教辅资料站
电子教辅　试卷练习
知识总结　备课资源
扫码关注获取更多学习资料



典中点®

综合应用创新题 典中点

一本在做题中教会你学习方法的书

主　　编：荣德基
本册主编：程小恒



九年级数学 下

（LJ版） 五四学制

陕西新华出版传媒集团
陕西人民教育出版社
·西安·

一本在做题中教会你学习方法的书

练，就练得与众不同

课时练

名师点金	课堂小结	点出精华 点出要害
夯实基础·逐点练	随堂导练	知识点1…… 易错点1……
整合方法·提升练	课后导练	考查角度1 ……
探究培优·拓展练	课后选练	拔尖角度1 ……

专题练 整合练

阶段方法技巧训练	题组突破	方法 技巧 角度 思路
全章热门考点整合应用	题组突破	思想 概念 应用 考点

阶段测

达标检测卷	可练可测	第X章 达标检测卷 ……

《典中点》系列丛书是有思想的教辅，是有方法的宝典，是无声的老师，带你纵向贯通学习环节，横向打通疑难知识；帮你逐题渗透方法，分层提升能力；让你练准知识、练通考点、练透方法。

同学们，让我们牵手《典中点》系列丛书，练，就练得与众不同。

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

目录 CONTENTS

第五章 圆

1 圆
- 第1课时 圆的认识 …… 2
- 第2课时 圆的半径的应用 …… 4

2 圆的对称性
- 第1课时 圆的对称性 …… 5
- 第2课时 圆心角的度数与它所对弧的度数关系 …… 7

*3 垂径定理 …… 8

4 圆周角和圆心角的关系
- 第1课时 圆周角和圆心角、弧的关系 …… 10
- 第2课时 圆周角和直径的关系 …… 12

5 确定圆的条件
- 第1课时 确定圆的条件 …… 14
- 第2课时 圆内接四边形 …… 17

阶段方法技巧训练(一)
- **专训1 巧用圆的基本性质解圆的五种关系相关问题** …… 19
- **专训2 垂径定理的四种应用技巧** …… 20

6 直线和圆的位置关系
- 第1课时 直线和圆的位置关系 …… 21
- 第2课时 切线的性质 …… 23
- 第3课时 切线的判定 …… 25
- 第4课时 三角形的内切圆 …… 27

*7 切线长定理 …… 29

阶段方法技巧训练(二)
- **专训1 有关圆的位置关系的四种判断方法** …… 32
- **专训2 切线的证明技巧** …… 33
- **专训3 切线的判定和性质的四种应用类型** …… 34

8 正多边形和圆
- 第1课时 圆内接正多边形 …… 35
- 第2课时 正多边形 …… 36

9 弧长及扇形的面积 …… 38

10 圆锥的侧面积 …… 40

阶段方法技巧训练(三)
- **专训1 圆中常见的计算题型** …… 42
- **专训2 圆中常用的作辅助线的八种方法** …… 44
- **专训3 圆与相似三角形的综合** …… 46
- **专训4 用三角函数解与圆有关的问题** …… 47
- **专训5 分类讨论思想在圆中的应用类型** …… 48
- **专训6 与圆有关的存在性问题** …… 49

全章热门考点整合应用 …… 51

第六章 对概率的进一步认识

1 用树状图或表格求概率
- 第1课时 用树状图法求概率 …… 54
- 第2课时 用列举法求概率 …… 56
- 第3课时 用概率说明游戏的合理性 …… 58

2 生活中的概率 …… 60

*3 用频率估计概率
- 第1课时 用频率估计概率 …… 62
- 第2课时 用频率估计概率的应用 …… 64
- 第3课时 用计算机模拟试验估计概率 …… 65

阶段方法技巧训练(四)
- **专训1 概率的四种求法** …… 66
- **专训2 利用概率揭示游戏规则的公平性** …… 67
- **专训3 概率应用的四种类型** …… 68

全章热门考点整合应用 …… 69

达标检测卷

第五章达标检测卷 …… 71

第六章达标检测卷 …… 75

期末达标检测卷 …… 79

参考答案及点拨 …… 83

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

1 圆

第1课时 圆的认识

名师点金

判断点与圆的位置关系的方法

判断点与圆的位置关系时，比较点到圆心的距离与圆的半径即可. 当点到圆心的距离大于圆的半径时，点在圆外；当点到圆心的距离等于圆的半径时，点在圆上；当点到圆心的距离小于圆的半径时，点在圆内.

Ⅰ 夯实基础·逐点练 (答案见83页)

知识点1 圆的定义

1. 下列关于圆的叙述中正确的是(　　)

A. 圆是由圆心唯一确定的

B. 圆是一条封闭的曲线

C. 平面上到定点的距离小于或等于定长的所有点组成圆

D. 圆内任意一点到圆心的距离都相等

2. 平面内已知点 P，以 P 为圆心，3 cm 为半径作圆，这样的圆可以作(　　)

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 无数个

3. 下列图形中，四个顶点一定在同一个圆上的是(　　)

A. 菱形、平行四边形　　B. 矩形、正方形

C. 正方形、菱形　　D. 矩形、平行四边形

4. 平面内所有到定点 O 的距离小于或等于 r 的点 P 组成的图形的面积(　　)

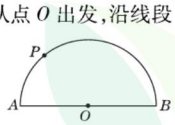
A. 小于 πr^2　B. 等于 πr^2　C. 大于 πr^2　D. 等于 $4\pi r^2$

5. 在平面直角坐标系中，$\odot O$ 的圆心在原点，半径为2，则下面各点在 $\odot O$ 上的是(　　)

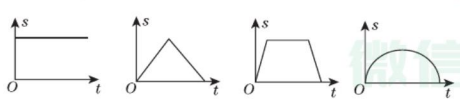
A. $(1,1)$　　B. $(-1,\sqrt{3})$

C. $(-2,-1)$　　D. $(\sqrt{2},-2)$

6. 如图，AB 是半圆 O 的直径，点 P 从点 O 出发，沿线段 OA→弧 AB→线段 BO 的路径匀速运动一周. 设线段 OP 的长为 s，运动时间为 t，则下列图象能大致刻画 s 与 t 之间的关系的是(　　)



(第6题)



A　　B　　C　　D

知识点2 点与圆的位置关系

7. 若 $\odot O$ 的半径为5 cm，点 A 到圆心 O 的距离为4 cm，则点 A 与 $\odot O$ 的位置关系是(　　)

A. 点 A 在 $\odot O$ 外　　B. 点 A 在 $\odot O$ 上

C. 点 A 在 $\odot O$ 内　　D. 不能确定

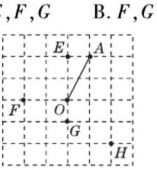
8. 若 $\odot O$ 的半径为5，圆心 O 的坐标为(3,4)，点 P 的坐标为(5,2)，则点 P 与 $\odot O$ 的位置关系是(　　)

A. 点 P 在 $\odot O$ 内　　B. 点 P 在 $\odot O$ 上

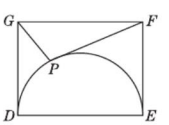
C. 点 P 在 $\odot O$ 外　　D. 点 P 在 $\odot O$ 上或在 $\odot O$ 外

9. 【中考·宜昌】在公园的 O 处附近有 E,F,G,H 四棵树，位置如图所示(图中小正方形的边长均相等). 现计划修建一座以 O 为圆心，OA 长为半径的圆形水池，要求池中不留树木，则 E,F,G,H 四棵树中需要被移除的为(　　)　　【导学号:9400200】

A. E,F,G　　B. F,G,H　　C. G,H,E　　D. H,E,F



(第9题)



(第10题)

10. 【中考·宜宾】在 $\triangle ABC$ 中，若 O 为 BC 边的中点，则必有 $AB^2+AC^2=2AO^2+2BO^2$ 成立. 依据以上结论，解决如下问题：如图，在矩形 $DEFG$ 中，已知 $DE=4$，$EF=3$，点 P 在以 DE 为直径的半圆上运动，则 PF^2+PG^2 的最小值为(　　)

A. $\sqrt{10}$　　B. $\frac{19}{2}$　　C. 34　　D. 10

易错点 考虑问题不全面而致错

11. 【中考·绍兴】等腰三角形 ABC 中，顶角 A 为40°，点 P 在以 A 为圆心，BC 长为半径的圆上，且 $BP=BA$，则 $\angle PBC$ 的度数为_____.

蒙古包：蒙古包是满族对蒙古族牧民住房的称呼. 但这类住房形式不限于蒙古族，在中亚地区游牧民族中也很常见. 蒙古包为天穹式，呈圆形，木架外边用白羊毛毡覆盖.(待续)

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

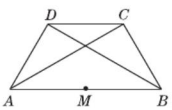
Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞(答案见83页)

考查角度1 利用圆的定义说明点在圆上

12. 如图,在等腰梯形 $ABCD$ 中,$AB \parallel CD$,$AD = BC$. 将 $\triangle ACD$ 沿对角线 AC 翻折后,点 D 恰好与边 AB 的中点 M 重合.

(1)点 C 是否在以 AB 为直径的圆上?请说明理由;

(2)当 $AB = 4$ 时,求此梯形的面积.



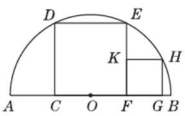
(第12题)

考查角度2 利用圆的半径进行计算

13. 如图,AB 是半圆 O 的直径,四边形 $CDEF$ 是正方形.

(1)求证:$OC = OF$;

(2)在正方形 $CDEF$ 的右侧有一正方形 $FGHK$,点 G 在 AB 上,点 H 在半圆上,点 K 在 EF 上. 若正方形 $CDEF$ 的边长为2,求正方形 $FGHK$ 的面积.



(第13题)

Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞(答案见83页)

拔尖角度1 利用点与圆的位置关系求半径的范围

14. 如图,已知矩形 $ABCD$ 的边 $AB = 3$ cm,$AD = 4$ cm,

(1)若以点 A 为圆心,4 cm 为半径作⊙A,则点 B,C,D 和⊙A 的位置关系如何?

(2)若以点 A 为圆心作⊙A,使 B,C,D 三点中至少有一点在⊙A 内且至少有一点在⊙A 外,则⊙A 的半径 r 的取值范围是多少?



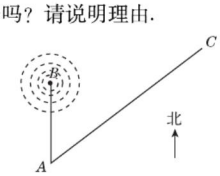
(第14题)

拔尖角度2 利用点与圆的位置关系解实际应用问题

15. 如图,在城市 A 的正北方向 50 km 的 B 处有一座无线电信号发射塔. 已知该发射塔发射的无线电信号的有效半径为 100 km,AC 是一条从 A 城直达 C 城的公路,从 A 城发往 C 城的班车速度为 60 km/h.

(1)当班车从 A 城出发开往 C 城时,某人立即打开无线电收音机,班车行驶了 0.5 h 的时候,接收信号最强. 信号最强时班车到发射塔的距离是多少千米?(离发射塔越近,信号越强)

(2)班车从 A 城到 C 城共行驶 2 h,请你判断班车到 C 城后还能接收到信号吗?请说明理由.



(第15题)

趣味数学　因为它是圆形的,所以在草原上、大风雪中遇到的阻力小,再大的地震中也不会使它变形. 它的顶上不易积雪,寒气不易侵入,是非常安全保暖的住所.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

第2课时　圆的半径的应用

名师点金

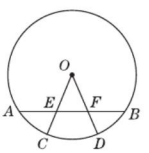
由圆的定义知圆上各点到圆心的距离相等，即同圆的半径相等. 圆的这一特征，在构造圆的半径、证相等关系中应用比较广泛.

整合方法 · 分类练

☞（答案见83页）

类型1 利用“同圆的半径相等”证线段相等

1. 如图，点A，B在$\odot O$上，半径OC，OD分别交AB于点E，F，且$AE=BF$，请你判断线段OE与OF的数量关系，并说明理由.



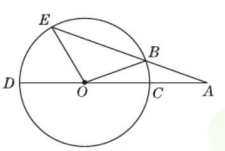
（第1题）

类型2 利用“同圆的半径相等”求角的度数

2. 如图，CD是$\odot O$的直径，点A在DC的延长线上，$\angle A=20°$，AE交$\odot O$于点B，且$AB=OC$. 求：

（1）$\angle AOB$的度数；

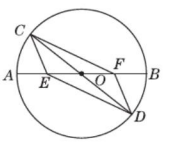
（2）$\angle EOD$的度数.



（第2题）

类型3 利用“同圆的半径相等”证明平行四边形

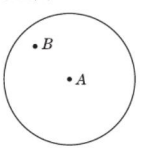
3. 如图，AB，CD为$\odot O$的两条直径，E，F分别为OA，OB的中点. 求证：四边形$CEDF$为平行四边形.



（第3题）

类型4 利用圆的半径解决实际应用问题

4. 如图，海军某部队在灯塔A周围进行爆破作业，灯塔A的周围3 km的水域为危险水域，有一渔船误入离灯塔A 2 km远的B处，为了尽快驶离危险区域，该渔船应按哪条射线方向航行？并说明理由.



（第4题）

微信公众号 教辅资料站

虽然我的知识在你们看起来很高，但我认为人的学习就像一个圆，学的东西越多，圆的周长就越长，则接触外面世界的机会就越多.

——爱因斯坦

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

2　圆的对称性

第1课时　圆的对称性

名师点金

同一圆中证明两弦相等的四种方法

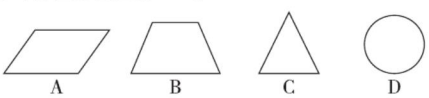
(1)若两弦位于两个不同的三角形中,证明两弦所在的三角形全等.
(2)在同一圆中证明两弦所对的弧相等(同一类弧).
(3)若两弦位于同一个三角形中,根据“等角对等边”证明两弦相等.
(4)证明两弦所对的圆心角相等.

Ⅰ 夯实基础·逐点练 ☞(答案见84页)

知识点1　圆的对称性

1. 【中考·内江】平行四边形、矩形、菱形、圆、等腰三角形中,只是轴对称图形的有(　　)
A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

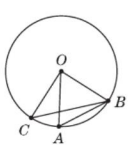
2. 【中考·黄石】下列图形中既是轴对称图形,又是中心对称图形的是(　　)


A　　B　　C　　D

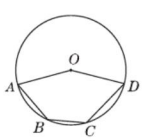
知识点2　与圆有关的概念

3. 下列说法中,正确的是(　　)
①弦是直径;②半圆是弧;③过圆心的线段是直径;④半圆是最长的弧;⑤直径是圆中最长的弦.
A. ②③　　B. ③⑤
C. ④⑤　　D. ②⑤

4. 【中考·无锡】如图,点A,B,C都在$\odot O$上,$OC\perp OB$,点A在劣弧BC上,且$OA=AB$,则$\angle ABC=$_____.



(第4题)



(第5题)

知识点3　圆心角与所对的弧、弦之间的关系

5. 【中考·台湾】如图,$\odot O$过五边形$OABCD$的四个顶点.若$\overset{\frown}{ABD}=150°$,$\angle A=65°$,$\angle D=60°$,则$\overset{\frown}{BC}$的度数为(　　)
A. 25°　　B. 40°　　C. 50°　　D. 55°

6. 已知AB,CD是$\odot O$的直径,弦$CE\parallel AB$,$\angle COE=40°$,则$\overset{\frown}{BD}$的度数是(　　)
A. 70°　　B. 110°
C. 40°　　D. 70°或110°

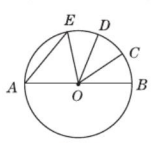
知识点4　相等的圆心角、弧、弦的对应关系

7. 下列说法中,错误的是(　　)
A. 在同圆或等圆中等弦所对的弧相等
B. 在同圆或等圆中等弧所对的弦相等
C. 在同圆或等圆中圆心角相等,所对的弦相等
D. 在同圆或等圆中弦相等,所对的圆心角相等

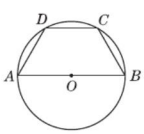
8. 在$\odot O$中,圆心角$\angle AOB=2\angle COD$,则$\overset{\frown}{AB}$与$\overset{\frown}{CD}$的关系是(　　)
A. $\overset{\frown}{AB}=2\overset{\frown}{CD}$　　B. $\overset{\frown}{AB}>2\overset{\frown}{CD}$
C. $\overset{\frown}{AB}<2\overset{\frown}{CD}$　　D. 不能确定

9. 在$\odot O$中,M,N分别为弦AB,CD的中点,如果$OM=ON$,那么在结论:①$AB=CD$;②$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$;③$\angle AOB=\angle COD$中,正确的是(　　)
A. ①②　　B. ①③　　C. ②③　　D. ①②③

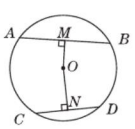
10. 【中考·贵港】如图,AB是$\odot O$的直径,$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}$,$\angle COD=34°$,则$\angle AOE$的度数是(　　)
A. 51°　　B. 56°　　C. 68°　　D. 78°



(第10题)



(第11题)



(第12题)

11. 如图,AB是$\odot O$的直径,BC,CD,DA是$\odot O$的弦,且$BC=CD=DA$,则$\angle BCD$等于(　　)
A. 100°　　B. 110°
C. 120°　　D. 135°

易错点　对圆中有关线段的关系运用不当而致错

12. 如图,在$\odot O$中,弦$AB>CD$,$OM\perp AB$,$ON\perp CD$,M,N分别为垂足,那么OM,ON的大小关系是(　　)
A. $OM>ON$　　B. $OM=ON$
C. $OM<ON$　　D. 无法确定

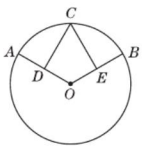
趣味数学　奥林匹克五环图案的数学美:奥林匹克五环是奥林匹克的标志,它由5个圆环组成,从左至右,从上到下,环环相扣.(待续)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法·提升练 ☞（答案见84页）

考查角度1 利用弧、圆心角的关系证线段相等

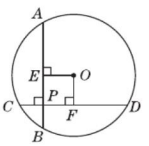
13. 【中考·牡丹江】如图，在⊙O中，$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CB}$，$CD\perp OA$于$D$，$CE\perp OB$于$E$，求证：$AD=BE$.



（第13题）

考查角度2 利用弧、弦的关系证正方形

14. 如图，⊙O的两条弦AB，CD互相垂直且相交于点P，$OE\perp AB$，$OF\perp CD$，垂足分别为E，F，$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$. 求证：四边形$OEPF$是正方形.



（第14题）

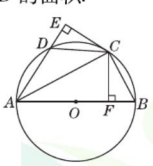
Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞（答案见84页）

拔尖角度1 利用圆心角与弧之间的关系解有关问题

15. 如图，AB是⊙O的直径，C，D为圆上两点，且$\overset{\frown}{CB}=\overset{\frown}{CD}$，$CF\perp AB$于点$F$，$CE\perp AD$交$AD$的延长线于点$E$.

（1）求证：$DE=BF$；

（2）若$\angle DAB=60°$，$AB=6$，求$\triangle ACD$的面积.



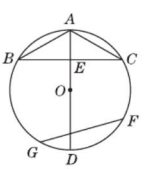
（第15题）

拔尖角度2 利用弧、弦、圆心角之间的关系解边角问题

16. 如图，已知AD是⊙O的直径，AB，AC是弦，且$AB=AC$.

（1）求证：直径AD平分$\angle BAC$；

（2）若BC经过半径OA的中点E，点F是$\overset{\frown}{CD}$的中点，点G是$\overset{\frown}{BF}$的中点，⊙O的半径为1. 求GF的长.



（第16题）

微信公众号 教辅资料站

奥林匹克五环，视觉上端庄大方，圆润流畅，是一个美丽的几何图形！它具有对称美、和谐美、简洁美和奇异美，是几何之美.

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第2课时　圆心角的度数与它所对弧的度数关系

名师点金

1. $n°$的圆心角所对的弧是$n°$的弧. 2. $n°$的弧所对的圆心角是$n°$的圆心角.

3. 度数相等的弧不一定是等弧. 例如在两个同心圆中,同一圆心角所对的两条弧的长度就不相等,只有在同圆或等圆中,度数相等的弧才是等弧.

易错点:弧不仅有度数,还有长度,其度数和长度都是可以计算的,长度相等的弧,度数不一定相等,度数相等的弧,其长度也不一定相等.

Ⅰ 夯实基础 · 逐点练

☞(答案见84页)

知识点 圆心角的度数与它所对弧的度数关系

1. 下列说法正确的有(　　)

①相等圆心角所对的弧相等

②如果两条弧的度数相等,那么这两条弧也相等

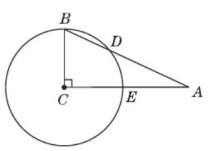
③圆心角等于它所对的弧

④弧等于它所对的圆心角

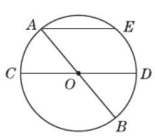
A. 0个　　B. 1个　　C. 2个　　D. 3个

2. 如图,在$\triangle ABC$中,$\angle C=90°$,$\angle A=25°$,以点C为圆心,BC为半径的圆交AB于点D,交AC于点E,则$\overset{\frown}{BD}$的度数为(　　)

A. 25°　　B. 30°　　C. 50°　　D. 65°



(第2题)



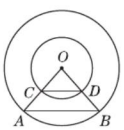
(第3题)

3. 如图,已知AB,CD是$\odot O$的两条直径,且$\angle AOC=50°$,作$AE\parallel CD$,交$\odot O$于E,则$\overset{\frown}{AE}$的度数为(　　)

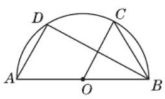
A. 65°　　B. 70°　　C. 75°　　D. 80°

4. 如图,在同心圆中,大圆半径OA,OB分别交小圆于C,D两点,则下列结论:①$\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{AB}$;②$AB=CD$;③$\overset{\frown}{CD}$的度数等于$\overset{\frown}{AB}$的度数;④$AB\parallel CD$,其中,正确的有(　　)

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个



(第4题)



(第6题)

5. 已知弦AB把圆周分成1∶5的两部分,则弦AB所对的圆心角的度数为(　　)

A. 30°　　B. 30°或150°　　C. 60°　　D. 60°或300°

6. 如图,$\overset{\frown}{AB}$是半圆,O为AB的中点,C,D两点在$\overset{\frown}{AB}$上,且$AD\parallel OC$,连接BC,BD. 若$\overset{\frown}{CD}$的度数为62°,则$\overset{\frown}{AD}$的度数为_____.

易错点 混淆弧与弧的度数而致错

7. $\overset{\frown}{AB}$与$\overset{\frown}{A'B'}$分别是$\odot O$和$\odot O'$中的弧,下列说法正确的是(　　)

A. 若$\overset{\frown}{AB}$与$\overset{\frown}{A'B'}$的度数相等,则$\angle AOB=\angle A'O'B'$

B. 若$\overset{\frown}{AB}$与$\overset{\frown}{A'B'}$的度数相等,则AB和$A'B'$的长度相等

C. 若AB和$A'B'$的长度相等,则$\overset{\frown}{AB}$和$\overset{\frown}{A'B'}$的度数相等

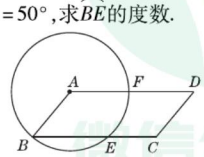
D. 若$\angle AOB=\angle A'O'B'$,则$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'}$

Ⅱ 整合方法 · 提升练

☞(答案见84页)

考查角度1 利用圆心角的度数与弧的度数间的关系求弧的度数

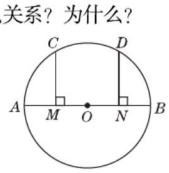
8. 如图,以$\square ABCD$的顶点A为圆心,AB为半径作圆,分别交BC,AD于E,F,若$\angle D=50°$,求$\overset{\frown}{BE}$的度数.



(第8题)

考查角度2 利用求圆心角的关系判断两弧的关系

9. 如图,AB是$\odot O$的直径,M,N分别是AO和BO的中点,$CM\perp AB$,$DN\perp AB$,则$\overset{\frown}{AC}$和$\overset{\frown}{BD}$有什么关系?为什么?



(第9题)

趣味数学　数学——科学不可动摇的基石,促进人类事业进步的丰富源泉.　——巴罗

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

*3 垂径定理

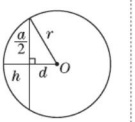
名师点金

垂径定理在基本图形计算中的“四变量”“两关系”

(1)**四变量**：如图，弦长为 a，圆心到弦的距离（弦心距）为 d，半径为 r，弧的中点到弦的距离（弓形高）为 h，这四个变量知任意两个可求其他两个.

(2)**两关系**：①$\left(\frac{a}{2}\right)^2+d^2=r^2$；②$h+d=r$.

注意：计算时常作半径或过圆心作弦的垂线段来构造直角三角形.



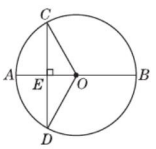
1 夯实基础·逐点练 ☞(答案见85页)

知识点1 垂径定理

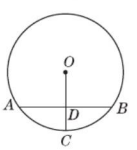
1. 【中考·广元】如图，已知⊙O 的直径 $AB\perp$ 弦 CD 于点 E，则下列结论中错误的是(　　)

A. $CE=DE$　　B. $AE=OE$

C. $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BD}$　　D. $\triangle OCE\cong\triangle ODE$



(第1题)



(第2题)

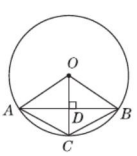
2. 【中考·阿坝州】如图，AB 是⊙O 的弦，半径 $OC\perp AB$ 于点 D，若⊙O 的半径为 5，$AB=8$，则 CD 的长是(　　)

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

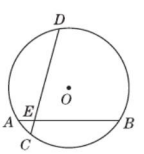
3. 【中考·上海】如图，在⊙O 中，AB 是弦，半径 $OC\perp AB$，垂足为 D. 要使四边形 $OACB$ 为菱形，还需要添加一个条件，这个条件可以是(　　)

A. $AD=BD$　　B. $OD=CD$

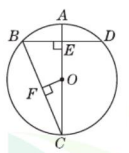
C. $\angle CAD=\angle CBD$　　D. $\angle OCA=\angle OCB$



(第3题)



(第4题)



(第5题)

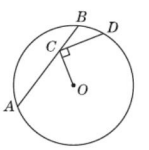
4. 【中考·梧州】如图，在半径为 $\sqrt{13}$ 的⊙O 中，弦 AB 与 CD 交于点 E，$\angle DEB=75°$，$AB=6$，$AE=1$，则 CD 的长是(　　)

A. $2\sqrt{6}$　　B. $2\sqrt{10}$　　C. $2\sqrt{11}$　　D. $4\sqrt{3}$

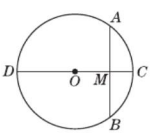
5. 【中考·衢州】如图，AC 是⊙O 的直径，弦 $BD\perp AO$ 于 E，连接 BC，过点 O 作 $OF\perp BC$ 于 F，若 $BD=8$ cm，$AE=2$ cm，则 OF 的长度是(　　)

A. 3 cm　　B. $\sqrt{6}$ cm　　C. 2.5 cm　　D. $\sqrt{5}$ cm

6. 【中考·嘉兴】如图，在⊙O 中，弦 $AB=1$，点 C 在 AB 上移动，连接 OC，过点 C 作 $CD\perp OC$ 交⊙O 于点 D，则 CD 的最大值为_____.



(第6题)



(第7题)

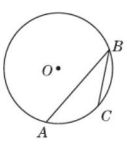
知识点2 垂径定理的推论

7. 如图，⊙O 的直径 $CD=10$ cm，AB 是⊙O 的弦，$AM=BM$，$OM:OC=3:5$，则 AB 的长为(　　)

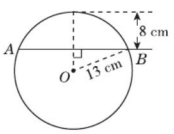
A. 8 cm　　B. $\sqrt{91}$ cm　　C. 6 cm　　D. 2 cm

8. 【中考·威海】如图，⊙O 的半径为 5，AB 为弦，点 C 为 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点，若 $\angle ABC=30°$，则弦 AB 的长为(　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. 5　　C. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$　　D. $5\sqrt{3}$



(第8题)



(第9题)

9. 【中考·金华】如图，在半径为 13 cm 的圆形铁片上切下一块高为 8 cm 的弓形铁片，则弓形弦 AB 的长为(　　)

A. 10 cm　　B. 16 cm　　C. 24 cm　　D. 26 cm

易错点 考虑问题不全面出现漏解而致错

10. 【中考·安顺】已知⊙O 的直径 $CD=10$ cm，AB 是⊙O 的弦，$AB\perp CD$，垂足为 M，且 $AB=8$ cm，则 AC 的长为(　　)

A. $2\sqrt{5}$ cm　　B. $4\sqrt{5}$ cm

C. $2\sqrt{5}$ cm 或 $4\sqrt{5}$ cm　　D. $2\sqrt{3}$ cm 或 $4\sqrt{3}$ cm

花朵为什么是圆的？在周长一定的情况下，圆的面积最大，对于花儿来说，圆形的面能吸引更多的蜜蜂和蝴蝶为它传粉，也能吸收到更多的阳光雨露，以利于它的生长.（待续）

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

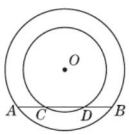
Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞(答案见85页)

考查角度① 利用垂径定理解同心圆问题

11. 【中考 · 湖州】已知在以点 O 为圆心的两个同心圆中,大圆的弦 AB 交小圆于点 C,D(如图).

(1)求证:$AC=BD$;

(2)若大圆的半径 $R=10$,小圆的半径 $r=8$,且圆心 O 到直线 AB 的距离为 6,求 AC 的长.



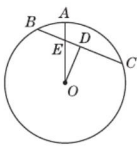
(第 11 题)

考查角度② 利用垂径定理的推论求线段的长

12. 如图,D 是⊙O 的弦 BC 的中点,A 是⊙O 上一点,OA 与 BC 交于点 E,已知 $AO=8$,$BC=12$.

(1)求线段 OD 的长;

(2)当 $EO=\sqrt{2}BE$ 时,求 ED 的长.



(第 12 题)

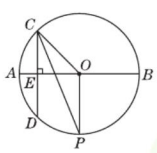
Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞(答案见85页)

拔尖角度① 利用垂径定理及圆的性质说明平行问题

13. 如图,AB 为⊙O 的直径,弦 $CD\perp AB$ 于点 E.

(1)当 $AB=10$,$CD=6$ 时,求 OE 的长;

(2)$\angle OCD$ 的平分线交⊙O 于点 P,连接 OP. 求证:$OP/\!/CD$.



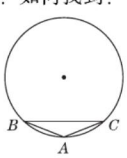
(第 13 题)

拔尖角度② 利用垂径定理建模解实际应用问题

14. 本市新建一座圆形人工湖,为测量该湖的半径,小杰和小丽沿湖边选取 A,B,C 三根木柱,使得 A,B 之间的距离与 A,C 之间的距离相等,并测得 BC 长为120 m,A 到 BC 的距离为 4 m,如图所示.

(1)请你帮他们求出该湖的半径;

(2)如果在圆周上再另取一点 P,建造一座连接 B,C,P 三点的三角形艺术桥,且△BCP 为直角三角形,问:这样的 P 点可以有几处?如何找到?



(第 14 题)

趣味数学　**茶壶盖为什么是圆的?** 因为圆的直径、半径都相等,所以圆形茶壶盖不容易掉下去,而且符合大众的审美观,使用也方便. 如果是方形茶壶盖,可能掉到杯子里,并且方的角容易被碰掉,而且不是很安全.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4 圆周角和圆心角的关系

第1课时 圆周角和圆心角、弧的关系

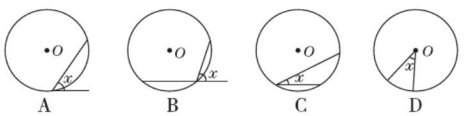
名师点金

“圆周角定理”是圆中的又一个重要定理，其作用在于转化同弧所对的圆心角与圆周角、同弧或等弧所对的圆周角之间的数量关系. 在应用这一定理时，要注意“同弧、等弧”的前提，只有准确识别图形中角的位置关系，才能得到角之间的数量关系.

1 夯实基础·逐点练 ☞（答案见85页）

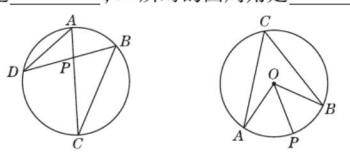
知识点1 圆周角的定义

1. 【中考·柳州】下列四个图中，$\angle x$ 为圆周角的是（　　）



A　　B　　C　　D

2. 如图，图中的圆周角共有_____个，其中$\overset{\frown}{AB}$所对的圆周角是_____，$\overset{\frown}{CD}$所对的圆周角是_____.



（第2题）　　（第3题）

知识点2 圆周角和圆心角的关系

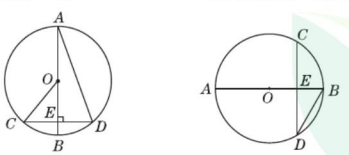
3. 【中考·吉林】如图，在$\odot O$中，$\overset{\frown}{AB}$所对的圆周角$\angle ACB=50°$，若P为$\overset{\frown}{AB}$上一点，$\angle AOP=55°$，则$\angle POB$的度数为（　　）

A. 30°　　B. 45°　　C. 55°　　D. 60°

4. 【中考·广州】如图，在$\odot O$中，AB是直径，CD是弦，$AB\perp CD$，垂足为E，连接CO，AD，$\angle BAD=20°$，则下列说法中正确的是（　　）

A. $AD=2OB$　　B. $CE=EO$

C. $\angle OCE=40°$　　D. $\angle BOC=2\angle BAD$



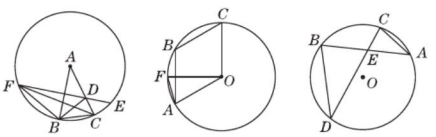
（第4题）　　（第5题）

5. 【中考·黔南州】如图，AB是$\odot O$的直径，弦$CD\perp AB$于点E，$\angle CDB=30°$，$\odot O$的半径为5 cm，则圆心O到弦CD的距离为（　　）

A. $\frac{5}{2}$ cm　　B. 3 cm　　C. $3\sqrt{3}$ cm　　D. 6 cm

6. 【中考·云南】如图，B，C是$\odot A$上的两点，AB的垂直平分线与$\odot A$交于E，F两点，与线段AC交于点D. 若$\angle BFC=20°$，则$\angle DBC$等于（　　）

A. 30°　　B. 29°　　C. 28°　　D. 20°



（第6题）　　（第7题）　　（第8题）

7. 【中考·泰安】如图，A，B，C是$\odot O$上的三点，且四边形$ABCO$是平行四边形，$OF\perp OC$交$\odot O$于点F，则$\angle BAF$等于（　　）

A. 12.5°　　B. 15°　　C. 20°　　D. 22.5°

知识点3 同弧或等弧所对圆周角的关系

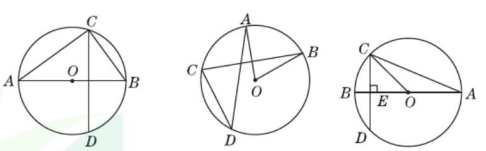
8. 【中考·柳州】如图，A，B，C，D是$\odot O$上的点，则图中与$\angle A$相等的角是（　　）

A. $\angle B$　　B. $\angle C$

C. $\angle DEB$　　D. $\angle D$

9. 【中考·河池】如图，$\odot O$的直径AB垂直于弦CD，$\angle CAB=36°$，则$\angle BCD$的大小是（　　）

A. 18°　　B. 36°　　C. 54°　　D. 72°



（第9题）　　（第10题）　　（第11题）

10. 【中考·黄冈】如图，在$\odot O$中，$OA\perp BC$，$\angle AOB=70°$，则$\angle ADC$的度数为（　　）

A. 30°　　B. 35°　　C. 45°　　D. 70°

易错点 忽视勾股定理的应用而致错

11. 【中考·安顺】如图，$\odot O$的直径AB垂直于弦CD，垂足是E，$\angle A=22.5°$，$OC=4$，CD的长为（　　）

A. $2\sqrt{2}$　　B. 4　　C. $4\sqrt{2}$　　D. 8

神奇的古建筑：在闽西南的南靖县，用夯土围合建造起来的楼房尚存10 000多座，有圆形、方形、五凤形、半月形、交椅形、围裙形、四字形等.（待续）

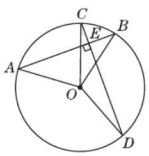
趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞(答案见86页)

考查角度1 利用圆周角定理证角的关系

12. 如图,在⊙O中,弦AB,CD垂直相交于点E. 求证:$\angle BOC+\angle AOD=180°$.

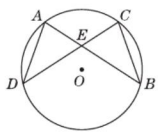


(第12题)

考查角度2 利用圆周角定理的推论证明线段相等

13. 【中考 · 自贡】如图,在⊙O中,弦AB与CD相交于点E,$AB=CD$,连接AD,BC.

求证:(1)$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BC}$;(2)$AE=CE$.



(第13题)

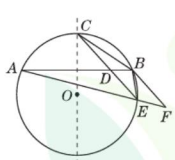
Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞(答案见86页)

拔尖角度1 利用等弧所对的圆周角定理求面积问题

14. 【中考 · 株洲】如图,AB为⊙O的一条弦,点C是劣弧AB的中点,E是优弧AB上一点,点F在AE的延长线上,且$BE=EF$,线段CE交弦AB于点D.

(1)求证:$CE\parallel BF$;

(2)若线段BD的长为2,且$EA:EB:EC=3:1:\sqrt{5}$,求$\triangle BCD$的面积(注:根据圆的对称性可知$OC\perp AB$).



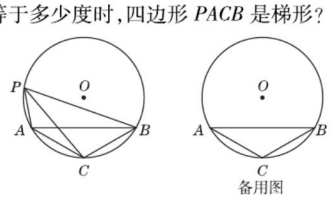
(第14题)

拔尖角度2 利用同弧所对的圆周角定理探究面积最大问题

15. 如图,P是⊙O上的一个动点,弦$AB=\sqrt{3}$,PC是$\angle APB$的平分线,$\angle BAC=30°$.

(1)当$\angle PAC$等于多少度时,四边形$PACB$的面积最大,最大面积是多少?

(2)当$\angle PAC$等于多少度时,四边形$PACB$是梯形?



(第15题)

微信公众号
教辅资料站

趣味数学　这些楼房千姿百态,气势非凡,给人以感染力和震撼力. 如此奇妙的构造和变化多端的造型在世界民居建筑中也是极其罕见的.(待续)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

第2课时　圆周角和直径的关系

名师点金

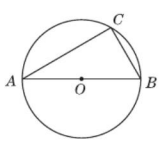
1. 已知直径时，常添加辅助线构造直角三角形，即“见直径想直角”. 题目中遇到直径时要考虑直径所对的圆周角为90°，遇到90°的圆周角时要考虑直角所对的弦为直径，这是圆中作辅助线的常用方法.
2. 在解决圆的有关问题时，常常利用圆周角定理及其推论进行两种转化：一是利用同弧所对的圆周角相等，进行角与角之间的转化；二是将圆周角相等的问题转化为弦相等或弧相等的问题.

Ⅰ 夯实基础·逐点练 （答案见86页）

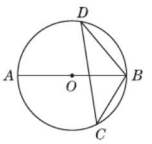
知识点1 直径所对的圆周角是直角

1. 【中考·张家界】如图，AB是$\odot O$的直径，BC是$\odot O$的弦，若$\angle OBC=60°$，则$\angle BAC$的度数是(　　)

A. 75°　　B. 60°　　C. 45°　　D. 30°



（第1题）



（第2题）

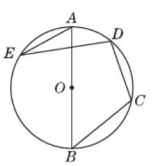
2. 【中考·滨州】如图，AB为$\odot O$的直径，C,D为$\odot O$上两点，若$\angle BCD=40°$，则$\angle ABD$的度数为(　　)

A. 60°　　B. 50°　　C. 40°　　D. 20°

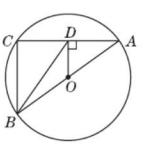
3. 【中考·青岛】如图，AB是$\odot O$的直径，点C,D,E在$\odot O$上，若$\angle AED=20°$，则$\angle BCD$的度数为(　　)

A. 100°　　B. 110°

C. 115°　　D. 120°



（第3题）



（第4题）

4. 【中考·广元】如图，AB,AC分别是$\odot O$的直径和弦，$OD\perp AC$于点D，连接BD,BC，且$AB=10,AC=8$，则BD的长为(　　)

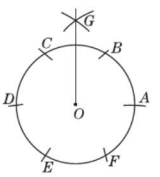
A. $2\sqrt{5}$　　B. 4

C. $2\sqrt{13}$　　D. 4.8

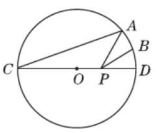
5. 【中考·湖州】尺规作图特有的魅力曾使无数人沉湎其中，传说拿破仑通过下列尺规作图考他的大臣：如图，①将半径为r的$\odot O$六等分，依次得到A,B,C,D,E,F六个分点；②分别以点A,D为圆心，AC长为半径画弧，G是两弧的一个交点；③连接OG.

问：OG的长是多少？大臣给出的正确答案应是(　　)

A. $\sqrt{3}r$　　B. $\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)r$　　C. $\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)r$　　D. $\sqrt{2}r$



（第5题）



（第6题）

6. 如图，CD是$\odot O$的直径，$CD=4$，$\angle ACD=20°$，点B为$\overset{\frown}{AD}$的中点，点P是直径CD上的一个动点，则$PA+PB$的最小值为_____.

知识点2 90°的圆周角所对的弦是直径

7. 下列结论正确的是(　　)

A. 直径所对的角是直角

B. 90°的圆心角所对的弦是直径

C. 同一条弦所对的圆周角相等

D. 半圆所对的圆周角是直角

8. 【中考·台州】从下列三角尺与圆弧的位置关系中，可判定圆弧为半圆的是(　　)


A　　B　　C　　D

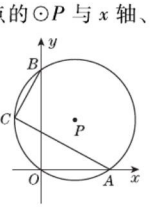
9. 【中考·兰州】如图，已知经过原点的$\odot P$与x轴、y轴分别交于点A,B，C是劣弧OB上一点，则$\angle ACB$等于(　　)

A. 80°

B. 90°

C. 100°

D. 无法确定



（第9题）

易错点 求圆周角的度数时考虑不周全而致错

10. 已知在半径为4的$\odot O$中，弦$AB=4\sqrt{3}$，点P在圆上，则$\angle APB=$_____.

不管多少土楼废弃又重建，都对环境无公害、无污染，与现在的钢筋、水泥或化学材料建成的楼房相比，土楼显示了“人与自然和谐相处”的巨大优势.

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

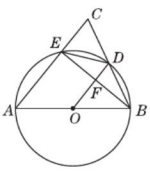
Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞(答案见87页)

考查角度1 利用直径和圆周角的关系证明边的关系(构造法)

11. 如图,在△ABC中,$AB=AC$,以AB为直径的⊙O分别交BC,AC于点D,E,连接EB,交OD于点F.

(1)求证:$OD\perp BE$;

(2)若$DE=\frac{\sqrt{5}}{2}$,$AB=\frac{5}{2}$,求AE的长.



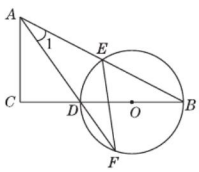
(第11题)

考查角度2 利用直径与圆周角的关系求边和角

12. 【中考 · 温州】如图,在△ABC中,$\angle C=90°$,D是BC边上一点,以DB为直径的⊙O经过AB的中点E,交AD的延长线于点F,连接EF.

(1)求证:$\angle 1=\angle F$;

(2)若$\sin B=\frac{\sqrt{5}}{5}$,$EF=2\sqrt{5}$,求$CD$的长.



(第12题)

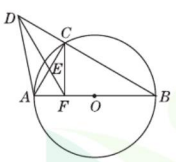
Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞(答案见87页)

拔尖角度1 利用直径与圆周角的关系证明线段的位置关系(设元替代法)

13. 【中考 · 株洲】如图,已知AB是半径为1的⊙O的直径,C是圆上一点,D是BC的延长线上一点,过点D的直线交AC于点E,交AB于点F,且△AEF为等边三角形.

(1)求证:△DFB是等腰三角形;

(2)若$DA=\sqrt{7}AF$,求证:$CF\perp AB$.



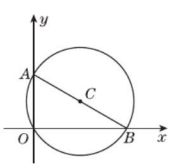
(第13题)

拔尖角度2 利用圆周角探究存在性问题

14. 如图,⊙C经过原点且与两坐标轴分别交于点$A(0,2)$和点$B(2\sqrt{3},0)$. 【导学号:9400200】

(1)求线段AB的长及$\angle ABO$的大小;

(2)在⊙C上是否存在一点P,使得△POB是等腰三角形?若存在,请求出$\angle BOP$的度数;若不存在,请说明理由.



(第14题)

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

5 确定圆的条件

第1课时 确定圆的条件

名师点金

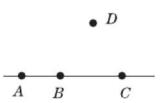
1. 三角形外心的性质：三角形的外心是它的外接圆的圆心，它是三角形三边垂直平分线的交点，它到三角形各个顶点的距离相等；锐角三角形的外心在三角形的内部，直角三角形的外心是斜边的中点，钝角三角形的外心在三角形的外部.
2. 三角形的外接圆有且只有一个；一个圆的内接三角形却有无数个，这些三角形的外心重合.

Ⅰ 夯实基础·逐点练 （答案见87页）

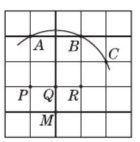
知识点1 确定圆的条件

1. 如图，点 A,B,C 在同一条直线上，点 D 在直线 AB 外，过 A,B,C,D 四个点中的任意三个点，能作圆的个数是（　　）

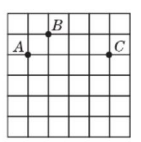
A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4



（第1题）



（第3题）



（第5题）

2. 已知 $AB=4$ cm，则过点 A,B 且半径为 3 cm 的圆有（　　）

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

3. 如图，在 5×5 的正方形网格中，一条圆弧经过 A,B,C 三点，那么这条圆弧所在圆的圆心是（　　）

A. 点 P　　B. 点 Q

C. 点 R　　D. 点 M

4. 下列关于确定一个圆的说法中，正确的是（　　）

A. 三个点一定能确定一个圆

B. 以已知线段的长为半径能确定一个圆

C. 以已知线段的长为直径能确定一个圆

D. 菱形的四个顶点能确定一个圆

5. 【中考·宁夏】如图，点 A,B,C 均在 6×6 的正方形网格格点上，过 A,B,C 三点的外接圆除经过 A,B,C 三点外还能经过的格点数为_____.

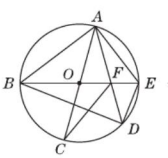
知识点2 三角形的外接圆、外心

6. 【中考·内江】已知 $\triangle ABC$ 的三边长 a,b,c 满足 $a+b^2+|c-6|+28=4\sqrt{a-1}+10b$，则 $\triangle ABC$ 的外接圆半径 = _____.

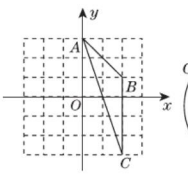
7. 【中考·河北】如图，AC,BE 是 $\odot O$ 的直径，弦 AD 与 BE 交于点 F，下列三角形中，外心不是点 O 的是（　　）

A. $\triangle ABE$　　B. $\triangle ACF$

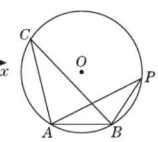
C. $\triangle ABD$　　D. $\triangle ADE$



（第7题）



（第8题）



（第10题）

8. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，点 A 的坐标为 $(0,3)$，点 B 的坐标为 $(2,1)$，点 C 的坐标为 $(2,-3)$，则经画图操作可知 $\triangle ABC$ 的外心坐标应是（　　）

A. $(0,0)$　　B. $(1,0)$

C. $(-2,-1)$　　D. $(2,0)$

9. 【中考·贵阳】小颖同学在手工制作中，把一个边长为 12 cm 的等边三角形纸片贴到一个圆形纸片上，若三角形的三个顶点恰好都在这个圆上，则圆的半径为（　　）

A. $2\sqrt{3}$ cm　　B. $4\sqrt{3}$ cm

C. $6\sqrt{3}$ cm　　D. $8\sqrt{3}$ cm

10. 【中考·陕西】如图，$\triangle ABC$ 是 $\odot O$ 的内接三角形，$\angle C=30°$，$\odot O$ 的半径为 5，若点 P 是 $\odot O$ 上的一点，在 $\triangle ABP$ 中，$PB=AB$，则 PA 的长为（　　）

A. 5　　B. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

C. $5\sqrt{2}$　　D. $5\sqrt{3}$

易错点 忽视三角形的外心与三角形的位置关系，出现漏解而致错

11. 【中考·龙东】若点 O 是等腰三角形 ABC 的外心，且 $\angle BOC=60°$，底边 $BC=2$，则 $\triangle ABC$ 的面积为（　　）

A. $2+\sqrt{3}$　　B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

C. $2+\sqrt{3}$ 或 $2-\sqrt{3}$　　D. $4+2\sqrt{3}$ 或 $2-\sqrt{3}$

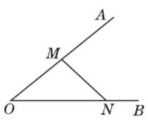
谜语：马路没弯（打一数学名词）　　谜底：直径　趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法·提升练 ☞(答案见88页)

考查角度1 利用确定圆的条件在已知图中作圆

12. 【中考·兰州】如图,在图中求作⊙P,使⊙P满足以线段MN为弦且圆心P到$\angle AOB$两边的距离相等.(要求:尺规作图,不写作法,保留作图痕迹)



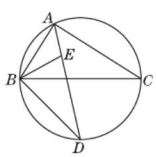
(第12题)

考查角度2 利用三角形外接圆的性质求线段的长

13. 【中考·临沂】如图,$\angle BAC$的平分线交$\triangle ABC$的外接圆于点D,$\angle ABC$的平分线交AD于点E.

(1)求证:$DE=DB$;

(2)若$\angle BAC=90°$,$BD=4$,求$\triangle ABC$的外接圆的半径.



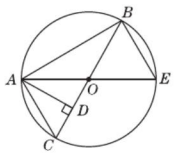
(第13题)

考查角度3 利用三角形外接圆解与相似相关的问题

14. 如图,$\triangle ABC$内接于⊙O,AD是边BC上的高,AE是⊙O的直径,连接BE.

(1)求证:$\triangle ABE$与$\triangle ADC$相似;

(2)若$AB=2BE=4DC=8$,求$\triangle ADC$的面积.



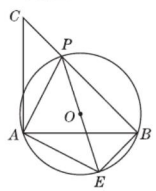
(第14题)

考查角度4 利用三角形外接圆的性质求线段的平方和

15. 【中考·台州】如图,已知等腰直角三角形ABC,点P是斜边BC上一点(不与B,C重合),PE是$\triangle ABP$的外接圆⊙O的直径.

(1)求证:$\triangle APE$是等腰直角三角形;

(2)若⊙O的直径为2,求PC^2+PB^2的值.



(第15题)

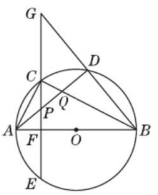
微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞（答案见89页）

拔尖角度① 利用三角形外心定义判断三角形外心

16. 如图，已知△ABC内接于⊙O，AB是直径，弦$CE\perp AB$于点F，C是$\overset{\frown}{AD}$的中点，连接BD并延长交EC的延长线于点G，连接AD，分别交CE，BC于点P，Q. 求证：点P是△ACQ的外心.



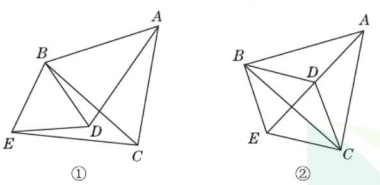
（第16题）

拔尖角度② 利用三角形外接圆解与全等相关的问题

17. 已知，如图①，在△ABC中，$BA=BC$，D是平面内不与A，B，C重合的任意一点，$\angle ABC=\angle DBE$，$BD=BE$.

（1）求证：△$ABD\cong$△CBE；

（2）如图②，当点D是△ABC的外接圆圆心时，请判断四边形$BDCE$的形状，并说明理由.



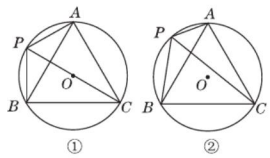
（第17题）

拔尖角度③ 利用三角形外接圆判断线段的和差关系

18. 已知⊙O是等边三角形ABC的外接圆.

（1）如图①，若PC为⊙O的直径，连接AP，BP，求证：$AP+BP=PC$；

（2）如图②，若点P是弧AB上任意一点，连接AP，BP，CP，那么结论$AP+BP=PC$还成立吗？请说明理由.



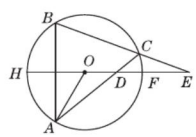
（第18题）

拔尖角度④ 利用圆的相关性质探究三角形外接圆中的相关问题（数形结合思想）

19. 如图，△ABC是⊙O的内接三角形，直径HF交AC于点D，HF和BC的延长线交于点E.

（1）若$HF\perp AB$，求证：$\angle OAD=\angle E$；

（2）若点A是下半圆上一动点，当点A运动到什么位置时，△CDE的外心在△CDE的一边上？请说明理由.



（第19题）

谜语：用圆规画鸡蛋（打一城市名称）

谜底：太原

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第2课时　圆内接四边形

名师点金

圆内接四边形的角的三种关系

(1)对角互补,若四边形 $ABCD$ 为 $\odot O$ 的内接四边形,则 $\angle A+\angle C=180°$,$\angle B+\angle D=180°$.

(2)四个内角的和是 $360°$,若四边形 $ABCD$ 为 $\odot O$ 的内接四边形,则 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360°$.

(3)任一外角与其相邻的内角的对角相等,简称圆内接四边形的任何一个外角等于其内对角.

Ⅰ 夯实基础·逐点练 (答案见89页)

知识点1 圆内接多边形

1. 下列说法正确的是(　　)

A. 在圆内部的多边形叫做圆内接多边形

B. 过四边形的四个顶点的圆叫做这个四边形的外接圆

C. 任意一个四边形都有外接圆

D. 一个圆只有一个内接四边形

2. 下列多边形中一定有外接圆的是(　　)

A. 三角形　　B. 四边形　　C. 五边形　　D. 六边形

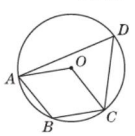
知识点2 圆内接四边形的对角互补

3. 【中考·杭州】在圆内接四边形 $ABCD$ 中,已知 $\angle A=70°$,则 $\angle C$ 等于(　　)

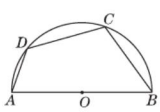
A. $20°$　　B. $30°$　　C. $70°$　　D. $110°$

4. 【中考·兰州】如图,四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$,若四边形 $ABCO$ 是平行四边形,则 $\angle ADC$ 等于(　　)

A. $45°$　　B. $50°$　　C. $60°$　　D. $75°$



(第4题)



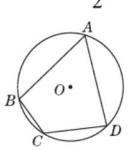
(第5题)

5. 【中考·镇江】如图,四边形 $ABCD$ 是半圆的内接四边形,AB 是直径,$\overset{\frown}{DC}=\overset{\frown}{CB}$,若 $\angle C=110°$,则 $\angle ABC$ 的度数等于(　　)

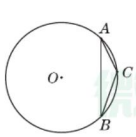
A. $55°$　　B. $60°$　　C. $65°$　　D. $70°$

6. 【中考·黄石】如图,已知 $\odot O$ 为四边形 $ABCD$ 的外接圆,O 为圆心,若 $\angle BCD=120°$,$AB=AD=2$,则 $\odot O$ 的半径长为(　　)

A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　C. $\frac{3}{2}$　　D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$



(第6题)



(第7题)

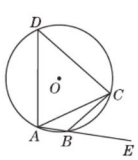
7. 【中考·扬州】如图,已知 $\odot O$ 的半径为2,$\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$,$\angle ACB=135°$,则 $AB=$ _____.

知识点3 圆内接四边形的外角等于其内对角

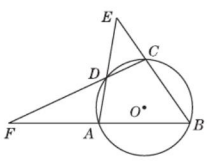
8. 【中考·广东】如图,四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$,$DA=DC$,$\angle CBE=50°$,则 $\angle DAC$ 的度数为(　　)

A. $130°$　　B. $100°$

C. $65°$　　D. $50°$



(第8题)



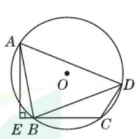
(第9题)

9. 【中考·锦州】如图,四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形,AD 与 BC 的延长线交于点 E,BA 与 CD 的延长线交于点 F,$\angle DCE=80°$,$\angle F=25°$,则 $\angle E$ 的度数为(　　)

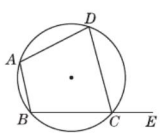
A. $55°$　　B. $50°$　　C. $45°$　　D. $40°$

10. 【中考·十堰】如图,四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$,$AE\perp CB$ 交 CB 的延长线于点 E,若 BA 平分 $\angle DBE$,$AD=5$,$CE=\sqrt{13}$,则 $AE=$(　　)

A. 3　　B. $3\sqrt{2}$　　C. $4\sqrt{3}$　　D. $2\sqrt{3}$



(第10题)



(第11题)

11. 如图,四边形 $ABCD$ 是圆内接四边形,E 是 BC 的延长线上一点,若 $\angle BAD=105°$,则 $\angle DCE=$ _____.

易错点 画图时考虑不全,出现漏解而致错

12. 已知 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$,$OD\perp AC$ 于点 D,如果 $\angle COD=32°$,那么 $\angle B$ 的度数为(　　)

A. $16°$　　B. $32°$

C. $16°$ 或 $164°$　　D. $32°$ 或 $148°$

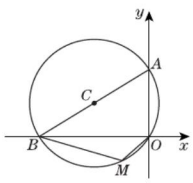
趣味数学　**三等分一个角**:对于某些角如 $90°$,$180°$ 三等分并不难,但是否所有角都可以三等分呢?(待续)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法·提升练 ☞（答案见89页）

考查角度1 利用圆内接四边形的性质求点的坐标（数形结合思想）

13. 如图，⊙C过原点，且与两坐标轴分别交于点A，B，点A的坐标为$(0,3)$，M是第三象限内$\overset{\frown}{OB}$上一点，$\angle BMO=120°$，求⊙C的半径及点B的坐标.



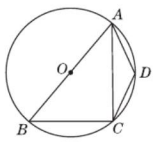
（第13题）

考查角度2 利用圆内接四边形的性质求边的关系

14. 如图，四边形$ABCD$内接于⊙O，$\angle B=50°$，$\angle ACD=25°$，$\angle BAD=65°$. 求证：

（1）$AD=CD$；

（2）AB是⊙O的直径.



（第14题）

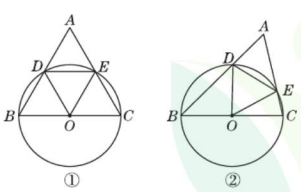
Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞（答案见89页）

拔尖角度1 利用圆内接四边形的性质证等边三角形

15. 在△ABC中，$\angle A=60°$，以BC为直径的⊙O分别交AB，AC于点D，E，连接OD，OE.

（1）如图①，如果$AB=AC$，求证：△ODE是等边三角形；

（2）如图②，如果$AB\neq AC$，（1）中的结论还能否成立？如果成立，请给出证明；如果不成立，请说明理由.



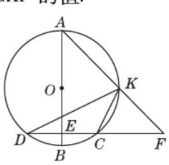
（第15题）

拔尖角度2 利用圆内接四边形的性质进行函数值计算

16. 如图，AB为⊙O的直径，弦$CD\perp AB$，垂足为E，K为$\overset{\frown}{AC}$上一动点，AK，DC的延长线相交于点F，连接CK，KD.

（1）求证：$\angle AKD=\angle CKF$；

（2）若$AB=10$，$CD=6$，求$\tan\angle CKF$的值.



（第16题）

微信公众号 教辅资料站

例如60°，若三等分则可以作出20°的角，那么正十八边形及正九边形也都可以作出来了. 其实三等分角的问题是由求作正多边形这类问题所引出来的.

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

阶段方法技巧训练（一）

专训 1　巧用圆的基本性质解圆的五种关系相关问题 ☞（答案见90页）

名师点金

圆的基本性质里面主要涉及弦、弧之间的关系，圆周角、圆心角之间的关系，弧、圆周角之间的关系，弦、圆心角之间的关系，弦、弧、圆心角之间的关系等，在解此类题目时，需要根据已知条件和所求问题去探求它们之间的内在联系，从而达到解决问题的目的.

关系1　弦、弧之间的关系

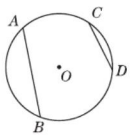
1. 如图，在⊙O中，$\overset{\frown}{AB}=2\overset{\frown}{CD}$，则下列结论正确的是(　　)

A. $AB>2CD$

B. $AB=2CD$

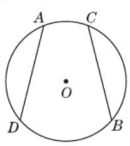
C. $AB<2CD$

D. 以上都不正确



（第1题）

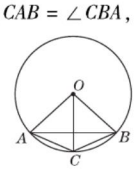
2. 如图，在⊙O中，弦AD与弦BC相等，求证：$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$.



（第2题）

关系2　圆周角、圆心角之间的关系

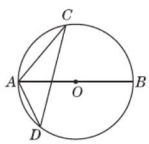
3. 如图，AB，AC，BC都是⊙O的弦，且$\angle CAB=\angle CBA$，求证：$\angle COB=\angle COA$.



（第3题）

关系3　弧、圆周角之间的关系

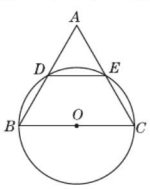
4. 如图，AB是⊙O的直径，点C，D在⊙O上，$\angle BAC=50°$，求$\angle ADC$的度数.



（第4题）

关系4　弦、圆心角之间的关系

5. 如图，以等边三角形ABC的边BC为直径作⊙O交AB于D，交AC于E，连接DE. 试判断BD，DE，EC之间的数量关系，并说明理由.

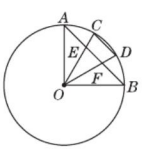


（第5题）

关系5　弦、弧、圆心角之间的关系

6. 如图，在⊙O中，$\angle AOB=90°$，且C，D是$\overset{\frown}{AB}$的三等分点，AB分别交OC，OD于点E，F.

求证：$AE=BF=CD$.



（第6题）

趣味数学　蜘蛛结的“八卦”网，既复杂又非常美丽，这种八角形的几何图案，即使木工师傅用直尺和圆规也难画得如此匀称.（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

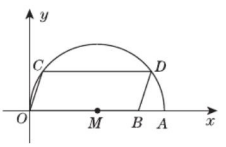
专训2 垂径定理的四种应用技巧 ☞（答案见90页）

名师点金

垂径定理的巧用主要体现在求点的坐标、解决最值问题、解决实际问题等. 解题时，巧用弦的一半、圆的半径和圆心到弦的垂线段三条线段组成的直角三角形，然后借助勾股定理，在这三个量中知道任意两个，可求出第三个.

技巧1 巧用垂径定理求点的坐标

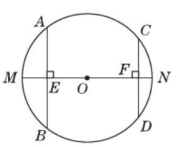
1. 如图，在平面直角坐标系中，点 A 的坐标是(10,0)，点 B 的坐标是(8,0)，点 C，D 在以 OA 为直径的半圆 M 上，且四边形 $OCDB$ 是平行四边形，求点 C 的坐标.



（第1题）

技巧2 巧用垂径定理解决最值问题（对称思想）

2. 如图，AB，CD 是半径为5的⊙O的两条弦，$AB=8$，$CD=6$，MN 是直径，$AB\perp MN$ 于点 E，$CD\perp MN$ 于点 F，P 为直线 EF 上的任意一点，求 $PA+PC$ 的最小值.



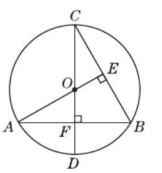
（第2题）

技巧3 巧用垂径定理计算

3. 如图，CD 为⊙O的直径，$CD\perp AB$，垂足为 F，$AO\perp BC$，垂足为 E，$BC=2\sqrt{3}$.

(1)求 AB 的长；

(2)求⊙O的半径.



（第3题）

技巧4 巧用垂径定理解决实际问题（建模思想）

4. 某地有一座拱桥，它的桥拱是圆弧形，桥下的水面宽度为7.2 m，拱顶高出水面2.4 m，现有一艘宽3 m，船舱顶部为长方形并高出水面2 m的货船要经过这里，此货船能顺利通过这座拱桥吗？

当对这个美丽的结构用数学方法进行分析时，出现在蜘蛛网上的概念真是惊人——半径、弦、平行线段、三角形、全等对应角、对数螺线、悬链线和超越线.

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

6　直线和圆的位置关系

第1课时　直线和圆的位置关系

名师点金

直线和圆的位置关系、直线和圆的公共点的个数、圆心 O 到直线的距离 d 与圆的半径 r 的大小三者间的关系：直线和圆相交⇔两个公共点⇔$d<r$；直线和圆相切⇔一个公共点⇔$d=r$；直线和圆相离⇔无公共点⇔$d>r$.

1 夯实基础·逐点练 ☞(答案见91页)

知识点1　直线和圆的位置关系与直线和圆的公共点个数间的关系

1. 若直线 m 与⊙O 的公共点个数不小于1，则直线 m 与⊙O 的位置关系是(　　)

A. 相交　　B. 相切　　C. 相交或相切　　D. 相离

2. 下列命题：①如果一条直线与圆没有公共点，那么这条直线与圆相离；②如果一条射线与圆没有公共点，那么这条射线所在的直线与圆相离；③如果一条线段与圆没有公共点，那么这条线段所在的直线与圆相离. 其中为真命题的有(　　)

A. ①　　B. ②　　C. ③　　D. ①②③

知识点2　直线和圆的位置关系的判定

3. 【中考·湘西州】在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$BC=3$ cm，$AC=4$ cm，以点 C 为圆心，以2.5 cm为半径画圆，则⊙C 与直线 AB 的位置关系是(　　)

A. 相交　　B. 相切　　C. 相离　　D. 不能确定

4. 已知⊙O 的半径为3，M 为直线 AB 上一点，若 $MO=3$，则直线 AB 与⊙O 的位置关系为(　　)

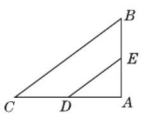
A. 相切　　B. 相交

C. 相切或相离　　D. 相切或相交

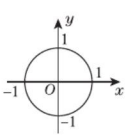
5. 如图，在△ABC 中，$AB=6$，$AC=8$，$BC=10$，D，E 分别是 AC，AB 的中点，则以 DE 为直径的圆与 BC 的位置关系是(　　)

A. 相交　　B. 相切

C. 相离　　D. 无法确定



(第5题)



(第6题)

6. 如图，在直角坐标系中，⊙O 的半径为1，则直线 $y=-x+\sqrt{2}$ 与⊙O 的位置关系是(　　)

A. 相离　　B. 相交

C. 相切　　D. 以上三种情形都有可能

知识点3　直线和圆的位置关系的性质

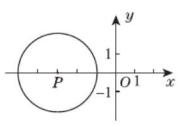
7. 以坐标原点 O 为圆心，作半径为2的圆，若直线 $y=-x+b$ 与⊙O 相交，则 b 的取值范围是(　　)

A. $0\leqslant b<2\sqrt{2}$　　B. $-2\sqrt{2}\leqslant b\leqslant 2\sqrt{2}$

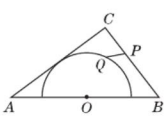
C. $-2\sqrt{3}<b<2\sqrt{3}$　　D. $-2\sqrt{2}<b<2\sqrt{2}$

8. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，半径为2的⊙P 的圆心 P 的坐标为$(-3,0)$，将⊙P 沿 x 轴正方向平移，使⊙P 与 y 轴相切，则平移的距离为(　　)

A. 1　　B. 1或5　　C. 3　　D. 5



(第8题)



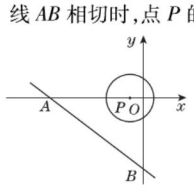
(第9题)

9. 【中考·台州】如图，在△ABC 中，$AB=10$，$AC=8$，$BC=6$，以边 AB 的中点 O 为圆心，作半圆与 AC 相切，点 P，Q 分别是边 BC 和半圆上的动点，连接 PQ，则 PQ 长的最大值与最小值的和是(　　)

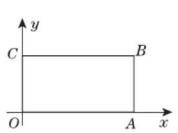
A. 6　　B. $2\sqrt{13}+1$

C. 9　　D. $\frac{32}{3}$

10. 【中考·菏泽】如图，直线 $y=-\frac{3}{4}x-3$ 交 x 轴于点 A，交 y 轴于点 B，点 P 是 x 轴上一动点，以点 P 为圆心，以1个单位长度为半径作⊙P，当⊙P 与直线 AB 相切时，点 P 的坐标是_____.



(第10题)



(第11题)

易错点　判断圆和各边相切时考虑不全而致错

11. 如图，在平面直角坐标系第一象限内有一矩形 $OABC$，$B(4,2)$，现有一圆同时和这个矩形的三边都相切，则此圆的圆心 P 的坐标为_____.

趣味数学　轮胎：最开始出现的轮胎是实心的，边缘也不是圆的、光滑的，而是不规则的多边形. 这样不仅在行进中颠簸得厉害，而且由于是实心的原因，十分耗材和沉重并且容易坏. (待续)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

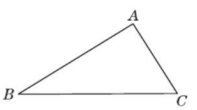
Ⅱ 整合方法·提升练 ☞（答案见91页）

考查角度1 利用作图条件判断直线和圆的位置关系

12. 【中考·怀化】如图，在Rt△ABC中，$\angle BAC=90°$.

（1）先作$\angle ACB$的平分线交AB边于点P，再以点P为圆心，PA长为半径作⊙P；（要求：尺规作图，保留作图痕迹，不写作法）

（2）请你判断BC与（1）中⊙P的位置关系，并说明理由.



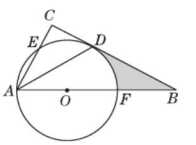
（第12题）

考查角度2 利用直线和圆心的距离判断直线与圆的位置关系

13. 【中考·枣庄】如图，在△ABC中，$\angle C=90°$，$\angle BAC$的平分线交BC于点D，点O在AB上，以点O为圆心，OA为半径的圆恰好经过点D，分别交AC，AB于点E，F.

（1）试判断直线BC与⊙O的位置关系，并说明理由；

（2）若$BD=2\sqrt{3}$，$BF=2$，求阴影部分的面积.（结果保留π）

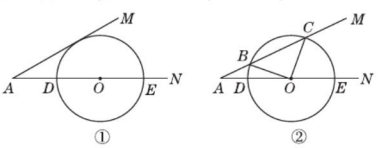


（第13题）

Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞（答案见91页）

拔尖角度1 直线和圆的位置关系的判定和性质在探求条件中的应用

14. 已知$\angle MAN=30°$，O为边AN上一点，以O为圆心，2为半径作⊙O，交AN于D，E两点，设$AD=x$.



（第14题）

（1）如图①，当x取何值时，⊙O与AM相切？

（2）如图②，当x取何值时，⊙O与AM相交于B，C两点，且$\angle BOC=90°$？

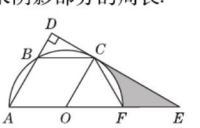
拔尖角度2 利用直线和圆的位置关系求周长问题

15. 【中考·扬州】如图，已知▱$OABC$的三个顶点A，B，C在以O为圆心的半圆上，过点C作$CD\perp AB$，分别交AB，AO的延长线于点D，E，AE交半圆O于点F，连接CF.

（1）判断直线DE与半圆O的位置关系，并说明理由；

（2）①求证：$CF=OC$；

②若半圆O的半径为12，求阴影部分的周长.



（第15题）

后来历经多年的努力改进，不规则的多边形逐渐被接近圆形的轮胎所取代. 同时，轴和轮胎的关系在同时期也得到了改进，轴的出现使材料大为节省，车辆也变得轻盈起来.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第2课时　切线的性质

名师点金

1. 直线和圆的三种位置关系可以用两种方式刻画：一是用直线和圆的公共点的个数来确定，二是用圆心到直线的距离与圆的半径之间的数量关系来确定，两种方式本质上是一致的.
2. 直线和圆的三种位置关系中“相切”最具有特殊性，由此我们得到了圆的切线的定义和性质，在应用切线的性质时，一定要抓住“垂直”这一特征，综合直角三角形的有关知识灵活解决问题.

Ⅰ 夯实基础·逐点练 ☞(答案见92页)

知识点1 切线的性质定理

1. 下列说法正确的是(　　)

A. 圆的切线垂直于半径

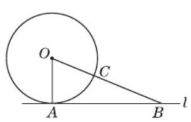
B. 垂直于切线的直线经过圆心

C. 经过圆心且垂直于切线的直线经过切点

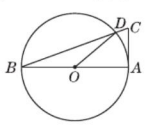
D. 经过切点的直线经过圆心

2. 【中考·吉林】如图，直线 l 是⊙O 的切线，A 为切点，B 为直线 l 上一点，连接 OB 交⊙O 于点 C. 若 $AB=12$，$OA=5$，则 BC 的长为(　　)

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8



(第2题)



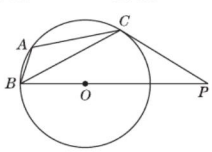
(第3题)

3. 如图，AB 是⊙O 的直径，AC 切⊙O 于点 A，BC 交⊙O 于点 D，若∠$C=70°$，则∠AOD 的度数为(　　)

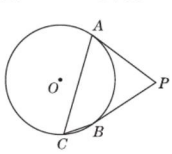
A. 70°　　B. 35°　　C. 20°　　D. 40°

4. 【中考·泰安】如图，△ABC 是⊙O 的内接三角形，∠$A=119°$，过点 C 的圆的切线交 BO 的延长线于点 P，则∠P 的度数为(　　)

A. 32°　　B. 31°　　C. 29°　　D. 61°



(第4题)



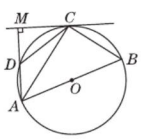
(第5题)

5. 【中考·福建】如图，PA，PB 是⊙O 的切线，A，B 为切点，点 C 在⊙O 上，且∠$ACB=55°$，则∠APB 的度数为(　　)

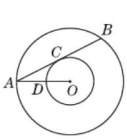
A. 55°　　B. 70°　　C. 110°　　D. 125°

6. 【中考·泰安】如图，圆内接四边形 $ABCD$ 的边 AB 过圆心 O，过点 C 的切线与边 AD 所在直线垂直于点 M，若∠$ABC=55°$，则∠ACD 等于(　　)

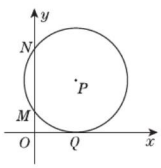
A. 20°　　B. 35°　　C. 40°　　D. 55°



(第6题)



(第7题)



(第8题)

知识点2 切线性质定理的应用

7. 如图，以点 O 为圆心的两个圆中，大圆的弦 AB 切小圆于点 C，OA 交小圆于点 D，若 $OD=2$，$\tan\angle OAB=\frac{1}{2}$，则 AB 的长为(　　)

A. 4　　B. $2\sqrt{3}$　　C. 8　　D. $4\sqrt{3}$

8. 如图，在平面直角坐标系中，点 P 在第一象限内，x 轴与⊙P 相切于点 Q，y 轴与⊙P 相交于 $M(0,2)$，$N(0,8)$ 两点，则点 P 的坐标是(　　)

A. (5,3)　　B. (3,5)　　C. (5,4)　　D. (4,5)

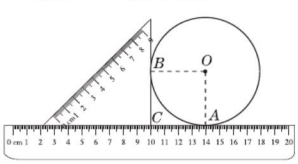
9. 【中考·宜昌】如图，圆形薄铁片与三角尺、直尺紧靠在一起平放在桌面上. 已知铁片的圆心为 O，三角尺的直角顶点 C 落在直尺的 10 cm 处，铁片与直尺的唯一公共点 A 落在直尺的 14 cm 处，铁片与三角尺的唯一公共点为 B. 下列说法错误的是(　　)

A. 圆形铁片的半径是 4 cm

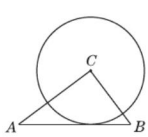
B. 四边形 $AOBC$ 为正方形

C. 弧 AB 的长度为 4π cm

D. 扇形 AOB 的面积是 4π cm^2



(第9题)



(第10题)

易错点 忽视“过切点”这一条件而致错

10. 如图，在△ABC 中，$AB=5$，$BC=3$，$AC=4$，以点 C 为圆心的圆与 AB 相切，则⊙C 的半径为(　　)

A. 2.3　　B. 2.4　　C. 2.5　　D. 2.6

趣味数学　缺一少十：腊月的一天，郑板桥和蔡州官同游苏州，见一家门上贴了一副对联：二三四五，六七八九. 郑板桥立即派人送来了一些衣服、米面和几斤肉.(待续)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

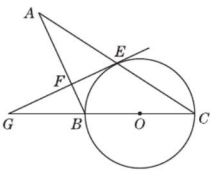
Ⅱ 整合方法·提升练 ☞（答案见92页）

考查角度1 利用切线的性质求半径的长度

11. 【中考·菏泽】如图，BC 是⊙O 的直径，CE 是⊙O 的弦，过点 E 作⊙O 的切线，交 CB 的延长线于点 G，过点 B 作 $BF\perp GE$ 于点 F，交 CE 的延长线于点 A.

（1）求证：$\angle ABG=2\angle C$；

（2）若 $GF=3\sqrt{3}$，$GB=6$，求⊙O 的半径.



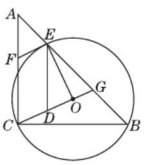
（第11题）

考查角度2 切线的性质在判断图形形状中的应用

12. 【中考·温州】如图，在△ABC 中，$AC=BC$，$\angle ACB=90°$，⊙O（圆心 O 在△ABC 内部）经过 B，C 两点，交 AB 于点 E，过点 E 作⊙O 的切线交 AC 于点 F. 延长 CO 交 AB 于点 G，作 $ED\parallel AC$ 交 CG 于点 D.

（1）求证：四边形 $CDEF$ 是平行四边形；

（2）若 $BC=3$，$\tan\angle DEF=2$，求 BG 的长.



（第12题）

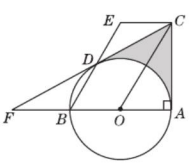
Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞（答案见92页）

拔尖角度1 利用切线的性质解与特殊四边形综合问题（化不规则为规则法）

13. 【中考·昆明】如图，AB 是⊙O 的直径，$\angle BAC=90°$，四边形 $EBOC$ 是平行四边形，EB 交⊙O 于点 D，连接 CD 并延长交 AB 的延长线于点 F.

（1）求证：CF 是⊙O 的切线；

（2）若 $\angle F=30°$，$EB=4$，求图中阴影部分的面积.（结果保留根号和 π）



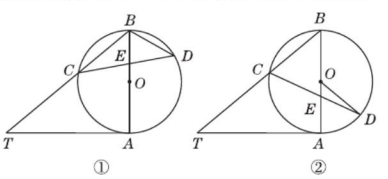
（第13题）

拔尖角度2 利用圆的切线性质求角的大小

14. 【中考·天津】已知 AB 是⊙O 的直径，AT 是⊙O 的切线，$\angle ABT=50°$，BT 交⊙O 于点 C，E 是 AB 上一点，延长 CE 交⊙O 于点 D.

（1）如图①，求 $\angle T$ 和 $\angle CDB$ 的大小；

（2）如图②，当 $BE=BC$ 时，求 $\angle CDO$ 的大小.



（第14题）

州官问郑板桥怎么知道这家人缺少衣服和粮食，郑板桥说："他家大门上不明白写着吗，你看那对联是'二三四五，六七八九'，这不是缺一（衣）少十（食）吗？"

趣味数学

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

第3课时　切线的判定

名师点金

切线的三种判定方法

(1)**定义法**:直线和圆只有一个公共点,这时,我们说这条直线和圆相切.

(2)**数量法**:若圆心到直线的距离 d 等于圆的半径 r,则这条直线是圆的切线.

(3)**位置法**(切线的判定定理):经过半径外端且垂直于这条半径的直线是圆的切线.

在切线的三种判定方法中,常用的是后两种判定方法,在判定圆的切线时,往往需要添加辅助线.

1 夯实基础·逐点练

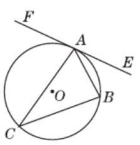
(答案见93页)

知识点1 切线的判定定理

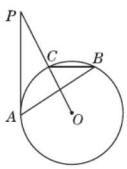
1. 如图,$\triangle ABC$ 是$\odot O$的内接三角形,下列选项中,能使过点 A 的直线 EF 与$\odot O$相切于点 A 的条件是(　　)

A. $\angle EAB=\angle C$　　B. $\angle EAB=\angle BAC$

C. $EF\perp AC$　　D. AC 是$\odot O$的直径



(第1题)



(第2题)

2. 如图,PA 与$\odot O$相切于点 A,PO 交$\odot O$于点 C,点 B 是优弧 CA 上一点,若 $\angle P=26°$,则 $\angle ABC$ 的度数为(　　)

A. 26°　　B. 64°　　C. 32°　　D. 90°

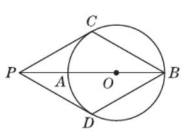
3. 如图,点 P 在$\odot O$的直径 BA 的延长线上,PC 与$\odot O$相切,切点为 C,点 D 在$\odot O$上,连接 PD,BD,已知 $PC=PD=BC$. 下列结论:

①PD 与$\odot O$相切;②四边形 $PCBD$ 是菱形;

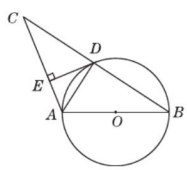
③$PO=AB$;④$\angle PDB=120°$.

其中,正确的有(　　)

A. 4个　　B. 3个　　C. 2个　　D. 1个



(第3题)



(第4题)

4. 如图,AB 是$\odot O$的直径,线段 BC 与$\odot O$的交点 D 是 BC 的中点,$DE\perp AC$ 于点 E,连接 AD,则下列结论中正确的个数是(　　)

①$AD\perp BC$;②$\angle EDA=\angle B$;

③$OA=\frac{1}{2}AC$;④DE 是$\odot O$的切线.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

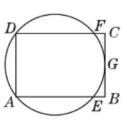
知识点2 切线的性质和判定的应用

5. 【中考·无锡】如图,在矩形 $ABCD$ 中,G 是 BC 的中点,过 A,D,G 三点的$\odot O$与边 AB,CD 分别交于点 E、点 F,给出下列说法:

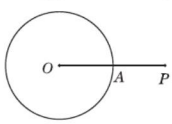
①AC 与 BD 的交点是$\odot O$的圆心;②AF 与 DE 的交点是$\odot O$的圆心;③BC 与$\odot O$相切.

其中正确的说法的个数是(　　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3



(第5题)



(第6题)

6. 如图,P 是$\odot O$外一点,OP 交$\odot O$于点 A,$OA=AP$.

甲　以点 A 为圆心,AP 长为半径画弧,交$\odot O$于点 B,则直线 BP 即为所求.

乙　过点 A 作直线 $MN\perp OP$,以点 O 为圆心,OP 长为半径画弧,交射线 AM 于点 B,连接 OB,交$\odot O$于点 C,直线 CP 即为所求.

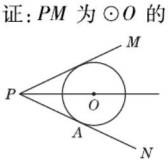
对于甲、乙两人的作法,下列判断正确的是(　　)

A. 甲正确,乙错误　　B. 甲错误,乙正确

C. 两人都正确　　D. 两人都错误

易错点 判断直线与圆相切时理由不充分而致错

7. 如图,点 O 为 $\angle MPN$ 的平分线上一点,以点 O 为圆心的$\odot O$与 PN 相切于点 A. 求证:PM 为$\odot O$的切线.



(第7题)

趣味数学　**蜗牛爬井问题**:德国数学家里斯曾出过这样一道数学题:井深20尺,蜗牛在井底,白天爬7尺,夜里降2尺,几天可以到达井顶?(答案:第4天白天到达井顶)(待续)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

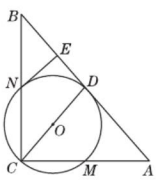
Ⅱ 整合方法·提升练 ☞（答案见93页）

考查角度1 利用公共点“连半径，证垂直”判定切线

8. 【中考·盐城】如图，在Rt△ABC中，$\angle ACB=90°$，CD是斜边AB上的中线，以CD为直径的⊙O分别交AC，BC于点M，N，过点N作$NE\perp AB$，垂足为E.

（1）若⊙O的半径为$\frac{5}{2}$，$AC=6$，求BN的长.

（2）求证：NE与⊙O相切.



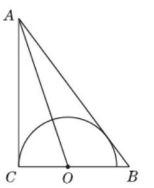
（第8题）

考查角度2 利用圆心“作垂直，证半径”判定切线

9. 【中考·南充】如图，在Rt△ABC中，$\angle ACB=90°$，$\angle BAC$的平分线交BC于点O，$OC=1$，以点O为圆心，OC长为半径作半圆.

（1）求证：AB为⊙O的切线；

（2）如果$\tan\angle CAO=\frac{1}{3}$，求$\cos B$的值.



（第9题）

Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞（答案见93页）

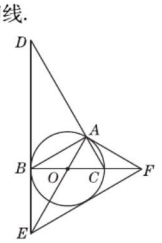
拔尖角度1 利用切线的判定与性质求线段长

10. 【中考·广东】如图，⊙O是△ABC的外接圆，BC是⊙O的直径，$\angle ABC=30°$，过点B作⊙O的切线BD，与CA的延长线交于点D，与半径AO的延长线交于点E，过点A作⊙O的切线AF，与直径BC的延长线交于点F.

（1）求证：△ACF∽△DAE；

（2）若$S_{\triangle AOC}=\frac{\sqrt{3}}{4}$，求$DE$的长；

（3）连接EF，求证：EF是⊙O的切线.



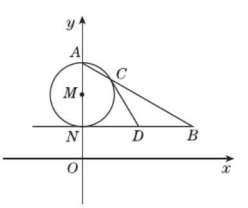
（第10题）

拔尖角度2 利用切线的判定探究坐标系中的切线问题

11. 【中考·凉州】如图，AN是⊙M的直径，$NB\parallel x$轴，AB交⊙M于点C. 【导学号：9400200】

（1）若点$A(0,6)$，$N(0,2)$，$\angle ABN=30°$，求点B的坐标；

（2）若D为线段NB的中点，求证：直线CD是⊙M的切线.



（第11题）

雷要注意的一点是蜗牛三天三夜实际上升15尺，第四天清晨离井口只剩5尺，天黑以前就能爬出井来，再也不会沿着井的内壁往下掉.

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第4课时　三角形的内切圆

名师点金

直角三角形内切圆半径的求法

设直角三角形的两直角边长分别为 a,b，斜边长为 c，r 为其内切圆的半径，则 $r=\frac{1}{2}(a+b-c)$. 若从面积推导，则 $r=\frac{ab}{a+b+c}$. 这两个结论可在做选择题和填空题时直接应用.

Ⅰ 夯实基础·逐点练

(答案见94页)

知识点1 三角形内切圆及相关概念

1. 下列说法错误的是(　　)

A. 三角形的内切圆与三角形的三边都相切

B. 一个三角形一定有唯一一个内切圆

C. 一个圆一定有唯一一个外切三角形

D. 等边三角形的内切圆与外接圆是同心圆

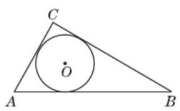
2. 【中考·广州】如图，$\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的内切圆，则点 O 是 $\triangle ABC$ 的(　　)

A. 三条边的垂直平分线的交点

B. 三条角平分线的交点

C. 三条中线的交点

D. 三条高的交点

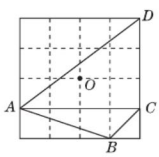


(第2题)

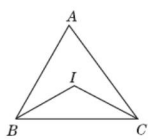
3. 【中考·河北】如图为 4×4 的网格图，A,B,C,D,O 均在格点上，点 O 是(　　)

A. $\triangle ACD$ 的外心　　B. $\triangle ABC$ 的外心

C. $\triangle ACD$ 的内心　　D. $\triangle ABC$ 的内心



(第3题)



(第5题)

4. 下列说法：①三角形的内心不一定在三角形的内部；②若点 I 是 $\triangle ABC$ 的内心，则 AI 平分 $\angle BAC$；③三角形有唯一的内切圆，圆有唯一的外切三角形. 其中正确的有(　　)

A. 0个　　B. 1个　　C. 2个　　D. 3个

5. 【中考·眉山】如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=66°$，点 I 是内心，则 $\angle BIC$ 的大小为(　　)

A. 114°　　B. 122°　　C. 123°　　D. 132°

知识点2 三角形内切圆的性质

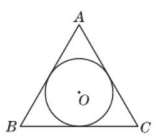
6. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=3$，$AB=5$，则它的内切圆与外接圆半径分别为(　　)

A. 1.5，2.5　　B. 2，5

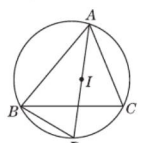
C. 1，2.5　　D. 2，2.5

7. 如图，正三角形 ABC 的内切圆半径为1，那么这个正三角形的边长为(　　)

A. 2　　B. 3　　C. $\sqrt{3}$　　D. $2\sqrt{3}$



(第7题)



(第9题)

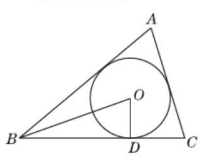
8. 【中考·武汉】已知一个三角形的三边长分别为5，7，8，则其内切圆的半径为(　　)

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{3}{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $2\sqrt{3}$

9. 【中考·荆门】如图，$\triangle ABC$ 的内心为 I，连接 AI 并延长交 $\triangle ABC$ 的外接圆于点 D，则线段 DI 与 DB 的关系是(　　)

A. $DI=DB$　　B. $DI>DB$　　C. $DI<DB$　　D. 不确定

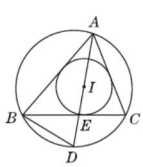
10. 【中考·湖州】如图，已知 $\triangle ABC$ 的内切圆 $\odot O$ 与 BC 边相切于点 D，连接 OB,OD. 若 $\angle ABC=40°$，则 $\angle BOD$ 的度数是_____.



(第10题)

易错点 混淆外心与内心的概念而致错

11. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 I 是 $\triangle ABC$ 的内心，$\angle BAC$ 的平分线和 $\triangle ABC$ 的外接圆相交于点 D，和 BC 交于点 E. 求证：$DI=DB$.



(第11题)

趣味数学　如果我继承可观的财产，我在数学上可能没有多少价值了.　——拉格朗日

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法·提升练 ☞（答案见94页）

考查角度1 利用内心的定义证明点为三角形内心

12. 如图，以点 O 为圆心的圆与 $\triangle ABC$ 的三边分别交于点 E,F,G,H,M,N，且 $EF=GH=MN$，求证：点 O 是 $\triangle ABC$ 的内心.



（第12题）

考查角度2 利用阅读材料求三角形内切圆的半径

13. 【中考·桂林】阅读下列材料：

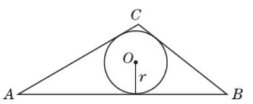
海伦公式：$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$（其中 a,b,c 是三角形的三边长，$p=\dfrac{a+b+c}{2}$，S 为三角形的面积）.

根据上述材料，解答下列问题：

如图，在 $\triangle ABC$ 中，$BC=5,AC=6,AB=9$.

（1）用海伦公式求 $\triangle ABC$ 的面积；

（2）求 $\triangle ABC$ 的内切圆半径 r.



（第13题）

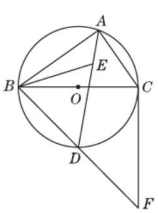
Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞（答案见94页）

拔尖角度1 利用三角形内心的性质判定圆的切线

14. 【中考·黄石】如图，$\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆，BC 为 $\odot O$ 的直径，点 E 为 $\triangle ABC$ 的内心，连接 AE 并延长交 $\odot O$ 于点 D，连接 BD 并延长至 F，使得 $DF=BD$，连接 CF,BE.

求证：（1）$DB=DE$；

（2）直线 CF 为 $\odot O$ 的切线.



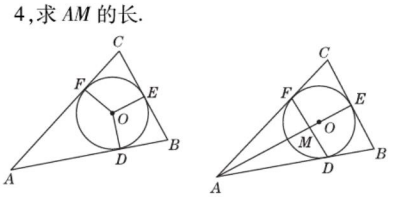
（第14题）

拔尖角度2 利用三角形内切圆性质进行相关计算

15. 【中考·百色】已知 $\triangle ABC$ 的内切圆 $\odot O$ 与 AB,BC,AC 分别相切于点 D,E,F，若 $\overset{\frown}{EF}=\overset{\frown}{DE}$，如图①.

（1）判断 $\triangle ABC$ 的形状，并证明你的结论；

（2）设 AE 与 DF 相交于点 M，如图②，$AF=2FC=4$，求 AM 的长.



（第15题）

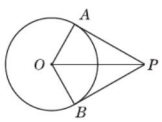
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

*7　切线长定理

名师点金

根据切线长定理，可以得到两个重要结论：①从圆外一点可以引圆的两条切线，这两条切线的切线长相等；②这一点和圆心的连线，平分两条切线所成的夹角. 如图，P 为 $\odot O$ 外的任意一点，PA，PB 为 $\odot O$ 的两条切线，切点分别为 A，B，则 $PA=PB$，$\angle APO=\angle BPO$，由此结合三角形内角和定理，还可以得到 $\angle AOP=\angle BOP$.

需要注意的是：①可以直接应用，②不能直接应用，但②可以帮助我们找到解题方法或理清解题思路.



Ⅰ 夯实基础·逐点练 ☞（答案见94页）

知识点1　切线长定理

1. 下列说法正确的是(　　)

A. 过任意一点总可以作圆的两条切线

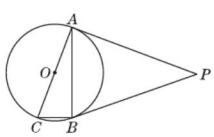
B. 圆的切线长就是圆的切线的长度

C. 过圆外一点所画的圆的两条切线的切线长相等

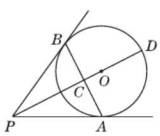
D. 过圆外一点所画的圆的切线的切线长一定大于圆的半径

2. 【中考·南充】如图，PA 和 PB 是 $\odot O$ 的切线，点 A 和 B 是切点，AC 是 $\odot O$ 的直径，已知 $\angle P=40°$，则 $\angle ACB$ 的度数是(　　)

A. 60°　　B. 65°　　C. 70°　　D. 75°



（第2题）



（第3题）

3. 【中考·益阳】如图，PA，PB 为 $\odot O$ 的切线，切点分别为 A，B，PO 交 AB 于点 C，PO 的延长线交 $\odot O$ 于点 D，下列结论不一定成立的是(　　)

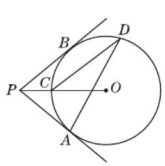
A. $PA=PB$　　B. $\angle BPD=\angle APD$

C. $AB\perp PD$　　D. AB 平分 PD

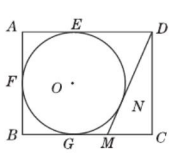
知识点2　切线长定理的应用

4. 如图，过 $\odot O$ 外一点 P 引 $\odot O$ 的两条切线 PA，PB，切点分别是 A，B，OP 交 $\odot O$ 于点 C，点 D 是优弧 AC 上不与点 A、点 C 重合的一个动点，连接 AD，CD. 若 $\angle APB=80°$，则 $\angle ADC$ 的度数是(　　)

A. 15°　　B. 20°　　C. 25°　　D. 30°



（第4题）



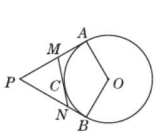
（第5题）

5. 【中考·南京】如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$AD=5$，AD，AB，BC 分别与 $\odot O$ 相切于 E，F，G 三点，过点 D 作 $\odot O$ 的切线交 BC 于点 M，切点为 N，则 DM 的长为(　　)

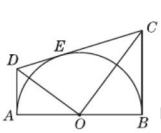
A. $\frac{13}{3}$　　B. $\frac{9}{2}$　　C. $\frac{4}{3}\sqrt{13}$　　D. $2\sqrt{5}$

6. 如图，从 $\odot O$ 外一点 P 引圆的两条切线 PA，PB，切点分别为 A，B，点 C 是劣弧 AB 上一点，过点 C 的切线分别交 PA，PB 于点 M，N，若 $\odot O$ 的半径为 2，$\angle P=60°$，则 $\triangle PMN$ 的周长为(　　)

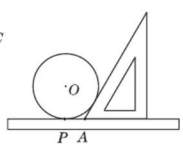
A. 4　　B. 6　　C. $4\sqrt{3}$　　D. $6\sqrt{3}$



（第6题）



（第7题）



（第8题）

7. 如图，AB 为半圆 O 的直径，AD，BC 分别切 $\odot O$ 于 A，B 两点，CD 切 $\odot O$ 于点 E，AD 与 CD 相交于点 D，BC 与 CD 相交于点 C，连接 OD，OC，对于下列结论：①$OD^2=DE\cdot CD$；②$AD+BC=CD$；③$OD=OC$；④$S_{梯形ABCD}=\frac{1}{2}CD\cdot OA$；⑤$\angle DOC=90°$. 其中正确的结论有(　　)

A. ①②⑤　　B. ②③④　　C. ③④⑤　　D. ①④⑤

8. 为了测量一个圆形铁环的半径，某同学采用如下方法：将铁环平放在水平桌面上，用一个含有 30°角的三角尺和一把刻度尺，按如图所示的方法得到相关数据，进而可求得铁环的半径. 若 P 为切点，测得 $PA=5$ cm，则铁环的半径是_____.

易错点　变式应用切线长定理时因考虑不全而致错

9. 既有外接圆，又有内切圆的平行四边形是(　　)

A. 矩形　　B. 菱形　　C. 正方形　　D. 矩形或菱形

趣味数学　**树木的年轮**：树木伐倒后，在树墩上可以看到许多圆环，植物学上称为年轮. 年轮是树木在生长过程中受季节影响形成的，一年产生一轮.（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

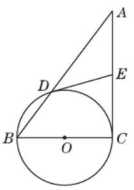
Ⅱ 整合方法·提升练 ☞（答案见95页）

考查角度1 利用切线长定理求线段长

10. 【中考·丽水】如图，在Rt△ABC中，$\angle C=90°$，以BC为直径的⊙O交AB于点D，切线DE交AC于点E.

（1）求证：$\angle A=\angle ADE$；

（2）若$AD=16$，$DE=10$，求BC的长.



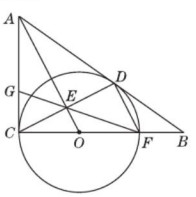
（第10题）

考查角度2 利用切线长定理证平行

11. 【中考·泸州】如图，⊙O与Rt△ABC的直角边AC和斜边AB分别相切于点C，D，与边BC相交于点F，OA与CD相交于点E，连接FE并延长交AC边于点G.

（1）求证：$DF/\!/AO$；

（2）若$AC=6$，$AB=10$，求CG的长.



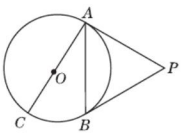
（第11题）

考查角度3 利用切线长定理求角的度数

12. 【中考·资阳】如图，AC是⊙O的直径，PA切⊙O于点A，PB切⊙O于点B，且$\angle APB=60°$.

（1）求$\angle BAC$的度数；

（2）若$PA=1$，求点O到弦AB的距离.



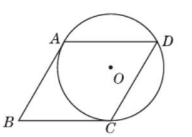
（第12题）

考查角度4 利用切线长定理解与菱形相关的问题

13. 【中考·珠海】如图，⊙O经过菱形$ABCD$的三个顶点A，C，D，且与AB相切于点A.

（1）求证：BC为⊙O的切线；

（2）求$\angle B$的度数.



（第13题）

年轮中蕴含着大量的气候、天文、医学和环境等方面的信息，在历史考古、林业研究、地质和公安破案等方面起着重要的作用.（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

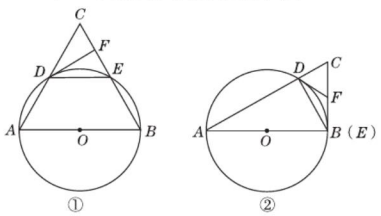
Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞(答案见96页)

拔尖角度① 利用切线长定理探究动点问题

14. 【中考 · 威海】已知 AB 为⊙O 的直径，$AB=2$，弦 $DE=1$，直线 AD 与 BE 相交于点 C，弦 DE 在⊙O 上运动且保持长度不变，⊙O 的切线 DF 交 BC 于点 F.

(1) 如图①，若 $DE/\!/AB$，求证：$CF=EF$；

(2) 如图②，当点 E 运动至与点 B 重合时，试判断 CF 与 BF 是否相等，并说明理由.

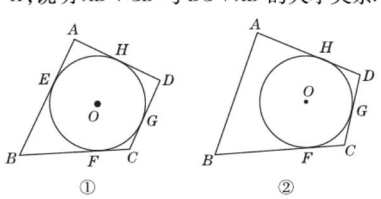


(第14题)

拔尖角度② 利用切线长定理说明与切线相关的四边形边的关系

15. (1) 如图①，四边形 $ABCD$ 是⊙O 的外切四边形，切点分别为 E,F,G,H，说明 $AB+CD$ 与 $BC+AD$ 的大小关系；

(2) 如图②，四边形 $ABCD$ 的三边切⊙O 于点 F,G,H，说明 $AB+CD$ 与 $BC+AD$ 的大小关系.



(第15题)

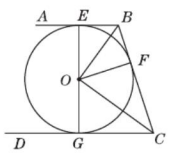
拔尖角度③ 利用切线长定理探究三角形形状并进行相关计算

16. 如图，AB,BC,CD 分别与⊙O 相切于点 E,F,G，且 $AB/\!/CD$，$BO=6$，$CO=8$.

(1) 判断△OBC 的形状，并说明理由；

(2) 求 BC 的长；

(3) 求⊙O 的半径 OF 的长.



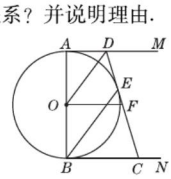
(第16题)

拔尖角度④ 利用切线长定理探究线段的数量及位置关系

17. 如图，AB 是⊙O 的直径，AM 和 BN 是它的两条切线，DC 切⊙O 于点 E，交 AM 于点 D，交 BN 于点 C，F 是 CD 的中点，连接 OF.

(1) 求证：$OD/\!/BE$；

(2) 猜想：OF 与 CD 有何数量关系？并说明理由.



(第17题)

趣味数学　我国在北半球，日照偏南方，树木的年轮往往呈现“南疏北密”的现象，因此在野外，树木的年轮也是我们辨别方向的方式之一.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

阶段方法技巧训练（二）

专训1 有关圆的位置关系的四种判断方法 ☞（答案见96页）

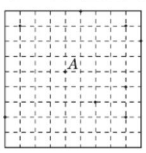
名师点金

与圆有关的位置关系包括点与圆的位置关系和直线与圆的位置关系，判断它们的关系主要有**定义法**、**比较法**、**交点个数法**、**距离比较法**等.

类型1 点与圆的位置关系

方法1 定义法

1. 如图，在网格中（每个小正方形的边长均为1个单位长度）选取9个格点（格线的交点称为格点）. 如果以A为圆心，r为半径画圆，选取的格点中除点A外恰好有3个在圆内，则r的取值范围为（　　）



（第1题）

A. $2\sqrt{2}<r\leqslant\sqrt{17}$　　B. $\sqrt{17}<r\leqslant3\sqrt{2}$

C. $\sqrt{17}<r\leqslant5$　　D. $5<r\leqslant\sqrt{29}$

2. 在矩形$ABCD$中，$AB=8$，$BC=3\sqrt{5}$，点P在边AB上，且$BP=3AP$，如果⊙P是以点P为圆心，PD的长为半径的圆，那么下列判断正确的是（　　）

A. 点B，C均在⊙P外

B. 点B在⊙P外，点C在⊙P内

C. 点B在⊙P内，点C在⊙P外

D. 点B，C均在⊙P内

方法2 比较法

3. ⊙O的半径$r=5$ cm，圆心O到直线l的距离$OD=3$ cm，在直线l上有P，Q，R三点，且有$PD=4$ cm，$QD=5$ cm，$RD=3$ cm，那么P，Q，R三点与⊙O的位置关系各是怎样的？

类型2 直线与圆的位置关系

方法3 交点个数法

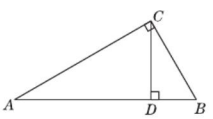
4. 已知直线l经过⊙O上的A，B两点，则直线l与⊙O的位置关系是（　　）

A. 相切　　B. 相交

C. 相离　　D. 无法确定

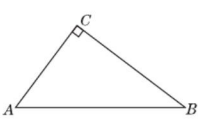
方法4 距离比较法

5. 如图，在△ABC中，$\angle ACB=90°$，$\angle A=30°$，$CD\perp AB$，$BC=4$ cm，以点C为圆心，4 cm为半径画⊙C，试判断直线BD与⊙C的位置关系，并说明理由.



（第5题）

6. 如图，在Rt△ABC中，$\angle C=90°$，$AC=3$，$BC=4$. 若以点C为圆心、R为半径的圆与斜边只有一个公共点，求R的取值范围.



（第6题）

时钟里的多边形：从1点钟开始，每次加上3个小时，加四次之后，会回到原出发点，最后在时钟内得到一个正四边形.（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

专训 2 切线的证明技巧 ☞(答案见97页)

名师点金

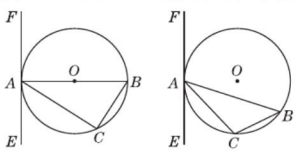
有关切线的证明分两种情况:一是直线过圆上某一点,证明直线是圆的切线时,只需"连半径,证垂直,得切线";二是直线和圆没有已知的公共点时,通常"作垂直,证半径,得切线".

技巧 1 连半径,证垂直,得切线

1. 【中考·武威】已知$\triangle ABC$内接于$\odot O$,过点A作直线EF.

(1)如图①,若AB为$\odot O$的直径,要使EF成为$\odot O$的切线,还需要添加的一个条件是(要求写出两种情况):_____或_____;

(2)如图②,如果AB是不过圆心O的弦,且$\angle CAE=\angle B$,那么EF是$\odot O$的切线吗?请说明理由.

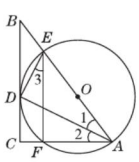


(第1题)

2. 【中考·广安】如图,在Rt$\triangle ABC$中,$\angle ACB=90°$,$AC=6$,$BC=8$,AD平分$\angle BAC$,AD交BC于点D,$ED\perp AD$交AB于点E,$\triangle ADE$的外接圆$\odot O$交AC于点F,连接EF.

(1)求证:BC是$\odot O$的切线;

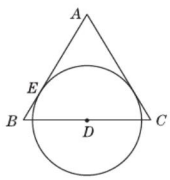
(2)求$\odot O$的半径r及$\angle 3$的正切值.



(第2题)

技巧 2 作垂直,证半径,得切线

3. 【一题多解】如图,$AB=AC$,D为BC的中点,$\odot D$与AB相切于E点.求证:AC与$\odot D$相切.

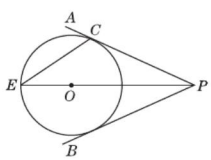


(第3题)

4. 【中考·黔西南州】如图,点O在$\angle APB$的平分线上,$\odot O$与PA相切于点C.

(1)求证:直线PB与$\odot O$相切;

(2)PO的延长线与$\odot O$交于点E,若$\odot O$的半径为3,$PC=4$.求弦CE的长.



(第4题)

趣味数学　如果每次加上2个小时,最后在时钟内得到一个正六边形;如果每次加上4个小时,最后在时钟内得到一个正三角形;如果每次加上1个小时,最后在时钟内得到一个正十二边形.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

专训3 切线的判定和性质的四种应用类型 ☞（答案见97页）

名师点金

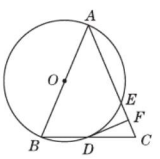
圆的切线的判定和性质的应用较广泛，一般先利用圆的切线的判定方法判定切线，再利用切线的性质进行线段和角的计算或论证，在计算或论证中常通过作辅助线解决有关问题.

类型1 应用于求线段的长

1. 【中考·咸宁】如图，在△ABC中，$AB=AC$，以AB为直径的⊙O与边BC，AC分别交于D，E两点，过点D作$DF\perp AC$，垂足为F.

（1）求证：DF是⊙O的切线；

（2）若$AE=4$，$\cos A=\frac{2}{5}$，求DF的长.



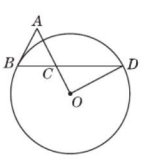
（第1题）

类型2 应用于求三角函数值

2. 【中考·镇江】如图，在△ABC中，$AB=AC$，过AC延长线上的点O作$OD\perp AO$，交BC的延长线于点D，以O为圆心，OD长为半径的圆过点B.

（1）求证：直线AB与⊙O相切；

（2）若$AB=5$，⊙O的半径为12，则$\tan\angle BDO=$_____.



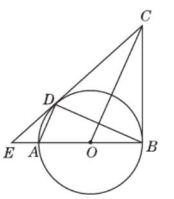
（第2题）

类型3 应用于求圆的半径

3. 【中考·凉山州】如图，已知AB为⊙O的直径，AD，BD是⊙O的弦，BC是⊙O的切线，切点为B，$OC/\!/AD$，BA，CD的延长线相交于点E.

（1）求证：DC是⊙O的切线；

（2）若$AE=1$，$ED=3$，求⊙O的半径.



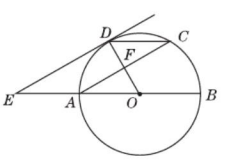
（第3题）

类型4 应用于求图形的面积

4. 【中考·通辽】如图，AB为⊙O的直径，D为$\overset{\frown}{AC}$的中点，连接OD交弦AC于点F，过点D作$DE/\!/AC$，交BA的延长线于点E.

（1）求证：DE是⊙O的切线；

（2）连接CD，若$OA=AE=4$，求四边形$ACDE$的面积.



（第4题）

古希腊毕达哥拉斯学派认为美同事物所表现出来的均衡、对称、和谐分不开，甚至认为：一切立体图形中最美的是球形，一切平面图形中最美的是圆形.（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

8　正多边形和圆

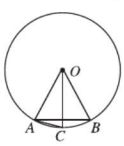
第1课时　圆内接正多边形

Ⅰ 夯实基础·逐点练 ☞(答案见98页)

知识点1　圆内接正多边形

1. 给出下列四个命题：
①正多边形都有内切圆和外接圆，且这两个圆是同心圆；
②各边相等的圆外切多边形是正多边形；
③各角相等的圆内接多边形是正多边形；
④正多边形既是轴对称图形又是中心对称图形.
其中正确命题有(　　)
A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

2. 如图，在⊙O中，$OA=AB$，$OC\perp AB$，则下列结论正确的是(　　)
①弦AB的长等于圆内接正六边形的边长；②弦AC的长等于圆内接正十二边形的边长；③$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$；④$\angle BAC=30°$.
A. ①②④
B. ①③④
C. ②③④
D. ①②③

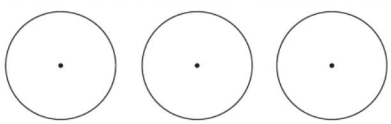


(第2题)

3. 【中考·株洲】下列圆的内接正多边形中，一条边所对的圆心角最大的图形是(　　)
A. 正三角形　　B. 正方形
C. 正五边形　　D. 正六边形

知识点2　圆内接正多边形的画法

4. 在如图所示的圆中，画出你喜欢的三个不同的圆内接正多边形.(画图工具不限，但要保留画图痕迹)

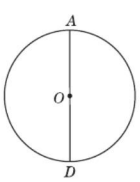


(第4题)

Ⅱ 整合方法·提升练 ☞(答案见98页)

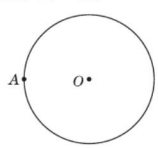
考查角度　利用正多边形的特征作图

5. 在学习圆与正多边形时，马露、高静两位同学设计了一个作圆内接正三角形的方法：
(1)如图，作直径AD；
(2)作半径OD的垂直平分线，交⊙O于B，C两点；
(3)连接AB，AC，那么△ABC为所求作的正三角形.
请你判断两位同学的作法是否正确，如果正确，请你按照两位同学设计的作法，作出△ABC，然后给出△ABC是正三角形的证明过程；如果不正确，请说明理由.



(第5题)

6. 已知⊙O和⊙O上的一点A，如图所示.
(1)作⊙O的内接正方形$ABCD$和内接正六边形$AEFCGH$；
(2)在(1)题的作图中，如果点E在$\overset{\frown}{AD}$上，连接DE，求证：DE为⊙O的内接正十二边形的一边.



(第6题)

趣味数学　生活中我们常常把没有缺陷、使人满意的情况叫做“圆满”，把理想的实现叫做“圆梦”，音乐表现也追求声音的圆润与技巧的娴熟.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第2课时 正多边形

名师点金

正多边形的判定方法

(1)根据定义判定：证明多边形的各边相等，各内角相等.

(2)根据正多边形与圆的关系判定：多边形为圆内接多边形时，判断该多边形的顶点将圆等分即可.

1 夯实基础·逐点练

☞(答案见98页)

知识点1 正多边形及有关概念

1. 正多边形的一边所对的中心角与该多边形的一个内角的关系为(　　)

A. 两角互余　　B. 两角互补

C. 两角互余或互补　　D. 不能确定

2. 下列图形中，既是轴对称图形，又是中心对称图形的有(　　)

①正三角形；②正方形；③正五边形；④正六边形；⑤线段；⑥圆；⑦菱形；⑧平行四边形.

A. 3个　　B. 4个　　C. 5个　　D. 6个

3. 对于下列说法：①各角相等的多边形是正多边形；②各边相等的三角形是正三角形；③各角相等的圆内接多边形是正多边形；④各顶点等分外接圆的多边形是正多边形. 你认为正确的有(　　)

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

4. 下列说法中，不正确的是(　　)

A. 正多边形一定有一个外接圆和一个内切圆

B. 各边相等且各角相等的多边形是正多边形

C. 正多边形的内切圆和外接圆是同心圆

D. 正多边形既是轴对称图形，又是中心对称图形

5. 如果一个四边形的外接圆与内切圆是同心圆，那么这个四边形一定是(　　)

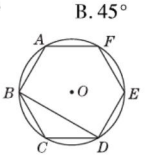
A. 矩形　　B. 菱形

C. 正方形　　D. 等腰梯形

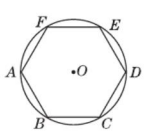
知识点2 正多边形的有关计算

6. 【中考·贵阳】如图，正六边形 $ABCDEF$ 内接于 $\odot O$，连接 BD，则 $\angle CBD$ 的度数是(　　)

A. 30°　　B. 45°　　C. 60°　　D. 90°



(第6题)



(第7题)

7. 【中考·沈阳】如图，正六边形 $ABCDEF$ 内接于 $\odot O$，正六边形的周长是12，则 $\odot O$ 的半径是(　　)

A. $\sqrt{3}$　　B. 2　　C. $2\sqrt{2}$　　D. $2\sqrt{3}$

8. $\odot O$ 的内接正三角形与正六边形的面积之比为(　　)

A. $\sqrt{2}:1$　　B. $1:\sqrt{3}$

C. $1:2$　　D. $1:\sqrt{2}$

9. 【中考·滨州】若正方形的外接圆半径为2，则其内切圆半径为(　　)

A. $\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. 1

10. 一个圆的内接正方形和外切正方形的面积的比是(　　)

A. $1:\sqrt{2}$　　B. $1:2$

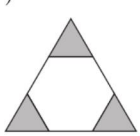
C. $2:3$　　D. $2:\pi$

11. 圆内接正六边形的周长为24，则该圆的内接正三角形的周长为(　　)

A. 12　　B. 6

C. $12\sqrt{3}$　　D. $6\sqrt{3}$

12. 如图，木工师傅从一块边长为60 cm的正三角形木板上锯出一块正六边形木板，那么这块正六边形木板的边长为(　　)



(第12题)

A. 24 cm　　B. 22 cm

C. 20 cm　　D. 18 cm

13. 半径相等的圆的内接正三角形、正方形、正六边形的边长之比为(　　)

A. $1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{3}:\sqrt{2}:1$

C. $3:2:1$　　D. $1:2:3$

易错点 误认为正多边形的边心距是正多边形的半径而致错

14. 一个边长为2的正多边形的内角和是其外角和的2倍，则这个正多边形的半径是(　　)

A. 2　　B. $\sqrt{3}$　　C. 1　　D. $\frac{1}{2}$

谜语：$\frac{7}{8}$(打一成语)　　谜底：七上八下

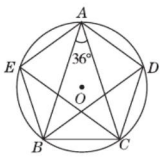
趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞(答案见98页)

考查角度1　利用正多边形与圆的关系判定一个多边形是正多边形

15. 如图，$\triangle ABC$ 是 $\odot O$ 的内接等腰三角形，顶角 $\angle BAC=36°$，弦 BD，CE 分别平分 $\angle ABC$，$\angle ACB$. 求证：五边形 $AEBCD$ 是正五边形.



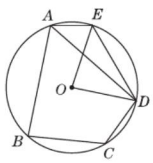
（第15题）

考查角度2　利用正多边形和圆的关系进行计算

16. 如图，在 $\odot O$ 的内接四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，$\angle C=120°$，点 E 在 $\overset{\frown}{AD}$ 上.

(1) 求 $\angle AED$ 的度数；

(2) 连接 OD，OE，当 $\angle DOE=90°$ 时，AE 恰好是 $\odot O$ 的内接正 n 边形的一边，求 n 的值.

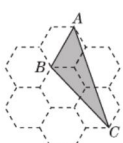


（第16题）

Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞(答案见99页)

拔尖角度1　利用正多边形的性质求正六边形网格中格点三角形的面积

17. 如图是由7个形状、大小完全相同的正六边形组成网格，正六边形的顶点称为格点. 已知每个正六边形的边长为1，$\triangle ABC$ 的顶点都在格点上，求 $\triangle ABC$ 的面积.



（第17题）

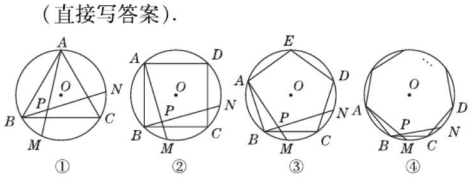
拔尖角度2　利用正多边形与圆的有关知识探究规律

18. 如图①②③④分别是 $\odot O$ 的内接正三角形、正四边形、正五边形、正 n 边形，点 M，N 分别从点 B，C 开始以相同的速度在 $\odot O$ 上逆时针运动.

(1) 图①中，$\angle APN$ 的度数是_____；

(2) 图②中，$\angle APN$ 的度数是_____，图③中，$\angle APN$ 的度数是_____；

(3) 试探索 $\angle APN$ 的度数与正多边形边数 n 的关系（直接写答案）.



（第18题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

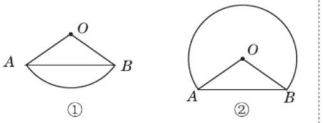
9 弧长及扇形的面积

名师点金

两类弓形面积的求法

(1)小于半圆的弧与弦组成的弓形，如图①，用扇形的面积减去三角形的面积.

(2)大于半圆的弧与弦组成的弓形，如图②，用扇形的面积加上三角形的面积.



1 夯实基础·逐点练 ☞(答案见99页)

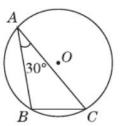
知识点1 弧长公式

1. 【中考·温州】若扇形的圆心角为90°，半径为6，则该扇形的弧长为(　　)

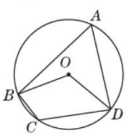
A. $\frac{3}{2}\pi$　　B. 2π　　C. 3π　　D. 6π

2. 【中考·南宁】如图，⊙O是△ABC的外接圆，$BC=2$，$\angle BAC=30°$，则$\overset{\frown}{BC}$的长等于(　　)

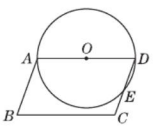
A. $\frac{2\pi}{3}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$



(第2题)



(第3题)



(第4题)

3. 如图，⊙O的半径为3，四边形$ABCD$内接于⊙O，连接OB，OD，若$\angle BOD=\angle BCD$，则$\overset{\frown}{BD}$的长为(　　)

A. π　　B. $\frac{3}{2}\pi$　　C. 2π　　D. 3π

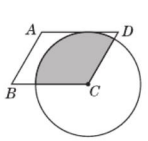
4. 如图，在▱$ABCD$中，$\angle B=70°$，$BC=6$，以AD为直径的⊙O交CD于点E，则$\overset{\frown}{DE}$的长为(　　)

A. $\frac{1}{3}\pi$　　B. $\frac{2}{3}\pi$　　C. $\frac{7}{6}\pi$　　D. $\frac{4}{3}\pi$

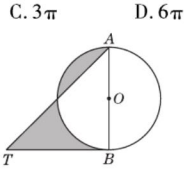
知识点2 扇形面积公式

5. 【中考·成都】如图，在▱$ABCD$中，$\angle B=60°$，⊙C的半径为3，则图中阴影部分的面积是(　　)

A. π　　B. 2π　　C. 3π　　D. 6π



(第5题)



(第6题)

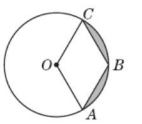
6. 如图，AB是⊙O的直径，BT是⊙O的切线，若$\angle ATB=45°$，$AB=2$，则阴影部分的面积是(　　)

A. 2　　B. $\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\pi$　　C. 1　　D. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\pi$

7. 【中考·广安】如图，已知⊙O的半径是2，点A，B，C在⊙O上，若四边形$OABC$是菱形，则图中阴影部分的面积为(　　)

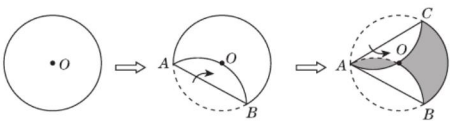
A. $\frac{2}{3}\pi-2\sqrt{3}$　　B. $\frac{2}{3}\pi-\sqrt{3}$

C. $\frac{4}{3}\pi-2\sqrt{3}$　　D. $\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$



(第7题)

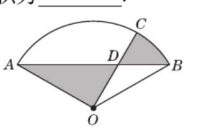
8. 【中考·聊城】如图，点O是圆形纸片的圆心，将这个圆形纸片按下列顺序折叠，使$\overset{\frown}{AB}$和$\overset{\frown}{AC}$都经过圆心O，则阴影部分的面积是⊙O面积的(　　)



(第8题)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{3}{5}$

9. 【中考·河南】如图，在扇形AOB中，$\angle AOB=120°$，半径OC交弦AB于点D，且$OC\perp OA$. 若$OA=2\sqrt{3}$，则阴影部分的面积为_____.



(第9题)

易错点 对弧长公式及扇形面积公式中n的意义理解不充分而致错

10. 已知$\overset{\frown}{AB}$所对的圆周角为30°，$\overset{\frown}{AB}$所在圆的半径为30 cm，求$\overset{\frown}{AB}$的长.

古希腊哲学家芝诺曾经说过："如果用小圆代表你们学到的知识，用大圆代表我学到的知识，那么大圆的面积是多一点，但两圆之外的空白都是我们的无知面. 圆越大其圆周接触的无知面就越多."

趣味数学

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞(答案见99页)

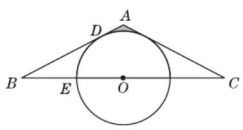
考查角度 利用扇形面积公式求不规则图形面积的方法

方法1 用作差法求不规则图形的面积

11. 【中考 · 临沂】如图，△ABC为等腰三角形，O是底边BC的中点，腰AB与⊙O相切于点D，OB与⊙O相交于点E.

(1)求证：AC是⊙O的切线；

(2)若$BD=\sqrt{3}$，$BE=1$，求阴影部分的面积.



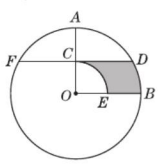
(第11题)

方法2 用变换法求不规则图形的面积

12. 【中考 · 新疆】如图，在⊙O中，半径$OA\perp OB$，过OA的中点C作$FD/\!/OB$交⊙O于D，F两点，且$CD=\sqrt{3}$，以O为圆心，OC为半径作$\overset{\frown}{CE}$，交OB于E点.

(1)求⊙O的半径OA的长；

(2)计算阴影部分的面积.



(第12题)

方法3 用整体思想求扇形的面积

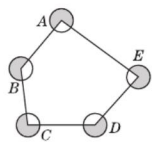
13. 【中考 · 朝阳】如图，分别以五边形$ABCDE$的顶点为圆心，1为半径作五个圆，则图中阴影部分的面积之和为(　　)

A. $\frac{3}{2}\pi$

B. 3π

C. $\frac{7}{2}\pi$

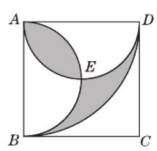
D. 2π



(第13题)

方法4 用替换法求不规则图形的面积

14. 如图，在边长为a的正方形$ABCD$中，以点A为圆心、AB为半径画弧得到扇形BAD，分别以AB，AD为直径的两个半圆交于点E，求图中阴影部分的面积.

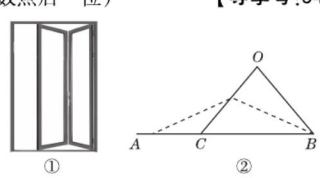


(第14题)

Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞(答案见100页)

拔尖角度 利用弧长公式求实际中运动的路径长

15. 【中考 · 江西】图①是一种折叠门，由上下轨道和两扇长宽相等的活页门组成，整个活页门的右轴固定在门框上，通过推动左侧活页门开关. 图②是其俯视简化示意图，已知轨道$AB=120$ cm，两扇活页门的宽$OC=OB=60$ cm，点B固定，当点C在AB上左右运动时，OC与OB的长度不变. (所有结果保留小数点后一位)　【导学号：9400200】



①　②

(第15题)

(1)若$\angle OBC=50°$，求AC的长；

(2)当点C从点A向右运动60 cm时，求点O在此过程中运动的路径长.

(参考数据：$\sin 50°\approx 0.77$，$\cos 50°\approx 0.64$，$\tan 50°\approx 1.19$，π取3.14)

趣味数学　谜语：1+2+3(打一成语)　谜底：接二连三

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10 圆锥的侧面积

名师点金

1. **圆锥和其侧面展开图之间转换的“两个对应”：**
（1）圆锥的母线与展开后扇形的半径相对应.（2）展开后扇形的弧长与圆锥底面周长相对应.
2. **圆锥面积计算的“三个关键点”：**
（1）分析清楚几何体表面的构成.（2）弄清圆锥与其侧面展开后的扇形各元素之间的对应关系.
（3）圆锥的母线长 l，底面圆的半径 r 和圆锥的高 h 的关系为 $l^2=r^2+h^2$.

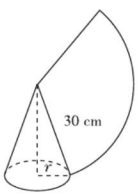
Ⅰ 夯实基础 · 逐点练 ☞（答案见100页）

知识点1 圆锥及其侧面展开图相关量的计算

1. 【中考 · 宁波】如图，用一个半径为30 cm，面积为 300π cm^2 的扇形铁皮，制作一个无底的圆锥（不计损耗），则圆锥的底面半径 r 为（　　）

A. 5 cm　　B. 10 cm

C. 20 cm　　D. 5π cm



（第1题）

2. 【中考 · 乌鲁木齐】圆锥的侧面展开图是一个弧长为 12π 的扇形，则这个圆锥底面圆的半径是（　　）

A. 24　　B. 12

C. 6　　D. 3

3. 【中考 · 东营】若圆锥的侧面积等于其底面积的3倍，则该圆锥侧面展开图所对应扇形圆心角的度数为（　　）

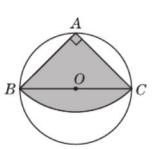
A. 60°　　B. 90°

C. 120°　　D. 180°

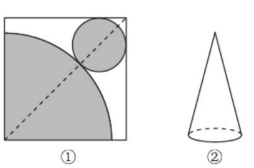
4. 【中考 · 盘锦】如图，从一块直径是8 m的圆形铁皮上剪出一个圆心角为90°的扇形，将剪下的扇形围成一个圆锥，圆锥的高是（　　）

A. $4\sqrt{2}$ m　　B. 5 m

C. $\sqrt{30}$ m　　D. $2\sqrt{15}$ m



（第4题）



（第6题）

5. 【中考 · 湖州】若一个圆锥的侧面展开图是半径为18 cm，圆心角为240°的扇形，则这个圆锥的底面半径是（　　）

A. 6 cm　　B. 9 cm

C. 12 cm　　D. 18 cm

6. 如图①，在正方形铁皮上剪下一个圆形和扇形，使之恰好围成图②所示的一个圆锥模型，设圆的半径为 r，扇形半径为 R，则圆的半径与扇形半径之间的关系为（　　）

A. $R=2r$　　B. $R=\frac{9}{4}r$

C. $R=3r$　　D. $R=4r$

7. 【中考 · 聊城】已知圆锥形工件的底面直径是40 cm，母线长30 cm，其侧面展开图圆心角的度数为_____.

知识点2 圆锥的侧面积和全面积

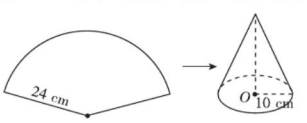
8. 【中考 · 河池】如图，用一张半径为24 cm的扇形纸板制作一顶圆锥形帽子（接缝忽略不计），如果圆锥形帽子的底面半径为10 cm，那么这张扇形纸板的面积是（　　）

A. 240π cm^2

B. 480π cm^2

C. $1\,200\pi$ cm^2

D. $2\,400\pi$ cm^2



（第8题）

9. 已知圆锥的底面半径为9 cm，母线长为10 cm，则圆锥的全面积是_____.

易错点 对旋转所得几何体的表面积理解不透而致错

10. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$AC=4$，$BC=3$，以 AB 边所在的直线为轴，将 $\triangle ABC$ 旋转一周，则所得几何体的表面积是（　　）

A. $\frac{168}{5}\pi$　　B. $\frac{564}{25}\pi$　　C. $\frac{84}{5}\pi$　　D. 12π

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

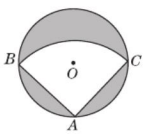
Ⅱ 整合方法·提升练 ☞(答案见100页)

考查角度1 利用圆的性质求解圆锥问题

11. 如图,有一直径是$\sqrt{2}$ m的圆形铁皮,现从中剪出一个圆心角是90°的最大扇形BAC.

(1)求AB的长;

(2)用该扇形铁皮围成一个圆锥,求所得圆锥的底面圆的半径.



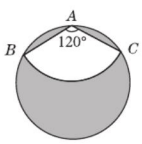
(第11题)

考查角度2 利用圆锥与其侧面展开图的关系进行相关计算

12. 如图,有一直径是1 m的圆形铁皮,要从中剪出一个圆心角是120°的扇形BAC.求:

(1)被剪掉部分(阴影部分)的面积;

(2)若用所留的扇形铁皮围成一个圆锥,该圆锥底面圆的半径是多少?



(第12题)

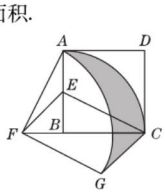
Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞(答案见100页)

拔尖角度1 利用扇形、三角形面积公式求阴影面积

13. 【中考·襄阳】如图,在正方形$ABCD$中,$AD=2$,E是AB的中点,将$\triangle BEC$绕点B逆时针旋转90°后,点E落在CB的延长线上的点F处,点C落在点A处.再将线段FA绕点F顺时针旋转90°得线段FG,连接EF,CG.

(1)求证:$EF/\!/CG$;

(2)求点C、点A在旋转过程中形成的$\overset{\frown}{AC}$,$\overset{\frown}{AG}$与线段CG所围成的阴影部分的面积.



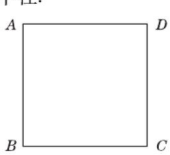
(第13题)

拔尖角度2 利用圆、扇形、圆锥的特征进行方案设计

14. 工人师傅要在如图所示的边长为40 cm的正方形铁皮上裁剪下一块完整的圆形和一块完整的扇形铁皮,使之恰好做成一个圆锥模型.

(1)请你帮助工人师傅设计三种不同的裁剪方案(画出示意图);

(2)何种设计方案使得正方形铁皮的利用率最高?求出此时圆锥模型底面圆的半径.



(第14题)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

阶段方法技巧训练（三）

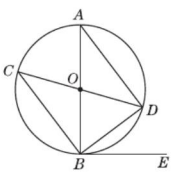
专训 1 圆中常见的计算题型 ☞（答案见101页）

名师点金

与圆有关的计算主要体现在：利用圆周角定理求角度，利用垂径定理构造直角三角形并结合勾股定理求弦长、弦心距或半径，利用弧长、扇形面积公式计算弧长、扇形面积，利用圆的知识解决实际问题等；其中涉及面积的计算，常采用**作差法**、**等积法**、**平移法**、**割补法**等，涉及实际应用计算，常采用**建模思想**进行计算.

题型 1 角度的计算

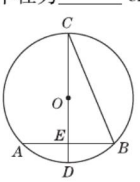
1. 【中考·娄底】如图，在⊙O中，AB，CD是直径，BE是切线，B为切点，连接AD，BC，BD.
（1）求证：$\triangle ABD \cong \triangle CDB$；
（2）若$\angle DBE = 37°$，求$\angle ADC$的度数.



（第1题）

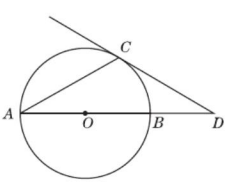
题型 2 半径、弦长的计算

2. 【中考·南京】如图，在⊙O中，CD是直径，弦$AB \perp CD$，垂足为E，连接BC，若$AB = 2\sqrt{2}$ cm，$\angle BCD = 22°30'$，则⊙O的半径为_____ cm.



（第2题）

3. 如图，已知⊙O中直径AB与弦AC的夹角为30°，过点C作⊙O的切线交AB的延长线于点D，OD = 30 cm. 求直径AB的长.

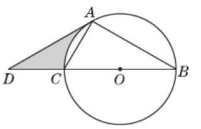


（第3题）

题型 3 面积的计算

技巧 1 利用“作差法”求面积

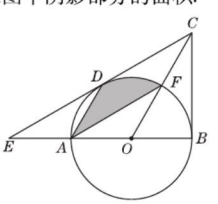
4. 【中考·齐齐哈尔】如图，以$\triangle ABC$的边BC为直径作⊙O，点A在⊙O上，点D在线段BC的延长线上，$AD = AB$，$\angle D = 30°$.
（1）求证：直线AD是⊙O的切线；
（2）若直径$BC = 4$，求图中阴影部分的面积.



（第4题）

技巧 2 利用“等积法”求面积

5. 【中考·威海】如图，在$\triangle BCE$中，点A是边BE上一点，以AB为直径的⊙O与CE相切于点D，$AD \parallel OC$，点F为OC与⊙O的交点，连接AF.
（1）求证：CB是⊙O的切线；
（2）若$\angle ECB = 60°$，$AB = 6$，求图中阴影部分的面积.



（第5题）

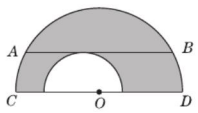
我们看到的下水道井盖为什么都是圆的呢？美术教师说：“圆形更讨人喜欢.”语文教师说：“圆形显得饱满.”（待续）

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

技巧 3 利用“平移法”求面积

6. 如图，两个半圆中，O 为大半圆的圆心，长为 18 的弦 AB 与直径 CD 平行且与小半圆相切，那么图中阴影部分的面积等于多少？



（第 6 题）

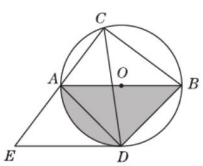
技巧 4 利用“割补法”求面积

7. 【中考 · 考感】如图，$\odot O$ 的直径 $AB=10$，弦 $AC=6$，$\angle ACB$ 的平分线交 $\odot O$ 于 D，过点 D 作 $DE\parallel AB$ 交 CA 的延长线于点 E，连接 AD，BD.

（1）由 AB，BD，$\overset{\frown}{AD}$ 围成的曲边三角形的面积是_____；

（2）求证：DE 是 $\odot O$ 的切线；

（3）求线段 DE 的长.



（第 7 题）

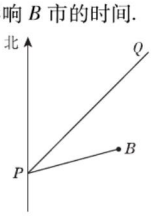
题型 4 实际应用的计算

应用 1 利用垂径定理解决台风问题

8. 如图，台风中心位于点 P，并沿东北方向 PQ 移动，已知台风移动的速度为 30 km/h，受影响区域的半径为 200 km，B 市位于点 P 北偏东 75°的方向上，距离 P 点 320 km 处.

（1）试说明台风是否会影响 B 市；

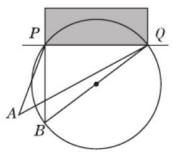
（2）若 B 市受台风的影响，求台风影响 B 市的时间.



（第 8 题）

应用 2 利用圆周角知识解决足球射门问题（转化思想）

9. 如图，在“世界杯”足球比赛中，队员甲带球向对方球门 PQ 进攻，当他带球冲到 A 点时，同伴队员乙已经助攻冲到 B 点，现有两种射门方式：一是由队员甲直接射门；二是队员甲将球迅速传给队员乙，由队员乙射门. 从射门角度考虑，你认为选择哪种射门方式较好？为什么？

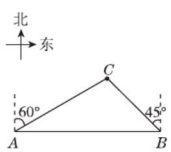


（第 9 题）

应用 3 利用直线与圆的位置关系解决范围问题

10. 如图，已知 A，B 两地相距 1 km. 要在 A，B 两地之间修建一条笔直的水渠（即图中的线段 AB），经测量在 A 地的北偏东 60°方向，B 地的北偏西 45°方向的 C 处有一个以 C 为圆心，350 m 为半径的圆形公园，则修建的这条水渠会不会穿过公园？为什么？

（参考数据：$\sqrt{3}\approx1.732$）



（第 10 题）

趣味数学　数学教师解释为两点理由：一、用同等材料制作，圆形是进水口径面积最大的；二、圆是平面与圆心等距离的所有点的集合，所以圆形井盖不会掉进圆形井内.（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

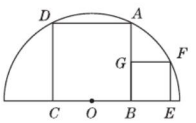
专训2 圆中常用的作辅助线的八种方法 ☞（答案见102页）

名师点金

在解决有关圆的计算或证明题时，往往需要添加辅助线，根据题目特点选择恰当的辅助线至关重要. 圆中常用的辅助线作法：作半径，巧用同圆的半径相等；连接圆上两点，巧用同弧所对的圆周角相等；作直径，巧用直径所对的圆周角是直角；证切线时“连半径，证垂直”以及“作垂直，证半径”等.

方法1 作半径，巧用同圆的半径相等

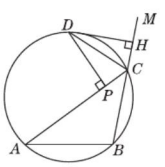
1. 如图，两正方形彼此相邻，且大正方形 $ABCD$ 的顶点 A，D 在半圆 O 上，顶点 B，C 在半圆 O 的直径上；小正方形 $BEFG$ 的顶点 F 在半圆 O 上，E 点在半圆 O 的直径上，点 G 在大正方形的边 AB 上. 若小正方形的边长为 4 cm，求该半圆的半径.



（第1题）

方法2 连接圆上两点，巧用同弧所对的圆周角相等

2. 如图，圆内接三角形 ABC 的外角 $\angle ACM$ 的平分线与圆交于 D 点，$DP \perp AC$，垂足是 P，$DH \perp BM$，垂足为 H. 求证：$AP = BH$.



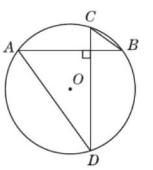
（第2题）

方法3 作直径，巧用直径所对的圆周角是直角

3. 如图，$\odot O$ 的半径为 R，弦 AB，CD 互相垂直，连接 AD，BC.

（1）求证：$AD^2 + BC^2 = 4R^2$；

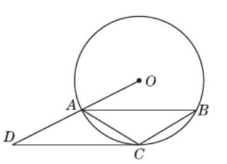
（2）若弦 AD，BC 的长是方程 $x^2 - 6x + 5 = 0$ 的两个根（$AD > BC$），求 $\odot O$ 的半径及点 O 到 AD 的距离.



（第3题）

方法4 证切线时辅助线作法的应用

4. 如图，$\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$，$CA = CB$，$CD \parallel AB$ 且与 OA 的延长线交于点 D. 判断 CD 与 $\odot O$ 的位置关系，并说明理由.

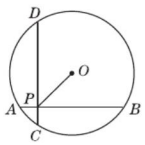


（第4题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

方法5　遇弦加弦心距或半径

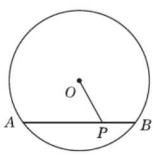
5. 如图，在半径为5的⊙O中，AB，CD是互相垂直的两条弦，垂足为P，且$AB=CD=8$，则OP的长为(　　)



(第5题)

A. 3　　B. 4　　C. $3\sqrt{2}$　　D. $4\sqrt{2}$

6. 如图，⊙O的直径为10 cm，弦$AB=8$ cm，P是弦AB上的一个动点，求OP的长度范围.



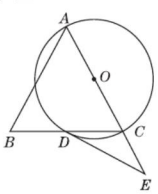
(第6题)

方法6　遇直径巧作直径所对的圆周角

7. 【中考·十堰】如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，以AC为直径的⊙O交BC于点D，点E为AC延长线上一点，且$\angle CDE=\frac{1}{2}\angle BAC$.

(1)求证：DE是⊙O的切线；

(2)若$AB=3BD$，$CE=2$，求⊙O的半径.



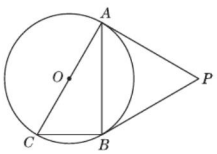
(第7题)

方法7　遇切线巧作过切点的半径

8. 如图，⊙O是Rt$\triangle ABC$的外接圆，$\angle ABC=90°$，点P是圆外一点，PA切⊙O于点A，且$PA=PB$.

(1)求证：PB是⊙O的切线；

(2)已知$PA=\sqrt{3}$，$\angle ACB=60°$，求⊙O的半径.



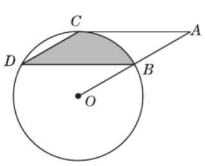
(第8题)

方法8　巧添辅助线计算阴影部分的面积

9. 【中考·自贡】如图，点B，C，D都在⊙O上，过点C作$AC\parallel BD$交OB的延长线于点A，连接CD，且$\angle CDB=\angle OBD=30°$，$DB=6\sqrt{3}$ cm.

(1)求证：AC是⊙O的切线；

(2)求由弦CD，BD与$\overset{\frown}{BC}$所围成的阴影部分的面积.(结果保留π)



(第9题)

趣味数学　古人云："没有规矩，不成方圆."可见在中国古代就有了规和矩.我们知道，"规"是指画圆的圆规；"矩"是指折成直角的曲尺，尺上有刻度.(待续)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

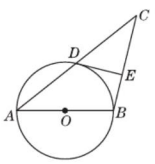
专训3 圆与相似三角形的综合 ☞（答案见103页）

名师点金

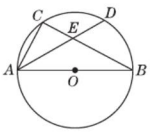
圆与相似三角形相综合是中考中的热门考点，解圆与相似三角形相综合的问题时，关键是要从圆中去抽取出相似三角形模型，然后利用相似三角形的性质去证明和求解相关问题. 在证两三角形相似时，往往构造同弧所对的圆周角相等或直径所对的圆周角是直角，从而为证两三角形相似创造角相等的条件.

1. 【中考·衢州】如图，已知$\triangle ABC$，$AB=BC$，以AB为直径的圆交AC于点D，过点D的$\odot O$的切线交BC于点E. 若$CD=5$，$CE=4$，则$\odot O$的半径是（　　）

A. 3　　B. 4　　C. $\frac{25}{6}$　　D. $\frac{25}{8}$



（第1题）



（第2题）

2. 【中考·南通】如图，AB为$\odot O$的直径，C为$\odot O$上一点，弦AD平分$\angle BAC$，交BC于点E，$AB=6$，$AD=5$，则AE的长为（　　）

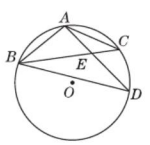
A. 2.5　　B. 2.8

C. 3　　D. 3.2

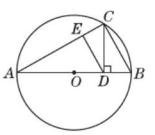
3. 如图，A，B，C，D是$\odot O$上的四个点，$AB=AC$，AD交BC于点E，$AE=3$，$ED=4$，则AB的长为（　　）

A. 3　　B. $2\sqrt{3}$

C. $\sqrt{21}$　　D. $3\sqrt{5}$



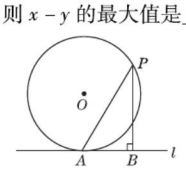
（第3题）



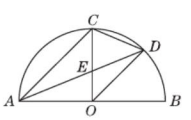
（第4题）

4. 【中考·呼和浩特】如图，AB是$\odot O$的直径，点C在圆上，$CD\perp AB$，$DE/\!/BC$，则图中与$\triangle ABC$相似的三角形有_____个.

5. 【中考·苏州】如图，直线l与半径为4的$\odot O$相切于点A，P是$\odot O$上的一个动点（不与点A重合），过点P作$PB\perp l$，垂足为B，连接PA. 设$PA=x$，$PB=y$，则$x-y$的最大值是_____.



（第5题）



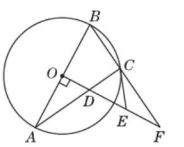
（第6题）

6. 如图，AB是半圆直径，半径$OC\perp AB$于点O，AD平分$\angle CAB$交弧BC于点D，交OC于点E，连接CD，OD，给出以下四个结论：①$AC/\!/OD$；②$CE=OE$；③$\triangle ODE\backsim\triangle ADO$；④$2CD^2=CE\cdot AB$. 其中正确结论的序号是_____.

7. 【中考·聊城】如图，$\triangle ABC$内接于$\odot O$，AB为直径，作$OD\perp AB$交AC于点D，延长BC，OD交于点F，过点C作$\odot O$的切线CE，交OF于点E.

（1）求证：$EC=ED$；

（2）如果$OA=4$，$EF=3$，求弦AC的长.



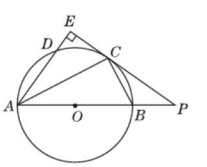
（第7题）

8. 【中考·襄阳】如图，AB是$\odot O$的直径，点C为$\odot O$上一点，AE和过点C的切线互相垂直，垂足为E，AE交$\odot O$于点D，直线EC交AB的延长线于点P，连接AC，BC，$PB:PC=1:2$.

（1）求证：AC平分$\angle BAD$；

（2）探究线段PB，AB之间的数量关系，并说明理由；

（3）若$AD=3$，求$\triangle ABC$的面积.



（第8题）

发明规矩的确切年代已无从查考，但在公元前15世纪的甲骨文中，已有规矩二字了.《史记》中有这样的记载：夏禹治水的时候，是“左准绳，右规矩”.（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

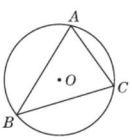
专训 4 用三角函数解与圆有关的问题 ☞(答案见104页)

名师点金

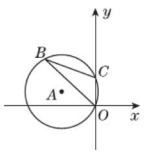
用三角函数解与圆有关的问题，是近几年中考热门命题内容，题型多样化，一般以中档题、压轴题形式出现，应高度重视.

1. 如图，已知$\triangle ABC$的外接圆$\odot O$的半径为3，$AC=4$，则$\sin B=$(　　)

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{4}{5}$　　D. $\frac{2}{3}$



(第1题)



(第2题)

2. 【中考·安顺】如图，半径为3的$\odot A$经过原点O和点$C(0,2)$，B是y轴左侧$\odot A$优弧上一点，则$\tan\angle OBC$为(　　)

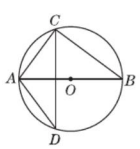
A. $\frac{1}{3}$　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

3. 【中考·乐山】在$\triangle ABC$中，$AB=AC=5$，$\sin B=\frac{4}{5}$.$\odot O$过B，C两点，且$\odot O$的半径$r=\sqrt{10}$，则OA的长为(　　)

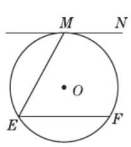
A. 3或5　　B. 5

C. 4或5　　D. 4

4. 【中考·黔东南州】如图，AB是$\odot O$的直径，$AB=15$，$AC=9$，则$\tan\angle ADC=$_____.



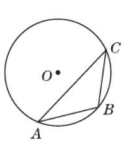
(第4题)



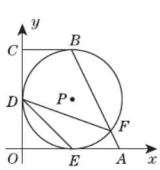
(第5题)

5. 【中考·玉林】如图，直线MN与$\odot O$相切于点M，$ME=EF$且$EF/\!/MN$，则$\cos E=$_____.

6. 【中考·泰安】如图，在半径为5的$\odot O$中，弦$AB=6$，点C是优弧AB上的一点(不与A，B重合)，则$\cos C$的值为_____.



(第6题)



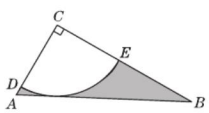
(第7题)

7. 【中考·荆州】如图，在直角坐标系中，四边形$OABC$是直角梯形，$BC/\!/OA$，$\odot P$分别与OA，OC，BC相切于点E，D，B，与AB交于点F，已知$A(2,0)$，$B(1,2)$，则$\tan\angle FDE=$_____.

8. 【中考·福州】如图，在Rt$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$AC=\sqrt{5}$，$\tan B=\frac{1}{2}$，半径为2的$\odot C$分别交AC，BC于点D，E，得到$\overset{\frown}{DE}$.

(1)求证：AB为$\odot C$的切线；

(2)求图中阴影部分的面积.

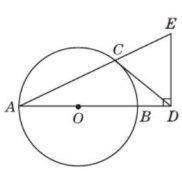


(第8题)

9. 【中考·乌鲁木齐】如图，AB是$\odot O$的直径，CD与$\odot O$相切于点C，与AB的延长线交于点D，$DE\perp AD$且与AC的延长线交于点E.

(1)求证：$DC=DE$；

(2)若$\tan\angle CAB=\frac{1}{2}$，$AB=3$，求$BD$的长.



(第9题)

趣味数学　意思就是说，夏禹是左手拿着水准绳，右手拿规和矩进行测量，规划出治水方案的. 由此说明在夏禹治水的年代就有了规和矩这两种几何工具了.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

专训 5 分类讨论思想在圆中的应用类型 ☞(答案见104页)

名师点金

由于圆中的点、线在圆中的位置分布可能有多种情况,经常会导致其答案的不唯一性,如:点与圆的位置关系,点可能在圆内,可能在圆上,也可能在圆外;两条弦的位置关系,可能在某条直径的同侧,也可能在某条直径的异侧;一条弦(非直径)所对的圆周角可能是锐角,也可能是钝角等,因此求解圆的有关问题时,要注意**分类讨论**.

类型 1 点与圆的位置关系不唯一

1. 若⊙O所在平面内一点P到⊙O上的点的最大距离为a,最小距离为$b(a>b)$,则此圆的半径为(　　)

A. $\frac{a+b}{2}$　　B. $\frac{a-b}{2}$

C. $\frac{a+b}{2}$或$\frac{a-b}{2}$　　D. $a+b$或$a-b$

2. 已知点P是⊙O外一点,PA,PB是⊙O的两条切线,切点分别为A,B,点C是⊙O上的任意一点(不与点A,B重合).若$\angle APB=50°$,求$\angle ACB$的度数.

类型 2 圆心的位置关系不唯一

3. 已知在圆内接三角形ABC中,$AB=AC$,圆心O到BC的距离为6 cm,圆的半径为10 cm,求腰AB的长.

类型 3 弦与弦的位置关系不唯一

4. ⊙O的半径为5 cm,弦$AB\parallel CD$,且$AB=8$ cm,$CD=6$ cm,求AB与CD之间的距离.

5. 已知AB是⊙O的直径,$AB=2$,AC和AD是⊙O的两条弦,$AC=\sqrt{2}$,$AD=\sqrt{3}$,求$\angle CAD$的度数.

类型 4 点在直径上的位置不唯一

6. 已知⊙O的直径$AB=10$ cm,弦$CD\perp AB$于点M,若$OM:OA=3:5$,则弦AC的长为多少?

类型 5 点在圆周上的位置不唯一

7. 已知A,B,C三点在⊙O上,$OA\perp BC$于点D,$\angle BOD=40°$,则$\angle BAC$的度数为_____.

8. 已知点A,B,C在半径为2 cm的⊙O上,若$BC=2\sqrt{3}$ cm,求$\angle A$的度数.

9. 已知A,B是⊙O上的两点,如果$\angle AOB=60°$,C是⊙O上不与点A,B重合的任意一点,求$\angle ACB$的度数.

类型 6 弦所对的圆周角不唯一

10. 圆的一条弦长等于它的半径,那么这条弦所对的圆周角为(　　)

A. 30°或60°　　B. 60°

C. 150°　　D. 30°或150°

11. 若圆的一条弦把圆分成度数比为2∶7的两条弧,则弦所对的圆周角等于_____.

类型 7 直线与圆的位置关系不唯一

12. 已知⊙O的直径为6,P为直线l上一点,$OP=3$,那么直线l与⊙O的位置关系是_____.

类型 8 切线的位置关系不唯一

13. 已知OA,OB是⊙O的半径且互相垂直,延长OB到点C,使$BC=OB$,CD是⊙O的切线,D为切点,求$\angle OAD$的度数.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

专训 6 与圆有关的存在性问题 ☞(答案见105页)

名师点金

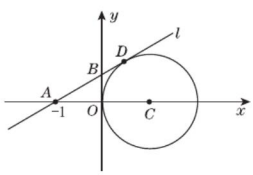
与圆有关的存在性问题,一般在探究时,通常是先假定符合条件的结论正确或存在,并以此作为新的条件进行合理推理计算,若能得到符合题意的结论,则假设成立,如果结论与题设矛盾或与实际不符,则假设不成立.

训练角度1 利用圆探究等腰三角形的存在性问题

1. 已知,如图,在直角坐标系中,$\odot C$ 与 y 轴相切,且 C 点的坐标为$(1,0)$,直线 l 过点 $A(-1,0)$,与$\odot C$ 相切于点 D,与 y 轴交于点 B.

(1)求直线 l 的表达式;

(2)在直线 l 上存在点 P,使$\triangle APC$ 为等腰三角形,求点 P 的坐标.



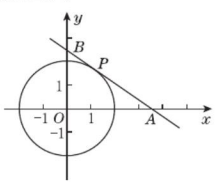
(第1题)

训练角度2 利用圆探究平行四边形的存在性问题

2. 如图,在平面直角坐标系中,以坐标原点 O 为圆心,2为半径画$\odot O$,P 是$\odot O$ 上一动点,且 P 在第一象限内,过点 P 作$\odot O$ 的切线,与 x 轴相交于点 A,与 y 轴相交于点 B.

(1)点 P 在运动时,线段 AB 的长度也在发生变化,请写出线段 AB 长度的最小值,并说明理由;

(2)在$\odot O$ 上是否存在一点 Q,使得以 Q,O,A,P 为顶点的四边形是平行四边形?若存在,请求出点 Q 的坐标;若不存在,请说明理由.



(第2题)

趣味数学　精巧的论证常常不是一蹴而就的,而是人们长期切磋积累的成果.我也是慢慢学来的,而且还要继续不断地学习.
——阿贝尔

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

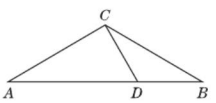
训练角度3 利用圆探究相似三角形的存在性问题

3. 如图，已知在等腰三角形 ABC 中，$\angle A=\angle B=30°$，过点 C 作 $CD\perp AC$ 交 AB 于点 D.

（1）尺规作图：过 A,D,C 三点作⊙O（只要求作出图形，保留痕迹，不要求写作法）；

（2）求证：BC 是过 A,D,C 三点的圆的切线；

（3）若过 A,D,C 三点的圆的半径为$\sqrt{3}$，则线段 BC 上是否存在一点 P，使得以 P,D,B 为顶点的三角形与△BCO 相似. 若存在，求出 DP 的长；若不存在，请说明理由.



（第3题）

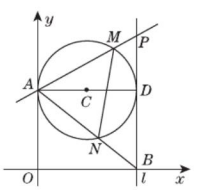
训练角度4 利用圆探究与面积有关的存在性问题

4. 如图，第一象限内半径为2的⊙C 与 y 轴相切于点 A，作直径 AD，过点 D 作⊙C 的切线 l 交 x 轴于点 B，P 为直线 l 上一动点，已知直线 PA 的表达式为 $y=kx+3$.

（1）设点 P 的纵坐标为 p，写出 p 随 k 变化的函数关系式；

（2）设⊙C 与 PA 交于点 M，与 AB 交于点 N，则不论动点 P 处于直线 l 上（点 B 除外）的什么位置时，都有△AMN∽△ABP，请你对于点 P 处于图中位置时的两三角形相似给予证明；

（3）是否存在使△AMN 的面积等于$\frac{32}{25}$的 k 值？若存在，请求出符合条件的 k 值；若不存在，请说明理由.



（第4题）

谜语：$1\,000^2=100\times100\times100$（打一成语）

谜底：千方百计

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

全章热门考点整合应用

☞(答案见106页)

名师点金

圆的知识是初中数学的重点内容,也是历年中考命题的热点.本章题型广泛,主要考查圆的概念、基本性质以及圆周角定理及其推论,直线与圆的位置关系,切线的性质和判定,正多边形与圆的计算和证明等,通常以这些知识为载体,与函数、方程等知识综合考查,可概括为一个概念、三个定理、三个关系、两个圆与三角形、两个公式、两个技巧、两种思想.

考点1 一个概念——圆的相关概念

1. 下列说法正确的是(　　)

A. 直径是弦,弦也是直径

B. 半圆是弧,弧是半圆

C. 无论过圆内哪一点,只能作一条直径

D. 在同圆或等圆中,直径的长度是半径的2倍

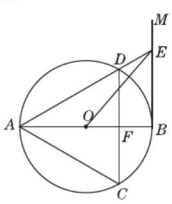
考点2 三个定理

定理1 垂径定理

2. 【中考·北京】如图,AB是$\odot O$的直径,过点B作$\odot O$的切线BM,弦$CD\parallel BM$,交AB于点F,且$\overset{\frown}{DA}=\overset{\frown}{DC}$,连接$AC$,$AD$,延长$AD$交$BM$于点$E$.

(1)求证:$\triangle ACD$是等边三角形;

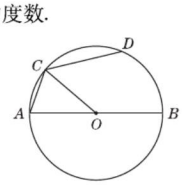
(2)连接OE,若$DE=2$,求OE的长.



(第2题)

定理2 圆心角、弦、弧间的关系定理

3. 如图,AB是$\odot O$的直径,点C在$\odot O$上,$\angle AOC=40°$,D是$\overset{\frown}{BC}$的中点,求$\angle ACD$的度数.



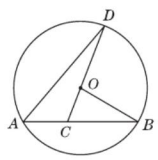
(第3题)

定理3 圆周角定理

4. 如图,已知AB是$\odot O$的弦,$OB=2$,$\angle B=30°$,C是弦AB上任意一点(不与点A,B重合),连接CO并延长,交$\odot O$于点D,连接AD.

(1)弦长$AB=$_____;(结果保留根号)

(2)当$\angle D=20°$时,求$\angle BOD$的度数.



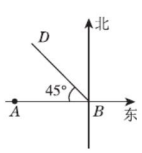
(第4题)

考点3 三个关系

关系1 点与圆的位置关系

5. 由于过度采伐森林和破坏植被,我国某些地区多次受到沙尘暴的侵袭.近来A市气象局测得沙尘暴中心在A市正东方向400 km的B处,正向西北方向转移,如图所示,距沙尘暴中心300 km的范围内将受到影响,则A市是否会受到这次沙尘暴的影响?

(参考数据:$\sqrt{2}\approx1.414$)



(第5题)

趣味数学　公元前240年前后,在希腊的亚历山大城图书馆当馆长的埃拉托色尼注意到在夏至的中午,阳光可以直射到位于亚历山大附近的小镇塞恩的一口枯井的井底.(待续)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

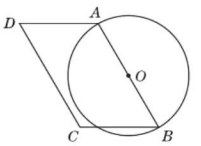
关系2 直线与圆的位置关系

6. 如图，在$\square ABCD$中，$\angle D=60°$，以AB为直径作$\odot O$，已知$AB=10$，$AD=m$.

（1）求点O到CD的距离（用含m的代数式表示）；

（2）若$m=6$，通过计算判断$\odot O$与CD的位置关系；

（3）若$\odot O$与线段CD有两个公共点，求m的取值范围.



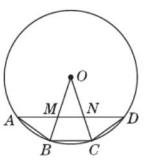
（第6题）

关系3 正多边形和圆的位置关系

7. 如图，已知$\odot O$的内接正十边形$ABCD\cdots$，AD分别交OB，OC于M，N. 求证：

（1）$MN/\!/BC$；

（2）$MN+BC=OB$.



（第7题）

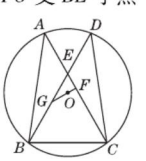
考点4 两个圆与三角形

圆与三角形1 三角形的外接圆

8. 【中考·哈尔滨】如图，$\odot O$是$\triangle ABC$的外接圆，弦BD交AC于点E，连接CD，且$AE=DE$，$BC=CE$.

（1）求$\angle ACB$的度数；

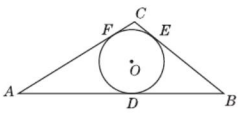
（2）过点O作$OF\perp AC$于点F，延长FO交BE于点G，$DE=3$，$EG=2$，求AB的长.



（第8题）

圆与三角形2 三角形的内切圆

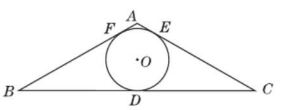
9. 如图，若$\triangle ABC$的三边长分别为$AB=9$，$BC=5$，$CA=6$，$\triangle ABC$的内切圆$\odot O$切AB，BC，AC于点D，E，F，则AF的长为（　　）



（第9题）

A. 5　　B. 10　　C. 7.5　　D. 4

10. 如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，内切圆$\odot O$与边BC，AC，AB分别切于D，E，F，$\angle BAC=120°$，$BF=2\sqrt{3}$，则内切圆$\odot O$的半径为（　　）



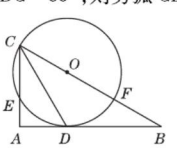
（第10题）

A. 2　　B. $\sqrt{3}$　　C. $4\sqrt{3}-6$　　D. $\frac{9}{4}$

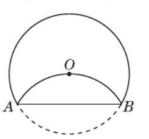
考点5 两个公式

公式1 弧长公式

11. 【中考·黄石】如图，在Rt$\triangle ABC$中，$\angle A=90°$，CD平分$\angle ACB$交AB于点D，O是BC上一点，经过C，D两点的$\odot O$分别交AC，BC于点E，F，$AD=\sqrt{3}$，$\angle ADC=60°$，则劣弧CD的长为_____.



（第11题）



（第12题）

12. 【中考·泰安】如图，将$\odot O$沿弦AB折叠，$\overset{\frown}{AB}$恰好经过圆心O，若$\odot O$的半径为3，则$\overset{\frown}{AB}$的长为（　　）

A. $\frac{1}{2}\pi$　　B. π　　C. 2π　　D. 3π

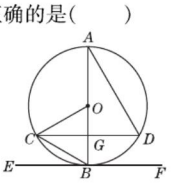
13. 【中考·昆明】如图，AB为$\odot O$的直径，$AB=6$，$AB\perp$弦CD，垂足为G，EF切$\odot O$于点B，连接AD，OC，BC，$\angle A=30°$，下列结论不正确的是（　　）

A. $EF/\!/CD$

B. $\triangle COB$是等边三角形

C. $CG=DG$

D. $\overset{\frown}{BC}$的长为$\frac{3}{2}\pi$



（第13题）

直立的物体没有影子，也就是说太阳正好在塞恩城的正上方. 作为一名科学家，他想知道亚历山大城是否也具有相同的情况.（待续）

趣味数学

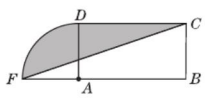
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

公式2 扇形面积公式

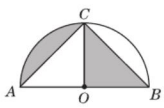
14. 设计一个商标图案，如图，在矩形 $ABCD$ 中，若 $AB=2BC$，且 $AB=8$ cm，以点 A 为圆心，AD 长为半径作弧，交 BA 的延长线于点 F，则商标图案（阴影部分）的面积等于（　　）

A. $(4\pi+8)$ cm^2　　B. $(4\pi+16)$ cm^2

C. $(3\pi+8)$ cm^2　　D. $(3\pi+16)$ cm^2



（第14题）



（第15题）

15. 【中考·重庆】如图，以 AB 为直径，点 O 为圆心的半圆经过点 C，若 $AC=BC=\sqrt{2}$，则图中阴影部分的面积是（　　）

A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$

C. $\frac{\pi}{2}$　　D. $\frac{1}{2}+\frac{\pi}{2}$

考点6 两个技巧

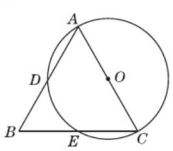
技巧1 作同弧所对的圆周角（特别地，直径所对的圆周角）

16. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，以 AC 为直径的 $\odot O$ 交 AB 于点 D，交 BC 于点 E.

(1) 求证：$BE=CE$；

(2) 若 $\angle B=70°$，求 $\overset{\frown}{DE}$ 的度数；

(3) 若 $BD=2$，$BE=3$，求 AC 的长.



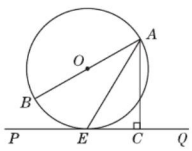
（第16题）

技巧2 作半径（特别地，垂直于弦的半径、过切点的半径）

17. 如图，AB 为 $\odot O$ 的直径，PQ 切 $\odot O$ 于 E，$AC\perp PQ$ 于 C.

(1) 求证：AE 平分 $\angle BAC$；

(2) 若 $EC=\sqrt{3}$，$\angle BAC=60°$，求 $\odot O$ 的半径.



（第17题）

考点7 两种思想

思想1 分类讨论思想

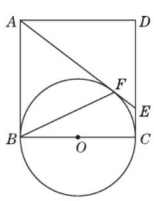
18. 已知在半径为1的 $\odot O$ 中，弦 $AC=\sqrt{2}$，弦 $AB=\sqrt{3}$，则 $\angle CAB=$ _____.

思想2 方程思想

19. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长是4，以 BC 为直径作 $\odot O$，从点 A 引圆的切线，切点为 F，AF 的延长线交 DC 于点 E. 求：

(1) $\triangle ADE$ 的面积；

(2) BF 的长.



（第19题）

趣味数学　结果他发现在同一天、同一时间，阳光是斜射进亚历山大城的. 埃拉托色尼判定，这是因为地面是弯曲的，他利用圆的有关知识，测得有关数据，证实了他的推测，而且求得了地球圆周的长度.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

对概率的进一步认识

1 用树状图或表格求概率

第1课时 用树状图法求概率

名师点金

(1)当事件涉及两个或两个以上元素时,用树状图可以依次列出所有可能的结果,求出 n,再分别求出某个事件中包含的所有可能的结果,求出 m,从而求出概率.

(2)用**树状图法**列举时,应注意取出后放回与不放回的问题.

Ⅰ 夯实基础·逐点练 (答案见108页)

知识点1 两步试验的树状图

1. 【中考·邵阳】掷一枚硬币两次,可能出现的结果有四种,我们可以利用如图所示的树状图来分析所有可能出现的结果,那么掷一枚硬币两次,至少有一次出现正面的概率是_____.



(第1题)

2. 【中考·大连】不透明袋子中装有红、绿小球各一个,除颜色外无其他差别,随机摸出一个小球后,放回并摇匀,再随机摸出一个,两次都摸到红球的概率为(　　)

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{4}$

3. 【中考·张家界】某校高一年级今年计划招四个班的新生,并采取随机摇号的方法分班,小明和小红既是该校的高一新生,又是好朋友,那么小明和小红分在同一个班的机会是(　　)

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{3}{4}$

4. 【中考·德州】经过某十字路口的汽车,可能直行,也可能左转或者右转,如果这三种可能性大小相同,那么经过这个十字路口的两辆汽车一辆左转,一辆右转的概率是(　　)

A. $\frac{4}{7}$　　B. $\frac{4}{9}$　　C. $\frac{2}{9}$　　D. $\frac{1}{9}$

知识点2 两步以上试验的树状图

5. 小红、小明、小芳在一起做游戏时,需要确定做游戏的先后顺序,他们约定用"剪刀、布、石头"的方式确定.问:在一个回合中三个人都出"布"的概率是(　　)

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{9}$　　C. $\frac{1}{18}$　　D. $\frac{1}{27}$

6. 小刚很擅长球类运动,课外活动时,足球队、篮球队都力邀他到自己的阵营,小刚左右为难,最后决定通过掷硬币来确定.游戏规则如下:连续抛掷硬币三次,若三次正面朝上或三次反面朝上,则由小刚任意挑选两球队;若两次正面朝上,一次正面朝下,则小刚加入足球阵营;若两次反面朝上,一次反面朝下,则小刚加入篮球阵营.

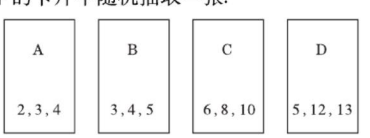
(1)用画树状图的方法表示三次抛掷硬币的所有结果;

(2)小刚任意挑选两球队的概率有多大?

(3)这个游戏规则对两个球队是否公平?为什么?

易错点 忽略"放回"与"不放回"这一过程而致错

7. 在四张编号为A,B,C,D的卡片(除编号外,其余完全相同)的正面分别写上如图所示的正整数后,背面朝上,洗匀放好,现从中随机抽取一张(不放回),再从剩下的卡片中随机抽取一张.



(第7题)

(1)请用画树状图的方法表示两次抽取卡片的所有可能出现的结果(卡片用A,B,C,D表示);

(2)我们知道,满足 $a^2+b^2=c^2$ 的三个正整数 a,b,c 称为勾股数,求抽到的两张卡片上的数都是勾股数的概率.

北宋天历、皇佑年间,大将狄青奉旨征讨反贼侬智高.在众人瞩目下,狄青举手一挥,把铜币全部扔在地上,结果一百个铜币居然全部是正面朝上.(待续)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞(答案见109页)

考查角度① 利用树状图解决与代数综合的概率问题

8. 【中考 · 日照】若 n 是一个两位正整数，且 n 的个位数字大于十位数字，则称 n 为“两位递增数”(如13，35，56等). 在某次数学趣味活动中，每位参加者需从由数字1，2，3，4，5，6构成的所有的“两位递增数”中随机抽取1个数，且只能抽取一次.

(1) 写出所有个位数字是5的“两位递增数”；

(2) 请用画树状图法求抽取的“两位递增数”的个位数字与十位数字之积能被10整除的概率.

考查角度② 利用树状图解决与分式综合的概率问题

9. 有三张卡片(形状、大小、颜色、质地都相同)，正面分别写上整式 x^2+1，$-x^2-2$，3. 将这三张卡片背面向上洗匀，从中任意抽取一张卡片，记卡片上的整式为 A，再从剩下的卡片中任意抽取一张，记卡片上的整式为 B，于是得到代数式 $\frac{A}{B}$. 【导学号：9400200】

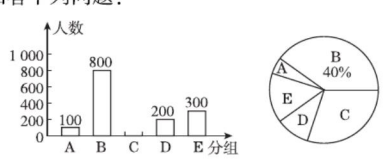
(1) 请用画树状图的方法，写出代数式 $\frac{A}{B}$ 所有可能的结果；

(2) 求代数式 $\frac{A}{B}$ 恰好是分式的概率.

Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞(答案见109页)

拔尖角度① 利用树状图解两次试验的概率问题

10. 【中考 · 南宁】为调查广西北部湾四市市民上班时最常用的交通工具的情况，随机抽取了四市部分市民进行调查，要求被调查者从“A：自行车，B：电动车，C：公交车，D：家庭汽车，E：其他”五个选项中选择最常用的一项，将所有调查结果整理后绘制成如下不完整的条形统计图和扇形统计图，请结合统计图回答下列问题：



(第10题)

(1) 在这次调查中，一共调查了_____名市民，扇形统计图中，C组对应的扇形圆心角是_____°；

(2) 请补全条形统计图；

(3) 若甲、乙两人上班时从A，B，C，D四种交通工具中随机选择一种，则甲、乙两人恰好选择同一种交通工具上班的概率是多少？请用画树状图法求解.

拔尖角度② 利用树状图解三次试验的概率问题

11. 【中考 · 兰州】为了参加中考体育测试，甲、乙、丙三位同学进行足球传球训练，球从一个人脚下随机传到另一个人脚下，且每位传球人传给其余两人的机会是均等的，由甲开始传球，共传球三次.

(1) 请利用树状图列举出三次传球的所有可能情况；

(2) 求三次传球后，球回到甲脚下的概率；

(3) 三次传球后，球回到甲脚下的概率大还是传到乙脚下的概率大？

趣味数学　将士们士气大振，一举歼灭敌军，这真的是“天意”吗？(注：一个铜币正面朝上或朝下的概率是相等的)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第2课时 用列举法求概率

名师点金

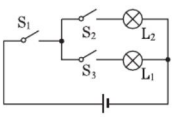
枚举法和**列表法**一般适用于两个元素进行两步试验的题目，在列举可能的结果时，要分清“放回”与“不放回”这两种情况.

1 夯实基础·逐点练

（答案见109页）

知识点1 用枚举法求概率

1. 【中考·娄底】在如图所示的电路中，随机闭合开关 S_1，S_2，S_3 中的两个，能让灯泡 L_1 发光的概率是_____.



（第1题）

2. 【中考·黔西南州】甲、乙、丙三人站成一排拍照，则甲站在中间的概率是（　　）

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

3. 【中考·东营】从1,2,3,4中任取两个不同的数，分别记为 a 和 b，则 $a^2+b^2>19$ 的概率是（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{5}{12}$　　C. $\frac{7}{12}$　　D. $\frac{1}{3}$

知识点2 用列表法求概率

4. 【中考·天门】有5张看上去无差别的卡片，正面分别写着1,2,3,4,5，洗匀后正面向下放在桌子上，从中随机抽取2张，抽出的卡片上的数字恰好是两个连续整数的概率是_____.

5. 【中考·株洲】从2,3,4,5中任意选两个数，记作 a 和 b，那么点 (a,b) 在函数 $y=\frac{12}{x}$ 图象上的概率是（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{6}$

6. 【中考·广西】“学雷峰”活动月中，“飞翼”班将组织学生开展志愿者服务活动，小晴和小霞从“图书馆、博物馆、科技馆”三个场馆中随机选择一个参加活动，两人恰好选择同一场馆的概率是（　　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{1}{9}$　　D. $\frac{2}{9}$

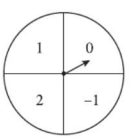
7. 【中考·临沂】小明和小华玩“石头、剪子、布”的游戏，若随机出手一次，则小华获胜的概率是（　　）

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{2}{9}$

8. 【中考·泰安】十位上的数字比个位上的数字、百位上的数字都大的三位数叫做“中高数”，如796就是一个“中高数”. 若十位上的数字为7，则从3,4,5,6,8,9中任选两数，与7组成“中高数”的概率是（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{2}{5}$　　D. $\frac{3}{5}$

9. 【中考·河南】如图是一次数学活动课制作的一个转盘，盘面被等分成四个扇形区域，并分别标有数字 -1,0,1,2. 若转动转盘两次，每次转盘停止后记录指针所指区域的数字（当指针恰好指在分界线上时，不记，重转），则记录的两个数字都是正数的概率为（　　）



（第9题）

A. $\frac{1}{8}$　　B. $\frac{1}{6}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{2}$

10. 【中考·泰安】袋内装有标号分别为1,2,3,4的4个小球，从中随机取出一个小球，让其标号为一个两位数的十位数字，放回搅匀后，再随机取出一个小球，让其标号为这个两位数的个位数字，则组成的两位数是3的倍数的概率为（　　）

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{5}{16}$　　C. $\frac{7}{16}$　　D. $\frac{1}{2}$

易错点 不能准确区分放回抽样与不放回抽样对事件发生的概率的影响而致错

11. 某电视栏目中的百宝箱互动环节是一种竞猜游戏，游戏规则如下：在20张商标牌中，有5张商标牌的背面注明一定金额，其余商标牌的背面均是一张哭脸，若翻到哭脸就不得奖；反之，则得奖. 参与游戏的观众有三次翻牌的机会（翻过的牌不能再翻），某人前两次翻牌均获得若干奖金，那么他第三次翻牌获奖的概率是（　　）

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{5}$　　C. $\frac{1}{6}$　　D. $\frac{3}{20}$

谜语：登上最高峰（打一数学名词）　　谜底：顶点

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞(答案见109页)

考查角度① 利用枚举法求实际应用中的概率问题

12. 【中考 · 陕西】端午节“赛龙舟,吃粽子”是中华民族的传统习俗,节日期间,小邱家包了三种不同馅的粽子,分别是红枣粽子(记为A)、豆沙粽子(记为B)、肉粽子(记为C),这些粽子除了馅不同,其余均相同. 粽子煮好后,小邱的妈妈给一个白盘中放入了两个红枣粽子、一个豆沙粽子和一个肉粽子;给一个花盘中放入了两个肉粽子、一个红枣粽子和一个豆沙粽子.

根据以上情况,请你回答下列问题:

(1)假设小邱从白盘中随机取一个粽子,恰好取到红枣粽子的概率是多少?

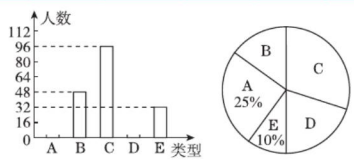
(2)若小邱先从白盘里的四个粽子中随机取一个粽子,再从花盘里的四个粽子中随机取一个粽子,请用枚举法,求小邱取到的两个粽子中一个是红枣粽子、一个是豆沙粽子的概率.

考查角度② 利用列表法求统计图中的概率问题

13. 【中考 · 凉山州】某校为了推进学校均衡发展,计划再购进一批图书,丰富学生的课外阅读. 为了解学生对课外阅读的需求情况,学校对学生所喜爱的读物:A. 文学,B. 艺术,C. 科普,D. 生活,E. 其他,进行了随机抽样调查(规定每名学生只能选其中一类读物),并将调查结果绘制成以下不完整的统计图表.

抽样调查统计表

类型	A	B	C	D	E
人数	a	48	96	b	32



(第13题)

(1)a = _____,b = _____,请补全条形统计图;

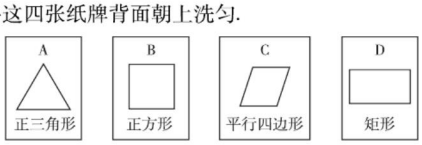
(2)如果全校有2 500名学生,请你估计全校有多少名学生喜爱科普读物;

(3)学校从喜爱科普读物的学生中选拔出2名男生和3名女生,并从中随机抽取2名学生参加科普知识竞赛,请你用列表法求出恰好抽到一名男生和一名女生的概率.

Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞(答案见109页)

拔尖角度 利用概率说明游戏规则的公平性问题

14. 【中考 · 营口】如图,有四张背面完全相同的纸牌A,B,C,D,其正面分别画有四个不同的几何图形,将这四张纸牌背面朝上洗匀.



(第14题)

(1)从中随机摸出一张,求摸出的牌面图形是中心对称图形的概率;

(2)小明和小亮约定做一个游戏,其规则如下:先由小明随机摸出一张纸牌,不放回,再由小亮从剩下的纸牌中随机摸出一张,若摸出的两张纸牌面图形都是轴对称图形,则小明获胜,否则小亮获胜,这个游戏公平吗?请用列表法说明理由(纸牌用A,B,C,D表示).

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第3课时 用概率说明游戏的合理性

名师点金

对于游戏不公平的问题，可以利用相应问题中的可能情形改动游戏规则，使修改后游戏是公平的，而修改游戏规则的方式有多种情形，只要合理即可，一般采用使所获得的概率相等达到目的.

1 夯实基础·逐点练

（答案见110页）

知识点1 用概率说明普通游戏的公平性

1. 【中考·黔南州】同时抛掷两枚质地均匀的硬币，则下列事件发生的概率最大的是（　　）

A. 两正面都朝上

B. 两背面都朝上

C. 一个正面朝上，另一个背面朝上

D. 三种情况发生的概率一样大

2. 一个箱子中装有红、黄、黑三个小球，三个人先后去摸球，一人摸一次，一次摸出一个小球，摸出后不放回，摸出黑色小球为赢，这个游戏是（　　）

A. 公平的

B. 不公平的

C. 先摸者赢的可能性大

D. 后摸者赢的可能性大

3. 小明和小亮做游戏，先各自在纸上写一个正整数，然后都拿给对方看. 他们约定：若两人所写的数都是奇数或都是偶数，则小明获胜；若两人所写的数一个是奇数，另一个是偶数，则小亮获胜. 这个游戏（　　）

A. 对小明有利　　B. 对小亮有利

C. 公平　　D. 无法确定对谁有利

4. 小明与小刚一起玩抛掷两枚硬币的游戏，游戏规则：抛出两个正面——小明赢1分；抛出其他结果——小刚赢1分；谁先得到10分，谁就获胜. 这是个不公平的游戏规则，要把它修改成公平的游戏，下列做法中错误的是（　　）

A. 把“抛出两个正面”改为“抛出两个同面”

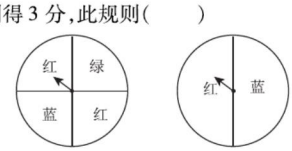
B. 把“抛出其他结果”改为“抛出两个反面”

C. 把“小明赢1分”改为“小明赢3分”

D. 把“小刚赢1分”改为“小刚赢3分”

知识点2 用概率说明几何游戏的公平性

5. 如图，小明、小刚利用两个转盘玩游戏，规则为小明将两个转盘各转一次，如配成紫色（红与蓝）得5分，否则小刚得3分，此规则（　　）

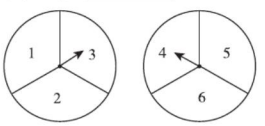


（第5题）

A. 公平　　B. 对小明有利

C. 对小刚有利　　D. 不可预测对谁有利

6. 王红和刘芳两人玩转盘游戏，如图，把转盘A，B分别分成3等份，并在每一份内标上数字，游戏规则：转动两个转盘，停止后指针所指的两个数字之和为7时，王红胜；数字之和为8时，刘芳胜，那么这二人中获胜可能性较大的是_____.

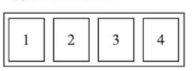


（第6题）

7. 四张形状相同的卡片如图所示. 将卡片洗匀后背面朝上放置在桌面上，小明先随机抽取一张卡片，记下数字为x；小亮再随机抽取一张卡片，记下数字为y. 两人在此基础上共同协商一个游戏规则：当$x>y$时小明获胜，否则小亮获胜.

（1）若小明抽出的卡片不放回，求小明获胜的概率；

（2）若小明抽出的卡片放回后小亮再随机抽取，问他们制定的游戏规则公平吗？请说明理由.



（第7题）

祖冲之是中国南北朝时期的数学家、天文学家、物理学家. 祖冲之的祖父名叫祖昌，在宋朝担任一个管理朝廷建筑的职位.（待续）

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

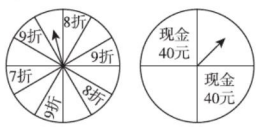
Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞(答案见110页)

考查角度① 利用概率公式求几何概率

8. 【中考 · 大庆】某商场举行开业酬宾活动,设立了两个可以自由转动的转盘(如图所示,两个转盘均被等分),并规定:顾客购买满188元的商品,即可任选一个转盘转动一次,转盘停止后,指针所指区域内容即为优惠方式;若指针所指区域空白,则无优惠. 已知小张在该商场消费300元.

(1)若他选择转动转盘1,则他能得到优惠的概率为多少?

(2)选择转动转盘1和转盘2,哪个对于小张更合算?请通过计算加以说明.

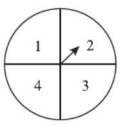


转盘1　　转盘2

(第8题)

考查角度② 利用概率修改规则使游戏公平

9. 小明和小亮用图中的转盘做游戏:分别转动转盘两次,若两次数字之差(大数减小数)大于或等于2,小明得1分,否则小亮得1分. 你认为此游戏是否公平?若公平,请说明理由;若不公平,请你修改规则,使游戏对双方公平.



(第9题)

Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞(答案见110页)

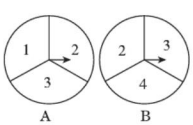
拔尖角度① 利用概率修改游戏规则

10. 有两个可以自由转动的均匀转盘,都被分成了3等份,并在每一份内标有数字,如图,规则如下:

①分别转动转盘A,B;②两个转盘停止后观察两个指针所指的数字(若指针指在等分线上,则重转一次,直到指针指向某一数字为止).

(1)用列表法分别求出"两个指针所指的数字都是方程 $x^2-5x+6=0$ 的解"的概率和"两个指针所指的数字都不是方程 $x^2-5x+6=0$ 的解"的概率;

(2)王磊和张浩想用这两个转盘做游戏,他们规定:"若两个指针所指的数字都是 $x^2-5x+6=0$ 的解"时,王磊得1分;若"两个指针所指的数字都不是 $x^2-5x+6=0$ 的解"时,张浩得3分,这个游戏公平吗?若你认为不公平,请修改得分规定,使游戏对双方公平.



A　　B

(第10题)

拔尖角度② 利用概率做出方案决策

11. 某商场设计了两种促销方案:第一种是顾客在商场消费每满200元就可以从一个装有100个完全相同的球(球上分别标有数字1,2,…,100)的箱子中随机摸出一个球(摸后放回). 若球上的数字是88,则返500元购物券;若是66或99,则返300元购物券;若球上的数字能被5整除,则返5元购物券;若是其他数字不返购物券;第二种是顾客在商场消费每满200元直接返还15元购物券. 估计活动期间将有5 000人参加活动. 请你通过计算说明商场选择哪种方案促销合算些.

趣味数学　祖冲之生长在这样的家庭里,从小就读了不少书,人们都称赞他是个博学的青年. 他特别爱好研究数学,也喜欢研究天文历法,经常观测太阳和星球运行的情况,并且做了详细记录.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

2 生活中的概率

名师点金

概率与人们的生活密切相关，能帮助我们对许多事情作出判断和决策，因此概率在各个领域都有着广泛的应用. 在实际应用中，简单的概率问题可以用概率的意义来求，较复杂的概率问题可以用**列表法**或**画树状图法**来求，还可以用频率估计概率.

1 夯实基础 · 逐点练 ☞（答案见110页）

知识点 概率的简单应用

1. 从1，2，−3这三个数中，随机抽取两个数相乘，积是正数的概率是（　　）

A. 0　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. 1

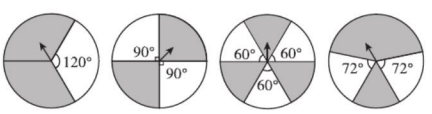
2. 有12个型号相同的杯子，其中一等品有7个，二等品有3个，三等品有2个，则从中任意取一个，是二等品的概率为（　　）

A. $\frac{1}{12}$　　B. $\frac{1}{6}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{7}{12}$

3. 某商店举办有奖销售活动，方式如下：凡购物满100元者得奖券一张，多购多得，每10 000张奖券为一个开奖单位，设特等奖1个，一等奖50个，二等奖100个，那么买100元商品的中奖概率是（　　）

A. $\frac{1}{10\,000}$　　B. $\frac{1}{200}$　　C. $\frac{1}{100}$　　D. $\frac{151}{10\,000}$

4. 某商场为促销开展抽奖活动，让顾客转动一次转盘，当转盘停止后，只有指针指向阴影区域时，顾客才能获得奖品，下列有四个大小相同的转盘（如图所示）可供选择，使顾客获得奖品可能性最大的是（　　）



A　　B　　C　　D

5. 在元旦游园晚会上有一个闯关活动：在5张背面完全相同的卡片上分别画有等腰梯形、圆、平行四边形、等腰三角形和菱形的图案. 将有图案的一面朝下，混合后从中任意翻开一张，如果翻开的图案是轴对称图形就可以过关，那么翻一次卡片可以过关的概率是（　　）

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{2}{5}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{4}{5}$

6. 时代中学周末有40人计划去体育场观看足球赛，40张票分别为B区的第2排1号到40号，分票采用随机抽取的方法，小明第一个抽取，他抽取的座位号为10号，接着小亮从其余的票中任意抽取一张，那么他抽取的这张票恰好与小明邻座的概率是（　　）

A. $\frac{1}{40}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{39}$　　D. $\frac{2}{39}$

7. 某机构发行福利彩票，在300万张彩票中，中奖率是1%，那么下列推断：①买10万张彩票一定不中奖；②买30万张彩票一定中奖；③买30万张彩票一定不中奖；④买30万张彩票可能会中奖，其中正确的是_____.（填序号）

8. 如图，创新广场上铺设了一种新颖的石子图案，它是由五个过同一点且半径不同的圆组成的，其中阴影部分铺黑色石子，其余部分铺白色石子. 小球落在一、三、五区域（阴影）内的概率分别是0.04，0.2，0.36，如果最大圆的半径是1米，那么黑色石子区域的总面积约为_____平方米.（结果精确到0.01平方米）



（第8题）

9. 有一种糖果，它的包装纸上印有棒子、老虎、鸡和虫子四种中的一种，小朋友可以利用这种糖果玩游戏，游戏的规则是双方各拿四颗包装纸图案不同的糖果，每次手中握住一颗，然后打开手掌，获胜的情况是棒子打老虎，老虎吃鸡，鸡啄虫子，虫子蛀棒子，其余情况为不输不赢，假定小明和小刚每次都等可能地握住其中一颗糖，那么小明获胜的概率是多少？

田忌赛马：传说战国时期，齐王与田忌各有上、中、下三匹马，同等级的马中，齐王的马比田忌的马强. 有一天，齐王要与田忌赛马，双方约定，比赛三局，每局各出一匹，每匹马赛一次，赢得两局者为胜.（待续）

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

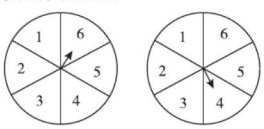
Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞(答案见111页)

考查角度① 概率在获奖游戏中的应用

10. 现有一次资助贫困生的公益活动由你来主持,每位参与者需交赞助费5元. 如图是两个可以自由转动的转盘,每个转盘被分成6个相等的扇形. 活动规则如下:参与者转动这两个转盘,转盘停止,指针各指向一个数字(若指针指在分割线上,则重转一次,直到指针指向某一数字为止). 若指针最后所指的数字之和为12,则获一等奖,奖金20元;数字之和为9,则获二等奖,奖金10元;数字之和为7,则获三等奖,奖金5元;其余的均不得奖. 此次活动所筹集到的赞助费除支付获奖人员的奖金外,其余全部用于资助贫困生的学习和生活.

(1)此次活动中获得一等奖的概率为_____,获得二等奖的概率为_____,获得三等奖的概率为_____;

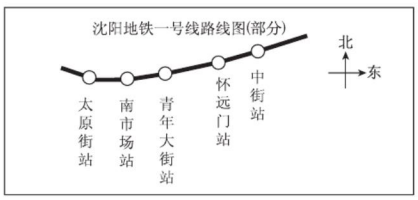
(2)若此次活动有2 000人参加,活动结束后大约有多少赞助费用于资助贫困生?



(第10题)

考查角度② 概率在日常生活中的应用

11. 如图是沈阳地铁一号线路线图(部分),小王和小林将分别从太原街站(用A表示)、南市场站(用B表示)、青年大街站(用C表示)这三站中,随机选取一站作为问卷调查的站点.



(第11题)

(1)在这三站中,小王选取问卷调查的站点是太原街站的概率是多少?(请直接写出结果)

(2)请你用列表法或画树状图法,求小王选取问卷调查的站点与小林选取问卷调查的站点相邻的概率.(各站点用相应的英文字母表示)

趣味数学　看样子田忌似乎没有什么胜的希望,但是田忌的谋士了解到主人的上、中等马分别比齐王的中、下等马要强……(待续)

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

*3 用频率估计概率

第1课时 用频率估计概率

名师点金

频率与概率间的关系：(1)概率是随机事件发生的可能性的大小的数量反映；(2)概率是事件在大量重复试验中频率逐渐稳定到的值，所以可以用大量重复试验中事件发生的频率去估计事件发生的概率，二者不能等同.

注意：用频率估计概率大小时，(1)试验要在相同条件下进行；(2)重复试验的次数要足够多.

1 夯实基础·逐点练 ☞(答案见111页)

知识点1 用频率估计概率

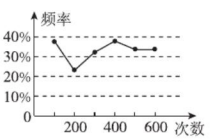
1. 【中考·宜昌】在课外实践活动中，甲、乙、丙、丁四个小组用投掷一元硬币的方法来估算正面朝上的概率，其试验次数分别为10次、50次、100次、200次，其中试验相对科学的是(　　)

A. 甲组　　B. 乙组　　C. 丙组　　D. 丁组

2. 【中考·兰州】一个不透明的盒子里有 n 个除颜色外其他完全相同的小球，其中有9个黄球，每次摸球前先将盒子里的球摇匀，任意摸出一个球记下颜色后再放回盒子，通过大量重复摸球试验后发现，摸到黄球的频率稳定在30%，那么估计盒子中小球的个数 n 为(　　)

A. 20　　B. 24　　C. 28　　D. 30

3. 甲、乙两名同学在一次用频率去估计概率的试验中，统计了某一结果出现的频率，绘出的统计图如图所示，则符合这一结果的试验可能是(　　)



(第3题)



(第6题)

A. 掷一枚正六面体的骰子，出现1点的概率

B. 从一个装有2个白球和1个红球的袋子中任取1个球，取到红球的概率

C. 抛一枚硬币，出现正面朝上的概率

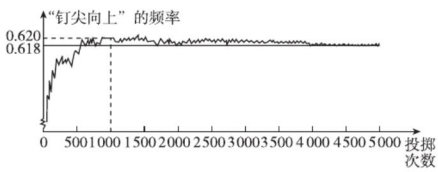
D. 任意写一个整数，它能被2整除的概率

4. 【中考·营口】在一个不透明的箱子里装有红色、蓝色、黄色的球共20个，除颜色外，形状、大小、质地等完全相同，小明通过多次摸球试验后发现摸到红色、黄色球的频率分别稳定在10%和15%. 则箱子里的蓝色球很可能有_____个.

知识点2 频率与概率的关系

5. 【中考·北京】如图显示了用计算机模拟随机投掷一枚图钉的某次试验的结果.

下面有三个推断：①当投掷次数是500时，计算机记录“钉尖向上”的次数是308，所以“钉尖向上”的概率是0.616；②随着试验次数的增加，“钉尖向上”的频率总在0.618附近摆动，显示出一定的稳定性，可以估计“钉尖向上”的概率是0.618；③若再次用计算机模拟试验，则当投掷次数为1 000时，“钉尖向上”的频率一定是0.620.



(第5题)

其中合理的是(　　)

A. ①　　B. ②　　C. ①②　　D. ①③

6. 【中考·宿迁】如图，为测量平地上一块不规则区域(图中的阴影部分)的面积，画一个边长为2 m的正方形，使不规则区域落在正方形内，现向正方形内随机投掷小石子(假设小石子落在正方形内每一点都是等可能的)，经过大量重复投掷试验，发现小石子落在不规则区域的频率稳定在常数0.25附近，由此可估计不规则区域的面积是_____m^2.

易错点 不能正确理解频率与概率的关系而致错

7. 下列说法合理的是(　　)

A. 小明在10次抛图钉的试验中发现3次钉尖朝上，由此他说钉尖朝上的概率是30%

B. 抛掷一枚普通的正六面体骰子，出现6点朝上的概率是$\frac{1}{6}$的意思是每掷6次就有1次掷得6点朝上

C. 某彩票的中奖机会是2%，那么如果买100张彩票一定会有2张中奖

D. 在一次课堂进行的试验中，甲、乙两组同学估计硬币落地后，正面朝上的概率分别为0.48和0.51

(1)如果齐王将马按上、中、下的顺序出阵比赛，那么田忌的马如何出阵，田忌才能取胜？(2)如果齐王将马按上、中、下的顺序出阵，而田忌的马随机出阵比赛，田忌获胜的概率是多少？(待续)

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞(答案见111页)

考查角度① 利用频率估算数据求概率

8. 王老师将1个黑球和若干个白球(球除颜色外都相同)放入一个不透明的袋中并搅匀,让若干学生进行摸球试验,每次摸出一个球(有放回),下表是试验进行中的一组统计数据.

摸球的次数 n	100	150	200	500	800	1 000
摸到黑球的次数 m	23	31	60	130	203	251
摸到黑球的频率$\frac{m}{n}$	0.23	0.21	0.30	0.26	0.25	

(1)补全上表中的有关数据,根据上表数据估计从袋中摸出一个球是黑球的概率是_____(保留两位小数);

(2)估算袋中白球的个数;

(3)在(2)的条件下,若小强同学有放回地连续两次摸球,用画树状图或列表的方法计算他两次都摸出白球的概率.

考查角度② 利用求频率估算概率

9. 【中考 · 滨州】为了考察甲、乙两种成熟期小麦的株高长势情况,现从中各随机抽取6株,并测得它们的株高(单位:cm)如下表所示:

甲	63	66	63	61	64	61
乙	63	65	60	63	64	63

(1)请分别计算表内两组数据的方差,并借此比较哪种小麦的株高长势比较整齐?

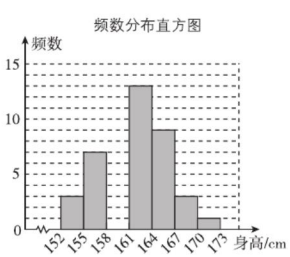
(2)现将进行两种小麦优良品种杂交试验,需从表内的甲、乙两种小麦中,各随机抽取一株进行配对,以预估整体配对状况,请你用列表或画树状图的方法,求所抽取的两株配对小麦株高恰好都等于各自平均株高的概率.

Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞(答案见111页)

拔尖角度✓ 利用频率、概率间的关系解统计图表问题

10. 【中考 · 黔东南州】某体育老师测量了自己任教的甲、乙两班男生的身高,并制作了如下不完整的统计图表.

身高分组/cm	频数	频率
$152 \leqslant x < 155$	3	0.06
$155 \leqslant x < 158$	7	0.14
$158 \leqslant x < 161$	m	0.28
$161 \leqslant x < 164$	13	n
$164 \leqslant x < 167$	9	0.18
$167 \leqslant x < 170$	3	0.06
$170 \leqslant x < 173$	1	0.02



(第10题)

根据以上统计图表完成下列问题:

(1)统计表中 m = _____,n = _____,并将频数分布直方图补充完整;

(2)在这次测量中两班男生身高的中位数在_____范围内;

(3)在身高≥167 cm的4人中,甲、乙两班各有2人,现从4人中随机推选2人补充到学校国旗护卫队中,请用列表或画树状图的方法求出这两人来自相同班级的概率.

趣味数学 答案:(1)田忌按照下、上、中的顺序能取胜;(2)田忌获胜的概率是$\frac{1}{6}$.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

第2课时　用频率估计概率的应用

名师点金

频率与概率的区别和联系

名称 / 关系	频率	概率
区别	具有随机性、不确定性，是试验值或使用时的统计值	是确定的、可求的，是理论值
	与试验次数有关	与试验次数无关
	与试验人、试验时间、试验地点有关	与试验人、试验时间、试验地点无关
联系	试验次数越多，频率越接近于概率. 概率能精确地反映事件出现的可能性的大小，而频率只能近似地反映事件出现的可能性的大小	

整合方法 · 分类练

（答案见111页）

类型1　估计生日相同的概率

1. 在可以不同年的条件下，下列结论正确的是（　　）

A. 400个人中至少有两人生日相同

B. 300个人中至少有两人生日相同

C. 2个人的生日不可能相同

D. 2个人的生日很有可能相同

2. 利用课余时间，让每个同学调查10人的生日，然后从全班同学的调查结果中随机选取50个被调查人的生日，看看他们中有没有2个人的生日相同，每选取50个被调查人的生日为一次试验，重复多次试验. 估计50个人中有2个人生日相同的概率.

类型2　利用频率与概率的关系设计估算总体数目的方案

3. 在一个不透明的口袋里装有只有颜色不同的黑、白两种颜色的球共20个，某学习小组做摸球试验，将球搅匀后从中随机摸出一个球记下颜色，再把它放回口袋中，不断重复. 下表是活动进行中的一组统计数据：

摸球的次数 n	100	150	200	500	800	1 000
摸到白球的次数 m	58	96	116	295	484	601
摸到白球的频率	0.58	0.64	0.58	0.59	0.605	0.601

（1）请估计：当 n 很大时，摸到白球的频率将会接近_____；（精确到0.1）

（2）假如你去摸一次，你摸到白球的概率约是_____，摸到黑球的概率约是_____；

（3）试估算口袋中黑、白两种颜色的球各有多少个；

（4）解决了上面的问题，小明同学猛然顿悟，过去一个悬而未决的问题有办法解决了. 这个问题是：在一个不透明的口袋里装有若干个白球，在不允许将球倒出来数的情况下，如何估计白球的个数？请你应用统计与概率的思想和方法解决这个问题，写出解决这个问题的主要步骤及估算方法（可以借助其他工具及用品）.

抛硬币并非最公平：抛硬币是做决定时普遍使用的一种方法. 人们认为硬币落下后正面朝上和反面朝上的概率都一样，都是50%. 但是有趣的是，这种非常受欢迎的想法并不正确.（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第3课时　用计算机模拟试验估计概率

名师点金

有时候，我们很难找到合适的替代物模拟试验，或者用替代物比较麻烦，这时我们可以用计算器产生符合条件的随机数，这种试验方法称为计算器模拟试验，设计模拟试验时有 n 种可能就要用计算器产生 $1\sim n$ 之间的随机数，调查 n 个人就需取 n 个数作为一次试验.

用计算器产生随机数的步骤：

(1)打开计算机，并清屏；(2)进入产生随机数的状态；(3)输入所产生的随机数的范围，按键得出随机数.

整合方法·分类练

(答案见111页)

类型1　用替代物模拟试验估计概率

1. 通过反复抛掷一枚正方体骰子，利用频率稳定值估计6点向上的概率的试验中，如果你手边没有骰子，那么你能设计一个试验方案来替代吗？说说你的试验过程.

类型2　用计算器模拟试验估算随机事件发生的概率

2. 一个袋子中装有除颜色外其他都相同的红、黄、绿、紫四个小球，小强想知道一次摸球能摸到红球的概率是多少. 若现在没有袋子和球，只有一个计算器，你能帮助小强找到答案吗？

类型3　利用试验模型模拟试验求概率

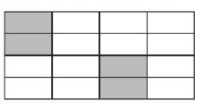
3. 现在初中课本里所学习的概率计算问题有以下几种类型：

第一类是可以列举有限个等可能发生的结果的概率计算问题，比如掷一枚均匀硬币的试验；

第二类是用试验或者模拟试验的数据计算频率，并用频率估计概率的计算问题，比如掷图钉的试验. 解决概率计算问题，可以直接利用模型，也可以转化后再利用模型.

请解决以下问题：

(1)如图，一个寻宝游戏，宝物随机藏在某一块砖下(砖除颜色外完全相同)，则宝物藏在阴影砖下的概率是多少？



(第3题)

(2)在1～9中随机选取3个整数，以这3个整数为边长构成三角形的情况如下表：

	第1组试验	第2组试验	第3组试验	第4组试验	第5组试验
构成锐角三角形次数	86	158	250	337	420
构成直角三角形次数	2	5	8	10	12
构成钝角三角形次数	73	155	191	258	331
不能构成三角形次数	139	282	451	595	737
合计	300	600	900	1 200	1 500

请你根据表中数据，估计构成钝角三角形的概率约是多少.(精确到百分位)

趣味数学　首先，虽然硬币落地时立在地上的可能性非常小，但是这种可能性是存在的. 其次，即使我们排除了这种很小的可能性，也并非是公平的.(待续)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

阶段方法技巧训练（四）

专训 1 概率的四种求法 （答案见112页）

名师点金

概率是通过大量重复试验中频率的稳定性得到的一个0～1的常数，它反映了事件发生的可能性的大小，需要注意的是概率是针对大量重复试验而言的，大量重复试验反映的规律并不一定出现在每次试验中. 常见的计算概率的方法有**公式法**（仅适用于等可能事件）、**列表法**、**画树状图法**和**频率估算法**等.

方法1 用公式法求概率

1. 一个不透明的袋中装有5个黄球，13个黑球和22个红球，它们除颜色外都相同.

（1）求从袋中随机摸出一个球是黄球的概率；

（2）现从袋中取出若干个黑球，并放入相同数量的黄球，搅拌均匀后使从袋中摸出一个球是黄球的概率不小于$\frac{1}{3}$，问至少取出了多少个黑球？

方法2 用列表法求概率

2. 【中考·贵阳】为落实立德树人的根本任务，加强思政、历史学科教师的专业化队伍建设，某校计划从前来应聘的“思政”专业（一名研究生，一名本科生）、历史专业（一名研究生、一名本科生）的高校毕业生中选聘教师，在政治思想审核合格的条件下，假设每位毕业生被录用的机会相等.

（1）若从中只录用一人，恰好选到“思政”专业毕业生的概率是_____；

（2）若从中录用两人，请用列表或画树状图的方法，求恰好选到的是一名“思政”研究生和一名历史本科生的概率.

方法3 用画树状图法求概率

3. 经过某十字路口的车，它可能继续直行，也可能向左转或向右转. 如果这三种可能性的大小是相同的，三辆车经过这个十字路口时，求下列事件发生的概率：

（1）三辆车全部继续直行；

（2）两辆车向右转，一辆车向左转；

（3）至少有两辆车向左转.

方法4 用频率估算法求概率

4. 一只不透明的袋中装有4个球，分别标有数字2，3，4，x，这些球除数字外都相同. 甲、乙两人每次同时从袋中各随机摸出1个球，并计算摸出的这2个球上数字之和，记录后都将球放回袋中搅匀，进行重复试验. 试验数据如下表：

摸球总次数	10	20	30	60	90	120	180	240	330	450
“和为7”出现的频数	1	9	14	24	26	37	58	82	109	150
“和为7”出现的频率	0.10	0.45	0.47	0.40	0.29	0.31	0.32	0.34	0.33	0.33

解答下列问题：

（1）如果试验继续进行下去，根据上表数据，出现“和为7”的频率将稳定在它的概率附近，试估计出现“和为7”的概率；

（2）根据（1），若x是不等于2，3，4的自然数，试求x的值.

测试结果显示，如果你按常规方法抛硬币，即用大拇指轻弹，开始抛时硬币朝上的一面在落地时仍朝上的可能性大约是51%.（待续）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

专训 2 利用概率揭示游戏规则的公平性 ☞(答案见112页)

名师点金

判断某个游戏的规则是否公平的方法

先用列表或画树状图的方法分别求出游戏双方获胜的概率,然后比较两个概率的大小,进而判断游戏规则是否公平.常见的考查有摸球游戏、转盘游戏、统计事件等.

训练角度 1 利用概率判断摸球游戏的公平性

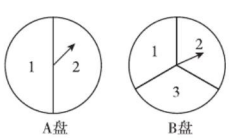
1. 【中考·贺州】在"植树节"期间,小王、小李两人想通过摸球的方式来决定谁去参加学校植树活动,规则如下:在两个盒子内分别装入标有数字1,2,3,4的四个和标有数字1,2,3的三个完全相同的小球,分别从两个盒子中各摸出一个球,如果所摸出的球上的数字之和小于6,那么小王去,否则就是小李去.

(1)用树状图或列表法求出小王去的概率;

(2)小李说:"这种规则不公平",你认同他的说法吗?请说明理由.

训练角度 2 利用概率判断转盘游戏的公平性

2. 【中考·通辽】小兰和小颖用如图所示的两个可以自由转动的转盘做游戏,每个转盘被分成面积相等的几个扇形,转动两个转盘各一次,若两次指针所指数字之和小于4,则小兰胜,否则小颖胜(指针指在分界线时重转),这个游戏对双方公平吗?请用树状图或列表法说明理由.



(第2题)

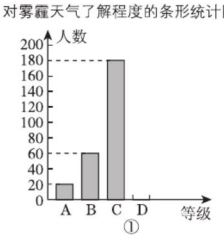
训练角度 3 利用概率判断统计事件的公平性

3. 【中考·天水】近年来,我国持续大面积的雾霾天气让环保和健康问题成为焦点,为了调查学生对雾霾天气知识的了解程度,某校在学生中作了一次抽样调查,调查结果共分为四个等级:A. 非常了解;B. 比较了解;C. 基本了解;D. 不了解. 根据调查统计结果,绘制了如图所示的不完整的三种统计图表.

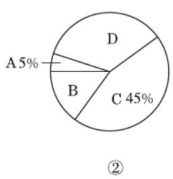
对雾霾天气了解程度的统计表

对雾霾天气的了解程度	百分比
A. 非常了解	5%
B. 比较了解	15%
C. 基本了解	45%
D. 不了解	n

对雾霾天气了解程度的条形统计图



对雾霾天气了解程度的扇形统计图



(第3题)

请结合统计图表,回答下列问题:

(1)本次参与调查的学生共有_____人,n = _____;

(2)扇形统计图中D部分扇形所对应的圆心角是_____度;

(3)请补全条形统计图;

(4)根据调查结果,学校准备开展关于雾霾的知识竞赛,某班要从"非常了解"程度的小明和小刚中选一人参加,现设计了如下游戏来确定,具体规则如下:把四个完全相同的乒乓球标上数字1,2,3,4,然后放到一个不透明的袋中,一个人先从袋中随机摸出一个球,另一人再从剩下的三个球中随机摸出一个球. 若摸出的两个球上的数字和为奇数,则小明去,否则小刚去. 请用树状图或列表法说明这个游戏规则是否公平.

趣味数学　如果你在抛之前先看一看抛硬币的人手上的硬币哪面朝上,这样你猜对的概率要高一些.

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

专训3 概率应用的四种类型 (答案见112页)

名师点金

概率的应用很广泛,主要体现在与其他知识的综合,如:在方程和不等式中的应用、在函数中的应用、在几何中的应用、在物理学中的应用等.

类型1 概率在方程、不等式中的应用

1. 【中考·成都】有9张卡片,分别写有1~9这九个数字,将它们背面朝上洗匀后,任意抽出一张,记卡片上的数字为a,则使关于x的不等式组$\begin{cases}4x\geqslant 3(x+1),\\ 2x-\dfrac{x-1}{2}<a\end{cases}$有解的概率为_____.

2. 【中考·武汉】从1,2,3,4四个数中随机选取两个不同的数,分别记为a,c,则关于x的一元二次方程$ax^2+4x+c=0$有实数解的概率为(　　)

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

类型2 概率在函数中的应用

题型1 放回事件

3. 在四个完全相同的小球上分别写上1,2,3,4四个数字,然后装入一个不透明的口袋内搅匀. 从口袋中任取一个球记下数字后作为点P的横坐标x,放回袋中搅匀,然后再从袋中取出一个球记下数字后作为点P的纵坐标y,求点$P(x,y)$落在直线$y=-x+5$上的概率.

题型2 不放回事件

4. 在一个不透明的布袋里装有4个分别标有1,2,3,4的小球,它们的形状、大小完全相同,小明从布袋里随机取出一个小球,记下数字为x,小红在剩下的3个小球中随机取出一个小球,记下数字为y.

(1)计算由x,y确定的点(x,y)在函数$y=-x+5$的图象上的概率;

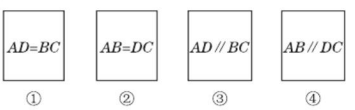
(2)小明和小红约定做游戏,其规则为若x,y满足$xy>6$,则小明胜;若x,y满足$xy<6$,则小红胜,这个游戏公平吗?若公平,请说明理由;若不公平,请写出公平的游戏规则.

类型3 概率在几何中的应用

5. 如图为4张背面完全相同的纸牌(分别用①②③④表示),在纸牌的正面分别写有四个不同的条件,小明将这4张纸牌背面朝上洗匀后,先随机摸出一张(不放回),再随机摸出一张.

(1)用画树状图法(或列表法)表示两次摸牌出现的所有可能结果;

(2)以两次摸出牌上的条件为条件,求能判定四边形$ABCD$是平行四边形的概率.



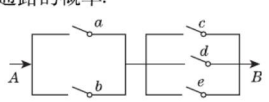
(第5题)

类型4 概率在物理学中的应用

6. 如图,有一条电路AB由图示的开关控制,任意地闭合两个开关.

(1)请你画出树状图表示所有可能的情况;

(2)请你求使电路形成通路的概率.



(第6题)

布丰投针问题:18世纪,法国数学家布丰和勒克莱尔提出的"投针问题",记载于布丰1777年出版的著作中.(待续)

趣味数学

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

全章热门考点整合应用

☞(答案见113页)

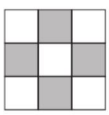
名师点金

本章内容是近年来中考的必考内容,主要考点是用列表法或画树状图法计算概率、用频率估计概率及概率的应用.其考查形式既有单一考查,又有与平面直角坐标系、几何、统计知识等综合考查.其热门考点可概括为两个方法、两种思想.

考点1 两个方法

方法1 求随机事件的概率

1. 小球在如图所示的地板上自由滚动,并随机地停留在某块方砖上,每一块方砖除颜色外完全相同,它最终停留在灰色方砖上的概率是_____.



(第1题)

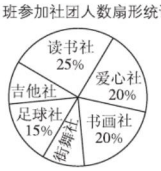
2. 【中考·宜昌】九(1)班的全体同学根据自己的兴趣爱好参加了六个学生社团(每名学生必须参加且只参加一个).为了解学生参加社团的情况,学生会对该班参加各个社团的人数进行了统计,绘制成如图所示不完整的扇形统计图.已知参加"读书社"的学生有15人.请解答下列问题:

(1)该班的学生共有_____人;

(2)若该班参加"吉他社"与"街舞社"的人数相同,请你计算"吉他社"对应扇形的圆心角的度数;

(3)九(1)班学生甲、乙、丙是"爱心社"的优秀成员,现要从这三名学生中随机选两名学生参加"社区义工"活动,请你用画树状图或列表的方法求出恰好选中甲和乙的概率.

九(1)班参加社团人数扇形统计图



(第2题)

方法2 用频率估计概率

3. 小军和小刚两位同学在学习"概率"时,做投掷骰子(质地均匀的正方体)试验,他们共做了60次试验,试验的结果如下表:

向上点数	1	2	3	4	5	6
出现次数	7	9	6	8	20	10

(1)计算2点朝上的频率和5点朝上的频率;

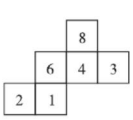
(2)小军说:"根据试验结果可知,一次投掷出现3点朝上的概率是$\frac{1}{10}$."小军的这一说法正确吗?为什么?

(3)小刚说:"如果掷600次,那么出现6点朝上的次数正好是100次."小刚的这一说法正确吗?为什么?

考点2 两种思想

思想1 数形结合思想

4. 一个均匀的正方体各面上分别标有数字1,2,3,4,6,8,其表面展开图如图所示,抛掷这个正方体,则朝上一面的数字恰好等于朝下一面的数字的2倍的概率是(　　)



(第4题)

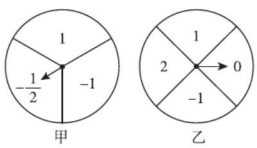
A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{6}$

趣味数学　在平面上画有一组间距为a的平行线,将一根长度为$l(l<a)$的针任意掷在这个平面上,求此针与平行线中任一条相交的概率.布丰本人证明了这个概率是$2l/\pi a$(π为圆周率).

关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

思想2 方程思想

5. 如图，甲、乙两个可以自由转动的均匀的转盘，甲转盘被分成3个面积相等的扇形，乙转盘被分成4个面积相等的扇形，每一个扇形都标有相应的数，同时转动两个转盘，当转盘停止后，设甲转盘中指针所指区域内的数为 m，乙转盘中指针所指区域内的数为 n（指针指向边界线时，重转一次，直到指针都指向某一个区域为止）.



（第5题）

（1）请你用画树状图或列表的方法求出 $|m+n|>1$ 的概率；

（2）直接写出点 (m,n) 落在函数 $y=-x$ 图象上的概率.

6. 一个口袋中放有红球、白球和黑球若干个，每个球除了颜色以外没有任何区别. 已知红球比黑球多1个，比白球少3个.

（1）小王通过大量重复试验（每次取1个球，放回搅匀后再取）发现，取出黑球的频率稳定在 $\frac{1}{4}$ 左右，请你估计口袋中黑球的个数；

（2）若小王取出的第一个球是白球，将它放在桌上，闭上眼睛从口袋中余下的球中再任意取出1个球，取出红球的概率是多少？

7. 口袋里有红、绿、黄三种颜色的球（除颜色外其余都相同），其中红球4个，绿球5个，黄球若干个，任意摸出1个球是绿球的概率是 $\frac{1}{3}$. 求：

（1）口袋里黄球的个数；

（2）任意摸出1个球是红球的概率.

智力题：烧一根不均匀的绳子，从头到尾总共需要1小时，问如何用烧绳子的方法来确定半小时的时间呢？（答案：两边一起烧）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第五章达标检测卷

（120 分，90 分钟）

题　号	一	二	三	总　分
得　分				

姓名　学号　班级　学校

一、选择题（每题 3 分，共 30 分）

1. 下列命题为真命题的是（　　）

A. 两点确定一个圆　　B. 度数相等的弧相等

C. 垂直于弦的直径平分弦　　D. 相等的圆周角所对的弧相等，所对的弦也相等

2. 已知⊙O 的半径为 5，点 P 到圆心 O 的距离为 6，那么点 P 与⊙O 的位置关系是（　　）

A. 点 P 在⊙O 外　　B. 点 P 在⊙O 内　　C. 点 P 在⊙O 上　　D. 无法确定

3. 如图，⊙O 是△ABC 的外接圆，$\angle BOC=120°$，则 $\angle BAC$ 的度数是（　　）

A. 70°　　B. 60°　　C. 50°　　D. 30°


（第 3 题）


（第 4 题）


（第 5 题）


（第 6 题）

4. 如图，AB，AC 为⊙O 的切线，B 和 C 是切点，延长 OB 到 D，使 $BD=OB$，连接 AD. 如果 $\angle DAC=78°$，那么 $\angle ADO$ 等于（　　）

A. 70°　　B. 64°　　C. 62°　　D. 51°

5. 如图，在⊙O 中，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}$，$OB$，$OC$ 分别交 AC，BD 于点 E，F，则下列结论不一定正确的是（　　）

A. $AC=BD$　　B. $OE\perp AC$，$OF\perp BD$

C. △OEF 为等腰三角形　　D. △OEF 为等边三角形

6. 如图，在直角坐标系中，一个圆经过坐标原点 O，交坐标轴于点 E，F，$OE=8$，$OF=6$，则圆的直径长为（　　）

A. 12　　B. 10　　C. 14　　D. 15

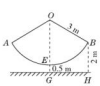
7. 如图，△PQR 是⊙O 的内接正三角形，四边形 $ABCD$ 是⊙O 的内接正方形，$BC/\!/QR$，则 $\angle AOQ$ 等于（　　）

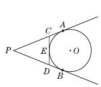
A. 60°　　B. 65°　　C. 72°　　D. 75°

8. 秋千拉绳长 3 m，静止时踩板离地面 0.5 m，某小朋友荡秋千时，秋千在最高处踩板离地面 2 m（左右对称），如图，则该秋千所荡过的圆弧长为（　　）

A. π m　　B. 2π m　　C. $\frac{4}{3}\pi$ m　　D. $\frac{4}{3}$ m


（第 7 题）


（第 8 题）


（第 9 题）


（第 10 题）

9. 如图，PA，PB 切⊙O 于 A，B 两点，CD 切⊙O 于点 E，交 PA，PB 于点 C 和点 D. 若△PCD 的周长为⊙O 半径的 3 倍，则 $\tan\angle APB$ 等于（　　）

A. $\frac{12}{5}$　　B. $\frac{3}{5}\sqrt{13}$　　C. $\frac{2}{3}\sqrt{13}$　　D. $\frac{5}{12}$

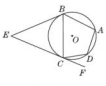
10. 如图，在平面直角坐标系中，⊙P 的圆心坐标是 $(3,a)$ $(a>3)$，半径为 3，函数 $y=x$ 的图象被⊙P 截得的弦 AB 的长为 $4\sqrt{2}$，则 a 的值是（　　）

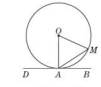
A. 4　　B. $3+\sqrt{2}$　　C. $3\sqrt{2}$　　D. $3+\sqrt{3}$

二、填空题（每题 3 分，共 24 分）

11. 如图，圆锥的底面半径 $r=3$，高 $h=4$，则圆锥的侧面积是_____.


（第 11 题）


（第 12 题）


（第 13 题）


（第 14 题）

12. 如图，EB，EC 是⊙O 的两条切线，B，C 是切点，A，D 是⊙O 上的两点，如果 $\angle E=46°$，$\angle DCF=32°$，那么 $\angle A=$_____.

13. 如图，DB 切⊙O 于点 A，$\angle AOM=66°$，则 $\angle DAM=$_____.

14. 如图，AB，CD 是⊙O 的弦，$AB\perp CD$，BE 是⊙O 的直径，若 $AC=3$，则 $DE=$_____.

15. 如图，水平放置的圆柱形油槽的截面直径是 52 cm，装入油后，油深 CD 为 16 cm，那么油面宽度 $AB=$_____.


（第 15 题）


（第 16 题）


（第 17 题）


（第 18 题）

16. 如图，在扇形 AOB 中，$\angle AOB=90°$，点 C 为 OA 的中点，$CE\perp OA$ 交 $\overset{\frown}{AB}$ 于点 E，以点 O 为圆心，OC 的长为半径作 $\overset{\frown}{CD}$ 交 OB 于点 D. 若 $OA=2$，则阴影部分的面积为_____.

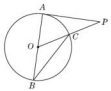
17. 如图，在△ABC 中，$\angle C=90°$，$AC=3$，$AB=5$，D 为 BC 边的中点，以 AD 上一点 O 为圆心的⊙O 和 AB，BC 均相切，则⊙O 的半径为_____.

18. 如图，在⊙O 中，C，D 分别是 OA，OB 的中点，$MC\perp AB$，$ND\perp AB$，M，N 在⊙O 上. 下列结论：①$MC=ND$；②$\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{MN}=\overset{\frown}{NB}$；③四边形 $MCDN$ 是正方形；④$MN=\frac{1}{2}AB$，其中正确的结论有_____.（填序号）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三、**解答题**（19题6分，其余每题12分，共66分）

19. 如图，AB 是⊙O 的直径，PA 切⊙O 于点 A，OP 交⊙O 于点 C，连接 BC，若$\angle P=30°$，求$\angle B$ 的度数.



（第19题）

20. 如图，AB 是⊙O 的直径，BD 是⊙O 的弦，延长 BD 到点 C，使 $DC=BD$，连接 AC，过点 D 作 $DE\perp AC$，垂足为 E.

（1）求证：$AB=AC$；

（2）若⊙O 的半径为4，$\angle BAC=60°$，求 DE 的长.



（第20题）

21. 如图，点 P 在 y 轴上，⊙P 交 x 轴于 A，B 两点，连接 BP 并延长交⊙P 于点 C，过点 C 的直线 $y=2x+b$ 交 x 轴于点 D，且⊙P 的半径为$\sqrt{5}$，$AB=4$.

（1）求点 B，P，C 的坐标；

（2）求证：CD 是⊙P 的切线.



（第21题）

22. 如图，CB 和 CD 与⊙O 相切于 B，D 两点，A 为圆周上一点，且$\angle 1:\angle 2:\angle 3=1:2:3$，$BC=3$，求扇形 AOD 的面积 S.

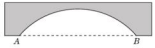


（第22题）

23. 如图，一拱形公路桥，圆弧形桥拱的水面跨度 $AB=80$ m，桥拱到水面的最大高度为20 m.

（1）求桥拱的半径；

（2）现有一艘宽60 m，顶部截面为长方形且高出水面9 m的轮船要经过这座拱桥，这艘轮船能顺利通过吗？请说明理由.



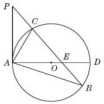
（第23题）

24. 如图，在△ABP 中，C 是 BP 边上一点，$\angle PAC=\angle PBA$，⊙O 是△ABC 的外接圆，AD 是⊙O 的直径，且交 BP 于点 E.

（1）求证：PA 是⊙O 的切线；

（2）过点 C 作 $CF\perp AD$，垂足为 F，延长 CF 交 AB 于点 G，若 $AG\cdot AB=12$，求 AC 的长；

（3）在满足（2）的条件下，若 $AF:FD=1:2$，$GF=1$，求⊙O 的半径及 $\sin\angle ACE$ 的值.



（第24题）

荣德基 品质教辅

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第六章达标检测卷

（120 分，90 分钟）

题　号	一	二	三	总　分
得　分				

姓名　学号　班级　学校

一、选择题（每题 3 分，共 30 分）

1. 小明制作了十张卡片，上面分别标有 1～10 这十个数. 从这十张卡片中随机抽取一张恰好能被 4 整除的概率是（　　）

A. $\frac{1}{10}$　　B. $\frac{2}{5}$　　C. $\frac{1}{5}$　　D. $\frac{3}{10}$

2. 从一定高度抛一个瓶盖 100 次，落地后盖面朝下的有 55 次，则下列说法中错误的是（　　）

A. 盖面朝下的频数是 55　　B. 盖面朝下的频率是 0.55

C. 盖面朝下的概率不一定是 0.55　　D. 同样的试验做 200 次，落地后盖面朝下的有 110 次

3. 在四张背面完全相同的卡片上分别印着等腰三角形、平行四边形、菱形、圆的图案，现将印有图案的一面朝下，混合后从中随机抽取两张，则抽取卡片上印有图案都是轴对称图形的概率是（　　）

A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{2}$

4. 如果手头没有硬币，下列方法可以模拟掷硬币试验的是（　　）

A. 掷一个瓶盖，盖面朝上代表正面，盖面朝下代表反面

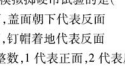
B. 掷一枚图钉，钉尖着地代表正面，钉帽着地代表反面

C. 用计算器产生 1 和 2 两个随机整数，1 代表正面，2 代表反面

D. 转动如图所示的转盘（转盘被分成 3 等份），指针指向“红”代表正面，指针指向“蓝”代表反面



（第 4 题）



（第 5 题）

（第 7 题）

5. 某展览大厅有 2 个入口和 2 个出口，其示意图如图所示，参观者可从任意一个入口进入，参观结束后可从任意一个出口离开. 小明从入口 1 进入并从出口 A 离开的概率是（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{6}$

6. 王阿姨在网上看中了一款防雾霾口罩，付款时需要输入 11 位的支付密码，她只记得密码的前 8 位，后 3 位由 1，7，9 这 3 个数字组成，但具体顺序忘记了，她第一次就输入正确密码的概率是（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{6}$　　D. $\frac{1}{8}$

7. 如图是两个可以自由转动的转盘，转盘各被等分成三个扇形，并分别标上 1，2，3 和 6，7，8 这 6 个数字，如果同时转动两个转盘各一次（指针落在等分线上重转），转盘停止后，指针指向的数字和为偶数的概率是（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{2}{9}$　　C. $\frac{4}{9}$　　D. $\frac{1}{3}$

8. 在一个不透明的盒子里装有颜色不同（其余均相同）的黑、白两种球共 40 个. 小亮做摸球试验，他将盒子内的球搅匀后从中随机摸出一个球，记下颜色后放回，不断重复上述过程，对试验结果进行统计后，小亮得到下表中的数据，则下列结论中正确的是（　　）

摸球的次数 n	100	200	300	500	800	1 000	1 500
摸到白球的次数 m	70	128	171	302	481	599	903
摸到白球的频率 $\frac{m}{n}$	0.70	0.64	0.57	0.604	0.601	0.599	0.602

A. n 越大，摸到白球的概率越接近 0.6　　B. 当 $n=2\,000$ 时，摸到白球的次数 $m=1\,200$

C. 当 n 很大时，摸到白球的频率将会稳定在 0.6 附近　D. 这个盒子中约有 28 个白球

9. 一个盒子里有完全相同的三个小球，小球上分别标有数 −1，1，2. 随机摸出一个小球（不放回），其数记为 p，再随机摸出另一个小球，其数记为 q，则满足关于 x 的方程 $x^2-px+q=0$ 有实数根的概率是（　　）

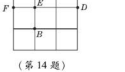
A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{5}{6}$

10. 如图，已知点 A,B,C,D,E,F 是边长为 1 的正六边形的顶点，连接任意两点均可得到一条线段，在连接两点所得的所有线段中任取一条线段，取到长度为 $\sqrt{3}$ 的线段的概率为（　　）

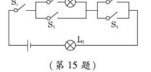
A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{2}{5}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{5}{9}$



（第 10 题）



（第 14 题）



（第 15 题）

二、填空题（每题 3 分，共 24 分）

11. 随机掷一枚质地均匀的硬币两次，落地后至少有一次正面朝上的概率是_____.

12. 在一个不透明的袋中装有除颜色外其余均相同的 n 个小球，其中有 5 个黑球，从袋中随机摸出一球，记下其颜色，这称为一次摸球试验，之后把它放回袋中，搅匀后，再继续摸出一球. 以下是利用计算机模拟的摸球试验次数与摸出黑球次数的列表，根据列表，可以估计出 $n=$_____.

摸球试验次数	100	1 000	5 000	10 000	50 000	100 000
摸出黑球次数	46	487	2 506	5 008	24 996	50 007

13. 从 $\sqrt{8}$，$\sqrt{12}$，$\sqrt{18}$，$\sqrt{32}$ 中随机抽取一个根式，化简后与 $\sqrt{2}$ 的被开方数相同的概率是_____.

14. 如图，在 3×3 的方格中，A,B,C,D,E,F 分别位于格点上，从 C,D,E,F 四点中任取一点，与点 A,B 为顶点作三角形，则所作三角形为等腰三角形的概率是_____.

15. 如图，随机地闭合开关 S_1,S_2,S_3,S_4,S_5 中的三个，能够使灯泡 L_1,L_2 同时发光的概率是_____.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

16. 某市举办“体彩杯”中学生篮球赛，初中男子组有市区学校的 A，B，C 三个队和县区学校的 D，E，F，G，H 五个队. 如果从 A，B，D，E 四个队与 C，F，G，H 四个队中各抽取一个队进行首场比赛，那么参加首场比赛的两个队都来自县区学校的概率是_____.

17. 在一个暗盒中放有若干个白色球和 2 个黑色球（这些球除颜色外无其他区别），若从中随机取出 1 个球是白色球的概率是$\frac{3}{5}$，则在暗盒中随机取出 2 个球都是白色球的概率是_____.

18. 从 -1，1，2 这三个数中随机抽取一个数，记为 a，那么，使关于 x 的一次函数 $y=2x+a$ 的图象与 x 轴、y 轴围成的三角形的面积为$\frac{1}{4}$，且使关于 x 的不等式组$\begin{cases}x+2\leqslant a,\\1-x\leqslant 2a\end{cases}$有解的概率为_____.

三、解答题（19 题 8 分，20 题 10 分，其余每题 12 分，共 66 分）

19. 小明和小林是某中学九年级的同班同学，在四月份举行的自主招生考试中，他俩都被同一所高中提前录取，并将被编入 A，B，C 三个班，他俩希望能再次成为同班同学.

（1）请你用画树状图法或列表法求出所有可能的结果；

（2）求两人再次成为同班同学的概率.

20. 一个瓶中装有一些幸运星，为了估计这个瓶中幸运星的颗数，小王是这样做的：先从瓶中取出 20 颗幸运星做上记号，然后把这些幸运星放回瓶中，充分摇匀，再从瓶中取出 30 颗幸运星，发现有 6 颗幸运星带有记号，请你帮小王估算出原来瓶中幸运星的颗数.

21. 某小区为了改善生态环境，促进生活垃圾的分类处理，将生活垃圾分为三类：厨余、可回收和其他，分别记为 a，b，c，并且设置了相应的垃圾箱：“厨余垃圾”箱、“可回收物”箱和“其他垃圾”箱，分别记为 A，B，C.

（1）若将三类垃圾随机投入三类垃圾箱，请用画树状图的方法求垃圾投放正确的概率；

（2）为调查居民生活垃圾分类投放情况，现随机抽取了该小区三类垃圾箱中总共 1 000 t 生活垃圾，数据统计如下（单位：t）：

	A	B	C
a	400	100	100
b	30	240	30
c	20	20	60

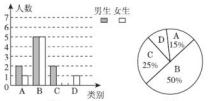
试估计“厨余垃圾”投放正确的概率.

22. 学校实施新课程改革以来，学生的学习能力有了很大的提高. 王老师为进一步了解本班学生自主学习、合作交流的现状，对该班部分学生进行调查，把调查结果分成四类（A：特别好，B：好，C：一般，D：较差）后，再将调查结果绘制成两幅不完整的统计图（如图①②）. 请根据统计图解答下列问题：

（1）本次调查中，王老师一共调查了_____名学生；

（2）将条形统计图补充完整；

（3）为了共同进步，王老师从被调查的 A 类和 D 类学生中分别选取一名学生进行“兵教兵”互助学习，请用列表或画树状图的方法求出恰好选中一名男生和一名女生的概率.

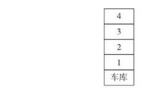


（第 22 题）

23. 小明、小亮、小芳和两个陌生人甲、乙同在如图所示的地下车库等电梯，已知两个陌生人到 1 至 4 层的任意一层出电梯，并设甲在 a 层出电梯，乙在 b 层出电梯.

（1）小明想知道甲、乙二人在同一层出电梯的概率，你能帮他求出来吗？

（2）小亮和小芳打赌：若甲、乙在同一层或相邻楼层出电梯，则小亮胜，否则小芳胜. 该游戏是否公平？若公平，请说明理由；若不公平，请修改游戏规则，使游戏公平.



（第 23 题）

24. 端午节吃粽子是中华民族的传统习俗，今年某商场销售甲厂家的高档、中档、低档三个品种及乙厂家的精装、简装两个品种的盒装粽子. 现需要在甲、乙两个厂家中各选购一个品种.

（1）写出所有选购方案；（利用树状图或表格求选购方案）

（2）如果（1）中各种选购方案被选中的可能性相同，那么甲厂家的高档粽子被选中的概率是多少？

（3）现某中学准备购买两个品种的粽子共 32 盒（价格如下表）发给学校的“留守儿童”，让他们过一个愉快的端午节，其中指定购买了甲厂家的高档粽子，再从乙厂家购买一个品种. 若恰好用了 1 200 元，则购买了多少盒甲厂家的高档粽子？

品种	高档	中档	低档	精装	简装
价格/（元/盒）	60	40	25	50	20

荣德基 品质教辅

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

期末达标检测卷

（120 分，90 分钟）

题　号	一	二	三	总　分
得　分				

姓名　学号　班级　学校

一、选择题（每题 3 分，共 30 分）

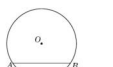
1. 下列结论正确的是(　　)

A. 长度相等的两条弧是等弧　　B. 半圆是弧

C. 相等的圆心角所对的弧相等　　D. 一条弦所对的所有的圆周角相等

2. 如图，在半径为 10 的⊙O 中，弦 AB 的长为 16，则这条弦的弦心距为(　　)

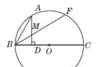
A. 6　　B. 8　　C. 10　　D. 12



（第 2 题）



（第 3 题）



（第 4 题）

3. 如图，在△ABC 中，$AB=10$，$AC=8$，$BC=6$，经过点 C 作与边 AB 相切的动圆，与 CB，CA 分别相交于点 E，F，则线段 EF 长度的最小值是(　　)

A. $4\sqrt{2}$　　B. 4.75　　C. 5　　D. 4.8

4. 如图，已知 BC 为⊙O 的直径，$AD\perp BC$，垂足为 D，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AF}$，$\angle ABF=30°$，则$\angle BAD$ 等于(　　)

A. 30°　　B. 45°　　C. 60°　　D. 22.5°

5. 一个盒子中装有标号为 1，2，3，4，5 的五个小球，这些球除标号外都相同，从中随机摸出两个小球，则摸出的小球标号之和大于 5 的概率为(　　)

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{2}{5}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{4}{5}$

6. 已知圆的半径为 6.5 cm，圆心到直线 l 的距离为 4.5 cm，那么这条直线和这个圆的公共点的个数是(　　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 无法确定

7. 在一次质检抽测中，随机抽取某摊位 20 袋食盐，测得各袋的质量分别为(单位：g)：

492	496	494	495	498	497	501	502	504	496
497	503	506	508	507	492	496	500	501	499

根据以上抽测结果，估计任买一袋该摊位的食盐，质量在 497.5 g～501.5 g 之间的概率为(　　)

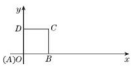
A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{3}{10}$　　D. $\frac{7}{20}$

8. 若圆锥的侧面积等于其底面积的 3 倍，则该圆锥侧面展开图所对应扇形圆心角的度数为(　　)

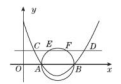
A. 60°　　B. 90°　　C. 120°　　D. 180°

9. 如图，在直角坐标系中放置一个边长为 1 的正方形 $ABCD$，将正方形 $ABCD$ 沿 x 轴的正方向无滑动地在 x 轴上滚动，当点 A 离开原点后第一次落在 x 轴上时，点 A 运动的路径与 x 轴围成的面积为(　　)

A. $\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\pi}{2}+1$　　C. $\pi+1$　　D. $\pi+\frac{1}{2}$



（第 9 题）



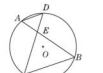
（第 10 题）

10. 如图，抛物线过点 $A(2,0)$，$B(6,0)$，$C(1,\sqrt{3})$，平行于 x 轴的直线 CD 交抛物线于点 C，D，以 AB 为直径的圆交直线 CD 于点 E，F，则 $CE+FD$ 的值是(　　)

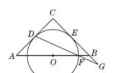
A. 2　　B. 4　　C. 3　　D. 6

二、填空题（每题 3 分，共 24 分）

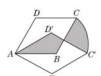
11. 如图，AB，CD 为⊙O 内两条相交的弦，交点为 E，且 $AB=CD$. 则以下结论：①$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$；②$AD/\!/BC$；③$AE:BE=1:2$；④△$ADE$∽△$BCE$. 其中不一定成立的是_____.（填序号）



（第 11 题）



（第 12 题）



（第 15 题）

12. 如图，在△ABC 中，$AC=BC=4$，$\angle C=90°$，O 是 AB 的中点，⊙O 与 AC，BC 分别相切于点 D，E，点 F 是⊙O 与 AB 的一个交点，连接 DF 并延长交 CB 的延长线于点 G，则 BG 的长是_____.

13. 一个口袋中有 4 个黑球和若干个白球，在不允许将球倒出来数的前提下，要估算白球的个数，小明从口袋中随机摸出一球，记下颜色，然后把它放回口袋中，摇匀后再随机摸出一球，记下颜色……不断重复上述过程. 他共摸了 100 次，其中 20 次摸到黑球，根据上述数据，小明可估计口袋中的白球有_____个.

14. 已知圆锥的侧面展开图的圆心角是 180°，底面积为 15 cm^2，则圆锥的侧面积为_____cm^2.

15. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，$AB=1$，$\angle BAD=60°$，把菱形 $ABCD$ 绕点 A 顺时针旋转 30°得到菱形 $AB'C'D'$，其中点 C 的运动路径为$\overset{\frown}{CC'}$，则图中阴影部分的面积为_____.

16. 从半径为 9 cm 的圆形纸片上剪去$\frac{1}{3}$圆周的一个扇形，将留下的扇形围成一个圆锥(接缝处不重叠)，那么这个圆锥的高为_____.

17. 淘淘和丽丽是非常要好的九年级学生，在物理、化学、生物实验技能考试中，考试科目要求三选一，并且采取抽签方式取得，那么他们两人都抽到物理实验的概率是_____.

18. 为了估计鱼塘中鱼的条数，养鱼者首先从鱼塘中捕获 30 条鱼，在每条鱼身上做好记号后，把这些鱼放归鱼塘，再从鱼塘中打捞 200 条鱼. 若在这 200 条鱼中有 5 条鱼是有记号的，则可估计鱼塘中有鱼____条.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三、**解答题**（19～21 题每题 10 分，其余每题 12 分，共 66 分）

19. 如图，点 A，B，C 是⊙O 上的三点，$AB \parallel OC$.

（1）求证：AC 平分 $\angle OAB$；

（2）过点 O 作 $OE \perp AB$ 于点 E，交 AC 于点 P. 若 $AB = 2$，$\angle AOE = 30°$，求 PE 的长.



（第 19 题）

20. 某射击运动员在同一条件下的射击成绩记录如下：

射击次数	10	20	30	40	50	60	80	100
射中 8 环以上的频数	6	17	25	31	39	49	65	80
射中 8 环以上的频率								

（1）计算表中相应的频率；（精确到 0.01）

（2）估计这名运动员射击一次时“射中 8 环以上”的概率.（精确到 0.1）

21. 如图，AB 是⊙O 的直径，AC 是弦，直线 EF 经过点 C，$AD \perp EF$ 于点 D，$\angle DAC = \angle BAC$.

（1）求证：EF 是⊙O 的切线；

（2）求证：$AC^2 = AD \cdot AB$；

（3）若⊙O 的半径为 2，$\angle ACD = 30°$，求图中阴影部分的面积.



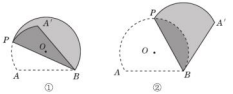
（第 21 题）

22. 图①和图②中，优弧 AB 所在⊙O 的半径为 2，$AB = 2\sqrt{3}$. 点 P 为优弧 AB 上一点（点 P 不与 A，B 重合），将图形沿 BP 折叠，得到点 A 的对称点 A'.

（1）点 O 到弦 AB 的距离是_____，当 BP 经过点 O 时，$\angle ABA' =$ _____；

（2）当 BA' 与⊙O 相切时，如图②，求折痕 BP 的长；

（3）若线段 BA' 与优弧 AB 只有一个公共点 B，设 $\angle ABP = \alpha$，确定 α 的取值范围.



（第 22 题）

23. 小明和小亮玩一个游戏：三张大小、质地都相同的卡片上分别标有数字 2，3，4（背面完全相同），现将标有数字的一面朝下，小明从中任意抽取一张，记下数字后放回洗匀，然后小亮从中任意抽取一张，计算小明和小亮抽得的两个数字之和，若和为奇数，则小明胜；若和为偶数，则小亮胜.

（1）请你用画树状图或列表的方法，求出这两数和为 6 的概率；

（2）你认为这个游戏规则对双方公平吗？说说你的理由.

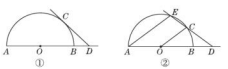
24. 已知 AB 是半圆 O 的直径，点 C 是半圆 O 上的动点，点 D 是线段 AB 延长线上的动点，在运动过程中，保持 $CD = OA$.

（1）当直线 CD 与半圆 O 相切时（如图①所示），求 $\angle ODC$ 的度数；

（2）当直线 CD 与半圆 O 相交时（如图②所示），设另一交点为 E，连接 AE，OC，若 $AE \parallel OC$.

①AE 与 OD 的大小有什么关系？为什么？

②求 $\angle ODC$ 的度数.



（第 24 题）

荣德基 品质教辅

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

正文练习答案

第五章 圆

1 圆

第 1 课时 圆的认识

1. B **点拨**：圆是由圆心、半径确定的，故 A 错误；平面上到定点的距离等于定长的所有点组成圆，故 C 错误；圆上任意一点到圆心的距离都相等，故 D 错误；只有 B 正确.

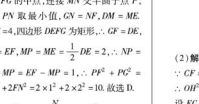
2. A **点拨**：平面内已知圆心与半径，可以确定唯一圆，故选 A.

3. B **4.** B **5.** B **6.** C **7.** C **8.** A **9.** A

10. D **点拨**：如图，设点 M 为 DE 的中点，点 N 为 FG 的中点，连接 MN 交半圆于点 P，此时 PN 取最小值，$GN=NF$，$DM=ME$.

$\because DE=4$，四边形 $DEFG$ 为矩形，$\therefore GF=DE$，

$MN=EF$，$MP=ME=\frac{1}{2}DE=2$，$\therefore NP=MN-MP=EF-MP=1$，$\therefore PF^2+PG^2=2PN^2+2FN^2=2\times1^2+2\times2^2=10$. 故选 D.



（第 10 题）

11. $30°$ 或 $110°$

12. **解**：(1) 点 C 在以 AB 为直径的圆上.

理由：如图，连接 MC，MD. 由折叠的性质知 $\angle DAC=\angle BAC$，$AD=AM$.

$\because AB//CD$，$\therefore\angle DCA=\angle BAC$.

$\therefore\angle DAC=\angle DCA$.

$\therefore AD=CD$. $\because AD=AM$，$\therefore CD=AM$，

$\therefore$ 四边形 $AMCD$ 是平行四边形，

$\therefore MC=AD$. $\because AM=BM$，$\therefore CD=BM$.

$\therefore$ 四边形 $BCDM$ 是平行四边形，

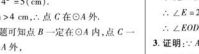
$\therefore MD=BC$. $\because AD=BC$，

$\therefore MC=MD=MA=MB$，

$\therefore$ 点 C 在以 AB 为直径的圆上.

(2) 由 (1) 得 $\triangle AMD$ 是等边三角形，如图，过点 D 作 $DE\perp AB$ 于点 E. 则 $AD=CD=AM=\frac{1}{2}AB=2$，$AE=\frac{1}{2}AM=1$. 由勾股定理得 $DE=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$，

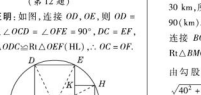
$\therefore$ 梯形 $ABCD$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times(2+4)\times\sqrt{3}=3\sqrt{3}$.



（第 12 题）

13. (1) **证明**：如图，连接 OD，OE，则 $OD=OE$. 又 $\angle OCD=\angle OFE=90°$，$DC=EF$，

$\therefore$ Rt$\triangle ODC\cong$Rt$\triangle OEF$(HL)，$\therefore OC=OF$.



（第 13 题）

(2) **解**：如图，连接 OH，

$\because CF=EF=2$，$OC=OF$，$\therefore OF=1$，

$\therefore OH^2=OK^2=OF^2+EF^2=1^2+2^2=5$.

设 $FG=GH=x$，

$\because OG^2+GH^2=OH^2$，

$\therefore(x+1)^2+x^2=5$，

$\therefore x^2+x-2=0$，

解得 $x_1=1$，$x_2=-2$（舍去）.

$\therefore S_{正方形FGHK}=1^2=1$.

14. **解**：(1) $\because AB=3$ cm <4 cm，

$\therefore$ 点 B 在 $\odot A$ 内.

$\because AD=4$ cm，$\therefore$ 点 D 在 $\odot A$ 上.

如图，连接 AC，$\because\angle B=90°$，

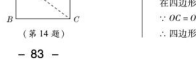
$\therefore AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$ (cm).

$\because 5$ cm >4 cm，$\therefore$ 点 C 在 $\odot A$ 外.

(2) 由题可知点 B 一定在 $\odot A$ 内，点 C 一定在 $\odot A$ 外，

$\because AB<r<AC$，即 3 cm $<r<5$ cm.

$\therefore$ 满足条件的 $\odot A$ 的半径 r 的取值范围是 3 cm $<r<5$ cm.



（第 14 题）

15. **解**：(1) 设跟车行驶了 0.5 h 的时候到达点 M，连接 BM. 由题意可知此时接收信号最强，$BM\perp AC$. 而 $AM=0.5\times60=30$(km)，$AB=50$ km，所以 $BM=40$ km.

即信号最强时班车到发射塔的距离是 40 km.

(2) 能. 理由：

因为 $AC=60\times2=120$ (km)，$AM=30$ km，所以 $MC=AC-AM=120-30=90$(km).

连接 BC. 因为 $BM=40$ km，所以在 Rt$\triangle BMC$ 中，

由勾股定理得 $BC=\sqrt{BM^2+MC^2}=\sqrt{40^2+90^2}=10\sqrt{97}$(km).

因为 $10\sqrt{97}<100$，

所以班车到 C 城后还能接收到信号.

第 2 课时 圆的半径的应用

1. **解**：$OE=OF$.

理由如下：连接 OA，OB，

$\because OA=OB$，

$\therefore\angle OAB=\angle OBA$，

即 $\angle OAE=\angle OBF$.

又 $\because AE=BF$，

$\therefore\triangle OAE\cong\triangle OBF$(SAS).

$\therefore OE=OF$.

2. **解**：(1) $\because AB=OC$，$OB=OC$，

$\therefore AB=OB$.

$\therefore\angle AOB=\angle A=20°$.

(2) $\because\angle OBE=\angle A+\angle AOB$，

$\therefore\angle OBE=2\angle A$.

$\because OB=OE$，$\therefore\angle OBE=\angle E$.

$\therefore\angle E=2\angle A$.

$\therefore\angle EOD=\angle A+\angle E=3\angle A=60°$.

3. **证明**：$\because AB$，CD 是 $\odot O$ 的两条直径，

$\therefore OA=OB=OC=OD$.

$\because E$，F 分别是 OA，OB 的中点，

$\therefore OE=\frac{1}{2}OA$，$OF=\frac{1}{2}OB$.

$\therefore OE=OF$.

在四边形 $CEDF$ 中，

$\because OC=OD$，$OE=OF$，

$\therefore$ 四边形 $CEDF$ 为平行四边形.

4. **解**：该渔船应按射线 AB 方向驶离危险区域.

理由：如图，连接 AB 并延长交 $\odot A$ 于点 C，在 $\odot A$ 上任取一点 D（D 异于 C，且异于 C 关于 A 的对称点），连接 BD，AD.

在 $\triangle ABD$ 中，$AB+BD>AD$.

$\because AD=AC=AB+BC$，

$\therefore AB+BD>AB+BC$. $\therefore BD>BC$.

当点 D 为 C 关于 A 的对称点时，

$BD=BA+AD=BA+AC>BC$，$\therefore BD>BC$.

$\therefore$ 按射线 AB 方向行驶路程最短，即能最快驶离危险区域.



（第 4 题）

点拨：本题运用了**建模思想**，将实际问题转化为数学问题. 其中圆内一点到圆上的最小距离为以圆心为端点，过该点的射线与圆相交的点与该点之间的线段长度.

2 圆的对称性

第 1 课时 圆的对称性

1. A **2.** D **3.** D **4.** $15°$

5. B **点拨**：连接 OB，OC，由半径相等得到 $\triangle OAB$，$\triangle OCD$ 都为等腰三角形，根据 $\angle A=65°$，$\angle D=60°$，求出 $\angle AOB$ 与 $\angle COD$ 的度数，根据 $\overset{\frown}{AB}$ 的度数确定出 $\angle AOD$ 的度数，进而求出 $\angle BOC$ 的度数，即可确定出 $\overset{\frown}{BC}$ 的度数.

6. D **7.** A **8.** A **9.** D **10.** D

11. C **点拨**：如图，连接 OC，OD.

$\because BC=CD=DA$，

$\therefore\angle COB=\angle COD=\angle DOA$，

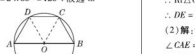
$\because\angle COB+\angle COD+\angle DOA=180°$，

$\therefore\angle COB=\angle COD=\angle DOA=60°$.

又 $\because OB=OC=OD=OA$，

$\therefore\triangle BOC$，$\triangle COD$，$\triangle DOA$ 均为等边三角形，

$\angle BCD=2\times60°=120°$. 故选 C.



（第 11 题）

12. **错解**：A 或 B

诊断：对于“在同圆或等圆中，如果两个圆心角、两条弧、两条弦、两个弦心距中有一组量相等，那么它们所对应的其余各组量都分别相等”这一性质中反映的各组量之间的关系判断不准，从而导致错误.

正解：C

13. **证明**：如图，连接 OC，

$\because\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CB}$，

$\therefore\angle AOC=\angle BOC$.

$\because CD\perp OA$ 于 D，$CE\perp OB$ 于 E，

$\therefore\angle CDO=\angle CEO=90°$.

在 $\triangle COD$ 与 $\triangle COE$ 中，

$\because\begin{cases}\angle DOC=\angle EOC,\\ \angle CDO=\angle CEO=90°,\\ CO=CO,\end{cases}$

$\therefore\triangle COD\cong\triangle COE$(AAS)，

$\therefore OD=OE$. $\because AO=BO$，$\therefore AD=BE$.

（第 13 题）

14. **证明**：连接 OA，OD. $\because\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$，

$\therefore\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BD}+\overset{\frown}{BC}$，即 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，

$\therefore AB=CD$. 又 $\because OE\perp AB$，$OF\perp CD$，垂足分别为 E，F，$\therefore AE=\frac{1}{2}AB$，$DF=\frac{1}{2}CD$，

$\therefore AE=DF$. 在 Rt$\triangle AOE$ 和 Rt$\triangle DOF$ 中，$OA=OD$，$AE=DF$，$\therefore$ Rt$\triangle AOE\cong$Rt$\triangle DOF$，$\therefore OE=OF$. $\because AB\perp CD$，$OE\perp AB$，$OF\perp OD$，$\therefore$ 四边形 $OEPF$ 是矩形. 又 $\because OE=OF$，$\therefore$ 四边形 $OEPF$ 是正方形.

15. (1) **证明**：$\because\overset{\frown}{CB}=\overset{\frown}{CD}$，

$\therefore CB=CD$，$\angle CAD=\angle CAB$，

又 $\because CF\perp AB$，$CE\perp AD$，

$\therefore CE=CF$.

在 Rt$\triangle CED$ 和 Rt$\triangle CFB$ 中，

$CD=CB$，$CE=CF$，

$\therefore$ Rt$\triangle CED\cong$Rt$\triangle CFB$，

$\therefore DE=BF$.

(2) **解**：$\because\angle CEA=\angle CFA=90°$，

$\angle CAE=\angle CAF$，$AC=AC$，

$\therefore\triangle CAE\cong\triangle CAF$.

$\therefore AB$ 是 $\odot O$ 的直径，$\therefore\angle ACB=90°$.

$\because\angle DAB=60°$，$AB=6$，

$\therefore\angle CAB=30°$，$\therefore BC=3$.

$\because CF\perp AB$ 于点 F，

$\therefore\angle FCB=30°$，

$\therefore CF=\frac{3}{2}\sqrt{3}$，$BF=\frac{3}{2}$.

$\therefore S_{\triangle ACD}=S_{\triangle ACE}-S_{\triangle CDE}=S_{\triangle ACF}-S_{\triangle CFB}=\frac{9}{4}\sqrt{3}$.

16. (1) **证明**：如图，连接 BD，CD.

$\because AB=AC$，$\therefore\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$.

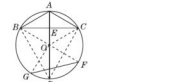
$\because AD$ 是 $\odot O$ 的直径，

$\therefore\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{CD}$. $\therefore BD=CD$.

又 $\because AD=AD$，$\therefore\triangle ABD\cong\triangle ACD$.

$\therefore\angle BAD=\angle CAD$.

$\therefore$ 直径 AD 平分 $\angle BAC$.



（第 16 题）

(2) **解**：如图，连接 BO，CO，GO，FO.

由 (1) 可知 $AD\perp BC$，

又 $\because$ 点 E 是 OA 的中点，

$\therefore BA=OB=AC=OC=OA$.

$\therefore\angle BOA=\angle AOC=60°$.

$\because\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{CD}$，

$\therefore\angle BOD=\angle COD=180°-\angle AOC=120°$.

又 $\because$ 点 F 是 $\overset{\frown}{CD}$ 的中点，

$\therefore\angle COF=\angle FOD=\frac{1}{2}\angle COD=60°$.

$\therefore\angle BOF=180°$.

$\therefore BF$ 是 $\odot O$ 的直径.

又 $\because$ 点 G 是 $\overset{\frown}{BF}$ 的中点，$\therefore\angle FOG=90°$.

$\because\odot O$ 的半径是 1，

$\therefore GF=\sqrt{2}OF=\sqrt{2}$.

第 2 课时 圆心角的度数与它所对弧的度数关系

1. A **2.** C

3. D **点拨**：连接 OE. $\because AE//CD$，

$\therefore\angle A=\angle AOC=50°$.

$\because OA=OE$，$\therefore\angle AEO=\angle A=50°$，

$\therefore\angle AOE=80°$，即弧 AE 的度数为 $80°$.

故选 D.

解题策略：解答本题的关键在于作出辅助线，联系条件和结论，从而达到解题的目的.

4. B **5.** C **6.** $56°$ **7.** A

8. **解**：如图，连接 AE，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

$\therefore\angle B=\angle D=50°$.

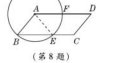
$\because AB=AE$，

$\therefore\angle AEB=\angle B=50°$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \angle BAE = 180° - \angle AEB - \angle B = 80°$.

$\therefore \overset{\frown}{BE}$的度数为 80°.



（第 8 题）

9. 解：$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$.

理由：如图，连接 OC，OD.

$\because OA = OB$，M，N 分别是 AO，BO 的中点，

$\therefore OM = ON$.

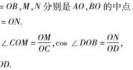
$\because \cos\angle COM = \frac{OM}{OC}$，$\cos\angle DOB = \frac{ON}{OD}$，

$OC = OD$.

$\therefore \cos\angle COM = \cos\angle DOB$.

$\because \angle COM$ 和 $\angle DOB$ 都是锐角.

$\therefore \angle COM = \angle DOB$. $\therefore \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$.



（第 9 题）

*3 垂径定理

1. B **2.** A **3.** B

4. C **点拨**：如图，过点 O 作 $OF \perp CD$ 于点 F，$OG \perp AB$ 于点 G，连接 OB，OD，OE.



（第 4 题）

则 $CF = DF$，$AG = BG = \frac{1}{2}AB = 3$，

$\therefore EG = AG - AE = 3 - 1 = 2$.

在 Rt △BOG 中，$OG = \sqrt{OB^2 - BG^2} = \sqrt{(\sqrt{13})^2 - 3^2} = 2$，

$\therefore EG = OG$.

$\therefore \angle OEG = 45°$，$OE = \sqrt{2}OG = 2\sqrt{2}$.

$\because \angle DEB = 75°$，$\therefore \angle OEF = 30°$.

$\therefore OF = \frac{1}{2}OE = \sqrt{2}$.

在 Rt △ODF 中，$DF = \sqrt{OD^2 - OF^2} = \sqrt{(\sqrt{13})^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{11}$，

$\therefore CD = 2DF = 2\sqrt{11}$.

5. D **6.** $\frac{1}{2}$ **7.** A **8.** D

9. C **点拨**：设弓形最高点为 C，OC 与 AB 交于点 D. $\because OB = 13$ cm，$CD = 8$ cm，$\therefore OD = OC - CD = 5$ cm. 在 Rt △BOD 中，$BD = \sqrt{OB^2 - OD^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$（cm），$\therefore AB = 2BD = 24$ cm.

10. C

11.（1）**证明**：如图，过点 O 作 $OE \perp AB$ 于点 E，则 $CE = DE$，$AE = BE$.

$\therefore AE - CE = BE - DE$，

即 $AC = BD$.

（2）**解**：如图，连接 OA，OC，由（1）可知，$OE \perp AB$ 且 $OE \perp CD$，

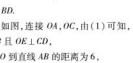
$\because$ 圆心 O 到直线 AB 的距离为 6，

$\therefore OE = 6$.

$\therefore CE = \sqrt{OC^2 - OE^2} = \sqrt{8^2 - 6^2} = 2\sqrt{7}$，

$AE = \sqrt{OA^2 - OE^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$.

$\therefore AC = AE - CE = 8 - 2\sqrt{7}$.



（第 11 题）

12. **解**：（1）如图，连接 OB.

$\because OD$ 过圆心，且 D 是弦 BC 的中点，

$\therefore OD \perp BC$，$BD = \frac{1}{2}BC = 6$.

在 Rt △BOD 中，由勾股定理得 $OD^2 + BD^2 = BO^2$，

$\therefore OD^2 + 6^2 = 8^2$. $\therefore OD = 2\sqrt{7}$.



（第 12 题）

（2）设 $BE = x$，则 $EO = \sqrt{2}x$，$ED = 6 - x$.

在 Rt △EOD 中，

由勾股定理得 $OD^2 + ED^2 = EO^2$，

$\therefore (2\sqrt{7})^2 + (6 - x)^2 = (\sqrt{2}x)^2$.

解得 $x_1 = -16$（舍去），$x_2 = 4$.

$\therefore ED = 2$.

13.（1）**解**：$\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径，且 $AB = 10$，

$\therefore AO = OC = 5$.

$\because CD$ 为 $\odot O$ 的弦，

且 $CD \perp AB$，$CD = 6$，$\therefore CE = 3$.

在 Rt △OCE 中，

$OE = \sqrt{OC^2 - CE^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$.

（2）**证明**：$\because CP$ 平分 $\angle OCD$，

$\therefore \angle OCP = \angle DCP$. $\because OC = OP$，

$\therefore \angle OCP = \angle OPC$.

$\therefore \angle DCP = \angle OPC$. $\therefore OP // CD$.

14. **解**：（1）如图，设圆心为点 O，连接 OB，OA，设 OA 交线段 BC 于点 D，

$\because AB = AC$，

$\therefore \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC}$，$\therefore OA \perp BC$，

$\therefore BD = DC = \frac{1}{2}BC = 60$（m）.

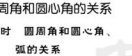
设 $OB = x$ m，$\because DA = 4$ m，

在 Rt △BDO 中，$OB^2 = OD^2 + BD^2$.

$\therefore x^2 = (x - 4)^2 + 60^2$.

解得 $x = 452$.

$\therefore$ 人工湖的半径为 452 m.



（第 14 题）

（2）这样的 P 点有 2 处，过点 B 或点 C 作 BC 的垂线交圆于一点，此点即为 P 点.

4 圆周角和圆心角的关系

第 1 课时 圆周角和圆心角、弧的关系

1. C

2. 4；$\angle C$ 与 $\angle D$；$\angle A$ 与 $\angle B$

3. B **4.** D

5. A **点拨**：连接 OC，根据垂径定理知圆心 O 到弦 CD 的距离为 OE 的长度，由圆周角定理知 $\angle COB = 2\angle CDB = 60°$，已知半径 OC 的长，即可在 Rt △OCE 中求出 OE 的长度.

6. A **点拨**：$\because \angle BFC = 20°$，

$\therefore \angle BAC = 2\angle BFC = 40°$.

$\because AB = AC$，

$\therefore \angle ABC = \angle ACB = \frac{180° - 40°}{2} = 70°$.

又 $\because EF$ 是线段 AB 的垂直平分线，

$\therefore AD = BD$，

$\therefore \angle A = \angle ABD = 40°$，

$\therefore \angle DBC = \angle ABC - \angle ABD = 70° - 40° = 30°$.

故选 A.

7. B **8.** D **9.** B **10.** B

11. C **点拨**：因为直径 AB 垂直于弦 CD，所以 $CE = DE$.

因为 $\angle A = 22.5°$，所以 $\angle COE = 45°$.

因为 $OC = 4$，由勾股定理得 $CE = 2\sqrt{2}$，

所以 $CD = 4\sqrt{2}$，故选 C.

本题容易忽视勾股定理的应用而致错.

12. **证明**：连接 AC，因为圆周角 $\angle BAC$ 与圆心角 $\angle BOC$ 同是 $\overset{\frown}{BC}$所对的角，

所以 $\angle BOC = 2\angle BAC$.

因为圆周角 $\angle ACD$ 与圆心角 $\angle AOD$ 同是 $\overset{\frown}{AD}$所对的角，

所以 $\angle AOD = 2\angle ACD$.

在 Rt △ACE 中，$\angle EAC + \angle ACE = 90°$，

所以 $\angle BOC + \angle AOD = 2\angle EAC + 2\angle ACE = 2(\angle EAC + \angle ACE) = 2 \times 90° = 180°$.

点拨：利用圆周角定理可使问题转化，如本题中，利用圆周角定理，可把证明“$\angle BOC + \angle AOD = 180°$”转化为证明“$\angle EAC + \angle ACE = 90°$”，而要证明后者，利用“直角三角形的两锐角互余”即可轻松解决.

13. **证明**：（1）$\because AB = CD$，

$\therefore \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$，即 $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{AC}$.

$\therefore \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC}$.

（2）$\because \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC}$，$\therefore AD = BC$.

$\because \angle ADE = \angle CBE$，$\angle DAE = \angle BCE$，

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CBE$（ASA）.

$\therefore AE = CE$.

14.（1）**证明**：$\because \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CB}$，$\therefore \angle AEC = \angle CEB$.

$\because BE = EF$，$\therefore \angle BEF = \angle EFB$.

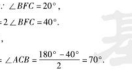
$\because \angle AEB$ 为 $\triangle BEF$ 的外角，

$\therefore \angle AEB = \angle EBF + \angle EFB$，

即 $2\angle CEB = 2\angle EBF$.

$\therefore \angle CEB = \angle EBF$，$\therefore CE // BF$.

（2）**解**：如图，设 AB 交 OC 于点 G.



（第 14 题）

$\because CE // BF$，$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EF}$.

$\because EA : EB = 3 : 1$，$BE = EF$，

$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EF} = \frac{AE}{BE} = 3$，

$\because DB = 2$，$\therefore AD = 6$.

$\because \angle AEC = \angle CEB$，$\angle A = \angle BCE$，

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle CBE$，

$\therefore \frac{AD}{CB} = \frac{AE}{CE}$，即 $\frac{6}{CB} = \frac{3}{\sqrt{5}}$. $\therefore CB = 2\sqrt{5}$.

$\because CO \perp AB$，$\therefore BG = (6 + 2) \div 2 = 4$.

$\therefore CG = \sqrt{BC^2 - BG^2} = 2$.

$\therefore S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}BD \cdot CG = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$.

15. **解**：（1）$\because PC$ 是 $\angle APB$ 的平分线，$\therefore \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC}$，$\therefore \angle APC = \angle CAB = 30°$，$C$ 为 $\overset{\frown}{AB}$的中点，因此 $\triangle ABC$ 的面积为定值，要使四边形 $PACB$ 的面积最大，需使 $\triangle PAB$ 的面积最大，此时 PC 是 $\odot O$ 的直径. 连接 PO 并延长交 AB 于点 D，则 $PD \perp AB$，且直线 PO 过点 C.

$\because \angle APC = 30°$，

$\therefore \overset{\frown}{AC}$所对的圆心角是 60°，

$\therefore \overset{\frown}{AP}$所对的圆心角是 120°，

$\therefore \angle ACP = \frac{1}{2} \times 120° = 60°$.

$\therefore$ 在 △ACP 中，$\angle PAC = 180° - \angle APC - \angle ACP = 90°$.

在 Rt △PAC 中，$\angle APC = 30°$，$AP = PB = AB = \sqrt{3}$，$\therefore PC = \frac{AP}{\cos 30°} = \sqrt{3} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = 2$.

$\therefore S_{\text{四边形}PACB} = 2S_{\triangle ACP} = \frac{1}{2}PC \cdot AB = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}$.

（2）①当 $\angle PAC = 120°$ 时，四边形 $PACB$ 是梯形.

$\because PC$ 是 $\angle APB$ 的平分线，$\angle BAC = 30°$，

$\therefore \angle APC = \angle BPC = 30°$，

$\therefore \angle APB = 60°$.

当 $AC // PB$ 且 AP 与 BC 不平行时，四边形 $PACB$ 是梯形.

$\therefore \angle PAC + \angle APB = 180°$，

$\therefore \angle PAC = 120°$.

②当 $\angle PAC = 60°$ 时，四边形 $PACB$ 是梯形.

$\because \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC}$，$\therefore AC = BC$.

又 $\because \angle BAC = 30°$，$\therefore \angle ACB = 120°$.

当 $BC // AP$ 且 AC 与 PB 不平行时，四边形 $PACB$ 是梯形.

$\therefore \angle PAC + \angle ACB = 180°$，$\therefore \angle PAC = 60°$.

综上所述，当 $\angle PAC$ 为 120° 或 60° 时，四边形 $PACB$ 是梯形.

第 2 课时 圆周角和直径的关系

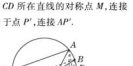
1. D **2.** B **3.** B **4.** C

5. D **点拨**：如图，连接 AD，AC，AG，CD. 由题意可知 OG 垂直平分 AD，$\therefore \triangle AOG$ 是直角三角形. 在 △ACD 中，易知 $\angle ACD = 90°$，$\angle ADC = 60°$，$\therefore AC = \sin\angle ADC \times AD = \sqrt{3}r$，$\therefore AC = \sqrt{3}r$. 在 Rt △$AOG$ 中，$OG = \sqrt{AG^2 - OA^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)^2 - r^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}r$.



（第 5 题）

6. 2 **点拨**：如图，根据轴对称性质，作出点 A 关于直径 CD 所在直线的对称点 M，连接 MB 交 CD 于点 P'，连接 AP'.



（第 6 题）

$\because PA + PB$ 的最小值 $= P'A + P'B = BM$，

$\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{MD}$.

作直径 BN，连接 MN.

$\therefore \angle BMN = 90°$.

$\because \angle ACD = 20°$，点 B 为$\overset{\frown}{AD}$的中点，

$\therefore \overset{\frown}{BD}$所对的圆心角的度数为 20°，

$\overset{\frown}{AD}$与$\overset{\frown}{MD}$所对的圆心角的度数都为 40°.

$\therefore \overset{\frown}{MB}$所对的圆心角的度数为 60°.

$\therefore \angle MNB = 30°$.

$\therefore$ 在 Rt △BMN 中，

$BM = \frac{1}{2}BN = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2} \times 4 = 2$.

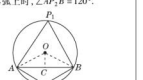
$\therefore PA + PB$ 的最小值为 2.

7. D **8.** B **9.** B

10. 60° 或 120° **点拨**：如图，当点 $P(P_1)$ 在弦 AB 所对的优弧上时，过点 O 作 $OC \perp AB$ 于点 C，连接 OA，OB. 由垂径定理可得 $AC = 2\sqrt{3}$，$\angle AOC = \angle BOC$. 在 Rt △OAC 中，$OC = \sqrt{OA^2 - AC^2} = 2 = \frac{1}{2}OA$，所以 $\angle OAC = 30°$，所以 $\angle AOB = 120°$，所以

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\angle AP_1B=60°$. 同理，当点 $P(P_2)$ 在弦 AB 所对的劣弧上时，$\angle AP_2B=120°$.



（第 10 题）

易错总结：对于“图形不明确型”问题，在解答时一般要进行分类讨论. 一条弦（非直径）所对的圆周角有两种情况：顶点在优弧上的圆周角和顶点在劣弧上的圆周角，解题时要分情况求解，否则容易漏解. 例如本题应分两种情况：点 P 在弦 AB 所对的优弧上和点 P 在弦 AB 所对的劣弧上.

11.（1）**证明**：如图，连接 AD.

$\because AB$ 是⊙O 的直径，

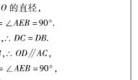
$\therefore \angle ADB=\angle AEB=90°$.

$\because AB=AC$，$\therefore DC=DB$.

$\because OA=OB$，$\therefore OD/\!/AC$，

$\therefore \angle OFB=\angle AEB=90°$，

$\therefore OD\perp BE$.



（第 11 题）

（2）**解**：设 $AE=x$，

$\because OD\perp BE$，$\therefore FE=FB$，$\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{ED}$.

$\therefore BD=ED=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

$\because OF=\dfrac{1}{2}AE=\dfrac{1}{2}x$，

$\therefore DF=OD-OF=\dfrac{5}{4}-\dfrac{1}{2}x$.

在 Rt△DFB 中，$BF^2=DB^2-DF^2=\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{5}{4}-\dfrac{1}{2}x\right)^2$.

在 Rt△OFB 中，$BF^2=OB^2-OF^2=\left(\dfrac{5}{4}\right)^2-\left(\dfrac{1}{2}x\right)^2$.

$\therefore \left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{5}{4}-\dfrac{1}{2}x\right)^2=\left(\dfrac{5}{4}\right)^2-\left(\dfrac{1}{2}x\right)^2$.

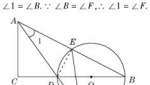
解得 $x=\dfrac{3}{2}$，即 $AE=\dfrac{3}{2}$.

12.（1）**证明**：如图，连接 DE，

$\because BD$ 是⊙O 的直径，$\therefore \angle DEB=90°$.

$\because E$ 是 AB 的中点，$\therefore DA=DB$，

$\therefore \angle 1=\angle B$. $\because \angle B=\angle F$，$\therefore \angle 1=\angle F$.



（第 12 题）

（2）**解**：$\because \angle 1=\angle F$，$\therefore AE=EF=2\sqrt{5}$，

$\therefore AB=2AE=4\sqrt{5}$.

在 Rt△ABC 中，$AC=AB\cdot\sin B=4$，

$\therefore BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=8$.

设 $CD=x$，则 $AD=BD=8-x$，

$\because AC^2+CD^2=AD^2$，

即 $4^2+x^2=(8-x)^2$，

$\therefore x=3$，即 $CD=3$.

13. 证明：（1）$\because AB$ 是⊙O 的直径，

$\therefore \angle ACB=90°$.

$\because \triangle AEF$ 为等边三角形，

$\therefore \angle CAB=\angle EFA=60°$.

$\therefore \angle B=90°-\angle CAB=30°$.

$\because \angle EFA=\angle B+\angle FDB$，

$\therefore \angle B=\angle FDB=30°$.

$\therefore \triangle DFB$ 是等腰三角形.

（2）如图，过点 A 作 $AM\perp DF$ 于点 M，设 $AF=2a$.



（第 13 题）

$\because \triangle AEF$ 是等边三角形，

$\therefore FM=EM=a$，$AM=\sqrt{3}a$，$\angle AEF=60°$.

在 Rt△DAM 中，$AD=\sqrt{7}AF=2\sqrt{7}a$，

$AM=\sqrt{3}a$，

$\therefore DM=\sqrt{AD^2-AM^2}=5a$.

$\therefore BF=DF=6a$.

$\therefore AB=AF+BF=8a$.

在 Rt△ABC 中，$\angle B=30°$，$\angle ACB=90°$，

$\therefore AC=4a$.

$\therefore CE=AC-AE=4a-2a=2a$.

$\therefore CE=EF$. $\therefore \angle ECF=\angle EFC$.

$\because \angle AEF=\angle ECF+\angle EFC=60°$，

$\therefore \angle CFE=30°$.

$\therefore \angle AFC=\angle AFE+\angle EFC=60°+30°=90°$.

$\therefore CF\perp AB$.

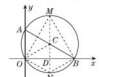
14. **解**：（1）$\because A(0,2)$，$B(2\sqrt{3},0)$，

$\therefore OA=2$，$OB=2\sqrt{3}$.

在 Rt△AOB 中，$AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}=4$.

如图，连接 OC，$\because \angle AOB=90°$，

$\therefore AB$ 为⊙C 的直径，点 C 为 AB 的中点.



（第 14 题）

$\therefore AC=OC=\dfrac{1}{2}AB=2=OA$.

$\therefore \triangle AOC$ 是等边三角形.

$\therefore \angle BAO=60°$. $\therefore \angle ABO=30°$.

（2）存在. 如图，作 OB 的垂直平分线 MN，交⊙C 于点 M，N，交 OB 于点 D，连接 OM，BM，ON，BN.

由垂经定理可得 MN 必过点 C，

即 MN 是⊙C 的直径.

$\because MN$ 垂直平分 OB，

$\therefore \triangle OBM$，$\triangle OBN$ 都是等腰三角形，

$\therefore$ 点 M，N 均符合点 P 的要求.

$\because MN$ 是⊙C 的直径，

$\therefore \angle MON=90°$.

$\because \angle BMO=\angle BAO=60°$，

$\therefore \triangle OBM$ 是等边三角形.

$\therefore \angle BOM=60°$. $\therefore \angle BON=30°$.

故存在符合条件的点 P，$\angle BOP$ 的度数为 60°或 30°.

5 确定圆的条件

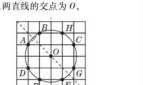
第 1 课时 确定圆的条件

1. C **点拨**：由不在同一条直线上的三点确定一个圆可知，过 A，B，D 三点，B，C，D 三点，A，C，D 三点可分别确定一个圆，故选 C.

2. B **点拨**：过点 A，B 且半径为 3 cm 的圆的圆心应当在线段 AB 的垂直平分线上，且到 A，B 两点的距离为 3 cm，这样的圆心有 2 个，故选 B.

3. B **4.** C

5. 5 **点拨**：如图，连接 AB，分别作 AB，AC 的中垂线，两直线的交点为 O，



（第 5 题）

以 O 为圆心，OA 为半径作圆，则⊙O 即为过 A，B，C 三点的外接圆，

由图可知，⊙O 还经过点 D，E，F，G，H 这 5 个格点，故答案为 5.

6. $\dfrac{25}{8}$ **7.** B **8.** C

9. B **点拨**：如图，过点 A 作 BC 边的垂线交 BC 于点 D，过点 B 作 AC 边的垂线交 AD 于点 O，则点 O 为圆形纸片的圆心.

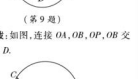
设⊙O 的半径为 R cm，由等边三角形的性质知 $\angle OBC=30°$，$BD=CD$.

$\because BD=OB\times\cos\angle OBC=\dfrac{\sqrt{3}}{2}R$（cm）.

$\therefore BC=2BD=\sqrt{3}R$（cm）.

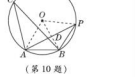
$\because BC=12$ cm，

$\therefore R=\dfrac{12}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}$. 故选 B.



（第 9 题）

10. D **点拨**：如图，连接 OA，OB，OP，OB 交 AP 于点 D.



（第 10 题）

$\because \angle C=30°$，

$\therefore \angle APB=\angle C=30°$.

$\because PB=AB$，$\therefore PA\perp=\angle APB=30°$.

$\therefore \angle ABP=120°$.

$\because PB=AB$，

$\therefore OB\perp AP$，$AD=PD$.

$\therefore \angle OBP=\angle OBA=60°$.

$\because OB=OA$，$\therefore \triangle AOB$ 是等边三角形，

$\therefore AB=OA=5$. $\therefore PB=AB=5$.

在 Rt△PBD 中，$PD=\cos 30°\cdot PB=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times5=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore AP=2PD=5\sqrt{3}$，故选 D.

11. C **点拨**：由题意可得，存在两种情况，当△ABC 为钝角三角形时，如图中的△A_1BC，

当△ABC 为锐角三角形时，如图中的△A_2BC.

连接 A_1A_2，交 BC 于 D.

$\because A_1B=A_1C$，$A_2B=A_2C$，

$\therefore A_1A_2$ 垂直平分 BC. $\therefore A_1A_2$ 为⊙O 的直径，$BD=CD=1$. $\because \angle BOC=60°$，$OB=OC$，

$\therefore \triangle OBC$ 为等边三角形. $\therefore OB=OC=BC=2$.

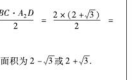
$\therefore OD=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$.

$\therefore S_{\triangle A_1BC}=\dfrac{BC\cdot A_1D}{2}=\dfrac{2\times(2-\sqrt{3})}{2}=2-\sqrt{3}$，

$S_{\triangle A_2BC}=\dfrac{BC\cdot A_2D}{2}=\dfrac{2\times(2+\sqrt{3})}{2}=2+\sqrt{3}$.

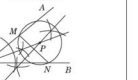
$\therefore \triangle ABC$ 的面积为 $2-\sqrt{3}$ 或 $2+\sqrt{3}$.

故选 C.



（第 11 题）

12. **解**：如图，⊙P 为所求作的圆.



（第 12 题）

13.（1）**证明**：$\because AD$ 平分 $\angle BAC$，BE 平分 $\angle ABC$，

$\therefore \angle ABE=\angle CBE$，$\angle BAE=\angle CAD$，

$\therefore \overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{CD}$，$\therefore \angle DBC=\angle BAE$.

$\because \angle DBE=\angle CBE+\angle DBC$，

$\angle DEB=\angle ABE+\angle BAE$，

$\therefore \angle DBE=\angle DEB$，$\therefore DE=DB$.

（2）**解**：连接 CD，如图所示.

$\because AD$ 平分 $\angle BAC$，

$\therefore \angle BAD=\angle CAD$，

$\therefore \overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{CD}$，$\therefore CD=BD=4$.



（第 13 题）

$\because \angle BAC=90°$，$\therefore BC$ 是直径，

$\therefore \angle BDC=90°$，

$\therefore BC=\sqrt{BD^2+CD^2}=4\sqrt{2}$，

$\therefore \triangle ABC$ 的外接圆的半径 $=\dfrac{1}{2}\times4\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.

14.（1）**证明**：$\because AE$ 是⊙O 的直径，

$\therefore \angle ABE=90°$.

$\because AD$ 是边 BC 上的高，

$\therefore \angle ADC=90°$. $\therefore \angle ADC=\angle ABE$.

$\because E$ 与 C 均是 $\overset{\frown}{AB}$ 所对的圆周角，

$\therefore E=\angle C$. $\therefore \triangle ABE\backsim\triangle ADC$.

（2）**解**：由（1）知 $\triangle ABE\backsim\triangle ADC$，

$\therefore \dfrac{AB}{AD}=\dfrac{BE}{DC}$.

又 $\because AB=2BE=4DC=8$，

$\therefore AD=4$，$DC=2$.

$\therefore \triangle ADC$ 的面积为 4.

解题归纳：在解与三角形与外接圆有关的题目时要注意运用直径所对的圆周角是直角及同弧所对的圆周角相等这两个性质.

15.（1）**证明**：$\because AB=AC$，$\angle BAC=90°$，

$\therefore \angle C=\angle ABC=45°$.

$\therefore \angle AEP=\angle ABP=45°$.

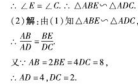
$\because PE$ 是⊙O 的直径，$\therefore \angle PAE=90°$，

$\therefore \angle APE=\angle AEP=45°$.

$\therefore AP=AE$. $\therefore \triangle APE$ 是等腰直角三角形.

（2）**解**：如图，作 $PM\perp AC$ 于 M，$PN\perp AB$ 于 N，则四边形 $PMAN$ 是矩形，

$\therefore PM=AN$，易知 $\triangle PCM$，$\triangle PNB$ 都是等腰直角三角形.



（第 15 题）

$\therefore PC=\sqrt{2}PM$，$PB=\sqrt{2}PN$.

$\because PC^2+PB^2=2(PM^2+PN^2)=2(AN^2+PN^2)=2PA^2=PE^2=2^2=4$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

16. **证明**：∵ AB 是直径，∴ $\angle ACB=90°$.

∵ $AB\perp CE$，AB 是直径，$\therefore \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AE}$.

又∵ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CD}$，$\therefore \overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{AE}$.

∴ $\angle ACP=\angle CAP$.

∴ $AP=PC$. 又∠QCP+∠ACP=∠CAP+∠CQP=90°，

∴ ∠PCQ=∠CQP. ∴ $CP=PQ$.

∴ $CP=AP=PQ$，即 P 是 Rt△ACQ 的外心.

17. (1) **证明**：∵ $\angle ABC=\angle DBE$，

∴ $\angle ABC+\angle CBD=\angle DBE+\angle CBD$，

∴ $\angle ABD=\angle CBE$.

在△ABD 与△CBE 中，

$$\because \begin{cases} BA=BC, \\ \angle ABD=\angle CBE, \\ BD=BE, \end{cases}$$

∴ △ABD≌△CBE.

(2) **解**：四边形 $BDCE$ 是菱形. 理由如下：

同(1)可证△ABD≌△CBE，∴ $AD=CE$.

∵ 点 D 是△ABC 的外接圆圆心，

∴ $DA=DB=DC$.

又∵ $BD=BE$，

∴ $BD=BE=CE=CD$，

∴ 四边形 $BDCE$ 是菱形.

18. (1) **证明**：∵ △ABC为等边三角形，

∴ $\angle ABC=\angle BAC=60°$.

∴ $\angle APC=\angle BPC=60°$.

∵ PC 为⊙O 的直径，

∴ $\angle PAC=\angle PBC=90°$.

∴ $\angle ACP=\angle BCP=30°$.

∴ $AP=BP=\frac{1}{2}PC$.

∴ $AP+BP=PC$.

(2) **解**：成立.

理由：如图，在 PC 上取一点 D，使 $PD=PA$，连接 AD.

∵ $\angle APD=\angle ABC=60°$，

∴ △APD 为等边三角形.

∴ $AD=AP$，∠PAD=60°.

又∵ ∠BAC=60°，∴ ∠PAB=∠DAC.

又∵ $AB=AC$，∴ △APB≌△ADC，

∴ $PB=DC$，

∴ $AP+BP=PD+DC=PC$.



(第 18 题)

19. (1) **证明**：如图，连接 OB.

∵ $HF\perp AB$，∴ $\overset{\frown}{BH}=\overset{\frown}{AH}$.

∴ $\angle AOH=\angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB$.

∵ ∠AOD+∠AOH=180°，

∠ECD+∠ACB=180°，

∴ ∠AOD=∠ECD.

又∵ ∠ODA=∠CDE，∴ ∠OAD=∠E.



(第 19 题)

(2) **解**：当 AB 是⊙O 的直径或 $AC\perp DF$ 时，△CDE 的外心在△CDE 的一边上.

理由：①∵ AB 是⊙O 的直径，

∴ $\angle ACB=90°$. ∴ ∠DCE=90°，

即△CDE 是直角三角形，

∴ △CDE 的外心在△CDE 的边 DE 上.

②当 A 运动到使 $AC\perp HF$ 时，△CDE 是直角三角形. 此时△CDE 的外心在△CDE 的边 CE 上.

综上所述，当 AB 是⊙O 的直径或 $AC\perp DF$ 时，△CDE 的外心在△CDE 的一边上.

解题归纳：解题关键是注意**数形结合思想**的应用，准确作出辅助线，利用圆心角转化角的关系.

第 2 课时　圆内接四边形

1. B　**2.** A　**3.** D　**4.** C　**5.** A　**6.** D

7. $2\sqrt{2}$　**8.** C　**9.** C

10. D　**点拨**：如图，连接 AC.

∵ BA 平分∠DBE，∴ ∠1=∠2.

∵ ∠1=∠CDA，∠2=∠3，

∴ ∠3=∠CDA. ∴ $AC=AD=5$.

∵ $AE\perp CB$，∴ ∠AEC=90°.

∴ $AE=\sqrt{AC^2-CE^2}=\sqrt{5^2-(\sqrt{13})^2}=2\sqrt{3}$.



(第 10 题)

11. 105°

12. D　**点拨**：点 B 可能在弦 AC 所对的优弧上，也可能在弦 AC 所对的劣弧上. 本题没有给出图形，其易错之处在于画图时因考虑不全而漏解.

13. **解**：由题意知四边形 $AOMB$ 为⊙C 的内接四边形，

∴ ∠BAO=180°−∠BMO=180°−120°=60°.

∴ ∠ABO=90°−∠BAO=90°−60°=30°.

在 Rt△ABO 中，易知 $OA=3$，得 $AB=2OA=6$.

∴ $AC=BC=3$，$OB=\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3}$.

∴ ⊙C 的半径为 3，点 B 的坐标是 $(-3\sqrt{3},0)$.

14. **证明**：(1) 四边形 $ABCD$ 内接于⊙O，

∵ ∠ADC=180°−∠B=130°.

∵ ∠ACD=25°，

∴ ∠DAC=180°−∠ADC−∠ACD=180°−130°−25°=25°.

∴ ∠DAC=∠ACD. ∴ $AD=CD$.

(2)∵ ∠BAC=∠BAD−∠DAC=65°−25°=40°，∠B=50°，

∴ ∠ACB=180°−∠B−∠BAC=180°−50°−40°=90°.

∴ AB 是⊙O 的直径.

15. (1) **证明**：∵ ∠A=60°，$AB=AC$，

∴ △ABC 是等边三角形，

∴ ∠B=∠C=60°.

∵ 四边形 $BDEC$ 是圆内接四边形，

∴ ∠CED=120°，

∴ ∠OED=∠CED−∠OEC=∠CED−∠C=120°−60°=60°.

∵ $OD=OE$，

∴ △ODE 是等边三角形.

(2) **解**：成立.

理由如下：

∵ ∠A=60°，∴ ∠B+∠C=120°.

∵ 四边形 $BDEC$ 是圆内接四边形，

∴ ∠CED+∠B=180°，

即∠OED+∠OEC+∠B=∠OED+∠C+∠B=∠OED+(∠B+∠C)=180°.

∴ ∠OED=180°−(∠B+∠C)=180°−120°=60°.

∵ $OD=OE$，∴ △ODE 是等边三角形.

16. (1) **证明**：连接 AD，AC，如图所示.

∵ ∠CKF 是圆内接四边形 $ADCK$ 的外角，

∴ ∠CKF=∠ADC.

∵ AB 为⊙O 的直径，$CD\perp AB$，

∴ $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{AC}$，则∠$ADC$=∠$ACD$=∠$AKD$，

∴ ∠AKD=∠CKF.

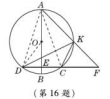
(2) **解**：连接 OD，如图所示，

∵ AB 为⊙O 的直径，$AB=10$，∴ $OD=5$.

∵ $CD\perp AB$，$CD=6$，∴ $DE=3$.

在 Rt△ODE 中，$OE=\sqrt{OD^2-DE^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$，∴ $AE=9$.

∵ ∠CKF=∠ADE，∴ tan ∠CKF=3.



(第 16 题)

阶段方法技巧训练（一）

专训 1

1. C

2. **证明**：因为 $AD=BC$，

所以根据在同圆或等圆中，相等的弦所对的劣弧相等，可得$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BC}$，

所以$\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{AC}$，即$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$.

3. **证明**：在⊙O 中，∠CAB，∠COB 分别是$\overset{\frown}{CB}$所对的圆周角和圆心角，

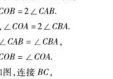
∴ ∠COB=2∠CAB.

同理，∠COA=2∠CBA.

又∵ ∠CAB=∠CBA，

∴ ∠COB=∠COA.

4. **解**：如图，连接 BC，



(第 4 题)

∵ AB 是⊙O 的直径，∴ ∠ACB=90°.

在 Rt△ABC 中，∠ABC=90°−∠BAC=90°−50°=40°.

又∵ △ADC，△ABC 是$\overset{\frown}{AC}$所对的圆周角，

∴ ∠ADC=∠ABC=40°.

5. **解**：$BD=DE=EC$. 理由：

如图，连接 OD，OE.



(第 5 题)

∵ $OB=OD=OE=OC$，∠B=∠C=60°，

∴ △OBD 与△COE 都是等边三角形.

∴ ∠BOD=∠COE=60°.

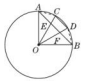
∴ ∠DOE=180°−∠BOD−∠COE=60°.

∴ ∠BOD=∠DOE=∠COE.

∴ $BD=DE=EC$.

点拨：本题利用“在同圆中，相等的圆心角所对的弦相等”去证明三条线段相等，因此，连接 OD，OE，构造弦所对的圆心角是解此题的关键.

6. **证明**：如图，连接 AC，BD.



(第 6 题)

∵ C，D 是$\overset{\frown}{AB}$的三等分点，

∴ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{BD}$.

∴ $AC=CD=BD$，

∠AOC=∠COD=∠BOD.

又∵ ∠AOB=90°，

∴ ∠AOC=∠COD=∠BOD=30°.

∵ $OA=OB$，∠AOB=90°，

∴ ∠OAB=∠OBA=45°.

∴ ∠AEC=∠AOC+∠OAB=75°.

∵ $OA=OC$，∠AOC=30°，

∴ $\angle ACE=\frac{1}{2}\times(180°-30°)=75°=\angle AEC$.

∴ $AE=AC$.

同理可得 $BF=BD$.

∴ $AE=BF=CD$.

专训 2

1. **解**：如图，连接 CM，作 $MN\perp CD$ 于 N，$CH\perp OA$ 于 H.

∵ 四边形 $OCDB$ 为平行四边形，B 点的坐标是(8，0)，

∴ $CD=OB=8$，$CN=MH$，$CH=MN$.

又∵ $MN\perp CD$，

∴ $CN=DN=\frac{1}{2}CD=4$.

∵ 点 A 的坐标为(10，0)，易知 $OA=10$，

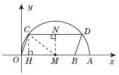
∴ $MO=MC=5$.

在 Rt△MNC 中，$MN=\sqrt{CM^2-CN^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$.

∴ $CH=3$.

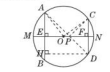
又 $OH=OM-MH=5-4=1$.

∴ 点 C 的坐标为(1，3).



(第 1 题)

2. **解**：如图，易知点 C 关于直线 MN 的对称点为点 D，连接 AD，交 MN 于点 P，连接 PC，易知此时 $PA+PC$ 最小且 $PA+PC=AD$. 过点 D 作 $DH\perp AB$ 于点 H，连接 OA，OC. 易知 $AE=4$，$CF=3$，由勾股定理得易得 $OE=3$，$OF=4$，∴ $DH=EF=7$，又 $AH=AE+EH=4+3=7$. ∴ $AD=7\sqrt{2}$. 即 $PA+PC$ 的最小值为 $7\sqrt{2}$.



(第 2 题)

点拨：本题运用了**转化思想**，将分散的线段转化为一条线段，然后运用勾股定理求出线段的长度.

3. **解**：(1) 连接 AC，

∵ CD 为⊙O 的直径，$CD\perp AB$，

∴ $AF=BF$.

∴ $AC=BC$. 延长 AE 交⊙O 于 G，则 AG 为⊙O 的直径，

又∠ABC，

∴ $BE=CE$.

∴ $AC=AB$.

∴ $AB=BC=2\sqrt{3}$.

(2) 由(1)知 $AB=BC=AC$，

∴ △ABC 为等边三角形.

∴ ∠BAC=60°.

∵ $AE\perp BC$，

∴ $\angle EAB=\angle CAE=\frac{1}{2}\angle CAB=30°$.

即∠OAF=30°，

在 Rt△OAF 中，$AF=\sqrt{3}$，

易得 $OA=2$，即⊙O 的半径为 2.

4. **解**：如图，AB 为水面位置，若 MN 为货船顶部位置，则 $MN/\!/AB$.

设圆弧形桥拱 AB 所在圆的圆心为 O，连接 OA，ON，作 $OC\perp AB$ 于点 D，交$\overset{\frown}{AB}$于点 C，交 MN 于点 H，则 $OC\perp MN$，

由垂径定理可知，D 为 AB 的中点，H 为 MN 的中点.

所以 $AD=3.6$ m，$NH=1.5$ m.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

设 $OA=r$ m，

则 $OD=OC-DC=(r-2.4)$ m.

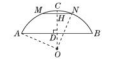
在 Rt△AOD 中，$OA^2=AD^2+OD^2$，

即 $r^2=3.6^2+(r-2.4)^2$，解得 $r=3.9$.

在 Rt△OHN 中，$OH=\sqrt{ON^2-NH^2}=\sqrt{3.9^2-1.5^2}=3.6$(m).

所以 $DH=OH-OD=3.6-(3.9-2.4)=2.1$(m).

因为 2.1 m＞2 m，所以此货船能顺利通过这座拱桥.



（第 4 题）

6 直线和圆的位置关系

第 1 课时 直线和圆的位置关系

1. C　**2.** A　**3.** A

4. D　**点拨**：因为垂线段最短，所以圆心到直线的距离小于或等于 3. 此时圆心到直线的距离与半径 3 的大小不确定，则直线和圆相交、相切都有可能. 故选 D.

5. A

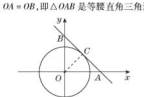
6. C　**点拨**：在坐标系中画出直线 $y=-x+\sqrt{2}$，易求出圆心 O 到直线 $y=-x+\sqrt{2}$ 的距离是 1，等于圆的半径 1，则直线和圆相切.

7. D　**点拨**：当直线 $y=-x+b$ 与圆相切，且经过第一、二、四象限时，如图所示.

在 $y=-x+b$ 中，令 $x=0$ 时，$y=b$，则与 y 轴的交点是 $B(0,b)$；

当 $y=0$ 时，$x=b$，则与 x 轴的交点是 $A(b,0)$，

则 $OA=OB$，即△OAB 是等腰直角三角形.



（第 7 题）

连接圆心 O 和切点 C，则 $OC=2$.

则 $OB=\sqrt{2}OC=2\sqrt{2}$，即 $b=2\sqrt{2}$；

同理，当直线 $y=-x+b$ 与圆相切，且经过第二、三、四象限时，$b=-2\sqrt{2}$.

∴ b 的取值范围是 $-2\sqrt{2}<b<2\sqrt{2}$.

故选 D.

8. B

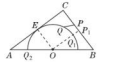
9. C　**点拨**：如图，设半圆 O 与 AC 相切于点 E，连接 OE，作 $OP_1\perp BC$，垂足为 P_1，交半圆 O 于点 Q_1，则 P_1Q_1 的长是 PQ 长的最小值. 易得 $OE=OQ_1=3$，$OP_1=4$.

所以 $P_1Q_1=OP_1-OQ_1=4-3=1$.

当点 Q 与点 Q_2 重合，点 P 与点 B 重合时，QP 的长最大. 易求得 $OB=5$，

所以 $BQ_2=3+5=8$，即 PQ 的长的最大值为 8，

所以 PQ 长的最大值与最小值的和为 $8+1=9$.



（第 9 题）

10. $\left(-\frac{7}{3},0\right)$或$\left(-\frac{17}{3},0\right)$

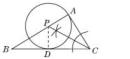
11. (1,1)或(3,1)或(2,0)或(2,2)

12. **解**：(1) 如图，$\odot P$ 为所求作的圆.

(2) BC 与 $\odot P$ 相切. 理由：

如图，过 P 作 $PD\perp BC$，交 BC 于点 D.

∵ CP 为∠ACB 的平分线，且 $PA\perp AC$，$PD\perp CB$，∴ $PD=PA$.



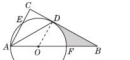
（第 12 题）

∴ 点 P 到 BC 的距离等于 $\odot P$ 的半径.

∴ BC 与 $\odot P$ 相切.

13. **解**：(1) BC 与 $\odot O$ 相切.

理由：如图，连接 OD.



（第 13 题）

∵ AD 是∠BAC 的平分线，

∴ ∠BAD=∠CAD.

又∵ $OD=OA$，

∴ ∠OAD=∠ODA.

∴ ∠CAD=∠ODA.

∴ $OD\parallel AC$.

∴ ∠ODB=∠C=90°.

∴ 圆心 O 到 BC 的距离等于 OD 的长度.

又∵ OD 为半径，

∴ BC 与 $\odot O$ 相切.

(2) 设 $OF=OD=x$，

则 $OB=OF+BF=x+2$，

根据勾股定理得 $OB^2=OD^2+BD^2$，

即 $(x+2)^2=x^2+12$.

解得 $x=2$. 即 $OD=OF=2$.

∴ $OB=2+2=4$.

∵ 在 Rt△ODB 中，$OD=\frac{1}{2}OB$，

∴ ∠B=30°.

∴ ∠DOB=60°.

∴ $S_{扇形DOF}=\frac{1}{6}\times\pi\times2^2=\frac{2\pi}{3}$.

则阴影部分的面积为 $S_{△ODB}-S_{扇形DOF}=\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3}=2\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3}$.

故阴影部分的面积为 $2\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3}$.

14. **解**：(1) 过 O 点作 $OF\perp AM$ 于 F，当 $OF=r=2$ 时，$\odot O$ 与 AM 相切，此时 $OA=4$，故 $x=AD=2$.

(2) 过 O 点作 $OG\perp AM$ 于 G.

∵ $OB=OC=2$，∠BOC=90°，

∴ $BC=2\sqrt{2}$.

∴ $BG=CG=\sqrt{2}$.

∴ $OG=\sqrt{2}$.

∵ ∠A=30°，∠AGO=90°，

∴ $OA=2\sqrt{2}$，

∴ $x=AD=2\sqrt{2}-2$.

15. (1) **解**：结论：DE 与半圆 O 相切.

理由：∵ $CD\perp AD$，

∴ ∠D=90°，

∵ 四边形 $OABC$ 是平行四边形，

∴ $AD\parallel OC$，

∴ ∠D+∠OCE=90°.

∴ $CO\perp DE$.

又∵ CO 为半径，

∴ DE 与半圆 O 相切.

(2) ①**证明**：如图，连接 OB.

∵ $OA=OC$，

∴ 四边形 $OABC$ 是菱形.

∴ $OA=OB=AB$.

∴ △AOB 为等边三角形.

∴ ∠BAO=60°.

∴ $AD\parallel OC$，

∴ ∠COF=∠BAO=60°.

∵ $OC=OF$，

∴ △OCF 是等边三角形，

∴ $CF=OC$.

②**解**：在 Rt△OCE 中，

∵ $OC=12$，∠COE=60°，∠OCE=90°，

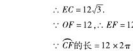
∴ $OE=2OC=24$，

∴ $EC=12\sqrt{3}$.

∵ $OF=12$，∴ $EF=12$.

∵ $\overset{\frown}{CF}$的长 $=12\times2\pi\times\frac{60}{360}=4\pi$，

∴ 阴影部分的周长为 $4\pi+12+12\sqrt{3}$.



（第 15 题）

第 2 课时 切线的性质

1. C　**点拨**：圆的切线垂直于过切点的半径，故 A 错误；经过切点且垂直于切线的直线经过圆心，B，D 错误；只有 C 是正确的.

2. D　**3.** D　**4.** A

5. B　**点拨**：连接 OA，OB.

∵ PA，PB 是☉O 的切线，

∴ $PA\perp OA$，$PB\perp OB$.

∵ ∠ACB=55°，∴ ∠AOB=110°.

∴ ∠APB=360°−90°−90°−110°=70°.

6. A　**7.** C　**8.** D　**9.** C

10. B　**点拨**：如图，设切点为 D，连接 CD.

∵ AB 是☉C 的切线，

∴ $CD\perp AB$，

∴ $S_{△ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CD$.

在△ABC 中，∵ $AB=5$，$BC=3$，$AC=4$，

∴ $AC^2+BC^2=4^2+3^2=5^2=AB^2$.

∴ ∠ACB=90°.

∴ $S_{△ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}AB\cdot CD$，

∴ $CD=\frac{AC\cdot BC}{AB}=\frac{4\times3}{5}=2.4$.

∴ ☉C 的半径为 2.4，故选 B.



（第 10 题）

11. (1) **证明**：连接 OE.

∵ EG 是☉O 的切线，

∴ $OE\perp EG$.

∵ $BF\perp GE$，∴ $OE\parallel AB$.

∴ ∠A=∠OEC.

∵ $OE=OC$，

∴ ∠OEC=∠C. ∴ ∠A=∠C.

∵ ∠ABG=∠A+∠C，

∴ ∠ABG=2∠C.

(2) **解**：∵ $BF\perp GE$，

∴ $BF\cdot GE=90$.

∵ $GF=3\sqrt{3}$，$GB=6$，

∴ $BF=\sqrt{BG^2-GF^2}=3$.

∵ $BF\parallel OE$，

∴ △BGF∽△OGE.

∵ $\frac{BF}{OE}=\frac{BG}{OG}$，

∴ $\frac{3}{OE}=\frac{6}{6+OE}$，解得 $OE=6$.

∴ ☉O 的半径为 6.

12. (1) **证明**：如图，连接 CE.

∵ 在△ABC 中，$AC=BC$，∠ACB=90°，

∴ ∠B=45°.

∴ ∠COE=90°.

∴ ∠CEO=∠ECO=45°.

∵ EF 是☉O 的切线，

∴ ∠FEO=90°.

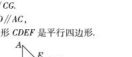
∴ ∠FEC=45°，

∴ ∠FEC=∠ECO.

∴ $EF\parallel OC$.

又∵ $ED\parallel AC$，

∴ 四边形 $CDEF$ 是平行四边形.



（第 12 题）

(2) **解**：如图，过 C 作 $GM\perp BC$ 于 M，

∵ △CMB 是等腰直角三角形，

∴ $MB=GM$.

∵ 四边形 $CDEF$ 是平行四边形，

∴ ∠FCD=∠FED.

∵ ∠ACD+∠GCB=∠GCB+∠CGM=90°，

∴ ∠CGM=∠ACD.

∴ ∠CGM=∠FED.

∵ $\tan\angle DEF=2$，

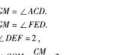
∴ $\tan\angle CGM=\frac{CM}{GM}=2$.

∴ $CM=2GM$.

又∵ $BC=CM+BM=2GM+GM=3$，

∴ $GM=1$. ∴ $BG=\sqrt{2}GM=\sqrt{2}$.

13. (1) **证明**：如图，连接 OD.



（第 13 题）

∵ 四边形 $EBOC$ 是平行四边形，

∴ $OC\parallel BE$.

∴ ∠AOC=∠OBE，∠COD=∠ODB.

∵ $OB=OD$，

∴ ∠OBD=∠ODB.

∴ ∠DOC=∠AOC.

在△COD 和△COA 中，

$$\begin{cases}OC=OC,\\ \angle COD=\angle COA,\\ OD=OA,\end{cases}$$

∴ △COD≌△COA.

∴ ∠CDO=∠CAO=90°.

∴ 圆心 O 到 CF 的距离等于☉O 的半径.

∴ CF 是☉O 的切线.

(2) **解**：∵ $F=30°$，∠ODF=90°，

∴ ∠DOF=60°，

∴ ∠AOD=120°.

∵ $OD=OB$，

∴ △OBD 是等边三角形，

∴ ∠BDO=∠DBO=60°，$OB=BD$.

易得∠EDC=∠ECD=30°，

∴ $ED=EC$.

∵ 四边形 $EBOC$ 是平行四边形，

∴ $EC=ED=BO=DB$.

∵ $EB=4$，

∴ $OB=OD=OA=2$.

∵ ∠AOC=∠COD，

∴ ∠AOC=60°.

在 Rt△AOC 中，

∵ ∠OAC=90°，∠AOC=60°，

∴ $OC=4$.

∴ $AC=\sqrt{OC^2-OA^2}=2\sqrt{3}$.

∴ $S_{阴影}=2S_{△AOC}-S_{扇形AOD}=2\times\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{3}-\frac{1}{3}\times\pi\times2^2=4\sqrt{3}-\frac{4\pi}{3}$.

14. **解**：(1) 如图①，连接 AC，

∵ AT 是☉O 的切线，AB 是☉O 的直径，

∴ ∠TAB=90°.

∵ ∠ABT=50°，

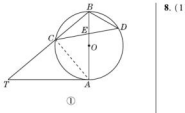
∴ ∠T=90°−∠ABT=40°.

由 AB 是☉O 的直径，得∠ACB=90°.

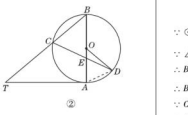
∴ ∠CAB=90°−∠ABC=40°.

∴ ∠CDB=∠CAB=40°.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料



①



②

（第 14 题）

（2）如图②，连接 AD，

在 $\triangle BCE$ 中，$BE=BC$，$\angle EBC=50°$，

$\therefore \angle BCE=\angle BEC=65°$.

$\therefore \angle BAD=\angle BCD=65°$.

$\because OA=OD$，

$\therefore \angle ODA=\angle OAD=65°$.

$\because \angle ADC=\angle ABC=50°$，

$\therefore \angle CDO=\angle ODA-\angle ADC=65°-50°=15°$.

第 3 课时　切线的判定

1. A　**2.** C　**3.** A　**4.** D　**5.** C　**6.** C

7. **证明**：如图，连接 OA，过点 O 作 $OB\perp PM$ 于点 B.

$\because PN$ 与 $\odot O$ 相切于点 A，

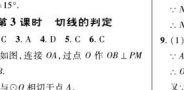
$\therefore OA\perp PN$.

$\because$ 点 O 在 $\angle MPN$ 的平分线上，$OB\perp PM$，

$\therefore OB=OA$.

$\therefore$ 点 O 到直线 PM 的距离等于 $\odot O$ 的半径.

$\therefore PM$ 为 $\odot O$ 的切线.



（第 7 题）

易错总结：利用切线的判定定理需满足两个条件：(1) 经过半径外端，(2) 与这条半径垂直，这两个条件缺一不可. 证明一条直线是圆的切线时，当直线和圆未明确是否有公共点时，应“作垂线，证半径”，而本题易错解为“连半径，证垂直”.

8. (1) **解**：如图，连接 DN，如图.



（第 8 题）

$\because \odot O$ 的半径为 $\frac{5}{2}$，$\therefore CD=5$.

$\because \angle ACB=90°$，CD 是斜边 AB 上的中线，

$\therefore BD=CD=AD=5$. $\therefore AB=10$.

$\therefore BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=8$.

$\because CD$ 为 $\odot O$ 的直径，

$\therefore \angle CND=90°$，即 $DN\perp BC$.

$\therefore BN=NC=\frac{1}{2}BC=4$.

(2) **证明**：连接 ON，如图.

$\because \angle ACB=90°$，D 为斜边 AB 的中点，

$\therefore CD=DA=DB=\frac{1}{2}AB$.

$\therefore \angle BCD=\angle B$.

$\because OC=ON$，$\therefore \angle BCD=\angle ONC$.

$\therefore \angle ONC=\angle B$. $\therefore ON\parallel AB$.

$\therefore NE\perp AB$，$\therefore ON\perp NE$.

$\therefore NE$ 与 $\odot O$ 相切.

9. (1) **证明**：如图，作 $OM\perp AB$ 于点 M，

$\because AO$ 平分 $\angle BAC$，$OC\perp AC$，$OM\perp AB$，

$\therefore OC=OM$.

又 $\because OC$ 是 $\odot O$ 的半径，

$\therefore OM$ 是 $\odot O$ 的半径.

$\therefore AB$ 是 $\odot O$ 的切线.



（第 9 题）

(2) **解**：$\because AO=AO$，$OC=OM$，

$\therefore Rt\triangle OCA\cong Rt\triangle OMA$，

$\therefore AC=AM$.

在 Rt $\triangle ACO$ 中，$\tan\angle CAO=\frac{OC}{AC}=\frac{1}{AC}=\frac{1}{3}$，

$\therefore AC=AM=3$.

设 $BM=x$，$OB=y$，则 $y^2-x^2=1$①.

$\because \cos B=\frac{BM}{OB}=\frac{BC}{AB}$，

$\therefore \frac{x}{y}=\frac{y+1}{x+3}$.

$\therefore x^2+3x=y^2+y$②.

由①②可以得到 $y=3x-1$，

$\therefore (3x-1)^2-x^2=1$.

$\therefore x=\frac{3}{4}$（$x=0$ 不合题意，舍去）.

$\therefore y=\frac{5}{4}$. $\therefore \cos B=\frac{x}{y}=\frac{3}{5}$.

10. (1) **证明**：$\because BC$ 为 $\odot O$ 的直径，

$\therefore \angle BAC=90°$.

又 $\because \angle ABC=30°$，

$\therefore \angle ACB=60°$.

又 $\because OA=OC$，

$\therefore \triangle OAC$ 为等边三角形，

即 $\angle OAC=\angle AOC=60°$.

$\because AF$ 为 $\odot O$ 的切线，

$\therefore \angle OAF=90°$，

$\therefore \angle CAF=\angle AFC=30°$.

$\because DE$ 为 $\odot O$ 的切线，

$\therefore \angle DBC=\angle OBE=90°$，

$\therefore \angle D=\angle DEA=30°$，

$\therefore \angle D=\angle CAF$，$\angle DEA=\angle AFC$，

$\therefore \triangle ACF\backsim\triangle DAE$.

(2) **解**：$\because \triangle AOC$ 为等边三角形，

$\therefore S_{\triangle AOC}=\frac{\sqrt{3}}{4}OA^2=\frac{\sqrt{3}}{4}$，

$\therefore OA=1$，

$\therefore BC=2$，$OB=1$.

又 $\because \angle D=\angle BEO=30°$，

$\therefore BD=2\sqrt{3}$，$BE=\sqrt{3}$，

$\therefore DE=3\sqrt{3}$.

(3) **证明**：过点 O 作 $OM\perp EF$ 于点 M.

$\because OA=OB$，$\angle OAF=\angle OBE=90°$，

$\angle BOE=\angle AOF$，

$\therefore \triangle OAF\cong\triangle OBE$，

$\therefore OE=OF$.

$\because \angle EOF=120°$，

$\therefore \angle OEM=\angle OFM=30°$，

$\therefore \angle OEB=\angle OEM=30°$，

即 EO 平分 $\angle BEF$.

又 $\because \angle OBE=\angle OME=90°$，

$\therefore OM=OB$，

$\therefore EF$ 为 $\odot O$ 的切线.

11. (1) **解**：$\because A(0,6)$，$N(0,2)$，$\therefore AN=4$.

$\because \angle ABN=30°$，又易知 $\angle ANB=90°$，

$\therefore AB=2AN=8$.

$\therefore$ 由勾股定理得 $NB=\sqrt{AB^2-AN^2}=4\sqrt{3}$，

$\therefore B(4\sqrt{3},2)$.

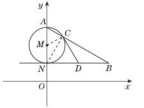
(2) **证明**：如图，连接 MC，NC.

$\because AN$ 是 $\odot M$ 的直径，

$\therefore \angle ACN=90°$.

$\therefore \angle NCB=90°$.

在 Rt $\triangle NCB$ 中，D 为 NB 的中点，



（第 11 题）

$\therefore CD=\frac{1}{2}NB=ND$.

$\therefore \angle CND=\angle NCD$.

$\because MC=MN$，

$\therefore \angle MCN=\angle MNC$.

$\because \angle MNC+\angle CND=90°$，

$\therefore \angle MCN+\angle NCD=90°$，

即 $MC\perp CD$.

$\therefore$ 直线 CD 是 $\odot M$ 的切线.

第 4 课时　三角形的内切圆

1. C　**2.** B　**3.** B　**4.** B　**5.** C　**6.** C

7. D　**8.** C　**9.** A　**10.** 70°

11. **证明**：如图，连接 BI.

$\because$ 点 I 是 $\triangle ABC$ 的内心，

$\therefore BI$ 平分 $\angle ABC$. $\therefore \angle ABI=\angle CBI$.

又 $\because AD$ 平分 $\angle BAC$，$\therefore \angle BAD=\angle DAC$.

$\because \angle DAC$ 与 $\angle DBC$ 均为 $\overset{\frown}{DC}$ 所对的圆周角，

$\therefore \angle DAC=\angle DBC$.

$\therefore \angle ABI+\angle BAD=\angle CBI+\angle DBC$，

$\therefore \angle BID=\angle IBD$. $\therefore DI=DB$.

易错总结：三角形的内心是三角形内切圆的圆心，即三角形三条角平分线的交点；三角形的外心是三角形外接圆的圆心，即三角形三边垂直平分线的交点. 本题中既出现了三角形的外接圆，又出现了三角形的内切圆，易混淆三角形的内心与外心的概念，造成证明错误.



（第 11 题）

12. **证明**：如图，过点 O 作 $OD\perp AB$ 于点 D，$OP\perp BC$ 于点 P，$OQ\perp AC$ 于点 Q，连接 OE，OF，OG，OH，OM，ON.

$\because EF=GH=MN$，

$OE=OF=OG=OH=OM=ON$，

$\therefore \triangle OEF\cong\triangle OGH\cong\triangle OMN$.

$\therefore OD=OP=OQ$.

$\therefore$ 点 O 是 $\triangle ABC$ 的内心.



（第 12 题）

13. **解**：(1) $\because BC=5$，$AC=6$，$AB=9$，

$\therefore p=\frac{BC+AC+AB}{2}=\frac{5+6+9}{2}=10$.

$\therefore S_{\triangle ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{10\times5\times4\times1}=10\sqrt{2}$.

故 $\triangle ABC$ 的面积是 $10\sqrt{2}$.

(2) $\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}r(AB+BC+AC)$，

$\therefore 10\sqrt{2}=\frac{1}{2}r(9+5+6)$.

解得 $r=\sqrt{2}$.

故 $\triangle ABC$ 的内切圆半径 $r=\sqrt{2}$.

14. **证明**：(1) $\because E$ 是 $\triangle ABC$ 的内心，

$\therefore \angle BAE=\angle CAE$，$\angle EBA=\angle EBC$.

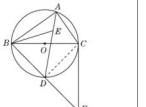
$\because \angle BED=\angle BAE+\angle EBA$，

$\angle DBE=\angle EBC+\angle DBC$，

$\angle DBC=\angle CAE$，

$\therefore \angle DBE=\angle DEB$.

$\therefore DB=DE$.



（第 14 题）

(2) 如图，连接 CD.

$\because \angle DAB=\angle DAC$，

$\therefore \overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{CD}$.

$\therefore BD=CD$.

$\therefore BD=DF$，

$\therefore CD=DB=DF$.

$\therefore \angle DBC=\angle DCB$，$\angle DCF=\angle DFC$.

$\because BC$ 是 $\odot O$ 的直径，

$\therefore \angle BDC=90°$.

$\therefore \angle DBC=\angle DCB=\angle DCF=\angle DFC=45°$.

$\therefore \angle BCF=90°$，

即 $BC\perp CF$.

$\therefore$ 直线 CF 是 $\odot O$ 的切线.

15. **解**：(1) $\triangle ABC$ 为等腰三角形.

证明：$\because \triangle ABC$ 的内切圆 $\odot O$ 与 AB，BC，AC 分别相切于点 D，E，F，

$\therefore \angle CFO=\angle CEO=\angle BDO=\angle BEO=90°$.

$\because$ 四边形内角和为 $360°$，

$\therefore \angle EOF+\angle FCE=180°$，

$\angle DOE+\angle DBE=180°$.

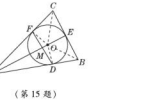
$\because \overset{\frown}{EF}=\overset{\frown}{DE}$，

$\therefore \angle EOF=\angle DOE$.

$\therefore \angle FCE=\angle DBE$. $\therefore AB=AC$.

$\therefore \triangle ABC$ 为等腰三角形.

(2) 连接 OB，OC，OD，OF，如图所示.



（第 15 题）

易知在等腰三角形 ABC 中，$AE\perp BC$，E 是 BC 的中点，即 $BE=CE$.

$\because$ 在 Rt $\triangle AOF$ 和 Rt $\triangle AOD$ 中，

$\begin{cases}OF=OD,\\OA=OA,\end{cases}$

$\therefore Rt\triangle AOF\cong Rt\triangle AOD$.

$\therefore AF=AD$，

同理 Rt $\triangle COF\cong Rt\triangle COE$，$CF=CE=2$，Rt $\triangle BOD\cong Rt\triangle BOE$，$BD=BE$.

$\therefore BD=CF$，

$\therefore DF\parallel BC$.

$\therefore \frac{AM}{AE}=\frac{AF}{AC}$.

$\therefore AE=\sqrt{AC^2-CE^2}=4\sqrt{2}$，

$\therefore AM=\frac{AE\cdot AF}{AC}=\frac{4\sqrt{2}\times4}{6}=\frac{8\sqrt{2}}{3}$.

“7　切线长定理

1. C　**2.** C　**3.** D　**4.** C　**5.** A

6. C　**点拨**：如图，连接 OP.

$\because PA$，PB 为 $\odot O$ 的切线，

$\therefore PA=PB$，$OA\perp AP$，$OB\perp BP$.

又 $\because OP=OP$，

$\therefore Rt\triangle PAO\cong Rt\triangle PBO$.

$\therefore \angle APO=\angle BPO$.

又 $\because \angle APB=60°$，

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \angle APO = 30°$.

在 Rt△APO 中，$OA = 2$，

$\therefore OP = 2OA = 4$.

根据勾股定理得 $PA = 2\sqrt{3}$.

$\because MA$，MC 为⊙O 的两条切线，

$\therefore MA = MC$.

又 NB，NC 为⊙O 的两条切线，

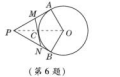
$\therefore NC = NB$.

$\therefore$ △PMN 的周长 $= PM + PN + MN = PM + PN + MC + NC = PM + PN + MA + NB = PA + PB = 2PA = 4\sqrt{3}$.



（第 6 题）

7. A　**点拨**：连接 OE，如图所示.



（第 7 题）

$\because AD$ 与⊙O 相切，DC 与⊙O 相切，BC 与⊙O 相切，

$\therefore \angle DAO = \angle DEO = \angle OBC = 90°$，$DA = DE$，$CE = CB$.

$\therefore AD /\!/ BC$，$CD = DE + EC = AD + BC$.

$\therefore$ ②正确.

在 Rt△ADO 和 Rt△EDO 中，

$\begin{cases} OD = OD, \\ DA = DE, \end{cases}$

$\therefore$ Rt△ADO≌Rt△EDO(HL)，

$\therefore \angle AOD = \angle EOD$.

同理，Rt△CEO≌Rt△CBO，

$\therefore \angle EOC = \angle BOC$.

又 $\angle AOD + \angle DOE + \angle EOC + \angle COB = 180°$，

$\therefore 2(\angle DOE + \angle EOC) = 180°$，

即 $\angle DOC = 90°$，

$\therefore$ ⑤正确.

$\because \angle DEO = \angle DOC = 90°$，$\angle EDO = \angle ODC$，

$\therefore \triangle EDO \backsim \triangle ODC$，

$\therefore \frac{OD}{CD} = \frac{DE}{OD}$，即 $OD^2 = CD \cdot DE$，

$\therefore$ ①正确.

而 $S_{梯形ABCD} = \frac{1}{2} AB \cdot (AD + BC) = \frac{1}{2} AB \cdot CD$，

$\therefore$ ④错误.

由条件推不出 $OD = OC$，

$\therefore$ ③错误，故正确的结论有①②⑤.

8. $5\sqrt{3}$ cm　**9.** C

10.（1）**证明**：如图，连接 OD，

$\because DE$ 是⊙O 的切线，

$\therefore \angle ODE = 90°$.

$\therefore \angle ADE + \angle BDO = 90°$.

$\because \angle ACB = 90°$，

$\therefore \angle A + \angle B = 90°$.

$\because OD = OB$，

$\therefore \angle B = \angle BDO$.

$\therefore \angle ADE = \angle A$.

（2）**解**：如图，连接 CD.

$\because \angle ADE = \angle A$，

$\therefore AE = DE$.

$\because BC$ 是⊙O 的直径，$\angle ACB = 90°$，

$\therefore EC$ 是⊙O 的切线.

$\therefore ED = EC$.

$\therefore AE = EC = DE$.

$\therefore DE = 10$，

$\therefore AC = 2DE = 20$.

$\because BC$ 是⊙O 的直径，

$\therefore \angle BDC = \angle ADC = 90°$.

在 Rt△ADC 中，$DC = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12$.

设 $BD = x$，在 Rt△BDC 中，$BC^2 = x^2 + 12^2$，在 Rt△ABC 中，$BC^2 = (x + 16)^2 - 20^2$，

$\therefore x^2 + 12^2 = (x + 16)^2 - 20^2$，解得 $x = 9$.

$\therefore BC = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15$.



（第 10 题）

11.（1）**证明**：如图，连接 OD.

$\because AB$ 与⊙O 相切于点 D，AC 与⊙O 相切于点 C，

$\therefore AC = AD$.

$\therefore OC = OD$，

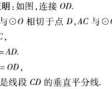
$\therefore OA$ 是线段 CD 的垂直平分线.

$\therefore OA \perp CD$.

易知 CF 是⊙O 的直径，

$\therefore \angle CDF = 90°$，

$\therefore DF \perp CD$，$\therefore DF /\!/ AO$.



（第 11 题）

（2）**解**：如图，过点 E 作 $EM \perp OC$ 于 M，

$\because AC = 6$，$AB = 10$，

$\therefore BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 8$.

$\because AD = AC = 6$，$\therefore BD = AB - AD = 4$.

易证△BDF∽△BCD，

$\therefore \frac{BD}{BC} = \frac{BF}{BD}$，$\therefore BF = \frac{BD^2}{BC} = \frac{4^2}{8} = 2$.

$\therefore CF = BC - BF = 6$，$OC = OF = \frac{1}{2} CF = 3$.

$\therefore OA = \sqrt{AC^2 + OC^2} = 3\sqrt{5}$.

易证 $OC^2 = OE \cdot OA$，$\therefore OE = \frac{3\sqrt{5}}{5}$.

$\because EM /\!/ AC$，$\therefore \frac{EM}{AC} = \frac{OM}{OC} = \frac{OE}{OA} = \frac{1}{5}$.

$\therefore OM = \frac{3}{5}$，$EM = \frac{6}{5}$.

$\therefore FM = OF + OM = \frac{18}{5}$.

易知 $\frac{EM}{CG} = \frac{FM}{FC}$，$\therefore CG = \frac{EM \cdot FC}{FM} = 2$.

12. **解**：（1）$\because PA$ 切⊙O 于点 A，PB 切⊙O 于点 B，

$\therefore PA = PB$，$\angle PAC = 90°$.

$\because \angle APB = 60°$，

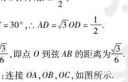
$\therefore$ △APB 是等边三角形.

$\therefore \angle BAP = 60°$.

$\therefore \angle BAC = 90° - \angle BAP = 30°$.

（2）过点 O 作 $OD \perp AB$ 于点 D，如图所示，

则 $AD = BD = \frac{1}{2} AB$.



（第 12 题）

由（1）得 AP 是等边三角形，

$\therefore AB = PA = 1$.　$\therefore AD = \frac{1}{2}$.

$\because \angle BAC = 30°$，$\therefore AD = \sqrt{3} OD = \frac{1}{2}$.

$\therefore OD = \frac{\sqrt{3}}{6}$，即点 O 到弦 AB 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

13.（1）**证明**：连接 OA，OB，OC，如图所示.

$\because AB$ 与⊙O 相切于 A 点，

$\therefore OA \perp AB$，即 $\angle OAB = 90°$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形，

$\therefore BA = BC$.

在△ABO 和△CBO 中，$\begin{cases} AB = CB, \\ OB = OB, \\ OA = OC, \end{cases}$

$\therefore$ △ABO≌△CBO(SSS).

$\therefore \angle BCO = \angle BAO = 90°$.

$\therefore OC \perp BC$.　$\therefore BC$ 为⊙O 的切线.



（第 13 题）

（2）**解**：如图，连接 BD.　$\because$△ABO≌△CBO，

$\therefore \angle ABO = \angle CBO$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形，

$\therefore BD$ 平分 $\angle ABC$，$\angle CBD = \angle CDB$.

$\therefore$ 点 O 在 BD 上.

$\therefore \angle BOC = \angle ODC + \angle OCD$.

$\because OD = OC$，$\therefore \angle ODC = \angle OCD$.

$\therefore \angle BOC = 2\angle ODC$.　$\therefore \angle BOC = 2\angle OBC$.

$\because \angle BOC + \angle OBC = 90°$，

$\therefore \angle OBC = 30°$.　$\therefore \angle ABC = 2\angle OBC = 60°$.

14.（1）**证明**：如图，连接 OD，OE.



（第 14 题）

$\because AB = 2$，$\therefore OA = OD = OE = OB = 1$.

$\therefore DE = 1$，$\therefore OD = OE = DE$.

$\therefore \triangle ODE$ 是等边三角形.

$\therefore \angle ODE = \angle OED = 60°$.

$\therefore DE /\!/ AB$，$\therefore \angle AOD = \angle ODE = 60°$，$\angle EOB = \angle OED = 60°$.

$\therefore \triangle AOD$ 和 $\triangle BOE$ 都是等边三角形.

$\therefore \angle OAD = \angle OBE = 60°$，

$\angle CDE = \angle OAD = 60°$，

$\angle CED = \angle OBE = 60°$.

$\therefore \triangle CDE$ 是等边三角形.

$\therefore DF$ 是⊙O 的切线，$\therefore OD \perp DF$.

$\therefore \angle EDF = 90° - 60° = 30°$.

$\therefore \angle DFE = 90°$.　$\therefore DF \perp CE$.　$\therefore CF = EF$.

（2）**解**：相等. 理由：当点 E 运动至与点 B 重合时，直线 BC 与⊙O 只有一个公共点，$\therefore BC$ 是⊙O 的切线，

$\because$ ⊙O 的切线 DF 交 BC 于点 F，

$\therefore BF = DF$.　$\therefore \angle BDF = \angle DBF$.

$\because AB$ 是直径，$\therefore \angle ADB = \angle BDC = 90°$.

$\therefore \angle FDC + \angle BDF = 90°$，$\angle C + \angle DBF = 90°$，

$\therefore \angle FDC = \angle C$.　$\therefore DF = CF$.　$\therefore BF = CF$.

15. **解**：（1）由切线长定理，得 $AE = AH$，$BE = BF$，$CF = CG$，$DG = DH$，

$\therefore AB + CD = AE + BE + CG + DG = AH + BF + CF + DH = BC + AD$，

即 $AB + CD = BC + AD$.

（2）过点 B 作⊙O 的切线，交 AD 于点 M.

由（1）可知 $BM + CD = BC + MD$.

$\because AB < AM + BM$，$\therefore AB + BM + CD < AM + BM + BC + MD$，即 $AB + CD < BC + AD$.

16. **解**：（1）△OBC 是直角三角形.

理由：$\because AB$，BC，CD 分别与⊙O 相切于点 E，F，G，$\therefore \angle OEB = \angle OFB = \angle OFC = \angle OGC = 90°$，$BE = BF$，$CF = CG$.

$\because OE = OF = OG$，△OBE≌△OBF，

△OCF≌△OCG.

$\therefore \angle OBE = \angle OBF = \frac{1}{2} \angle EBF$，

$\angle OCG = \angle OCF = \frac{1}{2} \angle GCF$.

$\because AB /\!/ CD$，$\therefore \angle EBF + \angle GCF = 180°$.

$\therefore \angle OBF + \angle OCF = 90°$.　$\therefore \angle BOC = 90°$.

$\therefore$ △OBC 是直角三角形.

（2）$\because$ 在 Rt△BOC 中，$BO = 6$，$CO = 8$，

$\therefore BC = \sqrt{BO^2 + CO^2} = 10$.

（3）$\because BC$ 与⊙O 相切于点 F，$\therefore OF \perp BC$.　$\therefore OF = \frac{BO \cdot CO}{BC} = \frac{6 \times 8}{10} = 4.8$.

17.（1）**证明**：如图，连接 OE.　$\because AM$，DC 是⊙O 的切线，OA，OE 是⊙O 的半径，

$\therefore DA = DE$，$OA = OE$.

又 $\because OD = OD$，$\therefore$ △ADO≌△EDO.

$\therefore \angle AOD = \angle EOD = \frac{1}{2} \angle AOE$.

又 $\because \angle ABE = \frac{1}{2} \angle AOE$，

$\therefore \angle AOD = \angle ABE$.　$\therefore OD /\!/ BE$.



（第 17 题）

（2）**解**：$OF = \frac{1}{2} CD$. 理由：

$\because BC$，CE 是⊙O 的切线，B，E 分别为切点，$\therefore CB = CE$.　$\because AD$，DE 是⊙O 的切线，A，E 分别为切点，$\therefore AD = ED$.

$\because AM /\!/ BN$，O 是 AB 的中点，F 是 DC 的中点，$\therefore OF = \frac{1}{2}(AD + BC) = \frac{1}{2}(DE + CE) = \frac{1}{2} CD$，即 $OF = \frac{1}{2} CD$.

阶段方法技巧训练（二）

专训 1

1. B　**2.** C

3. **解**：如图，连接 OR，OP，OQ.

$\because PD = 4$ cm，$OD = 3$ cm，且 $OD \perp l$，



（第 3 题）

$\therefore OP = \sqrt{PD^2 + OD^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$(cm) $= r$.　$\therefore$ 点 P 在⊙O 上.

$\because QD = 5$ cm，$\therefore OQ = \sqrt{QD^2 + OD^2} = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$(cm) > 5 cm $= r$.

$\therefore$ 点 Q 在⊙O 外.

$\because RD = 3$ cm，$\therefore OR = \sqrt{RD^2 + OD^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$(cm) < 5 cm $= r$.

$\therefore$ 点 R 在⊙O 内.

4. B

5. **解**：直线 BD 与⊙C 相交. 理由如下：

$\because \angle ACB = 90°$，$\angle A = 30°$，

$\therefore AB = 2BC = 8$ cm.

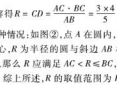
$\therefore AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = 4\sqrt{3}$ cm.

由三角形的面积公式，得 $\frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} AB \cdot CD$，$\therefore CD = \frac{AC \cdot BC}{AB} = 2\sqrt{3}$ cm.

$\because 2\sqrt{3}$ cm < 4 cm，$\therefore$ 直线 BD 与⊙C 相交.

6. **解**：本题应分两种情况讨论：一种情况：如图①，以 C 为圆心，R 为半径的圆与斜边 AB 相切，过点 C 作 $CD \perp AB$ 于点 D，则 $CD = R$. 在 Rt△ABC 中，由勾股定理得 $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. 由三角形的面积公式，得 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} CD \cdot AB$，解得 $R = CD = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{3 \times 4}{5} = 2.4$.

另一种情况：如图②，点 A 在圆内，以点 C 为圆心，R 为半径的圆与斜边 AB 相交于一点，那么 R 应满足 $AC < R \leqslant BC$，即 $3 < R \leqslant 4$. 综上所述，R 的取值范围为 $R = 2.4$ 或 $3 < R \leqslant 4$.



（第 6 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

专训2

1. 解：(1) $\angle BAE=90°$，$\angle CAE=\angle B$

(2) EF 是$\odot O$的切线.

理由：如图，作直径 AM，连接 CM，则 $\angle ACM=90°$，$\angle M=\angle B$，

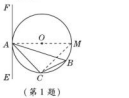
$\therefore \angle M+\angle CAM=\angle B+\angle CAM=90°$.

$\because \angle CAE=\angle B$，

$\therefore \angle CAM+\angle CAE=90°$，$\therefore AE\perp AM$.

$\because AM$ 为直径，$\therefore EF$ 是$\odot O$的切线.

点拨：(1)答案不唯一.



（第1题）

2. (1) **证明：**$\because ED\perp AD$，$\therefore \angle EDA=90°$.

$\therefore AE$ 是$\odot O$的直径.

$\therefore AE$ 的中点是圆心 O.

连接 OD，则 $OA=OD$，

$\therefore \angle 1=\angle ODA$.

$\because AD$ 平分$\angle BAC$，

$\therefore \angle 2=\angle 1=\angle ODA$.

$\therefore OD/\!/AC$.

$\therefore \angle BDO=\angle ACB=90°$.

$\therefore BD\perp DO$.

$\therefore BC$ 是$\odot O$的切线.

(2) **解：**在 Rt△ABC 中，由勾股定理得 $AB=\sqrt{BC^2+AC^2}=\sqrt{8^2+6^2}=10$.

$\because OD/\!/AC$，$\therefore \dfrac{OD}{AC}=\dfrac{OB}{AB}$，

即 $\dfrac{r}{6}=\dfrac{10-r}{10}$，解得 $r=\dfrac{15}{4}$.

在 Rt△BDO 中，$BD=\sqrt{OB^2-OD^2}=\sqrt{\left(10-\dfrac{15}{4}\right)^2-\left(\dfrac{15}{4}\right)^2}=5$，

$\therefore CD=BC-BD=8-5=3$.

在 Rt△ACD 中，$\tan\angle 2=\dfrac{CD}{AC}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$.

$\because \angle 3=\angle 2$，

$\therefore \tan\angle 3=\tan\angle 2=\dfrac{1}{2}$.

3. **证明：**(方法一)连接 DE，作 $DF\perp AC$，垂足为 F.

$\because AB$ 是$\odot D$的切线，

$\therefore DE\perp AB$.

又$\because DF\perp AC$，

$\therefore \angle DEB=\angle DFC=90°$.

$\because AB=AC$，

$\therefore \angle B=\angle C$.

$\because BD=CD$，

$\therefore \triangle BDE\cong\triangle CDF$.

$\therefore DF=DE$.

$\therefore F$ 在$\odot D$上.

$\therefore AC$ 与$\odot D$相切.

(方法二)连接 DE，AD，作 $DF\perp AC$，F 是垂足.

$\therefore AB$ 与$\odot D$相切，

$\therefore DE\perp AB$.

$\because AB=AC$，$BD=CD$，

$\therefore \angle DAB=\angle DAC$.

又$\because DE\perp AB$，$DF\perp AC$，

$\therefore DE=DF$.

$\therefore F$ 在$\odot D$上，

$\therefore AC$ 与$\odot D$相切.

4. (1) **证明：**如图，过点 O 作 $OD\perp PB$ 于点 D，连接 OC.

$\because AP$ 与$\odot O$相切，

$\therefore OC\perp AP$.

又$\because PO$ 平分$\angle APB$，

$\therefore OD=OC$. $\therefore D$ 在$\odot O$上，

$\therefore PB$ 是$\odot O$的切线.

(2) **解：**如图，过点 C 作 $CF\perp PE$ 于点 F.

在 Rt△OCP 中，$OP=\sqrt{OC^2+CP^2}=5$.

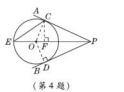
$\because S_{\triangle OCP}=\dfrac{1}{2}OC\cdot CP=\dfrac{1}{2}OP\cdot CF$，

$\therefore CF=\dfrac{12}{5}$.

在 Rt△COF 中，$OF=\sqrt{CO^2-CF^2}=\dfrac{9}{5}$，

$\therefore FE=3+\dfrac{9}{5}=\dfrac{24}{5}$.

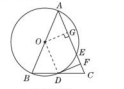
在 Rt△CFE 中，$CE=\sqrt{CF^2+EF^2}=\dfrac{12\sqrt{5}}{5}$.



（第4题）

专训3

1. (1) **证明：**如图，连接 OD.



（第1题）

$\because OB=OD$，$\therefore \angle ODB=\angle B$.

又$\because AB=AC$，

$\therefore \angle C=\angle B$，

$\therefore \angle ODB=\angle C$，

$\therefore OD/\!/AC$.

$\because DF\perp AC$，

$\therefore \angle DFC=90°$，

$\therefore \angle ODF=\angle DFC=90°$，

$\therefore DF$ 是$\odot O$的切线.

(2) **解：**如图，过 O 作 $OG\perp AC$ 于点 G，

则 $AG=\dfrac{1}{2}AE=2$.

$\because \cos A=\dfrac{AG}{OA}$，

$\therefore OA=\dfrac{AG}{\cos A}=\dfrac{2}{\frac{2}{5}}=5$.

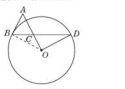
$\therefore OG=\sqrt{OA^2-AG^2}=\sqrt{21}$.

$\because \angle ODF=\angle DFG=\angle OGF=90°$，

$\therefore$ 四边形 $OGFD$ 为矩形，

$\therefore DF=OG=\sqrt{21}$.

2. (1) **证明：**连接 OB，如图所示.



（第2题）

$\because AB=AC$，

$\therefore \angle ABC=\angle ACB$.

$\because \angle ACB=\angle OCD$，

$\therefore \angle ABC=\angle OCD$.

$\because OD\perp AO$，

$\therefore \angle COD=90°$.

$\because \angle D+\angle OCD=90°$.

$\therefore OB=OD$，

$\therefore \angle OBD=\angle D$.

$\therefore \angle OBD+\angle ABC=90°$，即 $\angle ABO=90°$.

$\therefore AB\perp OB$.

$\therefore B$ 在$\odot O$上，

$\therefore$ 直线 AB 与$\odot O$相切.

(2) $\dfrac{2}{3}$.

3. (1) **证明：**如图，连接 DO.

$\because AD/\!/OC$，

$\therefore \angle DAO=\angle COB$，$\angle ADO=\angle COD$.

又$\because OA=OD$，

$\therefore \angle DAO=\angle ADO$.

$\therefore \angle COD=\angle COB$.

在△COD 和△COB 中，

$\because OD=OB$，$\angle COD=\angle COB$，$OC=OC$，

$\therefore \triangle COD\cong\triangle COB$(SAS).

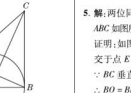
$\therefore \angle CDO=\angle CBO$.

$\because BC$ 是$\odot O$的切线，

$\therefore \angle CBO=90°$.

$\therefore \angle CDO=90°$.

$\therefore CD$ 是$\odot O$的切线.



（第3题）

(2) **解：**设$\odot O$的半径为 r，

则 $OD=r$，$OE=r+1$，

$\because CD$ 是$\odot O$的切线，

$\therefore \angle EDO=90°$.

$\therefore ED^2+OD^2=OE^2$.

$\therefore 3^2+r^2=(r+1)^2$.

解得 $r=4$.

$\therefore \odot O$的半径为4.

4. (1) **证明：**$\therefore D$ 为$\overset{\frown}{AC}$的中点，

$\therefore OD\perp AC$.

$\because AC/\!/DE$，

$\therefore OD\perp DE$.

$\therefore DE$ 是$\odot O$的切线.

(2) **解：**$\because D$ 为$\overset{\frown}{AC}$的中点，

$\therefore AF=CF$.

$\because AC/\!/DE$，$OA=AE$，

$\therefore F$ 为 OD 的中点，即 $OF=FD$，

在△AFO 和△CFD 中，$\begin{cases}AF=CF,\\ \angle AFO=\angle CFD,\\ OF=DF,\end{cases}$

$\therefore \triangle AFO\cong\triangle CFD$(SAS).

$\therefore S_{\triangle AFO}=S_{\triangle CFD}$.

$\therefore S_{四边形ACDE}=S_{\triangle ODE}$.

在 Rt△ODE 中，$OD=OA=AE=4$，

$\therefore OE=8$，

$\therefore DE=\sqrt{OE^2-OD^2}=4\sqrt{3}$，

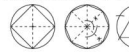
$\therefore S_{四边形ACDE}=S_{\triangle ODE}=\dfrac{1}{2}\times OD\times DE=\dfrac{1}{2}\times 4\times 4\sqrt{3}=8\sqrt{3}$.

8 正多边形和圆

第1课时 圆内接正多边形

1. A **2.** D **3.** A

4. 解：如图所示.（答案不唯一）



（第4题）

5. 解：两位同学的作法正确. 所作的正三角形 ABC 如图所示.

证明：如图，连接 BO，CO，BD. 设 BC 与 AD 交于点 E，

$\because BC$ 垂直平分 OD，$\therefore BO=BD$.

$\therefore BO=BD=OD$. $\therefore \angle BOE=60°$.

由垂径定理得 $\angle COE=\angle BOE=60°$.

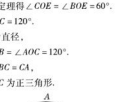
$\therefore \angle BOC=120°$.

$\because AD$ 为直径，

$\therefore \angle AOB=\angle AOC=120°$.

$\therefore AB=BC=CA$，

即△ABC 为正三角形.



（第5题）

6. (1) **解：**如图，作法：

①作直径 AC；②作直径 $BD\perp AC$；

③顺次连接 A，B，C，D，A，

四边形 $ABCD$ 即为$\odot O$的内接正方形；

④分别以 A，C 为圆心，OA 长为半径作弧，交$\odot O$于 E，H，F，G；

⑤顺次连接 A，E，F，C，G，H，A，

六边形 $AEFCGH$ 即为$\odot O$的内接正六边形.

(2) **证明：**如图，连接 OE.

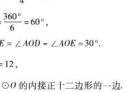
$\because \angle AOD=\dfrac{360°}{4}=90°$，

$\therefore \angle AOE=\dfrac{360°}{6}=60°$，

$\therefore \angle DOE=\angle AOD-\angle AOE=30°$.

$\therefore \dfrac{360°}{30°}=12$，

$\therefore DE$ 为$\odot O$的内接正十二边形的一边.



（第6题）

第2课时 正多边形

1. B **2.** C **3.** B **4.** D **5.** C

6. A **7.** B **8.** C **9.** A

10. B **11.** C **12.** C **13.** B

14. **错解：**B

诊断：设正多边形的边数为 n，则正多边形内角和为 $(n-2)\cdot 180°$，正多边形外角和为 360°，根据题意，得 $(n-2)\cdot 180°=360°\times 2$，解得 $n=6$，故此正多边形为正六边形. 因为边长为 2 的正六边形可以分成六个边长为 2 的正三角形，所以正六边形的半径等于 2. 产生错误的原因是认为正多边形的边心距是正多边形的半径，计算得出错误的结果 $\sqrt{3}$，最后导致错选 B.

正解：A

15. **分析：**利用在同圆中，相等的圆周角所对的弧相等，证明点 A，E，B，C，D 是$\odot O$的五等分点.

证明：在△ABC 中，

$\because AB=AC$，$\angle BAC=36°$，

$\therefore \angle ABC=\angle ACB=72°$.

$\because BD$，CE 分别平分$\angle ABC$，$\angle ACB$，

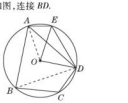
$\therefore \angle ABD=\angle DBC=\angle ACE=\angle BCE=36°$，$\therefore \angle BAC=\angle DBC=\angle ABD=\angle ACE=\angle BCE$，

$\therefore \overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DA}=\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BE}$.

$\therefore$ 五边形 $AEBCD$ 是正五边形.

规律方法：在同圆中，若相等分点间的弧相等，则所对的弦(多边形的各边)相等，相邻两弦所成的角(多边形的各内角)相等，这样的多边形是正多边形. 因此只需证明圆周被多边形的顶点 n 等分，就可得到正 n 边形，这是证明正多边形的常用方法.

16. 解：(1) 如图，连接 BD.



（第16题）

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是$\odot O$的内接四边形，

$\therefore \angle BAD+\angle C=180°$.

$\therefore \angle C=120°$，

$\therefore \angle BAD=60°$.

又$\because AB=AD$，

$\therefore \triangle ABD$ 是等边三角形.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \angle ABD = 60°$.

$\because$ 四边形 $ABDE$ 是$\odot O$ 的内接四边形，

$\therefore \angle AED + \angle ABD = 180°$.

$\therefore \angle AED = 120°$.

（2）如图，连接 OA.

$\because \angle ABD = 60°$，

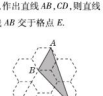
$\therefore \angle AOD = 2\angle ABD = 120°$.

又$\because \angle DOE = 90°$，

$\therefore \angle AOE = \angle AOD - \angle DOE = 30°$，

$\therefore n = \frac{360°}{30°} = 12$.

17. **解**：如图，作出直线 AB，CD，则直线 CD 一定与直线 AB 交于格点 E.



（第 17 题）

$\because$ 正六边形的边长为 1，

$\therefore$ 正六边形的半径是 1，则 $CE = 4$. 由题意得正六边形中隔一个顶点的两个顶点之间的距离是$\sqrt{3}$，则 $\triangle BCE$ 的边 EC 上的高是$\frac{3\sqrt{3}}{2}$，$\triangle ACE$ 的边 EC 上的高是$\frac{5\sqrt{3}}{2}$，

则 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AEC} - S_{\triangle BEC} = \frac{1}{2} \times 4 \times \left(\frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{3}$.

点拨：本题考查了正多边形的相关计算，正确理解 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AEC} - S_{\triangle BEC}$ 是解题的关键.

18. **解**：（1）$60°$　（2）$90°$；$108°$

（3）$\angle APN = \frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$.

9　弧长及扇形的面积

1. C　**2.** A　**3.** C　**4.** B　**5.** C

6. C　**7.** C　**8.** B

9. $\sqrt{3} + \pi$　**点拨**：过点 O 作 $OF \perp AB$ 于点 F.

$\because$ 在扇形 AOB 中，$\angle AOB = 120°$，半径 OC 交弦 AB 于点 D，且 $OC \perp OA$，

$\therefore \angle AOD = 90°$，$\angle OAB = \angle OBA = 30°$.

$\therefore \angle BOC = 30°$，$OD = OA \cdot \tan 30° = 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 2$，$AD = 4$，$AB = 2AF = 2AO \cdot \cos 30° = 2 \times 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6$，$OF = \sqrt{3}$.

$\therefore BD = 2$.

$\therefore S_{\text{阴影}} = S_{\triangle AOB} + S_{\text{扇形}BOC} - S_{\triangle BDO} = \frac{2\sqrt{3} \times 2}{2} + \frac{30 \times \pi \times (2\sqrt{3})^2}{360} - \frac{2 \times \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} + \pi$.

10. **解**：$\because \overset{\frown}{AB}$ 所对的圆周角为 $30°$，

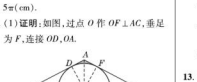
$\therefore \overset{\frown}{AB}$ 所对的圆心角为 $60°$，

$\therefore \overset{\frown}{AB}$ 的长 $= \frac{60 \times \pi \times 30}{180} = 10\pi$(cm).

易错总结：在公式 $l = \frac{n\pi R}{180}$，$S_{\text{扇形}} = \frac{n\pi R^2}{360}$ 中，n 是圆心角的度数，而题干给出的是圆周角的度数，不能直接代入公式计算，要求出圆心角的度数后再代入公式计算.

本题易错解为 $\overset{\frown}{AB}$ 的长 $= \frac{30 \times \pi \times 30}{180} = 5\pi$(cm).

11. （1）**证明**：如图，过点 O 作 $OF \perp AC$，垂足为 F，连接 OD，OA.



（第 11 题）

$\because \triangle ABC$ 是等腰三角形，点 O 是底边 BC 的中点，

$\therefore AO$ 是 $\triangle ABC$ 的高线，也是 $\angle BAC$ 的平分线，

$\because AB$ 是$\odot O$ 的切线，$\therefore OD \perp AB$，

又$\because OF \perp AC$，$\therefore OF = OD$，

即 OF 是$\odot O$ 的半径，

$\therefore AC$ 是$\odot O$ 的切线.

（2）**解**：在 $\mathrm{Rt}\triangle BOD$ 中，

设 $OD = OE = x$，则 $OB = x + 1$，

由勾股定理，得

$(x+1)^2 = x^2 + (\sqrt{3})^2$，

解得 $x = 1$，即 $OD = OE = 1$.

$\therefore OB = BE + OE = 2$.

$\therefore \sin \angle BOD = \frac{BD}{OB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore \angle BOD = 60°$.

$\therefore \angle AOD = 90° - \angle BOD = 30°$，

易知 $AD = AF$，$\angle FOA = \angle AOD$.

$\therefore AF = AD \cdot OD \times \tan \angle AOD = \frac{\sqrt{3}}{3}$，

$\angle DOF = 60°$.

$\therefore S_{\text{阴影}} = S_{\text{四边形}ADOF} - S_{\text{扇形}DOF} = \frac{1}{2}AD \times OD \times 2 - \frac{60}{360}\pi \times 1^2 = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\sqrt{3} - \pi}{6}$.

12. **解**：（1）连接 OD，$\because OA \perp OB$，$FD /\!/ OB$，

$\therefore OA \perp FD$. $\therefore \angle OCD = 90°$.

设 $OC = a$，则 $OA = 2a = OD$.

在 $\triangle OCD$ 中，由勾股定理，

得 $CD^2 + OC^2 = OD^2$，

即 $(\sqrt{3})^2 + a^2 = 4a^2$，

解得 $a_1 = 1$，$a_2 = -1$（舍去）.

$\therefore OA = 2a = 2$.

$\therefore$ $\odot O$ 的半径 OA 的长为 2.

（2）在 $\mathrm{Rt}\triangle OCD$ 中，

$\because OC = 1$，$OD = 2$，$\therefore \angle ODC = 30°$.

又$\because FD /\!/ OB$，$\therefore \angle DOB = 30°$.

$\therefore S_{\text{阴影}} = S_{\triangle OCD} + S_{\text{扇形}BOD} - S_{\text{扇形}COE} = \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} + \frac{30}{360} \times \pi \times 2^2 - \frac{90}{360} \times \pi \times 1^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{12}$.

13. C　**点拨**：因为五边形的内角和为 $540°$，所以阴影部分的面积等于五个圆的面积减去$\frac{540}{360}$个圆的面积.

14. **解**：如图，连接 AE 并延长，交弧 BD 于点 F，连接 BE. 由轴对称的性质可知 $S_{\text{扇形}BAF} = S_{\text{扇形}DAE}$，$S_1 = S_2 = S_4$，$S_3 = S_5$.



（第 14 题）

$\because \angle BAE = \angle DAE = 45°$，

$\therefore S_{\text{弓形}BAB} = \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{8}$，

$S_{\text{扇形}BAF} = \frac{45\pi a^2}{360} = \frac{\pi a^2}{8}$.

$\therefore S_{\text{弓形}BAB} = S_{\text{扇形}BAF}$，

$\therefore S_1 = S_4 = S_2 = S_3 = S_5$.

又$\because S_1 + S_5 = S_{\text{弓形}BAB} - S_{\triangle ABE} = \frac{\pi a^2}{8} - \frac{a^2}{4}$.

$\therefore S_{\text{阴影}} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 2(S_1 + S_5) = 2\left(\frac{\pi a^2}{8} - \frac{a^2}{4}\right) = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)a^2$.

15. **解**：（1）如图①，过 O 作 $OD \perp AB$，垂足为 D.

$\because OC = OB$，$\therefore BC = 2BD$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle OBD$ 中，$OB = 60$ cm，

$\angle OBD = 50°$，

$\therefore BD = OB \times \cos 50° \approx 60 \times 0.64 = 38.4$(cm).

$\therefore BC = 2BD \approx 76.8$ cm.

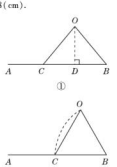
$\therefore AC = AB - BC \approx 43.2$ cm.

（2）$\because BO$ 的长始终不变，

$\therefore O$ 在以 B 点为圆心，半径为 60 cm 的圆上运动，如图②，此时 $\triangle OBC$ 为等边三角形.

$\therefore \angle OBC = 60°$.

$\therefore$ 点 O 运动的路径长 $= \frac{60 \times 3.14 \times 60}{180} = 62.8$(cm).



（第 15 题）

10　圆锥的侧面积

1. B

2. C　**点拨**：解决此类问题时要紧紧抓住圆锥和其侧面展开图两者之间的两个对应关系：(1) 圆锥的母线长对应侧面展开图的扇形半径；(2) 圆锥的底面周长对应侧面展开图的扇形弧长. 对这两个关系的正确记忆是解题的关键.

3. C

4. C　**点拨**：在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，由勾股定理得 $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

$\because AB = AC$，$BC = 8$ m，

$\therefore AB = 4\sqrt{2}$ m，

$\therefore \overset{\frown}{BC} = \frac{90}{360} \times 2\pi \times 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\pi$(m)，

$\therefore$ 围成的圆锥的底面圆半径是 $2\sqrt{2}\pi \div 2\pi = \sqrt{2}$(m)，

$\therefore$ 圆锥的高是 $\sqrt{(4\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{32 - 2} = \sqrt{30}$(m).

5. C　**6.** D　**7.** $240°$　**8.** A

9. 171π cm^2

10. **错解**：B

诊断：错解误认为以斜边为轴将直角三角形旋转一周所形成的几何体的表面积是两个共底面的圆锥的侧面积与一个底面积之和.

正解：C

11. **解**：（1）连接 BC，

$\because \angle BAC = 90°$，

$\therefore BC$ 为$\odot O$ 的直径，

即 $BC = \sqrt{2}$ m，

$\therefore$ 由勾股定理得 $AB = AC = 1$ m.

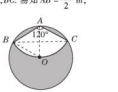
（2）设所得圆锥的底面圆的半径为 r m，

根据题意得 $2\pi r = \frac{90\pi \cdot 1}{180}$，

解得 $r = \frac{1}{4}$，

$\therefore$ 所得圆锥的底面圆的半径为$\frac{1}{4}$ m.

12. **解**：（1）如图，设圆形铁皮的圆心为 O，连接 OA，OB，BC. 易知 $AB = \frac{1}{2}$ m，



（第 12 题）

$\therefore$ 扇形 BAC 的面积为 $\frac{120 \times \pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^2}{360} = \frac{\pi}{12}(\mathrm{m}^2)$，

$\therefore$ 被剪掉部分（阴影部分）的面积为 $\pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{6}(\mathrm{m}^2)$.

（2）设该圆锥底面圆的半径为 r m，

则 $\frac{120 \times \pi \times \frac{1}{2}}{180} = 2\pi r$.

解得 $r = \frac{1}{6}$.

故该圆锥底面圆的半径是$\frac{1}{6}$ m.

13. （1）**证明**：在正方形 $ABCD$ 中，

$\angle BAC = 90°$.

$\because \triangle BEC$ 绕点 B 逆时针旋转 $90°$ 得到 $\triangle BFA$，

$\therefore \triangle ABF \cong \triangle CBE$，

$\therefore \angle FAB = \angle ECB$，$\angle ABF = \angle CBE = 90° + \angle CBE$，

$\therefore \angle AFB + \angle FAB = 90°$，

$\because$ 线段 FA 绕点 F 顺时针旋转 $90°$ 得线段 FG，

$\therefore \angle AFB + \angle CFG = \angle AFG = 90°$，

$\therefore \angle CFG = \angle FAB = \angle ECB$，

$\therefore EC /\!/ FG$，

$\because AF = CE$，$AF = FG$，

$\therefore EC = FG$，

$\therefore$ 四边形 $EFGC$ 是平行四边形，

$\therefore EF /\!/ CG$.

（2）**解**：$\because AD = 2$，$AB = AD$，E 是 AB 的中点，

$\therefore BF = BE = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 2 = 1$，

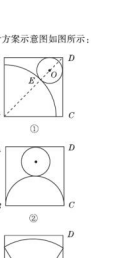
$\therefore AF = \sqrt{AB^2 + BF^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$，

由平行四边形的性质得，$\triangle FEC \cong \triangle CGF$，

$\therefore S_{\triangle FEC} = S_{\triangle CGF}$，

$\therefore S_{\text{阴影}} = S_{\text{扇形}ABC} + S_{\triangle ABF} + S_{\triangle FGC} - S_{\text{扇形}AFG} = \frac{90 \cdot \pi \cdot 2^2}{360} + \frac{1}{2} \times 2 \times 1 + \frac{1}{2} \times (1+2) \times 1 - \frac{90 \cdot \pi \cdot (\sqrt{5})^2}{360} = \frac{5}{2} - \frac{\pi}{4}$.

14. **解**：（1）设计方案示意图如图所示：



（第 14 题）

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）使得正方形铁皮的利用率最高的裁剪方案如图①所示. 设⊙O 的半径为 r cm，扇形的半径为 R cm，则有 $\frac{90\times\pi\times R}{180}=2r\times\pi$，

∴ $R=4r$. 连接 BD.

∵ 正方形的边长为 40 cm，

∴ $BD=40\sqrt{2}$ cm. 易知⊙O 与扇形的切点 E，圆心 O 在 BD 上，

∴ $R+r+\sqrt{2}r=BD$，

即 $4r+r+\sqrt{2}r=40\sqrt{2}$，

∴ $r=\frac{200\sqrt{2}-80}{23}$.

即圆锥模型底面圆的半径为 $\frac{200\sqrt{2}-80}{23}$ cm.

点拨：（1）答案不唯一.

阶段方法技巧训练（三）

专训 1

1.（1）**证明**：∵ AB，CD 是⊙O 的直径，

∴ $AB=CD$，$\angle ADB=\angle CBD=90°$.

在 Rt△ABD 和 Rt△CDB 中，

$\begin{cases}AB=CD,\\BD=DB.\end{cases}$

∴ Rt△ABD≌Rt△CDB（HL），

即△ABD≌△CDB.

（2）**解**：∵ BE 是⊙O 的切线，

∴ $AB\perp BE$. ∴ $\angle ABE=90°$.

∵ $\angle DBE=37°$，

∴ $\angle ABD=53°$.

∵ $OD=OA$，

∴ $\angle ODA=\angle BAD=90°-53°=37°$，

即 $\angle ADC$ 的度数为 37°.

2. 2　**点拨**：如图，连接 OB，∵ $\angle BCD=22°30'$，∴ $\angle BOD=2\angle BCD=45°$. ∵ $AB\perp CD$，∴ $BE=AE=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}=\sqrt{2}$（cm），$\angle OBE=45°$，∴ △$BOE$ 为等腰直角三角形，∴ $OB=\sqrt{2}BE=2$ cm.



（第 2 题）

3. **解**：如图，连接 OC.

∵ $\angle A=30°$，

∴ $\angle COD=60°$.

∵ DC 切⊙O 于点 C，

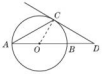
∴ $\angle OCD=90°$.

∴ $\angle D=30°$.

∵ $OD=30$ cm，

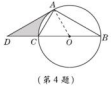
∴ $OC=\frac{1}{2}OD=15$ cm.

∴ $AB=2OC=30$ cm.



（第 3 题）

4.（1）**证明**：如图，连接 OA，则 $\angle COA=2\angle B$.



（第 4 题）

∵ $AD=AB$，$\angle D=30°$，

∴ $\angle B=\angle D=30°$.

∴ $\angle COA=60°$.

∴ $\angle OAD=180°-60°-30°=90°$.

∴ $OA\perp AD$.

∴ 直线 AD 是⊙O 的切线.

（2）**解**：∵ $BC=4$，

∴ $OA=OC=2$.

在 Rt△OAD 中，$OA=2$，$\angle D=30°$，

∴ $OD=2OA=4$，$AD=2\sqrt{3}$.

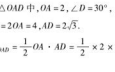
∴ $S_{\triangle OAD}=\frac{1}{2}OA\cdot AD=\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$.

∵ $\angle COA=60°$，

∴ $S_{\text{扇形}COA}=\frac{60\pi\cdot 2^2}{360}=\frac{2}{3}\pi$.

∴ $S_{\text{阴影}}=S_{\triangle OAD}-S_{\text{扇形}COA}=2\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3}$.

5.（1）**证明**：如图，连接 OD，与 AF 相交于点 G，



（第 5 题）

∵ CE 与⊙O 相切于点 D，

∴ $OD\perp CE$.

∴ $\angle CDO=90°$.

∵ $AD//OC$，

∴ $\angle ADO=\angle DOC$，$\angle DAO=\angle BOC$.

∵ $OA=OD$，

∴ $\angle ADO=\angle DAO$.

∴ $\angle DOC=\angle BOC$.

在△CDO 和△CBO 中，

$\begin{cases}CO=CO,\\\angle DOC=\angle BOC,\\OD=OB,\end{cases}$

∴ △CDO≌△CBO.

∴ $\angle CBO=\angle CDO=90°$.

∴ CB 是⊙O 的切线.

（2）**解**：由（1）可知 $\angle DCO=\angle BCO$，

∵ $\angle ECB=60°$，

∴ $\angle DCO=\angle BCO=\frac{1}{2}\angle ECB=30°$.

∴ $\angle DOC=\angle BOC=60°$.

∴ $\angle DOA=60°$.

∵ $OA=OD$，

∴ △OAD 是等边三角形.

∴ $AD=OD=OF$.

在△FOG 和△ADG 中，

$\begin{cases}\angle GOF=\angle GDA,\\\angle FGO=\angle AGD,\\OF=DA,\end{cases}$

∴ △FOG≌△ADG.

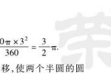
∴ $S_{\triangle ADC}=S_{\triangle FOG}$.

∵ $AB=6$，

∴ ⊙O 的半径 $r=3$.

∴ $S_{\text{阴影}}=S_{\text{扇形}BOF}=\frac{60\pi\times 3^2}{360}=\frac{3}{2}\pi$.

6. **解**：将小半圆向右平移，使两个半圆的圆心重合，如图所示，则阴影部分的面积等于半圆环的面积.



（第 6 题）

作 $OE\perp AB$ 于 E（易知 E 为切点），连接 OA，

则 $AE=\frac{1}{2}AB=9$.

∴ 阴影部分的面积 $=\frac{1}{2}\pi\cdot OA^2-\frac{1}{2}\pi\cdot OE^2=\frac{1}{2}\pi(OA^2-OE^2)=\frac{1}{2}\pi\cdot AE^2=\frac{1}{2}\pi\cdot 9^2=\frac{81}{2}\pi$.

点拨：观察图形可知阴影部分的面积等于大半圆的面积减去小半圆的面积，因此当小半圆在大半圆范围内左右移动时，阴影部分面积不改变，所以我们可以通过平移，使两个半圆的圆心重合，这样就能运用已知条件求出阴影部分的面积.

7.（1）$\frac{25}{2}+\frac{25\pi}{4}$

（2）**证明**：如图，连接 OD，

∵ AB 是⊙O 的直径，

∴ $\angle ACB=90°$.

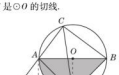
∵ CD 平分 $\angle ACB$，

∴ $\angle ABD=\angle ACD=\frac{1}{2}\angle ACB=45°$.

∴ $\angle AOD=90°$，即 $OD\perp AB$.

∵ $DE//AB$，∴ $OD\perp DE$.

∴ DE 是⊙O 的切线.



（第 7 题）

（3）**解**：∵ $AB=10$，$AC=6$，

∴ $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=8$，$AO=BO=DO=5$.

如图，过点 A 作 $AF\perp DE$ 于点 F，则四边形 $AODF$ 是正方形，

∴ $AF=OD=FD=5$，$\angle FAB=90°$.

∵ $\angle EAF=90°-\angle CAB=\angle ABC$.

∴ $\tan\angle EAF=\tan\angle ABC$.

∴ $\frac{EF}{AF}=\frac{AC}{BC}$，即 $\frac{EF}{5}=\frac{6}{8}$.

∴ $EF=\frac{15}{4}$.

∴ $DE=DF+EF=5+\frac{15}{4}=\frac{35}{4}$.

8. **解**：（1）如图，过点 B 作 $BH\perp PQ$ 于点 H，在 Rt△BHP 中，由条件易知 $BP=320$ km，$\angle BPQ=30°$. ∴ $BH=\frac{1}{2}BP=160$ km < 200 km. ∴ 台风会影响 B 市.

（2）如图，以 B 为圆心，200 km 为半径画圆，交 PQ 于 P_1，P_2 两点，连接 BP_1，由垂径定理知 $P_1P_2=2P_1H$.

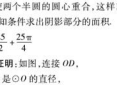
在 Rt△BHP_1 中，$BP_1=200$ km，$BH=160$ km，

∴ $P_1H=\sqrt{200^2-160^2}=120$（km）.

∴ $P_1P_2=2P_1H=240$ km.

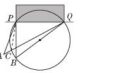
∴ 台风影响 B 市的时间为 $\frac{240}{30}=8$（h）.

点拨：在图形中画出圆，可以非常直观地构造数学模型，然后利用垂径定理解决生活中的实际问题.



（第 8 题）

9. **解**：选择射门方式二较好，理由如下：设 AQ 与圆的另一交点为 C，连接 PC，如图所示.



（第 9 题）

∵ $\angle PCQ$ 是△PAC 的外角，

∴ $\angle PCQ>\angle A$. 又∵ $\angle PCQ=\angle B$，

∴ $\angle B>\angle A$. ∴ 在 B 点射门比在 A 点射门好. ∴ 选择射门方式二较好.

点拨：本题运用**转化思想**，将射门角度大小的问题，建模转化到圆中，根据圆周角的相关结论来解决实际问题.

10. **解**：修建的这条水渠不会穿过公园.

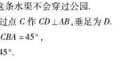
理由：如图，过点 C 作 $CD\perp AB$，垂足为 D.

由题易得 $\angle CBA=45°$，

∴ $\angle BCD=45°$.

∴ $CD=BD$.

设 $CD=x$ km，则 $BD=x$ km.



（第 10 题）

由题易得 $\angle CAB=30°$，

∴ $AC=2CD=2x$ km，

∴ $AD=\sqrt{(2x)^2-x^2}=\sqrt{3}x$（km），

∴ $\sqrt{3}x+x=1$，解得 $x=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$，

即 $CD=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ km≈0.366 km＝366 m＞350 m，

也就是说，以点 C 为圆心，350 m 为半径的圆与 AB 相离.

∴ 修建的这条水渠不会穿过公园.

专训 2

1. **解**：如图，连接 OA，OF. 设 $OA=OF=r$ cm，$AB=a$ cm.



（第 1 题）

在 Rt△OAB 中，$r^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2$，

在 Rt△OEF 中，$r^2=4^2+\left(4+\frac{a}{2}\right)^2$，

∴ $\frac{a^2}{4}+a^2=16+16+4a+\frac{a^2}{4}$.

解得 $a_1=8$，$a_2=-4$（舍去）.

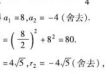
∴ $r^2=\left(\frac{8}{2}\right)^2+8^2=80$.

∴ $r_1=4\sqrt{5}$，$r_2=-4\sqrt{5}$（舍去），

即该半圆的半径为 $4\sqrt{5}$ cm.

点拨：在有关圆的计算题中，求角度或边长时，常连接半径构造等腰三角形或直角三角形，利用特殊三角形的性质来解决问题.

2. **证明**：如图，连接 AD，BD.



（第 2 题）

∵ $\angle DAC$，$\angle DBC$ 都是 $\overset{\frown}{DC}$ 所对的圆周角，

∴ $\angle DAC=\angle DBC$.

∵ CD 平分 $\angle ACM$，$DP\perp AC$，$DH\perp CM$，

∴ $\angle DPA=\angle DHC=90°$，$DP=DH$.

在△ADP 和△BDH 中，

$\begin{cases}\angle DAP=\angle DBH,\\\angle DPA=\angle DHB=90°,\\DP=DH.\end{cases}$

∴ △ADP≌△BDH. ∴ $AP=BH$.

点拨：本题通过作辅助线构造圆周角，然后利用“同弧所对的圆周角相等”得到 $\angle DAC=\angle DBC$，为证两三角形全等创造了条件.

3.（1）**证明**：如图，过点 D 作⊙O 的直径 DE，连接 AE，EC，AC.

∵ DE 是⊙O 的直径，

∴ $\angle ECD=\angle EAD=90°$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

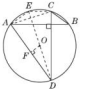
又∵ $CD \perp AB$，∴ $EC // AB$.

∴ $\angle BAC = \angle ACE$.

∴ $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AK}$. ∴ $BC = AE$.

在 Rt△AED 中，$AD^2 + AE^2 = DE^2$，

∴ $AD^2 + BC^2 = 4R^2$.



（第 3 题）

（2）**解**：如图，过点 O 作 $OF \perp AD$ 于点 F.

∵ 弦 AD，BC 的长是方程 $x^2 - 6x + 5 = 0$ 的两个根（$AD > BC$），∴ $AD = 5$，$BC = 1$.

由（1）知，$AD^2 + BC^2 = 4R^2$，

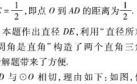
∴ $5^2 + 1^2 = 4R^2$. ∴ $R = \frac{\sqrt{26}}{2}$.

∵ $\angle EAD = 90°$，$OF \perp AD$，∴ $OF // EA$.

又∵ O 为 DE 的中点，∴ $OF = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}$，即点 O 到 AD 的距离为 $\frac{1}{2}$.

点拨：本题作出直径 DE，利用“直径所对的圆周角是直角”构造了两个直角三角形，给解题带来了方便.

4. **解**：CD 与 $\odot O$ 相切，理由如下：如图，作 $\odot O$ 的直径 CE，连接 AE.



（第 4 题）

∵ CE 是 $\odot O$ 的直径，∴ $\angle EAC = 90°$.

∴ $\angle E + \angle ACE = 90°$.

∵ $CA = CB$，∴ $\angle B = \angle CAB$.

∵ $AB // CD$，

∴ $\angle ACD = \angle CAB$. ∴ $\angle B = \angle ACD$.

又∵ $\angle B = \angle E$，∴ $\angle ACD = \angle E$.

∴ $\angle ACE + \angle ACD = 90°$，即 $OC \perp DC$.

又∵ OC 为 $\odot O$ 的半径，∴ CD 与 $\odot O$ 相切.

5. C

6. **解**：如图，过点 O 作 $OE \perp AB$ 于点 E，连接 OB.

∵ $AB = 8$ cm，

∴ $AE = BE = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 8 = 4$（cm）.

∵ $\odot O$ 的直径为 10 cm，

∴ $OB = \frac{1}{2} \times 10 = 5$（cm），

∴ $OE = \sqrt{OB^2 - BE^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$（cm）.

∵ 3 cm ≤ OP ≤ 5 cm.



（第 6 题）

7. （1）**证明**：连接 OD，AD，

∵ AC 是 $\odot O$ 的直径，

∴ $\angle ADC = 90°$. ∴ $AD \perp BC$.

∵ $AB = AC$，

∴ $\angle CAD = \angle BAD = \frac{1}{2}\angle BAC$.

∵ $\angle CDE = \frac{1}{2}\angle BAC$，

∴ $\angle CDE = \angle CAD$.

∵ $OA = OD$，∴ $\angle CAD = \angle ADO$.

∴ $\angle CDE = \angle ADO$.

∵ $\angle ADO + \angle ODC = 90°$，

∴ $\angle ODC + \angle CDE = 90°$，

∴ $\angle ODE = 90°$. ∴ $OD \perp DE$.

又∵ OD 是 $\odot O$ 的半径，

∴ DE 是 $\odot O$ 的切线.

（2）**解**：∵ $AB = AC$，$AD \perp BC$，∴ $BD = CD$.

∵ $AB = 3BD$，∴ $AC = 3DC$.

设 $DC = x$，则 $AC = 3x$，

∴ $AD = \sqrt{AC^2 - DC^2} = 2\sqrt{2}x$.

∵ $\angle CDE = \angle CAD$，$\angle DEC = \angle AED$，

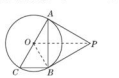
∴ △CDE ∽ △DAE.

∴ $\frac{CE}{DE} = \frac{DC}{AD} = \frac{DE}{AE}$，即 $\frac{2}{DE} = \frac{x}{2\sqrt{2}x} = \frac{DE}{3x + 2}$.

∴ $x = \frac{14}{3}$. ∴ $AC = 3x = 14$.

∴ $\odot O$ 的半径为 7.

8. （1）**证明**：如图，连接 OB，∵ $OA = OB$，



（第 8 题）

∴ $\angle OAB = \angle OBA$.

∵ $PA = PB$，∴ $\angle PAB = \angle PBA$.

∴ $\angle OAB + \angle PAB = \angle OBA + \angle PBA$，

即 $\angle PAO = \angle PBO$.

又∵ PA 是 $\odot O$ 的切线，∴ $\angle PAO = 90°$.

∴ $\angle PBO = 90°$. ∴ $OB \perp PB$.

又∵ OB 是 $\odot O$ 的半径，

∴ PB 是 $\odot O$ 的切线.

（2）**解**：如图，连接 OP，

∵ $PA = PB$，

∴ 点 P 在线段 AB 的垂直平分线上.

∵ $OA = OB$，

∴ 点 O 在线段 AB 的垂直平分线上.

∴ OP 为线段 AB 的垂直平分线.

又∵ $BC \perp AB$，

∴ $PO // BC$. ∴ $\angle AOP = \angle ACB = 60°$.

由（1）知 $\angle PAO = 90°$.

∴ $\angle APO = 30°$. ∴ $PO = 2AO$.

∵ 在 Rt△APO 中，$AO^2 + PA^2 = PO^2$，

∴ $AO^2 + 3 = (2AO)^2$.

又∵ $AO > 0$，∴ $AO = 1$.

∴ $\odot O$ 的半径为 1.

9. （1）**证明**：如图，连接 CO，交 DB 于点 E，则 $\angle O = 2\angle CDB = 60°$.

又∵ $\angle OBE = 30°$，

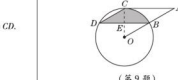
∴ $\angle BEO = 180° - 60° - 30° = 90°$.

∵ $AC // BD$，

∴ $\angle ACO = \angle BEO = 90°$，即 $OC \perp AC$.

又∵ 点 C 在 $\odot O$ 上，

∴ AC 是 $\odot O$ 的切线.



（第 9 题）

（2）**解**：∵ $OE \perp DB$，

∴ $EB = \frac{1}{2}DB = 3\sqrt{3}$ cm.

在 Rt△EOB 中，∵ $\angle OBE = 30°$，

∴ $OE = \frac{1}{2}OB$. ∵ $EB = 3\sqrt{3}$ cm，

∴ 由勾股定理可求得 $OB = 6$ cm.

∵ $\angle CDB = \angle DBO$，$DE = BE$，$\angle CED = \angle OEB$，

∴ △CDE ≌ △OBE. ∴ $S_{\triangle CDE} = S_{\triangle OBE}$.

∴ $S_{\text{阴影}} = S_{\text{扇形}COB} = \frac{60}{360}\pi \cdot 6^2 = 6\pi$（cm^2）.

专训 3

1. D　**2.** B　**3.** C　**4.** 4　**5.** 2.2　**6.** ①④

7. （1）**证明**：连接 OC.

∵ CE 与 $\odot O$ 相切，OC 是 $\odot O$ 的半径，

∴ $OC \perp CE$. ∴ $\angle OCA + \angle ACE = 90°$.

∵ $OA = OC$，∴ $\angle A = \angle OCA$.

∴ $\angle ACE + \angle A = 90°$.

∵ $OD \perp AB$，∴ $\angle ODA + \angle A = 90°$.

∴ $\angle ODA = \angle CDE$，

∴ $\angle CDE + \angle A = 90°$.

∴ $\angle CDE = \angle ACE$. ∴ $EC = ED$.

（2）**解**：∵ AB 为 $\odot O$ 的直径，

∴ $\angle ACB = \angle DCF = 90°$.

在 Rt△DCF 中，$\angle DCE + \angle ECF = 90°$，

$\angle DCE = \angle CDE$，

∴ $\angle CDE + \angle ECF = 90°$.

∵ $\angle CDE + \angle F = 90°$，

∴ $\angle ECF = \angle F$.

∴ $EC = EF$.

∵ $EF = 3$，

∴ $EC = DE = 3$.

∴ $OE = \sqrt{OC^2 + EC^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.

∵ $OD = OE - DE = 5 - 3 = 2$.

∴ 在 Rt△OAD 中，$AD = \sqrt{OA^2 + OD^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$.

∵ $\angle A = \angle A$，$\angle ACB = \angle AOD$，

∴ △AOD ∽ △ACB.

∴ $\frac{OA}{AC} = \frac{AD}{AB}$，即 $\frac{4}{AC} = \frac{2\sqrt{5}}{8}$，解得 $AC = \frac{16\sqrt{5}}{5}$.

8. （1）**证明**：如图，连接 OC. ∵ PE 与 $\odot O$ 相切，∴ $OC \perp PE$.

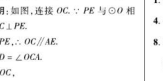
∵ $AE \perp PE$，∴ $OC // AE$.

∴ $\angle CAD = \angle OCA$.

∵ $OA = OC$，

∴ $\angle OCA = \angle OAC$. ∴ $\angle CAD = \angle OAC$.

∴ AC 平分 $\angle BAD$.



（第 8 题）

（2）**解**：PB，AB 之间的数量关系为 $AB = 3PB$.

理由如下：∵ AB 为 $\odot O$ 的直径，

∴ $\angle ACB = 90°$.

∴ $\angle BAC + \angle ABC = 90°$. ∵ $OB = OC$，

∴ $\angle OCB = \angle ABC$. ∵ $\angle PCB + \angle OCB = 90°$，

∴ $\angle PCB = \angle PAC$.

∵ $\angle P = \angle P$，∴ △PCA ∽ △PBC.

∴ $\frac{PC}{PB} = \frac{PA}{PC}$. ∴ $PC^2 = PB \cdot PA$.

∵ $PB : PC = 1 : 2$，

∴ $PC = 2PB$. ∴ $PA = 4PB$. ∴ $AB = 3PB$.

（3）**解**：过点 O 作 $OH \perp AD$ 于点 H，如图，则 $AH = \frac{1}{2}AD = \frac{3}{2}$，四边形 $OCEH$ 是矩形.

∴ $OC = HE$. ∴ $AE = \frac{3}{2} + OC$.

∵ $OC // AE$，∴ △PCO ∽ △PEA. ∴ $\frac{OC}{AE} = \frac{PO}{PA}$.

∵ $AB = 3PB$，$AB = 2OB$，∴ $OB = \frac{3}{2}PB$.

∴ $\frac{OC}{\frac{3}{2} + OC} = \frac{PB + \frac{3}{2}PB}{PB + 3PB} = \frac{5}{8}$.

∴ $OC = \frac{5}{2}$. ∴ $AB = 5$.

由（2）知 △PBC ∽ △PCA，

∴ $\frac{PB}{PC} = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$. ∴ $AC = 2BC$.

在 Rt△ABC 中，$AC^2 + BC^2 = AB^2$，

∴ $(2BC)^2 + BC^2 = 5^2$，

∴ $BC = \sqrt{5}$. ∴ $AC = 2\sqrt{5}$.

∴ $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BC = 5$，即 △$ABC$ 的面积为 5.

专训 4

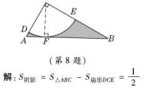
1. D　**2.** D　**3.** A

4. $\frac{3}{4}$　**5.** $\frac{1}{2}$　**6.** $\frac{4}{5}$　**7.** $\frac{1}{2}$

8. （1）**证明**：如图，过点 C 作 $CF \perp AD$ 于点 F，

在 Rt△ABC 中，$\tan B = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{2}$，

∴ $BC = 2AC = 2\sqrt{5}$. ∴ $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{5})^2} = 5$，∴ $CF = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{\sqrt{5} \times 2\sqrt{5}}{5} = 2$. ∴ AB 为 $\odot C$ 的切线.



（第 8 题）

（2）**解**：$S_{\text{阴影}} = S_{\triangle ABC} - S_{\text{扇形}DCE} = \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times 2\sqrt{5} - \frac{90\pi \times 2^2}{360} = 5 - \pi$.

9. （1）**证明**：连接 OC，如图，

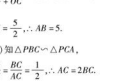
∵ CD 是 $\odot O$ 的切线，

∴ $\angle OCD = 90°$. ∴ $\angle ACO + \angle DCE = 90°$.

又∵ $ED \perp AD$，∴ $\angle EDA = 90°$. ∴ $\angle EAD + \angle E = 90°$. ∵ $OC = OA$，∴ $\angle ACO = \angle EAD$，

∴ $\angle DCE = \angle E$，∴ $DC = DE$.

（2）**解**：设 $BD = x$，则 $AD = AB + BD = 3 + x$，$OD = OB + BD = 1.5 + x$. 在 Rt△EAD 中，∵ $\tan \angle CAB = \frac{1}{2}$，∴ $ED = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}(3 + x)$. ∴ $DC = DE = \frac{1}{2}(3 + x)$. 在 Rt△$OCD$ 中，$OC^2 + CD^2 = OD^2$，则 $1.5^2 + \left[\frac{1}{2}(3 + x)\right]^2 = (1.5 + x)^2$，解得 $x_1 = -3$（舍去），$x_2 = 1$，∴ $BD = 1$.



（第 9 题）

专训 5

1. C

2. **解**：连接 OA，OB.

∵ PA，PB 是 $\odot O$ 的两条切线，

∴ $PA \perp OA$，$PB \perp OB$.

∴ $\angle OAP = \angle OBP = 90°$.

∴ $\angle AOB = 360° - (\angle OAP + \angle OBP + \angle APB) = 360° - (90° + 90° + 50°) = 130°$.

当点 C 是优弧 AB 上一点时，$\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB = 65°$.

当点 C 是劣弧 AB 上一点时，$\angle ACB = 180° - 65° = 115°$.

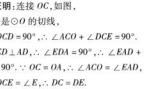
∴ $\angle ACB$ 的度数为 65° 或 115°.

3. **解**：分两种情况：

（1）当圆心 O 在△ABC 内时，如图①，连接 AO 并延长交 BC 于 D，连接 OB. 由题意易得 $AD \perp BC$，∴ $BD = \sqrt{OB^2 - OD^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$（cm）.

∴ $AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = \sqrt{16^2 + 8^2} = 8\sqrt{5}$（cm）.

（2）当圆心 O 在△ABC 外时，如图②，连接 OA 交 BC 于 D，连接 OB，易得 $AD = 10 - 6 = 4$（cm）. 同（1）解法，$AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}$（cm）. 综上所述，腰 AB 的长为 $8\sqrt{5}$ cm 或 $4\sqrt{5}$ cm.



①　②

（第 3 题）

4. **解**：①弦 AB 和 CD 的位置如图①，

过点 O 作 $OF \perp CD$ 于 F，交 AB 于 E，连接 OA，OC，易知 $OE \perp AB$.

∵ $AB = 8$ cm，$CD = 6$ cm，

∴ $AE = 4$ cm，$CF = 3$ cm.

∵ $OA = OC = 5$ cm，

∴ $EO = \sqrt{OA^2 - AE^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$（cm），

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$OF=\sqrt{OC^2-CF^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$(cm)，

$\therefore EF=OF-OE=1$ cm；

②弦 AB 和 CD 的位置如图②，

过点 O 作 $OE\perp AB$，垂足为 E，延长 EO 交 CD 于 F，连接 OA，OC.

同理可得 $OE=3$ cm，$OF=4$ cm，

$\therefore EF=OE+OF=7$ cm.

综上所述，AB 与 CD 之间的距离为 1 cm 或 7 cm.



（第 4 题）

5. 解：本题分两种情况：

当 AC，AD 在 AB 同侧时，如图①所示，连接 BD，BC，

则 $\angle ADB=\angle ACB=90°$.

在 Rt△ADB 中，$AD=\sqrt{3}$，$AB=2$，

易得 $\angle DAB=30°$，

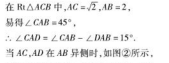
在 Rt△ACB 中，$AC=\sqrt{2}$，$AB=2$，

易得 $\angle CAB=45°$，

$\therefore \angle CAD=\angle CAB-\angle DAB=15°$.

当 AC，AD 在 AB 异侧时，如图②所示，连接 BD，BC，同理可求得 $\angle CAD=75°$.

综上所述，$\angle CAD$ 的度数为 15°或 75°.



（第 5 题）

6. 解：垂足 M 可能在半径 OA 上，也可能在半径 OB 上，需分两种情况讨论：

（1）当点 M 在半径 OA 上时，如图①.

连接 OC，易得 $OC=OA=\frac{1}{2}AB=5$ cm.

又 $\because OM:OA=3:5$，

$\therefore OM=3$ cm. $\therefore AM=OA-OM=2$ cm.

$\because CD\perp AB$，$\therefore \angle CMO=\angle CMA=90°$.

在 Rt△OMC 中，$MC=\sqrt{OC^2-OM^2}=4$ cm.

在 Rt△AMC 中，$AC=\sqrt{AM^2+MC^2}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$(cm).

（2）当点 M 在半径 OB 上时，如图②.

连接 OC，

易得 $OA=OC=5$ cm，$OM=3$ cm.

$\therefore AM=OA+OM=8$ cm.

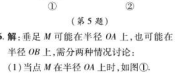
$\because CD\perp AB$，$\therefore \angle AMC=90°$.

在 Rt△OMC 中，

$MC=\sqrt{OC^2-OM^2}=4$ cm.

在 Rt△AMC 中，$AC=\sqrt{AM^2+MC^2}=\sqrt{8^2+4^2}=4\sqrt{5}$(cm).

综上所述，弦 AC 的长为 $2\sqrt{5}$ cm 或 $4\sqrt{5}$ cm.



（第 6 题）

7. 40°或 140°

8. 解：过点 O 作 $OD\perp BC$ 于点 D，连接 OB，OC，则 $BD=CD=\frac{1}{2}BC=\sqrt{3}$ cm.

$\therefore OD=\sqrt{OB^2-BD^2}=1$ cm，

$\therefore \frac{OD}{OB}=\frac{1}{2}$，

$\therefore \angle OBD=30°$，$\angle BOD=60°$，

$\therefore \angle BOC=120°$，$\therefore \angle A=60°$或 120°.

9. 解：当点 C 位于优弧 AB 上时，$\angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB=30°$；当点 C 位于劣弧 AB 上时，$\angle ACB=\frac{1}{2}(360°-\angle AOB)=150°$.

$\therefore \angle ACB$ 的度数为 30°或 150°.

10. D　**11.** 40°或 140°

12. 相切或相交

13. 解：如图①.

$\because CD$ 是⊙O 的切线，$\therefore OD\perp CD$.

$\because OD=OB=BC$，

$\therefore \cos\angle COD=\frac{OD}{OC}=\frac{1}{2}$，

$\therefore \angle COD=60°$.

$\therefore OA\perp OB$，

$\therefore \angle AOB=90°$，

$\therefore \angle AOD=150°$.

$\therefore OA=OD$，

$\therefore \angle OAD=\angle ODA=15°$；

如图②.

$\because CD$ 是⊙O 的切线，

$\therefore OD\perp CD$.

$\because OD=OB=BC$，

$\therefore \cos\angle COD=\frac{OD}{OC}=\frac{1}{2}$，

$\therefore \angle COD=60°$.

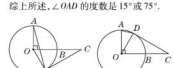
$\therefore OA\perp OB$，$\therefore \angle AOB=90°$，

$\therefore \angle AOD=30°$.

$\because OA=OD$，

$\therefore \angle OAD=\angle ODA=75°$.

综上所述，$\angle OAD$ 的度数是 15°或 75°.



（第 13 题）

专训 6

1. 解：（1）连接 CD，则 $CD\perp AD$，且 $CD=1$，

$\because AC=2$，

$\therefore AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$.

易知点 B 的坐标为 $(0,\frac{\sqrt{3}}{3})$.

设 l 的表达式为 $y=kx+\frac{\sqrt{3}}{3}$，

$\because$ 直线 l 经过点 $A(-1,0)$，

$\therefore -k+\frac{\sqrt{3}}{3}=0$，$\therefore k=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$\therefore$ 直线 l 的表达式为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{\sqrt{3}}{3}$.

（2）连接 BC，由 A，C 两点的坐标知，A，C 两点关于 y 轴对称，$\therefore BA=BC$，故点 B 是一个所求的点；以 A 为圆心，AC 的长为半径画弧，交直线 l 于点 P_1，P_2，易求得 $P_1(-1-\sqrt{3},-1)$，$P_2(\sqrt{3}-1,1)$，以 C 为圆心，AC 的长为半径画弧，交直线 l 于点 P_3，易求得 $P_3(2,\sqrt{3})$. 故在直线 l 上存在点 P，使△APC 为等腰三角形，这样的点 P 有四个：$(0,\frac{\sqrt{3}}{3})$，$(-\sqrt{3}-1,-1)$，$(\sqrt{3}-1,1)$，$(2,\sqrt{3})$.

2. 解：（1）线段 AB 长度的最小值为 4.

理由如下：

连接 OP.

$\because AB$ 切⊙O 于 P，

$\therefore OP\perp AB$. 取 AB 的中点 C，连接 OC，则 $AB=2OC$，当 $OC=OP$ 时，OC 最短，即 AB 最短，此时 $AB=4$.

（2）假设存在符合条件的点 Q.

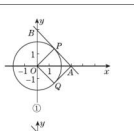
如图①，设四边形 $APOQ$ 为平行四边形，

$\because \angle APO=90°$，$\therefore$ 四边形 $APOQ$ 为矩形.

又 $\because OP=OQ$，$\therefore$ 四边形 $APOQ$ 为正方形，

$\therefore OQ=OA$，$\angle QOA=45°$，

在 Rt△OQA 中，根据 $OQ=2$，$\angle AOQ=45°$，得点 Q 的坐标为 $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$.



（第 2 题）

如图②，设四边形 $APOQ$ 为平行四边形，连接 OP，$\because OQ\parallel PA$，$\angle APO=90°$.

$\therefore \angle PDQ=90°$，

又 $\because OP=OQ$，$\therefore \angle PQO=45°$，

$\because PQ\parallel OA$，$\therefore PQ\perp y$ 轴.

设 $PQ\perp y$ 轴于点 H，

在 Rt△OHQ 中，

根据 $OQ=2$，$\angle HQO=45°$，

得点 Q 的坐标为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

$\therefore$ 符合条件的点 Q 的坐标为 $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ 或 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

3. （1）解：如图，作出圆心 O，以点 O 为圆心，OA 长为半径作圆.

（2）证明：$\because CD\perp AC$，$\therefore \angle ACD=90°$.

$\therefore AD$ 是⊙O 的直径. 如图，连接 OC，

$\because \angle A=\angle B=30°$，$\therefore \angle ACB=120°$.

又 $\because OA=OC$，$\therefore \angle ACO=\angle A=30°$，

$\therefore \angle BCO=\angle ACB-\angle ACO=120°-30°=90°$.

$\therefore BC\perp OC$，$\therefore BC$ 是⊙O 的切线.



（第 3 题）

（3）解：存在.

$\because \angle BCD=\angle ACB-\angle ACD=120°-90°=30°$，$\therefore \angle BCD=\angle B$，即 $DB=DC$.

又 $\because$ 在 Rt△ACD 中，$DC=AD\cdot\sin 30°=\sqrt{3}$，$\therefore BD=\sqrt{3}$.

方法一：①如图，过点 D 作 $DP_1\parallel OC$，交 CB 于 P_1，则△P_1DB∽△COB，$\therefore \frac{P_1D}{CO}=\frac{BD}{BO}$，$\therefore BO=BD+OD=2\sqrt{3}$，

$\therefore P_1D=\frac{BD}{BO}\times OC=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

②如图，过点 D 作 $DP_2\perp AB$，则△BDP_2∽△BCO，$\therefore \frac{P_2D}{OC}=\frac{BD}{BC}$，

$\because BC=\sqrt{BO^2-CO^2}=3$，

$\therefore P_2D=\frac{BD}{BC}\times OC=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{3}=1$.

方法二：①当△BPD∽△BCO 时，$\angle DPB=\angle OCB=90°$.

在 Rt△BPD 中，$DP=BD\cdot\sin 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

②当△BDP∽△BCO 时，

$\angle PDB=\angle OCB=90°$.

在 Rt△BPD 中，$DP=BD\cdot\tan 30°=1$.

4. （1）解：$\because y$ 轴和直线 l 都是⊙C 的切线，

$\therefore OA\perp AD$，$BD\perp AD$.

又 $\because OA\perp OB$，

$\therefore \angle AOB=\angle OAD=\angle ADB=90°$，

$\therefore$ 四边形 $OADB$ 是矩形.

$\because \odot C$ 的半径为 2，$\therefore AD=OB=4$.

$\because$ 点 P 在直线 l 上，

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(4,p)$.

又 $\because$ 点 P 也在直线 AP 上，

$\therefore p=4k+3$.

（2）证明：如图，连接 DN.

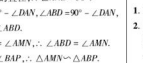
$\because AD$ 是⊙C 的直径，$\therefore \angle AND=90°$.

$\because \angle ADN=90°-\angle DAN$，$\angle ABD=90°-\angle DAN$，

$\therefore \angle ADN=\angle ABD$.

又 $\because \angle ADN=\angle AMN$，$\therefore \angle ABD=\angle AMN$.

$\because \angle MAN=\angle BAP$，$\therefore$ △AMN∽△ABP.



（第 4 题）

（3）解：存在.

把 $x=0$ 代入 $y=kx+3$ 得 $y=3$，即 $OA=BD=3$，

$\therefore AB=\sqrt{AD^2+BD^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$.

$\because S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}AB\cdot DN=\frac{1}{2}AD\cdot DB$，

$\therefore DN=\frac{AD\cdot DB}{AB}=\frac{4\times 3}{5}=\frac{12}{5}$.

$\therefore AN^2=AD^2-DN^2=4^2-\left(\frac{12}{5}\right)^2=\frac{256}{25}$.

$\because$ △AMN∽△ABP，$\therefore \frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ABP}}=\left(\frac{AN}{AP}\right)^2$，即 $S_{\triangle AMN}=\left(\frac{AN}{AP}\right)^2\cdot S_{\triangle ABP}=\frac{AN^2\cdot S_{\triangle ABP}}{AP^2}$.

当点 P 在点 B 上方时，

$\because AP^2=AD^2+PD^2=AD^2+(PB-BD)^2=4^2+(4k+3-3)^2=16(k^2+1)$，

$S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}PB\cdot AD=\frac{1}{2}(4k+3)\times 4=2(4k+3)$，

$\therefore S_{\triangle AMN}=\frac{AN^2\cdot S_{\triangle ABP}}{AP^2}=\frac{256\times 2(4k+3)}{25\times 16(k^2+1)}=\frac{32(4k+3)}{25(k^2+1)}=\frac{32}{25}$.

整理，得 $k^2-4k-2=0$，解得 $k_1=2+\sqrt{6}$，$k_2=2-\sqrt{6}$.

当点 P 在 B 点下方时，

$\because AP^2=AD^2+PD^2=4^2+(3+4k-3)^2=16(k^2+1)$，

$S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}PB\cdot AD=\frac{1}{2}|-(-4k+3)|\times 4=-2(4k+3)$，

$\therefore S_{\triangle AMN}=\frac{AN^2\cdot S_{\triangle ABP}}{AP^2}=\frac{-256\times 2(4k+3)}{25\times 16(k^2+1)}=\frac{32}{25}$.

化简，得 $k^2+1=-(4k+3)$，解得 $k=-2$.

综上，当 $k=2\pm\sqrt{6}$ 或 $k=-2$ 时，△AMN 的面积等于 $\frac{32}{25}$.

全章热门考点整合应用

1. D

2. （1）证明：$\because AB$ 是⊙O 的直径，BM 是⊙O 的切线，$\therefore AB\perp BE$.

$\because CD/\!/BE$，

$\therefore CD\perp AB$. $\therefore \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{AC}$.

又 $\because \overset{\frown}{DA}=\overset{\frown}{DC}$，$\therefore \overset{\frown}{DA}=\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CD}$.

$\therefore AD=AC=CD$.

$\therefore$ △ACD 是等边三角形.

（2）解：如图，过点 O 作 $ON\perp AD$ 于 N.

由（1）知△ACD 是等边三角形，

$\therefore \angle DAC=60°$.

$\because AD=AC$，$CD\perp AB$，

$\therefore \angle DAB=30°$，

$\therefore BE=\frac{1}{2}AE$，$ON=\frac{1}{2}AO$.

设⊙O 的半径为 r，

$\therefore ON=\frac{1}{2}r$. $\therefore AN=DN=\frac{\sqrt{3}}{2}r$.

$\therefore EN=2+\frac{\sqrt{3}}{2}r$，$AE=2+\sqrt{3}r$.

$\therefore BE=\frac{1}{2}AE=\frac{\sqrt{3}r+2}{2}$. 在 Rt△$NEO$ 与 Rt△BEO 中，$OE^2=ON^2+NE^2=$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

OB^2+BE^2，即 $\left(\frac{r}{2}\right)^2+\left(2+\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)^2=r^2+\left(\frac{\sqrt{3}r+2}{2}\right)^2$，∴ $r=2\sqrt{3}$（$r=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 舍去）.

∴ $OE^2=\left(\frac{r}{2}\right)^2+\left(2+\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)^2=28$.

又∵ $OE>0$，∴ $OE=2\sqrt{7}$.



（第 2 题）

3. 解：∵ $\angle AOC=40°$，$OA=OC$，

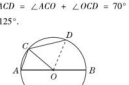
∴ $\angle BOC=180°-40°=140°$，$\angle ACO=\frac{1}{2}\times(180°-40°)=70°$. 如图，连接 OD.

∵ D 是 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点，

∴ $\angle COD=\frac{1}{2}\angle BOC=70°$.

∵ $OC=OD$，∴ $\angle OCD=\frac{180°-70°}{2}=55°$.

∴ $\angle ACD=\angle ACO+\angle OCD=70°+55°=125°$.



（第 3 题）

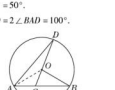
4. 解：（1）$2\sqrt{3}$

（2）如图，连接 OA. ∵ $OA=OB$，$OA=OD$，

∴ $\angle BAO=\angle B$，$\angle DAO=\angle D$.

∴ $\angle BAD=\angle BAO+\angle DAO=\angle B+\angle D=30°+20°=50°$.

∴ $\angle BOD=2\angle BAD=100°$.



（第 4 题）

5. 解：如图，过点 A 作 $AC\perp BD$ 于点 C.

由题意，得 $AB=400$ km，

$\angle DBA=45°$，∴ $\angle BAC=45°$，∴ $AC=BC$.

在 Rt△ABC 中，设 $AC=BC=x$ km.

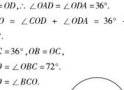
由勾股定理，得 $AC^2+BC^2=AB^2$，

∴ $x^2+x^2=400^2$，解得 $x=200\sqrt{2}$ 或 $x=-200\sqrt{2}$（舍去），

∴ $AC=200\sqrt{2}\approx282.8$（km）.

∵ 282.8 km＜300 km，

∴ A 市会受到这次沙尘暴的影响.



（第 5 题）

6. 解：（1）根据平行线间的距离处处相等，知点 O 到 CD 的距离即为点 A 到 CD 的距离. 过点 A 作 $AE\perp CD$ 于点 E. ∵ $\angle D=60°$，$AD=m$，∴ $AE=\frac{\sqrt{3}}{2}m$，即点 O 到 CD 的距离是 $\frac{\sqrt{3}}{2}m$.

（2）由题可得 $OA=5$. 当 $m=6$ 时，$\frac{\sqrt{3}}{2}m=3\sqrt{3}>5$，故⊙$O$ 与 CD 相离.

（3）若⊙O 与线段 CD 有两个公共点，则该圆和线段 CD 相交，当点 C 在⊙O 上时，易得 $m=\frac{1}{2}AB=5$；

当线段 CD 与⊙O 相切时，有 $\frac{\sqrt{3}}{2}m=5$，解得 $m=\frac{10}{3}\sqrt{3}$.

所以 m 的取值范围是 $5\leqslant m<\frac{10}{3}\sqrt{3}$.

7. 证明：（1）如图，连接 OA，OD，则 $\angle AOB=\angle BOC=\angle COD=360°\div10=36°$，则 $\angle AOD=\angle AOB+\angle BOC+\angle COD=108°$.

又∵ $OA=OD$，∴ $\angle OAD=\angle ODA=36°$.

∵ $\angle ANO=\angle COD+\angle ODA=36°+36°=72°$.

∵ $\angle BOC=36°$，$OB=OC$，

∴ $\angle BCO=\angle OBC=72°$.

∴ $\angle ANO=\angle BCO$.

∴ $MN/\!/BC$.

（2）∵ $\angle AON=\angle AOB+\angle BOC=72°$，

$\angle ANO=72°$，

∴ $AN=AO=OB$.

∵ $MN/\!/BC$，

∴ $\angle AMB=\angle OBC=72°$.

又∵ $\angle ABM=\frac{180°-36°}{2}=72°$，

∴ $\angle ABM=\angle AMB$. ∴ $AB=AM$.

∴ $AN=AM+MN=AB+MN=BC+MN$.

∴ $MN+BC=OB$.



（第 7 题）

8. 解：（1）在⊙O 中，$\angle A=\angle D$.

又∵ $AE=DE$，$\angle AEB=\angle DEC$，

∴ △$AEB\cong$△DEC. ∴ $EB=EC$.

又∵ $BC=CE$，$BE=CE=BC$.

∴ △EBC 为等边三角形.

∴ $\angle ACB=60°$.

（2）∵ $OF\perp AC$，∴ $AF=CF$.

∵ △EBC为等边三角形，

∴ $\angle CEF=60°$. ∴ $\angle ECF=30°$.

∵ $EG=2$，∴ $EF=1$.

又∵ $AE=ED=3$，∴ $CF=AF=4$.

∴ $AC=8$，$CE=5$.

∵ $BC=5$. 如图，作 $BM\perp AC$ 于点 M，

∵ $\angle BCM=60°$，

∴ $\angle MBC=30°$. ∴ $CM=\frac{5}{2}$.

∴ $BM=\sqrt{BC^2-CM^2}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$，

$AM=AC-CM=\frac{11}{2}$.

∴ $AB=\sqrt{AM^2+BM^2}=7$.



（第 8 题）

9. A　**点拨**：设 $AF=x$，$CF=y$，$BE=z$，则列方程组 $\begin{cases}x+y=6,\\y+z=5,\\x+z=9,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=5,\\y=1,\\z=4,\end{cases}$

∴ $AF=5$.

10. C　**点拨**：设⊙O 的半径为 r，连接 AO，OD，OF，易得 A，O，D 三点共线，$AD=2$，$AO=2-r$，$\angle AFO=90°$，$\angle AOF=30°$，

∴ $AF=\frac{1}{2}AO=\frac{1}{2}(2-r)$.

又根据已知条件易求得 $AF=4-2\sqrt{3}$，

∴ $4-2\sqrt{3}=\frac{1}{2}(2-r)$.

∴ $r=4\sqrt{3}-6$. 故选 C.

11. $\frac{4}{3}\pi$　**点拨**：连接 DF，OD.

∵ CF 是⊙O 的直径，∴ $\angle CDF=90°$.

∵ $\angle ADC=60°$，$\angle A=90°$，

∴ $\angle ACD=30°$.

∵ CD 平分 $\angle ACB$ 交 AB 于点 D，

∴ $\angle DCF=30°$.

∵ $OC=OD$，∴ $\angle OCD=\angle ODC=30°$.

∴ $\angle COD=120°$.

在 Rt△CAD 中，$CD=2AD=2\sqrt{3}$.

在 Rt△FCD 中，$FC=\frac{CD}{\cos30°}=\frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=4$.

∴ ⊙O 的半径为 2.

∴ 劣弧 $\overset{\frown}{CD}$ 的长为 $\frac{120°\times\pi\times2}{180}=\frac{4}{3}\pi$.

12. C　**13.** D

14. A　**点拨**：∵ 在矩形 $ABCD$ 中，$AB=2BC$，$AB=8$ cm，∴ $AD=BC=4$ cm，$\angle DAF=90°$. ∴ $S_{\text{扇形}FAD}=\frac{1}{4}\pi\cdot4^2=4\pi$（cm^2）.

$S_{\text{矩形}ABCD}=AB\cdot AD=8\times4=32$（cm^2）. 又∵ $AF=AD=4$ cm，∴ $BF=AF+AB=4+8=12$（cm）. ∴ $S_{\triangle BCF}=\frac{1}{2}BF\cdot BC=\frac{1}{2}\times12\times4=24$（cm^2）. ∴ $S_{\text{阴影}}=S_{\text{矩形}ABCD}+S_{\text{扇形}FAD}-S_{\triangle BCF}=4\pi+32-24=4\pi+8$（cm^2）. 故选 A.

15. A

16.（1）证明：如图，连接 AE，

∵ AC 为⊙O 的直径，∴ $\angle AEC=90°$.

∴ $AE\perp BC$. 又∵ $AB=AC$，∴ $BE=CE$.

（2）解：如图，连接 OD，OE，在 Rt△ABE 中，$\angle BAE=90°-\angle B=90°-70°=20°$，∴ $\angle DOE=2\angle DAE=40°$.

∴ $\overset{\frown}{DE}$ 的度数为 40°.



（第 16 题）

（3）解：如图，连接 CD，由（1）知 $BE=CE$，∴ $BC=2BE=6$，设 $AC=x$，则 $AD=x-2$.

∵ AC 为⊙O 的直径，∴ $\angle ADC=90°$.

在 Rt△BCD 中，$CD^2=BC^2-BD^2=6^2-2^2=32$.

在 Rt△ADC 中，$AD^2+CD^2=AC^2$，

∴ $(x-2)^2+32=x^2$，解得 $x=9$，即 AC 的长为 9.

17.（1）证明：如图，连接 OE，则 $OA=OE$.

∴ $\angle OEA=\angle OAE$.

∵ PQ 切⊙O 于 E，∴ $OE\perp PQ$.

又∵ $AC\perp PQ$，∴ $OE/\!/AC$.

∴ $\angle OEA=\angle EAC$. ∴ $\angle OAE=\angle EAC$.

∴ AE 平分 $\angle BAC$.



（第 17 题）

（2）解：如图，连接 BE. ∵ AB 是⊙O 的直径，∴ $\angle AEB=90°$. ∵ $\angle BAC=60°$，∴ $\angle OAE=\angle EAC=30°$.

∴ $AB=2BE$. ∵ $AC\perp PQ$，∴ $\angle ACE=90°$.

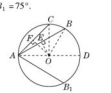
∴ $AE=2CE$. ∵ $CE=\sqrt{3}$，∴ $AE=2\sqrt{3}$.

设 $BE=x$，则 $AB=2x$.

在 Rt△ABE 中，由勾股定理得 $x^2+12=4x^2$，解得 $x_1=2$，$x_2=-2$（舍去）.

∴ $AB=4$. ∴ ⊙O 的半径为 2.

18. 15° 或 75°　**点拨**：如图，当圆心 O 在 $\angle CAB$ 的外部时，过点 A 作直径 AD，连接 OC，OB，过点 O 作 $OE\perp AB$，$OF\perp AC$，垂足分别为 E，F. 由垂径定理和勾股定理可求得 $OE=\frac{1}{2}OA$，$OF=FA$，∴ $\angle BAO=30°$，$\angle CAO=45°$. ∴ $\angle CAB=15°$. 当圆心 O 在 $\angle CAB$ 的内部时，同理可得，$\angle CAB_1=75°$.



（第 18 题）

19. 解：（1）∵ BC 是⊙O 的直径，$AB\perp BC$，$DC\perp BC$，∴ AB，CD 都是⊙O 的切线.

∴ $AF=AB=4$，$EC=EF$.

设 $EC=x$，则 $EF=x$，$AE=4+x$，$DE=4-x$，

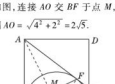
在 Rt△ADE 中，$AD^2+DE^2=AE^2$，

∴ $4^2+(4-x)^2=(4+x)^2$，

解得 $x=1$.

∴ △ADE 的面积 $=\frac{1}{2}\times4\times(4-1)=6$.

（2）如图，连接 AO 交 BF 于点 M，连接 OF，则 $AO=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$.



（第 19 题）

∵ $OB\perp AB$，$OF\perp AF$，且 $OB=OF$，

∴ AO 为∠BAF 的平分线.

又∵ $AB=AF$，∴ $AM\perp BF$，$BM=MF$.

∵ $BF=2BM$.

∵ $S_{\triangle ABO}=\frac{1}{2}AO\cdot BM=\frac{1}{2}OB\cdot AB$，

∴ $BM=\frac{AB\cdot OB}{AO}=\frac{4\times2}{2\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

∴ $BF=\frac{8\sqrt{5}}{5}$.

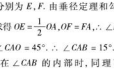
第六章　对概率的进一步认识

1　用树状图或表格求概率

第 1 课时　用树状图法求概率

1. $\frac{3}{4}$　**2.** D　**3.** A

4. C　**点拨**：画树状图列举这两辆汽车行驶方向所有可能的结果如图所示：



（第 4 题）

这两辆汽车行驶方向共有 9 种可能的结果，且所有结果的可能性相等.

由树状图知，两辆汽车一辆左转，一辆右转的结果有 2 种，

∴ P（两辆汽车一辆左转，一辆右转）$=\frac{2}{9}$. 故选 C.

5. D

6. 解：（1）根据题意画出树状图如图所示：

（第 6 题）

（2）由树状图可知，共有 8 种等可能的结果；正正正，正正反，正反正，正反反，反正正，反正反，反反正，反反反.

其中三次正面朝上或二次反面朝上的情况有 2 种. 所以 P（小刚任意挑选两球队）$=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$.

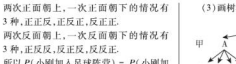
（3）这个游戏规则对两个球队公平.

理由如下：

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

两次正面朝上，一次正面朝下的情况有3种，正正反，正反正，反正正。
两次反面朝上，一次反面朝下的情况有3种，正反反，反正反，反反正。
所以 P（小刚加入足球阵营）$=$ P（小刚加入篮球阵营）$=\frac{3}{8}$。
所以这个游戏规则对两个球队公平。

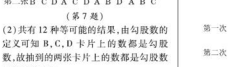
7. 解：(1) 画树状图如图所示：



（第7题）

(2) 共有12种等可能的结果，由勾股数的定义可知 B，C，D 卡片上的数都是勾股数，故抽到的两张卡片上的数都是勾股数的结果数为6，
所以抽到的两张卡片上的数都是勾股数的概率为 $\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$。

8. 解：(1) 根据题意，所有个位数字是5的“两位递增数”是15，25，35，45.
(2) 画树状图如图所示：



（第8题）

共有15种等可能的结果，其中个位数字与十位数字之积能被10整除的结果数为3，所以个位数字与十位数字之积能被10整除的概率 $=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$。

9. 解：(1) 画树状图如图：



（第9题）

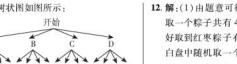
(2) 代数式 $\frac{A}{B}$ 恰好是分式的概率 $=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$。

10. 解：(1) 2 000；108
(2) 补全条形统计图如图所示：



[第10(2)题]

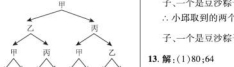
(3) 画树状图如图所示：



[第10(3)题]

共有16种等可能的结果，甲、乙两人选择同一种交通工具的情况有4种，∴ 甲、乙两人恰好选择同一种交通工具上班的概率为 $\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$。

11. 解：(1) 根据题意画出树状图如图所示：



（第11题）

(2) 由(1) 可知三次传球后，球回到甲脚下的概率为 $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$。
(3) 由(1) 可知球回到甲脚下的概率为 $\frac{1}{4}$，传到乙脚下的概率为 $\frac{3}{8}$，所以球传到乙脚下的概率大。

第2课时　用列举法求概率

1. $\frac{1}{3}$　**2.** B　**3.** D　**4.** $\frac{2}{5}$

5. D　**6.** A　**7.** C

8. C　**点拨**：列表如下：

9	379	479	579	679	879	–
8	378	478	578	678	–	978
6	376	476	576	–	876	976
5	375	475	–	675	875	975
4	374	–	574	674	874	974
3	–	473	573	673	873	973
个位 十位	3	4	5	6	8	9

共有30种等可能的结果，与7组成“中高数”的有12种情况，∴ 与7组成“中高数”的概率是 $\frac{12}{30}=\frac{2}{5}$，故选 C.

9. C　**10.** B

11. 错解：A
诊断：20张商标牌中有奖的有5张，该参与者前两次翻牌均获奖，而翻过的牌不能再翻，因此剩下的18张商标牌中，有奖的商标牌有3张，故他第三次翻牌获奖的概率是 $\frac{3}{18}=\frac{1}{6}$，而不是 $\frac{1}{4}$。
正解：C

12. 解：(1) 由题意可得，小邱从白盒中随机取一个粽子共有4种等可能的情况，恰好取到红枣粽子有2种情况，∴ 小邱从白盒中随机取一个粽子，恰好取到红枣粽子的概率是 $\frac{1}{2}$。
(2) 由题意可得，出现的所有可能情况是 (A，A)，(A，B)，(A，C)，(A，C)，(A，A)，(A，B)，(A，C)，(A，C)，(B，A)，(B，B)，(B，C)，(B，C)，(C，A)，(C，B)，(C，C)，(C，C)，
共有16种等可能的结果，一个是红枣粽子、一个是豆沙粽子的有3种情况，
∴ 小邱取到的两个粽子中一个是红枣粽子、一个是豆沙粽子的概率是 $\frac{3}{16}$。

13. 解：(1) 80；64
补全条形统计图如图所示：



（第13题）

(2) $2\,500\times\frac{96}{320}=750$（名）
故全校大约有750名学生喜爱科普读物.
(3) 列表如下：

	女1	女2	女3	男1	男2
女1		(女2，女1)	(女3，女1)	(男1，女1)	(男2，女1)
女2	(女1，女2)		(女3，女2)	(男1，女2)	(男2，女2)
女3	(女1，女3)	(女2，女3)		(男1，女3)	(男2，女3)
男1	(女1，男1)	(女2，男1)	(女3，男1)		(男2，男1)
男2	(女1，男2)	(女2，男2)	(女3，男2)	(男1，男2)	

所有等可能的情况有20种，其中是一名男生和一名女生的有12种，所以 P（恰好抽到一名男生和一名女生）$=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$。

14. 解：(1) 共有4张纸牌，正面是中心对称图形的情况有3种，所以摸出的纸牌面图形是中心对称图形的概率是 $\frac{3}{4}$。
(2) 列表如下：

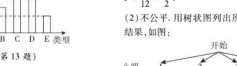
	A	B	C	D
A		(A，B)	(A，C)	(A，D)
B	(B，A)		(B，C)	(B，D)
C	(C，A)	(C，B)		(C，D)
D	(D，A)	(D，B)	(D，C)	

共产生12种结果，每种结果出现的可能性相同，其中两张纸牌面图形都是轴对称图形的有6种，所以 P（两张纸牌面图形都是轴对称图形）$=\frac{1}{2}$，P（两张纸牌面图形不都是轴对称图形）$=\frac{1}{2}$，因此这个游戏公平。

第3课时　用概率说明游戏的合理性

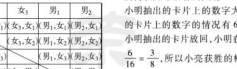
1. C　**2.** A　**3.** C　**4.** D　**5.** A　**6.** 王红

7. 解：(1) 用树状图列出所有等可能的结果，如图：



[第7(1)题]

由树状图可看出共有12种可能，其中小明抽出的卡片上的数字大于小亮抽出的卡片上的数字的情况有6种，因此，若小明抽出的卡片不放回，小明获胜的概率为 $P=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$。
(2) 不公平. 用树状图列出所有等可能的结果，如图：

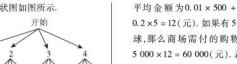


[第7(2)题]

由树状图可以看出共有16种可能，其中小明抽出的卡片上的数字大于小亮抽出的卡片上的数字的情况有6种，因此，若小明抽出的卡片放回，小明获胜的概率为 $\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$，所以小亮获胜的概率为 $\frac{5}{8}$，显然不公平。

8. 解：(1) ∵ 整个圆被等分成了12个扇形，其中有6个扇形能享受折扣，
∴ P（得到优惠）$=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$。
(2) 转动转盘1能获得的优惠为 $\frac{0.3\times300+0.2\times300\times2+0.1\times300\times3}{12}=25$（元），
转动转盘2能获得的优惠为 $40\times\frac{2}{4}=20$（元），
所以选择转动转盘1更优惠.
点拨：本题考查了几何概率，考查学生对简单几何模型的掌握情况，既避免了单纯依靠公式机械计算的做法，又体现了数学知识在现实生活中的运用，体现了数学学科的基础性. 用到的知识点为概率 = 相应的面积与总面积之比.

9. 解：不公平. 画树状图如图所示.



（第9题）

一共有16种等可能的结果，两次数字之差（大数减小数）大于或等于2的有6种情况.
∴ P（小明得1分）$=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$，
P（小亮得1分）$=\frac{10}{16}=\frac{5}{8}$.
∴ 小明得分为 $1\times\frac{3}{8}=\frac{3}{8}$，
小亮得分为 $1\times\frac{5}{8}=\frac{5}{8}$.
∵ $\frac{3}{8}\neq\frac{5}{8}$，
∴ 游戏不公平.
游戏规则改为分别转动转盘两次，若两次数字之差（大数减小数）大于或等于2，小明得5分，否则小亮得3分.（修改游戏规则不唯一）

10. 解：(1) 解方程 $x^2-5x+6=0$，得 $x_1=2$，$x_2=3$，列表如下：

	2	3	4
1	1，2	1，3	1，4
2	2，2	2，3	2，4
3	3，2	3，3	3，4

由表知，两个指针所指的数字都是该方程的解的概率是 $\frac{4}{9}$，两个指针所指的数字都不是该方程的解的概率是 $\frac{1}{9}$.
(2) 因为 $1\times\frac{4}{9}\neq3\times\frac{1}{9}$，所以游戏不公平.
修改得分规定为：若两个指针所指的数字都是 $x^2-5x+6=0$ 的解时，王磊得1分；若两个指针所指的数字都不是 $x^2-5x+6=0$ 的解时，张浩得4分.（修改得分规定不唯一）

11. 解：易得获得500元购物券的概率是 $\frac{1}{100}=0.01$；获得300元购物券的概率是 $\frac{2}{100}=0.02$，∵ 在1～100中，能够被5整除的数有20个，∴ 获得5元购物券的概率是 $\frac{20}{100}=0.2$，∴ 摸球一次获得购物券的平均金额为 $0.01\times500+0.02\times300+0.2\times5=12$（元）. 如果有5 000人参加摸球，那么商场需付的购物券的金额是 $5\,000\times12=60\,000$（元）. 若商场直接返还15元购物券，则需付的购物券的金额是 $5\,000\times15=75\,000$（元）.
∵ 60 000 < 75 000，
∴ 商场选择摸球的促销方式合算.

2　生活中的概率

1. B　**点拨**：从1，2，－3中随机抽取两个数相乘，共有6种等可能的结果，其中积是正数的有2种，所以积是正数的概率是 $\frac{1}{3}$.

2. C

3. D　**点拨**：$P=\frac{1+50+100}{10\,000}=\frac{151}{10\,000}$.

4. A　**5.** D

6. D　**点拨**：小明抽到了10号，还剩39个号，其中与10号相邻的只有9号和11号，所以小亮抽取的这张票恰好与小明邻座的概率是 $\frac{2}{39}$.

7. ④

8. 1.88　**点拨**：由题知，小球落在阴影区域的概率为 $0.04+0.2+0.36=0.6$，所以黑色石子区域的总面积为 $0.6\times\pi\times1^2\approx1.88$（平方米）.

9. 解：画出树状图如图：



（第9题）

从图中可知，所有等可能发生的情况共有16种，而小明获胜的情况只有4种.
所以小明获胜的概率为 $P=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

10. 解：(1) $\frac{1}{36}$；$\frac{1}{9}$；$\frac{1}{6}$

(2) $\left(\frac{1}{36}\times 20+\frac{1}{9}\times 10+\frac{1}{6}\times 5\right)\times 2\,000=5\,000$(元)，5 × 2 000 − 5 000 = 5 000(元)，即活动结束后大约有 5 000 元赞助费用于资助贫困生.

11. 解：(1) $\frac{1}{3}$.

(2) 列表如下：

小球 / 小王	A	B	C
A	(A,A)	(A,B)	(A,C)
B	(B,A)	(B,B)	(B,C)
C	(C,A)	(C,B)	(C,C)

由表格可知共有 9 种可能出现的结果，每种结果出现的可能性相同，其中小王与小林在相邻的站点进行同卷调查的结果有 4 种：(A,B)，(B,A)，(B,C)，(C,B)，因此小王选取同卷调查的站点与小林选取同卷调查的站点相邻的概率为 $\frac{4}{9}$.

*3 用频率估计概率

第 1 课时 用频率估计概率

1. D **点拨**：大量重复试验时，某事件发生的频率会稳定在某个常数的附近，这个常数就叫做事件概率的估计值.

2. D **3.** B **4.** 15 **5.** B **6.** 1

7. 错解：A

错因分析：用频率估计概率时，要注意试验的次数越多，事件发生的频率就会越接近于这个事件发生的概率，试验的次数太少易受偶然性因素影响，此时的频率不能用来估计概率.

正解：D

8. 解：(1) 0. 25；0. 25

点拨：251 ÷ 1 000 = 0. 251，结果保留两位小数为 0. 25，表格中应填 0. 25；

∵ 大量重复试验事件发生的频率逐渐稳定到 0. 25 附近，

∴ 估计从袋中摸出一个球是黑球的概率是 0. 25.

(2) 设袋中白球有 x 个，由题意，得 $\frac{1}{1+x}=0.25$，

解得 $x=3$.

经检验，$x=3$ 是原方程的解且符合题意.

∴ 袋中白球有 3 个.

(3) 用 B 代表黑球，W_1，W_2，W_3 代表白球，将摸球情况列表如下：

第一次 / 第二次	B	W_1	W_2	W_3
B	(B,B)	(B,W_1)	(B,W_2)	(B,W_3)
W_1	(W_1,B)	(W_1,W_1)	(W_1,W_2)	(W_1,W_3)
W_2	(W_2,B)	(W_2,W_1)	(W_2,W_2)	(W_2,W_3)
W_3	(W_3,B)	(W_3,W_1)	(W_3,W_2)	(W_3,W_3)

总共有 16 种等可能的结果，其中两个球都是白球的结果有 9 种，∴ 两次都摸出白球的概率为 $\frac{9}{16}$.

9. 解：(1) ∵ $\bar{x}_{甲}=\frac{63+66+63+61+64+61}{6}=63$，

∴ $s_{甲}^2=\frac{1}{6}\times[(63-63)^2\times 2+(66-63)^2+2\times(61-63)^2+(64-63)^2]=3$.

∵ $\bar{x}_{乙}=\frac{63+65+60+63+64+63}{6}=63$，

∴ $s_{乙}^2=\frac{1}{6}\times[(63-63)^2\times 3+(65-63)^2+(60-63)^2+(64-63)^2]=\frac{7}{3}$.

∵ $s_{乙}^2<s_{甲}^2$，

∴ 乙种小麦的株高长势比较整齐.

(2) 列表如下：

甲 / 乙	63	66	63	61	64	61
63	(63,63)	(66,63)	(63,63)	(61,63)	(64,63)	(61,63)
65	(63,65)	(66,65)	(63,65)	(61,65)	(64,65)	(61,65)
60	(63,60)	(66,60)	(63,60)	(61,60)	(64,60)	(61,60)
63	(63,63)	(66,63)	(63,63)	(61,63)	(64,63)	(61,63)
64	(63,64)	(66,64)	(63,64)	(61,64)	(64,64)	(61,64)
63	(63,63)	(66,63)	(63,63)	(61,63)	(64,63)	(61,63)

由表格可知，共有 36 种等可能的结果，其中两株配对小麦株高恰好都等于各自平均株高的有 6 种，∴ 所抽取的两株配对小麦株高恰好都等于各自平均株高的概率为 $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

10. 解：(1) 14；0. 26

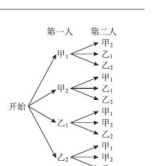
补全频数分布直方图如图所示：



［第 10(1) 题］

(2) 161 ≤ x < 164

(3) 将甲、乙两班的学生分别记为 $甲_1$、$甲_2$、$乙_1$、$乙_2$，树状图如下图所示，



［第 10(3) 题］

所以 P(两人来自相同班级) = $\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$.

第 2 课时 用频率估计概率的应用

1. A

2. 略.

3. 解：(1) 0. 6

(2) 0. 6 × 0. 4

(3) 白球有 20 × 0. 6 = 12(个)，黑球有 20 − 12 = 8(个).

(4) 把 a 个黑球装入口袋中，将黑球、白球混合搅匀，做模球试验，随机摸出一个球记下颜色，再放回口袋中，不断重复，可得到摸到黑球的频率 P，由于黑球有 a 个，则设白球的数量为 b，得 $\frac{a}{a+b}=P$，

解得 $b=\frac{1-P}{P}a$.

规律总结：当试验次数较多时，随机事件发生的频率将逐渐稳定于其相应的概率，这一理论为我们通过试验用频率估计概率提供了依据.

第 3 课时 用计算机模拟试验 估计概率

1. 解：从一副扑克牌中取六张牌面分别是 A，2，3，4，5，6 的扑克牌，分别代表正方体骰子六个面的点数(A 代表 1 点)，试验时将六张扑克牌背面向上洗匀后，从中随机抽取一张(有放回)，重复多次试验后，记录抽到 6 的次数.

点拨：本题的试验方案有多种，关键是设计的试验要在同等条件下进行，另外，用来设计试验方案的物品必须能保证每次出现的机会相等.

2. 解：用计算器产生 1 − 4 之间的随机整数，如 1 代表红球，2 代表黄球，3 代表绿球，4 代表紫球，输出 100 次结果，看出现 1 的次数，利用频率来估计概率，概率为 25%.

点拨：利用计算器即能我们产生随机数时，关键在于确定所需要的随机数的范围.

3. 解：(1) 根据题图，藏在阴影砖下的结果有 4 种，所有的等可能结果有 16 种，故宝物藏在阴影砖下的概率 $P=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}=0.25$.

(2) 各组试验中构成钝角三角形的频率依次约是 0. 24，0. 26，0. 21，0. 22，0. 22，所以构成钝角三角形的概率约是 0. 22.

阶段方法技巧训练(四)

专训 1

1. 解：(1) P(摸出一个球是黄球) = $\frac{5}{5+13+22}=\frac{1}{8}$.

(2) 设取出了 x 个黑球，则放入了 x 个黄球，由题意得 $\frac{5+x}{5+13+22}\geqslant\frac{1}{3}$，

解得 $x\geqslant\frac{25}{2}$.

∵ x 为正整数，∴ x 最小取 9.

∴ 至少取出了 9 个黑球.

2. 解：(1) $\frac{1}{2}$

(2) 设“思政”专业的一名研究生为 A，一名本科生为 B，历史专业的一名研究生为 C，一名本科生为 D，

列表如下：

第二名 / 第一名	A	B	C	D
A	—	(A,B)	(A,C)	(A,D)
B	(B,A)	—	(B,C)	(B,D)
C	(C,A)	(C,B)	—	(C,D)
D	(D,A)	(D,B)	(D,C)	—

共有 12 种等可能的结果，恰好选到的是一名“思政”研究生和一名历史本科生的概率为 $\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.

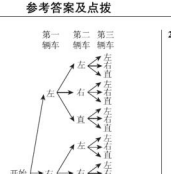
3. 解：用树状图表示出三辆车经过该十字路口时所有可能出现的情况，如图所示.

由树状图可以看出，三辆车经过该十字路口时所有等可能出现的情况共有 27 种.

(1) 三辆车全部继续直行的结果只有 1 种，所以 P(三辆车全部继续直行) = $\frac{1}{27}$.

(2) 两辆车向右转，一辆车向左转的结果有 3 种，所以 P(两辆车向右转，一辆车向左转) = $\frac{3}{27}=\frac{1}{9}$.

(3) 至少有两辆车向左转的结果有 7 种，所以 P(至少有两辆车向左转) = $\frac{7}{27}$.



（第 3 题）

4. 解：(1) 估计出现“和为 7”的概率为 0. 33.

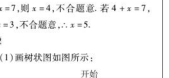
(2) 列表如下，一共有 12 种等可能的结果.

和 / 乙	2	3	4	x
2	／	5	6	$2+x$
3	5	／	7	$3+x$
4	6	7	／	$4+x$
x	$x+2$	$x+3$	$x+4$	／

由(1)知，出现“和为 7”的概率约为 0. 33，∴ “和为 7”出现的次数约为 0. 33 × 12 = 3. 96 ≈ 4. 若 $2+x=7$，则 $x=5$，符合题意. 若 $3+x=7$，则 $x=4$，不合题意. 若 $4+x=7$，则 $x=3$，不合题意，∴ $x=5$.

专训 2

1. 解：(1) 画树状图如图所示：



（第 1 题）

共有 12 种等可能的结果，其中摸出的球上的数字之和小于 6 的情况有 9 种，

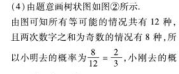
∴ P(小王去) = $\frac{3}{4}$.

(2) 认同小李的说法，理由如下：

∵ P(小王去) = $\frac{3}{4}$，P(小李去) = $\frac{1}{4}$，

$\frac{3}{4}\neq\frac{1}{4}$，∴ 规则不公平.

2. 解：这个游戏对双方是公平的. 如图，



（第 2 题）

一共有 6 种情况，和小于 4 的有 3 种.

∴ P(和小于 4) = $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$，

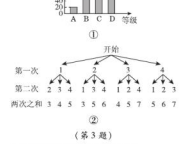
P(和不小于 4) = $\frac{1}{2}$.

∴ 这个游戏对双方是公平的.

3. 解：(1) 400；35%　(2) 126

(3) 调查结果为 D 等级的人数为 400 × 35% = 140，

故补全的条形统计图如图①所示.



（第 3 题）

(4) 由题意画树状图如图②所示.

由图可知所有等可能的情况共有 12 种，且两次数字之和为奇数的情况有 8 种，所以小明去的概率为 $\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$，小刚去的概率为 $\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}\neq\frac{1}{3}$，所以这个游戏规则不公平.

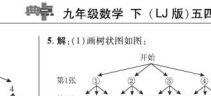
专训 3

1. $\frac{4}{9}$ **点拨**：若不等式组 $\begin{cases}4x\geqslant 3(x+1),\\ 2x-\frac{x-1}{2}<a\end{cases}$ 有解，则不等式组的解集为 $3\leqslant x<\frac{2a-1}{3}$，且满足条件 $\frac{2a-1}{3}>3$，解得 $a>5$，∴ 满足条件的 a 的值为 6，7，8，9. ∴ 不等式组有解的概率为 $P=\frac{4}{9}$.

2. C

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

3. 解：画树状图如图：



（第 3 题）

∴点 P 的坐标有 $(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)$，共 16 种结果，其中在直线 $y=-x+5$ 上的点有 $(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)$，共 4 种结果.

∴点 $P(x,y)$ 落在直线 $y=-x+5$ 上的概率为 $P=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$.

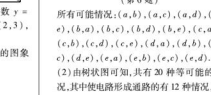
4. 解：(1) 方法一：列表如下：

x \ y	1	2	3	4
1		(1,2)	(1,3)	(1,4)
2	(2,1)		(2,3)	(2,4)
3	(3,1)	(3,2)		(3,4)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	

共有 12 种等可能的结果，在函数 $y=-x+5$ 的图象上的点有 $(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)$，共 4 种结果.

∴ P（点 (x,y) 在函数 $y=-x+5$ 的图象上）$=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$.

方法二：画树状图如图：



（第 4 题）

共有 12 种等可能的结果，在函数 $y=-x+5$ 的图象上的点有 $(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)$，共 4 种结果.

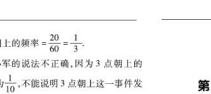
∴ P（点 (x,y) 在函数 $y=-x+5$ 的图象上）$=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$.

(2) 不公平. 理由如下：∵ x,y 满足 $xy>6$ 的有 $(2,4),(3,4),(4,2),(4,3)$，共 4 种情况，x,y 满足 $xy<6$ 的有 $(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(3,1),(4,1)$，共 6 种情况，∴ P（小明胜）$=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$，$P$（小红胜）$=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$.

∵ $\frac{1}{3}\neq\frac{1}{2}$，∴游戏不公平.

公平的游戏规则可改为若 x,y 满足 $xy\geqslant 6$，则小明胜；若 x,y 满足 $xy<6$，则小红胜.（修改游戏规则不唯一）

5. 解：(1) 画树状图如图：

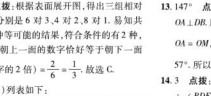


（第 5 题）

所有可能结果：$(①,②),(①,③),(①,④),(②,①),(②,③),(②,④),(③,①),(③,②),(③,④),(④,①),(④,②),(④,③)$，共 12 种结果.

(2) 共有 12 种等可能的结果. 能判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形的有 $(①,②),(①,③),(②,①),(②,④),(③,①),(③,④),(④,②),(④,③)$，共 8 种情况，∴能判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形的概率为 $\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$.

6. 解：(1) 画出树状图如图.



（第 6 题）

所有可能情况：$(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(b,a),(b,c),(b,d),(b,e),(c,a),(c,b),(c,d),(c,e),(d,a),(d,b),(d,c),(d,e),(e,a),(e,b),(e,c),(e,d)$.

(2) 由树状图可知，共有 20 种等可能的情况，其中使电路形成通路的有 12 种情况，所以 P（使电路形成通路）$=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$.

全章热门考点整合应用

1. $\frac{4}{9}$

2. 解：(1) 60

(2) 参加“吉他社”的学生在全班学生中所占比例为 $\frac{1-25\%-20\%-20\%-15\%}{2}=10\%$，所以“吉他社”对应扇形的圆心角的度数为 $360°\times 10\%=36°$.

(3) 列表如下：

	甲	乙	丙
甲		(甲,乙)	(甲,丙)
乙	(乙,甲)		(乙,丙)
丙	(丙,甲)	(丙,乙)	

由表格可知，共有 6 种等可能的情况，其中恰好选中甲和乙的情况有 2 种，故 P（恰好选中甲和乙）$=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

3. 解：(1) 2 点朗上的频率 $=\frac{9}{60}=\frac{3}{20}$；5 点朗上的频率 $=\frac{20}{60}=\frac{1}{3}$.

(2) 小军的说法不正确，因为 3 点朗上的频率为 $\frac{1}{10}$，不能说明 3 点朗上这一事件发生的概率就是 $\frac{1}{10}$，只有当试验的次数足够多时，该事件发生的频率才稳定在事件发生的概率附近，才可以将这个频率的稳定值作为该事件发生的概率.

(3) 小刚的说法不正确，因为随机事件的发生具有随机性，所以出现 6 点朗上的次数不一定是 100 次.

4. C　**点拨**：根据表面展开图，得出三组相对的面分别是 6 对 3,4 对 2,8 对 1. 易知共有 6 种等可能的结果，符合条件的有 2 种，故 P（朝上一面的数字恰好等于朝下一面的数字的 2 倍）$=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$. 故选 C.

5. 解：(1) 列表如下：

转盘乙 \ 转盘甲	−1	0	1	2
−1	(−1,−1)	(−1,0)	(−1,1)	(−1,2)
$-\frac{1}{2}$	$(-\frac{1}{2},-1)$	$(-\frac{1}{2},0)$	$(-\frac{1}{2},1)$	$(-\frac{1}{2},2)$
1	(1,−1)	(1,0)	(1,1)	(1,2)

由表格可知，所有等可能的结果有 12 种，其中 $|m+n|>1$ 的情况有 5 种.

∴ $|m+n|>1$ 的概率为 $\frac{5}{12}$.

(2) 点 (m,n) 落在函数 $y=-x$ 图象上的概率为 $\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.

6. 解：(1) 设口袋中红球有 x 个，则黑球有 $(x-1)$ 个，白球有 $(x+3)$ 个，共有球 $x+(x-1)+(x+3)=(3x+2)$ 个.

根据题意，得 $\frac{x-1}{3x+2}=\frac{1}{4}$，解得 $x=6$. 经检验，$x=6$ 是原方程的解且符合题意.

所以 $x-1=5$.

因此估计口袋中有 5 个黑球.

(2) 口袋中共有球 $6+5+6+3=20$（个），小王取出第一个球后不放回，还剩下 19 个球，红球仍是 6 个，所以小王从口袋中余下的球中任意取出 1 个球是红球的概率是 $\frac{6}{19}$.

7. 解：(1) 设黄球有 x 个.

则根据题意，得 $\frac{5}{x+4+5}=\frac{1}{3}$，解得 $x=6$.

∴口袋里有 6 个黄球.

(2) 任意摸出 1 个球是红球的概率为 $\frac{4}{15}$.

达标检测卷答案

第五章达标检测卷

一. 1. C　2. A　3. B　4. B　5. D　6. B

7. D　8. B　9. A　10. B

二. 11. 15π

12. 90°　**点拨**：易知 $EB=EC$. 又 $\angle E=46°$，所以 $\angle ECB=67°$. 从而 $\angle BCD=180°-67°-32°=81°$. 在 $\odot O$ 中，$\angle BCD$ 与 $\angle A$ 互补，所以 $\angle A=180°-81°=99°$.

13. 147°　**点拨**：因为 DB 是 $\odot O$ 的切线，所以 $OA\perp DB$. 所以 $\angle DAO=90°$. 由 $\angle AOM=66°$，$OA=OM$，得 $\angle OAM=\frac{1}{2}(180°-66°)=57°$. 所以 $\angle DAM=90°+57°=147°$.

14. 3　**点拨**：∵ BE 是 $\odot O$ 的直径，
∴ $\angle BDE=90°$.
∴ $\angle BDC+\angle CDE=90°$.
又∵ $AB\perp CD$，
∴ $\angle ACD+\angle CAB=90°$.
∵ $\angle CAB=\angle BDC$，
∴ $\angle ACD=\angle CDE$.
∴ $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CE}$.
∴ $\overset{\frown}{AD}-\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{CE}-\overset{\frown}{AE}$.
∴ $\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{AC}$.
∴ $DE=AC=3$.

15. 48 cm

16. $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{12}$　**点拨**：连接 OE. ∵点 C 是 OA 的中点，∴ $OC=\frac{1}{2}OA=1$. ∵ $OE=OA=2$，∴ $OC=\frac{1}{2}OE$. ∵ $CE\perp OA$，∴ $\angle OEC=30°$. ∴ $\angle COE=60°$. 在 Rt△OCE 中，$CE=\sqrt{OE^2-OC^2}=\sqrt{3}$，∴ $S_{\triangle OCE}=\frac{1}{2}OC\cdot CE=\frac{\sqrt{3}}{2}$. ∵ $\angle AOB=90°$，∴ $\angle BOE=\angle AOB-\angle COE=30°$.
∴ $S_{\text{扇形}BOE}=\frac{30\pi\times 2^2}{360}=\frac{\pi}{3}$. 又 $S_{\text{扇形}COD}=\frac{90\pi\times 1^2}{360}=\frac{\pi}{4}$. 因此 $S_{\text{阴影}}=S_{\text{扇形}BOE}+S_{\triangle OCE}-S_{\text{扇形}COD}=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{12}$.

17. $\frac{6}{7}$

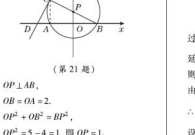
18. ①②④　**点拨**：连接 OM，ON，易证 Rt△$OMC\cong$ Rt△OND，可得 $MC=ND$，故①正确. 在 Rt△MOC 中，$CO=\frac{1}{2}MO$，可得 $\angle CMO=30°$，所以 $\angle MOC=60°$. 易得 $\angle MOC=\angle NOD=\angle MON=60°$，所以 $\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{MN}=\overset{\frown}{NB}$，故②正确. 易得 $CD=\frac{1}{2}AB=OA=OM$，∵ $MC<OM$，∴四边形 $MCDN$ 是矩形，故③错误. 易得 $MN=CD=\frac{1}{2}AB$，故④正确.

三. 19. 解：∵ PA 切 $\odot O$ 于点 A，AB 是 $\odot O$ 的直径，$\angle P=30°$，
∴ $\angle AOP=60°$.
∴ $\angle B=\frac{1}{2}\angle AOP=30°$.

20. (1) 证明：连接 AD.
∵ AB 是 $\odot O$ 的直径，∴ $\angle ADB=90°$.
∵ $DC=BD$，∴ $AB=AC$.

(2) 解：由(1) 知 $AB=AC$，
∵ $\angle BAC=60°$，
∴ $\triangle ABC$ 是等边三角形.
在 Rt△BAD 中，$\angle BAD=30°$，$AB=8$，
∴ $BD=4$，∴ $DC=4$.
又∵ $DE\perp AC$，
∴ $DE=DC\cdot\sin C=4\cdot\sin 60°=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$.

21. (1) 解：如图，连接 CA.



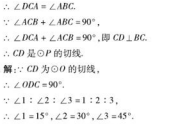
（第 21 题）

∵ $OP\perp AB$，
∴ $OB=OA=2$.
∵ $OP^2+OB^2=BP^2$，
∴ $OP^2=5-4=1$，即 $OP=1$.
∵ BC 是 $\odot O$ 的直径，
∴ $\angle CAB=90°$.
∵ $CP=BP$，$OB=OA$，
∴ $AC=2OP=2$.
∴ $B(2,0)$，$P(0,1)$，$C(-2,2)$.

(2) 证明：∵直线 $y=2x+b$ 过 C 点，
∴ $b=6$. ∴ $y=2x+6$.
∵当 $y=0$ 时，$x=-3$，
∴ $D(-3,0)$. ∴ $AD=1$.
∵ $OB=AC=2$，$\angle CAD=\angle POB=90°$，$AD=OP=1$，
∴ $\triangle DAC\cong\triangle POB$.
∴ $\angle DCA=\angle OBC$.
∵ $\angle ACB+\angle ABC=90°$，
∴ $\angle DCA+\angle ACB=90°$，即 $CD\perp BC$.
∴ CD 是 $\odot P$ 的切线.

22. 解：∵ CD 为 $\odot O$ 的切线，
∴ $\angle ODC=90°$.
∵ $\angle 1:\angle 2:\angle 3=1:2:3$，
∴ $\angle 1=15°$，$\angle 2=30°$，$\angle 3=45°$.
连接 OB，∵ CB 为 $\odot O$ 的切线，
∴ $\angle OBC=90°$，$BC=CD$.
∴ $\angle CBD=\angle 3=45°$，
∴ $\angle C=90°$.
∴四边形 $OBCD$ 为矩形.
又 $OD=OB$，
∴四边形 $OBCD$ 为正方形.
∵ $BC=3$，∴ $OB=OD=3$.
∵ $\angle 1=15°$，∴ $\angle AOB=30°$，
∴ $\angle AOD=120°$.
∴ $S=\frac{120}{360}\times\pi\times 3^2=3\pi$.

23. 解：(1) 如图，点 E 是桥拱所在圆的圆心.



（第 23 题）

过点 E 作 $EF\perp AB$ 于点 F，
延长 EF 交 $\overset{\frown}{AB}$ 于点 C，连接 AE，
则 $CF=20$ m.
由垂径定理知，F 是 AB 的中点，
∴ $AF=FB=\frac{1}{2}AB=40$ m.
设半径是 r m，由勾股定理，得 $AE^2=AF^2+EF^2=AF^2+(CE-CF)^2$，即 $r^2=40^2+(r-20)^2$，解得 $r=50$.
∴桥拱的半径为 50 m.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

（2）这艘轮船能顺利通过. 理由：

当宽60 m的轮船刚好可通过拱桥时，如图，MN为轮船顶部的位置.

连接EM，设EC与MN的交点为D，

则$DE \perp MN$，$\therefore DM = 30$ m，

$\therefore DE = \sqrt{EM^2 - DM^2} = \sqrt{50^2 - 30^2} = 40$(m)，

$\because EF = EC - CF = 50 - 20 = 30$(m)，

$\therefore DF = DE - EF = 40 - 30 = 10$(m)，

$\because 10$ m$ > 9$ m，

$\therefore$ 这艘轮船能顺利通过.

24.（1）**证明**：如图，连接CD，

$\because AD$是$\odot O$的直径，

$\therefore \angle ACD = 90°$.

$\therefore \angle CAD + \angle ADC = 90°$.

又$\because \angle PAC = \angle PBA$，$\angle ADC = \angle PBA$，

$\therefore \angle PAC = \angle ADC$.

$\therefore \angle CAD + \angle PAC = 90°$.

$\therefore PA \perp DA$.

$\because AD$是$\odot O$的直径，

$\therefore PA$是$\odot O$的切线.

（2）**解**：由（1）知，$PA \perp AD$，

又$\because CF \perp AD$，

$\therefore CF // PA$.

$\therefore \angle GCA = \angle PAC$.

又$\because \angle PAC = \angle PBA$，

$\therefore \angle GCA = \angle PBA$.

而$\angle CAG = \angle BAC$，

$\therefore \triangle CAG \backsim \triangle BAC$.

$\therefore \frac{AG}{AC} = \frac{AC}{AB}$，

即$AC^2 = AG \cdot AB$.

$\because AG \cdot AB = 12$，

$\therefore AC^2 = 12$.

$\therefore AC = 2\sqrt{3}$.

（3）**解**：设$AF = x$，

$\because AF : FD = 1 : 2$，

$\therefore FD = 2x$.

$\therefore AD = AF + FD = 3x$.

在$\mathrm{Rt}\triangle ACD$中，

$\because CF \perp AD$，

$\therefore AC^2 = AF \cdot AD$，即$3x^2 = 12$，

解得$x = 2$或$x = -2$（舍去）.

$\therefore AF = 2$，

$\therefore AD = 6$.

$\therefore \odot O$的半径为3.

在$\mathrm{Rt}\triangle AFG$中，$AF = 2$，$GF = 1$，

根据勾股定理，得$AG = \sqrt{AF^2 + GF^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$，由（2）知$AG \cdot AB = 12$，

$\therefore AB = \frac{12}{AG} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$. 连接$BD$，如图.

$\because AD$是$\odot O$的直径，

$\therefore \angle ABD = 90°$.

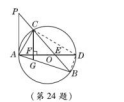
在$\mathrm{Rt}\triangle ABD$中，$\because \sin \angle ADB = \frac{AB}{AD}$，

$AD = 6$，$AB = \frac{12\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore \sin \angle ADB = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

$\because \angle ACE = \angle ADB$，

$\therefore \sin \angle ACE = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.



（第24题）

第六章达标检测卷

一、**1.** C　**2.** D　**3.** D

4. C　**点拨**：易知A、B两个选项中，瓶盖和图钉质量不均匀，因此试验所产生的结果不具有等可能性；D选项中，指针指向“红”“蓝”的概率均为$\frac{1}{3}$，而掷硬币试验中，正面朝上、反面朝上的概率均为$\frac{1}{2}$；只有C选项符合题意，因此选C.

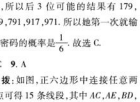
5. C

6. C　**点拨**：因为后3位由1，7，9这3个数字组成，所以后3位可能的结果有179，197，719，791，917，971. 所以她第一次就输入正确密码的概率是$\frac{1}{6}$. 故选C.

7. C　**8.** C　**9.** A

10. B　**点拨**：如图，正六边形中连接任意两个顶点可得15条线段，其中AC，AE，BD，BF，CE，DF这6条线段的长度为$\sqrt{3}$，

∴ 所求概率为$\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$.



（第10题）

二、**11.** $\frac{3}{4}$　**点拨**：随机掷一枚质地均匀的硬币两次，可能出现的结果有（正，正），（正，反），（反，正），（反，反）4种，且每种结果出现的可能性相同，至少有一次正面朝上的结果有3种，故所求概率是$\frac{3}{4}$.

12. 10　**13.** $\frac{3}{4}$　**14.** $\frac{3}{4}$　**15.** $\frac{1}{5}$

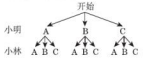
16. $\frac{3}{8}$　**点拨**：列表如下：

	A	B	D	E
C	(A，C)	(B，C)	(D，C)	(E，C)
F	(A，F)	(B，F)	(D，F)	(E，F)
G	(A，G)	(B，G)	(D，G)	(E，G)
H	(A，H)	(B，H)	(D，H)	(E，H)

由表格可知共有16种等可能情况，参加首场比赛的两个队都来自县区学校的有6种情况，故所求概率为$\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.

17. $\frac{3}{10}$　**18.** $\frac{1}{3}$

三、**19. 解**：（1）根据题意，画树状图如图所示：



（第19题）

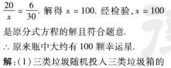
所有可能结果为（A，A），（A，B），（A，C），（B，A），（B，B），（B，C），（C，A），（C，B），（C，C）.

（2）从树状图看出一共有9种等可能的结果，其中两人是同班同学的有3种. 所以所求概率为$\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

20. 解：设原来瓶中大约有x颗幸运星，则有$\frac{20}{x} = \frac{6}{30}$. 解得$x = 100$. 经检验，$x = 100$是原分式方程的解且符合题意.

∴ 原来瓶中大约有100颗幸运星.

21. 解：（1）三类垃圾随机投入三类垃圾箱的树状图如图所示.



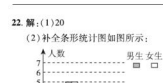
（第21题）

由树状图可知，垃圾投放正确的概率为$\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

（2）“厨余垃圾”投放正确的概率为$\frac{400}{400 + 100 + 100} = \frac{2}{3}$.

22. 解：（1）20

（2）补全条形统计图如图所示：



（第22题）

（3）列表如下，A类学生中的两名男生分别记为男A_1和男A_2，

	男A_1	男A_2	女A
男D	(男A_1，男D)	(男A_2，男D)	(女A，男D)
女D	(男A_1，女D)	(男A_2，女D)	(女A，女D)

共有6种等可能的结果，其中，是一男一女的有3种，所以恰好选中一名男生和一名女生的概率为$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

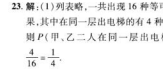
23. 解：（1）列表略，一共出现16种等可能结果，其中在同一层出电梯的有4种结果，则P（甲、乙二人在同一层出电梯）$= \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.

（2）游戏不公平. 甲、乙在同一层或相邻楼层出电梯的有10种结果，故P（小亮胜）$= \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$，$P$（小芳胜）$= \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.

$\because \frac{5}{8} > \frac{3}{8}$，∴ 游戏不公平.

修改游戏规则：若甲、乙在同一层或相隔一层出电梯，则小亮胜；若甲、乙相邻楼层或隔两层出电梯，则小芳胜（答案不唯一）.

24. 解：（1）画树状图如图所示：



（第24题）

或列表如下：

甲厂家 乙厂家	高档	中档	低档
精装	(高档，精装)	(中档，精装)	(低档，精装)
简装	(高档，简装)	(中档，简装)	(低档，简装)

共有6种选购方案：（高档，精装），（高档，简装），（中档，精装），（中档，简装），（低档，精装），（低档，简装）.

（2）因为选中甲厂家的高档粽子的方案有2种，即（高档，精装），（高档，简装），所以甲厂家的高档粽子被选中的概率为$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

（3）当选用方案（高档，精装）时，设分别购买高档粽子、精装粽子x_1盒、y_1盒，根据题意，

得$\begin{cases} x_1 + y_1 = 32, \\ 60x_1 + 50y_1 = 1\,200. \end{cases}$

解得$\begin{cases} x_1 = -40, \\ y_1 = 72. \end{cases}$

经检验，不符合题意，舍去.

当选用方案（高档，简装）时，设分别购买高档粽子、简装粽子x_2盒、y_2盒，根据题意，得$\begin{cases} x_2 + y_2 = 32, \\ 60x_2 + 20y_2 = 1\,200. \end{cases}$

解得$\begin{cases} x_2 = 14, \\ y_2 = 18. \end{cases}$经检验，符合题意.

故购买了14盒甲厂家的高档粽子.

期末达标检测卷

一、**1.** B　**点拨**：在同圆或等圆中，完全重合的弧才是等弧，长度相等的弧不一定是等弧，故A错误；半圆是弧，B正确；在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弧才相等，故C错误；弦为直径时所对的圆周角都相等，弦不是直径时，顶点在优弧与劣弧上的圆周角不相等，故D错误.

2. A　**3.** D　**4.** A　**5.** C　**6.** C　**7.** B　**8.** C

9. C　**点拨**：如图，点A运动的路径与y轴围成的面积为$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 = \frac{90\pi \times 1^2}{360} + \frac{90\pi \times (\sqrt{2})^2}{360} + \frac{90\pi \times 1^2}{360} + 2 \times \left(\frac{1}{2} \times 1 \times 1\right) = \pi + 1$. 故选C.



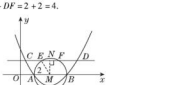
（第9题）

10. B　**点拨**：如图，∵ 点A，B的坐标分别是$(2,0)$，$(6,0)$，∴ AB的中点M的坐标为$(4,0)$，且点M是圆心，作$MN \perp CD$于点N，则$EN = FN$，又由抛物线的对称性可知$CN = DN$，∴ $CE = DF$. 连接EM. 在$\mathrm{Rt}\triangle EMN$中，$EN = \sqrt{EM^2 - MN^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}AB\right)^2 - MN^2} = \sqrt{2^2 - (\sqrt{3})^2} = 1$.

又$CN = 4 - 1 = 3$，

∴ $CE = CN - EN = 3 - 1 = 2$，

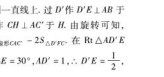
∴ $CE + DF = 2 + 2 = 4$.



（第10题）

二、**11.** $\frac{3}{4}$　**12.** $2\sqrt{2} - 2$　**13.** 16　**14.** 30

15. $\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2} - \sqrt{3}$　**点拨**：如图，连接$D'C$，BC'，BD'，易知A，D'，C在同一直线上，A，B，C'在同一直线上. 过D'作$D'E \perp AB$于E，过C作$CH \perp AC'$于H. 由旋转可知，$S_{\text{阴影}} = S_{\text{扇形}CAC'} - 2S_{\triangle D'FC}$. 在$\mathrm{Rt}\triangle AD'E$中，$\angle D'AE = 30°$，$AD' = 1$，∴ $D'E = \frac{1}{2}$，$AE = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



在$\mathrm{Rt}\triangle BD'E$中，

$BE = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$，

$D'B^2 = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2 - \sqrt{3}$.

（第15题）

可证$\angle D'FB = \angle CFC' = 90°$，$\triangle D'BF$是等腰直角三角形，∴ $D'F^2 = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$，

∴ $BF = D'F = \sqrt{\frac{4 - 2\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$，

∴ $CF = 1 - \frac{\sqrt{3} - 1}{2} = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}$.

在$\mathrm{Rt}\triangle CBH$中，$\angle CBH = 60°$，$BC = 1$，

∴ $BH = \frac{1}{2}$，$CH = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

∴ $AH = \frac{3}{2}$，∴ $AC^2 = 3$.

∴ $S_{\triangle D'FC} = \frac{1}{2} \times D'F \times CF = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \times \frac{3 - \sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3} - 3}{4}$，

$S_{\text{扇形}CAC'} = \frac{30\pi}{360} \times AC^2 = \frac{30\pi}{360} \times 3 = \frac{\pi}{4}$.

∴ $S_{\text{阴影}} = S_{\text{扇形}CAC'} - 2 \times S_{\triangle D'FC} = \frac{\pi}{4} - 2 \times \frac{2\sqrt{3} - 3}{4} = \frac{\pi}{4} + \frac{3}{2} - \sqrt{3}$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

16. $3\sqrt{5}$ cm　**17.** $\frac{1}{9}$　**18.** 1 200

三、19.（1）**证明**：∵ $AB /\!/ OC$，

∴ $\angle C = \angle BAC$.

∵ $OA = OC$，∴ $\angle C = \angle OAC$.

∴ $\angle BAC = \angle OAC$，即 AC 平分 $\angle OAB$.

（2）**解**：∵ $OE \perp AB$，

∴ $AE = BE = \frac{1}{2}AB = 1$.

又∵ $\angle AOE = 30°$，$\angle OEA = 90°$，

∴ $\angle OAE = 60°$.

∴ $\angle EAP = \frac{1}{2}\angle OAE = 30°$.

∵ $\tan \angle EAP = \frac{PE}{AE}$，

∴ $PE = AE \cdot \tan \angle EAP = 1 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

∴ PE 的长是 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

20. **解**：（1）表中的频率依次为 0.60，0.85，0.83，0.78，0.78，0.82，0.81，0.80.

（2）可以看出：随着射击次数的增多，运动员射中 8 环以上的频率稳定在 0.8 左右，从而估计他射击一次时，“射中 8 环以上”的概率为 0.8.

21.（1）**证明**：连接 OC.

∵ $AD \perp EF$，

∴ $\angle ADC = 90°$.

∵ $\angle ACD + \angle CAD = 90°$.

∵ $OC = OA$，∴ $\angle ACO = \angle CAO$.

∵ $\angle DAC = \angle BAC$，

∴ $\angle ACD + \angle ACO = 90°$，

即 $\angle OCD = 90°$.

∴ EF 是 $\odot O$ 的切线.

（2）**证明**：连接 BC.

∵ AB 是 $\odot O$ 的直径，

∴ $\angle ACB = 90°$.

∵ $AD \perp EF$，

∴ $\angle ADC = 90° = \angle ACB$.

∵ $\angle DAC = \angle BAC$，

∴ $\triangle ACD \backsim \triangle ABC$.

∴ $\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC}$，即 $AC^2 = AB \cdot AD$.

（3）**解**：∵ CD 是 $\odot O$ 的切线，

∴ $\angle OCD = 90°$，

即 $\angle ACD + \angle ACO = 90°$.

∵ $\angle ACD = 30°$，

∴ $\angle OCA = 60°$.

∵ $OC = OA$，

∴ $\triangle ACO$ 是等边三角形.

∴ $AC = OC = 2$，$\angle AOC = 60°$.

在 Rt△ADC 中，

∵ $\angle ACD = 30°$，

∴ $AD = 1$，$CD = \sqrt{3}$.

∴ $S_{\text{阴影}} = S_{\text{扇形}OCBA} - S_{\text{扇形}OCA} = \frac{1}{2}(1 + 2) \times \sqrt{3} - \frac{60° \cdot \pi \cdot 2^2}{360} = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi}{3}$.

22. **解**：（1）1；60°

（2）作 $OC \perp AB$ 于点 C，连接 OB，如图所示.



（第 22 题）

∵ BA' 与 $\odot O$ 相切，

∴ $\angle OBA' = 90°$.

在 Rt△OBC 中，$OB = 2$，$OC = 1$，

∴ $\sin \angle OBC = \frac{OC}{OB} = \frac{1}{2}$.

∴ $\angle OBC = 30°$.

∴ $\angle ABP = \frac{1}{2}\angle ABA' = \frac{1}{2}(\angle OBA' + \angle OBC) = 60°$.

∴ $\angle OBP = 30°$.

作 $OD \perp BP$ 于点 D，则 $BP = 2BD$.

∵ $BD = OB \cdot \cos 30° = \sqrt{3}$，∴ $BP = 2\sqrt{3}$.

（3）∵ 点 P，A 不重合，∴ $\alpha > 0°$.

由（1）得，当 α 增大到 30° 时，点 A' 在优弧 AB 上，

∴ 当 $0° < \alpha < 30°$ 时，点 A' 在 $\odot O$ 内，线段 BA' 与优弧 AB 只有一个公共点 B.

由（2）知，α 增大到 60° 时，BA' 与 $\odot O$ 相切，即线段 BA' 与优弧 AB 只有一个公共点 B.

当 α 继续增大时，点 P 逐渐靠近点 B，但点 P，B 不重合，∴ $\angle OBP < 90°$. ∵ $\alpha = \angle OBA' + \angle OBP$，$\angle OBA' = 30°$，∴ $\alpha < 120°$. ∴ 当 $60° \leqslant \alpha < 120°$ 时，线段 BA' 与优弧 AB 只有一个公共点 B.

综上所述，α 的取值范围是 $0° < \alpha < 30°$ 或 $60° \leqslant \alpha < 120°$.

23. **解**：（1）列表如下：

和 / 小明 / 小亮	2	3	4
2	4	5	6
3	5	6	7
4	6	7	8

总共有 9 种结果，每种结果出现的可能性相同，而两数和为 6 的结果有 3 种，因此 P（两数和为 6）$= \frac{1}{3}$.

（2）这个游戏规则对双方不公平.

理由：因为 P（和为奇数）$= \frac{4}{9}$，P（和为偶数）$= \frac{5}{9}$，而 $\frac{4}{9} \neq \frac{5}{9}$，所以这个游戏规则对双方是不公平的.

24. **解**：（1）如图①所示，连接 OC，

则 $\angle OCD = 90°$.

∵ $OC = OA$，$CD = OA$，

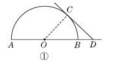
∴ $OC = CD$.

∴ $\angle ODC = \angle COD$.

∵ $\angle ODC + \angle COD = 90°$，

∴ $\angle ODC = 45°$.

（2）如图②所示，连接 OE.



①



②

（第 24 题）

∵ $CD = OA$，

∴ $CD = OC = OE = OA$.

∴ $\angle 1 = \angle 2$，$\angle 3 = \angle 4$.

∵ $AE /\!/ OC$，

∴ $\angle 2 = \angle 3$.

设 $\angle 1 = x$，

则 $\angle 2 = \angle 3 = \angle 4 = x$.

∴ $\angle AOE = \angle OCD = 180° - 2x$.

①$AE = OD$，理由如下：

在△AOE 与△OCD 中，

$$\begin{cases} OA = CO, \\ \angle AOE = \angle OCD, \\ OE = CD, \end{cases}$$

∴ △AOE≌△OCD（SAS）.

∴ $AE = OD$.

②∵ $OE = OC$，$\angle 6 = \angle 1 + \angle 2 = 2x$，

∴ $\angle 5 = \angle 6 = 2x$，

∵ $AE /\!/ OC$，

∴ $\angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 180°$，

即 $x + 2x + 2x = 180°$.

∴ $x = 36°$.

∴ $\angle ODC = 36°$.

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

综合应用创新题 高中版

达标检测卷

含参考答案及点拨

九年级数学

下（LJ版）五四学制

陕西新华出版传媒集团
陕西人民教育出版社