教辅资料站

电子教辅　试卷练习
知识总结　备课资源

扫码关注获取更多学习资料

荣德基 主编

典中点®

综合应用创新题 典中点

按课时编写



九年级数学 上

（XJ版）

按80:1配赠教师用书

登录荣德基官方网站
免费下载课件资源



典中点·不简单　你·不平凡

- 方法技巧44招
- 典型易错题29道
- 培优拔尖题55道
- 高频考点15个

典中点微课堂　扫一扫

全书微课精彩呈现
创新题目 讲透方法

陕西新华出版传媒集团
陕西人民教育出版社

练透方法 练出高分

本书方法规律索引

方法规律

频次	方法名称	首次页码
	思想方法	
4	分类讨论思想	2
6	数形结合思想	5
3	整体思想	25
2	转化思想	44
4	方程思想	45
1	函数思想	70
1	用样本估计总体的思想	99
	解题方法	
1	根据反比例函数的增减性比较函数值大小的方法	5
2	特殊值法	5
3	待定系数法	13
1	判别一元二次方程的"两方法"	20
3	直接开平方法	22
7	配方法	24
3	换元法	25
3	公式法	26
5	因式分解法	27
1	提公因式法	27
1	十字相乘法	27
1	类比法	28
1	构造法	34
1	整体换元法	34
1	降次换元法	34
1	倒数换元法	34
1	判断四条线段是否是成比例线段的方法	46
2	参数法	47
1	定义法	47
1	利用平行线证比例式或等积式的方法	50
1	等线段代换法	50
1	等积代换法	50
1	等比例代换法	50
1	平行法	50
2	等比例过渡法	50
1	确定相似三角形的对应边和对应角的方法	53
1	三点定型法	57
1	相似图形的周长、面积的计算方法	62
1	利用相似三角形解决实际问题的方法	65
1	求锐角的正弦值的方法	74
1	折叠法	75
1	记忆特殊角的正弦值的两种方法	76
1	记忆特殊角的余弦值的两种方法	77
1	求锐角的三角函数值的三种方法	79
2	化斜为直法	84
1	解答含有仰角、俯角问题的方法	85
1	割补法	93

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

荣德基 主编

综合应用创新题 典中点

本册主编：程小恒



九年级数学 上

（XJ版）

陕西新华出版传媒集团
陕西人民教育出版社
·西安·

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



极速提分20招

书山有路 · 训练有法

思想 方法 技巧 应用

四类绝招速解百题，招招见效助拿高分

第 1 招　反比例函数与一次函数的综合应用
第 2 招　反比例函数与几何的综合应用
第 3 招　巧用一元二次方程的定义及相关概念求字母或代数式的值
第 4 招　配方法的七种常见应用
第 5 招　一元二次方程的五种解法
第 6 招　根的判别式的八种常见应用
第 7 招　一元二次方程与三角形综合的四种类型
第 8 招　根与系数的关系的九种应用
第 9 招　一元二次方程中常见易错易混问题归类
第10招　降次思想在求代数式的值和解方程中的应用
第11招　成比例线段的证明和计算的五种常用作辅助线的方法
第12招　巧作平行线构造相似三角形
第13招　证比例式或等积式的七种技巧
第14招　求三角函数值的常见技巧
第15招　巧用构造法求几种特殊角的三角函数值
第16招　解直角三角形的八种常见类型
第17招　“化斜为直”构造直角三角形的方法
第18招　利用三角函数解实际问题
第19招　样本估计总体常见应用
第20招　建模思想应用的常见类型归类



提分一定有方法！

内容及详解请见夹册《极速提分法》

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

目录 CONTENTS

第1章 反比例函数

1.1 反比例函数 …… 1

1.2 反比例函数的图象与性质

第1课时 反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k>0)$ 的图象与性质 …… 3

第2课时 反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k<0)$ 的图象与性质 …… 5

第3课时 反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$ 中 k 的性质 …… 7

第4课时 **反比例函数的图象与性质的常见应用题型** …… 9

阶段核心归类

用反比例函数比例系数 k 的几何意义解与面积相关的应用 …… 11

1.3 反比例函数的应用

第1课时 建立反比例函数模型解实际问题 …… 13

第2课时 建立反比例函数模型解跨学科问题 …… 15

阶段核心方法

求反比例函数表达式的六种方法 …… 17

全章热门考点整合应用 …… 18

第2章 一元二次方程

2.1 一元二次方程 …… 20

2.2 一元二次方程的解法

第1课时 直接开平方法解方程 …… 22

第2课时 配方法解方程 …… 24

第3课时 公式法解方程 …… 26

第4课时 因式分解法解方程 …… 27

2.3 一元二次方程根的判别式 …… 29

*2.4 一元二次方程根与系数的关系 …… 31

阶段核心方法

一元二次方程的九种解法 …… 33

2.5 一元二次方程的应用

第1课时 列一元二次方程解百分率问题 … 35

第2课时 列一元二次方程解几何问题 … 36

第3课时 列一元二次方程解一般问题 … 37

阶段核心归类

一元二次方程解实际问题的十种常见应用 …… 39

全章热门考点整合应用 …… 42

第3章 图形的相似

3.1 比例线段

第1课时 比例的基本性质 …… 45

第2课时 成比例线段 …… 46

3.2 平行线分线段成比例 …… 48

阶段核心技巧

平行线分线段成比例常见应用的六种技巧 …… 50

3.3 相似图形 …… 51

3.4 相似三角形的判定与性质

第1课时 利用平行线判定两个三角形相似 …… 53

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

目 录 CONTENTS

第 2 课时　利用角的关系判定两个三角形相似 …… 55
第 3 课时　利用边角关系判定两个三角形相似 …… 57
第 4 课时　利用三边关系判定两个三角形相似 …… 59
第 5 课时　**相似三角形的判定的应用** …… 61
第 6 课时　相似三角形的性质 …… 62
阶段核心归类
巧用“基本图形”探索相似条件 …… 64
3.5　相似三角形的应用 …… 65
3.6　位　似
第 1 课时　位似图形 …… 67
第 2 课时　平面直角坐标系中的位似变换 … 69
阶段核心归类
巧用位似解三角形中的内接多边形问题 …… 71
全章热门考点整合应用 …… 72
第 4 章　锐角三角函数
4.1　正弦和余弦
第 1 课时　正弦函数 …… 74
第 2 课时　正弦函数的计算 …… 76
第 3 课时　余弦函数 …… 77
4.2　正　切 …… 79
阶段核心归类
求锐角三角函数值的七种常见题型 …… 81
4.3　解直角三角形 …… 83
4.4　解直角三角形的应用
第 1 课时　视角在测量中的应用 …… 85
第 2 课时　用解直角三角形解坡角(坡度)、方位角的应用 …… 87
第 3 课时　解直角三角形在实际中的一般应用 …… 89
阶段核心归类
构造三角函数基本图形解实际问题的四种数学模型 …… 91
全章热门考点整合应用 …… 92
第 5 章　用样本推断总体
5.1　总体平均数与方差的估计 …… 94
5.2　统计的简单应用 …… 96
阶段核心归类
用样本估计总体分析数据 …… 98
全章热门考点整合应用 …… 99
达标检测卷
第 1 章达标检测卷 …… 101
第 2 章达标检测卷 …… 105
第 3 章达标检测卷 …… 109
第 4 章达标检测卷 …… 113
第 5 章达标检测卷 …… 117
期末达标检测卷 …… 121
参考答案及点拨 …… 125

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

反比例函数

1.1 反比例函数

小贴士："*"表示该题的难度较大，综合性或技巧性较强。

名师点金

1. 反比例函数有三种表达形式：(1) $y=\frac{k}{x}$；(2) $y=kx^{-1}$；(3) $xy=k$，其中 k 是常数，且 $k\neq0$.

2. 判断一个函数是否是反比例函数，先看它是否符合反比例函数的三种表达形式之一，再看 k 是否是常数，且 $k\neq0$.

1 夯实基础·逐点练 ☞(答案见125页)

知识点1 反比例函数的定义

1. 下列函数中，表示 y 是 x 的反比例函数的是(　　)

A. $y=\sqrt{3}x$　B. $y=\frac{a}{x}$　C. $y=\frac{1}{x^2}$　D. $y=\frac{1}{3x}$

2. 函数 $y=-\frac{1}{4x}$ 的比例系数是(　　)

A. 4　B. -4　C. $\frac{1}{4}$　D. $-\frac{1}{4}$

3. 若 $y=\frac{k(k-3)}{x}$ 是反比例函数，则 k 必须满足(　　)

A. $k\neq3$

B. $k\neq0$

C. $k\neq3$ 或 $k\neq0$

D. $k\neq3$ 且 $k\neq0$

4. 下列说法不正确的是(　　)

A. 在 $y=\frac{1}{x}-1$ 中，$y+1$ 与 x 成反比例

B. 在 $xy=-2$ 中，y 与 $\frac{1}{x}$ 成正比例

C. 在 $y=\frac{1}{2x^2}$ 中，y 与 x 成反比例

D. 在 $xy=-3$ 中，y 与 x 成反比例

知识点2 确定反比例函数表达式

5. 【中考·安徽】已知点 $A(1,-3)$ 关于 x 轴的对称点 A' 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象上，则实数 k 的值为(　　)

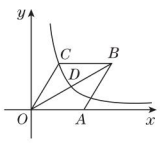
A. 3　B. $\frac{1}{3}$　C. -3　D. $-\frac{1}{3}$

6. 已知 y 是 x 的反比例函数，下面的表格给出了 x 与 y 的一些值，则☆和¤所表示的数分别为(　　)

x	☆	-1	$\frac{1}{2}$
y	$\frac{1}{3}$	2	¤

A. 6，2　B. -6，2　C. 6，-2　D. -6，-4

*7. 【中考·滨州】如图，在平面直角坐标系中，菱形 $OABC$ 的边 OA 在 x 轴的正半轴上，反比例函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 的图象经过对角线 OB 的中点 D 和顶点 C. 若菱形 $OABC$ 的面积为 12，则 k 的值为(　　)



(第7题)

A. 6　B. 5　C. 4　D. 3

知识点3 建立反比例函数的模型

8. 【中考·自贡】回顾初中阶段函数的学习过程，从函数表达式到函数图象，再利用函数图象研究函数的性质，这种研究方法主要体现的数学思想是(　　)

A. 数形结合　B. 类比

C. 演绎　D. 公理化

9. 下列各组的两个变量满足反比例关系的是(　　)

A. 三角形面积一定时，它的一边长与该边上的高

B. 等腰三角形的周长一定时，它的底边长与腰长

C. 圆的周长与它的半径

D. 圆的面积与它的半径

10. 购买 x 只茶杯需 15 元，则购买一只茶杯的价格 y 与 x 的函数表达式为(　　)

A. $y=\frac{15}{x}$(x 取实数)

B. $y=\frac{15}{x}$(x 取整数)

C. $y=\frac{15}{x}$(x 取自然数)

D. $y=\frac{15}{x}$(x 取正整数)

易错点 忽视反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 中 k 不能为 0

11. 【中考·安顺】若 $y=(a+1)x^{a^2-2}$ 是反比例函数，则 a 的取值为(　　)　【导学号:4885393】

A. 1　B. -1

C. ±1　D. 任意实数

趣味数学　怎样改变"女性跑得比男性慢"的说法：若比较两性赛跑的速度时，加入"身高"的因素，会对选手的表现产生什么变化？(待续)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法·提升练 ☞（答案见125页）

考查角度1 利用数量关系信息求函数表达式

12. 已知 $y=y_1+y_2$，y_1 与 x^2 成正比例函数关系，y_2 与 x 成反比例函数关系，且当 $x=1$ 时，$y=3$；当 $x=-1$ 时，$y=1$.

（1）求 y 与 x 之间的函数表达式；

（2）当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，求 y 的值.

考查角度2 利用图表信息求函数表达式（分类讨论思想）

13. 已知 y 是关于 x 的函数，下表给出了 x 与 y 的一些值.

x	-3	-2		1		3	4
y		$\frac{3}{2}$	3		$-\frac{3}{2}$		$-\frac{3}{4}$

请探索：

（1）y 是 x 的正比例函数还是反比例函数？

（2）写出该函数的表达式，并将表格补充完整.

Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞（答案见125页）

拔尖角度1 利用反比例函数解电学问题

14. 在直流电路中，电流 I（A）、电阻 R（Ω）、电压 U（V）之间满足关系式 $U=IR$，已知 $U=220$ V.

（1）请写出电流 I（A）关于电阻 R（Ω）的函数表达式，并判断它是我们学过的哪种函数.

（2）利用写出的函数表达式完成下表：

R/Ω	20	40	60	80	100
I/A					

（3）当 R 越来越大时，I 怎样变化？当 R 越来越小呢？

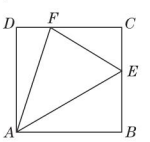
拔尖角度2 利用反比例函数解与几何相关问题

15. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长是2，E，F 分别在 BC，CD 两边上，且 E，F 与 BC，CD 两边的端点不重合，$\triangle AEF$ 的面积是1，设 $BE=x$，$DF=y$.

（1）求 y 关于 x 的函数表达式.

（2）判断在（1）中，y 关于 x 的函数是什么函数？

（3）写出此函数自变量 x 的取值范围.



（第15题）

微信公众号 教辅资料站

趣味数学

体育专栏作家按照这个想法，计算出男子、女子一百米世界纪录保持者的每秒身高比（速度除以其身高）分别为5.55和5.64. 因此，他的结论是跑得最快的女人比跑得最快的男人还要快.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1.2　反比例函数的图象与性质

第 1 课时　反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（$k>0$）的图象与性质

名师点金

画反比例函数图象和画一次函数图象的方法相同，即分为列表、描点、连线三个步骤，画图象时要注意：
(1)列表时，自变量的取值可选取绝对值相等而符号相反的数值，这样既可简化计算，又便于描点.
(2)选取的点越多，画的图象就越准确.
(3)连线时不能连成折线，需用光滑的曲线连接各点.

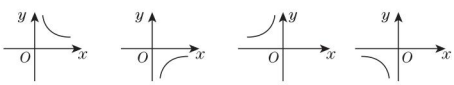
1 夯实基础·逐点练 ☞(答案见 125 页)

知识点 1　反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k>0)$ 的图象

1. 【中考·柳州】反比例函数 $y=\frac{2}{x}$ 的图象位于(　　)

A. 第一、三象限　　B. 第二、三象限
C. 第一、二象限　　D. 第二、四象限

2. $y=\frac{1}{x}(x<0)$ 的图象是(　　)



A　　B　　C　　D

3. 【中考·海南】如果反比例函数 $y=\frac{a-2}{x}$（a 是常数）的图象在第一、三象限，那么 a 的取值范围是(　　)

A. $a<0$　　B. $a>0$　　C. $a<2$　　D. $a>2$

4. 已知反比例函数 $y=\frac{2}{x}$，则下列各点在这个反比例函数的图象上的是(　　)

A. $(-2,1)$　　B. $(1,-2)$
C. $(-2,-2)$　　D. $(1,2)$

5. 对于反比例函数 $y=\frac{3}{x}$ 的图象的对称性，下列叙述错误的是(　　)

A. 关于原点对称
B. 关于直线 $y=x$ 对称
C. 关于直线 $y=-x$ 对称
D. 关于 x 轴对称

*6. 【中考·西藏】已知点 A 是直线 $y=2x$ 与双曲线 $y=\frac{m+1}{x}$（m 为常数）一支的交点，过点 A 作 x 轴的垂线，垂足为 B，且 $OB=2$，则 m 的值为(　　)

A. -7　　B. -8　　C. 8　　D. 7

知识点 2　反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k>0)$ 的性质

7. 已知反比例函数 $y=\frac{4}{x}$，下列结论中不正确的是(　　)

A. 图象必经过点 $(1,4)$
B. 在第三象限内，y 随 x 的增大而减小
C. 图象是轴对称图形，且对称轴是 y 轴
D. 图象是中心对称图形，且对称中心是坐标原点

8. 【中考·赤峰】点 $A(1,y_1)$，$B(3,y_2)$ 是反比例函数 $y=\frac{9}{x}$ 图象上的两点，则 y_1，y_2 的大小关系是(　　)

A. $y_1>y_2$　　B. $y_1=y_2$
C. $y_1<y_2$　　D. 不能确定

*9. 【中考·黑龙江】已知反比例函数 $y=\frac{6}{x}$，当 $1<x<3$ 时，y 的最小整数值是(　　)

A. 3　　B. 4
C. 5　　D. 6

10. 【中考·天津】若点 $A(x_1,-6)$，$B(x_2,-2)$，$C(x_3,2)$ 在反比例函数 $y=\frac{12}{x}$ 的图象上，则 x_1，x_2，x_3 的大小关系是(　　)

A. $x_1<x_2<x_3$　　B. $x_2<x_1<x_3$
C. $x_2<x_3<x_1$　　D. $x_3<x_2<x_1$

易错点 忽略点在“同一象限”这一条件运用性质比较大小出错

11. 反比例函数 $y=\frac{3}{x}$ 图象上三个点的坐标为 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，(x_3,y_3)，若 $x_1<x_2<0<x_3$，则 y_1，y_2，y_3 的大小关系是(　　)

A. $y_1<y_2<y_3$　　B. $y_2<y_1<y_3$
C. $y_2<y_3<y_1$　　D. $y_1<y_3<y_2$

趣味数学　在清代乾隆五十年的时候，乾隆皇帝在乾清宫摆下千叟宴，三千九百多位老年人应邀参加宴会. 其中有一位客人的年纪特别大，多大呢？（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

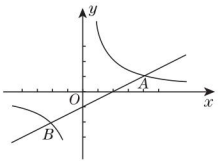
Ⅱ 整合方法·提升练 ☞（答案见125页）

考查角度1 利用反比例函数的图象与性质说明函数表达式间的关系

12. 【中考·常德】如图，已知一次函数 $y_1=k_1x+b$（$k_1\neq0$）与反比例函数 $y_2=\frac{k_2}{x}$（$k_2\neq0$）的图象交于 $A(4,1)$，$B(n,-2)$ 两点.

（1）求一次函数与反比例函数的表达式；

（2）请根据图象直接写出 $y_1<y_2$ 时 x 的取值范围.



（第12题）

考查角度2 利用反比例函数的图象与性质说明图象的位置

13. 设一次函数 $y=kx+b$（k，b 是常数，$k\neq0$）的图象过 $A(1,3)$，$B(-1,-1)$ 两点.

（1）求该一次函数的表达式；

（2）若点 $(2a+2,a)$ 在该一次函数的图象上，求 a 的值；

（3）已知点 $C(x_1,y_1)$ 和点 $D(x_2,y_2)$ 在该一次函数的图象上，设 $m=(x_1-x_2)(y_1-y_2)$，判断反比例函数 $y=\frac{m+1}{x}$ 的图象所在的象限，说明理由.

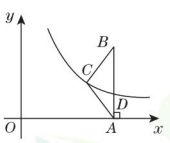
Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞（答案见126页）

拔尖角度1 利用反比例函数图象上点的坐标性质求线段长

14. 【中考·苏州】如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AC=BC$，$AB\perp x$ 轴，垂足为 A. 反比例函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 的图象经过点 C，交 AB 于点 D. 已知 $AB=4$，$BC=\frac{5}{2}$.

（1）若 $OA=4$，求 k 的值；

（2）连接 OC，若 $BD=BC$，求 OC 的长.



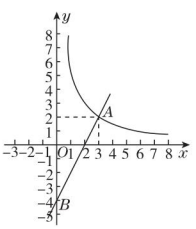
（第14题）

拔尖角度2 利用反比例函数图象的特征求不等式的解集问题

15. 【中考·湘西州】如图，一次函数 $y=kx+b$ 的图象与反比例函数 $y=\frac{m}{x}$ 的图象在第一象限交于点 $A(3,2)$，与 y 轴的负半轴交于点 B，且 $OB=4$.

（1）求函数 $y=\frac{m}{x}$ 和 $y=kx+b$ 的表达式；

（2）结合图象直接写出不等式组 $0<\frac{m}{x}<kx+b$ 的解集.



（第15题）

微信公众号 教辅资料站

趣味数学

乾隆皇帝说了，但没有明说，而是出了一副对联的上联：花甲重开，外加三七岁月. 大臣纪昀在一旁凑热闹，用下联说出了老人的年龄：古稀双庆，内多一个春秋.（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 2 课时　反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（$k<0$）的图象与性质

名师点金

根据反比例函数的增减性比较函数值大小的方法：

利用反比例函数的增减性来比较函数值的大小时，如果给定的两点或几点能够确定在同一象限的分支上时，可以直接利用反比例函数的性质解答；如果给定的两点或几点不能够确定在同一象限的分支上时，则不能使用反比例函数的性质，需要根据函数的图象和点的位置用**数形结合思想**来判断或利用**特殊值法**即通过求值来进行比较.

Ⅰ 夯实基础 · 逐点练

☞（答案见 126 页）

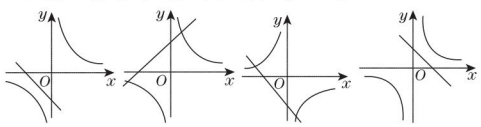
知识点 1　反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k<0)$的图象

1. 【中考 · 营口】反比例函数 $y=-\frac{4}{x}(x>0)$的图象位于(　　)

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

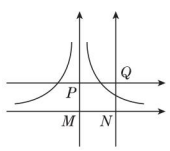
2. 【中考 · 宁夏】函数 $y=\frac{k}{x}$和 $y=kx+2(k\neq0)$在同一直角坐标系中的大致图象是(　　)



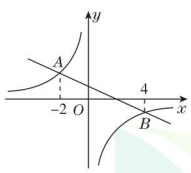
A　　B　　C　　D

***3.** 【中考 · 河北】如图，函数 $y=\begin{cases}\frac{1}{x}(x>0),\\-\frac{1}{x}(x<0)\end{cases}$的图象所在坐标系的原点是(　　)

A. 点 M　　B. 点 N　　C. 点 P　　D. 点 Q



（第 3 题）



（第 4 题）

4. 【中考 · 泸州】如图，一次函数 $y_1=ax+b$ 和反比例函数 $y_2=\frac{k}{x}$的图象相交于 A,B 两点，则使 $y_1>y_2$ 成立的 x 的取值范围是(　　)

A. $-2<x<0$ 或 $0<x<4$

B. $x<-2$ 或 $0<x<4$

C. $x<-2$ 或 $x>4$

D. $-2<x<0$ 或 $x>4$

知识点 2　反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$的性质

5. 【中考 · 上海】下列函数中，函数值 y 随自变量 x 的值增大而增大的是(　　)

A. $y=\frac{x}{3}$　　B. $y=-\frac{x}{3}$　　C. $y=\frac{3}{x}$　　D. $y=-\frac{3}{x}$

6. 【中考 · 天门】反比例函数 $y=-\frac{3}{x}$，下列说法不正确的是(　　)

A. 图象经过点 $(1,-3)$

B. 图象位于第二、四象限

C. 图象关于直线 $y=x$ 对称

D. y 随 x 的增大而增大

7. 【中考 · 天津】若点 $A(-3,y_1)$，$B(-2,y_2)$，$C(1,y_3)$都在反比例函数 $y=-\frac{12}{x}$的图象上，则 y_1，y_2，y_3 的大小关系是(　　)

A. $y_2<y_1<y_3$　　B. $y_3<y_1<y_2$

C. $y_1<y_2<y_3$　　D. $y_3<y_2<y_1$

8. 【中考 · 江西】已知正比例函数 y_1 的图象与反比例函数 y_2 的图象相交于点 $A(2,4)$，下列说法正确的是(　　)

A. 反比例函数 y_2 的表达式是 $y_2=-\frac{8}{x}$

B. 两个函数图象的另一交点坐标为 $(2,-4)$

C. 当 $x<-2$ 或 $0<x<2$ 时，$y_1<y_2$

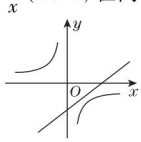
D. 正比例函数 y_1 与反比例函数 y_2 都随 x 的增大而增大

易错点　易混淆双函数图象确定待定系数的范围

9. 一次函数 $y=x+b$ 与反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$在同一直角坐标系内的大致图象如图所示，则 k,b 的取值范围是(　　)

A. $k>0,b>0$　　B. $k<0,b>0$

C. $k<0,b<0$　　D. $k>0,b<0$



（第 9 题）

趣味数学　这位老人的岁数究竟是多少？（答案：141 岁）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞（答案见126页）

考查角度1 利用反比例函数的图象说明函数性质

10. 已知函数 $y=-\frac{3}{x}$.

（1）画出函数的图象；

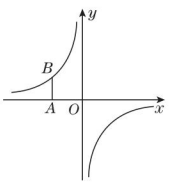
（2）当 $2\leqslant x\leqslant 4$ 时，求函数值 y 的取值范围.

考查角度2 利用反比例函数的图象与性质说明点的位置

11. 【中考 · 随州】如图，在平面直角坐标系中，将坐标原点 O 沿 x 轴向左平移 2 个单位长度得到点 A，过点 A 作 y 轴的平行线交反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象于点 B，$AB=\frac{3}{2}$.

（1）求反比例函数的表达式；

（2）若 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$ 是该反比例函数图象上的两点，且 $x_1<x_2$ 时，$y_1>y_2$，指出点 P，Q 各位于哪个象限，并简要说明理由.



（第11题）

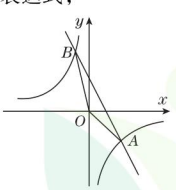
Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞（答案见127页）

拔尖角度1 利用反比例函数的图象与性质求交点图形的面积

12. 【中考 · 广安】如图，已知 $A(n,-2)$，$B(-1,4)$ 是一次函数 $y=kx+b$ 和反比例函数 $y=\frac{m}{x}$ 的图象的两个交点.

（1）求反比例函数和一次函数的表达式；

（2）求 $\triangle AOB$ 的面积.



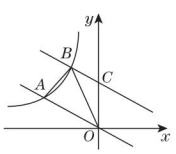
（第12题）

拔尖角度2 利用反比例函数的图象与性质求平移过程中直线的表达式

13. 【中考 · 湖北】如图，在平面直角坐标系中，直线 $y=-\frac{1}{2}x$ 与反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq 0)$ 在第二象限内的图象相交于点 $A(m,1)$.

（1）求反比例函数的表达式；

（2）将直线 $y=-\frac{1}{2}x$ 向上平移后与反比例函数图象在第二象限内交于点 B，与 y 轴交于点 C，且 $\triangle ABO$ 的面积为 $\frac{3}{2}$，求直线 BC 的表达式.



（第13题）

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 3 课时　反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（$k\neq0$）中 k 的性质

名师点金

反比例函数的比例系数 k 的几何意义

过反比例函数图象上的任意一点 P 作 x 轴、y 轴的垂线，则可得：(1)两条垂线与 x 轴、y 轴围成的矩形的面积等于 $|k|$；(2)所作垂线（x 轴（或 y 轴）与线段 OP 围成的三角形的面积等于 $\frac{|k|}{2}$.

常应用该几何意义来确定反比例函数的表达式或进行相应面积的计算、比较等.

Ⅰ 夯实基础 · 逐点练

☞（答案见 127 页）

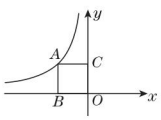
知识点 1　求反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（$k\neq0$）的表达式

1. 若双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 与直线 $y=2x+1$ 的一个交点的横坐标为 -1，则 k 的值为（　　）

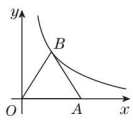
A. -1　　B. 1　　C. -2　　D. 2

2. 【中考 · 铜仁】如图，正方形 $ABOC$ 的边长为 2，反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象经过点 A，则 k 的值是（　　）

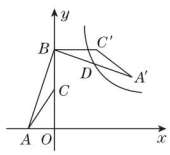
A. 2　　B. -2　　C. 4　　D. -4



（第 2 题）



（第 3 题）



（第 4 题）

3. 如图，点 A 的坐标是 $(2,0)$，$\triangle ABO$ 是等边三角形，点 B 在第一象限. 若反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象经过点 B，则 k 的值是（　　）

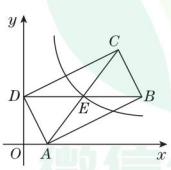
A. 1　　B. 2　　C. $\sqrt{3}$　　D. $2\sqrt{3}$

***4.** 【中考 · 济宁】如图，点 A 的坐标是 $(-2,0)$，点 B 的坐标是 $(0,6)$，C 为 OB 的中点，将 $\triangle ABC$ 绕点 B 逆时针旋转 90° 后得到 $\triangle A'BC'$. 若反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象恰好经过 $A'B$ 的中点 D，则 k 的值是（　　）

A. 9　　B. 12　　C. 15　　D. 18

***5.** 如图，在平面直角坐标系中，矩形 $ABCD$ 的顶点 A，D 分别在 x 轴、y 轴上，对角线 $BD\parallel x$ 轴，反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k>0,x>0)$ 的图象经过矩形对角线的交点 E. 若点 $A(2,0)$，$D(0,4)$，则 k 的值为（　　）

A. 16　　B. 20　　C. 32　　D. 40

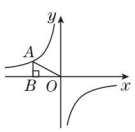


（第 5 题）

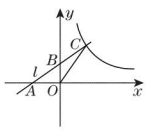
知识点 2　反比例函数中 k 的几何性质

6. 【中考 · 毕节】如图，点 A 为反比例函数 $y=-\frac{4}{x}$ 图象上一点，过点 A 作 $AB\perp x$ 轴于点 B，连接 OA，则 $\triangle ABO$ 的面积为（　　）

A. -4　　B. 4　　C. -2　　D. 2



（第 6 题）



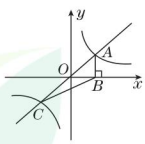
（第 7 题）

7. 【中考 · 莱芜】如图，直线 l 与 x 轴，y 轴分别交于 A，B 两点，且与反比例函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 的图象交于点 C，若 $S_{\triangle AOB}=S_{\triangle BOC}=1$，则 $k=$（　　）

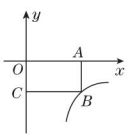
A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

8. 【中考 · 凉山州】如图，正比例函数 $y=kx$ 与反比例函数 $y=\frac{4}{x}$ 的图象相交于 A，C 两点，过点 A 作 x 轴的垂线交 x 轴于点 B，连接 BC，则 $\triangle ABC$ 的面积等于（　　）

A. 8　　B. 6　　C. 4　　D. 2



（第 8 题）



（第 9 题）

易错点　已知图形面积求反比例函数比例系数 k 的值时，易忽视图象的位置

9. 如图，面积为 5 的矩形 $OABC$ 的一个顶点 B 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象上，另三点在坐标轴上，则 $k=$ _____.

趣味数学　1822 年傅立叶发现某些函数可用曲线表示，也可用一个式子表示，或用多个式子表示，从而结束了函数概念是否以唯一一个式子表示的争论，把对函数的认识又推到了一个新的层次.（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法·提升练 ☞（答案见128页）

考查角度1 利用变量的对应性求反比例函数的表达式

10. 【中考·吉林】已知 y 是 x 的反比例函数，并且当 $x=2$ 时，$y=6$.

（1）求 y 关于 x 的函数表达式；

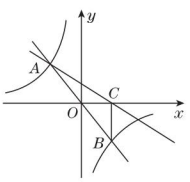
（2）当 $x=4$ 时，求 y 的值.

考查角度2 利用反比例函数的对称性求表达式

11. 【中考·东营】如图，在平面直角坐标系中，直线 $y=mx$ 与双曲线 $y=\frac{n}{x}$ 相交于 $A(-2,a)$、B 两点，$BC\perp x$ 轴，垂足为 C，$\triangle AOC$ 的面积是2.

（1）求 m，n 的值；

（2）求直线 AC 的表达式.



（第11题）

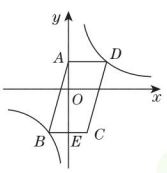
Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞（答案见128页）

拔尖角度1 利用反比例函数的几何性质解与几何图形相关的问题

12. 【中考·菏泽】如图，$\square ABCD$ 中，顶点 A 的坐标是 $(0,2)$，$AD\parallel x$ 轴，BC 交 y 轴于点 E，顶点 C 的纵坐标是 -4，$\square ABCD$ 的面积是24，反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象经过点 B 和 D，求：

（1）反比例函数的表达式；

（2）AB 所在直线的表达式.



（第12题）

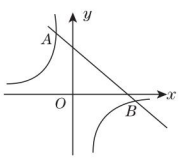
拔尖角度2 利用反比例函数的几何性质解与不等式相关的问题

13. 【中考·广东】如图，一次函数 $y=k_1x+b$ 的图象与反比例函数 $y=\frac{k_2}{x}$ 的图象相交于 A，B 两点，其中点 A 的坐标为 $(-1,4)$，点 B 的坐标为 $(4,n)$.

（1）根据图象，直接写出满足 $k_1x+b>\frac{k_2}{x}$ 的 x 的取值范围；

（2）求这两个函数的表达式；

（3）点 P 在线段 AB 上，且 $S_{\triangle AOP}:S_{\triangle BOP}=1:2$，求点 P 的坐标.



（第13题）

微信公众号 教辅资料站

趣味数学

1823年柯西从定义变量开始给出了函数的定义，同时指出，虽然无穷级数是规定函数的一种有效方法，但是对函数来说不一定要有表达式.（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 4 课时　反比例函数的图象与性质的常见应用题型 ☞(答案见 128 页)

名师点金

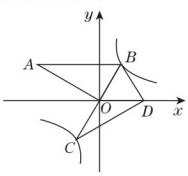
反比例函数图象的位置及增减性由 k 的符号决定,$|k|$ 等于图象上一点向两坐标轴所作垂线段与两坐标轴所围成的矩形的面积,中考时常将反比例函数图象和性质与其他函数、几何图形综合在一起进行考查,是中考压轴题中一个重要的命题方向.

题型 1　利用反比例函数解与图形的旋转相关的问题

1. 【中考·大连】如图,在平面直角坐标系中,$\angle AOB = 90°$,$AB \parallel x$ 轴,$OB = 2$,双曲线 $y = \frac{k}{x}$ 经过点 B,将 $\triangle AOB$ 绕点 B 逆时针旋转,使点 O 的对应点 D 落在 x 轴的正半轴上. 若 AB 的对应线段 CB 恰好经过点 O.

(1)求点 B 的坐标和双曲线对应的函数表达式;

(2)判断点 C 是否在双曲线上,并说明理由.



(第 1 题)

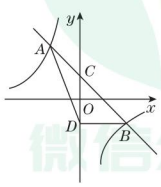
题型 2　利用反比例函数解与图形的轴对称相关的问题

2. 【中考·甘肃】如图,一次函数 $y = kx + b$ 的图象与反比例函数 $y = \frac{m}{x}$ 的图象相交于 $A(-1, n)$,$B(2, -1)$ 两点,与 y 轴相交于点 C.

(1)求一次函数与反比例函数的表达式;

(2)若点 D 与点 C 关于 x 轴对称,求 $\triangle ABD$ 的面积;

(3)若 $M(x_1, y_1)$,$N(x_2, y_2)$ 是反比例函数 $y = \frac{m}{x}$ 图象上的两点,当 $x_1 < x_2 < 0$ 时,比较 y_2 与 y_1 的大小关系.



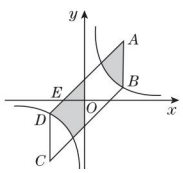
(第 2 题)

题型 3　利用反比例函数解与图形的中心对称相关的问题

3. 如图,点 $A(3,5)$ 关于原点 O 的对称点为点 C,分别过点 A,C 作 y 轴的平行线,与反比例函数 $y = \frac{k}{x}(0 < k < 15)$ 的图象交于点 B,D,连接 AD,BC,AD 与 x 轴交于点 $E(-2,0)$.

(1)求 k 的值;

(2)直接写出阴影部分面积之和.



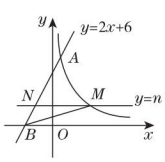
(第 3 题)

题型 4　利用反比例函数解与图形的平移相关的问题

4. 【中考·贵阳】如图,直线 $y = 2x + 6$ 与反比例函数 $y = \frac{k}{x}(k > 0)$ 的图象交于点 $A(1, m)$,与 x 轴交于点 B,平行于 x 轴的直线 $y = n(0 < n < 6)$ 交反比例函数的图象于点 M,交 AB 于点 N,连接 BM.

(1)求 m 的值和反比例函数的表达式;

(2)直线 $y = n$ 沿 y 轴方向平移,当 n 为何值时,$\triangle BMN$ 的面积最大?



(第 4 题)

微信公众号 教辅资料站

趣味数学　不过他仍然认为函数关系可以用多个表达式来表示,这是一个很大的局限,突破这一局限的是杰出数学家狄利克雷.

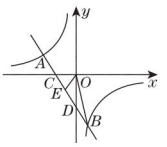
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型5 利用反比例函数解与图象交点相关的问题

5.【中考·南充】双曲线 $y=\frac{k}{x}$（k 为常数，且 $k\neq0$）与直线 $y=-2x+b$ 交于 $A\left(-\frac{1}{2}m,m-2\right)$，$B(1,n)$ 两点.

（1）求 k 与 b 的值；

（2）如图，直线 AB 交 x 轴于点 C，交 y 轴于点 D，若点 E 为 CD 的中点，求 $\triangle BOE$ 的面积.



（第5题）

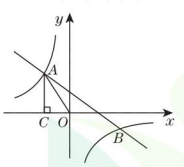
题型6 利用反比例函数解与最值相关的问题

6.【中考·内江】如图，一次函数 $y=mx+n(m\neq0)$ 的图象与反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$ 的图象交于第二、四象限内的点 $A(a,4)$ 和点 $B(8,b)$. 过点 A 作 x 轴的垂线，垂足为点 C，$\triangle AOC$ 的面积为4.

（1）分别求出 a 和 b 的值；

（2）结合图象直接写出 $mx+n<\frac{k}{x}$ 的解集；

（3）在 x 轴上取点 P，使 $PA-PB$ 取得最大值，求点 P 的坐标.



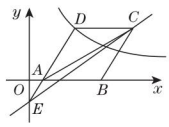
（第6题）

题型7 利用反比例函数解与图形的面积相关的问题

7.【中考·贵港】如图，菱形 $ABCD$ 的边 AB 在 x 轴上，点 A 的坐标为 $(1,0)$，点 $D(4,4)$ 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 的图象上，直线 $y=\frac{2}{3}x+b$ 经过点 C，与 y 轴交于点 E，连接 AC，AE.

（1）求 k，b 的值；

（2）求 $\triangle ACE$ 的面积.



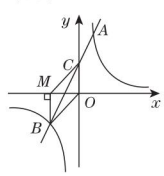
（第7题）

题型8 利用反比例函数解与一次函数、几何综合的问题

8.【中考·鞍山】如图，在平面直角坐标系中，一次函数 $y=mx+n(m\neq0)$ 的图象与 y 轴交于点 C，与反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$ 的图象交于 A，B 两点，点 A 在第一象限，纵坐标为4，点 B 在第三象限，$BM\perp x$ 轴，垂足为点 M，$BM=OM=2$.

（1）求反比例函数和一次函数的表达式；

（2）连接 OB，MC，求四边形 $MBOC$ 的面积.



（第8题）

更多提分招数详见《极速提分法》第1页.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

阶段核心归类

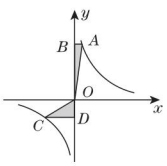
用反比例函数比例系数 k 的几何意义解与面积相关的应用 ☞(答案见 129 页)

名师点金

反比例函数的比例系数 k 具有一定的几何意义，$|k|$ 等于反比例函数图象上任意一点向两坐标轴所作垂线段与两坐标轴所围成的矩形的面积. 在反比例函数的图象中，涉及三角形或矩形的面积时，常用比例系数 k 的几何意义解决问题.

应用 1　反比例函数的比例系数 k 与面积的关系

1. 如图，A，C 是函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图象上任意两点，过点 A 作 y 轴的垂线，垂足为 B，过点 C 作 y 轴的垂线，垂足为 D，记 Rt$\triangle AOB$ 的面积为 S_1，Rt$\triangle COD$ 的面积为 S_2，则(　　)



(第 1 题)

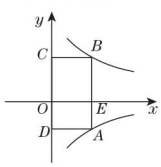
A. $S_1>S_2$　　B. $S_1<S_2$

C. $S_1=S_2$　　D. S_1 和 S_2 的大小关系不能确定

2. 【中考·盘锦】如图，四边形 $ABCD$ 是矩形，点 A 在第四象限 $y_1=-\frac{2}{x}$ 的图象上，点 B 在第一象限 $y_2=\frac{k}{x}$ 的图象上，AB 交 x 轴于点 E，点 C 与点 D 在 y 轴上，$AD=\frac{3}{2}$，$S_{矩形OCBE}=\frac{3}{2}S_{矩形ODAE}$.

(1)求点 B 的坐标；

(2)若点 P 在 x 轴上，$S_{\triangle BPE}=3$，求直线 BP 的表达式.



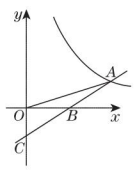
(第 2 题)

应用 2　已知三角形的面积关系求点的坐标

3. 【中考·泰安】如图，已知一次函数 $y=kx+b$ 的图象与反比例函数 $y=\frac{m}{x}$ 的图象交于点 A，与 x 轴交于点 $B(5,0)$，若 $OB=AB$，且 $S_{\triangle OAB}=\frac{15}{2}$.

(1)求反比例函数与一次函数的表达式；

(2)若点 P 为 x 轴上一点，$\triangle ABP$ 是等腰三角形，求点 P 的坐标.



(第 3 题)

应用 3　已知三角形的面积求函数表达式

4. 【中考·泰州】平面直角坐标系 xOy 中，横坐标为 a 的点 A 在反比例函数 $y_1=\frac{k}{x}(x>0)$ 的图象上，点 A' 与点 A 关于点 O 对称，一次函数 $y_2=mx+n$ 的图象经过点 A'.

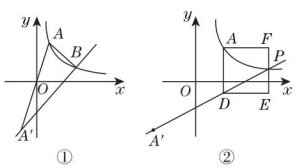
(1)设 $a=2$，点 $B(4,2)$ 在函数 y_1，y_2 的图象上.

①分别求函数 y_1，y_2 的表达式；

②直接写出使 $y_1>y_2>0$ 成立的 x 的范围；

(2)如图①，设函数 y_1，y_2 的图象相交于点 B，点 B 的横坐标为 $3a$，$\triangle AA'B$ 的面积为 16，求 k 的值.

(3)设 $m=\frac{1}{2}$，如图②，过点 A 作 $AD\perp x$ 轴，与函数 y_2 的图象相交于点 D，以 AD 为一边向右侧作正方形 $ADEF$. 试说明函数 y_2 的图象与线段 EF 的交点 P 一定在函数 y_1 的图象上.



(第 4 题)

微信公众号
教辅资料站

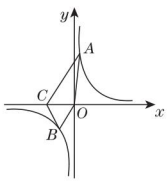
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

应用4 已知四边形面积求点的坐标

5. 【中考·兰州】如图，在平面直角坐标系 xOy 中，反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$ 的图象过等边三角形 BOC 的顶点 B，$OC=2$，点 A 在反比例函数图象上，连接 AC，AO.

(1)求反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$ 的表达式；

(2)若四边形 $ACBO$ 的面积是 $3\sqrt{3}$，求点 A 的坐标.



（第5题）

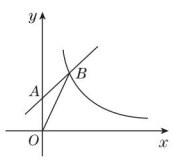
应用5 已知反比例函数表达式求图形的面积

题型1 利用函数表达式求面积

6. 【中考·盐城】如图，一次函数 $y=x+1$ 的图象交 y 轴于点 A，与反比例函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 的图象交于点 $B(m,2)$.

(1)求反比例函数的表达式；

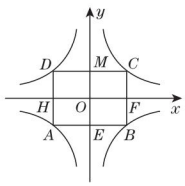
(2)求 $\triangle AOB$ 的面积.



（第6题）

题型2 利用对称性求面积

7. 如图是由四条曲线围成的广告标志，建立平面直角坐标系，双曲线对应的函数表达式分别为 $y=-\frac{6}{x}$，$y=\frac{6}{x}$. 现用四根钢条固定这四条曲线，这种钢条加工成矩形产品按面积计算，每单位面积25元，请你帮助工人师傅计算一下，所需钢条一共花多少钱？



（第7题）

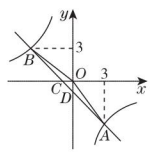
题型3 利用点的坐标及面积公式求面积

8. 【中考·铜仁】如图，一次函数 $y=kx+b(k,b$ 为常数，$k\neq0)$ 的图象与反比例函数 $y=-\frac{12}{x}$ 的图象交于 A,B 两点，且与 x 轴交于点 C，与 y 轴交于点 D，点 A 的横坐标与点 B 的纵坐标都是3.

(1)求一次函数的表达式；

(2)求 $\triangle AOB$ 的面积；

(3)写出不等式 $kx+b>-\frac{12}{x}$ 的解集.



（第8题）

更多提分招数详见《极速提分法》第3页.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1.3　反比例函数的应用

第 1 课时　建立反比例函数模型解实际问题

名师点金

用反比例函数解决实际问题的步骤：

(1)审清题意，找出问题中的常量、变量(有时常量、变量以图象的形式给出)，并且理清常量与变量之间的关系；

(2)根据常量与变量之间的关系，设出反比例函数表达式；

(3)利用**待定系数法**确定函数表达式，并注意自变量的取值范围；

(4)利用反比例函数的图象与性质解决实际问题.

Ⅰ 夯实基础·逐点练

☞(答案见 131 页)

知识点 1　实际问题中的反比例函数关系式

1. 某汽车的油箱一次加满汽油 45 L，可行驶 y km，设该汽车每行驶 100 km 耗油 x L，则 y 关于 x 的函数表达式为_____.

2. 【中考·临沂】已知甲、乙两地相距 20 km，汽车从甲地匀速行驶到乙地，则汽车行驶时间 t(单位：h)关于行驶速度 v(单位：km/h)的函数关系式是(　　)

A. $t=20v$　　B. $t=\dfrac{20}{v}$　　C. $t=\dfrac{v}{20}$　　D. $t=\dfrac{10}{v}$

3. 小华以每分钟 x 个字的速度书写，y min 写了 300 个字，则 y 与 x 的函数关系式为(　　)

A. $y=\dfrac{300}{x}$　　B. $y=300x$

C. $x+y=300$　　D. $y=\dfrac{300-x}{x}$

4. 用规格为 50 cm×50 cm 的地板砖密铺客厅恰好需要 60 块. 如果改用规格为 a cm×a cm 的地板砖 y 块也恰好能密铺该客厅，那么 y 与 a 之间的关系式为(　　)

A. $y=\dfrac{150\ 000}{a^2}$　　B. $y=\dfrac{150\ 000}{a}$

C. $y=150\ 000a^2$　　D. $y=150\ 000a$

知识点 2　实际问题中的反比例函数的图象

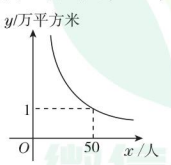
5. 【中考·海南】某村耕地总面积为 50 万平方米，且该村人均耕地面积 y(单位：万平方米)与总人口 x(单位：人)的函数图象如图所示，则下列说法正确的是(　　)

A. 该村人均耕地面积随总人口的增多而增多

B. 该村人均耕地面积 y 与总人口 x 成正比例

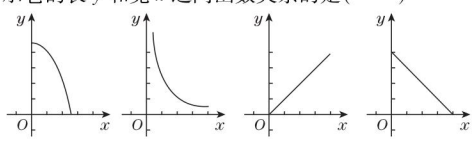
C. 若该村人均耕地面积为 2 万平方米，则总人口有 100 人

D. 当该村总人口为 50 人时，人均耕地面积为 1 万平方米



(第 5 题)

6. 【中考·淮安】当矩形面积一定时，下列图象中能表示它的长 y 和宽 x 之间函数关系的是(　　)

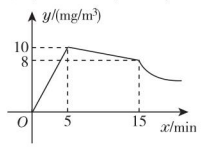


A　　B　　C　　D

*7. 新型冠状病毒肺炎疫情期间，某公司为了员工的身心健康，定期对办公室采取喷洒药物进行消毒. 在对某办公室进行消毒的过程中，先经过5 min的集中药物喷洒，再封闭该办公室 10 min，然后打开门窗进行通风，室内空气中的含药量 y(mg/m³)与药物在空气中的持续时间 x(min)之间的函数关系，在打开门窗通风前分别满足两个一次函数，在通风后又成反比例，如图所示，下面四个选项中错误的是(　　)

A. 经过 5 min 集中喷洒药物，室内空气中的含药量最高达到 10 mg/m³

B. 室内空气中的含药量不低于 8 mg/m³ 的持续时间达到了 11 min



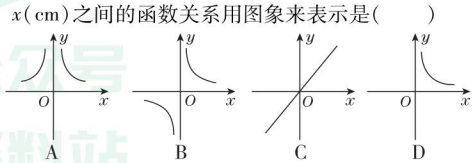
(第 7 题)

C. 当室内空气中的含药量不低于 5 mg/m³ 且持续时间不低于 35 min，才能有效杀灭某种传染病毒，此次消毒完全有效

D. 当室内空气中的含药量低于 2 mg/m³ 时，对人体才是安全的，所以从室内空气中的含药量达到 2 mg/m³ 开始，需经过 59 min 后，员工才能进入室内

易错点 忽视自变量的实际意义造成错误

8. 三角形的面积为 8 cm²，底边上的高 y(cm)与底边长 x(cm)之间的函数关系用图象来表示是(　　)



A　　B　　C　　D

趣味数学　谜语：$1\ 000^2=100\times100\times100$(打一成语)　　谜底：千方百计

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞（答案见131页）

考查角度① 利用反比例函数解实际问题

9. 【中考 · 杭州】方方驾驶小汽车匀速地从A地行驶到B地，行驶里程为480千米，设小汽车的行驶时间为t（单位：时），行驶速度为v（单位：千米/时），且全程速度限定为不超过120千米/时.

（1）求v关于t的函数表达式.

（2）方方上午8点驾驶小汽车从A地出发.

①方方需在当天12点48分至14点（含12点48分和14点）间到达B地，求小汽车行驶速度v的范围.

②方方能否在当天11点30分前到达B地？说明理由.

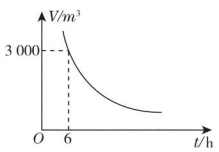
考查角度② 利用反比例函数解工程问题

10. 一蓄水池每小时的排水量$V(\mathrm{m^3})$与排完水池中的水所用的时间$t(\mathrm{h})$之间成反比例函数关系，其图象如图所示.

（1）求V与t之间的函数表达式.

（2）若要2 h排完水池中的水，那么每小时的排水量应该是多少？

（3）如果每小时排水量不超过4 000 $\mathrm{m^3}$，那么水池中的水至少要多少小时才能排完？



（第10题）

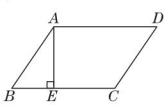
Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞（答案见131页）

拔尖角度① 利用反比例函数解几何问题

11. 如图，在$\square ABCD$中，设BC边的长为$x(\mathrm{cm})$，BC边上的高线AE长为$y(\mathrm{cm})$，已知$\square ABCD$的面积等于24 $\mathrm{cm^2}$.

（1）求y关于x的函数表达式；

（2）求当$3<y<6$时x的取值范围.



（第11题）

拔尖角度② 利用反比例函数的性质选择方案

12. 甲、乙两家商场进行促销活动，甲商场采用“每满200元减100元”的促销方式，即购买商品的总金额满200元但不足400元，少付100元；满400元但不足600元，少付200元……乙商场按顾客购买商品的总金额打六折促销.

（1）若顾客在甲商场购买了510元的商品，付款时应付多少钱？

（2）若顾客在甲商场购买商品的总金额为$x(400\leqslant x<600)$元，优惠后得到商家的优惠率为$p\left(p=\dfrac{\text{优惠金额}}{\text{购买商品的总金额}}\right)$，写出$p$与$x$之间的函数关系式，并说明$p$随$x$的变化情况.

（3）品牌、质量、规格等都相同的某种商品，在甲、乙两家商场的标价都是$a(200\leqslant a<400)$元，你认为选择哪家商场购买商品花钱较少？请说明理由.

微信公众号 教辅资料站

趣味数学

在物理学中，有很多量之间的变化是反比例的关系，如当电压一定时，电流与电阻成反比例关系，我们可以借助反比例函数的图象和性质解决一些物理学中的问题.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 2 课时　建立反比例函数模型解跨学科问题

名师点金

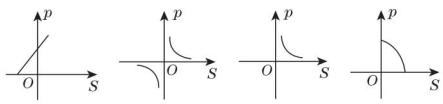
在利用反比例函数解决其他学科问题时，要根据题目中的实际意义结合该学科具有的特性，找出各变量的关系，建立反比例函数模型，再根据需要利用反比例函数的性质解决问题.

1 夯实基础·逐点练

(答案见 131 页)

知识点 1 物理力学、热学中的反比例函数

1. 物理学知识告诉我们，一个物体受到的压强 p 与所受压力 F 及受力面积 S 之间的计算公式为 $p=\frac{F}{S}$. 当一个物体所受压力为定值时，该物体所受压强 p 与受力面积 S 之间的关系用图象表示大致为(　　)

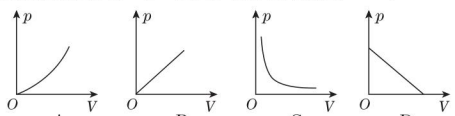


A　　B　　C　　D

2. 【中考·考感】公元前 3 世纪，古希腊科学家阿基米德发现了杠杆平衡，后来人们把它归纳为“杠杆原理”，即阻力 × 阻力臂 = 动力 × 动力臂. 小伟欲用撬棍撬动一块石头，已知阻力和阻力臂分别是 1 200 N 和 0.5 m，则动力 F(单位：N)关于动力臂 l(单位：m)的函数表达式正确的是(　　)

A. $F=\frac{1\,200}{l}$　　B. $F=\frac{600}{l}$　　C. $F=\frac{500}{l}$　　D. $F=\frac{0.5}{l}$

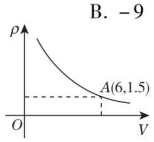
3. 根据物理学家波义耳 1662 年的研究结果，在温度不变的情况下，气球内气体的压强 p(Pa)与它的体积 V(m^3)的乘积是一个常数 k，即 $pV=k$(k 为常数，$k>0$)，下列图象能正确反映 p 与 V 之间函数关系的是(　　)



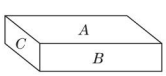
A　　B　　C　　D

4. 在一个可以改变体积的密闭容器内有一定质量的某种气体，当改变容器的体积时，气体的密度也随之改变，密度 ρ(单位：kg/m^3)与体积 V(单位：m^3)满足函数关系式 $\rho=\frac{k}{V}$(k 为常数，$k\neq0$)，其图象如图所示，则 k 的值为(　　)

A. 9　　B. −9　　C. 4　　D. −4



(第 4 题)



(第 5 题)

5. 【中考·宜昌】如图，一块砖的 A，B，C 三个面的面积比为 4∶2∶1. 如果 A，B，C 面分别向下放在地上，地面所受压强为 p_1，p_2，p_3，压强的计算公式为 $p=\frac{F}{S}$，其中 p 是压强，F 是压力，S 是受力面积，则 p_1，p_2，p_3 的大小关系正确的是(　　)

A. $p_1>p_2>p_3$　　B. $p_1>p_3>p_2$

C. $p_2>p_1>p_3$　　D. $p_3>p_2>p_1$

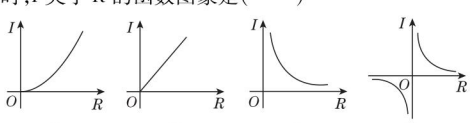
知识点 2 物理光学、电学中的反比例函数

6. 【中考·温州】验光师测得一组关于近视眼镜的度数 y(度)与镜片焦距 x(米)的对应数据如下表，根据表中数据，可得 y 关于 x 的函数表达式为(　　)

近视眼镜的度数 y/度	200	250	400	500	1 000
镜片焦距 x/米	0.50	0.40	0.25	0.20	0.10

A. $y=\frac{100}{x}$　　B. $y=\frac{x}{100}$　　C. $y=\frac{400}{x}$　　D. $y=\frac{x}{400}$

7. 【中考·台州】已知电流 I(安培)、电压 U(伏特)、电阻 R(欧姆)之间的关系为 $I=\frac{U}{R}$，当电压为定值时，I 关于 R 的函数图象是(　　)



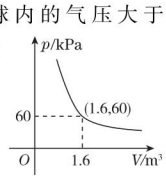
A　　B　　C　　D

易错点 1 不考虑反比例函数的增减性造成错误

***8.** 某气球内充满了一定质量的气体，当温度不变时，气球内气体的气压 p(kPa)是气体体积 V(m^3)的反比例函数，其图象如图所示. 当气球内的气压大于 120 kPa 时，气球将爆炸. 为了安全起见，气球的体积应(　　)

A. 不小于 $\frac{5}{4}$ m^3　　B. 大于 $\frac{5}{4}$ m^3

C. 不小于 $\frac{4}{5}$ m^3　　D. 小于 $\frac{4}{5}$ m^3



(第 8 题)

趣味数学　反比例函数在生活中有很多应用，当压力一定时，物体所受的压强与接触面积成反比例关系，据此可以增大接触面积，减小物体所受压强.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

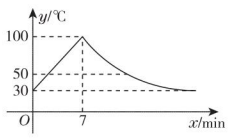
Ⅱ 整合方法·提升练 ☞（答案见131页）

考查角度① 利用反比例函数解决电学问题

9. 【中考·鄂尔多斯】教室里的饮水机接通电源就进入自动程序，开机加热时每分钟上升10 ℃，加热到100 ℃停止加热，水温开始下降，此时水温y(℃)与开机后用时x(min)成反比例关系，直至水温降至30 ℃，饮水机关机，饮水机关机后即刻自动开机，重复上述自动程序. 若在水温为30 ℃时接通电源，水温y(℃)与时间x(min)的关系如图所示：

(1) 分别写出水温上升和下降阶段y与x之间的函数关系式；

(2) 怡萱同学想喝高于50 ℃的水，请问她最多需要等待多长时间？

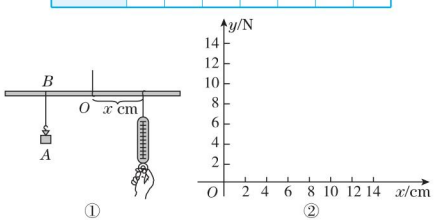


（第9题）

考查角度② 利用反比例函数解决复杂的杠杆问题

10. 如图①，小华设计了一个探究杠杆平衡条件的试验：在一根匀质的木杆中点O左侧固定位置B处悬挂重物A，在中点O右侧用一个弹簧秤向下拉直到木杆平衡，改变弹簧秤与点O的距离x(cm)，观察弹簧秤的示数y(N)的变化情况. 试验数据记录如下：

x/cm	…	4	6	8	10	12	…
y/N	…	12	8	6	4.8	4	…



（第10题）

(1) 把上表中x，y的各组对应值作为点的坐标，在如图②所示的坐标系中描出相应的点，用平滑的曲线连接这些点并观察所得的图象，猜测y(N)与x(cm)之间的函数关系，并求出函数关系式(不用写出x的取值范围).

(2) 当弹簧秤的示数为5 N时，弹簧秤与点O的距离是多少？随着弹簧秤与点O的距离不断减小，弹簧秤的示数将发生怎样的变化？

考查角度③ 利用多种函数的性质解决热学问题

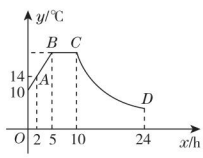
11. 【中考·乐山】某蔬菜生产基地的气温较低时，用装有恒温系统的大棚栽培一种新品种蔬菜. 如图是试验阶段的某天恒温系统从开启到关闭后，大棚内的温度y(℃)与时间x(h)之间的函数关系，其中线段AB，BC表示恒温系统开启阶段，双曲线的一部分CD表示恒温系统关闭阶段.

请根据图中信息解答下列问题：

(1) 求这天的温度y与时间x($0\leqslant x\leqslant 24$)的函数表达式.

(2) 求恒温系统设定的恒定温度.

(3) 若大棚内的温度低于10 ℃时，蔬菜会受到伤害. 问这天内，恒温系统最多可以关闭多少小时，才能使蔬菜避免受到伤害？



（第11题）

谜语：1+2+3（打一成语） 谜底：接二连三 趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

阶段核心方法

求反比例函数表达式的六种方法 ☞(答案见 132 页)

名师点金

求反比例函数的表达式,关键是确定比例系数 k 的值. 求比例系数 k 的值,可以根据反比例函数的定义及性质列方程、不等式求解,可以根据图象中点的坐标求解,可以直接根据数量关系列表达式,也可以利用待定系数法求解,还可以利用比例系数 k 的几何意义求解. 其中**待定系数法**是常用方法.

方法 1 利用反比例函数的定义求表达式

1. 若 $y=(m+3)x^{m^2-10}$ 是反比例函数,试求其函数表达式.

方法 2 利用反比例函数的性质求表达式

2. 已知函数 $y=(n-4)x^{-|2n-9|}$ 是反比例函数,且其图象所在的每一个象限内,y 随 x 的增大而减小,求此函数的表达式.

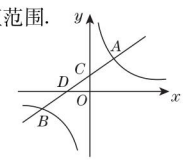
方法 3 利用反比例函数的图象求表达式

3. 【中考·襄阳】如图,已知一次函数 $y_1=kx+b$ 与反比例函数 $y_2=\frac{m}{x}$ 的图象在第一、三象限分别交于 $A(3,4)$,$B(a,-2)$ 两点,直线 AB 与 y 轴、x 轴分别交于 C,D 两点.

(1)求一次函数和反比例函数的表达式;

(2)比较大小,AD _____ BC(填“$>$”“$<$”或“$=$”);

(3)直接写出 $y_1<y_2$ 时 x 的取值范围.



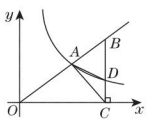
(第 3 题)

方法 4 利用待定系数法求表达式

4. 【中考·大连】如图,在平面直角坐标系 xOy 中,点 $A(3,2)$ 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 的图象上,点 B 在 OA 的延长线上,$BC\perp x$ 轴,垂足为 C,BC 与反比例函数的图象相交于点 D,连接 AC,AD.

(1)求该反比例函数的表达式;

(2)若 $S_{\triangle ACD}=\frac{3}{2}$,设点 C 的坐标为 $(a,0)$,求线段 BD 的长.



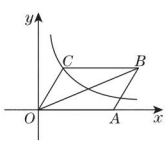
(第 4 题)

方法 5 利用图形的性质求表达式

5. 【中考·百色】如图,已知平行四边形 $OABC$ 中,点 O 为坐标原点,点 $A(3,0)$,$C(1,2)$,函数 $y=\frac{k}{x}$ $(k\neq 0)$ 的图象经过点 C.

(1)求 k 的值及直线 OB 的函数表达式;

(2)求四边形 $OABC$ 的周长.



(第 5 题)

方法 6 利用实际问题中的数量关系求表达式

6. 某运输队要运 300 t 物资到江边防洪.

(1)运输时间 t(单位:h)与运输速度 v(单位:t/h)之间有怎样的函数关系?

(2)运了一半时,接到防洪指挥部命令,剩下的物资要在2 h之内运到江边,则运输速度至少为多少?

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

全章热门考点整合应用

☞（答案见132页）

名师点金

反比例函数及其图象、性质是历年来中考的热点，既有与本学科知识的综合，也有与其他学科知识的综合，题型既有选择、填空，也有解答类型. 其热门考点可概括为一个概念、两个方法、两个应用、一个技巧.

考点1 一个概念——反比例函数

1. 若 $y=(m-1)x^{|m|-2}$ 是反比例函数，则 m 的取值为（　　）

A. 1　　B. -1　　C. ±1　　D. 任意实数

2. 某学校到县城的路程为5 km，一同学骑车从学校到县城的平均速度 v（km/h）与所用时间 t（h）之间的函数表达式是（　　）

A. $v=5t$　　B. $v=t+5$

C. $v=\dfrac{5}{t}$　　D. $v=\dfrac{t}{5}$

3. 判断下面哪些式子表示 y 是 x 的反比例函数：

①$xy=-\dfrac{1}{2}$；②$y=3+x$；③$y=\dfrac{-3}{4x}$；④$y=\dfrac{5a}{x}$（a 为常数且 $a\neq0$）.

其中_____是反比例函数（填序号）.

考点2 两个方法

方法1 画反比例函数图象的方法

4. 已知 y 与 x 的部分取值如下表：

x	…	-6	-5	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4	5	6	…
y	…	1	1.2	1.5	2	3	6	-6	-3	-2	-1.5	-1.2	-1	…

（1）试猜想 y 与 x 的函数关系可能是你学过的哪类函数，并写出这个函数的表达式；

（2）画出这个函数的图象.

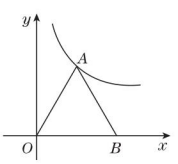
方法2 求反比例函数表达式的方法

5. 已知反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的图象与一次函数 $y=x+b$ 的图象在第一象限内相交于点 $A(1,-k+4)$. 试确定这两个函数的表达式.

6. 【中考·嘉兴】如图，在直角坐标系中，已知点 $B(4,0)$，等边三角形 OAB 的顶点 A 在反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的图象上.　　【导学号：4885393】

（1）求反比例函数的表达式；

（2）把 $\triangle OAB$ 向右平移 a 个单位长度，对应得到 $\triangle O'A'B'$，当这个函数图象经过 $\triangle O'A'B'$ 一边的中点时，求 a 的值.



（第6题）

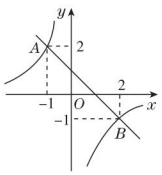
谜语：看谁力量大（打一数学名词）　　谜底：比例（力）　　趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考点 3　两个应用

应用 1　反比例函数的图象与性质的应用

7. 【中考·衡阳】如图，一次函数 $y_1 = kx + b(k \neq 0)$ 的图象与反比例函数 $y_2 = \frac{m}{x}(m$ 为常数且 $m \neq 0)$ 的图象都经过 $A(-1,2)$，$B(2,-1)$，结合图象，则不等式 $kx + b > \frac{m}{x}$ 的解集是(　　)



（第 7 题）

A. $x < -1$

B. $-1 < x < 0$

C. $x < -1$ 或 $0 < x < 2$

D. $-1 < x < 0$ 或 $x > 2$

8. 画出反比例函数 $y = \frac{6}{x}$ 的图象，并根据图象回答问题：

(1) 根据图象指出当 $y = -2$ 时 x 的值；

(2) 根据图象指出当 $-2 < x < 1$ 且 $x \neq 0$ 时 y 的取值范围；

(3) 根据图象指出当 $-3 < y < 2$ 且 $y \neq 0$ 时 x 的取值范围.

应用 2　反比例函数的实际应用

9. 某厂仓库储存了部分原料，按原计划每小时消耗2 t，可用 60 h. 由于技术革新，实际生产能力有所提高，即每小时消耗的原料量大于计划消耗的原料量. 设现在每小时消耗原料 x(单位：t)，库存的原料可使用的时间为 y(单位：h).

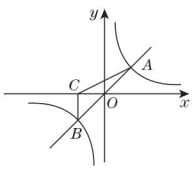
(1) 写出 y 关于 x 的函数表达式，并求出自变量的取值范围；

(2) 若恰好经过 24 h 才有新的原料进厂，为了使机器不停止运转，则 x 应控制在什么范围内？

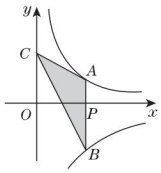
考点 4　一个技巧——用系数 k 的几何性质巧求图形的面积

10. 如图，正比例函数 $y = x$ 与反比例函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图象相交于 A，B 两点，$BC \perp x$ 轴于点 C，则 $\triangle ABC$ 的面积为(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4



（第 10 题）



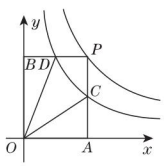
（第 11 题）

11. 如图，过 x 轴正半轴上的任意一点 P 作 y 轴的平行线交反比例函数 $y = \frac{2}{x}(x > 0)$ 和 $y = -\frac{4}{x}(x > 0)$ 的图象于 A，B 两点，C 是 y 轴上任意一点，则 $\triangle ABC$ 的面积为_____.

12. 【中考·东营】如图是函数 $y = \frac{3}{x}$ 与函数 $y = \frac{6}{x}$ 在第一象限内的图象，点 P 是 $y = \frac{6}{x}$ 的图象上一动点，$PA \perp x$ 轴于点 A，交 $y = \frac{3}{x}$ 的图象于点 C，$PB \perp y$ 轴于点 B，交 $y = \frac{3}{x}$ 的图象于点 D.

(1) 求证：D 是 BP 的中点.

(2) 求四边形 $ODPC$ 的面积.



（第 12 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2.1 一元二次方程

名师点金

判别一元二次方程的“两方法”

(1)**根据定义要把握三点**:一是整式方程;二是含有一个未知数;三是未知数的最高次数是2.

(2)**根据一般形式要把握两点**:一是能化成 $ax^2+bx+c=0$ 的形式,且 a 一定不能为0,而 b,c 都可以为0;二是判断是否为一元二次方程与其解的情况无关.

Ⅰ 夯实基础·逐点练 ☞(答案见133页)

知识点1 一元二次方程的定义

1. 下列关于 x 的方程一定是一元二次方程的是(　　)

A. $ax^2+bx+c=0$

B. $x^2+1-x^2=0$

C. $x^2+\frac{1}{x}=2$

D. $x^2-x-2=0$

2. 如果方程 $(m-3)x^{m^2-7}-x+3=0$ 是关于 x 的一元二次方程,那么 m 的值为(　　)

A. ±3　　B. 3

C. -3　　D. 无法确定

3. 若方程 $(m-1)x^{|m|+1}-2x=3$ 是关于 x 的一元二次方程,则有(　　)

A. $m=1$　　B. $m=-1$

C. $m=\pm1$　　D. $m\neq\pm1$

知识点2 一元二次方程的一般形式

4. 把方程 $x(x+2)=5(x-2)$ 化成一元二次方程的一般形式,则 a,b,c 的值分别是(　　)

A. 1,-3,10　　B. 1,7,-10

C. 1,-5,12　　D. 1,3,2

5. 若关于 x 的方程 $2x^2+mx=4x+2$ 中不含 x 的一次项,则 m 等于(　　)

A. 0　　B. 4　　C. -4　　D. ±4

知识点3 利用一元二次方程建立实际问题模型

6. 【中考·日照】某省加快新旧动能转换,促进企业创新发展,某企业一月份的营业额是1 000万元,月平均增长率相同,第一季度的总营业额是3 990万元.若设月平均增长率是 x,那么可列出的方程是(　　)

A. $1\,000(1+x)^2=3\,990$

B. $1\,000+1\,000(1+x)+1\,000(1+x)^2=3\,990$

C. $1\,000(1+2x)=3\,990$

D. $1\,000+1\,000(1+x)+1\,000(1+2x)=3\,990$

7. 【中考·乌鲁木齐】宾馆有50间房供游客居住,当每间房每天定价为180元时,宾馆会住满;当每间房每天的定价每增加10元时,就会空闲一间房.如果有游客居住,宾馆需对居住的每间房每天支出20元的费用.当房价定为多少元时,宾馆当天的利润为10 890元?设房价定为 x 元,则有(　　)

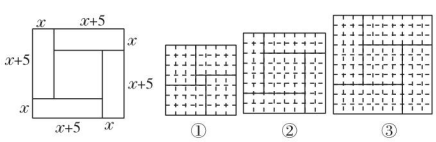
A. $(180+x-20)\left(50-\frac{x}{10}\right)=10\,890$

B. $(x-20)\left(50-\frac{x-180}{10}\right)=10\,890$

C. $x\left(50-\frac{x-180}{10}\right)-50\times20=10\,890$

D. $(x+180)\left(50-\frac{x}{10}\right)-50\times20=10\,890$

***8.** 【中考·宁夏】你知道吗?对于一元二次方程,我国古代数学家还研究过其几何解法呢!以方程 $x^2+5x-14=0$ 即 $x(x+5)=14$ 为例加以说明.数学家赵爽(公元3~4世纪)在其所著的《勾股圆方图注》中记载的方法是:构造图(如下面左图)中大正方形的面积是 $(x+x+5)^2$,其中它又等于四个矩形的面积加上中间小正方形的面积,即 $4\times14+5^2$,据此易得 $x=2$.那么在下面右边的三个构图(矩形的顶点均落在边长为1的小正方形网格格点上)中,能够说明方程 $x^2-4x-12=0$ 的正确构图是_____.(只填序号)



(第8题)

易错点 忽视二次项系数不为零的条件而致错

9. 若关于 x 的方程 $(k-3)x^{|k|-1}-x-2=0$ 是一元二次方程,则不等式 $kx-2k+6\leqslant0$ 的解集为(　　)

A. $x\leqslant0$　　B. $x\geqslant4$

C. $x\leqslant0$ 或 $x\geqslant4$　　D. $x\leqslant4$

趣味数学

“小屠夫”问题:美国南北战争时北军总司令、第18任总统格兰特在路上相中了一匹马.马的主人是一位聪明的德国人,得知格兰特是美国总统后,以半价把马卖给了他.(待续)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞(答案见 133 页)

考查角度 1　利用一元二次方程及相关的定义求字母的值

10. 已知关于 x 的方程 $(2k+1)x^2+4kx+k-1=0$,问:

(1) k 为何值时,此方程是一元一次方程?

(2) k 为何值时,此方程是一元二次方程?并写出这个一元二次方程的二次项系数、一次项系数及常数项.

考查角度 2　利用一元二次方程的一般形式求字母的值(待定系数法)

11. 一元二次方程 $a(x+1)^2+b(x+1)+c=0$ 化为一般形式后为 $3x^2+2x-1=0$,试求 $a^2+b^2-c^2$ 的值的算术平方根.

Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞(答案见 133 页)

拔尖角度 1　利用一元二次方程的定义探究字母参数的问题

12. 若 $x^{2a+b}-3x^{a-b}+1=0$ 是关于 x 的一元二次方程,求 a,b 的值.下面是两位同学的解法.

甲:根据题意,得 $\begin{cases}2a+b=2,\\a-b=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\b=0.\end{cases}$

乙:根据题意,得 $\begin{cases}2a+b=2,\\a-b=1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2a+b=1,\\a-b=2.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=1,\\b=0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=1,\\b=-1.\end{cases}$

你认为上述两位同学的解法是否正确?为什么?如果都不正确,请给出正确的解法.

拔尖角度 2　利用一元二次方程的一般形式探究系数间的关系

13. 教材或资料会出现这样的题目:

把方程 $\frac{1}{2}x^2-x=2$ 化为一元二次方程的一般形式,并写出它的二次项系数、一次项系数和常数项.

现在把上面的题目改编为下面的两个小题,请解答.

(1)下列方程中,有哪几个是方程 $\frac{1}{2}x^2-x=2$ 所化的一元二次方程的一般形式?

①$\frac{1}{2}x^2-x-2=0$;②$-\frac{1}{2}x^2+x+2=0$;

③$x^2-2x=4$;④$-x^2+2x+4=0$;

⑤$\sqrt{3}x^2-2\sqrt{3}x-4\sqrt{3}=0$.

(2)方程 $\frac{1}{2}x^2-x=2$ 化为一元二次方程的一般形式,它的二次项系数、一次项系数、常数项之间具有什么关系?

更多提分招数详见《极速提分法》第 6 页.

趣味数学　格兰特很喜爱它,给乌取名为“小屠夫”.几年之后,华尔街出现动乱,格兰特家族发生了严重的经济问题,他万不得已以 493.68 美元的价格把“小屠夫”和它的伙伴一起卖了.(待续)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2.2 一元二次方程的解法

第1课时 直接开平方法解方程

名师点金

直接开平方法解一元二次方程的三个步骤

变形：将方程化为含未知数的完全平方式，即非负常数的形式. **开方**：利用平方根的定义，将方程转化为两个一元一次方程；

求解：解一元一次方程，得出方程的根.

Ⅰ 夯实基础·逐点练 ☞（答案见134页）

知识点1 一元二次方程的解

1. 【中考·资阳】a 是方程 $2x^2=x+4$ 的一个根，则代数式 $4a^2-2a$ 的值是_____.

2. 【中考·天津】方程 $x^2+x-12=0$ 的两个根为（　　）

A. $x_1=-2,x_2=6$　　B. $x_1=-6,x_2=2$

C. $x_1=-3,x_2=4$　　D. $x_1=-4,x_2=3$

3. 【中考·兰州】$x=1$ 是关于 x 的一元二次方程 $x^2+ax+2b=0$ 的解，则 $2a+4b$ 等于（　　）

A. -2　　B. -3

C. -1　　D. -6

4. 老师出示了小黑板上的题目（如图），小敏回答："方程有一个根为5."小聪回答："方程有一个根为-3."则你认为（　　）

方程 $x^2-2x-15=0$ 的根是_____.

（第4题）

A. 只有小敏回答正确

B. 只有小聪回答正确

C. 小敏、小聪回答都正确

D. 小敏、小聪回答都不正确

*5. 【中考·包头】若关于 x 的方程 $x^2+(m+1)x+\frac{1}{2}=0$ 的一个实数根的倒数恰好是它本身，则 m 的值为（　　）

A. $-\frac{5}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$

C. $-\frac{5}{2}$ 或 $\frac{1}{2}$　　D. 1

知识点2 形如 $x^2=p(p\geqslant 0)$ 型方程的解法

6. 【中考·徐州】方程 $x^2-4=0$ 的解是_____.

7. 对于方程 $x^2=m-1$.

（1）若方程的根为 $\pm\sqrt{m-1}$，则 m _____；

（2）若方程无实数根，则 m _____.

8. 一元二次方程 $4x^2-9=0$ 的解为（　　）

A. $x=\frac{3}{2}$　　B. $x=\frac{2}{3}$

C. $x_1=\frac{3}{2},x_2=-\frac{3}{2}$　　D. $x_1=\frac{2}{3},x_2=-\frac{2}{3}$

*9. 【中考·深圳】给出一种运算：对于函数 $y=x^n$，规定 $y'=nx^{n-1}$. 例如：若函数 $y=x^4$，则有 $y'=4x^3$. 已知函数 $y=x^3$，则方程 $y'=12$ 的解是（　　）

A. $x_1=4,x_2=-4$

B. $x_1=2,x_2=-2$

C. $x_1=x_2=0$

D. $x_1=2\sqrt{3},x_2=-2\sqrt{3}$

知识点3 形如 $(mx+n)^2=p(p\geqslant 0)$ 型方程的解法

10. 【中考·吉林】若关于 x 的一元二次方程 $(x+3)^2=c$ 有实数根，则 c 的值可以为_____（写出一个即可）.

11. 【中考·丽水】一元二次方程 $(x+6)^2=16$ 可化为两个一元一次方程，其中一个一元一次方程是 $x+6=4$，则另一个一元一次方程是（　　）

A. $x-6=4$　　B. $x-6=-4$

C. $x+6=4$　　D. $x+6=-4$

12. 一元二次方程 $(x-2)^2=1$ 的根是（　　）

A. $x=3$　　B. $x_1=3,x_2=-3$

C. $x_1=3,x_2=1$　　D. $x_1=1,x_2=-3$

13. 已知一元二次方程 $(x-3)^2=1$ 的两个解恰好分别是等腰三角形 ABC 的底边长和腰长，则 $\triangle ABC$ 的周长为（　　）

A. 10　　B. 10或8

C. 9　　D. 8

易错点 对一元二次方程的解的意义理解不透导致检验漏解

14. 在 $x=-4,x=-2,x=1,x=3$ 中，是方程 $x^2+x-12=0$ 的根的是_____.

趣味数学

格兰特对这个价格很不满意，朋友劝他："你在'小屠夫'身上赚了12%，在另一匹马上亏了10%，加起来还赚了2%."格兰特说："也许应该这样计算."格兰特为什么这么说呢？（待续）

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞(答案见 134 页)

考查角度 1　利用方程解的定义求一元二次方程

15. 若关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的一个根是 1,且 a,b 满足等式 $b=\sqrt{a-2}+\sqrt{2-a}+1$,求此一元二次方程.

考查角度 2　利用直接开平方法解方程中根的特征求分式的值

16. 若一元二次方程 $ax^2=b(ab>0)$ 的两个根分别是 $m+1$ 与 $2m-4$,求 $\frac{b}{a}$ 的值.

Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞(答案见 134 页)

拔尖角度 1　利用方程的解解与三角形相关的问题(数形结合思想)

17. 一个三角形的两边长分别是 2 cm 和 6 cm,第三条边的长是 a cm(其中 a 为整数),且 a 满足方程 $x^2-9x+14=0$,求此三角形的周长.

拔尖角度 2　利用平方根的意义说明方程 $x^2=a$ 的解的情况

18. 对于 $ax^2+c=0(a\neq0)$ 型的一元二次方程:

(1)当 a,c 满足何条件时,方程有实数解?试写出此时的解.

(2)当 a,c 满足何条件时,方程无实数解,为什么?

趣味数学　理由:"小屠夫"买进价格为 264 美元,以 295.68 美元卖出,赚进了 12%;另外一匹马买进价格为 220 美元,以 198 美元卖出,亏了 10%.买价总额为 484 美元,卖价总额为 493.68 美元,利润为 2%.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

第2课时　配方法解方程

名师点金

二次三项式的配方过程与一元二次方程的配方过程有两大区别：**一是二次项系数化为1**，二次三项式是提出二次项的系数，一元二次方程是两边同时除以二次项的系数；**二是配方**，二次三项式是先加上一次项系数一半的平方再减去一次项系数一半的平方，一元二次方程是两边同时加上一次项系数一半的平方.

Ⅰ 夯实基础·逐点练 ☞（答案见134页）

知识点1 二次三项式的配方

1. 【中考·安顺】若 $x^2+2(m-3)x+16$ 是关于 x 的完全平方式，则 $m=$ _____.

2. 将代数式 a^2+4a-5 变形，结果正确的是(　　)

A. $(a+2)^2-1$　　B. $(a+2)^2-5$

C. $(a+2)^2+4$　　D. $(a+2)^2-9$

3. 将代数式 $x^2-10x+5$ 配方后，发现它的最小值为(　　)

A. -30　　B. -20

C. -5　　D. 0

4. 不论 x,y 为何实数，代数式 $x^2+y^2+2x-4y+7$ 的值(　　)

A. 总不小于2　　B. 总不小于7

C. 可为任何实数　　D. 可能为负数

5. 【中考·扬州】已知 $M=\frac{2}{9}a-1$，$N=a^2-\frac{7}{9}a$（a 为任意实数），则 M,N 的大小关系为(　　)

A. $M<N$　　B. $M=N$

C. $M>N$　　D. 不能确定

***6.** 已知 a,b,c 是 $\triangle ABC$ 的三边长，且 $a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$，则 $\triangle ABC$ 的形状为(　　)

A. 钝角三角形　　B. 等边三角形

C. 直角三角形　　D. 等腰直角三角形

知识点2 用配方法解一元二次方程

7. 用配方法解下列方程，其中应在方程左右两边同时加上4的是(　　)

A. $x^2+4x=5$　　B. $2x^2-4x=5$

C. $x^2-2x=5$　　D. $x^2+2x=5$

8. 用配方法解一元二次方程 $x^2-4x+1=0$ 时，下列变形正确的是(　　)

A. $(x-2)^2=1$　　B. $(x-2)^2=5$

C. $(x+2)^2=3$　　D. $(x-2)^2=3$

9. 一元二次方程 $x^2-8x=48$ 可表示成 $(x-a)^2=48+b$ 的形式，其中 a,b 为整数，则 $a+b$ 的值为(　　)

A. 20　　B. 12

C. -12　　D. -20

10. 用配方法解方程 $x^2-8x+15=0$ 的过程中，配方正确的是(　　)

A. $x^2-8x+(-4)^2=1$

B. $x^2-8x+(-4)^2=31$

C. $(x+4)^2=1$

D. $(x-4)^2=-11$

11. 用配方法解下列方程时，配方正确的是(　　)

A. 方程 $x^2-6x-5=0$，可化为 $(x-3)^2=4$

B. 方程 $y^2-2y-2\,021=0$，可化为 $(y-1)^2=2\,021$

C. 方程 $a^2+8a+9=0$，可化为 $(a+4)^2=25$

D. 方程 $2x^2-6x-7=0$，可化为 $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{23}{4}$

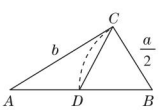
***12.** 【中考·舟山】欧几里得的《原本》记载，形如 $x^2+ax=b^2$ 的方程的图解法是：如图，画 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$，使 $\angle ACB=90°$，$BC=\frac{a}{2}$，$AC=b$，再在斜边 AB 上截取 $BD=\frac{a}{2}$，则该方程的一个正根是(　　)

A. AC 的长

B. AD 的长

C. BC 的长

D. CD 的长



（第12题）

13. 【中考·益阳】规定：$a\otimes b=(a+b)b$，如：$2\otimes 3=(2+3)\times 3=15$，若 $2\otimes x=3$，则 $x=$ _____.

易错点 在配方时忽视等式的性质而致错

14. 【中考·齐齐哈尔】解方程：$x^2+6x=-7$.

谜语：一模一样（打一数学名词）　　谜底：全等　　趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞(答案见 134 页)

考查角度 1　利用配方法解非负数问题

15. 先阅读下面的内容,再解决问题.

例题:若 $m^2+2mn+2n^2-6n+9=0$,求 m 和 n 的值.

解:$\because m^2+2mn+2n^2-6n+9=0$,

$\therefore m^2+2mn+n^2+n^2-6n+9=0$.

$\therefore (m+n)^2+(n-3)^2=0$.

$\therefore m+n=0, n-3=0$.

$\therefore m=-3, n=3$.

问题:已知 a,b,c 为正整数且是 $\triangle ABC$ 的三边长,c 是 $\triangle ABC$ 的最短边长,a,b 满足 $a^2+b^2=12a+8b-52$,求 c 的值.

考查角度 2　利用配方法解二次三项式的最值问题

16. 我们可以利用配方法解决一些多项式的最值问题,如:$x^2+2x+3=(x^2+2x+1)+2=(x+1)^2+2$,当 $x=-1$ 时,x^2+2x+3 有最小值,为 2;再如:$-x^2+2x-2=-(x^2-2x+1)-1=-(x-1)^2-1$,当 $x=1$ 时,$-x^2+2x-2$ 有最大值,为 -1.

(1)代数式 x^2+6x+m 有最小值,为 1,则 $m=$_____;

(2)代数式 $-x^2+4x+m$ 有最大值,为 2,则 $m=$_____;

(3)代数式 $x^2+(m+2)x+4m-7$ 有最小值为 0,求 m 的值.

Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞(答案见 134 页)

拔尖角度 1　利用配方法求代数式的值(整体思想、换元法)

17. 已知实数 x 满足 $x^2+\frac{1}{x^2}+2\left(x+\frac{1}{x}\right)=0$,求 $x+\frac{1}{x}$ 的值.

拔尖角度 2　利用配方法探究新定义法(整体思想)

18. 小明在解一元二次方程时,发现有这样一种解法:

如:解方程 $x(x+4)=6$.

解:原方程可变形,得 $[(x+2)-2][(x+2)+2]=6$,

$(x+2)^2-2^2=6$,

$(x+2)^2=6+2^2$,

$(x+2)^2=10$.

直接开平方并整理,得 $x_1=-2+\sqrt{10}, x_2=-2-\sqrt{10}$.

我们称小明这种解法为"平均数法".

(1)下面是小明用"平均数法"解方程 $(x+3)(x+7)=5$ 时写的解题过程.

解:原方程可变形,得 $[(x+a)-b][(x+a)+b]=5$,$(x+a)^2-b^2=5$,

$(x+a)^2=5+b^2$.

直接开平方并整理,得 $x_1=c, x_2=d$.

上述解题过程中的 a,b,c,d 所表示的数分别是_____,_____,_____,_____.

(2)请用"平均数法"解方程:$(x-5)(x+3)=6$.

更多提分招数详见《极速提分法》第 7 页.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

第3课时 公式法解方程

名师点金

用公式法解一元二次方程的四个步骤：

(1)把一元二次方程化为一般形式. (2)确定 a,b,c 的值. (3)计算 b^2-4ac 的值. (4)当 $b^2-4ac\geqslant 0$ 时，把 a,b,c 的值代入求根公式，求出方程的两个实数根.

Ⅰ 夯实基础·逐点练

☞(答案见134页)

知识点1 一元二次方程的求根公式

1. 方程 $3x^2-x=4$ 化为一般形式后 a,b,c 的值分别为(　　)

A. $3,1,4$　　B. $3,-1,-4$

C. $3,-4,-1$　　D. $-1,3,-4$

2. 一元二次方程 $\sqrt{2}x^2+4\sqrt{3}x=2\sqrt{2}$ 中，b^2-4ac 的值应是(　　)

A. 64　　B. -64　　C. 32　　D. -32

3. 以 $x=\dfrac{b\pm\sqrt{b^2+4c}}{2}$ 为根的一元二次方程可能是(　　)

A. $x^2+bx+c=0$　　B. $x^2+bx-c=0$

C. $x^2-bx+c=0$　　D. $x^2-bx-c=0$

知识点2 求根公式的应用

4. 【中考·威海】一元二次方程 $3x^2=4-2x$ 的解是_____.

5. 已知4个数据：$-\sqrt{2},2\sqrt{2},a,b$，其中 a,b 是方程 $x^2-2x-1=0$ 的两个根，则这4个数据的中位数是_____.

6. 【中考·泰安】一元二次方程 $(x+1)(x-3)=2x-5$ 的根的情况是(　　)

A. 无实数根

B. 有一个正根，一个负根

C. 有两个正根，且都小于3

D. 有两个正根，且有一根大于3

Ⅱ 整合方法·提升练

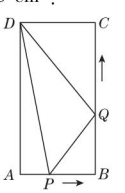
☞(答案见134页)

考查角度1 利用一元二次方程解与非负数相关的问题

7. 已知 a,b,c 均为实数且 $\sqrt{a^2-2a+1}+|b+1|+(c+3)^2=0$，求方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根.

考查角度2 利用一元二次方程探究与几何相关的问题(数形结合思想)

8. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=6$ cm，$BC=12$ cm，点 P 从点 A 出发沿边 AB 向点 B 以1 cm/s的速度移动，同时，点 Q 从点 B 出发沿边 BC 向点 C 以2 cm/s的速度移动. 问：几秒时 $\triangle PDQ$ 的面积为35 cm^2？



(第8题)

一个人的贡献和他的自负严格地成反比，这似乎是品行上的一个公理. ——拉格朗日

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 4 课时　因式分解法解方程

名师点金

用因式分解法解一元二次方程的步骤：

(1)移项，将方程的右边化为 0. (2)将方程的左边分解为两个一次因式的积. (3)令每个因式等于 0，得两个一元一次方程. (4)解这两个一元一次方程，得方程的两个根.

用因式分解法解方程的关键是将方程左边因式分解. 常用到的因式分解的方法有：**提公因式法**、**公式法**、**十字相乘法**(即 $x^2-(a+b)x+ab$ 型的因式分解).

Ⅰ 夯实基础 · 逐点练

☞(答案见 135 页)

知识点 1　因式分解法的依据

1. 【中考 · 山西】我们解一元二次方程 $3x^2-6x=0$ 时，可以运用因式分解法，将此方程化为 $3x(x-2)=0$，从而得到两个一元一次方程 $3x=0$ 或 $x-2=0$，进而得到原方程的解为 $x_1=0$，$x_2=2$. 这种解法体现的数学思想是(　　)

A. 转化思想　　B. 函数思想

C. 数形结合思想　　D. 公理化思想

2. 用因式分解法解方程，下列过程正确的是(　　)

A. $(2x-3)(3x-4)=0$ 化为 $2x-3=0$ 或 $3x-4=0$

B. $(x+3)(x-1)=1$ 化为 $x+3=1$ 或 $x-1=1$

C. $(x-2)(x-3)=2\times3$ 化为 $x-2=2$ 或 $x-3=3$

D. $x(x+2)=0$ 化为 $x+2=0$

知识点 2　用因式分解法解方程

3. 【中考 · 扬州】一元二次方程 $x(x-2)=x-2$ 的根是_____.

4. 【中考 · 十堰】对于实数 a，b，定义运算“◎”如下：$a◎b=(a+b)^2-(a-b)^2$，若 $(m+2)◎(m-3)=24$，则 $m=$_____.

5. 【中考 · 凉山州】若关于 x 的方程 $x^2+2x-3=0$ 与 $\frac{2}{x+3}=\frac{1}{x-a}$ 有一个解相同，则 a 的值为(　　)

A. 1　　B. 1 或 −3

C. −1　　D. −1 或 3

***6.** 一个等腰三角形的底边长是 6，腰长是一元二次方程 $x^2-7x+10=0$ 的一根，则此三角形的周长是(　　)

A. 16　　B. 10

C. 14　　D. 10 或 16

7. 【中考 · 通辽】一个菱形的边长是方程 $x^2-8x+15=0$ 的一个根，其中一条对角线长为 8，则该菱形的面积为(　　)

A. 48　　B. 24

C. 24 或 40　　D. 48 或 80

知识点 3　用适当的方法解一元二次方程

8. 解方程 $(5x-1)^2=3(5x-1)$ 的最适当的方法是(　　)

A. 直接开平方法　　B. 配方法

C. 公式法　　D. 因式分解法

9. 已知下列方程，请把它们的序号填在最适当的解法后的横线上.

①$2(x-1)^2=6$；　②$(x-2)^2+x^2=4$；

③$(x-2)(x-3)=3$；　④$x^2-2x-1=0$；

⑤$x^2-\sqrt{2}x+\frac{1}{4}=0$；　⑥$x^2-2x-98=0$.

(1)直接开平方法：_____.

(2)配方法：_____.

(3)公式法：_____.

(4)因式分解法：_____.

易错点 1　在方程两边同时除以含有未知数的式子导致失根

10. 【中考 · 齐齐哈尔】解方程：$2(x-3)=3x(x-3)$.

易错点 2　用换元法解方程时，忽视实数这一条件而致错

11. 已知 x 为实数，且满足 $(x^2+x+1)^2+2(x^2+x+1)-3=0$，那么 x^2+x+1 的值为(　　)

A. 1　　B. −3

C. −3 或 1　　D. −1 或 3

趣味数学　唐朝时，有一位懂数学的尚书主持了一场考试，其中有一道题是：某天，几个盗贼正在商议怎样分配偷来的布匹. 贼首说，每人分 6 匹，还剩 5 匹；每人分 7 匹，还少 8 匹.(待续)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法·提升练 ☞（答案见135页）

考查角度1 利用方程的特点选择适当的方法解方程

12. 解下列方程：

（1）【中考·梧州】$2x^2-4x-30=0$；

（2）$x^2-(\sqrt{2}+\sqrt{3})x+\sqrt{6}=0$；

（3）$x^2-8x+4=0$.

考查角度2 利用因式分解法解 $x^2+(a+b)x+ab=0$ 型的方程（类比法）

13. 【中考·湘潭】由多项式乘法得 $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$，将该式从右到左使用，即可得到“十字相乘法”进行因式分解的公式：$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$.

【示例】分解因式：$x^2+5x+6=x^2+(2+3)x+2\times3=(x+2)(x+3)$.

（1）分解因式：$x^2+6x+8=(x+____)(x+____)$.

（2）请用上述方法解方程：$x^2-3x-4=0$.

Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞（答案见135页）

拔尖角度1 利用换元法解方程

14. 阅读材料：

为了解方程 $(x^2-1)^2-5(x^2-1)+4=0$，我们可以将 x^2-1 看作一个整体，然后设 $x^2-1=y$，那么原方程可化为 $y^2-5y+4=0$ ①，解得 $y_1=1$，$y_2=4$，当 $y=1$ 时，$x^2-1=1$，$\therefore x^2=2$，$\therefore x=\pm\sqrt{2}$；当 $y=4$ 时，$x^2-1=4$，$\therefore x^2=5$，$\therefore x=\pm\sqrt{5}$，故原方程的解为 $x_1=\sqrt{2}$，$x_2=-\sqrt{2}$，$x_3=\sqrt{5}$，$x_4=-\sqrt{5}$.

解答问题：

（1）上述解题过程，在由原方程得到方程①的过程中，利用_____法达到了降次的目的，体现了转化的数学思想.

（2）请利用以上知识解方程：$x^2+\frac{1}{x^2}-5\left(x+\frac{1}{x}\right)=-8$.

拔尖角度2 利用因式分解法解决与根有关的三角形问题

15. 已知关于 x 的方程 $(a-1)x^2-4x-1+2a=0$，$x=3$ 是方程的一个根.

（1）求 a 的值及方程的另一个根；

（2）一个三角形的三边长是此方程的根，求这个三角形的周长.

更多提分招数详见《极速提分法》第8页.

趣味数学

贼首的话被躲在暗处的衙役听到了，他飞快地跑回官府，报告了知府，但知府不知道有多少盗贼，不知派多少人去抓捕他们. 请问有盗贼几人，布几匹？（答案：盗贼13人，布83匹）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2.3　一元二次方程根的判别式

名师点金

根的判别式的应用

(1)**直用**:不解方程,判断方程根的情况.

(2)**逆用**:由方程根的情况,求字母系数的取值范围.

注意:一元二次方程有实数根,包含有两个相等的实数根和有两个不相等的实数根两种情况.

1 夯实基础·逐点练

(答案见 135 页)

知识点 1 一元二次方程根的判别式

1. 方程 $7x=2x^2-4$ 化为一般形式 $ax^2+bx+c=0$ 后,$a=$_____,$b=$_____,$c=$_____,$b^2-4ac=$_____.

2. 方程 $6x-8=5x^2$ 化为一般形式 $ax^2+bx+c=0$ 后,a,b,c 的值为(　　)

A. $a=5,b=6,c=-8$

B. $a=5,b=-6,c=-8$

C. $a=5,b=-6,c=8$

D. $a=6,b=5,c=8$

3. 在方程 $2x^2+3x=1$ 中,b^2-4ac 的值为(　　)

A. 1　　B. -1　　C. 17　　D. -17

4. 已知方程 $2x^2+mx+1=0$ 的根的判别式的值为 16,则 m 的值为(　　)

A. $2\sqrt{6}$　　B. $-2\sqrt{6}$

C. $\pm2\sqrt{6}$　　D. $\pm3\sqrt{6}$

知识点 2 一元二次方程根的类别

5. 【中考·河南】一元二次方程 $(x+1)(x-1)=2x+3$ 的根的情况是(　　)

A. 有两个不相等的实数根

B. 有两个相等的实数根

C. 只有一个实数根

D. 没有实数根

6. 【中考·湘西州】一元二次方程 $x^2-2x+3=0$ 根的情况是(　　)

A. 有两个不相等的实数根

B. 有两个相等的实数根

C. 没有实数根

D. 无法判断

***7.** 【中考·娄底】关于 x 的一元二次方程 $x^2-(k+3)x+k=0$ 的根的情况是(　　)

A. 有两个不相等的实数根

B. 有两个相等的实数根

C. 无实数根

D. 不能确定

知识点 3 一元二次方程根的判别式的应用

8. 【中考·自贡】关于 x 的一元二次方程 $x^2-2x+m=0$ 无实数根,则实数 m 的取值范围是(　　)

A. $m<1$　　B. $m\geqslant1$　　C. $m\leqslant1$　　D. $m>1$

9. 【中考·荆州】若一次函数 $y=kx+b$ 的图象不经过第二象限,则关于 x 的方程 $x^2+kx+b=0$ 的根的情况是(　　)

A. 有两个不相等的实数根

B. 有两个相等的实数根

C. 无实数根

D. 无法确定

10. 【中考·安徽】若关于 x 的一元二次方程 $x(x+1)+ax=0$ 有两个相等的实数根,则实数 a 的值为(　　)

A. -1　　B. 1

C. -2 或 2　　D. -3 或 1

***11.** 【中考·河北】小刚在解关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 时,只抄对了 $a=1,b=4$,解出其中一个根是 $x=-1$. 他核对时发现所抄的 c 比原方程的 c 值小 2,则原方程的根的情况是(　　)

A. 不存在实数根

B. 有两个不相等的实数根

C. 有一个根是 $x=-1$

D. 有两个相等的实数根

易错点 ! 应用根的判别式求字母的取值范围时忽视一元二次方程的隐含条件

12. 【中考·新疆】若关于 x 的一元二次方程 $(k-1)x^2+x+1=0$ 有两个实数根,则 k 的取值范围是(　　)

A. $k\leqslant\frac{5}{4}$　　B. $k>\frac{5}{4}$

C. $k<\frac{5}{4}$ 且 $k\neq1$　　D. $k\leqslant\frac{5}{4}$ 且 $k\neq1$

更多提分招数详见《极速提分法》第 10 页.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞（答案见135页）

考查角度1 利用方程根的情况求字母的取值范围

13. 【中考 · 北京】关于 x 的方程 $x^2-2x+2m-1=0$ 有实数根，且 m 为正整数，求 m 的值及此时方程的根.

考查角度2 利用一元二次方程的根的情况求代数式的值

14. 【中考 · 衡阳】关于 x 的一元二次方程 $x^2-3x+k=0$ 有实数根.

（1）求 k 的取值范围；

（2）如果 k 是符合条件的最大整数，且一元二次方程 $(m-1)x^2+x+m-3=0$ 与方程 $x^2-3x+k=0$ 有一个相同的根，求此时 m 的值.

Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞（答案见135页）

拔尖角度1 利用一元二次方程根的情况解等腰三角形问题（分类讨论思想）

15. 已知关于 x 的方程 $x^2-(2k+1)x+4\left(k-\frac{1}{2}\right)=0$.

（1）求证：无论 k 取何值，这个方程总有实数根.

（2）若等腰三角形 ABC 的一边长 $a=4$，另两边长 b，c 恰好是这个方程的两个根，求 $\triangle ABC$ 的周长.

拔尖角度2 利用新定义中方程的根的情况求字母的值

16. 对于实数 m，n，定义一种运算“$\otimes$”：$m\otimes n=mn+n$.

（1）求 $2\otimes5$ 与 $2\otimes(-5)$ 的值；

（2）如果关于 x 的方程 $x\otimes(a\otimes x)=-\frac{1}{4}$ 有两个相等的实数根，求实数 a 的值.

更多提分招数详见《极速提分法》第12页.

谜语：捎来考试成绩单（打一数学名词） 谜底：带分数 趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

* 2.4　一元二次方程根与系数的关系

名师点金

与一元二次方程根与系数的关系有关的几种常见式子变形：

(1) $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$；

(2) $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$；

(3) $(x_1+1)(x_2+1)=x_1x_2+(x_1+x_2)+1$；

(4) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}$；

(5) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}$；

(6) $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$.

1 夯实基础 · 逐点练

☞(答案见 136 页)

知识点 1 一元二次方程根与系数的关系

1. 【中考 · 黄冈】若 x_1,x_2 是一元二次方程 $x^2-4x-5=0$ 的两根，则 $x_1\cdot x_2$ 的值为(　　)

A. -5　　B. 5

C. -4　　D. 4

2. 【中考 · 广东】已知 x_1,x_2 是一元二次方程 $x^2-2x=0$ 的两个实数根，下列结论错误的是(　　)

A. $x_1\neq x_2$

B. $x_1^2-2x_1=0$

C. $x_1+x_2=2$

D. $x_1\cdot x_2=2$

3. 【中考 · 贵港】已知 α,β 是一元二次方程 $x^2+x-2=0$ 的两个实数根，则 $\alpha+\beta-\alpha\beta$ 的值是(　　)

A. 3　　B. 1

C. -1　　D. -3

4. 【中考 · 淄博】若 $x_1+x_2=3$，$x_1^2+x_2^2=5$，则以 x_1,x_2 为根的一元二次方程是(　　)

A. $x^2-3x+2=0$

B. $x^2+3x-2=0$

C. $x^2+3x+2=0$

D. $x^2-3x-2=0$

5. 【中考 · 天门】若方程 $x^2-2x-4=0$ 的两个实数根为 α,β，则 $\alpha^2+\beta^2$ 的值为(　　)

A. 12　　B. 10

C. 4　　D. -4

6. 【中考 · 眉山】若 α,β 是一元二次方程 $3x^2+2x-9=0$ 的两根，则 $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}$ 的值是(　　)

A. $\frac{4}{27}$　　B. $-\frac{4}{27}$

C. $-\frac{58}{27}$　　D. $\frac{58}{27}$

7. 【中考 · 天门】若 α,β 为方程 $2x^2-5x-1=0$ 的两个实数根，则 $2\alpha^2+3\alpha\beta+5\beta$ 的值为(　　)

A. -13　　B. 12

C. 14　　D. 15

知识点 2 一元二次方程根与系数的关系的应用

8. 【中考 · 绵阳】若关于 x 的方程 $x^2-2x+c=0$ 有一根为 -1，则方程的另一根为(　　)

A. -1　　B. -3

C. 1　　D. 3

9. 【中考 · 贵港】若 α,β 是关于 x 的一元二次方程 $x^2-2x+m=0$ 的两实根，且 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=-\frac{2}{3}$，则 m 等于(　　)

A. -2　　B. -3

C. 2　　D. 3

***10.** 【中考 · 包头】已知等腰三角形的三边长分别为 $a,b,4$，且 a,b 是关于 x 的一元二次方程 $x^2-12x+m+2=0$ 的两根，则 m 的值是(　　)

A. 34　　B. 30

C. 30 或 34　　D. 30 或 36

11. 【中考 · 烟台】已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-4x+m-1=0$ 的实数根 x_1,x_2，满足 $3x_1x_2-x_1-x_2>2$，则 m 的取值范围是_____.

***12.** 【中考 · 荆州】关于 x 的一元二次方程 $x^2-2kx+k^2-k=0$ 的两个实数根分别是 x_1,x_2，且 $x_1^2+x_2^2=4$，则 $x_1^2-x_1x_2+x_2^2$ 的值是_____.

易错点 忽视判断一元二次方程根的判别式符号

13. 【中考 · 呼和浩特】关于 x 的一元二次方程 $x^2+(a^2-2a)x+a-1=0$ 的两个实数根互为相反数，则 a 的值为(　　)

A. 2　　B. 0

C. 1　　D. 2 或 0

趣味数学　1707 年牛顿的代数讲义经整理后出版，定名为《普遍算术》. 书中陈述了代数基本概念与基本运算，同时对方程的根及其性质进行了深入的探讨，引出了方程论方面的丰硕成果.（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法·提升练 ☞（答案见136页）

考查角度1 利用一元二次方程根与系数的关系求方程的根

14. 【中考·随州】已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-(2k+1)x+k^2+1=0$ 有两个不相等的实数根 x_1,x_2.

(1)求 k 的取值范围；

(2)若 $x_1+x_2=3$，求 k 的值及方程的根.

考查角度2 利用一元二次方程根与系数的关系求两根满足某关系式时字母的值

15. 【中考·绥化】已知关于 x 的方程 $kx^2-3x+1=0$ 有实数根.

(1)求 k 的取值范围.

(2)若该方程有两个实数根，分别为 x_1 和 x_2，当 $x_1+x_2+x_1x_2=4$ 时，求 k 的值.

Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞（答案见136页）

拔尖角度1 利用一元二次方程根与系数的关系及根的判别式求代数式的值

16. 【中考·南充】已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+(2m-1)x+m^2-3=0$ 有实数根.

(1)求实数 m 的取值范围；

(2)当 $m=2$ 时，方程的根为 x_1,x_2，求代数式 $(x_1^2+2x_1)(x_2^2+4x_2+2)$ 的值.

拔尖角度2 利用一元二次方程根与系数的关系及根的判别式解存在性问题

17. 【中考·鄂州】关于 x 的方程 $x^2-(2k-1)x+k^2-2k+3=0$ 有两个不相等的实数根.

(1)求实数 k 的取值范围.

(2)设方程的两个实数根分别为 x_1,x_2，存不存在这样的实数 k，使得 $|x_1|-|x_2|=\sqrt{5}$？若存在，求出这样的 k 值；若不存在，说明理由.

更多提分招数详见《极速提分法》第13页.

如，他得出了方程的根与其判别式之间的关系，指出可以利用系数确定方程根之幂的和数，即“牛顿等幂和公式”.

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

阶段核心方法

一元二次方程的九种解法 ☞(答案见 136 页)

名师点金

解一元二次方程时,主要考虑降次,其解法有**直接开平方法、因式分解法、配方法和公式法**,有些特殊方程还可用**换元法**等. 在具体的解题过程中,结合方程的特点选择合适的方法,往往会达到事半功倍的效果.

方法 1 形如$(x+m)^2=n(n\geqslant 0)$的一元二次方程用直接开平方法求解

1. 用直接开平方法解下列一元二次方程,其中无实数解的方程为(　　)

A. $x^2-5=5$　　B. $-3x^2=0$

C. $x^2+4=0$　　D. $(x+1)^2=0$

2. 解方程:$\frac{1}{3}(x-2)^2=8$.

方法 2 当二次项系数为 1,且一次项系数为偶数时,用配方法求解

3. 解方程:$x^2+4x-2=0$.

4. 已知 $x^2-10x+y^2-16y+89=0$,求$\frac{x}{y}$的值.

方法 3 能化成形如$(x+a)(x+b)=0$的一元二次方程用因式分解法求解

5. 【中考·宁夏】一元二次方程 $x(x-2)=2-x$ 的根是(　　)

A. -1　　B. 0

C. 1 和 2　　D. -1 和 2

6. 解下列一元二次方程:

(1) $x^2-2x=0$;

(2) $16x^2-9=0$;

(3) 【中考·巴中】$3x(x-2)=x-2$.

方法 4 如果一个一元二次方程易化为一般形式,则用公式法求解

7. 用公式法解一元二次方程 $x^2-\frac{1}{4}=2x$,方程的解应是(　　)

A. $x=\frac{-2\pm\sqrt{5}}{2}$　　B. $x=\frac{2\pm\sqrt{5}}{2}$

C. $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$　　D. $x=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$

8. 【中考·绵阳】已知 $a>b>0$,且$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}+\frac{3}{b-a}=0$,则$\frac{b}{a}=$_____.

9. 用公式法解下列方程:

(1) $3(x^2+1)-7x=0$;

更多提分招数详见《极速提分法》第 15 页.

趣味数学　在 1825 年,挪威学者阿贝尔终于证明了:如果方程的次数 $n\geqslant 5$,那么此方程不可能用根式求解,即不存在求一元五次方程的求根公式,这就是著名的阿贝尔定理.(待续)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

(2) $4x^2-3x-5=x-2$.

方法5 用构造法解一元二次方程

10. 解方程：$6x^2+19x+10=0$.

11. 若 m,n,p 满足 $m-n=8$，$mn+p^2+16=0$，求 $m+n+p$ 的值.

方法6 用整体换元法解方程

12. 解方程：$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=48$.

方法7 用降次换元法解方程

13. 解方程：$6x^4-35x^3+62x^2-35x+6=0$.

方法8 用倒数换元法解分式方程

14. 解方程：$\frac{x-2}{x}-\frac{3x}{x-2}=2$.

15. 解方程：$\frac{x+1}{x^2}-\frac{2x^2}{x+1}=1$.

方法9 用特殊值法解一元二次方程

16. 解方程：$(x-2\,019)(x-2\,020)=2\,021\times2\,022$.

更多提分招数详见《极速提分法》第17页.

趣味数学

由于受阿贝尔定理的影响，绝大多数的数学家早已放弃了对一元五次方程求根公式的探索.但由于社会的发展，仍然有一群爱好数学的学者在不断地寻求突破！

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2.5　一元二次方程的应用

第 1 课时　列一元二次方程解百分率问题

名师点金

1. **增长率(或降低率)问题的规律**:(1)增长率问题. 设某数为 a,平均增长率为 x,则一次增长后的值为 $a(1+x)$,两次增长后的值为 $a(1+x)^2$,依次类推,n 次增长后的值为 $a(1+x)^n$. (2)降低率问题. 设某数为 a,平均降低率为 x,则一次降低后的值为 $a(1-x)$,两次降低后的值为 $a(1-x)^2$,依次类推,n 次降低后的值为 $a(1-x)^n$.
2. **解决利润问题常用的关系式**:(1)利润 = 售价 − 进价. (2)利润率 $=\frac{\text{利润}}{\text{进价}}\times 100\% =\frac{\text{售价}-\text{进价}}{\text{进价}}\times 100\%$.
(3)售价 = 进价 × (1 + 利润率). (4)总利润 = 单个利润 × 销售量 = 总收入 − 总支出.

Ⅰ 夯实基础 · 逐点练 ☞(答案见 137 页)

知识点 1　增长率问题

1. 【中考 · 大连】某村 2016 年的人均收入为 20 000 元,2018 年的人均收入为 24 200 元.
(1)求 2016 年到 2018 年该村人均收入的年平均增长率;
(2)假设 2019 年该村人均收入的增长率与前两年的年平均增长率相同,请你计算 2019 年该村的人均收入是多少元?

知识点 2　利润问题

2. 【中考 · 东营】为加快新旧动能转换,提高公司经济效益,某公司决定对近期研发出的一种电子产品进行降价促销,使生产的电子产品能够及时售出,根据市场调查:这种电子产品销售单价定为 200 元时,每天可售出 300 个;若销售单价每降价 1 元,每天可多售出 5 个. 已知每个电子产品的固定成本为 100 元,问这种电子产品降价后的销售单价为多少元时,公司每天可获利 32 000 元?

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞(答案见 137 页)

考查角度　利用一元二次方程、不等式解实际问题的应用

3. 【中考 · 玉林】某养殖场为了响应党中央的扶贫政策,今年起采用“场内 + 农户”养殖模式,同时加强对蛋鸡的科学管理,蛋鸡的产蛋率不断提高,三月份和五月份的产蛋量分别是 2.5 万千克与 3.6 万千克,现假定该养殖场蛋鸡产蛋量的月增长率相同.
(1)求该养殖场蛋鸡产蛋量的月平均增长率;
(2)假定当月产的鸡蛋当月在各销售点全部销售出去,且每个销售点每月平均销售量最多为 0.32 万千克,如果要完成六月份的鸡蛋销量任务,那么该养殖场在五月份已有的销售点的基础上至少要再增加多少个销售点?

趣味数学　华罗庚说:“宇宙之大,粒子之微,火箭之速,化工之巧,地球之变,生物之谜,日月之繁,无处不用数学.”

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第2课时　列一元二次方程解几何问题

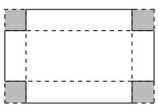
名师点金

列一元二次方程解几何图形问题应注意三点：**一是**图形的面积公式是基本的等量关系式；**二是**利用平移的性质（图形的面积不变）将零散的图形拼聚在一起；**三是**取舍根时，注意条件中对图形边长的限制.

Ⅰ 夯实基础·逐点练 ☞（答案见137页）

知识点1 规则图形的应用

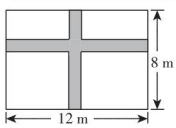
1. 【中考·徐州】如图，有一块矩形硬纸板，长30 cm，宽20 cm，在其四角各剪去一个同样的正方形，然后将四周突出部分折起，可制成一个无盖长方体盒子，当剪去正方形的边长取何值时，所得长方体盒子的侧面积为200 cm^2？



（第1题）

知识点2 不规则图形的应用

2. 【中考·山西】如图，在一块长12 m，宽8 m的矩形空地上，修建同样宽的两条互相垂直的道路（两条道路各与矩形的一条边平行），剩余部分栽种花草，且栽种花草的面积为77 m^2，设道路的宽为x m，则根据题意，可列方程为_____.



（第2题）

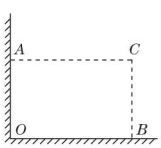
Ⅱ 整合方法·提升练 ☞（答案见138页）

考查角度1 利用一元二次方程解与方案有关问题

3. 【中考·百色】如图，在直角墙角AOB（$OA\perp OB$，且OA，OB长度不限）中，要砌20 m长的墙，与直角墙角AOB围成地面为矩形的储仓，且矩形地面$AOBC$的面积为96 m^2.

（1）求这个矩形地面的长；

（2）有规格为0.80×0.80和1.00×1.00（单位：m）的地板砖价格分别为55元/块和80元/块，若只选其中一种地板砖都恰好能铺满储仓的矩形地面（不计缝隙），用哪一种规格的地板砖费用较少？



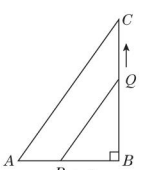
（第3题）

考查角度2 利用一元二次方程探究面积问题

4. 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle B=90°$，$AB=5$ cm，$BC=7$ cm. 点P从点A开始沿AB边向点B以1 cm/s的速度移动，点Q从点B开始沿BC边向点C以2 cm/s的速度移动.

（1）如果点P，Q分别从点A，B同时出发，那么几秒后，$\triangle PBQ$的面积等于4 cm^2？

（2）如果点P，Q分别从点A，B同时出发，$\triangle PBQ$的面积能否等于7 cm^2？



（第4题）

天才=1%的灵感+99%的汗水.——爱迪生

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 3 课时　列一元二次方程解一般问题

名师点金

列一元二次方程解应用题的一般步骤可归纳为六个字：审、设、列、解、验、答.

(1)一般情况下，步骤中的第一步“审”不写出来，但它是关键的一步，只有审清题意，明确了已知量、未知量及它们之间的关系，才能准确列出方程.

(2)设未知数有直接设元和间接设元两种方式，直接设元就是问什么，设什么；间接设元就是在直接设元比较困难，或所列方程较复杂时所采用的间接设未知数的方法.

Ⅰ 夯实基础·逐点练

☞(答案见 138 页)

知识点 1 传播问题

1. 【中考·鸡西】某校“研学”活动小组在一次野外实践时，发现一种植物的主干长出若干数目的支干，每个支干又长出同样数目的小分支，主干、支干和小分支的总数是 43，则这种植物每个支干长出的小分支个数是(　　)

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

*2. 【中考·贺州】某生物实验室需培育一群有益菌. 现有 60 个活体样本，经过两轮培育后，有益菌总和达 24 000 个，其中每个有益菌每一轮可分裂出若干个相同数目的有益菌.

(1)每轮分裂中每个有益菌可分裂出多少个有益菌？

(2)按照这样的分裂速度，经过三轮培育后共有多少个有益菌？

知识点 2 循环问题

3. 【中考·新疆】在某篮球邀请赛中，参赛的每两个队之间都要比赛一场，共比赛 36 场，设有 x 个队参赛，根据题意，可列方程为(　　)

A. $\frac{1}{2}x(x-1)=36$　　B. $\frac{1}{2}x(x+1)=36$

C. $x(x-1)=36$　　D. $x(x+1)=36$

4. 【中考·新疆】某市体育局要组织一次篮球赛，赛制为单循环形式(每两队之间都赛一场)，计划安排 28 场比赛，应邀请多少支球队参加比赛？

知识点 3 数字问题

5. 一个两位数，它的十位数字比个位数字小 4，若把这两个数字调换位置，所得的两位数与原两位数的乘积等于 765，求原两位数.

趣味数学　缺一少十：腊月的一天，郑板桥和蔡州官同游苏州，见一家门上贴了一副对联：二三四五，六七八九. 郑板桥立即派人送来了一些衣服、米面和几斤肉.(待续)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法·提升练 ☞（答案见138页）

考查角度1 利用一元二次方程解传播问题

6. 岳一中九年级某学生聆听了感恩励志主题演讲《不要让爱你的人失望》后，写了一份《改变，从现在开始》的倡议书在微信朋友圈传播，规则：将倡议书发表在自己的朋友圈，再邀请 n 个好友转发倡议书，每个好友转发倡议书之后，又邀请 n 个互不相同的好友转发倡议书，以此类推，已知经过两轮传播后，共有421人参与了传播活动，求 n 的值.

考查角度2 利用一元二次方程解计数问题

7. 我们知道，计算 n 边形的对角线条数公式为：$\frac{1}{2}n(n-3)$. 如果一个 n 边形共有20条对角线，那么可以得到方程 $\frac{1}{2}n(n-3)=20$.

整理得 $n^2-3n-40=0$，解得 $n=8$ 或 $n=-5$.

$\because n\geqslant 3$，$\therefore n=-5$ 不合题意，舍去.

$\therefore n=8$，即该多边形是八边形.

根据以上内容，解答下列问题：

（1）若一个多边形共有14条对角线，则这个多边形的边数是多少？

（2）甲同学说：“我求得一个多边形共有10条对角线.”你认为甲同学的说法正确吗？为什么？

Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞（答案见138页）

拔尖角度1 利用一元二次方程解与一次函数相关的问题

8. 【中考·德州】为积极响应新旧动能转换，提高公司经济效益，某科技公司近期研发出一种新型高科技设备，每台设备成本价为30万元，经过市场调研发现，每台售价为40万元时，年销售量为600台；每台售价为45万元时，年销售量为550台. 假定该设备的年销售量 y（单位：台）和销售单价 x（单位：万元）成一次函数关系.

（1）求年销售量 y 与销售单价 x 的函数关系式；

（2）根据相关规定，此设备的销售单价不得高于70万元，如果该公司想获得10 000万元的年利润，则该设备的销售单价应是多少万元？

拔尖角度2 利用一元二次方程解与不等式相关的问题

9. 为进一步促进义务教育均衡发展，某市加大了基础教育经费的投入，已知2018年该市投入基础教育经费5 000万元，2020年投入基础教育经费7 200万元.

（1）求该市这两年投入基础教育经费的年平均增长率；

（2）如果按（1）中基础教育经费投入的年平均增长率计算，该市计划2021年用不超过当年基础教育经费的5%购买电脑和实物投影仪共1 500台调配给农村学校，若购买一台电脑需3 500元，购买一台实物投影仪需2 000元，则最多可购买电脑多少台？

趣味数学

蔡州官问郑板桥怎么知道这家人缺少衣服和粮食，郑板桥说：“他家大门上不明白写着吗，你看那对联是‘二三四五，六七八九’，这不是缺一（衣）少十（食）吗？”

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

阶段核心归类

一元二次方程解实际问题的十种常见应用 ☞(答案见 138 页)

名师点金

同学们知道,学习了一元二次方程的解法以后,就会经常遇到解决与一元二次方程有关的生活中的应用问题,即列一元二次方程解应用题,不少同学遇到这类问题总是左右为难,难以下笔,事实上,同学们只要能认真阅读题目,分析题意,并能学会分解题目,各个击破,从而找到已知的条件和未知问题,必要时可通过画图、列表等方法来帮助我们理顺已知与未知之间的关系,找到一个或几个相等的式子,从而列出方程求解,同时还要及时地检验解的正确性并作答. 现就列一元二次方程解应用题中遇到的常见的十大典型题目,举例说明.

应用 1　增长率问题

1. 【中考·宜昌】HW 公司 2018 年使用自主研发生产的“QL”系列甲、乙、丙三类芯片共 2 800 万块,生产了 2 800 万部手机,其中乙类芯片的产量是甲类芯片的 2 倍,丙类芯片的产量比甲、乙两类芯片产量的和还多 400 万块,这些“QL”芯片解决了该公司 2018 年生产的全部手机所需芯片的 10%.

(1)求 2018 年甲类芯片的产量;

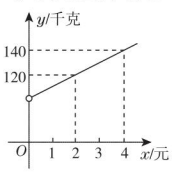
(2)HW 公司计划 2020 年生产的手机全部使用自主研发的“QL”系列芯片,从 2019 年起逐年扩大“QL”芯片的产量,2019 年、2020 年这两年,甲类芯片每年的产量都比前一年增长一个相同的百分数 $m\%$,乙类芯片的产量平均每年增长的百分数比 $m\%$ 小 1,丙类芯片的产量每年按相同的数量递增,2018 年到 2020 年,丙类芯片三年的总产量达到 1.44 亿块,这样,2020 年 HW 公司的手机产量比 2018 年全年的手机产量多 10%,求丙类芯片 2020 年的产量及 m 的值.

应用 2　销售问题

2. 某商贸公司以每千克 40 元的价格购进一种干果,计划以每千克 60 元的价格销售,为了让顾客得到更大的实惠,现决定降价销售,已知这种干果销售量 y(千克)与每千克降价 x(元)$(0<x<20)$之间满足一次函数关系,其图象如图所示. 【导学号:4885393】

(1)求 y 与 x 之间的函数关系式;

(2)新型冠状病毒肺炎疫情期间,该商贸公司想通过销售这些干果获利 2 090 元,并全部捐赠给疫情最严重的地区,则这种干果每千克应降价多少元?



(第 2 题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

应用3 储蓄问题

3. 王红梅同学将1 000元压岁钱第一次按一年定期存入“少儿银行”，到期后将本金和利息取出，并将其中的500元捐给“希望工程”，剩余的又全部按一年定期存入，这时存款的年利率已下调到第一次存款时年利率的90%，这样到期后，可得本金和利息共522元，求第一次存款时的年利率.（不计利息税）

应用4 趣味问题

4. 一个醉汉拿着一根竹竿进城，横着怎么也拿不进去，量竹竿长比城门宽4米. 旁边一个醉汉嘲笑他：“你没看城门高吗？竖着拿就可以进去啦！”结果竹竿竖着比城门高2米，二人没办法，只好请教聪明人，聪明人教他们二人沿着城门的对角斜着拿，二人一试，不多不少刚好进城门，你知道竹竿有多长吗？

应用5 古诗问题

5. 读诗词解题：（通过列方程式，算出周瑜去世时的年龄）

大江东去浪淘尽，千古风流数人物；
而立之年督东吴，早逝英年两位数；
十位恰小个位三，个位平方与寿符；
哪位学子算得快，多少年华属周瑜？

应用6 传播问题

6. 某种电脑病毒传播非常快，如果有一台电脑被感染，经过两轮感染后就会有81台电脑被感染. 请回答：每轮感染中平均一台电脑会感染几台电脑？若病毒得不到有效控制，三轮后被感染的电脑总数会不会超过700台？

谜语：风筝失控（打一数学名词）　谜底：线段　趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

应用 7 情景问题

7. 收发微信红包已成为各类人群进行交流联系、增强感情的一部分. 如图是甜甜和她的双胞胎妹妹在六一儿童节期间的对话.



（第 7 题）

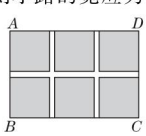
请问：

(1) 2018 年到 2020 年甜甜和她的妹妹在六一收到红包的年平均增长率是多少?

(2) 2020 年六一，甜甜和她的妹妹各收到了多少元的微信红包?

应用 8 几何问题

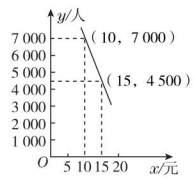
8. 【中考·襄阳】改善小区环境，争创文明家园. 如图所示，某社区决定在一块长 (AD) 16 m，宽 (AB) 9 m 的矩形场地 $ABCD$ 上修建三条同样宽的小路，其中两条与 AB 平行，另一条与 AD 平行，其余部分种草，要使草坪部分的总面积为 112 m^2，则小路的宽应为多少?



（第 8 题）

应用 9 函数问题

9. 某博物馆每周都吸引大量中外游客前来参观. 如果游客过多，对馆中的珍贵文物会产生不利影响，因此博物馆采取了提高门票价格的方法来控制参观人数，在该方法的实施过程中发现：每周参观人数 y (人) 与票价 x (元) 之间存在着如图所示的一次函数关系，在这种情况下，如果要保证每周 4 万元的门票收入，那么每周应限定参观人数为多少? 门票价格应是多少?



（第 9 题）

应用 10 新定义问题

10. 观察下列一组方程：①$x^2 - x = 0$；②$x^2 - 3x + 2 = 0$；③$x^2 - 5x + 6 = 0$；④$x^2 - 7x + 12 = 0$……它们的根有一定的规律，都是两个连续的自然数，我们称这类一元二次方程为“连根一元二次方程”.

(1) 若 $x^2 + kx + 56 = 0$ 也是“连根一元二次方程”，写出实数 k 的值，并解这个一元二次方程；

(2) 请写出第 n 个方程和它的根.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

全章热门考点整合应用

☞（答案见139页）

名师点金

一元二次方程题的类型非常丰富，常见的有一元二次方程的根、一元二次方程的解法、一元二次方程根的情况、一元二次方程根与系数的关系、一元二次方程的应用等，只要我们掌握了不同类型题的解法特点，就可以使问题变得简单明了. 本章热门考点可概括为两个概念、一个解法、两个关系、两个应用、三种思想.

考点1 两个概念

概念1 一元二次方程

1. 当 m 取何值时，方程 $(m-1)x^{m^2+1}+2mx+3=0$ 是关于 x 的一元二次方程？

概念2 一元二次方程的根

2. 若关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一根为 -1，且 $a=\sqrt{4-c}+\sqrt{c-4}-2$，求 $\dfrac{(a+b)^{2\,020}}{2\,021c}$ 的值.

考点2 一个解法——一元二次方程的解法

3. 选择适当的方法解下列方程：

(1) $(x-1)^2+2x(x-1)=0$；

(2) $x^2-6x-6=0$；

(3) $6\,000(1-x)^2=4\,860$；

(4) $(10+x)(50-x)=800$；

(5)【中考·山西】$(2x-1)^2=x(3x+2)-7$.

谜语：登上最高峰（打一数学名词）

谜底：顶点

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考点 3　两个关系

关系 1　一元二次方程根的判别式与系数的关系

4. 【中考·烟台】当 $b+c=5$ 时，关于 x 的一元二次方程 $3x^2+bx-c=0$ 的根的情况为(　　)

A. 有两个不相等的实数根

B. 有两个相等的实数根

C. 没有实数根

D. 无法确定

5. 在等腰三角形 ABC 中，三边长分别为 a,b,c. 其中 $a=5$，若关于 x 的方程 $x^2+(b+2)x+(6-b)=0$ 有两个相等的实数根，求 $\triangle ABC$ 的周长.

关系 2　一元二次方程根与系数的关系

6. 【中考·孝感】已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-2(a-1)x+a^2-a-2=0$ 有两个不相等的实数根 x_1,x_2.

(1)若 a 为正整数，求 a 的值；

(2)若 x_1,x_2 满足 $x_1^2+x_2^2-x_1x_2=16$，求 a 的值.

7. 【中考·黄石】已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-6x+(4m+1)=0$ 有实数根.

(1)求 m 的取值范围；

(2)若该方程的两个实数根为 x_1,x_2，且 $|x_1-x_2|=4$，求 m 的值.

考点 4　两个应用

应用 1　一元二次方程的应用

8. 【中考·德州】习近平总书记说："读书可以让人保持思想活力，让人得到智慧启发，让人滋养浩然之气."某校为响应我市全民阅读活动，利用节假日面向社会开放学校图书馆. 据统计，第一个月进馆 128 人次，进馆人次逐月增加，到第三个月末累计进馆 608 人次，若进馆人次的月平均增长率相同.

(1)求进馆人次的月平均增长率；

(2)因条件限制，学校图书馆每月接纳能力不超过 500 人次，在进馆人次的月平均增长率不变的条件下，校图书馆能否接纳第四个月的进馆人次，并说明理由.

应用 2　配方法的应用

9. 阅读下面材料.

我们知道 x^2+6x+9 可以分解因式，结果为 $(x+3)^2$，其实 x^2+6x+8 也可以通过配方法分解因式，其过程如下：

$$\begin{aligned}&x^2+6x+8\\=&x^2+6x+9-9+8\\=&(x+3)^2-1\\=&(x+3+1)(x+3-1)\\=&(x+4)(x+2).\end{aligned}$$

(1)请仿照上述过程填空：

$x^2+4x-5=[x+(\quad\quad)][x+(\quad\quad)]$；

$x^2-5x+6=[x+(\quad\quad)][x+(\quad\quad)]$；

$x^2-8x-9=[x+(\quad\quad)][x+(\quad\quad)]$.

(2)请观察(1)中横线上所填的数，每道题所填的两个数与一次项系数、常数项有什么关系？

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

10. 阅读材料：

把形如 $ax^2+bx+c(a,b,c$ 为常数）的二次三项式（或其一部分）配成完全平方式的方法叫作配方法. 配方法的基本形式是完全平方公式的逆写，即 $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$.

例如：$(x-1)^2+3$，$(x-2)^2+2x$，$\left(\frac{1}{2}x-2\right)^2+\frac{3}{4}x^2$ 是 x^2-2x+4 的三种不同形式的配方，即“余项”分别是常数项、一次项、二次项.

请根据阅读材料解决下列问题：

（1）仿照上面的例子，写出 x^2-4x+2 的三种不同形式的配方；

（2）已知 $a^2+b^2+c^2-ab-3b-2c+4=0$，求 $a+b+c$ 的值.

考点5 三种思想

思想1 整体思想

11. 已知 $x=a$ 是 $2x^2+x-2=0$ 的一个根，求代数式 $2a^4+a^3+2a^2+2a+1$ 的值.

思想2 转化思想

12. 解方程：$(2x+1)^2-3(2x+1)=-2$.

思想3 分类讨论思想

13. 已知关于 x 的方程 $x^2+2(a-1)x+a^2-7a-4=0$ 有两个实数根 x_1,x_2.

（1）求 a 的取值范围；

（2）若 $x_1^2=x_1x_2$，求方程的两个根及 a 的值.

谜语：千真万确（打一数学名词） 谜底：实数 趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第1章达标检测卷

（120分，90分钟）

题　号	一	二	三	总　分
得　分				

姓名　学号　班级　学校

一、选择题（每题3分，共30分）

1. 下列函数中，表示 y 是 x 的反比例函数的是（　　）

A. $y=\frac{2x-1}{3}$　　B. $y=\frac{1}{x-1}$　　C. $y=-\frac{1}{x^2}$　　D. $y=\frac{1}{2x}$

2. 如果点 $(3,-4)$ 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象上，那么下列各点中，在此图象上的是（　　）

A. $(3,4)$　　B. $(-2,-6)$　　C. $(-2,6)$　　D. $(-3,-4)$

3. 某闭合电路中，电源的电压为定值，电流 I(A) 与电阻 $R(\Omega)$ 成反比例函数关系. 如图所示的是该电路中电流 I 与电阻 R 之间的函数关系的图象，当电阻 R 为 5Ω 时，电流 I 为（　　）



（第3题）

A. 6 A　　B. 5 A　　C. 1.2 A　　D. 1 A

4. 已知反比例函数 $y=\frac{3}{x}$，下列结论中不正确的是（　　）

A. 图象经过点 $(-1,-3)$　　B. 图象在第一、三象限

C. 当 $x>1$ 时，$0<y<3$　　D. 当 $x<0$ 时，y 随着 x 的增大而增大

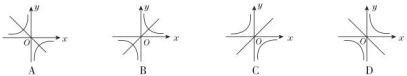
5. 若在同一直角坐标系中，正比例函数 $y=k_1x$ 与反比例函数 $y=\frac{k_2}{x}$ 的图象无交点，则有（　　）

A. $k_1+k_2>0$　　B. $k_1+k_2<0$　　C. $k_1k_2>0$　　D. $k_1k_2<0$

6. 已知点 $A(-1,y_1)$，$B(2,y_2)$ 都在双曲线 $y=\frac{3+m}{x}$ 上，且 $y_1>y_2$，则 m 的取值范围是（　　）

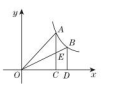
A. $m<0$　　B. $m>0$　　C. $m>-3$　　D. $m<-3$

7. 在同一平面直角坐标系中，正比例函数 $y=kx$ 与反比例函数 $y=\frac{k-1}{x}$ 的图象不可能是（　　）



8. 如图，分别过反比例函数 $y=\frac{2}{x}(x>0)$ 图象上任意两点 A,B 作 x 轴的垂线，垂足分别为点 C,D，连接 OA,OB，设 AC 与 OB 的交点为 E，$\triangle AOE$ 与梯形 $ECDB$ 的面积分别为 S_1,S_2，则 S_1 与 S_2 的大小关系是（　　）

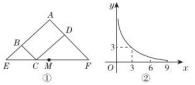
A. $S_1>S_2$　　B. $S_1<S_2$　　C. $S_1=S_2$　　D. S_1,S_2 的大小关系不能确定



（第8题）



（第9题）



（第10题）

9. 如图，A,B 两点在反比例函数 $y=\frac{k_1}{x}$ 的图象上，C,D 两点在反比例函数 $y=\frac{k_2}{x}$ 的图象上，$AC\perp x$ 轴于点 E，$BD\perp x$ 轴于点 F，$AC=2$，$BD=3$，$EF=\frac{10}{3}$，则 k_2-k_1 的值为（　　）

A. 4　　B. $\frac{14}{3}$　　C. $\frac{16}{3}$　　D. 6

10. 如图①，在矩形 $ABCD$ 中，$BC=x$，$CD=y$，y 与 x 满足的反比例函数关系如图②所示，等腰直角三角形 AEF 的斜边 EF 过 C 点，M 为 EF 的中点，则下列结论正确的是（　　）

A. 当 $x=3$ 时，$EC<EM$　　B. 当 $y=9$ 时，$EC>EM$

C. 当 x 增大时，$EC\cdot CF$ 的值增大　　D. 当 y 增大时，$BE\cdot DF$ 的值不变

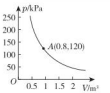
二、填空题（每题3分，共24分）

11. 已知反比例函数 $y=\frac{k-1}{x}$（k 是常数，$k\neq1$）的图象有一支在第二象限，那么 k 的取值范围是_____.

12. 若点 $(2,y_1)$，$(3,y_2)$ 在函数 $y=-\frac{2}{x}$ 的图象上，则 y_1 _____ y_2（填“>”“<”或“=”）.

13. 若反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象与一次函数 $y=mx$ 的图象的一个交点的坐标为 $(1,2)$，则它们另一个交点的坐标为_____.

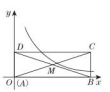
14. 某气球内充满了一定质量的气体，当温度不变时，气球内气体的压强 p(kPa) 是气体体积 $V(m^3)$ 的反比例函数，其图象如图所示，则当气球内气体体积 $V(m^3)$ 的范围是 $0.8<V<2$ 时，气体的压强 p(kPa) 的范围是_____.



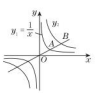
（第14题）



（第15题）



（第16题）



（第17题）

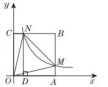
15. 如图，点 A 是反比例函数图象上一点，过点 A 作 $AB\perp y$ 轴于点 B，点 P 在 x 轴上，且 $\triangle ABP$ 的面积为 6，则这个反比例函数的表达式为_____.

16. 如图，矩形 $ABCD$ 在第一象限，AB 在 x 轴的正半轴上(点 A 与点 O 重合)，$AB=3$，$BC=1$，连接 AC,BD，交点为 M. 将矩形 $ABCD$ 沿 x 轴向右平移，当平移距离为_____时，点 M 在反比例函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图象上.

17. 如图，过原点 O 的直线与两个反比例函数的图象在第一象限内分别交于点 A,B，且 A 为 OB 的中点，若函数 $y_1=\frac{1}{x}$，则 y_2 与 x 的函数表达式是_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

18. 如图，在平面直角坐标系中，正方形 $OABC$ 的顶点 O 与原点重合，顶点 A，C 分别在 x 轴，y 轴上，反比例函数的图象与正方形的两边 AB，BC 分别交于点 M，N，$ND\perp x$ 轴，垂足为 D，连接 OM，ON，MN. 下列结论：①$\triangle OCN\cong\triangle OAM$；②$ON=MN$；③四边形 $DAMN$ 与 $\triangle MON$ 面积相等；④若 $\angle MON=45°$，$MN=2$，则点 C 的坐标为 $(0,\sqrt{2}+1)$. 其中正确结论的序号是_____.



（第 18 题）

三、解答题（19～22 题每题 10 分，23 题 12 分，24 题 14 分，共 66 分）

19. 已知 y 与 $x-1$ 成反比例，且当 $x=-5$ 时，$y=2$.

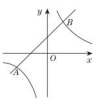
（1）求 y 与 x 的函数表达式；

（2）当 $x=5$ 时，求 y 的值.

20. 如图，已知一次函数与反比例函数的图象交于点 $A(-4,-2)$ 和 $B(a,4)$.

（1）求反比例函数的表达式和点 B 的坐标；

（2）根据图象回答，当 x 在什么范围时，一次函数的值大于反比例函数的值？



（第 20 题）

21. 如图，已知反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象经过点 $A(4,m)$，$AB\perp x$ 轴，且 $\triangle AOB$ 的面积为 2.

（1）求 k 和 m 的值；

（2）若点 $C(x,y)$ 也在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象上，当 $-3\leqslant x\leqslant -1$ 时，求 y 的取值范围.

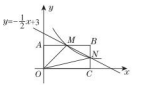


（第 21 题）

22. 如图，在平面直角坐标系中，矩形 $OABC$ 的顶点 O 与坐标原点重合，A，C 分别在 y 轴，x 轴上，点 B 的坐标为 $(4,2)$，直线 $y=-\frac{1}{2}x+3$ 分别交 AB，BC 于点 M，N，反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象经过点 M，N.

（1）求反比例函数的表达式；

（2）若点 P 在 y 轴上，且 $\triangle OPM$ 的面积与四边形 $BMON$ 的面积相等，求点 P 的坐标.



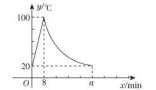
（第 22 题）

23. 教师办公室有一种可以自动加热的饮水机，该饮水机的工作程序是：放满水后，接通电源，则自动开始加热，每分钟水温上升 10 ℃，待加热到 100 ℃，饮水机自动停止加热，水温开始下降，水温 y(℃) 和通电时间 x(min) 成反比例函数关系，直至水温降至室温，饮水机再次自动加热，重复上述过程. 设某天水温和室温均为 20 ℃，接通电源后，水温 y(℃) 和通电时间 x(min) 之间的关系如图所示，回答下列问题：

（1）分别求出当 $0\leqslant x\leqslant 8$ 和 $8<x\leqslant a$ 时，y 和 x 之间的函数表达式；

（2）求出图中 a 的值；

（3）李老师这天早上 7：30 将饮水机电源打开，若他想在 8：10 上课前喝到不低于 40 ℃ 的开水，则他需要在什么时间段内接水？

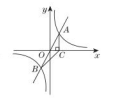


（第 23 题）

24. 如图，正比例函数 $y=2x$ 的图象与反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象交于 A，B 两点，过点 A 作 $AC\perp x$ 轴于点 C，连接 BC，若 $\triangle ABC$ 的面积为 2.

（1）求 k 的值.

（2）x 轴上是否存在一点 D，使 $\triangle ABD$ 为直角三角形？若存在，求出点 D 的坐标；若不存在，请说明理由.



（第 24 题）

荣德基 品质教辅
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 2 章达标检测卷

(120 分,90 分钟)

题 号	一	二	三	总 分
得 分				

姓名 学号 班级 学校

一、选择题(每题 3 分,共 30 分)

1. 下列方程是一元二次方程的是(　　)

A. $9x+2=0$　　B. $z^2+x=1$　　C. $3x^2-8=0$　　D. $\frac{1}{x}+x^2=0$

2. 一元二次方程 $x^2-8x-1=0$ 配方后为(　　)

A. $(x-4)^2=17$　　B. $(x+4)^2=15$　　C. $(x+4)^2=17$　　D. $(x-4)^2=15$

3. 将方程 $x(x-1)=4(x+1)$ 化为一般形式后,二次项系数、一次项系数与常数项之和为(　　)

A. 0　　B. 10　　C. 4　　D. -8

4. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+mx-8=0$ 的一个实数根为 2,则另一个实数根及 m 的值分别为(　　)

A. 4,-2　　B. -4,-2　　C. 4,2　　D. -4,2

5. 下列一元二次方程中,没有实数根的是(　　)

A. $x^2-2x=0$　　B. $x^2+4x-1=0$　　C. $2x^2-4x+3=0$　　D. $3x^2=5x-2$

6. 在一次酒会上,每两人都只碰一次杯,如果一共碰杯 55 次,则参加酒会的人数为(　　)

A. 9 人　　B. 10 人　　C. 11 人　　D. 12 人

7. 关于 x 的方程 $x^2-ax+2a=0$ 的两根的平方和是 5,则 a 的值是(　　)

A. -1 或 5　　B. 1　　C. 5　　D. -1

8. 一个三角形的两边长分别为 3 和 6,第三边的长是方程 $(x-2)(x-4)=0$ 的根,则这个三角形的周长是(　　)

A. 11　　B. 11 或 13　　C. 13　　D. 以上选项都不正确

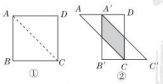
9. 若一元二次方程 $x^2-2x-m=0$ 无实数根,则一次函数 $y=(m+1)x+m-1$ 的图象不经过的象限是(　　)

A. 第四象限　　B. 第三象限　　C. 第二象限　　D. 第一象限

10. 如图,将边长为 2 cm 的正方形 $ABCD$ 沿其对角线 AC 剪开,再把 $\triangle ABC$ 沿着 AD 方向平移,得到 $\triangle A'B'C'$,若两个三角形重叠部分的面积为1 cm^2,则它移动的距离 AA' 等于(　　)

A. 0.5 cm　　B. 1 cm

C. 1.5 cm　　D. 2 cm



(第 10 题)

二、填空题(每题 3 分,共 24 分)

11. 若方程 $(a-2)x^{|a|}+3ax+1=0$ 是关于 x 的一元二次方程,则 a 的值是_____.

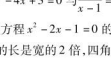
12. 已知关于 x 的一元二次方程 $mx^2+5x+m^2-2m=0$ 有一个根为 0,则 $m=$_____.

13. 某市加大了对雾霾的治理力度,2019 年第一季度投入资金 100 万元,第二季度和第三季度共投入资金 260 万元,求这两个季度投入资金的平均增长率. 设这两个季度投入资金的平均增长率为 x,根据题意可列方程为_____.

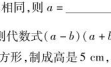
14. 关于 x 的两个方程 $x^2-4x+3=0$ 与 $\frac{1}{x-1}=\frac{2}{x+a}$ 有一个解相同,则 $a=$_____.

15. 已知 a,b 是一元二次方程 $x^2-2x-1=0$ 的两个实数根,则代数式 $(a-b)(a+b-2)+ab=$_____.

16. 如图,一个矩形铁皮的长是宽的 2 倍,四角各截去一个正方形,制成高是 5 cm,容积是 500 cm^3 的无盖长方体容器,那么这块铁皮的长为_____,宽为_____.(铁皮厚度忽略不计)



(第 16 题)



(第 18 题)

17. 对于实数 a,b,定义运算"$\otimes$":$a\otimes b=\begin{cases}a^2-ab(a\geqslant b),\\ ab-b^2(a<b).\end{cases}$ 例如:$4\otimes 2$,因为 $4>2$,所以 $4\otimes 2=4^2-4\times 2=8$. 若 x_1,x_2 是一元二次方程 $x^2-5x+6=0$ 的两个根,则 $x_1\otimes x_2=$_____.

18. 如图,在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle BAC=90°$,$AB=AC=16$ cm,AD 为 BC 边上的高,动点 P 从点 A 出发,沿 $A\to D$ 方向以$\sqrt{2}$ cm/s 的速度向点 D 运动. 设 $\triangle ABP$ 的面积为 S_1,矩形 $PDFE$ 的面积为 S_2,运动时间为 t s $(0<t<8)$,则 $t=$_____时,$S_1=2S_2$.

三、解答题(19 ~ 22 题每题 10 分,23 题 12 分,24 题 14 分,共 66 分)

19. 用适当的方法解下列方程.

(1) $x^2-4x-1=0$;　　(2) $x^2-1=2(x+1)$;

(3) $x^2+3x+1=0$;　　(4) $(y+1)(y-1)=2y-1$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

20. 已知关于 x 的方程 $4x^2-(k+2)x+k-1=0$ 有两个相等的实数根.

(1)求 k 的值;

(2)求此时方程的根.

21. 已知关于 x 的一元二次方程 $(x-3)(x-2)=p(p+1)$.

(1)试证明:无论 p 取何值此方程总有两个实数根.

(2)若原方程的两根 x_1,x_2 满足 $x_1^2+x_2^2-x_1x_2=3p^2+1$,求 p 的值.

22. 某批发商以每件 50 元的价格购进 800 件 T 恤,第一个月以单价 80 元销售,售出了 200 件;第二个月如果单价不变,预计仍可售出 200 件. 批发商为增加销售量,决定降价销售,根据市场调查,单价每降低 1 元,可多售出 10 件,但最低单价应高于购进的价格. 第二个月结束后,批发商将对剩余的 T 恤一次性清仓销售,清仓时单价为 40 元. 设第二个月单价降低 x 元.

(1)填表(不需化简):

时间	第一个月	第二个月	清仓时
单价/元	80		40
销售量/件	200		

(2)如果批发商希望通过销售这批 T 恤获利 9 000 元. 那么第二个月的单价应是多少元?

23. 如图,在 $\triangle ABC$ 中,$\angle B=90°$,$AB=6$ cm,$BC=8$ cm,若点 P 从点 A 沿 AB 边向点 B 以 1 cm/s 的速度移动,点 Q 从点 B 沿 BC 边向点 C 以 2 cm/s 的速度移动,两点同时出发.

(1)问几秒后,$\triangle PBQ$ 的面积为 8 cm^2?

(2)出发几秒后,线段 PQ 的长为 $4\sqrt{2}$ cm?

(3)$\triangle PBQ$ 的面积能否为 10 cm^2? 若能,求出时间;若不能,请说明理由.



(第 23 题)

24. 某中学九年级准备组织学生去梦幻王国进行春游活动. 梦幻王国给出了学生团体门票的优惠价格:如果学生人数不超过 30 名,那么门票为每张 240 元;如果人数超过了 30 名,则每超过 1 名,每张门票就降低 2 元,但每张门票最低不能少于 200 元.

(1)若一班共有 40 名学生参加了春游活动,则需要交门票费多少元?

(2)若二班共有 52 名学生参加了春游活动,则需要交门票费多少元?

(3)若三班交了门票费 9 450 元,请问该班参加春游的学生有多少名?

荣德基 品质教辅

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第3章达标检测卷

（120分，90分钟）

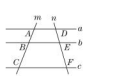
题　号	一	二	三	总　分
得　分				

姓名　学号　班级　学校

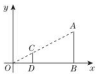
一、选择题（每题3分，共30分）

1. 若$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，$\angle A=40°$，$\angle B=60°$，则$\angle C'$等于（　　）
A. 20°　　B. 40°　　C. 60°　　D. 80°

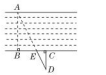
2. 如图，已知直线$a/\!/b/\!/c$，直线m交直线a，b，c于点A，B，C，直线n交直线a，b，c于点D，E，F，若$\frac{AB}{BC}=\frac{1}{2}$，则$\frac{DE}{EF}$等于（　　）
A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. 1



（第2题）



（第5题）



（第7题）

3. 下列四组线段中，不是成比例线段的为（　　）
A. 3，6，2，4　　B. 4，6，5，10　　C. 1，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{6}$　　D. 2，$\sqrt{5}$，2$\sqrt{3}$，$\sqrt{15}$

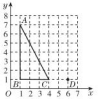
4. 下列各组图形中有可能不相似的是（　　）
A. 各有一个角是45°的两个等腰三角形　　B. 各有一个角是60°的两个等腰三角形
C. 各有一个角是105°的两个等腰三角形　　D. 两个等腰直角三角形

5. 如图，在平面直角坐标系中，有点$A(6,3)$，$B(6,0)$，以原点O为位似中心，位似比为$\frac{1}{3}$，在第一象限内把线段AB缩小后得到线段CD，则点C的坐标为（　　）
A. (2,1)　　B. (2,0)　　C. (3,3)　　D. (3,1)

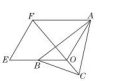
6. 下列说法：①位似图形都相似；②位似图形都是平移后再放大（或缩小）得到；③直角三角形斜边上的中线与斜边的比为1∶2；④两个相似多边形的面积比为4∶9，则周长的比为16∶81. 其中正确的有（　　）
A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

7. 如图，为计算河的宽度（河两岸平行），在河对岸选定一个目标点A，在近岸取点B，C，D，使得$AB\perp BC$，$CD\perp BC$，点E在BC上，并且点A，E，D在同一直线上，若测得$BE=20$ m，$CE=10$ m，$CD=20$ m，则河的宽度AB为（　　）
A. 60 m　　B. 40 m　　C. 30 m　　D. 20 m

8. 如图，点A，B，C，D的坐标分别是(1,7)，(1,1)，(4,1)，(6,1)，以C，D，E为顶点的三角形与$\triangle ABC$相似，则点E的坐标不可能是（　　）
A. (6,0)　　B. (6,3)　　C. (6,5)　　D. (4,2)



（第8题）



（第9题）



（第12题）

9. 如图，四边形$AOEF$是平行四边形，点B为OE的中点，延长FO至点C，使$OC=\frac{1}{3}FO$，连接AB，AC，BC，则在$\triangle ABC$中，$S_{\triangle ABO}:S_{\triangle AOC}:S_{\triangle BOC}$等于（　　）
A. 6∶2∶1　　B. 3∶2∶1　　C. 6∶3∶2　　D. 4∶3∶2

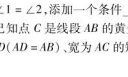
10. 已知$\triangle ABC$的三边长分别为20 cm，50 cm，60 cm，现要利用长度分别为30 cm和60 cm的细木条各一根，做一个与$\triangle ABC$相似的三角形木架，要求以其中一根为一边，将另一根截下两段（允许有余料）作为另外两边，那么另两边的长度分别为（　　）
A. 10 cm，25 cm　　B. 10 cm，36 cm或12 cm，36 cm
C. 12 cm，36 cm　　D. 10 cm，25 cm或12 cm，36 cm

二、填空题（每题3分，共24分）

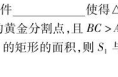
11. 已知$\frac{c}{4}=\frac{b}{5}=\frac{a}{6}\neq 0$，则$\frac{b+c}{a}=$_____.

12. 如图，$\angle 1=\angle 2$，添加一个条件_____使得$\triangle ADE\backsim\triangle ACB$.

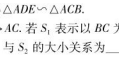
13. 如图，已知点C是线段AB的黄金分割点，且$BC>AC$. 若S_1表示以BC为边的正方形的面积，S_2表示长为$AD(AD=AB)$、宽为AC的矩形的面积，则S_1与S_2的大小关系为_____.



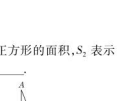
（第13题）



（第14题）



（第15题）



（第16题）

14. 如图，在$\triangle ABC$中，D，E分别是AB和AC的中点，F是BC延长线上一点，DF平分CE于点G，$CF=1$，则$BC=$_____，$\triangle ADE$与$\triangle ABC$的周长之比为_____，$\triangle CFG$与$\triangle BFD$的面积之比为_____.

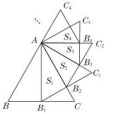
15. 如图，四边形$ABCD$与四边形$EFGH$位似，其位似中心为点O，且$\frac{OE}{EA}=\frac{4}{3}$，则$\frac{FG}{BC}=$_____.

16.《九章算术》是我国古代数学名著，书中有下列问题：“今有勾五步，股十二步，问勾中容方几何？”其意思为：“今有直角三角形（如图），勾（短直角边）长为5步，股（长直角边）长为12步，问该直角三角形能容纳的正方形边长最大是多少步？”该问题的答案是_____步.

17. 矩形$ABCD$中，$AB=6$，$BC=8$，点P在矩形$ABCD$的内部，点E在边BC上，满足$\triangle PBE\backsim\triangle DBC$，若$\triangle APD$是等腰三角形，则$PE$的长为_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

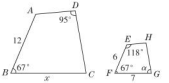
18. 如图，正三角形 ABC 的边长为 2，以 BC 边上的高 AB_1 为边作正三角形 AB_1C_1，$\triangle ABC$ 与 $\triangle AB_1C_1$ 公共部分的面积记为 S_1，再以正三角形 AB_1C_1 的边 B_1C_1 上的高 AB_2 为边作正三角形 AB_2C_2，$\triangle AB_1C_1$ 与 $\triangle AB_2C_2$ 公共部分的面积记为 S_2，……，以此类推，则 S_n = _____（用含 n 的式子表示，n 为正整数）.



（第 18 题）

三、解答题（19～22 题每题 10 分，23 题 12 分，24 题 14 分，共 66 分）

19. 如图，四边形 $ABCD$∽四边形 $EFGH$，试求出 x 及 $\angle\alpha$ 的大小.

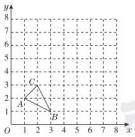


（第 19 题）

20. 如图，$\triangle ABC$ 三个顶点的坐标分别为 $A(1,2)$，$B(3,1)$，$C(2,3)$，以原点 O 为位似中心，将 $\triangle ABC$ 放大为原来的 2 倍得 $\triangle A'B'C'$.

（1）在图中第一象限内画出符合要求的 $\triangle A'B'C'$（不要求写画法）；

（2）计算 $\triangle A'B'C'$ 的面积.

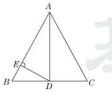


（第 20 题）

21. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，AD 为 BC 边上的中线，$DE\perp AB$ 于点 E.

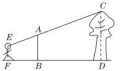
（1）求证：$\triangle BDE$∽$\triangle CAD$.

（2）若 $AB=13$，$BC=10$，求线段 DE 的长.



（第 21 题）

22. 如图，竖立在 B 处的标杆 $AB=2.4$ 米，在 F 处的观测者从 E 处看到标杆顶端 A、树顶 C 在同一条直线上（点 F,B,D 也在同一条直线上）. 已知 $BD=8$ 米，$FB=2.5$ 米，$EF=1.5$ 米，求树高 CD.



（第 22 题）

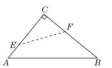
23. 如图，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，翻折 $\angle C$，使点 C 落在斜边 AB 上的某一点 D 处，折痕为 EF（点 E,F 分别在边 AC,BC 上）.

（1）若 $\triangle CEF$ 与 $\triangle ABC$ 相似.

①当 $AC=BC=2$ 时，AD 的长为_____.

②当 $AC=3$，$BC=4$ 时，AD 的长为_____.

（2）当点 D 是 AB 的中点时，$\triangle CEF$ 与 $\triangle ABC$ 相似吗？请说明理由.



（第 23 题）

24. 如图①，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle B=90°$，$BC=2AB=8$，点 D,E 分别是边 BC,AC 的中点，连接 DE. 将 $\triangle EDC$ 绕点 C 按顺时针方向旋转，记旋转角为 α.

（1）当 $\alpha=0°$ 和 $\alpha=180°$ 时，求 $\dfrac{AE}{BD}$ 的值.

（2）试判断当 $0°\leqslant\alpha<360°$ 时，$\dfrac{AE}{BD}$ 的大小有无变化？请仅就图②的情况给出证明.

（3）当 $\triangle EDC$ 旋转至 A,D,E 三点共线时，求线段 BD 的长.



①　②　（备用图）

（第 24 题）

荣德基 品质教辅

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第4章达标检测卷

（120分，90分钟）

题　号	一	二	三	总　分
得　分				

姓名　学号　班级　学校

一、选择题（每题3分，共30分）

1. $2\cos 60°$的值是（　　）

A. 1　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

2. 在Rt△ABC中，$\angle C=90°$，$AB=10$，$AC=6$，则$\sin A$的值是（　　）

A. $\frac{4}{5}$　　B. $\frac{3}{5}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{1}{3}$

3. 如图，在边长为1的小正方形组成的网格中，△ABC的三个顶点A，B，C均在网格的格点上，则$\tan\angle ABC$的值为（　　）

A. $\frac{3}{5}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{\sqrt{10}}{5}$　　D. 1



（第3题）



（第5题）



（第6题）



（第7题）

4. 已知α为锐角，且$\sin(90°-\alpha)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则$\alpha$的度数为（　　）

A. 30°　　B. 60°　　C. 45°　　D. 75°

5. 如图，长4 m的楼梯AB的倾斜角$\angle ABD$为60°，为了改善楼梯的安全性能，准备重新建造楼梯，使其倾斜角$\angle ACD$为45°，则调整后的楼梯AC的长为（　　）

A. $2\sqrt{3}$ m　　B. $2\sqrt{6}$ m　　C. $(2\sqrt{3}-2)$ m　　D. $(2\sqrt{6}-2)$ m

6. 如图，沿AE折叠矩形纸片$ABCD$，使点D落在BC边上的点F处. 已知$AB=8$，$BC=10$，则$\cos\angle EFC$的值是（　　）

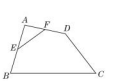
A. $\frac{4}{7}$　　B. $\frac{4}{3}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{4}{5}$

7. 如图，某地修建高速公路，要从B地向C地修一条隧道（B，C在同一水平面上）. 为了测量B，C两地之间的距离，某工程师乘坐热气球从C地出发，垂直上升100 m到达A处，在A处观察B地的俯角为30°，则B，C两地之间的距离为（　　）

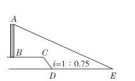
A. $100\sqrt{3}$ m　　B. $50\sqrt{2}$ m　　C. $50\sqrt{3}$ m　　D. $\frac{100}{3}\sqrt{3}$ m

8. 如图，在四边形$ABCD$中，E，F分别是边AB，AD的中点，若$EF=2$，$BC=5$，$CD=3$，则$\tan C$的值为（　　）

A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{4}{3}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{4}{5}$



（第8题）



（第10题）



（第12题）

9. 等腰三角形一腰上的高与腰长之比是1∶2，则等腰三角形顶角的度数为（　　）

A. 30°　　B. 50°　　C. 60°或120°　　D. 30°或150°

10. 如图，AB是一垂直于水平面的建筑物. 某同学从建筑物底端B出发，先沿水平方向向右行走20米到达点C，再经过一段坡度（或坡比）为$i=1:0.75$，坡长为10米的斜坡CD到达点D，然后再沿水平方向向右行走40米到达点E（A，B，C，D，E均在同一平面内）. 在E处测得建筑物顶端A的仰角为24°，则建筑物AB的高度约为（　　）（参考数据：$\sin 24°\approx 0.41$，$\cos 24°\approx 0.91$，$\tan 24°\approx 0.45$）

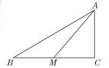
A. 21.7米　　B. 22.4米　　C. 27.4米　　D. 28.8米

二、填空题（每题3分，共24分）

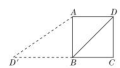
11. 在△ABC中，$\angle C=90°$，$AB=13$，$BC=5$，则$\cos B=$_____.

12. 如图，点$A(3,t)$在第一象限，OA与x轴所夹的锐角为α，$\tan\alpha=\frac{3}{2}$，则t的值是_____.

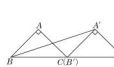
13. 如图，在Rt△ABC中，$\angle C=90°$，AM是直角边BC上的中线，若$\sin\angle CAM=\frac{3}{5}$，则$\tan B$的值为_____.



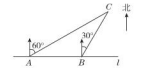
（第13题）



（第15题）



（第16题）



（第18题）

14. 已知锐角A的正弦$\sin A$是一元二次方程$2x^2-7x+3=0$的根，则$\sin A=$_____.

15. 如图，已知正方形$ABCD$的边长为2，如果将线段BD绕着点B旋转后，点D落在CB的延长线上的D'处，那么$\tan\angle BAD'=$_____.

16. 如图，将以A为直角顶点的等腰直角三角形ABC沿直线BC平移得到△$A'B'C'$，使点B'与C重合，连接$A'B$，则$\tan\angle A'BC'=$_____.

17. 一次函数的图象经过点（tan 45°，tan 60°）和（$-\cos 60°$，$-6\tan 30°$），则此一次函数的表达式为_____.

18. 如图，在一笔直的海岸线l上有相距2 km的A，B两个观测站，B站在A站的正东方向上，从A站测得船C在北偏东60°的方向上，从B站测得船C在北偏东30°的方向上，则船C到海岸线l的距离是_____km.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三、**解答题**(19～22 题每题 10 分,23 题 12 分,24 题 14 分,共 66 分)

19. 计算:

(1)$\sqrt{2}(2\cos 45^\circ - \sin 60^\circ) + \frac{\sqrt{24}}{4}$;

(2)$\sin 60^\circ \cdot \cos 60^\circ - \tan 30^\circ \cdot \tan 60^\circ + \sin^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ$.

20. 在△ABC 中,$\angle C = 90^\circ$,$\angle A$,$\angle B$,$\angle C$ 所对的边分别为 a,b,c.

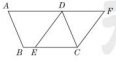
(1)已知 $c = 8\sqrt{3}$,$\angle A = 60^\circ$,求 $\angle B$,a,b;

(2)已知 $a = 3\sqrt{6}$,$\angle A = 45^\circ$,求 $\angle B$,b,c.

21. 如图,已知▱$ABCD$,点 E 是 BC 边上的一点,将边 AD 延长至点 F,使$\angle AFC = \angle DEC$.

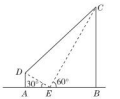
(1)求证:四边形 $DECF$ 是平行四边形.

(2)若 $AB = 13$,$DF = 14$,$\tan A = \frac{12}{5}$,求 CF 的长.



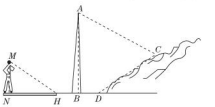
(第 21 题)

22. 如图,甲建筑物 AD 和乙建筑物 BC 的水平距离 AB 为 90 m,且乙建筑物的高度是甲建筑物高度的 6 倍,从 $E(A,E,B$ 在同一水平线上)点测得 D 点的仰角为 30°,测得 C 点的仰角为 60°. 求这两座建筑物顶端 C,D 间的距离.(计算结果用根号表示,不取近似值)



(第 22 题)

23. 如图,在夕阳西下的傍晚,某人看见高压电线的铁塔在阳光的照射下,铁塔的影子的一部分落在小山的斜坡上,为了测得铁塔的高度,他测得铁塔底部 B 到小山坡脚 D 的距离为 2 米,铁塔在小山斜坡上的影长 DC 为 3.4 米,斜坡的坡度 $i = 1:1.875$,同时他测得自己的影长 $NH = 336$ 厘米,而他的身高 MN 为 168 厘米,求铁塔的高度.

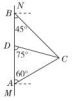


(第 23 题)

24. 如图,在南北方向的海岸线 MN 上,有 A,B 两艘巡逻船,现均收到故障船 C 的求救信号. 已知 A,B 两船相距$100(\sqrt{3}+1)$海里,船 C 在船 A 的北偏东 60°方向上,船 C 在船 B 的东南方向上,海岸线 MN 上有一观测点 D,测得船 C 正好在观测点 D 的南偏东 75°方向上.

(1)分别求出 A 与 C,A 与 D 之间的距离(结果保留根号).

(2)已知距观测点 D 处 100 海里范围内有暗礁.若巡逻船 A 沿直线 AC 去营救船 C,在去营救的途中有无触礁危险?(参考数据:$\sqrt{2} \approx 1.41$,$\sqrt{3} \approx 1.73$)



(第 24 题)

荣德基 品质教辅

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第5章达标检测卷

（120分，90分钟）

题　号	一	二	三	总　分
得　分				

姓名　学号　班级　学校

一、选择题（每题3分，共30分）

1. 样本方差的作用是(　　)
A. 估计总体的平均水平　　B. 表示样本的平均水平
C. 表示总体的波动大小　　D. 表示样本的波动大小，从而估计总体的波动大小

2. 要了解九年级学生中身高在某一个范围内的学生人数占九年级学生总人数的比例，需知道相应样本的(　　)
A. 平均数　　B. 频数分布　　C. 众数　　D. 方差

3. 甲、乙两组秧苗的平均高度一样，方差分别是3.5，10.9，则下列说法正确的是(　　)
A. 甲秧苗出苗更整齐　　B. 乙秧苗出苗更整齐
C. 甲、乙秧苗出苗一样整齐　　D. 无法确定甲、乙秧苗出苗谁更整齐

4. 为保障人民群众身体健康，在流感流行期间有关部门加强对市场的监管力度. 在对某商店的检查中抽检了5包口罩（每包10只），5包口罩中合格口罩的只数分别是9，10，9，10，10，则估计该商店出售的这批口罩的合格率为(　　)
A. 95%　　B. 96%　　C. 97%　　D. 98%

5. 生物工作者为了估计一片山林中雀鸟的数量，设计了如下方案：先捕捉100只雀鸟，给它们做上标记后放回山林. 一段时间后，再从中随机捕捉500只，其中有标记的雀鸟有5只. 请你帮助工作人员估计这片山林中雀鸟的数量为(　　)
A. 1 000只　　B. 10 000只　　C. 5 000只　　D. 50 000只

6. 某商店对自己销售的三个品牌的奶粉进行了跟踪调查，两周内三个品牌奶粉a，b，c的销售量的比为4∶3∶1，现在该商店购进一批奶粉，共计2 400箱，采购员是根据商店的销售情况购进的，则b品牌奶粉约购进了(　　)
A. 900箱　　B. 1 600箱　　C. 300箱　　D. 2 100箱

7. 在体检调查中，把部分学生的身高作为样本，样本数据落在1.6～2.0米之间的频率为0.28，于是可估计2 000名体检学生中，身高在1.6～2.0米之间的有(　　)
A. 56名　　B. 560名　　C. 80名　　D. 150名

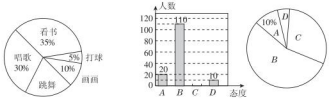
8. 下表是天天超市今年7月份中7天的利润情况记录. 根据下表，你估计天天超市今年7月份的总利润是(　　)

日期	4	8	12	15	20	24	28
当日利润/万元	0.20	0.17	0.23	0.21	0.23	0.18	0.25

A. 6.51万元　　B. 6.4万元　　C. 1.47万元　　D. 5.88万元

9. 为调查某校3 000名学生的兴趣爱好情况，随机抽取部分学生进行调查，并结合调查数据作出如图所示的扇形统计图. 根据统计图提供的信息，可估算出该校喜爱跳舞的学生共有(　　)
A. 300名　　B. 400名　　C. 500名　　D. 600名

10. “戒烟一小时，健康亿人行”. 小华就公众对在餐厅吸烟的态度进行了随机抽样调查，主要有四种态度：A. 顾客出面制止；B. 劝说进吸烟室；C. 餐厅老板出面制止；D. 无所谓. 他将调查结果绘制了两幅不完整的统计图，如图. 以下结论：①这次抽样的公众有200人；②“餐厅老板出面制止”部分的人数是60人；③在扇形统计图中，“无所谓”部分所对应的圆心角是18度；④若该城区人口有20万人，估计赞成“餐厅老板出面制止”的有6万人. 其中正确的结论有(　　)
A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个



（第9题）　（第10题）　（第11题）

二、填空题（每题3分，共24分）

11. 在开展“国学诵读”活动中，某校为了解全校1 300名学生课外阅读的情况，随机调查了50名学生一周的课外阅读时间，并绘制成如图所示的条形统计图. 根据图中数据，估计该校1 300名学生一周的课外阅读时间不少于7小时的人数是_____人.

12. 某烟花爆竹厂从20万件同类产品中随机抽取了100件进行质检，发现其中有5件不合格，那么估计该厂这20万件产品中合格品为_____件.

13. 从某地某一个月中随机抽取5天的中午，记录这5天12时的气温（单位：℃），结果如下：22，32，25，13，18，可估计该地这一个月中午12时的平均气温为_____.

14. 某校共有学生1 600名，为了解学生最喜欢的课外体育运动项目的情况，学校随机抽查了200名学生，其中有85名学生表示最喜欢的项目是足球，则可估计该校学生中最喜欢的课外体育运动项目是足球的学生有_____名.

15. 某校从参加计算机测试的学生中抽取了60名学生的成绩（40～100分）进行分析，并将其分成了六段后绘制成如图所示的频数直方图（其中70～80分这一段因故看不清，每段数据包含最小值，不包含最大值），若60分以上（含60分）为及格，试根据图中信息来估计这次测试的及格率为_____.



（第15题）

16. 七(1)班同学为了解某小区家庭月均用水情况，随机调查了该小区部分家庭，并将调查数据整理如下表（不完整），若该小区有800户家庭，据此估计该小区月均用水量不超过10 m^3的家庭有_____户.

月均用水量 x/m^3	$0<x\leqslant5$	$5<x\leqslant10$	$10<x\leqslant15$	$15<x\leqslant20$	$x>20$
频数	12		20		3
频率	0.12			0.07	

17. 从某厂生产的25 W，40 W日光灯中各抽出8个做使用寿命（单位：h）试验，结果如下：
25 W：444，443，457，460，451，438，459，464；
40 W：439，466，452，464，438，459，467，455.
根据这组数据，你认为_____日光灯使用寿命比较长，_____日光灯质量比较稳定.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

18. 甲、乙两班举行电脑汉字输入比赛，参赛学生每分钟输入汉字个数的统计结果如下表：

班级	参赛人数	平均数	中位数	方差
甲班	55	135	149	191
乙班	55	135	151	110

某同学分析上表后得出如下结论：①甲、乙两班学生的平均成绩相同；②乙班优秀的人数多于甲班优秀的人数（每分钟输入汉字的个数≥150为优秀）；③甲班成绩的波动比乙班大. 上述结论中，正确的是_____.（填序号）

三、解答题（19题10分，20，21题每题12分，其余每题16分，共66分）

19. 甲、乙两台机床同时加工直径为100毫米的零件，为了检验产品的质量，从产品中各抽出6件进行测量，测得数据（单位：毫米）如下.

甲机床：99　100　98　100　100　103　　乙机床：99　100　102　99　100　100

分别计算上述两组数据的平均数及方差，并说明哪一台机床加工这种零件较符合要求.

20. 随机抽取某理发店一周的营业额如下表（单位：元）.

星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六	星期日	合计
540	680	760	640	960	2 200	1 780	7 560

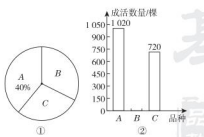
（1）求该店本周的日平均营业额.

（2）如果用该店本周星期一到星期五的日平均营业额估计当月的营业总额，你认为是否合理？如果合理，请说明理由；如果不合理，请设计一个方案，并估计该店当月（按30天计算）的营业总额.

21. 某市园林处去年植树节在滨海路两侧栽了A,B,C三个品种的树苗，栽种的A,B,C三个品种树苗数量的扇形统计图如图①，其中B品种树苗数量对应的扇形的圆心角为120°. 今年植树节前管理员调查了这三个品种树苗的成活率情况，准备今年从三个品种中选成活率最高的品种再进行栽种. 经调查得知：A品种的成活率为85%，三个品种的总成活率为89%，但三个品种树苗成活数量统计图尚不完整，如图②. 请你根据以上信息帮管理员解决下列问题：

（1）三个品种树苗去年共栽了多少棵？

（2）补全条形统计图，并通过计算，说明今年应栽哪个品种的树苗.

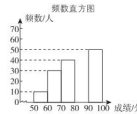


（第21题）

22. 某校团委组织了一次全校3 000名学生参加的演讲比赛，为了解本次比赛的成绩，校团委随机抽取了其中200名学生的成绩作为样本进行统计，制成如下不完整的统计图表：

频数分布表

成绩 x/分	频数/人	频率
$50\leqslant x<60$	10	0.05
$60\leqslant x<70$	30	0.15
$70\leqslant x<80$	40	n
$80\leqslant x<90$	m	0.35
$90\leqslant x\leqslant 100$	50	0.25



（第22题）

根据所给信息，解答下列问题.

（1）$m=$_____，$n=$_____，并补全频数直方图.

（2）这200名学生成绩的中位数会落在_____的分数段.

（3）若成绩在90分以上（包括90分）为“优”等，请你估计该校参加本次比赛的3 000名学生中成绩是“优”等的约有多少名.

23. 某校260名学生参加植树活动，要求每人植4～7棵，活动结束后随机抽查了20名学生每人的植树量，并分为四种类型，A：4棵；B：5棵；C：6棵；D：7棵. 将各类的人数绘制成扇形统计图和条形统计图，经确认扇形统计图是正确的，而条形统计图尚有一处错误. 回答下列问题：

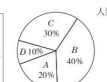
（1）写出条形统计图中存在的错误，并说明理由.

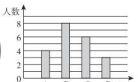
（2）在求这20名学生每人植树量的平均数时，小宇是这样分析的：

第一步：求平均数的公式是$\bar{x}=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$；

第二步：在该问题中，$n=4,x_1=4,x_2=5,x_3=6,x_4=7$；

第三步：$\bar{x}=\dfrac{4+5+6+7}{4}=5.5$（棵）.





（第23题）

①小宇的分析是从哪一步开始出现错误的？

②请你帮他计算出正确的平均数，并估计这260名学生共植树多少棵.

荣德基 品质教辅

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

期末达标检测卷

（120 分，90 分钟）

题　号	一	二	三	总　分
得　分				

姓名　学号　班级　学校

一、选择题（每题 3 分，共 30 分）

1. 已知非零实数 a,b,c,d 满足 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，则下列关系中成立的是(　　)

A. $\frac{a}{d}=\frac{c}{b}$　　B. $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$　　C. $ac=bd$　　D. $\frac{a+1}{b}=\frac{c+1}{d}$

2. 下列结论中正确的是(　　)

A. $\sin 60°=\frac{1}{2}$　　B. $\tan 60°=\sqrt{3}$　　C. $\sin 45°=\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\cos 30°=\frac{1}{2}$

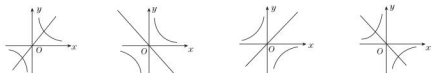
3. 若反比例函数的图象经过点 $(2,-2)$，$(m,1)$，则 m 的值为(　　)

A. 1　　B. -1　　C. 4　　D. -4

4. 某种植基地 2019 年蔬菜产量为 80 吨，预计 2021 年蔬菜产量达到 100 吨，求蔬菜产量的年平均增长率. 设蔬菜产量的年平均增长率为 x，则可列方程为(　　)

A. $80(1+x)^2=100$　　B. $100(1-x)^2=80$　　C. $80(1+2x)=100$　　D. $80(1+x^2)=100$

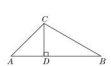
5. 已知 $k_1>0>k_2$，则函数 $y=k_1x$ 和 $y=\frac{k_2}{x}$ 在同一平面直角坐标系中的图象大致是(　　)



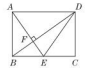
A　　B　　C　　D

6. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=45°$，$\angle B=30°$，$CD\perp AB$，垂足为点 D，$CD=1$，则 AB 的长为(　　)

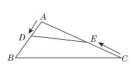
A. 2　　B. $2\sqrt{3}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}+1$　　D. $\sqrt{3}+1$



（第 6 题）



（第 9 题）



（第 10 题）

7. 李大伯承包了一个果园，种植了 100 棵樱桃树，今年已进入收获期. 收获时，从中任选并采摘了 10 棵树的樱桃，分别称得每棵树所产樱桃的质量如下表：

序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
质量/千克	14	21	27	17	18	20	19	23	19	22

据调查，市场上今年樱桃的批发价格为每千克 30 元. 用所学的统计知识估计今年此果园樱桃的总产量与按批发价格销售樱桃所得的总收入分别为(　　)

A. 200 千克，6 000 元　　B. 1 900 千克，57 000 元

C. 2 000 千克，60 000 元　　D. 1 850 千克，55 500 元

8. 已知反比例函数 $y=\frac{ab}{x}$，当 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而增大，则关于 x 的方程 $ax^2-2x+b=0$ 的根的情况是(　　)

A. 有两个正根　　B. 有两个负根　　C. 有一个正根和一个负根　　D. 没有实数根

9. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，点 E 是边 BC 的中点，$AE\perp BD$，垂足为 F，则 $\tan\angle BDE$ 的值为(　　)

A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

10. 如图，在钝角三角形 ABC 中，$AB=6$ cm，$AC=12$ cm，动点 D 从点 A 出发到点 B 停止，动点 E 从点 C 出发到点 A 停止. 点 D 运动的速度为 1 cm/s，点 E 运动的速度为 2 cm/s. 如果两点同时运动，那么当以点 A,D,E 为顶点的三角形与 $\triangle ABC$ 相似时，运动的时间是(　　)

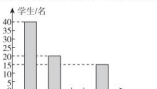
A. 3 s 或 4.8 s　　B. 3 s　　C. 4.5 s　　D. 4.5 s 或 4.8 s

二、填空题（每题 3 分，共 24 分）

11. 方程 $(x-2)(x-3)=6$ 的解为_____.

12. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A$，$\angle B$ 都是锐角，若 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos B=\frac{1}{2}$，则 $\angle C=$_____.

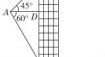
13. 某学校为了解学生课间体育活动情况，随机抽取本校 100 名学生进行调查，整理收集到的数据，绘制成如图所示的统计图. 若该校共有 800 名学生，则估计喜欢“踢毽子”的学生有_____名.



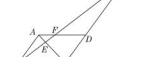
（第 13 题）



（第 14 题）



（第 15 题）



（第 16 题）

14. 如图，$\triangle ABC$ 中，E,F 分别是 AB,AC 上的两点，且 $\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}=\frac{1}{2}$，若 $\triangle AEF$ 的面积为 2，则四边形 $EBCF$ 的面积为_____.

15. 如图，航拍无人机从 A 处测得一幢建筑物顶部 B 的仰角为 45°，测得底部 C 的俯角为 60°，此时航拍无人机与该建筑物的水平距离 AD 为 110 m，那么该建筑物的高度 BC 约为_____m.（结果保留整数，$\sqrt{3}\approx1.73$）

16. 如图，在 $\square ABCD$ 中，过点 B 的直线与 AC，AD 及 CD 的延长线分别相交于 E,F,G. 若 $BE=6$，$EF=2$，则 FG 等于_____.

17. 已知关于 x 的方程 $x^2-(a+b)x+ab-1=0$，x_1，x_2 是此方程的两个实数根，现给出三个结论：①$x_1\neq x_2$；②$x_1x_2<ab$；③$x_1^2+x_2^2<a^2+b^2$. 则正确结论的序号是_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

18. 关于 x 的反比例函数 $y=\frac{a+4}{x}$ 的图象如图所示，A，P 为该图象上的点，且关于原点成中心对称. 在 $\triangle PAB$ 中，$PB\parallel y$ 轴，$AB\parallel x$ 轴，PB 与 AB 相交于点 B. 若 $\triangle PAB$ 的面积大于 12，则关于 x 的方程 $(a-1)x^2-x+\frac{1}{4}=0$ 的根的情况是_____.



（第 18 题）

三、解答题（19，20 题每题 8 分，22，23 题每题 10 分，21，24 题每题 15 分，共 66 分）

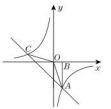
19. 计算或解方程：

（1）$\tan^2 60°+4\sin 30°\cdot\cos 45°-(2\,021-\pi)^0$；　　（2）$2x^2-3x-9=0$.

20. 如图，Rt$\triangle ABO$ 的顶点 A 是双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 与直线 $y=-x+(k+1)$ 在第四象限的交点，$AB\perp x$ 轴于 B，且 $S_{\triangle ABO}=\frac{3}{2}$.

（1）求双曲线和直线的表达式；

（2）求直线与双曲线的两个交点 A，C 的坐标及 $\triangle AOC$ 的面积.



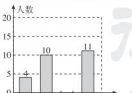
（第 20 题）

21. 2022 年 2 月 4 日～20 日第 24 届冬季奥林匹克运动会将在北京市和张家口市联合举行. 某校对七年级学生开展了“冬奥会知多少”的调查活动，采取随机抽样的方法进行问卷调查，问卷调查的结果划分为“不太了解”“基本了解”“比较了解”“非常了解”四个等级，对调查结果进行统计后，绘制了如下不完整的条形统计图，已知“基本了解”的人数占抽样调查人数的 25%，根据统计图提供的信息，回答下列问题：

（1）此次调查抽取了_____名学生；

（2）补全条形统计图；

（3）若该校七年级有 600 名学生，请估计“比较了解”和“非常了解”的学生共有多少人？



（第 21 题）

22. 在水果销售旺季，某水果店购进一种优质水果，进价为 20 元/千克，售价不低于 20 元/千克，且不超过 32 元/千克. 根据销售情况，发现该水果一天的销售量 y（千克）与该天的售价 x（元/千克）满足如下表所示的一次函数关系.

销售量 y/千克	…	34.8	32	29.6	28	…
售价 x/（元/千克）	…	22.6	24	25.2	26	…

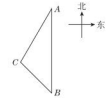
（1）某天这种水果的售价为 23.5 元/千克，求当天该水果的销售量；

（2）如果某天销售这种水果获利 150 元，那么该水果的售价为多少元/千克？

23. 一名徒步爱好者来衡阳旅行，他从宾馆 C 处出发，沿北偏东 30°的方向行走 2 000 米到达石鼓书院 A 处，参观后又从 A 处沿正南方向行走一段距离，到达位于宾馆 C 处南偏东 45°方向的雁峰公园 B 处，如图所示.

（1）求这名徒步爱好者从石鼓书院走到雁峰公园的途中与宾馆的最短距离.

（2）若这名徒步爱好者以 100 米/分的速度从雁峰公园返回宾馆，那么他在 15 分钟内能否到达宾馆？



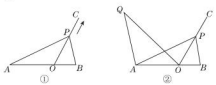
（第 23 题）

24. 如图①，点 O 在线段 AB 上，$AO=2$，$OB=1$，OC 为射线，且 $\angle BOC=60°$，动点 P 以每秒 2 个单位长度的速度从点 O 出发，沿射线 OC 做匀速运动，设运动时间为 t 秒.

（1）当 $t=\frac{1}{2}$ 时，$OP=$_____，$S_{\triangle ABP}=$_____.

（2）当 $\triangle ABP$ 是直角三角形时，求 t 的值.

（3）如图②，当 $AP=AB$ 时，过点 A 作 $AQ\parallel BP$，并使得 $\angle QOP=\angle B$. 求证：$AQ\cdot BP=3$.



（第 24 题）

荣德基 品质教辅

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

典点 参考答案及点拨

正文练习答案

第1章 反比例函数

1.1 反比例函数

1. D　2. D　3. D　4. C

5. A　**点拨**：先根据关于 x 轴对称的点的坐标特征确定 A' 的坐标为 $(1,3)$，再把 A' 的坐标代入 $y=\frac{k}{x}$，即可得到 k 的值.

6. D

7. C　**点拨**：设点 A 的坐标为 $(a,0)$，点 C 的坐标为 $\left(c,\frac{k}{c}\right)$，则 $a\cdot\frac{k}{c}=12$，点 D 的坐标为 $\left(\frac{a+c}{2},\frac{k}{2c}\right)$.

$\therefore\begin{cases}a\cdot\frac{k}{c}=12,\\ \frac{k}{2c}=\frac{k}{\frac{a+c}{2}},\end{cases}$ 解得 $k=4$.

8. A

9. A　**点拨**：A 选项中设三角形面积为 S，一边长为 a，该边上的高为 h，则有 $a=\frac{2S}{h}$；B 选项中设三角形周长为 C，底边长为 a，腰长为 b，则有 $C=a+2b$；C 选项中设圆的周长为 C，半径为 r，则有 $C=2\pi r$；D 选项中设圆的面积为 S，半径为 r，则有 $S=\pi r^2$. 观察可得，只有 A 选项中的两个变量满足反比例关系.

10. D

11. A　**点拨**：本题易忽略反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 中 $k\neq0$，而直接由 $a^2-2=-1$ 得 $a=\pm1$.

12. **解**：(1) 设 $y_1=k_1x^2$，$y_2=\frac{k_2}{x}$ $(k_1,k_2\neq0)$，则 $y=k_1x^2+\frac{k_2}{x}$.

将 $x=1$，$y=3$ 和 $x=-1$，$y=1$ 分别代入，得 $\begin{cases}k_1+k_2=3,\\ k_1-k_2=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k_1=2,\\ k_2=1.\end{cases}$

$\therefore y$ 与 x 之间的函数表达式为 $y=2x^2+\frac{1}{x}$.

(2) 当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，$y=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{-\frac{1}{2}}=-\frac{3}{2}$.

13. **解**：(1) 假设 y 与 x 是正比例函数关系，则可设 $y=k_1x$ $(k_1\neq0)$，把 $x=-2$，$y=\frac{3}{2}$ 代入，得 $k_1=-\frac{3}{4}$，所以 $y=-\frac{3}{4}x$.

第13题图

把 $x=4$，$y=-\frac{3}{4}$ 代入 $y=-\frac{3}{4}x$，等式不成立，所以 y 不是 x 的正比例函数.

假设 y 与 x 是反比例函数关系，则可设 $y=\frac{k_2}{x}$ $(k_2\neq0)$，把 $x=-2$，$y=\frac{3}{2}$ 代入，得 $k_2=-3$，所以 $y=-\frac{3}{x}$. 把 $x=4$，$y=-\frac{3}{4}$ 代入 $y=-\frac{3}{x}$，等式成立，所以 y 是 x 的反比例函数.

(2) 该函数的表达式为 $y=-\frac{3}{x}$.

补充表格如下：

x	-3	-2	-1	1	2	3	4
y	1	$\frac{3}{2}$	3	-3	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{3}{4}$

14. **解**：(1) 电流 I(A) 关于电阻 R(Ω) 的函数表达式为 $I=\frac{220}{R}$ $(R>0)$，它是我们学过的反比例函数.

(2) 填表如下：

R/Ω	20	40	60	80	100
I/A	11	$\frac{11}{2}$	$\frac{11}{3}$	$\frac{11}{4}$	$\frac{11}{5}$

(3) 当 R 越来越大时，I 越来越小；当 R 越来越小时，I 越来越大.

15. **解**：(1) $\because S_{\triangle ADF}+S_{\triangle ABE}+S_{\triangle CEF}=S_{正方形ABCD}-S_{\triangle AEF}=2^2-1=3$，

$\therefore\frac{1}{2}\times2y+\frac{1}{2}\times2x+\frac{1}{2}(2-x)\times(2-y)=3$，$\therefore xy=2$，$\therefore y=\frac{2}{x}$.

(2) 反比例函数.

(3) $0<x<2$.

1.2 反比例函数的图象与性质

第1课时　反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ $(k>0)$ 的图象与性质

1. A　2. D　3. D　4. D　5. D

6. D　**点拨**：由题意，可知点 A 的横坐标是 ±2.

$\because$ 点 A 在正比例函数 $y=2x$ 的图象上，

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(2,4)$ 或 $(-2,-4)$.

又 $\because$ 点 A 在反比例函数 $y=\frac{m+1}{x}$ $(m$ 为常数$)$ 的图象上，

$\therefore4=\frac{m+1}{2}$ 或 $-4=\frac{m+1}{-2}$，

$\therefore m+1=8$，

$\therefore m=7$.

7. C　**点拨**：函数 $y=\frac{4}{x}$ 的图象是轴对称图形，但对称轴不是 y 轴.

8. A

9. A　**点拨**：反比例函数 $y=\frac{6}{x}$ 中 $k=6>0$，$\therefore$ 该反比例函数在 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而减小. 当 $x=3$ 时，$y=\frac{6}{3}=2$；当 $x=1$ 时，$y=\frac{6}{1}=6$.

$\therefore$ 当 $1<x<3$ 时，$2<y<6$.

$\therefore$ 当 $1<x<3$ 时，y 的最小整数值是 3. 故选 A.

10. B

11. B　**点拨**：先根据反比例函数的表达式判断出函数图象所在的象限及其增减性，再根据 $x_1<x_2<0<x_3$ 即可得出结论.

$\because$ 反比例函数 $y=\frac{3}{x}$ 中，$k=3>0$，

$\therefore$ 此函数图象的两个分支分别位于第一、三象限，且在每一个象限内 y 随 x 的增大而减小.

$\because x_1<x_2<0<x_3$，

$\therefore$ 点 (x_1,y_1)，(x_2,y_2) 在第三象限，点 (x_3,y_3) 在第一象限.

$\therefore y_3>y_1<0<y_2$.

12. **解**：(1) 将 $A(4,1)$ 的坐标代入 $y=\frac{k_2}{x}$ 得 $k_2=4$，所以反比例函数的表达式为 $y_2=\frac{4}{x}$. 将 $B(n,-2)$ 的坐标代入 $y_2=\frac{4}{x}$ 得 $n=-2$，所以点 B 的坐标为 $(-2,-2)$.

将 $A(4,1)$，$B(-2,-2)$ 的坐标分别代入 $y_1=k_1x+b$ 得 $\begin{cases}4k_1+b=1,\\ -2k_1+b=-2,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k_1=\frac{1}{2},\\ b=-1,\end{cases}$ 所以一次函数的表达式为 $y_1=\frac{1}{2}x-1$.

(2) 根据两个函数的图象可以看出 $y_1<y_2$ 时 x 的取值范围为 $x<-2$ 或 $0<x<4$.

13. **解**：(1) $\because$ 一次函数 $y=kx+b$ $(k,b$ 是常数，$k\neq0)$ 的图象过 $A(1,3)$，$B(-1,-1)$ 两点，

$\therefore\begin{cases}k+b=3,\\ -k+b=-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=2,\\ b=1.\end{cases}$

即该一次函数的表达式是 $y=2x+1$.

(2) $\because$ 点 $(2a+2,a)$ 在该一次函数 $y=2x+1$ 的图象上，

$\therefore a=2(2a+2)+1$，解得 $a=-\frac{5}{3}$.

(3) 反比例函数 $y=\frac{m+1}{x}$ 的图象在第一、三象限.

理由：$\because$ 点 $C(x_1,y_1)$ 和点 $D(x_2,y_2)$ 在该一次函数 $y=2x+1$ 的图象上，$m=(x_1-x_2)(y_1-y_2)$，

$\therefore$ 假设 $x_1<x_2$，则 $y_1<y_2$，此时 $m=(x_1-x_2)(y_1-y_2)>0$，

假设 $x_1>x_2$，则 $y_1>y_2$，此时 $m=(x_1-x_2)(y_1-y_2)=0$，

假设 $x_1>x_2$，则 $y_1>y_2$，此时 $m=(x_1-x_2)(y_1-y_2)>0$.

由上可得，$m\geqslant0$，$\therefore m+1>0$，

$\therefore$ 反比例函数 $y=\frac{m+1}{x}$ 的图象在第一、三象限.

14. **解**：(1) 如图，过点 C 作 $CE\perp AB$，垂足为 E，

$\because AC=BC$，$AB=4$，

$\therefore AE=BE=2$.

在 Rt$\triangle BCE$ 中，$BC=\frac{5}{2}$，$BE=2$，

$\therefore CE=\frac{3}{2}$.

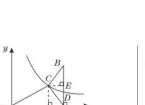
$\because OA=4$，

$\therefore OF=\frac{5}{2}$，

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $\left(\frac{5}{2},2\right)$.

$\therefore$ 点 C 在 $y=\frac{k}{x}$ 的图象上，

$\therefore k=5$.



(第14题)

(2) 设点 A 的坐标为 $(m,0)$，

$\because AB=4$，$BD=BC=\frac{5}{2}$，

$\therefore AD=\frac{3}{2}$.

$\because D$，C 两点的坐标分别为 $\left(m,\frac{3}{2}\right)$，$\left(m-\frac{3}{2},2\right)$.

$\because$ 点 C，D 都在 $y=\frac{k}{x}$ 的图象上，

$\therefore\frac{3}{2}m=2\left(m-\frac{3}{2}\right)$，$\therefore m=6$，

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $\left(\frac{9}{2},2\right)$，

如图，过点 C 作 $CF\perp x$ 轴，垂足为 F，

$\therefore OF=\frac{9}{2}$，$CF=2$，

在 Rt$\triangle OFC$ 中，$OC^2=OF^2+CF^2$，

$\therefore OC=\frac{\sqrt{97}}{2}$.

15. **解**：(1) 把点 $A(3,2)$ 的坐标代入反比例函数 $y=\frac{m}{x}$，可得 $m=3\times2=6$，

$\therefore$ 反比例函数的表达式为 $y=\frac{6}{x}$.

$\because OB=4$，

$\therefore B(0,-4)$.

把点 $A(3,2)$，$B(0,-4)$ 的坐标代入一次函数 $y=kx+b$，可得 $\begin{cases}3k+b=2,\\ b=-4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=2,\\ b=-4.\end{cases}$

$\therefore$ 一次函数的表达式为 $y=2x-4$.

(2) 不等式组 $0<\frac{m}{x}<kx+b$ 的解集为 $x>3$.

第2课时　反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ $(k<0)$ 的图象与性质

1. D

2. B　**点拨**：在函数 $y=\frac{k}{x}$ 和 $y=kx+2(k\neq0)$ 中，当 $k>0$ 时，函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象在第一、三象限，函数 $y=kx+2$ 的图象经过第一、二、四象限，故选项 A，D 错误；当 $k<0$ 时，函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象在第二、四象限，函数 $y=kx+2$ 的图象经过第一、二、四象限，故选项 C 错误.

3. A　**点拨**：易知函数 $y=\begin{cases}\frac{1}{x}(x>0),\\ -\frac{1}{x}(x<0)\end{cases}$ 的图象关于 y 轴对称，且图象位于 x 轴上方，所以点 M 是原点.

4. B

5. A　**点拨**：函数 $y=\frac{x}{3}$ 的图象是直线，经过第一、三象限，y 随 x 的增大而增大，故选 A.

函数 $y=-\frac{x}{3}$ 的图象是直线，经过第二、四象限，y 随 x 的增大而减小.

函数 $y=\frac{3}{x}$ 的图象是双曲线，位于第一、三象限，在每一象限内，y 随 x 的增大而减小.

函数 $y=-\frac{3}{x}$ 的图象是双曲线，位于第二、四象限，在每一象限内，y 随 x 的增大而增大.

6. D　**点拨**：由于点 $(1,-3)$ 的坐标满足反比例函数 $y=-\frac{3}{x}$，故 A 是正确的；由于 $k=-3<0$，所以双曲线位于第二、四象限，故 B 是正确的；由反比例函数图象的对称性，可知反比例函数 $y=-\frac{3}{x}$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称，故 C 是正确的；由反比例函数的性质可知，$k<0$ 时，在每个象限内 y 随 x 的增大而增大，不在同一象限则不具有此性质，故 D 是不正确的.

7. B　8. C

9. C　**点拨**：$\because$ 一次函数 $y=x+b$ 的图象经过第一、三、四象限，

$\therefore b<0$.

又 $\because$ 反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ $(k\neq0)$ 的图象在第二、四象限，

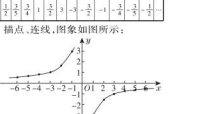
$\therefore k<0$.

综上所述，$k<0$，$b<0$.

10. **解**：(1) 列表如下：

x	$\cdots$	-6	-5	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
y	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	-1	$-\frac{3}{2}$	-3	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{5}$	$\cdots$

描点、连线，图象如图所示：



(第10题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)由图象可知当 $2\leqslant x\leqslant 4$ 时，$-\frac{3}{2}\leqslant y\leqslant -\frac{3}{4}$.

11. 解：(1) 由题意知点 B 的坐标为 $\left(-2,\frac{3}{2}\right)$.

把点 $B\left(-2,\frac{3}{2}\right)$ 的坐标代入 $y=\frac{k}{x}$，得 $k=-3$.

∴ 反比例函数的表达式为 $y=-\frac{3}{x}$.

(2)结论：点 P 在第二象限，点 Q 在第四象限.

理由：∵ $k=-3<0$，

∴ 反比例函数 $y=-\frac{3}{x}$ 在每个象限内，y 随 x 的增大而增大.

∵ $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$ 是该反比例函数图象上的两点，且 $x_1<x_2$ 时，$y_1>y_2$，

∴ 点 P，Q 在不同的象限.

∴ 点 P 在第二象限，点 Q 在第四象限.

12. 解：(1)∵ $A(n,-2)$，$B(-1,4)$ 是一次函数 $y=kx+b$ 和反比例函数 $y=\frac{m}{x}$ 的图象的两个交点，

∴ $4=\frac{m}{-1}$，得 $m=-4$.

∴ $y=-\frac{4}{x}$.

∴ $-2=-\frac{4}{n}$，得 $n=2$.

∴ $A(2,-2)$.

解方程组 $\begin{cases}2k+b=-2,\\-k+b=4,\end{cases}$

得 $\begin{cases}k=-2,\\b=2.\end{cases}$

∴ 反比例函数的表达式为 $y=-\frac{4}{x}$，一次函数的表达式为 $y=-2x+2$.

(2)设直线 $y=-2x+2$ 与 y 轴的交点为 C，当 $x=0$ 时，$y=-2\times 0+2=2$，∴ 点 C 的坐标是 $(0,2)$.

∵ $A(2,-2)$，$B(-1,4)$，

∴ $S_{\triangle AOB}=S_{\triangle AOC}+S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}\times 2\times 2+\frac{1}{2}\times 2\times 1=3$.

13. 解：(1)∵ 直线 $y=-\frac{1}{2}x$ 过点 $A(m,1)$，

∴ $-\frac{1}{2}m=1$，解得 $m=-2$.

∴ $A(-2,1)$.

∵ 反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq 0)$ 的图象过点 $A(-2,1)$，

∴ $k=-2\times 1=-2$.

∴ 反比例函数的表达式为 $y=-\frac{2}{x}$.

(2)连接 AC，设直线 BC 的表达式为 $y=-\frac{1}{2}x+b$，

∵ $BC\parallel AO$，

∴ $\triangle ACO$ 与 $\triangle ABO$ 的面积相等.

又∵ $\triangle ABO$ 的面积为 $\frac{3}{2}$，

∴ $\triangle ACO$ 的面积 $=\frac{1}{2}OC\cdot 2=\frac{3}{2}$.

∴ $OC=\frac{3}{2}$，∴ $C\left(0,\frac{3}{2}\right)$，∴ $b=\frac{3}{2}$，

∴ 直线 BC 的表达式为 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$.

第3课时　反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ ($k\neq 0$) 中 k 的性质

1. B　**点拨**：将 $x=-1$ 代入 $y=2x+1$ 中，可得 $y=-1$，再将 $x=-1$，$y=-1$ 代入 $y=\frac{k}{x}$ 中，可得 $k=1$.

2. D

3. C　**点拨**：过点 B 作 $BC\perp OA$ 于点 C.

∵ 点 A 的坐标是 $(2,0)$，∴ $AO=2$.

∵ $\triangle ABO$ 是等边三角形，∴ $OC=1$，

∴ $BC=\sqrt{3}$，

∴ 点 B 的坐标是 $(1,\sqrt{3})$.

把点 $B(1,\sqrt{3})$ 的坐标代入 $y=\frac{k}{x}$，得 $k=\sqrt{3}$. 故选 C.

4. C　**点拨**：作 $A'H\perp y$ 轴于点 H. 证明 $\triangle AOB\cong\triangle BHA'$(AAS)，推出 $OA=BH$，$OB=A'H$，求出点 A' 的坐标，再利用中点坐标公式求出点 D 的坐标即可解决问题.

如图，作 $A'H\perp y$ 轴于 H.

∵ $\angle AOB=\angle A'HB=\angle ABA'=90°$，

∴ $\angle ABO+\angle A'BH=90°$，$\angle ABO+\angle BAO=90°$.

∴ $\angle BAO=\angle A'BH$.

又∵ $BA=A'B$，

∴ $\triangle AOB\cong\triangle BHA'$(AAS).

∴ $OA=HB$，$OB=HA'$.

∵ 点 A 的坐标是 $(-2,0)$，点 B 的坐标是 $(0,6)$，

∴ $OA=2$，$OB=6$.

∴ $BH=OA=2$，$A'H=OB=6$.

∴ $OH=OB-BH=4$.

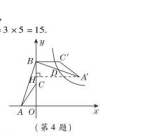
∴ $A'(6,4)$.

∵ $BD=A'D$，

∴ $D(3,5)$.

∵ 反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象经过点 D，

∴ $k=3\times 5=15$.



(第4题)

5. B　**点拨**：∵ $BD\parallel x$ 轴，$D(0,4)$，

∴ B，D 两点纵坐标相同，都为 4，

∴ 可设 $B(x,4)$.

∵ 矩形 $ABCD$ 的对角线的交点为 E，

∴ E 为 BD 中点，$\angle DAB=90°$，

∴ $E\left(\frac{1}{2}x,4\right)$，

∵ $A(2,0)$，$D(0,4)$，$B(x,4)$，$AD^2+AB^2=BD^2$.

∴ $2^2+4^2+(x-2)^2+4^2=x^2$，

解得 $x=10$.

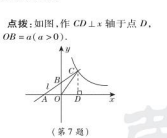
∴ $E(5,4)$.

∵ 反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k>0,x>0)$ 的图象经过点 E，

∴ $k=5\times 4=20$.

6. D

7. D　**点拨**：如图，作 $CD\perp x$ 轴于点 D，设 $OB=a(a>0)$.



(第7题)

∵ $S_{\triangle AOB}=S_{\triangle BOC}$，

∴ $AB=BC$.

∵ $\triangle AOB$ 的面积为 1，

∴ $\frac{1}{2}OA\cdot OB=1$，

∴ $OA=\frac{2}{a}$.

∵ $CD\parallel OB$，$AB=BC$，

∴ $OD=OA=\frac{2}{a}$，$CD=2OB=2a$，

∴ $C\left(\frac{2}{a},2a\right)$.

∵ 反比例函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 的图象经过点 C，

∴ $k=\frac{2}{a}\times 2a=4$.

8. C　**点拨**：∵ 点 A，C 位于反比例函数图象上且关于原点对称，

∴ $S_{\triangle OBA}=S_{\triangle OBC}$.

∵ 过双曲线上任意一点与原点所连的线段，x 轴(或 y 轴)、和过该点向坐标轴作的垂线所围成的直角三角形面积 S 是个定值，

∴ $S_{\triangle OBA}=\frac{1}{2}|k|$.

∴ $\triangle ABC$ 的面积等于 $2\times\frac{1}{2}|k|=|k|=4$.

9. -5　**点拨**：由 k 的几何意义可知 $|k|=|xy|=AB\cdot BC=5$.

又由图象可知，其一个分支在第四象限，

所以 $k<0$. 因此 $k=-5$.



易错总结：已知矩形或三角形的面积求反比例函数中 k 的值时，要注意图象的位置. 当图象在第一、三象限时，k 取正数；当图象在第二、四象限时，k 取负数；当未给出图象的位置时，要分两种情况讨论. 本题中，易出现的错误是误认为 $k=xy=AB\cdot BC=5$.

10. 解：(1)设 $y=\frac{k}{x}(k\neq 0)$，

因为当 $x=2$ 时，$y=6$，

所以 $k=xy=12$，所以 $y=\frac{12}{x}$.

(2)当 $x=4$ 时，$y=3$.

11. 解：(1)∵ 直线 $y=mx$ 与双曲线 $y=\frac{n}{x}$ 相交于 $A(-2,a)$，B 两点，

∴ 点 A 与点 B 关于原点中心对称，

∴ $B(2,-a)$，∴ $C(2,0)$.

∵ $S_{\triangle AOC}=2$，

∴ $\frac{1}{2}\times 2\times a=2$，解得 $a=2$，

∴ $A(-2,2)$，

把 $A(-2,2)$ 的坐标代入 $y=mx$ 和 $y=\frac{n}{x}$，得 $-2m=2$，$2=\frac{n}{-2}$，

解得 $m=-1$，$n=-4$，

(2)设直线 AC 的表达式为 $y=kx+b$，

∵ 直线 AC 经过 A，C，

∴ $\begin{cases}-2k+b=2,\\2k+b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-\frac{1}{2},\\b=1,\end{cases}$

∴ 直线 AC 的表达式为 $y=-\frac{1}{2}x+1$.

12. 解：(1)∵ 顶点 A 的坐标是 $(0,2)$，顶点 C 的纵坐标是 -4，

∴ $AE=6$.

又∵ $\square ABCD$ 的面积是 24，

∴ $AD=BC=4$，

∴ $D(4,2)$，

∴ $k=4\times 2=8$，

∴ 反比例函数的表达式为 $y=\frac{8}{x}$.

(2)由题意知点 B 的纵坐标为 -4，且在反比例函数 $y=\frac{8}{x}$ 的图象上，

∴ 点 B 的横坐标为 -2，

∴ $B(-2,-4)$.

设 AB 所在直线的表达式为 $y=k'x+b$，

将 $A(0,2)$，$B(-2,-4)$ 的坐标代入，

得 $\begin{cases}b=2,\\-2k'+b=-4,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k'=3,\\b=2,\end{cases}$

∴ AB 所在直线的表达式为 $y=3x+2$.

13. 解：(1)∵ 点 A 的坐标为 $(-1,4)$，点 B 的坐标为 $(4,n)$，

由图象可得满足 $k_1x+b>\frac{k_2}{x}$ 的 x 的取值范围是 $x<-1$ 或 $0<x<4$.

(2)∵ 反比例函数 $y=\frac{k_2}{x}$ 的图象过点 $A(-1,4)$，$B(4,n)$，

∴ $k_2=-1\times 4=-4$，$k_2=4n$，

∴ $n=-1$. ∴ $B(4,-1)$.

∵ 一次函数 $y=k_1x+b$ 的图象过点 A，点 B，

∴ $\begin{cases}-k_1+b=4,\\4k_1+b=-1,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k_1=-1,\\b=3,\end{cases}$

∴ 一次函数的表达式为 $y=-x+3$，

反比例函数的表达式为 $y=-\frac{4}{x}$.

(3)如图，设直线 AB 与 y 轴的交点为 C，∴ $C(0,3)$，∴ $OC=3$，

∴ $S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}\times 3\times 1=\frac{3}{2}$，

∴ $S_{\triangle AOB}=S_{\triangle AOC}+S_{\triangle BOC}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\times 3\times 4=\frac{15}{2}$.

∵ $S_{\triangle AOC}:S_{\triangle BOP}=1:2$，

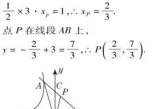
∴ $S_{\triangle AOP}=\frac{15}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{2}$，

∴ $S_{\triangle COP}=\frac{5}{2}-\frac{3}{2}=1$，

∴ $\frac{1}{2}\times 3\cdot x_P=1$，∴ $x_P=\frac{2}{3}$.

∵ 点 P 在线段 AB 上，

∴ $y=-\frac{2}{3}+3=\frac{7}{3}$，∴ $P\left(\frac{2}{3},\frac{7}{3}\right)$.



(第13题)

第4课时　反比例函数的图象与性质的常见应用题型

1. 解：(1)∵ $AB\parallel x$ 轴，

∴ $\angle ABO=\angle BOD$.

∵ $\angle ABO=\angle CBD$，

∴ $\angle BOD=\angle OBD$.

∵ $OB=BD$，∴ $\angle BOD=\angle BDO$.

∴ $\triangle BOD$ 是等边三角形.

∴ $\angle BOD=60°$.

∵ $OB=2$，∴ $B(1,\sqrt{3})$.

∵ 双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 经过点 B，

∴ $k=1\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$.

∴ 双曲线对应的函数表达式为 $y=\frac{\sqrt{3}}{x}$.

(2)点 C 在双曲线上. 理由如下：

∵ $\angle ABO=\angle BOD=60°$，

$\angle AOB=90°$，

∴ $\angle A=30°$. ∴ $AB=2OB$.

∵ $AB=BC$，∴ $BC=2OB$.

∴ $OC=OB=2$. ∴ $C(-1,-\sqrt{3})$.

∵ $-1\times(-\sqrt{3})=\sqrt{3}$，

∴ 点 C 在双曲线上.

2. 解：(1)∵ 反比例函数 $y=\frac{m}{x}$ 的图象经过点 $B(2,-1)$，

∴ $m=2\times(-1)=-2$.

∴ 反比例函数的表达式为 $y=-\frac{2}{x}$.

∵ 点 $A(-1,n)$ 在 $y=-\frac{2}{x}$ 的图象上，∴ $n=2$. ∴ $A(-1,2)$.

把 A，B 两点的坐标分别代入 $y=kx+b$ 中，

则有 $\begin{cases}-k+b=2,\\2k+b=-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-1,\\b=1.\end{cases}$

∴ 一次函数的表达式为 $y=-x+1$.

(2)∵ 直线 $y=-x+1$ 交 y 轴于点 C，∴ $C(0,1)$.

∵ D，C 两点关于 x 轴对称，

∴ $D(0,-1)$.

又∵ $B(2,-1)$，∴ $BD\parallel x$ 轴.

∴ $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}\times 2\times(2+1)=3$.

(3)∵ $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$ 是反比例函数 $y=-\frac{2}{x}$ 图象上的两点，在同一象限内 x 越大 y 越大，且 $x_1<x_2<0$，

∴ $y_1<y_2$.

3. 解：(1)设直线 AD 的表达式为 $y=ax+b$.

∵ 直线 AD 过点 $A(3,5)$，$E(-2,0)$，

∴ $\begin{cases}3a+b=5,\\-2a+b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\b=2.\end{cases}$

∴ 直线 AD 的表达式为 $y=x+2$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∵点 C 与点 $A(3,5)$ 关于原点对称，
∴点 C 的坐标为 $(-3,-5)$.
∵ $CD/\!/y$ 轴，∴点 D 的横坐标为 -3，
把 $x=-3$ 代入 $y=x+2$ 得 $y=-1$.
∴点 D 的坐标为 $(-3,-1)$.

∵点 D 在函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象上，
∴ $k=(-3)\times(-1)=3$.
(2)12.

4. 解：(1) ∵直线 $y=2x+6$ 经过点 $A(1,m)$，∴ $m=2\times1+6=8$.
∴ $A(1,8)$.
∵反比例函数的图象经过点 $A(1,8)$，∴ $8=\frac{k}{1}$，∴ $k=8$.

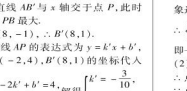
∴反比例函数的表达式为 $y=\frac{8}{x}$.
(2)由题意，可知点 M,N 的坐标为 $M\left(\frac{8}{n},n\right),N\left(\frac{n-6}{2},n\right)$，
∵ $0<n<6$，
∴ $\frac{n-6}{2}<0$，

∴ $S_{\triangle BMN}=\frac{1}{2}\times\left(\left|\frac{n-6}{2}\right|+\left|\frac{8}{n}\right|\right)\times n=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{n-6}{2}+\frac{8}{n}\right)\times n=-\frac{1}{4}\times(n-3)^2+\frac{25}{4}$.
∴当 $n=3$ 时，$\triangle BMN$ 的面积最大.

5. 解：(1)∵点 $A\left(-\frac{1}{2}n,m-2\right),B(1,n)$ 在直线 $y=-2x+b$ 上，
∴ $\begin{cases}m+b=m-2,\\-2+b=n,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=-2,\\n=-4.\end{cases}$
∴ $B(1,-4)$，
代入反比例函数表达式 $y=\frac{k}{x}$，
得 $-4=\frac{k}{1}$，∴ $k=-4$.
(2)直线 AB 的表达式为 $y=-2x-2$，
令 $x=0$，解得 $y=-2$，
令 $y=0$，解得 $x=-1$，
∴ $C(-1,0),D(0,-2)$.
∵点 E 为 CD 的中点，
∴ $E\left(-\frac{1}{2},-1\right)$，

∴ $S_{\triangle BOF}=S_{\triangle OBE}+S_{\triangle OBD}=\frac{1}{2}OD\cdot(x_B-x_E)=\frac{1}{2}\times2\times\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$.

6. 解：(1)∵点 $A(a,4)$，
∴ $AC=4$，
∵ $S_{\triangle AOC}=4$，即 $\frac{1}{2}OC\cdot AC=4$，
∴ $OC=2$.
∵点 $A(a,4)$ 在第二象限，
∴ $a=-2$，∴ $A(-2,4)$.
将 $A(-2,4)$ 的坐标代入 $y=\frac{k}{x}$，得 $k=-8$，
∴反比例函数的表达式为 $y=-\frac{8}{x}$.
把 $B(8,b)$ 的坐标代入，得 $b=-1$.
∴ $B(8,-1)$.
∴ $a=-2,b=-1$.
(2)由图象可以看出 $mx+n<\frac{k}{x}$ 的解集为 $-2<x<0$ 或 $x>8$.
(3)如图，作点 B 关于 x 轴的对称点 B'，直线 AB' 与 x 轴交于点 P，此时 $PA-PB$ 最大.
∵ $B(8,-1)$，∴ $B'(8,1)$.
设直线 AP 的表达式为 $y=k'x+b'$，将 $A(-2,4),B'(8,1)$ 的坐标代入得 $\begin{cases}-2k'+b'=4,\\8k'+b'=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k'=-\frac{3}{10},\\b'=\frac{17}{5}.\end{cases}$



(第6题)

∴直线 AP 的表达式为 $y=-\frac{3}{10}x+\frac{17}{5}$.
当 $y=0$ 时，$-\frac{3}{10}x+\frac{17}{5}=0$，
解得 $x=\frac{34}{3}$，∴ $P\left(\frac{34}{3},0\right)$.

7. 解：(1)∵点 $D(4,4)$ 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 的图象上，
∴ $k=4\times4=16$.
过点 D 作 $DF\perp AB$，垂足为 F，
由 $A(1,0),D(4,4)$ 可知 $OA=1,OF=4,DF=4$，∴ $AF=3$，
∴ $AD=\sqrt{4^2+3^2}=5$.
∵四边形 $ABCD$ 是菱形，
∴ $AB=CD=AD=5$.
∴ C 的横坐标为 9，∴ $C(9,4)$
将 $C(9,4)$ 的坐标代入 $y=\frac{2}{3}x+b$，
得 $4=\frac{2}{3}\times9+b$，∴ $b=-2$.
(2)由(1)知一次函数表达式为 $y=\frac{2}{3}x-2$.
令 $x=0$，得 $y=-2$，则 $E(0,-2)$，
令 $y=0$，得 $\frac{2}{3}x-2=0$，则 $x=3$，
∴ $S_{\triangle BEC}=\frac{1}{2}\times(3-1)\times(2+4)=6$.

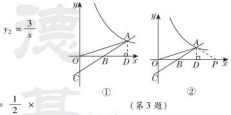
8. 解：(1)∵ $BM=OM=2$，
∴点 B 的坐标为 $(-2,-2)$.
∵反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$ 的图象经过点 B，
∴ $-2=\frac{k}{-2}$，得 $k=4$.
∴反比例函数的表达式为 $y=\frac{4}{x}$.
∵点 A 的纵坐标是 4，
∴ $4=\frac{4}{x}$，得 $x=1$，
∴点 A 的坐标为 $(1,4)$.
∵一次函数 $y=mx+n(m\neq0)$ 的图象过点 $A(1,4)$，点 $B(-2,-2)$，
∴ $\begin{cases}m+n=4,\\-2m+n=-2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=2,\\n=2,\end{cases}$
即一次函数的表达式为 $y=2x+2$.
(2)∵ $y=2x+2$ 与 y 轴交于点 C，
∴点 C 的坐标为 $(0,2)$.
∵点 $B(-2,-2)$，点 $M(-2,0)$，
∴ $OC=MB=2$.
∵ $BM\perp x$ 轴，∴ $MB/\!/OC$，
∴四边形 $MBOC$ 是平行四边形，
∴四边形 $MBOC$ 的面积是 $OM\cdot OC=4$.

阶段核心归类

1. C

2. 解：(1)∵点 A 在第四象限 $y_1=-\frac{2}{x}$ 的图象上，∴ $S_{矩形OAHE}=2$.
∵ $S_{矩形OCBE}=\frac{3}{2}S_{矩形OAHE}$，
∴ $S_{矩形OCBE}=\frac{3}{2}\times2=3$.
∵点 B 在第一象限 $y_2=\frac{k}{x}$ 的图象上，∴ $k=3$，∴ $y_2=\frac{3}{x}$.
∵ $BC=AD=\frac{3}{2}$，
∴点 B 的横坐标为 $\frac{3}{2}$，代入 $y_2=\frac{3}{x}$ 得，$y=\frac{3}{\frac{3}{2}}=2$，∴ $B\left(\frac{3}{2},2\right)$.
(2)设 $P(a,0)$，
∵ $S_{\triangle BPE}=\frac{1}{2}\cdot PE\cdot BE=\frac{1}{2}\times\left|\frac{3}{2}-a\right|\times2=3$，
解得 $a=-\frac{3}{2}$ 或 $a=\frac{9}{2}$，
∴点 $P\left(-\frac{3}{2},0\right)$ 或 $\left(\frac{9}{2},0\right)$，
设直线 BP 的表达式为 $y=mx+n(m\neq0)$，
①若直线过 $\left(\frac{3}{2},2\right),\left(-\frac{3}{2},0\right)$，则 $\begin{cases}\frac{3}{2}m+n=2,\\-\frac{3}{2}m+n=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=\frac{2}{3},\\n=1.\end{cases}$
∴直线 BP 的表达式为 $y=\frac{2}{3}x+1$；
②若直线过 $\left(\frac{3}{2},2\right),\left(\frac{9}{2},0\right)$，则 $\begin{cases}\frac{3}{2}m+n=2,\\\frac{9}{2}m+n=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=-\frac{2}{3},\\n=3.\end{cases}$
∴直线 BP 的表达式为 $y=-\frac{2}{3}x+3$.
综上，直线 BP 的表达式是 $y=\frac{2}{3}x+1$ 或 $y=-\frac{2}{3}x+3$.

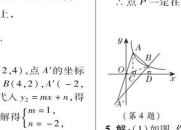
3. 解：(1)如图①，过点 A 作 $AD\perp x$ 轴于点 D.
∵ $B(5,0)$，∴ $OB=5$.
∵ $S_{\triangle OAB}=\frac{15}{2}$，
∴ $\frac{1}{2}\times5\cdot AD=\frac{15}{2}$，∴ $AD=3$.
∵ $OB=AB$，∴ $AB=5$.
在 $\mathrm{Rt}\triangle ADB$ 中，$BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=4$，
∴ $OD=OB+BD=9$，∴ $A(9,3)$.
将点 A 的坐标代入 $y=\frac{m}{x}$，得 $m=9\times3=27$.
∴反比例函数的表达式为 $y=\frac{27}{x}$.
将点 A,B 的坐标代入 $y=kx+b$，得 $\begin{cases}9k+b=3,\\5k+b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=\frac{3}{4},\\b=-\frac{15}{4}.\end{cases}$
∴一次函数的表达式为 $y=\frac{3}{4}x-\frac{15}{4}$.



(第3题)

(2)由(1)知 $AB=5$，
∵ $\triangle ABP$ 是等腰三角形，
∴①当 $AB=PB$ 时，$PB=5$.
∴ $P(0,0)$ 或 $P(10,0)$.
②当 $AB=AP$ 时，如图②，
由(1)知 $BD=4$，
易知点 P 与点 B 关于 AD 对称，
∴ $DP=BD=4$.
∴ $OP=5+4+4=13$.∴ $P(13,0)$.
③当 $BP=AP$ 时，设 $P(a,0)$，
∵ $A(9,3),B(5,0)$，
∴ $AP^2=(9-a)^2+9,BP^2=(a-5)^2$.
∴ $(9-a)^2+9=(a-5)^2$，
解得 $a=\frac{65}{8}$，∴ $P\left(\frac{65}{8},0\right)$.
综上，满足条件的点 P 的坐标为 $(0,0)$ 或 $(10,0)$ 或 $(13,0)$ 或 $\left(\frac{65}{8},0\right)$.

4. 解：(1)由已知，点 $B(4,2)$ 在 $y_1=\frac{k}{x}(x>0)$ 的图象上，
∴ $k=8$，∴ $y_1=\frac{8}{x}$.
∵ $a=2$，
∴点 A 的坐标为 $(2,4)$，点 A' 的坐标为 $(-2,-4)$，把 $B(4,2),A'(-2,-4)$ 的坐标分别代入 $y_2=mx+n$，得 $\begin{cases}2=4m+n,\\-4=-2m+n,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=1,\\n=-2,\end{cases}$
∴ $y_2=x-2$.
②$2<x<4$.
(2)如图，分别过点 A,B 作 $AC\perp x$ 轴于点 $C,BD\perp x$ 轴于点 D，连接 BO.
∵点 A' 与 A 关于点 O 对称，
∴点 O 在 AA' 上，且 $OA=OA'$，
∴ $S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}S_{\triangle A'AB}=8$.
∵ $A\left(a,\frac{8}{a}\right),B\left(3a,\frac{8}{3a}\right)$，
∴ $S_{\triangle OAC}=\frac{1}{2}a\cdot\frac{8}{a}=\frac{1}{2}k,S_{\triangle OBD}=\frac{1}{2}\times3a\times\frac{8}{3a}=\frac{1}{2}k$.∴ $S_{\triangle OAC}=S_{\triangle OBD}$.
∴ $S_{四边形AOBD}-S_{\triangle OBD}=S_{四边形AOBD}-S_{\triangle OAC}$，∴ $S_{四边形ACBD}=S_{\triangle OAB}=8$.
∴ $\frac{1}{2}\left(\frac{8}{a}+\frac{8}{3a}\right)(3a-a)=8$，∴ $k=6$.
(3)∵点 A 的坐标为 $\left(a,\frac{6}{a}\right)$，点 A' 与点 A 关于点 O 对称，
∴ $A'\left(-a,-\frac{6}{a}\right)$.
将点 A' 的坐标代入 $y_1=\frac{1}{2}x+n$，得 $n=\frac{1}{2}a-\frac{6}{a}$，
∴ $y_2=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}a-\frac{6}{a}$.
∵ $AD\perp x$ 轴，∴ $x_B=a$，
∴ $y_B=a-\frac{6}{a}$，
∴ $AD=\frac{6}{a}-\left(a-\frac{6}{a}\right)=\frac{24}{a}-a$.
∵四边形 $ADEF$ 是正方形，
∴ $DE=AD=\frac{24}{a}-a$，
∴ $x_F=x_E=a+\frac{24}{a}-a=\frac{24}{a}$.
将 $x_P=\frac{24}{a}$ 代入 $y_2=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}a-\frac{6}{a}$ 得 $y_P=\frac{1}{2}\cdot\frac{24}{a}+\frac{1}{2}a-\frac{6}{a}=\frac{1}{2}a$，
∴ $P\left(\frac{24}{a},\frac{1}{2}a\right)$.
将 $x_P=\frac{24}{a}$ 代入 $y_1=\frac{8}{x}$ 得 $y_1=\frac{8}{\frac{24}{a}}=\frac{1}{2}a=y_P$.
∴点 P 一定在函数 y_1 的图象上.



5. 解：(1)如图，作 $BD\perp OC$ 于点 D，
∵ $\triangle BOC$ 是等边三角形，
∴ $OB=OC=2$，
∴ $OD=\frac{1}{2}OC=1$，
∴ $BD=\sqrt{OB^2-OD^2}=\sqrt{3}$，
∴ $S_{\triangle OBD}=\frac{1}{2}OD\times BD=\frac{\sqrt{3}}{2}$.
又∵ $S_{\triangle OBD}=\frac{1}{2}|k|$，∴ $|k|=\sqrt{3}$.
∵反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$ 的图象在第一、三象限，∴ $k=\sqrt{3}$，
∴反比例函数的表达式为 $y=\frac{\sqrt{3}}{x}$.
(2)∵ $S_{\triangle OBC}=\frac{1}{2}OC\cdot BD=\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$，
∴ $S_{\triangle AOC}=3\sqrt{3}-\sqrt{3}=2\sqrt{3}$.
∵ $S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}OC\cdot y_A=2\sqrt{3}$，
∴ $y_A=2\sqrt{3}$，
把 $y=2\sqrt{3}$ 代入 $y=\frac{\sqrt{3}}{x}$，求得 $x=\frac{1}{2}$，
∴点 A 的坐标为 $\left(\frac{1}{2},2\sqrt{3}\right)$.

6. 解：(1)∵点 $B(m,2)$ 在直线 $y=x+1$ 上，∴ $2=m+1$，得 $m=1$.
∴点 B 的坐标为 $(1,2)$.
∵点 $B(1,2)$ 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 的图象上，∴ $2=\frac{k}{1}$，得 $k=2$，
即反比例函数的表达式是 $y=\frac{2}{x}$.
(2)将 $x=0$ 代入 $y=x+1$，得 $y=1$，
则点 A 的坐标为 $(0,1)$.
又∵点 B 的坐标为 $(1,2)$，
∴ $\triangle AOB$ 的面积是 $\frac{1\times1}{2}=\frac{1}{2}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7. 解：由反比例函数图象的对称性可知，两条坐标轴将矩形 $ABCD$ 分成四个全等的小矩形.

∵ 点 A 为 $y=\frac{6}{x}$ 的图象上的一点，

∴ $S_{\text{矩形}AEOH}=6$.

∴ $S_{\text{矩形}ABCD}=4\times6=24$.

∴ 总费用为 $25\times24=600$（元）.

答：所需钢条一共花 600 元.

8. 解：(1)∵ 一次函数 $y=kx+b(k,b$ 为常数，$k\neq0)$ 的图象与反比例函数 $y=-\frac{12}{x}$ 的图象交于 A,B 两点，点 A 的横坐标与点 B 的纵坐标都是 3，

∴ $3=-\frac{12}{x_B}$，$y_A=-\frac{12}{3}=-4$，

解得 $x_B=-4$，∴ $B(-4,3)$，$A(3,-4)$，

把点 B,A 的坐标分别代入 $y=kx+b$，

得 $\begin{cases}-4k+b=3,\\3k+b=-4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-1,\\b=-1,\end{cases}$

故一次函数的表达式为 $y=-x-1$.

(2)对于 $y=-x-1$，当 $y=0$ 时，$x=-1$，故点 C 的坐标为 $(-1,0)$，

则 $\triangle AOB$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times1\times3+\frac{1}{2}\times1\times4=\frac{7}{2}$.

(3)不等式 $kx+b>-\frac{12}{x}$ 的解集为 $x<-4$ 或 $0<x<3$.

1.3 反比例函数的应用

第 1 课时　建立反比例函数模型 解实际问题

1. $y=\frac{4\,500}{x}$　**2.** B　**3.** A　**4.** A　**5.** D

6. B

7. C　**点拨**：观察题图可知 A 正确；

设当 $0\leqslant x\leqslant5$ 时，$y=k_1x$，

由题意得 $5k_1=10$，

∴ $k_1=2$，∴ $y=2x$，

令 $y=8$，得 $x=4$，

当 $y\geqslant8$ 时，$4\leqslant x\leqslant15$.

∵ $15-4=11$，∴ B 正确；

当 $x>15$ 时，设 $y=\frac{k_2}{x}$，

由题意得 $k_2=15\times8=120$，

∴ $y=\frac{120}{x}$，

对于 $y=2x$，当 $y=5$ 时，$x=2.5$，

对于 $y=\frac{120}{x}$，当 $y=5$ 时，$x=24$.

∴ 当 $y\geqslant5$ 时，$2.5\leqslant x\leqslant24<35$，故 C 错误；

对于 $y=2x$，当 $y=2$ 时，$x=1$，对于 $y=\frac{120}{x}$，当 $y=2$ 时，$x=60$，

∵ $60-1=59$，∴ D 正确.

8. D　**点拨**：本题易忽视三角形的底边长和高均为正数而错选 B.

9. 解：(1)∵ $vt=480$，且全程速度限定为不超过 120 千米/时，

∴ v 关于 t 的函数表达式为 $v=\frac{480}{t}$（$t\geqslant4$）.

(2)①8 点至 12 点 48 分时间长为 $\frac{24}{5}$ 小时，8 点至 14 点时间长为 6 小时，

将 $t=6$ 代入 $v=\frac{480}{t}$，得 $v=80$；

将 $t=\frac{24}{5}$ 代入 $v=\frac{480}{t}$，得 $v=100$.

∴ 小汽车行驶速度 v 的范围为 $80\leqslant v\leqslant100$.

②方方不能在当天 11 点 30 分前到达 B 地. 理由如下：

8 点至 11 点 30 分时间长为 $\frac{7}{2}$ 小时，

将 $t=\frac{7}{2}$ 代入 $v=\frac{480}{t}$，得 $v=\frac{960}{7}>120$，超速了. 故方方不能在当天 11 点30 分前到达 B 地.

10. 解：(1)设函数表达式为 $V=\frac{k}{t}$，把 $(6,3\,000)$ 代入 $V=\frac{k}{t}$，得 $3\,000=\frac{k}{6}$，

解得 $k=18\,000$，所以 V 与 t 之间的函数表达式为 $V=\frac{18\,000}{t}$.

(2)把 $t=2$ 代入 $V=\frac{18\,000}{t}$，得 $V=9\,000$.

答：每小时的排水量应该是 9 000 m^3.

(3)把 $V=4\,000$ 代入 $V=\frac{18\,000}{t}$，得 $t=4.5$，因此水池中的水至少要 4.5 h才能排完.

11. 解：(1)由题意得 $xy=24$，∴ $y=\frac{24}{x}$.

(2)当 $y=3$ 时，$x=8$；

当 $y=6$ 时，$x=4$，

∴ 当 $3<y<6$ 时，x 的取值范围为 $4<x<8$.

12. 解：(1)$510-200=310$(元).

答：付款时应付 310 元.

(2)$p=\frac{200}{x}(400\leqslant x<600)$，

∴ p 随 x 的增大而减小.

(3)购买 a 件$(200\leqslant a<400)$元商品在甲商场的优惠金额是 $a-0.6a=0.4a$(元).

当 $0.4a<100$，即 $200\leqslant a<250$ 时，选择甲商场购买商品花钱较少；

当 $0.4a=100$，即 $a=250$ 时，选择甲、乙两家商场购买商品花钱一样多；

当 $0.4a>100$，即 $250<a<400$ 时，选择乙商场购买商品花钱较少.

第 2 课时　建立反比例函数模型解跨学科问题

1. C　**2.** B　**3.** C　**4.** A　**5.** D　**6.** A

7. C

8. C　**点拨**：本题易忽略反比例函数的增减性而导致选错.

9. 解：(1)观察图象，可知当 $x=7$ 时，$y=100$.

当 $0\leqslant x\leqslant7$ 时，设 y 关于 x 的函数关系式为 $y=kx+b$，

则 $\begin{cases}b=30,\\7k+b=100,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=10,\\b=30,\end{cases}$

即当 $0\leqslant x\leqslant7$ 时，y 与 x 之间的函数关系式为 $y=10x+30$.

当 $x>7$ 时，设 $y=\frac{\alpha}{x}$，则 $100=\frac{\alpha}{7}$，

解得 $\alpha=700$，

即当 $x>7$ 时，y 与 x 之间的函数关系式为 $y=\frac{700}{x}$.

当 $y=30$ 时，$x=\frac{70}{3}$，

∴ y 与 x 之间的函数关系式为

$$y=\begin{cases}10x+30(0\leqslant x\leqslant7),\\\frac{700}{x}\left(7<x\leqslant\frac{70}{3}\right),\end{cases}$$

y 与 x 之间的函数关系式每 $\frac{70}{3}$ 分钟重复出现一次.

(2)将 $y=50$ 代入 $y=10x+30$，得 $x=2$，

将 $y=50$ 代入 $y=\frac{700}{x}$，得 $x=14$.

∵ $\frac{70}{3}-14+2=\frac{34}{3}$，

∴ 怡萱同学想喝高于 50 ℃的水，她最多需要等待 $\frac{34}{3}$ min.

10. 解：(1)画图略. 由图象猜测 y 与 x 之间的函数关系为反比例函数关系.

∴ 设 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$.

把 $x=4$，$y=12$ 代入，得 $k=48$，

∴ $y=\frac{48}{x}$.

将其余各点的坐标代入验证，均适合，∴ y 与 x 之间的函数关系式为 $y=\frac{48}{x}$.

(2)把 $y=5$ 代入 $y=\frac{48}{x}$，得 $x=9.6$.

∴ 当弹簧秤的示数为 5 N 时，弹簧秤与点 O 的距离是 9.6 cm. 随着弹簧秤与点 O 的距离不断减小，弹簧秤的示数将不断增大.

11. 解：(1)设线段 AB 对应的函数表达式为 $y=k_1x+b(k_1\neq0)$.

∵ 线段 AB 过点 $(0,10)$，$(2,14)$，

∴ $\begin{cases}b=10,\\2k_1+b=14,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k_1=2,\\b=10.\end{cases}$

∴ AB 对应的函数表达式为 $y=2x+10$ $(0\leqslant x<5)$.

∵ 点 B 在线段 AB 上，当 $x=5$ 时，$y=20$，

∴ 点 B 的坐标为 $(5,20)$.

∵ BC 对应的函数表达式为 $y=20$ $(5\leqslant x<10)$，

设双曲线 CD 对应的函数表达式为 $y=\frac{k_2}{x}(k_2\neq0)$.

∵ $C(10,20)$，∴ $k_2=200$.

∴ 双曲线 CD 对应的函数表达式为 $y=\frac{200}{x}(10\leqslant x\leqslant24)$.

∴ y 关于 x 的函数表达式为

$$y=\begin{cases}2x+10(0\leqslant x<5),\\20(5\leqslant x<10),\\\frac{200}{x}(10\leqslant x\leqslant24).\end{cases}$$

(2)由(1)知恒温系统设定的恒定温度为 20 ℃.

(3)把 $y=10$ 代入 $y=\frac{200}{x}$ 中，

解得 $x=20$.

∴ $20-10=10$(h).

答：恒温系统最多可以关闭 10 h，才能使蔬菜避免受到伤害.

阶段核心方法

1. 解：由反比例函数的定义可知

$\begin{cases}m^2-10=-1,\\m+3\neq0,\end{cases}$ ∴ $m=3$.

∴ 此反比例函数的表达式为 $y=\frac{6}{x}$.

易错点拨：该题容易忽略 $m+3\neq0$ 这一条件，得出 $m=\pm3$ 的错误结论.

2. 解：由题意得 $\begin{cases}-12n-9!=-1,\\n-4>0.\end{cases}$

解得 $n=5$.

∴ 此函数的表达式是 $y=\frac{1}{x}$.

3. 解：(1)把 $A(3,4)$ 的坐标代入反比例函数 $y_2=\frac{m}{x}$，得 $4=\frac{m}{3}$，解得 $m=12$，

∴ 反比例函数的表达式为 $y_2=\frac{12}{x}$.

∵ 点 $B(a,-2)$ 在反比例函数 $y_2=\frac{12}{x}$ 的图象上，

∴ $-2=\frac{12}{a}$，解得 $a=-6$，

∴ $B(-6,-2)$.

∵ 一次函数 $y_1=kx+b$ 的图象经过 $A(3,4)$，$B(-6,-2)$ 两点，

∴ $\begin{cases}3k+b=4,\\-6k+b=-2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=\frac{2}{3},\\b=2,\end{cases}$

∴ 一次函数的表达式为 $y_1=\frac{2}{3}x+2$.

(2)= 点拨：由一次函数的表达式为 $y_1=\frac{2}{3}x+2$ 可知 $C(0,2)$，$D(-3,0)$，

∴ $AD=\sqrt{(3+3)^2+4^2}=2\sqrt{13}$，$BC=\sqrt{6^2+(2+2)^2}=2\sqrt{13}$，

∴ $AD=BC$.

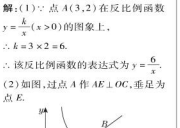
(3)由图象可知 $y_1<y_2$ 时 x 的取值范围是 $x<-6$ 或 $0<x<3$.

4. 解：(1)∵ 点 $A(3,2)$ 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 的图象上，

∴ $k=3\times2=6$.

∴ 该反比例函数的表达式为 $y=\frac{6}{x}$.

(2)如图，过点 A 作 $AE\perp OC$，垂足为点 E.



(第 4 题)

设直线 OA 的表达式为 $y=k'x$，将 $A(3,2)$ 的坐标代入，得 $k'=\frac{2}{3}$，

∴ 直线 OA 的表达式为 $y=\frac{2}{3}x$.

∵ 点 $C(a,0)$，

∴ 把 $x=a$ 代入 $y=\frac{2}{3}x$，得 $y=\frac{2}{3}a$；

把 $x=a$ 代入 $y=\frac{6}{x}$，得 $y=\frac{6}{a}$.

∴ $B\left(a,\frac{2}{3}a\right)$，即 $BC=\frac{2}{3}a$；

$D\left(a,\frac{6}{a}\right)$，即 $CD=\frac{6}{a}$.

∵ $S_{\triangle ACD}=\frac{3}{2}$，

∴ $\frac{1}{2}CD\cdot EC=\frac{3}{2}$，

即 $\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{a}\cdot(a-3)=\frac{3}{2}$，

解得 $a=6$.

∴ $BD=BC-CD=\frac{2}{3}a-\frac{6}{a}=4-1=3$.

∴ 线段 BD 的长为 3.

5. 解：(1)依题意，点 $C(1,2)$ 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$ 的图象上，

∴ $k=1\times2=2$.

∵ $A(3,0)$，∴ $OA=3$.

∵ 四边形 $OABC$ 是平行四边形，

∴ $BC=OA=3$.

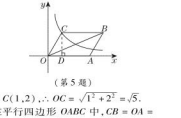
又∵ $BC\parallel x$ 轴，∴ $B(4,2)$.

设直线 OB 的函数表达式为 $y=ax$，

∴ $2=4a$. ∴ $a=\frac{1}{2}$.

∴ 直线 OB 的函数表达式为 $y=\frac{1}{2}x$.

(2)如图，过点 C 作 $CD\perp OA$ 于点 D.



(第 5 题)

∵ $C(1,2)$，∴ $OC=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$.

在平行四边形 $OABC$ 中，$CB=OA=3$，$AB=OC=\sqrt{5}$，

∴ 四边形 $OABC$ 的周长为 $3+3+\sqrt{5}+\sqrt{5}=6+2\sqrt{5}$.

6. 解：(1)由已知得 $vt=300$.

∴ t 与 v 之间的函数表达式为 $t=\frac{300}{v}$（$v>0$）.

(2)运了一半物资后还剩 $300\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=150$(t).

∵ 剩下的物资要在 2 h 之内运到江边，

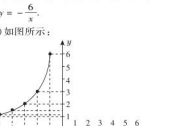
∴ 运输速度至少为 $150\div2=75$(t/h).

全章热门考点整合应用

1. B　**2.** C　**3.** ①③④

4. 解：(1)反比例函数，函数的表达式为 $y=-\frac{k}{x}$.

(2)如图所示：



(第 4 题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5. 解：∵ 反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象经过点 $A(1,-k+4)$，

$\therefore -k+4=\frac{k}{1}$，即 $-k+4=k$.

$\therefore k=2$. $\therefore A(1,2)$.

∵ 一次函数 $y=x+b$ 的图象经过点 $A(1,2)$，$\therefore 2=1+b$. $\therefore b=1$.

$\therefore$ 反比例函数的表达式为 $y=\frac{2}{x}$，

一次函数的表达式为 $y=x+1$.

6. 解：(1) 如图①，过点 A 作 $AC\perp OB$ 于点 C.

∵ $\triangle OAB$ 是等边三角形，

$\therefore \angle AOB=60°$，$OC=\frac{1}{2}OB$.

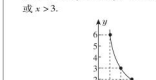
∵ $B(4,0)$，$\therefore OA=OB=4$.

$\therefore OC=2$，$\therefore AC=2\sqrt{3}$.

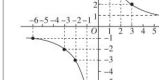
把点 $A(2,2\sqrt{3})$ 的坐标代入 $y=\frac{k}{x}$，

得 $k=4\sqrt{3}$，

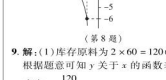
$\therefore$ 反比例函数的表达式为 $y=\frac{4\sqrt{3}}{x}$.



①



②



③

(第 6 题)

(2) 分两种情况讨论：

情况一：如图②，点 D 是 $A'B'$ 的中点，过点 D 作 $DE\perp x$ 轴于点 E.

由题意得 $A'B'=4$，$\angle A'B'O'=60°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle DEB'$ 中，$B'D=2$，$B'E=1$，$DE=\sqrt{3}$，$\therefore O'E=3$.

把 $y=\sqrt{3}$ 代入 $y=\frac{4\sqrt{3}}{x}$，得 $x=4$，

$\therefore OE=4$，$\therefore a=OO'=1$.

情况二：如图③，点 F 是 $A'O'$ 的中点，过点 F 作 $FH\perp x$ 轴于点 H.

由题意得 $A'O'=4$，$\angle A'O'B'=60°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle FO'H$ 中，$O'H=1$，$FH=\sqrt{3}$.

把 $y=\sqrt{3}$ 代入 $y=\frac{4\sqrt{3}}{x}$，得 $x=4$，

$\therefore OH=4$，$\therefore a=OO'=3$.

综上所述，a 的值为 1 或 3.

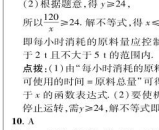
7. C

8. 解：如图所示.

(1) 当 $y=-2$ 时，$x=-3$；

(2) 当 $-2<x<1$ 且 $x\neq 0$ 时，$y<-3$ 或 $y>6$；

(3) 当 $-3<y<2$ 且 $y\neq 0$ 时，$x<-2$ 或 $x>3$.



(第 8 题)

9. 解：(1) 库存原料为 $2\times 60=120$(t)，根据题意可知 y 关于 x 的函数表达式为 $y=\frac{120}{x}$.

由于生产能力提高，每小时消耗的原料量大于计划消耗的原料量，所以自变量的取值范围是 $x>2$.

(2) 根据题意，得 $y\geqslant 24$，

所以 $\frac{120}{x}\geqslant 24$. 解不等式，得 $x\leqslant 5$，

即每小时消耗的原料量应控制在大于 2 且不大于 5 t 的范围内.

点拨：(1) 由“每小时消耗的原料量 × 可使用的时间 = 原料总量”可得 y 关于 x 的函数表达式. (2) 要使机器不停止运转，需 $y\geqslant 24$，解不等式即可.

10. A

11. 3　**点拨**：连接 AO，BO，由题可得 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABO}=S_{\triangle APO}+S_{\triangle BPO}$，

又易知 $S_{\triangle APO}=\frac{1}{2}\times 2=1$，

$S_{\triangle BPO}=\frac{1}{2}\times|-4|=2$，$\therefore S_{\triangle ABC}=3$.

12. (1) **证明**：∵ 点 P 在双曲线 $y=\frac{6}{x}$ 上，∴ 设点 P 的坐标为 $\left(\frac{6}{m},m\right)$.

∵ 点 D 在双曲线 $y=\frac{3}{x}$ 上，$BP\parallel x$ 轴，点 D 在 BP 上，∴ 点 D 的坐标为 $\left(\frac{3}{m},m\right)$. $\therefore BD=\frac{3}{m}$，$BP=\frac{6}{m}$.

$\therefore D$ 是 BP 的中点.

(2) 解：由题意可知 $S_{\triangle BOD}=\frac{3}{2}$，

$S_{\triangle AOC}=\frac{3}{2}$，$S_{四边形ODPE}=6$.

$\therefore S_{四边形OCPE}=S_{四边形ODPE}-S_{\triangle BOD}-S_{\triangle AOC}=6-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}=3$.

第 2 章　一元二次方程

2.1　一元二次方程

1. D　**2.** C　**3.** B　**4.** A　**5.** B　**6.** B

7. B

8. ②　**点拨**：∵ $x^2-4x-12=0$，即 $x(x-4)=12$，∴ 构造如图①②中大正方形的面积是 $(x+x-4)^2$，其中它又等于四个矩形的面积加上中间小正方形的面积，即 $4\times 12+4^2$，据此易得 $x=6$. 故答案为②.

9. 错解：C

诊断：当方程是一元二次方程时，不仅要使未知数的最高次数是 2，还要使二次项的系数不为 0. 本题就是忽视了二次项的系数 $k-3\neq 0$ 这一条件，从而导致错解.

正解：B

10. 解：(1) 当 $2k+1=0$，且 $4k\neq 0$，即 $k=-\frac{1}{2}$ 时，方程 $(2k+1)x^2+4kx+k-1=0$ 化为 $-2x-\frac{3}{2}=0$，此时为一元一次方程.

(2) 当 $2k+1\neq 0$，即 $k\neq -\frac{1}{2}$ 时，此方程为一元二次方程，其二次项系数是 $2k+1$，一次项系数是 $4k$，常数项是 $k-1$.

11. 解：整理 $a(x+1)^2+b(x+1)+c=0$ 得 $ax^2+(2a+b)x+(a+b+c)=0$，

则 $\begin{cases}a=3,\\ a+b=2,\\ a+b+c=-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=3,\\ b=-4,\\ c=0.\end{cases}$

$\therefore a^2+b^2-c^2=9+16=25$.

$\therefore a^2+b^2-c^2$ 的值的算术平方根是 5.

12. 解：都不正确，均考虑不全面.

正确解法如下：

欲使 $x^{2n+1}-3x^{n-3}+1=0$ 是关于 x 的一元二次方程，则 $\begin{cases}2n+b=2,\\ a-b=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2n+b=2,\\ a-b=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2n+b=1,\\ a-b=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2n+b=0,\\ a-b=2.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\frac{4}{3},\\ b=-\frac{2}{3}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=1,\\ b=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-\frac{2}{3},\\ b=-\frac{2}{3}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=1,\\ b=-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=\frac{2}{3},\\ b=-\frac{4}{3}.\end{cases}$

13. 解：(1) 一元二次方程的一般形式是 $ax^2+bx+c=0(a,b,c$ 是常数且 $a\neq 0)$，因此①，②，④，⑤是方程 $\frac{1}{2}x^2-x=2$ 所化的一元二次方程的一般形式.

(2) 若设方程 $\frac{1}{2}x^2-x=2$ 的一般形式的二次项系数为 $a(a\neq 0)$，则一次项系数为 $-2a$，常数项为 $-4a$，因此二次项系数：一次项系数：常数项 $=1:(-2):(-4)$.

2.2　一元二次方程的解法

第 1 课时　直接开平方法解方程

1. B　**2.** D　**3.** A　**4.** C

5. C　**点拨**：解本题的关键是先求出方程的一个实数根，再根据方程根的定义代回方程求解. 设这个实数根是 x，则 $\frac{1}{x}=x$，解得 $x=\pm 1$，将 $x=\pm 1$ 分别代入原方程，求出 m 的值即可.

6. $x_1=2$，$x_2=-2$

7. (1) ≥1　(2) <1　**8.** C

9. B　**点拨**：由函数 $y=x^3$ 得 $n=3$，则 $y'=3x^2$，$\therefore 3x^2=12$，$x^2=4$，$x=\pm 2$，即 $x_1=2$，$x_2=-2$，故选 B.

10. 5(答案不唯一，只要 $c\geqslant 0$ 即可)

11. D　**12.** C　**13.** A

14. $x=-4$，$x=3$　**点拨**：本题方程的根有两个，学生易漏掉其中一个.

15. 解：由题意知 $a-2\geqslant 0$，$2-a\geqslant 0$，故 $a=2$，所以 $b=1$，

因为方程的一个根是 1，

所以 $a+b+c=0$，所以 $c=-3$.

所以此一元二次方程为 $2x^2+x-3=0$.

16. 解：∵ $m+1$ 与 $2m-4$ 是一元二次方程 $ax^2=b(ab>0)$ 的两个根，

∴ $(m+1)+(2m-4)=0$，

∴ $m=1$，即方程的两根分别为 2 和 -2.

把 $x=2$ 代入 $ax^2=b$ 中，得 $4a=b$，

∴ $\frac{b}{a}=4$.

17. 解：由已知可得 a 的取值范围为 $4<a<8$. 又因为 a 为整数，所以 a 可能的取值为 5，6，7. 当 $a=5$ 时，将其代入方程，此方程为 $5x^2-9\times 5+14\neq 0$，故 $a=5$ 不是方程的根. 同理可知，$a=6$ 也不是方程的根，$a=7$ 是方程的根，即三角形的第三条边的长为 7 cm. 所以此三角形的周长是 $2+6+7=15$(cm).

18. 解：(1) 当 $ac\leqslant 0$ 时，方程有实数解，其解为 $x_1=\sqrt{-\frac{c}{a}}$，$x_2=-\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

(2) 当 $ac>0$ 时，方程无实数解.

理由如下：∵ $x^2=-\frac{c}{a}<0$，负数没有平方根，∴ 此时方程无实数解.

第 2 课时　配方法解方程

1. -1 或 7　**2.** D　**3.** B　**4.** A　**5.** A

6. B　**点拨**：∵ $a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$，∴ $2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc=0$，∴ $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$.

∴ $a-b=0$，$b-c=0$，$c-a=0$，

∴ $a=b=c$，

∴ $\triangle ABC$ 的形状为等边三角形.

7. A　**8.** D　**9.** A　**10.** A　**11.** D

12. B　**点拨**：欧几里得的《原本》记载，形如 $x^2+ax=b^2$ 的方程的图解法是：画 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$，使 $\angle ACB=90°$，$BC=\frac{a}{2}$，$AC=b$，再在斜边 AB 上截取 $BD=\frac{a}{2}$，设 $AD=x$，根据勾股定理得 $\left(x+\frac{a}{2}\right)^2=b^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2$，整理得 $x^2+ax=b^2$，

则该方程的一个正根是 AD 的长.

13. 1 或 -3　**点拨**：依题意得 $(2+x)x=3$，整理，得 $x^2+2x=3$，

∴ $(x+1)^2=4$，∴ $x+1=\pm 2$，

∴ $x=1$ 或 $x=-3$.

14. 解：∵ $x^2+6x=-7$，

∴ $x^2+6x+9=-7+9$，

即 $(x+3)^2=2$，解得 $x+3=\pm\sqrt{2}$，

∴ $x=-3\pm\sqrt{2}$，

即 $x_1=-3+\sqrt{2}$，$x_2=-3-\sqrt{2}$.

点拨：本题的易错之处是在配方时忽视等式的基本性质，忘了在等号右边加 9 而致错.

15. 解：∵ $a^2+b^2=12a+8b-52$，

∴ $a^2-12a+b^2-8b+52=0$.

∴ $(a-6)^2+(b-4)^2=0$.

∴ $a-6=0$，$b-4=0$.

∴ $a=6$，$b=4$.

又∵ a，b，c 为正整数且是 $\triangle ABC$ 的三边长，c 是 $\triangle ABC$ 的最短边长，

∴ $6-4<c\leqslant 4$(c 是正整数).

∴ $c=3$ 或 $c=4$.

即 c 的值是 3 或 4.

16. 解：(1) 10　(2) -2

(3) $x^2+(m+2)x+4m-7=\left(x+\frac{m+2}{2}\right)^2+4m-7-\frac{(m+2)^2}{4}$，

∵ 原代数式有最小值，为 0，

∴ $4m-7-\frac{(m+2)^2}{4}=0$，

即 $m^2-12m+32=0$.

配方得 $(m-6)^2=4$，

∴ $m-6=\pm 2$，∴ $m_1=8$，$m_2=4$.

17. 解：将已知等式两边同时加上 2，



第17题图

得 $x^2+\frac{1}{x^2}+2+2$

$2\left(x+\frac{1}{x}\right)=2$，

即 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)=2$.

设 $x+\frac{1}{x}=y$，则 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)=2$ 可化为 $y^2+2y=2$.

配方，得 $y^2+2y+1=2+1$，

∴ $(y+1)^2=3$.

直接开平方，得 $y+1=\pm\sqrt{3}$.

解得 $y_1=\sqrt{3}-1$，$y_2=-\sqrt{3}-1$.

即 $x+\frac{1}{x}=\sqrt{3}-1$ 或 $x+\frac{1}{x}=-\sqrt{3}-1$.

经检验，不存在实数 x 使 $x+\frac{1}{x}=\sqrt{3}-1$ 成立，故舍去.

∴ $x+\frac{1}{x}=-\sqrt{3}-1$.

点拨：本题在解答过程中应用了**换元法**和**整体思想**，即用 y 来代替 $x+\frac{1}{x}$，将已知等式转化成一元二次方程求解.

18. 解：(1) 5；2；-2　(2) 原方程可变形，得 $[(x-1)-4][(x-1)+4]=6$，$(x-1)^2-4^2=6$，$(x-1)^2=6+4^2$.

直接开平方并整理，得 $x_1=1+\sqrt{22}$，$x_2=1-\sqrt{22}$.

第 3 课时　公式法解方程

1. B　**2.** A　**3.** D

4. $x_1=\frac{-1+\sqrt{13}}{3}$，$x_2=\frac{-1-\sqrt{13}}{3}$

5. 1

6. D　**点拨**：$(x+1)(x-3)=2x-5$，整理得 $x^2-4x+2=0$，

解得 $x_1=2+\sqrt{2}>3$，$x_2=2-\sqrt{2}$，$0<2-\sqrt{2}<3$，

故有两个正根，且有一根大于 3.

7. 解：依题意，得 $a^2-2a+1=0$ 且 $b+1=0$ 且 $c+3=0$，∴ $a=1$，$b=-1$，$c=-3$，代入方程可得 $x^2-x-3=0$，

∴ $x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$，

即 $x_1=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$，$x_2=\frac{1-\sqrt{13}}{2}$.

8. 解：设 x s 时 $\triangle PDQ$ 的面积为 35 cm^2，

即 $S_{四边形ABCD}-S_{\triangle APQ}-S_{\triangle DQC}=35$，

$12\times 6-\frac{1}{2}\times 12x-\frac{1}{2}(6-x)\cdot 2x-\frac{1}{2}\times 6\times(12-2x)=35$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解得 $x_1=3+2\sqrt{2}, x_2=3-2\sqrt{2}$，

因为当其移动 $(3+2\sqrt{2})$ s或 $(3-2\sqrt{2})$ s时均符合题意，

所以 $(3+2\sqrt{2})$ s或 $(3-2\sqrt{2})$ s时 $\triangle PDQ$ 的面积为 35 cm^2.

第 4 课时　因式分解法解方程

1. A　**2.** A　**3.** $x_1=2, x_2=1$

4. -3 或 4　**5.** C

6. A　**点拨**：解方程 $x^2-7x+10=0$，得 $x=2$ 或 $x=5$，

若腰长为 2，则三角形的三边长为 2，2，6，显然不能构成三角形；

若腰长为 5，则三角形三边长为 5，5，6，此时三角形的周长为 16.

故选 A.

7. B　**8.** D

9. (1)①　(2)④⑥　(3)③⑤　(4)②

10. **解**：移项，得 $2(x-3)-x(x-3)=0$.

整理，得 $(x-3)(2-3x)=0$.

所以 $x-3=0$ 或 $2-3x=0$.

解得 $x_1=3, x_2=\frac{2}{3}$.

点拨：解方程时千万不能将方程两边同时除以 $x-3$，否则方程会漏掉一解.

11. **错解**：C

诊断：设 $x^2+x+1=y$，

则已知等式可化为 $y^2+2y-3=0$，

分解因式得 $(y+3)(y-1)=0$，

解得 $y_1=-3, y_2=1$.

当 $y=-3$ 时，$x^2+x+1=-3$ 无实数根；当 $y=1$ 时，$x^2+x+1=1$ 有实数根. 本题易因未讨论满足 $x^2+x+1=y$ 的实数 x 是否存在而错选 C.

正解：A

12. **解**：(1) $2x^2-4x-30=0$，

$x^2-2x-15=0$，

$(x-5)(x+3)=0$.

$\therefore x_1=5, x_2=-3$.

(2) $x^2-(\sqrt{2}+\sqrt{3})x+\sqrt{6}=0$，

$(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{3})=0$，

$\therefore x_1=\sqrt{2}, x_2=\sqrt{3}$.

(3) $x^2-8x+4=0$，

$x^2-8x+16=12$，

$(x-4)^2=12$，

$x-4=\pm 2\sqrt{3}$，

$\therefore x_1=4+2\sqrt{3}, x_2=4-2\sqrt{3}$.

13. **解**：(1) 2；4

(2) $\because x^2-3x-4=0$，

$\therefore (x+1)(x-4)=0$，

则 $x+1=0$ 或 $x-4=0$，

$\therefore x_1=-1, x_2=4$.

14. **解**：(1) 换元

(2) $\because x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$，

$\therefore$ 可设 $x+\frac{1}{x}=y$，则原方程变形为 $y^2-2-5y+8=0$.

解得 $y_1=2, y_2=3$.

当 $y=2$ 时，$x+\frac{1}{x}=2$，

$\therefore x^2-2x+1=0$. 解得 $x_1=x_2=1$，

经检验，$x_1=x_2=1$ 是方程 $x+\frac{1}{x}=2$ 的解；

当 $y=3$ 时，$x+\frac{1}{x}=3$，

$\therefore x^2-3x+1=0$，

解得 $x_3=\frac{3+\sqrt{5}}{2}, x_4=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

经检验，$x_3=\frac{3+\sqrt{5}}{2}, x_4=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ 是方程 $x+\frac{1}{x}=3$ 的解.

∴ 原方程的解为 $x_1=x_2=1, x_3=\frac{3+\sqrt{5}}{2}, x_4=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

15. **解**：(1) 将 $x=3$ 代入方程 $(a-1)x^2-4x-1+2a=0$，得 $9(a-1)-12-1+2a=0$，解得 $a=2$.

将 $a=2$ 代入原方程，得 $x^2-4x+3=0$，因式分解得 $(x-1)(x-3)=0$，$\therefore x_1=1, x_2=3$.

∴ 方程的另一个根是 $x=1$.

(2) ∵ 三角形的三边长都是这个方程的根，

∴ ①当三边长都为 1 时，周长为 3；

②当三边长都为 3 时，周长为 9；

③当两边长为 3，一边为 1 时，周长为 7；

④当两边长为 1，一边长为 3 时，不满足三角形三边关系，不能构成三角形.

故三角形周长为 3 或 7.

2.3　一元二次方程根的判别式

1. 2；-7；-4；81

2. C　**3.** C　**4.** C　**5.** A　**6.** C

7. A　**点拨**：$\Delta=(k+3)^2-4k=k^2+2k+9=(k+1)^2+8$.

$\because (k+1)^2\geqslant 0$，

$\therefore (k+1)^2+8>0$，即 $\Delta>0$.

∴ 方程有两个不相等的实数根.

8. D　**9.** A

10. A　**点拨**：原方程可变形为 $x^2+(a+1)x=0$.

∵ 该方程有两个相等的实数根，

$\therefore \Delta=(a+1)^2-4\times 1\times 0=0$，

解得 $a=-1$.

11. A　**点拨**：∵ 小刚在解关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq 0$) 时，只抄对了 $a=1, b=4$，解出其中一个根是 $x=-1$，

∴ $(-1)^2-4+c=0$，

解得 $c=3$，故原方程中 $c=5$，

则 $b^2-4ac=16-4\times 1\times 5=-4<0$，故原方程不存在实数根.

12. D　**点拨**：本题易忽视一元二次方程二次项系数不为 0 这一条件，而直接由根的判别式求得 $k\leqslant\frac{5}{4}$.

13. **解**：∵ 关于 x 的方程 $x^2-2x+2m-1=0$ 有实数根，

$\therefore b^2-4ac=4-4(2m-1)\geqslant 0$，

解得 $m\leqslant 1$.

∵ m 为正整数，∴ $m=1$，

∴ 原方程为 $x^2-2x+1=0$，

则 $(x-1)^2=0$，

解得 $x_1=x_2=1$.

14. **解**：(1) 根据题意得 $\Delta=(-3)^2-4k\geqslant 0$，解得 $k\leqslant\frac{9}{4}$.

(2) 符合条件的 k 的最大整数为 2，

方程 $x^2-3x+k=0$ 为 $x^2-3x+2=0$，解得 $x_1=1, x_2=2$.

∵ 一元二次方程 $(m-1)x^2+x+m-3=0$ 与方程 $x^2-3x+2=0$ 有一个相同的根，

∴ 当 $x=1$ 时，$m-1+1+m-3=0$，

解得 $m=\frac{3}{2}$；

当 $x=2$ 时，$4(m-1)+2+m-3=0$，解得 $m=1$.

∵ $m-1\neq 0$，∴ m 的值为 $\frac{3}{2}$.

15. (1) **证明**：因为 $\Delta=[-(2k+1)]^2-4\times 1\times 4\left(k-\frac{1}{2}\right)=4k^2-12k+9=(2k-3)^2\geqslant 0$，

所以无论 k 取何值，这个方程总有实数根.


第15题图

(2) **解**：若 a 为等腰三角形 ABC 的底边长，则 b, c 为等腰三角形 ABC 的两腰长，

由题意知方程有两个相等的实数根，

所以 $\Delta=0$，即 $k=\frac{3}{2}$.

所以方程为 $x^2-4x+4=0$，

解得 $x_1=x_2=2$.

即 $b=c=2$，不符合三角形三边关系，故舍去.

若 a 为等腰三角形 ABC 的一腰长，由题意知 4 是方程的一个根，

所以 $4^2-(2k+1)\times 4+4\left(k-\frac{1}{2}\right)=0$，解得 $k=\frac{5}{2}$.

所以方程为 $x^2-6x+8=0$，

解得 $x_1=2, x_2=4$，符合题意. 所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $2+4+4=10$.

16. **解**：(1) $2\otimes 5=2\times 5+5=15$.

$2\otimes(-5)=2\times(-5)+(-5)=-15$.

(2) $x\otimes(a\otimes x)=x\otimes(ax+x)=x\otimes[(a+1)x]=(a+1)x^2+(a+1)x=-\frac{1}{4}$，整理，得 $4(a+1)x^2+4(a+1)x+1=0$.

∵ 关于 x 的方程 $x\otimes(a\otimes x)=-\frac{1}{4}$ 有两个相等的实数根，

$\therefore\begin{cases}a+1\neq 0,\\ \Delta=16(a+1)^2-16(a+1)=0.\end{cases}$

解得 $a=0$.

*2.4　一元二次方程根与系数的关系

1. A　**2.** D

3. B　**点拨**：∵ α,β 是方程 $x^2+x-2=0$ 的两个实数根，

$\therefore \alpha+\beta=-1, \alpha\beta=-2$.

∴ $\alpha+\beta-\alpha\beta=-1+2=1$.

4. A

5. A　**点拨**：∵ 方程 $x^2-2x-4=0$ 的两个实数根为 α,β，

∴ $\alpha+\beta=2, \alpha\beta=-4$，

∴ $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4+8=12$.

故选 A.

6. C　**7.** B　**8.** D　**9.** B

10. A　**点拨**：当 $a=4$ 时，$b<8$，

∵ a, b 是关于 x 的一元二次方程 $x^2-12x+m+2=0$ 的两根，

∴ $4+b=12$，∴ $b=8$，不符合题意；

当 $b=4$ 时，$a<8$，

∵ a, b 是关于 x 的一元二次方程 $x^2-12x+m+2=0$ 的两根，

∴ $4+a=12$，∴ $a=8$，不符合题意；

当 $a=b$ 时，

∵ a, b 是关于 x 的一元二次方程 $x^2-12x+m+2=0$ 的两根，

∴ $a+b=12$，∴ $a=b=6$，

∴ $m+2=36$，∴ $m=34$.

11. $3<m\leqslant 5$

12. 4　**点拨**：∵ $x^2-2kx+k^2-k=0$ 的两个实数根分别是 x_1, x_2，

∴ $x_1+x_2=2k, x_1\cdot x_2=k^2-k$.

∵ $x_1^2+x_2^2=4$，

∴ $(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=4$，

∴ $(2k)^2-2(k^2-k)=4$，

解得 $k=-2$ 或 $k=1$，

由题意得 $\Delta=(-2k)^2-4\times 1\times(k^2-k)\geqslant 0$，

解得 $k\geqslant 0$，

∴ $k=1$. ∴ $x_1\cdot x_2=0$，

∴ $x_1^2-x_1x_2+x_2^2=4-0=4$.

13. B　**易错总结**：在利用一元二次方程的根与系数的关系时，要注意它成立的前提，即方程有实数根的前提 $\Delta\geqslant 0$. 本题如果取 $a=2$，则 $\Delta<0$，方程无实数根，不符合题意.


第13题图

14. **解**：(1) ∵ 关于 x 的一元二次方程 $x^2-(2k+1)x+k^2+1=0$ 有两个不相等的实数根，∴ $\Delta>0$，

∴ $[-(2k+1)]^2-4(k^2+1)>0$，

解得 $k>\frac{3}{4}$.

(2) ∵ 方程的两个根分别为 x_1, x_2，

∴ $x_1+x_2=2k+1=3$，

解得 $k=1$，

∴ 原方程为 $x^2-3x+2=0$，

∴ $x_1=1, x_2=2$.

15. **解**：(1) 当 $k=0$ 时，原方程为 $-3x+1=0$，解得 $x=\frac{1}{3}$.

∴ $k=0$ 符合题意；

当 $k\neq 0$ 时，原方程为一元二次方程，

∵ 该一元二次方程有实数根，

∴ $\Delta=(-3)^2-4\times k\times 1\geqslant 0$，

解得 $k\leqslant\frac{9}{4}$.

综上所述，k 的取值范围为 $k\leqslant\frac{9}{4}$.

(2) ∵ x_1 和 x_2 是方程 $kx^2-3x+1=0$ 的两个根，

∴ $x_1+x_2=\frac{3}{k}, x_1x_2=\frac{1}{k}$.

∵ $x_1+x_2+x_1x_2=4$，

∴ $\frac{3}{k}+\frac{1}{k}=4$，解得 $k=1$，

经检验，$k=1$ 是分式方程的解，且符合题意，

∴ k 的值为 1.

16. **解**：(1) 由题意得，$\Delta\geqslant 0$，

∴ $(2m-1)^2-4(m^2-3)\geqslant 0$，

∴ $m\leqslant\frac{13}{4}$.

(2) 当 $m=2$ 时，方程为 $x^2+3x+1=0$，∴ $x_1+x_2=-3, x_1x_2=1$.

∵ 方程的实数根分别是 x_1, x_2，

∴ $x_1^2+3x_1+1=0, x_2^2+3x_2+1=0$，

∴ $(x_1^2+2x_1)(x_2^2+4x_2+2)$

$=(x_1^2+2x_1+x_1-x_1)(x_2^2+3x_2+x_2+2)$

$=(-1-x_1)(-1+x_2+2)$

$=(-1-x_1)(x_2+1)$

$=-x_2-x_1x_2-1-x_1$

$=-x_2-x_1-2$

$=3-2$

$=1$.

17. **解**：(1) ∵ 方程有两个不相等的实数根，

∴ $\Delta=[-(2k-1)]^2-4(k^2-2k+3)=4k-11>0$，

解得 $k>\frac{11}{4}$.

(2) 存在.

∵ $x_1x_2=k^2-2k+3=(k-1)^2+2>0$，

∴ 将 $|x_1|-|x_2|=\sqrt{5}$ 两边平方可得 $x_1^2-2x_1x_2+x_2^2=5$，即 $(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=5$，

∵ $x_1+x_2=2k-1, x_1x_2=k^2-2k+3$，

∴ $(2k-1)^2-4(k^2-2k+3)=5$，

整理得 $4k-11=5$，

解得 $k=4$.

阶段核心方法

1. C

2. **解**：$\frac{1}{3}(x-2)^2=8$，

$(x-2)^2=24$，

$x-2=\pm 2\sqrt{6}$，

∴ $x_1=2+2\sqrt{6}, x_2=2-2\sqrt{6}$.

3. **解**：$x^2+4x-2=0$，

$x^2+4x=2$，

$(x+2)^2=6$，

$x+2=\pm\sqrt{6}$，

∴ $x_1=-2+\sqrt{6}, x_2=-2-\sqrt{6}$.

4. **解**：$x^2-10x+y^2-16y+89=0$，

$(x^2-10x+25)+(y^2-16y+64)=0$，

$(x-5)^2+(y-8)^2=0$，

∴ $x=5, y=8$.

∴ $\frac{x}{y}=\frac{5}{8}$.

5. D

6. **解**：(1) $x^2-2x=0$，

$x(x-2)=0$，

∴ $x_1=0, x_2=2$.

(2) $16x^2-9=0$，

$(4x+3)(4x-3)=0$，

∴ $x_1=-\frac{3}{4}, x_2=\frac{3}{4}$.

(3) $3x(x-2)=x-2$，

$3x(x-2)-(x-2)=0$，

$(x-2)(3x-1)=0$，

∴ $x-2=0$ 或 $3x-1=0$，

∴ $x_1=2, x_2=\frac{1}{3}$.

7. B

8. $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$　**点拨**：由题意得 $2b(b-a)+a(b-a)+3ab=0$，

整理得 $2\left(\frac{b}{a}\right)^2+\frac{2b}{a}-1=0$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解得 $\frac{b}{a}=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$，

$\because a>b>0$，

$\therefore \frac{b}{a}=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

9. 解：(1) $3(x^2+1)-7x=0$，

$3x^2-7x+3=0$.

其中 $a=3, b=-7, c=3$.

$\therefore b^2-4ac=(-7)^2-4\times3\times3=13$.

$\therefore x=\frac{7\pm\sqrt{13}}{6}$.

即 $x_1=\frac{7+\sqrt{13}}{6}, x_2=\frac{7-\sqrt{13}}{6}$.

(2) $4x^2-3x-5=x-2$，

$4x^2-4x-3=0$.

其中 $a=4, b=-4, c=-3$.

$\therefore b^2-4ac=(-4)^2-4\times4\times(-3)=64$.

$\therefore x=\frac{4\pm\sqrt{64}}{8}$，

即 $x_1=\frac{3}{2}, x_2=-\frac{1}{2}$.

10. 解：将原方程两边同乘 6，得 $(6x)^2+19\times6x+60=0$.

解得 $6x=-15$ 或 $6x=-4$.

$\therefore x_1=-\frac{5}{2}, x_2=-\frac{2}{3}$.

11. 解：因为 $m-n=8$，所以 $m=n+8$.

将 $m=n+8$ 代入 $mn+p^2+16=0$ 中，得 $n(n+8)+p^2+16=0$，

所以 $n^2+8n+16+p^2=0$，

即 $(n+4)^2+p^2=0$.

又因为 $(n+4)^2\geqslant0, p^2\geqslant0$，

所以 $\begin{cases}n+4=0,\\ p=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}n=-4,\\ p=0.\end{cases}$

所以 $m=n+8=4$，

所以 $m+n+p=4+(-4)+0=0$.

12. 解：原方程即为 $[(x-1)(x-4)]\cdot[(x-2)(x-3)]=48$，

即 $(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)=48$.

设 $y=x^2-5x+5$，

则原方程变为 $(y-1)(y+1)=48$.

解得 $y_1=7, y_2=-7$.

当 $x^2-5x+5=7$ 时，

解得 $x_1=\frac{5+\sqrt{33}}{2}, x_2=\frac{5-\sqrt{33}}{2}$；

当 $x^2-5x+5=-7$ 时，$\Delta=(-5)^2-4\times1\times12=-23<0$，方程无实数根.

$\therefore$ 原方程的根为 $x_1=\frac{5+\sqrt{33}}{2}$，

$x_2=\frac{5-\sqrt{33}}{2}$.

13. 解：经验证 $x=0$ 不是方程的根，原方程两边同除以 x^2，

得 $6x^2-35x+62-\frac{35}{x}+\frac{6}{x^2}=0$，

即 $6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-35\left(x+\frac{1}{x}\right)+62=0$.

设 $y=x+\frac{1}{x}$，则 $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$，

原方程可变为 $6(y^2-2)-35y+62=0$.

解得 $y_1=\frac{5}{2}, y_2=\frac{10}{3}$.

当 $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$ 时，

解得 $x_1=2, x_2=\frac{1}{2}$；

当 $x+\frac{1}{x}=\frac{10}{3}$ 时，

解得 $x_3=3, x_4=\frac{1}{3}$.

经检验，均符合题意.

$\therefore$ 原方程的根为 $x_1=2, x_2=\frac{1}{2}$，

$x_3=3, x_4=\frac{1}{3}$.

14. 解：设 $\frac{x-2}{x}=y$，则原方程化为 $y-\frac{3}{2}=2$，整理得 $y^2-2y-3=0$，

$\therefore y_1=3, y_2=-1$.

当 $y=3$ 时，$\frac{x-2}{x}=3$，$\therefore x=-1$.

当 $y=-1$ 时，$\frac{x-2}{x}=-1$，

$\therefore x=1$.

经检验，$x=\pm1$ 都是原方程的根.

$\therefore$ 原方程的根为 $x_1=1, x_2=-1$.

15. 解：设 $\frac{x+1}{x^2}=y$，则原方程变形为 $y-\frac{2}{y}=1$，

即 $y=-1$ 时，$\frac{x+1}{x^2}=-1$，

$\therefore x^2+x+1=0$，

$\because \Delta=1-4=-3<0$，

$\therefore \frac{x+1}{x^2}=-1$ 无实数根；

当 $y=2$ 时，$\frac{x+1}{x^2}=2$，

$\therefore 2x^2-x-1=0$，

$\therefore x_1=-\frac{1}{2}, x_2=1$ 是方程 $\frac{x+1}{x^2}=2$ 的解.

$\therefore$ 原方程的解为 $x_1=-\frac{1}{2}, x_2=1$.

16. 解：方程组 $\begin{cases}x-2\ 019=2\ 022,\\ x-2\ 020=2\ 021\end{cases}$ 的解一定是原方程的解，

解得 $x=4\ 041$.

方程组 $\begin{cases}x-2\ 019=-2\ 021,\\ x-2\ 020=-2\ 022\end{cases}$ 的解也一定是原方程的解，

解得 $x=-2$.

$\because$ 原方程最多有两个实数根，

$\therefore$ 原方程的根为 $x_1=4\ 041, x_2=-2$.

点拨：解本题也可采用**换元法**. 设 $x-2\ 020=t$，则 $x-2\ 019=t+1$，原方程可化为 $t(t+1)=2\ 021\times2\ 022$，先求出 t，进而求出 x.

2.5 一元二次方程的应用

第 1 课时 列一元二次方程

解百分率问题

1. 解：(1) 设 2016 年到 2018 年该村人均收入的年平均增长率为 x，

根据题意得 $20\ 000\times(1+x)^2=24\ 200$，

解得 $x_1=0.1=10\%, x_2=-2.1$（不合题意，舍去）.

答：2016 年到 2018 年该村人均收入的年平均增长率为 10%.

(2) $24\ 200\times(1+10\%)=26\ 620$(元).

答：2019 年该村的人均收入是 26 620元.

2. 解：设这种电子产品降价后的销售单价为 x 元，则降价后每天可售出 $[300+5(200-x)]$ 个，

依题意，得 $(x-100)[300+5(200-x)]=32\ 000$，

整理，得 $x^2-360x+32\ 400=0$，

解得 $x_1=x_2=180$，

$180<200$，符合题意.

答：这种电子产品降价后的销售单价为 180 元时，公司每天可获利 32 000元.

3. 解：(1) 设该养殖场蛋鸡产蛋量的月平均增长率为 x，

根据题意得 $2.5(1+x)^2=3.6$，

解得 $x_1=0.2=20\%, x_2=-2.2$（不合题意，舍去）.

答：该养殖场蛋鸡产蛋量的月平均增长率为 20%.

(2) 设再增加 y 个销售点，根据题意得 $3.6+0.3(2y+3)\geqslant3.6\times(1+20\%)$，

解得 $y\geqslant\frac{9}{4}$.

答：至少要再增加 3 个销售点.

第 2 课时 列一元二次方程

解几何问题

1. 解：设剪去正方形的边长为 x cm，则做成的无盖长方体盒子的底面长为 $(30-2x)$ cm，宽为 $(20-2x)$ cm，高为 x cm，

依题意，得 $2\times[(30-2x)+(20-2x)]x=200$，

整理，得 $2x^2-25x+50=0$，

解得 $x_1=\frac{5}{2}, x_2=10$.

当 $x=10$ 时，$20-2x=0$，不合题意，舍去.

答：当剪去正方形的边长为 $\frac{5}{2}$ cm 时，所得长方体盒子的侧面积为 200 cm^2.

2. $(12-x)(8-x)=77$

3. 解：(1) 设这个矩形地面的长是 x m，则依题意得 $x(20-x)=96$.

解得 $x_1=12, x_2=8$(舍去).

答：这个矩形地面的长是 12 m.

(2) 用现格为 0.80×0.80(单位：m) 的地板砖所需的费用：$96\div(0.80\times0.80)\times55=8\ 250$(元).

用现格为 1.00×1.00(单位：m) 的地板砖所需的费用：$96\div(1.00\times1.00)\times80=7\ 680$(元).

$\because 8\ 250>7\ 680$，

$\therefore$ 用现格为 1.00×1.00(单位：m) 的地板砖所需的费用较少.

4. 解：(1) 设 x s 后，$\triangle PBQ$ 的面积为 4 cm^2，

则 $\frac{1}{2}\cdot2x\cdot(5-x)=4$，

解得 $x_1=1, x_2=4$.

当 $x=4$ 时，$2x=8>7$，不合题意，舍去，$\therefore x=1$.

答：1 s 后，$\triangle PBQ$ 的面积等于 4 cm^2.

(2) 设 y s 后，$\triangle PBQ$ 的面积是 7 cm^2.

由题意，得 $\frac{1}{2}\cdot2y\cdot(5-y)=7$，

即 $y^2-5y+7=0$.

$\because \Delta=(-5)^2-4\times7<0$，

$\therefore$ 此方程无实数根.

$\therefore \triangle PBQ$ 的面积不能等于 7 cm^2.

第 3 课时 列一元二次方程解一般问题

1. C

2. 解：(1) 设每轮分裂中每个有益菌可分裂出 x 个有益菌，根据题意，得 $60(1+x)^2=24\ 000$.

解得 $x_1=19, x_2=-21$（不合题意，舍去）.

答：每轮分裂中每个有益菌可分裂出 19 个有益菌.

(2) $60\times(1+19)^3=60\times20^3=480\ 000$(个).

答：经过三轮培育后共有 480 000 个有益菌.

3. A

4. 解：设应邀请 x 支球队参加比赛，根据题意，得 $\frac{x(x-1)}{2}=28$.

解得 $x_1=8, x_2=-7$（舍去）.

答：应邀请 8 支球队参加比赛.

5. 解：设原两位数的十位数字为 x，则个位数字为 $x+4$，根据题意得 $(10x+x+4)[10(x+4)+x]=765$，整理得 $x^2+4x-5=0$，解得 $x_1=1, x_2=-5$（舍去），则 $x+4=5$，故原两位数为 $10x+x+4=10\times1+1+4=15$.

6. 解：由题意得 $n+n^2+1=421$，

解得 $n_1=-21$（舍去），$n_2=20$.

答：n 的值是 20.

7. 解：(1) 设这个多边形的边数为 n，

根据题意得 $\frac{1}{2}n(n-3)=14$，

整理得 $n^2-3n-28=0$，

解得 $n=7$ 或 $n=-4$.

$\because n\geqslant3$，$\therefore n=-4$ 不合题意，舍去.

$\therefore n=7$，即这个多边形的边数是 7.

(2) 甲同学的说法是不正确的.

理由如下：设这个多边形的边数为 n，则 $\frac{1}{2}n(n-3)=10$，

整理得 $n^2-3n-20=0$，

解得 $n=\frac{3\pm\sqrt{89}}{2}$，

$\because$ 符合方程 $n^2-3n-20=0$ 的正整数 n 不存在，

$\therefore$ 多边形的对角线不可能有 10 条，即甲同学的说法不正确.

8. 解：(1) 设年销售量 y 与销售单价 x 的函数关系式为 $y=kx+b(k\neq0)$，

由题意得 $\begin{cases}40k+b=600,\\ 45k+b=550,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-10,\\ b=1\ 000.\end{cases}$

$\therefore$ 年销售量 y 与销售单价 x 的函数关系式为 $y=-10x+1\ 000$.

(2) 根据题意可知每台设备的利润为 $(x-30)$ 万元，则年销售为 $(-10x+1\ 000)$ 台.

则 $(x-30)(-10x+1\ 000)=10\ 000$，

整理，得 $x^2-130x+4\ 000=0$，

解得 $x_1=50, x_2=80$.

$\because$ 此设备的销售单价不得高于 70 万元，

$\therefore x=50$.

答：该设备的销售单价应是 50 万元.

9. 解：(1) 设该市这两年投入基础教育经费的年平均增长率为 x，

根据题意，得 $5\ 000(1+x)^2=7\ 200$，

解得 $x_1=0.2=20\%, x_2=-2.2$（舍去）.

答：该市这两年投入基础教育经费的年平均增长率为 20%.

(2) 2021 年投入基础教育经费为 $7\ 200\times(1+20\%)=8\ 640$(万元)，

设购买电脑 m 台，则购买实物投影仪 $(1\ 500-m)$ 台，

根据题意，得 $3\ 500m+2\ 000(1\ 500-m)\leqslant86\ 400\ 000\times5\%$，

解得 $m\leqslant880$.

答：最多可购买电脑 880 台.

阶段核心归类

1. 解：(1) 设 2018 年甲类芯片的产量为 x 万块，

由题意得 $x+2x+(x+2x+400)=2\ 800$，

解得 $x=400$.

答：2018 年甲类芯片的产量为 400 万块.

(2) 2018 年丙类芯片的产量为 $x+2x+400=1\ 600$(万块).

设丙类芯片的年增长率加的数量为 y 万块，

则 $1\ 600+1\ 600+y+1\ 600+2y=14\ 400$，解得 $y=3\ 200$.

$\therefore$ 丙类芯片 2020 年的产量为 $1\ 600+2\times3\ 200=8\ 000$(万块).

2018 年 HW 公司手机产量为 $2\ 800\times10\%=28\ 000$(万部)，

则 $400(1+m\%)^2+2\times400(1+m\%+1)^2+8\ 000=28\ 000\times(1+10\%)$，

设 $m\%=t$，化简得 $3t^2+2t-56=0$，

解得 $t=4$ 或 $t=-\frac{14}{3}$(舍去).

$\therefore t=4$，$\therefore m\%=4$.

$\therefore m=400$.

答：丙类芯片 2020 年的产量为 8 000 万块，m 的值为 400.

2. 解：(1) 设一次函数关系式为 $y=kx+b$，将 $x=2, y=120$ 和 $x=4, y=140$ 分别代入得 $\begin{cases}2k+b=120,\\ 4k+b=140,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=10,\\ b=100.\end{cases}$

$\therefore y$ 与 x 之间的函数关系为 $y=10x+100$.

(2) 由题意得 $(60-40-x)(10x+100)=2\ 090$，

整理得 $x^2-10x+9=0$，

解得 $x_1=1, x_2=9$.

$\because$ 要让顾客得到更大的实惠，

$\therefore x=9$.

答：这种干果每千克应降价 9 元.

3. 解：设第一次存款时的年利率为 x.

则根据题意，得 $[1\ 000(1+x)-500](1+0.9x)=522$.

整理得 $900x^2+1\ 450x-22=0$.

解这个方程，得 $x_1\approx0.015\ 0=1.50\%, x_2\approx-1.63$(舍去).

答：第一次存款时的年利率约是 1.50%.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. 解:设竹竿的长为 x 米,
∵ 横着比城门宽 4 米,竖着比城门高 2 米,∴ 城门高为 $(x-2)$ 米,宽为 $(x-4)$ 米.
∵ 沿着城门的对角斜着拿刚好可以进城门,故可列方程为 $(x-2)^2+(x-4)^2=x^2$,
解得 $x_1=2$(舍去),$x_2=10$.
答:竹竿的长为 10 米.

5. 解:设周瑜去世时的年龄的个位数字为 x,则十位数字为 $(x-3)$.
根据题意,得 $x^2=10(x-3)+x$.
即 $x^2-11x+30=0$,
解这个方程,得 $x=5$ 或 $x=6$.
当 $x=5$ 时,周瑜去世时的年龄为 25 岁,不合题意,舍去;
当 $x=6$ 时,周瑜去世时的年龄为 36 岁,符合题意.
答:周瑜去世时的年龄为 36 岁.

6. 解:设每轮感染中平均一台电脑会感染 x 台电脑.
则 $1+x+x(1+x)=81$,
解得 $x_1=8$,$x_2=-10$(舍去),
三轮感染后的电脑数量为 $81+81\times8=729$(台)>700 台.
答:每轮感染中平均一台电脑会感染 8 台电脑,若病毒得不到有效控制,三轮后被感染的电脑总数会超过 700 台.

7. 解:(1)设收到红包的年平均增长率是 x,
根据题意,得 $400(1+x)^2=484$,
解得 $x_1=-2.1$(舍去),$x_2=0.1=10\%$.
答:2018 年到 2020 年甜甜和她的妹妹在六一收到红包的年平均增长率是 10%.
(2)设甜甜收到了元微信红包,则她的妹妹收到了 $(2y+34)$ 元微信红包,
根据题意,得 $y+2y+34=484$,
解得 $y=150$,
则 $2y+34=334$.
答:2020 年六一,甜甜和她的妹妹分别收到了 150 元和 334 元微信红包.

8. 解:设小路的宽应为 m,
根据题意得$(16-2x)(9-x)=112$,
整理得 $x^2-17x+16=0$,
解得 $x_1=1$,$x_2=16$.
∵ $16>9$,
∴ $x=16$ 不符合题意,舍去.
∴ $x=1$.
答:小路的宽应为 1 m.

9. 解:设每周参观人数 y(人)与票价 x(元)之间的一次函数表达式为 $y=kx+b(x>0)$,
根据题意,得 $\begin{cases}10k+b=7\,000,\\15k+b=4\,500.\end{cases}$
解得 $\begin{cases}k=-500,\\b=12\,000.\end{cases}$
∴ $y=-500x+12\,000(x>0)$.
∵ $xy=40\,000$,即 $x(-500x+12\,000)=40\,000$,∴ $x^2-24x+80=0$,
解得 $x_1=20$,$x_2=4$.
把 $x_1=20$,$x_2=4$ 分别代入 $y=-500x+12\,000$,得 $y_1=2\,000$,$y_2=10\,000$.
∵ 要控制参观人数,
∴ 取 $x=20$,此时 $y=2\,000$.
答:每周应限定参观人数为 2 000 人,门票价格应是 20 元.

10. 解:(1)由题意可得 $k=-15$,则原方程为 $x^2-15x+56=0$,
解得 $x_1=7$,$x_2=8$.
(2)第 n 个方程为 $x^2-(2n-1)x+n(n-1)=0$,它的根为 $x_1=n-1$,$x_2=n$.

全章热门考点整合应用

1. 解:当 $m^2+1=2$ 且 $m-1\neq0$ 时,方程 $(m-1)x^{m^2+1}+2mx+3=0$ 是关于 x 的一元二次方程.
由 $m^2+1=2$,得 $m^2=1$,
所以 $m=\pm1$.
由 $m-1\neq0$,得 $m\neq1$,
所以只能取 $m=-1$.
所以当 $m=-1$ 时,方程 $(m-1)x^{m^2+1}+2mx+3=0$ 是关于 x 的一元二次方程.
点拨:要准确理解一元二次方程的概念,需从次数和系数两方面考虑.

2. 解:由题意得 $c-4\geqslant0$ 且 $4-c\geqslant0$.
∴ $c=4$,则 $a=-2$.
又∵ -1 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根,
∴ $a-b+c=0$,
∴ $b=a+c=-2+4=2$.
∴ 原式 $=\frac{(-2+2)^{2020}}{2\,021\times4}=0$.

3. 解:(1)$(x-1)^2+2x(x-1)=0$,
$(x-1)(x-1+2x)=0$,
$(x-1)(3x-1)=0$,
∴ $x_1=1$,$x_2=\frac{1}{3}$.
(2)$x^2-6x-6=0$,
$x^2-6x=6$,
$x^2-6x+9=15$,
$(x-3)^2=15$,
$x-3=\pm\sqrt{15}$,
∴ $x_1=3+\sqrt{15}$,$x_2=3-\sqrt{15}$.
(3)$6\,000(1-x)^2=4\,860$,
$(1-x)^2=0.81$,
$1-x=\pm0.9$,
∴ $x_1=1.9$,$x_2=0.1$.
(4)$(10+x)(50-x)=800$,
$x^2-40x+300=0$,
$(x-10)(x-30)=0$,
∴ $x_1=10$,$x_2=30$.
(5)$(2x-1)^2=x(3x+2)-7$,
$4x^2-4x+1=3x^2+2x-7$,
$x^2-6x+8=0$,
$(x-2)(x-4)=0$,
∴ $x_1=2$,$x_2=4$.

4. A

5. 解:∵ 关于 x 的方程 $x^2+(b+2)x+(6-b)=0$ 有两个相等的实数根,
∴ $\Delta=(b+2)^2-4(6-b)=0$,
∴ $b_1=2$,$b_2=-10$(舍去).
当 a 为腰长时,$\triangle ABC$ 的周长为 $5+5+2=12$.
当 b 为腰长时,$2+2<5$,不能构成三角形.
∴ $\triangle ABC$ 的周长为 12.

6. 解:(1)∵ 关于 x 的一元二次方程 $x^2-2(a-1)x+a^2-a-2=0$ 有两个不相等的实数根,
∴ $\Delta=[-2(a-1)]^2-4(a^2-a-2)>0$,
解得 $a<3$,
∵ a 为正整数,
∴ $a=1$,2.
∵ $x_1^2+x_2^2-x_1x_2=16$,
∴ $(x_1+x_2)^2-3x_1x_2=16$.
∵ $x_1+x_2=2(a-1)$,$x_1x_2=a^2-a-2$,
∴ $[2(a-1)]^2-3(a^2-a-2)=16$,
解得 $a_1=-1$,$a_2=6$,
∵ $a<3$,
∴ $a=-1$.

7. 解:(1)∵ 关于 x 的一元二次方程 $x^2-6x+(4m+1)=0$ 有实数根,
∴ $\Delta=(-6)^2-4\times1\times(4m+1)\geqslant0$,解得 $m\leqslant2$.
(2)∵ 方程 $x^2-6x+(4m+1)=0$ 的两个实数根为 x_1,x_2,
∴ $x_1+x_2=6$,$x_1x_2=4m+1$,
∴ $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=4^2$,即 $32-16m=16$,
解得 $m=1$.

8. 解:(1)设进馆人次的月平均增长率为 x,则由题意得
$128+128(1+x)+128(1+x)^2=608$,
化简得 $4x^2+12x-7=0$,
解得 $x_1=0.5=50\%$,$x_2=-3.5$(舍去).
答:进馆人次的月平均增长率为 50%.
(2)∵ 进馆人次的月平均增长率为 50%,
∴ 第四个月的进馆人次为 $128(1+50\%)^3=128\times\frac{27}{8}=432<500$.
答:校图书馆能接纳第四个月的进馆人次.

9. 解:(1)-1;5;-2;-3;1;-9
(2)每道题所填的两个数的和等于一次项系数,积等于常数项.

10. 解:(1)$(x-2)^2-2$,$(x-\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2}-4)x$,$2(x-1)^2-x^2$.
(2)$a^2+b^2+c^2-ab-3b-2c+4=\left(a-\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}(b-2)^2+(c-1)^2=0$,所以 $a-\frac{1}{2}b=0$,$b-2=0$,$c-1=0$.
所以 $a=1$,$b=2$,$c=1$.
所以 $a+b+c=4$.

11. 解:∵ $x=a$ 是 $2x^2+x-2=0$ 的一个根,
∴ $2a^2+a-2=0$,即 $2a^2+a=2$.
∴ 原式 $=a^2(2a^2+a)+2a^2+2a+1=2a^2+2a^2+2a+1=2(2a^2+a)+1=5$.

12. 解:设 $2x+1=y$,则原方程可化为 $y^2-3y=-2$.
解得 $y_1=1$,$y_2=2$.
当 $y=1$ 时,有 $2x+1=1$,
所以 $x=0$;
当 $y=2$ 时,有 $2x+1=2$,所以 $x=\frac{1}{2}$.
所以原方程的解为 $x_1=0$,$x_2=\frac{1}{2}$.
点拨:利用**换化思想**将复杂的一元二次方程转化为简单的一元二次方程来求解.

13. 解:(1)由题意得 $\Delta=[2(a-1)]^2-4(a^2-7a-4)=20a+20\geqslant0$,
∴ $a\geqslant-1$.
(2)若 $x_1^2=x_1x_2$,则 $x_1(x_1-x_2)=0$,故 $x_1=0$ 或 $x_1=x_2$.
当 $x_1=0$ 时,代入原方程得 $a^2-7a-4=0$,解得 $a=\frac{7\pm\sqrt{65}}{2}$.
而此时 $x_1+x_2=-2(a-1)$,
∴ $x_2=-2(a-1)$.
故 $x_2=-5-\sqrt{65}$ 或 $x_2=-5+\sqrt{65}$.
当 $x_1=x_2$ 时,$\Delta=20a+20=0$,
∴ $a=-1$.
原方程为 $x^2-4x+4=0$,
解得 $x_1=x_2=2$.


第13题答案

第3章 图形的相似

3.1 比例线段

第1课时 比例的基本性质

1. B **2.** B **3.** B **4.** D

5. A **点拨**:由 $a:b=3:4$ 知 $3b=4a$,
∴ $b=\frac{4a}{3}$.
由 $a+b=14$ 得到 $a+\frac{4a}{3}=14$,
解得 $a=6$.
∴ $b=8$.
∴ $2a-b=2\times6-8=4$.

6. A **7.** 12

8. 解:由题意得 $\begin{cases}2a-b=4c,\\a+b=5c,\end{cases}$
解得 $\begin{cases}a=3c,\\b=2c.\end{cases}$
所以 $a:b:c=3c:2c:c=3:2:1$.

9. 解:(1)设 $\frac{a+4}{3}=\frac{b+3}{2}=\frac{c+8}{4}=k(k\neq0)$,
则 $a=3k-4$,$b=2k-3$,$c=4k-8$.
∵ $a+b+c=12$,
∴ $3k-4+2k-3+4k-8=12$,
解得 $k=3$,∴ $a=5$,$b=3$,$c=4$.
(2)∵ $3^2+4^2=5^2$,即 $b^2+c^2=a^2$,
∴ $\triangle ABC$ 是直角三角形.

10. 解:(1)∵ 正方形 $ABCD$ 的边长是 2,点 P 是 AB 的中点,
∴ $AB=AD=2$,$AP=1$,$\angle BAD=90°$.
∴ $PD=\sqrt{AP^2+AD^2}=\sqrt{5}$.
∵ $PF=PD$,
∴ $AF=\sqrt{5}-1$.
在正方形 $AMEF$ 中,$AM=AF=\sqrt{5}-1$.
∴ $DM=AD-AM=3-\sqrt{5}$.
(2)点 M 是线段 AD 的黄金分割点.
理由如下:由(1)得 $AD\cdot DM=2(3-\sqrt{5})=6-2\sqrt{5}$,$AM^2=(\sqrt{5}-1)^2=6-2\sqrt{5}$,
∴ $AM^2=AD\cdot DM$.
∴ 点 M 是线段 AD 的黄金分割点.

3.2 平行线分线段成比例

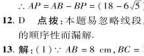
1. C **2.** B **3.** C **4.** 4

5. B **点拨**:∵ $DE//BC$,
∴ $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$.
∵ $AD=1$,$DB=2$,∴ $AB=3$,
∴ $\frac{AE}{AC}=\frac{AD}{AB}=\frac{1}{3}$. 故选 B.

6. C

7. C **点拨**:∵ $DE//BC$,
∴ $AE:EC=AD:DB=1:2$.
∵ $EF//AB$,
∴ $BF:FC=AE:EC=1:2$.
∵ $CF=6$,∴ $BF=3$,故选 C.

8. A **点拨**:如图,延长 BC 至点 F,使得 $CF=BD$,



(第11题)

当主持人至少走到点 P 时才最理想,且满足 $\frac{BP}{AB}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
∴ $BP=AB\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}=12\times\frac{\sqrt{5}-1}{2}=6\sqrt{5}-6$(米),
∴ $AP=AB-BP=(18-6\sqrt{5})$ 米.

12. D **点拨**:本题易忽略线段成比例的顺序性而漏解.

13. 解:(1)∵ $AB=8$ cm,$BC=12$ cm,$A'B'=4$ cm,$B'C'=6$ cm,
∴ $\frac{A'B'}{AB}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$,$\frac{B'C'}{BC}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$.
(2)由(1)知 $\frac{A'B'}{AB}=\frac{1}{2}$,$\frac{B'C'}{BC}=\frac{1}{2}$,
∴ $\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}$.
∴ 线段 $A'B'$,AB,$B'C'$,BC 是成比例线段.


第15题图答案

14. 解:(1)设 $\frac{a}{b}=\frac{c}{4}=\frac{e}{6}=k(k\neq0)$,
则 $a=5k$,$b=4k$,$c=6k$,
∴ $\frac{2a+b}{3c}=\frac{10k+4k}{18k}=\frac{7}{9}$.
(2)∵ $\triangle ABC$ 的周长为 90,
∴ $a+b+c=90$,
即 $5k+4k+6k=90$. 解得 $k=6$,
∴ $a=30$,$b=24$,$c=36$.

15. 解:(1)设 $\frac{a+4}{3}=\frac{b+3}{2}=\frac{c+8}{4}=k(k\neq0)$,
则 $a=3k-4$,$b=2k-3$,$c=4k-8$.
∵ $a+b+c=12$,
∴ $3k-4+2k-3+4k-8=12$,
解得 $k=3$,∴ $a=5$,$b=3$,$c=4$.
(2)∵ $3^2+4^2=5^2$,即 $b^2+c^2=a^2$,
∴ $\triangle ABC$ 是直角三角形.

16. 解:(1)∵ 正方形 $ABCD$ 的边长是 2,点 P 是 AB 的中点,
∴ $AB=AD=2$,$AP=1$,$\angle BAD=90°$.
∴ $PD=\sqrt{AP^2+AD^2}=\sqrt{5}$.
∵ $PF=PD$,
∴ $AF=\sqrt{5}-1$.
在正方形 $AMEF$ 中,$AM=AF=\sqrt{5}-1$.
∴ $DM=AD-AM=3-\sqrt{5}$.
(2)点 M 是线段 AD 的黄金分割点.
理由如下:由(1)得 $AD\cdot DM=2(3-\sqrt{5})=6-2\sqrt{5}$,$AM^2=(\sqrt{5}-1)^2=6-2\sqrt{5}$,
∴ $AM^2=AD\cdot DM$.
∴ 点 M 是线段 AD 的黄金分割点.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\because ED=EC$,
$\therefore \angle EDC=\angle ECD$,
$\therefore \angle BDE=\angle FCE$,
在$\triangle EBD$和$\triangle EFC$中,
$\begin{cases} DB=CF, \\ \angle BDE=\angle FCE, \\ ED=EC, \end{cases}$
$\therefore \triangle EBD\cong\triangle EFC(SAS)$.
$\therefore \angle B=\angle F$.
$\therefore \triangle ABC$是等边三角形,
$\therefore \angle B=\angle ACB$,
$\therefore \angle ACB=\angle F$,
$\therefore AC/\!\!/EF$,$\therefore \dfrac{BA}{AE}=\dfrac{BC}{CF}$
$\because BA=BC$,
$\therefore CF=AE=2$,
$\therefore BD=CF=2$.



(第8题)

9. D

10. B　**点拨**:如图,过O作$OG/\!\!/BC$,交AC于G,则$\dfrac{DO}{BO}=\dfrac{DG}{CG}$



(第10题)

$\because O$是BD的中点,$\therefore DO=BO$,
$\therefore DG=CG$.
又$\because AD:DC=1:2$,
$\therefore AD=DG=GC$.
$\because AG:GC=2:1$.
$\because OG/\!\!/EC$,
$\therefore AO:OE=AG:GC=2:1$.
$\because S_{\triangle AOB}:S_{\triangle BOE}=2:1$.
设$S_{\triangle BOE}=S$,则$S_{\triangle AOB}=2S$,
$\therefore S_{\triangle ABE}=3S$.
又$\because BO=OD$,
$\therefore S_{\triangle AOD}=S_{\triangle AOB}=2S$,
$\therefore S_{\triangle ABD}=4S$.
$\because AD:DC=1:2$,
$\therefore S_{\triangle BDC}=2S_{\triangle ABD}=8S$,
$\therefore S_{四边形COHE}=S_{\triangle BDC}-S_{\triangle BOE}=7S$.
$\because S_{\triangle AFC}=S_{四边形COHE}+S_{\triangle AOB}=9S$,
$\therefore \dfrac{BE}{EC}=\dfrac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle AFC}}=\dfrac{3S}{9S}=\dfrac{1}{3}$.

11. 解:(1)$\because a/\!\!/b/\!\!/c$,
$\therefore \dfrac{AB}{BC}=\dfrac{DE}{EF}$,即$\dfrac{3}{5}=\dfrac{4}{EF}$,
解得$EF=\dfrac{20}{3}$.
(2)$\because a/\!\!/b/\!\!/c$,
$\therefore \dfrac{AB}{BC}=\dfrac{DE}{EF}=\dfrac{2}{5}$,
$\therefore \dfrac{DE+EF}{EF}=\dfrac{2+5}{5}$,即$\dfrac{10}{EF}=\dfrac{7}{5}$,
解得$EF=\dfrac{50}{7}$.

12. 证明:$\because$四边形$ABCD$是平行四边形,$\therefore AB/\!\!/CD$,$AD/\!\!/BC$.
$\therefore \dfrac{BO}{OE}=\dfrac{AO}{OC}$,$\dfrac{AO}{OC}=\dfrac{OF}{BO}$
$\therefore \dfrac{BO}{OE}=\dfrac{OF}{BO}$,即$BO^2=OF\cdot OE$.

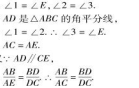
13. 证明:如图,过点D作$DE/\!\!/BN$,交AC于点E,则$\dfrac{CE}{NE}=\dfrac{CD}{BD}$.



(第13题)

$\because AD$是BC边上的中线,
$\therefore BD=CD$.$\therefore CE=NE$.
$\because DE/\!\!/MN$,$\therefore \dfrac{AM}{DM}=\dfrac{AN}{NE}$.
又$\because M$是AD的中点,$\therefore AM=DM$,
$\therefore AN=NE$.$\therefore AN=NE=CE$.
$\therefore CN=NE+CE=2AN$.
$\therefore AN=\dfrac{1}{2}CN$.

14. 证明:如图,过点C作$CE/\!\!/DA$,交BA的延长线于点E.
$\therefore \angle 1=\angle E$,$\angle 2=\angle 3$.
$\because AD$是$\triangle ABC$的角平分线,
$\therefore \angle 1=\angle 2$.$\therefore \angle 3=\angle E$.
$\therefore AC=AE$.
又$\because AD/\!\!/CE$,
$\therefore \dfrac{AB}{AE}=\dfrac{BD}{DC}$.$\therefore \dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BD}{DC}$.



(第14题)

阶段核心技巧

1. 证明:(1)在菱形$ABCD$中,$AD=BC$,$AB=CD$,$\angle A=\angle C$.
$\because AB=CD$,$BE=DF$,
$\therefore AE=CF$,
$\therefore \triangle ADE\cong\triangle CBF$.
(2)$\because \triangle ADE\cong\triangle CBF$,
$\therefore DE=BF$.
$\because$在菱形$ABCD$中,$BC=CD$,$AB/\!\!/CD$,
$\therefore \dfrac{GE}{DE}=\dfrac{GB}{BC}$,
$\therefore \dfrac{GE}{BF}=\dfrac{GB}{CD}$

2. 证明:$\because DE/\!\!/BC$,
$\therefore \dfrac{PD}{PB}=\dfrac{PE}{PC}$,
$\because PD+PC=PE+PB$,
$\because DF/\!\!/AC$,$\therefore \dfrac{PF}{PC}=\dfrac{PD}{PA}$,
$\therefore PD+PC=PF+PA$.
$\because PE+PB=PF+PA$.
$\therefore \dfrac{PE}{PF}=\dfrac{PA}{PB}$

3. 证明:$\because EF/\!\!/CD$,$\therefore \dfrac{AF}{AD}=\dfrac{AE}{AC}$
$\because DE/\!\!/BC$,$\therefore \dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}$
$\therefore \dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AF}{AD}$

4. 证明:(1)$\because \triangle ABC$与$\triangle DCE$都是等边三角形,
$\therefore AC=BC$,$CE=CD$,$\angle DCE=\angle ACB=60°$.
$\therefore \angle DCE+\angle ACD=\angle ACB+\angle ACD$,即$\angle ACE=\angle BCD$.
$\therefore \triangle ACE\cong\triangle BCD$.
(2)$\because \triangle ACE\cong\triangle BCD$,
$\therefore \angle BDC=\angle AEC$.
又$\because \angle GCD=180°-\angle ACB-\angle DCE=60°=\angle FCE$,$CD=CE$,
$\therefore \triangle GCD\cong\triangle FCE$.
$\therefore CG=CF$.
$\therefore \triangle CFG$为等边三角形.
$\therefore \angle CFG=\angle DCE=60°$.
$\therefore GF/\!\!/CE$.$\therefore \dfrac{AG}{GC}=\dfrac{AF}{FE}$

5. 证明:$\because DE/\!\!/BC$,$\therefore \dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$
$\because$点D为AB的中点,
$\therefore AD=DB$,即$\dfrac{AD}{DB}=1$.
$\therefore CF/\!\!/BA$,
$\therefore \dfrac{DE}{EF}=\dfrac{AE}{EC}=\dfrac{AD}{DB}=1$.
$\therefore DE=EF$.

6. 证明:$\because AC/\!\!/EF$,
$\therefore \dfrac{BE}{BC}=\dfrac{BF}{BA}$①.
$\because FE/\!\!/BD$,
$\therefore \dfrac{AE}{AD}=\dfrac{AF}{AB}$②.
①+②,得$\dfrac{BE}{BC}+\dfrac{AE}{AD}=\dfrac{BF}{BA}+\dfrac{AF}{AB}=\dfrac{AB}{AB}=1$,
即$\dfrac{AE}{AD}+\dfrac{BE}{BC}=1$.

3.3　相似图形

1. D　**2.** D　**3.** C　**4.** B　**5.** C　**6.** B
7. B
8. C　**点拨**:$\because$四边形$ABCD\backsim$四边形$A_1B_1C_1D_1$,
$\therefore \dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{CD}{C_1D_1}$.
又$\because AB=12$,$CD=15$,$A_1B_1=9$,
$\therefore C_1D_1=\dfrac{9\times15}{12}=\dfrac{45}{4}$.故选C.
9. A
10. D　**点拨**:把一个图形按一定比扩大或缩小,各边都相应地扩大或缩小,各角不变.
11. 解:(1)$\because \triangle ABC\backsim\triangle ADE$,
$\therefore \angle AED=\angle C=40°$,$\angle ADE=\angle B=180°-\angle A-\angle C=180°-60°-40°=80°$.
(2)$\because \triangle ABC\backsim\triangle ADE$,
$\therefore \dfrac{AC}{AE}=\dfrac{BC}{DE}$,即$\dfrac{5+3}{5}=\dfrac{7}{DE}$,
$\therefore DE=\dfrac{35}{8}$ cm.

12. 解:(1)$\because$多边形$ABCDEF$与多边形$A_1B_1C_1D_1E_1F_1$相似,且$\angle C$和$\angle C_1$,$\angle D$和$\angle D_1$,$\angle E$和$\angle E_1$是对应角,$\therefore \angle C=95°$,$\angle D=135°$,$\angle E=120°$.
由多边形内角和定理,知六边形的内角和为720°,$\therefore \angle F=720°-(135°+120°+95°+135°+120°)=115°$.
(2)$\because$多边形$ABCDEF$和多边形$A_1B_1C_1D_1E_1F_1$的相似比是1∶1.5,且$CD=15$ cm,
$\therefore C_1D_1=15\times1.5=22.5$(cm).

13. (1)证明:$\because$菱形$AEFG\backsim$菱形$ABCD$,
$\therefore \angle EAG=\angle BAD$,
$\therefore \angle EAG+\angle GAB=\angle BAD+\angle GAB$,
$\therefore \angle EAB=\angle GAD$.
$\therefore AE=AG$,$AB=AD$,
$\therefore \triangle AEB\cong\triangle AGD$,$\therefore EB=GD$.
(2)解:如图,连接BD交AC于点P,则$BP\perp AC$.



(第13题)

$\because \angle DAB=60°$,
$\therefore \angle PAB=30°$,
$\therefore BP=\dfrac{1}{2}AB=1$,
$\therefore AP=\sqrt{AB^2-BP^2}=\sqrt{3}$.
$\therefore AE=AG=\sqrt{3}$,
$\therefore EP=2\sqrt{3}$,
$\therefore EB=\sqrt{EP^2+BP^2}=\sqrt{12+1}=\sqrt{13}$,
$\therefore GD=EB=\sqrt{13}$.

14. 解:(1)如果四周的小路的宽度均相等,那么小路四周所围成的矩形$A'B'C'D'$和矩形$ABCD$不相似.理由如下:
$\because \dfrac{30+2a}{30}=\dfrac{15+a}{15}$,$\dfrac{20+2a}{20}=\dfrac{10+a}{10}$,
$\therefore \dfrac{30+2a}{30}\neq\dfrac{20+2a}{20}$,
$\therefore$小路四周所围成的矩形$A'B'C'D'$和矩形$ABCD$不相似.
(2)当$\dfrac{20+2x}{20}=\dfrac{30+2y}{30}$时,小路四周所围成的矩形$A'B'C'D'$和矩形$ABCD$相似,
化简$\dfrac{20+2x}{20}=\dfrac{30+2y}{30}$,得$\dfrac{x}{y}=\dfrac{2}{3}$.
$\therefore x$与y的比值为$\dfrac{2}{3}$时,能使小路四周所围成的矩形$A'B'C'D'$和矩形$ABCD$相似.

3.4　相似三角形的判定与性质

第1课时　利用平行线判定两个三角形相似

1. C　**2.** D
3. $\triangle ADF\backsim\triangle ECF$或$\triangle EBA\backsim\triangle ECF$或$\triangle ADF\backsim\triangle EBA$(任意写一对即可)
4. B　**5.** C　**6.** D
7. B　**点拨**:$\because \angle C=90°$,$AB=5$,$BC=4$,$\therefore AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=3$.
$\because PQ/\!\!/AB$,$\therefore \angle AMD=\angle BDQ$.
又$\because \angle AMD=\angle QBD$,
$\therefore \angle QBD=\angle BDQ$.
$\therefore QB=QD$.
$\therefore QP=2QB$.
$\because PQ/\!\!/AB$,
$\therefore \triangle CPQ\backsim\triangle CAB$.
$\therefore \dfrac{CP}{CA}=\dfrac{CQ}{CB}=\dfrac{PQ}{AB}$,
即$\dfrac{CP}{3}=\dfrac{4-QB}{4}=\dfrac{2QB}{5}$,
解得$CP=\dfrac{24}{13}$.
$\therefore AP=CA-CP=\dfrac{15}{13}$.

8. B　**点拨**:如图,作$DH/\!\!/EG$交AB于点H,则$\triangle AEG\backsim\triangle ADH$.
$\therefore \dfrac{AE}{AD}=\dfrac{EG}{DH}$
$\because EF\perp AC$,$\angle C=90°$,
$\therefore \angle EFA=\angle C=90°$.
$\therefore EF/\!\!/CD$.
$\therefore \triangle AEF\backsim\triangle ADC$.



(第8题)

$\therefore \dfrac{AE}{AD}=\dfrac{EF}{CD}$.$\because \dfrac{EG}{DH}=\dfrac{EF}{CD}$
$\therefore EG=EF$.$\therefore DH=CD$.
设$DH=x$,则$CD=x$.
$\because BC=12$,$AC=6$,
$\therefore BD=12-x$.
$\because EF\perp AC$,$EF/\!\!/EG$,$DH/\!\!/EG$,
$\therefore EG/\!\!/AC/\!\!/DH$.
$\therefore \triangle BDH\backsim\triangle BCA$.
$\therefore \dfrac{DH}{AC}=\dfrac{BD}{BC}$,即$\dfrac{x}{6}=\dfrac{12-x}{12}$,
解得$x=4$.$\therefore CD=4$.
9. 错解:D
诊断:不能准确找出相似三角形的对应边,导致不能准确写出对应线段所成的比例式.
正解:B
10. (1)证明:$\because$四边形$ABCD$为平行四边形,$\therefore AD/\!\!/BE$.
$\therefore \triangle AMD\backsim\triangle EMB$.
(2)解:$\because AD/\!\!/BC$,
$\therefore \triangle FND\backsim\triangle ENB$.
$\therefore \dfrac{FD}{BE}=\dfrac{DN}{BN}$.
$\because M$,N为BD的三等分点,
$\therefore \dfrac{DN}{BN}=\dfrac{1}{2}$.$\therefore \dfrac{FD}{BE}=\dfrac{1}{2}$.

11. (1)证明:$\because$四边形$ABCD$是平行四边形,点F在边AD的延长线上,
$\therefore DF/\!\!/BC$.
$\because DF=BE$,
$\therefore$四边形$BEFD$是平行四边形,
$\therefore BD/\!\!/EF$.
(2)解:$\because BE=4$,$\therefore DF=4$.
$\because DF/\!\!/BC$,
$\therefore \triangle DFG\backsim\triangle CEG$,
$\therefore \dfrac{DG}{CG}=\dfrac{DF}{CE}$
$\therefore EC=\dfrac{DF\cdot CG}{DG}=DF\cdot\dfrac{CG}{DG}=4\times\dfrac{3}{2}=6$.

12. (1)证明:$\because$四边形$EFGH$是正方形,
$\therefore EH/\!\!/BC$.
$\therefore \triangle AEH\backsim\triangle ABC$.
(2)解:如图,设AD与EH交于点M.



(第12题)

$\because$四边形$EFGH$是正方形,AD是

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

BC 边上的高，

$\therefore \angle EFD = \angle FEM = \angle FDM = 90°$，

$\therefore$ 四边形 $EFDM$ 是矩形，

$\therefore EF = DM$.

设正方形 $EFGH$ 的边长为 x cm，

$\because \triangle AEH \backsim \triangle ABC$，$\therefore \dfrac{EH}{BC} = \dfrac{AE}{AB}$

$\because EM // BD$，$\therefore \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AM}{AD}$.

$\therefore \dfrac{EH}{BC} = \dfrac{AM}{AD}$，即 $\dfrac{x}{40} = \dfrac{30 - x}{30}$.

$\therefore x = \dfrac{120}{7}$.

$\therefore$ 正方形 $EFGH$ 的边长为 $\dfrac{120}{7}$ cm，

面积为 $\dfrac{14\,400}{49}$ cm^2.

13. （1）**证明**：$\because \angle OED = \angle OBA$，$\angle OEF = \angle OBC$，

$\therefore DE // AB$，$EF // BC$.

由 $DE // AB$，

得 $\triangle ODE \backsim \triangle OAB$，

$\therefore \dfrac{OD}{OA} = \dfrac{OE}{OB}$.

由 $EF // BC$，得 $\triangle OFE \backsim \triangle OCB$，

$\therefore \dfrac{OE}{OC} = \dfrac{OF}{OB}$，$\therefore \dfrac{OD}{OA} = \dfrac{OF}{OC}$.

（2）**解**：是. 理由如下：由 $\triangle OFE \backsim \triangle OCB$，得 $\dfrac{EF}{CB} = \dfrac{OE}{OB}$.

由 $\triangle ODE \backsim \triangle OAB$，得 $\dfrac{DE}{AB} = \dfrac{OE}{OB}$.

$\therefore \dfrac{DE}{AB} = \dfrac{EF}{BC}$.

$\because \triangle DEF$ 是以 DF 为底边的等腰三角形，$\therefore DE = EF$，

$\therefore AB = BC$，即 $\triangle ABC$ 是以 AC 为底边的等腰三角形.

第 2 课时　利用角的关系判定两个三角形相似

1. A

2. C　**点拨**：图中三角形有 $\triangle AEG$，$\triangle ADC$，$\triangle CFG$，$\triangle CBA$. 由 $AB // EF // DC$，$AD // BC$，可得 $\triangle AEG \backsim \triangle ADC \backsim \triangle CFG \backsim \triangle CBA$，有 6 种组合.

3. C　**4.** B　**5.** C

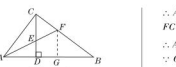
6. C　**点拨**：连接 EF. 若四边形 $EGFH$ 为菱形，则 $EF \perp GH$，假设线段 EF，GH 交于点 O，则 O 为 AC 中点，故 $AO = \dfrac{1}{2}AC = 2\sqrt{5}$.

易知 $\triangle ABC \backsim \triangle AOE$，

$\therefore \dfrac{AB}{AO} = \dfrac{AC}{AE}$，即 $\dfrac{8}{2\sqrt{5}} = \dfrac{4\sqrt{5}}{AE}$，

解得 $AE = 5$.

7. A　**点拨**：如图，过点 F 作 $FG \perp AB$ 于点 G.



（第 7 题）

$\because \angle ACB = 90°$，

$\therefore \angle CAF + \angle CFA = 90°$.

$\because CD \perp AB$，$\therefore \angle CDA = 90°$，

$\therefore \angle FAD + \angle AED = 90°$.

$\because AF$ 平分 $\angle CAB$，

$\therefore \angle CAF = \angle FAD$.

$\therefore \angle CFA = \angle AED = \angle CEF$.

$\therefore CE = CF$.

$\because AF$ 平分 $\angle CAB$，$\angle ACF = \angle AGF = 90°$，$\therefore FC = FG$.

$\because \angle B = \angle B$，$\angle FGB = \angle ACB = 90°$，

$\therefore \triangle BFG \backsim \triangle BAC$.

$\therefore \dfrac{BF}{AB} = \dfrac{FG}{AC}$.

$\because AC = 3$，$AB = 5$，$\angle ACB = 90°$，

$\therefore BC = 4$.

$\therefore \dfrac{4 - CF}{5} = \dfrac{FG}{3}$，

$\therefore FC = \dfrac{3}{2}$，即 CE 的长为 $\dfrac{3}{2}$.

8. B　**点拨**：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，$AB = 12$，$BM = 5$，

$\therefore \angle B = 90°$，$AM = 13$.

$\because ME \perp AM$，

$\therefore \angle AME = \angle B = 90°$，$\angle MAE + \angle MEA = 90°$.

$\because \angle BAM + \angle MAE = 90°$，

$\therefore \angle BAM = \angle MEA$，

$\therefore \triangle ABM \backsim \triangle EMA$，

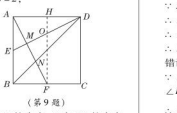
$\therefore \dfrac{AM}{AE} = \dfrac{BM}{AM}$，

$\therefore \dfrac{13}{AE} = \dfrac{5}{13}$，

解得 $AE = \dfrac{169}{5}$.

$\therefore DE = AE - AD = \dfrac{169}{5} - 12 = \dfrac{109}{5}$.

9. C　**点拨**：如图，过点 F 作 $FH \perp AD$ 于点 H，交 ED 于 O，则 $AB // FH$，$FH = AB = 2$，



（第 9 题）

$\because E$ 为 AB 的中点，F 为 BC 的中点，$BC = AD = 2$，

$\therefore AE = EB = 1$，$BF = AH = 1$，

$FC = HD = 1$，

$\therefore AF = \sqrt{FH^2 + AH^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.

$\because OH // AE$，

$\therefore \triangle DHO \backsim \triangle DAE$，

$\therefore \dfrac{HO}{AE} = \dfrac{DH}{AD} = \dfrac{1}{2}$，

$\therefore OH = \dfrac{1}{2}AE = \dfrac{1}{2}$，

$\therefore OF = FH - OH = 2 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$.

$\because AE // FO$，

$\therefore \angle EAM = \angle OFM$，$\angle AEM = \angle FOM$，

$\therefore \triangle AME \backsim \triangle FMO$，

$\therefore \dfrac{AM}{FM} = \dfrac{AE}{OF} = \dfrac{2}{3}$，

$\therefore AM = \dfrac{2}{5}AF = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

$\because AD // BF$，

$\therefore \angle NAD = \angle NFB$，$\angle NDA = \angle NBF$，

$\therefore \triangle AND \backsim \triangle FNB$，

$\therefore \dfrac{AN}{FN} = \dfrac{AD}{BF} = 2$，

$\therefore AN = \dfrac{2}{3}AF = \dfrac{2\sqrt{5}}{3}$，

$\therefore MN = AN - AM = \dfrac{2\sqrt{5}}{3} - \dfrac{2\sqrt{5}}{5} = \dfrac{4\sqrt{5}}{15}$，故选 C.

10. C　**点拨**：$\because \triangle BPC$ 是等边三角形，

$\therefore BP = PC = BC$，$\angle PBC = \angle PCB = \angle BPC = 60°$，

在正方形 $ABCD$ 中，

$\because AB = BC = CD$，$\angle A = \angle ADC = \angle BCD = 90°$，

$\therefore \angle ABE = \angle DCF = 30°$，

$\therefore BE = 2AE$，故①正确；

$\because PC = CD$，$\angle PCD = 30°$，

$\therefore \angle PDC = 75°$，$\therefore \angle FDP = 15°$，

$\because \angle DBA = 45°$，

$\therefore \angle PBD = 15°$，

$\therefore \angle FDP = \angle PBD$，

$\because \angle DFP = \angle BPC = 60°$，

$\therefore \triangle DFP \backsim \triangle BPH$，故②正确；

$\because \angle FDP = \angle PBD = 15°$，$\angle ADB = 45°$，

$\therefore \angle PDB = 30°$，而 $\angle DFP = 60°$，

$\therefore \angle PFD \neq \angle PDB$，

$\therefore \triangle PFD$ 与 $\triangle PDB$ 不会相似，故③错误；

$\because \angle PDH = \angle PCD = 30°$，

$\angle DPH = \angle DPC$，

$\therefore \triangle DPH \backsim \triangle CPD$，$\therefore \dfrac{DP}{PC} = \dfrac{PH}{DP}$，

$\therefore DP^2 = PH \cdot PC$，故④正确；故选 C.

11. **错解**：2

诊断：根据题意，要使 $\triangle AEF$ 与 $\triangle ABC$ 相似，由于本题没有说明对应关系，故采用分类讨论思想. 有两种可能：（1）$\triangle AEF \backsim \triangle ABC$，（2）$\triangle AEF \backsim \triangle ACB$.


第 11 题诊断

正解：2 或 4.5

12. **证明**：（1）$\because \triangle ABC$ 与 $\triangle DCE$ 都是等边三角形，

$\because AC = BC$，$CD = CE$，$\angle ACB = \angle DCE = 60°$.

$\therefore \angle ACB + \angle ACE = \angle ACE + \angle DCE$，即 $\angle BCE = \angle ACD$.

在 $\triangle BCE$ 和 $\triangle ACD$ 中，

$\begin{cases} BC = AC, \\ \angle BCE = \angle ACD, \\ CE = CD, \end{cases}$

$\therefore \triangle BCE \cong \triangle ACD$（SAS），

$\therefore AD = BE$.

（2）由（1）知，$\triangle BCE \cong \triangle ACD$，

$\therefore \angle CBE = \angle CAD$.

$\because \angle BMC = \angle AMF$，

$\therefore \angle AFB = \angle ACB = 60° = \angle ABC$.

又 $\because \angle BAF = \angle DAB$，

$\therefore \triangle ABF \backsim \triangle ADB$.

13. （1）**证明**：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AD // BC$，$AD = BC$.

$\therefore \triangle EBF \backsim \triangle EAD$.

$\therefore \dfrac{BF}{AD} = \dfrac{EB}{EA} = \dfrac{1}{2}$.

$\therefore BF = \dfrac{1}{2}AD = \dfrac{1}{2}BC$. $\therefore BF = CF$.

（2）**解**：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AD // BC$.

$\because \angle FCG = \angle DAG$.

又 $\because \angle FGC = \angle DGA$，

$\therefore \triangle AGD \backsim \triangle CGF$.

$\therefore \dfrac{FG}{DG} = \dfrac{FC}{AD}$，即 $\dfrac{FG}{4} = \dfrac{1}{2}$.

解得 $FG = 2$.

14. （1）**解**：$\because$ 矩形 $ABCD$ 中，$AD // CF$，

$\therefore \angle DAF = \angle AFC$.

$\because AF$ 平分 $\angle DAC$，

$\therefore \angle DAF = \angle CAF$.

$\therefore \angle FAC = \angle AFC$.

$\therefore AC = CF$.

$\because AB = 4$，$BC = 3$，

$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.

$\therefore CF = 5$.

$\because AD // CF$，

$\therefore \angle EDA = \angle ECF$，$\angle EAD = \angle EFB$，

$\therefore \triangle ADE \backsim \triangle FCE$.

$\therefore \dfrac{AD}{CF} = \dfrac{DE}{CE}$.

设 $DE = x$，则 $\dfrac{3}{5} = \dfrac{x}{4 - x}$，

解得 $x = \dfrac{3}{2}$.

$\therefore DE = \dfrac{3}{2}$.

（2）**证明**：$\because AD // FH$，$AH // DF$，

$\therefore$ 四边形 $ADFH$ 是平行四边形.

$\because AD = FH = 3$.

$\because CH = 2$，$BH = 5$.

$\because AD // BH$，$\therefore \angle GDA = \angle GBH$，$\angle GAD = \angle GHB$，

$\therefore \triangle ADG \backsim \triangle HBG$.

$\therefore \dfrac{DG}{BG} = \dfrac{AD}{BH}$

$\therefore \dfrac{DG}{5 - DG} = \dfrac{3}{5}$.

$\therefore DG = \dfrac{15}{8}$.

$\therefore DE = \dfrac{3}{2}$，

$\therefore \dfrac{DE}{DC} = \dfrac{4}{5} = \dfrac{DC}{DB}$.

$\therefore EG // BC$.

$\therefore \angle 1 = \angle AHC$.

又 $\because DF // AH$，

$\therefore \angle AHC = \angle DFC$.

$\therefore \angle 1 = \angle DFC$.

15. **解**：（1）由旋转知，$AB = AD$，$\angle DAB = 90°$，

$\therefore \angle ABD = \angle ADB = 45°$.

由平移知 $DF // AB$，

$\therefore \angle BDF = \angle ABD$，

$\therefore \angle BDF = 45°$.

（2）由平移知 $EG // AC$，$EG = AC$，

$\therefore$ 四边形 $ACGE$ 是平行四边形.

又 $\because \angle C = 90°$，

$\therefore$ 四边形 $ACGE$ 是矩形，

$\therefore \angle EAC = 90°$，$AE = CG$.

又 $\because \angle DAB = 90°$，

$\therefore \angle EAH + \angle EAD = \angle CAB + \angle EAB$，

$\therefore \angle DAE = \angle CAB$，

由（1）知 $DF // AB$，

$\therefore \angle EDA + \angle DAB = 180°$，

$\therefore \angle EDA = 90°$，$\therefore \angle EDA = \angle C$，

$\therefore \triangle AED \backsim \triangle ABC$，$\therefore \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AD}{AC}$，

$\therefore \dfrac{AE}{10} = \dfrac{10}{8}$，$\therefore AE = \dfrac{25}{2}$，

$\therefore CG = \dfrac{25}{2}$.

第 3 课时　利用边角关系判定两个三角形相似

1. C　**2.** C　**3.** B　**4.** C　**5.** B

6. $DF // AC$（答案不唯一）

7. C

8. C　**点拨**：$\because$ 四边形 $EFGB$ 是正方形，$EB = 2$，

$\therefore FG = EB = 2$，$\angle FGB = 90°$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，H 为 AD 的中点，

$\therefore AD = 4$，$AH = 2$，$\angle BAD = 90°$.

$\therefore AH // MN = FGN$，$AH = GF$.

又 $\because \angle ANH = \angle GNF$，

$\therefore \triangle ANH \cong \triangle GNF$（AAS），故①正确.

$\because \triangle ANH \cong \triangle GNF$，$\therefore \angle AHN = \angle HFG$.

$\because AG = FG = 2 = AH$，

$\therefore AF = \sqrt{2}FG = \sqrt{2}AH$.

$\therefore \angle AFH \neq \angle AHF$.

$\therefore \angle AFN \neq \angle HFG$，故②错误.

$\because \triangle ANH \cong \triangle GNF$，

$\therefore AN = \dfrac{1}{2}AG = 1$.

$\therefore GM = BC = 4$，

$\therefore \dfrac{AH}{AN} = \dfrac{AM}{AG} = 2$.

又 $\because \angle HAN = \angle AGM = 90°$，

$\therefore \triangle AHN \backsim \triangle GMA$，

$\therefore \angle AHN = \angle AMG$.

$\because AD // GM$，

$\therefore \angle HAK = \angle AMG$.

$\therefore \angle AHK = \angle HAK$.

$\therefore AK = HK$.

$\because AK + HK = NK$.

$\therefore FN = HN$，

$\therefore FN = 2NK$，故③正确.

易知四边形 $ADMG$ 是矩形.

$\therefore DM = AG = 2$.

$\therefore S_{\triangle AFN} = \dfrac{1}{2}AN \cdot FG = \dfrac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1$，

$S_{\triangle ADM} = \dfrac{1}{2}AD \cdot DM = \dfrac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$，

$\therefore S_{\triangle AFN} : S_{\triangle ADM} = 1 : 4$，故④正确.

故选 C.

9. $\dfrac{12}{5}$ 或 $\dfrac{5}{3}$　**点拨**：当 $\dfrac{AE}{AD} = \dfrac{AB}{AC}$ 时，

$\because \angle A = \angle A$，$\therefore \triangle AED \backsim \triangle ABC$.

此时 $AE = \dfrac{AB \cdot AD}{AC} = \dfrac{6 \times 2}{5} = \dfrac{12}{5}$.

当 $\dfrac{AD}{AE} = \dfrac{AB}{AC}$ 时，$\because \angle A = \angle A$，

$\therefore \triangle ADE \backsim \triangle ABC$.

此时 $AE = \dfrac{AC \cdot AD}{AB} = \dfrac{5 \times 2}{6} = \dfrac{5}{3}$.

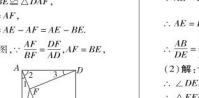
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

故答案为$\frac{12}{5}$或$\frac{5}{3}$.

易错总结：当$\frac{AE}{AD}=\frac{AB}{AC}$或$\frac{AD}{AE}=\frac{AB}{AC}$时，以$A,D,E$为顶点的三角形与$\triangle ABC$相似，本题容易考虑问题不全面出现漏解.

10. 证明：(1)如图，∵ 四边形$ABCD$为正方形，
$\therefore AB=AD,\angle BAD=90°$.
$\therefore \angle 1+\angle 2=90°$.
$\because BE\perp AP,DF\perp AP$，
$\therefore \angle BEA=\angle AFD=90°$.
$\therefore \angle 2+\angle 3=90°$，
$\therefore \angle 1=\angle 3$.
在$\triangle ABE$和$\triangle DAF$中，
$\begin{cases}\angle BEA=\angle AFD,\\ \angle 1=\angle 3,\\ AB=DA,\end{cases}$
$\therefore \triangle ABE\cong\triangle DAF$，
$\therefore BE=AF$，
$\therefore EF=AE-AF=AE-BE$.

(2)如图，∵ $\frac{AF}{BF}=\frac{DF}{AF}$，$AF=BE$，



(第10题)

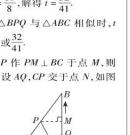
$\therefore \frac{BE}{BF}=\frac{DF}{AF}$，$\therefore \frac{BE}{DF}=\frac{BF}{AF}$.
设$\frac{BE}{BF}=\frac{DF}{AF}=k$，则$BE=kBF,DF=kAD$，$\therefore EF=\sqrt{BF^2-BE^2}=\sqrt{1-k^2}BF$，$AF=\sqrt{AD^2-DF^2}=\sqrt{1-k^2}AD$.
$\therefore \frac{EF}{AF}=\frac{BF}{AD}$，$\therefore \frac{BE}{DF}=\frac{EF}{AF}$.
又∵ $\angle BEF=\angle AFD=90°$，
$\therefore \triangle BEF\backsim\triangle DFA$，
$\therefore \angle 4=\angle 3$.
∵ $\angle 1=\angle 3$，$\therefore \angle 4=\angle 1$.
∵ $\angle 1+\angle BPA=90°$，$\angle 5+\angle BPA=90°$，$\therefore \angle 5=\angle 1$，$\therefore \angle 4=\angle 5$.
即BE平分$\angle FBP$，而$BE\perp EP$，
$\therefore EF=EP$.

11. 证明：(1)∵ $\angle ACD=\angle B,\angle CAD=\angle BAC$，
$\therefore \triangle ACD\backsim\triangle ABC$.
$\therefore AC:AB=AD:AC$.
$\therefore AC^2=AD\cdot AB$.
(2)∵ $\triangle ACD\backsim\triangle ABC$，
$\therefore \angle ADF=\angle ACG$.
又∵ $\frac{AD}{AC}=\frac{DF}{CG}$，∴ $\triangle ADF\backsim\triangle ACG$.
$\therefore \angle DAF=\angle CAF$，
即$\angle BAG=\angle CAG$.
过点B作$BE\parallel AC$，交AG的延长线于点E，则$\angle E=\angle CAG$，
又∵ $\angle BGE=\angle AGC$，
$\therefore \triangle ACG\backsim\triangle EBG$. ∴ $\frac{AC}{BE}=\frac{CG}{BG}$.
又∵ $\angle BAG=\angle CAG$，∴ $\angle BAG=\angle E$. ∴ $AB=BE$. ∴ $\frac{AC}{AB}=\frac{CG}{BG}$.
∵ $AC^2=AD\cdot AB$，∴ $\frac{AD}{AC}=\frac{AC}{AB}$，
∴ $\frac{DF}{CG}=\frac{CG}{BC}$. ∵ $CG^2=DF\cdot BC$.

12. (1)证明：在正方形$ABCD$中，$\angle A=\angle D=90°,AB=AD=CD$.
∵ $AE=ED,DF=\frac{1}{4}DC$，
∴ $AE=ED=\frac{1}{2}AB,DF=\frac{1}{4}AB$.
∴ $\frac{AB}{DE}=\frac{AE}{DF}$. ∴ $\triangle ABE\backsim\triangle DEF$.

(2)**解**：∵ $AD\parallel CG$，
∴ $\angle DEF=\angle G,\angle D=\angle DCG$.
∴ $\triangle EFD\backsim\triangle GFC$.
∴ $\frac{DE}{CG}=\frac{DF}{CF}=\frac{1}{3}$.
∵ $DE=\frac{1}{2}AB=2$，
∴ $CG=6$. ∴ $BC=10$.

13. 解：(1)由题意知，$AB=10$ cm，$BP=5t$ cm，$CQ=4t$ cm，$BQ=(8-4t)$ cm.
当$\triangle PBQ\backsim\triangle ABC$时，有$\frac{PB}{AB}=\frac{BQ}{BC}$，
即$\frac{5t}{10}=\frac{8-4t}{8}$，解得$t=1$；
当$\triangle QBP\backsim\triangle ABC$时，有$\frac{QB}{AB}=\frac{BP}{BC}$，
即$\frac{8-4t}{10}=\frac{5t}{8}$，解得$t=\frac{32}{41}$.
综上，当$\triangle BPQ$与$\triangle ABC$相似时，t的值为1或$\frac{32}{41}$.
(2)过点P作$PM\perp BC$于点M，则$PM\parallel AC$，设AQ,CP交于点N，如图所示.



(第13题)

∵ $PM\parallel AC$，∴ $\triangle BMP\backsim\triangle BCA$，
∴ $\frac{BP}{BA}=\frac{PM}{AC}=\frac{BM}{BC}$，
∴ $\frac{5t}{10}=\frac{PM}{6}=\frac{BM}{8}$.
∴ $PM=3t$ cm，$BM=4t$ cm，
则$CM=(8-4t)$ cm.
∵ $\angle QAC+\angle NCA=90°$，$\angle PCM+\angle NCA=90°$，
∴ $\angle QAC=\angle PCM$.
又∵ $\angle ACQ=\angle PMC=90°$，
∴ $\triangle ACQ\backsim\triangle CMP$，
∴ $\frac{AC}{CM}=\frac{CQ}{MP}$，
∴ $\frac{6}{8-4t}=\frac{4t}{3t}$，
解得$t=\frac{7}{8}$.
故t的值为$\frac{7}{8}$.

第4课时　利用三边关系判定两个三角形相似

1. B　**2.** D　**3.** C　**4.** D

5. B　**点拨**：分以下四种情况讨论：(1)若截45 cm的铝材，设截下的两段长分别为x cm，y cm$(x<y)$，由题意得$\frac{24}{x}=\frac{30}{y}=\frac{36}{27}$①或$\frac{24}{x}=\frac{30}{27}=\frac{36}{y}$②(注：27 cm不可能是最小边长)，由①解得$x=18,y=22.5$，符合题意，由②解得$x=\frac{108}{5},y=\frac{162}{5}$，而$x+y=\frac{108}{5}+\frac{162}{5}=\frac{270}{5}=54>45$，不合题意，舍去.
(2)若截27 cm的铝材，设截下的两段长分别为a cm，b cm$(a<b)$，由题意得$\frac{24}{a}=\frac{30}{b}=\frac{36}{45}$(注：45 cm只能是最大边长)，解得$a=30,b=37.5$，而$a+b=30+37.5=67.5>27$，不合题意，舍去. 综上可知，截法只有1种.

6. C　**点拨**：设网格中每个小正方形的边长为1. 由图得①中的三角形的各边长分别为$2,\sqrt{2},\sqrt{10}$，③中的三角形的各边长分别为$2\sqrt{2},2,2\sqrt{5}$，
∵ $\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{5}}$，∴ 两个三角形的三边对应成比例，∴ ①和③相似. 故选C.

7. C

8. B　**点拨**：设小正方形的边长为1，则“帅”“相”“兵”所在位置的格点构成的三角形的三边长分别为$2,2\sqrt{5},4\sqrt{2}$. “车”“炮”之间的距离为1，“炮”②之间的距离为$\sqrt{5}$，“车”②之间的距离为$2\sqrt{2}$，
∴ $\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$，
∴ “马”应该落在②的位置.

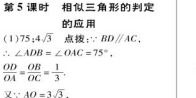
9. B　**点拨**：当直角三角形的直角边长分别为6，8，且另一个与它相似的直角三角形的直角边长分别为3，4时，x的值为5；当8，4为对应边的长且为两直角三角形的斜边长时，x的值为$\sqrt{7}$，故x的值可以为5或$\sqrt{7}$. 此题易忽略第二种情况.

10. 证明：∵ $\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{DE}=\frac{AC}{AE}$，
∴ $\triangle ABC\backsim\triangle ADE$.
∴ $\angle BAC=\angle DAE$.
∴ $\angle BAC-\angle CAD=\angle DAE-\angle CAD$，即$\angle BAD=\angle CAE$.

11. 证明：设正方形$ABCD$的边长为a，
∴ $AD=BC=CD=a$.
又∵ Q是CD的中点，
∴ $DQ=CQ=\frac{1}{2}a$.
∵ $BP=3PC$，∴ $PC=\frac{1}{4}a$.
∴ $AQ=\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}=\frac{\sqrt{5}a}{2}$，$PQ=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{16}}=\frac{\sqrt{5}a}{4}$.
∴ $\frac{AD}{CQ}=\frac{DQ}{PC}=\frac{AQ}{PQ}=2$.
∴ $\triangle ADQ\backsim\triangle QCP$.

12. 解：(1)$\triangle ACF\backsim\triangle GCA$. 理由：可设正方形$ABCD$，正方形$CDEF$，正方形$EFGH$的边长为$a$，则$\triangle ACF$的三边长分别为$AC=\sqrt{2}a,CF=a,AF=\sqrt{5}a$，$\triangle ACG$的三边长分别为$AC=\sqrt{2}a,CG=2a,AG=\sqrt{10}a$.
∴ $\frac{CF}{AC}=\frac{a}{\sqrt{2}a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\frac{AC}{CG}=\frac{\sqrt{2}a}{2a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，
$\frac{AF}{AG}=\frac{\sqrt{5}a}{\sqrt{10}a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.
∴ $\frac{CF}{AC}=\frac{AC}{CG}=\frac{AF}{AG}$.
∴ $\triangle ACF\backsim\triangle GCA$.
(2)∵ $\triangle ACF\backsim\triangle GCA$，
∴ $\angle 1=\angle CAF$.
∴ $\angle 1+\angle 2=\angle CAF+\angle 2=\angle ACB=45°$.

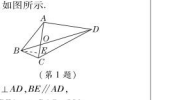
13. (1)证明：根据勾股定理，得$AB=2\sqrt{5},AC=\sqrt{5},BC=5$，
显然有$AB^2+AC^2=BC^2$，
根据勾股定理的逆定理得$\triangle ABC$为直角三角形.
(2)**解**：$\triangle ABC$和$\triangle DEF$相似.
理由如下：根据勾股定理，得$AB=2\sqrt{5},AC=\sqrt{5},BC=5,DE=4\sqrt{2},DF=2\sqrt{2},EF=2\sqrt{10}$.
∴ $\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}=\frac{BC}{EF}=\frac{\sqrt{10}}{4}$.
∴ $\triangle ABC\backsim\triangle DEF$.
(3)**解**：如图，连接P_1P_4，P_2P_4，P_3P_4，则$\triangle P_2P_3P_4$符合要求.



(第13题)

第5课时　相似三角形的判定的应用

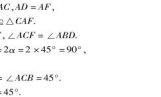
1. ∵ $(1)75\frac{1}{4}$小$\frac{OB}{OC}=\frac{1}{3}$.
∴ $\angle ADB=\angle OAC=75°$，
$\frac{OD}{OA}=\frac{OB}{OC}=\frac{1}{3}$.
又∵ $AO=3\sqrt{3}$，
∴ $OD=\frac{1}{3}AO=\sqrt{3}$，
∴ $AD=AO+OD=4\sqrt{3}$.
∵ $\angle BAD=30°,\angle ADB=75°$，
∴ $\angle ABD=180°-\angle BAD-\angle ADB=75°=\angle ADB$.
∴ $AB=AD=4\sqrt{3}$.
(2)**解**：过点B作$BE\parallel AD$交AC于点E，如图所示.



(第1题)

∵ $AC\perp AD,BE\parallel AD$，
∴ $\angle BEA=\angle DAC=90°$.
∵ $\angle EOB=\angle AOD$，
∴ $\triangle EOB\backsim\triangle AOD$，
∴ $\frac{BO}{DO}=\frac{EO}{AO}=\frac{BE}{DA}$.
∵ $BO:DO=1:3$，
∴ $\frac{EO}{AO}=\frac{BE}{DA}=\frac{1}{3}$.
∵ $AO=3\sqrt{3}$，∴ $EO=\sqrt{3}$，
∴ $AE=4\sqrt{3}$.
∵ $\angle ABC=\angle ACB=75°$，
∴ $\angle BAC=30°$，$AB=AC$，
∴ $AB=2BE$.
在$\mathrm{Rt}\triangle AEB$中，$AE^2+BE^2=AB^2$，
即$(4\sqrt{3})^2+BE^2=(2BE)^2$，
解得$BE=4$(负值舍去).
∴ $AB=AC=8,AD=12$，
在$\mathrm{Rt}\triangle CAD$中，$AC^2+AD^2=CD^2$，
即$8^2+12^2=CD^2$，
解得$CD=4\sqrt{13}$(负值舍去).

2. (1)**证明**：∵ 点D与点F关于直线AE对称，
∴ $AD=AF,\angle DAE=\angle FAE=\alpha$.
∴ $\angle DAF=2\alpha=\angle BAC$.
∵ $AB=AC,AD=AF$，
∴ $\frac{AD}{AF}=\frac{AB}{AC}=1$.
∴ $\triangle ADF\backsim\triangle ABC$.
(2)**证明**：∵ $\angle DAF=2\alpha=\angle BAC$，
∴ $\angle DAF-\angle DAC=\angle BAC-\angle DAC$，即$\angle BAD=\angle CAF$.
又∵ $AB=AC,AD=AF$，
∴ $\triangle BAD\cong\triangle CAF$.
∴ $BD=CF,\angle ACF=\angle ABD$.
∵ $\angle BAC=2\alpha=2\times45°=90°,AB=AC$，
∴ $\angle B=\angle ACB=45°$.
∴ $\angle ACF=45°$.
∴ $\angle ECF=180°-\angle ACB-\angle ACF=90°$.
∴ $EF^2=CF^2+CE^2$.



(第2题)

∴ $AD=AF,DE=EF,\angle FAE=\angle DAE=\alpha$.
∴ $\angle DAF=2\alpha=\angle BAC$.
∴ $\angle DAF-\angle DAC=\angle BAC-\angle DAC$，即$\angle CAF=\angle BAD$.
又∵ $AB=AC,AD=AF$，
∴ $\triangle BAD\cong\triangle CAF$.
∴ $BD=CF,\angle ACF=\angle B$.
∵ $\angle BAC=2\alpha=2\times45°=90°,AB=AC$，
∴ $\angle B=\angle ACB=45°$.
∴ $\angle ACF=45°$.
∴ $\angle ECF=180°-\angle ACB-\angle ACF=90°$.
∴ $EF^2=CF^2+CE^2$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\because EF=DE,CF=BD,$

$\therefore DE^2=BD^2+CE^2.$

3. 证明：(1)在$\triangle ACB$中，$AB=3\sqrt{5}$，$BC=6,AC=3$，

在$\triangle DCE$中，$DE=2\sqrt{5},EC=4,$

$DC=2,\therefore \frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EC}=\frac{AC}{DC}=\frac{3}{2}.$

$\therefore \triangle ACB\backsim\triangle DCE.$

(2)$\because \triangle ACB\backsim\triangle DCE,$

$\therefore \angle ABC=\angle DEC.$

$\because \angle ABC+\angle BAC=90^\circ,$

$\therefore \angle DEC+\angle BAC=90^\circ.$

$\therefore \angle EFA=90^\circ.$

$\therefore EF\perp AB.$

4. (1)①假　②假　③真

(2)证明：如图，连接BD_1,B_1D_1.

$\because \angle BCD=\angle B_1C_1D_1,\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CD}{C_1D_1},$

$\therefore \triangle BCD\backsim\triangle B_1C_1D_1.$

$\therefore \angle CBD=\angle C_1B_1D_1,\angle CDB=\angle C_1D_1B_1,\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{BD}{B_1D_1},$

又$\because \angle ABC=\angle A_1B_1C_1,\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1},$

$\therefore \angle ABD=\angle A_1B_1D_1,\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BD}{B_1D_1},$

$\therefore \triangle ABD\backsim\triangle A_1B_1D_1.$

$\therefore \frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AD}{A_1D_1},\angle ADB=\angle A_1D_1B_1,$

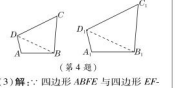
$\angle DAB=\angle D_1A_1B_1.$

$\therefore \frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CD}{C_1D_1}=\frac{AD}{A_1D_1},\angle ABC=\angle A_1B_1C_1,\ \angle BCD=\angle B_1C_1D_1,$

$\angle ADC=\angle A_1D_1C_1,$

$\angle DAB=\angle D_1A_1B_1.$

四边形$ABCD$与四边形$A_1B_1C_1D_1$相似.



(第4题)

(3)解：四边形$ABFE$与四边形$EFCD$相似，

$\therefore \frac{DE}{AE}=\frac{EF}{AB}.$

$\because EF=OE+OF,$

$\therefore \frac{DE}{AE}=\frac{OE+OF}{AB}.$

$\because EF//AB,$

$\therefore \triangle DEO\backsim\triangle DAB,\triangle COF\backsim\triangle CAB,$

$\therefore \frac{DE}{AD}=\frac{OE}{AB},\frac{OC}{AC}=\frac{OF}{AB}.$

$\therefore EF//CD,$

$\therefore \frac{DE}{AC}=\frac{OC}{AC}.\because \frac{DE}{AD}=\frac{OF}{AB},$

$\therefore \frac{DE}{AD}+\frac{DE}{AB}=\frac{OE}{AB}+\frac{OF}{AB}.$

$\therefore \frac{2DE}{AD}=\frac{EF}{AB}=\frac{DE}{AE}.$

$\therefore AD=DE+AE,$

$\therefore \frac{2}{DE+AE}=\frac{1}{AE}.$

$\therefore 2AE=DE+AE,$即$AE=DE.$

$\therefore \frac{DC}{EF}=\frac{CF}{BF}=\frac{EF}{AB}=\frac{DE}{AE}=1,$

$\therefore$四边形$EFCD$与四边形$ABFE$全等.

$\therefore \frac{S_2}{S_1}=1.$

第6课时　相似三角形的性质

1. A　**2.** C　**3.** A　**4.** B　**5.** C　**6.** A

7. D

8. C　**点拨**：$\because \angle CAD=\angle B,\angle ACD=\angle BCA,$

$\therefore \triangle ACD\backsim\triangle BCA.$

$\therefore \frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle BCA}}=\left(\frac{AC}{BC}\right)^2,$

即$\frac{a}{S_{\triangle BCA}}=\frac{1}{4},$

则$S_{\triangle BCA}=4a.$

$\therefore S_{\triangle ABD}=S_{\triangle BCA}-S_{\triangle ACD}=4a-a=3a.$

9. C

10. B　**点拨**：$\because$在$\square ABCD$中，$\angle BAD=\angle BCD=60^\circ,\therefore \angle ADC=120^\circ.$

$\because DE$平分$\angle ADC,$

$\therefore \angle ADE=\angle DAE=60^\circ=\angle AED,$

$\therefore \triangle ADE$是等边三角形，

$\therefore AD=AE=DE.$

$\because AD=\frac{1}{2}AB,$

$\therefore AE=\frac{1}{2}AB=BE,$

$\therefore DE=BE,$

$\therefore \angle BDE=\angle DBE,$

$\therefore \angle BDE=\frac{1}{2}\angle AED=30^\circ,$

$\therefore \angle ADB=90^\circ,$即$AD\perp BD,$

$\therefore S_{\square ABCD}=AD\cdot BD,$故(1)正确；

$\because \angle CDE=60^\circ,\angle BDE=30^\circ,$

$\therefore \angle CDB=\angle BDE=30^\circ,$

$\therefore DB$平分$\angle CDE,$故(2)正确；

$\because$在Rt$\triangle AOD$中，$AO>AD,$

$\therefore AO>DE,$故(3)错误；

$\because O$是BD的中点，E是AB的中点，

$\therefore OE$是$\triangle ABD$的中位线，

$\therefore OE//AD,OE=\frac{1}{2}AD,$

$\therefore \triangle DAF=\angle FOE,\angle ADF=\angle OEF,$

$\therefore \triangle OEF\backsim\triangle ADF,$

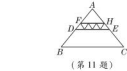
$\therefore S_{\triangle ADF}=4S_{\triangle OEF},$且$AF=2OF,$

$\therefore S_{\triangle AEF}=2S_{\triangle OEF},$

$\therefore S_{\triangle ABF}=6S_{\triangle OEF},$

故④错误.故选B.

11. D　**点拨**：如图所示.



(第11题)

根据题意得$\triangle AFH\backsim\triangle ADE,$

$\therefore \frac{S_{\triangle AFH}}{S_{\triangle ADE}}=\left(\frac{FH}{DE}\right)^2=\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16},$

设$S_{\triangle AFH}=9x,$则$S_{\triangle ADE}=16x,$

$\therefore 16x-9x=7,$解得$x=1.$

$\therefore S_{\triangle ADE}=16.$

$\therefore$四边形$DBCE$的面积为$42-16=26.$

本题易忽略相似三角形性质的适用条件而致错.

12. (1)证明：$\because$四边形$ABCD$为菱形，

$\therefore BD$平分$\angle ABC.$

$\therefore \angle ABC=2\angle ABG.$

又$\because \angle ABC=2\angle BAM,$

$\therefore \angle BAG=\angle ABG.$

$\therefore AG=BG.$

(2)解：$\because$四边形$ABCD$为菱形，

$\therefore AD//BC,AD=BC.$

$\because \angle GAD=\angle GMB.$

$\because \angle AGD=\angle BGM,$

$\therefore \triangle BGM\backsim\triangle DGA.$

$\because M$为BC的中点，

$\therefore BM=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AD.$

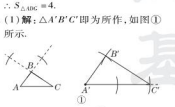
即$\triangle BGM$与$\triangle DGA$的相似比为$1:2,$

$\therefore S_{\triangle BGM}:S_{\triangle ADM}=1:4.$

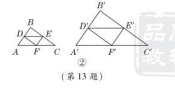
$\because S_{\triangle BGM}=1,$

$\therefore S_{\triangle ADM}=4.$

13. (1)解：$\triangle A'B'C'$即为所作，如图①所示.



①



②

(第13题)

(2)证明：如图②所示.

$\because D,E,F$分别是$\triangle ABC$三边AB,BC,CA的中点，

$\therefore DE=\frac{1}{2}AC,DF=\frac{1}{2}BC,EF=\frac{1}{2}AB.$

$\therefore \triangle DEF\backsim\triangle CAB.$

同理，$\triangle D'E'F'\backsim\triangle C'A'B'.$

由(1)可知$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C',$

$\therefore \triangle DEF\backsim\triangle D'E'F'.$

14. 解：问题1：

(1)$\frac{3}{16}$　**点拨**：$\because AB=4,AD=3,$

$\therefore BD=4-3=1.$

$\because DE//BC,$

$\therefore \frac{CE}{EA}=\frac{BD}{AD}=\frac{1}{3}.$

$\therefore \frac{S_{\triangle DEC}}{S_{\triangle ADE}}=\frac{EC}{AE}=\frac{1}{3}.$

$\because DF//BC,$

$\therefore \triangle ADE\backsim\triangle ABC,$

$\therefore \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=\left(\frac{AD}{AB}\right)^2=\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16},$

$\therefore \frac{S_{\triangle DEC}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{3}{16},$即$\frac{S'}{S}=\frac{3}{16}.$

(2)方法一：$\because AB=4,AD=m,$

$\therefore BD=4-m.$

$\because DE//BC,$

$\therefore \frac{CE}{EA}=\frac{BD}{AD}=\frac{4-m}{m}.$

$\therefore \frac{S_{\triangle DEC}}{S_{\triangle ADE}}=\frac{CE}{AE}=\frac{4-m}{m}.$

$\because DE//BC,$

$\therefore \triangle ADE\backsim\triangle ABC,$

$\therefore \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=\left(\frac{AD}{AB}\right)^2=\left(\frac{m}{4}\right)^2=\frac{m^2}{16},$

$\therefore \frac{S_{\triangle DEC}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{S_{\triangle DEC}}{S_{\triangle ADE}}\cdot\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{4-m}{m}\cdot\frac{m^2}{16}=\frac{-m^2+4m}{16},$

即$\frac{S'}{S}=\frac{-m^2+4m}{16}.$

方法二：如图①，过点B作$BH\perp AC$于H，过点D作$DF\perp AC$于F，则$DF//BH,$

$\therefore \triangle ADF\backsim\triangle ABH,$

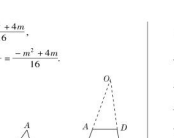
$\therefore \frac{DF}{BH}=\frac{AD}{AB}=\frac{m}{4}.$

$\because DE//BC,$

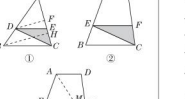
$\therefore \frac{CE}{AC}=\frac{BD}{AB}=\frac{4-m}{4},$

$\therefore \frac{S_{\triangle DEC}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{\frac{1}{2}CE\cdot DF}{\frac{1}{2}CA\cdot BH}=\frac{4-m}{4}\cdot\frac{m}{4}=\frac{-m^2+4m}{16},$

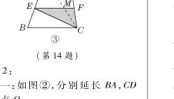
即$\frac{S'}{S}=\frac{-m^2+4m}{16}.$



①



②



③

(第14题)

问题2：

方法一：如图②，分别延长BA,CD交于点$O.$

$\because AD//BC,$

$\therefore \triangle OAD\backsim\triangle OBC,$

$\therefore \frac{OA}{OB}=\frac{AD}{BC}=\frac{1}{2}.$

$\therefore OA=AB=4,\therefore OB=8.$

$\because AE=n,\therefore OE=4+n.$

$\because EF//BC,$

$\therefore$由问题1的解法可知：$\frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle OBC}}=\frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle OEF}}\cdot\frac{S_{\triangle OEF}}{S_{\triangle OBC}}=\frac{4-n}{4+n}\cdot\left(\frac{4+n}{8}\right)^2=\frac{16-n^2}{64}.$

$\because \frac{S_{\triangle OAD}}{S_{\triangle OBC}}=\left(\frac{OA}{OB}\right)^2=\frac{1}{4},$

$\therefore \frac{S_{四边形ABCD}}{S_{\triangle OBC}}=\frac{3}{4},$

$\therefore \frac{S_{\triangle CEF}}{S_{四边形ABCD}}=\frac{S_{\triangle CEF}}{\frac{3}{4}S_{\triangle OBC}}=\frac{4}{3}\times\frac{16-n^2}{64}=\frac{16-n^2}{48},$即$\frac{S'}{S}=\frac{16-n^2}{48}.$

方法二：如图③，连接AC交EF于$M.$

$\because AD//BC,$且$AD=\frac{1}{2}BC,$

$\therefore \frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{1}{2},$

$\therefore S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC},$

$\therefore S_{\triangle ADC}=\frac{1}{3}S,S_{\triangle ABC}=\frac{2}{3}S.$

由问题1的结论可知：$\frac{S_{\triangle EMC}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{-n^2+4n}{16},$

$\therefore S_{\triangle EMC}=\frac{-n^2+4n}{16}\cdot S_{\triangle ABC}=\frac{-n^2+4n}{16}\cdot\frac{2}{3}S=\frac{(-2n^2+8n)S}{48}.$

$\because EF//BC,$

$\therefore \frac{CF}{CD}=\frac{BE}{AB}=\frac{4-n}{4}.$

$\because MF//AD,$

$\therefore \triangle CFM\backsim\triangle CDA,$

$\therefore \frac{S_{\triangle CFM}}{S_{\triangle CDA}}=\left(\frac{CF}{CD}\right)^2=\left(\frac{4-n}{4}\right)^2.$

又$\because \frac{S_{\triangle CFM}}{S_{\triangle CDA}}=\frac{S_{\triangle CFM}}{\frac{3}{4}S}=\frac{3S_{\triangle CFM}}{S},$

$\therefore \frac{3S_{\triangle CFM}}{S}=\left(\frac{4-n}{4}\right)^2,$

$\therefore S_{\triangle CFM}=\frac{(4-n)^2S}{48},$

$\therefore S_{\triangle EFC}=S_{\triangle EMC}+S_{\triangle CFM}=\frac{(-2n^2+8n)S}{48}+\frac{(4-n)^2S}{48}=\frac{(16-n^2)S}{48},$

$\therefore \frac{S'}{S}=\frac{16-n^2}{48}.$

阶段核心归类

1. (1)证明：$\because$四边形$ABCD$是平行四边形，

$\therefore OA=OC,AB//CD.$

$\therefore \angle OAE=\angle OCF.$

在$\triangle AOE$和$\triangle COF$中，

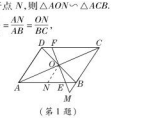
$\begin{cases}\angle OAE=\angle OCF,\\ OA=OC,\\ \angle AOE=\angle COF,\end{cases}$

$\therefore \triangle AOE\cong\triangle COF$(ASA).

$\therefore OE=OF.$

(2)解：如图，过点O作$ON//BC$交AB于点N，则$\triangle AON\backsim\triangle ACB.$

$\therefore \frac{OA}{AC}=\frac{AN}{AB}=\frac{ON}{BC},$



(第1题)

$\because OA=OC=\frac{1}{2}AC,$

$\therefore ON=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AD=2,$

$BN=\frac{1}{2}AB=3.$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\because ON // BC$,

$\therefore \angle ONE = \angle MBE$.

又$\because \angle OEN = \angle MEB$,

$\therefore \triangle ONE \backsim \triangle MBE$.

$\therefore \dfrac{ON}{BM} = \dfrac{NE}{BE}$, 即$\dfrac{2}{1} = \dfrac{3-BE}{BE}$,

解得 $BE = 1$.

2. **解**: 相似. 理由如下: $\because \dfrac{EO}{BO} = \dfrac{DO}{CO}$,

$\angle BOE = \angle COD$, $\angle DOE = \angle COB$,

$\therefore \triangle BOE \backsim \triangle COD$, $\triangle DOE \backsim \triangle COB$.

$\therefore \angle EBO = \angle DCO$, $\angle DEO = \angle CBO$.

$\because \angle ADE = \angle DCO + \angle DEO$,

$\angle ABC = \angle EBO + \angle CBO$,

$\therefore \angle ADE = \angle ABC$.

又$\because \angle A = \angle A$,

$\therefore \triangle ADE \backsim \triangle ABC$.

3. **证明**: $\because \angle BAC = 90^\circ$, $AD \perp BC$,

$\therefore \angle BAC = \angle ADB = 90^\circ$.

又$\because \angle CBA = \angle ABD$,

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle DBA$.

$\therefore \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{DB}{DA}$, $\angle BAD = \angle C$.

$\because AD \perp BC$, E 为 AC 的中点,

$\therefore DE = EC$.

$\therefore \angle BDF = \angle CDE = \angle C$.

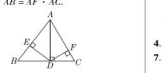
$\therefore \angle BDF = \angle BAD$.

又$\because \angle F = \angle F$,

$\therefore \triangle DBF \backsim \triangle ADF$.

$\therefore \dfrac{DB}{AD} = \dfrac{DF}{AF}$, $\therefore \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{DF}{AF}$.

点拨: 当所证等积式或比例式运用“三点定型法”不能定型或能定型而不相似, 条件又不具备成比例线段时, 可考虑用中间比“搭桥”, 称为“等比转换法”, 有时还可用“等积转换法”, 例如: 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AD \perp BC$ 于点 D, $DE \perp AB$ 于点 E, $DF \perp AC$ 于点 F, 求证: $AE \cdot AB = AF \cdot AC$. 可由两组“射影图”得 $AE \cdot AB = AD^2$, $AF \cdot AC = AD^2$, $\therefore AE \cdot AB = AF \cdot AC$.



(第 3 题)

4. **证明**: (1) $\because \angle DAB = \angle EAC$,

$\therefore \angle DAE = \angle BAC$.

又$\because \angle ADE = \angle ABC$,

$\therefore \triangle ADE \backsim \triangle ABC$.

(2) $\because \triangle ADE \backsim \triangle ABC$,

$\therefore \dfrac{AD}{AE} = \dfrac{AB}{AC}$

$\because \angle DAB = \angle EAC$,

$\therefore \triangle ADB \backsim \triangle AEC$.

$\therefore \dfrac{AD}{AE} = \dfrac{BD}{CE}$.

5. (1) **证明**: $\because \angle A = \angle B = \angle DEC = 90^\circ$,

$\therefore \angle DEA + \angle CEB = 90^\circ$, $\angle DEA + \angle D = 90^\circ$,

$\therefore \angle D = \angle CEB$,

$\therefore \triangle ADE \backsim \triangle BEC$.

(2) **解**: 同意, 选择图②(或图③)说明理由:

$\because \angle A = \angle B = \angle DEC$, $\angle A + \angle D = \angle DEC + \angle CEB$,

$\therefore \angle D = \angle CEB$,

$\therefore \triangle ADE \backsim \triangle BEC$.

3.5 相似三角形的应用

1. B

2. C **点拨**: 如图, 设 BD 是 BC 在地面上的影子, 设树高为 x m. 根据竹竿的高与其影子长度的比值和树高与其影子长度的比值相等, 得$\dfrac{CB}{BD} = \dfrac{1}{0.8}$, 而$CB = 1.2$ m,

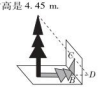
$\therefore BD = 0.96$ m.

$\therefore$ 树在地面上的实际影长是 $0.96 + 2.6 = 3.56$(m).

则$\dfrac{x}{3.56} = \dfrac{1}{0.8}$.

$\therefore x = 4.45$.

$\therefore$ 树高是 4.45 m.



(第 2 题)

3. 5.5 **点拨**: 根据“两角对应相等的两个三角形相似”, 可知$\triangle EDF \backsim \triangle CDB$, 则$\dfrac{BC}{EF} = \dfrac{CD}{DE}$, 即$\dfrac{AB-1.5}{0.2} = \dfrac{8}{0.4}$, 解得 $AB = 5.5$ m.

4. B **5.** C **6.** 8 m

7. A **点拨**: 由题意知$\angle AGC = \angle FGE$,

$\because \angle ACG = \angle FEG = 90^\circ$,

$\therefore \triangle ACG \backsim \triangle FEG$.

$\therefore \dfrac{AC}{FE} = \dfrac{CG}{EG}$,

$\therefore \dfrac{AC}{1.6} = \dfrac{15}{3}$.

$\therefore AC = 8$ m.

$\therefore AB = AC + BC = 8 + 0.5 = 8.5$(m).

8. **解**: 设 $OE = x$ m, $OA = a$ m, $BC = b$ m, 则 $AB = (2-b)$ m, $CD = (2.1-b)$ m, $CO = (2+a)$ m.

由光的反射定律可知 $\triangle AFB \backsim \triangle AEO$, $\triangle CDG \backsim \triangle COE$,

$\therefore \dfrac{BF}{OE} = \dfrac{AB}{OA}$, 即$\dfrac{1.6}{x} = \dfrac{2-b}{a}$;①

$\dfrac{DG}{OE} = \dfrac{CD}{CO}$, 即$\dfrac{1.6}{x} = \dfrac{2.1-b}{2+a}$.②

由①②得 $a = 20(2-b)$.③

将③代入①, 得$\dfrac{1.6}{x} = \dfrac{2-b}{20(2-b)}$,

解得 $x = 32$.

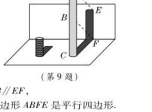
答: 楼的高度 OE 为 32 m.

9. **解**: (1) 设敏敏的影长为 x cm.

由题意得$\dfrac{150}{x} = \dfrac{90}{60}$, 解得 $x = 100$.

答: 敏敏的影长为 100 cm.

(2) 如图, 连接 AE, 作 $FB // EA$, 交 AC 于 B.



(第 9 题)

$\because AB // EF$,

$\therefore$ 四边形 $ABFE$ 是平行四边形.

$\therefore AB = EF = 150$ cm.

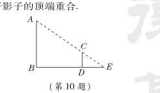
设 $BC = y$ cm, 由题意知 BC 落在地面上的影长为 120 cm,

$\therefore \dfrac{y}{120} = \dfrac{90}{60}$, 解得 $y = 180$.

$\therefore AC = AB + BC = 150 + 180 = 330$(cm).

答: 高圆柱的高度为 330 cm.

10. **解**: (1) 如图, 沿着旗杆的影子竖立标杆, 使标杆影子的顶端正好与旗杆影子的顶端重合.



(第 10 题)

(2) 用皮尺测量旗杆的影长 $BE = a$ m, 标杆 CD 的影长 $DE = b$ m, 标杆高 $CD = c$ m.

根据$\triangle EDC \backsim \triangle EBA$, 得$\dfrac{CD}{AB} = \dfrac{ED}{EB}$,

即$\dfrac{c}{AB} = \dfrac{b}{a}$, 所以 $AB = \dfrac{ac}{b}$ m,

即旗杆 AB 的高度为$\dfrac{ac}{b}$ m. (设计方案不唯一)

11. **解**: $\because MN \perp NQ$, $AC \perp NQ$,

$\therefore CA // MN$,

$\therefore \triangle CAD \backsim \triangle MND$. $\therefore \dfrac{CA}{MN} = \dfrac{AD}{ND}$,

$\therefore \dfrac{1.6}{MN} = \dfrac{1 \times 0.8}{(5+1) \times 0.8}$. $\therefore MN = 9.6$ m.

$\because BE \perp NQ$, $MN \perp NQ$, $\therefore BE // MN$,

$\therefore \triangle EFB \backsim \triangle MFN$. $\therefore \dfrac{EB}{MN} = \dfrac{BF}{NF}$,

$\therefore \dfrac{EB}{9.6} = \dfrac{2 \times 0.8}{(2+9) \times 0.8}$.

$\therefore EB = 1.75$ m.

$\therefore$ 小军的身高 BE 约为 1.75 m.

3.6 位 似

第 1 课时 位似图形

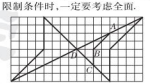
1. D **2.** D **3.** C **4.** $\dfrac{2}{5}$ **5.** C **6.** C

7. D

8. C **点拨**: 由题意可得 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 是位似图形, $\therefore \triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 是相似图形, 故①②正确; $\because$ 点 D, E, F 分别是 AO, BO, CO 的中点, $\therefore \triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的相似比为 2∶1, $\therefore$ 其周长比为 2∶1, 故③错误; $\because$ 相似三角形的面积比等于相似比的平方, $\therefore \triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的面积比为 4∶1, 故④正确. 故选 C.

9. **解**: 如图.

易错总结: 此题易忽略其中一种情况, 当题中对位似图形的位置没有限制条件时, 一定要考虑全面.



(第 9 题)

10. **解**: 是. 理由: $\because$ 点 E, F 分别是 OA, OB 的中点,

$\therefore FE = \dfrac{1}{2}AB$, $FE // AB$.

$\therefore$ 点 G, H 分别是 OC, OD 的中点,

$\therefore HG = \dfrac{1}{2}CD$, $HG // CD$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AB = CD$, $AB // CD$.

$\therefore EF = HG$, $FE // HG$.

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

$\because FE // AB$, $\therefore \angle OEF = \angle OAB$.

同理 $\angle OEH = \angle OAD$,

$\therefore \angle HEF = \angle DAB$,

同理 $\angle EFG = \angle ABC$, $\angle FGH = \angle BCD$, $\angle GHE = \angle CDA$.

又易得$\dfrac{EF}{AB} = \dfrac{FG}{BC} = \dfrac{GH}{CD} = \dfrac{HE}{AD} = \dfrac{1}{2}$,

$\therefore \square EFGH \backsim \square ABCD$.

又$\because$ 它们的对应顶点的连线相交于点 O, $\therefore \square ABCD$ 与四边形 $EFGH$ 是位似图形, O 为位似中心.

11. **证明**: $\because \triangle DEO$ 与 $\triangle ABO$ 是位似图形, $\therefore \dfrac{OD}{OA} = \dfrac{OE}{OB}$.

$\because \triangle OEF$ 与 $\triangle OBC$ 是位似图形,

$\therefore \dfrac{OE}{OB} = \dfrac{OF}{OC}$.

$\therefore \dfrac{OD}{OA} = \dfrac{OF}{OC}$, 即 $OD \cdot OC = OF \cdot OA$.

12. **解**: (1) $\triangle ABC$ 与 $\triangle FGC$ 是位似图形, 位似中心是点 C.

在矩形 $ABCD$ 中, $AD // BC$,

$\therefore \angle DAF = \angle ECF$, $\angle ADF = \angle CEF$,

$\therefore \triangle AFD \backsim \triangle CFE$. $\therefore \dfrac{CF}{AF} = \dfrac{CE}{AD}$.

又$\because AD = BC$, $\therefore \dfrac{CF}{AF} = \dfrac{CE}{BC}$.

$\because \angle ABC = 90^\circ$, $OE \perp BC$,

$\therefore OE // AB$.

又$\because OA = OC$, $\therefore CE = \dfrac{1}{2}BC$,

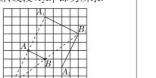
$\therefore \dfrac{CF}{AF} = \dfrac{1}{2}$. $\therefore \dfrac{CF}{AC} = \dfrac{1}{3}$,

即 $\triangle ABC$ 与 $\triangle FGC$ 的位似比为 3∶1.

(2) CF∶$BC = 1$∶4.

13. **解**: (1) 如图, 线段 A_1B_1 即为所求.

(2) 如图, 线段 A_2B_1 即为所求.



(第 13 题)

(3) 20

第 2 课时 平面直角坐标系中的位似变换

1. C **2.** A **3.** A **4.** $(-1,2)$或$(1,-2)$

5. $(2,2\sqrt{3})$ **点拨**: 分别过 A, C 作 $AE \perp OB$, $CF \perp OB$,

$\because \angle OCD = 90^\circ$, $\angle AOB = 60^\circ$,

$\therefore \angle ABO = \angle CDO = 30^\circ$, $\angle OCF = 30^\circ$.

$\because \triangle OAB$ 与 $\triangle OCD$ 是以点 O 为位似中心的位似图形, 位似比为 3∶4, 点 B 的坐标是 $(6,0)$.

$\therefore$ 点 D 的坐标是 $(8,0)$, 则 $DO = 8$, 故 $OC = 4$, 则 $FO = 2$,

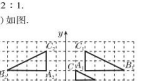
$\therefore CF = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$,

故点 C 的坐标是 $(2,2\sqrt{3})$.

6. $(4,6)$或$(-4,-6)$

7. **解**: (1) $\triangle A_1B_1C_1$ 与 $\triangle ABC$ 的位似比是 2∶1.

(2) 如图.



(第 7 题)

(3) $\because$ 点 $P(a,b)$ 为 $\triangle ABC$ 内一点, $\therefore$ 依上述两次变换后, 点 P 在 $\triangle A_2B_2C_2$ 内的对应点 P_2 的坐标是 $(-2a,2b)$.

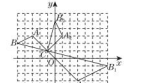
8. B **点拨**: 点 $P(m,n)$ 是线段 AB 上一点, 以原点 O 为位似中心把 $\triangle AOB$ 放大到原来的两倍, 则点 P 的对应点的坐标为 $(m \times 2, n \times 2)$或 $(m \times (-2), n \times (-2))$, 即 $(2m,2n)$或 $(-2m,-2n)$. 故选 B. 本题易忽略其中一种情况, 应考虑全面.



答案速查

9. **解**: (1) 如图, $\triangle A_1B_1C$ 即为所作, 点 A_1 的坐标为 $(3,-3)$.

(2) 如图, $\triangle A_2B_2C$ 即为所作.

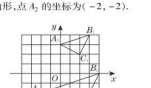


(第 9 题)

(3) $CB = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$, 点 B 经过的路径长为$\dfrac{90 \cdot \pi \cdot \sqrt{17}}{180} = \dfrac{\sqrt{17}}{2}\pi$.

10. **解**: (1) 如图, $\triangle A_1B_1C_1$ 就是所要画的三角形.

(2) 如图, $\triangle A_2B_2C$ 就是所要画的三角形, 点 A_2 的坐标为 $(-2,-2)$.



(第 10 题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

11. 解：(1)图略.

(2)将点(0,4)，(1,0)，(2,4)，(3,0)，(4,4)的横坐标保持不变，纵坐标分别乘 -1，得(0，-4)，(1,0)，(2，-4)，(3,0)，(4，-4)，然后描点连线，图略.

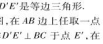
(3)将点(0,4)，(1,0)，(2,4)，(3,0)，(4,4)的纵坐标保持不变，横坐标分别乘 -1，得(0,4)，(-1,0)，(-2,4)，(-3,0)，(-4,4)，然后描点连线，图略.

(4)图案①与图案②关于 x 轴对称，图案①与图案③关于 y 轴对称.

12. 解：(1)由已知得 $k=-2$，

把点(3,1)的坐标和 $k=-2$ 代入 $y=kx+b$，得 $1=-2\times3+b$，

$\therefore b=7$.



(2)如图，根据位似比为1:2得函数 $y=kx+b$ 的图象有两种情况：



(第12题)

①不经过第三象限时，过点(1,0)和(0，2)，这时函数表达式为 $y=-2x+2$；

②不经过第一象限时，过点(-1,0)和(0，-2)，这时函数表达式为 $y=-2x-2$.

点拨：本题考查了一次函数的应用，根据**数形结合思想**利用**待定系数法**进行**分类讨论**，即可求出函数表达式.

阶段核心归类

1. 证明：$\because E'C'//EC$，

$\therefore \angle C'E'O=\angle CEO$，$\angle OCE=\angle OC'E'$.

$\therefore \dfrac{CE}{C'E'}=\dfrac{OE}{OE'}$.

又$\because E'D'//ED$，

$\therefore \angle D'E'O=\angle DEO$，$\angle DOE=\angle D'OE'$.

$\therefore \angle CED=\angle C'E'D'$，$\dfrac{DE}{D'E'}=\dfrac{OE}{OE'}$.

$\therefore \dfrac{CE}{C'E'}=\dfrac{DE}{D'E'}$. $\therefore \triangle CDE\backsim\triangle C'D'E'$.

又$\because \triangle CDE$ 是等边三角形，

$\therefore \triangle C'D'E'$ 是等边三角形.

2. 解：如图，在 AB 边上任取一点 D'，过点 D' 作 $D'E'\perp BC$ 于点 E'，在 BC 上截取 $E'F'$，使 $E'F'=2D'E'$，过点 F' 作 $F'G'\perp BC$，过点 D' 作 $D'G'//BC$ 交 $F'G'$ 于点 G'，作射线 BG' 交 AC 于点 G，过点 G 作 $GF//G'F'$，$DG//D'G'$，GF 交 BC 于点 F，DG 交 AB 于点 D，过点 D 作 $DE//D'E'$ 交 BC 于点 E，则四边形 $DEFG$ 为 $\triangle ABC$ 的内接矩形，且 $DE:EF=1:2$.



(第2题)

3. 解：设符合要求的正方形 $PQMN$ 的边 PN 与 $\triangle ABC$ 的高 AD 相交于点 E，易知 AE 为 $\triangle APN$ 的边 PN 上的高.

设正方形 $PQMN$ 的边长为 x mm，

$\because PN//BC$，$\therefore \triangle APN\backsim\triangle ABC$，

$\therefore \dfrac{AE}{AD}=\dfrac{PN}{BC}$，

即$\dfrac{80-x}{80}=\dfrac{x}{120}$，解得 $x=48$，

即这个正方形零件的边长是 48 mm.

4. (1)证明：$\because DE//BC$，

$\therefore \triangle ADP\backsim\triangle ABQ$，$\triangle AEP\backsim\triangle ACQ$，

$\therefore \dfrac{DP}{BQ}=\dfrac{AP}{AQ}$，$\dfrac{PE}{QC}=\dfrac{AP}{AQ}$，

$\therefore \dfrac{DP}{BQ}=\dfrac{PE}{QC}$.

(2)①解：$MN=\dfrac{\sqrt{2}}{9}$.

②证明：$\because \angle B+\angle C=90°$，$\angle CEF+\angle C=90°$，

$\therefore \angle B=\angle CEF$.

又$\because \angle BGD=\angle EFC=90°$，

$\therefore \triangle BGD\backsim\triangle EFC$.

$\therefore \dfrac{DG}{CF}=\dfrac{BG}{EF}$.

$\therefore DG\cdot EF=CF\cdot BG$.

又$\because DG=GF=EF$，

$\therefore GF^2=CF\cdot BG$.

由(1)的结论易得$\dfrac{DM}{BG}=\dfrac{MN}{GF}$，$\dfrac{MN}{GF}=\dfrac{EN}{CF}$，

$\therefore \left(\dfrac{MN}{GF}\right)^2=\dfrac{DM}{BG}\cdot\dfrac{EN}{CF}$，

即$\dfrac{MN^2}{FG^2}=\dfrac{DM}{BG}\cdot\dfrac{EN}{CF}$.

$\therefore MN^2=DM\cdot EN$.

全章热门考点整合应用

1. C　**2.** 20 m

3. 解：四边形 $ABCD$ 与四边形 $A'B'C'D'$ 相似. 理由：由已知条件易得，$\angle ADC=\angle AD'C'$，$\angle C=\angle C'$，$\angle ABC=\angle AB'C'$，$\angle A=\angle A'$，且$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{CD}{C'D'}=\dfrac{DA}{D'A'}=\dfrac{4}{3}$，所以四边形 $ABCD$ 与四边形 $A'B'C'D'$ 相似.

4. 解：如图，过点 B 作 $BM\perp x$ 轴于点 M，过点 B' 作 $B'N\perp x$ 轴于点 N，

$\therefore \angle BMC=\angle B'NC=90°$，

又$\because \angle BCM=\angle NCB'$

$\therefore \triangle CBM\backsim\triangle CB'N$.

$\therefore MC:NC=BM:B'N=BC:B'C$.

又由已知条件知 $NC=a+1$，$B'N=-b$，$BC:B'C=1:2$，

$\therefore MC:(a+1)=BM:(-b)=1:2$.

$\therefore MC=\dfrac{1}{2}(a+1)$，$BM=-\dfrac{b}{2}$.

$\therefore MO=\dfrac{1}{2}(a+1)+1=\dfrac{a+3}{2}$.

$\therefore$ 点 B 的坐标为$\left(-\dfrac{a+3}{2},-\dfrac{b}{2}\right)$.



(第4题)

5. 解：由题意，得$\begin{cases}2a+b=6c,\\a+b=5c,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=c,\\b=4c.\end{cases}$

$\therefore a:b:c=c:4c:c=1:4:1$.

6. 解：(1)$\because DE//BC$，

$\therefore \dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}$

即$\dfrac{8-2x}{8}=\dfrac{y}{6}$.

$\therefore y=-\dfrac{3}{2}x+6(0\leqslant x\leqslant4)$.

(2)$\because S_{\triangle BDE}=\dfrac{1}{2}\cdot2x\cdot y=$

$\dfrac{1}{2}\cdot2x\cdot\left(6-\dfrac{3}{2}x\right)=$

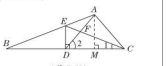
$-\dfrac{3}{2}(x-2)^2+6$，

且$-\dfrac{3}{2}(x-2)^2\leqslant0$，

$\therefore -\dfrac{3}{2}(x-2)^2+6\leqslant6$.

$\therefore$ 当 $x=2$ 时，$S_{\triangle BDE}$ 有最大值，最大值为 6.

7. (1)证明：如图，$\because D$ 是 BC 边上的中点，$DE\perp BC$，



(第7题)

$\therefore EB=EC$. $\therefore \angle B=\angle1$.

$\because AD=AC$，$\therefore \angle ACB=\angle2$.

$\therefore \triangle ABC\backsim\triangle FCD$.

(2)解：如图，过点 A 作 $AM\perp CB$ 于点 M. $\because D$ 是 BC 边上的中点，

$\therefore BC=2CD$.

由(1)知$\triangle ABC\backsim\triangle FCD$，

$\therefore \dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle FCD}}=\left(\dfrac{BC}{CD}\right)^2=\dfrac{4}{1}$.

$\because S_{\triangle FCD}=5$，$\therefore S_{\triangle ABC}=20$.

$\because S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}BC\cdot AM$，

$\therefore AM=\dfrac{2S_{\triangle ABC}}{BC}=\dfrac{2\times20}{10}=4$.

$\therefore DE\perp BC$，$AM\perp BC$，

$\therefore DE//AM$，

$\therefore \triangle BDE\backsim\triangle BMA$.

$\therefore \dfrac{DE}{AM}=\dfrac{BD}{BM}$.

由 $AD=AC$，$AM\perp BC$，

知 $DM=\dfrac{1}{2}CD=\dfrac{1}{4}BC=\dfrac{5}{2}$.

$\therefore BD=\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{1}{2}\times10=5$，

$\therefore \dfrac{DE}{4}=\dfrac{5}{5+\frac{5}{2}}$. $\therefore DE=\dfrac{8}{3}$.

8. (1)证明：$\because DR$ 平分 $\angle ADC$，

$\therefore \angle ADR=\angle CDR$.

$\because \angle ABD=\angle BCD=90°$，

$\therefore \triangle ABD\backsim\triangle BCD$. $\therefore \dfrac{AD}{BD}=\dfrac{BD}{CD}$.

$\therefore BD^2=AD\cdot CD$.

(2)解：$\because BM//CD$，$\therefore \angle MBD=\angle BDC$.

$\because \angle ADR=\angle MBD$.

$\because \angle ABD=90°$，

$\therefore BM=MD$，$\angle MAB=\angle MBA$.

$\therefore BM=MD=AM=4$.

$\because BD^2=AD\cdot CD$，且 $CD=6$，$AD=8$，

$\therefore BD^2=48$.

$\because BC^2=BD^2-CD^2=12$.

$\therefore MC^2=MB^2+BC^2=28$. $\therefore MC=2\sqrt{7}$.

$\because BM//CD$，

$\therefore \angle BMN=\angle DCN$.

又$\because \angle MNB=\angle CND$，

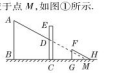
$\therefore \triangle MNB\backsim\triangle CND$.

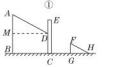
$\therefore \dfrac{BM}{CD}=\dfrac{MN}{CN}=\dfrac{2}{3}$.

即$\dfrac{MN}{2\sqrt{7}-MN}=\dfrac{2}{3}$，

解得 $MN=\dfrac{4}{5}\sqrt{7}$.

9. 解：(方法一：作延长线)延长 AD，与地面交于点 M，如图①所示.





(第9题)

由 $AM//FH$ 知 $\angle AMB=\angle FHG$.

$\because AB\perp BG$，$FG\perp BG$，$DC\perp BG$，

$\therefore \angle ABC=\angle DCM=\angle FGH=90°$.

$\therefore \angle AMB=\angle DMC=\angle FHG$，

$\therefore \triangle ABM\backsim\triangle DCM\backsim\triangle FGH$.

$\therefore \dfrac{AB}{BM}=\dfrac{CD}{CM}=\dfrac{FG}{GH}$.

$\because CD=2$ m，$FG=1.2$ m，$GH=2$ m，

$\therefore \dfrac{2}{CM}=\dfrac{1.2}{2}$.

解得 $CM=\dfrac{10}{3}$ m.

$\because BC=4$ m，

$\therefore BM=BC+CM=4+\dfrac{10}{3}=\dfrac{22}{3}$(m).

$\therefore \dfrac{AB}{\frac{22}{3}}=\dfrac{1.2}{2}$. 解得 $AB=4.4$ m.

故这棵树的高度是 4.4 m.

(方法二：作垂线)过点 D 作 $DM\perp AB$ 于点 M，如图②所示.

易知$\triangle AMD\backsim\triangle FGH$.

$\therefore \dfrac{AM}{DM}=\dfrac{FG}{GH}$.

而 $DM=BC=4$ m，$AM=AB-CD=(AB-2)$ m，$FG=1.2$ m，$GH=2$ m，

$\therefore \dfrac{AB-2}{4}=\dfrac{1.2}{2}$.

解得 $AB=4.4$ m.

故这棵树的高度是 4.4 m.

10. 解：如图，过点 A 作 $AF\perp DE$，垂足为 F，并延长 AF 交 BC 于点 G.

由题意知 $DE=24$ m，$BC=60$ m，$AF=30$ m.

$\because DE//BC$，$\therefore \triangle ADE\backsim\triangle ABC$.

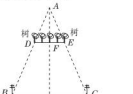
$\because AF\perp DE$，$DE//BC$，$\therefore AG\perp BC$.

$\therefore \dfrac{AF}{AG}=\dfrac{DE}{BC}$，即$\dfrac{30}{AG}=\dfrac{24}{60}$.

解得 $AG=75$ m，

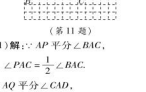
$\therefore FG=AG-AF=75-30=45$(m)，

即河的宽度为 45 m.



(第10题)

11. 解：如图，$\triangle A'B'C'$ 即为所求作的图形.



(第11题)

12. (1)解：$\because AP$ 平分 $\angle BAC$，

$\therefore \angle PAC=\dfrac{1}{2}\angle BAC$.

$\because AQ$ 平分 $\angle CAD$，

$\therefore \angle CAQ=\dfrac{1}{2}\angle CAD$.

$\therefore \angle PAC+\angle CAQ=\dfrac{1}{2}\angle BAC+\dfrac{1}{2}\angle CAD=\dfrac{1}{2}(\angle BAC+\angle CAD)$.

又$\because \angle BAC+\angle CAD=180°$，

$\therefore \angle PAC+\angle CAQ=90°$，

即 $\angle PAQ=90°$.

(2)证明：由(1)知 $\angle PAQ=90°$.

$\because M$ 是线段 PQ 的中点，

$\therefore PM=AM$.

$\therefore \angle APM=\angle PAM$.

$\because \angle APM=\angle B+\angle BAP$，$\angle PAM=\angle CAM+\angle PAC$，$\angle BAP=\angle PAC$，

$\therefore \angle B=\angle CAM$.

$\therefore \angle AMC=\angle BMA$，

$\therefore \triangle ACM\backsim\triangle BAM$.

$\therefore \dfrac{CM}{AM}=\dfrac{AM}{BM}$.

$\therefore AM^2=CM\cdot BM$，

即 $PM^2=CM\cdot BM$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第4章　锐角三角函数

4.1　正弦和余弦

第1课时　正弦函数

1. $\frac{4}{5}$　**2.** B　**3.** D　**4.** A

5. A　**点拨**：过点 A 作 $AB\perp x$ 轴于点 B，

∵点 A 的坐标为 $(4,3)$，

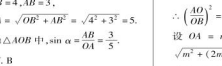
∴ $OB=4$，$AB=3$，

∴ $OA=\sqrt{OB^2+AB^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$.

在 Rt△AOB 中，$\sin\alpha=\frac{AB}{OA}=\frac{3}{5}$.

6. A　**7.** B

8. A　**点拨**：如图，连接 AC 交 BD 于点 O，过点 D 作 $DF\perp BE$ 于点 F，



（第8题）

∵ BD 平分∠ABC，

∴ ∠ABD=∠DBC.

∵在□$ABCD$ 中，$AD=BC$，$AD/\!/BC$，

∴ ∠ADB=∠DBC，

∴ ∠ADB=∠ABD，

∴ $AB=AD=BC$，

∴四边形 $ABCD$ 是菱形，

∴ $AC\perp BD$，$OB=OD$.

∵ $DE\perp BD$，∴ $OC/\!/DE$.

∵ $DE=6$，∴ $OC=\frac{1}{2}DE=3$，

∴ $AC=2OC=6$.

∵□$ABCD$ 的面积为 24，

∴ $\frac{1}{2}BD\cdot AC=24$，

∴ $BD=8$，∴ $OB=4$.

∴ $BC=CD=\sqrt{OB^2+OC^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$，

设 $CF=x$，则 $BF=5+x$，

由 $BD^2-BF^2=DC^2-CF^2$ 可得 $8^2-(5+x)^2=5^2-x^2$，

解得 $x=\frac{7}{5}$，

∴ $DF=\frac{24}{5}$，

∴ $\sin\angle DCE=\frac{DF}{DC}=\frac{\frac{24}{5}}{5}=\frac{24}{25}$.

9. D　**点拨**：如图，过点 A，B 分别作 $AD\perp x$ 轴，$BE\perp x$ 轴，垂足分别为 D，E，

∵点 A 在反比例函数 $y=-\frac{1}{x}(x<0)$ 的图象上，点 B 在反比例函数 $y=\frac{4}{x}(x>0)$ 的图象上，

∴ $S_{\triangle AOD}=\frac{1}{2}$，$S_{\triangle BOE}=2$.

又∵ ∠AOB=90°，

∴ ∠AOD=∠OBE.

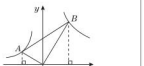
又∵ ∠ADO=∠OEB=90°，

∴ △AOD∽△OBE，

∴ $\left(\frac{AO}{OB}\right)^2=\frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle OBE}}=\frac{1}{4}$，∴ $\frac{AO}{OB}=\frac{1}{2}$.

设 $OA=m$，则 $OB=2m$，$AB=\sqrt{m^2+(2m)^2}=\sqrt{5}m$，

在 Rt△AOB 中，$\sin\angle ABO=\frac{OA}{AB}=\frac{m}{\sqrt{5}m}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.



（第9题）

10. D　**点拨**：如图，过点 C 作 $CD\perp AB$ 于点 D，则 ∠ADC=90°，

∴ $AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$.



第10题图象

∴ $\sin\angle BAC=\frac{CD}{AC}=\frac{4}{5}$.



（第10题）

学生易犯的错误是在△ABC 中直接运用正弦，而忘记了作垂线，构造直角三角形.

11. **解**：(1) ∵ $DE/\!/BC$，

∴ △ADE∽△ABC，∴ $\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}$.

又∵ $DE=3$，$BC=9$，

∴ $\frac{AD}{AB}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

(2) 根据(1)中 $\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}$，

得 $\frac{AD}{AD+BD}=\frac{DE}{BC}$

∵ $BD=10$，$DE=3$，$BC=9$，

∴ $\frac{AD}{AD+10}=\frac{3}{9}$，解得 $AD=5$，

∴ $AB=15$.

∴ $\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$.

12. (1) 证明：∵ $DE\perp AM$，$BF\perp AM$，

∴ ∠DEA=∠AFB=90°.

∵ ∠BAF+∠DAE=90°，

∠ADE+∠DAE=90°，

∴ ∠BAF=∠ADE.

在△DEA 和△AFB 中，

$\begin{cases}\angle DEA=\angle AFB,\\ \angle ADE=\angle BAF,\\ DA=AB,\end{cases}$

∴ △DEA≌△AFB.

∴ $AE=BF$.

(2) 解：设 $AE=x$，则 $BF=x$，

∵ △DEA≌△AFB.

∴ $DE=AF=2$.

∵四边形 $ABED$ 的面积为 24，

∴ $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\times 2x=24$，

解得 $x_1=6$，$x_2=-8$（舍去）.

∴ $AE=BF=6$.

∴ $EF=AE-AF=6-2=4$.

在 Rt△EFB 中，$BE=\sqrt{6^2+4^2}=2\sqrt{13}$，

∴ $\sin\angle EBF=\frac{EF}{BE}=\frac{4}{2\sqrt{13}}=\frac{2\sqrt{13}}{13}$.

13. **解**：(1) 有 3 对相似三角形，

即 △AMP ∽ △BPQ，△AMP ∽ △CQD，△BPQ∽△CQD.

(2) ∵ $AD/\!/BC$，

∴ ∠DQC=∠MDQ.

根据折叠的性质可知：

∠DQC=∠DQM，

∴ ∠MDQ=∠DQM，∴ $MD=MQ$.

∵ $AM=ME$，$BQ=EQ$，

∴ $BQ=EQ=MQ-ME=MD-AM$.

∵ $\sin\angle DMF=\frac{DF}{MD}=\frac{3}{5}$，

∴设 $DF=3x$，$MD=5x$，

∴ $BP=EP=AP=\frac{3x}{2}$，$BQ=5x-1$.

∵ △AMP∽△BPQ，∴ $\frac{AM}{BP}=\frac{AP}{BQ}$，

∴ $\frac{1}{\frac{3x}{2}}=\frac{\frac{3x}{2}}{5x-1}$，

解得 $x=\frac{2}{9}$ 或 $x=2$.

∵当 $x=\frac{2}{9}$ 时，$AP=\frac{3}{2}x=\frac{1}{3}<AM$，

∴ $x=\frac{2}{9}$ 应舍去.

∴ $AB=AP+BP=3x=6$.

14. (1) 解：将 $(-1,2)$ 代入 $y=mx$，得 $2=-m$，解得 $m=-2$，

∴正比例函数表达式为 $y=-2x$.

将 $(-1,2)$ 代入 $y=\frac{n-3}{x}$，

得 $2=-(n-3)$，解得 $n=1$，

∴反比例函数表达式为 $y=-\frac{2}{x}$.

联立正、反比例函数表达式成方程组，得 $\begin{cases}y=-2x,\\ y=-\frac{2}{x},\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x_1=-1,\\ y_1=2,\end{cases}\begin{cases}x_2=1,\\ y_2=-2,\end{cases}$

∴点 A 的坐标为 $(1,-2)$.

(2) 证明：∵四边形 $ABCD$ 是菱形，

∴ $AC\perp BD$，$AB/\!/CD$，

∴ ∠CPD=90°，∠DCP=∠BAP，即 ∠DCP=∠OAE.

∵ $AB\perp x$ 轴，

∴ ∠AEO=90°=∠CPD，

∴ △CPD∽△AEO.

(3) 解：∵点 A 的坐标为 $(1,-2)$，$AB\perp x$ 轴，

∴ $AE=2$，$OE=1$，

∴ $AO=\sqrt{AE^2+OE^2}=\sqrt{5}$.

∵ △CPD∽△AEO，

∴ ∠CDP=∠AOE，

即 ∠CDB=∠AOE，

∴ $\sin\angle CDB=\sin\angle AOE=\frac{AE}{AO}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

第2课时　正弦函数的计算

1. C　**2.** A　**3.** C

4. B　**点拨**：∵ $-\sin 60°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\sin 30°=\frac{1}{2}$，∴ $M\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$.

∴点 M 关于 x 轴对称的点的坐标是 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

5. C　**6.** A　**7.** C　**8.** D

9. **解**：(1) 原式 $=\sqrt{3}-1+2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+4=2\sqrt{3}+3$.

(2) 原式 $=2-1+4-4\times\frac{1}{2}=2-1+4-2=3$.

(3) 原式 $=1+\sqrt{2}-1-2\times\frac{\sqrt{2}}{2}+3=3$.

10. **解**：在 Rt△ADE 中，∠A=90°，∠AED=45°，∴ ∠ADE=45°.

∵ $\sin\angle ADE=\frac{AE}{DE}$，

∴ $AE=DE\cdot\sin\angle ADE=6\times\sin 45°=3\sqrt{2}$.

∵ $BE=AB-AE$，

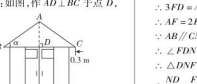
∴ $BE=5\sqrt{2}-3\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.

在 Rt△BCE 中，$\sin\angle BCE=\frac{BE}{CE}=\frac{2\sqrt{2}}{7}$.

第3课时　余弦函数

1. A

2. B　**点拨**：如图，作 $AD\perp BC$ 于点 D，



（第2题）

则 $BD=\frac{3}{2}+0.3=\frac{9}{5}$ m.

∵ $\cos\alpha=\frac{BD}{AB}$，∴ $\cos\alpha=\frac{\frac{9}{5}}{AB}$，

解得 $AB=\frac{9}{5\cos\alpha}$ m.

3. D　**点拨**：∵正方形 $ABCD$，$DPMN$ 的面积分别为 S_1，S_2，

∴ $S_1=CD^2$，$S_2=PD^2$，

在 Rt△PCD 中，$CP^2=CD^2+PD^2$，

∴ $S_1+S_2=CP^2$，故 A 正确；

如图，连接 CF，

∵点 H 与 B 关于 CE 对称，

∴ $CH=CB$，∠BCE=∠HCE，∠BEC=∠HEC.

又∵ $CB=CD$，∴ $CH=CD$，

在 Rt△FCH 和 Rt△FCD 中，

$\begin{cases}CH=CD,\\ CF=CF,\end{cases}$

∴ Rt△FCH≌Rt△FCD(HL)，

∴ ∠FCH=∠FCD，

∴ ∠ECH+∠FCH=$\frac{1}{2}$∠BCD=45°，即 ∠ECF=45°，

过点 F 作 $FG\perp EC$ 于 G，

∴△CFG 是等腰直角三角形，

∴ $FG=CG$.

∵ E 为 AB 的中点，

∴ $BE=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}BC$.

∵ ∠BEC=∠GEF，∠B=∠FGE=90°，

∴ △CEB∽△FEG，∴ $\frac{EG}{CB}=\frac{EF}{CE}=\frac{1}{2}$，

∴ $FG=2EG$，

设 $EG=x$，则 $FG=2x$，

∴ $CG=2x$，∴ $CF=2\sqrt{2}x$，$EC=3x$.

∵ $EH^2+BC^2=EC^2$，

∴ $\frac{5}{4}BC^2=9x^2$，∴ $BC^2=\frac{36}{5}x^2$，

∴ $BC=AD=CD=\frac{6\sqrt{5}}{5}x$，

在 Rt△FDC 中，$FD=\sqrt{CF^2-CD^2}=\sqrt{(2\sqrt{2}x)^2-\frac{36}{5}x^2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}x$，

∴ $3FD=AD$，

∴ $AF=2FD$，故 B 正确；

∵ $AB/\!/CN$，

∴ ∠FDN=∠FAE，∠FND=∠FEA，

∴ △DNF∽△AEF，

∴ $\frac{ND}{EA}=\frac{FD}{FA}=\frac{1}{2}$，∴ $AE=2ND$.

∵ $PD=ND$，$AE=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}CD$，

∴ $CD=4PD$，故 C 正确；

∵ $EG=x$，$FG=2x$，∴ $EF=\sqrt{5}x$.

∵ $BC=\frac{6\sqrt{5}}{5}x$，∴ $AE=\frac{3\sqrt{5}}{5}x$，

过点 H 作 $HQ\perp AD$ 于 Q，作 $HS\perp CD$ 于 S，

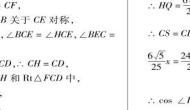
∴ $HQ/\!/AB$，∴ △FQH∽△FAE，

∴ $\frac{HQ}{EA}=\frac{HF}{EF}$，即 $\frac{HQ}{\frac{3\sqrt{5}}{5}x}=\frac{2\sqrt{5}x}{\sqrt{5}x}$，

∴ $HQ=\frac{6\sqrt{5}}{25}x$，

∵ $CS=CD-SD=CD-HQ=\frac{6\sqrt{5}}{5}x-\frac{6\sqrt{5}}{25}x=\frac{24\sqrt{5}}{25}x$，

∴ $\cos\angle HCD=\frac{CS}{CH}=\frac{\frac{24\sqrt{5}}{25}x}{\frac{6\sqrt{5}}{5}x}=\frac{4}{5}$，故 D 错误.



（第3题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. D　**5.** B

6. 解：原式 $=\sqrt{2}+2-\sqrt{2}-2\times\frac{1}{2}=1$.

7. B　**8.** A　**9.** B

10. 解：∵ 方程 $2x^2-5x+2=0$ 的解是 $x_1=2$，$x_2=\frac{1}{2}$，且 $0<\cos\alpha<1$，



∴ $\cos\alpha=\frac{1}{2}$.

常见错解：∵ 方程 $2x^2-5x+2=0$ 的解是 $x_1=2$，$x_2=\frac{1}{2}$，

∴ $\cos\alpha=2$ 或 $\cos\alpha=\frac{1}{2}$.

此时忽略了 $\cos\alpha(\alpha$ 为锐角$)$的取值范围是 $0<\cos\alpha<1$，而错得 $\cos\alpha=2$ 或 $\cos\alpha=\frac{1}{2}$.

11. 1；1；1；1

12. 解：∵ $\sin^2 89°=\cos^2 1°$，$\sin^2 88°=\cos^2 2°$，…，$\sin^2 46°=\cos^2 44°$，

∴ 原式 $=\sin^2 1°+\sin^2 2°+\cdots+\sin^2 44°+\sin^2 45°+\cos^2 44°+\cdots+\cos^2 2°+\cos^2 1°+(\sin^2 1°+\cos^2 1°)+(\sin^2 2°+\cos^2 2°)+\cdots+(\sin^2 44°+\cos^2 44°)+\sin^2 45°=1+1+\cdots+1+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=44\frac{1}{2}$.

点拨：求锐角的正弦(余弦)值的平方和时，通常运用 $\sin^2 A+\cos^2 A=1$ 及 $\sin A=\cos(90°-\angle A)$ 求解.

13. 解：(1) 在 $\triangle ABC$ 中，∵ $\angle ACB=90°$，$BC=8$，$\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{4}{5}$，

∴ $AB=10$.

∵ D 是 AB 的中点，

∴ $CD=\frac{1}{2}AB=5$.

(2) 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，

∵ $AB=10$，$BC=8$，

∴ $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=6$.

∵ D 是 AB 的中点，

∴ $BD=5$，$S_{\triangle BDC}=S_{\triangle ADC}$，

∴ $S_{\triangle BDC}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$，

即 $\frac{1}{2}CD\cdot BE=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}AC\cdot BC$，

∴ $BE=\frac{6\times8}{2\times5}=\frac{24}{5}$.

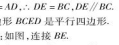
在 $\mathrm{Rt}\triangle BDE$ 中，$\cos\angle DBE=\frac{BE}{BD}=\frac{\frac{24}{5}}{5}=\frac{24}{25}$，即 $\cos\angle ABE=\frac{24}{25}$.

14. (1) **证明**：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，∴ $AD=BC$，$AD/\!/BC$.

∵ $DE=AD$，∴ $DE=BC$，$DE/\!/BC$.

∴ 四边形 $BCED$ 是平行四边形.

(2) 解：如图，连接 BE.



(第14题)

∵ $DA=DB=2$，$DE=AD$，

∴ $DE=2$，且 $BD=\frac{1}{2}AE$，

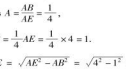
∴ $\angle ABE=90°$，$AE=4$.

∵ $\cos A=\frac{AB}{AE}=\frac{1}{4}$，

∴ $AB=\frac{1}{4}AE=\frac{1}{4}\times4=1$.

∴ $BE=\sqrt{AE^2-AB^2}=\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$，即点 B 到点 E 的距离为 $\sqrt{15}$.

15. 解：(1) 如图，过点 B 作 $BD\perp x$ 轴于点 D.



(第15题)

∵ $CA\perp CB$，∴ $\angle BCD+\angle ACO=\angle BCD+\angle CBD=90°$.

∴ $\angle ACO=\angle CBD$.

∵ $\angle AOC=\angle CDB=90°$，$AC=CB$，

∴ $\triangle AOC\cong\triangle CDB$(AAS).

∴ $DB=OC=3$，$CD=AO$.

∵ $\cos\angle ACO=\frac{OC}{AC}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

∴ $AC=\frac{OC}{\cos\angle ACO}=\frac{3}{\frac{\sqrt{5}}{5}}=3\sqrt{5}$.

∴ $CD=AO=\sqrt{AC^2-OC^2}=\sqrt{(3\sqrt{5})^2-3^2}=6$.

∴ $OD=OC+CD=3+6=9$.

∴ $B(-9,3)$.

把 B 点坐标代入 $y=\frac{m}{x}$，

得 $m=-9\times3=-27$，

∴ 反比例函数的表达式为 $y=-\frac{27}{x}$.

(2) 当 $x<0$ 时，$kx+b<\frac{m}{x}$ 的解集为 $-9<x<0$.

4.2　正　切

1. A　**2.** D　**3.** A　**4.** C　**5.** D

6. D　**点拨**：根据非负数的性质得出 $\cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan B=1$，求出 $\angle A$ 和 $\angle B$ 的度数，进而可求得 $\angle C$ 的度数.

7. A　**点拨**：∵ 点 O 到 $\triangle ABC$ 三边的距离相等，

∴ BO 平分 $\angle ABC$，CO 平分 $\angle ACB$.

∴ $\angle A=180°-(\angle ABC+\angle ACB)=180°-(2\angle OBC+2\angle OCB)=180°-2(\angle OBC+\angle OCB)=180°-2(180°-\angle BOC)=180°-2\times(180°-120°)=60°$.

∴ $\tan A=\tan 60°=\sqrt{3}$.

8. A　**9.** A

10. D　**点拨**：可取 $\angle A=60°$，则 $\tan A=\sqrt{3}$，$\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos A=\frac{1}{2}$，

∴ $\tan A>\sin A>\cos A$.

11. 错解：在 $\triangle ABC$ 中，$\tan B=\frac{AC}{AB}=\frac{5}{5}=1$.

诊断：造成错解的原因是忽略了锐角三角函数是在直角三角形中定义的.

正解：如图，过点 A 作 $AD\perp BC$ 于点 D.



(第11题)

∵ $AB=AC$，∴ $BD=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\times6=3$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，$AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$，

∴ $\tan B=\frac{AD}{BD}=\frac{4}{3}$.

12. 解：(1) 原式 $=8+2-\sqrt{3}+\sqrt{3}-1=9$.

(2) 原式 $=\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+1}=1$.

(3) 原式 $=\frac{\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times1}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}}=1$.

13. 解：(1) 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，$AD=12$，$\sin B=\frac{4}{5}$，

∴ $AB=15$，∴ $BD=\sqrt{15^2-12^2}=9$.

∴ $DC=BC-BD=14-9=5$.

(2) ∵ E 为 AC 的中点，

∴ $ED=EC$，∴ $\angle EDC=\angle C$，

∴ $\tan\angle EDC=\tan C=\frac{AD}{DC}=\frac{12}{5}$.

14. (1) **证明**：∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，∴ $AB=AD$.

又 $\angle BMA=\angle DNA=90°$，$AM=AN$，

∴ $\mathrm{Rt}\triangle ABM\cong\mathrm{Rt}\triangle ADN$(HL).

(2) 解：∵ $\mathrm{Rt}\triangle ABM\cong\mathrm{Rt}\triangle ADN$，

∴ $BM=DN$，$\angle BAM=\angle DAN$.

∵ $\angle BAD=90°$，∴ $\angle MAN=90°$.

∵ $AM=AN$，∴ $\angle AMT=\angle ANT=45°$.

又 $\angle DNA=90°$，

∴ $\angle DNT=45°$，∴ $\angle AMT=\angle DNT$.

又 $\angle ATM=\angle DTN$，

∴ $\triangle AMT\sim\triangle DNT$，∴ $\frac{AT}{DT}=\frac{AM}{DN}$.

∵ $AT=\frac{1}{4}AD$，∴ $\frac{AT}{DT}=\frac{1}{3}$.

∴ $\frac{AM}{DN}=\frac{1}{3}$.

∵ $BM=DN$，∴ $\frac{AM}{BM}=\frac{1}{3}$.

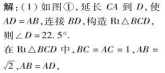
在 $\mathrm{Rt}\triangle ABM$ 中，$\tan\angle ABM=\frac{AM}{BM}=\frac{1}{3}$.

15. 解：(1) 如图①，延长 CA 到 D，使 $AD=AB$，连接 BD，构造 $\mathrm{Rt}\triangle BCD$，则 $\angle D=22.5°$.

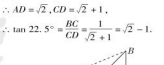
在 $\mathrm{Rt}\triangle BCD$ 中，$BC=AC=1$，$AB=\sqrt{2}$，$AB=AD$，

∴ $AD=\sqrt{2}$，$CD=\sqrt{2}+1$，

∴ $\tan 22.5°=\frac{BC}{CD}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$.



①



②

(第15题)

(2) 可先构造一个含 $30°$ 角的 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$，再构造一个含 $15°$ 角的 $\mathrm{Rt}\triangle BCD$.

如图②，$\angle C=90°$，$\angle BAC=30°$，$BC=1$，$AD=AB=2$，$AC=\sqrt{3}$，$\angle D=15°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BCD$ 中，$\tan 15°=\frac{BC}{DC}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$.

阶段核心归类

1. 解：(1) ∵ $\angle B=90°$，$\angle BDC=45°$，

∴ $BC=BD=5$.

∵ $\sin A=\frac{5}{13}$，∴ $AC=13$，

∴ $AB=12$，

∴ $AD=AB-BD=12-5=7$.

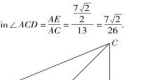
(2) 如图，过 A 作 $AE\perp CD$，交 CD 的延长线于点 E.

∵ $\angle ADE=\angle CDB=45°$，

∴ $\triangle ADE$ 是等腰直角三角形，

∴ $AE=DE=AD\cdot\cos\angle ADE=\frac{7\sqrt{2}}{2}$，

则 $\sin\angle ACD=\frac{AE}{AC}=\frac{\frac{7\sqrt{2}}{2}}{13}=\frac{7\sqrt{2}}{26}$.



(第1题)

2. 解：(1) 过点 A 作 $AD\perp BC$，交 BC 的延长线于点 D，如图①所示.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADC$ 中，$AC=4$.

∵ $\angle ACB=150°$，

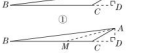
∴ $\angle ACD=30°$，

∴ $AD=\frac{1}{2}AC=2$，$CD=AC\cdot\cos 30°=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$.

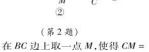
在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，$\tan B=\frac{AD}{BD}=\frac{2}{BD}=\frac{1}{8}$，

∴ $BD=16$，

∴ $BC=BD-CD=16-2\sqrt{3}$.



①



②

(第2题)

(2) 在 BC 边上取一点 M，使得 $CM=AC$，连接 AM，如图②所示.

∵ $\angle ACB=150°$，

∴ $\angle AMC=\angle MAC=15°$.

由(1)可知，$AD=2$，$CD=2\sqrt{3}$，

∴ $\tan 15°=\tan\angle AMD=\frac{AD}{MD}=\frac{2}{4+2\sqrt{3}}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}\approx\frac{1}{2+1.7}\approx0.3$.

3. D

4. (1) **证明**：如图，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\sin A=\frac{a}{c}$，$\cos A=\frac{b}{c}$，

根据勾股定理，得 $a^2+b^2=c^2$.

∴ $\sin^2 A+\cos^2 A=\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{c^2}=1$.



(第4题)

(2) 解：如图，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\sin A=\frac{a}{c}$，$\cos A=\frac{b}{c}$，

根据勾股定理，得 $a^2+b^2=c^2$.

∵ $\sin A\cdot\cos A=\frac{1}{2}$，

∴ $\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{c}=\frac{1}{2}$，

∴ $c^2=2ab$，∴ $a^2+b^2=2ab$，

即 $(a-b)^2=0$，∴ $a=b$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\tan A=\frac{a}{b}=1$，

∴ $A=45°$.

5. 解：∵ $b^2=(c+a)(c-a)$，

∴ $b^2=c^2-a^2$，即 $c^2=a^2+b^2$，

∴ $\triangle ABC$ 是直角三角形，且 $\angle C=90°$.

∵ $5b-4c=0$，∴ $5b=4c$，∴ $\frac{b}{c}=\frac{4}{5}$，

设 $b=4k$，$c=5k$，则 $a=3k(k\neq0)$.

∴ $\sin A+\sin B=\frac{3k}{5k}+\frac{4k}{5k}=\frac{7}{5}$.

6. 解：连接 EF，设 $CF=k$，由题意可得 $CD=AD=AB=BC=4k$，$BE=EC=2k$，$DF=3k$.

根据勾股定理得 $AF=5k$，$EF=\sqrt{5}k$，$AE=2\sqrt{5}k$.

∵ $EF^2+AE^2=AF^2$.

∴ $\triangle AEF$ 是直角三角形，且 $\angle AEF=90°$.

∴ $\sin\angle EAF=\frac{EF}{AF}=\frac{\sqrt{5}k}{5k}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

$\cos\angle EAF=\frac{AE}{AF}=\frac{2\sqrt{5}k}{5k}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

7. (1) **证明**：∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴ $\angle B=\angle BAD=90°$.

∵ $EF\perp AM$，

∴ $\angle AFE=90°$.

∴ $\angle EAF+\angle BAM=\angle EAF+\angle AEF=90°$.

∴ $\angle BAM=\angle AEF$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)**解**:在 Rt△ABM 中,

∵ $\angle B=90°$, $AB=4$, $\cos\angle BAM=\frac{4}{5}$,

∴ $AM=5$.

∵ F 为 AM 的中点,∴ $AF=\frac{5}{2}$.

∵ $\angle BAM=\angle AEF$,

∴ $\cos\angle AEF=\cos\angle BAM=\frac{4}{5}$,

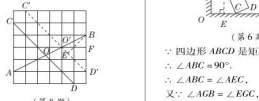
∴ $\sin\angle AEF=\frac{3}{5}$.

在 Rt△AEF 中,∵ $\angle AFE=90°$, $AF=\frac{5}{2}$, $\sin\angle AEF=\frac{3}{5}$,

∴ $AE=\frac{25}{6}$.

∴ $DE=AD-AE=6-\frac{25}{6}=\frac{11}{6}$.

8. **解**:如图,平移 CD 到 $C'D'$,交 AB 于 O',



(第 8 题)

则 $\angle BO'D'=\angle BOD$,

∴ $\tan\angle BOD=\tan\angle BO'D'$,

由图易知 $O'E$ 在格点处.

设每个小正方形的边长为 a,

则 $O'B=\sqrt{a^2+(2a)^2}=\sqrt{5}a$,

$O'D'=\sqrt{(2a)^2+(2a)^2}=2\sqrt{2}a$,

$BD'=3a$.

过 B 作 $BE\perp O'D'$ 于点 E,$O'F\perp BD'$ 于点 F,

则 $BE=\frac{BD'\cdot O'F}{O'D'}=\frac{3a\cdot 2a}{2\sqrt{2}a}=\frac{3\sqrt{2}}{2}a$,

∴ $O'E=\sqrt{O'B^2-BE^2}$

$=\sqrt{(\sqrt{5}a)^2-\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}a\right)^2}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}a$,

∴ $\tan\angle BO'E=\frac{BE}{O'E}=\frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}a}{\frac{\sqrt{2}}{2}a}=3$,

∴ $\tan\angle BOD=3$.

9. **解**:根据题图可知 $\angle AFE+\angle EFC+\angle BFC=180°$,

根据折叠的性质,知 $\angle EFC=\angle D=90°$,

∴ $\angle AFE+\angle BFC=90°$.

在 Rt△BCF 中,∵ $\angle BCF+\angle BFC=90°$,

∴ $\angle AFE=\angle BCF$.

根据折叠的性质,有 $CF=CD=10$.

在 Rt△BCF 中,$BC=8$,$CF=10$,

由勾股定理得 $BF=6$,

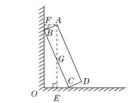
∴ $\tan\angle BCF=\frac{BF}{BC}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$,

∴ $\tan\angle AFE=\tan\angle BCF=\frac{3}{4}$.

4.3 解直角三角形

1. D **2**. D **3**. B **4**. D **5**. B

6. D **点拨**:如图,作 $AE\perp OC$ 于点 E,交 BC 于点 G,作 $AF\perp OB$ 于点 F,则 $\angle AEC=90°$.



(第 6 题)

∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

∴ $\angle ABC=90°$.

∴ $\angle ABC=\angle AEC$,

又∵ $\angle AGB=\angle EGC$,

∴ $\angle EAB=\angle BCO=x$,

∵ $FB/\!/AE$,∴ $\angle FBA=\angle EAB=x$.

∵ $AB=a$,$BC=b$,

∴ $FO=FB+BO=a\cos x+b\sin x$.

7. A **点拨**:∵ 在 Rt△ABC 中,$AC\perp BC$,$\angle ABC=30°$,

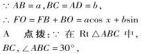
∴ $AB=2AC$,$BC=\frac{AC}{\tan 30°}=\sqrt{3}AC$.

∵ $BD=BA$,

∴ $DC=BD+BC=(2+\sqrt{3})AC$.

∴ $\tan\angle DAC=\frac{DC}{AC}=\frac{(2+\sqrt{3})AC}{AC}=2+\sqrt{3}$.

8. 2 **点拨**:过点 A 作 $AD\perp BC$,垂足为点 D,如图所示.



(第 8 题)

设 $AC=x$,则 $AB=\sqrt{2}x$. 在 Rt△ACD 中,$AD=AC\cdot\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}x$,

$CD=AC\cdot\cos C=\frac{\sqrt{2}}{2}x$,

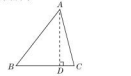
在 Rt△ABD 中,$AB=\sqrt{2}x$,$AD=\frac{\sqrt{2}}{2}x$,

∴ $BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}x$.

∴ $BC=BD+CD=\frac{\sqrt{6}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}x=\sqrt{6}+\sqrt{2}$. ∴ $x=2$,即 $AC=2$.

9. $\frac{16}{5}$

10. D **点拨**:过点 A 作 $AD\perp BC$,垂足为 D,如图所示.



(第 10 题)

在 Rt△ACD 中,$CD=CA\cdot\cos C=1$,

∴ $AD=\sqrt{CA^2-CD^2}=\sqrt{15}$.

在 Rt△ABD 中,$BD=CB-CD=3$,

$AD=\sqrt{15}$,

∴ $AB=\sqrt{BD^2+AD^2}=2\sqrt{6}$,

∴ $\sin B=\frac{AD}{AB}=\frac{\sqrt{10}}{4}$.

11. **解**:在 Rt△ABC 中,$\angle B=90°$,

∴ $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}$.

∴ $\tan A=\frac{BC}{AB}=\frac{3}{5}$,$\cos A=\frac{AB}{AC}=\frac{5}{\sqrt{34}}=\frac{5\sqrt{34}}{34}$.

易错总结:本题中已指出 $\angle B=90°$,所以 AC 为斜边,面受习惯的影响,常误以为 $\angle C$ 的对边 AB 是斜边. 因此,解题时应认真审题,注意所给条件,分清斜边和直角边,以防出错.

12. **解**:(1)如图,过点 A 作 $AE\perp BC$ 于点 E,



第12题答案

∵ $\cos C=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

∴ $\angle C=45°$.

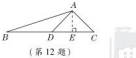
在Rt△ACE 中,$CE=AC\cdot\cos C=1$,

∴ $AE=CE=1$.

在 Rt△ABE 中,$\tan B=\frac{1}{3}$,

即 $\frac{AE}{BE}=\frac{1}{3}$,∴ $BE=3AE=3$.

∴ $BC=BE+CE=4$.



(第 12 题)

(2)∵ AD 是△ABC 的中线,

∴ $CD=\frac{1}{2}BC=2$.

∴ $DE=CD-CE=1$.

∵ $AE\perp BC$,$DE=AE$,

∴ $\angle ADC=45°$.

∴ $\sin\angle ADC=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

13. **解**:由 $AE\perp BC$,$DF\perp BC$,易得四边形 $AEFD$ 是矩形,

∴ $AE=DF=6$,$AD=EF=3$.

∵ 倾斜角 $\alpha=45°$,$\beta=30°$,

∴ $BE=\frac{AE}{\tan\alpha}=\frac{6}{\tan 45°}=\frac{6}{1}=6$,

$CF=\frac{DF}{\tan\beta}=\frac{6}{\tan 30°}=\frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=6\sqrt{3}$.

∴ $BC=BE+EF+CF=6+3+6\sqrt{3}=9+6\sqrt{3}$(m).

即 BC 的长为 $(9+6\sqrt{3})$ m.

14. (1)**证明**:∵ $\angle M=\angle ABC=90°$,

∴ $\angle MAB+\angle MBA=\angle NBC+\angle MBA=90°$.

∴ $\angle MAB=\angle NBC$.

∵ $\angle M=\angle N=90°$,

∴ △$ABM\sim$△BCN.

(2)**解**:如图,过点 P 作 $PN\perp AP$ 交 AC 于点 N,过点 N 作 $NM\perp BC$ 于点 M.

∵ $\angle BAP+\angle APB=90°$,$\angle APB+\angle MPN=90°$,

∴ $\angle BAP=\angle MPN$.

又∠$B=\angle NMP=90°$,

∴ △$BAP\sim$△MPN,

∴ $\frac{AP}{PN}=\frac{BA}{MP}=\frac{BP}{MN}$.

又∵ $\tan\angle PAC=\frac{PN}{PA}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,

∴ $\frac{MP}{BA}=\frac{MN}{BP}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

设 $MN=2\sqrt{5}a$,$PM=2\sqrt{5}b$,

则 $BP=5a$,$AB=5b$.

∵ ∠$BAP=\angle C$,

∴ $\angle C=\angle MPN$. ∴ $NP=NC$.

∵ $NM\perp PC$,∴ $PM=MC$.

∴ $PC=2PM=4\sqrt{5}b$.

又易知△$BAP\sim$△BCA,

∴ $\frac{BA}{BP}=\frac{BC}{BA}$.

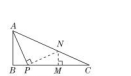
∴ $BA^2=BP\cdot BC$.

∴ $(5b)^2=5a\cdot(5a+4\sqrt{5}b)$.

又 $a>0$,$b>0$,

∴ $a=\frac{\sqrt{5}}{5}b$.

∴ $\tan C=\frac{MN}{MC}=\frac{2\sqrt{5}a}{2\sqrt{5}b}=\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.



(第 14 题)

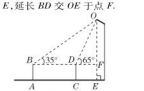
(3)**解**:$\tan\angle CEB=\frac{3}{14}$.

4.4 解直角三角形的应用

第 1 课时 视角在测量中的应用

1. B **2**. C

3. C **点拨**:如图,过点 O 作 $OE\perp AC$ 于点 E,延长 BD 交 OE 于点 F.



(第 3 题)

设 $DF=x$ 米,则 $BF=(3+x)$ 米,

在 Rt△ODF 中,$\tan 65°=\frac{OF}{DF}$,

∴ $OF=DF\tan 65°=x\tan 65°$米.

在 Rt△OBF 中,$\tan 35°=\frac{OF}{BF}$,

∴ $OF=(3+x)\tan 35°$米,

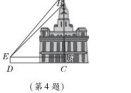
∴ $x\tan 65°=(3+x)\tan 35°$,

∴ $2.1x\approx 0.7(3+x)$,解得 $x\approx 1.5$.

∴ $OF\approx 1.5\times 2.1=3.15$(米).

∴ $OE\approx 3.15+1.5\approx 4.7$(米).

4. 7.2 **点拨**:如图,易知四边形 $CDEF$ 是矩形.



(第 4 题)

由题意知 $\angle BEF=45°$,

∴ $CD=EF=FM=38$ m.

在 Rt△AEF 中,$AF=EF\cdot\tan 50°\approx 38\times 1.19=45.22$(m).

∴ $AB=AF-BF\approx 45.22-38\approx 7.2$(m).

∴ 旗杆的高度约为 7.2 m.

5. C **6**. $1\,200(\sqrt{3}-1)$

7. $(15\sqrt{3}+15)$ **8**. $40\sqrt{3}$

9. **解**:如图,延长 CD,交过点 A 的水平线于点 E,可得 $DE\perp AE$.

在 Rt△AED 中,$AE=BC=40$ m,$\angle EAD=45°$,

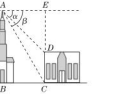
∴ $ED=40$ m.

在 Rt△ABC 中,$\angle ACB=60°$,$BC=40$ m,

∴ $AB=BC\cdot\tan 60°=40\sqrt{3}\approx 69.3$(m).

则 $CD=EC-ED=AB-ED\approx 40\sqrt{3}-40\approx 29.3$(m).

答:这两座建筑物 AB,CD 的高度分别为 69.3 m,29.3 m.



(第 9 题)

10. **解**:设该雕塑的高 CD 为 x 米.

在 Rt△ACD 中,$AD=\frac{x}{\tan 30°}=\sqrt{3}x$(米).

在 Rt△BCD 中,$BD=\frac{x}{\tan 45°}=x$(米),

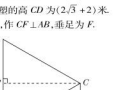
根据题意,得 $AD-BD=4$ 米,

即 $\sqrt{3}x-x=4$.

解得 $x=2\sqrt{3}+2$.

答:该雕塑的高 CD 为 $(2\sqrt{3}+2)$ 米.

11. **解**:如图,作 $CF\perp AB$,垂足为 F.



(第 11 题)

∵ $AB\perp BD$,$CD\perp BD$,

∴ 四边形 $CDBF$ 是矩形.

∴ $CF=BD$,$CD=BF$,$CF/\!/BD$,

∴ $\angle ECF=\angle CED=30°$.

设 $DE=x$ 米,

则 $BD=BE+DE=(10+x)$ 米.

∴ $CF=(10+x)$ 米.

在 Rt△CDE 中,$\tan\angle CED=\frac{CD}{DE}$,

∴ $CD=x\tan 30°$米.

在 Rt△ACF 中,$\tan\angle ACF=\frac{AF}{CF}$,

∴ $AF=(10+x)\tan 30°$米.

∵ $AB=AF+BF=AF+CD=30$ 米,

∴ $(10+x)\tan 30°+x\tan 30°=30$,

解得 $x=15\sqrt{3}-5$,

∴ $x\tan 30°=15-\frac{5}{3}\sqrt{3}$.

即 $CD=\left(15-\frac{5}{3}\sqrt{3}\right)$米.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

答：立柱 CD 的高为 $\left(15-\frac{5}{3}\sqrt{3}\right)$ 米.

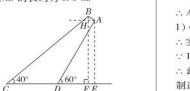
12. **解**：如图，过点 B 作 $BF\perp CE$ 于点 F，交过点 A 平行于 CD 的直线于点 H.

在 Rt $\triangle BCF$ 中，$BF=BC\cdot\sin\angle BCF\approx5\times0.64\approx3.20$(m)，$CF=BC\cdot\cos\angle BCF\approx5\times0.77\approx3.85$(m).

在 Rt $\triangle ADE$ 中，$DE=\frac{AE}{\tan\angle ADE}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}\approx1.73$(m).

$\therefore BH=BF-HF=BF-AE\approx3.20-3=0.20$(m)，$AH=EF=CD+DE-CF\approx2.7+1.73-3.85=0.58$(m). $\therefore AB=\sqrt{BH^2+AH^2}=\sqrt{0.20^2+0.58^2}\approx0.6$(m).

答：AB 的长约为 0.6 m.



（第 12 题）

第 2 课时　用解直角三角形解坡角（坡度）、方位角的应用

1. 1.02　**2.** A

3. B　**点拨**：延长 AB 交 ED 的延长线于 M，作 $CJ\perp DM$ 于 J，则四边形 $BMJC$ 是矩形，在 Rt $\triangle CDJ$ 中求出 CJ，DJ，再根据 $\tan\angle AEM=\frac{AM}{EM}$ 构建方程即可解决问题.

4. B　**点拨**：由题意可得 $\angle APB=60°-15°=45°$，$\angle PBH=60°$，则可由锐角三角函数求得 PB 的长，又由山坡的坡度 i 为 $1:\sqrt{3}$，可求得 $\angle ABC$ 的度数，从而得出 $\triangle ABP$ 是等腰直角三角形，则可求得答案.

5. 566　**6.** B

7. B　**点拨**：根据题意，得 $\angle CAB=65°-20°=45°$，$\angle ACB=40°+20°=60°$，$AB=30\sqrt{2}$ km.

如图，过点 B 作 $BE\perp AC$ 于点 E，

$\therefore\angle AEB=\angle CEB=90°$.

在 Rt $\triangle ABE$ 中，

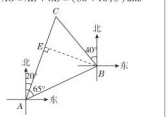
$\because\angle EAB=45°$，$AB=30\sqrt{2}$ km，

$\therefore AE=BE=AB\cdot\sin45°=30\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=30$(km).

在 Rt $\triangle CBE$ 中，$\because\angle ACB=60°$，

$\therefore CE=\frac{BE}{\tan60°}=\frac{30}{\sqrt{3}}=10\sqrt{3}$(km).

$\therefore AC=AE+CE=(30+10\sqrt{3})$ km.



（第 7 题）

8. **解**：依题意可知，$\angle DCB=45°$，$\angle DCA=60°$，

$\because BD=CD=200$ m.

在 Rt $\triangle ACD$ 中，$AD=CD\cdot\tan\angle DCA=200\sqrt{3}$ m.

$\therefore AB=200\sqrt{3}-200\approx200\times(\sqrt{3}-1)\approx146$(m).

∴实际车速约为 $146\div10=14.6$(m/s).

$\because14.6<16$，

∴此车没有超过该路段 16 m/s 的限制速度.

9. **解**：(1)30;45

(2)$\because BP\perp AC$，

$\therefore\angle BPA=\angle BPC=90°$.

$\because\angle C=45°$，

$\therefore\angle CBP=45°$.

$\therefore BP=CP$.

$\because\angle BAC=30°$，

$\therefore AP=\frac{BP}{\tan30°}=\sqrt{3}BP$ 海里.

$\because CP+AP=AC$，

$\therefore BP+\sqrt{3}BP=10$ 海里，

解得 $BP=(5\sqrt{3}-5)$ 海里.

答：观测站 B 到 AC 的距离 BP 为 $(5\sqrt{3}-5)$ 海里.

10. **解**：∵斜坡 AB 的坡度为 $1:\sqrt{3}$，

$\therefore\tan\angle ABE=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$\therefore\angle ABE=30°$.

在 Rt $\triangle AEB$ 中，$AB=200$ 米，

$\therefore AE=\frac{1}{2}AB=100$ 米.

$\therefore AC=20$ 米，

$\because CE=AE-AC=80$ 米.

∵斜坡 CD 的坡度为 $1:4$，

$\therefore\frac{CE}{DE}=\frac{1}{4}$，即 $\frac{80}{DE}=\frac{1}{4}$，

解得 $DE=320$ 米.

$\therefore CD=\sqrt{CE^2+DE^2}=\sqrt{80^2+320^2}=80\sqrt{17}$(米).

答：斜坡 CD 的长是 $80\sqrt{17}$ 米.

11. **解**：$\because BH=0.6$ 米，$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，

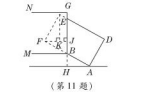
$\therefore AB=\frac{BH}{\sin\alpha}=\frac{0.6}{\frac{3}{5}}=1$(米).

$\therefore AH=\sqrt{AB^2-BH^2}=\sqrt{1^2-0.6^2}=0.8$(米).

$\because AF=FC=2$ 米，

$\because BF=1$ 米.

如图，作 $FJ\perp BG$ 于点 J，作 $EK\perp FJ$ 于点 K.



（第 11 题）

$\because\angle EKF=\angle FJB=\angle AHB=90°$，$\angle EFK=\angle FBJ=\angle ABH$，$BH=AB$，

$\therefore\triangle EFK\backsim\triangle ABH$，$\triangle FBJ\backsim\triangle ABH$.

$\therefore\frac{EF}{AB}=\frac{EK}{AH}$，$BJ=BH=0.6$ 米.

$\therefore\frac{1.6}{1}=\frac{EK}{0.8}$，解得 $EK=1.28$ 米.

$\therefore BJ+EK=0.6+1.28=1.88$(米).

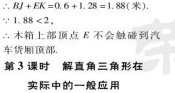
$\because1.88<2$，

∴木箱上部顶点 E 不会触碰到汽车货厢顶面.

第 3 课时　解直角三角形在实际中的一般应用

1. 69　**2.** B　**3.** A　**4.** C　**5.** $\sqrt{3}$

6. $6\sqrt{2}$　**点拨**：如图，延长 AD 交地面于点 E，过点 D 作 $DF\perp CE$ 于点 F，



（第 6 题）

则 $DF\parallel AB$.

$\therefore\angle A=\angle FDE=60°$.

$\because\angle DCF=45°$，$CD=4$ m，

$\therefore CF=DF=2\sqrt{2}$ m.

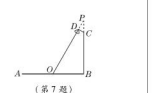
$\because EF=DF\cdot\tan60°=2\sqrt{6}$ m.

$\therefore BE=6\sqrt{6}$ m.

$\because\frac{BE}{AB}=\tan60°=\sqrt{3}$，

$\therefore AB=6\sqrt{2}$ m.

7. D　**点拨**：如图，延长 OD，BC 交于点 P.



（第 7 题）

易知 $\angle ODC=\angle B=90°$，$\angle P=30°$，$OB=11$ m，$CD=2$ m，

∴在 Rt $\triangle CPD$ 中，

$DP=\frac{DC}{\tan30°}=2\sqrt{3}$ m，

$PC=\frac{CD}{\sin30°}=4$ m.

$\because\angle P=\angle P$，$\angle PDC=\angle B=90°$，

$\therefore\triangle PDC\backsim\triangle PBO$.

$\therefore\frac{PD}{PB}=\frac{CD}{OB}$

$\therefore PB=\frac{PD\cdot OB}{CD}=\frac{2\sqrt{3}\times11}{2}=11\sqrt{3}$(m)，

$\therefore BC=PB-PC=(11\sqrt{3}-4)$ m.

8. **解**：由题意可知 $AC=45.54-2.34=43.2$(m).

在 Rt $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=\alpha=8°35'$，

$\tan\angle ABC=\frac{AC}{BC}$，

$\therefore BC=\frac{AC}{\tan\angle ABC}=\frac{43.2}{\tan8°35'}\approx286$(m).

因此观察所 A 与船只 B 的水平距离约为 286 m.

易错总结：解题时容易弄错 AC 的高度，A 的标高为 45.54 m(当水位为 0 m时的高度)，当水位为 +2.34 m，即水位上升了 2.34 m 时，AC 的高度为 $45.54-2.34=43.2$(m).

9. **解**：如图，过点 B 作 $BH\perp AA_1$ 于点 H.

在 Rt $\triangle ABH$ 中，$AB=500$ 米，

$\angle BAH=30°$，

$\therefore BH=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times500=250$(米).

$\therefore A_1B_1=BH=250$ 米.

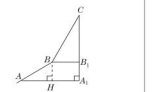
在 Rt $\triangle BB_1C$ 中，$BC=800$ 米，$\angle CBB_1=60°$，

$\therefore\frac{B_1C}{BC}=\sin\angle CBB_1=\sin60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore B_1C=\frac{\sqrt{3}}{2}BC=\frac{\sqrt{3}}{2}\times800=400\sqrt{3}$(米).

∴检修人员上升的垂直高度 $CA_1=CB_1+A_1B_1=400\sqrt{3}+250\approx943$(米).

答：检修人员上升的垂直高度 CA_1 约为 943 米.



（第 9 题）

点拨：测不易直接测量的物体的高度或测河宽等，关键在于构造出直角三角形，通过测量角的度数和测量边的长度，计算出所要求的物体的高度或长度. 根据题目已知特点选用适当锐角三角函数或边角关系去解直角三角形，得到数学问题的答案，再转化得到实际问题的答案.

10. **解**：(1)如图①，过点 E 作 $EM\perp CD$ 于点 M，延长 EM 交 l 于点 F，则 $EM\perp l$.

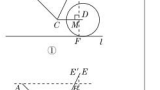
由题意知 $\angle BCM=64°$，$EC=BC+BE=60+15=75$(cm)，

$\therefore EM=EC\cdot\sin\angle BCM=75\times\sin64°\approx67.5$(cm).

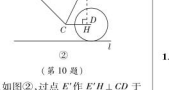
∵CD 与地面 l 平行，

$\therefore MF=32$ cm.

则单车坐垫 E 到地面的距离为 $EM+MF\approx67.5+32=99.5$(cm).



①



②

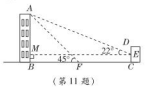
（第 10 题）

(2)如图②，过点 E' 作 $E'H\perp CD$ 于点 H.

由题意知 $E'H=80\times0.8=64$(cm)，则 $E'C=\frac{E'H}{\sin\angle ECH}=\frac{64}{\sin64°}\approx71.11$(cm).

$\therefore EE'=EC-E'C\approx75-71.11\approx3.9$(cm).

11. **解**：(1)如图，过点 E 作 $EM\perp AB$，垂足为 M.



（第 11 题）

设 AB 为 x 米.

在 Rt $\triangle ABF$ 中，$\angle AFB=45°$，

$\therefore BF=AB=x$ 米.

$\therefore BC=BF+FC=(x+25)$ 米.

在 Rt $\triangle AEM$ 中，$\angle AEM=22°$，$AM=AB-BM=AB-CE=(x-2)$ 米，$ME=BC=(x+25)$ 米，

$\tan22°=\frac{AM}{ME}$，则 $\frac{x-2}{x+25}\approx\frac{2}{5}$，

解得 $x\approx20$.

答：办公楼 AB 的高度约为 20 米.

(2)由(1)可得 $ME=x+25\approx20+25=45$(米).

在 Rt $\triangle AME$ 中，$\cos22°=\frac{ME}{AE}$，

$\therefore AE=\frac{ME}{\cos22°}\approx\frac{45}{\frac{15}{16}}=48$(米).

答：A，E 之间的距离约为 48 米.

12. **解**：设 $OE=OH=2x$ cm，

则 $OD=DE+OE=(190+2x)$ cm.

$\because\angle ADE=30°$，

$\therefore OC=\frac{1}{2}OD=95+x$(cm).

$\therefore BC=OC-OB=95+x-2x=95-x$(cm).

$\because\tan\angle BAC=\frac{BC}{AC}$，

$\therefore2.14\approx\frac{95-x}{40}$，

解得 $x\approx9.4$.

$\therefore OB=2x\approx19$ cm.

答：OB 的长度约为 19 cm.

阶段核心归类

1. **解**：如图，过点 A 作 $AC\perp OB$，垂足为点 C，

在 Rt $\triangle ACO$ 中，

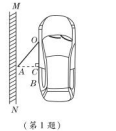
$\because\angle AOC=40°$，$AO=1.2$ m，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore AC = AO \cdot \sin\angle AOC \approx 1.2 \times 0.64 \approx 0.768(\text{m})$.

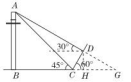
∵ 汽车靠墙一侧 OB 与墙 MN 平行且距离为 0.8 m，$0.768 < 0.8$，

∴ 车门不会碰到墙.



（第 1 题）

2. 解：延长 AD 交 BC 的延长线于点 G，作 $DH \perp BG$ 于点 H，如图所示.



（第 2 题）

在 Rt△DHC 中，$\angle DCH = 60°$，$CD = 4$ m，则 $CH = CD \cdot \cos\angle DCH = 4 \times \cos 60° = 2$(m)，

$DH = CD \cdot \sin\angle DCH = 4 \times \sin 60° = 2\sqrt{3}$(m).

∵ $DH \perp BG$，又易知 $\angle G = 30°$，

$\therefore HG = \dfrac{DH}{\tan G} = \dfrac{2\sqrt{3}}{\tan 30°} = 6$(m).

$\therefore CG = CH + HG = 2 + 6 = 8$(m).

设 $AB = x$ m，

∵ $AB \perp BG$，$\angle G = 30°$，$\angle BCA = 45°$，

$\therefore BC = x$ m，$BG = \dfrac{AB}{\tan G} = \dfrac{x}{\tan 30°} = \sqrt{3}x$(m).

∵ $BG - BC = CG$，

$\therefore \sqrt{3}x - x = 8$.

解得 $x \approx 11$.

答：电线杆的高约为 11 m.

3. 解：如图，过 B 作 $BD \perp AC$，垂足为 D，设 $AD = x$ km，在 Rt△ABD 中，

$\tan\angle BAD = \dfrac{BD}{AD}$，即 $\sqrt{3} = \dfrac{BD}{x}$.

$\therefore BD = \sqrt{3}x$ km.

在 Rt△BCD 中，∵ $\angle CBD = 90° - 37° = 53°$，$\tan\angle CBD = \dfrac{CD}{BD}$，即 $\dfrac{4}{3} \approx \dfrac{CD}{\sqrt{3}x}$，

$\therefore CD \approx \dfrac{4\sqrt{3}x}{3}$ km.

$\therefore \dfrac{4\sqrt{3}x}{3} + x = 13$，解得 $x \approx 4\sqrt{3} - 3$.

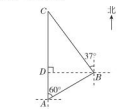
$\therefore BD \approx (12 - 3\sqrt{3})$ km.

在 Rt△BCD 中，$\cos\angle CBD = \dfrac{BD}{BC}$，

即 $\dfrac{3}{5} \approx \dfrac{12 - 3\sqrt{3}}{BC}$，

$\therefore BC \approx (20 - 5\sqrt{3})$ km.

答：B，C 两地的距离约为 $(20 - 5\sqrt{3})$ km.



（第 3 题）

4. 解：设每层楼高为 x m，由题意得 $MC' = MC - CC' = 2.5 - 1.5 = 1$(m)，则 $DC' = (5x + 1)$ m，$EC' = (4x + 1)$ m.

在 Rt△$DC'A'$ 中，$\angle DA'C' = 60°$，

$\therefore C'A' = \dfrac{DC'}{\tan 60°} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}(5x + 1)$ m.

在 Rt△$EC'B'$ 中，$\angle EB'C' = 30°$，

$\therefore C'B' = \dfrac{EC'}{\tan 30°} = \sqrt{3}(4x + 1)$ m.

∵ $A'B' = C'B' - C'A' = AB$，

$\therefore \sqrt{3}(4x + 1) - \dfrac{\sqrt{3}}{3}(5x + 1) = 14$.

解得 $x = 2\sqrt{3} - \dfrac{2}{7}$.

$\therefore DC = DC' + CC' = 5x + 1 + 1.5 \approx 18.4$(m).

答：居民楼的高度约为 18.4 m.

全章热门考点整合应用

1. 解：在 Rt△ABC 中，∵ $\angle ACB = 90°$，

∴ $\angle BCD + \angle ACD = 90°$.

∵ $CD \perp AB$，∴ $\angle ACD + \angle A = 90°$，

∴ $\angle BCD = \angle A$.

在 Rt△ABC 中，由勾股定理，得 $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 10$，

∴ $\sin\angle BCD = \sin A = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$，

$\cos\angle BCD = \cos A = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$，

$\tan\angle BCD = \tan A = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3}$.

2. 解：∵ $\sin B = \dfrac{3}{5}$，$\angle ACB = 90°$，$DE \perp AB$，∴ $\sin B = \dfrac{DE}{DB} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{3}{5}$.

设 $DE = CD = 3k$，则 $DB = 5k$，

∴ $CB = 8k$，$AC = 6k$，$AB = 10k$.

∵ $AC + CD = 9$，

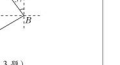
∴ $6k + 3k = 9$，

∴ $k = 1$，

∴ $DE = 3$，$DB = 5$，$BC = 8$，

∴ $BE = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$.

过点 C 作 $CF \perp AB$ 于点 F，如图，



（第 2 题）

则 $CF // DE$，∴ △BDE∽△BCF.

$\therefore \dfrac{DE}{CF} = \dfrac{BE}{BF} = \dfrac{BD}{BC} = \dfrac{5}{8}$，

求得 $CF = \dfrac{24}{5}$，$BF = \dfrac{32}{5}$，∴ $EF = \dfrac{12}{5}$.

在 Rt△CEF 中，$CE = \sqrt{CF^2 + EF^2} = \dfrac{12}{5}\sqrt{5}$.

3. 解：(1) 原式 $= \dfrac{\sqrt{3}}{3} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \times 1$

$= \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{2}$

$= \dfrac{3}{4}$.

(2) 原式 $= \dfrac{1}{4} \times 1^2 + \dfrac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} - 3 \times \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2}}$

$= \dfrac{1}{4} + 4 - 3 \times \dfrac{3}{4} + 2 - 1$

$= 3$.

4. 解：设 $CE = y$.

(1) ∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴ $AB = CD = 4$，$BC = AD = 5$，

$\angle B = \angle BCD = 90°$.

∵ $BP = a$，$CE = y$，

∴ $PC = 5 - a$，$DE = 4 - y$.

∵ $AP \perp PE$，∴ $\angle APE = 90°$，

∴ $\angle APB + \angle CPE = 90°$.

∵ $\angle APB + \angle BAP = 90°$，

∴ $\angle CPE = \angle BAP$.

∴ △ABP∽△PCE.

$\therefore \dfrac{BP}{CE} = \dfrac{AB}{PC}$

$\therefore y = \dfrac{-a^2 + 5a}{4}$，

即 $CE = \dfrac{-a^2 + 5a}{4}$.

(2) 四边形 $APFD$ 是菱形，理由如下：

当 $a = 3$ 时，$y = \dfrac{-3^2 + 5 \times 3}{4} = \dfrac{3}{2}$，

即 $CE = \dfrac{3}{2}$.

$\therefore DE = \dfrac{5}{2}$.

∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴ $AD // BF$.

∴ △AED∽△FEC.

$\therefore \dfrac{AD}{FC} = \dfrac{DE}{CE}$，∴ $FC = 3$.

易知 $PC = 2$，

∴ $PF = PC + CF = 5$，∴ $PF = AD$.

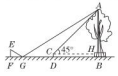
∴ 四边形 $APFD$ 是平行四边形.

在 Rt△APB 中，$AB = 4$，$BP = 3$，∠$B = 90°$，∴ $AP = 5 = PF$.

∴ 四边形 $APFD$ 是菱形.

(3) 根据 $\tan\angle PAE = \dfrac{1}{2}$ 可得 $\dfrac{AP}{PE} = 2$. 由 (1) 得 △ABP∽△PCE，$\therefore \dfrac{AB}{PC} = \dfrac{AP}{PE} = 2$，得 $\dfrac{4}{5 - a} = 2$ 或 $\dfrac{4}{a - 5} = 2$，解得 $a = 3$ 或 $a = 7$.

5. 解：如图，过点 C 作 $CH \perp AB$ 于点 H，



（第 5 题）

则 $CH = BD$，$BH = CD = 0.5$.

在 Rt△ACH 中，∵ $\angle ACH = 45°$，

∴ $AH = CH = BD$，

∴ $AB = AH + BH = BD + 0.5$.

∵ $EF \perp FB$，$AB \perp FB$，

∴ $EF // AG = BG$.

由题意，易知 $\angle EGF = \angle AGB$，

∴ △EFG∽△ABG，

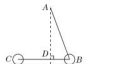
∴ $\dfrac{EF}{AB} = \dfrac{FG}{BG}$，即 $\dfrac{1.6}{BD + 0.5} = \dfrac{2}{5 + BD}$，

解得 $BD = 17.5$，

∴ $AB = 17.5 + 0.5 = 18$.

答：这棵古树的高度 AB 为 18 m.

6. 解：如图，过点 A 作 $AD \perp BC$ 于点 D，延长 AD 交地面于点 E.



（第 6 题）

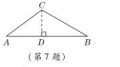
∵ $\sin\angle ABD = \dfrac{AD}{AB}$，

∴ $AD = AB \cdot \sin\angle ABD \approx 92 \times 0.94 = 86.48$(cm).

∵ $DE = 6$ cm，∴ $AE = AD + DE \approx 86.48 + 6 = 92.5$(cm).

答：把手 A 离地面的高度约为 92.5 cm.

7. 解：如图，过点 C 作 $CD \perp AB$ 于点 D，



（第 7 题）

在 Rt△BCD 中，∵ $\angle B = 30°$，$BC = 12$，∴ $CD = BC \times \sin 30° = 6$，$BD = BC \times \cos 30° = 6\sqrt{3}$.

在 Rt△ACD 中，∵ $\tan A = \dfrac{CD}{AD} = \dfrac{3}{4}$，$CD = 6$，∴ $AD = 8$.

∴ $AC = \sqrt{CD^2 + AD^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$，$AB = AD + BD = 8 + 6\sqrt{3}$.

8. 解：方法一：如图①，过点 B 作 $BE // AD$ 交 DC 于点 E，过点 E 作 $EF // AB$ 交 AD 于点 F，则 $BE \perp AD$，$EF \perp AD$.



∴ 四边形 $ABEF$ 是矩形.

∴ $EF = AB$，$AF = BE$.

∵ $\angle ABC = 120°$，

∴ $\angle CBE = 120° - 90° = 30°$，$\angle D = 180° - 120° = 60°$.

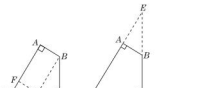
在 Rt△BCE 中，$BE = \dfrac{BC}{\cos\angle CBE} = \dfrac{50\sqrt{3}}{\cos 30°} = \dfrac{50\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 100$，

$EC = BC \cdot \tan\angle CBE = 50\sqrt{3} \times \tan 30° = 50\sqrt{3} \times \dfrac{\sqrt{3}}{3} = 50$.

在 Rt△DEF 中，

$DF = \dfrac{EF}{\tan D} = \dfrac{AB}{\tan 60°} = \dfrac{30\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 30$.

∴ $AD = AF + DF = BE + DF = 100 + 30 = 130$，∴ $S_{四边形ABCD} = S_{矩形ABED} + S_{\triangle BCE} = \dfrac{1}{2}(AD + BE) \cdot AB + \dfrac{1}{2}BC \cdot EC = \dfrac{1}{2} \times (130 + 100) \times 30\sqrt{3} + \dfrac{1}{2} \times 50\sqrt{3} \times 50 = 4700\sqrt{3}$.



（第 8 题）

方法二：如图②，延长 DA，CB 交于点 E，则 $\angle ABE = 180° - \angle ABC = 60°$，$\angle E = 90° - \angle ABE = 30°$.

在 Rt△ABE 中，$AE = AB \cdot \tan 60° = 30\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 90$，$BE = \dfrac{AB}{\cos 60°} = \dfrac{30\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = 60\sqrt{3}$.

$\therefore CE = BE + BC = 60\sqrt{3} + 50\sqrt{3} = 110\sqrt{3}$.

在 Rt△DCE 中，$DC = CE \cdot \tan 30° = 110\sqrt{3} \times \dfrac{\sqrt{3}}{3} = 110$.

$\therefore S_{四边形ABCD} = S_{\triangle DCE} - S_{\triangle ABE} = \dfrac{1}{2}DC \cdot CE - \dfrac{1}{2}AB \cdot AE = \dfrac{1}{2} \times 110 \times 110\sqrt{3} - \dfrac{1}{2} \times 30\sqrt{3} \times 90 = 4700\sqrt{3}$.

点拨：求不规则图形的面积可以将其转化为直角三角形或特殊的四边形的面积来求. 可适当添加辅助线，本题利用**分割法**将不规则四边形分割为直角三角形和直角梯形，或者利用**补形法**把不规则四边形转化为直角三角形求解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第5章　用样本推断总体

5.1　总体平均数与方差的估计

1. C　**2.** C　**3.** D　**4.** 1 200　**5.** A　**6.** B

7. 错解：C

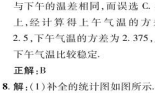
易错诊断：错解的原因是仅凭想当然而缺乏根据，只看到上午的温差与下午的温差相同，而误选 C. 实际上，经计算得上午气温的方差为 2.5，下午气温的方差为 2.375，所以下午气温比较稳定.

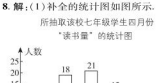

第7题微课

正解：B

8. 解：(1) 补全的统计图如图所示.

所抽取读校七年级学生四月份“读书量”的统计图





(第8题)

3

(2) 平均数 $=\frac{3\times1+18\times2+21\times3+12\times4+5\times6}{3+18+21+12+6}$

$=3$(本).

(3) 四月份“读书量”为 5 本的学生有 $1\,200\times\frac{6}{60}=120$(名).

9. 解：(1) 因为有 50 名居民，前三组共有 $4+8+12=24$(名)，所以中位数落在第四组，中位数为 $\frac{75+75}{2}=75$(分).

(2) $500\times\frac{50-4-8-12-2}{50}=240$(人).

答：A 小区 500 名居民中能超过平均数的有 240 人.

(3) 从平均数看，两个小区居民对新型冠状病毒肺炎的防护知识掌握情况的平均水平相同；从方差看，B 小区居民对新型冠状病毒肺炎的防护知识的掌握情况比 A 小区稳定；从中位数看，B 小区至少有一半的居民成绩高于平均数.

5.2　统计的简单应用

1. B

2. A　**点拨**：由题可得，抽查的学生参加社团活动时间在 8～10 小时之间的学生数为 $100-30-24-10-8=28$(人)，∴ $1\,000\times\frac{28}{100}=280$(人)，即该校五一期间参加社团活动时间在 8～10 小时之间的学生数大约是 280 人，故选 A.

3. 1 400　**点拨**：∵ 被抽查的学生有 $28\div28\%=100$(人)，

∴ 优秀的学生有 $100\times20\%=20$(人)，

∴ 估计成绩为优秀和良好的学生共有 $2\,000\times\frac{20+50}{100}=1\,400$(人).

4. A　**5.** C

6. B　**点拨**：由图表信息，联立中美 GDP 趋势线表达式得

$$\begin{cases}y=0.86x+0.468,\\ y=0.53x+11.778.\end{cases}$$

解得 $x=34\frac{3}{11}$.

∴ $2\,018+\left(34\frac{3}{11}-15\right)=2\,037\frac{3}{11}$，

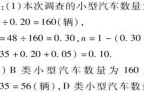
取整数为 2 038. 故选 B.

7. 解：(1) 本次调查的小型汽车数量为 $32\div0.20=160$(辆)，

$m=48\div160=0.30$，$n=1-(0.30+0.35+0.20+0.05)=0.10$.

(2) B 类小型汽车数量为 $160\times0.35=56$(辆)，D 类小型汽车数量为 $0.10\times160=16$(辆)，

补全频数直方图如图所示.



(第7题)

(3) 每车只乘坐 1 人的小型汽车数量为 $5\,000\times0.30=1\,500$(辆).

8. 解：(1) 5；4；4.65；4.8

(2) 估计七年级 600 名学生活动后视力达标的有 $600\times\frac{12+4}{30}=320$(人).

(3) 活动开展前视力在 4.8 及以上的有 11 人，活动开展后视力在 4.8 及以上的有 16 人，视力达标人数有一定的提升.（答案不唯一，合理即可）

9. 解：(1) 30.5

(2) 折线统计图

(3) 2018 年 7－12 月与 2017 年同期相比 PM2.5 平均浓度下降了.

阶段核心归类

1. 解：(1) 抽取的 5 个菠萝去皮前的平均质量为 $\frac{1}{5}\times(1.0+1.1+1.4+1.2+1.3)=1.2$(千克)，去皮后的平均质量为 $\frac{1}{5}\times(0.6+0.7+0.9+0.8+0.9)=0.78$(千克)；这 200 个菠萝去皮前的总质量约为 $1.2\times200=240$(千克)，去皮后的总质量约为 $0.78\times200=156$(千克).

(2) 原计划的销售总额约为 $2.6\times240=624$(元)，

根据题意，得去皮后的菠萝的售价应约为 $624\div156=4$(元/千克).

2. 解：(1) 134；134.5；135；1.8

(2) ①从众数看，甲班每分钟输入 135 个汉字的学生最多，乙班每分钟输入 134 个汉字的学生最多，所以甲班成绩较好；

②从中位数看，甲班每分钟输入 135 个汉字以上(包括 135 个)的学生比乙班多，所以甲班成绩较好；

③从方差看，$s_{甲}^2<s_{乙}^2$，甲班成绩波动小，比较稳定，所以甲班成绩较好；

④从最好成绩看，乙班速度最快的学生比甲班多 1 名，所以乙班成绩较好.

3. 解：(1) 甲种电子钟走时误差的平均数是 $\frac{1}{10}\times(1-3+4+2-2+2-1-1+2)=0$(秒)，

乙种电子钟走时误差的平均数是 $\frac{1}{10}\times(4-3-1+2-2+1-2+2-2+1)=0$(秒).

(2) 甲种电子钟走时误差的方差是 $\frac{1}{10}\times[(1-0)^2+(-3-0)^2+\cdots+(2-0)^2]=\frac{1}{10}\times60=6$，

乙种电子钟走时误差的方差是 $\frac{1}{10}\times[(4-0)^2+(-3-0)^2+\cdots+(1-0)^2]=\frac{1}{10}\times48=4.8$.

(3) 我会买乙种电子钟，因为两种类型的电子钟价格相同，且甲种电子钟走时误差的方差比乙种电子钟走时误差的方差大，说明乙种电子钟的稳定性较好，所以乙种电子钟的质量更优.

4. 解：(1) 1.8；3 600；27 000

(2) 设鱼塘中大鱼总质量有 x 千克.

由题意列不等式，得 $10x+6(3\,600-x)\geqslant27\,000$，

解得 $x\geqslant1\,350$.

答：鱼塘中大鱼总质量应至少有 1 350 千克.

全章热门考点整合应用

1. 解：(1) 因为 $(15\times1+60\times2+65\times3+35\times4+20\times5+5\times6)\div200=3$(个)，所以这一天这 200 户家庭平均每户丢弃 3 个塑料袋.

(2) 因为 $100\times3\times365=109\,500$(万个)，所以估计该市现有的 100 万户家庭每年丢弃 109 500 万个塑料袋.

2. 解：(1) 从九年级学生最喜欢的运动项目人数统计图中得知，九年级最喜欢排球的人数占总数的百分比为 $1-30\%-16\%-24\%-10\%=20\%$. 又知九年级最喜欢排球的人数为 10，∴ 九年级抽取的学生数为 $10\div20\%=50$(人)，

∴ 本次调查抽取的学生数为 $50\times3=150$(人).

(2) 根据(1)得七年级最喜欢跳绳的有 $50-7-8-14-6=15$(人)，

那么八年级最喜欢跳绳的有 $15-5=10$(人)，

∴ 八年级最喜欢踢毽的学生有 $50-12-10-5=13$(人)，

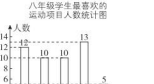
九年级最喜欢排球的人数占九年级抽样总人数的百分比为 $\frac{10}{50}\times100\%=20\%$，

补全统计表如下表所示.

七年级学生最喜欢的运动项目人数统计表

项目	排球	篮球	踢毽	跳绳	其他
人数	7	8	14	15	6

补全统计图如图所示.





(第2题)

(3) 不够用. 理由：$1\,800\times\frac{14+13+50\times30\%}{150}\div4=126$(个)，

∵ $126>124$，

∴ 不够用.

3. 解：(1) 120；0.1

(2) $1<t\leqslant1.5$ 的人数为 $120\times0.4=48$，补全频数直方图如图所示.



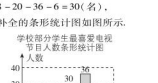
(第3题)

(3) 估计该校学生每天课外阅读时间超过 1 小时的人数为 $1\,200\times(0.4+0.1)=600$(人).

4. 解：(1) 100

(2) 最喜爱 C 类电视节目的有 $100-8-20-36-6=30$(名)，

补全的条形统计图如图所示.



(第4题)

(3) 72°

(4) $2\,000\times\frac{8}{100}=160$(名).

答：估计该校最喜爱新闻类电视节目的学生有 160 名.

5. 解：(1) 该用户去年 9 月份 6:00 至 22:00 的总用电量约为 $\frac{4.5+4.4+4.6+4.6+4.3+4.6}{6}\times30=135$(千瓦时)，

22:00 至次日 6:00 的总用电量约为 $\frac{1.4+1.6+1.3+1.5+1.7+1.5}{6}\times30=45$(千瓦时).

$135+45=180$(千瓦时).

所以估计该用户去年 9 月份总用电量为 180 千瓦时.

(2) 根据题意，得该用户 3 月份总用电量为 $\frac{146.4}{0.61}=240$(千瓦时).

设该用户 3 月份 6:00 至 22:00 的总用电量为 x 千瓦时，则 22:00 至次日 6:00 的总用电量为 $(240-x)$ 千瓦时.

根据题意，得 $0.61x+0.30(240-x)=127.8$，解得 $x=180$. 所以 $240-x=60$.

答：该用户今年 3 月份 6:00 至 22:00 与 22:00 至次日 6:00 两个时段的用电量分别为 180 千瓦时，60 千瓦时.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 1 章达标检测卷

一、1. D　2. C　3. C　4. D　5. D

6. D　**点拨**：由题意知，反比例函数图象在第二、四象限，所以 $3+m<0$，即 $m<-3$.

7. D

8. C　**点拨**：∵点 A，B 均在反比例函数 $y=\frac{2}{x}(x>0)$ 的图象上，∴ $S_{\triangle AOC}=S_{\triangle BOD}=1$. 由题图可知，$\triangle AOC$ 与 $\triangle BOD$ 有一个公共部分 $\triangle COE$，因此 $\triangle AOE$ 与梯形 $ECDB$ 的面积相等，即 $S_1=S_2$，故选 C.

9. A　**点拨**：设 A 点坐标为 $\left(m,\frac{k_1}{m}\right)$，$B$ 点坐标为 $\left(n,\frac{k_1}{n}\right)$，则 C 点坐标为 $\left(m,\frac{k_2}{m}\right)$，$D$ 点坐标为 $\left(n,\frac{k_2}{n}\right)$，由题意得

$$\begin{cases} n-m=\frac{10}{3}, \\ \frac{k_1-k_2}{m}=2, \\ \frac{k_2-k_1}{n}=3, \end{cases}$$ 解得 $k_2-k_1=4$.

10. D

二、11. $k<1$　12. <

13. $(-1,-2)$　**点拨**：∵反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象关于原点成中心对称，一次函数 $y=mx$ 的图象经过原点，且关于原点成中心对称，∴它们的交点也关于原点成中心对称.

∵点 $(1,2)$ 关于原点成中心对称的点为 $(-1,-2)$，

∴它们另一个交点的坐标为 $(-1,-2)$.

14. $48<p<120$

15. $y=\frac{12}{x}$　**点拨**：连接 OA，则 $\triangle ABP$ 与 $\triangle ABO$ 的面积相等，都等于 6，

∴反比例函数的表达式是 $y=\frac{12}{x}$.

16. $\frac{1}{2}$　**点拨**：将矩形 $ABCD$ 沿 x 轴向右平移后，过点 M 作 $ME\perp AB$ 于点 E，则 $AE=\frac{1}{2}AB=\frac{3}{2}$，$ME=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}$. 设 $OA=m$，则 $OE=OA+AE=m+\frac{3}{2}$，

∴ $M\left(m+\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$.

∵点 M 在反比例函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图象上，

∴ $\frac{1}{2}=\frac{1}{m+\frac{3}{2}}$，解得 $m=\frac{1}{2}$.

17. $y_2=\frac{4}{x}$　18. ①③④

三、19. **解**：(1) 设 y 与 x 的函数表达式为 $y=\frac{k}{x-1}$，由题意得 $2=\frac{k}{-5-1}$，解得 $k=-12$.

∴ y 与 x 的函数表达式为 $y=-\frac{12}{x-1}$.

(2) 当 $x=5$ 时，$y=-\frac{12}{x-1}=-\frac{12}{5-1}=-3$.

20. **解**：(1) 设反比例函数表达式为 $y=\frac{k}{x}(k\neq 0)$，

∵反比例函数图象经过点 $A(-4,-2)$，∴ $-2=\frac{k}{-4}$，

∴ $k=8$.

∴反比例函数表达式是 $y=\frac{8}{x}$.

∵点 $B(n,4)$ 在函数 $y=\frac{8}{x}$ 的图象上，∴ $4=\frac{8}{n}$，∴ $n=2$.

∴点 B 的坐标为 $(2,4)$.

(2) 根据图象得当 $x>2$ 或 $-4<x<0$ 时，一次函数的值大于反比例函数的值.

21. **解**：(1)∵ $\triangle AOB$ 的面积为 2，且反比例函数的图象在第一、三象限，∴ $k=4$，

∴反比例函数表达式为 $y=\frac{4}{x}$.

∵ $A(4,m)$，∴ $m=\frac{4}{4}=1$.

(2)∵当 $x=-3$ 时，$y=-\frac{4}{3}$；当 $x=-1$ 时，$y=-4$.

又∵反比例函数 $y=\frac{4}{x}$ 在 $x<0$ 时，y 随 x 的增大而减小，

∴当 $-3\leqslant x\leqslant -1$ 时，y 的取值范围为 $-4\leqslant y\leqslant -\frac{4}{3}$.

22. **解**：(1) 由题意易得点 M 的纵坐标为 2.

将 $y=2$ 代入 $y=-\frac{1}{2}x+3$，得 $x=2$.

∴ $M(2,2)$. 把点 M 的坐标代入 $y=\frac{k}{x}$，得 $k=4$，

∴反比例函数的表达式是 $y=\frac{4}{x}$.

(2) 由题意得 $S_{\triangle OPM}=\frac{1}{2}OP\cdot AM$，

∵ $S_{四边形AMON}=S_{矩形AOBC}-S_{\triangle AOM}-S_{\triangle CON}=4\times 2-2-2=4$，$S_{\triangle OPM}=S_{四边形AMON}$，

∴ $\frac{1}{2}OP\cdot AM=4$.

又易知 $AM=2$，∴ $OP=4$.

∴点 P 的坐标是 $(0,4)$ 或 $(0,-4)$.

23. **解**：(1) 当 $0\leqslant x\leqslant 8$ 时，设 $y=k_1x+b$，将 $(0,20)$，$(8,100)$ 分别代入 $y=k_1x+b$，可求得 $k_1=10$，$b=20$.

∴当 $0\leqslant x\leqslant 8$ 时，$y=10x+20$.

当 $8<x\leqslant a$ 时，设 $y=\frac{k_2}{x}$.

将 $(8,100)$ 代入 $y=\frac{k_2}{x}$，

得 $k_2=800$.

∴当 $8<x\leqslant a$ 时，$y=\frac{800}{x}$.

综上，当 $0\leqslant x\leqslant 8$ 时，$y=10x+20$；

当 $8<x\leqslant a$ 时，$y=\frac{800}{x}$.

(2) 将 $y=20$ 代入 $y=\frac{800}{x}$，

解得 $x=40$，即 $a=40$.

(3) 当 $y=40$ 时，$x=\frac{800}{40}=20$.

∵要想喝到不低于 40 ℃的开水，x 需满足 $8\leqslant x\leqslant 20$，即李老师要在 7:38到 7:50 之间接水.

24. **解**：(1)∵正比例函数图象与反比例函数图象的两个交点关于原点对称，

∴ $S_{\triangle AOC}=S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=1$.

∵ $AC\perp x$ 轴，∴ $k=2$.

(2) 假设存在这样的点 D，设点 D 的坐标为 $(m,0)$.

由 $\begin{cases} y=\frac{2}{x}, \\ y=2x, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x_1=1, \\ y_1=2, \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=-1, \\ y_2=-2. \end{cases}$

∴ $A(1,2)$，$B(-1,-2)$.

∴ $AD=\sqrt{(1-m)^2+2^2}$，

$BD=\sqrt{(m+1)^2+2^2}$，

$AB=\sqrt{(1+1)^2+(2+2)^2}=2\sqrt{5}$.

当 D 为直角顶点时，

∵ $AB=2\sqrt{5}$，∴ $OD=\frac{1}{2}AB=\sqrt{5}$.

∴点 D 的坐标为 $(\sqrt{5},0)$ 或 $(-\sqrt{5},0)$.

当 A 为直角顶点时，

由 $AB^2+AD^2=BD^2$，得 $(2\sqrt{5})^2+(1-m)^2+2^2=(m+1)^2+2^2$，

解得 $m=5$，即 $D(5,0)$.

当 B 为直角顶点时，

由 $BD^2+AB^2=AD^2$，得 $(m+1)^2+2^2+(2\sqrt{5})^2=(1-m)^2+2^2$，

解得 $m=-5$，即 $D(-5,0)$.

∴存在这样的点 D，使 $\triangle ABD$ 为直角三角形，点 D 的坐标为 $(\sqrt{5},0)$ 或 $(-\sqrt{5},0)$ 或 $(5,0)$ 或 $(-5,0)$.

第 2 章达标检测卷

一、1. C　2. A　3. D　4. D　5. C

6. C　**点拨**：设参加酒会的人数为 x 人，根据题意得 $\frac{1}{2}x(x-1)=55$，

整理，得 $x^2-x-110=0$，

解得 $x_1=11$，$x_2=-10$(不合题意，舍去). 所以参加酒会的人数为 11 人.

7. D　8. C　9. D

10. B　**点拨**：设 AC 交 $A'B'$ 于 H.

∵ $\angle DAC=45°$，$\angle AA'H=90°$，

∴ $\triangle AA'H$ 是等腰直角三角形.

设 $AA'=x$ cm，则 $A'H=x$ cm，

$A'D=(2-x)$ cm.

∴ $x(2-x)=1$，解得 $x_1=x_2=1$，

即 $AA'=1$ cm. 故选 B.

二、11. -2　12. 2

13. $100(1+x)+100(1+x)^2=260$

点拨：根据题意知，第二季度投入资金 $100(1+x)$ 万元，第三季度投入资金 $100(1+x)^2$ 万元.

∴ $100(1+x)+100(1+x)^2=260$.

14. 1　**点拨**：由方程 $x^2-4x+3=0$，得 $(x-1)(x-3)=0$，

∴ $x-1=0$ 或 $x-3=0$.

解得 $x_1=1$，$x_2=3$.

当 $x=1$ 时，分式方程 $\frac{1}{x-1}=\frac{-2}{x+a}$ 无意义；

当 $x=3$ 时，$\frac{1}{3-1}=\frac{2}{3+a}$，

解得 $a=1$.

经检验，$a=1$ 是方程 $\frac{1}{3-1}=\frac{2}{3+a}$ 的解.

15. -1

16. 30 cm；15 cm

17. 3 或 -3　**点拨**：$x^2-5x+6=0$ 的两个根为 $x_1=2$，$x_2=3$ 或 $x_1=3$，$x_2=2$.

当 $x_1=2$，$x_2=3$ 时，$x_1\otimes x_2=2\times 3-3^2=-3$；

当 $x_1=3$，$x_2=2$ 时，$x_1\otimes x_2=3^2-2\times 3=3$.

18. 6　**点拨**：∵在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90°$，$AB=AC=16$ cm，AD 为 BC 边上的高，

∴ $AD=BD=CD=8\sqrt{2}$ cm.

又∵ $AP=\sqrt{2}t$ cm，

∴ $S_1=\frac{1}{2}AP\cdot BD=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}t\times 8\sqrt{2}=8t(\text{cm}^2)$，$PD=(8\sqrt{2}-\sqrt{2}t)$ cm.

易知 $PE=AP=\sqrt{2}t$ cm，

∴ $S_2=PD\cdot PE=(8\sqrt{2}-\sqrt{2}t)\cdot\sqrt{2}t\text{ cm}^2$.

∵ $S_1=2S_2$，

∴ $8t=2(8\sqrt{2}-\sqrt{2}t)\cdot\sqrt{2}t$.

解得 $t_1=0$(舍去)，$t_2=6$.

三、19. **解**：(1)(配方法)

移项，得 $x^2-4x=1$，

配方，得 $x^2-4x+(-2)^2=1+(-2)^2$，

因此 $(x-2)^2=5$，

所以 $x-2=\sqrt{5}$ 或 $x-2=-\sqrt{5}$，

解得 $x_1=\sqrt{5}+2$，$x_2=2-\sqrt{5}$.

(2)(因式分解法) 移项，得 $x^2-1-2(x+1)=0$，因式分解，得 $(x+1)(x-1-2)=0$，

解得 $x_1=-1$，$x_2=3$.

(3)(公式法) ∵ $a=1$，$b=3$，$c=1$，所以 $b^2-4ac=3^2-4\times 1\times 1=5>0$，

所以 $x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$，

所以 $x_1=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$，$x_2=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$.

(4)(因式分解法) 原方程可变形为 $y^2-2y=0$，$y(y-2)=0$，

所以 $y_1=0$，$y_2=2$.

20. **解**：(1) 由题意得 $\Delta=(k+2)^2-4\times 4\times(k-1)=k^2+4k+4-16k+16=k^2-12k+20=0$，

解得 $k=2$ 或 $k=10$.

(2) 当 $k=2$ 时，

原方程变为 $4x^2-4x+1=0$，$(2x-1)^2=0$，即 $x_1=x_2=\frac{1}{2}$；

当 $k=10$ 时，原方程为 $4x^2-12x+9=0$，$(2x-3)^2=0$，

即 $x_1=x_2=\frac{3}{2}$.

21. (1) **证明**：原方程可变形为 $x^2-5x+6-p^2-p=0$.

∵ $\Delta=(-5)^2-4(6-p^2-p)=25-24+4p^2+4p=4p^2+4p+1=(2p+1)^2\geqslant 0$，

∴无论 p 取何值此方程总有两个实数根.

(2) **解**：∵原方程的两根为 x_1，x_2，

∴ $x_1+x_2=5$，$x_1x_2=6-p^2-p$.

∵ $x_1^2+x_2^2-x_1x_2=3p^2+1$，

∴ $(x_1+x_2)^2-3x_1x_2=3p^2+1$，

∴ $5^2-3(6-p^2-p)=3p^2+1$，

∴ $25-18+3p^2+3p=3p^2+1$，

∴ $3p=-6$，

∴ $p=-2$.

22. **解**：(1) 第一行填 $80-x$；第二行依次填 $200+10x$；$800-200-(200+10x)$.

(2) 根据题意，得 $80\times 200+(80-x)(200+10x)+40[800-200-(200+10x)]-50\times 800=9000$.

整理，得 $x^2-20x=0$.

解这个方程，得 $x_1=x_2=10$.

当 $x=10$ 时，$80-x=70>50$.

所以第二个月的单价应是 70 元.

23. **解**：(1) 设 t s 后，$\triangle PBQ$ 的面积为 8 cm^2，则 $PB=(6-t)$ cm，$BQ=2t$ cm，

∵ $\angle B=90°$，

∴ $\frac{1}{2}(6-t)\times 2t=8$，

解得 $t_1=2$，$t_2=4$.

∴ 2 s 或 4 s 后，$\triangle PBQ$ 的面积为 8 cm^2.

(2) 设出发 x s 后，$PQ=4\sqrt{2}$ cm，由题意，得 $(6-x)^2+(2x)^2=(4\sqrt{2})^2$，解得 $x_1=\frac{2}{5}$，$x_2=2$，故出发 $\frac{2}{5}$ s 或 2 s 后，线段 PQ 的长为 $4\sqrt{2}$ cm.

(3) 不能. 理由：设经过 y s，$\triangle PBQ$ 的面积等于 10 cm^2，则 $\frac{1}{2}\times(6-y)\times 2y=10$，即 $y^2-6y+10=0$，

∵ $\Delta=b^2-4ac=36-4\times 10=-4<0$，

∴ $\triangle PBQ$ 的面积不能等于 10 cm^2.

24. **解**：(1) $240-(40-30)\times 2=220$(元)，$220\times 40=8800$(元).

答：若一班共有 40 名学生参加了春游活动，则需要交门票费 8 800 元.

(2) $240-(52-30)\times 2=196$(元)，∵ $196<200$，

∴每张门票 200 元.

$200\times 52=10\,400$(元).

答：若二班共有 52 名学生参加了春游活动，则需要交门票费 10 400 元.

(3)∵ 9 450 不是 200 的整数倍，且 $240\times 30=7\,200$(元)$<9\,450$ 元，

∴每张门票的价格高于 200 元且低于 240 元.

设三班参加春游的学生有 x 名，则每张门票的价格为 $[240-2(x-30)]$ 元，

根据题意，得 $[240-2(x-30)]x=9\,450$，

整理，得 $x^2-150x+4\,725=0$，

解得 $x_1=45$，$x_2=105$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\because 240-2(x-30)>200$,

$\therefore x<50$.

$\therefore x=45$.

答:若三班交了门票费 9 450 元,则该班参加春游的学生有 45 名.

第 3 章达标检测卷

一、1. D　2. B　3. B　4. A　5. A　6. B

7. B　**点拨**:$\because AB\perp BC$,$CD\perp BC$,

$\therefore \angle ABE=\angle DCE=90°$.

$\because \angle AEB=\angle DEC$,

$\therefore \triangle ABE\backsim\triangle DCE$.

$\therefore \frac{AB}{DC}=\frac{BE}{CE}$,即 $\frac{AB}{20}=\frac{20}{10}$.

$\therefore AB=40$ m.

8. B

9. B　**点拨**:设 AB 与 OF 相交于点 M,

$\because AF\parallel OB$,

$\therefore \triangle FAM\backsim\triangle OBM$,

$\therefore \frac{OM}{FM}=\frac{BM}{AM}=\frac{BO}{AF}=\frac{1}{2}$.

设 $S_{\triangle BOM}=S$,则 $S_{\triangle AOM}=2S$,

$\because OC=\frac{1}{3}FO$,$OM=\frac{1}{2}FM$,

$\therefore OM=OC$.

$\therefore S_{\triangle AOC}=S_{\triangle AOM}=2S$,

$S_{\triangle BOC}=S_{\triangle BOM}=S$.

$\therefore S_{\triangle ABC}:S_{\triangle AOC}:S_{\triangle BOC}=3:2:1$.

10. D　**点拨**:如果从 30 cm 长的一根中截,那么 60 cm 长的一根只能作为最长边,而 $\triangle ABC$ 的最长边也为 60 cm,且另两边长之和大于 30 cm,所以不符合题意.如果从 60 cm 长的一根中截,设截得的短边和长边的长分别为 x cm,y cm,那么有三种情况,即 $20:30=50:x=60:y$ 或 $20:x=50:y=60:30$,解得 $x=75$,$y=90$($x+y>60$,不符合题意,舍去)或 $x=12$,$y=36$ 或 $x=10$,$y=25$.

故选 D.

二、11. $\frac{3}{2}$

12. $\angle D=\angle C$(答案不唯一)

13. $S_1=S_2$　**点拨**:点 C 是线段 AB 的黄金分割点,且 $BC>AC$,

$\therefore BC^2=AC\cdot AB$.

又 $\because S_1=BC^2$,$S_2=AC\cdot AD=AC\cdot AB$,

$\therefore S_1=S_2$.

14. 2∶1∶2;1∶6　15. $\frac{4}{7}$

16. $\frac{60}{17}$　**点拨**:四边形 $CDEF$ 是正方形,

$\therefore CD=ED$,$DE\parallel CF$,

设 $ED=x$ 步,则 $CD=x$ 步,$AD=(12-x)$ 步,

$\because DE\parallel CF$,

$\therefore \triangle ADE\backsim\triangle ACB$,

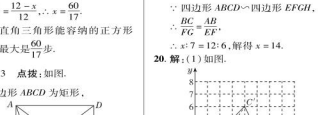
$\therefore \frac{ED}{BC}=\frac{AD}{AC}$,

$\therefore \frac{x}{5}=\frac{12-x}{12}$,$\therefore x=\frac{60}{17}$.

∴该直角三角形能容纳的正方形边长最大是 $\frac{60}{17}$ 步.

17. $\frac{6}{5}$ 或 3　**点拨**:如图.

∵四边形 $ABCD$ 为矩形,



(第 17 题)

$\therefore \angle BAD=90°$,

$\therefore BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=10$,

当 $PD=AD=8$ 时,$BP=BD-PD=2$,

$\because \triangle PBE'\backsim\triangle DBC$,

$\therefore \frac{BP}{BD}=\frac{PE'}{CD}$,即 $\frac{2}{10}=\frac{PE'}{6}$,

解得 $PE'=\frac{6}{5}$,

当 $P'D=P'A$ 时,点 P' 为 BD 的中点,$\therefore P'E'=\frac{1}{2}CD=3$,

当 $PA=AD$ 时,显然不成立.

故答案为 $\frac{6}{5}$ 或 3.

18. $\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(\frac{3}{4}\right)^n$　**点拨**:在正三角形 ABC 中,$AB_1\perp BC$,$\therefore BB_1=\frac{1}{2}BC=1$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABB_1$ 中,$AB_1=\sqrt{AB^2-BB_1^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$,

根据题意可得 $\triangle AB_2B_1\backsim\triangle AB_1B$,记 $\triangle AB_1B$ 的面积为 S,

$\therefore \frac{S_1}{S}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$,$\therefore S_1=\frac{3}{4}S$.

同理可得 $S_2=\frac{3}{4}S_1$,$S_3=\frac{3}{4}S_2$,$S_4=\frac{3}{4}S_3$,…,

$\because S=\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore S_1=\frac{3}{4}S=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{3}{4}$,

$S_2=\frac{3}{4}S_1=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(\frac{3}{4}\right)^2$,$S_3=\frac{3}{4}S_2=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(\frac{3}{4}\right)^3$,$S_4=\frac{3}{4}S_3=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(\frac{3}{4}\right)^4$,…,$S_n=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

三、19. 解:$\because$ 四边形 $ABCD\backsim$ 四边形 $EFGH$,$\therefore \angle H=\angle D=95°$.

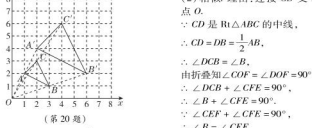
$\therefore \angle\alpha=360°-95°-118°-67°=80°$.

∵四边形 $ABCD\backsim$ 四边形 $EFGH$,

$\therefore \frac{BC}{FG}=\frac{AB}{EF}$,

$\therefore x:7=12:6$,解得 $x=14$.

20. 解:(1)如图.



(第 20 题)

(2) $S_{\triangle ABC}=4\times4-\frac{1}{2}\times2\times2-\frac{1}{2}\times2\times4-\frac{1}{2}\times2\times4=6$.

21. (1)证明:$\because AB=AC$,$\therefore \angle B=\angle C$,

又 $\because AD$ 为 BC 边上的中线,

$\therefore AD\perp BC$.

$\because DE\perp AB$,

$\therefore \angle BED=\angle ADC=90°$.

$\therefore \triangle BDE\backsim\triangle CAD$.

(2)解:$\because BC=10$,AD 为 BC 边上的中线,

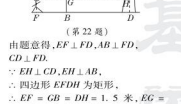
$\therefore BD=CD=5$.

$\because AC=AB=13$,

∴由勾股定理可知 $AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=12$.

由(1)中 $\triangle BDE\backsim\triangle CAD$ 可知 $\frac{DE}{AD}=\frac{BD}{AC}$,得 $\frac{DE}{12}=\frac{5}{13}$,故 $DE=\frac{60}{13}$.

22. 解:过点 E 作 $EH\perp CD$ 交 CD 于点 H,交 AB 于点 G,如图所示.



(第 22 题)

由题意得,$EF\perp FD$,$AB\perp FD$,

$CD\perp FD$.

$\therefore EH\perp CD$,$EH\perp AB$,

∴四边形 $EFDH$ 为矩形,

$\therefore EF=GB=DH=1.5$ 米,$EG=FB=2.5$ 米,$GH=BD=8$ 米,

$\therefore AG=AB-GB=2.4-1.5=0.9$(米).

$\because EH\perp CD$,$EH\perp AB$,$\therefore AG\parallel CH$,

$\therefore \triangle AEG\backsim\triangle CEH$,$\therefore \frac{AG}{CH}=\frac{EG}{EH}$,

$\therefore \frac{0.9}{CH}=\frac{2.5}{2.5+8}$,

解得 $CH=3.78$ 米,

$\therefore CD=CH+DH=3.78+1.5=5.28$(米).

答:树高 CD 为 5.28 米.

23. 解:(1)①$\sqrt{2}$　②$\frac{9}{5}$ 或 $\frac{5}{2}$

(2)相似.理由:连接 CD 交 EF 于点 O.

$\because CD$ 是 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 的中线,

$\therefore CD=DB=\frac{1}{2}AB$,

$\therefore \angle DCB=\angle B$,

由折叠知 $\angle COF=\angle DOF=90°$,

$\therefore \angle DCB+\angle CFE=90°$,

$\therefore \angle B+\angle CFE=90°$.

$\therefore \angle CFE+\angle CFE=90°$,

$\therefore \angle B=\angle CEF$.

在 $\triangle CEF$ 和 $\triangle CBA$ 中,$\angle ECF=\angle BCA$,$\angle CEF=\angle B$,

$\therefore \triangle CEF\backsim\triangle CBA$.

24. 解:(1)当 $\alpha=0°$ 时,$\because BC=2AB=8$,

$\therefore AB=4$.

∴点 D,E 分别是边 BC,AC 的中点,

$\therefore BD=4$,$AE=EC=\frac{1}{2}AC$.

$\because \angle B=90°$,

$\therefore AC=\sqrt{8^2+4^2}=4\sqrt{5}$,

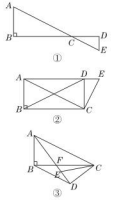
$\therefore AE=CE=2\sqrt{5}$,

$\therefore \frac{AE}{BD}=\frac{2\sqrt{5}}{4}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

当 $\alpha=180°$ 时,如图①,

易得 $AC=4\sqrt{5}$,$CE=2\sqrt{5}$,$CD=4$,

$\therefore \frac{AE}{BD}=\frac{AC+CE}{BC+CD}=\frac{4\sqrt{5}+2\sqrt{5}}{8+4}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.



(第 24 题)

(2)无变化.

证明:在题图①中,$\because DE$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线,

$\therefore DE\parallel AB$,

$\therefore \frac{CE}{CA}=\frac{CD}{CB}$,$\angle EDC=\angle B=90°$.

在题图②中,$\because \triangle EDC$ 在旋转过程中形状大小不变,

$\therefore \frac{CE}{CA}=\frac{CD}{CB}$ 仍然成立.

$\because \angle ACE=\angle BCD=\alpha$,

$\therefore \triangle ACE\backsim\triangle BCD$.$\therefore \frac{AE}{BD}=\frac{AC}{BC}$

由(1)可知 $AC=4\sqrt{5}$.

$\therefore \frac{AC}{BC}=\frac{4\sqrt{5}}{8}=\frac{\sqrt{5}}{2}$,$\therefore \frac{AE}{BD}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

$\therefore \frac{AE}{BD}$ 的大小不变.

(3)当 $\triangle EDC$ 在 BC 上方,且 A,D,E 三点共线时,四边形 $ABCD$ 为矩形,如图②,$\because BD=AC=4\sqrt{5}$;当 $\triangle EDC$ 在 BC 下方,且 A,E,D 三点共线时,$\triangle ADC$ 为直角三角形,如图③,由勾股定理可得 $AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=8$.又知 $DE=2$,$\therefore AE=6$.

$\therefore \frac{AE}{BD}=\frac{2\sqrt{5}}{4}$,$\therefore BD=\frac{12\sqrt{5}}{5}$.

综上,BD 的长为 $4\sqrt{5}$ 或 $\frac{12\sqrt{5}}{5}$.

第 4 章达标检测卷

一、1. A　2. A　3. B　4. A

5. B　**点拨**:在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中,$AD=AB\cdot\sin60°=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$(m),在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 中,$AC=\frac{AD}{\sin45°}=\frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2\sqrt{6}$(m),故选 B.

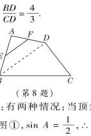
6. D　7. A

8. B　**点拨**:如图,连接 BD,由三角形中位线定理得 $BD=2EF=2\times2=4$.又 $BC=5$,$CD=3$,

$\therefore CD^2+BD^2=BC^2$.

$\therefore \triangle BDC$ 是直角三角形,且 $\angle BDC=90°$.

$\therefore \tan C=\frac{BD}{CD}=\frac{4}{3}$.



(第 8 题)

9. D　**点拨**:有两种情况:当顶角为锐角时,如图①,$\sin A=\frac{1}{2}$,$\therefore \angle A=30°$;当顶角为钝角时,如图②,$\sin(180°-\angle BAC)=\frac{1}{2}$,

$\therefore 180°-\angle BAC=30°$.

$\therefore \angle BAC=150°$.



(第 9 题)

10. A　**点拨**:如图,过点 C 作 $CN\perp DE$,交 ED 的延长线于点 N,延长 AB 交 ED 的延长线于点 M,则 $BM\perp DE$,则 $MN=BC=20$ 米.

∵斜坡 CD 的坡比 $i=1:0.75$,

∴令 $CN=x$ 米,则 $DN=0.75x$ 米.

在 $\mathrm{Rt}\triangle CDN$ 中,由勾股定理,得 $x^2+(0.75x)^2=10^2$,

解得 $x=8$(负值已舍去),

则 $CN=8$ 米,$DN=6$ 米.

∵$DE=40$ 米,∴$ME=MN+DN+DE=66$ 米,$AM=(AB+8)$ 米.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AME$ 中,$\tan E=\frac{AM}{ME}$,

即 $\tan24°=\frac{AB+8}{66}$,从而 $0.45\approx\frac{AB+8}{66}$,解得 $AB\approx21.7$ 米.



(第 10 题)

二、11. $\frac{5}{13}$

12. $\frac{9}{2}$　**点拨**:如图,过点 A 作 $AB\perp x$ 轴于 B,

∵点 $A(3,t)$ 在第一象限,

$\therefore AB=t$,$OB=3$,

$\therefore \tan\alpha=\frac{AB}{OB}=\frac{t}{3}=\frac{3}{2}$,

$\therefore t=\frac{9}{2}$.



(第 12 题)

13. $\frac{2}{3}$　14. $\frac{1}{2}$

15. $\sqrt{2}$　**点拨**:由题意知 $BD'=BD=2\sqrt{2}$.在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD'$ 中,$\tan\angle BAD'=\frac{BD'}{AB}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

16. $\frac{1}{3}$　**点拨**：如图，过 A' 作 $A'D \perp BC'$ 于点 D，设 $A'D = x$，则 $A'B' = x$，$BC = 2x$，$BD = 3x$.

所以 $\tan\angle A'BC' = \frac{A'D}{BD} = \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$.



（第 16 题）

17. $y = 2\sqrt{3}x - \sqrt{3}$

点拨：$\tan 45° = 1$，$\tan 60° = \sqrt{3}$，$-\cos 60° = -\frac{1}{2}$，$-6\tan 30° = -2\sqrt{3}$.

设函数 $y = kx + b$ 的图象经过点 $(1, \sqrt{3})$，$\left(-\frac{1}{2}, -2\sqrt{3}\right)$，则用待定系数法可求出 $k = 2\sqrt{3}$，$b = -\sqrt{3}$.

18. $\sqrt{3}$　**点拨**：如图，过点 C 作 $CH \perp l$，垂足为点 H.

由题意得 $\angle ACH = 60°$，$\angle BCH = 30°$.

设 $CH = x$ km，

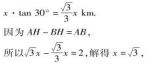
在 Rt$\triangle ACH$ 中，$AH = CH \cdot \tan\angle ACH = x \cdot \tan 60° = \sqrt{3}x$ km.

在 Rt$\triangle BCH$ 中，$BH = CH \cdot \tan\angle BCH = x \cdot \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ km.

因为 $AH - BH = AB$，

所以 $\sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3}x = 2$，解得 $x = \sqrt{3}$，

即船 C 到海岸线 l 的距离是 $\sqrt{3}$ km.



（第 18 题）

三、19. **解**：(1) 原式 $= \sqrt{2} \times \left(2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\sqrt{6}}{2} = 2 - \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} = 2$.

(2) 原式 $= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} \times \sqrt{3} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.

20. **解**：(1) $\angle B = 30°$，$a = 12$，$b = 4\sqrt{3}$.

(2) $\angle B = 45°$，$b = 3\sqrt{6}$，$c = 6\sqrt{3}$.

21. (1) **证明**：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AD // BC$. ∴ $\angle ADE = \angle DEC$.

又∵ $\angle AFC = \angle DEC$，

∴ $\angle AFC = \angle ADE$，∴ $DE // FC$.

∴ 四边形 $DECF$ 是平行四边形.

(2) **解**：过点 D 作 $DH \perp BC$ 于点 H，如图.



（第 21 题）

∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $\angle BCD = \angle A$，$AB = CD = 13$.

又∵ $\tan A = \frac{12}{5} = \tan\angle DCH = \frac{DH}{CH}$，

∴ $DH = 12$，$CH = 5$.

∵ $DF = 14$，∴ $CE = 14$. ∴ $EH = 9$.

∴ $DE = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15$.

∴ $CF = DE = 15$.

22. **解**：设 $AD = x$ m，则 $BC = 6x$ m.

在 Rt$\triangle ADE$ 中，∵ $\angle AED = 30°$，

∴ $AE = \frac{AD}{\tan 30°} = \frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3}x$ (m)，

$DE = 2AD = 2x$ m.

在 Rt$\triangle BCE$ 中，∵ $\angle BEC = 60°$，

∴ $BE = \frac{BC}{\tan 60°} = \frac{6x}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}x$ (m)，

$EC = 2BE = 4\sqrt{3}x$ m.

∵ $AE + BE = AB$，

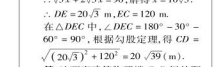
∴ $\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}x = 90$，解得 $x = 10\sqrt{3}$.

∴ $DE = 20\sqrt{3}$ m，$EC = 120$ m.

在 $\triangle DEC$ 中，∵ $\angle DEC = 180° - 30° - 60° = 90°$，根据勾股定理，得 $CD = \sqrt{(20\sqrt{3})^2 + 120^2} = 20\sqrt{39}$ (m).

答：这两座建筑物顶端 C，D 间的距离为 $20\sqrt{39}$ m.

23. **解**：如图，过点 C 作 $CE \perp BD$ 于点 E，延长 AC，交 BD 的延长线于点 F，



（第 23 题）

在 Rt$\triangle CDE$ 中，$i = 1{:}1.875$，

∵ $\frac{CE}{DE} = \frac{1}{1.875} = \frac{8}{15}$，

设 $CE = 8x$ 米，$DE = 15x$ 米，

则 $DC = 17x$ 米，

∵ $DC = 3.4$ 米，

∴ $CE = 1.6$ 米，$DE = 3$ 米，

在 Rt$\triangle MNH$ 中，$\tan\angle MHN = \frac{MN}{NH} = \frac{168}{336} = \frac{1}{2}$.

∴ 在 Rt$\triangle CEF$ 中，$\tan F = \frac{CE}{EF} = \frac{1.6}{EF} = \tan\angle MHN = \frac{1}{2}$.

∴ $EF = 3.2$ 米，

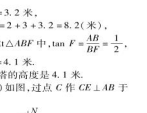
即 $BF = 2 + 3 + 3.2 = 8.2$ (米)，

∴ 在 Rt$\triangle ABF$ 中，$\tan F = \frac{AB}{BF} = \frac{1}{2}$，

∴ $AB = 4.1$ 米.

答：铁塔的高度是 4.1 米.

24. **解**：(1) 如图，过点 C 作 $CE \perp AB$ 于点 E.



（第 24 题）

设 $AE = a$ 海里，则 $BE = AB - AE = 100(\sqrt{3} + 1) - a$ (海里).

在 Rt$\triangle ACE$ 中，∵ $\angle AEC = 90°$，$\angle EAC = 60°$，

∴ $AC = \frac{AE}{\cos 60°} = \frac{a}{\frac{1}{2}} = 2a$ (海里)，

$CE = AE \cdot \tan 60° = \sqrt{3}a$ (海里).

在 Rt$\triangle BCE$ 中，$\angle EBC = 45°$，

∴ $\angle BCE = 90° - \angle EBC = 45°$.

∴ $\angle EBC = \angle ECB$，$BE = CE$.

∴ $100(\sqrt{3} + 1) - a = \sqrt{3}a$，

解得 $a = 100$.

∴ $AC = 200$ 海里.

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB = 180° - 45° - 60° = 75° = \angle ADC$，$\angle CAD = \angle BAC$，

∴ $\triangle ACD \sim \triangle ABC$，∴ $\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$，

即 $\frac{AD}{200} = \frac{200}{100(\sqrt{3} + 1)}$，

∴ $AD = 200(\sqrt{3} - 1)$ 海里.

答：A 与 C 之间的距离为 200 海里，A 与 D 之间的距离为 $200(\sqrt{3} - 1)$ 海里.

(2) 如图，过点 D 作 $DF \perp AC$ 于点 F.

在 Rt$\triangle ADF$ 中，$\angle DAF = 60°$，

∴ $DF = AD \cdot \sin 60° = 200(\sqrt{3} - 1) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 100(3 - \sqrt{3}) \approx 127$ (海里).

∵ $127 > 100$，

∴ 若运逻船 A 沿直线 AC 去营救船 C，在去营救的途中无触礁危险.

第 5 章达标检测卷

一、1. D　**2.** B　**3.** A　**4.** B　**5.** B　**6.** A　**7.** B　**8.** A　**9.** D　**10.** D

二、11. 520

12. 19 万　**点拨**：设合格品为 x 万件，则 $\frac{20 - x}{20} = \frac{5}{100}$，解得 $x = 19$.

13. 22℃　**14.** 680　**15.** 75%

16. 560　**点拨**：根据题意得抽取的总户数为 $\frac{12}{0.12} = 100$(户)，$15 < x \leqslant 20$ 的频数是 $0.07 \times 100 = 7$，$5 < x \leqslant 10$ 的频数是 $100 - 12 - 20 - 7 - 3 = 58$，则估计该小区月均用水量不超过 $10\ m^3$ 的家庭有 $\frac{12 + 58}{100} \times 800 = 560$(户).

17. 40 W；25 W

点拨：$\bar{x}_{25\,W} = \frac{1}{8} \times (444 + 443 + \cdots + 464) = 452$(h)，

$\bar{x}_{40\,W} = \frac{1}{8} \times (439 + 466 + \cdots + 455) = 455$(h)，$s^2_{25\,W} = \frac{1}{8} \times [(444 - 452)^2 + (443 - 452)^2 + \cdots + (464 - 452)^2] = 78$，$s^2_{40\,W} = \frac{1}{8} \times [(439 - 455)^2 + (466 - 455)^2 + \cdots + (455 - 455)^2] = 114.5$.

因为 $\bar{x}_{25\,W} < \bar{x}_{40\,W}$，$s^2_{25\,W} < s^2_{40\,W}$，

所以 40 W 日光灯使用寿命比较长，25 W 日光灯质量比较稳定.

18. ①②③　**点拨**：从表中可得甲、乙两班学生成绩的平均数都是 135，故①正确. 甲班中位数是 149，乙班中位数是 151，由于每分钟输入汉字的个数 $\geqslant 150$ 为优秀，故乙班优秀的人数多于甲班优秀的人数；由于 $\bar{x}_甲 = 141$，$\bar{x}_乙 = 135$，$s^2_甲 > s^2_乙$，所以甲班成绩的波动比乙班大，故②③也正确.

三、19. **解**：$\bar{x}_{甲} = \frac{1}{6} \times (99 + 100 + 98 + 100 + 100 + 103) = 100$(毫米)，$\bar{x}_{乙} = \frac{1}{6} \times (99 + 100 + 102 + 99 + 100 + 100) = 100$(毫米)；由方差计算公式可得 $s^2_{甲} = \frac{1}{6} \times [(99 - 100)^2 + (100 - 100)^2 \times 3 + (98 - 100)^2 + (103 - 100)^2] = \frac{7}{3}$，$s^2_{乙} = \frac{1}{6} \times [(99 - 100)^2 \times 2 + (100 - 100)^2 \times 3 + (102 - 100)^2] = 1$.

因为 $\bar{x}_{甲} = \bar{x}_{乙}$，$s^2_{甲} > s^2_{乙}$，

所以乙机床加工这种零件较符合要求.

20. **解**：(1) 该店本周的日平均营业额为 $7\,560 \div 7 = 1\,080$(元).

(2) 因为在星期一至星期日的营业额中星期六、日的营业额明显高于其他五天的营业额，所以去掉星期六、日的营业额对平均数的影响较大.

故用该店本周星期一到星期五的日平均营业额估计当月的营业总额不合理.

方案：用该店本周星期一到星期日的日平均营业额估计当月营业总额，

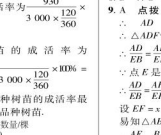
当月的营业总额约为 $30 \times 1\,080 = 32\,400$(元).

21. **解**：(1) 4 品种树苗樱数为 $1\,020 \div 85\% = 1\,200$(棵)，所以三个品种树苗去年共栽了 $1\,200 \div 40\% = 3\,000$(棵).

(2) B 品种树苗成活棵数为 $3\,000 \times 89\% - 1\,020 - 720 = 930$(棵).

补全后的条形统计图如图所示，B 品种树苗的成活率为 $\frac{930}{3\,000 \times \frac{120}{360}} \times 100\% = 93\%$.

C 品种树苗的成活率为 $\frac{720}{3\,000 - 1\,200 - 3\,000 \times \frac{120}{360}} \times 100\% = 90\%$，所以 B 品种树苗的成活率最高，今年应栽 B 品种树苗.

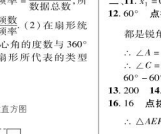


（第 21 题）

点拨：(1) 由于频率 $= \frac{\text{频数}}{\text{数据总数}}$，所以数据总数 $= \frac{\text{频数}}{\text{频率}}$；(2) 在扇形统计图中，扇形圆心角的度数与 360° 的比值等于该扇形所代表的类型的频率.

22. **解**：(1) 70；0.2

如图.



（第 22 题）

(2) $80 \leqslant x < 90$

(3) $3\,000 \times 0.25 = 750$(名).

答：该校参加本次比赛的 3 000 名学生中成绩“优”等的约有 750 名.

23. **解**：(1) D 有错. 理由：$10\% \times 20 = 2 \neq 3$，即植树 7 棵的是 2 人，并不是 3 人.

(2) ①第二步.

② 正确的平均数为 $\bar{x} = \frac{4 \times 4 + 5 \times 8 + 6 \times 6 + 7 \times 2}{20} = 5.3$(棵).

估计这 260 名学生共植树 $5.3 \times 260 = 1\,378$(棵).

期末达标检测卷

一、1. B　**2.** B　**3.** D　**4.** A

5. C　**点拨**：∵ $k_1 > 0 > k_2$，∴ 函数 $y = k_1x$ 的图象过第一、三象限，反比例函数 $y = \frac{k_2}{x}$ 的图象分布在第二、四象限. 故选 C.

6. D　**7.** C　**8.** C

9. A　**点拨**：∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，∴ $AD // BC$，$AD = BC$.

∴ $\triangle ADF \sim \triangle EBF$.

∴ $\frac{AD}{EB} = \frac{AF}{EF} = \frac{DF}{BF}$.

∵ 点 E 是 BC 的中点，$AD = BC$，

∴ $\frac{AD}{EB} = \frac{AF}{EF} = \frac{DF}{BF} = 2$.

设 $EF = x$，则 $AF = 2x$.

易知 $\triangle ABF \sim \triangle DEF$，

∴ $\frac{AF}{DF} = \frac{BF}{EF}$. ∴ $BF = \sqrt{2}x$.

∴ $\frac{DF}{BF} = 2$，

∴ $DF = 2\sqrt{2}x$.

在 Rt$\triangle DEF$ 中，$\tan\angle BDE = \frac{EF}{DF} = \frac{x}{2\sqrt{2}x} = \frac{\sqrt{2}}{4}$. 故选 A.

10. A

二、11. $x_1 = 0$，$x_2 = 5$

12. 60°　**点拨**：∵ 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A$，$\angle B$ 都是锐角，$\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos B = \frac{1}{2}$，

∴ $\angle A = \angle B = 60°$.

∴ $\angle C = 180° - \angle A - \angle B = 180° - 60° - 60° = 60°$.

13. 200　**14.** 16　**15.** 300

16. 16　**点拨**：∵ $AD // BC$，

∴ $\triangle AEF \sim \triangle CEB$，∴ $\frac{AE}{CE} = \frac{EF}{EB}$，

又易得 $\triangle ABE \sim \triangle CGE$，∴ $\frac{BE}{GE} = \frac{AE}{CE}$，

∴ $\frac{BE}{GE} = \frac{EF}{EB}$

将 $BE = 6$，$EF = 2$ 代入，求得 $EG = 18$，

∴ $FG = EG - EF = 18 - 2 = 16$.

17. ①②

18. 没有实数根　**点拨**：∵ 反比例函数 $y = \frac{a + 4}{x}$ 的图象在第一、三象限内，

∴ $a + 4 > 0$，即 $a > -4$.

∵ A，P 两点关于原点成中心对称，$PB //$ y 轴，$AB //$ x 轴，$\triangle PAB$ 的面积大于 12，

∴ $2(a + 4) > 12$，即 $a + 4 > 6$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

荣德基 主编

典中点

综合应用创新题 典中点

极速提分法

思想 方法 技巧 应用



九年级 数学 上 (XJ版)

陕西新华出版传媒集团
陕西人民教育出版社

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

极速提分20招

思想 方法 技巧 应用 四类绝招速解百题，招招见效助拿高分

第1招 反比例函数与一次函数的综合应用 …… 1 ▶第1章
第2招 反比例函数与几何的综合应用 …… 3 ▶第1章
第3招 巧用一元二次方程的定义及相关概念求字母或代数式的值 …… 6 ▶第2章
第4招 配方法的七种常见应用 …… 7 ▶第2章
第5招 一元二次方程的五种解法 …… 8 ▶第2章
第6招 根的判别式的八种常见应用 …… 10 ▶第2章
第7招 一元二次方程与三角形综合的四种类型 …… 12 ▶第2章
第8招 根与系数的关系的九种应用 …… 13 ▶第2章
第9招 一元二次方程中常见易错易混问题归类 …… 15 ▶第2章
第10招 降次思想在求代数式的值和解方程中的应用 …… 17 ▶第2章
第11招 成比例线段的证明和计算的五种常用作辅助线的方法 …… 19 ▶第3章
第12招 巧作平行线构造相似三角形 …… 21 ▶第3章
第13招 证比例式或等积式的七种技巧 …… 22 ▶第3章
第14招 求三角函数值的常见技巧 …… 25 ▶第4章
第15招 巧用构造法求几种特殊角的三角函数值 …… 26 ▶第4章
第16招 解直角三角形的八种常见类型 …… 27 ▶第4章
第17招 “化斜为直”构造直角三角形的方法 …… 29 ▶第4章
第18招 利用三角函数解实际问题 …… 30 ▶第4章
第19招 样本估计总体常见应用 …… 33 ▶第5章
第20招 建模思想应用的常见类型归类 …… 35 ▶第1~4章
参考答案及点拨 …… 37

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第1招　反比例函数与一次函数的综合应用

教你一招

反比例函数单独考查的时候很少，与一次函数综合考查的情况较多，其考查形式有：两种函数图象在同一坐标系中的情况，两种函数的图象与性质，两种函数图象的交点情况、交点坐标，用待定系数法求函数表达式及求与函数图象有关的几何图形的面积等.

典例剖析

例 如图1-1，设直线 $y=kx(k>0)$ 与双曲线 $y=\frac{5}{x}$ 相交于 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 两点，求 $x_1y_2-3x_2y_1$ 的值.

解题秘方：正比例函数和反比例函数的图象都关于原点对称，这两个函数图象的交点也关于原点对称. 解决与两个函数图象的交点有关的问题时，利用函数图象的对称性非常方便.

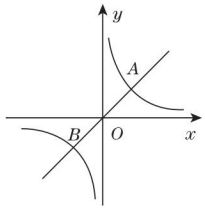


图1-1

解：因为直线 $y=kx$ 和双曲线 $y=\frac{5}{x}$ 都关于原点对称的，

所以 A，B 两点关于原点对称.

所以 $x_2=-x_1$，$y_2=-y_1$.

所以 $x_1y_2-3x_2y_1=x_1(-y_1)-3(-x_1)y_1=-x_1y_1+3x_1y_1=2x_1y_1$.

因为 $x_1y_1=5$，

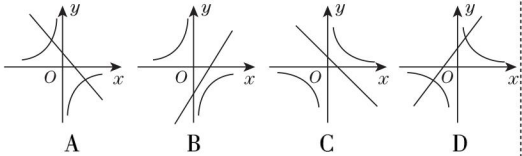
所以 $x_1y_2-3x_2y_1=2x_1y_1=10$.

分类训练

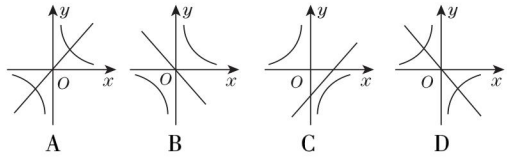
☞(答案见37页)

应用1　反比例函数图象与一次函数图象的位置进行判断

1. 在同一直角坐标系中，一次函数 $y=kx-k$ 与反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$ 的图象大致是(　　)



2. 若 $ab<0$，则正比例函数 $y=ax$ 与反比例函数 $y=\frac{b}{x}$ 在同一坐标系中的大致图象可能是(　　)



应用2　反比例函数与一次函数的图象与性质

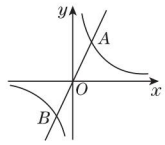
3. 如图，正比例函数 $y_1=k_1x$ 和反比例函数 $y_2=\frac{k_2}{x}$ 的图象交于 $A(1,2)$，B 两点，给出下列结论：

①$k_1<k_2$；②当 $x<-1$ 时，$y_1<y_2$；③当 $y_1>y_2$ 时，$x>1$；④当 $x<0$ 时，y_2 随 x 的增大而减小.

其中正确的有(　　)

A. 0个　　B. 1个

C. 2个　　D. 3个



(第3题)

4. 已知函数 $y_1=x(x\geqslant0)$，$y_2=\frac{4}{x}(x>0)$ 的图象如图所示，则以下结论：

①两函数图象的交点 A 的坐标为(2,2)；

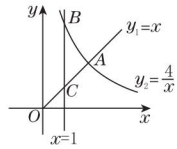
②当 $x>2$ 时，$y_1>y_2$；

③图中 $BC=2$；

④两函数图象构成的图形是轴对称图形；

⑤当 x 逐渐增大时，y_1 随着 x 的增大而增大，y_2 随着 x 的增大而减小.

其中正确结论的序号是_____.



(第4题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

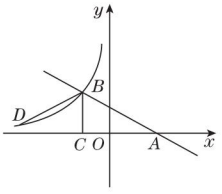
应用 3 反比例函数与一次函数的有关计算

类型 1 求函数表达式

5. 【中考·常州】如图,已知一次函数 $y=kx+b$ 的图象与 x 轴交于点 A,与反比例函数 $y=\frac{m}{x}(x<0)$ 的图象交于点 $B(-2,n)$,过点 B 作 $BC\perp x$ 轴于点 C,点 $D(3-3n,1)$ 是该反比例函数图象上一点.

(1)求 m 的值;

(2)若 $\angle DBC=\angle ABC$,求一次函数 $y=kx+b$ 的表达式.



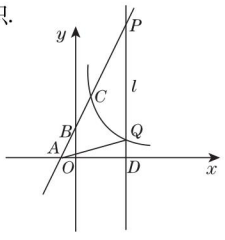
(第 5 题)

类型 2 求面积

6. 如图,在平面直角坐标系 xOy 中,直线 $y=2x+n$ 与 x 轴、y 轴分别交于点 A,B,与双曲线 $y=\frac{4}{x}$ 在第一象限内交于点 $C(1,m)$.

(1)求 m 和 n 的值;

(2)过 x 轴上的点 $D(3,0)$ 作平行于 y 轴的直线 l,分别与直线 AB 和双曲线 $y=\frac{4}{x}$ 交于点 P,Q,求 $\triangle APQ$ 的面积.



(第 6 题)

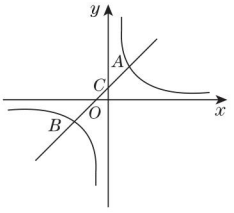
类型 3 求点的坐标

7. 【中考·自贡】如图,在平面直角坐标系中,一次函数 $y_1=kx+b(k\neq0)$ 的图象与反比例函数 $y_2=\frac{m}{x}(m\neq0)$ 的图象相交于第一、三象限内的 $A(3,5)$,$B(a,-3)$ 两点,与 x 轴交于点 C.

(1)求该反比例函数和一次函数的表达式;

(2)在 y 轴上找一点 P 使 $PB-PC$ 最大,求 $PB-PC$ 的最大值及点 P 的坐标;

(3)直接写出当 $y_1>y_2$ 时,x 的取值范围.



(第 7 题)

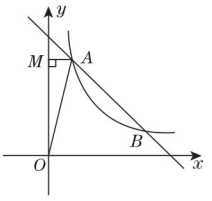
类型 4 有关最值的计算题

8. 如图,一次函数 $y=mx+5$ 的图象与反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$ 在第一象限的图象交于 $A(1,n)$ 和 $B(4,1)$ 两点,过点 A 作 y 轴的垂线,垂足为 M.

(1)求一次函数和反比例函数的表达式;

(2)求 $\triangle OAM$ 的面积 S;

(3)在 y 轴上求一点 P,使 $PA+PB$ 最小.



(第 8 题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第2招　反比例函数与几何的综合应用

教你一招

解反比例函数与几何图形的综合题，一般先设出几何图形中的未知量，然后结合函数的图象用含未知数的代数式表示出几何图形与图象的交点坐标，再由函数表达式及几何图形的性质写出含未知数及待求字母系数的方程(组)，解方程(组)即可得所求几何图形中的未知量或函数表达式中待定字母的值.

典例剖析

例 【中考·山西】如图2-1，在平面直角坐标系中，正方形 $OABC$ 的顶点 O 与坐标原点重合，其边长为2，点 A、点 C 分别在 x 轴、y 轴的正半轴上，函数 $y=2x$ 的图象与 CB 交于点 D，函数 $y=\frac{k}{x}$(k 为常数，$k\neq0$)的图象经过点 D，与 AB 交于点 E，与函数 $y=2x$ 的图象在第三象限内交于点 F，连接 AF，EF.

(1)求函数 $y=\frac{k}{x}$ 的表达式，并直接写出 E，F 两点的坐标；

(2)求△AEF 的面积.

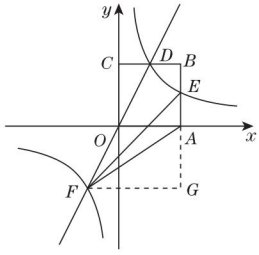


图2-1

解题秘方：根据正方形的性质，以及函数图象上点的坐标特征可求出点 D 的坐标为(1，2)，根据待定系数法可求出反比例函数表达式，进一步得到 E，F 两点的坐标；过点 F 作 $FG\perp AB$，与 BA 的延长线交于点 G，根据两点间的距离公式可求出 $AE=1$，$FG=3$，再根据三角形面积公式可求出△AEF 的面积.

解：(1)∵正方形 $OABC$ 的边长为2，

∴点 D 的纵坐标为2，即 $y=2$，

将 $y=2$ 代入 $y=2x$，得 $x=1$，

∴点 D 的坐标为(1，2).

∵函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象经过点 D，

∴$2=\frac{k}{1}$，解得 $k=2$，

∴函数 $y=\frac{k}{x}$ 的表达式为 $y=\frac{2}{x}$.

$E(2,1)$，$F(-1,-2)$.

(2)如图2-1，过点 F 作 $FG\perp AB$，与 BA 的延长线交于点 G，

∵$E(2,1)$，$F(-1,-2)$，

∴$AE=1$，$FG=2-(-1)=3$，

∴△AEF 的面积为 $\frac{1}{2}AE\cdot FG=\frac{1}{2}\times1\times3=\frac{3}{2}$.

分类训练

☞(答案见38页)

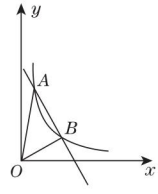
应用1　反比例函数与三角形的综合

1. 如图，一次函数 $y=kx+b$ 与反比例函数 $y=\frac{6}{x}$($x>0$)的图象交于 $A(m,6)$，$B(3,n)$ 两点.

(1)求一次函数的表达式；

(2)根据图象直接写出使 $kx+b<\frac{6}{x}$ 成立的 x 的取值范围；

(3)求△AOB 的面积.



(第1题)

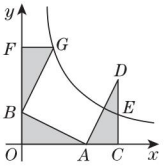
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2. 如图，点 A，B 分别在 x 轴、y 轴上，点 D 在第一象限内，$DC \perp x$ 轴于点 C，$AO = CD = 2$，$AB = DA = \sqrt{5}$，反比例函数 $y = \frac{k}{x}(x > 0)$ 的图象过 CD 的中点 E.

(1) 求证：$\triangle AOB \cong \triangle DCA$.

(2) 求 k 的值.

(3) $\triangle BFG$ 和 $\triangle DCA$ 关于某点成中心对称，其中点 F 在 y 轴上，试判断点 G 是否在反比例函数的图象上，并说明理由.



(第 2 题)

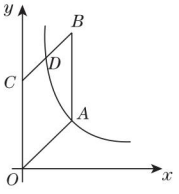
应用 2 反比例函数与四边形的综合

类型 1 反比例函数与平行四边形的综合

3. 【中考·常州】如图，在 $\square OABC$ 中，$OA = 2\sqrt{2}$，$\angle AOC = 45°$，点 C 在 y 轴上，点 D 是 BC 的中点，反比例函数 $y = \frac{k}{x}(x > 0)$ 的图象经过点 A，D.

(1) 求 k 的值；

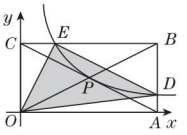
(2) 求点 D 的坐标.



(第 3 题)

类型 2 反比例函数与矩形的综合

4. 如图，矩形 $OABC$ 的顶点 A，C 的坐标分别是 $(4,0)$ 和 $(0,2)$，反比例函数 $y = \frac{k}{x}(x > 0)$ 的图象过对角线的交点 P 并且与 AB，BC 分别交于 D，E 两点，连接 OD，OE，DE，则 $\triangle ODE$ 的面积为_____.

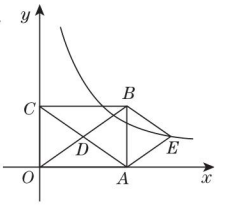


(第 4 题)

5. 如图，在平面直角坐标系中，矩形 $OABC$ 的对角线 OB，AC 相交于点 D，且 $BE \parallel AC$，$AE \parallel OB$.

(1) 求证：四边形 $AEBD$ 是菱形.

(2) 如果 $OA = 3$，$OC = 2$，求出经过点 E 的双曲线对应的函数表达式.



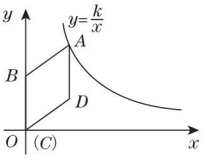
(第 5 题)

类型 3 反比例函数与菱形的综合

6. 如图，在平面直角坐标系中，菱形 $ABCD$ 的顶点 C 与原点 O 重合，点 B 在 y 轴的正半轴上，点 A 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}(k > 0, x > 0)$ 的图象上，点 D 的坐标为 $(4,3)$.

(1) 求 k 的值；

(2) 若将菱形 $ABCD$ 沿 x 轴正方向平移，当菱形的顶点 D 落在反比例函数 $y = \frac{k}{x}(k > 0, x > 0)$ 的图象上时，求菱形 $ABCD$ 沿 x 轴正方向平移的距离.



(第 6 题)

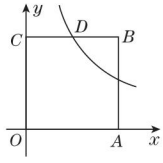
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

类型4 反比例函数与正方形的综合

7. 如图，在平面直角坐标系中，点 O 为坐标原点，正方形 $OABC$ 的边 OA，OC 分别在 x 轴、y 轴上，点 B 的坐标为 $(2,2)$，反比例函数 $y=\frac{k}{x}(x>0,k\neq0)$ 的图象经过线段 BC 的中点 D.

(1) 求 k 的值；

(2) 若点 $P(x,y)$ 在该反比例函数的图象上运动（不与点 D 重合），过点 P 作 $PR\perp y$ 轴于点 R，作 $PQ\perp BC$ 所在直线于点 Q，记四边形 $CQPR$ 的面积为 S，求 S 关于 x 的函数表达式，并写出 x 的取值范围.



（第7题）

应用3 反比例函数与菱形、正方形的综合

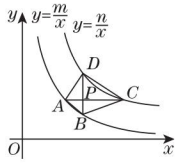
8. 【中考·金华】如图，四边形 $ABCD$ 的四个顶点分别在反比例函数 $y=\frac{m}{x}$ 与 $y=\frac{n}{x}(x>0,0<m<n)$ 的图象上，对角线 $BD\parallel y$ 轴，且 $BD\perp AC$ 于点 P，已知点 B 的横坐标为4.

(1) 当 $m=4$，$n=20$ 时，

①若点 P 的纵坐标为2，求直线 AB 的函数表达式.

②若点 P 是 BD 的中点，试判断四边形 $ABCD$ 的形状，并说明理由.

(2) 四边形 $ABCD$ 能否成为正方形？若能，求此时 m，n 之间的数量关系；若不能，试说明理由.



（第8题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第3招 巧用一元二次方程的定义及相关概念求字母或代数式的值



教你一招

巧用一元二次方程的定义及相关概念求值主要体现在:利用定义或项的概念求字母的值,利用根的概念求字母或代数式的值,利用根的概念解决探究性问题等.

分类训练 ☞(答案见40页)

应用1 利用一元二次方程的定义求字母的取值

1. 已知$(m-3)x^2+\sqrt{m+2}x=1$是关于x的一元二次方程,则m的取值范围是(　　)

A. $m\neq3$　　B. $m\geqslant3$

C. $m\geqslant-2$　　D. $m\geqslant-2$且$m\neq3$

2. 已知关于x的方程$(m+1)x^{m^2+1}+(m-2)x-1=0$.

(1)m取何值时,它是一元二次方程?并写出这个方程.

(2)m取何值时,它是一元一次方程?

应用2 利用一元二次方程的项的概念求字母的取值

3. 已知关于x的一元二次方程$(m-1)x^2+5x+m^2-1=0$的常数项为0,求m的值.

应用3 利用一元二次方程的根的概念求字母或代数式的值

4. 【中考·宁夏】若$2-\sqrt{3}$是关于x的方程$x^2-4x+c=0$的一个根,则c的值是(　　)

A. 1　　B. $3-\sqrt{3}$　　C. $1+\sqrt{3}$　　D. $2+\sqrt{3}$

5. 已知关于x的一元二次方程$(k+4)x^2+3x+k^2-16=0$的一个根为0,求k的值.

6. 已知实数a是一元二次方程$x^2-2\,022x+1=0$的根,求代数式$a^2-2\,021a-\dfrac{a^2+1}{2\,022}$的值.

应用4 利用一元二次方程的根的概念解决探究性问题

7. 已知m,n是方程$x^2-2x-1=0$的两个根,是否存在实数a使$(7m^2-14m+a)(3n^2-6n-7)$的值等于8?若存在,求出a的值;若不存在,请说明理由.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

第4招　配方法的七种常见应用

教你一招

配方法的应用有两个大的方面：二次三项式的配方和用配方法解一元二次方程，其依据是完全平方公式 $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$；另外还广泛应用于求最值、求待定系数的值等，是一个重要的数学方法.

典例剖析

例 当 x 取何值时，代数式 $2x^2 - 6x + 7$ 的值最小？并求出这个最小值.

解题秘方：求代数式的最值，用配方法就要先将代数式转化成 $a(x+m)^2 + n$ 的形式，然后根据完全平方式的非负性求代数式的最值.

解：$2x^2 - 6x + 7 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}$.

$\because 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \geqslant 0$，$\therefore 2x^2 - 6x + 7 \geqslant \frac{5}{2}$.

$\therefore$ 当 $x = \frac{3}{2}$ 时，$2x^2 - 6x + 7$ 的值最小，最小值为 $\frac{5}{2}$.

分类训练

☞(答案见40页)

应用1　配方法在识别方程中的应用

1. 求证：无论 m 为何值，关于 x 的方程 $(m^2 - 4m + 5)x^2 + 2x - 7 = 0$ 是一元二次方程.

应用2　配方法在解方程中的应用

2. 根据要求，解答下列问题.

(1) 解下列方程(直接写出方程的解即可)：

①方程 $x^2 - 2x + 1 = 0$ 的解为_____；

②方程 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 的解为_____；

③方程 $x^2 - 4x + 3 = 0$ 的解为_____；

……

(2) 根据以上方程特征及其解的特征，请猜想：

①方程 $x^2 - 9x + 8 = 0$ 的解为_____；

②关于 x 的方程_____的解为 $x_1 = 1$，$x_2 = n$；

(3) 请用配方法解方程 $x^2 - 9x + 8 = 0$，以验证猜想结论的正确性.

应用3　配方法在求二次三项式中的待定系数的应用

3. 已知关于 x 的二次三项式 $x^2 + (k+1)x + k^2 - 2k + 1$ 是完全平方式，求 k 的值.

应用4　配方法在求二次三项式的最小(大)值中的应用

4. 求多项式 $2x^2 - 4x + 7$ 的最小值.

应用5　配方法在判定一元二次方程中的应用

5. 试证明关于 x 的方程 $(a^2 - 8a + 20)x^2 + 2ax + 1 = 0$，无论 a 为何值，该方程都是一元二次方程.

应用6　配方法在求多个未知数的值中的应用

6. 已知 a，b，c 是 $\triangle ABC$ 的三边长，且 $a^2 + b^2 + c^2 - 6a - 8b - 10c + 50 = 0$.

(1) 求 a，b，c 的值；

(2) 判断 $\triangle ABC$ 的形状.

应用7　配方法在比较两个二次三项式大小中的应用

7. 设 $A = 2x^2 - 4x - 1$，$B = x^2 - 6x - 6$，试比较 A 和 B 的大小.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第5招 一元二次方程的五种解法

教你一招

解一元二次方程时，主要考虑降次，其解法有**直接开平方法**、**因式分解法**、**配方法**和**公式法**，有些特殊方程还可用**换元法**等. 当题目中要求用某一种方法求解时，则根据要求进行计算，如果没有，则依次按照直接开平方法→因式分解法→配方法→公式法的顺序选一种运算比较简便的方法进行求解.

典例剖析

例 用公式法解下列方程.

(1) $2x^2-7x+4=0$；(2) $3x^2-2\sqrt{3}x=-1$；

(3) $x^2-2x+3=0$；(4) $-3x^2-5x+2=0$.

解题秘方：用公式法解一元二次方程时，先将方程整理成一元二次方程的一般形式，确定 a,b,c 的值，再求出 Δ 的值，当 $\Delta\geqslant 0$ 时，可代入求根公式求解，当 $\Delta<0$ 时，方程无实数根，这时，若将 a,b,c 的值直接代入求根公式，则算式无意义. 另外，当 a,b,c 中含有分数时，一般先化为整数再计算.

解：(1)$\because a=2,b=-7,c=4$，

$\therefore \Delta=(-7)^2-4\times2\times4=17$.

$\therefore x_1=\dfrac{7+\sqrt{17}}{4},x_2=\dfrac{7-\sqrt{17}}{4}$.

(2)方程可化为 $3x^2-2\sqrt{3}x+1=0$.

$\because a=3,b=-2\sqrt{3},c=1$，

$\therefore \Delta=(-2\sqrt{3})^2-4\times3\times1=0$.

$\therefore x_1=x_2=-\dfrac{-2\sqrt{3}}{2\times3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

(3)$\because a=1,b=-2,c=3$，

$\therefore \Delta=(-2)^2-4\times1\times3=-8<0$.

$\therefore$ 方程无实数根.

(4)$\because a=-3,b=-5,c=2$，

$\therefore \Delta=(-5)^2-4\times(-3)\times2=49$.

$\therefore x=\dfrac{5\pm\sqrt{49}}{2\times(-3)}=-\dfrac{5\pm7}{6}$. $\therefore x_1=-2,x_2=\dfrac{1}{3}$.

分类训练

☞(答案见41页)

解法1 用直接开平方法解方程

1. 解方程：$(4x-1)^2=225$.

2. 解方程：$\dfrac{1}{3}(x-1)^2=8$.

解法2 用配方法解方程

3. 【中考·梧州】解方程：$2x^2-4x-30=0$.

4. 解方程：$(2x-1)^2=x(3x+2)-7$.

5. 解方程：$(x+1)(x-1)+2(x+3)=8$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解法3 用公式法解方程

6. 解方程：$x^2=6x+1$.

7. 解方程：$\sqrt{2}x-2=2x^2$.

解法4 用因式分解法解方程

8. 解方程：$2(x-2)=3x(x-2)$.

9. 解方程：$3(x-5)^2=x^2-25$.

10. 解方程：$(x+2)^2-4(x+2)+3=0$.

解法5 用换元法解方程

11. 阅读下面的材料：

为解方程$(x^2-1)^2-6(x^2-1)+8=0$，我们可以将x^2-1视为一个整体，可设$x^2-1=y$，则$(x^2-1)^2=y^2$，原方程可化为$y^2-6y+8=0$，解得$y_1=2$，$y_2=4$.

当$y=2$时，$x^2-1=2$，$x^2=3$，$\therefore x=\pm\sqrt{3}$；

当$y=4$时，$x^2-1=4$，$x^2=5$，$\therefore x=\pm\sqrt{5}$.

$\therefore$原方程的解为$x_1=\sqrt{3}$，$x_2=-\sqrt{3}$，$x_3=\sqrt{5}$，$x_4=-\sqrt{5}$.

(1)根据材料解方程：$x^4+x^2-6=0$.

(2)已知实数a，b满足$(a+2b)(a+2b-2)=2a+4b-4$，求$4a+8b-1$的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第6招 根的判别式的八种常见应用

教你一招

1. 对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$，式子 b^2-4ac 的值决定了一元二次方程的根的情况，利用根的判别式可以不解方程直接判断方程根的情况，反过来，利用方程根的情况可以确定方程中待定系数的值或取值范围.
2. 对于反比例函数与一次函数的图象的公共点问题，可转化为一元二次方程根的情况，用判别式来辅助计算. 判别式大于0，则有两个公共点；判别式等于0，则有一个公共点；判别式小于0，则没有公共点.

典例剖析

例 【中考·岳阳】已知关于 x 的方程 $x^2-(2m+1)x+m(m+1)=0$.

(1)求证：方程总有两个不等的实数根；

(2)已知方程的一个根为 $x=0$，求代数式 $(2m-1)^2+(3+m)(3-m)+7m-5$ 的值(要求先化简再求值).

解题秘方：一元二次方程根的判别式的应用主要有以下三种情况：1. 不解方程，由根的判别式的正负性及是否为0可直接判定根的情况. 2. 根据方程根的情况，结合根的判别式来确定方程中待定字母的取值范围，若二次项系数中含有字母，则应注意检验二次项系数是否为零. 3. 应用判别式证明方程根的情况(有实根、无实根、有两个不等的实根、有两个相等的实根).

(1)**证明**：∵关于 x 的方程 $x^2-(2m+1)x+m(m+1)=0$ 是一元二次方程，

∴$\Delta=[-(2m+1)]^2-4m(m+1)=1>0$.

∴方程总有两个不等的实数根.

(2)**解**：∵$x=0$ 是此方程的一个根，

∴把 $x=0$ 代入方程中得到 $m(m+1)=0$.

∴$m=0$ 或 $m=-1$.

$(2m-1)^2+(3+m)(3-m)+7m-5=4m^2-4m+1+9-m^2+7m-5=3m^2+3m+5$，

把 $m=0$ 代入 $3m^2+3m+5$ 得 $3m^2+3m+5=5$；

把 $m=-1$ 代入 $3m^2+3m+5$ 得 $3m^2+3m+5=3\times1-3+5=5$. 综上，原代数式的值为5.

分类训练

☞(答案见41页)

应用1 利用根的判别式判断不含字母系数的方程的根的情况

1. 判断下列方程的根的情况.

(1)$x^2+x+\frac{1}{4}=0$；

(2)$x^2+2x-1=0$；

(3)$x^2+x+2=0$.

应用2 利用根的判别式判断含字母系数的方程根的情况

2. 已知关于 x 的方程 $x^2-2x-m=0$ 没有实数根，其中 m 是实数，试判断关于 x 的方程 $x^2+2mx+m(m+1)=0$ 有无实数根.

应用3 利用根的判别式求方程的字母系数的值或取值范围

3. 已知关于 x 的一元二次方程 $mx^2-(m+2)x+2=0$.

(1)证明：不论 m 为何值，方程总有实数根.

(2)m 为何整数时，方程有两个不相等的正整数根？

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

应用 4 利用根的判别式求代数式的值

4. 已知关于 x 的方程 $x^2+(2m-1)x+4=0$ 有两个相等的实数根，求 $\dfrac{m-1}{(2m-1)^2+2m}$ 的值.

应用 5 利用根的判别式确定三角形的形状

5. 已知关于 x 的一元二次方程 $(a+c)x^2+2bx+(a-c)=0$，其中 a,b,c 分别为 $\triangle ABC$ 三边的长.

(1) 如果 $x=-1$ 是方程的根，试判断 $\triangle ABC$ 的形状，并说明理由；

(2) 如果方程有两个相等的实数根，试判断 $\triangle ABC$ 的形状，并说明理由；

(3) 如果 $\triangle ABC$ 是等边三角形，试求这个一元二次方程的根.

应用 6 利用根的判别式探求菱形条件

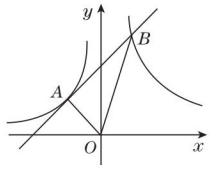
6. 已知 $\square ABCD$ 的两边 AB,AD 的长是关于 x 的方程 $x^2-mx+\dfrac{m}{2}-\dfrac{1}{4}=0$ 的两个根.

(1) m 为何值时，$\square ABCD$ 是菱形？并求出菱形的边长.

(2) 若 AB 的长为 2，求 $\square ABCD$ 的周长是多少？

应用 7 利用根的判别式解反比例函数图象与一次函数图象有一个交点问题

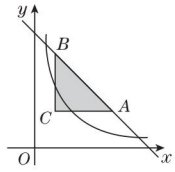
7. 如图，将直线 $y=x$ 沿 x 轴负方向平移 4 个单位长度后，恰好与双曲线 $y=\dfrac{m}{x}(x<0)$ 有唯一公共点 A，并交双曲线 $y=\dfrac{n}{x}(x>0)$ 于点 B，若 y 轴平分 $\triangle AOB$ 的面积，求 n 的值.



(第 7 题)

应用 8 利用根的判别式解反比例函数图象与一次函数图象有交点问题

8. 如图，过点 $C(1,2)$ 分别作 x 轴、y 轴的平行线，交直线 $y=-x+6$ 于点 A,B，若反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}(x>0)$ 的图象与 $\triangle ABC$ 有公共点，求 k 的取值范围.



(第 8 题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第7招 一元二次方程与三角形综合的四种类型

教你一招

一元二次方程是初中数学的重点内容之一,常常与其他知识结合,其中一元二次方程与三角形的综合应用就是非常重要的一种,主要考查一元二次方程的根的概念、根的判别式的应用、一元二次方程的解法及一元二次方程与等腰三角形、直角三角形的性质等知识的综合运用.

分类训练 ☞(答案见43页)

类型1 一元二次方程与三角形三边关系的综合

1. 一个三角形的两边长分别为4和6,第三边的长是方程$x^2-7x+12=0$的解,则第三边的长为(　　)

A. 3　　B. 4　　C. 3或4　　D. 无法确定

2. 根据一元二次方程根的定义,解答下列问题.

一个三角形两边长分别为3 cm和7 cm,第三边长为a cm(a为整数),且a满足$a^2-10a+21=0$,求三角形的周长.

解:由已知可得$4<a<10$,则a可取5,6,7,8,9.(第一步)

当$a=5$时,代入$a^2-10a+21$,得$5^2-10\times5+21\neq0$,故$a=5$不是方程的根.

同理可知$a=6$,$a=8$,$a=9$都不是方程的根,$a=7$是方程的根.(第二步)

∴三角形的周长是$3+7+7=17$(cm).

上述过程中,第一步的根据是_____,

第二步应用的数学思想是_____,确定a值的大小是根据_____.

类型2 一元二次方程与直角三角形的综合

3. 已知一个直角三角形的两条直角边的长恰好是方程$x^2-14x+48=0$的两个根,则这个直角三角形的斜边长为_____.

4. 已知a,b,c分别是$\triangle ABC$的三边长,当$m>0$时,关于x的一元二次方程$c(x^2+m)+b(x^2-m)-2\sqrt{m}ax=0$有两个相等的实数根,试判断$\triangle ABC$的形状,并说明理由.

类型3 一元二次方程与等腰三角形的综合

5. 已知关于x的方程$x^2-(k+2)x+2k=0$.

(1)求证:无论k取任何实数,方程总有实数根;

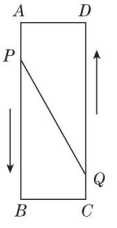
(2)若等腰三角形ABC的一边长$a=1$,另两边长b,c恰好是这个方程的两个根,求$\triangle ABC$的周长.

类型4 一元二次方程与动态几何的综合

6. 如图,已知A,B,C,D为矩形的四个顶点,$AB=16$ cm,$AD=6$ cm,动点P,Q分别从点A,C同时出发,点P以3 cm/s的速度向点B移动,一直到达点B为止,点Q以2 cm/s的速度向点D移动.问:

(1)P,Q两点从出发开始到几秒时,四边形$PBCQ$的面积是33 cm^2?

(2)P,Q两点从出发开始到几秒时,点P和点Q之间的距离第一次是10 cm?



(第6题)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

第8招　根与系数的关系的九种应用

教你一招

如果一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的两个实数根为 x_1,x_2，那么 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$，这就是一元二次方程根与系数的关系.

反过来，如果 x_1,x_2 满足 $x_1+x_2=p$，$x_1x_2=q(p^2-4q\geqslant0)$，那么 x_1,x_2 是一元二次方程 $x^2-px+q=0$ 的两个根.

一元二次方程根与系数的关系揭示了根与系数的一种必然联系，利用这个关系，我们可以解决诸如已知一根求另一根、求涉根代数式的值、构造方程、证明等式和不等式等问题，它是中学数学中的一个重要工具.

典例剖析

例 已知关于 x 的方程 $(a-5)x^2-4x-1=0$，

(1)若方程有实数根，求 a 的取值范围；

(2)是否存在这样的实数 a，使方程的两根 x_1,x_2 满足 $x_1+x_2+x_1x_2=3$？若存在，求出实数 a 的值；若不存在，请说明理由.

解题秘方：1. 对于二次项系数含有字母的方程，当方程未指明是一元二次方程或有两个根时，必须将方程按二次项系数为 0 和不为 0 两种情况进行分类讨论；2. 解答涉及一元二次方程根的存在性问题，一般先假设存在，根据根与系数的关系列出关于字母系数的方程，求出字母系数的值，再看它是否满足根的判别式大于或等于零，最后确定字母值的存在性.

解：(1)当 $a=5$ 时，方程为 $-4x-1=0$，方程有实数根；

当 $a\neq5$ 时，方程为一元二次方程，

$\Delta=16+4(a-5)=4a-4\geqslant0$，解得 $a\geqslant1$.

$\therefore a$ 的取值范围为 $a\geqslant1$.

(2)存在. 根据题意得 $x_1+x_2=\frac{4}{a-5}$，$x_1x_2=-\frac{1}{a-5}$.

$\because x_1+x_2+x_1x_2=3$，

$\therefore \frac{4}{a-5}-\frac{1}{a-5}=3$.

解这个方程得 $a=6$.

经检验，$a=6$ 是方程的解.

又$\because a=6$ 满足 $\Delta\geqslant0$，

$\therefore$ 存在实数 a，使方程的两根 x_1,x_2 满足 $x_1+x_2+x_1x_2=3$，此时 $a=6$.

分类训练

☞(答案见43页)

应用1　已知方程一根，求另一根及待定系数

1. 已知方程 $x^2+kx-6=0$ 的一个根为 2，求它的另一根及 k 的值.

应用2　已知方程，求有关两根的代数式的值

2. 已知 x_1,x_2 是方程 $x^2-4x+2=0$ 的两根，求：

(1)$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$的值；

(2)$(x_1-x_2)^2$ 的值.

应用3　已知两个方程，求含两个未知数的代数式的值

3. 已知方程 $2m^2-5m-1=0$ 与 $2n^2-5n-1=0$，且 $m\neq n$，求$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

应用4 已知方程,求字母系数的取值范围

4. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-3x+k+1=0$ 的两根的平方和小于5,求 k 的取值范围.

应用5 已知方程,求字母系数的值

5. 已知关于 x 的方程 $x^2+2(m-2)x+m^2+4=0$ 有两个实数根,且两个根的平方和比两个根的积大21,求 m 的值.

应用6 已知方程,判断根的符号

6. 不解方程,判断方程 $2x^2+3x-7=0$ 两根的符号.

应用7 已知两根,求一元二次方程

7. 已知 $x_1=-1$ 和 $x_2=3$ 是某个二次项系数为1的一元二次方程的根,请写出这个方程.

应用8 结合根的判别式证明等式

8. 已知实数 x,y,z 满足 $x=6-y,z^2=xy-9$.
求证:$x=y$.

应用9 结合根的判别式证明不等式

9. 已知实数 a,b,c 满足 $\begin{cases}a^2-a-bc+1=0,\\2a^2-2bc-b-c+2=0,\end{cases}$
求证:$a\geqslant 1$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第9招　一元二次方程中常见易错易混问题归类

教你一招

一元二次方程是初中数学的重要内容，是刻画某些实际问题中数量关系的有效的数学模型，可以利用其解决某些实际问题. 方程思想是各类考试必考的数学思想. 由于部分学生的思维不缜密，常会出现以下各类错误，通过归类练习，以示警示.

典例剖析

例 已知6是关于x的方程$x^2-(m+2)x+2m=0$的一个实数根，并且这个方程的两个实数根恰好是等腰$\triangle ABC$的两条边的长，则$\triangle ABC$的周长为多少？

解题秘方：本题考查了一元二次方程的解、解一元二次方程及三角形三边的关系，掌握数形结合思想是解题关键.

解：把$x=6$代入方程得$36-6(m+2)+2m=0$，解得$m=6$，

则原方程为$x^2-8x+12=0$，解得$x_1=2$，$x_2=6$.

由这个方程的两个根恰好是等腰$\triangle ABC$的两条边的长，可知：

①当$\triangle ABC$的腰长为6，底边长为2时，$\triangle ABC$的周长为$6+6+2=14$；

②当$\triangle ABC$的腰长为2，底边长为6时，$2+2<6$，不合题意，舍去.

综上所述，$\triangle ABC$的周长为14.

分类训练

☞(答案见44页)

易错1　忽视二次项系数不为零的条件而致错

1. 若关于x的方程$(k-4)x^{|k|-2}-x-3=0$是一元二次方程，求不等式$kx-2k+4\leqslant 0$的解集.

易错2　将多项式进行配方时与方程配方相混淆而致错

2. 将$2y^2-6y+1$进行配方.

易错3　应用根的判别式求字母的取值范围时忽视一元二次方程的隐含条件

3. 已知关于x的方程$k^2x^2+(2k-1)x+1=0$有两个不相等的实数根，求k的取值范围.

易错4　在方程两边同时除以含有未知数的式子，导致失根

4. 解方程：$3(2x+5)=2x(2x+5)$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

易错5 利用根与系数的关系时未考虑“Δ”

5. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-6x+(2m+1)=0$ 有实数根.

(1)求 m 的取值范围;

(2)如果方程的两个实数根为 x_1,x_2,且 $2x_1x_2+x_1+x_2\geqslant 20$,求 m 的取值范围.

易错6 忽视几何图形对方程根的要求

6. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-(3k+1)x+2k^2+2k=0$.

(1)求证:无论 k 取何实数值,方程总有实数根.

(2)若等腰△ABC 的一边长 $a=6$,另两边长 b,c 恰好是这个方程的两个根,求此三角形的另两边长.

易错7 忽略实际问题对方程根的要求

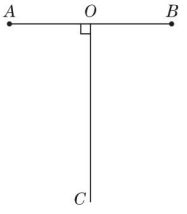
7. 某商场销售一批名牌衬衫,平均每天可售出 20 件,每件盈利 40 元,为了扩大销售,尽快减少库存,商场决定采取适当的降价措施,经调查发现,如果每件衬衫降价 4 元,商场平均每天可多售出 8 件.

(1)若商场平均每天销售这种衬衫的盈利要达到 1 200 元,每件衬衫应降价多少元?

(2)每件衬衫降价多少元时,商场每天盈利最多?

易错8 考虑问题不全面,出现漏解

8. 如图,$AO=OB=50$ cm,OC 是一条射线,$OC\perp AB$,蚂蚁甲由 A 点以 2 cm/s 的速度向 B 点爬行,同时蚂蚁乙由 O 点以 3 cm/s 的速度沿 OC 方向爬行,是否存在这样的时刻,使两只蚂蚁与 O 点组成的三角形的面积为 450 cm^2?



(第 8 题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 10 招　降次思想在求代数式的值和解方程中的应用

教你一招

解一元二次方程的基本思路是将一元二次方程降次，转化为一元一次方程求解，这种解题思路实质就是降次思想. 应用**降次思想**也能把某些高次方程转化为一元二次方程求解. 在求一些代数式的值时也常用降次思想求解.

典例剖析

例 已知：$2x^2 - x = 1$，求代数式 $6x^3 + x^2 - 5x + 2\,020$ 的值.

解题秘方：利用降次思想，将已知变形为 $x^2 = \frac{1}{2}(x+1)$ 后，反复运用 $x^2 = \frac{1}{2}(x+1)$ 进行降次化简，将 x 的三次式转化为 x 的一次式，然后代入求解.

解：∵ $2x^2 - x = 1$，

∴ $x^2 = \frac{1}{2}(x+1)$.

∴ $x^3 = \frac{1}{2}(x+1)\cdot x = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{2}x$

$= \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$.

∴ $6x^3 + x^2 - 5x + 2\,020$

$= 6\left(\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}(x+1) - 5x + 2\,020$

$= 2\,022$.

分类训练 ☞（答案见 45 页）

技巧 1　利用降次思想解一元二次方程

方法 1　开方降次法

1. 用直接开平方法解下列方程：

(1) $3(x+1)^2 = \frac{1}{3}$；

(2) $(2x+3)^2 - 12 = 0$.

方法 2　配方降次法

2. 用配方法解下列方程：

(1) $3x^2 - 12x + 9 = 0$；

(2) $2x^2 - 3 = 4x$.

方法 3　因式分解降次法

3. 解下列方程：

(1) $4x^2 - 4x + 1 = 3x^2 - 6x + 9$；

(2) $(3x+1)^2 + 4(3x+1) + 4 = 0$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

技巧 2 利用降次思想解高次方程

4. 解方程：$x^3-2x^2-4x+8=0$.

技巧 3 利用降次思想求代数式的值

方法 4 降次代换法

5. 已知 $x=2-\sqrt{5}$，求 $x^4-8x^3+16x^2-x+1$ 的值.

方法 5 整体代换降次法

6. 若 $x^2+x-1=0$，求 x^3+2x^2+3 的值.

方法 6 利用方程的根及根与系数的关系降次法

7. 设 x_1,x_2 是一元二次方程 $x^2+x-3=0$ 的两个根，求 ${x_1}^3-4{x_2}^2+19$ 的值.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 11 招　成比例线段的证明和计算的五种常用作辅助线的方法

教你一招

在与比例有关的几何证明、计算的过程中，常常需要通过平行线分线段成比例、相似三角形对应边成比例得到比例关系. 而有些题中，这样的平行线、相似三角形并不是十分明显. 因此，我们需要通过添加辅助线，构造平行线或相似三角形进而证明所需要的比例式.

典例剖析

例 如图 11-1，已知 AD 是 $\triangle ABC$ 的中线.

(1)若 E 为 AD 的中点，射线 CE 交 AB 于点 F，求 $\frac{AF}{BF}$；

(2)若 E 为 AD 上的一点，且 $\frac{AE}{ED}=\frac{1}{k}$，射线 CE 交 AB 于点 F，求 $\frac{AF}{BF}$.

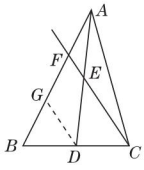


图 11-1

解题秘方：“平行线或相似三角形”是线段成比例的必备条件，因此在证明成比例线段或求线段的比时，常通过作辅助线，构造平行线截线段成比例或相似三角形的模型，而平行线分线段成比例的基本事实可将一条直线上的两条线段的比转换为另一条直线上两条线段的比，本题中已知 BD 与 CD 的比，AE 与 DE 的比，过点 D 作 $DG\parallel CF$ 交 AB 于点 G，可实现比的转换.

解： 如图 11-1，过点 D 作 $DG\parallel CF$ 交 AB 于点 G.

(1)$\because DG\parallel CF$，$\therefore \frac{BG}{GF}=\frac{BD}{DC}$.

又 $\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 的中线，

$\therefore BD=DC$. $\therefore BG=GF$.

$\because DG\parallel CF$，$\therefore \frac{AF}{FG}=\frac{AE}{ED}$.

又 $\because E$ 为 AD 的中点，

$\therefore AE=ED$. $\therefore AF=GF$.

$\therefore AF=FG=GB$. $\therefore \frac{AF}{BF}=\frac{1}{2}$.

(2)$\because DG\parallel CF$，$\therefore \frac{AF}{FG}=\frac{AE}{ED}$.

又 $\because \frac{AE}{ED}=\frac{1}{k}$，$\therefore \frac{AF}{FG}=\frac{1}{k}$，即 $FG=kAF$.

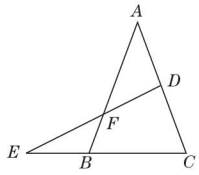
由(1)知 $BG=GF$，$\therefore BG=FG=kAF$. $\therefore BF=2kAF$. $\therefore \frac{AF}{BF}=\frac{1}{2k}$.

分类训练

☞(答案见 46 页)

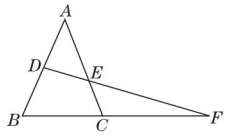
方法 1　作平行线

1. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，D 为 AC 上一点，E 为 CB 延长线上的一点，$BE=AD$，DE 交 AB 于点 F，求证：$EF\cdot BC=AC\cdot DF$.



(第 1 题)

2. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，D 为 AB 的中点，DF 交 AC 于点 E，交 BC 的延长线于点 F. 求证：$AE\cdot CF=BF\cdot EC$.

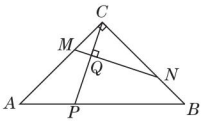


(第 2 题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

方法2 作垂线

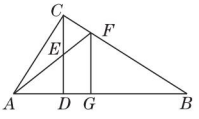
3. 如图，在△ABC中，$\angle ACB=90°$，$AC=BC$，P是AB上一点，Q是PC上一点(不是中点)，MN过点Q且$MN\perp CP$，分别交AC，BC于点M，N，求证：$PA:PB=CM:CN$.



(第3题)

方法3 作延长线

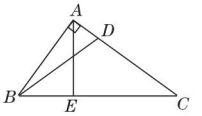
4. 如图，在Rt△ABC中，$\angle ACB=90°$，CD为斜边AB上的高，E为CD的中点，AE的延长线交BC于点F，$FG\perp AB$于点G. 求证：$FG^2=CF\cdot BF$.



(第4题)

方法4 作中线

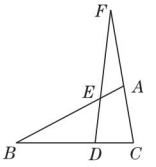
5. 如图，在△ABC中，$AB\perp AC$，$AE\perp BC$于点E，点D在AC边上，若$BD=DC=EC=1$，求AC的长.



(第5题)

方法5 作相似三角形

6. 如图，直线DF分别交△ABC的BC，AB两边于D，E，与CA的延长线交于F，若$\frac{BD}{DC}=\frac{FE}{ED}=2$，求$BE:EA$的比值.



(第6题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

参考答案及点拨

第1招 反比例函数与一次函数的综合应用

1. A　**2.** B

3. C　**点拨**:把点 $A(1,2)$ 的坐标分别代入 $y_1=k_1x$,$y_2=\frac{k_2}{x}$ 中,得 $k_1=2$,$k_2=2$. ∴ ①是错误的. 易知点 B 的坐标为 $(-1,-2)$,由图象可知,②④是正确的,当 $y_1>y_2$ 时,$x>1$ 或 $-1<x<0$,∴ ③是错误的. 故选 C.

4. ①②④⑤

5. **解**:(1)∵ 点 $B(-2,n)$,$D(3-3n,1)$ 在反比例函数 $y=\frac{m}{x}$ $(x<0)$ 的图象上,

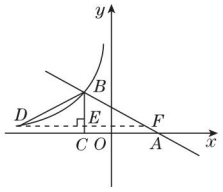
∴ $-2n=3-3n$,解得 $n=3$.

∴ $m=-2n=-6$.

(2)由(1)知反比例函数的表达式为 $y=-\frac{6}{x}$.

∵ $n=3$,∴ 点 B 的坐标为 $(-2,3)$,D 的坐标为 $(-6,1)$.

如图,过点 D 作 $DE\perp BC$ 于点 E,延长 DE 交 AB 于点 F.



(第5题)

在△DBE 和△FBE 中,$\begin{cases}\angle DBE=\angle FBE,\\ BE=BE,\\ \angle BED=\angle BEF=90°,\end{cases}$

∴ △DBE≌△FBE(ASA).

∴ $DE=FE=4$.

∴ 点 F 的坐标为 $(2,1)$.

将点 $B(-2,3)$,$F(2,1)$ 的坐标分别代入 $y=kx+b$,

得 $\begin{cases}-2k+b=3,\\ 2k+b=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-\frac{1}{2},\\ b=2.\end{cases}$

∴ 一次函数的表达式为 $y=-\frac{1}{2}x+2$.

点拨:(1)将点 B,D 的坐标代入反比例函数的表达式求解 m 的值;(2)通过作辅助线求点 F 的坐标. 再由点 B,F 的坐标求一次函数的表达式.

6. **解**:(1)把 $(1,m)$ 的坐标代入 $y=\frac{4}{x}$,得 $m=\frac{4}{1}$,∴ $m=4$.

∴ 点 C 的坐标为 $(1,4)$.

把 $(1,4)$ 的坐标代入 $y=2x+n$,

得 $4=2\times1+n$,解得 $n=2$.

(2)对于 $y=2x+2$,令 $x=3$,则 $y=2\times3+2=8$,

∴ 点 P 的坐标为 $(3,8)$.

令 $y=0$,则 $2x+2=0$,得 $x=-1$,

∴ 点 A 的坐标为 $(-1,0)$.

对于 $y=\frac{4}{x}$,令 $x=3$,则 $y=\frac{4}{3}$.

∴ 点 Q 的坐标为 $\left(3,\frac{4}{3}\right)$.

∴ △APQ 的面积 $=\frac{1}{2}AD\cdot PQ=\frac{1}{2}\times(3+1)\times\left(8-\frac{4}{3}\right)=\frac{40}{3}$.

点拨:注意反比例函数与一次函数图象的交点坐标满足两个函数的表达式,解答这类题通常运用方程思想.

7. **解**:(1)把 $A(3,5)$ 的坐标代入 $y_2=\frac{m}{x}$ $(m\neq0)$,可得 $m=3\times5=15$,∴ 反比例函数的表达式为 $y_2=\frac{15}{x}$.

把点 $B(a,-3)$ 的坐标代入 $y_2=\frac{15}{x}$,可得 $a=-5$,

∴ 点 B 的坐标为 $(-5,-3)$.

把 $A(3,5)$,$B(-5,-3)$ 的坐标分别代入 $y_1=kx+b$,可得

$\begin{cases}3k+b=5,\\ -5k+b=-3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=1,\\ b=2,\end{cases}$

∴ 一次函数的表达式为 $y_1=x+2$.

(2)一次函数的表达式为 $y_1=x+2$,令 $x=0$,则 $y=2$,

∴ 一次函数与 y 轴的交点为 $(0,2)$,

当点 P 在点 $(0,2)$ 时,$PB-PC=BC$ 最大,

令 $y=0$,则 $x=-2$,

∴ 点 C 的坐标为 $(-2,0)$,

∴ $BC=\sqrt{(-5+2)^2+3^2}=3\sqrt{2}$.

(3)当 $y_1>y_2$ 时,$-5<x<0$ 或 $x>3$.

8. **解**:(1)将 $B(4,1)$ 的坐标代入 $y=\frac{k}{x}$,得 $1=\frac{k}{4}$,∴ $k=4$.

∴ $y=\frac{4}{x}$. 将 $B(4,1)$ 的坐标代入 $y=mx+5$,得 $1=4m+5$,

∴ $m=-1$. ∴ $y=-x+5$.

(2)∵ 点 A 在反比例函数 $y=\frac{4}{x}$ 的图象上,

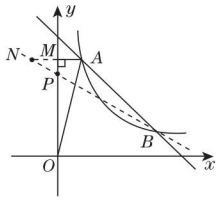
∴ $n=\frac{4}{1}$,即 $n=4$.

∴ 点 A 的坐标为 $(1,4)$.

∴ $S=\frac{1}{2}\times1\times4=2$.

(3)如图,作点 A 关于 y 轴的对称点 N,则 $N(-1,4)$,作直线 BN,交 y 轴于点 P,点 P 即为所求.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



(第 8 题)

设直线 BN 对应的函数表达式为 $y=ax+b$,

由 $\begin{cases}4a+b=1,\\-a+b=4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-\dfrac{3}{5},\\b=\dfrac{17}{5}.\end{cases}$

$\therefore y=-\dfrac{3}{5}x+\dfrac{17}{5}$. $\therefore$ 点 P 的坐标为 $\left(0,\dfrac{17}{5}\right)$.

点拨:本题主要考查了用待定系数法求一次函数与反比例函数的表达式以及对称点问题,根据已知得出对称点是解题的关键.

第 2 招 反比例函数与几何的综合应用

1. 解:(1)$\because A(m,6),B(3,n)$ 两点在反比例函数 $y=\dfrac{6}{x}(x>0)$ 的图象上,$\therefore m=1,n=2$,即点 A 的坐标为 $(1,6)$,点 B 的坐标为 $(3,2)$.

$\because$ 点 $A(1,6),B(3,2)$ 在一次函数 $y=kx+b$ 的图象上,

$\therefore \begin{cases}6=k+b,\\2=3k+b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-2,\\b=8,\end{cases}$

故一次函数的表达式为 $y=-2x+8$.

(2)根据图象可知使 $kx+b<\dfrac{6}{x}$ 成立的 x 的取值范围是 $0<x<1$ 或 $x>3$.

(3)如图,分别过点 A,B 作 $AE\perp x$ 轴,$BC\perp x$ 轴,垂足分别为 E,C,设直线 AB 交 x 轴于点 D.

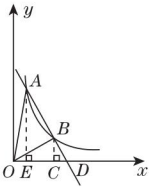
令 $-2x+8=0$,得 $x=4$,即点 D 的坐标为 $(4,0)$.

$\therefore OD=4$.

$\because$ 点 A 的坐标为 $(1,6)$,点 B 的坐标为 $(3,2)$,

$\therefore AE=6,BC=2$.

$\therefore S_{\triangle AOB}=S_{\triangle AOD}-S_{\triangle ODB}=\dfrac{1}{2}\times4\times6-\dfrac{1}{2}\times4\times2=8$.



(第 1 题)

点拨:(1)用待定系数法求出一次函数表达式;(2)根据图象直接得出 x 的取值范围;(3)作辅助线利用作差法巧解 $\triangle AOB$ 的面积.

2. (1)**证明**:$\because$ 点 A,B 分别在 x 轴、y 轴上,点 D 在第一象限内,$DC\perp x$ 轴于点 C,

$\therefore \angle AOB=\angle DCA=90°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AOB$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle DCA$ 中,$\begin{cases}AO=DC,\\AB=DA,\end{cases}$

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle AOB\cong\mathrm{Rt}\triangle DCA(\mathrm{HL})$.

(2)**解**:在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 中,$\because CD=2,DA=\sqrt{5}$,

$\therefore AC=\sqrt{DA^2-CD^2}=1$.

$\therefore OC=OA+AC=2+1=3$.

$\therefore$ 点 D 的坐标为 $(3,2)$.

$\because$ 点 E 为 CD 的中点,

$\therefore$ 点 E 的坐标为 $(3,1)$.

$\therefore k=3\times1=3$.

(3)**解**:点 G 在反比例函数的图象上.

理由如下:$\because \triangle BFG$ 和 $\triangle DCA$ 关于某点成中心对称,

$\therefore \triangle BFG\cong\triangle DCA$.

$\therefore FG=CA=1,BF=DC=2,\angle BFG=\angle DCA=90°$.

易知 $OB=AC=1$,

$\therefore OF=OB+BF=1+2=3$.

$\therefore$ 点 G 的坐标为 $(1,3)$.

$\because 1\times3=3$,

$\therefore$ 点 $G(1,3)$ 在反比例函数的图象上.

3. 解:(1)过点 A 作 $AE\perp OC$,垂足为点 E,

$\therefore \angle OAE=\angle AOC=45°$,$\therefore OE=AE$.

在 $\triangle AOE$ 中,$OE^2+AE^2=OA^2$,

即 $OE^2+OE^2=(2\sqrt{2})^2$,

解得 $OE=2$,$\therefore AE=2$,

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(2,2)$,

$\therefore k=4$.

(2)$\because$ 四边形 $OABC$ 是平行四边形,

$\therefore OC/\!/AB$.

$\because OC\perp x$ 轴,$\therefore AB\perp x$ 轴. $\therefore$ 点 B 的横坐标为 2.

$\because$ 点 D 是 BC 的中点,

$\therefore$ 点 D 的横坐标为 1,

$\therefore$ 点 D 的坐标为 $(1,4)$.

4. $\dfrac{15}{4}$ **点拨**:$\because$ 点 C 的坐标为 $(0,2)$,点 A 的坐标为 $(4,0)$,由矩形的性质可得点 P 的坐标为 $(2,1)$,把点 P 的坐标代入反比例函数的表达式可得 $k=2$,

$\therefore$ 反比例函数的表达式为 $y=\dfrac{2}{x}$. 易知点 D 的横坐标为 4,

$\therefore AD=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$. $\therefore BD=\dfrac{3}{2}$. 又易知点 E 的纵坐标为 2,

$\therefore 2=\dfrac{2}{CE}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore CE=1.\ \therefore BE=3.$

$\therefore S_{\triangle ODE}=S_{矩形OABC}-S_{\triangle OCE}-S_{\triangle BED}-S_{\triangle OAD}=8-1-\frac{9}{4}-1=\frac{15}{4}.$

5. (1)**证明**:$\because BE/\!/AC,AE/\!/OB,$

$\therefore$ 四边形 $AEBD$ 是平行四边形.

$\because$ 四边形 $OABC$ 是矩形,

$\therefore DA=\frac{1}{2}AC,DB=\frac{1}{2}OB,AC=BO.$

$\therefore DA=DB.$

$\therefore$ 四边形 $AEBD$ 是菱形.

(2)**解**:连接 DE,交 AB 于点 F,

易知 $DE=OA=3.$

$\because$ 四边形 $AEBD$ 是菱形,

$\therefore EF=DF=\frac{1}{2}DE=\frac{3}{2},AF=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}OC=1.$

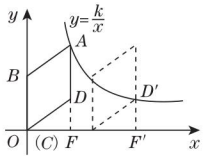
$\therefore$ 点 E 的坐标为$\left(\frac{9}{2},1\right).$

设所求反比例函数的表达式为 $y=\frac{k}{x}$,

把点 $E\left(\frac{9}{2},1\right)$的坐标代入得 $1=\frac{k}{\frac{9}{2}}$,解得$k=\frac{9}{2}.$

$\therefore$ 所求反比例函数的表达式为 $y=\frac{9}{2x}.$

6. **解**:(1)如图,过点 D 作 x 轴的垂线,垂足为 F,易知点 A,D,F 在同一条直线上.



(第 6 题)

$\because$ 点 D 的坐标为$(4,3)$,

$\therefore OF=4,DF=3.$

$\therefore OD=5.$

$\therefore AD=OD=5.$

$\therefore$ 点 A 的坐标为$(4,8)$.

$\therefore k=xy=4\times8=32.$

(2)如图,将菱形 $ABCD$ 沿 x 轴正方向平移,使得点 D 落在反比例函数$y=\frac{32}{x}(x>0)$的图象上的点 D'处,过点 D'作 x 轴的垂线,垂足为 F'.

$\because DF=3,\therefore D'F'=3.$

$\therefore$ 点 D'的纵坐标为 3.

$\because$ 点 D'在 $y=\frac{32}{x}(x>0)$的图象上,

$\therefore 3=\frac{32}{x}$,解得 $x=\frac{32}{3}$,

即 $OF'=\frac{32}{3}.\ \therefore FF'=\frac{32}{3}-4=\frac{20}{3}.$

$\therefore$ 菱形 $ABCD$ 沿 x 轴正方向平移的距离为$\frac{20}{3}.$

7. **解**:(1)$\because$ 正方形 $OABC$ 的边 OA,OC 分别在 x 轴、y 轴上,点 B 的坐标为$(2,2)$,$\therefore$ 点 C 的坐标为$(0,2)$.

$\because$ 点 D 是 BC 的中点,

$\therefore$ 点 D 的坐标为$(1,2)$.

$\because$ 反比例函数 $y=\frac{k}{x}(x>0,k\neq0)$的图象经过点 D,

$\therefore k=2.$

(2)当点 P 在直线 BC 的上方,即 $0<x<1$ 时,

$\because$ 点 $P(x,y)$在该反比例函数的图象上运动,

$\therefore y=\frac{2}{x}.$

$\therefore S_{四边形CQPR}=CQ\cdot PQ=x\cdot\left(\frac{2}{x}-2\right)=2-2x.$

当点 P 在直线 BC 的下方,即 $x>1$ 时,

同理求出 $S_{四边形CQPR}=CQ\cdot PQ=x\cdot\left(2-\frac{2}{x}\right)=2x-2.$

综上,$S=\begin{cases}2x-2(x>1),\\2-2x(0<x<1).\end{cases}$

点拨:(1)由正方形的性质求出点 D 的坐标,代入函数表达式中利用待定系数法即可求出 k 值;(2)注意将 x 的取值范围分成 $0<x<1$ 和 $x>1$ 两部分进行分类讨论.

8. **解**:(1)①易知 A,B 两点在双曲线 $y=\frac{4}{x}$上.

当 $x=4$ 时,$y=1$,

$\therefore$ 点 B 的坐标为$(4,1)$,

当 $y=2$ 时,$2=\frac{4}{x}$,

$\therefore x=2,\therefore$ 点 A 的坐标为$(2,2)$.

设直线 AB 的函数表达式为 $y=kx+b$,

$\therefore\begin{cases}2k+b=2,\\4k+b=1,\end{cases}\therefore\begin{cases}k=-\frac{1}{2},\\b=3,\end{cases}$

$\therefore$ 直线 AB 的函数表达式为 $y=-\frac{1}{2}x+3.$

②四边形 $ABCD$ 是菱形.

理由如下:易知 C,D 两点在双曲线 $y=\frac{20}{x}$上. 由①知,点 B 的坐标为$(4,1)$,

$\because BD/\!/y$ 轴,

$\therefore$ 点 D 的坐标为$(4,5)$.

$\because$ 点 P 是 BD 的中点,

$\therefore$ 点 P 的坐标为$(4,3)$,

当 $y=3$ 时,由 $y=\frac{4}{x}$得,$x=\frac{4}{3}$;

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

由 $y=\frac{20}{x}$ 得,$x=\frac{20}{3}$,故 $A\left(\frac{4}{3},3\right),C\left(\frac{20}{3},3\right)$.

$\therefore PA=4-\frac{4}{3}=\frac{8}{3},PC=\frac{20}{3}-4=\frac{8}{3}$,

$\therefore PA=PC$.

又$\because PB=PD$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

又$\because BD\perp AC$,$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形.

(2)四边形 $ABCD$ 能是正方形.

当四边形 $ABCD$ 是正方形时,$BD=AC$,

当 $x=4$ 时,$y=\frac{m}{x}=\frac{m}{4},y=\frac{n}{x}=\frac{n}{4}$,

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $\left(4,\frac{m}{4}\right)$,点 D 的坐标为 $\left(4,\frac{n}{4}\right)$,

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $\left(4,\frac{m+n}{8}\right)$,

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $\left(\frac{8m}{m+n},\frac{m+n}{8}\right)$,点 C 的坐标为 $\left(\frac{8n}{m+n},\frac{m+n}{8}\right)$.

$\because AC=BD$,

$\therefore \frac{8n}{m+n}-\frac{8m}{m+n}=\frac{n}{4}-\frac{m}{4}$,

$\therefore m+n=32$.

第 3 招 巧用一元二次方程的定义及相关概念求字母或代数式的值

1. D **点拨:** 由题意,得 $\begin{cases}m-3\neq0,\\m+2\geqslant0,\end{cases}$ 解得 $m\geqslant-2$ 且 $m\neq3$.

2. **解:**(1)当 $\begin{cases}m^2+1=2,\\m+1\neq0\end{cases}$ 时,它是一元二次方程,解得 $m=1$.

即当 $m=1$ 时,它是一元二次方程. 此时原方程可化为 $2x^2-x-1=0$.

(2)当 $\begin{cases}m-2\neq0,\\m+1=0\end{cases}$ 或者 $\begin{cases}m+1+(m-2)\neq0,\\m^2+1=1\end{cases}$ 时,它是一元一次方程. 解得 $m=-1$ 或 $m=0$.

故当 $m=-1$ 或 $m=0$ 时,它是一元一次方程.

3. **解:**由题意,得 $\begin{cases}m^2-1=0,\\m-1\neq0,\end{cases}$

解得 $m=-1$.

4. A

5. **解:**把 $x=0$ 代入 $(k+4)x^2+3x+k^2-16=0$,

得 $k^2-16=0$,解得 $k=\pm4$.

$\because k+4\neq0$,$\therefore k\neq-4$,$\therefore k=4$.

6. **解:**$\because$ 实数 a 是一元二次方程 $x^2-2\,022x+1=0$ 的根,

$\therefore a^2-2\,022a+1=0$.

$\therefore a^2+1=2\,022a,a^2-2\,022a=-1$.

$\therefore a^2-2\,021a-\frac{a^2+1}{2\,022}=a^2-2\,021a-\frac{2\,022a}{2\,022}=a^2-2\,021a-a=a^2-2\,022a=-1$.

7. **解:**存在实数 a 使 $(7m^2-14m+a)(3n^2-6n-7)$ 的值等于 8.

由题意可知 $m^2-2m-1=0,n^2-2n-1=0$,

$\therefore (7m^2-14m+a)(3n^2-6n-7)=[7(m^2-2m)+a][3(n^2-2n)-7]=(7+a)(3-7)=-4(7+a)$,由 $-4(7+a)=8$ 得 $a=-9$,故存在实数 a,且 a 的值等于 -9.

第 4 招 配方法的七种常见应用

1. **证明:**$\because m^2-4m+5=(m-2)^2+1>0$,$\therefore m^2-4m+5\neq0$.

$\therefore$ 无论 m 为何值,该方程都是关于 x 的一元二次方程.

点拨: 本题利用配方法将关于 x 的方程中 x^2 的系数 m^2-4m+5 配方得到 $(m-2)^2+1$,判断此系数的值不可能为 0,进而判断出关于 x 的方程是一元二次方程.

2. **解:**(1)①$x_1=x_2=1$ ②$x_1=1,x_2=2$ ③$x_1=1,x_2=3$

(2)①$x_1=1,x_2=8$ ②$x^2-(1+n)x+n=0$

(3)$x^2-9x+8=0$,

$x^2-9x=-8$,

$x^2-9x+\frac{81}{4}=-8+\frac{81}{4}$,

$\left(x-\frac{9}{2}\right)^2=\frac{49}{4}$.

$\therefore x-\frac{9}{2}=\pm\frac{7}{2}$.

$\therefore x_1=1,x_2=8$.

3. **解:**$\because$ 关于 x 的二次三项式 $x^2+(k+1)x+k^2-2k+1$ 是完全平方式,

$\therefore x^2+(k+1)x+k^2-2k+1=\left(x+\frac{k+1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}k^2-\frac{5}{2}k+\frac{3}{4}$ 中 $\frac{3}{4}k^2-\frac{5}{2}k+\frac{3}{4}=0$,解得 $k=3$ 或 $k=\frac{1}{3}$.

点拨: 本题利用配方法将 $x^2+(k+1)x+k^2-2k+1$ 配方得到 $\left(x+\frac{k+1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}k^2-\frac{5}{2}k+\frac{3}{4}$,由条件可知该式是完全平方式,故 $\frac{3}{4}k^2-\frac{5}{2}k+\frac{3}{4}$ 的值为 0,即可求得 k 的值.

4. **解:**$2x^2-4x+7=2(x^2-2x+1)+5=2(x-1)^2+5\geqslant5$.

$\therefore$ 多项式 $2x^2-4x+7$ 的最小值为 5.

点拨: 本题利用配方法将 $2x^2-4x+7$ 配方得到 $2(x-1)^2+5$,所以当 $x=1$ 时有最小值为 5.

5. **证明:**$\because a^2-8a+20=(a-4)^2+4>0$,$\therefore a^2-8a+20\neq0$.

$\therefore$ 无论 a 取何值,该方程都是关于 x 的一元二次方程.

6. **解:**(1)由 $a^2+b^2+c^2-6a-8b-10c+50=0$,得 $(a-3)^2+(b-4)^2+(c-5)^2=0$.

$\because (a-3)^2\geqslant0,(b-4)^2\geqslant0,(c-5)^2\geqslant0$,

$\therefore a-3=0,b-4=0,c-5=0$,

$\therefore a=3,b=4,c=5$.

(2)$\because 3^2+4^2=5^2$,即 $a^2+b^2=c^2$,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∴ $\triangle ABC$ 是直角三角形.

点拨： 本题先利用配方法将原式整理后求出 a,b,c 的值，再由勾股定理的逆定理判断三角形形状.

7. 解：$A-B=2x^2-4x-1-x^2+6x+6=x^2+2x+5=(x+1)^2+4$.

$\because (x+1)^2\geqslant 0$，$\therefore (x+1)^2+4>0$，$\therefore A>B$.

点拨： 本题比较大小用作差法，将 $A-B$ 的式子配方得到 $(x+1)^2+4$，由此式的值恒大于 0，即可比较出 A 与 B 的大小.

第 5 招　一元二次方程的五种解法

1. 解：$(4x-1)^2=225$，$4x-1=\pm 15$.

$\therefore x_1=4$，$x_2=-\frac{7}{2}$.

点拨： 利用直接开平方法求得 $4x-1=\pm 15$，从而进行求解.

2. 解：$\frac{1}{3}(x-1)^2=8$，

$(x-1)^2=24$，

$x-1=\pm 2\sqrt{6}$.

$\therefore x_1=1+2\sqrt{6}$，$x_2=1-2\sqrt{6}$.

3. 解：$2x^2-4x-30=0$，

$x^2-2x=15$，

$x^2-2x+1=15+1$，

$(x-1)^2=16$，

$x-1=\pm 4$.

$\therefore x_1=5$，$x_2=-3$.

4. 解：$(2x-1)^2=x(3x+2)-7$，

整理得 $x^2-6x=-8$，

$x^2-6x+9=-8+9$，

$(x-3)^2=1$，

$x-3=\pm 1$.

$\therefore x_1=4$，$x_2=2$.

点拨： 本题化简后配方得到 $(x-3)^2=1$，再直接开平方求解.

5. 解：$(x+1)(x-1)+2(x+3)=8$，

$x^2-1+2x+6=8$，

$x^2+2x=3$，

$x^2+2x+1=3+1$，

$(x+1)^2=4$，

$x+1=\pm 2$，

$\therefore x_1=1$，$x_2=-3$.

6. 解：$x^2=6x+1$，

$x^2-6x-1=0$，

$\Delta=(-6)^2-4\times 1\times(-1)=36+4=40$，

$x=\frac{6\pm 2\sqrt{10}}{2}$，

$\therefore x_1=3+\sqrt{10}$，$x_2=3-\sqrt{10}$.

点拨： 本题直接利用公式法求解即可.

7. 解：$\sqrt{2}x-2=2x^2$，

$2x^2-\sqrt{2}x+2=0$，

$\Delta=(-\sqrt{2})^2-4\times 2\times 2=2-16<0$，

$\therefore$ 原方程无实数根.

8. 解：$2(x-2)=3x(x-2)$，

$2(x-2)-3x(x-2)=0$，

$(x-2)(2-3x)=0$，

$x-2=0$ 或 $2-3x=0$.

$\therefore x_1=2$，$x_2=\frac{2}{3}$.

点拨： 本题先利用因式分解法将方程变形为 $(x-2)(2-3x)=0$ 再进行求解.

9. 解：$3(x-5)^2=x^2-25$，

$3(x-5)^2-(x+5)(x-5)=0$，

$(x-5)[3(x-5)-(x+5)]=0$，

$(x-5)(2x-20)=0$，

$\therefore x_1=5$，$x_2=10$.

10. 解：$(x+2)^2-4(x+2)+3=0$，

$(x+2-3)(x+2-1)=0$，

$(x-1)(x+1)=0$，

$x-1=0$ 或 $x+1=0$，

$\therefore x_1=1$，$x_2=-1$.

11. 解：(1) 设 $x^2=y$，则原方程变为 $y^2+y-6=0$，

解得 $y_1=-3$，$y_2=2$.

当 $y=-3$ 时，$x^2=-3$，无实数根；

当 $y=2$ 时，$x^2=2$，$\therefore x=\pm\sqrt{2}$.

$\therefore$ 原方程的解为 $x_1=\sqrt{2}$，$x_2=-\sqrt{2}$.

(2) 设 $a+2b=x$，则 $x(x-2)=2x-4$，解得 $x_1=x_2=2$，

即 $a+2b=2$.

$\therefore 4a+8b-1=4(a+2b)-1=4\times 2-1=7$.

点拨： 本题利用换元的思想求方程的解和代数式的值. (1) 中将 x^2 看成一个整体进行换元，(2) 中将 $a+2b$ 看成一个整体进行换元，从而达到运算简便的目的.

第 6 招　根的判别式的八种常见应用

1. 解：(1) $\Delta=0$，方程有两个相等的实根；

(2) $\Delta=2^2+4>0$，方程有两个不相等的实数根；

(3) $\Delta<0$，方程无实根.

点拨： 直接利用根的判别式判断方程根的情况即可.

2. 解：$\because x^2-2x-m=0$ 没有实数根，

$\therefore \Delta_1=(-2)^2-4\cdot(-m)=4+4m<0$，即 $m<-1$.

$\therefore$ 对于方程 $x^2+2mx+m(m+1)=0$，

$\Delta_2=(2m)^2-4\cdot m(m+1)=-4m>4$，

$\therefore$ 方程 $x^2+2mx+m(m+1)=0$ 有两个不相等的实数根.

点拨： 由 $x^2-2x-m=0$ 无实数根得出 $m<-1$，从而得到方程 $x^2+2mx+m(m+1)=0$ 的根的判别式的值 $-4m>4$，故该方程有两个不相等的实数根.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. (1)**证明**:$\Delta=[-(m+2)]^2-8m=m^2-4m+4=(m-2)^2$.

$\because (m-2)^2\geqslant 0$,即 $\Delta\geqslant 0$,

$\therefore$ 不论 m 为何值,方程总有实数根.

(2)**解**:解关于 x 的一元二次方程

$mx^2-(m+2)x+2=0$,得

$x=\dfrac{m+2\pm(m-2)}{2m}$.

$\therefore x_1=\dfrac{2}{m}$,$x_2=1$.

$\because$ 方程的两个根都是正整数,

$\therefore \dfrac{2}{m}$是正整数,

$\therefore m=1$ 或 $m=2$.

又$\because$ 方程的两个根不相等,

$\therefore m\neq 2$,$\therefore m=1$.

点拨:(1)求出方程根的判别式,根据平方的非负性证明即可.(2)利用公式法求出方程的两个根.再根据方程有两个不相等的正整数根求得 $m=1$.

4. **解**:$\because$ 关于 x 的方程 $x^2+(2m-1)x+4=0$ 有两个相等的实数根,

$\therefore \Delta=(2m-1)^2-4\times 1\times 4=0$,即 $2m-1=\pm 4$.

$\therefore m=\dfrac{5}{2}$或 $m=-\dfrac{3}{2}$.

当 $m=\dfrac{5}{2}$时,$\dfrac{m-1}{(2m-1)^2+2m}=\dfrac{\frac{5}{2}-1}{16+5}=\dfrac{1}{14}$;

当 $m=-\dfrac{3}{2}$时,$\dfrac{m-1}{(2m-1)^2+2m}=\dfrac{-\frac{3}{2}-1}{16-3}=-\dfrac{5}{26}$.

5. **解**:(1)$\triangle ABC$ 是等腰三角形,理由:$\because x=-1$ 是方程的根,

$\therefore (a+c)\times(-1)^2-2b+(a-c)=0$.

$\therefore a+c-2b+a-c=0$.$\therefore a-b=0$.$\therefore a=b$.

$\therefore \triangle ABC$ 是等腰三角形.

(2)$\triangle ABC$ 是直角三角形.理由:

$\because$ 方程有两个相等的实数根,

$\therefore (2b)^2-4(a+c)(a-c)=0$,

$\therefore 4b^2-4a^2+4c^2=0$,$\therefore a^2=b^2+c^2$,

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形.

(3)如果 $\triangle ABC$ 是等边三角形,那么 $a=b=c$.

当 $a=b=c$ 时,原方程可整理为 $2ax^2+2ax=0$.

$\therefore x^2+x=0$.解得 $x_1=0$,$x_2=-1$.

点拨:本题将方程根的判别式与三角形结合在一起进行考查,解题时根据给出的条件灵活运用即可.

6. **解**:(1)由题意,得 $\Delta=0$,

即 $m^2-4\left(\dfrac{m}{2}-\dfrac{1}{4}\right)=m^2-2m+1=0$.

解得 $m_1=m_2=1$.

故当 m 为 1 时,$\square ABCD$ 是菱形.

此时原方程为 $x^2-x+\dfrac{1}{4}=0$,解得 $x_1=x_2=\dfrac{1}{2}$.

即菱形 $ABCD$ 的边长为 $\dfrac{1}{2}$.

(2)由题意知 $x=2$ 是关于 x 的方程 $x^2-mx+\dfrac{m}{2}-\dfrac{1}{4}=0$ 的一个根,$\therefore$ 将 $x=2$ 代入原方程得 $4-2m+\dfrac{m}{2}-\dfrac{1}{4}=0$,

解得 $m=\dfrac{5}{2}$,故原方程为 $x^2-\dfrac{5}{2}x+1=0$,

解得 $x_1=2$,$x_2=\dfrac{1}{2}$.$\therefore AD=\dfrac{1}{2}$.

故 $\square ABCD$ 的周长为 $2\times\left(2+\dfrac{1}{2}\right)=5$.

点拨:本题将方程根的判别式与平行四边形、菱形相结合,灵活利用给出的条件进行求解即可.

7. **解**:直线 $y=x$ 沿 x 轴负方向平移 4 个单位长度后是直线 $y=x+4$,

由 $x+4=\dfrac{m}{x}$,可得 $x^2+4x-m=0$,根据题意知此方程有两个相等的实数根.

$\therefore \Delta=16+4m=0$.

解得 $m=-4$.

解方程组$\begin{cases}y=-\dfrac{4}{x},\\ y=x+4,\end{cases}$

得$\begin{cases}x=-2,\\ y=2.\end{cases}$

则 A 的坐标是 $(-2,2)$.

$\because y$ 轴平分 $\triangle AOB$ 的面积,

$\therefore B$ 的横坐标是 2.

在 $y=x+4$ 中,令 $x=2$,得 $y=6$,

则 B 的坐标是 $(2,6)$,

代入 $y=\dfrac{n}{x}$,得 $n=12$.

8. **解**:$\because$ 点 C 的坐标为 $(1,2)$,$BC\parallel y$ 轴,$AC\parallel x$ 轴,

$\therefore A$ 点的纵坐标为 2,B 点的横坐标为 1.

当 $x=1$ 时,$y=-1+6=5$,

当 $y=2$ 时,$-x+6=2$,解得 $x=4$,

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(4,2)$,点 B 的坐标为 $(1,5)$.

当反比例函数图象过点 C 时,k 值最小.

此时 $k=1\times 2=2$.

当反比例函数图象与线段 AB 只有一个公共点时,k 值最大.

设此公共点坐标为 $(x,-x+6)$,则 $\dfrac{k}{x}=-x+6$,得 $x^2-6x+k=0$,当 $\Delta=(-6)^2-4k=0$,即 $k=9$ 时,直线与双曲线有且只有一个公共点 $(3,3)$.

因此,k 的取值范围是 $2\leqslant k\leqslant 9$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第7招 一元二次方程与三角形综合的四种类型

1. C

2. 三角形任意两边之和大于第三边，任意两边之差小于第三边；分类讨论思想；方程根的定义

3. 10

4. 解：$\triangle ABC$ 是直角三角形. 理由如下：

原方程可化为 $(b+c)x^2-2\sqrt{m}ax+cm-bm=0$，

$\Delta=4ma^2-4m(c-b)(c+b)=4m(a^2+b^2-c^2)$.

∵ 当 $m>0$ 时，原方程有两个相等的实数根，

∴ $a^2+b^2-c^2=0$，即 $a^2+b^2=c^2$.

∴ $\triangle ABC$ 是直角三角形.

5. (1)**证明**：∵ $\Delta=[-(k+2)]^2-4\times1\times2k=k^2+4k+4-8k=k^2-4k+4=(k-2)^2\geqslant0$，∴ 无论 k 取任何实数，方程总有实数根.

(2)**解**：解方程 $x^2-(k+2)x+2k=0$，得 $x_1=k$，$x_2=2$.

∵ $\triangle ABC$ 为等腰三角形，

∴ 当 $a=k=1$ 时，$1+1=2$，此时，不能构成三角形；

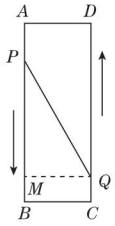
当 $a=1$，$k=2$ 时，三边长为 1，2，2，$\triangle ABC$ 的周长为 5.

6. 解：当运动时间为 t s 时，$PB=(16-3t)$ cm，$CQ=2t$ cm.

(1)依题意，得 $\frac{1}{2}\times(16-3t+2t)\times6=33$，

解得 $t=5$.

答：P，Q 两点从出发开始到 5 s 时，四边形 $PBCQ$ 的面积是 33 cm^2.



（第 6 题）

(2)过点 Q 作 $QM\perp AB$ 于点 M，如图所示.

则 $PM=PB-CQ=(16-5t)$ cm，$QM=6$ cm，

$PQ^2=PM^2+QM^2$，即 $10^2=(16-5t)^2+6^2$，

解得 $t_1=\frac{8}{5}$，$t_2=\frac{24}{5}$（不合题意，舍去）.

答：P，Q 两点从出发开始到 $\frac{8}{5}$ s 时，点 P 和点 Q 之间的距离第一次是 10 cm.

第8招 根与系数的关系的九种应用

1. 解：设方程的另一根为 x_1.

由题意得 $\begin{cases}x_1+2=-k,\\2x_1=-6,\end{cases}$

解得 $x_1=-3$，$k=1$.

∴ 方程的另一根为 -3，k 的值是 1.

点拨：利用根与系数的关系联立方程组求解即可.

2. 解：由已知得 $x_1+x_2=4$，$x_1x_2=2$.

(1)$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{4}{2}=2$；

(2)$(x_1-x_2)^2=x_1^2+x_2^2-2x_1x_2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=4^2-4\times2=16-8=8$.

点拨：将代数式变形成关于 x_1+x_2 和 x_1x_2 的组合形式，然后利用根与系数的关系求解.

3. 解：由题意得 m，n 是方程 $2x^2-5x-1=0$ 的两根，则 $m+n=\frac{5}{2}$，$mn=-\frac{1}{2}$.

$\therefore\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{m+n}{mn}=\frac{\frac{5}{2}}{-\frac{1}{2}}=-5$.

4. 解：设方程的两根分别为 x_1，x_2，则 $x_1+x_2=3$，$x_1x_2=k+1$.

∵ $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=3^2-2(k+1)<5$，

∴ $k>1$. ①

又∵ $\Delta=(-3)^2-4(k+1)\geqslant0$，

∴ $k\leqslant\frac{5}{4}$. ②

由①②得 $1<k\leqslant\frac{5}{4}$.

点拨：本题容易忽略 $\Delta\geqslant0$ 这个条件，做题时要注意方程有根的条件.

5. 解：∵ 方程有两个实数根，

∴ $\Delta=[2(m-2)]^2-4\times1\times(m^2+4)\geqslant0$.

解这个不等式，得 $m\leqslant0$.

设方程两根为 x_1，x_2，

则 $x_1+x_2=-2(m-2)$，$x_1x_2=m^2+4$.

∵ $x_1^2+x_2^2-x_1x_2=21$，

∴ $(x_1+x_2)^2-3x_1x_2=21$.

∴ $[-2(m-2)]^2-3(m^2+4)=21$.

整理得 $m^2-16m-17=0$.

解得 $m_1=-1$，$m_2=17$.

又∵ $m\leqslant0$，∴ $m=-1$.

点拨：利用根与系数的关系求出两根的和与两根的积，代入 $(x_1+x_2)^2-3x_1x_2=21$ 得到关于 m 的一元二次方程，再解方程即可，本题易忽略 $\Delta\geqslant0$ 这一条件.

6. 解：对于 $2x^2+3x-7=0$，$\Delta=3^2-4\times2\times(-7)=65>0$.

∴ 方程有两个不相等的实数根.

设方程的两个根为 x_1，x_2，

∵ $x_1x_2=-\frac{7}{2}<0$，

∴ 原方程的两个实数根异号.

点拨：先根据 $\Delta>0$ 判断方程有两个不相等的实数根，再根据 $x_1x_2=\frac{c}{a}$ 判断两实数根是同号还是异号.

7. 解：设这个方程为 $x^2+ax+b=0$.

由已知得 $-1+3=-a$，$-1\times3=b$，

∴ $a=-2$，$b=-3$.

∴ 这个方程为 $x^2-2x-3=0$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点拨： 已知方程的两实数根和二次项系数为1，可设方程为 $x^2+ax+b=0$，根据根与系数的关系即可求出此方程.

8. 证明： 由题意知 $x+y=6$，$xy=z^2+9$，

$\therefore x,y$ 是关于 t 的一元二次方程 $t^2-6t+z^2+9=0$①的两个实根，从而 $\Delta=36-4(z^2+9)=-4z^2\geqslant 0$，

$\therefore z=0$，$\therefore \Delta=0$.

$\therefore$ 方程①有两个相等的实数根，

$\therefore x=y$.

9. 证明： 由题中条件知 $bc=a^2-a+1$，$b+c=2a^2-2bc+2=2a$.

于是 b,c 是关于 t 的一元二次方程 $t^2-2at+a^2-a+1=0$ 的两个实根.

$\therefore \Delta=4a^2-4(a^2-a+1)\geqslant 0$，

解得 $a\geqslant 1$.

点拨： 本题关键是构造以 b,c 为两实根的一元二次方程，利用判别式 $\Delta\geqslant 0$ 即可证得 $a\geqslant 1$.

第9招 一元二次方程中常见易错易混问题归类

1. 错解： 由题意知 $|k|-2=2$，解得 $k=\pm 4$.

$\therefore$ 不等式为 $4x-8+4\leqslant 0$ 或 $-4x+8+4\leqslant 0$，$\therefore x\leqslant 1$ 或 $x\geqslant 3$.

诊断： 当方程是一元二次方程时，不仅要使未知数的最高次数是2，还要使二次项的系数不为0. 本题就是忽视了二次项的系数 $k-4\neq 0$ 这一条件，而导致错解.

正解： 由题意知 $\begin{cases}|k|-2=2,\\ k-4\neq 0,\end{cases}$ $\therefore k=-4$.

$\therefore$ 不等式为 $-4x+8+4\leqslant 0$，$\therefore x\geqslant 3$.

2. 错解1： 将二次项系数化为1时，仍和给方程配方时一样，各项都除以2，错得 $2y^2-6y+1=y^2-3y+\frac{1}{2}=\left(y-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{7}{4}$.

错解2： 配方时，加上一次项系数一半的平方后，为了保持代数式的值不变，必须再减去一次项系数一半的平方，不能“只加不减”. 错得 $2y^2-6y+1=2\left[y^2-3y+\left(-\frac{3}{2}\right)^2\right]+1=2\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+1$.

正解： $2y^2-6y+1$

$=2\left[y^2-3y+\left(-\frac{3}{2}\right)^2-\left(-\frac{3}{2}\right)^2\right]+1$

$=2\left[\left(y-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right]+1$

$=2\left(y-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{2}+1$

$=2\left(y-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{7}{2}$.

3. 错解： 由题意，得 $b^2-4ac=(2k-1)^2-4\times k^2\times 1>0$，解得 $k<\frac{1}{4}$.

诊断： 对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$，隐含条件 $a\neq 0$ 很容易被忽视，所以二次项系数含字母时，一定要考虑二次项系数不能为0.

正解： 由题意，得 $b^2-4ac=(2k-1)^2-4\times k^2\times 1>0$，且 $k^2\neq 0$，解得 $k<\frac{1}{4}$ 且 $k\neq 0$. 所以 k 的取值范围是 $k<\frac{1}{4}$ 且 $k\neq 0$.

4. 解： 原方程可化为 $3(2x+5)-2x(2x+5)=0$.

因式分解，得 $(2x+5)(3-2x)=0$.

$\therefore 2x+5=0$ 或 $3-2x=0$.

解得 $x_1=-\frac{5}{2}$，$x_2=\frac{3}{2}$.

点拨： 在解方程时，不能在方程的两边同时除以含有未知数的代数式，否则会造成失根. 本题容易错误地在方程的两边同时除以公因式 $2x+5$，而丢失一个根 $x=-\frac{5}{2}$.

5. 解： (1) 根据题意，得 $\Delta=(-6)^2-4(2m+1)\geqslant 0$，解得 $m\leqslant 4$.

(2) 根据题意，得 $x_1+x_2=6$，$x_1x_2=2m+1$，而 $2x_1x_2+x_1+x_2\geqslant 20$，

$\therefore 2(2m+1)+6\geqslant 20$，解得 $m\geqslant 3$.

又$\because m\leqslant 4$，$\therefore m$ 的取值范围为 $3\leqslant m\leqslant 4$.

点拨： 在解(2)题时，由 $2x_1x_2+x_1+x_2\geqslant 20$ 及根与系数的关系，得到 $m\geqslant 3$，易得到错误结论为 $m\geqslant 3$，而忽视掉 $\Delta\geqslant 0$ 的要求.

6. (1) 证明： 对于一元二次方程 $x^2-(3k+1)x+2k^2+2k=0$，

$\Delta=[-(3k+1)]^2-4(2k^2+2k)=9k^2+6k+1-8k^2-8k=k^2-2k+1=(k-1)^2\geqslant 0$.

$\therefore$ 无论 k 取何实数值，方程总有实数根.

(2) **解：** $\because \triangle ABC$ 为等腰三角形，

$\therefore$ 有 $a=b=6$，$a=c=6$ 或 $b=c$ 三种情况.

①当 $a=b=6$ 或 $a=c=6$ 时，可知 $x=6$ 为方程的一个根，

$\therefore 6^2-6(3k+1)+2k^2+2k=0$，

解得 $k=3$ 或 $k=5$.

当 $k=3$ 时，方程为 $x^2-10x+24=0$，解得 $x=4$ 或 $x=6$，

$\therefore$ 三角形的另两边长为4，6.

当 $k=5$ 时，方程为 $x^2-16x+60=0$，

解得 $x=6$ 或 $x=10$，

$\therefore$ 三角形的另两边长为6，10.

②当 $b=c$ 时，方程有两个相等的实数根，

$\therefore \Delta=0$，即 $(k-1)^2=0$，解得 $k_1=k_2=1$，

$\therefore$ 方程为 $x^2-4x+4=0$，

解得 $x_1=x_2=2$，

此时三角形三边长为6，2，2，不满足三角形三边关系，舍去.

综上可知，三角形的另两边长为4，6或6，10.

点拨： 解(2)题时易因没有考虑三角形的三边关系，而得到错误答案.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7. 错解：(1)设每件衬衫应降价 x 元，

根据题意，得$(40-x)(20+2x)=1\ 200$，

整理得 $x^2-30x+200=0$.

解得 $x_1=20$，$x_2=10$.

答：每件衬衫应降价 20 元或 10 元.

(2)由(1)知 $(40-x)(20+2x)=-2x^2+60x+800=-2(x-15)^2+1\ 250$.

因为 $-2(x-15)^2\leqslant 0$，所以当 $-2(x-15)^2=0$，即 $x=15$ 时，$-2(x-15)^2+1\ 250$ 的值最大.

即$(40-x)(20+2x)$有最大值，为 1 250.

答：每件衬衫降价 15 元时，商场每天盈利最多.

错因分析：此题条件是“尽快减少库存”，其含义是每天售出的衬衫越多越好. 因此 $x=10$ 不符合题意，舍去，所以$x=20$.

正解：(1)设每件衬衫应降价 x 元，

根据题意，得$(40-x)(20+2x)=1\ 200$，

整理得 $x^2-30x+200=0$，

解得 $x_1=20$，$x_2=10$.

因为要尽快减少库存，所以 x 应取 20.

答：每件衬衫应降价 20 元.

(2)由(1)知 $(40-x)(20+2x)=-2x^2+60x+800=-2(x-15)^2+1\ 250$.

因为 $-2(x-15)^2\leqslant 0$，所以当 $-2(x-15)^2=0$，即 $x=15$ 时，$-2(x-15)^2+1\ 250$ 的值最大.

即$(40-x)(20+2x)$有最大值，为 1 250.

答：每件衬衫降价 15 元时，商场每天盈利最多.

易错诊断：运用一元二次方程解决实际问题时，方程的解一般有两个，但由于实际情况的限制，有时会有所取舍，如果对实际情况不了解，就会出现多解的错误. 本题中，根据“尽快减少库存”的实际意义，要对方程的解进行合理取舍，忽略了这一点，结果就会出错.

8. 错解：设 t s 后两只蚂蚁与 O 点组成的三角形的面积是 450 cm². 根据题意，得$\frac{1}{2}(50-2t)\cdot 3t=450$，整理得 $t^2-25t+150=0$，解得 $t_1=10$，$t_2=15$.

答：分别在 10 s 和 15 s 时，两只蚂蚁与 O 点组成的三角形的面积为 450 cm².

错因分析：此题考虑问题不够全面，漏掉了蚂蚁甲在 OB 上的情况.

正解：(1)当蚂蚁甲在 AO 段时，设 t s 后两只蚂蚁与 O 点组成的三角形的面积是 450 cm²，根据题意，得$\frac{1}{2}(50-2t)\cdot 3t=450$.

整理得 $t^2-25t+150=0$，解得 $t_1=10$，$t_2=15$.

(2)蚂蚁甲爬完 AO 这段用了 $50\div 2=25$(s)，当它开始由 O 点向 B 点爬行时，设从 O 点开始 x s 后两只蚂蚁与 O 点组成的三角形的面积是 450 cm²，根据题意，得$\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot 3(x+25)=450$，

整理得 $x^2+25x-150=0$.

解得 $x_1=5$，$x_2=-30$(舍去).

当 $x=5$ 时，$x+25=30$，即这时蚂蚁爬了 30 s.

答：分别在 10 s，15 s，30 s 时，两只蚂蚁与 O 点组成的三角形的面积是 450 cm².

易错诊断：解动点问题要弄清点运动的特征，必要时要注意分类讨论. 如蚂蚁甲由 A 点向 B 点爬行表示蚂蚁甲既可以在线段 AO 上，又可以在线段 OB 上.

第 10 招　降次思想在求代数式的值和解方程中的应用

1. 解：(1)原方程可化为$(x+1)^2=\frac{1}{9}$，

两边直接开平方，得 $x+1=\pm\frac{1}{3}$，

$\therefore x+1=\frac{1}{3}$或 $x+1=-\frac{1}{3}$，

$\therefore x_1=-\frac{2}{3}$，$x_2=-\frac{4}{3}$.

(2)移项，得$(2x+3)^2=12$，

两边直接开平方，得 $2x+3=\pm 2\sqrt{3}$，

$\therefore 2x+3=2\sqrt{3}$或 $2x+3=-2\sqrt{3}$，

$\therefore x_1=\frac{2\sqrt{3}-3}{2}$，$x_2=\frac{-2\sqrt{3}-3}{2}$.

点拨：本题用直接开平方法解方程，如(1)将 $x+1$ 看成一个整体，得到关于 $x+1$ 的一次方程再求解即可.

2. 解：(1)二次项系数化为 1，得 $x^2-4x+3=0$，

移项，得 $x^2-4x=-3$，

配方，得 $x^2-4x+4=-3+4$，

$\therefore (x-2)^2=1$，$\therefore x-2=1$ 或 $x-2=-1$，

$\therefore x_1=3$，$x_2=1$.

(2)原方程可化为 $2x^2-4x=3$，

二次项系数化为 1，得 $x^2-2x=\frac{3}{2}$，

配方，得 $x^2-2x+1=\frac{3}{2}+1$，

$\therefore (x-1)^2=\frac{5}{2}$，

$\therefore x-1=\frac{\sqrt{10}}{2}$或 $x-1=-\frac{\sqrt{10}}{2}$，

$\therefore x_1=1+\frac{\sqrt{10}}{2}$，$x_2=1-\frac{\sqrt{10}}{2}$.

点拨：利用配方法进行配方求解即可.

3. 解：(1)移项、合并同类项，得 $x^2+2x-8=0$，

因式分解，得$(x-2)(x+4)=0$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

于是得 $x-2=0$ 或 $x+4=0$，$\therefore x_1=2, x_2=-4$.

(2)因式分解，得$(3x+1+2)^2=0$，即$(3x+3)^2=0$，

于是得 $x_1=x_2=-1$.

点拨： 直接利用因式分解法进行降次.

4. 解：原方程可变形为

$x^2(x-2)-4(x-2)=0$，$(x-2)(x^2-4)=0$，$(x-2)^2(x+2)=0$.

所以 $x_1=x_2=2, x_3=-2$.

点拨： 直接利用因式分解法进行降次.

5. 解：由 $x=2-\sqrt{5}$，得 $x-2=-\sqrt{5}$，

两边平方，得 $x^2-4x+4=5$，

$\therefore x^2-4x=1$，

$\therefore x^4-8x^3+16x^2-x+1$

$=x^2(x^2-8x+16)-(x-1)$

$=x^2(x-4)^2-(x-1)$

$=[x(x-4)]^2-(x-1)$

$=(x^2-4x)^2-(x-1)$

$=1-(2-\sqrt{5}-1)$

$=\sqrt{5}$.

6. 解：$\because x^2+x-1=0$，$\therefore x^2+x=1$，

$\therefore x^3+2x^2+3=x(x^2+x)+x^2+3=x+x^2+3=4$.

点拨： 先将代数式转化成与 x^2+x 有关的式子，再整体代入求值.

7. 解：由题意得 $x_1^2+x_1-3=0$，

$x_2^2+x_2-3=0$，

即 $x_1^2=3-x_1$，$x_2^2=3-x_2$，

$\therefore x_1^3-4x_2^2+19$

$=x_1(3-x_1)-4(3-x_2)+19$

$=3x_1-x_1^2+4x_2+7$

$=3x_1-(3-x_1)+4x_2+7$

$=4x_1+4x_2+4$

$=4(x_1+x_2)+4$.

又根据根与系数的关系知道 $x_1+x_2=-1$，

$\therefore$ 原式 $=4\times(-1)+4=0$.

第 11 招　成比例线段的证明和计算的五种常用作辅助线的方法

1. 证明：过点 D 作 $DG/\!/BC$ 交 AB 于 G，$\therefore \angle GDF=\angle BEF$.

又$\because \angle GFD=\angle BFE$，$\therefore \triangle DFG\backsim\triangle EFB$.

$\therefore \dfrac{DG}{EB}=\dfrac{DF}{EF}$.

$\because EB=AD$，$\therefore \dfrac{DG}{AD}=\dfrac{DF}{EF}$.

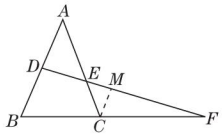
$\because DG/\!/BC$，$\therefore \triangle ADG\backsim\triangle ACB$，

$\therefore \dfrac{DG}{BC}=\dfrac{AD}{AC}$，即$\dfrac{DG}{AD}=\dfrac{BC}{AC}$，

$\therefore \dfrac{DF}{EF}=\dfrac{BC}{AC}$，$\therefore EF\cdot BC=AC\cdot DF$.

点拨：通过作平行线证三角形相似，然后由相似三角形的对应边成比例证等积式.

2. 证明：如图，过点 C 作 $CM/\!/AB$ 交 DF 于点 M.



(第 2 题)

$\because CM/\!/AB$，$\therefore \triangle CMF\backsim\triangle BDF$. $\therefore \dfrac{BF}{CF}=\dfrac{BD}{CM}$.

$\because CM/\!/AD$，$\therefore \angle ADE=\angle CME$.

又$\because \angle AED=\angle CEM$，

$\therefore \triangle ADE\backsim\triangle CME$. $\therefore \dfrac{AE}{EC}=\dfrac{AD}{CM}$.

$\because D$ 为 AB 的中点，$\therefore BD=AD$.

$\therefore \dfrac{BD}{CM}=\dfrac{AD}{CM}$. $\therefore \dfrac{BF}{CF}=\dfrac{AE}{EC}$，

即 $AE\cdot CF=BF\cdot EC$.

3. 证明：过点 P 作 $PE\perp AC$ 于 E，$PF\perp CB$ 于 F，则四边形 $CEPF$ 为矩形.

$\therefore PF/\!/\!/EC$.

易得$\angle A=\angle B=45°$，$\angle AEP=\angle BFP=90°$，

$\therefore$ Rt$\triangle AEP\backsim$Rt$\triangle BFP$.

$\therefore \dfrac{PA}{PB}=\dfrac{PE}{PF}$.

易得 $PF=EC$，$\therefore \dfrac{PA}{PB}=\dfrac{PE}{EC}$. ①

$\because CP\perp MN$ 于 Q，

$\therefore \angle QCN+\angle QNC=90°$.

又$\because \angle QCN+\angle QCM=90°$，

$\therefore \angle QCM=\angle QNC$.

又易得$\angle PEC=\angle MCN=90°$，$\therefore$ Rt$\triangle PEC\backsim$Rt$\triangle MCN$.

$\therefore \dfrac{EP}{CM}=\dfrac{EC}{CN}$，即$\dfrac{EP}{EC}=\dfrac{CM}{CN}$. ②

由①②得$\dfrac{PA}{PB}=\dfrac{CM}{CN}$，即 $PA:PB=CM:CN$.

点拨：本题通过作垂线得到矩形 $CEPF$，再由矩形的性质和相似三角形的性质即可证得.

4. 证明：延长 GF 与 AC，交于点 H，

$\because CD\perp AB$，$FG\perp AB$，$\therefore CD/\!/FG$，

$\therefore \triangle AFG\backsim\triangle AED$，$\triangle AFH\backsim\triangle AEC$.

$\therefore \dfrac{AF}{AE}=\dfrac{FG}{ED}$，$\dfrac{AF}{AE}=\dfrac{FH}{EC}$. $\therefore \dfrac{FG}{ED}=\dfrac{FH}{EC}$.

又$\because ED=EC$，$\therefore FG=FH$.

易证得 Rt$\triangle CFH\backsim$Rt$\triangle GFB$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \frac{CF}{FG}=\frac{FH}{BF}$. $\therefore FG\cdot FH=CF\cdot BF$.

$\because FG=FH$, $\therefore FG^2=CF\cdot BF$.

点拨:通过作延长线构造相似三角形,再由相似三角形的性质和等量代换得到几个比例式或等积式,从而得到结论.

5. 解:取 BC 的中点 M,连接 AM.

$\because AB\perp AC$, $\therefore AM=CM$,

$\therefore \angle MAC=\angle C$.

又$\because BD=DC$, $\therefore \angle DBC=\angle C$.

$\therefore \angle MAC=\angle DBC$.

$\because \angle C=\angle C$,

$\therefore \triangle MAC\backsim\triangle DBC$.

$\therefore \frac{MC}{DC}=\frac{AC}{BC}$.

又$\because DC=1$, $MC=\frac{1}{2}BC$,

$\therefore AC=\frac{MC\cdot BC}{DC}=\frac{1}{2}BC^2$. ①

易得 $\mathrm{Rt}\triangle AEC\backsim\mathrm{Rt}\triangle BAC$,

$\therefore \frac{AC}{BC}=\frac{EC}{AC}$.

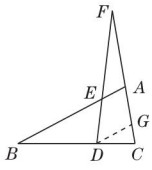
又$\because EC=1$,

$\therefore AC^2=CE\cdot BC=BC$. ②

由①②得, $AC=\frac{1}{2}AC^4$, $\therefore AC=\sqrt[3]{2}$.

点拨:通过作中线构造相似三角形,进而得到相关线段的数量关系,最终求得 AC 的长.

6. 解:如图,过点 D 作 AB 的平行线交 AC 于 G.



(第 6 题)

$\because \frac{BD}{DC}=\frac{FE}{ED}=2$,

$\therefore \frac{CD}{CB}=\frac{1}{3}$, $\frac{EF}{FD}=\frac{2}{3}$.

$\because DG/\!/AB$,

$\therefore \triangle FAE\backsim\triangle FGD$, $\triangle CGD\backsim\triangle CAB$.

$\therefore \frac{AE}{DG}=\frac{EF}{FD}=\frac{2}{3}$, $\frac{DG}{AB}=\frac{CD}{CB}=\frac{1}{3}$.

$\therefore AE=\frac{2}{3}DG$, $AB=3DG$, $\therefore BE=\frac{7}{3}DG$,

$\therefore BE:AE=7:2=\frac{7}{2}$.

点拨:通过作平行线,得到两对相似三角形,再根据相似三角形性质并结合已知条件得到线段的数量关系.

第 12 招 巧作平行线构造相似三角形

1. 解:如图,连接 DF,$\because E$, F 是边 BC 上的两个三等分点,

$\therefore BE=EF=FC$.

$\because D$ 是 AC 的中点, $\therefore AD=CD$.

$\therefore DF$ 是 $\triangle ACE$ 的中位线.

$\therefore DF/\!/AE$,且 $DF=\frac{1}{2}AE$.

$\therefore DF/\!/PE$.

$\therefore \frac{BE}{BF}=\frac{BP}{BD}$.

$\because BF=2BE$, $\therefore BD=2BP$.

$\therefore BP=PD$.

$\therefore DF=2PE$.

$\because DF/\!/AE$, $\therefore \angle APQ=\angle FDQ$,

又$\because \angle AQP=\angle FQD$,

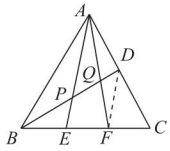
$\therefore \triangle APQ\backsim\triangle FDQ$.

$\therefore \frac{PQ}{QD}=\frac{AP}{DF}$.

设 $PE=a$,则 $DF=2a$, $AP=3a$.

$\therefore PQ:QD=AP:DF=3:2$.

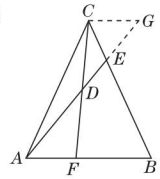
$\therefore BP:PQ:QD=5:3:2$.



(第 1 题)

点拨:给出边的三等分点或中点,求相关线段的比值时,通常连接这些点中的某些点找平行关系,构造相似三角形求解.

2. 解:如图,过点 C 作 $CG/\!/AB$ 交 AE 的延长线于点 G.



(第 2 题)

$\because CG/\!/AB$, $\therefore \angle DAF=\angle G$.

又$\because D$ 为 CF 的中点, $\therefore CD=DF$.

在 $\triangle ADF$ 和 $\triangle GDC$ 中,

$$\begin{cases}\angle DAF=\angle G,\\ \angle ADF=\angle GDC,\\ DF=DC,\end{cases}$$

$\therefore \triangle ADF\cong\triangle GDC(\mathrm{AAS})$. $\therefore AF=CG$.

$\because BF:AF=3:2$, $\therefore AB:AF=5:2$.

$\because AB/\!/CG$, $\therefore \angle EAB=\angle EGC$.

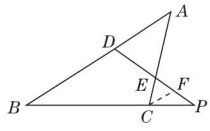
又$\because \angle AEB=\angle GEC$,

$\therefore \triangle ABE\backsim\triangle GCE$.

$\therefore \frac{BE}{EC}=\frac{AB}{CG}=\frac{AB}{AF}=\frac{5}{2}$.

点拨:过顶点 C 作 $CG/\!/AB$ 交 AE 的延长线于点 G,构造相似三角形,得到相关线段的比.

3. 证明:如图,过点 C 作 $CF/\!/AB$ 交 DP 于点 F,



(第 3 题)

$\therefore \triangle PCF\backsim\triangle PBD$. $\therefore \frac{BP}{CP}=\frac{BD}{CF}$.

$\because AD/\!/CF$, $\therefore \angle ADE=\angle EFC$.

$\because AD=AE$, $\therefore \angle ADE=\angle AED$.

$\because \angle AED=\angle CEP$,

$\therefore \angle EFC=\angle CEP$.

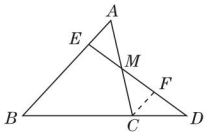
$\therefore EC=CF$.

$\therefore \frac{BP}{CP}=\frac{BD}{EC}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点拨： 过点 C 作 AB 的平行线，得到相似三角形，进而得到 $\frac{BP}{CP}=\frac{BD}{CF}$，再根据等腰三角形的性质与判定，得到 $EC=CF$，从而得到结论.

4. 证明： 方法一：如图①，过点 C 作 $CF\parallel AB$，交 DE 于点 F，



（第 4 题①）

$\therefore \triangle CDF\backsim\triangle BDE.$

$\therefore \frac{CF}{BE}=\frac{CD}{BD}.$

$\because$ 点 M 为 AC 边的中点，

$\therefore AM=CM.$

$\because CF\parallel AB,$

$\therefore \angle A=\angle MCF.$

又$\because \angle AME=\angle CMF,$

$\therefore \triangle AME\cong\triangle CMF.\ \therefore AE=CF.$

$\because AE=\frac{1}{4}AB, BE=AB-AE,$

$\therefore BE=3AE.\ \therefore \frac{AE}{BE}=\frac{1}{3}.$

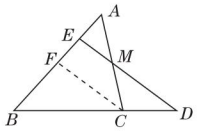
$\because \frac{CF}{BE}=\frac{CD}{BD},$

$\therefore \frac{AE}{BE}=\frac{CD}{BD}=\frac{1}{3}$，即 $BD=3CD.$

又$\because BD=BC+CD,$

$\therefore BC=2CD.$

方法二：如图②，过点 C 作 $CF\parallel DE$，交 AB 于点 F，



（第 4 题②）

$\therefore \frac{AE}{AF}=\frac{AM}{AC}.$

又$\because$ 点 M 为 AC 边的中点，

$\therefore AC=2AM.$

$\therefore 2AE=AF.\ \therefore AE=EF.$

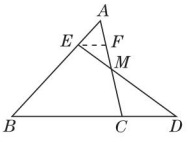
又$\because \frac{AE}{AB}=\frac{1}{4},\ \therefore \frac{BF}{EF}=2.$

又$\because CF\parallel DE,$

$\therefore \frac{BF}{FE}=\frac{BC}{CD}=2.$

$\therefore BC=2CD.$

方法三：如图③，过点 E 作 $EF\parallel BC$，交 AC 于点 F，



（第 4 题③）

$\therefore \triangle AEF\backsim\triangle ABC.$

$\therefore \frac{EF}{BC}=\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}.$

由 $AE=\frac{1}{4}AB$，知

$\frac{EF}{BC}=\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{1}{4},$

$\therefore EF=\frac{1}{4}BC, AF=\frac{1}{4}AC.$

$\because EF\parallel CD,$

$\therefore \angle FEM=\angle CDM,$

又$\because \angle FME=\angle CMD,$

$\therefore \triangle EFM\backsim\triangle DCM,$

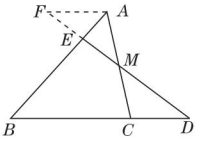
$\therefore \frac{EF}{CD}=\frac{MF}{MC}.$

又$\because AM=MC,\ \therefore MF=\frac{1}{2}MC.$

$\therefore EF=\frac{1}{2}CD.$

$\therefore BC=2CD.$

方法四：如图④，过点 A 作 $AF\parallel BD$，交 DE 的延长线于点 F，



（第 4 题④）

$\therefore \angle AFE=\angle BDE,$

又$\because \angle AEF=\angle BED,$

$\therefore \triangle AEF\backsim\triangle BED.$

$\therefore \frac{AE}{BE}=\frac{AF}{BD}.$

$\because AE=\frac{1}{4}AB,$

$\therefore AE=\frac{1}{3}BE.\ \therefore AF=\frac{1}{3}BD.$

$\because AF\parallel CD,\ \therefore \angle AFE=\angle CDM,$

又$\because \angle AMF=\angle CMD,\ \therefore \triangle AFM\backsim\triangle CDM.\ \therefore \frac{AF}{CD}=\frac{AM}{MC}.$

又$\because AM=MC,\ \therefore AF=CD.$

$\therefore CD=\frac{1}{3}BD.\ \therefore BC=2CD.$

点拨： 由已知线段的比，求证另外两线段的比，通常作平行线，构造相似三角形来求解.

第 13 招 证比例式或等积式的七种技巧

1. 证明： 过点 B 作 AC 的平行线，过点 C 作 AB 的平行线，两线交于点 Q，连接 DQ，易知 A, D, Q 三点共线，

$\because PM\parallel AC, PN\parallel AB,$

$\therefore PM\parallel BQ, PN\parallel CQ,$

$\therefore \frac{AM}{AB}=\frac{AP}{AQ}, \frac{AN}{AC}=\frac{AP}{AQ}.$

$\therefore \frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}.$

点拨： 通过作 AB, AC 的平行线，并结合 $PM\parallel AC, PN\parallel AB$，得到 $PM\parallel BQ, PN\parallel CQ$，从而得到两个比例式，结论即可得出.

2. 证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AE\parallel DC, \angle A=\angle C.$

$\therefore \angle CDF=\angle E.\ \therefore \triangle FCD\backsim\triangle DAE.\ \therefore \frac{DC}{AE}=\frac{CF}{AD}.$

3. 证明： $\because DM\perp BC, \angle BAC=90°,$

$\therefore \angle B+\angle BEM=90°, \angle D+\angle DEA=90°.$

$\because \angle BEM=\angle DEA,\ \therefore \angle B=\angle D.$

又$\because M$ 为 BC 的中点，$\angle BAC=90°,$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore BM = AM$.

$\therefore \angle B = \angle BAM$.

$\therefore \angle BAM = \angle D$，即 $\angle EAM = \angle D$.

又∵ $\angle AME = \angle DMA$.

$\therefore \triangle AME \backsim \triangle DMA$.

$\therefore \dfrac{AM}{MD} = \dfrac{ME}{AM}$，即 $AM^2 = MD \cdot ME$.

4. **证明**：如图，连接 PM，PN.

∵ MN 是 AP 的垂直平分线，

$\therefore MA = MP$，$NA = NP$.

$\therefore \angle 1 = \angle 2$，$\angle 3 = \angle 4$.

又∵ $\triangle ABC$ 是等边三角形，

$\therefore \angle B = \angle C = \angle 1 + \angle 3 = 60°$.

$\therefore \angle 2 + \angle 4 = 60°$.

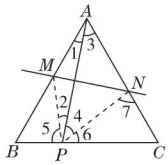
$\therefore \angle 5 + \angle 6 = 120°$.

又∵ $\angle 6 + \angle 7 = 180° - \angle C = 120°$，

$\therefore \angle 5 = \angle 7$.

$\therefore \triangle BPM \backsim \triangle CNP$.

$\therefore \dfrac{BP}{CN} = \dfrac{BM}{CP}$，即 $BP \cdot CP = BM \cdot CN$.



（第 4 题）

5. **证明**：∵ $AB /\!/ DN$，

$\therefore \dfrac{AM}{NM} = \dfrac{BM}{DM}$.

又∵ $AD /\!/ BP$，

$\therefore \dfrac{MP}{AM} = \dfrac{BM}{DM}$.

$\therefore \dfrac{AM}{MN} = \dfrac{MP}{AM}$.

$\therefore AM^2 = MN \cdot MP$.

6. **证明**：由题意得 $\angle BDF = \angle BAE = 90°$.

∵ BE 平分 $\angle ABC$，$\therefore \angle DBF = \angle ABE$.

$\therefore \triangle BDF \backsim \triangle BAE$. $\therefore \dfrac{BD}{AB} = \dfrac{BF}{BE}$.

∵ $\angle BAC = \angle BDA = 90°$，$\angle ABC = \angle DBA$.

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle DBA$. $\therefore \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{BD}{AB}$. $\therefore \dfrac{BF}{BE} = \dfrac{AB}{BC}$.

7. **证明**：(1)∵ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，$\therefore \angle B = \angle D$.

∵ $AM \perp BC$，$AN \perp CD$，$\therefore \angle AMB = \angle AND = 90°$.

$\therefore \triangle AMB \backsim \triangle AND$.

(2)由 $\triangle AMB \backsim \triangle AND$ 得 $\dfrac{AM}{AN} = \dfrac{AB}{AD}$，$\angle BAM = \angle DAN$.

又∵ $AD = BC$，

$\therefore \dfrac{AM}{AN} = \dfrac{AB}{BC}$. $\therefore \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{BC}$.

∵ $AM \perp BC$，$AD /\!/ BC$，$\therefore \angle MAD = \angle AMB = 90°$.

$\therefore \angle B + \angle BAM = \angle MAN + \angle NAD = 90°$.

$\therefore \angle B = \angle MAN$. $\therefore \triangle AMN \backsim \triangle BAC$. $\therefore \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{MN}{AC}$.

8. **证明**：∵ $BG \perp AP$，$PE \perp AB$，

$\therefore \angle AEP = \angle DEB = \angle AGB = 90°$.

$\therefore \angle P + \angle PAB = 90°$，$\angle PAB + \angle ABG = 90°$.

$\therefore \angle P = \angle ABG$. $\therefore \triangle AEP \backsim \triangle DEB$.

$\therefore \dfrac{AE}{DE} = \dfrac{PE}{BE}$，即 $AE \cdot BE = PE \cdot DE$.

又∵ $\angle CEA = \angle BEC = 90°$，

$\therefore \angle CAB + \angle ACE = 90°$.

又∵ $\angle ACB = 90°$，$\therefore \angle CAB + \angle CBE = 90°$.

$\therefore \angle ACE = \angle CBE$. $\therefore \triangle AEC \backsim \triangle CEB$.

$\therefore \dfrac{AE}{CE} = \dfrac{CE}{BE}$，即 $CE^2 = AE \cdot BE$. $\therefore CE^2 = DE \cdot PE$.

9. **证明**：∵ $AD \perp BC$，$DE \perp AB$，

$\therefore \angle ADB = \angle AED = 90°$.

又∵ $\angle BAD = \angle DAE$，$\therefore \triangle ABD \backsim \triangle ADE$.

$\therefore \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AD}$，即 $AD^2 = AE \cdot AB$.

同理可得 $AD^2 = AF \cdot AC$.

$\therefore AE \cdot AB = AF \cdot AC$. $\therefore \dfrac{AE}{AF} = \dfrac{AC}{AB}$.

10. **证明**：如图，连接 PC.

∵ $AB = AC$，$AD \perp BC$，

$\therefore AD$ 垂直平分 BC，$\angle ABC = \angle ACB$.

$\therefore BP = CP$. $\therefore \angle 1 = \angle 2$.

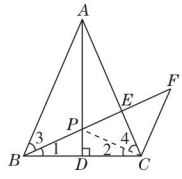
$\therefore \angle ABC - \angle 1 = \angle ACB - \angle 2$，即 $\angle 3 = \angle 4$.

∵ $CF /\!/ AB$，$\therefore \angle 3 = \angle F$. $\therefore \angle 4 = \angle F$.

又∵ $\angle CPF = \angle CPE$，$\therefore \triangle CPF \backsim \triangle EPC$.

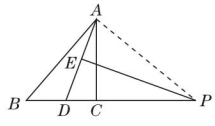
$\therefore \dfrac{CP}{PE} = \dfrac{PF}{CP}$，即 $CP^2 = PF \cdot PE$.

∵ $BP = CP$，$\therefore BP^2 = PE \cdot PF$.



（第 10 题）

11. **证明**：如图，连接 PA，



（第 11 题）

∵ EP 是 AD 的垂直平分线，$\therefore PA = PD$.

$\therefore \angle PDA = \angle PAD$.

$\therefore \angle B + \angle BAD = \angle DAC + \angle CAP$.

又∵ AD 平分 $\angle BAC$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \angle BAD=\angle DAC.\therefore \angle B=\angle CAP.$

又$\because \angle APC=\angle BPA,\therefore \triangle PAC\backsim\triangle PBA.$

$\therefore \frac{PA}{PB}=\frac{PC}{PA}$,即$PA^2=PB\cdot PC.$

$\because PA=PD,\therefore PD^2=PB\cdot PC.$

第 14 招 求三角函数值的常见技巧

1. 解:(方法一)原式$=\frac{(\sin A-3\cos A)\div\cos A}{(4\sin A+\cos A)\div\cos A}=\frac{\frac{\sin A}{\cos A}-3}{\frac{4\sin A}{\cos A}+1}=\frac{\tan A-3}{4\tan A+1}.$

$\because \tan A=4,\therefore$ 原式$=\frac{4-3}{4\times4+1}=\frac{1}{17}.$

(方法二)$\because \tan A=4,\therefore \frac{\sin A}{\cos A}=4,\therefore \sin A=4\cos A.$

$\therefore$ 原式$=\frac{4\cos A-3\cos A}{4\times4\cos A+\cos A}=\frac{\cos A}{17\cos A}=\frac{1}{17}.$

2. 解:$\because \sin\alpha-\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2},\therefore(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=\frac{1}{2}$,

即$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}.$

$\therefore 1-2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}$,即$2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}.$

$\therefore(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$

又$\because \alpha$ 为锐角,$\therefore \sin\alpha+\cos\alpha>0.$

$\therefore \sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{6}}{2}.$

3. C **点拨:** $\because(45°-\alpha)+(45°+\alpha)=90°,\therefore \sin(45°-\alpha)=\cos(45°+\alpha),\sin^2(45°-\alpha)+\sin^2(45°+\alpha)=\cos^2(45°+\alpha)+\sin^2(45°+\alpha)=1.$

4. 解:$\tan1°\cdot\tan2°\cdot\tan3°\cdot\cdots\cdot\tan88°\cdot\tan89°=(\tan1°\cdot\tan89°)\cdot(\tan2°\cdot\tan88°)\cdot\cdots\cdot(\tan44°\cdot\tan46°)\cdot\tan45°=1.$

点拨: 互余的两角的正切值的积为 1,即若$\alpha+\beta=90°$,则$\tan\alpha\cdot\tan\beta=1.$

5. 解:$\because \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{12}{25}$,

$\therefore(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=1+2\times\frac{12}{25}=\frac{49}{25}.$

$\because \alpha$ 为锐角,$\therefore \sin\alpha+\cos\alpha>0.\therefore \sin\alpha+\cos\alpha=\frac{7}{5}.$

又$\because \sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{12}{25}$,

$\therefore$ 以$\sin\alpha,\cos\alpha$ 为根的一元二次方程为$x^2-\frac{7}{5}x+\frac{12}{25}=0.$

点拨: 此题用到两方面的知识:(1)公式$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 与完全平方公式的综合运用;(2)若$x_1+x_2=p,x_1x_2=q$,则以x_1,x_2 为两根的一元二次方程为$x^2-px+q=0$. 本题答案不唯一.

6. 解:$\because \sin\alpha$ 是方程$2x^2-7x+3=0$ 的一个根,

$\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\times2\times3}}{2\times2}=\frac{7\pm5}{4}.$

$\therefore \sin\alpha=\frac{1}{2}$或$\sin\alpha=3$(不符合题意,舍去).

$\because \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,$

$\therefore \cos^2\alpha=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}.$

又$\because \alpha$ 为锐角,$\therefore \cos\alpha>0,\therefore \cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}.$

$\therefore \sqrt{1-2\sin\alpha\cos\alpha}=\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}=\sqrt{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}=|\sin\alpha-\cos\alpha|=\left|\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=\frac{\sqrt{3}-1}{2}.$

第 15 招 巧用构造法求几种特殊角的三角函数值

1. 解:如图,在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle BAC=30°,\angle C=90°$,延长 CA 到 D,使 $AD=AB$,连接 BD,则$\angle D=15°$,

设 $BC=a$,则 $AB=2a,AC=\sqrt{3}a$,

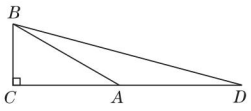
$\therefore AD=2a,\therefore CD=(2+\sqrt{3})a.$

在 Rt$\triangle BCD$ 中,$BD=\sqrt{BC^2+CD^2}=\sqrt{a^2+(7+4\sqrt{3})a^2}=(\sqrt{6}+\sqrt{2})a.$

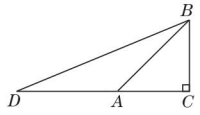
$\therefore \sin15°=\sin D=\frac{BC}{BD}=\frac{a}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})a}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4};$

$\cos15°=\cos D=\frac{CD}{BD}=\frac{(2+\sqrt{3})a}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})a}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$

点拨: 通过构造含有 15°角的直角三角形,利用数形结合思想求得结果.



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 解:如图,在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°,AC=BC$,

延长 CA 到 D,使 $DA=AB$,连接 BD,

则$\angle D=22.5°$,设 $AC=BC=a$,则 $AB=\sqrt{2}a$,

$\therefore AD=\sqrt{2}a,\therefore DC=(\sqrt{2}+1)a,$

$\therefore \tan22.5°=\tan D=\frac{BC}{CD}=\frac{a}{(\sqrt{2}+1)a}=\sqrt{2}-1.$

点拨: 通过构造含有 22.5°的直角三角形,利用数形结合思想即可求得结论.

3. 解:$\because$ 将矩形纸片 $ABCD$ 沿过点 B 的直线折叠,使点 A 落在 BC 边上的点 E 处,

$\therefore AB=BE,\angle AEB=\angle EAB=45°.$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∵ 还原后，再沿过点 E 的直线折叠，使点 A 落在 BC 边上的点 F 处，

$\therefore AE=EF$，$\angle EAF=\angle EFA=45°\div2=22.5°$，

$\therefore \angle FAB=67.5°$.

设 $AB=x$，则 $AE=EF=\sqrt{2}x$，

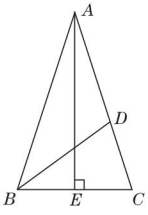
$\therefore \tan 67.5°=\tan\angle FAB=\dfrac{FB}{AB}=\dfrac{\sqrt{2}x+x}{x}=\sqrt{2}+1$.

4. **解**：如图，作 $\triangle ABC$，使 $\angle BAC=36°$，$AB=AC$，$\angle ABC$ 的平分线 BD 交 AC 于 D 点，过点 A 作 $AE\perp BC$ 于 E 点，则 $\angle BAE=18°$，$\angle ABE=72°$. 设 $BC=a$，易知 $BE=\dfrac{1}{2}a$，$BD=AD=a$，

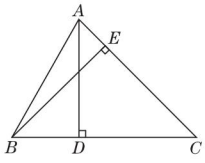
$\triangle ABC\backsim\triangle BCD$，$\therefore \dfrac{AB}{BC}=\dfrac{BC}{CD}$，$\therefore \dfrac{AB}{a}=\dfrac{a}{AB-a}$，

即 $AB^2-a\cdot AB-a^2=0$，$\therefore AB=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}a$（负根舍去），

$\therefore \sin 18°=\sin\angle BAE=\dfrac{BE}{AB}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.



（第 4 题）



（第 5 题）

5. **解**：方法一：利用第 1 题的图形求解. 易知 $\angle CBD=75°$，

$\therefore \sin75°=\dfrac{CD}{BD}=\dfrac{(2+\sqrt{3})a}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})a}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，

$\cos75°=\dfrac{BC}{BD}=\dfrac{a}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})a}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，

$\tan75°=\dfrac{CD}{BC}=\dfrac{(2+\sqrt{3})a}{a}=2+\sqrt{3}$.

方法二：如图，作 $\triangle ABD$，使 $\angle ADB=90°$，$\angle DAB=30°$，延长 BD 到 C，使 $DC=DA$，连接 AC，过点 B 作 $BE\perp AC$ 于 E，则 $\angle ACD=\angle DAC=45°$，$\angle BAE=75°$，设 $AD=DC=a$，则 $AC=\sqrt{2}a$，$BD=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$，$AB=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}a$，

$\therefore BC=BD+CD=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}+1\right)a$.

$\therefore CE=BE=BC\cdot\sin45°=\dfrac{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{6}a$，

$\therefore AE=AC-CE=\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6}a$，

$\therefore \sin75°=\sin\angle BAE=\dfrac{BE}{AB}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，

$\cos75°=\cos\angle BAE=\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，

$\tan75°=\tan\angle BAE=\dfrac{BE}{AE}=2+\sqrt{3}$.

点拨：根据 $30°+45°=75°$，通过含 $30°$ 角的 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 和含 $45°$ 角的 $\mathrm{Rt}\triangle ADC$ 构造出含 $75°$ 角的 $\triangle ABC$，利用数形结合思想，即可求得结果.

第 16 招　解直角三角形的八种常见类型

1. **解**：(1) ∵ $\tan A=\dfrac{a}{b}=\sqrt{3}$，

$\therefore \angle A=60°$.

$\therefore \angle B=30°$. $\therefore c=2b=12\sqrt{5}$.

(2) ∵ $\tan A=\dfrac{a}{b}=\sqrt{3}$，

$\therefore \angle A=60°$.

$\therefore \angle B=30°$. $\therefore c=2b=20$.

2. **解**：∵ $AD=2$，$AC=\sqrt{3}$，$\angle C=90°$，

$\therefore \cos\angle DAC=\dfrac{AC}{AD}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore \angle DAC=30°$.

∵ AD 为 $\angle BAC$ 的平分线，

$\therefore \angle BAC=2\angle DAC=60°$，

$\therefore BC=AC\cdot\tan\angle BAC=\sqrt{3}\cdot\tan60°=\sqrt{3}\times\sqrt{3}=3$.

3. **解**：(1) $a=c\cdot\sin A=10\cdot\sin60°=5\sqrt{3}$，$b=c\cdot\cos A=10\cdot\cos60°=5$.

(2) $b=\dfrac{a}{\tan A}=\dfrac{4}{\tan60°}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，$\angle B=90°-\angle A=30°$.

4. **解**：(1) 在 $\mathrm{Rt}\triangle CDE$ 中，$\angle CDE=30°$，$DE=80$ cm，

$\therefore CD=DE\cdot\cos30°=80\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=40\sqrt{3}$（cm）.

故支架 CD 的长为 $40\sqrt{3}$ cm.

(2) 在 $\mathrm{Rt}\triangle OAC$ 中，$\angle BAC=30°$，$AC=165$ cm，

$\therefore OC=AC\cdot\tan30°=165\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=55\sqrt{3}$（cm），

$OA=\dfrac{AC}{\cos30°}=\dfrac{165}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=110\sqrt{3}$（cm）.

$\therefore OD=OC-CD=55\sqrt{3}-40\sqrt{3}=15\sqrt{3}$（cm）.

$\therefore AB=OA-OB=OA-OD=110\sqrt{3}-15\sqrt{3}=95\sqrt{3}$（cm）.

故真空热水管 AB 的长为 $95\sqrt{3}$ cm.

5. **解**：(1) 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\cos A=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{3}{5}$，

即 $\dfrac{15}{AB}=\dfrac{3}{5}$，解得 $AB=25$.

∵ D 是边 AB 的中点，$\therefore CD=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{25}{2}$.

(2) 由 (1) 可得 $AD=BD=CD=\dfrac{25}{2}$，

由勾股定理知 $CB=\sqrt{AB^2-AC^2}=20$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

设 $DE=x, EB=y(x>0, y>0)$，则 $\begin{cases} y^2+x^2=\left(\frac{25}{2}\right)^2, \\ \left(x+\frac{25}{2}\right)^2+y^2=20^2, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x=\frac{7}{2}, \\ y=12. \end{cases}$

$\therefore \sin\angle DBE=\frac{DE}{BD}=\frac{7}{25}$.

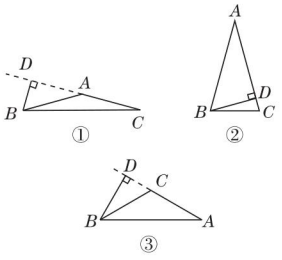
6. **解**：分三种情况：

①如图①，当 $\angle BAC$ 为钝角，$AB=AC$ 时，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，

$\because BD=1, \tan\angle ABD=\sqrt{3}$，

$\therefore AD=\sqrt{3}, AB=2$，

$\therefore AC=2, \therefore CD=2+\sqrt{3}$.



（第 6 题）

②如图②，当 $\angle BAC$ 为锐角，$AB=AC$ 时，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，

$\because BD=1, \tan\angle ABD=\sqrt{3}$，

$\therefore AD=\sqrt{3}, AB=2$，

$\therefore AC=2$，

$\therefore CD=2-\sqrt{3}$.

③如图③，当 $BC=AC$ 时，

$\because \tan\angle ABD=\sqrt{3}$，

$\therefore \angle ABD=60°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，$\angle A=90°-\angle ABD=30°$.

$\because BC=AC$，

$\therefore \angle CBA=\angle A=30°$.

$\therefore \angle BCD=60°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BCD$ 中，$BD=1, \angle BCD=60°, \tan\angle BCD=\frac{BD}{CD}$，

$\therefore \frac{1}{CD}=\tan 60°=\sqrt{3}. \therefore CD=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

综上所述，CD 的长为 $2+\sqrt{3}$ 或 $2-\sqrt{3}$ 或 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

7. **解**：(1) $\because \triangle ABD$ 是等边三角形，$AB=10, \therefore AD=AB=10$.

$\because DH\perp AB, \therefore AH=\frac{1}{2}AB=5$，

$\therefore DH=\sqrt{AD^2-AH^2}=\sqrt{10^2-5^2}=5\sqrt{3}$.

$\because \triangle ABC$ 是等腰直角三角形，

$\therefore \angle CAB=45°$，

$\therefore \angle AEH=45°$，

$\therefore EH=AH=5$，

$\therefore DE=DH-EH=5\sqrt{3}-5$.

(2) $\because DH\perp AB$ 且 $\tan\angle HDB=\frac{3}{4}$，

$\therefore$ 可设 $BH=3k(k>0)$，则 $DH=4k, DB=5k$.

$\because BD=AB=10$，

$\therefore 5k=10$，解得 $k=2$.

$\therefore DH=8, BH=6, \therefore AH=4$.

又易知 $EH=AH=4$，

$\therefore DE=DH-EH=8-4=4$.

8. **解**：$\because AD, CE$ 是 $\triangle ABC$ 的高，

$\therefore \angle ADB=\angle CEB=90°$.

$\because \angle B=\angle B$，

$\therefore \triangle ADB\backsim\triangle CEB$，

$\therefore \frac{BD}{BE}=\frac{BA}{BC}$，即 $\frac{BD}{BA}=\frac{BE}{BC}$.

$\because \angle B=\angle B, \therefore \triangle DBE\backsim\triangle ABC$.

$\therefore \angle ACB=\angle DEB$.

设 $CD=x$，则 $DB=6-x$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，$AD^2=AB^2-DB^2$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 中，$AD^2=AC^2-CD^2$，

$\therefore AB^2-DB^2=AC^2-CD^2$.

$\because AB=4, AC=5, \therefore 4^2-(6-x)^2=5^2-x^2$，解得 $x=\frac{15}{4}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 中，$\cos\angle ACD=\frac{CD}{AC}=\frac{\frac{15}{4}}{5}=\frac{3}{4}$.

$\because \angle ACB=\angle DEB$，

$\therefore \cos\angle DEB=\frac{3}{4}$.

9. (1) **证明**：由题意可得 $\angle A=\angle D=\angle C=\angle BFE=90°$，

$\therefore \angle ABF=90°-\angle AFB, \angle DFE=180°-\angle BFE-\angle AFB=90°-\angle AFB$，

$\therefore \angle ABF=\angle DFE$，

$\therefore \triangle ABF\backsim\triangle DFE$.

(2) **解**：由折叠可得 $FB=BC, EF=EC$.

$\because \sin\angle DFE=\frac{1}{3}, \therefore \frac{DE}{EF}=\frac{1}{3}$，

即 $EF=3DE. \therefore AB=CD=DE+EC=DE+EF=4DE, DF=\sqrt{EF^2-DE^2}=2\sqrt{2}DE$.

$\because \triangle ABF\backsim\triangle DFE$，

$\therefore \frac{EF}{DF}=\frac{FB}{AB}$，即 $FB=\frac{EF\cdot AB}{DF}=\frac{3DE\cdot 4DE}{2\sqrt{2}DE}=3\sqrt{2}DE$.

又 $\because FB=BC, EF=EC$，

$\therefore \tan\angle EBC=\frac{EC}{BC}=\frac{3DE}{3\sqrt{2}DE}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. 解：(1)∵ $\tan\angle ABO=\frac{1}{2}=\frac{CE}{EB}$，$EB=EO+OB=6$，

∴ $CE=3$，∴ $C(-2,3)$，

于是可求得反比例函数的表达式为 $y=-\frac{6}{x}$.

(2)∵ $\tan\angle ABO=\frac{1}{2}=\frac{OA}{OB}$，$OB=4$，

∴ $OA=2$，$B(4,0)$. ∴ $A(0,2)$.

设直线 AB 对应的函数表达式为 $y=kx+b$，

将点 $A(0,2)$，$B(4,0)$ 的坐标分别代入 $y=kx+b$，

可得 $b=2$，$k=-\frac{1}{2}$，

∴ 直线 AB 对应的函数表达式为 $y=-\frac{1}{2}x+2$.

第 17 招　“化斜为直”构造直角三角形的方法

1. 解：如图，过点 A 作 $AD\perp BC$，垂足为点 D.

设 $BD=x$，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，$AD=BD\cdot\tan B=x\cdot\tan 60^\circ=\sqrt{3}x$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 中，∵ $\angle C=45^\circ$，

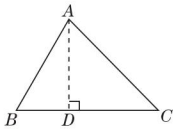
∴ $\angle CAD=90^\circ-\angle C=45^\circ$，

∴ $\angle C=\angle CAD$，∴ $CD=AD=\sqrt{3}x$.

∵ $BC=1+\sqrt{3}$，∴ $\sqrt{3}x+x=1+\sqrt{3}$，

解得 $x=1$，即 $BD=1$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，∵ $\cos B=\frac{BD}{AB}$，∴ $AB=\frac{BD}{\cos B}=\frac{1}{\cos 60^\circ}=2$.



（第 1 题）

点拨：通过作辅助线构造含特殊角的直角三角形，即可得出结果.

2. 解：如图，延长 BC，AD 交于点 E.

∵ $\angle A=60^\circ$，$\angle B=90^\circ$，∴ $\angle E=30^\circ$.

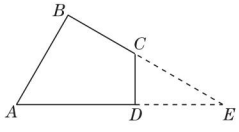
在 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 中，$BE=\frac{AB}{\tan E}=\frac{2}{\tan 30^\circ}=2\sqrt{3}$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle CDE$ 中，$EC=2CD=2$，

∴ $DE=EC\cdot\cos 30^\circ=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

∴ $S_{四边形ABCD}=S_{\mathrm{Rt}\triangle ABE}-S_{\mathrm{Rt}\triangle ECD}=\frac{1}{2}AB\cdot BE-\frac{1}{2}CD\cdot ED=$

$\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{3}-\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.



（第 2 题）

点拨：本题看似是四边形问题，但注意到 $\angle B=90^\circ$，$\angle A=60^\circ$，不难想到延长 BC，AD 交于点 E，构造出直角三角形，将所求问题转化为直角三角形问题来解决.

3. 解：如图，过点 B 作 $BE\perp CD$，交 CD 的延长线于点 E.

∵ 点 D 是 AB 的中点，∴ $AD=DB$.

又∵ $\angle ACD=\angle BED=90^\circ$，$\angle ADC=\angle BDE$，

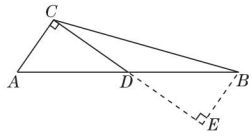
∴ $\triangle ACD\cong\triangle BED$，

∴ $CD=ED$，$AC=BE$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle CBE$ 中，$\sin\angle BCE=\frac{BE}{BC}=\frac{1}{3}$，∴ $BC=3BE$.

∴ $CE=\sqrt{BC^2-BE^2}=2\sqrt{2}BE$，

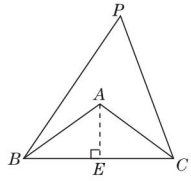
∴ $CD=\frac{1}{2}CE=\sqrt{2}BE=\sqrt{2}AC$. ∴ $\tan A=\frac{CD}{AC}=\frac{\sqrt{2}AC}{AC}=\sqrt{2}$.



（第 3 题）

点拨：构造直角三角形，把所要求的量与已知量建立关系是解题的关键.

4. 解：如图，过点 A 作 $AE\perp BC$ 于点 E，



（第 4 题）

∵ $AB=AC=5$，

∴ $BE=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\times8=4$，$\angle BAE=\frac{1}{2}\angle BAC$.

∵ $\angle BPC=\frac{1}{2}\angle BAC$，∴ $\angle BPC=\angle BAE$.

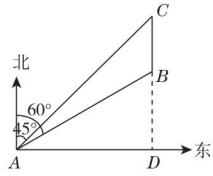
在 $\mathrm{Rt}\triangle BAE$ 中，由勾股定理得

$AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$，

∴ $\tan\angle BPC=\tan\angle BAE=\frac{BE}{AE}=\frac{4}{3}$.

第 18 招　利用三角函数解实际问题

1. 解：延长 CB 交过点 A 的正东方向于 D，如图所示.



（第 1 题）

则 $\angle CDA=90^\circ$，由题意得 $AC=30$ km，$\angle CAD=90^\circ-45^\circ=$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$45°$，$\angle BAD=90°-60°=30°$，

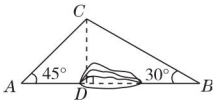
$\therefore AD=AC\cdot\cos 45°=30\times\frac{\sqrt{2}}{2}=15\sqrt{2}$(km)，

$\therefore BD=AD\cdot\tan 30°=15\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=5\sqrt{6}$(km)，

$\therefore AB=\sqrt{AD^2+BD^2}=\sqrt{(15\sqrt{2})^2+(5\sqrt{6})^2}=10\sqrt{6}\approx 10\times 2.449\approx 24.49$(km).

答：巡逻船与渔船的距离约为 24.49 km.

2. **解**：(1) 如图，过点 C 作 AB 的垂线 CD，垂足为 D.



(第 2 题)

$\because AB\perp CD$，$\sin B=\frac{CD}{BC}$，$BC=80$ 千米，$\angle B=30°$，

$\therefore CD=BC\cdot\sin 30°=80\times\frac{1}{2}=40$(千米).

$\because \sin A=\frac{CD}{AC}$，$\angle A=45°$，$\therefore AC=\frac{CD}{\sin 45°}=\frac{40}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=40\sqrt{2}$(千米).

$\therefore AC+BC=40\sqrt{2}+80\approx 40\times 1.41+80=136.4$(千米).

答：开通隧道前，汽车从 A 地到 B 地大约要走 136.4 千米.

(2) $\because \cos B=\frac{BD}{BC}$，$BC=80$ 千米，$\angle B=30°$，

$\therefore BD=BC\cdot\cos 30°=80\times\frac{\sqrt{3}}{2}=40\sqrt{3}$(千米).

$\because \tan A=\frac{CD}{AD}$，$CD=40$ 千米，$\angle A=45°$，

$\therefore AD=\frac{CD}{\tan 45°}=\frac{40}{1}=40$(千米).

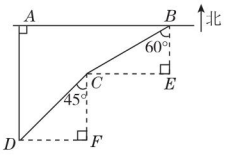
$\therefore AB=AD+BD=40+40\sqrt{3}\approx 40+40\times 1.73=109.2$(千米).

$\therefore AC+BC-AB\approx 136.4-109.2=27.2$(千米).

答：开通隧道后，汽车从 A 地到 B 地大约可以少走 27.2 千米.

点拨：作辅助线，将三角形分成两个直角三角形，在直角三角形中利用特殊角的三角函数求出相关线段的长.

3. **解**：如图，过 B 作 AB 的垂线，过 C 作 AB 的平行线，两线交于点 E；过 C 作 AB 的垂线，过 D 作 AB 的平行线，两线交于点 F，则 $\angle E=\angle F=90°$，拦截点 D 处到公路的距离 $DA=BE+CF$.



(第 3 题)

在 Rt△BCE 中，$\because \angle E=90°$，$\angle CBE=60°$，

$\therefore \angle BCE=30°$，

$\therefore BE=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\times 1\,000=500$(米).

在 Rt△CDF 中，$\because \angle F=90°$，$\angle DCF=45°$，$CD=1\,000$ 米，

$\therefore CF=\frac{\sqrt{2}}{2}CD=500\sqrt{2}$米.

$\therefore DA=BE+CF=(500+500\sqrt{2})$米，

即拦截点 D 处到公路的距离是 $(500+500\sqrt{2})$ 米.

4. **解**：(1) 100；$(60+10t)$

(2) 不会，理由如下：过点 O 作 $OH\perp PQ$ 于点 H，如图. 在 Rt△POH 中，$\angle OHP=90°$，$\angle OPH=65°-20°=45°$，$OP=200$ km，

$\therefore OH=PH=OP\cdot\sin\angle OPH=200\times\sin 45°=100\sqrt{2}\approx 141$(km).

设经过 x h 时，台风中心从 P 移动到 H.

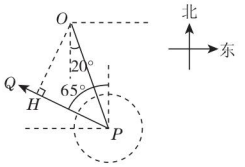
$\because$ 台风中心移动速度为 20 km/h，

$\therefore 20x=100\sqrt{2}$，

$\therefore x=5\sqrt{2}$.

此时，受台风侵袭的圆形区域半径应为 $60+10\times 5\sqrt{2}\approx 130.5$(km).

台风中心在整个移动过程中与城市 O 的最近距离 $OH\approx 141$ km，而台风中心从 P 移动到 H 时受侵袭的圆形区域半径约为 130.5 km，130.5 km < 141 km，因此，当台风中心移动到与城市 O 距离最近时，这股台风不会侵袭这座海滨城市.



(第 4 题)

5. **解**：如图，过点 B 作 $BG\perp D'D$ 于点 G，延长 EC，GB 交于点 F.

$\because AB=25$ cm，$\angle D'AB=37°$，

$\therefore BG=AB\cdot\sin 37°\approx 25\times 0.60=15$(cm)，

$AG=AB\cdot\cos 37°\approx 25\times 0.80=20$(cm).

$\because FG=DE=50$ cm，

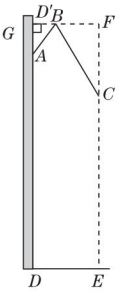
$\therefore BF=FG-BG\approx 50-15=35$(cm).

$\because \angle GBA=90°-\angle D'AB=90°-37°=53°$，

$\angle ABC=72°$，

$\therefore \angle CBF=180°-\angle GBA-\angle ABC=180°-53°-72°=55°$.

$\therefore \angle BCF=90°-\angle CBF=90°-55°=35°$.



(第 5 题)

$\because \tan 35°=\frac{BF}{CF}$，

$\therefore CF\approx\frac{35}{0.70}=50$(cm).

$\therefore FE=CF+CE\approx 50+130=180$(cm).

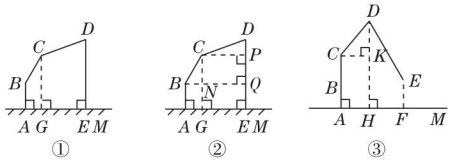
$\therefore GD=FE\approx 180$ cm.

$\therefore AD=GD-AG\approx 180-20=160$(cm).

答：安装师傅应将支架固定在离地面约 160 cm 的位置.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6. 解：(1)过点 C 作 $CG\perp AM$ 于点 G，如图①所示.



(第 6 题)

$\because AB\perp AM, DE\perp AM$，

$\therefore AB\parallel CG\parallel DE$.

$\therefore \angle DCG=180°-\angle CDE=110°$.

$\therefore \angle BCG=\angle BCD-\angle DCG=30°$.

$\therefore \angle ABC=180°-\angle BCG=150°$.

(2)过点 C 作 $CP\perp DE$ 于点 P，过点 B 作 $BQ\perp DE$ 于点 Q，交 CG 于点 N，如图②所示.

在 $Rt\triangle CPD$ 中，$DP=CD\cdot\cos 70°\approx 0.51$(米)；

在 $Rt\triangle BCN$ 中，$CN=BC\cdot\cos 30°\approx 1.04$(米)，

所以 $DE=DP+PQ+QE=DP+CN+AB\approx 2.35$(米).

如图③，过点 D 作 $DH\perp AM$ 于点 H，过点 C 作 $CK\perp DH$ 于点 K，$\therefore \angle DCK=50°$.

在 $Rt\triangle CKD$ 中，$DK=CD\cdot\sin 50°\approx 1.16$(米)，

所以 $DH=DK+KH\approx 1.16+1.2+0.8=3.16$(米).

所以 $DH-DE\approx 3.16-2.35\approx 0.8$(米).

答：斗杆顶点 D 的最高点比初始位置大约高了 0.8 米.

第 19 招 样本估计总体常见应用

1. 解：(1)15；15

(2)平均数 $\bar{x}=$

$$\frac{5\times 8+10\times 14+15\times 20+20\times 6+25\times 2}{50}=13(\text{元}).$$

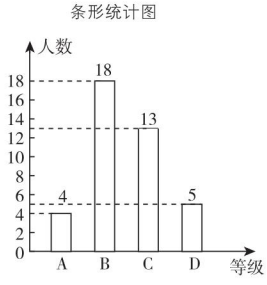
(3)$\because$ 样本数据的平均数是 13 元，

$\therefore$ 估计该校 600 名学生的捐款平均数是 13 元.

$\therefore$ 估计该校 600 名学生的捐款总数是 $600\times 13=7\,800$(元).

2. 解：(1)117

(2)如图所示.



(第 2 题)

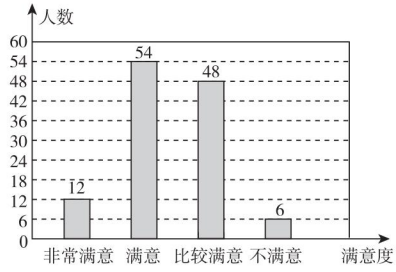
(3)B

(4)$300\times\frac{4}{18\div 45\%}=30$(人).

故估计足球运球测试成绩达到 A 级的学生有 30 人.

3. 解：(1)120；45%

(2)$n=120\times 40\%=48$. 补全条形统计图如图所示.



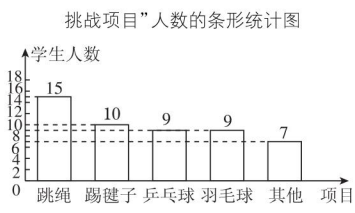
(第 3 题)

(3)$3\,600\times(10\%+45\%)=1\,980$(名).

故估计该景区服务工作平均每天得到 1 980 名游客的肯定.

4. 解：(1)12；18%

(2)如图所示.



(第 4 题)

(3)$900\times\frac{8+9+50\times 20\%}{50\times 3}=162$(人)，故该校最喜欢“羽毛球”项目的学生总人数约为 162 人.

第 20 招 建模思想应用的常见类型归类

1. 解：(1)设每千克核桃应降价 x 元.

根据题意，得 $(60-x-40)\left(100+\frac{x}{2}\times 20\right)=2\,240$.

化简，得 $x^2-10x+24=0$.

解得 $x_1=4, x_2=6$.

答：每千克核桃应降价 4 元或 6 元.

(2)由(1)可知每千克核桃可降价 4 元或 6 元.

因为要尽可能让利于顾客，

所以每千克核桃应降价 6 元.

此时，售价为 $60-6=54$(元)，

$\frac{54}{60}\times 100\%=90\%$.

答：该店应该按原售价的九折出售.

点拨：设出未知数，利用平均每天的销售量 × 每千克的利润 = 2 240 元列出方程求解即可.

2. 解：(1)结合题图可设日均销售量 p(桶)与销售单价 x(元)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

的函数关系式为 $p=kx+b(k\neq0)$,

根据题意得 $\begin{cases}7k+b=500,\\12k+b=250,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-50,\\b=850.\end{cases}$

所以日均销售量 p(桶)与销售单价 x(元)的函数关系式为 $p=-50x+850$.

(2)所提问题不唯一,如:"若该经营部希望日均获利 1 350 元,那么日均应销售多少桶水?"

根据题意得 $(x-5)(-50x+850)-250=1\,350$,

解得 $x_1=9$,$x_2=13$(不合题意,舍去),

当 $x=9$ 时,$p=-50x+850=400$.

答:若该经营部希望日均获利 1 350 元,那么日均应销售 400 桶水.

点拨:本题考查了一元二次方程及一次函数的应用,解题的关键是通过题目和图象建立合适的函数模型求解.

3. 解:(1)在直角坐标系中描出相应的点如图所示.

(2)由(1)中图可知,加热过程中 y 与 x 满足一次函数关系,

设函数表达式为 $y=kx+b(k\neq0)$,

将(0,24)代入,求得 $b=24$,

再将(2,56)代入,求得 $k=16$.

所以加热过程中 y 与 x 的函数表达式为 $y=16x+24$.

由(1)中图可知,加工过程中 y 与 x 满足反比例函数关系,

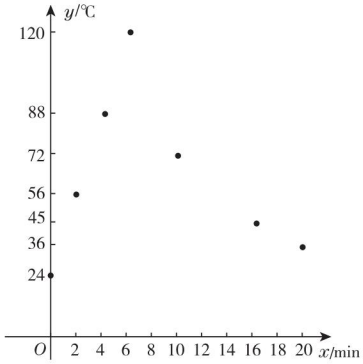
设函数表达式为 $y=\frac{m}{x}(m\neq0)$,

将(10,72)代入,得 $m=720$.

所以加工过程中 y 与 x 的函数表达式为 $y=\frac{720}{x}$.

(3)由于在加工过程中,$y=24$ 时,$x=\frac{720}{24}=30$,

所以每次加热后,进行加工的时间是 $30-6=24$(min).



(第 3 题)

4. 解:(1)库存原料为 $2\times60=120$(吨),根据题意可知 y 与 x 之间的函数表达式为 $y=\frac{120}{x}$.

因为生产能力提高,每小时消耗的原料大于计划消耗的原料,所以自变量的取值范围是 $x>2$.

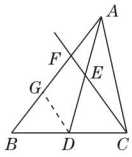
(2)根据题意,得 $y\geqslant24$,即 $\frac{120}{x}\geqslant24$.

解不等式,得 $x\leqslant5$,

即每小时消耗的原料应控制在大于 2 吨且不大于 5 吨的范围内.

点拨:本题考查反比例函数的应用,解题的关键是正确建立反比例函数模型并求出反比例函数表达式.

5. 解:如图,过点 D 作 $DG/\!/CF$ 交 AB 于点 G.



(第 5 题)

(1)$\because DG/\!/CF$,$\therefore \frac{BG}{GF}=\frac{BD}{DC}$,

又$\because BD=DC$,$\therefore BG=GF$.

$\because DG/\!/CF$,$\therefore \frac{AF}{FG}=\frac{AE}{ED}$,

又$\because AE=ED$,$\therefore AF=GF$,

$\therefore AF=FG=GB$,$\therefore \frac{AF}{BF}=\frac{1}{2}$.

(2)$\because DG/\!/CF$,$\therefore \frac{AF}{FG}=\frac{AE}{ED}$.

又$\because \frac{AE}{ED}=\frac{1}{k}$,$\therefore \frac{AF}{FG}=\frac{1}{k}$,即 $FG=kAF$.

同(1)可知 $BG=GF$,

$\therefore BG=FG=kAF$,

$\therefore BF=2kAF$,$\therefore \frac{AF}{BF}=\frac{1}{2k}$.

点拨:平行线分线段成比例的基本事实可将一条直线上的两条线段的比转换为另一条直线上两条线段的比,已知 BD 与 CD 的比、AE 与 DE 的比,过其中一分点作平行线,可实现比的转换.

6. 8.0 m **点拨**:如图,延长 AF 交 BH 于点 N,过点 F 作 $FM\perp BH$ 于点 M,

$\because \angle FEH=30°$,$EF=1.7$ m,

$\therefore FM=0.85$ m,$\therefore EM\approx1.47$ m.

由题易知 $\triangle FMN\backsim\triangle CDG$,

$\therefore \frac{FM}{CD}=\frac{MN}{DG}$.

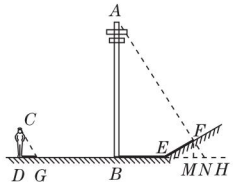
$\because CD=1.6$ m,$DG=0.8$ m,

$\therefore MN=0.425$ m,

$\because BE=2.1$ m,$\therefore BN\approx2.1+1.47+0.425=3.995$(m).

又易知 $\frac{AB}{BN}=\frac{CD}{DG}$,

$\therefore \frac{AB}{3.995}\approx\frac{1.6}{0.8}$,解得 $AB\approx8.0$ m.



(第 6 题)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

典点

练准知识 练通考点
练透方法 练出高分





提分一定有方法！

绿色印刷产品

关注荣德基微信公众号，获取新资讯。

荣德基官方网站：http://www.rudder.com.cn
荣德基天猫旗舰店：http://rongdeji.tmall.com
客服热线：182 1039 5892

荣德基
初中频道

本书导学号
4885393

ISBN 978-7-5450-6651-7
定价：45.90元

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料