按课时编写

典中点®

综合应用创新题 典中点

一本在做题中教会你学习方法的书



九年级数学 下

（HS版） 按80：1配赠教师用书

练透方法 练出高分

- 方法技巧37招
- 典型易错题28道
- 培优拔尖题54道
- 高频考点14个

教辅资料站

电子教辅 试卷练习
知识总结 备课资源

扫码关注获取更多学习资料

陕西新华出版传媒集团
陕西人民教育出版社



典中点®

综合应用创新题 典中点

一本在做题中教会你学习方法的书

主　　编：荣德基
本册主编：程小恒



九年级数学 下

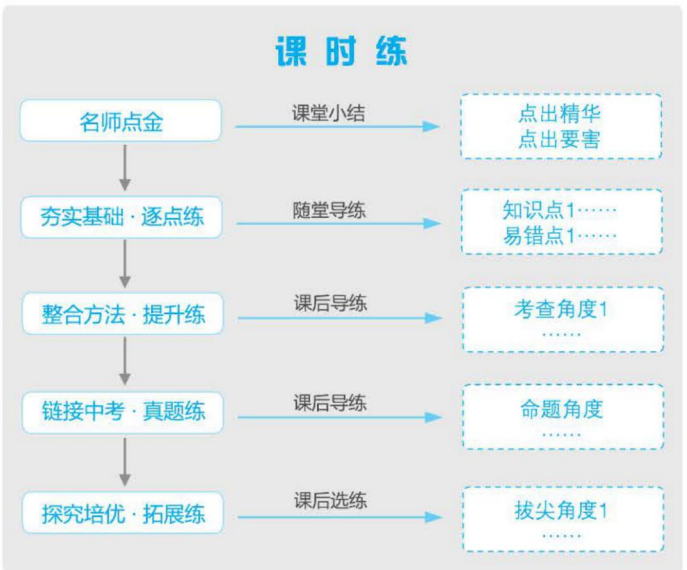
（HS 版）

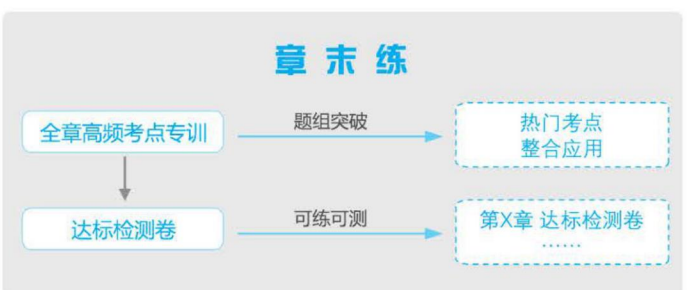
陕西新华出版传媒集团
陕西人民教育出版社
·西安·

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

一本在做题中教会你学习方法的书

练，就练得与众不同





《典点》系列丛书是有思想的教辅，是有方法的宝典，是无声的老师；带你纵向贯通学习环节，横向打通疑难知识；帮你逐题渗透方法，分层提升能力；让你练准知识、练通考点、练透方法。

同学们，让我们牵手《典点》系列丛书，练，就练得与众不同。

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

目录 CONTENTS

第26章 二次函数

26.1 二次函数 …… 1

26.2 二次函数的图象与性质 …… 3

26.2.1 二次函数 $y=ax^2$ 的图象与性质 …… 3

26.2.2 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与性质 …… 5

第1课时 二次函数 $y=ax^2+k$ 的图象与性质 …… 5

第2课时 二次函数 $y=a(x-h)^2$ 的图象与性质 …… 7

第3课时 二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象与性质 …… 9

第4课时 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与性质 …… 11

第5课时 用二次函数求几何面积的最值 …… 13

26.2.3 求二次函数的表达式 …… 15

阶段方法技巧训练(一) …… 17

专训1 二次函数的图象与系数的七种关系 …… 17

专训2 求二次函数表达式的常见类型 …… 18

26.3 实践与探索 …… 20

第1课时 用二次函数解决实际中“抛物线”形的最值应用 …… 20

第2课时 用二次函数求实际中应用问题 …… 22

第3课时 二次函数与一元二次方程之间的关系 …… 24

第4课时 用图象法解一元二次方程(不等式) …… 26

阶段方法技巧训练(二) …… 28

专训1 二次函数图象信息题的四种常见类型 …… 28

专训2 二次函数在学科内的综合运用 …… 29

专训3 用二次函数解决问题的四种类型 …… 30

专训4 探究二次函数中存在性问题 …… 32

全章热门考点整合应用 …… 33

第27章 圆

27.1 圆的认识 …… 36

27.1.1 圆的基本元素 …… 36

27.1.2 圆的对称性 …… 38

第1课时 圆心角、弧、弦间的关系 …… 38

第2课时 垂直于弦的直径性质 …… 40

27.1.3 圆周角 …… 42

第1课时 圆周角和直径的关系 …… 42

第2课时 圆周角和圆心角、弧的关系 …… 44

第3课时 圆内接四边形 …… 46

阶段方法技巧训练(三) …… 48

专训1 巧用圆的基本性质解圆的五种关系 …… 48

专训2 垂径定理的四种应用技巧 …… 49

27.2 与圆有关的位置关系 …… 50

27.2.1 点与圆的位置关系 …… 50

27.2.2 直线与圆的位置关系 …… 52

27.2.3 切 线 …… 54

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

目 录 CONTENTS

第 1 课时　切　线 …… 54
第 2 课时　切线长 …… 56
第 3 课时　三角形的内切圆 …… 58
*第 4 课时　圆与圆的位置关系 …… 60
阶段方法技巧训练(四) …… 62
专训 1　有关圆的位置关系的六种判断方法 …… 62
专训 2　切线的判定和性质的四种应用类型 …… 63
27.3　圆中的计算问题 …… 64
第 1 课时　弧长和扇形面积 …… 64
第 2 课时　圆锥的侧面积和表面积 …… 66
27.4　正多边形和圆 …… 68
阶段方法技巧训练(五) …… 70
专训 1　圆中常见的计算题型 …… 70
专训 2　圆中常用的作辅助线的八种方法 …… 72
专训 3　圆与相似三角形的综合 …… 74
专训 4　用三角函数解与圆有关问题 …… 75
全章热门考点整合应用 …… 76

第 28 章　样本与总体
28.1　抽样调查的意义 …… 79
28.1.1　普查和抽样调查 …… 79
28.1.2　这样选择样本合适吗 …… 81
28.2　用样本估计总体 …… 83
28.2.1　简单随机抽样 …… 83
28.2.2　简单随机抽样调查可靠吗 …… 85
28.3　借助调查做决策 …… 87
28.3.1　借助调查做决策 …… 87
28.3.2　容易误导读者的统计图 …… 90
全章热门考点整合应用 …… 91

达标检测卷
第 26 章达标检测卷 …… 93
第 27 章达标检测卷 …… 97
第 28 章达标检测卷 …… 101
期末达标检测卷 …… 105

参考答案及点拨 …… 109



微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

26.1 二次函数

名师点金

关于二次函数的定义要理解三点：

(1)函数关系式必须是整式，自变量的取值范围是全体实数，而在实际应用中，自变量的取值范围必须符合实际意义.

(2)确定二次函数关系式的各项系数及常数项时，要把函数关系式化为一般式.

(3)二次项系数不为0.

1 夯实基础·逐点练 (答案见109页)

知识点1 二次函数的定义

1. 【中考·兰州】下列函数关系式中，一定为二次函数的是(　　)

A. $y=3x-1$　　B. $y=ax^2+bx+c$

C. $s=2t^2-2t+1$　　D. $y=x^2+\frac{1}{x}$

2. 下列各式中，y 是 x 的二次函数的是(　　)

A. $y=\frac{1}{x^2}$　　B. $y=x^2+\frac{1}{x}+1$

C. $y=2x^2-1$　　D. $y=\sqrt{x^2-1}$

3. 下列各式中，y 是 x 的二次函数的是(　　)

A. $y=ax^2+bx+c$　　B. $x^2+y-2=0$

C. $y^2-ax=2$　　D. $x^2-y^2+1=0$

4. 若函数 $y=(m-2)x^2+4x-5$(m 是常数)是二次函数，则(　　)

A. $m\neq-2$　　B. $m\neq2$

C. $m\neq3$　　D. $m\neq-3$

5. 若 $y=(m-1)x^{m^2+1}$ 是二次函数，则 m 的值是(　　)

A. 1　　B. -1

C. 1或-1　　D. 2

6. 对于任意实数 m，下列函数一定是二次函数的是(　　)　　【导学号:1489846】

A. $y=mx^2+3x-1$　　B. $y=(m-1)x^2$

C. $y=(m-1)^2x^2$　　D. $y=(-m^2-1)x^2$

知识点2 二次函数的一般形式及函数值

7. 已知二次函数 $y=1-3x+5x^2$，则它的二次项系数 a，一次项系数 b，常数项 c 分别是(　　)

A. $a=1,b=-3,c=5$

B. $a=1,b=3,c=5$

C. $a=5,b=3,c=1$

D. $a=5,b=-3,c=1$

8. 关于函数 $y=(500-10x)(40+x)$，下列说法不正确的是(　　)

A. y 是 x 的二次函数

B. 二次项系数是 -10

C. 一次项是100

D. 常数项是20 000

9. 已知 x 是实数，且满足 $(x-2)(x-3)\sqrt{1-x}=0$，则相应的函数 $y=x^2+x+1$ 的值为(　　)

A. 13或3　　B. 7或3

C. 3　　D. 13或7或3

知识点3 利用二次函数的关系式表示实际问题

10. 一台机器原价60万元，如果每年的折旧率为 x，两年后这台机器的价格为 y 万元，那么 y 与 x 之间的函数关系式为(　　)

A. $y=60(1-x)^2$　　B. $y=60(1-x)$

C. $y=60-x^2$　　D. $y=60(1+x)^2$

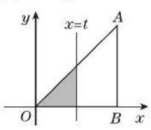
11. 如图，在 $\mathrm{Rt}\triangle AOB$ 中，$AB\perp OB$，且 $AB=OB=3$，设直线 $x=t(0<t<3)$ 截此三角形所得阴影部分的面积为 S，则 S 与 t 之间的函数关系式为(　　)

A. $S=t$

B. $S=\frac{1}{2}t^2$

C. $S=t^2$

D. $S=\frac{1}{2}t^2-1$



(第11题)

易错点 利用二次函数的定义求字母的值时，易忽略二次项系数不为0这一条件而导致错误

12. 当 $a=$_____时，函数 $y=(a-2)x^{a^2-2}+ax-1$ 是二次函数.

趣味数学　18世纪，法国数学家达朗贝尔在进行研究中，给函数重新下了一个定义，他认为，所谓变量的函数，就是指由这些变量和常量所组成的表达式，即用表达式表示函数关系.(待续)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

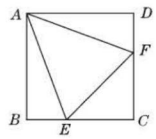
Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞（答案见109页）

考查角度1 利用二次函数的关系式建立实际问题模型

13. 某商店以每双42元的价格购进一种皮鞋，根据试销得知这种皮鞋每天的销售量 t（双）与每双的售价 x（元）之间可以看成一次函数关系：$t=-4x+204$. 请写出每天的销售利润 y（元）与每双的售价 x（元）之间的函数关系式，并确定自变量 x 的取值范围.

考查角度2 利用二次函数的关系式建立几何问题模型

14. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为4，E 为 BC 上一点，F 是 CD 上一点，且 $AE=AF$，设 $\triangle AEF$ 的面积为 y，EC 的长为 x，求 y 与 x 的函数关系式.



（第14题）

Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞（答案见109页）

拔尖角度1 利用二次函数探究最值问题

15. 某广告公司设计一幅周长为12 m的矩形广告牌，设计费为每平方米1 000元，设矩形一边的长为 x m，面积为 S m^2.

（1）求 S 与 x 之间的函数关系式，并确定自变量 x 的取值范围；

（2）若要求设计的广告牌的边长为整数，请你填写下表，并探究当 x 取何值时，广告牌的设计费最多.

x/m					
S/m^2					
设计费/元					

拔尖角度2 利用二次函数探究图形排列规律问题

16. 观察如图所示的构成规律.

（1）如果第 n 个图中有 S 个圆，试写出 S 与 n 的函数关系式；

（2）这个函数是不是二次函数？



（第16题）

微信公众号
教辅资料站

后来瑞士的数学家欧拉又把函数的定义作了进一步的规范，他认为函数是能描画出的一条曲线. 19世纪中期，法国数学家黎曼吸收了前人的成果，第一次准确地提出了函数的定义.

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

26.2　二次函数的图象与性质

26.2.1　二次函数 $y=ax^2$ 的图象与性质

名师点金

解二次函数 $y=ax^2$ 应用问题的三个步骤：

(1) **审题建模**：审查题目特点，建立 $y=ax^2$ 模型.

(2) **确定关系式**：根据图形或者其他条件，确定点的坐标，用待定系数法确定二次函数关系式.

(3) **解决问题**：利用关系式，根据纵坐标求横坐标，或根据横坐标求纵坐标解决问题.

Ⅰ 夯实基础 · 逐点练

(答案见 109 页)

知识点 1　二次函数 $y=ax^2$ 的图象

1. 关于二次函数 $y=3x^2$ 的图象，下列说法错误的是(　　)

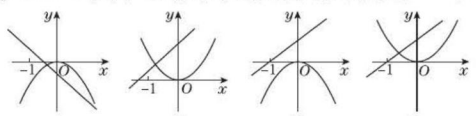
A. 它是一条抛物线

B. 它的开口向上，且关于 y 轴对称

C. 它的顶点是抛物线的最高点

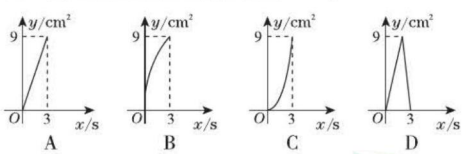
D. 它与 $y=-3x^2$ 的图象关于 x 轴对称

2. 【中考 · 呼和浩特】二次函数 $y=ax^2$ 与一次函数 $y=ax+a$ 在同一坐标系中的大致图象可能是(　　)

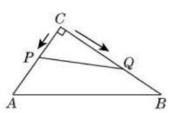


A　　B　　C　　D

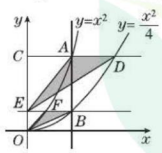
3. 如图，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=4\ \mathrm{cm}$，$BC=6\ \mathrm{cm}$，动点 P 从点 C 开始沿 CA 以 1 cm/s 的速度向 A 点运动，同时动点 Q 从点 C 开始沿 CB 以 2 cm/s 的速度向 B 点运动，其中一个动点到达终点时，另一个动点也停止运动，则运动过程中所构成的 $\triangle CPQ$ 的面积 $y(\mathrm{cm}^2)$ 与运动时间 $x(\mathrm{s})$ 之间的函数图象大致是(　　)



A　　B　　C　　D



(第 3 题)



(第 4 题)

4. 【中考 · 南宁】如图，垂直于 x 轴的直线 AB 分别与抛物线 $C_1: y=x^2(x\geqslant 0)$ 和抛物线 $C_2: y=\frac{x^2}{4}(x\geqslant 0)$ 交于 A,B 两点，过点 A 作 $CD\parallel x$ 轴分别与 y 轴和抛物线 C_2 交于点 C,D，过点 B 作 $EF\parallel x$ 轴分别与 y 轴和抛物线 C_1 交于点 E,F，则 $\frac{S_{\triangle OFB}}{S_{\triangle EAD}}$ 的值为(　　)

A. $\frac{\sqrt{2}}{6}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{6}$

知识点 2　二次函数 $y=ax^2$ 的性质

5. 下列关于函数 $y=36x^2$ 的叙述中，错误的是(　　)

A. 图象的对称轴是 y 轴

B. 图象的顶点是原点

C. 当 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而增大

D. y 有最大值

6. 抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$，$y=x^2$，$y=-x^2$ 的共同性质是：①都是开口向上；②都以点 $(0,0)$ 为顶点；③都以 y 轴为对称轴；④都关于 x 轴对称. 其中正确的有(　　)

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

7. 已知抛物线 $y=ax^2(a>0)$ 过 $A(-2,y_1)$，$B(1,y_2)$ 两点，则下列关系式一定正确的是(　　)

A. $y_1>0>y_2$　　B. $y_2>0>y_1$

C. $y_1>y_2>0$　　D. $y_2>y_1>0$

8. 对于二次函数：①$y=3x^2$；②$y=\frac{1}{3}x^2$；③$y=\frac{4}{3}x^2$，它们的图象在同一坐标系中，开口大小的顺序用序号来表示应是(　　)

A. ②>③>①　　B. ②>①>③

C. ③>①>②　　D. ③>②>①

9. 若二次函数 $y=-ax^2$，当 $x=2$ 时，$y=\frac{1}{2}$；则当 $x=-2$ 时，$y=$ _____.

易错点 ! 不能准确地掌握二次函数 $y=ax^2$ 的图象与性质

10. 已知二次函数 $y=x^2$，在 $-1\leqslant x\leqslant 4$ 范围内，求函数的最值.

趣味数学　**太阳灶与抛物镜**：抛物镜的性质有着广泛的应用. 例如，在光学上，如果把光源放在抛物镜的焦点处，射出的光线经过抛物镜的反射，变成了平行光线.（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞（答案见109页）

考查角度1 利用二次函数 $y=ax^2$ 的图象的特征解相关问题

11. 已知函数 $y=(m+3)x^{m^2+3m-2}$ 是关于 x 的二次函数.

（1）求 m 的值；

（2）当 m 为何值时，该函数图象的开口向下？

（3）当 m 为何值时，该函数有最小值？

考查角度2 利用二次函数 $y=ax^2$ 的性质解相关问题

12. 根据下列条件分别求 a 的取值范围.

（1）函数 $y=(a-2)x^2$，当 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而减小，当 $x<0$ 时，y 随 x 的增大而增大；

（2）函数 $y=(3a-2)x^2$ 有最大值；

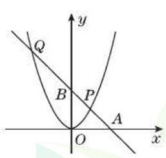
（3）抛物线 $y=(a+2)x^2$ 与抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的形状相同；

（4）函数 $y=ax^{a^2+a}$ 的图象是开口向上的抛物线.

Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞（答案见109页）

拔尖角度1 利用二次函数图象的几何特征求它的关系式

13. 已知一次函数 $y=kx+b$ 与二次函数 $y=ax^2$ 的图象如图所示，其中一次函数的图象与 x 轴，y 轴的交点分别为 $A(2,0)$，$B(0,2)$，一次函数与二次函数的图象的交点分别为 P，Q，且它们的纵坐标的比为 1∶4，求这两个函数的关系式.



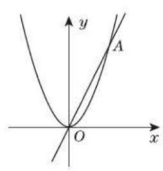
（第13题）

拔尖角度2 利用函数的图象探究存在性问题（分类讨论思想）

14. 如图，抛物线 $y=ax^2$ 与直线 $y=kx$ 在第一象限内交于点 $A(2,4)$.

（1）求抛物线对应的函数关系式；

（2）在 x 轴上是否存在一点 P，使 $\triangle AOP$ 为等腰三角形？若存在，请你求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.



（第14题）

微信公众号
教辅资料站

汽车前灯、探照灯、手电筒就是利用这个光学性质设计的.反过来，也可以把射入的平行光线集中于焦点处，太阳灶就是利用这个原理设计的.

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

26.2.2　二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与性质

第 1 课时　二次函数 $y=ax^2+k$ 的图象与性质

名师点金

解二次函数 $y=ax^2+k$ 的问题要注意两点：

(1) 二次项系数的符号⇔图象的开口方向；二次项系数的绝对值相等⇔抛物线的形状相同；k⇔顶点的纵坐标.

(2) 抛物线 $y=ax^2+k$ 可由抛物线 $y=ax^2$ 向上(下)平移得到，可简记为“**上加下减**”.

1 夯实基础 · 逐点练

☞(答案见 110 页)

知识点 1　二次函数 $y=ax^2+k$ 的图象

1. 抛物线 $y=ax^2+(a-2)$ 的顶点在 x 轴的下方，则 a 的取值范围是_____.

2. 【中考 · 茂名】在平面直角坐标系中，下列函数的图象经过原点的是(　　)

A. $y=\dfrac{1}{x}$　　B. $y=-2x-3$

C. $y=2x^2+1$　　D. $y=5x$

3. 在平面直角坐标系中，抛物线 $y=x^2-1$ 与 x 轴的交点的个数是(　　)

A. 3　　B. 2　　C. 1　　D. 0

4. 在二次函数：①$y=3x^2$；②$y=\dfrac{1}{2}x^2+1$；③$y=-\dfrac{4}{3}x^2-3$ 中，图象开口大小顺序用序号表示为(　　)

A. ①>②>③　　B. ①>③>②

C. ②>③>①　　D. ②>①>③

5. 【中考 · 宜宾】已知抛物线 $y=x^2-1$ 与 y 轴交于点 A，与直线 $y=kx$(k 为任意实数)相交于 B，C 两点，则下列结论不正确的是(　　)

A. 存在实数 k，使得 $\triangle ABC$ 为等腰三角形

B. 存在实数 k，使得 $\triangle ABC$ 的内角中有两角分别为 30°和 60°

C. 任意实数 k，使得 $\triangle ABC$ 都为直角三角形

D. 存在实数 k，使得 $\triangle ABC$ 为等边三角形

知识点 2　二次函数 $y=ax^2+k$ 的性质

6. 对于二次函数 $y=3x^2+2$，下列说法错误的是(　　)

A. 最小值为 2

B. 图象与 x 轴没有公共点

C. 当 $x<0$ 时，y 随 x 的增大而增大

D. 图象的对称轴是 y 轴

7. 【中考 · 绍兴】已知点 (x_1,y_1)，(x_2,y_2) 均在抛物线 $y=x^2-1$ 上，下列说法正确的是(　　)

A. 若 $y_1=y_2$，则 $x_1=x_2$

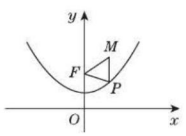
B. 若 $x_1=-x_2$，则 $y_1=-y_2$

C. 若 $0<x_1<x_2$，则 $y_1>y_2$

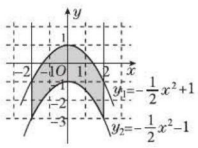
D. 若 $x_1<x_2<0$，则 $y_1>y_2$

8. 已知抛物线 $y=\dfrac{1}{4}x^2+1$ 上任意一点到定点 $F(0,2)$ 的距离与到 x 轴的距离始终相等. 如图，点 M 的坐标为 $(\sqrt{3},3)$，P 是抛物线 $y=\dfrac{1}{4}x^2+1$ 上一个动点，则 $\triangle PMF$ 周长的最小值是(　　)

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6



(第 8 题)



(第 11 题)

知识点 3　二次函数 $y=ax^2+k$ 与 $y=ax^2$ 之间的关系

9. 抛物线 $y=2x^2+1$ 是由抛物线 $y=2x^2$(　　)得到的.

A. 向上平移 2 个单位　　B. 向下平移 2 个单位

C. 向上平移 1 个单位　　D. 向下平移 1 个单位

10. 【中考 · 上海】如果将抛物线 $y=x^2+2$ 向下平移 1 个单位，那么所得新抛物线的表达式是(　　)

A. $y=(x-1)^2+2$　　B. $y=(x+1)^2+2$

C. $y=x^2+1$　　D. $y=x^2+3$

11. 如图，两条抛物线 $y_1=-\dfrac{1}{2}x^2+1$，$y_2=-\dfrac{1}{2}x^2-1$ 与分别经过点 $(-2,0)$，$(2,0)$ 且平行于 y 轴的两条平行线围成的阴影部分的面积为(　　)

A. 8　　B. 6　　C. 10　　D. 4

易错点 ! 对平移的规律理解不透彻

12. 能否通过上下平移二次函数 $y=\dfrac{1}{3}x^2$ 的图象，使得到的新的函数图象过点 $(3,-3)$？若能，说出平移的方向和距离；若不能，说明理由.

趣味数学　在我们进行运动会的铅球比赛时，如何能用巧劲把沉重的铅球扔得最远呢？(待续)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞（答案见110页）

考查角度1 利用二次函数 $y=ax^2$ 与 $y=ax^2+k$ 的关系求函数关系式

13. 抛物线 $y=ax^2+k$ 的顶点坐标是(0,2)，且形状及开口方向与抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 相同.

(1)确定 a，k 的值；

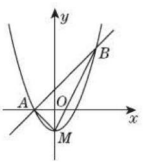
(2)画出抛物线 $y=ax^2+k$.

考查角度2 利用二次函数图象上点的坐标求函数表达式

14. 【中考 · 衡阳】如图，顶点 M 在 y 轴上的抛物线与直线 $y=x+1$ 相交于 A，B 两点，且点 A 在 x 轴上，点 B 的横坐标为2，连结 AM，BM.

(1)求抛物线的表达式；

(2)判断△ABM 的形状，并说明理由.



（第14题）

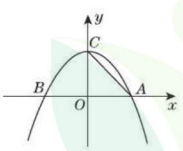
Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞（答案见110页）

拔尖角度1 利用抛物线的特征探究存在性问题

15. 如图，抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2+2$ 与 x 轴交于 A，B 两点，其中点 A 在 x 轴的正半轴上，点 B 在 x 轴的负半轴上.

(1)试写出该抛物线的对称轴和顶点 C 的坐标；

(2)在抛物线上是否存在一点 M，使△MAC ≌△OAC？若存在，求出点 M 的坐标；若不存在，请说明理由.



（第15题）

拔尖角度2 利用二次函数的图象与性质求最值问题

16. 【中考 · 安徽】一次函数 $y=kx+4$ 与二次函数 $y=ax^2+c$ 的图象的一个交点坐标为(1,2)，另一个交点是该二次函数图象的顶点.

(1)求 k，a，c 的值；

(2)过点 $A(0,m)$ $(0<m<4)$ 且垂直于 y 轴的直线与二次函数 $y=ax^2+c$ 的图象相交于 B，C 两点，点 O 为坐标原点，记 $W=OA^2+BC^2$，求 W 关于 m 的函数表达式，并求 W 的最小值.

微信公众号
教辅资料站

经过实验和计算发现，当我们使铅球抛出的弧线与水平线的夹角为45°时，扔出的距离最远.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 2 课时　二次函数 $y=a(x-h)^2$ 的图象与性质

名师点金

1. 将抛物线 $y=ax^2$ 沿 x 轴左右平移可以得到抛物线 $y=a(x-h)^2$. 抛物线 $y=ax^2$ 的顶点坐标是 $(0,0)$，抛物线 $y=a(x-h)^2$ 的顶点坐标是 $(h,0)$，顶点始终在 x 轴上.
2. 对于函数 $y=a(x-h)^2$，若 $a>0$，则 $x<h$ 时，y 随 x 的增大而减小，$x>h$ 时，y 随 x 的增大而增大，函数有最小值 0；若 $a<0$，则 $x<h$ 时，y 随 x 的增大而增大，$x>h$ 时，y 随 x 的增大而减小，函数有最大值 0.

Ⅰ 夯实基础 · 逐点练 ☞(答案见 110 页)

知识点 1　二次函数 $y=a(x-h)^2$ 的图象

1. 抛物线 $y=-5(x-2)^2$ 的顶点坐标是(　　)

A. $(-2,0)$　　B. $(2,0)$　　C. $(0,-2)$　　D. $(0,2)$

2. 【中考 · 兰州】在下列二次函数中，其图象的对称轴为直线 $x=-2$ 的是(　　)

A. $y=(x+2)^2$　　B. $y=2x^2-2$

C. $y=-2x^2-2$　　D. $y=2(x-2)^2$

3. 对于抛物线 $y=2(x-1)^2$，下列说法正确的有(　　)

①开口向上；②顶点为 $(0,-1)$；③对称轴为直线 $x=1$；④与 x 轴的交点坐标为 $(1,0)$.

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

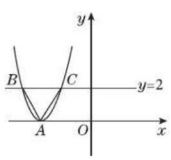
4. 【中考 · 台湾】如图，坐标平面上有一顶点为 A 的抛物线，此抛物线与直线 $y=2$ 交于 B,C 两点，$\triangle ABC$ 为正三角形. 若 A 点坐标为 $(-3,0)$，则此抛物线与 y 轴的交点坐标为(　　)

A. $\left(0,\frac{9}{2}\right)$

B. $\left(0,\frac{27}{2}\right)$

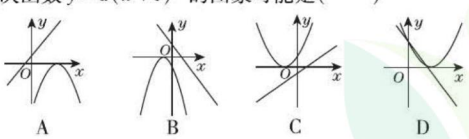
C. $(0,9)$

D. $(0,19)$



(第 4 题)

5. 在同一平面直角坐标系中，一次函数 $y=ax+c$ 和二次函数 $y=a(x+c)^2$ 的图象可能是(　　)



A　　B　　C　　D

知识点 2　二次函数 $y=a(x-h)^2$ 的性质

6. 关于二次函数 $y=-2(x+3)^2$，下列说法正确的是(　　)

A. 其图象的开口向上

B. 其图象的对称轴是直线 $x=3$

C. 其图象的顶点坐标是 $(0,3)$

D. 当 $x>-3$ 时，y 随 x 的增大而减小

7. 已知抛物线 $y=-(x+1)^2$ 上的两点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，如果 $x_1<x_2<-1$，那么下列结论成立的是(　　)

A. $y_1<y_2<0$　　B. $0<y_1<y_2$

C. $0<y_2<y_1$　　D. $y_2<y_1<0$

8. 已知二次函数 $y=-2(x+m)^2$，当 $x<-3$ 时，y 随 x 的增大而增大；当 $x>-3$ 时，y 随 x 的增大而减小，则当 $x=1$ 时，y 的值为(　　)

A. -12　　B. 12　　C. 32　　D. -32

知识点 3　二次函数 $y=a(x-h)^2$ 与 $y=ax^2$ 之间的关系

9. 【中考 · 海南】把抛物线 $y=x^2$ 平移得到抛物线 $y=(x+2)^2$，则这个平移过程正确的是(　　)

A. 向左平移 2 个单位　　B. 向右平移 2 个单位

C. 向上平移 2 个单位　　D. 向下平移 2 个单位

10. 对于任何实数 h，抛物线 $y=-x^2$ 与抛物线 $y=-(x-h)^2$ 的相同点是(　　)

A. 形状与开口方向相同　　B. 对称轴相同

C. 顶点相同　　D. 都有最低点

11. 【中考 · 丽水】将函数 $y=x^2$ 的图象用下列方法平移后，所得的图象不经过点 $A(1,4)$ 的方法是(　　)

A. 向左平移 1 个单位　　B. 向右平移 3 个单位

C. 向上平移 3 个单位　　D. 向下平移 1 个单位

易错点 ! 函数 $y=ax^2+c$ 与 $y=a(x-h)^2$ 的图象与性质区别不清

12. 对于二次函数 $y=3x^2+1$ 和 $y=3(x-1)^2$，有以下说法：

①它们的图象都是开口向上；

②它们图象的对称轴都是 y 轴，顶点坐标都是 $(0,0)$；

③当 $x>0$ 时，它们的函数值 y 都是随着 x 的增大而增大；

④它们图象的开口大小是一样的.

其中正确的说法有(　　)

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

微信公众号 教辅资料站

趣味数学　谜语：31 + 13 = ?　(打一字)　　谜底：非

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞(答案见110页)

考查角度1 利用二次函数的图象与性质求函数关系式

13. 已知抛物线 $y=a(x-h)^2$ 的对称轴为直线 $x=-2$，且过点(1，-3).

(1)求抛物线对应的函数关系式；

(2)画出函数的图象；

(3)从图象上观察，当 x 取何值时，y 随 x 的增大而增大？当 x 取何值时，函数有最大值(或最小值)？

考查角度2 利用二次函数的图象平移求函数关系式

14. 已知抛物线 $y=a(x-h)^2$ 向右平移3个单位后得到抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2$.

(1)求 a，h 的值；

(2)写出抛物线 $y=a(x-h)^2$ 的对称轴及顶点坐标.

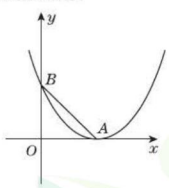
Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞(答案见110页)

拔尖角度1 利用二次函数图象的位置变换探究几何问题

15. 如图，将抛物线 $y=x^2$ 向右平移 a 个单位后，顶点为 A，与 y 轴交于点 B，且 $\triangle AOB$ 为等腰直角三角形.

(1)求 a 的值；

(2)在图中的抛物线上是否存在点 C，使 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形？若存在，直接写出点 C 的坐标，并求 $S_{\triangle ABC}$；若不存在，请说明理由.



(第15题)

拔尖角度2 利用二次函数的图象与性质解几何问题

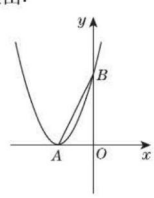
16. 如图，已知二次函数 $y=(x+2)^2$ 的图象与 x 轴交于点 A，与 y 轴交于点 B.

(1)写出点 A，B 的坐标.

(2)求 $S_{\triangle AOB}$.

(3)求出抛物线的对称轴.

(4)在对称轴上是否存在一点 P，使以 P，A，O，B 为顶点的四边形为平行四边形？若存在，求出 P 点的坐标；若不存在，请说明理由.



(第16题)

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 3 课时　二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象与性质

名师点金

抛物线 $y=ax^2$ 到抛物线 $y=a(x-h)^2+k$ 平移方法“八字诀”

平移规律是“上加下减，左加右减”.

(1)“上加下减”是指抛物线 $y=ax^2$ 向上平移，则在 ax^2 后加上一个正数；向下平移，则在 ax^2 后减去一个正数.

(2)“左加右减”是指抛物线 $y=ax^2$ 向左平移，则在括号内 x 后面加上一个正数；向右平移，则在括号内 x 后面减去一个正数.

Ⅰ 夯实基础·逐点练

☞(答案见 110 页)

知识点 1　二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 与 $y=ax^2$ 之间的关系

1. 【中考·宿迁】将抛物线 $y=x^2$ 向右平移 2 个单位，再向上平移 1 个单位，所得抛物线对应的函数关系式是(　　)

A. $y=(x+2)^2+1$　　B. $y=(x+2)^2-1$

C. $y=(x-2)^2+1$　　D. $y=(x-2)^2-1$

2. 在平面直角坐标系中，如果抛物线 $y=3x^2$ 不动，而把 x 轴、y 轴分别向上、向右平移 3 个单位，那么在新坐标系下此抛物线对应的函数关系式是(　　)

A. $y=3(x-3)^2+3$　　B. $y=3(x-3)^2-3$

C. $y=3(x+3)^2+3$　　D. $y=3(x+3)^2-3$

3. 【中考·哈尔滨】将抛物线 $y=2x^2$ 向上平移 3 个单位长度，再向右平移 2 个单位长度，所得到的抛物线为(　　)

A. $y=2(x+2)^2+3$　　B. $y=2(x-2)^2+3$

C. $y=2(x-2)^2-3$　　D. $y=2(x+2)^2-3$

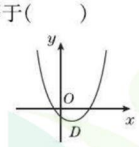
4. 【中考·玉林】已知抛物线 $C:y=\frac{1}{2}(x-1)^2-1$，顶点为 D(如图)，将 C 沿水平方向向右(或向左)平移 $|m|$ 个单位长度，得到抛物线 C_1，顶点为 D_1，C 与 C_1 相交于点 Q，若 $\angle DQD_1=60°$，则 m 等于(　　)

A. $\pm4\sqrt{3}$

B. $\pm2\sqrt{3}$

C. -2 或 $2\sqrt{3}$

D. -4 或 $4\sqrt{3}$



(第 4 题)

知识点 2　二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象

5. 【中考·衢州】二次函数 $y=(x-1)^2+3$ 图象的顶点坐标是(　　)

A. $(1,3)$　B. $(1,-3)$　C. $(-1,3)$　D. $(-1,-3)$

6. 【中考·益阳】若抛物线 $y=(x-m)^2+(m+1)$ 的顶点在第一象限，则 m 的取值范围为(　　)

A. $m>1$　　B. $m>0$

C. $m>-1$　　D. $-1<m<0$

7. 下列二次函数中，图象以直线 $x=2$ 为对称轴，且经过点 $(0,1)$ 的是(　　)

A. $y=(x-2)^2+1$

B. $y=(x+2)^2+1$

C. $y=(x-2)^2-3$

D. $y=(x+2)^2-3$

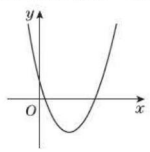
8. 二次函数 $y=a(x+m)^2+n$ 的图象如图所示，则一次函数 $y=mx+n$ 的图象经过(　　)

A. 第一、二、三象限

B. 第一、二、四象限

C. 第二、三、四象限

D. 第一、三、四象限



(第 8 题)

知识点 3　二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的性质

9. 【中考·泰安】对于抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2+3$，下列结论：

①抛物线的开口向下；

②对称轴为直线 $x=1$；

③顶点坐标为 $(-1,3)$；

④$x>1$ 时，y 随 x 的增大而减小.

其中正确结论的个数为(　　)

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

10. 【中考·凉山州】当 $0\leqslant x\leqslant3$ 时，直线 $y=a$ 与抛物线 $y=(x-1)^2-3$ 有交点，则 a 的取值范围是_____.

易错点 对顶点式二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 在指定条件下的最值理解不透而致错

11. 【中考·舟山】二次函数 $y=-(x-1)^2+5$，当 $m\leqslant x\leqslant n$ 且 $mn<0$ 时，y 的最小值为 $2m$，最大值为 $2n$，则 $m+n$ 的值为(　　)

A. $\frac{5}{2}$　　B. 2

C. $\frac{3}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

趣味数学　聪明的马克·吐温：在一个社交舞会上，一个慈善家得意洋洋地告诉马克·吐温：“上个星期我根据困难程度将 50 枚银元施舍给了 10 个穷人，他们得到的数目各不相同.”(待续)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

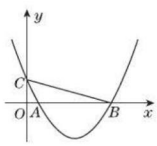
Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞（答案见110页）

考查角度① 利用抛物线的特征求二次函数的关系式

12. 【中考 · 泰州】如图，在平面直角坐标系 xOy 中，二次函数图象的顶点坐标为$(4,-3)$，该图象与 x 轴相交于点 A，B，与 y 轴相交于点 C，其中点 A 的横坐标为 1.

(1) 求该二次函数的表达式；

(2) 求 $\tan\angle ABC$.



（第 12 题）

考查角度② 利用抛物线的平移求二次函数的关系式

13. 把二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象先向左平移 2 个单位，再向上平移 4 个单位，得到二次函数 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2-1$ 的图象.

(1) 试确定 a，h，k 的值；

(2) 指出二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 图象的开口方向、对称轴和顶点坐标.

Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞（答案见110页）

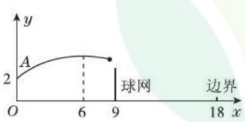
拔尖角度① 利用二次函数图象解实际应用问题（建模思想）

14. 【中考 · 天水】如图，排球运动员站在点 O 处练习发球，将球从 O 点正上方 2 m 的 A 处发出，把球看成点，其运行的高度 y(m) 与运行的水平距离 x(m) 满足关系式 $y=a(x-6)^2+h$. 已知球网与 O 点的水平距离为 9 m，高度为 2.43 m，球场的边界距 O 点的水平距离为 18 m.

(1) 当 $h=2.6$ 时，求 y 与 x 之间的函数关系式（不要求写出自变量 x 的取值范围）.

(2) 当 $h=2.6$ 时，球能否越过球网？球会不会出边界？请说明理由.

(3) 若球一定能越过球网，又不出边界，求 h 的取值范围.



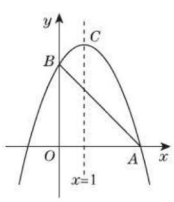
（第 14 题）

拔尖角度② 利用二次函数的图象探究动点问题（分类讨论思想）

15. 如图，已知抛物线 $y=a(x-h)^2+k$ 与 x 轴的一个交点为 $A(3,0)$，与 y 轴的交点为 $B(0,3)$，其顶点为 C，对称轴为直线 $x=1$.

(1) 求抛物线的表达式；

(2) 已知点 M 为 y 轴上的一个动点，当 $\triangle ABM$ 为等腰三角形时，求点 M 的坐标.



（第 15 题）

微信公众号 教辅资料站

马克 · 吐温听了笑了起来，当场揭穿了慈善家的伪善面目. 你知道他是怎么知道的吗？

答案：要使 10 个穷人每人得到数目各不相同的银元，至少要 $1+2+3+\cdots+10=55$（枚）银元.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 4 课时　二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与性质

名师点金

利用二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象信息判断各项系数的符号的方法

1. a 决定抛物线的开口方向，简记为“正上负下”；
2. c 决定抛物线与 y 轴的交点位置，简记为“上正下负原点 0”；
3. a，b 的符号共同决定对称轴的位置，简记为“左同右异，y 轴 b 的值为 0”.

另外还要注意特殊值的意义，如 $x=1$，-1，2 时 y 的值的符号. 可以由图象的位置来判断各项系数的符号，也可以由各项系数的符号来判断图象的位置.

1 夯实基础 · 逐点练

☞(答案见 111 页)

知识点 1 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 与 $y=a(x-h)^2+k$ 之间的关系

1. 【中考 · 兰州】二次函数 $y=x^2-2x+4$ 化为 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式，下列正确的是(　　)

A. $y=(x-1)^2+2$　　B. $y=(x-1)^2+3$

C. $y=(x-2)^2+2$　　D. $y=(x-2)^2+4$

2. 【中考 · 济宁】将抛物线 $y=x^2-6x+5$ 向上平移两个单位长度，再向右平移一个单位长度后，得到的抛物线表达式是(　　)

A. $y=(x-4)^2-6$　　B. $y=(x-1)^2-3$

C. $y=(x-2)^2-2$　　D. $y=(x-4)^2-2$

知识点 2 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与性质

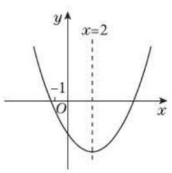
3. 【中考 · 遂宁】二次函数 $y=x^2-ax+b$ 的图象如图所示，对称轴为直线 $x=2$，下列结论不正确的是(　　)

A. $a=4$

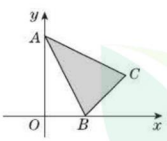
B. 当 $b=-4$ 时，顶点的坐标为 $(2,-8)$

C. 当 $x=-1$ 时，$b>-5$

D. 当 $x>3$ 时，y 随 x 的增大而增大



(第 3 题)



(第 4 题)

4. 如图，已知 $\triangle ABC$ 的顶点坐标分别为 $A(0,2)$，$B(1,0)$，$C(2,1)$，若二次函数 $y=x^2+bx+1$ 的图象与阴影部分(含边界)一定有公共点，则实数 b 的取值范围是(　　)

A. $b\leqslant -2$　　B. $b<-2$

C. $b\geqslant -2$　　D. $b>-2$

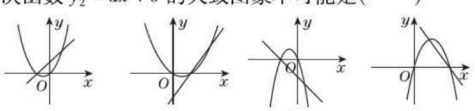
5. 【中考 · 福建】若二次函数 $y=|a|x^2+bx+c$ 的图象经过 $A(m,n)$，$B(0,y_1)$，$C(3-m,n)$，$D(\sqrt{2},y_2)$，$E(2,y_3)$，则 y_1,y_2,y_3 的大小关系是(　　)

A. $y_1<y_2<y_3$　　B. $y_1<y_3<y_2$

C. $y_3<y_2<y_1$　　D. $y_2<y_3<y_1$

知识点 3 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 a，b，c 之间的关系

6. 【中考 · 湖州】已知 a，b 是非零实数，$|a|>|b|$，在同一平面直角坐标系中，二次函数 $y_1=ax^2+bx$ 与一次函数 $y_2=ax+b$ 的大致图象不可能是(　　)



A　　B　　C　　D

7. 【中考 · 安顺】如图，已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴分别交于 A，B 两点，与 y 轴交于 C 点，$OA=OC$. 则由抛物线的特征写出如下结论：

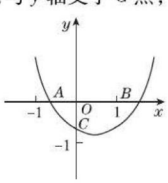
①$abc>0$；②$4ac-b^2>0$；

③$a-b+c>0$；④$ac+b+1=0$.

其中正确的个数是(　　)

A. 4　　B. 3

C. 2　　D. 1



(第 7 题)

易错点 ! 不善于结合方程的根的知识而致错

8. 【中考 · 黄石】以 x 为自变量的二次函数 $y=x^2-2(b-2)x+b^2-1$ 的图象不经过第三象限，则实数 b 的取值范围是(　　)

A. $b\geqslant\frac{5}{4}$

B. $b\geqslant 1$ 或 $b\leqslant -1$

C. $b\geqslant 2$

D. $1\leqslant b\leqslant 2$

趣味数学　**哥尼斯堡七桥问题**：18 世纪时，欧洲有一个风景秀丽的小城哥尼斯堡(今俄罗斯加里宁格勒)，那里的普雷格尔河上有七座桥，将河中的两个岛与河岸连结起来.(待续)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞（答案见111页）

考查角度1 利用二次函数的特征作二次函数的图象

9. 已知抛物线 $y=x^2+2x-3$.

（1）试确定抛物线的开口方向、顶点坐标和对称轴；

（2）用“五点法”画出该抛物线，并用“平移法”说明该抛物线是由抛物线 $y=x^2$ 怎样平移得到的.

考查角度2 利用二次函数的性质求字母的值以及点的坐标

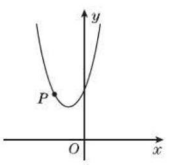
10. 【中考 · 宁波】如图，已知二次函数 $y=x^2+ax+3$ 的图象经过点 $P(-2,3)$.

（1）求 a 的值和图象的顶点坐标.

（2）点 $Q(m,n)$ 在该二次函数图象上.

①当 $m=2$ 时，求 n 的值；

②若点 Q 到 y 轴的距离小于2，请根据图象直接写出 n 的取值范围.



（第10题）

Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞（答案见111页）

拔尖角度 利用二次函数的性质解决新定义问题

11. 【中考 · 荆州】若二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图象的顶点在一次函数 $y=kx+t(k\neq0)$ 的图象上，则称 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 为 $y=kx+t(k\neq0)$ 的伴随函数，如：$y=x^2+1$ 是 $y=x+1$ 的伴随函数.

（1）若 $y=x^2-4$ 是 $y=-x+p$ 的伴随函数，求直线 $y=-x+p$ 与两坐标轴围成的三角形的面积.

（2）若函数 $y=mx-3(m\neq0)$ 的伴随函数 $y=x^2+2x+n$ 的图象与 x 轴两个交点间的距离为4，求 m,n 的值.

微信公众号
教辅资料站

有人提出了一个问题：一个人怎样才能一次走遍七座桥，每座桥只走一次，最后回到出发点？欧拉研究并解决了此问题，他把问题归结为“一笔画”的问题，证明上述走法是不可能实现的.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 5 课时　用二次函数求几何面积的最值

名师点金

利用二次函数求几何图形面积的最值是二次函数应用的重点之一，解决此类问题的基本方法是借助已知条件，分析几何图形的性质，确定二次函数关系式，再根据二次函数的图象与性质求出最值，从而解决问题.

Ⅰ 夯实基础·逐点练 ☞(答案见 111 页)

知识点 1 二次函数的最值

1. 二次函数 $y=x^2-4x+c$ 的最小值为 0，则 c 的值为(　　)

A. 2　　B. 4　　C. -4　　D. 16

2. 已知 $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$，那么函数 $y=-2x^2+8x-6$ 的最大值是(　　)　　【导学号:1489846】

A. -6　　B. -2.5　　C. 2　　D. 不能确定

3. 已知 $y=-x(x+3-a)+1$ 是关于 x 的二次函数，当 x 的取值范围在 $1\leqslant x\leqslant 5$ 时，若 y 在 $x=1$ 时取得最大值，则实数 a 的取值情况是(　　)

A. $a=9$　　B. $a=5$

C. $a\leqslant 9$　　D. $a\leqslant 5$

4. 已知二次函数 $y=2x^2-6x+1$，当 $0\leqslant x\leqslant 5$ 时，y 的取值范围是_____.

5. 若二次函数 $y=x^2+ax+5$ 的图象关于直线 $x=-2$ 对称，且当 $m\leqslant x\leqslant 0$ 时，y 有最大值 5，最小值 1，则 m 的取值范围是_____.

知识点 2 几何图形面积的最值

6. 已知一个直角三角形两直角边长之和为 20 cm，则这个直角三角形的最大面积为(　　)

A. 25 cm^2　　B. 50 cm^2

C. 100 cm^2　　D. 不确定

7. 用一条长为 40 cm 的绳子围成一个面积为 a cm^2 的长方形，a 的值不可能为(　　)

A. 20　　B. 40　　C. 100　　D. 120

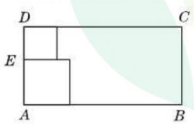
8. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AD=1$，$AB=2$，从较短边 AD 上找一点 E，过这点剪下两个正方形，它们的边长分别是 AE，DE 的长，当剪下的两个正方形的面积之和最小时，点 E 应选在(　　)

A. AD 的中点

B. $AE:ED=(\sqrt{5}-1):2$

C. $AE:ED=\sqrt{2}:1$

D. $AE:ED=(\sqrt{2}-1):2$

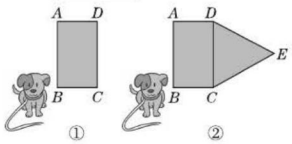


(第 8 题)

9. 【中考·金华】在一空旷场地上设计一落地为矩形 $ABCD$ 的小屋，$AB+BC=10$ m，拴住小狗的 10 m 长的绳子一端固定在 B 点处，小狗在不能进入小屋内的条件下活动，其可以活动的区域面积为 $S(m^2)$.

(1) 如图①，若 $BC=4$ m，则 $S=$_____；

(2) 如图②，现考虑在(1)中矩形 $ABCD$ 小屋的右侧以 CD 为边拓展一等边三角形 CDE 区域，使之变成落地为五边形 $ABCED$ 的小屋，其他条件不变，则在 BC 的变化过程中，当 S 取得最小值时，边 BC 的长为_____.

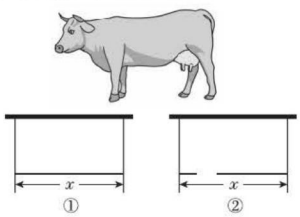


(第 9 题)

10. 【中考·绍兴】某农场拟建一间矩形种牛饲养室，饲养室的一面靠现有墙(墙足够长)，已知计划中的建筑材料可建围墙的总长为 50 m. 设饲养室长为 $x(m)$，占地面积为 $y(m^2)$.

(1) 如图①，问当饲养室长 x 为多少时，占地面积 y 最大？

(2) 如图②，现要求在图中所示位置留 2 m 宽的门，且仍使饲养室的占地面积最大，小敏说："只要饲养室长比(1)中的长多 2 m 就行了."请你通过计算，判断小敏的说法是否正确.



(第 10 题)

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞（答案见111页）

考查角度1 利用二次函数解决实际中面积的最值问题

11. 【中考 · 包头】某广告公司设计一幅周长为16米的矩形广告牌，广告设计费为每平方米2 000元，设矩形一边长为 x 米，面积为 S 平方米.

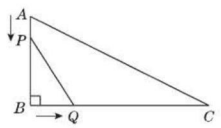
(1) 求 S 与 x 之间的函数关系式，并写出自变量 x 的取值范围；

(2) 设计费能达到24 000元吗？为什么？

(3) 当 x 是多少时，设计费最多？最多是多少元？

考查角度2 利用二次函数解决动态几何面积的最值问题

12. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B = 90°$，$AB = 12$ mm，$BC = 24$ mm，动点 P 从点 A 开始沿边 AB 向 B 以2 mm/s的速度移动，动点 Q 从点 B 开始沿边 BC 向 C 以4 mm/s的速度移动. 已知 P，Q 分别从 A，B 同时出发，求 $\triangle PBQ$ 的面积 $S(\text{mm}^2)$ 关于出发时间 t(s) 的函数关系式，并求出 t 为何值时，$\triangle PBQ$ 的面积最大？最大值是多少？



（第12题）

Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞（答案见111页）

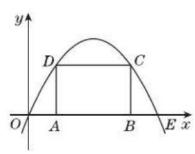
拔尖角度 利用二次函数解决与周长、面积相关的几何应用问题

13. 【中考 · 金华】如图，抛物线 $y = ax^2 + bx\ (a \neq 0)$ 过点 $E(10,0)$，矩形 $ABCD$ 的边 AB 在线段 OE 上（点 A 在点 B 的左边），点 C，D 在抛物线上. 设 $A(t,0)$，当 $t = 2$ 时，$AD = 4$.

(1) 求抛物线的表达式.

(2) 当 t 为何值时，矩形 $ABCD$ 的周长有最大值？最大值是多少？

(3) 保持 $t = 2$ 时的矩形 $ABCD$ 不动，向右平移抛物线. 当平移后的抛物线与矩形的边有两个交点 G，H，且直线 GH 平分矩形的面积时，求抛物线平移的距离.



（第13题）

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

26.2.3　求二次函数的表达式

名师点金

用待定系数法求二次函数表达式选择表达式类型的方法：若已知图象上任意三个点的坐标，则利用一般式 $y=ax^2+bx+c$ 求；若已知图象的顶点坐标（或对称轴或函数的最值），则利用顶点式 $y=a(x-h)^2+k$ 求；若已知图象与 x 轴的两个交点坐标，则利用交点式 $y=a(x-x_1)(x-x_2)$ 求.

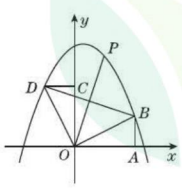
1 夯实基础 · 逐点练

(答案见 112 页)

知识点 1 用一般式（三点式）确定二次函数表达式

1. 【中考 · 杭州】设二次函数 $y=ax^2+bx-(a+b)$（a,b 是常数，$a\neq0$）.
   (1) 判断该二次函数图象与 x 轴交点的个数，说明理由；
   (2) 若该二次函数的图象经过 $A(-1,4)$，$B(0,-1)$，$C(1,1)$ 三个点中的其中两个点，求该二次函数的表达式；
   (3) 若 $a+b<0$，点 $P(2,m)$（$m>0$）在该二次函数图象上，求证：$a>0$.　【导学号：1489846】

2. 【中考 · 黑龙江】如图，Rt△AOB 的直角边 OA 在 x 轴上，$\angle OAB=90°$，$OA=2$，$AB=1$，将 Rt△AOB 绕点 O 逆时针旋转 90° 得到 Rt△COD，抛物线 $y=-\frac{5}{6}x^2+bx+c$ 经过 B,D 两点.
   (1) 求二次函数的表达式；
   (2) 连结 BD，点 P 是抛物线上一点，直线 OP 把△BOD 的周长分成相等的两部分，求点 P 的坐标.



（第 2 题）

知识点 2 用顶点式确定二次函数表达式

3. 已知 $A(1,0)$，$B(0,-1)$，$C(-1,2)$，$D(2,-1)$，$E(4,2)$ 五个点，抛物线 $y=a(x-1)^2+k(a>0)$ 经过其中三个点.
   (1) 求证：C,E 两点不可能同时在抛物线 $y=a(x-1)^2+k(a>0)$ 上.
   (2) 点 A 在抛物线 $y=a(x-1)^2+k(a>0)$ 上吗？为什么？
   (3) 求 a 和 k 的值.

知识点 3 用交点式确定二次函数表达式

4. 【中考 · 杭州】在平面直角坐标系中，设二次函数为 $y=(x+a)(x-a-1)$，其中 $a\neq0$.
   (1) 若此二次函数的图象经过点 $(1,-2)$，求该二次函数的表达式；
   (2) 若一次函数 $y=ax+b$ 的图象与二次函数的图象经过 x 轴上同一点，探究实数 a,b 满足的关系式；
   (3) 已知点 $P(x_0,m)$ 和 $Q(1,n)$ 在二次函数的图象上，若 $m<n$，求 x_0 的取值范围.

趣味数学　怎样改变“女性跑得比男性慢”的说法：若比较两性赛跑的速度时，加入“身高”的因素，会使选手的表现产生什么变化？（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞（答案见112页）

考查角度① 利用对称确定二次函数表达式

5. 已知二次函数 $y=3x^2-6x+5$，求满足下列条件的二次函数的表达式：

（1）两图象关于 x 轴对称；

（2）两图象关于 y 轴对称；

（3）两图象关于经过抛物线 $y=3x^2-6x+5$ 的顶点且平行于 x 轴的直线对称.

考查角度② 利用对称轴确定二次函数表达式

6. 【中考 · 广州】已知抛物线 $y_1=-x^2+mx+n$，直线 $y_2=kx+b$，y_1 的对称轴与 y_2 交于点 $A(-1,5)$，点 A 与 y_1 的顶点 B 的距离是4.

（1）求 y_1 的表达式；

（2）若 y_2 随着 x 的增大而增大，且 y_1 与 y_2 都经过 x 轴上的同一点，求 y_2 的表达式.

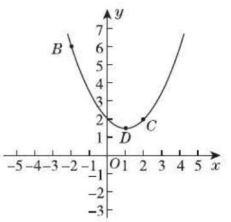
考查角度③ 利用直线平移与二次函数图象交点情况求字母的取值范围

7. 【中考 · 菏泽】如图，在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y=ax^2+bx+2$ 过 $B(-2,6)$，$C(2,2)$ 两点.

（1）试求抛物线的表达式；

（2）记抛物线的顶点为 D，求 $\triangle BCD$ 的面积；

（3）若直线 $y=-\frac{1}{2}x$ 向上平移 c 个单位所得的直线与抛物线段 BDC（包括端点 B，C）部分有两个交点，求 c 的取值范围.



（第7题）

体育专栏作家按照这个想法，计算出男子、女子一百米世界纪录的每秒身高比（速度除以其身高）分别为5.55和5.64. 因此，他的结论是跑得最快的女人比跑得最快的男人还要快.

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

阶段方法技巧训练（一）

专训 1　二次函数的图象与系数的七种关系 ☞(答案见 113 页)

名师点金

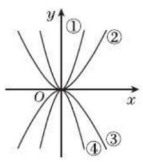
二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的系数 a,b,c 与图象有着密切的关系：a 的取值决定了开口方向和开口大小，a,b 的取值影响对称轴的位置，c 的取值决定了抛物线与 y 轴的交点位置，所以 a,b,c 这三个系数共同决定着抛物线的位置和形状，反之也可以根据二次函数图象的情况确定 a,b,c 的符号或大小.

关系 1　a 与图象的关系

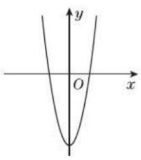
1. 如图，四个函数的图象分别对应的是①$y=ax^2$；②$y=bx^2$；③$y=cx^2$；④$y=dx^2$. 则 a,b,c,d 的大小关系为(　　)

A. $a>b>c>d$　　B. $a>b>d>c$

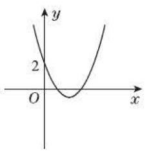
C. $b>a>c>d$　　D. $b>a>d>c$



(第 1 题)



(第 2 题)



(第 5 题)

关系 2　b 与图象的关系

2. 若二次函数 $y=3x^2+(b-3)x-4$ 的图象如图所示，则 b 的值是(　　)

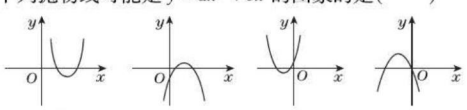
A. -5　　B. 0

C. 3　　D. 4

3. 当抛物线 $y=x^2-nx+2$ 的对称轴是 y 轴时，n _____ 0；当对称轴在 y 轴左侧时，n _____ 0；当对称轴在 y 轴右侧时，n _____ 0.(填“>”“<”或“=”)

关系 3　c 与图象的关系

4. 下列抛物线可能是 $y=ax^2+bx$ 的图象的是(　　)

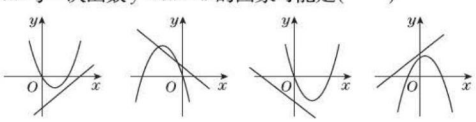


A　　B　　C　　D

5. 若将抛物线 $y=ax^2+bx+c-3$ 向上平移 4 个单位后得到的图象如图所示，则 $c=$ _____.

关系 4　a,b 与图象的关系

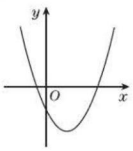
6. 【中考·攀枝花】在同一坐标系中，二次函数 $y=ax^2+bx$ 与一次函数 $y=bx-a$ 的图象可能是(　　)



A　　B　　C　　D

关系 5　a,c 与图象的关系

7. 二次函数 $y=(3-m)x^2-x+n+5$ 的图象如图所示，试求 $\sqrt{(m-3)^2}+\sqrt{n^2}-|m+n|$ 的值.



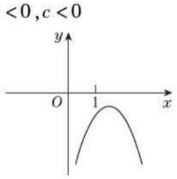
(第 7 题)

关系 6　b,c 与图象的关系

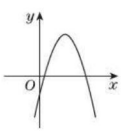
8. 【中考·六盘水】已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图所示，则(　　)

A. $b>0,c>0$　　B. $b>0,c<0$

C. $b<0,c<0$　　D. $b<0,c>0$



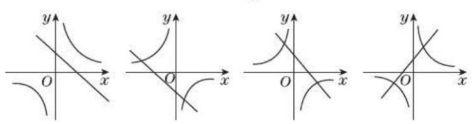
(第 8 题)



(第 9 题)

关系 7　a,b,c 与图象的关系

9. 【中考·深圳】已知 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图象如图所示，则 $y=ax+b$ 和 $y=\frac{c}{x}$ 的图象为(　　)



A　　B　　C　　D

趣味数学　**雨后的彩虹**：彩虹在雨后出现在天空中，它是一道横跨天空的七色彩带，红、橙、黄、绿、蓝、靛、紫，宛如一座彩色的拱桥飞架天空.(待续)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

专训2 求二次函数表达式的常见类型 （答案见113页）

名师点金

求二次函数的表达式是解决二次函数问题的重要保证，在求解二次函数的表达式时一般选用待定系数法，但在具体题目中要根据不同条件，设出恰当的表达式，这样往往可以使解题过程简便.

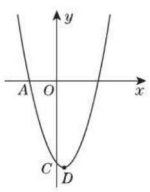
类型1 由函数的基本形式求表达式

方法1 利用一般式求二次函数表达式

1. 【中考·黔南州】如图，已知二次函数 $y=x^2+bx+c$ 的图象与 y 轴交于点 $C(0,-6)$，与 x 轴的一个交点坐标是 $A(-2,0)$.

(1)求二次函数的表达式，并写出顶点 D 的坐标；

(2)将二次函数的图象沿 x 轴向左平移 $\frac{5}{2}$ 个单位，当 $y<0$ 时，求 x 的取值范围.



（第1题）

方法2 利用顶点式求二次函数表达式

2. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$，当 $x=1$ 时，有最大值8，其图象的形状、开口方向与抛物线 $y=-2x^2$ 相同，则这个二次函数的表达式是（　　）

A. $y=-2x^2-x+3$　　B. $y=-2x^2+4$

C. $y=-2x^2+4x+8$　　D. $y=-2x^2+4x+6$

3. 已知某个二次函数的最大值是2，图象顶点在直线 $y=x+1$ 上，并且图象经过点 $(3,-6)$. 求这个二次函数的表达式.

方法3 利用交点式求二次函数表达式

4. 已知抛物线与 x 轴交于 $A(1,0)$，$B(-4,0)$ 两点，与 y 轴交于点 C，且 $AB=BC$，求此抛物线对应的函数表达式.

方法4 利用平移法求二次函数表达式

5. 【中考·绥化】把二次函数 $y=2x^2$ 的图象向左平移1个单位，再向下平移2个单位，平移后抛物线的表达式是_____.

6. 已知 $y=x^2+bx+c$ 的图象向右平移2个单位，再向下平移3个单位，得到的图象的表达式为 $y=x^2-2x-3$.

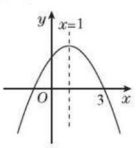
(1)$b=$_____，$c=$_____；

(2)求原函数图象的顶点坐标；

(3)求两个图象顶点之间的距离.

方法5 利用对称轴法求二次函数表达式

7. 如图，已知抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 的对称轴为直线 $x=1$，且与 x 轴的一个交点为 $(3,0)$，那么它对应的函数表达式是_____.

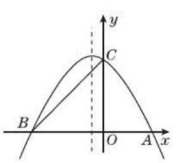


（第7题）

8. 如图，抛物线与 x 轴交于 A，B 两点，与 y 轴交于 C 点，点 A 的坐标为 $(2,0)$，点 C 的坐标为 $(0,3)$，抛物线的对称轴是直线 $x=-\frac{1}{2}$.

(1)求抛物线的表达式；

(2)M 是线段 AB 上的任意一点，当 $\triangle MBC$ 为等腰三角形时，求点 M 的坐标.



（第8题）

东边日出西边雨，道是无晴却有晴；残虹收度雨，缺岸上新流；虹销雨霁，彩彻区明；虹收青嶂雨，鸟没夕阳天.（待续）

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

方法 6　灵活运用方法求二次函数的表达式

9. 已知抛物线的顶点坐标为 $(-2,4)$，且与 x 轴的一个交点坐标为 $(1,0)$，求抛物线对应的函数表达式.

类型 2　由函数图象中的信息求表达式

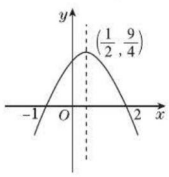
10. 如图是某个二次函数的图象，根据图象可知，该二次函数的表达式是(　　)

A. $y=x^2-x-2$

B. $y=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+2$

C. $y=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+1$

D. $y=-x^2+x+2$



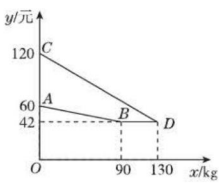
(第 10 题)

11. 【中考·南京】某企业生产并销售某种产品，假设销售量与产量相等. 下图中的折线 ABD、线段 CD 分别表示该产品每千克生产成本 y_1(单位：元)、销售价 y_2(单位：元)与产量 x(单位：kg)之间的函数关系.

(1) 请解释图中点 D 的横坐标、纵坐标的实际意义；

(2) 求线段 AB 所表示的 y_1 关于 x 的函数表达式；

(3) 当该产品产量为多少时，获得的利润最大？最大利润是多少？



(第 11 题)

类型 3　由表格信息求表达式

12. 若 $y=ax^2+bx+c$，则由表格中信息可知 y 与 x 之间的函数关系式是(　　)

x	-1	0	1
ax^2			1
ax^2+bx+c	8	3	

A. $y=x^2-4x+3$　　B. $y=x^2-3x+4$

C. $y=x^2-3x+3$　　D. $y=x^2-4x+8$

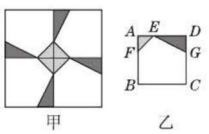
13. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c\,(a\neq0)$ 自变量 x 和函数值 y 的部分对应值如下表：

x	…	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	…
y	…	$-\frac{5}{4}$	-2	$-\frac{9}{4}$	-2	$-\frac{5}{4}$	0	$\frac{7}{4}$	…

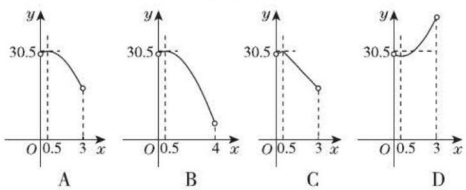
则该二次函数的表达式为_____.

类型 4　几何应用中求二次函数的表达式

14. 【中考·安顺】某校校园内有一个大正方形花坛，如图甲所示，它由四个边长为 3 米的小正方形组成，且每个小正方形的种植方案相同. 其中的一个小正方形 $ABCD$ 如图乙所示，$DG=1$ 米，$AE=AF=x$ 米，在五边形 $EFBCG$ 区域上种植花卉，则大正方形花坛种植花卉的面积 y 与 x 的函数图象大致是(　　)



(第 14 题)

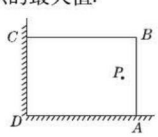


类型 5　实际问题中求二次函数表达式

15. 在美化校园的活动中，某兴趣小组想借助如图所示的直角墙角(两墙足够长)，用 28 m 长的篱笆围成一个矩形花园 $ABCD$(篱笆只围 AB，BC 两边)，设 $AB=x$ m，花园的面积为 S m^2.

(1) 求 S 关于 x 的函数表达式；

(2) 若在 P 处有一棵树与墙 CD，AD 的距离分别是 15 m和 6 m，要将这棵树围在花园内(含边界，不考虑树的粗细)，求花园面积的最大值.



(第 15 题)

趣味数学　这些是诗人赞美彩虹的诗句，在大多数人眼中的彩虹，在数学家的眼中，却有可能是一条开口向下的弧线，这条弧线就像我们抛出物体后物体运动的轨迹，所以叫做“抛物线”.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

26.3 实践与探索

第1课时 用二次函数解决实际中“抛物线”形的最值应用

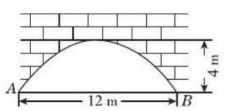
名师点金

1. **抛物线形建筑物问题**：几种常见的抛物线形建筑物有拱形桥洞、隧道洞口、拱形门等. 解决这类问题的关键是根据已知条件选择合理的位置建立直角坐标系，结合问题中的数据求出函数表达式，然后利用函数表达式解决问题.
2. **运动问题**：
   (1) 运动中的距离、时间、速度问题，这类问题多根据运动规律中的公式求解.
   (2) 物体的运动路线(轨迹)问题，解决这类问题的思想方法是利用数形结合思想和函数思想，合理建立直角坐标系，根据已知数据，运用待定系数法求出运动轨迹(抛物线)的表达式，再利用二次函数的性质去分析、解决问题.

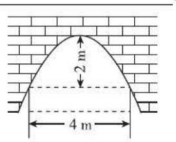
1 夯实基础·逐点练 (答案见114页)

知识点1 建立坐标系解抛物线形建筑物问题

1. 【中考·绍兴】如图是一座拱桥，当水面宽 AB 为 12 m 时，桥洞顶部离水面 4 m，已知桥洞的拱形是抛物线，以水平方向为 x 轴，建立平面直角坐标系，若选取点 A 为坐标原点时抛物线对应的函数表达式是 $y=-\frac{1}{9}(x-6)^2+4$，则选取点 B 为坐标原点时抛物线对应的函数表达式是_____.



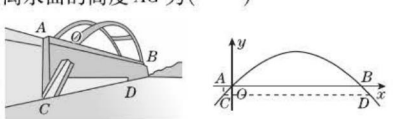
(第1题)



(第2题)

2. 【中考·绵阳】如图是抛物线形拱桥，当拱顶离水面 2 m 时，水面宽 4 m，水面下降 2 m，水面宽度增加_____m.

3. 【中考·金华】如图②是图①中拱形大桥的示意图，桥拱与桥面的交点为 O，B，以点 O 为原点，水平直线 OB 为 x 轴，建立平面直角坐标系，桥的拱形可近似看成抛物线 $y=-\frac{1}{400}(x-80)^2+16$，桥拱与桥墩 AC 的交点 C 恰好在水面，有 $AC\perp x$ 轴，若 $OA=10$ m，则桥面离水面的高度 AC 为(　　)



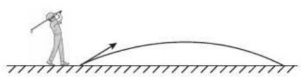
(第3题)

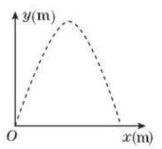
A. $16\frac{9}{40}$ m　　B. $\frac{17}{4}$ m

C. $16\frac{7}{40}$ m　　D. $\frac{15}{4}$ m

知识点2 建立坐标系解抛物线形运动的最值问题

4. 【中考·襄阳】如图，若被击打的小球飞行高度 h(单位：m)与飞行时间 t(单位：s)之间具有的关系为 $h=20t-5t^2$，则小球从飞出到落地所用的时间为_____s. 【导学号：1489846】


(第4题)



(第5题)

5. 某广场有一喷水池，水从地面喷出，如图，以水平地面为 x 轴，出水点为原点，建立平面直角坐标系，水在空中划出的曲线是抛物线 $y=-x^2+4x$(单位：m)的一部分，则水喷出的最大高度是(　　)

A. 4 m　　B. 5 m

C. 6 m　　D. 7 m

6. 【中考·临沂】足球运动员将足球沿与地面成一定角度的方向踢出，足球飞行的路线是一条抛物线，不考虑空气阻力，足球距离地面的高度 h(单位：m)与足球被踢出后经过的时间 t(单位：s)之间的关系如下表：

t	0	1	2	3	4	5	6	7	…
h	0	8	14	18	20	20	18	14	…

下列结论：

①足球距离地面的最大高度为 20 m；

②足球飞行路线的对称轴是直线 $t=\frac{9}{2}$；

③足球被踢出 9 s 时落地；

④足球被踢出 1.5 s 时，距离地面的高度是 11 m.

其中正确结论的个数是(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

1998 年我国洪水大兰溢期间，为了确保武汉、南京等大工业城市的安全，有关部门准备实施荆江分洪的方案. 20 吨炸药已经装好，爆破进入倒计时，这一方案在最后一刻被放弃. (待续)

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞(答案见 114 页)

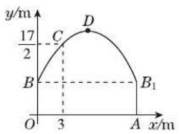
考查角度 1　利用二次函数的图象与性质解车过拱桥(隧道)问题

7. 【中考 · 青岛】如图,隧道的截面由抛物线和长方形构成,长方形的长是 12 m,宽是 4 m. 按照图中所示的直角坐标系,抛物线可以用 $y=-\frac{1}{6}x^2+bx+c$ 表示,且抛物线上的点 C 到墙面 OB 的水平距离为 3 m,到地面 OA 的距离为 $\frac{17}{2}$ m.

(1)求该抛物线的表达式,并计算出拱顶 D 到地面 OA 的距离.

(2)一辆货运汽车载一长方体集装箱后高为 6 m,宽为 4 m,如果隧道内设双向行车道,那么这辆货运汽车能否安全通过?

(3)在抛物线形拱壁上需要安装两排灯,使它们离地面的高度相等,如果灯离地面的高度不超过8 m,那么两排灯的水平距离最小是多少米?



(第 7 题)

考查角度 2　利用二次函数的图象与性质解生活中的抛物线形问题

8. 【中考 · 德州】随着新农村的建设和旧城的改造,我们的家园越来越美丽,小明家附近广场中央新修了个圆形喷水池(如图),在水池中心竖直安装了一根高为 2 m 的喷水管,它喷出的抛物线形水柱在与水池中心的水平距离为 1 m 处达到最高,水柱落地处离池中心 3 m.

(1)请你建立适当的平面直角坐标系,并求出水柱抛物线对应的函数表达式;

(2)求出水柱的最大高度是多少.



(第 8 题)

Ⅲ 链接中考 · 真题练 ☞(答案见 115 页)

命题角度　利用数据信息建立二次函数模型解运动中抛物线形问题

9. 【中考 · 滨州】如图,一小球沿与地面成一定角度的方向飞出,小球的飞行路线是一条抛物线. 如果不考虑空气阻力,小球的飞行高度 y(单位:m)与飞行时间 x(单位:s)之间具有函数关系 $y=-5x^2+20x$,请根据要求解答下列问题:

(1)在飞行过程中,当小球的飞行高度为 15 m 时,飞行的时间是多少?

(2)在飞行过程中,小球从飞出到落地所用时间是多少?

(3)在飞行过程中,小球飞行高度何时最大?最大高度是多少?



(第 9 题)

趣味数学　据当时的新闻报道,水利专家组用数学里的有限元法对荆江大堤的体积渗漏进行了测算,确定出一个安全系数. 按照这个结果,水位即使涨到 45.3 米,对长江大堤也可严防死守,因此不用分洪.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第2课时　用二次函数求实际中应用问题

名师点金

利润问题的基本关系式：总利润 = 单件利润 × 销售总量.

若销售单价每提高 m 元，销售量相应减少 n 件，设提高 x 元，则现销售量 = 原销售量 $-\frac{x}{m}n$.

Ⅰ 夯实基础 · 逐点练

☞（答案见115页）

知识点1 用二次函数表示实际问题

1. 某工厂2017年产品的产量为100吨，该产品产量的年平均增长率为 $x(x>0)$，设2019年该产品的产量为 y 吨，则 y 关于 x 的函数表达式为（　　）

A. $y=100(1-x)^2$

B. $y=100(1+x)^2$

C. $y=\dfrac{100}{(1+x)^2}$

D. $y=100+100(1+x)+100(1+x)^2$

2. 心理学家发现：学生对概念的接受能力 y 与提出概念的时间 x（min）之间是二次函数关系，当提出概念13 min时，学生对概念的接受能力最大，为59.9；当提出概念30 min时，学生对概念的接受能力就剩下31，则 y 与 x 满足的二次函数表达式为（　　）

A. $y=-(x-13)^2+59.9$

B. $y=-0.1x^2+2.6x+31$

C. $y=0.1x^2-2.6x+76.8$

D. $y=-0.1x^2+2.6x+43$

3. 某商场购进一种单价为40元的商品，如果以单价60元售出，那么每天可卖出300个，根据销售经验，每降价1元，每天可多卖出20个，假设每个降价 x（元），每天销售 y（个），每天获得利润 W（元）.

（1）写出 y 与 x 的函数表达式：_____；

（2）求出 W 与 x 的函数表达式（不必写出 x 的取值范围）.

知识点2 用二次函数的最值解实际问题

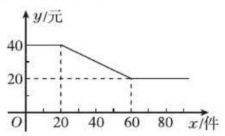
4. 某旅行社在“五一”期间接团去外地旅游，经计算，所获营业额 y（元）与旅行团人数 x（人）满足关系式 $y=-x^2+100x+28\,400$，要使所获营业额最大，则此旅行团应有（　　）

A. 30人　　B. 40人　　C. 50人　　D. 55人

5. 【中考 · 本溪】某工厂生产一种火爆的网红电子产品，每件产品成本16元. 工厂将该产品进行网络批发，批发单价 y（元）与一次性批发量 x（件）（x 为正整数）之间满足如图所示的函数关系.

（1）直接写出 y 与 x 之间所满足的函数表达式，并写出自变量 x 的取值范围.

（2）若一次性批发量不超过60件，当批发量为多少件时，工厂获利最大？最大利润是多少？



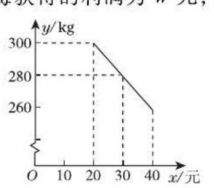
（第5题）

易错点 将销售额当销售利润而致错

6. 【中考 · 云南】草莓是云南多地盛产的一种水果，今年某水果销售店在草莓销售旺季，试销售成本为每千克20元的草莓，规定试销期间销售单价不低于成本单价，也不高于每千克40元，经试销发现，销售量 y（kg）与销售单价 x（元）符合一次函数关系，如图是 y 与 x 的函数关系图象.

（1）求 y 关于 x 的函数表达式；

（2）设该水果销售店试销草莓获得的利润为 W 元，求 W 的最大值.



（第6题）

鲁班造锯是我们熟悉的一个历史故事：有一次鲁班的手不慎被一片小草割破，他仔细观察发现小草叶子边布满了有序的小齿.（待续）

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞(答案见 115 页)

考查角度 ① 利用二次函数解与方程综合问题

7. 【中考 · 通辽】当今,越来越多的青少年在观看影片《流浪地球》后,更加喜欢同名科幻小说,该小说销量也急剧上升. 书店为满足广大顾客需求,订购该科幻小说若干本,每本进价为 20 元. 根据以往经验:当销售单价是 25 元时,每天的销售量是 250 本;销售单价每上涨 1 元,每天的销售量就减少 10 本. 书店要求每本书的利润不低于 10 元且不高于 18 元.

(1)直接写出书店销售该科幻小说时每天的销售量 y(本)与销售单价 x(元)之间的函数关系式及自变量的取值范围;

(2)书店决定每销售 1 本该科幻小说,就捐赠 a ($0<a\leqslant 6$)元给困难职工,每天扣除捐赠后可获得的最大利润为 1 960 元,求 a 的值.

考查角度 ② 利用二次函数解与不等式(组)综合问题

8. 【中考 · 随州】某食品厂生产一种半成品食材,成本为 2 元/千克,每天的产量 p(百千克)与销售价格 x(元/千克)满足函数关系式 $p=\frac{1}{2}x+8$. 从市场反馈的信息发现,该半成品食材每天的市场需求量 q(百千克)与销售价格 x(元/千克)满足一次函数关系,部分数据如下表:

销售价格 x/(元/千克)	2	4	…	10
市场需求量 q/百千克	12	10	…	4

已知按物价部门规定,销售价格 x 不低于 2 元/千克且不高于 10 元/千克.

(1)直接写出 q 与 x 的函数表达式,并注明自变量 x 的取值范围.

(2)当每天的产量小于或等于市场需求量时,这种半成品食材能全部售出,而当每天的产量大于市场需求量时,只能售出符合市场需求量的半成品食材,剩余的食材由于保质期短而只能废弃.

①当每天的半成品食材能全部售出时,求 x 的取值范围;

②求厂家每天获得的利润 y(百元)与销售价格 x 的函数表达式.

(3)在(2)的条件下,当 x 为_____元/千克时,利润 y 有最大值;若要使每天的利润不低于 24(百元),并尽可能地减少半成品食材的浪费,则 x 应定为_____元/千克.

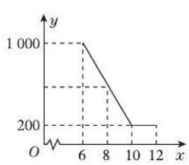
Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞(答案见 115 页)

拔尖角度 利用图表信息解分段函数问题

9. 【中考 · 云南】某驻村扶贫小组实施产业扶贫,帮助贫困农户进行西瓜种植和销售. 已知西瓜的成本为6 元/kg,规定销售单价不低于成本,又不高于成本的两倍. 经过市场调查发现,某天西瓜的销售量 y(kg)与销售单价 x(元/kg)的函数关系如图所示.

(1)求 y 与 x 的函数表达式;

(2)求这一天销售西瓜获得的利润 W(元)的最大值.



(第 9 题)

趣味数学　于是便根据小苹的结构发明了铁锯. 鲁班在这里用了类比思维方法. 类比思维是从要解决的问题联想到与它类似的熟悉的问题,用熟悉的问题的解法来思考所要解决的问题.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

第3课时　二次函数与一元二次方程之间的关系

名师点金

判断抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴交点的个数的方法：当 $b^2-4ac>0$ 时，有两个交点；当 $b^2-4ac=0$ 时，有一个交点；当 $b^2-4ac<0$ 时，没有交点.

Ⅰ 夯实基础·逐点练 ☞（答案见115页）

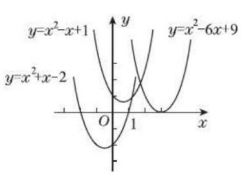
知识点1 二次函数与一元二次方程之间的关系

1. 观察图象（如图）填空：

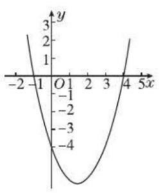
（1）二次函数 $y=x^2+x-2$ 的图象与 x 轴有_____个交点，则一元二次方程 $x^2+x-2=0$ 的根的判别式 Δ _____ 0；

（2）二次函数 $y=x^2-6x+9$ 的图象与 x 轴有_____个交点，则一元二次方程 $x^2-6x+9=0$ 的根的判别式 Δ _____ 0；

（3）二次函数 $y=x^2-x+1$ 的图象与 x 轴_____公共点，则一元二次方程 $x^2-x+1=0$ 的根的判别式 Δ _____ 0.



（第1题）



（第2题）

2. 【中考·柳州】小兰画了一个函数 $y=x^2+ax+b$ 的图象如图所示，则关于 x 的方程 $x^2+ax+b=0$ 的解是（　　）

A. 无解　　B. $x=1$

C. $x=-4$　　D. $x=-1$ 或 $x=4$

3. 【中考·梧州】已知 $m>0$，关于 x 的一元二次方程 $(x+1)(x-2)-m=0$ 的解为 x_1，x_2（$x_1<x_2$），则下列结论正确的是（　　）

A. $x_1<-1<2<x_2$

B. $-1<x_1<2<x_2$

C. $-1<x_1<x_2<2$

D. $x_1<-1<x_2<2$

4. 【中考·岳阳】对于一个函数，自变量 x 取 a 时，函数值 y 也等于 a，我们称 a 为这个函数的不动点. 如果二次函数 $y=x^2+2x+c$ 有两个相异的不动点 x_1，x_2，且 $x_1<1<x_2$，则 c 的取值范围是（　　）

A. $c<-3$　　B. $c<-2$

C. $c<\frac{1}{4}$　　D. $c<1$

知识点2 二次函数与其图象与 x 轴的交点个数之间的关系

5. 【中考·荆门】抛物线 $y=-x^2+4x-4$ 与坐标轴的交点个数为（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

6. 【中考·杭州】在平面直角坐标系中，已知 $a\neq b$，设函数 $y=(x+a)(x+b)$ 的图象与 x 轴有 M 个交点，函数 $y=(ax+1)(bx+1)$ 的图象与 x 轴有 N 个交点，则（　　）

A. $M=N-1$ 或 $M=N+1$　　B. $M=N-1$ 或 $M=N+2$

C. $M=N$ 或 $M=N+1$　　D. $M=N$ 或 $M=N-1$

7. 【中考·天津】已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$（a，b，c 为常数，$a\neq0$）经过点 $(-1,0)$，$(0,3)$，其对称轴在 y 轴右侧. 有下列结论：

①抛物线经过点 $(1,0)$；

②方程 $ax^2+bx+c=2$ 有两个不相等的实数根；

③ $-3<a+b<3$.

其中，正确结论的个数为（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

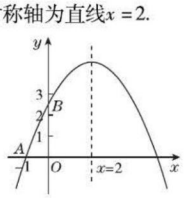
8. 【中考·达州】如图，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴交于点 $A(-1,0)$，与 y 轴的交点 B 在 $(0,2)$ 与 $(0,3)$ 之间（不包括这两点），对称轴为直线 $x=2$.

下列结论：

①$abc<0$；②$9a+3b+c>0$；

③若点 $M\left(\frac{1}{2},y_1\right)$，$N\left(\frac{5}{2},y_2\right)$ 是函数图象上的两点，则 $y_1<y_2$；

④ $-\frac{3}{5}<a<-\frac{2}{5}$.



（第8题）

其中正确结论有（　　）

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

易错点 混淆“与 x 轴交点”与“与坐标轴交点”而致错

9. 【中考·徐州】若函数 $y=x^2-2x+b$ 的图象与坐标轴有三个交点，则 b 的取值范围是（　　）

A. $b<1$ 且 $b\neq0$　　B. $b>1$

C. $0<b<1$　　D. $b<1$

二次函数：与之有关联的有二次三项式、一元二次方程、一元二次不等式等，它是整个中学数学的重要核心内容之一.（待续）

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

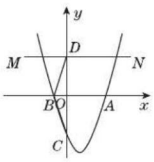
Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞(答案见 116 页)

考查角度 1 利用抛物线与直线的交点情况求字母的值

10. 【中考 · 黑龙江】如图,在平面直角坐标系中,抛物线 $y=x^2+bx+c$ 与 x 轴交于点 $A(3,0)$、点 $B(-1,0)$,与 y 轴交于点 C.

(1)求抛物线的函数表达式;

(2)过点 $D(0,3)$ 作直线 $MN/\!/x$ 轴,点 P 在直线 MN 上且 $S_{\triangle PAC}=S_{\triangle DBC}$,直接写出点 P 的坐标.



(第 10 题)

考查角度 2 利用抛物线与坐标轴的交点情况求字母的取值范围

11. 【中考 · 北京】在平面直角坐标系 xOy 中,抛物线 $y=ax^2+bx-\frac{1}{a}$ 与 y 轴交于点 A,将点 A 向右平移 2 个单位长度,得到点 B,点 B 在抛物线上.

(1)求点 B 的坐标(用含 a 的式子表示);

(2)求抛物线的对称轴;

(3)已知点 $P\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{a}\right)$,$Q(2,2)$,若抛物线与线段 PQ 恰有一个公共点,结合函数图象,求 a 的取值范围.

Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞(答案见 116 页)

拔尖角度 1 利用二次函数与方程的关系求字母的值

12. 【中考 · 大庆】已知二次函数的表达式为 $y=x^2+mx+n$.

(1)若这个二次函数的图象与 x 轴交于点 $A(1,0)$,点 $B(3,0)$,求实数 m,n 的值;

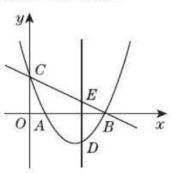
(2)若 $\triangle ABC$ 是有一个内角为 30°的直角三角形,$\angle C$ 为直角,$\sin A,\cos B$ 是方程 $x^2+mx+n=0$ 的两个根,求实数 m,n 的值.

拔尖角度 2 利用图象中距离的最值求坐标

13. 【中考 · 大连】如图,抛物线 $y=x^2-3x+\frac{5}{4}$ 与 x 轴相交于 A,B 两点,与 y 轴相交于点 C,点 D 是直线 BC 下方抛物线上一点,过点 D 作 y 轴的平行线,与直线 BC 相交于点 E.

(1)求直线 BC 的函数表达式;

(2)当线段 DE 的长度最大时,求点 D 的坐标.



(第 13 题)

趣味数学　各类考试无不把它作为命题的重要内容.我国数学家杨乐曾在一次讲话中专门论述了为什么二次函数的内容受到高考命题的青睐,可见二次函数及其影响极为深远.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第4课时　用图象法解一元二次方程（不等式）

名师点金

利用图象求一元二次方程的根的方法

直接画出函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象，则图象与 x 轴交点的横坐标就是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根. 其步骤一般为：(1)作出二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象；(2)观察图象与 x 轴交点的个数；(3)若图象与 x 轴有交点，估计出图象与 x 轴交点的横坐标即可得到一元二次方程的近似根.

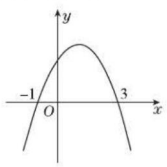
Ⅰ 夯实基础·逐点练 (答案见116页)

知识点1 利用二次函数的图象解一元二次方程

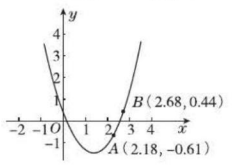
1. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图所示，则一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根为(　　)

A. $x_1=1, x_2=-3$　　B. $x_1=x_2=-1$

C. $x_1=x_2=3$　　D. $x_1=-1, x_2=3$



(第1题)



(第2题)

2. 如图是二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象，图象上有两点，分别为 $A(2.18,-0.61)$，$B(2.68,0.44)$，则方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个解只可能是(　　)

A. 2.18　　B. 2.68　　C. -0.51　　D. 2.55

3. 【中考·兰州】下表是一组二次函数 $y=x^2+3x-5$ 的自变量 x 与函数值 y 的对应值：

x	1	1.1	1.2	1.3	1.4
y	-1	-0.49	0.04	0.59	1.16

那么方程 $x^2+3x-5=0$ 的一个近似根是(　　)

A. 1　　B. 1.1　　C. 1.2　　D. 1.3

4. 小明在复习数学知识时，针对“求一元二次方程的解”总结了以下几种方法，请你补充完整.

例题：求一元二次方程 $x^2-x-1=0$ 的两个解.

(1)解法一：选择一种合适的方法(公式法、配方法、因式分解法)求解.

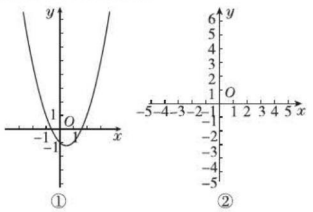
(2)解法二：利用二次函数图象与 x 轴的交点求解.

如图①，把方程 $x^2-x-1=0$ 的解看成是二次函数 $y=$ _____ 的图象与 x 轴交点的横坐标 x_1，x_2，则 x_1，x_2 就是方程的解.

(3)解法三：利用两个函数图象的交点求解.

①把方程 $x^2-x-1=0$ 的解看成是二次函数 $y=$ _____ 的图象与直线 $y=$ _____ 的交点的横坐标；

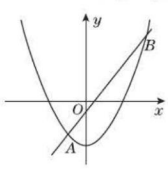
②在图②中画出这两个函数的图象，用 x_1，x_2 在 x 轴上标出方程的解.



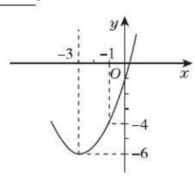
(第4题)

知识点2 利用二次函数的图象解一元二次不等式

5. 【中考·济宁】如图，抛物线 $y=ax^2+c$ 与直线 $y=mx+n$ 交于 $A(-1,p)$，$B(3,q)$ 两点，则不等式 $ax^2+mx+c>n$ 的解集是_____.



(第5题)



(第6题)

6. 如图，已知顶点为 $(-3,-6)$ 的抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过点 $(-1,-4)$，则下列结论中错误的是(　　)

A. $b^2>4ac$

B. $ax^2+bx+c\geqslant -6$

C. 若点 $(-2,m)$，$(-5,n)$ 在抛物线上，则 $m>n$

D. 关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=-4$ 的两根为 -5 和 -1

易错点 不考虑方程根的情况盲目作图象而致错

7. 用图象法求 $x^2-x+\frac{1}{4}=0$ 的解.

如果将社会比喻为庞大的坐标系，那么把我们自己人生轨迹中的每一个点连结起来，往往很像一条抛物线.（待续）

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞(答案见 116 页)

考查角度 1　利用二次函数的图象说明它与一元二次方程(不等式)的解(解集)间的关系

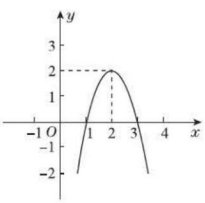
8. 二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图象如图所示,根据图象解答下列问题:

(1)写出方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根;

(2)写出不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集;

(3)写出 y 随 x 的增大而减小的自变量 x 的取值范围;

(4)若方程 $ax^2+bx+c=k$ 有两个不相等的实数根,求 k 的取值范围.



(第 8 题)

考查角度 2　利用二次函数图象解一元二次不等式的方法

9. 【中考 · 滨州】根据下列要求,解答相关问题.

(1)请补全以下求不等式 $-2x^2-4x\geqslant0$ 的解集的过程.

①构造函数,画出图象:根据不等式特征构造二次函数 $y=-2x^2-4x$,并在坐标系中(如图①)画出二次函数 $y=-2x^2-4x$ 的图象(只画出图象即可);

②求得界点,标示所需:当 $y=0$ 时,求得方程 $-2x^2-4x=0$ 的解为_____,并用锯齿线标示出函数 $y=-2x^2-4x$ 的图象中 $y\geqslant0$ 的部分;

③借助图象,写出解集:由所标示图象,可得不等式 $-2x^2-4x\geqslant0$ 的解集为_____.

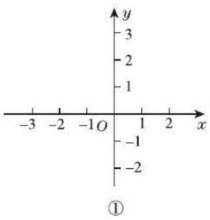
(2)利用(1)中求不等式解集的步骤,求不等式 $x^2-2x+1<4$ 的解集.

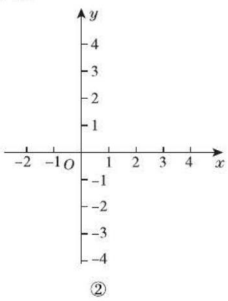
①构造函数,在图②中画出图象;

②求得界点,标示所需;

③借助图象,写出解集.

(3)参照以上两个求不等式解集的过程,借助一元二次方程的求根公式,直接写出关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c>0(a>0)$ 的解集.





(第 9 题)

Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞(答案见 116 页)

拔尖角度　利用一元二次方程的根解与之相关的二次函数、几何综合问题

10. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 的图象与 x 轴交于 $A(x_1,0)$,$B(x_2,0)(x_1<x_2)$ 两点,与 y 轴交于点 C,x_1,x_2 是方程 $x^2+4x-5=0$ 的两根.

(1)若抛物线的顶点为 D,求 $S_{\triangle ABC}$: $S_{\triangle ACD}$;

(2)若 $\angle ADC=90°$,求二次函数的表达式.

趣味数学　当然,人生的抛物线当中也有几个关键的点,譬如说它的顶点,又譬如说它与对称轴的交点,这些关键的点是考验人的心态与意志、决定人的成功与失败的时刻.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

阶段方法技巧训练（二）

专训 1 二次函数图象信息题的四种常见类型 ☞（答案见117页）

名师点金

利用图象信息解决二次函数的问题主要是运用数形结合思想将图象信息转换为数学语言，掌握二次函数的图象和性质是解决此类问题的关键.

类型 1 根据抛物线的特征确定 a,b,c 及与其有关的代数式的符号

1. 【中考·荆门】二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的大致图象如图所示，顶点坐标为 $(-2,-9a)$，下列结论：

①$4a+2b+c>0$；

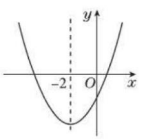
②$5a-b+c=0$；

③$a(x+5)(x-1)=-1$ 有两个根 x_1 和 x_2，且 $x_1<x_2$，则 $-5<x_1<x_2<1$；

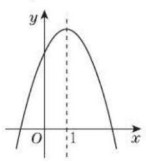
④若方程 $|ax^2+bx+c|=1$ 有四个根，则这四个根的和为 -4.

其中正确的结论有（　　）

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个



（第1题）



（第2题）

类型 2 利用二次函数的图象比较大小

2. 二次函数 $y=-x^2+bx+c$ 的图象如图，若点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 在此函数图象上，且 $x_1<x_2<1$，则 y_1 与 y_2 的大小关系是（　　）

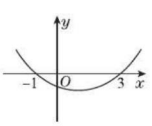
A. $y_1\leqslant y_2$　　B. $y_1<y_2$　　C. $y_1\geqslant y_2$　　D. $y_1>y_2$

类型 3 利用二次函数的图象求方程的解或不等式的解集

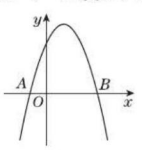
3. 【中考·黄石】二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图象如图所示，则当函数值 $y>0$ 时，x 的取值范围是（　　）

A. $x<-1$　　B. $x>3$

C. $-1<x<3$　　D. $x<-1$ 或 $x>3$



（第3题）

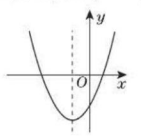


（第4题）

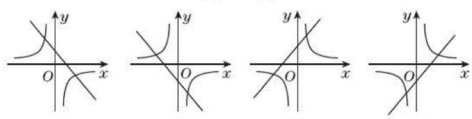
4. 【中考·阜新】如图，二次函数 $y=ax^2+bx+3$ 的图象经过点 $A(-1,0)$，$B(3,0)$，那么一元二次方程 $ax^2+bx=0$ 的根是_____.

类型 4 根据抛物线的特征确定其他函数的图象

5. 【中考·泰安】二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图所示，则反比例函数 $y=\frac{a}{x}$ 与一次函数 $y=ax+b$ 在同一坐标系内的大致图象是（　　）



（第5题）

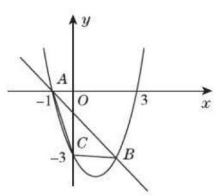


A　　B　　C　　D

6. 如图，$A(-1,0)$，$B(2,-3)$ 两点在一次函数 $y_1=-x+m$ 与二次函数 $y_2=ax^2+bx-3$ 的图象上.

(1) 求 m 的值和二次函数的表达式.

(2) 设二次函数的图象交 y 轴于点 C，求 $\triangle ABC$ 的面积.



（第6题）

漫谈抛物线：炮弹发射之后飞行的路线是怎样的？火炮发明之后，人们对这个问题并不十分明白.从发射炮弹的一方看来，以为炮弹离开炮筒后是沿着炮筒所在的射线飞出的.（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

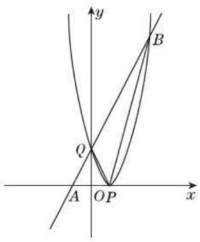
专训 2 二次函数在学科内的综合运用 ☞(答案见 117 页)

名师点金

本章是中考的必考内容之一,所占分值较高,对于二次函数的概念、增减性、图象的顶点坐标、对称轴及平移等性质多以选择题、填空题的形式出现,对于二次函数的应用,主要考查函数的建模思想及分析问题、解决问题的能力,多以解答题的形式出现,对于求函数表达式及与一元二次方程的关系,综合性较强,对于二次函数和图形的变化、图形的面积等相结合的一些探究性问题,则常以中考压轴题的形式出现.

应用 1 二次函数与一次函数的综合

1. 如图,二次函数 $y=x^2+bx+c$ 的图象与 x 轴只有一个公共点 P,与 y 轴的交点为 Q. 过 Q 点的直线 $y=2x+m$ 与 x 轴交于点 A,与这个二次函数的图象交于另一点 B. 若 $S_{\triangle BPQ}=3S_{\triangle APQ}$,求这个二次函数的表达式.



(第 1 题)

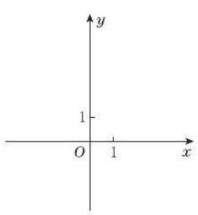
应用 2 二次函数与三角函数的综合

2. 【中考·上海】已知在平面直角坐标系 xOy 中(如图),抛物线 $y=ax^2-4$ 与 x 轴的负半轴相交于点 A,与 y 轴相交于点 B,$AB=2\sqrt{5}$,点 P 在抛物线上,线段 AP 与 y 轴的正半轴交于点 C,线段 BP 与 x 轴相交于点 D,设点 P 的横坐标为 m.

(1)求这条抛物线对应的函数表达式;

(2)用含 m 的代数式表示线段 CO 的长;

(3)当 $\tan\angle ODC=\dfrac{3}{2}$ 时,求 $\angle PAD$ 的正弦值.



(第 2 题)

应用 3 二次函数与一元二次方程的综合

3. 已知关于 x 的二次函数 $y=x^2-(2m-1)x+m^2+3m+4$.

(1)探究 m 取不同值时,该二次函数的图象与 x 轴的交点的个数;

(2)设该二次函数的图象与 x 轴的交点分别为 $A(x_1,0)$,$B(x_2,0)$,且 $x_1^2+x_2^2=5$,与 y 轴的交点为 C,它的顶点为 M,求直线 CM 对应的函数表达式.

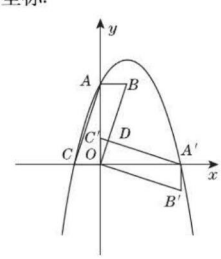
应用 4 二次函数与相似的综合

4. 【中考·黔西南州】在平面直角坐标系中,$\square ABOC$ 按如图所示的方式放置,将此平行四边形绕点 O 顺时针旋转 90°得到 $\square A'B'OC'$,抛物线 $y=-x^2+2x+3$ 经过 A,C,A' 三点.

(1)求 A,A',C 三点的坐标.

(2)求 $\square ABOC$ 和 $\square A'B'OC'$ 重叠部分($\triangle C'OD$)的面积.

(3)点 M 是第一象限内抛物线上的一动点,问点 M 在何处时,$\triangle AMA'$ 的面积最大?最大面积是多少?并写出此时点 M 的坐标.



(第 4 题)

趣味数学　也以为炮弹是从空中沿直线方向飞下来的,于是当时人们总认为炮弹飞行的路线是一条折线.意大利著名学者伽利略更正了这种错误认识.(待续)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

专训3 用二次函数解决问题的四种类型 ☞（答案见118页）

名师点金

利用二次函数解决实际问题时，要注意数形结合，巧妙地运用二次函数表达式实行建模，从而达到应用二次函数的某些性质来解决问题的目的.

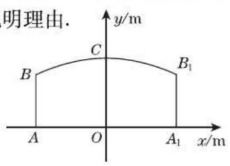
类型1 建立平面直角坐标系解决实际问题

题型1 拱桥（隧道）问题

1. 如图是某地区一条公路上隧道入口在平面直角坐标系中的示意图，点 A 和 A_1，点 B 和 B_1 分别关于 y 轴对称. 隧道拱部分 BCB_1 为一段抛物线，最高点 C 离路面 AA_1 的距离为 8 m，点 B 离路面 AA_1 的距离为 6 m，隧道宽 AA_1 为 16 m.

（1）求隧道拱部分 BCB_1 对应的函数表达式.

（2）现有一大型货车，装载某大型设备后，宽为 4 m，装载设备的顶部离路面均为 7 m，问：它能否安全通过这个隧道？并说明理由.



（第1题）

题型2 建筑物问题

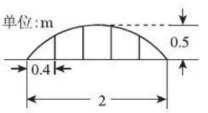
2. 某公园草坪的防护栏由 100 段形状相同的抛物线组成，为了牢固，每段防护栏需要每间距 0.4 m 加设一根不锈钢的支柱，防护栏的最高点到底部距离为 0.5 m（如图），则这条防护栏需要不锈钢支柱的总长度为（　　）

A. 50 m

B. 100 m

C. 160 m

D. 200 m



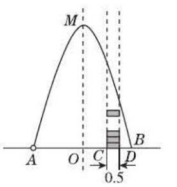
（第2题）

题型3 物体运动问题

3. 如图，在水平地面点 A 处有一网球发射器向空中发射网球，网球飞行路线是一条抛物线，在地面上的落点为 B. 有人在直线 AB 上点 C（靠点 B 一侧）处竖直向上摆放无盖的圆柱形桶，试图让网球落入桶内. 已知 $AB=4$ 米，$AC=3$ 米，网球飞行最大高度 $OM=5$ 米，圆柱形桶的直径为 0.5 米，高为 0.3 米（网球的体积和圆柱形桶的厚度忽略不计）.

（1）如果竖直摆放 5 个圆柱形桶，网球能不能落入桶内？

（2）当竖直摆放多少个圆柱形桶时，网球可以落入桶内？

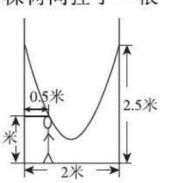


（第3题）

类型2 建立二次函数模型解决几何最值问题

题型1 利用二次函数解决图形高度的最值问题

4. 如图，小明的父亲在相距 2 米的两棵树间拴了一根绳子，给小明做了一个简易的秋千. 拴绳子的地方距地面高都是 2.5 米，绳子自然下垂呈抛物线状，身高 1 米的小明距较近的那棵树 0.5 米时，头部刚好接触到绳子，则绳子的最低点距地面的高度为_____米.



（第4题）

他指出炮弹并不是沿着折线飞行的，而是沿着一条曲线飞行的，他把这条曲线叫“抛物线”，就像斜抛一个物体后，物体在空中划过的曲线的形状，“抛物”的名称正是由此而来.（待续）

趣味数学

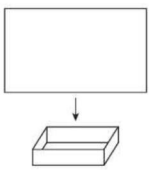
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

题型 2　利用二次函数解决图形面积的最值问题

5. 【中考·潍坊】工人师傅用一块长为 10 dm，宽为 6 dm的矩形铁皮制作一个无盖的长方体容器（如图），需要将四角各裁掉一个正方形（厚度不计）.

(1) 在图中画出裁剪示意图，用实线表示裁剪线，虚线表示折痕，并求长方体底面面积为 12 dm^2 时，裁掉的正方形边长为多少.

(2) 若要求制作的长方体的底面长不大于底面宽的 5 倍，并将容器进行防锈处理，侧面每平方分米的费用为 0.5 元，底面每平方分米的费用为 2 元，裁掉的正方形边长为多少时，总费用最低，最低为多少？



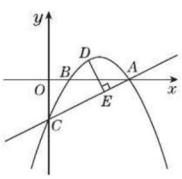
（第 5 题）

类型 3　建立二次函数模型解决动点探究问题

6. 如图，直线 $y=\frac{1}{2}x-2$ 与 x 轴，y 轴分别交于点 A，C，抛物线过点 A，C 和点 $B(1,0)$.

(1) 求抛物线的表达式；

(2) 在 x 轴上方的抛物线上有一动点 D，当 D 与直线 AC 的距离 DE 最大时，求出点 D 的坐标，并求出最大距离.



（第 6 题）

类型 4　建立二次函数模型解决决策问题

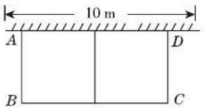
题型 1　几何问题中的决策

7. 如图，有长为 24 m 的围栏，一面利用墙（墙的最大可用长度为 10 m），围成中间隔有一道栅栏的长方形鸡舍. 设鸡舍的一边 AB 为 x m，面积为 S m^2.

(1) 求 S 与 x 的函数表达式（不必写出 x 的取值范围）.

(2) 如果围成面积为 45 m^2 的鸡舍，AB 的长是多少米？

(3) 能围成面积比 45 m^2 更大的鸡舍吗？如果能，请求出最大面积；如果不能，请说明理由.



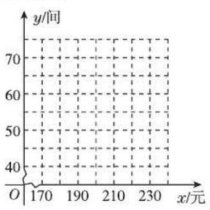
（第 7 题）

题型 2　实际问题中的决策

8. 【中考·衢州】某宾馆有若干间标准房，当标准房的价格为 200 元时，每天入住的房间数为60 间. 经市场调查表明，该宾馆每间标准房的价格在170～240 元之间（含 170 元、240 元）浮动时，每天入住的房间数 y（间）与每间标准房的价格 x（元）的数据如下表：

x/元	…	190	200	210	220	…
y/间	…	65	60	55	50	…

(1) 根据所给数据在如图所示的坐标系中描出相应的点，并画出图象.



（第 8 题）

(2) 求 y 关于 x 的函数表达式，并写出自变量 x 的取值范围.

(3) 设客房的日营业额为 w（元）. 若不考虑其他因素，问宾馆标准房的价格定为多少元时，客房的日营业额最大？最大为多少元？

趣味数学　在现实生活中，你会发现有不少曲线的形状是抛物线，如喷泉喷出的水滴行进的路线，跳水运动员起跳后至入水前运动的路线，某些桥梁的桥拱等.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

专训 4 探究二次函数中存在性问题 ☞（答案见119页）

名师点金

存在性问题是近年来中考的热点，这类问题的知识覆盖面广，综合性强，题型构思精巧，解题方法灵活，求解时常常要猜想或者假设问题的某种关系或结论存在，再经过分析、归纳、演算、推理找出最后的答案. 常见的类型有探索与特殊几何图形有关的存在性问题，探索与周长有关的存在性问题，探索与面积有关的存在性问题.

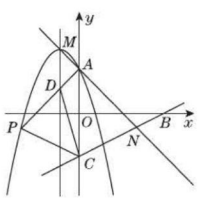
类型1 探索与特殊几何图形有关的存在性问题

1. 【中考·绵阳】如图，已知抛物线 $y=-x^2-2x+a$（$a\neq0$）与 y 轴相交于 A 点，顶点为 M，直线 $y=\frac{1}{2}x-a$ 分别与 x 轴，y 轴相交于 B,C 两点，并且与直线 MA 相交于 N 点.

（1）若直线 BC 和抛物线有两个不同交点，求 a 的取值范围，并用 a 表示点 M,A 的坐标.

（2）将 $\triangle NAC$ 沿着 y 轴翻折，若点 N 的对称点 P 恰好落在抛物线上，AP 与抛物线的对称轴相交于点 D，连结 CD，求 a 的值及 $\triangle PCD$ 的面积.

（3）在抛物线 $y=-x^2-2x+a(a>0)$ 上是否存在点 Q，使得以 Q,A,C,N 为顶点的四边形是平行四边形？若存在，求出点 Q 的坐标；若不存在，请说明理由.



（第1题）

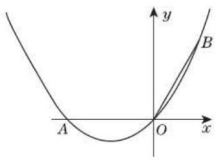
类型2 探索与周长有关的存在性问题

2. 如图，在直角坐标系中，点 A 的坐标为 $(-2,0)$，$OB=OA$，且 $\angle AOB=120°$.

（1）求点 B 的坐标.

（2）求经过 A,O,B 三点的抛物线的表达式.

（3）在（2）中抛物线的对称轴上是否存在点 C，使 $\triangle BOC$ 的周长最小？若存在，求出点 C 的坐标；若不存在，请说明理由.



（第2题）

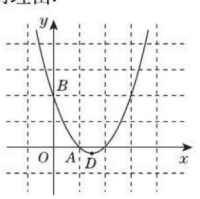
类型3 探索与面积有关的存在性问题

3. 如图，已知抛物线 $y=x^2+bx+c$ 经过 $A(1,0),B(0,2)$ 两点，顶点为 D.

（1）求抛物线的表达式.

（2）若将抛物线沿 y 轴平移后经过点 $C(3,1)$，求平移后所得抛物线的表达式.

（3）设（2）中平移后的抛物线与 y 轴的交点为 B_1，顶点为 D_1，在此抛物线上是否存在点 N，使 $\triangle NBB_1$ 的面积是 $\triangle NDD_1$ 面积的2倍？若存在，求出点 N 的坐标；若不存在，请说明理由.



（第3题）

谜语：边搬边数（打一数学名词）　　谜底：运算

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

全章热门考点整合应用

(答案见 120 页)

名师点金

二次函数是中考的必考内容,难度高,综合性强,既可以与代数知识相结合,也可以与几何知识相结合. 有关二次函数的问题,中考一般以三种形式出现:一是以选择题或填空题出现,重在考查二次函数的基本概念和基本性质;二是以实际应用题的形式出现,重在考查函数建模思想;三是以综合题的形式出现,往往是压轴题,考查学生分析问题和解决问题的能力. 其主要热门考点可概括为:一个概念、一个性质、两个关系、三个应用、两个技巧、三种思想.

考点 1 一个概念——二次函数的定义

1. 已知函数 $y=(m+3)x^{m^2+4m-3}+5$ 是关于 x 的二次函数.

(1)求 m 的值;

(2)当 m 为何值时,该函数图象的开口向上?

(3)当 m 为何值时,该函数有最大值?

考点 2 一个性质——二次函数的图象与性质

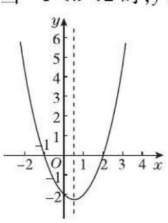
2. 二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的大致图象如图,关于该二次函数,下列说法错误的是(　　)

A. 函数有最小值

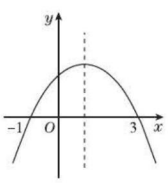
B. 图象的对称轴是直线 $x=\frac{1}{2}$

C. 当 $x<\frac{1}{2}$ 时,y 随 x 的增大而减小

D. 当 $-1<x<2$ 时,$y>0$



(第 2 题)



(第 3 题)

考点 3 两个关系

关系 1 抛物线的位置与二次函数各项系数的关系

3. 【中考·安顺】如图为二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq0)$ 的图象,则下列说法:①$a>0$;②$2a+b=0$;③$a+b+c>0$;④当 $-1<x<3$ 时,$y>0$,其中正确的个数为(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

关系 2 二次函数与一元二次方程的关系

4. 已知关于 x 的函数 $y=(a^2+3a+2)x^2+(a+1)x+\frac{1}{4}$ 的图象与 x 轴总有交点.

(1)求 a 的取值范围;

(2)设函数的图象与 x 轴有两个不同的交点,分别为 $A(x_1,0)$,$B(x_2,0)$,当 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=a^2-3$ 时,求 a 的值.

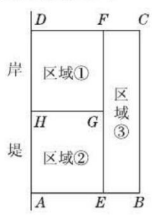
考点 4 三个应用

应用 1 最大面积的应用

5. 【中考·安徽】为了节省材料,某水产养殖户利用水库的岸堤(岸堤足够长)为一边,用总长为 80 米的围网在水库中围成了如图所示的①②③三块矩形区域,而且这三块矩形区域的面积相等,设 BC 的长度是 x 米,矩形区域 $ABCD$ 的面积为 y 平方米.

(1)求 y 与 x 之间的函数表达式,并注明自变量 x 的取值范围;

(2)当 x 取何值时,y 有最大值?最大值是多少?



(第 5 题)

趣味数学 **花瓣知多少**:百合花有 3 瓣,梅花有 5 瓣,飞燕草有 8 瓣,万寿菊有 13 瓣,向日葵有 21 或 34 瓣,雏菊有 34、55 或 89 瓣,其他数目很少出现. 这些花的瓣数不正是斐波那契数列中的数吗? (待续)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

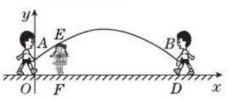
应用2 “抛物线”形几何应用

6. 跳绳时，绳甩到最高处时的形状是抛物线. 正在甩绳的甲、乙两名同学拿绳的手间距（A 与 B 间的水平距离）为 6 m，到地面的距离 AO 和 BD 均为 0.9 m，身高为1.4 m的小丽站在距点 O 的水平距离为 1 m 的点 F 处，绳子甩到最高处时刚好通过她的头顶（点 E）. 以点 O 为原点建立如图所示的平面直角坐标系，设此抛物线对应的函数表达式为 $y=ax^2+bx+0.9$.

（1）求该抛物线对应的函数表达式（不考虑自变量的取值范围）；

（2）如果小华站在 O，D 之间，且离点 O 的距离为 3 m，当绳子甩到最高处时刚好通过他的头顶，请你算出小华的身高；

（3）如果身高为 1.4 m 的小丽站在 O，D 之间，且离点 O 的距离为 t m，绳子甩到最高处时超过她的头顶，请结合图象，写出 t 的取值范围.

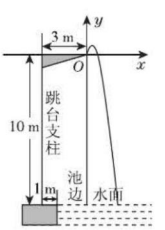


（第6题）

7. 某跳水运动员进行 10 m 高台跳水训练时，身体（看成一点）在空中的运动路线是如图所示坐标系下经过原点 O 的一条抛物线. 在跳某个规定动作时，正常情况下，该运动员在空中的最高处距水面 $10\frac{2}{3}$ m，入水处距池边的距离为4 m，同时，运动员在距水面高度为5 m 以前，必须完成规定的翻腾动作，并调整好入水姿势，否则就会出现失误.

（1）求这条抛物线对应的函数表达式.

（2）在某次试跳中，测得运动员在空中的运动路线是（1）中的抛物线，且运动员在空中调整好入水姿势时，距池边的水平距离为 $3\frac{3}{5}$ m，问此次跳水会不会出现失误？



（第7题）

应用3 生活实际应用

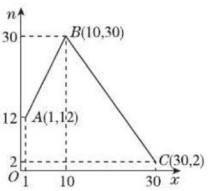
8. 【中考·荆门】为落实“精准扶贫”精神，市农科院专家指导李大爷利用坡前空地种植优质草莓. 根据市场调查，在草莓上市销售的 30 天中，其销售价格 m（元/kg）与第 x 天（x 为正整数）之间满足 $m=\begin{cases}3x+15(1\leqslant x\leqslant 15),\\-x+75(15<x\leqslant 30),\end{cases}$ 销售量 n（kg）与第 x 天之间的函数关系如图所示.

如果李大爷的草莓在上市销售期间每天的维护费用为 80 元.

（1）求销售量 n 与第 x 天之间的函数表达式；

（2）求在草莓上市销售的 30 天中，每天的销售利润 y（元）与第 x 天之间的函数表达式（日销售利润 = 日销售额 − 日维护费）；

（3）求日销售利润 y 的最大值及相应的 x.

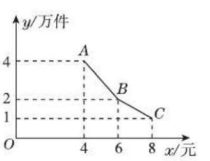


（第8题）

9. 【中考·威海】为了支持大学生创业，某市政府出台了一项优惠政策：提供 10 万元的无息创业贷款，小王利用这笔贷款，注册了一家淘宝网店，招收 5 名员工，销售一种火爆的电子产品，并约定用该网店经营的利润，逐月偿还这笔无息贷款，已知该产品的成本为每件 4 元，员工每人每月的工资为 4 千元，该网店还需每月支付其他费用 1 万元，该产品每月销售量 y（万件）与销售单价 x（元）之间的函数关系如图所示.

（1）求该网店每月利润 W（万元）与销售单价 x（元）之间的函数表达式；

（2）小王自网店开业起，最快在第几个月可还清 10 万元的无息贷款？



（第9题）

两位法国物理学家于 1992 年将花瓣形成过程的参数考虑进去，设计了一套计算机仿真程序，同时做了仿真实验.（待续）

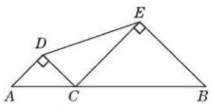
趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

考点 5　两个技巧

技巧 1　巧用二次函数求几何最值

10. 如图，线段 AB 的长为 2，点 C 为 AB 上一个动点，分别以 AC，BC 为斜边在 AB 的同侧作等腰直角三角形 ACD 和等腰直角三角形 BCE，求 DE 长的最小值.



（第 10 题）

技巧 2　巧用二次函数设计方案

11. 某市“建立社会主义新农村”工作组到某县大棚蔬菜生产基地指导菜农修建大棚种植蔬菜. 通过调查得知平均修建每公顷大棚要用支架、农膜等材料费 2.7 万元；购置滴灌设备的费用（万元）与大棚面积（公顷）的平方成正比，比例系数为 0.9；另外种植每公顷蔬菜需种子、化肥、农药等开支 0.3 万元. 每公顷蔬菜年均可卖 7.5 万元.

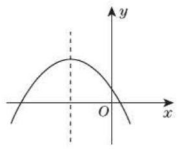
（1）某基地的菜农共修建大棚 x 公顷，当年收益（扣除修建和种植成本后）为 y 万元，写出 y 关于 x 的函数表达式.

（2）除种子、化肥、农药投资只能当年使用外，其他设施 3 年内不需要增加投资仍可继续使用. 如果按 3 年计算，是否修建大棚面积越大，收益就越大？如果不是，修建面积为多少时可以获得最大收益？请帮助工作组为基地修建大棚提一项合理化的建议.

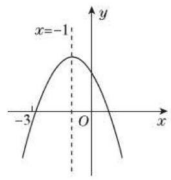
考点 6　三种思想

思想 1　数形结合思想

12. 已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的位置如图，则点 $P(a,bc)$ 在第_____象限.



（第 12 题）



（第 13 题）

13. 【中考 · 巴中】二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图象如图所示，下列结论：①$b^2>4ac$；②$abc<0$；③$2a+b-c>0$；④$a+b+c<0$，其中正确的是（　　）

A. ①④　　B. ②④

C. ②③　　D. ①②③④

思想 2　分类讨论思想

14. 【中考 · 台州】已知函数 $y=x^2+bx+c(b,c$ 为常数）的图象经过点 $(-2,4)$.

（1）求 b,c 满足的关系式；

（2）设该函数图象的顶点坐标是 (m,n)，当 b 的值变化时，求 n 关于 m 的函数表达式；

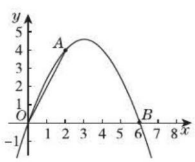
（3）若该函数的图象不经过第三象限，当 $-5\leqslant x\leqslant1$ 时，函数的最大值与最小值之差为 16，求 b 的值.

思想 3　方程思想

15. 【中考 · 安徽】如图，二次函数 $y=ax^2+bx$ 的图象经过点 $A(2,4)$ 与 $B(6,0)$.

（1）求 a,b 的值；

（2）点 C 是该二次函数图象上 A,B 两点之间的一动点，横坐标为 $x(2<x<6)$，写出四边形 $OACB$ 的面积 S 关于点 C 的横坐标 x 的函数表达式，并求 S 的最大值.



（第 15 题）

趣味数学　两项的结果都证实，在自然界定律的要求下（系统保持在最低能量状态），花朵会以斐波那契数列长出花瓣. 其实，这些类似花瓣数目的大自然模式都有深层的数学规律.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

27.1 圆的认识

27.1.1 圆的基本元素

名师点金

理解圆的定义要注意两层含义

(1)圆上各点到圆心的距离都相等.在圆所在的平面内,到圆心距离等于半径的点必定在圆上;(2)当一条线段绕着它的一个端点在平面内旋转一周时,它的另一个端点的运动轨迹就是一个圆.

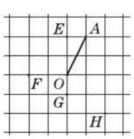
Ⅰ 夯实基础·逐点练 (答案见121页)

知识点1 圆的定义

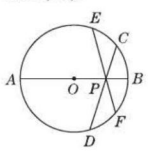
1. 下列关于圆的叙述中正确的是(　　)
   A. 圆是由圆心唯一确定的
   B. 圆是一条封闭的曲线
   C. 平面内到定点的距离小于或等于定长的所有点组成圆
   D. 圆内任意一点到圆心的距离都相等

2. 下列图形中,四个顶点一定在同一个圆上的是(　　)
   A. 菱形、平行四边形　　B. 矩形、正方形
   C. 正方形、菱形　　D. 矩形、平行四边形

3. 【中考·宜昌】在公园的 O 处附近有 E,F,G,H 四棵树,位置如图所示(图中小正方形的边长均相等),现计划修建一座以 O 为圆心,OA 为半径的圆形水池,要求池中不留树木,则 E,F,G,H 四棵树中需要被移除的为(　　)　　【导学号:1489846】
   A. E,F,G　　B. F,G,H
   C. G,H,E　　D. H,E,F



(第3题)



(第4题)

知识点2 与圆有关的概念

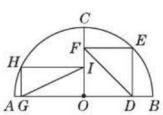
4. 如图,在⊙O 中,AB 是⊙O 的直径,点 P 是 OB 上的任一点(不包括 O,B),CD,EF 是过点 P 的两条弦,则图中的弦有_____,以 B 为端点的劣弧有_____.

5. 下列命题中正确的有(　　)
   ①弦是圆上任意两点之间的部分;②半径是弦;
   ③直径是最长的弦;④弧是半圆,半圆是弧.
   A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

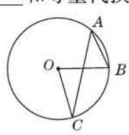
6. 点 A,C 为半径是3的圆周上两点,点 B 为$\overset{\frown}{AC}$的中点,以线段 BA,BC 为邻边作菱形 $ABCD$,顶点 D 恰在该圆直径的三等分点上,则该菱形的边长为(　　)
   A. $\sqrt{5}$或$2\sqrt{2}$　B. $\sqrt{5}$或$2\sqrt{3}$　C. $\sqrt{6}$或$2\sqrt{2}$　D. $\sqrt{6}$或$2\sqrt{3}$

知识点3 同圆的半径相等

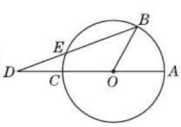
7. 如图,C 是以点 O 为圆心,AB 为直径的半圆上一点,且 $CO\perp AB$,在 OC 两侧分别作矩形 $OGHI$ 和正方形 $ODEF$,且点 I,F 在 OC 上,点 H,E 在半圆上,可证:$IG=FD$.小云发现连结图中已知点得到两条线段,便可证明 $IG=FD$.
   请回答:小云所作的两条线段分别是_____和_____;证明 $IG=FD$ 的依据是矩形的对角线相等,_____和等量代换.



(第7题)



(第8题)



(第9题)

8. 【中考·毕节】如图,点 A,B,C 在⊙O 上,$\angle A=36°$,$\angle C=28°$,则 $\angle B=$(　　)
   A. 100°　　B. 72°　　C. 64°　　D. 36°

9. 如图,已知 AC 是⊙O 的直径,点 B 在圆周上(不与点 A,C 重合),点 D 在 AC 的延长线上,连结 BD 交⊙O 于点 E,若 $\angle AOB=3\angle ADB$,则(　　)
   A. $DE=EB$　B. $\sqrt{2}DE=EB$　C. $\sqrt{3}DE=DO$　D. $DE=OB$

易错点 考虑问题不全面而致错

10. 【中考·绍兴】等腰三角形 ABC 中,顶角 A 为40°,点 P 在以 A 为圆心,BC 长为半径的圆上,且 $BP=BA$,则 $\angle PBC$ 的度数为_____.

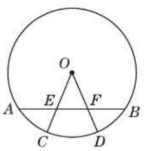
谜语:0+0=0(打一成语)　　谜底:一无所得　趣味数学

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞(答案见 122 页)

考查角度 1 利用同圆的半径相等证明线段相等(全等法)

11. 如图,AB 是⊙O 的弦,半径 OC,OD 分别交 AB 于点 E,F,且 $AE = BF$,请你判断线段 OE 与 OF 的数量关系,并给予证明.



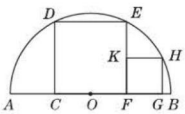
(第 11 题)

考查角度 2 利用同圆的半径相等求面积

12. 如图,AB 是半圆 O 的直径,四边形 $CDEF$ 是正方形,其中点 D,E 在半圆 O 上,点 C,F 在直径 AB 上.

(1)求证:$OC = OF$.

(2)在正方形 $CDEF$ 的右侧有一正方形 $FGHK$,点 G 在 AB 上,点 H 在半圆 O 上,点 K 在 EF 上. 若正方形 $CDEF$ 的边长为 2,求正方形 $FGHK$ 的面积.



(第 12 题)

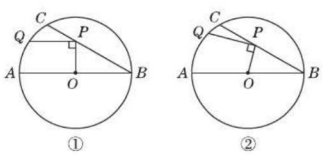
Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞(答案见 122 页)

拔尖角度 1 利用圆的半径求最值

13. 在⊙O 中,直径 $AB = 6$,BC 是弦,$\angle ABC = 30°$,点 P 在 BC 上,点 Q 在⊙O 上,且 $OP \perp PQ$.

(1)如图①,当 $PQ // AB$ 时,求 PQ 的长度;

(2)如图②,当点 P 在 BC 上移动时,求 PQ 长的最大值.



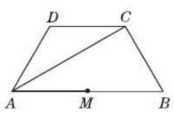
(第 13 题)

拔尖角度 2 利用“同圆的半径相等”说明四点共圆

14. 如图,在等腰梯形 $ABCD$ 中,$AB // CD$,$AD = BC$. 将 $\triangle ACD$ 沿对角线 AC 翻折后,点 D 恰好与边 AB 的中点 M 重合.

(1)点 C 是否在以 AB 为直径的圆上?请说明理由.

(2)当 $AB = 4$ 时,求此梯形的面积.



(第 14 题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

27.1.2 圆的对称性

第1课时 圆心角、弧、弦间的关系

名师点金

同一圆中证明两弦相等的四种方法

(1)若两弦位于两个不同的三角形，证明两弦所在的三角形全等.

(2)在同一圆中证明两弦所对的弧相等(同一类弧).

(3)若两弦位于同一个三角形中，根据等角对等边证明两弦相等.

(4)证明两弦所对的圆心角相等.

1 夯实基础·逐点练 (答案见122页)

知识点1 圆的旋转对称性

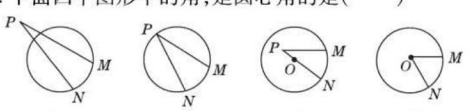
1. 下列说法中正确的有(　　)

(1)圆是轴对称图形；(2)圆是旋转对称图形；(3)圆不是中心对称图形；(4)圆是轴对称图形但不是旋转对称图形.

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

知识点2 圆心角

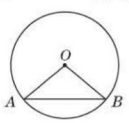
2. 下面四个图形中的角，是圆心角的是(　　)



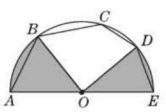
A　　B　　C　　D

3. 如图，AB为$\odot O$的弦，$\angle A=40°$，则$\overset{\frown}{AB}$所对的圆心角等于(　　)　　【导学号:1489846】

A. 40°　　B. 80°　　C. 100°　　D. 120°



(第3题)



(第4题)

4. 【中考·武威】如图，半圆O的直径$AE=4$，点B，C，D均在半圆上，若$AB=BC$，$CD=DE$，连结OB，OD，则图中阴影部分的面积为_____.

知识点3 圆心角、弧、弦之间的关系

5. 下列说法中，正确的是(　　)

A. 等弦所对的弧相等

B. 等弧所对的弦相等

C. 圆心角相等，所对的弦相等

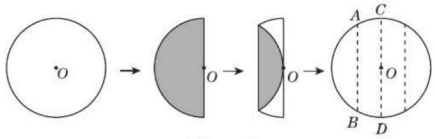
D. 弦相等，所对的圆心角相等

6. 在$\odot O$中，圆心角$\angle AOB=2\angle COD$，则$\overset{\frown}{AB}$与$\overset{\frown}{CD}$的关系是(　　)

A. $\overset{\frown}{AB}=2\overset{\frown}{CD}$　　B. $\overset{\frown}{AB}>2\overset{\frown}{CD}$

C. $\overset{\frown}{AB}<2\overset{\frown}{CD}$　　D. 不能确定

7. 把一张圆形纸片按如图所示方式折叠两次后展开，图中的虚线表示折痕，则$\overset{\frown}{BC}$的度数是(　　)

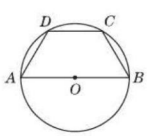


(第7题)

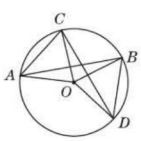
A. 120°　　B. 135°　　C. 150°　　D. 165°

8. 如图，AB是$\odot O$的直径，BC，CD，DA是$\odot O$的弦，若$BC=CD=DA=4$ cm，则$\odot O$的周长为(　　)

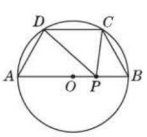
A. 5π cm　　B. 6π cm　　C. 9π cm　　D. 8π cm



(第8题)



(第9题)



(第10题)

9. 如图，点A，B，C，D均在$\odot O$上，且$\angle AOB=\angle COD$，连结AC，BD，有下列结论：①$AB=CD$；②$\angle AOC=\angle BOD$；③$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$；④$\triangle AOC\cong\triangle BOD$. 其中正确的结论是_____(写序号即可).

10. 如图，AB是$\odot O$的直径，$AB=10$，BC，CD，DA是$\odot O$的弦，且$BC=CD=DA$，若点P是直径AB上的一动点，则$PD+PC$的最小值为_____.

易错点 对圆中的有关线段的关系运用不当而致错

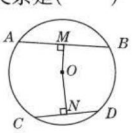
11. 如图，在$\odot O$中，弦$AB>CD$，$OM\perp AB$，$ON\perp CD$，M，N分别为垂足，那么OM，ON的大小关系是(　　)

A. $OM>ON$

B. $OM=ON$

C. $OM<ON$

D. 无法确定



(第11题)

花朵为什么是圆的？在周长一定的情况下，圆的面积最大，对于花儿来说，圆形的面能吸引更多的蜜蜂和蝴蝶为它传粉，也能吸收到更多的阳光雨露，以利于它的生长.(待续)

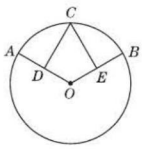
趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞(答案见 122 页)

考查角度 1 利用弧、圆心角的关系证线段相等

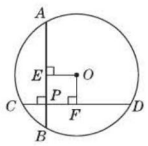
12. 【中考 · 牡丹江】如图,在⊙O 中,$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CB}$,$CD\perp OA$ 于 D,$CE\perp OB$ 于 E,求证:$AD=BE$.



(第 12 题)

考查角度 2 利用弧、弦关系证正方形

13. 如图,⊙O 的两条弦 AB,CD 互相垂直且相交于点 P,$OE\perp AB$,$OF\perp CD$,垂足分别为 E,F,$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$. 求证:四边形 $OEPF$ 是正方形.



(第 13 题)

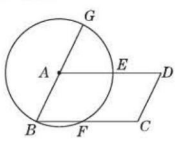
Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞(答案见 122 页)

拔尖角度 1 利用圆心角与弧之间的关系求解有关问题

14. 如图,以▱$ABCD$ 的顶点 A 为圆心,AB 为半径作圆,分别交 AD,BC 于点 E,F,延长 BA 交⊙A 于点 G.

(1)求证:$\overset{\frown}{GE}=\overset{\frown}{EF}$;

(2)若$\overset{\frown}{BF}$的度数为 50°,求∠C 的度数.



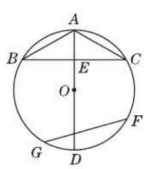
(第 14 题)

拔尖角度 2 利用弧、弦、圆心角之间的关系解边角问题

15. 如图,已知 AD 是⊙O 的直径,AB,AC 是弦,且 $AB=AC$.

(1)求证:直径 AD 平分∠BAC.

(2)若 BC 经过半径 OA 的中点 E,点 F 是$\overset{\frown}{CD}$的中点,点 G 是$\overset{\frown}{BF}$的中点,⊙O 的半径为 1. 求 GF 的长.



(第 15 题)

趣味数学　**茶壶盖为什么是圆的?** 因为圆形茶壶盖的直径、半径都相等,不容易掉下去. 圆符合大众的审美观,使用也方便. 如果是方的话,茶壶盖可能掉到杯子里,并且角容易被碰掉,不是很安全.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

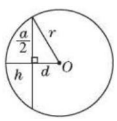
第2课时　垂直于弦的直径性质

名师点金

垂径定理基本图形计算中的“四变量”“两关系”

(1)“**四变量**”：如图，弦长为 a，圆心到弦的距离（弦心距）为 d，半径为 r，弧的中点到弦的距离（弓形高）为 h，这四个变量知任意两个可求其他两个.

(2)“**两关系**”：①$\left(\frac{a}{2}\right)^2+d^2=r^2$；②$h+d=r$.



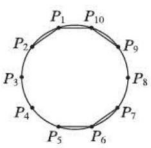
注意：计算时常作半径或过圆心作弦的垂线段来构造直角三角形.

1 夯实基础·逐点练 ☞（答案见123页）

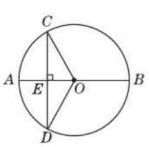
知识点1 圆的轴对称性

1. 【中考·台湾】如图是 $P_1,P_2,\cdots,P_{10}$ 十个点在圆上的位置图，且此十点将圆周分成十等份. 今小玉连结 P_1P_2，P_1P_{10}，P_9P_{10}，P_5P_6，P_6P_7，判断小玉再连结下列哪一条线段后，所形成的图形不是轴对称图形.（　　）

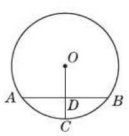
A. P_2P_3　　B. P_4P_5　　C. P_7P_8　　D. P_8P_9



（第1题）



（第2题）



（第3题）

知识点2 垂径定理

2. 【中考·广元】如图，已知⊙O 的直径 $AB\perp$ 弦 CD 于点 E，则下列结论中错误的是（　　）

A. $CE=DE$　　B. $AE=OE$

C. $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BD}$　　D. $\triangle OCE\cong\triangle ODE$

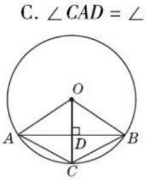
3. 如图，AB 是⊙O 的弦，半径 $OC\perp AB$ 于点 D，若⊙O 的半径为5，$AB=8$，则 CD 的长是（　　）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

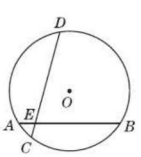
4. 【中考·上海】如图，已知⊙O 中，AB 是弦，半径 $OC\perp AB$，垂足为 D. 要使四边形 $OACB$ 为菱形，还需要添加一个条件，这个条件可以是（　　）

A. $AD=BD$　　B. $OD=CD$

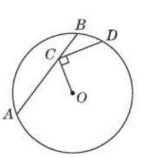
C. $\angle CAD=\angle CBD$　　D. $\angle OCA=\angle OCB$



（第4题）



（第5题）



（第6题）

5. 【中考·梧州】如图，在半径为 $\sqrt{13}$ 的⊙O 中，弦 AB 与 CD 交于点 E，$\angle DEB=75°$，$AB=6$，$AE=1$，则 CD 的长是（　　）

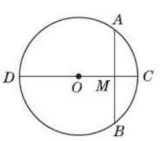
A. $2\sqrt{6}$　　B. $2\sqrt{10}$　　C. $2\sqrt{11}$　　D. $4\sqrt{3}$

6. 【中考·嘉兴】如图，在⊙O 中，弦 $AB=1$，点 C 在 AB 上移动，连接 OC，过点 C 作 $CD\perp OC$ 交⊙O 于点 D，则 CD 的最大值为_____.

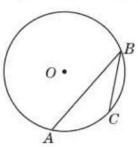
知识点3 垂径定理的推论

7. 如图，⊙O 的直径 $CD=10$ cm，AB 是⊙O 的弦，$AM=BM$，$OM:OC=3:5$，则 AB 的长为（　　）

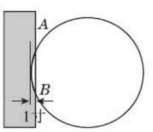
A. 8 cm　　B. $\sqrt{91}$ cm　　C. 6 cm　　D. 2 cm



（第7题）



（第8题）



（第9题）

8. 【中考·威海】如图，⊙O 的半径为5，AB 为弦，点 C 为 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点，若 $\angle ABC=30°$，则弦 AB 的长为（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. 5　　C. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$　　D. $5\sqrt{3}$

9. 【中考·广西北部湾经济区】《九章算术》作为古代中国乃至东方的第一部自成体系的数学专著，与古希腊的《几何原本》并称现代数学的两大源泉. 在《九章算术》中记载有一问题：“今有圆材埋在壁中，不知大小. 以锯锯之，深一寸，锯道长一尺，问径几何？”小辉同学根据原文题意，画出圆材截面图如图所示，已知：锯口深为1寸，锯道 $AB=1$ 尺（1尺=10寸），则该圆材的直径为_____寸.

易错点 考虑问题不全面而漏解

10. 【中考·安顺】已知⊙O 的直径 $CD=10$ cm，AB 是⊙O 的弦，$AB\perp CD$，垂足为 M，且 $AB=8$ cm，则 AC 的长为（　　）

A. $2\sqrt{5}$ cm　　B. $4\sqrt{5}$ cm

C. $2\sqrt{5}$ cm 或 $4\sqrt{5}$ cm　　D. $2\sqrt{3}$ cm 或 $4\sqrt{3}$ cm

谜语：圆规画鸡蛋（打一城市名称）　　谜底：太原

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

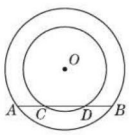
Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞(答案见 123 页)

考查角度 1 利用垂径定理解同心圆问题

11. 【中考 · 湖州】已知在以点 O 为圆心的两个同心圆中,大圆的弦 AB 交小圆于点 C,D(如图).

(1)求证:$AC=BD$;

(2)若大圆的半径 $R=10$,小圆的半径 $r=8$,且圆心 O 到直线 AB 的距离为 6,求 AC 的长.



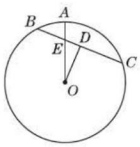
(第 11 题)

考查角度 2 利用垂径定理的推论解计算问题

12. 如图,D 是 $\odot O$ 的弦 BC 的中点,A 是 $\odot O$ 上一点,OA 与 BC 交于点 E,已知 $AO=8$,$BC=12$.

(1)求线段 OD 的长;

(2)当 $EO=\sqrt{2}BE$ 时,求 ED 的长.



(第 12 题)

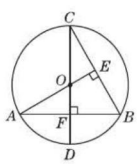
Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞(答案见 123 页)

拔尖角度 1 利用垂径定理解计算问题的应用

13. 如图,CD 为 $\odot O$ 的直径,$CD\perp AB$,垂足为 F,$AO\perp BC$,垂足为 E,$BC=2\sqrt{3}$.

(1)求 AB 的长;

(2)求 $\odot O$ 的半径.



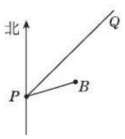
(第 13 题)

拔尖角度 2 利用垂径定理解最值问题的应用

14. 如图,台风中心位于点 P,并沿东北方向 PQ 移动,已知台风移动的速度为 30 km/h,受影响区域的半径为 200 km,B 市位于点 P 的北偏东 75°方向上,距离 P 点 320 km 处.

(1)试说明本次台风是否会影响 B 市;

(2)求这次台风影响 B 市的时间.



(第 14 题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

27.1.3 圆周角

第1课时 圆周角和直径的关系

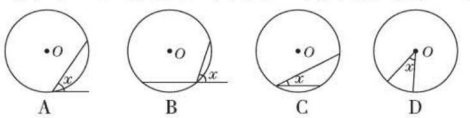
名师点金

1. 已知直径时，常添加辅助线构造直角三角形，即“见直径想直角”. 题目中遇到直径时要考虑直径所对的圆周角为90°，遇到90°的圆周角时要考虑90°的圆周角所对的弦为直径，这是圆中作辅助线的常用方法.
2. 在解决圆的有关问题时，常常利用圆周角定理进行两种转化：一是利用同弧或等弧所对的圆周角相等，进行角与角之间的转化；二是将圆周角相等的问题转化为弦相等或弧相等的问题.

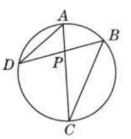
1 夯实基础·逐点练 ☞（答案见123页）

知识点1 圆周角的定义

1. 【中考·柳州】下列四个图中，$\angle x$ 为圆周角的是(　　)



2. 如图，图中的圆周角共有_____个，其中$\overset{\frown}{AB}$所对的圆周角是_____，$\overset{\frown}{CD}$所对的圆周角是_____.



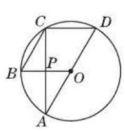
（第2题）

知识点2 半圆或直径所对的圆周角是直角

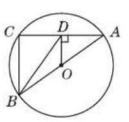
3. 【中考·襄阳】如图，AD 是⊙O 的直径，BC 是弦，四边形 $OBCD$ 是平行四边形，AC 与 OB 相交于点 P，下列结论错误的是(　　)

A. $AP=2OP$　　B. $CD=2OP$

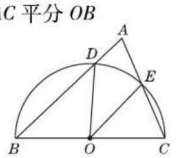
C. $OB\perp AC$　　D. AC 平分 OB



（第3题）



（第4题）



（第5题）

4. 【中考·广元】如图，AB，AC 分别是⊙O 的直径和弦，$OD\perp AC$ 于点 D，连结 BD，BC，且 $AB=10$，$AC=8$，则 BD 的长为(　　)

A. $2\sqrt{5}$　　B. 4　　C. $2\sqrt{13}$　　D. 4.8

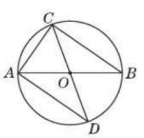
5. 【中考·聊城】如图，BC 是半圆 O 的直径，D，E 是$\overset{\frown}{BC}$上两点，连结 BD，CE 并延长交于点 A，连结 OD，OE，如果$\angle A=70°$，那么$\angle DOE$ 的度数为(　　)

A. 35°　　B. 38°　　C. 40°　　D. 42°

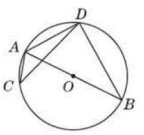
知识点3 同弧或等弧所对圆周角的关系

6. 【中考·盐城】如图，AB 为⊙O 的直径，CD 是⊙O 的弦，$\angle ADC=35°$，则$\angle CAB$ 的度数为(　　)

A. 35°　　B. 45°　　C. 55°　　D. 65°



（第6题）



（第7题）

7. 【中考·福建】如图，AB 是⊙O 的直径，C，D 是⊙O 上位于 AB 异侧的两点，下列四个角中，一定与$\angle ACD$ 互余的角是(　　)

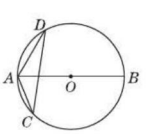
A. $\angle ADC$　　B. $\angle ABD$

C. $\angle BAC$　　D. $\angle BAD$

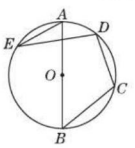
8. 【中考·毕节】如图，AB 是⊙O 的直径，CD 是⊙O 的弦，$\angle ACD=30°$，则$\angle BAD$ 为(　　)

A. 30°　　B. 50°

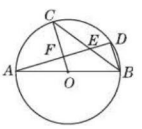
C. 60°　　D. 70°



（第8题）



（第9题）



（第10题）

9. 【中考·青岛】如图，AB 是⊙O 的直径，点 C，D，E 在⊙O 上，若 $\angle AED=20°$，则 $\angle BCD$ 的度数为(　　)

A. 100°　　B. 110°

C. 115°　　D. 120°

易错点 忽视将角的相等转化为弧相等导致判断错误

10. 【中考·滨州】如图，AB 是⊙O 的直径，C，D 是⊙O 上的点，且 $OC\parallel BD$，AD 分别与 BC，OC 相交于点 E，F，有下列结论：

①$AD\perp BD$；②$\angle AOC=\angle AEC$；③BC 平分 $\angle ABD$；④$AF=DF$；⑤$BD=2OF$；⑥$\triangle CEF\backsim\triangle BED$.

其中一定成立的是(　　)

A. ②④⑤⑥　　B. ①③⑤⑥

C. ②③④⑥　　D. ①③④⑤

神奇的古建筑：在闽西南的南靖县，用夯土围合建造起来的楼房尚存10 000多座，有圆形、方形、五角形、半月形、交椅形、围裙形、凸字形等.（待续）

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

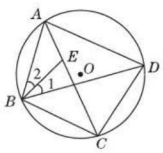
Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞(答案见 123 页)

考查角度 1　利用同(等)弧所对的圆周角解角的关系

11. 【中考 · 台州】如图,四边形 $ABCD$ 内接于⊙O(点 A,B,C,D 在⊙O 上),点 E 在对角线 AC 上,$EC=BC=DC$.

(1)若 $\angle CBD=39°$,求 $\angle BAD$ 的度数;

(2)求证:$\angle 1=\angle 2$.



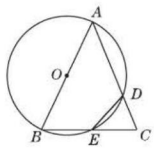
(第 11 题)

考查角度 2　利用直径所对的圆周角是直角解边的关系

12. 如图,已知 $\triangle ABC$,以 AB 为直径的⊙O 分别交 AC 于 D,BC 于 E,连结 ED,若 $ED=EC$.

(1)求证:$AB=AC$;

(2)若 $AB=4$,$BC=2\sqrt{3}$,求 $\triangle ABC$ 的面积.



(第 12 题)

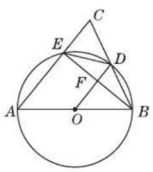
Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞(答案见 124 页)

拔尖角度 1　利用直径所对的圆周角是直角求边长(构造法)

13. 如图,在 $\triangle ABC$ 中,$AB=AC$,以 AB 为直径的⊙O 分别交 BC,AC 于点 D,E,连结 EB 交 OD 于点 F.

(1)求证:$OD\perp BE$;

(2)若 $DE=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$,$AB=\dfrac{5}{2}$,求 AE 的长.



(第 13 题)

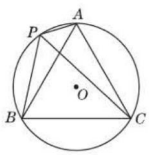
拔尖角度 2　利用同弧所对的圆周角及圆的有关性质探究相关问题

14. 【中考 · 德州】如图,⊙O 的半径为 1,A,P,B,C 是⊙O 上的四个点,$\angle APC=\angle CPB=60°$.

(1)判断 $\triangle ABC$ 的形状:_____;

(2)试探究线段 PA,PB,PC 之间的数量关系,并说明理由;

(3)当点 P 位于$\overset{\frown}{AB}$的什么位置时,四边形 $APBC$ 的面积最大?求出最大面积.



(第 14 题)

趣味数学　这些土楼千姿百态,气势非凡,给人以感染力和震撼力.如此奇妙的建构和变化多端的造型在世界民居建筑中也是极其罕见的.(待续)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

第2课时　圆周角和圆心角、弧的关系

名师点金

“圆周角定理”是圆中的又一个重要定理，其作用在于转化同弧所对的圆心角与圆周角、同弧或等弧所对的圆周角之间的数量关系. 在应用这一定理时，要注意“同弧、等弧”的前提，只有准确识别图形中角的位置关系，才能得到角之间的数量关系.

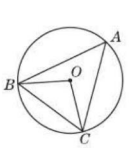
Ⅰ 夯实基础·逐点练

（答案见124页）

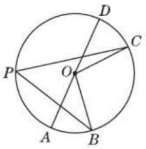
知识点1 圆周角和圆心角的关系

1. 【中考·宜昌】如图，点 A,B,C 均在 $\odot O$ 上，当 $\angle OBC=40°$ 时，$\angle A$ 的度数是（　　）

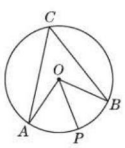
A. 50°　　B. 55°　　C. 60°　　D. 65°



（第1题）



（第2题）



（第3题）

2. 【中考·贵港】如图，AD 是 $\odot O$ 的直径，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，若 $\angle AOB=40°$，则圆周角 $\angle BPC$ 的度数是（　　）

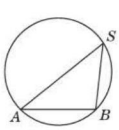
A. 40°　　B. 50°　　C. 60°　　D. 70°

3. 【中考·吉林】如图，在 $\odot O$ 中，$\overset{\frown}{AB}$ 所对的圆周角 $\angle ACB=50°$，若 P 为 $\overset{\frown}{AB}$ 上一点，$\angle AOP=55°$，则 $\angle POB$ 的度数为（　　）

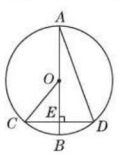
A. 30°　　B. 45°　　C. 55°　　D. 60°

4. 【中考·武威】如图，点 A,B,S 在圆上，若弦 AB 的长度等于圆半径的 $\sqrt{2}$ 倍，则 $\angle ASB$ 的度数是（　　）

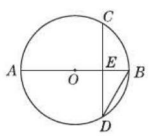
A. 22.5°　　B. 30°　　C. 45°　　D. 60°



（第4题）



（第5题）



（第6题）

5. 【中考·广州】如图，在 $\odot O$ 中，AB 是直径，CD 是弦，$AB\perp CD$，垂足为 E，连结 CO,AD，$\angle BAD=20°$，则下列说法中正确的是（　　）

A. $AD=2OB$　　B. $CE=EO$

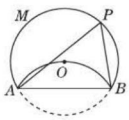
C. $\angle OCE=40°$　　D. $\angle BOC=2\angle BAD$

6. 【中考·黔南州】如图，AB 是 $\odot O$ 的直径，弦 $CD\perp AB$ 于点 E，$\angle CDB=30°$，$\odot O$ 的半径为 5 cm，则圆心 O 到弦 CD 的距离为（　　）

A. $\frac{5}{2}$ cm　　B. 3 cm　　C. $3\sqrt{3}$ cm　　D. 6 cm

7. 【中考·海南】如图，将 $\odot O$ 沿弦 AB 折叠，圆弧恰好经过圆心 O，点 P 是 $\overset{\frown}{AMB}$ 上一点，则 $\angle APB$ 的度数为（　　）

A. 45°　　B. 30°　　C. 75°　　D. 60°



（第7题）

知识点2 90°的圆周角所对的弦是直径

8. 下列结论正确的是（　　）

A. 直径所对的角是直角

B. 90°的圆心角所对的弦是直径

C. 同一条弦所对的圆周角相等

D. 半圆所对的圆周角是直角

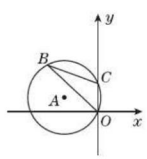
9. 【中考·台州】从下列三角尺与圆弧的位置关系中，可判定圆弧为半圆的是（　　）



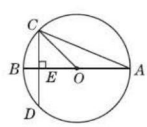
A　　B　　C　　D

10. 【中考·安顺】如图，半径为 3 的 $\odot A$ 经过原点 O 和点 $C(0,2)$，B 是 y 轴左侧 $\odot A$ 优弧上一点，则 $\tan\angle OBC$ 为（　　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{4}$



（第10题）



（第11题）

易错点 忽视勾股定理的应用而致错

11. 【中考·眉山】如图，$\odot O$ 的直径 AB 垂直于弦 CD，垂足是 E，$\angle A=22.5°$，$OC=6$，CD 的长为（　　）

A. $6\sqrt{2}$　　B. $3\sqrt{2}$　　C. 6　　D. 12

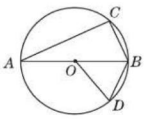
不管多少土楼废弃又重建，都对环境无公害、无污染，与现在的钢筋、水泥或化学材料建成的楼房相比，土楼显示了“人与自然和谐相处”的巨大优势.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞(答案见 124 页)

考查角度 1 利用圆周角与圆心角的关系求角

12. 如图,AB 是⊙O 的直径,弦 $BC=BD$,若 $\angle BOD=50°$,求 $\angle A$ 的度数.



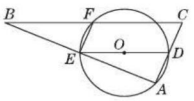
(第 12 题)

考查角度 2 利用 90°的圆周角所对的弦是直径求面积

13. 如图,已知 ED 为⊙O 的直径且 $ED=4$,点 A(不与 E,D 重合)为⊙O 上一个动点,线段 AB 经过点 E,且 $EA=EB$,F 为⊙O 上一点,$\angle FEB=90°$,BF 的延长线与 AD 的延长线交于点 C.

(1)求证:$\triangle EFB\backsim\triangle ADE$;

(2)当点 A 在⊙O 上移动时,直接写出四边形 $FCDE$ 的最大面积为多少.



(第 13 题)

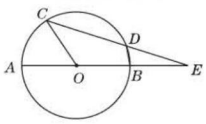
Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞(答案见 124 页)

拔尖角度 1 利用圆周角与圆心角的关系解与解直角三角形综合问题

14. 如图,AB 为⊙O 的直径,弦 CD 与 AB 的延长线相交于点 E,连结 BD.

(1)求证:$\angle COE=2\angle BDE$;

(2)当 $OB=BE=2$,且 $\angle BDE=60°$时,求 $\tan E$.



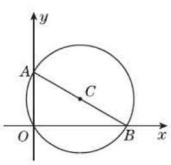
(第 14 题)

拔尖角度 2 利用 90°的圆周角所对的弦是直径解与坐标综合问题

15. 如图,⊙C 经过原点且与两坐标轴分别交于点 $A(0,2)$ 和点 $B(2\sqrt{3},0)$.

(1)求线段 AB 的长及 $\angle ABO$ 的大小.

(2)在⊙C 上是否存在一点 P,使得 $\triangle POB$ 是等腰三角形?若存在,请求出 $\angle BOP$ 的度数;若不存在,请说明理由.



(第 15 题)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

第3课时　圆内接四边形

名师点金

圆内接四边形的角的三种关系

1. 对角互补，若四边形 $ABCD$ 为 $\odot O$ 的内接四边形，则 $\angle A+\angle C=180°$，$\angle B+\angle D=180°$.
2. 四个内角的和是 $360°$.
3. 任一外角与其相邻的内角的对角相等，简称圆内接四边形的外角等于其内对角.

1 夯实基础·逐点练

（答案见125页）

知识点1 圆内接多边形

1. 下列说法正确的是（　　）

A. 在圆内部的多边形叫做圆内接多边形

B. 过四边形的四个顶点的圆叫做这个四边形的外接圆

C. 任意一个四边形都有外接圆

D. 一个圆只有唯一一个内接四边形

2. 下列多边形中一定有外接圆的是（　　）

A. 三角形　B. 四边形　C. 五边形　D. 六边形

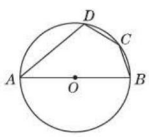
知识点2 圆内接四边形的对角互补

3. 【中考·兰州】如图，四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$，若 $\angle A=40°$，则 $\angle C=$（　　）

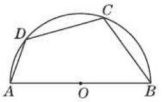
A. 110°　B. 120°　C. 135°　D. 140°

4. 【中考·镇江】如图，四边形 $ABCD$ 是半圆的内接四边形，AB 是直径，$\overset{\frown}{DC}=\overset{\frown}{CB}$，若 $\angle C=110°$，则 $\angle ABC$ 的度数等于（　　）

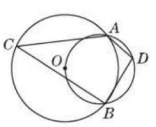
A. 55°　B. 60°　C. 65°　D. 70°



（第3题）



（第4题）



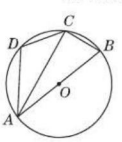
（第5题）

5. 如图，两圆相交于 A，B 两点，小圆经过大圆圆心 O，点 C，D 分别在两圆上，若 $\angle ADB=100°$，则 $\angle ACB$ 的度数为（　　）

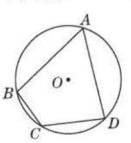
A. 35°　B. 40°　C. 50°　D. 80°

6. 【中考·牡丹江】如图，四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$，AB 经过圆心，$\angle B=3\angle BAC$，则 $\angle ADC$ 等于（　　）

A. 100°　B. 112.5°　C. 120°　D. 135°



（第6题）



（第7题）

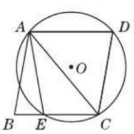
7. 【中考·黄石】如图，已知 $\odot O$ 为四边形 $ABCD$ 的外接圆，O 为圆心，若 $\angle BCD=120°$，$AB=AD=2$，则 $\odot O$ 的半径长为（　　）

A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$　B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　C. $\frac{3}{2}$　D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

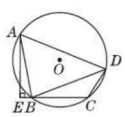
知识点3 圆内接四边形的外角等于其内对角

8. 【中考·天水】如图，四边形 $ABCD$ 是菱形，$\odot O$ 经过点 A，C，D，与 BC 相交于点 E，连结 AC，AE. 若 $\angle D=80°$，则 $\angle EAC$ 的度数为（　　）

A. 20°　B. 25°　C. 30°　D. 35°



（第8题）

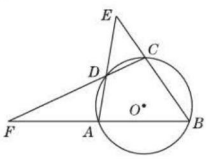


（第9题）

9. 【中考·十堰】如图，四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$，$AE\perp CB$ 交 CB 的延长线于点 E，若 BA 平分 $\angle DBE$，$AD=5$，$CE=\sqrt{13}$，则 $AE=$（　　）

A. 3　B. $3\sqrt{2}$　C. $4\sqrt{3}$　D. $2\sqrt{3}$

10. 【中考·锦州】如图，四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形，AD 与 BC 的延长线交于点 E，BA 与 CD 的延长线交于点 F，$\angle DCE=80°$，$\angle F=25°$，则 $\angle E$ 的度数为（　　）



（第10题）

A. 55°　B. 50°　C. 45°　D. 40°

易错点 画图时考虑不全而漏解

11. 已知 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$，$OD\perp AC$ 于点 D，如果 $\angle COD=32°$，那么 $\angle B$ 的度数为（　　）

A. 16°　B. 32°　C. 16°或164°　D. 32°或148°

树木的年轮：伐倒树木后，在树墩上可以看到有许多同心圆环，植物学上称之为年轮. 年轮是树木在生长过程中受季节影响形成的，一年产生一轮.（待续）

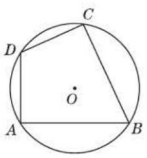
趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞(答案见 125 页)

考查角度 1 利用圆内接四边形的性质求边长

12. 【中考 · 无锡】如图，四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$，$AB=17$，$CD=10$，$\angle A=90°$，$\cos B=\frac{3}{5}$，求 AD 的长.



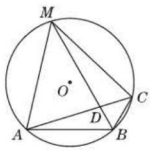
（第 12 题）

考查角度 2 利用圆内接四边形的性质证边的关系

13. 【中考 · 包头】如图，在 $\odot O$ 中，B 是 $\odot O$ 上的一点，$\angle ABC=120°$，弦 $AC=2\sqrt{3}$，弦 BM 平分 $\angle ABC$ 交 AC 于点 D，连结 MA，MC.

(1) 求 $\odot O$ 半径的长；

(2) 求证：$AB+BC=BM$.



（第 13 题）

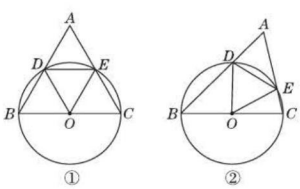
Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞(答案见 125 页)

拔尖角度 1 利用圆内接四边形的性质证等边三角形

14. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=60°$，以 BC 为直径的 $\odot O$ 分别交 AB，AC 于点 D，E，连结 OD，OE.

(1) 如图①，如果 $AB=AC$，求证：$\triangle ODE$ 是等边三角形；

(2) 如图②，如果 $AB\neq AC$，(1) 中的结论还能否成立？如果成立，请给出证明；如果不成立，请说明理由.



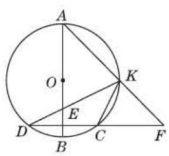
（第 14 题）

拔尖角度 2 利用圆内接四边形的性质进行函数值计算

15. 如图，AB 为 $\odot O$ 的直径，弦 $CD\perp AB$，垂足为 E，K 为 $\overset{\frown}{AC}$ 上一动点，AK，DC 的延长线相交于点 F，连结 CK，KD.

(1) 求证：$\angle AKD=\angle CKF$；

(2) 若 $AB=10$，$CD=6$，求 $\tan\angle CKF$ 的值.



（第 15 题）

趣味数学　年轮中蕴含着大量的气候、天文、医学和环境等方面的历史信息. 同时，在历史考古、林业研究、地质和公安破案等方面，年轮也起着重要的作用.（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

阶段方法技巧训练（三）

专训 1 巧用圆的基本性质解圆的五种关系

（答案见125页）

名师点金

圆的基本性质里面主要涉及弦、弧之间的关系，圆周角、圆心角之间的关系，弧、圆周角之间的关系，弦、圆心角之间的关系，弦、弧、圆心角之间的关系等，在解此类题目时，需要根据已知条件和所求问题去探求它们之间的内在联系，从而达到解决问题的目的.

关系1 弦、弧之间的关系

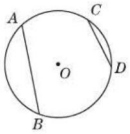
1. 如图，在⊙O中，$\overset{\frown}{AB}=2\overset{\frown}{CD}$，则下列结论正确的是(　　)

A. $AB>2CD$

B. $AB=2CD$

C. $AB<2CD$

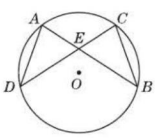
D. 以上都不正确



（第1题）

2. 【中考·自贡】如图，⊙O中，弦AB与CD相交于点E，$AB=CD$，连结AD，BC.

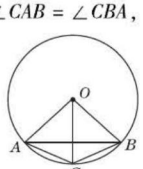
求证：(1)$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BC}$；(2)$AE=CE$.



（第2题）

关系2 圆周角、圆心角之间的关系

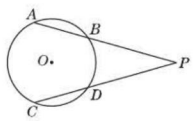
3. 如图，AB，AC，BC都是⊙O的弦，且$\angle CAB=\angle CBA$，求证：$\angle COB=\angle COA$.



（第3题）

关系3 弧、圆周角之间的关系

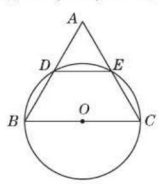
4. 【中考·南京】如图，⊙O的弦AB，CD的延长线相交于点P，且$AB=CD$. 求证：$PA=PC$.



（第4题）

关系4 弦、圆心角之间的关系

5. 如图，以等边三角形ABC的边BC为直径作⊙O交AB于D，交AC于E，连结DE. 试判断BD，DE，EC之间的数量关系，并说明理由.

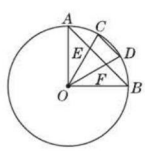


（第5题）

关系5 弦、弧、圆心角之间的关系

6. 如图，在⊙O中，$\angle AOB=90°$，且C，D是$\overset{\frown}{AB}$的三等分点，AB分别交OC，OD于点E，F.

求证：$AE=BF=CD$.



（第6题）

我国在北半球，日照偏南方，树木的年轮往往是“南疏北密”，因此在野外，树木的年轮也成为我们辨别方向的方式之一.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

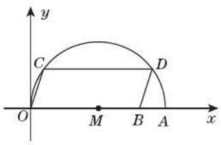
专训 2　垂径定理的四种应用技巧 (答案见 126 页)

名师点金

垂径定理的巧用主要体现在求点的坐标、解决最值问题、解决实际问题等. 解题时,巧用弦的一半、圆的半径和圆心到弦的垂线段三条线段组成的直角三角形,然后借助勾股定理,在这三个量中知道任意两个,可求出第三个.

技巧 1　巧用垂径定理求点的坐标

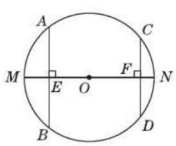
1. 如图,在平面直角坐标系中,点 A 的坐标是(10,0),点 B 的坐标是(8,0),点 C,D 在以 OA 为直径的半圆 M 上,且四边形 $OCDB$ 是平行四边形,求点 C 的坐标.



(第 1 题)

技巧 2　巧用垂径定理解决最值问题(对称法)

2. 如图,AB,CD 是半径为 5 的 $\odot O$ 的两条弦,$AB=8$,$CD=6$,MN 是直径,$AB\perp MN$ 于点 E,$CD\perp MN$ 于点 F,P 为直线 EF 上的任意一点,求 $PA+PC$ 的最小值.



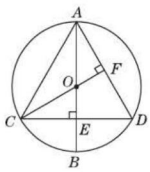
(第 2 题)

技巧 3　巧用垂径定理计算

3. 如图,已知圆 O 的直径 AB 垂直于弦 CD 于点 E,连结 CO 并延长交 AD 于点 F,且 $CF\perp AD$.

(1)求证:E 是 OB 的中点;

(2)若 $AB=8$,求 CD 的长.



(第 3 题)

技巧 4　巧用垂径定理解决实际问题(建模思想)

4. 某地有一座拱桥,它的桥拱是圆弧形,桥下的水面宽度为 7.2 m,拱顶高出水面 2.4 m,现有一艘宽 3 m,船舱顶部截面为长方形并高出水面 2 m 的货船要经过这里,此货船能顺利通过这座拱桥吗?

趣味数学　华罗庚说:"宇宙之大,粒子之微,火箭之速,化工之巧,地球之变,生物之谜,日用之繁,无处不用数学."

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

27.2 与圆有关的位置关系

27.2.1 点与圆的位置关系

名师点金

点和圆的位置关系的两点注意

(1) **等价关系**：点与圆的位置关系⇔点到圆心的距离 d 和半径 r 的关系，即由位置关系可以判断数量关系，反过来由数量关系也可以判断位置关系.

(2) **数形结合思想**：解决点与圆的位置关系问题的捷径是利用数形结合思想，借助图形进行判断.

1 夯实基础 · 逐点练

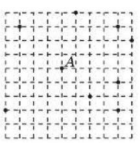
☞(答案见126页)

知识点 1 点与圆的位置关系

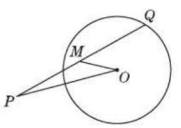
1. 如图，在网格(每个小正方形的边长均为1)中选取9个格点(格线的交点称为格点)，如果以 A 为圆心，r 为半径画圆，选取的格点中除点 A 外恰好有3个在圆内，则 r 的取值范围为(　　)

A. $2\sqrt{2}<r\leqslant\sqrt{17}$　　B. $\sqrt{17}<r\leqslant3\sqrt{2}$

C. $\sqrt{17}<r\leqslant5$　　D. $5<r\leqslant\sqrt{29}$



(第1题)



(第2题)

2. 【中考 · 贵港】如图，已知 P 是 $\odot O$ 外一点，Q 是 $\odot O$ 上的动点，线段 PQ 的中点为 M，连结 OP，OM. 若 $\odot O$ 的半径为2，$OP=4$，则线段 OM 的最小值是(　　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

知识点 2 确定圆的条件

3. 下列关于确定一个圆的说法中，正确的是(　　)

A. 三个点一定能确定一个圆

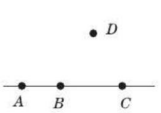
B. 以已知线段为半径能确定一个圆

C. 以已知线段为直径能确定一个圆

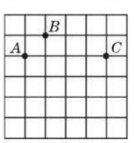
D. 菱形的四个顶点能确定一个圆

4. 如图，点 A，B，C 在同一条直线上，点 D 在直线 AB 外，过这四点中的任意3个点，能画圆的个数是(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4



(第4题)



(第5题)

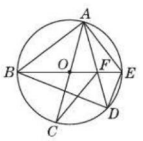
知识点 3 三角形的外接圆

5. 【中考 · 宁夏】如图，点 A，B，C 均在6×6的正方形网格的格点上，过 A，B，C 三点的外接圆除经过 A，B，C 三点外还能经过的格点数为_____.

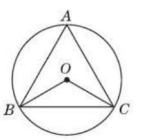
6. 【中考 · 内江】已知△ABC 的三边 a，b，c 满足 $a+b^2+|c-6|+28=4\sqrt{a-1}+10b$，则△$ABC$ 的外接圆半径为_____.

7. 【中考 · 河北】如图，AC，BE 是 $\odot O$ 的直径，弦 AD 与 BE 交于点 F，下列三角形中，外心不是点 O 的是(　　)

A. △ABE　　B. △ACF　　C. △ABD　　D. △ADE



(第7题)



(第9题)

8. 小颖同学在手工制作中，把一张边长为12 cm的等边三角形纸片贴到一张圆形纸片上，若三角形的三个顶点恰好都在这个圆上，则圆的半径为(　　)

A. $2\sqrt{3}$ cm　　B. $4\sqrt{3}$ cm　　C. $6\sqrt{3}$ cm　　D. $8\sqrt{3}$ cm

9. 【中考 · 自贡】如图，若△ABC 内接于半径为 R 的 $\odot O$，且 $\angle A=60°$，连结 OB，OC，则边 BC 的长为(　　)

A. $\sqrt{2}R$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}R$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}R$　　D. $\sqrt{3}R$

易错点 忽视三角形的外心与三角形的位置关系，出现漏解

10. 若点 O 是等腰三角形 ABC 的外心，且 $\angle BOC=60°$，底边 $BC=2$，则△ABC 的面积为(　　)

A. $2+\sqrt{3}$　　B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

C. $2+\sqrt{3}$ 或 $2-\sqrt{3}$　　D. $4+2\sqrt{3}$ 或 $2-\sqrt{3}$

关于数学思维举例：我们在大街上看到的下水道井盖为什么都是圆的呢？美术教师说："圆形更讨人喜欢."语文教师说："圆形显得饱满."(待续)

趣味数学

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

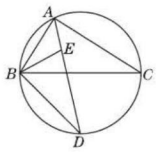
Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞(答案见 127 页)

考查角度 1　利用三角形外接圆的性质求线段的长

11. 【中考 · 临沂】如图，$\angle BAC$ 的平分线交 $\triangle ABC$ 的外接圆于点 D，$\angle ABC$ 的平分线交 AD 于点 E.

(1)求证：$DE = DB$.

(2)若 $\angle BAC = 90°$，$BD = 4$，求 $\triangle ABC$ 的外接圆的半径.



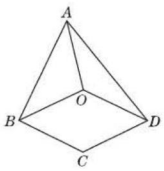
(第 11 题)

考查角度 2　利用确定圆的条件说明边角相等

12. 【中考 · 南京】如图，在四边形 $ABCD$ 中，$BC = CD$，$\angle C = 2\angle BAD$，O 是四边形 $ABCD$ 内一点，且 $OA = OB = OD$.

求证：(1) $\angle BOD = \angle C$；

(2)四边形 $OBCD$ 是菱形.



(第 12 题)

Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞(答案见 127 页)

拔尖角度 1　利用二次函数的性质求三角形外接圆中的最值

13. 【中考 · 台州】如图，$\triangle ABC$ 是 $\odot O$ 的内接三角形，点 D 在弧 BC 上，点 E 在弦 AB 上(E 不与 A 重合)，且四边形 $BDCE$ 为菱形.

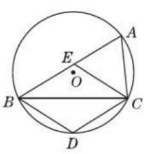
(1)求证：$AC = CE$.

(2)求证：$BC^2 - AC^2 = AB \cdot AC$.

(3)已知 $\odot O$ 的半径为 3.

①若 $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{5}{3}$，求 BC 的长；

②当 $\dfrac{AB}{AC}$ 为何值时，$AB \cdot AC$ 的值最大？



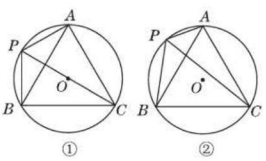
(第 13 题)

拔尖角度 2　利用三角形外接圆判断线段的和差关系

14. 已知 $\odot O$ 是等边三角形 ABC 的外接圆.

(1)如图①，若 PC 为 $\odot O$ 的直径，连结 AP，BP，求证：$AP + BP = PC$.

(2)如图②，若点 P 是弧 AB 上任意一点，连结 AP，BP，CP，那么结论 $AP + BP = PC$ 还成立吗？请说明理由.



(第 14 题)

趣味数学　而数学教师解释为两点理由：一、用同等材料制作的圆形管道进水口径面积最大；二、圆形是平面上与圆心等距离的所有点的集合.(待续)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

27.2.2 直线与圆的位置关系

名师点金

直线和圆的位置关系、直线和圆的公共点的个数、圆心 O 到直线的距离 d 与圆的半径 r 的大小三者间的关系：直线和圆相交⇔两个公共点⇔$d<r$；直线和圆相切⇔一个公共点⇔$d=r$；直线和圆相离⇔无公共点⇔$d>r$.

Ⅰ 夯实基础 · 逐点练

（答案见127页）

知识点① 直线和圆的位置关系与直线和圆的公共点个数间的关系

1. 若直线 m 与⊙O 的公共点个数不小于1，则直线 m 与⊙O 的位置关系是（　　）

A. 相交　　B. 相切

C. 相交或相切　　D. 相离

2. 下列命题：①如果一条直线与圆没有公共点，那么这条直线与圆相离；②如果一条射线与圆没有公共点，那么这条射线所在的直线与圆相离；③如果一条线段与圆没有公共点，那么这条线段所在的直线与圆相离. 其中为真命题的有（　　）

A. ①　　B. ②

C. ③　　D. ①②③

知识点② 直线与圆的位置关系的判定

3. 【中考 · 湘西州】在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$BC=3$ cm，$AC=4$ cm，以点 C 为圆心，2.5 cm 为半径画圆，则⊙C 与直线 AB 的位置关系是（　　）

A. 相交　　B. 相切

C. 相离　　D. 不能确定

4. 已知⊙O 的半径为3，M 为直线 AB 上一点，若 $MO=3$，则直线 AB 与⊙O 的位置关系为（　　）

A. 相切　　B. 相交

C. 相切或相离　　D. 相切或相交

5. 【中考 · 广州】平面内，⊙O 的半径为1，点 P 到 O 的距离为2，过点 P 可作⊙O 的切线的条数为（　　）

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 无数条

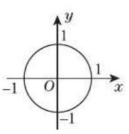
6. 如图，在直角坐标系中，⊙O 的半径为1，则直线 $y=-x+\sqrt{2}$ 与⊙O 的位置关系是（　　）

A. 相离

B. 相交

C. 相切

D. 以上三种情形都有可能



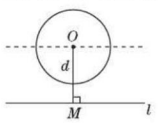
（第6题）

知识点③ 直线与圆的位置关系的性质

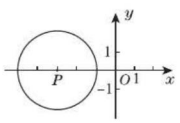
7. 【中考 · 永州】如图，给定一个半径长为2的圆，圆心 O 到水平直线 l 的距离为 d，即 $OM=d$. 我们把圆上到直线 l 的距离等于1的点的个数记为 m. 如 $d=0$ 时，l 为经过圆心 O 的一条直线，此时圆上有四个到直线 l 的距离等于1的点，即 $m=4$，由此可知：

（1）当 $d=3$ 时，$m=$_____；

（2）当 $m=2$ 时，d 的取值范围是_____.



（第7题）



（第9题）

8. 以坐标原点 O 为圆心，作半径为2的圆，若直线 $y=-x+b$ 与⊙O 相交，则 b 的取值范围是（　　）

A. $0\leqslant b<2\sqrt{2}$　　B. $-2\sqrt{2}\leqslant b\leqslant 2\sqrt{2}$

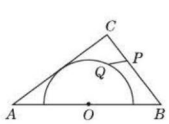
C. $-2\sqrt{3}<b<2\sqrt{3}$　　D. $-2\sqrt{2}<b<2\sqrt{2}$

9. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，半径为2的⊙P 的圆心 P 的坐标为 $(-3,0)$，将⊙P 沿 x 轴正方向平移，使⊙P 与 y 轴相切，则平移的距离为（　　）

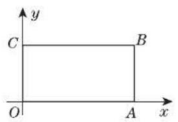
A. 1　　B. 1或5　　C. 3　　D. 5

10. 【中考 · 台州】如图，在△ABC 中，$AB=10$，$AC=8$，$BC=6$，以边 AB 的中点 O 为圆心，作半圆与 AC 相切，点 P，Q 分别是边 BC 和半圆上的动点，连结 PQ，则 PQ 长的最大值与最小值的和是（　　）

A. 6　　B. $2\sqrt{13}+1$　　C. 9　　D. $\frac{32}{3}$



（第10题）



（第11题）

易错点 判断圆和各边相切时考虑不全而漏解

11. 如图，在平面直角坐标系第一象限内有一矩形 $OABC$，$B(4,2)$，现有一圆同时和这个矩形的三边都相切，则此圆的圆心 P 的坐标为_____.

所以圆形井盖不会掉进圆形井内，如果做成正方形的，则把盖子沿着正方形的对角线放下时，它就会落入下水道内.

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

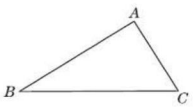
Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞(答案见 128 页)

考查角度 1 利用作图条件判断直线与圆的位置关系

12. 【中考 · 怀化】如图,在 Rt△ABC 中,∠BAC = 90°.

(1)先作∠ACB 的平分线交 AB 边于点 P,再以点 P 为圆心,PA 长为半径作⊙P;(要求:尺规作图,保留作图痕迹,不写作法)

(2)请你判断 BC 与(1)中⊙P 的位置关系,并证明你的结论.



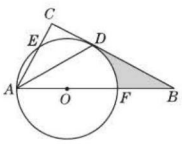
(第 12 题)

考查角度 2 利用直线与圆心的距离判断直线与圆的位置关系

13. 【中考 · 枣庄】如图,在△ABC 中,∠C = 90°,∠BAC 的平分线交 BC 于点 D,点 O 在 AB 上,以点 O 为圆心,OA 为半径的圆恰好经过点 D,分别交 AC,AB 于点 E,F.

(1)试判断直线 BC 与⊙O 的位置关系,并说明理由;

(2)若 $BD = 2\sqrt{3}$,$BF = 2$,求阴影部分的面积(结果保留 π).



(第 13 题)

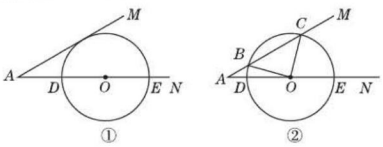
Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞(答案见 128 页)

拔尖角度 1 利用直线与圆的位置关系探究确定其位置关系的条件

14. 已知∠MAN = 30°,O 为边 AN 上一点,以 O 为圆心,2 为半径作⊙O,交 AN 于 D,E 两点,设 $AD = x$.

(1)如图①,当 x 取何值时,⊙O 与 AM 相切?

(2)如图②,当 x 取何值时,⊙O 与 AM 相交于 B,C 两点,且∠BOC = 90°?



(第 14 题)

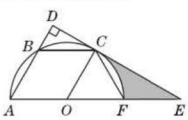
拔尖角度 2 利用直线和圆的位置关系求周长问题

15. 【中考 · 扬州】如图,已知平行四边形 $OABC$ 的三个顶点 A,B,C 在以 O 为圆心的半圆上,过点 C 作 $CD \perp AB$,分别交 AB,AO 的延长线于点 D,E,AE 交半圆 O 于点 F,连结 CF.

(1)判断直线 DE 与半圆 O 的位置关系,并说明理由.

(2)①求证:$CF = OC$;

②若半圆 O 的半径为 12,求阴影部分的周长.



(第 15 题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

27.2.3 切 线
第1课时 切 线

名师点金

证明直线与圆相切的三种途径

(1)**定义法**：和圆有且只有一个公共点的直线是圆的切线.

(2)**数量法**($d=r$)：圆心到直线的距离等于半径的直线是圆的切线.

(3)**判定定理**：经过圆的半径的外端且垂直于这条半径的直线是圆的切线.

1 夯实基础·逐点练 ☞(答案见128页)

知识点1 切线的判定

1. 下列四个命题：

①与圆有公共点的直线是圆的切线；

②垂直于圆的半径的直线是圆的切线；

③到圆心的距离等于半径的直线是圆的切线；

④过直径端点，且垂直于此直径的直线是圆的切线.

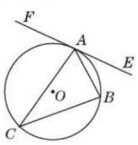
其中是真命题的是(　　)

A. ①②　　B. ②③　　C. ③④　　D. ①④

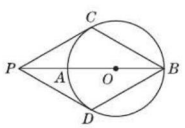
2. 如图，$\triangle ABC$是$\odot O$的内接三角形，下列选项中，能使过点A的直线EF与$\odot O$相切于点A的条件是(　　)

A. $\angle EAB=\angle C$　　B. $\angle EAB=\angle BAC$

C. $EF\perp AC$　　D. AC是$\odot O$的直径



(第2题)



(第3题)

3. 如图，点P在$\odot O$的直径BA的延长线上，PC与$\odot O$相切，切点为C，点D在$\odot O$上，连结PD，BD，已知$PC=PD=BC$. 下列结论：

①PD与$\odot O$相切；②四边形$PCBD$是菱形；

③$PO=AB$；④$\angle PDB=120°$，

其中正确的有(　　)

A. 4个　　B. 3个　　C. 2个　　D. 1个

知识点2 切线的性质

4. 下列说法正确的是(　　)

A. 圆的切线垂直于半径

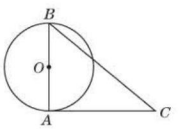
B. 垂直于切线的直线经过圆心

C. 经过圆心且垂直于切线的直线经过切点

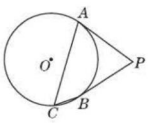
D. 经过切点的直线经过圆心

5. 【中考·重庆】如图，AB是$\odot O$的直径，AC是$\odot O$的切线，A为切点，若$\angle C=40°$，则$\angle B$的度数为(　　)

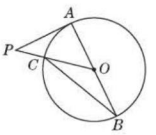
A. 60°　　B. 50°　　C. 40°　　D. 30°



(第5题)



(第6题)



(第7题)

6. 【中考·福建】如图，PA，PB是$\odot O$的切线，A，B为切点，点C在$\odot O$上，且$\angle ACB=55°$，则$\angle APB$等于(　　)

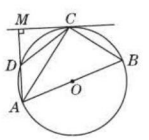
A. 55°　　B. 70°　　C. 110°　　D. 125°

7. 【中考·自贡】如图，AB是$\odot O$的直径，PA切$\odot O$于点A，PO交$\odot O$于点C，连结BC，若$\angle P=40°$，则$\angle B$等于(　　)

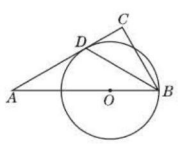
A. 20°　　B. 25°　　C. 30°　　D. 40°

8. 【中考·泰安】如图，圆内接四边形$ABCD$的边AB过圆心O，过点C的切线与边AD所在直线垂直于点M，若$\angle ABC=55°$，则$\angle ACD$等于(　　)

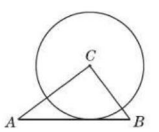
A. 20°　　B. 35°　　C. 40°　　D. 55°



(第8题)



(第9题)



(第10题)

9. 【中考·重庆】如图，在$\triangle ABC$中，$\angle A=30°$，点O是边AB上一点，以点O为圆心，以OB为半径作圆，$\odot O$恰好与AC相切于点D，连结BD. 若BD平分$\angle ABC$，$AD=2\sqrt{3}$，则线段CD的长是(　　)

A. 2　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\frac{3}{2}$　　D. $\frac{3}{2}\sqrt{3}$

易错点 忽视“过切点”这一条件而致错

10. 【中考·嘉兴】如图，$\triangle ABC$中，$AB=5$，$BC=3$，$AC=4$，以点C为圆心的圆与AB相切，则$\odot C$的半径为(　　)

A. 2.3　　B. 2.4　　C. 2.5　　D. 2.6

轮胎：最开始出现的轮胎是实心的，边缘也不是圆形的，而是不规则的多边形，车子因此在行进中颠簸得厉害，而且由于是实心的原因，十分耗材和沉重.(待续)

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

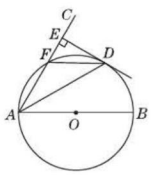
Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞(答案见 129 页)

考查角度 1　利用公共点“连半径，证垂直”判定切线

11. 【中考 · 淮安】如图，AB 是 $\odot O$ 的直径，AC 与 $\odot O$ 交于点 F，弦 AD 平分 $\angle BAC$，$DE \perp AC$，垂足为 E.

(1) 试判断直线 DE 与 $\odot O$ 的位置关系，并说明理由；

(2) 若 $\odot O$ 的半径为 2，$\angle BAC = 60°$，求线段 EF 的长.



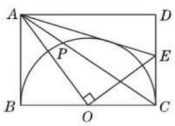
(第 11 题)

考查角度 2　利用圆心“作垂直，证半径”判定切线

12. 【中考 · 贵港】如图，在矩形 $ABCD$ 中，以 BC 边为直径作半圆 O，$OE \perp OA$ 交 CD 边于点 E，对角线 AC 与半圆 O 的另一个交点为 P，连结 AE.

(1) 求证：AE 是半圆 O 的切线；

(2) 若 $PA = 2$，$PC = 4$，求 AE 的长.



(第 12 题)

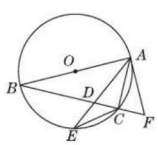
Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞(答案见 129 页)

拔尖角度 1　利用切线的判定与性质求线段长

13. 【中考 · 通辽】如图，$\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$，AB 是 $\odot O$ 的直径，$AC = CE$，连结 AE 交 BC 于点 D，延长 DC 至 F 点，使 $CF = CD$，连结 AF.

(1) 判断直线 AF 与 $\odot O$ 的位置关系，并说明理由；

(2) 若 $AC = 10$，$\tan \angle CAE = \dfrac{3}{4}$，求 AE 的长.



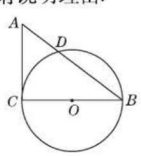
(第 13 题)

拔尖角度 2　利用切线的性质和判定探究切线条件

14. 【中考 · 枣庄】如图，在 Rt$\triangle ACB$ 中，$\angle C = 90°$，$AC = 3$ cm，$BC = 4$ cm，以 BC 为直径作 $\odot O$ 交 AB 于点 D.

(1) 求线段 AD 的长度；

(2) 点 E 是线段 AC 上的一点，试问：当点 E 在什么位置时，直线 ED 与 $\odot O$ 相切？请说明理由.



(第 14 题)

趣味数学　后来历经多年的努力改进，不规则的多边形逐渐被接近圆形的轮胎所取代. 同时，轴和轮胎的关系在同时期也得到了改进，轴的出现使材料大为节省，车辆也变得轻盈起来.

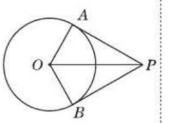
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第2课时　切线长

名师点金

根据切线长定理，可以得到两个重要结论：

①从圆外一点可以引圆的两条切线，两条切线的切线长相等；②这一点和圆心的连线，平分两条切线所成的夹角. P 为 $\odot O$ 外的任意一点，PA，PB 为 $\odot O$ 的两条切线，切点分别为 A，B，如图所示，则 $PA=PB$，$\angle APO=\angle BPO$，由此结合三角形内角和定理，还可以得到 $\angle AOP=\angle BOP$.



1 夯实基础 · 逐点练

（答案见129页）

知识点1 切线长定理

1. 下列说法正确的是(　　)

A. 过任意一点总可以作圆的两条切线

B. 圆的切线长就是圆的切线的长度

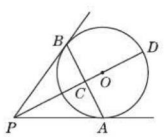
C. 过圆外一点所画的圆的两条切线长相等

D. 过圆外一点所画的圆的切线长一定大于圆的半径

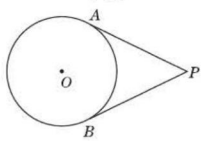
2. 【中考 · 益阳】如图，PA，PB 为圆 O 的切线，切点分别为 A，B，PO 交 AB 于点 C，PO 的延长线交圆 O 于点 D，下列结论不一定成立的是(　　)

A. $PA=PB$　　B. $\angle BPD=\angle APD$

C. $AB\perp PD$　　D. AB 平分 PD



（第2题）



（第3题）

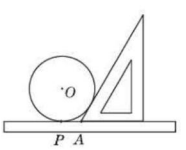
3. 【中考 · 杭州】如图，P 为圆 O 外一点，PA，PB 分别切圆 O 于 A，B 两点，若 $PA=3$，则 $PB=$(　　)

A. 2　　B. 3

C. 4　　D. 5

知识点2 切线长定理的应用

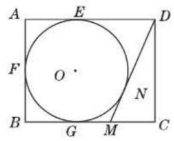
4. 为了测量一个圆形铁环的半径，某同学采用如下方法：将铁环平放在水平桌面上，用一个含有30°角的三角尺和一把刻度尺，按如图所示的方法得到相关数据，进而可求得铁环的半径. 若 P 为切点，测得 $PA=5$ cm，则铁环的半径是_____.



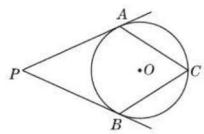
（第4题）

5. 【中考 · 南京】如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$AD=5$，AD，AB，BC 分别与 $\odot O$ 相切于 E，F，G 三点，过点 D 作 $\odot O$ 的切线交 BC 于点 M，切点为 N，则 DM 的长为(　　)

A. $\frac{13}{3}$　　B. $\frac{9}{2}$　　C. $\frac{4}{3}\sqrt{13}$　　D. $2\sqrt{5}$



（第5题）



（第6题）

6. 【中考 · 哈尔滨】如图，PA，PB 分别与 $\odot O$ 相切于 A，B 两点，点 C 为 $\odot O$ 上一点，连结 AC，BC，若 $\angle P=50°$，则 $\angle ACB$ 的度数为(　　)

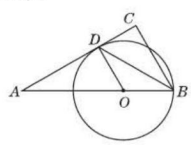
A. 60°　　B. 75°

C. 70°　　D. 65°

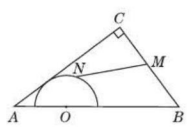
7. 【中考 · 贺州】如图，在 $\triangle ABC$ 中，O 是 AB 边上的点，以 O 为圆心，OB 为半径的 $\odot O$ 与 AC 相切于点 D，BD 平分 $\angle ABC$，$AD=\sqrt{3}OD$，$AB=12$，CD 的长是(　　)

A. $2\sqrt{3}$　　B. 2

C. $3\sqrt{3}$　　D. $4\sqrt{3}$



（第7题）



（第8题）

8. 【中考 · 玉林】如图，在 Rt $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=4$，$BC=3$，点 O 是 AB 的三等分点，半圆 O 与 AC 相切，M，N 分别是 BC 与半圆弧上的动点，则 MN 的最小值和最大值之和是(　　)

A. 5　　B. 6

C. 7　　D. 8

易错点 应用切线长定理时因考虑不全而致错

9. 既有外接圆，又有内切圆的平行四边形是(　　)

A. 矩形

B. 菱形

C. 正方形

D. 矩形或菱形

古人云："没有规矩，不成方圆." 可见在中国古代就有了规和矩. 我们知道，"规" 是指画圆的圆规；"矩" 是指折成直角的曲尺，尺上有刻度.（待续）

趣味数学

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

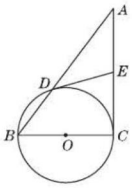
Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞(答案见 129 页)

考查角度 1 利用切线长定理求线段长

10. 【中考 · 丽水】如图,在 Rt△ABC 中,$\angle C=90°$,以 BC 为直径的⊙O 交 AB 于点 D,切线 DE 交 AC 于点 E.

(1)求证:$\angle A=\angle ADE$;

(2)若 $AD=16$,$DE=10$,求 BC 的长.



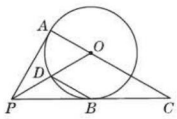
(第 10 题)

考查角度 2 利用切线长定理证线段平行

11. 【中考 · 南京】如图,PA,PB 是⊙O 的切线,A,B 为切点,连结 AO 并延长,交 PB 的延长线于点 C,连结 PO,交⊙O 于点 D.

(1)求证:PO 平分 $\angle APC$;

(2)连结 DB,若 $\angle C=30°$,求证:$DB\parallel AC$.



(第 11 题)

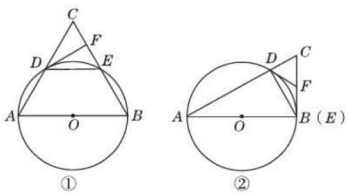
Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞(答案见 130 页)

拔尖角度 1 利用切线长定理探究动点问题

12. 【中考 · 威海】已知:AB 为⊙O 的直径,$AB=2$,弦 $DE=1$,直线 AD 与 BE 相交于点 C,弦 DE 在⊙O 上运动且保持长度不变,⊙O 的切线 DF 交 BC 于点 F.

(1)如图①,若 $DE\parallel AB$,求证:$CF=EF$.

(2)如图②,当点 E 运动至与点 B 重合时,试判断 CF 与 BF 是否相等,并说明理由.

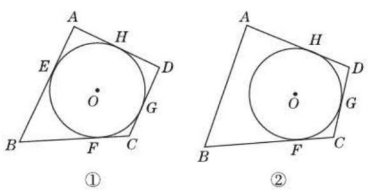


(第 12 题)

拔尖角度 2 利用切线长定理说明与切线相关的四边形边的关系

13. (1)如图①,四边形 $ABCD$ 是⊙O 的外切四边形,切点分别为 E,F,G,H,说明 $AB+CD$ 与 $BC+AD$ 的大小关系;

(2)如图②,四边形 $ABCD$ 的三边切⊙O 于点 F,G,H,说明 $AB+CD$ 与 $BC+AD$ 的大小关系.



(第 13 题)

趣味数学　发明规矩的确切年代已无从查考,但在公元前 15 世纪的甲骨文中,已有“规”“矩”二字了.《史记》中也有这样的记载:夏禹治水的时候,是“左准绳,右规矩”.(待续)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第3课时　三角形的内切圆

名师点金

直角三角形内切圆半径的求法

设直角三角形的两直角边长分别为 a,b，斜边长为 c，r 为其内切圆的半径，则 $r=\frac{1}{2}(a+b-c)$. 若从面积推导，则 $r=\frac{ab}{a+b+c}$. 这两个结论可在做选择题和填空题时直接应用.

1 夯实基础·逐点练 ☞（答案见130页）

知识点1 三角形内切圆及相关概念

1. 下列说法错误的是(　　)

A. 三角形的内切圆与三角形的三边都相切

B. 一个三角形一定有唯一一个内切圆

C. 一个圆一定有唯一一个外切三角形

D. 等边三角形的内切圆与外接圆是同心圆

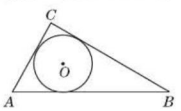
2. 如图，$\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的内切圆，则点 O 是 $\triangle ABC$ 的(　　)

A. 三条边的垂直平分线的交点

B. 三条角平分线的交点

C. 三条中线的交点

D. 三条高的交点



（第2题）

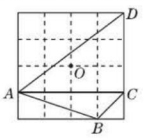
3. 【中考·河北】如图为 4×4 的网格图，A,B,C,D,O 均在格点上，点 O 是(　　)

A. $\triangle ACD$ 的外心

B. $\triangle ABC$ 的外心

C. $\triangle ACD$ 的内心

D. $\triangle ABC$ 的内心



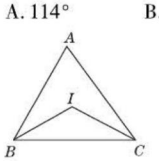
（第3题）

4. 下列说法：①三角形的内心不一定在三角形的内部；②若点 I 是 $\triangle ABC$ 的内心，则 AI 平分 $\angle BAC$；③三角形有唯一的内切圆，圆有唯一的外切三角形，其中正确的有(　　)

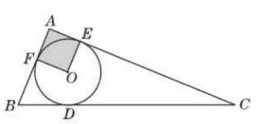
A. 0个　　B. 1个　　C. 2个　　D. 3个

5. 【中考·眉山】如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=66°$，点 I 是内心，则 $\angle BIC$ 的大小为(　　)

A. 114°　　B. 122°　　C. 123°　　D. 132°



（第5题）



（第6题）

知识点2 三角形内切圆的性质

6. 【中考·云南】如图，$\triangle ABC$ 的内切圆 $\odot O$ 与 BC,CA,AB 分别相切于点 D,E,F，且 $AB=5,BC=13,CA=12$，则阴影部分(即四边形 $AEOF$)的面积是(　　)

A. 4　　B. 6.25　　C. 7.5　　D. 9

7. 【中考·德州】《九章算术》是我国古代内容极为丰富的数学名著，书中有下列问题："今有勾八步，股十五步. 问勾中容圆径几何？"其意思是"今有直角三角形，勾(短直角边)长为8步，股(长直角边)长为15步，问该直角三角形能容纳的圆形(内切圆)直径是多少？"下列选项正确的是(　　)

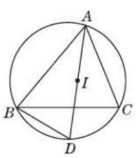
A. 3步　　B. 5步　　C. 6步　　D. 8步

8. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°,AC=3,AB=5$，则它的内切圆与外接圆半径分别为(　　)

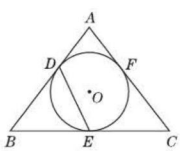
A. 1.5,2.5　　B. 2,5　　C. 1,2.5　　D. 2,2.5

9. 【中考·荆门】如图，$\triangle ABC$ 内心为 I，连接 AI 并延长交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 D，则线段 DI 与 DB 的关系是(　　)

A. $DI=DB$　　B. $DI>DB$　　C. $DI<DB$　　D. 不确定



（第9题）



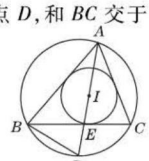
（第10题）

10. 【中考·泸州】如图，等腰 $\triangle ABC$ 的内切圆 $\odot O$ 与 AB,BC,CA 分别相切于点 D,E,F，且 $AB=AC=5$，$BC=6$，则 DE 的长是(　　)

A. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$　　B. $\frac{3\sqrt{10}}{5}$　　C. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$　　D. $\frac{6\sqrt{5}}{5}$

易错点 混淆外心与内心的概念

11. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 I 是 $\triangle ABC$ 的内心，$\angle BAC$ 的平分线和 $\triangle ABC$ 的外接圆相交于点 D，和 BC 交于点 E. 求证：$DI=DB$.



（第11题）

这意思是说，夏禹是左手拿着水准绳，右手拿着规和矩进行测量，从而规划出治水方案的. 由此说明在夏禹治水的年代就有了规和矩这两种几何工具了.

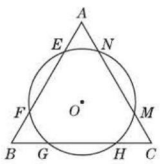
趣味数学

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法·提升练 ☞(答案见130页)

考查角度1 利用内心定义证明点为三角形内心

12. 如图,以点 O 为圆心的圆与 $\triangle ABC$ 的三边分别交于点 E,F,G,H,M,N,且 $EF=GH=MN$,求证:点 O 是 $\triangle ABC$ 的内心.



(第12题)

考查角度2 利用阅读材料求三角形内切圆的半径

13. 【中考·桂林】阅读下列材料:

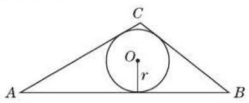
海伦公式:$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$(其中 a,b,c 是三角形的三边长,$p=\dfrac{a+b+c}{2}$,S 为三角形的面积).

根据上述材料,解答下列问题:

如图,在 $\triangle ABC$ 中,$BC=5,AC=6,AB=9$.

(1)用海伦公式求 $\triangle ABC$ 的面积;

(2)求 $\triangle ABC$ 的内切圆半径 r.



(第13题)

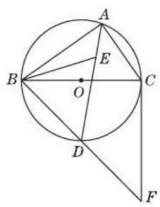
Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞(答案见130页)

拔尖角度1 利用三角形的内心的性质判定圆的切线

14. 【中考·黄石】如图,$\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆,BC 为 $\odot O$ 的直径,点 E 为 $\triangle ABC$ 的内心,连结 AE 并延长交 $\odot O$ 于点 D,连结 BD 并延长至点 F,使得 $DF=BD$,连结 CF,BE.

(1)求证:$DB=DE$.

(2)求证:直线 CF 为 $\odot O$ 的切线.



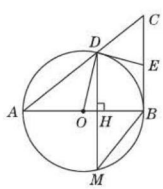
(第14题)

拔尖角度2 利用三角形内切圆性质进行相关计算

15. 【中考·呼和浩特】如图,以 Rt$\triangle ABC$ 的直角边 AB 为直径的 $\odot O$ 交斜边 AC 于点 D,过点 D 作 $\odot O$ 的切线与 BC 交于点 E,弦 DM 与 AB 垂直,垂足为 H.

(1)求证:E 为 BC 的中点;

(2)若 $\odot O$ 的面积为 12π,两个三角形 $\triangle AHD$ 和 $\triangle BMH$ 的外接圆面积之比为3,求 $\triangle DEC$ 的内切圆面积 S_1 和四边形 $OBED$ 的外接圆面积 S_2 的比.



(第15题)

趣味数学 天才=1%的灵感+99%的汗水. ——爱迪生

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

* 第4课时　圆与圆的位置关系

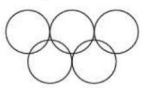
名师点金

解两圆位置关系的问题常作的两条辅助线：公共弦、公切线.

Ⅰ 夯实基础·逐点练 （答案见131页）

知识点1 两圆位置关系的判定

1. 如图所示的图案由五个圆组成，在这五个圆中，不存在的位置关系是（　　）



（第1题）

A. 外离　　B. 内切　　C. 外切　　D. 相交

2. 生活处处皆学问. 自行车车轮所在两圆的位置关系是（　　）

A. 外切　　B. 内切　　C. 外离　　D. 内含

3. 若两圆的半径分别是4 cm和5 cm，圆心距为10 cm，则这两个圆的位置关系是（　　）

A. 内切　　B. 相交　　C. 外切　　D. 外离

4. 两圆的半径分别为3和5，圆心距为7，则两圆的位置关系是（　　）

A. 内切　　B. 相交　　C. 外切　　D. 外离

5. 已知两圆的半径分别是4和9，圆心距为13，那么这两圆的位置关系是_____.

6. 已知$\odot O_1$和$\odot O_2$的半径分别是一元二次方程$(x-1)(x-2)=0$的两根，且$O_1O_2=2$，则$\odot O_1$和$\odot O_2$的位置关系是_____.

知识点2 两圆位置关系的性质

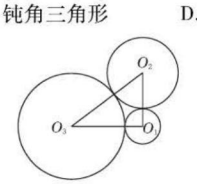
7. 外切两圆的半径分别为2 cm和3 cm，则两圆的圆心距是（　　）

A. 1 cm　　B. 2 cm　　C. 3 cm　　D. 5 cm

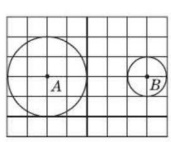
8. 如图，$\odot O_1$，$\odot O_2$，$\odot O_3$两两相外切，$\odot O_1$的半径$r_1=1$，$\odot O_2$的半径$r_2=2$，$\odot O_3$的半径$r_3=3$，则$\triangle O_1O_2O_3$是（　　）

A. 锐角三角形　　B. 直角三角形

C. 钝角三角形　　D. 锐角三角形或钝角三角形



（第8题）



（第11题）

9. 已知两圆内切，它们的半径分别为3和6，则这两圆的圆心距d的取值满足（　　）

A. $d>9$　　B. $d=9$　　C. $3<d<9$　　D. $d=3$

10. 已知两圆的半径分别为2和3，圆心距为d，若两圆有公共点，则d的取值范围是（　　）

A. $d=1$　　B. $d=5$　　C. $1\leqslant d\leqslant 5$　　D. $1<d<5$

11. 如图，在8×6的网格图（每个小正方形的边长均为1个单位）中，$\odot A$的半径为2个单位，$\odot B$的半径为1个单位，要使运动的$\odot B$与静止的$\odot A$内切，应将$\odot B$由图示位置向左平移（　　）个单位.

A. 2　　B. 4　　C. 6　　D. 4或6

12. 填空：两圆公切线条数与两圆的位置关系.

（1）两圆内切⇔_____；

（2）两圆外切⇔_____；

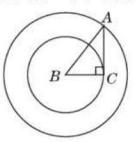
（3）两圆外离⇔_____；

（4）两圆相交⇔_____；

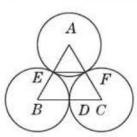
（5）两圆内含⇔_____.

13. 已知相切两圆的半径分别为5 cm和4 cm，则这两个圆的圆心距是_____.

14. 如图，在Rt$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，$AC=3$. 将$\triangle ABC$绕B点顺时针旋转一周，则分别以BA，BC为半径的圆形成一圆环，该圆环的面积为_____.



（第14题）



（第15题）

15. 【中考·梧州】如图，三个半径都为3 cm的圆两两外切，切点分别为D，E，F，则EF的长为_____cm.

易错点 对两圆相切的意义理解不透而漏解

16. 若两圆相切，圆心距为7，其中一圆的半径为10，求另一个圆的半径.

《守株待兔》这则寓言家喻户晓，两千年来，人们一直认为“待兔”不得，罪在“守株”！其实，抱怨“守株”是没有道理的. 问题的关键在于兔子的运动规律.（待续）

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

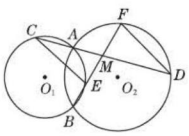
Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞(答案见 131 页)

考查角度 1 利用两圆位置关系的性质证两线段间的数量及位置关系

17. 如图，$\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 相交于点 A,B，过点 A 的直线分别交两圆于点 C,D，点 M 是 CD 的中点，直线 BM 分别交两圆于点 E,F. 求证：

(1) $CE /\!/ DF$；

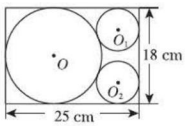
(2) $ME = MF$.



（第 17 题）

考查角度 2 利用两圆位置关系的性质解实际应用题

18. 三江铁器厂的王师傅要在一长为 25 cm，宽为 18 cm 的矩形薄铁板上裁出一个最大的圆和两个尽可能大的小圆，他画出了如图所示的草图，但他在求小圆半径时遇到了困难，你能帮助王师傅计算出小圆的半径吗？试写出解答过程.



（第 18 题）

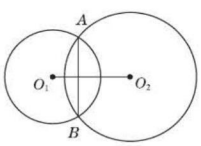
Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞(答案见 131 页)

拔尖角度 1 两圆位置关系与方程的综合应用

19. 已知 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 的圆心距为 6，两圆的半径分别是方程 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 的两个根，求 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 的位置关系.

拔尖角度 2 求相交两圆的公共弦长

20. 【中考 · 娄底】如图，$\odot O_1$，$\odot O_2$ 相交于 A,B 两点，两圆半径分别为 6 cm 和 8 cm，连心线 O_1O_2 的长为 10 cm，求弦 AB 的长.



（第 20 题）

趣味数学　如果通往大树的路是兔子所必经的，那么“守株”又将何妨？然而世界是一个不断运动的世界.

（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

阶段方法技巧训练（四）

专训 1 有关圆的位置关系的六种判断方法 ☞（答案见131页）

名师点金

与圆有关的位置关系包括点与圆的位置关系、直线与圆的位置关系和圆与圆的位置关系，判断它们的关系主要有定义法、比较法、交点个数法、距离比较法等.

类型1 点与圆的位置关系

方法1 定义法

1. 【中考·湘西州】⊙O的半径为5 cm，点A到圆心O的距离$OA=3$ cm，则点A与⊙O的位置关系为(　　)

A. 点A在圆上　　B. 点A在圆内

C. 点A在圆外　　D. 无法确定

2. 在矩形$ABCD$中，$AB=8$，$BC=3\sqrt{5}$，点P在边AB上，且$BP=3AP$，如果圆P是以点P为圆心，PD的长为半径的圆，那么下列判断正确的是(　　)

A. 点B，C均在圆P外

B. 点B在圆P外，点C在圆P内

C. 点B在圆P内，点C在圆P外

D. 点B，C均在圆P内

方法2 比较法

3. 设⊙O的半径为2，点P到圆心的距离$OP=m$，且m使关于x的方程$2x^2-2\sqrt{2}x+m-1=0$有实数根，则点P与⊙O的位置关系是_____.

4. ⊙O的半径$r=5$ cm，圆心O到直线l的距离$OD=3$ cm，在直线l上有P，Q，R三点，且有$PD=4$ cm，$QD=5$ cm，$RD=3$ cm，那么P，Q，R三点与⊙O的位置关系各是怎样的?

类型2 直线与圆的位置关系

方法3 交点个数法

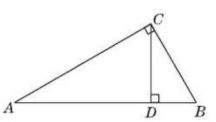
5. 已知直线l经过⊙O上的A，B两点，则直线l与⊙O的位置关系是(　　)

A. 相切　　B. 相交

C. 相离　　D. 无法确定

方法4 距离比较法

6. 如图所示，在△ABC中，$\angle ACB=90°$，$\angle A=30°$，$CD\perp AB$，$BC=4$ cm，以点C为圆心，4 cm为半径画⊙C，试判断直线BD与⊙C的位置关系，并说明理由.



（第6题）

类型3 圆与圆的位置关系

方法5 公共点法

7. 已知两圆的半径分别为3和4，圆心距为d，若两圆有公共点，则d的取值范围是(　　)

A. $d=1$　　B. $d=7$

C. $1\leqslant d\leqslant 7$　　D. $1<d<7$

方法6 距离比较法

8. 【中考·内江】已知⊙O_1的半径为3 cm，⊙O_2的半径为2 cm，圆心距$O_1O_2=4$ cm，则⊙O_1与⊙O_2的位置关系是(　　)

A. 外离　　B. 外切　　C. 相交　　D. 内切

兔子的活动，在时空的长河中，划出一条千奇百怪的轨迹，而希望这条轨迹能与树木在时空中的轨线再次相交，无疑是极为渺茫的，因此，这正是这位农人悲剧之所在！

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

专训 2　切线的判定和性质的四种应用类型 ☞(答案见 131 页)

名师点金

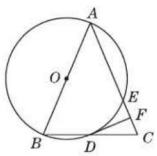
圆的切线的判定和性质的应用较广泛,一般先利用圆的切线的判定方法判定切线,再利用切线的性质进行线段和角的计算或论证,在计算或论证中常通过作辅助线解决有关问题.

类型 1　应用于求线段的长

1. 【中考·咸宁】如图,在△ABC中,$AB=AC$,以AB为直径的⊙O与边BC,AC分别交于D,E两点,过点D作$DF\perp AC$,垂足为点F.

(1)求证:DF是⊙O的切线.

(2)若$AE=4$,$\cos A=\frac{2}{5}$,求DF的长.



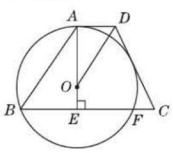
(第 1 题)

类型 2　应用于求三角函数值

2. 【中考·绥化】如图,在梯形$ABCD$中,$AD\parallel BC$,$AE\perp BC$于E,$\angle ADC$的平分线交AE于点O,以点O为圆心,OA为半径的圆经过点B,交BC于另一点F.

(1)求证:CD与⊙O相切.

(2)若$BF=24$,$OE=5$,求$\tan\angle ABC$的值.



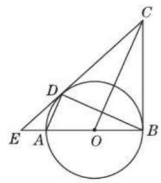
(第 2 题)

类型 3　应用于求圆的半径

3. 【中考·凉山州】如图,已知AB为⊙O的直径,AD,BD是⊙O的弦,BC是⊙O的切线,切点为B,$OC\parallel AD$,BA,CD的延长线相交于点E.

(1)求证:DC是⊙O的切线.

(2)若$AE=1$,$ED=3$,求⊙O的半径.



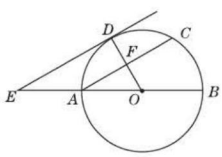
(第 3 题)

类型 4　应用于求图形的面积

4. 【中考·通辽】如图,AB为⊙O的直径,D为$\overset{\frown}{AC}$的中点,连结OD交弦AC于点F,过点D作$DE\parallel AC$,交BA的延长线于点E.

(1)求证:DE是⊙O的切线.

(2)连结CD,若$OA=AE=4$,求四边形$ACDE$的面积.



(第 4 题)

趣味数学　公元 1822 年,法国数学家傅立叶证明了任何曲线都可以由正弦曲线叠加而成,他甚至找到了叠加的方法.傅立叶的出色工作,使一门近代的数学分支以他的光辉名字命名.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

27.3 圆中的计算问题

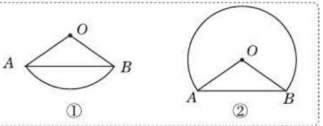
第1课时 弧长和扇形面积

名师点金

两类弓形面积的求法

(1)小于半圆的弧与弦组成的弓形，如图①，用扇形的面积减去三角形的面积.

(2)大于半圆的弧与弦组成的弓形，如图②，用扇形的面积加上三角形的面积.



1 夯实基础·逐点练 ☞(答案见132页)

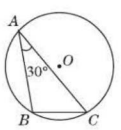
知识点1 弧长公式

1. 【中考·温州】若扇形的圆心角为90°，半径为6，则该扇形的弧长为(　　)

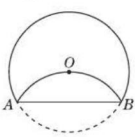
A. $\frac{3}{2}\pi$　　B. 2π　　C. 3π　　D. 6π

2. 【中考·南宁】如图，$\odot O$是$\triangle ABC$的外接圆，$BC=2$，$\angle BAC=30°$，则$\overset{\frown}{BC}$的长等于(　　)

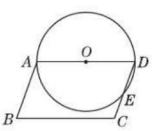
A. $\frac{2\pi}{3}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$



(第2题)



(第3题)



(第4题)

3. 【中考·泰安】如图，将$\odot O$沿弦AB折叠，$\overset{\frown}{AB}$恰好经过圆心O，若$\odot O$的半径为3，则$\overset{\frown}{AB}$的长为(　　)

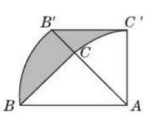
A. $\frac{1}{2}\pi$　　B. π　　C. 2π　　D. 3π

4. 【中考·烟台】如图，在$\square ABCD$中，$\angle B=70°$，$BC=6$，以AD为直径的$\odot O$交CD于点E，则$\overset{\frown}{DE}$的长为(　　)

A. $\frac{1}{3}\pi$　　B. $\frac{2}{3}\pi$　　C. $\frac{7}{6}\pi$　　D. $\frac{4}{3}\pi$

知识点2 扇形面积公式

5. 【中考·眉山】如图，$\triangle ABC$是等腰直角三角形，$\angle ACB=90°$，$AC=BC=2$，把$\triangle ABC$绕点A按顺时针方向旋转45°后得到$\triangle AB'C'$，则线段BC在上述旋转过程中所扫过部分(阴影部分)的面积是_____.

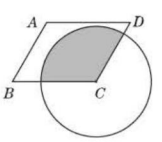


(第5题)

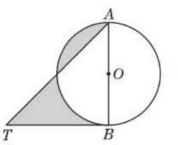
6. 【中考·成都】如图，在$\square ABCD$中，$\angle B=60°$，$\odot C$的半径为3，则图中阴影部分的面积是(　　)

A. π　　B. 2π

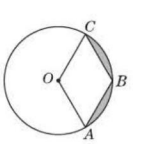
C. 3π　　D. 6π



(第6题)



(第7题)



(第8题)

7. 如图，AB是$\odot O$的直径，BT是$\odot O$的切线，若$\angle ATB=45°$，$AB=2$，则阴影部分的面积是(　　)

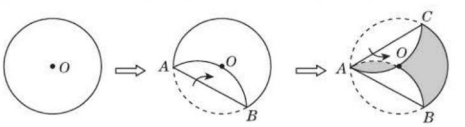
A. 2　　B. $\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\pi$　　C. 1　　D. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\pi$

8. 如图，已知$\odot O$的半径是2，点A，B，C在$\odot O$上，若四边形$OABC$是菱形，则图中阴影部分的面积为(　　)

A. $\frac{2}{3}\pi-2\sqrt{3}$　　B. $\frac{2}{3}\pi-\sqrt{3}$

C. $\frac{4}{3}\pi-2\sqrt{3}$　　D. $\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$

9. 【中考·聊城】如图，点O是圆形纸片的圆心，将这个圆形纸片按下列顺序折叠，使$\overset{\frown}{AB}$和$\overset{\frown}{AC}$都经过圆心O，则阴影部分的面积是$\odot O$面积的(　　)



(第9题)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{3}{5}$

易错点 对弧长公式及扇形面积公式中的n的意义理解不充分而致错

10. 已知$\overset{\frown}{AB}$所对的圆周角为30°，$\overset{\frown}{AB}$所在圆的半径为30 cm，求$\overset{\frown}{AB}$的长.

数学——科学不可动摇的基石，促进人类事业进步的丰富源泉. ——巴罗

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞(答案见 132 页)

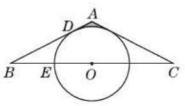
考查角度 利用扇形面积公式求不规则图形面积的方法

方法 1 用割补法求不规则图形的面积

11. 【中考 · 临沂】如图，$\triangle ABC$ 为等腰三角形，O 是底边 BC 的中点，腰 AB 与 $\odot O$ 相切于点 D，OB 与 $\odot O$ 相交于点 E.

(1)求证：AC 是 $\odot O$ 的切线；

(2)若 $BD=\sqrt{3}$，$BE=1$，求阴影部分的面积.

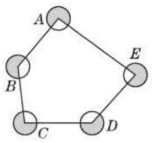


(第 11 题)

方法 2 用整体思想求扇形的面积

12. 【中考 · 朝阳】如图，分别以五边形 $ABCDE$ 的顶点为圆心，1 为半径作五个圆，则图中阴影部分的面积之和为(　　)

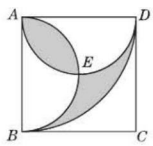
A. $\frac{3}{2}\pi$　　B. 3π　　C. $\frac{7}{2}\pi$　　D. 2π



(第 12 题)

方法 3 用替换法求不规则图形的面积

13. 如图，在边长为 a 的正方形 $ABCD$ 中，以点 A 为圆心、AB 为半径画弧得到扇形 ABD，分别以 AB，AD 为直径的两个半圆交于点 E，求图中阴影部分的面积.



(第 13 题)

Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞(答案见 132 页)

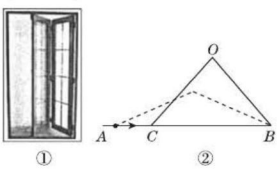
拔尖角度 1 利用弧长公式求实际中运动的路径长

14. 【中考 · 江西】图①是一种折叠门，由上下轨道和两扇长宽相等的活页门组成，整个活页门的右轴固定在门框上，通过推动左侧活页门开关. 图②是其俯视简化示意图，已知轨道 $AB=120$ cm，两扇活页门的宽 $OC=OB=60$ cm，点 B 固定，当点 C 在 AB 上左右运动时，OC 与 OB 的长度不变. (所有结果保留小数点后一位)

(1)若 $\angle OBC=50°$，求 AC 的长；

(2)当点 C 从点 A 向右运动 60 cm 时，求点 O 在此过程中运动的路径长.

(参考数据：$\sin 50°\approx 0.77$，$\cos 50°\approx 0.64$，$\tan 50°\approx 1.19$，π 取 3.14)



①　　②

(第 14 题)

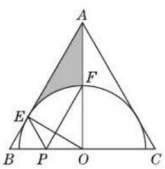
拔尖角度 2 利用圆的知识进行综合计算

15. 【中考 · 扬州】如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$AO\perp BC$ 于点 O，$OE\perp AB$ 于点 E，以点 O 为圆心，OE 为半径作半圆，交 AO 于点 F.

(1)求证：AC 是 $\odot O$ 的切线；

(2)若点 F 是 AO 的中点，$OE=3$，求图中阴影部分的面积；

(3)在(2)的条件下，点 P 是 BC 边上的动点，当 $PE+PF$ 取最小值时，直接写出 BP 的长.



(第 15 题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第2课时　圆锥的侧面积和表面积

名师点金

1. 圆锥和侧面展开图之间转换的“两对应”：
（1）圆锥的母线与展开后扇形的半径的对应.（2）展开后扇形的弧长与圆锥底面圆周长的对应.
2. 圆锥面积计算的“三关键点”：
（1）分析清楚几何体表面的构成.（2）弄清圆锥与其侧面展开后扇形各元素之间的对应关系.（3）圆锥的母线长 l，底面圆的半径 r 和圆锥的高 h 的关系为 $l^2=r^2+h^2$.

1 夯实基础·逐点练

（答案见133页）

知识点1 圆锥及其侧面展开图相关量的计算

1. 【中考·东营】若圆锥的侧面积等于其底面积的3倍，则该圆锥侧面展开图所对应扇形圆心角的度数为（　　）

A. 60°　　B. 90°　　C. 120°　　D. 180°

2. 【中考·贺州】已知圆锥的母线长是12，它的侧面展开图的圆心角是120°，则它的底面圆的直径为（　　）

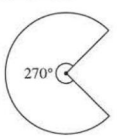
A. 2　　B. 4　　C. 6　　D. 8

3. 【中考·宿迁】若将半径为12 cm的半圆形纸片围成一个圆锥的侧面，则这个圆锥的底面圆半径是（　　）

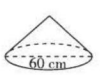
A. 2 cm　　B. 3 cm　　C. 4 cm　　D. 6 cm

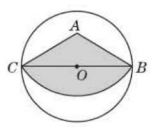
4. 【中考·东营】如图，已知一块圆心角为270°的扇形铁皮，用它做一个圆锥形的烟囱帽（接缝处忽略不计），圆锥底面圆的直径是60 cm，则这块扇形铁皮的半径是（　　）

A. 40 cm　　B. 50 cm　　C. 60 cm　　D. 80 cm



（第4题）





（第5题）

5. 【中考·贵港】如图，点 A 在以 BC 为直径的 $\odot O$ 内，且 $AB=AC$，以点 A 为圆心，AC 长为半径作弧，得到扇形 ABC，剪下扇形 ABC 围成一个圆锥（AB 和 AC 重合），若 $\angle BAC=120°$，$BC=2\sqrt{3}$，则这个圆锥底面圆的半径是（　　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{3}$

6. 如图，圆锥的底面圆的半径为5，母线长为20，一只蜘蛛从底面圆周上一点 A 出发沿圆锥的侧面爬行一周后回到点 A 的最短路程是（　　）

A. 8　　B. $10\sqrt{2}$　　C. $15\sqrt{2}$　　D. $20\sqrt{2}$



（第6题）



（第7题）

知识点2 圆锥的侧面积和表面积

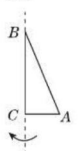
7. 【中考·南通】如图，圆锥的底面半径为2，母线长为6，则侧面积为（　　）

A. 4π　　B. 6π　　C. 12π　　D. 16π

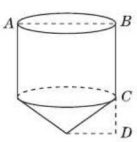
8. 【中考·南充】如图，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$AC=5$ cm，$BC=12$ cm，$\angle ACB=90°$，把 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 绕 BC 所在的直线旋转一周得到一个几何体，则这个几何体的侧面积为（　　）

A. 60π cm^2　　B. 65π cm^2

C. 120π cm^2　　D. 130π cm^2



（第8题）



（第9题）

9. 【中考·绵阳】“赶陀螺”是一项深受人们喜爱的运动，如图是一个陀螺的立体结构图，已知底面圆的直径 $AB=8$ cm，圆柱体部分的高 $BC=6$ cm，圆锥体部分的高 $CD=3$ cm，则这个陀螺的表面积是（　　）

A. 68π cm^2　　B. 74π cm^2　　C. 84π cm^2　　D. 100π cm^2

易错点 对旋转所得几何体的表面积理解不透而致错

10. 已知在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$AC=4$，$BC=3$，以 AB 边所在的直线为轴，将 $\triangle ABC$ 旋转一周，则所得几何体的表面积是（　　）

A. $\frac{168}{5}\pi$　　B. $\frac{564}{25}\pi$　　C. $\frac{84}{5}\pi$　　D. 12π

芝诺的圆：古希腊哲学家芝诺关于学习知识是这样说的：“如果用小圆代表你们学到的知识，用大圆代表我学到的知识.（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞(答案见 133 页)

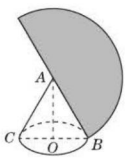
考查角度 1 利用圆锥的侧面展开图进行相关计算

11. 如图,一个圆锥的高为 $3\sqrt{3}$ cm,侧面展开图是半圆. 求:

(1)圆锥的母线长与底面半径之比;

(2)$\angle BAC$ 的度数;

(3)圆锥的侧面积(结果保留 π).



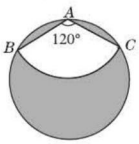
(第 11 题)

考查角度 2 利用圆锥与它侧面展开图的关系进行相关计算

12. 如图,有一直径是 1 m 的圆形铁皮,要从中剪出一个圆心角是 120°的扇形 ABC.

(1)求被剪掉的阴影部分的面积;

(2)若用所留的扇形铁皮围成一个圆锥,则该圆锥底面圆的半径是多少?



(第 12 题)

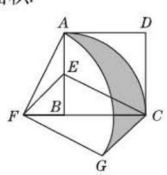
Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞(答案见 133 页)

拔尖角度 1 利用扇形、三角形面积公式求阴影面积

13. 【中考 · 襄阳】如图,在正方形 $ABCD$ 中,$AD=2$,E 是 AB 的中点,将 $\triangle BEC$ 绕点 B 逆时针旋转 90°后,点 E 落在 CB 的延长线上点 F 处,点 C 落在点 A 处. 再将线段 FA 绕点 F 顺时针旋转 90°得线段 FG,连结 EF,CG.

(1)求证:$EF/\!/CG$;

(2)求点 C、点 A 在旋转过程中形成的 $\overset{\frown}{AC}$,$\overset{\frown}{AG}$ 与线段 CG 所围成的阴影部分的面积.



(第 13 题)

拔尖角度 2 利用圆、扇形、圆锥的特征进行方案设计

14. 工人师傅要在如图所示的一块边长为 40 cm 的正方形铁皮上裁剪下一块完整的圆形和一块完整的扇形铁皮,使之恰好做成一个圆锥模型(接缝处忽略不计).

(1)请你帮助工人师傅设计三种不同的裁剪方案(画出示意图);

(2)何种设计方案使得正方形铁皮的利用率最高?求出此时圆锥模型底面圆的半径.



(第 14 题)

趣味数学　那么大圆的面积是多一点,但两圆之外的空白都是我们的无知面. 圆越大其圆周接触的无知面就越多."

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

27.4 正多边形和圆

名师点金

1. 常见正多边形的边长与半径的关系：正六边形的边长等于其外接圆半径，正三角形的边长等于其外接圆半径的$\sqrt{3}$倍，正方形的边长等于其外接圆半径的$\sqrt{2}$倍.
2. 求解与正多边形有关的计算问题，关键是找出被半径和边心距分割成的直角三角形，将正多边形的计算问题转化为直角三角形问题.

1 夯实基础·逐点练 （答案见133页）

知识点1 圆内接正多边形及相关定义

1. 【中考·株洲】下列圆的内接正多边形中，一条边所对的圆心角最大的图形是（　　）

A. 正三角形　　B. 正方形

C. 正五边形　　D. 正六边形

2. 正多边形的一边所对的中心角与该多边形的一个内角的关系为（　　）

A. 两角互余　　B. 两角互补

C. 两角互余或互补　　D. 不能确定

3. 【中考·自贡】图中有两张型号完全一样的折叠式饭桌，将正方形桌面边上的四个弓形面板翻折起来后，就能形成一个圆形桌面（可近似看成正方形的外接圆），正方形桌面与翻折成的圆形桌面的面积之比最接近（　　）

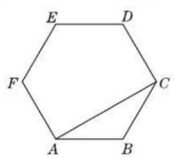


（第3题）

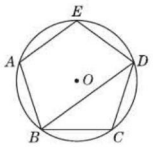
A. $\frac{4}{5}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{1}{2}$

4. 【中考·河池】如图，在正六边形$ABCDEF$中，$AC=2\sqrt{3}$，则它的边长是（　　）

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2



（第4题）



（第5题）

5. 【中考·湖州】如图，已知正五边形$ABCDE$内接于$\odot O$，连结BD，则$\angle ABD$的度数是（　　）

A. 60°　　B. 70°　　C. 72°　　D. 144°

6. 【中考·达州】以半径为2的圆的内接正三角形、正方形、正六边形的边心距为三边作三角形，则该三角形的面积是（　　）

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{3}$

7. 【中考·德阳】已知圆内接正三角形的面积为$\sqrt{3}$，则该圆的内接正六边形的边心距是（　　）

A. 2　　B. 1　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

8. 【中考·日照】下列说法正确的是（　　）

A. 圆内接正六边形的边长与该圆的半径相等

B. 在平面直角坐标系中，不同的坐标可以表示同一点

C. 一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$一定有实数根

D. 将$\triangle ABC$绕A点按顺时针方向旋转60°得$\triangle ADE$，则$\triangle ABC$与$\triangle ADE$不全等

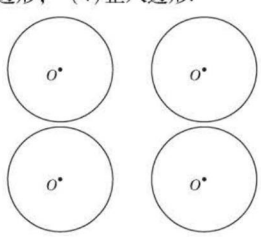
9. 刘徽是中国古代卓越的数学家之一，他在《九章算术》中提出了“割圆术”，即用内接或外切正多边形逐步逼近圆来近似计算圆的面积，设$\odot O$的半径为1，若用$\odot O$的外切正六边形的面积来近似估计$\odot O$的面积，则$S_{\odot O}\approx$_____.（结果保留根号）

知识点2 圆内接正多边形的画法

10. 如图，试分别按要求画出圆O的内接正多边形.

（1）正三角形；　（2）正方形；

（3）正六边形；　（4）正八边形.



（第10题）

易错点 误认为正多边形的边心距是正多边形的半径

11. 一个边长为2的正多边形的内角和是其外角和的2倍，则这个正多边形的半径是（　　）

A. 2　　B. $\sqrt{3}$　　C. 1　　D. $\frac{1}{2}$

时钟里的多边形：从1点钟开始，每次加上3个小时，加了四次之后，会回到原出发点，最后在时钟内得到一个正四边形.（待续）

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞(答案见 134 页)

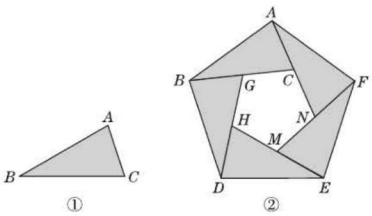
考查角度 1 利用正多边形的性质解相关问题

12. 【中考 · 镇江】在三角形纸片 ABC(如图①)中,$\angle BAC=78°$,$AC=10$,小霞用 5 张这样的三角形纸片拼成了一个内外都是正五边形的图形(如图②).

(1) $\angle ABC=$ _____°;

(2)求正五边形 $GHMNC$ 的边 GC 的长.

(参考值:$\sin 78°\approx 0.98$,$\cos 78°\approx 0.21$,$\tan 78°\approx 4.70$)



(第 12 题)

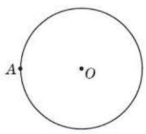
考查角度 2 利用正多边形的特征作图

13. 作图与证明:

如图,已知 $\odot O$ 和 $\odot O$ 上的一点 A,请完成下列任务:

(1)作 $\odot O$ 的内接正六边形 $ABCDEF$;

(2)连结 BF,CE,判断四边形 $BCEF$ 的形状并加以证明.



(第 13 题)

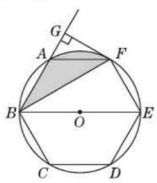
Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞(答案见 134 页)

拔尖角度 1 利用正多边形与圆的关系进行计算

14. 【中考 · 铜仁】如图,正六边形 $ABCDEF$ 内接于 $\odot O$,BE 是 $\odot O$ 的直径,连结 BF,延长 BA,过 F 作 $FG\perp BA$,垂足为 G.

(1)求证:FG 是 $\odot O$ 的切线;

(2)已知 $FG=2\sqrt{3}$,求图中阴影部分的面积.



(第 14 题)

拔尖角度 2 利用正多边形与圆的有关知识探究规律

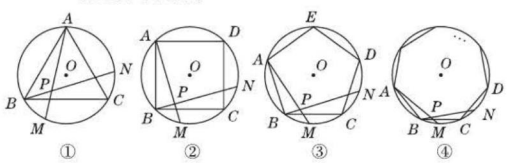
15. 如图①②③④分别是 $\odot O$ 的内接正三角形、正四边形、正五边形、正 n 边形,点 M,N 分别从点 B,C 开始以相同的速度在 $\odot O$ 上逆时针运动.

(1)图①中,$\angle APN=$ _____;

(2)图②中,$\angle APN=$ _____,

图③中,$\angle APN=$ _____;

(3)试探索 $\angle APN$ 的度数与正多边形边数 n 的关系(直接写答案).



(第 15 题)

趣味数学　如果每次加上 2 个小时,最后在时钟内得到一个正六边形;如果每次加上 4 个小时,最后在时钟内得到一个正三角形;如果每次加上 1 个小时,最后在时钟内得到一个正十二边形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

阶段方法技巧训练（五）

专训 1 圆中常见的计算题型 ☞（答案见134页）

名师点金

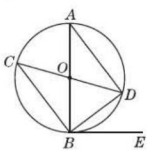
与圆有关的计算主要体现在：利用圆周角定理求角度，利用垂径定理构造直角三角形并结合勾股定理，已知弦长、弦心距、半径三个量中的任意两个量时，可求出第三个量，利用弧长、扇形面积公式计算弧长、扇形面积，利用圆的知识解决实际问题等；其中涉及面积的计算，常采用作差法、等积法、平移法、割补法等，涉及实际应用计算常采用建模思想进行求解.

题型1 有关角度的计算

1. 【中考·娄底】如图，在⊙O中，AB，CD是直径，BE是切线，B为切点，连结AD，BC，BD.

（1）求证：$\triangle ABD \cong \triangle CDB$；

（2）若$\angle DBE = 37°$，求$\angle ADC$的度数.



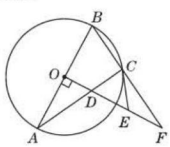
（第1题）

题型2 弦长的计算

2. 【中考·聊城】如图，$\triangle ABC$内接于⊙O，AB为直径，作$OD \perp AB$交AC于点D，延长BC，OD交于点F，过点C作⊙O的切线CE，交OF于点E.

（1）求证：$EC = ED$；

（2）如果$OA = 4$，$EF = 3$，求弦AC的长.



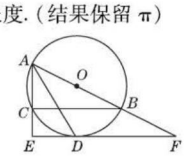
（第2题）

题型3 弧长的计算

3. 【中考·衡阳】如图，⊙O是$\triangle ABC$的外接圆，AB为直径，$\angle BAC$的平分线交⊙O于点D，过点D作$DE \perp AC$，分别交AC，AB的延长线于点E，F.

（1）求证：EF是⊙O的切线；

（2）若$AC = 4$，$CE = 2$，求$\overset{\frown}{BD}$的长度.（结果保留π）



（第3题）

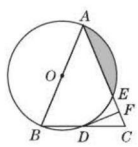
题型4 面积的计算

技巧1 利用“作差法”求面积

4. 【中考·丽水】如图，在$\triangle ABC$中，$AB = AC$，以AB为直径的⊙O分别与BC，AC交于点D，E，过点D作⊙O的切线DF，交AC于点F.

（1）求证：$DF \perp AC$；

（2）若⊙O的半径为4，$\angle CDF = 22.5°$，求阴影部分的面积.



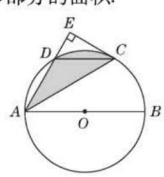
（第4题）

技巧2 利用“等积法”求面积

5. 【中考·赤峰】如图，AB为⊙O的直径，C，D是半圆AB的三等分点，过点C作AD延长线的垂线CE，垂足为E.

（1）求证：CE是⊙O的切线；

（2）若⊙O的半径为2，求图中阴影部分的面积.



（第5题）

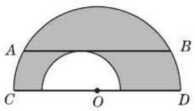
托尔斯泰的分数：一个人就好像一个分数，他的实际才能好比分子，而他对自己的估价好比分母. 分母越大，则分数的值就越小.

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

技巧 3 利用“平移法”求面积

6. 如图，两个半圆中，O 为大半圆的圆心，长为 18 的弦 AB 与直径 CD 平行且与小半圆相切，那么图中阴影部分的面积等于多少？



（第 6 题）

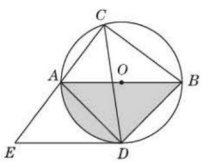
技巧 4 利用“割补法”求面积

7. 【中考 · 孝感】如图，$\odot O$ 的直径 $AB=10$，弦 $AC=6$，$\angle ACB$ 的平分线交 $\odot O$ 于 D，过点 D 作 $DE/\!/AB$ 交 CA 的延长线于点 E，连结 AD，BD.

(1) 由 AB，BD，$\overset{\frown}{AD}$ 围成的曲边三角形的面积是_____.

(2) 求证：DE 是 $\odot O$ 的切线.

(3) 求线段 DE 的长.



（第 7 题）

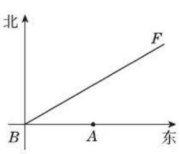
题型 5 实际应用的计算

应用 1 利用垂径定理解决台风问题

8. 如图，A 城气象台测得台风中心在 A 城正西方向 300 km的 B 处，并以 $10\sqrt{7}$ km/h 的速度向北偏东 60°的 BF 方向移动，距台风中心 200 km 的范围是受台风影响的区域.

(1) A 城是否会受到这次台风的影响？为什么？

(2) 若 A 城受到这次台风的影响，试计算 A 城遭受这次台风影响的时间有多长？

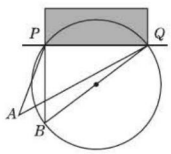


（第 8 题）

应用 2 利用圆周角知识解决足球射门问题（转化思想）

9. 如图，在“世界杯”足球比赛中，队员甲带球向对方球门 PQ 进攻，当他带球冲到 A 点时，同伴队员乙已经助攻冲到 B 点，现有两种射门方式：一是由队员甲直接射门；二是队员甲将球迅速传给队员乙，由队员乙射门.

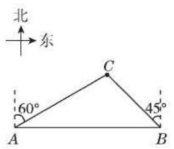
从射门角度考虑，你认为选择哪种射门方式较好？为什么？



（第 9 题）

应用 3 利用直线与圆的位置关系解决范围问题

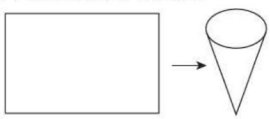
10. 如图，已知 A，B 两地相距 1 km. 要在 A，B 两地之间修建一条笔直的水渠（即图中的线段 AB），经测量在 A 地的北偏东 60°方向，B 地的北偏西 45°方向的 C 处有一个以 C 为圆心，350 m 为半径的圆形公园，则修建的这条水渠会不会穿过公园？为什么？



（第 10 题）

应用 4 利用圆锥侧面展开图解决材料最省问题

11. 如图，某工厂要选一块矩形铁皮加工成一个底面半径为 20 cm，高为 $40\sqrt{2}$ cm 的圆锥形漏斗，要求只能有一条接缝（接缝忽略不计），请问：选长、宽分别为多少厘米的矩形铁皮，才能使所用材料最省？



（第 11 题）

趣味数学　**王菊珍的百分数**：我国科学家王菊珍对待实验失败有句格言，叫做“千下去还有 50% 成功的希望，不干便是 100% 的失败”.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

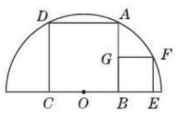
专训2 圆中常用的作辅助线的八种方法 ☞（答案见136页）

名师点金

在解决有关圆的计算或证明题时，往往需要添加辅助线，根据题目特点选择恰当的辅助线至关重要. 圆中常用的辅助线作法有：作半径，巧用同圆的半径相等；连结圆上两点，巧用同弧所对的圆周角相等；作直径，巧用直径所对的圆周角是直角；证切线时“连半径，证垂直”以及“作垂直，证半径”等.

方法1 作半径，巧用同圆的半径相等

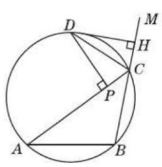
1. 如图，两正方形彼此相邻，且大正方形 $ABCD$ 的顶点 A，D 在半圆 O 上，顶点 B，C 在半圆 O 的直径上；小正方形 $BEFG$ 的顶点 F 在半圆 O 上，点 E 在半圆 O 的直径上，点 G 在大正方形的边 AB 上. 若小正方形的边长为 4 cm，求该半圆的半径.



（第1题）

方法2 连结圆上两点，巧用同弧所对的圆周角相等

2. 如图，圆内接三角形 ABC 的外角 $\angle ACM$ 的平分线与圆交于 D 点，$DP \perp AC$，垂足是 P，$DH \perp BM$，垂足为 H. 求证：$AP = BH$.



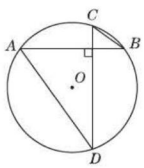
（第2题）

方法3 作直径，巧用直径所对的圆周角是直角

3. 如图，$\odot O$ 的半径为 R，弦 AB，CD 互相垂直，连结 AD，BC.

（1）求证：$AD^2 + BC^2 = 4R^2$；

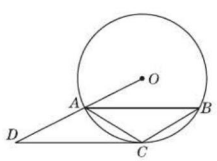
（2）若弦 AD，BC 的长是方程 $x^2 - 6x + 5 = 0$ 的两个根（$AD > BC$），求 $\odot O$ 的半径及点 O 到 AD 的距离.



（第3题）

方法4 证切线时辅助线作法的应用

4. 如图，$\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$，$CA = CB$，$CD \parallel AB$ 且与 OA 的延长线交于点 D. 判断 CD 与 $\odot O$ 的位置关系，并说明理由.



（第4题）

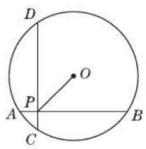
华罗庚的减号：在学习中要敢于做减法，就是减去前人已经解决的部分，看看还有哪些问题没有解决，需要我们去探索解决.

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

方法 5　遇弦作弦心距或半径

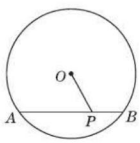
5. 如图，在半径为 5 的⊙O 中，AB，CD 是互相垂直的两条弦，垂足为 P，且 $AB = CD = 8$，则 OP 的长为(　　)



（第 5 题）

A. 3　　B. 4　　C. $3\sqrt{2}$　　D. $4\sqrt{2}$

6. 如图，⊙O 的直径为 10 cm，弦 $AB = 8$ cm，P 是弦 AB 上的一个动点，求 OP 的长度范围.



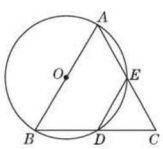
（第 6 题）

方法 6　遇直径巧作直径所对的圆周角

7. 如图，在△ABC 中，$AB = BC = 2$，以 AB 为直径的⊙O 分别交 BC，AC 于点 D，E，且点 D 是 BC 的中点.

(1) 求证：△ABC 为等边三角形.

(2) 求 DE 的长.



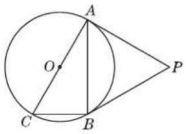
（第 7 题）

方法 7　遇切线巧作过切点的半径

8. 如图，⊙O 是 Rt△ABC 的外接圆，$\angle ABC = 90°$，点 P 是圆外一点，PA 切⊙O 于点 A，且 $PA = PB$.

(1) 求证：PB 是⊙O 的切线；

(2) 已知 $PA = \sqrt{3}$，$\angle ACB = 60°$，求⊙O 的半径.



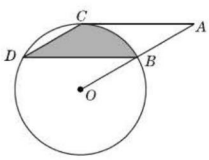
（第 8 题）

方法 8　巧添辅助线计算阴影部分的面积

9. 【中考 · 自贡】如图所示，点 B，C，D 都在⊙O 上，过点 C 作 $AC \parallel BD$ 交 OB 的延长线于点 A，连结 CD，且 $\angle CDB = \angle OBD = 30°$，$DB = 6\sqrt{3}$ cm.

(1) 求证：AC 是⊙O 的切线；

(2) 求由弦 CD，BD 与 $\overset{\frown}{BC}$ 所围成的阴影部分的面积.（结果保留 π）



（第 9 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

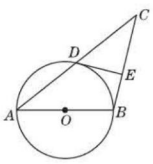
专训3 圆与相似三角形的综合 ☞（答案见137页）

名师点金

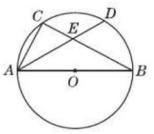
圆与相似三角形相综合是中考中的热门考点，解圆与相似三角形相综合的问题时，关键是要从圆中去抽取出相似三角形模型，然后利用相似三角形的性质去证明和求解相关问题. 在证两三角形相似时，往往构造同弧所对的圆周角或直径所对的圆周角，从而为证两三角形相似创造角相等的条件.

1. 【中考·衢州】如图，已知$\triangle ABC$，$AB=BC$，以AB为直径的圆交AC于点D，过点D的$\odot O$的切线交BC于点E. 若$CD=5$，$CE=4$，则$\odot O$的半径是(　　)

A. 3　　B. 4　　C. $\frac{25}{6}$　　D. $\frac{25}{8}$



（第1题）



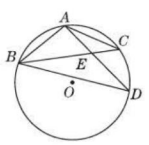
（第2题）

2. 【中考·南通】如图，AB为$\odot O$的直径，C为$\odot O$上一点，弦AD平分$\angle BAC$，交BC于点E，$AB=6$，$AD=5$，则AE的长为(　　)

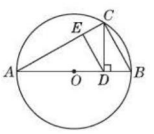
A. 2.5　　B. 2.8　　C. 3　　D. 3.2

3. 如图，A，B，C，D是$\odot O$上的四个点，$AB=AC$，AD交BC于点E，$AE=3$，$ED=4$，则AB的长为(　　)

A. 3　　B. $2\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{21}$　　D. $3\sqrt{5}$



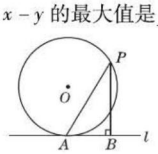
（第3题）



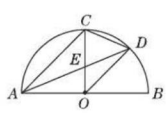
（第4题）

4. 【中考·呼和浩特】如图，AB是$\odot O$的直径，点C在圆上，$CD\perp AB$，$DE/\!/BC$，则图中与$\triangle ABC$相似的三角形有_____个.

5. 【中考·苏州】如图，直线l与半径为4的$\odot O$相切于点A，P是$\odot O$上的一个动点(不与点A重合)，过点P作$PB\perp l$，垂足为B，连结PA. 设$PA=x$，$PB=y$，则$x-y$的最大值是_____.



（第5题）



（第6题）

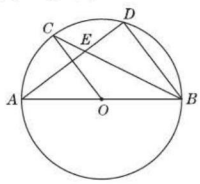
6. 如图，AB是半圆O的直径，半径$OC\perp AB$于点O，AD平分$\angle CAB$交弧BC于点D，连结CD，OD，给出以下四个结论：①$AC/\!/OD$；②$CE=OE$；③$\triangle ODE\backsim\triangle ADO$；④$2CD^2=CE\cdot AB$. 其中正确结论的序号是_____.

7. 【中考·成都】如图，AB为$\odot O$的直径，C，D为圆上的两点，$OC/\!/BD$，弦AD，BC相交于点E.

(1)求证：$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CD}$；

(2)若$CE=1$，$EB=3$，求$\odot O$的半径；

(3)在(2)的条件下，过点C作$\odot O$的切线，交BA的延长线于点P，过点P作$PQ/\!/CB$交$\odot O$于F，Q两点(点F在线段PQ上)，求PQ的长.



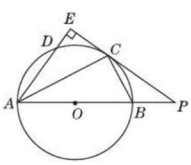
（第7题）

8. 【中考·襄阳】如图，AB是$\odot O$的直径，点C为$\odot O$上一点，AE和过点C的切线互相垂直，垂足为E，AE交$\odot O$于点D，直线EC交AB的延长线于点P，连结AC，BC，$PB:PC=1:2$.

(1)求证：AC平分$\angle BAD$.

(2)探究线段PB，AB之间的数量关系，并说明理由.

(3)若$AD=3$，求$\triangle ABC$的面积.



（第8题）

在数学中，我们发现真理的主要工具是归纳和模拟.　　——拉普拉斯

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

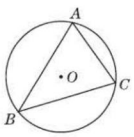
专训 4　用三角函数解与圆有关问题 (答案见 138 页)

名师点金

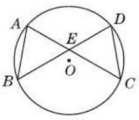
用三角函数解与圆有关的问题，是近几年中考热门命题内容，题型多样化；一般以中档题、压轴题形式出现，应高度重视.

1. 如图，已知△ABC 的外接圆⊙O 的半径为 3，$AC=4$，则 $\sin B=$(　　)

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{4}{5}$　　D. $\frac{2}{3}$



(第 1 题)



(第 2 题)

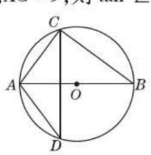
2. 如图，已知⊙O 的两条弦 AC，BD 相交于点 E，$\angle A=70°$，$\angle C=50°$，那么 $\cos\angle AEB$ 的值为(　　)

A. $\sqrt{3}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

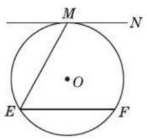
3. 在△ABC 中，$AB=AC=5$，$\sin B=\frac{4}{5}$. ⊙O 过 B，C 两点，且⊙O 的半径 $r=\sqrt{10}$，则 OA 的长为(　　)

A. 3 或 5　　B. 5　　C. 4 或 5　　D. 4

4. 【中考·黔东南州】如图，AB 是⊙O 的直径，$AB=15$，$AC=9$，则 $\tan\angle ADC=$ _____.



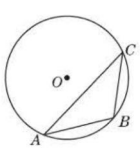
(第 4 题)



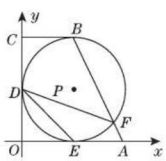
(第 5 题)

5. 【中考·玉林】如图，直线 MN 与⊙O 相切于点 M，$ME=EF$ 且 $EF/\!/MN$，则 $\cos E=$ _____.

6. 【中考·泰安】如图，在半径为 5 的⊙O 中，弦 $AB=6$，点 C 是优弧 AB 上的一点(不与 A，B 重合)，则 $\cos C$ 的值为 _____.



(第 6 题)



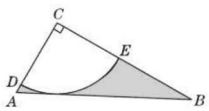
(第 7 题)

7. 【中考·荆州】如图，在直角坐标系中，四边形 $OABC$ 是直角梯形，$BC/\!/OA$，⊙P 分别与 OA，OC，BC 相切于点 E，D，B，与 AB 交于点 F，已知 $A(2,0)$，$B(1,2)$，则 $\tan\angle FDE=$ _____.

8. 【中考·福州】如图，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$AC=\sqrt{5}$，$\tan B=\frac{1}{2}$，半径为 2 的⊙C 分别交 AC，BC 于点 D，E，得到 $\overset{\frown}{DE}$.

(1)求证：AB 为⊙C 的切线.

(2)求图中阴影部分的面积.

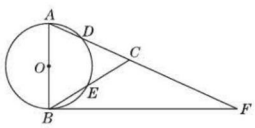


(第 8 题)

9. 【中考·随州】如图，在△ABC 中，$AB=AC$，以 AB 为直径的⊙O 分别交 AC，BC 于点 D，E，点 F 在 AC 的延长线上，且 $\angle BAC=2\angle CBF$.

(1)求证：BF 是⊙O 的切线.

(2)若⊙O 的直径为 3，$\sin\angle CBF=\frac{\sqrt{3}}{3}$，求 BC 和 BF 的长.



(第 9 题)

趣味数学　sin 对 cos 说："我心中除了你，还有一个人."cos 生气地说："她是谁？"sin 说："tan."

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

全章热门考点整合应用

（答案见138页）

名师点金

圆的知识是初中数学的重点内容，也是历年中考命题的热点. 本章题型广泛，主要考查圆的概念、基本性质以及圆周角定理及其推论，直线与圆的位置关系，切线的性质和判定，正多边形与圆的计算和证明等，通常以这些知识为载体，与函数、方程等知识综合考查. 全章热门考点可概括为：一个概念、三个定理、三个关系、两个圆与三角形、三个公式、两个技巧、两种思想.

考点1 一个概念——圆的相关概念

1. 下列说法正确的是（　　）

A. 直径是弦，弦也是直径

B. 半圆是弧，弧是半圆

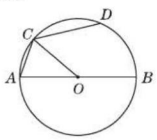
C. 无论过圆内哪一点，只能作一条直径

D. 在同圆或等圆中，直径的长度是半径的2倍

考点2 三个定理

定理1 圆心角、弦、弧间的关系定理

2. 如图，AB 是⊙O 的直径，点 C 在⊙O 上，$\angle AOC=40°$，D 是$\overset{\frown}{BC}$的中点，求 $\angle ACD$ 的度数.



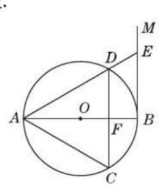
（第2题）

定理2 垂径定理

3. 【中考·北京】如图，AB 是⊙O 的直径，过点 B 作⊙O 的切线 BM，弦 $CD\parallel BM$，交 AB 于点 F，且$\overset{\frown}{DA}=\overset{\frown}{DC}$，连结 AC，AD，延长 AD 交 BM 于点 E.

（1）求证：$\triangle ACD$ 是等边三角形；

（2）连结 OE，若 $DE=2$，求 OE 的长.



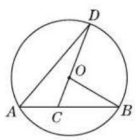
（第3题）

定理3 圆周角定理

4. 如图，已知 AB 是⊙O 的弦，$OB=2$，$\angle B=30°$，C 是弦 AB 上任意一点（不与点 A，B 重合），连结 CO 并延长 CO 交⊙O 于点 D，连结 AD.

（1）弦长 $AB=$_____（结果保留根号）；

（2）当 $\angle D=20°$ 时，求 $\angle BOD$ 的度数.

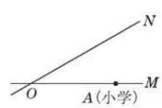


（第4题）

考点3 三个关系

关系1 点与圆的位置关系

5. 如图，有两条笔直的公路 OM，ON 相交成 $30°$ 角，沿公路 OM 方向离两条公路的交叉处 O 点 80 m 的 A 处有一所希望小学，当拖拉机沿 ON 方向行驶时，距拖拉机 50 m 范围内会受到噪音影响，已知有两台相距30 m 的拖拉机正沿 ON 方向行驶，它们的速度均为5 m/s，则这两台拖拉机沿 ON 方向行驶时给小学带来噪音影响的时间是多长？



（第5题）

小明问："车轮为什么是圆的啊？"小强用圆规画了一个圆，说："我们量一量圆周上任何一点到圆心的距离，发现它们都相等，这个距离叫做半径.（待续）

趣味数学

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

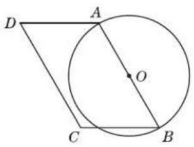
关系 2 直线与圆的位置关系

6. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，$\angle D=60°$，以 AB 为直径作⊙O，已知 $AB=10$，$AD=m$.

(1) 求点 O 到 CD 的距离；(用含 m 的代数式表示)

(2) 若 $m=6$，通过计算判断⊙O 与 CD 的位置关系；

(3) 若⊙O 与线段 CD 有两个公共点，求 m 的取值范围.



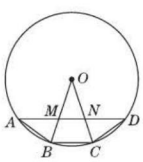
(第 6 题)

关系 3 正多边形和圆的位置关系

7. 如图，已知⊙O 的内接正十边形 $ABCD\cdots$，AD 交 OB，OC 于 M，N. 求证：

(1) $MN/\!/BC$；

(2) $MN+BC=OB$.



(第 7 题)

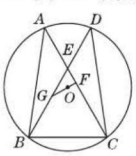
考点 4 两个圆与三角形

圆与三角形 1 三角形的外接圆

8. 【中考·哈尔滨】如图，⊙O 是 $\triangle ABC$ 的外接圆，弦 BD 交 AC 于点 E，连结 CD，且 $AE=DE$，$BC=CE$.

(1) 求 $\angle ACB$ 的度数；

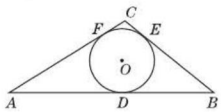
(2) 过点 O 作 $OF\perp AC$ 于点 F，延长 FO 交 BE 于点 G，$DE=3$，$EG=2$，求 AB 的长.



(第 8 题)

圆与三角形 2 三角形的内切圆

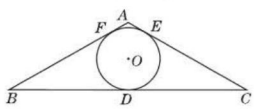
9. 如图，若 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 $AB=9$，$BC=5$，$CA=6$，$\triangle ABC$ 的内切圆⊙O 切 AB，BC，AC 于点 D，E，F，则 AF 的长为(　　)



(第 9 题)

A. 5　　B. 10　　C. 7.5　　D. 4

10. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，内切圆⊙O 与边 BC，AC，AB 分别切于 D，E，F. $\angle BAC=120°$，$BF=2\sqrt{3}$. 则内切圆⊙O 的半径为(　　)



(第 10 题)

A. 2　　B. $\sqrt{3}$　　C. $4\sqrt{3}-6$　　D. $\frac{9}{4}$

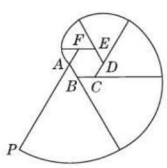
考点 5 三个公式

公式 1 弧长公式

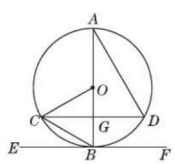
11. 如图，已知正六边形 $ABCDEF$ 是边长为 2 cm 的螺母，点 P 是 FA 延长线上的点，在 A，P 之间拉一条长为 12 cm 的无伸缩性细线，一端固定在点 A，握住另一端点 P 拉直细线，把它全部紧紧缠绕在螺母上(缠绕时螺母不动)，则点 P 运动的路径长为(　　)

A. 13π cm　　B. 14π cm

C. 15π cm　　D. 16π cm



(第 11 题)



(第 12 题)

12. 【中考·昆明】如图，AB 为⊙O 的直径，$AB=6$，$AB\perp$ 弦 CD，垂足为 G，EF 切⊙O 于点 B，连结 AD，OC，BC，$\angle A=30°$，下列结论不正确的是(　　)

A. $EF/\!/CD$

B. $\triangle COB$ 是等边三角形

C. $CG=DG$

D. $\overset{\frown}{BC}$的长为$\frac{3}{2}\pi$

趣味数学　车轮做成圆形，车轴安在圆心处，车轴与地面的距离总是等于车轮半径，这样车轮在地面就可以平稳地滚动.(待续)

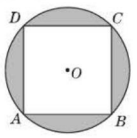
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

公式2 扇形面积公式

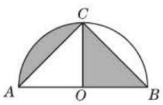
13. 【中考·益阳】如图，正方形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$，$AB=4$，则图中阴影部分的面积是（　　）

A. $4\pi-16$　　B. $8\pi-16$

C. $16\pi-32$　　D. $32\pi-16$



（第13题）



（第14题）

14. 【中考·重庆】如图，以 AB 为直径，点 O 为圆心的半圆经过点 C，若 $AC=BC=\sqrt{2}$，则图中阴影部分的面积是（　　）

A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$

C. $\frac{\pi}{2}$　　D. $\frac{1}{2}+\frac{\pi}{2}$

公式3 圆锥的侧面积和表面积公式

15. 在手工课上，王红制成了一顶圆锥形纸帽，已知纸帽底面圆的半径为10 cm，母线长为50 cm，则制作一顶这样的纸帽所需纸板的面积至少为（　　）

A. $250\pi\ \text{cm}^2$　　B. $500\pi\ \text{cm}^2$

C. $750\pi\ \text{cm}^2$　　D. $1\ 000\pi\ \text{cm}^2$

16. 已知圆锥底面圆的半径为2，母线长是4，则它的表面积为（　　）

A. 4π　　B. 8π　　C. 12π　　D. 16π

考点6 两个技巧

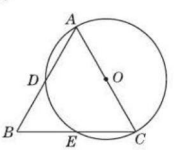
技巧1 作同弧所对的圆周角（特别地：直径所对的圆周角）

17. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，以 AC 为直径的 $\odot O$ 交 AB 于点 D，交 BC 于点 E.

（1）求证：$BE=CE$；

（2）若 $\angle B=70°$，求 $\overset{\frown}{DE}$ 的度数；

（3）若 $BD=2$，$BE=3$，求 AC 的长.



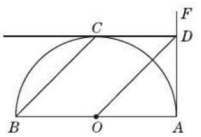
（第17题）

技巧2 作半径（特别地：垂直于弦的半径、过切点的半径）

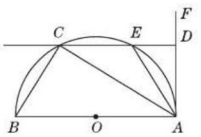
18. 【中考·江西】如图①，AB 为半圆的直径，点 O 为圆心，AF 为半圆的切线，过半圆上的点 C 作 $CD\parallel AB$ 交 AF 于点 D，连接 BC.

（1）连接 DO，若 $BC\parallel OD$，求证：CD 是半圆的切线.

（2）如图②，当线段 CD 与半圆交于点 E 时，连接 AE，AC，判断 $\angle AED$ 和 $\angle ACD$ 的数量关系，并证明你的结论.



①



②

（第18题）

考点7 两种思想

思想1 分类讨论思想

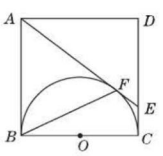
19. 已知在半径为1的 $\odot O$ 中，弦 $AC=\sqrt{2}$，弦 $AB=\sqrt{3}$，则 $\angle CAB=$ _____.

思想2 方程思想

20. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长是4，以 BC 为直径作圆，从点 A 引圆的切线，切点为 F，AF 的延长线交 DC 于点 E. 求：

（1）$\triangle ADE$ 的面积；

（2）BF 的长.



（第20题）

假如车轮是方形或三角形的，从轮缘到中心的距离各不相等，那车子走起来，会忽高忽低上下震动. 因此，车轮都是圆的.”说完之后，小明明白了，他深有感触地说：“看来，处处离不开数学啊！”

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

28.1 抽样调查的意义

28.1.1 普查和抽样调查

名师点金

抽样调查是经常采用的调查方式，抽样调查具有花费少、省时的特点，适用于一些不宜全面调查的情况，抽取的样本要具有代表性和广泛性.

总体与样本的关系：总体包括所有个体，样本包括一部分个体，样本是总体的一部分，样本所体现的特征能近似反映总体的特征.

1 夯实基础·逐点练 (答案见140页)

知识点1 普查

1. 下列调查中，最适合采用普查的是(　　)
   A. 对我市中学生每周课外阅读时间情况的调查
   B. 对我市市民知晓“礼让行人”交通新规情况的调查
   C. 对我市中学生观看电影《厉害了，我的国》情况的调查
   D. 对我国首艘国产航母002型各零部件质量情况的调查
2. 下列调查中，适合采用普查方式的是(　　)
   A. 对某班50名同学视力情况的调查
   B. 对汉江水质情况的调查
   C. 对某类烟花燃放质量情况的调查
   D. 对元宵节期间市场上汤圆质量情况的调查

知识点2 抽样调查

3. 下列调查中，最适合采用抽样调查的是(　　)
   A. 对某地区现有的16名百岁以上老人睡眠时间的调查
   B. 对“神舟十号”运载火箭发射前零部件质量情况的调查
   C. 对某校九年级三班学生视力情况的调查
   D. 对某市场一品牌电脑使用寿命的调查
4. 下面调查方式中，合适的是(　　)
   A. 调查你所在班级同学的身高，采用抽样调查方式
   B. 调查湘江的水质情况，采用抽样调查的方式
   C. 调查CCTV-5《NBA总决赛》栏目在我市的收视率，采用普查的方式
   D. 要了解全市初中学生的业余爱好，采用普查的方式

知识点3 总体、个体、样本、样本容量

5. 为了了解内江市2018年中考数学学科各分数段成绩分布情况，从中抽取400名考生的中考数学成绩进行统计分析，在这个问题中，样本是指(　　)
   A. 400
   B. 被抽取的400名考生
   C. 被抽取的400名考生的中考数学成绩
   D. 内江市2018年中考数学成绩
6. 某校七年级有1 500名学生参加安全应急预案知识竞赛活动，为了了解本次知识竞赛的成绩分布情况，从中抽取了200名学生的得分进行统计分析，以下说法正确的是(　　)　　【导学号:1489846】
   A. 这200名学生是总体的一个样本
   B. 1 500名学生是总体
   C. 每名学生的竞赛成绩是个体
   D. 200名学生是样本容量
7. 【中考·营口】为了解某市参加中考的25 000名学生的身高情况，抽查了其中1 200名学生的身高进行统计分析. 下面叙述正确的是(　　)
   A. 25 000名学生是总体
   B. 1 200名学生的身高是总体的一个样本
   C. 每名学生是总体的一个个体
   D. 以上调查是普查

易错点! 概念不清，理解错误

8. 为了了解某中学七年级450名学生期中考试的数学成绩，从中抽取了50名学生期中考试的数学成绩进行分析. 在这次抽样分析过程中，总体是_____，样本是_____，个体是_____，样本容量是_____.

趣味数学 一名统计学家遇到一位数学家，统计学家调侃数学家说道：“你们不是说若$X=Y$且$Y=Z$，则$X=Z$吗！那么想必你若是喜欢一个女孩，那么那个女孩喜欢的男生你也会喜欢喽.”(待续)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞（答案见140页）

考查角度① 利用调查的意义选择调查方法

9. 下列调查中，哪些适宜用抽样调查，哪些适宜用普查？
（1）调查某市中学生每天做作业的时间；
（2）调查某班学生对“中国梦”的知晓情况；
（3）调查一架“歼20”隐形战机各零部件的质量；
（4）调查2018年俄罗斯世界杯决赛参赛运动员兴奋剂的使用情况.

考查角度② 利用总体、个体、样本、样本容量的定义进行识别

10. 时代中学七年级共10个班，为了了解本年级学生一周中收看电视节目所用的时间，小亮利用放学时间在校门口调查了他认识的60名七年级同学.
（1）小亮的调查是抽样调查吗？
（2）如果是抽样调查，指出调查的总体、个体和样本容量.

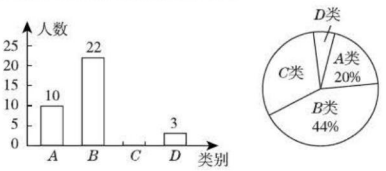
Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞（答案见140页）

拔尖角度① 利用调查的意义说明调查方式的选择

11. 近年来，由于乱砍滥伐，掠夺性使用森林资源，我国长江、黄河流域植被遭到破坏，土地沙化严重，洪涝灾害时有发生，沿黄某地区为积极响应和支持“保护母亲河”的倡议，建造了长100 km、宽0.5 km的防护林，有关部门为统计这一防护林共有多少棵树，从中选出10块防护林（每块长1 km、宽0.5 km）进行统计.
（1）在这个问题中，总体、个体、样本各是什么？
（2）请你谈谈要想了解整个防护林的树木棵数，采用哪种调查方式较好？说出你的理由.

拔尖角度② 利用统计图的信息说明相关数据

12. 某校为了预测本校九年级男生毕业体育测试达标情况，随机抽取该年级部分男生进行了一次测试（满分50，成绩均记为整数分），并按测试成绩 m（单位：分）分成四类：A 类（$45 < m \leqslant 50$），B 类（$40 < m \leqslant 45$），C 类（$35 < m \leqslant 40$），D 类（$m \leqslant 35$）绘制出如图所示的两幅不完整的统计图，请根据图中信息解答下列问题：
（1）求本次抽取的样本容量和扇形统计图中 A 类所对的圆心角的度数；
（2）补全条形统计图；
（3）若 D 类为测试成绩不达标，则样本男生毕业体育测试成绩能达标的有多少名？



（第12题）

数学家想了一下反问道：“按这种说法，你把左手放到一锅100摄氏度的开水中，右手放到一锅0摄氏度的冰水里想来也没事吧！因为它们平均不过是50摄氏度而已！”
趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

28.1.2　这样选择样本合适吗

名师点金

有关统计图的综合题，解答时应认真审题，根据已知列算式求未知量. 抽样调查的目的就是用样本的特征估计总体的特征. 用样本的情况估计总体的情况是一种重要的统计思想，在生产生活中有着广泛的应用.

Ⅰ 夯实基础·逐点练 (答案见140页)

知识点1 样本的代表性

1. 刘强同学为了调查全市初中生人数，他对自己所在城区人口和城区初中生人数进行了调查. 城区人口约3万人，初中生约1 200人. 全市人口实际约300万人，因此他推断全市初中生约12万人. 但市教育局提供的全市初中生人数约8万，与他估计的数据有很大偏差. 请你用所学的统计知识，找出其中错误的原因：_____.

2. 【中考·淄博】下列调查，样本具有代表性的是(　　)
   A. 了解全校同学对课程的喜欢情况，对某班男同学进行调查
   B. 了解某小区居民的防火意识，对你们班同学进行调查
   C. 了解商场的平均日营业额，选在周末进行调查
   D. 了解观众对所看电影的评价情况，对座号是奇数号的观众进行调查

3. 为了了解某校九年级学生期中考试的成绩，准备采用抽样调查，下列抽取的样本合理的是(　　)
   A. 随机选取九年级其中一个班的成绩
   B. 选取九年级中人数最多的那个班的成绩
   C. 选取九年级全部女生的成绩
   D. 选取九年级各班座位号为奇数的学生的成绩

4. 为了了解全校学生对数学的兴趣程度，教导主任召集了各年级各班数学课代表开座谈会，了解他们的兴趣程度，小聪认为这样的抽样调查合适，理由是担任数学课代表的同学具有代表性；小芳认为这样的抽样调查不合适，理由是只抽查担任数学课代表的同学不具有代表性. 对于小聪和小芳的观点，你认为(　　)
   A. 小聪和小芳都正确
   B. 小聪和小芳都错误
   C. 只有小聪正确
   D. 只有小芳正确

知识点2 样本容量适度

5. 为了解本地区老年人一年中生病次数，下列样本抽取方式最合适的是(　　)
   A. 到公园调查100名晨练老人
   B. 到医院调查100名老年病人
   C. 到某小区调查10名老年居民
   D. 利用户籍资料，按规则抽查10%的老年人

6. 【中考·重庆】为调查某大型企业员工对企业的满意程度，以下样本最具代表性的是(　　)
   A. 企业男员工
   B. 企业年满50岁及以上的员工
   C. 用企业人员名册，随机抽取三分之一的员工
   D. 企业新进员工

7. 为了了解现阶段全国出生的男女比例是否失调，小刚对他家所在村落一年来新出生的婴儿进行调查. 小莉认为小刚这种调查方式不合适，主要原因是：①样本容量太小，不具有普遍性；②调查的范围太小，缺乏普遍性；③应该用普查，不能用抽样调查. 其中正确的是(　　)
   A. ①③　　B. ①②③
   C. ①②　　D. ①

8. 为了了解全校学生上学方式的情况(骑自行车、步行和乘汽车)，对占全校一半以上的寄宿生进行了全面调查. 对于这样的调查大家都认为不合适，其中有两个理由：①样本容量太小；②样本缺乏代表性. 下面判断正确的是(　　)　　【导学号：1489846】
   A. ①②都正确
   B. ①②都错误
   C. ①正确，②错误
   D. ①错误，②正确

易错点 选取样本缺乏普遍性而致错

9. 某中学九年级进行了一次数学测验，参考人数780人，为了了解这次数学测验成绩，下列抽取样本中较为合理的是(　　)
   A. 抽取前100名同学的数学测验成绩
   B. 抽取后100名同学的数学测验成绩
   C. 抽取1、2两班同学的数学测验成绩
   D. 抽取各班学号为3的倍数的同学的数学测验成绩

趣味数学　一天，莎维尔村理发师挂出一块招牌："村里所有不自己理发的男人都由我给他们理发，我也只给这些人理发."于是有人问他："您的头发由谁理呢？"(待续)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞（答案见140页）

考查角度1 利用样本的普遍性辨析样本

10. 判断下面几个抽样调查选择样本的方法是否合适，请说明理由.

(1) 估计我国儿童的身高状况，在某幼儿园的一个班里进行调查；

(2) 为了解观众对所观看影片的评价情况，随机调查某电影院单排单号的观众；

(3) 为调查某初级中学的学生上学坐校车的情况，抽取七年级的两个班进行调查.

考查角度2 利用样本的代表性抽取样本

11. 为制订某市七、八、九年级男生校服的生产计划，有关部门准备对2 000名初中男生的身高进行调查，现有三种方案：

(1) 测量体校中200名篮球、排球队员中男生的身高.

(2) 查阅有关外地200名男生身高的统计资料.

(3) 在该市市区和郊区各任选三所初级中学，在这六所学校每个年级的(1)班中，用抽签的方法分别选出15名男生，然后测量他们的身高.

为了达到估计该市初中三个年级男生身高分布的目的，你认为采用上述哪种调查方案比较合理？

Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞（答案见140页）

拔尖角度 利用统计图的信息说明样本合理性

12. 【中考 · 北京】调查作业：了解你所在小区家庭5月份用气量情况：

小天、小东和小芸三位同学住在同一小区，该小区共有300户家庭，每户家庭人数在2～5之间，这300户家庭的平均人数为3.4.

小天、小东和小芸各自对该小区家庭5月份用气量情况进行了抽样调查，将收集的数据进行了整理，绘制的统计表分别为表1，表2和表3.

表1 抽样调查小区4户家庭5月份用气量统计表（单位：m^3）

家庭人数	2	3	4	5
用气量	14	19	21	26

表2 抽样调查小区15户家庭5月份用气量统计表（单位：m^3）

家庭人数	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	4
用气量	10	11	15	13	14	15	15	17	17	18	18	18	18	20	22

表3 抽样调查小区15户家庭5月份用气量统计表（单位：m^3）

家庭人数	2	2	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5
用气量	10	12	13	14	17	17	18	19	20	20	22	26	31	28	31

根据以上材料回答问题：

小天、小东和小芸三人中，哪一位同学抽样调查的数据能较好地反映该小区家庭5月份用气量情况，并简要说明其他两位同学抽样调查的不足之处.

理发师顿时哑口无言，因为理发师所说的话是自相矛盾的. 这是一个著名的悖论，称为“罗素悖论”，是由英国哲学家罗素提出来的.

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

28.2 用样本估计总体

28.2.1 简单随机抽样

名师点金

抽样调查的可靠性完全取决于抽样调查得到的样本的可靠性. 抽样调查时,应注意:1. 样本容量的大小要适度,选取的样本容量过小时,与总体的误差过大,失去了抽样调查的意义;选取的样本容量过大时,违背了抽样调查的初衷. 2. 样本的选取必须是随机的,否则样本就不具有代表性. 3. 计算要准确.

1 夯实基础·逐点练 (答案见140页)

知识点1 简单随机抽样

1. 下列不属于简单随机抽样特征的是(　　)
   A. 总体中每个个体被抽取到的机会都是均等的
   B. 抽取一个个体后余下的个体被抽到的机会都是均等的
   C. 抽取一部分个体后余下的个体被抽到的机会还都是均等的
   D. 某个个体一定不会被抽到

2. 小明对随机抽样所抽取到的样本总结出如下四条特征:①具有代表性;②具有全面性;③具有合理性;④没有偏向性. 其中正确的有(　　)
   A. 4条　　B. 3条　　C. 2条　　D. 1条

3. 为了解某重点中学学生劳逸结合状况(共有3个年级,每个年级6个班),可采用下列方式进行调查:
   ①向每个班级的班长进行调查;
   ②向3个年级的每个班的学习委员进行调查;
   ③向各年级每班前10名学生进行调查;
   ④将18个班编号,从中任意抽取3个班,向这3个班的所有学生进行调查.
   你认为调查具有随机性的是(　　)
   A. ①　　B. ②　　C. ③　　D. ④

4. 有四位同学从编号1~50的总体中抽取8个个体组成一个样本,他们选取的样本中个体编号分别为:①5,10,15,20,25,30,35,40;②43,44,45,46,47,48,49,50;③1,3,5,7,9,11,13,15;④43,25,2,17,35,9,24,19.
   你认为具有随机性的样本是(　　)
   A. ④　　B. ③　　C. ②　　D. ①

5. 为了解某初中学校学生的视力情况,需要抽取部分学生进行调查,下列抽取学生的方法最合适的是(　　)
   A. 随机抽取该校一个班级的学生
   B. 随机抽取该校一个年级的学生
   C. 随机抽取该校一部分男生
   D. 分别从该校七、八、九年级中各班随机抽取10%的学生

知识点2 抽样调查的可靠性

6. 为了了解全县初中毕业班20 000名学生的身高,县教育局准备采用随机抽样方法,下列给出的样本容量较为合适的是(　　)
   A. 20　　B. 200　　C. 2 000　　D. 10 000

7. 某市教育局准备通过集中答卷的方式了解全市中学生的文化学习水平和各项综合素质的情况,下面比较合理的做法是(　　)
   A. 由全市各高中学校选派10名学生参加测试
   B. 由全市各初中学校选派10名学生参加测试
   C. 由全市各中学选派10名学生参加测试
   D. 由全市各中学随机抽取10名中学生参加测试

8. 下列调查中,选取的样本具有代表性的是(　　)
   A. 为了解某地区居民的防火意识,对该地区的初中生进行调查
   B. 为了解某校1 200名学生的视力情况,随机抽取该校120名学生进行调查
   C. 为了解某商场的平均日营业额,选在周末进行调查
   D. 为了解全校学生课外小组的活动情况,对该校的男生进行调查

9. 某出版社在某学校只征求了三名同学的意见,就宣传"本书深受同学们的欢迎",这种说法错误的原因是(　　)　　【导学号:1489846】
   A. 这三名同学不具有代表性　B. 没有征求老师的意见
   C. 没有征求家长意见　　D. 样本容量太小

易错点 易忽视样本的代表性而致错

10. 在学校体育文艺节前夕,体育部为了了解全校同学喜欢球类运动的情况,安排某班体育委员小聪明负责调查,于是小聪明就向本班的43名同学进行了调查.
    (1)题中的总体、样本分别是什么?
    (2)小聪明的抽样合适吗?

趣味数学 谜语:苏东坡踏翠(猜一数学家)　　谜底:苏步青

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞（答案见140页）

考查角度① 利用样本的随机性选取调查方式

11. 某社区要调查社区居民双休日的学习状况，采用下列调查方式：

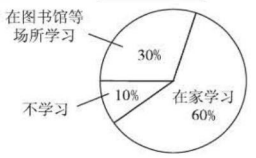
①从一幢高层住宅楼中选取200名居民；

②从不同的住宅楼中随机选取200名居民；

③选取社区内200名在校学生.

（1）上述调查方式最合理的是_____；

（2）将最合理的调查方式得到的数据制成如图所示的扇形统计图. 在这个调查中，200名居民双休日在家学习的有_____人.



（第11题）

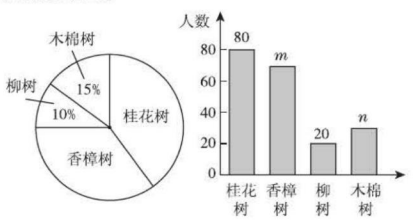
考查角度② 利用样本的代表性说明宣传的可信度

12. 福建安溪盛产茶叶，某茶叶厂为了解他们生产的茶叶的销售情况，在厦门一家商场进行调查，结果发现他们的茶叶销售量占该商场茶叶销售总量的30%. 由此，广告中宣传该厂生产的茶叶在国内茶叶销售总量中占30%. 该宣传的数据是否可信？为什么？

Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞（答案见140页）

拔尖角度① 利用统计图的信息求随机抽样中相关数据

13. 【中考 · 梅州】为实施校园文化公园化战略，提升校园文化品位，在“回赠母校一棵树”活动中，某中学准备在校园内的空地上种植桂花树、香樟树、柳树、木棉树. 为了解学生喜爱的树种情况，随机调查了该校部分学生，并将调查结果整理后制成了如图所示的统计图：



（第13题）

请根据统计图提供的信息，解答以下问题：（直接填写答案）

（1）该中学一共随机调查了_____人；

（2）条形统计图中的 $m=$_____，$n=$_____；

（3）如果在该校随机抽查了一位学生，那么该学生喜爱香樟树的概率是_____.

拔尖角度② 利用随机抽样的意义选取调查方式

14. 上学期期末考试，九年级400名学生的数学成绩分布情况如下表：

分数段	0～29	30～39	40～49	50～59	60～69	70～79	80～89	90～99	100～109	110～120
人数	8	24	24	28	20	36	40	100	64	56

（1）为了进一步了解这次考试的平均成绩，准备采用抽样调查的方式调查100名学生的成绩，下列调查方式最合理的是（　　）

A. 随机调查100名学生的成绩

B. 在各个分数段内各随机调查10名学生的成绩

C. 按各分数段内人数的比例，随机调查相应人数的成绩

D. 去掉最高50名和最低50名的成绩后，再在余下的学生中随机调查100名学生的成绩

（2）根据（1）中最合理的调查方式，求样本的最小平均分和最大平均分.

谜语：洒款园（猜一数学家）　　谜底：陈景润

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

28.2.2　简单随机抽样调查可靠吗

名师点金

用样本估计总体，应注意如下两点：

(1)用样本估计总体，不大可能完全一致，总会有一定的误差.

(2)用随机抽样选取的样本不同，得出的估计值也往往不同. 所以基于不同的样本，可能会对总体给出不同的估计值. 但是，随着样本容量的增大，由样本得出的估计值更接近于总体.

1 夯实基础·逐点练

(答案见141页)

知识点1 求样本相关的数据

1. 【中考·山东】从总体中抽取一部分数据作为样本去估计总体的某种属性. 下面叙述正确的是(　　)

A. 样本容量越大，样本平均数就越大

B. 样本容量越大，样本的方差就越大

C. 样本容量越大，样本的极差就越大

D. 样本容量越大，对总体的估计就越准确

2. 【中考·无锡】100名学生进行20秒钟跳绳测试，测试成绩统计如下表：

跳绳个数 x	$20<x\leqslant$ 30	$30<x\leqslant$ 40	$40<x\leqslant$ 50	$50<x\leqslant$ 60	$60<x\leqslant$ 70	$x>70$
人数	5	2	13	31	23	26

则这次测试成绩的中位数 m 满足(　　)

A. $40<m\leqslant 50$　　B. $50<m\leqslant 60$

C. $60<m\leqslant 70$　　D. $m>70$

3. 【中考·镇江】有4万个不少于70的两位数，从中随机抽取3 000个数据，统计如下：

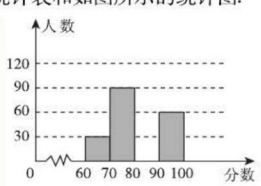
数据 x	$70\leqslant x<79$	$80\leqslant x<89$	$90\leqslant x<99$
个数	800	1 300	900
平均数	78.1	85	91.9

请根据表格中的信息，估计这4万个数据的平均数为(　　)

A. 92.16　　B. 85.23　　C. 84.73　　D. 77.97

4. 为了解2019年全国中学生创新能力大赛中竞赛项目“知识产权”笔试情况，随机抽查了部分参赛同学的成绩，整理并制作了如下统计表和如图所示的统计图.

分数段	频数	频率
$60\leqslant x<70$	30	0.1
$70\leqslant x<80$	90	n
$80\leqslant x<90$	m	0.4
$90\leqslant x<100$	60	0.2



(第4题)

请根据以上图表提供的信息，解答下列问题：

(1)本次调查的样本容量为_____；

(2)在表中：$m=$_____，$n=$_____；

(3)补全频数分布直方图；

(4)参加竞赛的小聪说，他的成绩是所有抽查同学成绩的中位数，据此推断他的成绩落在_____分数段内；

(5)如果竞赛成绩80分以上(含80分)为优秀，那么你估计该竞赛项目的优秀率大约是_____.

知识点2 用样本估计总体

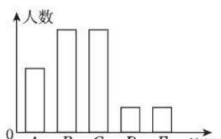
5. 【中考·绵阳】要估计鱼塘中的鱼数，养鱼者首先从鱼塘中打捞50条鱼，在每条鱼身上做好记号后把这些鱼放归鱼塘，再从鱼塘中打捞出100条鱼，发现只有两条鱼是刚才做了记号的鱼，假设鱼在鱼塘内均匀分布，那么这个鱼塘的鱼数约为(　　)

A. 5 000条　B. 2 500条　C. 1 750条　D. 1 250条

6. 某校为了解全校2 000名学生的体重情况，随机抽测了200名学生的体重，根据体质指数(BMI)标准，体重超标的有15名学生，则估计全校体重超标学生的人数为(　　)

A. 15　　B. 150　　C. 200　　D. 2 000

7. 【中考·邵阳】某市对九年级学生进行“综合素质”评价，评价结果为 A,B,C,D,E 五个等级. 现随机抽取了500名学生的评价结果作为样本进行分析，绘制了如图所示的统计图. 已知图中从左到右的五个长方形的高之比为2∶3∶3∶1∶1，据此估算该市80 000名九年级学生中“综合素质”评价结果为“A”的学生约为_____人.



(第7题)

易错点 不清楚样本估计总体的前提条件而出错

8. 为了了解我市6 000名学生参加初中毕业会考数学考试的成绩情况，从中抽取了200名考生的成绩进行统计，那么统计的结果一定可以反映总体的特征吗？

趣味数学　谜语：1的任意次方(打一成语)　　谜底：始终如一

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞（答案见141页）

考查角度① 利用简单随机抽样进行判断

9. 某报纸上刊登了一则新闻，“某种品牌的节能灯的合格率为95%”，请据此回答下列问题.

(1) 这则新闻是否说明市面上所有这种品牌的节能灯恰有5%为不合格？

(2) 你认为这则消息来源于普查，还是抽样调查？为什么？

(3) 如果已知在这次检查中合格产品有76个，则共有多少个节能灯接受检查？

(4) 如果此次检查了两种产品，数据如下表所示，有人由此认为“*A* 品牌的不合格率比 *B* 品牌低，更让人放心”. 你同意这种说法吗？为什么？

品牌	*A* 品牌	*B* 品牌
被检查数	70	10
不合格数	3	1

考查角度② 利用样本估计总体进行预测

10. 某养鱼专业户搞池塘养鱼已三年了，第一年放养鲢鱼苗20 000尾，其成活率约为70%，为了了解这批鲢鱼苗的生长情况（以每尾鱼的质量为标准），在第二年秋季时，随意从中捞取10尾，称得每尾鱼的质量如下（单位：千克）：

0.8　0.9　1.2　1.3　0.8　0.9　1.1　1.2　1.0　0.8

(1) 指出上述问题中的总体、个体和样本分别是什么；

(2) 试根据样本的平均数估计这塘鱼的总质量是多少千克；

(3) 若把这塘鱼以每千克4元的价格全部卖掉，则可得多少元的收入？

Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞（答案见141页）

拔尖角度① 利用样本估计总体解中位数、众数问题

11. 【中考 · 威宁】近年来，共享单车逐渐成为高校学生喜爱的“绿色出行”方式之一，自2016年国庆后，许多高校均投放了使用手机支付就可随取随用的共享单车. 某高校为了解本校学生出行使用共享单车的情况，随机调查了某天部分出行学生使用共享单车的情况，并整理成如下统计表.

使用次数	0	1	2	3	4	5
人数	11	15	23	28	18	5

(1) 这天部分出行学生使用共享单车次数的中位数是_____，众数是_____，该中位数的意义是_____；

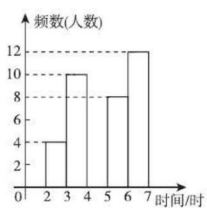
(2) 这天部分出行学生平均每人使用共享单车约多少次（结果保留整数）？

(3) 若该校某天有1 500名学生出行，请你估计这天使用共享单车次数在3次以上（含3次）的学生有多少人.

拔尖角度② 利用样本估计总体解频数（率）问题

12. 【中考 · 贺州】某中学为了了解学生每周在校体育锻炼时间，在本校随机抽取了若干名学生进行调查，并依据调查结果绘制了以下不完整的统计图表，请根据图表信息解答下列问题：

时间/时	频数（人数）	频率
$2 \leqslant t < 3$	4	0.1
$3 \leqslant t < 4$	10	0.25
$4 \leqslant t < 5$	a	0.15
$5 \leqslant t < 6$	8	b
$6 \leqslant t < 7$	12	0.3
合计	40	1



（第12题）

(1) 表中的 a = _____，b = _____；

(2) 请将频数分布直方图补全；

(3) 若该校共有1 200名学生，试估计全校每周在校参加体育锻炼时间至少有4小时的学生为多少名.

谜语：舌头（打一数字）　　谜底：千

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

28.3　借助调查做决策

28.3.1　借助调查做决策

名师点金

1. **借助调查做出正确的决策需要以下几个步骤**：(1)确定调查对象；(2)确定调查方式；(3)设计调查问题；(4)展开调查；(5)收集并整理数据；(6)确定最佳方案或做出正确的决策.
2. 数据来源是多方面的，但其来源应尽可能真实可靠，做决策时应综合考虑多方面因素，而且要用发展的眼光看问题，要有敏锐的观察能力和较强的分析、判断问题的能力.
3. **数据分析的方法**：
(1)理解平均数、中位数、众数反映的是数据的集中趋势，方差与标准差反映的是数据的波动程度.(2)在具体问题中，根据实际问题灵活选择合适的数据解决相关问题.

1 夯实基础·逐点练

(答案见 141 页)

知识点 1　数据的收集与处理

1. 为了获得某地区中学生视力状况的数据，小明同学在调查问卷中，提出如下四个问题，其中，你认为不恰当的问题是(　　)　　【导学号：1489846】

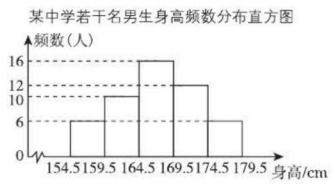
A. 在你看书时，眼睛与书本的距离

B. 你学习时使用的灯具

C. 你喜欢穿的服装颜色

D. 你是否躺着看书

2. 为了解某中学 300 名男生的身高情况，随机抽取若干名男生进行身高测量，将所得的数据整理后，画出频数分布直方图(如图). 估计该校男生的身高在 169.5～174.5 cm 的人数为(　　)



(第 2 题)

A. 12　　B. 48　　C. 72　　D. 96

知识点 2　数据分析与决策

3. 兵兵家准备买一台电脑，他上网查询甲、乙、丙三种品牌的电脑近三年来的销售情况如下表：

近三年来甲、乙、丙三种品牌电脑销售量统计表(单位：万台)

	2016 年	2017 年	2018 年
甲	720	657	552
乙	698	640	580
丙	500	588	680

如果你是兵兵，你会选(　　)

A. 甲　　B. 乙　　C. 丙　　D. 无法确定

4. 华山鞋厂为了了解中学生穿鞋的鞋号情况，对永红中学九年级(1)班的 20 名男生所穿鞋的鞋号进行统计，统计结果如下表：

鞋号	23.5	24	24.5	25	25.5	26
人数	3	4	4	7	1	1

那么这 20 名男生鞋号数据的平均数是_____，中位数是_____，众数是_____，在平均数、中位数和众数中，鞋厂最感兴趣的是_____.

5. 暑假里小王准备购置一台新冰箱，市场上主要有两种冰箱，节能冰箱与一般冰箱，到底哪一种好，小王经过调查，得到如下表所示的数据：(一年按 365 天算)

	价格/元	每天耗电量/度	使用寿命/年
节能冰箱	3 000	0.7	15
一般冰箱	2 000	1.4	15

若电费为 0.60 元/度，则节能冰箱使用 15 年的电费为_____元，总花费为_____元；一般冰箱使用 15 年的电费为_____元，总花费为_____元，根据计算结果，小王最终决定购买_____冰箱.

易错点　做决策时，考虑不全面

6. 一厂家在某城市几家经销本厂产品的大商场进行调查后发现，产品的销量占这几家大商场同类产品销量的 50%. 据此，该厂家在广告中宣传说他们的产品在国内同类产品的销量中占 50%. 请你根据所学的统计知识，判断该广告中宣传的数据是否可靠. 为什么？

趣味数学　历史教师问："你知道武则天是什么人吗？"学生答："武则天是数学家. 五过则添，就是发明四舍五入的那位大数学家."

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞（答案见141页）

考查角度① 利用众数、方差做决策

7.【中考 · 淄博】在学校组织的社会实践活动中，甲、乙两人参加了射击比赛，每人射击七次，命中的环数如下表：

序号	一	二	三	四	五	六	七
甲命中的环数	7	8	8	6	9	8	10
乙命中的环数	5	10	6	7	8	10	10

根据以上信息，解决以下问题：

（1）写出甲、乙两人命中环数的众数.

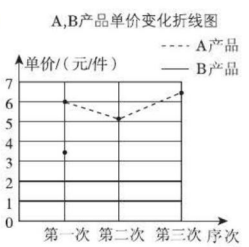
（2）已知通过计算器求得$\bar{x}_{甲}=8$，$s^2_{甲}\approx1.43$，试比较甲、乙两人谁的成绩更稳定.

考查角度② 利用方差、中位数做决策

8.【中考 · 河北】某厂生产A，B两种产品，其单价随市场变化而进行相应调整. 营销人员根据前三次单价变化的情况，绘制了如下统计表及不完整的折线图如图：

A，B产品单价变化统计表

	第一次	第二次	第三次
A产品单价/（元/件）	6	5.2	6.5
B产品单价/（元/件）	3.5	4	3



（第8题）

并求得了A产品三次单价数据的平均数和方差：

$\bar{x}_A=5.9$；$s^2_A=\frac{1}{3}[(6-5.9)^2+(5.2-5.9)^2+(6.5-5.9)^2]=\frac{43}{150}$.

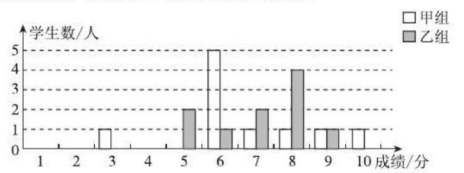
（1）补全图中B产品单价变化的折线图，B产品第三次的单价比上一次的单价降低了_____%；

（2）求B产品三次单价数据的方差，并比较哪种产品的单价波动小；

（3）该厂决定第四次调价，A产品的单价仍为6.5元/件，B产品的单价比3元/件上调$m\%$（$m>0$），使得A产品这四次单价的中位数是B产品四次单价中位数的2倍少1，求m的值.

考查角度③ 利用平均数、中位数、方差与统计图做决策

9.【中考 · 扬州】为声援扬州“运河申遗”，某校举办了一次运河知识竞赛，满分为10分，学生得分均为整数，成绩达到6分以上（包括6分）为合格，达到9分以上（包括9分）为优秀. 这次竞赛中甲、乙两组学生成绩分布的条形统计图如图所示.



（第9题）

（1）补充完整下面的成绩统计分析表.

组别	平均数	中位数	方差	合格率	优秀率
甲组	6.7		3.41	90%	20%
乙组		7.5	1.69	80%	10%

（2）小明同学说：“这次竞赛我得了7分，在我们小组中排名属中游略偏上！”观察上表可知，小明是_____组的学生（填“甲”或“乙”）.

（3）甲组同学说他们组的合格率、优秀率均高于乙组，所以他们组的成绩好于乙组. 但乙组同学不同意甲组同学的说法，认为他们组的成绩要好于甲组. 请你给出两条支持乙组同学观点的理由.

美国科学家C · R · 劳有句名言：“在理性的基础上，所有的判断都是统计学.”统计学能帮我们通过偶然性揭示必然性，从而解决许多难以解决的问题.

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞(答案见 142 页)

拔尖角度 1 方案决策问题

10. 某市“每天锻炼一小时,幸福生活一辈子”活动已开展了一年,为了解该市此项活动的开展情况,某调查统计公司准备采用以下调查方式中的一种进行调查:

A. 从一个社区随机选取 200 名居民;

B. 从一个城镇的不同住宅楼中随机选取 200 名居民;

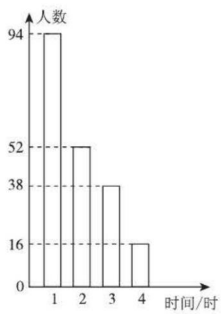
C. 从该市公安局户籍管理处随机抽取 200 名城乡居民作为调查对象,然后进行调查.

(1)在上述调查方式中,你认为比较合理的一个是_____(填选项).

(2)由一种比较合理的调查方式所得到的数据制成了如图的条形统计图,在这个调查中,这 200 名居民每天锻炼 2 小时的有_____人.

(3)若该市有 100 万人,请你利用(2)中的调查结果,估计该市每天锻炼 2 小时及以上的有多少万人.

(4)你认为这个调查活动的设计有没有不合理的地方?谈谈你的理由.



(第 10 题)

拔尖角度 2 市场销售决策问题

11. 经市场调查,某种质量为(5 ± 0.25)kg 的优质西瓜最为畅销. 为了控制西瓜的质量,农科所采用 A,B 两种种植技术进行试验. 现从这两种技术种植的西瓜中各随机抽取 20 个,记录它们的质量(单位:kg)如下:

A:4.1,4.8,5.4,4.9,4.7,5.0,4.9,4.8,5.8,5.2,5.0,4.8,5.2,4.9,5.2,5.0,4.8,5.2,5.1,5.0.

B:4.5,4.9,4.8,4.5,5.2,5.1,5.0,4.5,4.7,4.9,5.4,5.5,4.6,5.3,4.8,5.0,5.2,5.3,5.0,5.3.

(1)若质量为(5 ± 0.25)kg 的为优等品,根据以上信息完成下表:

	优等品数量/个	平均数	方差
A		4.990	0.103
B		4.975	0.093

(2)从市场销售的角度看,你认为推广哪种种植技术较好.

趣味数学　时间是个常数,但对勤奋者来说是个变数,用分来计算时间的人比用小时来计算时间的人的时间多 59 倍.
——雷巴柯夫

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

28.3.2 容易误导读者的统计图

名师点金

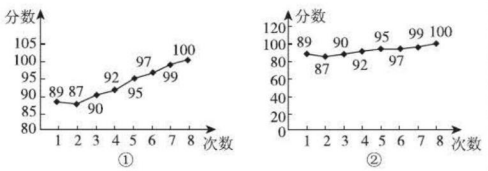
扇形统计图、条形统计图、折线统计图中每种统计图都有其各自的特点，但是每种统计图与统计图之间，由于不同的作法反映的数据表象容易给人造成误导.

整合方法 · 分类练

（答案见142页）

类型1 折线统计图给人的错觉

1. 小明将他的8次数学测验成绩按顺序绘成了如图所示的统计图.



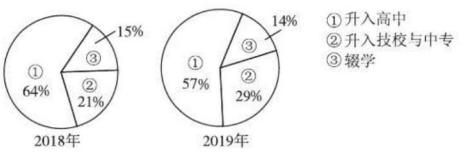
（第1题）

（1）图①和图②给人造成的感觉各是什么？

（2）若小明想向他的父母说明他数学成绩的提高情况，他将向父母展示哪一个统计图？为什么？

类型2 扇形统计图给人的错觉

2. 某市在全市普及九年义务教育后，决定在五年内普及高中教育，下面是2018年、2019年两年中考升入高中、技校与中专及辍学人数与考生人数的比例情况，如图.



（第2题）

根据该图，李疑认为该市2019年升入高中人数比2018年少，你同意她的看法吗？为什么？

类型3 条形统计图给人的错觉

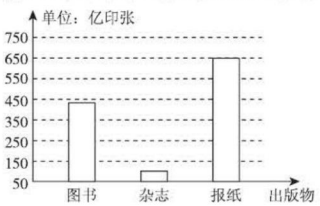
3. 下图反映了我国2018年图书、杂志和报纸的出版印张数.

（1）直观地看这个条形图，2018年哪种出版物总印张数最多？哪种出版物总印张数最少？最多的是最少的几倍？

（2）实际上最多的大约是最少的几倍？图中所表现出来的直观情况与此相符吗？

（3）这个图为什么会给人造成这样的感觉？

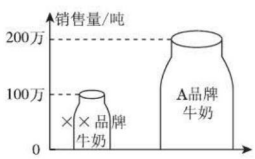
（4）为了更直观、清楚地反映实际情况，此图应做怎样的改动？



（第3题）

类型4 容易误导决策的其他统计图

4. 生产A品牌牛奶的公司为了宣传其公司牛奶销售量大，2018年的市场调查的销售量表明：A品牌牛奶销售量为200万吨，其他品牌牛奶销售量为100万吨，生产A品牌牛奶公司把该品牌牛奶销售量与其他品牌牛奶的销售量对比绘画了如图的统计图，并形象地用牛奶瓶代替条形. 你认为该公司的宣传图可靠吗？



（第4题）

当你听到一种统计关系时，切勿轻率地对因果关系做结论，否则会误入歧途. 比如统计资料表明，大多数汽车事故出在中等速度的行驶中，极少的事故是出在大于150千米/时的行驶中的.（待续）

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

全章热门考点整合应用

(答案见 142 页)

名师点金

本章主要考查抽样调查以及用样本估计总体的思想. 本章的主要考点可概括为:两个概念、三个样本性质、三个决策方式、两种思想.

考点 1 两个概念

概念 1 普查与抽样调查

1. 下列调查中,哪些适合用普查方式,哪些适合用抽样调查?

(1)了解一批炮弹的杀伤半径;

(2)了解扬州电视台(关注)栏目的收视率;

(3)了解长江中鱼的种类;

(4)了解某班学生对“扬州精神”的知晓率;

(5)了解全校每个学生的心理健康状况;

(6)了解某种灯泡是否可以连续使用 2 200 小时;

(7)调查一架“歼 20”隐形战机各零部件的质量.

概念 2 总体与样本

2. 为了解七(3)班同学的营养情况,随机抽取了 8 名学生的血样进行血色素检测,测得结果如下:(单位:g)13.8,12.5,10.6,11,14.7,12.4,13.6,12.2. 在这个问题中,采取了_____调查方式,总体是_____,个体是_____,样本容量是_____.

考点 2 三个样本性质

性质 1 样本的代表性

3. 某教育网站正在就“中小学生对教师上课拖堂现象的反应”的问题进行在线调查,你认为调查结果_____代表性(填“具有”或“不具有”),理由是_____.

性质 2 样本的可靠性

4. 小丽和小明这 2 名同学对全班 50 名同学的数学成绩进行统计,小丽随机抽取的 5 名同学的成绩分别为(单位:分):98,92,75,80,65. 由此估计全班同学数学成绩的平均分为 82 分,而小明随机抽取的 10 名同学的成绩分别为(单位:分):99,98,95,92,85,80,78,75,75,70. 由此他估计全班同学数学成绩的平均分为 84.7 分,而实际上全班同学的数学成绩的平均分为 87 分,因此小丽认为抽样调查不可靠,她的观点正确吗?

性质 3 样本的随机性

5. 某校共有七、八、九三个年级,每个年级共有八个班,全校共有 1 236 名学生. 在下列情况下如何用随机抽样的方法分别选取一个样本?

(1)在全校三个年级中随机抽取两个年级;

(2)随机抽取九年级的一个班;

(3)在全校学生中随机抽取 40 人;

(4)在全校七、八、九三个年级中随机抽取两个班级,并在这两个班级中随机抽取 40 人.

考点 3 三个决策方式

决策 1 由媒体与网络的信息做决策

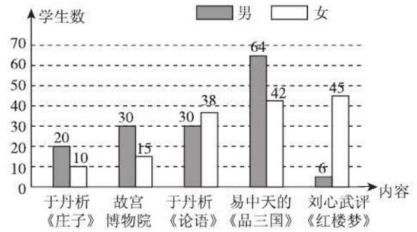
6. 某船队要对下月是否出海做决策,若出海后是好天气,可得收益 5 000 元;若出海后天气变坏,将要损失 2 000 元;若不出海,无论天气好坏都要承担 1 000 元的损失费. 船队队长通过上网查询下月的天气情况后,预测下月好天气的机会是 60%,坏天气的机会是 40%,则应该如何做决策?

趣味数学　这是否就意味着高速行驶比较安全?绝对不是这样. 统计关系往往不能表明因果关系. 由于多数人是以中等速度开车,因此多数事故是出在中等速度的行驶中.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

决策2 由统计图的信息做决策

7. 为了丰富校园文化生活，某校计划在午间校园广播台播放《百家讲坛》的部分内容. 为了了解学生的喜好，抽取若干名学生进行问卷调查（每人只选一项内容），整理调查结果，绘制统计图，如图.



（第7题）

请根据统计图提供的信息回答以下问题：

（1）抽取的学生数为_____名.

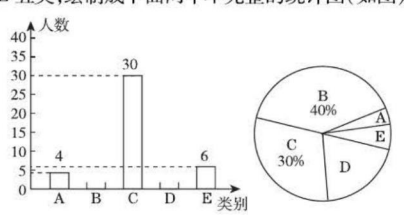
（2）该校有3 000名学生，估计喜欢收听易中天的《品三国》的学生有_____名.

（3）估计该校女学生喜欢收听刘心武评《红楼梦》的占全校学生的_____%.

（4）如果你是学校广播电台的主持人，你怎样选择播放《百家讲坛》？

决策3 由统计与概率综合做决策

8. 【中考·孝感】在孝感市关工委组织的“五好小公民”主题教育活动中，我市蓝天学校组织全校学生参加了“红旗飘飘，引我成长”知识竞赛，赛后随机抽取了部分参赛学生的成绩，按从高分到低分将成绩分成A，B，C，D，E五类，绘制成下面两个不完整的统计图（如图）：



（第8题）

根据上面提供的信息解答下列问题：

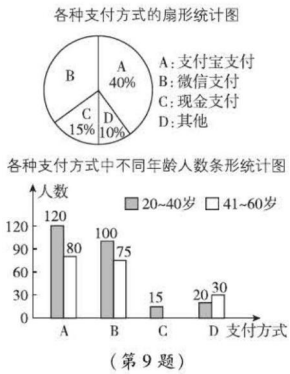
（1）D类所对应的圆心角是_____度，样本中成绩的中位数落在_____类中，并补全条形统计图；

（2）若A类含有2名男生和2名女生，随机选择2名学生担任校园广播“孝心伴我行”节目主持人，请用列表法或画树状图求恰好抽到1名男生和1名女生的概率.

考点4 两种思想

思想1 样本估计总体思想

9. 【中考·金华】为了解朝阳社区20～60岁居民最喜欢的支付方式，某兴趣小组对社区内该年龄段的部分居民展开了随机问卷调查（每人只能选择其中一项），并将调查数据整理后绘成如下两幅不完整的统计图. 请根据图中信息解答下列问题：



（第9题）

（1）求参与问卷调查的总人数.

（2）补全条形统计图.

（3）该社区中20～60岁的居民约8 000人，估算这些人中最喜欢微信支付方式的人数.

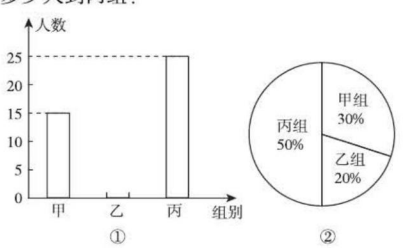
思想2 方程思想

10. 某年级组织学生参加夏令营活动，本次夏令营分为甲、乙、丙三组进行，如图所示的两幅统计图反映了学生参加夏令营的报名情况，请你根据图中的信息回答下列问题：

（1）该年级报名参加丙组的有_____人.

（2）该年级报名参加本次活动的总人数为多少？并补全统计图.

（3）根据实际情况，需要从甲组抽调部分同学到丙组，使丙组人数是甲组人数的3倍，应从甲组抽调多少人到丙组？



（第10题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



典点®

综合应用创新题 典中点

达标检测卷

含参考答案及点拨

九年级数学

下（HS版）

陕西新华出版传媒集团
陕西人民教育出版社

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第26章达标检测卷

（120分，90分钟）

题　号	一	二	三	总　分
得　分				

姓名　学号　班级　学校　密　封　线

一、选择题（每题3分，共30分）

1. 下列函数中是二次函数的是（　　）

A. $y=3x-1$　　B. $y=3x^2-1$　　C. $y=(x+1)^2-x^2$　　D. $y=\sqrt{x^2-1}$

2. 抛物线 $y=2x^2+1$ 的顶点坐标是（　　）

A. $(2,1)$　　B. $(0,1)$　　C. $(1,0)$　　D. $(1,2)$

3. 二次函数 $y=ax^2+bx-1(a\neq0)$ 的图象经过点 $(1,1)$，则 $a+b+1$ 的值是（　　）

A. -3　　B. -1　　C. 2　　D. 3

4. 在平面直角坐标系中，将抛物线 $y=x^2-4$ 先向右平移2个单位，再向上平移2个单位，得到的抛物线表达式为（　　）

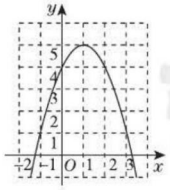
A. $y=(x+2)^2+2$　　B. $y=(x-2)^2-2$

C. $y=(x-2)^2+2$　　D. $y=(x+2)^2-2$

5. 如图是二次函数 $y=-x^2+2x+4$ 的图象，使 $y\leqslant1$ 成立的 x 的取值范围是（　　）

A. $-1\leqslant x\leqslant3$　　B. $x\leqslant-1$

C. $x\geqslant3$　　D. $x\leqslant-1$ 或 $x\geqslant3$



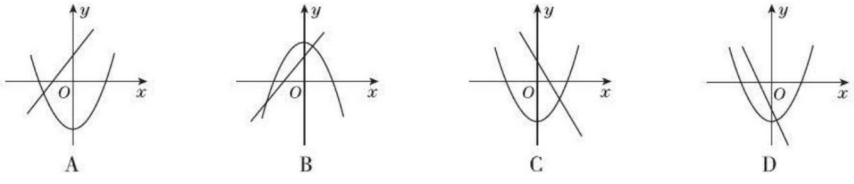
（第5题）

6. 关于抛物线 $y=x^2-2x+1$，下列说法错误的是（　　）

A. 开口向上　　B. 与 x 轴有两个重合的交点

C. 对称轴是直线 $x=1$　　D. 当 $x>1$ 时，y 随 x 的增大而减小

7. 同一坐标系中，一次函数 $y=ax+1$ 与二次函数 $y=x^2+a$ 的图象可能是（　　）



8. 抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 上部分点的横坐标 x、纵坐标 y 的对应值如下表所示：

x	…	-2	-1	0	1	2	…
y	…	0	4	6	6	4	…

从上表可知，下列说法中错误的是（　　）

A. 抛物线与 x 轴的一个交点坐标为 $(-2,0)$　　B. 抛物线与 y 轴的交点坐标为 $(0,6)$

C. 抛物线的对称轴是直线 $x=0$　　D. 抛物线在对称轴左侧部分是上升的

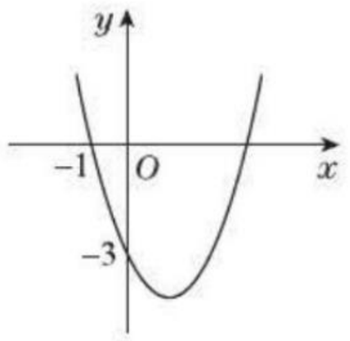
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. 某海滨浴场有 100 把遮阳伞,每把每天收费 10 元时,可全部租出;若每把每天提高 2 元,则减少 10 把伞租出,若每把每天收费再提高 2 元,则再减少 10 把伞租出……为了投资少而获利大,每把每天应提高(　　)

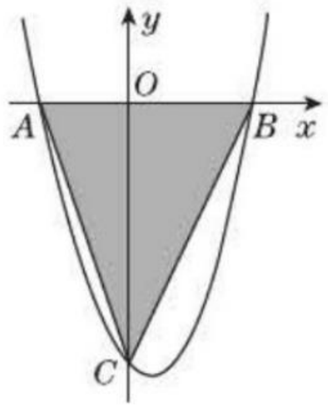
A. 4 元或 6 元　　B. 4 元　　C. 6 元　　D. 8 元

10. 如图,抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 过点 $(-1,0)$ 和点 $(0,-3)$,且顶点在第四象限,设 $P=a+b+c$,则 P 的取值范围是(　　)

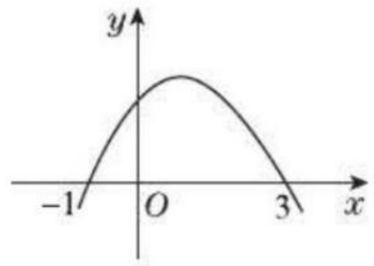
A. $-3<P<-1$　　B. $-6<P<0$　　C. $-3<P<0$　　D. $-6<P<-3$



(第 10 题)



(第 14 题)



(第 16 题)

二、填空题(每题 3 分,共 30 分)

11. 二次函数 $y=x^2+2x-4$ 的图象的开口方向是_____,对称轴是直线_____,顶点坐标是_____.

12. 函数 $y=x^2+2x+1$,当 $y=0$ 时,$x=$_____;当 $1<x<2$ 时,y 随 x 的增大而_____(填"增大"或"减小").

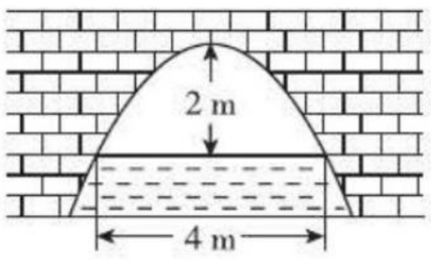
13. 小磊要制作一个三角形的钢架模型,在这个三角形中,长度为 x(单位:cm)的边与这条边上的高的和为40 cm,这个三角形的面积 S(单位:cm^2)随 x 的变化而变化,则 S 与 x 之间的函数关系式为_____.

14. 如图,二次函数 $y=x^2-x-6$ 的图象交 x 轴于 A,B 两点,交 y 轴于 C 点,则 $\triangle ABC$ 的面积为_____.

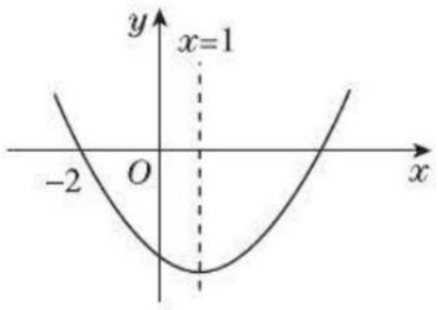
15. 已知抛物线 $y=ax^2-2ax+c(a\neq0)$ 与 x 轴一个交点的坐标为 $(-1,0)$,则一元二次方程 $ax^2-2ax+c=0$ 的根为_____.

16. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图象如图所示,则一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解是_____.

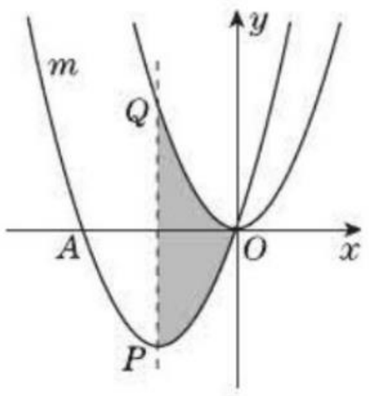
17. 如图是一个横断面为抛物线形的拱桥,当水面宽 4 m 时,拱顶(桥洞的最高点)离水面 2 m,当水面下降1 m 时,水面的宽度为_____.



(第 17 题)



(第 18 题)



(第 20 题)

18. 二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图象如图所示,下列结论:①$2a+b=0$;②$a+c>b$;③抛物线与 x 轴的另一个交点为 $(3,0)$;④$abc>0$. 其中正确的结论是_____(填写序号).

19. 若二次函数 $y=2x^2-4x-1$ 的图象与 x 轴交于 $A(x_1,0),B(x_2,0)$ 两点,则 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ 的值为_____.

20. 如图,把抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 平移得到抛物线 m,抛物线 m 经过点 $A(-6,0)$ 和原点 $O(0,0)$,它的顶点为 P,它的对称轴与抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 交于点 Q,则图中阴影部分的面积为_____.

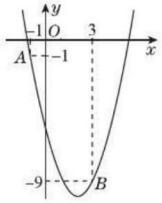
关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

三、**解答题**（21题8分，22～25题每题10分，26题12分，共60分）

21. 如图，已知二次函数 $y=ax^2-4x+c$ 的图象经过点 A 和点 B.

（1）求该二次函数的表达式，写出该抛物线的对称轴及顶点坐标；

（2）若点 $P(m,m)$ 在该函数的图象上，求 m 的值.



（第21题）

22. 已知二次函数 $y=x^2+bx-c$ 的图象与 x 轴两交点的坐标分别为 $(m,0)$，$(-3m,0)$ $(m\neq 0)$.

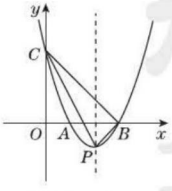
（1）求证：$4c=3b^2$；

（2）若该函数图象的对称轴为直线 $x=1$，试求二次函数的最小值.

23. 如图，在平面直角坐标系中，抛物线 $y=x^2+bx+c$ 经过点 $(-1,8)$ 并与 x 轴交于 A,B 两点，且点 B 的坐标为 $(3,0)$.

（1）求抛物线的表达式；

（2）若抛物线与 y 轴交于点 C，顶点为点 P，求 $\triangle CPB$ 的面积.



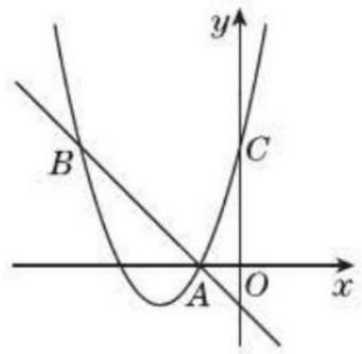
（第23题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

24. 如图,二次函数 $y=(x+2)^2+m$ 的图象与 y 轴交于点 C,点 B 在抛物线上,且与点 C 关于抛物线的对称轴对称,已知一次函数 $y=kx+b$ 的图象经过该二次函数图象上的点 $A(-1,0)$ 及点 B.

(1)求二次函数与一次函数的表达式;

(2)根据图象,写出满足 $(x+2)^2+m\geqslant kx+b$ 的 x 的取值范围.



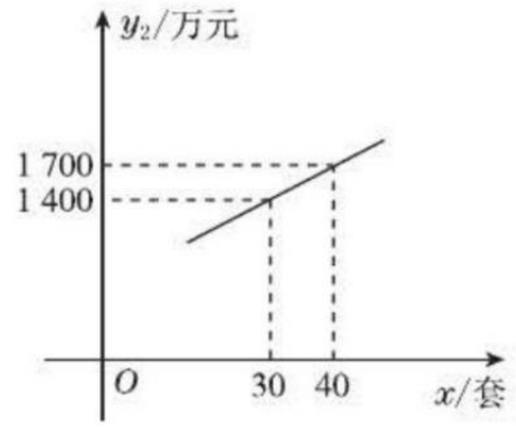
(第 24 题)

25. 国家推行“节能减排,低碳经济”政策后,某环保节能设备生产企业的产品供不应求. 若该企业的某种环保设备每月的产量保持在一定的范围内,每套产品的生产成本不高于 50 万元,每套产品的售价不低于 90 万元. 已知这种设备的月产量 x(套)与每套的售价 y_1(万元)的关系是 $y_1=170-2x$,月产量 x(套)与生产总成本 y_2(万元)存在如图所示的函数关系.

(1)直接写出 y_2 与 x 之间的函数关系式.

(2)求月产量 x 的范围.

(3)当月产量为多少时,这种设备的月利润最大? 最大月利润是多少?



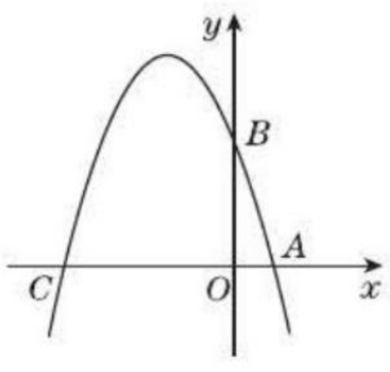
(第 25 题)

26. 如图,在平面直角坐标系 xOy 中,点 A,B,C 分别为坐标轴上的三个点,且 $OA=1$,$OB=3$,$OC=4$.

(1)求经过 A,B,C 三点的抛物线的表达式;

(2)在平面直角坐标系 xOy 中是否存在一点 P,使得以点 A,B,C,P 为顶点的四边形为菱形? 若存在,请求出点 P 的坐标;若不存在,请说明理由;

(3)若点 M 为该抛物线上一动点,在(2)的条件下,请求出当 $|PM-AM|$ 最大时点 M 的坐标,并直接写出 $|PM-AM|$ 的最大值.



(第 26 题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第27章达标检测卷

（120分，90分钟）

题　号	一	二	三	总　分
得　分				

姓名 学号 班级 学校 密 封 线

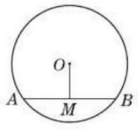
一、选择题（每题3分，共30分）

1. 已知⊙O的半径为5，点P到圆心O的距离为6，那么点P与⊙O的位置关系是（　　）

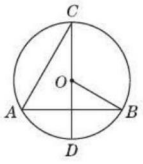
A. 点P在⊙O外　　B. 点P在⊙O内　　C. 点P在⊙O上　　D. 无法确定

2. 如图，⊙O的弦$AB=8$，M是AB的中点，且$OM=3$，则⊙O的半径等于（　　）

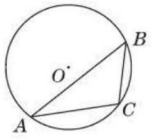
A. 8　　B. 4　　C. 10　　D. 5



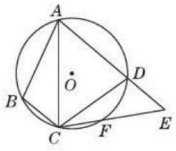
（第2题）



（第4题）



（第5题）



（第6题）

3. 下列命题为真命题的是（　　）

A. 两点确定一个圆　　B. 度数相等的弧相等

C. 垂直于弦的直径平分弦　　D. 相等的圆周角所对的弧相等，所对的弦也相等

4. 如图，在⊙O中，$CD\perp AB$，则下列结论中正确的是（　　）

A. $AC=AB$　　B. $\angle C=\frac{1}{2}\angle BOD$　　C. $\angle C=\angle B$　　D. $\angle A=\angle BOD$

5. 如图，在⊙O中，弦$BC=1$，点A是圆上一点，且$\angle A=30°$，则⊙O的半径是（　　）

A. 1　　B. 2　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{5}$

6. 如图，四边形$ABCD$内接于⊙O，F是$\overset{\frown}{CD}$上一点，且$\overset{\frown}{DF}=\overset{\frown}{BC}$，连结$CF$并延长交$AD$的延长线于点$E$，连结$AC$. 若$\angle ABC=105°$，$\angle BAC=25°$，则$\angle E$的度数为（　　）

A. 45°　　B. 50°　　C. 55°　　D. 60°

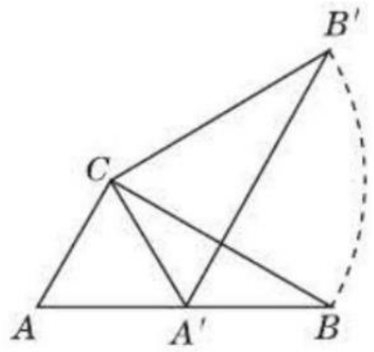
7. 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，$\angle ABC=30°$，$AB=2$. 将$\triangle ABC$绕直角顶点C逆时针旋转60°得$\triangle A'B'C$，则点B转过的路径长为（　　）

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. π

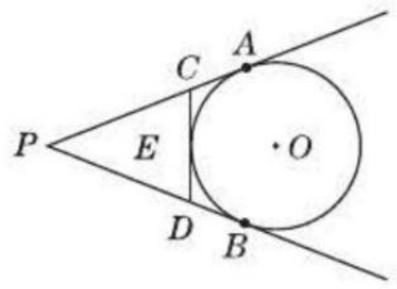
8. 如图，PA，PB切⊙O于A，B两点，CD切⊙O于点E，交PA，PB于点C和点D. 若$\triangle PCD$的周长为⊙O半径的3倍，则$\tan\angle APB=$（　　）

A. $\frac{12}{5}$　　B. $\frac{3}{5}\sqrt{13}$　　C. $\frac{2}{3}\sqrt{13}$　　D. $\frac{5}{12}$

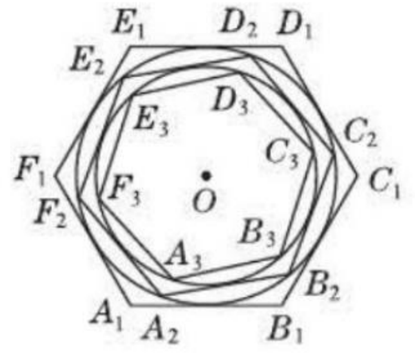
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



（第 7 题）



（第 8 题）



（第 10 题）

9. 已知一块圆心角为 300°的扇形铁皮，用它做一个圆锥形的烟囱帽（接缝忽略不计），圆锥的底面圆的直径是 80 cm，则这块扇形铁皮的半径是（　　）

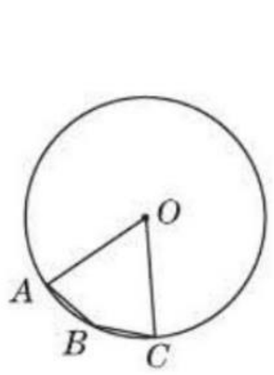
A. 24 cm　　B. 48 cm　　C. 96 cm　　D. 192 cm

10. 如图，正六边形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的边长为 2，正六边形 $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$ 的外接圆与正六边形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的各边相切，正六边形 $A_3B_3C_3D_3E_3F_3$ 的外接圆与正六边形 $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$ 的各边相切……按这样的规律进行下去，正六边形 $A_{10}B_{10}C_{10}D_{10}E_{10}F_{10}$ 的边长为（　　）

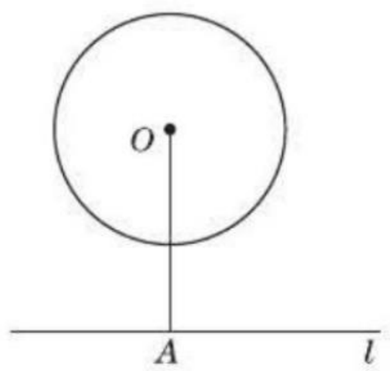
A. $\frac{243}{2^9}$　　B. $\frac{81\sqrt{3}}{2^9}$　　C. $\frac{81}{2^9}$　　D. $\frac{81\sqrt{3}}{2^8}$

二、填空题（每题 3 分，共 30 分）

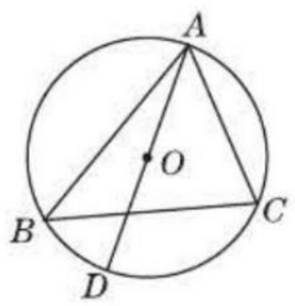
11. 如图，点 A,B,C 在 $\odot O$ 上，$\angle AOC=60°$，则 $\angle ABC$ 的度数是_____.



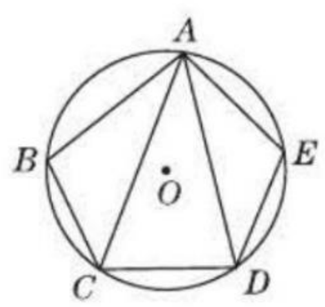
（第 11 题）



（第 12 题）



（第 13 题）



（第 15 题）

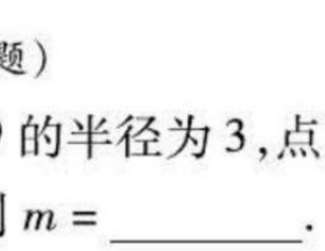
12. 如图，已知 $\odot O$ 的半径为 3，点 O 到 l 的距离 $OA=5$，将直线 l 沿射线 AO 方向平移 m 个单位时，$\odot O$ 与直线 l 相切，则 $m=$_____.

13. 如图，AD 为 $\odot O$ 的直径，$AD=6$ cm，$\angle DAC=\angle ABC$，则 $AC=$_____.

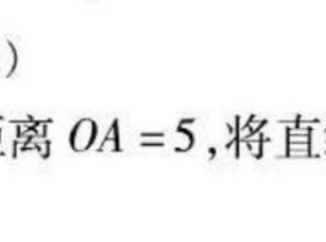
14. 直角三角形的两边长分别为 16 和 12，则此三角形的外接圆半径是_____.

15. 如图，在 $\odot O$ 的内接五边形 $ABCDE$ 中，$\angle CAD=35°$，则 $\angle B+\angle E=$_____°.

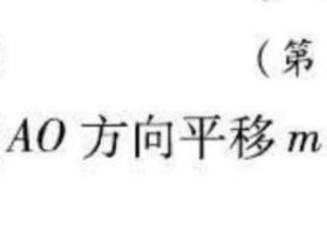
16. 如图，直线 AB 与 $\odot O$ 相切于点 A，AC,CD 是 $\odot O$ 的两条弦，且 $CD\parallel AB$，若 $\odot O$ 的半径为 $\frac{5}{2}$，$CD=4$，则弦 AC 的长为_____.



（第 16 题）



（第 17 题）



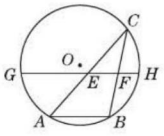
（第 18 题）

17. 一个圆锥形漏斗，某同学用三角板测得其高度的尺寸如图所示，则该圆锥形漏斗的侧面积为_____.

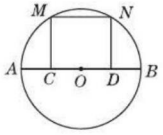
18. 如图，$AC\perp BC$，$AC=BC=4$，以 BC 为直径作半圆，圆心为点 O. 以点 C 为圆心，BC 为半径作弧 AB，过点 O 作 AC 的平行线交两弧于点 D,E，则阴影部分的面积是_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

19. 如图，AB 是$\odot O$ 的一条弦，点 C 是$\odot O$ 上一动点，且$\angle ACB=30°$，点 E，F 分别是 AC，BC 的中点，直线 EF 与$\odot O$ 交于 G，H 两点，若$\odot O$ 的半径是 7，则 $GE+FH$ 的最大值是_____.



（第 19 题）



（第 20 题）

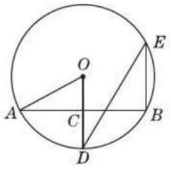
20. 如图，在$\odot O$ 中，C，D 分别是 OA，OB 的中点，$MC\perp AB$，$ND\perp AB$，M，N 在$\odot O$ 上. 下列结论：①$MC=ND$；②$\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{MN}=\overset{\frown}{NB}$；③四边形 $MCDN$ 是正方形；④$MN=\frac{1}{2}AB$，其中正确的是_____.（填序号）

三、解答题（21、22 题每题 8 分，23、24 题每题 10 分，25、26 题每题 12 分，共 60 分）

21. 如图，AB 是$\odot O$ 的一条弦，$OD\perp AB$，垂足为 C，交$\odot O$ 于点 D，点 E 在$\odot O$ 上.

（1）若$\angle AOD=60°$，求$\angle DEB$ 的度数；

（2）若 $OC=3$，$OA=5$，求 AB 的长.



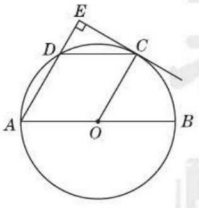
（第 21 题）

22. “不在同一条直线上的三个点确定一个圆”. 请你判断平面直角坐标系内的三个点 $A(2,3)$，$B(-3,-7)$，$C(5,11)$ 是否可以确定一个圆.

23. 如图，AB 是$\odot O$ 的直径，点 C，D 为半圆 O 的三等分点，过点 C 作 $CE\perp AD$，交 AD 的延长线于点 E.

（1）求证：CE 是$\odot O$ 的切线；

（2）判断四边形 $AOCD$ 是否为菱形，并说明理由.



（第 23 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

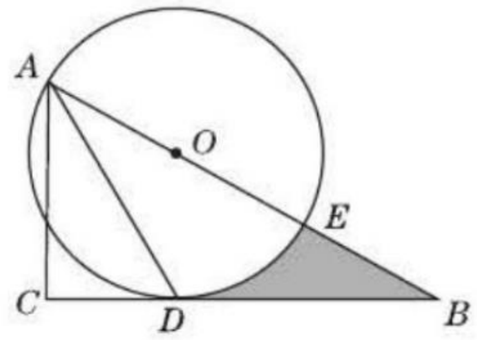
24. 如图,在 Rt△ABC 中,∠C = 90°,∠BAC 的平分线 AD 交 BC 边于点 D. 以 AB 上一点 O 为圆心作⊙O,使⊙O 经过点 A 和点 D.

(1)判断直线 BC 与⊙O 的位置关系,并说明理由;

(2)若 AC = 3,∠B = 30°,

①求⊙O 的半径;

②设⊙O 与 AB 边的另一个交点为 E,求线段 BD,BE 与劣弧 DE 所围成的阴影部分的面积. (结果保留根号和 π)

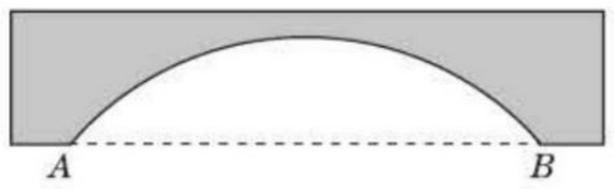


(第 24 题)

25. 如图,一拱形公路桥,圆弧形桥拱的水面跨度 AB = 80 米,桥拱到水面的最大高度为 20 米.

(1)求桥拱的半径.

(2)现有一艘宽 60 米,顶部截面为长方形且高出水面 9 米的轮船要经过这座拱桥,这艘轮船能顺利通过吗? 请说明理由.



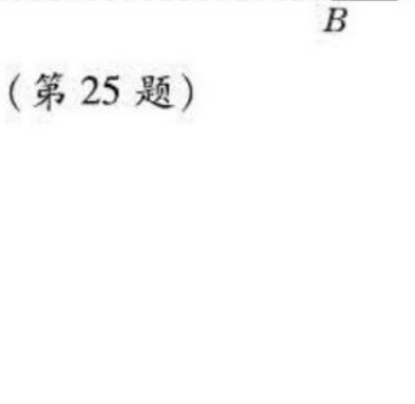
(第 25 题)

26. 如图,已知在△ABP 中,C 是 BP 边上一点,∠PAC = ∠PBA,⊙O 是△ABC 的外接圆,AD 是⊙O 的直径,且交 BP 于点 E.

(1)求证:PA 是⊙O 的切线.

(2)过点 C 作 $CF \perp AD$,垂足为 F,延长 CF 交 AB 于点 G,若 $AG \cdot AB$ = 12,求 AC 的长.

(3)在满足(2)的条件下,若 AF:FD = 1:2,GF = 1,求⊙O 的半径及 sin ∠ACE 的值.



(第 26 题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第28章达标检测卷

（120分，90分钟）

题　号	一	二	三	总　分
得　分				

姓名 学号 班级 学校

密 封 线

一、选择题（每题3分，共30分）

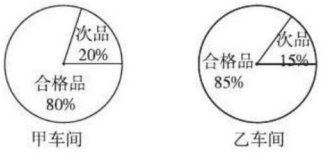
1. 以下问题，不适合用普查的是（　　）
A. 了解全班同学每周体育锻炼的时间　　B. 旅客上飞机前的安检
C. 学校招聘教师，对应聘人员进行面试　　D. 了解全市中小学生每天的零花钱

2. 为了解某市老人的身体健康状况，需要抽取部分老人进行调查，下列抽取方法最合适的是（　　）
A. 随机抽取100位女性老人
B. 随机抽取100位男性老人
C. 随机抽取公园内100位老人
D. 在城市和乡镇各选10个点，每个点任选5位老人

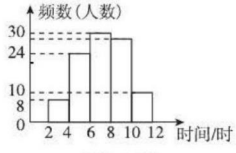
3. 为了解某校2 000名师生对我市“三创”（创国家园林城市、国家卫生城市、全国文明城市）工作的知晓情况，从中随机抽取了100名师生进行问卷调查，这项调查中的样本是（　　）
A. 2 000名师生对“三创”工作的知晓情况　　B. 从中抽取的100名师生
C. 从中抽取的100名师生对“三创”工作的知晓情况　　D. 100

4. 在选取样本时，下列说法不正确的是（　　）
A. 所选样本必须足够大　　B. 所选样本要具有代表性
C. 所选样本可按自己的爱好抽取　　D. 仅仅增加调查人数不一定能提高调查质量

5. 从如图所示的两个统计图来看，车间生产的合格品的情况为（　　）
A. 甲车间多　　B. 乙车间多　　C. 一样多　　D. 不能确定



（第5题）



（第6题）

6. 为了解某校学生今年五一期间参加社团活动时间的情况，随机抽查了其中100名学生进行统计，并绘制如图所示的频数直方图，已知该校共有1 000名学生，据此估计，该校五一期间参加社团活动时间在8～10小时之间的学生数大约是（　　）
A. 280　　B. 240　　C. 300　　D. 260

7. 为了了解某市6 000名学生参加初中毕业会考数学考试的成绩情况，从中抽取了200名考生的数学会考成绩进行统计. 在这个问题中，下列说法：①这6 000名学生的数学会考成绩的全体是总体；②每名考生是个体；③200名考生是总体的一个样本；④样本容量是200. 其中正确的有（　　）
A. 4个　　B. 3个　　C. 2个　　D. 1个

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8. 某市关心下一代工作委员会为了了解全市九年级学生的视力状况,从全市 30 000 名九年级学生中随机抽取了 500 名进行视力测试,发现其中视力不良的学生有 100 名,则可估计全市 30 000 名九年级学生中视力不良的有(　　)

A. 100 名　　B. 500 名　　C. 6 000 名　　D. 15 000 名

9. 下面是利群超市今年 5 月份中连续七天的利润情况记录:(单位:万元)

日期	14 日	15 日	16 日	17 日	18 日	19 日	20 日
当日利润	0. 20	0. 17	0. 23	0. 21	0. 23	0. 18	0. 25

可估计利群超市这一个月的利润是(　　)

A. 6. 51 万元　　B. 6. 42 万元　　C. 1. 47 万元　　D. 5. 88 万元

10. 小刚想买双好的运动鞋,于是他上网查找有关资料,得到下表:

	颜色	价格/元	备注
甲	红、白、蓝、灰	450	不宜在雨中穿
乙	淡黄、浅绿、白、黑	700	有很好的防水性
丙	灰、白蓝相间	350	较为防水
丁	浅绿、淡黄、白蓝相间	500	防水性很好

他想买一双价格在 300 ~ 600 元之间,白蓝相间、浅绿或淡黄色且防水性能很好的运动鞋,那么应选(　　)

A. 甲　　B. 乙　　C. 丙　　D. 丁

二、填空题(每题 3 分,共 30 分)

11. 为了解某校学生一周参加课外活动的时间,调查了其中 20 名学生一周参加课外活动的时间,这个问题中的总体是_____,样本是_____.

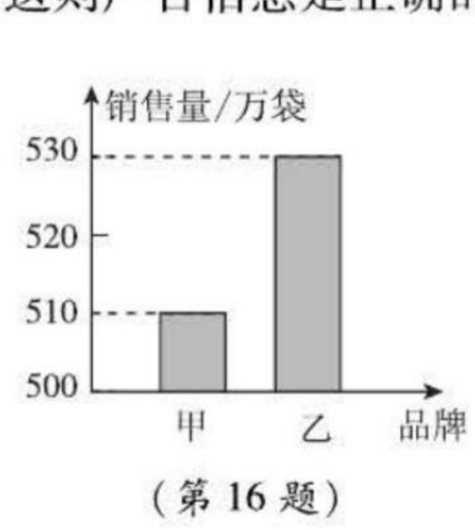
12. 小龙为了知道汤的口味如何,从锅中舀出一勺汤尝尝,这种抽样调查的方法是_____的.(填“合适”或“不合适”)

13. 小芳从编号为 1 ~ 200 的总体中抽取 10 个个体组成一个样本,编号依次是:21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,你认为她选取的这个样本_____随机性.(填“具有”或“不具有”)

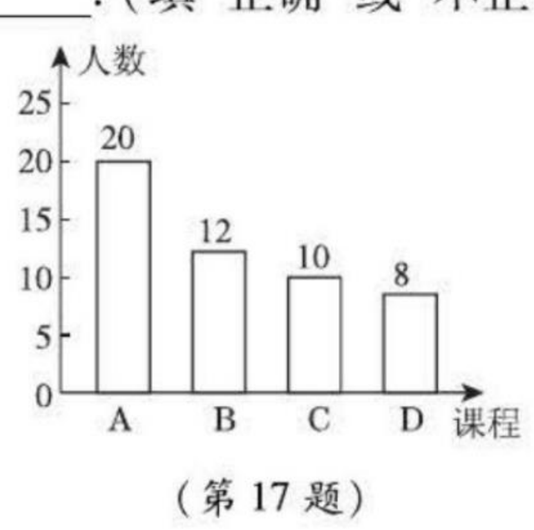
14. 某市有 100 万人,在一次对城市标志性建筑设计方案的选取的民意调查中,随机调查了 1 万人,其中有6 500人同意甲方案,由此可估计该城市中同意甲方案的有_____万人.

15. 某出租车公司在五一期间平均每天的营业额为 5 万元,由此推断该出租车公司 5 月份的总营业额约为 $5 \times 31 = 155$(万元),根据所学的统计知识,你认为这样的推断_____.(填“合理”或“不合理”)

16. 一则报纸上的广告绘制了如图所示的统计图,并称“乙品牌牛奶每天销售量是甲品牌牛奶每天销售量的 3 倍”. 你认为这则广告信息是正确的吗? _____.(填“正确”或“不正确”)



(第 16 题)



(第 17 题)

17. 某学校计划开放 A,B,C,D 四门校本课程供学生选修,规定每个学生必须并且只能选修其中一门. 为了了解学生的选修意向,现随机抽取了部分学生进行调查,并将调查结果绘制成如图所示的条形统计图. 已知该校学生人数为 2 000 人,由此估计选修 A 课程的学生有_____人.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

18. 为了从甲、乙两名学生中选拔一人参加今年六月份的全市中学生实验操作竞赛，赛前一～五月每个月对他们的实验水平进行一次测试. 甲的成绩分别为65，80，80，85，90；乙的成绩分别为75，90，83，76，80. 如果你是辅导老师，应选派学生_____参加这次竞赛.

19. 果园里有果树200棵，从中随机抽取5棵，每棵果树的产量如下（单位：kg）：98，102，97，103，105，这5棵果树的平均产量为_____kg，估计这200棵果树的总产量为_____kg.

20. 为了估计某市的空气质量情况，某同学在30天里的记录如下：

污染指数/w	40	60	80	100	120	140
天数/天	3	5	10	6	5	1

其中$w<50$时空气质量为优，$50\leqslant w\leqslant 100$时空气质量为良，$100<w\leqslant 150$时空气质量为轻度污染. 若1年按365天计算，可估计该市在一年中空气质量达到良以上（含良）的天数为_____天.

三、解答题（21、22题每题10分，23、24题每题12分，25题16分，共60分）

21. 为了解同学们对教师授课情况的满意程度，教导主任召集全校各班的学习委员开座谈会了解他们的看法，你认为这样的抽样调查合适吗？为什么？

22. 为了了解某商场今年四月份的营业额，抽查了该商场在今年四月份里5天的营业额，结果如下：（单位：万元）：2.5，2.8，2.7，2.4，2.6.

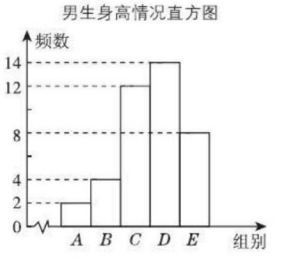
（1）在这个问题中，总体和样本分别指的是什么？

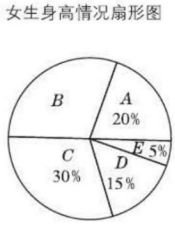
（2）求样本的平均数.

（3）根据样本平均数估计，这个商场四月份的平均日营业额为多少万元，这个商场四月份的月营业额是多少万元.

23. 为了了解江城中学学生的身高情况，随机对该校男生、女生的身高进行抽样调查. 已知抽取的样本中，男生、女生的人数相同，根据所得数据绘制成如图所示的统计图表.

组别	身高/cm
A	$x<150$
B	$150\leqslant x<155$
C	$155\leqslant x<160$
D	$160\leqslant x<165$
E	$x\geqslant 165$





（第23题）

根据图表中提供的信息，回答下列问题：

（1）在样本中，男生身高的中位数落在_____组（填组别序号），女生身高在B组的人数是_____；

（2）在样本中，身高在$150\leqslant x<155$之间的共有_____人，身高人数最多的是_____组（填组别序号）；

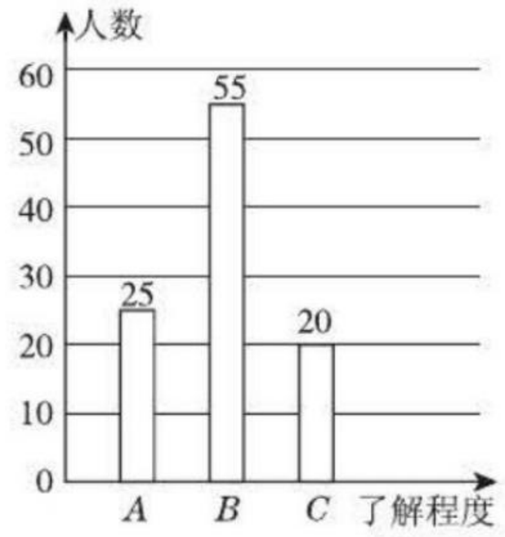
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(3)已知该校共有男生 500 人、女生 480 人,请估计身高在 $155 \leqslant x < 165$ 之间的学生有多少人?

24. 阳光中学组织学生开展社会实践活动,调查某社区居民对消防知识的了解程度(A:特别熟悉;B:有所了解;C:不知道),在该社区随机抽取了 100 名居民进行问卷调查,将调查结果绘制成如图所示的统计图. 根据统计图解答以下问题:

(1)若该社区有居民 900 名,试估计对消防知识"特别熟悉"的居民人数;

(2)该社区的管理人员有男、女各 2 名,若从中选 2 名参加消防知识培训,试用列表或画树状图的方法,求恰好选中一男一女的概率.



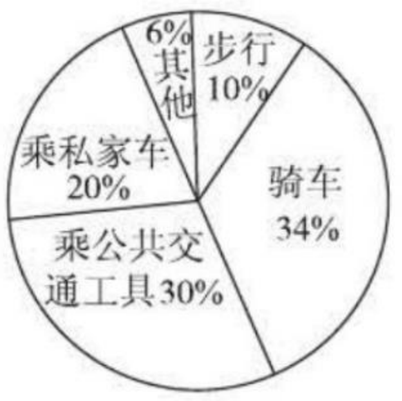
(第 24 题)

25. 某校有 2 000 名学生,为了解全校学生的上学方式,该校数学兴趣小组在全校随机抽取了 150 名学生进行抽样调查. 整理样本数据,得到频数分布表和扇形统计图(如图①):

某校 150 名学生上学方式频数分布表

方式	划记	频数
步行	正正正	15
骑车	正正正正正正正正正正一	51
乘公共交通工具	正正正正正正正正正	45
乘私家车	正正正正正正	30
其他	正丅	9
合计		150

某校150名学生上学方式扇形统计图



(第 25 题①)

(1)理解画线语句的含义,回答问题:如果 150 名学生全部在同一个年级抽取,这样的抽样是否合理?请说明理由.

(2)根据抽样调查的结果,将估计出的全校 2 000 名学生上学方式的情况绘制成条形统计图(补充在图②中).

(3)该校数学兴趣小组结合调查获取的信息,向学校提出了一些建议,如:骑车上学的学生数约占全校的 34%,建议学校合理安排自行车停车场地. 请你结合上述统计的全过程,再提出一条合理化建议:_____.

某校2 000名学生上学方式条形统计图



(第 25 题②)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

期末达标检测卷

（120 分，90 分钟）

题　号	一	二	三	总　分
得　分				

姓名　学号　班级　学校　密　封　线

一、选择题（每题 3 分，共 30 分）

1. 下列调查中，最适合采用抽样调查的是（　　）

A. 对市场一品牌洗衣机使用寿命的调查

B. 对“神舟十号”运载火箭发射前零部件质量情况的调查

C. 对某校九年级一班学生身高情况的调查

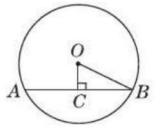
D. 对某校九年级二班学生睡眠时间的调查

2. 如果将抛物线 $y=x^2+2$ 向下平移 1 个单位，那么所得新抛物线对应的函数表达式是（　　）

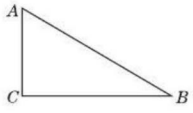
A. $y=(x-1)^2+2$　　B. $y=(x+1)^2+2$　　C. $y=x^2+1$　　D. $y=x^2+3$

3. 如图，在⊙O 中，$OC\perp AB$ 于点 C，$AB=4$，$OC=1$，则 OB 的长是（　　）

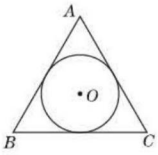
A. $\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{5}$　　C. $\sqrt{15}$　　D. $\sqrt{17}$



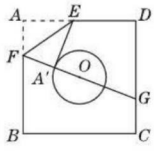
（第 3 题）



（第 5 题）



（第 7 题）



（第 9 题）

4. 某校九(1)班和九(2)班各有 5 人参加了数学竞赛的初赛，成绩如下：(单位：分)(1)班：80，45，89，40，98；(2)班：78，90，60，75，69. 从能够获奖的角度来看，你认为应派（　　）参加复赛.

A. (1)班　　B. (2)班　　C. 都可以　　D. 不能确定

5. 如图，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$\angle A=60°$，$BC=4$ cm，以点 C 为圆心，以 3 cm 长为半径作圆，则⊙C 与 AB 的位置关系是（　　）

A. 相交　　B. 相切　　C. 相离　　D. 无法确定

6. 若 $A(-4,y_1)$，$B(-3,y_2)$，$C(1,y_3)$ 是抛物线 $y=x^2+4x-5$ 上的三个点，则 y_1，y_2，y_3 的大小关系是（　　）

A. $y_1<y_2<y_3$　　B. $y_2<y_1<y_3$　　C. $y_3<y_1<y_2$　　D. $y_1<y_3<y_2$

7. 如图，⊙O 是边长为 2 的等边三角形 ABC 的内切圆，则⊙O 的半径为（　　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

8. 若二次函数 $y=x^2+bx$ 的图象的对称轴是经过点(2，0)且平行于 y 轴的直线，则关于 x 的方程 $x^2+bx=5$ 的解为（　　）

A. $x_1=0$，$x_2=4$　　B. $x_1=1$，$x_2=5$　　C. $x_1=1$，$x_2=-5$　　D. $x_1=-1$，$x_2=5$

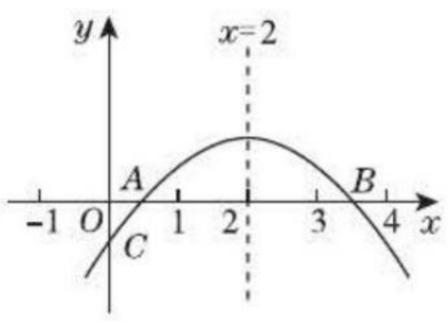
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

9. 如图,正方形纸片 $ABCD$ 的边长为 8,$\odot O$ 的半径为 2,圆心在正方形的中心上,将纸片按如图方式折叠,使 EA' 恰好与 $\odot O$ 相切于 A'($\triangle EFA'$ 与 $\odot O$ 除切点外无重叠部分),延长 FA' 交 CD 边于 G,则 $A'G$ 的长是(　　)

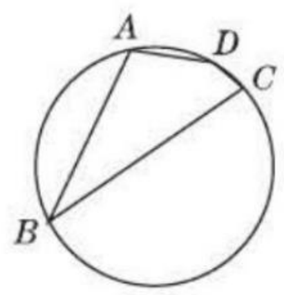
A. 6　　B. $\frac{19}{3}$　　C. 7　　D. $\frac{22}{3}$

10. 如图,二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的图象与 x 轴正半轴相交于 A,B 两点,与 y 轴相交于点 C,对称轴为直线 $x=2$,且 $OA=OC$,则下列结论:①$abc>0$;②$9a+3b+c<0$;③$c>-1$;④关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 有一个根为 $-\frac{1}{a}$. 其中正确的结论有(　　)

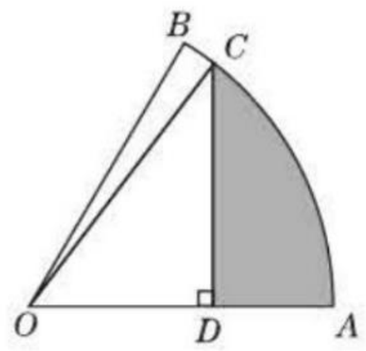
A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个



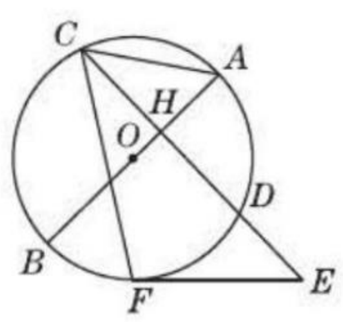
(第 10 题)



(第 12 题)



(第 15 题)



(第 16 题)

二、填空题(每题 3 分,共 30 分)

11. 若 $y=(m^2+m)x^{m^2-m}$ 是二次函数,则 m 的值为_____.

12. 如图,在圆内接四边形 $ABCD$ 中,$\angle B=30°$,则 $\angle D=$_____.

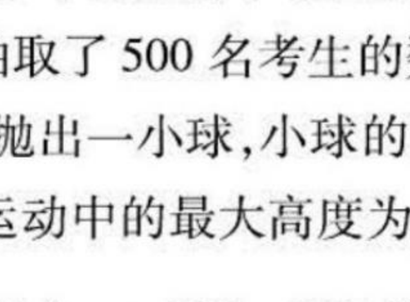
13. 据统计,某市 2018 年参加初中毕业会考的学生有 46 000 名,为了了解该市初中毕业会考数学考试的情况,从中随机抽取了 500 名考生的数学成绩进行统计分析,在这个问题中,样本容量是_____.

14. 从地面垂直向上抛出一小球,小球的高度 h(米)与小球运动时间 t(秒)的函数关系式是 $h=9.8t-4.9t^2$,那么小球运动中的最大高度为_____米.

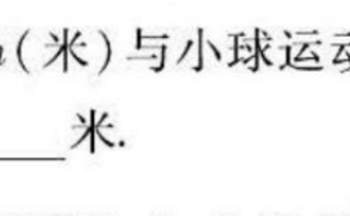
15. 如图,在扇形 AOB 中,$\angle AOB=60°$,扇形的半径为 4,点 C 在 $\overset{\frown}{AB}$ 上,$CD\perp OA$,垂足为点 D. 当 $\triangle OCD$ 的面积最大时,图中阴影部分的面积为_____.

16. 如图,AB 是 $\odot O$ 的直径,且经过弦 CD 的中点 H,过 CD 延长线上一点 E 作 $\odot O$ 的切线,切点为 F. 若 $\angle ACF=65°$,则 $\angle E=$_____.

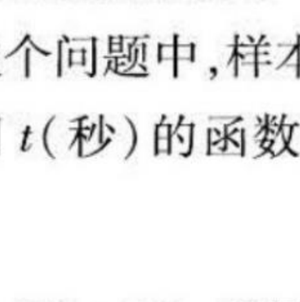
17. 如图,在平面直角坐标系中,点 O 为坐标原点,点 P 在第一象限,$\odot P$ 与 x 轴交于 O,A 两点,点 A 的坐标为(6,0),$\odot P$ 的半径为 $\sqrt{13}$,则点 P 的坐标为_____.



(第 17 题)



(第 18 题)



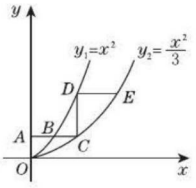
(第 19 题)

18. 如图,AB 是半圆的直径,点 O 为圆心,$OA=5$,弦 $AC=8$,$OD\perp AC$,垂足为 E,交 $\odot O$ 于 D,连结 BE. 设 $\angle BEC=\alpha$,则 $\sin\alpha=$_____.

19. 如图,小华用一个半径为 36 cm,面积为 324π cm^2 的扇形纸板制作一个圆锥形的玩具帽,则帽子的底面半径 $r=$_____cm.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

20. 如图，平行于 x 轴的直线 AC 分别交抛物线 $y_1=x^2(x\geqslant 0)$ 与 $y_2=\frac{x^2}{3}(x\geqslant 0)$ 于 B,C 两点，过点 C 作 y 轴的平行线交 y_1 于点 D，直线 $DE\parallel AC$，交 y_2 于点 E，则 $\frac{DE}{AB}=$ _____.



（第 20 题）

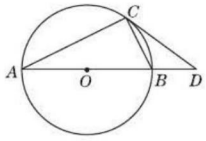
三、解答题（21、22 题每题 8 分，23、24 题每题 10 分，25、26 题每题 12 分，共 60 分）

21. 已知二次函数图象的顶点坐标为（1，−1），且经过原点（0，0），求该函数的表达式.

22. 如图，AB 是⊙O 的直径，C 是⊙O 上一点，D 在 AB 的延长线上，且 $\angle BCD=\angle A$.

（1）求证：CD 是⊙O 的切线；

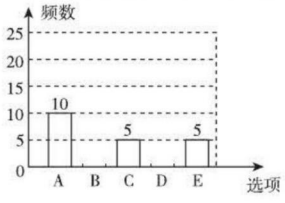
（2）若⊙O 的半径为 3，$CD=4$，求 BD 的长.



（第 22 题）

23. 随着移动终端设备的升级换代，手机已经成为我们生活中不可缺少的一部分，为了解学生在假期使用手机的情况（选项：A. 和同学亲友聊天；B. 学习；C. 购物；D. 游戏；E. 其他），端午节后某中学在全校范围内随机抽取了若干名学生进行调查，得到如下图表（部分信息未给出）：

选项	频数	频率
A	10	m
B	n	0.2
C	5	0.1
D	p	0.4
E	5	0.1



（第 23 题）

根据以上信息解答下列问题：

（1）这次被调查的学生有多少人？

（2）求表中 m,n,p 的值，并补全条形统计图.

（3）若该中学约有 800 名学生，估计全校学生中利用手机购物或玩游戏的共有多少人，并根据以上调查结果，就中学生如何合理使用手机给出你的一条建议.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

24. 某商店经销一种双肩包,已知这种双肩包的成本价为每个30元. 市场调查发现,这种双肩包每天的销售量y(单位:个)与销售单价x(单位:元)有如下关系:$y=-x+60(30\leqslant x\leqslant 60)$.

设这种双肩包每天的销售利润为w元.

(1)求w与x之间的函数表达式.

(2)这种双肩包销售单价定为多少元时,每天的销售利润最大?最大利润是多少元?

(3)如果物价部门规定这种双肩包的销售单价不高于48元,该商店销售这种双肩包每天要获得200元的销售利润,销售单价应定为多少元?

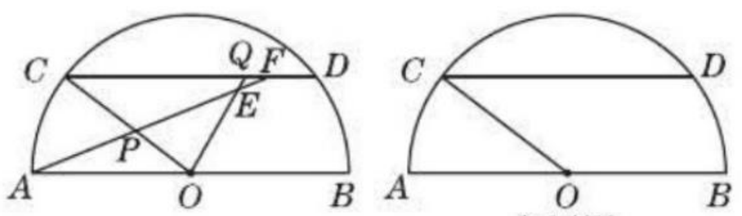
25. 已知:如图,AB是半圆O的直径,弦$CD//AB$,动点P,Q分别在线段OC,CD上,且$DQ=OP$,AP的延长线与射线OQ相交于点E、与弦CD相交于点F(点F与点C,D不重合),$AB=20$,$\cos\angle AOC=\frac{4}{5}$.

设$OP=x$,$\triangle CPF$的面积为y.

(1)求证:$AP=OQ$;

(2)求y关于x的函数关系式,并写出x的取值范围;

(3)当$\triangle OPE$是直角三角形时,求线段OP的长.



备用图

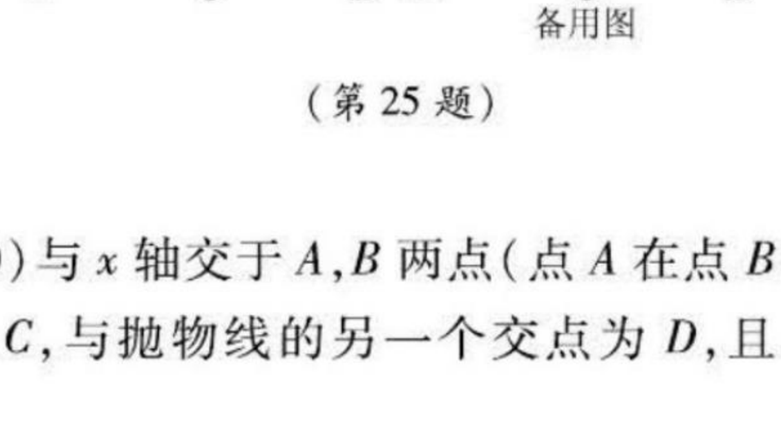
(第25题)

26. 如图,在平面直角坐标系xOy中,抛物线$y=ax^2-2ax-3a(a<0)$与x轴交于A,B两点(点A在点B的左侧),经过点A的直线$l:y=kx+b$与y轴负半轴交于点C,与抛物线的另一个交点为D,且$CD=4AC$.

(1)直接写出点A的坐标,并求直线l对应的函数表达式(其中k,b用含a的式子表示).

(2)点E是直线l上方的抛物线上的动点,若$\triangle ACE$的面积的最大值为$\frac{5}{4}$,求a的值.

(3)设P是抛物线的对称轴上的一点,点Q在抛物线上,以点A,D,P,Q为顶点的四边形能否成为矩形?若能,求出点P的坐标;若不能,请说明理由.



备用图

(第26题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

正文练习答案

第26章 二次函数

26.1 二次函数

1. C 2. C 3. B 4. B 5. B 6. D
7. D 8. C 9. C 10. A 11. B

12. -2 **点拨**：根据题意，得$\begin{cases}a^2-2=2,①\\a-2\neq0.②\end{cases}$由①，得$a=\pm2$；由②，得$a\neq2$，所以$a=-2$.

易错总结：求二次函数中字母系数的值时，根据二次函数的定义，在保证函数中含自变量的式子是整式的前提下，还必须满足自变量的最高次数是2和二次项系数不为0. 在解题过程中，往往容易忽略二次项系数不为0这个条件，只是从自变量的最高次数是2入手列方程求a的值，此时容易出现错解.

13. **解**：$y=(x-42)t=(x-42)(-4x+204)$，即$y=-4x^2+372x-8\,568$.
因为每双进价为42元，所以$x\geqslant42$.
而销售量$t\geqslant0$，故$-4x+204\geqslant0$，即$x\leqslant51$. 所以自变量x的取值范围为$42\leqslant x\leqslant51$.
点拨：本题最终要求的是y与x之间的函数关系式，即式子中不应该含有t，于是在运算过程中，应利用t与x之间的关系将t代换掉.

14. **解**：由已知条件易证Rt$\triangle ABE\cong$Rt$\triangle ADF$，
$\therefore BE=DF$.
$\therefore EC=FC=x$，$BE=DF=4-x$.
$\therefore S_{\triangle ABE}=S_{\triangle ADF}=\frac{1}{2}\times4\times(4-x)=8-2x$，$S_{\triangle EFC}=\frac{1}{2}x^2$.
$\therefore S_{\triangle AEF}=S_{正方形ABCD}-2S_{\triangle ABE}-S_{\triangle EFC}=16-2\times(8-2x)-\frac{1}{2}x^2$，即$y=-\frac{1}{2}x^2+4x(0<x\leqslant4)$.

15. **解**：(1)$S=x\left(\frac{12}{2}-x\right)$，即$S=-x^2+6x\ (0<x<6)$.
(2)

x/m	1	2	3	4	5
S/m^2	5	8	9	8	5
设计费/元	5 000	8 000	9 000	8 000	5 000

由表格可得，当$x=3$时，广告牌的设计费最多.

16. **解**：(1)$S=n^2+1$.
(2)是二次函数.

26.2 二次函数的图象与性质

26.2.1 二次函数$y=ax^2$的图象与性质

1. C 2. D 3. C 4. D 5. D

6. B **点拨**：抛物线$y=\frac{1}{2}x^2$，$y=x^2$的开口向上，抛物线$y=-x^2$的开口向下，①错误；抛物线$y=\frac{1}{2}x^2$，$y=x^2$，$y=-x^2$的顶点坐标都为$(0,0)$，对称轴都为y轴，②③正确；④错误. 故选B.

7. C **点拨**：∵抛物线$y=ax^2(a>0)$过$A(-2,y_1)$，$\therefore A(-2,y_1)$关于y轴的对称点$(2,y_1)$也在抛物线$y=ax^2(a>0)$上. 又∵$a>0$，$0<1<2$，$\therefore y_1>y_2>0$.

8. A 9. $\frac{1}{2}$

10. **错解**：当$x=-1$时，$y=(-1)^2=1$；当$x=4$时，$y=4^2=16$.
$\therefore$在$-1\leqslant x\leqslant4$范围内，函数的最小值是1，最大值是16.
诊断：当$-1\leqslant x\leqslant4$时，既包含了正数、零，又包含了负数，因此在这个范围内对应的函数值y随x的变化情况要分段研究. 实际上，当$x=0$时，函数取得最小值0. 而$x=-1$时，$y=1$；$x=4$时，$y=16$，所以最大值为16.
正解：∵$-1\leqslant x\leqslant4$包含了$x=0$，$\therefore$函数$y=x^2$的最小值为0. 当$x=-1$时，$y=1$；当$x=4$时，$y=16$.
$\therefore$当$-1\leqslant x\leqslant4$时，函数$y=x^2$的最大值为16.

11. **解**：(1)根据题意，得
$\begin{cases}m^2+3m-2=2,\\m+3\neq0,\end{cases}$
解得$\begin{cases}m=-4\text{或}1,\\m\neq-3.\end{cases}$
$\therefore m=-4$或$m=1$.
(2)∵函数图象的开口向下，
$\therefore m+3<0$，$\therefore m<-3$.
$\therefore m=-4$.
$\therefore$当$m=-4$时，该函数图象的开口向下.
(3)∵函数有最小值，
$\therefore m+3>0$，
$\therefore m>-3$. $\therefore m=1$.
$\therefore$当$m=1$时，该函数有最小值.

12. **解**：(1)由题意得$a-2<0$，解得$a<2$.
(2)由题意得$3a-2<0$，解得$a<\frac{2}{3}$.
(3)由题意得$|a+2|=\left|-\frac{1}{2}\right|$，解得$a_1=-\frac{5}{2}$，$a_2=-\frac{3}{2}$.
(4)由题意得$a^2+a=2$，
解得$a_1=-2$，$a_2=1$.
又由题意知$a>0$，$\therefore a=1$.

13. **解**：把点A的坐标$(2,0)$和点B的坐标$(0,2)$分别代入$y=kx+b$，得$\begin{cases}2k+b=0,\\b=2.\end{cases}$解得$\begin{cases}k=-1,\\b=2.\end{cases}$
$\therefore$一次函数的关系式为$y=-x+2$.
设点P的坐标为(x_1,y_1)，点Q的坐标为(x_2,y_2)，则$y_1:y_2=1:4$，
$\therefore y_2=4y_1$，即$ax_2^2=4ax_1^2$.
$\therefore x_2=\pm2x_1$.
又点Q在第二象限，点P在第一象限，
$\therefore x_2=-2x_1$.
$\therefore$点Q的坐标为$(-2x_1,4y_1)$.
把P，Q两点的坐标分别代入$y=-x+2$，
得$\begin{cases}y_1=-x_1+2,\\4y_1=2x_1+2.\end{cases}$解得$\begin{cases}x_1=1,\\y_1=1.\end{cases}$
$\therefore$点P的坐标为$(1,1)$. 把点P的坐标$(1,1)$代入$y=ax^2$，得$a=1$.
$\therefore$二次函数的关系式为$y=x^2$.

14. **解**：(1)将$A(2,4)$的坐标代入$y=ax^2$，得$4=4a$，$\therefore a=1$.
$\therefore$抛物线对应的函数关系式为$y=x^2$.
(2)设存在一点$P(x,0)$，使$\triangle AOP$为等腰三角形.
由题意知$OA=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$.
当$OA=OP$时，$OP=2\sqrt{5}$，
$\therefore P(2\sqrt{5},0)$或$P(-2\sqrt{5},0)$.
当$OA=AP$时，$(x-2)^2+16=20$，
$\therefore x=0$(舍去)或$x=4$. $\therefore P(4,0)$.
当$OP=AP$时，$x^2=(x-2)^2+16$，
$\therefore x=5$，$\therefore P(5,0)$.
$\therefore$当点P的坐标为$(2\sqrt{5},0)$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$(-2\sqrt{5},0)$,$(4,0)$或$(5,0)$时,$\triangle AOP$为等腰三角形.

26.2.2 二次函数$y=ax^2+bx+c$的图象与性质

第1课时 二次函数$y=ax^2+k$的图象与性质

1. $a<2$且$a\neq0$

2. D **3.** B **4.** C **5.** D **6.** C

7. D **8.** C **9.** C **10.** C **11.** A

12. 解:能. 设平移后的图象对应的二次函数关系式为$y=\frac{1}{3}x^2+b$,将点$(3,-3)$的坐标代入关系式,得$b=-6$.

所以平移的方向是向下,平移的距离是6个单位.

13. 解:(1)由题意易知$a=-\frac{1}{2}$,把点$(0,2)$的坐标代入$y=-\frac{1}{2}x^2+k$,得$k=2$.

(2)图象略.

14. 解:(1)$\because A$点为直线$y=x+1$与x轴的交点,

$\therefore A(-1,0)$. 又B点的横坐标为2,代入$y=x+1$可求得$y=3$,

$\therefore B(2,3)$.

$\because$抛物线顶点在y轴上,

$\therefore$可设抛物线的表达式为$y=ax^2+c$,把A,B两点的坐标代入可得$\begin{cases}a+c=0,\\4a+c=3.\end{cases}$解得$\begin{cases}a=1,\\c=-1.\end{cases}$

$\therefore$抛物线的表达式为$y=x^2-1$.

(2)$\triangle ABM$为直角三角形. 理由如下:

$\because A(-1,0),B(2,3)$,$\therefore AB=\sqrt{[2-(-1)]^2+3^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$.

由(1)中求得的抛物线表达式为$y=x^2-1$可知M点的坐标为$(0,-1)$,

$\therefore AM=\sqrt{2}$,

$BM=\sqrt{2^2+[3-(-1)]^2}=2\sqrt{5}$,

$\therefore AM^2+AB^2=2+18=20=BM^2$.

$\therefore\triangle ABM$为直角三角形.

15. 解:(1)抛物线的对称轴是y轴,顶点C的坐标为$(0,2)$.

(2)不存在. 理由:由已知条件易求出点A的坐标为$(2,0)$,点B的坐标为$(-2,0)$,则$OA=OB=2$,又易知$OC=2$,故$\triangle OAC$是等腰直角三角形. 假设存在一点M,使$\triangle MAC\cong\triangle OAC$,

$\because AC$为公共边,$OA=OC$,

$\therefore$点M与点O关于直线AC对称,即四边形$OAMC$是正方形.

$\therefore M$点的坐标为$(2,2)$. 当$x=2$时,$y=-\frac{1}{2}x^2+2=-\frac{1}{2}\times2^2+2=0\neq2$,即点$M$不在抛物线$y=-\frac{1}{2}x^2+2$上,

$\therefore$在抛物线上不存在点M,使$\triangle MAC\cong\triangle OAC$.

16. 解:(1)由题意得$k+4=2$,解得$k=-2$.

$\because y=ax^2+c$图象的顶点为$(0,4)$,

$\therefore c=4$.

把$(1,2)$的坐标代入$y=ax^2+4$,得$a+4=2$,解得$a=-2$.

(2)由(1)得二次函数表达式为$y=-2x^2+4$,令$y=m$,得$2x^2+m-4=0$,$\therefore x=\pm\sqrt{\frac{4-m}{2}}(0<m<4)$.

设B,C两点的坐标分别为(x_1,m),(x_2,m),则$BC=|x_1|+|x_2|=2\sqrt{\frac{4-m}{2}}$. $\therefore W=OA^2+BC^2=m^2+4\cdot\frac{4-m}{2}=m^2-2m+8=(m-1)^2+7(0<m<4)$. $\therefore$当$m=1$时,W取得最小值7.

第2课时 二次函数$y=a(x-h)^2$的图象与性质

1. B **2.** A **3.** C **4.** B

5. B **6.** D **7.** A

8. D **点拨:**由二次函数$y=a(x-h)^2$的性质可知二次函数$y=-2(x+m)^2$图象的对称轴为直线$x=-m$,根据题意,得$x=-m=-3$. 所以$m=3$,即二次函数的关系式为$y=-2(x+3)^2$,所以当$x=1$时,$y=-32$. 故选D.

9. A **10.** A **11.** D

12. B **点拨:**二次函数$y=3x^2+1$的图象开口向上,对称轴是y轴,顶点坐标是$(0,1)$;二次函数$y=3(x-1)^2$的图象开口向上,对称轴是直线$x=1$,顶点坐标是$(1,0)$;二次函数$y=3x^2+1$和$y=3(x-1)^2$的图象的开口大小一样. 因此正确的说法有2个:①④. 故选B.

13. 解:(1)由题意知$h=-2$. 将点$(1,-3)$的坐标代入$y=a(x+2)^2$得$a=-\frac{1}{3}$,所以抛物线对应的函数关系式为$y=-\frac{1}{3}(x+2)^2$.

(2)图象略.

(3)当$x<-2$时,y随x的增大而增大;当$x=-2$时,函数有最大值.

14. 解:(1)$a=\frac{1}{4}$,$h=-3$.

(2)抛物线$y=\frac{1}{4}(x+3)^2$的对称轴为直线$x=-3$,顶点坐标为$(-3,0)$.

15. 解:(1)依题意将抛物线$y=x^2$平移a个单位后为抛物线$y=(x-a)^2$.

$\because OA=OB$,点A的坐标为$(a,0)$,点B的坐标为$(0,a^2)$,

$\therefore a^2=a$.

$\because a\neq0$,$\therefore a=1$.

(2)存在. 由(1)可得点A的坐标为$(1,0)$,点B的坐标为$(0,1)$,由抛物线的对称性可知,C点的坐标为$(2,1)$,此时可得$AB=AC$,

$\angle BAC=90°$,又易知$AB=AC=\sqrt{2}$,

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=1$.

16. 解:(1)在$y=(x+2)^2$中,

令$y=0$,得$x=-2$;令$x=0$,得$y=4$.

$\therefore$点A,B的坐标分别为$(-2,0)$,$(0,4)$.

(2)$\because$点A,B的坐标分别为$(-2,0)$,$(0,4)$,

$\therefore OA=2,OB=4$.

$\therefore S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}OA\cdot OB=\frac{1}{2}\times2\times4=4$.

(3)抛物线的对称轴为直线$x=-2$.

(4)存在.

①以OA和OB为邻边可作平行四边形P_1AOB,易求得$P_1(-2,4)$;

②以AB和OB为邻边可作平行四边形P_2ABO,易求得$P_2(-2,-4)$.

故P点的坐标为$(-2,4)$或$(-2,-4)$.

第3课时 二次函数$y=a(x-h)^2+k$的图象与性质

1. C **2.** D **3.** B **4.** A **5.** A **6.** B

7. C **8.** C **9.** C **10.** $-3\leqslant a\leqslant1$

11. D

12. 解:(1)由题意可设二次函数的表达式为$y=a(x-4)^2-3(a\neq0)$.

把$A(1,0)$的坐标代入,得$0=a(1-4)^2-3$,解得$a=\frac{1}{3}$.

$\therefore$该二次函数的表达式为$y=\frac{1}{3}(x-4)^2-3$.

(2)令$x=0$,则$y=\frac{1}{3}(0-4)^2-3=\frac{7}{3}$,则$OC=\frac{7}{3}$.

$\because$二次函数图象的顶点坐标为$(4,-3)$,$\therefore$点B与点A关于直线$x=4$对称,$\therefore B$点坐标为$(7,0)$.

$\therefore OB=7$.

$\therefore\tan\angle ABC=\frac{OC}{OB}=\frac{\frac{7}{3}}{7}=\frac{1}{3}$.

13. 解:(1)$a=\frac{1}{2}$,$h=1$,$k=-5$.

(2)二次函数$y=a(x-h)^2+k$图象的开口向上,对称轴为直线$x=1$,顶点坐标为$(1,-5)$.

14. 解:(1)$\because$球从O点正上方2 m的A处发出,$\therefore$抛物线$y=a(x-6)^2+h$过点$(0,2)$.

又$\because h=2.6$,$\therefore 2=a(0-6)^2+2.6$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解得 $a=-\frac{1}{60}$.

故 y 与 x 之间的函数关系式为 $y=-\frac{1}{60}(x-6)^2+2.6$.

(2)球能越过球网，球会出边界. 理由：当 $x=9$ 时，$y=-\frac{1}{60}\times(9-6)^2+2.6=2.45>2.43$，∴ 球能越过球网；当 $y=0$ 时，$-\frac{1}{60}(x-6)^2+2.6=0$，解得 $x_1=6+2\sqrt{39}$，$x_2=6-2\sqrt{39}$(舍去)，

∵ $6+2\sqrt{39}>18$，∴ 球会出边界.

(3)将 $x=0$，$y=2$ 代入 $y=a(x-6)^2+h$，得 $a=\frac{2-h}{36}$. 若球一定能越过球网，则当 $x=9$ 时，$y=\frac{2-h}{36}\cdot(9-6)^2+h=\frac{2+3h}{4}>2.43$①；

若球不出边界，则当 $x=18$ 时，$y=\frac{2-h}{36}\cdot(18-6)^2+h=8-3h\leqslant 0$②，由①②得 $h\geqslant\frac{8}{3}$.

15. **解**：(1)由题意可知 $h=1$，则 $y=a(x-1)^2+k$. 将点 $A(3,0)$，$B(0,3)$ 的坐标分别代入上式，得 $\begin{cases}4a+k=0,\\a+k=3.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-1,\\k=4.\end{cases}$

故抛物线的表达式为 $y=-(x-1)^2+4$.

(2)①当 $MA=MB$ 时，$M(0,0)$；

②当 $AB=AM$ 时，$M(0,-3)$；

③当 $AB=BM$ 时，$M(0,3+3\sqrt{2})$ 或 $M(0,3-3\sqrt{2})$.

所以点 M 的坐标为 $(0,0)$，$(0,-3)$，$(0,3+3\sqrt{2})$ 或 $(0,3-3\sqrt{2})$.

第4课时　二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与性质

1. B　2. D　3. C　4. C　5. D

6. D　**点拨**：由 $\begin{cases}y=ax^2+bx,\\y=ax+b\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=-\frac{b}{a},\\y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=1,\\y=a+b.\end{cases}$

故二次函数 $y_1=ax^2+bx$ 与一次函数 $y_2=ax+b$ $(a\neq 0)$ 在同一平面直角坐标系中图象的交点为 $\left(-\frac{b}{a},0\right)$，$(1,a+b)$.

在A中，由一次函数图象可知 $a>0$，$b>0$；由二次函数图象可知 $a>0$，$b>0$，则 $a+b>0$，不符合题意.

在B中，由一次函数图象可知 $a>0$，$b<0$；由二次函数图象可知 $a>0$，$b<0$，由 $|a|>|b|$，可得 $a+b>0$，不符合题意.

在C中，由一次函数图象可知 $a<0$，$b<0$；由二次函数图象可知 $a<0$，$b<0$，则 $a+b<0$，不符合题意.

在D中，由一次函数图象可知 $a<0$，$b>0$；由二次函数图象可知 $a<0$，$b>0$，由 $|a|>|b|$，可得 $a+b<0$，符合题意.

7. B　8. A

9. **解**：(1)$y=x^2+2x-3=(x+1)^2-4$.

∴ 抛物线的开口向上，顶点坐标为 $(-1,-4)$，对称轴为直线 $x=-1$.

(2)画图略.

抛物线 $y=x^2$ 先向下平移4个单位，再向左平移1个单位得到抛物线 $y=(x+1)^2-4$(平移方法不唯一).

10. **解**：(1)把点 $P(-2,3)$ 的坐标代入 $y=x^2+ax+3$，得 $3=(-2)^2-2a+3$，解得 $a=2$.

∴ $y=x^2+2x+3=(x+1)^2+2$.

∴ 图象的顶点坐标为 $(-1,2)$.

(2)①当 $m=2$ 时，$n=3^2+2=11$.

②$2\leqslant n<11$.

11. **解**：(1)∵ $y=x^2-4$ 图象的顶点坐标为 $(0,-4)$，且 $y=x^2-4$ 是 $y=-x+p$ 的伴随函数，

∴ 点 $(0,-4)$ 在一次函数 $y=-x+p$ 的图象上.

∴ $-4=0+p$，即 $p=-4$.

∴ 一次函数为 $y=-x-4$.

∵ 直线 $y=-x-4$ 与坐标轴的交点分别为 $(0,-4)$，$(-4,0)$，

∴ 直线 $y=-x-4$ 与两坐标轴围成的三角形的面积为 $\frac{1}{2}\times4\times4=8$.

(2)设函数 $y=x^2+2x+n$ 的图象与 x 轴两个交点的横坐标分别为 x_1，x_2，则 $x_1+x_2=-2$，$x_1x_2=n$，

∴ $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{4-4n}$. 由题意得 $\sqrt{4-4n}=4$，解得 $n=-3$. ∴ 二次函数为 $y=x^2+2x-3=(x+1)^2-4$，

其图象的顶点坐标为 $(-1,-4)$.

∵ $y=x^2+2x-3$ 是 $y=mx-3$ $(m\neq 0)$ 的伴随函数，

∴ $-4=-m-3$，解得 $m=1$.

第5课时　用二次函数求几何面积的最值

1. B　2. B　3. D　4. $-\frac{7}{2}\leqslant y\leqslant 21$

5. $-4\leqslant m\leqslant -2$　6. B　7. D

8. A　**点拨**：设 $AE=x$，则 $DE=1-x$，设剪下的两个正方形的面积之和为 y，则 $y=AE^2+DE^2=x^2+(1-x)^2=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$. 当 $x=\frac{1}{2}$ 时，y 取最小值，即点 E 是 AD 的中点. 故选A.

9. (1)88π m^2　(2)$\frac{5}{2}$m

10. **解**：(1)∵ $y=x\cdot\frac{50-x}{2}=-\frac{1}{2}(x-25)^2+\frac{625}{2}$，

∴ 当 $x=25$ 时，占地面积 y 最大，即当饲养室长为25 m时，占地面积 y 最大.

(2)∵ $y=x\cdot\frac{50-(x-2)}{2}=-\frac{1}{2}(x-26)^2+338$，

∴ 当 $x=26$ 时，占地面积 y 最大，即当饲养室长为26 m时，占地面积 y 最大.

∵ $26-25=1\neq 2$，

∴ 小敏的说法不正确.

点拨：根据题意用含 x 的代数式表示出饲养室的宽，由矩形的面积＝长×宽计算，再根据二次函数的性质分析即可.

11. **解**：(1)∵ 矩形的一边长为 x 米，周长为16米，

∴ 另一边长为 $(8-x)$ 米，

∴ $S=x(8-x)=-x^2+8x$，

其中 $0<x<8$；

(2)能，理由如下：

∵ 设计费为每平方米2 000元，

∴ 当设计费为24 000元时，面积为 $24\,000\div2\,000=12$(平方米)，

即 $-x^2+8x=12$，解得 $x=2$ 或 $x=6$，

∴ 设计费能达到24 000元.

(3)∵ $S=-x^2+8x=-(x-4)^2+16$，

∴ 当 $x=4$ 时，$S_{最大}=16$.

$16\times2\,000=32\,000$(元)，

∴ 当 $x=4$ 时，矩形的最大面积为16平方米，设计费最多，最多是32 000元.

12. **解**：由题意可知，$BP=(12-2t)$mm，$BQ=4t$ mm.

∴ $S=\frac{1}{2}BP\cdot BQ=\frac{1}{2}(12-2t)\cdot4t$，

整理，得 $S=-4t^2+24t$，易知 $0<t<6$.

∵ $S=-4t^2+24t=-4(t-3)^2+36$，∴ 当 $t=3$ 时，S 取得最大值，为36. 故 S 关于 t 的函数关系式为 $S=-4t^2+24t$ $(0<t<6)$. 当 $t=3$ 时，$\triangle PBQ$ 的面积最大，为36 mm^2.

13. **解**：(1)由题意可设抛物线的表达式为 $y=ax(x-10)$，

∵ 当 $t=2$ 时，$AD=4$，

∴ 点 D 的坐标为 $(2,4)$.

∴ $4=a\times2\times(2-10)$，

解得 $a=-\frac{1}{4}$.

∴ 抛物线的表达式为 $y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{5}{2}x$.

(2)由抛物线的对称性得 $BE=OA=t$，∴ $AB=10-2t$，

当 $x=t$ 时，$AD=-\frac{1}{4}t^2+\frac{5}{2}t$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∴ 矩形 $ABCD$ 的周长

$=2(AB+AD)$

$=2\left[(10-2t)+\left(-\frac{1}{4}t^2+\frac{5}{2}t\right)\right]$

$=-\frac{1}{2}t^2+t+20$

$=-\frac{1}{2}(t-1)^2+\frac{41}{2}$.

∵ $-\frac{1}{2}<0$,

∴ 当 $t=1$ 时,矩形 $ABCD$ 的周长有最大值,最大值为$\frac{41}{2}$.

(3)当 $t=2$ 时,点 A,B,C,D 的坐标分别为$(2,0),(8,0),(8,4),(2,4)$,

∴ 矩形 $ABCD$ 对角线的交点 P 的坐标为$(5,2)$.

当平移后的抛物线过点 A 时,点 H 的坐标为$(4,4)$,此时 GH 不能将矩形的面积平分;

当平移后的抛物线过点 C 时,点 G 的坐标为$(6,0)$,此时 GH 也不能将矩形的面积平分.

∴ 当 G,H 中有一点落在线段 AD 或 BC 上时,直线 GH 不可能将矩形的面积平分.

当点 G,H 分别落在线段 AB,DC 上时,直线 GH 过点 P,必平分矩形 $ABCD$的面积. 连结 OD,

∵ $AB/\!/CD$,

∴ 线段 OD 平移后得到的是线段 GH.

∴ 线段 OD 的中点 Q 平移后的对应点是 P. 连结 BD,PQ,

在 $\triangle OBD$ 中,PQ 是中位线,

∴ $PQ=\frac{1}{2}OB=4$.

∴ 抛物线向右平移的距离是 4.

26.2.3 求二次函数的表达式

1. (1)**解**:∵ $\Delta=b^2+4a(a+b)=b^2+4ab+4a^2=(b+2a)^2$,

∴ 当 $b+2a=0$ 时,$\Delta=0$,图象与 x 轴有一个交点;当 $b+2a\neq0$ 时,$\Delta>0$,图象与 x 轴有两个交点.

(2)**解**:∵ 当 $x=1$ 时,$y=a+b-(a+b)=0$,∴ 图象不可能过点$C(1,1)$.

∴ 函数的图象经过 $A(-1,4),B(0,-1)$ 两点,可得$\begin{cases}a-b-(a+b)=4,\\-(a+b)=-1,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=3,\\b=-2.\end{cases}$

∴ 该二次函数的表达式为 $y=3x^2-2x-1$.

(3)**证明**:∵ 点 $P(2,m)(m>0)$ 在该二次函数图象上,∴ $m=4a+2b-(a+b)=3a+b>0$. 又∵ $a+b<0$,∴ $(3a+b)-(a+b)>0$,整理,得 $2a>0$,∴ $a>0$.

2. **解**:(1)∵ Rt$\triangle AOB$ 绕点 O 逆时针旋转 90°得到 Rt$\triangle COD$,

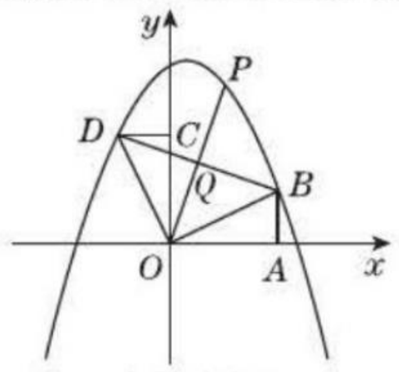
∴ $CD=AB=1,OA=OC=2$,

则点 $B(2,1),D(-1,2)$,代入表达式,得$\begin{cases}-\frac{10}{3}+2b+c=1,\\-\frac{5}{6}-b+c=2,\end{cases}$

解得$\begin{cases}b=\frac{1}{2},\\c=\frac{10}{3}.\end{cases}$

∴ 二次函数的表达式为 $y=-\frac{5}{6}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{10}{3}$.

(2)如图,设 OP 与 BD 交于点 Q.



(第 2 题)

∵ 直线 OP 把 $\triangle BOD$ 的周长分成相等的两部分,且 $OB=OD$,

∴ $DQ=BQ$,即点 Q 为 BD 的中点,

∴ 点 Q 的坐标为$\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$.

设直线 OP 的表达式为 $y=kx$,

将点 Q 的坐标代入,得$\frac{1}{2}k=\frac{3}{2}$,

解得 $k=3$,

∴ 直线 OP 的表达式为 $y=3x$,

代入 $y=-\frac{5}{6}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{10}{3}$,

得 $-\frac{5}{6}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{10}{3}=3x$,

解得 $x=1$ 或 $x=-4$(舍去).

当 $x=1$ 时,$y=3$,

∴ 点 P 的坐标为$(1,3)$.

3. (1)**证明**:由题意可知,抛物线的对称轴为直线 $x=1$.

若点 $C(-1,2)$ 在抛物线上,

则点 C 关于直线 $x=1$ 的对称点$(3,2)$也在这条抛物线上.

∴ C,E 两点不可能同时在抛物线 $y=a(x-1)^2+k(a>0)$ 上.

(2)**解**:点 A 不在抛物线上.

理由:若点 $A(1,0)$ 在抛物线 $y=a(x-1)^2+k(a>0)$ 上,则 $k=0$.

∴ $y=a(x-1)^2(a>0)$.

易知 $B(0,-1),D(2,-1)$ 都不在抛物线上.

由(1)知 C,E 两点不可能同时在抛物线上.

∴ 与抛物线经过其中三个点矛盾.

∴ 点 A 不在抛物线上.

(3)**解**:由(2)可知点 A 不在抛物线上. 结合(1)的结论易知 B,D 一定在抛物线 $y=a(x-1)^2+k(a>0)$ 上.

①若点 $C(-1,2)$ 在此抛物线上,

则$\begin{cases}a+k=-1,\\4a+k=2,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=1,\\k=-2.\end{cases}$

②若点 $E(4,2)$ 在此抛物线上,

则$\begin{cases}a+k=-1,\\9a+k=2,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=\frac{3}{8},\\k=-\frac{11}{8}.\end{cases}$

综上可知,$\begin{cases}a=1,\\k=-2\end{cases}$或$\begin{cases}a=\frac{3}{8},\\k=-\frac{11}{8}.\end{cases}$

4. **解**:(1)由二次函数的图象经过点$(1,-2)$,得$(a+1)(-a)=-2$,解得 $a_1=-2,a_2=1$.

当 $a=-2$ 时,二次函数的表达式为 $y=(x-2)(x+2-1)$,

即 $y=x^2-x-2$;

当 $a=1$ 时,二次函数的表达式为$y=(x+1)(x-2)$,

即 $y=x^2-x-2$.

综上所述,该二次函数的表达式为 $y=x^2-x-2$.

(2)当 $y=0$ 时,$(x+a)(x-a-1)=0$,解得 $x=-a$ 或 $x=a+1$,

所以二次函数的图象与 x 轴的交点是$(-a,0),(a+1,0)$.

当 $y=ax+b$ 的图象经过 $(-a,0)$ 时,$-a^2+b=0$,即 $b=a^2$;

当 $y=ax+b$ 的图象经过 $(a+1,0)$ 时,$a^2+a+b=0$,即 $b=-a^2-a$.

(3)由题易知二次函数的图象的对称轴为直线 $x=\frac{1}{2}$. 当 P 在对称轴的左侧(含顶点)时,y 随 x 的增大而减小,因为$(1,n)$与$(0,n)$关于直线$x=\frac{1}{2}$对称,所以由 $m<n$,得 $0<x_0\leqslant\frac{1}{2}$;当 P 在对称轴的右侧时,y 随 x 的增大而增大,由 $m<n$,得$\frac{1}{2}<x_0<1$. 综上所述,x_0 的取值范围为$0<x_0<1$.

5. **解**:$y=3x^2-6x+5$ 可化为 $y=3(x-1)^2+2$,根据对称可知:(1)两图象关于 x 轴对称,所求表达式为 $y=-3(x-1)^2-2$,即$y=-3x^2+6x-5$.

(2)两图象关于 y 轴对称,所求表达式为 $y=3(x+1)^2+2$,即 $y=3x^2+6x+5$.

(3)两图象关于经过抛物线 $y=3x^2-6x+5$ 的顶点且平行于 x 轴的直线对称,

所求表达式为 $y=-3(x-1)^2+2$,即 $y=-3x^2+6x-1$.

6. **解**:(1)由题意得 $B(-1,1)$ 或$(-1,9)$,∴ $-\frac{m}{2\times(-1)}=-1$,

$\frac{4\times(-1)\cdot n-m^2}{4\times(-1)}=1$ 或 9.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解得 $m=-2, n=0$ 或 8.

∴ y_1 的表达式为 $y_1=-x^2-2x$ 或 $y_1=-x^2-2x+8$.

(2)①当 $y_1=-x^2-2x$ 时，

解 $-x^2-2x=0$，得 $x=0$ 或 -2，

∴ 抛物线与 x 轴的交点是 $(0,0)$ 和 $(-2,0)$.

∵ y_2 随着 x 的增大而增大，且过点 $A(-1,5)$，

∴ y_1 与 y_2 都经过 x 轴上的同一点 $(-2,0)$.

把 $(-1,5)$，$(-2,0)$ 的坐标分别代入 $y_2=kx+b$，得 $\begin{cases}-k+b=5,\\-2k+b=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=5,\\b=10,\end{cases}$ ∴ $y_2=5x+10$.

②当 $y_1=-x^2-2x+8$ 时，解 $-x^2-2x+8=0$，得 $x=-4$ 或 2，

∴ 抛物线与 x 轴的交点是 $(-4,0)$ 和 $(2,0)$.

∵ y_2 随着 x 的增大而增大，且过点 $A(-1,5)$，∴ y_1 与 y_2 都经过 x 轴上的同一点 $(-4,0)$. 把 $(-1,5)$，$(-4,0)$ 的坐标分别代入 $y_2=kx+b$，得 $\begin{cases}-k+b=5,\\-4k+b=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=\dfrac{5}{3},\\b=\dfrac{20}{3},\end{cases}$

∴ $y_2=\dfrac{5}{3}x+\dfrac{20}{3}$.

综上，y_2 的表达式为 $y_2=5x+10$ 或 $y_2=\dfrac{5}{3}x+\dfrac{20}{3}$.

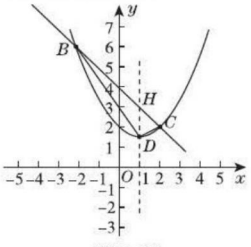
7. **解**：(1)∵ 抛物线 $y=ax^2+bx+2$ 过 $B(-2,6)$，$C(2,2)$ 两点，

∴ $\begin{cases}4a-2b+2=6,\\4a+2b+2=2.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\dfrac{1}{2},\\b=-1.\end{cases}$

∴ 抛物线的表达式为 $y=\dfrac{1}{2}x^2-x+2$.

(2)∵ $y=\dfrac{1}{2}x^2-x+2=\dfrac{1}{2}(x-1)^2+\dfrac{3}{2}$，∴ 顶点坐标为 $\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$.

如图，由 B，C 两点坐标易得直线 BC 对应的函数表达式为 $y=-x+4$，作抛物线的对称轴，交 BC 于点 H，则点 H 的坐标为 $(1,3)$.



（第 7 题）

∴ $S_{\triangle BCD}=S_{\triangle BDH}+S_{\triangle DHC}=\dfrac{1}{2}\times\left(3-\dfrac{3}{2}\right)\times[1-(-2)]+\dfrac{1}{2}\times\left(3-\dfrac{3}{2}\right)\times(2-1)=3$.

(3)联立 $\begin{cases}y=-\dfrac{1}{2}x+c,\\y=\dfrac{1}{2}x^2-x+2,\end{cases}$

消去 y，得到 $x^2-x+4-2c=0$.

当 $\Delta=0$ 时，直线与抛物线相切，$1-4(4-2c)=0$，

∴ $c=\dfrac{15}{8}$. 当直线 $y=-\dfrac{1}{2}x+c$ 经过点 C 时，$c=3$，当直线 $y=-\dfrac{1}{2}x+c$ 经过点 B 时，$c=5$.

∵ 直线 $y=-\dfrac{1}{2}x$ 向上平移 c 个单位所得的直线与抛物线段 BDC（包括端点 B，C）部分有两个交点，

∴ $\dfrac{15}{8}<c\leqslant 3$.

阶段方法技巧训练（一）

专训 1

1. A
2. C　**点拨**：∵ 二次函数 $y=3x^2+(b-3)x-4$ 的图象关于 y 轴对称，∴ $b-3=0$，$b=3$.
3. $=$；$<$；$>$
4. D　5. 1
6. C　**点拨**：由二次函数 $y=ax^2+bx$ 知，其图象过原点，排除 D.

由方程组 $\begin{cases}y=ax^2+bx,\\y=bx-a\end{cases}$ 得 $ax^2=-a$，∵ $a\neq 0$，∴ $x^2=-1$，该方程无实数根.

故二次函数与一次函数的图象无交点，排除 B.

二次函数的图象开口向上，说明 $a>0$；对称轴在 y 轴右侧，则 $b<0$. 一次函数的图象从左向右上升，则 $b>0$；从左向右下降，则 $b<0$. 故 A 错误，C 正确.

7. **解**：由图象知 $\begin{cases}3-m>0,\\n+5<0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m<3,\\n<-5.\end{cases}$

∴ $m-3<0$，$m+n<-2$.

∴ $\sqrt{(m-3)^2}+\sqrt{n^2}-|m+n|=3-m-n+m+n=3$.

8. B　9. C

专训 2

1. **解**：(1)∵ 把 C 点坐标 $(0,-6)$ 代入二次函数的表达式得 $c=-6$，把 A 点坐标 $(-2,0)$ 代入 $y=x^2+bx-6$ 得 $b=-1$，∴ 二次函数的表达式为 $y=x^2-x-6$，即 $y=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{25}{4}$.

∴ 顶点 D 的坐标为 $\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{25}{4}\right)$.

(2)将二次函数的图象沿 x 轴向左平移 $\dfrac{5}{2}$ 个单位所得图象对应的函数表达式为 $y=(x+2)^2-\dfrac{25}{4}$.

令 $y=0$，得 $(x+2)^2-\dfrac{25}{4}=0$，

解得 $x_1=\dfrac{1}{2}$，$x_2=-\dfrac{9}{2}$.

∵ $a>0$，∴ 当 $y<0$ 时，x 的取值范围是 $-\dfrac{9}{2}<x<\dfrac{1}{2}$.

2. D
3. **解**：设二次函数图象的顶点坐标为 $(x,2)$，则 $2=x+1$，所以 $x=1$，所以图象的顶点坐标为 $(1,2)$.

设二次函数的表达式为 $y=a(x-1)^2+2$，将点 $(3,-6)$ 的坐标代入上式，可得 $a=-2$.

所以该函数的表达式为 $y=-2(x-1)^2+2$，即 $y=-2x^2+4x$.

4. **解**：由 $A(1,0)$，$B(-4,0)$ 可知 $AB=5$，$OB=4$.

又∵ $BC=AB$，∴ $BC=5$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BCO$ 中，$OC=\sqrt{BC^2-OB^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$，

∴ C 点的坐标为 $(0,3)$ 或 $(0,-3)$.

设抛物线对应的函数表达式为 $y=a(x-1)(x+4)$，

将点 $(0,3)$ 的坐标代入得 $3=a(0-1)(0+4)$，解得 $a=-\dfrac{3}{4}$；

将点 $(0,-3)$ 的坐标代入得 $-3=a(0-1)(0+4)$，解得 $a=\dfrac{3}{4}$.

∴ 此抛物线对应的函数表达式为 $y=-\dfrac{3}{4}(x-1)(x+4)$ 或 $y=\dfrac{3}{4}(x-1)(x+4)$，即 $y=-\dfrac{3}{4}x^2-\dfrac{9}{4}x+3$ 或 $y=\dfrac{3}{4}x^2+\dfrac{9}{4}x-3$.

点拨：若给出抛物线与 x 轴的交点坐标或对称轴及抛物线与 x 轴的两交点间的距离，通常可设交点式求解.

5. $y=2x^2+4x$
6. **解**：(1)2；0

(2)原函数的表达式为 $y=x^2+2x=(x+1)^2-1$.

∴ 其图象的顶点坐标为 $(-1,-1)$.

(3)原函数图象的顶点为 $(-1,-1)$，新函数图象的顶点为 $(1,-4)$. 由勾股定理易得两个顶点之间的距离为 $\sqrt{13}$.

7. $y=-x^2+2x+3$
8. **解**：(1)设抛物线的表达式为 $y=a\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+k$.

把点 $A(2,0)$，$C(0,3)$ 的坐标分别代

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

入，得$\begin{cases}\frac{25}{4}a+k=0,\\ \frac{1}{4}a+k=3.\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-\frac{1}{2},\\ k=\frac{25}{8}.\end{cases}$

∴ 抛物线的表达式为 $y=-\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{25}{8}$，即 $y=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+3$.

(2)由 $y=0$，得 $-\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{25}{8}=0$，解得 $x_1=2,x_2=-3$，∴ $B(-3,0)$.

①当 $CM=BM$ 时，∵ $BO=CO=3$，即 $\triangle BOC$ 是等腰三角形，∴ 当 M 点在原点 O 处时，$\triangle MBC$ 是等腰三角形，∴ M 点的坐标为(0,0)；

②当 $BC=BM$ 时，在 Rt$\triangle BOC$ 中，$BO=CO=3$，由勾股定理得 $BC=\sqrt{OC^2+OB^2}=3\sqrt{2}$，∴ $BM=3\sqrt{2}$.

∴ M 点的坐标为 $(3\sqrt{2}-3,0)$.

综上所述，点 M 坐标为(0,0)或 $(3\sqrt{2}-3,0)$.

9. 解：(方法一)设抛物线对应的函数表达式为 $y=ax^2+bx+c$，由题意得

$\begin{cases}-\frac{b}{2a}=-2,\\ \frac{4ac-b^2}{4a}=4,\\ a+b+c=0.\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-\frac{4}{9},\\ b=-\frac{16}{9},\\ c=\frac{20}{9}.\end{cases}$

∴ 抛物线对应的函数表达式为 $y=-\frac{4}{9}x^2-\frac{16}{9}x+\frac{20}{9}$.

(方法二)设抛物线对应的函数表达式为 $y=a(x+2)^2+4$，将点(1,0)的坐标代入得 $0=a(1+2)^2+4$，解得 $a=-\frac{4}{9}$.

∴ 抛物线对应的函数表达式为 $y=-\frac{4}{9}(x+2)^2+4$.

即 $y=-\frac{4}{9}x^2-\frac{16}{9}x+\frac{20}{9}$.

(方法三)∵ 抛物线的顶点坐标为 $(-2,4)$，与 x 轴的一个交点坐标为(1,0)，∴ 抛物线的对称轴为直线 $x=-2$，与 x 轴的另一个交点坐标为 $(-5,0)$. 设抛物线对应的函数表达式为 $y=a(x-1)(x+5)$，

将点 $(-2,4)$ 的坐标代入得 $4=a(-2-1)(-2+5)$，解得 $a=-\frac{4}{9}$.

∴ 抛物线对应的函数表达式为 $y=-\frac{4}{9}(x-1)(x+5)$，

即 $y=-\frac{4}{9}x^2-\frac{16}{9}x+\frac{20}{9}$.

点拨：本题分别运用了一般式、顶点式、交点式求二次函数表达式，求二次函数的表达式时要根据题目条件灵活选择方法，如本题中，第一种方法列式较复杂，且计算量大，第二、三种方法较简便，且计算量小.

10. D

11. 解：(1)点 D 的横坐标、纵坐标的实际意义：当产量为 130 kg 时，该产品每千克生产成本与销售价相等，都为 42 元.

(2)设线段 AB 所表示的 y_1 与 x 之间的函数表达式为 $y_1=k_1x+b_1$.

因为 $y_1=k_1x+b_1$ 的图象过点(0,60)与(90,42)，

所以$\begin{cases}b_1=60,\\ 90k_1+b_1=42.\end{cases}$

解方程组得$\begin{cases}k_1=-0.2,\\ b_1=60.\end{cases}$

线段 AB 所表示的 y_1 关于 x 的函数表达式为 $y_1=-0.2x+60(0\leqslant x\leqslant 90)$.

(3)设 y_2 与 x 之间的函数表达式为 $y_2=k_2x+b_2$. 因为 $y_2=k_2x+b_2$ 的图象过点(0,120)与(130,42)，

所以$\begin{cases}b_2=120,\\ 130k_2+b_2=42.\end{cases}$

解方程得$\begin{cases}k_2=-0.6,\\ b_2=120.\end{cases}$

y_2 关于 x 的函数表达式为 $y_2=-0.6x+120(0\leqslant x\leqslant 130)$.

设产量为 x kg 时，获得的利润为 W 元. 当 $0\leqslant x\leqslant 90$ 时，$W=x[(-0.6x+120)-(-0.2x+60)]=-0.4(x-75)^2+2\,250$.

所以，当 $x=75$ 时，W 的值最大，最大值为 2 250. 当 $90<x\leqslant 130$ 时，$W=x[(-0.6x+120)-42]=-0.6(x-65)^2+2\,535$. 当 $x=90$ 时，W 的值最大，此时 $W=-0.6\times(90-65)^2+2\,535=2\,160$. 由 $-0.6<0$ 知，当 $x>65$ 时，W 随 x 的增大而减小，所以 $90<x\leqslant 130$ 时，$W<2\,160$. 因此，当该产品产量为 75 kg 时，获得的利润最大，最大利润是 2 250元.

12. A　**13.** $y=x^2+x-2$

14. A　**点拨**：先求出 $\triangle AEF$ 和 $\triangle DEG$ 的面积，然后可得到五边形 $EFBCG$ 的面积，继而可得 y 与 x 的函数表达式.

$S_{\triangle AEF}=\frac{1}{2}AE\times AF=\frac{1}{2}x^2$，$S_{\triangle DEG}=\frac{1}{2}DG\times DE=\frac{1}{2}\times 1\times(3-x)=\frac{3-x}{2}$，$S_{五边形EFBCG}=S_{正方形ABCD}-S_{\triangle AEF}-S_{\triangle DEG}=9-\frac{1}{2}x^2-\frac{3-x}{2}=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{15}{2}$，则 $y=4\times\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{15}{2}\right)=-2x^2+2x+30$.

∵ $0<AE<AD$，∴ $0<x<3$，

∴ $y=-2x^2+2x+30(0<x<3)$.

故选 A.

15. 解：(1)∵ $AB=x$ m，

∴ $BC=(28-x)$ m.

于是易得 $S=AB\cdot BC=x(28-x)=-x^2+28x$，

即 $S=-x^2+28x(0<x<28)$.

(2)由题意可知$\begin{cases}x\geqslant 6,\\ 28-x\geqslant 15.\end{cases}$

解得 $6\leqslant x\leqslant 13$. 由(1)知，$S=-x^2+28x=-(x-14)^2+196$.

易知当 $6\leqslant x\leqslant 13$ 时，S 随 x 的增大而增大，∴ 当 $x=13$ 时，$S_{最大}=195$，即花园面积的最大值为 195 m^2.

26.3　实践与探索

第 1 课时　用二次函数解决实际中“抛物线”形的最值应用

1. $y=-\frac{1}{9}(x+6)^2+4$　**2.** $(4\sqrt{2}-4)$

3. B　**4.** 4　**5.** A　**6.** B

7. 解：(1)根据题意得 $B(0,4)$，$C\left(3,\frac{17}{2}\right)$. 把 $B(0,4)$，$C\left(3,\frac{17}{2}\right)$的坐标代入 $y=-\frac{1}{6}x^2+bx+c$，

得$\begin{cases}c=4,\\ -\frac{1}{6}\times 3^2+3b+c=\frac{17}{2}.\end{cases}$

解得$\begin{cases}b=2,\\ c=4.\end{cases}$

所以抛物线的表达式为 $y=-\frac{1}{6}x^2+2x+4$，即 $y=-\frac{1}{6}(x-6)^2+10$.

所以 $D(6,10)$. 所以拱顶 D 到地面 OA 的距离为 10 m.

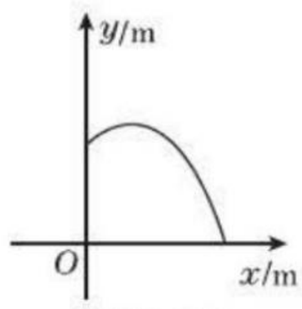
(2)当 $x=\frac{12}{2}-4=2$ 或 $x=\frac{12}{2}+4=10$ 时，$y=\frac{22}{3}>6$，

所以这辆货运汽车能安全通过.

(3)令 $y=8$，则 $-\frac{1}{6}(x-6)^2+10=8$，

解得 $x_1=6+2\sqrt{3}$，$x_2=6-2\sqrt{3}$，则 $x_1-x_2=4\sqrt{3}$. 所以两排灯的水平距离最小是$4\sqrt{3}$ m.

8. 解：(1)如图，以水管与地面交点为原点，原点与水柱落地点所在直线为 x 轴，水管所在直线为 y 轴，建立平面直角坐标系.



(第 8 题)

设抛物线对应的函数表达式为 $y=$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$a(x-1)^2+h$，

将(0,2)和(3,0)的坐标代入，

得$\begin{cases}a+h=2,\\4a+h=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-\frac{2}{3},\\h=\frac{8}{3}.\end{cases}$

∴抛物线对应的函数表达式为$y=-\frac{2}{3}(x-1)^2+\frac{8}{3}$，

即$y=-\frac{2}{3}x^2+\frac{4}{3}x+2(0\leqslant x\leqslant 3)$.

(2)$y=-\frac{2}{3}x^2-\frac{4}{3}x+2(0\leqslant x\leqslant 3)$，

当$x=1$时，$y=\frac{8}{3}$，

即水柱的最大高度为$\frac{8}{3}$ m.

9. **解**：(1)当$y=15$时，有$-5x^2+20x=15$，化简得$x^2-4x+3=0$，因式分解得$(x-1)(x-3)=0$，故$x=1$或$x=3$，即飞行的时间是1 s或3 s.

(2)飞出和落地的瞬间，高度都为0，故$y=0$. 所以有$0=-5x^2+20x$，解得$x=0$或$x=4$，所以从飞出到落地所用时间是$4-0=4$(s).

(3)当$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{20}{2\times(-5)}=2$时，$y$的值最大，为$-5\times4+20\times2=20$.

即小球飞行高度在2 s时最大，最大高度为20 m.

第2课时　用二次函数求实际中应用问题

1. B　**2.** D

3. **解**：(1)$y=300+20x$

(2)$W=(300+20x)(60-40-x)=-20x^2+100x+6\,000$.

4. C

5. **解**：(1)当$0<x\leqslant 20$且x为整数时，$y=40$；当$20<x\leqslant 60$且x为整数时，$y=-\frac{1}{2}x+50$；当$x>60$且x为整数时，$y=20$.

(2)设所获利润为w(元).

当$0<x\leqslant 20$且x为整数时，$y=40$，

∴$w_{最大}=(40-16)\times20=480$.

当$20<x\leqslant 60$且x为整数时，$y=-\frac{1}{2}x+50$，

∴$w=(y-16)x$

$=\left(-\frac{1}{2}x+50-16\right)x$

$=-\frac{1}{2}x^2+34x$

$=-\frac{1}{2}(x-34)^2+578$.

∵$-\frac{1}{2}<0$，

∴当$x=34$时，w最大，最大值为578.

答：一次性批发34件时，工厂获利最大，最大利润是578元.

6. **解**：(1)设y关于x的函数表达式为$y=kx+b$，

根据题意，得$\begin{cases}20k+b=300,\\30k+b=280.\end{cases}$

解得$\begin{cases}k=-2,\\b=340.\end{cases}$

∴y关于x的函数表达式为$y=-2x+340(20\leqslant x\leqslant 40)$.

(2)由已知得

$W=(x-20)(-2x+340)$

$=-2x^2+380x-6\,800$

$=-2(x-95)^2+11\,250$，

∵$-2<0$，

∴当$x\leqslant 95$时，W随x的增大而增大.

∵$20\leqslant x\leqslant 40$，

∴当$x=40$时，W最大，最大值为$-2\times(40-95)^2+11\,250=5\,200$.

7. **解**：(1)根据题意，得$y=250-10(x-25)=-10x+500(30\leqslant x\leqslant 38)$.

(2)设每天扣除捐赠后可获得利润w元，

则$w=(x-20-a)(-10x+500)=-10x^2+(10a+700)x-500a-10\,000(30\leqslant x\leqslant 38)$.

易知，此二次函数图象的对称轴为直线$x=35+\frac{1}{2}a$，且$0<a\leqslant 6$，

则$35<35+\frac{1}{2}a\leqslant 38$，

∴当$x=35+\frac{1}{2}a$时，

w取得最大值.

∴$\left(35+\frac{1}{2}a-20-a\right)\left[-10\left(35+\frac{1}{2}a\right)+500\right]=1\,960$，解得$a_1=2$，$a_2=58$(不合题意，舍去). ∴$a=2$.

8. **解**：(1)$q=-x+14$，其中$2\leqslant x\leqslant 10$.

(2)①当每天的半成品食材能全部售出时，有$p\leqslant q$，即$\frac{1}{2}x+8\leqslant -x+14$，解得$x\leqslant 4$.

又$2\leqslant x\leqslant 10$，所以此时$2\leqslant x\leqslant 4$.

②由①可知，当$2\leqslant x\leqslant 4$时，$y=(x-2)p=(x-2)\cdot\left(\frac{1}{2}x+8\right)=\frac{1}{2}x^2+7x-16$；

当$4<x\leqslant 10$时，

$y=(x-2)q-2(p-q)=(x-2)\cdot(-x+14)-2\left[\frac{1}{2}x+8-(-x+14)\right]=-x^2+13x-16$，

即$y=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2+7x-16(2\leqslant x\leqslant 4),\\-x^2+13x-16(4<x\leqslant 10).\end{cases}$

(3)$\frac{13}{2}$；5　**点拨**：当$2\leqslant x\leqslant 4$时，$y=\frac{1}{2}x^2+7x-16=\frac{1}{2}(x+7)^2-\frac{81}{2}$，

∴当$2\leqslant x\leqslant 4$时，y随x的增大而增大.

∴当$x=4$时y有最大值，$y_{最大}=\frac{1}{2}\times4^2+7\times4-16=20$.

当$4<x\leqslant 10$时，$y=-x^2+13x-16=-\left(x-\frac{13}{2}\right)^2+\frac{105}{4}$，

∵$-1<0$，$\frac{13}{2}>4$，

∴当$x=\frac{13}{2}$时y有最大值$\frac{105}{4}$.

∵$20<\frac{105}{4}$，

∴当x为$\frac{13}{2}$元/千克时，利润y有最大值.

要使每天的利润不低于24(百元)，则当$2\leqslant x\leqslant 4$时，显然不符合.

故$y=-\left(x-\frac{13}{2}\right)^2+\frac{105}{4}\geqslant 24$，解得$5\leqslant x\leqslant 8$.

∵尽可能减少半成品食材的浪费，

∴x应定为5元/千克.

9. **解**：(1)当$6\leqslant x\leqslant 10$时，设y与x的函数表达式为$y=kx+b(k\neq0)$.

根据题意，得$\begin{cases}1\,000=6k+b,\\200=10k+b,\end{cases}$

解得$\begin{cases}k=-200,\\b=2\,200.\end{cases}$

∴$y=-200x+2\,200$.

当$10<x\leqslant 12$时，$y=200$.

故y与x的函数表达式为

$y=\begin{cases}-200x+2\,200(6\leqslant x\leqslant 10),\\200(10<x\leqslant 12).\end{cases}$

(2)由已知得$W=(x-6)y$.

当$6\leqslant x\leqslant 10$时，$W=(x-6)(-200x+2\,200)=-200\left(x-\frac{17}{2}\right)^2+1\,250$.

∵$-200<0$，即抛物线的开口向下，

∴$x=\frac{17}{2}$时，W取得最大值1 250.

当$10<x\leqslant 12$时，

$W=(x-6)\cdot200=200x-1\,200$.

∵W随x的增大而增大，

∴$x=12$时，W取得最大值，为$200\times12-1\,200=1\,200<1\,250$.

答：这一天销售西瓜获得的利润W(元)的最大值为1 250.

第3课时　二次函数与一元二次方程之间的关系

1. (1)两；>

(2)一；=

(3)没有；<

2. D　**3.** A

4. B　**点拨**：由题意知，二次函数$y=x^2+2x+c$的两个相异不动点x_1，x_2是方程$x^2+2x+c=x$的两个实数根，且$x_1<1<x_2$.

整理，得$x^2+x+c=0$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

则$\begin{cases}1-4c>0,\\1+1+c<0.\end{cases}$解得$c<-2$.

5. C

6. C　**点拨**：∵ $y=(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab, a\neq b$,

∴ $\Delta=(a+b)^2-4ab=(a-b)^2>0$.

∴ 函数$y=(x+a)(x+b)$的图象与x轴有2个交点，即$M=2$.

∵ 函数$y=(ax+1)(bx+1)=abx^2+(a+b)x+1$,

∴ 当$ab\neq0$时，$\Delta=(a+b)^2-4ab=(a-b)^2>0$，此时函数$y=(ax+1)\cdot(bx+1)$的图象与$x$轴有2个交点，即$N=2$，则$M=N$;

当$ab=0$时，不妨令$a=0$，∵ $a\neq b$，∴ $b\neq0$，此时函数$y=(ax+1)(bx+1)=bx+1$为一次函数，其图象与x轴有1个交点，即$N=1$，则$M=N+1$.

综上可知，$M=N$或$M=N+1$.

7. C　**8**. D　**9**. A

10. **解**：(1)将点$A(3,0)$、点$B(-1,0)$的坐标代入$y=x^2+bx+c$，

得$\begin{cases}9+3b+c=0,\\1-b+c=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}b=-2,\\c=-3.\end{cases}$

∴ $y=x^2-2x-3$.

(2)点P的坐标为$(4,3)$或$(8,3)$.

11. **解**：(1)由题意得$A\left(0,-\frac{1}{a}\right)$.

点A向右平移2个单位长度，得到点$B\left(2,-\frac{1}{a}\right)$.

(2)∵ 点A与点B关于直线$x=1$对称，

∴ 抛物线的对称轴为直线$x=1$.

(3)①当$a>0$时，则$-\frac{1}{a}<0$.

分析图象可得：根据抛物线的对称性，抛物线不可能同时经过点A和点P，也不可能同时经过点B和点Q，所以此时抛物线与线段PQ没有公共点.

②当$a<0$时，则$-\frac{1}{a}>0$. 分析图象可得：根据抛物线的对称性，抛物线不可能同时经过点A和点P；但当点Q在点B上方或与点B重合时，抛物线与线段PQ恰有一个公共点，此时$-\frac{1}{a}\leqslant2$，解得$a\leqslant-\frac{1}{2}$.

综上所述，当$a\leqslant-\frac{1}{2}$时，抛物线与线段PQ恰有一个公共点.

12. **解**：(1)将点$A(1,0)$，$B(3,0)$的坐标分别代入$y=x^2+mx+n$中，

得$\begin{cases}1+m+n=0,\\9+3m+n=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}m=-4,\\n=3.\end{cases}$

(2)当$\angle A=30°$时，$\sin A=\cos B=\frac{1}{2}$，∴ $-m=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$，$n=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$，

∴ $m=-1$，$n=\frac{1}{4}$;

当$\angle B=30°$时，$\sin A=\cos B=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

∴ $-m=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$，$n=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$，

∴ $m=-\sqrt{3}$，$n=\frac{3}{4}$.

综上所述，$m=-1$，$n=\frac{1}{4}$或$m=-\sqrt{3}$，$n=\frac{3}{4}$.

13. **解**：(1)∵ 抛物线$y=x^2-3x+\frac{5}{4}$与x轴相交于A，B两点，与y轴相交于点C，

∴ 令$y=0$，得$x=\frac{1}{2}$或$x=\frac{5}{2}$.

令$x=0$，得$y=\frac{5}{4}$，

∴ $A\left(\frac{1}{2},0\right)$，$B\left(\frac{5}{2},0\right)$，$C\left(0,\frac{5}{4}\right)$.

设直线BC的函数表达式为$y=kx+h$，

则有$\begin{cases}\frac{5}{2}k+h=0,\\h=\frac{5}{4}.\end{cases}$解得$\begin{cases}k=-\frac{1}{2},\\h=\frac{5}{4}.\end{cases}$

∴ 直线BC的函数表达式为$y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}$.

(2)设点D的横坐标为m，则点D的坐标为$\left(m,m^2-3m+\frac{5}{4}\right)$，

点E的坐标为$\left(m,-\frac{1}{2}m+\frac{5}{4}\right)$，

设DE的长度为d，

∵ 点D是直线BC下方抛物线上一点，

∴ $d=-\frac{1}{2}m+\frac{5}{4}-\left(m^2-3m+\frac{5}{4}\right)$.

整理，得$d=-m^2+\frac{5}{2}m$.

∵ $a=-1<0$，

∴ 当$m=-\frac{b}{2a}=-\frac{\frac{5}{2}}{2\times(-1)}=\frac{5}{4}$时，$d_{最大}=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{0-\frac{25}{4}}{-4}=\frac{25}{16}$.

当$m=\frac{5}{4}$时，$m^2-3m+\frac{5}{4}=-\frac{15}{16}$.

∴ 点D的坐标为$\left(\frac{5}{4},-\frac{15}{16}\right)$.

第4课时　用图象法解一元二次方程(不等式)

1. D　**2**. D　**3**. C

4. **解**：(1)公式法：

∵ $a=1$，$b=-1$，$c=-1$，

∴ $\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\times1\times(-1)=5>0$. ∴ $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$，

即$x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，$x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

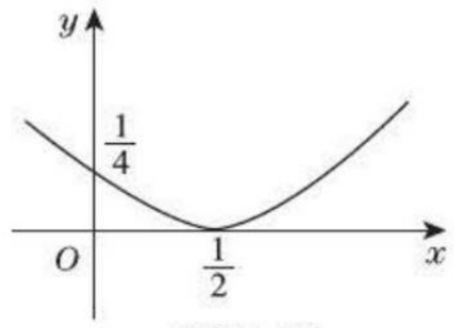
(2)x^2-x-1

(3)①x^2-x；1(答案不唯一)

②略.

5. $x<-3$或$x>1$　**6**. C

7. **解**：画出抛物线$y=x^2-x+\frac{1}{4}$(如图)，由图象可知抛物线与x轴的交点为$\left(\frac{1}{2},0\right)$，所以原方程的解为$x_1=x_2=\frac{1}{2}$.



(第7题)

8. **解**：(1)$x_1=1$，$x_2=3$.　(2)$1<x<3$.

(3)$x>2$.

(4)∵ 方程$ax^2+bx+c=k$有两个不相等的实数根，

∴ 抛物线$y=ax^2+bx+c-k$与x轴有两个交点，即抛物线$y=ax^2+bx+c$向下平移k个单位后与x轴有两个交点. 由图象可知抛物线$y=ax^2+bx+c$向下平移2个单位后与x轴有一个交点，∴ $k<2$.

9. **解**：(1)①图略. ②$x_1=0$，$x_2=-2$；图略. ③$-2\leqslant x\leqslant0$.

(2)①构造二次函数$y=x^2-2x+1$，并画出图象(图略).

②当$y=4$时，求得方程$x^2-2x+1=4$的解为$x_1=3$，$x_2=-1$；图略.

③借助图象，直接写出不等式$x^2-2x+1<4$的解集：$-1<x<3$.

(3)①当$b^2-4ac>0$时，解集为$x>\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$或$x<\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$；

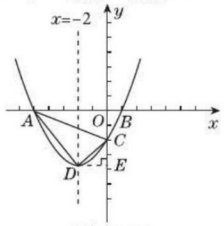
②当$b^2-4ac=0$时，解集为$x\neq-\frac{b}{2a}$$\left(x>-\frac{b}{2a}\text{或}x<-\frac{b}{2a}\text{亦可}\right)$；

③当$b^2-4ac<0$时，解集为全体实数.

10. **解**：(1)解方程$x^2+4x-5=0$，得$x_1=-5$，$x_2=1$. ∴ A点的坐标为$(-5,0)$，B点的坐标为$(1,0)$，则抛物线为$y=a(x+5)(x-1)=ax^2+4ax-5a$，可得$D$点的坐标为$(-2,-9a)$，$C$点的坐标为$(0,-5a)$. 依题意画出图象，如图所示，则$OA=5$，$OB=1$，$AB=6$，$OC=5a$，过点$D$作$DE\perp y$轴于点$E$，则$DE=2$，$OE=9a$，$CE=OE-OC=4a$. ∴ $S_{\triangle ACD}=S_{梯形ADEO}-S_{\triangle CDE}-S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}(DE+OA)\cdot OE-$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\frac{1}{2}DE\cdot CE-\frac{1}{2}OA\cdot OC=\frac{1}{2}\times(2+5)\times 9a-\frac{1}{2}\times 2\times 4a-\frac{1}{2}\times 5\times 5a=15a$，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 6\times 5a=15a$，$\therefore S_{\triangle ABC}:S_{\triangle ACD}=1:1$.



（第10题）

（2）$\because \angle ADC=90°$，$\therefore AC^2=AD^2+CD^2$，即 $5^2+(5a)^2=(5-2)^2+(9a)^2+2^2+(9a-5a)^2$，

即 $72a^2=12$. 则 $a=\pm\frac{\sqrt{6}}{6}$.

$\because a>0$，$\therefore a=\frac{\sqrt{6}}{6}$. 故二次函数的表达式为 $y=\frac{\sqrt{6}}{6}(x+5)(x-1)$，

即 $y=\frac{\sqrt{6}}{6}x^2+\frac{2\sqrt{6}}{3}x-\frac{5\sqrt{6}}{6}$.

阶段方法技巧训练（二）

专训1

1. B　**2.** B　**3.** D　**4.** $x_1=0$，$x_2=2$

5. C

6. **解**：（1）将点 $A(-1,0)$ 的坐标代入 $y_1=-x+m$，得 $m=-1$；

将点 $A(-1,0)$，$B(2,-3)$ 的坐标分别代入 $y_2=ax^2+bx-3$，

得 $\begin{cases}a-b-3=0,\\4a+2b-3=-3.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\b=-2.\end{cases}$

$\therefore y_2=x^2-2x-3$.

（2）易知点 C 的坐标为 $(0,-3)$，

又 $\because B$ 点坐标为 $(2,-3)$，

$\therefore BC\parallel x$ 轴. $\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times|x_B-x_C|\times|y_C|=\frac{1}{2}\times 2\times 3=3$.

专训2

1. **解**：由题意知二次函数图象与 y 轴的交点 Q 的坐标为 $(0,c)$.

又 $\because$ 直线 $y=2x+m$ 过点 Q，

$\therefore m=c$. 联立 $\begin{cases}y=x^2+bx+c,\\y=2x+c,\end{cases}$

可得 B 点的坐标为 $(2-b,4-2b+c)$.

作 $BC\perp x$ 轴于 C，则 $BC=4-2b+c$.

$\because S_{\triangle BPQ}=3S_{\triangle APQ}$，$\therefore S_{\triangle APB}=4S_{\triangle APQ}$.

$\because \triangle APQ$ 与 $\triangle APB$ 等底（AP）不等高，$\therefore S_{\triangle APB}:S_{\triangle APQ}=4:1=BC:OQ$.

又 $\because OQ=c(c>0)$，

$\therefore (4-2b+c):c=4:1$.

即 $2b+3c-4=0$　①.

$\because$ 二次函数 $y=x^2+bx+c$ 的图象与 x 轴只有一个公共点，

$\therefore \Delta=b^2-4c=0$　②.

解联立①②的方程组，

可得 $\begin{cases}b_1=\frac{4}{3},\\c_1=\frac{4}{9},\end{cases}\begin{cases}b_2=-4,\\c_2=4.\end{cases}$

经检验知，当 $b=\frac{4}{3}$ 时，抛物线的顶点在 y 轴左侧，不符合题意，舍去.

$\therefore b=-4$，$c=4$. $\therefore$ 二次函数的表达式为 $y=x^2-4x+4$.

点拨：本题用待定系数法求函数表达式时，根据图象的几何性质寻找待定系数所满足的条件，列方程或方程组求解. 解题时还必须根据题目条件对结果进行检验，舍去不符合题意的解.

2. **解**：（1）由题易知点 B 的坐标为 $(0,-4)$，即 $OB=4$. 在 Rt$\triangle OAB$ 中，$AB=2\sqrt{5}$，$OB=4$. $\therefore OA=\sqrt{AB^2-OB^2}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-4^2}=2$.

又 $\because$ 点 A 在 x 轴的负半轴上，

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(-2,0)$.

将点 $A(-2,0)$ 的坐标代入抛物线对应的函数表达式，得 $0=4a-4$，解得 $a=1$，$\therefore y=x^2-4$.

（2）$\because P(m,m^2-4)$，$A(-2,0)$，

$\therefore$ 直线 AP 对应的函数表达式为 $y=(m-2)x+(2m-4)$.

$\therefore CO=2m-4$.

（3）$\because P(m,m^2-4)$，$B(0,-4)$，

$\therefore$ 直线 BD 对应的函数表达式为 $y=mx-4$. $\therefore OD=\frac{4}{m}$.

$\therefore \tan\angle ODC=\frac{OC}{OD}=\frac{m(m-2)}{2}=\frac{3}{2}$.

解得 $m=3$（$m=-1$ 不合题意，舍去）. $\therefore P(3,5)$. 过 P 作 $PM\perp x$ 轴于 M. 则 $PM=5$，$AM=5$. $\therefore PA=5\sqrt{2}$. $\therefore \sin\angle PAD=\frac{PM}{PA}=\frac{5}{5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. **解**：（1）令 $y=0$，得 $x^2-(2m-1)x+m^2+3m+4=0$，$\Delta=(2m-1)^2-4(m^2+3m+4)=-16m-15$. 当 $\Delta>0$ 时，方程有两个不相等的实数根，即 $-16m-15>0$，$\therefore m<-\frac{15}{16}$. 此时二次函数的图象与 x 轴有两个交点；当 $\Delta=0$ 时，方程有两个相等的实数根，即 $-16m-15=0$，$\therefore m=-\frac{15}{16}$. 此时二次函数的图象与 x 轴只有一个交点；当 $\Delta<0$ 时，方程没有实数根，即 $-16m-15<0$，$\therefore m>-\frac{15}{16}$. 此时二次函数的图象与 x 轴没有交点.

（2）由一元二次方程根与系数的关系得 $x_1+x_2=2m-1$，$x_1x_2=m^2+3m+4$，$\therefore x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(2m-1)^2-2(m^2+3m+4)=2m^2-10m-7$.

$\because x_1^2+x_2^2=5$，$\therefore 2m^2-10m-7=5$.

$\therefore m^2-5m-6=0$.

解得 $m_1=6$，$m_2=-1$.

$\because$ 二次函数的图象与 x 轴有两个交点，$\therefore m<-\frac{15}{16}$. $\therefore m=-1$.

$\therefore y=x^2+3x+2$. 令 $x=0$，得 $y=2$，

$\therefore$ 二次函数的图象与 y 轴的交点 C 的坐标为 $(0,2)$.

又 $\because y=x^2+3x+2=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$，

$\therefore$ 顶点 M 的坐标为 $\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{4}\right)$.

设过点 $C(0,2)$ 与 $M\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{4}\right)$ 的直线对应的函数表达式为 $y=kx+b$，

则 $\begin{cases}2=b,\\-\frac{1}{4}=-\frac{3}{2}k+b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=\frac{3}{2},\\b=2.\end{cases}$

$\therefore$ 直线 CM 对应的函数表达式为 $y=\frac{3}{2}x+2$.

4. **解**：（1）当 $y=0$ 时，$-x^2+2x+3=0$，解得 $x_1=3$，$x_2=-1$.

$\therefore C(-1,0)$，$A'(3,0)$.

当 $x=0$ 时，$y=3$. $\therefore A(0,3)$.

（2）由题易知 $AB=OC=1$，$OA=3$，$\angle OAB=\angle AOC=90°$.

$\therefore OB=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$，$\triangle AOB$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times 1\times 3=\frac{3}{2}$.

$\because$ 将 $\square ABOC$ 绕点 O 顺时针旋转 90° 得到 $\square A'B'OC'$，

$\therefore \angle ACO=\angle OC'D$，$OC'=OC=1$.

又 $\because \angle ACO=\angle ABO$，

$\therefore \angle ABO=\angle OC'D$.

又 $\because \angle C'OD=\angle AOB$，

$\therefore \triangle C'OD\backsim\triangle BOA$.

$\therefore \frac{S_{\triangle C'OD}}{S_{\triangle BOA}}=\left(\frac{OC'}{OB}\right)^2=\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2=\frac{1}{10}$.

$\therefore S_{\triangle C'OD}=\frac{3}{20}$.

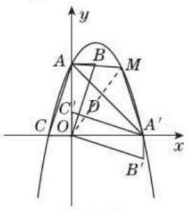
（3）如图，设 M 点的坐标为 $(m,-m^2+2m+3)$，连结 OM.

则 $S_{\triangle AMA'}=S_{\triangle OA'M}+S_{\triangle AMO}-S_{\triangle AOA'}=\frac{1}{2}\times 3\times(-m^2+2m+3)+\frac{1}{2}\times 3\times m-\frac{1}{2}\times 3\times 3=-\frac{3}{2}m^2+\frac{9}{2}m=-\frac{3}{2}\left(m-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{27}{8}(0<m<3)$.

当 $m=\frac{3}{2}$ 时，$S_{\triangle AMA'}$ 取到最大值为 $\frac{27}{8}$，$\therefore M\left(\frac{3}{2},\frac{15}{4}\right)$. 即当 M 的坐标为 $\left(\frac{3}{2},\frac{15}{4}\right)$ 时，$\triangle AMA'$ 的面积最大，最

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

大面积是$\frac{27}{8}$.



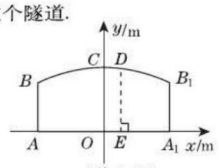
(第4题)

专训3

1. **解**:(1)由已知得 $OA = OA_1 = 8$ m, $OC = 8$ m, $AB = 6$ m. 故 $C(0,8)$, $B(-8,6)$. 设抛物线 BCB_1 对应的函数表达式为 $y = ax^2 + 8$,将 B 点坐标代入,得 $a \cdot (-8)^2 + 8 = 6$,解得 $a = -\frac{1}{32}$,所以隧道拱部分 BCB_1 对应的函数表达式为 $y = -\frac{1}{32}x^2 + 8 (-8 \leqslant x \leqslant 8)$.

(2)能. 若货车从隧道正中行驶,则其最右边到 y 轴的距离为2 m. 如图,设抛物线上横坐标为2的点为点 D,过点 D 作 $DE \perp AA_1$ 于点 E. 当 $x = 2$ 时, $y = -\frac{1}{32} \times 2^2 + 8 = 7\frac{7}{8}$,即 $D\left(2, 7\frac{7}{8}\right)$,所以 $DE = 7\frac{7}{8}$ m.

因为 $7\frac{7}{8} > 7$,所以该货车能安全通过这个隧道.

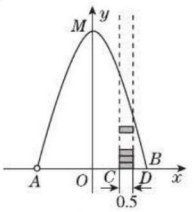


(第1题)

2. C

3. **解**:(1)以点 O 为原点, AB 所在直线为 x 轴, AB 的垂直平分线为 y 轴建立如图的直角坐标系,则有 $M(0,5)$, $B(2,0)$, $C(1,0)$, $D\left(\frac{3}{2},0\right)$. 设抛物线对应的函数表达式为 $y = ax^2 + c$,由抛物线过点 M 和点 B,可得 $a = -\frac{5}{4}$, $c = 5$. 故抛物线对应的函数表达式为 $y = -\frac{5}{4}x^2 + 5$. 当 $x = 1$ 时, $y = \frac{15}{4}$;当 $x = \frac{3}{2}$ 时, $y = \frac{35}{16}$. 故 $\left(1, \frac{15}{4}\right)$, $\left(\frac{3}{2}, \frac{35}{16}\right)$ 两点在抛物线上. 当竖直摆放5个圆柱形桶时,桶高为 $0.3 \times 5 = 1.5 = \frac{3}{2}$(米).

$\because \frac{3}{2} < \frac{15}{4}$ 且 $\frac{3}{2} < \frac{35}{16}$, $\therefore$ 网球不能落入桶内.



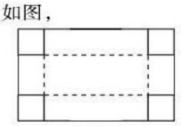
(第3题)

(2)设竖直摆放 m 个圆柱形桶时,网球可以落入桶内. 由题意,得 $\frac{35}{16} \leqslant 0.3m \leqslant \frac{15}{4}$,解得 $7\frac{7}{24} \leqslant m \leqslant 12\frac{1}{2}$.

$\because m$ 为整数, $\therefore m$ 的值为8,9,10,11,12. $\therefore$ 当竖直摆放8个,9个,10个,11个或12个圆柱形桶时,网球可以落入桶内.

4. 0.5

5. **解**:(1)如图,



(第5题)

设裁掉的正方形边长为 x dm,

由题意可得 $(10-2x)(6-2x) = 12$,

即 $x^2 - 8x + 12 = 0$,解得 $x = 2$ 或 $x = 6$(舍去).

$\therefore$ 裁掉的正方形边长为2 dm.

(2)$\because$ 底面长不大于底面宽的5倍,

$\therefore 10 - 2x \leqslant 5(6 - 2x)$,解得 $x \leqslant 2.5$,

又$\because x > 0$, $\therefore 0 < x \leqslant 2.5$.

设总费用为 w 元,由题意可知

$w = 0.5 \times 2x(16 - 4x) + 2(10 - 2x)(6 - 2x) = 4x^2 - 48x + 120 = 4(x-6)^2 - 24$,

$\because$ 对称轴为直线 $x = 6$,开口向上,

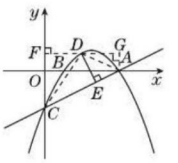
$\therefore$ 当 $0 < x \leqslant 2.5$ 时, w 随 x 的增大而减小, $\therefore$ 当 $x = 2.5$ 时, w 有最小值,最小值为25. $\therefore$ 当裁掉的正方形边长为2.5 dm时,总费用最低,最低为25元.

6. **解**:(1)在 $y = \frac{1}{2}x - 2$ 中,令 $x = 0$,得 $y = -2$;令 $y = 0$,得 $x = 4$, $\therefore A(4,0)$, $C(0,-2)$. 设抛物线的表达式为 $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$. $\because$ 点 $A(4,0)$, $B(1,0)$, $C(0,-2)$ 在抛物线上,

$$\therefore \begin{cases} 16a + 4b + c = 0, \\ a + b + c = 0, \\ c = -2. \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = -\frac{1}{2}, \\ b = \frac{5}{2}, \\ c = -2. \end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - 2$.



(第6题)

(2)设点 D 的坐标为 (x,y),则 $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - 2$ $(1 < x < 4)$. 在 $Rt\triangle AOC$ 中, $OA = 4$, $OC = 2$,由勾股定理得 $AC = 2\sqrt{5}$. 如图所示,连结 CD, AD. 过点 D 作 $DF \perp y$ 轴于点 F,过点 A 作 $AG \perp FD$,交 FD 的延长线于点 G,则 $FG = AO = 4$, $FD = x$, $DG = 4 - x$, $OF = AG = y$, $FC = y + 2$. $\therefore S_{\triangle ACD} = S_{梯形AGFC} - S_{\triangle CDF} - S_{\triangle ADG} = \frac{1}{2}(AG + FC) \cdot FG - \frac{1}{2}FC \cdot FD - \frac{1}{2}DG \cdot AG = \frac{1}{2}(y + y + 2) \times 4 - \frac{1}{2}(y+2) \cdot x - \frac{1}{2}(4-x) \cdot y = 2y - x + 4$. 将 $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - 2$ 代入,得 $S_{\triangle ACD} = 2y - x + 4 = -x^2 + 4x = -(x-2)^2 + 4$,当 $x = 2$ 时, $y = 1$,此时 $S_{\triangle ACD}$ 最大,且最大值为4.

$\therefore D(2,1)$.

$\because S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}AC \cdot DE$, $AC = 2\sqrt{5}$.

$\therefore$ 当 $\triangle ACD$ 的面积最大时,高 DE 最大,则 DE 的最大值为 $\frac{4}{\frac{1}{2}AC} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$.

$\therefore$ 当 D 与直线 AC 的距离 DE 最大时,点 D 的坐标为 $(2,1)$,最大距离为 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

7. **解**:(1)$\because AB = x$ m,

$\therefore BC = (24 - 3x)$ m,此时 $S = x(24 - 3x) = -3x^2 + 24x$.

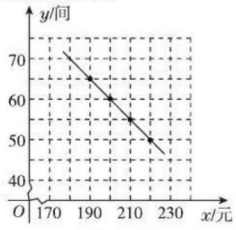
(2)由已知得 $-3x^2 + 24x = 45$,整理可得 $x^2 - 8x + 15 = 0$. 解得 $x_1 = 5$, $x_2 = 3$. $\because 0 < 24 - 3x \leqslant 10$,得 $\frac{14}{3} \leqslant x < 8$, $\therefore x_2 = 3$ 不符合题意,故 $AB = 5$ m.

(3)能 $S = -3x^2 + 24x = -3(x^2 - 8x) = -3(x-4)^2 + 48$. $\because \frac{14}{3} \leqslant x < 8$,

$\therefore$ 当 $x = \frac{14}{3}$ 时, $S_{最大} = 46\frac{2}{3}$. $\therefore$ 能围成面积比45 m² 更大的鸡舍. 围法是: BC 的长是10 m, AB 的长是 $4\frac{2}{3}$ m,这时鸡舍的面积最大,为 $46\frac{2}{3}$ m².

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

8. **解**：(1) 如图所示.



（第 8 题）

(2) 设 $y=kx+b$，将 $(200,60)$，$(220,50)$ 代入，得 $\begin{cases}200k+b=60,\\220k+b=50,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=-\frac{1}{2},\\b=160.\end{cases}$

$\therefore y=-\frac{1}{2}x+160\ (170\leqslant x\leqslant 240)$.

(3) $w=xy=x\left(-\frac{1}{2}x+160\right)=-\frac{1}{2}x^2+160x=-\frac{1}{2}(x-160)^2+12\,800$.

$\because -\frac{1}{2}<0$，对称轴为直线 $x=160$，

$\therefore$ 在 $170\leqslant x\leqslant 240$ 范围内，w 随 x 的增大而减小.

$\therefore$ 当 $x=170$ 时，w 取得最大值，最大值为 12 750.

答：宾馆标准房的价格定为 170 元时，客房的日营业额最大，最大为 12 750 元.

专训 4

1. **解**：(1) 由题意联立 $\begin{cases}y=-x^2-2x+a,\\y=\frac{1}{2}x-a.\end{cases}$

整理得 $2x^2+5x-4a=0$，由 $\Delta=25+32a>0$，解得 $a>-\frac{25}{32}$.

$\because a\neq 0$，$\therefore a>-\frac{25}{32}$ 且 $a\neq 0$.

在 $y=-x^2-2x+a$ 中，令 $x=0$，得 $y=a$，$\therefore A(0,a)$. 由 $y=-x^2-2x+a=-(x+1)^2+1+a$，得 $M(-1,1+a)$.

(2) 设直线 MA 的表达式为 $y=kx+b$，将 $A(0,a)$，$M(-1,1+a)$ 的坐标代入，得 $\begin{cases}a=b,\\1+a=-k+b.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=-1,\\b=a.\end{cases}$

故直线 MA 的表达式为 $y=-x+a$.

联立 $\begin{cases}y=-x+a,\\y=\frac{1}{2}x-a.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{4a}{3},\\y=-\frac{a}{3}.\end{cases}$

$\therefore N\left(\frac{4a}{3},-\frac{a}{3}\right)$. 由于 P 点是 N 点关于 y 轴的对称点，因此 $P\left(-\frac{4a}{3},-\frac{a}{3}\right)$，代入 $y=-x^2-2x+a$，

得 $-\frac{a}{3}=-\frac{16}{9}a^2+\frac{8}{3}a+a$，

解得 $a=\frac{9}{4}$ 或 $a=0$（舍去）.

$\therefore A\left(0,\frac{9}{4}\right)$，$C\left(0,-\frac{9}{4}\right)$，

$M\left(-1,\frac{13}{4}\right)$，$P\left(-3,-\frac{3}{4}\right)$.

$\therefore AC=\frac{9}{2}$. $\therefore S_{\triangle PCD}=S_{\triangle PAC}-S_{\triangle DAC}=\frac{1}{2}AC\cdot|x_P|-\frac{1}{2}AC\cdot|x_D|=\frac{1}{2}\times\frac{9}{2}\times(3-1)=\frac{9}{2}$.

(3) 存在. ①当点 Q_1 在 y 轴左侧时，由四边形 AQ_1CN 为平行四边形，得 AC 与 Q_1N 相互平分，则点 Q_1 与 N 关于原点 $(0,0)$ 中心对称，而 $N\left(\frac{4a}{3},-\frac{a}{3}\right)$，故 $Q_1\left(-\frac{4a}{3},\frac{a}{3}\right)$，代入 $y=-x^2-2x+a$，得 $\frac{a}{3}=-\frac{16}{9}a^2+\frac{8}{3}a+a$，解得 $a=\frac{15}{8}$ 或 $a=0$（舍去），$\therefore Q_1\left(-\frac{5}{2},\frac{5}{8}\right)$. ②当点 Q_2 在 y 轴右侧时，由四边形 ACQ_2N 为平行四边形，得 $NQ_2\ /\!/\ AC$ 且 $NQ_2=AC$，而 $N\left(\frac{4a}{3},-\frac{a}{3}\right)$，$A(0,a)$，$C(0,-a)$，故 $Q_2\left(\frac{4a}{3},-\frac{7a}{3}\right)$，代入 $y=-x^2-2x+a$，得 $-\frac{7a}{3}=-\frac{16}{9}a^2-\frac{8}{3}a+a$，解得 $a=\frac{3}{8}$ 或 $a=0$（舍去），$\therefore Q_2\left(\frac{1}{2},-\frac{7}{8}\right)$. $\therefore$ 当点 Q 的坐标为 $\left(-\frac{5}{2},\frac{5}{8}\right)$ 或 $\left(\frac{1}{2},-\frac{7}{8}\right)$ 时，Q，A，C，N 四点能构成平行四边形.

2. **解**：(1) 如图，过点 B 作 $BD\perp y$ 轴于点 D，则 $\angle BOD=120°-90°=30°$.

由 $A(-2,0)$ 可得 $OA=2$，$\therefore OB=2$.

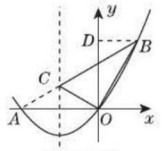
于是在 Rt$\triangle BOD$ 中，易得 $BD=1$，$OD=\sqrt{3}$. $\therefore$ 点 B 的坐标为 $(1,\sqrt{3})$.

(2) 由抛物线经过点 $A(-2,0)$，$O(0,0)$，可设抛物线的表达式为 $y=ax(x+2)$，将点 B 的坐标 $(1,\sqrt{3})$ 代入，得 $a=\frac{\sqrt{3}}{3}$，因此所求抛物线的表达式为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x^2+\frac{2\sqrt{3}}{3}x$.

(3) 存在. 如图，易知抛物线的对称轴是直线 $x=-1$，当点 C 是抛物线的对称轴与线段 AB 的交点时，$\triangle BOC$ 的周长最小. 设直线 AB 对应的函数表达式为 $y=kx+b$，

则 $\begin{cases}k+b=\sqrt{3},\\-2k+b=0.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=\frac{\sqrt{3}}{3},\\b=\frac{2\sqrt{3}}{3}.\end{cases}$

$\therefore y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{2\sqrt{3}}{3}$. 当 $x=-1$ 时，$y=\frac{\sqrt{3}}{3}$，因此点 C 的坐标为 $\left(-1,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.



（第 2 题）

3. **解**：(1) $\because$ 抛物线 $y=x^2+bx+c$ 经过点 $A(1,0)$，$B(0,2)$，

$\therefore \begin{cases}0=1+b+c,\\2=c.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=-3,\\c=2.\end{cases}$

$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y=x^2-3x+2$.

(2) 当 $x=3$ 时，由 $y=x^2-3x+2$ 得 $y=2$，可知抛物线 $y=x^2-3x+2$ 过点 $(3,2)$，$\therefore$ 将原抛物线沿 y 轴向下平移 1 个单位后过点 C. $\therefore$ 平移后抛物线的表达式为 $y=x^2-3x+1$.

(3) 存在. 假设存在点 N，

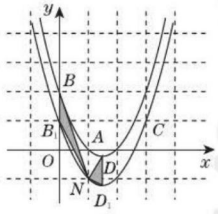
$\because$ 点 N 在抛物线 $y=x^2-3x+1$ 上，

$\therefore$ 可设 N 点坐标为 $(x_0,x_0^2-3x_0+1)$. 由(2)知，$BB_1=DD_1=1$.

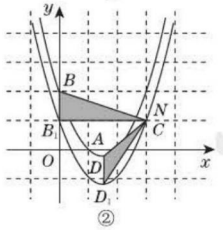
将 $y=x^2-3x+1$ 配方，得 $y=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$，

$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x=\frac{3}{2}$.

当 $0<x_0<\frac{3}{2}$ 时，如图①，



①



②

（第 3 题）

$\because S_{\triangle NBB_1}=2S_{\triangle NDD_1}$，

$\therefore \frac{1}{2}\times 1\times x_0=2\times\frac{1}{2}\times 1\times\left(\frac{3}{2}-x_0\right)$.

$\therefore x_0=1$. 此时 $x_0^2-3x_0+1=-1$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∴ 点 N 的坐标为(1, −1).

当 $x_0 > \frac{3}{2}$ 时,如图②,同理可得

$\frac{1}{2}\times 1\times x_0 = 2\times\frac{1}{2}\times 1\times\left(x_0-\frac{3}{2}\right)$,

∴ $x_0 = 3$,此时 $x_0^2 - 3x_0 + 1 = 1$.

∴ 点 N 的坐标为(3,1).

综上,符合条件的点 N 的坐标为(1, −1),(3,1).

全章热门考点整合应用

1. 解:(1)根据题意,

得 $\begin{cases} m^2+4m-3=2, \\ m+3\neq 0. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} m=-5 \text{ 或 } 1, \\ m\neq -3. \end{cases}$

∴ $m=-5$ 或 $m=1$.

(2)∵ 函数图象的开口向上,

∴ $m+3>0$. ∴ $m>-3$. ∴ $m=1$.

∴ 当 $m=1$ 时,该函数图象的开口向上.

(3)∵ 函数有最大值,∴ $m+3<0$,

∴ $m<-3$. ∴ $m=-5$.

∴ 当 $m=-5$ 时,该函数有最大值.

2. D

3. C　**点拨**:根据函数图象开口向下可得 $a<0$,所以①错误;因为抛物线与 x 轴的交点坐标为(−1,0),(3,0),所以其对称轴为直线 $x=1$. 所以 $-\frac{b}{2a}=1$. 因此 $2a+b=0$,所以②正确;当 $x=1$ 时,$y=a+b+c>0$,所以③正确;当 $-1<x<3$ 时,$y>0$,所以④正确. 所以②③④正确.

4. 解:(1)当 $a^2+3a+2=0$ 时,

$a_1=-1$, $a_2=-2$. 当 $a=-1$ 时,

$y=\frac{1}{4}$,图象与 x 轴无交点;

当 $a=-2$ 时,$y=-x+\frac{1}{4}$,图象与 x 轴有一个交点.

当 $a^2+3a+2\neq 0$,即 $a\neq -1$ 且 $a\neq -2$ 时,函数 $y=(a^2+3a+2)x^2+(a+1)x+\frac{1}{4}$ 为二次函数.

要使函数图象与 x 轴有交点,则

$(a+1)^2-4(a^2+3a+2)\times\frac{1}{4}\geqslant 0$,

解得 $a\leqslant -1$. ∴ $a<-1$ 且 $a\neq -2$.

故当 $a<-1$ 且 $a\neq -2$ 时,二次函数的图象与 x 轴总有交点.

综上所述,当 $a<-1$ 时,此函数的图象与 x 轴总有交点.

(2)由题知 $x_1+x_2=-\frac{a+1}{a^2+3a+2}$,

$x_1x_2=\frac{\frac{1}{4}}{a^2+3a+2}$, ∴ $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=-4(a+1)=a^2-3$.

∴ $a^2+4a+1=0$.

解得 $a_1=-2-\sqrt{3}$, $a_2=-2+\sqrt{3}$.

又∵ $-2+\sqrt{3}>-1$,即当 $a=-2+\sqrt{3}$ 时,二次函数的图象与 x 轴无交点,故舍去此值.

∴ $a=-2-\sqrt{3}$.

点拨:分类讨论思想是数学的常用思想,当问题中未明确是哪类函数时,通常要进行分类讨论.

5. 解:(1)∵ 三块矩形区域的面积相等,

∴ 矩形 $AEFD$ 的面积是矩形 $BCFE$ 面积的 2 倍.

∴ $AE=2BE$. 设 $BE=a$,则 $AE=2a$.

∴ $8a+2x=80$.

∴ $a=-\frac{1}{4}x+10$, $2a=-\frac{1}{2}x+20$.

∴ $y=\left(-\frac{1}{2}x+20\right)x+\left(-\frac{1}{4}x+10\right)x$

$=-\frac{3}{4}x^2+30x$.

∵ $a=-\frac{1}{4}x+10>0$, $x>0$,

∴ $0<x<40$,

则 $y=-\frac{3}{4}x^2+30x\ (0<x<40)$.

(2)∵ $y=-\frac{3}{4}x^2+30x=-\frac{3}{4}(x-20)^2+300\ (0<x<40)$,且二次项系数为 $-\frac{3}{4}<0$,

∴ 当 $x=20$ 时,y 有最大值,最大值为 300.

6. 解:(1)由题意得点 $E(1,1.4)$, $B(6,0.9)$,将它们的坐标分别代入 $y=ax^2+bx+0.9$ 得 $\begin{cases} a+b+0.9=1.4, \\ 36a+6b+0.9=0.9. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} a=-0.1, \\ b=0.6. \end{cases}$

∴ 所求的抛物线对应的函数表达式是 $y=-0.1x^2+0.6x+0.9$.

(2)把 $x=3$ 代入 $y=-0.1x^2+0.6x+0.9$,得 $y=-0.1\times 3^2+0.6\times 3+0.9=1.8$. 即小华的身高是 1.8 m.

(3)当 $y=1.4$ 时, $-0.1x^2+0.6x+0.9=1.4$. 解得 $x_1=1$, $x_2=5$. ∴ $1<t<5$.

7. 解:(1)在给定的直角坐标系下,设最高点为 A,入水点为 B,抛物线对应的函数表达式为 $y=ax^2+bx+c$. 由题意,知 $O(0,0)$, $B(2,-10)$,且顶点 A 的纵坐标为 $\frac{2}{3}$. ∴ $\begin{cases} c=0, \\ \frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{2}{3}, \\ 4a+2b+c=-10. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} a=-\frac{25}{6}, \\ b=\frac{10}{3}, \\ c=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=-\frac{3}{2}, \\ b=-2, \\ c=0. \end{cases}$

∵ $-\frac{b}{2a}>0$, $a<0$, ∴ $b>0$,

∴ $a=-\frac{25}{6}$, $b=\frac{10}{3}$, $c=0$.

∴ $y=-\frac{25}{6}x^2+\frac{10}{3}x$.

(2)当运动员在空中距池边的水平距离为 $3\frac{3}{5}$ m 时, $x=3\frac{3}{5}-2=\frac{8}{5}$,

$y=-\frac{25}{6}\times\left(\frac{8}{5}\right)^2+\frac{10}{3}\times\frac{8}{5}=-\frac{16}{3}$,

∴ 此时运动员距水面的高度为 $10-\frac{16}{3}=\frac{14}{3}$(m).

∵ $\frac{14}{3}<5$,

∴ 此次跳水会出现失误.

8. 解:(1)当 $1\leqslant x\leqslant 10$ 时,设 $n=kx+b$,由题意得 $\begin{cases} 12=k+b, \\ 30=10k+b, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} k=2, \\ b=10. \end{cases}$

∴ $n=2x+10$.

同理可得,当 $10<x\leqslant 30$ 时, $n=-1.4x+44$.

∴ 销售量 n 与第 x 天之间的函数关系式为

$n=\begin{cases} 2x+10\ (1\leqslant x\leqslant 10), \\ -1.4x+44\ (10<x\leqslant 30). \end{cases}$

(2)∵ $y=mn-80$,

∴ $y=$

$\begin{cases} (2x+10)(3x+15)-80\ (1\leqslant x\leqslant 10), \\ (-1.4x+44)(3x+15)-80\ (10<x\leqslant 15), \\ (-1.4x+44)(-x+75)-80\ (15<x\leqslant 30). \end{cases}$

整理,得 $y=$

$\begin{cases} 6x^2+60x+70\ (1\leqslant x\leqslant 10), \\ -4.2x^2+111x+580\ (10<x\leqslant 15), \\ 1.4x^2-149x+3\,220\ (15<x\leqslant 30). \end{cases}$

(3)当 $1\leqslant x\leqslant 10$ 时,

∵ $y=6x^2+60x+70$ 的对称轴是直线 $x=-\frac{60}{2\times 6}=-5$,

∴ $x=10$ 时,y 取得最大值,为 1 270;

当 $10<x\leqslant 15$ 时,

∵ $y=-4.2x^2+111x+580$ 的对称轴是直线 $x=-\frac{111}{-4.2\times 2}=\frac{111}{8.4}\approx 13.2$,

∴ $x=13$ 时,y 取得最大值,为 1 313.2;

当 $15<x\leqslant 30$ 时,

∵ $y=1.4x^2-149x+3\,220$ 的对称轴是直线 $x=\frac{149}{2.8}>30$,

∴ $x=16$ 时,y 取得最大值,为 1 194.4.

综上,草莓销售第 13 天,即 $x=13$ 时,日销售利润 y 最大,最大值是 1 313.2元.

9. 解:(1)设直线 AB 的表达式为 $y_{AB}=kx+b$,代入(4,4),(6,2),

得 $\begin{cases} 4=4k+b, \\ 2=6k+b, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} k=-1, \\ b=8. \end{cases}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∴ 直线 AB 的表达式为 $y_{AB}=-x+8$.
设直线 BC 的表达式为 $y_{BC}=k_1x+b_1$，代入(6,2)，(8,1)，

得 $\begin{cases}2=6k_1+b_1,\\1=8k_1+b_1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k_1=-\frac{1}{2},\\b_1=5.\end{cases}$

∴ 直线 BC 的表达式为 $y_{BC}=-\frac{1}{2}x+5$. 工资及其他费用为 $0.4\times5+1=3$(万元). 当 $4\leqslant x\leqslant6$ 时，$W=(x-4)\cdot(-x+8)-3$，即 $W=-x^2+12x-35$.
当 $6<x\leqslant8$ 时，$W=(x-4)\cdot\left(-\frac{1}{2}x+5\right)-3$，即 $W=-\frac{1}{2}x^2+7x-23$.

∴ $W=\begin{cases}-x^2+12x-35(4\leqslant x\leqslant6),\\-\frac{1}{2}x^2+7x-23(6<x\leqslant8).\end{cases}$

(2)当 $4\leqslant x\leqslant6$ 时，$W=-x^2+12x-35=-(x-6)^2+1$，
∴ 当 $x=6$ 时，W 取得最大值 1.
当 $6<x\leqslant8$ 时，$W=-\frac{1}{2}x^2+7x-23=-\frac{1}{2}(x-7)^2+\frac{3}{2}$，
∴ 当 $x=7$ 时，W 取得最大值 1.5.
∴ $\frac{10}{1.5}=\frac{20}{3}=6\frac{2}{3}$，即第 7 个月可以还清全部贷款.

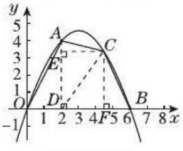
10. **解**：设 $AC=x$，则 $BC=2-x$.
∵ $\triangle ACD$ 和 $\triangle BCE$ 都是等腰直角三角形，
∴ $CD=\frac{\sqrt{2}}{2}x$，$CE=\frac{\sqrt{2}}{2}(2-x)$，
$\angle DCA=\angle ECB=45°$.
∴ $\angle DCE=180°-45°-45°=90°$.
在 Rt$\triangle DCE$ 中，由勾股定理，
得 $DE^2=DC^2+CE^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2+\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(2-x)\right]^2=x^2-2x+2=(x-1)^2+1$.
∴ 当 $x=1$ 时，DE^2 有最小值 1，此时 $DE=1$. 故 DE 长的最小值为 1.

11. **解**：(1)$y=7.5x-(2.7x+0.9x^2+0.3x)=-0.9x^2+4.5x$.
(2)设 3 年内每年的平均收益为 z 万元，根据题意，得
$z=7.5x-(0.9x+0.3x^2+0.3x)=-0.3x^2+6.3x=-0.3(x-10.5)^2+33.075$.
∴ 并不是面积越大收益就越大，当修建面积为 10.5 公顷时可以获得最大收益. 建议：当大棚面积超过 10.5 公顷时，扩大面积会使收益下降，因此修建面积不宜盲目扩大.（答案不唯一）

12. 三　**13.** A

14. **解**：(1)将点(−2,4)的坐标代入 $y=x^2+bx+c$，得 $-2b+c=0$，
∴ $c=2b$.
(2)由题易知，$m=-\frac{b}{2}$，$n=\frac{4c-b^2}{4}$，
又由(1)知 $c=2b$，∴ $n=\frac{8b-b^2}{4}$，
$b=-2m$. ∴ $n=-m^2-4m$.
(3)$y=x^2+bx+2b=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b^2}{4}+2b$，对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2}$.
①当 $b\leqslant0$ 时，$c\leqslant0$，若函数的图象不经过第三象限，则 $c=0$.
此时 $y=x^2$，当 $-5\leqslant x\leqslant1$ 时，函数的最小值是 0，最大值是 25，
∴ 最大值与最小值之差是 25(不合题意，舍去).
②当 $b>0$ 时，$c>0$，函数的图象不经过第三象限，则 $\Delta\leqslant0$，∴ $0<b\leqslant8$.
∴ $-4\leqslant-\frac{b}{2}<0$.
(ⅰ)当 $-5\leqslant x\leqslant1$ 时，函数有最小值 $-\frac{b^2}{4}+2b$，
(ⅱ)当 $-\frac{b}{2}\leqslant-2$，即 $b\geqslant4$ 时，函数有最大值 $1+3b$；
当 $-\frac{b}{2}>-2$，即 $b<4$ 时，函数有最大值 $25-3b$.
∵ 函数的最大值与最小值之差为 16，
∴ 当最大值为 $1+3b$ 时，$1+3b+\frac{b^2}{4}-2b=16$，解得 $b=6$ 或 $b=-10$，
∵ $4\leqslant b\leqslant8$，∴ $b=6$；
当最大值为 $25-3b$ 时，$25-3b+\frac{b^2}{4}-2b=16$，解得 $b=2$ 或 $b=18$，
∵ $0<b<4$，∴ $b=2$.
综上所述，$b=2$ 或 $b=6$.

15. **解**：(1)将点 $A(2,4)$ 与 $B(6,0)$ 的坐标分别代入 $y=ax^2+bx$ 中，
得 $\begin{cases}4a+2b=4,\\36a+6b=0.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-\frac{1}{2},\\b=3.\end{cases}$
(2)如图，过 A 作 x 轴的垂线，垂足为 $D(2,0)$，连结 CD，过 C 作 $CE\perp AD$，$CF\perp x$ 轴，垂足分别为 E，F.



（第 15 题）

$S_{\triangle OAD}=\frac{1}{2}OD\cdot AD=\frac{1}{2}\times2\times4=4$；
$S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}AD\cdot CE=\frac{1}{2}\times4\times(x-2)=2x-4$；
$S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}BD\cdot CF=\frac{1}{2}\times4\times\left(-\frac{1}{2}x^2+3x\right)=-x^2+6x$.
则 $S=S_{\triangle OAD}+S_{\triangle ACD}+S_{\triangle BCD}=4+2x-4-x^2+6x=-x^2+8x$，
∴ S 关于 x 的函数表达式为 $S=-x^2+8x(2<x<6)$.
∵ $S=-x^2+8x=-(x-4)^2+16$，
∴ 当 $x=4$ 时，四边形 $OACB$ 的面积 S 有最大值，最大值为 16.

第 27 章 圆

27.1 圆的认识

27.1.1 圆的基本元素

1. B　**2.** B　**3.** A

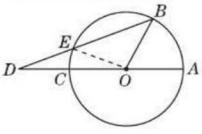
4. AB，CD，EF；$\overset{\frown}{BD}$，$\overset{\frown}{BC}$，$\overset{\frown}{BE}$，$\overset{\frown}{BF}$

5. A　**6.** D

7. OH；OE；同圆的半径相等

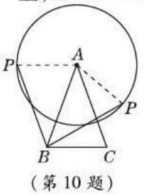
8. C　**点拨**：连结 OA，先根据等腰三角形的性质得到 $\angle OAC=\angle C=28°$，再根据等腰三角形的性质得到 $\angle B=\angle OAB$，即可求出 $\angle B$.

9. D　**点拨**：如图，连结 EO.
∵ $OB=OE$，∴ $\angle B=\angle OEB$.
∵ $\angle AOB=3\angle D$，∴ $\angle B+\angle D=3\angle D$. 又∵ $\angle OEB=\angle D+\angle DOE$，
∴ $\angle D+\angle DOE+\angle D=3\angle D$，
∴ $\angle DOE=\angle D$，
∴ $DE=EO=OB$，故选 D.



（第 9 题）

10. 30°或 110°　**点拨**：如图，连结 AP.
∵ $AB=AC$，$\angle BAC=40°$，
∴ $\angle ABC=70°$. ∵ $BP=BA=AC$，$AP=BC$，∴ $\triangle BAP\cong\triangle ABC$，
∴ $\angle ABP=\angle BAC=40°$. 当 BP 在 $\angle ABC$ 内部时，$\angle PBC=\angle ABC-\angle ABP=30°$；当 BP 在 $\angle ABC$ 外部时，$\angle PBC=\angle ABC+\angle ABP=110°$. 综上，$\angle PBC=30°$ 或 $110°$.



（第 10 题）

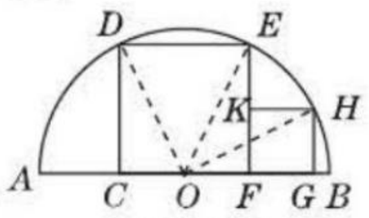


（第 11 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

11. 解：$OE = OF$.
证明：如图，连结 OA，OB，
$\because OA = OB$，$\therefore \angle OAB = \angle OBA$.
又$\because AE = BF$，$OA = OB$，
$\therefore \triangle OAE \cong \triangle OBF$. $\therefore OE = OF$.

12. (1) **证明**：如图，连结 OD，OE，
则 $OD = OE$，又 $\angle OCD = \angle OFE = 90°$，$DC = EF$，
$\therefore$ Rt$\triangle ODC \cong$ Rt$\triangle OEF$(HL).
$\therefore OC = OF$.

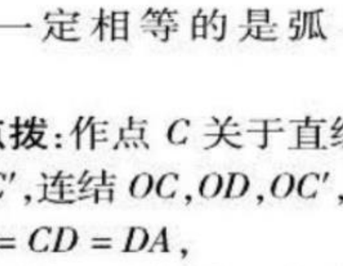


(第 12 题)

(2) **解**：如图，连结 OH，
$\because CF = EF = 2$，$OC = OF$，
$\therefore OF = 1$. $\therefore OH^2 = OE^2 = OF^2 + EF^2 = 1^2 + 2^2 = 5$.
设 $FG = GH = x$，$\because OG^2 + GH^2 = OH^2$，$\therefore (x+1)^2 + x^2 = 5$. $\therefore x^2 + x - 2 = 0$，解得 $x_1 = 1$，$x_2 = -2$(舍去).
$\therefore S_{\text{正方形}FGHK} = 1^2 = 1$.

13. 解：(1) 连结 OQ. $\because PQ /\!/ AB$，$PQ \perp OP$，$\therefore OP \perp AB$. $\because AB = 6$，$\therefore OB = 3$. $\because \angle ABC = 30°$，$\therefore PB = 2OP$. 在 Rt$\triangle PBO$ 中，$PB^2 = OP^2 + OB^2$. 设 $OP = x$，则 $PB = 2x$，则 $(2x)^2 = x^2 + 3^2$，解得 $x = \sqrt{3}$(负值已舍去)，$\therefore OP = \sqrt{3}$. 由勾股定理，得 $PQ = \sqrt{OQ^2 - OP^2} = \sqrt{3^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{6}$.
(2) 连结 OQ，由勾股定理得 $PQ = \sqrt{OQ^2 - OP^2} = \sqrt{9 - OP^2}$.
要使 PQ 取最大值，需 OP 取最小值，此时 $OP \perp BC$. $\because \angle ABC = 30°$，
$\therefore OP = \frac{1}{2}OB = \frac{3}{2}$，此时 $PQ_{\text{最大值}} = \sqrt{9 - \frac{9}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$.

14. 解：(1) 点 C 在以 AB 为直径的圆上. 理由：如图，连结 MC，MD. 由折叠的性质知 $\angle DAC = \angle BAC$，$AD = AM$. $\because AB /\!/ CD$，$\therefore \angle DCA = \angle BAC$.
$\therefore \angle DAC = \angle DCA$. $\therefore AD = CD$.
$\because AD = AM$，$\therefore CD = AM$，
$\therefore$ 四边形 $AMCD$ 是平行四边形，
$\therefore MC = AD$. $\because AM = BM$，
$\therefore CD = BM$. $\therefore$ 四边形 $BCDM$ 是平行四边形，$\therefore MD = BC$.
$\because AD = BC$，$\therefore MC = MD = MA = MB$，
$\therefore$ 点 C 在以 AB 为直径的圆上.
(2) 由(1)得 $\triangle AMD$ 是等边三角形，如图，过点 D 作 $DE \perp AB$ 于点 E. 由勾股定理得 $DE = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$，
$\therefore$ 梯形 $ABCD$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times (2 + 4) \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$.

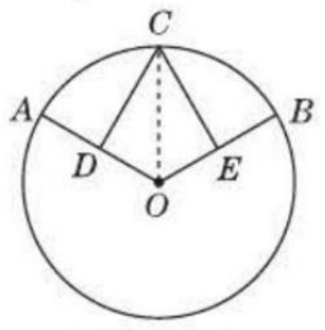


(第 14 题)

27.1.2 圆的对称性

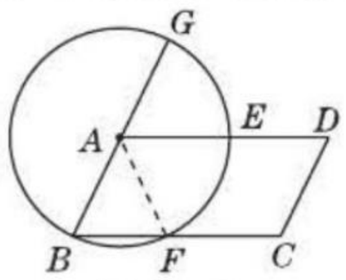
第 1 课时 圆心角、弧、弦间的关系

1. B **2.** D **3.** C **4.** π **5.** B **6.** A
7. C **8.** D
9. ①②④ **点拨**：由 $\angle AOB = \angle COD$ 可得 $\angle AOC = \angle BOD$，而 $OA = OC = OB = OD$，故可得①②④均正确，与弧 AC 一定相等的是弧 BD，故③错误.
10. 10 **点拨**：作点 C 关于直线 AB 的对称点 C'，连结 OC，OD，OC'，BC'，
$\because BC = CD = DA$，
$\therefore \angle AOD = \angle COD = \angle BOC = 60°$.
$\because$ 点 C 与点 C' 关于直线 AB 对称，
$\therefore BC' = BC$. $\therefore \angle BOC' = 60°$.
$\therefore$ 点 D，O，C' 在同一条直线上.
$\therefore DC' = AB = 10$，即 $PD + PC$ 的最小值为 10，此时点 P 与点 O 重合.
11. **错解**：A 或 B
诊断：对于“在同圆或等圆中，如果两个圆心角、两条弧、两条弦、两个弦心距中有一组量相等，那么它们所对应的其余各组量都相等”这一性质中反映的各组量之间的关系判断不准，从而导致错误.
正解：C
12. **证明**：如图，连结 OC，
$\because \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CB}$，$\therefore \angle AOC = \angle BOC$.
$\because CD \perp OA$ 于 D，$CE \perp OB$ 于 E，
$\therefore \angle CDO = \angle CEO = 90°$.
在 $\triangle COD$ 与 $\triangle COE$ 中，
$$\begin{cases} \angle DOC = \angle EOC, \\ \angle CDO = \angle CEO = 90°, \\ CO = CO, \end{cases}$$
$\therefore \triangle COD \cong \triangle COE$，$\therefore OD = OE$.
$\because AO = BO$，$\therefore AD = BE$.



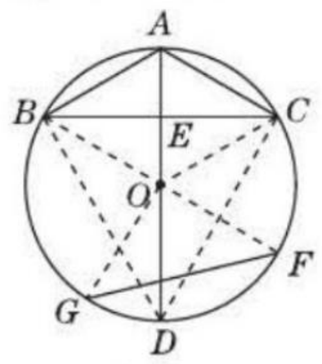
(第 12 题)

13. **证明**：连结 OA，OD. $\because \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$，$\therefore \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BD} + \overset{\frown}{BC}$，即 $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$，$\therefore AB = CD$. 又$\because OE \perp AB$，$OF \perp CD$，垂足分别为 E，F，$\therefore$ 将 $\odot O$ 沿 OE 折叠，AE 与 BE 重合，故 $AE = \frac{1}{2}AB$，同理可得 $DF = \frac{1}{2}CD$，$\therefore AE = DF$. 在 Rt$\triangle AOE$和Rt$\triangle DOF$中，$OA = OD$，$AE = DF$，$\therefore$ Rt$\triangle AOE \cong$ Rt$\triangle DOF$，$\therefore OE = OF$. $\because AB \perp CD$，$OE \perp AB$，$OF \perp CD$，$\therefore$ 四边形 $OEPF$ 是矩形. 又$\because OE = OF$，$\therefore$ 四边形 $OEPF$ 是正方形.
14. (1) **证明**：如图，连结 AF，则 $AB = AF$，



(第 14 题)

$\therefore \angle ABF = \angle AFB$.
$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，
$\therefore AD /\!/ BC$.
$\therefore \angle EAF = \angle AFB$，$\angle GAE = \angle ABF$.
$\therefore \angle GAE = \angle EAF$. $\therefore \overset{\frown}{GE} = \overset{\frown}{EF}$.
(2) **解**：$\because \overset{\frown}{BF}$的度数为 50°，
$\therefore \angle BAF = 50°$.
$\therefore \angle ABF = \angle AFB = 65°$.
又$\because AB /\!/ CD$，
$\therefore \angle ABF + \angle C = 180°$.
$\therefore \angle C = 180° - \angle ABF = 115°$.
15. (1) **证明**：如图，连结 BD，CD.
$\because AB = AC$，$\therefore \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC}$.



(第 15 题)

又$\because AD$ 是 $\odot O$ 的直径，
$\therefore \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{CD}$. $\therefore BD = CD$.
又$\because AD = AD$，
$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACD$.
$\therefore \angle BAD = \angle CAD$.
即直径 AD 平分 $\angle BAC$.
(2) **解**：如图，连结 BO，CO，GO，FO.
由(1)可知 $AD \perp BC$，
又$\because$ 点 E 是 OA 的中点，
$\therefore BA = OB = AC = OC = OA$.
$\therefore \triangle AOB$ 与 $\triangle AOC$ 都为等边三角形. $\therefore \angle BOA = \angle AOC = 60°$.
$\because \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{CD}$，$\therefore \angle BOD = \angle COD = 180° - \angle AOC = 120°$.
又$\because$ 点 F 是$\overset{\frown}{CD}$的中点，
$\therefore \angle COF = \angle FOD = \frac{1}{2}\angle COD = 60°$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \angle BOF = 180°$.

$\therefore BF$ 是$\odot O$的直径.

又$\because$ 点 G 是$\overset{\frown}{BF}$的中点，

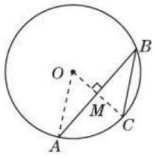
$\therefore \angle FOG = 90°$.

$\because \odot O$的半径是1，$\therefore GF = \sqrt{2}OF = \sqrt{2}$.

第2课时　垂直于弦的直径性质

1. D　**2.** B　**3.** A　**4.** B　**5.** C　**6.** $\frac{1}{2}$　**7.** A

8. D　**点拨**：如图，连结 OA，OC，OC 交 AB 于点 M. 根据垂径定理的推论可知 OC 垂直平分 AB，因为 $\angle ABC = 30°$，故 $\angle AOC = 60°$，在 Rt $\triangle AOM$ 中，$\sin 60° = \frac{AM}{OA} = \frac{AM}{5} = \frac{\sqrt{3}}{2}$，故 $AM = \frac{5\sqrt{3}}{2}$，从而 $AB = 5\sqrt{3}$. 故选 D.



（第8题）

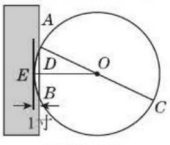
9. 26　**点拨**：如图，设$\odot O$的半径为 r.

在 Rt $\triangle ADO$ 中，$AD = \frac{1}{2}AB = 5$，

$OD = OE - DE = r - 1$，$OA = r$，

则有 $r^2 = 5^2 + (r-1)^2$，解得 $r = 13$.

$\therefore \odot O$的直径 AC 为 26 寸.



（第9题）

10. C　**点拨**：如图，连结 AC，AO，

$\because \odot O$的直径 $CD = 10$ cm，

$\therefore OA = OD = OC = 5$ cm，

$\because AB \perp CD$，$AB = 8$ cm，

$\therefore AM = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 8 = 4$(cm)，

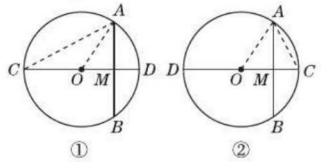
当 C 点的位置如图①所示时，

$\because OA = 5$ cm，$AM = 4$ cm，$CD \perp AB$，

$\therefore OM = \sqrt{OA^2 - AM^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$(cm)，

$\therefore CM = OC + OM = 5 + 3 = 8$(cm)，

$\therefore AC = \sqrt{AM^2 + CM^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}$(cm)；



（第10题）

当 C 点的位置如图②所示时，同理可得 $OM = 3$ cm.

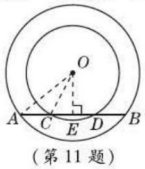
$\because OC = 5$ cm，

$\therefore MC = 5 - 3 = 2$(cm).

在 Rt $\triangle AMC$ 中，$AC = \sqrt{AM^2 + MC^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$(cm).

$\therefore AC$ 的长为 $4\sqrt{5}$ cm 或 $2\sqrt{5}$ cm. 故选 C.

11. (1) **证明**：如图，过点 O 作 $OE \perp AB$ 于点 E，则 $CE = DE$，$AE = BE$.



（第11题）

$\therefore AE - CE = BE - DE$，即 $AC = BD$.

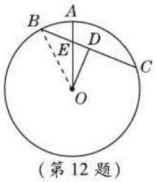
(2) **解**：如图，连结 OA，OC，由(1)可知，$OE \perp AB$，

$\because$ 圆心 O 到直线 AB 的距离为 6，

$\therefore OE = 6$. $\therefore CE = \sqrt{OC^2 - OE^2} = \sqrt{8^2 - 6^2} = 2\sqrt{7}$，$AE = \sqrt{OA^2 - OE^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$.

$\therefore AC = AE - CE = 8 - 2\sqrt{7}$.

12. **解**：(1) 如图，连结 OB.



（第12题）

$\because OD$ 过圆心，且 D 是弦 BC 的中点，$\therefore OD \perp BC$，$BD = \frac{1}{2}BC = 6$.

在 Rt $\triangle BOD$ 中，由勾股定理得 $OD^2 + BD^2 = BO^2$，

$\therefore OD^2 + 6^2 = 8^2$，$\therefore OD = 2\sqrt{7}$.

(2) 设 $BE = x$，则 $EO = \sqrt{2}x$，$ED = 6 - x$. 在 Rt $\triangle EOD$ 中，由勾股定理得 $OD^2 + ED^2 = EO^2$，$\therefore (2\sqrt{7})^2 + (6-x)^2 = (\sqrt{2}x)^2$. 解得 $x_1 = -16$（舍去），$x_2 = 4$. $\therefore ED = 2$.

13. **解**：(1) 连结 AC，$\because CD$ 为$\odot O$的直径，$CD \perp AB$，

$\therefore AF = BF$，$\therefore AC = BC$.

又 $AO \perp BC$，

$\therefore BE = CE$，$\therefore AC = AB$，

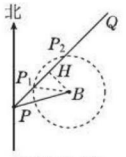
$\therefore AB = BC = 2\sqrt{3}$.

(2) 由(1)知 $AB = BC = AC$，

$\therefore \triangle ABC$ 为等边三角形，

$\therefore \angle OAF = 30°$，在 Rt $\triangle OAF$ 中，$AF = \sqrt{3}$，可求 $OA = 2$，即$\odot O$的半径为 2.

14. **解**：(1) 如图，过点 B 作 $BH \perp PQ$ 于点 H.



（第14题）

在 Rt $\triangle BHP$ 中，由已知条件知 $BP = 320$ km，$\angle BPQ = 30°$，

$\therefore BH = 160$ km < 200 km.

$\therefore$ 本次台风会影响 B 市.

(2) 如图，以 B 为圆心，200 km 为半径作圆，交 PQ 于 P_1，P_2 两点，连结 BP_1.

由垂径定理可知 $P_1P_2 = 2P_1H$.

在 Rt $\triangle BHP_1$ 中，$BP_1 = 200$ km，$BH = 160$ km，

$\therefore P_1H = \sqrt{200^2 - 160^2} = 120$(km)，

$\therefore P_1P_2 = 2P_1H = 240$ km.

$\therefore$ 台风影响 B 市的时间为 $\frac{240}{30} = 8$(h).

27.1.3　圆周角

第1课时　圆周角和直径的关系

1. C　**2.** 4；$\angle C$ 与 $\angle D$；$\angle A$ 与 $\angle B$

3. A　**4.** C　**5.** C　**6.** C　**7.** D　**8.** C　**9.** B

10. D　**点拨**：$\because AB$ 是$\odot O$的直径，$\therefore \angle ADB = 90°$，即 $AD \perp BD$. 因此①正确. $\angle AOC = 2\angle ABC$，$\angle AEC = \angle ABC + \angle BAD$，若 $\angle AOC = \angle AEC$，则 $\angle BAD = \angle ABC$，则 $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$，而由已知无法推断出 $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$，因此②错误. $\because BD \perp AD$，$BD /\!/ OC$，$\therefore OC \perp AD$. $\therefore \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CD}$. $\therefore \angle ABC = \angle CBD$. 因此③正确. $\because OC \perp AD$，$\therefore AF = DF$，因此④正确. $\because AF = DF$，$AO = BO$，$\therefore BD = 2OF$. 因此⑤正确. 若 $\triangle CEF \cong \triangle BED$ 成立，则 $CF = BD$，此时 $CF = 2OF$，而由已知无法推断出 $CF = 2OF$，故⑥错误，因此①③④⑤一定成立，故选 D.

11. (1) **解**：$\because BC = DC$，

$\therefore \angle CBD = \angle CDB = 39°$.

$\because \angle BAC = \angle CDB = 39°$，$\angle CAD = \angle CBD = 39°$，

$\therefore \angle BAD = \angle BAC + \angle CAD = 39° + 39° = 78°$.

(2) **证明**：$\because EC = BC$，

$\therefore \angle CEB = \angle CBE$.

而 $\angle CEB = \angle 2 + \angle BAE$，$\angle CBE = \angle 1 + \angle CBD$，

$\therefore \angle 2 + \angle BAE = \angle 1 + \angle CBD$.

$\because \angle BAE = \angle BDC = \angle CBD$，

$\therefore \angle 1 = \angle 2$.

12. (1) **证明**：$\because ED = EC$，

$\therefore \angle EDC = \angle C$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∵ $\angle B$ 所对的弧为$\overset{\frown}{AE}$，$\angle ADE$ 所对的弧为$\overset{\frown}{ABE}$，

∴ $\angle B + \angle ADE = 180°$.

又∵ $\angle EDC + \angle ADE = 180°$，

∴ $\angle EDC = \angle B$，∴ $\angle B = \angle C$，

∴ $AB = AC$.

(2)**解**：连结 AE.

∵ AB 为⊙O 的直径，∴ $AE \perp BC$.

由(1)可知 $AB = AC$，∴ $BE = CE = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$. 在 Rt△$ABE$ 中，$AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{13}$，

∴ $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AE = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times \sqrt{13} = \sqrt{39}$.

13. (1)**证明**：如图. 连结 AD.

∵ AB 是⊙O 的直径，

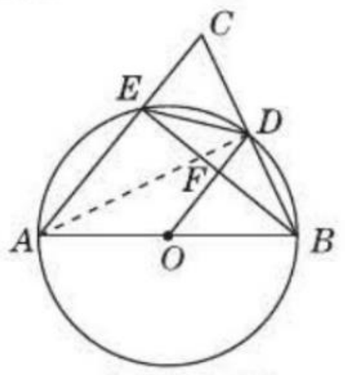
∴ $\angle ADB = \angle AEB = 90°$.

∵ $AB = AC$，∴ $DC = DB$.

又∵ $OA = OB$，∴ $OD \parallel AC$.

∴ $\angle OFB = \angle AEB = 90°$.

∴ $OD \perp BE$.



（第 13 题）

(2)**解**：设 $AE = x$.

∵ $AB = \frac{5}{2}$，∴ $OB = OD = \frac{5}{4}$.

由 $OD \perp BE$，

易得 OD 是线段 BE 的垂直平分线，

∴ $FE = FB$，$BD = ED = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

又∵ $OA = OB$，∴ $OF = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{2}x$.

∴ $DF = OD - OF = \frac{5}{4} - \frac{1}{2}x$.

在 Rt△DFB 中，$BF^2 = DB^2 - DF^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{2}x\right)^2$.

在 Rt△OFB 中，$BF^2 = OB^2 - OF^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}x\right)^2$.

∴ $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{2}x\right)^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}x\right)^2$，解得 $x = \frac{3}{2}$，即 $AE = \frac{3}{2}$.

14. **解**：(1)等边三角形

(2) $PA + PB = PC$.

理由：如图①，在 PC 上截取 $PD = PA$，连结 AD.

∵ $\angle APC = 60°$，

∴ △PAD 是等边三角形.

∴ $PA = AD$，$\angle PAD = 60°$.

∵ $\angle BAC = 60°$，∴ $\angle PAD = \angle BAC$.

∴ $\angle PAB = \angle DAC$.

又∵ $AB = AC$，

∴ △PAB≌△DAC，∴ $PB = DC$.

∵ $PD + DC = PC$，∴ $PA + PB = PC$.

(3)当点 P 为$\overset{\frown}{AB}$的中点时，四边形 $APBC$ 的面积最大.

如图②，过点 P 作 $PE \perp AB$，垂足为 E，过点 C 作 $CF \perp AB$，垂足为 F.

∵ △ABC 是等边三角形，∴ 点 F 为 AB 的中点，且 CF 过圆心 O.

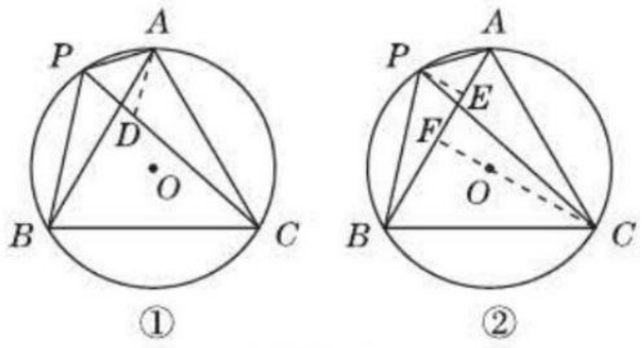
∵ $S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2}AB \cdot PE$，$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CF$，

∴ $S_{四边形APBC} = \frac{1}{2}AB \cdot (PE + CF)$.

当点 P 为$\overset{\frown}{AB}$的中点时，点 E 与点 F 重合，$PE + CF = PC$，PC 为⊙O 的直径，此时四边形 $APBC$ 的面积最大.

易求得 $AB = \sqrt{3}$，

∴ $S_{四边形APBC} = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}$.



（第 14 题）

第 2 课时　圆周角和圆心角、弧的关系

1. A　**2**. B　**3**. B　**4**. C　**5**. D

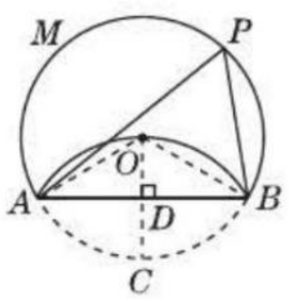
6. A　**点拨**：连结 OC，由题意知圆心 O 到弦 CD 的距离为 OE 的长度，由圆周角定理知 $\angle COB = 2\angle CDB = 60°$，已知半径 OC 的长，即可在Rt△OCE 中求出 OE 的长度.

7. D　**点拨**：过点 O 作半径 $OC \perp AB$ 于点 D，连结 OA，OB，如图，易知 $OD = CD = \frac{1}{2}OC = \frac{1}{2}OA$，

∴ $\angle OAD = 30°$，而 $OA = OB$.

∴ $\angle OBD = 30°$. ∴ $\angle AOB = 120°$.

∴ $\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB = 60°$.



（第 7 题）

8. D　**9**. B　**10**. D

11. C　**点拨**：因为直径 AB 垂直于弦 CD，所以 $CE = DE$. 因为 $\angle A = 22.5°$，所以 $\angle COE = 45°$.

因为 $OC = 6$，由勾股定理得 $CE = 3\sqrt{2}$，所以 $CD = 6\sqrt{2}$，故选 C. 本题容易忽视勾股定理的应用而致错.

12. **解**：连结 OC. ∵ $BC = BD$，

∴ $\angle BOC = \angle BOD = 50°$，

∴ $\angle A = \frac{1}{2}\angle BOC = \frac{1}{2} \times 50° = 25°$.

13. (1)**证明**：如图，连结 FA.

∵ $\angle FEB = 90°$，∴ $EF \perp AB$.

∴ $\angle FEA = 90°$.

∵ $BE = AE$，∴ $BF = AF$.

∵ $\angle FEA = 90°$，

∴ AF 是⊙O 的直径.

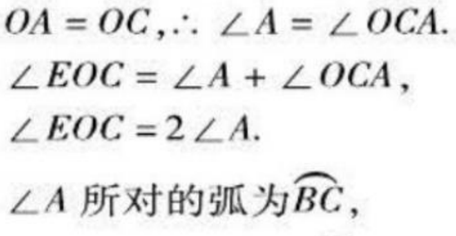
∴ $AF = DE$. ∴ $BF = ED$.

在 Rt△EFB 和 Rt△ADE 中，

$\begin{cases} BE = AE \\ BF = DE \end{cases}$，

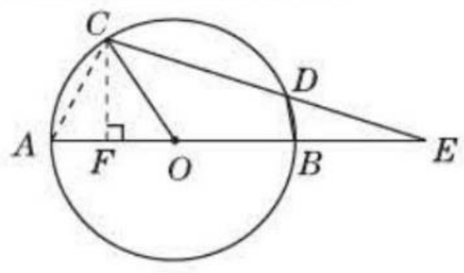
∴ Rt△EFB≌Rt△ADE.

(2)**解**：四边形 $FCDE$ 的最大面积 $= 4 \times 2 = 8$.



（第 13 题）

14. (1)**证明**：如图，连结 AC.



（第 14 题）

∵ $OA = OC$，∴ $\angle A = \angle OCA$.

∵ $\angle EOC = \angle A + \angle OCA$，

∴ $\angle EOC = 2\angle A$.

∵ $\angle A$ 所对的弧为$\overset{\frown}{BC}$，

$\angle CDB$ 所对的弧为$\overset{\frown}{CAB}$，

∴ $\angle A + \angle CDB = 180°$.

又∵ $\angle CDB + \angle EDB = 180°$，

∴ $\angle A = \angle EDB$，

∴ $\angle COE = 2\angle BDE$.

(2)**解**：如图，作 $CF \perp OA$ 于 F.

∵ $\angle EDB = 60°$，∴ $\angle EOC = 120°$，

∴ $\angle A = \angle OCA = 60°$，

∴ $\angle COF = 60°$.

在 Rt△COF 中，∵ $CO = 2$，$\angle COF = 60°$，∴ $OF = 1$，

∴ $CF = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$.

又∵ $OB = BE = 2$，∴ $EF = 5$.

∴ $\tan E = \frac{CF}{EF} = \frac{\sqrt{3}}{5}$.

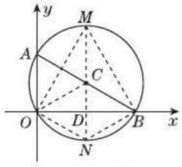
15. **解**：(1)∵ $A(0,2)$，$B(2\sqrt{3},0)$，

∴ $OA = 2$，$OB = 2\sqrt{3}$.

在 Rt△AOB 中，$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

如图，连结 OC. ∵ $\angle AOB=90°$，



（第 15 题）

∴ AB 为⊙C 的直径，点 C 为 AB 的中点. ∴ $AC=OC=\frac{1}{2}AB=2=OA$.

∴ △AOC 是等边三角形.

∴ $\angle BAO=60°$. ∴ $\angle ABO=30°$.

(2)存在. 如图，作 OB 的垂直平分线 MN，交⊙C 于点 M，N，交 OB 于点 D，连结 OM，BM，ON，BN. 易知 MN 过点 C，即 MN 是⊙C 的直径，

∵ MN 垂直平分 OB，

∴ △OBM，△OBN 都是等腰三角形.

∴ M，N 点均符合 P 点的要求.

∵ MN 是⊙C 的直径，

∴ $\angle MON=90°$.

∵ $\angle BMO=\angle BAO=60°$，

∴ △OBM 是等边三角形.

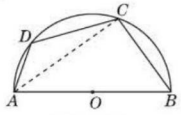
∴ $\angle BOM=60°$. ∴ $\angle BON=30°$.

故存在符合条件的 P 点，$\angle BOP$ 的度数为 60°或 30°.

第 3 课时　圆内接四边形

1. B　**2.** A　**3.** D

4. A　**点拨**：如图，连接 AC. 根据圆内接四边形的性质得 $\angle DAB=180°-\angle C=70°$，再由圆周角定理得出 $\angle CAD=\angle CAB=35°$. 因为 $\angle ACB=90°$，所以 $\angle ABC=90°-\angle CAB=55°$.



（第 4 题）

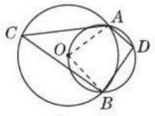
5. B　**点拨**：连结 OA，OB，如图所示.

∵ A，O，B，D 都在小圆上，

∴ $\angle ADB+\angle AOB=180°$.

而 $\angle ADB=100°$，∴ $\angle AOB=80°$.

∴ $\angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB=40°$.



（第 5 题）

6. B　**7.** D　**8.** C　**9.** D　**10.** C

11. D　**点拨**：点 B 可能在弦 AC 所对的优弧上，也可能在弦 AC 所对的劣弧上. 本题没有给出图形，其易错之处在于画图时考虑不全而漏解.

12. **解**：如图，延长 AD，BC 交于点 E.

在⊙O 中，∵ $\angle A=90°$，$\angle A+\angle DCB=180°$，∴ $\angle DCB=90°$，

∴ $\angle DCE=180°-\angle DCB=90°$，

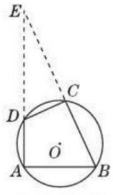
∴ $\angle E+\angle EDC=90°$，又 $\angle E+\angle B=90°$，∴ $\angle B=\angle EDC$.

∵ 在 Rt△ECD 中，$\cos B=\cos\angle EDC=\frac{CD}{ED}=\frac{3}{5}$，∴ $ED=\frac{5}{3}CD=\frac{50}{3}$，

∵ 在 Rt△EAB 中，$\cos B=\frac{AB}{BE}=\frac{3}{5}$，

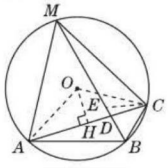
∴ $BE=\frac{85}{3}$，∴ $EA=\sqrt{BE^2-AB^2}=\sqrt{\left(\frac{85}{3}\right)^2-17^2}=\frac{68}{3}$，

∴ $AD=EA-ED=\frac{68}{3}-\frac{50}{3}=6$.



（第 12 题）

13. (1)**解**：如图，连接 OA，OC，作 $OH\perp AC$ 于点 H.



（第 13 题）

∵ $\angle ABC=120°$，

∴ $\angle AMC=180°-\angle ABC=60°$.

∴ $\angle AOC=2\angle AMC=120°$.

∴ $\angle AOH=\frac{1}{2}\angle AOC=60°$.

∵ $AH=\frac{1}{2}AC=\sqrt{3}$，

∴ $OA=\frac{AH}{\sin 60°}=2$，

即⊙O 半径的长为 2.

(2)**证明**：如图，在 BM 上截取 $BE=BC$，连接 CE.

∵ BM 平分 $\angle ABC$，$\angle ABC=120°$，

∴ $\angle MBC=\frac{1}{2}\angle ABC=60°$.

又∵ $BE=BC$，

∴ △EBC 是等边三角形.

∴ $CE=CB=BE$，$\angle CEB=60°$.

∴ $\angle MEC=180°-\angle CEB=120°$.

在△ABC 和△MEC 中，

$$\begin{cases}\angle ABC=\angle MEC,\\ \angle BAC=\angle EMC,\\ CB=CE,\end{cases}$$

∴ △ABC≌△MEC(AAS).

∴ $AB=ME$.

∵ $ME+EB=BM$，

∴ $AB+BC=BM$.

14. (1)**证明**：∵ $\angle A=60°$，$AB=AC$，

∴ △ABC 是等边三角形，

∴ $\angle B=\angle C=60°$.

∵ 四边形 $BDEC$ 是圆内接四边形，

∴ $\angle CED=120°$，

∴ $\angle OED=\angle CED-\angle OEC=\angle CED-\angle C=120°-60°=60°$.

∵ $OD=OE$，

∴ △ODE 是等边三角形.

(2)**解**：成立. 证明如下：

∵ $\angle A=60°$，∴ $\angle B+\angle C=120°$.

∵ 四边形 $BDEC$ 是圆内接四边形，

∴ $\angle CED+\angle B=180°$，即 $\angle OED+\angle OEC+\angle B=\angle OED+\angle C+\angle B=\angle OED+(\angle B+\angle C)=180°$.

∴ $\angle OED=180°-(\angle B+\angle C)=180°-120°=60°$.

∵ $OD=OE$，∴ △OED 是等边三角形.

15. (1)**证明**：连结 AD，AC，如图所示.

∵ $\angle CKF$ 是圆内接四边形 $ADCK$ 的外角，∴ $\angle AKC+\angle ADC=180°$，$\angle AKC+\angle CKF=180°$.

∴ $\angle CKF=\angle ADC$.

∵ AB 为⊙O 的直径，$CD\perp AB$，

∴ $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{AC}$，

则 $\angle ADC=\angle ACD=\angle AKD$，

∴ $\angle AKD=\angle CKF$.

(2)**解**：连结 OD，如图所示.

∵ AB 为⊙O 的直径，$AB=10$，

∴ $OD=5$.

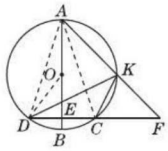
∵ $CD\perp AB$，$CD=6$，∴ $DE=3$.

在 Rt△ODE 中，$OE=\sqrt{OD^2-DE^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$，∴ $AE=9$.

在 Rt△ADE 中，$\tan\angle ADE=\frac{AE}{DE}=\frac{9}{3}=3$.

∵ $\angle CKF=\angle ADE$，

∴ $\tan\angle CKF=\tan\angle ADE=3$.



（第 15 题）

阶段方法技巧训练(三)

专训 1

1. C

2. **证明**：(1)∵ $AB=CD$，

∴ $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，即 $\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{AC}$.

∴ $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BC}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)∵ $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BC}$,

∴ $AD=BC$.

∵ $\angle ADE=\angle CBE$, $\angle DAE=\angle BCE$,

∴ $\triangle ADE\cong\triangle CBE$(ASA).

∴ $AE=CE$.

3. 证明:在⊙O 中,$\angle CAB$,$\angle COB$ 分别是$\overset{\frown}{CB}$所对的圆周角和圆心角,

∴ $\angle COB=2\angle CAB$. 同理:$\angle COA=2\angle CBA$.

又∵ $\angle CAB=\angle CBA$,

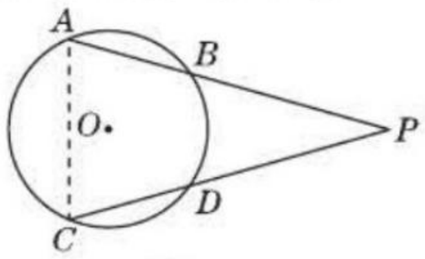
∴ $\angle COB=\angle COA$.

4. 证明:如图,连接 AC.

∵ $AB=CD$,∴ $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$.

∴ $\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{BD}$,即$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CB}$.

∴ $\angle C=\angle A$. ∴ $PA=PC$.



(第4题)

5. 解:$BD=DE=EC$. 理由如下:如图,连结 OD,OE.

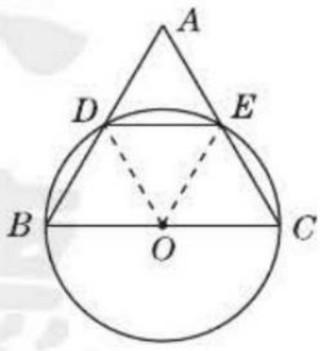
∵ $OB=OD=OE=OC$, $\angle B=\angle C=60°$,∴ $\triangle BOD$ 与 $\triangle COE$ 都是等边三角形. ∴ $\angle BOD=\angle COE=60°$.

∴ $\angle DOE=180°-\angle BOD-\angle COE=60°$.

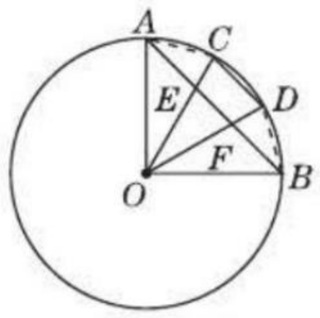
∴ $\angle BOD=\angle DOE=\angle COE$.

∴ $BD=DE=EC$.

点拨:本题利用“在同圆中,相等的圆心角所对的弦相等”证明三条线段相等,因此,连结 OD,OE,构造弦所对的圆心角是解此题的关键.



(第5题)



(第6题)

6. 证明:如图,连结 AC,BD.

∵ C,D 是$\overset{\frown}{AB}$的三等分点,

∴ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{BD}$,∴ $AC=CD=BD$,

∴ $\angle AOC=\angle COD=\angle BOD$.

又∵ $\angle AOB=90°$,

∴ $\angle AOC=\angle COD=\angle BOD=30°$.

∵ $OA=OB$, $\angle AOB=90°$,

∴ $\angle OAB=\angle OBA=45°$.

∴ $\angle AEC=\angle AOC+\angle OAB=75°$.

∵ $OA=OC$, $\angle AOC=30°$,

∴ $\angle ACE=\frac{1}{2}\times(180°-30°)=75°=\angle AEC$.

∴ $AE=AC$. 同理可得 $BF=BD$.

∴ $AE=BF=CD$.

专训2

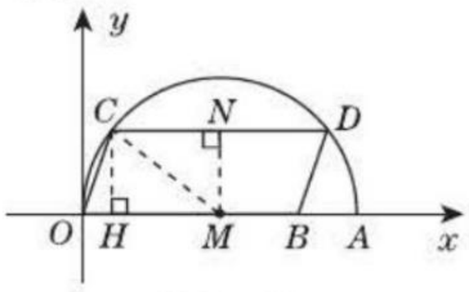
1. 解:如图,连结 CM,作 $MN\perp CD$ 于点 N,$CH\perp OA$ 于点 H.

∵ 四边形 $OCDB$ 为平行四边形,B 点的坐标是(8,0),∴ $CD=OB=8$, $CN=MH$, $CH=MN$. 又∵ $MN\perp CD$,

∴ $CN=DN=\frac{1}{2}CD=4$.

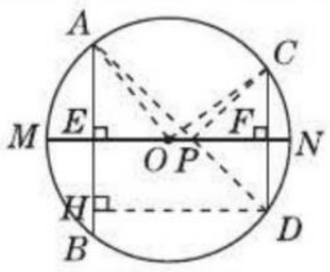
易知 $OA=10$,∴ $MO=MC=5$.

在 Rt△MNC 中,$MN=\sqrt{CM^2-CN^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$. ∴ $CH=3$,又 $OH=OM-MH=5-4=1$. ∴ 点 C 的坐标为(1,3).



(第1题)

2. 解:如图,易知点 C 关于 MN 的对称点为点 D,连结 AD,交 MN 于点 P,连结 PC,易知此时 $PA+PC$ 最小且 $PA+PC=AD$. 过点 D 作 $DH\perp AB$ 于点 H,连结 OA, OC. 易知 $AE=4$, $CF=DF=3$,由勾股定理易得 $OE=3$, $OF=4$,∴ $DH=EF=7$. 又 $AH=AE+EH=AE+DF=4+3=7$,∴ $AD=7\sqrt{2}$. 即 $PA+PC$ 的最小值为 $7\sqrt{2}$.



(第2题)

点拨:本题运用了**转化思想**,将分散的线段转化为同一直线上的一条线段,然后运用勾股定理求出线段的长度.

3. (1)**证明**:连结 AC. ∵ 直径 AB 垂直于弦 CD 于点 E,∴ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AD}$,∴ $AC=AD$. ∵ 过圆心 O 的线段 $CF\perp AD$,

∴ $AF=DF$,即 CF 是 AD 的垂直平分线,∴ $AC=CD$,∴ $AC=AD=CD$,即 $\triangle ACD$ 是等边三角形,

∴ $\angle FCD=30°$,∴ $OE=\frac{1}{2}OC$,

∴ $OE=\frac{1}{2}OB$,∴ 点 E 为 OB 的中点.

(2)**解**:∵ $AB=8$,∴ $OC=OB=\frac{1}{2}AB=4$. 又∵ $BE=OE$,∴ $OE=2$,

∴ 在 Rt△OCE 中,$CE=\sqrt{OC^2-OE^2}=\sqrt{16-4}=2\sqrt{3}$,∴ $CD=2CE=4\sqrt{3}$.

4. 解:如图,设圆弧形桥拱 AB 所在圆的圆心为 O,连结 OA,ON,作 $OD\perp AB$ 于点 D,交⊙O 于点 C,交 MN 于点 H,所以 $OC\perp MN$,由垂径定理可知,$AD=BD$, $MH=NH$. 所以 $AD=\frac{1}{2}AB=3.6$ m,$NH=\frac{1}{2}MN=1.5$ m.

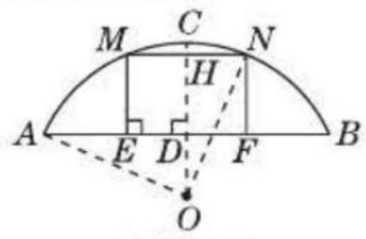
设 $OA=r$ m,则 $OD=OC-DC=(r-2.4)$ m.

在 Rt△AOD 中,$OA^2=AD^2+OD^2$,即 $r^2=3.6^2+(r-2.4)^2$,解得 $r=3.9$.

在 Rt△OHN 中,$OH=\sqrt{ON^2-NH^2}=\sqrt{3.9^2-1.5^2}=3.6$(m).

所以 $FN=DH=OH-OD=3.6-(3.9-2.4)=2.1$(m).

因为 2.1 m > 2 m,所以此货船能顺利通过这座拱桥.



(第4题)

27.2 与圆有关的位置关系

27.2.1 点与圆的位置关系

1. B **2.** B **3.** C **4.** C **5.** 5

6. $\frac{25}{8}$ **点拨**:∵ $a+b^2+|c-6|+28=4\sqrt{a-1}+10b$,

∴ $(a-1-4\sqrt{a-1}+4)+(b^2-10b+25)+|c-6|=0$,

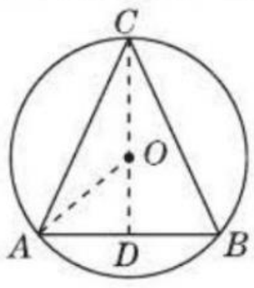
∴ $(\sqrt{a-1}-2)^2+(b-5)^2+|c-6|=0$,

∴ $\sqrt{a-1}-2=0$, $b-5=0$, $c-6=0$,

解得 $a=5$, $b=5$, $c=6$,

∴ $AC=BC=5$, $AB=6$,

如图,作 $CD\perp AB$ 于点 D,易知 CD 过点 O,连结 OA,则 $AD=3$, $CD=4$,



(第6题)

设△ABC 的外接圆的半径为 r,

则 $OC=r$, $OD=4-r$, $OA=r$,

∴ $3^2+(4-r)^2=r^2$,解得 $r=\frac{25}{8}$.

7. B **8.** B

9. D **点拨**:延长 BO 交⊙O 于 D,连结 CD,

易知 $\angle BCD=90°$, $\angle D=\angle A=60°$,

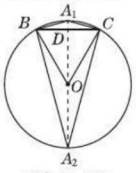
∴ $\angle CBD=30°$,

∵ $BD=2R$,∴ $DC=R$,∴ $BC=\sqrt{3}R$.

10. C **点拨**:由题意可得,存在两种情

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

况. ①当$\triangle ABC$为钝角三角形时，如图中的$\triangle A_1BC$，②当$\triangle ABC$为锐角三角形时，如图中的$\triangle A_2BC$.



（第10题）

连结A_1A_2，交BC于D.

$\because A_1B=A_1C, A_2B=A_2C$，

$\therefore A_1A_2$垂直平分BC. $\therefore A_1A_2$为$\odot O$的直径，$BD=CD=1$.

$\because \angle BOC=60^\circ, OB=OC$，

$\therefore \triangle OBC$为等边三角形.

$\therefore OB=OC=BC=2$.

$\therefore OD=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$.

$\therefore S_{\triangle A_1BC}=\dfrac{BC\cdot A_1D}{2}=\dfrac{2\times(2-\sqrt{3})}{2}=2-\sqrt{3}$，$S_{\triangle A_2BC}=\dfrac{BC\cdot A_2D}{2}=\dfrac{2\times(2+\sqrt{3})}{2}=2+\sqrt{3}$.

$\therefore \triangle ABC$的面积为$2-\sqrt{3}$或$2+\sqrt{3}$.

故选C.

11. （1）**证明**：$\because AD$平分$\angle BAC$，BE平分$\angle ABC$，$\therefore \angle ABE=\angle CBE$，$\angle BAE=\angle CAD$，$\therefore \overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{CD}$，

$\therefore \angle DBC=\angle BAE$，

$\because \angle DBE=\angle CBE+\angle DBC$，

$\angle DEB=\angle ABE+\angle BAE$，

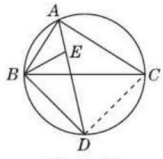
$\therefore \angle DBE=\angle DEB, \therefore DE=DB$.

（2）**解**：连结CD，如图所示.

$\because AD$平分$\angle BAC$，

$\therefore \angle BAD=\angle CAD$，

$\therefore \overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{CD}$. $\therefore CD=BD=4$.



（第11题）

$\because \angle BAC=90^\circ$，

$\therefore BC$是$\triangle ABC$的外接圆的直径，

$\therefore \angle BDC=90^\circ$，

$\therefore BC=\sqrt{BD^2+CD^2}=4\sqrt{2}$，

$\therefore \triangle ABC$的外接圆的半径$=\dfrac{1}{2}\times 4\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.

12. **证明**：（1）$\because OA=OB=OD$，

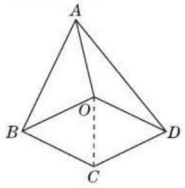
$\therefore$点A, B, D在以点O为圆心，OA为半径的圆上，

$\therefore \angle BOD=2\angle BAD$.

又$\because \angle C=2\angle BAD$，

$\therefore \angle BOD=\angle C$.

（2）如图，连结OC.



（第12题）

$\because OB=OD, CB=CD, OC=OC$，

$\therefore \triangle BOC\cong\triangle DOC$，

$\therefore \angle BOC=\angle DOC, \angle BCO=\angle DCO$，

$\therefore \angle BOC=\dfrac{1}{2}\angle BOD$，$\angle BCO=\dfrac{1}{2}\angle BCD$，由（1）知$\angle BOD=\angle BCD$，

$\therefore \angle BOC=\angle BCO, \therefore OB=CB$.

又$\because OB=OD, CB=CD$，

$\therefore OB=BC=CD=DO$，

$\therefore$四边形$OBCD$是菱形.

13. （1）**证明**：如图，连结AD. 弧AC所对的圆周角$\angle ABC=\angle ADC$，弧CD所对的圆周角$\angle DBC=\angle DAC$.

$\because$四边形$BDCE$是菱形，

$\therefore \angle ABC=\angle DBC$.

$\therefore \angle ADC=\angle DAC, \therefore AC=CD$.

又$\because CD=CE, \therefore AC=CE$.

（2）**证明**：如图，作$CH\perp AE$于H.

$\because \triangle ACE$为等腰三角形，

$\therefore H$为AE的中点，即$AH=EH$.

在$\mathrm{Rt}\triangle CHB$中，$BC^2-CH^2=BH^2$；

在$\mathrm{Rt}\triangle AHC$中，$AC^2-CH^2=AH^2$.

$\therefore BC^2-AC^2=BH^2-AH^2=(BH+AH)(BH-AH)=AB\cdot BE=AB\cdot AC$.

（3）**解**：①如图，连结OD, OC，记OD与BC交于点P，则$OD=3$. 易得OD垂直平分BC.

由$\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{5}{3}$，可设$AB=5t, AC=3t$.

又$BC^2-9t^2=5t\cdot 3t=15t^2$，

$\therefore BC^2=24t^2$，则$PC^2=6t^2$.

$\therefore PD=\sqrt{CD^2-PC^2}=\sqrt{3}t$，

从而$OP=3-\sqrt{3}t$. $\therefore$在$\mathrm{Rt}\triangle OPC$中，

$(3-\sqrt{3}t)^2+6t^2=9$，解得$t=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$或$t=0$（舍去），$\therefore BC=2\sqrt{6}t=4\sqrt{2}$.

②设$\dfrac{AB}{AC}=m$，则$AB=mAC$.

设$AC=a, OP=b$，则$PD=3-b$，

$\therefore PC^2=9-b^2=a^2-(3-b)^2$，

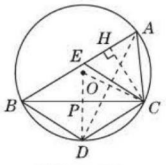
得$b=3-\dfrac{a^2}{6}$.

$\therefore PC^2=a^2-\dfrac{a^4}{36}$. $\therefore BC^2=4a^2-\dfrac{a^4}{9}$.

$\therefore BC^2-AC^2=4a^2-\dfrac{a^4}{9}-a^2=-\dfrac{a^4}{9}+3a^2=-\dfrac{1}{9}(a^4-27a^2)=-\dfrac{1}{9}\left(a^2-\dfrac{27}{2}\right)^2+\dfrac{81}{4}$.

当$a^2=\dfrac{27}{2}$时，BC^2-AC^2取得最大值$\dfrac{81}{4}$，即$AB\cdot AC$取得最大值$\dfrac{81}{4}$.

此时$AB\cdot AC=mAC\cdot AC=ma^2=\dfrac{81}{4}$. 又$a^2=\dfrac{27}{2}, \therefore m=\dfrac{3}{2}$. 即$\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{3}{2}$时，$AB\cdot AC$的值最大.



（第13题）

14. （1）**证明**：$\because \triangle ABC$为等边三角形，

$\therefore \angle ABC=\angle BAC=60^\circ$.

$\therefore \angle APC=\angle BPC=60^\circ$.

$\because PC$为$\odot O$的直径，

$\therefore \angle PAC=\angle PBC=90^\circ$.

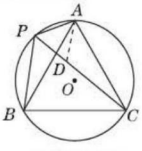
$\therefore \angle ACP=\angle BCP=30^\circ$.

$\therefore AP=BP=\dfrac{1}{2}PC$.

$\therefore AP+BP=PC$.

（2）**解**：成立.

理由：如图，在PC上取一点D，使$PD=PA$，连结AD.



（第14题）

$\because \angle APD=\angle ABC=60^\circ$，

$\therefore \triangle APD$为等边三角形.

$\therefore AD=AP, \angle PAD=60^\circ$.

又$\because \angle BAC=60^\circ$，

$\therefore \angle PAB=\angle DAC$.

又$\because AB=AC, \therefore \triangle APB\cong\triangle ADC$，

$\therefore PB=DC$，

$\therefore AP+BP=PD+DC=PC$.

27.2.2 直线与圆的位置关系

1. C **2.** A **3.** A **4.** D **5.** C

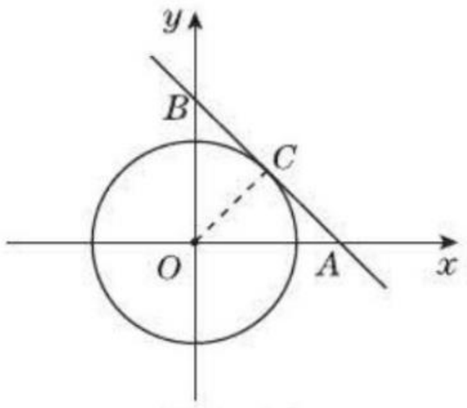
6. C **点拨**：在坐标系中画出直线$y=-x+\sqrt{2}$，易求出圆心O到直线$y=-x+\sqrt{2}$的距离是1，等于圆的半径1，则直线与圆相切.

7. （1）1 （2）$1<d<3$

8. D **点拨**：当直线$y=-x+b$与圆相

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

切，且经过第一、二、四象限时，如图所示.

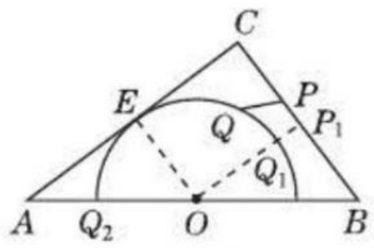


（第 8 题）

在 $y=-x+b$ 中，令 $x=0$ 时，$y=b$，则直线与 y 轴的交点 B 的坐标为 $(0,b)$；当 $y=0$ 时，$x=b$，则直线与 x 轴的交点 A 的坐标为 $(b,0)$，则 $OA=OB$，即 $\triangle OAB$ 是等腰直角三角形. 连结圆心 O 和切点 C，则 $OC=2$. 则 $OB=\sqrt{2}OC=2\sqrt{2}$，即 $b=2\sqrt{2}$；同理，当直线 $y=-x+b$ 与圆相切，且经过第二、三、四象限时，$b=-2\sqrt{2}$. $\therefore b$ 的取值范围是 $-2\sqrt{2}<b<2\sqrt{2}$. 故选 D.

9. B

10. C　**点拨**：如图，设半圆 O 与 AC 相切于点 E，与 OA 相交于点 Q_2. 连结 OE，作 $OP_1\perp BC$，垂足为 P_1，交半圆 O 于点 Q_1，则 P_1Q_1 的长是 PQ 长的最小值. 易得 $OE=OQ_1=3$，$OP_1=4$. 所以 $P_1Q_1=OP_1-OQ_1=4-3=1$. 当点 Q 与点 Q_2 重合，点 P 与点 B 重合时，QP 的值最大. 易求得 $OB=5$，所以 $BQ_2=3+5=8$，即 QP 的最大值为 8，所以 PQ 长的最大值与最小值的和为 $8+1=9$.



（第 10 题）

11. (1,1)或(3,1)或(2,0)或(2,2)

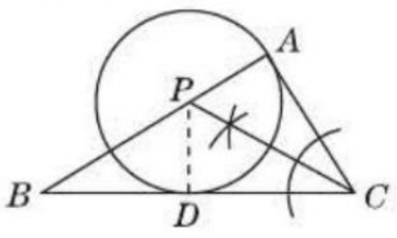
12. **解**：(1)如图，$\odot P$ 为所求的圆.

(2) BC 与 $\odot P$ 相切. 证明如下：

如图，过 P 作 $PD\perp BC$，交 BC 于点 D.

$\because CP$ 为 $\angle ACB$ 的平分线，且 $PA\perp AC$，$PD\perp CB$，$\therefore PD=PA$. $\therefore$ 点 P 到 BC 的距离等于 $\odot P$ 的半径.

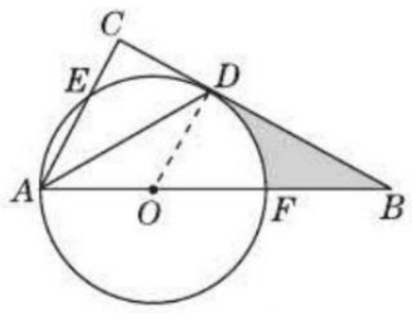
$\therefore BC$ 与 $\odot P$ 相切.



（第 12 题）

13. **解**：(1) BC 与 $\odot O$ 相切.

理由：如图，连结 OD.



（第 13 题）

$\because AD$ 是 $\angle BAC$ 的平分线，

$\therefore \angle BAD=\angle CAD$.

又 $\because OD=OA$，$\therefore \angle OAD=\angle ODA$.

$\therefore \angle CAD=\angle ODA$. $\therefore OD\parallel AC$.

$\therefore \angle ODB=\angle C=90°$，即 $OD\perp BC$.

$\therefore$ 圆心 O 到直线 BC 的距离为半径 OD 的长，$\therefore BC$ 与 $\odot O$ 相切.

(2) 设 $OF=OD=x$，则 $OB=OF+BF=x+2$，根据勾股定理得 $OB^2=OD^2+BD^2$，即 $(x+2)^2=x^2+12$.

解得 $x=2$，即 $OD=OF=2$.

$\therefore OB=2+2=4$.

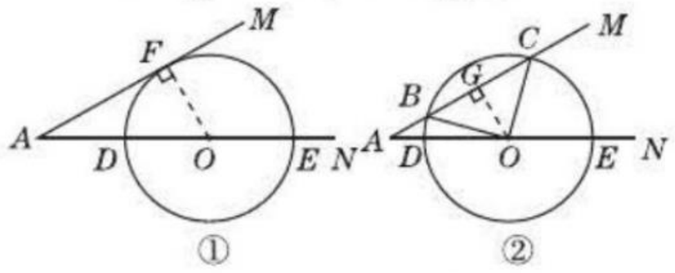
$\because$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle ODB$ 中，$OD=\frac{1}{2}OB$，

$\therefore \angle B=30°$. $\therefore \angle DOB=60°$.

$\therefore S_{扇形DOF}=\frac{1}{6}\times\pi\times2^2=\frac{2\pi}{3}$.

则阴影部分的面积为 $S_{\triangle ODB}-S_{扇形DOF}=\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3}=2\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3}$. 故阴影部分的面积为 $2\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3}$.

14. **解**：(1)如图①，过 O 点作 $OF\perp AM$ 于点 F，当 $OF=r=2$ 时，$\odot O$ 与 AM 相切，此时 $OA=4$，故 $AD=2$. 即当 $x=2$ 时，$\odot O$ 与 AM 相切.



（第 14 题）

(2) 如图②，过 O 点作 $OG\perp AM$ 于 G.

$\because OB=OC=2$，$\angle BOC=90°$，

$\therefore BC=2\sqrt{2}$. $\therefore BG=CG=\sqrt{2}$.

$\therefore OG=\sqrt{2}$.

$\because \angle A=30°$，$\therefore OA=2\sqrt{2}$.

$\therefore AD=2\sqrt{2}-2$. 即当 $x=2\sqrt{2}-2$ 时，$\odot O$ 与 AM 相交于 B，C 两点，且 $\angle BOC=90°$.

15. (1) **解**：DE 与半圆 O 相切.

理由：$\because CD\perp AD$，$\therefore \angle D=90°$.

$\because$ 四边形 $OABC$ 是平行四边形，

$\therefore AD\parallel OC$，$\therefore \angle D=\angle OCE=90°$.

$\therefore CO\perp DE$. $\therefore$ 圆心 O 到直线 DE 的距离为半径 OC 的长.

$\therefore DE$ 与半圆 O 相切.

(2) ①**证明**：如图，连结 OB.

$\because OA=OC$，$\therefore$ 四边形 $OABC$ 是菱形. $\therefore OA=OB=AB$.

$\therefore \triangle AOB$ 为等边三角形.

$\therefore \angle BAO=60°$.

$\because AD\parallel OC$，$\therefore \angle COF=\angle BAO=60°$.

$\because OC=OF$，$\therefore \triangle OCF$ 是等边三角形，$\therefore CF=OC$.

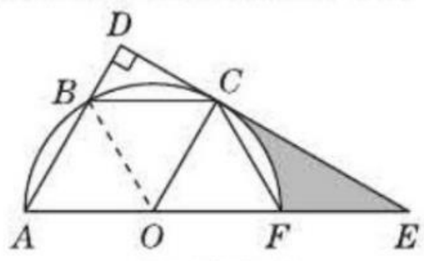
②**解**：在 $\mathrm{Rt}\triangle OCE$ 中，$\because OC=12$，$\angle COE=60°$，$\angle OCE=90°$，

$\therefore OE=2OC=24$，$\therefore EC=12\sqrt{3}$.

$\because OF=12$，$\therefore EF=12$.

又 $\because \overset{\frown}{CF}$ 的长 $=\frac{1}{6}\times2\pi\times12=4\pi$，

$\therefore$ 阴影部分的周长为 $4\pi+12+12\sqrt{3}$.



（第 15 题）

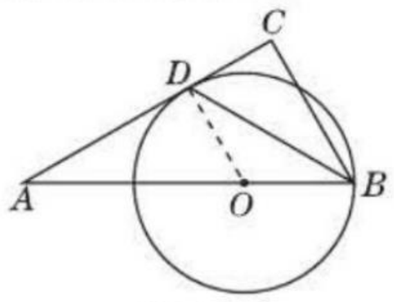
27.2.3　切　线

第 1 课时　切　线

1. C　**2.** A　**3.** A　**4.** C　**5.** B

6. B　**7.** B　**8.** A

9. B　**点拨**：如图，连结 OD，由 AC 切 $\odot O$ 于点 D，得 $OD\perp AC$.



（第 9 题）

$\because$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle AOD$ 中，$\angle A=30°$，$AD=2\sqrt{3}$，$\tan A=\frac{OD}{AD}$，

$\therefore OD=AD\cdot\tan A=2\sqrt{3}\times\tan30°=2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=2$. $\therefore AO=2OD=4$.

$\because \angle AOD=90°-\angle A=60°$，

$\therefore \angle ABD=\frac{1}{2}\angle AOD=30°$.

$\because BD$ 平分 $\angle ABC$，

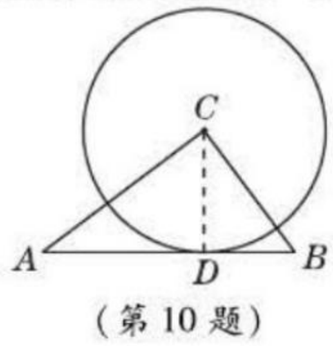
$\therefore \angle ABC=2\angle ABD=60°$.

$\therefore \angle C=90°=\angle ADO$. $\therefore OD\parallel BC$.

$\therefore \frac{AD}{DC}=\frac{AO}{OB}$，即 $\frac{2\sqrt{3}}{DC}=\frac{4}{2}$.

$\therefore DC=\sqrt{3}$.

10. B　**点拨**：如图，设切点为 D，连结 CD.



（第 10 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∵ AB 是⊙C 的切线，

∴ $CD \perp AB$，∴ $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CD$.

在△ABC 中，∵ $AB = 5$，$BC = 3$，$AC = 4$，

∴ $AC^2 + BC^2 = 4^2 + 3^2 = 5^2 = AB^2$.

∴ $\angle ACB = 90°$.

∴ $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} AB \cdot CD$，

∴ $CD = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{4 \times 3}{5} = 2.4$.

∴ ⊙C 的半径为 2.4，故选 B.

11. **解**：(1) 直线 DE 与⊙O 相切. 理由如下：

如图，连结 OD.

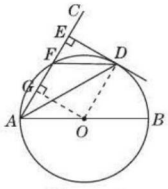
∵ AD 平分∠BAC，∴ $\angle OAD = \angle CAD$.

∵ $OA = OD$，∴ $\angle OAD = \angle ODA$.

∴ $\angle ODA = \angle CAD$. ∴ $OD \parallel AC$.

∵ $DE \perp AC$，∴ $DE \perp OD$.

∴ 直线 DE 与⊙O 相切.



（第 11 题）

(2) 如图，作 $OG \perp AF$ 于点 G，

则 $AF = 2AG$.

∵ $\angle BAC = 60°$，$OA = 2$，

∴ $AG = \frac{1}{2} OA = 1$.

∴ $AF = 2$. ∴ $AF = OD$.

易证四边形 $AODF$ 是菱形，

∴ $DF \parallel OA$，$DF = OA = 2$.

∴ $\angle EFD = \angle BAC = 60°$.

∴ $EF = \frac{1}{2} DF = 1$.

12. (1) **证明**：∵ $OE \perp OA$，∴ $\angle AOE = 90°$，

∴ $\angle BAO + \angle AOB = \angle AOB + \angle COE = 90°$，∴ $\angle BAO = \angle COE$.

∵ 在矩形 $ABCD$ 中，$\angle ABO = \angle OCE = 90°$，

∴ $\triangle ABO \backsim \triangle OCE$，∴ $\frac{AB}{OC} = \frac{AO}{OE}$.

∵ $OB = OC$，∴ $\frac{AB}{OB} = \frac{AO}{OE}$.

∵ $\angle ABO = \angle AOE = 90°$，

∴ $\triangle ABO \backsim \triangle AOE$，∴ $\angle BAO = \angle OAE$.

过 O 作 $OF \perp AE$ 于 F，如图所示.

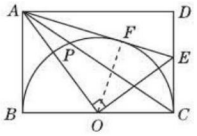
∴ $\angle ABO = \angle AFO = 90°$.

在△ABO 与△AFO 中，

$$\begin{cases} \angle ABO = \angle AFO, \\ \angle BAO = \angle FAO, \\ AO = AO, \end{cases}$$

∴ $\triangle ABO \cong \triangle AFO$，∴ $OF = OB$，

∴ AE 是半圆 O 的切线.



（第 12 题）

(2) **解**：∵ AF 是⊙O 的切线，AC 是⊙O 的割线，∴ $AF^2 = AP \cdot AC$，

∴ $AF = \sqrt{2 \times (2+4)} = 2\sqrt{3}$，

∴ $AB = AF = 2\sqrt{3}$.

∵ $AC = 6$，

∴ $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 2\sqrt{6}$，

∴ $OB = \frac{1}{2} BC = \sqrt{6}$，

∴ $AO = \sqrt{AB^2 + OB^2} = 3\sqrt{2}$.

∵ $\triangle ABO \backsim \triangle AOE$，

∴ $\frac{AO}{AE} = \frac{AB}{AO}$，∴ $\frac{3\sqrt{2}}{AE} = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$，

∴ $AE = 3\sqrt{3}$.

13. **解**：(1) 直线 AF 与⊙O 相切. 理由如下：

∵ AB 为⊙O 的直径，

∴ $\angle ACB = 90°$. ∴ $\angle ACF = 90°$.

在△ACD 和△ACF 中，

$$\begin{cases} AC = AC, \\ \angle ACD = \angle ACF = 90°, \\ CD = CF, \end{cases}$$

∴ $\triangle ACD \cong \triangle ACF$(SAS)，

∴ $\angle FAC = \angle EAC$.

∵ $AC = CE$，∴ $\angle E = \angle EAC$.

∵ $\angle B = \angle E$，∴ $\angle B = \angle FAC$.

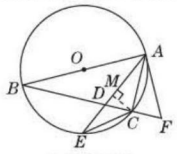
∵ $\angle B + \angle BAC = 90°$，

∴ $\angle FAC + \angle BAC = 90°$. ∴ $BA \perp AF$.

又∵ 点 A 在⊙O 上，

∴ 直线 AF 是⊙O 的切线.

(2) 如图，作 $CM \perp AE$ 于点 M，



（第 13 题）

∵ $AC = CE$，∴ $AM = EM$.

∵ $\tan \angle CAE = \frac{3}{4}$，

∴ $\frac{CM}{AM} = \frac{3}{4}$. 设 $CM = 3x$，则 $AM = 4x$.

在 Rt△ACM 中，根据勾股定理得 $CM^2 + AM^2 = AC^2$，

∴ $(3x)^2 + (4x)^2 = 100$，解得 $x = 2$.

∴ $AM = 8$. ∴ $AE = 2AM = 2 \times 8 = 16$.

14. **解**：(1) 在 Rt△ACB 中，

∵ $AC = 3$ cm，$BC = 4$ cm，$\angle ACB = 90°$，

∴ $AB = 5$ cm. 如图，连结 CD.

∵ BC 为⊙O 的直径，

∴ $\angle ADC = \angle BDC = 90°$.

∵ $\angle A = \angle A$，$\angle ADC = \angle ACB = 90°$，

∴ $\triangle ADC \backsim \triangle ACB$. ∴ $\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC}$，

则 $AD = \frac{AC^2}{AB} = \frac{9}{5}$ cm.

(2) 当点 E 是线段 AC 的中点时，直线 ED 与⊙O 相切. 理由如下：

如图，连结 OD，

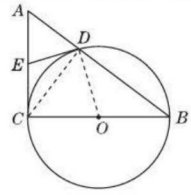
∵ DE 是 Rt△ADC 的中线，

∴ $ED = EC$，∴ $\angle EDC = \angle ECD$.

∵ $OC = OD$，∴ $\angle ODC = \angle OCD$.

∴ $\angle EDO = \angle EDC + \angle ODC = \angle ECD + \angle OCD = \angle ACB = 90°$.

∴ $ED \perp OD$，∴ 直线 ED 与⊙O 相切.



（第 14 题）

第 2 课时　切线长

1. C　**2.** D　**3.** B　**4.** $5\sqrt{3}$ cm

5. A　**6.** D　**7.** A　**8.** B　**9.** C

10. (1) **证明**：如图，连结 OD.

∵ DE 是⊙O 的切线，

∴ $\angle ODE = 90°$.

∴ $\angle ADE + \angle BDO = 90°$.

∵ $\angle ACB = 90°$，∴ $\angle A + \angle B = 90°$.

∵ $OD = OB$，∴ $\angle B = \angle BDO$.

∴ $\angle ADE = \angle A$.

(2) **解**：如图，连结 CD.

∵ $\angle ADE = \angle A$，∴ $AE = DE$.

∵ BC 是⊙O 的直径，$\angle ACB = 90°$，

∴ EC 是⊙O 的切线.

∴ $ED = EC$. ∴ $AE = EC = DE$.

∵ $DE = 10$，∴ $AC = 2DE = 20$.

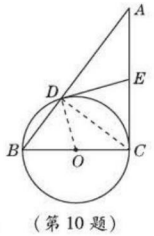
∵ BC 是⊙O 的直径，

∴ $\angle BDC = \angle ADC = 90°$.

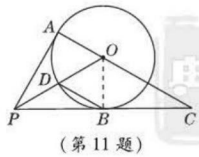
在 Rt△ADC 中，$DC = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12$，设 $BD = x$，在 Rt△BDC 中，$BC^2 = x^2 + 12^2$，在 Rt△ABC 中，$BC^2 = (x+16)^2 - 20^2$，

∴ $x^2 + 12^2 = (x+16)^2 - 20^2$，

解得 $x = 9$. ∴ $BC = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15$.



（第 10 题）



（第 11 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

11. 证明:(1)如图,连结 OB.

$\because PA, PB$ 是$\odot O$的切线,

$\therefore OA \perp AP, OB \perp BP$.

又 $OA = OB$,$\therefore PO$ 平分$\angle APC$.

(2)$\because OA \perp AP, OB \perp BP$,

$\therefore \angle CAP = \angle OBP = 90°$.

$\because \angle C = 30°$,

$\therefore \angle APC = 90° - \angle C = 90° - 30° = 60°$.

$\because PO$ 平分$\angle APC$,

$\therefore \angle OPC = \frac{1}{2}\angle APC = \frac{1}{2} \times 60° = 30°$. $\therefore \angle POB = 90° - \angle OPC = 90° - 30° = 60°$. 又 $OD = OB$,

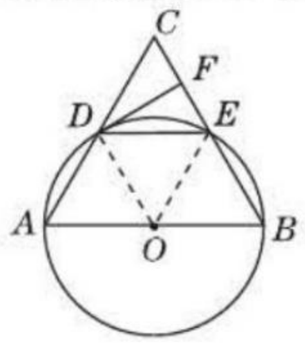
$\therefore \triangle ODB$ 是等边三角形.

$\therefore \angle OBD = 60°$.

$\therefore \angle DBP = \angle OBP - \angle OBD = 90° - 60° = 30°$. $\therefore \angle DBP = \angle C$.

$\therefore DB // AC$.

12. (1)**证明**:如图,连结 OD, OE.



(第 12 题)

$\because AB = 2$,

$\therefore OA = OD = OE = OB = 1$.

$\because DE = 1$,$\therefore OD = OE = DE$.

$\therefore \triangle ODE$ 是等边三角形.

$\therefore \angle ODE = \angle OED = 60°$.

$\because DE // AB$,$\therefore \angle AOD = \angle ODE = 60°$,$\angle EOB = \angle OED = 60°$.

$\therefore \triangle AOD$ 和$\triangle BOE$ 是等边三角形.

$\therefore \angle OAD = \angle OBE = 60°$.

$\therefore \angle CDE = \angle OAD = 60°$,$\angle CED = \angle OBE = 60°$.

$\therefore \triangle CDE$ 是等边三角形.

$\because DF$ 是$\odot O$的切线,$\therefore OD \perp DF$.

$\therefore \angle EDF = 90° - 60° = 30°$.

$\therefore \angle DFE = 90°$.

$\therefore DF \perp CE$. $\therefore CF = EF$.

(2)**解**:相等. 理由:当点 E 运动至与点 B 重合时,BC 是$\odot O$的切线.

$\because \odot O$的切线 DF 交 BC 于点 F,

$\therefore BF = DF$. $\therefore \angle BDF = \angle DBF$.

$\because AB$ 是直径,$\therefore \angle ADB = \angle BDC = 90°$.

$\therefore \angle BDF + \angle FDC = \angle DBF + \angle C = 90°$. $\therefore \angle FDC = \angle C$.

$\therefore DF = CF$. $\therefore BF = CF$.

13. 解:(1)由切线长定理,得 $AE = AH$,$BE = BF$,$CF = CG$,$DG = DH$,

$\therefore AB + CD = AE + BE + CG + DG = AH + BF + CF + DH = BC + AD$,

即 $AB + CD = BC + AD$.

(2)过点 B 作$\odot O$的切线,交 AD 于点 M. 由(1)可知 $BM + CD = BC + MD$.

$\because AB < AM + BM$,

$\therefore AB + BM + CD < AM + BM + BC + MD$,即 $AB + CD < BC + AD$.

第 3 课时　三角形的内切圆

1. C　**2.** B　**3.** B　**4.** B　**5.** C　**6.** A

7. C　**8.** C　**9.** A　**10.** D

11. 证明:如图,连结 BI.

$\because$ 点 I 是$\triangle ABC$的内心,

$\therefore BI$ 平分$\angle ABC$. $\therefore \angle ABI = \angle CBI$.

又$\because AD$ 平分$\angle BAC$,

$\therefore \angle BAD = \angle DAC$.

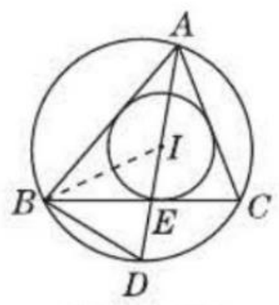
$\because \angle DAC$ 与 $\angle DBC$ 均为$\overset{\frown}{DC}$所对的圆周角,$\therefore \angle DAC = \angle DBC$.

$\therefore \angle BAD = \angle DBC$.

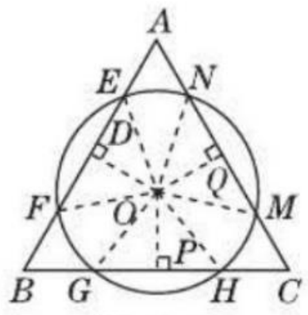
$\therefore \angle ABI + \angle BAD = \angle CBI + \angle DBC$,

$\therefore \angle BID = \angle IBD$. $\therefore DI = DB$.

易错总结:三角形的内心是三角形内切圆的圆心,即三角形三条角平分线的交点;三角形的外心是三角形外接圆的圆心,即三角形三边垂直平分线的交点. 本题中既出现了三角形的外接圆,又出现了三角形的内切圆,易混淆三角形的内心与外心的概念,造成证明错误.



(第 11 题)



(第 12 题)

12. 证明:如图,过点 O 作 $OD \perp AB$ 于点 D,$OP \perp BC$ 于点 P,$OQ \perp AC$ 于点 Q,连结 OE,OF,OG,OH,OM,ON.

$\because EF = GH = MN$,$OE = OF = OG = OH = OM = ON$,

$\therefore \triangle OEF \cong \triangle OGH \cong \triangle OMN$.

$\therefore OD = OP = OQ$.

$\therefore$ 点 O 是$\triangle ABC$的内心.

13. 解:(1)$\because BC = 5$,$AC = 6$,$AB = 9$,

$\therefore p = \frac{BC + AC + AB}{2} = \frac{5 + 6 + 9}{2} = 10$.

$\therefore S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{10 \times 5 \times 4 \times 1} = 10\sqrt{2}$.

故$\triangle ABC$的面积是 $10\sqrt{2}$.

(2)$\because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}r(AB + BC + AC)$,

$\therefore 10\sqrt{2} = \frac{1}{2}r(9 + 5 + 6)$.

解得 $r = \sqrt{2}$.

故$\triangle ABC$的内切圆半径 $r = \sqrt{2}$.

14. 证明:(1)$\because E$ 是$\triangle ABC$的内心,

$\therefore \angle BAE = \angle CAE$,$\angle EBA = \angle EBC$.

$\because \angle BED = \angle BAE + \angle EBA$,

$\angle DBE = \angle EBC + \angle DBC$,

$\angle DBC = \angle CAE$,

$\therefore \angle DBE = \angle DEB$. $\therefore DB = DE$.

(2)如图,连结 CD.

$\because \angle DAB = \angle DAC$,

$\therefore \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{CD}$. $\therefore BD = CD$.

$\because BD = DF$,$\therefore CD = DB = DF$.

$\therefore \angle DBC = \angle DCB$,$\angle DCF = \angle DFC$.

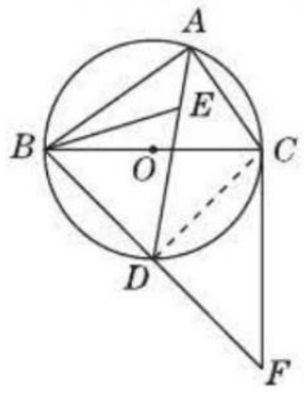
$\because BC$ 是$\odot O$的直径,

$\therefore \angle BDC = 90°$.

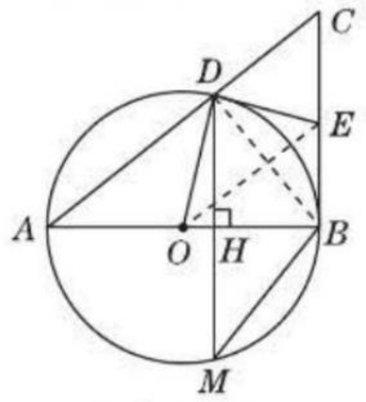
$\therefore \angle DBC = \angle DCB = \angle DCF = \angle DFC = 45°$.

$\therefore \angle BCF = 90°$,即 $BC \perp CF$.

$\therefore$ 直线 CF 是$\odot O$的切线.



(第 14 题)



(第 15 题)

15. (1)**证明**:连结 OE,如图.

$\because$ 在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle ABC = 90°$,AB 是$\odot O$的直径,

$\therefore BE$ 是$\odot O$的切线.

又$\because DE$ 是$\odot O$的切线,

$\therefore DE = BE$.

又$\because OD = OB$,$OE = OE$,

$\therefore \triangle ODE \cong \triangle OBE$,

$\therefore \angle DOE = \angle BOE = \frac{1}{2}\angle DOB$.

又$\because \angle DAB = \frac{1}{2}\angle DOB$,

$\therefore \angle DAB = \angle BOE$,$\therefore OE // AC$.

$\because O$ 为 AB 的中点,

$\therefore E$ 为 BC 的中点.

(2)**解**:连结 BD,如图.

$\because \triangle AHD$ 和$\triangle BMH$ 的外接圆面积之比为 3,且两个三角形的外接圆的直径分别为 AD,BM,

$\therefore AD : BM = \sqrt{3}$,

由题易知$\triangle ADH \backsim \triangle MBH$,

$\therefore DH : BH = \sqrt{3}$.

$\because DH = HM$,$\therefore HM : BH = \sqrt{3}$,

$\therefore \angle BMH = 30° = \angle BAC$,$\therefore \angle C = 60°$.

又$\because DE$ 是 Rt$\triangle BCD$ 的中线,

$\therefore DE = CE$,$\therefore \triangle DEC$ 为等边三角形.

又$\because \odot O$的面积为12π,

$\therefore 12\pi = \left(\frac{1}{2}AB\right)^2 \pi$,$\therefore AB = 4\sqrt{3}$,

$\therefore BC = 4$,$AC = 8$,$\therefore OE = \frac{1}{2}AC = 4$,

$EC = \frac{1}{2}BC = 2$,$\therefore$ 四边形 $OBED$ 的外接圆面积 $S_2 = \pi \cdot 2^2 = 4\pi$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∵ 等边三角形 DEC 内切圆的半径为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，面积 $S_1=\frac{\pi}{3}$，

∴ $\triangle DEC$ 的内切圆面积 S_1 和四边形 $OBED$ 的外接圆面积 S_2 的比为 1:12.

*第 4 课时　圆与圆的位置关系

1. B　**2.** C　**3.** D　**4.** B

5. 外切　**6.** 相交　**7.** D　**8.** B

9. D　**10.** C　**11.** D

12. (1)公切线有 1 条

(2)公切线有 3 条

(3)公切线有 4 条

(4)公切线有 2 条

(5)公切线有 0 条

13. 1 cm 或 9 cm

14. 9π

15. 3

16. **解**：设另一个圆的半径为 r.

当两圆内切时，$|10-r|=7$，

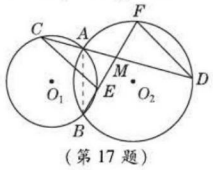
解得 $r=3$ 或 17. 当两圆外切时，$10+r=7$，此方程无解.

∴ 另一个圆的半径为 3 或 17.

17. **证明**：(1)如图，连结 AB，

则 $\angle D=\angle ABF=\angle C$，

即 $\angle D=\angle C$，∴ $CE/\!/DF$.



(第 17 题)

(2)在 $\triangle CME$ 与 $\triangle DMF$ 中，

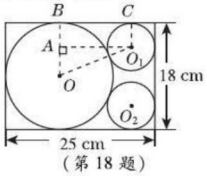
$$\because \begin{cases}\angle C=\angle D,\\ CM=DM,\\ \angle CME=\angle DMF,\end{cases}$$

∴ $\triangle CME\cong\triangle DMF$，

∴ $ME=MF$.

18. **解**：能. 如图，设 $\odot O$，$\odot O_1$ 和矩形的同一边分别相切于 B，C 两点，$\odot O_1$ 的半径为 r cm，连结 OO_1，OB，O_1C，过点 O_1 作 $O_1A\perp OB$ 于点 A. 在 $\mathrm{Rt}\triangle OO_1A$ 中，由勾股定理得 $OA^2+AO_1^2=OO_1^2$，即 $(9-r)^2+(25-9-r)^2=(9+r)^2$，整理得 $r^2-68r+256=0$，解得 $r_1=4$，$r_2=64$(不合题意，舍去).

∴ 小圆的半径为 4 cm.



(第 18 题)

19. **解**：解方程 $x^2-5x+6=0$，得 $x_1=2$，$x_2=3$，∴ $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 的半径为 2，3. ∵ $2+3<6$，∴ $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 外离.

20. **解**：如图，连结 AO_1，AO_2，

则 $AO_1=6$ cm，$AO_2=8$ cm.

又∵ $O_1O_2=10$ cm，

∴ $AO_1^2+AO_2^2=O_1O_2^2$，

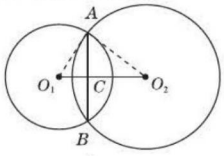
∴ $\triangle AO_1O_2$ 为直角三角形.

设 O_1O_2 与 AB 相交于点 C，则易知 $AC\perp O_1O_2$，且 $AB=2AC$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AO_1O_2$ 中，∵ $\frac{1}{2}AO_1\cdot AO_2=\frac{1}{2}O_1O_2\cdot AC$，

∴ $AC=\frac{AO_1\cdot AO_2}{O_1O_2}=\frac{6\times8}{10}=4.8(\mathrm{cm})$，

∴ $AB=2AC=9.6$ cm.



(第 20 题)

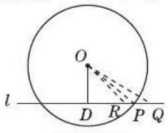
阶段方法技巧训练(四)

专训 1

1. B　**2.** C

3. 点 P 在 $\odot O$ 上或 $\odot O$ 内

4. **解**：如图，连结 OR，OP，OQ.



(第 4 题)

∵ $PD=4$ cm，$OD=3$ cm，且 $OD\perp l$，

∴ $OP=\sqrt{PD^2+OD^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5(\mathrm{cm})=r$. ∴ 点 P 在 $\odot O$ 上.

∵ $QD=5$ cm，∴ $OQ=\sqrt{QD^2+OD^2}=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}(\mathrm{cm})>5$ cm $=r$.

∴ 点 Q 在 $\odot O$ 外. ∵ $RD=3$ cm，

∴ $OR=\sqrt{RD^2+OD^2}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}(\mathrm{cm})<5$ cm $=r$.

∴ 点 R 在 $\odot O$ 内.

5. B

6. **解**：直线 BD 与 $\odot C$ 相交. 理由如下：

∵ $\angle ACB=90°$，$\angle A=30°$，

∴ $AB=2BC=8$ cm.

∴ $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=4\sqrt{3}$ cm.

∵ $\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}AB\cdot CD$，

∴ $CD=\frac{AC\cdot BC}{AB}=2\sqrt{3}$ cm.

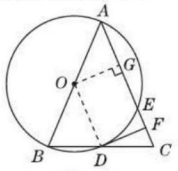
∵ $2\sqrt{3}$ cm <4 cm，

∴ 直线 BD 与 $\odot C$ 相交.

7. C　**8.** C

专训 2

1. (1)**证明**：如图，连结 OD.



(第 1 题)

∵ $OB=OD$，

∴ $\angle ODB=\angle B$.

又∵ $AB=AC$，

∴ $\angle C=\angle B$，

∴ $\angle ODB=\angle C$，

∴ $OD/\!/AC$.

∴ $\angle ODF=\angle DFC$.

∵ $DF\perp AC$，

∴ $\angle DFC=90°$，

∴ $\angle ODF=\angle DFC=90°$，

∴ DF 是 $\odot O$ 的切线.

(2)**解**：如图，作 $OG\perp AC$ 于点 G.

∵ $OG\perp AE$，

∴ $AG=\frac{1}{2}AE=2$.

∵ $\cos A=\frac{AG}{OA}$，

∴ $OA=\frac{AG}{\cos A}=\frac{2}{\frac{2}{5}}=5$.

∴ $OG=\sqrt{OA^2-AG^2}=\sqrt{21}$.

∵ $\angle ODF=\angle DFG=\angle OGF=90°$，

∴ 四边形 $OGFD$ 为矩形，

∴ $DF=OG=\sqrt{21}$.

2. (1)**证明**：过点 O 作 $OG\perp DC$，垂足为 G，如图所示.

∵ $AD/\!/BC$，$AE\perp BC$ 于 E，

∴ $OA\perp AD$.

∴ $\angle OAD=\angle OGD=90°$.

∵ AE 平分 $\angle ADC$，

∴ $\angle ADO=\angle ODG$.

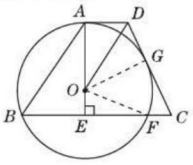
在 $\triangle ADO$ 和 $\triangle GDO$ 中，

$$\begin{cases}\angle OAD=\angle OGD,\\ \angle ADO=\angle GDO,\\ OD=OD,\end{cases}$$

∴ $\triangle ADO\cong\triangle GDO$.

∴ $OA=OG$.

∴ CD 与 $\odot O$ 相切.



(第 2 题)

(2)**解**：如图，连结 OF.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\because AE \perp BC$,

$\therefore BE = EF = \frac{1}{2}BF = 12$.

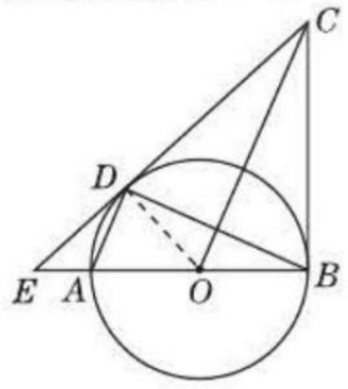
在 $\mathrm{Rt}\triangle OEF$ 中,$OE = 5$,$EF = 12$,

$\therefore OF = \sqrt{OE^2 + EF^2} = 13$.

$\therefore AE = OA + OE = 13 + 5 = 18$.

$\therefore \tan \angle ABC = \frac{AE}{BE} = \frac{3}{2}$.

3. (1) **证明**:如图,连结 DO.



(第 3 题)

$\because AD // OC$,

$\therefore \angle DAO = \angle COB$,$\angle ADO = \angle COD$.

又$\because OA = OD$,

$\therefore \angle DAO = \angle ADO$.

$\therefore \angle COD = \angle COB$.

在 $\triangle COD$ 和 $\triangle COB$ 中,

$\because OD = OB$,$\angle COD = \angle COB$,$OC = OC$,

$\therefore \triangle COD \cong \triangle COB$.

$\therefore \angle CDO = \angle CBO$.

$\because BC$ 是 $\odot O$ 的切线,

$\therefore \angle CBO = 90°$.

$\therefore \angle CDO = 90°$.

$\therefore CD$ 是 $\odot O$ 的切线.

(2) **解**:设 $\odot O$ 的半径为 r,则 $OD = r$,$OE = r + 1$.

$\because CD$ 是 $\odot O$ 的切线,

$\therefore \angle EDO = 90°$.

$\therefore ED^2 + OD^2 = OE^2$.

$\therefore 3^2 + r^2 = (r + 1)^2$.

解得 $r = 4$.

$\therefore \odot O$ 的半径为 4.

4. (1) **证明**:$\because D$ 为 $\overset{\frown}{AC}$ 的中点,

$\therefore OD \perp AC$.

$\because AC // DE$,

$\therefore OD \perp DE$.

$\therefore DE$ 是 $\odot O$ 的切线.

(2) **解**:如图,连结 DA.

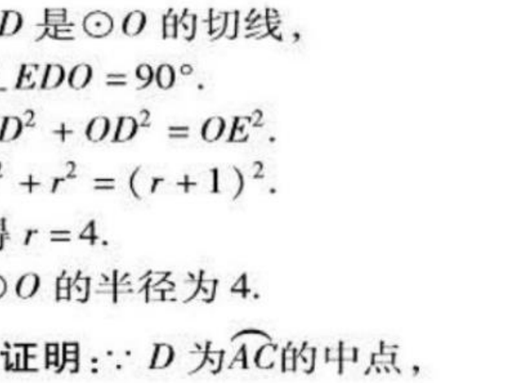
$\because D$ 为 $\overset{\frown}{AC}$ 的中点,

$\therefore AF = CF$.

$\because OD \perp DE$,$OA = AE$,

$\therefore AD = OA = OD$.

$\because OD \perp AC$,



(第 4 题)

$\therefore F$ 为 OD 的中点,即 $OF = FD$,

在 $\triangle AFO$ 和 $\triangle CFD$ 中,

$$\begin{cases} AF = CF, \\ \angle AFO = \angle CFD, \\ OF = DF, \end{cases}$$

$\therefore \triangle AFO \cong \triangle CFD$.

$\therefore S_{\triangle AFO} = S_{\triangle CFD}$.

$\therefore S_{四边形ACDE} = S_{\triangle ODE}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ODE$ 中,$OD = OA = AE = 4$,

$\therefore OE = 8$,

$\therefore DE = \sqrt{OE^2 - OD^2} = 4\sqrt{3}$,

$\therefore S_{四边形ACDE} = S_{\triangle ODE}$

$= \frac{1}{2} \times OD \times DE$

$= \frac{1}{2} \times 4 \times 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$.

27.3 圆中的计算问题

第 1 课时 弧长和扇形面积

1. C **2.** A **3.** C **4.** B

5. $\frac{1}{2}\pi$ **点拨**:$\because \angle ACB = 90°$,$AC = BC = 2$,$\therefore AB = 2\sqrt{2}$.

$\therefore S_{阴影} = S_{扇形ABB'} + S_{\triangle AB'C'} - S_{扇形ACC'} - S_{\triangle ABC} = S_{扇形ABB'} - S_{扇形ACC'} = \frac{45}{360} \times \pi \times (2\sqrt{2})^2 - \frac{45}{360} \times \pi \times 2^2 = \frac{1}{2}\pi$.

6. C **7.** C **8.** C **9.** B

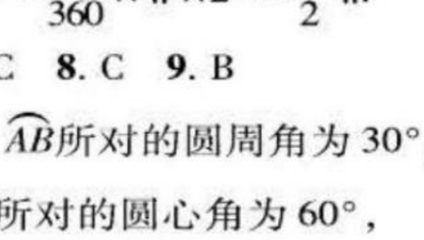
10. **解**:$\because \overset{\frown}{AB}$ 所对的圆周角为 30°,

$\therefore \overset{\frown}{AB}$ 所对的圆心角为 60°,

$\therefore \overset{\frown}{AB}$ 的长 $= \frac{60 \times \pi \times 30}{180} = 10\pi(\mathrm{cm})$.

易错总结:在公式 $l = \frac{n\pi R}{180}$,$S_{扇形} = \frac{n\pi R^2}{360}$ 中,$n°$ 是圆心角的度数,而题干给出的是圆周角的度数,不能直接代入公式计算,要求出圆心角的度数后再代入公式计算. 本题易错解为 $\overset{\frown}{AB}$ 的长 $= \frac{30 \times \pi \times 30}{180} = 5\pi(\mathrm{cm})$.

11. (1) **证明**:如图,过点 O 作 $OF \perp AC$,垂足为 F,连结 OD,OA.



(第 11 题)

$\because \triangle ABC$ 是等腰三角形,点 O 是底边 BC 的中点,

$\therefore AO$ 是 $\triangle ABC$ 的高,也是 $\angle BAC$ 的平分线.

$\because$ 腰 AB 与 $\odot O$ 相切于点 D,

$\therefore OD \perp AB$.

又$\because OF \perp AC$,

$\therefore OF = OD$,即 OF 是 $\odot O$ 的半径,

$\therefore AC$ 是 $\odot O$ 的切线.

(2) **解**:在 $\mathrm{Rt}\triangle BOD$ 中,设 $OD = OE = x$,则 $OB = x + 1$,由勾股定理,得 $(x + 1)^2 = x^2 + (\sqrt{3})^2$,解得 $x = 1$,即 $OD = OE = 1$.

$\therefore OB = 2$.

$\because \sin \angle BOD = \frac{BD}{OB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore \angle BOD = 60°$.

$\therefore \angle AOD = 90° - \angle BOD = 30°$,

易知 $\triangle DAO \cong \triangle FAO$,

$\therefore \angle AOF = \angle AOD = 30°$,

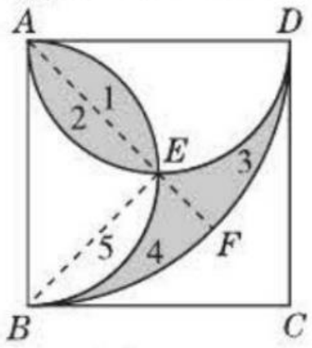
$\therefore \angle DOF = 60°$.

又$\because AD = OD \cdot \tan \angle AOD = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore S_{阴影} = S_{四边形ADOF} - S_{扇形DOF} = \frac{1}{2}AD \times OD \times 2 - \frac{60}{360}\pi \times 1^2 = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\sqrt{3} - \pi}{6}$.

12. C **点拨**:因为五边形的内角和为 540°,所以阴影部分的面积等于五个圆的面积减去 $\frac{540}{360}$ 个圆的面积.

13. **解**:如图,连结 AE 并延长,交弧 BD 于点 F,连结 BE. 由轴对称的性质可知 $S_{扇形ABF} = S_{扇形ADF}$,$S_1 = S_2 = S_5$,$S_3 = S_4$.



(第 13 题)

$\because \angle BAE = \angle DAE = 45°$,

$\therefore S_{半圆形AB} = \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{8}$,

$S_{扇形ABF} = \frac{45\pi a^2}{360} = \frac{\pi a^2}{8}$.

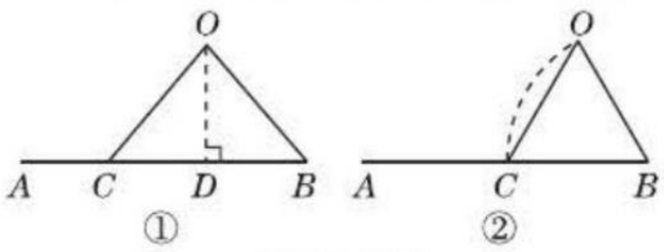
$\therefore S_{半圆形AB} = S_{扇形ABF}$,

$\therefore S_1 = S_4 = S_2 = S_3 = S_5$.

又$\because S_1 + S_5 = S_{半圆形AB} - S_{\triangle ABE} = \frac{\pi a^2}{8} - \frac{a^2}{4}$.

$\therefore S_{阴影} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 2(S_1 + S_5) = 2\left(\frac{\pi a^2}{8} - \frac{a^2}{4}\right) = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)a^2$.

14. **解**:(1) 如图①,作 $OD \perp AB$,垂足为 D.



(第 14 题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∵ $OC=OB$，$OD\perp AB$，∴ $CD=BD$.

在 Rt $\triangle OBD$ 中，$BD=OB\times\cos 50°\approx 60\times 0.64=38.4$(cm)，

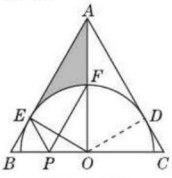
则 $AC=AB-2BD\approx 120-76.8=43.2$(cm).

(2)因为 BO 的长始终不变，所以点 O 在以 B 点为圆心，半径为 60 cm 的弧上运动，如图②，此时 $\triangle OBC$ 为等边三角形，则扇形的圆心角为 60°.

所以点 O 在此过程中运动的路径长 $=\frac{60\times\pi\times 60}{180}\approx\frac{60\times 3.14\times 60}{180}=62.8$(cm).

点拨：(1)过 O 作 $OD\perp AB$ 于 D，在 Rt$\triangle OBD$ 中运用三角函数解答；(2)找到点 O 的运动轨迹为弧 CO，将问题转化为求弧长，再利用等边三角形中的特殊角进行求解.

15. (1)**证明**：如图，过点 O 作 AC 的垂线 OD，垂足为 D.



(第 15 题)

∵ $AB=AC$，$AO\perp BC$ 于点 O，

∴ $\angle BAO=\angle CAO$.

∵ $OE\perp AB$，$OD\perp AC$，

∴ $OE=OD$. ∴ AC 是⊙O 的切线.

(2)**解**：∵ 点 F 是 AO 的中点，

∴ $AO=2OF$.

∵ $OF=OE=3$，∴ $AO=6$.

在 Rt $\triangle AOE$ 中，$\cos\angle AOE=\frac{OE}{OA}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$，∴ $\angle AOE=60°$.

∴ $AE=OE\times\tan\angle AOE=3\times\tan 60°=3\sqrt{3}$. ∴ $S_{阴影}=\frac{1}{2}\times AE\times EO-\frac{60\times\pi\times 3^2}{360}=\frac{1}{2}\times 3\sqrt{3}\times 3-\frac{60\times\pi\times 3^2}{360}=\frac{9\sqrt{3}-3\pi}{2}$.

(3)**解**：$BP=\sqrt{3}$.

第 2 课时　圆锥的侧面积和表面积

1. C　**2**. D　**3**. D　**4**. A　**5**. B　**6**. D

7. C　**8**. B　**9**. C

10. **错解**：B

诊断：误认为以斜边为轴将直角三角形旋转一周所形成的几何体的表面积是两个共底面的圆锥的侧面积与一个底面积之和.

正解：C

11. **解**：(1)设此圆锥的底面半径为 r cm，母线长 $AB=l$ cm.

∵ $2\pi r=\pi l$，∴ $l=2r$，即 $l:r=2:1$.

∴ 圆锥的母线长与底面半径之比为2:1.

(2)由(1)知 $AB=AC=2BO=2CO$.

∴ $AB=AC=BC$. ∴ $\angle BAC=60°$.

(3)设 $OB=x$ cm，则 $AB=2x$ cm. 由题意得 $x^2+(3\sqrt{3})^2=(2x)^2$，

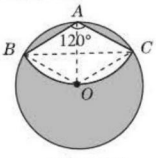
解得 $x_1=3$，$x_2=-3$(舍去).

∴ $OB=3$ cm，$AB=6$ cm.

∴ 圆锥的侧面积为 $\pi\times 6\times 3=18\pi$(cm^2).

12. **解**：(1)如图，设圆心为 O，连结 OA，OB，OC，BC. 在 $\triangle ABO$ 和$\triangle ACO$中，$OB=OC$，$AB=AC$，$OA=OA$，

∴ $\triangle ABO\cong\triangle ACO$.



(第 12 题)

又∵ $\angle BAC=120°$，

∴ $\angle BAO=\angle CAO=60°$.

又∵ $OA=OB$，

∴ $\triangle ABO$ 为等边三角形，

∴ $AB=OA=\frac{1}{2}$ m，∴ 扇形 ABC 的面积为$\frac{120\times\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^2}{360}=\frac{\pi}{12}$(m^2).

∴ 被剪掉的阴影部分的面积为$\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{6}$(m^2).

(2)设该圆锥底面圆的半径为 r m，则$\frac{120\times\pi\times\frac{1}{2}}{180}=2\pi r$. 解得 $r=\frac{1}{6}$.

故该圆锥底面圆的半径是$\frac{1}{6}$ m.

13. (1)**证明**：在正方形 $ABCD$ 中，$AB=BC=AD=2$，$\angle ABC=90°$，

∵ $\triangle BEC$ 绕点 B 逆时针旋转 90°得到$\triangle BFA$，∴ $\triangle ABF\cong\triangle CBE$.

∴ $\angle FAB=\angle ECB$，$\angle ABF=\angle CBE=90°$，$AF=CE$.

∴ $\angle AFB+\angle FAB=90°$.

∵ 线段 FA 绕点 F 顺时针旋转 90°得线段 FG，

∴ $\angle AFB+\angle CFG=\angle AFG=90°$.

∴ $\angle CFG=\angle FAB=\angle ECB$.

∴ $EC/\!/FG$.

∵ $AF=CE$，$AF=FG$.

∴ $EC=FG$. ∴ 四边形 $EFGC$ 是平行四边形. ∴ $EF/\!/CG$.

(2)**解**：∵ $AB=AD=2$，E 是 AB 的中点，∴ $BF=BE=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 2=1$.

∴ $AF=\sqrt{AB^2+BF^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$.

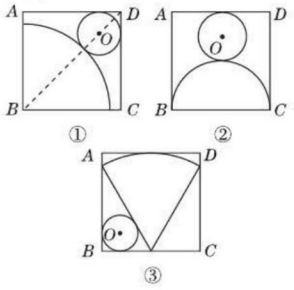
由平行四边形的性质得，

$\triangle FEC\cong\triangle CGF$，

∴ $S_{\triangle FEC}=S_{\triangle CGF}$.

∴ $S_{阴影}=S_{扇形BAC}+S_{\triangle ABF}+S_{\triangle FGC}-S_{扇形FAG}=\frac{90\cdot\pi\cdot 2^2}{360}+\frac{1}{2}\times 2\times 1+\frac{1}{2}\times(1+2)\times 1-\frac{90\cdot\pi\cdot(\sqrt{5})^2}{360}=\frac{5}{2}-\frac{\pi}{4}$.

14. **解**：(1)设计方案示意图如图所示.



(第 14 题)

(2)使得正方形铁皮的利用率最高的裁剪方案如图①所示. 连结 BD. 设圆的半径为 r cm，扇形的半径为 R cm，则有$\frac{90\times\pi\times R}{180}=2r\times\pi$，

∴ $R=4r$.

∵ 正方形的边长为 40 cm，

∴ $BD=40\sqrt{2}$ cm.

∵ 圆心 O 在 BD 上，

∴ $R+r+\sqrt{2}r=BD$.

即$4r+r+\sqrt{2}r=40\sqrt{2}$.

∴ $r=\frac{200\sqrt{2}-80}{23}$. 则此时圆锥模型底面圆的半径为$\frac{200\sqrt{2}-80}{23}$ cm.

点拨：(1)题答案不唯一.

27.4　正多边形和圆

1. A　**2**. B　**3**. C　**4**. D　**5**. C　**6**. A

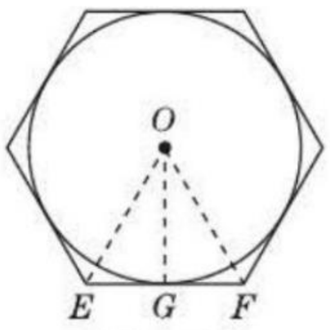
7. B　**8**. A

9. $2\sqrt{3}$　**点拨**：如图，设 EF 与⊙O 相切于点 G，连结 OE，OG，OF，易知 $OG\perp EF$，$\triangle OEF$ 为等边三角形，OG 为 $\angle FOE$ 的平分线，即 $\angle EOG=30°$，

∴ $EG=OG\times\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

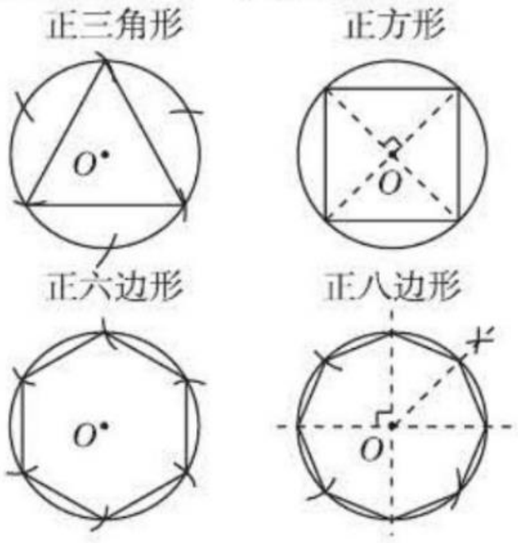
则 $S_{\odot O}\approx 12\times\frac{1}{2}\times 1\times\frac{\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



（第 9 题）

10. 解：（作法不唯一）如图所示.



（第 10 题）

11. 错解：B

诊断：设正多边形的边数为 n. 因为正多边形内角和为 $(n-2)\cdot 180°$，正多边形外角和为 $360°$，根据题意得 $(n-2)\cdot 180° = 360°\times 2$，解得 $n=6$，故正多边形为正六边形. 边长为 2 的正六边形可以分成六个边长为 2 的正三角形，所以正多边形的半径等于 2. 产生错误的原因是认为正多边形的边心距是正多边形的半径，计算得出错误的结果 $\sqrt{3}$，最后导致错选 B.

正解：A

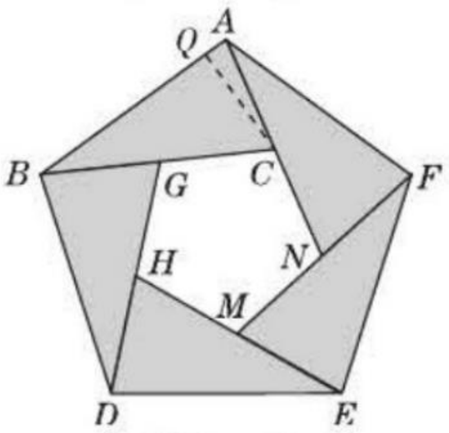
12. 解：（1）30；

∵ 五边形 $ABDEF$ 是正五边形，

$\therefore \angle DBA = \dfrac{(5-2)\times 180°}{5} = 108°$，

由题易知 $\angle DBC = \angle BAC = 78°$，

$\therefore \angle ABC = \angle DBA - \angle DBC = 30°$.



（第 12 题）

（2）如图，过点 C 作 $CQ\perp AB$ 于 Q.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AQC$ 中，$\sin\angle QAC = \dfrac{QC}{AC}$，

$\therefore QC = AC\cdot \sin\angle QAC \approx 10\times 0.98 = 9.8$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle BQC$ 中，$\angle ABC = 30°$，

$\therefore BC = 2QC \approx 19.6$.

$\therefore GC = BC - BG = BC - AC \approx 19.6 - 10 = 9.6$.

13. 解：（1）如图①，首先作直径 AD，然后分别以 A，D 为圆心，OA 长为半径画弧，分别交 $\odot O$ 于点 B，F，C，E，连结 AB，BC，CD，DE，EF，AF，则正六边形 $ABCDEF$ 即为所求.（作法不唯一）

（2）四边形 $BCEF$ 是矩形.

证明：如图②，连结 OE.

∵ 六边形 $ABCDEF$ 是正六边形，

$\therefore AB = AF = DE = DC = FE = BC$.

$\therefore \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AF} = \overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{DC}$.

$\therefore \overset{\frown}{BF} = \overset{\frown}{CE}$. $\therefore BF = CE$.

$\therefore$ 四边形 $BCEF$ 是平行四边形.

∵ $\angle EOD = \dfrac{360°}{6} = 60°$，$OE = OD$，

$\therefore \triangle EDO$ 是等边三角形.

$\therefore \angle OED = \angle ODE = 60°$.

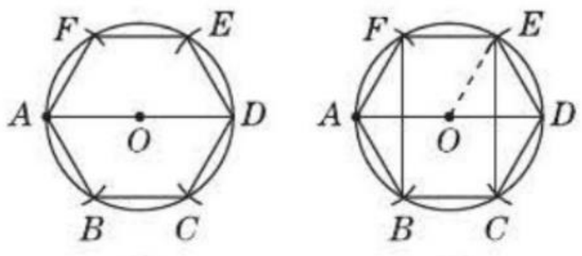
$\therefore \angle EDC = \angle FED = 2\angle ODE = 120°$.

又∵ $DE = DC$，

$\therefore \angle DEC = \angle DCE = 30°$.

$\therefore \angle CEF = \angle DEF - \angle DEC = 90°$.

$\therefore$ 四边形 $BCEF$ 是矩形.



（第 13 题）

14.（1）**证明**：连结 OF，如图.

∵ 在正六边形 $ABCDEF$ 中，

$AB = AF = EF$，

$\therefore \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AF} = \overset{\frown}{EF}$，

又∵ $\angle BAF = \dfrac{(6-2)\times 180°}{6} = 120°$，

$\therefore \angle ABF = \angle AFB = \angle EBF = 30°$.

∵ $OB = OF$，$\therefore \angle OBF = \angle BFO = 30°$，

$\therefore \angle ABF = \angle OFB$，$\therefore AB /\!/ OF$.

∵ $FG\perp BA$，$\therefore OF\perp FG$，

$\therefore FG$ 是 $\odot O$ 的切线.

（2）**解**：连结 AO，如图.

∵ $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AF} = \overset{\frown}{EF}$，

$\therefore \angle AOF = 60°$，$\angle AFB = \angle FBE$.

∵ $OA = OF$，$\therefore$ $\triangle AOF$ 是等边三角形，$\therefore \angle AFO = 60°$.

∵ $\angle GFO = 90°$，

$\therefore \angle AFG = 30°$.

∵ $FG = 2\sqrt{3}$，$\therefore AF = 4$，

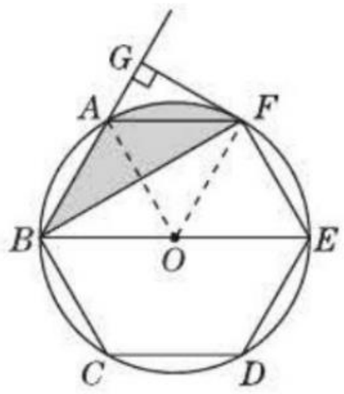
$\therefore AO = 4$.

∵ $\angle AFB = \angle FBE$，

$\therefore AF /\!/ BE$，

$\therefore S_{\triangle ABF} = S_{\triangle AOF}$，

$\therefore$ 图中阴影部分的面积为 $\dfrac{60\cdot \pi\times 4^2}{360} = \dfrac{8\pi}{3}$.



（第 14 题）

15. 解：（1）60°　（2）90°；108°

（3）$\angle APN = \dfrac{(n-2)\cdot 180°}{n}$.

阶段方法技巧训练（五）

专训 1

1.（1）**证明**：∵ AB，CD 是直径，

$\therefore \angle ADB = \angle CBD = 90°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle CDB$ 中，

$\begin{cases} AB = CD, \\ BD = DB. \end{cases}$

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ABD \cong \mathrm{Rt}\triangle CDB$.

（2）**解**：∵ BE 是 $\odot O$ 的切线，

$\therefore AB\perp BE$. $\therefore \angle ABE = 90°$.

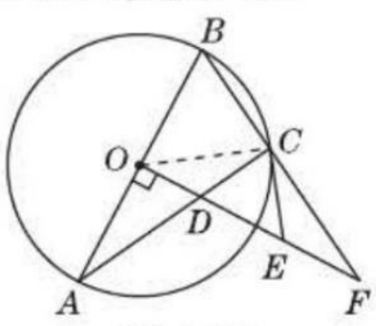
∵ $\angle DBE = 37°$，$\therefore \angle ABD = 53°$.

∵ $OD = OA$，

$\therefore \angle ODA = \angle BAD = 90° - 53° = 37°$.

即 $\angle ADC$ 的度数为 $37°$.

2.（1）**证明**：如图，连结 OC.



（第 2 题）

∵ CE 与 $\odot O$ 相切，OC 是 $\odot O$ 的半径，

$\therefore OC\perp CE$，

$\therefore \angle OCA + \angle ACE = 90°$.

∵ $OA = OC$，$\therefore \angle A = \angle OCA$，

$\therefore \angle ACE + \angle A = 90°$.

∵ $OD\perp AB$，

$\therefore \angle ODA + \angle A = 90°$.

∵ $\angle ODA = \angle CDE$，

$\therefore \angle CDE + \angle A = 90°$，

$\therefore \angle CDE = \angle ACE$，$\therefore EC = ED$.

（2）**解**：∵ AB 为 $\odot O$ 的直径，

$\therefore \angle ACB = \angle DCF = 90°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle DCF$ 中，$\angle DCE + \angle ECF = 90°$，$\angle DCE = \angle CDE$，

$\therefore \angle CDE + \angle ECF = 90°$.

∵ $\angle CDE + \angle F = 90$，

$\therefore \angle ECF = \angle F$，$\therefore EC = EF$.

∵ $EF = 3$，$\therefore EC = DE = 3$，

$\therefore OE = \sqrt{OC^2 + EC^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$，

$\therefore OD = OE - DE = 2$，

$\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle OAD$ 中，$AD = \sqrt{OA^2 + OD^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

在 Rt△AOD 和 Rt△ACB 中，

∵ ∠A = ∠A，∠ACB = ∠AOD，

∴ Rt△AOD∽Rt△ACB，

∴ $\frac{OA}{AC}=\frac{AD}{AB}$，即$\frac{4}{AC}=\frac{2\sqrt{5}}{8}$，

∴ $AC=\frac{16\sqrt{5}}{5}$.

3. (1)**证明**：连结 OD，如图.

∵ AD 平分∠BAC，

∴ ∠BAD = ∠CAD. ∴ $\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{BD}$.

∴ $OD\perp BC$.

∵ AB 为⊙O 的直径，

∴ ∠ACB = 90°.

∵ $DE\perp AC$，∴ ∠E = 90°.

∴ ∠E = ∠ACB. ∴ $BC/\!/EF$.

∴ $OD\perp EF$. ∴ EF 是⊙O 的切线.

(2)**解**：连结 OC，设 OD 交 BC 于 G，如图.

∵ AB 为⊙O 的直径，

∴ ∠ACB = 90°.

又∵ $DE\perp AC$，$OD\perp EF$，

∴ 四边形 $CEDG$ 为矩形.

∴ $DG=CE=2$.

易知 G 为 BC 的中点.

又∵ O 为 AB 的中点，

∴ OG 为△ABC 的中位线.

∴ $OG/\!/AC$，$OG=\frac{1}{2}AC=2$.

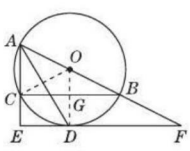
∴ $OD=4$. ∴ $OD=OC=OA=AC=4$.

∴ △OAC 为等边三角形.

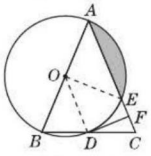
∴ ∠BAC = 60°.

∵ $OG/\!/AC$，∴ ∠BOD = 60°.

∴ $\overset{\frown}{BD}$的长度为$\frac{60\pi\times4}{180}=\frac{4\pi}{3}$.



(第 3 题)



(第 4 题)

4. (1)**证明**：如图，连结 OD.

∵ $OB=OD$，∴ ∠ABC = ∠ODB.

∵ $AB=AC$，∴ ∠ABC = ∠ACB.

∴ ∠ODB = ∠ACB. ∴ $OD/\!/AC$.

∵ DF 是⊙O 的切线，∴ $DF\perp OD$.

∴ $DF\perp AC$.

(2)**解**：如图，连结 OE.

∵ $DF\perp AC$，∠CDF = 22.5°，

∴ ∠ABC = ∠ACB = 67.5°.

∴ ∠BAC = 45°.

∵ $OA=OE$，∴ ∠OEA = ∠BAC = 45°.

∴ ∠AOE = 90°.

∵ ⊙O 的半径为 4，

∴ $S_{扇形AOE}=4\pi$，$S_{\triangle AOE}=8$.

∴ $S_{阴影}=S_{扇形AOE}-S_{\triangle AOE}=4\pi-8$.

5. (1)**证明**：如图，连结 OC.

∵ 点 C，D 为半圆 AB 的三等分点，

∴ $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{BC}$，

∴ ∠BOC = 60°，∠BOD = 120°，

又∠BAD = $\frac{1}{2}$∠BOD = 60°，

∴ ∠BOC = ∠BAD，∴ $OC/\!/AD$.

∵ $CE\perp AD$，∴ $CE\perp OC$，

∴ CE 为⊙O 的切线.

(2)**解**：如图，连结 OD.

∵ $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{BC}$，

∴ ∠COD = ∠BOC = $\frac{1}{3}\times180°=60°$.

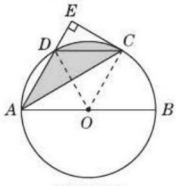
∵ $OD=OC$，∴ △COD 是等边三角形，

∴ ∠OCD = 60°.

又∵ ∠BOC = 60°，∴ $CD/\!/AB$，

∴ $S_{\triangle ACD}=S_{\triangle COD}$，

∴ 图中阴影部分的面积 = $S_{扇形COD}$ = $\frac{60\cdot\pi\times2^2}{360}=\frac{2\pi}{3}$.

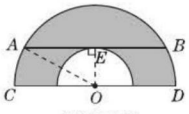


(第 5 题)

6. **解**：将小半圆向右平移，使两个半圆的圆心重合，如图，则阴影部分的面积等于半圆环面积.

作 $OE\perp AB$ 于 E(易知 E 为切点)，连结 OA，∴ $AE=\frac{1}{2}AB=9$.

∴ 阴影部分的面积 = $\frac{1}{2}\pi\cdot OA^2-\frac{1}{2}\pi\cdot OE^2=\frac{1}{2}\pi(OA^2-OE^2)=\frac{1}{2}\pi\cdot AE^2=\frac{1}{2}\pi\cdot9^2=\frac{81}{2}\pi$.



(第 6 题)

点拨：观察图形可知阴影部分的面积等于大半圆的面积减去小半圆的面积，因此当小半圆在大半圆范围内左右移动时，阴影部分面积不改变，所以我们可以通过平移，使两个半圆圆心重合，这样就能运用已知条件求出阴影部分的面积.

7. (1)$\frac{25}{2}+\frac{25\pi}{4}$

(2)**证明**：如图，连结 OD.

∵ AB 是⊙O 的直径，

∴ ∠ACB = 90°.

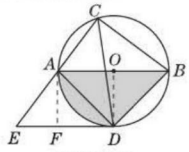
∵ CD 平分∠ACB，

∴ ∠ABD = ∠ACD = $\frac{1}{2}$∠ACB = 45°.

∴ ∠AOD = 90°，即 $OD\perp AB$.

∵ $DE/\!/AB$，∴ $OD\perp DE$.

∴ DE 是⊙O 的切线.



(第 7 题)

(3)**解**：∵ $AB=10$，$AC=6$，∠ACB = 90°，

∴ $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=8$，$AO=BO=DO=5$.

如图，过点 A 作 $AF\perp DE$ 于点 F，则四边形 $AODF$ 是正方形，

∴ $AF=OD=FD=5$，∠FAB = 90°.

∴ ∠EAF = 90° − ∠CAB = ∠ABC.

∴ tan ∠EAF = tan ∠ABC.

∴ $\frac{EF}{AF}=\frac{AC}{BC}$，即$\frac{EF}{5}=\frac{6}{8}$.

∴ $EF=\frac{15}{4}$.

∴ $DE=DF+EF=5+\frac{15}{4}=\frac{35}{4}$.

8. **解**：(1) A 城会受到这次台风的影响. 理由如下：

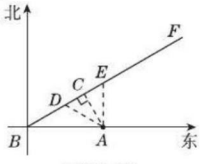
如图，过 A 作 $AC\perp BF$ 于点 C.

在 Rt△ABC 中，易知∠CBA = 30°.

又 BA = 300 km，

∴ $AC=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times300=150$(km).

∵ 150 < 200，∴ A 城会受到这次台风的影响.



(第 8 题)

(2)如图，设 BF 上 D，E 两点到 A 的距离为 200 km，则台风中心在线段 DE 上时，对 A 城均有影响，而在线段 DE 以外时，对 A 城没有影响.

∵ AC = 150 km，$AD=AE$ = 200 km，

∴ $DC=\sqrt{AD^2-AC^2}=\sqrt{200^2-150^2}=50\sqrt{7}$(km).

∴ $DE=2DC=100\sqrt{7}$ km.

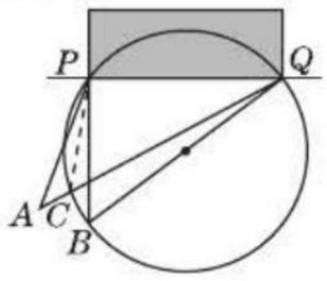
∴ $\frac{100\sqrt{7}}{10\sqrt{7}}=10$(h).

∴ A 城会受这次台风影响的时间为 10 h.

9. **解**：选择射门方式二较好. 理由如下：设 AQ 与圆的交点为 C，连结

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

PC,如图所示.



(第9题)

∵ $\angle PCQ$ 是 $\triangle PAC$ 的外角,

∴ $\angle PCQ > \angle A$.

又∵ $\angle PCQ = \angle B$,

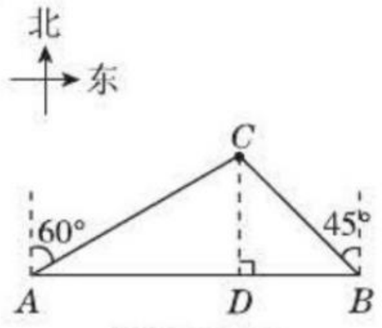
∴ $\angle B > \angle A$.

∴ 在 B 点射门比在 A 点射门好.

∴ 选择射门方式二较好.

点拨:本题运用转化思想,将射门角度大小的问题,建模转化到圆中,根据圆周角的相关结论来解决实际问题.

10. 解:修建的这条水渠不会穿过公园. 理由:如图,过点 C 作 $CD \perp AB$,垂足为 D.



(第10题)

由题易得 $\angle CBA = 45°$,

∴ $\angle BCD = 45°$. ∴ $CD = BD$.

设 $CD = x$ km,则 $BD = x$ km.

由题易得 $\angle CAB = 30°$,

∴ $AC = 2CD = 2x$ km,

∴ $AD = \sqrt{(2x)^2 - x^2} = \sqrt{3}x$(km),

∴ $\sqrt{3}x + x = 1$. 解得 $x = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

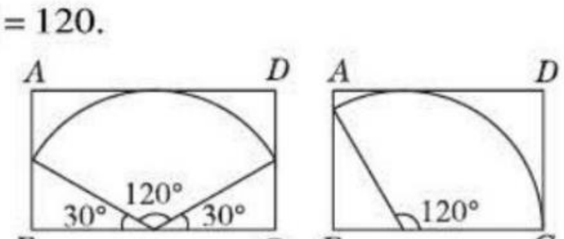
即 $CD = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \approx 0.366$(km) = 366 m > 350 m,

也就是说,以点 C 为圆心,350 m 为半径的圆与 AB 相离.

∴ 修建的这条水渠不会穿过公园.

11. 解:∵ 圆锥形漏斗的底面半径为 20 cm,高为 $40\sqrt{2}$ cm,∴ 圆锥的母线长为 $\sqrt{20^2 + (40\sqrt{2})^2} = 60$(cm).

设圆锥的侧面展开图的圆心角为 $n°$,则有 $\dfrac{n\pi \times 60}{180} = 2\pi \times 20$,解得 $n = 120$.



(第11题)

方案一:如图①,扇形的半径为 60 cm,矩形的宽为 60 cm,易求得矩形的长为 $60\sqrt{3}$ cm. 当 $AB = 60$ cm,$BC = 60\sqrt{3}$ cm 时,$S_{矩形ABCD} = 3\,600\sqrt{3}$ cm^2.

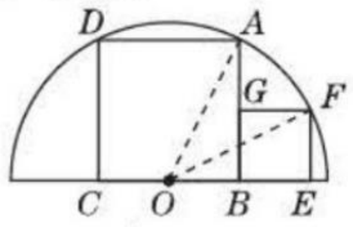
方案二:如图②,扇形与矩形的两边相切,有一边重合,易求得矩形的宽为 60 cm,长为 30 + 60 = 90(cm),此时矩形的面积为 90 × 60 = 5 400(cm^2).

∵ $3\,600\sqrt{3} > 5\,400$,

∴ 方案二所用材料最省. 即选长为 90 cm,宽为 60 cm 的矩形铁皮,才能使所用材料最省.

专训2

1. 解:如图,连结 OA,OF. 设 $OA = OF = r$ cm,$AB = a$ cm.



(第1题)

在 Rt$\triangle OAB$ 中,$r^2 = \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + a^2$,

在 Rt$\triangle OEF$ 中,$r^2 = 4^2 + \left(4 + \dfrac{a}{2}\right)^2$,

∴ $\dfrac{a^2}{4} + a^2 = 16 + 16 + 4a + \dfrac{a^2}{4}$.

解得 $a_1 = 8$,$a_2 = -4$(舍去).

∴ $r^2 = \left(\dfrac{8}{2}\right)^2 + 8^2 = 80$. ∴ $r_1 = 4\sqrt{5}$,

$r_2 = -4\sqrt{5}$(舍去). 即该半圆的半径为 $4\sqrt{5}$ cm.

点拨:在有关圆的计算题中,求角度或边长时,常连结半径构造等腰三角形或直角三角形,利用特殊三角形的性质来解决问题.

2. 证明:如图,连结 AD,BD.

∵ $\angle DAC$,$\angle DBC$ 是 $\overset{\frown}{DC}$ 所对的圆周角. ∴ $\angle DAC = \angle DBC$.

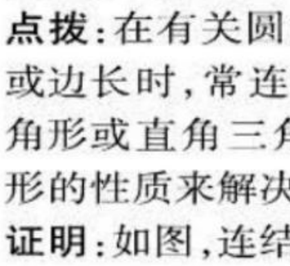
∵ CD 平分 $\angle ACM$,$DP \perp AC$,$DH \perp CM$,∴ $DP = DH$.

在 $\triangle ADP$ 和 $\triangle BDH$ 中,

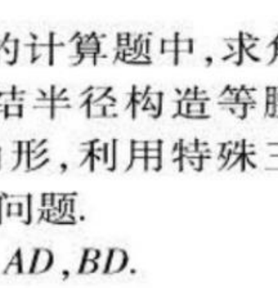
$$\begin{cases} \angle DAP = \angle DBH, \\ \angle DPA = \angle DHB = 90°, \\ DP = DH. \end{cases}$$

∴ $\triangle ADP \cong \triangle BDH$. ∴ $AP = BH$.

点拨:本题通过作辅助线构造圆周角,然后利用"同弧所对的圆周角相等"得到 $\angle DAC = \angle DBC$,为证两三角形全等创造了条件.



(第2题)



(第3题)

3. (1) 证明:如图,过点 D 作 $\odot O$ 的直径 DE,连结 AE,EC,AC.

∵ DE 是 $\odot O$ 的直径,

∴ $\angle ECD = \angle EAD = 90°$.

又∵ $CD \perp AB$,∴ $EC \parallel AB$.

∴ $\angle BAC = \angle ACE$.

∴ $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AE}$. ∴ $BC = AE$.

在 Rt$\triangle AED$ 中,$AD^2 + AE^2 = DE^2$,

∴ $AD^2 + BC^2 = 4R^2$.

(2) **解**:如图,过点 O 作 $OF \perp AD$ 于点 F.

∵ 弦 AD,BC 的长是方程 $x^2 - 6x + 5 = 0$ 的两个根($AD > BC$),

∴ $AD = 5$,$BC = 1$.

由(1)知,$AD^2 + BC^2 = 4R^2$,

∴ $5^2 + 1^2 = 4R^2$. ∴ $R = \dfrac{\sqrt{26}}{2}$.

∵ $\angle EAD = 90°$,$OF \perp AD$,

∴ $OF \parallel EA$.

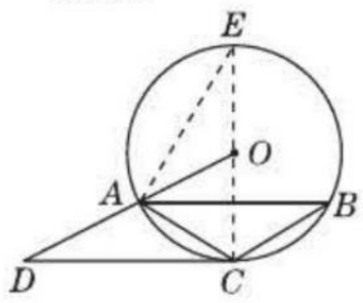
又∵ O 为 DE 的中点,

∴ $OF = \dfrac{1}{2}AE = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{1}{2}$,

即点 O 到 AD 的距离为 $\dfrac{1}{2}$.

点拨:本题作出直径 DE,利用"直径所对的圆周角是直角"构造了两个直角三角形,给解题带来了方便.

4. 解:CD 与 $\odot O$ 相切. 理由如下:如图,作直径 CE,连结 AE.



(第4题)

∵ CE 是直径,

∴ $\angle EAC = 90°$.

∴ $\angle E + \angle ACE = 90°$.

∵ $CA = CB$,∴ $\angle B = \angle CAB$.

∵ $AB \parallel CD$,

∴ $\angle ACD = \angle CAB$.

∴ $\angle B = \angle ACD$.

又∵ $\angle B = \angle E$,∴ $\angle ACD = \angle E$.

∴ $\angle ACE + \angle ACD = 90°$,即 $OC \perp DC$.

又 OC 为 $\odot O$ 的半径,∴ CD 与 $\odot O$ 相切.

5. C

6. 解:如图,过点 O 作 $OE \perp AB$ 于点 E,连结 OB.

∵ $AB = 8$ cm,∴ $AE = BE = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{1}{2} \times 8 = 4$(cm).

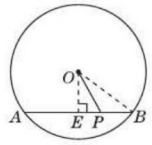
∵ $\odot O$ 的直径为 10 cm,

∴ $OB = \dfrac{1}{2} \times 10 = 5$(cm),

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$\therefore OE=\sqrt{OB^2-BE^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3(\text{cm})$.

$\therefore 3\ \text{cm}\leqslant OP\leqslant 5\ \text{cm}$.



（第6题）

7.（1）**证明**：如图，连结AD.

$\because AB$是$\odot O$的直径，

$\therefore \angle ADB=90°$.

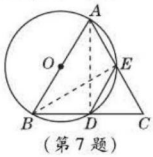
$\because$点D是BC的中点，

$\therefore AD$是线段BC的垂直平分线.

$\therefore AB=AC$.

$\because AB=BC$，$\therefore AB=BC=AC$，

$\therefore \triangle ABC$为等边三角形.



（第7题）

（2）**解**：如图，连结BE.

$\because AB$是直径，

$\therefore \angle AEB=90°$，$\therefore BE\perp AC$.

$\because \triangle ABC$是等边三角形，

$\therefore AE=EC$，即E为AC的中点.

$\because D$是BC的中点，

$\therefore DE$为$\triangle ABC$的中位线.

$\therefore DE=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 2=1$.

8.（1）**证明**：如图，连结OB.

$\because OA=OB$，

$\therefore \angle OAB=\angle OBA$.

$\because PA=PB$，

$\therefore \angle PAB=\angle PBA$.

$\therefore \angle OAB+\angle PAB=\angle OBA+\angle PBA$，即$\angle PAO=\angle PBO$.

又$\because PA$是$\odot O$的切线，

$\therefore \angle PAO=90°$.

$\therefore \angle PBO=90°$. $\therefore OB\perp PB$.

又$\because OB$是$\odot O$的半径，

$\therefore PB$是$\odot O$的切线.

（2）**解**：如图，连结OP.

$\because PA=PB$，

$\therefore$点P在线段AB的垂直平分线上.

$\because OA=OB$，

$\therefore$点O在线段AB的垂直平分线上.

$\therefore OP$为线段AB的垂直平分线.

又$\because BC\perp AB$，

$\therefore PO/\!/BC$. $\therefore \angle AOP=\angle ACB=60°$.

由（1）知$\angle PAO=90°$.

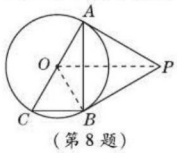
$\therefore \angle APO=30°$. $\therefore PO=2AO$.

$\because$在Rt$\triangle APO$中，$AO^2+PA^2=PO^2$，

$\therefore AO^2+3=(2AO)^2$.

又$\because AO>0$，

$\therefore AO=1$，$\therefore \odot O$的半径为1.



（第8题）

9.（1）**证明**：如图，连结CO，交DB于点E，$\therefore \angle O=2\angle CDB=60°$.

又$\because \angle OBE=30°$，

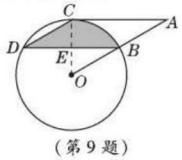
$\therefore \angle BEO=180°-60°-30°=90°$.

$\because AC/\!/BD$，

$\therefore \angle ACO=\angle BEO=90°$. 即$OC\perp AC$.

又$\because$点C在$\odot O$上，

$\therefore AC$是$\odot O$的切线.



（第9题）

（2）**解**：$\because OE\perp DB$，

$\therefore EB=\frac{1}{2}DB=3\sqrt{3}$ cm.

在Rt$\triangle EOB$中，$\because \angle OBD=30°$，

$\therefore OE=\frac{1}{2}OB$.

$\because EB=3\sqrt{3}$ cm，

$\therefore$由勾股定理可求得$OB=6$ cm.

又$\because \angle CDE=\angle OBE$，$DE=BE$，$\angle CED=\angle OEB$，

$\therefore \triangle CDE\cong\triangle OBE$. $\therefore S_{\triangle CDE}=S_{\triangle OBE}$.

$\therefore S_{\text{阴影}}=S_{\text{扇形}OCB}=\frac{60}{360}\pi\cdot 6^2=6\pi(\text{cm}^2)$.

专训3

1. D **2.** B **3.** C **4.** 4 **5.** 2 **6.** ①④

7.（1）**证明**：$\because OC=OB$，$\therefore \angle OBC=\angle OCB$. $\because OC/\!/BD$，$\therefore \angle OCB=\angle CBD$，$\therefore \angle OBC=\angle CBD$，

$\therefore \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CD}$.

（2）**解**：如图，连接AC.

$\because CE=1$，$EB=3$，$\therefore BC=4$.

$\because \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CD}$，$\therefore \angle CAD=\angle ABC$.

又$\because \angle ECA=\angle ACB$，

$\therefore \triangle ACE\backsim\triangle BCA$，$\therefore \frac{AC}{CE}=\frac{CB}{AC}$，

$\therefore AC^2=CB\cdot CE=4\times 1$，$\therefore AC=2$.

$\because AB$为$\odot O$的直径，$\therefore \angle ACB=90°$，

$\therefore AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=2\sqrt{5}$，

$\therefore \odot O$的半径为$\sqrt{5}$.

（3）**解**：如图，过点O作$OH\perp FQ$于点H，连接OQ.

$\because PC$是$\odot O$的切线，

$\therefore \angle PCO=90°$.

又$\because \angle ACB=90°$，$OB=OC$，

$\therefore \angle PCA=\angle BCO=\angle CBO$.

又$\because \angle CPB=\angle CPA$，

$\therefore \triangle APC\backsim\triangle CPB$，

$\therefore \frac{PA}{PC}=\frac{PC}{PB}=\frac{AC}{BC}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，

$\therefore PC=2PA$，$PC^2=PA\cdot PB$，

$\therefore 4PA^2=PA\times(PA+2\sqrt{5})$，

$\therefore PA=\frac{2\sqrt{5}}{3}$，$\therefore PO=\frac{5\sqrt{5}}{3}$.

$\because PQ/\!/BC$，$\therefore \angle CBA=\angle BPQ$.

又$\because \angle ACB=\angle PHO=90°$，

$\therefore \triangle BCA\backsim\triangle PHO$，

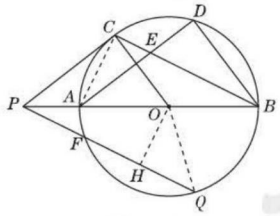
$\therefore \frac{AC}{OH}=\frac{BC}{PH}=\frac{AB}{PO}$，

即$\frac{2}{OH}=\frac{4}{PH}=\frac{2\sqrt{5}}{\frac{5\sqrt{5}}{3}}=\frac{6}{5}$，

$\therefore PH=\frac{10}{3}$，$OH=\frac{5}{3}$，

$\therefore HQ=\sqrt{OQ^2-OH^2}=\frac{2\sqrt{5}}{3}$，

$\therefore PQ=PH+HQ=\frac{10+2\sqrt{5}}{3}$.



（第7题）

8.（1）**证明**：如图，连结OC.

$\because PE$与$\odot O$相切，$\therefore OC\perp PE$.

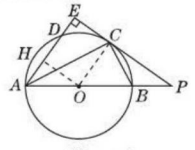
$\because AE\perp PE$，$\therefore OC/\!/AE$.

$\therefore \angle CAD=\angle OCA$.

$\because OA=OC$，$\therefore \angle OCA=\angle OAC$.

$\therefore \angle CAD=\angle OAC$.

$\therefore AC$平分$\angle BAD$.



（第8题）

（2）**解**：PB，AB之间的数量关系为$AB=3PB$.

理由如下：$\because AB$为$\odot O$的直径，

$\therefore \angle ACB=90°$.

$\therefore \angle BAC+\angle ABC=90°$.

$\because OB=OC$，$\therefore \angle OCB=\angle ABC$.

$\because \angle PCB+\angle OCB=90°$，

$\therefore \angle PCB=\angle PAC$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

又∵ $\angle P=\angle P$,

∴ $\triangle PCA\backsim\triangle PBC$.

∴ $\frac{PC}{PB}=\frac{PA}{PC}$. ∴ $PC^2=PB\cdot PA$.

∵ $PB:PC=1:2$,

∴ $PC=2PB$. ∴ $PA=4PB$.

∴ $AB=3PB$.

(3)**解**:过点 O 作 $OH\perp AD$ 于点 H,

如图,则 $AH=\frac{1}{2}AD=\frac{3}{2}$,

∵ 四边形 $OCEH$ 是矩形.

∴ $OC=HE$. ∴ $AE=\frac{3}{2}+OC$.

∵ $OC/\!/AE$,∴ $\triangle PCO\backsim\triangle PEA$.

∴ $\frac{OC}{AE}=\frac{PO}{PA}$.

∵ $AB=3PB$, $AB=2OB$,

∴ $OB=\frac{3}{2}PB$.

∴ $\frac{OC}{\frac{3}{2}+OC}=\frac{PB+\frac{3}{2}PB}{PB+3PB}=\frac{5}{8}$,

∴ $OC=\frac{5}{2}$, ∴ $AB=5$.

∵ $\triangle PBC\backsim\triangle PCA$,

∴ $\frac{PB}{PC}=\frac{BC}{AC}=\frac{1}{2}$,

∴ $AC=2BC$.

在 Rt$\triangle ABC$ 中, $AC^2+BC^2=AB^2$,

∴ $(2BC)^2+BC^2=5^2$, ∴ $BC=\sqrt{5}$,

∴ $AC=2\sqrt{5}$.

∴ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=5$,即 $\triangle ABC$ 的面积为 5.

专训 4

1. D **2**. C **3**. A

4. $\frac{3}{4}$ **5**. $\frac{1}{2}$ **6**. $\frac{4}{5}$ **7**. $\frac{1}{2}$

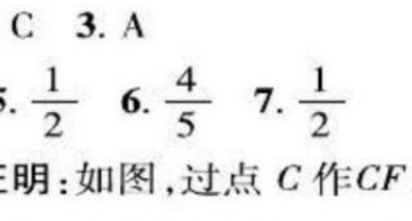
8. (1)**证明**:如图,过点 C 作 $CF\perp AB$ 于点 F,在 Rt$\triangle ABC$ 中, $\tan B=\frac{AC}{BC}=\frac{1}{2}$, ∴ $BC=2AC=2\sqrt{5}$.

∴ $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{(\sqrt{5})^2+(2\sqrt{5})^2}=5$,

∴ $CF=\frac{AC\cdot BC}{AB}=\frac{\sqrt{5}\times2\sqrt{5}}{5}=2$.

∴ AB 为 $\odot C$ 的切线.

(2)**解**: $S_{阴影}=S_{\triangle ABC}-S_{扇形CDE}=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times2\sqrt{5}-\frac{90\pi\times2^2}{360}=5-\pi$.



(第 8 题)

9. (1)**证明**:连接 AE,如图.

∵ AB 是 $\odot O$ 的直径,

∴ $\angle AEB=90°$,

∴ $\angle1+\angle2=90°$, $AE\perp BC$.

∵ $AB=AC$, ∴ $2\angle1=\angle BAC$.

∵ $\angle BAC=2\angle CBF$,

∴ $\angle1=\angle CBF$,

∴ $\angle CBF+\angle2=90°$,

即 $\angle ABF=90°$. ∴ $AB\perp BF$.

∵ AB 是 $\odot O$ 的直径,

∴ BF 是 $\odot O$ 的切线.

(2)**解**:过点 C 作 $CH\perp BF$ 于 H,如图.

∵ $\sin\angle CBF=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\angle1=\angle CBF$,

∴ $\sin\angle1=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

∵ 在 Rt$\triangle AEB$ 中, $\angle AEB=90°$, $AB=3$,

∴ $BE=AB\cdot\sin\angle1=3\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$,

易得 $BC=2BE=2\sqrt{3}$.

∵ $\sin\angle CBF=\frac{CH}{BC}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

∴ $CH=2$.

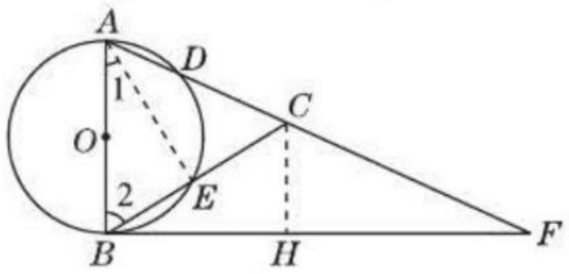
∵ $AB\perp BF$, $CH\perp BF$, ∴ $CH/\!/AB$,

∴ $\frac{CF}{AF}=\frac{CH}{AB}$,即 $\frac{CF}{CF+3}=\frac{2}{3}$,

∴ $CF=6$,

∴ $AF=AC+CF=9$,

∴ $BF=\sqrt{AF^2-AB^2}=6\sqrt{2}$.



(第 9 题)

全章热门考点整合应用

1. D

2. **解**:∵ $\angle AOC=40°$,

∴ $\angle BOC=180°-40°=140°$,

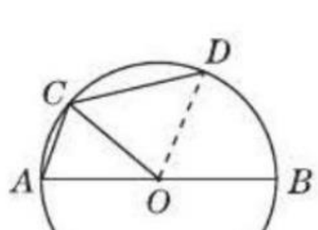
$\angle ACO=\frac{1}{2}\times(180°-40°)=70°$.

如图,连结 OD. ∵ D 是 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点,

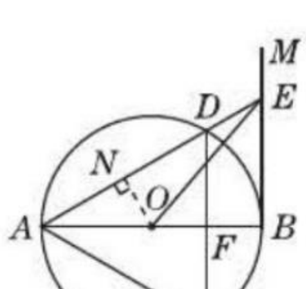
∴ $\angle COD=\frac{1}{2}\angle BOC=70°$.

∴ $\angle OCD=\frac{180°-70°}{2}=55°$.

∴ $\angle ACD=\angle ACO+\angle OCD=70°+55°=125°$.



(第 2 题)



(第 3 题)

3. (1)**证明**:∵ AB 是 $\odot O$ 的直径, BM 是 $\odot O$ 的切线, ∴ $AB\perp BE$.

∵ $CD/\!/BE$, ∴ $CD\perp AB$. ∴ $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{AC}$.

∵ $\overset{\frown}{DA}=\overset{\frown}{DC}$, ∴ $\overset{\frown}{DA}=\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CD}$.

∴ $AD=AC=CD$.

∴ $\triangle ACD$是等边三角形.

(2)**解**:如图,过 O 作 $ON\perp AD$ 于 N.

由(1)知$\triangle ACD$ 是等边三角形,

∴ $\angle DAC=60°$.

∵ $AD=AC$, $CD\perp AB$,

∴ $\angle DAB=30°$,

∴ $BE=\frac{1}{2}AE$, $ON=\frac{1}{2}AO$.

设 $\odot O$ 的半径为 r,

∴ $ON=\frac{1}{2}r$, ∴ $AN=DN=\frac{\sqrt{3}}{2}r$,

∴ $EN=2+\frac{\sqrt{3}}{2}r$, $AE=2+\sqrt{3}r$.

∴ $BE=\frac{1}{2}AE=\frac{\sqrt{3}r+2}{2}$. 在 Rt$\triangle NEO$ 与 Rt$\triangle BEO$ 中, $OE^2=ON^2+NE^2=OB^2+BE^2$,即 $\left(\frac{r}{2}\right)^2+\left(2+\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)^2=r^2+\left(\frac{\sqrt{3}r+2}{2}\right)^2$, ∴ $r=2\sqrt{3}$ ($r=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 舍去).

∴ $OE^2=\left(\frac{r}{2}\right)^2+\left(2+\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)^2=28$.

又∵ $OE>0$, ∴ $OE=2\sqrt{7}$.

4. **解**:(1)$2\sqrt{3}$

(2)如图,连结 OA.

∵ $OA=OB$, $OA=OD$,

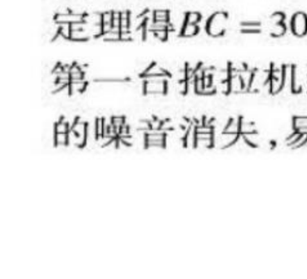
∴ $\angle BAO=\angle B$, $\angle DAO=\angle D$.

∴ $\angle BAD=\angle BAO+\angle DAO=\angle B+\angle D$.

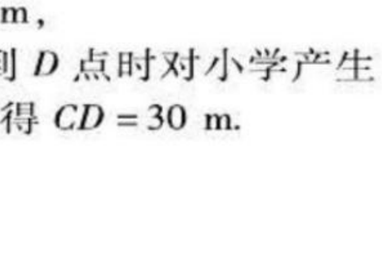
又∵ $\angle B=30°$, $\angle D=20°$,

∴ $\angle BAD=50°$.

∴ $\angle BOD=2\angle BAD=100°$.



(第 4 题)



(第 5 题)

5. **解**:如图,过点 A 作 $AC\perp ON$,垂足为 C.

∵ $\angle MON=30°$, $OA=80$ m,

∴ $AC=40$ m.

以点 A 为圆心,50 m 为半径作圆,交 ON 于 B, D 两点,连结 AB, AD.

当第一台拖拉机到 B 点时对小学产生噪音影响,∵ $AB=50$ m, ∴ 由勾股定理得 $BC=30$ m,

第一台拖拉机到 D 点时对小学产生的噪音消失,易得 $CD=30$ m.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∵ 两台拖拉机相距 30 m，
∴ 第一台拖拉机到 D 点时第二台拖拉机在 C 点，还需前行 30 m 后才对小学没有噪音影响.
∴ 影响时间应是 $90 \div 5 = 18$(s).
即这两台拖拉机沿 ON 方向行驶时给小学带来噪音影响的时间是 18 s.

6. **解**：(1) 根据平行线间的距离相等，知点 O 到 CD 的距离即为点 A 到 CD 的距离. 过点 A 作 $AE \perp CD$ 于点 E. 根据 $\angle D = 60°$，$AD = m$，利用直角三角形中“30°角所对的直角边等于斜边的一半”及勾股定理，得 $AE = \frac{\sqrt{3}}{2}m$，即点 O 到 CD 的距离是 $\frac{\sqrt{3}}{2}m$.

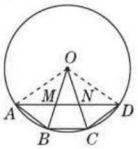
(2) 由题可得 $OA = 5$. 当 $m = 6$ 时，$\frac{\sqrt{3}}{2}m = 3\sqrt{3} > 5$，故 $\odot O$ 与 CD 相离.

(3) 若 $\odot O$ 与线段 CD 有两个公共点，则该圆和线段 CD 相交，当点 C 在 $\odot O$ 上时，易得 $m = \frac{1}{2}AB = 5$；

当线段 CD 与 $\odot O$ 相切时，有 $\frac{\sqrt{3}}{2}m = 5$，$m = \frac{10}{3}\sqrt{3}$.

所以 m 的取值范围是 $5 \leqslant m < \frac{10}{3}\sqrt{3}$.

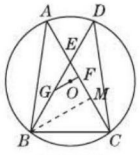
7. **证明**：(1) 如图，连结 OA，OD，则 $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = 360° \div 10 = 36°$，则 $\angle AOD = \angle AOB + \angle BOC + \angle COD = 108°$.



(第 7 题)

又∵ $OA = OD$，
∴ $\angle OAD = \angle ODA = 36°$.
∴ $\angle ANO = \angle COD + \angle ODA = 36° + 36° = 72°$.
∵ $\angle BOC = 36°$，$OB = OC$，
∴ $\angle BCO = \angle OBC = 72°$.
∴ $\angle ANO = \angle BCO$. ∴ $MN // BC$.
(2) ∵ $\angle AON = \angle AOB + \angle BOC = 72°$，$\angle ANO = 72°$，
∴ $AN = AO = OB$.
∵ $MN // BC$，
∴ $\angle AMB = \angle OBC = 72°$.
又∵ $\angle ABM = \frac{180° - 36°}{2} = 72°$，
∴ $\angle ABM = \angle AMB$. ∴ $AB = AM$.
又 $AB = BC$. ∴ $AN = AM + MN = AB + MN = BC + MN$.
∴ $MN + BC = OB$.

8. **解**：(1) 在 $\odot O$ 中，$\angle A = \angle D$.
∵ $\angle AEB = \angle DEC$，$AE = DE$，
∴ $\triangle AEB \cong \triangle DEC$. ∴ $EB = EC$.
又∵ $BC = CE$，∴ $BE = CE = BC$.
∴ $\triangle EBC$ 为等边三角形.
∴ $\angle ACB = 60°$.



(第 8 题)

(2) ∵ $OF \perp AC$，∴ $AF = CF$.
∵ $\triangle EBC$ 为等边三角形，
∴ $\angle GEF = 60°$. ∴ $\angle EGF = 30°$.
∵ $EG = 2$，∴ $EF = 1$.
又∵ $AE = ED = 3$，
∴ $CF = AF = 4$. ∴ $AC = 8$，$CE = 5$.
∴ $BC = 5$. 如图，作 $BM \perp AC$ 于点 M，
∵ $\angle BCM = 60°$，
∴ $\angle MBC = 30°$. ∴ $CM = \frac{5}{2}$. ∴ $BM = \sqrt{BC^2 - CM^2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$，$AM = AC - CM = \frac{11}{2}$. ∴ $AB = \sqrt{AM^2 + BM^2} = 7$.

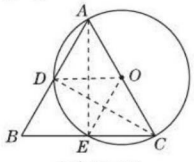
9. A

10. C　**点拨**：设 $\odot O$ 的半径为 r，连结 AO，OD，OE，易得 A，O，D 三点共线，$AD = 2$，$AO = 2 - r$，$\angle AEO = 90°$，$\angle AOE = 30°$，
∴ $AE = \frac{1}{2}AO = \frac{1}{2}(2 - r)$. 又根据已知条件易求得 $AE = 4 - 2\sqrt{3}$，
∴ $4 - 2\sqrt{3} = \frac{1}{2}(2 - r)$，
∴ $r = 4\sqrt{3} - 6$，
即内切圆 $\odot O$ 的半径是 $4\sqrt{3} - 6$.

11. B　**点拨**：由题图可知，点 P 运动的路径长是题图中六个扇形的弧长之和，每个扇形的圆心角均为 60°，半径从 12 cm 依次减 2 cm，所以点 P 运动的路径长为 $\frac{60\pi \times 12}{180} + \frac{60\pi \times 10}{180} + \frac{60\pi \times 8}{180} + \frac{60\pi \times 6}{180} + \frac{60\pi \times 4}{180} + \frac{60\pi \times 2}{180} = \frac{\pi}{3} \times (12 + 10 + 8 + 6 + 4 + 2) = 14\pi$(cm). 故选 B.

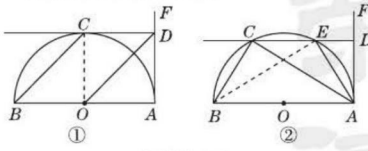
12. D　**13.** B　**14.** A　**15.** B　**16.** C

17. (1) **证明**：如图，连结 AE.
∵ AC 为直径，
∴ $\angle AEC = 90°$. ∴ $AE \perp BC$.
∵ $AB = AC$，∴ $BE = CE$.
(2) **解**：如图，连结 OD，OE，在 Rt$\triangle ABE$ 中，$\angle BAE = 90° - \angle B = 90° - 70° = 20°$，
∴ $\angle DOE = 2\angle DAE = 40°$.
∴ $\overset{\frown}{DE}$ 的度数为 40°.
(3) **解**：如图，连结 CD，由 (1) 知 $BE = CE$，∴ $BC = 2BE = 6$，设 $AC = x$，则 $AD = x - 2$.
∵ AC 为直径，∴ $\angle ADC = 90°$.
在 Rt$\triangle BCD$ 中，$CD^2 = BC^2 - BD^2 = 6^2 - 2^2 = 32$. 在 Rt$\triangle ADC$ 中，
∵ $AD^2 + CD^2 = AC^2$，
∴ $(x - 2)^2 + 32 = x^2$. 解得 $x = 9$. 即 AC 的长为 9.



(第 17 题)

18. (1) **证明**：如图①，连结 OC，
∵ $CD // AB$，$BC // OD$，
∴ 四边形 $BODC$ 是平行四边形，
∴ $OB = CD$.
∵ $OA = OB$，
∴ $CD = OA$，
易知四边形 $ADCO$ 是平行四边形.
∵ AF 为半圆的切线，AB 为半圆的直径，
∴ $AB \perp AD$，
∴ 平行四边形 $ADCO$ 是矩形，
∴ $OC \perp CD$，
∴ CD 是半圆的切线.



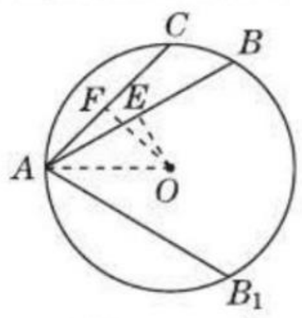
(第 18 题)

(2) $\angle AED + \angle ACD = 90°$.
证明：如图②，连结 BE，
∵ AB 为半圆的直径，
∴ $\angle AEB = 90°$，
∴ $\angle EBA + \angle BAE = 90°$.
∵ $AB \perp AD$，∴ $\angle DAE + \angle BAE = 90°$，
∴ $\angle ABE = \angle DAE$.
∵ $\angle ACE = \angle ABE$，∴ $\angle ACE = \angle DAE$.
∵ $CD // AB$，$AB \perp AD$，
∴ $CD \perp AD$，即 $\angle ADE = 90°$，
∴ $\angle AED + \angle ACD = \angle DAE + \angle AED = 90°$.

19. 15° 或 75°　**点拨**：如图，当圆心 O 在 $\angle CAB$ 的外部时，连结 OA，过点 O 作 $OE \perp AB$，$OF \perp AC$，垂足分别为 E，F. 由垂径定理和勾股定理可求

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

得 $OE=\frac{1}{2}OA$，$OF=FA$，$\therefore\ \angle BAO=30°$，$\angle CAO=45°$，$\therefore\ \angle CAB=15°$. 同理可得，当圆心 O 在 $\angle CAB$ 的内部时，$\angle CAB=75°$.



（第 19 题）

20. 解：(1)$\because$ BC 是$\odot O$ 的直径，

$AB\perp BC$，$DC\perp BC$，

$\therefore$ AB，CD 都是$\odot O$ 的切线.

$\therefore$ $AF=AB=4$.

设 $EC=x$，则 $EF=x$，$DE=4-x$，

$\therefore\ 4^2+(4-x)^2=(4+x)^2$，

解得 $x=1$.

$\therefore\ S_{\triangle ADE}=\frac{1}{2}\times4\times(4-1)=6$.

(2)如图，连结 AO 交 BF 于点 M，连结 OF. 则 $AO=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$.

$\because$ $OB\perp AB$，$OF\perp AF$，且 $OB=OF$，

$\therefore$ AO 为 $\angle BAF$ 的平分线.

$\because$ $AB=AF$，

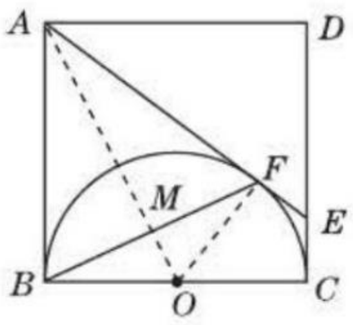
$\therefore$ $AM\perp BF$，$BM=MF$，

$\therefore$ $BF=2BM$.

$\because S_{\triangle ABO}=\frac{1}{2}AO\cdot BM=\frac{1}{2}OB\cdot AB$，

$\therefore BM=\frac{AB\cdot OB}{AO}=\frac{4\times2}{2\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore BF=\frac{8\sqrt{5}}{5}$.



（第 20 题）

第 28 章 样本与总体

28.1 抽样调查的意义

28.1.1 普查和抽样调查

1. D　**2.** A　**3.** D　**4.** B　**5.** C

6. C　**7.** B

8. 该中学七年级 450 名学生期中考试的数学成绩；

从中抽取的 50 名学生期中考试的数学成绩；

该中学七年级 450 名学生中每一名学生期中考试的数学成绩；50

点拨：总体、个体、样本的考察对象是统一的，所不同的是范围的大小，在本题中，学生容易忽视总体、个体、样本都是指学生期中考试的数学成绩，而错误认为是学生. 同时要注意样本容量只是样本的数目，不带单位.

9. 解：(1)适宜用抽样调查.

(2)(3)(4)适宜用普查.

10. 解：(1)小亮的调查是抽样调查.

(2)调查的总体是时代中学七年级共 10 个班所有学生一周中收看电视节目所用的时间；个体是每名同学一周中收看电视节目所用的时间；样本容量是 60.

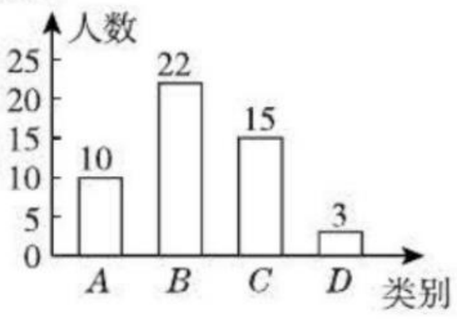
11. 解：(1)总体：建造的长 100 km、宽 0.5 km的防护林中树的棵数；个体：每块长 1 km、宽 0.5 km 的防护林中树的棵数；样本：抽查的 10 块防护林中树的棵数；

(2)采用抽样调查的方式较好，因为数量较大，不容易全面调查.

12. 解：(1)样本容量 $=\frac{10}{20\%}=50$.

A 类所对的圆心角 $=360°\times20\%=72°$.

(2)如图.



（第 12 题）

(3)$50-3=47$(名)，

即样本男生毕业体育测试成绩能达标的有 47 名.

28.1.2 这样选择样本合适吗

1. 样本在总体中所占比例太小或样本不具有代表性、广泛性、随机性

2. D

3. D　**点拨**：各班的成绩差异可能比较大，所以 A、B 不合适；男、女生的成绩差异也可能较大，所以 C 不合适.

4. D　**点拨**：各班的数学课代表一般是对数学比较有兴趣的同学，但他们的兴趣程度并不能代表全班同学的兴趣程度.

5. D　**6.** C　**7.** C

8. D　**点拨**：样本容量已超过总体容量的一半，不能算小了. 只向寄宿生调查显然是不具有代表性的.

9. D

10. 解：(1)不合适，幼儿园有很多，只在某幼儿园的一个班调查不具有代表性，且儿童不仅仅包括幼儿园里的儿童.

(2)合适，这是一种随机抽取样本的方法，具有代表性.

(3)不合适，一个初级中学有七、八、九三个年级，只抽取七年级学生不具有代表性.

11. 解：采用方案(3)比较合理.

12. 解：小芸抽样调查的数据能较好地反映该小区家庭 5 月份用气量情况. 小天调查的人数太少；小东抽样调查的数据中，家庭人数的平均值为 $(2\times3+3\times11+4)\div15\approx2.87$，远远偏离了平均人数 3.4，所以他的数据抽样有明显的问题.

小芸抽样调查的数据中，

家庭人数的平均值为：$(2\times2+3\times7+4\times4+5\times2)\div15=3.4$，

说明小芸抽样调查的数据质量较好，因此小芸抽样调查的数据能较好地反映出该小区家庭 5 月份用气量情况.

28.2 用样本估计总体

28.2.1 简单随机抽样

1. D　**2.** A　**3.** D

4. A　**点拨**：①中所有的数均为 5 的倍数，②中所有的数是 43 ~ 50 的有序数列，③是一组连续奇数，①②③都不具有随机性. 而④中是无规则的随机数字. 故选 A.

5. D　**6.** C　**7.** D

8. B　**9.** A

10. 解：(1)总体是全校同学喜欢球类运动的情况；样本是某班 43 名同学喜欢球类运动的情况.

(2)这样的抽样不合适，因为小聪明选取的样本反映的是他所在的班级的情况，不能代表全校同学的情况.

11. (1)②　(2)120

12. 解：不可信. 因为全国销售茶叶的商场、店铺非常多，只调查一家的销售情况，所取的样本非常缺乏代表性和全面性，所以此样本与总体的实际情况可能相差甚远.

13. (1)200

(2)70；30

(3)$\frac{7}{20}$

14. 解：(1)C

(2)按照(1)中 C 的样本，表中各分数段抽查的人数依次是 2，6，6，7，5，9，10，25，16，14，故最小平均分为 $(2\times0+6\times30+6\times40+7\times50+5\times60+9\times70+10\times80+25\times90+16\times100+14\times110)\div100=78.9$(分)；最大平均分为 $(2\times29+6\times39+6\times49+7\times59+5\times69+9\times79+10\times89+25\times99+16\times109+14\times120)\div100=88.44$(分).

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

28.2.2 简单随机抽样 调查可靠吗

1. D **点拨**：用样本估计总体分布的过程中，估计的结果是否准确与总体的数量无关，只与样本容量在总体数量中所占的比例有关，对于同一个总体，样本容量越大，估计得越准确.

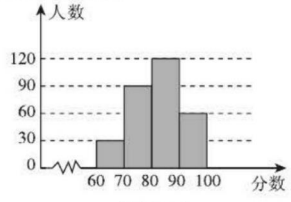
2. B **点拨**：100 名学生的跳绳成绩中第 50、51 名位于 $50 < x \leqslant 60$ 范围内，故中位数 m 满足 $50 < m \leqslant 60$，故选 B.

3. B

4. **解**：(1)300

(2)120；0.3

(3)如图所示.



(第 4 题)

(4)$80 \leqslant x < 90$

(5)60%

5. B 6. B

7. 16 000

8. **错解**：一定.

诊断：利用样本估计总体的前提条件是样本容量足够大、具有代表性，本题选取的 200 名考生可能就只是一个学校的考生，样本容量也相对较小，所以不一定能反映总体的特征.

正解：不一定.

9. **解**：(1)不能说明.

(2)消息来源于抽样调查，因为节能灯太多且调查具有破坏性，很难实现普查.

(3)共有 $\frac{76}{95\%} = 80$(个)节能灯接受检查.

(4)不同意. 因为抽查 B 品牌样本容量偏小.

10. **解**：(1)总体是池塘内所有成活鱼苗的质量；个体是每尾鱼的质量；样本是所抽取的 10 尾鱼的质量.

(2)因为 $\frac{1}{10} \times (0.8 + 0.9 + 1.2 + 1.3 + 0.8 + 0.9 + 1.1 + 1.2 + 1.0 + 0.8) = 1$(千克)，

所以这塘鱼的总质量约是 $20\,000 \times 70\% \times 1 = 14\,000$(千克).

(3)$14\,000 \times 4 = 56\,000$(元).

故可得约 56 000 元的收入.

11. **解**：(1)3 次；3 次；这部分出行学生这天约有一半使用共享单车的次数在 3 次或 3 次以上

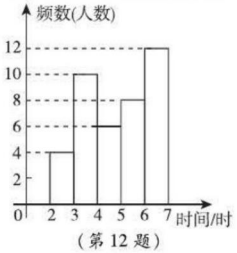
(2)$\bar{x} = \frac{1}{100}(0 \times 11 + 1 \times 15 + 2 \times 23 + 3 \times 28 + 4 \times 18 + 5 \times 5) \approx 2$(次)，即这天部分出行学生平均每人使用共享单车约 2 次.

(3)$1\,500 \times \frac{28 + 18 + 5}{100} = 765$(人)，

即估计这天使用共享单车次数在 3 次以上(含 3 次)的学生有 765 人.

12 **解**：(1)6；0.2

(2)频数分布直方图如图所示.



(第 12 题)

(3)由题意得，估计全校每周在校参加体育锻炼时间至少有 4 小时的学生为 $1\,200 \times (0.15 + 0.2 + 0.3) = 780$(名).

28.3 借助调查做决策

28.3.1 借助调查做决策

1. C

2. C **点拨**：∵ 样本容量为 $6 + 10 + 16 + 12 + 6 = 50$，169.5 ~ 174.5 cm的频数为 12，∴ 该段身高的频率为 $\frac{12}{50}$，∴ 估计该校男生的身高在 169.5 ~ 174.5 cm的人数为 $300 \times \frac{12}{50} = 72$(人).

3. C

4. 24.55；24.5；25；众数

点拨：平均数：$(23.5 \times 3 + 24 \times 4 + 24.5 \times 4 + 25 \times 7 + 25.5 + 26) \div 20 = 24.55$；中位数为从小到大(或从大到小)排列的第 10、11 个数据的平均数，为 24.5；频数最多的即为众数；鞋厂最感兴趣的是需求最多的数，即众数.

5. 2 299.5；5 299.5；4 599；6 599；节能

6. **错解**：该广告中宣传的数据可靠.

诊断：在已有的统计知识的基础上，我们应大胆地发表自己的观点，对某些商家的广告所提供的数据信息进行合理的质疑. 本题中所提供的数据，其样本是在经销该厂家产品的几家商场中进行的调查，但还有更多商场可能并未经销该厂家的产品，而且仅在一个城市调查，具有局限性，显然抽取的这个样本缺乏代表性，不能依此来估计整体情况，更不能将这一数据作为广告依据进行宣传.

正解：该广告中宣传的数据不可靠，因为选取的样本不具有代表性，忽略了不经销该厂家产品的那些商场.

7. **解**：(1)由题意可知，甲的众数为 8，乙的众数为 10.

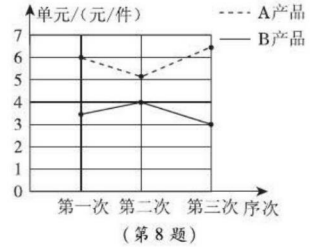
(2)$\bar{x}_乙 = \frac{5+6+7+8+10+10+10}{7} = 8$，

$s^2_乙 = \frac{1}{7}[(5-8)^2 + (10-8)^2 + \cdots + (10-8)^2] = \frac{26}{7} \approx 3.71$.

因为 $\bar{x}_甲 = 8$，$s^2_甲 \approx 1.43$，

所以甲、乙的平均成绩一样，而甲的方差小于乙的方差. 所以甲的成绩更稳定.

8. **解**：(1)如图所示. 25



(第 8 题)

(2)$\bar{x}_B = \frac{1}{3}(3.5 + 4 + 3) = 3.5$，

$s^2_B = \frac{(3.5-3.5)^2 + (4-3.5)^2 + (3-3.5)^2}{3}$

$= \frac{1}{6}$. 因为 $\frac{1}{6} < \frac{43}{150}$，

所以 B 产品的单价波动小.

(3)第四次调价后，对于 A 产品，这四次单价数据的中位数为 $\frac{6+6.5}{2} = \frac{25}{4}$；

对于 B 产品，因为 $m > 0$，

所以第四次单价大于 3 元/件.

又因为 $\frac{3.5+4}{2} \times 2 - 1 = \frac{13}{2} > \frac{25}{4}$，

所以第四次单价小于 4 元/件.

所以 $\frac{3(1+m\%) + 3.5}{2} \times 2 - 1 = \frac{25}{4}$.

所以 $m = 25$.

9. **解**：(1)填表如下：

组别	平均数	中位数	方差	合格率	优秀率
甲组	6.7	6	3.41	90%	20%
乙组	7.1	7.5	1.69	80%	10%

(2)甲

(3)乙组的平均数、中位数均高于甲组，方差小于甲组，故乙组成绩好于

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

甲组.

10. **解**:(1)C

(2)52

(3)$\frac{52+38+16}{200}\times100=53$(万人).

(4)有,理由不唯一,如:由于全市人口众多,而样本只选取了200人,样本容量较小,不能准确地反映真实情况.

11. **解**:(1)16;10

(2)①从优等品数量的角度看,因为A技术种植的西瓜优等品数量较多,所以A技术较好;

②从平均数的角度看,因为A技术种植的西瓜质量的平均数更接近5 kg,所以A技术较好;

③从方差的角度看,因为B技术种植的西瓜质量的方差更小,所以B技术种植的西瓜质量更稳定.

总之,从市场销售角度看,因优等品更畅销,A技术种植的西瓜优等品数量更多且平均质量更接近5 kg,因而更适合推广种植.

28.3.2 容易误导读者的统计图

1. **解**:(1)题图①给人的感觉是小明的进步较大,而题图②给人的感觉是成绩较稳定,说明小明的进步不是很大.

(2)小明想向他的父母说明他的数学成绩的提高情况,他将向父母展示题图①,因为题图①反映小明数学成绩的提高比较明显.

2. **解**:不同意. 理由:因为2018年、2019年考生总人数未知,无法计算这两年升入高中人数的具体数目,只能从统计图中判断每年的升学比例. 所以不能只从题中两图中的比例判断升入高中人数的多少.

3. **解**:(1)报纸最多,杂志最少,最多的是最少的12倍.

(2)实际上最多的大约是最少的6倍多,题图中所表现出来的直观情况与此不相符.

(3)因为题图纵轴不是从0开始的.

(4)为了更直观、清楚地反映实际情况,在绘制条形统计图时纵轴上的起始值应从0开始.

4. **解**:不可靠;因为其他品牌牛奶的销售量为100万吨,A品牌牛奶的销售量为200万吨,题中统计图中A品牌牛奶销售量的高度是其他品牌牛奶的销售量的2倍,信息符合. 但从横坐标看,A品牌牛奶销售量是其他品牌牛奶销售量的2倍以上,信息不符合,所以该公司的宣传图不可靠.

全章热门考点整合应用

1. **解**:适合普查方式的有(4)(7),适合抽样调查方式的有(1)(2)(3)(5)(6).

2. 抽样;七(3)班同学的血色素含量;每名学生的血色素含量;8

3. 不具有;某教育网站在线调查时的范围和人群太集中,针对性强,不具有代表性

4. **解**:她的观点是错误的. 简单的随机抽样的方法是一种可以信赖的方法,这种调查的结果是可靠的,但选择的样本不同,得到的结果也存在一定的误差,且样本容量越大,调查的数据与总体便越接近.

5. **解**:(1)将三个年级依次编号1,2,3,再在这三个数中随机产生两个不同的数,相应编号的年级即作为样本.

(2)将九年级的八个班依次编号1,2,3,…,8,再在这8个数中随机产生1个数,相应编号的班级即作为样本.

(3)将全校1 236名学生依次编号1,2,3,…,1 236,再在这1 236个数中随机产生40个不同的数,相应编号的学生即作为样本.

(4)将全校24个班级依次编号1,2,3,…,24,并在这24个数中随机产生两个不同的数,再将相应编号的两个班中所有学生依次编号1,2,3,…,假如这两个班共有m名学生,那么就在1,2,3,…,m这m个数中随机产生40个不同的数,相应编号的学生即为样本.

6. **解**:根据题意,预计出海的收益为$5\ 000\times60\%+(-2\ 000)\times40\%=2\ 200$(元).

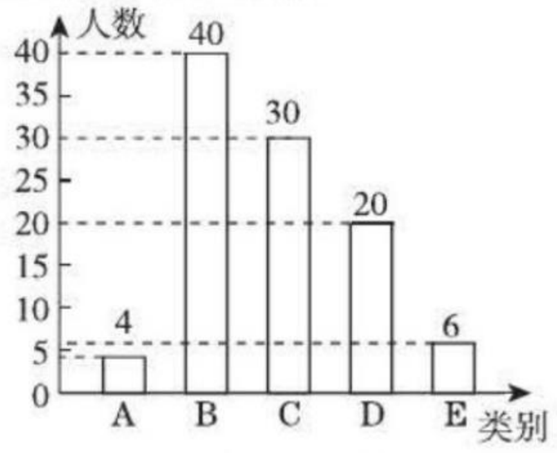
不出海则损失1 000元,所以应该选择出海.

7. **解**:(1)300 (2)1 060 (3)15

(4)答案不唯一,如多播放易中天的《品三国》和于丹析《论语》等.

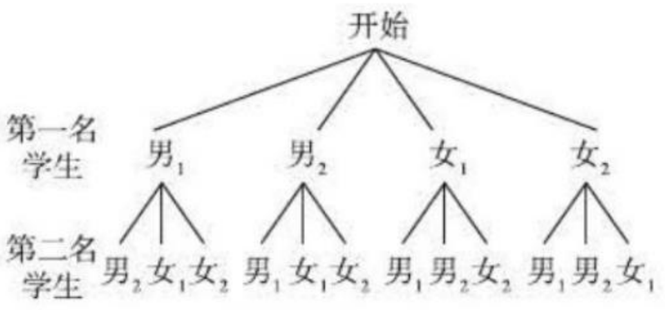
8. **解**:(1)72;C

补全统计图如图所示.



[第8(1)题]

(2)画树状图(如图).



[第8(2)题]

由树状图可以看出共有12种等可能情况,其中抽出一名男生和一名女生有8种情况,即

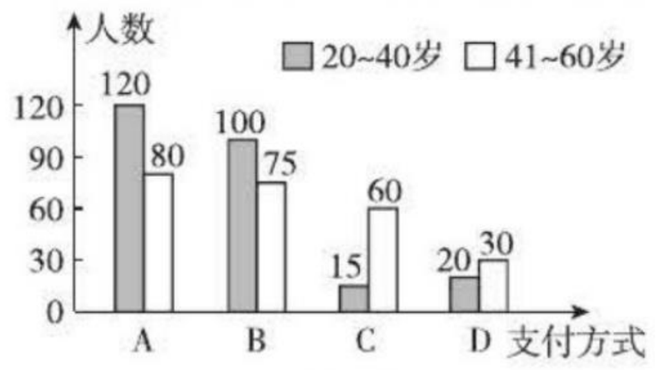
$P_{(抽到一名男生和一名女生)}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$.

9. **解**:(1)∵$(120+80)\div40\%=500$,

∴参与问卷调查的总人数为500.

(2)$500\times15\%-15=60$.

补全条形统计图,如图所示.



(第9题)

(3)∵$8\ 000\times(1-40\%-10\%-15\%)=2\ 800$,

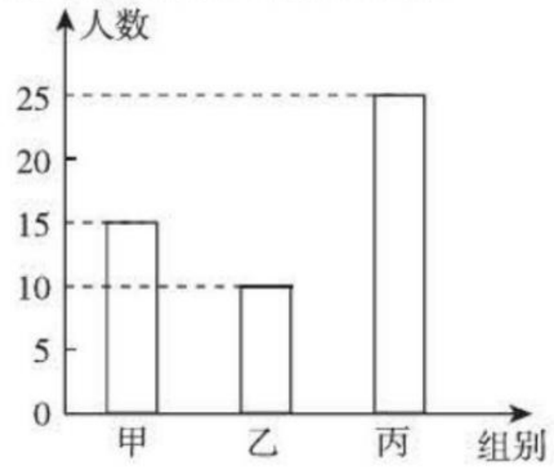
∴这些人中最喜欢微信支付方式的人数约为2 800.

10. **解**:(1)25

(2)$25\div50\%=50$(人).

所以该年级报名参加本次活动的总人数为50.

补全条形统计图如图所示.



(第10题)

(3)设应从甲组抽调x人到丙组,

列方程得$3(15-x)=25+x$,

解得$x=5$.

所以应从甲组抽调5人到丙组.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

达标检测卷答案

第26章达标检测卷

一、1. B　2. B　3. D　4. B　5. D

6. D　7. C　8. C　9. C

10. B　**点拨**：∵ 抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 过点 $(-1,0)$ 和点 $(0,-3)$，∴ $0=a-b+c$，$-3=c$，∴ $b=a-3$. ∵ 当 $x=1$ 时，$y=ax^2+bx+c=a+b+c$，∴ $P=a+b+c=a+a-3-3=2a-6$.

∵ 顶点在第四象限，$a>0$，∴ $b=a-3<0$，∴ $a<3$，∴ $0<a<3$，∴ $-6<2a-6<0$，即 $-6<P<0$. 故选 B.

二、11. 向上；$x=-1$；$(-1,-5)$

12. -1；增大　13. $S=-\frac{1}{2}x^2+20x$

14. 15

15. $x_1=-1$，$x_2=3$　**点拨**：由题意，得 $a+2a+c=0$. ∴ $c=-3a$，∴ $ax^2-2ax-3a=0$. ∵ $a\neq0$，∴ $x^2-2x-3=0$，解得 $x_1=-1$，$x_2=3$.

16. $-1<x<3$　17. $2\sqrt{6}$ m

18. ①④　19. -4

20. $\frac{27}{2}$　**点拨**：由题意知抛物线 m 的对称轴为直线 $x=-3$，可设抛物线 m 对应的函数表达式为 $y=\frac{1}{2}(x+3)^2+h$. ∵ 抛物线 m 经过原点，∴ $0=\frac{1}{2}\times3^2+h$，∴ $h=-\frac{9}{2}$. ∴ 顶点 P 的坐标为 $\left(-3,-\frac{9}{2}\right)$. 又∵ 点 Q 的坐标为 $\left(-3,\frac{1}{2}\times3^2\right)$，即 $\left(-3,\frac{9}{2}\right)$，∴ 点 P 与点 Q 关于 x 轴对称，∴ $S_{阴影}=|-3|\cdot\left|\frac{9}{2}\right|=3\times\frac{9}{2}=\frac{27}{2}$.

三、21. **解**：(1) 将 $A(-1,-1)$，$B(3,-9)$ 的坐标分别代入，得 $\begin{cases}a+4+c=-1,\\9a-12+c=-9,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\c=-6.\end{cases}$ ∴ 该二次函数的表达式为 $y=x^2-4x-6$.

∵ $y=x^2-4x-6=(x-2)^2-10$，∴ 该抛物线的对称轴为直线 $x=2$，顶点坐标为 $(2,-10)$.

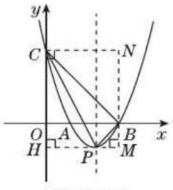
(2) ∵ 点 $P(m,m)$ 在该函数的图象上，∴ $m^2-4m-6=m$. ∴ $m_1=6$，$m_2=-1$. ∴ m 的值为 6 或 -1.

22. **解**：(1) 由题意，m，$-3m$ 是一元二次方程 $x^2+bx-c=0$ 的两根，根据一元二次方程根与系数的关系，得 $m+(-3m)=-b$，$m\cdot(-3m)=-c$，∴ $b=2m$，$c=3m^2$，∴ $4c=12m^2$，$3b^2=12m^2$，∴ $4c=3b^2$.

(2) 由题意得 $-\frac{b}{2}=1$，∴ $b=-2$，由(1)得 $c=\frac{3}{4}b^2=\frac{3}{4}\times(-2)^2=3$，∴ $y=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$，∴ 二次函数的最小值为 -4.

23. **解**：(1) ∵ 抛物线 $y=x^2+bx+c$ 经过点 $(-1,8)$ 与点 $B(3,0)$，∴ $\begin{cases}1-b+c=8,\\9+3b+c=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=-4,\\c=3,\end{cases}$ ∴ 抛物线的表达式为 $y=x^2-4x+3$.

(2) ∵ $y=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$，∴ $P(2,-1)$，$C(0,3)$. 过点 P 作 $PH\perp y$ 轴于点 H，过点 B 作 $BM\parallel y$ 轴交直线 PH 于点 M，过点 C 作 $CN\perp y$ 轴交直线 BM 于点 N，如图所示，则 $S_{\triangle CPB}=S_{矩形CHMN}-S_{\triangle PHC}-S_{\triangle PMB}-S_{\triangle CNB}=3\times4-\frac{1}{2}\times2\times4-\frac{1}{2}\times1\times1-\frac{1}{2}\times3\times3=3$，即 $\triangle CPB$ 的面积为 3.



（第23题）

24. **解**：(1) ∵ 抛物线 $y=(x+2)^2+m$ 经过点 $A(-1,0)$，∴ $0=1+m$，∴ $m=-1$，∴ 二次函数的表达式为 $y=(x+2)^2-1=x^2+4x+3$，∴ 点 C 的坐标为 $(0,3)$，抛物线的对称轴为直线 $x=-2$. 又∵ 点 B，C 关于对称轴对称，∴ 点 B 的坐标为 $(-4,3)$.

∵ $y=kx+b$ 经过点 A，B，∴ $\begin{cases}-k+b=0,\\-4k+b=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-1,\\b=-1.\end{cases}$ ∴ 一次函数的表达式为 $y=-x-1$.

(2) 由图象可知，满足 $(x+2)^2+m\geqslant kx+b$ 的 x 的取值范围为 $x\leqslant-4$ 或 $x\geqslant-1$.

25. **解**：(1) y_2 与 x 之间的函数关系式为 $y_2=500+30x$.

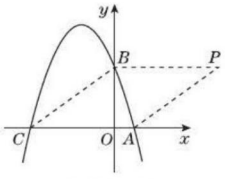
(2) 依题意，得 $\begin{cases}500+30x\leqslant50x,\\170-2x\geqslant90,\end{cases}$ 解得 $25\leqslant x\leqslant40$.

(3) 设这种设备的月利润为 w 元，则 $w=xy_1-y_2=x(170-2x)-(500+30x)=-2x^2+140x-500$，∴ $w=-2(x-35)^2+1\,950$.

∵ $25<35<40$，∴ 当 $x=35$ 时，$w_{最大}=1\,950$，即当月产量为 35 套时，这种设备的月利润最大，最大月利润是 1 950 万元.

26. **解**：(1) 设抛物线的表达式为 $y=ax^2+bx+c$，∵ $A(1,0)$，$B(0,3)$，$C(-4,0)$，∴ $\begin{cases}a+b+c=0,\\c=3,\\16a-4b+c=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-\frac{3}{4},\\b=-\frac{9}{4},\\c=3.\end{cases}$

∴ 经过 A，B，C 三点的抛物线的表达式为 $y=-\frac{3}{4}x^2-\frac{9}{4}x+3$.



（第26题）

(2) 存在. 理由如下：∵ $OB=3$，$OC=4$，$OA=1$，∴ $BC=AC=5$. 如图，当 BP 平行且等于 AC 时，四边形 $ACBP$ 为菱形，∴ $BP=AC=5$，且点 P 到 x 轴的距离等于 OB，∴ 点 P 的坐标为 $(5,3)$. 当点 P 在第二、三象限时，以点 A，B，C，P 为顶点的四边形只能是平行四边形，不是菱形，而第四象限也不存在点 P 使四边形为菱形，所以综上所述，当点 P 的坐标为 $(5,3)$ 时，以点 A，B，C，P 为顶点的四边形为菱形.

(3) 设直线 PA 对应的函数表达式为 $y=kx+b(k\neq0)$，∵ $A(1,0)$，$P(5,3)$，∴ $\begin{cases}5k+b=3,\\k+b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=\frac{3}{4},\\b=-\frac{3}{4},\end{cases}$

∴ 直线 PA 对应的函数表达式为 $y=\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}$. 当点 M 与点 P，A 不在同一直线上时，根据三角形的三边关系 $|PM-AM|<PA$，当点 M 与点 P，A 在同一直线上时，$|PM-AM|=PA$，∴ 当点 M 与点 P，A 在同一直线上时，$|PM-AM|$ 的值最大，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

即点 M 为直线 PA 与抛物线的交点. 解方程组 $\begin{cases} y=\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}, \\ y=-\frac{3}{4}x^2-\frac{9}{4}x+3, \end{cases}$

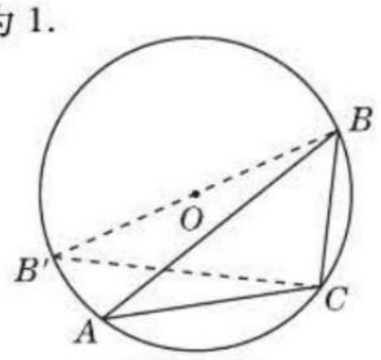
得 $\begin{cases} x_1=1, \\ y_1=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_2=-5, \\ y_2=-\frac{9}{2}, \end{cases}$

∴ 当点 M 的坐标为 $(1,0)$ 或 $\left(-5,-\frac{9}{2}\right)$ 时，$|PM-AM|$ 的值最大，此时 $|PM-AM|$ 的最大值为 5.

第 27 章达标检测卷

一、**1.** A　**2.** D　**3.** C　**4.** B

5. A　**点拨**：本题运用数形结合思想，如图，过 B 作直径 BB'，连结 $B'C$，则 $\angle B'=30°$，$\angle B'CB=90°$，∴ $BC=\frac{1}{2}B'B$，则 $B'B=2\times1=2$，故 $\odot O$ 的半径为 1.



（第 5 题）

6. B

7. B　**点拨**：∵ $\angle ACB=90°$，$\angle ABC=30°$，$AB=2$，∴ $AC=\frac{1}{2}AB=1$.

∴ $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$. ∴ 点 B 转过的路径长为 $\frac{60\pi\cdot\sqrt{3}}{180}=\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$.

8. A　**9.** B

10. D　**点拨**：∵ 正六边形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的边长为 $2=\frac{(\sqrt{3})^{1-1}}{2^{1-2}}$，∴ 正六边形 $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$ 的外接圆的半径为 $\sqrt{3}$，则正六边形 $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$ 的边长为 $\sqrt{3}=\frac{(\sqrt{3})^{2-1}}{2^{2-2}}$.

同理，正六边形 $A_3B_3C_3D_3E_3F_3$ 的边长为 $\frac{3}{2}=\frac{(\sqrt{3})^{3-1}}{2^{3-2}}$……

正六边形 $A_nB_nC_nD_nE_nF_n$ 的边长为 $\frac{(\sqrt{3})^{n-1}}{2^{n-2}}$. 当 $n=10$ 时，正六边形 $A_{10}B_{10}C_{10}D_{10}E_{10}F_{10}$ 的边长为 $\frac{(\sqrt{3})^{10-1}}{2^{10-2}}=\frac{(\sqrt{3})^8\cdot\sqrt{3}}{2^8}=\frac{3^4\cdot\sqrt{3}}{2^8}=\frac{81\sqrt{3}}{2^8}$，故选 D.

二、**11.** 150°　**12.** 2 或 8

13. $3\sqrt{2}$ cm　**14.** 8 或 10

15. 215　**点拨**：∵ A,B,C,D 四点共圆，∴ $\angle B+\angle ADC=180°$.

又∵ A,C,D,E 四点共圆，∴ $\angle E+\angle ACD=180°$. ∴ $\angle ACD+\angle ADC+\angle B+\angle E=360°$.

∵ $\angle ACD+\angle ADC=180°-35°=145°$，∴ $\angle B+\angle E=360°-145°=215°$.

16. $2\sqrt{5}$　**点拨**：连结 AO 并延长交 CD 于 E，连结 OD. ∵ AB 是 $\odot O$ 的切线，∴ $EA\perp AB$. 又∵ $CD/\!/AB$，∴ $AE\perp CD$，∴ $CE=ED=2$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle OED$ 中，$OE=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2-2^2}=\frac{3}{2}$，∴ $AE=\frac{5}{2}+\frac{3}{2}=4$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ACE$ 中，$AC=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$.

17. 15π　**18.** $\frac{5}{3}\pi-2\sqrt{3}$　**19.** 10.5

20. ①②④　**点拨**：连结 OM,ON，易证 $\mathrm{Rt}\triangle OMC\cong\mathrm{Rt}\triangle OND$，可得 $MC=ND$，故①正确. 在 $\mathrm{Rt}\triangle MOC$ 中，$CO=\frac{1}{2}MO$，得 $\angle CMO=30°$，所以 $\angle MOC=60°$，易得 $\angle MOC=\angle NOD=\angle MON=60°$，所以 $\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{MN}=\overset{\frown}{NB}$. 故②正确. 易得 $CD=\frac{1}{2}AB=OA=OM$，因为 $MC<OM$，所以 $MC<CD$. 所以四边形 $MCDN$ 不是正方形. 故③错误. 易得 $MN=CD=\frac{1}{2}AB$，故④正确.

三、**21.** **解**：(1) ∵ $OD\perp AB$，∴ $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{DB}$.

∴ $\angle DEB=\frac{1}{2}\angle AOD=30°$.

(2) 在 $\mathrm{Rt}\triangle AOC$ 中，$OC=3$，$OA=5$，由勾股定理得 $AC=4$.

∴ $AB=2AC=8$.

22. **解**：设经过 A,B 两点的直线对应的函数表达式为 $y=kx+b$.

∵ $A(2,3)$，$B(-3,-7)$，

∴ $\begin{cases} 2k+b=3, \\ -3k+b=-7, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k=2, \\ b=-1. \end{cases}$

∴ 经过 A,B 两点的直线对应的函数表达式为 $y=2x-1$.

当 $x=5$ 时，$y=2\times5-1=9\neq11$，

∴ 点 $C(5,11)$ 不在直线 AB 上，

即 A,B,C 三点不在同一条直线上.

∴ 平面直角坐标系内的三个点 $A(2,3)$，$B(-3,-7)$，$C(5,11)$ 可以确定一个圆.

23. (1) **证明**：如图所示，连结 AC，

∵ 点 C,D 是半圆 O 的三等分点，

∴ $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{CB}$，∴ $\angle DAC=\angle CAB$.

∵ $OA=OC$，∴ $\angle CAB=\angle OCA$，

∴ $\angle DAC=\angle OCA$，∴ $AE/\!/OC$.

∴ $\angle OCE+\angle E=180°$.

∵ $CE\perp AD$，∴ $\angle E=90°$，

∴ $\angle OCE=90°$，∴ $OC\perp CE$，

∴ CE 是 $\odot O$ 的切线.

(2) **解**：四边形 $AOCD$ 为菱形. 理由如下：

∵ $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CB}$，∴ $\angle DCA=\angle CAB$，

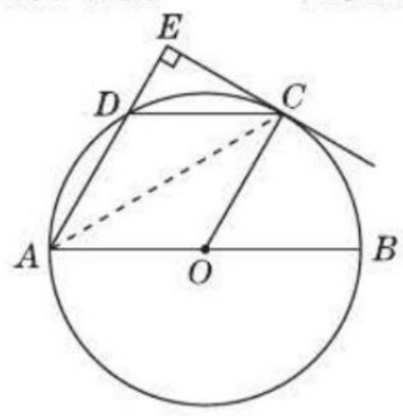
∴ $CD/\!/OA$.

又∵ $AE/\!/OC$，

∴ 四边形 $AOCD$ 是平行四边形.

∵ $OA=OC$，

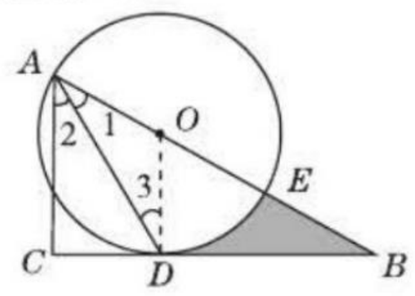
∴ 平行四边形 $AOCD$ 是菱形.



（第 23 题）

24. **解**：(1) 相切. 理由如下：

如图，连结 OD.



（第 24 题）

∵ AD 平分 $\angle BAC$，

∴ $\angle1=\angle2$.

∵ $OA=OD$，∴ $\angle1=\angle3$.

∴ $\angle2=\angle3$.

∴ $OD/\!/AC$.

又 $\angle C=90°$，

∴ $\angle ODB=90°$，即 $OD\perp BC$.

又∵ 点 D 在 $\odot O$ 上，

∴ BC 与 $\odot O$ 相切.

(2) ①设 $\odot O$ 的半径为 r.

∵ $AC=3$，$\angle B=30°$，∴ $AB=6$.

又 $OA=OD=r$，∴ $OB=2r$.

∴ $2r+r=6$，解得 $r=2$，即 $\odot O$ 的半径是 2.

②由①得 $OD=2$，$OB=4$，则 $BD=2\sqrt{3}$，又易知 $\angle DOE=60°$，则 $S_{阴影}=S_{\triangle OBD}-S_{扇形DOE}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times2-\frac{60\pi\times2^2}{360}=2\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3}$.

25. **解**：(1) 如图，设点 E 是桥拱所在圆的圆心.

过点 E 作 $EF\perp AB$ 于点 F，延长 EF 交 $\odot E$ 于点 C，连结 AE，

则 $CF=20$ 米. 由垂径定理知，F 是 AB 的中点，

∴ $AF=FB=\frac{1}{2}AB=40$ 米. 设圆的

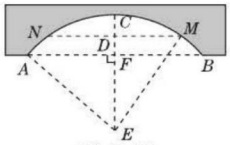
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

半径是 r，由勾股定理，

得 $AE^2 = AF^2 + EF^2 = AF^2 + (CE - CF)^2$，

即 $r^2 = 40^2 + (r - 20)^2$，解得 $r = 50$ 米.

∴ 桥拱的半径为 50 米.



（第 25 题）

（2）这艘轮船能顺利通过. 理由如下：如图，设 $MN = 60$ 米，$MN \parallel AB$，EC 与 MN 的交点为 D，连结 EM，

易知 $DE \perp MN$，

∴ $MD = 30$ 米，

∴ $DE = \sqrt{EM^2 - DM^2} = \sqrt{50^2 - 30^2} = 40$（米）.

∵ $EF = EC - CF = 50 - 20 = 30$（米），

∴ $DF = DE - EF = 40 - 30 = 10$（米）.

∵ 10 米 > 9 米，

∴ 这艘轮船能顺利通过.

26.（1）**证明**：如图，连结 CD.

∵ AD 是 $\odot O$ 的直径，

∴ $\angle ACD = 90°$.

∴ $\angle CAD + \angle ADC = 90°$.

又∵ $\angle PAC = \angle PBA$，$\angle ADC = \angle PBA$，

∴ $\angle PAC = \angle ADC$.

∴ $\angle CAD + \angle PAC = 90°$.

∴ $PA \perp DA$.

∴ PA 是 $\odot O$ 的切线.

（2）**解**：由（1）知，$PA \perp AD$，

又∵ $CF \perp AD$，

∴ $CF \parallel PA$. ∴ $\angle GCA = \angle PAC$.

又∵ $\angle PAC = \angle PBA$，

∴ $\angle GCA = \angle PBA$.

而 $\angle CAG = \angle BAC$，

∴ $\triangle CAG \backsim \triangle BAC$.

∴ $\frac{AG}{AC} = \frac{AC}{AB}$，即 $AC^2 = AG \cdot AB$.

∵ $AG \cdot AB = 12$，

∴ $AC^2 = 12$. ∴ $AC = 2\sqrt{3}$.

（3）**解**：设 $AF = x$，∵ $AF : FD = 1 : 2$，

∴ $FD = 2x$. ∴ $AD = AF + FD = 3x$.

在 Rt△ACD 中，∵ $CF \perp AD$，

∴ $AC^2 = AF \cdot AD$，即 $3x^2 = 12$，

解得 $x = 2$ 或 $x = -2$（舍去）.

∴ $AF = 2$，$AD = 6$.

∴ $\odot O$ 的半径为 3.

在 Rt△AFG 中，$AF = 2$，$GF = 1$，

根据勾股定理得 $AG = \sqrt{AF^2 + GF^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$，由（2）知 $AG \cdot AB = 12$，

∴ $AB = \frac{12}{AG} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$. 连结 BD，如图.

∵ AD 是 $\odot O$ 的直径，

∴ $\angle ABD = 90°$.

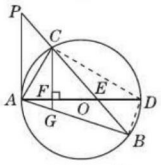
在 Rt△ABD 中，∵ $\sin \angle ADB = \frac{AB}{AD}$，

$AD = 6$，$AB = \frac{12\sqrt{5}}{5}$，

∴ $\sin \angle ADB = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

∵ $\angle ACE = \angle ADB$，

∴ $\sin \angle ACE = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.



（第 26 题）

第 28 章达标检测卷

一、**1.** D　**点拨**：当调查对象数目较大，而且普查没有意义时选择用抽样调查.

2. D

3. C　**点拨**：本调查中的样本是从中抽取的 100 名师生对“三创”工作的知晓情况，易错选 B.

4. C　**点拨**：抽取的样本要具有代表性，不能凭自己的爱好抽取.

5. D　**6.** A　**7.** C　**8.** C

9. A　**点拨**：先算出这七天平均每天的利润：$(0.20 + 0.17 + 0.23 + 0.21 + 0.23 + 0.18 + 0.25) \div 7 = 0.21$（万元），则这一个月的利润大约为 $0.21 \times 31 = 6.51$（万元）.

10. D

二、**11.** 某校学生一周参加课外活动的时间；其中 20 名学生一周参加课外活动的时间

12. 合适　**点拨**：这样选取的样本具有代表性.

13. 不具有　**点拨**：抽取的编号为连续的自然数，故不具有随机性.

14. 65　**点拨**：本题运用方程思想解答. 设该城市中同意甲方案的有 x 万人，根据题意有 $\frac{0.65}{1} \approx \frac{x}{100}$，

解得 $x \approx 65$.

15. 不合理　**点拨**：样本的选取不具有代表性.

16. 不正确　**17.** 800　**18.** 甲

19. 101；20 200　**点拨**：先求 5 棵果树的平均产量：$(98 + 102 + 97 + 103 + 105) \div 5 = 101$（kg），则 200 棵果树的总产量约为 $200 \times 101 = 20\,200$（kg）.

20. 292　**点拨**：30 天中达到良以上（含良）的天数为 $3 + 5 + 10 + 6 = 24$（天），设一年中达到良以上（含良）的有 x 天，根据题意得 $\frac{24}{30} \approx \frac{x}{365}$，解得 $x \approx 292$.

三、**21.** **解**：不合适，因为所选取的样本不具有代表性.

22. **解**：（1）总体指该商场今年四月份每天的营业额，样本指抽查的四月份里 5 天中每天的营业额.

（2）$(2.5 + 2.8 + 2.7 + 2.4 + 2.6) \div 5 = 2.6$（万元），故样本的平均数为 2.6 万元.

（3）这个商场四月份的平均日营业额约为 2.6 万元，月营业额约为 $2.6 \times 30 = 78$（万元）.

23. **解**：（1）D；12

（2）16；C

（3）$500 \times \frac{12 + 14}{2 + 4 + 8 + 12 + 14} + 480 \times (30\% + 15\%) = 541$（人）.

答：身高在 $155 \leqslant x < 165$ 之间的学生约有 541 人.

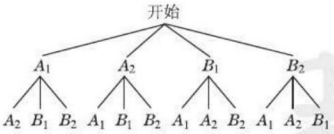
24. **解**：（1）在调查的居民中，对消防知识“特别熟悉”的居民所占的百分比为 $\frac{25}{100} \times 100\% = 25\%$.

则该社区对消防知识“特别熟悉”的居民约有 $900 \times 25\% = 225$（名）.

（2）记 A_1，A_2 表示两名男性管理人员，B_1，B_2 表示两名女性管理人员. 列表如下.

	A_1	A_2	B_1	B_2
A_1		(A_1, A_2)	(A_1, B_1)	(A_1, B_2)
A_2	(A_2, A_1)		(A_2, B_1)	(A_2, B_2)
B_1	(B_1, A_1)	(B_1, A_2)		(B_1, B_2)
B_2	(B_2, A_1)	(B_2, A_2)	(B_2, B_1)	

画树状图（如图）：



（第 24 题）

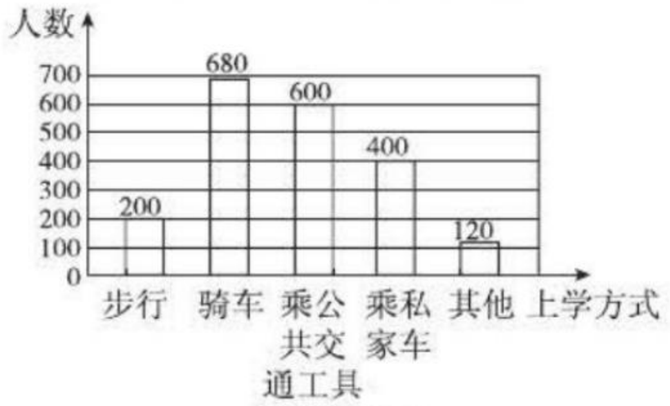
故恰好选中一男一女的概率为 $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

25. **解**：（1）不合理，因为如果 150 名学生全部在同一个年级抽取，这样抽取的学生不具有随机性，结果比较片面，所以这样的抽样不合理.

（2）步行人数为 $2\,000 \times 10\% = 200$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(名),骑车的人数为2 000 × 34% = 680(名),
乘公共交通工具的人数为 2 000 × 30% = 600(名),乘私家车的人数为 2 000 × 20% = 400(名),选择其他方式的人数为 2 000 × 6% = 120(名),绘制条形统计图如图所示.



(第25题)

(3)为了节约和保护环境,请同学们尽量不要乘坐私家车上学(答案不唯一)

期末达标检测卷

一、**1**. A

2. C **点拨**:抛物线平移的规律是"上加下减,左加右减",由此即可求得将抛物线平移后所得新抛物线对应的函数表达式.

3. B **点拨**:由垂径定理得 $BC=\frac{1}{2}AB=2$,根据勾股定理得 $OB=\sqrt{OC^2+BC^2}=\sqrt{5}$,故选 B.

4. A **5**. A

6. B **点拨**:由 $y=x^2+4x-5=(x+2)^2-9$,得抛物线的对称轴为直线 $x=-2$,在对称轴的左侧,y 随 x 的增大而减小. 由对称性知,$x=1$ 与 $x=-5$ 时的函数值相等,$\therefore y_2<y_1<y_3$.

7. A **8**. D

9. B **点拨**:作 $FS\perp CD$ 于点 S,由于点 O 是正方形 $ABCD$ 的中心,正方形是中心对称图形,则 $AF=CG$.
易知 $\triangle EFA\cong\triangle EFA'$,则有 $AF=A'F$. 再根据四边形 $ADSF$ 是矩形,设 $AF=A'F=DS=CG=x$,在 $\mathrm{Rt}\triangle FSG$ 中利用勾股定理得 $[2(2+x)]^2=(8-2x)^2+8^2$,解得 $x=\frac{7}{3}$.
所以 $A'G=GF-A'F=2(2+x)-x=4+x=\frac{19}{3}$.

10. C **点拨**:由图象开口向下,可知 $a<0$. 由图象与 y 轴的交点在 x 轴的下方,可知 $c<0$. 又对称轴为直线 $x=2$,$\therefore -\frac{b}{2a}>0$. $\therefore b>0$.
$\therefore abc>0$. 故①正确.
由图象可知当 $x=3$ 时,$y>0$,
$\therefore 9a+3b+c>0$. 故②错误.
由图象可知 $OA<1$,
$\because OA=OC$,$\therefore OC<1$,即 $-c<1$.
$\therefore c>-1$. 故③正确.
假设方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的一个根为 $x=-\frac{1}{a}$,把 $x=-\frac{1}{a}$ 代入方程可得 $\frac{1}{a}-\frac{b}{a}+c=0$.
整理可得 $ac-b+1=0$.
两边同时乘 c 可得 $ac^2-bc+c=0$.
即方程有一个根为 $x=-c$.
由③可知 $-c=OA$,而 OA 的长是方程的根,$\therefore x=-c$ 是方程的根,即假设成立. 故④正确.
综上可知正确的结论有 3 个,故选 C.

二、**11**. 2 **点拨**:由二次函数的定义得 $m^2-m=2$ 且 $m^2+m\neq0$,解得 $m_1=2$,$m_2=-1$,但 $m\neq0$,且 $m\neq-1$,所以 $m=2$. 本题易忽略 $m^2+m\neq0$ 而出错.

12. 150° **13**. 500 **14**. 4.9 **15**. $2\pi-4$

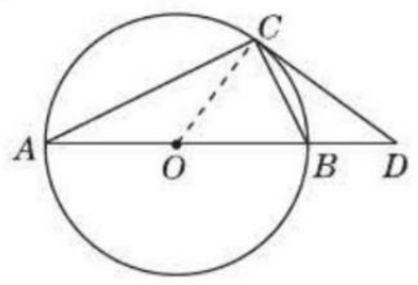
16. 50° **点拨**:连结 OF,
$\because\angle ACF=65°$,$\therefore\angle AOF=130°$.
$\because EF$ 是 $\odot O$ 的切线,
$\therefore\angle OFE=90°$. 易知 $AB\perp CD$,
$\therefore\angle OHE=90°$,
$\therefore\angle E=360°-90°-90°-130°=50°$.

17. (3,2) **18**. $\frac{3}{13}\sqrt{13}$ **19**. 9

20. $3-\sqrt{3}$ **点拨**:设 A 点坐标为 $(0,a)(a>0)$,令 $x^2=a$,解得 $x=\sqrt{a}$,
$\therefore$ 点 $B(\sqrt{a},a)$. 令 $\frac{x^2}{3}=a$,则 $x=\sqrt{3a}$,$\therefore$ 点 $C(\sqrt{3a},a)$.
$\because CD/\!/y$ 轴,$\therefore$ 点 D 的横坐标与点 C 的横坐标相同,为 $\sqrt{3a}$,而 $y_1=(\sqrt{3a})^2=3a$,$\therefore$ 点 D 的坐标为 $(\sqrt{3a},3a)$.
$\because DE/\!/AC$,$\therefore$ 点 E 的纵坐标为 $3a$,
$\therefore\frac{x^2}{3}=3a$,$\therefore x=3\sqrt{a}$,
$\therefore$ 点 E 的坐标为 $(3\sqrt{a},3a)$.
$\therefore DE=3\sqrt{a}-\sqrt{3a}$,
$\therefore\frac{DE}{AB}=\frac{3\sqrt{a}-\sqrt{3a}}{\sqrt{a}}=3-\sqrt{3}$.

三、**21**. **解**:设所求二次函数的表达式为 $y=a(x-1)^2-1(a\neq0)$,
$\because$ 抛物线经过原点 $(0,0)$,
$\therefore a(0-1)^2-1=0$,解得 $a=1$.
$\therefore$ 该函数的表达式为 $y=(x-1)^2-1$,即 $y=x^2-2x$.
点拨:本题运用待定系数法解答.
由于已知二次函数图象的顶点坐标为 $(1,-1)$,因此可设所求二次函数的表达式为 $y=a(x-1)^2-1(a\neq0)$,再把 $x=0$,$y=0$ 代入函数表达式中确定 a 的值.

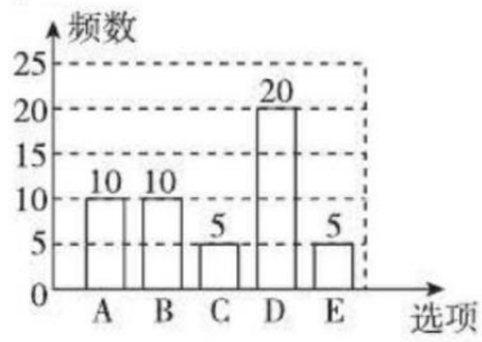
22. (1)**证明**:如图,连结 OC.
$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,C 是 $\odot O$ 上一点,



(第22题)

$\therefore\angle ACB=90°$,
即 $\angle ACO+\angle OCB=90°$.
$\because OA=OC$,$\angle BCD=\angle A$,
$\therefore\angle ACO=\angle A=\angle BCD$.
$\therefore\angle BCD+\angle OCB=90°$,
即 $\angle OCD=90°$.
$\therefore CD$ 是 $\odot O$ 的切线.
(2)**解**:由(1)及已知有 $\angle OCD=90°$,$OC=3$,$CD=4$,
$\therefore OD=\sqrt{OC^2+CD^2}=5$.
$\therefore BD=OD-OB=5-3=2$.

23. **解**:(1)5 ÷ 0.1 = 50(人),
即这次被调查的学生有 50 人.
(2)$m=\frac{10}{50}=0.2$,$n=0.2\times50=10$,
$p=0.4\times50=20$,补全条形统计图如图所示.



(第23题)

(3)800 × (0.1 + 0.4) = 800 × 0.5 = 400(人),
估计全校学生中利用手机购物或玩游戏的共有 400 人.
建议:可利用手机学习.(建议不唯一)

24. **解**:(1)根据题意可得:
$w=(x-30)\cdot y=(x-30)(-x+60)=-x^2+90x-1\,800$,
$\therefore w$ 与 x 之间的函数表达式为 $w=-x^2+90x-1\,800(30\leqslant x\leqslant60)$.
(2)根据题意可得 $w=-x^2+90x-1\,800=-(x-45)^2+225$,
$\because -1<0$,$30\leqslant x\leqslant60$,
$\therefore$ 当 $x=45$ 时,w 有最大值,最大值为 225,
即销售单价定为 45 元时,每天的销售利润最大,最大利润为 225 元.
(3)当 $w=200$ 时,可得方程 $-(x-45)^2+225=200$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

解得 $x_1=40, x_2=50$.

$\because 50>48$,

$\therefore x_2=50$ 不符合题意，应舍去.

$\therefore$ 该商店销售这种双肩包每天要获得 200 元的销售利润，销售单价应定为 40 元.

25. (1)**证明**：连结 OD,

$\because OC=OD$,

$\therefore \angle OCD=\angle ODC$.

$\because CD/\!/AB$,

$\therefore \angle AOC=\angle OCD$,

$\therefore \angle AOC=\angle ODC$.

在$\triangle AOP$和$\triangle ODQ$中，

$$\begin{cases} PO=QD, \\ \angle POA=\angle QDO, \\ AO=OD, \end{cases}$$

$\therefore \triangle AOP\cong\triangle ODQ$,

$\therefore AP=OQ$.

(2)**解**：作 $PH\perp OA$，垂足为 H，作 $OG\perp CD$，垂足为 G. 由题易得 $OH=\frac{4}{5}x, PH=\frac{3}{5}x, S_{\triangle AOP}=3x$.

$\because CD/\!/AB$,

$\therefore \triangle PFC\backsim\triangle PAO$,

$\therefore \frac{y}{S_{\triangle AOP}}=\left(\frac{CP}{OP}\right)^2=\left(\frac{10-x}{x}\right)^2$,

即 $y=\frac{3x^2-60x+300}{x}$.

当点 F 与点 C 重合时，$OP=10$. 当点 F 与点 D 重合时，

$\because \cos\angle OCG=\frac{CG}{OC}=\cos\angle AOC=\frac{4}{5}$,$\therefore CG=8$,$\therefore CD=16$.

$\because \frac{CF}{OA}=\frac{CP}{OP}=\frac{8}{5}$,

$\therefore \frac{10-x}{x}=\frac{8}{5}$,

解得 $x=\frac{50}{13}$.

又$\because$ 点 F 与点 C, D 不重合，

$\therefore x$ 的取值范围为 $\frac{50}{13}<x<10$.

(3)**解**：当$\angle POE=90°$时，

$CQ=\frac{OC}{\cos\angle QCO}=12.5$,

$OP=DQ=CD-CQ=3.5$(舍去)；

当$\angle OPE=90°$时，则$\angle APO=90°$,

$\therefore OP=AO\cdot\cos\angle COA=8$；

当 $\angle OEP=90°$ 时，此种情况不存在.

$\therefore$ 线段 OP 的长为 8.

26. **解**：(1)$A(-1,0)$.

$\because$ 直线 l 经过点 A,

$\therefore 0=-k+b, b=k$.

$\therefore y=kx+k$.

令 $ax^2-2ax-3a=kx+k$,

即 $ax^2-(2a+k)x-3a-k=0$.

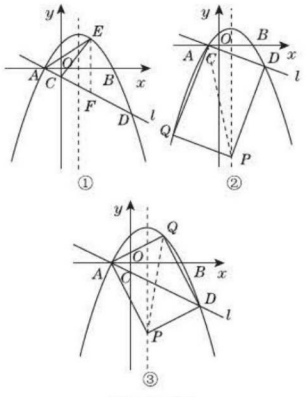
$\because CD=4AC$,

$\therefore$ 点 D 的横坐标为 4.

$\therefore \frac{-3a-k}{a}=-1\times4$,

$\therefore k=a$.

$\therefore$ 直线 l 对应的函数表达式为 $y=ax+a$.



(第 26 题)

(2)如图①，过点 E 作 $EF/\!/y$ 轴，交直线 l 于点 F.

设 $E(x, ax^2-2ax-3a)$,

则 $F(x, ax+a)$.

$\therefore EF=ax^2-2ax-3a-(ax+a)=ax^2-3ax-4a$.

$\because S_{\triangle ACE}=S_{\triangle AFE}-S_{\triangle CFE}=\frac{1}{2}(ax^2-3ax-4a)(x+1)-\frac{1}{2}(ax^2-3ax-4a)x=\frac{1}{2}(ax^2-3ax-4a)=\frac{1}{2}a\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{8}a$,

$\therefore \triangle ACE$ 的面积的最大值为 $-\frac{25}{8}a$.

$\because \triangle ACE$ 的面积的最大值为 $\frac{5}{4}$,

$\therefore -\frac{25}{8}a=\frac{5}{4}$，解得 $a=-\frac{2}{5}$.

(3)以点 A, D, P, Q 为顶点的四边形能成为矩形.

令 $ax^2-2ax-3a=ax+a$，即 $ax^2-3ax-4a=0$,

解得 $x_1=-1, x_2=4$.

$\therefore D(4,5a)$.

$\because y=ax^2-2ax-3a=a(x-1)^2-4a$,

$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x=1$.

设 $P(1,m)$，①如图②，若 AD 是矩形的一条边，连结 AP，则 $Q(-4,21a)$, $m=21a+5a=26a$，则 $P(1,26a)$.

$\because$ 四边形 $ADPQ$ 为矩形，

$\therefore \angle ADP=90°$,

$\therefore AD^2+PD^2=AP^2$,

$\therefore 5^2+(5a)^2+(1-4)^2+(26a-5a)^2=(-1-1)^2+(26a)^2$,

解得 $a^2=\frac{1}{7}$,

$\because a<0$,$\therefore a=-\frac{\sqrt{7}}{7}$,

$\therefore P\left(1,-\frac{26\sqrt{7}}{7}\right)$.

②如图③，若 AD 是矩形的一条对角线，连结 PQ，则线段 AD 的中点坐标为 $\left(\frac{3}{2},\frac{5a}{2}\right)$, $Q(2,-3a)$.

又$\because \frac{1}{2}(-3a+m)=\frac{5}{2}a$,

$\therefore m=8a$.

$\therefore P(1,8a)$.

$\because$ 四边形 $APDQ$ 为矩形，

$\therefore \angle APD=90°$,

$\therefore AP^2+PD^2=AD^2$,

$\therefore (-1-1)^2+(8a)^2+(1-4)^2+(8a-5a)^2=(-1-4)^2+(5a)^2$,

解得 $a^2=\frac{1}{4}$,

$\because a<0$,$\therefore a=-\frac{1}{2}$.

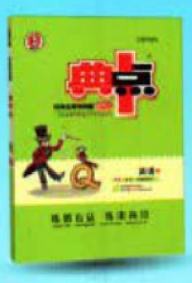
$\therefore P(1,-4)$.

综上所述，以点 A, D, P, Q 为顶点的四边形能成为矩形，点 P 的坐标为 $\left(1,-\frac{26\sqrt{7}}{7}\right)$或$(1,-4)$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

典点®

练准知识 练通考点
练透方法 练出高分





提分一定有方法！

绿色印刷产品

关注荣德基微信公众号，获取新资讯。
荣德基官方网站：http://www.rudder.com.cn
荣德基天猫旗舰店：http://rongdeji.tmall.com

荣德基
初中频道

本书导学号
1489846

ISBN 978-7-5450-7062-0
9 787545 070620 >
定价：37.90元

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料