$

$\therefore AB:AF=5:2.$

$\because AB/\!/CG,$

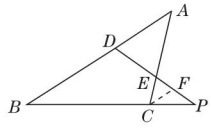
$\therefore \angle CGE=\angle BAE,\angle GCE=\angle ABE.$

$\therefore \triangle ABE\backsim\triangle GCE.$

$\therefore \dfrac{BE}{EC}=\dfrac{AB}{CG}=\dfrac{AB}{AF}=\dfrac{5}{2}.$

点拨:过顶点C作$CG/\!/AB$交AE的延长线于点G,构造相似三角形,得到相关线段的比.

3. 证明:如图,过点C作$CF/\!/AB$交DP于点F,



(第3题)

$\therefore \angle PFC=\angle PDB,$

$\angle PCF=\angle PBD.$

$\therefore \triangle PCF\backsim\triangle PBD.$

$\therefore \dfrac{BP}{CP}=\dfrac{BD}{CF}.$

$\because AD/\!/CF,$

$\therefore \angle ADE=\angle EFC.$

$\because AD=AE,$

$\therefore \angle ADE=\angle AED.$

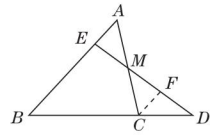
$\because \angle AED=\angle CEP,$

$\therefore \angle EFC=\angle CEP.$

$\therefore EC=CF.$

$\therefore \dfrac{BP}{CP}=\dfrac{BD}{EC}.$

4. 证明:方法一　如图①,过点C作$CF/\!/AB$,交DE于点F,



(第4题①)

$\therefore \angle FCD=\angle B.$

又$\because \angle D$为公共角,

$\therefore \triangle CDF\backsim\triangle BDE.$

$\therefore \dfrac{CF}{BE}=\dfrac{CD}{BD}.$

$\because$点M为AC边的中点,

$\therefore AM=CM.$

$\because CF/\!/AB,$

$\therefore \angle A=\angle MCF.$

又$\because \angle AME=\angle CMF,$

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$\therefore \triangle AME \cong \triangle CMF.$

$\therefore AE = CF.$

$\because AE = \frac{1}{4}AB, BE = AB - AE,$

$\therefore BE = 3AE.$

$\therefore \frac{AE}{BE} = \frac{1}{3}.$

$\because \frac{CF}{BE} = \frac{CD}{BD},$

$\therefore \frac{AE}{BE} = \frac{CD}{BD} = \frac{1}{3}$, 即 $BD = 3CD.$

又$\because BD = BC + CD,$

$\therefore BC = 2CD.$

方法二　如图②,过点 C 作 $CF \parallel DE$,交 AB 于点 F,

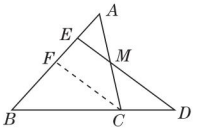
$\therefore \frac{AE}{AF} = \frac{AM}{AC}.$

又$\because$ 点 M 为 AC 边的中点,

$\therefore AC = 2AM.$

$\therefore 2AE = AF.$

$\therefore AE = EF.$



(第 4 题②)

又$\because \frac{AE}{AB} = \frac{1}{4}, \therefore \frac{BF}{EF} = 2.$

又$\because CF \parallel DE, \therefore \frac{BF}{FE} = \frac{BC}{CD} = 2.$

$\therefore BC = 2CD.$

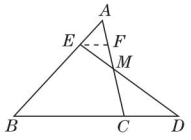
方法三　如图③,过点 E 作 $EF \parallel BC$,交 AC 于点 F,

$\therefore \angle AEF = \angle B.$

又$\because \angle A$ 为公共角,

$\therefore \triangle AEF \backsim \triangle ABC.$

$\therefore \frac{EF}{BC} = \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}.$



(第 4 题③)

$\because AE = \frac{1}{4}AB,$

$\therefore \frac{EF}{BC} = \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{1}{4},$

$\therefore EF = \frac{1}{4}BC, AF = \frac{1}{4}AC.$

由 $EF \parallel CD$,易证得 $\triangle EFM \backsim \triangle DCM,$

$\therefore \frac{EF}{CD} = \frac{MF}{MC}.$

又$\because M$ 为 AC 的中点,$\therefore AM = MC,$

$\therefore MF = \frac{1}{2}MC.$

$\therefore EF = \frac{1}{2}CD.$

$\therefore BC = 2CD.$

方法四　如图④,过点 A 作 $AF \parallel BD$,交 DE 的延长线于点 F,

$\therefore \angle F = \angle D, \angle FAE = \angle B.$

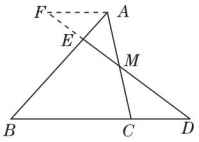
$\therefore \triangle AEF \backsim \triangle BED.$

$\therefore \frac{AE}{BE} = \frac{AF}{BD}.$

$\because AE = \frac{1}{4}AB,$

$\therefore AE = \frac{1}{3}BE.$

$\therefore AF = \frac{1}{3}BD.$



(第 4 题④)

由 $AF \parallel CD$,易证得 $\triangle AFM \backsim \triangle CDM.$

又$\because M$ 为 AC 的中点,$\therefore AM = MC,$

$\therefore AF = CD.$

$\therefore CD = \frac{1}{3}BD.$

$\therefore BC = 2CD.$

点拨:由已知线段的比,求另外两线段的比,通常用作平行线,构造相似三角形来求解.

第 10 招　证明比例式或等积式的七种技巧

1. 证明:过点 D 作 $DG \parallel BC$,交 AC 于点 G,

易知 $\triangle DGF \backsim \triangle ECF, \triangle ADG \backsim \triangle ABC.$

$\therefore \frac{EF}{DF} = \frac{CE}{DG}, \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DG}.$

$\because AD = CE,$

$\therefore \frac{CE}{DG} = \frac{AD}{DG}.$

$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{EF}{DF},$

即 $AB \cdot DF = BC \cdot EF.$

点拨:过某一点作平行线,构造出如“A”型或“X”型的基本图形,通过相似三角形转化线段的比,从而解决问题.

2. 证明:$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AE \parallel DC, \angle A = \angle C.$

$\therefore \angle CDF = \angle E.$

$\therefore \triangle FCD \backsim \triangle DAE.$

$\therefore \frac{DC}{AE} = \frac{CF}{AD}.$

3. 证明:$\because DM \perp BC, \angle BAC = 90°,$

$\therefore \angle B + \angle BEM = 90°, \angle D + \angle DEA = 90°.$

$\because \angle BEM = \angle DEA,$

$\therefore \angle B = \angle D.$

又$\because M$ 为 BC 的中点,$\angle BAC = 90°,$

$\therefore BM = AM.$

$\therefore \angle B = \angle BAM.$

$\therefore \angle BAM = \angle D$,即 $\angle EAM = \angle D.$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

又∵ $\angle AME=\angle DMA$,

∴ $\triangle AME\backsim\triangle DMA$.

∴ $\frac{AM}{MD}=\frac{ME}{AM}$,即 $AM^2=MD\cdot ME$.

4. **证明**:如图,连接 PM,PN.

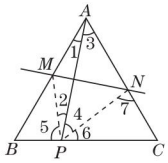
∵ MN 是 AP 的垂直平分线,

∴ $MA=MP$,$NA=NP$.

∴ $\angle 1=\angle 2$,$\angle 3=\angle 4$.

又∵ $\triangle ABC$ 是等边三角形,

∴ $\angle B=\angle C=\angle 1+\angle 3=60°$.



(第4题)

∴ $\angle 2+\angle 4=60°$.

∴ $\angle 5+\angle 6=120°$.

又∵ $\angle 6+\angle 7=180°-\angle C=120°$,

∴ $\angle 5=\angle 7$.

∴ $\triangle BPM\backsim\triangle CNP$.

∴ $\frac{BP}{CN}=\frac{BM}{CP}$,即 $BP\cdot CP=BM\cdot CN$.

点拨:通过作辅助线构造出△BPM 和△CNP,将要证的四条线段转化在这两个三角形中,利用已知条件证明两三角形相似,从而得出结论.

5. **证明**:∵ $AB/\!/DN$,

∴ $\angle MBA=\angle MDN$,$\angle MAB=\angle MND$.

∴ $\triangle AMB\backsim\triangle NMD$.

∴ $\frac{AM}{NM}=\frac{BM}{DM}$.

又∵ $AD/\!/BP$,

∴ $\angle MAD=\angle P$,$\angle MDA=\angle MBP$.

∴ $\triangle BMP\backsim\triangle DMA$.

∴ $\frac{MP}{AM}=\frac{BM}{DM}$.

∴ $\frac{AM}{MN}=\frac{MP}{AM}$.

∴ $AM^2=MN\cdot MP$.

点拨:利用平行线得到角相等,从而判定三角形相似,再由相似三角形对应边的比相等,可求某些线段的长或证明比例式和等积式. 当直接利用相似三角形对应边的比相等或平行线截得的对应线段成比例无法证明时,可找中间比进行过渡,而找中间比是证明比例关系常用的方法.

6. **证明**:由题意得 $\angle BDF=\angle BAE=90°$.

∵ BE 平分 $\angle ABC$,

∴ $\angle DBF=\angle ABE$.

∴ $\triangle BDF\backsim\triangle BAE$.

∴ $\frac{BD}{AB}=\frac{BF}{BE}$.

∵ $\angle BAC=\angle BDA=90°$,

$\angle ABC=\angle DBA$,

∴ $\triangle ABC\backsim\triangle DBA$.

∴ $\frac{AB}{BC}=\frac{BD}{AB}$.

∴ $\frac{BF}{BE}=\frac{AB}{BC}$.

点拨:本题通过先证明 $\triangle BDF\backsim\triangle BAE$,再证明 $\triangle ABC\backsim\triangle DBA$,进而得出结论.

7. **证明**:(1)∵ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形,

∴ $\angle B=\angle D$.

∵ $AM\perp BC$,$AN\perp CD$,

∴ $\angle AMB=\angle AND=90°$.

∴ $\triangle AMB\backsim\triangle AND$.

(2)由 $\triangle AMB\backsim\triangle AND$ 得 $\frac{AM}{AN}=\frac{AB}{AD}$,$\angle BAM=\angle DAN$.

又∵ $AD=BC$,

∴ $\frac{AM}{AN}=\frac{AB}{BC}$.

∴ $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{BC}$.

∵ $AM\perp BC$,$AD/\!/BC$,

∴ $\angle MAD=\angle AMB=90°$.

∴ $\angle B+\angle BAM=\angle MAN+\angle NAD=90°$.

∴ $\angle B=\angle MAN$.

∴ $\triangle AMN\backsim\triangle BAC$. ∴ $\frac{AM}{AB}=\frac{MN}{AC}$.

8. **证明**:∵ $BG\perp AP$,$PE\perp AB$,

∴ $\angle AEP=\angle DEB=\angle AGB=90°$.

∴ $\angle P+\angle PAB=90°$,

$\angle PAB+\angle ABG=90°$.

∴ $\angle P=\angle ABG$.

∴ $\triangle AEP\backsim\triangle DEB$.

∴ $\frac{AE}{DE}=\frac{PE}{BE}$,即 $AE\cdot BE=PE\cdot DE$.

∵ $\angle CEA=90°$,

∴ $\angle CAB+\angle ACE=90°$.

又∵ $\angle ACB=90°$,

∴ $\angle CAB+\angle CBE=90°$.

∴ $\angle ACE=\angle CBE$.

又∵ $\angle CEA=\angle BEC=90°$,

∴ $\triangle AEC\backsim\triangle CEB$.

∴ $\frac{AE}{CE}=\frac{CE}{BE}$,即 $CE^2=AE\cdot BE$.

∴ $CE^2=DE\cdot PE$.

9. **证明**:∵ $AD\perp BC$,$DE\perp AB$,

∴ $\angle ADB=\angle AED=90°$.

又∵ $\angle BAD=\angle DAE$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

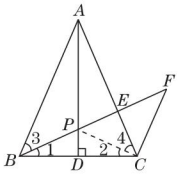
$\therefore \triangle ABD \backsim \triangle ADE.$

$\therefore \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AD}$,即 $AD^2=AE\cdot AB.$

同理可得 $AD^2=AF\cdot AC.$

$\therefore AE\cdot AB=AF\cdot AC.\therefore \frac{AE}{AF}=\frac{AC}{AB}.$

10. 证明:如图,连接 $PC.$



(第 10 题)

$\because AB=AC,AD\perp BC,$

$\therefore AD$ 垂直平分 $BC,$

$\angle ABC=\angle ACB.$

$\therefore BP=PC.$

$\therefore \angle 1=\angle 2.$

$\therefore \angle ABC-\angle 1=\angle ACB-\angle 2,$

即 $\angle 3=\angle 4.$

$\because CF/\!/AB,\therefore \angle 3=\angle F.$

$\therefore \angle 4=\angle F.$

又$\because \angle CPF=\angle CPE,$

$\therefore \triangle CPF \backsim \triangle EPC.$

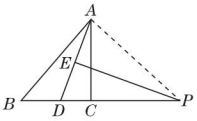
$\therefore \frac{PC}{PE}=\frac{PF}{PC}$,即 $PC^2=PF\cdot PE.$

$\because BP=PC,$

$\therefore BP^2=PE\cdot PF.$

点拨:连接 PC,根据相似三角形对应边成比例的性质得到 $\frac{PC}{PE}=\frac{PF}{PC}$,进而得到 $PC^2=PE\cdot PF$,再利用等线段代换法,即 $BP=PC$ 可得到结论.

11. 证明:如图,连接 $PA,$



(第 11 题)

$\because EP$ 是 AD 的垂直平分线,

$\therefore PA=PD.$

$\therefore \angle PDA=\angle PAD.$

$\therefore \angle B+\angle BAD=\angle DAC+\angle CAP.$

又$\because AD$ 平分 $\angle BAC,$

$\therefore \angle BAD=\angle DAC.$

$\therefore \angle B=\angle CAP.$

又$\because \angle APC=\angle BPA,$

$\therefore \triangle PAC \backsim \triangle PBA.$

$\therefore \frac{PA}{PB}=\frac{PC}{PA}$,即 $PA^2=PB\cdot PC.$

$\because PA=PD,$

$\therefore PD^2=PB\cdot PC.$

第 11 招 求三角函数值的常见技巧

1. 解:方法一 原式 $=\frac{(\sin A-3\cos A)\div\cos A}{(4\sin A+\cos A)\div\cos A}=\frac{\frac{\sin A}{\cos A}-3}{\frac{4\sin A}{\cos A}+1}=\frac{\tan A-3}{4\tan A+1}.$

$\because \tan A=4,\therefore \frac{\tan A-3}{4\tan A+1}=\frac{4-3}{4\times 4+1}=\frac{1}{17}.$

方法二 $\because \tan A=4,\therefore \frac{\sin A}{\cos A}=4,$

$\therefore \sin A=4\cos A.$

$\therefore$ 原式 $=\frac{4\cos A-3\cos A}{4\times 4\cos A+\cos A}=\frac{\cos A}{17\cos A}=\frac{1}{17}.$

2. 解:$\because \sin\alpha-\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2},\therefore (\sin\alpha-\cos\alpha)^2=\frac{1}{2},$

即 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}.$

$\therefore 1-2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}$,即 $2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}.$

$\therefore (\sin\alpha+\cos\alpha)^2$

$=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha$

$=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$

又$\because \alpha$ 为锐角,$\therefore \sin\alpha+\cos\alpha>0.$

$\therefore \sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{6}}{2}.$

3. C **点拨**:$\because (45^\circ-\alpha)+(45^\circ+\alpha)=90^\circ,\therefore \sin(45^\circ-\alpha)=\cos(45^\circ+\alpha),\sin^2(45^\circ-\alpha)+\sin^2(45^\circ+\alpha)=\cos^2(45^\circ+\alpha)+\sin^2(45^\circ+\alpha)=1.$

4. 解:$\tan 1^\circ\cdot\tan 2^\circ\cdot\tan 3^\circ\cdot\cdots\cdot\tan 88^\circ\cdot\tan 89^\circ=(\tan 1^\circ\cdot\tan 89^\circ)\cdot(\tan 2^\circ\cdot\tan 88^\circ)\cdot\cdots\cdot(\tan 44^\circ\cdot\tan 46^\circ)\cdot\tan 45^\circ=1.$

点拨:互余两角的正切值之积为 1,即若 $\alpha+\beta=90^\circ$,则 $\tan\alpha\cdot\tan\beta=1.$

5. 解:$\because \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{12}{25},$

$\therefore (\sin\alpha+\cos\alpha)^2$

$=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha$

$=1+2\times\frac{12}{25}=\frac{49}{25}.$

$\because \alpha$ 为锐角,$\therefore \sin\alpha+\cos\alpha>0.$

$\therefore \sin\alpha+\cos\alpha=\frac{7}{5}.$

又$\because \sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{12}{25},$

$\therefore$ 以 $\sin\alpha,\cos\alpha$ 为根的一元二次方程为 $x^2-\frac{7}{5}x+\frac{12}{25}=0.$

点拨:此题用到两方面的知识:(1)公式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 与完全平方公式的综合运用.(2)若 $x_1+x_2=p,x_1x_2=q$,则以 x_1,x_2 为两个根的一元二次方程为 $x^2-px+q=0.$ 本题答案不唯一.

6. 解:$\because \sin\alpha$ 是方程 $2x^2-7x+3=0$ 的一个根,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \sin\alpha=\dfrac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\times2\times3}}{2\times2}=\dfrac{7\pm5}{4}$.

$\therefore \sin\alpha=\dfrac{1}{2}$或$\sin\alpha=3$(不合题意,舍去).

$\because \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$,

$\therefore \cos^2\alpha=1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{3}{4}$.

又$\because \alpha$为锐角,$\therefore \cos\alpha>0$,$\therefore \cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$\therefore \sqrt{1-2\sin\alpha\cos\alpha}=\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}=$

$\sqrt{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}=|\sin\alpha-\cos\alpha|=\left|\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right|=$

$\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

第12招 巧用构造法求几种特殊角的三角函数值

1. **解**:如图,作Rt$\triangle ABC$,使$\angle BAC=30°$,$\angle C=90°$,延长CA到D,使$AD=AB$,连接BD,则$\angle D=15°$.

设$BC=a$,则$AB=2a$,$AC=\sqrt{3}a$,

$\therefore AD=2a$,$CD=(2+\sqrt{3})a$.

在Rt$\triangle BCD$中,$BD=\sqrt{BC^2+CD^2}=\sqrt{a^2+(7+4\sqrt{3})a^2}=$

$(\sqrt{6}+\sqrt{2})a$.

$\therefore \sin15°=\sin D=\dfrac{BC}{BD}=\dfrac{a}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})a}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

$\cos15°=\cos D=\dfrac{CD}{BD}=\dfrac{(2+\sqrt{3})a}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})a}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

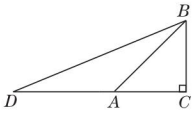
$\tan15°=\tan D=\dfrac{BC}{CD}=\dfrac{a}{(2+\sqrt{3})a}=2-\sqrt{3}$.

点拨: 通过构造含15°角的直角三角形求解.

2. **解**:如图,作Rt$\triangle ABC$,使$\angle C=90°$,$AC=BC$,延长CA到D,使$DA=AB$,连接BD,则$\angle D=22.5°$.

设$AC=BC=a$,则$AB=\sqrt{2}a$,

$\therefore AD=\sqrt{2}a$,$DC=(\sqrt{2}+1)a$,



(第2题)

$\therefore \tan22.5°=\tan D=\dfrac{BC}{CD}=\dfrac{a}{(\sqrt{2}+1)a}=\sqrt{2}-1$.

3. **解**:$\because$ 将矩形纸片$ABCD$沿过点B的直线折叠,使点A落在BC边上的点E处,

$\therefore AB=BE$,$\angle AEB=\angle EAB=45°$.

$\because$ 还原后,再沿过点E的直线折叠,使点A落在BC边上的点F处,

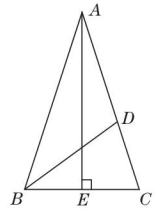
$\therefore AE=EF$,$\angle EAF=\angle EFA=45°\div2=22.5°$,

$\therefore \angle FAB=67.5°$.

设$AB=x$,则$AE=EF=\sqrt{2}x$,

$\therefore \tan67.5°=\tan\angle FAB=\dfrac{FB}{AB}=\dfrac{\sqrt{2}x+x}{x}=\sqrt{2}+1$.

4. **解**:如图,作$\triangle ABC$,使$\angle BAC=36°$,$AB=AC$,$\angle ABC$的平分线BD交AC于点D,过点A作$AE\perp BC$于点E,则$\angle BAE=18°$,$\angle ABE=72°$.



(第4题)

设$BC=a$,易知$BE=\dfrac{1}{2}a$,$BD=AD=a$,

由图易得$\triangle ABC\backsim\triangle BCD$,

$\therefore \dfrac{AB}{BC}=\dfrac{BC}{CD}$,

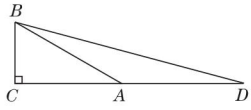
$\therefore \dfrac{AB}{a}=\dfrac{a}{AB-a}$,

即$AB^2-a\cdot AB-a^2=0$,

$\therefore AB=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}a$(负值舍去),

$\therefore \sin18°=\sin\angle BAE=\dfrac{BE}{AB}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

5. **解**:方法一　利用第1题的图形求解. 易知$\angle CBD=75°$,



(第5题)

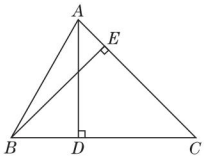
$\therefore \sin75°=\dfrac{CD}{BD}=\dfrac{(2+\sqrt{3})a}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})a}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

$\cos75°=\dfrac{BC}{BD}=\dfrac{a}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})a}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

$\tan75°=\dfrac{CD}{BC}=\dfrac{(2+\sqrt{3})a}{a}=2+\sqrt{3}$.

方法二　如图,作$\triangle ABD$,使$\angle ADB=90°$,$\angle DAB=30°$,延长BD到点C,使$DC=DA$,连接AC,过点B作$BE\perp AC$于点E,则$\angle ACD=\angle DAC=45°$,则$\angle BAE=75°$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料



(第5题)

设 $AD=DC=a$,则 $AC=\sqrt{2}a$,$BD=\frac{\sqrt{3}}{3}a$,$AB=\frac{2\sqrt{3}}{3}a$,

$\therefore BC=BD+CD=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+1\right)a$.

$\therefore CE=BE=BC\cdot\sin 45°=\frac{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{6}a$,

$\therefore AE=AC-CE=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6}a$,

$\therefore \sin 75°=\sin\angle BAE=\frac{BE}{AB}=\frac{\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{6}a}{\frac{2\sqrt{3}}{3}a}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$,

$\cos 75°=\cos\angle BAE=\frac{AE}{AB}=\frac{\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6}a}{\frac{2\sqrt{3}}{3}a}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$,

$\tan 75°=\tan\angle BAE=\frac{BE}{AE}=\frac{\frac{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{6}a}{\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6}a}=2+\sqrt{3}$.

第13招 解直角三角形的五种常见类型

1. 解:$\because a=2\sqrt{3}$,$b=6$,

$\therefore c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{12+36}=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$.

$\because \tan A=\frac{a}{b}=\frac{2\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,$\therefore \angle A=30°$,

$\therefore \angle B=60°$.

2. 解:$\because AB=13$,$AC=12$,$\angle ACB=90°$,

$\therefore BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{169-144}=\sqrt{25}=5$.

$\therefore \sin\angle BAC=\frac{BC}{AB}=\frac{5}{13}$.

过点 B 作 $BD\perp MC$ 于点 D.

设点 B 到直线 MC 的距离为 d,则 $BD=d$,

$\because \angle BCM=\angle BAC$,

$\therefore \sin\angle BCM=\sin\angle BAC$.

$\therefore \sin\angle BCM=\frac{d}{BC}=\frac{5}{13}$,即 $\frac{d}{5}=\frac{5}{13}$,

$\therefore d=\frac{25}{13}$,即点 B 到直线 MC 的距离为 $\frac{25}{13}$.

3. 解:(1)由题意知 $\sin C=\frac{AB}{AC}$,即 $\frac{1}{2}=\frac{3}{AC}$,则 $AC=6$.

(2)由题意知 $\tan C=\frac{AB}{BC}$,即 $\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{3}{BC}$,则 $BC=3\sqrt{3}$.

4. 解:$\because \angle C=90°$,$\angle BDC=45°$,$BC=3$,$\therefore CD=3$.

$\because \angle A=30°$,$BC=3$,

$\therefore \tan A=\frac{BC}{AC}=\frac{3}{AC}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,即 $AC=3\sqrt{3}$.

$\therefore AD=AC-CD=3\sqrt{3}-3$.

5. 解:$\because \angle B=45°$,$\angle C=90°$,

$\therefore \angle A=45°$. $\therefore a=b$.

$\because \sin A=\frac{a}{c}$,$c=10$,$\therefore a=10\cdot\sin 45°=5\sqrt{2}$.

$\therefore b=5\sqrt{2}$.

6. 解:$\because \angle C=90°$,$\angle B=30°$,$AB=4\sqrt{3}$,

$\therefore \angle CAB=60°$,

$AC=AB\cdot\sin 30°=4\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=2\sqrt{3}$.

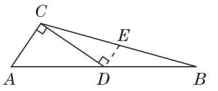
又$\because AD$ 是$\angle BAC$ 的平分线,

$\therefore \angle CAD=30°$.

$\because \cos\angle CAD=\frac{AC}{AD}=\frac{2\sqrt{3}}{AD}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore AD=4$.

7. 解:过点 D 作 CD 的垂线交 BC 于点 E,如图.



(第7题)

在 Rt△CDE 中,$\because \tan\angle BCD=\frac{1}{3}=\frac{DE}{CD}$,

$\therefore$ 设 $DE=x$,则 $CD=3x$.

$\because CD\perp AC$,$\therefore DE/\!/AC$.

又$\because$ 点 D 为 AB 的中点,

$\therefore$ 点 E 为 BC 的中点.

$\therefore DE=\frac{1}{2}AC$.

$\therefore AC=2DE=2x$.

在 Rt△ACD 中,$\angle ACD=90°$,$AC=2x$,$CD=3x$,

$\therefore AD=\sqrt{AC^2+CD^2}=\sqrt{4x^2+9x^2}=\sqrt{13}x$.

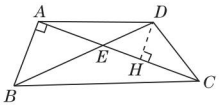
$\therefore \sin A=\frac{CD}{AD}=\frac{3x}{\sqrt{13}x}=\frac{3\sqrt{13}}{13}$,

$\cos A=\frac{AC}{AD}=\frac{2x}{\sqrt{13}x}=\frac{2\sqrt{13}}{13}$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\tan A=\frac{CD}{AC}=\frac{3x}{2x}=\frac{3}{2}$.

8. 解：如图，过点 D 作 $DH\perp AC$ 于点 H.



（第 8 题）

$\because\angle CED=45°$，$DH\perp EC$，$DE=\sqrt{2}$，

$\therefore EH=DE\cdot\cos 45°=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=1$，

$\therefore DH=1$.

又$\because\angle DCE=30°$，

$\therefore HC=\frac{DH}{\tan 30°}=\sqrt{3}$，$CD=\frac{DH}{\sin 30°}=2$.

$\because\angle AEB=\angle CED=45°$，$\angle BAC=90°$，$BE=2\sqrt{2}$，

$\therefore AB=AE=2$，

$\therefore AC=AE+EH+HC=2+1+\sqrt{3}=3+\sqrt{3}$，

$\therefore S_{四边形ABCD}=\frac{1}{2}\times 2\times(3+\sqrt{3})+\frac{1}{2}\times 1\times(3+\sqrt{3})=\frac{3\sqrt{3}+9}{2}$.

点拨： 题目中给出的有直角和 30°，45°角，因此我们可以通过构造直角三角形，运用特殊角的三角函数值求出某些边的长，进而求出四边形 $ABCD$ 的面积.

9. 解：(1)将方程整理，得 $(c-a)x^2+2bx+(a+c)=0$，

则 $\Delta=(2b)^2-4(c-a)(a+c)=4(b^2+a^2-c^2)$.

$\because$ 方程有两个相等的实数根，

$\therefore\Delta=0$，即 $b^2+a^2=c^2$.

$\therefore\triangle ABC$ 为直角三角形.

(2)由 $3c=a+3b$，得 $a=3c-3b$. ①

将①代入 $a^2+b^2=c^2$，得 $(3c-3b)^2+b^2=c^2$.

$\therefore 4c^2-9bc+5b^2=0$，即 $(4c-5b)(c-b)=0$.

由①可知 $b\neq c$，

$\therefore 4c=5b$.

$\therefore b=\frac{4}{5}c$. ②

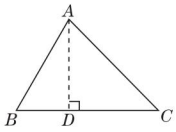
将②代入①，得 $a=\frac{3}{5}c$.

$\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\sin A+\sin B=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}=\frac{7}{5}$.

点拨： 解决本题的突破口是由一元二次方程根与判别式的关系得到一个关于 a,b,c 的等式. 从解题过程中可以看出，求三角函数值时，只分析出直角三角形中三边的比例关系即可求出其值.

第 14 招 “化斜为直”构造直角三角形的方法

1. 解：如图，过点 A 作 $AD\perp BC$，垂足为点 D.



（第 1 题）

设 $BD=x$，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，

$AD=BD\cdot\tan B=x\cdot\tan 60°=\sqrt{3}x$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 中，$\because\angle C=45°$，

$\therefore\angle CAD=90°-\angle C=45°$.

$\therefore\angle C=\angle CAD$.

$\therefore CD=AD=\sqrt{3}x$.

$\because BC=1+\sqrt{3}$，

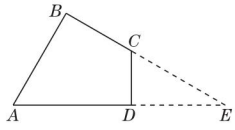
$\therefore\sqrt{3}x+x=1+\sqrt{3}$.

解得 $x=1$，即 $BD=1$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，$\because\cos B=\frac{BD}{AB}$，

$\therefore AB=\frac{BD}{\cos B}=\frac{1}{\cos 60°}=2$.

2. 解：如图，延长 BC，AD 交于点 E.



（第 2 题）

$\because\angle A=60°$，$\angle B=90°$，

$\therefore\angle E=30°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 中，$BE=\frac{AB}{\tan E}=\frac{2}{\tan 30°}=2\sqrt{3}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle CDE$ 中，$EC=2CD=2$，

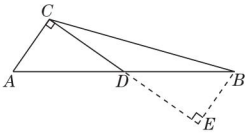
$\therefore DE=EC\cdot\cos 30°=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

$\therefore S_{四边形ABCD}=S_{\mathrm{Rt}\triangle ABE}-S_{\mathrm{Rt}\triangle ECD}=\frac{1}{2}AB\cdot BE-\frac{1}{2}CD\cdot ED=\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{3}-\frac{1}{2}\times 1\times\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

点拨： 本题看似是解四边形问题，但注意到 $\angle B=90°$，$\angle A=60°$，不难想到延长 BC，AD 交于点 E，构造出直角三角形，将所求问题转化为直角三角形问题来解决.

3. 解：如图，过点 B 作 $BE\perp CD$，交 CD 的延长线于点 E.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



(第3题)

∵ 点 D 是 AB 的中点,∴ $AD=DB$.

又∵ $\angle ACD=\angle BED=90°$, $\angle ADC=\angle BDE$,

∴ $\triangle ACD\cong\triangle BED$.

∴ $CD=DE$, $AC=BE$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle CBE$ 中, $\sin\angle BCE=\dfrac{BE}{BC}=\dfrac{1}{3}$,

∴ $BC=3BE$.

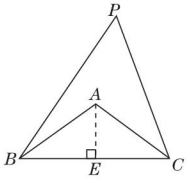
∴ $CE=\sqrt{BC^2-BE^2}=2\sqrt{2}BE$.

∴ $CD=\dfrac{1}{2}CE=\sqrt{2}BE=\sqrt{2}AC$.

∴ $\tan A=\dfrac{CD}{AC}=\dfrac{\sqrt{2}AC}{AC}=\sqrt{2}$.

点拨: 构造直角三角形,把所要求的量与已知量建立关系是解题的关键.

4. **解:** 如图,过点 A 作 $AE\perp BC$ 于点 E,



(第4题)

∵ $AB=AC=5$,

∴ $BE=\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{1}{2}\times8=4$, $\angle BAE=\dfrac{1}{2}\angle BAC$.

∵ $\angle BPC=\dfrac{1}{2}\angle BAC$,

∴ $\angle BPC=\angle BAE$.

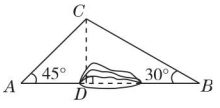
在 $\mathrm{Rt}\triangle BAE$ 中,由勾股定理得

$AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$,

∴ $\tan\angle BPC=\tan\angle BAE=\dfrac{BE}{AE}=\dfrac{4}{3}$.

第15招 利用三角函数解决实际问题

1. **解:** (1) 如图,过点 C 作 AB 的垂线 CD,垂足为点 D.



(第1题)

∵ $AB\perp CD$, $\sin B=\dfrac{CD}{BC}$, $BC=80$ 千米, $\angle B=30°$,

∴ $CD=BC\cdot\sin 30°=80\times\dfrac{1}{2}=40$(千米).

∵ $\sin A=\dfrac{CD}{AC}$, $\angle A=45°$,

∴ $AC=\dfrac{CD}{\sin 45°}=\dfrac{40}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=40\sqrt{2}$(千米).

∴ $AC+BC=40\sqrt{2}+80\approx40\times1.41+80=136.4$(千米).

答: 开通隧道前,汽车从 A 地到 B 地大约要走 136.4 千米.

(2)∵ $\cos B=\dfrac{BD}{BC}$, $BC=80$ 千米, $\angle B=30°$,

∴ $BD=BC\cdot\cos 30°=80\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=40\sqrt{3}$(千米).

∵ $\tan A=\dfrac{CD}{AD}$, $CD=40$ 千米, $\angle A=45°$,

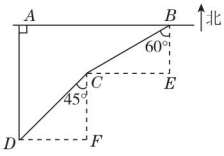
∴ $AD=\dfrac{CD}{\tan 45°}=\dfrac{40}{1}=40$(千米).

∴ $AB=AD+BD=40+40\sqrt{3}\approx40+40\times1.73=109.2$(千米).

∴ $AC+BC-AB\approx136.4-109.2=27.2$(千米).

答: 开通隧道后,汽车从 A 地到 B 地大约可以少走 27.2 千米.

2. **解:** 如图,过点 B 作 AB 的垂线,过点 C 作 AB 的平行线,两线交于点 E;过点 C 作 AB 的垂线,过点 D 作 AB 的平行线,两线交于点 F,则 $\angle E=\angle F=90°$,拦截点 D 处到公路的距离 $DA=BE+CF$.



(第2题)

在 $\mathrm{Rt}\triangle BCE$ 中,∵ $\angle E=90°$, $\angle CBE=60°$,

∴ $\angle BCE=30°$,

∴ $BE=\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{1}{2}\times1\,000=500$(米).

在 $\mathrm{Rt}\triangle CDF$ 中,

∵ $\angle F=90°$, $\angle DCF=45°$, $CD=1\,000$ 米,

∴ $CF=\dfrac{\sqrt{2}}{2}CD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times1\,000=500\sqrt{2}$(米).

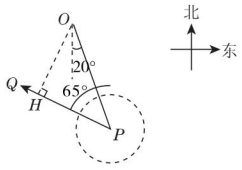
∴ $DA=BE+CF=(500+500\sqrt{2})$米,

即拦截点 D 处到公路的距离是 $(500+500\sqrt{2})$ 米.

3. **解:** (1) 100; $(60+10t)$

(2) 不会. 理由如下:过点 O 作 $OH\perp PQ$ 于点 H,如图.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



（第3题）

在 Rt△POH 中，$\angle OHP = 90°$，$\angle OPH = 65° - 20° = 45°$，$OP = 200$ km，

∴ $OH = PH = OP \cdot \sin \angle OPH = 200 \times \sin 45° = 100\sqrt{2} \approx 141$(km).

设经过 x h 时，台风中心从 P 移动到 H.

∵ 台风中心移动速度为20 km/h，

∴ $20x = 100\sqrt{2}$，∴ $x = 5\sqrt{2}$.

此时，受台风侵袭的圆形区域半径应为 $60 + 10 \times 5\sqrt{2} \approx 130.5$(km).

∵ 台风中心在整个移动过程中与城市 O 的最近距离 $OH \approx 141$ km，而台风中心从 P 移动到 H 时受侵袭的圆形区域半径约为 130.5 km，130.5 km < 141 km，

∴ 当台风中心移动到与城市 O 距离最近时，这股台风不会侵袭这座海滨城市.

第16招 应用建模思想的常见类型

1. 解：(1)四边形 $DHBG$ 是菱形. 理由如下：

∵ 四边形 $ABCD$，$FBED$ 是完全相同的矩形，

∴ $\angle A = \angle E = 90°$，$AD = ED$，$AB = EB$.

在△DAB 和△DEB 中，$\begin{cases} AD = ED, \\ \angle A = \angle E, \\ AB = EB, \end{cases}$

∴ △DAB≌△DEB(SAS)，

∴ $\angle ABD = \angle EBD$.

∵ $AB \parallel CD$，$DF \parallel BE$，

∴ 四边形 $DHBG$ 是平行四边形，$\angle HDB = \angle EBD$，

∴ $\angle HDB = \angle HBD$，

∴ $DH = BH$，

∴ 四边形 $DHBG$ 是菱形.

(2)设 $DH = BH = x$，则 $AH = 8 - x$，

在 Rt△ADH 中，$AD^2 + AH^2 = DH^2$，

即 $4^2 + (8 - x)^2 = x^2$，

解得 $x = 5$，即 $BH = 5$，

∴ 菱形 $DHBG$ 的面积为 $HB \cdot AD = 5 \times 4 = 20$.

点拨：建立方程模型，将 DH，BH 的长设为 x，由勾股定理列方程求得 BH 的长，进而求面积.

2. 不发生；在直角三角形中，斜边上的中线等于斜边的一半

点拨：连接 OP.

∵ $\angle AOB = 90°$，点 P 是线段 AB 的中点，

∴ $OP = \frac{1}{2}AB$.

∵ 木棍(AB)的长度不发生改变，

∴ 滑动过程中，点 P 到点 O 的距离不发生变化.

3. 解：(1)四边形 $EFGH$ 还是平行四边形.

理由如下：连接 AC.

∵ E，F 分别是 AB，BC 的中点，

∴ $EF \parallel AC$，$EF = \frac{1}{2}AC$.

∵ G，H 分别是 CD，AD 的中点，

∴ $GH \parallel AC$，$GH = \frac{1}{2}AC$，

∴ $EF \parallel GH$，$EF = GH$，

∴ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

(2)①当 $AC = BD$ 时，四边形 $EFGH$ 是菱形.

证明：由(1)可知四边形 $EFGH$ 是平行四边形，

易知 $FG = \frac{1}{2}BD$，$EF = \frac{1}{2}AC$，

∵ $AC = BD$，

∴ $FG = EF$，

∴ 四边形 $EFGH$ 是菱形.

②当 $AC \perp BD$ 时，四边形 $EFGH$ 是矩形.

点拨：由(1)可知 $EF \parallel AC$，且四边形 $EFGH$ 是平行四边形，

∵ $AC \perp BD$，

∴ $EF \perp BD$，

∵ G，F 分别是 CD，BC 的中点，

∴ $FG \parallel BD$.

∵ $EF \perp BD$，

∴ $EF \perp FG$，即 $\angle EFG = 90°$，

∴ 四边形 $EFGH$ 是矩形.

4. 解：(1)设每千克核桃应降价 x 元.

根据题意，得 $(60 - x - 40)\left(100 + \frac{x}{2} \times 20\right) = 2\,240$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

化简,得 $x^2-10x+24=0$.

解得 $x_1=4, x_2=6$.

答:每千克核桃应降价 4 元或 6 元.

(2)由(1)可知每千克核桃可降价 4 元或 6 元.

∵ 要尽可能让利于顾客,

∴ 每千克核桃应降价 6 元.

∴ 售价为 $60-6=54$(元),

∴ $\frac{54}{60}\times 100\%=90\%$.

答:该店应该按原售价的九折出售.

点拨:设出未知数,利用"平均每天的销售量 × 每千克的利润 =2 240"列出方程求解即可.

5. 解:(1)结合题目中图象可设日均销售量 p(桶)与销售单价 x(元)的函数表达式为 $p=kx+b(k\neq 0)$,

根据题意得 $\begin{cases}7k+b=500,\\12k+b=250,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-50,\\b=850.\end{cases}$

所以日均销售量 p(桶)与销售单价 x(元)的函数表达式为 $p=-50x+850$.

(2)所提问题不唯一.

示例:若该经营部希望日均获利 1 350 元,那么日均应销售多少桶水?

根据题意得 $(x-5)(-50x+850)-250=1\ 350$,

解得 $x_1=9, x_2=13$(不合题意,舍去),

当 $x=9$ 时,$p=-50x+850=400$.

答:若该经营部希望日均获利 1 350 元,那么日均应销售 400 桶水.

点拨:本题考查了一元二次方程及一次函数的应用,解题的关键是通过题目和图象建立合适的函数模型求解.

6. 解:(1)在直角坐标系中描出相应的点如图所示.

(2)由(1)中图可知,加热过程中 y 与 x 满足一次函数关系,设函数表达式为 $y=kx+b(k\neq 0)$,

将(0,24)的坐标代入,求得 $b=24$,

再将(2,56)的坐标代入,求得 $k=16$.

所以加热过程中 y 与 x 的函数表达式为 $y=16x+24$.

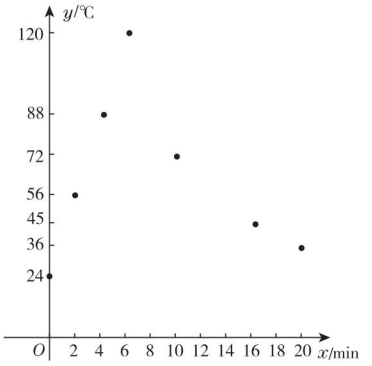
由(1)中图可知,加工过程中 y 与 x 满足反比例函数关系,设函数表达式为 $y=\frac{m}{x}(m\neq 0)$,

将(10,72)的坐标代入,得 $m=720$.

所以加工过程中 y 与 x 的函数表达式为 $y=\frac{720}{x}$.

(3)由于在加工过程中,$y=24$ 时,$x=\frac{720}{24}=30$,

所以每次加热后,进行加工的时间是 $30-6=24$(min).



(第 6 题)

7. 解:(1)库存原料为 $2\times 60=120$(吨),根据题意可知 y 与 x 之间的函数表达式为 $y=\frac{120}{x}$.

因为生产能力提高,每小时消耗的原料大于原计划消耗的原料,所以自变量的取值范围是 $x>2$.

(2)根据题意,得 $y\geqslant 24$,即 $\frac{120}{x}\geqslant 24$.

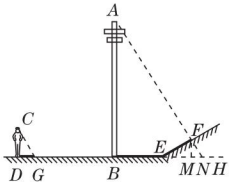
解不等式,得 $x\leqslant 5$,

即每小时消耗的原料应控制在大于 2 吨且不大于 5 吨的范围内.

点拨:本题考查反比例函数的应用,解题的关键是正确建立反比例函数模型并求出反比例函数表达式.

8. 8.0 m **点拨**:如图,延长 AF 交 BH 于点 N,过点 F 作 $FM\perp BH$ 于点 M,∵ $\angle FEH=30°$,$EF=1.7$ m,∴ $FM=0.85$ m,∴ $EM\approx 1.47$ m. 由题易知 $\triangle FMN\backsim\triangle CDG$,∴ $\frac{FM}{CD}=\frac{MN}{DG}$,∵ $CD=1.6$ m,$DG=0.8$ m,∴ $MN=0.425$ m,∵ $BE=2.1$ m,∴ $BN\approx 2.1+1.47+0.425=3.995$(m),又易知 $\frac{AB}{BN}=\frac{CD}{DG}$,∴ $\frac{AB}{3.995}\approx\frac{1.6}{0.8}$,

解得 $AB\approx 8.0$ m.



(第 8 题)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

典点

练准知识 练通考点
练透方法 练出高分





提分一定有方法！

绿色印刷产品

关注荣德基微信公众号，获取新资讯。

荣德基官方网站：http://www.rudder.com.cn
荣德基天猫旗舰店：http://rongdeji.tmall.com
客服热线：182 1039 5892

荣德基
初中频道

本书导学号
5390328

ISBN 978-7-5450-6629-6
定价：44.90元

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料