按课时编写

典中点®

综合应用创新题 典中点

一本在做题中教会你学习方法的书



九年级数学 下

（HK版） 按80：1配备教师用书

练透方法 练出高分

- 方法技巧40招
- 典型易错题24道
- 培优拔尖题53道
- 高频考点22个

教辅资料站

电子教辅 试卷练习
知识总结 备课资源

扫码关注获取更多学习资料

陕西新华出版传媒集团
陕西人民教育出版社



典中点®

综合应用创新题 典中点

一本在做题中教会你学习方法的书

主　　编：荣德基
本册主编：程小恒



九年级数学 下

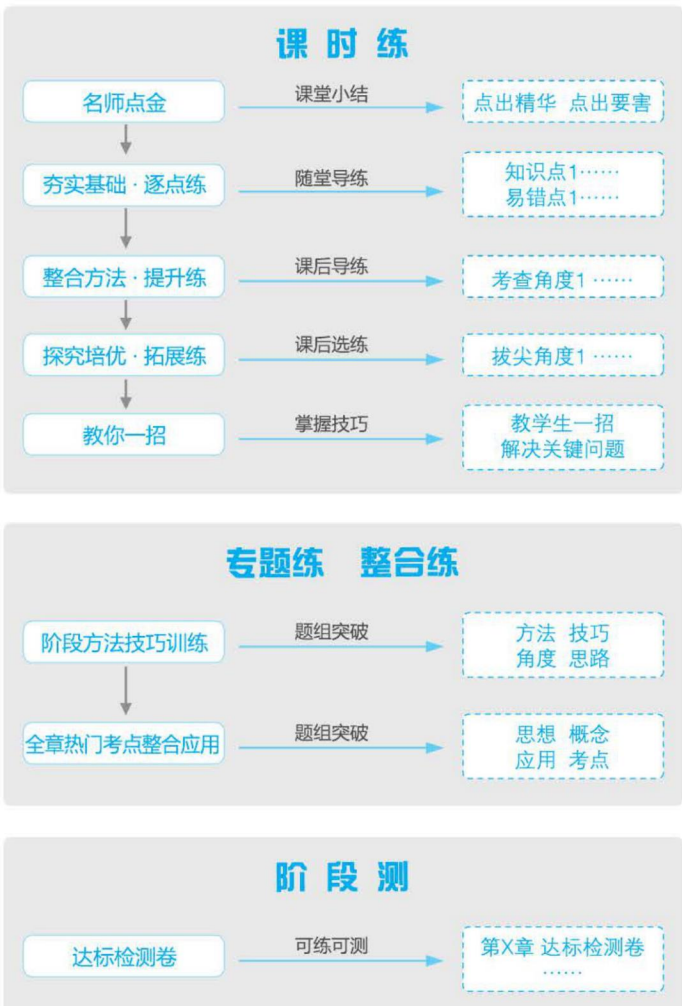
（HK版）

陕西新华出版传媒集团
陕西人民教育出版社
·西安·

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

一本在做题中教会你学习方法的书

练，就练得与众不同



《典中点》系列丛书是有思想的教辅，是有方法的宝典，是无声的老师，带你纵向贯通学习环节，横向打通疑难知识；帮你逐题渗透方法，分层提升能力；让你练准知识、练通考点、练透方法。

同学们，让我们牵手《典中点》系列丛书，练，就练得与众不同。

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

目录 CONTENTS

第24章 圆

24.1 旋 转

第1课时 旋 转 …… 1

第2课时 旋转作图 …… 3

第3课时 中心对称 …… 4

第4课时 中心对称图形 …… 6

第5课时 图案设计 …… 8

阶段方法技巧训练(一)

专训1 图形的变换——平移、旋转与对称 …… 10

专训2 巧用图形变换作辅助线 …… 12

24.2 圆的基本性质

24.2.1 垂径分弦

第1课时 圆的认识 …… 13

第2课时 圆的半径的应用 …… 15

第3课时 垂直于弦的直径 …… 16

24.2.2 圆心角、弧、弦、弦心距间关系 …… 18

24.2.3 圆的确定 …… 20

24.3 圆周角

第1课时 圆周角和圆心角、弧的关系 …… 22

第2课时 圆周角和直径的关系 …… 24

第3课时 圆内接四边形 …… 26

阶段方法技巧训练(二)

专训1 巧用圆的基本性质解圆的五种关系 …… 28

专训2 垂径定理的四种应用技巧 …… 29

24.4 直线与圆的位置关系

第1课时 直线与圆的位置关系及切线的性质 …… 30

第2课时 切线的判定 …… 32

*第3课时 切线长定理 …… 34

24.5 三角形的内切圆 …… 36

阶段方法技巧训练(三)

专训1 与圆有关的位置关系的判断方法 …… 38

专训2 切线的判定和性质的四种应用类型 …… 39

24.6 正多边形与圆 …… 40

24.7 弧长与扇形面积

第1课时 弧长与扇形面积 …… 42

第2课时 圆锥的侧面积和全面积 …… 44

24.8 综合与实践 进球线路与最佳射门角 …… 46

阶段方法技巧训练(四)

专训1 圆中常见的计算题型 …… 47

专训2 圆中常用的作辅助线的八种方法 …… 50

专训3 圆与相似三角形的综合 …… 52

专训4 用三角函数解与圆有关问题 …… 53

专训5 分类讨论思想在圆中的应用类型 …… 54

全章热门考点整合应用 …… 55

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

目 录 CONTENTS

第25章 投影与视图

25.1 投 影

第1课时 平行投影与中心投影 …… 59

第2课时 正投影 …… 61

阶段方法技巧训练(五)

专训1 平行投影、中心投影、正投影间的关系 …… 63

专训2 投影规律在实际问题中的应用 …… 64

25.2 三视图

第1课时 由几何体到三视图 …… 65

第2课时 由三视图到几何体 …… 67

第3课时 由三视图到几何体的展开图 … 69

阶段方法技巧训练(六)

专训1 三视图与实物的互相转化 …… 71

专训2 根据物体的三视图计算其表面积和体积 …… 72

全章热门考点整合应用 …… 73

第26章 概率初步

26.1 随机事件 …… 76

26.2 等可能情形下的概率计算

第1课时 概率的计算 …… 78

第2课时 用树状图法求概率 …… 80

第3课时 用列表法求概率 …… 82

第4课时 利用概率判断游戏规则的公平性 …… 84

26.3 用频率估计概率 …… 85

26.4 综合与实践 概率在遗传学中的应用 …… 87

阶段方法技巧训练(七)

专训1 事件的认识 …… 88

专训2 概率的四种求法 …… 89

专训3 利用概率判断游戏规则的公平性 …… 90

专训4 概率与其他知识的综合 …… 91

全章热门考点整合应用 …… 92

达标检测卷

第24章达标检测卷 …… 93

第25章达标检测卷 …… 97

第26章达标检测卷 …… 101

期末达标检测卷 …… 105

参考答案及点拨 …… 109

微信公众号 教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

24.1 旋 转

第1课时 旋 转

名师点金

理解旋转必须明确两点

1. 图形绕着某一定点旋转，这一定点可以是图形外的一点，也可以是图形上的一点，还可以是图形内的一点. 这一定点即为旋转中心.
2. 旋转的决定因素：(1)旋转中心；(2)旋转角；(3)旋转方向.

1 夯实基础·逐点练 (答案见109页)

知识点1 旋转及相关概念

1. 【中考·呼和浩特】将数字“6”旋转180°，得到数字“9”. 将数字“9”旋转180°，得到数字“6”. 现将数字“69”旋转180°，得到的数字是(　　)

A. 96　　B. 69　　C. 66　　D. 99

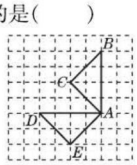
2. 【中考·广州】将如图所示的图案以圆心为中心，旋转180°后得到的图案是(　　)【导学号:9513162】



(第2题)　A　B　C　D

3. 如图，在正方形网格中，将△ABC绕点A旋转后得到△ADE，则下列旋转方式中符合题意的是(　　)

A. 顺时针旋转90°
B. 逆时针旋转90°
C. 顺时针旋转45°
D. 逆时针旋转45°



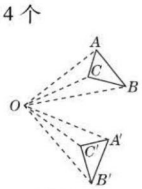
(第3题)

知识点2 旋转的性质

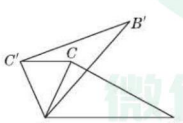
4. 如图，把△ABC绕点O按顺时针方向旋转60°后得到△$A'B'C'$，则下列等式成立的有(　　)

①$AB = A'B'$；②$OB = OB'$；③$\angle AOA' = \angle COC'$；④$\angle COB = \angle A'OC'$；⑤$\angle AOB = \angle BOC'$.

A. 2个　　B. 3个
C. 4个　　D. 5个



(第4题)



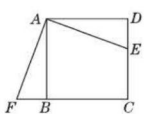
(第5题)

5. 【中考·德州】如图，在△ABC中，$\angle CAB = 65°$，在同一平面内，将△ABC绕点A旋转到△$AB'C'$的位置，使得$CC' // AB$，则旋转角的度数为(　　)

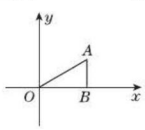
A. 35°　　B. 40°　　C. 50°　　D. 60°

6. 如图，点E是正方形$ABCD$的边DC上一点，把△ADE绕点A顺时针旋转90°到△ABF的位置，若四边形$AECF$的面积为25，$DE = 2$，则AE的长为(　　)

A. 5　　B. $\sqrt{23}$　　C. 7　　D. $\sqrt{29}$



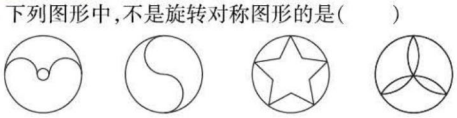
(第6题)



(第9题)

知识点3 旋转对称图形

7. 下列图形中，不是旋转对称图形的是(　　)



A　B　C　D

8. 【中考·莆田】规定：在平面内，将一个图形绕着某一点旋转一定的角度(小于周角)后能和自身重合，则称此图形为旋转对称图形. 下列图形是旋转对称图形，且有一个旋转角为60°的是(　　)

A. 正三角形　B. 正方形　C. 正六边形　D. 正十边形

易错点 易忽视旋转方向而漏解

9. 【中考·黔东南州】如图，在△ABO中，$AB \perp OB$，$OB = \sqrt{3}$，$AB = 1$. 将△ABO绕O点旋转90°后得到△A_1B_1O，则点A_1的坐标为(　　)

A. $(-1, \sqrt{3})$　　B. $(-1, \sqrt{3})$或$(1, -\sqrt{3})$
C. $(-1, -\sqrt{3})$　　D. $(-1, -\sqrt{3})$或$(-\sqrt{3}, -1)$

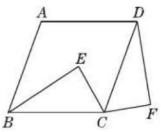
趣味数学 大自然中最普遍最醉人的舞步——螺旋：世间万物都在运动，运动的形式多种多样. 螺旋却是一种备受大自然和人类文明青睐的运动形式.(待续)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞（答案见109页）

考查角度1 利用旋转的性质求角的度数

10. 【中考 · 长春】如图，在菱形 $ABCD$ 中，$\angle A=110°$，点 E 是菱形 $ABCD$ 内一点，连接 CE，将线段 CE 绕点 C 顺时针旋转 $110°$，得到线段 CF，连接 BE，DF. 若 $\angle E=86°$，求 $\angle F$ 的度数.



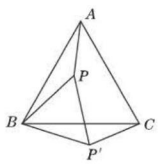
（第10题）

考查角度2 利用旋转判断相关图形

11. 如图，P 为等边三角形 ABC 内部一点，将 $\triangle ABP$ 按顺时针旋转后能与 $\triangle CBP'$ 重合.

（1）旋转中心是哪一点？旋转角是多少度？

（2）连接 PP'，$\triangle BPP'$ 是什么三角形？并说明你的理由.



（第11题）

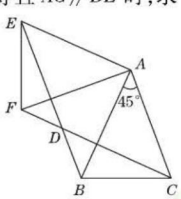
Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞（答案见109页）

拔尖角度1 利用旋转的性质进行线段的计算

12. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC=1$，$\angle BAC=45°$，$\triangle AEF$ 是由 $\triangle ABC$ 绕点 A 按顺时针方向旋转得到的，连接 BE，CF 相交于点 D.

（1）求证：$BE=CF$；

（2）当四边形 $ACDE$ 的四边相等且 $AC\parallel DE$ 时，求 BD 的长.



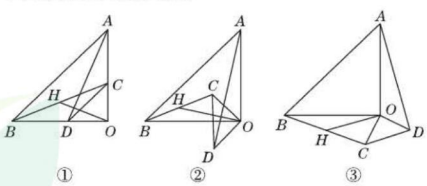
（第12题）

拔尖角度2 利用旋转的性质探究线段的大小和位置关系

13. 【中考 · 黑龙江】已知，$\triangle AOB$ 和 $\triangle COD$ 均为等腰直角三角形，$\angle AOB=\angle COD=90°$. 连接 AD，BC，点 H 为 BC 的中点，连接 OH.

（1）如图①所示，求证：$OH=\frac{1}{2}AD$ 且 $OH\perp AD$.

（2）将 $\triangle COD$ 绕点 O 旋转到图②，图③所示位置时，线段 OH 与 AD 又有怎样的关系，并选择一个图形证明你的结论.



（第13题）

微信公众号
教辅资料站

你只要随便往身边一看，就可以发现到处都是螺旋：你手指上的指纹结构、野外的向日葵种子、藤类植物的卷须等都不约而同地呈现出螺旋结构.

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 2 课时　旋转作图

名师点金

旋转作图的一般步骤

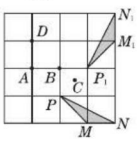
一连：连接已知点与旋转中心；二定：确定旋转方向；三量：测量旋转角度；四截：在旋转角的另一条边上，以旋转中心为一端点截取等于对应线段长度的线段；五画：顺次连接所得的点，从而画出旋转得到的图形.

Ⅰ 夯实基础 · 逐点练 ☞(答案见 109 页)

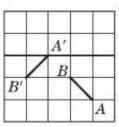
知识点 1 旋转作图

1. 如图，在 4×4 的正方形网格中，$\triangle MNP$ 绕某点旋转一定的角度，得到 $\triangle M_1N_1P_1$，则其旋转中心是(　　)

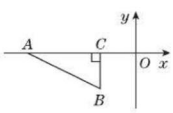
A. 点 A　　B. 点 B　　C. 点 C　　D. 点 D



(第 1 题)



(第 2 题)



(第 3 题)

2. 【中考 · 泰安】如图，在正方形网格中，线段 $A'B'$ 是线段 AB 绕某点逆时针旋转角 α 得到的，点 A' 与 A 对应，则角 α 的大小为(　　)

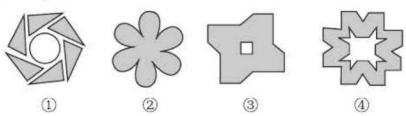
A. 30°　　B. 60°　　C. 90°　　D. 120°

3. 【中考 · 济宁】如图，在平面直角坐标系中，点 A，C 在 x 轴上，点 C 的坐标为 $(-1,0)$，$AC=2$. 将 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 先绕点 C 顺时针旋转 90°，再向右平移 3 个单位长度，则变换后点 A 的对应点坐标是(　　)

A. $(2,2)$　　B. $(1,2)$　　C. $(-1,2)$　　D. $(2,-1)$

知识点 2 用旋转变换设计图案

4. 如图所示的 4 个图案，能通过基本图形旋转得到的有(　　)

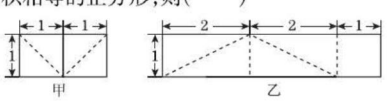


(第 4 题)

A. 1 个　　B. 2 个

C. 3 个　　D. 4 个

5. 【中考 · 河北】如图是甲、乙两张不同的长方形纸片，将它们分别沿着虚线剪开后，各自要拼一个与原来面积相等的正方形，则(　　)



(第 5 题)

A. 甲、乙都可以　　B. 甲、乙都不可以

C. 甲不可以，乙可以　　D. 甲可以，乙不可以

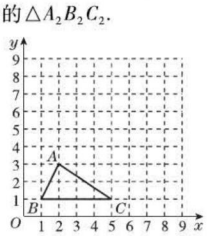
Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞(答案见 109 页)

考查角度 1 利用旋转的性质作图

6. 【中考 · 宁夏】如图，在平面直角坐标系中，$\triangle ABC$ 三个顶点的坐标分别为 $A(2,3)$，$B(1,1)$，$C(5,1)$.

(1) 把 $\triangle ABC$ 平移后，其中点 A 移到点 $A_1(4,5)$，画出平移后得到的 $\triangle A_1B_1C_1$；

(2) 把 $\triangle A_1B_1C_1$ 绕点 A_1 按逆时针方向旋转 90°，画出旋转后的 $\triangle A_2B_2C_2$.



(第 6 题)

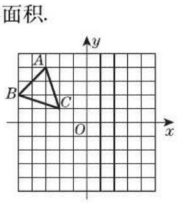
考查角度 2 利用图形旋转变换作图求面积

7. 【中考 · 齐齐哈尔】如图，在平面直角坐标系内，小正方形网格的边长为 1 个单位长度，$\triangle ABC$ 的三个顶点的坐标分别为 $A(-3,4)$，$B(-5,2)$，$C(-2,1)$.

(1) 画出 $\triangle ABC$ 关于 y 轴的对称图形 $\triangle A_1B_1C_1$；

(2) 画出将 $\triangle ABC$ 绕原点 O 逆时针方向旋转 90° 得到的 $\triangle A_2B_2C_2$；

(3) 求(2)中线段 OA 扫过的图形面积.



(第 7 题)

趣味数学　**牵牛花的螺旋**　到了夏季，人们随处可见牵牛花采用螺旋缠绕形式，用它的蔓茎紧紧依附在圆桶状的大树上生长，这是为了最大限度地减少从各个方向吹来的风的影响.(待续)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第3课时　中心对称

名师点金

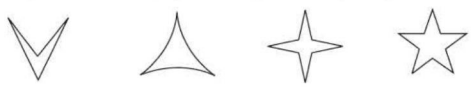
1. 掌握中心对称性质的“三个对应”
（1）对应边相等.（2）对应边平行或在同一直线上.（3）对应角相等.
2. 判断中心对称的“两个方法”
（1）连接两个图形的对应点的线段是否经过同一个点，并且被该点平分.
（2）把其中一个图形绕着某一个点旋转180°后是否能与另一个图形重合.

Ⅰ 夯实基础·逐点练 ☞（答案见110页）

知识点1 中心对称的定义

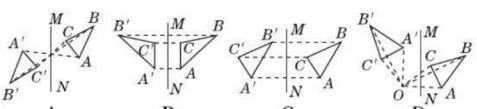
1. 下列说法正确的是(　　)
A. 全等的两个图形成中心对称
B. 能够完全重合的两个图形成中心对称
C. 绕某点旋转后能重合的两个图形成中心对称
D. 绕某点旋转180°后能够重合的两个图形成中心对称

2. 观察下列四个图形，中心对称图形是(　　)



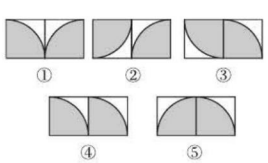
A　　B　　C　　D

3. 下列各组图形中，$\triangle A'B'C'$与$\triangle ABC$成中心对称的是(　　)



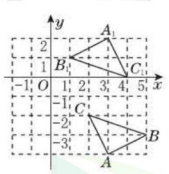
A　　B　　C　　D

4. 如图所示的5组图形中，左边的图形与右边的图形成中心对称的有(　　)
A. 1组　　B. 2组　　C. 3组　　D. 4组



①　②　③　④　⑤

（第4题）

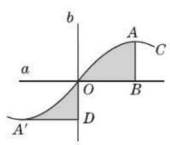


（第5题）

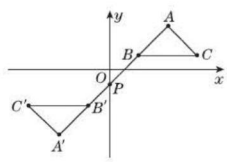
知识点2 中心对称的性质

5. 如图，在平面直角坐标系中，若$\triangle ABC$与$\triangle A_1B_1C_1$关于E点成中心对称，则对称中心E点的坐标是_____.

6. 【中考·乐山】如图，直线a，b垂直相交于点O，曲线C关于点O成中心对称，点A的对称点是点A'，$AB\perp a$于点B，$A'D\perp b$于点D，若$OB=3$，$OD=2$，则阴影部分的面积之和为_____.



（第6题）

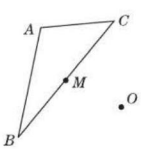


（第7题）

7. 【中考·内江】如图，在平面直角坐标系中，$\triangle ABC$的顶点A在第一象限，点B，C的坐标分别为$(2,1)$，$(6,1)$，$\angle BAC=90°$，$AB=AC$，直线AB交y轴于点P，若$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$关于点P成中心对称，则点A'的坐标为(　　)
A. $(-4,-5)$　　B. $(-5,-4)$
C. $(-3,-4)$　　D. $(-4,-3)$

知识点3 中心对称的作图

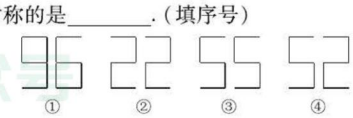
8. 如图，已知点M是$\triangle ABC$的边BC的中点，点O是$\triangle ABC$外一点.
（1）画$\triangle A'B'C'$，使$\triangle A'B'C'$与$\triangle ABC$关于点M成中心对称；
（2）画$\triangle A''B''C''$，使$\triangle A''B''C''$与$\triangle ABC$关于点O成中心对称.



（第8题）

易错点 混淆平移、轴对称、中心对称的定义导致判断失误

9. 如图所示的4组图形中，右边图形与左边图形成中心对称的是_____.（填序号）



①　②　③　④

（第9题）

虽然乍看起来显得不太符合“两点之间线段最短”的几何学原理，但如果打开螺旋式缠绕的牵牛花藤蔓，就会发现它是线段，也就是说，牵牛花藤蔓是在用最短的距离缠绕在大树上生长的.

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

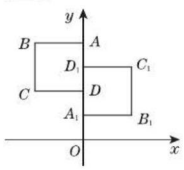
Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞(答案见 110 页)

考查角度 1 利用中心对称的定义求点的坐标

10. 【中考 · 南昌】如图，正方形 $ABCD$ 与正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 关于某点中心对称，已知 A，D_1，D 三点的坐标分别是(0，4)，(0，3)，(0，2).

(1)求对称中心的坐标；

(2)写出顶点 B，C，B_1，C_1 的坐标.



(第 10 题)

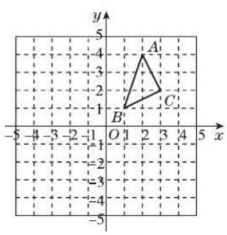
考查角度 2 利用中心对称的性质求点的坐标

11. 【中考 · 眉山】在边长为 1 个单位长度的正方形网格中建立如图所示的平面直角坐标系，$\triangle ABC$ 的顶点都在格点上，请解答下列问题：

(1)作出 $\triangle ABC$ 向左平移 4 个单位长度后得到的 $\triangle A_1B_1C_1$，并写出点 C_1 的坐标；

(2)作出 $\triangle ABC$ 关于原点 O 对称的 $\triangle A_2B_2C_2$，并写出点 C_2 的坐标；

(3)已知 $\triangle ABC$ 关于直线 l 对称的 $\triangle A_3B_3C_3$ 的顶点 A_3 的坐标为(−4，−2)，请直接写出直线 l 的函数表达式.

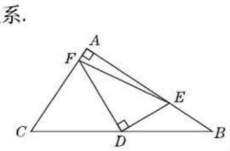


(第 11 题)

Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞(答案见 110 页)

拔尖角度 1 利用中心对称变换探究线段间的数量关系

12. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=90°$，点 D 为 BC 的中点，$DE\perp DF$，DE 交 AB 于点 E，DF 交 AC 于点 F，试探究线段 BE，EF，FC 之间的数量关系.



(第 12 题)

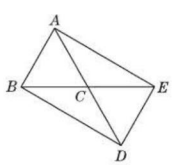
拔尖角度 2 利用中心对称的性质探究构成矩形的条件

13. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$\triangle ABC$ 与 $\triangle DEC$ 关于点 C 成中心对称，连接 AE，BD.

(1)线段 AE，BD 具有怎样的位置关系和数量关系？说明你的理由.

(2)如果 $\triangle ABC$ 的面积为 5 cm^2，求四边形 $ABDE$ 的面积.

(3)当 $\angle ACB$ 为多少度时，四边形 $ABDE$ 为矩形？说明你的理由.



(第 13 题)

趣味数学　**对称充满于海洋**　轴对称可见于蚶蛤等贝壳类动物、古生代的三叶虫、龙虾、鱼，以及其他动物身体的形状；而中心对称则见于放射虫类和海胆等.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第4课时　中心对称图形

名师点金

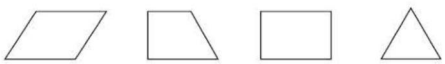
判断中心对称图形的“两个方法”

1. 若一个图形上，存在这样的一个点，使整个图形绕着这个点旋转180°后能够与原来的图形重合，则这个图形就是中心对称图形.
2. 若图形中对应点的连线都经过同一个点，并且被这个点平分，则这个图形就是中心对称图形.

Ⅰ 夯实基础·逐点练 （答案见110页）

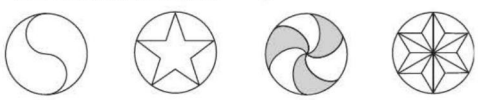
知识点1 中心对称图形的定义

1. 【中考·西藏】下列图形是轴对称图形，但不是中心对称图形的是(　　)



A　　B　　C　　D

2. 【中考·恩施州】在下列图形中，既是轴对称图形又是中心对称图形的是(　　)



A　　B　　C　　D

3. 【中考·玉林】如图，五星红旗上的每一个五角星(　　)

A. 是轴对称图形，但不是中心对称图形

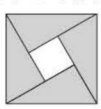
B. 是中心对称图形，但不是轴对称图形

C. 既是轴对称图形，又是中心对称图形

D. 既不是轴对称图形，也不是中心对称图形



（第3题）



（第4题）

4. 如图，对其对称性描述正确的是(　　)

A. 是轴对称图形

B. 是中心对称图形

C. 既是轴对称图形又是中心对称图形

D. 既不是轴对称图形也不是中心对称图形

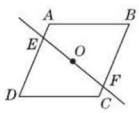
5. 【中考·攀枝花】下列平面图形中，既是中心对称图形，又是轴对称图形的是(　　)

A. 菱形　　B. 等边三角形

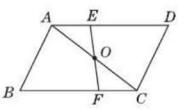
C. 平行四边形　　D. 等腰梯形

知识点2 中心对称图形的性质

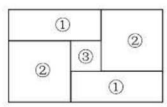
6. 如图，直线 EF 经过平行四边形 $ABCD$ 的对角线的交点 O，若 $AE=2$ cm，四边形 $AEFB$ 的面积为 12 cm^2，则 $CF=$_____，平行四边形 $ABCD$ 的面积为_____.



（第6题）



（第7题）



（第8题）

7. 如图，已知△ABC与△CDA关于点 O 成中心对称，过点 O 任作直线 EF 分别交 AD，BC 于点 E，F，下面的结论：①点 E 和点 F，点 B 和点 D 分别关于点 O 中心对称；②直线 BD 必经过点 O；③四边形 $ABCD$ 是中心对称图形；④四边形 $DEOC$ 与四边形 $BFOA$ 的面积必相等；⑤△AOE与△COF成中心对称. 其中正确的个数为(　　)

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

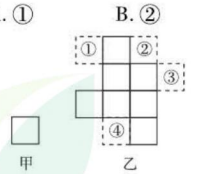
8. 【中考·宁波】如图，小明家的住房平面图呈长方形，被分割成3个正方形和2个长方形后仍是中心对称图形. 若只知道原住房平面图长方形的周长，则分割后不用测量就能知道周长的图形的标号为(　　)

A. ①②　　B. ②③　　C. ①③　　D. ①②③

知识点3 中心对称图形的作图

9. 【中考·河北】图甲和图乙中所有的小正方形都全等，将图甲的正方形放在图乙中①②③④的某一位置，使它与原来7个小正方形组成的图形是中心对称图形，这个位置是(　　)

A. ①　　B. ②　　C. ③　　D. ④



（第9题）



（第10题）

10. 如图，长方形 $ABCD$ 是篮球场的简图，请通过画图找出它的对称中心.

易错点 对中心对称图形识别不清

11. 有下列图形：①线段；②三角形；③平行四边形；④正方形；⑤圆；⑥等腰梯形. 其中不是中心对称图形的是_____.（填序号）

传说国王要奖赏国际象棋的发明者，问其有什么要求，聪明的发明者跪在国王面前说：“陛下，请在棋盘的每个格子里放麦粒，后一个格子放的麦粒数都是前一个格子里放的麦粒数的2倍.（待续）

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞(答案见 111 页)

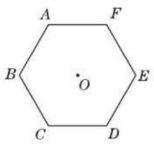
考查角度 1 利用中心对称图形的定义识别图形

12. 如图,正六边形 $ABCDEF$ 的中心是点 O.

(1)分析它的对称性;

(2)正六边形绕其中心旋转多少度可与自身重合?

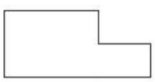
(3)还有哪些正多边形是中心对称图形?



(第 12 题)

考查角度 2 利用中心对称图形的性质等分面积

13. 如图,一块木板的所有拐角都是直角,一木工想要将它锯成面积相等的两块,请你帮他设计一种简单的方法,画出一条线,使这条线将木板分成面积相等的两部分.(画出必要的辅助线)



(第 13 题)

Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞(答案见 111 页)

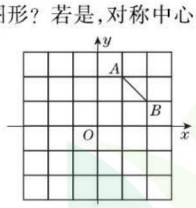
拔尖角度 1 利用旋转作图并判断所作图形的对称性

14. 已知 AB 在平面直角坐标系中的位置如图所示,每个小正方形的边长是 1.

(1)在 x 轴上找一点 C,画出 $\triangle ABC$,使 $\triangle ABC$ 是以 AB 为底的等腰三角形,并写出点 C 的坐标:_____.

(2)将(1)中所画的 $\triangle ABC$ 绕着点 C 分别按逆时针方向旋转 90°,180°,270°,画出旋转后的图形.

(3)请欣赏你画出的整个图形,想一想,整个图形是否是轴对称图形?若是,有多少条对称轴?整个图形是否是中心对称图形?若是,对称中心是什么?



(第 14 题)

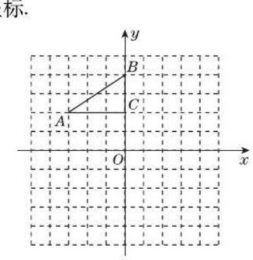
拔尖角度 2 利用图形变换的性质求相关点的坐标

15. 如图,在平面直角坐标系中,$\triangle ABC$ 的三个顶点的坐标分别是 $A(-3,2)$,$B(0,4)$,$C(0,2)$.

(1)将 $\triangle ABC$ 以点 C 为旋转中心旋转 180°,画出旋转后对应的 $\triangle A_1B_1C$;平移 $\triangle ABC$,若点 A 的对应点 A_2 的坐标为 $(0,-4)$,画出平移后对应的 $\triangle A_2B_2C_2$;

(2)若将 $\triangle A_1B_1C$ 绕某一点旋转可以得到 $\triangle A_2B_2C_2$,请直接写出旋转中心的坐标;

(3)在 x 轴上有一点 P,使得 $PA+PB$ 的值最小,请直接写出点 P 的坐标.



(第 15 题)

微信公众号
教辅资料站

趣味数学　直到第 64 个格子,请都赏给你的仆人吧!”国王听了很不以为然,没一会儿,他的报管就来报告了,“国王,如果满足他这个要求,我们国家要全国不吃不喝两千多年啊!”

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第5课时　图案设计

名师点金

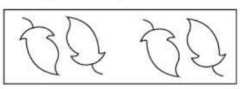
图案的设计常常利用轴对称、旋转、平移等方法，由于轴对称、旋转、平移现象在现实生活中普遍存在，并有广泛的应用和丰富的文化价值，因此轴对称变换、旋转变换、平移变换是设计图案常用的方法.

Ⅰ 夯实基础·逐点练

（答案见111页）

知识点1 分析图案的形成过程

1. 如图是一个镶边的模板，该图案是由基本图形（　　）通过一次平移得到的.

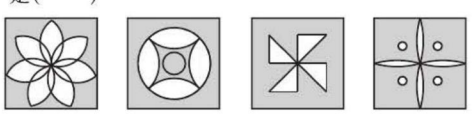


（第1题）



A　　B　　C　　D

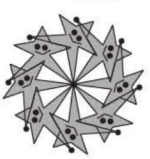
2. 【中考·烟台改编】在学习《图案设计》这一节时，老师要求同学们利用图形变化设计图案. 下列设计的图案中，是中心对称图形但不是轴对称图形的是（　　）



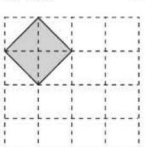
A　　B　　C　　D

3. 如图，若要使这个图案与自身重合，则至少绕它的中心旋转（　　）

A. 45°　　B. 90°　　C. 135°　　D. 180°



（第3题）

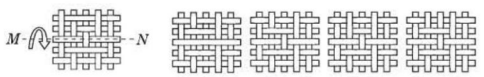


（第4题）

4. 【中考·枣庄】如图，在4×4的正方形网格中，每个小正方形的顶点称为格点，左上角阴影部分是一个以格点为顶点的正方形（简称格点正方形）. 若再作一个格点正方形，并涂上阴影，使这两个格点正方形无重叠面积，且组成的图形既是轴对称图形，又是中心对称图形，则这个格点正方形的作法共有（　　）

A. 2种　　B. 3种　　C. 4种　　D. 5种

5. 【中考·绍兴】一块竹条编织物，先将其按如图所示绕直线 MN 翻转180°，再将它按逆时针方向旋转90°，所得的竹条编织物是（　　）



（第5题）

A　　B　　C　　D

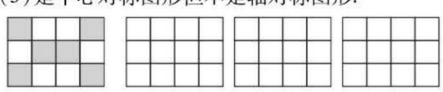
知识点2 设计图案

6. 如图 a，在4×3的网格上，由个数相同的白色方块与黑色方块组成一幅图案，请仿照此图案，在图 b 的网格中设计符合要求的图案.（注：①不得与原图案相同；②黑、白方块的个数要相同）

（1）是轴对称图形也是中心对称图形；

（2）是轴对称图形但不是中心对称图形；

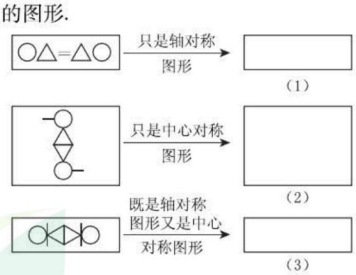
（3）是中心对称图形但不是轴对称图形.



a　　b

（第6题）

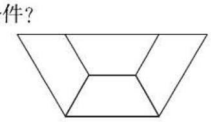
7. 以给出的图形“○”“○”“△”“△”“═”（两个相同的圆、两个相同的等边三角形、两条线段）为构件，各设计一个构思独特且有意义的轴对称图形或中心对称图形. 举例：如图，左框中是符合要求的一个图形. 你还能构思出其他的图形吗？请在右框中画出与之不同的图形.



（第7题）

易错点 分析图案要从角和边两个角度去考虑

8. 如图所示的图案是由一个梯形经过旋转和对称形成的，则该梯形应该满足什么条件？



（第8题）

生命从最原始的单细胞动物向多细胞动物演化，最早拥有了以“对称性”为特征的复杂性，每个个体都有来自于父母的染色体和相应的基因，虽然隐性基因并不表现出来.（待续）

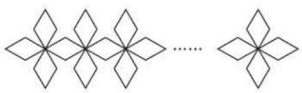
趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞(答案见 111 页)

考查角度 1 有规律排列的图案的探究

9. 一个由小平行四边形组成的装饰链,断去了一部分,剩下部分如图所示,则断去部分的小平行四边形的个数可能是(　　)

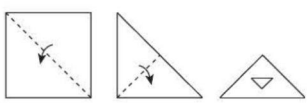


(第 9 题)

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

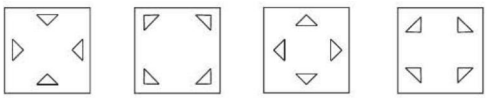
考查角度 2 剪纸图案的分析

10. 【中考 · 绥化】如图,把一张正方形纸片按图①,图②对折两次后,再按图③挖去一个三角形小孔,则展开后的图形是(　　)　【导学号:9513162】



①　②　③

(第 10 题)



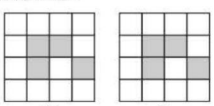
A　B　C　D

考查角度 3 图案的开放设计

11. 【中考 · 天门】如图,4 × 4 的网格图都是由 16 个相同小正方形组成,每个网格图中有 4 个小正方形已涂上阴影,请在空白小正方形中,按下列要求涂上阴影.

(1) 在图①中选取 2 个空白小正方形涂上阴影,使 6 个阴影小正方形组成一个中心对称图形.

(2) 在图②中选取 2 个空白小正方形涂上阴影,使 6 个阴影小正方形组成一个轴对称图形,但不是中心对称图形.



①　②

(第 11 题)

Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞(答案见 111 页)

拔尖角度 1 分析图案的形成过程

12. 如图所示的图案是由 7 个正六边形组成的,下面是三名同学对该图案的形成过程的不同见解.

甲:该图案可看成是由其中一个正六边形经过 6 次平移而形成的.

乙:该图案可看成是由图案的一半经过轴对称变换而形成的.

丙:该图案可看成是由图案的一半经过中心对称变换而形成的.

你认为上述观点都正确吗?



(第 12 题)

拔尖角度 2 由指定基本图案设计图形

13. 利用 1 个等腰三角形、2 个长方形、3 个圆,可以构造出许多独特且有意义的轴对称图形,如图已给出四幅图,你能再构思出一些轴对称图形吗(画出 3 幅即可)? 别忘了加一两句贴切、有创意的解说词.



(第 13 题)

微信公众号
教辅资料站

趣味数学　在越来越多基因被克隆出来以后,寻找控制对称性状的基因,成为寻找新发现的有力线索. 一般相信,某些对称性状是由若干对基因所控制的,也决定某些非对称性状的特化.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

阶段方法技巧训练(一)

专训 1 图形的变换——平移、旋转与对称 (答案见111页)

名师点金

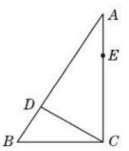
图形的旋转实质是只改变图形位置的全等变换，在这个变换过程中有对应线段相等、对应角相等……一些等量关系，利用这些等量关系可以解决线段、角、面积的计算等有关问题.

技巧 1 图形的旋转在求角度中的应用

1. 【中考·荆门】如图，在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，点 D，E 分别在 AB，AC 上，$CE=BC$，连接 CD，将线段 CD 绕点 C 按顺时针方向旋转 90°后得 CF，连接 EF.

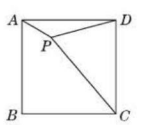
(1)补充完成图形；

(2)若 $EF\parallel CD$，求证：$\angle BDC=90°$.



(第1题)

2. 如图，在正方形 $ABCD$ 内有一点 P，$PA=1$，$PD=2$，$PC=3$，求 $\angle APD$ 的度数.

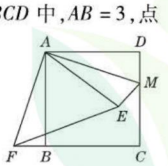


(第2题)

技巧 2 图形的旋转在求线段长中的应用

3. 【中考·桂林】如图，在正方形 $ABCD$ 中，$AB=3$，点 M 在 CD 边上，且 $DM=1$，△AEM 与△ADM 关于 AM 所在的直线对称，将△ADM 按顺时针方向绕点 A 旋转 90°得到△ABF，连接 EF，则线段 EF 的长为(　　)

A. 3　　B. $2\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{13}$　　D. $\sqrt{15}$

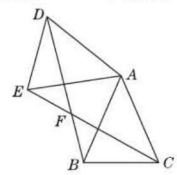


(第3题)

4. 【中考·毕节】如图，已知△ABC 中，$AB=AC$，把△ABC 绕 A 点沿顺时针方向旋转得到△ADE，连接 BD，CE 交于点 F.

(1)求证：△AEC≌△ADB；

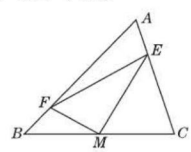
(2)若 $AB=2$，$\angle BAC=45°$，当四边形 $ADFC$ 是菱形时，求 BF 的长.



(第4题)

技巧 3 旋转在说明线段不等关系中的应用

5. 如图所示，在△ABC 中，M 是 BC 的中点，E，F 分别在 AC，AB 上，且 $ME\perp MF$，求证：$EF<BF+CE$.



(第5题)

技巧 4 利用旋转确定点的坐标

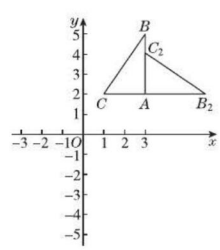
6. 【中考·衡阳】如图，在平面直角坐标系中，△ABC 的三个顶点的坐标分别为 $A(3,2)$，$B(3,5)$，$C(1,2)$.

(1)在平面直角坐标系中画出△ABC 关于 x 轴对称的△$A_1B_1C_1$.

(2)把△ABC 绕点 A 顺时针旋转一定的角度，得到图中的△AB_2C_2，点 C_2 在 AB 上.

①旋转角为多少度？

②写出点 B_2 的坐标.



(第6题)

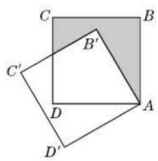
奥林匹克五环图案的数学美　奥林匹克五环是奥林匹克的标志，它由5个圆环组成，从左至右，从上到下，环环相扣.(待续)

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

技巧 5　利用旋转求面积

7. 如图，将边长为$\sqrt{3}$的正方形 $ABCD$ 绕点 A 逆时针旋转 30°后得到正方形 $AB'C'D'$，求图中阴影部分的面积.



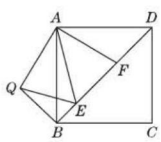
（第 7 题）

技巧 6　旋转在说明平方关系中的应用

8. 【中考 · 日照】如图，在正方形 $ABCD$ 中，E，F 是对角线 BD 上两点，且 $\angle EAF = 45°$，将 $\triangle ADF$ 绕点 A 顺时针旋转 90°后，得到 $\triangle ABQ$，连接 EQ. 求证：

（1）EA 是 $\angle QED$ 的平分线；

（2）$EF^2 = BE^2 + DF^2$.



（第 8 题）

技巧 7　旋转在说明图形全等中的应用

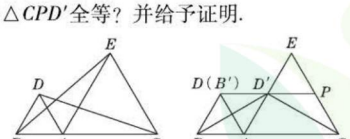
9. 如图①，点 A 是线段 BC 上一点，$\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 都是等边三角形.

（1）连接 BE，CD，求证：$BE = CD$.

（2）如图②，将 $\triangle ABD$ 绕点 A 顺时针旋转得到 $\triangle AB'D'$.

①当旋转角为_____度时，边 AD' 落在边 AE 上；

②在①的条件下，延长 DD' 交 CE 于点 P，连接 BD'，CD'，当线段 AB，AC 满足什么数量关系时，$\triangle BDD'$ 与 $\triangle CPD'$ 全等？并给予证明.



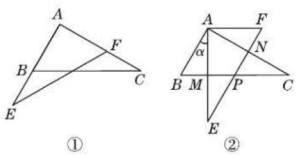
（第 9 题）

技巧 8　旋转在说明图形形状中的应用

10. 某校九年级学习小组在学习探究过程中，用两块完全相同的且含 60°角的直角三角板 ABC 与 AFE 按如图①所示位置放置. 现将 $\mathrm{Rt}\triangle AEF$ 绕 A 点按逆时针方向旋转角 $\alpha(0° < \alpha < 90°)$，如图②，$AE$ 与 BC 交于点 M，AC 与 EF 交于点 N，BC 与 EF 交于点 P.

（1）求证：$AM = AN$；

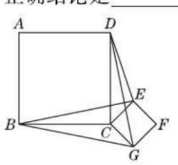
（2）当旋转角 $\alpha = 30°$ 时，判断四边形 $ABPF$ 的形状. 并说明理由.



（第 10 题）

技巧 9　旋转在说明线段位置关系中的应用

11. 【中考 · 南充】如图，正方形 $ABCD$ 和正方形 $CEFG$ 边长分别为 a 和 b，正方形 $CEFG$ 绕点 C 旋转，给出下列结论：①$BE = DG$；②$BE \perp DG$；③$DE^2 + BG^2 = 2a^2 + 2b^2$，其中正确结论是_____.（填序号）

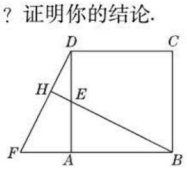


（第 11 题）

12. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，E 是 AD 的中点，F 是 BA 延长线上的一点，$AF = AE$，BE 的延长线交 DF 于点 H，已知 $\triangle ABE \cong \triangle ADF$.

（1）在图中，可以通过平移、翻折、旋转中的哪一种方法，使 $\triangle ABE$ 变到 $\triangle ADF$ 的位置？

（2）线段 BE 与 DF 有什么关系？证明你的结论.



（第 12 题）

趣味数学　奥林匹克五环视觉上端庄大方、圆润流畅，是一个美丽的几何图形！奥林匹克五环的美，是因为它具有对称美、和谐美、简洁美和奇异美，是几何之美.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

专训 2 巧用图形变换作辅助线 ☞（答案见112页）

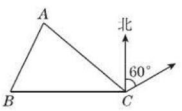
名师点金

平移、旋转、轴对称和中心对称这几种图形变换都可以改变图形的位置，而不改变图形的形状和大小，注意作图时要弄清平移的方向和距离、旋转的方向和角度，作图要求准确、明了.

类型1 平移作图

题型1 已知平移方向和距离作图

1. 如图，已知△ABC，将△ABC沿着北偏东60°的方向平移1 cm，作出平移后的图形.（不写作法，保留作图痕迹）



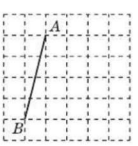
（第1题）

题型2 已知平移方法在网格（坐标系）中作图

2. 【中考·桂林】如图，在网格中，每个小正方形的边长均为1个单位长度，我们将小正方形的顶点叫做格点，线段AB的端点均在格点上.

（1）将线段AB向右平移3个单位长度，得到线段$A'B'$，画出平移后的线段并连接AB'和$A'B$，两线段相交于点O；

（2）求证：△AOB≌△$B'OA'$.

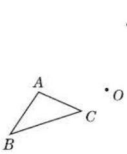


（第2题）

类型2 旋转作图

题型1 已知旋转角和旋转中心作图

3. 如图，将△ABC绕点O旋转后，顶点A的对应点为点D，试确定顶点B，C的对应点的位置并画出旋转后的三角形.



（第3题）

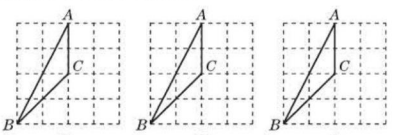
题型2 已知旋转方法在网格（坐标系）中作图

4. 【中考·枣庄】如图，在4×4的方格纸中，△ABC的三个顶点都在格点上.

（1）在图①中画出一个与△ABC成中心对称的格点三角形；

（2）在图②中，画出一个与△ABC成轴对称且△ABC有公共边的格点三角形；

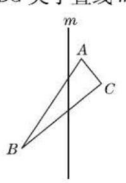
（3）在图③中，画出△ABC绕着点C按顺时针方向旋转90°后的三角形.



（第4题）

类型3 轴对称作图

5. 请作出图中与△ABC关于直线m成轴对称的图形.



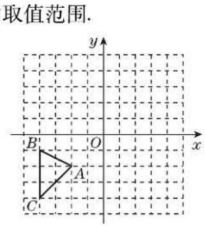
（第5题）

类型4 中心对称作图

6. 【中考·金华】如图，在平面直角坐标系中，△ABC各顶点的坐标分别为$A(-2,-2)$，$B(-4,-1)$，$C(-4,-4)$.

（1）作出△ABC关于原点成中心对称的△$A_1B_1C_1$.

（2）作出点A关于x轴的对称点A'. 若把点A'向右平移a个单位长度后落在△$A_1B_1C_1$的内部（不包括顶点和边界），求a的取值范围.



（第6题）

微信公众号 教辅资料站

我国最早记载了雪花是六角菱形. 其实，雪花形状千奇百怪，但又万变不离其宗，既是中心对称图形，又是轴对称图形.

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

24.2　圆的基本性质

24.2.1　垂径分弦

第 1 课时　圆的认识

名师点金

理解圆的定义要注意两层含义

1. 圆上各点到圆心的距离都相等，到圆心距离等于半径的点必定在圆上；
2. 当一条线段绕着它的一个端点在平面内旋转一周时，它的另一个端点的运动轨迹就是一个圆.

Ⅰ 夯实基础 · 逐点练 ☞(答案见 113 页)

知识点 1　圆的定义

1. 下列关于圆的叙述中正确的是(　　)

A. 圆是由圆心唯一确定的

B. 圆是一条封闭的曲线

C. 平面上到定点的距离小于或等于定长的所有点组成圆

D. 圆内任意一点到圆心的距离都相等

2. 平面内已知点 P，以 P 为圆心，3 cm 为半径作圆，这样的圆可以作(　　)

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 无数个

3. 下列图形中，四个顶点一定在同一个圆上的是(　　)

A. 菱形、平行四边形　　B. 矩形、正方形

C. 正方形、菱形　　D. 矩形、平行四边形

知识点 2　与圆有关的概念

4. 下列说法中，正确的是(　　)

①弦是直径；②半圆是弧；③过圆心的线段是直径；④半圆是最长的弧；⑤直径是圆中最长的弦.

A. ②③　　B. ③⑤　　C. ④⑤　　D. ②⑤

5. 如图，点 A,B,C 在⊙O 上，点 O 在线段 AC 上，点 D 在线段 AB 上，下列说法正确的是(　　)

A. 线段 AB,AC,CD,OB 都是弦

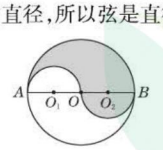
B. 与线段 OB 相等的线段有 OA,OC,CD

C. 图中的优弧有 2 条

D. AC 是弦，AC 又是⊙O 的直径，所以弦是直径



(第 5 题)



(第 7 题)

6. 下列说法中，错误的是(　　)

A. 直径相等的两个圆是等圆

B. 长度相等的两条弧是等弧

C. 圆中最长的弦是直径

D. 一条弦把圆分成两条弧，这两条弧可能相等

7. 【中考 · 赤峰】如图，⊙O 的半径为 1，分别以⊙O 的直径 AB 上的两个四等分点 O_1,O_2 为圆心，$\frac{1}{2}$ 为半径作半圆，则图中阴影部分的面积为(　　)

A. π　　B. $\frac{1}{2}\pi$　　C. $\frac{1}{4}\pi$　　D. 2π

知识点 3　点与圆的位置关系

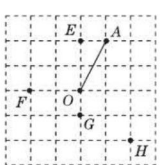
8. ⊙O 的半径为 5 cm，点 A 到圆心 O 的距离 OA = 3 cm，则点 A 与⊙O 的位置关系为(　　)

A. 点 A 在圆上　　B. 点 A 在圆内

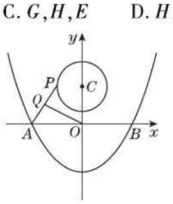
C. 点 A 在圆外　　D. 无法确定

9. 【中考 · 宜昌】在公园的 O 处附近有 E,F,G,H 四棵树，位置如图所示(图中小正方形的边长均相等)．现计划修建一座以 O 为圆心，OA 为半径的圆形水池，要求池中不留树木，则 E,F,G,H 四棵树中需要被移除的为(　　)

A. E,F,G　　B. F,G,H　　C. G,H,E　　D. H,E,F



(第 9 题)



(第 10 题)

10. 【中考 · 乐山】如图，抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2-4$ 与 x 轴交于 A,B 两点，P 是以点 $C(0,3)$ 为圆心，2 为半径的圆上的动点，Q 是线段 PA 的中点，连接 OQ，则线段 OQ 的最大值是(　　)

A. 3　　B. $\frac{\sqrt{41}}{2}$　　C. $\frac{7}{2}$　　D. 4

易错点 考虑问题不全面而致错

11. 【中考 · 绍兴】等腰三角形 ABC 中，顶角 A 为 40°，点 P 在以 A 为圆心，BC 长为半径的圆上，且 $BP=BA$，则∠PBC 的度数为_____.

趣味数学　**蒙古包**　蒙古包是对蒙古族牧民住房的称呼，这类住房形式不限于蒙古族，在中亚地区游牧民族中也很常见．蒙古包为天穹式，呈圆形，木架外边用白羊毛毡覆盖．(待续)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞（答案见113页）

考查角度1 利用圆的定义作图

12. 设 $AB=4$ cm，作出满足下列要求的图形.

（1）到点 A 的距离等于 3 cm 的所有点组成的图形，到点 B 的距离等于 2 cm 的所有点组成的图形；

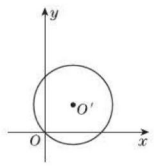
（2）到点 A 的距离等于 3 cm，且到点 B 的距离等于 2 cm的所有点组成的图形；

（3）到点 A 的距离小于 3 cm，且到点 B 的距离小于 2 cm的所有点组成的图形；

（4）到点 A 的距离大于 3 cm，且到点 B 的距离小于 2 cm的所有点组成的图形.

考查角度2 利用点与圆的位置关系判断点的位置

13. 如图，$\odot O'$ 过坐标原点 O，点 O' 的坐标为 $(1,1)$. 判断点 $P(-1,1)$，点 $Q(1,0)$，点 $R(2,2)$ 和 $\odot O'$ 的位置关系.



（第 13 题）

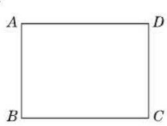
Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞（答案见113页）

拔尖角度1 利用点与圆的位置关系探究半径的范围

14. 如图，已知矩形 $ABCD$ 的边 $AB=3$ cm，$AD=4$ cm.

（1）若以点 A 为圆心，4 cm 为半径作 $\odot A$，则点 B，C，D 和 $\odot A$ 的位置关系如何？

（2）若以点 A 为圆心作 $\odot A$，使 B，C，D 三点中至少有一点在 $\odot A$ 内且至少有一点在 $\odot A$ 外，则 $\odot A$ 的半径 r 的取值范围是多少？



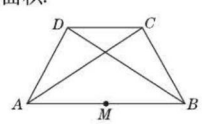
（第 14 题）

拔尖角度2 利用圆的定义探究点是否在圆上

15. 如图，在等腰梯形 $ABCD$ 中，$AB\parallel CD$，$AD=BC$. 将 $\triangle ACD$ 沿对角线 AC 翻折后，点 D 恰好与边 AB 的中点 M 重合.

（1）点 C 是否在以 AB 为直径的圆上？请说明理由.

（2）当 $AB=4$ 时，求此梯形的面积.



（第 15 题）

教你一招

判断点与圆的位置关系的方法 判断点与圆的位置关系时，比较点到圆心的距离与圆的半径即可. 当点到圆心的距离大于圆的半径时，点在圆外；当点到圆心的距离等于圆的半径时，点在圆上；当点到圆心的距离小于圆的半径时，点在圆内.

因为它是圆形的，所以立在草原上，大风雪中阻力小，大地震中不会变形，顶上又不易积雪，寒气不易侵入，是非常安全且保暖的住所.

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 2 课时　圆的半径的应用

名师点金

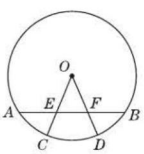
由圆的定义知圆上各点到圆心的距离相等，即同圆的半径相等. 圆的这一特征，在构造圆的半径，证相等关系中应用比较广泛.

整合方法 · 分类练

(答案见 114 页)

类型 1　利用“同圆的半径相等”证线段相等

1. 如图，AB 是 $\odot O$ 的弦，半径 OC，OD 分别交 AB 于点 E，F，且 $AE = BF$，请你判断线段 OE 与 OF 的数量关系，并说明理由.



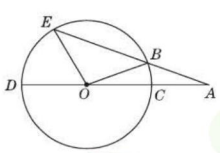
(第 1 题)

类型 2　利用“同圆的半径相等”求角的度数

2. 如图，CD 是 $\odot O$ 的直径，点 A 在 DC 的延长线上，$\angle A = 20°$，AE 交 $\odot O$ 于点 B，且 $AB = OC$. 求：

(1) $\angle AOB$ 的度数；

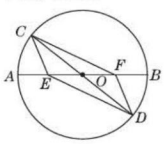
(2) $\angle EOD$ 的度数.



(第 2 题)

类型 3　利用“同圆的半径相等”证明平行四边形

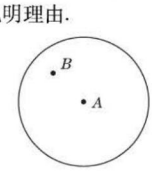
3. 如图，AB，CD 为 $\odot O$ 的两条直径，E，F 分别为 OA，OB 的中点. 求证：四边形 $CEDF$ 为平行四边形.



(第 3 题)

类型 4　利用圆的半径解决实际应用问题

4. 如图，海军某部队在灯塔 A 周围进行爆破作业，灯塔 A 的周围 3 km 的水域为危险水域，有一渔船误入离灯塔 A 2 km 远的 B 处，为了尽快驶离危险区域，该渔船应按哪条射线方向航行？并说明理由.



(第 4 题)

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第3课时　垂直于弦的直径

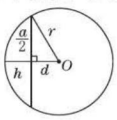
名师点金

垂径定理基本图形计算中的四变量、两关系

1. 四变量：如图，弦长为 a，圆心到弦的距离（弦心距）为 d，半径为 r，弧的中点到弦的距离（弓形高）为 h，这四个变量知任意两个可求其他两个.

2. 两关系：(1) $\left(\frac{a}{2}\right)^2+d^2=r^2$；(2) $h+d=r$.

注意：计算时常作半径或过圆心作弦的垂线段来构造直角三角形.



Ⅰ 夯实基础 · 逐点练 ☞（答案见114页）

知识点1 圆的轴对称性

1. 下面四个图形分别是节能、节水、低碳和绿色食品标志，在这四个标志中，是轴对称图形的是（　　）

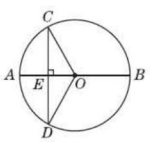


知识点2 垂径定理

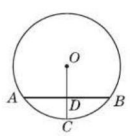
2. 【中考 · 广元】如图，已知⊙O 的直径 $AB\perp$ 弦 CD 于点 E，则下列结论中错误的是（　　）

A. $CE=DE$　　B. $AE=OE$

C. $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BD}$　　D. $\triangle OCE\cong\triangle ODE$



（第2题）



（第3题）

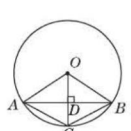
3. 如图，AB 是⊙O 的弦，半径 $OC\perp AB$ 于点 D，若⊙O 的半径为5，$AB=8$，则 CD 的长是（　　）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

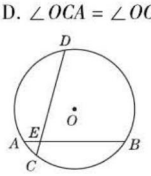
4. 【中考 · 上海】如图，已知⊙O 中，AB 是弦，半径 $OC\perp AB$，垂足为点 D. 要使四边形 $OACB$ 为菱形，还需要添加一个条件，这个条件可以是（　　）

A. $AD=BD$　　B. $OD=CD$

C. $\angle CAD=\angle CBD$　　D. $\angle OCA=\angle OCB$



（第4题）

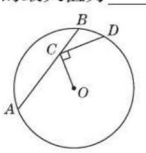


（第5题）

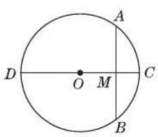
5. 【中考 · 梧州】如图，在半径为 $\sqrt{13}$ 的⊙O 中，弦 AB 与 CD 交于点 E，$\angle DEB=75°$，$AB=6$，$AE=1$，则 CD 的长是（　　）

A. $2\sqrt{6}$　　B. $2\sqrt{10}$　　C. $2\sqrt{11}$　　D. $4\sqrt{3}$

6. 【中考 · 嘉兴】如图，在⊙O 中，弦 $AB=1$，点 C 在 AB 上移动，连接 OC，过点 C 作 $CD\perp OC$ 交⊙O 于点 D，则 CD 的最大值为_____.



（第6题）



（第7题）

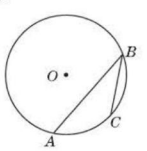
知识点3 垂径定理的推论

7. 如图，⊙O 的直径 $CD=10$ cm，AB 是⊙O 的弦，$AM=BM$，$OM:OC=3:5$，则 AB 的长为（　　）

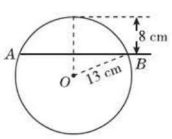
A. 8 cm　　B. $\sqrt{91}$ cm　　C. 6 cm　　D. 2 cm

8. 【中考 · 威海】如图，⊙O 的半径为5，AB 为弦，点 C 为 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点，若 $\angle ABC=30°$，则弦 AB 的长为（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. 5　　C. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$　　D. $5\sqrt{3}$



（第8题）



（第9题）

9. 如图，在半径为 13 cm 的圆形铁片上切下一块高为 8 cm 的弓形铁片，则弓形弦 AB 的长为（　　）

A. 10 cm　　B. 16 cm　　C. 24 cm　　D. 26 cm

易错点 考虑问题不全面而漏解

10. 【中考 · 安顺】已知⊙O 的直径 $CD=10$ cm，AB 是⊙O 的弦，$AB\perp CD$，垂足为 M，且 $AB=8$ cm，则 AC 的长为（　　）

A. $2\sqrt{5}$ cm　　B. $4\sqrt{5}$ cm

C. $2\sqrt{5}$ cm 或 $4\sqrt{5}$ cm　　D. $2\sqrt{3}$ cm 或 $4\sqrt{3}$ cm

神奇的古建筑　在闽西南的南靖县，用夯土围合建造起来的楼房尚存10 000多座，有圆形、方形、五角形、半月形、交椅形、围裙形、凹字形等.（待续）

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

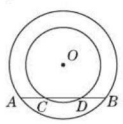
Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞(答案见 114 页)

考查角度 1 利用垂径定理解同心圆问题

11. 【中考 · 湖州】已知在以点 O 为圆心的两个同心圆中,大圆的弦 AB 交小圆于点 C,D(如图).

(1)求证:$AC = BD$;

(2)若大圆的半径 $R = 10$,小圆的半径 $r = 8$,且圆心 O 到直线 AB 的距离为 6,求 AC 的长.



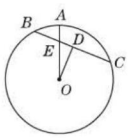
(第 11 题)

考查角度 2 利用垂径定理的推论解计算问题

12. 如图,D 是⊙O 的弦 BC 的中点,A 是⊙O 上一点,OA 与 BC 交于点 E,已知 $AO = 8$,$BC = 12$.

(1)求线段 OD 的长;

(2)当 $EO = \sqrt{2}BE$ 时,求 ED 的长.



(第 12 题)

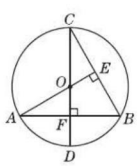
Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞(答案见 114 页)

拔尖角度 1 利用垂径定理解计算问题的应用

13. 如图,CD 为⊙O 的直径,$CD \perp AB$,垂足为 F,$AO \perp BC$,垂足为 E,$BC = 2\sqrt{3}$.

(1)求 AB 的长;

(2)求⊙O 的半径.



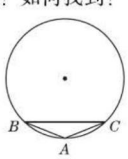
(第 13 题)

拔尖角度 2 利用垂径定理建模解实际应用问题

14. 本市新建一座圆形人工湖,为测量该湖的半径,小杰和小丽沿湖边选取 A,B,C 三根木柱,使得 A,B 之间的距离与 A,C 之间的距离相等,并测得 BC 长为 120 米,A 到 BC 的距离为 4 米,如图所示.

(1)请你帮他们求出该人工湖的半径;

(2)如果在圆周上再另取一点 P,建造一座连接 B,C,P 三点的三角形艺术桥,且△BCP 为直角三角形,问:这样的 P 点可以有几处?如何找到?



(第 14 题)

趣味数学　这些楼房千姿百态,气势非凡,给人以感染力和震撼力.如此奇妙的建构和变化多端的造型在世界民居建筑中是极其罕见的.(待续)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

24.2.2 圆心角、弧、弦、弦心距间关系

名师点金

同一圆中证明两弦相等的“五种方法”

1. 若两弦位于两个不同的三角形，证明两弦所在的三角形全等；
2. 若两弦位于同一个三角形中，根据等角对等边证明两弦相等；
3. 在同一圆中证明两弦所对的弧相等（同一类弧）；
4. 证明两弦所对的圆心角相等；
5. 证明两弦的弦心距相等.

1 夯实基础·逐点练 ☞（答案见115页）

知识点1 圆的旋转对称性

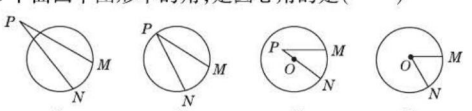
1. 下列说法中正确的有（　　）

（1）圆是轴对称图形；（2）圆是旋转对称图形；（3）圆不是中心对称图形；（4）圆是轴对称图形但不是旋转对称图形.

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

知识点2 圆心角

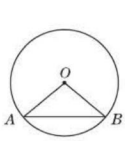
2. 下面四个图形中的角，是圆心角的是（　　）



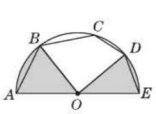
A　　B　　C　　D

3. 如图，AB 为$\odot O$ 的弦，$\angle A=40°$，则$\overset{\frown}{AB}$所对的圆心角等于（　　）

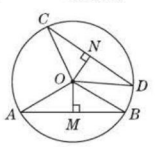
A. 40°　　B. 80°　　C. 100°　　D. 120°



（第3题）



（第4题）



（第5题）

4. 【中考·武威】如图，半圆 O 的直径 $AE=4$，点 B，C，D 均在半圆上，若$AB=BC$，$CD=DE$，连接 OB，OD，则图中阴影部分的面积为_____.

知识点3 圆心角、弧、弦、弦心距间的关系

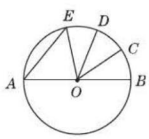
5. 如图，AB，CD 分别为$\odot O$ 的两条弦，$OM\perp AB$ 于 M，$ON\perp CD$ 于 N，且 $OM=ON$，则（　　）

A. $AB=CD$　　B. $\angle AOB=\angle COD$

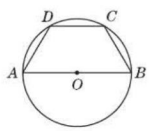
C. $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$　　D. 以上结论都对

6. 【中考·贵港】如图，AB 是$\odot O$ 的直径，$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}$，$\angle COD=34°$，则$\angle AOE$ 的度数是（　　）

A. 51°　　B. 56°　　C. 68°　　D. 78°



（第6题）



（第7题）

7. 如图，AB 是$\odot O$ 的直径，BC，CD，DA 是$\odot O$ 的弦，若 $BC=CD=DA=4$ cm，则$\odot O$ 的周长为（　　）

A. 5π cm　　B. 6π cm　　C. 9π cm　　D. 8π cm

8. 在$\odot O$ 中，M，N 分别为弦 AB，CD 的中点，如果$OM=ON$，那么下列结论：① $AB=CD$；② $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$；③$\angle AOB=\angle COD$ 中，正确的是（　　）

A. ①②　　B. ①③　　C. ②③　　D. ①②③

9. 如图，点 A，B，C，D 均在$\odot O$ 上，且$\angle AOB=\angle COD$，连接 AB，CD，AC，BD. 下列结论：

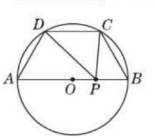
①$AB=CD$；②$\angle AOC=\angle BOD$；③$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$；

④$\triangle AOC\cong\triangle BOD$.

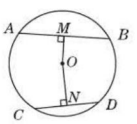
其中正确的结论是_____.（写序号即可）



（第9题）



（第10题）



（第11题）

10. 如图，AB 是$\odot O$ 的直径，$AB=10$，BC，CD，DA 是$\odot O$ 的弦，且 $BC=CD=DA$，若点 P 是直径 AB 上的一动点，则 $PD+PC$ 的最小值为_____.

易错点 对圆中的有关线段的关系运用不当而致错

11. 如图，在$\odot O$ 中，弦 $AB>CD$，$OM\perp AB$ 于 M，$ON\perp CD$ 于 N，那么 OM，ON 的大小关系是（　　）

A. $OM>ON$　　B. $OM=ON$

C. $OM<ON$　　D. 无法确定

不管多少土楼废弃又重建，都对环境无公害、无污染，与现在的钢筋、水泥或化学材料建成的楼房相比，土楼显示了“人与自然和谐相处”的巨大优势.

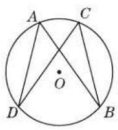
趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞(答案见 115 页)

考查角度 1 利用等弦证等弧

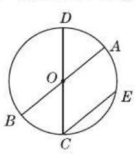
12. 如图所示,在⊙O 中,$AD=BC$,求证:$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$.



(第 12 题)

考查角度 2 利用等圆心角证等弧

13. 如图所示,AB,CD 是⊙O 的两条直径,弦 $CE\parallel AB$,求证:$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{AE}$. 【导学号:9513162】



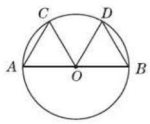
(第 13 题)

考查角度 3 利用弧、弦、圆心角之间的关系证明线段的相等与平行

14. 如图所示,AB 是⊙O 的直径,$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CD}$,$\angle COD=60°$.

(1) $\triangle AOC$ 是等边三角形吗?请说明理由.

(2)求证:$AC=BD$,$OC\parallel BD$.



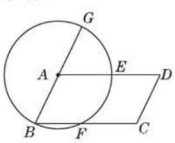
(第 14 题)

考查角度 4 利用圆心角与弧之间的关系求解有关问题

15. 如图,以▱$ABCD$ 的顶点 A 为圆心,AB 为半径作圆,分别交 AD,BC 于点 E,F,延长 BA 交⊙A 于点 G.

(1)求证:$\overset{\frown}{GE}=\overset{\frown}{EF}$;

(2)若$\overset{\frown}{BF}$的度数为 50°,求∠C 的度数.



(第 15 题)

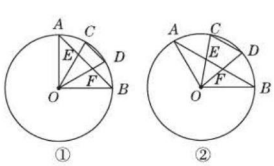
Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞(答案见 115 页)

拔尖角度 综合运用弧、弦、圆心角之间的关系探究与圆有关的相等的线段

16. (1)如图①,在⊙O 中,∠$AOB=90°$,且 C,D 是$\overset{\frown}{AB}$的三等分点,AB 分别交 OC,OD 于点 E,F.

求证:$AE=BF=CD$.

(2)在(1)题中,如果∠$AOB=120°$,其他条件不变,如图②所示,那么(1)中的结论还成立吗?若成立,请证明;若不成立,请说明理由.



(第 16 题)

趣味数学　**树木的年轮**　树木伐倒后,在树墩上可以看到有许多同心圆环,植物学上称其为年轮.年轮是树木在生长过程中受季节影响形成的,一年产生一轮.(待续)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

24.2.3 圆的确定

名师点金

1. 三角形外心的性质：三角形的外心是它的外接圆的圆心，它是三角形三边垂直平分线的交点，它到三角形各个顶点的距离相等；锐角三角形的外心在三角形的内部，直角三角形的外心是斜边的中点，钝角三角形的外心在三角形的外部.
2. 三角形的外接圆有且只有一个；一个圆的内接三角形却有无数个，这些三角形的外心重合.

Ⅰ 夯实基础·逐点练 （答案见115页）

知识点1 圆的确定

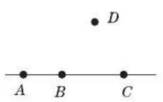
1. 下列说法中正确的是（　　）

A. 两个点确定一个圆　B. 三个点确定一个圆

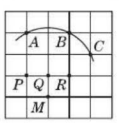
C. 四个点确定一个圆　D. 不共线的三个点确定一个圆

2. 如图，点 A,B,C 在同一条直线上，点 D 在直线 AB 外，过这四点中的任意三点，能画圆的个数是（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4



（第2题）



（第4题）

3. 已知 $AB=4$ cm，则过点 A,B 且半径为 3 cm 的圆有（　　）

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

4. 如图，在 5×5 的正方形网格中，一条圆弧经过 A,B,C 三点，那么这条圆弧所在圆的圆心是（　　）

A. 点 P　　B. 点 Q　　C. 点 R　　D. 点 M

5. 下列关于确定一个圆的说法中，正确的是（　　）

A. 三个点一定能确定一个圆

B. 以已知线段为半径能确定一个圆

C. 以已知线段为直径能确定一个圆

D. 菱形的四个顶点能确定一个圆

知识点2 三角形的外接圆、外心及其性质

6. 下列说法中，真命题的个数是（　　）

①任何三角形有且只有一个外接圆；

②任何圆有且只有一个内接三角形；

③三角形的外心不一定在三角形内；

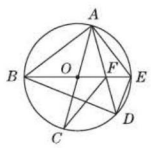
④三角形的外心到三角形三边的距离相等；

⑤经过三点确定一个圆.

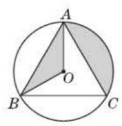
A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

7. 【中考·河北】如图，AC,BE 是 $\odot O$ 的直径，弦 AD 与 BE 交于点 F，下列三角形中，外心不是点 O 的是（　　）

A. $\triangle ABE$　　B. $\triangle ACF$　　C. $\triangle ABD$　　D. $\triangle ADE$



（第7题）



（第8题）

8. 【中考·通辽】如图，等边三角形 ABC 内接于 $\odot O$，若 $\odot O$ 的半径为 2，则图中阴影部分的面积等于（　　）

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{2}{3}\pi$　　C. $\frac{4}{3}\pi$　　D. 2π

9. 【中考·绥化】半径为 5 的 $\odot O$ 是锐角三角形 ABC 的外接圆，$AB=AC$，连接 OB,OC，延长 CO 交弦 AB 于点 D，若 $\triangle OBD$ 是直角三角形，则弦 BC 的长为_____.

知识点3 反证法

10. 用反证法证明命题时，第一步做法错误的是（　　）

A. 先作出与结论相反的假设

B. 先作出与结论排斥的假设

C. 假设命题的结论不成立

D. 先肯定命题的结论正确

11. 用反证法证明命题“三角形中必有一个内角小于或等于60°”时，首先应假设三角形中（　　）

A. 有一个内角大于60°　　B. 有一个内角小于60°

C. 每一个内角都大于60°　　D. 每一个内角都小于60°

12. 用反证法证明命题“若 $\odot O$ 的半径为 r，点 P 到圆心的距离为 d，且 $d>r$，则点 P 在 $\odot O$ 的外部”，应先假设_____.

易错点 忽视三角形的外心与三角形的位置关系，出现漏解

13. 在 $\triangle ABC$ 中，$BC=24$ cm，外心 O 到 BC 的距离为 5 cm，求 $\triangle ABC$ 的外接圆半径.

年轮中蕴含着大量的气候、天文、医学和环境等方面的历史信息.同时，在历史考古、林业研究、地质和公安破案等方面，年轮也起着重要的作用.（待续）

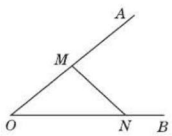
趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞(答案见 116 页)

考查角度 1　利用确定圆的条件在已知图中作图

14. 【中考 · 兰州】如图,在图中求作⊙P,使⊙P 满足以线段 MN 为弦且圆心 P 到∠AOB 两边的距离相等.(要求:尺规作图,不写作法,保留作图痕迹)

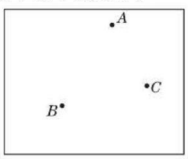


(第 14 题)

考查角度 2　利用三角形外接圆的定义解实际应用问题

15. 小颖家的房前有一块矩形的空地,空地上有三棵树 A,B,C,小颖想建一个圆形花坛,使三棵树都在花坛的边上.

(1)请你帮小颖把花坛的位置画出来(尺规作图,不写作法,保留作图痕迹);



(第 15 题)

(2)若在△ABC 中,AB = 8 米,AC = 6 米,∠BAC = 90°,试求小颖家圆形花坛的面积.

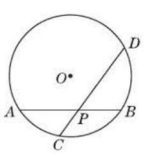
Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞(答案见 116 页)

拔尖角度 1　利用反证法证两线段的位置关系

16. 用反证法证明:圆内不是直径的两条弦不能互相平分.

已知:如图所示,AB,CD 是⊙O 内两条非直径的弦,且 AB 与 CD 相交于 P 点.

求证:AB 与 CD 不能互相平分.



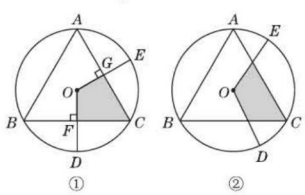
(第 16 题)

拔尖角度 2　利用三角形外接圆探究面积关系(割补法)

17. 如图①,在圆内接三角形 ABC 中,AB = BC = CA,OD,OE 为⊙O 的半径,OD ⊥ BC 于点 F,OE ⊥ AC 于点 G.

(1)求证:阴影部分四边形 $OFCG$ 的面积是△ABC 的面积的$\frac{1}{3}$;

(2)如图②,若∠DOE 保持 120°角不变,求证:当∠DOE 绕着点 O 旋转时,由两条半径和△ABC 的两边围成的图形(图中阴影部分)面积始终是△ABC 的面积的$\frac{1}{3}$.



(第 17 题)

趣味数学　我国在北半球,日照偏南方的缘故,树木的年轮往往是"南疏北密",因此在野外,树木的年轮也成为我们辨别方向的方式之一.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

24.3 圆周角

第1课时 圆周角和圆心角、弧的关系

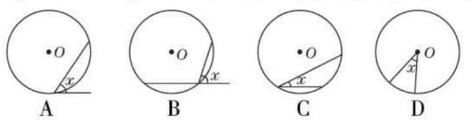
名师点金

“圆周角定理”是圆中的又一个重要定理，其作用在于转化同弧所对的圆心角与圆周角、同弧或等弧所对的圆周角之间的数量关系. 在应用这一定理时，要注意“同弧、等弧”的前提，只有准确识别图形中角的位置关系，才能得到角之间的数量关系.

1 夯实基础·逐点练 （答案见116页）

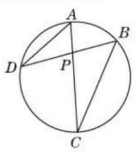
知识点1 圆周角的定义

1. 【中考·柳州】下列四个图中，$\angle x$ 为圆周角的是（　　）

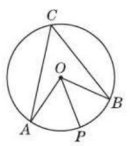


A　　B　　C　　D

2. 如图，图中的圆周角共有_____个，其中$\overset{\frown}{AB}$所对的圆周角是_____，$\overset{\frown}{CD}$所对的圆周角是_____.



（第2题）



（第3题）

知识点2 圆周角和圆心角的关系

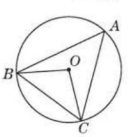
3. 【中考·吉林】如图，在$\odot O$中，$\overset{\frown}{AB}$所对的圆周角$\angle ACB=50°$，若P为$\overset{\frown}{AB}$上一点，$\angle AOP=55°$，则$\angle POB$的度数为（　　）

A. 30°　　B. 45°

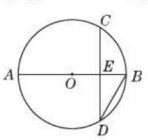
C. 55°　　D. 60°

4. 【中考·宜昌】如图，点A，B，C均在$\odot O$上，当$\angle OBC=40°$时，$\angle A$的度数是（　　）

A. 50°　　B. 55°　　C. 60°　　D. 65°



（第4题）



（第5题）

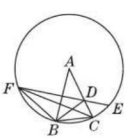
5. 【中考·黔南州】如图，AB是$\odot O$的直径，弦$CD\perp AB$于点E，$\angle CDB=30°$，$\odot O$的半径为5 cm，则圆心O到弦CD的距离为（　　）

A. $\frac{5}{2}$ cm　　B. 3 cm

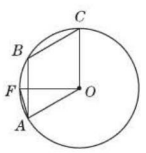
C. $3\sqrt{3}$ cm　　D. 6 cm

6. 【中考·云南】如图，B，C是$\odot A$上的两点，AB的垂直平分线与$\odot A$交于E，F两点，与线段AC交于点D. 若$\angle BFC=20°$，则$\angle DBC=$（　　）

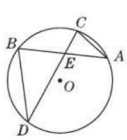
A. 30°　　B. 29°　　C. 28°　　D. 20°



（第6题）



（第7题）



（第8题）

7. 【中考·泰安】如图，A，B，C是$\odot O$上的三点，且四边形$ABCO$是平行四边形，$OF\perp OC$交$\odot O$于点F，则$\angle BAF$等于（　　）

A. 12.5°　　B. 15°　　C. 20°　　D. 22.5°

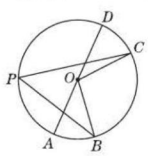
知识点3 同弧或等弧与所对圆周角的关系

8. 【中考·柳州】如图，A，B，C，D是$\odot O$上的点，则图中与$\angle A$相等的角是（　　）

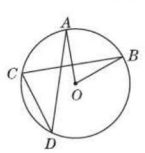
A. $\angle B$　　B. $\angle C$　　C. $\angle DEB$　　D. $\angle D$

9. 【中考·贵港】如图，AD是$\odot O$的直径，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，若$\angle AOB=40°$，则圆周角$\angle BPC$的度数是（　　）

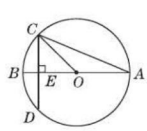
A. 40°　　B. 50°　　C. 60°　　D. 70°



（第9题）



（第10题）



（第11题）

10. 【中考·黄冈】如图，在$\odot O$中，$OA\perp BC$，$\angle AOB=70°$，则$\angle ADC$的度数为（　　）

A. 30°　　B. 35°　　C. 45°　　D. 70°

易错点 忽视勾股定理的应用而致错

11. 【中考·安顺】如图，$\odot O$的直径AB垂直于弦CD，垂足是E，$\angle A=22.5°$，$OC=4$，CD的长为（　　）

A. $2\sqrt{2}$　　B. 4

C. $4\sqrt{2}$　　D. 8

花朵为什么是圆的？在周长一定的情况下，圆的面积最大，对于花儿来说，圆形的面能吸引更多的蜜蜂和蝴蝶为它传粉，也能吸收到更多的阳光雨露，以利于它的生长.（待续）

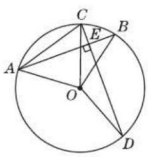
趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞(答案见 116 页)

考查角度 1 利用圆周角定理证角的关系

12. 如图,在⊙O 中,弦 AB,CD 垂直相交于点 E. 求证:$\angle BOC+\angle AOD=180°$.



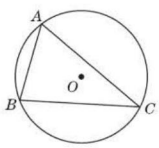
(第 12 题)

考查角度 2 利用圆周角定理的推论求线段长

13. 【中考 · 安徽】如图,⊙O 为锐角△ABC 的外接圆,半径为 5.

(1)用尺规作图作出∠BAC 的平分线,并标出它与劣弧 BC 的交点 E;(保留作图痕迹,不写作法)

(2)若(1)中的点 E 到弦 BC 的距离为 3,求弦 CE 的长.



(第 13 题)

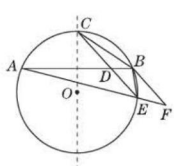
Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞(答案见 116 页)

拔尖角度 1 利用等弧所对的圆周角定理求面积问题

14. 【中考 · 株洲】如图,AB 为⊙O 的一条弦,点 C 是劣弧 AB 的中点,E 是优弧 AB 上一点,点 F 在 AE 的延长线上,且 $BE=EF$,线段 CE 交弦 AB 于点 D.

(1)求证:$CE/\!/BF$.

(2)若线段 BD 的长为 2,且 $EA:EB:EC=3:1:\sqrt{5}$,求△BCD 的面积. (注:根据圆的对称性可知$OC\perp AB$)



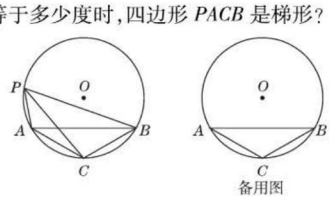
(第 14 题)

拔尖角度 2 利用同弧所对的圆周角定理探究面积最大问题

15. 如图,P 是⊙O 上的一个动点,弦 $AB=\sqrt{3}$,PC 是∠APB 的平分线,∠$BAC=30°$.

(1)当∠PAC 等于多少度时,四边形 $PACB$ 有最大面积,最大面积是多少?

(2)当∠PAC 等于多少度时,四边形 $PACB$ 是梯形?



(第 15 题)

趣味数学　茶壶盖为什么是圆的?　因为圆的直径、半径都相等,不容易掉下去.如果是方的话,可能掉到杯子里,并且方的容易把角碰掉,不是很安全.圆的符合大众的审美观,大家喜欢圆的,使用也方便.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第2课时　圆周角和直径的关系

名师点金

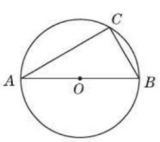
1. 已知直径时，常添加辅助线构造直角三角形，即“见直径想直角”. 题目中遇到直径时要考虑直径所对的圆周角为90°，遇到90°的圆周角时要考虑直角所对的弦为直径，这是圆中作辅助线的常用方法.
2. 在解决圆的有关问题时，常常利用圆周角定理及其推论进行两种转化：
   一是利用同弧所对的圆周角相等，进行角与角之间的转化；
   二是将圆周角相等的问题转化为弦相等或弧相等的问题.

1 夯实基础·逐点练 （答案见117页）

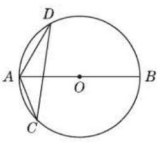
知识点1 直径所对的圆周角是直角

1. 【中考·张家界】如图，AB 是$\odot O$的直径，BC 是$\odot O$的弦，若$\angle OBC=60°$，则$\angle BAC$的度数是(　　)

A. 75°　　B. 60°　　C. 45°　　D. 30°



（第1题）



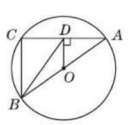
（第2题）

2. 【中考·毕节】如图，AB 是$\odot O$的直径，CD 是$\odot O$的弦，$\angle ACD=30°$，则$\angle BAD$为(　　)

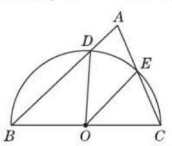
A. 30°　　B. 50°　　C. 60°　　D. 70°

3. 【中考·广元】如图，AB，AC 分别是$\odot O$的直径和弦，$OD\perp AC$ 于点 D，连接 BD，BC，且 $AB=10$，$AC=8$，则 BD 的长为(　　)

A. $2\sqrt{5}$　　B. 4　　C. $2\sqrt{13}$　　D. 4.8



（第3题）



（第4题）

4. 【中考·聊城】如图，BC 是半圆 O 的直径，D，E 是$\overset{\frown}{BC}$上两点，连接 BD，CE 并延长交于点 A，连接 OD，OE，如果$\angle A=70°$，那么$\angle DOE$的度数为(　　)

A. 35°　　B. 38°　　C. 40°　　D. 42°

5. 【中考·湖州】尺规作图特有的魅力曾使无数人沉湎其中，传说拿破仑通过下列尺规作图考他的大臣：

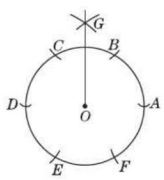
①将半径为 r 的$\odot O$六等分，依次得到 A，B，C，D，E，F 六个分点；

②分别以点 A，D 为圆心，AC 长为半径画弧，G 是两弧的一个交点；

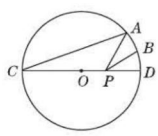
③连接 OG.

问：OG 的长是多少？大臣给出的正确答案应是(　　)

A. $\sqrt{3}r$　　B. $\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)r$　　C. $\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)r$　　D. $\sqrt{2}r$



（第5题）



（第6题）

6. 如图，CD 是$\odot O$的直径，$CD=4$，$\angle ACD=20°$，点 B 为弧 AD 的中点，点 P 是直径 CD 上的一个动点，则 $PA+PB$ 的最小值为_____.

知识点2 90°的圆周角所对的弦是直径

7. 下列结论正确的是(　　)

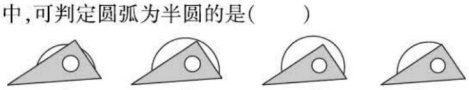
A. 直径所对的角是直角

B. 90°的圆心角所对的弦是直径

C. 同一条弦所对的圆周角相等

D. 半圆所对的圆周角是直角

8. 【中考·台州】从下列三角尺与圆弧的位置关系中，可判定圆弧为半圆的是(　　)



A　　B　　C　　D

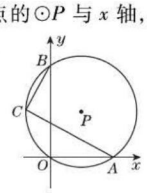
9. 【中考·兰州】如图，已知经过原点的$\odot P$与 x 轴，y 轴分别交于点 A，B，C 是劣弧 OB 上一点，则$\angle ACB$等于(　　)

A. 80°

B. 90°

C. 100°

D. 无法确定



（第9题）

易错点 求圆周角的度数时容易考虑不周全

10. 已知在半径为 4 的$\odot O$中，弦 $AB=4\sqrt{3}$，点 P 在圆上，则$\angle APB=$_____.

虽然我的知识在你们看起来很渊博，但我认为人的学习就像一个圆，学的东西越多，则圆的周长越长，周长越长则接触外面世界的机会就越多. ——爱因斯坦

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

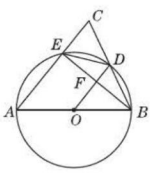
Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞(答案见 117 页)

考查角度 1　利用直径所对的圆周角是直角求边长(构造法)

11. 如图,在△ABC 中,$AB=AC$,以 AB 为直径的⊙O 分别交 BC,AC 于点 D,E,连接 EB 交 OD 于点 F.

(1)求证:$OD\perp BE$;

(2)若 $DE=\frac{\sqrt{5}}{2}$,$AB=\frac{5}{2}$,求 AE 的长.



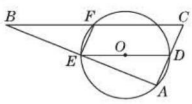
(第 11 题)

考查角度 2　利用 90°的圆周角所对的弦是直径求面积

12. 如图,已知 ED 为⊙O 的直径且 $ED=4$,点 A(不与 E,D 重合)为⊙O 上一个动点,线段 AB 经过点 E,且 $EA=EB$,F 为⊙O 上一点,$\angle FEB=90°$,BF 的延长线与 AD 的延长线交于点 C.

(1)求证:△EFB≌△ADE;

(2)当点 A 在⊙O 上移动时,直接回答四边形 $FCDE$ 的最大面积为多少.



(第 12 题)

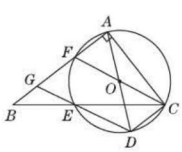
Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞(答案见 118 页)

拔尖角度 1　利用直径与圆周角的关系证明平行四边形(设元替代法)

13. 【中考 · 温州】如图,在△ABC 中,$\angle BAC=90°$,点 E 在 BC 边上,且 $CA=CE$,过 A,C,E 三点的⊙O 交 AB 于另一点 F,作直径 AD,连接 DE 并延长交 AB 于点 G,连接 CD,CF.

(1)求证:四边形 $DCFG$ 是平行四边形;

(2)当 $BE=4$,$CD=\frac{3}{8}AB$ 时,求⊙O 的直径长.



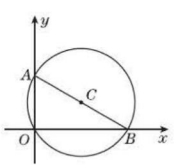
(第 13 题)

拔尖角度 2　利用圆周角探究存在性问题

14. 如图,⊙C 经过原点且与两坐标轴分别交于点 $A(0,2)$和点 $B(2\sqrt{3},0)$.

(1)求线段 AB 的长及∠ABO 的大小.

(2)在⊙C 上是否存在一点 P,使得△POB 是等腰三角形?若存在,请求出∠BOP 的度数;若不存在,请说明理由.



(第 14 题)

趣味数学　华罗庚说:"宇宙之大,粒子之微,火箭之速,化工之巧,地球之变,生物之谜,日用之繁,无处不用数学."

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

第3课时　圆内接四边形

名师点金

圆内接四边形的角的“三种关系”

1. 对角互补，若四边形 $ABCD$ 为 $\odot O$ 的内接四边形，则 $\angle A+\angle C=180°$，$\angle B+\angle D=180°$.
2. 四个内角的和是 $360°$，若四边形 $ABCD$ 为 $\odot O$ 的内接四边形，则 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360°$.
3. 任一外角与其相邻的内角的对角相等，简称圆内接四边形的外角等于其内对角.

Ⅰ 夯实基础·逐点练

☞（答案见118页）

知识点1 圆内接多边形

1. 下列说法正确的是(　　)

A. 在圆内部的多边形叫做圆内接多边形

B. 过四边形的四个顶点的圆叫做这个四边形的外接圆

C. 任意一个四边形都有外接圆

D. 一个圆只有唯一一个内接四边形

2. 下列多边形中一定有外接圆的是(　　)

A. 三角形　　B. 四边形　　C. 五边形　　D. 六边形

3. 下列命题中，不正确的是(　　)

A. 矩形有一个外接圆

B. 弦的垂直平分线一定平分弦所对的弧

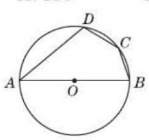
C. 菱形有一个外接圆

D. 任何一个三角形都有一个外接圆

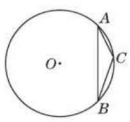
知识点2 圆内接四边形对角互补

4. 【中考·兰州】如图，四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$，若 $\angle A=40°$，则 $\angle C=$(　　)

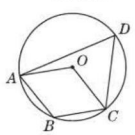
A. 110°　　B. 120°　　C. 135°　　D. 140°



（第4题）



（第5题）



（第6题）

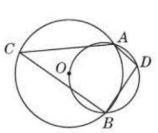
5. 【中考·扬州】如图，已知 $\odot O$ 的半径为2，$\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$，$\angle ACB=135°$，则 $AB=$_____.

6. 【中考·兰州】如图，四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$，若四边形 $ABCO$ 是平行四边形，则 $\angle ADC=$(　　)

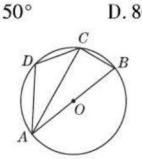
A. 45°　　B. 50°　　C. 60°　　D. 75°

7. 如图，两圆相交于 A，B 两点，小圆经过大圆圆心 O，点 C，D 分别在两圆上，若 $\angle ADB=100°$，则 $\angle ACB$ 的度数为(　　)

A. 35°　　B. 40°　　C. 50°　　D. 80°



（第7题）



（第8题）

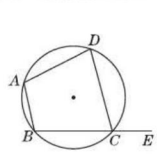
8. 【中考·牡丹江】如图，四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$，AB 经过圆心，$\angle B=3\angle BAC$，则 $\angle ADC$ 等于(　　)

A. 100°　　B. 112.5°

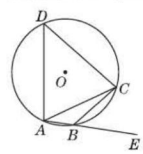
C. 120°　　D. 135°

知识点3 圆内接四边形的外角等于其内对角

9. 如图，四边形 $ABCD$ 是圆内接四边形，E 是 BC 的延长线上一点，若 $\angle BAD=105°$，则 $\angle DCE=$_____.



（第9题）



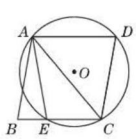
（第10题）

10. 【中考·广东】如图，四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$，$DA=DC$，$\angle CBE=50°$，则 $\angle DAC$ 的大小为(　　)

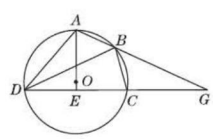
A. 130°　　B. 100°　　C. 65°　　D. 50°

11. 【中考·天水】如图，四边形 $ABCD$ 是菱形，$\odot O$ 经过点 A，C，D，与 BC 相交于点 E，连接 AC，AE. 若 $\angle D=80°$，则 $\angle EAC$ 的度数为(　　)

A. 20°　　B. 25°　　C. 30°　　D. 35°



（第11题）



（第12题）

12. 【中考·潍坊】如图，四边形 $ABCD$ 为 $\odot O$ 的内接四边形，延长 AB 与 DC 相交于点 G，$AO\perp CD$，垂足为 E，连接 BD，$\angle GBC=50°$，则 $\angle DBC$ 的度数为(　　)

A. 50°　　B. 60°　　C. 80°　　D. 85°

易错点 画图时考虑不全而漏解

13. 已知 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$，$OD\perp AC$ 于点 D，如果 $\angle COD=32°$，那么 $\angle B$ 的度数为(　　)

A. 16°　　B. 32°

C. 16°或164°　　D. 32°或148°

关于数学思维举例　我们在大街上看到的下水道井盖为什么都是圆的呢？美术教师说，圆形更讨人喜欢；语文教师说，圆形显得饱满……（待续）

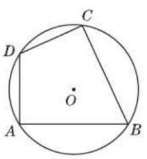
趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞(答案见 118 页)

考查角度 1 利用圆内接四边形的性质求边长

14. 【中考 · 无锡】如图,四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$,$AB=17$,$CD=10$,$\angle A=90°$,$\cos B=\frac{3}{5}$,求 AD 的长.



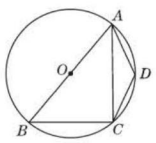
(第 14 题)

考查角度 2 利用圆内接四边形的性质求边的关系

15. 如图,四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$,$\angle B=50°$,$\angle ACD=25°$,$\angle BAD=65°$. 求证:

(1) $AD=CD$;

(2) AB 是 $\odot O$ 的直径.



(第 15 题)

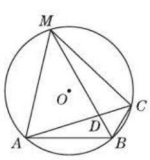
Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞(答案见 118 页)

拔尖角度 1 利用圆内接四边形的性质证线段的和差关系(截长补短法)

16. 【中考 · 包头】如图,在 $\odot O$ 中,B 是 $\odot O$ 上的一点,$\angle ABC=120°$,弦 $AC=2\sqrt{3}$,弦 BM 平分 $\angle ABC$ 交 AC 于点 D,连接 MA,MC.

(1)求 $\odot O$ 半径的长;

(2)求证:$AB+BC=BM$.



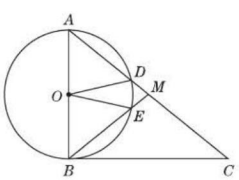
(第 16 题)

拔尖角度 2 利用圆内接四边形的性质证菱形

17. 如图,在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,$\angle ABC=90°$,点 M 是 AC 的中点,以 AB 为直径作 $\odot O$ 分别交 AC,BM 于点 D,E.

(1)求证:$MD=ME$;

(2)连接 OD,OE,当 $\angle C=30°$ 时,求证:四边形 $ODME$ 是菱形.



(第 17 题)

趣味数学　而数学教师给出了两点理由:第一,圆形用同等材料制作是进水口径面积最大的;第二,圆形是平面上与圆心等距离的所有点的集合.(待续)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

阶段方法技巧训练(二)

专训 1 巧用圆的基本性质解圆的五种关系 (答案见119页)

名师点金

圆的基本性质里面主要涉及弦、弧之间的关系，圆周角、圆心角之间的关系，弧、圆周角之间的关系，弦、圆心角之间的关系，弦、弧、圆心角之间的关系等，在解此类题目时，需要根据已知条件和所求问题去探求它们之间的内在联系，从而达到解决问题的目的.

关系1 弦、弧之间的关系

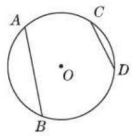
1. 如图，在⊙O中，$\overset{\frown}{AB}=2\overset{\frown}{CD}$，则下列结论正确的是(　　)

A. $AB>2CD$

B. $AB=2CD$

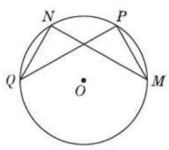
C. $AB<2CD$

D. 以上都不正确



(第1题)

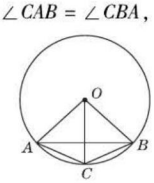
2. 已知：如图，MN、PQ是⊙O的两条弦，且$QN=MP$，求证：$MN=PQ$.



(第2题)

关系2 圆周角、圆心角之间的关系

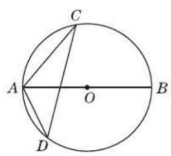
3. 如图，AB，AC，BC都是⊙O的弦，且$\angle CAB=\angle CBA$，求证：$\angle COB=\angle COA$.



(第3题)

关系3 弧、圆周角之间的关系

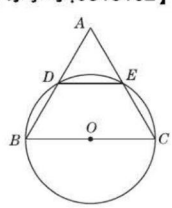
4. 如图，AB是⊙O的直径，点C，D在⊙O上，$\angle BAC=50°$，求$\angle ADC$的度数.



(第4题)

关系4 弦、圆心角之间的关系

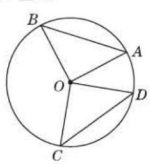
5. 如图，以等边三角形ABC的边BC为直径作⊙O交AB于D，交AC于E，连接DE. 试判断BD，DE，EC之间的数量关系，并说明理由. 【导学号：9513162】



(第5题)

关系5 弧、圆心角之间的关系

6. 如图，在⊙O中，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，求证：$\angle B=\angle C$.



(第6题)

所以圆形井盖不会掉进井内，而井盖如果是正方形的，把它沿着正方形的对角线放下时，它就会落入下水道内.

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

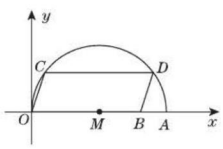
专训 2　垂径定理的四种应用技巧 ☞(答案见 119 页)

名师点金

垂径定理的巧用主要体现在求点的坐标、解决最值问题、解决实际问题等. 解题时,巧用弦的一半、圆的半径和圆心到弦的垂线段三条线段组成直角三角形,然后借助勾股定理,在这三个量中知道任意两个,可求出第三个.

技巧 1　巧用垂径定理求点的坐标

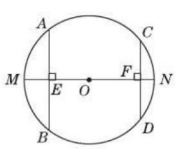
1. 如图,在平面直角坐标系中,点 A 的坐标是(10,0),点 B 的坐标是(8,0),点 C,D 在以 OA 为直径的半圆 M 上,且四边形 $OCDB$ 是平行四边形,求点 C 的坐标.



(第 1 题)

技巧 2　巧用垂径定理解决最值问题(对称法)

2. 如图,AB,CD 是半径为 5 的 $\odot O$ 的两条弦,$AB=8$,$CD=6$,MN 是直径,$AB\perp MN$ 于点 E,$CD\perp MN$ 于点 F,P 为直线 EF 上的任意一点,求 $PA+PC$ 的最小值.



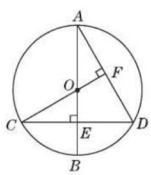
(第 2 题)

技巧 3　巧用垂径定理计算

3. 如图,已知圆 O 的直径 AB 垂直于弦 CD 于点 E,连接 CO 并延长交 AD 于点 F,且 $CF\perp AD$.

(1)求证:E 是 OB 的中点;

(2)若 $AB=8$,求 CD 的长.



(第 3 题)

技巧 4　巧用垂径定理解决实际问题(建模思想)

4. 某地有一座拱桥,它的桥拱是圆弧形,桥下的水面宽度为 7.2 m,拱顶高出水面 2.4 m. 现有一艘宽 3 m,船舱顶部截面为长方形并高出水面 2 m 的货船要经过这里,此货船能顺利通过这座拱桥吗?

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

24.4 直线与圆的位置关系

第1课时 直线与圆的位置关系及切线的性质

名师点金

1. 直线与圆的三种位置关系可以用两种方式刻画：一是用直线与圆的公共点的个数来确定，二是用圆心到直线的距离与圆的半径之间的数量关系来确定. 两种方式本质上是一致的.
2. 直线与圆的三种位置关系中“相切”最具有特殊性，由此我们得到了圆的切线的定义和性质，在应用切线的性质时，一定要抓住“垂直”这一特征，综合直角三角形的有关知识灵活解决问题.

1 夯实基础·逐点练 (答案见119页)

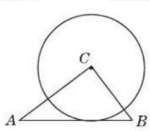
知识点1 直线和圆的位置关系

1. 【中考·湘西州】在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$BC=3$ cm，$AC=4$ cm，以点 C 为圆心，以 2.5 cm 为半径画圆，则 $\odot C$ 与直线 AB 的位置关系是(　　)

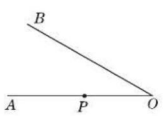
A. 相交　　B. 相切　　C. 相离　　D. 不能确定

2. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=5$，$BC=3$，$AC=4$，以点 C 为圆心的圆与 AB 相切，则 $\odot C$ 的半径为(　　)

A. 2.3　　B. 2.4　　C. 2.5　　D. 2.6



(第2题)

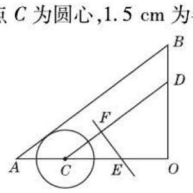


(第3题)

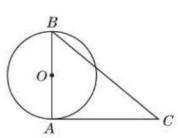
3. 如图，$\angle O=30°$，P 为边 OA 上的一点，且 $OP=5$，若以 P 为圆心，r 为半径的圆与射线 OB 只有一个公共点，则半径 r 满足的条件是(　　)

A. $r=5$　　B. $r=\frac{5}{2}$　　C. $\frac{5}{2}\leqslant r<5$　　D. $r=\frac{5}{2}$ 或 $r>5$

4. 【中考·无锡】如图，在 $\triangle AOB$ 中，$\angle O=90°$，$AO=8$ cm，$BO=6$ cm，点 C 从点 A 出发，在边 AO 上以 2 cm/s 的速度向点 O 运动，与此同时，点 D 从点 B 出发，在边 BO 上以1.5 cm/s的速度向点 O 运动，过 OC 的中点 E 作 CD 的垂线 EF，则当点 C 运动了_____s 时，以点 C 为圆心，1.5 cm 为半径的圆与直线 EF 相切.



(第4题)



(第5题)

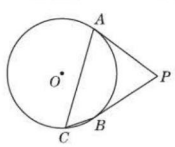
知识点2 切线的性质

5. 【中考·重庆】如图，AB 是 $\odot O$ 的直径，AC 是 $\odot O$ 的切线，A 为切点，若 $\angle C=40°$，则 $\angle B$ 的度数为(　　)

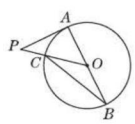
A. 60°　　B. 50°　　C. 40°　　D. 30°

6. 【中考·福建】如图，PA，PB 是 $\odot O$ 的切线，A，B 为切点，点 C 在 $\odot O$ 上，且 $\angle ACB=55°$，则 $\angle APB$ 等于(　　)

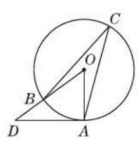
A. 55°　　B. 70°　　C. 110°　　D. 125°



(第6题)



(第7题)



(第8题)

7. 【中考·自贡】如图，AB 是 $\odot O$ 的直径，PA 切 $\odot O$ 于点 A，PO 交 $\odot O$ 于点 C，连接 BC，若 $\angle P=40°$，则 $\angle B$ 等于(　　)

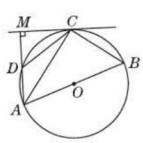
A. 20°　　B. 25°　　C. 30°　　D. 40°

8. 【中考·黔南州】如图，已知直线 AD 是 $\odot O$ 的切线，点 A 为切点，OD 交 $\odot O$ 于点 B，点 C 在 $\odot O$ 上，且 $\angle ODA=36°$，则 $\angle ACB$ 的度数为(　　)

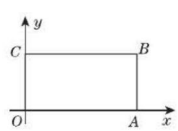
A. 54°　　B. 36°　　C. 30°　　D. 27°

9. 【中考·泰安】如图，圆内接四边形 $ABCD$ 的边 AB 过圆心 O，过点 C 的切线与边 AD 所在直线垂直于点 M，若 $\angle ABC=55°$，则 $\angle ACD$ 等于(　　)

A. 20°　　B. 35°　　C. 40°　　D. 55°



(第9题)



(第10题)

易错点 判断圆和各边相切时考虑不全而漏解

10. 如图，在平面直角坐标系第一象限内有一矩形 $OABC$，$B(4,2)$，现有一圆同时和这个矩形的三边都相切，则此圆的圆心 P 的坐标为_____.

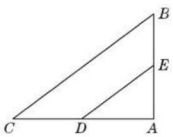
如果我继承了可观的财产，我在数学上可能没有多少价值了. ——拉格朗日

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞(答案见 120 页)

考查角度 1 利用直线与圆的位置关系判断直线的位置

11. 【中考 · 盘锦】如图,在△ABC 中,$AB=6$,$AC=8$,$BC=10$,D,E 分别是 AC,AB 的中点,判断以 DE 为直径的圆与 BC 的位置关系.



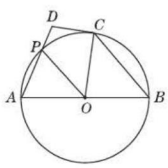
(第 11 题)

考查角度 2 利用切线的性质求直径的长

12. 【中考 · 贵阳】如图,已知 AB 是⊙O 的直径,点 P 是⊙O 上一点,连接 OP,点 A 关于 OP 的对称点 C 恰好落在⊙O 上.

(1)求证:$OP/\!/BC$;

(2)过点 C 作⊙O 的切线 CD,交 AP 的延长线于点 D. 如果∠$D=90°$,$DP=1$,求⊙O 的直径.



(第 12 题)

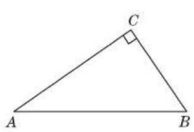
Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞(答案见 120 页)

拔尖角度 1 利用切线的性质进行作图计算

13. 【中考 · 自贡】如图,在△ABC 中,∠$ACB=90°$.

(1)作出经过点 B,圆心 O 在斜边 AB 上且与边 AC 相切于点 E 的⊙O;(要求:用尺规作图,保留作图痕迹,不写作法和证明)

(2)设(1)中所作的⊙O 与边 AB 交于异于点 B 的另外一点 D,若⊙O 的直径为 5,$BC=4$,求 DE 的长.(如果用尺规画不出图形,可画出草图完成第(2)问)



(第 13 题)

拔尖角度 2 利用圆的切线性质解与函数相关的综合问题

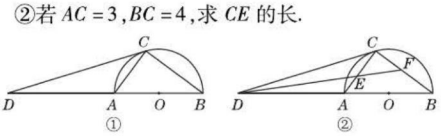
14. 【中考 · 十堰】如图①,AB 为半圆 O 的直径,点 D 为 BA 的延长线上一点,DC 为半圆 O 的切线,切点为 C.

(1)求证:∠ACD = ∠B.

(2)如图②,∠BDC 的平分线分别交 AC,BC 于点 E,F.

①求 tan ∠CFE 的值;

②若 $AC=3$,$BC=4$,求 CE 的长.



(第 14 题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第2课时　切线的判定

名师点金

切线的三种判定方法

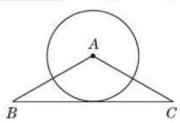
1. 定义法：直线和圆只有一个公共点，这时，我们说这条直线和圆相切.
2. 数量法：若圆心到直线的距离 d 等于圆的半径 r，则直线是圆的切线.
3. 位置法（切线的判定定理）：经过半径外端点并且垂直于这条半径的直线是圆的切线.

在切线的三种判定方法中，常用的是后两种判定方法，在判定圆的切线时，往往需要添加辅助线.

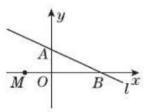
Ⅰ 夯实基础·逐点练 ☞（答案见120页）

知识点1　圆心到直线的距离等于半径⇔直线是圆的切线

1. 【中考·沈阳】如图，在△ABC中，$AB=AC$，$\angle B=30°$，以点 A 为圆心，以 3 cm 为半径作⊙A，当 $AB=$_____cm 时，BC 与⊙A 相切.



（第1题）



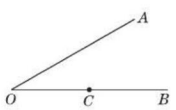
（第2题）

2. 【中考·烟台】如图，直线 l：$y=-\frac{1}{2}x+1$ 与坐标轴交于 A，B 两点，点 $M(m,0)$ 是 x 轴上一动点，以点 M 为圆心，2 个单位长度为半径作⊙M，当⊙M 与直线 l 相切时，m 的值为_____.

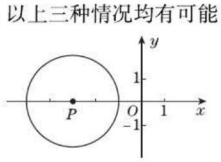
3. 【中考·张家界】如图，$\angle O=30°$，C 为 OB 上一点，且 $OC=6$，以点 C 为圆心，半径为 3 的圆与 OA 的位置关系是（　　）

A. 相离　　B. 相交

C. 相切　　D. 以上三种情况均有可能



（第3题）



（第5题）

4. 在平面直角坐标系 xOy 中，以点（$-3,4$）为圆心，4 为半径的圆（　　）

A. 与 x 轴相交，与 y 轴相切

B. 与 x 轴相离，与 y 轴相交

C. 与 x 轴相切，与 y 轴相交

D. 与 x 轴相切，与 y 轴相离

5. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，半径为 2 的⊙P 的圆心 P 的坐标为（$-3,0$），将⊙P 沿 x 轴正方向平移，使⊙P 与 y 轴相切，则平移的距离为（　　）

A. 1　　B. 1 或 5　　C. 3　　D. 5

知识点2　经过半径外端且垂直于半径的直线是圆的切线

6. 下列四个命题：

①与圆有公共点的直线是圆的切线；

②垂直于圆的半径的直线是圆的切线；

③到圆心的距离等于半径的直线是圆的切线；

④过直径端点，且垂直于此直径的直线是圆的切线.

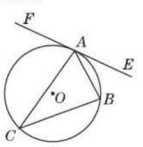
其中真命题是（　　）

A. ①②　　B. ②③　　C. ③④　　D. ①④

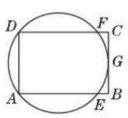
7. 如图，△ABC 是⊙O 的内接三角形，下列选项中，能使过点 A 的直线 EF 与⊙O 相切于点 A 的条件是（　　）

A. $\angle EAB=\angle C$　　B. $\angle B=90°$

C. $EF\perp AC$　　D. AC 是⊙O 的直径



（第7题）



（第8题）

8. 【中考·无锡】如图，矩形 $ABCD$ 中，G 是 BC 的中点，过 A，D，G 三点的圆 O 与边 AB，CD 分别交于点 E、点 F，给出下列说法：

（1）AC 与 BD 的交点是圆 O 的圆心；

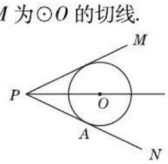
（2）AF 与 DE 的交点是圆 O 的圆心；

（3）BC 与圆 O 相切. 其中正确的说法的个数是（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

易错点　判断直线与圆相切时理由不充分

9. 如图，点 O 为∠MPN 的平分线上一点，以点 O 为圆心的⊙O 与 PN 相切于点 A. 求证：PM 为⊙O 的切线.



（第9题）

公元1822年，法国数学家傅立叶证明了任何曲线都可以由正弦曲线叠加而成，他甚至找到了构成叠加的方法. 傅立叶的出色工作，使一门近代的数学分支，以他的名字命名.

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

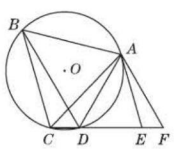
Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞(答案见 121 页)

考查角度 1 利用公共点“连半径,证垂直”判定切线

10. 【中考 · 常德】如图,已知⊙O 是等边三角形 ABC 的外接圆,点 D 在圆上,在 CD 的延长线上有一点 F,使 $DF=DA$,$AE\parallel BC$ 交 CF 于 E.

(1)求证:EA 是⊙O 的切线;

(2)求证:$BD=CF$.



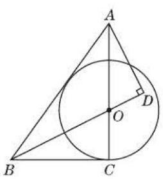
(第 10 题)

考查角度 2 利用圆心“作垂直,证半径”判定切线

11. 【中考 · 江西】如图,在△ABC 中,O 为 AC 上一点,以点 O 为圆心,OC 为半径作圆,与 BC 相切于点 C,过点 A 作 $AD\perp BO$ 的延长线于点 D,且 $\angle AOD=\angle BAD$.

(1)求证:AB 为⊙O 的切线;

(2)若 $BC=6$,$\tan\angle ABC=\dfrac{4}{3}$,求 AD 的长.



(第 11 题)

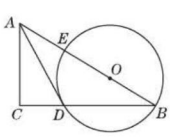
Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞(答案见 121 页)

拔尖角度 1 利用切线的判定与性质求线段长

12. 【中考 · 金华】如图,在 Rt△ABC 中,点 O 在斜边 AB 上,以 O 为圆心,OB 为半径作圆,分别与 BC,AB 相交于点 D,E,连接 AD. 已知 $\angle CAD=\angle B$.

(1)求证:AD 是⊙O 的切线.

(2)若 $BC=8$,$\tan B=\dfrac{1}{2}$,求⊙O 的半径.



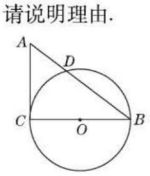
(第 12 题)

拔尖角度 2 利用切线的性质和判定探究切线条件

13. 【中考 · 枣庄】如图,在 Rt△ACB 中,$\angle C=90°$,$AC=3$ cm,$BC=4$ cm,以 BC 为直径作⊙O 交 AB 于点 D.

(1)求线段 AD 的长度;

(2)点 E 是线段 AC 上的一点,试问:当点 E 在什么位置时,直线 ED 与⊙O 相切?请说明理由.



(第 13 题)

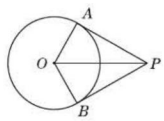
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

* 第3课时　切线长定理

名师点金

根据切线长定理，可以得到两个重要结论

1. 从圆外一点可以引圆的两条切线，两条切线的切线长相等.
2. 这一点和圆心的连线，平分两条切线所成的夹角. P 为 $\odot O$ 外的任意一点，PA，PB 为 $\odot O$ 的两条切线，切点分别为 A，B，如图所示，则 $PA=PB$，$\angle APO=\angle BPO$，由此结合三角形内角和定理，还可以得到 $\angle AOP=\angle BOP$.



Ⅰ 夯实基础·逐点练 ☞（答案见121页）

知识点1 切线长定理

1. 下列说法正确的是(　　)

A. 过任意一点总可以作圆的两条切线

B. 圆的切线长就是圆的切线的长度

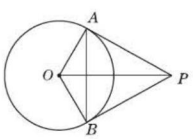
C. 过圆外一点所画的圆的两条切线长相等

D. 过圆外一点所画的圆的切线长一定大于圆的半径

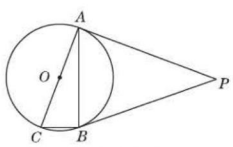
2. 如图，PA 切 $\odot O$ 于 A，PB 切 $\odot O$ 于 B，连接 OP，AB. 下列结论不一定正确的是(　　)

A. $PA=PB$　　B. OP 垂直平分 AB

C. $\angle OPA=\angle OPB$　　D. $PA=AB$



（第2题）



（第3题）

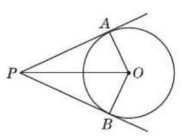
3. 【中考·南充】如图，PA 和 PB 是 $\odot O$ 的切线，点 A 和 B 是切点，AC 是 $\odot O$ 的直径，已知 $\angle P=40°$，则 $\angle ACB$ 的大小是(　　)

A. 60°　　B. 65°　　C. 70°　　D. 75°

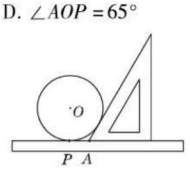
4. 如图，PA，PB 是 $\odot O$ 的切线，且 $\angle APB=50°$，下列结论不正确的是(　　)

A. $PA=PB$　　B. $\angle APO=25°$

C. $\angle OBP=65°$　　D. $\angle AOP=65°$



（第4题）



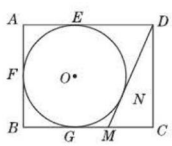
（第5题）

知识点2 切线长定理的应用

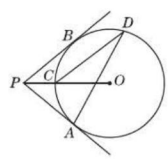
5. 为了测量一个圆形铁环的半径，某同学采用如下方法：将铁环平放在水平桌面上，用一个含有30°角的三角尺和一把刻度尺，按如图所示的方法得到相关数据，进而可求得铁环的半径. 若 P 为切点，测得 $PA=5$ cm，则铁环的半径是_____.

6. 【中考·南京】如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$AD=5$，AD，AB，BC 分别与 $\odot O$ 相切于 E，F，G 三点，过点 D 作 $\odot O$ 的切线交 BC 于点 M，切点为 N，则 DM 的长为(　　)

A. $\frac{13}{3}$　　B. $\frac{9}{2}$　　C. $\frac{4}{3}\sqrt{13}$　　D. $2\sqrt{5}$



（第6题）



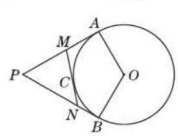
（第7题）

7. 【中考·荆州】如图，过 $\odot O$ 外一点 P 引 $\odot O$ 的两条切线 PA，PB，切点分别是 A，B，OP 交 $\odot O$ 于点 C，点 D 是优弧 AC 上不与点 A、点 C 重合的一个动点，连接 AD，CD. 若 $\angle APB=80°$，则 $\angle ADC$ 的度数是(　　)

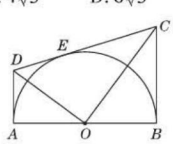
A. 15°　　B. 20°　　C. 25°　　D. 30°

8. 如图，从 $\odot O$ 外一点 P 引圆的两条切线 PA，PB，切点分别为 A，B，点 C 是劣弧 AB 上一点，过点 C 的切线分别交 PA，PB 于点 M，N. 若 $\odot O$ 的半径为2，$\angle P=60°$，则 $\triangle PMN$ 的周长为(　　)

A. 4　　B. 6　　C. $4\sqrt{3}$　　D. $6\sqrt{3}$



（第8题）



（第9题）

9. 如图，AB 为半圆 O 的直径，AD，BC 分别切 $\odot O$ 于 A，B 两点，CD 切 $\odot O$ 于点 E，AD 与 CD 相交于点 D，BC 与 CD 相交于点 C，连接 OD，OC. 对于下列结论：$①AD+BC=CD$；$②OD=OC$；$③S_{梯形ABCD}=\frac{1}{2}CD\cdot OA$；$④\angle DOC=90°$. 其中正确的结论有(　　)

A. ①④　　B. ①②③

C. ②③④　　D. ③④

谜语：东方欲晓（打一数学家名）　　谜底：徐光启　趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

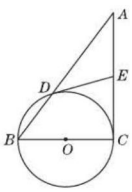
Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞(答案见 121 页)

考查角度 1 利用切线长定理求线段长

10. 【中考 · 丽水】如图,在 Rt△ABC 中,$\angle C=90°$,以 BC 为直径的⊙O 交 AB 于点 D,切线 DE 交 AC 于点 E.

(1)求证:$\angle A=\angle ADE$;

(2)若 $AD=16$,$DE=10$,求 BC 的长.



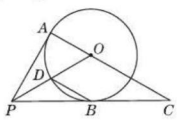
(第 10 题)

考查角度 2 利用切线长定理证线段平行

11. 【中考 · 南京】如图,PA,PB 是⊙O 的切线,A,B 为切点,连接 AO 并延长,交 PB 的延长线于点 C,连接 PO,交⊙O 于点 D.

(1)求证:PO 平分 $\angle APC$;

(2)连接 DB,若 $\angle C=30°$,求证:$DB\parallel AC$.



(第 11 题)

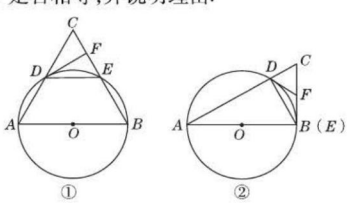
Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞(答案见 122 页)

拔尖角度 1 利用切线长定理探究动点问题

12. 【中考 · 威海】已知:AB 为⊙O 的直径,$AB=2$,弦 $DE=1$,直线 AD 与 BE 相交于点 C,弦 DE 在⊙O 上运动且保持长度不变,⊙O 的切线 DF 交 BC 于点 F.

(1)如图①,若 $DE\parallel AB$,求证:$CF=EF$;

(2)如图②,当点 E 运动至与点 B 重合时,试判断 CF 与 BF 是否相等,并说明理由.

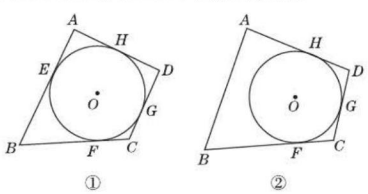


(第 12 题)

拔尖角度 2 利用切线长定理说明与切线相关的四边形边的关系

13. (1)如图①,四边形 $ABCD$ 是⊙O 的外切四边形,切点分别为 E,F,G,H,说明 $AB+CD$ 与 $BC+AD$ 的大小关系;

(2)如图②,四边形 $ABCD$ 的三边切⊙O 于点 F,G,H,说明 $AB+CD$ 与 $BC+AD$ 的大小关系.



(第 13 题)

趣味数学　时间是个常数,但对勤奋者来说,它是个'变数'.用'分'来计算时间的人比用'时'来计算时间的人的时间多 59 倍.——雷巴柯夫

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

24.5 三角形的内切圆

名师点金

直角三角形内切圆半径的求法

设直角三角形的两直角边长分别为 a,b，斜边长为 c，r 为其内切圆的半径，则 $r=\frac{1}{2}(a+b-c)$. 若从面积推导，则 $r=\frac{ab}{a+b+c}$. 这两个结论可在做选择题和填空题时直接应用.

1 夯实基础·逐点练 ☞（答案见122页）

知识点1 三角形内切圆及相关概念

1. 下列说法错误的是（　　）

A. 三角形的内切圆与三角形的三边都相切

B. 一个三角形一定有唯一一个内切圆

C. 一个圆一定有唯一一个外切三角形

D. 等边三角形的内切圆与外接圆是同心圆

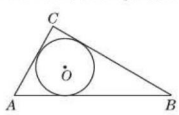
2. 【中考·广州】如图，$\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的内切圆，则点 O 是 $\triangle ABC$ 的（　　）

A. 三条边的垂直平分线的交点

B. 三条角平分线的交点

C. 三条中线的交点

D. 三条高的交点

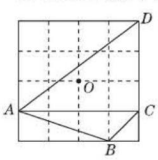


（第2题）

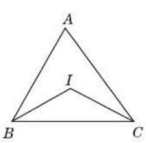
3. 【中考·河北】如图为 4×4 的网格图，A,B,C,D,O 均在格点上，点 O 是（　　）

A. $\triangle ACD$ 的外心　　B. $\triangle ABC$ 的外心

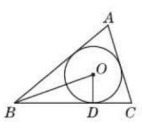
C. $\triangle ACD$ 的内心　　D. $\triangle ABC$ 的内心



（第3题）



（第5题）



（第6题）

4. 下列说法：①三角形的内心不一定在三角形的内部；②若点 I 是 $\triangle ABC$ 的内心，则 AI 平分 $\angle BAC$；③三角形有唯一的内切圆，圆有唯一的外切三角形. 其中正确的有（　　）

A. 0个　　B. 1个　　C. 2个　　D. 3个

5. 【中考·眉山】如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=66°$，点 I 是内心，则 $\angle BIC$ 的大小为（　　）

A. 114°　　B. 122°　　C. 123°　　D. 132°

知识点2 三角形内切圆的性质

6. 【中考·湖州】如图，已知 $\triangle ABC$ 的内切圆 $\odot O$ 与 BC 边相切于点 D，连接 OB,OD. 若 $\angle ABC=40°$，则 $\angle BOD$ 的度数是_____.

7. 【中考·德州】《九章算术》是我国古代内容极为丰富的数学名著，书中有下列问题：“今有勾八步，股十五步. 问勾中容圆径几何？”其意思是“今有直角三角形，勾（短直角边）长为8步，股（长直角边）长为15步，问该直角三角形能容纳的圆形（内切圆）直径是多少？”（　　）

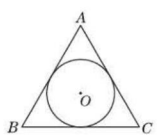
A. 3步　　B. 5步　　C. 6步　　D. 8步

8. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=3$，$AB=5$，则它的内切圆与外接圆半径分别为（　　）

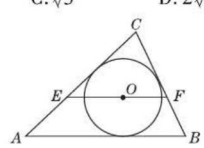
A. 1.5，2.5　　B. 2，5　　C. 1，2.5　　D. 2，2.5

9. 如图，正三角形 ABC 的内切圆半径为1，那么这个正三角形的边长为（　　）

A. 2　　B. 3　　C. $\sqrt{3}$　　D. $2\sqrt{3}$



（第9题）



（第11题）

10. 【中考·武汉】已知一个三角形的三边长分别为5，7，8，则其内切圆的半径为（　　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{3}{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $2\sqrt{3}$

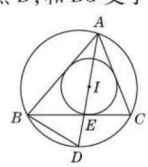
11. 如图，O 是 $\triangle ABC$ 的内心，过点 O 作 $EF\parallel AB$，与 AC,BC 分别相交于点 E,F，则（　　）

A. $EF>AE+BF$　　B. $EF<AE+BF$

C. $EF=AE+BF$　　D. $EF\leqslant AE+BF$

易错点 混淆外心与内心的概念

12. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 I 是 $\triangle ABC$ 的内心，$\angle BAC$ 的平分线和 $\triangle ABC$ 的外接圆相交于点 D，和 BC 交于点 E. 求证：$DI=DB$.



（第12题）

芝诺的圆 古希腊哲学家芝诺关于学习知识是这样说的，如果用小圆代表你们学到的知识，用大圆代表我学到的知识.（待续）

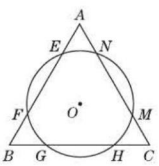
趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞(答案见 122 页)

考查角度 1 利用内心的定义证明点为三角形的内心

13. 如图,以点 O 为圆心的圆与 $\triangle ABC$ 的三边分别交于点 E,F,G,H,M,N,且 $EF=GH=MN$,求证:点 O 是 $\triangle ABC$ 的内心.



(第 13 题)

考查角度 2 利用阅读材料求三角形内切圆的半径

14. 【中考 · 桂林】阅读下列材料:

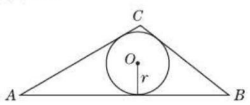
海伦公式:$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.(其中 a,b,c 是三角形的三边长,$p=\dfrac{a+b+c}{2}$,S 为三角形的面积)

根据上述材料,解答下列问题:

如图,在 $\triangle ABC$ 中,$BC=5,AC=6,AB=9$.

(1)用海伦公式求 $\triangle ABC$ 的面积;

(2)求 $\triangle ABC$ 的内切圆半径 r.



(第 14 题)

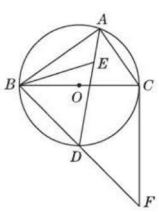
Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞(答案见 122 页)

拔尖角度 1 利用三角形内心的性质判定圆的切线

15. 【中考 · 黄石】如图,$\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆,BC 为 $\odot O$ 的直径,点 E 为 $\triangle ABC$ 的内心,连接 AE 并延长交 $\odot O$ 于 D 点,连接 BD 并延长至 F,使得 $DF=BD$,连接 CF,BE.

(1)求证:$DB=DE$;

(2)求证:直线 CF 为 $\odot O$ 的切线.



(第 15 题)

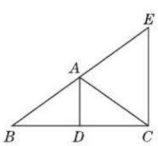
拔尖角度 2 利用三角形内切圆性质进行相关计算

16. 【中考 · 长沙】如图,在 $\triangle ABC$ 中,AD 是边 BC 上的中线,$\angle BAD=\angle CAD$,$CE/\!/AD$,CE 交 BA 的延长线于点 E,$BC=8$,$AD=3$. 【导学号:9513162】

(1)求 CE 的长;

(2)求证:$\triangle ABC$ 为等腰三角形;

(3)求 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心 P 与内切圆圆心 Q 之间的距离.



(第 16 题)

趣味数学　那么大圆的面积是多一点,但两圆之外的空白都是我们的无知面.圆越大其圆周接触的无知面就越多.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

阶段方法技巧训练(三)

专训 1 与圆有关的位置关系的判断方法 ☞(答案见123页)

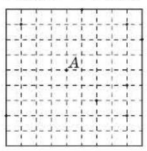
名师点金

与圆有关的位置关系包括点与圆的位置关系、直线与圆的位置关系、圆与圆的位置关系，判断它们的关系主要有定义法、比较法、交点个数法、距离比较法等.

类型1 点与圆的位置关系

方法1 定义法

1. 如图，在网格中(每个小正方形的边长均为1个单位长度)选取9个格点(格线的交点称为格点). 如果以A为圆心，r为半径画圆，选取的格点中除点A外恰好有3个在圆内，则r的取值范围为(　　)



(第1题)

A. $2\sqrt{2}<r\leqslant\sqrt{17}$

B. $\sqrt{17}<r\leqslant3\sqrt{2}$

C. $\sqrt{17}<r\leqslant5$

D. $5<r\leqslant\sqrt{29}$

2. 在矩形$ABCD$中，$AB=8$，$BC=3\sqrt{5}$，点P在边AB上，且$BP=3AP$，如果圆P是以点P为圆心，PD的长为半径的圆，那么下列判断正确的是(　　)

A. 点B，C均在圆P外

B. 点B在圆P外，点C在圆P内

C. 点B在圆P内，点C在圆P外

D. 点B，C均在圆P内

方法2 比较法

3. $\odot O$的半径$r=5$ cm，圆心O到直线l的距离$OD=3$ cm，在直线l上有P，Q，R三点，且有$PD=4$ cm，$QD=5$ cm，$RD=3$ cm，那么P，Q，R三点与$\odot O$的位置关系各是怎样的?

类型2 直线与圆的位置关系

方法3 交点个数法

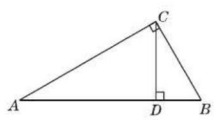
4. 已知直线l经过$\odot O$上的A，B两点，则直线l与$\odot O$的位置关系是(　　)

A. 相切　　B. 相交

C. 相离　　D. 无法确定

方法4 距离比较法

5. 如图所示，在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，$\angle A=30°$，$CD\perp AB$，$BC=4$ cm，以点C为圆心，4 cm长为半径画$\odot C$，试判断直线BD与$\odot C$的位置关系，并说明理由.



(第5题)

类型3 圆与圆的位置关系

方法5 公共点法

6. 已知两圆的半径分别为2和3，圆心距为d，若两圆有公共点，则d的取值范围是(　　)

A. $d=1$　　B. $d=5$

C. $1\leqslant d\leqslant5$　　D. $1<d<5$

方法6 公切线法

7. 填空：两圆公切线条数与两圆的位置关系.

(1)两圆内切⇔_____;

(2)两圆外切⇔_____;

(3)两圆外离⇔_____;

(4)两圆相交⇔_____;

(5)两圆内含⇔_____.

方法7 距离比较法

8. 已知$\odot O_1$与$\odot O_2$的圆心距为6，两圆的半径分别是方程$x^2-5x+6=0$的两个根，求$\odot O_1$与$\odot O_2$的位置关系.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

专训 2　切线的判定和性质的四种应用类型 ☞(答案见 123 页)

名师点金

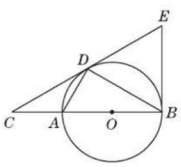
圆的切线的判定和性质的应用较广泛,一般先利用圆的切线的判定方法判定切线,再利用切线的性质进行线段和角的计算或论证,在计算或论证中常通过作辅助线解决有关问题.

类型 1　应用于求线段的长

1. 如图,点 D 为⊙O 上一点,点 C 在直径 BA 的延长线上,且∠CDA = ∠CBD.

(1)判断直线 CD 和⊙O 的位置关系,并说明理由;

(2)过点 B 作⊙O 的切线 BE 交直线 CD 于点 E,若 AC = 2,⊙O 的半径是 3,求 BE 的长.



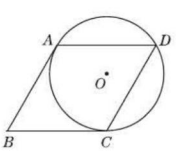
(第 1 题)

类型 2　应用于求角的度数

2. 【中考·珠海】如图,⊙O 经过菱形 $ABCD$ 的三个顶点 A,C,D,且与 AB 相切于点 A.

(1)求证:BC 为⊙O 的切线;

(2)求∠B 的度数.



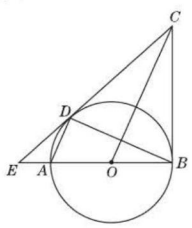
(第 2 题)

类型 3　应用于求圆的半径

3. 【中考·凉山州】如图,已知 AB 为⊙O 的直径,AD,BD 是⊙O 的弦,BC 是⊙O 的切线,切点为 B,OC // AD,BA,CD 的延长线相交于点 E.

(1)求证:CD 是⊙O 的切线;

(2)若 AE = 1,ED = 3,求⊙O 的半径.



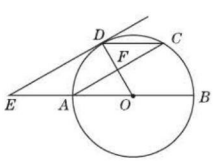
(第 3 题)

类型 4　应用于求图形的面积

4. 【中考·通辽】如图,AB 为⊙O 的直径,D 为$\overset{\frown}{AC}$的中点,连接 OD 交弦 AC 于点 F,过点 D 作 DE // AC,交 BA 的延长线于点 E.

(1)求证:DE 是⊙O 的切线;

(2)连接 CD,若 OA = AE = 4,求四边形 $ACDE$ 的面积.



(第 4 题)

趣味数学　在数学的天地里,重要的不是我们知道什么,而是我们怎么知道什么.——毕达哥拉斯

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

24.6 正多边形与圆

名师点金

1. 常见正多边形的边长与半径的关系

正六边形的边长等于其外接圆半径，正三角形的边长等于其外接圆半径的$\sqrt{3}$倍，正方形的边长等于其外接圆半径的$\sqrt{2}$倍.

2. 求解与正多边形有关的计算问题，关键是找出被半径和边心距分割成的直角三角形，将正多边形的计算问题转化为直角三角形问题.

1 夯实基础·逐点练 ☞（答案见124页）

知识点1 圆内接正多边形及相关定义

1. 【中考·株洲】下列圆的内接正多边形中，一条边所对的圆心角最大的图形是（　　）

A. 正三角形　　B. 正方形

C. 正五边形　　D. 正六边形

2. 正多边形的一边所对的中心角与该多边形的一个内角的关系为（　　）

A. 两角互余　　B. 两角互补

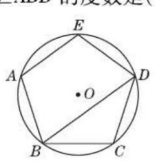
C. 两角互余或互补　　D. 不能确定

3. 【中考·滨州】若正方形的外接圆半径为2，则其内切圆半径为（　　）

A. $\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{2}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. 1

4. 【中考·湖州】如图，已知正五边形$ABCDE$内接于$\odot O$，连接BD，则$\angle ABD$的度数是（　　）



（第4题）

A. 60°　　B. 70°　　C. 72°　　D. 144°

5. 一个圆的内接正四边形和外切正四边形的面积比是（　　）

A. $1:\sqrt{2}$　　B. $1:2$

C. $2:3$　　D. $2:\pi$

6. 【中考·达州】以半径为2的圆的内接正三角形、正方形、正六边形的边心距为三边作三角形，则该三角形的面积是（　　）

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{3}$

7. 【中考·德阳】已知圆内接正三角形的面积为$\sqrt{3}$，则该圆的内接正六边形的边心距是（　　）

A. 2　　B. 1　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

8. 【中考·日照】下列说法正确的是（　　）

A. 圆内接正六边形的边长与该圆的半径相等

B. 在平面直角坐标系中，不同的坐标可以表示同一点

C. 一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$一定有实数根

D. 将$\triangle ABC$绕A点按顺时针方向旋转60°得$\triangle ADE$，则$\triangle ABC$与$\triangle ADE$不全等

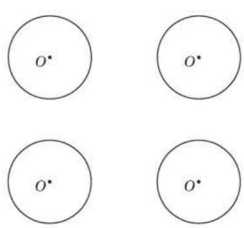
9. 刘徽是中国古代卓越的数学家之一，他在《九章算术》中提出了“割圆术”，即用内接或外切正多边形逐步逼近圆来近似计算圆的面积，设$\odot O$的半径为1，若用$\odot O$的外切正六边形的面积来近似估计$\odot O$的面积，则$S_{\odot O}\approx$_____.（结果保留根号）

知识点2 圆内接正多边形的画法

10. 如图，试分别按要求画出圆O的内接正多边形.

（1）正三角形；　（2）正方形；

（3）正六边形；　（4）正八边形.



（第10题）

易错点 误认为正多边形的边心距是正多边形的半径

11. 一个边长为2的正多边形的内角和是其外角和的2倍，则这个正多边形的半径是（　　）

A. 2　　B. $\sqrt{3}$　　C. 1　　D. $\frac{1}{2}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

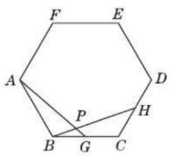
Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞(答案见 124 页)

考查角度 1 利用正多边形的性质解相关问题

12. 如图,点 G,H 分别是正六边形 $ABCDEF$ 的边 BC,CD 上的点,且 $BG=CH,AG$ 交 BH 于点 P.

(1)求证:$\triangle ABG\cong\triangle BCH$;

(2)求 $\angle APH$ 的度数.



(第 12 题)

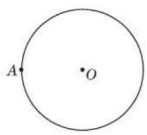
考查角度 2 利用正多边形的特征作图

13. 作图与证明:

如图,已知⊙O 和⊙O 上的一点 A,请完成下列任务:

(1)作⊙O 的内接正六边形 $ABCDEF$;

(2)连接 BF,CE,判断四边形 $BCEF$ 的形状并加以证明.



(第 13 题)

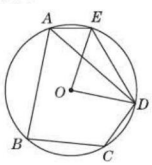
Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞(答案见 124 页)

拔尖角度 1 利用正多边形与圆的关系进行计算

14. 如图,在⊙O 的内接四边形 $ABCD$ 中,$AB=AD$,$\angle C=120°$,点 E 在$\overset{\frown}{AD}$上.

(1)求 $\angle AED$ 的度数;

(2)连接 OD,OE,当 $\angle DOE=90°$ 时,AE 恰好是⊙O 的内接正 n 边形的一边,求 n 的值.



(第 14 题)

拔尖角度 2 利用正多边形与圆的有关知识探究规律

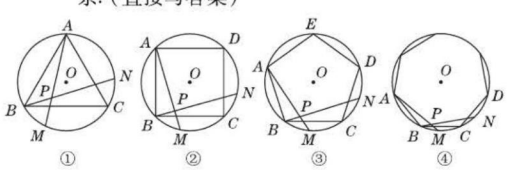
15. 如图①②③④分别是⊙O 的内接正三角形、正四边形、正五边形、正 n 边形,点 M,N 分别从点 B,C 开始以相同的速度在⊙O 上逆时针运动.

(1)图①中,$\angle APN=$_____;

(2)图②中,$\angle APN=$_____,

图③中,$\angle APN=$_____;

(3)试探索 $\angle APN$ 的度数与正多边形边数 n 的关系.(直接写答案)



(第 15 题)

趣味数学　公元前 3 世纪,古希腊科学家阿基米德发现了著名的杠杆定律:若两物体与支点的距离反比于其重量,则杠杆平衡.通俗一点可以描述为"阻力 × 阻力臂 = 动力 × 动力臂".

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

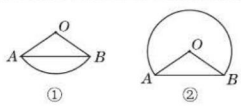
24.7 弧长与扇形面积

第1课时 弧长与扇形面积

名师点金

两类弓形面积的求法

1. 小于半圆的弧与弦组成的弓形，如图①，用扇形的面积减去三角形的面积.
2. 大于半圆的弧与弦组成的弓形，如图②，用扇形的面积加上三角形的面积.



1 夯实基础·逐点练 ☞（答案见124页）

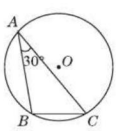
知识点1 弧长公式

1. 【中考·温州】若扇形的圆心角为90°，半径为6，则该扇形的弧长为（　　）

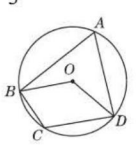
A. $\frac{3}{2}\pi$　　B. 2π　　C. 3π　　D. 6π

2. 【中考·南宁】如图，$\odot O$是$\triangle ABC$的外接圆，$BC=2$，$\angle BAC=30°$，则$\overset{\frown}{BC}$的长等于（　　）

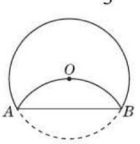
A. $\frac{2\pi}{3}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$



（第2题）



（第3题）



（第4题）

3. 如图，$\odot O$的半径为3，四边形$ABCD$内接于$\odot O$，连接OB，OD，若$\angle BOD=\angle BCD$，则$\overset{\frown}{BD}$的长为（　　）

A. π　　B. $\frac{3}{2}\pi$　　C. 2π　　D. 3π

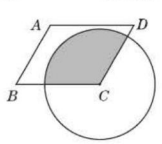
4. 【中考·泰安】如图，将$\odot O$沿弦AB折叠，$\overset{\frown}{AB}$恰好经过圆心O，若$\odot O$的半径为3，则$\overset{\frown}{AB}$的长为（　　）

A. $\frac{1}{2}\pi$　　B. π　　C. 2π　　D. 3π

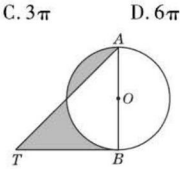
知识点2 扇形面积公式

5. 【中考·成都】如图，在$\square ABCD$中，$\angle B=60°$，$\odot C$的半径为3，则图中阴影部分的面积是（　　）

A. π　　B. 2π　　C. 3π　　D. 6π



（第5题）



（第6题）

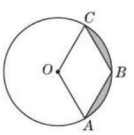
6. 如图，AB是$\odot O$的直径，BT是$\odot O$的切线，若$\angle ATB=45°$，$AB=2$，则阴影部分的面积是（　　）

A. 2　　B. $\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\pi$　　C. 1　　D. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\pi$

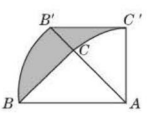
7. 【中考·广安】如图，已知$\odot O$的半径是2，点A，B，C在$\odot O$上，若四边形$OABC$是菱形，则图中阴影部分的面积为（　　）

A. $\frac{2}{3}\pi-2\sqrt{3}$　　B. $\frac{2}{3}\pi-\sqrt{3}$

C. $\frac{4}{3}\pi-2\sqrt{3}$　　D. $\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$

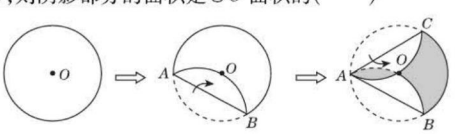


（第7题）



（第9题）

8. 【中考·聊城】如图，点O是圆形纸片的圆心，将这个圆形纸片按下列顺序折叠，使$\overset{\frown}{AB}$和$\overset{\frown}{AC}$都经过圆心O，则阴影部分的面积是$\odot O$面积的（　　）



（第8题）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{3}{5}$

9. 【中考·眉山】如图，$\triangle ABC$是等腰直角三角形，$\angle ACB=90°$，$AC=BC=2$，把$\triangle ABC$绕点A按顺时针方向旋转45°后得到$\triangle AB'C'$，则线段BC在上述旋转过程中所扫过部分（阴影部分）的面积是_____.

易错点 对弧长公式及扇形面积公式中的n的意义理解不充分而致错

10. 已知$\overset{\frown}{AB}$所对的圆周角为30°，$\overset{\frown}{AB}$所在圆的半径为30 cm，求$\overset{\frown}{AB}$的长.

谜语：追本溯源（打一数学名词）　　谜底：求根

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞(答案见 125 页)

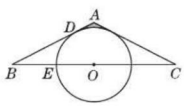
考查角度 ✓ 利用扇形面积公式求不规则图形面积的方法

方法 1 用作差法求不规则图形的面积

11. 【中考 · 临沂】如图,△ABC 为等腰三角形,O 是底边 BC 的中点,腰 AB 与⊙O 相切于点 D,OB 与⊙O 相交于点 E.

(1)求证:AC 是⊙O 的切线;

(2)若 $BD=\sqrt{3}$,$BE=1$,求阴影部分的面积.



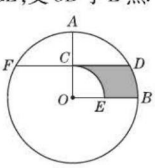
(第 11 题)

方法 2 用变换法求不规则图形的面积

12. 【中考 · 新疆】如图,在⊙O 中,半径 $OA\perp OB$,过 OA 的中点 C 作 $FD\parallel OB$ 交⊙O 于 D,F 两点,且 $CD=\sqrt{3}$,以 O 为圆心,OC 为半径作$\overset{\frown}{CE}$,交 OB 于 E 点.

(1)求⊙O 的半径 OA 的长;

(2)计算阴影部分的面积.



(第 12 题)

方法 3 用整体思想求扇形的面积

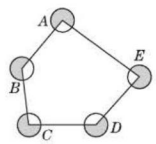
13. 【中考 · 朝阳】如图,分别以五边形 $ABCDE$ 的顶点为圆心,1 为半径作五个圆,则图中阴影部分的面积之和为(　　)

A. $\frac{3}{2}\pi$

B. 3π

C. $\frac{7}{2}\pi$

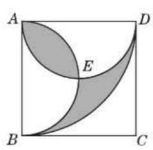
D. 2π



(第 13 题)

方法 4 用替换法求不规则图形的面积

14. 如图,在边长为 a 的正方形 $ABCD$ 中,以点 A 为圆心、AB 为半径画弧得到扇形 ABD,分别以 AB,AD 为直径的两个半圆交于点 E,求图中阴影部分的面积.



(第 14 题)

Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞(答案见 125 页)

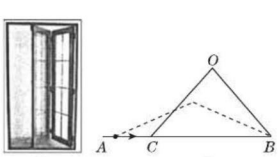
拔尖角度 ① 利用弧长公式求实际中运动的路径长

15. 【中考 · 江西】图①是一种折叠门,由上下轨道和两扇长宽相等的活页门组成,整个活页门的右轴固定在门框上,通过推动左侧活页门开关. 图②是其俯视简化示意图,已知轨道 $AB=120$ cm,两扇活页门的宽 $OC=OB=60$ cm,点 B 固定,当点 C 在 AB 上左右运动时,OC 与 OB 的长度不变.

(1)若 $\angle OBC=50°$,求 AC 的长;

(2)当点 C 从点 A 向右运动 60 cm 时,求点 O 在此过程中运动的路径长.

(所有结果保留小数点后一位,参考数据:$\sin 50°\approx 0.77$,$\cos 50°\approx 0.64$,$\tan 50°\approx 1.19$,π 取 3.14)



① ②

(第 15 题)

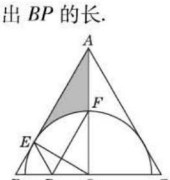
拔尖角度 ② 利用圆的知识进行综合计算

16. 【中考 · 扬州】如图,在△ABC 中,$AB=AC$,$AO\perp BC$ 于点 O,$OE\perp AB$ 于点 E,以点 O 为圆心,OE 为半径作半圆,交 AO 于点 F.

(1)求证:AC 是⊙O 的切线;

(2)若点 F 是 AO 的中点,$OE=3$,求图中阴影部分的面积;

(3)在(2)的条件下,点 P 是 BC 边上的动点,当 $PE+PF$ 取最小值时,直接写出 BP 的长.



(第 16 题)

趣味数学　谜语:此方程无解(打一成语)　　谜底:求之不得

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

第2课时　圆锥的侧面积和全面积

名师点金

1. **圆锥和侧面展开图之间转换的“两个对应”**

（1）圆锥的母线与展开后扇形的半径的对应.（2）展开后扇形的弧长与圆锥底面圆周长的对应.

2. **圆锥面积计算的“三个关键点”**

（1）分析清楚几何体表面的构成.（2）弄清圆锥与其侧面展开后扇形各元素之间的对应关系.（3）圆锥的母线长 l，底面圆的半径 r 和圆锥的高 h 的关系为 $l^2=r^2+h^2$.

Ⅰ 夯实基础 · 逐点练

（答案见125页）

知识点1 圆锥及其侧面展开图相关量的计算

1. 【中考 · 东营】若圆锥的侧面积等于其底面积的3倍，则该圆锥侧面展开图所对应扇形圆心角的度数为（　　）

A. 60°　　B. 90°　　C. 120°　　D. 180°

2. 【中考 · 贺州】已知圆锥的母线长是12，它的侧面展开图的圆心角是120°，则它的底面圆的直径为（　　）

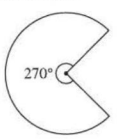
A. 2　　B. 4　　C. 6　　D. 8

3. 【中考 · 宿迁】若将半径为12 cm的半圆形纸片围成一个圆锥的侧面，则这个圆锥的底面圆半径是（　　）

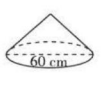
A. 2 cm　　B. 3 cm　　C. 4 cm　　D. 6 cm

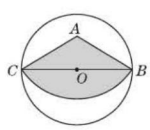
4. 【中考 · 东营】如图，已知一块圆心角为270°的扇形铁皮，用它做一个圆锥形的烟囱帽（接缝处忽略不计），圆锥底面圆的直径是60 cm，则这块扇形铁皮的半径是（　　）

A. 40 cm　　B. 50 cm　　C. 60 cm　　D. 80 cm



（第4题）





（第5题）

5. 【中考 · 贵港】如图，点 A 在以 BC 为直径的⊙O 内，且 $AB=AC$，以点 A 为圆心，AC 长为半径作弧，得到扇形 ABC，剪下扇形 ABC 围成一个圆锥（AB 和 AC 重合）. 若 $\angle BAC=120°$，$BC=2\sqrt{3}$，则这个圆锥底面圆的半径是（　　）

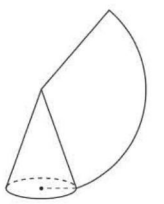
A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{3}$

6. 如图，圆锥的底面圆的半径为5，母线长为20，一只蜘蛛从底面圆周上一点 A 出发沿圆锥的侧面爬行一周后回到点 A 的最短路程是（　　）

A. 8　　B. $10\sqrt{2}$　　C. $15\sqrt{2}$　　D. $20\sqrt{2}$



（第6题）



（第7题）

知识点2 圆锥的侧面积和全面积

7. 【中考 · 南通】如图，圆锥的底面半径为2，母线长为6，则侧面积为（　　）

A. 4π　　B. 6π　　C. 12π　　D. 16π

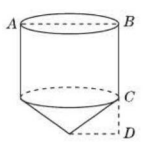
8. 如图，在 Rt△ABC 中，$AC=5$ cm，$BC=12$ cm，$\angle ACB=90°$，把 Rt△ABC 绕 BC 所在的直线旋转一周得到一个几何体，则这个几何体的侧面积为（　　）

A. 60π cm^2　　B. 65π cm^2

C. 120π cm^2　　D. 130π cm^2



（第8题）



（第9题）

9. 【中考 · 绵阳】“赶陀螺”是一项深受人们喜爱的运动，如图所示是一个陀螺的立体结构图. 已知底面圆的直径 $AB=8$ cm，圆柱体部分的高 $BC=6$ cm，圆锥体部分的高 $CD=3$ cm，则这个陀螺的表面积是（　　）

A. 68π cm^2　　B. 74π cm^2

C. 84π cm^2　　D. 100π cm^2

易错点 对由旋转所得几何体的表面积理解不透而致错

10. 已知在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$AC=4$，$BC=3$，以 AB 边所在的直线为轴，将△ABC 旋转一周，则所得几何体的表面积是（　　）

A. $\frac{168}{5}\pi$　　B. $\frac{564}{25}\pi$　　C. $\frac{84}{5}\pi$　　D. 12π

轮胎　最开始出现的轮胎是实心的，边缘也不是磨圆光滑的，而是不规则的多边形. 这样不仅在行进中颠簸得厉害，而且由于是实心的，轮胎十分耗材和沉重并且容易坏.（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞(答案见 125 页)

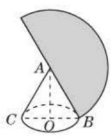
考查角度 1　利用圆锥的侧面展开图进行相关计算

11. 如图,一个圆锥的高为 $3\sqrt{3}$ cm,侧面展开图是半圆. 求:

(1)圆锥的母线长与底面半径之比;

(2)$\angle BAC$ 的度数;

(3)圆锥的侧面积. (结果保留 π)



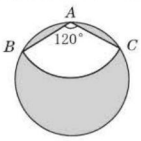
(第 11 题)

考查角度 2　利用圆锥与它侧面展开图的关系进行相关计算

12. 如图,有一直径是 1 m 的圆形铁皮,要从中剪出一个圆心角是 120°的扇形 ABC.

(1)求被剪掉的阴影部分的面积;

(2)若用所留的扇形铁皮围成一个圆锥,则该圆锥底面圆的半径是多少?



(第 12 题)

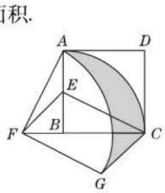
Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞(答案见 126 页)

拔尖角度 1　利用扇形、三角形面积公式求阴影面积

13. 【中考 · 襄阳】如图所示,在正方形 $ABCD$ 中,$AD=2$,E 是 AB 的中点,将 $\triangle BEC$ 绕点 B 逆时针旋转 90°后,点 E 落在 CB 的延长线上点 F 处,点 C 落在点 A 处. 再将线段 FA 绕点 F 顺时针旋转 90°得线段 FG,连接 EF,CG.

(1)求证:$EF \parallel CG$;

(2)求点 C、点 A 在旋转过程中形成的 $\overset{\frown}{AC}$,$\overset{\frown}{AG}$ 与线段 CG 所围成的阴影部分的面积.



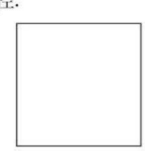
(第 13 题)

拔尖角度 2　利用圆、扇形、圆锥的特征进行方案设计

14. 工人师傅要在如图所示的一块边长为 40 cm 的正方形铁皮上裁剪下一块完整的圆形和一块完整的扇形铁皮,使之恰好做成一个圆锥模型(接缝处忽略不计).

(1)请你帮助工人师傅设计三种不同的裁剪方案;(画出示意图)

(2)何种设计方案使得正方形铁皮的利用率最高?求出此时圆锥模型底面圆的半径.



(第 14 题)

趣味数学　后来经过多年的努力改进,不规则的多边形逐渐被接近圆形的轮胎所取代. 同时,轴和轮胎的关系在同时期也得到了优化,轴的出现使材料大为节省,车辆也变得轻盈起来.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

24.8 综合与实践 进球线路与最佳射门角

Ⅰ 夯实基础 · 逐点练 ☞（答案见126页）

知识点 最佳射门角问题

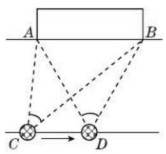
1. 如图，足球运动员在球门 AB 前横向带球准备射门，下列说法正确的是（　　）

A. 在 C 处射门进球的可能性大

B. 在 D 处射门进球的可能性大

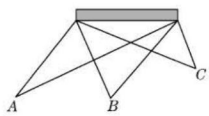
C. 在 C，D 两处射门进球的可能性一样大

D. 无法判断 C，D 两处哪处进球的可能性大



（第1题）

2. 如图，点 A，B，C 表示足球比赛中三个不同的射门位置，估测图中各角的大小关系，请指出在图中_____点处射门最好.

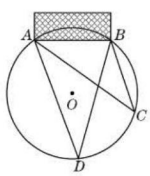


（第2题）

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞（答案见126页）

考查角度① 利用圆周角说明射门角

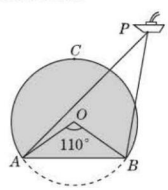
3. 足球训练场上，教练在球门前画了一个圆圈进行无人防守的射门训练. 如图，甲、乙两名运动员分别在 C，D 两处，他们争论不休，都说自己所在的位置对球门 AB 的张角大. 如果你是教练，请评一评他们两个人谁的位置对球门 AB 的张角大？为什么？



（第3题）

考查角度② 利用圆周角解决航海问题

4. 某处靠近海岸的海域有一片暗礁，当地海洋管理部门在海岸上建造了两座灯塔 A，B，通告所有船只不要进入以 AB 为弦的弓形区域（阴影部分）内（含边界）以免触礁，如图所示. 现有一艘货轮 P 正向暗礁区域靠近，当 $\angle APB$ 多大时，才能避开暗礁？



（第4题）

古人云："没有规矩，不成方圆."可见在中国古代，就有了规和矩. 我们知道，"规"是指画圆的圆规，"矩"是指折成直角的曲尺，尺上有刻度.（待续）

趣味数学

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

阶段方法技巧训练(四)

专训 1　圆中常见的计算题型 (答案见 126 页)

名师点金

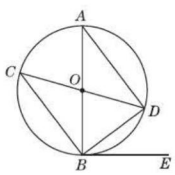
与圆有关的计算主要体现在:(1)利用圆周角定理求角度;(2)利用垂径定理构造直角三角形,结合勾股定理由弦长、弦心距、半径三个量中的任意两个量,求出第三个量;(3)利用弧长、扇形面积公式计算弧长、扇形面积,利用圆的知识解决实际问题等. 其中涉及面积的计算,常采用**作差法、等积法、平移法、割补法**等. 而实际应用常采用建模思想进行计算.

题型 1　角度的计算

1. 【中考·娄底】如图,在⊙O 中,AB,CD 是直径,BE 是切线,B 为切点,连接 AD,BC,BD.

(1)求证:$\triangle ABD \cong \triangle CDB$;

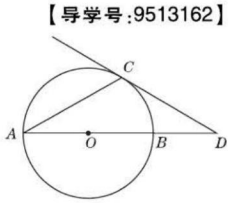
(2)若 $\angle DBE = 37°$,求 $\angle ADC$ 的度数.



(第 1 题)

题型 2　半径、弦长的计算

2. 如图,已知⊙O 中直径 AB 与弦 AC 的夹角为 30°,过点 C 作⊙O 的切线交 AB 的延长线于点 D,OD = 30 cm. 求直径 AB 的长.　【导学号:9513162】



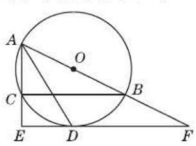
(第 2 题)

题型 3　弧长的计算

3. 【中考·衡阳】如图,⊙O 是△ABC 的外接圆,AB 为直径,$\angle BAC$ 的平分线交⊙O 于点 D,过点 D 作 $DE \perp AC$,分别交 AC,AB 的延长线于点 E,F.

(1)求证:EF 是⊙O 的切线;

(2)若 $AC = 4$,$CE = 2$,求 $\overset{\frown}{BD}$ 的长度. (结果保留 π)



(第 3 题)

趣味数学　发明规矩的确切年代已无从查考,但在公元前 15 世纪的甲骨文中,已有规矩二字了.《史记》中有这样的记载:夏禹治水的时候,是"左准绳,右规矩".(待续)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

题型4 面积的计算

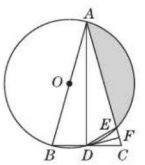
技巧1 利用“作差法”求面积

4. 【中考·攀枝花】如图，在△ABC中，$AB=AC$，以AB为直径的⊙O分别与BC，AC交于点D，E，过点D作$DF\perp AC$于点F.

(1) 若⊙O的半径为3，$\angle CDF=15°$，求阴影部分的面积；

(2) 求证：DF是⊙O的切线；

(3) 求证：$\angle EDF=\angle DAC$.



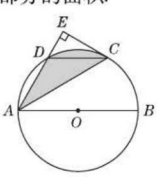
（第4题）

技巧2 利用“等积法”求面积

5. 【中考·赤峰】如图，AB为⊙O的直径，C，D是半圆AB的三等分点，过点C作AD延长线的垂线CE，垂足为E.

(1) 求证：CE是⊙O的切线；

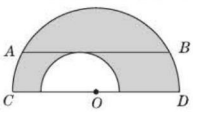
(2) 若⊙O的半径为2，求图中阴影部分的面积.



（第5题）

技巧3 利用“平移法”求面积

6. 如图所示，两个半圆中，O为大半圆的圆心，长为18的弦AB与直径CD平行且与小半圆相切，那么图中阴影部分的面积等于多少？



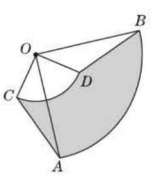
（第6题）

技巧4 利用“割补法”求面积

7. 如图所示，扇形OAB与扇形OCD的圆心角都是90°，连接AC，BD.

(1) 求证：$AC=BD$；

(2) 若$OA=2$ cm，$OC=1$ cm，求图中阴影部分的面积.



（第7题）

这意思是说，夏禹是左手拿着水准绳，右手拿规和矩进行测量，规划出治水方案的. 由此说明在夏禹治水的年代就有了规和矩这两种几何工具了.

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

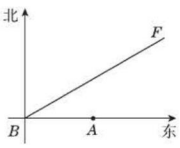
题型 4　实际应用的计算

应用 1　利用垂径定理解决台风问题

8. 如图，A 城气象台测得台风中心在 A 城正西方向 300 km的 B 处，并以 $10\sqrt{7}$ km/h 的速度向北偏东 60°的 BF 方向移动，距台风中心 200 km 的范围是受台风影响的区域.

(1) A 城是否会受到这次台风的影响？为什么？

(2) 若 A 城受到这次台风的影响，试计算 A 城遭受这次台风影响的时间有多长？

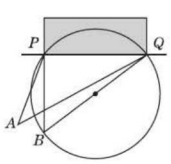


（第 8 题）

应用 2　利用圆周角知识解决足球射门问题(转化思想)

9. 如图所示，在“世界杯”足球比赛中，队员甲带球向对方球门 PQ 进攻，当他带球冲到 A 点时，同伴队员乙已经助攻冲到 B 点，现有两种射门方式：一是由队员甲直接射门；二是队员甲将球迅速传给队员乙，由队员乙射门.

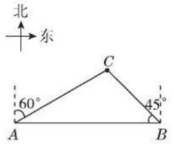
从射门角度考虑，你认为选择哪种射门方式较好？为什么？



（第 9 题）

应用 3　利用直线与圆的位置关系解决范围问题

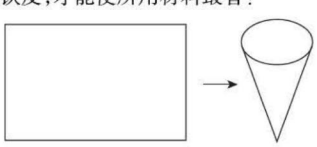
10. 如图，已知 A，B 两地相距 1 km. 要在 A，B 两地之间修建一条笔直的水渠(即图中的线段 AB)，经测量在 A 地的北偏东 60°方向，B 地的北偏西 45°方向的 C 处有一个以 C 为圆心，350 m 为半径的圆形公园，则修建的这条水渠会不会穿过公园？为什么？



（第 10 题）

应用 4　利用圆锥侧面展开图解决材料最省问题

11. 如图，某工厂要选一块矩形铁皮加工成一个底面半径为 20 cm，高为 $40\sqrt{2}$ cm 的圆锥形漏斗，要求只能有一条接缝(接缝忽略不计)，请问：选长、宽分别为多少厘米的矩形铁皮，才能使所用材料最省？



（第 11 题）

趣味数学　精巧的论证常常不是一蹴而就的，而是人们长期切磋积累的成果. 我也是慢慢学来的，而且还要继续不断的学习. ——阿贝尔

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

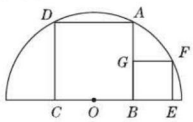
专训 2 圆中常用的作辅助线的八种方法 ☞（答案见128页）

名师点金

在解决有关圆的计算或证明题时，往往需要添加辅助线，根据题目特点选择恰当的辅助线至关重要. 圆中常用的辅助线作法有：作半径，巧用同圆的半径相等；连接圆上两点，巧用同弧所对的圆周角相等；作直径，巧用直径所对的圆周角是直角；证切线时“连半径，证垂直”，以及“作垂直，证半径”等.

方法1 作半径，巧用同圆的半径相等

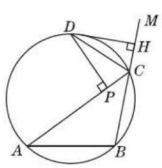
1. 如图所示，两正方形彼此相邻，且大正方形 $ABCD$ 的顶点 A，D 在半圆 O 上，顶点 B，C 在半圆 O 的直径上；小正方形 $BEFG$ 的顶点 F 在半圆 O 上，点 E 在半圆 O 的直径上，点 G 在大正方形的边 AB 上. 若小正方形的边长为 4 cm，求该半圆的半径.



（第1题）

方法2 连接圆上两点，巧用同弧所对的圆周角相等

2. 如图，圆内接三角形 ABC 的外角 $\angle ACM$ 的平分线与圆交于 D 点，$DP \perp AC$，垂足是 P，$DH \perp BM$，垂足为 H. 求证：$AP = BH$.



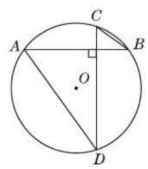
（第2题）

方法3 作直径，巧用直径所对的圆周角是直角

3. 如图，$\odot O$ 的半径为 R，弦 AB，CD 互相垂直，连接 AD，BC.

（1）求证：$AD^2 + BC^2 = 4R^2$；

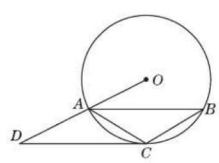
（2）若弦 AD，BC 的长是方程 $x^2 - 6x + 5 = 0$ 的两个根（$AD > BC$），求 $\odot O$ 的半径及点 O 到 AD 的距离.



（第3题）

方法4 证切线时辅助线作法的应用

4. 如图，$\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$，$CA = CB$，$CD \parallel AB$ 且与 OA 的延长线交于点 D. 判断 CD 与 $\odot O$ 的位置关系，并说明理由.

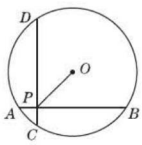


（第4题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

方法 5　遇弦加弦心距或半径

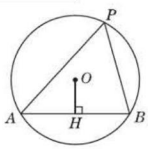
5. 如图所示，在半径为 5 的⊙O 中，AB，CD 是互相垂直的两条弦，垂足为 P，且 $AB=CD=8$，则 OP 的长为(　　)



(第 5 题)

A. 3　　B. 4　　C. $3\sqrt{2}$　　D. $4\sqrt{2}$

6. 【中考·贵港】如图所示，AB 是⊙O 的弦，$OH\perp AB$ 于点 H，点 P 是优弧上一点，若 $AB=2\sqrt{3}$，$OH=1$，则 $\angle APB$ 的度数是_____.



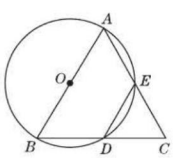
(第 6 题)

方法 6　遇直径巧加直径所对的圆周角

7. 如图，在△ABC 中，$AB=BC=2$，以 AB 为直径的⊙O 分别交 BC，AC 于点 D，E，且点 D 是 BC 的中点.

(1)求证：△ABC 为等边三角形；

(2)求 DE 的长.



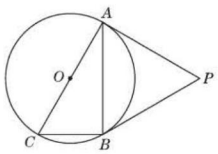
(第 7 题)

方法 7　遇切线巧作过切点的半径

8. 如图，⊙O 是 Rt△ABC 的外接圆，$\angle ABC=90°$，点 P 是圆外一点，PA 切⊙O 于点 A，且 $PA=PB$.

(1)求证：PB 是⊙O 的切线；

(2)已知 $PA=\sqrt{3}$，$\angle ACB=60°$，求⊙O 的半径.



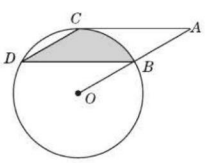
(第 8 题)

方法 8　巧添辅助线计算阴影部分的面积

9. 【中考·自贡】如图所示，点 B，C，D 都在⊙O 上，过点 C 作 $AC\parallel BD$ 交 OB 的延长线于点 A，连接 CD，且 $\angle CDB=\angle OBD=30°$，$DB=6\sqrt{3}$ cm.

(1)求证：AC 是⊙O 的切线；

(2)求由弦 CD，BD 与 $\overset{\frown}{BC}$ 所围成的阴影部分的面积.(结果保留 π)



(第 9 题)

趣味数学　sin 对 cos 说："我心中除了你，还有一个人."cos 生气地说："她是谁？"sin 说："tan."

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

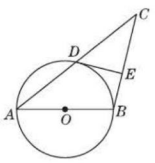
专训 3 圆与相似三角形的综合 ☞（答案见129页）

名师点金

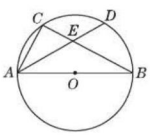
圆与相似三角形相综合是中考中的热门考点，解圆与相似三角形相综合的问题时，关键点是从圆中去抽取出相似三角形模型，然后利用相似三角形的性质去证明和求解相关问题. 在证两三角形相似时，往往构造同弧所对的圆周角相等或直径所对的圆周角是直角，从而为证两三角形相似创造角相等的条件.

1. 【中考·衢州】如图，已知$\triangle ABC$，$AB=BC$，以AB为直径的圆交AC于点D，过点D的$\odot O$的切线交BC于点E. 若$CD=5$，$CE=4$，则$\odot O$的半径是(　　)

A. 3　　B. 4　　C. $\frac{25}{6}$　　D. $\frac{25}{8}$



（第1题）



（第2题）

2. 【中考·南通】如图，AB为$\odot O$的直径，C为$\odot O$上一点，弦AD平分$\angle BAC$，交BC于点E，$AB=6$，$AD=5$，则AE的长为(　　)

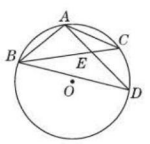
A. 2.5　　B. 2.8

C. 3　　D. 3.2

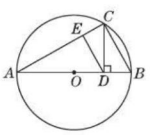
3. 如图，A，B，C，D是$\odot O$上的四个点，$AB=AC$，AD交BC于点E，$AE=3$，$ED=4$，则AB的长为(　　)

A. 3　　B. $2\sqrt{3}$

C. $\sqrt{21}$　　D. $3\sqrt{5}$



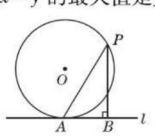
（第3题）



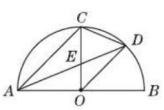
（第4题）

4. 【中考·呼和浩特】如图，AB是$\odot O$的直径，点C在圆上，$CD\perp AB$，$DE/\!/BC$，则图中与$\triangle ABC$相似的三角形有_____个.

5. 【中考·苏州】如图，直线l与半径为4的$\odot O$相切于点A，P是$\odot O$上的一个动点(不与点A重合)，过点P作$PB\perp l$，垂足为B，连接PA. 设$PA=x$，$PB=y$，则$x-y$的最大值是_____.



（第5题）



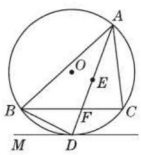
（第6题）

6. 如图，AB是半圆O的直径，半径$OC\perp AB$于点O，AD平分$\angle CAB$交弧BC于点D，连接CD，OD，给出以下四个结论：①$AC/\!/OD$；②$CE=OE$；③$\triangle ODE\backsim\triangle ADO$；④$2CD^2=CE\cdot AB$. 其中正确结论的序号是_____.

7. 【中考·滨州】如图，点E是$\triangle ABC$的内心，AE的延长线交BC于点F，交$\triangle ABC$的外接圆$\odot O$于点D，连接BD，过点D作直线DM，使$\angle BDM=\angle DAC$.

(1)求证：直线DM是$\odot O$的切线.

(2)求证：$DE^2=DF\cdot DA$.



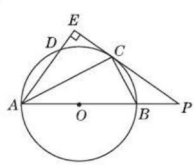
（第7题）

8. 【中考·襄阳】如图，AB是$\odot O$的直径，点C为$\odot O$上一点，AE和过点C的切线互相垂直，垂足为E，AE交$\odot O$于点D，直线EC交AB的延长线于点P，连接AC，BC，$PB:PC=1:2$.

(1)求证：AC平分$\angle BAD$.

(2)探究线段PB，AB之间的数量关系，并说明理由.

(3)若$AD=3$，求$\triangle ABC$的面积.



（第8题）

几何看来有时候要领先于分析，但事实上，几何的先行于分析，只不过像一个仆人走在主人的前面一样，是为主人开路的. ——西尔维斯特

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

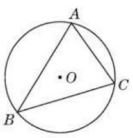
专训 4　用三角函数解与圆有关问题 ☞(答案见 129 页)

名师点金

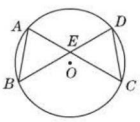
用三角函数解与圆有关的问题是近几年中考热门的命题内容,题型多样化,一般以中档题、压轴题的形式出现,应高度重视.

1. 如图,已知△ABC 的外接圆⊙O 的半径为 3,$AC=4$,则 $\sin B=$(　　)

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{4}{5}$　　D. $\frac{2}{3}$



(第 1 题)



(第 2 题)

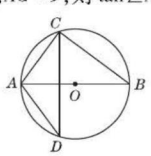
2. 如图,已知⊙O 的两条弦 AC,BD 相交于点 E,$\angle A=70°$,$\angle C=50°$,那么 $\cos\angle AEB$ 的值为(　　)

A. $\sqrt{3}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

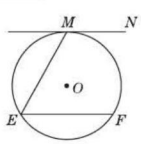
3. 【中考·乐山】在△ABC 中,$AB=AC=5$,$\sin B=\frac{4}{5}$.⊙O 过 B,C 两点,且⊙O 的半径 $r=\sqrt{10}$,则 OA 的长为(　　)

A. 3 或 5　　B. 5　　C. 4 或 5　　D. 4

4. 【中考·黔东南州】如图,AB 是⊙O 的直径,$AB=15$,$AC=9$,则 $\tan\angle ADC=$_____.



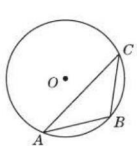
(第 4 题)



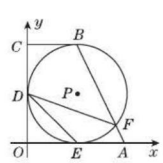
(第 5 题)

5. 【中考·玉林】如图,直线 MN 与⊙O 相切于点 M,$ME=EF$ 且 $EF/\!/MN$,则 $\cos E=$_____.

6. 【中考·泰安】如图,在半径为 5 的⊙O 中,弦 $AB=6$,点 C 是优弧 AB 上的一点(不与 A,B 重合),则 $\cos C$ 的值为_____.



(第 6 题)



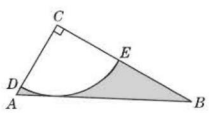
(第 7 题)

7. 【中考·荆州】如图,在直角坐标系中,四边形 $OABC$ 是直角梯形,$BC/\!/OA$,⊙P 分别与 OA,OC,BC 相切于点 E,D,B,与 AB 交于点 F,已知 $A(2,0)$,$B(1,2)$,则 $\tan\angle FDE=$_____.

8. 【中考·福州】如图,在 Rt△ABC 中,$\angle C=90°$,$AC=\sqrt{5}$,$\tan B=\frac{1}{2}$,半径为 2 的⊙C 分别交 AC,BC 于点 D,E,得到$\overset{\frown}{DE}$.

(1)求证:AB 为⊙C 的切线;

(2)求图中阴影部分的面积.

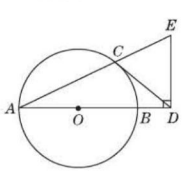


(第 8 题)

9. 【中考·乌鲁木齐】如图,AB 是⊙O 的直径,CD 与⊙O 相切于点 C,与 AB 的延长线交于点 D,$DE\perp AD$ 且与 AC 的延长线交于点 E.

(1)求证:$DC=DE$;

(2)若 $\tan\angle CAB=\frac{1}{2}$,$AB=3$,求 BD 的长.



(第 9 题)

趣味数学　《守株待兔》这则寓言家喻户晓,两千年来,人们一直认为“待兔”不得,罪在“守株”!其实,抱怨“守株”是没有道理的,问题的关键在于兔子的运动规律.(待续)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

专训5 分类讨论思想在圆中的应用类型 ☞（答案见130页）

名师点金

由于点、线在圆中的位置分布可能有多种情况，经常会导致答案的不唯一性，如：点与圆的位置关系，点可能在圆内，也可能在圆外；两条弦的位置关系，可能在某条直径的同侧，也可能在某条直径的异侧；一条弦（非直径）所对的圆周角可能是锐角，也可能是钝角等. 因此，求解圆的有关问题时，要注意分类讨论.

类型1 点与圆的位置关系不唯一

1. 已知点 P 是⊙O 外一点，PA，PB 是⊙O 的两条切线，切点分别为 A，B，点 C 是⊙O 上的任意一点（不与点 A，B 重合）. 若∠$APB=50°$，求∠ACB 的度数.

类型2 圆心的位置关系不唯一

2. 已知在圆内接三角形 ABC 中，$AB=AC$，圆心 O 到 BC 的距离为 6 cm，圆的半径为 10 cm，求腰 AB 的长.

类型3 弦与弦的位置关系不唯一

3. ⊙O 的半径为 5 cm，弦 $AB\parallel CD$，且 $AB=8$ cm，$CD=6$ cm，求 AB 与 CD 之间的距离.

类型4 点在直径上的位置不唯一

4. 已知⊙O 的直径 $AB=10$ cm，弦 $CD\perp AB$ 于点 M，若 $OM:OA=3:5$，则弦 AC 的长为多少？

类型5 点在圆周上的位置不唯一

5. 已知 A，B，C 三点在⊙O 上，$OD\perp BC$ 于点 D，∠$BOD=40°$，则∠BAC 的度数为_____.

6. 已知点 A，B，C 在半径为 2 cm 的⊙O 上，若 $BC=2\sqrt{3}$ cm，求∠A 的度数.

7. 已知 A，B 是⊙O 上的两点，如果∠$AOB=60°$，C 是⊙O 上不与点 A，B 重合的任意一点，求∠ACB 的度数.

类型6 弦所对的圆周角不唯一

8. 圆的一条弦长等于它的半径，那么这条弦所对的圆周角为（　　）

A. 30°或 60°　　B. 60°

C. 150°　　D. 30°或 150°

9. 若圆的一条弦把圆分成度数比为 2∶7 的两条弧，则弦所对的圆周角等于_____.

类型7 直线与圆的位置关系不唯一

10. 已知⊙O 的直径为 6，P 为直线 l 上一点，$OP=3$，那么直线 l 与⊙O 的关系是_____.

类型8 切线的位置关系不唯一

11. 已知 OA，OB 是⊙O 的半径且互相垂直，延长 OB 到点 C，使 $BC=OB$，CD 是⊙O 的切线，D 为切点，求∠OAD 的度数.

如果通往大树的路是兔子所必经的，那么“守株”又何妨？然而世界是一个不断运动的世界. 兔子的活动，在时空的长河中，划出一条千奇百怪的轨迹.（待续）

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

全章热门考点整合应用

☞(答案见 131 页)

名师点金

圆的知识是初中数学的重点内容,也是历年中考命题的热点.本章题型广泛,主要考查旋转、圆的概念和基本性质、圆周角定理及其推论、直线与圆的位置关系、切线的性质和判定、正多边形与圆的计算和证明等.考查通常以这些知识为载体,与函数、方程等知识相综合.全章热门考点可概括为:三个概念、三个定理、三个关系、两个圆与三角形、三个公式、三个技巧、两种思想.

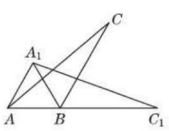
考点 1 三个概念

概念 1 旋转

1. 如图,将一个钝角三角形 ABC(其中 $\angle ABC = 120°$)绕点 B 按顺时针方向旋转得 $\triangle A_1BC_1$,使得点 C 落在 AB 的延长线上的点 C_1 处,连接 AA_1.

(1)求出旋转角的度数;

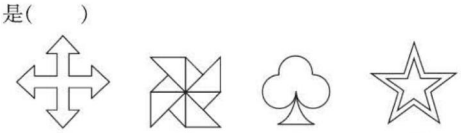
(2)求证:$\angle A_1AC = \angle C_1$.



(第 1 题)

概念 2 中心对称和中心对称图形

2. 下列图形中,既是轴对称图形,又是中心对称图形的是(　　)



A　　B　　C　　D

概念 3 圆的相关概念

3. 下列说法正确的是(　　)

A. 直径是弦,弦也是直径

B. 半圆是弧,弧是半圆

C. 无论过圆内哪一点,只能作一条直径

D. 在同圆或等圆中,直径的长度是半径的 2 倍

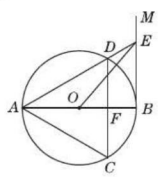
考点 2 三个定理

定理 1 垂径定理

4. 【中考 · 北京】如图,AB 是 $\odot O$ 的直径,过点 B 作 $\odot O$ 的切线 BM,弦 $CD \parallel BM$,交 AB 于点 F,且 $\overset{\frown}{DA} = \overset{\frown}{DC}$,连接 AC,AD,延长 AD 交 BM 于点 E.

(1)求证:$\triangle ACD$ 是等边三角形;

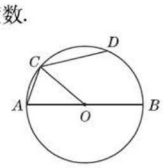
(2)连接 OE,若 $DE = 2$,求 OE 的长.



(第 4 题)

定理 2 圆心角、弦、弧间的关系定理

5. 如图,AB 是 $\odot O$ 的直径,点 C 在 $\odot O$ 上,$\angle AOC = 40°$,D 是 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点,求 $\angle ACD$ 的度数.



(第 5 题)

趣味数学　希望这条轨迹能与树木在时空中的轨线再次相交,无疑是极为渺茫的,因此,这正是这位农人悲剧之所在!

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

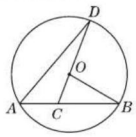
定理3 圆周角定理

6. 如图，已知 AB 是⊙O 的弦，$OB=2$，$\angle B=30°$，C 是弦 AB 上任意一点（不与点 A，B 重合），连接 CO 并延长 CO 交⊙O 于点 D，连接 AD.

（1）弦长 AB 等于_____；（结果保留根号）

（2）当 $\angle D=20°$ 时，求 $\angle BOD$ 的度数；

（3）当 AC 的长度为多少时，以点 A，C，D 为顶点的三角形与以点 B，C，O 为顶点的三角形相似？

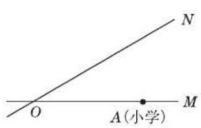


（第6题）

考点3 三个关系

关系1 点与圆的位置关系

7. 如图，有两条公路 OM，ON 相交成 30° 角，沿公路 OM 方向离两条公路的交叉处 O 点 80 m 的 A 处有一所希望小学，当拖拉机沿 ON 方向行驶时，距拖拉机 50 m 范围内会受到噪音影响. 已知有两台相距 30 m 的拖拉机正沿 ON 方向行驶，它们的速度均为5 m/s，则这两台拖拉机沿 ON 方向行驶时给小学带来噪音影响的时间是多少？



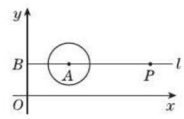
（第7题）

关系2 直线与圆的位置关系

8. 如图，已知 O 为原点，点 A 的坐标为(4,3)，⊙A 的半径为2. 过 A 作直线 l 平行于 x 轴，交 y 轴于点 B，点 P 在直线 l 上运动.

（1）当点 P 在⊙A 上时，请你直接写出它的坐标；

（2）设点 P 的横坐标为12，试判断直线 OP 与⊙A 的位置关系，并说明理由.



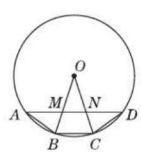
（第8题）

关系3 正多边形和圆的位置关系

9. 如图，已知⊙O 的内接正十边形 $ABCD\cdots$，AD 分别交 OB，OC 于 M，N. 求证：

（1）$MN/\!/BC$；

（2）$MN+BC=OB$.



（第9题）

谜语：弟弟千百万，在哥周围站，到哥等距离，围成包围圈（打一几何图形） 谜底：圆

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

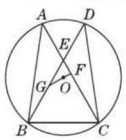
考点 4　两个圆与三角形

圆与三角形 1　三角形的外接圆

10. 【中考·哈尔滨】如图，$\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆，弦 BD 交 AC 于点 E，连接 CD，且 $AE=DE$，$BC=CE$.

(1) 求 $\angle ACB$ 的度数；

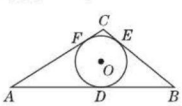
(2) 过点 O 作 $OF\perp AC$ 于点 F，延长 FO 交 BE 于点 G，$DE=3$，$EG=2$，求 AB 的长.



（第 10 题）

圆与三角形 2　三角形的内切圆

11. 如图，若 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 $AB=9$，$BC=5$，$CA=6$，$\triangle ABC$ 的内切圆 $\odot O$ 切 AB，BC，AC 于点 D，E，F，则 AF 的长为(　　)



（第 11 题）

A. 5　　B. 3

C. 4.5　　D. 4

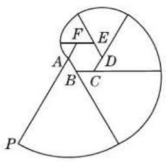
考点 5　三个公式

公式 1　弧长公式

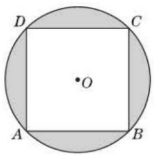
12. 如图，已知正六边形 $ABCDEF$ 是边长为 2 cm 的螺母，点 P 是 FA 延长线上的点，在 A，P 之间拉一条长为 12 cm 的无伸缩性细线，一端固定在点 A，握住另一端点 P 拉直细线，把它全部紧紧缠绕在螺母上(缠绕时螺母不动)，则点 P 运动的路径长为(　　)

A. 13π cm　　B. 14π cm

C. 15π cm　　D. 16π cm



（第 12 题）



（第 13 题）

公式 2　扇形面积公式

13. 【中考·益阳】如图，正方形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$，$AB=4$，则图中阴影部分的面积是(　　)

A. $4\pi-16$　　B. $8\pi-16$

C. $16\pi-32$　　D. $32\pi-16$

公式 3　圆锥的侧面积和全面积公式

14. 在手工课上，王红制成了一顶圆锥形纸帽，已知纸帽底面圆的半径为 10 cm，母线长为 50 cm，则制作一顶这样的纸帽所需纸板的面积至少为(　　)

A. 250π cm^2　　B. 500π cm^2

C. 750π cm^2　　D. $1\,000\pi$ cm^2

15. 已知圆锥底面圆的半径为 2，母线长是 4，则它的全面积为(　　)

A. 4π　　B. 8π　　C. 12π　　D. 16π

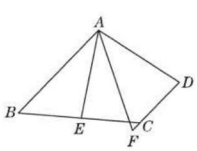
考点 6　三个技巧

技巧 1　作中心对称图形探究线段之间的关系

16. (探究题) 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB\parallel DC$，E 为 BC 边的中点，$\angle BAE=\angle EAF$，AF 与 DC 的延长线相交于点 F.

(1) 作出 $\triangle ABE$ 关于点 E 成中心对称的图形；

(2) 探究线段 AB 与 AF，CF 之间的数量关系，并证明你的结论.



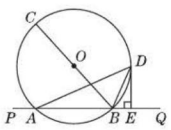
（第 16 题）

趣味数学　圆是一种美丽的图形. 春秋战国时期，墨翟在其所著《墨经》一书中就曾明确指出："圆，一中同长也." 意思是说：圆，只有一个圆心，由圆心到圆周的长都相等.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

技巧2 作同弧所对的圆周角（特别的：直径所对的圆周角）

17. 如图，直线 PQ 与 $\odot O$ 相交于点 A，B，BC 是 $\odot O$ 的直径，BD 平分 $\angle CBQ$ 交 $\odot O$ 于点 D，过点 D 作 $DE \perp PQ$，垂足为 E. 连接 AD，已知 $BC = 10$，$BE = 2$，求 $\sin \angle BAD$ 的值.



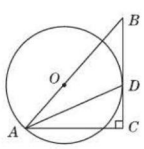
（第17题）

技巧3 作半径（特别的：垂直于弦的半径、过切点的半径）

18. 如图，$\odot O$ 的半径为 4，B 是 $\odot O$ 外一点，连接 OB，且 $OB = 6$. 过点 B 作 $\odot O$ 的切线 BD，切点为 D，延长 BO 交 $\odot O$ 于点 A，过点 A 作切线 BD 的垂线，垂足为 C.

（1）求证：AD 平分 $\angle BAC$；

（2）求 AC 的长.



（第18题）

考点7 两种思想

思想1 分类讨论思想

19. 已知在半径为 1 的 $\odot O$ 中，弦 $AC = \sqrt{2}$，弦 $AB = \sqrt{3}$，则 $\angle CAB =$ _____. 【导学号：9513162】

思想2 方程思想

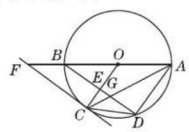
20. 【中考·绥化】如图，AB 为 $\odot O$ 的直径，AC 平分 $\angle BAD$，交弦 BD 于点 G，连接半径 OC 交 BD 于点 E，过点 C 的一条直线交 AB 的延长线于点 F，$\angle AFC = \angle ACD$.

（1）求证：直线 CF 是 $\odot O$ 的切线.

（2）若 $DE = 2CE = 2$.

①求 AD 的长；

②求 $\triangle ACF$ 的周长（结果可保留根号）.



（第20题）

数学是人类知识活动留下来的最具威力的知识工具，是一些现象的根源. 数学是不变的，是客观存在的，上帝必以数学法则建造宇宙. ——笛卡儿

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

25.1 投 影

第1课时 平行投影与中心投影

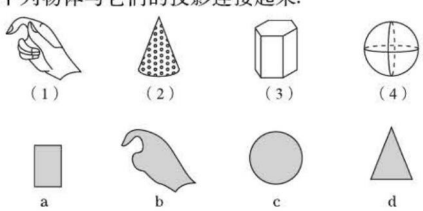
名师点金

1. **平行投影的特点**(光线平行)
   (1)在同一时刻,不同物体的影子同向,且物体的物高和影长成正比.
   (2)在不同时刻,同一物体的影子的方向和大小可能不同.
2. **中心投影的特点**(物体与其影子顶端连线所在直线必过点光源)
   (1)等高的物体垂直地面放置时,离点光源越近,影子越短;离点光源越远,影子越长.
   (2)等长的物体平行于地面放置时,离点光源越近,影子越长;离点光源越远,影子越短,但不会比物体本身的长度还短.

1 夯实基础·逐点练 (答案见133页)

知识点1 投影

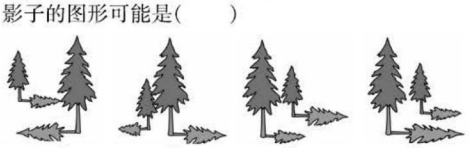
1. 把下列物体与它们的投影连接起来.



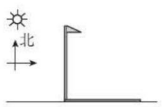
2. 在一盏路灯的周围有一圈栏杆,则下列叙述中正确的是(　　)
A. 若栏杆的影子都落在围栏里,则是在太阳光照射下形成的
B. 若这盏路灯有影子,则说明是在白天形成的
C. 若所有栏杆的影子都在围栏外,则是在路灯照射下形成的
D. 若所有栏杆的影子都在围栏外,则是在太阳光照射下形成的

知识点2 平行投影

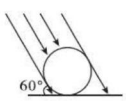
3. 下列四幅图形中,表示两棵树在同一时刻阳光下的影子的图形可能是(　　)



4. 如图是胡老师画的一幅写生画,四位同学对这幅画的作画时间作了猜测. 根据胡老师给出的方向坐标,猜测比较合理的是(　　)
A. 小明:早上8点　　B. 小亮:中午12点
C. 小刚:下午5点　　D. 小红:什么时间都行



(第4题)



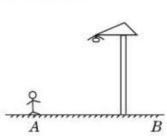
(第5题)

5. 如图,太阳光线与地面成60°的角,照射在地面上的一只皮球上,皮球在地面上的投影长是$10\sqrt{3}$ cm,则皮球的直径是(　　)
A. $5\sqrt{3}$ cm　　B. 15 cm　　C. 10 cm　　D. $8\sqrt{3}$ cm

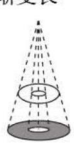
知识点3 中心投影

6. 下列现象属于中心投影的有(　　)
①小孔成像;②皮影戏;③手影;④放电影.
A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

7. 如图,晚上小亮在路灯下散步,在小亮由A处径直走到B处这一过程中,他在地上的影子(　　)
A. 逐渐变短　　B. 先变短后变长
C. 先变长后变短　　D. 逐渐变长



(第7题)


(第8题)

8. 【中考·永州】圆桌面(桌面中间有一个直径为0.4 m的圆洞)正上方的灯泡(看作一个点)发出的光线照射平行于地面的桌面后,在地面上形成如图所示的圆环形阴影. 已知桌面直径为1.2 m,桌面离地面1 m,若灯泡离地面3 m,则地面圆环形阴影的面积是(　　)
A. 0.324π m^2　　B. 0.288π m^2
C. 1.08π m^2　　D. 0.72π m^2

趣味数学 一名统计学家遇到一位数学家,统计学家调侃数学家说道:"你们不是说若$X=Y$且$Y=Z$,则$X=Z$吗!那么想必你若是喜欢一个女孩,那么那个女孩喜欢的男生你也会喜欢喽."(待续)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

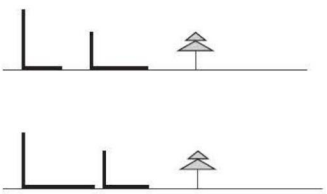
Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞（答案见133页）

考查角度1 利用投影的特征判断投影类型

9. 如图分别是两根木杆及其影子的图形.

（1）哪个图反映了阳光下的情形？哪个图反映了路灯下的情形？

（2）请你画出图中表示小树影长的线段.



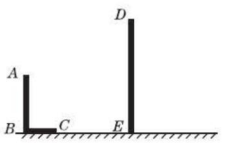
（第9题）

考查角度2 利用平行投影的性质测高

10. 如图，已知 AB 和 DE 是直立在地面上的两根立柱. $AB=5$ m，某一时刻 AB 在阳光下的影长 $BC=3$ m.

（1）请你在图中画出此时 DE 在阳光下的影子；

（2）若在测量 AB 的影长时，同时测量出 DE 在阳光下的影长为6 m，请你计算 DE 的长.



（第10题）

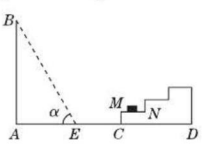
Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞（答案见133页）

拔尖角度1 利用平行投影判断光照情况

11. 如图所示，一幢楼房 AB 背后有一台阶 CD，台阶每层高0.2米，且 $AC=17.2$ 米，设太阳光线与水平地面的夹角为 α，当 $\alpha=60°$ 时，测得楼房在地面上的影长 $AE=10$ 米，现有一只小猫睡在台阶的 MN 这层上晒太阳.

（1）楼房的高度约为多少米？（结果精确到0.1米）

（2）过了一会儿，当 $\alpha=45°$ 时，小猫能否晒到太阳？请说明理由.（参考数据：$\sqrt{3}\approx1.732$）



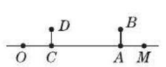
（第11题）

拔尖角度2 利用中心投影进行作图计算

12. 如图，身高1.6米的小明从距路灯的底部（点 O）20米的点 A 沿 AO 方向行走14米到点 C 处，小明在 A 处，头顶 B 在路灯投影下形成的影子在 M 处.

（1）已知灯杆垂直于路面，试标出路灯 P 的位置和小明在 C 处，头顶 D 在路灯投影下形成的影子 N 的位置.

（2）若路灯（点 P）距地面8米，小明从 A 到 C 时，身影的长度是变长了还是变短了？变长或变短了多少米？



（第12题）

数学家想了一下反问道："你把左手放到一锅一百度的开水中，右手放到一锅零度的冰水里想来也没事吧！因为它们平均不过是五十度而已！"

趣味数学

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

第2课时　正投影

名师点金

1. 正投影是特殊的平行投影，它不可能是中心投影. 同时，立体图形的正投影可以归结为点、线段及平面图形的正投影.
2. 正投影只要求光线与投影面之间是垂直的，与物体的位置无关.
3. 因为正投影的投影线垂直于投影面，所以一个物体的正投影与我们沿投影线方向观察这个物体看到的平面图形之间是有联系的.

1 夯实基础·逐点练 (答案见133页)

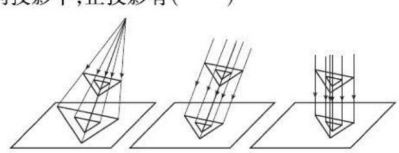
知识点1 正投影的定义

1. 投影线_____于投影面产生的投影叫做正投影. 它包含以下两个要素：
(1)正投影是特殊的_____，它不可能是_____.
(2)正投影只要求_____与_____垂直，与物体位置无关.

2. 球的正投影是(　　)
A. 圆　　B. 椭圆　　C. 点　　D. 圆环

3. 【中考·绥化】正方形的正投影不可能是(　　)
A. 线段　　B. 矩形　　C. 正方形　　D. 梯形

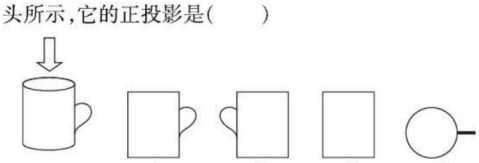
4. 下列投影中，正投影有(　　)



(第4题)

A. 0个　　B. 1个　　C. 2个　　D. 3个

5. 如图，水杯的杯口与投影面平行，投影线的方向如箭头所示，它的正投影是(　　)



(第5题)　A　B　C　D

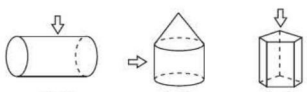
6. 底面与投影面垂直的圆锥体的正投影是(　　)
A. 圆　　B. 三角形
C. 矩形　　D. 正方形

7. 【中考·南宁】把一个正六棱柱如图摆放，光线由上向下照射此正六棱柱时的正投影是(　　)



(第7题)　A　B　C　D

8. 如图，投影线的方向如箭头所示，画出下列各图形的正投影.



(1)　(2)　(3)

(第8题)

知识点2 正投影的性质

9. 一根笔直的小木棒(记为线段AB)，它的正投影为线段CD，则下列各式中一定成立的是(　　)
A. $AB=CD$　　B. $AB\leqslant CD$
C. $AB>CD$　　D. $AB\geqslant CD$

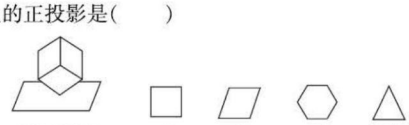
10. 【中考·南宁】小乐用一块矩形硬纸板在阳光下做投影实验，通过观察，发现这块矩形硬纸板在平整的地面上不可能出现的投影是(　　)
A. 三角形　　B. 线段
C. 矩形　　D. 平行四边形

11. 当棱长为20 cm的正方体的某个面平行于投影面时，这个正方体的正投影的面积为(　　)
A. 200 cm^2　B. 300 cm^2　C. 400 cm^2　D. 600 cm^2

12. 几何体在平面P的正投影，取决于(　　)
①几何体的形状；②投影面与几何体的位置关系；③投影面P的大小.
A. ①②　　B. ①③　　C. ②③　　D. ①②③

易错点 对正方体的正投影的类型认识不全而致错

13. 如图所示，把正方体一个顶点朝上立放，在它下面放一张白纸，使纸面与太阳光垂直，则正方体在纸上的正投影是(　　)



(第13题)　A　B　C　D

趣味数学　点——如果没有从开始时的点点滴滴做起，那么以后就没有一线希望.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

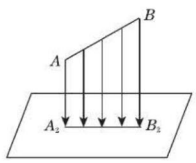
Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞（答案见133页）

考查角度1 利用正投影的性质求影长（转化思想）

14. 已知一根长为8 cm的木棒AB与投影面平行，投影线垂直于投影面.

（1）求此时的影子A_1B_1的长度；

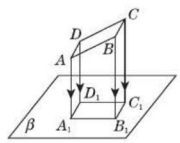
（2）如图是将木棒绕其端点A逆时针旋转30°后的示意图（此时平面ABB_2A_2垂直于投影面），求旋转后木棒的影子A_2B_2的长.



（第14题）

考查角度2 利用正投影的性质求投影的面积

15. 已知一纸板的形状为正方形$ABCD$，且边长为10 cm. 如图，四边形$A_1B_1C_1D_1$是正方形$ABCD$在面β上的正投影，AD，BC与投影面β平行，且AB，CD与投影面β成30°角，求正方形$ABCD$的正投影的面积.

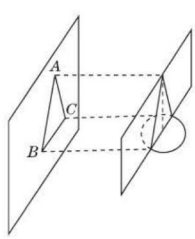


（第15题）

Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞（答案见133页）

拔尖角度1 利用正投影的定义和性质求几何体的表面积和体积

16. 一个圆锥的轴截面平行于投影面，圆锥的正投影是等腰三角形，如图所示，等腰三角形的腰长为13 cm，高为12 cm，求该圆锥的体积及表面积.（提示：$V_{圆锥}=\frac{1}{3}\pi r^2h$，其中$r$是底面圆的半径，$h$是圆锥的高）



（第16题）

拔尖角度2 利用投影的定义叙述图形的性质并推断图形的性质

17. 操作与研究：

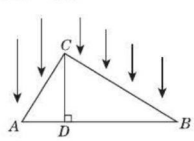
如图，$\triangle ABC$被平行光线照射，$CD\perp AB$于D，AB在投影面上.

（1）指出图中AC的投影是什么，CD与BC的投影呢？

（2）探究：当$\triangle ABC$为直角三角形（$\angle ACB=90°$）时，易得$AC^2=AD\cdot AB$，此时有如下结论：直角三角形一直角边的平方等于它在斜边上的射影与斜边的乘积，这一结论我们称为射影定理.

通过上述结论的推理，请证明以下两个结论：

①$BC^2=BD\cdot AB$；②$CD^2=AD\cdot BD$.



（第17题）

谜语：零的突破（打一字母）

谜底：C

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

阶段方法技巧训练(五)

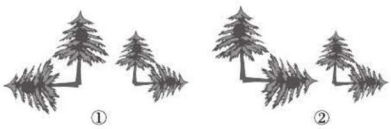
专训 1　平行投影、中心投影、正投影间的关系 (答案见 134 页)

名师点金

1. 平行投影的投影线是平行的,在同一时刻物体的影长与物高成正比;中心投影的投影线相交于一点,在同一时刻物体的影长与物高不一定成正比.
2. 平行投影在同一时刻的影子总在同一方向;中心投影在同一时刻的影子不一定在同一方向.
3. 正投影是投影线垂直于投影面的平行投影.

训练角度 1　利用平行投影与中心投影的定义判断投影

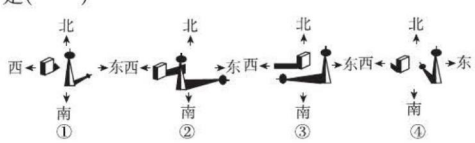
1. 如图,下列判断正确的是(　　)



(第 1 题)

A. 图①是在阳光下的影子,图②是在灯光下的影子
B. 图②是在阳光下的影子,图①是在灯光下的影子
C. 图①和图②都是在阳光下的影子
D. 图①和图②都是在灯光下的影子

2. 如图,下面是北半球一天中四个不同时刻两个建筑物的影子,将它们按时间先后顺序进行排列,正确的是(　　)

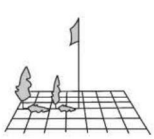


(第 2 题)

A. ③④②①　　B. ②④③①
C. ③④①②　　D. ③①②④

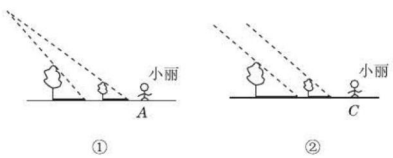
训练角度 2　利用平行投影与中心投影的特征作图

3. 如图,两棵树的影子是在太阳光下形成的还是在灯光下形成的?画出同一时刻旗杆的影子.(用线段表示)



(第 3 题)

4. 如图①②分别是两棵树及其影子的情形.

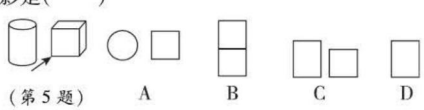


(第 4 题)

(1)哪个图反映了阳光下的情形?哪个图反映了路灯下的情形?
(2)你是用什么方法判断的?
(3)请分别画出图中表示小丽影子的线段.

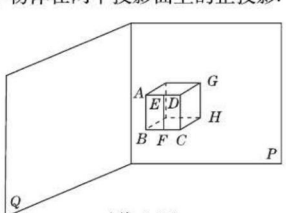
训练角度 3　正投影的识别与画法

5. 如图,若投影线的方向如箭头所示,则图中物体的正投影是(　　)



(第 5 题)

6. 一个正方体框架上面嵌有一根黑色的金属丝 EF,如图所示.若正方体的面 $ABCD$ 平行于投影面 P,且垂直于投影面 Q,画出这个物体在两个投影面上的正投影.



(第 6 题)

趣味数学　近代最伟大的科学家爱因斯坦在谈成功的秘诀时,写下一个公式:$A=x+y+z$,并解释道:"A 代表成功,x 代表艰苦的劳动,y 代表正确的方法,z 代表少说空话."——爱因斯坦

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

专训 2 投影规律在实际问题中的应用 ☞（答案见134页）

名师点金

用光线照射物体，在某个平面（地面、墙壁等）上得到的影子叫物体的投影. 投影有两种类型：平行投影和中心投影. 平行投影的特征是投影线平行，中心投影的特征是投影线相交于一点. 与投影有关的实际问题往往与相似三角形、直角三角形的性质密切相关，解答时要注意构造相似三角形或直角三角形.

训练角度 1 平行投影的实际应用

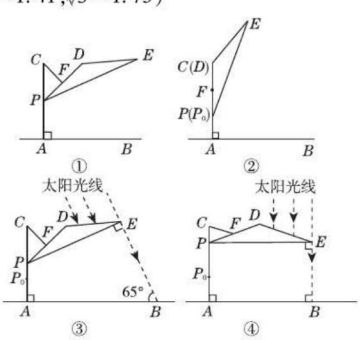
类型 1 投影线不受限时的测量

1. 【中考 · 舟山】如图①，滑动调节式遮阳伞的立柱 AC 垂直于地面 AB，P 为立柱上的滑动调节点，伞体的截面示意图为 $\triangle PDE$，F 为 PD 中点，$AC=2.8$ m，$PD=2$ m，$CF=1$ m，$\angle DPE=20°$. 当点 P 位于初始位置 P_0 时，点 D 与 C 重合（如图②）. 根据生活经验，当太阳光线与 PE 垂直时，遮阳效果最佳.

（1）上午 10:00 时，太阳光线与地面的夹角为 65°（如图③），为使遮阳效果最佳，点 P 需从 P_0 上调多少距离？（结果精确到 0.1 m）

（2）中午 12:00 时，太阳光线与地面垂直（如图④），为使遮阳效果最佳，点 P 在（1）的基础上还需上调多少距离？（结果精确到 0.1 m）

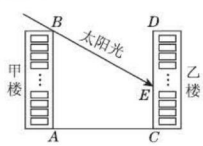
（参考数据：$\sin 70°\approx 0.94$，$\cos 70°\approx 0.34$，$\tan 70°\approx 2.75$，$\sqrt{2}\approx 1.41$，$\sqrt{3}\approx 1.73$）



（第 1 题）

类型 2 投影线在特定条件时的测量

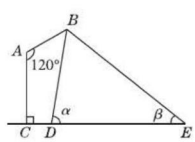
2. 如图，有甲、乙两幢办公楼，两幢楼都为 10 层，由地面上依次为 1 层至 10 层，每层的高度均为 3 m，两楼之间的距离为30 m. 为了了解太阳光与水平线的夹角为 30°时，甲楼对乙楼采光的影响情况，请你求出甲楼楼顶 B 的影子 E 落在乙楼的第几层.



（第 2 题）

训练角度 2 中心投影的实际应用

3. 【中考 · 内江】如图是某路灯在铅垂面内的示意图，灯柱 AC 的高为 11 米，灯杆 AB 与灯柱 AC 的夹角 $\angle A=120°$，路灯采用锥形灯罩，在地面上的照射区域 DE 长 18 米，从 D，E 两处测得灯 B 的仰角分别为 α 和 β，且 $\tan\alpha=6$，$\tan\beta=\frac{3}{4}$，求灯杆 AB 的长度.



（第 3 题）

谜语：（1）走遍天下都不怕（打一数学名词）；（2）夏周之间（打一数学名词）.

谜底：（1）有理数；（2）商.

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

25.2 三视图

第 1 课时　由几何体到三视图

名师点金

画三视图的口诀

主、俯视图长对正，主、左视图高平齐，左、俯视图宽相等.

三视图的画法

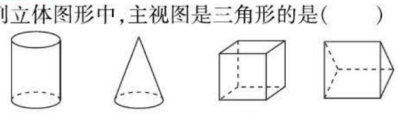
1. 确定主视图位置，画出主视图；2. 在主视图的正下方画出俯视图，注意与主视图“长对正”；3. 在主视图的正右方画出左视图，注意与主视图“高平齐”，与俯视图“宽相等”.

注意：几何体看得见部分的轮廓线画成实线，被遮挡而看不见部分的轮廓线画成虚线.

1 夯实基础 · 逐点练 ☞(答案见 135 页)

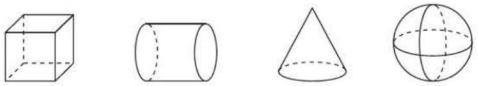
知识点 1　几何体的三视图

1. 下列立体图形中，主视图是三角形的是(　　)



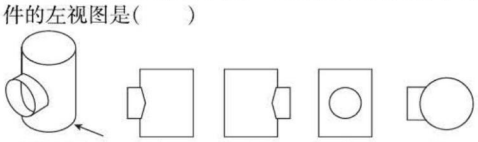
A　B　C　D

2. 【中考 · 张家界】下列四个立体图形中，其主视图是轴对称图形但不是中心对称图形的是(　　)



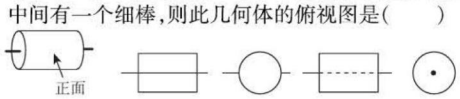
A　B　C　D

3. 【中考 · 柳州】如图，这是一个机械零部件，该零部件的左视图是(　　)



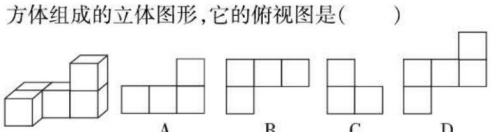
(第 3 题)　A　B　C　D

4. 【中考 · 贵阳】如图是一个水平放置的圆柱形物体，中间有一个细棒，则此几何体的俯视图是(　　)



(第 4 题)　A　B　C　D

5. 【中考 · 泸州】下图是一个由 5 个完全相同的小正方体组成的立体图形，它的俯视图是(　　)



(第 5 题)　A　B　C　D

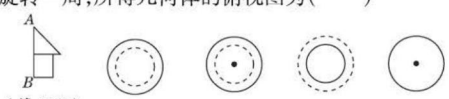
6. 下列立体图形中，俯视图与主视图不同的是(　　)



正方体　圆柱　圆锥　球

A　B　C　D

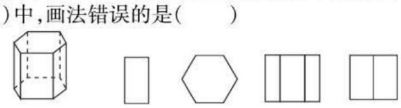
7. 【中考 · 雅安】将如图所示的图形绕 AB 边所在直线旋转一周，所得几何体的俯视图为(　　)



(第 7 题)　A　B　C　D

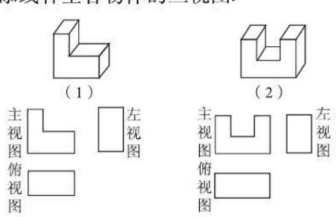
知识点 2　画几何体的三视图

8. 如图，下面关于正六棱柱的视图(主视图、左视图、俯视图)中，画法错误的是(　　)



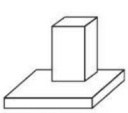
(第 8 题)　A　B　C　D

9. 如图，添线补全各物体的三视图.



(第 9 题)

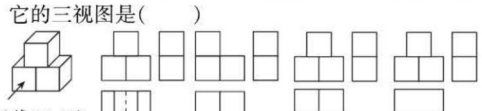
10. 画出如图所示立体图形的三视图.(相当于在桌面的中间靠后放着一个盒子)



(第 10 题)

易错点 画图时忽视被遮挡部分的轮廓线

11. 如图是一个由 3 个相同的正方体组成的立体图形，它的三视图是(　　)



(第 11 题)　A　B　C　D

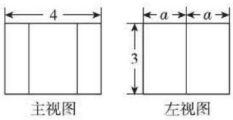
趣味数学　画家们在发展聚焦透视体系的过程中引入了新的几何思想，并开创了数学的一个新分支，这就是射影几何. 射影几何的诞生必须提到这样几位人物.(待续)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞（答案见135页）

考查角度① 利用几何体的三视图的意义求字母值

12. 如图是一个正六棱柱的主视图和左视图，则图中 a 的值为（　　）

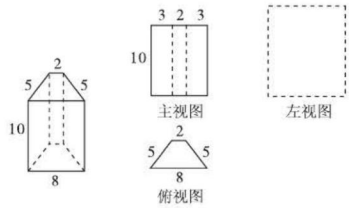


（第12题）

A. $2\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. 1

考查角度② 利用三视图的画法补充几何体的三视图

13. 如图是一个直四棱柱及其主视图和俯视图（等腰梯形）.



（第13题）

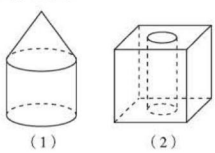
（1）根据图中所给数据，可求出俯视图（等腰梯形）的高为_____；

（2）在虚线框内画出左视图，并标出各边的长.

Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞（答案见135页）

拔尖角度① 利用三视图的画法画组合体的三视图

14. 画出如图所示的几何体的三种视图.



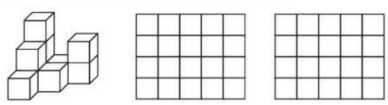
（第14题）

拔尖角度② 利用三视图的画法说明不同物体可能有相同的视图

15. 如图是由若干个完全相同的小正方体组成的一个几何体.

（1）请画出这个几何体的左视图和俯视图（用阴影表示）；

（2）如果在这个几何体上再添加一些相同的小正方体，并保持这个几何体的俯视图和左视图不变，那么最多可以再添加几个小正方体？



（第15题）

首先，是数学透视学的天才阿尔贝蒂，他不仅提出了投影线、截影等概念，还阐述了截影的数学性质. 其次，为这门学科做出重要贡献的是两位法国数学家——德沙格和帕斯卡.（待续）

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 2 课时　由三视图到几何体

名师点金

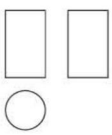
解决由三视图确定物体的体积、表面积的问题时，关键是恢复原几何体的形状，所以利用形象思维建立空间模型是必备的素养. 而在确定小立方块个数时，要把握三视图之间的关系，巧妙体会“俯视图打地基，主视图疯狂盖，左视图拆违章”的要领，体会几何体构成的所有可能.

Ⅰ 夯实基础 · 逐点练

☞(答案见 135 页)

知识点 1 由三视图想象几何体

1. 【中考 · 常州】如图是某几何体的三视图，该几何体是(　　)

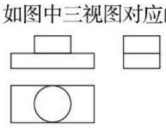


(第 1 题)

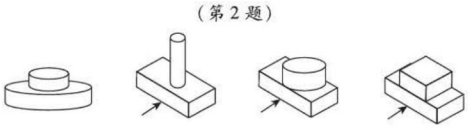
A. 圆柱　　B. 正方体

C. 圆锥　　D. 球

2. 【中考 · 莆田】如图中三视图对应的几何体是(　　)



(第 2 题)



A　　B　　C　　D

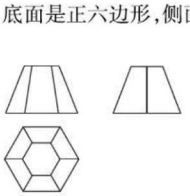
3. 如图是一个几何体的三视图，描述其结构特征，最准确的是(　　)

A. 底面是正六边形

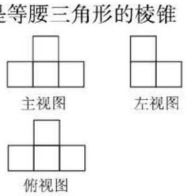
B. 底面是六边形，侧面是等腰梯形的棱台

C. 上、下底面是正六边形，侧面是等腰梯形的棱台

D. 底面是正六边形，侧面是等腰三角形的棱锥

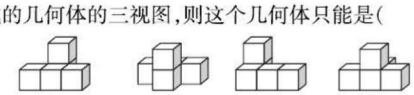


(第 3 题)



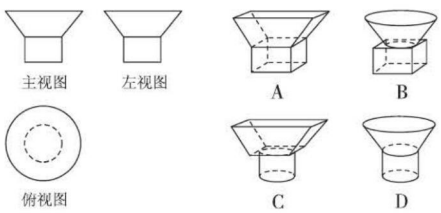
(第 4 题)

4. 【中考 · 绥化】如图是一些完全相同的小正方体搭成的几何体的三视图，则这个几何体只能是(　　)



A　　B　　C　　D

5. 一个几何体的三视图如图所示，该几何体是(　　)

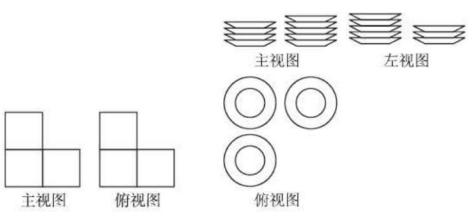


(第 5 题)

知识点 2 由三视图确定组合体的数据

6. 【中考 · 武汉】一个几何体由若干个相同的正方体组成，其主视图和俯视图如图所示，则这个几何体中正方体的个数最多是(　　)

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6



(第 6 题)

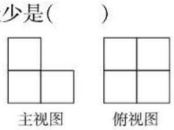
(第 7 题)

7. 【中考 · 永州】一张桌子上摆放有若干个大小、形状完全相同的碟子，现从三个方向看，其三种视图如图所示，则这张桌子上碟子的总数为(　　)

A. 11　　B. 12

C. 13　　D. 14

8. 【中考 · 黑龙江】如图是由若干个相同的小正方体搭成的一个几何体的主视图和俯视图，则所需的小正方体的个数最少是(　　)



(第 8 题)

A. 6　　B. 5　　C. 4　　D. 3

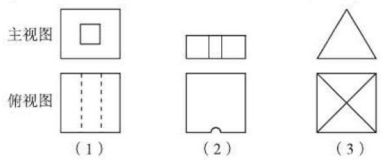
趣味数学　虽然射影几何方面的工作最初是为了给画家提供方便，但它的实际意义远不止于此. 在当时，它由于解析几何的发展而略显失色，甚至一度被人们遗忘.(待续)

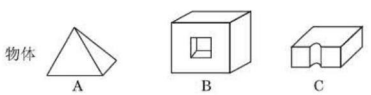
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞（答案见135页）

考查角度1 利用三视图的特征找对应的几何体

9. 如图，根据主视图和俯视图找出物体（连线）.





（第9题）

考查角度2 利用三视图描述几何体

10. 如图是某物体的三种视图，请描述这个物体的形状，并画出其图形. 【导学号:9513162】



（第10题）

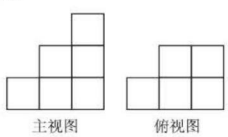
Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞（答案见135页）

拔尖角度1 利用三视图的数据信息补视图（试验操作法）

11. 由一些大小相同的小正方体组成的简单几何体的主视图和俯视图如图所示.

（1）请你画出这个几何体的一种左视图；

（2）若组成这个几何体的小正方体的个数为 n，请你写出 n 的所有可能值.



（第11题）

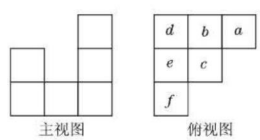
拔尖角度2 利用视图上的数据还原立体图形

12. 用小正方体搭一个几何体，使它的主视图和俯视图如图所示. 俯视图中小正方形中的字母表示在该位置上小正方体的个数，请回答下列问题：

（1）a，b，c 各表示几？

（2）这个几何体最少由几个小正方体搭成？最多呢？

（3）当 $d=e=1$，$f=2$ 时，画出这个几何体的左视图.



（第12题）

但到19世纪被人重新发现时，德沙格和帕斯卡等人的杰出思想大放异彩. 射影几何作为一个着重研究图形位置和相交方面的性质的学科，终于成熟了.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 3 课时　由三视图到几何体的展开图

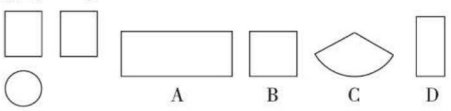
名师点金

对于由几何体的三种视图求它的表面积、体积等相关数据的题目，首先由几何体的三种视图想象出该几何体的形状，再利用三视图中的相关数据确定立体图形的相关数据.

Ⅰ 夯实基础·逐点练 ☞(答案见 135 页)

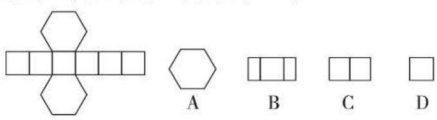
知识点 1 由三视图想象几何体的展开图

1. 如图是某几何体的三视图，则该几何体的侧面展开图是(　　)



(第 1 题)

2. 如图是一个几何体的展开图，下面哪个平面图形不是它的三视图中的一个视图(　　)



(第 2 题)

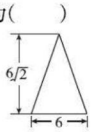
3. 【中考·泰安】如图是一圆锥的左视图，根据图中所标数据，圆锥侧面展开图的扇形圆心角的大小为(　　)

A. 90°

B. 120°

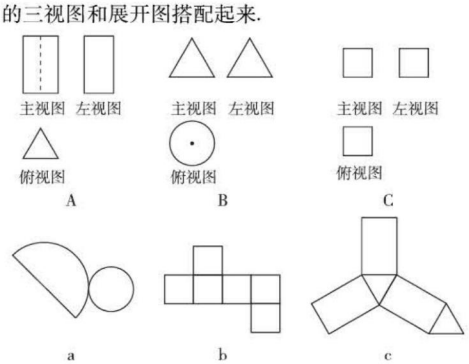
C. 135°

D. 150°



(第 3 题)

4. 如图是三个物体的三视图和展开图，请将同一物体的三视图和展开图搭配起来.



(第 4 题)

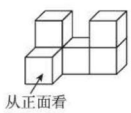
A 与_____，B 与_____，C 与_____.

知识点 2 由三视图求几何体的表面积和体积

5. 【中考·连云港】由 6 个大小相同的正方体搭成的几何体如图所示，比较它的主视图，左视图和俯视图的面积，则(　　)

A. 三个视图的面积一样大　　B. 主视图的面积最小

C. 左视图的面积最小　　D. 俯视图的面积最小



(第 5 题)

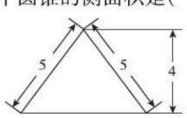


(第 6 题)

6. 如图，空心卷筒纸的高度为 12 cm，外径(直径)为 10 cm，内径为 4 cm，在比例尺为1∶4的三视图中，其主视图的面积是(　　)

A. $\frac{21\pi}{4}$ cm²　　B. $\frac{21\pi}{16}$ cm²　　C. 30 cm²　　D. 7.5 cm²

7. 【中考·宿迁】一个圆锥的主视图如图所示，根据图中数据，计算这个圆锥的侧面积是(　　)



(第 7 题)

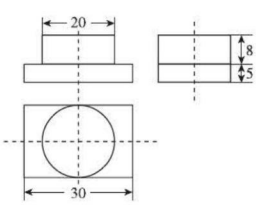
A. 20π　　B. 15π

C. 12π　　D. 9π

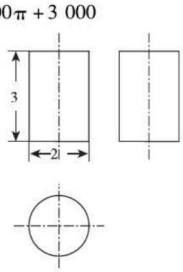
8. 【中考·荆州】如图是某几何体的三视图，根据图中的数据，求得该几何体的体积为(　　)

A. 800π + 1 200　　B. 160π + 1 700

C. 3 200π + 1 200　　D. 800π + 3 000



(第 8 题)



(第 9 题)

9. 【中考·临沂】如图是一个几何体的三视图(图中尺寸单位：cm)，根据图中所示数据求得这个几何体的侧面积是(　　)

A. 12 cm²　　B. (12 + π) cm²

C. 6π cm²　　D. 8π cm²

趣味数学　一日，刘备召集众将领商量迎敌大策，只见一大盏油灯悬于营房之中，忽然听见赵云说："平日里我身高不是众将中最矮的，可今日我的影子为何是最短的呢？"(待续)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞（答案见136页）

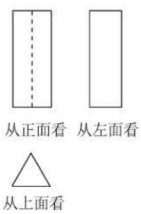
考查角度1 利用三视图求简单几何体的侧面积

10. 如图为一几何体从不同方向看到的图形：

（1）写出这个几何体的名称；

（2）任意画出这个几何体的一种表面展开图；

（3）若长方形的长为 10 cm，正三角形的边长为 4 cm，求这个几何体的侧面积.



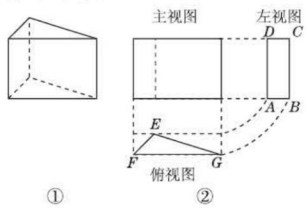
（第 10 题）

考查角度2 利用三角函数求由三视图表示的几何体的体积（构造直角三角形法）

11. 某直三棱柱零件如图①，张师傅根据此零件按 1 ∶ 1 的比例画出准确的三视图如图②. 已知在 $\triangle EFG$ 中，$EF=4$ cm，$\angle EFG=45°$，$FG=12$ cm，又知 $AD=8$ cm.

（1）求 AB 的长；

（2）求出这个直三棱柱的体积.



（第 11 题）

Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞（答案见136页）

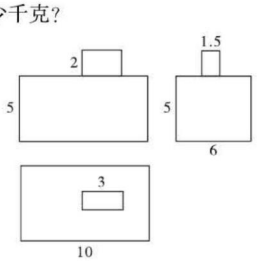
拔尖角度1 利用三视图求实际应用问题中物体的质量

12. 已知一个模型的三视图如图所示.（单位：m）

（1）请描述这个模型的形状.

（2）制作这个模型的木料密度为 360 kg/m^3，则这个模型的质量是多少千克？

（3）如果要给这个模型刷油漆，每千克油漆可以漆 4 m^2，需要油漆多少千克？



（第 12 题）

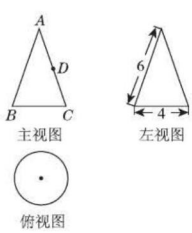
拔尖角度2 利用三视图想象几何体的展开图求最短路程问题

13. 如图是一个几何体的三视图.（单位：厘米）

（1）写出这个几何体的名称；

（2）根据所示数据计算这个几何体的表面积；

（3）如果一只蚂蚁要从这个几何体中的点 B 出发，沿表面爬到 AC 的中点 D，请你求出最短线路的路程.



（第 13 题）

众将听后哈哈大笑起来，这时，赵云抬头看到那盏油灯，顿时明白了，说："平日在太阳光下，太阳光线是平行的，同一时刻，同一地点太阳光下的影长都与物体高度成正比.（待续）

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

阶段方法技巧训练(六)

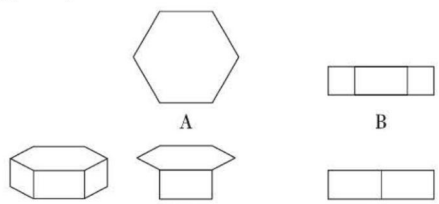
专训 1　三视图与实物的互相转化 (答案见 136 页)

名师点金

物体不同面的视图只能反映该面的形状,它的三视图才能反映物体的具体形状,因此在实践中要求根据物体画出它的三视图,或已知三视图想象物体的形状. 画物体的三视图实际上就是画出物体正面、左面和上面的正投影,规律是"长对正、高平齐、宽相等"的对应;看不见的轮廓线要画成虚线. 由三视图想象物体的立体图形时,应充分发挥空间想象能力.

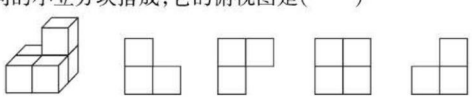
训练角度 1　判断物体的三视图

1. 【中考 · 天门】如图所示的正六棱柱的主视图是(　　)



(第 1 题)

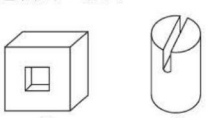
2. 【中考 · 天水】如图所示的几何体是由 5 个大小相同的小立方块搭成,它的俯视图是(　　)



(第 2 题)

训练角度 2　画物体的三视图

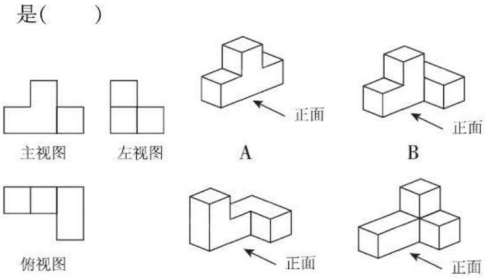
3. 观察如图所示的几何体,画出它们的三视图.



(第 3 题)

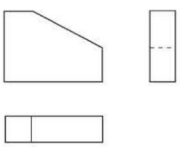
训练角度 3　已知三视图想象物体的形状

4. 【中考 · 河北】下图中的三视图所对应的几何体是(　　)



(第 4 题)

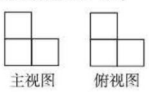
5. 请根据如图所示物体的三视图画出该物体.



(第 5 题)

训练角度 4　由三视图确定小正方体的个数

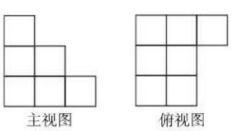
6. 【中考 · 毕节】一个几何体是由一些大小相同的小立方块摆成的,其主视图和俯视图如图所示,则组成这个几何体的小立方块最少有(　　)



(第 6 题)

A. 3 个　　B. 4 个　　C. 5 个　　D. 6 个

7. 用若干个相同的小立方块搭成一个几何体,使得它的主视图和俯视图如图所示. 这样的几何体只有一种吗? 它最少需要多少个小立方块? 最多需要多少个小立方块?



(第 7 题)

趣味数学　而现在的灯光是发散的,可以看成是点光源,离这个点光源越近,影子越短,离它越远,影子反而越长."

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

专训 2 根据物体的三视图计算其表面积和体积 ☞（答案见136页）

名师点金

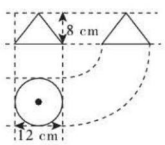
在实际问题中，常常要求根据物体的三视图和尺寸计算物体的表面积或体积. 解决此类题型的方法是先由三视图想象出几何体的形状，再根据图中的尺寸利用相应的公式进行计算.

训练角度 1 利用三视图求几何体的表面积

1. 如图是一个几何体的三视图.

（1）写出此几何体的名称；

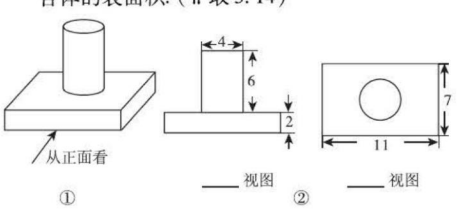
（2）求此几何体的表面积 S.



（第1题）

2. （1）图①是一个组合体，图②是它的两种视图，请在横线上填写出两种视图的名称；

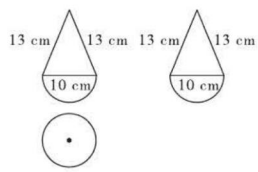
（2）根据两种视图中的尺寸（单位：cm），计算这个组合体的表面积.（π取3.14）



（第2题）

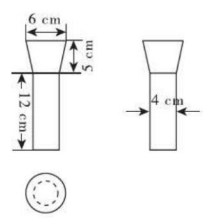
训练角度 2 利用三视图求几何体的体积

3. 某糖果厂想要为儿童设计一种新型的装糖果的不倒翁，请你根据包装厂设计好的三视图（如图）的尺寸计算其容积.（球的体积公式：$V=\frac{4}{3}\pi r^3$）



（第3题）

4. 如图是某工厂设计生产的某种手电筒的三视图，利用图中标出的数据求该手电筒的表面积和体积.



（第4题）

华罗庚小时候帮助父亲做生意，那时华罗庚常站在柜台前接待顾客，顾客一走他就赶紧埋头看书、演算数学题. 华罗庚就是这样抓住时间，为数学事业的发展做出了卓越贡献.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

全章热门考点整合应用

☞(答案见 137 页)

名师点金

本章知识是中考的考点之一. 在本章中,平行投影与中心投影的性质、三视图与几何体的相互转化,以及侧面展开图、面积、体积等与三视图有关的计算等是中考命题的热点内容. 本章热门考点可概括为:三个概念、两个解法、三个画法、两个应用.

考点 1 三个概念

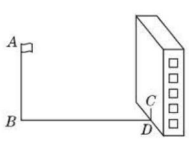
概念 1 平行投影

1. 在一个晴朗的上午,赵丽颖拿着一块矩形木板放在阳光下,矩形木板在地面上形成的投影不可能是(　　)



A　　B　　C　　D

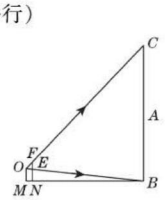
2. 如图,王斌同学想测量旗杆的高度,他在某一时刻测得 1 m 长的竹竿竖直放置时影长 2 m. 在同一时刻测量旗杆的影长时,因旗杆靠近教学楼,所以影子没有全落在地面上,而是有一部分落在墙上,他测得落在地面上的影长为 20 m,落在墙上的影高为 2 m,求旗杆的高度.



(第 2 题)

概念 2 中心投影

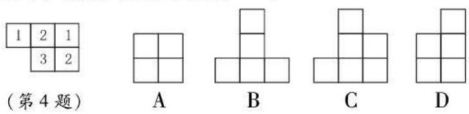
3. 如图,一建筑物 A 高为 BC,光源位于点 O 处,用一把刻度尺 EF(长 22 cm)在光源前适当地移动,使其影子长刚好等于 BC,这时量得 O 和刻度尺之间的距离 MN 为 10 cm,O 距建筑物的距离 MB 为 20 m. 问:建筑物 A 多高?(刻度尺与建筑物平行)



(第 3 题)

概念 3 三视图

4. 如图是一个由多个相同的小正方体搭成的几何体的俯视图,图中所标数字为该位置小正方体的个数,则这个几何体的左视图是(　　)

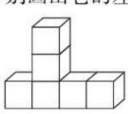


(第 4 题)

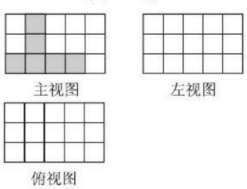
5. 如图是由一些棱长都为 1 cm 的小正方体组合成的简单几何体.

(1)该几何体的表面积为_____;

(2)该几何体的主视图如图中阴影部分所示,请在下面方格纸中分别画出它的左视图和俯视图.



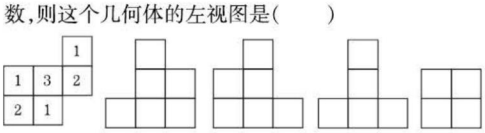
(第 5 题)



考点 2 两个解法

解法 1 由三视图还原几何体

6. 如图是一个由多个相同小正方体堆积而成的几何体的俯视图,图中所示数字为该位置上小正方体的个数,则这个几何体的左视图是(　　)

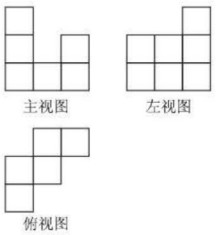


(第 6 题)

趣味数学　**五角星**　最早对五角星的使用被发现在两河流域文明的文献资料里. 在巴比伦语文献中,五角星的边可表示定位:前、后、左、右和上. 这些方向同样有一个占星学的含义,代表五个星球:木星、水星、火星、土星和金星.

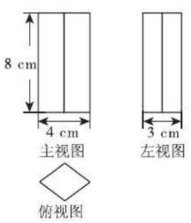
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7. 根据下面的三视图说明物体的形状，它共有几层？一共有多少个小正方体？



（第7题）

8. 如图是一个几何体的三视图，它的俯视图为菱形. 请写出该几何体的名称，并根据图中所给的数据求出它的侧面积.



（第8题）

解法2 分解图形法

9. 某种含盖的玻璃容器（透明）的外形如图，请你画出它的三视图.



（第9题）

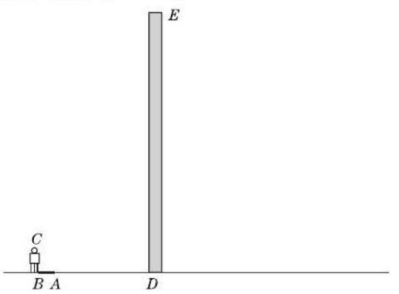
考点3 三个画法

画法1 画投影

10. 在一次数学活动课上，李老师带领学生去测教学楼的高度. 在阳光下，测得身高 1.65 m 的黄丽同学 BC 的影长 BA 为 1.1 m，与此同时，测得教学楼 DE 的影长 DF 为 12.1 m.

（1）请你在图中画出此时教学楼 DE 在阳光下的投影 DF；

（2）请你根据已测得的数据，求出教学楼 DE 的高度.（结果精确到 0.1 m）

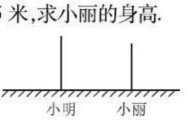


（第10题）

11. 小明和小丽在操场上玩耍，小丽突然高兴地对小明说：“我踩到你的‘脑袋’了.”如图为小明和小丽的位置.

（1）请画出此时小丽在阳光下的影子；

（2）若知小明身高是 1.60 米，小明与小丽间的距离为 2 米，而小丽的影子长为 1.75 米，求小丽的身高.



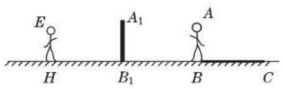
（第11题）

成功的法则极为简单，但简单并不代表容易.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

画法 2 画投影源

12. 学习投影后，小明和小颖利用灯光下自己的影子长度来测量一路灯的高度，并探究影子长度的变化规律. 如图，在同一时间，身高为 1.6 m 的小明（AB）的影子 BC 长是 3 m，而小颖（EH）刚好在路灯灯泡的正下方 H 点，并测得 $HB=6$ m.



（第 12 题）

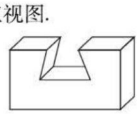
（1）请在图中画出形成影子的光线，并确定路灯灯泡所在的位置 G.

（2）求路灯灯泡的垂直高度 GH.

（3）如果小明沿线段 BH 向小颖（点 H）走去，当小明走到 BH 中点 B_1 处时，求他的影子 B_1C_1 的长；当小明继续走剩下路程的 $\frac{1}{3}$ 到 B_2 处时，求他的影子 B_2C_2 的长；当小明继续走剩下路程的 $\frac{1}{4}$ 到 B_3 处时…按此规律继续走下去，当小明走剩下路程的 $\frac{1}{n+1}$ 到 B_n 处时，他的影子 B_nC_n 的长为多少？（直接用含 n 的代数式表示）

画法 3 画三视图

13. 一种机器上有一个转动的零件叫燕尾槽（如图），为了准确做出这个零件，请画出它的三视图.

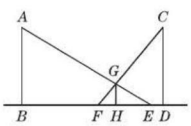


（第 13 题）

考点 4 两个应用

应用 1 测高的应用

14. 如图，晚上，小亮走到大街上，他发现：当他站在大街两边的两盏路灯（AB 和 CD）之间，并且自己被两边路灯照在地上的两个影子成一直线时，自己右边的影子（HE）长为 3 米，左边的影子（HF）长为 1.5 米. 又知自己身高（GH）1.80 米，两盏路灯的高相同，两盏路灯之间的距离（BD）为 12 米，求路灯的高.



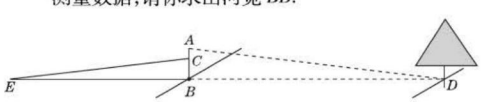
（第 14 题）

应用 2 测距离的应用

15. 某一天，小明和小亮来到一河边，想用遮阳帽和皮尺测量这条河的大致宽度，如图，两人在确保无安全隐患的情况下，先在河岸边选择了一点 B.（点 B 与河对岸岸边上的一棵树的底部点 D 所确定的直线垂直于河岸）

（1）小明在 B 点面向树的方向站好，调整帽檐，使视线通过帽檐正好落在树的底部点 D 处，如图所示，这时小亮测得小明眼睛距地面的距离 $AB=1.7$ 米.

（2）小明站在原地转动 180° 后蹲下，并保持原来的观察姿态（除身体重心下移外，其他姿态均不变），这时视线通过帽檐落在了 DB 延长线上的点 E 处，此时小亮测得 $BE=9.6$ 米，小明的眼睛距地面的距离 $CB=1.2$ 米. 根据以上测量过程及测量数据，请你求出河宽 BD.



（第 15 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

26.1 随机事件

名师点金

在一定条件下，有些事件必然会发生，这样的事件称为必然事件；在一定条件下，有些事件必然不会发生，这样的事件称为不可能事件；在一定条件下，可能发生也可能不发生的事件称为随机事件. 区分事件的种类既要用到理论知识，还要根据生活经验.

1 夯实基础·逐点练

(答案见137页)

知识点1 事件的认识

1. 【中考·淄博】下列语句描述的事件中，是随机事件的为(　　)
   A. 水能载舟，亦能覆舟　　B. 只手遮天，偷天换日
   C. 瓜熟蒂落，水到渠成　　D. 心想事成，万事如意

2. 【中考·内江】下列事件为必然事件的是(　　)
   A. 袋中有4个蓝球，2个绿球，共6个球，随机摸出一个球是红球
   B. 三角形的内角和为180°
   C. 打开电视机，任选一个频道，屏幕上正在播放广告
   D. 抛掷一枚硬币两次，第一次正面向上，第二次反面向上

3. 【中考·武汉】不透明的袋子中装有形状、大小、质地完全相同的6个球，其中4个黑球、2个白球，从袋子中一次摸出3个球，下列事件是不可能事件的是(　　)
   A. 摸出的是3个白球
   B. 摸出的是3个黑球
   C. 摸出的是2个白球、1个黑球
   D. 摸出的是2个黑球、1个白球

知识点2 随机事件可能性的大小

4. 下列每一个不透明的袋子中都装有若干个红球和白球(除颜色不同外其他均相同).
   第一个袋子：红球1个，白球1个；
   第二个袋子：红球1个，白球2个；
   第三个袋子：红球2个，白球3个；
   第四个袋子：红球4个，白球10个.
   分别从中任意摸出一个球，摸到红球可能性最大的是(　　)
   A. 第一个袋子　　B. 第二个袋子
   C. 第三个袋子　　D. 第四个袋子

5. 【中考·厦门】一枚质地均匀的骰子，骰子的六个面上分别刻有1到6的点数，投掷这样的骰子一次，向上一面点数是偶数的结果有(　　)
   A. 1种　　B. 2种　　C. 3种　　D. 6种

知识点3 概率的定义

6. 掷一枚有正反面的均匀硬币，正确的说法是(　　)
   A. 正面一定朝上
   B. 反面一定朝上
   C. 正面朝上比反面朝上的概率大
   D. 正面朝上和反面朝上的概率都是0.5

7. 【中考·巴中改编】下列说法中正确的是(　　)
   A. “打开电视，正在播放新闻节目”是必然事件
   B. “抛一枚硬币，正面朝上的概率为$\frac{1}{2}$”表示每抛两次就有一次正面朝上
   C. 抛一枚均匀的正方体骰子，朝上的点数是6的概率与朝上的点数是3的概率相等
   D. 为了了解某种节能灯的使用寿命，选择全面调查

8. 【中考·长沙】下列说法中正确的是(　　)
   A. “打开电视机，正在播放《动物世界》”是必然事件
   B. 某种彩票的中奖概率为$\frac{1}{1\,000}$，说明每买1 000张彩票，一定有一张中奖
   C. 抛掷一枚质地均匀的硬币一次，出现正面朝上的概率为$\frac{1}{3}$
   D. 想了解长沙市所有城镇居民的人均年收入水平，宜采用抽样调查

易错点! 混淆事件可能性大小和事件的关系而致错

9. 【中考·台州】某品牌电插座抽样检查的合格率为99%，则下列说法中正确的是(　　)
   A. 购买100个该品牌的电插座，一定有99个合格
   B. 购买1 000个该品牌的电插座，一定有10个不合格
   C. 购买20个该品牌的电插座，一定都合格
   D. 即使购买1个该品牌的电插座，也可能不合格

谜语：对症下药(打一数学名词)　　谜底：开方　　趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞(答案见 137 页)

考查角度 1　利用事件的意义判断事件的类型

10. 把下列事件划分为两类,并说出划分标准.

①向空中抛一块石头,石头会飞向太空;

②甲、乙两名同学在进行羽毛球比赛,甲获胜;

③从一副扑克牌中随意抽取一张牌,这张牌正好是红桃;

④黑暗中从一大串钥匙中随意选中一把,并用它打开了大门;

⑤两个负数的商小于 0;

⑥在你们班中,任意选出一名同学,该同学是男生;

⑦明天的太阳从西方升起.

考查角度 2　利用随机事件的可能性判断可能性的大小

11. 一个不透明的口袋里装有 5 个红球,3 个白球,2 个绿球,这些球形状和大小完全相同,小明从中任意摸出一个球.

(1)你认为小明摸到的球很可能是什么颜色?为什么?

(2)摸到三种颜色球的可能性一样吗?

(3)如果想让小明摸到红球和白球的可能性一样,该怎么办?写出你的方案.

Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞(答案见 138 页)

拔尖角度 1　利用事件发生的可能性解释生活现象

12. 足球世界杯比赛分成 8 个小组,每个小组 4 个队,小组进行单循环比赛(每个队都与该小组的其他队比赛一场),选出 2 个队进入 16 强. 比赛规定胜一场得 3 分,平一场得 1 分,负一场得 0 分. 请问:

(1)每个小组共比赛多少场?

(2)在小组比赛中,有一队比赛结束后积分为 6 分,该队出线这一事件是一个确定事件还是一个随机事件?

拔尖角度 2　利用方程求解判断事件的类型(方程思想)

13. (探究题)小明每天早上要在 7:50 之前赶到距家 1 000米的学校上学. 一天,小明以 80 米/分的速度出发. 5 分钟后,小明的爸爸发现小明忘了带数学书,于是,爸爸立即以 100 米/分的速度去追赶小明,结果在途中追上了小明. 试探究这个事件是什么事件,并说明理由.　**【导学号:9513162】**



教你一招

判别事件类型的方法　事件的分类与事件发生的可能性大小有关,必然事件发生的可能性是 100%,不可能事件发生的可能性是 0,随机事件发生的可能性在 0 和 100% 之间.

说明:随机事件发生的可能性的大小与该事件在总体情况中所占的百分比有关.

趣味数学　成功的法则极为简单,但简单并不代表容易.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

26.2 等可能情形下的概率计算

第1课时 概率的计算

名师点金

应用 $P(A)=\frac{m}{n}$ 求简单事件的概率的步骤

1. 判断：试验所有可能出现的结果必须是有限的，各种结果出现的可能性必须相等；
2. 确定：试验发生的所有的结果数 n 和事件 A 发生的所有结果数 m；
3. 计算：套入公式 $P(A)=\frac{m}{n}$ 计算.

1 夯实基础·逐点练 （答案见138页）

知识点1 概率的范围

1. （1）必然事件 A 的概率：$P(A)=$_____.
（2）不可能事件 A 的概率：$P(A)=$_____.
（3）随机事件 A 的概率 $P(A)$ 的取值范围：_____.

2. 【中考·百色】必然事件的概率是（　　）
A. -1　　B. 0　　C. 0.5　　D. 1

3. 下列事件中：①2022年在中国的北京和张家口举办冬奥会；②上海冬天的温度达35 ℃；③打开安徽电视台正在播新闻. 概率为1的事件有（　　）
A. 0个　　B. 1个　　C. 2个　　D. 3个

知识点2 概率的计算

4. 【中考·绥化】不透明袋子中有2个红球和4个蓝球，这些球除颜色外无其他差别，从袋子中随机取出1个球是红球的概率是（　　）
A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{5}$　　D. $\frac{1}{6}$

5. 【中考·泰安】如图，在下列图形中任取一个是中心对称图形的概率是（　　）

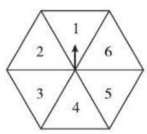


（第5题）

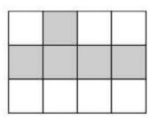
A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. 1

6. 【中考·宜昌】在“绿水青山就是金山银山”这句话中任选一个汉字，这个字是“绿”的概率为（　　）
A. $\frac{3}{10}$　　B. $\frac{1}{10}$　　C. $\frac{1}{9}$　　D. $\frac{1}{8}$

7. 【中考·连云港】如图，任意转动正六边形转盘一次，当转盘停止转动时，指针指向大于3的数的概率是（　　）
A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{1}{6}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{2}$



（第7题）



（第8题）

8. 【中考·东营】如图，共有12个大小相同的小正方形，其中阴影部分的5个小正方形是一个正方体的表面展开图的一部分，现从其余的小正方形中任取一个涂上阴影，能构成这个正方体的表面展开图的概率是（　　）
A. $\frac{4}{7}$　　B. $\frac{3}{7}$　　C. $\frac{2}{7}$　　D. $\frac{1}{7}$

9. 【中考·内江】某十字路口的交通信号灯每分钟红灯亮30秒，绿灯亮25秒，黄灯亮5秒，当你抬头看信号灯时，是黄灯的概率为（　　）
A. $\frac{1}{12}$　　B. $\frac{5}{12}$　　C. $\frac{1}{6}$　　D. $\frac{1}{2}$

10. 【中考·黄冈】在-4，-2，1，2四个数中，随机取两个数分别作为函数 $y=ax^2+bx+1$ 中 a，b 的值，则该二次函数图象恰好经过第一、二、四象限的概率为_____.

易错点 对概率的含义理解不透而致错

11. 【中考·梅州】下列说法正确的是（　　）
A. 掷一枚均匀的骰子，骰子停止转动后，6点朝上是必然事件
B. 甲、乙两人在相同条件下各射击10次，他们的成绩平均数相同，方差分别是 $s_{甲}^2=0.4$，$s_{乙}^2=0.6$，则甲的射击成绩较稳定
C. “明天降雨的概率为$\frac{1}{2}$”，表示明天有半天都在降雨
D. 了解一批电视机的使用寿命，适合用普查的方式

首次提出系统研究概率是在帕斯卡和费马来往的一系列信件中. 这些通信最初是由帕斯卡提出的，他想找费马请教几个由 Chevvalier de Mere 提出的问题.（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞(答案见 138 页)

考查角度 1 利用概率说明概率值的意义

12. 甲、乙、丙三个事件发生的概率分别为 0.5,0.1,0.9,它们各与下面的哪句话相配.

(1)发生的可能性很大,但不一定发生;

(2)发生的可能性很小;

(3)发生与不发生的可能性一样.

考查角度 2 利用概率公式求相关数据

13. 【中考 · 眉山】一个口袋中放有 290 个涂有红、黑、白三种颜色的质地相同的小球. 若红球个数是黑球个数的 2 倍多 40 个. 从袋中任取一个球是白球的概率是$\frac{1}{29}$.

(1)求袋中红球的个数;

(2)求从袋中任取一个球是黑球的概率.

Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞(答案见 138 页)

拔尖角度 1 利用概率公式求事件的概率

14. 【中考 · 南京】甲口袋中有 2 个白球、1 个红球,乙口袋中有 1 个白球、1 个红球,这些球除颜色外无其他差别,分别从每个口袋中随机摸出一个球.

(1)求摸出的 2 个球都是白球的概率;

(2)下列事件中,概率最大的是(　　)

A. 摸出的 2 个球颜色相同

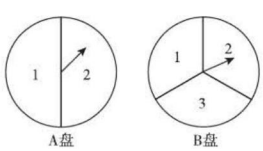
B. 摸出的 2 个球颜色不相同

C. 摸出的 2 个球中至少有 1 个红球

D. 摸出的 2 个球中至少有 1 个白球

拔尖角度 2 利用概率说明游戏规则的公平性

15. 【中考 · 通辽】小兰和小颖用如图所示的两个可以自由转动的转盘做游戏,每个转盘被分成面积相等的几个扇形,转动两个转盘各一次,若两次指针所指数字之和小于 4,则小兰胜,否则小颖胜(指针指在分界线时重转),这个游戏对双方公平吗? 请说明理由.



(第 15 题)

趣味数学　Chevvalier de Mere 是一知名作家,路易十四宫廷的显要,也是一名狂热的赌徒. 问题主要有两个:掷骰子问题和比赛奖金分配问题.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

第2课时　用树状图法求概率

名师点金

1. 当事件涉及三个或三个以上元素时，用列表法不易列举出所有可能结果，用树状图可以依次列出所有可能的结果，求出 n，再找出某个事件中包含的所有可能的结果，求出 m，从而求出概率.
2. 用树状图法列举时，应注意取出后放回与不放回的问题.

1 夯实基础·逐点练 ☞（答案见138页）

知识点1 两步试验的树状图

1. 【中考·邵阳】掷一枚硬币两次，可能出现的结果有四种，我们可以利用如图所示的树状图来分析所有可能出现的结果，那么掷一枚硬币两次，至少有一次出现正面的概率是_____.



（第1题）

2. 【中考·临沂】2018年某市初中学业水平实验操作考试. 要求每名学生从物理，化学，生物三个学科中随机抽取一科参加测试，小华和小强都抽到物理学科的概率是(　　)

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{6}$　　D. $\frac{1}{9}$

3. 【中考·湖州】一个布袋里装有4个只有颜色不同的球，其中3个红球，1个白球，从布袋里摸出1个球，记下颜色后放回，搅匀，再摸出1个球，则两次摸到的球都是红球的概率是(　　)

A. $\frac{1}{16}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{3}{8}$　　D. $\frac{9}{16}$

4. 【中考·张家界】某校高一年级今年计划招四个班的新生，并采取随机摇号的方法分班，小明和小红既是该校的高一新生，又是好朋友，那么小明和小红分在同一个班的机会是(　　)

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{3}{4}$

5. 【中考·德州】经过某十字路口的汽车，可能直行，也可能左转或者右转，如果这三种可能性大小相同，则经过这个十字路口的两辆汽车一辆左转，一辆右转的概率是(　　)

A. $\frac{4}{7}$　　B. $\frac{4}{9}$　　C. $\frac{2}{9}$　　D. $\frac{1}{9}$

知识点2 两步以上试验的树状图

6. 小红、小明、小芳在一起做游戏时，需要确定游戏的先后顺序. 他们约定用“石头、剪刀、布”的方式确定. 问在一个回合中三个人都出“布”的概率是(　　)

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{9}$　　C. $\frac{1}{18}$　　D. $\frac{1}{27}$

7. 小刚很擅长球类运动，课外活动时，足球队、篮球队都力邀他到自己的阵营，小刚左右为难，最后决定通过掷硬币来确定. 规则如下：连续抛掷硬币三次，若三次正面朝上或三次反面朝上，则由小刚任意挑选两球队；若两次正面朝上一次正面朝下，则小刚加入足球阵营；若两次反面朝上一次反面朝下，则小刚加入篮球阵营.

(1) 用画树状图的方法表示三次抛掷硬币的所有结果.

(2) 小刚任意挑选两球队的概率有多大？

(3) 这个规则对两个球队是否公平？为什么？

易错点 忽略“放回”与“不放回”这一过程而致错

8. 【中考·成都】在四张编号为 A,B,C,D 的卡片（除编号外，其余完全相同）的正面分别写上如图所示正整数后，背面朝上，洗匀放好，现从中随机抽取一张（不放回），再从剩下的卡片中随机抽取一张.

A	B	C	D
2, 3, 4	3, 4, 5	6, 8, 10	5, 12, 13

（第8题）

(1) 请用画树状图或列表的方法表示两次抽取卡片的所有可能出现的结果（卡片用 A,B,C,D 表示）；

(2) 我们知道，满足 $a^2+b^2=c^2$ 的三个正整数 a,b,c 称为勾股数，求抽到的两张卡片上的数都是勾股数的概率.

北宋天历、皇佑年间，大将狄青奉旨征讨反贼侬智高. 在众人瞩目下狄青举手一挥，把铜币全部扔在地上，结果一百个铜币居然全都是钱面朝上.（待续）

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞(答案见 138 页)

考查角度 1 利用概率解与代数的综合问题

9. 【中考 · 日照】若 n 是一个两位正整数,且 n 的个位数字大于十位数字,则称 n 为“两位递增数”(如 13,35,56 等). 在某次数学趣味活动中,每位参加者需从由数字 1,2,3,4,5,6 构成的所有的“两位递增数”中随机抽取 1 个数,且只能抽取一次.

(1)写出所有个位数字是 5 的“两位递增数”;

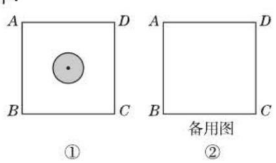
(2)请用列表法或树状图,求抽取的“两位递增数”的个位数字与十位数字之积能被 10 整除的概率.

考查角度 2 利用概率解与几何的综合问题

10. 有一类随机事件概率的计算方法:设试验结果落在某个区域 S 中的每一点的机会均等,用 A 表示事件“试验结果落在 S 中的一个小区域 M 中”,那么事件 A 发生的概率 $P(A)=\dfrac{M\text{ 的面积}}{S\text{ 的面积}}$. 有一块边长为 30 cm 的正方形 $ABCD$ 飞镖游戏板,假设飞镖投在游戏板上的每一点的机会均等.

(1)在飞镖游戏板上画有半径为 5 cm 的一个圆(如图①),求飞镖落在圆内的概率;

(2)飞镖在游戏板上的落点记为点 O,求 $\triangle OAB$ 为钝角三角形的概率.



(第 10 题)

Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞(答案见 139 页)

拔尖角度 1 利用树状图解两次试验的概率问题

11. 【中考 · 黄冈】央视“经典咏流传”开播以来受到社会广泛关注. 我市某校就“中华文化我传承——地方戏曲进校园”的喜爱情况进行了随机调查,对收集的信息进行统计,绘制了下面两幅尚不完整的统计图. 请你根据统计图所提供的信息解答下列问题:

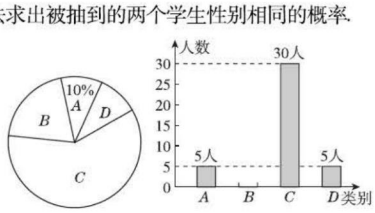
图中 A 表示“很喜欢”,B 表示“喜欢”,C 表示“一般”,D 表示“不喜欢”.

(1)被调查的总人数是_____人,扇形统计图中 C 部分所对应的扇形圆心角的度数为_____;

(2)补全条形统计图;

(3)若该校共有学生 1 800 人,请根据上述调查结果,估计该校学生中 A 类有_____人;

(4)在抽取的 A 类 5 人中,刚好有 3 个女生 2 个男生,从中随机抽取两个学生担任两角色,用树状图或列表法求出被抽到的两个学生性别相同的概率.



(第 11 题)

拔尖角度 2 利用树状图解三次试验的概率问题

12. 【中考 · 兰州】为了参加中考体育测试,甲、乙、丙三位同学进行足球传球训练,球从一个人脚下随机传到另一个人脚下,且每位传球人传给其余两人的机会是均等的,由甲开始传球,共传球三次.

(1)请利用树状图列举出三次传球的所有可能情况;

(2)求三次传球后,球回到甲脚下的概率;

(3)三次传球后,球回到甲脚下的概率大还是传到乙脚下的概率大?

趣味数学　将士们士气大振,一举歼灭敌军,这真的是“天意”吗? (注:一个铜币钱面朝上或朝下的概率是相等的)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第3课时　用列表法求概率

名师点金

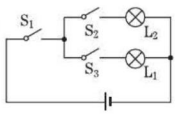
枚举法和列表法一般适用于两个元素进行两步试验的题目，在列举可能的结果时，要分清“放回”与“不放回”两种情况.

Ⅰ 夯实基础·逐点练

（答案见139页）

知识点1 用枚举法求概率

1. 【中考·娄底】在如图所示的电路中，随机闭合开关S_1，S_2，S_3中的两个，能让灯泡L_1发光的概率是_____.



（第1题）

2. 【中考·大连】不透明袋子中装有红、绿小球各一个，除颜色外无其他差别，随机摸出一个小球后，放回并摇匀，再随机摸出一个，两次都摸到红球的概率为(　　)

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{4}$

3. 【中考·贵港】从长为3，5，7，10的四条线段中任意选取三条作为边，能构成三角形的概率是(　　)

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. 1

知识点2 用列表法求概率

4. 【中考·天门】有5张看上去无差别的卡片，正面分别写着1，2，3，4，5，洗匀后正面向下放在桌子上，从中随机抽取2张，抽出的卡片上的数字恰好是两个连续整数的概率是_____.

5. 【中考·娄底】从2018年高一年级学生开始，湖南省全面启动高考综合改革，学生学习完必修课程后，可以根据高校相关专业的选课要求和自身兴趣、志向、优势，从思想政治、历史、地理、物理、化学、生物6个科目中，自主选择3个科目参加等级考试. 学生A已选物理，还想从思想政治、历史、地理3个文科科目中选1科，再从化学、生物2个理科科目中选1科. 若他选思想政治、历史、地理的可能性相等，选化学、生物的可能性相等，则选修地理和生物的概率是_____.

6. 【中考·金华】小明和小华参加社会实践活动，随机选择“打扫社区卫生”和“参加社会调查”其中一项，那么两人同时选择“参加社会调查”的概率为(　　)

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{3}{4}$

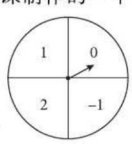
7. 【中考·临沂】小明和小华玩“石头、剪子、布”的游戏，若随机出手一次，则小华获胜的概率是(　　)

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{2}{9}$

8. 【中考·泰安】若十位上的数字比个位上的数字、百位上的数字都大的三位数叫做中高数，如796就是一个“中高数”. 若十位上数字为7，则从3，4，5，6，8，9中任选两数，与7组成“中高数”的概率是(　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{2}{5}$　　D. $\frac{3}{5}$

9. 【中考·河南】如图是一次数学活动课制作的一个转盘，盘面被等分成四个扇形区域，并分别标有数字-1，0，1，2. 若转动转盘两次，每次转盘停止后记录指针所指区域的数字(当指针恰好指在分界线上时，不记，重转)，则记录的两个数字都是正数的概率为(　　)



（第9题）

A. $\frac{1}{8}$　　B. $\frac{1}{6}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{2}$

10. 【中考·泰安】袋内装有标号分别为1，2，3，4的4个小球，从袋内随机取出一个小球，让其标号为一个两位数的十位数字，放回搅匀后，再随机取出一个小球，让其标号为这个两位数的个位数字，则组成的两位数是3的倍数的概率为(　　)

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{5}{16}$　　C. $\frac{7}{16}$　　D. $\frac{1}{2}$

易错点 不能准确区分放回抽样与不放回抽样对事件发生的概率的影响

11. 某电视栏目中的百宝箱互动环节是一种竞猜游戏，游戏规则如下：在20张商标牌中，有5张商标牌的背面注明一定金额，其余商标牌的背面均是一张哭脸，若翻到哭脸就不得奖；反之，则得奖. 参与游戏的观众有三次翻牌的机会(翻过的牌不能再翻)，某人前两次翻牌均获得若干奖金，那么他第三次翻牌获奖的概率是(　　)

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{5}$　　C. $\frac{1}{6}$　　D. $\frac{3}{20}$

老师发现一个学生的作业本上的姓名是“木(123)”. 老师问：“这是谁的作业本？”一个学生说：“是我的！”老师：“你叫什么名字？”(待续)

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞(答案见 139 页)

考查角度① 利用枚举法求实际应用中的概率问题

12. 【中考 · 陕西】端午节“赛龙舟,吃粽子”是中华民族的传统习俗. 节日期间,小邱家包了三种不同馅的粽子,分别是:红枣粽子(记为 A)、豆沙粽子(记为 B)、肉粽子(记为 C). 这些粽子除了馅不同,其余均相同. 粽子煮好后,小邱的妈妈给一个白盘中放了两个红枣粽子,一个豆沙粽子和一个肉粽子;给一个花盘中放入了两个肉粽子,一个红枣粽子和一个豆沙粽子.

根据以上情况,请你回答下列问题:

(1)假设小邱从白盘中随机取一个粽子,恰好取到红枣粽子的概率是多少?

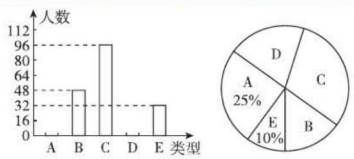
(2)若小邱先从白盘里的四个粽子中随机取一个粽子,再从花盘里的四个粽子中随机取一个粽子,求小邱取到的两个粽子中一个是红枣粽子、一个是豆沙粽子的概率.

考查角度② 利用列表法求统计图中的概率问题

13. 【中考 · 凉山州】某校为了推进学校均衡发展,计划再购进一批图书,丰富学生的课外阅读,为了解学生对课外阅读的需求情况,学校对学生所喜爱的读物(A. 文学,B. 艺术,C. 科普,D. 生活,E. 其他)进行了随机抽样调查(规定每名学生只能选其中一类读物),并将调查结果绘制成以下不完整的统计图表.

抽样调查统计表

类型	A	B	C	D	E
人数	a	48	96	b	32



(第 13 题)

(1)a = _____,b = _____,请补全条形统计图;

(2)如果全校有 2 500 名学生,请你估计全校有多少名学生喜爱科普读物;

(3)学校从喜爱科普读物的学生中选拔出 2 名男生和 3 名女生,并从中随机抽取 2 名学生参加科普知识竞赛,请你用列表法求出恰好抽到一名男生和一名女生的概率.

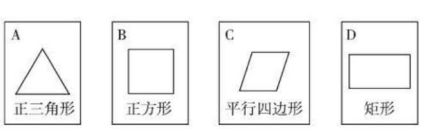
Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞(答案见 139 页)

拔尖角度 利用概率说明游戏规则的公平性问题

14. 【中考 · 营口】如图,有四张背面完全相同的纸牌 A,B,C,D,其正面分别画有四个不同的几何图形,将这四张纸牌背面朝上洗匀.

(1)从中随机摸出一张,求摸出的牌面图形是中心对称图形的概率;

(2)小明和小亮约定做一个游戏,其规则为:先由小明随机摸出一张纸牌,不放回,再由小亮从剩下的纸牌中随机摸出一张,若摸出的两张牌面图形都是轴对称图形小明获胜,否则小亮获胜,这个游戏公平吗? 请用列表法说明理由. (纸牌用 A,B,C,D 表示)



(第 14 题)

趣味数学　学生:“木林森.”老师:“你怎么把名字写成这样?”学生:“我用的是乘法分配律!”

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第4课时　利用概率判断游戏规则的公平性

整合方法 · 分类练

（答案见139页）

类型1 利用概率判断摸球游戏的公平性

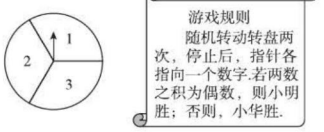
1. 【中考 · 贺州】在“植树节”期间，小王、小李两人想通过摸球的方式来决定谁去参加学校植树活动，规则如下：在两个盒子内分别装入标有数字1，2，3，4的四个和标有数字1，2，3的三个完全相同的小球，分别从两个盒子中各摸出一个球，如果所摸出的球上的数字之和小于6，那么小王去，否则就是小李去.
   （1）用树状图或列表法求出小王去的概率；
   （2）小李说：“这种规则不公平”，你认同他的说法吗？请说明理由.

类型2 利用概率判断抽卡片游戏的公平性

2. 【中考 · 青岛】小明和小亮计划暑期结伴参加志愿者活动. 小明想参加敬老服务活动，小亮想参加文明礼仪宣传活动. 他们想通过做游戏来决定参加哪个活动，于是小明设计了一个游戏，游戏规则是：在三张完全相同的卡片上分别标记4、5、6三个数字，一人先从三张卡片中随机抽出一张，记下数字后放回，另一人再从中随机抽出一张，记下数字，若抽出的两张卡片标记的数字之和为偶数，则按照小明的想法参加敬老服务活动，若抽出的两张卡片标记的数字之和为奇数，则按照小亮的想法参加文明礼仪宣传活动. 你认为这个游戏公平吗？请说明理由.

类型3 利用概率判断转盘游戏的公平性

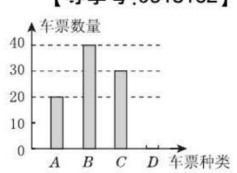
3. 如图，可以自由转动的转盘被3等分，指针落在每个扇形内的机会均等.
   （1）现随机转动转盘一次，停止后，指针指向1的概率为_____.
   （2）小明和小华利用这个转盘做游戏，若采用下列游戏规则，你认为对双方公平吗？请用列表或画树状图的方法说明理由.



（第3题）

类型4 利用概率判断掷骰子游戏的公平性

4. “五一”假期，某公司组织部分员工分别到A，B，C，D四地旅游，公司按定额购买了前往各地的车票. 如图是未制作完的车票种类和数量的条形统计图，根据统计图回答下列问题：
   （1）若去D地的车票数量占全部车票的10%，请求出去D地车票的数量，并补全统计图；
   （2）在（1）的前提下，若公司采用随机抽取的方式分发车票，每人抽取一张（所有车票的形状、大小、质地完全相同且充分洗匀），那么员工小胡抽到去A地的概率是多少？
   （3）若有一张车票，小王、小李都想要，决定采取抛掷一枚各面分别标有1，2，3，4的正四面体骰子的方法来确定这张车票的归属，具体规则是：每人各抛掷一次，若小王掷得着地一面的数字比小李掷得着地一面的数字小，车票给小王，否则给小李. 试用列表法或树状图法分析，这个规则公平吗？ 【导学号：9513162】



（第4题）

谜语：抬头一笑（打一人名）　谜底：杨乐

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

26.3　用频率估计概率

名师点金

频率与概率间的关系

1. 概率是随机事件发生的可能性的大小的数量反映；
2. 概率是事件在大量重复试验中频率逐渐稳定到的值，所以可以用大量重复试验中事件发生的频率去估计事件发生的概率，二者不能等同.

注意：用频率估计概率大小时，试验要在相同条件下进行，重复试验的次数要足够多.

Ⅰ 夯实基础 · 逐点练 ☞(答案见 140 页)

知识点 1　用频率估计概率

1. 【中考 · 淮安】某射手在相同条件下进行射击训练，结果如下：

射击次数 n	10	20	40	50	100	200	500	1 000
击中靶心的频数 m	9	19	37	45	89	181	449	901
击中靶心的频率 $\frac{m}{n}$	0.900	0.950	0.925	0.900	0.890	0.905	0.898	0.901

该射手击中靶心的概率的估计值是_____(精确到 0.01).

2. 【中考 · 营口】在一个不透明的箱子里装有红色、蓝色、黄色的球共 20 个，除颜色外，形状、大小、质地等完全相同，小明通过多次摸球试验后发现摸到红色、黄色球的频率分别稳定在 10% 和 15%. 则箱子里的蓝色球的个数很可能是_____个.

3. 【中考 · 宜昌】在课外实践活动中，甲，乙，丙，丁四个小组用投掷一元硬币的方法来估算正面朝上的概率，其试验次数分别为 10 次，50 次，100 次，200 次，其中试验相对科学的是(　　)

A. 甲组　　B. 乙组　　C. 丙组　　D. 丁组

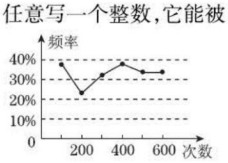
4. 甲、乙两名同学在一次用频率去估计概率的试验中，统计了某一结果出现的频率，绘出的统计图如图所示，则符合这一结果的试验可能是(　　)

A. 掷一枚正六面体的骰子，出现 1 点的概率

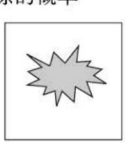
B. 从一个装有 2 个白球和 1 个红球的袋子中任取 1 个球，取到红球的概率

C. 抛一枚硬币，出现正面朝上的概率

D. 任意写一个整数，它能被 2 整除的概率



(第 4 题)


(第 5 题)

知识点 2　频率与概率的关系

5. 【中考 · 宿迁】如图，为测量平地上一块不规则区域(图中的阴影部分)的面积，画一个边长为 2 m 的正方形，使不规则区域落在正方形内，现向正方形内随机投掷小石子(假设小石子落在正方形内每一点都是等可能的)，经过大量重复投掷试验，发现小石子落在不规则区域的频率稳定在常数 0.25 附近，由此可估计不规则区域的面积是_____m^2.

6. 某人做投硬币试验时，投掷 m 次，正面朝上 n 次(即正面朝上的频率 $P=\frac{n}{m}$)，则下列说法正确的是(　　)

A. P 一定等于 $\frac{1}{2}$

B. P 一定不等于 $\frac{1}{2}$

C. 多投一次，P 更接近 $\frac{1}{2}$

D. 投掷次数逐渐增加，P 稳定在 $\frac{1}{2}$ 附近

易错点 ! 不能正确理解频率与概率的关系

7. 下列说法合理的是(　　)

A. 小明在 10 次抛图钉的试验中发现 3 次钉尖朝上，由此他说钉尖朝上的概率是 30%

B. 抛掷一枚普通的正六面体骰子，出现 6 点朝上的概率是 $\frac{1}{6}$ 的意思是每掷 6 次就有 1 次掷得 6 点朝上

C. 某彩票的中奖机会是 2%，那么买 100 张彩票一定会有 2 张中奖

D. 在一次课堂进行的试验中，甲、乙两组同学估计硬币落地后，正面朝上的概率分别为 0.48 和 0.51

趣味数学　谜语：老爷爷参加赛跑(打一人名)　　谜底：祖冲之

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞（答案见140页）

考查角度① 利用频率估算数据求概率

8. 王老师将1个黑球和若干个白球（每个球除颜色外都相同）放入一个不透明的袋中并搅匀，让若干学生进行摸球试验，每次摸出一个球（有放回），下表是试验进行中的一组统计数据.

摸球的次数 n	100	150	200	500	800	1 000
摸到黑球的次数 m	23	31	60	130	203	251
摸到黑球的频率 $\frac{m}{n}$	0.23	0.21	0.30	0.26	0.25	

（1）补全上表中的有关数据，根据上表数据估计从袋中摸出一个球是黑球的概率是_____；

（2）估算袋中白球的个数；

（3）在（2）的条件下，若小强同学有放回地连续两次摸球，用画树状图或列表的方法计算他两次都摸出白球的概率.

考查角度② 利用求频率估算概率

9. 【中考 · 滨州】为了考察甲、乙两种成熟期小麦的株高长势情况，现从中随机抽取6株，并测得它们的株高（单位：cm）如表所示：

甲	63	66	63	61	64	61
乙	63	65	60	63	64	63

（1）请分别计算表内两组数据的方差，并借此比较哪种小麦的株高长势比较整齐？

（2）现将进行两种小麦优良品种杂交试验，需从表内的甲、乙两种小麦中，各随机抽取一株进行配对，以预估整体配对状况，请你用列表法或画树状图的方法，求所抽取的两株配对小麦株高恰好都等于各自平均株高的概率.

Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞（答案见140页）

拔尖角度 利用频率、概率间的关系解统计图表问题

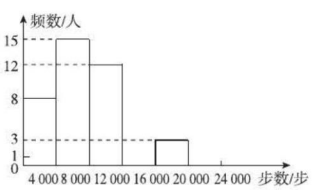
10. 【中考 · 枣庄】现今“微信运动”被越来越多的人关注和喜爱，某兴趣小组随机调查了我市50名教师某日“微信运动”中的步数情况进行统计整理，绘制了如下的统计图表（不完整）：

根据以上信息，解答下列问题：

（1）写出 a,b,c,d 的值，并补全频数分布直方图.

（2）本市约有37 800名教师，用调查的样本数据估计日行走步数超过12 000步（包含12 000步）的教师有多少名？

（3）若在50名被调查的教师中，选取日行走步数超过16 000步（包含16 000步）的两名教师与大家分享心得，求被选取的两名教师恰好都在20 000步（包含20 000步）以上的概率.



（第10题）

步数	频数	频率
$0 \leqslant x < 4\,000$	8	a
$4\,000 \leqslant x < 8\,000$	15	0.3
$8\,000 \leqslant x < 12\,000$	12	b
$12\,000 \leqslant x < 16\,000$	c	0.2
$16\,000 \leqslant x < 20\,000$	3	0.06
$20\,000 \leqslant x < 24\,000$	d	0.04

谜语：1+2+3（打一成语）

谜底：接二连三

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

26.4　综合与实践　概率在遗传学中的应用

整合方法 · 分类练

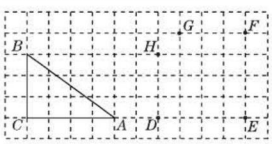
(答案见 141 页)

类型 1　概率在数学中的应用

1. 如图,在方格纸中,$\triangle ABC$ 的三个顶点及 D,E,F,G,H 五个点分别位于小正方形的顶点上.

(1)现以 D,E,F,G,H 中的三个点为顶点画三角形,在所画的三角形中与 $\triangle ABC$ 不全等但面积相等的三角形是_____;(只需要填一个三角形)

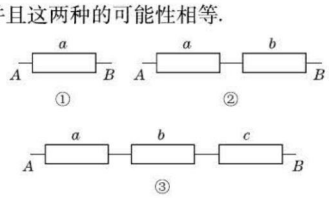
(2)先从 D,E 两个点中任意取一个点,再从 F,G,H 三个点中任意取两个不同的点,以所取的这三个点为顶点画三角形,求所画三角形与 $\triangle ABC$ 面积相等的概率.(用画树状图或列表法求解)



(第 1 题)

类型 2　概率在物理学中的应用

2. 在物理试验中,当电流在一定时间段内正常通过电子元件时,每个电子元件的状态有两种可能:通电或断开,并且这两种的可能性相等.



(第 2 题)

(1)如图①,当只有一个电子元件时,A,B 之间的电流通过的概率是_____;

(2)如图②,当有两个电子元件 a,b 串联时,A,B 之间的电流通过的概率是_____;

(3)如图③,当有三个电子元件串联时,猜想 A,B 之间电流通过的概率是_____.

类型 3　概率在生物学中的应用

3. 白化病是一种隐性的性状,如果 N 是正常的基因,a 是白化病基因,那么携带成对基因 Na 的个体的皮肤、头发和眼球的颜色是正常,而携带成对基因 aa 的个体将患有白化病.

(1)设母亲和父亲都携带成对基因 Na,求他们有正常孩子的概率;

(2)设母亲和父亲分别携带成对基因 NN 和 Na,求他们有正常孩子的概率和孩子患有白化病的概率;

(3)设母亲和父亲分别携带成对基因 aa 和 Na,求他们有正常孩子的概率和孩子患有白化病的概率.

类型 4　概率在实际生活中的应用

4. 某小区为了促进生活垃圾的分类处理,将生活垃圾分为可回收垃圾、厨余垃圾、其他垃圾三类,分别记为 A,B,C,并且设置了相应的垃圾箱,依次记为 a,b,c.

(1)若将厨余垃圾随机地投入一个垃圾箱,求垃圾投放正确的概率;

(2)为了调查小区垃圾分类投放情况,现随机抽取了该小区三类垃圾箱中总质量为 500 kg 的生活垃圾,数据如下:(单位:kg)

	a	b	c
A	40	15	10
B	60	250	40
C	15	15	55

试估计"厨余垃圾"投放正确的概率.

趣味数学　谜语:八分之七(打一成语)　　谜底:七上八下

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

阶段方法技巧训练（七）

专训 1 事件的认识 ☞（答案见141页）

名师点金

判断一个事件的类型的方法

判断一个事件是不可能事件、必然事件还是随机事件，其标准在于结果是否在试验前预先确定，与这个试验是否进行无关. 一般来说，描述已被确定的真理或客观存在的事实的事件是必然事件，描述违背已被确定的真理或客观存在的事实的事件是不可能事件，否则是随机事件. 随机事件又分为等可能事件和非等可能事件.

训练角度 1 确定性事件

题型 1 不可能事件

1. 下列事件中，属于不可能事件的是（　　）
   A. 某投篮高手投篮一次就进球
   B. 打开电视机，正在播放世界杯足球比赛
   C. 掷一次骰子，向上的一面出现的点数不大于6
   D. 在1个标准大气压下，90 ℃的水会沸腾

2. 下列事件中，不可能事件有_____.（填序号）
   ①度量三角形的内角和，结果是360°；
   ②随意翻一本书的某页，这页的页码是奇数；
   ③一个袋子里装有红、白、黄三种颜色的小球，从中摸出黑球；
   ④如果$|a|=|b|$，那么$a=b$；
   ⑤测量某天的最低气温，结果为 −180 ℃.

题型 2 必然事件

3. 【中考·怀化】下列事件中是必然事件的是（　　）
   A. 地球绕着太阳转
   B. 抛一枚硬币，正面朝上
   C. 明天会下雨
   D. 打开电视，正在播放新闻

4. 【中考·徐州】一只不透明的袋子中装有4个黑球，2个白球，每个球除颜色外都相同，从中任意摸出3个球，下列事件为必然事件的是（　　）
   A. 至少有1个球是黑球
   B. 至少有1个球是白球
   C. 至少有2个球是黑球
   D. 至少有2个球是白球

5. 指出下列事件中，哪些是必然事件，哪些是不可能事件. 这些事件是确定性事件吗？
   ①两条平行线被第三条直线所截，同位角相等；
   ②367人中至少有2人的生日相同；
   ③没有水分，种子也会发芽；
   ④奥运会上百米赛跑的成绩是5秒；
   ⑤同种电荷，相互排斥；
   ⑥通常情况下，高铁比普通列车快；
   ⑦用3 cm，5 cm，8 cm的三条线段围成三角形.

训练角度 2 随机事件

6. 下列事件是随机事件的是（　　）
   A. 太阳从东边升起
   B. 一元二次方程$x^2+2x+3=0$无实数解
   C. 明天会下雨
   D. 两直线相交，对顶角相等

7. “任意打开一本200页的数学书，正好是第50页”，这是_____事件.（填“随机”或“必然”）

8. 指出下列随机事件中，哪些是等可能事件，哪些是非等可能事件.
   ①在一个装着3个白球、3个黑球（每个球除颜色外都相同）的袋中摸出一个球，摸出白球与摸出黑球；
   ②掷一枚均匀的骰子，朝上一面的点数分别为1，2，3，4，5，6；
   ③从4张扑克牌中（4张牌的花色分别为红桃、方块、梅花、黑桃）随意抽取一张，这张牌分别是红桃、方块、梅花、黑桃；
   ④掷一枚图钉，钉尖着地与钉尖朝上.

抛硬币并非最公平　抛硬币是做决定时普遍使用的一种方法. 人们认为硬币落下后正面朝上和反面朝上的概率都一样，都是50%. 但是有趣的是，这种非常受欢迎的想法并不正确.（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

专训 2　概率的四种求法 (答案见 141 页)

名师点金

概率可以通过大量重复试验中频率的稳定性来估计，它反映了事件发生的可能性的大小，需要注意的是：概率是针对大量重复试验而言的，大量重复试验反映的规律并不一定出现在每次试验中. 常见的计算概率的方法有公式法(仅适用于等可能事件)、列表法、画树状图法和频率估算法等.

方法 1　用公式法求概率

1. 一个不透明的袋中装有 5 个黄球，13 个黑球和 22 个红球，它们除颜色外都相同.

(1) 求从袋中摸出一个球是黄球的概率；

(2) 现从袋中取出若干个黑球，并放入相同数量的黄球，搅拌均匀后使从袋中摸出一个球是黄球的概率不小于$\frac{1}{3}$，问至少取出了多少个黑球？

方法 2　用列表法求概率

2. 【中考·潍坊】某校为了解九年级学生近两个月“推荐书目”的阅读情况，随机抽取了该年级的部分学生，调查了他们每人“推荐书目”的阅读本数. 设每名学生的阅读本数为 n，并按以下规定分为四档：当 $n<3$ 时，为“偏少”；当 $3\leqslant n<5$ 时，为“一般”；当 $5\leqslant n<8$ 时，为“良好”；当 $n\geqslant 8$ 时，为“优秀”. 将调查结果统计后绘制成如下不完整的统计图表：

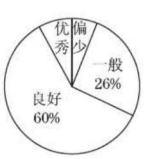
阅读本数 n/本	1	2	3	4	5	6	7	8	9
人数/人	1	2	6	7	12	x	7	y	1

请根据以上信息回答下列问题：

(1) 分别求出统计表中的 x，y 的值；

(2) 估计该校九年级 400 名学生中为“优秀”档次的人数；

(3) 从被调查的“优秀”档次的学生中随机抽取 2 名学生介绍读书体会，请用列表或画树状图的方法求抽取的 2 名学生中有 1 名阅读本数为 9 的概率.



(第 2 题)

方法 3　用画树状图法求概率

3. 体育课上，小明、小强、小华三人在踢足球，足球从一人传到另一人就记为踢一次.

(1) 如果从小强开始踢，经过两次踢球后，足球踢到了小华处的概率是多少？

(2) 如果踢三次后，足球踢到了小明处的可能性最小，应从谁开始踢？请说明理由.

方法 4　用频率估算法求概率

4. 一只不透明的袋子中装有 4 个球，分别标有数字 2，3，4，x，这些球除数字外都相同. 甲、乙两人每次同时从袋中各随机摸出 1 个球，并计算摸出的这两个球上数字之和. 记录后都将球放回袋中搅匀，进行重复试验. 试验数据如下表：

摸球总次数	10	20	30	60	90	120	180	240	330	450
“和为 7”出现的频数	1	9	14	24	26	37	58	82	109	150
“和为 7”出现的频率	0.10	0.45	0.47	0.40	0.29	0.31	0.32	0.34	0.33	0.33

解答下列问题：

(1) 如果试验继续进行下去，根据上表数据，“和为 7”出现的频率将稳定在它的概率附近，试估计“和为 7”出现的概率；

(2) 根据(1)，若 x 是不等于 2，3，4 的自然数，试求 x 的值.

趣味数学　测试结果显示，如果你按常规方法抛硬币，即用大拇指轻弹，开始抛时硬币朝上的一面在落地时仍朝上的可能性大约是 51%.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

专训 3 利用概率判断游戏规则的公平性 ☞（答案见141页）

名师点金

通过计算概率判断游戏是不是公平是概率知识的一个重要应用，也是中考考查的热点. 解决游戏公平性问题要先计算游戏双方获胜的概率，再进行判断. 若概率相等，则游戏公平；若概率不相等，则游戏不公平.

训练角度 1 利用概率判断摸球游戏的公平性

1. 在一个不透明的口袋里装有分别标有数字1，2，3，4的四个球，除数字不同外，球没有任何区别，每次试验前先搅拌均匀.

（1）若从中任取一球，球上的数字为偶数的概率为多少？

（2）若从中任取一球（不放回），再从中任取一球，请用画树状图或列表的方法求出两个球上的数字之和为偶数的概率.

（3）若设计一种游戏方案：从中任取两球，两个球上的数字之差的绝对值为1时甲胜，否则为乙胜，请问这种游戏方案对甲、乙双方公平吗？请说明理由.

训练角度 2 利用概率判断转盘游戏的公平性

2. 【中考·营口】如图是一个转盘，转盘被平均分成4等份，即被分成4个大小相等的扇形，4个扇形分别标有数字1，2，3，4，指针的位置固定，转动转盘后任其自由停止，每次指针落在每一扇形的机会均等（若指针恰好落在分界线上则重转）.

（1）图中标有“1”的扇形至少绕圆心旋转_____度能与标有“4”的扇形的起始位置重合.

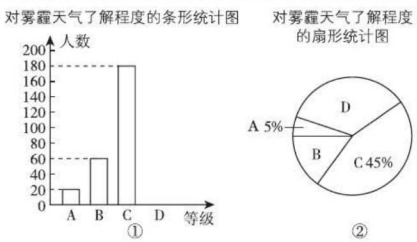
（2）现有一本故事书，姐妹俩商定通过转盘游戏定输赢（赢的一方先看），游戏规则是：姐妹俩各转动一次转盘，两次转动后，若指针所指扇形上的数字之积为偶数，则姐姐赢；若指针所指扇形上的数字之积为奇数，则妹妹赢. 这个游戏规则对双方公平吗？请利用树状图或列表法说明理由.



（第2题）

训练角度 3 利用概率判断统计事件的公平性

3. 【中考·天水】近年来，我国持续大面积的雾霾天气让环保和健康问题成为焦点，为了调查学生对雾霾天气知识的了解程度，某校在学生中做了一次抽样调查，调查结果共分为四个等级：A. 非常了解；B. 比较了解；C. 基本了解；D. 不了解. 根据调查统计结果，绘制了如图所示的不完整的三种统计图表.



（第3题）

对雾霾天气了解程度的统计表

对雾霾天气的了解程度	百分比
A. 非常了解	5%
B. 比较了解	15%
C. 基本了解	45%
D. 不了解	n

请结合统计图表，回答下列问题：

（1）本次参与调查的学生共有_____人，n = _____.

（2）扇形统计图中D部分扇形所对应的圆心角是_____度.

（3）请补全条形统计图.

（4）根据调查结果，学校准备开展关于雾霾的知识竞赛，某班要从“非常了解”程度的小明和小刚中选一人参加，现设计了如下游戏来确定，具体规则是：把四个完全相同的乒乓球标上数字1，2，3，4，然后放到一个不透明的袋中，一个人先从袋中随机摸出一个球，另一个人再从剩下的三个球中随机摸出一个球. 若摸出的两个球上的数字和为奇数，则小明去，否则小刚去. 请用树状图或列表法说明这个游戏规则是否公平.

“一门科学，只有当它能成功地运用数学时，才能达到真正完善的地步.”——马克思

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

专训 4　概率与其他知识的综合 ☞(答案见 142 页)

名师点金

概率的基本试验一般有掷骰子、转转盘、摸球等. 随着研究越来越深入,考查的触角伸向了学科内的其他各章. 但万变不离其宗,只不过,在分析等可能结果时,用到学科内的其他知识.

类型 1　概率与方程、不等式的综合

1. 在一副扑克牌中,拿出红桃 2、红桃 3、红桃 4、红桃 5 四张牌,洗匀后,小明从中随机摸出一张,记下牌面上的数字为 x,然后放回并洗匀,再由小华随机摸出一张,记下牌面上的数字为 y,组成一对数(x,y).

(1)用列表法或画树状图法表示出(x,y)所有可能出现的结果;

(2)求小明、小华各摸一次扑克牌所确定的一对数是方程 $x+y=6$ 的解的概率;

(3)求小明、小华各摸一次扑克牌所确定的一对数是不等式 $x-y\geqslant 1$ 的解的概率.

类型 2　概率与函数的综合

2. 有七张正面分别标有数 $-3,-2,-1,0,1,2,3$ 的卡片,它们除数不同外其余全部相同,将它们背面朝上,洗匀后从中随机抽取一张,记卡片上的数为 a,求使关于 x 的一元二次方程 $x^2-2(a-1)x+a(a-3)=0$ 有两个不相等的实数根,且以 x 为自变量的二次函数 $y=x^2-(a^2+1)x-a+2$ 的图象不经过点$(1,0)$的概率.

类型 3　概率与几何的综合

3. 【中考·酒泉】如图,在正方形方格中,阴影部分是涂黑 3 个小正方形所形成的图案.

(1)如果将一粒米随机地抛在这个正方形方格上,那么米粒落在阴影部分的概率是多少?

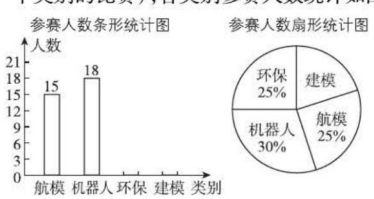
(2)现将方格内空白的小正方形(A,B,C,D,E,F)中任取 2 个涂黑,得到新图案. 请用列表或画树状图的方法求新图案是轴对称图形的概率.



(第 3 题)

类型 4　概率与统计的综合

4. 【中考·十堰】为了提高科技创新意识,我市某中学在“2016 年科技节”活动中举行科技比赛,包括“航模”“机器人”“环保”“建模”四个类别(每个学生只能参加一个类别的比赛),各类别参赛人数统计如图:



(第 4 题)

请根据以上信息,解答下列问题:

(1)全体参赛的学生共有_____人,“建模”在扇形统计图中的圆心角是_____°.

(2)将条形统计图补充完整.

(3)在比赛结果中,获得“环保”类一等奖的学生为 1 名男生和 2 名女生,获得“建模”类一等奖的学生为 1 名男生和 1 名女生. 现从这两类获得一等奖的学生中各随机选取 1 名学生参加市级“环保建模”考察活动,问选取的两人中恰为 1 名男生 1 名女生的概率是多少?

趣味数学　数缺形时少直观,形少数时难入微,数形结合百般好,隔离分家万事休. ——华罗庚

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

全章热门考点整合应用

☞（答案见142页）

名师点金

本章内容是近年来中考的必考内容，主要考点有事件的类型、用列表法或树状图法计算概率、用频率估计概率及概率的应用. 其考查形式既有单一考查，又有与平面直角坐标系、几何、统计等知识的综合考查. 热门考点可概括为一个判断、两个方法、两种思想.

考点1 一个判断——事件类型的判断

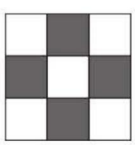
1. 下列事件中，是必然事件的是（　　）
   A. 抛掷一枚质地均匀的硬币，落地后正面朝上
   B. 成都平原7月份某一天的最低气温是 -2 ℃
   C. 在标准大气压下，通常加热到100 ℃时，水沸腾
   D. 打开电视，正在播放《新闻联播》

2. 【中考·福建】投掷两枚质地均匀的骰子，骰子的六个面上分别刻有1到6的点数，则下列事件为随机事件的是（　　）
   A. 两枚骰子向上一面的点数之和大于1
   B. 两枚骰子向上一面的点数之和等于1
   C. 两枚骰子向上一面的点数之和大于12
   D. 两枚骰子向上一面的点数之和等于12

考点2 两个方法

方法1 求随机事件的概率

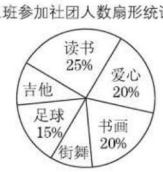
3. 小球在如图所示的地板上自由滚动，并随机地停留在某块方砖上，每一块方砖除颜色外完全相同，它最终停留在黑色方砖上的概率是_____.



（第3题）

4. 【中考·宜昌】901班的全体同学根据自己的兴趣爱好参加了六个学生社团（每名学生必须参加且只参加一个）. 为了解学生参加社团的情况，学生会对该班参加各个社团的人数进行了统计，绘制成如图所示不完整的扇形统计图. 已知参加“读书社”的学生有15名. 请解答下列问题：
   （1）该班的学生共有_____名；
   （2）若该班参加“吉他社”与“街舞社”的人数相同，请你计算“吉他社”对应扇形的圆心角的度数；
   （3）901班学生甲、乙、丙是“爱心社”的优秀成员，现要从这三名学生中随机选两名学生参加“社区义工”活动，请你用画树状图或列表的方法求出恰好选中甲和乙的概率. 【导学号：9513162】

901班参加社团人数扇形统计图



（第4题）

方法2 用频率估计概率

5. 小军和小刚两位同学在学习“概率”时，做投掷骰子（质地均匀的正方体）试验，他们共做了60次试验，试验的结果如下表：

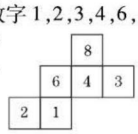
朝上点数	1	2	3	4	5	6
出现次数	7	9	6	8	20	10

   （1）计算2点朝上的频率和5点朝上的频率.
   （2）小军说：“根据试验，一次试验中出现3点朝上的概率是$\frac{1}{10}$.”小军的这一说法正确吗？为什么？
   （3）小刚说：“如果掷600次，那么出现6点朝上的次数正好是100次.”小刚的这一说法正确吗？为什么？

考点3 两种思想

思想1 数形结合思想

6. 一个均匀的正方体各面上分别标有数字1，2，3，4，6，8，其表面展开图如图，抛掷这个正方体，则朝上一面的数字恰好等于朝下一面的数字的2倍的概率是（　　）



（第6题）

   A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{6}$

思想2 方程思想

7. 一个口袋中放有红球、白球和黑球若干个，每个球除了颜色以外没有任何区别，已知红球比黑球多1个，比白球少3个.
   （1）小王通过大量重复试验（每次取1个球，放回搅匀后再取第二个）发现，取出黑球的频率稳定在$\frac{1}{4}$左右，请你估计口袋中黑球的个数；
   （2）若小王取出的第一个球是白球，将它放在桌上，闭上眼睛从口袋中余下的球中再任意取出1个球，取出红球的概率是多少？

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



典中点

综合应用创新题 典中点

达标检测卷

含参考答案及点拨

九年级数学

下（HK版）

陕西新华出版传媒集团
陕西人民教育出版社

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第24章达标检测卷

（150分，90分钟）

题　号	一	二	三	总　分
得　分				

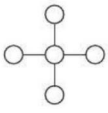
姓名　学号　班级　学校　密　封　线

一、选择题（每题4分，共40分）

1. 在下面的图形中，既是轴对称图形又是中心对称图形的是（　　）


A


B


C

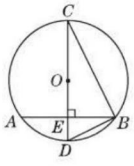

D

2. 已知⊙O的半径为5，点P到圆心O的距离为6，那么点P与⊙O的位置关系是（　　）

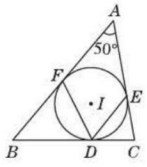
A. 点P在⊙O外　　B. 点P在⊙O内　　C. 点P在⊙O上　　D. 无法确定

3. 如图，CD是⊙O的直径，弦$AB \perp CD$于点E，连接BC，BD，下列结论中不一定正确的是（　　）

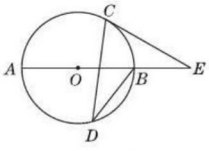
A. $AE = BE$　　B. $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD}$　　C. $OE = DE$　　D. $\angle DBC = 90°$



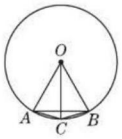
（第3题）



（第4题）



（第5题）



（第6题）

4. 如图，在△ABC中，$\angle A = 50°$，内切圆I与边BC，CA，AB分别相切于点D，E，F，则$\angle EDF$的度数为（　　）

A. 50°　　B. 65°　　C. 70°　　D. 80°

5. 如图，AB是⊙O的直径，C，D是⊙O上的点，$\angle CDB = 30°$，过点C作⊙O的切线交AB的延长线于E，则$\sin E$的值为（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

6. 如图，在⊙O中，$OA = AB$，$OC \perp AB$，则下列结论错误的是（　　）

A. 弦AB的长等于圆内接正六边形的边长　　B. 弦AC的长等于圆内接正十二边形的边长

C. $AC = BC$　　D. $\angle BAC = 30°$

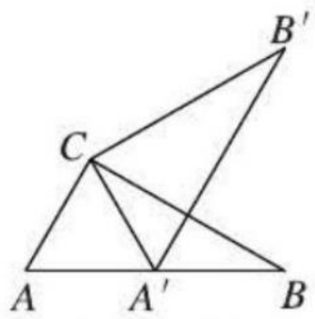
7. 如图，在△ABC中，$\angle ACB = 90°$，$\angle ABC = 30°$，$AB = 2$. 将△ABC绕直角顶点C逆时针旋转60°得到△$A'B'C$，则点B经过的路径长为（　　）

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. π

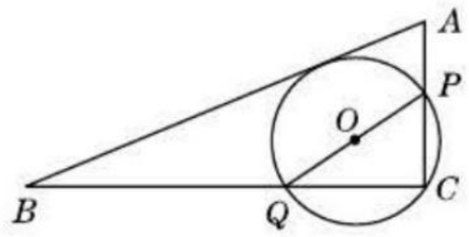
8. 现有一个圆心角为90°，半径为8 cm的扇形纸片，用它恰好能围成一个圆锥的侧面（接缝处忽略不计），则该圆锥底面圆的半径为（　　）

A. 4 cm　　B. 3 cm　　C. 2 cm　　D. 1 cm

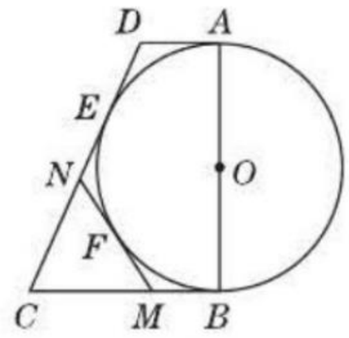
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



（第 7 题）



（第 9 题）



（第 10 题）

9. 如图，在△ABC 中，$AB=13$，$AC=5$，$BC=12$，经过点 C 且与边 AB 相切的动圆 O 与 CA，CB 分别相交于点 P，Q，则线段 PQ 长度的最小值是（　　）

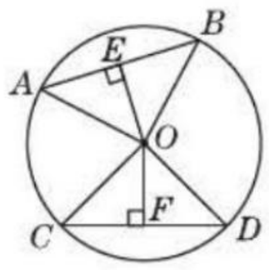
A. $\frac{12}{5}$　　B. $\frac{60}{13}$　　C. 5　　D. 无法确定

10. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AD/\!/BC$，$\angle ABC=90°$，$AD=2$，$AB=6$，以 AB 为直径的⊙O 切 CD 于点 E，F 为$\overset{\frown}{BE}$上一动点，过 F 点的直线 MN 为⊙O 的切线，MN 交 BC 于点 M，交 CD 于点 N，则△MCN 的周长为（　　）

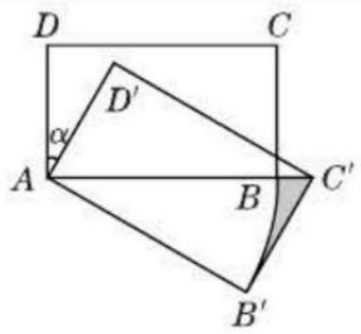
A. 9　　B. 10　　C. $3\sqrt{11}$　　D. $2\sqrt{23}$

二、填空题（每题 5 分，共 20 分）

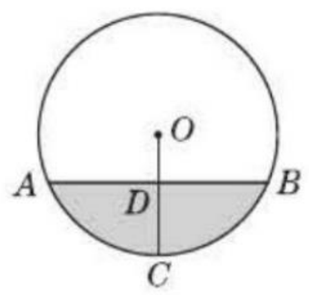
11. 如图，已知 AB，CD 是⊙O 的两条弦，OE，OF 分别为 AB，CD 的弦心距，连接 OA，OB，OC，OD，如果 $AB=CD$，则可得出结论：_____.（至少填写两个）



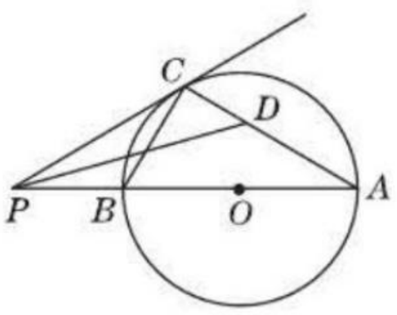
（第 11 题）



（第 12 题）



（第 13 题）



（第 14 题）

12. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=\sqrt{3}$，$AD=1$，把该矩形绕点 A 顺时针旋转∠α 得矩形 $AB'C'D'$，点 C' 落在 AB 的延长线上，则图中阴影部分的面积是_____.

13. 如图，水平放置的圆柱形油槽的截面直径是 52 cm，装入油后，油深 CD 为 16 cm，那么油面宽度 $AB=$_____.

14. 如图，AB 是⊙O 的直径，P 为 AB 延长线上的一个动点，过点 P 作⊙O 的切线，切点为 C. 连接 AC，BC，作∠APC的平分线交 AC 于点 D. 下列结论正确的是_____.（写出所有正确结论的序号）

①△CPD∽△DPA；

②若∠$A=30°$，则 $PC=\sqrt{3}BC$；

③若∠$CPA=30°$，则 $PB=OB$；

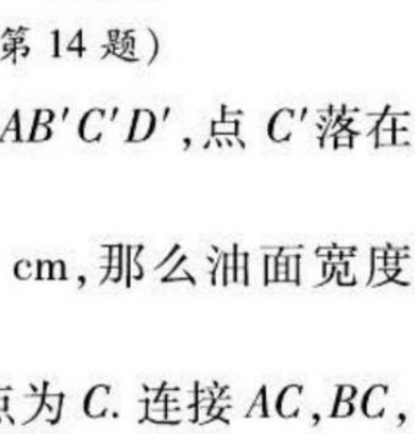
④无论点 P 在 AB 延长线上的位置如何变化，∠CDP 为定值.

三、解答题（15 题 8 分，19，20 题每题 12 分，21，22 题每题 14 分，其余每题 10 分，共 90 分）

15. 如图，正方形网格中的每个小正方形的边长都是 1 个单位长度，每个小正方形的顶点叫做格点. △ABC 的三个顶点 A，B，C 都在格点上，将△ABC 绕点 A 顺时针旋转 90°得到△$AB'C'$.

（1）在正方形网格中，画出△$AB'C'$；

（2）计算线段 AB 在变换到 AB'的过程中扫过区域的面积.



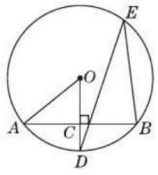
（第 15 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

16. 如图，AB 是$\odot O$ 的一条弦，$OD\perp AB$，垂足为点 C，交$\odot O$ 于点 D，点 E 在$\odot O$ 上.

（1）若$\angle AOD=52°$，求$\angle DEB$ 的度数；

（2）若 $OC=3$，$AB=8$，求$\odot O$ 的直径.

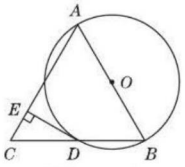


（第 16 题）

17. 如图，AB 是$\odot O$ 的直径，BD 是$\odot O$ 的弦，延长 BD 到点 C，使 $DC=BD$，连接 AC，过点 D 作 $DE\perp AC$，垂足为 E.

（1）求证：$AB=AC$；

（2）若$\odot O$ 的半径为 4，$\angle BAC=60°$，求 DE 的长.

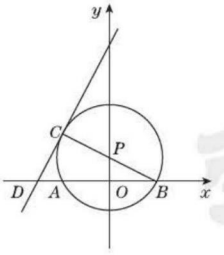


（第 17 题）

18. 如图，点 P 在 y 轴上，$\odot P$ 交 x 轴于 A，B 两点，连接 BP 并延长交$\odot P$ 于点 C，过点 C 的直线 $y=2x+b$ 交 x 轴于点 D，且$\odot P$ 的半径为$\sqrt{5}$，$AB=4$.

（1）求点 B，P，C 的坐标；

（2）求证：CD 是$\odot P$ 的切线.

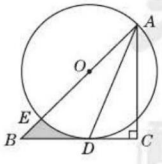


（第 18 题）

19. 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=BC$，点 O 在 AB 上，经过点 A 的$\odot O$ 与 BC 相切于点 D，交 AB 于点 E.

（1）求证：AD 平分$\angle BAC$；

（2）若 $CD=1$，求图中阴影部分的面积.（结果保留 π）



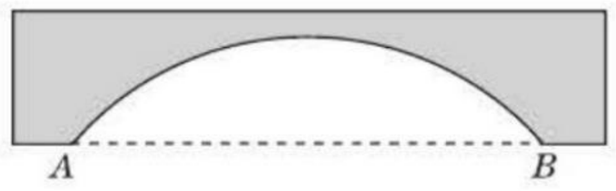
（第 19 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

20. 如图,一拱形公路桥,圆弧形桥拱的水面跨度 $AB=80$ m,桥拱到水面的最大高度为 20 m.

(1)求桥拱所在圆的半径.

(2)现有一艘宽 60 m,顶部截面为长方形且高出水面 9 m 的轮船要经过这座拱桥,这艘轮船能顺利通过吗?请说明理由.



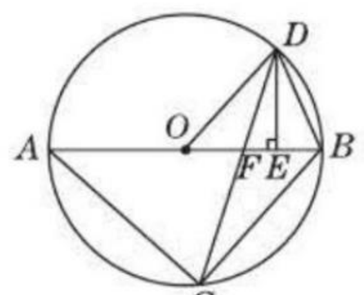
(第 20 题)

21. 如图,已知 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$,AB 是直径,点 D 在 $\odot O$ 上,$OD\parallel BC$,过点 D 作 $DE\perp AB$,垂足为 E,连接 CD 交 OE 边于点 F.

(1)求证:$\triangle DOE\backsim\triangle ABC$;

(2)求证:$\angle ODF=\angle BDE$;

(3)连接 OC,设 $\triangle DOE$ 的面积为 S_1,四边形 $BCOD$ 的面积为 S_2,若 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{2}{7}$,求 $\sin A$ 的值.

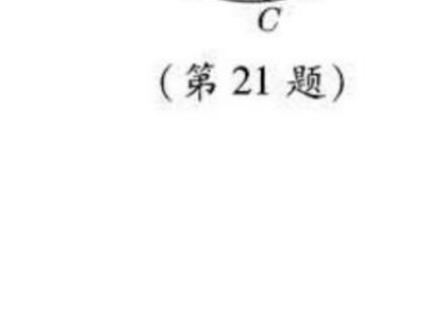


(第 21 题)

22. 如图,菱形 $ABCD$ 的顶点 A,B 在 x 轴上,点 A 在点 B 的左侧,点 D 在 y 轴的正半轴上,$\angle BAD=60°$,点 A 的坐标为 $(-2,0)$.

(1)求线段 AD 所在直线的表达式;

(2)动点 P 从点 A 出发,以每秒 1 个单位长度的速度,按照 $A\to D\to C\to B\to A$ 的顺序在菱形的边上匀速运动一周,设运动时间为 t 秒. 求 t 为何值时,以点 P 为圆心、以 $r=1$ 为半径的圆与对角线 AC 相切?



(第 22 题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第25章达标检测卷

（150分，90分钟）

题　号	一	二	三	总　分
得　分				

姓名 学号 班级 学校

密 封 线

一、选择题（每题4分，共40分）

1. 下列几何体中，俯视图是矩形的是（　　）

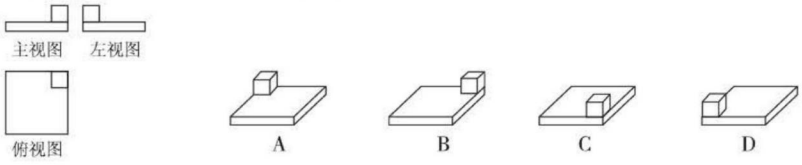


2. 如果在同一时刻的阳光下，小莉的影子比小玉的影子长，那么在同一路灯下（　　）

A. 小莉的影子比小玉的影子长　　B. 小莉的影子比小玉的影子短

C. 小莉的影子与小玉的影子一样长　　D. 无法判断谁的影子长

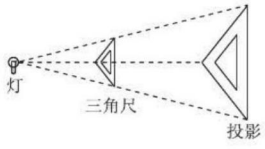
3. 如图是一个几何体的三视图，则此几何体为（　　）



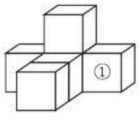
（第3题）

4. 如图，位似图形由三角尺与其在灯光照射下的中心投影组成，相似比为2∶5，且三角尺一边长为8 cm，则投影三角形的对应边长为（　　）

A. 8 cm　　B. 20 cm　　C. 3.2 cm　　D. 10 cm



（第4题）



（第6题）

5. 李刚同学拿一个矩形木框在阳光下摆弄，矩形木框在地面上形成的投影不可能是（　　）



6. 如图是由6个同样大小的正方体摆成的几何体. 将正方体①移走后，所得几何体（　　）

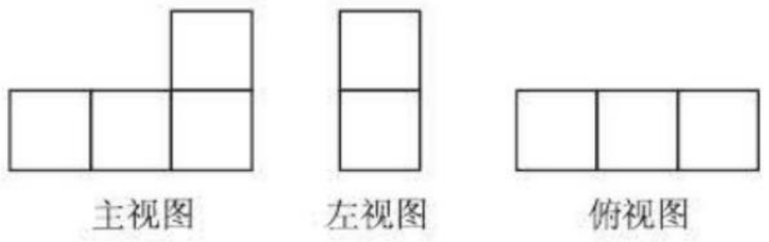
A. 主视图改变，左视图改变　　B. 俯视图不变，左视图不变

C. 俯视图改变，左视图改变　　D. 主视图改变，左视图不变

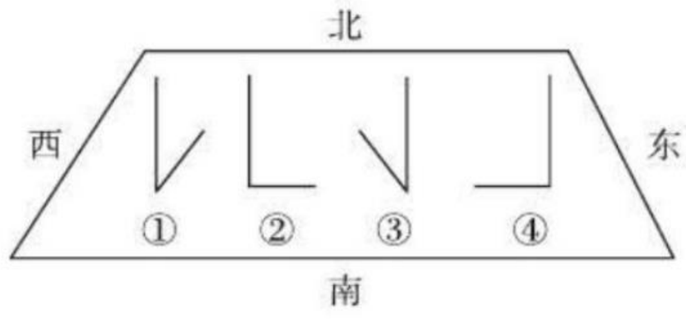
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7. 如图是由一些相同的小正方体搭成的几何体的三视图，搭成这个几何体的小正方体个数是(　　)

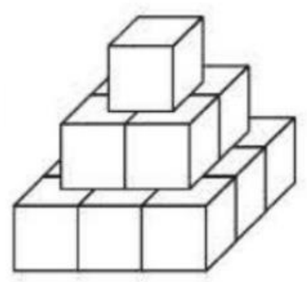
A. 2 个　　B. 3 个　　C. 4 个　　D. 6 个



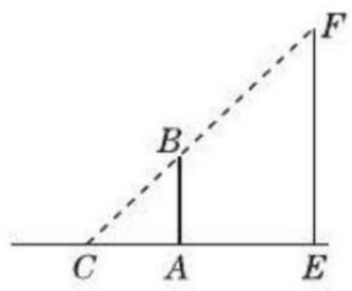
(第 7 题)



(第 8 题)



(第 9 题)



(第 10 题)

8. 如图①②③④是一天中四个不同时刻的木杆在地面上的影子，将它们按时间先后顺序排列正确的一项是(　　)

A. ④③①②　　B. ①②③④　　C. ②③①④　　D. ③①④②

9. 小华有 14 个棱长为 1 dm 的正方体，他在地面上把它们摆成如图所示的形状，然后把露出表面的部分都涂上颜色，那么被涂上颜色的总面积为(　　)

A. 30 dm^2　　B. 33 dm^2　　C. 34 dm^2　　D. 35 dm^2

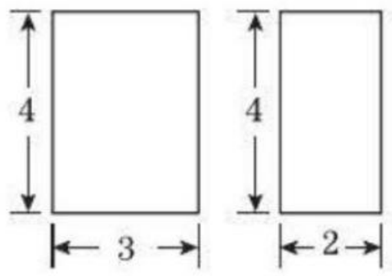
10. 如图，一根直立于水平地面上的木杆 AB 在灯光下形成影子 $AC(AC > AB)$，当木杆绕点 A 按逆时针方向旋转，直至到达地面时，影子的长度发生变化. 已知 $AE = 5$ m，在旋转过程中，影长的最大值为 5 m，最小值为3 m，且影长最大时，木杆与光线垂直，则路灯 EF 的高度为(　　)

A. 6 m　　B. 7.5 m　　C. 8 m　　D. 10 m

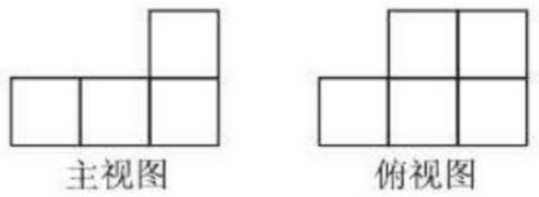
二、填空题(每题 5 分，共 20 分)

11. 下列各种现象：①上午 10 点时，走在路上的人的影子；②晚上 10 点时，走在路灯下的人的影子；③中午乘凉处的树影；④升国旗时，地上旗杆的影子，其中属于中心投影现象的是_____.

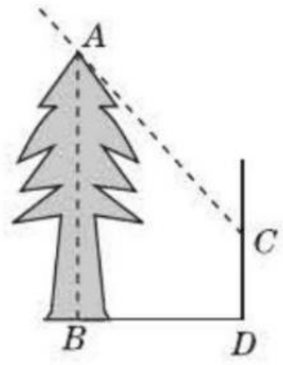
12. 一个长方体的主视图和左视图如图所示(单位：厘米)，则其俯视图的面积是_____平方厘米.



(第 12 题)



(第 13 题)



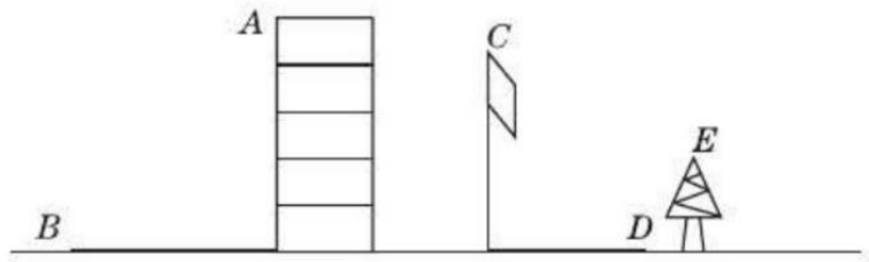
(第 14 题)

13. 由一些大小相同的小正方体搭成的几何体的主视图和俯视图如图所示，则搭成该几何体的小正方体最多有_____个.

14. 某数学课外活动小组想利用树影测量树高，他们在同一时刻测得一身高为 1.5 m 的同学的影长为 1.35 m，由于大树靠近一幢建筑物，因此树影的一部分落在建筑物上，如图，他们测得地面部分的影长为 3.6 m，建筑物上的影长为 1.8 m，则树的高度为_____.

三、解答题(15，16 题每题 9 分，17 题 10 分，22 题 14 分，其余每题 12 分，共 90 分)

15. 在一座八层楼的楼顶有一个大灯泡 O，该楼房旁边的楼房 A 和旗杆 C 在灯泡下的影子如图所示，试确定灯泡 O 的位置，再作出小树 E 在灯泡下的影子 FG. (不写作法，保留作图痕迹)

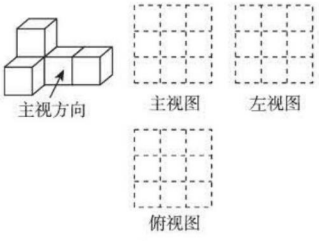


(第 15 题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

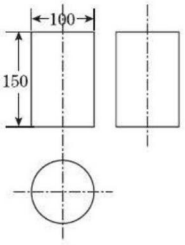
16. (1)用5个棱长为1 cm的小立方块搭成的几何体如图所示，在下边的网格中画出它的三视图.

(2)在实物图中，再添加若干个小立方块，使得它的左视图和俯视图不变，那么最多可添加_____个小立方块.



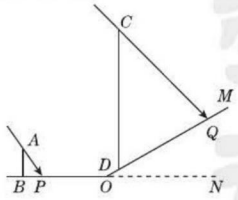
（第16题）

17. 某工厂要加工一批茶叶罐，设计者给出了茶叶罐的三视图（如图），请你按照三视图确定制作每个茶叶罐所需钢板的面积.（图中单位：mm，结果保留 π）



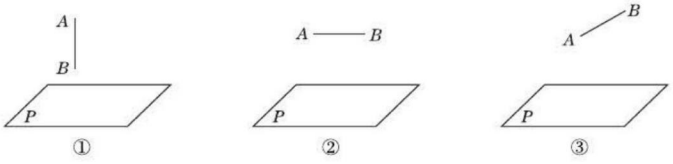
（第17题）

18. 在一个阳光明媚的上午，陈老师组织学生测量小山坡上的一棵大树 CD 的高度（大树垂直于水平面），如图，山坡 OM 与地面 ON 的夹角为30°（即 $\angle MON=30°$），站立在水平地面上身高为1.7 m的小明 AB 在地面的影长 BP 为1.2 m，此刻大树 CD 在斜坡上的影长 DQ 为5 m，求大树的高度.



（第18题）

19. 如图，已知线段 $AB=2$ cm，投影面为 P.



（第19题）

(1)当 AB 垂直于投影面 P 时（如图①），请画出线段 AB 的正投影；

(2)当 AB 平行于投影面 P 时（如图②），请画出它的正投影，并求出正投影的长；

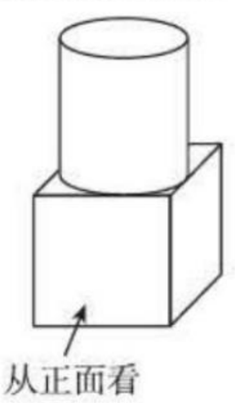
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(3)在(2)的基础上,点 A 不动,线段 AB 绕点 A 在垂直于投影面 P 的平面内逆时针旋转 30°,请在图③中画出线段 AB 的正投影,并求出其正投影的长.

20. 如图,某游乐园门口需要修建一个由正方体和圆柱组合而成的立体图形,已知正方体的棱长与圆柱的底面直径及高相等,都是 0.8 m.

(1)请画出它的主视图、左视图、俯视图;

(2)为了好看,需要在这个立体图形表面刷一层油漆,已知油漆每平方米 40 元,那么一共需要花费多少元?(结果精确到 0.1)



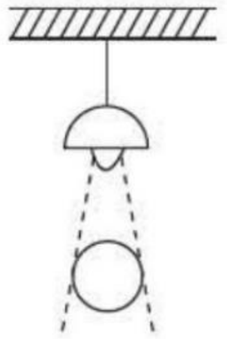
(第 20 题)

21. 如图,在一间黑暗的屋子里用一盏白炽灯照一个球.

(1)球在地面上的阴影是什么形状?

(2)当把白炽灯向高处移时,阴影的大小怎样变化?

(3)若白炽灯到球心的距离是 1 米,到地面的距离是 3 米,球的半径是 0.2 米,问:球在地面上的阴影的面积是多少?

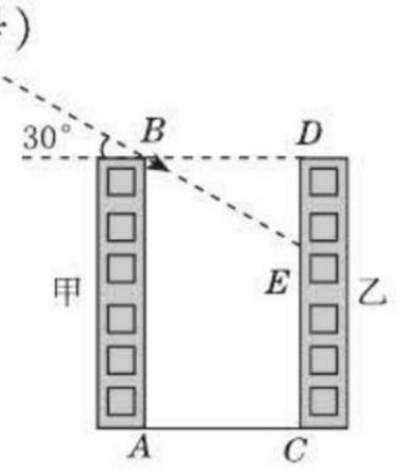


(第 21 题)

22. 为加快新农村建设,某市投入资金建设新型农村社区. 如图为住宅区内的两幢楼,它们的高 $AB = CD = 30$ m,现需了解甲楼对乙楼采光情况的影响. 当太阳光线与水平线的夹角为 30°时. 试求:

(1)若两楼间的距离 $AC = 24$ m,则甲楼的影子落在乙楼上有多高;(结果保留根号)

(2)若甲楼的影子刚好不影响乙楼,则两楼之间的距离应当有多远. (结果保留根号)



(第 22 题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第26章达标检测卷

（150分，90分钟）

题　号	一	二	三	总　分
得　分				

姓名 学号 班级 学校

密 封 线

一、选择题（每题4分，共40分）

1. 下列事件中，是必然事件的是（　　）

A. 两条线段可以组成一个三角形　　B. 400人中有两个人的生日在同一天

C. 早上的太阳从西方升起　　D. 打开电视机，它正在播放动画片

2. 在一个布袋里装有白、红、黑三种颜色的小球，它们除颜色外没有任何区别，其中白球2个，红球6个，黑球4个，将布袋中的球搅匀，闭上眼睛随机从布袋中取出1个球，则取出黑球的概率是（　　）

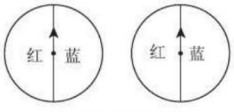
A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{6}$

3. 已知一个布袋里装有2个红球、3个白球和a个黄球，这些球除颜色外其他都相同. 若从该布袋里任意摸出1个球，是红球的概率为$\frac{1}{3}$，则a等于（　　）

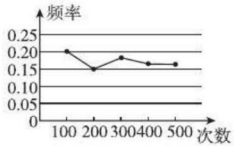
A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

4. 用如图所示的两个可自由转动的转盘做“配紫色”游戏：分别旋转两个转盘，若其中一个转出红色，另一个转出蓝色即可配成紫色，那么可配成紫色的概率是（　　）

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{2}$



（第4题）



（第5题）

5. 某小组做“用频率估计概率”的试验时，统计了某一结果出现的频率，绘制了如图所示的折线统计图，则符合这一结果的试验最有可能的是（　　）

A. 在“石头、剪刀、布”的游戏中，小明随机出的是“剪刀”

B. 一副去掉大、小王的普通扑克牌洗匀后，从中任抽一张牌的花色是红桃

C. 暗箱中有1个红球和2个黄球，它们只有颜色上的区别，从中任取一个球是黄球

D. 掷一枚质地均匀的正六面体骰子，向上一面的点数是4

6. 在-1，1，2中任取两个数作为点的坐标，那么该点刚好在一次函数$y=x-2$的图象上的概率是（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{6}$

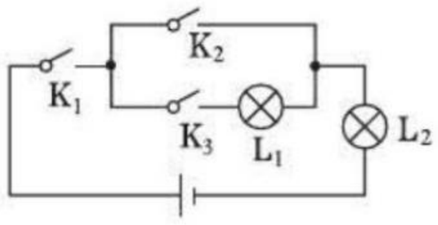
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7. 义乌国际小商品博览会某志愿小组有五名翻译,其中一名只会翻译阿拉伯语,三名只会翻译英语,还有一名这两种语言都会翻译. 若从中随机挑选两名组成一组,则该组能够翻译上述两种语言的概率是(　　)

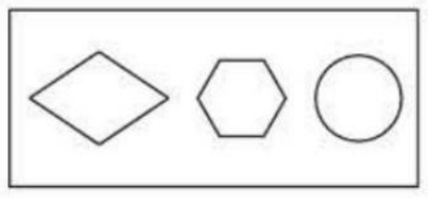
A. $\frac{3}{5}$　　B. $\frac{7}{10}$　　C. $\frac{3}{10}$　　D. $\frac{16}{25}$

8. 如图,随机闭合开关 K_1,K_2,K_3 中的两个,则能让两个灯泡同时发光的概率是(　　)

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$



(第 8 题)



(第 9 题)

9. 如图,在一个长方形内有对角线长分别为 2 和 3 的菱形、边长为 1 的正六边形和半径为 1 的圆,则一点随机落在这三个图形内的概率较大的是(　　)

A. 落在菱形内　　B. 落在圆内　　C. 落在正六边形内　　D. 一样大

10. 同时抛掷 A,B 两个均匀的小正方体(每个面上分别标有数字 1,2,3,4,5,6),设两个正方体朝上一面的数字分别为 x,y,并以此确定点 $P(x,y)$,那么点 P 满足在抛物线 $y=-x^2+3x$ 上的概率为(　　)

A. $\frac{1}{18}$　　B. $\frac{1}{12}$　　C. $\frac{1}{9}$　　D. $\frac{1}{6}$

二、填空题(每题 5 分,共 20 分)

11. 成语“守株待兔”反映的事件是_____事件.(填“必然”“不可能”或“随机”)

12. 在四边形 $ABCD$ 中,①$AB\parallel CD$,②$AD\parallel BC$,③$AB=CD$,④$AD=BC$. 在这四个条件中任选两个作为已知条件,能判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形的概率是_____.

13. 一个不透明的袋中,装有红、黄、白三种只有颜色不同的小球,其中红色小球有 8 个,黄、白色小球的数目相同. 为估计袋中黄色小球的数目,每次将袋中的小球摇匀后随机摸出一个小球,记下颜色,然后把它放回袋中,摇匀后再随机摸出一个小球,记下颜色……多次试验发现摸到红色小球的频率稳定于$\frac{1}{6}$,则估计袋中黄色小球的数目是_____.

14. 从 -3,-2,-1,0,4 这五个数中随机抽取一个数记为 a,a 的值既是不等式组$\begin{cases}2x+3<4,\\3x-1>-11\end{cases}$的解,又在函数 $y=\frac{1}{2x^2+2x}$的自变量取值范围内的概率是_____.

三、解答题(16 题 10 分,19,20 题每题 14 分,21 题 16 分,其余每题 12 分,共 90 分)

15. 掷两个普通的正方体骰子,把两个骰子的点数相加,请问:下列事件中,哪些是必然事件,哪些是不可能事件,哪些是随机事件? 并说明原因.

(1)和为 1;(2)和为 4;(3)和为 12;(4)和小于 14.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

16. 在一次大规模的统计中发现英文文献中字母 E 使用的频率在 0.105 附近，而字母 J 使用的频率大约为 0.001，如果这次统计是可信的，那么下列说法正确吗？试说明理由．

（1）在英文文献中字母 E 出现的概率在 10.5% 左右，字母 J 出现的概率在 0.1% 左右；

（2）如果再去统计一篇约含 200 个字母的英文文献，那么字母 E 出现的概率一定会非常接近 10.5%．

17. 一个不透明的袋中装有 20 个只有颜色不同的球，其中 5 个黄球、8 个黑球、7 个红球．

（1）求从袋中摸出一个球是黄球的概率；

（2）现从袋中取出若干个黑球，搅匀后，使从袋中摸出一个球是黑球的概率是$\frac{1}{3}$，求从袋中取出黑球的个数．

18. 某人的钱包内有 10 元、20 元和 50 元的纸币各 1 张，从中随机取出 2 张纸币．

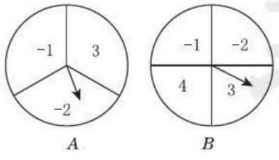
（1）求取出纸币的总额是 30 元的概率；

（2）求取出纸币的总额可购买一件 51 元的商品的概率．

19. 如图所示，有 A，B 两个大小均匀的转盘，其中 A 转盘被分成 3 等份，B 转盘被分成 4 等份，并在每一份内标上数．小明和小红同时各转动其中一个转盘，转盘停止后（当指针指在边界线时视为无效，重转），若将 A 转盘指针指向的数记作一次函数表达式中的 k，将 B 转盘指针指向的数记作一次函数表达式中的 b．

（1）请用列表或画树状图的方法写出所有的可能；

（2）求一次函数 $y=kx+b$ 的图象经过第一、二、四象限的概率．



（第 19 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

20. 某班开展安全知识竞赛活动,班长将所有同学的成绩(得分为整数,满分为 100 分)分成四类,并制作了统计表和统计图(如图).

类别	成绩/分	频数
甲	$60 \leqslant m < 70$	5
乙	$70 \leqslant m < 80$	10
丙	$80 \leqslant m < 90$	a
丁	$90 \leqslant m \leqslant 100$	5



(第 20 题)

根据图表信息,回答下列问题:

(1)该班共有学生_____名,表中 $a =$ _____;

(2)将丁类的五名学生分别记为 A, B, C, D, E,现从中随机挑选两名学生参加学校的决赛,请借助树状图、列表或其他方法,求 B 能参加决赛的概率.

21. 从一副 52 张(没有大、小王)的扑克牌中,每次抽出 1 张,然后放回洗匀再抽,在试验中得到下表中部分数据:

试验次数	40	80	120	160	200	240	280	320	360	400
出现方块的次数	11	18		40	49	63	68	80	91	100
出现方块的频率	0.275	0.225	0.250	0.250	0.245	0.263	0.243		0.253	0.250

(1)将数据表补充完整.

(2)从上表中可以估计出现方块的概率是_____.(精确到 0.01)

(3)从这副扑克牌中取出两组牌,分别是方块 1,2,3 和红桃 1,2,3,将它们背面朝上分别重新洗牌后,从两组牌中各摸出一张,若摸出的两张牌的牌面数字之和等于 3,则甲方赢;若摸出的两张牌的牌面数字之和等于 4,则乙方赢. 你认为这个游戏对双方是公平的吗?若不是,有利于谁?请你用概率知识(列表法或画树状图法)加以分析说明.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

期末达标检测卷

（150 分，90 分钟）

题　号	一	二	三	总　分
得　分				

姓名 学号 班级 学校 密 封 线

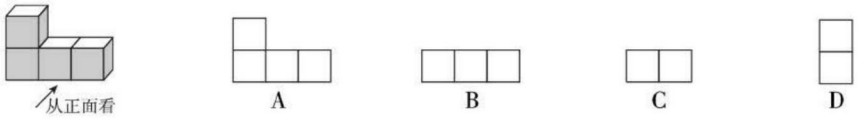
一、选择题（每题 4 分，共 40 分）

1. 下列图形中，既是轴对称图形又是中心对称图形的是（　　）



A　　B　　C　　D

2. 如图是一个由 4 个相同的正方体组成的立体图形，它的主视图是（　　）



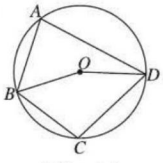
（第 2 题）

3. 有下列事件：①一个直角三角形的两锐角分别是 40° 和 50°；②当 x 是实数时，$x^2 \geqslant 0$；③长为 5 cm，5 cm，11 cm 的三条线段能围成一个三角形；④关于 x 的方程 $x^2 - 2x - m = 0$ 在实数范围内有解. 其中是随机事件的是（　　）

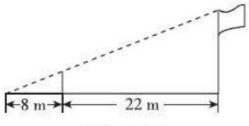
A. ①②　　B. ②③　　C. ③④　　D. ①④

4. 如图，四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$，若 $\angle BOD = 160°$，则 $\angle BCD$ 等于（　　）

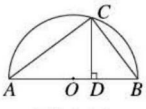
A. 160°　　B. 100°　　C. 80°　　D. 20°



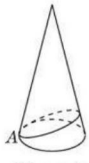
（第 4 题）



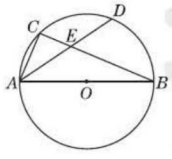
（第 5 题）



（第 6 题）



（第 8 题）



（第 9 题）

5. 如图，为了测量学校旗杆的高度，小东用长为 3.2 m 的竹竿做测量工具. 移动竹竿使竹竿、旗杆顶端的影子恰好落在地面的同一点，此时，竹竿与这一点相距 8 m，与旗杆相距 22 m，则旗杆的高为（　　）

A. 8.8 m　　B. 12 m　　C. 16 m　　D. 20 m

6. 如图是以 $\triangle ABC$ 的边 AB 为直径的半圆 O，点 C 恰好在半圆上，过 C 作 $CD \perp AB$ 于 D. 已知 $\cos \angle ACD = \frac{3}{5}$，$BC = 4$，则 AC 的长为（　　）

A. 1　　B. $\frac{20}{3}$　　C. 3　　D. $\frac{16}{3}$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

7. 将分别标有“孔”“孟”“之”“乡”汉字的四个小球放在一个不透明的口袋中，这些球除汉字外无其他差别，每次摸球前先搅拌均匀，随机摸出一球，不放回，再随机摸出一球，两次摸出球上的汉字能组成“孔孟”的概率是(　　)

A. $\frac{1}{8}$　　B. $\frac{1}{6}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{2}$

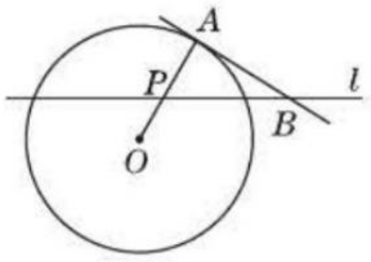
8. 如图，一个圆锥的母线长为40，底面圆的周长为20 π，一只蚂蚁从点 A 出发沿着圆锥的侧面爬行一周回到点 A，蚂蚁所走的最短路程是(　　)

A. $40\sqrt{2}$　　B. $20\sqrt{2}$　　C. $10\sqrt{2}$　　D. $80\sqrt{2}$

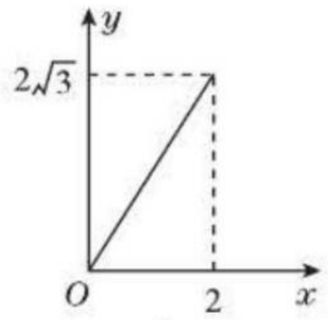
9. 如图，AB 为⊙O 的直径，C 为⊙O 上一点，弦 AD 平分∠BAC，交 BC 于点 E，$AB=6$，$AD=5$，则 AE 的长为(　　)

A. 2.5　　B. 2.8　　C. 3　　D. 3.2

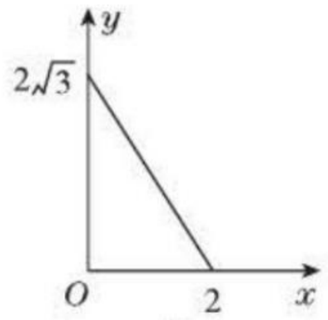
10. 如图，A 点在半径为2的⊙O 上，过线段 OA 上的一点 P 作直线 l，与⊙O 过点 A 的切线交于点 B，且∠$APB=60°$，设 $OP=x$，则△PAB 的面积 y 关于 x 的函数图象大致是(　　)



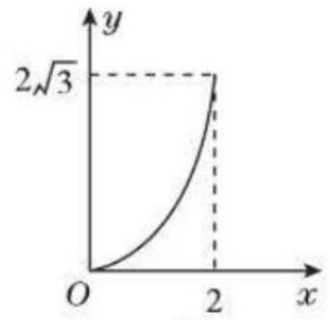
(第10题)



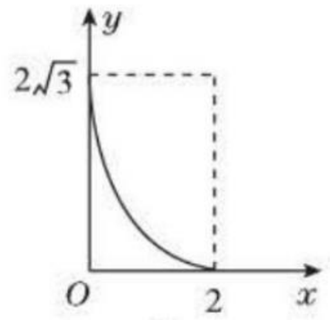
A



B



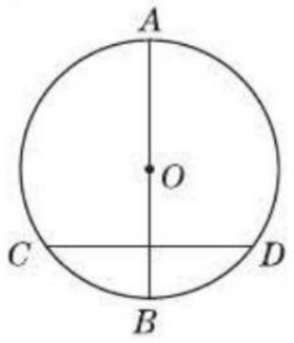
C



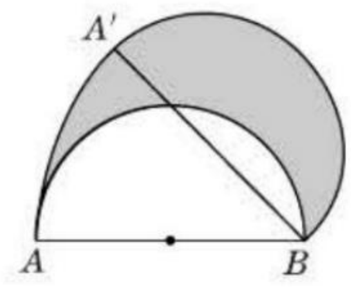
D

二、填空题(每题5分，共20分)

11. 如图，AB 为⊙O 的直径，$CD\perp AB$，若 $AB=10$，$CD=8$，则圆心 O 到弦 CD 的距离为_____.



(第11题)

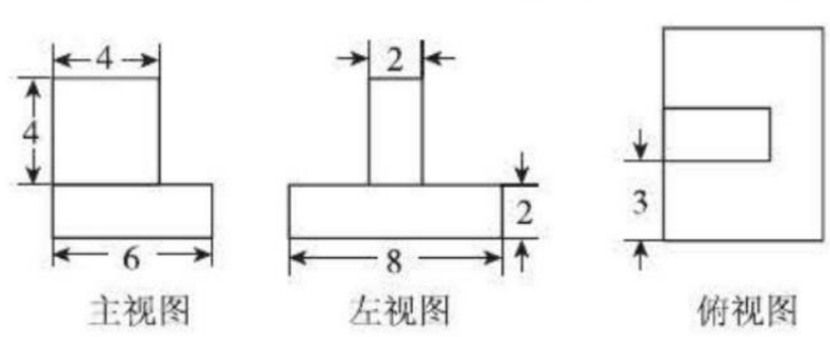


(第13题)

12. 小颖妈妈经营的玩具店某次进了一箱黑、白两种颜色的球共3 000个，为了估计两种颜色的球各有多少个，她将箱子里面的球搅匀后从中随机摸出一个球记下颜色，再把它放回箱子中，多次重复上述过程后，她发现摸到黑球的频率在0.7附近波动，据此可以估计黑球有_____个.

13. 如图，AB 为半圆的直径，且 $AB=4$，半圆绕点 B 顺时针旋转45°，点 A 旋转到点 A' 的位置，则图中阴影部分的面积为_____.

14. 如图是由两个长方体组合而成的一个立体图形的三视图，根据图中所标尺寸(单位：mm)，计算出这个立体图形的表面积是_____ mm^2.



(第14题)

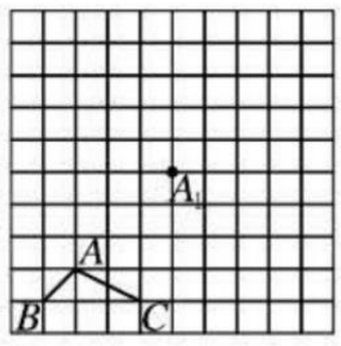
三、解答题(15题10分，19，20题每题14分，21题16分，其余每题12分，共90分)

15. 如图，在正方形网格中，△ABC 为格点三角形(即三角形的顶点都在格点上).

(1) 把△ABC 沿 BA 方向平移后，点 A 移动到点 A_1，在网格中画出平移后得到的△$A_1B_1C_1$；

(2) 把△$A_1B_1C_1$ 绕点 A_1 按逆时针方向旋转90°，在网格中画出旋转后的△$A_1B_2C_2$；

(3) 如果网格中小正方形的边长为1，求点 B 经过(1)(2)变换的路径总长.



(第15题)

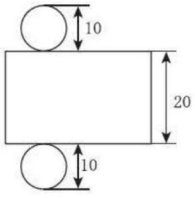
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

16. 如图所示是某几何体的表面展开图.

(1)这个几何体的名称是 _____;

(2)画出这个几何体的三视图;

(3)求这个几何体的体积.($\pi \approx 3.14$)

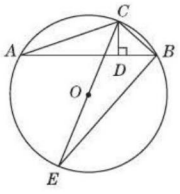


(第 16 题)

17. 如图,$\triangle ABC$ 内接于$\odot O$,CE 是$\odot O$ 的直径,$CD \perp AB$,垂足为 D,$BC=2$,$AC=4$,$\sin\angle BAC=\frac{1}{3}$.

(1)求证:$\triangle ACD \backsim \triangle ECB$;

(2)求$\odot O$ 的面积.



(第 17 题)

18. 在某电视台的一档选秀节目中,有三位评委,每位评委在选手完成才艺表演后,出示“通过”(用√表示)或“淘汰”(用×表示)的评定结果. 节目组规定:每位选手至少获得两位评委的“通过”才能晋级.

(1)请用树状图列举出选手 A 获得三位评委评定的各种可能的结果;

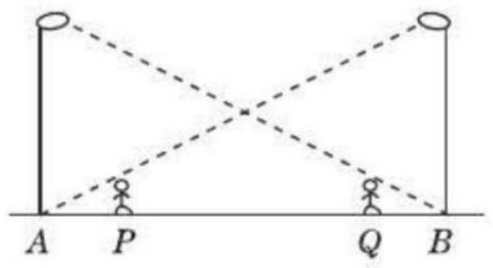
(2)求选手 A 晋级的概率.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

19. 如图所示，文华在广场上游玩时，他由路灯 A 走向路灯 B，当他走到 P 点时，发现他身后的影子的末端刚好接触路灯 A 的底部，当他再向前走 12 m 到达 Q 点时，发现他身前的影子的末端刚好接触到路灯 B 的底部，已知文华的身高为 1.6 m，两个路灯的高度都是 9.6 m，且 $AP = QB = x$ m.

(1)求两个路灯之间的距离；

(2)当文华走到路灯 B 时，他在路灯 A 下的影子长是多少？

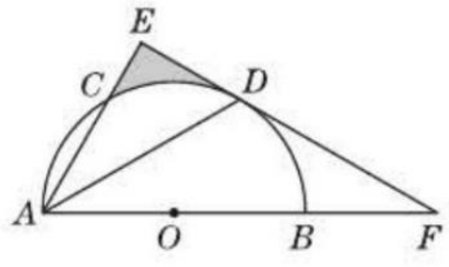


(第 19 题)

20. 如图，AB 为半圆 O 的直径，AC 是⊙O 的一条弦，D 为$\overset{\frown}{BC}$的中点，作 $DE \perp AC$，交 AC 的延长线于点 E，交 AB 的延长线于点 F，连接 DA.

(1)求证：EF 为半圆 O 的切线；

(2)若 $DA = DF = 6\sqrt{3}$，求阴影区域的面积.(结果保留根号和 π)



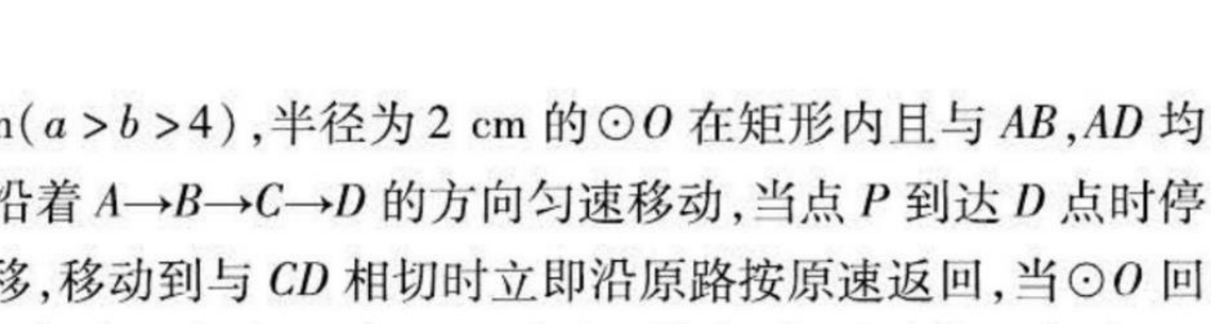
(第 20 题)

21. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AD = a$ cm，$AB = b$ cm($a > b > 4$)，半径为 2 cm 的⊙O 在矩形内且与 AB，AD 均相切. 现有动点 P 从 A 点出发，在矩形边上沿着 $A \to B \to C \to D$ 的方向匀速移动，当点 P 到达 D 点时停止移动；⊙O 在矩形内部沿 AD 向右匀速平移，移动到与 CD 相切时立即沿原路按原速返回，当⊙O 回到出发时的位置(即再次与 AB 相切)时停止移动. 已知点 P 与⊙O 同时开始移动，同时停止移动(即同时到达各自的终止位置).

(1)如图①，点 P 从 $A \to B \to C \to D$，全程共移动了_____cm.(用含 a，b 的代数式表示)

(2)如图①，已知点 P 从 A 点出发，移动 2 s 到达 B 点，继续移动 3 s，到达 BC 的中点. 若点 P 与⊙O 的移动速度相等，求在这 5 s 时间内圆心 O 移动的距离.

(3)如图②，已知 $a = 20$，$b = 10$. 是否存在如下情形：当⊙O 到达⊙O_1 的位置时(此时圆心 O_1 在矩形对角线 BD 上)，PD 与⊙O_1 恰好相切？请说明理由.



(第 21 题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

正文练习答案

第24章 圆

24.1 旋 转

第1课时 旋 转

1. B　2. D　3. B　4. B　5. C

6. D　**点拨**：∵ 把△ADE绕点A顺时针旋转90°到△ABF的位置，∴ 四边形$AECF$的面积等于正方形$ABCD$的面积，∴ $AD=5$. ∵ $DE=2$，∴ 在Rt△ADE中，$AE=\sqrt{AD^2+DE^2}=\sqrt{29}$. 故选D.

7. A　8. C　9. B

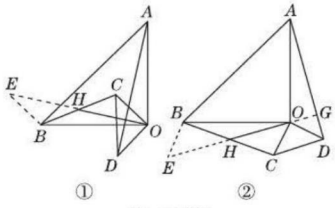
10. **解**：∵ 菱形$ABCD$，$\angle A=110°$，
∴ $BC=CD$，$\angle BCD=\angle A=110°$，
由旋转的性质知，$CE=CF$，$\angle ECF=\angle BCD=110°$，
∴ $\angle BCE=\angle DCF=110°-\angle DCE$，
在△BCE和△DCF中，
$$\begin{cases}BC=DC,\\ \angle BCE=\angle DCF,\\ CE=CF,\end{cases}$$
∴ △BCE≌△DCF，∴ $\angle F=\angle E=86°$.

11. **解**：(1) 旋转中心是点B，旋转角是60°.
(2) △BPP'是等边三角形. 理由如下：
∵ 将△ABP按顺时针旋转60°后得到△CBP'，∴ $BP=BP'$，$\angle PBP'=60°$.
∴ △BPP'是等边三角形.

12. (1) **证明**：∵ △AEF是由△ABC绕点A按顺时针方向旋转得到的，
∴ $AE=AB$，$AF=AC$，$\angle EAF=\angle BAC$.
∴ $\angle EAF+\angle BAF=\angle BAC+\angle BAF$，即$\angle EAB=\angle FAC$.
∵ $AB=AC$，∴ $AE=AF$.
∴ △AEB≌△AFC.
∴ $BE=CF$.
(2) **解**：∵ 四边形$ACDE$的四边相等，$AB=AC=1$，
∴ $DE=AE=AC=AB=1$.
∴ $\angle AEB=\angle ABE$.
∵ $AC/\!/DE$，∴ $\angle ABE=\angle BAC=45°$.
∴ $\angle AEB=\angle ABE=45°$.
∴ $\angle EAB=90°$.
∴ △ABE为等腰直角三角形.
∴ $BE=\sqrt{AE^2+AB^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.
∴ $BD=BE-DE=\sqrt{2}-1$.

13. (1) **证明**：∵ △OAB与△OCD均为等腰直角三角形，$\angle AOB=\angle COD=90°$，
∴ $OC=OD$，$OA=OB$，
在△AOD与△BOC中，
$$\begin{cases}OA=OB,\\ \angle AOD=\angle BOC,\\ OD=OC,\end{cases}$$
∴ △AOD≌△BOC(SAS)，
∴ $\angle OAD=\angle OBC$，$AD=BC$，
∵ 点H为BC的中点，$\angle BOC=90°$，
∴ $OH=HB=\frac{1}{2}BC$，∴ $OH=\frac{1}{2}AD$.
$\angle OBH=\angle HOB=\angle OAD$，
又∵ $\angle OAD+\angle ADO=90°$，
∴ $\angle ADO+\angle HOB=90°$，
∴ $OH\perp AD$.

(2) **解**：①结论：$OH=\frac{1}{2}AD$，$OH\perp AD$. 证明如下：如图①，延长OH到E，使得$HE=OH$，连接BE，
易证△BEO≌△ODA，∴ $OE=AD$.
∴ $OH=\frac{1}{2}OE=\frac{1}{2}AD$.
由△BEO≌△ODA，知$\angle EOB=\angle DAO$，
∴ $\angle DAO+\angle AOH=\angle EOB+\angle AOH=90°$，∴ $OH\perp AD$.



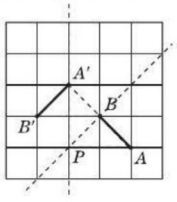
(第13题)

②结论：$OH=\frac{1}{2}AD$，$OH\perp AD$. 证明如下：如图②，延长OH到E，使得$HE=OH$，连接BE，延长EO交AD于G.
易证△BEO≌△ODA，
∴ $OE=AD$. ∴ $OH=\frac{1}{2}OE=\frac{1}{2}AD$.
由△BEO≌△ODA，知$\angle EOB=\angle DAO$，
∴ $\angle DAO+\angle AOG=\angle EOB+\angle AOG=180°-\angle AOB=90°$，
∴ $\angle AGO=90°$. ∴ $OH\perp AD$.

第2课时 旋转作图

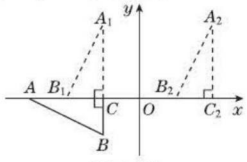
1. B

2. C　**点拨**：如图，连接$A'A$，$B'B$，作线段AA'，BB'的垂直平分线，两直线相交于点P，连接AP，$A'P$，则$\angle APA'$即为所求的旋转角α，故答案为C.



(第2题)

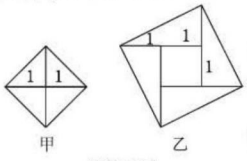
3. A　**点拨**：如图所示，先根据题意画出△ABC绕点C顺时针旋转90°后的图形△A_1B_1C. 因为C的坐标为$(-1,0)$，$A_1C=AC=2$，所以点A_1的坐标为$(-1,2)$，再画出将△A_1B_1C向右平移3个单位长度后的图形△$A_2B_2C_2$，所以点A_2的坐标为$(2,2)$.



(第3题)

4. D

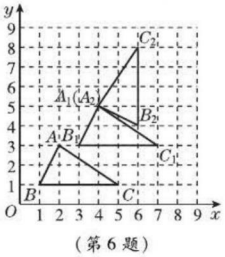
5. A　**点拨**：对剪开后的纸片进行旋转平移操作，所得的图形如图所示.



(第5题)

可见，甲、乙都可以拼成与原来面积相等的正方形，故选A.

6. **解**：(1) 如图，△$A_1B_1C_1$即为所求；

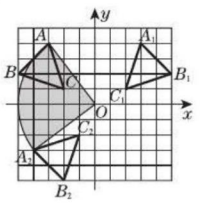


(第6题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(2)如图,$\triangle A_2B_2C_2$ 即为所求.

7. 解:(1)根据关于 y 轴对称的点纵坐标相同,横坐标互为相反数的特点,得出 $A_1(3,4)$,$B_1(5,2)$,$C_1(2,1)$,$\triangle ABC$ 关于 y 轴的对称图形 $\triangle A_1B_1C_1$ 如图所示.



(第 7 题)

(2)根据绕原点 O 逆时针旋转 90°的点的坐标特点:横坐标为原纵坐标的相反数,纵坐标为原横坐标,可知,$\triangle A_2B_2C_2$ 各顶点的坐标分别为 $A_2(-4,-3)$,$B_2(-2,-5)$,$C_2(-1,-2)$,如图所示.

(3)如图,(2)中线段 OA 扫过的图形面积是扇形 AOA_2 的面积,即阴影部分的面积,

$\because A(-3,4)$,$\therefore AO=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

$\because$ 旋转角 $\angle AOA_2=90°$,

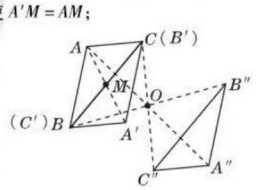
$\therefore$ 扇形 AOA_2 的面积为 $\frac{1}{4}\pi\times5^2=\frac{25}{4}\pi$.

第 3 课时　中心对称

1. D　**2.** C　**3.** A　**4.** B　**5.** $(3,-1)$

6. 6　**7.** A

8. 解:(1)如图,①连接 AM 并延长至 A',使 $A'M=AM$;



(第 8 题)

②点 B 关于点 M 的对称点 B' 即为点 C,点 C 关于点 M 的对称点 C' 即为点 B;

③连接 $A'B'$,$A'C'$,$\triangle A'B'C'$ 即为所求.

(2)如图,①连接 AO,BO,CO,并分别延长至 A'',B'',C'',使 $A''O=AO$,$B''O=BO$,$C''O=CO$;

②连接 $A''B''$,$A''C''$,$B''C''$,则 $\triangle A''B''C''$ 即为所求.

点拨:解答画与已知图形成中心对称的图形的问题,思路较为简单,只需画出已知图形中各个关键点关于对称中心的对称点,然后顺次连接即可.

9. 错解:①②③④

诊断:判断两个图形是否成中心对称不能凭直观感觉,应根据中心对称的定义进行判断.

正解:①②③

10. 解:(1)根据对称中心的定义,可得对称中心的坐标是 D_1D 的中点的坐标,

$\because$ 点 D_1,D 的坐标分别是(0,3),(0,2),

$\therefore$ 对称中心的坐标是(0,2.5).

(2)$\because$ 点 A,D 的坐标分别是(0,4),(0,2),

$\therefore$ 正方形 $ABCD$ 与正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的边长都是 $4-2=2$.

$\therefore$ 点 B,C 的坐标分别是 $(-2,4)$,$(-2,2)$,

$\because A_1D_1=2$,点 D_1 的坐标是(0,3),

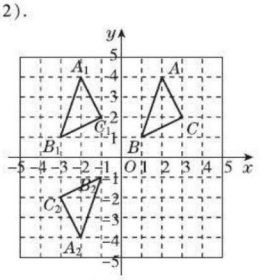
$\therefore$ 点 A_1 的坐标是(0,1).

$\therefore$ 点 B_1,C_1 的坐标分别是(2,1),(2,3).

综上,可得顶点 B,C,B_1,C_1 的坐标分别是 $(-2,4)$,$(-2,2)$,(2,1),(2,3).

11. 解:(1)如图所示,点 C_1 的坐标为 $(-1,2)$;

(2)如图所示,点 C_2 的坐标是 $(-3,-2)$.

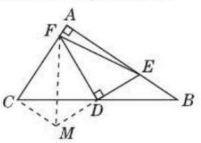


(第 11 题)

(3)直线 l 的函数表达式为 $y=-x$.

12. 解:$\because$ 点 D 为 BC 的中点,

$\therefore BD=CD$. 作 $\triangle BDE$ 关于点 D 成中心对称的 $\triangle CDM$,如图所示.



(第 12 题)

由中心对称的性质可得 $CM=BE$,$MD=ED$,$\angle DCM=\angle B$.

又$\because \angle B+\angle ACB=90°$,

$\therefore \angle DCM+\angle ACB=90°$,

即 $\angle FCM=90°$.

连接 FM. 在 $\triangle FME$ 中,$MD=ED$,$FD\perp ME$,

$\therefore FM=FE$.

又$\because$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle FCM$ 中,$FC^2+CM^2=FM^2$,

$\therefore FC^2+BE^2=EF^2$.

点拨:通过几何图形的中心对称变换,可以将线段进行等长的位置转移,使分散的几何元素集中起来.

13. 解:(1)AE 与 BD 平行且相等.

理由如下:

$\because \triangle ABC$ 与 $\triangle DEC$ 关于点 C 成中心对称,

$\therefore AC=CD$,$BC=CE$,

$\therefore$ 四边形 $ABDE$ 是平行四边形,

$\therefore AE$ 与 BD 平行且相等.

(2)$\because$ 四边形 $ABDE$ 是平行四边形,

$\therefore S_{\triangle ABC}=S_{\triangle BCD}=S_{\triangle CDE}=S_{\triangle ACE}$,

$\because \triangle ABC$ 的面积为 5 cm^2,

$\therefore$ 四边形 $ABDE$ 的面积 $=4\times5=20(\mathrm{cm}^2)$;

(3)当 $\angle ACB=60°$ 时,四边形 $ABDE$ 为矩形.

理由如下:$\because AB=AC$,$\angle ACB=60°$,

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形,

$\therefore AC=BC$,

$\because AD=2AC$,$BE=2BC$,

$\therefore AD=BE$,

$\because$ 四边形 $ABDE$ 是平行四边形,

$\therefore$ 四边形 $ABDE$ 为矩形.

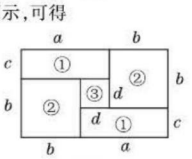
第 4 课时　中心对称图形

1. D　**2.** D　**3.** A　**4.** B　**5.** A

6. 2 cm;24 cm^2　**7.** D

8. A　**点拨**:如图,设图形①的长和宽分别是 a,c,图形②的边长是 b,图形③的边长是 d,原来大长方形的周长是 l,则 $l=2(a+2b+c)$,

根据图示,可得



(第 8 题)

$\begin{cases}a=b+d,\\b=c+d,\end{cases}$ 两式相减,可得 $a-b=b-c$,$\therefore 2b=a+c$. $\therefore l=2(a+2b+c)=2\times2(a+c)=4(a+c)$,或 $l=2(a+2b+c)=2\times4b=8b$.

$\therefore 2(a+c)=\frac{l}{2}$,$4b=\frac{l}{2}$.

$\because$ 图形①的周长是 $2(a+c)$,图形②的周长是 $4b$,$\frac{l}{2}$ 的值一定,

$\therefore$ 图形①②的周长是定值,不用测量就能知道,图形③的周长不用测量无法知道.

$\therefore$ 分割后不用测量就能知道周长的图形的标号为①②.

9. C

10. 解:作图略,连接 AC,BD,它们的交点就是对称中心.

11. 错解:①②③

诊断:错解的原因是对一些常见的图

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

形不能正确分析. 根据中心对称图形的概念，可知：线段绕其中点旋转180°，平行四边形绕其对角线的交点旋转180°，正方形绕其对角线的交点旋转180°，圆绕其圆心旋转180°，都能与自身重合，都是中心对称图形；三角形和等腰梯形，找不到对称中心，故不是中心对称图形.

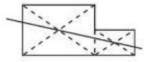
正解：②⑥

12. 解：(1)正六边形 $ABCDEF$ 既是中心对称图形，又是轴对称图形，有6条对称轴.

(2)旋转60°的正整数倍可与自身重合.

(3)只要边数是偶数的正多边形都是中心对称图形.

13. 解：如图.



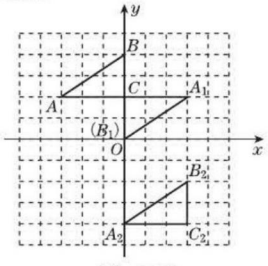
（第13题）

点拨：过中心对称图形的对称中心的任意一条直线都能把图形分成面积相等的两部分. 本题答案不唯一.

14. 解：(1)画图略. (0,0)　(2)略.

(3)整个图形是轴对称图形，有四条对称轴；整个图形是中心对称图形，对称中心是原点.

15. 解：(1)画出 $\triangle A_1B_1C$ 和 $\triangle A_2B_2C_2$ 如图所示.



（第15题）

(2)旋转中心的坐标为 $\left(\frac{3}{2},-1\right)$.

(3)点 P 的坐标为 $(-2,0)$.

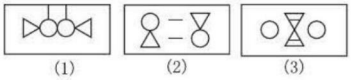
解题策略：本题考查的是旋转变换及平移变换，解题的关键是作图要准确.

第5课时　图案设计

1. B　**2.** C　**3.** A　**4.** C　**5.** B

6. 略.

7. 解：如图所示.



（第7题）

点拨：本题答案不唯一.

8. 错解：因为该图案是由一个梯形作全等变换形成的，所以围绕一个顶点的三个角相等，所以该梯形的四个内角分别为120°，120°，60°，60°.

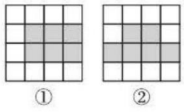
诊断：该图案的设计不仅与梯形的角有关，而且与梯形的上下底和腰都有关.

正解：该梯形从边来说应符合：上底等于腰且等于下底的一半；从角来说应符合：四个内角分别为120°，120°，60°，60°.

9. C　**10.** C

11. 解：(1)如图①.（答案不唯一）

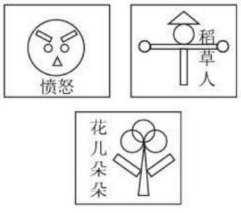
(2)如图②.（答案不唯一）



（第11题）

12. 解：甲从平移的角度，以一个正六边形为基本图案进行分析；乙从轴对称的角度，以图案的一半为基本图案进行分析；丙从中心对称的角度，以图案的一半为基本图案进行分析. 虽然各自分析的角度不同，但是他们的观点都是正确的.

13. 解：如图所示.



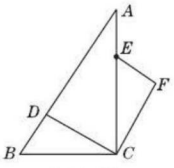
（第13题）

点拨：答案不唯一.

阶段方法技巧训练(一)

专训1

1. (1)**解**：补全图形，如图所示.



（第1题）

(2)**证明**：由题意得：$\angle DCF=90°$，$DC=FC$.

$\therefore \angle DCE+\angle ECF=90°$.

$\because \angle ACB=90°$，

$\therefore \angle DCE+\angle BCD=90°$.

$\therefore \angle ECF=\angle BCD$.

$\because EF/\!/DC$，

$\therefore \angle EFC+\angle DCF=180°$.

$\therefore \angle EFC=90°$.

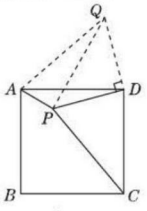
在 $\triangle BDC$ 和 $\triangle EFC$ 中，

$$\begin{cases} DC=FC, \\ \angle BCD=\angle ECF, \\ BC=EC, \end{cases}$$

$\therefore \triangle BDC\cong\triangle EFC(\mathrm{SAS})$.

$\therefore \angle BDC=\angle EFC=90°$.

2. 解：如图，将 $\triangle PCD$ 绕点 D 顺时针旋转90°得到 $\triangle QAD$，连接 PQ，则 $\triangle PDQ$ 是一个等腰直角三角形.



（第2题）

$\therefore \angle DPQ=45°$，$QD=PD=2$，

$QA=PC=3$.

在等腰直角三角形 PDQ 中，$PQ^2=DP^2+DQ^2=8$. 在 $\triangle PAQ$ 中，

$PA^2+PQ^2=1+8=9=AQ^2$，

$\therefore \angle APQ=90°$.

$\therefore \angle APD=\angle APQ+\angle DPQ=90°+45°=135°$.

3. C　**点拨**：连接 BM.

因为 $\triangle AEM$ 与 $\triangle ADM$ 关于 AM 所在的直线对称，

所以 $AE=AD=AB$，$\angle MAD=\angle MAE$.

因为 $\triangle ADM$ 按顺时针方向绕点 A 旋转90°得到 $\triangle ABF$，

所以 $AF=AM$，$\angle FAB=\angle MAD$.

所以 $\angle FAB=\angle MAE$.

所以 $\angle FAB+\angle BAE=\angle BAE+\angle MAE$.

所以 $\angle FAE=\angle MAB$.

所以 $\triangle FAE\cong\triangle MAB$.

所以 $EF=BM$.

因为四边形 $ABCD$ 是正方形，

所以 $BC=CD=AB=3$.

因为 $DM=1$，所以 $CM=2$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BCM$ 中，$BM=\sqrt{BC^2+CM^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$.

所以 $EF=BM=\sqrt{13}$.

4. (1)**证明**：由旋转的性质得：$\triangle ABC\cong\triangle ADE$，

$\therefore \angle BAC=\angle DAE$，$AB=AD$，$AC=AE$.

又$\because AB=AC$，

$\therefore AE=AD$.

由 $\angle BAC=\angle DAE$ 得 $\angle BAC+\angle BAE=\angle DAE+\angle BAE$，即 $\angle CAE=\angle DAB$.

在 $\triangle AEC$ 和 $\triangle ADB$ 中，

$$\begin{cases} AE=AD, \\ \angle CAE=\angle DAB, \\ AC=AB, \end{cases}$$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \triangle AEC \cong \triangle ADB(\mathrm{SAS})$.

(2)**解**:$\because$ 四边形 $ADFC$ 是菱形,

$\therefore DF /\!/ AC$. 又$\because \angle BAC = 45°$,

$\therefore \angle DBA = \angle BAC = 45°$.

由(1)得 $AB = AD$,

$\therefore \angle DBA = \angle BDA = 45°$.

$\therefore \triangle ABD$ 是直角边长为 2 的等腰直角三角形.

$\therefore BD^2 = 2AB^2$,即 $BD = 2\sqrt{2}$.

$\because AD = DF = FC = AC = AB = 2$,

$\therefore BF = BD - DF = 2\sqrt{2} - 2$.

5. **证明**:由题意可知 $BM = MC$,

$\therefore$ 可将 $\triangle BFM$ 绕点 M 旋转 180°得到 $\triangle CNM$,如图所示.

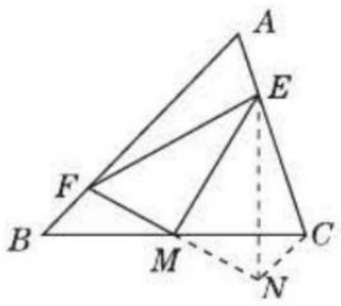
$\therefore BF = CN, FM = MN$.

连接 EN,又$\because ME \perp MF$,

$\therefore EN = EF$.

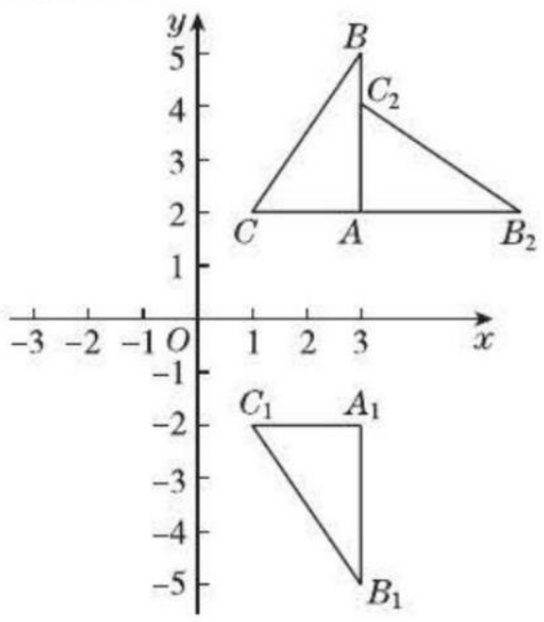
在 $\triangle ENC$ 中,$EN < NC + CE$,

$\therefore EF < BF + CE$.



(第 5 题)

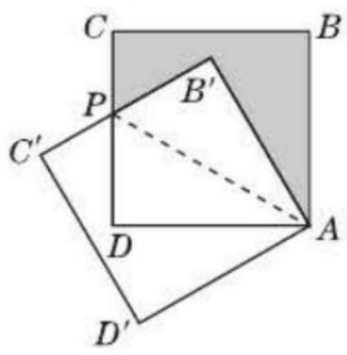
6. **解**:(1)如图.



(第 6 题)

(2)①旋转角为 90°;②$B_2(6,2)$.

7. **解**:如图,连接 AP.



(第 7 题)

由旋转的性质可知,$\angle BAB' = 30°$,

$\therefore \angle B'AD = 60°$.

$\because AP = AP, AB' = AD$,

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle AB'P \cong \mathrm{Rt}\triangle ADP$.

$\therefore \angle B'AP = \angle DAP = 30°$.

$\because \angle D = 90°, \therefore DP = \frac{1}{2}AP$.

$\because AD = \sqrt{3}$,$\therefore$ 由勾股定理可得 $AP = 2$,$DP = 1$.

$\therefore S_{\text{阴影}} = S_{\text{正方形}ABCD} - S_{\triangle ADP} - S_{\triangle AB'P} = (\sqrt{3})^2 - \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} - \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} = 3 - \sqrt{3}$.

8. **证明**:(1)$\because$ 将 $\triangle ADF$ 绕点 A 顺时针旋转 90°后,得到 $\triangle ABQ$,

$\therefore QB = DF, AQ = AF, \angle BAQ = \angle DAF$.

$\because \angle BAD = 90°, \angle EAF = 45°$,

$\therefore \angle DAF + \angle BAE = 45°$,

$\therefore \angle QAE = \angle BAQ + \angle BAE = 45°$,

$\therefore \angle QAE = \angle FAE$.

在 $\triangle AQE$ 和 $\triangle AFE$ 中,

$$\begin{cases} AQ = AF, \\ \angle QAE = \angle FAE, \\ AE = AE, \end{cases}$$

$\therefore \triangle AQE \cong \triangle AFE$.

$\therefore \angle AEQ = \angle AEF$,

即 EA 是 $\angle QED$ 的平分线.

(2)由(1)得 $QB = DF$,$\triangle AQE \cong \triangle AFE$,

$\therefore QE = EF$.

由题易知 $\angle ABQ = \angle ADF = \angle ABD = 45°$,$\therefore \angle QBE = \angle ABQ + \angle ABD = 45° + 45° = 90°$.

$\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle QBE$ 中,$QB^2 + BE^2 = QE^2$,

$\therefore EF^2 = BE^2 + DF^2$.

9. (1)**证明**:$\because \triangle ACE, \triangle ABD$ 都是等边三角形,$\therefore AB = AD, AE = AC, \angle BAD = \angle CAE = 60°$,$\therefore \angle BAD + \angle DAE = \angle CAE + \angle DAE$,即 $\angle BAE = \angle DAC$,

$\therefore \triangle BAE \cong \triangle DAC, \therefore BE = CD$.

(2)**解**:①60

②当 $AC = 2AB$ 时,$\triangle BDD'$ 与 $\triangle CPD'$ 全等. 证明:由旋转和等边三角形的知识可知 $AB = BD = DD' = AD'$,$\therefore$ 四边形 $ABDD'$ 是菱形,$\therefore \angle ABD' = \angle DBD' = \frac{1}{2}\angle ABD = 30°, DP /\!/ BC$. $\because \triangle ACE$ 是等边三角形,$\therefore AC = AE = CE, \angle ACE = 60°$. $\because AC = 2AB, \therefore AE = 2AD', \therefore \angle PCD' = \angle ACD' = \frac{1}{2}\angle ACE = 30°$. $\because DP /\!/ BC$,

$\therefore \angle ABD' = \angle DBD' = \angle BD'D = \angle ACD' = \angle PCD' = \angle PD'C = 30°, \therefore BD' = CD'$,

$\therefore \triangle BDD' \cong \triangle CPD'$.

10. (1)**证明**:由题可知,$AB = AF, \angle BAM = \angle FAN, \angle B = \angle F = 60°$,

$\therefore \triangle ABM \cong \triangle AFN(\mathrm{ASA})$,

$\therefore AM = AN$.

(2)**解**:当旋转角 $\alpha = 30°$ 时,四边形 $ABPF$ 是菱形.

理由:$\because \alpha = 30°, \therefore \angle FAB = 120°$.

$\because \angle B = 60°, \therefore \angle FAB + \angle B = 180°$,

$\therefore AF /\!/ BP, \therefore \angle F = \angle FPC = 60°$,

$\therefore \angle FPC = \angle B = 60°, \therefore AB /\!/ FP$,

$\therefore$ 四边形 $ABPF$ 是平行四边形.

$\because AB = AF$,

$\therefore$ 平行四边形 $ABPF$ 是菱形.

11. ①②③

12. **解**:(1)可以通过旋转的方法,使 $\triangle ABE$ 变到 $\triangle ADF$ 的位置.

(2)$BE = DF, BE \perp DF$. 证明如下:

$\because \triangle ABE \cong \triangle ADF$,

$\therefore BE = DF, \angle ABE = \angle ADF$.

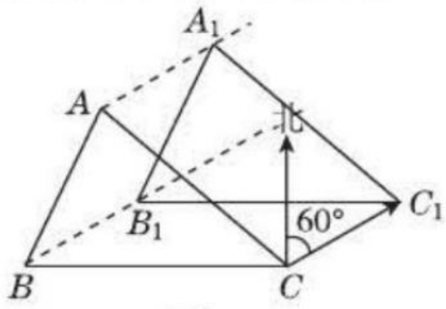
而 $\angle AEB = \angle DEH$,

$\therefore \angle DHE = \angle EAB = 90°$,

$\therefore BE \perp DF$.

专训 2

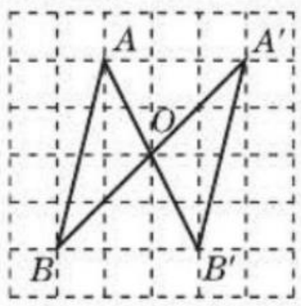
1. **解**:如图,$\triangle A_1B_1C_1$ 即为所求.



(第 1 题)

点拨:平移作图时,找关键点的对应点是解题的关键.

2. (1)**解**:如图所示.



(第 2 题)

(2)**证明**:$\because AB /\!/ A'B'$,

$\therefore \angle A = \angle B', \angle B = \angle A'$.

在 $\triangle AOB$ 和 $\triangle B'OA'$ 中,

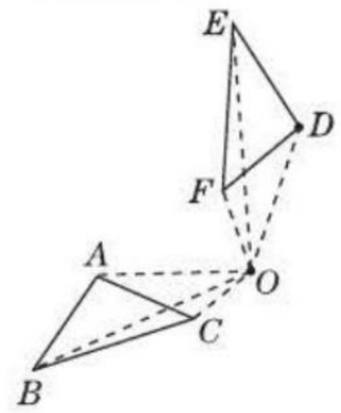
$$\begin{cases} \angle A = \angle B', \\ AB = A'B', \\ \angle B = \angle A', \end{cases}$$

$\therefore \triangle AOB \cong \triangle B'OA'$.

3. **解**:(1)连接 OA, OD, OB, OC;

(2)分别以 OB, OC 为一边按顺时针方向作 $\angle BOE$,$\angle COF$,使得 $\angle BOE = \angle COF = \angle AOD$ 且 $OE = OB, OF = OC$;

(3)连接 EF, ED, FD,$\triangle DEF$ 就是所求作的三角形,如图.



(第 3 题)

4. **分析**:(1)以 C 为对称中心,作点 A, B 关于 C 的对称点 A', B',连接 $A'C$,$B'C, A'B'$ 即可画出三角形;或以 AB 的中点 O 为对称中心,作出点 C 关于 O

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

的对称点 C'，连接 BC'，AC' 即可画出三角形.

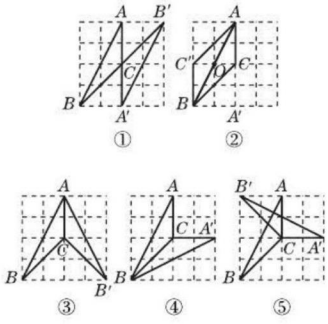
(2)以 AC 为对称轴，作点 B 关于直线 AC 的对称点 B'，连接 AB'，$B'C$ 即可画出三角形；或以 BC 为对称轴，作点 A 关于直线 BC 的对称点 A'，连接 $A'C$，$A'B$ 即可画出三角形.

(3)根据旋转的性质作点 A 和点 B 绕点 C 按顺时针方向旋转 90° 的对应点 A'，B'，连接 $A'C$，$B'C$，$A'B'$ 即可画出旋转后的三角形.

解：(1)如图①②.

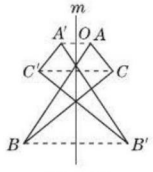
(2)如图③④.

(3)如图⑤.



(第 4 题)

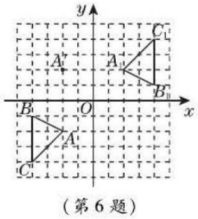
5. **解**：如图，作法：(1)过点 A 作直线 m 的垂线，垂足为点 O，在垂线上截取 $OA'=OA$，点 A' 就是点 A 关于直线 m 的对称点；(2)类似地，可以分别作出点 B，C 关于直线 m 的对称点 B'，C'；(3)连接 $A'B'$，$B'C'$，$C'A'$，得到的 $\triangle A'B'C'$ 就是所要求作的图形.



(第 5 题)

6. **解**：(1)如图，$\triangle A_1B_1C_1$ 就是所求作的图形.

(2)点 A' 如图所示，a 的取值范围是 $4<a<6$.



(第 6 题)

24.2 圆的基本性质

24.2.1 垂径分弦

第 1 课时 圆的认识

1. B **点拨**：圆是由圆心、半径确定的，故 A 错误；平面上到定点的距离等于定长的所有点组成圆，故 C 错误；圆上任意一点到圆心的距离都相等，故 D 错误；只有 B 正确.

2. A **点拨**：平面内已知圆心与半径，可以唯一确定圆，故选 A.

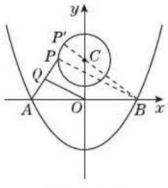
3. B **4.** D

5. C **点拨**：线段 CD，OB 不是弦. 线段 AB，AC 都是弦，且 AC 是 $\odot O$ 的直径. 直径是弦，但弦不一定是直径. OA，OC，OB 是半径，它们都相等，但 $CD\neq OB$. 图中的优弧有弧 BAC 和弧 ACB，因此，只有 C 正确.

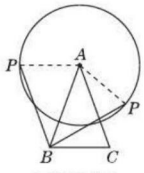
6. B **点拨**：由等弧的定义可知：在同圆或等圆中，能够互相重合的两条弧是等弧. 而长度相等的弧不一定能重合，故 B 错误.

7. B **8.** B **9.** A

10. C **点拨**：如图，连接 BP. 当 $y=0$ 时，$\frac{1}{4}x^2-4=0$，解得 $x_1=4$，$x_2=-4$，则 $A(-4,0)$，$B(4,0)$. $\because Q$ 是线段 PA 的中点，$\therefore OQ$ 为 $\triangle ABP$ 的中位线. $\therefore OQ=\frac{1}{2}BP$. 当 BP 最大时，OQ 最大. 而 BP 过圆心 C 时，BP 最大. 如图，点 P 运动到 P' 位置时，BP 最大. $\because BC=\sqrt{3^2+4^2}=5$，$\therefore BP'=5+2=7$. $\therefore$ 线段 OQ 的最大值是 $\frac{7}{2}$.



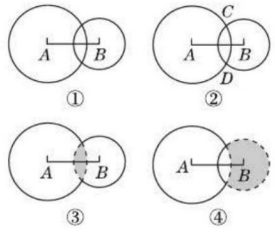
(第 10 题)



(第 11 题)

11. 30°或 110° **点拨**：如图，连接 AP. $\because AB=AC$，$\angle BAC=40°$，$\therefore \angle ABC=70°$，$\because BP=BA=AC$，$AP=BC$，$\therefore \triangle BAP\cong\triangle ABC(SSS)$，$\therefore \angle ABP=\angle BAC=40°$. 当 BP 在 $\angle ABC$ 内部时，$\angle PBC=\angle ABC-\angle ABP=30°$；当 BP 在 $\angle ABC$ 外部时，$\angle PBC=\angle ABC+\angle ABP=110°$. 综上，$\angle PBC=30°$ 或 110°.

12. **解**：(1)如图①，到点 A 的距离等于 3 cm 的所有点组成的图形是以点 A 为圆心，以 3 cm 为半径的圆，到点 B 的距离等于 2 cm 的所有点组成的图形是以点 B 为圆心，以 2 cm 为半径的圆.



(第 12 题)

(2)如图②，到点 A 的距离等于 3 cm 的所有点组成的图形是以点 A 为圆心，以 3 cm 为半径的圆. 到点 B 的距离为 2 cm 的点只有 C，D 两点.

(3)如图③，以点 A 为圆心，以 3 cm 为半径的 $\odot A$ 的内部与以点 B 为圆心，以 2 cm 为半径的 $\odot B$ 的内部的公共部分(不包括边界的阴影部分)即为所求.

(4)如图④，以点 A 为圆心，3 cm 为半径的 $\odot A$ 的外部与以点 B 为圆心，2 cm 为半径的 $\odot B$ 的内部的公共部分(不包括边界的阴影部分)即为所求.

点拨：平面内，到定点的距离等于定长的所有点组成的图形是以定点为圆心，定长为半径的圆；到定点的距离小于定长的所有点组成的图形是以定点为圆心，定长为半径的圆的内部；到定点的距离大于定长的所有点组成的图形是以定点为圆心，定长为半径的圆的外部.

13. **解**：$\because$ 点 O' 的坐标为 $(1,1)$，且 $\odot O'$ 经过坐标原点，

$\therefore \odot O'$ 的半径 $OO'=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.

$\because$ 点 P 的坐标为 $(-1,1)$，$\therefore PO'=2$.

同理，$QO'=1$，$RO'=\sqrt{2}$，

$\because PO'>\sqrt{2}$，$QO'<\sqrt{2}$，$RO'=\sqrt{2}$，

$\therefore$ 点 P 在 $\odot O'$ 外，点 Q 在 $\odot O'$ 内，点 R 在 $\odot O'$ 上.

14. **解**：(1)$\because AB=3$ cm <4 cm，

$\therefore$ 点 B 在 $\odot A$ 内.

$\because AD=4$ cm，$\therefore$ 点 D 在 $\odot A$ 上.

如图，连接 AC，$\because \angle B=90°$，

$\therefore AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$(cm).

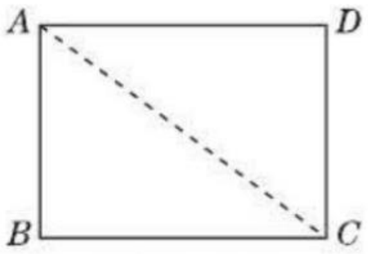
$\because 5$ cm >4 cm，$\therefore$ 点 C 在 $\odot A$ 外.

(2)由题可知点 B 一定在 $\odot A$ 内，点 C 一定在 $\odot A$ 外，

$\therefore AB<r<AC$，即 3 cm $<r<5$ cm.

$\therefore$ 满足条件的 $\odot A$ 的半径 r 的取值范围是 3 cm $<r<5$ cm.

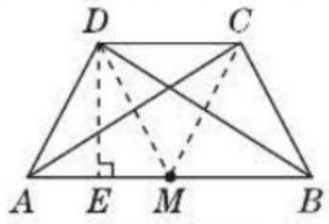
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



（第 14 题）

15. **解**：(1)点 C 在以 AB 为直径的圆上.

理由：如图，连接 MC，MD. 由折叠的性质知 $\angle DAC = \angle BAC$，$AD = AM$.



（第 15 题）

$\because AB // CD$，$\therefore \angle DCA = \angle BAC$.

$\because \angle DAC = \angle BAC$，$\therefore \angle DAC = \angle DCA$.

$\therefore AD = CD$. $\because AD = AM$，$\therefore CD = AM$，

$\therefore$ 四边形 $AMCD$ 是平行四边形，

$\therefore MC = AD$. 同理 $MD = BC$.

$\because AD = BC$，

$\therefore MC = MD = AD = BC = MA = MB$，

$\therefore$ 点 C 在以 AB 为直径的圆上.

(2)由(1)得 $\triangle AMD$ 是等边三角形，如图，过点 D 作 $DE \perp AB$ 于点 E. 由勾股定理得 $DE = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$，

$\therefore$ 梯形 $ABCD$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times (2 + 4) \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$.

第 2 课时　圆的半径的应用

1. **解**：$OE = OF$.

理由如下：连接 OA，OB，$\because OA = OB$，

$\therefore \angle OAB = \angle OBA$，即 $\angle OAE = \angle OBF$.

又 $\because AE = BF$，$\therefore \triangle OAE \cong \triangle OBF$(SAS).

$\therefore OE = OF$.

2. **解**：(1)$\because AB = OC$，$OB = OC$，

$\therefore AB = OB$. $\therefore \angle AOB = \angle A = 20°$.

(2)$\because \angle OBE = \angle A + \angle AOB$，

$\therefore \angle OBE = 2\angle A$.

$\because OB = OE$，$\therefore \angle OBE = \angle E$.

$\therefore \angle E = 2\angle A$.

$\therefore \angle EOD = \angle A + \angle E = 3\angle A = 60°$.

3. **证明**：$\because AB$，CD 是 $\odot O$ 的两条直径，

$\therefore OA = OB = OC = OD$.

$\because E$，F 分别是 OA，OB 的中点，

$\therefore OE = \frac{1}{2}OA$，$OF = \frac{1}{2}OB$.

$\therefore OE = OF$.

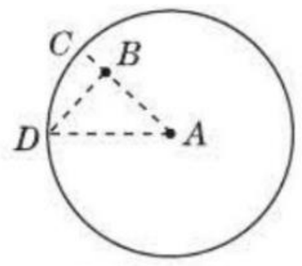
在四边形 $CEDF$ 中，

$\because OC = OD$，$OE = OF$，

$\therefore$ 四边形 $CEDF$ 为平行四边形.

4. **解**：该渔船应按射线 AB 方向驶离危险区域.

理由：如图，连接 AB 并延长交 $\odot A$ 于点 C，在 $\odot A$ 上任取一点 D(D 异于 C，且异于 C 关于 A 的对称点)，连接 BD，AD.



（第 4 题）

在 $\triangle ABD$ 中，$AB + BD > AD$.

$\because AD = AC = AB + BC$，

$\therefore AB + BD > AB + BC$. $\therefore BD > BC$.

当点 D 为 C 关于 A 的对称点时，

$BD = BA + AD = BA + AC > BC$，

$\therefore BD > BC$.

$\therefore$ 按射线 AB 方向行驶路程最短，即能最快驶离危险区域.

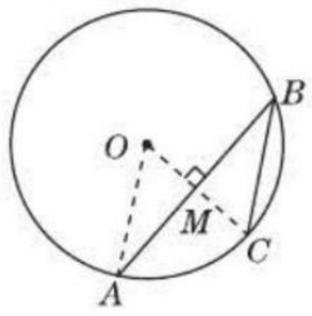
点拨：本题运用了**建模思想**，将实际问题转化为数学问题. 其中圆内一点到圆上的点的最小距离为以圆心为端点过该点的射线与圆相交的点与该点之间的线段长度.

第 3 课时　垂直于弦的直径

1. D　**2.** B　**3.** A　**4.** B　**5.** C

6. $\frac{1}{2}$　**7.** A

8. D　**点拨**：如图，连接 OA，OC，OC 交 AB 于点 M. 根据垂径定理逆定理可知 OC 垂直平分 AB，因为 $\angle ABC = 30°$，故 $\angle AOC = 60°$，在 Rt $\triangle AOM$ 中，$\sin 60° = \frac{AM}{OA} = \frac{AM}{5} = \frac{\sqrt{3}}{2}$，故 $AM = \frac{5\sqrt{3}}{2}$，从而 $AB = 5\sqrt{3}$. 故选 D.



（第 8 题）

9. C　**点拨**：设弓形最高点为 C，OC 与 AB 交于点 D. $\because OB = 13$ cm，$CD = 8$ cm，$\therefore OD = OC - CD = 5$(cm).

在 Rt $\triangle BOD$ 中，$BD = \sqrt{OB^2 - OD^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$(cm)，

$\therefore AB = 2BD = 24$(cm).

10. C　**点拨**：如图，连接 AC，AO，

$\because \odot O$ 的直径 $CD = 10$ cm，

$\therefore OA = OD = OC = 5$ cm，

$\because AB \perp CD$，$AB = 8$ cm，

$\therefore AM = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 8 = 4$(cm).

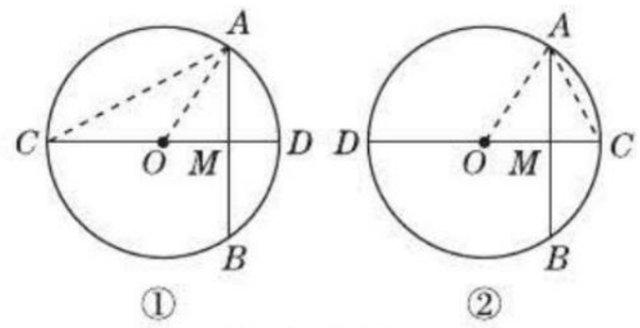
当 C 点的位置如图①所示时，

$\because OA = 5$ cm，$AM = 4$ cm，$CD \perp AB$，

$\therefore OM = \sqrt{OA^2 - AM^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$(cm)，

$\therefore CM = OC + OM = 5 + 3 = 8$(cm)，

$\therefore AC = \sqrt{AM^2 + CM^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}$(cm)；



（第 10 题）

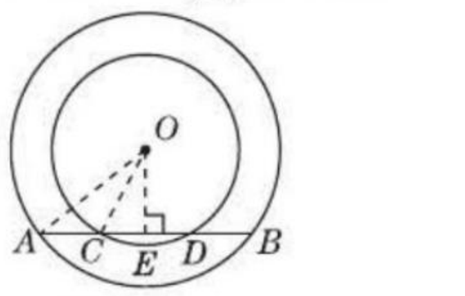
当 C 点的位置如图②所示时，同理可得 $OM = 3$ cm，

$\because OC = 5$ cm，$\therefore MC = 5 - 3 = 2$(cm)，

在 Rt $\triangle AMC$ 中，$AC = \sqrt{AM^2 + MC^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$(cm).

11. (1)**证明**：如图，过点 O 作 $OE \perp AB$ 于点 E，则 $CE = DE$，$AE = BE$.

$\therefore AE - CE = BE - DE$，即 $AC = BD$.



（第 11 题）

(2)**解**：如图，连接 OA，OC，由(1)可知，$OE \perp AB$，

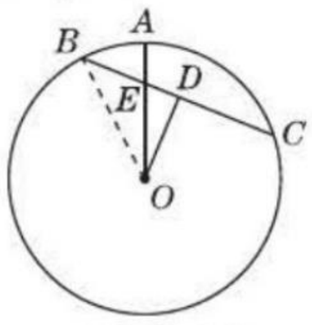
$\because$ 圆心 O 到直线 AB 的距离为 6，

$\therefore OE = 6$.

$\therefore CE = \sqrt{OC^2 - OE^2} = \sqrt{8^2 - 6^2} = 2\sqrt{7}$，$AE = \sqrt{OA^2 - OE^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$.

$\therefore AC = AE - CE = 8 - 2\sqrt{7}$.

12. **解**：(1)如图，连接 OB.



（第 12 题）

$\because OD$ 过圆心，且 D 是弦 BC 的中点，

$\therefore OD \perp BC$，$BD = \frac{1}{2}BC = 6$.

在 Rt $\triangle BOD$ 中，由勾股定理得 $OD^2 + BD^2 = BO^2$，

$\therefore OD^2 + 6^2 = 8^2$，$\therefore OD = 2\sqrt{7}$.

(2)设 $BE = x$，则 $EO = \sqrt{2}x$，$ED = 6 - x$.

在 Rt $\triangle EOD$ 中，由勾股定理得 $OD^2 + ED^2 = EO^2$，

$\therefore (2\sqrt{7})^2 + (6 - x)^2 = (\sqrt{2}x)^2$.

解得 $x_1 = -16$(舍去)，$x_2 = 4$.

$\therefore ED = 2$.

13. **解**：(1)连接 AC，$\because CD$ 为 $\odot O$ 的直径，$CD \perp AB$，$\therefore AF = BF$，$\therefore AC = BC$.

又 $AO \perp BC$，$\therefore BE = CE$，$\therefore AC = AB$，

$\therefore AB = BC = 2\sqrt{3}$.

(2)由(1)知 $AB = BC = AC$，$\therefore \triangle ABC$ 为等边三角形，$\therefore \angle OAF = 30°$，在

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Rt△OAF中，$AF=\sqrt{3}$，可求$OA=2$，即⊙O的半径为2.

14. **解**：(1) 如图，设圆心为点O，连接OB，OA，设OA交线段BC于点D，

∵ $AB=AC$，∴ $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$，

∴ $OA\perp BC$，

∴ $BD=DC=\frac{1}{2}BC=60$米，

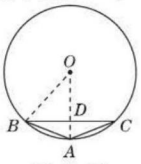
设$OB=x$米，

∵ $DA=4$米，∴ $OD=(x-4)$米.

在Rt△BDO中，$OB^2=OD^2+BD^2$.

∴ $x^2=(x-4)^2+60^2$. 解得$x=452$.

∴ 人工湖的半径为452米.



（第14题）

(2)这样的P点有2处，过点B或点C作BC的垂线交圆于一点，此点即为P点.

24.2.2 圆心角、弧、弦、弦心距间关系

1. B **2.** D **3.** C **4.** π **5.** D

6. D **点拨**：由$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}$可得$\angle BOE=3\angle COD=3\times34°=102°$，因此$\angle AOE=180°-\angle BOE=78°$，故选D.

7. D **8.** D

9. ①②④ **点拨**：由$\angle AOB=\angle COD$可得$AB=CD$，$\angle AOC=\angle BOD$，而$OA=OC=OB=OD$，则△AOC≌△BOD. 故①②④均正确，与$\overset{\frown}{AC}$一定相等的是$\overset{\frown}{BD}$，故③错误.

10. 10 **点拨**：作点C关于AB的对称点C'，连接OC，OD，OC'，BC'，∵ $DA=CD=BC$，∴ $\angle AOD=\angle COD=\angle BOC=60°$. ∵ C与C'关于AB对称，∴ $BC=BC'$. ∴ $\angle BOC'=60°$.

∴ D，O，C'在同一条直线上. ∴ $DC'=AB=10$，易知当P在点O的位置时，$PD+PC$的值最小，最小值为10.

11. **错解**：A或B

诊断：对“在同圆或等圆中，如果两个圆心角以及这两个角所对的弧、所对的弦、所对弦的弦心距中，有一组量相等，那么其余各组量都分别相等”这一性质中反映的各组量之间的关系判断不准，从而导致错误.

正解：C

12. **证明**：因为$AD=BC$，根据在同圆或等圆中，相等的弦所对的劣弧相等，可得$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BC}$，所以$\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{AC}$，即$\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{AB}$.

点拨：在同圆或等圆中，等弧对等弦、等弦对等弧（劣弧等劣弧，优弧等优弧）.

13. **分析**：要证明$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{AE}$，由在同圆中相等的圆心角所对的弧相等，可知只需证明两条弧所对的圆心角相等即可.

证明：连接OE. 因为$OE=OC$，

所以$\angle C=\angle E$.

因为$CE\parallel AB$，

所以$\angle C=\angle BOC$，$\angle E=\angle AOE$，

所以$\angle BOC=\angle AOE$，

所以$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{AE}$.

点拨：作辅助线OE是解此题的关键.

14. (1) **解**：△AOC是等边三角形.

理由如下：

∵ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CD}$，∴ $\angle AOC=\angle COD=60°$.

又∵ $OA=OC$，∴ △AOC是等边三角形.

(2) **证明**：∵ $\angle AOC=\angle COD=60°$，

∴ $\angle BOD=180°-60°-60°=60°$，

∴ $\angle AOC=\angle BOD$，∴ $AC=BD$.

∵ $OB=OD$，$\angle BOD=60°$，

∴ △BOD是等边三角形.

∴ $\angle D=60°$，∴ $\angle D=\angle COD$，

∴ $OC\parallel BD$.

点拨：本题利用了同圆中等弧所对的圆心角相等，相等的圆心角所对的弦相等，实现了弧、圆心角、弦之间的相互转化，从而使问题得以解决.

15. (1) **证明**：连接AF，则$AB=AF$，

∴ $\angle ABF=\angle AFB$.

∵ 四边形$ABCD$是平行四边形，

∴ $AD\parallel BC$，

∴ $\angle EAF=\angle AFB$，$\angle GAE=\angle ABF$，

∴ $\angle GAE=\angle EAF$，∴ $\overset{\frown}{GE}=\overset{\frown}{EF}$.

(2) **解**：∵ $\overset{\frown}{BF}$的度数为50°，

∴ $\angle BAF=50°$.

∴ $\angle ABF=\angle AFB=65°$.

又∵ $AB\parallel CD$，∴ $\angle ABF+\angle C=180°$，

∴ $\angle C=180°-\angle ABF=115°$.

点拨：在同圆中，圆心角、弧、弦之间的关系是证弧相等、线段相等、角相等的依据，一般在分析时，哪一组量与所证问题最贴近，就应构造那一组量，再证明相等.

16. (1) **证明**：连接AC，BD.

∵ C，D是$\overset{\frown}{AB}$的三等分点，

∴ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{BD}$，∴ $AC=CD=BD$.

∵ $\angle AOB=90°$，$OA=OB$，

∴ $\angle AOC=\angle COD=\angle BOD=30°$，

$\angle OAB=\angle OBA=45°$.

∴ $\angle AEC=\angle AOC+\angle OAB=75°$.

∵ $OA=OC$，$\angle AOC=30°$，

∴ $\angle ACE=\frac{1}{2}\times(180°-30°)=75°=\angle AEC$.

∴ $AE=AC$. 同理可得$BF=BD$.

∴ $AE=BF=CD$.

(2) **解**：成立.

证明如下：连接AC，BD.

∵ C，D是$\overset{\frown}{AB}$的三等分点，

∴ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{BD}$，∴ $AC=CD=BD$.

∵ $\angle AOB=120°$，$OA=OB$，

∴ $\angle AOC=\angle COD=\angle BOD=40°$，

$\angle OAB=\angle OBA=30°$.

∴ $\angle AEC=\angle AOC+\angle OAB=70°$.

∵ $OA=OC$，$\angle AOC=40°$，

∴ $\angle ACE=\frac{1}{2}\times(180°-40°)=70°=\angle AEC$.

∴ $AE=AC$，同理可得$BF=BD$.

∴ $AE=BF=CD$.

24.2.3 圆的确定

1. D

2. C **点拨**：由不在同一条直线上的三点确定一个圆可知，过A，B，D三点、B，C，D三点、A，C，D三点可分别确定一个圆，故选C.

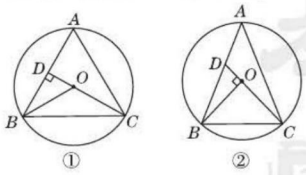
3. B **点拨**：过点A，B且半径为3 cm的圆的圆心应当在线段AB的垂直平分线上，且到A，B两点的距离均为3 cm，这样的圆心有2个，故选B.

4. B **5.** C

6. B **点拨**：正确的有①③. 任何一个圆有无数个内接三角形，故②错；三角形的外心到三角形的三个顶点的距离相等，故④错；经过不在同一直线上的三点确定一个圆，故⑤错.

7. B **8.** C

9. $5\sqrt{3}$或$5\sqrt{2}$ **点拨**：如图①，当$\angle ODB=90°$，即$CD\perp AB$时，可得$AD=BD$，∴ $AC=BC$. 又∵ $AB=AC$，∴ △ABC是等边三角形. ∴ $\angle DBO=30°$. ∵ $OB=5$，∴ $BD=\frac{\sqrt{3}}{2}OB=\frac{5\sqrt{3}}{2}$. ∴ $BC=AB=2BD=5\sqrt{3}$. 如图②，当$\angle DOB=90°$时，可得$\angle BOC=90°$，∴ △BOC是等腰直角三角形. ∴ $BC=\sqrt{2}OB=5\sqrt{2}$.



（第9题）

10. D **11.** C

12. 点P在⊙O上或点P在⊙O内

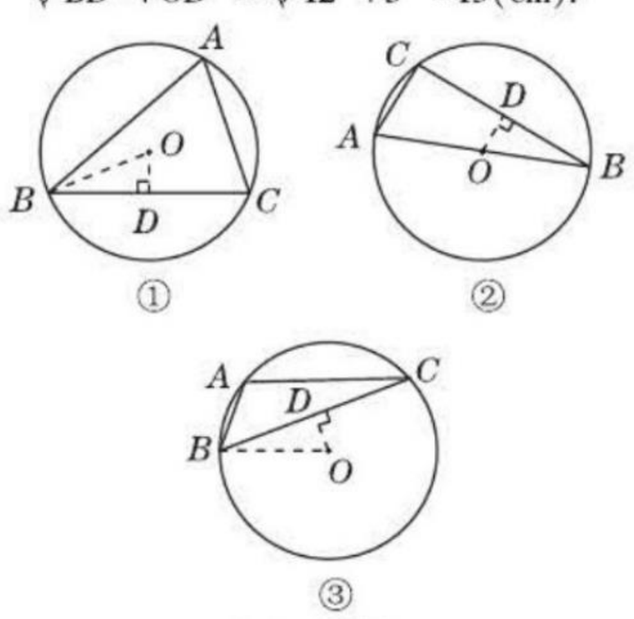
13. **思路导引**：由于△ABC的形状不确定，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

故需分类讨论.

解:(1)当$\triangle ABC$为锐角三角形时,如图①,过点O作$OD\perp BC$,垂足为D,连接OB,则$OD=5$ cm,$BD=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\times 24=12$(cm).

在Rt$\triangle ODB$中,根据勾股定理,得$OB=\sqrt{BD^2+OD^2}=\sqrt{12^2+5^2}=13$(cm).



(第13题)

(2)当$\triangle ABC$为直角三角形时,由于外心O到BC的距离为5 cm,故BC不可能为斜边.

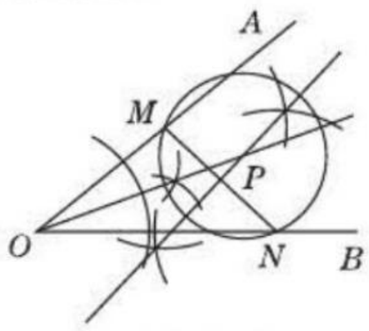
如图②,过点O作$OD\perp BC$,垂足为D,则$OD=5$ cm,$BD=12$ cm,同理可得$OB=13$ cm.

(3)当$\triangle ABC$为钝角三角形时,如图③,过点O作$OD\perp BC$,垂足为D,连接OB,则$OD=5$ cm,$BD=12$ cm,同理可得$OB=13$ cm.

综上所述,$\triangle ABC$的外接圆半径为13 cm.

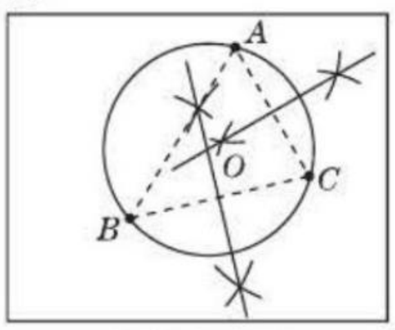
易错总结:虽然AB的长只有一个解,但在解题过程中要考虑$\triangle ABC$的形状有三种情况,这样解题过程才完整.而一部分同学在解本题时易忽视三角形的形状,只考虑其中一种(或两种)情况,而忽略另外两种(或一种)情况,从而导致解题过程不完整.

14. **解**:如图所示.



(第14题)

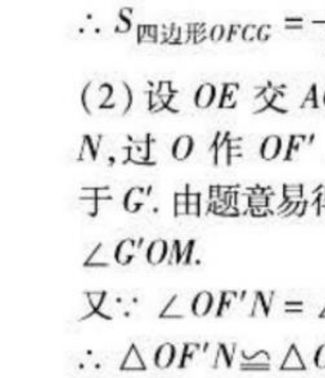
15. **解**:(1)$\odot O$的位置即为花坛的位置,如图所示.



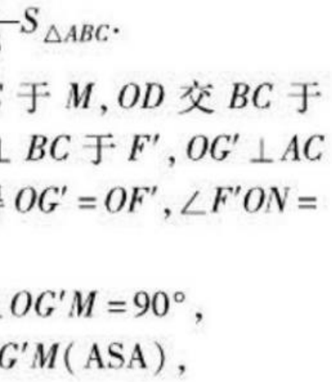
(第15题)

(2)$\because \angle BAC=90°$,$AB=8$米,$AC=6$米,$\therefore BC=10$米,$\therefore \triangle ABC$外接圆的半径为5米,$\therefore$小颖家圆形花坛的面积为25π平方米.

16. **证明**:假设弦AB与CD能互相平分,则点P即为AB,CD的中点,连接OP,如图,$\because AB$,CD为非直径的弦,由垂径定理的推论得$OP\perp AB$,$OP\perp CD$,即有两条直线AB,CD与OP垂直,这与"过一点有且只有一条直线与已知直线垂直"矛盾,$\therefore$假设不成立,故AB与CD不能互相平分.



(第16题)



(第17题)

17. **证明**:(1)如图,过O作$OH\perp AB$于H,连接OA,OC,OB.$\because AB=BC=AC$,$\therefore OH=OF=OG$,$\therefore S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AOB}+S_{\triangle BOC}+S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}AB\cdot OH+\frac{1}{2}BC\cdot OF+\frac{1}{2}AC\cdot OG=\frac{3}{2}BC\cdot OF$.

在Rt$\triangle OCG$和Rt$\triangle OBF$中,$OC=OB$,$OG=OF$,$\therefore$Rt$\triangle OCG\cong$Rt$\triangle OBF$(HL),

$\therefore S_{四边形OFCG}=S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}BC\cdot OF$,

$\therefore S_{四边形OFCG}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$.

(2)设OE交AC于M,OD交BC于N,过O作$OF'\perp BC$于F',$OG'\perp AC$于G'.由题意易得$OG'=OF'$,$\angle F'ON=\angle G'OM$.

又$\because \angle OF'N=\angle OG'M=90°$,

$\therefore \triangle OF'N\cong\triangle OG'M$(ASA),

$\therefore S_{\triangle OF'N}=S_{\triangle OG'M}$,$\therefore S_{四边形ONCM}=S_{四边形OF'CG'}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$.

24.3 圆周角

第1课时 圆周角和圆心角、弧的关系

1. C **2**. 4;$\angle C$与$\angle D$;$\angle A$与$\angle B$

3. B **4**. A

5. A **点拨**:连接OC,由题意知圆心O到弦CD的距离为OE的长度,由圆周角定理知$\angle COB=2\angle CDB=60°$,已知半径$OC$的长,即可在Rt$\triangle OCE$中求出$OE$的长度.

6. A **7**. B **8**. D **9**. B **10**. B

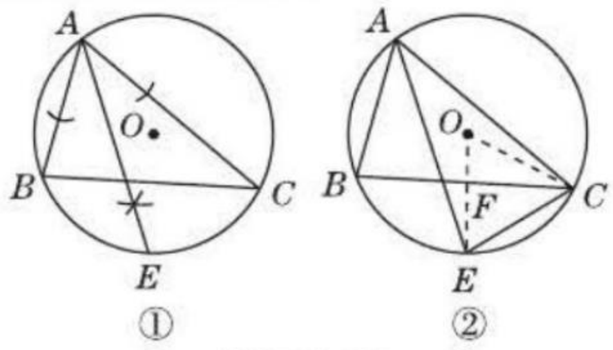
11. C **点拨**:因为直径AB垂直于弦CD,所以$CE=DE$.因为$\angle A=22.5°$,所以$\angle COE=45°$.因为$OC=4$,由勾股定理得$CE=2\sqrt{2}$,所以$CD=4\sqrt{2}$,故选C.本题容易忽视勾股定理的应用而致错.

12. **证明**:连接AC,因为圆周角$\angle BAC$与圆心角$\angle BOC$同是$\overset{\frown}{BC}$所对的角,所以$\angle BOC=2\angle BAC$.因为圆周角$\angle ACD$与圆心角$\angle AOD$同是$\overset{\frown}{AD}$所对的角,所以$\angle AOD=2\angle ACD$.

在Rt$\triangle ACE$中,$\angle EAC+\angle ACE=90°$,所以$\angle BOC+\angle AOD=2\angle EAC+2\angle ACE=2(\angle EAC+\angle ACE)=2\times 90°=180°$.

点拨:利用圆周角定理可使问题转化,如本题中,利用圆周角定理,可把证明"$\angle BOC+\angle AOD=180°$"转化为证明"$\angle EAC+\angle ACE=90°$",而证明后者,利用"直角三角形的两锐角互余"即可轻松解决.

13. **解**:(1)如图①所示.



(第13题)

(2)如图②,连接OE交BC于F,连接OC,由(1)得$\angle BAE=\angle CAE$,

$\therefore \overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{CE}$,$\therefore OE\perp BC$.$\therefore EF=3$,$\therefore OF=2$.

在Rt$\triangle OCF$中,$CF=\sqrt{OC^2-OF^2}=\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{21}$;

在Rt$\triangle ECF$中,$CE=\sqrt{CF^2+EF^2}=\sqrt{21+9}=\sqrt{30}$.

14. (1)**证明**:$\because \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CB}$,$\therefore \angle AEC=\angle CEB$.

$\because BE=EF$,$\therefore \angle EBF=\angle EFB$.

$\because \angle AEB$为$\triangle BEF$的外角,

$\therefore \angle AEB=\angle EBF+\angle EFB$,

即$2\angle CEB=2\angle EBF$.

$\therefore \angle CEB=\angle EBF$,$\therefore CE/\!/BF$.

(2)**解**:如图,设AB交OC于点G.

(第14题)

$\because CE/\!/BF$,$\therefore \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EF}$,

$\because EA:EB=3:1$,$BE=EF$,

$\therefore \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EF}=\frac{AE}{BE}=3$,

$\because DB=2$,$\therefore AD=6$.

$\because \angle AEC=\angle CEB$,$\angle A=\angle BCE$,

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

$\therefore \triangle ADE \backsim \triangle CBE$,

$\therefore \frac{AD}{CB}=\frac{AE}{CE}$,即$\frac{6}{CB}=\frac{3}{\sqrt{5}}$,

$\therefore CB=2\sqrt{5}$.

$\because CO\perp AB$,$\therefore BG=(6+2)\div 2=4$.

$\therefore CG=\sqrt{BC^2-BG^2}=2$.

$\therefore S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}BD\cdot CG=\frac{1}{2}\times 2\times 2=2$.

15. 解：(1)$\because PC$ 是$\angle APB$ 的平分线，

$\therefore \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$,$\therefore \angle APC=\angle BAC=30°$，

C 为$\overset{\frown}{AB}$的中点，因此$\triangle ABC$ 的面积为定值，要使四边形 $PACB$ 的面积最大，需使$\triangle PAB$ 的面积最大，此时 PC 是$\odot O$ 的直径，即 PC 过 O 点.

设 PC 交 AB 于点 D，则 $PD\perp AB$.

$\because \angle APC=30°$,$\therefore \angle BPC=\angle APC=30°$，

$\therefore \angle APB=60°$. 又易知 $AP=BP$.

$\therefore \triangle APB$ 是等边三角形.

$\therefore AP=BP=AB=\sqrt{3}$.

$\because \angle APC=30°$，

$\therefore \overset{\frown}{AC}$所对的圆心角是 60°，

$\therefore \overset{\frown}{AP}$所对的圆心角是 120°，

$\therefore \angle ACP=\frac{1}{2}\times 120°=60°$.

$\therefore$ 在 $\triangle ACP$ 中，$\angle PAC=180°-\angle APC-\angle ACP=90°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle PAC$ 中，$\angle APC=30°$,$AP=\sqrt{3}$，

$\therefore PC=\frac{AP}{\cos 30°}=\sqrt{3}\times\frac{2}{\sqrt{3}}=2$.

$\therefore S_{四边形PACB}=2S_{\triangle ACP}=\frac{1}{2}PC\cdot AB=\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$.

$\therefore$ 当$\angle PAC=90°$时，四边形 $PACB$ 有最大面积，最大面积是$\sqrt{3}$.

(2)① 当 $\angle PAC=120°$ 时，四边形 $PACB$ 是梯形.

$\because PC$ 是$\angle APB$ 的平分线，

$\therefore \angle APC=\angle BPC=\angle BAC=30°$，

$\therefore \angle APB=60°$.

当 $AC\parallel PB$ 且 AP 与 BC 不平行时，四边形 $PACB$ 是梯形.

$\therefore \angle PAC+\angle APB=180°$，

$\therefore \angle PAC=120°$.

②当$\angle PAC=60°$时，四边形 $PACB$ 是梯形.

$\because \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$,$\therefore AC=BC$.

又$\because \angle BAC=30°$,$\therefore \angle ACB=120°$.

当 $BC\parallel AP$ 且 AC 与 PB 不平行时，四边形 $PACB$ 是梯形.

$\therefore \angle PAC+\angle ACB=180°$，

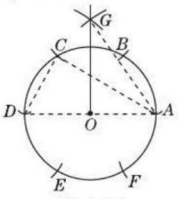
$\therefore \angle PAC=60°$.

综上所述，当 $\angle PAC$ 为 120° 或 60° 时，四边形 $PACB$ 是梯形.

第 2 课时　圆周角和直径的关系

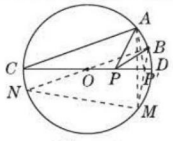
1. D　**2.** C　**3.** C　**4.** C

5. D　**点拨**：如图，连接 AD,AC,AG,CD. 由题意可知 OG 是 AD 的垂直平分线，$\therefore \triangle AOG$ 是直角三角形. 在 $\triangle ACD$ 中，易知$\angle ACD=90°$,$\angle ADC=60°$,$\therefore AC=\sin\angle ADC\times AD=\sqrt{3}r$,$\therefore AG=\sqrt{3}r$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle AOG$ 中，$OG=\sqrt{AG^2-OA^2}=\sqrt{(\sqrt{3}r)^2-r^2}=\sqrt{2}r$.



（第 5 题）

6. 2　**点拨**：如图，根据轴对称性质，作出点 A 关于直径 CD 所在直线的对称点 M，连接 MB 交 CD 于点 P'，连接 AP'.



（第 6 题）

$\therefore PA+PB$ 的最小值 $=P'A+P'B=BM$,$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{MD}$.

作直径 BN，连接 MN. $\therefore \angle BMN=90°$.

$\because \angle ACD=20°$，点 B 为弧 AD 的中点，$\therefore$ 弧 BD 所对的圆心角的度数为 20°，弧 AD 与弧 MD 所对的圆心角的度数都为 40°.

$\therefore$ 弧 MB 所对的圆心角的度数为 60°.

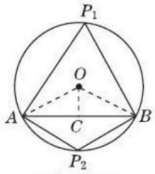
$\therefore \angle MNB=30°$. $\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle BMN$ 中，

$BM=\frac{1}{2}BN=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}\times 4=2$.

$\therefore PA+PB$ 的最小值为 2.

7. D　**8.** B　**9.** B

10. 60°或 120°　**点拨**：如图，当点 $P(P_1)$ 在弦 AB 所对的优弧上时，过点 O 作 $OC\perp AB$ 于点 C，连接 OA,OB. 可得 $AC=2\sqrt{3}$,$\angle AOC=\angle BOC$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle OAC$ 中，$OC=\sqrt{OA^2-AC^2}=2=\frac{1}{2}OA$，所以$\angle OAC=30°$. 所以 $\angle AOB=120°$，所以 $\angle AP_1B=60°$. 同理当点 $P(P_2)$ 在弦 AB 所对的劣弧上时，$\angle AP_2B=120°$.



（第 10 题）

易错总结：对于“图形不明确型”问题，在解答时一般要进行分类讨论. 一条弦（非直径）所对的圆周角有两种情况：顶点在优弧上的圆周角和顶点在劣弧上的圆周角，解题时要分情况求解，否则容易漏解. 例如本题应分两种情况：点 P 在弦 AB 所对的优弧上和点 P 在弦 AB 所对的劣弧上.

11. (1)**证明**：如图. 连接 AD.

$\because AB$ 是$\odot O$ 的直径，

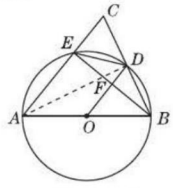
$\therefore \angle ADB=\angle AEB=90°$.

$\because AB=AC$,$\therefore DC=DB$.

$\because OA=OB$,$\therefore OD\parallel AC$.

$\therefore \angle OFB=\angle AEB=90°$.

$\therefore OD\perp BE$.



（第 11 题）

(2)**解**：设 $AE=x$，

$\because AB=\frac{5}{2}$,$\therefore OB=OD=\frac{5}{4}$.

由 $OD\perp BE$，

易得 OD 是线段 BE 的垂直平分线，

$\therefore FE=FB$,$BD=ED=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

又$\because OA=OB$，

$\therefore OF=\frac{1}{2}AE=\frac{1}{2}x$.

$\therefore DF=OD-OF=\frac{5}{4}-\frac{1}{2}x$.

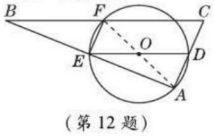
在 $\mathrm{Rt}\triangle DFB$ 中，$BF^2=DB^2-DF^2=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{2}x\right)^2$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle OFB$ 中，$BF^2=OB^2-OF^2=\left(\frac{5}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{2}x\right)^2$.

$\therefore \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{2}x\right)^2=\left(\frac{5}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{2}x\right)^2$，

解得 $x=\frac{3}{2}$，即 $AE=\frac{3}{2}$.

12. (1)**证明**：如图，连接 FA.



（第 12 题）

$\because \angle FEB=90°$,$\therefore EF\perp AB$.

$\therefore \angle FEA=90°$.

$\because BE=AE$,$\therefore BF=AF$.

$\because \angle FEA=90°$,$\therefore AF$ 是$\odot O$ 的直径.

$\therefore AF=DE$. $\therefore BF=ED$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

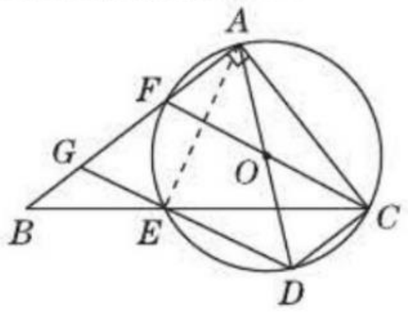
在 Rt△EFB 和 Rt△ADE 中，

$\begin{cases} BE = AE, \\ BF = DE, \end{cases}$

∴ Rt△EFB≌△Rt△ADE.

(2)**解**：四边形 $FCDE$ 的最大面积 = $4 \times 2 = 8$.

13. (1)**证明**：如图，连接 AE.



（第 13 题）

∵ $\angle BAC = 90°$，∴ CF 是⊙O 的直径.

∵ $AC = EC$，∴ $CF \perp AE$.

∵ AD 是⊙O 的直径，

∴ $\angle AED = \angle ACD = 90°$，即 $DG \perp AE$.

∴ $CF // DG$.

∵ $\angle BAC + \angle ACD = 180°$，∴ $AB // CD$.

∴ 四边形 $DCFG$ 是平行四边形.

(2)**解**：由 $CD = \frac{3}{8}AB$，

设 $CD = 3x$，$AB = 8x$.

∵ 四边形 $DCFG$ 是平行四边形，

∴ $FG = CD = 3x$.

∵ $\angle AOF = \angle COD$，∴ $AF = CD = 3x$.

∴ $BG = 8x - 3x - 3x = 2x$.

∵ $EG // CF$，∴ $\frac{BE}{EC} = \frac{BG}{GF} = \frac{2}{3}$.

∵ $BE = 4$，∴ $AC = EC = 6$.

∴ $BC = 6 + 4 = 10$.

∴ $AB = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 = 8x$.

∴ $x = 1$.

在 Rt△ACF 中，$AF = 3$，$AC = 6$，

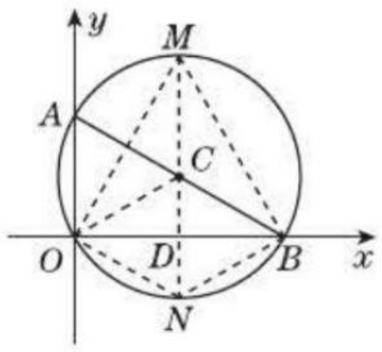
∴ $CF = \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5}$，即⊙$O$ 的直径长为 $3\sqrt{5}$.

14. **解**：(1)∵ $A(0,2)$，$B(2\sqrt{3},0)$，

∴ $OA = 2$，$OB = 2\sqrt{3}$.

在 Rt△AOB 中，$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$.

如图，连接 OC，∵ $\angle AOB = 90°$，



（第 14 题）

∴ AB 为⊙C 的直径，点 C 为 AB 的中点.

∴ $AC = OC = \frac{1}{2}AB = 2 = OA$.

∴ △AOC 是等边三角形.

∴ $\angle BAO = 60°$. ∴ $\angle ABO = 30°$.

(2)存在. 如图，作 OB 的垂直平分线 MN，交⊙C 于点 M，N，交 OB 于点 D，连接 OM，BM，ON，BN.

易知 MN 过点 C，即 MN 是⊙C 的直径.

∵ MN 垂直平分 OB，

∴ △OBM，△OBN 都是等腰三角形.

∴ M，N 点均符合 P 点的要求.

∵ MN 是⊙C 的直径，∴ $\angle MON = 90°$.

∵ $\angle BMO = \angle BAO = 60°$，

∴ △OBM 是等边三角形.

∴ $\angle BOM = 60°$. ∴ $\angle BON = 30°$.

故存在符合条件的 P 点，$\angle BOP$ 的度数为 60°或 30°.

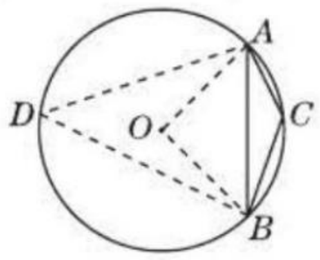
第 3 课时　圆内接四边形

1. B　**2**. A　**3**. C　**4**. D

5. $2\sqrt{2}$　**点拨**：如图，在优弧 AB 上任取一点 D，连接 AD，BD，OA，OB.

∵ $\angle ACB = 135°$，∴ $\angle ADB = 45°$，

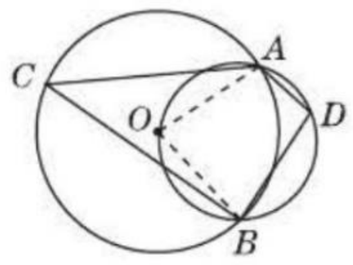
∴ $\angle AOB = 90°$，∴ △OAB 为等腰直角三角形，∵ $OA = OB = 2$，∴ $AB = 2\sqrt{2}$.



（第 5 题）

6. C

7. B　**点拨**：连接 OA，OB，如图所示.



（第 7 题）

∵ A，O，B，D 都在小圆上，

∴ $\angle ADB + \angle AOB = 180°$.

而 $\angle ADB = 100°$，∴ $\angle AOB = 80°$.

∴ $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB = 40°$.

8. B　**9**. 105°　**10**. C　**11**. C　**12**. C

13. D　**点拨**：点 B 可能在弦 AC 所对的优弧上，也可能在弦 AC 所对的劣弧上. 本题没有给出图形，其易错之处在于画图时考虑不全而漏解.

14. **解**：如图，延长 AD，BC 交于点 E.

在⊙O 中，∵ $\angle A = 90°$，$\angle A + \angle DCB = 180°$，∴ $\angle DCB = 90°$，∴ $\angle DCE = 180° - \angle DCB = 90°$，∴ $\angle E + \angle EDC = 90°$，又 $\angle E + \angle B = 90°$，∴ $\angle B = \angle EDC$.

∵ 在Rt△ECD中，

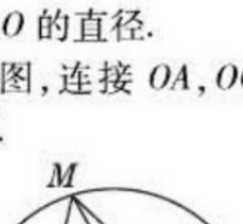
$\cos B = \cos \angle EDC = \frac{CD}{ED} = \frac{3}{5}$，

∴ $ED = \frac{5}{3}CD = \frac{50}{3}$，

∵ 在Rt△EAB中，$\cos B = \frac{AB}{BE} = \frac{3}{5}$，

∴ $BE = \frac{85}{3}$，∴ $EA = \sqrt{BE^2 - AB^2} = \sqrt{\left(\frac{85}{3}\right)^2 - 17^2} = \frac{68}{3}$，

∴ $AD = EA - ED = \frac{68}{3} - \frac{50}{3} = 6$.



（第 14 题）

15. **证明**：(1)∵ 四边形 $ABCD$ 内接于⊙O，

∴ $\angle ADC = 180° - \angle B = 130°$.

∵ $\angle ACD = 25°$，

∴ $\angle DAC = 180° - \angle ADC - \angle ACD = 180° - 130° - 25° = 25°$.

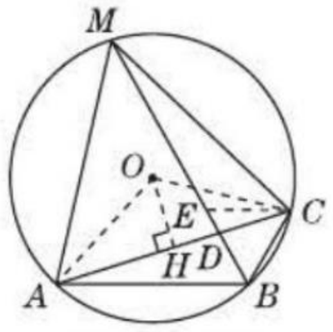
∴ $\angle DAC = \angle ACD$. ∴ $AD = CD$.

(2)∵ $\angle BAC = \angle BAD - \angle DAC = 65° - 25° = 40°$，$\angle B = 50°$，

∴ $\angle ACB = 180° - \angle B - \angle BAC = 180° - 50° - 40° = 90°$.

∴ AB 是⊙O 的直径.

16. (1)**解**：如图，连接 OA，OC，作 $OH \perp AC$ 于点 H.



（第 16 题）

∵ $\angle ABC = 120°$，

∴ $\angle AMC = 180° - \angle ABC = 60°$.

∴ $\angle AOC = 2\angle AMC = 120°$.

∴ $\angle AOH = \frac{1}{2}\angle AOC = 60°$.

∵ $AH = \frac{1}{2}AC = \sqrt{3}$，

∴ $OA = \frac{AH}{\sin 60°} = 2$，即⊙$O$ 半径的长为 2.

(2)**证明**：如图，在 BM 上截取 $BE = BC$，连接 CE.

∵ BM 平分 $\angle ABC$，$\angle ABC = 120°$，

∴ $\angle MBC = \frac{1}{2}\angle ABC = 60°$.

又∵ $BE = BC$，∴ △EBC 是等边三角形.

∴ $CE = CB = BE$，$\angle CEB = 60°$.

∴ $\angle MEC = 180° - \angle CEB = 120°$.

在△ABC 和△MEC 中，

$\begin{cases} \angle ABC = \angle MEC, \\ \angle BAC = \angle EMC, \\ CB = CE, \end{cases}$

∴ △ABC≌△MEC. ∴ $AB = ME$.

∵ $ME + EB = BM$，

∴ $AB + BC = BM$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

17. 证明：(1)在 Rt△ABC 中，点 M 是 AC 的中点，

$\therefore MA = MB$，

$\therefore \angle A = \angle MBA$；

连接 DE，则四边形 $ABED$ 是⊙O 的内接四边形，

$\therefore \angle ADE + \angle ABE = 180°$，

而$\angle ADE + \angle MDE = 180°$，

$\therefore \angle MDE = \angle MBA$；

同理可得$\angle MED = \angle A$，

$\therefore \angle MDE = \angle MED$，

$\therefore MD = ME$.

(2)$\because \angle C = 30°$，

$\therefore \angle A = 60°$，

$\therefore \angle ABM = 60°$，

$\therefore$ △OAD 和△OBE 为等边三角形，

$\therefore \angle BOE = 60°$，

$\therefore \angle BOE = \angle A$，

$\therefore OE /\!/ AC$，

同理可得 $OD /\!/ BM$，

$\therefore$ 四边形 $DOEM$ 为平行四边形，

而 $OD = OE$，

$\therefore$ 四边形 $ODME$ 是菱形.

阶段方法技巧训练（二）

专训1

1. C

2. 证明：$\because QN = MP$，

$\therefore \overset{\frown}{QN} = \overset{\frown}{MP}$.

$\therefore \overset{\frown}{QN} + \overset{\frown}{NP} = \overset{\frown}{MP} + \overset{\frown}{NP}$，

即$\overset{\frown}{QP} = \overset{\frown}{MN}$，

$\therefore MN = PQ$.

3. 证明：在⊙O 中，$\angle CAB$，$\angle COB$ 分别是$\overset{\frown}{CB}$所对的圆周角和圆心角，

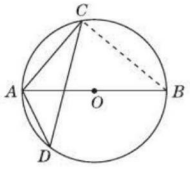
$\therefore \angle COB = 2\angle CAB$.

同理：$\angle COA = 2\angle CBA$.

又$\because \angle CAB = \angle CBA$，

$\therefore \angle COB = \angle COA$.

4. 解：如图，连接 BC，



（第4题）

$\because AB$ 是⊙O 的直径，

$\therefore \angle ACB = 90°$.

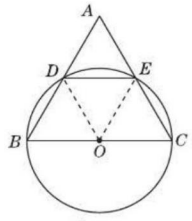
在 Rt△ABC 中，$\angle ABC = 90° - \angle BAC = 90° - 50° = 40°$.

又$\because \angle ADC$，$\angle ABC$ 是$\overset{\frown}{AC}$所对的圆周角，

$\therefore \angle ADC = \angle ABC = 40°$.

5. 解：$BD = DE = EC$.

理由如下：如图，连接 OD，OE.



（第5题）

$\because OB = OD = OE = OC$，$\angle B = \angle C = 60°$，

$\therefore$ △BOD 与△COE 都是等边三角形.

$\therefore \angle BOD = \angle COE = 60°$.

$\therefore \angle DOE = 180° - \angle BOD - \angle COE = 60°$.

$\therefore \angle BOD = \angle DOE = \angle COE$.

$\therefore BD = DE = EC$.

点拨：本题利用“在同圆中，相等的圆心角所对的弦相等”证明三条线段相等，因此，连接 OD，OE，构造弦所对的圆心角是解此题的关键.

6. 证明：$\because$ 在⊙O 中，$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$，

$\therefore \angle AOB = \angle COD$，

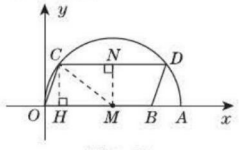
$\because OA = OB$，$OC = OD$，

$\therefore$ 在△AOB 中，$\angle B = 90° - \frac{1}{2}\angle AOB$，在△$COD$ 中，$\angle C = 90° - \frac{1}{2}\angle COD$，

$\therefore \angle B = \angle C$.

专训2

1. 解：如图，连接 CM，作 $MN \perp CD$ 于点 N，$CH \perp OA$ 于点 H.



（第1题）

$\because$ 四边形 $OCDB$ 为平行四边形，B 点的坐标是(8,0)，

$\therefore CD = OB = 8$，$CN = MH$，$CH = MN$.

又$\because MN \perp CD$，

$\therefore CN = DN = \frac{1}{2}CD = 4$.

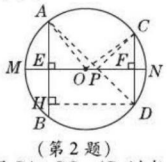
易知 $OA = 10$，$\therefore MO = MC = 5$.

在 Rt△MNC 中，$MN = \sqrt{CM^2 - CN^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.

$\therefore CH = 3$，又 $OH = OM - MH = 5 - 4 = 1$.

$\therefore$ 点 C 的坐标为(1,3).

2. 解：如图，易知点 C 关于 MN 的对称点为点 D，连接 AD，交 MN 于点 P，连接 PC，易知此时 $PA + PC$ 最小且 $PA + PC = AD$. 过点 D 作 $DH \perp AB$ 于点 H，连接 OA，OC. 易知 $AE = 4$，$CF = DF = 3$，由勾股定理易得 $OE = 3$，$OF = 4$，$\therefore DH = EF = 7$，又 $AH = AE + EH = AE + DF = 4 + 3 = 7$.



（第2题）

$\therefore AD = 7\sqrt{2}$.

即 $PA + PC$ 的最小值为 $7\sqrt{2}$.

点拨：本题运用**转化思想**，将分散的线段转化为同一直线上的一条线段，然后运用勾股定理求出线段的长度.

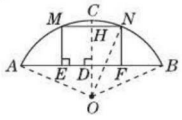
3. (1)**证明**：连接 AC，$\because$ 直径 AB 垂直于弦 CD 于点 E，$\therefore \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AD}$，$\therefore AC = AD$.

$\because$ 过圆心 O 的线段 $CF \perp AD$，$\therefore AF = DF$，即 CF 是 AD 的中垂线，$\therefore AC = CD$，$\therefore AC = AD = CD$，即△ACD 是等边三角形，$\therefore \angle FCD = 30°$，$\therefore OE = \frac{1}{2}OC$，$\therefore OE = \frac{1}{2}OB$，$\therefore$ 点 E 为 OB 的中点.

(2)**解**：$\because AB = 8$，$\therefore OC = OB = \frac{1}{2}AB = 4$. 又$\because BE = OE$，$\therefore OE = 2$，$\therefore$ 在 Rt△OCE 中，$CE = \sqrt{OC^2 - OE^2} = \sqrt{16 - 4} = 2\sqrt{3}$，

$\therefore CD = 2CE = 4\sqrt{3}$.

4. 解：如图.



（第4题）

设圆弧形桥拱 AB 所在圆的圆心为 O，连接 OA，ON，作 $OD \perp AB$ 于点 D，交⊙O 于点 C，交 MN 于点 H，所以 $OC \perp MN$，由垂径定理可知，$AD = BD$，$MH = NH$.

所以 $AD = \frac{1}{2}AB = 3.6$ m，$NH = \frac{1}{2}MN = 1.5$ m.

设 $OA = r$ m，则 $OD = OC - DC = (r - 2.4)$ m.

在 Rt△AOD 中，$OA^2 = AD^2 + OD^2$，

即 $r^2 = 3.6^2 + (r - 2.4)^2$，

解得 $r = 3.9$.

在 Rt△OHN 中，$OH = \sqrt{ON^2 - NH^2} = \sqrt{3.9^2 - 1.5^2} = 3.6$(m).

所以 $FN = DH = OH - OD = 3.6 - (3.9 - 2.4) = 2.1$(m).

因为 2.1 m > 2 m，所以此货船能顺利通过这座拱桥.

24.4 直线与圆的位置关系

第1课时 直线与圆的位置关系及切线的性质

1. A **2.** B **3.** D

4. $\frac{17}{8}$ **点拨**：设当点 C 运动了 t s 时，以点 C 为圆心，1.5 cm 为半径的圆与直线 EF 相切，此时，$CF = 1.5$ cm.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\because AC=2t$ cm, $BD=\frac{3}{2}t$ cm,

$\therefore OC=(8-2t)$ cm,

$OD=\left(6-\frac{3}{2}t\right)$cm.

$\because$ 点 E 是 OC 的中点,

$\therefore CE=\frac{1}{2}OC=(4-t)$ cm.

$\because \angle EFC=\angle O=90°, \angle FCE=\angle OCD$,

$\therefore \triangle EFC\backsim\triangle DOC$.

$\therefore \frac{EF}{DO}=\frac{CF}{CO}$.

$\therefore EF=\frac{3DO}{2CO}=\frac{3\left(6-\frac{3}{2}t\right)}{2(8-2t)}=\frac{9}{8}$(cm).

在 Rt$\triangle EFC$ 中,由勾股定理可知$CE^2=CF^2+EF^2$,

$\therefore (4-t)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{9}{8}\right)^2$,

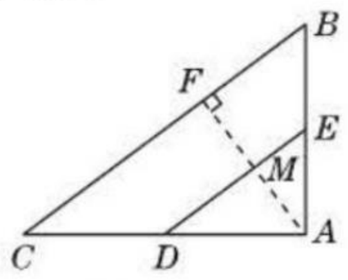
解得 $t=\frac{17}{8}$或 $t=\frac{47}{8}$.

$\because 0\leqslant t\leqslant 4, \therefore t=\frac{17}{8}$.

5. B **6.** B **7.** B **8.** D **9.** A

10. (1,1)或(3,1)或(2,0)或(2,2)

11. **解**:如图,过点 A 作 $AF\perp BC$ 于点 F,交 DE 于点 M.



(第 11 题)

$\because AB=6, AC=8, BC=10$.

$\therefore \angle BAC=90°$,

$\therefore$ 根据题意得 $10\cdot AF=6\times 8$,解得 $AF=\frac{24}{5}$.

$\because D, E$ 分别是 AC, AB 的中点,

$\therefore DE\parallel BC$,且 $DE=\frac{1}{2}BC=5$.

$\therefore M$ 为 AF 的中点,

$\therefore MF=\frac{12}{5}<2.5$.

$\therefore$ 以 DE 为直径的圆与 BC 相交.

12. (1) **证明**:$\because$ 点 A 关于 OP 的对称点 C 恰好落在$\odot O$ 上,

$\therefore \overset{\frown}{AP}=\overset{\frown}{PC}$.

$\therefore \angle AOP=\angle COP$.

$\therefore \angle AOP=\frac{1}{2}\angle AOC$.

又$\because \angle ABC=\frac{1}{2}\angle AOC$,

$\therefore \angle AOP=\angle ABC$.

$\therefore OP\parallel BC$.

(2) **解**:连接 PC.

$\because CD$ 为$\odot O$ 的切线,

$\therefore OC\perp CD$.

$\because \angle D=90°$,

$\therefore AD\perp CD. \therefore OC\parallel AD$.

$\therefore \angle APO=\angle COP$.

$\because \angle AOP=\angle COP$,

$\therefore \angle APO=\angle AOP$.

$\therefore OA=AP$.

又$\because OA=OP$,

$\therefore \triangle APO$ 为等边三角形.

$\therefore \angle AOP=60°$.

$\therefore \angle OBC=\angle AOP=60°$.

又$\because OC=CB$,

$\therefore \triangle BCO$ 为等边三角形.

$\therefore \angle COB=60°$.

$\therefore \angle POC=180°-(\angle AOP+\angle COB)=60°$.

又$\because OP=OC$,

$\therefore \triangle POC$ 也为等边三角形.

$\therefore \angle PCO=60°, PC=OP=OC$.

$\because \angle OCD=90°$,

$\therefore \angle PCD=30°$.

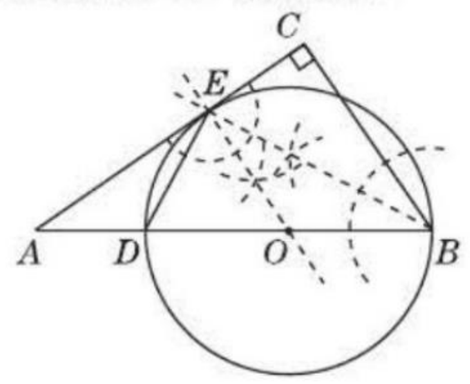
$\therefore$ 在 Rt$\triangle PCD$ 中,$PD=\frac{1}{2}PC$.

$\because PC=OP=\frac{1}{2}AB$,

$\therefore PD=\frac{1}{4}AB$.

$\therefore AB=4PD=4$.

13. **解**:(1)如图,$\odot O$ 为所求作.



(第 13 题)

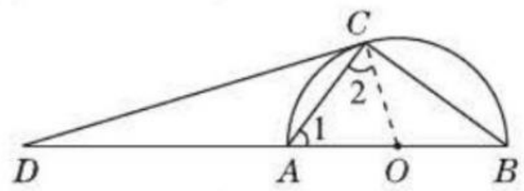
(2)如图,由作图知 BE 平分 $\angle ABC$,所以 $\angle ABE=\angle CBE$.

因为 BD 为$\odot O$ 的直径,所以 $\angle DEB=90°=\angle ACB$. 所以 $\triangle DEB\backsim\triangle ECB$,

所以$\frac{BE}{BC}=\frac{BD}{BE}$,将 $BD=5, BC=4$ 代入可求得 $BE=2\sqrt{5}$.

在 Rt$\triangle DEB$ 中,$DE=\sqrt{BD^2-BE^2}=\sqrt{5^2-(2\sqrt{5})^2}=\sqrt{5}$.

14. (1) **证明**:如图,连接 OC.



(第 14 题)

$\because OA=OC, \therefore \angle 1=\angle 2$.

$\because CD$ 是$\odot O$ 的切线,$\therefore OC\perp CD$.

$\therefore \angle DCO=90°$.

$\therefore \angle ACD+\angle 2=90°$.

$\because AB$ 是直径,$\therefore \angle 1+\angle B=90°$.

$\therefore \angle ACD=\angle B$.

(2) **解**:①由题图易知,$\angle CEF=\angle ECD+\angle CDE, \angle CFE=\angle B+\angle FDB$.

$\because \angle ECD=\angle B, \angle CDE=\angle FDB$,

$\therefore \angle CEF=\angle CFE$.

$\because \angle ECF=90°, \therefore \angle CEF=\angle CFE=45°$.

$\therefore \tan\angle CFE=\tan 45°=1$.

②在 Rt$\triangle ACB$ 中,$\because AC=3, BC=4$,

$\therefore AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=5$.

$\because \angle CDA=\angle BDC, \angle ACD=\angle B$,

$\therefore \triangle ADC\backsim\triangle CDB$.

$\therefore \frac{CD}{BD}=\frac{AC}{CB}=\frac{AD}{CD}=\frac{3}{4}$.

$\because \angle CDE=\angle BDF, \angle DCE=\angle B$,

$\therefore \triangle DCE\backsim\triangle DBF. \therefore \frac{CE}{BF}=\frac{CD}{BD}=\frac{3}{4}$.

设 $CE=CF=x, \therefore \frac{x}{4-x}=\frac{3}{4}$.

$\therefore x=\frac{12}{7}. \therefore CE=\frac{12}{7}$.

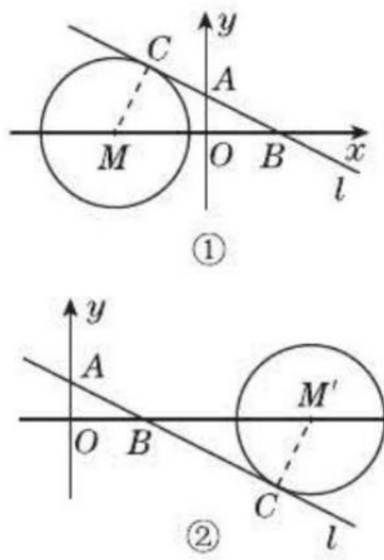
第 2 课时　切线的判定

1. 6

2. $2\sqrt{5}-2$ 或 $2\sqrt{5}+2$

点拨:在 $y=-\frac{1}{2}x+1$ 中,令 $x=0$,则 $y=1$,令 $y=0$,则 $x=2. \therefore A(0,1)$, $B(2,0), \therefore AB=\sqrt{5}$. 当$\odot M$ 与直线 l 相切,且$\odot M$ 位于直线 l 左下方时,如图①. 设$\odot M$ 与直线 l 相切于点 C,连接 MC,则 $MC=2, MC\perp AB$. $\because \angle MCB=\angle AOB=90°, \angle MBC=\angle ABO$,

$\therefore \triangle BMC\backsim\triangle BAO. \therefore \frac{CM}{OA}=\frac{BM}{AB}$,即$\frac{2}{1}=\frac{BM}{\sqrt{5}}. \therefore BM=2\sqrt{5}. \therefore OM=2\sqrt{5}-2$. 同理,当$\odot M$ 与直线 l 相切,且$\odot M$ 位于直线 l 右上方时,如图②,可得 $BM'=2\sqrt{5}, OB=2. \therefore OM'=2\sqrt{5}+2. \therefore m$ 的值为 $2\sqrt{5}-2$ 或 $2\sqrt{5}+2$.



(第 2 题)

3. C **4.** C **5.** B **6.** C **7.** A **8.** C

9. **证明**:如图,连接 OA,过点 O 作 $OB\perp PM$ 于点 B.

$\because PN$ 与$\odot O$ 相切于点 $A, \therefore OA\perp PN$.

$\because$ 点 O 在 $\angle MPN$ 的平分线上,$OB\perp$

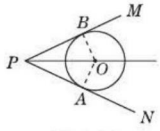
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

PM，$\therefore OB=OA$.

$\therefore$ 点 O 到直线 PM 的距离等于$\odot O$ 的半径，

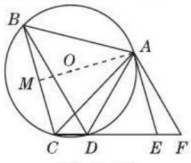
$\therefore PM$ 为$\odot O$ 的切线.

易错总结：利用切线的判定定理需满足两个条件：经过半径外端点，与这条半径垂直. 这两个条件缺一不可. 证明一条直线是圆的切线，当直线和圆未明确是否有公共点时，应“作垂线，证半径”，而本题易错解为“连半径，证垂直”.



（第 9 题）

10. **证明**：(1) 如图，连接 AO，并延长 AO 交 BC 于 M. 因为 $\triangle ABC$ 为等边三角形，O 为外心，所以 $AM\perp BC$.



（第 10 题）

因为 $AE/\!/BC$，所以 $AM\perp AE$，所以 EA 是$\odot O$ 的切线.

(2) 因为 $\triangle ABC$ 为等边三角形，所以 $\angle BCA=\angle BAC=60°$，所以 $\angle BDC=\angle BAC=60°$，$\angle BDA=\angle BCA=60°$，所以 $\angle ADF=60°$. 又因为 $DA=DF$，所以 $\triangle ADF$ 为等边三角形，所以 $\angle DAF=60°$，$AD=AF$，所以 $\angle BAD=\angle CAF$，又 $AB=AC$，所以 $\triangle BAD\cong\triangle CAF$，所以 $BD=CF$.

11. (1) **证明**：如图，作 $OE\perp AB$ 于 E.

因为$\odot O$ 与 BC 相切于点 C，

所以 $AC\perp BC$，

因为 $\angle AOD=\angle BAD$，$AD\perp BD$，

所以 $\angle OAD=\angle ABD$，

易知 $\angle OAD=\angle OBC$，

所以 $\angle ABD=\angle OBC$，

所以 $OE=OC$，

所以点 E 在$\odot O$ 上，

所以 AB 为$\odot O$ 的切线.

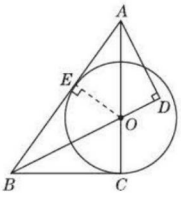
(2) **解**：由 $BC=6$，$\tan\angle ABC=\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{4}{3}$，得 $AC=8$，易知 $AB=10$，$BE=BC=6$，$AE=4$.

令 $OE=OC=x$，则在 $\mathrm{Rt}\triangle AEO$ 中，$(8-x)^2=4^2+x^2$，解得 $x=3$，所以 $OB=\sqrt{BE^2+OE^2}=\sqrt{6^2+3^2}=3\sqrt{5}$.

因为 $\dfrac{1}{2}AB\times OE=\dfrac{1}{2}OB\times AD$，

即 $\dfrac{1}{2}\times10\times3=\dfrac{1}{2}\times3\sqrt{5}\times AD$，

所以 $AD=2\sqrt{5}$.



（第 11 题）

12. (1) **证明**：如图，连接 OD，

$\because OB=OD$，$\therefore\angle ODB=\angle B$，

又 $\because\angle B=\angle CAD$，

$\therefore\angle CAD=\angle ODB$，

$\because$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 中，

$\angle CAD+\angle ADC=90°$，

$\therefore\angle ADC+\angle ODB=90°$.

$\therefore\angle ADO=180°-(\angle ADC+\angle ODB)=180°-90°=90°$，

$\therefore OD\perp AD$.

$\therefore AD$ 为$\odot O$ 的切线.

(2) **解**：设$\odot O$ 的半径为 r，

$\because$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$AC=BC\cdot\tan B=8\times\dfrac{1}{2}=4$，

$\therefore AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{4^2+8^2}=4\sqrt{5}$，

$\therefore OA=4\sqrt{5}-r$，

$\because$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 中，

$\tan\angle CAD=\tan B=\dfrac{1}{2}$，

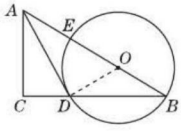
$\therefore CD=AC\cdot\tan\angle CAD=4\times\dfrac{1}{2}=2$，

$\therefore AD^2=AC^2+CD^2=4^2+2^2=20$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADO$ 中，$OA^2=OD^2+AD^2$，

即 $(4\sqrt{5}-r)^2=r^2+20$，

解得 $r=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$.



（第 12 题）

13. **解**：(1) 在 $\mathrm{Rt}\triangle ACB$ 中，$\because AC=3$ cm，$BC=4$ cm，$\angle ACB=90°$，$\therefore AB=5$ cm.

如图，连接 CD，$\because BC$ 为$\odot O$ 的直径，

$\therefore\angle ADC=\angle BDC=90°$.

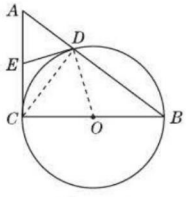
$\because\angle A=\angle A$，$\angle ADC=\angle ACB=90°$，

$\therefore\triangle ADC\backsim\triangle ACB$. $\therefore\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{AD}{AC}$，

则 $AD=\dfrac{AC^2}{AB}=\dfrac{9}{5}$(cm).

(2) 当点 E 是线段 AC 的中点时，直线 ED 与$\odot O$ 相切.

理由如下：如图，连接 OD，$\because DE$ 是 $\mathrm{Rt}\triangle ADC$ 的中线，$\therefore ED=EC$，$\therefore\angle EDC=\angle ECD$. $\because OC=OD$，$\therefore\angle ODC=\angle OCD$. $\therefore\angle EDO=\angle EDC+\angle ODC=\angle ECD+\angle OCD=\angle ACB=90°$. $\therefore ED\perp OD$，$\therefore$ 直线 ED 与$\odot O$ 相切.



（第 13 题）

*第 3 课时　切线长定理

1. C　**2.** D　**3.** C　**4.** C　**5.** $5\sqrt{3}$ cm

6. A　**7.** C　**8.** C　**9.** A

10. (1) **证明**：如图，连接 OD，

$\because DE$ 是$\odot O$ 的切线，

$\therefore\angle ODE=90°$.

$\therefore\angle ADE+\angle BDO=90°$.

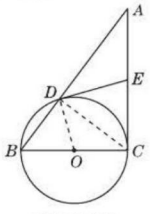
$\because\angle ACB=90°$，

$\therefore\angle A+\angle B=90°$.

$\because OD=OB$，

$\therefore\angle B=\angle BDO$.

$\therefore\angle ADE=\angle A$.



（第 10 题）

(2) **解**：如图，连接 CD.

$\because\angle ADE=\angle A$，

$\therefore AE=DE$.

$\because BC$ 是$\odot O$ 的直径，$\angle ACB=90°$，

$\therefore EC$ 是$\odot O$ 的切线.

$\therefore ED=EC$. $\therefore AE=EC=DE$.

$\because DE=10$，$\therefore AC=2DE=20$.

$\because BC$ 是$\odot O$ 的直径，

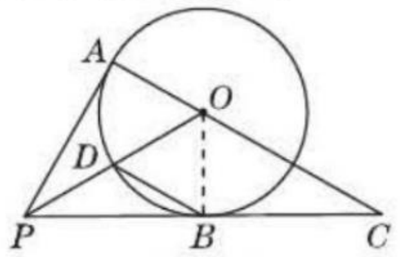
$\therefore\angle BDC=\angle ADC=90°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADC$ 中，$DC=\sqrt{20^2-16^2}=12$，设 $BD=x$，在 $\mathrm{Rt}\triangle BDC$ 中，$BC^2=x^2+12^2$，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$BC^2=(x+16)^2-20^2$，$\therefore x^2+12^2=(x+16)^2-20^2$，解得 $x=9$.

$\therefore BC=\sqrt{12^2+9^2}=15$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

11. 证明:(1)如图,连接 OB,



(第 11 题)

$\because PA, PB$ 是$\odot O$ 的切线,

$\therefore OA \perp AP, OB \perp BP$.

又 $OA = OB$,$\therefore PO$ 平分$\angle APC$.

(2)$\because OA \perp AP, OB \perp BP$,

$\therefore \angle CAP = \angle OBP = 90°$.

$\because \angle C = 30°$,

$\therefore \angle APC = 90° - \angle C = 90° - 30° = 60°$.

$\because PO$ 平分$\angle APC$,

$\therefore \angle OPC = \frac{1}{2}\angle APC = \frac{1}{2} \times 60° = 30°$.

$\therefore \angle POB = 90° - \angle OPC = 90° - 30° = 60°$.

又 $OD = OB$,

$\therefore \triangle ODB$ 是等边三角形.

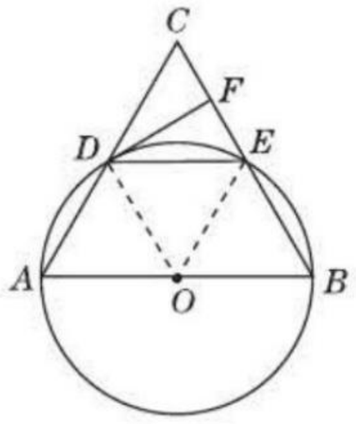
$\therefore \angle OBD = 60°$.

$\therefore \angle DBP = \angle OBP - \angle OBD = 90° - 60° = 30°$.

$\therefore \angle DBP = \angle C$.

$\therefore DB /\!/ AC$.

12. (1)**证明**:如图,连接 OD, OE.



(第 12 题)

$\because AB = 2$,

$\therefore OA = OD = OE = OB = 1$.

$\because DE = 1$,

$\therefore OD = OE = DE$.

$\therefore \triangle ODE$ 是等边三角形.

$\therefore \angle ODE = \angle OED = 60°$.

$\because DE /\!/ AB$,

$\therefore \angle AOD = \angle ODE = 60°$, $\angle EOB = \angle OED = 60°$.

$\therefore \triangle AOD$ 和$\triangle BOE$ 是等边三角形.

$\therefore \angle OAD = \angle OBE = 60°$.

$\therefore \angle CDE = \angle OAD = 60°$, $\angle CED = \angle OBE = 60°$.

$\therefore \triangle CDE$ 是等边三角形.

$\because DF$ 是$\odot O$ 的切线,

$\therefore OD \perp DF$.

$\therefore \angle EDF = 90° - 60° = 30°$.

$\therefore \angle DFE = 90°$.

$\therefore DF \perp CE$. $\therefore CF = EF$.

(2)**解**:相等.

理由:当点 E 运动至与点 B 重合时,BC 是$\odot O$ 的切线,

$\because \odot O$ 的切线 DF 交 BC 于点 F,

$\therefore BF = DF$.

$\therefore \angle BDF = \angle DBF$.

$\because AB$ 是直径,

$\therefore \angle ADB = \angle BDC = 90°$.

$\therefore \angle BDF + \angle FDC = \angle DBF + \angle C = 90°$.

$\therefore \angle FDC = \angle C$.

$\therefore DF = CF$.

$\therefore BF = CF$.

13. 解:(1)由切线长定理,得 $AE = AH$,$BE = BF$,$CF = CG$,$DG = DH$,

$\therefore AB + CD = AE + BE + CG + DG = AH + BF + CF + DH = BC + AD$,

即 $AB + CD = BC + AD$.

(2)过点 B 作$\odot O$ 的切线,交 AD 于点 M.

由(1)可知 $BM + CD = BC + MD$.

$\because AB < AM + BM$,

$\therefore AB + BM + CD < AM + BM + BC + MD$,

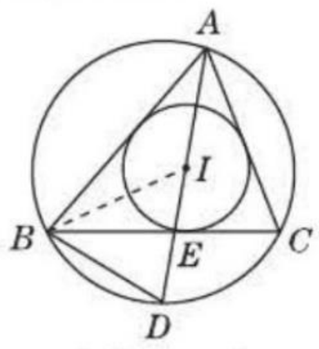
即 $AB + CD < BC + AD$.

24.5 三角形的内切圆

1. C **2.** B **3.** B **4.** B **5.** C **6.** 70°

7. C **8.** C **9.** D **10.** C **11.** C

12. 证明:如图,连接 BI.



(第 12 题)

$\because$ 点 I 是$\triangle ABC$ 的内心,

$\therefore BI$ 平分$\angle ABC$. $\therefore \angle ABI = \angle CBI$.

又$\because AD$ 平分$\angle BAC$,$\therefore \angle BAD = \angle DAC$.

$\because \angle DAC$ 与 $\angle DBC$ 均为$\overset{\frown}{DC}$所对的圆周角,

$\therefore \angle DAC = \angle DBC$.

$\therefore \angle BAD = \angle DBC$.

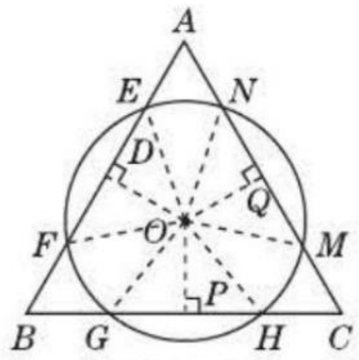
$\therefore \angle ABI + \angle BAD = \angle CBI + \angle DBC$,

$\therefore \angle BID = \angle IBD$.

$\therefore DI = DB$.

易错总结:三角形的内心是三角形内切圆的圆心,即三角形三条角平分线的交点;三角形的外心是三角形外接圆的圆心,即三角形三边垂直平分线的交点. 本题中既出现了三角形的外接圆,又出现了三角形的内切圆,易出现混淆三角形的内心与外心的概念而造成的错误.

13. 证明:如图,过点 O 作 $OD \perp AB$ 于点 D,$OP \perp BC$ 于点 P,$OQ \perp AC$ 于点 Q,



(第 13 题)

连接 OE, OF, OG, OH, OM, ON.

$\because EF = GH = MN$, $OE = OF = OG = OH = OM = ON$,

$\therefore \triangle OEF \cong \triangle OGH \cong \triangle OMN$.

$\therefore OD = OP = OQ$.

$\therefore$ 点 O 是$\triangle ABC$ 的内心.

14. 解:(1)$\because BC = 5, AC = 6, AB = 9$,

$\therefore p = \frac{BC + AC + AB}{2} = \frac{5 + 6 + 9}{2} = 10$.

$\therefore S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{10 \times 5 \times 4 \times 1} = 10\sqrt{2}$.

故$\triangle ABC$ 的面积是 $10\sqrt{2}$.

(2)$\because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}r(AB + BC + AC)$,

$\therefore 10\sqrt{2} = \frac{1}{2}r(9 + 5 + 6)$,

解得 $r = \sqrt{2}$.

故$\triangle ABC$ 的内切圆半径 $r = \sqrt{2}$.

15. 证明:(1)$\because E$ 是$\triangle ABC$ 的内心,

$\therefore \angle BAE = \angle CAE$, $\angle EBA = \angle EBC$.

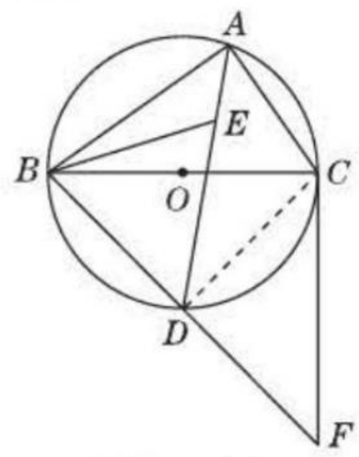
$\because \angle BED = \angle BAE + \angle EBA$,

$\angle DBE = \angle EBC + \angle DBC$,

$\angle DBC = \angle CAE$,

$\therefore \angle DBE = \angle DEB$.

$\therefore DB = DE$.



(第 15 题)

(2)如图,连接 CD.

$\because \angle DAB = \angle DAC$,

$\therefore \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{CD}$. $\therefore BD = CD$.

$\because BD = DF$,$\therefore CD = DB = DF$.

$\therefore \angle DBC = \angle DCB$, $\angle DCF = \angle DFC$.

$\because BC$ 是$\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle BDC = 90°$.

$\therefore \angle DBC = \angle DCB = \angle DCF = \angle DFC = 45°$.

$\therefore \angle BCF = 90°$,即 $BC \perp CF$.

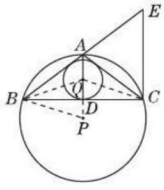
$\therefore$ 直线 CF 是$\odot O$ 的切线.

16. (1)**解**:$\because AD$ 是$\triangle ABC$ 的中线,

$\therefore$ 点 D 是 BC 的中点,

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

又∵ $CE/\!/AD$，
∴ AD 为△BCE 的中位线，
∴ $CE=2AD=2\times3=6$.
(2)**证明**：∵ $CE/\!/AD$，
∴ $\angle BAD=\angle E$，$\angle ACE=\angle CAD$.
又∵ $\angle BAD=\angle CAD$，
∴ $\angle ACE=\angle E$. ∴ $AC=AE$，
又∵ $AB=AE$，∴ $AB=AC$.
∴ △ABC 为等腰三角形.
(3)**解**：如图，⊙Q 与 ⊙P 分别为△ABC 的内切圆与外接圆，连接 BP，PD，易知点 Q 在 AD 上.



（第 16 题）

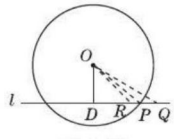
∵ △ABC 是等腰三角形，AD 是△ABC 的 BC 边上的中线，
∴ $AD\perp BC$，
又∵ $AD=3$，$BD=CD=\frac{1}{2}BC=4$，
∴ $AB=AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$.
易知 P，D，A 三点共线，设⊙P 的半径为 R，⊙Q 的半径为 r，
在 Rt△BDP 中，$R^2-(R-3)^2=4^2$，
解得 $R=\frac{25}{6}$.
∴ $PD=\frac{25}{6}-3=\frac{7}{6}$.
连接 BQ，CQ，在△ABC 中，$\frac{1}{2}BC\cdot AD=\frac{1}{2}AB\cdot r+\frac{1}{2}AC\cdot r+\frac{1}{2}BC\cdot r$，
即 $\frac{1}{2}\times8\times3=\frac{1}{2}\times5\times r+\frac{1}{2}\times5\times r+\frac{1}{2}\times8\times r$，解得 $r=\frac{4}{3}$.
∴ $PQ=\frac{4}{3}+\frac{7}{6}=\frac{5}{2}$.

阶段方法技巧训练（三）

专训 1

1. B　**2**. C

3. **解**：如图，连接 OR，OP，OQ.



（第 3 题）

∵ $PD=4$ cm，$OD=3$ cm，且 $OD\perp l$，
∴ $OP=\sqrt{PD^2+OD^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5(cm)=r$.
∴ 点 P 在⊙O 上.
∵ $QD=5$ cm，∴ $OQ=\sqrt{QD^2+OD^2}=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}(cm)>5$ cm$=r$.
∴ 点 Q 在⊙O 外.
∵ $RD=3$ cm，
∴ $OR=\sqrt{RD^2+OD^2}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}(cm)<5$ cm$=r$.
∴ 点 R 在⊙O 内.

4. B

5. **解**：直线 BD 与⊙C 相交.
理由如下：∵ $\angle ACB=90°$，$\angle A=30°$，
∴ $AB=2BC=8$ cm.
∴ $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=4\sqrt{3}$(cm).
由三角形的面积公式得 $\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}AB\cdot CD$，
∴ $CD=\frac{AC\cdot BC}{AB}=2\sqrt{3}$(cm).
∵ $2\sqrt{3}$ cm<4 cm，
∴ 直线 BD 与⊙C 相交.

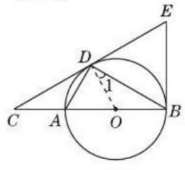
6. C

7. (1)公切线有 1 条
(2)公切线有 3 条
(3)公切线有4 条
(4)公切线有 2 条
(5)公切线有 0 条

8. **解**：解方程 $x^2-5x+6=0$，
得 $x_1=2$，$x_2=3$.
∴ ⊙O_1 与⊙O_2 的半径分别为 2，3.
∵ $2+3<6$，∴ ⊙O_1 与⊙O_2 外离.

专训 2

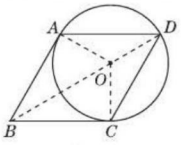
1. **解**：(1)直线 CD 与⊙O 相切. 理由如下：
连接 OD，如图，



（第 1 题）

∵ AB 为直径，∴ $\angle ADB=90°$.
即 $\angle ADO+\angle1=90°$.
∵ $OB=OD$，∴ $\angle CBD=\angle1$.
又∵ $\angle CDA=\angle CBD$，∴ $\angle1=\angle CDA$.
∴ $\angle CDA+\angle ADO=90°$.
即 $\angle CDO=90°$.
∴ $OD\perp CD$，
又∵ OD 是⊙O 的半径，
∴ CD 是⊙O 的切线，即直线 CD 与⊙O 相切.
(2)∵ $AC=2$，⊙O 的半径是 3，
∴ $OC=2+3=5$，$OD=3$.
在 Rt△CDO 中，由勾股定理得 $CD=4$，
∵ CE 切⊙O 于 D，EB 切⊙O 于 B，
∴ $DE=EB$，$\angle CBE=90°$.
设 $DE=EB=x$，
在 Rt△CBE 中，由勾股定理得 $CE^2=BE^2+BC^2$，
则 $(4+x)^2=x^2+(5+3)^2$，解得 $x=6$. 即 $BE=6$.

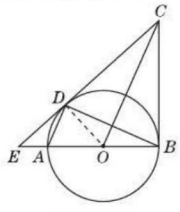
2. (1)**证明**：连接 OA，OB，OC，如图，



（第 2 题）

∵ AB 与⊙O 相切于 A 点，∴ $OA\perp AB$.
即 $\angle OAB=90°$.
∵ 四边形 $ABCD$ 为菱形，∴ $BA=BC$.
又∵ $OA=OC$，$OB=OB$，
∴ △ABO≌△CBO(SSS).
∴ $\angle BCO=\angle BAO=90°$.
∴ $OC\perp BC$，∴ BC 为⊙O 的切线.
(2)**解**：如图，连接 BD，
∵ △ABO≌△CBO，∴ $\angle ABO=\angle CBO$.
∵ 四边形 $ABCD$ 为菱形，
∴ BD 平分 $\angle ABC$. ∴ 点 O 在 BD 上.
∵ $OD=OC$，∴ $\angle ODC=\angle OCD$.
∵ $\angle BOC=\angle ODC+\angle OCD$，
∴ $\angle BOC=2\angle ODC$.
∵ $CB=CD$，∴ $\angle OBC=\angle ODC$.
∴ $\angle BOC=2\angle OBC$.
∵ $\angle BOC+\angle OBC=90°$，
∴ $\angle OBC=30°$.
∴ $\angle ABC=2\angle OBC=60°$.

3. (1)**证明**：如图，连接 DO.



（第 3 题）

∵ $AD/\!/OC$，
∴ $\angle DAO=\angle COB$，$\angle ADO=\angle COD$.
又∵ $OA=OD$，
∴ $\angle DAO=\angle ADO$.
∴ $\angle COD=\angle COB$.
在△COD 和△COB 中，
∵ $OD=OB$，$\angle COD=\angle COB$，$OC=OC$，
∴ △COD≌△COB(SAS).
∴ $\angle CDO=\angle CBO$.
∵ BC 是⊙O 的切线，
∴ $\angle CBO=90°$.
∴ $\angle CDO=90°$. ∴ CD 是⊙O 的切线.
(2)**解**：设⊙O 的半径为 r，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

则 $OD=r, OE=r+1$,

$\because CD$ 是 $\odot O$ 的切线,

$\therefore \angle EDO=90°$.

$\therefore ED^2+OD^2=OE^2$.

$\therefore 3^2+r^2=(r+1)^2$. 解得 $r=4$.

$\therefore \odot O$ 的半径为 4.

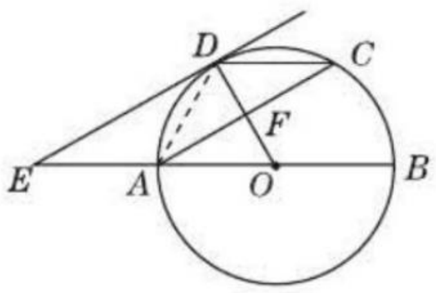
4. (1) **证明**: $\because D$ 为 $\overset{\frown}{AC}$ 的中点,

$\therefore OD \perp AC$.

$\because AC /\!/ DE, \therefore OD \perp DE$.

$\therefore DE$ 是 $\odot O$ 的切线.

(2) **解**: 如图,连接 DA.



(第 4 题)

$\because D$ 为 $\overset{\frown}{AC}$ 的中点, $\therefore AF=CF$.

$\because OD \perp DE, OA=AE$,

$\therefore AD=OA=OD$.

$\because OD \perp AC, \therefore F$ 为 OD 的中点,

即 $OF=FD$, 在 $\triangle AFO$ 和 $\triangle CFD$ 中,

$$\begin{cases} AF=CF, \\ \angle AFO=\angle CFD, \\ OF=DF, \end{cases}$$

$\therefore \triangle AFO \cong \triangle CFD$(SAS).

$\therefore S_{\triangle AFO}=S_{\triangle CFD}$.

$\therefore S_{四边形ACDE}=S_{\triangle ODE}$.

在 Rt$\triangle ODE$ 中, $OD=OA=AE=4$,

$\therefore OE=8$,

$\therefore DE=\sqrt{OE^2-OD^2}=4\sqrt{3}$,

$\therefore S_{四边形ACDE}=S_{\triangle ODE}=\frac{1}{2}\times OD\times DE=\frac{1}{2}\times 4\times 4\sqrt{3}=8\sqrt{3}$.

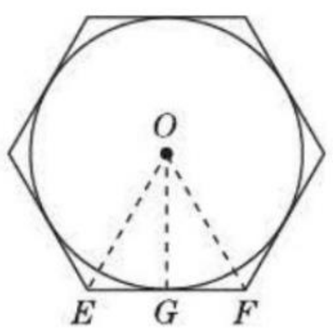
24.6 正多边形与圆

1. A **2.** B **3.** A **4.** C **5.** B **6.** A

7. B **8.** A

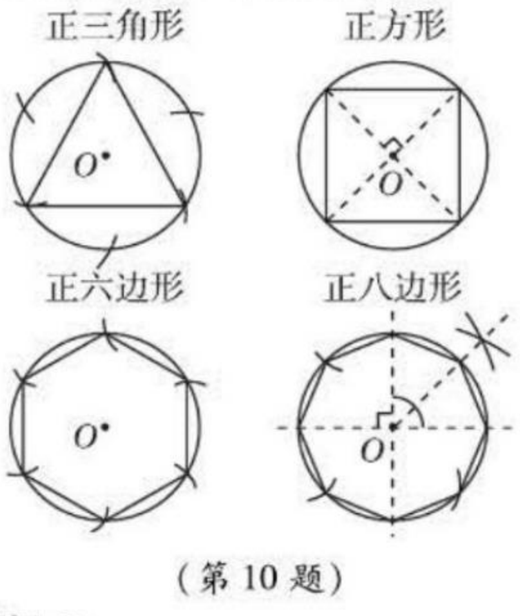
9. $2\sqrt{3}$ **点拨**: 如图,设 EF 与 $\odot O$ 相切于点 G,连接 OE, OG, OF,易知 $OG \perp EF$, $\triangle OEF$ 为等边三角形, OG 为 $\angle FOE$ 的平分线,即 $\angle EOG=30°$,

$\therefore EG=OG\times\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$,则 $S_{\odot O}\approx 12\times\frac{1}{2}\times 1\times\frac{\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}$.



(第 9 题)

10. **解**: (作法不唯一)如图所示:



(第 10 题)

11. **错解**: B

诊断: 设正多边形的边数为 n. 因为正多边形内角和为 $(n-2)\cdot 180°$,正多边形外角和为 360°,根据题意得 $(n-2)\cdot 180°=360°\times 2$,解得 $n=6$,故正多边形为正六边形. 边长为 2 的正六边形可以分成六个边长为 2 的正三角形,所以正多边形的半径等于 2. 产生错误的原因是认为正多边形的边心距是正多边形的半径,计算得出错误的结果 $\sqrt{3}$,最后导致错选 B.

正解: A

12. (1) **证明**: $\because$ 六边形 $ABCDEF$ 为正六边形,

$\therefore AB=BC, \angle ABC=\angle C=120°$.

在 $\triangle ABG$ 与 $\triangle BCH$ 中,

$$\begin{cases} AB=BC, \\ \angle ABG=\angle C, \\ BG=CH, \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABG \cong \triangle BCH$.

(2) **解**: 由(1)知 $\triangle ABG \cong \triangle BCH$,

$\therefore \angle BAG=\angle HBC$.

$\therefore \angle APH=\angle ABP+\angle BAG=\angle ABP+\angle HBC=\angle ABC=120°$.

13. **解**: (1)如图①,首先作直径 AD,然后分别以 A, D 为圆心, OA 长为半径画弧,分别交 $\odot O$ 于点 B, F, C, E,连接 AB, BC, CD, DE, EF, AF,则正六边形 $ABCDEF$ 即为所求. (作法不唯一)

(2) 四边形 $BCEF$ 是矩形.

证明: 如图②,连接 OE.

$\because$ 六边形 $ABCDEF$ 是正六边形,

$\therefore AB=AF=DE=DC=FE=BC$.

$\therefore \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AF}=\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{DC}$.

$\therefore \overset{\frown}{BF}=\overset{\frown}{CE}. \therefore BF=CE$.

$\therefore$ 四边形 $BCEF$ 是平行四边形.

$\because \angle EOD=\frac{360°}{6}=60°, OE=OD$,

$\therefore \triangle EDO$ 是等边三角形.

$\therefore \angle OED=\angle ODE=60°$.

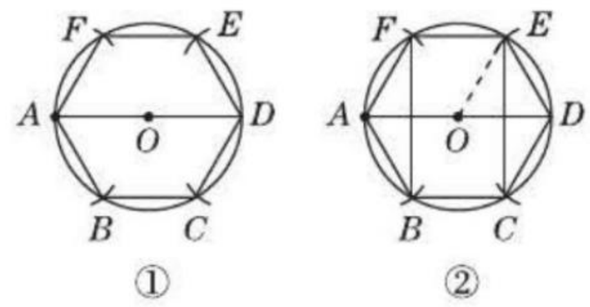
$\therefore \angle EDC=\angle FED=2\angle ODE=120°$.

又 $\because DE=DC$,

$\therefore \angle DEC=\angle DCE=30°$.

$\therefore \angle CEF=\angle DEF-\angle DEC=90°$.

$\therefore$ 四边形 $BCEF$ 是矩形.



(第 13 题)

14. **解**: (1)如图,连接 BD.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形,

$\therefore \angle BAD+\angle C=180°$.

$\because \angle C=120°, \therefore \angle BAD=60°$.

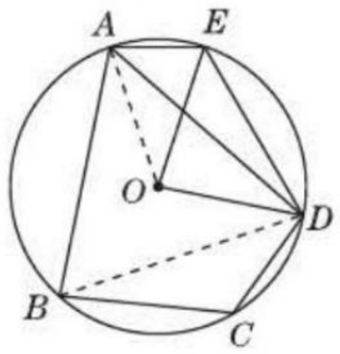
又 $\because AB=AD, \therefore \triangle ABD$ 是等边三角形.

$\therefore \angle ABD=60°$.

$\because$ 四边形 $ABDE$ 是 $\odot O$ 的内接四边形,

$\therefore \angle AED+\angle ABD=180°$.

$\therefore \angle AED=120°$.



(第 14 题)

(2) 如图,连接 OA. $\because \angle ABD=60°$,

$\therefore \angle AOD=2\angle ABD=120°$.

又 $\because \angle DOE=90°$,

$\therefore \angle AOE=\angle AOD-\angle DOE=30°$,

$\therefore n=\frac{360°}{30°}=12$.

15. **解**: (1)60° (2)90°; 108°

(3) $\angle APN=\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$.

24.7 弧长与扇形面积

第 1 课时 弧长与扇形面积

1. C **2.** A **3.** C **4.** C **5.** C **6.** C

7. C **8.** B

9. $\frac{1}{2}\pi$ **点拨**: $\because \angle ACB=90°, AC=BC=2$,

$\therefore AB=2\sqrt{2}$. 则 $S_{阴影}=S_{扇形ABB'}+S_{\triangle AB'C'}-S_{扇形ACC'}-S_{\triangle ABC}=S_{扇形ABB'}-S_{扇形ACC'}=\frac{45}{360}\times\pi\times(2\sqrt{2})^2-\frac{45}{360}\times\pi\times 2^2=\frac{1}{2}\pi$.

10. **解**: $\because \overset{\frown}{AB}$ 所对的圆周角为 30°,

$\therefore \overset{\frown}{AB}$ 所对的圆心角为 60°,

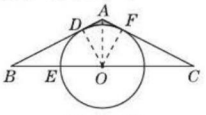
$\therefore \overset{\frown}{AB}$ 的长 $=\frac{60\times\pi\times 30}{180}=10\pi$(cm).

易错总结: 在公式 $l=\frac{n\pi R}{180}, S_{扇形}=$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\frac{n\pi R^2}{360}$中，n是圆心角的度数. 题干给出的是圆周角的度数，不能直接代入公式计算，要求出圆心角的度数后再代入公式计算. 本题易错解为$\overset{\frown}{AB}$的长$=\frac{30\times\pi\times30}{180}=5\pi(\text{cm})$.

11. (1)**证明**：如图，过点O作$OF\perp AC$，垂足为点F，连接OD，OA.



（第11题）

$\because\triangle ABC$是等腰三角形，点O是底边BC的中点，

$\therefore AO$是$\triangle ABC$的高线，也是$\angle BAC$的平分线，

$\because$腰AB与$\odot O$相切于点D，

$\therefore OD\perp AB$，

又$\because OF\perp AC$，

$\therefore OF=OD$，即OF是$\odot O$的半径，

$\therefore AC$是$\odot O$的切线.

(2)**解**：在Rt$\triangle BOD$中，设$OD=OE=x$，则$OB=x+1$，

由勾股定理，得：

$(x+1)^2=x^2+(\sqrt{3})^2$，

解得$x=1$，即$OD=OE=1$.

$\therefore OB=2$.

$\because\sin\angle BOD=\frac{BD}{OB}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore\angle BOD=60°$.

$\therefore\angle AOD=90°-\angle BOD=30°$，

易知$\triangle DAO\cong\triangle FAO$，

$\therefore\angle AOF=\angle AOD=30°$，

$\therefore\angle DOF=60°$.

又$\because AD=OD\cdot\tan\angle AOD=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore S_{\text{阴影}}=S_{\text{四边形}ADOF}-S_{\text{扇形}DOF}=\frac{1}{2}AD\times OD\times2-\frac{60}{360}\pi\times1^2=\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{2\sqrt{3}-\pi}{6}$.

12. **解**：(1)连接OD，

$\because OA\perp OB$，$FD/\!/OB$，

$\therefore\angle OCD=90°$.

设$OC=a$，则$OA=2a=OD$.

在$\triangle OCD$中，由勾股定理，

得$CD^2+OC^2=OD^2$，

即$(\sqrt{3})^2+a^2=4a^2$，

解得$a_1=1$，$a_2=-1$(舍去).

$\therefore$半径OA的长$2a=2$.

(2)$S_{\triangle OCD}=\frac{1}{2}OC\cdot CD=\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

在Rt$\triangle OCD$中，$\because OC=1$，$OD=2$，

$\therefore\angle ODC=30°$.

又$\because FD/\!/OB$，$\therefore\angle DOB=30°$.

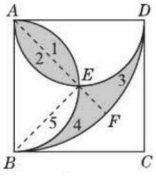
$S_{\text{阴影}}=S_{\triangle OCD}+S_{\text{扇形}OBD}-S_{\text{扇形}OCE}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{12}\pi\cdot2^2-\frac{1}{4}\pi\cdot1^2$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{12}$.

13. C　**点拨**：因为五边形的内角和为540°，所以阴影部分的面积等于五个圆的面积减去$\frac{540}{360}$个圆的面积.

14. **解**：如图，连接AE，并延长交弧BD于点F，连接BE. 由轴对称的性质可知$S_{\text{扇形}ABF}=S_{\text{扇形}ADF}$，$S_1=S_2=S_5$，$S_3=S_4$.



（第14题）

$\because\angle BAE=\angle DAE=45°$，

$\therefore S_{\text{半圆形}AB}=\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{\pi a^2}{8}$，

$S_{\text{扇形}ABF}=\frac{45\pi a^2}{360}=\frac{\pi a^2}{8}$.

$\therefore S_{\text{半圆形}AB}=S_{\text{扇形}ABF}$，

$\therefore S_1=S_4=S_2=S_3=S_5$.

又$\because S_1+S_5=S_{\text{半圆形}AB}-S_{\triangle ABE}=\frac{\pi a^2}{8}-\frac{a^2}{4}$，

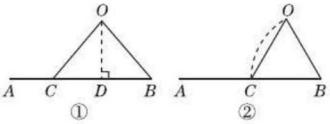
$\therefore S_{\text{阴影}}=S_1+S_2+S_3+S_4=2(S_1+S_5)=2\left(\frac{\pi a^2}{8}-\frac{a^2}{4}\right)=\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)a^2$.

15. **解**：(1)如图①，作$OD\perp AB$，垂足为D.

$\because OC=OB$，$OD\perp AB$，$\therefore CD=BD$.

在Rt$\triangle OBD$中，$BD=OB\times\cos50°\approx60\times0.64=38.4(\text{cm})$，

则$AC=AB-2BD\approx120-76.8=43.2(\text{cm})$.



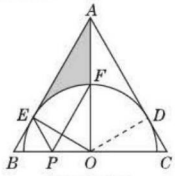
（第15题）

(2)因为BO的长始终不变，所以点O在以B点为圆心，半径为60 cm的弧上运动，如图②，此时$\triangle OBC$为等边三角形，则扇形的圆心角为60°.

所以点O在此过程中运动的路径长$=\frac{60\times\pi\times60}{180}\approx\frac{60\times3.14\times60}{180}=62.8(\text{cm})$.

点拨：(1)过O作$OD\perp AB$于D，在Rt$\triangle OBD$中运用三角函数解答；(2)找到点O的运动轨迹为弧CO，故转化为求弧长，再利用等边三角形中的特殊角进行求解.

16. (1)**证明**：如图，过点O作AC的垂线OD，垂足为D.



（第16题）

$\because AB=AC$，$AO\perp BC$于点O，

$\therefore\angle BAO=\angle CAO$.

$\because OE\perp AB$，$OD\perp AC$，

$\therefore OE=OD$.

$\therefore AC$是$\odot O$的切线.

(2)**解**：$\because$点F是AO的中点，

$\therefore AO=2OF$.

$\because OF=OE=3$，

$\therefore AO=6$.

在Rt$\triangle AOE$中，$\cos\angle AOE=\frac{OE}{OA}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$，

$\therefore\angle AOE=60°$.

$\therefore AE=OE\times\tan\angle AOE=3\times\tan60°=3\sqrt{3}$.

$\therefore S_{\text{阴影}}=\frac{1}{2}\times AE\times EO-\frac{60\times\pi\times3^2}{360}=\frac{1}{2}\times3\sqrt{3}\times3-\frac{60\times\pi\times3^2}{360}=\frac{9\sqrt{3}-3\pi}{2}$.

(3)**解**：$BP=\sqrt{3}$.

第2课时　圆锥的侧面积和全面积

1. C　**2.** D　**3.** D　**4.** A　**5.** B　**6.** D

7. C　**8.** B　**9.** C

10. **错解**：B

诊断：误认为以斜边为轴将直角三角形旋转一周所形成的几何体的表面积是两个共底面的圆锥的侧面积与一个底面积之和.

正解：C

11. **解**：(1)设此圆锥的底面半径为r cm，母线长$AB=l$ cm.

$\because2\pi r=\pi l$，

$\therefore l=2r$，即$l:r=2:1$.

$\therefore$圆锥的母线长与底面半径之比为2:1.

(2)由(1)知$AB=AC=2BO=2CO$.

$\therefore AB=AC=BC$.

$\therefore\angle BAC=60°$.

(3)设$OB=x$ cm，则$AB=2x$ cm.

由题意得$x^2+(3\sqrt{3})^2=(2x)^2$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

解得 $x_1=3, x_2=-3$(舍去).

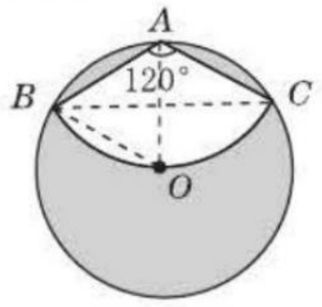
$\therefore OB=3$ cm, $AB=6$ cm.

$\therefore$ 圆锥的侧面积为 $\pi\times6\times3=18\pi(\text{cm}^2)$.

12. **解**:(1)如图,设圆心为 O,连接 OA, OB, OC, BC. 在 $\triangle ABO$ 和 $\triangle ACO$ 中,

$OB=OC, AB=AC, OA=OA$,

$\therefore \triangle ABO\cong\triangle ACO$.



(第 12 题)

又$\because \angle BAC=120°$,

$\therefore \angle BAO=\angle CAO=60°$.

又$\because OA=OB$,

$\therefore \triangle ABO$ 为等边三角形,

$\therefore AB=OA=\frac{1}{2}$ m,

$\therefore$ 扇形 ABC 的面积为

$$\frac{120\times\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^2}{360}=\frac{\pi}{12}(\text{m}^2).$$

$\therefore$ 被剪掉的阴影部分的面积为 $\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{6}(\text{m}^2)$.

(2)设该圆锥底面圆的半径为 r m,

则 $\frac{120\times\pi\times\frac{1}{2}}{180}=2\pi r$,解得 $r=\frac{1}{6}$.

故该圆锥底面圆的半径是 $\frac{1}{6}$ m.

13. (1) **证明**:在正方形 $ABCD$ 中, $AB=BC=AD=2$, $\angle ABC=90°$,

$\because \triangle BEC$ 绕点 B 逆时针旋转 $90°$ 得到 $\triangle BFA$,

$\therefore \triangle ABF\cong\triangle CBE$.

$\therefore \angle FAB=\angle ECB$, $\angle ABF=\angle CBE=90°$, $AF=CE$.

$\therefore \angle AFB+\angle FAB=90°$.

$\because$ 线段 FA 绕点 F 顺时针旋转 $90°$ 得线段 FG,

$\therefore \angle AFB+\angle CFG=\angle AFG=90°$.

$\therefore \angle CFG=\angle FAB=\angle ECB$.

$\therefore EC/\!/FG$.

$\because AF=CE, AF=FG$. $\therefore EC=FG$.

$\therefore$ 四边形 $EFGC$ 是平行四边形.

$\therefore EF/\!/CG$.

(2) **解**:$\because AB=AD=2$, E 是 AB 的中点,

$\therefore BF=BE=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times2=1$.

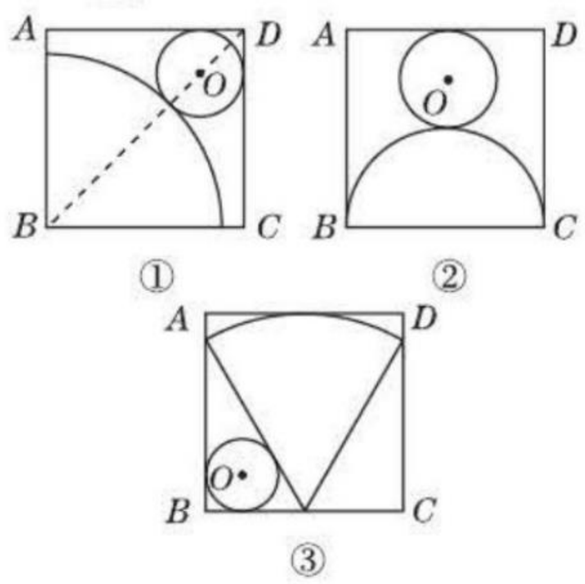
$\therefore AF=\sqrt{AB^2+BF^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$.

由平行四边形的性质得, $\triangle FEC\cong\triangle CGF$, $\therefore S_{\triangle FEC}=S_{\triangle CGF}$.

$\therefore S_{\text{阴影}}=S_{\text{扇形}BAC}+S_{\triangle ABF}+S_{\triangle FGC}-S_{\text{扇形}FAG}=\frac{90\cdot\pi\cdot2^2}{360}+\frac{1}{2}\times2\times1+\frac{1}{2}\times(1+2)\times1-\frac{90\cdot\pi\cdot(\sqrt{5})^2}{360}=\frac{5}{2}-\frac{\pi}{4}$.

14. **解**:(1)设计方案示意图如图所示:

(2)使得正方形铁皮的利用率最高的裁剪方案如图①所示. 连接 BD. 设圆的半径为 r cm,扇形的半径为 R cm,则有 $\frac{90\times\pi\times R}{180}=2r\times\pi$, $\therefore R=4r$.



(第 14 题)

$\because$ 正方形的边长为 40 cm,

$\therefore BD=40\sqrt{2}$ cm.

$\because$ 圆心 O 在 BD 上, $\therefore R+r+\sqrt{2}r=BD$.

即 $4r+r+\sqrt{2}r=40\sqrt{2}$.

$\therefore r=\frac{200\sqrt{2}-80}{23}$(cm). 则此时圆锥模型底面圆的半径为 $\frac{200\sqrt{2}-80}{23}$ cm.

点拨:(1)题答案不唯一.

24.8 综合与实践 进球线路与最佳射门角

1. B **点拨**:因为点 D 距离球门 AB 的中心比较近,所以 $\angle ADB$ 大于 $\angle ACB$,所以在 D 处射门进球的可能性大.

2. B **点拨**:观察可知 $\angle A<\angle C<\angle B$. 故在 B 点处射门最好.

3. **解**:甲、乙两个人所在的位置对球门 AB 的张角一样大. 根据圆周角定理的推论可得 $\angle ADB=\angle ACB$.

4. **解**:货轮 P 在航行时,只要使 $\angle APB<55°$,即在 $\overset{\frown}{ACB}$ 外行驶,就能避开暗礁.

点拨:当 P 在圆弧上时,正好处于危险区域边缘,此时 $\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}\times110°=55°$;当 P 处于危险区域内时,有 $\angle APB>\frac{1}{2}\angle AOB=55°$;当 P 处于危险区域外时,有 $\angle APB<\frac{1}{2}\angle AOB=55°$.

阶段方法技巧训练(四)

专训 1

1. (1) **证明**:$\because AB, CD$ 是 $\odot O$ 的直径,

$\therefore AB=CD$, $\angle ADB=\angle CBD=90°$.

在 Rt$\triangle ABD$ 和 Rt$\triangle CDB$ 中,

$\begin{cases}AB=CD,\\ BD=DB.\end{cases}$

$\therefore$ Rt$\triangle ABD\cong$Rt$\triangle CDB$(HL),

即 $\triangle ABD\cong\triangle CDB$.

(2) **解**:$\because BE$ 是 $\odot O$ 的切线,

$\therefore AB\perp BE$.

$\therefore \angle ABE=90°$.

$\because \angle DBE=37°$.

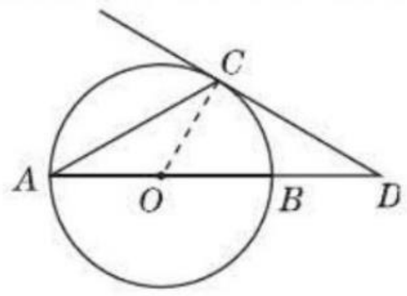
$\therefore \angle ABD=53°$.

$\because OD=OA$,

$\therefore \angle ODA=\angle BAD=90°-53°=37°$,

即 $\angle ADC$ 的度数为 $37°$.

2. **解**:如图,连接 OC. $\because \angle A=30°$,



(第 2 题)

$\therefore \angle COD=60°$.

$\because DC$ 切 $\odot O$ 于点 C,

$\therefore \angle OCD=90°$.

$\therefore \angle D=30°$.

$\because OD=30$ cm, $\therefore OC=\frac{1}{2}OD=15$ cm.

$\therefore AB=2OC=30$ cm.

3. (1) **证明**:连接 OD,如图.

$\because AD$ 平分 $\angle BAC$,

$\therefore \angle BAD=\angle CAD$.

$\therefore \overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{BD}$.

$\therefore OD\perp BC$.

$\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle ACB=90°$.

$\because DE\perp AC$,

$\therefore \angle E=90°$.

$\therefore \angle E=\angle ACB$.

$\therefore BC/\!/EF$.

$\therefore OD\perp EF$.

$\therefore EF$ 是 $\odot O$ 的切线.

(2) **解**:连接 OC,设 OD 交 BC 于 G,如图,

$\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径, $\therefore \angle ACB=90°$.

又$\because DE\perp AC, OD\perp EF$,

$\therefore$ 四边形 $CEDG$ 为矩形.

$\therefore DG=CE=2$.

易知 G 为 BC 的中点.

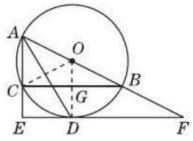
又$\because O$ 为 AB 的中点,

$\therefore OG$ 为 $\triangle ABC$ 的中位线.

$\therefore OG/\!/AC, OG=\frac{1}{2}AC=2$.

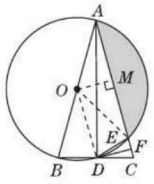
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore OD=4$. $\therefore OD=OC=OA=AC=4$.
$\therefore \triangle OAC$ 为等边三角形.
$\therefore \angle BAC=60°$.
$\because OG/\!/AC$,
$\therefore \angle BOD=60°$.
$\therefore \overset{\frown}{BD}$的长度为$\frac{60\pi\times4}{180}=\frac{4\pi}{3}$.



（第3题）

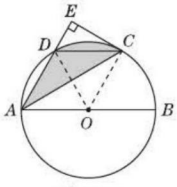
4. (1)**解**:如图,连接OE. $\because AB$是$\odot O$的直径,$\therefore AD\perp BC$. 又$\because AB=AC$,
$\therefore DB=DC$,$\angle DAB=\angle DAC$.
在Rt$\triangle ACD$中,$DF\perp AC$,易得$\angle DAC=\angle CDF=15°$. $\therefore \angle OAE=30°$.
$\because OA=OE$,$\therefore \angle OEA=\angle OAE=30°$,
$\therefore \angle AOE=120°$.
过点O作$OM\perp AE$于点M,
则$\angle AOM=\angle EOM=60°$,$AM=ME$.
$\because OA=3$,$\therefore OM=OA\cdot\cos 60°=\frac{3}{2}$,
$AM=OA\cdot\sin 60°=\frac{3\sqrt{3}}{2}$,则$AE=3\sqrt{3}$.
$\therefore S_{阴影}=S_{扇形OAE}-S_{\triangle OAE}=\frac{120\pi\times3^2}{360}-\frac{1}{2}\times3\sqrt{3}\times\frac{3}{2}=3\pi-\frac{9\sqrt{3}}{4}$.



（第4题）

(2)**证明**:如图,连接OD,
$\because OA=OB$,$DB=DC$,
$\therefore OD$为$\triangle ABC$的中位线,
$\therefore OD/\!/AC$.
$\because DF\perp AC$,
$\therefore DF\perp OD$.
$\therefore DF$是$\odot O$的切线.
(3)**证明**:$\because \angle DAB=\angle DAC$,
$\therefore DB=DE$.
$\because DB=DC$,
$\therefore DE=DC$.
又$\because DF\perp AC$,
$\therefore \angle EDF=\angle CDF$.
在(1)中已证$\angle CDF=\angle DAC$,
$\therefore \angle EDF=\angle DAC$.

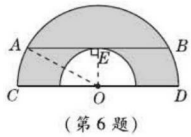
5. (1)**证明**:如图,连接OC.
$\because$点C,D为半圆AB的三等分点,
$\therefore \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{BC}$.
$\therefore \angle AOD=\angle COD=\angle BOC$.
$\therefore \angle BOC=\frac{1}{2}\angle BOD$.
又$\because \angle BAD=\frac{1}{2}\angle BOD$,
$\therefore \angle BOC=\angle BAD$.
$\therefore OC/\!/AD$.
$\because CE\perp AD$,
$\therefore CE\perp OC$.
$\therefore CE$是$\odot O$的切线.



（第5题）

(2)**解**:如图,连接OD.
$\because \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{BC}$,
$\therefore \angle COD=\angle BOC=\frac{1}{3}\times180°=60°$.
$\because OD=OC$,
$\therefore \triangle COD$是等边三角形.
$\therefore \angle OCD=60°$.
又$\because \angle BOC=60°$,
$\therefore CD/\!/AB$.
$\therefore S_{\triangle ACD}=S_{\triangle COD}$.
$\therefore S_{阴影}=S_{扇形COD}=\frac{60\cdot\pi\times2^2}{360}=\frac{2\pi}{3}$.

6. **解**:将小半圆向右平移,使两个半圆的圆心重合,如图,则阴影部分的面积等于半圆环面积.
作$OE\perp AB$于E(易知E为切点),连接OA,
$\therefore AE=\frac{1}{2}AB=9$.



（第6题）

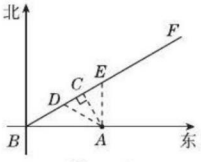
$\therefore$阴影部分的面积$=\frac{1}{2}\pi\cdot OA^2-\frac{1}{2}\pi\cdot OE^2=\frac{1}{2}\pi(OA^2-OE^2)=\frac{1}{2}\pi\cdot AE^2=\frac{1}{2}\pi\cdot9^2=\frac{81}{2}\pi$.

点拨:观察图形可知阴影部分的面积等于大半圆的面积减去小半圆的面积,因此当小半圆在大半圆范围内左右移动时,阴影部分面积不改变,所以我们可以通过平移,使两个半圆圆心重合,这样就能运用已知条件求出阴影部分的面积.

7. (1)**证明**:$\because \angle AOB=\angle COD=90°$,
即$\angle AOC+\angle AOD=\angle BOD+\angle AOD$,
$\therefore \angle AOC=\angle BOD$.
又$\because AO=BO$,$CO=DO$,
$\therefore \triangle AOC\cong\triangle BOD$. $\therefore AC=BD$.
(2)**解**:由(1)知$\triangle AOC\cong\triangle BOD$,
$\therefore$阴影部分的面积=扇形OAB的面积−扇形OCD的面积.
则$S_{阴影}=\frac{90\pi\cdot OA^2}{360}-\frac{90\pi\cdot OC^2}{360}=\frac{90\pi(OA^2-OC^2)}{360}=\frac{90\pi(2^2-1^2)}{360}=\frac{3}{4}\pi(cm^2)$.

点拨:本题通过**割补法**将不规则图形的面积转化为两个规则图形的面积的差的形式.

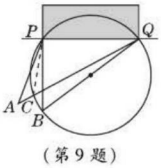
8. **解**:(1)A城会受到这次台风的影响.
理由如下:如图,过A作$AC\perp BF$于点C.
在Rt$\triangle ABC$中,易知$\angle CBA=30°$,
又$BA=300$ km,
$\therefore AC=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times300=150$(km),
$\because 150<200$,$\therefore A$城会受到这次台风的影响.



（第8题）

(2)如图,设BF上D,E两点到A的距离为200 km,则台风中心在线段DE上时,对A城均有影响,而在线段DE以外时,对A城没有影响.
$\because AC=150$ km,$AD=AE=200$ km,
$\therefore DC=\sqrt{AD^2-AC^2}=\sqrt{200^2-150^2}=50\sqrt{7}$(km).
$\therefore DE=2DC=100\sqrt{7}$ km.
$\therefore \frac{100\sqrt{7}}{10\sqrt{7}}=10$(h).
$\therefore A$城会受这次台风影响的时间为10 h.

9. **解**:选择射门方式二较好,理由如下:
设AQ与圆的交点为C,连接PC,如图所示.



（第9题）

$\because \angle PCQ$是$\triangle PAC$的外角,
$\therefore \angle PCQ>\angle A$. 又$\because \angle PCQ=\angle B$,
$\therefore \angle B>\angle A$. $\therefore$在B点射门比在A点

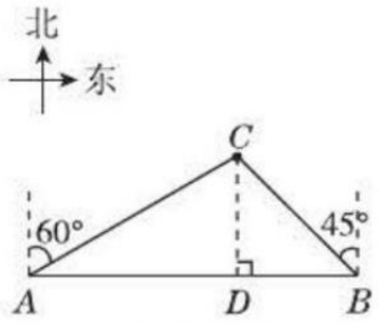
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

射门好. ∴ 选择射门方式二较好.

点拨:本题运用转化思想,将射门角度大小的问题,建模转化到圆中,根据圆周角的相关结论来解决实际问题.

10. 解:修建的这条水渠不会穿过公园.

理由:如图,过点 C 作 $CD \perp AB$,垂足为 D.



(第 10 题)

由题易得 $\angle CBA = 45°$,

$\therefore \angle BCD = 45°$. $\therefore CD = BD$.

设 $CD = x$ km,则 $BD = x$ km.

由题易得 $\angle CAB = 30°$,

$\therefore AC = 2CD = 2x$ km,

$\therefore AD = \sqrt{(2x)^2 - x^2} = \sqrt{3}x$(km),

$\therefore \sqrt{3}x + x = 1$. 解得 $x = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

即 $CD = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \approx 0.366$(km) = 366 m > 350 m,

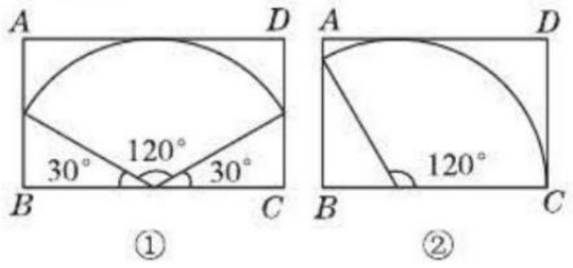
也就是说,以点 C 为圆心,350 m 为半径的圆与 AB 相离.

∴ 修建的这条水渠不会穿过公园.

11. 解:∵ 圆锥形漏斗的底面半径为 20 cm,高为 $40\sqrt{2}$ cm,

∴ 圆锥的母线长为 $\sqrt{20^2 + (40\sqrt{2})^2} = 60$(cm).

设圆锥的侧面展开图的圆心角为 $n°$,则有 $\dfrac{n\pi \times 60}{180} = 2\pi \times 20$,解得 $n = 120$.



(第 11 题)

方案一:如图①,扇形的半径为 60 cm,矩形的宽为 60 cm,易求得矩形的长为 $60\sqrt{3}$ cm. 当 $AB = 60$ cm,$BC = 60\sqrt{3}$ cm 时,$S_{矩形ABCD} = 3\,600\sqrt{3}$ cm^2.

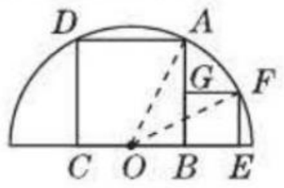
方案二:如图②,扇形与矩形的两边相切,有一边重合,易求得矩形的宽为 60 cm,长为 30 + 60 = 90(cm),此时矩形的面积为 90 × 60 = 5 400(cm^2).

∵ $3\,600\sqrt{3} > 5\,400$,

∴ 方案二所用材料最省. 即选长为 90 cm,宽为 60 cm 的矩形铁皮,才能使所用材料最省.

专训 2

1. 解:如图,连接 OA,OF.



(第 1 题)

设 $OA = OF = r$ cm,$AB = a$ cm.

在 Rt△OAB 中,$r^2 = \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + a^2$,

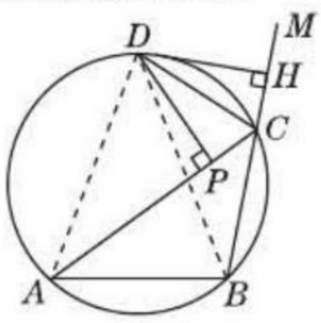
在 Rt△OEF 中,$r^2 = 4^2 + \left(4 + \dfrac{a}{2}\right)^2$,

$\therefore \dfrac{a^2}{4} + a^2 = 16 + 16 + 4a + \dfrac{a^2}{4}$. 解得 $a_1 = 8$,$a_2 = -4$(舍去).

$\therefore r^2 = \left(\dfrac{8}{2}\right)^2 + 8^2 = 80$. $\therefore r_1 = 4\sqrt{5}$,$r_2 = -4\sqrt{5}$(舍去). 即该半圆的半径为 $4\sqrt{5}$ cm.

点拨:在有关圆的计算题中,求角度或边长时,常连接半径构造等腰三角形或直角三角形,利用特殊三角形的性质来解决问题.

2. 证明:如图,连接 AD,BD.



(第 2 题)

∵ $\angle DAC$、$\angle DBC$ 是$\overset{\frown}{DC}$所对的圆周角.

$\therefore \angle DAC = \angle DBC$.

∵ CD 平分 $\angle ACM$,$DP \perp AC$,$DH \perp CM$,

$\therefore DP = DH$.

在△ADP 和△BDH 中,

$$\begin{cases} \angle DAP = \angle DBH, \\ \angle DPA = \angle DHB = 90°, \\ DP = DH. \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADP \cong \triangle BDH$. $\therefore AP = BH$.

点拨:本题通过作辅助线构造圆周角,然后利用“同弧所对的圆周角相等”得到 $\angle DAC = \angle DBC$,为证两三角形全等创造了条件.

3. (1) **证明**:如图,过点 D 作⊙O 的直径 DE,连接 AE,EC,AC.



(第 3 题)

∵ DE 是⊙O 的直径,

$\therefore \angle ECD = \angle EAD = 90°$.

又∵ $CD \perp AB$,$\therefore EC /\!/ AB$.

$\therefore \angle BAC = \angle ACE$.

$\therefore \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AE}$. $\therefore BC = AE$.

在 Rt△AED 中,

$AD^2 + AE^2 = DE^2$,

$\therefore AD^2 + BC^2 = 4R^2$.

(2) **解**:如图,过点 O 作 $OF \perp AD$ 于点 F.

∵ 弦 AD,BC 的长是方程 $x^2 - 6x + 5 = 0$ 的两个根($AD > BC$),

$\therefore AD = 5$,$BC = 1$.

由(1)知,$AD^2 + BC^2 = 4R^2$,

$\therefore 5^2 + 1^2 = 4R^2$. $\therefore R = \dfrac{\sqrt{26}}{2}$.

∵ $\angle EAD = 90°$,$OF \perp AD$,

$\therefore OF /\!/ EA$.

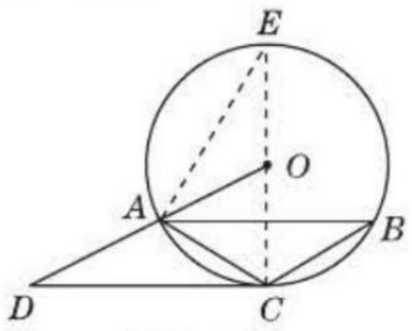
又∵ O 为 DE 的中点,

$\therefore OF = \dfrac{1}{2}AE = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{1}{2}$.

即点 O 到 AD 的距离为 $\dfrac{1}{2}$.

点拨:本题作出直径 DE,利用“直径所对的圆周角是直角”构造出两个直角三角形,给解题带来了方便.

4. 解:CD 与⊙O 相切,理由如下:如图,作直径 CE,连接 AE.



(第 4 题)

∵ CE 是直径,

$\therefore \angle EAC = 90°$.

$\therefore \angle E + \angle ACE = 90°$.

∵ $CA = CB$,$\therefore \angle B = \angle CAB$.

∵ $AB /\!/ CD$,

$\therefore \angle ACD = \angle CAB$. $\therefore \angle B = \angle ACD$.

又∵ $\angle B = \angle E$,$\therefore \angle ACD = \angle E$.

$\therefore \angle ACE + \angle ACD = 90°$,

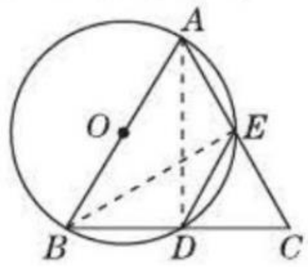
即 $OC \perp DC$.

又 OC 为⊙O 的半径,

$\therefore CD$ 与⊙O 相切.

5. C **6.** 60°

7. (1) **证明**:如图,连接 AD,



(第 7 题)

∵ AB 是⊙O 的直径,

$\therefore \angle ADB = 90°$.

∵ 点 D 是 BC 的中点,

$\therefore AD$ 是线段 BC 的垂直平分线.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore AB=AC$.

$\because AB=BC$,$\therefore AB=BC=AC$,

$\therefore \triangle ABC$ 为等边三角形.

(2)**解**:如图,连接 BE.$\because AB$ 是直径,

$\therefore \angle AEB=90°$,$\therefore BE\perp AC$.

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形,

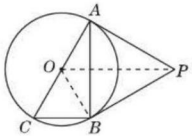
$\therefore AE=EC$,即 E 为 AC 的中点.

$\because D$ 是 BC 的中点,

$\therefore DE$ 为 $\triangle ABC$ 的中位线.

$\therefore DE=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 2=1$.

8.(1)**证明**:如图,连接 OB,



(第 8 题)

$\because OA=OB$,$\therefore \angle OAB=\angle OBA$.

$\because PA=PB$,$\therefore \angle PAB=\angle PBA$.

$\therefore \angle OAB+\angle PAB=\angle OBA+\angle PBA$.

即 $\angle PAO=\angle PBO$.

又$\because PA$ 是 $\odot O$ 的切线,

$\therefore \angle PAO=90°$.

$\therefore \angle PBO=90°$.$\therefore OB\perp PB$.

又$\because OB$ 是 $\odot O$ 的半径,

$\therefore PB$ 是 $\odot O$ 的切线.

(2)**解**:如图,连接 OP,

$\because PA=PB$,$\therefore$ 点 P 在线段 AB 的垂直平分线上.

$\because OA=OB$,$\therefore$ 点 O 在线段 AB 的垂直平分线上.

$\therefore OP$ 为线段 AB 的垂直平分线.

又$\because BC\perp AB$,

$\therefore PO/\!/BC$.$\therefore \angle AOP=\angle ACB=60°$.

由(1)知 $\angle PAO=90°$.

$\therefore \angle APO=30°$.$\therefore PO=2AO$.

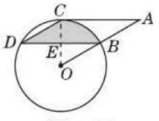
$\because$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle APO$ 中,$AO^2+PA^2=PO^2$,

$\therefore AO^2+3=(2AO)^2$.

又$\because AO>0$,

$\therefore AO=1$,$\therefore \odot O$ 的半径为 1.

9.(1)**证明**:如图,连接 CO,交 DB 于点 E,



(第 9 题)

$\therefore \angle O=2\angle CDB=60°$.

又$\because \angle OBE=30°$,

$\therefore \angle BEO=180°-60°-30°=90°$.

$\because AC/\!/BD$,$\therefore \angle ACO=\angle BEO=90°$.

即 $OC\perp AC$.

又$\because$ 点 C 在 $\odot O$ 上,

$\therefore AC$ 是 $\odot O$ 的切线.

(2)**解**:$\because OE\perp DB$,

$\therefore EB=\frac{1}{2}DB=3\sqrt{3}$ cm.

在 $\mathrm{Rt}\triangle EOB$ 中,

$\because \angle OBD=30°$,$\therefore OE=\frac{1}{2}OB$.

$\because EB=3\sqrt{3}$ cm,

$\therefore$ 由勾股定理可求得 $OB=6$ cm.

又$\because \angle CDE=\angle OBE$,$DE=BE$,

$\angle CED=\angle OEB$,

$\therefore \triangle CDE\cong\triangle OBE$.$\therefore S_{\triangle CDE}=S_{\triangle OBE}$.

$\therefore S_{\text{阴影}}=S_{\text{扇形}OCB}=\frac{60}{360}\pi\cdot 6^2=6\pi(\mathrm{cm}^2)$.

专训 3

1. D　**2**. B　**3**. C　**4**. 4　**5**. 2　**6**. ①④

7. **证明**:(1)如图,连接 OD.

$\because$ 点 E 是 $\triangle ABC$ 的内心,

$\therefore \angle BAD=\angle CAD$.

$\therefore \overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{CD}$.$\therefore OD\perp BC$.

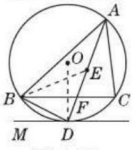
又$\because \angle BDM=\angle DAC$,

$\angle DAC=\angle DBC$,

$\therefore \angle BDM=\angle DBC$.

$\therefore BC/\!/DM$.$\therefore OD\perp DM$.

$\therefore$ 直线 DM 是 $\odot O$ 的切线.



(第 7 题)

(2)如图,连接 BE.

$\because$ 点 E 是 $\triangle ABC$ 的内心,

$\therefore \angle BAE=\angle CAE=\angle CBD$,$\angle ABE=\angle CBE$.

$\therefore \angle BAE+\angle ABE=\angle CBD+\angle CBE$,

即 $\angle BED=\angle EBD$.

$\therefore DB=DE$.

$\because \angle DBF=\angle DAB$,$\angle BDF=\angle ADB$,

$\therefore \triangle DBF\backsim\triangle DAB$.

$\therefore \frac{DF}{DB}=\frac{DB}{DA}$,即 $DB^2=DF\cdot DA$.

$\therefore DE^2=DF\cdot DA$.

8.(1)**证明**:如图,连接 OC.

$\because PE$ 与 $\odot O$ 相切,$\therefore OC\perp PE$.

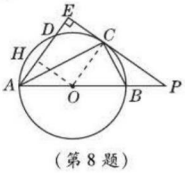
$\because AE\perp PE$,$\therefore OC/\!/AE$.

$\therefore \angle CAD=\angle OCA$.

$\because OA=OC$,$\therefore \angle OCA=\angle OAC$.

$\therefore \angle CAD=\angle OAC$.

$\therefore AC$ 平分 $\angle BAD$.



(第 8 题)

(2)**解**:PB,AB 之间的数量关系为 $AB=3PB$.

理由如下:$\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle ACB=90°$.

$\therefore \angle BAC+\angle ABC=90°$.$\because OB=OC$,

$\therefore \angle OCB=\angle ABC$.

$\because \angle PCB+\angle OCB=90°$,

$\therefore \angle PCB=\angle PAC$.

又$\because \angle P=\angle P$,$\therefore \triangle PCA\backsim\triangle PBC$.

$\therefore \frac{PC}{PB}=\frac{PA}{PC}$.$\therefore PC^2=PB\cdot PA$.

$\because PB:PC=1:2$,

$\therefore PC=2PB$.$\therefore PA=4PB$.$\therefore AB=3PB$.

(3)**解**:过点 O 作 $OH\perp AD$ 于点 H,如图,则 $AH=\frac{1}{2}AD=\frac{3}{2}$,

四边形 $OCEH$ 是矩形.

$\therefore OC=HE$.$\therefore AE=\frac{3}{2}+OC$.

$\because OC/\!/AE$,$\therefore \triangle PCO\backsim\triangle PEA$.

$\therefore \frac{OC}{AE}=\frac{PO}{PA}$.

$\because AB=3PB$,$AB=2OB$,$\therefore OB=\frac{3}{2}PB$.

$\therefore \frac{OC}{\frac{3}{2}+OC}=\frac{PB+\frac{3}{2}PB}{PB+3PB}=\frac{5}{8}$,

$\therefore OC=\frac{5}{2}$,$\therefore AB=5$.

$\because \triangle PBC\backsim\triangle PCA$,$\therefore \frac{PB}{PC}=\frac{BC}{AC}=\frac{1}{2}$,

$\therefore AC=2BC$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,$AC^2+BC^2=AB^2$,

$\therefore (2BC)^2+BC^2=5^2$,$\therefore BC=\sqrt{5}$,

$\therefore AC=2\sqrt{5}$.

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=5$,

即 $\triangle ABC$ 的面积为 5.

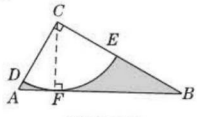
专训 4

1. D　**2**. C　**3**. A

4. $\frac{3}{4}$　**5**. $\frac{1}{2}$　**6**. $\frac{4}{5}$　**7**. $\frac{1}{2}$

8.(1)**证明**:如图,过点 C 作 $CF\perp AB$ 于点 F,在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,$\tan B=\frac{AC}{BC}=\frac{1}{2}$,

$\therefore BC=2AC=2\sqrt{5}$.$\therefore AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{(\sqrt{5})^2+(2\sqrt{5})^2}=5$,$\therefore CF=\frac{AC\cdot BC}{AB}=\frac{\sqrt{5}\times 2\sqrt{5}}{5}=2$.$\therefore AB$ 为 $\odot C$ 的切线.



(第 8 题)

(2)**解**:$S_{\text{阴影}}=S_{\triangle ABC}-S_{\text{扇形}CDE}=\frac{1}{2}\times$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\sqrt{5}\times2\sqrt{5}-\dfrac{90\pi\times2^2}{360}=5-\pi$.

9. (1)**证明**:连接 OC,如图所示,

$\because CD$ 是$\odot O$ 的切线,

$\therefore \angle OCD=90°$,

$\therefore \angle ACO+\angle DCE=90°$.

又$\because ED\perp AD$,$\therefore \angle EDA=90°$,

$\therefore \angle EAD+\angle E=90°$. $\because OC=OA$,

$\therefore \angle ACO=\angle EAD$, $\therefore \angle DCE=\angle E$,

$\therefore DC=DE$.

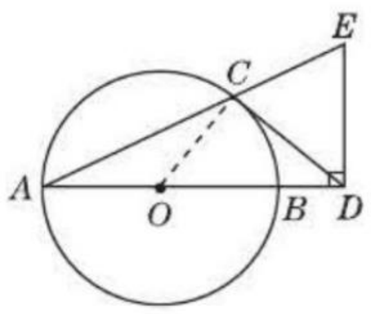
(2)**解**:设 $BD=x$,则 $AD=AB+BD=3+x$, $OD=OB+BD=1.5+x$.

在 Rt$\triangle EAD$ 中,$\because \tan\angle CAB=\dfrac{1}{2}$,

$\therefore ED=\dfrac{1}{2}AD=\dfrac{1}{2}(3+x)$. 由(1)知,

$DC=DE=\dfrac{1}{2}(3+x)$. 在 Rt$\triangle OCD$ 中,

$OC^2+CD^2=DO^2$,则 $1.5^2+\left[\dfrac{1}{2}(3+x)\right]^2=(1.5+x)^2$,解得$x_1=-3$(舍去),$x_2=1$,$\therefore BD=1$.



(第 9 题)

专训 5

1. **解**:连接 OA, OB.

$\because PA$, PB 是$\odot O$ 的两条切线.

$\therefore PA\perp OA$, $PB\perp OB$.

$\therefore \angle OAP=\angle OBP=90°$.

$\therefore \angle AOB=360°-(\angle OAP+\angle OBP+\angle APB)=360°-(90°+90°+50°)=130°$.

当点 C 是优弧 AB 上一点时,$\angle ACB=\dfrac{1}{2}\angle AOB=65°$.

当点 C 是劣弧 AB 上一点时,$\angle ACB=180°-65°=115°$.

$\therefore \angle ACB$ 的度数为 65°或 115°.

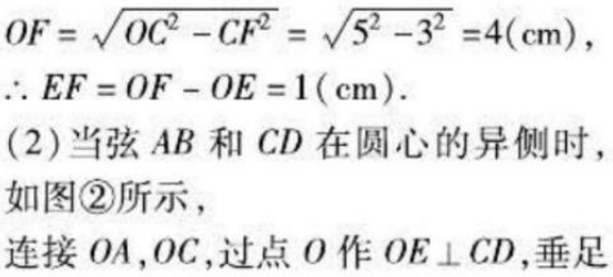
2. **解**:分两种情况进行讨论.

(1)当圆心 O 在$\triangle ABC$ 内时,如图①,连接 AO 并延长交 BC 于 D,连接 OB. 由题意易得 $AD\perp BC$, $\therefore BD=\sqrt{OB^2-OD^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$(cm).

$\therefore AB=\sqrt{AD^2+BD^2}=\sqrt{16^2+8^2}=8\sqrt{5}$(cm).

(2)当圆心 O 在$\triangle ABC$ 外时,如图②,连接 OA 交 BC 于 D,连接 OB,易得 $AD=10-6=4$(cm). 同(1)解法:$AB=\sqrt{AD^2+BD^2}=\sqrt{4^2+8^2}=4\sqrt{5}$(cm).

综上所述,腰 AB 的长为 $8\sqrt{5}$ cm 或 $4\sqrt{5}$ cm.



(第 2 题)

3. **解**:(1)当弦 AB 和 CD 在圆心的同侧时,如图①所示,

连接 OA, OC,过点 O 作 $OF\perp CD$,垂足为 F,交 AB 于 E.

$\because AB/\!/CD$,$\therefore OE\perp AB$.

$\because AB=8$ cm, $CD=6$ cm,

$\therefore AE=4$ cm, $CF=3$ cm,

$\because OA=OC=5$ cm,

$\therefore OE=\sqrt{OA^2-AE^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$(cm),

$OF=\sqrt{OC^2-CF^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$(cm),

$\therefore EF=OF-OE=1$(cm).

(2)当弦 AB 和 CD 在圆心的异侧时,如图②所示,

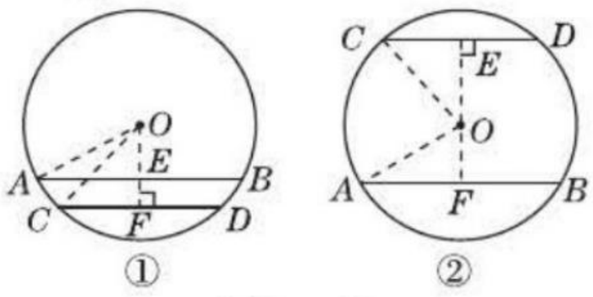
连接 OA, OC,过点 O 作 $OE\perp CD$,垂足为 E,延长 EO 交 AB 于 F.

$\because AB/\!/CD$,$\therefore OF\perp AB$.

同理可得 $OE=4$ cm, $OF=3$ cm,

$\therefore EF=OE+OF=7$(cm).

综上所述,AB 与 CD 之间的距离为 1 cm或 7 cm.



(第 3 题)

4. **解**:垂足 M 可能在半径 OA 上,也可能在半径 OB 上,需分两种情况讨论:

(1)当点 M 在半径 OA 上时,如图①所示.

连接 OC,易得 $OC=OA=\dfrac{1}{2}AB=5$ cm.

又$\because OM:OA=3:5$,

$\therefore OM=3$ cm.

$\therefore AM=OA-OM=2$(cm).

$\because AB$ 是$\odot O$ 的直径,弦 $CD\perp AB$,

$\therefore$ 在 Rt$\triangle OMC$ 中,

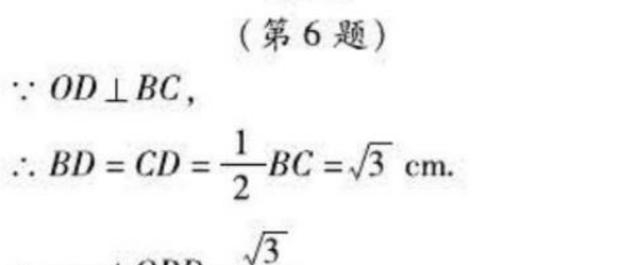
$MC=\sqrt{OC^2-OM^2}=4$(cm).

$\therefore$ 在 Rt$\triangle AMC$ 中,$AC=\sqrt{AM^2+MC^2}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$(cm).

(2)当点 M 在半径 OB 上时,如图②所示. 此时,$AM=OA+OM=8$(cm).

$\therefore AC=\sqrt{AM^2+MC^2}=\sqrt{8^2+4^2}=4\sqrt{5}$(cm).

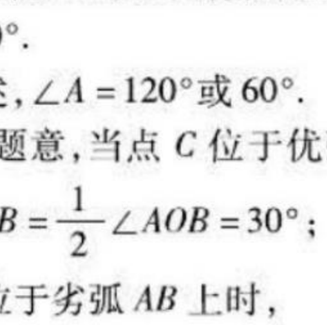
综上所述,AC 的长为 $2\sqrt{5}$ cm 或 $4\sqrt{5}$ cm.



(第 4 题)

5. 40°或 140°

6. **解**:当点 A 在弦 BC 所对的优弧上时,过点 O 作 $OD\perp BC$ 于点 D,连接 OB, OC,如图所示.



(第 6 题)

$\because OD\perp BC$,

$\therefore BD=CD=\dfrac{1}{2}BC=\sqrt{3}$ cm.

$\therefore \cos\angle OBD=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore \angle OBD=30°$, $\angle BOD=60°$,

$\therefore \angle BOC=120°$, $\therefore \angle A=60°$.

当点 A 在弦 BC 所对的劣弧上时,易知 $\angle A=120°$.

综上所述,$\angle A=120°$或 60°.

7. **解**:根据题意,当点 C 位于优弧 AB 上时,$\angle ACB=\dfrac{1}{2}\angle AOB=30°$;

当点 C 位于劣弧 AB 上时,

$\angle ACB=\dfrac{1}{2}(360°-\angle AOB)=150°$.

$\therefore \angle ACB$ 的度数为 30°或 150°.

8. D

9. 40°或 140°

10. 相切或相交

11. **解**:(1)连接 OD,如图①.

$\because CD$ 是$\odot O$ 的切线,$\therefore OD\perp CD$.

$\because OD=OB=BC$,

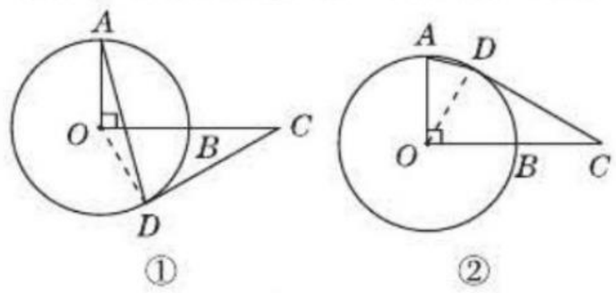
$\therefore \cos\angle COD=\dfrac{OD}{OC}=\dfrac{1}{2}$,

$\therefore \angle COD=60°$.

$\because OA\perp OB$,

$\therefore \angle AOB=90°$, $\therefore \angle AOD=150°$.

$\because OA=OD$, $\therefore \angle OAD=\angle ODA=15°$.



(第 11 题)

(2)连接 OD,如图②.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∵ CD 是⊙O 的切线，∴ $OD \perp CD$.

∵ $OD = OB = BC$，

∴ $\cos\angle COD = \frac{OD}{OC} = \frac{1}{2}$，

∴ $\angle COD = 60°$.

∵ $OA \perp OB$，

∴ $\angle AOB = 90°$，∴ $\angle AOD = 30°$.

∵ $OA = OD$，∴ $\angle OAD = \angle ODA = 75°$.

综上所述，$\angle OAD$ 的度数是 15°或 75°.

全章热门考点整合应用

1. (1) **解**：由题意可知 $\angle ABC + \angle CBC_1 = 180°$，$\angle ABC = 120°$，

∴ $\angle CBC_1 = 60°$，即旋转角的度数为 60°.

(2) **证明**：由(1)知 $\angle CBC_1 = 60°$，

∴ $\triangle A_1BC_1$ 是由 $\triangle ABC$ 绕点 B 顺时针旋转 60°得到的，

∴ $AB = A_1B$，$\angle ABA_1 = \angle CBC_1 = 60°$，$\angle C = \angle C_1$，

∴ $\triangle ABA_1$ 是等边三角形.

∴ $\angle A_1AB = 60°$.

∴ $\angle A_1AB = \angle CBC_1$，∴ $AA_1 // BC$.

∴ $\angle A_1AC = \angle C$. ∴ $\angle A_1AC = \angle C_1$.

2. A　**点拨**：A 既是轴对称图形，又是中心对称图形；B 是中心对称图形，不是轴对称图形；C，D 是轴对称图形，不是中心对称图形. 故选 A.

3. D

4. (1) **证明**：∵ AB 是⊙O 的直径，BM 是⊙O 的切线，∴ $AB \perp BE$.

∵ $CD // BE$，∴ $CD \perp AB$. ∴ $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{AC}$.

∵ $\overset{\frown}{DA} = \overset{\frown}{DC}$，

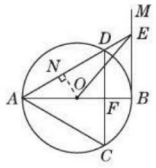
∴ $\overset{\frown}{DA} = \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CD}$.

∴ $AD = AC = CD$.

∴ $\triangle ACD$ 是等边三角形.

(2) **解**：如图，过 O 作 $ON \perp AD$ 于 N.

∴ $AN = DN$.



（第 4 题）

由(1)知 $\triangle ACD$ 是等边三角形，

∴ $\angle DAC = 60°$.

∵ $AD = AC$，$CD \perp AB$，∴ $\angle DAB = 30°$，

∴ $BE = \frac{1}{2}AE$，$ON = \frac{1}{2}AO$.

易得 $AN = \frac{\sqrt{3}}{2}AO$. 设⊙$O$ 的半径为 r，

∴ $ON = \frac{1}{2}r$，$AN = DN = \frac{\sqrt{3}}{2}r$，

∴ $EN = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}r$，$AE = 2 + \sqrt{3}r$，

∴ $BE = \frac{1}{2}AE = \frac{\sqrt{3}r + 2}{2}$.

在 Rt $\triangle NEO$ 与 Rt$\triangle BEO$ 中，$OE^2 = ON^2 + NE^2 = OB^2 + BE^2$，即 $\left(\frac{r}{2}\right)^2 + \left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2}r\right)^2 = r^2 + \left(\frac{\sqrt{3}r + 2}{2}\right)^2$，

∴ $r = 2\sqrt{3}$（$r = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$舍去），

∴ $OE^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 + \left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2}r\right)^2 = 28$，

∴ $OE = 2\sqrt{7}$.

5. **解**：∵ $\angle AOC = 40°$，

∴ $\angle BOC = 180° - 40° = 140°$，

$\angle ACO = \frac{1}{2} \times (180° - 40°) = 70°$.

连接 OD. ∵ D 是$\overset{\frown}{BC}$的中点，

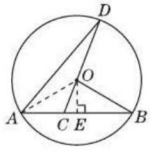
∴ $\angle COD = \frac{1}{2}\angle BOC = 70°$. ∴ $\angle OCD = \frac{180° - 70°}{2} = 55°$. ∴ $\angle ACD = \angle ACO + \angle OCD = 70° + 55° = 125°$.

6. **思路导引**：(1) 如图，过点 O 作 $OE \perp AB$ 于点 E，根据 $\angle B = 30°$，$OB = 2$ 可得 $BE = \sqrt{3}$，由垂径定理知 $AB = 2\sqrt{3}$. (2) 如图，连接 OA，利用半径相等，可得 $\angle BAD = \angle BAO + \angle DAO = \angle B + \angle D = 30° + 20° = 50°$. 再利用圆周角定理可得 $\angle BOD = 2\angle BAD = 100°$. (3) 由 $\angle BCD$ 是 $\triangle ADC$ 的外角，可知 $\angle BCD \neq \angle CAD$，$\angle BCD \neq \angle D$，只有 $\angle BCD = \angle ACD$，即 $\angle BCD = \angle ACD = 90°$. 由 $\angle B = 30°$，得 $\angle BOD = 120°$. 由圆周角定理知 $\angle CAD = \frac{1}{2}\angle BOD = 60°$.

可得 $\triangle DAC \backsim \triangle BOC$，$AC = \frac{1}{2}AB = \sqrt{3}$.

解：(1) $2\sqrt{3}$

(2) 如图，连接 OA.



（第 6 题）

∵ $OA = OB$，$OA = OD$，

∴ $\angle BAO = \angle B$，$\angle DAO = \angle D$.

∴ $\angle BAD = \angle BAO + \angle DAO = \angle B + \angle D$.

又∵ $\angle B = 30°$，$\angle D = 20°$，

∴ $\angle BAD = 50°$.

∴ $\angle BOD = 2\angle BAD = 100°$.

(3) ∵ $\angle BCO = \angle DAC + \angle D$，

∴ $\angle BCO > \angle DAC$，$\angle BCO > \angle D$，

∴ 要使 $\triangle DAC$ 与 $\triangle BOC$ 相似，只能 $\angle ACD = \angle OCB = 90°$.

此时 $\angle BOC = 60°$，$\angle BOD = 120°$，

∴ $\angle DAC = \frac{1}{2}\angle BOD = 60°$.

∴ $\angle DAC = \angle BOC$.

∴ $\triangle DAC \backsim \triangle BOC$.

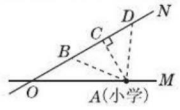
∵ $\angle BCO = 90°$，即 $OC \perp AB$，

∴ $AC = \frac{1}{2}AB = \sqrt{3}$.

∴ 当 AC 的长度为 $\sqrt{3}$ 时，$\triangle DAC$ 与 $\triangle BOC$ 相似.

点拨：圆周角定理和垂径定理在与圆有关的证明、计算题中经常出现，要牢固掌握.

7. **解**：如图，过点 A 作 $AC \perp ON$，垂足为 C.



（第 7 题）

∵ $\angle MON = 30°$，$OA = 80$ m，

∴ $AC = 40$ m.

设当第一台拖拉机到 B 点时对小学产生噪音影响，连接 AB，此时 $AB = 50$ m，由勾股定理得 $BC = 30$ m，

设第一台拖拉机到 D 点时噪音消失，连接 AD，此时 $AD = 50$ m，易得 $CD = 30$ m.

∵ 两台拖拉机相距 30 m，

∴ 第一台到 D 点时第二台在 C 点，还需前行 30 m 后才对小学没有噪音影响，

∴ 影响时间应是 $(30 + 30 + 30) \div 5 = 18$(s).

即这两台拖拉机沿 ON 方向行驶时给小学带来噪音影响的时间是 18 s.

8. **思路导引**：(1) 由题意知点 P，B 的纵坐标与点 A 的纵坐标相同，即为 3，当点 P 在 BA 之间时，它的横坐标为 $4 - 2 = 2$；当点 P 在 BA 的延长线上时，它的横坐标为 $4 + 2 = 6$. (2) 连接 OP，过点 A 作 $AC \perp OP$，垂足为 C，则有 $\triangle APC \backsim \triangle OPB$，即可求得 AC 的值，与⊙A 的半径比较即可得到 OP 与⊙A 的位置关系.

解：(1) 点 P 的坐标是(2,3)或(6,3).

(2) 直线 OP 与⊙A 相交. 理由如下：连接 OP，过点 A 作 $AC \perp OP$，垂足为 C，

则 $AP = PB - AB = 12 - 4 = 8$，$OB = 3$，

$OP = \sqrt{12^2 + 3^2} = \sqrt{153} = 3\sqrt{17}$.

∵ $\angle ACP = \angle OBP = 90°$，$\angle APC = \angle OPB$，

∴ $\triangle APC \backsim \triangle OPB$，∴ $\frac{AC}{OB} = \frac{AP}{OP}$，

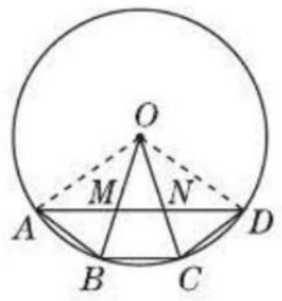
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

即$\frac{AC}{3}=\frac{8}{3\sqrt{17}}$.

$\therefore AC=\frac{8\sqrt{17}}{17}<2$.

$\therefore$ 直线 OP 与$\odot A$ 相交.

9. **证明**:(1)如图,连接 OA, OD,则 $\angle AOD=\angle AOB+\angle BOC+\angle COD=\frac{360°}{10}\times3=108°$.



(第 9 题)

又$\because OA=OD$,

$\therefore \angle OAD=\angle ODA=\frac{180°-108°}{2}=36°$.

$\therefore \angle ANO=\angle COD+\angle ODA=36°+36°=72°$. $\because \angle BOC=36°$, $OB=OC$,

$\therefore \angle BCO=\frac{180°-36°}{2}=72°$.

$\therefore \angle ANO=\angle BCO$. $\therefore MN/\!/BC$.

(2)$\because \angle AON=36°\times2=72°$, $\angle ANO=72°$, $\therefore AN=AO=OB$.

$\because \angle ABM=\frac{180°-36°}{2}=72°$, $\angle AMB=\angle OAD+\angle AOB=36°+36°=72°$,

$\therefore \angle ABM=\angle AMB$, $\therefore AB=AM$. 又 $AB=BC$, $\therefore AN=AM+MN=AB+MN=BC+MN$, $\therefore MN+BC=OB$.

10. **解**:(1)在$\odot O$ 中, $\angle A=\angle D$.

$\because \angle AEB=\angle DEC$, $AE=DE$,

$\therefore \triangle AEB\cong\triangle DEC$. $\therefore EB=EC$.

又$\because BC=CE$, $\therefore BE=CE=BC$.

$\therefore \triangle EBC$ 为等边三角形.

$\therefore \angle ACB=60°$.

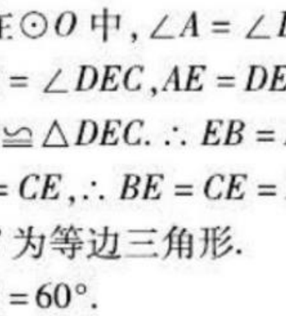
(2)$\because OF\perp AC$, $\therefore AF=CF$.

$\because \triangle EBC$ 为等边三角形,

$\therefore \angle GEF=60°$, $\therefore \angle EGF=30°$.

$\because EG=2$, $\therefore EF=1$. 又$\because AE=ED=3$, $\therefore CF=AF=4$. $\therefore AC=8$, $CE=5$.

$\therefore BC=5$. 如图,过点 B 作 $BM\perp AC$ 于点 M,



(第 10 题)

$\because \angle BCM=60°$, $\therefore \angle MBC=30°$.

$\therefore CM=\frac{5}{2}$. $\therefore BM=\sqrt{BC^2-CM^2}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$, $AM=AC-CM=\frac{11}{2}$. $\therefore AB=\sqrt{AM^2+BM^2}=7$.

11. A

12. B **点拨**:由题图可知,点 P 运动的路径长是题图中六个扇形的弧长的和,每个扇形的圆心角均为 60°,半径从 12 cm 依次减 2 cm,所以点 P 运动的路径长为 $\frac{60\pi\times12}{180}+\frac{60\pi\times10}{180}+\frac{60\pi\times8}{180}+\frac{60\pi\times6}{180}+\frac{60\pi\times4}{180}+\frac{60\pi\times2}{180}=\frac{\pi}{3}\times(12+10+8+6+4+2)=14\pi(\text{cm})$. 故选 B.

13. B

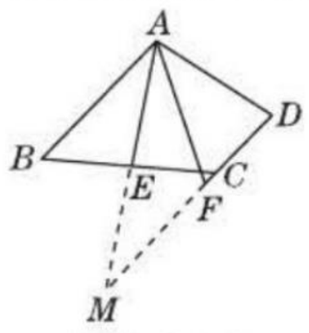
14. B **点拨**:由圆锥的侧面展开图的面积计算公式,得 $S=\pi rl=\pi\times10\times50=500\pi(\text{cm}^2)$. 故选 B.

15. C **点拨**:$\because$ 底面周长是 $2\times2\pi=4\pi$,

$\therefore$ 侧面积是 $\frac{1}{2}\times4\pi\times4=8\pi$,底面积是 $\pi\times2^2=4\pi$.

$\therefore$ 全面积是 $8\pi+4\pi=12\pi$.

16. **解**:(1)如图,延长 AE 到点 M,使 $EM=AE$. 连接 CM,则 $\triangle MCE$ 为所求.



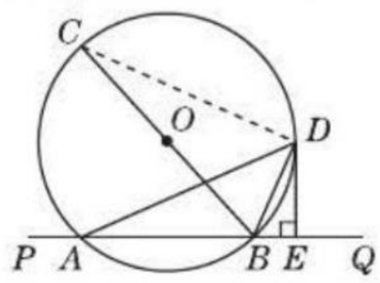
(第 16 题)

(2)$AB=AF+CF$.

证明:$\because \triangle MCE$ 为 $\triangle ABE$ 关于点 E 成中心对称的图形, $\therefore AB=MC$, $\angle BAE=\angle M$, $\therefore AB/\!/MC$, $\therefore D$, C, F, M 共线. 又$\because \angle BAE=\angle EAF$, $\therefore \angle EAF=\angle M$. $\therefore MF=AF$, $\because MC=MF+CF$, $\therefore AB=AF+CF$.

17. **解**:如图,连接 CD. $\because BC$ 是$\odot O$ 的直径, $\therefore \angle BDC=90°$.

$\because DE\perp AB$, $\therefore \angle BED=90°$.



(第 17 题)

$\therefore \angle BDC=\angle BED$.

$\because BD$ 平分 $\angle CBQ$,

$\therefore \angle CBD=\angle DBE$,

$\therefore \triangle BCD\backsim\triangle BDE$,

$\therefore \frac{BD}{BE}=\frac{BC}{BD}$,即 $BD^2=BE\cdot BC$.

$\because BE=2$, $BC=10$,

$\therefore BD^2=20$, $\therefore BD=2\sqrt{5}$.

在 Rt$\triangle BCD$ 中,

$\sin\angle C=\frac{BD}{BC}=\frac{2\sqrt{5}}{10}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

$\because \angle BAD=\angle C$, $\therefore \sin\angle BAD=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

18. (1)**证明**:如图,连接 OD.

$\because BD$ 是$\odot O$ 的切线, D 为切点,

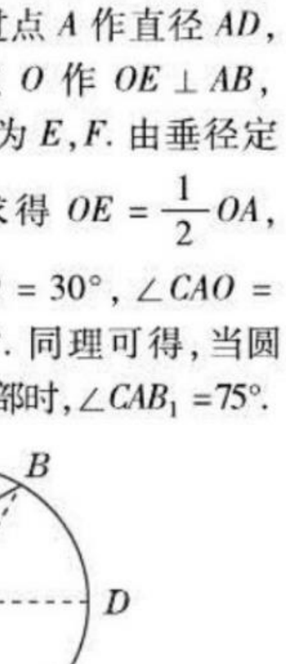
$\therefore OD\perp BC$.

$\because AC\perp BD$,

$\therefore OD/\!/AC$, $\therefore \angle3=\angle2$.

又$\because OD=OA$, $\therefore \angle1=\angle3$.

$\therefore \angle1=\angle2$, $\therefore AD$ 平分 $\angle BAC$.

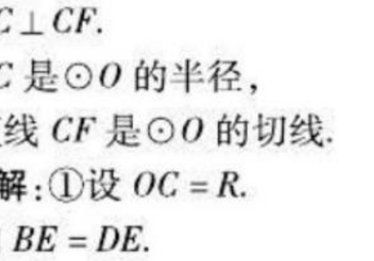


(第 18 题)

(2)**解**:$\because OD/\!/AC$, $\therefore \triangle BOD\backsim\triangle BAC$,

$\therefore \frac{OD}{AC}=\frac{BO}{BA}$, $\therefore \frac{4}{AC}=\frac{6}{6+4}$, $\therefore AC=\frac{20}{3}$.

19. 15°或 75° **点拨**:如图,当圆心 O 在 $\angle CAB$ 的外部时,过点 A 作直径 AD,连接 OC, OB,过点 O 作 $OE\perp AB$, $OF\perp AC$,垂足分别为 E, F. 由垂径定理和勾股定理可求得 $OE=\frac{1}{2}OA$, $OF=FA$, $\therefore \angle BAO=30°$, $\angle CAO=45°$, $\therefore \angle CAB=15°$. 同理可得,当圆心 O 在$\angle CAB_1$ 的内部时, $\angle CAB_1=75°$.



(第 19 题)

20. (1)**证明**:$\because AC$ 平分 $\angle BAD$,

$\therefore \angle BAC=\angle DAC$.

$\therefore C$ 是弧 BD 的中点.

$\therefore OC\perp BD$.

$\because \angle AFC=\angle ACD$, $\angle ACD=\angle ABD$,

$\therefore \angle AFC=\angle ABD$.

$\therefore BD/\!/CF$.

$\therefore OC\perp CF$.

$\because OC$ 是$\odot O$ 的半径,

$\therefore$ 直线 CF 是$\odot O$ 的切线.

(2)**解**:①设 $OC=R$.

易知 $BE=DE$.

$\because DE=2CE=2$,

$\therefore BE=DE=2$, $CE=1$.

$\therefore OE=R-1$.

在 Rt$\triangle OBE$ 中, $(R-1)^2+2^2=R^2$,

解得 $R=\frac{5}{2}$.

$\therefore OE=\frac{5}{2}-1=\frac{3}{2}$.

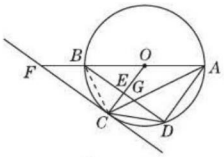
$\because OA=OB$, $BE=DE$,

$\therefore OE$ 为 $\triangle ABD$ 的中位线.

$\therefore AD=2OE=3$.

②如图,连接 BC.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



（第20题）

$\because BD // CF$，$\therefore \frac{BE}{FC}=\frac{OE}{OC}=\frac{OB}{OF}$.

$\because BE=2$，$OE=\frac{3}{2}$，$OC=OB=\frac{5}{2}$，

$\therefore CF=\frac{10}{3}$，$OF=\frac{25}{6}$.

$\therefore AF=OF+OA=\frac{20}{3}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BCE$ 中，$CE=1$，$BE=2$，

$\therefore BC=\sqrt{CE^2+BE^2}=\sqrt{5}$.

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径，

$\therefore \triangle ACB$ 为直角三角形.

$\therefore AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=2\sqrt{5}$.

$\therefore \triangle ACF$ 的周长 $=AC+FC+AF=10+2\sqrt{5}$.

第25章 投影与视图

25.1 投 影

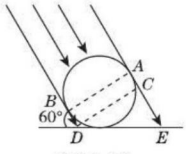
第1课时 平行投影与中心投影

1. 解：(1)——b，(2)——d，(3)——a，(4)——c

2. C **3.** D

4. C **点拨**：本题考查了平行投影的特点和规律. 在不同时刻，同一物体的影子的方向和大小可能不同，不同时刻物体在太阳光下的影子的大小在改变，方向也在改变. 就北半球而言，从早晨到傍晚影子的指向是：西－西北－北－东北－东，影长由长变短，再变长.

5. B **点拨**：如图，设与皮球相切的光线与地面分别交于 D，E 两点，切点分别为 B，A，连接 AB，并过点 D 作 $DC\perp AE$ 于点 C. 由题意得：$DE=10\sqrt{3}$ cm，$\angle CED=60°$，∴ 可得：$DC=DE\cdot\sin 60°=15$(cm). ∴ $AB=DC=15$ cm. 故选 B. 本题考查平行投影的知识，属于基础题，解答本题的关键是建立直角三角形，然后利用三角函数进行解答.

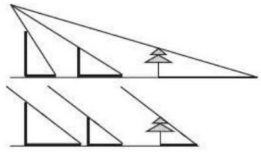


（第5题）

6. D **7.** B **8.** D

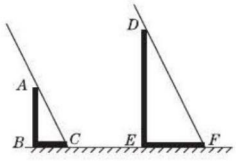
9. 解：(1)上面的图为路灯下的情形，下面的图为阳光下的情形.

(2)如图所示.



（第9题）

10. 解：(1)如图所示.



（第10题）

EF 为 DE 在阳光下的影子.

(2)由题意得 $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$，即 $\frac{5}{3}=\frac{DE}{6}$，

$\therefore DE=10$ m. 即 DE 的长为 10 m.

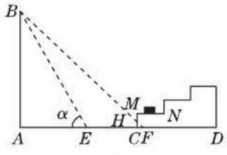
11. 解：(1)当 $\alpha=60°$ 时，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 中，

$\because \tan 60°=\frac{AB}{AE}=\frac{AB}{10}$，

$\therefore AB=10\cdot\tan 60°=10\sqrt{3}\approx 10\times 1.732\approx 17.3$(米).

即楼房的高度约为 17.3 米.

(2)当 $\alpha=45°$ 时，小猫能晒到太阳. 理由如下：假设没有台阶，如图，当 $\alpha=45°$ 时，从点 B 射下的光线与地面 AD 的交点为点 F，与 MC 的交点为点 H.



（第11题）

$\because \angle BFA=45°$，$\therefore \tan 45°=\frac{AB}{AF}=1$.

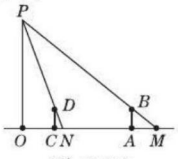
此时的影长 $AF=AB\approx 17.3$ 米.

$\therefore CF=AF-AC\approx 17.3-17.2=0.1$(米).

$\therefore CH=CF\approx 0.1$ 米.

∴ 楼房的影子落在台阶 MC 这个侧面上. ∴ 小猫能晒到太阳.

12. 解：(1)如图.



（第12题）

(2)设在 A 处时影长 AM 为 x 米，在 C 处时影长 CN 为 y 米.

由 $\frac{x}{x+20}=\frac{1.6}{8}$，解得 $x=5$.

由 $\frac{y}{y+(20-14)}=\frac{1.6}{8}$，解得 $y=1.5$.

$\therefore x-y=5-1.5=3.5$.

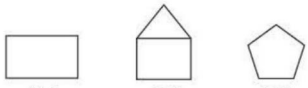
∴ 变短了，变短了 3.5 米.

第2课时 正投影

1. 垂直 (1)平行投影；中心投影 (2)光线；投影面

2. A **3.** D **4.** B **5.** D **6.** B **7.** A

8. 解：如图所示.



（第8题）

9. D **10.** A **11.** C **12.** A **13.** C

14. **分析**：(1)当木棒平行于投影面时，其正投影的长度与木棒的长度一致；(2)当木棒倾斜于投影面时，可转化为解直角三角形来求解.

解：(1)因为木棒平行于投影面，

所以 $A_1B_1=AB=8$ cm，

即此时的影子 A_1B_1 的长度为 8 cm.

(2)过点 A 作 $AH\perp BB_2$ 于点 H.

因为 $AA_2\perp A_2B_2$，$BB_2\perp A_2B_2$，

所以四边形 AA_2B_2H 为矩形，

所以 $AH=A_2B_2$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABH$ 中，$\angle BAH=30°$，$AB=8$ cm，所以 $A_2B_2=AH=AB\cdot\cos 30°=8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$(cm).

即旋转后木棒的影子 A_2B_2 的长为 $4\sqrt{3}$ cm.

15. 解：过点 A 作 $AH\perp BB_1$ 于点 H. 依题意，得 $\angle BAH=30°$，四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 是矩形，其中 $A_1D_1=AD$，$A_1B_1=AH$.

$\because AH\perp BB_1$，$\angle BAH=30°$，

$\therefore AH=AB\cdot\cos 30°=10\times\frac{\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}$(cm)，

$\therefore A_1B_1=AH=5\sqrt{3}$ cm.

$\because A_1D_1=AD=10$ cm，

$\therefore S_{四边形A_1B_1C_1D_1}=A_1B_1\cdot A_1D_1=5\sqrt{3}\times 10=50\sqrt{3}$(cm²).

则正方形 $ABCD$ 的正投影的面积是 $50\sqrt{3}$ cm².

规律总结：求投影的面积，先确定投影的形状，再根据相应的面积公式，有针对性地求出相关线段的长.

16. 解：由于圆锥的轴截面平行于投影面，其正投影是等腰三角形，因此圆锥的高等于等腰三角形的高；圆锥底面圆的半径等于等腰三角形底边长的一半. 如图，作 $AD\perp BC$ 于 D，$AB=AC=$

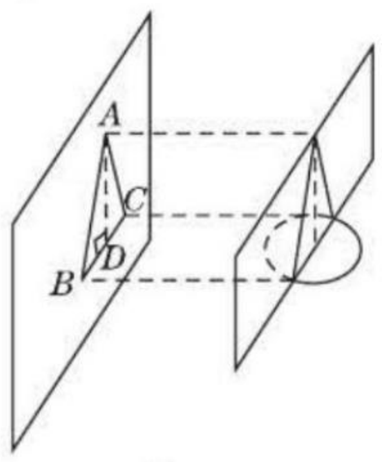
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

13 cm, $AD=12$ cm, $\therefore CD=5$ cm, $\therefore r=CD=5$ cm, $h=12$ cm.

$\therefore V_{圆锥}=\frac{1}{3}\pi r^2h=100\pi(\text{cm}^3)$,

底面周长为 $l=2\pi r=10\pi$ cm, $R=AC=13$ cm,

$S_{表}=\frac{1}{2}lR+\pi r^2=90\pi(\text{cm}^2)$.



(第 16 题)

17. (1)**解**: AC 的投影是 AD, CD 的投影是点 D, BC 的投影是 BD.

(2)**证明**:①易证得 $\triangle BCD\backsim\triangle BAC$,可得 $BC^2=BD\cdot AB$;②易证得 $\triangle ACD\backsim\triangle CBD$,可得 $CD^2=AD\cdot BD$.

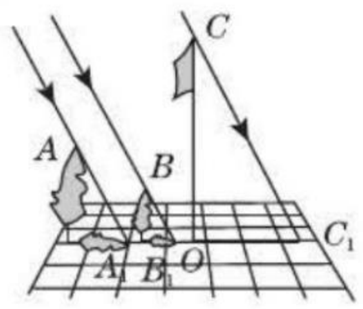
阶段方法技巧训练(五)

专训 1

1. B **点拨**:图①中影子的方向不同,是在灯光下的影子;图②中影子的方向相同,且影长与树高成正比,是在阳光下的影子.

2. C

3. **解**:如图,过树和影子的顶端分别画两条光线 AA_1, BB_1. 观察可知, $AA_1\ //\ BB_1$,故两棵树的影子是在太阳光下形成的.



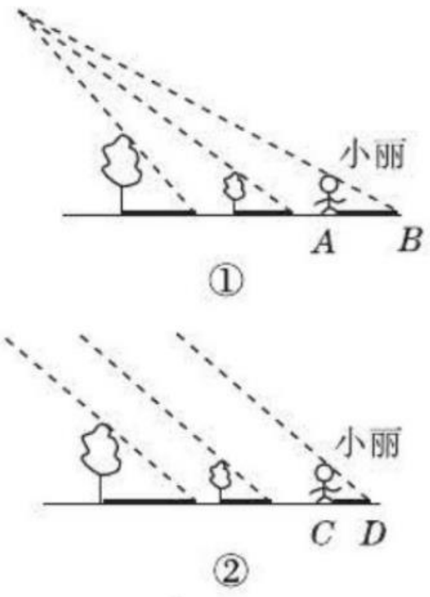
(第 3 题)

过旗杆的顶端 C 画 AA_1(或 BB_1)的平行线 CC_1,交地面于点 C_1,连接旗杆底端 O 和点 C_1,则线段 OC_1 即为同一时刻旗杆的影子.

点拨:根据物体和影子之间的关系可以判断是平行投影,然后根据平行投影的特征即可完成题中的要求.

4. **解**:(1)题图②反映了阳光下的情形,题图①反映了路灯下的情形.

(2)题图①中过影子顶端与树顶端的直线相交于一点,符合中心投影的特点,因此题图①反映了路灯下的情形;题图②中过影子顶端与树顶端的直线平行,符合平行投影的特点,因此题图②反映了阳光下的情形.



(第 4 题)

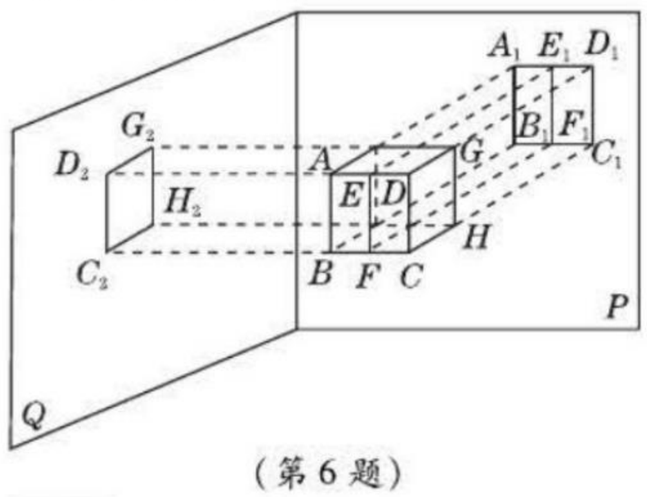
(3)路灯下小丽的影子如图①所示,表示影子的线段为 AB;阳光下小丽的影子如图②所示,表示影子的线段为 CD.

误区诊断:平行投影和中心投影对应的光线是不同的,形成平行投影的光源发出的光线是平行光线,而形成中心投影的光源发出的光线交于一点;同一时刻,平行投影下的影子的方向总是在同一方向,而中心投影下的影子可能在同一方向,也可能在不同方向.

5. C **点拨**:观察图中的两个立体图形,圆柱的正投影为长方形,正方体的正投影为正方形,故选 C.

6. **解**:画出的正投影如图所示. 这个物体在投影面 P 上的正投影是正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 及线段 E_1F_1,在投影面 Q 上的正投影是正方形 $C_2D_2G_2H_2$.

点拨:当物体的某个面(或某条边)与投影面平行时,这个面(或这条边)的正投影和这个面(或这条边)相同;当物体的某个面(或某条边)与投影面垂直时,这个面(或这条边)的正投影是一条线段(或一个点).



(第 6 题)

专训 2

1. **解**:(1)当点 P 位于初始位置 P_0 时, $CP_0=2$ m.

如图①,上午 10:00 时,太阳光线与地面的夹角为 65°,点 P 上调至 P_1 处,

$\angle P_1EB=90°$, $\angle CAB=90°$,

$\therefore\angle AP_1E=115°$, $\therefore\angle CP_1E=65°$.

$\because\angle DP_1E=20°$, $\therefore\angle CP_1F=45°$.

$\because CF=P_1F=1$ m,

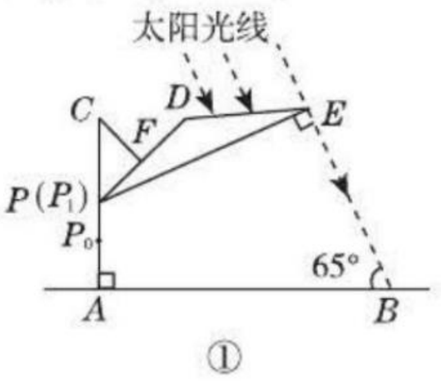
$\therefore\angle C=\angle CP_1F=45°$. $\therefore\angle CFP_1=90°$.

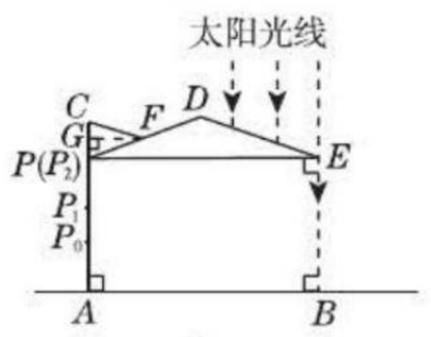
$\therefore\triangle CP_1F$ 为等腰直角三角形,

$\therefore CP_1=\sqrt{2}$ m.

$\therefore P_0P_1=CP_0-CP_1=2-\sqrt{2}\approx0.6(\text{m})$,

即点 P 需从 P_0 上调约 0.6 m.





(第 1 题)

(2)如图②,中午 12:00 时,太阳光线与 PE,地面都垂直,点 P 上调至 P_2 处, $\therefore P_2E\ //\ AB$.

$\because\angle CAB=90°$, $\therefore\angle CP_2E=90°$.

$\because\angle DP_2E=20°$,

$\therefore\angle CP_2F=\angle CP_2E-\angle DP_2E=70°$.

$\because CF=P_2F=1$ m,

$\therefore\triangle CP_2F$ 为等腰三角形.

过点 F 作 $FG\perp CP_2$ 于点 G,

$\therefore CG=GP_2=P_2F\cdot\cos70°\approx1\times0.34=0.34(\text{m})$.

$\therefore CP_2=2GP_2\approx0.68$ m.

$\therefore P_1P_2=CP_1-CP_2\approx\sqrt{2}-0.68\approx0.7(\text{m})$,

即点 P 在(1)的基础上还需上调约 0.7 m.

2. **解**:过点 E 作 $EF\perp AB$,垂足为点 F,则 $\angle BEF=30°$,设 $EC=h$ m.

$\because AB\perp AC$, $DC\perp AC$, $EF\perp AB$,

$\therefore$ 四边形 $ACEF$ 为矩形.

$\therefore EF=AC$, $AF=EC=h$ m.

在 Rt$\triangle BFE$ 中, $EF=AC=30$ m, $AB=10\times3=30(\text{m})$,所以 $BF=AB-AF=AB-EC=(30-h)$ m.

因为 $\angle BEF=30°$,所以 $BE=(60-2h)$ m.

由勾股定理得, $BF^2+EF^2=BE^2$,

所以 $(30-h)^2+30^2=(60-2h)^2$.

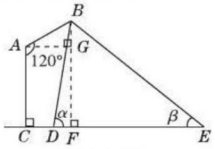
解得 $h\approx12.68$. ($h\approx47.32$ 不合题意,舍去)

因为 $4<\frac{12.68}{3}<5$,所以甲楼楼顶 B 的影子 E 落在乙楼的第五层.

方法点拨:这道题是平行投影在实际生活中的应用,解答此题的关键是将实际问题转化为数学问题,构造直角三角形,利用直角三角形的性质求解.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. 解：如图，过点 B 作 $BF\perp CE$，交 CE 于点 F，过点 A 作 $AG\perp BF$，交 BF 于点 G，则 $FG=AC=11$ 米.



（第 3 题）

$\because\angle BEF=\beta,\tan\beta=\frac{3}{4}$，

$\therefore$ 设 $BF=3x$ 米，则 $EF=4x$ 米.

在 Rt$\triangle BDF$ 中，$\because\tan\angle BDF=\frac{BF}{DF}$，

$\angle BDE=\alpha,\tan\alpha=6$.

$\therefore DF=\frac{BF}{\tan\angle BDF}=\frac{3x}{6}=\frac{1}{2}x$（米）.

$\because DE=18$ 米，$\therefore\frac{1}{2}x+4x=18$，

$\therefore x=4.\therefore BF=12$ 米，

$\therefore BG=BF-GF=12-11=1$（米）.

易得 $\angle CAG=90°$.

$\because\angle BAC=120°,\therefore\angle BAG=\angle BAC-\angle CAG=120°-90°=30°$.

$\therefore AB=2BG=2$ 米.

答：灯杆 AB 的长度为 2 米.

25.2 三视图

第 1 课时 由几何体到三视图

1. B **2.** C **3.** C **4.** C **5.** B **6.** C

7. B **8.** A

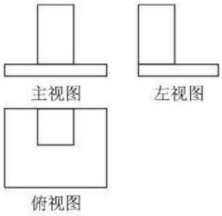
9. 解：(1) 主视图正确，左视图、俯视图如图①所示.

(2) 主视图正确，左视图、俯视图如图②所示.



（第 9 题）

10. 解：三视图如图所示.



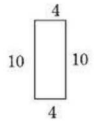
（第 10 题）

规律总结：三视图的长、宽、高的关系：主视图和俯视图长度相等，主视图和左视图高度相等，俯视图和左视图宽度相等.

11. A **12.** B

13. 解：(1) 4

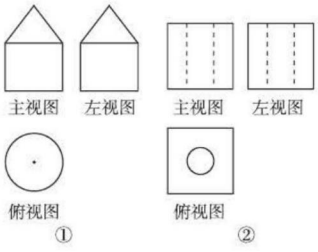
(2) 如图所示.



（第 13 题）

14. 解：(1) 如图①所示.

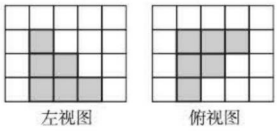
(2) 如图②所示.



（第 14 题）

15. 解：(1) 画图如图所示.

(2) 最多可以再添加 4 个小正方体.

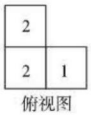


（第 15 题）

第 2 课时 由三视图到几何体

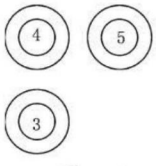
1. A **2.** C **3.** C **4.** A **5.** D

6. C 点拨：分析主视图和俯视图，在俯视图上标出各位置最多的正方体个数如下图，故选 C.



（第 6 题）

7. B 点拨：由俯视图可得：碟子共有 3 摞，由主视图和左视图，可得每摞碟子的个数，如图所示，故这张桌子上碟子的总数为 $3+4+5=12$.

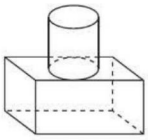


（第 7 题）

8. B

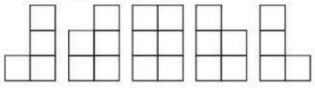
9. 解：(1)——B；(2)——C；(3)——A.

10. 解：直径和宽相等的圆柱和长方体的组合图形. 如图所示.



（第 10 题）

11. 解：(1) 由主视图可看出，此几何体有 3 列，从左往右第一列 1 层，第二列 2 层，第三列 3 层，又由俯视图可知，此几何体有 2 行，从前往后第一行 3 列，第二行 2 列，则左视图的所有可能的结果有如图所示的 5 种情形（画出一种即可）.



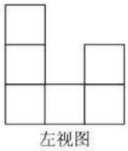
（第 11 题）

(2) 把以上五种情况下的几何体分别画出来，可得组成几何体的小正方体的个数有 8，9，10 或 11，即 $n=8$，9，10 或 11.

12. 解：(1) a 为 3，b 为 1，c 为 1.

(2) 最少由 9 个小正方体搭成，最多由 11 个小正方体搭成.

(3) 当 $d=e=1,f=2$ 时，该几何体的左视图如图所示.



（第 12 题）

点拨：由主视图与俯视图可知 a 为 3，b 与 c 均为 1，而 d,e,f 中至少有一个应为 2. 当均为 2 时，共有 11 个小正方体；当其中两个为 2，一个为 1 时，共有 10 个小正方体；当其中一个为 2，另外两个为 1 时，共有 9 个小正方体. 当 a,b,c,d,e,f 的值确定时，就只有一种情况，由此即可画出它的左视图.

第 3 课时 由三视图到几何体的展开图

1. A **2.** D

3. B 点拨：$\because$ 圆锥的底面半径为 3，

$\therefore$ 圆锥的底面周长为 6π，

$\because$ 圆锥的高度是 $6\sqrt{2}$，

$\therefore$ 圆锥的母线长为 $\sqrt{3^2+(6\sqrt{2})^2}=9$.

设扇形的圆心角为 $n°$，

$\therefore\frac{n\pi\times9}{180}=6\pi$，解得 $n=120$.

$\therefore$ 圆锥的侧面展开图中扇形的圆心角为 120°. 故选 B.

4. c；a；b

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5. C

6. D　**点拨**：$12 \times \frac{1}{4} = 3(\text{cm})$，

$10 \times \frac{1}{4} = 2.5(\text{cm})$，

$3 \times 2.5 = 7.5(\text{cm}^2)$，

即其主视图的面积是 7.5 cm^2. 故选 D.

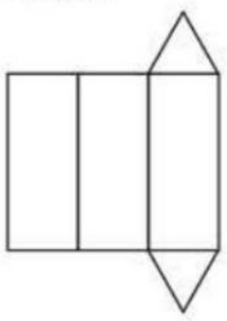
7. B

8. D　**点拨**：由三视图可知，几何体是由一个圆柱和一个长方体组成，圆柱底面直径为 20，高为 8，长方体的长为 30，宽为 20，高为 5，故该几何体的体积为：$\pi \times 10^2 \times 8 + 30 \times 20 \times 5 = 800\pi + 3\,000$，故选 D.

9. C　**点拨**：由三视图知该几何体是圆柱，且底面直径是 2 cm，高是 3 cm，则其侧面积为 $2\pi \times 3 = 6\pi(\text{cm}^2)$.

10. **解**：(1) 正三棱柱.

(2) 如图.



（第 10 题）

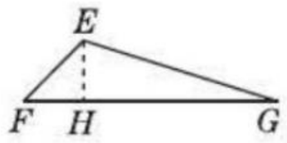
(3) $10 \times 4 \times 3 = 120(\text{cm}^2)$.

点拨：(2) 答案不唯一.

11. **思路导引**：(1) 过点 E 作 $EH \perp FG$ 于点 H，则根据题意可得出 $EH = AB$，然后解直角三角形即可得出答案.

(2) 根据三棱柱的体积等于底面积乘棱柱的高进行计算即可.

解：(1) 过点 E 作 $EH \perp FG$ 于点 H，如图.



（第 11 题）

在 $\text{Rt}\triangle EHF$ 中，$EF = 4$ cm，$\angle EFH = 45°$，

$\therefore EH = EF \cdot \sin \angle EFH = 4 \times \sin 45° = 2\sqrt{2}(\text{cm})$.

由图形可知 $AB = EH = 2\sqrt{2}$ cm.

(2) 直三棱柱的体积 $= S_{\triangle EFG} \cdot AD = \frac{1}{2} \times 12 \times 2\sqrt{2} \times 8 = 96\sqrt{2}(\text{cm}^3)$.

12. **解**：(1) 此模型由两个长方体组成：上面是一个小长方体，下面是一个大长方体.

(2) 模型的体积 $= 5 \times 6 \times 10 + 2 \times 3 \times 1.5 = 309(\text{m}^3)$，则该模型的质量 $= 309 \times 360 = 111\,240(\text{kg})$.

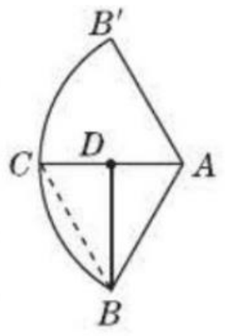
(3) 模型的表面积 $= 2 \times 3 \times 2 + 2 \times 1.5 \times 2 + 10 \times 5 \times 2 + 5 \times 6 \times 2 + 6 \times 10 \times 2 = 298(\text{m}^2)$，

需要油漆 $298 \div 4 = 74.5(\text{kg})$.

13. **解**：(1) 圆锥.

(2) 表面积 $S = S_{\text{扇形}} + S_{\text{圆}} = \pi rl + \pi r^2 = 12\pi + 4\pi = 16\pi$（平方厘米）.

(3) 如图，将圆锥侧面展开，线段 BD 长为所求的最短路程，由条件得 $\angle BAB' = 120°$，C 为弧 BB' 的中点，所以 $\angle BAD = 60°$. 连接 BC，易知 $\triangle ABC$ 为等边三角形，又因为 D 为 AC 的中点，所以 $BD \perp AC$. 从而可求得 $BD = 3\sqrt{3}$ 厘米.



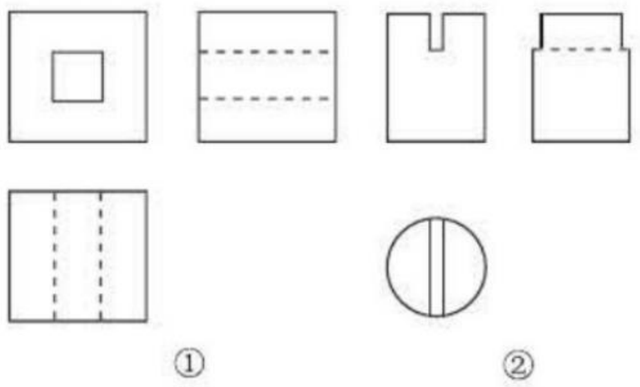
（第 13 题）

阶段方法技巧训练（六）

专训 1

1. B　**2**. C

3. **解**：如图所示.

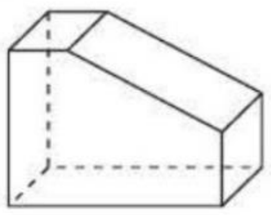


（第 3 题）

方法点拨：画三视图时，要根据几何体合理想象，看得见的轮廓线用实线画，看不见的轮廓线用虚线画.

4. B

5. **解**：如图所示.



（第 5 题）

技巧点拨：该物体是一个长方体切去了右上角后剩余的部分，还原物体时，还要根据实线和虚线确定切去部分的位置.

6. B

7. **解**：这样的几何体不是只有一种，最少需要 10 个小立方块，最多需要 16 个小立方块.

专训 2

1. **解**：(1) 圆锥.

(2) 由题图可知，圆锥高为 8 cm，底面直径为 12 cm，易求得母线长为 10 cm.

$\therefore S = \pi r^2 + \pi rl = 36\pi + 60\pi = 96\pi(\text{cm}^2)$.

2. **解**：(1) 主；俯

(2) 表面积 $= 2 \times (11 \times 7 + 11 \times 2 + 7 \times 2) + 4 \times \pi \times 6 \approx 301.36(\text{cm}^2)$.

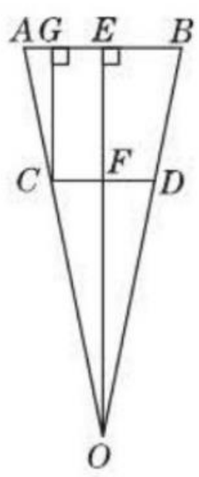
点拨：(1) 找到从正面和上面看所得到的图形即可得答案. (2) 根据题目所给尺寸，计算出下面长方体的表面积 + 上面圆柱的侧面积即可得解.

3. **解**：圆锥的高为：$\sqrt{13^2 - 5^2} = 12(\text{cm})$，

则不倒翁的容积为：$\frac{1}{3}\pi \times 5^2 \times 12 + \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi \times 5^3 = 100\pi + \frac{250\pi}{3} = \frac{550\pi}{3}(\text{cm}^3)$.

4. **解**：先求圆台的表面积和体积.

构造如图所示的三角形，$OA = OB$，$CD \parallel AB$，$AB = 6$ cm，$CD = 4$ cm，$EF = CG = 5$ cm，则梯形 $ABDC$ 可表示圆台的主视图.



（第 4 题）

易得 $AE = \frac{1}{2}AB = 3$ cm，$EG = CF = \frac{1}{2}CD = 2$ cm，

$\therefore AG = AE - EG = 3 - 2 = 1(\text{cm})$.

在 $\text{Rt}\triangle ACG$ 中，

$AC = \sqrt{CG^2 + AG^2} = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}(\text{cm})$.

$\because CD \parallel AB$，$\therefore \triangle OCD \backsim \triangle OAB$.

$\therefore \frac{CD}{AB} = \frac{OF}{OE} = \frac{OF}{OF + EF}$，

即 $\frac{4}{6} = \frac{OF}{OF + 5}$. 解得 $OF = 10$ cm.

$\therefore OE = OF + EF = 10 + 5 = 15(\text{cm})$.

由 $\frac{OC}{AC} = \frac{OF}{EF} = \frac{2}{1}$，得 $OC = 2AC = 2\sqrt{26}$ cm.

$\therefore OA = \frac{3}{2}OC = 3\sqrt{26}$ cm.

$\therefore$ 手电筒圆台部分的表面积为 $S_1 = \pi \times \left(\frac{6}{2}\right)^2 + \left(\pi \times \frac{6}{2} \times 3\sqrt{26} - \pi \times \frac{4}{2} \times 2\sqrt{26}\right) = (9 + 5\sqrt{26})\pi(\text{cm}^2)$，

圆台的体积为 $V_1 = \frac{1}{3}\pi \times \left(\frac{6}{2}\right)^2 \times 15 - \frac{1}{3}\pi \times \left(\frac{4}{2}\right)^2 \times 10 = \frac{95}{3}\pi(\text{cm}^3)$.

又 $\because$ 手电筒圆柱部分的表面积为 $S_2 = \pi \times \left(\frac{4}{2}\right)^2 + \pi \times 4 \times 12 = 52\pi(\text{cm}^2)$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

圆柱的体积为 $V_2=\pi\times\left(\frac{4}{2}\right)^2\times12=48\pi(\text{cm}^3)$，

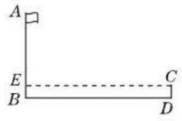
∴ 该手电筒的表面积 $S=S_1+S_2=(9+5\sqrt{26})\pi+52\pi=(61+5\sqrt{26})\pi(\text{cm}^2)$，

该手电筒的体积 $V=V_1+V_2=\frac{95}{3}\pi+48\pi=\frac{239}{3}\pi(\text{cm}^3)$.

全章热门考点整合应用

1. A　**点拨**：太阳光线是平行光线，由于摆放的位置不同，矩形木板在地面上形成的投影可能是 B，C 或 D. 故选 A.

2. **解**：如图，过点 C 作 $CE\perp AB$，垂足为点 E，则 $EC=BD=20$ m，$BE=CD=2$ m.



（第 2 题）

设 $AB=x$ m，则 $AE=(x-2)$ m.

由题意，知 $\frac{AE}{EC}=\frac{1}{2}$，即 $\frac{x-2}{20}=\frac{1}{2}$.

解得 $x=12$.

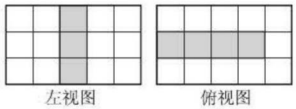
故旗杆的高度为 12 m.

点拨：本题旗杆的影子不都在地面上，故不能盲目地根据物体的高度与影长成正比例来列方程. 本题也可以过影子上的点 D 作 $DE\parallel CA$ 来构造平行四边形解决问题，或延长 AC，BD 交于一点，通过相似三角形的性质求解.

3. **解**：由题意，知 $EF\parallel BC$，∴ $\triangle OEF\backsim\triangle OBC$，∴ $\frac{EF}{BC}=\frac{MN}{MB}$，即 $\frac{0.22}{BC}=\frac{0.1}{20}$，解得 $BC=44$ m. ∴ 建筑物 A 的高为 44 m.

4. D

5. **解**：(1)26 cm²　(2)如图所示.

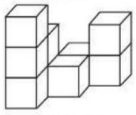


（第 5 题）

6. A　**点拨**：从俯视图可以想象出几何体的各部分小正方体的个数，进而可得出左视图中从左至右小正方形的个数依次为 1，3，2，故选 A. 对于由多个小正方体堆成的几何体的左视图的问题，要想象出左视图中每列小正方形的个数.

7. **思路导引**：由俯视图确定该物体在水平面上的形状，再由主视图、左视图确定空间形状.

解：该物体的形状如图，它共有 3 层，一共有 9 个小正方体.



（第 7 题）

方法总结：根据物体的三视图想象物体形状的方法：一般是由俯视图确定物体在水平面内的形状，然后再根据主视图和左视图补全它在空间里的形状，从而确定物体的形状.

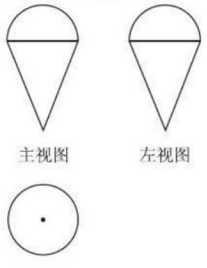
8. **思路导引**：由主视图与左视图判断此几何体为柱体，又由俯视图可知此几何体为四棱柱.

解：该几何体是直四棱柱. 由三种视图知，棱柱底面菱形的对角线的长分别为 4 cm，3 cm.

∴ 菱形的边长为 $\frac{5}{2}$ cm，∴ 棱柱的侧面积为 $\frac{5}{2}\times8\times4=80(\text{cm}^2)$.

9. **思路导引**：由这种容器抽象出来的几何体其实就是一个圆锥和一个与圆锥有相同底面的半球的组合体.

解：这种容器的三视图如图.



（第 9 题）

点拨：画复杂图形的三视图时，可把复杂的组合几何体分解成单一的常见几何体进行研究，并作出视图.

10. **解**：(1)略.

(2)∵ $AC\parallel FE$，∴ $\triangle ABC\backsim\triangle FDE$.

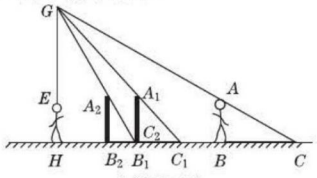
∴ $\frac{AB}{FD}=\frac{BC}{DE}$. ∴ $\frac{1.1}{12.1}=\frac{1.65}{DE}$.

∴ $DE=18.15$ m≈18.2 m.

故教学楼 DE 的高度约为 18.2 m.

11. **解**：(1)略. (2)设小丽身高 x 米，利用三角形相似列方程：$\frac{1.60}{2}=\frac{x}{1.75}$，解得 $x=1.4$. 即小丽的身高为 1.4 米.

12. **解**：(1)如图所示.



（第 12 题）

(2)由题意得：$\triangle ABC\backsim\triangle GHC$，

∴ $\frac{AB}{GH}=\frac{BC}{HC}$，∴ $\frac{1.6}{GH}=\frac{3}{6+3}$，

∴ $GH=4.8$(m).

(3)$\triangle A_1B_1C_1\backsim\triangle GHC_1$，

∴ $\frac{A_1B_1}{GH}=\frac{B_1C_1}{HC_1}$，设 B_1C_1 长为 x m，则 $\frac{1.6}{4.8}=\frac{x}{x+3}$，解得 $x=\frac{3}{2}$，即 $B_1C_1=\frac{3}{2}$.

同理 $\frac{1.6}{4.8}=\frac{B_2C_2}{B_2C_2+2}$，解得 $B_2C_2=1$ m.

$B_nC_n=\frac{3}{n+1}$ m.

13. 略.

14. **解**：设路灯的高为 x 米，∵ $GH\perp BD$，$AB\perp BD$，∴ $GH\parallel AB$，∴ $\triangle EGH\backsim\triangle EAB$，∴ $\frac{GH}{x}=\frac{EH}{EB}$，①

同理 $\triangle FGH\backsim\triangle FCD$，∴ $\frac{GH}{x}=\frac{FH}{FD}$，②

∴ $\frac{EH}{EB}=\frac{FH}{FD}=\frac{EH+FH}{EB+FD}$，∴ $\frac{3}{EB}=\frac{4.5}{12+4.5}$，解得 $EB=11$ 米，代入①得 $\frac{1.8}{x}=\frac{3}{11}$，解得 $x=6.6$. ∴ 路灯高为 6.6 米.

15. **解**：由题意得，$\angle BAD=\angle BCE$，

∵ $\angle ABD=\angle CBE=90°$，∴ $\triangle BAD\backsim\triangle BCE$，∴ $\frac{BD}{BE}=\frac{AB}{CB}$，即 $\frac{BD}{9.6}=\frac{1.7}{1.2}$，解得 $BD=13.6$ 米，∴ 河宽 BD 是 13.6 米.

第 26 章　概率初步

26.1　随机事件

1. D　**2.** B　**3.** A　**4.** A

5. C　**点拨**：总共有 6 种情况，向上一面点数是偶数的结果有 3 种可能，故选择 C.

6. D　**7.** C　**8.** D

9. D　**点拨**：由随机事件知，即使购买 1 个该品牌的电插座，也可能不合格，故选 D.

10. **解**：按事件名称划分：不可能事件：①⑤⑦；随机事件：②③④⑥. 按事件的确定性划分：确定事件：①⑤⑦；不确定事件：②③④⑥.

点拨：判断一个事件是不可能事件、必然事件还是随机事件，其标准在于结果是否在试验前预先确定，与这个试验是否进行无关. 一般来说，描述已被确定的真理或客观存在的事实的事件是必然事件，描述违背已被确定的真理或客观存在的事实的事件是不可能事件，否则是随机事件.

11. **解**：(1)红色，因为红球最多.

(2)不一样.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(3)取2个红球出来,或放2个白球进去.

点拨:(3)题答案不唯一,合理即可.

12. 解:(1)共比赛6场.

(2)随机事件.

13. 解:是不可能事件. 理由如下:

设小明的爸爸用x分钟追上小明,则可列方程$80(x+5)=100x$,解得$x=20$. 此时$80(x+5)=80\times(20+5)=2\,000$(米)$>1\,000$米,说明这时小明已经到学校了,故小明的爸爸没有在途中追上小明,所以这个事件是不可能事件.

方法规律:解答本题运用了**方程思想**,先列出方程求出爸爸追上小明所需要的时间,然后根据三种事件的概念进行判断即可.

26.2 等可能情形下的概率计算

第1课时 概率的计算

1. (1)1 (2)0 (3)$0<P(A)<1$

2. D **点拨**:必然事件的概率为1,不可能事件的概率为0,随机事件的概率大于0且小于1. 故选D.

3. B **4.** A

5. C **点拨**:共有4种等可能的结果,从中任取一个是中心对称图形的有3种情况,所以所求的概率为$\frac{3}{4}$.

6. B **7.** D **8.** A **9.** A

10. $\frac{1}{6}$ **点拨**:函数$y=ax^2+bx+1$的图象一定经过y轴上的点$(0,1)$,又知其图象经过第一、二、四象限,则图象的开口向上,对称轴在y轴的右侧,且与x轴正半轴有两个交点. $\therefore a>0, b<0, b^2-4a>0$. 从$-4,-2,1,2$四个数中随机取两个数一共有12种情形,其中满足条件的有$a=1, b=-4$,和$a=2, b=-4$共2种情形,$\therefore$图象恰好经过第一、二、四象限的概率为$\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.

11. B **点拨**:选项A错误,因为掷一枚均匀的骰子,骰子停止转动后,6点朝上是随机事件;选项B正确,因为方差反映的是成绩的稳定性,方差小的较稳定;选项C错误,因为"明天降雨的概率为$\frac{1}{2}$",表示明天降雨的可能性与不降雨的可能性相同;选项D错误,因为了解一批电视机的使用寿命,有破坏性,不适合用普查的方式.

12. 解:(1)发生的可能性很大,但不一定发生,0.9.

(2)发生的可能性很小,0.1.

(3)发生与不发生的可能性一样,0.5.

13. 解:(1)$290\times\frac{1}{29}=10$(个),

$290-10=280$(个),

$(280-40)\div(2+1)=80$(个),

$280-80=200$(个).

故袋中红球的个数是200个.

(2)$80\div290=\frac{8}{29}$.

答:从袋中任取一个球是黑球的概率是$\frac{8}{29}$.

14. 解:(1)将甲口袋中的2个白球、1个红球分别记为白$_1$,白$_2$,红$_1$,将乙口袋中的1个白球、1个红球分别记为白$_3$,红$_2$,分别从每个口袋中随机摸出一个球,所有可能的结果有:

(白$_1$,白$_3$),(白$_1$,红$_2$),(白$_2$,白$_3$),(白$_2$,红$_2$),(红$_1$,白$_3$),(红$_1$,红$_2$),共有6种等可能的结果,其中摸出的2个球都是白球的结果有2种,

$\therefore P$(摸出的2个球都是白球)$=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

(2)D **点拨**:P(摸出的2个球颜色相同)$=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$,

P(摸出的2个球颜色不相同)$=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$,

P(摸出的2个球中至少有1个红球)$=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$,

P(摸出的2个球中至少有1个白球)$=\frac{5}{6}$. 故(2)题选D.

15. 解:这个游戏对双方是公平的.

理由如下:

$\because$两次数字之和可能为2,3,4,3,4,5共6种情况,和小于4的有3种,

$\therefore P$(和小于4)$=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

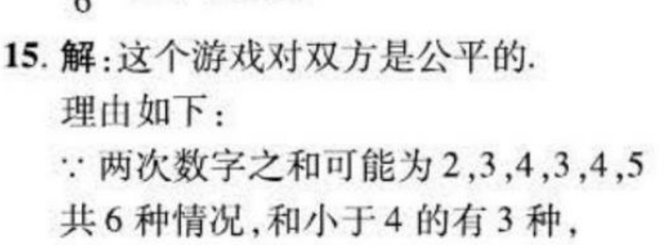
$\therefore$这个游戏对双方是公平的.

第2课时 用树状图法求概率

1. $\frac{3}{4}$

2. D **3.** D **4.** A

5. C **点拨**:画"树状图"列举这两辆汽车行驶方向所有可能的结果如图所示:



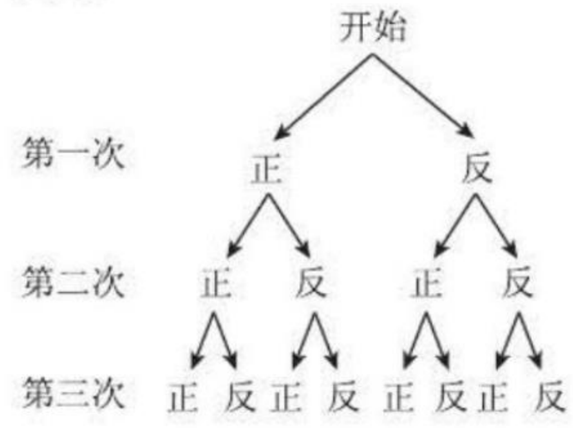
(第5题)

$\therefore$这两辆汽车行驶方向共有9种可能的结果,且所有结果的可能性相等.

由"树状图"知,两辆汽车一辆左转,一辆右转的结果有2种,$\therefore P$(两辆汽车一辆左转,一辆右转)$=\frac{2}{9}$. 故选C.

6. D

7. 解:(1)根据题意画出如图所示的树状图:



(第7题)

(2)由树状图可知,共有8种等可能的结果:

正正正,正正反,正反正,正反反,反正正,反正反,反反正,反反反.

其中三次正面朝上或三次反面朝上的情况有2种. 所以P(小刚任意挑选两球队)$=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$.

(3)这个规则对两个球队公平. 理由如下:

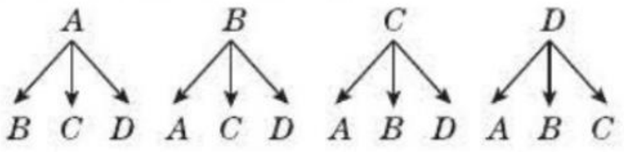
两次正面朝上一次正面朝下的情况有3种,正正反,正反正,反正正.

两次反面朝上一次反面朝下的情况有3种,正反反,反正反,反反正.

所以P(小刚加入足球阵营)$=P$(小刚加入篮球阵营)$=\frac{3}{8}$.

所以这个规则对两个球队公平.

8. 解:(1)画树状图如图:



(第8题)

共有12种等可能的结果;

(2)由勾股数的定义可知B, C, D卡片上的数都是勾股数,故抽到的两张卡片上的数都是勾股数的结果数为6,

所以抽到的两张卡片上的数都是勾股数的概率为$\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$.

9. 解:(1)根据题意所有个位数字是5的"两位递增数"是15,25,35,45这4个.

(2)画树状图如图:

(第9题)

共有15种等可能的结果,其中个位数字与十位数字之积能被10整除的结果数为3,所以个位数字与十位数字之积能被10整除的概率$=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$.

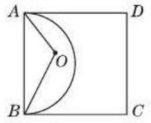
关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

10. 解：(1)∵ 半径为5 cm的圆的面积为25π cm^2，

边长为30 cm的正方形$ABCD$的面积为900 cm^2，

∴ P(飞镖落在圆内)$=\frac{25\pi}{900}=\frac{\pi}{36}$.

(2)如图可得：当点O落在以AB为直径的半圆内，$\triangle OAB$为钝角三角形.



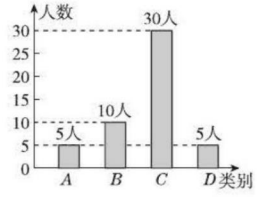
(第10题)

∵ $S_{半圆}=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot15^2=\frac{225}{2}\pi$(cm^2)，

∴ P($\triangle OAB$为钝角三角形)$=\frac{\frac{225}{2}\pi}{900}=\frac{\pi}{8}$.

11. 解：(1)50；216°

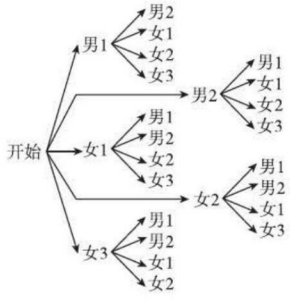
(2)如图所示.



[第11(2)题]

(3)180

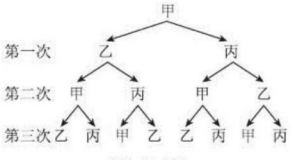
(4)画出树状图，如图所示：



[第11(4)题]

被抽到的两个学生性别相同的概率为$\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$.

12. 解：(1)根据题意画出树状图如图：



(第12题)

(2)由(1)可知三次传球后，球回到甲脚下的概率为$\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$.

(3)由(1)可知球回到甲脚下的概率为$\frac{1}{4}$，传到乙脚下的概率为$\frac{3}{8}$，所以球传到乙脚下的概率大.

第3课时　用列表法求概率

1. $\frac{1}{3}$　**2.** D　**3.** B　**4.** $\frac{2}{5}$　**5.** $\frac{1}{6}$

6. A　**点拨**：列表得出所有等可能的情况数，找出小明、小华两人同时选择“参加社会调查”的情况数，即可求出要求的概率.

7. C

8. C　**点拨**：列表得：

9	379	479	579	679	879	–
8	378	478	578	678	–	978
6	376	476	576	–	876	976
5	375	475	–	675	875	975
4	374	–	574	674	874	974
3	–	473	573	673	873	973
个位 / 百位	3	4	5	6	8	9

∵ 共有30种等可能的结果，与7组成“中高数”的有12种情况，∴ 与7组成“中高数”的概率是$\frac{12}{30}=\frac{2}{5}$. 故选C.

9. C　**10.** B

11. 错解：A

诊断：20张商标牌中有奖的有5张，该参与者前两次翻牌均获奖，而翻过的牌不能再翻，因此剩下的18张商标牌中，有奖的商标牌有3张，故他第三次翻牌获奖的概率是$\frac{3}{18}=\frac{1}{6}$，而不是$\frac{1}{4}$.

正解：C

12. 解：(1)由题意可得，小邱从白盘中随机取一个粽子，恰好取到红枣粽子的概率是：$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

(2)由题意可得，出现的所有可能是：

$(A,A),(A,B),(A,C),(A,C)$，

$(A,A),(A,B),(A,C),(A,C)$，

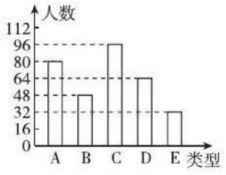
$(B,A),(B,B),(B,C),(B,C)$，

$(C,A),(C,B),(C,C),(C,C)$.

∴ 小邱取到的两个粽子中一个是红枣粽子、一个是豆沙粽子的概率是$\frac{3}{16}$.

13. 解：(1)80；64

补全条形统计图如图：



(第13题)

(2)$2\,500\times\frac{96}{320}=750$(名).

答：估计全校有750名学生喜爱科普读物.

(3)将3名女生分别记为女1，女2，女3，2名男生分别记为男1，男2，则列表：

	女1	女2	女3	男1	男2
女1		(女2，女1)	(女3，女1)	(男1，女1)	(男2，女1)
女2	(女1，女2)		(女3，女2)	(男1，女2)	(男2，女2)
女3	(女1，女3)	(女2，女3)		(男1，女3)	(男2，女3)
男1	(女1，男1)	(女2，男1)	(女3，男1)		(男2，男1)
男2	(女1，男2)	(女2，男2)	(女3，男2)	(男1，男2)	

所有等可能的情况有20种，其中一男一女的有12种，所以P(恰好抽到一男一女)$=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$.

14. 解：(1)共有4张纸牌，牌面图形是中心对称图形的情况有3种，所以摸出的牌面图形是中心对称图形的概率是$\frac{3}{4}$；

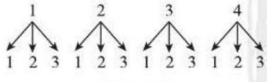
(2)列表：

	A	B	C	D
A		(A,B)	(A,C)	(A,D)
B	(B,A)		(B,C)	(B,D)
C	(C,A)	(C,B)		(C,D)
D	(D,A)	(D,B)	(D,C)	

共产生12种结果，每种结果出现的可能性相同，其中两张牌面图形都是轴对称图形的有6种，∴ P(两张牌面图形都是轴对称图形)$=\frac{1}{2}$，因此这个游戏公平.

第4课时　利用概率判断游戏规则的公平性

1. 解：(1)画树状图如图：



(第1题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

共有12种等可能的结果,其中摸出的球上的数字之和小于6的情况有9种,

$\therefore P(\text{小王去})=\frac{3}{4}$.

(2)我认同小李的说法,理由如下:

$\because P(\text{小王去})=\frac{3}{4}, P(\text{小李去})=\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\neq\frac{1}{4}$,∴这种规则不公平.

2. 解:不公平. 理由:列表表示所有可能的结果:

第一张 / 和 / 第二张	4	5	6
4	8	9	10
5	9	10	11
6	10	11	12

由上表可知,共有9种等可能结果,其中和为偶数的有5种结果,和为奇数的有4种结果,

$\therefore P(\text{参加敬老服务活动})=\frac{5}{9}$,

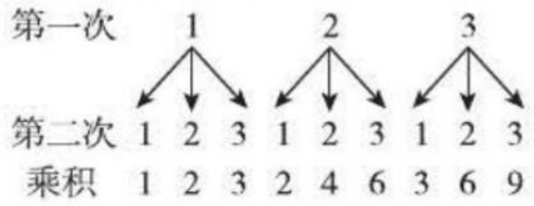
$P(\text{参加文明礼仪宣传活动})=\frac{4}{9}$.

$\because \frac{5}{9}\neq\frac{4}{9}$,

∴这个游戏不公平.

3. 解:(1)$\frac{1}{3}$.

(2)画树状图如图.



(第3题)

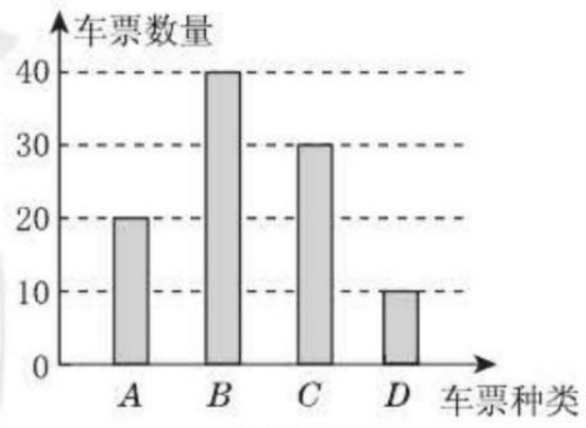
乘积共有9种等可能情况,其中偶数有5种,奇数有4种,

$\therefore P(\text{小明胜})=\frac{5}{9}$,

$P(\text{小华胜})=\frac{4}{9}$.

$\because \frac{5}{9}\neq\frac{4}{9}$,∴游戏规则对双方不公平.

4. 解:(1)设去D地的车票有x张,则$x=(x+20+40+30)\times10\%$,解得$x=10$,即去D地的车票有10张,补全统计图如图所示.



(第4题)

(2)小胡抽到去A地的概率为$\frac{20}{20+40+30+10}=\frac{1}{5}$.

(3)列表如下:

小李 / 小王	1	2	3	4
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)

可知共有16种等可能的结果,其中小王掷得着地一面的数字比小李掷得着地一面的数字小的有6种,分别为(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4).

所以小王掷得着地一面的数字比小李掷得着地一面的数字小的概率为$\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$,

小王掷得着地一面的数字不小于小李掷得着地一面的数字的概率为$\frac{10}{16}=\frac{5}{8}$. 因为$\frac{3}{8}\neq\frac{5}{8}$,所以这个规则不公平.

26.3 用频率估计概率

1. 0.90 **2.** 15 **3.** D **4.** B

5. 1

6. D

7. 错解:A

诊断:用频率估计概率时,要注意试验的次数越多,事件发生的频率就会越接近这个事件发生的概率. 试验的次数太少易受偶然性因素影响,此时的频率不能用来估计概率.

正解:D

8. 解:(1)0.25;0.25

(2)设袋中白球为x个,由题意得

$\frac{1}{1+x}=0.25$,

解得$x=3$. 经检验$x=3$是原方程的解且符合题意.

∴估计袋中有3个白球.

(3)用B代表黑球,W_1,W_2,W_3代表白球,将摸球情况列表如下:

第一次 / 第二次	B	W_1	W_2	W_3
B	(B,B)	(B,W_1)	(B,W_2)	(B,W_3)
W_1	(W_1,B)	(W_1,W_1)	(W_1,W_2)	(W_1,W_3)
W_2	(W_2,B)	(W_2,W_1)	(W_2,W_2)	(W_2,W_3)
W_3	(W_3,B)	(W_3,W_1)	(W_3,W_2)	(W_3,W_3)

总共有16种等可能的结果,其中两个球都是白球的结果有9种,∴两次都摸出白球的概率为$\frac{9}{16}$.

9. 解:(1)$\because \bar{x}_{甲}=\frac{63+66+63+61+64+61}{6}=63$,

$\therefore s_{甲}^2=\frac{1}{6}\times[(63-63)^2\times2+(66-63)^2+2\times(61-63)^2+(64-63)^2]=3$;

$\because \bar{x}_{乙}=\frac{63+65+60+63+64+63}{6}=63$,

$\therefore s_{乙}^2=\frac{1}{6}\times[(63-63)^2\times3+(65-63)^2+(60-63)^2+(64-63)^2]=\frac{7}{3}$.

$\because s_{乙}^2<s_{甲}^2$,

∴乙种小麦的株高长势比较整齐.

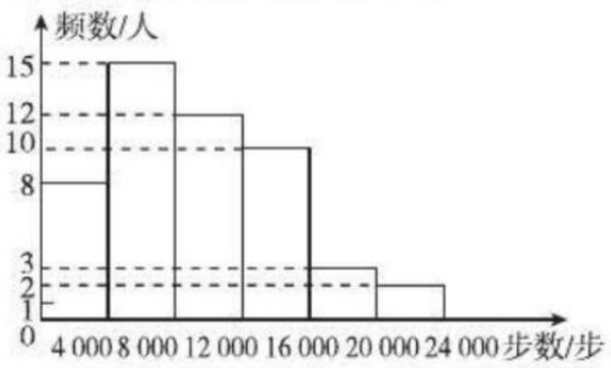
(2)列表如下:

	63	66	63	61	64	61
63	63,63	66,63	63,63	61,63	64,63	61,63
65	63,65	66,65	63,65	61,65	64,65	61,65
60	63,60	66,60	63,60	61,60	64,60	61,60
63	63,63	66,63	63,63	61,63	64,63	61,63
64	63,64	66,64	63,64	61,64	64,64	61,64
63	63,63	66,63	63,63	61,63	64,63	61,63

由表可知,共有36种等可能结果,其中两株配对小麦株高恰好都等于各自平均株高的有6种,∴所抽取的两株配对小麦株高恰好都等于各自平均株高的概率为$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

10. 解:(1)$a=8\div50=0.16$,$b=12\div50=0.24$,$c=50\times0.2=10$,$d=50\times0.04=2$,

补全频数分布直方图如图:



[第10(1)题]

(2)37 800×(0.2+0.06+0.04)=11 340,

答:估计日行走步数超过12 000步(包含12 000步)的教师有11 340名.

(3)设16 000≤x<20 000的3名教师分别为A,B,C,20 000≤x<24 000的2名教师分别为X,Y,画树状图如图:

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



［第10(3)题］

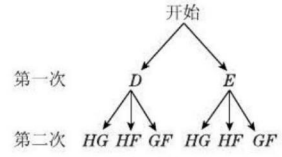
由树状图可知，被选取的两名教师恰好都在20 000步（包含20 000步）以上的概率为$\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$.

26.4 综合与实践

概率在遗传学中的应用

1. 解：(1) $\triangle DFG$（或$\triangle DHF$）

(2)画树状图如图：



（第1题）

由树状图可知共有6种等可能结果. 其中与$\triangle ABC$面积相等的有3种，即$\triangle DHF$，$\triangle DGF$和$\triangle EGF$. 所以所画三角形与$\triangle ABC$面积相等的概率为$P=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

2. (1)$\frac{1}{2}$ (2)$\frac{1}{4}$ (3)$\frac{1}{8}$

3. 解：(1)共有NN，Na，Na，aa四种等可能的情况，所以P(正常)$=\frac{3}{4}$.

(2)共有NN，Na，NN，Na四种等可能的情况，所以P(正常)$=\frac{4}{4}=1$，P(患病)$=\frac{0}{4}=0$.

(3)共有Na，aa，Na，aa四种等可能的情况，所以P(正常)$=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，P(患病)$=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

4. 解：(1)垃圾投放正确的概率为$\frac{1}{3}$.

(2)“厨余垃圾”投放正确的概率为$\frac{250}{60+250+40}=\frac{5}{7}$.

阶段方法技巧训练（七）

专训1

1. D **2.** ①③⑤ **3.** A **4.** A

5. 解：必然事件有①②⑤⑥，不可能事件有③④⑦，这些事件都是确定性事件.

6. C **7.** 随机

8. 解：等可能事件有①②③，非等可能事件有④.

专训2

1. 解：(1) P(摸出一个球是黄球)$=\frac{5}{5+13+22}=\frac{1}{8}$.

(2)设取出了x个黑球，则放入了x个黄球，由题意得$\frac{5+x}{5+13+22}\geqslant\frac{1}{3}$，解得$x\geqslant\frac{25}{3}$. $\because x$为正整数，$\therefore x$最小取9.

则至少取出了9个黑球.

2. 解：(1)由题中图表可知被调查学生中“一般”档次的有13人，所占比例是26%，所以共调查的学生数是$13\div26\%=50$(人)，

则调查学生中“良好”档次的人数为$50\times60\%=30$(人)，所以$x=30-(12+7)=11$，$y=50-(1+2+6+7+12+11+7+1)=3$.

(2)由样本数据可知“优秀”档次所占的比例是$\frac{3+1}{50}=0.08=8\%$.

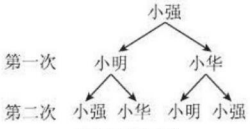
所以，估计该校九年级400名学生中为“优秀”档次的人数为$400\times8\%=32$(人).

(3)用A，B，C表示阅读本数是8的学生，用D表示阅读本数是9的学生，列表如下：

	A	B	C	D
A		(A,B)	(A,C)	(A,D)
B	(B,A)		(B,C)	(B,D)
C	(C,A)	(C,B)		(C,D)
D	(D,A)	(D,B)	(D,C)	

由列表可知，共有12种等可能的情况，其中所抽取的2名学生中有1名阅读本数为9的有6种. 所以抽取的2名学生中有1名阅读本数为9的概率$P=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$.

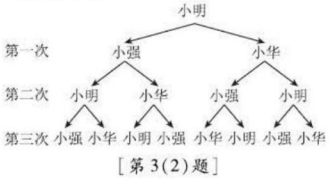
3. 解：(1)画树状图如图：



［第3(1)题］

$\therefore P$(踢到小华处)$=\frac{1}{4}$.

(2)应从小明开始踢. 理由如下：画树状图如图：



［第3(2)题］

若从小明开始踢，P(踢到小明处)$=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$，同理，若从小强开始踢，P(踢到小明处)$=\frac{3}{8}$，若从小华开始踢，P(踢到小明处)$=\frac{3}{8}$. 故应从小明开始踢.

4. 解：(1)“和为7”出现的概率约为0.33；

(2)列表如下：

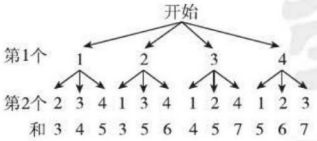
和 / 甲 / 乙	2	3	4	x
2	/	5	6	$2+x$
3	5	/	7	$3+x$
4	6	7	/	$4+x$
x	$x+2$	$x+3$	$x+4$	/

由表格可知，一共有12种等可能的结果，由(1)可知，“和为7”出现的概率约为0.33，$\therefore$“和为7”出现的次数约为$0.33\times12=3.96\approx4$. 若$2+x=7$，则$x=5$，符合题意，若$3+x=7$，则$x=4$，不合题意. 若$4+x=7$，则$x=3$，不合题意. $\therefore x=5$.

专训3

1. 解：(1)$\because$不透明的口袋里装有分别标有数字1，2，3，4的四个球，球上的数字为偶数的是2与4，$\therefore$从中任取一球，球上的数字为偶数的概率为$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

(2)画树状图如图：



（第1题）

共有12种等可能的结果，两个球上的数字之和为偶数的有(1,3)，(2,4)，(3,1)，(4,2)，共4种情况，

$\therefore$两个球上的数字之和为偶数的概率为$\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$.

(3)公平. 理由如下：

$\because$两个球上的数字之差的绝对值为1的有(1,2)，(2,3)，(3,4)，(4,3)，(3,2)，(2,1)，共6种情况，

$\therefore P$(甲胜)$=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$，$P$(乙胜)$=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$. $\therefore P$(甲胜)$=P$(乙胜)，

$\therefore$这种游戏方案对甲、乙双方公平.

2. 解：(1)90

(2)不公平. 理由：列表如下：

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

	1	2	3	4
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)

由表可知共有16种等可能的结果,且指针所指扇形上的数字之积为偶数的有12种,奇数的有4种,则指针所指扇形上的数字之积为偶数的概率是$\frac{12}{16}=\frac{3}{4}$,指针所指扇形上的数字之积为奇数的概率是$\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$,

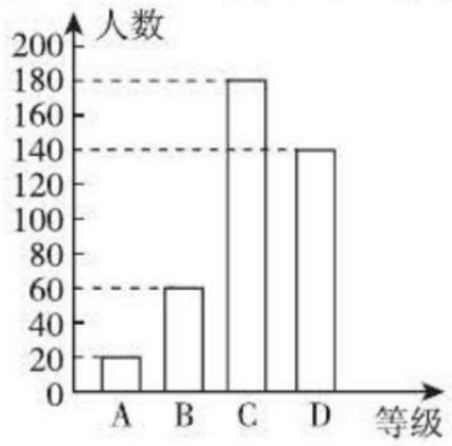
∴这个游戏规则对双方不公平.

3. **解**:(1)400;35%

(2)126

(3)调查的结果为D等级的人数为:$400\times35\%=140$,

故补全的条形统计图如图所示.



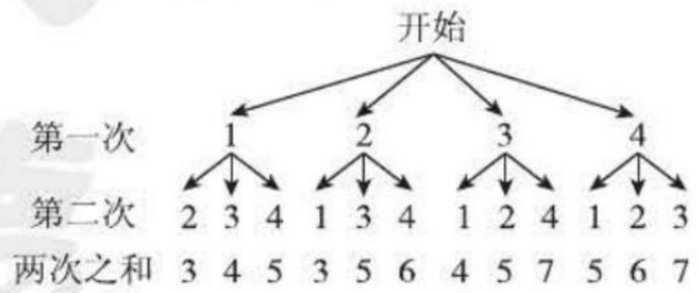
[第3(3)题]

(4)由题意可得,画树状图如图所示,

∴P(数字和为奇数)$=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$,

P(数字和为偶数)$=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$.

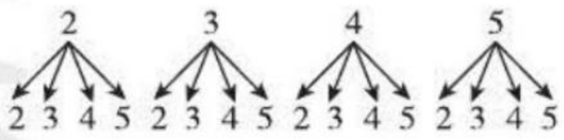
故这个游戏规则不公平.



[第3(4)题]

专训4

1. **解**:(1)画树状图如图:



(第1题)

共有16种等可能的结果.

(2)是方程$x+y=6$的解的共有3种情况,

∴P(是方程$x+y=6$的解)$=\frac{3}{16}$.

(3)是不等式$x-y\geqslant1$的解的共有6种情况,

∴P(是不等式$x-y\geqslant1$的解)$=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$.

2. **解**:∵$x^2-2(a-1)x+a(a-3)=0$有两个不相等的实数根,∴$\Delta>0$,

即$[-2(a-1)]^2-4a(a-3)>0$,

∴$a>-1$,将(1,0)代入$y=x^2-(a^2+1)x-a+2$得$a^2+a-2=0$,根据题意可知二次函数不过点(1,0),

∴$a^2+a-2\neq0$,即$(a-1)(a+2)\neq0$,解得$a\neq1$且$a\neq-2$. 可见,符合要求的a的值为0,2,3.

∴所求概率$P=\frac{3}{7}$.

3. **解**:(1)米粒落在阴影部分的概率为$\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$;

(2)列表:

第一次 \ 第二次	A	B	C	D	E	F
A		(A,B)	(A,C)	(A,D)	(A,E)	(A,F)
B	(B,A)		(B,C)	(B,D)	(B,E)	(B,F)
C	(C,A)	(C,B)		(C,D)	(C,E)	(C,F)
D	(D,A)	(D,B)	(D,C)		(D,E)	(D,F)
E	(E,A)	(E,B)	(E,C)	(E,D)		(E,F)
F	(F,A)	(F,B)	(F,C)	(F,D)	(F,E)	

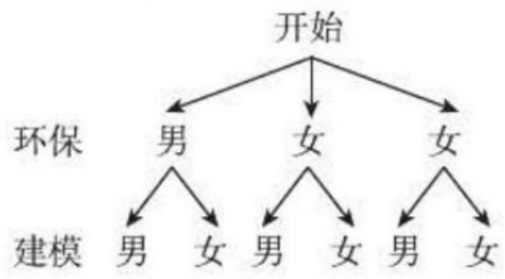
共有30种等可能的情况,其中新图案是轴对称图形的有10种,

故新图案是轴对称图形的概率为$\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$.

4. **解**:(1)60;72

(2)补全条形统计图略.

(3)画树状图如图:



(第4题)

∵共有6种等可能结果,其中两人恰为1名男生1名女生的有3种结果,

∴P(恰为1名男生1名女生)$=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

全章热门考点整合应用

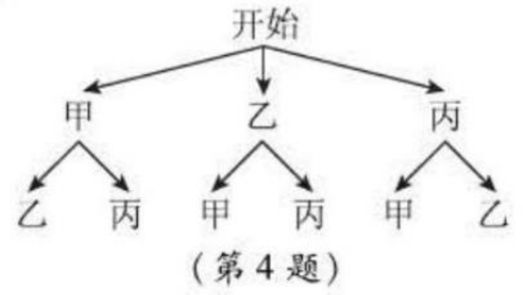
1. C **2.** D **3.** $\frac{4}{9}$

4. **解**:(1)60

(2)参加"吉他社"的学生在全班学生中所占比例为$\frac{1-25\%-20\%-20\%-15\%}{2}=10\%$,

所以"吉他社"对应扇形的圆心角的度数为$360^\circ\times10\%=36^\circ$.

(3)画树状图如图:



(第4题)

或列表如下:

	甲	乙	丙
甲		(甲,乙)	(甲,丙)
乙	(乙,甲)		(乙,丙)
丙	(丙,甲)	(丙,乙)	

由树状图(或表格)可知,共有6种等可能的情况,其中恰好选中甲和乙的情况有2种,故P(恰好选中甲和乙)$=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

5. **解**:(1)2点朝上的频率$=\frac{9}{60}=\frac{3}{20}$;

5点朝上的频率$=\frac{20}{60}=\frac{1}{3}$.

(2)小军的说法不正确,因为3点朝上的频率为$\frac{1}{10}$,不能说明3点朝上这一事件发生的概率就是$\frac{1}{10}$,只有当试验的次数足够多时,该事件发生的频率稳定在事件发生的概率附近,才可以将这个频率的稳定值作为该事件发生的概率.

(3)小刚的说法是不正确的,因为随机事件的发生具有随机性,所以6点朝上出现的次数不一定是100次.

6. C **点拨**:根据其表面展开图,得出三组相对的面分别是6对3,4对2,8对1. 故P(朝上一面的数字恰好等于朝下一面的数字的2倍)$=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$. 故选C.

7. **解**:(1)设口袋中红球有x个,

则黑球有$(x-1)$个,白球有$(x+3)$个,

共有球$x+(x-1)+(x+3)=3x+2$(个).

根据题意,得$\frac{x-1}{3x+2}=\frac{1}{4}$,解得$x=6$.

经检验$x=6$是原方程的解且符合题意.

所以$x-1=5$.

因此估计口袋中有5个黑球.

(2)$6+5+6+3=20$(个).

口袋中共有球20个,小王取出第一个球后不放回,还剩下19个球,红球仍是6个,所以小王从口袋中余下的球中任意取出1个球是红球的概率是$\frac{6}{19}$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

达标检测卷答案

第24章达标检测卷

一、1. C　2. A

3. C　**点拨**：由垂径定理可得选项A，B是正确的；由直径所对的圆周角是直角可得选项D是正确的. 故选C.

4. B　5. A　6. D　7. B

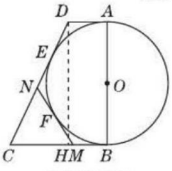
8. C　**点拨**：设该圆锥底面圆的半径为r cm，则$\frac{90\pi\times8}{180}=2\pi r$，解得$r=2$. 故选C.

9. B　**点拨**：设AB与$\odot O$相切于点D，连接OC，OD，CD，则$OD\perp AB$，易知$\angle ACB=90°$，所以PQ为$\odot O$的直径，$PQ=OC+OD\geqslant CD$，当CD过点O时，$PQ=CD$，此时PQ有最小值，且$CD\perp AB$，所以$CD=\frac{BC\cdot AC}{AB}=\frac{60}{13}$.

10. A　**点拨**：作$DH\perp BC$于点H，如图所示，∵ 在四边形$ABCD$中，$AD\parallel BC$，$\angle ABC=90°$，∴ $AB\perp BC$，$AB\perp AD$. ∵ AB为直径，∴ AD和BC为$\odot O$的切线. ∵ CD和MN为$\odot O$的切线，∴ $DE=DA=2$，$CE=CB$，$NE=NF$，$MB=MF$. 易知四边形$ABHD$为矩形，∴ $BH=AD=2$，$DH=AB=6$，设$BC=x$，则$CH=x-2$，$CD=x+2$.

在Rt△DCH中，∵ $CH^2+DH^2=CD^2$，∴ $(x-2)^2+6^2=(x+2)^2$，解得$x=4.5$. ∴ $CB=CE=4.5$，

∴ △MCN的周长$=CN+CM+MN=CN+CM+NF+MF=CN+CM+NE+MB=CE+CB=9$. 故选A.



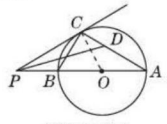
（第10题）

二、11. $OE=OF$，$\angle AOB=\angle COD$

点拨：本题答案不唯一.

12. $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{4}$　13. 48 cm

14. ②③④　**点拨**：如图，连接OC. 由AB为$\odot O$的直径知$\angle ACB=90°$. 因为PC为$\odot O$的切线，所以$\angle PCO=90°$，易得$\angle PCB=\angle A$. 若$\angle A=30°$，则$\angle CBA=60°$，易得$\angle CPB=30°$，所以$\angle CPB=\angle A$，所以$PC=AC=\sqrt{3}BC$，故②正确. 若$\angle CPA=30°$，则$\angle COP=60°$，又因为$OC=OB$，所以△BOC为等边三角形，所以$BC=OB$，$\angle CBO=60°$，所以$\angle PCB=30°$，所以$PB=BC$，所以$PB=OB$，故③正确. 因为PD为$\angle APC$的平分线，所以$\angle DPA=\frac{1}{2}\angle APC$. 所以$\angle CDP=\angle DPA+\angle A=\frac{1}{2}(\angle APC+\angle BOC)=45°$，即$\angle CDP=45°$为定值，故④正确. 在△$CPD$和△$DPA$中，$\angle CPD=\angle DPA$，而$\angle CDP>\angle A$，$\angle PCD>\angle A$，所以△$CPD$与△$DPA$不相似，故①错误.

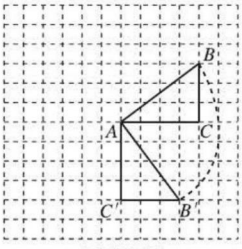


（第14题）

三、15. **解**：(1) 如图.

(2) 如图，线段AB在变换到AB'的过程中扫过区域的面积就是扇形$B'AB$的面积，其中$\angle B'AB=90°$，$AB'=AB=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

所以线段AB在变换到AB'的过程中扫过区域的面积是$\frac{90}{360}\times\pi\times25=\frac{25}{4}\pi$.



（第15题）

16. **解**：(1) ∵ $OD\perp AB$，垂足为点C，交$\odot O$于点D，

∴ $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$. 又∵ $\angle AOD=52°$，

∴ $\angle DEB=\frac{1}{2}\angle AOD=26°$.

(2) ∵ $OD\perp AB$，∴ $AC=BC=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times8=4$，

∴ 在Rt△AOC中，$AO=\sqrt{AC^2+OC^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$，

∴ $\odot O$的直径是10.

17. (1) **证明**：如图，连接AD.

∵ AB是$\odot O$的直径，∴ $\angle ADB=90°$.

∵ $DC=BD$，∴ $AB=AC$.

(2) **解**：由(1)知$AB=AC$，

∵ $\angle BAC=60°$，

∴ △ABC是等边三角形，

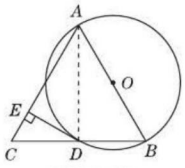
∴ $\angle C=\angle B=60°$.

∵ $\angle ADB=90°$，∴ $\angle BAD=30°$.

在Rt△BAD中，$\angle BAD=30°$，$AB=8$，∴ $BD=4$，即$DC=4$.

又∵ $DE\perp AC$，

∴ $DE=DC\cdot\sin C=4\cdot\sin60°=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$.



（第17题）

18. (1) **解**：如图，连接CA.

∵ $OP\perp AB$，∴ $OB=OA=2$.

∴ $B(2,0)$.

∵ $OP^2+OB^2=BP^2$，∴ $OP^2=5-4=1$，∴ $OP=1$.

∴ $P(0,1)$. ∵ BC是$\odot P$的直径，

∴ $\angle CAB=90°$.

∵ $CP=BP$，$OB=OA$，

∴ $AC=2OP=2$.

∴ $C(-2,2)$.

(2) **证明**：∵ 直线$y=2x+b$过C点，

∴ $b=6$. ∴ $y=2x+6$.

∵ 当$y=0$时，$x=-3$，

∴ $D(-3,0)$. ∴ $AD=1$.

∵ $AC=OB=2$，$AD=OP=1$，$\angle CAD=\angle BOP=90°$，

∴ △$DAC\cong$△POB. ∴ $\angle DCA=\angle ABC$.

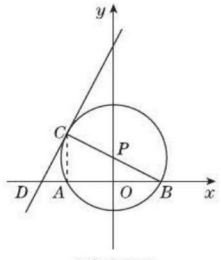
∵ $\angle ACB+\angle ABC=90°$，

∴ $\angle DCA+\angle ACB=90°$，

即$\angle DCB=90°$.

又∵ BC为$\odot P$的直径，

∴ CD是$\odot P$的切线.



（第18题）

19. (1) **证明**：如图，连接OD.

∵ BC与$\odot O$相切于点D，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore OD \perp BC$.

$\because \angle C = 90°$,

$\therefore OD // AC$.

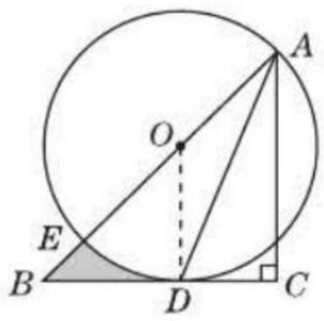
$\therefore \angle ODA = \angle CAD$.

$\because OD = OA$,

$\therefore \angle ODA = \angle BAD$,

$\therefore \angle BAD = \angle CAD$.

$\therefore AD$ 平分 $\angle BAC$.



（第 19 题）

(2)**解**：$\because$ 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$，$AC = BC$，

$\therefore \angle B = \angle BAC = 45°$.

$\because BC$ 与$\odot O$ 相切于点 D，

$\therefore \angle ODB = 90°$，

$\therefore \angle BOD = 45°$.

$\therefore OD = BD$.

设 $BD = x$，则 $OD = OA = x$，$OB = \sqrt{2}x$.

$\therefore BC = AC = x + 1$.

$\because AC^2 + BC^2 = AB^2$，

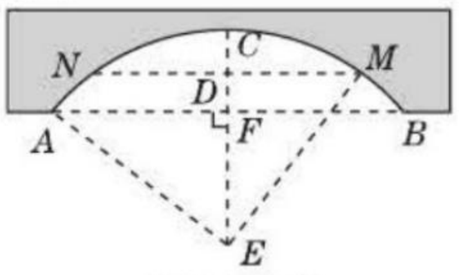
$\therefore 2(x+1)^2 = (\sqrt{2}x + x)^2$.

$\therefore x = \sqrt{2}$（负值舍去）.

$\therefore BD = OD = \sqrt{2}$.

$\therefore$ 图中阴影部分的面积 $= S_{\triangle BOD} - S_{扇形DOE} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} - \frac{45 \cdot \pi \times (\sqrt{2})^2}{360} = 1 - \frac{\pi}{4}$.

20. **解**：(1) 如图，设点 E 是桥拱所在圆的圆心.



（第 20 题）

过点 E 作 $EF \perp AB$ 于点 F，

延长 EF 交$\overset{\frown}{AB}$于点 C，连接 AE，

则 $CF = 20$ m. 由垂径定理知，

F 是 AB 的中点，

$\therefore AF = FB = \frac{1}{2}AB = 40$ m.

设半径是 r m，由勾股定理，

得 $AE^2 = AF^2 + EF^2 = AF^2 + (CE - CF)^2$，

即 $r^2 = 40^2 + (r-20)^2$.

解得 $r = 50$.

$\therefore$ 桥拱所在圆的半径为 50 m.

(2) 这艘轮船能顺利通过. 理由：

当宽 60 m 的轮船刚好可通过拱桥时，如图，MN 为轮船顶部的位置.

连接 EM，设 EC 与 MN 的交点为 D，

则 $DE \perp MN$，$\therefore DM = 30$ m，$\therefore DE = \sqrt{EM^2 - DM^2} = \sqrt{50^2 - 30^2} = 40$(m).

$\because EF = EC - CF = 50 - 20 = 30$(m)，

$\therefore DF = DE - EF = 40 - 30 = 10$(m).

$\because 10$ m > 9 m，

$\therefore$ 这艘轮船能顺利通过.

21. (1) **证明**：$\because AB$ 是$\odot O$ 的直径，

$\therefore \angle ACB = 90°$.

$\because DE \perp AB$，$\therefore \angle DEO = 90°$.

$\therefore \angle DEO = \angle ACB$.

$\because OD // BC$，$\therefore \angle DOE = \angle ABC$，

$\therefore \triangle DOE \backsim \triangle ABC$.

(2) **证明**：$\because \triangle DOE \backsim \triangle ABC$，

$\therefore \angle ODE = \angle A$.

$\because \angle A$ 与 $\angle BDC$ 都是$\overset{\frown}{BC}$所对的圆周角，

$\therefore \angle A = \angle BDC$，$\therefore \angle ODE = \angle BDC$，

$\therefore \angle ODF = \angle BDE$.

(3) **解**：$\because \triangle DOE \backsim \triangle ABC$，

$\therefore \frac{S_{\triangle DOE}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{OD}{AB}\right)^2 = \frac{1}{4}$，

即 $S_{\triangle ABC} = 4S_{\triangle DOE} = 4S_1$，

$\because OA = OB$，$\therefore S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$，

即 $S_{\triangle BOC} = 2S_1$. $\because \frac{S_1}{S_2} = \frac{2}{7}$，

$S_2 = S_{\triangle BOC} + S_{\triangle DOE} + S_{\triangle DBE} = 2S_1 + S_1 + S_{\triangle DBE}$，

$\therefore S_{\triangle DBE} = \frac{1}{2}S_1$，

$\therefore BE = \frac{1}{2}OE$，即 $OE = \frac{2}{3}OB = \frac{2}{3}OD$，

$\therefore \sin A = \sin \angle ODE = \frac{OE}{OD} = \frac{2}{3}$.

22. **解**：(1) $\because \angle BAD = 60°$，$\angle AOD = 90°$，$\therefore \angle ADO = 30°$.

又$\because$ 点 A 的坐标为 $(-2, 0)$，$\therefore AO = 2$，$\therefore AD = 4$，

$\therefore OD = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$，

$\therefore$ 点 D 的坐标为 $(0, 2\sqrt{3})$.

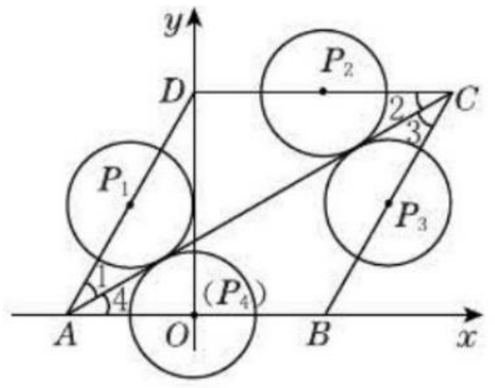
设直线 AD 的表达式为 $y = kx + b$，

则 $\begin{cases} -2k + b = 0, \\ b = 2\sqrt{3}, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} k = \sqrt{3}, \\ b = 2\sqrt{3}, \end{cases}$ $\therefore$ 线段 AD 所在直线的表达式为 $y = \sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$.

(2) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，$\angle BAD = 60°$，$\therefore DC = CB = BA = AD = 4$，

$\angle DCB = \angle BAD = 60°$，$\therefore \angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4 = 30°$，如图.



（第 22 题）

①当点 P 在 P_1 的位置且$\odot P_1$ 与 AC 相切时，易得 $AP_1 = 2r = 2$，$\therefore t_1 = 2$.

②当点 P 在 P_2 的位置且$\odot P_2$ 与 AC 相切时，易得 $CP_2 = 2r = 2$，$\therefore AD + DP_2 = 6$，$\therefore t_2 = 6$.

③当点 P 在 P_3 的位置且$\odot P_3$ 与 AC 相切时，易得 $CP_3 = 2r = 2$，$\therefore AD + DC + CP_3 = 10$，$\therefore t_3 = 10$.

④当点 P 在 P_4 的位置且$\odot P_4$ 与 AC 相切时，易得 $AP_4 = 2r = 2$，

$\therefore AD + DC + CB + BP_4 = 14$，

$\therefore t_4 = 14$，

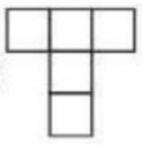
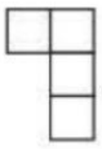
$\therefore$ 当 $t = 2, 6, 10$ 或 14 时，以点 P 为圆心、以 $r = 1$ 为半径的圆与对角线 AC 相切.

第 25 章达标检测卷

一、**1**. B　**2**. D　**3**. B

4. B　**点拨**：设所求投影三角形的对应边长为 x cm，则有 $\frac{2}{5} = \frac{8}{x}$，解得 $x = 20$.

5. D

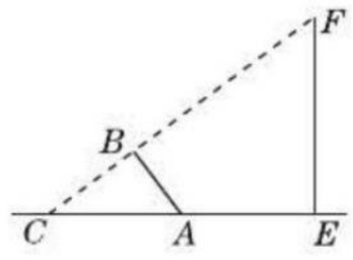
6. D　**点拨**：移走之前，主视图为 ，俯视图为 ，左视图为 ，移走之后，主视图为 ，俯视图为 ，左视图为 ，故只有左视图不变.

7. C　**8**. A　**9**. B

10. B　**点拨**：当木杆旋转到达地面时，影长最短，等于 AB 的长.

$\because$ 影长的最小值为 3 m，

$\therefore AB = 3$ m. $\because$ 影长最大时，木杆与光线垂直（如图），此时 $AC = 5$ m，



（第 10 题）

$\therefore BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 4$ m.

$\because \angle CBA = \angle CEF = 90°$，$\angle C = \angle C$，

$\therefore \triangle CAB \backsim \triangle CFE$.

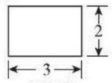
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \frac{CB}{CE}=\frac{BA}{EF}$，

即$\frac{4}{5+5}=\frac{3}{EF}$. $\therefore EF=7.5$(m).

二、**11.** ②

12. 6　**点拨**：这个长方体的俯视图如图（单位：厘米）.



俯视图

（第 12 题）

13. 7　**点拨**：根据题意得搭成该几何体的小正方体最多有 1 + 1 + 1 + 2 + 2 = 7(个).

14. 5.8 m　**点拨**：如图，分别延长 AC，BD 交于点 E.

∵ $CD=1.8$ m，且同一时刻测得一身高为 1.5 m 的同学的影长为1.35 m，

$\therefore \frac{CD}{DE}=\frac{1.5}{1.35}$，即$\frac{1.8}{DE}=\frac{1.5}{1.35}$.

$\therefore DE=1.62$(m).

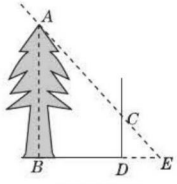
∵ $CD/\!/AB$，

$\therefore \angle ABD=\angle CDE$，$\angle BAC=\angle DCE$，

$\therefore \triangle ABE\backsim\triangle CDE$.

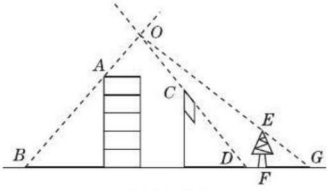
$\therefore \frac{CD}{AB}=\frac{DE}{BE}$，即$\frac{1.8}{AB}=\frac{1.62}{1.62+3.6}$.

解得 $AB=5.8$(m).



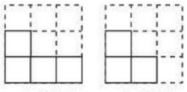
（第 14 题）

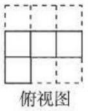
三、**15.** **解**：如图所示.



（第 15 题）

16. **解**：(1) 如图.


主视图　左视图

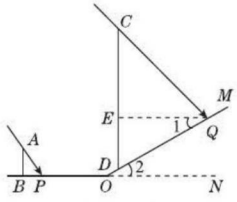

俯视图

（第 16 题）

(2)2

17. **解**：由三视图可知茶叶罐的形状为圆柱，并且茶叶罐的底面直径 $2r$ 为 100 mm，高 h 为 150 mm. $\therefore$ 半径 $r=50$ mm. ∵ 制作每个茶叶罐所需钢板的面积即为该圆柱的表面积，$\therefore S_{表}=2\pi r^2+2\pi rh=2\pi\times50^2+2\pi\times50\times150=20\,000\pi$(mm²). 故制作每个茶叶罐所需钢板的面积为 $20\,000\pi$ mm².

18. **解**：如图，过点 Q 作 $QE\perp DC$ 于点 E，由题意可得，$\triangle ABP\backsim\triangle CEQ$，



（第 18 题）

则$\frac{AB}{BP}=\frac{EC}{EQ}$，即$\frac{1.7}{1.2}=\frac{EC}{EQ}$.

由题意可得，$EQ/\!/NO$，

则$\angle1=\angle2=30°$.

∵ $QD=5$ m，

$\therefore DE=\frac{5}{2}$ m，$EQ=\frac{5}{2}\sqrt{3}$ m，

故$\frac{1.7}{1.2}=\frac{EC}{EQ}=\frac{EC}{\frac{5}{2}\sqrt{3}}$，

解得 $EC=\frac{85}{24}\sqrt{3}$，

故 $CD=CE+DE=\frac{85}{24}\sqrt{3}+\frac{5}{2}=\frac{60+85\sqrt{3}}{24}$(m).

答：大树的高度为$\frac{60+85\sqrt{3}}{24}$ m.

19. **解**：(1) 画图略.

(2) 画图略. AB 的正投影长 2 cm.

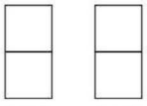
(3) 画图略. AB 的正投影长$\sqrt{3}$ cm.

20. **解**：(1) 如图所示.

(2) 根据题意得 $0.8\times0.8\times5+0.8\pi\times0.8=(0.64\pi+3.2)$(m²)，

$40\times(0.64\pi+3.2)\approx208.4$(元).

答：一共需要花费 208.4 元.


主视图　左视图


俯视图

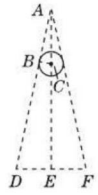
（第 20 题）

21. **解**：(1) 阴影是圆形.

(2) 当把白炽灯向高处移时，阴影会逐渐变小.

(3) 设球在地面上的阴影的半径为 x 米，

抽象出图形如图，过球心 C 作 $CB\perp AD$，垂足为 B，则 CB 是球的半径.



（第 21 题）

易知 $\triangle ABC\backsim\triangle AED$，得$\frac{AB}{AE}=\frac{BC}{DE}$，

$\therefore \frac{\sqrt{1^2-0.2^2}}{3}=\frac{0.2}{x}$，解得 $x^2=\frac{3}{8}$，

则 $S_{阴影}=\frac{3}{8}\pi$ 平方米.

22. **解**：(1) ∵ $AB=CD=30$ m，$BA\perp AC$，$CD\perp AC$，

$\therefore$ 四边形 $ABDC$ 是矩形.

$\therefore BD=AC=24$ m，$\angle BDE=90°$.

∵ $\angle DBE=30°$，

$\therefore$ 设 $DE=x$ m，则 $BE=2x$ m.

$\therefore$ 在 Rt$\triangle BDE$ 中，$BD=\sqrt{BE^2-DE^2}=\sqrt{(2x)^2-x^2}=\sqrt{3}x$(m).

$\therefore \sqrt{3}x=24$，解得 $x=8\sqrt{3}$.

$\therefore EC=CD-DE=(30-8\sqrt{3})$ m，即甲楼的影子落在乙楼上有$(30-8\sqrt{3})$ m高.

(2) 如图. 当太阳光照射到 C 时，甲楼的影子刚好不影响乙楼，

在 Rt$\triangle ABC$ 中，$AB=30$ m，

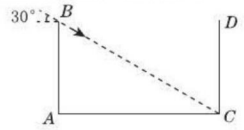
$\angle ACB=30°$，

$\therefore BC=2AB=60$ m.

在 Rt$\triangle ABC$ 中，由勾股定理得

$AC=\sqrt{BC^2-AB^2}=\sqrt{60^2-30^2}=30\sqrt{3}$(m).

$\therefore$ 若甲楼的影子刚好不影响乙楼，则两楼之间的距离应当为$30\sqrt{3}$ m.



（第 22 题）

第 26 章达标检测卷

一、**1.** B　**2.** C　**3.** A　**4.** D　**5.** D　**6.** D　**7.** B　**8.** B　**9.** B

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. A　**点拨**:列表:

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

共有36种等可能的情况,点$P(x,y)$在抛物线$y=-x^2+3x$上的情况有(1,2),(2,2)2种.

∴点P在抛物线$y=-x^2+3x$上的概率为$\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$. 故选A.

二、**11**. 随机

12. $\frac{2}{3}$　**13**. 20

14. $\frac{2}{5}$　**点拨**:不等式组$\begin{cases}2x+3<4,\\3x-1>-11\end{cases}$的解集为$-\frac{10}{3}<x<\frac{1}{2}$,要使函数$y=\frac{1}{2x^2+2x}$有意义,则分母$2x^2+2x\neq0$,解得$x\neq0$且$x\neq-1$. 在所给的五个数$-3,-2,-1,0,4$中,$-3$与$-2$既满足$-\frac{10}{3}<x<\frac{1}{2}$,又满足$x\neq0$且$x\neq-1$,故所求概率为$\frac{2}{5}$.

三、**15**. **解**:(1)最小的和为2,所以是不可能事件;

(2)和可能为2到12之间的任意一个整数,所以是随机事件;

(3)和可能为2到12之间的任意一个整数,所以是随机事件;

(4)和最大为12,所以是必然事件.

16. **解**:(1)正确,理由:当试验次数很大时可以用频率估计概率.

(2)不正确,理由:当试验次数不够大时,频率不一定接近概率.

17. **解**:(1)$P=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$.

(2)设取出x个黑球,由题意得$\frac{8-x}{20-x}=\frac{1}{3}$,解得$x=2$. 经检验$x=2$是方程的解且符合题意,即从袋中取出黑球的个数为2.

18. **解**:某人从钱包内随机取出2张纸币,可能出现的结果有3种,即10元与20元,10元与50元,20元与50元,并且它们出现的可能性相等.

(1)取出纸币的总额是30元(记为事件A)的结果有1种,即10元与20元,所以$P(A)=\frac{1}{3}$.

(2)取出纸币的总额可购买一件51元的商品(记为事件B)的结果有2种,即10元与50元,20元与50元,所以$P(B)=\frac{2}{3}$.

19. **解**:(1)列表如下:

b \ k	-1	-2	3
-1	$(-1,-1)$	$(-2,-1)$	$(3,-1)$
-2	$(-1,-2)$	$(-2,-2)$	$(3,-2)$
3	$(-1,3)$	$(-2,3)$	$(3,3)$
4	$(-1,4)$	$(-2,4)$	$(3,4)$

(2)由表格可知,所有等可能的情况有12种. 一次函数$y=kx+b$的图象经过第一、二、四象限时,$k<0,b>0$,有4种情况,则P(一次函数$y=kx+b$的图象经过第一、二、四象限)$=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$.

20. **解**:(1)40;20.

(2)列表:

	A	B	C	D	E
A		(A,B)	(A,C)	(A,D)	(A,E)
B	(B,A)		(B,C)	(B,D)	(B,E)
C	(C,A)	(C,B)		(C,D)	(C,E)
D	(D,A)	(D,B)	(D,C)		(D,E)
E	(E,A)	(E,B)	(E,C)	(E,D)	

所以B能参加决赛的概率为$\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$.

21. **解**:(1)30;0.250　(2)0.25

(3)列表如下:

红桃 \ 方块	1	2	3
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)

所有等可能的结果有9种,其中甲方赢的结果有2种,乙方赢的结果有3种,∴P(甲方赢)$=\frac{2}{9}$,P(乙方赢)$=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$,∴P(乙方赢)$>P$(甲方赢).∴这个游戏对双方是不公平的,有利于乙方.

期末达标检测卷

一、**1**. D　**2**. A

3. D　**点拨**:①④都是随机事件;②是必然事件;③是不可能事件. 故选D.

4. B　**5**. B

6. D　**点拨**:∵AB为直径,∴$\angle ACB=90°$,∴$\angle ACD+\angle BCD=90°$,∵$CD\perp AB$,∴$\angle BCD+\angle B=90°$,∴$\angle B=\angle ACD$,∵$\cos\angle ACD=\frac{3}{5}$,∴$\cos B=\frac{3}{5}$,易知$\tan B=\frac{4}{3}$,∵$BC=4$,∴$\tan B=\frac{AC}{BC}=\frac{AC}{4}=\frac{4}{3}$,∴$AC=\frac{16}{3}$.

7. B

8. A　**点拨**:根据计算,可知圆锥的侧面展开图的圆心角为90°,再运用勾股定理求解可知最短路程为$40\sqrt{2}$. 故选A.

9. B　**点拨**:连接BD,∵AD平分$\angle BAC$,∴$\angle CAE=\angle DAB$,∴$\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{BD}$. ∵$AB$是⊙$O$的直径,∴$\angle ACE=\angle ADB=90°$,∴$\triangle ACE\backsim\triangle ADB$,∴$\frac{AC}{AD}=\frac{AE}{AB}$,即$\frac{AC}{5}=\frac{AE}{6}$. 设$AC=5x$,则$AE=6x$,∴$DE=5-6x$,连接$OD$交$BC$于点$F$,则$DO\perp BC$,∴$OD/\!/AC$,易知$OF=\frac{1}{2}AC=\frac{5}{2}x$,∴$DF=OD-OF=3-\frac{5}{2}x$,易得$\triangle ACE\backsim\triangle DFE$,∴$\frac{AC}{DF}=\frac{AE}{DE}$,即$\frac{5x}{3-\frac{5}{2}x}=\frac{6x}{5-6x}$,解得$x=\frac{7}{15}$($x=0$舍去),则$AE=6x=2.8$,故选B.

10. D

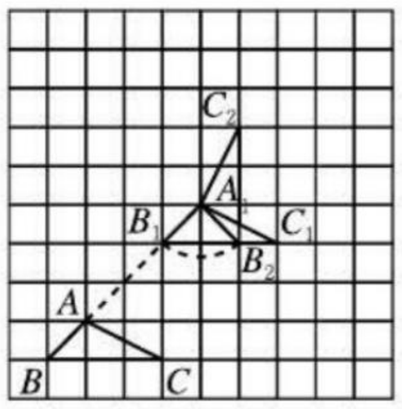
二、**11**. 3　**12**. 2 100

13. 2π　**点拨**:$S_{阴影}=S_{扇形ABA'}=\frac{45}{360}\pi\cdot4^2=2\pi$.

14. 200　**点拨**:由三视图可知立体图形由上下两个长方体构成,上面长方体长4 mm,宽2 mm,高4 mm,下面长方体长8 mm,宽6 mm,高2 mm,去掉重合部分,立体图形表面积为:$6\times8\times2+8\times2\times2+6\times2\times2+4\times4\times2+4\times2\times2=200(mm^2)$.

三、**15**. **解**:(1)如图.　(2)如图.

(3)如图,点B经过的路径为线段BB_1和$\overset{\frown}{B_1B_2}$,∴点B经过的路径总长为$\sqrt{3^2+3^2}+\frac{90\pi\cdot\sqrt{2}}{180}=3\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$.

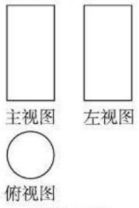


(第15题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

16. **解**：(1)圆柱　(2)如图所示.

(3)这个几何体的体积为$\left(\frac{10}{2}\right)^2\pi\times 20\approx 3.14\times\left(\frac{10}{2}\right)^2\times 20=1\,570$.



（第16题）

17. (1)**证明**：$\because\angle CAD$和$\angle CEB$都为劣弧BC所对的圆周角，

$\therefore\angle CAD=\angle CEB$，又$\because CD\perp AB$，

$\therefore\angle CDA=90°$，$\because CE$为$\odot O$的直径，

$\therefore\angle CBE=90°$，$\therefore\angle CDA=\angle CBE$，

$\therefore\triangle ACD\backsim\triangle ECB$.

(2)**解**：在Rt$\triangle ACD$中，$\sin\angle BAC=\frac{CD}{AC}=\frac{1}{3}$，

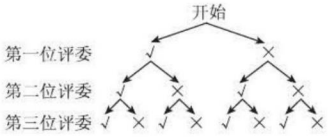
$\because AC=4$，$\therefore CD=\frac{1}{3}\cdot AC=\frac{4}{3}$.

$\because\triangle ACD\backsim\triangle ECB$，$\therefore\frac{AC}{EC}=\frac{CD}{CB}$，

即$\frac{4}{EC}=\frac{\frac{4}{3}}{2}$，$\therefore EC=6$，$\therefore\odot O$的半径为3，$\therefore\odot O$的面积为$9\pi$.

点拨：解题的关键是利用三角形相似的判定证得三角形相似，第(1)题的结论可以作为第(2)题的条件.

18. **解**：(1)画树状图如图：



（第18题）

(2)由(1)知共有8种等可能的结果，其中晋级的有4种情况，

所以$P(A\text{晋级})=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$.

19. **解**：(1)由题意可知，$PQ=12$ m，$AB=(12+2x)$ m.

易知$\frac{1.6}{9.6}=\frac{AP}{AB}$，即$\frac{1.6}{9.6}=\frac{x}{12+2x}$，解得$x=3$. $\therefore AB=18$ m.

即两个路灯之间的距离为18 m.

(2)设当文华走到路灯B时，他在路灯A下的影子长是a m，则$\frac{1.6}{9.6}=\frac{a}{a+18}$，

解得$a=3.6$. $\therefore$他在路灯A下的影子长是3.6 m.

20. (1)**证明**：如图，连接OD，

$\because D$为$\overset{\frown}{BC}$的中点，$\therefore\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DB}$.

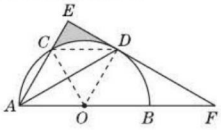
$\therefore\angle EAD=\angle DAO$.

$\because OA=OD$，$\therefore\angle DAO=\angle ODA$.

$\therefore\angle ODA=\angle EAD$. $\therefore OD\parallel AE$.

$\because DE\perp AC$，$\therefore DE\perp OD$.

$\therefore EF$是半圆O的切线.



（第20题）

(2)**解**：如图，连接OC与CD.

$\because DA=DF$，$\therefore\angle DAF=\angle F$.

又由(1)知$\angle CAD=\angle DAF$，

$\therefore\angle F=\angle DAF=\angle CAD$.

$\because\angle EAF+\angle F=90°$，$\therefore 3\angle F=90°$.

$\therefore\angle F=30°$. $\therefore\angle BAC=60°$.

又$\because OC=OA$，$\therefore\triangle OAC$为等边三角形.

$\therefore\angle AOC=60°$.

由(1)知$OD\perp EF$，

$\therefore\angle DOF=90°-\angle F=60°$.

在Rt$\triangle DOF$中，$DF=6\sqrt{3}$，

$\therefore OD=DF\cdot\tan 30°=6\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=6$.

在Rt$\triangle AED$中，$DA=6\sqrt{3}$，

$\angle CAD=30°$，$\therefore DE=\frac{1}{2}DA=3\sqrt{3}$，

$EA=DA\cdot\cos 30°=9$.

$\because\angle COD=180°-\angle AOC-\angle DOF=60°$，$OC=OD$，$\therefore\triangle COD$是等边三角形.

$\therefore\angle DCO=60°=\angle AOC$. $\therefore CD\parallel AB$.

$\therefore S_{\triangle ACD}=S_{\triangle COD}$.

$\therefore S_{\text{阴影}}=S_{\triangle AED}-S_{\text{扇形}COD}=\frac{1}{2}\times 9\times 3\sqrt{3}-\frac{60\pi\cdot 6^2}{360}=\frac{27\sqrt{3}}{2}-6\pi$.

21. **解**：(1)$(a+2b)$

(2)$\because$在整个运动过程中，点P移动的距离为$(a+2b)$ cm，圆心O移动的距离为$2(a-4)$ cm.

由题意，得$a+2b=2(a-4)$.　①

$\because$点P移动2 s到达B点，即点P用2 s移动了b cm，

点P继续移动3 s，到达BC的中点，

即点P用3 s移动了$\frac{1}{2}a$ cm，

$\therefore\frac{b}{2}=\frac{\frac{1}{2}a}{3}$.　②

由①②解得$\begin{cases}a=24,\\ b=8.\end{cases}$

$\because$点P移动的速度与$\odot O$移动的速度相等，

$\therefore\odot O$移动的速度为$\frac{b}{2}=4$(cm/s).

$\therefore$在这5 s时间内圆心O移动的距离为$5\times 4=20$(cm).

(3)存在这种情形. 理由如下：

设点P移动的速度为v_1 cm/s，$\odot O$移动的速度为v_2 cm/s，

由题意，得$\frac{v_1}{v_2}=\frac{a+2b}{2(a-4)}=\frac{20+2\times 10}{2\times(20-4)}=\frac{5}{4}$.

如图，作直线OO_1，设直线OO_1与AB交于点E，与CD交于点F，$\odot O_1$与AD相切于点G，连接O_1G，则$O_1G\perp AD$.

若PD与$\odot O_1$相切，切点为H，连接O_1H，则$O_1H\perp DP$，$O_1G=O_1H$，

易得Rt$\triangle DO_1G\backsim$Rt$\triangle DO_1H$，

$\therefore\angle ADB=\angle BDP$.

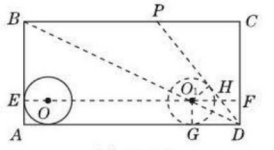
$\because BC\parallel AD$，$\therefore\angle ADB=\angle CBD$.

$\therefore\angle BDP=\angle CBD$，$\therefore BP=DP$，

设$BP=x$ cm，则$DP=x$ cm，$PC=(20-x)$ cm，

在Rt$\triangle PCD$中，由勾股定理，可得$PC^2+CD^2=PD^2$，

即$(20-x)^2+10^2=x^2$，解得$x=\frac{25}{2}$.



（第21题）

$\therefore$此时点P移动的距离为$10+\frac{25}{2}=\frac{45}{2}$(cm)，易知$EF\parallel AD$，

$\therefore\triangle BEO_1\backsim\triangle BAD$，

$\therefore\frac{EO_1}{AD}=\frac{BE}{BA}$，即$\frac{EO_1}{20}=\frac{10-2}{10}$，

$\therefore EO_1=16$(cm)，$\therefore OO_1=14$ cm.

(i)当$\odot O$首次到达$\odot O_1$的位置时，$\odot O$移动的距离为14 cm，

$\therefore$此时点P与$\odot O$移动的速度比为$\frac{\frac{45}{2}}{14}=\frac{45}{28}$，

$\because\frac{45}{28}\neq\frac{5}{4}$，$\therefore$此时$PD$与$\odot O_1$不可能相切.

(ii)当$\odot O$在返回途中到达$\odot O_1$的位置时，$\odot O$移动的距离为$2\times(20-4)-14=18$(cm)，

$\therefore$此时点P与$\odot O$移动的速度比为$\frac{\frac{45}{2}}{18}=\frac{45}{36}=\frac{5}{4}$，

$\therefore$此时PD与$\odot O_1$恰好相切.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



练准知识 练通考点
练透方法 练出高分



提分一定有方法！



绿色印刷产品

关注荣德基微信公众号，获取新资讯。
荣德基官方网站：http://www.rudder.com.cn
荣德基天猫旗舰店：http://rongdeji.tmall.com

荣德基
初中频道

本书导学号
9513162

ISBN 978-7-5450-7013-2
9 787545 070132 >
定价：37.90元

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料