教辅资料站

电子教辅　试卷练习
知识总结　备课资源

扫码关注获取更多学习资料

荣德基 主编

# 典中点®

综合应用创新题 典中点

按课时编写




## 九年级数学 全一册

（ZJ版）

登录荣德基官方网站
免费下载课件资源

典中点·不简单　你·不平凡

- 方法技巧44招
- 典型易错题45道
- 培优拔尖题95道
- 高频考点32个

典中点微课堂 扫一扫

全书微课精彩呈现
创新题目 讲透方法

陕西新华出版传媒集团
陕西人民教育出版社

综合应用创新题 典中点 九年级数学 全一册 ZJ版 荣德基 主编 陕西新华出版传媒集团 陕西人民教育出版社

# 练透方法 练出高分

## 本书方法规律索引

### 方法规律


| 频次 | 方法名称 | 首次页码 |
| --- | --- | --- |
| | **思想方法** | |
| 6 | 数形结合思想 | 2 |
| 6 | 方程思想 | 4 |
| 1 | 建模思想 | 6 |
| 6 | 分类讨论思想 | 6 |
| 3 | 转化思想 | 61 |
| 1 | 整体思想 | 73 |
| 1 | 从特殊到一般的思想 | 155 |
| | **解题方法** | |
| 1 | 利用二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图象信息判断各项系数的符号的方法 | 7 |
| 1 | 用待定系数法求二次函数表达式选择类型的方法 | 9 |
| 1 | 求二次函数最值的方法 | 11 |
| 1 | 判定抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 $x$ 轴交点的个数的方法 | 13 |
| 1 | 利用图象求一元二次方程的根的方法 | 24 |
| 1 | 判别事件类型的方法 | 32 |
| 1 | 同一圆中证明两弦相等的四种方法 | 62 |
| 1 | 设元替代法 | 67 |
| 1 | 两类弓形面积的求法 | 72 |
| 3 | 割补法 | 73 |
| 1 | 替换法 | 73 |
| 1 | 求阴影面积的常用方法 | 74 |
| 1 | 作差法 | 74 |
| 1 | 等积变形法 | 74 |
| 1 | 判断四条线段是否是成比例线段的方法 | 79 |
| 1 | 参数法 | 80 |
| 1 | 定义法 | 81 |
| 1 | 中间比代换法 | 84 |
| 2 | 等积代换法 | 84 |
| 1 | 等比代换法 | 84 |
| 3 | 等比例过渡法 | 84 |
| 1 | 确定相似三角形的对应边与对应角的方法 | 85 |
| 1 | 利用平行线证比例式或等积式的方法 | 87 |
| 1 | 三角形相似的判定方法 | 95 |
| 1 | 运用重心定理解三角形中线段问题的方法 | 96 |
| 1 | 利用相似三角形解决实际问题的方法 | 99 |
| 1 | 构造平行线法 | 105 |
| 1 | 三点定型法 | 105 |
| 1 | 构造相似三角形法 | 105 |
| 1 | 等线段代换法 | 105 |
| 1 | 求锐角的三角函数值的三种方法 | 110 |
| 1 | 巧记特殊锐角三角函数值的方法 | 112 |
| 3 | 化斜为直法 | 119 |
| 1 | 解答含有仰角、俯角问题的方法 | 124 |
| 1 | 作辅助线的两种方法 | 145 |
| 1 | 构造直角三角形法 | 157 |
| 1 | 化折为直法 | 159 |


关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

荣德基 主编

# 综合应用创新题典中点

本册主编：程小恒



# 九年级数学 全一册

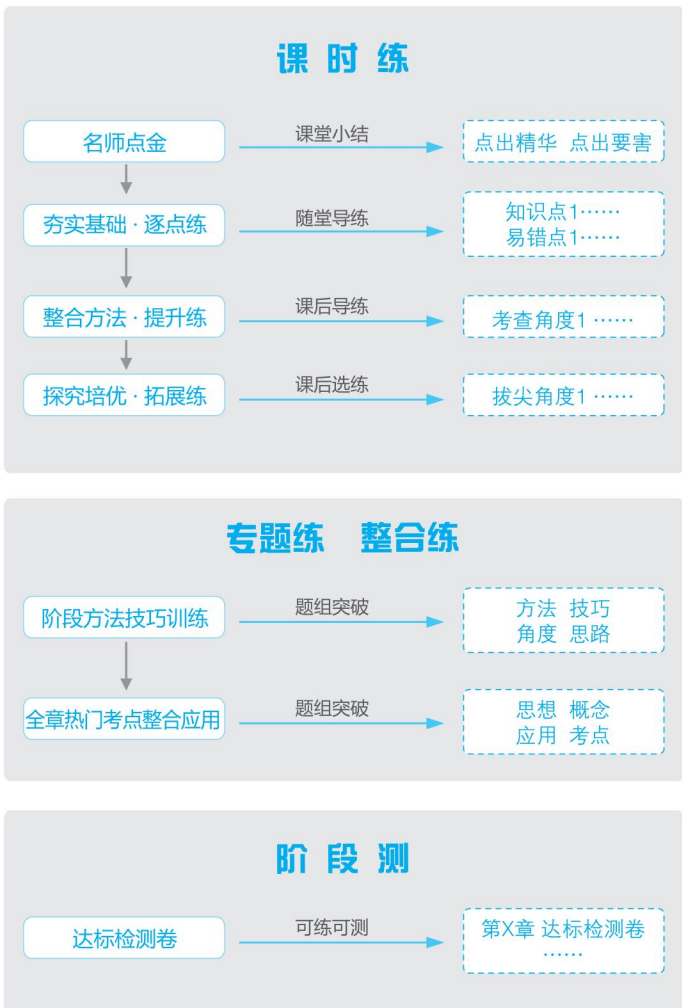
（ZJ版）

陕西新华出版传媒集团
陕西人民教育出版社
·西安·

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 一本在做题中教会你学习方法的书

练，就练得与众不同




《典中点》系列丛书是有思想的教辅，是有方法的宝典，是无声的老师，带你纵向贯通学习环节，横向打通疑难知识；帮你逐题渗透方法，分层提升能力；让你练准知识、练通考点、练透方法。

同学们，让我们牵手《典中点》系列丛书，练，就练得与众不同。

微信公众号
教辅资料站

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

CONTENTS 目录

## 上 册


第1章 二次函数

1.1 二次函数 …… 1
1.2 二次函数的图象
第1课时 二次函数 $y=ax^2(a\neq0)$ 的图象 … 3
第2课时 二次函数 $y=a(x-m)^2+k$ $(a\neq0)$ 的图象 …… 5
第3课时 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq0)$ 的图象 …… 7
第4课时 确定二次函数的表达式 …… 9
1.3 二次函数的性质
第1课时 二次函数的性质 …… 11
第2课时 二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图象与 $x$ 轴的交点 …… 13
阶段方法技巧训练
专训1 二次函数的图象与系数的关系 …… 15
专训2 求二次函数表达式的常见类型 …… 16
1.4 二次函数的应用
第1课时 利用二次函数求几何中的最值应用 …… 18
第2课时 利用二次函数求实际问题中的最值应用 …… 20
第3课时 利用二次函数解抛物线形的最值应用 …… 22
第4课时 利用二次函数的图象解一元二次方程(不等式) …… 24
章末整合提升训练
专训1 利用二次函数解决问题的四种类型 …… 26
专训2 探究二次函数中存在性问题 …… 28

全章热门考点整合应用 …… 29

第2章 简单事件的概率

2.1 事件的可能性 …… 32
2.2 简单事件的概率
第1课时 概 率 …… 34
第2课时 用列表法求概率 …… 36
第3课时 用画树状图法求概率 …… 38
2.3 用频率估计概率 …… 40
阶段方法技巧训练
专训1 概率的四种求法 …… 42
专训2 利用概率判断游戏规则的公平性 … 43
2.4 概率的简单应用 …… 44

全章热门考点整合应用 …… 46

第3章 圆的基本性质

3.1 圆
第1课时 圆的认识 …… 47
第2课时 圆的半径的应用 …… 49
第3课时 确定圆的条件 …… 50
3.2 图形的旋转
第1课时 旋转的认识 …… 52
第2课时 旋转作图 …… 54
阶段方法技巧训练(一)
专训 平移与旋转在解题中的巧用 …… 55
3.3 垂径定理
第1课时 垂径定理 …… 57
第2课时 垂径定理的逆定理 …… 59
阶段方法技巧训练(二)
专训 垂径定理的四种应用技巧 …… 61
3.4 圆心角 …… 62
3.5 圆周角
第1课时 圆周角和圆心角、弧的关系 …… 64
第2课时 圆周角和直径的关系 …… 66
3.6 圆内接四边形 …… 68
3.7 正多边形 …… 70
3.8 弧长及扇形的面积 …… 72
章末整合提升训练
专训1 圆中常见的基本计算题型 …… 74
专训2 利用圆的基本性质作辅助线的方法 …… 75
专训3 与圆有关的动态问题及实际应用 … 76

全章热门考点整合应用 …… 77

第4章 相似三角形

4.1 比例线段
第1课时 成比例线段 …… 79
第2课时 黄金分割 …… 81
4.2 由平行线截得的比例线段 …… 82
阶段方法技巧训练(一)
专训 平行线分线段成比例常见应用技巧 … 84
4.3 相似三角形 …… 85
4.4 两个三角形相似的判定
※第1课时 用平行线判定三角形相似 … 87




关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

第 2 课时　用角的关系判定三角形相似 … 89
第 3 课时　用边角关系判定三角形相似 … 91
第 4 课时　用三边关系判定三角形相似 …… 93
阶段方法技巧训练(二)
**专训　证明相似三角形的方法** …… 95
4.5　相似三角形的性质及其应用
第 1 课时　相似三角形对应线段的性质 …… 96
第 2 课时　相似三角形对应周长、面积的性质 …… 97
第 3 课时　相似三角形的性质在测量中的应用 …… 99
4.6　相似多边形 …… 101
4.7　图形的位似 …… 103
章末整合提升训练
**专训 1　证比例式或等积式的技巧** …… 105
**专训 2　巧用“基本图形”探索相似条件** … 106
**专训 3　巧用位似解三角形中的内接多边形问题** …… 107
全章热门考点整合应用 …… 108

## 下　册

第1章　解直角三角形
1.1　锐角三角函数
第 1 课时　锐角三角函数 …… 110
第 2 课时　特殊角的三角函数值 …… 112
1.2　锐角三角函数的计算 …… 114
阶段方法技巧训练
**专训 1　求锐角三角函数值的常用方法** … 116
**专训 2　同角或互余两角的三角函数关系的应用** …… 117
1.3　解直角三角形
第 1 课时　解直角三角形 …… 118
第 2 课时　用解直角三角形解坡度问题 … 120
第 3 课时　用解直角三角形解方位角问题 …… 122
第 4 课时　用解直角三角形解视角问题 … 124
第 5 课时　用解直角三角形解一般问题 … 126
章末整合提升训练
**专训 1　解直角三角形的几种常见类型** … 128
**专训 2　构造三角函数基本图形解实际问题的几种数学模型** …… 130
**专训 3　应用三角函数解四种常见问题** … 132
**专训 4　三角函数在学科内的综合应用** … 133
全章热门考点整合应用 …… 135
第2章　直线与圆的位置关系
2.1　直线与圆的位置关系
第 1 课时　直线与圆的位置关系 …… 137
第 2 课时　切线的判定 …… 139
2.2　切线长定理 …… 141
2.3　三角形的内切圆 …… 143
章末整合提升训练
**专训 1　直线与圆有关的作辅助线的方法** … 145
**专训 2　圆的实际应用及有关动态问题** … 146
全章热门考点整合应用 …… 147
第3章　三视图与表面展开图
3.1　投　影
第 1 课时　平行投影 …… 148
第 2 课时　中心投影 …… 150
阶段方法技巧训练
**专训　平行投影、中心投影的四种常见应用** … 152
3.2　简单几何体的三视图
第 1 课时　直棱柱的三视图 …… 153
第 2 课时　旋转体的三视图 …… 154
3.3　由三视图描述几何体 …… 156
3.4　简单几何体的表面展开图
第 1 课时　几何体的展开图 …… 158
第 2 课时　圆锥的展开图及相关计算 …… 160
全章热门考点整合应用 …… 162

## 达标检测卷

### 上　册

第 1 章达标检测卷 …… 165
第 2 章达标检测卷 …… 169
第 3 章达标检测卷 …… 173
第 4 章达标检测卷 …… 177

### 下　册

第 1 章达标检测卷 …… 181
第 2 章达标检测卷 …… 185
第 3 章达标检测卷 …… 189
参考答案及点拨 …… 193



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

坚持

## 1.1 二次函数

**名师点金**

二次函数的定义要理解三点：
(1)函数关系式必须是整式，自变量的取值是全体实数；而在实际应用中，自变量的取值必须符合实际意义；
(2)确定二次函数的各项系数及常数项时，要把函数关系式化为一般形式；
(3)二次项系数不为0.

### Ⅰ 夯实基础 · 逐点练 ☞(答案见193页) 随堂导练

**知识点1 二次函数的定义**

1. 【中考·兰州】下列函数关系式中，一定为二次函数的是(　　)
A. $y=3x-1$　　B. $y=ax^2+bx+c$
C. $s=2t^2-2t+1$　　D. $y=x^2+\frac{1}{x}$

2. 关于函数$y=(500-10x)(40+x)$，下列说法不正确的是(　　)
A. $y$是关于$x$的二次函数
B. 二次项系数是$-10$
C. 一次项是100
D. 常数项是20 000

3. 下列说法中，正确的是(　　)
A. 二次函数中，自变量的取值范围是非零实数
B. 在圆的面积公式$S=\pi r^2$中，$S$是关于$r$的二次函数
C. $y=\frac{1}{2}(x-1)(x+4)$不是二次函数
D. 在$y=1-\sqrt{2}x^2$中，一次项系数为1

4. 已知$x$是实数，且满足$(x-2)(x-3)\sqrt{1-x}=0$，则相应的函数$y=x^2+x+1$的值为(　　)
A. 13或3　　B. 7或3
C. 3　　D. 13或7或3

**知识点2 用待定系数法确定二次函数表达式**

5. 二次函数$y=2x^2-bx+c$满足：当$x=1$时，$y=0$；当$x=-2$时，$y=-3$，则$b$，$c$的值分别是(　　)
A. $-3$，$-5$　　B. $-3$，$-4$
C. 3，4　　D. 3，$-5$

6. 已知函数$y=x^2+2x+m$，当$x=1$时，$y$的值为$-12$，那么当$x=2$时，$y$的值为(　　)
A. $-15$　　B. $-11$　　C. $-7$　　D. 12

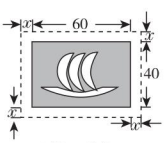
7. 已知二次函数$y=ax^2+bx+c$，则由表格中信息可知$y$与$x$之间的函数表达式是_____.

| $x$ | $-1$ | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| $ax^2$ | | | 1 |
| $ax^2+bx+c$ | 8 | 3 | |

**知识点3 实际问题中根据数量关系确定二次函数表达式**

8. 某商品现在的售价为每件60元，每星期可卖出300件.市场调查反映，如果调整商品售价，每降价1元，每星期可多卖出20件.设每件商品降价$x$元后，每星期售出商品的总销售额为$y$元，则$y$与$x$的关系式为(　　)
A. $y=60(300+20x)$
B. $y=(60-x)(300+20x)$
C. $y=300(60-20x)$
D. $y=(60-x)(300-20x)$

9. 在一幅长60 cm，宽40 cm的矩形风景画的四周镶一条金色纸边，制成一幅矩形挂图，如图所示(单位：cm)，如果要使整幅挂图的面积是$y$ cm$^2$，设金色纸边的宽度为$x$ cm，那么$y$关于$x$的函数是(　　)
A. $y=(60+2x)(40+2x)$
B. $y=(60+x)(40+x)$
C. $y=(60+2x)(40+x)$
D. $y=(60+x)(40+2x)$



(第9题)

**易错点 用二次函数的定义求字母的值时，易忽略“二次项系数不为0”这一条件而导致错误**

10. 如果函数$y=(a-2)x^{a^2-2}+ax-1$是二次函数，那么$a$的值是(　　)　【导学号:1858154】
A. 2　　B. $-2$　　C. 2或$-2$　　D. 0

微信公众号 教辅资料站



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

## Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞（答案见193页） 课后导练

**考查角度1 利用二次函数的定义求字母的值**

11. 已知函数 $y=(k-1)x^{k^2+k}+1$ 是关于 $x$ 的二次函数.
（1）求 $k$ 的值；
（2）写出该二次函数的表达式，并指出其二次项系数、一次项系数和常数项.

**考查角度2 利用二次函数表达式建立实际问题模型**

12. 某商店以每双42元的价格购进一种皮鞋，根据试销得知这种皮鞋每天的销售量 $t$（双）与每双的售价 $x$（元）之间可以看成一次函数关系 $t=-4x+204$. 请写出每天的销售利润 $y$（元）与每双的售价 $x$（元）之间的函数关系式，并确定自变量 $x$ 的取值范围.

## Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞（答案见193页） 课后选练

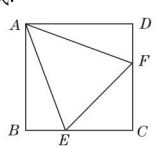
**拔尖角度1 利用二次函数探究最值问题**

13. 某广告公司设计一幅周长为12 m的矩形广告牌，设计费为每平方米1 000元，设矩形一边的长为 $x$ m，面积为 $S$ $m^2$.
（1）求 $S$ 与 $x$ 之间的函数关系式，并指出自变量 $x$ 的取值范围；
（2）若要求设计的广告牌边长为整数，请你填写下表，并探究当 $x$ 取何值时，广告牌的设计费最多.

| $x$（m） | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $S$（$m^2$） | | | | | |
| 设计费（元） | | | | | |

**拔尖角度2 利用二次函数表示几何问题（数形结合思想）**

14. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为4，$E$ 为 $BC$ 上一点，$F$ 是 $CD$ 上一点，且 $AE=AF$，设 $\triangle AEF$ 的面积为 $y$，$EC$ 的长为 $x$，求 $y$ 与 $x$ 的函数关系式.



（第14题）

微信公众号 教辅资料站


谜语：1×1=1（打一成语）
谜底：一成不变
趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 1.2 二次函数的图象

## 第1课时 二次函数 $y=ax^2$ $(a\neq0)$ 的图象

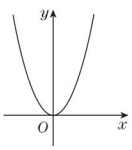
**名师点金**

函数 $y=ax^2(a\neq0)$ 的图象：
(1)图象是抛物线，对称轴是 $y$ 轴；(2)$a>0\Leftrightarrow$开口向上$\Leftrightarrow$有最低点$(0,0)$，$a<0\Leftrightarrow$开口向下$\Leftrightarrow$有最高点$(0,0)$；
(3)$|a|$越大$\Leftrightarrow$抛物线的开口越小；(4)抛物线 $y=ax^2$ 与抛物线 $y=-ax^2$ 关于 $x$ 轴对称.

### Ⅰ 夯实基础·逐点练 (答案见193页) 随堂导练

**知识点1 二次函数 $y=ax^2(a\neq0)$ 的图象**

1. 如图所示的函数图象所表示的表达式有可能是(　　)



(第1题)

A. $y=-x^2$
B. $y=x^2$
C. $y=x$
D. $y=\frac{1}{x}$

2. 下列各点中，在二次函数 $y=-5x^2$ 的图象上的是(　　)
A. $(-1,-5)$　　B. $(2,-10)$
C. $(1,5)$　　D. $(-2,20)$

3. 若二次函数 $y=ax^{a^2-1}$ 的图象开口向上，则 $a$ 的值为(　　)
A. 3　　B. $-3$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $-\sqrt{3}$

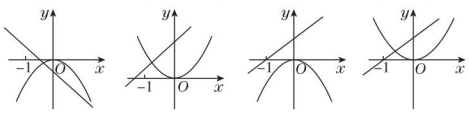
4. 【中考·常德】规定：如果一个四边形有一组对边平行，一组邻边相等，那么称此四边形为广义菱形. 根据规定判断下面四个结论：
①正方形和菱形都是广义菱形；
②平行四边形是广义菱形；
③对角线互相垂直，且两组邻边分别相等的四边形是广义菱形；
④若 $M,N$ 的坐标分别为$(0,1)$，$(0,-1)$，$P$ 是二次函数 $y=\frac{1}{4}x^2$ 的图象上在第一象限内的任意一点，$PQ$ 垂直直线 $y=-1$ 于点 $Q$，则四边形 $PMNQ$ 是广义菱形.
其中正确的是_____(填序号).

**知识点2 二次函数 $y=ax^2(a\neq0)$ 的图象的特征**

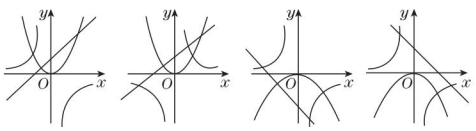
5. 关于二次函数 $y=-\frac{2}{3}x^2$ 的性质描述错误的是(　　)
A. 它的图象关于 $y$ 轴对称
B. 该抛物线开口向下
C. 原点是该抛物线上的最高点
D. 当 $x$ 为任意实数时，函数值 $y$ 总是负数

6. 关于二次函数 $y=3x^2$ 与 $y=-3x^2$，下列叙述正确的有(　　)
①它们的图象都是抛物线；②它们的图象的对称轴都是 $y$ 轴；③它们的图象的顶点都是$(0,0)$；④二次函数 $y=3x^2$ 的图象开口向上，二次函数 $y=-3x^2$ 的图象开口向下；⑤它们的图象关于 $x$ 轴对称.
A. 5个　　B. 4个
C. 3个　　D. 2个

7. 【中考·呼和浩特】二次函数 $y=ax^2$ 与一次函数 $y=ax+a$ 在同一坐标系中的大致图象可能是(　　)




8. 【中考·赤峰】函数 $y=k(x-k)$ 与 $y=kx^2$，$y=\frac{k}{x}$ $(k\neq0)$，在同一坐标系上的图象正确的是(　　)




**易错点 画二次函数的图象时忽视自变量的取值范围而致错**

9. 在直角坐标系中分别作出下列函数的图象：
(1)$y=x^2$；
(2)$y=-x^2(0\leqslant x<2)$.

微信公众号 教辅资料站



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

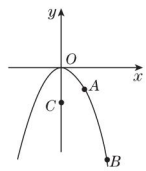
## Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞（答案见 193 页） 课后导练

**考查角度 1** 利用 $y=ax^2$ 的图象的特征求字母的值（方程思想）

10. 已知函数 $y=(m+3)x^{m^2+3m-2}$ 的图象是抛物线.
（1）求 $m$ 的值；
（2）当 $m$ 为何值时，抛物线的开口向下？
（3）当 $m$ 为何值时，抛物线有最低点？并写出它的顶点坐标和对称轴.

**考查角度 2** 利用 $y=ax^2$ 图象的对称性求最值（数形结合思想）

11. 如图，在抛物线 $y=-x^2$ 上有 $A,B$ 两点，其横坐标分别为 1，2. 在 $y$ 轴上有一动点 $C$，求 $AC+BC$ 的最小值.

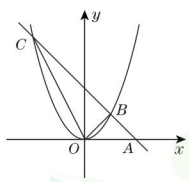


（第 11 题）

## Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞（答案见 193 页） 课后选练

**拔尖角度 1** 利用 $y=ax^2$ 图象的特征解面积坐标问题

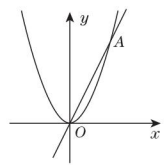
12. 如图，直线 $AB$ 过 $x$ 轴上一点 $A(2,0)$，且与抛物线 $y=ax^2$ 相交于 $B,C$ 两点，$B$ 点的坐标为 $(1,1)$.
（1）求直线 $AB$ 和抛物线的表达式；
（2）若抛物线上有一点 $D$（在第一象限内）使得 $S_{\triangle AOD}=S_{\triangle OBC}$，求 $D$ 点的坐标.



（第 12 题）

**拔尖角度 2** 利用 $y=ax^2$ 图象的特征探究等腰三角形问题

13. 如图，抛物线 $y=ax^2$ 与直线 $y=kx+b$ 在第一象限内交于点 $A(2,4)$.
（1）求抛物线的表达式；
（2）在 $x$ 轴上是否存在一点 $P$，使 $\triangle AOP$ 为等腰三角形？若存在，请你求出点 $P$ 的坐标；若不存在，请说明理由.



（第 13 题）

微信公众号 教辅资料站



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 第2课时 二次函数 $y=a(x-m)^2+k$ $(a\neq0)$ 的图象

**名师点金**

**抛物线 $y=ax^2$ 到抛物线 $y=a(x-m)^2+k$ 平移方法“八字诀”：**
平移规律是“上加下减，左加右减”.(1)“上加下减”是指抛物线 $y=ax^2$ 向上平移，则在 $ax^2$ 后加上一个正数；向下平移，则在 $ax^2$ 后减去一个正数.(2)“左加右减”是指抛物线 $y=ax^2$ 向左平移，则括号内 $x$ 后面的数是正数；向右平移，则括号内 $x$ 后面的数是负数.

## Ⅰ 夯实基础·逐点练 (答案见194页) 随堂导练

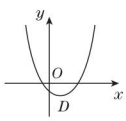
**知识点1 抛物线 $y=a(x-m)^2+k$ 的平移**

1. 【中考·哈尔滨】将抛物线 $y=2x^2$ 向上平移3个单位，再向右平移2个单位，所得到的抛物线为(　　)
A. $y=2(x+2)^2+3$　　B. $y=2(x-2)^2+3$
C. $y=2(x-2)^2-3$　　D. $y=2(x+2)^2-3$

2. 【中考·上海】如果将抛物线 $y=x^2+2$ 向下平移1个单位，那么所得新抛物线的表达式是(　　)
A. $y=(x-1)^2+2$　　B. $y=(x+1)^2+2$
C. $y=x^2+1$　　D. $y=x^2+3$

3. 将抛物线 $y=(x-1)^2$ 向左平移2个单位，所得抛物线的表达式为(　　)
A. $y=(x+1)^2$　　B. $y=(x-3)^2$
C. $y=(x-1)^2+2$　　D. $y=(x-1)^2-2$

4. 【中考·玉林】已知抛物线 $C:y=\frac{1}{2}(x-1)^2-1$，顶点为 $D$(如图)，将 $C$ 沿水平方向向右(或向左)平移 $|m|$ 个单位，得到抛物线 $C_1$，顶点为 $D_1$，$C$ 与 $C_1$ 相交于点 $Q$，若 $\angle DQD_1=60°$，则 $m$ 等于(　　)
A. $\pm4\sqrt{3}$
B. $\pm2\sqrt{3}$
C. $-2$ 或 $2\sqrt{3}$
D. $-4$ 或 $4\sqrt{3}$



(第4题)

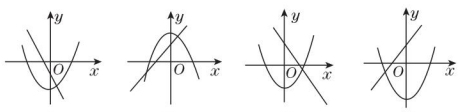
**知识点2 二次函数 $y=a(x-m)^2+k$ 的图象特征**

5. 【中考·衢州】二次函数 $y=(x-1)^2+3$ 图象的顶点坐标是(　　)
A. $(1,3)$　　B. $(1,-3)$
C. $(-1,3)$　　D. $(-1,-3)$

6. 【中考·成都】二次函数 $y=2x^2-3$ 的图象是一条抛物线，下列关于该抛物线的说法，正确的是(　　)
A. 抛物线开口向下
B. 抛物线经过点$(2,3)$
C. 抛物线的对称轴是直线 $x=1$
D. 抛物线与 $x$ 轴有两个交点

7. 在平面直角坐标系中，抛物线 $y=x^2-1$ 与 $x$ 轴的交点的个数是(　　)
A. 3　　B. 2　　C. 1　　D. 0

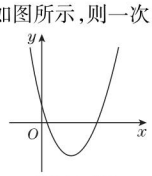
8. 【中考·泰安】在同一坐标系中，一次函数 $y=-mx+n^2$ 与二次函数 $y=x^2+m$ 的图象可能是(　　)



A　B　C　D

9. 【中考·益阳】若抛物线 $y=(x-m)^2+(m+1)$ 的顶点在第一象限，则 $m$ 的取值范围为(　　)
A. $m>1$　　B. $m>0$
C. $m>-1$　　D. $-1<m<0$

10. 二次函数 $y=a(x+m)^2+n$ 的图象如图所示，则一次函数 $y=mx+n$ 的图象经过(　　)
A. 第一、二、三象限
B. 第一、二、四象限
C. 第二、三、四象限
D. 第一、三、四象限



(第10题)

11. 下列二次函数中，图象以直线 $x=2$ 为对称轴，且经过点$(0,1)$的是(　　)
A. $y=(x-2)^2+1$　　B. $y=(x+2)^2+1$
C. $y=(x-2)^2-3$　　D. $y=(x+2)^2-3$

12. 当 $0\leqslant x\leqslant3$ 时，直线 $y=a$ 与抛物线 $y=(x-1)^2-3$ 有交点，则 $a$ 的取值范围是_____.

**易错点 对平移的规律理解不透彻**

13. 能否通过上下平移二次函数 $y=\frac{1}{3}x^2$ 的图象，使得到的新的函数图象过点$(3,-3)$？若能，说出平移的方向和距离；若不能，说明理由.

微信公众号 教辅资料站



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

## Ⅱ 整合方法 · 提升练 （答案见 194 页） 课后导练

**考查角度 1** 利用抛物线的平移求二次函数的表达式

**14.** 把二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象先向左平移 2 个单位，再向上平移 4 个单位，得到二次函数 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2-1$ 的图象.

(1) 试确定 $a,h,k$ 的值；

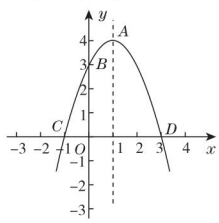
(2) 指出二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 图象的开口方向、对称轴和顶点坐标.

**考查角度 2** 利用抛物线的特征求二次函数的表达式

**15.** 【中考 · 齐齐哈尔】如图，已知抛物线的顶点为 $A(1,4)$，抛物线与 $y$ 轴交于点 $B(0,3)$，与 $x$ 轴交于 $C,D$ 两点，点 $P$ 是 $x$ 轴上的一个动点.

(1) 求此抛物线的表达式；

(2) 当 $PA+PB$ 的值最小时，求点 $P$ 的坐标.




（第 15 题）

## Ⅲ 探究培优 · 拓展练 （答案见 194 页） 课后选练

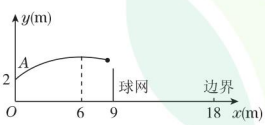
**拔尖角度 1** 利用二次函数图象解实际应用问题（建模思想）

**16.** 【中考 · 天水】如图，排球运动员站在点 $O$ 处练习发球，将球从 $O$ 点正上方 2 m 的 $A$ 处发出，把球看成点，其运行的高度 $y$(m) 与运行的水平距离 $x$(m) 满足关系式 $y=a(x-6)^2+h$. 已知球网与 $O$ 点的水平距离为 9 m，高度为 2.43 m，球场的边界距 $O$ 点的水平距离为 18 m.

(1) 当 $h=2.6$ 时，求 $y$ 与 $x$ 的关系式（不要求写出自变量 $x$ 的取值范围）.

(2) 当 $h=2.6$ 时，球能否越过球网？球会不会出界？请说明理由.

(3) 若球一定能越过球网，又不出边界，求 $h$ 的取值范围.



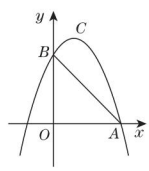

（第 16 题）

**拔尖角度 2** 利用二次函数的图象探究动点问题（分类讨论思想）

**17.** 如图，已知抛物线 $y=a(x-h)^2+k$ 与 $x$ 轴的一个交点为 $A(3,0)$，与 $y$ 轴的交点为 $B(0,3)$，其顶点为 $C$，对称轴为直线 $x=1$.

(1) 求抛物线的表达式；

(2) 已知点 $M$ 为 $y$ 轴上的一个动点，当 $\triangle ABM$ 为等腰三角形时，求点 $M$ 的坐标.




（第 17 题）

微信公众号 教辅资料站



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 第 3 课时 二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图象

**名师点金**

利用二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图象信息判断各项系数的符号的方法：
(1) $a$ 决定抛物线的开口方向，简记为“正上负下”；
(2) $c$ 决定抛物线与 $y$ 轴的交点位置，简记为“上正下负原点 0”；
(3) $a,b$ 的符号共同决定对称轴的位置，简记为“左同右异，$y$ 轴 $b$ 的值为 0”. 另外还要注意特殊值的意义，如 $x=1,-1,2$ 时 $y$ 的值的符号. 可以由图象的位置来判断各项系数的符号，也可以由各项系数的符号来判断图象的位置.

## Ⅰ 夯实基础 · 逐点练 ☞(答案见 194 页) 随堂导练

**知识点1 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 与 $y=a(x-m)^2+k$ 之间的关系**

1. 【中考 · 山西】用配方法将二次函数 $y=x^2-8x-9$ 化为 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式为(　　)
A. $y=(x-4)^2+7$　　B. $y=(x-4)^2-25$
C. $y=(x+4)^2+7$　　D. $y=(x+4)^2-25$

2. 【中考 · 眉山】若抛物线 $y=x^2-2x+3$ 不动，将平面直角坐标系 $xOy$ 先沿水平方向向右平移 1 个单位，再沿铅直方向向上平移 3 个单位，则原抛物线的表达式应变为(　　)
A. $y=(x-2)^2+3$　　B. $y=(x-2)^2+5$
C. $y=x^2-1$　　D. $y=x^2+4$

3. 【中考 · 济宁】将抛物线 $y=x^2-6x+5$ 向上平移两个单位，再向右平移一个单位后，得到的抛物线表达式是(　　)
A. $y=(x-4)^2-6$　　B. $y=(x-1)^2-3$
C. $y=(x-2)^2-2$　　D. $y=(x-4)^2-2$

**知识点2 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象特征**

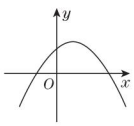
4. 【中考 · 重庆】抛物线 $y=-3x^2+6x+2$ 的对称轴是(　　)
A. 直线 $x=2$　　B. 直线 $x=-2$
C. 直线 $x=1$　　D. 直线 $x=-1$

5. 下列关于二次函数的说法错误的是(　　)
A. 抛物线 $y=-2x^2+3x+1$ 的对称轴是直线 $x=\frac{3}{4}$
B. 点 $A(3,0)$ 不在抛物线 $y=x^2-2x-3$ 上
C. 抛物线 $y=(x+2)^2-2$ 的顶点坐标是 $(-2,-2)$
D. 函数 $y=2x^2+4x-3$ 的图象的最低点是 $(-1,-5)$

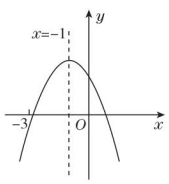
6. 【中考 · 荆门】若二次函数 $y=x^2+mx$ 的图象的对称轴是直线 $x=3$，则关于 $x$ 的方程 $x^2+mx=7$ 的解为(　　)
A. $x_1=0,x_2=6$　　B. $x_1=1,x_2=7$
C. $x_1=1,x_2=-7$　　D. $x_1=-1,x_2=7$

**知识点3 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 $a,b,c$ 之间的关系**

7. 【中考 · 黔东南州】二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图所示，则下列结论正确的是(　　)
A. $a<0,b<0,c>0,b^2-4ac>0$
B. $a>0,b<0,c>0,b^2-4ac<0$
C. $a<0,b>0,c<0,b^2-4ac>0$
D. $a<0,b>0,c>0,b^2-4ac>0$



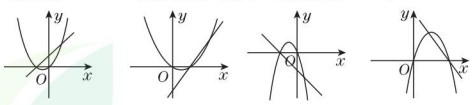
(第 7 题)



(第 8 题)

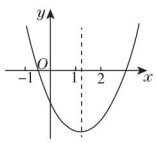
8. 【中考 · 巴中】二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图象如图所示，下列结论：①$b^2>4ac$；②$abc<0$；③$2a+b-c>0$；④$a+b+c<0$，其中正确的是(　　)
A. ①④　　B. ②④　　C. ②③　　D. ①②③④

9. 【中考 · 湖州】已知 $a,b$ 是非零实数，$|a|>|b|$，在同一平面直角坐标系中，二次函数 $y_1=ax^2+bx$ 与一次函数 $y_2=ax+b$ 的大致图象不可能是(　　)



A　　B　　C　　D

10. 【中考 · 天水】二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图所示，若 $M=4a+2b,N=a-b$，则 $M,N$ 的大小关系为 $M$ _____ $N$. (填“>”“=”或“<”)



(第 10 题)

微信公众号 教辅资料站

趣味数学

怎样改变“女性跑得比男性慢”的说法：若比较两性赛跑的速度时，加入“身高”的因素，会使选手的表现产生什么变化呢？ (待续)



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

## Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞（答案见194页） 课后导练

**考查角度1 利用抛物线的特征作二次函数的图象**

11. 已知抛物线 $y=x^2+2x-3$.

（1）试确定抛物线的开口方向、顶点坐标和对称轴；

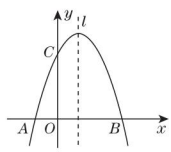
（2）用“五点法”画出该抛物线，并用“平移法”说明该抛物线是怎样由抛物线 $y=x^2$ 平移得到的.

**考查角度2 利用抛物线的特征求点的坐标**

12. 【中考 · 宁波】如图，已知抛物线 $y=-x^2+mx+3$ 与 $x$ 轴交于 $A,B$ 两点，与 $y$ 轴交于点 $C$，点 $B$ 的坐标为 $(3,0)$.

（1）求 $m$ 的值及抛物线的顶点坐标；

（2）点 $P$ 是抛物线对称轴上的一个动点，当 $PA+PC$ 的值最小时，求点 $P$ 的坐标.




（第12题）

## Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞（答案见194页） 课后选练

**拔尖角度 利用抛物线的特征求字母的取值范围**

13. 在平面直角坐标系 $xOy$ 中，抛物线 $y=mx^2-2mx+m-1\ (m>0)$ 与 $x$ 轴的交点为 $A,B$.

（1）求抛物线的顶点坐标；

（2）横、纵坐标都是整数的点叫做整点.

①当 $m=1$ 时，求线段 $AB$ 上整点的个数；

②若抛物线在点 $A,B$ 之间的部分与线段 $AB$ 所围成的区域内（包括边界）恰有6个整点，结合函数的图象，求 $m$ 的取值范围.

微信公众号 教辅资料站



体育专栏作家按照这个想法，计算出男子、女子一百米世界纪录的每秒身高比（速度除以其身高）分别为5.55和5.64. 因此，他的结论是跑得最快的女人比跑得最快的男人还要快.

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 第4课时 确定二次函数的表达式

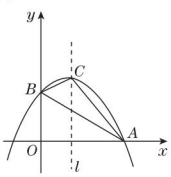
**名师点金**

用待定系数法求二次函数表达式选择类型的方法：
若已知图象上三个任意点的坐标，则利用一般式 $y=ax^2+bx+c$ 求；若已知图象的顶点坐标（或对称轴或函数的最值），则利用顶点式 $y=a(x-m)^2+k$ 求；若已知图象与 $x$ 轴的两个交点，则利用交点式 $y=a(x-x_1)(x-x_2)$ 求.

## Ⅰ 夯实基础 · 逐点练 （答案见195页） 随堂导练

### 知识点1 用一般式（三点式）确定二次函数表达式

1. 【中考 · 宁夏】如图，抛物线 $y=-\frac{1}{3}x^2+bx+c$ 经过点 $A(3\sqrt{3},0)$ 和点 $B(0,3)$，且这个抛物线的对称轴为直线 $l$，顶点为 $C$.
（1）求抛物线的表达式；
（2）连结 $AB,AC,BC$，求 $\triangle ABC$ 的面积.



（第1题）

### 知识点2 用顶点式确定二次函数表达式

2. 已知 $A(1,0),B(0,-1),C(-1,2),D(2,-1),E(4,2)$ 五个点，抛物线 $y=a(x-1)^2+k(a>0)$ 经过其中三个点.
（1）求证：$C,E$ 两点不可能同时在抛物线 $y=a(x-1)^2+k(a>0)$ 上；
（2）点 $A$ 在抛物线 $y=a(x-1)^2+k(a>0)$ 上吗？为什么？
（3）求 $a$ 和 $k$ 的值.

### 知识点3 用交点式确定二次函数表达式

3. 【中考 · 烟台】已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的 $y$ 与 $x$ 的部分对应值如下表：

| $x$ | $-1$ | $0$ | $2$ | $3$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $5$ | $0$ | $-4$ | $-3$ | $0$ |

下列结论：①抛物线的开口向上；
②抛物线的对称轴为直线 $x=2$；
③当 $0<x<4$ 时，$y>0$；
④抛物线与 $x$ 轴的两个交点间的距离是4；
⑤若 $A(x_1,2),B(x_2,3)$ 是抛物线上两点，则 $x_1<x_2$.
其中正确的个数是（　　）
A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

4. 【中考 · 宁波】已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 $x$ 轴交于点 $A(1,0),B(3,0)$，且过点 $C(0,-3)$.
（1）求抛物线的表达式和顶点坐标；
（2）请你写出一种平移的方法，使平移后抛物线的顶点落在直线 $y=-x$ 上，并写出平移后抛物线的表达式.

微信公众号 教辅资料站



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

## Ⅱ 整合方法 · 提升练 （答案见195页） 课后导练

**考查角度1 利用对称确定二次函数表达式**

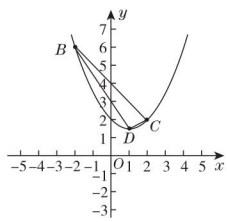
5. 已知二次函数 $y=3x^2-6x+5$，求满足下列条件的二次函数的表达式：
（1）两图象关于 $x$ 轴对称；
（2）两图象关于 $y$ 轴对称；
（3）两图象关于经过抛物线 $y=3x^2-6x+5$ 的顶点且平行于 $x$ 轴的直线对称.

**考查角度2 利用对称轴确定二次函数表达式**

6. 【中考 · 宁波】已知抛物线 $y=(x-m)^2-(x-m)$，其中 $m$ 是常数.
（1）求证：不论 $m$ 为何值，该抛物线与 $x$ 轴一定有两个公共点；
（2）若该抛物线的对称轴为直线 $x=\frac{5}{2}$.
①求该抛物线对应的函数表达式；
②把该抛物线沿 $y$ 轴向上平移多少个单位后，得到的抛物线与 $x$ 轴只有一个公共点？

**考查角度3 利用直线平移与二次函数图象交点情况求字母的取值范围**

7. 【中考 · 菏泽】如图，在平面直角坐标系 $xOy$ 中，抛物线 $y=ax^2+bx+2$ 过 $B(-2,6)$，$C(2,2)$ 两点.
（1）试求抛物线的表达式；
（2）记抛物线顶点为 $D$，求 $\triangle BCD$ 的面积；
（3）若直线 $y=-\frac{1}{2}x$ 向上平移 $c$ 个单位所得的直线与抛物线段 $BDC$（包括端点 $B$，$C$）部分有两个交点，求 $c$ 的取值范围.



（第7题）

微信公众号 教辅资料站



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 1.3 二次函数的性质

## 第1课时 二次函数的性质

**名师点金**

求二次函数最值的方法：

一是公式法，即当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，函数 $y$ 有最大(小)值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$；二是配方法，即把二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 配方为 $y=a(x-m)^2+k$，则当 $x=m$ 时，函数 $y$ 有最大(小)值 $k$. 当 $x=-\frac{b}{2a}$ 或 $x=m$ 在自变量的取值范围内时，二次函数的最大(小)值是二次函数图象顶点的纵坐标，对应的自变量的值是顶点的横坐标.

### Ⅰ 夯实基础 · 逐点练 (答案见195页) 随堂导练

**知识点1 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的增减性**

1. 已知点 $A(-3,y_1)$，$B(-1,y_2)$，$C(3,y_3)$ 在抛物线 $y=\frac{2}{3}x^2$ 上，则 $y_1,y_2,y_3$ 的大小关系是(　　)

A. $y_1<y_2<y_3$　　B. $y_1>y_2>y_3$

C. $y_1=y_3<y_2$　　D. $y_2<y_3=y_1$

2. 【中考·绍兴】已知点 $(x_1,y_1)$，$(x_2,y_2)$ 均在抛物线 $y=x^2-1$ 上，下列说法正确的是(　　)

A. 若 $y_1=y_2$，则 $x_1=x_2$

B. 若 $x_1=-x_2$，则 $y_1=-y_2$

C. 若 $0<x_1<x_2$，则 $y_1>y_2$

D. 若 $x_1<x_2<0$，则 $y_1>y_2$

3. 已知二次函数 $y=-\frac{1}{2}x^2-7x+\frac{15}{2}$，若自变量 $x$ 分别取 $x_1,x_2,x_3$，且 $0<x_1<x_2<x_3$，则对应的函数值 $y_1,y_2,y_3$ 的大小关系正确的是(　　)

A. $y_1>y_2>y_3$　　B. $y_1<y_2<y_3$

C. $y_2>y_3>y_1$　　D. $y_2<y_3<y_1$

4. 【中考·福建】若二次函数 $y=|a|x^2+bx+c$ 的图象过不同的五点 $A(m,n)$，$B(0,y_1)$，$C(3-m,n)$，$D(\sqrt{2},y_2)$，$E(2,y_3)$，则 $y_1,y_2,y_3$ 的大小关系是(　　)

A. $y_1<y_2<y_3$　　B. $y_1<y_3<y_2$

C. $y_3<y_2<y_1$　　D. $y_2<y_3<y_1$

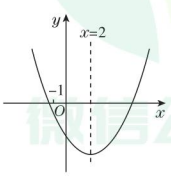
5. 【中考·遂宁】二次函数 $y=x^2-ax+b$ 的图象如图所示，对称轴为直线 $x=2$，下列结论不正确的是(　　)

A. $a=4$

B. 当 $b=-4$ 时，顶点的坐标为 $(2,-8)$

C. 当 $x=-1$ 时，$b>-5$

D. 当 $x>3$ 时，$y$ 随 $x$ 的增大而增大



(第5题)

**知识点2 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的最值**

6. 对于二次函数 $y=3x^2+2$，下列说法错误的是(　　)

A. 最小值为2

B. 图象与 $x$ 轴没有公共点

C. 当 $x<0$ 时，$y$ 随 $x$ 的增大而增大

D. 图象的对称轴是 $y$ 轴

7. 已知抛物线 $y=-x^2+2x-3$，下列结论中不正确的是(　　)

A. 函数 $y$ 的最大值是 $-2$

B. 当 $x<1$ 时，$y$ 随 $x$ 的增大而减小

C. 图象的对称轴是直线 $x=1$

D. 图象与 $y$ 轴的交点在 $x$ 轴下方

8. 【中考·广州】对于二次函数 $y=-\frac{1}{4}x^2+x-4$，下列说法正确的是(　　)

A. 当 $x>0$ 时，$y$ 随 $x$ 的增大而增大

B. 当 $x=2$ 时，$y$ 有最大值 $-3$

C. 图象的顶点坐标为 $(-2,-7)$

D. 图象与 $x$ 轴有两个交点

9. 【中考·温州】已知二次函数 $y=x^2-4x+2$，关于该函数在 $-1\leqslant x\leqslant3$ 的取值范围内，下列说法正确的是(　　)

A. 有最大值 $-1$，有最小值 $-2$

B. 有最大值0，有最小值 $-1$

C. 有最大值7，有最小值 $-1$

D. 有最大值7，有最小值 $-2$

**易错点 对顶点式 $y=a(x-m)^2+k$ 在指定条件下的最值理解不透而致错**

10. 【中考·舟山】二次函数 $y=-(x-1)^2+5$，当 $m\leqslant x\leqslant n$ 且 $mn<0$ 时，$y$ 的最小值为 $2m$，最大值为 $2n$，则 $m+n$ 的值为(　　)

A. $\frac{5}{2}$　　B. 2　　C. $\frac{3}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

教辅资料站

趣味数学 在运动会上进行铅球比赛时，如何能用巧劲把沉重的铅球扔得最远呢？(待续)



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

## Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞（答案见 196 页） 课后导练

**考查角度 1 利用二次函数的增减性求字母的值**

**11.** 求当二次函数 $y=x^2-2ax+2a+3$ 分别满足下列条件时 $a$ 的值.

（1）函数 $y$ 的最小值为 0.

（2）当 $x>5$ 时，$y$ 随 $x$ 的增大而增大；当 $x<5$ 时，$y$ 随 $x$ 的增大而减小.

**考查角度 2 利用二次函数的最值求字母的值**

**12.** 已知函数 $y=x^2+(2m+1)x+m^2-1$.

（1）$m$ 为何值时，$y$ 有最小值 0；

（2）求证：不论 $m$ 取何值，函数图象的顶点都在同一直线上.

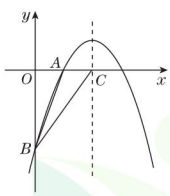
## Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞（答案见 196 页） 课后选练

**拔尖角度 1 利用二次函数的最值解决几何问题**

**13.** 如图，已知函数 $y=-\frac{1}{2}x^2+bx+c$ 的图象经过 $A(2,0)$，$B(0,-6)$ 两点.

（1）设该二次函数的图象的对称轴与 $x$ 轴交于点 $C$，连结 $BA$，$BC$，求 $\triangle ABC$ 的面积；

（2）若该函数自变量的取值范围是 $-1\leqslant x\leqslant 8$，直接写出函数的最大值和最小值.




（第 13 题）

**拔尖角度 2 利用二次函数的增减性解决几何问题**

**14.** 在平面直角坐标系内，反比例函数和二次函数 $y=k(x^2+x-1)$ 的图象交于点 $A(1,k)$ 和点 $B(-1,-k)$.

（1）当 $k=-2$ 时，求反比例函数的表达式；

（2）要使反比例函数与二次函数都是 $y$ 随着 $x$ 的增大而增大，求 $k$ 应满足的条件以及 $x$ 的取值范围；

（3）设二次函数的图象的顶点为 $Q$，当 $\triangle ABQ$ 是以 $AB$ 为斜边的直角三角形时，求 $k$ 的值.

微信公众号 教辅资料站



经过实验和计算发现，当我们使铅球抛出的弧线与水平线的夹角为 45°时，扔出的距离最远.

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 第2课时 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq0)$ 的图象与 $x$ 轴的交点

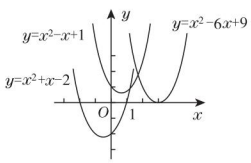
**名师点金**

判定抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 $x$ 轴交点的个数的方法：
当 $b^2-4ac>0$ 时，有两个交点；当 $b^2-4ac=0$ 时，有一个交点；当 $b^2-4ac<0$ 时，没有交点.

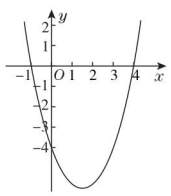
## Ⅰ 夯实基础·逐点练 ☞(答案见196页) 随堂导练

### 知识点1 二次函数与一元二次方程之间的关系

1. 观察图象(如图)填空：
(1)二次函数 $y=x^2+x-2$ 的图象与 $x$ 轴有_____个交点，则一元二次方程 $x^2+x-2=0$ 的根的判别式 $b^2-4ac$ _____ 0；
(2)二次函数 $y=x^2-6x+9$ 的图象与 $x$ 轴有_____个交点，则一元二次方程 $x^2-6x+9=0$ 的根的判别式 $b^2-4ac$ _____ 0；
(3)二次函数 $y=x^2-x+1$ 的图象与 $x$ 轴_____公共点，则一元二次方程 $x^2-x+1=0$ 的根的判别式 $b^2-4ac$ _____ 0.



(第1题)



(第2题)

2. 【中考·柳州】小兰画了一个函数 $y=x^2+ax+b$ 的图象如图，则关于 $x$ 的方程 $x^2+ax+b=0$ 的解是(　　)
A. 无解　　B. $x=1$
C. $x=-4$　　D. $x=-1$ 或 $x=4$

3. 【中考·宿迁】若二次函数 $y=ax^2-2ax+c$ 的图象经过点 $(-1,0)$，则关于 $x$ 的方程 $ax^2-2ax+c=0$ 的解为(　　)
A. $x_1=-3,x_2=-1$　　B. $x_1=1,x_2=3$
C. $x_1=-1,x_2=3$　　D. $x_1=-3,x_2=1$

4. 【中考·南充】已知抛物线 $y=ax^2+bx+c(a,b,c$ 是常数)，$a>0$，顶点坐标为 $\left(\frac{1}{2},m\right)$，给出下列结论：①若点 $(n,y_1)$ 与点 $\left(\frac{3}{2}-2n,y_2\right)$ 在该抛物线上，则当 $n<\frac{1}{2}$ 时，$y_1<y_2$；②关于 $x$ 的一元二次方程 $ax^2-bx+c-m+1=0$ 无实数解，那么(　　)
A. ①正确，②正确　　B. ①正确，②错误
C. ①错误，②正确　　D. ①错误，②错误

### 知识点2 二次函数与其图象与 $x$ 轴的交点个数之间的关系

5. 下列抛物线中，与 $x$ 轴有两个交点的是(　　)
A. $y=3x^2-5x+3$　　B. $y=4x^2-12x+9$
C. $y=x^2-2x+3$　　D. $y=2x^2+3x-4$

6. 【中考·永州】抛物线 $y=x^2+2x+m-1$ 与 $x$ 轴有两个不同的交点，则 $m$ 的取值范围是(　　)
A. $m<2$　　B. $m>2$
C. $0<m\leqslant2$　　D. $m<-2$

7. 【中考·资阳】已知二次函数 $y=x^2+bx+c$ 的图象与 $x$ 轴只有一个交点，且图象过 $A(x_1,m),B(x_1+n,m)$ 两点，则 $m,n$ 的关系为(　　)
A. $m=\frac{1}{2}n$　　B. $m=\frac{1}{4}n$
C. $m=\frac{1}{2}n^2$　　D. $m=\frac{1}{4}n^2$

8. 【中考·杭州】在平面直角坐标系中，已知 $a\neq b$，设函数 $y=(x+a)(x+b)$ 的图象与 $x$ 轴有 $M$ 个交点，函数 $y=(ax+1)(bx+1)$ 的图象与 $x$ 轴有 $N$ 个交点，则(　　)
A. $M=N-1$ 或 $M=N+1$　　B. $M=N-1$ 或 $M=N+2$
C. $M=N$ 或 $M=N+1$　　D. $M=N$ 或 $M=N-1$

9. 【中考·长沙】已知抛物线 $y=ax^2+bx+c(b>a>0)$ 与 $x$ 轴最多有一个交点，现有以下四个结论：
①该抛物线的对称轴在 $y$ 轴左侧；
②关于 $x$ 的方程 $ax^2+bx+c+2=0$ 无实数根；
③$a-b+c\geqslant0$；
④$\frac{a+b+c}{b-a}$ 的最小值为3.
其中，正确结论有(　　)
A. 1个　　B. 2个
C. 3个　　D. 4个

### 易错点 混淆“与 $x$ 轴交点”与“与坐标轴交点”而致错

10. 【中考·荆门】抛物线 $y=-x^2+4x-4$ 与坐标轴的交点个数为(　　)
A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

## Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞（答案见196页） 课后导练

**考查角度1** 利用抛物线与 $x$ 轴的交点情况求字母的取值范围

**11.** 【中考 · 湖州】已知抛物线 $y=2x^2-4x+c$ 与 $x$ 轴有两个不同的交点.

（1）求 $c$ 的取值范围；

（2）若抛物线 $y=2x^2-4x+c$ 经过点 $A(2,m)$ 和点 $B(3,n)$，试比较 $m$ 与 $n$ 的大小，并说明理由.

**考查角度2** 利用抛物线与 $x$ 轴的交点情况求点的坐标

**12.** 【中考 · 云南】已知 $k$ 是常数，抛物线 $y=x^2+(k^2+k-6)x+3k$ 的对称轴是 $y$ 轴，并且与 $x$ 轴有两个交点.

（1）求 $k$ 的值；

（2）若点 $P$ 在抛物线 $y=x^2+(k^2+k-6)x+3k$ 上，且点 $P$ 到 $y$ 轴的距离是2，求点 $P$ 的坐标.

## Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞（答案见196页） 课后选练

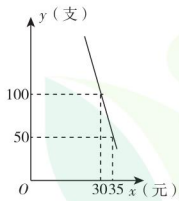
**拔尖角度1** 利用二次函数解实际中最值问题

**13.** 某网店专售一款电动牙刷，其成本为每支20元，销售中发现，该款电动牙刷每天的销售量 $y$（支）与销售单价 $x$（元）之间存在如图所示的关系.

（1）请求出 $y$ 关于 $x$ 的函数关系式；

（2）该款电动牙刷销售单价为多少元时，每天销售利润最大？最大销售利润是多少元？

（3）近期武汉爆发了新型冠状病毒肺炎疫情，该网店店主决定从每天获得的利润中抽出200元捐赠武汉，为了保证捐款后每天剩余利润不低于550元，如何确定该款电动牙刷的销售单价？



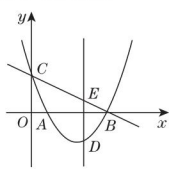

（第13题）

**拔尖角度2** 利用抛物线与 $x$ 轴交点及最值求相关值

**14.** 【中考 · 大连】如图，抛物线 $y=x^2-3x+\frac{5}{4}$ 与 $x$ 轴相交于 $A,B$ 两点，与 $y$ 轴相交于点 $C$，点 $D$ 是直线 $BC$ 下方抛物线上一点，过点 $D$ 作 $y$ 轴的平行线，与直线 $BC$ 相交于点 $E$.

（1）求直线 $BC$ 的表达式；

（2）当线段 $DE$ 的长度最大时，求点 $D$ 的坐标.




（第14题）

微信公众号 教辅资料站



马克 · 吐温听后笑了起来，当场揭穿了“慈善家”的伪善面目. 你知道他是怎么知道的吗？

答案：每人得到数目各不相同的银元，至少要 $1+2+3+\cdots+10=55$（枚）银元.

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 阶段方法技巧训练

## 专训 1 二次函数的图象与系数的关系 (答案见 197 页)

**名师点金**

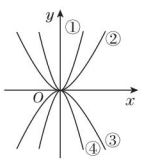
二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的系数 $a,b,c$ 与图象有着密切的关系:$a$ 的取值决定了开口方向和开口大小,$a,b$ 的取值影响对称轴的位置,$c$ 的取值决定了抛物线与 $y$ 轴的交点位置,所以 $a,b,c$ 这三个系数共同决定着抛物线的位置和大小,反之也可以根据二次函数图象情况确定 $a,b,c$ 的符号或大小.

### 训练角度 1 $a$ 与图象的关系

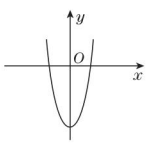
1. 如图,四个函数的图象分别对应的是①$y=ax^2$;②$y=bx^2$;③$y=cx^2$;④$y=dx^2$,则 $a,b,c,d$ 的大小关系为(　　)

A. $a>b>c>d$　　B. $a>b>d>c$

C. $b>a>c>d$　　D. $b>a>d>c$




(第 1 题)




(第 3 题)

2. 在抛物线 $y=mx^2$ 与抛物线 $y=nx^2$ 中,若 $-m>n>0$,则开口向上的抛物线是_____,开口较大的抛物线是_____.

### 训练角度 2 $b$ 与图象的关系

3. 若二次函数 $y=3x^2+(b-3)x-4$ 的图象如图所示,则 $b$ 的值是(　　)

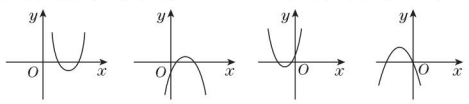
A. $-5$　　B. 0

C. 3　　D. 4

4. 当抛物线 $y=x^2-nx+2$ 的对称轴是 $y$ 轴时,$n$ _____ 0;当对称轴在 $y$ 轴左侧时,$n$ _____ 0;当对称轴在 $y$ 轴右侧时,$n$ _____ 0.(填“$>$”“$<$”或“$=$”)

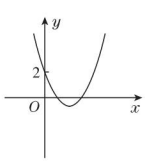
### 训练角度 3 $c$ 与图象的关系

5. 下列抛物线可能是 $y=ax^2+bx$ 的图象的是(　　)

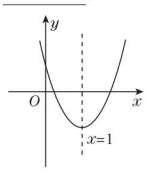



A　　B　　C　　D

6. 若将抛物线 $y=ax^2+bx+c-3$ 向上平移 4 个单位后得到的图象如图所示,则 $c=$ _____.




(第 6 题)




(第 7 题)

### 训练角度 4 $a,b$ 与图象的关系

7. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图所示,则下列说法中不正确的是(　　)

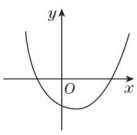
A. $a>0$　　B. $b<0$

C. $3a+b>0$　　D. $b>-2a$

8. 如果抛物线 $y=\frac{m}{2}x^2+(n+2)x-5$ 的对称轴是直线 $x=-\frac{3}{2}$,则 $(3m-2n)^2-\frac{2n+4}{3m}$ 的值为_____.

### 训练角度 5 $a,c$ 与图象的关系

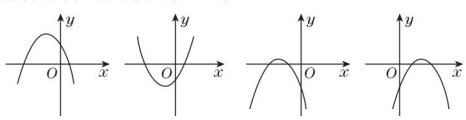
9. 二次函数 $y=(3-m)x^2-x+n+5$ 的图象如图所示,试求 $\sqrt{(m-3)^2}+\sqrt{n^2}-|m+n|$ 的值.




(第 9 题)

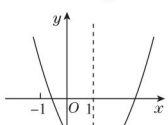
### 训练角度 6 $a,b,c$ 与图象的关系

10. 在二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 中,$a<0,b>0,c<0$,则符合条件的图象是(　　)




A　　B　　C　　D

11. 【中考·鄂州】二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图所示,对称轴是直线 $x=1$.下列结论:① $abc<0$;② $3a+c>0$;③ $(a+c)^2-b^2<0$;④ $a+b\leqslant m(am+b)$($m$ 为实数).其中正确的有(　　)




(第 11 题)

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 专训2 求二次函数表达式的常见类型 ☞（答案见197页）

**名师点金**

求二次函数的表达式是解决二次函数问题的重要保证，在求解二次函数的表达式时一般选用待定系数法，但在具体题目中要根据不同条件，设出恰当的表达式，这样往往可以使解题过程变得简便.

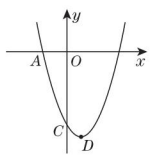
## 类型1 由函数的基本形式求表达式

**方法1 利用一般式求二次函数表达式**

1. 【中考·黔南州】如图，已知二次函数 $y=x^2+bx+c$ 的图象与 $y$ 轴交于点 $C(0,-6)$，与 $x$ 轴的一个交点坐标是 $A(-2,0)$.

(1)求二次函数的表达式，并写出顶点 $D$ 的坐标；

(2)将二次函数的图象沿 $x$ 轴向左平移 $\frac{5}{2}$ 个单位，当 $y<0$ 时，求 $x$ 的取值范围.




（第1题）

**方法2 利用顶点式求二次函数表达式**

2. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$，当 $x=1$ 时，有最大值8，其图象的形状、开口方向与抛物线 $y=-2x^2$ 相同，则这个二次函数的表达式是(　　)

A. $y=-2x^2-x+3$　　B. $y=-2x^2+4$

C. $y=-2x^2+4x+8$　　D. $y=-2x^2+4x+6$

3. 已知某个二次函数的最大值是2，图象顶点在直线 $y=x+1$ 上，并且图象经过点 $(3,-6)$. 求这个二次函数的表达式.

**方法3 利用交点式求二次函数表达式**

4. 已知抛物线与 $x$ 轴交于 $A(1,0)$，$B(-4,0)$ 两点，与 $y$ 轴交于点 $C$，且 $AB=BC$，求此抛物线对应的函数表达式.

**方法4 利用平移式求二次函数表达式**

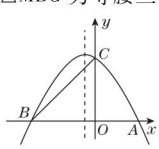
5. 【中考·绥化】把二次函数 $y=2x^2$ 的图象向左平移1个单位，再向下平移2个单位，平移后抛物线的表达式是_____.

**方法5 利用对称轴法求二次函数表达式**

6. 如图，抛物线与 $x$ 轴交于 $A$，$B$ 两点，与 $y$ 轴交于 $C$ 点，点 $A$ 的坐标为 $(2,0)$，点 $C$ 的坐标为 $(0,3)$，抛物线的对称轴是直线 $x=-\frac{1}{2}$.

(1)求抛物线的表达式；

(2)$M$ 是线段 $AB$ 上的任意一点，当 $\triangle MBC$ 为等腰三角形时，求点 $M$ 的坐标.




（第6题）



鲁班造锯是我们熟悉的一个历史故事，当鲁班的手不慎被一片小草割破后，他仔细观察发现小草叶子边布满了有序的小齿.（待续）

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

**方法 6 灵活运用方法求二次函数的表达式**

7. 已知抛物线的顶点坐标为(−2,4),且与 $x$ 轴的一个交点坐标为(1,0),求抛物线对应的函数表达式.

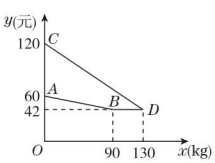
**类型 2 由函数图象中的信息求表达式**

8. 【中考·南京】某企业生产并销售某种产品,假设销售量与产量相等. 下图中的折线 $ABD$、线段 $CD$ 分别表示该产品每千克生产成本 $y_1$(单位:元)、销售价 $y_2$(单位:元)与产量 $x$(单位:kg)之间的函数关系.

(1)请解释图中点 $D$ 的横坐标、纵坐标的实际意义;

(2)求线段 $AB$ 所表示的 $y_1$ 与 $x$ 之间的函数表达式;

(3)当该产品产量为多少时,获得的利润最大? 最大利润是多少?




(第 8 题)

**类型 3 由表格信息求表达式**

9. 若 $y=ax^2+bx+c$,则由表格中信息可知 $y$ 与 $x$ 之间的函数关系式是(　　)

| $x$ | −1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| $ax^2$ | | | 2 |
| $ax^2+bx+c$ | 9 | 4 | |

A. $y=2x^2-3x+4$　　B. $y=2x^2-4x+3$

C. $y=2x^2-3x+3$　　D. $y=2x^2-3x+8$

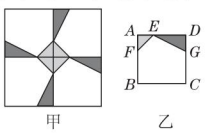
10. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 自变量 $x$ 和函数值 $y$ 的部分对应值如下表:

| $x$ | … | $-\frac{3}{2}$ | −1 | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 1 | $\frac{3}{2}$ | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | … | $-\frac{5}{4}$ | −2 | $-\frac{9}{4}$ | −2 | $-\frac{5}{4}$ | 0 | $\frac{7}{4}$ | … |

则该二次函数的表达式为_____.

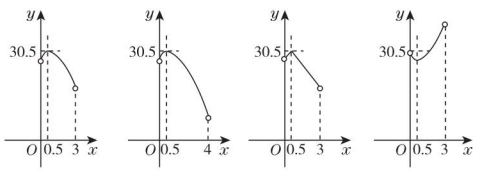
**类型 4 几何应用中求二次函数的表达式**

11. 【中考·安顺】某校校园内有一个大正方形花坛,如图甲所示,它由四个边长均为 3 米的小正方形组成,且每个小正方形的种植方案相同. 其中的一个小正方形 $ABCD$ 如图乙所示,$DG=1$ 米,$AE=AF=x$ 米,在五边形 $EFBCG$ 区域上种植花卉,则大正方形花坛种植花卉的面积 $y$ 与 $x$ 的函数图象大致是(　　)




甲　　乙

(第 11 题)

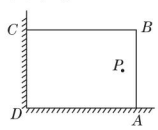



**类型 5 实际问题中求二次函数表达式**

12. 在美化校园的活动中,某兴趣小组想借助如图所示的直角墙角(两边足够长),用 28 m 长的篱笆围成一个矩形花园 $ABCD$(篱笆只围 $AB$,$BC$ 两边),设 $AB=x$ m,花园的面积为 $S$ m$^2$.

(1)求 $S$ 与 $x$ 之间的函数表达式;

(2)若在 $P$ 处有一棵树与墙 $CD$,$AD$ 的距离分别是 15 m和 6 m,要将这棵树围在花园内(含边界,不考虑树的粗细),求花园面积的最大值.




(第 12 题)



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 1.4 二次函数的应用

## 第1课时 利用二次函数求几何中的最值应用

**名师点金**

利用二次函数求几何图形面积的最值是二次函数应用的重点之一，解决此类问题的基本方法是：借助已知条件，分析几何图形的性质，确定二次函数表达式，再根据二次函数的图象和性质求出最值，从而解决问题.

### Ⅰ 夯实基础·逐点练 （答案见198页） 随堂导练

#### 知识点1 二次函数的最值

1. 二次函数 $y=x^2-4x+c$ 的最小值为0，则 $c$ 的值为（　　）

A. 2　　B. 4

C. $-4$　　D. 16

2. 已知 $x^2+y=3$，当 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时，$y$ 的最小值是（　　）

A. $-1$　　B. 2

C. $\frac{11}{4}$　　D. 3

3. 【中考·黄冈】当 $a\leqslant x\leqslant a+1$ 时，函数 $y=x^2-2x+1$ 的最小值为1，则 $a$ 的值为（　　）

A. $-1$　　B. 2

C. 0或2　　D. $-1$或2

4. 已知二次函数 $y=2x^2-6x+1$，当 $0\leqslant x\leqslant 5$ 时，$y$ 的取值范围是_____.

5. 若二次函数 $y=x^2+ax+5$ 的图象关于直线 $x=-2$ 对称，且当 $m\leqslant x\leqslant 0$ 时，$y$ 有最大值5，最小值1，则 $m$ 的取值范围是_____.

#### 知识点2 几何面积的最值

6. 已知一个直角三角形两直角边长之和为20 cm，则这个直角三角形的最大面积为（　　）

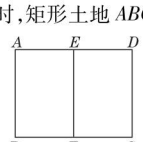
A. 25 $cm^2$　　B. 50 $cm^2$

C. 100 $cm^2$　　D. 不确定

7. 用一条长为40 cm的绳子围成一个面积为 $a$ $cm^2$ 的长方形，$a$ 的值不可能为（　　）

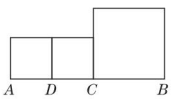
A. 20　　B. 40　　C. 100　　D. 120

8. 【中考·沈阳】如图，一块矩形土地 $ABCD$ 由篱笆围着，并且由一条与 $CD$ 边平行的篱笆 $EF$ 分开，已知篱笆的总长为900 m（篱笆的厚度忽略不计），当 $AB=$_____m时，矩形土地 $ABCD$ 的面积最大.

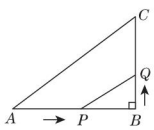



（第8题）

9. 如图，线段 $AB=6$，点 $C$ 是 $AB$ 上一点，点 $D$ 是 $AC$ 的中点，分别以 $AD$，$DC$，$CB$ 为边作正方形，则当 $AC=$_____时，三个正方形的面积之和最小.




（第9题）



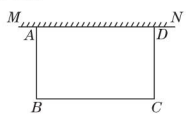

（第10题）

10. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=90°$，$AB=8$ cm，$BC=6$ cm，点 $P$ 从点 $A$ 开始沿 $AB$ 向点 $B$ 以2 cm/s的速度移动，点 $Q$ 从点 $B$ 开始沿 $BC$ 向点 $C$ 以1 cm/s的速度移动. 如果 $P$，$Q$ 分别从 $A$，$B$ 同时出发，当 $\triangle PBQ$ 的面积最大时，运动时间为_____.

11. 【中考·福建】如图，在足够大的空地上有一段长为 $a$ 米的旧墙 $MN$，某人利用旧墙和木栏围成一个矩形菜园 $ABCD$，其中 $AD\leqslant MN$，已知矩形菜园的一边靠墙，另三边一共用了100米木栏.

（1）若 $a=20$，所围成的矩形菜园的面积为450平方米，求所利用旧墙 $AD$ 的长；

（2）求矩形菜园 $ABCD$ 面积的最大值.




（第11题）



一个人就好像是一个分数，他的实际才能好比分子，而他对自己的估价好比分母. 分母越大，则分数的值就越小.

——托尔斯泰

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

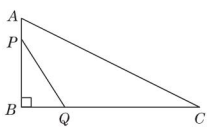
## Ⅱ 整合方法 · 提升练 (答案见 198 页) 课后导练

**考查角度 1** 利用二次函数解决实际中面积的最值问题

12. 【中考 · 包头】某广告公司设计一幅周长为 16 米的矩形广告牌,广告设计费为每平方米 2 000 元,设矩形一边长为 $x$ 米,面积为 $S$ 平方米.
(1)求 $S$ 与 $x$ 之间的函数关系式,并写出自变量 $x$ 的取值范围;
(2)设计费能达到 24 000 元吗? 为什么?
(3)当 $x$ 是多少时,设计费最多? 最多是多少元?

**考查角度 2** 利用二次函数解决动态几何面积的最值问题

13. 如图,在 $\triangle ABC$ 中,$\angle B = 90°$,$AB = 12$ mm,$BC = 24$ mm,动点 $P$ 从点 $A$ 开始沿边 $AB$ 向点 $B$ 以 2 mm/s 的速度移动,动点 $Q$ 从点 $B$ 开始沿边 $BC$ 向点 $C$ 以 4 mm/s 的速度移动. 已知 $P$,$Q$ 分别从 $A$,$B$ 同时出发,求 $\triangle PBQ$ 的面积 $S(\text{mm}^2)$ 与出发时间 $t(\text{s})$ 的函数表达式,并求出 $t$ 为何值时,$\triangle PBQ$ 的面积最大,最大值是多少?

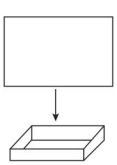


(第 13 题)

## Ⅲ 探究培优 · 拓展练 (答案见 198 页) 课后选练

**拔尖角度** 利用二次函数解决与一次函数、一元二次方程相关的几何应用问题

14. 【中考 · 巴彦淖尔】工人师傅用一块长为 12 分米,宽为 8 分米的矩形铁皮制作一个无盖长方体容器,需要将四角各裁掉一个正方形. (厚度不计)
(1)请在图中画出裁剪示意图,用实线表示裁剪线,虚线表示折痕;并求当长方体底面面积为 32 平方分米时,裁掉的正方形边长是多少?
(2)若要求制作的长方体的底面长不大于底面宽的 5 倍(长大于宽),并将容器外表面进行防锈处理,侧面每平方分米的费用为 0.5 元,底面每平方分米的费用为 2 元,求裁掉的正方形边长为多少时,总费用最低,最低费用为多少元?


(第 14 题)

趣味数学

著名数学家诺伯特 · 维纳,在博士学位的授予仪式上,执行主席问他的年龄. 他的回答十分巧妙.
(待续)



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 第2课时 利用二次函数求实际问题中的最值应用

**名师点金**

利润问题的基本关系式：总利润＝单件利润×销售总量.

若销售单价每提高 $m$ 元，销售量相应减少 $n$ 件，设提高 $x$ 元，则现销售量＝原销售量 $-\frac{x}{m}n$.

## Ⅰ 夯实基础·逐点练 （答案见198页） 随堂导练

### 知识点1 用二次函数表示实际问题

1. 某工厂2018年产品的产量为100吨，该产品产量的年平均增长率为 $x(x>0)$，设2020年该产品的产量为 $y$ 吨，则 $y$ 关于 $x$ 的函数表达式为（　　）

A. $y=100(1-x)^2$

B. $y=100(1+x)^2$

C. $y=\frac{100}{(1+x)^2}$

D. $y=100+100(1+x)+100(1+x)^2$

2. 心理学家发现：学生对概念的接受能力 $y$ 与提出概念的时间 $x$（min）之间是二次函数关系，当提出概念13 min时，学生对概念的接受能力最大，为59.9；当提出概念30 min时，学生对概念的接受能力就剩下31，则 $y$ 与 $x$ 满足的二次函数关系式为（　　）

A. $y=-(x-13)^2+59.9$

B. $y=-0.1x^2+2.6x+31$

C. $y=0.1x^2-2.6x+76.8$

D. $y=-0.1x^2+2.6x+43$

3. 某商场购进一种单价为40元的商品，如果以单价60元售出，那么每天可卖出300个，根据销售经验，每降价1元，每天可多卖出20个，假设每个降价 $x$ 元，每天销售 $y$ 个，每天获得利润 $W$ 元.

（1）写出 $y$ 与 $x$ 的函数关系式：_____；

（2）求出 $W$ 与 $x$ 的函数关系式（不必写出 $x$ 的取值范围）.

### 知识点2 用二次函数的最值解实际问题

4. 某旅行社在五一期间接团去外地旅游，经计算，所获营业额 $y$（元）与旅行团人数 $x$（人）满足关系式 $y=-x^2+100x+28\,400$，要使所获营业额最大，则此旅行团应有（　　）

A. 30人　　B. 40人　　C. 50人　　D. 55人

5. 【中考·兰州】某商家销售一款商品，进价每件80元，售价每件145元，每天销售40件，每销售一件需支付给商场管理费5元，未来一个月（按30天计算），这款商品将开展“每天降价1元”的促销活动，即从第一天开始每天的单价均比前一天降低1元，通过市场调查发现，该商品单价每降1元，每天销售量增加2件，设第 $x$ 天（$1\leqslant x\leqslant 30$ 且 $x$ 为整数）的销售量为 $y$ 件. 【导学号：1858154】

（1）直接写出 $y$ 与 $x$ 的函数关系式；

（2）设第 $x$ 天的利润为 $w$ 元，试求出 $w$ 与 $x$ 之间的函数关系式，并求出哪一天的利润最大，最大利润是多少元？

### 易错点 将销售额当销售利润而致错

6. 【中考·毕节】某商店销售一款进价为每件40元的护肤品，调查发现，销售单价不低于40元且不高于80元时，该商品的日销售量 $y$（件）与销售单价 $x$（元）之间存在一次函数关系，当销售单价为44元时，日销售量为72件；当销售单价为48元时，日销售量为64件.

（1）求 $y$ 与 $x$ 之间的函数关系式；

（2）设该护肤品的日销售利润为 $W$（元），当销售单价为多少时，日销售利润最大，最大日销售利润是多少？



他说：“我今年岁数的立方是四位数，四次方是六位数，这两个数，刚好把十个数字0，1，2，3，4，5，6，7，8，9全都用上了，不重不漏.（待续）

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

## Ⅱ 整合方法 · 提升练 (答案见 198 页) 课后导练

### 考查角度 1 利用二次函数解与方程(组)综合问题

7. 【中考 · 通辽】当今,越来越多的青少年在观看影片《流浪地球》后,更加喜欢同名科幻小说,该小说销量也急剧上升. 书店为满足广大顾客需求,订购该科幻小说若干本,每本进价为 20 元. 根据以往经验:当销售单价是 25 元时,每天的销售量是 250 本;销售单价每上涨 1 元,每天的销售量就减少 10 本. 书店要求每本书的利润不低于 10 元且不高于 18 元.

(1)直接写出书店销售该科幻小说时每天的销售量 $y$(本)与销售单价 $x$(元)之间的函数关系式及自变量的取值范围;

(2)书店决定每销售 1 本该科幻小说,就捐赠 $a$ $(0<a\leqslant 6)$ 元给困难职工,每天扣除捐赠后可获得的最大利润为 1 960 元,求 $a$ 的值.

### 考查角度 2 利用二次函数解与不等式(组)综合问题

8. 【中考 · 随州】某食品厂生产一种半成品食材,成本为 2 元/千克,每天的产量 $p$(百千克)与销售价格 $x$(元/千克)满足函数关系式 $p=\frac{1}{2}x+8$. 从市场反馈的信息发现,该半成品食材每天的市场需求量 $q$(百千克)与销售价格 $x$(元/千克)满足一次函数关系,部分数据如下表:

| 销售价格 $x$(元/千克) | 2 | 4 | … | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 市场需求量 $q$(百千克) | 12 | 10 | … | 4 |

已知按物价部门规定,销售价格 $x$ 不低于 2 元/千克且不高于 10 元/千克.

(1)直接写出 $q$ 与 $x$ 的函数关系式,并注明自变量 $x$ 的取值范围.

(2)当每天的产量小于或等于市场需求量时,这种半成品食材能全部售出,而当每天的产量大于市场需求量时,只能售出符合市场需求量的半成品食材,剩余的食材由于保质期短而只能废弃.

①当每天的半成品食材能全部售出时,求 $x$ 的取值范围;

②求厂家每天获得的利润 $y$(百元)与销售价格 $x$ 的函数关系式.

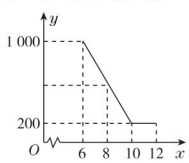
(3)在(2)的条件下,当 $x$ 为_____元/千克时,利润 $y$ 有最大值;若要使每天的利润不低于 24 百元,并尽可能地减少半成品食材的浪费,则 $x$ 应定为_____元/千克.

### 考查角度 3 利用图中的信息解函数问题

9. 【中考 · 云南】某驻村扶贫小组实施产业扶贫,帮助贫困农户进行西瓜种植和销售. 已知西瓜的成本为 6 元/千克,规定销售单价不低于成本,又不高于成本的两倍. 经过市场调查发现,某天西瓜的销售量 $y$(千克)与销售单价 $x$(元/千克)的函数关系如图所示.

(1)求 $y$ 与 $x$ 的函数表达式;

(2)求这一天销售西瓜获得的利润 $W$(元)的最大值.




(第 9 题)



关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

# 第3课时 利用二次函数解抛物线形的最值应用

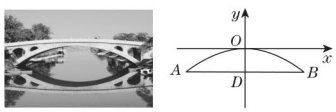
**名师点金**

1. **抛物线形建筑物问题**：几种常见的抛物线形建筑物有拱形桥洞、隧道洞口、拱形门等. 解决这类问题的关键是根据已知条件选择合理的位置建立直角坐标系，结合问题中的数据求出函数表达式，然后利用函数表达式解决问题.
2. **运动问题**：(1)运动中的距离、时间、速度问题，这类问题多根据运动规律中的公式求解. (2)物体的运动路线(轨迹)问题，解决这类问题的思想方法是利用数形结合思想和函数思想，合理建立直角坐标系，根据已知数据，运用待定系数法求出运动轨迹(抛物线)的表达式，再利用二次函数的性质去分析、解决问题.

## Ⅰ 夯实基础 · 逐点练 ☞(答案见199页) 随堂导练

### 知识点1 建立坐标系解抛物线形建筑物问题

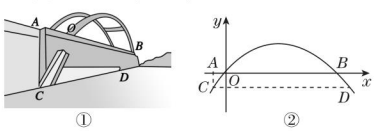
1. 【中考 · 铜仁】河北省赵县的赵州桥的桥拱是近似的抛物线形，建立如图所示的平面直角坐标系，其函数的关系式为 $y=-\frac{1}{25}x^2$，当水面离桥拱顶的高度 $DO$ 是4 m时，这时水面宽度 $AB$ 为(　　)




(第1题)

A. −20 m　　B. 10 m　　C. 20 m　　D. −10 m

2. 【中考 · 金华】图②是图①中拱形大桥的示书图，桥拱与桥面的交点为 $O$，$B$，以点 $O$ 为原点，水平直线 $OB$ 为 $x$ 轴，建立平面直角坐标系，桥的拱形可近似看成抛物线 $y=-\frac{1}{400}(x-80)^2+16$，桥拱与桥墩 $AC$ 的交点 $C$ 恰好在水面，有 $AC\perp x$ 轴，若 $OA=10$ 米，则桥面离水面的高度 $AC$ 为(　　)

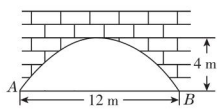



(第2题)

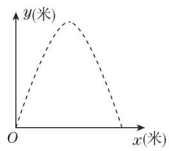
A. $16\frac{9}{40}$米　　B. $\frac{17}{4}$米

C. $16\frac{7}{40}$米　　D. $\frac{15}{4}$米

3. 【中考 · 绍兴】如图是一座拱桥，当水面宽 $AB$ 为12 m时，桥洞顶部离水面4 m，已知桥洞的拱形是抛物线，以水平方向为 $x$ 轴，建立平面直角坐标系，若选取点 $A$ 为坐标原点时抛物线对应的函数表达式是 $y=-\frac{1}{9}(x-6)^2+4$，则选取点 $B$ 为坐标原点时抛物线对应的函数表达式是_____.




(第3题)




(第4题)

### 知识点2 建立坐标系解抛物线形运动的最值问题

4. 某广场有一喷水池，水从地面喷出，如图，以水平地面为 $x$ 轴，出水点为原点，建立平面直角坐标系，水在空中划出的曲线是抛物线 $y=-x^2+4x$ 的一部分，则水喷出的最大高度(单位：米)是(　　)

A. 4米　　B. 5米

C. 6米　　D. 7米

5. 【中考 · 临沂】从地面竖直向上抛出一小球，小球的高度 $h$(单位：m)与小球的运动时间 $t$(单位：s)之间的函数关系如图所示. 下列结论：

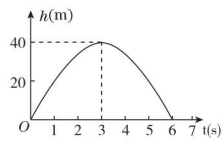
①小球在空中经过的路程是40 m；

②小球抛出3 s后，速度越来越快；

③小球抛出3 s时速度为0；

④小球的高度 $h=30$ m时，$t=1.5$ s.

其中正确的是(　　)




(第5题)

A. ①④　　B. ①②

C. ②③④　　D. ②③

6. 【中考 · 武汉】飞机着陆后滑行的距离 $y$(单位：m)关于滑行时间 $t$(单位：s)的函数表达式是 $y=60t-\frac{3}{2}t^2$，在飞机着陆滑行中，最后4s滑行的距离是_____m.



花瓣知多少：百合花的花瓣是3瓣，梅花是5瓣，飞燕草是8瓣，万寿菊是13瓣，向日葵是21或34瓣，雏菊是34、55或89瓣，其他数目很少出现.(待续)

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

## Ⅱ 整合方法 · 提升练 (答案见 199 页)



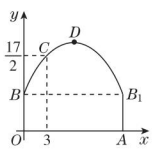
### 考查角度 1 利用二次函数的图象和性质解车过拱桥(隧道)问题

7. 【中考 · 青岛】如图,隧道的截面由抛物线和长方形构成,长方形的长是 12 m,宽是 4 m. 按照图中所示的直角坐标系,抛物线可以用 $y=-\frac{1}{6}x^2+bx+c$ 表示,且抛物线上的点 $C$ 到墙面 $OB$ 的水平距离为 3 m,到地面 $OA$ 的距离为 $\frac{17}{2}$ m.

(1)求该抛物线的函数表达式,并计算出拱顶 $D$ 到地面 $OA$ 的距离;

(2)一辆货运汽车载一长方体集装箱后高为 6 m,宽为 4 m,如果隧道内设双向行车道,那么这辆货车能否安全通过?

(3)在抛物线形拱壁上需要安装两排灯,使它们离地面的高度相等,如果灯离地面的高度不超过 8 m,那么两排灯的水平距离最小是多少米?




(第 7 题)

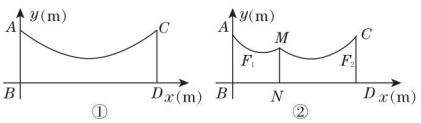
### 考查角度 2 利用二次函数的图象和性质解生活中的抛物线形问题

8. 【中考 · 丽水】如图①,地面 $BD$ 上两根等长立柱 $AB$,$CD$ 之间悬挂一根近似成抛物线 $y=\frac{1}{10}x^2-\frac{4}{5}x+3$ 的绳子.

(1)求绳子最低点离地面的距离;

(2)因实际需要,在离 $AB$ 为 3 m 的位置处用一根立柱 $MN$ 撑起绳子,如图②,使左边抛物线 $F_1$ 的最低点距 $MN$ 为 1 m,离地面 1.8 m,求 $MN$ 的长;

(3)将立柱 $MN$ 的长度提升为 3 m,通过调整 $MN$ 的位置,使抛物线 $F_2$ 对应的函数二次项系数始终为 $\frac{1}{4}$,设 $MN$ 离 $AB$ 的距离为 $m$ m,抛物线 $F_2$ 的顶点离地面距离为 $k$ m,当 $2\leqslant k\leqslant 2.5$ 时,求 $m$ 的取值范围.




(第 8 题)

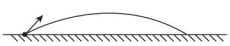
### 考查角度 3 利用数据信息建立二次函数模型解运动中抛物线形问题

9. 【中考 · 滨州】如图,一小球沿与地面成一定角度的方向飞出,小球的飞行路线是一条抛物线. 如果不考虑空气阻力,小球的飞行高度 $y$(单位:m)与飞行时间 $x$(单位:s)之间具有函数关系 $y=-5x^2+20x$,请根据要求解答下列问题:

(1)在飞行过程中,当小球的飞行高度为 15 m 时,飞行时间是多少?

(2)在飞行过程中,小球从飞出到落地所用时间是多少?

(3)在飞行过程中,小球飞行高度何时最大?最大高度是多少?



(第 9 题)

趣味数学

这些花的花瓣数不正是斐波那契数列中的数吗? 两位法国物理学家于 1992 年将花瓣形成过程的参数考虑进去,设计了一套计算机仿真技术. (待续)



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 第4课时 利用二次函数的图象解一元二次方程（不等式）

**名师点金**

利用图象求一元二次方程的根的方法：

直接画出二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象，则图象与 $x$ 轴交点的横坐标就是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根. 其步骤一般为：(1)作出二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象；(2)观察图象与 $x$ 轴交点的个数；(3)若图象与 $x$ 轴有交点，估计出图象与 $x$ 轴交点的横坐标即可得到一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的近似根.

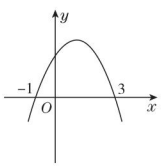
## Ⅰ 夯实基础 · 逐点练 ☞(答案见199页) 随堂导练

### 知识点1 利用二次函数的图象解一元二次方程

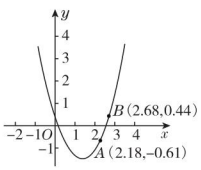
1. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图所示，则一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根为(　　)

A. $x_1=1, x_2=-3$　　B. $x_1=x_2=-1$

C. $x_1=x_2=3$　　D. $x_1=-1, x_2=3$




(第1题)




(第2题)

2. 如图，是二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象，图象上有两点分别为 $A(2.18,-0.61)$，$B(2.68,0.44)$，则方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个解只可能是(　　)

A. 2.18　　B. 2.68

C. $-0.51$　　D. 2.55

3. 根据下面表格的对应值，判断方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq0, a, b, c$ 为常数)的一个解的范围是(　　)

| $x$ | 3.23 | 3.24 | 3.25 | 3.26 |
|---|---|---|---|---|
| $ax^2+bx+c$ | $-0.06$ | $-0.02$ | 0.03 | 0.09 |

A. $3<x<3.23$　　B. $3.23<x<3.24$

C. $3.24<x<3.25$　　D. $3.25<x<3.26$

4. 坐标平面上，某二次函数图象的顶点为$(2,-1)$，此函数图象与 $x$ 轴相交于 $P, Q$ 两点，且 $PQ=6$. 若此函数图象通过$(1,a)$，$(3,b)$，$(-1,c)$，$(-3,d)$四点，则 $a, b, c, d$ 之间哪个为正？(　　)

A. $a$　　B. $b$

C. $c$　　D. $d$

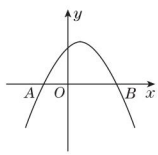
### 知识点2 利用二次函数的图象解一元二次不等式

5. 如图，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 $x$ 轴交于点 $A(-1,0)$，$B(2,0)$.

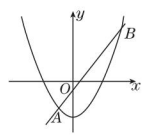
(1)方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解为_____；

(2)不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为_____；

(3)不等式 $ax^2+bx+c\leqslant0$ 的解集为_____.




(第5题)



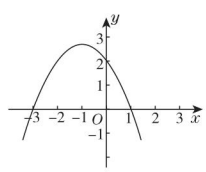

(第6题)

6. 【中考·济宁】如图，抛物线 $y=ax^2+c$ 与直线 $y=mx+n$ 交于 $A(-1,p)$，$B(3,q)$两点，则不等式 $ax^2+mx+c>n$ 的解集是_____.

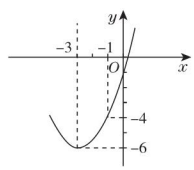
7. 【中考·牡丹江】抛物线 $y=ax^2+bx+c(a<0)$的图象如图所示，则关于 $x$ 的不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是(　　)

A. $x<2$　　B. $x>-3$

C. $-3<x<1$　　D. $x<-3$ 或 $x>1$




(第7题)




(第8题)

8. 【中考·烟台】如图，已知顶点为$(-3,-6)$的抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过点$(-1,-4)$，则下列结论中错误的是(　　)

A. $b^2>4ac$

B. $ax^2+bx+c\geqslant-6$

C. 若点$(-2,m)$，$(-5,n)$在抛物线上，则 $m>n$

D. 关于 $x$ 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=-4$ 的两根为 $-5$ 和 $-1$

### 易错点 不考虑方程根的情况盲目作图象而走弯路

9. 用图象法求 $x^2-x+\frac{1}{4}=0$ 的解.



同时做了仿真实验，两项的结果都证实，在自然界定律的要求下（系统保持在最低能量状态），（待续）

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

## Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞(答案见 199 页) 课后导练

**考查角度 1** 利用二次函数的图象说明它与一元二次方程(不等式)的解(解集)之间的关系

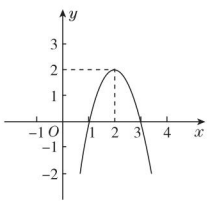
**10.** 二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图象如图所示,根据图象解答下列问题:

(1)写出方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根;

(2)写出不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集;

(3)写出 $y$ 随 $x$ 的增大而减小的自变量 $x$ 的取值范围;

(4)若方程 $ax^2+bx+c=k$ 有两个不相等的实数根,求 $k$ 的取值范围.




(第 10 题)

**考查角度 2** 二次函数的图象与线段的交点情况在求字母范围中的应用

**11.** 【中考 · 天门】在平面直角坐标系中,已知抛物线 $C:y=ax^2+2x-1(a\neq0)$ 和直线 $l:y=kx+b$,点 $A(-3,-3)$,$B(1,-1)$ 均在直线 $l$ 上.

(1)若抛物线 $C$ 与直线 $l$ 有交点,求 $a$ 的取值范围;

(2)当 $a=-1$,二次函数 $y=ax^2+2x-1$ 的自变量 $x$ 满足 $m\leqslant x\leqslant m+2$ 时,函数 $y$ 的最大值为 $-4$,求 $m$ 的值;

(3)若抛物线 $C$ 与线段 $AB$ 有两个不同的交点,请直接写出 $a$ 的取值范围.

## Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞(答案见 199 页) 课后选练

**拔尖角度** 利用一元二次方程的根解与之相关的二次函数、几何综合问题

**12.** 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 的图象与 $x$ 轴交于 $A(x_1,0)$,$B(x_2,0)(x_1<x_2)$ 两点,与 $y$ 轴交于点 $C$,$x_1$,$x_2$ 是方程 $x^2+4x-5=0$ 的两根.

(1)若抛物线的顶点为 $D$,求 $S_{\triangle ABC}:S_{\triangle ACD}$ 的值;

(2)若 $\angle ADC=90°$,求二次函数的表达式.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 章末整合提升训练

## 专训1 利用二次函数解决问题的四种类型 ☞（答案见200页）

**名师点金**

利用二次函数解决实际问题时，要注意数形结合，巧妙地运用二次函数表达式进行建模，从而达到应用二次函数的某些性质来解决问题的目的.

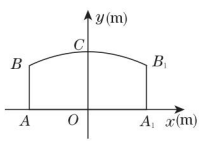
### 类型1 建立平面直角坐标系解决实际问题

**题型1 拱桥（隧道）问题**

1. 如图是某地区一条公路上隧道入口在平面直角坐标系中的示意图，点$A$和$A_1$、点$B$和$B_1$分别关于$y$轴对称. 隧道拱部分$BCB_1$为一段抛物线，最高点$C$离路面$AA_1$的距离为8 m，点$B$离路面$AA_1$的距离为6 m，隧道宽$AA_1$为16 m.

（1）求隧道拱部分$BCB_1$对应的函数表达式；

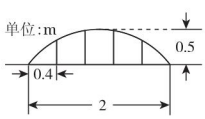
（2）现有一大型货车，装载某大型设备后，宽为4 m，装载设备的顶部离路面均为7 m，问：它能否安全通过这个隧道？并说明理由.




（第1题）

**题型2 建筑物问题**

2. 某公园草坪的防护栏由100段形状相同的抛物线组成，为了牢固，每段防护栏需要间距0.4 m加设一根不锈钢的支柱，防护栏的最高点到底部距离为0.5 m（如图），则这条防护栏需要不锈钢支柱的总长度为（　　）




（第2题）

A. 50 m　　B. 100 m

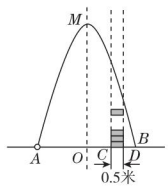
C. 160 m　　D. 200 m

**题型3 物体运动类问题**

3. 如图，在水平地面点$A$处有一网球发射器向空中发射网球，网球飞行的路线是一条抛物线，在地面上的落点为$B$. 有人在直线$AB$上点$C$（靠点$B$一侧）处竖直向上摆放无盖的圆柱形桶，试图让网球落入桶内. 已知$AB=4$米，$AC=3$米，网球飞行最大高度$OM=5$米，圆柱形桶的直径为0.5米，高为0.3米（网球的体积和圆柱形桶的厚度忽略不计）.

（1）如果竖直摆放5个圆柱形桶，网球能不能落入桶内？

（2）当竖直摆放多少个圆柱形桶时，网球可以落入桶内？

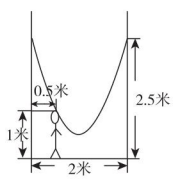



（第3题）

### 类型2 建立二次函数模型解决几何最值问题

**题型1 利用二次函数解决图形高度的最值问题**

4. 如图，小明的父亲在相距2米的两棵树间拴了一根绳子，给小明做了一个简易的秋千. 拴绳子的地方距地面高都是2.5米，绳子自然下垂呈抛物线状，身高1米的小明距较近的那棵树0.5米时，头部刚好接触到绳子，则绳子的最低点距地面的高度为_____米.




（第4题）



漫谈抛物线：炮弹发射之后飞行的路线是怎样的？火炮发明之初，人们对这个问题并不十分明白.（待续）

趣味数学

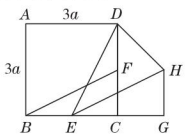
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

**题型 2 利用二次函数解决图形面积的最值问题**

5. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 $3a$，两动点 $E$，$F$ 分别从顶点 $B$，$C$ 同时开始以相同速度沿边 $BC$，$CD$ 运动，与 $\triangle BCF$ 相应的 $\triangle EGH$ 在运动过程中始终保持 $\triangle EGH \cong \triangle BCF$，$B$，$E$，$C$，$G$ 在一条直线上.

(1) 若 $BE = a$，求 $DH$ 的长；

(2) 当 $E$ 点在 $BC$ 边上的什么位置时，$\triangle DHE$ 的面积取得最小值？并求该三角形面积的最小值.



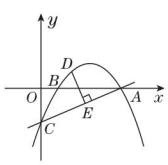

(第 5 题)

**类型 3 建立二次函数模型解决动点探究问题**

6. 如图，直线 $y = \frac{1}{2}x - 2$ 与 $x$ 轴、$y$ 轴分别交于点 $A$，$C$，抛物线过点 $A$，$C$ 和点 $B(1,0)$.

(1) 求抛物线的表达式；

(2) 在 $x$ 轴上方的抛物线上有一动点 $D$，当 $D$ 与直线 $AC$ 的距离 $DE$ 最大时，求出点 $D$ 的坐标，并求出最大距离.




(第 6 题)

**类型 4 建立二次函数模型解决作决策问题**

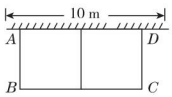
**题型 1 几何问题中的决策**

7. 如图，有长为 24 m 的围栏，一面利用墙(墙的最大可用长度为 10 m)，围成中间隔有一道栅栏的长方形鸡舍. 设鸡舍的一边 $AB$ 为 $x$ m，面积为 $S$ m$^2$.

(1) 求 $S$ 与 $x$ 的函数关系式(不必写出 $x$ 的取值范围)；

(2) 如果围成面积为 45 m$^2$ 的鸡舍，$AB$ 的长是多少米？

(3) 能围成面积比 45 m$^2$ 更大的鸡舍吗？如果能，请求出最大面积；如果不能，请说明理由.



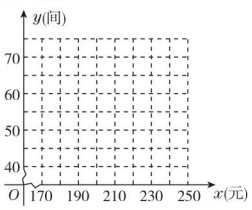

(第 7 题)

**题型 2 实际问题中的决策**

8. 【中考·衢州】某宾馆有若干间标准房，当标准房的价格为 200 元时，每天入住的房间数为60 间. 经市场调查表明，该宾馆每间标准房的价格在170 ~ 240 元之间(含 170 元、240 元)浮动时，每天入住的房间数 $y$(间)与每间标准房的价格 $x$(元)的数据如下表：

| $x$(元) | … | 190 | 200 | 210 | 220 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$(间) | … | 65 | 60 | 55 | 50 | … |

(1) 根据所给数据在如图所示的坐标系中描出相应的点，并画出图象；




(第 8 题)

(2) 求 $y$ 关于 $x$ 的函数表达式，并写出自变量 $x$ 的取值范围；

(3) 设客房的日营业额为 $w$(元). 若不考虑其他因素，问宾馆标准房的价格定为多少元时，客房的日营业额最大？最大为多少元？



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 专训2 探究二次函数中存在性问题 （答案见201页）

**名师点金**

存在性问题是近年来中考的热点，这类问题的知识覆盖面广，综合性强，题型构思精巧，解题方法灵活，求解时常常要猜想或者假设问题的某种关系或结论存在，再经过分析、归纳、演算、推理找出最后的答案. 常见的类型有探索与特殊几何图形有关的存在性问题、探索与面积有关的存在性问题.

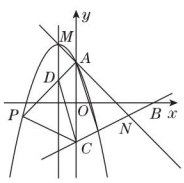
## 类型1 探索与特殊几何图形有关的存在性问题

1. 【中考·绵阳】如图，已知抛物线 $y=-x^2-2x+a$（$a\neq0$）与 $y$ 轴相交于 $A$ 点，顶点为 $M$，直线 $y=\frac{1}{2}x-a$ 分别与 $x$ 轴、$y$ 轴相交于 $B$，$C$ 两点，并且与直线 $MA$ 相交于 $N$ 点.

(1) 若直线 $BC$ 和抛物线有两个不同交点，求 $a$ 的取值范围，并用 $a$ 表示点 $M$，$A$ 的坐标；

(2) 将△$NAC$ 沿着 $y$ 轴翻折，若点 $N$ 的对称点 $P$ 恰好落在抛物线上，$AP$ 与抛物线的对称轴相交于点 $D$，连结 $CD$，求 $a$ 的值及△$PCD$ 的面积；

(3) 在抛物线 $y=-x^2-2x+a$（$a>0$）上是否存在点 $Q$，使得以 $Q$，$A$，$C$，$N$ 为顶点的四边形是平行四边形？若存在，求出点 $Q$ 的坐标；若不存在，请说明理由.




（第1题）

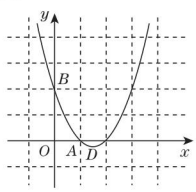
## 类型2 探索与面积有关的存在性问题

2. 如图，已知抛物线 $y=x^2+bx+c$ 经过 $A(1,0)$，$B(0,2)$ 两点，顶点为 $D$.

(1) 求抛物线的表达式；

(2) 将抛物线沿 $y$ 轴平移后经过点 $C(3,1)$，求平移后所得抛物线的表达式；

(3) 设(2)中平移后的抛物线与 $y$ 轴的交点为 $B_1$，顶点为 $D_1$，在此抛物线上是否存在点 $N$，使△$NBB_1$ 的面积是△$NDD_1$ 面积的2倍？若存在，求出点 $N$ 的坐标；若不存在，请说明理由.




（第2题）



被袭击的一方也以为炮弹是从空中沿直线方向飞下来的，于是当时人们总认为炮弹飞行的路线是一条折线.（待续）

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 全章热门考点整合应用 ☞(答案见 201 页)

**名师点金**

二次函数是中考的必考内容,难度高,综合性强,既可以与代数知识相结合,也可以与几何知识相结合. 有关二次函数的问题,中考一般以三种形式出现:一是以选择题或填空题出现,重在考查二次函数的基本概念和基本性质;二是以实际应用题的形式出现,重在考查函数建模思想;三是以综合题的形式出现,往往是压轴题,考查学生分析问题和解决问题的能力. 其主要热门考点可概括为一个概念、一个性质、两个关系、三个应用、两个技巧、两种思想.

## 考点1 一个概念——二次函数的定义

1. 已知函数 $y=(m+2)x^{m^2+4m-3}+5$ 是关于 $x$ 的二次函数.

(1)求 $m$ 的值;

(2)当 $m$ 为何值时,该函数图象的开口向上?

(3)当 $m$ 为何值时,该函数有最大值?

## 考点2 一个性质——二次函数的图象与性质

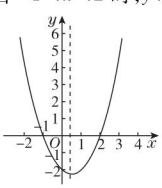
2. 二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的大致图象如图,关于该二次函数,下列说法错误的是(　　)

A. 函数有最小值

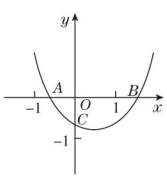
B. 图象的对称轴是直线 $x=\frac{1}{2}$

C. 当 $x<\frac{1}{2}$ 时,$y$ 随 $x$ 的增大而减小

D. 当 $-1<x<2$ 时,$y>0$




(第 2 题)




(第 3 题)

## 考点3 两个关系

### 关系1 抛物线的位置与二次函数各项系数的关系

3. 【中考·安顺】如图,已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 $x$ 轴分别交于 $A,B$ 两点,与 $y$ 轴交于 $C$ 点,$OA=OC$. 则由抛物线的特征写出如下结论:① $abc>0$;② $4ac-b^2>0$;③ $a-b+c>0$;④ $ac+b+1=0$.

其中正确的个数是(　　)

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

### 关系2 二次函数与一元二次方程的关系

4. 已知关于 $x$ 的函数 $y=(a^2+3a+2)x^2+(a+1)x+\frac{1}{4}$ 的图象与 $x$ 轴总有交点.

(1)求 $a$ 的取值范围;

(2)设函数的图象与 $x$ 轴有两个不同的交点,分别为 $A(x_1,0),B(x_2,0)$,当 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=a^2-3$ 时,求 $a$ 的值.

## 考点4 三个应用

### 应用1 最大面积的应用

5. 【中考·安徽】为了节省材料,某水产养殖户利用水库的岸堤(岸堤足够长)为一边,用总长为 80 米的围网在水库中围成了如图所示的①②③三块矩形区域,而且这三块矩形区域的面积相等,设 $BC$ 的长度是 $x$ 米,矩形区域 $ABCD$ 的面积为 $y$ 平方米.

(1)求 $y$ 与 $x$ 之间的函数表达式,并注明自变量 $x$ 的取值范围;

(2)当 $x$ 取何值时,$y$ 有最大值?最大值是多少?




(第 5 题)

**趣味数学**

意大利著名学者伽利略更正了这种错误认识. 他指出炮弹并不是沿着折线飞行的,而是沿着一条曲线飞行的,他把这条曲线叫“抛物线”. (待续)



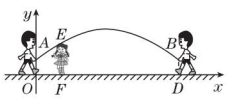
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

**应用2 “抛物线”形几何应用**

6. 跳绳时，绳甩到最高处时的形状是抛物线. 正在甩绳的甲、乙两名同学拿绳的手间距（$A$ 与 $B$ 间的距离）为 6 m，到地面的距离 $AO$ 和 $BD$ 均为 0.9 m，身高为 1.4 m的小丽站在距点 $O$ 的水平距离为 1 m 的点 $F$ 处，绳子甩到最高处时刚好通过她的头顶点 $E$. 以点 $O$ 为原点建立如图所示的平面直角坐标系，设此抛物线对应的函数表达式为 $y = ax^2 + bx + 0.9$.

（1）求该抛物线对应的函数表达式（不考虑自变量的取值范围）；

（2）如果小华站在 $O$，$D$ 之间，且离点 $O$ 的距离为 3 m，当绳子甩到最高处时刚好通过他的头顶，请你算出小华的身高.

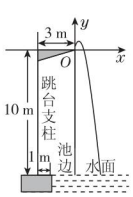



（第6题）

7. 某跳水运动员进行 10 m 高台跳水训练时，身体（看成一点）在空中的运动路线是如图所示的一条抛物线. 在跳某个规定动作时，正常情况下，该运动员在空中的最高处距水面 $10\frac{2}{3}$ m，入水处距池边的距离为 4 m，同时，运动员在距水面高度为 5 m 以前，必须完成规定的翻腾动作，并调整好入水姿势，否则就会出现失误.

（1）求这条抛物线对应的函数表达式；

（2）在某次试跳中，测得运动员在空中的运动路线是（1）中的抛物线，且运动员在空中调整好入水姿势时，距池边的水平距离为 $3\frac{3}{5}$ m，问此次跳水会不会出现失误？




（第7题）

**应用3 生活实际应用**

8. 【中考·梧州】我市某超市销售一种文具，进价为 5 元/件. 售价为 6 元/件时，当天的销售量为 100 件. 在销售过程中发现：售价每上涨 0.5 元，当天的销售量就减少 5 件. 设当天销售单价统一为 $x$ 元/件（$x \geqslant 6$，且 $x$ 是按 0.5 元的倍数上涨），当天销售利润为 $y$ 元.

（1）求 $y$ 与 $x$ 的函数关系式（不要求写出自变量的取值范围）；

（2）要使当天销售利润不低于 240 元，求当天销售单价所在的范围；

（3）若每件文具的利润不超过 80%，要想当天获得利润最大，每件文具售价为多少元？并求出最大利润.

9. 【中考·包头】某出租公司有若干辆同一型号的货车对外出租，每辆货车的日租金实行淡季、旺季两种价格标准，旺季每辆货车的日租金比淡季上涨 $\frac{1}{3}$. 据统计，淡季该公司平均每天有 10 辆货车未租出，日租金总收入为 1 500 元；旺季所有的货车每天能全部租出，日租金总收入为 4 000 元.

（1）该出租公司这批对外出租的货车共有多少辆？淡季每辆货车的日租金是多少元？

（2）经市场调查发现，在旺季如果每辆货车的日租金每上涨 20 元，每天租出去的货车就会减少1 辆，不考虑其他因素，每辆货车的日租金上涨多少元时，该出租公司的日租金总收入最高？



就像斜抛一个物体后，物体在空中划过的曲线的形状，“抛物”的名称正是从此而来. 在现实生活中，你会发现有不少曲线的形状是抛物线.（待续）

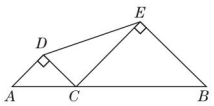
趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

## 考点5 两个技巧

### 技巧 1 巧用二次函数求几何最值

10. 如图，线段 $AB$ 的长为 2，点 $C$ 为 $AB$ 上一个动点，分别以 $AC$，$BC$ 为斜边在 $AB$ 的同侧作等腰直角三角形 $ACD$ 和等腰直角三角形 $BCE$，求 $DE$ 长的最小值.




（第 10 题）

### 技巧 2 巧用二次函数设计方案

11. 某市“建立社会主义新农村”工作组到某县大棚蔬菜生产基地指导菜农修建大棚种植蔬菜. 通过调查得知平均修建每公顷大棚要用支架、农膜等材料费 2.7 万元；购置滴灌设备的费用（万元）与大棚面积（公顷）的平方成正比，比例系数为 0.9；另外种植每公顷蔬菜需种子、化肥、农药等开支 0.3 万元. 每公顷蔬菜年均可卖 7.5 万元.

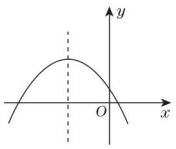
（1）某基地的菜农共修建大棚 $x$ 公顷，当年收益（扣除修建和种植成本后）为 $y$ 万元，写出 $y$ 关于 $x$ 的函数表达式；

（2）除种子、化肥、农药投资只能当年使用外，其他设施 3 年内不需要增加投资仍可继续使用. 如果按 3 年计算，是否修建大棚面积越大，收益就越大？如果不是，修建面积为多少时可以获得最大收益？请帮助工作组为基地修建大棚提一项合理化的建议.

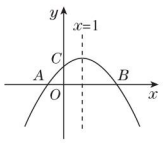
## 考点6 两种思想

### 思想 1 数形结合思想

12. 已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的位置如图，则点 $P(a,bc)$ 在第_____象限.




（第 12 题）




（第 13 题）

13. 【中考 · 随州】如图，已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 $x$ 轴交于 $A$，$B$ 两点，与 $y$ 轴交于点 $C$，$OA=OC$，对称轴为直线 $x=1$，则下列结论：①$abc<0$；②$a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{4}c=0$；③$ac+b+1=0$；④$2+c$ 是关于 $x$ 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根. 其中正确的有（　　）

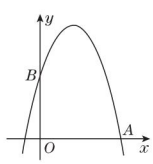
A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

### 思想 2 分类讨论思想

14. 如图，已知二次函数 $y=-x^2+bx+3$ 的图象与 $x$ 轴的一个交点为 $A(4,0)$，与 $y$ 轴交于点 $B$.

（1）求此二次函数的表达式和点 $B$ 的坐标；

（2）在 $x$ 轴上是否存在点 $P$，使得 $\triangle PAB$ 为等腰三角形？若存在，求出点 $P$ 的坐标；若不存在，请说明理由.




（第 14 题）



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 第2章 简单事件的概率




## 2.1 事件的可能性

**名师点金**

**判别事件类型的方法**：事件的分类与事件发生的可能性大小有关，必然事件发生的可能性是100%，不可能事件发生的可能性是0，随机事件发生的可能性在0和100%之间.

**说明**：随机事件发生的可能性的大小与该事件在总体情况中所占的百分比有关.

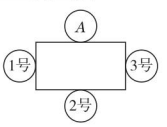
### Ⅰ 夯实基础 · 逐点练 (答案见202页) 随堂导练

**知识点1 事件的认识**

1. “若$a,b$为实数，则$a^2+b^2=-1$”这一事件是(　　)
   A. 必然事件　　B. 随机事件
   C. 不可能事件　　D. 无法确定
2. “正五边形的外角和为360°”这个事件是(　　)
   A. 随机事件　　B. 必然事件
   C. 不可能事件　　D. 无法确定
3. 【中考·长沙】下列事件中，是必然事件的是(　　)
   A. 购买一张彩票，中奖
   B. 射击运动员射击一次，命中靶心
   C. 经过有交通信号灯的路口，遇到红灯
   D. 任意画一个三角形，其内角和是180°
4. 下列事件中，属于随机事件的是(　　)
   A. $\sqrt{63}$的值比8大
   B. 打开手机就有未接电话
   C. 地球自转的同时也在绕日公转
   D. 袋中只有5个黄球，摸出一个球是白球
5. 【中考·武汉】不透明的袋子中只有4个黑球和2个白球，这些球除颜色外无其他差别，随机从袋子中一次摸出3个球，下列事件是不可能事件的是(　　)
   A. 3个球都是黑球　　B. 3个球都是白球
   C. 3个球中有黑球　　D. 3个球中有白球
6. 【中考·广安】下列说法正确的是(　　)
   A. “367人中必有2人的生日是同一天”是必然事件
   B. 了解一批灯泡的使用寿命采用全面调查
   C. 一组数据6,5,3,5,4的众数是5，中位数是3
   D. 一组数据10,11,12,9,8的平均数是10，方差是1.5

**知识点2 用列表法或画树状图法求所有可能结果数**

7. 小丽有3件不同的上衣，4条不同的裤子，她想从中选出一件上衣和一条裤子配成一套漂亮的服装参加演出，共有几种不同的搭配方法(　　)
   A. 3种　　B. 4种　　C. 7种　　D. 12种
8. 【中考·厦门】一枚质地均匀的骰子，骰子的六个面上分别刻有1到6的点数，投掷这样的骰子一次，向上一面点数是偶数的结果有(　　)
   A. 1种　　B. 2种　　C. 3种　　D. 6种
9. 合作小组的4名同学坐在课桌旁讨论问题，学生$A$的座位如图所示，学生$B,C,D$随机坐到其他三个座位上，则共有_____种坐法.




(第9题)

**知识点3 随机事件可能性的大小**

10. 从一副扑克牌中任意抽出一张，以下四种牌中抽到可能性最大的是(　　)
    A. 大王　　B. 红色图案　　C. 梅花　　D. 老K
11. 【中考·资阳】在一个布袋中装有红、白两种颜色的小球，它们除颜色外没有任何其他区别. 其中红球若干，白球5个，袋中的球已搅匀，若从袋中随机取出1个球，取出红球的可能性大，则红球的个数是(　　)
    A. 4个　　B. 5个
    C. 不足4个　　D. 6个或6个以上

**易错点 对随机事件的可能性大小辨别不清**

12. A袋中有4个白球，6个黑球；B袋中有2个白球，1个黑球. 这些球除颜色外其他均相同. 在每个袋中随机摸出一个球，是白球的可能性哪个大？为什么？



谜语：不耻下问(打一数学名词)　　谜底：求解

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

## Ⅱ 整合方法 · 提升练 (答案见202页) 课后导练

**考查角度1 利用事件的意义判断事件的类型**

13. 把下列事件划分为两类.

①向空中抛一块石头,石头会飞向太空;

②甲、乙两名同学进行羽毛球比赛,甲获胜;

③从一副扑克牌中随意抽取一张牌,这张牌正好是红桃;

④打开电视,正在播放“新型冠状病毒肺炎疫情”的新闻;

⑤两个负数的商小于0;

⑥在你们班中,任意选出一名同学,该同学是男生;

⑦明天的太阳从西方升起.

**考查角度2 利用随机事件的可能性判断可能性的大小**

14. 一个不透明的口袋里装有5个红球,3个白球,2个绿球,这些球形状和大小完全相同,小明从中任意摸出一个球.

(1)你认为小明摸到的球很可能是什么颜色?为什么?

(2)摸到三种颜色球的可能性一样吗?

(3)如果想让小明摸到红球和白球的可能性一样,该怎么办?写出你的方案.

## Ⅲ 探究培优 · 拓展练 (答案见202页) 课后选练

**拔尖角度1 利用事件发生的可能性解释生活现象**

15. 足球世界杯比赛分成8个小组,每个小组4个队,小组进行单循环比赛(每个队都与该小组的其他队比赛一场),选出2个队进入16强.比赛规定胜一场得3分,平一场得1分,负一场得0分.请问:

(1)每个小组共比赛多少场?

(2)在小组比赛中,有一队比赛结束后积分为6分,这一事件是一个确定事件还是一个随机事件?

**拔尖角度2 利用方程求解判断事件的类型(方程思想)**

16. 小明每天早上要在7:50之前赶到距家1 000米的学校上学.一天,小明以80米/分的速度出发.5分钟后,小明的爸爸发现小明忘了带数学书,于是,立即以100米/分的速度去追赶小明,结果在途中追上了小明.试探究这个事件是什么事件?



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 2.2 简单事件的概率

## 第1课时 概 率

**名师点金**

应用 $P(A)=\frac{m}{n}$ 求简单事件的概率的步骤：

(1)**判断**：试验所有可能出现的结果必须是有限的，各种结果出现的可能性必须相等；

(2)**确定**：试验发生的所有的结果数 $n$ 和事件 $A$ 发生的所有结果数 $m$；

(3)**计算**：套入公式 $P(A)=\frac{m}{n}$ 计算.

### Ⅰ 夯实基础·逐点练 (答案见202页) 随堂导练

**知识点1 概率的定义**

1. 【中考·佛山】掷一枚有正反面的均匀硬币，正确的说法是(　　)

A. 正面一定朝上

B. 反面一定朝上

C. 正面朝上比反面朝上的概率大

D. 正面朝上和反面朝上的概率都是0.5

2. 【中考·张家界】下列说法正确的是(　　)

A. 打开电视机，正在播放“张家界新闻”是必然事件

B. 天气预报说“明天的降水概率为65%”，意味着明天一定下雨

C. 两组数据平均数相同，则方差大的更稳定

D. 数据5,6,7,7,8的中位数与众数均为7

**知识点2 概率的范围**

3. (1)必然事件 $A$ 的概率：$P(A)=$_____.

(2)不可能事件 $A$ 的概率：$P(A)=$_____.

(3)随机事件 $A$ 的概率：$P(A)$ 的取值范围为_____.

(4)随机事件的概率的规律：事件发生的可能性越大，则它的概率越接近_____；反之，事件发生的可能性越小，则它的概率越接近_____. 从1~9这九个自然数中任取一个，是2的倍数的概率是_____. 方程 $5x=10$ 的解为负数的概率是_____.

4. 一个事件发生的概率不可能是(　　)

A. 0　　B. 1

C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{3}{2}$

5. 【中考·福州】下列说法中，正确的是(　　)

A. 不可能事件发生的概率为0

B. 随机事件发生的概率为 $\frac{1}{2}$

C. 概率很小的事件不可能发生

D. 投掷一枚质地均匀的硬币100次，正面朝上的次数一定为50

**知识点3 概率的计算**

6. 【中考·绥化】不透明袋子中有2个红球和4个蓝球，这些球除颜色外无其他差别，从袋子中随机取出1个球是红球的概率是(　　)

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{5}$　　D. $\frac{1}{6}$

7. 【中考·鄂尔多斯】下列计算：

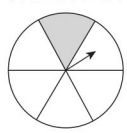
① $\sqrt{9}=\pm3$；② $3a^2-2a=a$；③ $(2a^2)^3=6a^6$；

④ $a^8\div a^4=a^2$；⑤ $\sqrt[3]{-27}=-3$.

从中任意选取一个，运算结果正确的概率是(　　)

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{2}{5}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{4}{5}$

8. 【中考·桂林】如图，一个圆形转盘被平均分成6个全等的扇形，任意旋转这个转盘1次，当转盘停止转动时，指针指向阴影部分的概率是(　　)



(第8题)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{6}$

9. 【中考·海南】某路口的交通信号灯每分钟红灯亮30秒，绿灯亮25秒，黄灯亮5秒，当小明到达该路口时，遇到绿灯亮的概率是(　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{1}{12}$　　D. $\frac{5}{12}$

**易错点 对概率的含义理解不透而致错**

10. 【中考·沈阳】下列说法正确的是(　　)

A. 若甲、乙两组数据的平均数相同，$S_{甲}^2=0.1$，$S_{乙}^2=0.04$，则乙组数据较稳定

B. 如果明天降水的概率是50%，那么明天有半天都在降雨

C. 了解全国中学生的节水意识应选用普查方式

D. 早上的太阳从西方升起是必然事件



谜语：夏周之间（打一数学名词）　　谜底：商

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

## Ⅱ 整合方法 · 提升练 (答案见202页) 课后导练

**考查角度1 利用概率说明概率值的意义**

**11.** 甲、乙、丙三个事件发生的概率分别为0.5,0.1,0.9,它们各与下面的哪句话相配?

(1)发生的可能性很大,但不一定发生;

(2)发生的可能性很小;

(3)发生与不发生的可能性一样.

**考查角度2 利用概率的意义求相关数据**

**12.** 不透明的口袋里有红、绿、黄三种除颜色外其余都相同的球,其中有红球4个,绿球5个,从中任意摸出1个球是绿球的概率是$\frac{1}{3}$.求:

(1)口袋里黄球的个数;

(2)任意摸出1个球为红球的概率.

## Ⅲ 探究培优 · 拓展练 (答案见203页) 课后选练

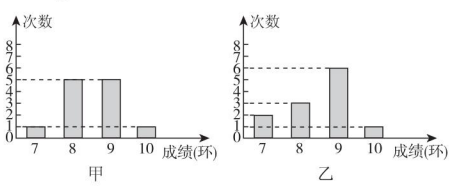
**拔尖角度1 利用概率公式求事件的概率**

**13.** 【中考·雅安】甲、乙两人进行射击训练,两人分别射击12次,如图分别统计了两人的射击成绩.已知甲射击成绩的方差$S_{甲}^2=\frac{7}{12}$,平均成绩$\bar{x}_{甲}=8.5$环.

(1)根据图上信息,估计乙射击成绩不少于9环的概率是多少.

(2)求乙射击的平均成绩及成绩的方差,并据此比较甲、乙的射击"水平".

$$S^2=\frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2].$$




(第13题)

**拔尖角度2 利用概率公式求改变条件事件的概率**

**14.** 【中考·南昌】在一个不透明的袋子中装有仅颜色不同的10个球,其中红球4个,黑球6个.

(1)先从袋子中取出$m(m>1)$个红球,再从袋子中随机摸出1个球,将"摸出黑球"记为事件$A$,请完成下列表格:

| 事件$A$ | 必然事件 | 随机事件 |
|---|---|---|
| $m$的值 | | |

(2)先从袋子中取出$m$个红球,再放入$m$个一样的黑球并摇匀,随机摸出1个球是黑球的概率等于$\frac{4}{5}$,求$m$的值.



关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

# 第2课时 用列表法求概率

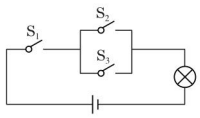
**名师点金**

枚举法和列表法一般适用于两个元素进行两步试验的题目，在列举可能的结果时，要分清“放回”与“不放回”两种情况.

## Ⅰ 夯实基础·逐点练 （答案见203页） 随堂导练

**知识点1 用枚举法求概率（等可能事件结果个数较少）**

1. 【中考·娄底】如图，随机闭合开关$S_1$，$S_2$，$S_3$中的两个，能让灯泡发光的概率是_____.




（第1题）

2. 【中考·绵阳】有5张看上去无差别的卡片，上面分别写着1，2，3，4，5，随机抽取3张，用抽到的三个数字作为边长，恰能构成三角形的概率是（　　）

A. $\frac{3}{10}$　　B. $\frac{3}{20}$

C. $\frac{7}{20}$　　D. $\frac{7}{10}$

3. 【中考·大连】不透明袋子中装有红、绿小球各一个，除颜色外无其他差别，随机摸出一个小球后，放回并摇匀，再随机摸出一个，两次都摸到红球的概率为（　　）

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{4}$

**知识点2 用列表法求概率（等可能事件结果个数较多）**

4. 【中考·重庆】一枚质地均匀的骰子，骰子的六个面上分别刻有1到6的点数，连续掷两次骰子，在骰子向上的一面上，第二次出现的点数是第一次出现的点数的2倍的概率是_____.

5. 【中考·广西】“学雷锋”活动月中，“飞翼”班将组织学生开展志愿者服务活动，小晴和小霞从“图书馆、博物馆、科技馆”三个场馆中随机选择一个参加活动，两人恰好选择同一场馆的概率是（　　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{1}{9}$　　D. $\frac{2}{9}$

6. 小强和小华两人玩“剪刀、石头、布”游戏，随机出手一次，则两人平局的概率为（　　）

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{3}$

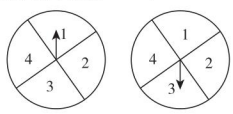
C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

7. 【中考·东营】从1，2，3，4中任取两个不同的数，分别记为$a$和$b$，则$a^2+b^2>19$的概率是（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{5}{12}$

C. $\frac{7}{12}$　　D. $\frac{1}{3}$

8. 学生甲与学生乙玩一种转盘游戏. 如图是两个完全相同的转盘，每个转盘均被分成完全相同的四个区域，分别用数字1，2，3，4表示. 固定指针，同时转动两个转盘，任其自由停止，若两指针所指数字的积为奇数，则甲获胜；若两指针所指数字的积为偶数，则乙获胜；若指针指向扇形的分界线，则都重转一次. 那么在该游戏中乙获胜的概率是（　　）




（第8题）

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{5}{6}$

9. 【中考·恩施州】有6张看上去无差别的卡片，上面分别写着1，2，3，4，5，6，随机抽取一张后，放回并混在一起，再随机抽取一张，两次抽取的数字的积为奇数的概率是（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{3}{10}$　　D. $\frac{1}{6}$

**易错点 不能准确区分放回抽样与不放回抽样对事件发生的概率的影响**

10. 某电视栏目中的百宝箱互动环节是一种竞猜游戏，游戏规则如下：在20张商标牌中，有5张商标牌的背面注明一定金额，其余商标牌的背面均是一张哭脸，若翻到哭脸则不得奖；反之，则得奖. 参与游戏的观众有三次翻牌的机会（翻过的牌不能再翻），某人前两次翻牌均获得若干奖金，那么他第三次翻牌获奖的概率是（　　）

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{5}$　　C. $\frac{1}{6}$　　D. $\frac{3}{20}$



传说战国时期，齐王与田忌各有上、中、下等三匹马，同等级的马中，齐王的马比田忌的马强.（待续）

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

## Ⅱ 整合方法 · 提升练 (答案见 203 页) 课后导练

**考查角度 1** 利用列表法求实际应用中的概率问题

**11.** 【中考 · 宁夏】为了创建文明城市,增强学生的环保意识,随机抽取 8 名学生,对他们的垃圾分类投放情况进行调查,这 8 名学生分别标记为 $A,B,C,D,E,F,G,H$,其中“√”表示投放正确,“×”表示投放错误,统计情况如下表.

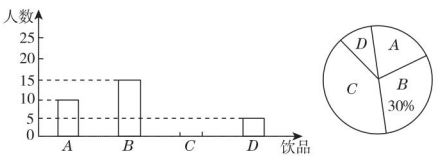
| 学生 / 垃圾类别 | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ | $F$ | $G$ | $H$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 厨余垃圾 | √ | √ | √ | √ | √ | √ | √ | √ |
| 可回收垃圾 | √ | × | √ | × | × | √ | √ | √ |
| 有害垃圾 | × | √ | × | √ | √ | × | × | √ |
| 其他垃圾 | × | √ | √ | × | × | √ | √ | √ |

(1)求 8 名学生中至少有三类垃圾投放正确的概率;

(2)为进一步了解垃圾分类投放情况,现从 8 名学生里“有害垃圾”投放错误的学生中随机抽取两人接受采访,试用标记的字母列举所有可能抽取的结果.

**考查角度 2** 利用列表法求统计中的概率问题

**12.** 如今很多初中生喜欢购买饮品饮用,既影响身体健康又给家庭增加不必要的开销,为此某班数学兴趣小组对本班同学一天饮用饮品的情况进行了调查,大致可分为四种:*A*. 白开水,*B*. 瓶装矿泉水,*C*. 碳酸饮料,*D*. 非碳酸饮料,根据统计结果绘制如下两个统计图,根据统计图提供的信息,解答下列问题.




(第 12 题)

(1)这个班级有多少名同学?并补全条形统计图.

(2)若该班同学每人每天只饮用一种饮品(每种仅限一瓶,价格如下表),则该班同学每天用于饮品的人均花费是多少元?

| 饮品名称 | 白开水 | 瓶装矿泉水 | 碳酸饮料 | 非碳酸饮料 |
|---|---|---|---|---|
| 平均价格(元/瓶) | 0 | 2 | 3 | 4 |

(3)为了养成良好的生活习惯,班主任决定在饮用白开水的 5 名班委干部(其中有两名班长记为 $A$,$B$,其余三名记为 $C,D,E$)中随机抽取 2 名班委干部作良好习惯监督员,请用列表法求出恰好抽到 2 名班长的概率.

趣味数学

有一天,齐王要与田忌赛马,双方约定:比赛三局,每局各出一匹,每匹马赛一次,赢得两局者为胜.(待续)



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 第3课时 用画树状图法求概率

**名师点金**

1. 当事件涉及三个或三个以上元素时，用列表法不易列举出所有可能结果，用树状图可以依次列出所有可能的结果，求出 $n$，再分析某个事件中包含的所有可能的结果，求出 $m$，从而求出概率.
2. 用画树状图法列举时，应注意取出后“放回”与“不放回”的问题.

## Ⅰ 夯实基础 · 逐点练 ☞（答案见203页） 随堂导练

### 知识点1 两步试验的树状图

1. 【中考 · 泰安】一个盒子中装有标号为1,2,3,4,5的五个小球，这些球除标号外都相同，从中随机摸出两个小球，则摸出的小球标号之和大于5的概率为(　　)

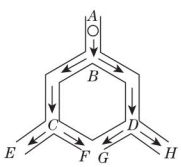
A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{2}{5}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{4}{5}$

2. 【中考 · 柳州】如图，小李与小陈做猜拳游戏，规定每人每次至少要出一个手指，两人出拳的手指数之和为偶数时小李获胜，那么小李获胜的概率为(　　)

A. $\frac{13}{25}$　　B. $\frac{12}{25}$　　C. $\frac{4}{25}$　　D. $\frac{1}{2}$



（第2题）




（第6题）

3. 【中考 · 荆门】投掷一枚质地均匀的骰子两次，向上一面的点数依次记为 $a,b$，那么方程 $x^2+ax+b=0$ 有解的概率是(　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{8}{15}$　　D. $\frac{19}{36}$

4. 【中考 · 临沂】经过某十字路口的汽车，可能直行，也可能向左转或向右转，如果这三种可能性大小相同，那么两辆汽车经过这个十字路口时一辆向右转，一辆向左转的概率是(　　)

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{2}{9}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{9}$

### 知识点2 两步以上试验的树状图

5. 【中考 · 包头】同时抛掷三枚质地均匀的硬币，至少有两枚硬币正面向上的概率是(　　)

A. $\frac{3}{8}$　　B. $\frac{5}{8}$

C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{1}{2}$

6. 如图，一个小球从入口 $A$ 往下落，在每个交叉口都有向左或向右两种可能，且两种可能性相等. 则小球最终从出口 $E$ 落出的概率为(　　)

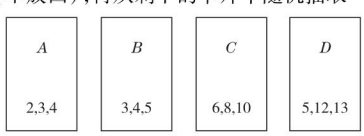
A. $\frac{1}{8}$　　B. $\frac{1}{6}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{2}$

7. 【中考 · 梧州】三张背面完全相同的数字牌，它们的正面分别印有数字1,2,3，将它们背面朝上，洗匀后随机抽取一张，记录牌上的数字并把牌放回，再重复这样的步骤两次，得到三个数字 $a,b,c$，则以 $a,b,c$ 为边长正好构成等边三角形的概率是(　　)

A. $\frac{1}{9}$　　B. $\frac{1}{27}$　　C. $\frac{5}{9}$　　D. $\frac{1}{3}$

### 易错点 忽略“放回”或“不放回”这一过程而致错

8. 【中考 · 成都】在四张编号为 $A,B,C,D$ 的卡片（除编号外，其余完全相同）的正面分别写上如图所示的正整数后，背面朝上，洗匀放好，现从中随机抽取一张（不放回），再从剩下的卡片中随机抽取一张.




（第8题）

(1) 请用画树状图或列表的方法表示两次抽取卡片的所有可能出现的结果（卡片用 $A,B,C,D$ 表示）；

(2) 我们知道，满足 $a^2+b^2=c^2$ 的三个正整数 $a,b,c$ 称为勾股数，求抽到的两张卡片上的数都是勾股数的概率.



（1）如果齐王将马按上、中、下的顺序出阵比赛，那么田忌的马如何出阵，田忌才能取胜？（2）如果齐王将马按上、中、下的顺序出阵，而田忌的马随机出阵比赛，田忌获胜的概率是多少？（待续）

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

## Ⅱ 整合方法 · 提升练 (答案见203页) 课后导练

**考查角度1** 利用概率解与代数综合问题

9. 【中考·岳阳】已知不等式组 $\begin{cases} 3x+4>x, & ① \\ \frac{4}{3}x \leqslant x+\frac{2}{3}. & ② \end{cases}$

(1)求不等式组的解集,并写出它的所有整数解;

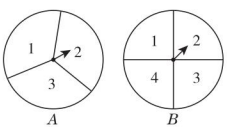
(2)在不等式组的所有整数解中任取两个不同的整数相乘,请用画树状图或列表的方法求积为正数的概率.

**考查角度2** 利用概率解与几何综合问题

10. 【中考·淮安】如图,转盘 $A$ 的三个扇形面积相等,分别标有数字1,2,3,转盘 $B$ 的四个扇形面积相等,分别标有数字1,2,3,4. 转动 $A$,$B$ 转盘各一次,当转盘停止转动时,将指针所落扇形中的两个数字相乘(当指针落在两个扇形的交线上时,重新转动转盘).

(1)用画树状图或列表的方法列出所有可能出现的结果;

(2)求两个数字的积为奇数的概率.




(第10题)

## Ⅲ 探究培优 · 拓展练 (答案见203页) 课后选练

**拔尖角度1** 利用树状图解函数中的概率问题

11. 【中考·南充】现有四张背面完全相同的不透明卡片,其正面分别写有数字 $-2$,$-1$,0,2,把这四张卡片背面朝上洗匀后放在桌面上.

(1)随机抽取一张卡片,求抽取的卡片正面的数字为负数的概率;

(2)先随机抽取一张卡片,其正面的数字作为点 $A$ 的横坐标,然后放回并洗匀,再随机抽取一张卡片,其正面的数字作为点 $A$ 的纵坐标,试用画树状图或列表的方法求出点 $A$ 在直线 $y=2x$ 上的概率.

**拔尖角度2** 利用树状图解三次试验的概率问题

12. 【中考·兰州】为了参加中考体育测试,甲、乙、丙三位同学进行足球传球训练,球从一个人脚下随机传到另一个人脚下,且每位传球人传给其余两人的机会是均等的,由甲开始传球,共传球三次.

(1)请利用树状图列举出三次传球的所有可能情况;

(2)求三次传球后,球回到甲脚下的概率;

(3)三次传球后,球回到甲脚下的概率大还是传到乙脚下的概率大?

趣味数学 答案:(1)田忌的马按照下、上、中的顺序出阵能取胜;(2)田忌获胜的概率是 $\frac{1}{6}$.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 2.3 用频率估计概率

**名师点金**

**频率与概率间的关系：**
(1)概率是随机事件发生的可能性的大小的数量反映；(2)概率是事件在大量重复试验中频率逐渐稳定到的值，所以可以用大量重复试验中事件发生的频率去估计事件发生的概率，二者不能等同.
**注意：**用频率估计概率大小时，(1)试验要在相同条件下进行；(2)重复试验的次数要足够多.

## Ⅰ 夯实基础 · 逐点练 ☞(答案见204页) 随堂导练

### 知识点1 用频率估计概率

1. 【中考 · 扬州】扬州某毛绒玩具厂对一批毛绒玩具进行质量抽检的结果如下：

| 抽取的毛绒玩具数 $n$ | 20 | 50 | 100 | 200 | 500 | 1 000 | 1 500 | 2 000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 优等品的频数 $m$ | 19 | 47 | 91 | 184 | 462 | 921 | 1 379 | 1 846 |
| 优等品的频率 $\frac{m}{n}$ | 0.950 | 0.940 | 0.910 | 0.920 | 0.924 | 0.921 | 0.919 | 0.923 |

从这批玩具中，任意抽取一个毛绒玩具是优等品的概率的估计值是_____.(精确到0.01)

2. 【中考 · 锦州】在一个不透明的袋子中装有3个白球和若干个红球，这些球除颜色外都相同. 每次从袋子中随机摸出一个球，记下颜色后再放回袋中，通过多次重复试验发现摸出红球的频率稳定在0.7附近，则袋子中红球约有_____个.

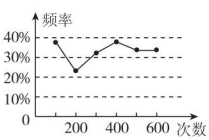
3. 【中考 · 宜昌】在课外实践活动中，甲、乙、丙、丁四个小组用投掷一元硬币的方法来估算正面朝上的概率，其试验次数分别为10，50，100，200，其中试验相对科学的是(　　)
A. 甲组　　B. 乙组　　C. 丙组　　D. 丁组

4. 【中考 · 泰州】小明和同学做“抛掷质地均匀的硬币试验”获得的数据如下表：

| 抛掷次数 | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 |
|---|---|---|---|---|---|
| 正面朝上的频数 | 53 | 98 | 156 | 202 | 244 |

若抛掷硬币的次数为1 000，则“正面朝上”的频数最接近(　　)
A. 200　　B. 300　　C. 500　　D. 800

5. 甲、乙两名同学在一次用频率去估计概率的试验中，统计了某一结果出现的频率，绘制出的统计图如图所示，则符合这一结果的试验可能是(　　)



(第5题)

A. 掷一枚正方体骰子，出现1点的概率
B. 从一个装有2个白球和1个红球的袋子中任取1个球，取到红球的概率
C. 抛一枚硬币，出现正面朝上的概率
D. 任意写一个整数，它能被2整除的概率

### 知识点2 频率与概率的关系

6. 【中考 · 山西】在大量重复试验中，关于随机事件发生的频率与概率，下列说法正确的是(　　)
A. 频率就是概率
B. 频率与试验次数无关
C. 概率是随机的，与频率无关
D. 随着试验次数的增加，频率一般会越来越接近概率

7. 某人做投硬币试验时，投掷$m$次，正面朝上$n$次(即正面朝上的频率$P=\frac{n}{m}$)，则下列说法正确的是(　　)
A. $P$一定等于$\frac{1}{2}$
B. $P$一定不等于$\frac{1}{2}$
C. 多投一次，$P$更接近$\frac{1}{2}$
D. 投掷次数逐渐增加，$P$稳定在$\frac{1}{2}$附近

8. 在“抛掷正方体”的试验中，正方体的六个面分别标有数字1，2，3，4，5和6，如果试验的次数增多，出现数字“6”的频率的变化趋势是接近_____.

### 易错点 不能正确理解频率与概率的关系

9. 下列说法合理的是(　　)
A. 小明在10次抛图钉的试验中发现3次钉尖朝上，由此他说钉尖朝上的概率是30%
B. 抛掷一枚普通的正方体骰子，出现6点朝上的概率是$\frac{1}{6}$的意思是每掷6次就有1次掷得6点朝上
C. 某彩票的中奖机会是2%，那么买100张彩票一定会有2张中奖
D. 在抛掷硬币的试验中，甲、乙两组同学估计硬币落地后，正面朝上的概率分别为0.48和0.51


谜语：招收演员(打一数学名词)　　谜底：补角


关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

## Ⅱ 整合方法 · 提升练 (答案见204页) 课后导练

### 考查角度1 利用频率估算数据求概率

**10.** 王老师将1个黑球和若干个白球(每个球除颜色外都相同)放入一个不透明的袋中并搅匀,让若干学生进行摸球试验,每次摸出一个球(有放回),下表是试验的统计数据.

| 摸球的次数 $n$ | 100 | 150 | 200 | 500 | 800 | 1 000 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 摸到黑球的次数 $m$ | 23 | 31 | 60 | 130 | 203 | 251 |
| 摸到黑球的频率 $\frac{m}{n}$ | 0.23 | 0.21 | 0.30 | 0.26 | 0.25 | |

(1)补全上表中的有关数据,根据上表数据估计从袋中摸出一个球是黑球的概率是_____;

(2)估计袋中白球的个数;

(3)在(2)的条件下,若小强同学有放回地连续两次摸球,用画树状图或列表的方法计算他两次都摸出白球的概率.

### 考查角度2 利用求频率估算概率

**11.** 【中考·宁夏】为了解学生的体能情况,随机选取了1 000名学生进行调查,并记录了他们对长跑、短跑、跳绳、跳远四个项目的喜欢情况,整理成以下统计表,其中"√"表示喜欢,"×"表示不喜欢.

| 项目 / 学生数 | 长跑 | 短跑 | 跳绳 | 跳远 |
|---|---|---|---|---|
| 200 | √ | × | √ | √ |
| 300 | × | √ | × | √ |
| 150 | √ | √ | √ | × |
| 200 | √ | × | √ | × |
| 150 | √ | × | × | × |

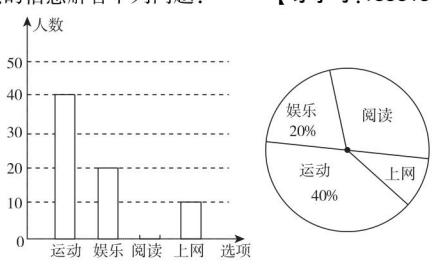
(1)估计学生同时喜欢短跑和跳绳的概率;

(2)估计学生在长跑、短跑、跳绳、跳远中同时喜欢三个项目的概率;

(3)如果某学生喜欢长跑,那么该学生同时喜欢短跑、跳绳、跳远中哪项的可能性最大?

### 考查角度3 利用统计图中的数据求概率

**12.** 【中考·西藏】某校为研究学生的课余爱好情况,采取抽样调查的方法,从阅读、运动、娱乐、上网等四个方面调查了若干学生的兴趣爱好,并将调查的结果绘制成如下两幅不完整的统计图,请你根据图中提供的信息解答下列问题: 【导学号:1858154】




(第12题)

(1)在这次研究中,一共调查了_____名学生;若该校共有1 500名学生,估计全校爱好运动的学生共有_____名;

(2)补全条形统计图,并计算阅读部分的圆心角是_____;

(3)在全校学生中随机选出一名学生参加演讲比赛,用频率估计概率,则选出的恰好是爱好阅读的学生的概率是_____.



关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

# 阶段方法技巧训练

## 专训1 概率的四种求法 （答案见204页）

**名师点金**

概率可以通过大量重复试验中频率的稳定值来估计，它反映了事件发生的可能性的大小，需要注意的是概率是针对大量重复试验而言的，大量重复试验反映的规律并不一定出现在每次试验中. 常见的计算概率的方法有公式法（仅适用于等可能事件）、列表法、画树状图法和频率估算法等.

### 方法1 用公式法求概率

1. 一个不透明的袋中装有5个黄球，13个黑球和22个红球，它们除颜色外都相同.
   （1）求从袋中摸出一个球是黄球的概率；
   （2）现从袋中取出若干个黑球，并放入相同数量的黄球，搅拌均匀后使从袋中摸出一个球是黄球的概率不小于$\frac{1}{3}$，求至少取出了多少个黑球.

### 方法2 用列表法求概率

2. 【中考·包头】某校为了解九年级学生的体育达标情况，随机抽取50名九年级学生进行体育达标项目测试，测试成绩如下表，请根据表中的信息，解答下列问题：

| 测试成绩（分） | 23 | 25 | 26 | 28 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|
| 人数 | 4 | 18 | 15 | 8 | 5 |

   （1）该校九年级有450名学生，估计体育测试成绩为25分的学生人数；
   （2）该校体育老师要对本次抽测成绩为23分的甲、乙、丙、丁4名学生进行分组强化训练，要求两人一组，求甲和乙恰好分在同一组的概率.

### 方法3 用画树状图法求概率

3. 体育课上，小明、小强、小华三人在训练踢足球，足球从一人传到另一人就记为踢一次.
   （1）如果从小强开始踢，经过两次踢球后，足球踢到了小华处的概率是多少？
   （2）如果踢三次后，球踢到了小明处的可能性最小，应从谁开始踢？请说明理由.

### 方法4 用频率估算法求概率

4. 一个不透明的袋子中装有4个球，分别标有数字2，3，4，$x$，这些球除数字外都相同. 甲、乙两人每次同时从袋中各随机摸出1个球，并计算摸出的这两个球上数字之和. 记录后都将球放回袋中搅匀，进行重复试验. 试验数据如下表：

| 摸球总次数 | 10 | 20 | 30 | 60 | 90 | 120 | 180 | 240 | 330 | 450 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| “和为7”出现的频数 | 1 | 9 | 14 | 24 | 26 | 37 | 58 | 82 | 109 | 150 |
| “和为7”出现的频率 | 0.10 | 0.45 | 0.47 | 0.40 | 0.29 | 0.31 | 0.32 | 0.34 | 0.33 | 0.33 |

   解答下列问题：
   （1）如果试验继续进行下去，根据上表数据，出现“和为7”的频率将稳定在它的概率附近，试估计出现“和为7”的概率；
   （2）若$x$是不等于2，3，4的自然数，试求$x$的值.



谜语：1+2+3（打一成语） 谜底：接二连三




关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

## 专训2 利用概率判断游戏规则的公平性 (答案见204页)

**名师点金**

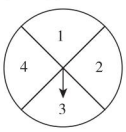
通过计算概率判断游戏是不是公平是概率知识的一个重要应用,也是中考考查的热点.解决游戏公平性问题要先计算游戏双方获胜的概率,若概率相等,则游戏公平;若概率不相等,则游戏不公平.

### 训练角度1 利用概率判断摸球游戏的公平性

1. 【中考·云南】甲、乙两名同学玩一个游戏:在一个不透明的口袋中装有标号分别为1,2,3,4的四个小球(除标号外无其他差异),从口袋中随机摸出一个小球,记下标号后放回口袋中,充分摇匀后,再从口袋中随机摸出一个小球,记下该小球的标号,两次记下的标号分别用$x$,$y$表示.若$x+y$为奇数,则甲获胜;若$x+y$为偶数,则乙获胜.
   (1)用列表法或画树状图法求$(x,y)$所有可能出现的结果总数;
   (2)你认为这个游戏对双方公平吗?请说明理由.

### 训练角度2 利用概率判断转盘游戏的公平性

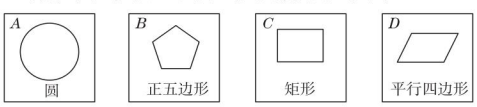
2. 【中考·营口】如图是一个转盘,转盘被平均分成4等份,即被分成4个大小相等的扇形,4个扇形分别标有数字1,2,3,4,指针的位置固定,转动转盘后任其自由停止,每次指针落在每一扇形的机会均等(若指针恰好落在分界线上则重转).
   (1)图中标有"1"的扇形至少绕圆心旋转_____度能与标有"4"的扇形的起始位置重合;
   (2)现有一本故事书,姐妹俩商定通过转盘游戏定输赢(赢的一方先看).游戏规则:姐妹俩各转动一次转盘,两次转动后,若指针所指扇形上的数字之积为偶数,则姐姐赢;若指针所指扇形上的数字之积为奇数,则妹妹赢.这个游戏规则对双方公平吗?请利用画树状图法或列表法说明理由.




(第2题)

### 训练角度3 利用概率判断摸纸牌游戏的公平性

3. 【中考·通辽】如图,有四张反面完全相同的纸牌$A$,$B$,$C$,$D$,其正面分别画有四个不同的几何图形,将四张纸牌洗匀正面朝下随机放在桌面上.
   (1)从四张纸牌中随机摸出一张,摸出的牌面图形是中心对称图形的概率是_____.
   (2)小明和小亮约定做一个游戏,其规则为:先由小明随机摸出一张,不放回,再由小亮从剩下的纸牌中随机摸出一张,若摸出的两张牌面图形既是轴对称图形又是中心对称图形,则小亮获胜,否则小明获胜.这个游戏公平吗?请用列表法或画树状图法(纸牌用$A$,$B$,$C$,$D$表示)说明理由.若不公平,请你帮忙修改一下游戏规则,使游戏公平.




(第3题)



关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

# 2.4 概率的简单应用

**名师点金**

对于游戏不公平的问题，可以利用相应问题中的可能情形改动游戏规则，使修改后游戏是公平的，而修改游戏规则的方式可能有多种，只要合理即可，一般采用使所获得的概率相等的规则来达到目的.

## 夯实基础 · 逐点练 （答案见205页） 随堂导练

### 知识点1 普通游戏中的概率

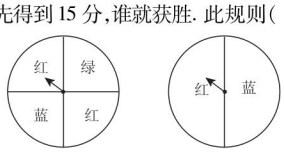
1. 甲、乙两人玩一个游戏，判定这个游戏公平不公平的标准是(　　)
A. 游戏的规则由甲方确定
B. 游戏的规则由乙方确定
C. 游戏的规则由甲乙双方确定
D. 游戏双方要各有50%赢的机会

2. 【中考·黔南州】同时抛掷两枚质地均匀的硬币，则下列事件发生的概率最大的是(　　)
A. 两个正面都朝上
B. 两个背面都朝上
C. 一个正面朝上，另一个背面朝上
D. 三种情况发生的概率一样大

3. 一个箱子中装有红、黄、黑三个小球，三个人先后去摸球，一人摸一次，一次摸出一个小球，摸出后不放回，摸出黑色小球为赢，这个游戏(　　)
A. 公平
B. 不公平
C. 先摸者赢的可能性大
D. 后摸者赢的可能性大

4. 小明与小刚一起玩抛掷两枚硬币的游戏，游戏规则：抛出两个正面——小明赢1分；抛出其他结果——小刚赢1分. 谁先得到9分，谁就获胜. 这是个不公平的游戏规则，要把它修改成公平的游戏规则，下列做法中错误的是(　　)
A. 把“抛出两个正面”改为“抛出两个同面”
B. 把“抛出其他结果”改为“抛出两个反面”
C. 把“小明赢1分”改为“小明赢3分”
D. 把“小刚赢1分”改为“小刚赢3分”

5. 如图，小明、小刚利用两个转盘玩游戏，规则为将两个转盘各转一次，如配成紫色(红与蓝)小明得5分，否则小刚得3分，谁先得到15分，谁就获胜. 此规则(　　)




(第5题)

A. 公平
B. 对小明有利
C. 对小刚有利
D. 不可预测对谁有利

### 知识点2 生活中的概率

6. 【中考·湖州】已知现有的10瓶饮料中有2瓶已过了保质期，从这10瓶饮料中任取1瓶，恰好取到已过了保质期的饮料的概率是(　　)

A. $\frac{1}{10}$　　B. $\frac{9}{10}$

C. $\frac{1}{5}$　　D. $\frac{4}{5}$

7. 【中考·广州】某个密码锁的密码由三个数字组成，每个数字都是0～9这十个数字中的一个，只有当三个数字与所设定的密码及顺序完全相同时，才能将锁打开，如果仅忘记了所设密码的最后那个数字，那么一次就能打开该密码锁的概率是(　　)

A. $\frac{1}{10}$　　B. $\frac{1}{9}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{2}$

### 知识点3 数学中的概率

8. 【中考·毕节】在$\square ABCD$中，$AC$，$BD$是两条对角线，现从以下四个关系：①$AB=BC$；②$AC=BD$；③$AC\perp BD$；④$AB\perp BC$中随机取出一个作为条件，即可推出$\square ABCD$是菱形的概率为(　　)

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. 1

9. 【中考·德州】甲、乙是两个不透明的纸箱，甲中有三张标有数字$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{2}$，1的卡片，乙中有三张标有数字1，2，3的卡片，卡片除所标数字外无其他差别，现制定一个游戏规则：从甲中任取一张卡片，将其数字记为$a$，从乙中任取一张卡片，将其数字记为$b$. 若$a$，$b$能使关于$x$的一元二次方程$ax^2+bx+1=0$有两个不相等的实数根，则甲获胜，否则乙获胜，则乙获胜的概率为(　　)

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{5}{9}$　　C. $\frac{4}{9}$　　D. $\frac{1}{3}$



摩天轮是一种大型转轮状的机械建筑设施，上面挂在轮边缘的是供乘客乘搭的座舱. 乘客坐在摩天轮上，慢慢地往上转，可以从高处俯瞰四周景色.（待续）

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

## Ⅱ 整合方法 · 提升练 (答案见205页) 课后导练

**考查角度1 利用概率解卡片中游戏应用问题**

10. 【中考·黄石】将正面分别写着数字1,2,3的三张卡片(注:这三张卡片的形状、大小、质地、颜色等其他方面完全相同,若背面朝上放在桌面上,这三张卡片看上去无任何差别)洗匀后,背面朝上放在桌面上,甲从中随机抽取一张卡片,记该卡片上的数字为$m$,然后放回洗匀,背面朝上放在桌面上,再由乙从中随机抽取一张卡片,记该卡片上的数字为$n$,组成一数对$(m,n)$.
(1)请写出$(m,n)$所有可能出现的结果;
(2)甲、乙两人玩游戏,规则如下:按上述要求,两人各抽一次卡片,卡片上数字之和为奇数则甲赢,数字之和为偶数则乙赢. 你认为这个游戏公平吗? 请说明理由.

**考查角度2 利用概率解数学中游戏应用问题**

11. 【中考·安徽】一袋中装有形状大小都相同的四个小球,每个小球上各标有一个数字,分别是1,4,7,8. 现规定从袋中任取一个小球,对应的数字作为一个两位数的个位数字,然后将小球放回袋中搅拌均匀,再任取一个小球,对应的数字作为这个两位数的十位数字.
(1)写出按上述规定得到的所有可能的两位数;
(2)从这些两位数中任取一个,求其算术平方根大于4且小于7的概率.

## Ⅲ 探究培优 · 拓展练 (答案见205页) 课后选练

**拔尖角度1 利用概率说明游戏规则的公平性**

12. 【中考·怀化】甲、乙两人都握有分别标记为$A,B,C$的三张牌,两人做游戏,游戏规则:若两人出的牌不同,则$A$胜$B$,$B$胜$C$,$C$胜$A$;若两人出的牌相同,则为平局.
(1)用画树状图或列表的方法,列出甲、乙两人一次游戏的所有可能的结果;
(2)求出现平局的概率. 这个游戏公平吗? 试说明理由.

**拔尖角度2 利用概率说明游戏与函数图象关系**

13. 【中考·白银】在甲、乙两个不透明的布袋里,都装有3个大小、材质完全相同的小球,其中甲袋中的小球上分别标有数字0,1,2;乙袋中的小球上分别标有数字$-1$,$-2$,0. 现从甲袋中任意摸出一个小球,记其标有的数字为$x$,再从乙袋中任意摸出一个小球,记其标有的数字为$y$,以此确定点$M$的坐标$(x,y)$.
(1)请你用画树状图或列表的方法,写出点$M$所有可能的坐标;
(2)求点$M(x,y)$在函数$y=-\frac{2}{x}$的图象上的概率.

趣味数学

最常见的摩天轮存在的场合是游乐园(或主题公园)与园游会,摩天轮作为一种游乐场机动游戏,与云霄飞车、旋转木马合称为“乐园三宝”.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 全章热门考点整合应用 ☞（答案见205页）

**名师点金**

本章内容是近年来中考的必考内容，主要考点是事件的类型、用列表法或画树状图法计算概率、用频率估计概率及概率的应用. 其考查形式既有单一考查，又有与平面直角坐标系、几何、统计知识等综合考查. 其热门考点可概括为一个判断、两个方法、两个思想.

## 考点1 一个判断——事件类型的判断

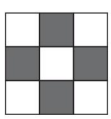
1. 【中考·广西】下列事件为必然事件的是（　　）
   A. 打开电视机，正在播放新闻
   B. 任意画一个三角形，其内角和是180°
   C. 买一张电影票，座位号是奇数
   D. 掷一枚质地均匀的硬币，正面朝上

2. 下列事件，是随机事件的是（　　）
   A. 四边形的内角和为180°
   B. 袋中有2个黄球和3个绿球，随机摸出一个球是红球
   C. 2020年日本举办奥运会
   D. 从$-2$，$-1$，2这三个数中任取两个不同的数作为点的坐标，该点在第四象限

## 考点2 两个方法

### 方法1 求随机事件的概率

3. 小球在如图所示的地板上自由滚动，并随机地停留在某块方砖上，每一块方砖除颜色外完全相同，它最终停留在黑色方砖上的概率是_____.


（第3题）

4. 【中考·乐山】小强同学从$-1$，0，1，2，3，4这六个数中任选一个数，满足不等式$x+1<2$的概率是（　　）
   A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{2}$

5. 【中考·武汉】从1，2，3，4四个数中随机选取两个不同的数，分别记为$a$，$c$，则关于$x$的一元二次方程$ax^2+4x+c=0$有实数解的概率为（　　）
   A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

### 方法2 用频率估计概率

6. 小军和小刚两位同学在学习“概率”时，做投掷骰子（质地均匀的正方体）试验，他们共做了60次试验，试验的结果如下表：

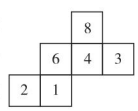
| 向上点数 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 出现次数 | 7 | 9 | 6 | 8 | 20 | 10 |

（1）计算2点朝上的频率和5点朝上的频率.
（2）小军说：“根据试验，一次试验中出现3点朝上的概率是$\frac{1}{10}$.”小军的这一说法正确吗？为什么？
（3）小刚说：“如果掷600次，那么出现6点朝上的次数正好是100次.”小刚的这一说法正确吗？为什么？

## 考点3 两个思想

### 思想1 数形结合思想

7. 一个均匀的正方体各面上分别标有数字1，2，3，4，6，8，其表面展开图如图所示，抛掷这个正方体，则朝上一面的数字恰好等于朝下一面的数字的2倍的概率是（　　）



（第7题）

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{6}$

### 思想2 方程思想

8. 一个口袋中放有红球、白球和黑球若干个，每个球除了颜色以外没有任何区别，已知红球比黑球多1个，比白球少3个.
（1）小王通过大量重复试验（每次取1个球，放回搅匀后再取第二个）发现，取出黑球的频率稳定在$\frac{1}{4}$左右，请你估计口袋中黑球的个数.
（2）在（1）的条件下，若小王取出的第一个球是白球，将它放在桌上，闭上眼睛从口袋中余下的球中再任意取出1个球，取出红球的概率是多少？


谜语：看谁力量大（打一数学名词）　　谜底：比例（力）


关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 第1章 解直角三角形

专注

## 1.1 锐角三角函数

### 第1课时 锐角三角函数

**名师点金**

求锐角的三角函数值的三种方法:(1)在直角三角形中,确定各边长,根据定义直接求出.(2)利用相似、全等等关系,寻找与所求角相等的角(若该角的三角函数值知道或者易求).(3)利用互余的两个角间的特殊关系求.

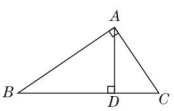
**夯实基础 · 逐点练** (答案见223页) 随堂导练

**知识点1 锐角三角函数**

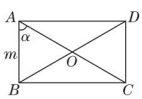
1. 【中考 · 乐山】如图,在 Rt△$ABC$ 中,∠$BAC$ = 90°,$AD$⊥$BC$ 于点 $D$,则下列结论不正确的是(　　)

A. $\sin B=\frac{AD}{AB}$　　B. $\sin B=\frac{AC}{BC}$

C. $\sin B=\frac{AD}{AC}$　　D. $\sin B=\frac{CD}{AC}$



(第1题)



(第2题)

2. 【中考 · 金华】如图,矩形 $ABCD$ 的对角线交于点 $O$,已知 $AB=m$,∠$BAC$ = ∠$\alpha$,则下列结论错误的是(　　)

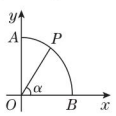
A. ∠$BDC$ = ∠$\alpha$　　B. $BC=m\cdot\tan\alpha$

C. $AO=\frac{m}{2\sin\alpha}$　　D. $BD=\frac{m}{\cos\alpha}$

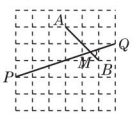
3. 【中考 · 福州】如图,以 $O$ 为圆心,半径为 1 的弧交坐标轴于 $A$,$B$ 两点,$P$ 是$\overset{\frown}{AB}$上一点(不与 $A$,$B$ 重合),连结 $OP$,设∠$POB$ = $\alpha$,则点 $P$ 的坐标是(　　)

A. ($\sin\alpha$,$\sin\alpha$)　　B. ($\cos\alpha$,$\cos\alpha$)

C. ($\cos\alpha$,$\sin\alpha$)　　D. ($\sin\alpha$,$\cos\alpha$)



(第3题)



(第4题)

4. 【中考 · 淄博】如图是由边长相同的小正方形组成的网格,$A$,$B$,$P$,$Q$ 四点均在正方形网格的格点上.线段 $AB$,$PQ$ 相交于点 $M$.则图中∠$QMB$ 的正切值是(　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

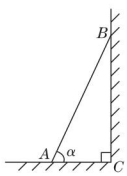
5. 【中考 · 杭州】在直角三角形 $ABC$ 中,若 $2AB=AC$,则 $\cos C=$_____.

**知识点2 锐角三角函数的应用**

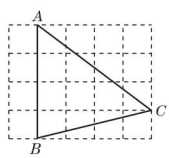
6. 【中考 · 长春】如图,一把梯子靠在垂直水平地面的墙上,梯子 $AB$ 的长是 3 m,若梯子与地面的夹角为 $\alpha$,则梯子顶端到地面的距离 $BC$ 为(　　)

A. 3$\sin\alpha$ m　　B. 3$\cos\alpha$ m

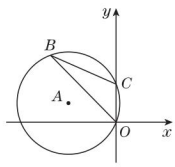
C. $\frac{3}{\sin\alpha}$ m　　D. $\frac{3}{\cos\alpha}$ m



(第6题)



(第7题)



(第8题)

7. 【中考 · 宜昌】如图,在 5×4 的正方形网格中,每个小正方形的边长都是 1,△$ABC$ 的顶点都在这些小正方形的顶点上,则 $\sin$∠$BAC$ 的值为(　　)

A. $\frac{4}{3}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{4}{5}$

8. 【中考 · 安顺】如图,半径为 3 的⊙$A$ 经过原点 $O$ 和点 $C(0,2)$,$B$ 是 $y$ 轴左侧⊙$A$ 优弧上一点,则 $\tan$∠$OBC$ 的值为(　　)

A. $\frac{1}{3}$　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

**易错点 忽视锐角三角函数值的范围而致错**

9. 已知 $x=\cos\alpha$($\alpha$ 为锐角)满足方程 $2x^2-5x+2=0$,求 $\cos\alpha$ 的值.



正弦的数学符号为 sin,英文名称为 sine,sine 是英语对于拉丁语 sinus 的转写.sinus 的本意为“弯曲”.(待续)

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

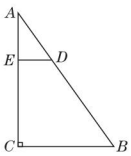
## Ⅱ 整合方法 · 提升练 (答案见 223 页) 课后导练

**考查角度 1** 利用相似三角形的性质求锐角的正弦值

**10.** 如图,在△$ABC$ 中,$\angle C=90°$,点 $D$,$E$ 分别在边 $AB$,$AC$ 上,$DE\parallel BC$,$DE=3$,$BC=9$.

(1)求$\dfrac{AD}{AB}$的值;

(2)若 $BD=10$,求 $\sin A$ 的值.



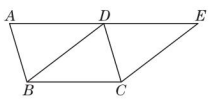

(第 10 题)

**考查角度 2** 利用余弦的定义求距离

**11.** 【中考 · 贵阳】如图,四边形 $ABCD$ 是平行四边形,延长 $AD$ 至点 $E$,使 $DE=AD$,连结 $BD$,$CE$.

(1)求证:四边形 $BCED$ 是平行四边形;

(2)若 $DA=DB=2$,$\cos A=\dfrac{1}{4}$,求点 $B$ 到点 $E$ 的距离.




(第 11 题)

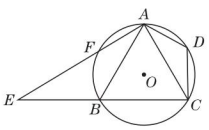
## Ⅲ 探究培优 · 拓展练 (答案见 223 页) 课后选练

**拔尖角度 1** 利用圆中相似解决正切问题

**12.** 【中考 · 凉山州】如图,已知四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$,$A$ 是$\overset{\frown}{BDC}$的中点,$AE\perp AC$ 于 $A$,与 $\odot O$ 及 $CB$ 的延长线交于点 $F$,$E$,且$\overset{\frown}{BF}=\overset{\frown}{AD}$.

(1)求证:△$ADC$∽△$EBA$;

(2)如果 $AB=8$,$CD=5$,求 $\tan\angle CAD$ 的值.



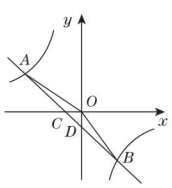

(第 12 题)

**拔尖角度 2** 利用正弦函数解一次函数、反比例函数问题

**13.** 【中考 · 重庆】如图,在平面直角坐标系中,一次函数的图象与反比例函数的图象交于第二、四象限内的 $A$,$B$ 两点,与 $x$ 轴交于点 $C$,与 $y$ 轴交于点 $D$,点 $B$ 的坐标是$(m,-4)$,连结 $AO$,$AO=5$,$\sin\angle AOC=\dfrac{3}{5}$.

(1)求反比例函数的表达式;

(2)连结 $OB$,求△$AOB$ 的面积.




(第 13 题)

趣味数学

从这个概念来看,正弦线就应该指那些弯弯曲曲的,波状起伏的线条.如此说来,最初的命名者应该是鉴于正弦线是弯曲的,所以给它取名为 sinus 了.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

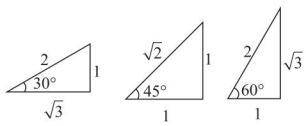
# 第2课时 特殊角的三角函数值

**名师点金**

巧记特殊锐角三角函数值的方法：

（1）**三角板记忆法**：借助如图所示的三角板记忆.

（2）**特点记忆法**：30°，45°，60°角的正弦值记为$\frac{\sqrt{1}}{2}$，$\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\frac{\sqrt{3}}{2}$；余弦值记为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\frac{\sqrt{1}}{2}$；正切值记为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\frac{\sqrt{3^2}}{3}$，$\frac{\sqrt{3^3}}{3}$.




（3）**口诀记忆法**：1，2，3；3，2，1；3，9，27；弦比2，切比3，分子根号别忘添.

## Ⅰ 夯实基础·逐点练 ☞（答案见224页） 随堂导练

### 知识点1 特殊角（30°，45°，60°）的三角函数值

1. 【中考·天津】2sin 60°的值等于（　　）

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

2. 【中考·滨州】下列运算：sin 30° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sqrt{8}=2\sqrt{2}$，$\pi^0=\pi$，$2^{-2}=-4$，其中运算结果正确的个数为（　　）

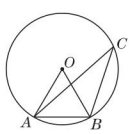
A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

3. 【中考·包头】计算 $\sin^2 45°+\cos 30°\cdot\tan 60°$，其结果是（　　）

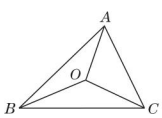
A. 2　　B. 1　　C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{5}}{4}$

4. 如图，点$A$，$B$，$C$在⊙$O$上，$\angle ACB=30°$，则$\sin\angle AOB$的值是（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$




（第4题）




（第5题）

5. 如图，点$O$在△$ABC$内，且到三个顶点的距离相等，若$\angle BOC=120°$，则$\tan\angle BAC$的值为（　　）

A. $\sqrt{3}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

### 知识点2 特殊三角函数值的对应角

6. 【中考·怀化】已知$\angle\alpha$为锐角，且$\sin\alpha=\frac{1}{2}$，则$\angle\alpha=$（　　）

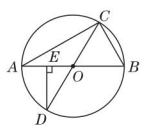
A. 30°　　B. 45°　　C. 60°　　D. 90°

7. 在△$ABC$中，$\angle A$，$\angle B$都是锐角，且$\sin A=\frac{1}{2}$，$\cos B=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则△$ABC$的形状是（　　）

A. 直角三角形　　B. 钝角三角形

C. 锐角三角形　　D. 不能确定

8. 如图，△$ABC$内接于⊙$O$，$AB$，$CD$为⊙$O$的直径，$DE\perp AB$于点$E$，$\sin A=\frac{1}{2}$，则$\angle D$的度数是_____.




（第8题）

### 知识点3 锐角三角函数间的关系

9. 在Rt△$ABC$中，$\angle C=90°$，下列式子不一定成立的是（　　）

A. $\tan A=\frac{\sin A}{\cos B}$　　B. $\sin^2 A+\cos^2 A=1$

C. $\sin^2 A+\sin^2 B=1$　　D. $\tan A\cdot\tan B=1$

10. 【中考·汕尾】在Rt△$ABC$中，$\angle C=90°$，若$\sin A=\frac{3}{5}$，则$\cos B$的值是（　　）

A. $\frac{4}{5}$　　B. $\frac{3}{5}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{4}{3}$

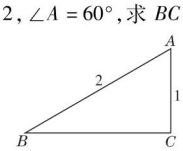
11. 当$45°<\angle A<90°$时，下列不等式中正确的是（　　）

A. $\tan A>\cos A>\sin A$　　B. $\cos A>\tan A>\sin A$

C. $\sin A>\tan A>\cos A$　　D. $\tan A>\sin A>\cos A$

### 易错点 忽视锐角的三角函数值是在直角三角形中求出这一条件而致错

12. 如图，在△$ABC$中，$AC=1$，$AB=2$，$\angle A=60°$，求$BC$的长.




（第12题）



余弦在英语中写作cosine，符号为cos，是对拉丁语comlementi sinus（正弦的补）的简写.（待续）

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

## Ⅱ 整合方法 · 提升练 (答案见 224 页) 课后导练

**考查角度 1** 利用特殊角的三角函数值计算

**13.** 求下列各式的值：

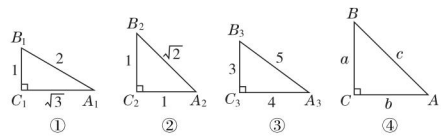
(1)【中考 · 成都】$2^{-2}+\sqrt[3]{8}-2\sin 60°+\left|-\sqrt{3}\right|$；

(2)$\dfrac{\sin 60° \cdot \tan 45°}{\tan 30°}-\cos 30° \cdot \tan 30°$；

(3)$\sin 30°-\cos^2 45°+\dfrac{3}{4}\tan^2 30°+\sin^2 60°-\cos 60°$.

**考查角度 2** 利用三角函数定义说明同角三角函数的平方关系

**14.** 【中考 · 遂宁】如图①②③，根据图中数据完成填空，再按要求答题：




(第 14 题)

$\sin^2 A_1+\sin^2 B_1=$_____；$\sin^2 A_2+\sin^2 B_2=$_____；$\sin^2 A_3+\sin^2 B_3=$_____.

(1)观察上述等式，猜想：在 Rt$\triangle ABC$ 中，若 $\angle C=90°$，则有 $\sin^2 A+\sin^2 B=$_____.

(2)如图④，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的对边分别是 $a$，$b$，$c$，利用三角函数的定义和勾股定理，说明你的猜想.

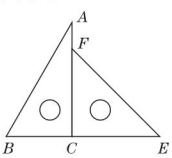
(3)已知：$\angle A$，$\angle B$ 均为锐角，$\angle A+\angle B=90°$，且 $\sin A=\dfrac{5}{13}$，求 $\sin B$.

## Ⅲ 探究培优 · 拓展练 (答案见 224 页) 课后选练

**拔尖角度 1** 利用特殊角的三角函数值解三角尺中的数学问题

**15.** 【中考 · 丽水】数学拓展课程《玩转学具》课堂中，小陆同学发现，一副三角尺中，含 45°的三角尺的斜边与含 30°的三角尺的长直角边相等，于是，小陆同学提出一个问题，如图，将一副三角尺直角顶点重合拼放在一起，点 $B$，$C$，$E$ 在同一直线上，若 $BC=2$，求 $AF$ 的长.

请你运用所学的数学知识解决这个问题.



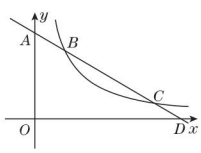

(第 15 题)

**拔尖角度 2** 利用特殊三角函数值求函数图象中的角

**16.** 如图，直线 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+b$ 与 $x$ 轴、$y$ 轴分别交于 $D$，$A$ 两点，与双曲线 $y=\dfrac{k}{x}$ 在第一象限交于 $B$，$C$ 两点，且 $AB \cdot AC=4$.

(1)求 $\angle ADO$ 的度数；

(2)求 $k$ 的值.




(第 16 题)

趣味数学

正切的数学符号为 tan，英文名称是 tangent，这个词汇翻译自拉丁语 tangens，意思是 touching（在此，不好用汉语确切地表示这个概念，故使用英语解析，拙译为“挨着”）.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 1.2 锐角三角函数的计算

**名师点金**

1. 利用计算器可求锐角的三角函数值，按键顺序为：先按 sin 键或 cos 键或 tan 键，再按角度值，最后按 = 键就可求出相应的三角函数值.
2. 已知锐角三角函数值也可求相应的锐角，按键顺序为：先按 SHIFT 键，再按 $\sin^{-1}$ 键或 $\cos^{-1}$ 键或 $\tan^{-1}$ 键，然后输入三角函数值，最后按 = 键就可求出相应角度.

## 夯实基础 · 逐点练 （答案见224页） 随堂导练

### 知识点1 用计算器求已知锐角的三角函数值

1. 用计算器计算$\sqrt{2}\cos 55°$时，按键顺序正确的是（　　）

A. 2 $\sqrt{\ }$ × cos 5 5 =

B. $\sqrt{\ }$ 2 cos 5 5 0 =

C. $\sqrt{\ }$ 2 cos 5 5 =

D. 2 $\sqrt{\ }$ 5 5 cos =

2. 利用计算器求 sin 30°时，依次按键 sin 3 0 =，则计算器上显示的结果是（　　）

A. 0.5　　B. 0.707　　C. 0.866　　D. 1

3. 用计算器计算 cos 44°的结果（精确到0.01）是（　　）

A. 0.90　　B. 0.72　　C. 0.69　　D. 0.66

4. 用计算器验证，下列等式正确的是（　　）

A. $\sin 18°24′ + \sin 35°36′ = \sin 54°$

B. $\sin 65°54′ - \sin 35°54′ = \sin 30°$

C. $2\sin 15°30′ = \sin 31°$

D. $\sin 72°18′ - \sin 12°18′ = \sin 47°42′$

### 知识点2 用计算器求已知三角函数值的对应角

5. 已知 $\sin\alpha = \frac{1}{2}$，求 $\alpha$，若用科学计算器计算且结果以度、分、秒为单位，最后应按键（　　）

A. AC/ON　　B. SHIFT

C. MODE　　D. °′″

6. 已知 $\alpha$ 为锐角，且 $\tan\alpha = 3.387$，下列各值中与 $\alpha$ 最接近的是（　　）

A. 73°33′　　B. 73°27′

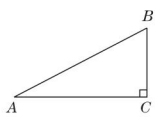
C. 16°27′　　D. 16°21′

7. 在$\triangle ABC$中，$\angle C = 90°$，$BC = 5$，$AB = 13$，用科学计算器求$\angle A$约等于（　　）

A. 24°38′　　B. 65°22′

C. 67°23′　　D. 22°37′

8. 【中考 · 陕西】如图，有一滑梯 $AB$，其水平宽度 $AC$ 为5.3米，铅直高度 $BC$ 为2.8米，则$\angle A$的度数约为_____（用科学计算器计算，结果精确到0.1°）.




（第8题）

### 知识点3 用计算器探究三角函数的性质

9. 在 Rt$\triangle ABC$中，$\angle C = 90°$，下列各式中一定成立的是（　　）

A. $\sin A = \sin B$　　B. $\tan A = \tan B$

C. $\sin A = \cos B$　　D. $\cos A = \cos B$

10. 用计算器比较 tan 25°，sin 27°，cos 26°的大小关系是（　　）

A. $\tan 25° < \cos 26° < \sin 27°$

B. $\tan 25° < \sin 27° < \cos 26°$

C. $\sin 27° < \tan 25° < \cos 26°$

D. $\cos 26° < \tan 25° < \sin 27°$

11. 用计算器求 sin 15°，sin 25°，sin 35°，sin 45°，sin 55°，sin 65°，sin 75°，sin 85°的值，研究 $\sin\alpha$ 的值随锐角 $\alpha$ 变化的规律，根据这个规律判断：若 $\frac{1}{2} < \sin\alpha < \frac{\sqrt{3}}{2}$，则（　　）

A. $30° < \alpha < 60°$　　B. $30° < \alpha < 90°$

C. $0° < \alpha < 60°$　　D. $60° < \alpha < 90°$

### 易错点 不区分35°29′与35.29°而导致错误

12. 用计算器求 sin 35°29′的值（结果精确到0.001）.



阿拉伯数字1，2，3，4，5，6，7，8，9，0是国际上通用的数码. 这种数字的创制并非阿拉伯人，但也不能抹掉阿拉伯人的功劳.（待续）

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

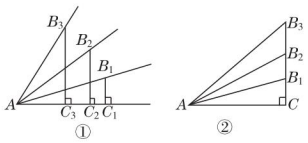
## Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞(答案见 224 页) 课后导练

**考查角度 1** 探究三角函数的增减性

**13.** (1) 如图①,$AB_1 = AB_2 = AB_3$,$B_1C_1 \perp AC_1$ 于点 $C_1$,$B_2C_2 \perp AC_2$ 于点 $C_2$,$B_3C_3 \perp AC_3$ 于点 $C_3$,试探索随着锐角度数的增大,它的正弦值变化的规律;

(2) 如图②,$\angle C = 90°$,试探索随着锐角度数的增大,它的余弦值变化的规律;

(3) 根据你探索到的规律,试比较 18°,34°,50°,62°,88°这些锐角的正弦值的大小和余弦值的大小.



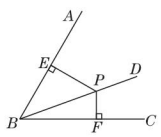

(第 13 题)

**考查角度 2** 利用三角函数值比较线段的长短

**14.** 如图,已知 $\angle ABC$ 和射线 $BD$ 上一点 $P$(点 $P$ 与点 $B$ 不重合,且点 $P$ 到 $BA$,$BC$ 的距离分别为 $PE$,$PF$ 的长).

(1) 若 $\angle EBP = 40°$,$\angle FBP = 20°$,试比较 $PE$,$PF$ 的长短;

(2) 若 $\angle EBP = \alpha$,$\angle FBP = \beta$,$\alpha$,$\beta$ 都是锐角,且 $\alpha > \beta$,请判断 $PE$,$PF$ 的长短.




(第 14 题)

## Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞(答案见 225 页) 课后选练

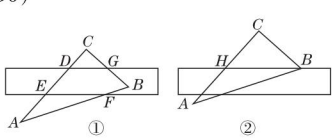
**拔尖角度 1** 利用三角函数解几何应用问题

**15.** 【中考 · 酒泉】如图①,将直尺摆放在三角板上,使直尺与三角板的边分别交于点 $D$,$E$,$F$,$G$,已知 $\angle CGD = 42°$.

(1) 求 $\angle CEF$ 的度数;

(2) 将直尺向下平移,使直尺的边缘通过三角板的顶点 $B$,交 $AC$ 边于点 $H$,如图②,点 $H$,$B$ 在直尺上的读数分别为 4,13.4,求 $BC$ 的长(结果保留两位小数).

(参考数据:sin 42° ≈ 0.67,cos 42° ≈ 0.74,tan 42° ≈ 0.90)



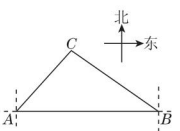

(第 15 题)

**拔尖角度 2** 利用三角函数解实际应用问题

**16.** 【中考 · 贺州】如图,一艘海轮在 $A$ 点时测得灯塔 $C$ 在它的北偏东 42°方向上,它沿正东方向航行 80 海里后到达 $B$ 处,此时灯塔 $C$ 在它的北偏西 55°方向上.

(1) 求海轮在航行过程中与灯塔 $C$ 的最短距离(结果精确到 0.1 海里);

(2) 求海轮在 $B$ 处时与灯塔 $C$ 的距离(结果保留整数).(参考数据:sin 55° ≈ 0.819,cos 55° ≈ 0.574,tan 55° ≈ 1.428,tan 42° ≈ 0.900,tan 35° ≈ 0.700,tan 48° ≈ 1.111)




(第 16 题)



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 阶段方法技巧训练

## 专训1 求锐角三角函数值的常用方法 （答案见225页）

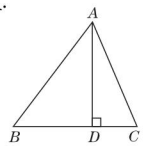
**名师点金**

锐角三角函数刻画了直角三角形中边和角之间的关系，对于非直角三角形，要把它转化为直角三角形求解. 在求锐角的三角函数值时，首先要明确是求锐角的正弦值，余弦值还是正切值，其次要弄清是哪两条边的比.

### 方法1 直接用锐角三角函数的定义

1. 【中考·雅安】在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AB=5$，$BC=4$，则 $\sin A=$ _____.

2. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AD\perp BC$，垂足是 $D$，若 $BC=14$，$AD=12$，$\tan\angle BAD=\frac{3}{4}$，求 $\sin C$ 的值.

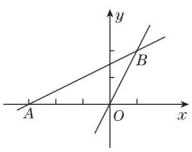



（第2题）

3. 如图，直线 $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ 与 $x$ 轴交于点 $A$，与直线 $y=2x$ 交于点 $B$.

（1）求点 $B$ 的坐标；

（2）求 $\sin\angle BAO$ 的值.




（第3题）

### 方法2 利用同角或互余两角三角函数间的关系

4. 若 $\angle A$ 为锐角，且 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则 $\cos A=$（　　）

A. 1　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

5. 若 $\alpha$ 为锐角，且 $\cos\alpha=\frac{12}{13}$，则 $\sin(90°-\alpha)=$（　　）

A. $\frac{5}{13}$　　B. $\frac{12}{13}$　　C. $\frac{5}{12}$　　D. $\frac{12}{5}$

6. 若 $\alpha$ 为锐角，且 $\sin^2\alpha+\cos^2 30°=1$，则 $\alpha=$ _____.

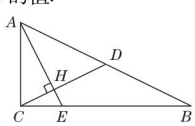
### 方法3 巧设参数

7. 【中考·滨州】在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，若 $\tan A=\frac{1}{2}$，则 $\sin B=$ _____.

8. 已知，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 所对的边长分别为 $a$，$b$，$c$，且 $a$，$b$，$c$ 满足 $b^2=(c+a)(c-a)$. 若 $5b-4c=0$，求 $\sin A+\sin B$ 的值.

### 方法4 利用等角来替换

9. 如图，已知在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$CD$ 是斜边 $AB$ 上的中线，过点 $A$ 作 $AE\perp CD$，$AE$ 分别与 $CD$，$CB$ 相交于点 $H$，$E$ 且 $AH=2CH$，求 $\sin B$ 的值.




（第9题）



三角函数趣味记忆：一、有一天，sin 方了一下，cos 也方了一下，他们于是相爱了，成为完美的1；二、sin 和 cos 有一天除了一下，于是 tan 诞生了；（待续）

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

## 专训2 同角或互余两角的三角函数关系的应用 (答案见225页)

**名师点金**

1. 同角三角函数关系：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

2. 互余两角的三角函数关系：$\sin\alpha=\cos(90°-\alpha)$，$\cos\alpha=\sin(90°-\alpha)$，$\tan\alpha\cdot\tan(90°-\alpha)=1$.

### 训练角度1 同角的三角函数关系的应用

1. 已知$\dfrac{\sin A}{\cos A}=4$，求$\dfrac{\sin A-3\cos A}{4\sin A+\cos A}$的值.

2. 若$\alpha$为锐角，$\sin\alpha-\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，求$\sin\alpha+\cos\alpha$的值.

### 训练角度2 互余两角的三角函数关系的应用

3. 若$45°-\alpha$和$45°+\alpha$均为锐角，则下列关系式正确的是(　　)

A. $\sin(45°-\alpha)=\sin(45°+\alpha)$

B. $\sin^2(45°-\alpha)+\cos^2(45°+\alpha)=1$

C. $\sin^2(45°-\alpha)+\sin^2(45°+\alpha)=1$

D. $\cos^2(45°-\alpha)+\sin^2(45°+\alpha)=1$

4. 计算$\tan 1°\cdot\tan 2°\cdot\tan 3°\cdot\cdots\cdot\tan 88°\cdot\tan 89°$的值.

### 训练角度3 同角的三角函数间的关系在一元二次方程中的应用

5. 已知$\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\dfrac{12}{25}$($\alpha$为锐角)，求一个一元二次方程，使其两根分别为$\sin\alpha$和$\cos\alpha$.

6. 已知$\alpha$为锐角且$\sin\alpha$是方程$2x^2-7x+3=0$的一个根，求$\sqrt{1-2\sin\alpha\cos\alpha}$的值.

趣味数学 三、tan很寂寞，于是数学家看不下去了，创造了cot陪陪他；四、tan找不到妈妈cos时，就会方一下然后去找1，于是在根号叔叔的帮助下，找到了妈妈cos.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 1.3 解直角三角形

## 第1课时 解直角三角形

**名师点金**

1. **三个概念**：在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，正弦：$\sin A=\frac{\angle A\text{的对边}}{\text{斜边}}$；余弦：$\cos A=\frac{\angle A\text{的邻边}}{\text{斜边}}$；正切：$\tan A=\frac{\angle A\text{的对边}}{\angle A\text{的邻边}}$.
2. **两种类型**：**一是**求某一锐角的三角函数值；**二是**给出三角函数值，得到边的关系，求线段的长度.
3. **一种构造**：锐角三角函数的概念是在直角三角形中定义的，在非直角三角形中利用锐角三角函数解决问题时要通过构造直角三角形求解.

## I 夯实基础 · 逐点练 （答案见225页） 随堂导练

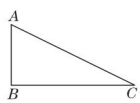
### 知识点1 已知两边解直角三角形

1. 在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AB=2\sqrt{5}$，$AC=\sqrt{15}$，则 $\angle A$ 的度数为（　　）

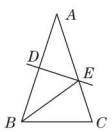
A. 90°　　B. 60°　　C. 45°　　D. 30°

2. 【中考 · 兰州】如图，$\triangle ABC$ 中，$\angle B=90°$，$BC=2AB$，则 $\cos A=$（　　）

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$



（第2题）



（第3题）

3. 【中考 · 绵阳】如图，$\triangle ABC$ 中，$AB=AC=4$，$\angle C=72°$，$D$ 是 $AB$ 中点，点 $E$ 在 $AC$ 上，$DE\perp AB$，连结 $BE$，则 $\cos A$ 的值为（　　）

A. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

C. $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$　　D. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

### 知识点2 已知一边及一锐角解直角三角形

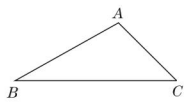
4. 在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\angle B=30°$，$AB=8$，则 $BC$ 的长是（　　）

A. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$　　B. 4　　C. $8\sqrt{3}$　　D. $4\sqrt{3}$

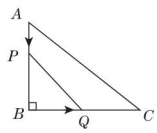
5. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，若 $\angle B=2\angle A$，$b=3$，则 $a$ 等于（　　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. 6　　D. $\frac{3}{2}$

6. 【中考 · 盐城】如图，在 $\triangle ABC$ 中，$BC=\sqrt{6}+\sqrt{2}$，$\angle C=45°$，$AB=\sqrt{2}AC$，则 $AC$ 的长为_____.



（第6题）



（第9题）

### 知识点3 已知一边及一锐角三角函数解直角三角形

7. 【中考 · 兰州】在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\sin A=\frac{3}{5}$，$BC=6$，则 $AB=$（　　）

A. 4　　B. 6　　C. 8　　D. 10

8. 【中考 · 怀化】在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\sin A=\frac{4}{5}$，$AC=6$ cm，则 $BC$ 的长度为（　　）

A. 6 cm　　B. 7 cm　　C. 8 cm　　D. 9 cm

9. 【中考 · 西宁】如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=90°$，$\tan C=\frac{3}{4}$，$AB=6$ cm. 动点 $P$ 从点 $A$ 开始沿边 $AB$ 向点 $B$ 以 1 cm/s的速度移动，动点 $Q$ 从点 $B$ 开始沿边 $BC$ 向点 $C$ 以2 cm/s的速度移动. 若 $P$，$Q$ 两点分别从 $A$，$B$ 两点同时出发，在运动过程中，$\triangle PBQ$ 的最大面积是（　　）

A. 18 $cm^2$　　B. 12 $cm^2$

C. 9 $cm^2$　　D. 3 $cm^2$

### 易错点 受思维定式影响误以为 $\angle C$ 的对边为斜边造成错误

10. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=90°$，$BC=3$，$AB=5$，求 $\tan A$，$\cos A$ 的值.



我国古代没有出现角的函数概念，只用勾股定理解决了一些三角学范围内的实际问题.（待续）



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

## Ⅱ 整合方法 · 提升练 ☞(答案见 226 页) 课后导练

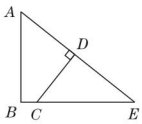
### 考查角度 1 利用三角函数解直角三角形

**11.** 【中考 · 包头】如图,已知四边形 $ABCD$ 中,$\angle ABC=90°$,$\angle ADC=90°$,$AB=6$,$CD=4$,$BC$ 的延长线与 $AD$ 的延长线交于点 $E$.

(1)若 $\angle A=60°$,求 $BC$ 的长;

(2)若 $\sin A=\frac{4}{5}$,求 $AD$ 的长.

(注意:本题中的计算过程和结果均保留根号)



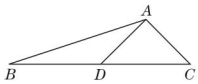

(第 11 题)

### 考查角度 2 利用化斜为直法解非直角三角形

**12.** 【中考 · 襄阳】如图,$AD$ 是 $\triangle ABC$ 的中线,$\tan B=\frac{1}{3}$,$\cos C=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$AC=\sqrt{2}$. 求:

(1)$BC$ 的长;

(2)$\sin\angle ADC$ 的值.




(第 12 题)

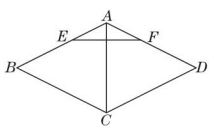
## Ⅲ 探究培优 · 拓展练 ☞(答案见 226 页) 课后选练

### 拔尖角度 1 利用三角函数解与四边形有关的综合问题

**13.** 【中考 · 北京】如图,在菱形 $ABCD$ 中,$AC$ 为对角线,点 $E$,$F$ 分别在 $AB$,$AD$ 上,$BE=DF$,连结 $EF$.

(1)求证:$AC\perp EF$; 【导学号:1858154】

(2)延长 $EF$ 交 $CD$ 的延长线于点 $G$,连结 $BD$ 交 $AC$ 于点 $O$. 若 $BD=4$,$\tan G=\frac{1}{2}$,求 $AO$ 的长.



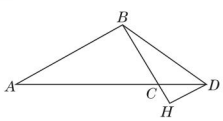

(第 13 题)

### 拔尖角度 2 利用三角函数解与相似有关的综合问题

**14.** 【中考 · 连云港】如图,在 $\triangle ABC$ 中,$\angle ABC=90°$,$BC=3$,$D$ 为 $AC$ 延长线上一点,$AC=3CD$,过点 $D$ 作 $DH\parallel AB$,交 $BC$ 的延长线于点 $H$.

(1)求 $BD\cdot\cos\angle HBD$ 的值;

(2)若 $\angle CBD=\angle A$,求 $AB$ 的长.




(第 14 题)



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 第2课时 用解直角三角形解坡度问题

**名师点金**

1. 坡角是坡面与水平面间的夹角；坡度（或坡比）是坡面的铅垂高度与水平长度的比.
2. 坡度与坡角的关系是坡度越大，坡角就越大，坡面就越陡；坡角的正切值等于坡比.
3. 解决坡度问题时，可适当添加辅助线，将梯形分割为直角三角形和矩形.

## Ⅰ 夯实基础 · 逐点练 ☞（答案见226页） 随堂导练

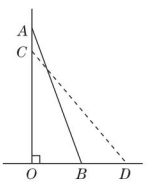
### 知识点1 坡角的应用

1. 【中考 · 广州】如图，有一斜坡 $AB$，坡顶 $B$ 离地面的高度 $BC$ 为 30 m，斜坡的倾斜角是 $\angle BAC$，若 $\tan\angle BAC=\frac{2}{5}$，则此斜坡的水平距离 $AC$ 为（　　）

A. 75 m　　B. 50 m　　C. 30 m　　D. 12 m



（第1题）



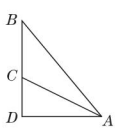
（第2题）

2. 【中考 · 德州】如图，一架长为6米的梯子 $AB$ 斜靠在一竖直的墙 $AO$ 上，这时测得 $\angle ABO=70°$，如果梯子的底端 $B$ 外移到 $D$，则梯子顶端 $A$ 下移到 $C$，这时又测得 $\angle CDO=50°$，那么 $AC$ 的长度约为 _____ 米（参考数据：$\sin 70°\approx 0.94$，$\sin 50°\approx 0.77$，$\cos 70°\approx 0.34$，$\cos 50°\approx 0.64$）.

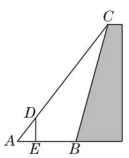
### 知识点2 坡度的应用

3. 【中考 · 济宁】如图，斜面 $AC$ 的坡度（$CD$ 与 $AD$ 的比）为1∶2，$AC=3\sqrt{5}$ 米，坡顶有一旗杆 $BC$，旗杆顶端 $B$ 点与 $A$ 点有一条彩带相连. 若 $AB=10$ 米，则旗杆 $BC$ 的高度为（　　）

A. 5 米　　B. 6 米　　C. 8 米　　D. $(3+\sqrt{5})$ 米



（第3题）

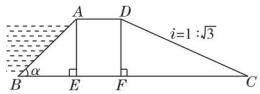


（第4题）

4. 如图，为了测量山坡护坡石坝的坡度（坡面的铅直高度与水平宽度的比称为坡度），把一根长5 m的杆子 $AC$ 斜靠在石坝旁，量出离杆底1 m处的 $D$ 点离地面的高度 $DE=0.8$ m，又量得杆底与坝脚的距离 $AB=2$ m，则石坝的坡度为（　　）

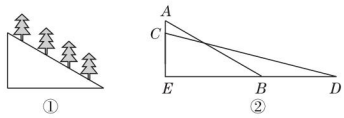
A. 1∶5　　B. 1∶0.25　　C. 1∶4　　D. 1∶0.5

5. 【中考 · 德阳】如图，某拦水大坝的横断面为梯形 $ABCD$，$AE$，$DF$ 为梯形的高，其中迎水坡 $AB$ 的坡角 $\alpha=45°$，坡长 $AB=6\sqrt{2}$ 米，背水坡 $CD$ 的坡度 $i=1:\sqrt{3}$（$i$ 为 $DF$ 与 $FC$ 的比值），则背水坡 $CD$ 的坡长为 _____ 米.



（第5题）

6. 自开展“全民健身运动”以来，喜欢户外步行健身的人越来越多. 为方便群众步行健身，某地政府决定对一段如图①所示的坡路进行改造. 如图②，改造前的斜坡 $AB=200$ 米，坡度为 $1:\sqrt{3}$；将斜坡 $AB$ 的高度 $AE$ 降低 $AC=20$ 米后，斜坡 $AB$ 被改造为斜坡 $CD$，其坡度为1∶4. 求斜坡 $CD$ 的长.（结果保留根号）



（第6题）



1631年西方三角学首次传入我国，以德国学者邓玉函、汤若望和我国学者徐光启合编的《大测》为代表. 同年徐光启等人还编写了《测量全义》，其中有平面三角和球面三角的论述.（待续）

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

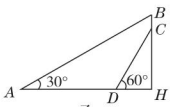
## Ⅱ 整合方法 · 提升练 (答案见 226 页) 课后导练

### 考查角度 1 利用坡角解测高应用

**7.** 【中考 · 娄底】芜湖长江大桥是中国跨度最大的公路和铁路两用桥梁,大桥采用低塔斜拉桥桥型(如图甲),图乙是从图甲引申出的平面图,假设你站在桥上测得拉索 $AB$ 与水平桥面的夹角是 30°,拉索 $CD$ 与水平桥面的夹角是 60°,两拉索顶端的距离 $BC$ 为 2 米,两拉索底端的距离 $AD$ 为 20 米,请求出立柱 $BH$ 的长.(结果精确到 0.1 米,$\sqrt{3}\approx1.732$)



甲

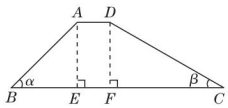



乙

(第 7 题)

### 考查角度 2 利用坡角解测宽应用

**8.** 【中考 · 十堰】如图,拦水坝的横断面为梯形 $ABCD$,$AD=3$ m,坝高 $AE=DF=6$ m,坡角 $\alpha=45°$,$\beta=30°$,求 $BC$ 的长.




(第 8 题)

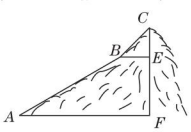
## Ⅲ 探究培优 · 拓展练 (答案见 226 页) 课后选练

### 拔尖角度 1 利用坡角解分段高度应用

**9.** 【中考 · 黄石】如图,为测量一座山峰 $CF$ 的高度,将此山的某侧山坡划分为 $AB$ 和 $BC$ 两段,每一段山坡近似是“直”的,测得坡长 $AB=800$ 米,$BC=200$ 米,坡角 $\angle BAF=30°$,$\angle CBE=45°$.

(1)求 $AB$ 段山坡的高度 $EF$;

(2)求山峰的高度 $CF$.($\sqrt{2}\approx1.414$,$CF$ 结果精确到米)



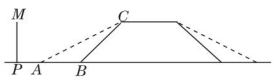

(第 9 题)

### 拔尖角度 2 利用坡角解说理问题

**10.** 【中考 · 天水】某地的一座人行天桥如图所示,天桥高为 6 米,坡面 $BC$ 的坡度为 1 ∶ 1,文化墙 $PM$ 在天桥底部正前方 8 米($PB$ 的长)处,为了方便行人推车过天桥,有关部门决定降低坡度,使新坡面的坡度为 1 ∶ $\sqrt{3}$.(参考数据:$\sqrt{2}\approx1.414$,$\sqrt{3}\approx1.732$)

(1)若新坡面坡角为 $\alpha$,求坡角 $\alpha$ 的度数;

(2)有关部门规定,文化墙距天桥底部小于 3 米时应拆除,天桥改造后,该文化墙 $PM$ 是否需要拆除?请说明理由.




(第 10 题)

趣味数学

1653 年薛凤祚与波兰学者穆尼阁合编《三角算法》,以“三角”取代“大测”,确立了“三角”名称. 1877 年华蘅芳等人对三角级数展开式等问题有过独立的探讨.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 第3课时　用解直角三角形解方位角问题

**名师点金**

解决与方位角有关的实际问题时，必须先在每个位置中心建立方向标，然后根据方位角标出图中已知角的度数，最后在某个直角三角形内利用锐角三角函数解决问题.

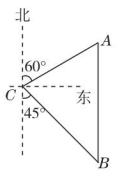
## Ⅰ 夯实基础·逐点练 ☞（答案见227页） 随堂导练

### 知识点1 同一点的两个方位角的应用

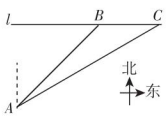
1. 【中考·长沙】如图，一艘轮船从位于灯塔$C$的北偏东60°方向，距离灯塔60 n mile的小岛$A$出发，沿正南方向航行一段时间后，到达位于灯塔$C$的南偏东45°方向上的$B$处，这时轮船$B$与小岛$A$的距离是(　　)

A. $30\sqrt{3}$ n mile　　B. 60 n mile

C. 120 n mile　　D. $(30+30\sqrt{3})$ n mile



（第1题）



（第2题）

2. 【中考·辽阳】某数学小组三名同学运用自己所学的知识检测车速，他们将观测点设在一段笔直的公路旁且距公路100米的点$A$处，如图所示，直线$l$表示公路，一辆小汽车由公路上的$B$处向$C$处匀速行驶，用时5秒，经测量，点$B$在点$A$北偏东45°方向上，点$C$在点$A$北偏东60°方向上，这段公路最高限速60千米/时，此车_____.（填“超速”或“没有超速”）（参考数据：$\sqrt{3}\approx1.732$）

### 知识点2 两个不同点的方位角的应用

3. 【中考·绵阳】一艘在南北航线上的测量船，于$A$点处测得海岛$B$在点$A$的南偏东30°方向，继续向南航行30海里到达$C$点时，测得海岛$B$在$C$点的北偏东15°方向，那么海岛$B$离此航线的最近距离是（结果保留小数点后两位）（参考数据：$\sqrt{3}\approx1.732$，$\sqrt{2}\approx1.414$）(　　)

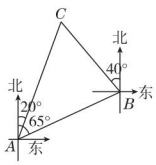
A. 4.64海里　　B. 5.49海里

C. 6.12海里　　D. 6.21海里

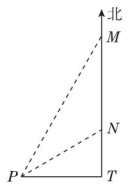
4. 【中考·泰安】如图，一艘船由$A$港沿北偏东65°方向航行$30\sqrt{2}$ km至$B$港，然后再沿北偏西40°方向航行至$C$港，$C$港在$A$港北偏东20°方向，则$A$，$C$两港之间的距离为(　　)

A. $(30+30\sqrt{3})$ km　　B. $(30+10\sqrt{3})$ km

C. $(10+30\sqrt{3})$ km　　D. $30\sqrt{3}$ km



（第4题）



（第5题）

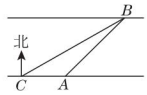
5. 【中考·黄石】如图，一轮船在$M$处观测灯塔$P$位于南偏西30°方向，该轮船沿正南方向以15海里/小时的速度匀速航行2小时后到达$N$处，再观测灯塔$P$位于南偏西60°方向. 若该轮船继续向南航行至离灯塔$P$最近的位置$T$处，此时轮船与灯塔之间的距离$PT$为_____海里.（结果保留根号）

6. 【中考·绍兴】如图①，某社会实践活动小组实地测量两岸互相平行的一段河的宽度，在河的南岸边点$A$处，测得河的北岸边点$B$在其北偏东45°方向，然后向西走60 m到达$C$点，测得点$B$在点$C$的北偏东60°方向，如图②.

（1）求$\angle CBA$的度数；

（2）求出这段河的宽.（结果精确到1 m，备用数据：$\sqrt{2}\approx1.41$，$\sqrt{3}\approx1.73$）


①



②

（第6题）



一天，数学家觉得自己受够了数学，于是他跑到消防队去宣布他想当消防员. 消防队长说：“您看上去不错，可是我得先给您做一个测试.”消防队长问：“假设房子起火，您怎么办？”（待续）

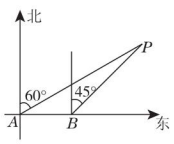
趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

## Ⅱ 整合方法 · 提升练 (答案见 227 页) 课后导练

**考查角度 1** 利用方位角解同侧两点测角的安全航行问题

7. 【中考 · 宿迁】如图,大海中某灯塔 $P$ 周围 10 海里范围内有暗礁,一艘海轮在点 $A$ 处观察灯塔 $P$ 在北偏东 60°方向,该海轮向正东方向航行 8 海里到达点 $B$ 处,这时观测灯塔恰好在北偏东 45°方向. 如果海轮继续向正东方向航行,会有触礁的危险吗? 试说明理由. (参考数据:$\sqrt{3}\approx1.73$)



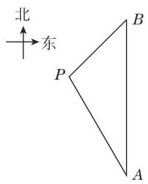

(第 7 题)

**考查角度 2** 利用方位角解异侧两点测角的距离问题

8. 【中考 · 随州】如图,在一次海上救援中,两艘专业救助船 $A$,$B$ 同时收到某事故渔船的求救讯息,已知此时救助船 $B$ 在 $A$ 的正北方向,事故渔船 $P$ 在救助船 $A$ 的北偏西 30°方向上,在救助船 $B$ 的西南方向上,且事故渔船 $P$ 与救助船 $A$ 相距 120 海里.

(1)求收到求救讯息时事故渔船 $P$ 与救助船 $B$ 之间的距离;

(2)若救助船 $A$,$B$ 分别以 40 海里/时,30 海里/时的速度同时出发,匀速直线前往事故渔船 $P$ 处搜救,试通过计算判断哪艘船先到达.




(第 8 题)

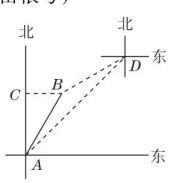
## Ⅲ 探究培优 · 拓展练 (答案见 227 页) 课后选练

**拔尖角度 1** 利用方位角解多点测角的距离问题

9. 【中考 · 资阳】如图,南海某海域有两艘外国渔船 $A$,$B$ 在小岛 $C$ 的正南方向同一处捕鱼. 一段时间后,渔船 $B$ 沿北偏东 30°的方向航行至小岛 $C$ 的正东方向 20 海里处.

(1)求渔船 $B$ 航行的距离;

(2)此时,在 $D$ 处巡逻的中国渔政船同时发现了这两艘渔船,其中 $B$ 渔船在点 $D$ 的南偏西 60°方向,$A$ 渔船在点 $D$ 的西南方向,我渔政船要求这两艘渔船迅速离开中国海域,请分别求出中国渔政船此时到这两艘外国渔船的距离. (注:结果保留根号)



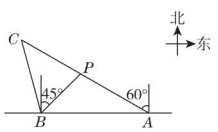

(第 9 题)

**拔尖角度 2** 利用方位角解多点测角的速度问题

10. 如图,在一笔直的海岸线上有 $A$,$B$ 两个观测站,$A$ 观测站在 $B$ 观测站的正东方向,有一艘小船在点 $P$ 处,从 $A$ 处测得小船在北偏西 60°方向,从 $B$ 处测得小船在北偏东 45°方向,点 $P$ 到点 $B$ 的距离是 $3\sqrt{2}$ 千米. (注:结果有根号的保留根号)

(1)求 $A$,$B$ 两观测站之间的距离;

(2)小船从点 $P$ 处沿射线 $AP$ 的方向以 $\sqrt{3}$ 千米/时的速度进行沿途考察,航行一段时间后到达点 $C$ 处,此时,从 $B$ 测得小船在北偏西 15°方向,求小船沿途考察的时间.




(第 10 题)



数学家回答:"我把消防栓接到软管上,打开水龙头,把火浇灭."消防队长说:"完全正确!" (待续)



关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

# 第4课时 用解直角三角形解视角问题

**名师点金**

解答含有仰角、俯角问题的方法：

（1）仰角和俯角是视线相对于水平线而言的，不同位置的仰角和俯角是不同的，可巧记为“上仰下俯”. 在测量物体的高度时，要善于将实际问题抽象为数学问题.

（2）视线、水平线、物体的高构成直角三角形，已知仰角（俯角）和另一边，利用解直角三角形的知识就可以求出物体的高度.

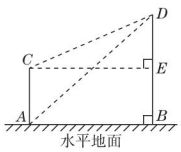
（3）弄清仰角、俯角的定义，根据题意画出几何图形，将实际问题中的数量关系归结到直角三角形中来求解.

## Ⅰ 夯实基础 · 逐点练 ☞（答案见227页） 随堂导练

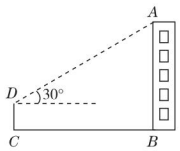
### 知识点1 仰角的应用

1. 【中考 · 河北】如图，从点 $C$ 观测点 $D$ 的仰角是（　　）

A. $\angle DAB$　B. $\angle DCE$　C. $\angle DCA$　D. $\angle ADC$




（第1题）

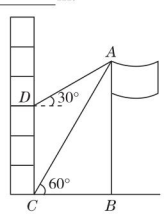



（第2题）

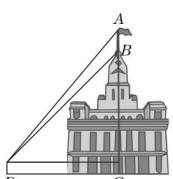
2. 【中考 · 苏州】如图，小亮为了测量校园里教学楼 $AB$ 的高度，将测角仪 $CD$ 竖直放置在与教学楼水平距离为 $18\sqrt{3}$ m 的地面上，若测角仪的高度是 1.5 m，测得教学楼的顶部 $A$ 处的仰角为 30°，则教学楼的高度是（　　）

A. 55.5 m　B. 54 m　C. 19.5 m　D. 18 m

3. 【中考 · 天门】如图，为测量旗杆 $AB$ 的高度，在教学楼一楼点 $C$ 处测得旗杆顶部的仰角为 60°，在四楼点 $D$ 处测得旗杆顶部的仰角为 30°，点 $C$ 与点 $B$ 在同一水平线上，已知 $CD$ = 9.6 m，则旗杆 $AB$ 的高度为_____m.




（第3题）




（第4题）

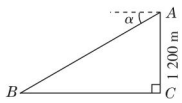
4. 【中考 · 德州】如图，某建筑物 $BC$ 上有一旗杆 $AB$，某人站在与 $BC$ 相距 38 m 的 $D$ 处观测到旗杆顶部 $A$ 的仰角为 50°，观测到旗杆底部 $B$ 的仰角为 45°，则旗杆的高度约为_____.（结果精确到 0.1 m. 参考数据：$\sin 50° \approx 0.77$，$\cos 50° \approx 0.64$，$\tan 50° \approx 1.19$）

### 知识点2 俯角的应用

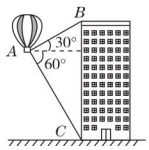
5. 【中考 · 哈尔滨】如图，某飞机在空中 $A$ 处探测到它的正下方地平面上目标 $C$，此时飞行高度 $AC$ = 1 200 m，从飞机上看地平面指挥台 $B$ 的俯角 $\alpha$ = 30°，则飞机 $A$ 与指挥台 $B$ 的距离为（　　）

A. 1 200 m　B. $1\,200\sqrt{2}$ m

C. $1\,200\sqrt{3}$ m　D. 2 400 m




（第5题）



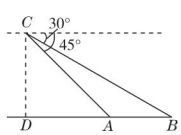

（第6题）

6. 【中考 · 长沙】如图，热气球的探测器显示，从热气球 $A$ 处看一栋楼顶部 $B$ 处的仰角为 30°，看这栋楼底部 $C$ 处的俯角为 60°，热气球 $A$ 处与楼的水平距离为 120 m，则这栋楼的高度为（　　）

A. $160\sqrt{3}$ m　B. $120\sqrt{3}$ m

C. 300 m　D. $160\sqrt{2}$ m

7. 【中考 · 巴彦淖尔】如图，某日，正在我国南海海域作业的一艘大型渔船突然发生险情，相关部门接到求救信号后，立即调遣一架直升机和一艘正在南海巡航的渔政船前往救援，当直升机到达海面 3 000 m 的高空 $C$ 处时，测得 $A$ 处渔政船的俯角为 45°，测得 $B$ 处发生险情渔船的俯角为 30°，此时渔政船和渔船的距离 $AB$ 是（　　）




（第7题）

A. $3\,000\sqrt{3}$ m　B. $3\,000(\sqrt{3}+1)$ m

C. $3\,000(\sqrt{3}-1)$ m　D. $1\,500\sqrt{3}$ m



最后一个问题：假设您走进小巷，而货栈没有起火，您怎么办？”数学家疑惑地思索了半天，终于答道：“我就把货栈点着.”（待续）

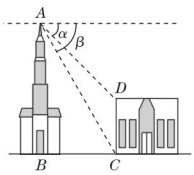
趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

## Ⅱ 整合方法 · 提升练 (答案见 227 页) 课后导练

### 考查角度 1 利用俯角解一点两线问题的应用

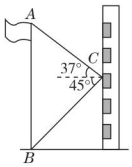
8. 【中考 · 黄冈】如图,两座建筑物的水平距离 $BC$ 为 40 m,从 $A$ 点测得 $D$ 点的俯角 $\alpha$ 为 45°,测得 $C$ 点的俯角 $\beta$ 为 60°,求这两座建筑物 $AB$,$CD$ 的高度.(结果保留一位小数,参考数据:$\sqrt{2}\approx1.414$,$\sqrt{3}\approx1.732$)




(第 8 题)

### 考查角度 2 利用仰、俯角解一点两线问题的应用

9. 如图,小东在教学楼距地面 9 m 高的窗口 $C$ 处,测得正前方旗杆顶部 $A$ 点的仰角为 37°,旗杆底部 $B$ 点的俯角为 45°,升旗时,国旗上端悬挂在距地面 2.25 m 处,若国旗随国歌声冉冉升起,并在国歌播放 46 s 结束时到达旗杆顶端,则国旗匀速上升的速度为多少?(结果保留一位小数,参考数据:sin 37° ≈ 0.60,cos 37° ≈ 0.80,tan 37° ≈ 0.75)

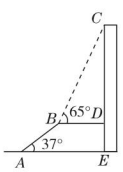



(第 9 题)

## Ⅲ 探究培优 · 拓展练 (答案见 228 页) 课后选练

### 拔尖角度 1 利用三角函数解一点一线问题的应用

10. 【中考 · 青岛】如图,$AB$ 是长为 10 m,倾斜角为 37° 的自动扶梯,平台 $BD$ 与大楼 $CE$ 垂直,且与扶梯 $AB$ 的长度相等,在 $B$ 处测得大楼顶部 $C$ 的仰角为 65°,求大楼 $CE$ 的高度.(结果保留整数,参考数据:$\sin 37°\approx\frac{3}{5}$,$\tan 37°\approx\frac{3}{4}$,$\sin 65°\approx\frac{9}{10}$,$\tan 65°\approx\frac{15}{7}$)



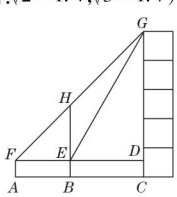

(第 10 题)

### 拔尖角度 2 利用三角函数解两点两线问题的应用

11. 【中考 · 广安】如图,某数学兴趣小组为测量一棵古树 $BH$ 和教学楼 $CG$ 的高,先在 $A$ 处用高 1.5 米的测角仪 $AF$ 测得古树顶端 $H$ 的仰角 $\angle HFE$ 为 45°,此时教学楼顶端 $G$ 恰好在视线 $FH$ 上,再向前走 10 米到达 $B$ 处,又测得教学楼顶端 $G$ 的仰角 $\angle GED$ 为 60°,点 $A$,$B$,$C$ 三点在同一水平线上.

(1)求古树 $BH$ 的高;

(2)求教学楼 $CG$ 的高.(参考数据:$\sqrt{2}\approx1.4$,$\sqrt{3}\approx1.7$)




(第 11 题)



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 第5课时 用解直角三角形解一般问题

**名师点金**

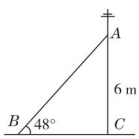
利用解直角三角形的知识解决实际问题的一般过程：
(1)将实际问题抽象为数学问题(画出平面图形,转化为解直角三角形的问题)；
(2)根据问题中的条件,适当选用锐角三角函数,运用直角三角形的有关性质解直角三角形；
(3)得到数学问题的答案；(4)得到实际问题的答案.
**注意**：当有些图形不是直角三角形时,可考虑适当添加辅助线构造直角三角形或其他特殊的四边形得出.

## Ⅰ 夯实基础 · 逐点练 (答案见228页) 随堂导练

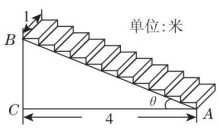
### 知识点1 借助工具测量的应用

1. 【中考 · 钦州】如图,为固定电线杆 $AC$,在离地面高度为6 m的 $A$ 处引拉线 $AB$,使拉线 $AB$ 与地面上的 $BC$ 的夹角为48°,则拉线 $AB$ 的长度约为(　　)(结果精确到0.1 m,参考数据:$\sin 48°\approx 0.74$,$\cos 48°\approx 0.67$,$\tan 48°\approx 1.11$)

A. 6.7 m　　B. 7.2 m　　C. 8.1 m　　D. 9.0 m



(第1题)



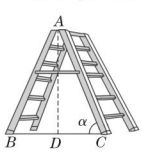
(第2题)

2. 【中考 · 金华】一座楼梯的示意图如图所示,$BC$ 是铅垂线,$CA$ 是水平线,$BA$ 与 $CA$ 的夹角为 $\theta$. 现要在楼梯上铺一条地毯,已知 $CA=4$ 米,楼梯宽度为1米,则地毯的面积至少需要(　　)

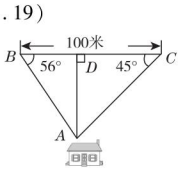
A. $\frac{4}{\sin\theta}$ 平方米　　B. $\frac{4}{\cos\theta}$ 平方米

C. $\left(4+\frac{4}{\tan\theta}\right)$ 平方米　　D. $(4+4\tan\theta)$ 平方米

3. 【中考 · 衢州】如图,人字梯 $AB$,$AC$ 的长都为2米,当 $\alpha=50°$ 时,人字梯顶端离地面的高度 $AD$ 是_____米.(结果精确到0.1米,参考数据:$\sin 50°\approx 0.77$,$\cos 50°\approx 0.64$,$\tan 50°\approx 1.19$)



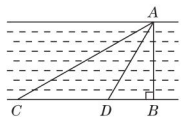
(第3题)



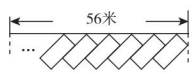
(第4题)

4. 【中考 · 西宁】如图,为保护门源百里油菜花海,由“芬芳浴”游客中心 $A$ 处修建通往百米观景长廊 $BC$ 的两条栈道 $AB$,$AC$. 若 $\angle B=56°$,$\angle C=45°$,则游客中心 $A$ 到观景长廊 $BC$ 的距离 $AD$ 的长约为_____米.($\sin 56°\approx 0.8$,$\tan 56°\approx 1.5$)

5. 【中考 · 咸宁】如图,九(1)班数学课外活动小组在河边测量河宽 $AB$(这段河流的两岸平行),他们在点 $C$ 处测得 $\angle ACB=30°$,在点 $D$ 处测得 $\angle ADB=60°$,$CD=80$ m,则河宽 $AB$ 约为_____m.(结果保留整数,参考数据:$\sqrt{3}\approx 1.73$)



(第5题)



(第6题)

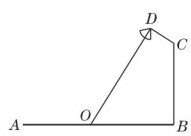
6. 【中考 · 黔南州】为解决都匀市停车难的问题,计划在一段长为56米的路段规划出如图所示的停车位,已知每个车位是长为5米,宽为2米的矩形,且矩形的宽与路的边缘成45°角,则该路段最多可以划出_____个这样的停车位.(取 $\sqrt{2}\approx 1.4$,结果保留整数)

### 知识点2 借助影子测量的应用

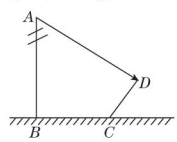
7. 【中考 · 绵阳】如图,要在宽为22米的九州大道两边安装路灯,路灯的灯臂 $CD$ 长2米,且与灯柱 $BC$ 成120°角,路灯采用圆锥形灯罩,灯罩的轴线 $DO$ 与灯臂 $CD$ 垂直,当灯罩的轴线 $DO$ 通过公路路面的中心线时照明效果最佳,此时,路灯的灯柱 $BC$ 高度应该设计为(　　)

A. $(11-2\sqrt{2})$ 米　　B. $(11\sqrt{3}-2\sqrt{2})$ 米

C. $(11-2\sqrt{3})$ 米　　D. $(11\sqrt{3}-4)$ 米



(第7题)



(第8题)

8. 如图,已知电线杆 $AB$ 直立于地面上,它的影子恰好落在土坡的坡面 $CD$ 和地面 $BC$ 上,如果 $CD$ 与地面成45°角,$\angle A=60°$,$CD=4$ m,$BC=(4\sqrt{6}-2\sqrt{2})$ m,则电线杆 $AB$ 的长为_____m.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

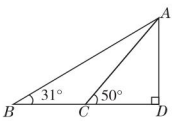
## Ⅱ 整合方法 · 提升练 (答案见 228 页) 课后导练

### 考查角度 1 利用解直角三角形求速度问题

9. 【中考 · 六盘水】据调查,超速行驶是引发交通事故的主要原因之一,所以规定以下情境中的速度不得超过 15 m/s,在一条笔直公路 $BD$ 的上方 $A$ 处有一探测仪,如平面几何图,$AD=24$ m,$\angle D=90°$,第一次探测到一辆轿车从 $B$ 点匀速向 $D$ 点行驶,测得 $\angle ABD=31°$,2 秒后到达 $C$ 点,测得 $\angle ACD=50°$. ($\tan 31°\approx 0.6$,$\tan 50°\approx 1.2$,结果精确到 1 m)

(1)求 $B$,$C$ 的距离;

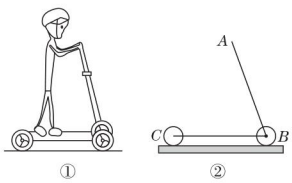
(2)通过计算,判断此轿车是否超速.




(第 9 题)

### 考查角度 2 利用解直角三角形求高度问题

10. 【中考 · 台州】图①是一辆在平地上滑行的滑板车,图②是其示意图,已知车杆 $AB$ 长 92 cm,车杆与脚踏板所成的角 $\angle ABC=70°$,前后轮子的半径均为 6 cm,求把手 $A$ 离地面的高度. (结果保留一位小数,参考数据:$\sin 70°\approx 0.94$,$\cos 70°\approx 0.34$,$\tan 70°\approx 2.75$)




(第 10 题)

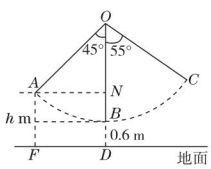
## Ⅲ 探究培优 · 拓展练 (答案见 228 页) 课后选练

### 拔尖角度 1 利用解直角三角形求安全问题

11. 【中考 · 遵义】某新农村乐园设置了一个秋千场所,如图所示,秋千拉绳 $OB$ 的长为 3 m,静止时,踏板到地面距离 $BD$ 的长为 0.6 m(踏板厚度忽略不计). 为安全起见,乐园管理处规定:儿童的"安全高度"为 $h$ m,成人的"安全高度"为 2 m. (计算结果精确到 0.1 m)

(1)当摆绳 $OA$ 与 $OB$ 成 45°夹角时,恰为儿童的安全高度,则 $h=$ _____ m.

(2)某成人在玩秋千时,摆绳 $OC$ 与 $OB$ 的最大夹角为 55°,问此人是否安全? (参考数据:$\sqrt{2}\approx 1.41$,$\sin 55°\approx 0.82$,$\cos 55°\approx 0.57$,$\tan 55°\approx 1.43$)



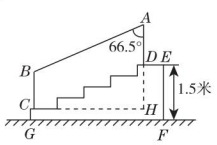

(第 11 题)

### 拔尖角度 2 利用解直角三角形求用料问题

12. 【中考 · 广安】如图,某城市市民广场一入口处有五级高度相等的小台阶. 已知台阶总高 1.5 米,为了安全,现要做一个不锈钢扶手 $AB$ 及两根与 $FG$ 垂直且长为 1 米的不锈钢架杆 $AD$ 和 $BC$(架杆的底端分别为 $D$,$C$),且 $\angle DAB=66.5°$. (参考数据:$\cos 66.5°\approx 0.40$,$\sin 66.5°\approx 0.92$)

(1)求点 $D$ 与点 $C$ 的高度差 $DH$;

(2)求所有不锈钢材料的总长度. (即 $AD+AB+BC$ 的长,结果精确到 0.1 米)




(第 12 题)



关注微信公众号"教辅资料站"获取更多学习资料

# 章末整合提升训练

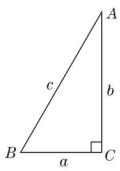
## 专训 1　解直角三角形的几种常见类型 ☞（答案见 228 页）

**名师点金**

解直角三角形是中考的重要内容之一，直角三角形边、角关系的知识是解直角三角形的基础. 解直角三角形时，要注意三角函数的选取，避免计算复杂. 在解题中，若求解的边、角不在直角三角形中，应先添加辅助线，构造直角三角形.

### 类型 1　已知两直角边解直角三角形

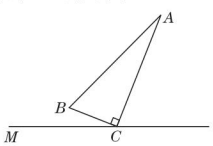
1. 如图，在 Rt△$ABC$ 中，∠$C$ = 90°，$a$，$b$，$c$ 分别为∠$A$，∠$B$，∠$C$ 的对边，$a$ = 2$\sqrt{3}$，$b$ = 6，解这个直角三角形.




（第 1 题）

### 类型 2　已知一直角边和斜边解直角三角形

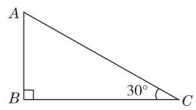
2. 如图，∠$ACB$ = 90°，$AB$ = 13，$AC$ = 12，∠$BCM$ = ∠$BAC$，求 sin ∠$BAC$ 的值和点 $B$ 到直线 $MC$ 的距离.




（第 2 题）

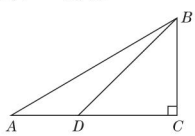
### 类型 3　已知一直角边和一锐角解直角三角形

3. 如图，在△$ABC$ 中，∠$B$ = 90°，∠$C$ = 30°，$AB$ = 3.
（1）求 $AC$ 的长；
（2）求 $BC$ 的长.




（第 3 题）

4. 如图，在 Rt△$ABC$ 中，∠$C$ = 90°，∠$A$ = 30°，$BC$ = 3，$D$ 为 $AC$ 边上一点，∠$BDC$ = 45°，求 $AD$ 的长.




（第 4 题）



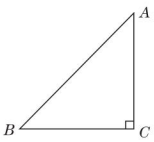
三角学简介：三角学之英文名称 Trigonometry，约定名于公元 1600 年，实际起源于希腊文 trigono（三角）和 metrein（测量）.（待续）

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

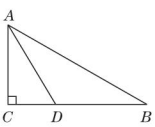
### 类型4 已知斜边和一锐角解直角三角形

5. 如图，在 Rt△$ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\angle B=45°$，$a$，$b$，$c$ 分别为 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的对边，$c=10$，解这个直角三角形.




（第 5 题）

6. 如图，在△$ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\angle B=30°$，$AD$ 是 $\angle BAC$ 的平分线，与 $BC$ 相交于点 $D$，且 $AB=4\sqrt{3}$，求 $AD$ 的长.

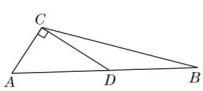



（第 6 题）

### 类型5 已知非直角三角形中的边（或角或三角函数值）解直角三角形

**题型 1** 化斜三角形为直角三角形问题（**化斜为直法**）

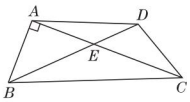
7. 如图，在△$ABC$ 中，点 $D$ 是 $AB$ 的中点，$DC\perp AC$，且 $\tan\angle BCD=\frac{1}{3}$，求 $\angle A$ 的三角函数值.




（第 7 题）

**题型 2** 化解四边形问题为解直角三角形问题

8. 【中考·北京】如图，在四边形 $ABCD$ 中，对角线 $AC$，$BD$ 交于点 $E$，$\angle BAC=90°$，$\angle CED=45°$，$\angle DCE=30°$，$DE=\sqrt{2}$，$BE=2\sqrt{2}$. 求 $CD$ 的长和四边形 $ABCD$ 的面积.




（第 8 题）

**题型 3** 化解方程问题为解直角三角形问题

9. 已知 $a$，$b$，$c$ 分别是△$ABC$ 中 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的对边，关于 $x$ 的一元二次方程 $a(1-x^2)+2bx+c(1+x^2)=0$ 有两个相等的实数根，且 $3c=a+3b$.

（1）判断△$ABC$ 的形状；

（2）求 $\sin A+\sin B$ 的值.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

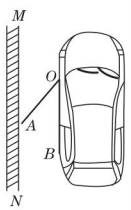
## 专训2 构造三角函数基本图形解实际问题的几种数学模型 ☞（答案见229页）

**名师点金**

解直角三角形及其应用是近几年各地中考命题的热点之一，考查内容不仅有传统的计算距离、高度、角度的应用题，还有要求同学们根据题中给出的信息构造三角函数的基本图形，建立数学模型，将某些简单的实际问题转化为数学问题，把数学问题转化为锐角三角函数问题来求解. 运用锐角三角函数知识解决与实际生活、生产相关的应用题是近年来中考的热点题型.

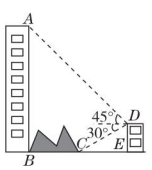
### 模型1 构造一个直角三角形解实际问题

1. 【中考·台州】如图是一辆小汽车与墙平行停放的平面示意图，汽车靠墙一侧 $OB$ 与墙 $MN$ 平行且距离为 0.8 m，已知小汽车车门宽 $AO$ 为 1.2 m，当车门打开角度 $\angle AOB$ 为 40°时，车门是否会碰到墙？请说明理由.（参考数据：$\sin 40° \approx 0.64$，$\cos 40° \approx 0.77$，$\tan 40° \approx 0.84$）




（第1题）

2. 如图，大楼 $AB$ 右侧有一障碍物，在障碍物的旁边有一幢小楼 $DE$，在小楼的顶端 $D$ 处测得障碍物边缘点 $C$ 的俯角为 30°，测得大楼顶端 $A$ 的仰角为 45°（点 $B$，$C$，$E$ 在同一水平直线上），已知 $AB=80$ m，$DE=10$ m，求障碍物 $B$，$C$ 两点间的距离.（结果精确到 0.1 m，参考数据：$\sqrt{2} \approx 1.414$，$\sqrt{3} \approx 1.732$）



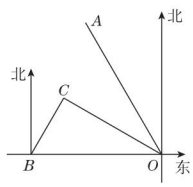

（第2题）

### 模型2 构造形如“”的两个直角三角形解实际问题

3. 如图，港口 $B$ 位于港口 $O$ 正西方向 120 km 处，小岛 $C$ 位于港口 $O$ 北偏西 60°的方向. 一艘游船从港口 $O$ 出发，沿 $OA$ 方向（北偏西 30°）以 $v$ km/h 的速度驶离港口 $O$，同时一艘快艇从港口 $B$ 出发，沿北偏东 30°的方向以 60 km/h 的速度驶向小岛 $C$，在小岛 $C$ 用 1 h 加装补给物资后，立即按照原来的速度给游船送去.

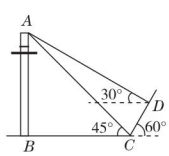
（1）快艇从港口 $B$ 到小岛 $C$ 需要多长时间？

（2）若快艇从小岛 $C$ 到与游船相遇恰好用时 1 h，求 $v$ 的值及相遇处与港口 $O$ 的距离.




（第3题）

4. 【中考·黔东南州】黔东南州某校吴老师组织九（1）班同学开展数学活动，带领同学们测量学校附近一电线杆的高. 如图，已知电线杆直立于地面上，某天在太阳光的照射下，电线杆的影子（折线 $BCD$）恰好落在水平地面和斜坡上，在 $D$ 处测得电线杆顶端 $A$ 的仰角为 30°，在 $C$ 处测得电线杆顶端 $A$ 的仰角为 45°，斜坡与地面成 60°角，$CD=4$ m，请你根据这些数据求电线杆的高（$AB$）.（结果精确到 1 m，参考数据：$\sqrt{2} \approx 1.4$，$\sqrt{3} \approx 1.7$）




（第4题）

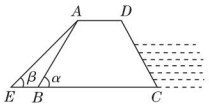


早期的三角学是天文学的一部分，后来研究范围扩大，变成以三角函数为主要对象的学科. 现在，三角学的研究范围已不仅限于三角形，且为数理分析之基础，研究实用科学所必需之工具.（待续）

趣味数学

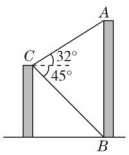
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

5. 【中考 · 安徽】如图，防洪大堤的横断面是梯形 $ABCD$，其中 $AD \parallel BC$，坡角 $\alpha = 60°$. 汛期来临前对其进行了加固，改造后的背水面坡角 $\beta = 45°$. 若原坡长 $AB = 20$ m，求改造后的坡长 $AE$. （结果保留根号）




（第 5 题）

7. 如图，从一个建筑物 $C$ 处测得对面楼 $AB$ 的顶部 $A$ 的仰角为 32°，底部 $B$ 的俯角为 45°，已知建筑物 $C$ 的高度为 31 米，求楼 $AB$ 的高度约为多少米. （结果取整数，参考数据：$\sin 32° \approx 0.5$，$\cos 32° \approx 0.8$，$\tan 32° \approx 0.6$）



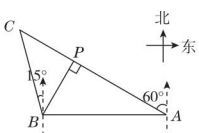

（第 7 题）

**模型 3** 构造形如“”的两个直角三角形解实际问题

6. 【中考 · 海南】如图是某区域的平面示意图，码头 $A$ 在观测站 $B$ 的正东方向，码头 $A$ 的北偏西 60°方向上有一小岛 $C$，小岛 $C$ 在观测站 $B$ 的北偏西 15°方向上，码头 $A$ 到小岛 $C$ 的距离 $AC$ 为 10 海里.

（1）填空：$\angle BAC =$ _____度，$\angle C =$ _____度；

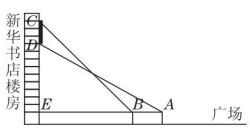
（2）求观测站 $B$ 到 $AC$ 的距离 $BP$. （结果保留根号）




（第 6 题）

**模型 4** 构造形如“”的两个直角三角形解实际问题

8. 如图，小刚同学在广场上观测新华书店楼房墙上的电子屏幕 $CD$，点 $A$ 是小刚的眼睛，他测得屏幕下端 $D$ 处的仰角为 30°，然后他正对屏幕方向前进了 6 米到达 $B$ 处，又测得该屏幕上端 $C$ 处的仰角为 45°，延长 $AB$ 与楼房垂直相交于点 $E$，测得 $BE = 21$ 米，请你帮小刚求出该屏幕上端与下端之间的距离 $CD$. （结果保留根号）




（第 8 题）



三角学创始于公元前约 150 年，早在公元前 300 年，古代埃及人已有了一定的三角学知识，主要用于测量. 例如建筑金字塔、整理尼罗河泛滥后的耕地、通商航海和观测天象等. （待续）



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

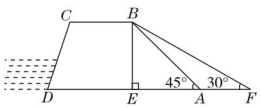
# 专训3 应用三角函数解四种常见问题 ☞（答案见230页）

**名师点金**

在运用解直角三角形的知识解决实际问题时，要学会将千变万化的实际问题转化为数学问题，要善于将某些实际问题中的数量关系归结为直角三角形中的元素（边、角）之间的关系，若不是直角三角形，应尝试添加辅助线，构造出直角三角形进行解答，这样才能更好地运用解直角三角形的方法求解. 其中仰角、俯角的应用问题，方向角的应用问题，坡度、坡角的应用问题要熟练掌握其解题思路，把握解题关键.

## 类型1 坡坝问题

1. 如图，水坝的横断面是梯形 $ABCD$，背水坡 $AB$ 的坡角 $\angle BAE=45°$，坝高 $BE=20$ 米. 汛期来临，为加大水坝的防洪强度，将坝底从 $A$ 处向后水平延伸到 $F$ 处，使新的背水坡 $BF$ 的坡角 $\angle F=30°$，求 $AF$ 的长度. （结果精确到1米，参考数据：$\sqrt{2}\approx1.414$，$\sqrt{3}\approx1.732$）



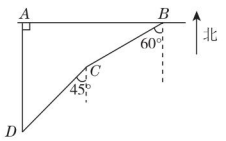

（第1题）

## 类型2 测距问题

2. 一条东西走向的高速公路上有两个加油站 $A$，$B$，在 $A$ 的北偏东 45° 方向上还有一个加油站 $C$，$C$ 到高速公路的最短距离是30千米，$B$，$C$ 间的距离是60千米，想要经过 $C$ 修一条笔直的公路与高速公路相交，使两路交叉口 $P$ 到 $B$，$C$ 的距离相等，请求出交叉口 $P$ 到加油站 $A$ 的距离.（结果保留根号）

## 类型3 判断说理问题——拦截问题

3. 【中考·荆门】如图，在一次军事演习中，蓝方在一条东西走向的公路上的 $A$ 处朝正南方向撤退，红方在公路上的 $B$ 处沿南偏西 60° 方向前进实施拦截，红方行驶1 000米到达 $C$ 处后，因前方无法通行，红方决定调整方向，再朝南偏西 45° 方向前进了相同的距离，刚好在 $D$ 处成功拦截蓝方，求拦截点 $D$ 处到公路的距离.（结果不取近似值）



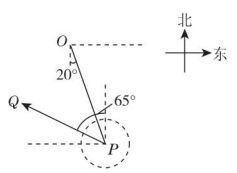

（第3题）

## 类型4 判断说理问题——台风影响问题

4. 如图，在某海滨城市 $O$ 附近海面有一股强台风，据监测，当前台风中心位于该城市的南偏东 20° 方向 200 km的海面 $P$ 处，并以20 km/h的速度向北偏西 65° 的 $PQ$ 方向移动，台风侵袭的范围是一个圆形区域，当前半径为60 km，且圆的半径以10 km/h的速度不断扩大.

（1）当台风中心移动4 h时，受台风侵袭的圆形区域半径增大到_____km；当台风中心移动 $t$ h时，受台风侵袭的圆形区域半径增大到_____km.

（2）当台风中心移动到与城市 $O$ 距离最近时，这股台风是否会侵袭这座海滨城市？请说明理由.（参考数据：$\sqrt{2}\approx1.41$，$\sqrt{3}\approx1.73$）




（第4题）



公元前2世纪后希腊天文学家希帕霍斯为了天文观测的需要，作了一个和现在三角函数表相仿的“弦表”，他成为西方三角学的最早奠基者，这个成就使他赢得了“三角学之父”的称谓.（待续）

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

## 专训 4　三角函数在学科内的综合应用 ☞(答案见 230 页)

**名师点金**

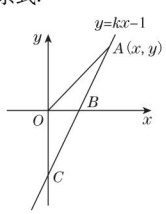
1. **三角函数与其他函数的综合应用**:此类问题常常利用函数图象与坐标轴的交点构造直角三角形,再结合锐角三角函数求线段的长,最后可转化为求函数图象上的点的坐标.
2. **三角函数与方程的综合应用**:主要是与一元二次方程之间的联系,利用方程根的情况,最终转化为三角形三边之间的关系求解.
3. **三角函数与圆的综合应用**:主要利用圆中的垂径定理、直径所对的圆周角是直角等,将圆中的边角关系转化为同一直角三角形的边角关系求解.
4. **三角函数与相似三角形的综合应用**:此类问题常常是由相似得成比例线段,再转化成所求锐角的三角函数.

### 类型 1　三角函数与一次函数的综合应用

1. 如图,直线 $y=kx-1$ 与 $x$ 轴、$y$ 轴分别交于 $B,C$ 两点,$\tan\angle OCB=\frac{1}{2}$.

(1)求点 $B$ 的坐标和 $k$ 的值;

(2)若点 $A(x,y)$ 是直线 $y=kx-1$ 上的一个动点,且在第一象限内,在点 $A$ 的运动过程中,试写出 $\triangle AOB$ 的面积 $S$ 与 $x$ 的函数关系式.

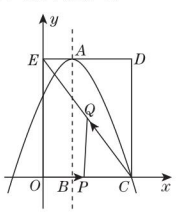



(第 1 题)

### 类型 2　三角函数与二次函数的综合应用

2. 如图,在平面直角坐标系中,矩形 $OCDE$ 的三个顶点分别是 $C(3,0),D(3,4),E(0,4)$. 点 $A$ 在 $DE$ 上,以 $A$ 为顶点的抛物线过点 $C$,且对称轴直线 $x=1$ 交 $x$ 轴于点 $B$,连结 $EC$,点 $P,Q$ 为动点,设运动时间为 $t$ 秒.

(1)求点 $A$ 的坐标及抛物线对应的函数表达式;




(第 2 题)

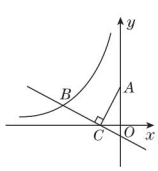
(2)如图,若点 $P$ 在线段 $OC$ 上从点 $O$ 向点 $C$ 以 1 个单位/秒的速度运动,同时,点 $Q$ 在线段 $CE$ 上从点 $C$ 向点 $E$ 以 2 个单位/秒的速度运动,当一个点到达终点时,另一个点随之停止运动. 当 $t$ 为何值时,$\triangle PCQ$ 为直角三角形?

### 类型 3　三角函数与反比例函数的综合应用

3. 【中考·攀枝花】如图,在平面直角坐标系 $xOy$ 中,一次函数 $y=kx+b$ 的图象与反比例函数 $y=\frac{m}{x}$ 的图象在第二象限交于点 $B$,与 $x$ 轴交于点 $C$,点 $A$ 在 $y$ 轴上,满足条件:$CA\perp CB$,且 $CA=CB$,点 $C$ 的坐标为 $(-3,0)$,$\cos\angle ACO=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

(1)求反比例函数的表达式;

(2)直接写出当 $x<0$ 时,$kx+b<\frac{m}{x}$ 的解集.




(第 3 题)

**趣味数学**

公元 2 世纪,希腊天文学家、数学家托勒密继承希帕霍斯的成就,加以整理发挥,著成的《天文学大成》13 卷,被认为是西方第一本系统论述三角学理论的著作.



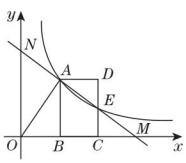
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

4. 如图，反比例函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 的图象经过线段 $OA$ 的端点 $A$，$O$ 为原点，作 $AB\perp x$ 轴于点 $B$，点 $B$ 的坐标为 $(2,0)$，$\tan\angle AOB=\frac{3}{2}$.

(1)求 $k$ 的值；

(2)将线段 $AB$ 沿 $x$ 轴正方向平移到线段 $DC$ 的位置，反比例函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 的图象恰好经过 $DC$ 的中点 $E$，求直线 $AE$ 对应的函数表达式；

(3)若直线 $AE$ 与 $x$ 轴交于点 $M$，与 $y$ 轴交于点 $N$，请你探索线段 $AN$ 与线段 $ME$ 的大小关系，写出你的结论，并说明理由.




（第4题）

## 类型4 三角函数与方程的综合应用

5. 已知关于 $x$ 的方程 $5x^2-10x\cos\alpha-7\cos\alpha+6=0$ 有两个相等的实数根，求边长为 10 cm 且两边所夹的锐角为 $\alpha$ 的菱形的面积.

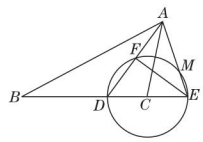
## 类型5 三角函数与圆的综合应用

6. 如图，$AD$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，以点 $C$ 为圆心，$CD$ 为半径作圆交 $BC$ 的延长线于点 $E$，交 $AD$ 于点 $F$，交 $AE$ 于点 $M$，且 $\angle B=\angle CAE$，$EF:FD=4:3$.

(1)求证：点 $F$ 是 $AD$ 的中点；

(2)求 $\cos\angle AED$ 的值；

(3)如果 $BD=10$，求半径 $CD$ 的长.



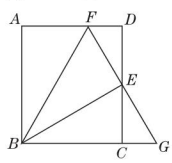

（第6题）

## 类型6 三角函数与相似三角形的综合应用

7. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，点 $E$ 是 $CD$ 的中点，点 $F$ 是边 $AD$ 上一点，连结 $FE$ 并延长交 $BC$ 的延长线于点 $G$，连结 $BF$，$BE$，且 $BE\perp FG$.

(1)求证：$BF=BG$；

(2)若 $\tan\angle BFG=\sqrt{3}$，$S_{\triangle CGE}=6\sqrt{3}$，求 $AD$ 的长.




（第7题）



有四个人借钱的数目分别是这样的：阿伊库向贝尔借了 10 美元，贝尔向查理借了 20 美元，查理向迪克借了 30 美元，迪克又向阿伊库借了 40 美元.（待续）

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 全章热门考点整合应用 ☞(答案见 231 页)

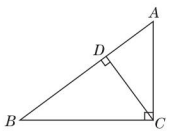
**名师点金**

本章主要学习锐角三角函数的定义,锐角三角函数值,解直角三角形,以及解直角三角形的实际应用,重点考查运用解直角三角形的知识解决一些几何图形中的应用和实际应用,是中考的必考内容. 其主要考点可概括为:两个概念、一个运算、两个应用、两个技巧.

## 考点 1 两个概念

### 概念 1 锐角三角函数

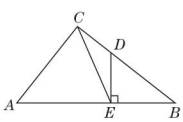
1. 如图,在 Rt△$ABC$ 中,∠$ACB$ = 90°,$AC$ = 6,$BC$ = 8,$CD$ ⊥ $AB$ 于点 $D$,求∠$BCD$ 的三个三角函数值.




(第 1 题)

### 概念 2 解直角三角形

2. 如图,在 Rt△$ABC$ 中,∠$ACB$ = 90°,$\sin B = \frac{3}{5}$,$D$ 是 $BC$ 上一点,$DE$ ⊥ $AB$ 于点 $E$,$CD = DE$,$AC + CD = 9$,求 $BE$,$CE$ 的长.




(第 2 题)

## 考点 2 一个运算——特殊角的三角函数值与实数运算

3. 计算:

(1) $\tan30°\sin60° + \cos^2 30° - \sin^2 45°\tan45°$;

(2) $\frac{1}{4}\tan^2 45° + \frac{1}{\sin^2 30°} - 3\cos^2 30° + \frac{\tan45°}{\cos60°} - \frac{\sin40°}{\cos50°}$.

## 考点 3 两个应用

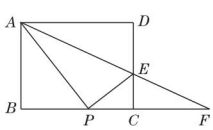
### 应用 1 解直角三角形在学科内的应用

4. 如图,在矩形 $ABCD$ 中,$AB$ = 4,$AD$ = 5,$P$ 是射线 $BC$ 上的一个动点,过点 $P$ 作 $PE$ ⊥ $AP$,交射线 $DC$ 于点 $E$,射线 $AE$ 交射线 $BC$ 于点 $F$,设 $BP = a$.

(1) 当点 $P$ 在线段 $BC$ 上时(点 $P$ 与点 $B$,$C$ 都不重合),试用含 $a$ 的代数式表示 $CE$ 的长;

(2) 当 $a$ = 3 时,连结 $DF$,试判断四边形 $APFD$ 的形状,并说明理由;

(3) 当 $\tan\angle PAE = \frac{1}{2}$ 时,求 $a$ 的值.




(第 4 题)



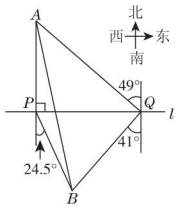
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

**应用2 解直角三角形的实际应用**

5. 如图，自来水厂 $A$ 和村庄 $B$ 在小河 $l$ 的两侧，现要在 $A$，$B$ 间铺设一条输水管道. 为了搞好工程预算，需测算出 $A$，$B$ 间的距离. 一小船在点 $P$ 处测得 $A$ 在正北方向，$B$ 位于南偏东 24.5°方向，前行 1 200 m，到达点 $Q$ 处，测得 $A$ 位于北偏西 49°方向，$B$ 位于南偏西 41°方向.

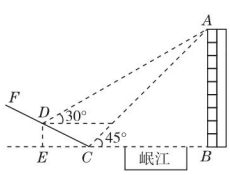
(1)线段 $BQ$ 与 $PQ$ 是否相等？请说明理由.

(2)求 $A$，$B$ 间的距离.（参考数据：$\cos 41° \approx 0.75$）




（第5题）

6. 【中考·眉山】如图，在岷江的右岸边有一高楼 $AB$，左岸边有一坡度 $i = 1 : 2$ 的山坡 $CF$，点 $C$ 与点 $B$ 在同一水平面上，$CF$ 与 $AB$ 在同一平面内，某数学兴趣小组为了测量楼 $AB$ 的高度，在坡底 $C$ 处测得楼顶 $A$ 的仰角为 45°，然后沿坡面 $CF$ 上行了 $20\sqrt{5}$ 米到达点 $D$ 处，此时在 $D$ 处测得楼顶 $A$ 的仰角为 30°，求楼 $AB$ 的高度.

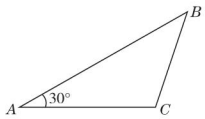



（第6题）

**考点4 两个技巧**

**技巧1 “化斜为直”构造直角三角形解三角形的技巧**

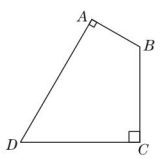
7. 如图，在△$ABC$ 中，$\angle A = 30°$，$\tan B = \frac{\sqrt{3}}{2}$，$AC = 2\sqrt{3}$，求 $AB$ 的长.




（第7题）

**技巧2 “割补法”构造直角三角形求解的技巧**

8. 如图，已知四边形 $ABCD$，$\angle ABC = 120°$，$AD \perp AB$，$CD \perp BC$，$AB = 30\sqrt{3}$，$BC = 50\sqrt{3}$，求四边形 $ABCD$ 的面积.（要求：用分割法和补形法两种方法求解）




（第8题）



答案：贝尔、查理、迪克各自拿出10美元给阿伊库就解决问题了，这样的话只动用了30美元. 最笨的办法就是用100美元来一一付清.

趣味数学

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 上 册

## 第1章达标检测卷

（120分，90分钟）

| 题 号 | 一 | 二 | 三 | 总 分 |
|---|---|---|---|---|
| 得 分 | | | | |

姓名：　班级：　学校：

### 一、选择题（每题3分，共30分）

1. 下列函数中是二次函数的是（　　）

A. $y=3x-1$　　B. $y=3x^2-1$　　C. $y=(x+1)^2-x^2$　　D. $y=\sqrt{x^2-1}$

2. 对于二次函数 $y=3(x-2)^2+1$ 的图象，下列说法正确的是（　　）

A. 开口向下　　B. 对称轴是直线 $x=-2$

C. 顶点坐标是(2,1)　　D. 与 $x$ 轴有两个交点

3. 抛物线 $y=x^2-1$ 可由下列哪一个函数的图象向右平移1个单位，再向下平移2个单位得到？（　　）

A. $y=(x-1)^2+1$　　B. $y=(x+1)^2+1$

C. $y=(x-1)^2-3$　　D. $y=(x+1)^2+3$

4. 二次函数 $y=x^2-2x+1$ 的图象与 $x$ 轴的交点个数是（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

5. 若 $A\left(\frac{3}{4},y_1\right),B\left(-\frac{5}{4},y_2\right),C\left(\frac{1}{4},y_3\right)$ 为二次函数 $y=x^2+4x-5$ 的图象上的三点，则 $y_1,y_2,y_3$ 的大小关系是（　　）

A. $y_1>y_2>y_3$　　B. $y_2>y_1>y_3$　　C. $y_3>y_1>y_2$　　D. $y_1>y_3>y_2$

6. 在同一坐标系中，二次函数 $y=ax^2+bx$ 与一次函数 $y=bx-a$ 的图象可能是（　　）

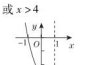


A　　B　　C　　D

7. 已知函数 $y=x^2+bx+c$ 的部分图象如图所示，若 $y<0$，则 $x$ 的取值范围是（　　）

A. $-1<x<4$　　B. $-1<x<3$

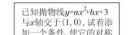
C. $x<-1$ 或 $x>4$　　D. $x<-1$ 或 $x>3$




（第7题）



（第8题）




（第9题）

8. 如图，从地面竖直向上抛出一个小球，小球的高度 $h$（单位：m）与小球运动时间 $t$（单位：s）之间的关系式为 $h=30t-5t^2$，那么小球从抛出至回落到地面所需要的时间是（　　）

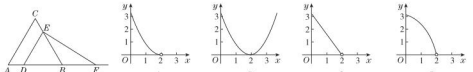
A. 6 s　　B. 4 s　　C. 3 s　　D. 2 s

9. 如图，老师出示了小黑板上的题后，小华说：过点(3,0)；小彬说：过点(4,3)；小明说：$a=1$；小颖说：抛物线被 $x$ 轴截得的线段长为2. 你认为四人的说法中，正确的有（　　）

A. 1个　　B. 2个

C. 3个　　D. 4个

10. 如图，已知△$ABC$ 为等边三角形，$AB=2$，点 $D$ 为边 $AB$ 上一点，过点 $D$ 作 $DE\parallel AC$，交 $BC$ 于 $E$ 点；过 $E$ 点作 $EF\perp DE$，交 $AB$ 的延长线于 $F$ 点. 设 $AD=x$，△$DEF$ 的面积为 $y$，则能大致反映 $y$ 与 $x$ 函数关系的图象是（　　）



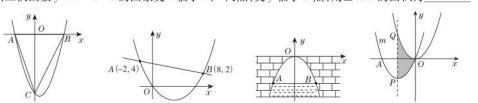

（第10题）

### 二、填空题（每题3分，共24分）

11. 抛物线 $y=-x^2+15$ 有最_____点，其坐标是_____.

12. 函数 $y=x^2+2x+1$，当 $y=0$ 时，$x=$_____；当 $1<x<2$ 时，$y$ 随 $x$ 的增大而_____.（填“增大”或“减小”）

13. 如图，二次函数 $y=x^2-x-6$ 的图象交 $x$ 轴于 $A,B$ 两点，交 $y$ 轴于 $C$ 点，则△$ABC$ 的面积为_____.




（第13题）　（第15题）　（第16题）　（第18题）

14. 已知抛物线 $y=ax^2-4ax+c$ 与 $x$ 轴的一个交点的坐标为 $(-2,0)$，则一元二次方程 $ax^2-4ax+c=0$ 的根为_____.

15. 已知二次函数 $y_1=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 与一次函数 $y_2=kx+m(k\neq0)$ 的图象相交于点 $A(-2,4),B(8,2)$，如图所示，则能使 $y_1>y_2$ 成立的 $x$ 的取值范围是_____.

16. 某涵洞的截面是抛物线形，如图所示，在图中建立的直角坐标系中，抛物线的表达式为 $y=-\frac{1}{4}x^2$，当涵洞水面宽 $AB$ 为12 m时，水面到桥拱顶点 $O$ 的距离为_____m.

17. 对于二次函数 $y=x^2-2mx-3$，有下列说法：

①它的图象与 $x$ 轴有两个交点；②如果当 $x\leqslant1$ 时，$y$ 随 $x$ 的增大而减小，则 $m=1$；③若图象向左平移3个单位后过原点，则 $m=-1$；④如果当 $x=4$ 与 $x=100$ 时，函数值相等，则当 $x=104$ 时，函数值为 $-3$，其中正确说法的序号是_____.

18. 如图，把抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 平移得到抛物线 $m$，抛物线 $m$ 经过点 $A(-6,0)$ 和原点 $O(0,0)$，它的顶点为 $P$，它的对称轴与抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 交于点 $Q$，则图中阴影部分的面积为_____.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

三、解答题(19～21 题每题 10 分,其余每题 12 分,共 66 分)

**19.** 如图,已知二次函数 $y=ax^2-4x+c$ 的图象经过点 $A$ 和点 $B$.

(1)求该二次函数的表达式,写出该抛物线的对称轴及顶点;

(2)若点 $P(m,m)$ 在该函数的图象上,求 $m$ 的值.




(第 19 题)

**20.** 如图,矩形 $ABCD$ 的两边长 $AB=18$ cm,$AD=4$ cm,点 $P$,$Q$ 分别从 $A$,$B$ 同时出发,点 $P$ 在边 $AB$ 上沿 $AB$ 方向以每秒 2 cm 的速度匀速运动,点 $Q$ 在边 $BC$ 上沿 $BC$ 方向以每秒 1 cm 的速度匀速运动(点 $P$,$Q$ 中有一点到达矩形顶点,则运动停止).设运动时间为 $x$ s,$\triangle PBQ$ 的面积为 $y$ cm$^2$.

(1)求 $y$ 关于 $x$ 的函数关系式,并写出 $x$ 的取值范围;

(2)求 $\triangle PBQ$ 的最大面积.

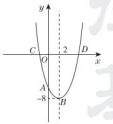



(第 20 题)

**21.** 如图,二次函数图象与 $y$ 轴交于点 $A(0,-6)$,与 $x$ 轴交于 $C$,$D$ 两点,顶点坐标为 $B(2,-8)$.若点 $P$ 是 $x$ 轴上的一动点.

(1)求此二次函数的表达式;

(2)当 $PA+PB$ 的值最小时,求点 $P$ 的坐标.

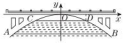



(第 21 题)

**22.** 如图,有一座抛物线形拱桥,在正常水位时水面 $AB$ 的宽为 20 米,如果水位上升 3 米,那么水面 $CD$ 的宽是 10 米.

(1)建立如图所示的直角坐标系,求此抛物线的表达式;

(2)当水位在正常水位时,有一艘宽为 6 米的货船经过这里,船舱上有高出水面 3.6 米的长方体货物(货物与货船同宽).此船能否顺利通过这座拱桥?

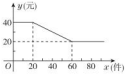



(第 22 题)

**23.** 某工厂生产一种火爆的网红电子产品,每件产品成本 16 元.工厂将该产品进行网络批发,批发单价 $y$(元)与一次性批发量 $x$(件)($x$ 为正整数)之间满足如图所示的函数关系.

(1)直接写出 $y$ 与 $x$ 之间所满足的函数关系式,并写出自变量 $x$ 的取值范围;

(2)若一次性批发量不超过 60 件,当批发量为多少件时,工厂获利最大?最大利润是多少?



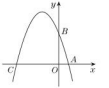

(第 23 题)

**24.** 已知如图,在平面直角坐标系 $xOy$ 中,点 $A$,$B$,$C$ 分别为坐标轴上的三个点,且 $OA=1$,$OB=3$,$OC=4$.

(1)求经过 $A$,$B$,$C$ 三点的抛物线的表达式;

(2)在平面直角坐标系 $xOy$ 中是否存在一点 $P$,使得以点 $A$,$B$,$C$,$P$ 为顶点的四边形为菱形?若存在,请求出点 $P$ 的坐标;若不存在,请说明理由;

(3)若点 $M$ 为该抛物线上一动点,在(2)的条件下,请求出使 $|PM-AM|$ 最大时点 $M$ 的坐标,并直接写出 $|PM-AM|$ 的最大值.




(第 24 题)

荣德基 品质教辅





关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 第2章达标检测卷

（120分，90分钟）

| 题　号 | 一 | 二 | 三 | 总　分 |
|---|---|---|---|---|
| 得　分 | | | | |

一、**选择题**（每题3分，共30分）

**1.** 下列事件是必然事件的是(　　)

A. 乘坐公共汽车恰好有空座　　B. 同位角相等

C. 打开手机就有未接电话　　D. 太阳从东方升起

**2.** 小明制作了十张卡片，上面分别标有1～10这十个数. 从这十张卡片中随机抽取一张恰好能被4整除的概率是(　　)

A. $\frac{1}{10}$　　B. $\frac{2}{5}$　　C. $\frac{1}{5}$　　D. $\frac{3}{10}$

**3.** 如图是一个可以自由转动的正六边形转盘，其中三个正三角形涂有阴影，转动指针，指针落在有阴影的区域内的概率为$a$(若指针落在分界线上，则重转)；如果投掷一枚质地均匀的硬币，正面向上的概率为$b$. 关于$a$，$b$大小的正确判断是(　　)

A. $a>b$　　B. $a=b$

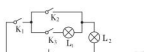
C. $a<b$　　D. 不能判断



（第3题）



（第4题）



（第7题）

**4.** 如图，有6张扑克牌，从中随机抽取一张，点数为偶数的概率是(　　)

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{2}$

**5.** 一个不透明的盒子里有$n$个除颜色外其他完全相同的球，其中有9个黄球. 每次摸球前先将盒子里的球摇匀，任意摸出一个球记下颜色后再放回盒子，通过大量重复摸球试验后发现，摸到黄球的频率稳定在30%，那么估计盒子中球的个数$n$为(　　)

A. 20　　B. 24　　C. 28　　D. 30

**6.** 义乌国际小商品博览会某志愿小组有五名翻译，其中一名只会翻译阿拉伯语，三名只会翻译英语，还有一名两种语言都会翻译. 若从中随机挑选两名组成一组，则该组能够翻译上述两种语言的概率是(　　)

A. $\frac{3}{5}$　　B. $\frac{7}{10}$　　C. $\frac{3}{10}$　　D. $\frac{16}{25}$

**7.** 如图，随机闭合开关$K_1$，$K_2$，$K_3$中的两个，则能让两个灯泡同时发光的概率是(　　)

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

**8.** 质地均匀的骰子六个面分别刻有1到6的点数，掷两次骰子，得到向上一面的两个点数，则下列事件中，发生可能性最大的是(　　)

A. 点数都是偶数　　B. 点数的和为奇数

C. 点数的和小于13　　D. 点数的和小于2

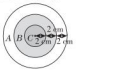


**9.** 如图，在一个长方形内有对角线长分别为2和3的菱形，边长为1的正六边形和半径为1的圆，则一点随机落在这三个图形内的概率较大的是(　　)

A. 落在菱形内　　B. 落在圆内　　C. 落在正六边形内　　D. 一样大



（第9题）




（第14题）

**10.** 同时抛掷$A$，$B$两个均匀的小正方体(每个面上分别标有数字1，2，3，4，5，6)，设两个正方体朝上一面的数字分别为$x$，$y$，并以此确定点$P(x,y)$，那么点$P$在抛物线$y=-x^2+3x$上的概率为(　　)

A. $\frac{1}{18}$　　B. $\frac{1}{12}$　　C. $\frac{1}{9}$　　D. $\frac{1}{6}$

二、**填空题**（每题3分，共24分）

**11.** 下列事件中，必然事件有_____，随机事件有_____，不可能事件有_____.(填序号)

①随意翻开日历，看到的是星期天；

②十五的月亮像弯弯的小船；

③某两个负数的积大于0；

④小明买体彩，中了500万奖金；

⑤两直线相交，对顶角相等.

**12.** 有5张背面无差别的卡片，正面分别标有$-1$，0，$\frac{1}{3}$，$\sqrt{2}$，$\pi$，将它们背面朝上，从中随机抽取1张，则抽出卡片正面的数是无理数的概率是_____.

**13.** 在四边形$ABCD$中，①$AB\parallel CD$；②$AD\parallel BC$；③$AB=CD$；④$AD=BC$. 在这四个条件中任选两个作为已知条件，能判定四边形$ABCD$是平行四边形的概率是_____.

**14.** 在如图所示($A$，$B$，$C$三个区域)的图形中随机地撒一把豆子，豆子落在_____区域的可能性最大.(填“$A$”或“$B$”或“$C$”)

**15.** 在一个不透明的袋中装有除颜色外其余均相同的$n$个球，其中有5个黑球，从袋中随机摸出一球，记下其颜色，这称为一次摸球试验，之后把它放回袋中，搅匀后，再继续摸出一球. 以下是利用计算机模拟的摸球试验次数与摸出黑球次数的表格：

| 摸球试验次数 | 100 | 1 000 | 5 000 | 10 000 | 50 000 | 100 000 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 摸出黑球次数 | 46 | 487 | 2 506 | 5 008 | 24 996 | 50 007 |

根据表格，可以估计出$n$的值是_____.

**16.** 一个口袋中有四个完全相同的小球，把它们分别标号为1，2，3，4，随机地摸出一个小球，然后放回，再随机地摸出一个小球，则两次摸出的小球标号的和等于4的概率是_____.

**17.** 在平面直角坐标系中，从五个点$A(0,0)$，$B(2,0)$，$C(1,1)$，$D(0,2)$，$E(2,2)$中任取三个，这三点能构成三角形的概率是_____.

**18.** 从$-3$，$-2$，$-1$，0，4这五个数中随机抽取一个数记为$a$，$a$的值既是不等式组$\begin{cases}2x+3<4,\\3x-1>-11\end{cases}$的解，又在函数$y=\frac{1}{2x^2+2x}$的自变量取值范围内的概率是_____.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

**三、解答题**(19～21 题每题 10 分,其余每题 12 分,共 66 分)

**19.** 在一个不透明的袋子中装有红球 4 个,绿球 5 个和黄球若干个,任意摸出一个球是黄球的概率是$\frac{1}{4}$.

(1)求袋子里黄球的个数;

(2)求任意摸出一个球是红色的概率.

**20.** 在一次大规模的统计中发现英文文献中字母 E 使用的频率在 0.105 附近,而字母 J 使用的频率大约为 0.001,如果这次统计是可信的,那么下列说法正确吗?试说明理由.

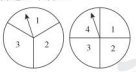
(1)在英文文献中字母 E 出现的概率在 10.5% 左右,字母 J 出现的概率在 0.1% 左右;

(2)如果再去统计一篇约含 200 个字母的英文文献,那么字母 E 出现的概率一定会非常接近 10.5%.

**21.** 如图,甲、乙两个转盘分别被分成了 3 等份与 4 等份,每份内均标有数字,分别旋转这两个转盘.

(1)请将所有可能出现的结果填入下表:

| 积 \ 甲 \ 乙 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | |
| 2 | | | | |
| 3 | | | | |



(第 21 题)

(2)积为 9 的概率为_____;积为偶数的概率为_____.

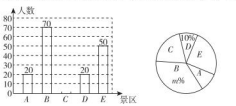
(3)从 1～12 这 12 个整数中,随机选取 1 个,求该数不是(1)中所填数字的概率.

**22.** $A,B,C$ 三人玩篮球传球游戏,游戏规则:第一次传球由 $A$ 将球随机地传给 $B,C$ 两人中的某一人,以后的每一次传球都是由上次的接球者将球随机地传给其他两人中的某一人.

(1)求两次传球后,球恰在 $B$ 手中的概率;

(2)求三次传球后,球恰在 $A$ 手中的概率.

**23.** 某市有 $A,B,C,D,E$ 五个景区很受游客喜爱,一旅行社对某小区居民在暑假期间去以上五个景区旅游(只选一个景区)的意向做了一次随机调查统计,并根据这个统计结果制作了如下两幅不完整的统计图:



(第 23 题)

(1)该小区居民在这次随机调查中被调查到的人数是_____,$m=$_____,并补全条形统计图;

(2)若该小区有居民 1 200 人,试估计去 $B$ 景区旅游的居民约有多少人?

(3)小军同学已去过 $E$ 景区旅游,暑假期间计划与父母从 $A,B,C,D$ 四个景区中,任选两个去旅游,求选到 $A,C$ 两个景区的概率.(要求画树状图或列表求概率)

**24.** 从一副 52 张(没有大小王)的扑克牌中,每次抽出 1 张,然后放回洗匀再抽,在试验中得到下表中部分数据:

| 试验次数 | 40 | 80 | 120 | 160 | 200 | 240 | 280 | 320 | 360 | 400 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 出现方块的次数 | 11 | 18 | | 40 | 49 | 63 | 68 | 80 | 91 | 100 |
| 出现方块的频率 | 0.275 | 0.225 | 0.250 | 0.250 | 0.245 | 0.263 | 0.243 | | 0.253 | 0.250 |

(1)将数据表补充完整.

(2)从上表中可以估计出现方块的概率是_____(精确到 0.01).

(3)从这副扑克牌中取出两组牌,分别是方块 1,2,3 和红桃 1,2,3,将它们背面朝上分别重新洗牌后,从两组牌中各摸出一张,若摸出的两张牌的牌面数字之和等于 3,则甲方赢;若摸出的两张牌的牌面数字之和等于 4,则乙方赢.你认为这个游戏对双方是公平的吗?若不是,有利于谁?请你用概率知识(列表法或画树状图法)加以分析说明.

荣德基 品质教辅





关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 下 册

## 第1章达标检测卷

（120分，90分钟）

| 题 号 | 一 | 二 | 三 | 总 分 |
|---|---|---|---|---|
| 得 分 | | | | |

一、**选择题**（每题3分，共30分）

1. $\cos 30°$的值为（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. 在Rt△$ABC$中，已知$\angle C=90°$，$\angle A=40°$，$BC=3$，则$AC$等于（　　）

A. $3\sin 40°$　　B. $3\sin 50°$　　C. $3\tan 40°$　　D. $3\tan 50°$

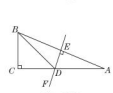
3. 等腰三角形底边与底边上的高的比是$2:\sqrt{3}$，则顶角为（　　）

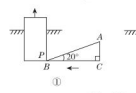
A. 60°　　B. 90°　　C. 120°　　D. 150°

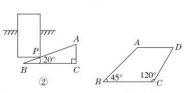
4. 为了测量被池塘隔开的$A$，$B$两点之间的距离，根据实际情况，作出如图所示的图形，其中$AB\perp BE$，$EF\perp BE$，$AF$交$BE$于点$D$，$C$在$BD$上. 有四位同学分别测量出以下4组数据：①$BC$，$\angle ACB$；②$CD$，$\angle ACB$，$\angle ADB$；③$EF$，$DE$，$BD$；④$DE$，$DC$，$BC$. 能根据所测数据，求出$A$，$B$两点之间距离的有（　　）

A. 1组　　B. 2组　　C. 3组　　D. 4组


（第4题）


（第5题）


（第6题）


（第7题）

5. 如图，在△$ABC$中，$\angle C=90°$，$AC=12$，$AB$的垂直平分线$EF$交$AC$于点$D$，连结$BD$，若$\cos\angle BDC=\frac{5}{7}$，则$BC$的长是（　　）

A. 10　　B. 8　　C. $4\sqrt{3}$　　D. $2\sqrt{6}$

6. 如图①，将一个Rt△$ABC$形状的楔子从木桩的底端点$P$处沿水平方向打入木桩底下，使木桩竖直向上运动，已知楔子斜面的倾斜角为20°，若楔子沿水平方向前移8 cm（如图②），则木桩大约上升了（结果保留一位小数. 参考数据：$\sin 20°\approx 0.34$，$\cos 20°\approx 0.94$，$\tan 20°\approx 0.36$）（　　）

A. 2.9 cm　　B. 2.2 cm　　C. 2.7 cm　　D. 7.5 cm

7. 如图，已知在四边形$ABCD$中，$AD\parallel BC$，$\angle B=45°$，$\angle C=120°$，$AB=8$，则$CD$的长为（　　）

A. $\frac{8\sqrt{6}}{3}$　　B. $4\sqrt{3}$　　C. $\frac{8\sqrt{2}}{3}$　　D. $4\sqrt{2}$

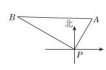
8. 李红同学遇到了这样一道题：求$\sqrt{3}\tan(\alpha+20°)=1$中锐角$\alpha$的度数. 你认为锐角$\alpha$的度数应是（　　）

A. 40°　　B. 30°

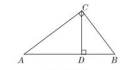
C. 20°　　D. 10°

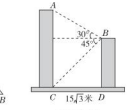
9. 如图，某时刻海上点$P$处有一客轮，测得灯塔$A$位于$P$的北偏东30°方向，且相距20 n mile. 客轮以60 n mile/h的速度沿北偏西60°方向航行$\frac{2}{3}$ h到达$B$处，那么$\tan\angle ABP$的值等于（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. 2　　C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$


（第9题）


（第10题）


（第12题）


（第14题）

10. 如图，一块矩形木板$ABCD$斜靠在墙边（$OC\perp OB$，点$A$，$B$，$C$，$D$，$O$在同一平面内），已知$AB=a$，$AD=b$，$\angle BCO=x$，则点$A$到$OC$的距离等于（　　）

A. $a\sin x+b\sin x$　　B. $a\cos x+b\cos x$

C. $a\sin x+b\cos x$　　D. $a\cos x+b\sin x$

二、**填空题**（每题3分，共24分）

11. 在Rt△$ABC$中，$\angle C=90°$，$AC=1$，$BC=3$，则$\angle A$的正切值为_____.

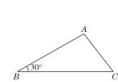
12. 如图，$CD$是Rt△$ABC$斜边上的高，$AC=4$，$BC=3$，则$\cos\angle BCD=$_____.

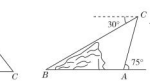
13. 已知传送带的坡度$i=1:2.4$，如果它把物体送到离地面10 m高的地方，那么物体所经过的路程为_____.

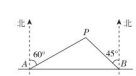
14. 如图，某校教学楼$AC$与实验楼$BD$的水平间距$CD=15\sqrt{3}$米，在实验楼顶部$B$点测得教学楼顶部$A$点的仰角是30°，底部$C$点的俯角是45°，则教学楼$AC$的高度是_____米（结果保留根号）.

15. 如图，正方形$ABCD$的边长为4，点$M$在边$DC$上，$M$，$N$两点关于对角线$AC$所在的直线对称，若$DM=1$，则$\tan\angle ADN=$_____.


（第15题）


（第16题）


（第17题）


（第18题）

16. 如图，在△$ABC$中，$\angle B=30°$，$AC=2$，$\cos C=\frac{3}{5}$，则$AB$边的长为_____.

17. 如图，在小山的东侧$A$点有一个热气球，由于受西风的影响，以30 m/min的速度沿与地面成75°角的方向飞行，25 min后到达$C$处，此时热气球上的人测得小山西侧$B$点的俯角为30°，则小山东西两侧$A$，$B$两点间的距离为_____.

18. 如图，在东西方向的海岸线上有$A$，$B$两个港口，甲货船从$A$港出发，沿北偏东60°的方向以40 n mile/h的速度航行，同时乙货船从$B$港出发，沿西北方向航行，2 h后两船在点$P$处相遇，则乙货船的速度为_____.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

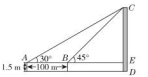
三、**解答题**(19～21 题每题 10 分,其余每题 12 分,共 66 分)

**19**. 计算:

(1) $2^{-1}-\sqrt{3}\tan 60°+(\pi-2\,021)^0+\left|-\frac{1}{2}\right|$;

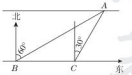
(2) $(\pi-\sqrt{5})^0+\sqrt{4}+(-1)^{2\,021}-\sqrt{3}\tan 60°$.

**20**. 如图,为了测量某建筑物 $CD$ 的高度,先在地面上用测角仪自 $A$ 处测得建筑物顶部的仰角是 30°,然后在水平地面上向建筑物方向前进了 100 m 到达 $B$ 处,此时测得建筑物顶部的仰角是 45°. 已知测角仪的高度是 1.5 m,请你计算出该建筑物的高度(结果精确到 1 m. 参考数据:$\sqrt{3}\approx 1.732$).




(第 20 题)

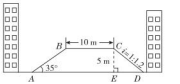
**21**. 如图,为测量一段笔直自西向东的河流的河面宽度,小明在南岸 $B$ 处测得对岸 $A$ 处一棵柳树位于北偏东 60°方向,他以每秒 1.5 米的速度沿着河岸向东步行 40 秒后到达 $C$ 处,此时测得柳树位于北偏东 30°方向. 试计算此段河流河面的宽度.




(第 21 题)



**22**. 为了缓解交通拥堵,方便行人,市政府计划在某街道修建一座横断面为四边形 $ABCD$ 的过街天桥(如图),$BC\parallel AD$,若天桥斜坡 $AB$ 的坡角 $\angle BAD$ 为 35°,斜坡 $CD$ 的坡度 $i=1:1.2$,$BC=10$ m,天桥高度 $CE=5$ m,求 $AD$ 的长度(结果精确到 0.1 m. 参考数据:$\sin 35°\approx 0.57$,$\cos 35°\approx 0.82$,$\tan 35°\approx 0.70$).




(第 22 题)

**23**. 如图是由 6 个形状、大小完全相同的小矩形组成的,小矩形的顶点称为格点. 已知小矩形较短边长为 1,$\triangle ABC$ 的顶点都在格点上.

(1)用无刻度的直尺作图:找出格点 $D$,连结 $CD$,使 $\angle ACD=90°$;

(2)在(1)的条件下,连结 $AD$,求 $\tan\angle BAD$ 的值.



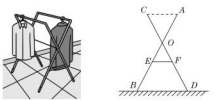

(第 23 题)

**24**. 小红家的阳台上放置了一个晒衣架(如图①),图②是晒衣架的侧面示意图,立杆 $AB$,$CD$ 相交于点 $O$,$B$,$D$ 两点立于地面,经测量:$AB=CD=136$ cm,$OA=OC=51$ cm,$OE=OF=34$ cm,现将晒衣架完全稳固张开,扣链 $EF$ 成一条线段,且 $EF=32$ cm(参考数据:$\sin 61.9°\approx 0.882$,$\cos 61.9°\approx 0.471$,$\tan 28.1°\approx 0.534$).

(1)求证:$AC\parallel BD$;

(2)求扣链 $EF$ 与立杆 $AB$ 的夹角 $\angle OEF$ 的度数(结果精确到 0.1°);

(3)小红的连衣裙穿在衣架上的总长度达到 122 cm,垂挂在晒衣架上是否会碰到地面?请通过计算说明理由.




① ②

(第 24 题)



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 第2章达标检测卷

（120分，90分钟）

| 题　号 | 一 | 二 | 三 | 总　分 |
|---|---|---|---|---|
| 得　分 | | | | |

一、选择题（每题3分，共30分）

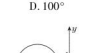
1. 已知⊙$O$的直径是6，点$O$到直线$l$的距离为3，则直线$l$与⊙$O$的位置关系是（　　）
A. 相离　　B. 相切　　C. 相交　　D. 无法判断

2. 平面内，⊙$O$的半径为1，点$P$到$O$的距离为2，过点$P$可作⊙$O$的切线（　　）
A. 0条　　B. 1条　　C. 2条　　D. 无数条

3. 如图，$AB$是⊙$O$的直径，$AC$是⊙$O$的切线，$A$为切点，$BC$与⊙$O$交于点$D$，连结$OD$，若$\angle C=50°$，则$\angle AOD$的度数为（　　）
A. 40°　　B. 50°　　C. 80°　　D. 100°


（第3题）


（第4题）


（第5题）

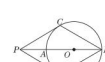
4. 如图，已知⊙$O$的半径为$R$，$AB$是⊙$O$的直径，$D$是$AB$延长线上的一点，$DC$是⊙$O$的切线，$C$是切点，连结$AC$，$BC$，若$\angle BCD=\angle CAB=30°$，则$BD$的长为（　　）
A. $2R$　　B. $\sqrt{3}R$　　C. $R$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}R$

5. 如图，在平面直角坐标系$xOy$中，半径为2的⊙$P$的圆心$P$的坐标为$(-3,0)$，将⊙$P$沿$x$轴正方向平移，使⊙$P$与$y$轴相切，则平移的距离为（　　）
A. 1　　B. 1或5　　C. 3　　D. 5

6. 如图，⊙$O$内切于△$ABC$，切点分别为$D$，$E$，$F$．$\angle B=50°$，$\angle C=60°$，连结$OE$，$OF$，$DE$，$DF$，则$\angle EDF$等于（　　）
A. 40°　　B. 55°　　C. 65°　　D. 70°


（第6题）


（第7题）


（第8题）


（第10题）

7. 如图，$AB$为⊙$O$的直径，$AD$切⊙$O$于点$A$，$\overset{\frown}{EC}=\overset{\frown}{CB}$．则下列结论不一定正确的是（　　）
A. $BA\perp DA$　　B. $OC/\!/AE$　　C. $\angle COE=2\angle CAE$　　D. $OD\perp AC$

8. 如图，$P$为⊙$O$的直径$BA$延长线上的一点，$PC$与⊙$O$相切，切点为$C$，点$D$是⊙$O$上一点，连结$PD$．已知$PC=PD=BC$．下列结论：
（1）$PD$与⊙$O$相切；（2）四边形$PCBD$是菱形；（3）$PO=AB$；（4）$\angle PDB=120°$．
其中正确的个数为（　　）
A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

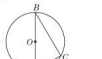
9. 已知⊙$O$的半径为1，圆心$O$到直线$l$的距离为2，过$l$上任意一点$A$作⊙$O$的切线，切点为$B$，则线段$AB$长度的最小值为（　　）
A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

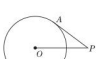
10. 如图，已知正方形$ABCD$，点$E$是边$AB$的中点，点$O$是线段$AE$上的一个动点（不与$A$，$E$重合），以$O$为圆心，$OB$为半径的圆与边$AD$相交于点$M$，过点$M$作⊙$O$的切线交$DC$于点$N$，连结$OM$，$ON$，$BM$，$BN$．记△$MNO$，△$AOM$，△$DMN$的面积分别为$S_1$，$S_2$，$S_3$，则下列结论不一定成立的是（　　）
A. $S_1>S_2+S_3$　　B. △$AOM\backsim$△$DMN$
C. $\angle MBN=45°$　　D. $MN=AM+CN$

二、填空题（每题3分，共24分）

11. 如图，$\angle APB=30°$，圆心在$PB$上的⊙$O$的半径为1 cm，$OP=3$ cm，若⊙$O$沿$BP$方向平移，当⊙$O$与直线$PA$相切时，圆心$O$平移的距离为_____．


（第11题）


（第12题）


（第13题）

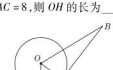

（第14题）

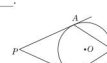
12. 如图，已知$AD$为⊙$O$的切线，⊙$O$的直径$AB=2$，弦$AC=1$，$\angle CAD=$_____°．

13. 如图，$PA$是⊙$O$的切线，$A$是切点，$PA=4$，$OP=5$，则⊙$O$的周长为_____．（结果保留$\pi$）

14. 如图，一个边长为4 cm的等边三角形$ABC$的高与⊙$O$的直径相等．⊙$O$与$BC$相切于点$C$，与$AC$相交于点$E$，则$CE$的长为_____ cm．

15. 如图，$AB$是⊙$O$的切线，$A$为切点，$AC$是⊙$O$的弦，过点$O$作$OH\perp AC$于点$H$，连结$OA$．若$AB=12$，$BO=13$，$AC=8$，则$OH$的长为_____．


（第15题）


（第16题）


（第17题）


（第18题）

16. 如图，$PA$，$PB$分别与⊙$O$相切于$A$，$B$两点，点$C$为⊙$O$上一点，连结$AC$，$BC$，若$\angle P=50°$，则$\angle ACB$的度数为_____．

17. 如图，直线$l$与半径为4的⊙$O$相切于点$A$，$P$是⊙$O$上的一个动点（不与点$A$重合），过点$P$作$PB\perp l$，垂足为$B$，连结$PA$．设$PA=x$，$PB=y$，则$x-y$的最大值是_____．

18. 如图，点$C$在以$AB$为直径的半圆上，$AB=8$，$\angle CBA=30°$，点$D$在线段$AB$上运动，点$E$与点$D$关于$AC$对称，$DF\perp DE$于点$D$，$DF$交$EC$的延长线于点$F$，下列结论：①$CE=CF$；②线段$EF$的最小值为$2\sqrt{3}$；③当$AD=2$时，$EF$与半圆相切；④若点$F$恰好落在$\overset{\frown}{BC}$上，则$AD=2\sqrt{5}$；⑤当点$D$从点$A$运动到点$B$时，线段$EF$扫过的面积是$16\sqrt{3}$．其中正确结论的序号是_____．



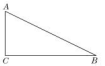
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

**三、解答题**(19～21 题每题 10 分,其余每题 12 分,共 66 分)

**19.** 如图,在 Rt△$ABC$ 中,$\angle ACB=90°$.

(1)先作$\angle ABC$ 的平分线交 $AC$ 边于点 $O$,再以点 $O$ 为圆心,$OC$ 为半径作⊙$O$(要求:尺规作图,保留作图痕迹,不写作法);

(2)请你判断(1)中 $AB$ 与⊙$O$ 的位置关系,并证明你的结论.




(第 19 题)

**20.** 如图,⊙$O$ 的半径为 4,$B$ 是⊙$O$ 外一点,连结 $OB$,且 $OB=6$. 过点 $B$ 作⊙$O$ 的切线 $BD$,切点为 $D$,延长 $BO$ 交⊙$O$ 于点 $A$,过点 $A$ 作切线 $BD$ 的垂线,垂足为 $C$.

(1)求证:$AD$ 平分$\angle BAC$;

(2)求 $AC$ 的长.

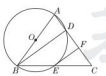



(第 20 题)

**21.** 如图,在△$ABC$ 中,$AB=AC=5$,$BC=6$,以 $AB$ 为直径作⊙$O$ 分别交 $AC$,$BC$ 于点 $D$,$E$,过点 $E$ 作⊙$O$ 的切线 $EF$ 交 $AC$ 于点 $F$,连结 $BD$.

(1)求证:$EF$ 是△$CDB$ 的中位线;

(2)求 $EF$ 的长.

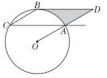



(第 21 题)

**22.** 如图,点 $A$,$B$,$C$ 在半径为 8 的⊙$O$ 上,过点 $B$ 作 $BD\parallel AC$,交 $OA$ 延长线于点 $D$,连结 $BC$,且$\angle BCA=\angle OAC=30°$.

(1)求证:$BD$ 是⊙$O$ 的切线;

(2)求图中阴影部分的面积.



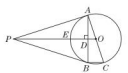

(第 22 题)

**23.** 如图,$PA$ 是⊙$O$ 的切线,切点为 $A$,$AC$ 是⊙$O$ 的直径,连结 $OP$ 交⊙$O$ 于 $E$,过 $A$ 点作 $AB\perp PO$ 于点 $D$,交⊙$O$ 于 $B$,连结 $BC$,$PB$.

(1)求证:$PB$ 是⊙$O$ 的切线;

(2)求证:$E$ 为△$PAB$ 的内心;

(3)若 $\cos\angle PAB=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$,$BC=1$,求 $PO$ 的长.



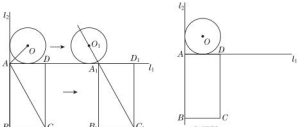

(第 23 题)

**24.** 如图,已知 $l_1\perp l_2$,⊙$O$ 与 $l_1$,$l_2$ 都相切,⊙$O$ 的半径为 2 cm. 矩形 $ABCD$ 的边 $AD$,$AB$ 分别与 $l_1$,$l_2$ 重合,$AB=4\sqrt{3}$ cm,$AD=4$ cm. 若⊙$O$ 与矩形 $ABCD$ 沿 $l_1$ 同时向右移动,⊙$O$ 的移动速度为 3 cm/s,矩形 $ABCD$ 的移动速度为 4 cm/s,设移动时间为 $t$ s.

(1)连结 $OA$,$AC$,则$\angle OAC$ 的度数为_____°;

(2)两个图形移动一段时间后,⊙$O$ 到达⊙$O_1$ 的位置,矩形 $ABCD$ 到达矩形 $A_1B_1C_1D_1$ 的位置,此时点 $O_1$,$A_1$,$C_1$ 恰好在同一直线上,求圆心 $O$ 移动的距离;

(3)在移动过程中,圆心 $O$ 到矩形对角线 $AC$ 所在直线的距离在不断变化,设该距离为 $d$(cm). 当 $d<2$ 时,求 $t$ 的取值范围.(解答时可以利用备用图画出相关示意图)




(第 24 题)

荣德基 品质教辅





关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

## 正文练习答案

上 册

### 第1章 二次函数

#### 1.1 二次函数

1. C　2. C　3. B

4. C　**点拨**：$x$ 是实数且满足 $(x-2)(x-3)\sqrt{1-x}=0$，∴ $1-x\geqslant 0$，即 $x\leqslant 1$. 当 $x\leqslant 1$ 时，$x-2\neq 0$，$x-3\neq 0$，∴ $\sqrt{1-x}=0$，∴ $x=1$. 当 $x=1$ 时，$y=x^2+x+1=1+1+1=3$. 故选 C.

5. A　6. C　7. $y=x^2-4x+3$

8. B　**点拨**：根据降价 $x$ 元，则售价为 $(60-x)$ 元，销售量为 $(300+20x)$ 件，由题意可得等量关系：总销售额 = 销售量 × 售价，根据等量关系列出函数表达式即可.

9. A　**点拨**：长是 $(60+2x)$ cm，宽是 $(40+2x)$ cm，由矩形的面积公式得 $y=(60+2x)(40+2x)$. 故选 A.

10. B　**点拨**：根据题意，得 $\begin{cases}a-2\neq 0,\\ a^2-2=2,\end{cases}$ ① ②

由①，得 $a\neq\pm 2$；

由②，得 $a=\pm 2$，所以 $a=-2$.

**易错总结**：求二次函数中所含字母的值时，要根据二次函数的定义，在保证函数中含自变量的式子是整式的前提下，还必须满足自变量的最高次数是 2 和二次项系数不为 0. 在解题过程中，往往容易忽略“二次项系数不为 0”这个条件，只是从自变量的最高次数是 2 入手列方程求字母的值，而得出错解.

11. **解**：(1) 由题意可知：$k^2+k=2$ 且 $k-1\neq 0$，∴ $k=-2$.

(2) 当 $k=-2$ 时，函数表达式为 $y=-3x^2+1$，二次项系数为 $-3$，一次项系数为 0，常数项为 1.

12. **解**：$y=(x-42)\,l=(x-42)(-4x+204)$，即 $y=-4x^2+372x-8\,568$.

因为每双进价为 42 元，所以 $x\geqslant 42$.

而销售量 $l\geqslant 0$，故 $-4x+204\geqslant 0$，即 $x\leqslant 51$.

所以自变量 $x$ 的取值范围为 $42\leqslant x\leqslant 51$.

**点拨**：本题是跨要求的是 $y$ 与 $x$ 间的函数关系式，即式子中不应该含有 $t$，于是在运算过程中，应利用 $t$ 与 $x$ 之间的关系式将 $t$ 代换掉.

13. **解**：(1) $S=x\left(\dfrac{12}{2}-x\right)$，

即 $S=-x^2+6x\,(0<x<6)$.

(2)

| $x$(m) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $S$(m$^2$) | 5 | 8 | 9 | 8 | 5 |
| 设计费(元) | 5 000 | 8 000 | 9 000 | 8 000 | 5 000 |

由表格可得，当 $x=3$ 时，广告牌的设计费最多.

14. **解**：在 Rt△$ABE$ 和 Rt△$ADF$ 中，

∵ $\begin{cases}AB=AD,\\ AE=AF,\end{cases}$ ∴ Rt△$ABE$≌Rt△$ADF$，

∴ $BE=DF$，∴ $BC=CD$，

∴ $EC=FC$，∴ $FC=x$，∴ $BE=DF=4-x$.

∴ $S_{△ABE}=S_{△ADF}=\dfrac{1}{2}\times 4\times(4-x)=8-2x$，$S_{△AFE}=S_{正方形ABCD}-2S_{△ABE}-S_{△EFC}=16-2\times(8-2x)-\dfrac{1}{2}x^2$，

即 $y=-\dfrac{1}{2}x^2+4x\,(0<x\leqslant 4)$.

#### 1.2 二次函数的图象

##### 第1课时　二次函数 $y=ax^2\,(a\neq 0)$ 的图象

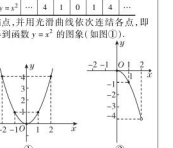
1. B　2. A　3. C　4. ①④　5. D　6. A　7. D

8. C　**点拨**：将一次函数表达式展开，可得出该函数图象与 $y$ 轴交于负半轴. 分析四个选项可知，只有 C 选项符合，由此即可得出结论.

9. **解**：(1) ① 列表：

| $x$ | … | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y=x^2$ | … | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 | … |

②描点，并用光滑曲线依次连结各点，即可得到函数 $y=x^2$ 的图象(如图①).



①

(第 9 题)



②

(2) ① 列表：

| $x$ | … | 0 | 1 | 2 | … |
|---|---|---|---|---|---|
| $y=-x^2$ | … | 0 | -1 | -4 | … |

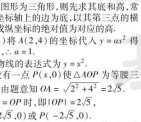
②描点，并用光滑曲线依次连结各点，即可得到函数 $y=-x^2\,(0\leqslant x<2)$ 的图象(如图②).

10. **解**：(1) 根据题意，得 $\begin{cases}m^2+3m-2=2,\\ m+3\neq 0,\end{cases}$ 解得 $m=1$ 或 $-4$.

(2) 当 $m+3<0$，即 $m=-4$ 时，抛物线的开口向下.

(3) 当 $m+3>0$，即 $m=1$ 时，抛物线有最低点. 此时它的顶点坐标为 $(0,0)$，对称轴为 $y$ 轴.

11. **解**：如图，点 $A$ 关于 $y$ 轴的对称点 $A'$ 的横坐标为 $-1$，易知 $A'$ 在抛物线 $y=-x^2$ 上，连结 $A'B$，与 $y$ 轴相交于点 $C$，连结 $AC$，则此时点 $C$ 即为使 $AC+BC$ 取最小值的点，$AC+BC$ 的最小值即为 $A'B$ 的值. 当 $x=-1$ 时，$y=-1$，当 $x=2$ 时，$y=-4$，所以 $A'(-1,-1)$，$B(2,-4)$，由勾股定理得，$A'B=\sqrt{(-1-2)^2+(-1-(-4))^2}=3\sqrt{2}$. 所以 $AC+BC$ 的最小值为 $3\sqrt{2}$.



(第 11 题)

12. **解**：(1) 设直线 $AB$ 的表达式为 $y=kx+b$，∵ 直线 $AB$ 过点 $A(2,0)$，$B(1,1)$，∴ $\begin{cases}2k+b=0,\\ k+b=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-1,\\ b=2,\end{cases}$ ∴ 直线 $AB$ 的表达式为 $y=-x+2$. 把点 $B(1,1)$ 的坐标代入 $y=mx^2$ 中，解得 $a=1$，∴ 抛物线的表达式为 $y=x^2$.

(2) 由 $\begin{cases}y=-x+2,\\ y=x^2,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x_1=1,\\ y_1=1,\end{cases}\begin{cases}x_2=-2,\\ y_2=4,\end{cases}$ ∴ $C(-2,4)$. 设点 $B$，$C$ 的纵坐标分别为 $y_B$，$y_C$，则 $S_{△OBC}=S_{△AOC}-S_{△AOB}=\dfrac{1}{2}AO\cdot|y_C|-\dfrac{1}{2}AO\cdot|y_B|=\dfrac{1}{2}\times 2\times 4-\dfrac{1}{2}\times 2\times 1=3$.

设点 $D$ 的纵坐标为 $y_D$，则 $S_{△AOD}=\dfrac{1}{2}OA\cdot|y_D|=\dfrac{1}{2}OA\cdot y_D$，

∴ $\dfrac{1}{2}\times 2\times y_D=3$，解得 $y_D=3$.

把 $y_D=3$ 代入 $y=x^2$，解得 $x=\pm\sqrt{3}$.

∵ 点 $D$ 在第一象限内，

∴ 点 $D$ 的坐标为 $(\sqrt{3},3)$.

**点拨**：化不规则图形为规则图形是求函数图象中相关图形面积的常规思路和方法. 若图形为三角形，则先求其底和高，常以两坐标轴上的边为底，以其第三点的横坐标或纵坐标的绝对值为对应的高.

13. **解**：(1) 将 $A(2,4)$ 的坐标代入 $y=ax^2$，得 $4=4a$，∴ $a=1$.

∴ 抛物线的表达式为 $y=x^2$.

(2) 设有一点 $P(x,0)$ 使△$AOP$ 为等腰三角形. 由题意知 $OA=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$.

当 $OA=OP$ 时，即 $|OP|=2\sqrt{5}$，

∴ $P(2\sqrt{5},0)$ 或 $P(-2\sqrt{5},0)$.

当 $OA=AP$ 时，$(x-2)^2+4^2=2^2+4^2$，得 $x=0$(舍去) 或 $x=4$，∴ $P(4,0)$.

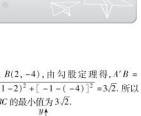
当 $OP=AP$ 时，$x^2=(x-2)^2+4^2$，∴ $x=5$，∴ $P(5,0)$.

综上，点 $P$ 的坐标为 $(2\sqrt{5},0)$，$(-2\sqrt{5},0)$，$(4,0)$ 或 $(5,0)$ 时，△$AOP$ 为等腰三角形.

##### 第2课时　二次函数 $y=a(x-m)^2+k\,(a\neq 0)$ 的图象

1. B　2. C　3. A

4. A　**点拨**：如图，抛物线 $C_1$：$y=\dfrac{1}{2}-(x-1)^2-1$ 沿水平方向向右(或向左) 平移 1 m 1 个单位，得到抛物线 $C_2$：$y=\dfrac{1}{2}(x-m-1)^2-1$，易知 $DD_1=QQ_1$，连结 $DD_1$，过点 $Q$ 作 $QM\perp DD_1$ 于点 $M$.



(第 4 题)

∵ $D(1,-1)$，$D_1(m+1,-1)$，

∴ 点 $Q$ 的横坐标为 $\dfrac{m}{2}+1$.

将 $x=\dfrac{m}{2}+1$ 代入 $y=\dfrac{1}{2}(x-1)^2-1$，得 $y=\dfrac{m^2}{8}-1$，∴ $Q\left(\dfrac{m}{2}+1,\dfrac{m^2}{8}-1\right)$.

∵ $\angle DQD_1=60°$，∴ △$DQD_1$ 是等边三角形. ∴ $QD=DD_1=1$ m.

在 Rt△$QDM$ 中，由勾股定理得 $\left(\dfrac{m}{2}+1-1\right)^2+\left(\dfrac{m^2}{8}-1+1\right)^2=m^2$，

解得 $m=\pm 4\sqrt{3}$.

5. C　6. D　7. B　8. D

9. B　**点拨**：∵ 抛物线 $y=(x-m)^2+(m+1)$ 的顶点第一象限，

∴ $\begin{cases}m>0,\\ m+1>0,\end{cases}$ ∴ $m>0$. 故选 B.

10. C　11. C

12. $-3\leqslant a\leqslant 1$　**点拨**：∵ 抛物线的顶点为 $(1,-3)$，而 $0\leqslant x\leqslant 3$，

∴ $-3\leqslant y\leqslant 1$.

∵ 直线 $y$ 与 $x$ 轴平行，

∴ 要使直线 $y=a$ 与抛物线 $y=(x-1)^2-3$ 有交点，$a$ 的取值范围为 $-3\leqslant a\leqslant 1$.

13. **解**：能. 设平移后的图象对应的二次函数表达式为 $y=-x^2+h$，将点 $(3,-3)$ 的坐标代入表达式，得 $h=-6$. 所以平移的方向是向下，平移的距离是 6 个单位.

**点拨**：二次函数图象的平移规律：上加下减；左加右减. 本题易因对平移变化规律理解不透而前功尽.

14. **解**：(1) $a=\dfrac{1}{2}$，$h=1$，$k=-5$.

(2) 图象开口向上，对称轴为直线 $x=1$，顶点坐标为 $(1,-5)$.

15. **解**：(1) 设抛物线的表达式为 $y=a(x-1)^2+4$，

∵ 抛物线过点 $B(0,3)$，

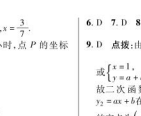
∴ $3=a(0-1)^2+4$. 解得 $a=-1$.

∴ 抛物线的表达式为 $y=-(x-1)^2+4$，即 $y=-x^2+2x+3$.

(2) 如图，作点 $B$ 关于 $x$ 轴的对称点 $E(0,-3)$，连结 $AE$ 交 $x$ 轴于点 $P$，连结 $PB$，此时 $PA+PB$ 的值最小. 设直线 $AE$ 的表达式为 $y=kx+b$，则 $\begin{cases}k+b=4,\\ b=-3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=7,\\ b=-3.\end{cases}$

∴ $y=7x-3$. 当 $y=0$ 时，$x=\dfrac{3}{7}$.

∴ 当 $PA+PB$ 的值最小时，点 $P$ 的坐标为 $\left(\dfrac{3}{7},0\right)$.



(第 15 题)

16. **解**：(1) ∵ 当 $x=2.6$ 时，球从 $O$ 点正上方 2 m 的 $A$ 处发出，

∴ 抛物线 $y=a(x-6)^2+h$ 过点 $(0,2)$.

∴ $2=a(0-6)^2+2.6$. 解得 $a=-\dfrac{1}{60}$.

故 $y$ 与 $x$ 的关系式为 $y=-\dfrac{1}{60}(x-6)^2+2.6$.

(2) 当 $x=9$ 时，$y=-\dfrac{1}{60}(9-6)^2+2.6=2.45>2.43$，∴ 球能越过球网；

当 $y=0$ 时，$-\dfrac{1}{60}(x-6)^2+2.6=0$，解得 $x_1=6+2\sqrt{39}$，$x_2=6-2\sqrt{39}$(舍去).

∵ $6+2\sqrt{39}>18$，∴ 球会出界.

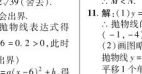
(另解：将 $x=18$ 代入抛物线表达式得 $y=-\dfrac{1}{60}(18-6)^2+2.6=0.2>0$，此时球仍在空中运行，故会出界)

(3) 将 $x=0$，$y=2$ 代入 $y=a(x-6)^2+h$，得 $a=\dfrac{2-h}{36}$. 若球一定能越过球网，则当 $x=9$ 时，$y=\dfrac{2-h}{36}\times(9-6)^2+h=\dfrac{2+3h}{4}>2.43$，

若球不出边界，则当 $x=18$ 时，$y=\dfrac{2-h}{36}(18-6)^2+h=8-3h\leqslant 0$，由①②得 $h\geqslant\dfrac{8}{3}$.

17. **解**：(1) 由题意可知 $h=1$，则 $y=a(x-1)^2+k$. 将点 $(3,0)$，$(0,3)$ 的坐标代入上式，得 $\begin{cases}4a+k=0,\\ a+k=3.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=-1,\\ k=4.\end{cases}$



第 17 题图答案

故抛物线的表达式为 $y=-(x-1)^2+4$.

(2) ① 当 $MA=MB$ 时，$M(0,0)$；

② 当 $AB=AM$ 时，$M(0,-3)$；

③ 当 $AB=BM$ 时，设 $M$ 的坐标为 $(0,b)$，∴ $BM=13-b|$，$AB=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$.

∴ $|13-b|=3\sqrt{2}$，

∴ $b=13-3\sqrt{2}$ 或 $b=13+3\sqrt{2}$.

∴ $M(0,3+3\sqrt{2})$ 或 $M(0,3-3\sqrt{2})$.

综上，点 $M$ 的坐标为 $(0,0)$，$(0,-3)$，$(0,3+3\sqrt{2})$，$(0,3-3\sqrt{2})$.

##### 第3课时　二次函数 $y=ax^2+bx+c\,(a\neq 0)$ 的图象

1. B　2. C　3. D　4. C

5. B　**点拨**：选项 B 中，当 $x=3$ 时，$y=3^2-2\times 3-3=0$，所以点 $A(3,0)$ 在该抛物线上，故选 B.

6. D　7. D　8. A

9. D　**点拨**：由 $\begin{cases}y=ax^2+bx,\\ y=ax+b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-\dfrac{b}{a},\\ y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=1,\\ y=a+b.\end{cases}$

故二次函数 $y_1=ax^2+bx$ 与一次函数 $y_2=ax+b$ 在同一平面直角坐标系中图象的交点为 $\left(-\dfrac{b}{a},0\right)$，$(1,a+b)$.

在 A 中，由一次函数图象可知 $a>0$，$b>0$；由二次函数图象可知 $a>0$，$b>0$，则 $a+b>0$，符合题意.

在 B 中，由一次函数图象可知 $a>0$，$b<0$；由二次函数图象可知 $a>0$，$b<0$，由 $|a|>|b|$，可得 $a+b>0$，不符合题意.

在 C 中，由一次函数图象可知 $a<0$，$b<0$；由二次函数图象可知 $a<0$，$b>0$，由 $|a|>|b|$，可得 $a+b<0$，不符合题意.

在 D 中，由一次函数图象可知 $a<0$，$b>0$；由二次函数图象可知 $a<0$，$b>0$，由 $|a|>|b|$，可得 $a+b<0$，符合题意.

10. <　**点拨**：由图象可得，当 $x=-1$ 时，$y=a-b+c>0$，当 $x=2$ 时，$y=4a+2b+c<0$，

∴ $M=N=4a+2b-(a-b)=4a+2b+c-(a-b+c)<0$，

∴ $M<N$.

11. **解**：(1) $y=x^2+2x-3=(x+1)^2-4$.

∴ 抛物线的开口方向向上，顶点坐标为 $(-1,-4)$，对称轴为直线 $x=-1$.

(2) 画图略.

抛物线 $y=x^2$ 先向下平移 4 个单位，再向左平移 1 个单位得到抛物线 $y=(x+1)^2-4$.

12. **解**：(1) 把点 $B(1,0)$ 的坐标代入 $y=-x^2+mx+3$ 得 $0=-3^2+3m+3$，解得 $m=2$.

∴ $y=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$，

∴ 顶点坐标为 $(1,4)$.

(2) 如图，连结 $BC$ 交抛物线的对称轴 $l$ 于点 $P$，连结 $PA$，则此时 $PA+PC$ 的值最小，设直线 $BC$ 的表达式为 $y=kx+b$，

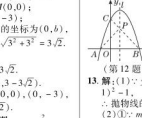
∵ 点 $C(0,3)$，点 $B(3,0)$，

∴ $\begin{cases}0=3k+b,\\ 3=b.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-1,\\ b=3.\end{cases}$

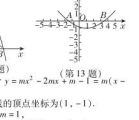
∴ 直线 $BC$ 的表达式为 $y=-x+3$.

当 $x=1$ 时，$y=-1+3=2$，

∴ 当 $PA+PC$ 的值最小时，点 $P$ 的坐标为 $(1,2)$.



(第 12 题)



(第 13 题)

13. **解**：(1) ∵ $y=mx^2-2mx+m-1=m(x-1)^2-1$，

∴ 抛物线的顶点坐标为 $(1,-1)$.

(2) ① ∴ $m=1$，

∴ 抛物线的表达式为 $y=x^2-2x$.

令 $y=0$，得 $x=0$ 或 2，不妨设 $A(0,0)$，$B(2,0)$，

∴ 线段 $AB$ 上整点的个数为 3.

② 如图，假设点 $A$ 在点 $B$ 的左边. 抛物线在点 $A$，$B$ 之间的部分与线段 $AB$ 所围成



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

的区域内(包括边界)恰有 6 个整点，
∴点 $A$ 的横坐标在 $-1$ 与 $-2$ 之间(含 $-1$，不含 $-2$)，

当抛物线经过点 $(-1,0)$ 时，$m=\frac{1}{4}$，

当抛物线经过点 $(-2,0)$ 时，$m=\frac{1}{9}$，

∴ $m$ 的取值范围为 $\frac{1}{9}<m\leqslant\frac{1}{4}$.

## 第 4 课时　确定二次函数的表达式

**1.** 解：(1)∵抛物线 $y=-\frac{1}{3}x^2+bx+c$ 经过 $A(3\sqrt{3},0)$，$B(0,3)$，

∴ $\begin{cases}-9+3\sqrt{3}b+c=0,\\ c=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=\frac{2\sqrt{3}}{3},\\ c=3.\end{cases}$

∴抛物线的表达式为 $y=-\frac{1}{3}x^2+\frac{2\sqrt{3}}{3}x+3$.

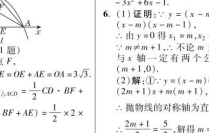
(2)由(1)知抛物线的对称轴为直线 $x=\sqrt{3}$. 把 $x=\sqrt{3}$ 代入 $y=-\frac{1}{3}x^2+\frac{2\sqrt{3}}{3}x+3$ 得 $y=4$，则点 $C$ 的坐标为 $(\sqrt{3},4)$.

设直线 $AB$ 的表达式为 $y=kx+a$.

将 $A(3\sqrt{3},0)$，$B(0,3)$ 的坐标代入可求得 $k=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，$a=3$，∴直线 $AB$ 的表达式为 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+3$. 如图，设抛物线的对称轴 $l$ 与 $x$ 轴的交点为 $E$，与直线 $AB$ 的交点 $D$ 的坐标为 $(\sqrt{3},m)$，

将点 $D(\sqrt{3},m)$ 的坐标代入 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+3$，得 $m=2$，∴点 $D$ 的坐标为 $(\sqrt{3},2)$，

∴ $CD=CE-DE=2$.




(第 1 题)

过点 $B$ 作 $BF\perp l$ 于点 $F$，

∴ $BF=OE$，∴ $BF+AE=OE+AE=OA=3\sqrt{3}$.

∴ $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle BCD}+S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}\cdot CD\cdot BF+\frac{1}{2}\cdot CD\cdot AE=\frac{1}{2}\cdot CD(BF+AE)=\frac{1}{2}\times2\times3\sqrt{3}=3\sqrt{3}$.

**2.** (1)**证明**：由题意可知，抛物线的对称轴为直线 $x=1$.

若 $C(-1,2)$ 在这个抛物线上，

则 $C$ 点关于直线 $x=1$ 的对称点 $(3,2)$ 也在这个抛物线上.

∵ $C$，$E$ 两点不可能同时在抛物线 $y=a(x-1)^2+k(a>0)$ 上.

(2)**解**：点 $A$ 不在抛物线 $y=a(x-1)^2+k(a>0)$ 上.

理由：若点 $A(1,0)$ 在抛物线 $y=a(x-1)^2+k(a>0)$ 上，则 $k=0$，∴ $y=a(x-1)^2$.

易知 $B(0,-1)$，$D(2,-1)$ 都不在该抛物线上.

由(1)知，$C$，$E$ 两点不可能同时在该抛物线上.

∴当该抛物线经过其中三个点矛盾.

∴点 $A$ 不在该抛物线上.

(3)**解**：由(2)可知 $A$ 不在抛物线 $y=a(x-1)^2+k(a>0)$ 上. 结合(1)的结论易知 $B$，$D$ 一定在该抛物线上.

①若点 $C(-1,2)$ 在此抛物线上，则 $\begin{cases}a+k=-1,\\ 4a+k=2.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\ k=-2.\end{cases}$

②若点 $E(4,2)$ 在此抛物线上，则 $\begin{cases}a+k=-1,\\ 9a+k=2.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\frac{3}{8},\\ k=-\frac{11}{8}.\end{cases}$

综上可知，$\begin{cases}a=1,\\ k=-2,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=\frac{3}{8},\\ k=-\frac{11}{8}.\end{cases}$

**3.** B

**4.** 解：(1)∵抛物线与 $x$ 轴交于点 $A(1,0)$，$B(3,0)$，∴抛物线的表达式为 $y=a(x-1)(x-3)$.

把 $C(0,-3)$ 的坐标代入，得 $3a=-3$，解得 $a=-1$，故抛物线的表达式为 $y=-(x-1)(x-3)$，

即 $y=-x^2+4x-3$.

∵ $y=-x^2+4x-3=-(x-2)^2+1$，

∴顶点坐标为 $(2,1)$.

(2)先向左平移 2 个单位，再向下平移 1 个单位，能使平移后的抛物线顶点落在直线 $y=-x$ 上. 平移后抛物线的表达式为 $y=-x^2$(答案不唯一).

**5.** 解：$y=3x^2-6x+5$ 可化为 $y=3(x-1)^2+2$，据题对称可知：

(1)两图象关于 $x$ 轴对称，所求表达式为 $y=-3(x-1)^2-2$，即 $y=-3x^2+6x-5$.

(2)两图象关于 $y$ 轴对称，所求表达式为 $y=3(x+1)^2+2$，即 $y=3x^2+6x+5$.

(3)两图象关于经过抛物线 $y=3x^2-6x+5$ 的顶点且平行于 $x$ 轴的直线对称，所求表达式为 $y=-3(x-1)^2+2$，即 $y=-3x^2+6x-1$.

**6.** (1)**证明**：∵ $y=(x-m)^2-(x-m)=(x-m)(x-m-1)$，

∴由 $y=0$ 得 $x_1=m$，$x_2=m+1$.

∵ $m\neq m+1$，∴不论 $m$ 为何值，该抛物线与 $x$ 轴一定有两个公共点：$(m,0)$，$(m+1,0)$.

(2)**解**：①∵ $y=(x-m)(x-m-1)=x^2-(2m+1)x+m(m+1)$，

∴抛物线的对称轴为直线 $x=\frac{2m+1}{2}$.

∴ $\frac{2m+1}{2}=\frac{5}{2}$，解得 $m=2$. ∴该抛物线对应的函数表达式为 $y=x^2-5x+6$.

②∵ $y=x^2-5x+6=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$，

∴把该抛物线沿 $y$ 轴向上平移 $\frac{1}{4}$ 个单位后，得到的抛物线与 $x$ 轴只有一个公共点.

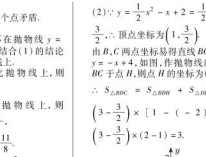
**7.** 解：(1)由题意，得 $\begin{cases}4a-2b+2=6,\\ 4a+2b+2=2.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=\frac{1}{2},\\ b=-1.\end{cases}$ ∴抛物线的表达式为 $y=\frac{1}{2}x^2-x+2$.

(2)∵ $y=\frac{1}{2}x^2-x+2=\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{3}{2}$，∴顶点坐标为 $\left(1,\frac{3}{2}\right)$.

由 $B$，$C$ 两点坐标易得直线 $BC$ 的表达式为 $y=-x+4$，如图，作抛物线的对称轴，交 $BC$ 于点 $H$，则点 $H$ 的坐标为 $(1,3)$，

∴ $S_{\triangle BHC}=S_{\triangle BHM}+S_{\triangle CHM}=\frac{1}{2}\times\left(3-\frac{3}{2}\right)\times[1-(-2)]+\frac{1}{2}\times\left(3-\frac{3}{2}\right)\times(2-1)=3.6$.




(第 7 题)

(3)由 $\begin{cases}y=-\frac{1}{2}x+t,\\ y=\frac{1}{2}x^2-x+2,\end{cases}$ 消去 $y$，得到 $x^2-x+4-2t=0$.

当 $1-4(4-2t)=0$，即 $t=\frac{15}{8}$ 时，直线与抛物线相切，

当直线 $y=-\frac{1}{2}x+t$ 经过点 $C$ 时，$t=3$，

当直线 $y=-\frac{1}{2}x+t$ 经过点 $B$ 时，$t=5$，

∵直线 $y=-\frac{1}{2}x$ 向上平移 $c$ 个单位所得的直线与抛物线段 $BDC$(包括端点 $B$，$C$)部分有两个交点，

∴ $\frac{15}{8}<c\leqslant3$.

## 1.3　二次函数的性质

### 第 1 课时　二次函数的性质

**1.** D　**2.** D　**3.** A

**4.** D　**点拨**：由 $A(m,n)$，$C(3-m,n)$ 的对称性，可求得二次函数图象的对称轴为直线 $x=\frac{3}{2}$. 由 $B(0,y_1)$，$D(\sqrt{2},y_2)$，$E(2,y_3)$ 与对称轴的距离及开口方向，即可判断 $y_3>y_1>y_2$.

**5.** C　**6.** C

**7.** B　**点拨**：∵ $y=-x^2+2x-3=-(x-1)^2-2$，∴可以得到以下结论：当 $x=1$ 时，抛物线的最大值为 $-2$；当 $x\leqslant1$ 时，$y$ 随 $x$ 的增大而增大；图象的对称轴是直线 $x=1$；令 $x=0$，得 $y=-3$，图象与 $y$ 轴的交点为 $(0,-3)$，在 $x$ 轴下方. 综上所述，故选 B.

**8.** B　**点拨**：∵二次函数 $y=-\frac{1}{4}x^2+x-4$ 可化为 $y=-\frac{1}{4}(x-2)^2-3$，且 $a=-\frac{1}{4}<0$，∴当 $x=2$ 时，二次函数 $y=-\frac{1}{4}x^2+x-4$ 有最大值 $-3$. 故选 B.

**9.** D　**点拨**：∵ $y=x^2-4x+2=(x-2)^2-2$，∴在 $-1\leqslant x\leqslant3$ 的取值范围内，当 $x=2$ 时，$y$ 有最小值 $-2$；当 $x=-1$ 时，$y$ 有最大值，为 $9-2=7$.

**10.** D　**易错总结**：容易忽略题目中给出的信息 $mn<0$，不能得出 $m<0<n$，从而不能根据图象进一步分成 $m<0<n<1$ 和 $m<0<1\leqslant n$ 两种情况讨论.

**11.** 解：(1)函数 $y$ 的最小值为 $\frac{4\times1\times(2a+3)-(-2a)^2}{4\times1}=0$，

解得 $a=3$ 或 $a=-1$.

(2)∵当 $x>5$ 时，$y$ 随 $x$ 的增大而增大，当 $x<5$ 时，$y$ 随 $x$ 的增大而减小，

∴对称轴为直线 $x=5$，即 $-\frac{-2a}{2\times1}=5$，

∴ $a=5$.

**12.** (1)解：当 $y=0$ 时，$\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4(m^2-1)-(2m+1)^2}{4}=\frac{-4m-5}{4}=0$，解得 $m=-\frac{5}{4}$.

(2)**证明**：∵函数 $y=x^2+(2m+1)x+m^2-1$ 的图象与 $x$ 轴的另一个交点为 $\left(-\frac{2m+1}{2},\frac{-4m-5}{4}\right)$，

设顶点在直线 $y_1=kx+n$ 上，则 $\frac{-2m+1}{2}k+n=\frac{-4m-5}{4}$，

故 $-mk+n=m$，$n=\frac{1}{2}k-\frac{5}{4}$，解得 $k=1$，$n=-\frac{3}{4}$.

∴不论 $m$ 取何值，该函数图象的顶点都在直线 $y=x-\frac{3}{4}$ 上.

**13.** 解：(1)∵ $A(2,0)$，$B(0,-6)$ 在函数的图象上，∴ $\begin{cases}-\frac{b}{2}\times4+2b+c=0,\\ c=-6.\end{cases}$

∴ $\begin{cases}b=4,\\ c=-6.\end{cases}$ ∴ $y=-\frac{1}{2}x^2+4x-6$，其对称轴为直线 $x=4$，

∴ $C(4,0)$，∴ $AC=2$，$OB=6$.

∴ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times2\times6=6$，即点 $ABC$ 的面积为 6.

(2)当 $x\neq4$ 时，函数有最大值 2；当 $x=-1$ 时，函数有最小值 $-10.5$.

**14.** 解：(1)因为点 $k=-2$，所以 $A(1,-2)$.

设反比例函数的表达式为 $y=\frac{m}{x}$，

因为点 $A$ 在函数的图象上，所以 $-2=\frac{m}{1}$，解得 $m=-2$，

所以反比例函数的表达式为 $y=-\frac{2}{x}$.

(2)因为点 $A(1,k)$ 在反比例函数的图象上，所以 $y=-\frac{k}{x}$. 由 $y=k(x^2+x-1)=k\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}k$，得抛物线的对称轴为直线 $x=-\frac{1}{2}$. 当 $k>0$ 时，反比例函数不存在 $y$ 随着 $x$ 的增大而增大的情况，所以 $k<0$，此时，当 $x<0$ 或 $x>0$ 时，反比例函数 $y$ 随着 $x$ 的增大而增大. 当 $k<0$ 时，二次函数图象的开口向下，所以当 $x\leqslant-\frac{1}{2}$ 时，二次函数 $y$ 随着 $x$ 的增大而增大，所以自变量 $x$ 的取值范围是 $x\leqslant-\frac{1}{2}$.

(3)由题(2)得点 $Q$ 的坐标为 $\left(-\frac{1}{2},-\frac{5}{4}k\right)$，

因为 $AQ\perp BQ$，且由题意知点 $O$ 是 $AB$ 的中点，所以 $OQ=\frac{1}{2}AB=OA$，得 $\frac{1}{4}+\frac{25}{16}k^2=1+k^2$，解得 $k=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

### 第 2 课时　二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图象与 $x$ 轴的交点

**1.** (1)两；　(2)一；　(3)没有；

**2.** D

**3.** C　**点拨**：二次函数 $y=ax^2-2ax+c$ 的图象经过点 $(-1,0)$，

∴方程 $ax^2-2ax+c=0$ 一定有一个解为 $x=-1$.

∵抛物线的对称轴为直线 $x=1$，

∴二次函数 $y=ax^2-2ax+c$ 的图象与 $x$ 轴的另一个交点为 $(3,0)$.

∴方程 $ax^2-2ax+c=0$ 的解为 $x_1=-1$，$x_2=3$.

**4.** A　**点拨**：∵顶点坐标为 $\left(\frac{1}{2},m\right)$，$n<\frac{1}{2}$，

∴点 $(n,y_1)$ 关于抛物线的对称点 $\left(1-n,y_1\right)$，

$1-n>\frac{1}{2}$.

∴点 $(1-n,y_1)$ 与 $\left(\frac{3}{2}-2n,y_2\right)$ 在该抛物线上.

∵ $(1-n)-\left(\frac{3}{2}-2n\right)=n-\frac{1}{2}<0$，

∴ $\frac{1}{2}<1-n<\frac{3}{2}-2n$.

∵ $a>0$，∴当 $x>\frac{1}{2}$ 时，$y$ 随 $x$ 的增大而增大，∴ $y_1<y_2$，故①正确.

把 $\left(\frac{1}{2},m\right)$ 的坐标代入 $y=ax^2+bx+c$，得 $m=\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c$.

∵ $-\frac{b}{2a}=\frac{1}{2}$，∴ $a+b=0$.

∴一元二次方程 $ax^2-bx+c-m+1=0$ 中，$b^2-4ac+4am-4a+b^2-4ac+4a\left(\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c\right)-4a=(a+b)^2-4a=-4a<0$.

∴关于 $x$ 的一元二次方程 $ax^2-bx+c-m+1=0$ 无实数解，故②正确.

**5.** D　**6.** A

**7.** D　**点拨**：由“二次函数 $y=x^2+bx+c$ 的图象与 $x$ 轴只有一个交点”推知 $x=-\frac{b}{2}$，$B\left(-\frac{b}{2}+\frac{1}{2},m\right)$，最后，根据二次函数图象上点的坐标特征即可得出结论.

**8.** C　**点拨**：∵ $y=(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$，$a\neq b$，

∴ $(a+b)^2-4ab=(a-b)^2>0$.

∴函数 $y=(x+a)(x+b)$ 的图象与 $x$ 轴有 2 个交点，即 $M=2$.

∵函数 $y=(ax+1)(bx+1)=abx^2+(a+b)x+1$，

∴当 $ab\neq0$ 时，$(a+b)^2-4ab=(a-b)^2>0$，此时函数 $y=(ax+1)(bx+1)$ 的图象与 $x$ 轴有 2 个交点，即 $N=2$，则 $M=N$；

当 $ab=0$ 时，不妨令 $a=0$，

∵ $a\neq b$，∴ $b\neq0$，此时函数 $y=(ax+1)(bx+1)=bx+1$ 与一次函数，其图象与 $x$ 轴有 1 个交点，即 $N=1$，则 $M=N+1$.

综上可知，$M=N$ 或 $M=N+1$.

**9.** D　**点拨**：∵ $b>a>0$，∴ $-\frac{b}{2a}<0$. 故①正确；∵抛物线与 $x$ 轴最多有一个交点，∴ $b^2-4ac\leqslant0$.

∴关于 $x$ 的方程 $ax^2+bx+c+2=0$ 中，$\Delta=b^2-4a(c+2)=b^2-4ac-8a<0$. 故②正确；

∵ $a>0$ 且抛物线与 $x$ 轴最多有一个交点，∴ $x$ 取任何值时，$y\geqslant0$，∴当 $x=-1$ 时，$a-b+c\geqslant0$. 故③正确；当 $x=-2$ 时，$4a-2b+c\geqslant0$，

∴ $a+b+c\geqslant3b-3a$，即 $a+b+c\geqslant3(b-a)$.

∴ $\frac{a+b+c}{b-a}\geqslant3$. 故④正确. 故选 D.

**10.** C　**点拨**：此题容易遗漏与 $y$ 轴的交点而错选 B.

**11.** 解：(1)∵抛物线 $y=ax^2-4x+c$ 与 $x$ 轴有两个不同的交点，

∴ $16-8c>0$，解得 $c<2$.

又∵ $c$ 为负整数，∴ $c=-1$. 理由如下：

∵抛物线 $y=2x^2-4x+c$ 的对称轴为直线 $x=1$，

∴点 $A(2,m)$ 和点 $B(3,n)$ 都在对称轴的右侧.

∵当 $x\geqslant1$ 时，$y$ 随 $x$ 的增大而增大，

∴ $m<n$.

**12.** 解：(1)∵抛物线 $y=x^2+(k^2+k-6)x+3k$ 的对称轴是 $y$ 轴，

∴ $k^2+k-6=0$，解得 $k_1=-3$，$k_2=2$.

又∵抛物线 $y=x^2+(k^2+k-6)x+3k$ 与 $x$ 轴有两个交点，

∴ $0-4\times1\times3k=-12k>0$，即 $k<0$.

∴ $k=-3$.

(2)由(1)得抛物线 $y=x^2-9$.

∴点 $P$ 向抛物线 $y=x^2-9$ 上且 $P$ 到 $y$ 轴的距离是 2，

∴点 $P$ 的横坐标为 2 或 $-2$.

当 $x=2$ 时，$y=-5$；当 $x=-2$ 时，$y=-5$，

∴点 $P$ 的坐标为 $(2,-5)$ 或 $(-2,-5)$.

**13.** 解：(1)设 $y$ 关于 $x$ 的函数关系式为 $y=kx+b$，

将点 $(30,100)$，$(35,50)$ 的坐标分别代入 $y=kx+b$，

得 $\begin{cases}30k+b=100,\\ 35k+b=50,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-10,\\ b=400.\end{cases}$

∴ $y$ 关于 $x$ 的函数关系式为 $y=-10x+400$.

(2)设该旅电动牙刷每天的销售利润为

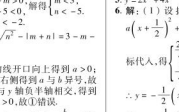



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$w$ 元，由题意得 $w=(x-20)\cdot y=(x-20)(-10x+400)=-10x^2+600x-8\,000=-10(x-30)^2+1\,000$，$\because -10<0$，∴ 当 $x=30$ 时，$w$ 有最大值，最大值为 1 000.

答：该款电动牙刷销售单价为 30 元时，每天销售利润最大，最大销售利润是 1 000 元.

(3) 设销款后每天利润为 $z$ 元，由题意可得 $z=-10x^2+600x-8\,000-200=-10x^2+600x-8\,200$，令 $z=550$，即 $-10x^2+600x-8\,200=550$，解得 $x_1=25$，$x_2=35$.



（第 13 题）

有关利润 $z$ 关于销售单价 $x$ 的函数关系图象如图所示，由图象可得：

当该款电动牙刷的销售单价每支不低于 25 元，且不高于 35 元时，可保证销款后每天利润不低于 550 元.

**14.** 解：(1) ∵ 抛物线 $y=x^2-3x+\frac{5}{4}$ 与 $x$ 轴相交于 $A$，$B$ 两点，与 $y$ 轴相交于点 $C$，

∴ 令 $y=0$，可得 $x=\frac{1}{2}$ 或 $x=\frac{5}{2}$.

∴ $A\left(\frac{1}{2},0\right)$，$B\left(\frac{5}{2},0\right)$.

令 $x=0$，得 $y=\frac{5}{4}$，∴ $C$ 点坐标为 $\left(0,\frac{5}{4}\right)$.

设直线 $BC$ 的表达式为 $y=kx+n$，

则有 $\begin{cases}\frac{5}{2}k+n=0,\\ n=\frac{5}{4},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-\frac{1}{2},\\ n=\frac{5}{4}.\end{cases}$

∴ 直线 $BC$ 的表达式为 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}$.

(2) 设点 $D$ 的横坐标为 $m$，则坐标为 $\left(m,m^2-3m+\frac{5}{4}\right)$，

点 $E$ 的坐标为 $\left(m,-\frac{1}{2}m+\frac{5}{4}\right)$，

设 $DE$ 的长度为 $d$，

∵ 点 $D$ 是直线 $BC$ 下方抛物线上一点，

则 $d=-\frac{1}{2}m+\frac{5}{4}-\left(m^2-3m+\frac{5}{4}\right)$，

整理得 $d=-m^2+\frac{5}{2}m$，

∵ $a=-1<0$，

∴ 当 $m=-\frac{b}{2a}=-\frac{-\frac{5}{2}}{2\times(-1)}=\frac{5}{4}$ 时，$d$ 有最大值，

$d_{最大}=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{0-\frac{25}{4}}{-4}=\frac{25}{16}$.

∴ 所求 $D$ 点的坐标为 $\left(\frac{5}{4},-\frac{15}{16}\right)$.

## 阶段方法技巧训练

**专训 1**

**1.** A　**点拨**：本题运用数形结合思想，在二次函数 $y=ax^2$ 的图象中，$|a|$ 越大，图象的开口越小，所以①，②中，$a>b>0$，③，④中，$d<c<0$，所以 $a>b>c>d$，故选 A.

**2.** $y=nx^2$；$y=nx^2$

**3.** C　**点拨**：∵ 二次函数 $y=3x^2+(b-3)x-4$ 的图象关于 $y$ 轴对称，∴ $b-3=0$，∴ $b=3$.

**4.** $m\le1<n$　**5.** D　**6.** 1　**7.** D　**8.** 15

**9.** 解：由图象知 $\begin{cases}3-m>0,\\ n+5<0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m<3,\\ n<-5.\end{cases}$

∴ $m-3<0$，$m+n<-2$.

∴ $\sqrt{(m-3)^2}+\sqrt{n^2}-|m+n|=3-m-n+m+n=3$.

**10.** D

**11.** C　**点拨**：由抛物线开口向上得到 $a>0$；由对称轴在 $y$ 轴左侧得到 $a$ 与 $b$ 异号，故 $b<0$；由抛物线与 $y$ 轴负半轴相交，得到 $c<0$，从而有 $abc>0$，故①错误.

当 $x=-1$ 时，$a-b+c>0$；由 $-\frac{b}{2a}=1$ 得 $b=-2a$，把 $b=-2a$ 代入 $a-b+c>0$，得 $3a+c>0$，故②正确.

当 $x=1$ 时，$a+b+c<0$，

∴ $(a-b+c)(a+b+c)<0$，

即 $(a+c)^2-b^2<0$，故③正确.

由对称轴为直线 $x=1$，即 $x=1$ 时，$y$ 有最小值，可得④正确.

**专训 2**

**1.** 解：(1) ∵ 把 $C$ 点坐标 $(0,-6)$ 代入二次函数的表达式得 $c=-6$，把 $A$ 点坐标 $(-2,0)$ 代入 $y=x^2+bx-6$ 得 $b=-1$，

∴ 二次函数的表达式为 $y=x^2-x-6$，

即 $y=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}$.

∴ 顶点 $D$ 的坐标为 $\left(\frac{1}{2},-\frac{25}{4}\right)$.

(2) 将二次函数的图象沿 $x$ 轴向左平移 $\frac{5}{2}$ 个单位所得图象对应的函数表达式为 $y=(x+2)^2-\frac{25}{4}$.

令 $y=0$，得 $(x+2)^2-\frac{25}{4}=0$，

解得 $x_1=\frac{1}{2}$，$x_2=-\frac{9}{2}$.

∵ $a>0$，∴ 当 $y<0$ 时，$x$ 的取值范围是 $-\frac{9}{2}<x<\frac{1}{2}$.

**2.** D

**3.** 解：设二次函数图象的顶点坐标为 $(x,2)$，则 $2=x+1$，所以 $x=1$，所以图象的顶点为 $(1,2)$. 设二次函数的表达式为 $y=a(x-1)^2+2$，将 $(3,-6)$ 的坐标代入，可得 $a=-2$. 所以这个二次函数的表达式为 $y=-2(x-1)^2+2$，即 $y=-2x^2+4x$.

**4.** 解：由 $A(1,0)$，$B(-4,0)$ 可知 $AB=5$，$OB=4$.

又∵ $BC=AB$，∴ $BC=5$.

在 Rt △$BCO$ 中，$OC=\sqrt{BC^2-OB^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$，

∴ $C$ 点的坐标为 $(0,3)$ 或 $(0,-3)$.

设抛物线对应的函数表达式为 $y=a(x-1)(x+4)$，将点 $(0,3)$ 的坐标代入得 $3=a(0-1)(0+4)$，解得 $a=-\frac{3}{4}$；

将点 $(0,-3)$ 的坐标代入得 $-3=a(0-1)(0+4)$，解得 $a=\frac{3}{4}$.

∴ 该抛物线对应的函数表达式为 $y=-\frac{3}{4}(x-1)(x+4)$ 或 $y=\frac{3}{4}(x-1)(x+4)$，即 $y=-\frac{3}{4}x^2-\frac{9}{4}x+3$ 或 $y=\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{4}x-3$.

**5.** $y=2x^2+4x$

**6.** 解：(1) 设抛物线的表达式为 $y=a\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+k$. 把点 $(2,0)$，$(0,3)$ 的坐标代入，得 $\begin{cases}\frac{25}{4}a+k=0,\\ \frac{1}{4}a+k=3.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-\frac{1}{2},\\ k=\frac{25}{8}.\end{cases}$

∴ $y=-\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{25}{8}$，

即 $y=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+3$.

(2) 由 $y=0$，得 $-\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{25}{8}=0$，

解得 $x_1=2$，$x_2=-3$，∴ $B(-3,0)$.

① 当 $CM=BM$ 时，∵ $BO=CO=3$，即 △$BOC$ 是等腰直角三角形，

∴ 当 $M$ 点在原点 $O$ 处时，△$MBC$ 是等腰三角形，∴ $M$ 点坐标为 $(0,0)$；

② 当 $BC=BM$ 时，在 Rt △$BOC$ 中，$BO=CO=3$，由勾股定理得 $BC=\sqrt{OC^2+OB^2}=3\sqrt{2}$，

∴ $BM=3\sqrt{2}$. ∴ $M$ 点坐标为 $(3\sqrt{2}-3,0)$.

综上所述，点 $M$ 坐标为 $(0,0)$ 或 $(3\sqrt{2}-3,0)$.

**7.** 解：方法一：设抛物线对应的函数表达式为 $y=ax^2+bx+c$，由题意得 $\begin{cases}-\frac{b}{2a}=-2,\\ \frac{4ac-b^2}{4a}=4,\\ a+b+c=0.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=-\frac{4}{9},\\ b=-\frac{16}{9},\\ c=\frac{20}{9}.\end{cases}$

∴ 抛物线对应的函数表达式为 $y=-\frac{4}{9}x^2-\frac{16}{9}x+\frac{20}{9}$.

方法二：设抛物线对应的函数表达式为 $y=a(x+2)^2+4$，将点 $(1,0)$ 的坐标代入得 $0=a(1+2)^2+4$，解得 $a=-\frac{4}{9}$.

∴ 抛物线对应的函数表达式为 $y=-\frac{4}{9}(x+2)^2+4$，

即 $y=-\frac{4}{9}x^2-\frac{16}{9}x+\frac{20}{9}$.

方法三：∵ 抛物线的顶点坐标为 $(-2,4)$，与 $x$ 轴的一个交点坐标为 $(1,0)$，

∴ 抛物线的对称轴方程为 $x=-2$，与 $x$ 轴的另一个交点坐标为 $(-5,0)$.

设抛物线对应的函数表达式为 $y=a(x-1)(x+5)$，将点 $(-2,4)$ 的坐标代入得 $4=a(-2-1)(-2+5)$，

解得 $a=-\frac{4}{9}$. ∴ 抛物线对应的函数表达式为 $y=-\frac{4}{9}(x-1)(x+5)$，

即 $y=-\frac{4}{9}x^2-\frac{16}{9}x+\frac{20}{9}$.

**点拨**：第一种方法列式较复杂，且计算量大，第二、三种方法较简便，计算量小.

**8.** 解：(1) 点 $D$ 的横坐标、纵坐标的实际意义：当产量为 130 kg 时，该种商品每千克生产成本与销售价相等，都为 42 元.

(2) 设线段 $AB$ 所表示的 $y_1$ 与 $x$ 之间的函数表达式为 $y_1=k_1x+b_1$，将 $A(0,60)$，$B(90,42)$ 代入，得 $\begin{cases}b_1=60,\\ 90k_1+b_1=42,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k_1=-0.2,\\ b_1=60.\end{cases}$ ∴ 所以线段 $AB$ 所表示的 $y_1$ 与 $x$ 之间的函数表达式为 $y_1=-0.2x+60(0\le x\le90)$.

(3) 设 $y_2$ 与 $x$ 之间的函数表达式为 $y_2=k_2x+b_2$.

将 $C(0,120)$，$D(130,42)$ 代入，得 $\begin{cases}b_2=120,\\ 130k_2+b_2=42,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k_2=-0.6,\\ b_2=120.\end{cases}$

所以 $y_2$ 与 $x$ 之间的函数表达式为 $y_2=-0.6x+120(0\le x\le130)$.

设产量为 $x$ kg 时，获得的利润为 $W$ 元.

当 $0\le x\le90$ 时，$W=x[(-0.6x+120)-(-0.2x+60)]=-0.4(x-75)^2+2\,250$.

所以当 $x=75$ 时，$W$ 的值最大，最大值为 2 250.

当 $90<x\le130$ 时，$W=x[(-0.6x+120)-(-0.2x+60)]=-0.6(x-65)^2+2\,535$.

当 $x=90$ 时，$W=-0.6\times(90-65)^2+2\,535=2\,160<2\,250$.

由 $-0.6<0$ 知，当 $x>65$ 时，$W$ 随 $x$ 的增大而减小，所以 $90<x\le130$ 时，$W<2\,160$.

因此当该产品产量为 75 kg 时，获得的利润最大，最大利润是 2 250 元.

**9.** A　**10.** $y=x^2+x-2$

**11.** A　**点拨**：先求出 △$AEF$ 和 △$DEG$ 的面积，然后可得到五边形 $EFBCG$ 的面积，继而可得 $y$ 与 $x$ 的函数关系式.

**12.** 解：(1) ∵ $AB=x$ m，

∴ $BC=(28-x)$ m. 于是易得 $S=AB\cdot BC=x(28-x)=-x^2+28x$，

即 $S=-x^2+28x(0<x<28)$.

(2) 由题意可知 $\begin{cases}x\ge6,\\ 28-x\ge15.\end{cases}$

解得 $6\le x\le13$.

由 (1) 知，$S=-x^2+28x=-(x-14)^2+196$.

易知当 $6\le x\le13$ 时，$S$ 随 $x$ 的增大而增大，∴ 当 $x=13$ 时，$S$ 有最大值 $S_{最大值}=195$，即花园面积的最大值为 195 $m^2$.

## 1.4　二次函数的应用

### 第 1 课时　利用二次函数求几何中的最值应用

**1.** B　**2.** A　**3.** D　**4.** $-\frac{7}{2}\le y\le21$

**5.** $-4\le m\le-2$　**6.** B　**7.** D

**8.** 150　**点拨**：设 $AB=x$ m，矩形 $ABCD$ 的面积为 $S$ $m^2$，则 $BC=\frac{1}{2}(900-3x)$ m，

由题意可得 $S=x\times\frac{1}{2}(900-3x)=-\frac{3}{2}(x^2-300x)=-\frac{3}{2}(x-150)^2+33\,750$，∴ 当 $x=150$ 时，$S$ 取得最大值，此时 $S=33\,750$，∴ $AB=150$ m.

**9.** 4　**10.** 2 s

**11.** 解：(1) 设 $AB=m$ 米，则 $AD=BC=(100-2m)$ 米，解得 $m_1=5$，$m_2=45$，当 $m=5$ 时，$100-2m=90>20$，不合题意舍去；

当 $m=45$ 时，$100-2m=10$，

答：$AD$ 的长为 10 米.

(2) 设 $AD=x$ 米，矩形菜园 $ABCD$ 的面积为 $S$ 平方米，

∴ $S=\frac{1}{2}x(100-x)=-\frac{1}{2}(x-50)^2+1\,250$，

若 $a\ge50$，则当 $x=50$ 时，$S$ 的最大值为 1 250；

若 $0<a<50$，则当 $0<x\le a$ 时，$S$ 随 $x$ 的增大而增大，

∴ 当 $x=a$ 时，$S$ 的最大值为 $50a-\frac{1}{2}a^2$.

综上所述，当 $a\ge50$ 时，矩形菜园 $ABCD$ 面积的最大值为 1 250 平方米；当 $0<a<50$ 时，矩形菜园 $ABCD$ 面积的最大值为 $\left(50a-\frac{1}{2}a^2\right)$ 平方米.

**12.** 解：(1) ∵ 矩形的一边长为 $x$ 米，则长为 16 米，

∴ 其邻边长为 $(8-x)$ 米，

∴ $S=x(8-x)=-x^2+8x$，其中 $0<x<8$.

(2) 能，理由如下：若设计费能达到 24 000 元，则当设计费为 24 000 元时，面积为 24 000 ÷ 2 000 = 12 (平方米)，

即 $-x^2+8x=12$，解得 $x=2$ 或 $x=6$，

∴ 设计费能达到 24 000 元.

(3) ∵ $S=-x^2+8x=-(x-4)^2+16$，

∴ 当 $x=4$ 时，$S$ 有最大值，$S_{最大值}=16$，

∴ 当 $x=4$ 时，矩形的面积最大，为 16 平方米，设计费最多，最多是 16 × 2 000 = 32 000 (元).

**13.** 解：由题意可知，$BP=(12-2t)$ mm，$BQ=4t$ mm.

∴ $S=\frac{1}{2}BP\cdot BQ=\frac{1}{2}(12-2t)\cdot4t$，

整理，得 $S=-4t^2+24t$，易知 $0<t<6$.

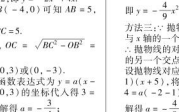
∵ $S=-4t^2+24t=-4(t-3)^2+36$，

∴ 当 $t=3$ 时，$S$ 取得最大值，为 36.

故 $S$ 与 $t$ 的函数关系式为 $S=-4t^2+24t(0<t<6)$，

当 $t=3$ 时，△$PBQ$ 的面积最大，为 36 $mm^2$.

**14.** 解：(1) 如图所示.


（第 14 题）

设裁掉的正方形的边长为 $x$ 分米，

由题意可得 $(12-2x)(8-2x)=32$，

即 $x^2-10x+8=0$，

解得 $x=2$ 或 $x=8$ (舍去).

答：裁掉的正方形的边长是 2 分米.

(2) 设总费用为 $y$ 元，

则 $y=2(12-2x)(8-2x)+0.5\times[2x(12-2x)+2x(8-2x)]=4x^2-60x+192=4(x-7.5)^2-33$，

又 ∵ $12-2x\le6$ ($8-2x\le6$)，∴ $x\ge3$.5，

∴ $a=4>0$，

∴ 当 $x<7.5$ 时，$y$ 随 $x$ 的增大而减小，

∴ 当 $x=3$.5 时，$y$ 取得最小值，最小值为 31.

答：裁掉的正方形边长为 3.5 分米时，总费用最低，最低费用为 31 元.

### 第 2 课时　利用二次函数求实际问题中的最值应用

**1.** B　2. D

**3.** 解：(1) $y=300+20x$

(2) $w=(300+20x)(60-40-x)=-20x^2+100x+6\,000$.

**4.** C

**5.** 解：(1) $y=2x+40$.

(2) 根据题意得 $w=(145-x-80-5)(2x+40)=-2x^2+80x+2\,400=-2(x-20)^2+3\,200$，

∵ $-2<0$，

∴ 函数有最大值，

∴ 当 $x=20$ 时，$w$ 有最大值，为 3 200，

∴ 第 20 天的利润最大，最大利润是 3 200 元.

**6.** 解：(1) 设 $y$ 与 $x$ 的函数关系式为 $y=kx+b(k\ne0)$，由题意得 $\begin{cases}44k+b=72,\\ 48k+b=64,\end{cases}$

解得 $k=-2$，$b=160$，

所以 $y$ 与 $x$ 之间的函数关系式是 $y=-2x+160(40\le x\le48)$.

(2) 由题意得，$W$ 与 $x$ 之间的函数关系式为 $W=(x-40)(-2x+160)=-2x^2+240x-6\,400=-2(x-60)^2+800$，

当 $x=60$ 时，$W$ 最大，是 800，

所以当销售单价为 60 元时，日销售利润最大，最大日销售利润是 800 元.

**点拨**：本题易将销售销售额当成销售利润，错得 $W=x(-2x+160)$.

**7.** 解：(1) 根据题意，得 $y=250-10(x-25)=-10x+500$ ($30\le x\le38$)，

(2) 设每天扣除捐赠后可获得利润 $w$ 元，则 $w=(x-20-a)(-10x+500)=-10x^2+(10a+700)x-500a-10\,000$ ($30\le x\le38$)，

易知，此二次函数图象的对称轴为直线 $x=35+\frac{1}{2}a$，且 $0<a\le6$，则 $35<35+\frac{1}{2}a\le38$，∴ 当 $x=35+\frac{1}{2}a$ 时，$w$ 取得最大值 ∴ $\left(35+\frac{1}{2}a-20-a\right)\left[-10\left(35+\frac{1}{2}a\right)+500\right]=1\,960$，

解得 $a_1=2$，$a_2=58$ (不合题意，舍去).

∴ $a=2$.

**8.** 解：(1) $y=-x+14$，其中 $2\le x\le10$.

(2) ① 当每天的半成品食材能全部售出时，有 $\begin{cases}y\ge8,\\ x\ge8,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x+14\ge8,\\ x\ge8,\end{cases}$ 解得 $8\le x\le6$.

又 $2\le x\le10$，∴ $2\le x\le6$.

② 由 ① 可知，当 $2\le x\le4$ 时，$y=(x-2)\cdot y=(x-2)\cdot\left(-\frac{1}{2}x+8\right)=\frac{1}{2}x^2+7x-16$；

当 $4<x\le10$ 时，$y=(x-2)q-2(p-q)=(x-2)(-x+14)-2\left[-\frac{1}{2}x+8-(-x+14)\right]=-x^2+13x-16$.

∴ $y=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2+7x-16\,(2\le x\le4),\\ -x^2+13x-16\,(4<x\le10).\end{cases}$





关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

(3)$\frac{13}{2}$≥5　**点拨**：当2≤x≤4时，$y=\frac{1}{2}x^2+7x-16=\frac{1}{2}(x+7)^2-\frac{81}{2}$，

∴当2≤x≤4时，y随x的增大而增大.

∴当x=4时，y有最大值，$y_{最大}=\frac{1}{2}\times4^2+7\times4-16=20$.

当4<x≤10时，$y=-x^2+13x-16=-\left(x-\frac{13}{2}\right)^2+\frac{105}{4}$，

∵$-1<0<\frac{13}{2}-4$，∴当x=$\frac{13}{2}$时，y有最大值$\frac{105}{4}$，

∵$20<\frac{105}{4}$，

∴当x为$\frac{13}{2}$元/千克时，利润y有最大值.

要使每天的利润不低于24百元，则当2≤x≤4时，显然不符合题意.

故$y=-\left(x-\frac{13}{2}\right)^2+\frac{105}{4}\geqslant24$，解得5≤x≤8.

∵要尽可能减少半成品食材的浪费，

∴x应定为5元/千克.

**9.** 解：(1)当6≤x≤10时，设y与x的函数表达式为$y=kx+b(k\neq0)$.

根据题意，得$\begin{cases}1\,000=6k+b,\\200=10k+b,\end{cases}$

解得$\begin{cases}k=-200,\\b=2\,200.\end{cases}$∴$y=-200x+2\,200$.

当10<x≤12时，$y=200$.

故y与x的函数表达式为$y=\begin{cases}-200x+2\,200(6\leqslant x\leqslant10),\\200(10<x\leqslant12).\end{cases}$

(2)由已知得$W=(x-6)y$.

当6≤x≤10时，$W=(x-6)(-200x+2\,200)=-200\left(x-\frac{17}{2}\right)^2+1\,250$.

∵$-200<0$，∴即抽特优的开口向下，

∴$x=\frac{17}{2}$时，W取得最大值1 250.

当10<x≤12时，$W=(x-6)\cdot200=200x-1\,200$.

∵W随x的增大而增大，

∴x=12时，W取得最大值，为200×12−1 200=1 200.

∵1 200<1 250，∴W的最大值为1 250.

答：这一天销售西瓜获得的利润的最大值为1 250元.

## 第3课时　利用二次函数解抛物线形的最值应用

**1.** C　**2.** B　**3.** $y=-\frac{1}{9}(x+6)^2+4$

**4.** A　**5.** D　**6.** 24

**7.** 解：(1)根据题意得$B(0,4)$，$C\left(3,\frac{17}{2}\right)$.

把B(0，4)，$C\left(3,\frac{17}{2}\right)$的坐标代入$y=-\frac{1}{6}x^2+bx+c$，解得$b=2$，$c=4$.

抛物线的函数表达式为$y=-\frac{1}{6}x^2+2x+4$，即$y=-\frac{1}{6}(x-6)^2+10$，

所以D(6，10).

所以拱顶D到地面OA的距离为10 m.

(2)由题意得货车最外侧与地面OA的交点为(2，0)或(10，0)，当$x=2$或$x=10$时，$y=\frac{22}{3}>6$，所以这辆货车能安全通过.

(3)令$y=8$，则$-\frac{1}{6}(x-6)^2+10=8$，解得$x_1=6+2\sqrt{3}$，$x_2=6-2\sqrt{3}$，则$x_1-x_2=4\sqrt{3}$.

所以两排灯的水平距离最小是$4\sqrt{3}$ m.

**8.** 解：(1)∵$-\frac{1}{10}>0$，

∴抛物线顶点为最低点.

∵$y=\frac{1}{10}x^2-\frac{4}{5}x+3=\frac{1}{10}(x-4)^2+\frac{7}{5}$，

∴绳子最低点离地面的距离为$\frac{7}{5}$ m.

(2)在$y=\frac{1}{10}x^2-\frac{4}{5}x+3$中，令$x=0$得$y=3$，∴A(0，3).

由题意，可设抛物线$F_1$的表达式为$y=a(x-2)^2+1.8$.

将点A(0，3)的坐标代入得$4a+1.8=3$，解得$a=0.3$，

∴抛物线$F_1$的表达式为$y=0.3(x-2)^2+1.8$. 当$x=3$时，$y=0.3\times1+1.8=2.1$，∴MN的长为2.1 m.

(3)由题意知$OD=3m$，$D(8,0)$.

∵$MN=CD=3$ m，

∴根据抛物线的对称性可知抛物线$F_2$的顶点在线段ND的垂直平分线上.

∴抛物线$F_2$的顶点坐标为$\left(\frac{7}{2},m+4.8\right)$.

∴抛物线$F_2$的表达式为$y=-\frac{1}{4}\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+m+4.8$.

由(1)(2)易知C点坐标为(8，3).

把点C(8，3)的坐标代入，得$-\frac{1}{4}\left(4-\frac{7}{2}\right)^2+m+4.8=3$，

∴$m=-\frac{1}{16}(m-8)^2+3$.

∴k是关于m的二次函数.

又∵$m\leqslant8$，∴k随m的增大而增大.

∴当$k=2$时，$-\frac{1}{16}(m-8)^2+3=2$，

解得$m_1=4$，$m_2=12$(不符合题意，舍去)；

当$k=2.5$时，$-\frac{1}{16}(m-8)^2+3=2.5$，

解得$m_1=8-2\sqrt{2}$，$m_2=8+2\sqrt{2}$(不符合题意，舍去).

∴m的取值范围是$4\leqslant m\leqslant8-2\sqrt{2}$.

**9.** 解：(1)当$y=15$时，$15=-5x^2+20x$，

解得$x_1=1$，$x_2=3$.

答：在飞行过程中，当小球的飞行高度为15 m时，飞行时间是1 s或3 s.

(2)当$y=0$时，$0=-5x^2+20x$，

解得$x_1=0$，$x_2=4$. $4-0=4(s)$.

答：在飞行过程中，小球从飞出到落地所用时间是4 s.

(3)$y=-5x^2+20x=-5(x-2)^2+20$，

∵当$x=2$时，y取得最大值，$y_{最大}=20$.

答：在飞行过程中，小球飞行高度在第2 s时最大，最大高度是20 m.

## 第4课时　利用二次函数的图象解一元二次方程(不等式)

**1.** D　**2.** D　**3.** C　**4.** D

**5.** (1)$x_1=-1$，$x_2=2$　(2)$-1<x<2$

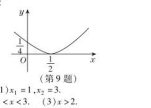
(3)$x\leqslant-1$或$x\geqslant2$

**6.** $x<-3$或$x>1$　**7.** C　**8.** C

**9.** 解：画出抛物线$y=x^2-x+\frac{1}{4}$(如图)，由图象可知抛物线与x轴的交点为$\left(\frac{1}{2},0\right)$，


第9题答案

所以只有方程的解为$x_1=x_2=\frac{1}{2}$.


(第9题)

**10.** 解：(1)$x_1=1$，$x_2=3$.

(2)$1<x<3$.　(3)$x\geqslant2$.

(4)∵方程$ax^2+bx+c=k$有两个不相等的实数根，

∴抛物线$y=ax^2+bx+c-k$与x轴有两个交点，即抛物线$y=ax^2+bx+c$向下平移k个单位后与x轴有两个交点. 由图象可知抛物线$y=ax^2+bx+c$向下平移2个单位后与x轴有一个交点，∴$k<2$.

**11.** 解：(1)将点A(−3，−3)，B(1，−1)的坐标代入$y=kx+b$，得$\begin{cases}-3k+b=-3,\\k+b=-1,\end{cases}$

解得$\begin{cases}k=\frac{1}{2},\\b=-\frac{3}{2}.\end{cases}$∴直线$l_1$：$y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$.

联立$y=ax^2+2x-1$与$y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$，则有$2ax^2+3x+1=0$.

∵抛物线C与直线l有交点，

∴$9-8a\geqslant0$，解得$a\leqslant\frac{9}{8}$且$a\neq0$.

(2)根据题意可得抛物线C：$y=-x^2+2x-1$.

∵$a<0$，∴抛物线开口向下，对称轴为直线$x=1$.

当$y=-x+1$时，有$-x^2+2x-1=-x+1$，

解得$x=-1$或$x=3$.

①在直线$x=1$左侧，y随x的增大而增大，∴$x=m+2=-1$时，y有最大值$-4$，则$m=-3$；

②在直线$x=1$右侧，y随x的增大而减小，∴$x=m=3$时，y有最大值$-4$.

综上所述，$m=-3$或$m=3$.

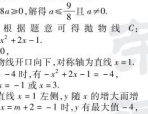
(3)a的取值范围为$-\frac{9}{8}\leqslant a<\frac{9}{8}$或$a\leqslant-2$.

**12.** 解：(1)解方程$x^2+4x-5=0$，得$x_1=-5$，$x_2=1$.

∴A点的坐标为(−5，0)，B点的坐标为(1，0)，则抛物线为$y=a(x+5)(x-1)=ax^2+4ax-5a$，可得D点的坐标为(−2，−9a)，C点的坐标为(0，−5a). 依题意画出图形，如图所示，则$OA=5$，$OB=1$，$AB=6$，$OC=5a$，过点D作$DE\perp$x轴于点E，则$DE=2$，$OE=9a$，$CE=OE-OC=4a$.

∴$S_{\triangle ACD}=S_{梯形ADEO}-S_{\triangle CDE}-S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}\times(2+5)\times9a-\frac{1}{2}\times2\times4a-\frac{1}{2}\times5\times5a=15a$，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times6\times5a=15a$，

∴$S_{\triangle ABC}:S_{\triangle ACD}=1:1$.


(第12题)

(2)∵$\angle ADC=90°$，∴$AC^2=AD^2+CD^2$.

即$5^2+(5a)^2=(5-2)^2+(9a)^2+2^2+(9a-5a)^2$，即$72a^2=12$. 则$a=\pm\frac{\sqrt{6}}{6}$.

∵$a>0$，∴$a=\frac{\sqrt{6}}{6}$. 故二次函数的表达式为$y=\frac{\sqrt{6}}{6}(x+5)(x-1)$，即$y=\frac{\sqrt{6}}{6}x^2+\frac{2\sqrt{6}}{3}x-\frac{5\sqrt{6}}{6}$.

# 章末整合提升训练

## 专训1

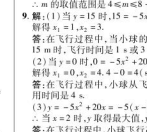
**1.** 解：(1)由已知得$OA=OA_1=8$ m，$OC=8$ m. 故$C(0,8)$，$B(-8,6)$. 设抛物线$BCB_1$对应的函数表达式为$y=ax^2+8$，将B点坐标代入，得$a\cdot(-8)^2+8=6$，解得$a=-\frac{1}{32}$，所以$y=-\frac{1}{32}x^2+8(-8\leqslant x\leqslant8)$.

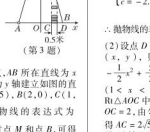
(2)能. 若货车从隧道正中行驶，则其最右边到x轴的距离为2 m. 如图，设抛物线上横坐标为2的点为点D，过点D作$DE\perp AA_1$于点E. 当$x=2$时，$y=-\frac{1}{32}\times2^2+8=7\frac{7}{8}$，即$D\left(2,7\frac{7}{8}\right)$，

所以$DE=7\frac{7}{8}$ m.

因为$7\frac{7}{8}>7$，

所以该货车能安全通过这个隧道.


(第1题)


(第3题)

**2.** C

**3.** 解：(1)以点O为原点，AB所在直线为x轴，AB的垂直平分线为y轴建立如图的直角坐标系，则有$M(0,5)$，$B(2,0)$，$C(1,0)$，$D\left(\frac{1}{2},0\right)$. 设抛物线的表达式为$y=ax^2+c$，由抛物线过点M和点B，可得$a=-\frac{5}{4}$，$c=5$. 故抛物线的表达式为$y=-\frac{5}{4}x^2+5$. 当$x=1$时，$y=\frac{15}{4}$，当$x=\frac{1}{2}$时，$y=\frac{35}{16}$.

故$\left(1,\frac{15}{4}\right)$，$\left(\frac{3}{2},\frac{35}{16}\right)$两点在抛物线上.

当竖直摆放5个圆柱形桶时，桶高为$0.3\times5=1.5$ m$=\frac{3}{2}$(米).

∵$\frac{3}{2}<\frac{15}{4}$且$\frac{3}{2}<\frac{35}{16}$，

∴同球不能落入桶内.

(2)设竖直摆放n个圆柱形桶时，网球可以落入桶内. 由题意，得$\frac{35}{16}\leqslant0.3n\leqslant\frac{15}{4}$，

解得$7\frac{7}{24}\leqslant n\leqslant12\frac{1}{2}$.

∵n为整数，

∴n的值为8，9，10，11，12.

∴当竖直摆放8，9，10，11或12个圆柱形桶时，网球可以落入桶内.

**4.** 0.5

**5.** 解：(1)连结FH，∵△EGH≌△BCF，

∴EG=BC，HG=FC，∠G=∠BCF，

∴CG∥BE，HG∥FC，

∴四边形FCGH是平行四边形，∴FH∥CG，

∴∠DFH=∠DCG=90°.

由题意可知，CF=BE=a.

在Rt△DFH中，DF=3a−a=2a，FH=CG=a，

∴$DH=\sqrt{DF^2+FH^2}=\sqrt{5}a$.

(2)设BE=x，△DHE的面积为y.

依题意，得$y=S_{△CDE}+S_{梯形CBEG}-S_{△DGH}=\frac{1}{2}\times3a\times(3a-x)+\frac{1}{2}\times(3a+x)\times x-\frac{1}{2}\times3a\times x$，

∴$y=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}ax+\frac{9}{2}a^2$，即$y=\frac{1}{2}\left(x-\frac{3}{2}a\right)^2+\frac{27}{8}a^2$.

∵$a>0$，∴当$x=\frac{3}{2}a$，即E是BC的中点时，y取得最小值，即△DHE的面积取得最小值，最小值是$\frac{27}{8}a^2$.

**6.** 解：(1)在$y=-\frac{1}{2}x-2$中，令$x=0$，得$y=-2$；令$y=0$，得$x=-4$，∴A(−4，0)，C(0，−2). 设抛物线的表达式为$y=ax^2+bx+c$($a\neq0$).

∵点A(−4，0)，B(1，0)，C(0，−2)在抛物线上，

∴$\begin{cases}16a+4b+c=0,\\a+b+c=0,\\c=-2.\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-\frac{1}{2},\\b=\frac{5}{2},\\c=-2.\end{cases}$

∴抛物线的表达式为$y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}x-2$.

(2)设点D的坐标为(x，y)，则$y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}x-2$

(1<x<4). 在Rt△AOC中，OA=4，OC=2，由勾股定理得$AC=2\sqrt{5}$. 如图所示，连结CD，AD. 过点D作$DF\perp$y轴于点F，过点A作$AG\perp FD$交FD的延长线于点G，则$FD=x$，$DG=4-x$，$OF=AG=y$，$FC=y+2$. $S_{△ACD}=S_{梯形AGFC}-S_{△CDF}-S_{△ADG}=\frac{1}{2}(AG+FC)\cdot FG-\frac{1}{2}FC\cdot FD-\frac{1}{2}DG\cdot AG=\frac{1}{2}(y+y+2)\times4-\frac{1}{2}(y+2)\cdot x-\frac{1}{2}(4-x)\cdot y=2y-x+4$. 将$y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}x-2$代入，得$S_{△ACD}=2y-x+4=-x^2+4x-(x-2)^2+4$，当$x=2$时，$y=1$，此时$S_{△ACD}$最大，最大值为4. ∴D(2，1).

∵$S_{△ACD}=\frac{1}{2}AC\cdot DE=2\sqrt{5}$，

∴当△ACD的面积最大时，点DE最大，则DE的最大值为$\frac{4}{\frac{1}{2}AC}=\frac{4}{\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

∴当D与点线AC的距离DE最大时，点D的坐标为(2，1)，最大距离为$\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

**7.** 解：(1)∵AB=x m，∴BC=(24−3x) m，此时$S=x(24-3x)=-3x^2+24x$.

(2)由已知得$-3x^2+24x=45$，整理可得$x^2-8x+15=0$. 解得$x_1=5$，$x_2=3$.

∵$0<24-3x\leqslant10$，得$\frac{14}{3}\leqslant x<8$，

∴$x_2=3$不符合题意，故AB=5 m.

(3)能. $S=-3x^2+24x=-3(x^2-8x)=-3(x-4)^2+48$.

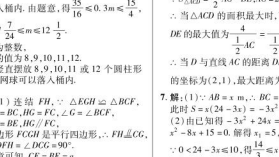
∵$\frac{14}{3}\leqslant x<8$，

∴当$x=\frac{14}{3}$时，S有最大值，$S_{最大值}=46\frac{2}{3}$.

∴能围成面积比45 m²更大的鸡舍.

设BE=CF的长是10 m，AB的长是4$\frac{2}{3}$ m，这时鸡舍的面积最大，为$46\frac{2}{3}$ m².

**8.** 解：(1)如图所示.


(第8题)

(2)设$y=kx+b$，将点(200，60)，(220，50)的坐标代入，得$\begin{cases}200k+b=60,\\220k+b=50,\end{cases}$

解得$\begin{cases}k=-\frac{1}{2},\\b=160.\end{cases}$

∴$y=-\frac{1}{2}x+160(170\leqslant x\leqslant240)$.

(3)$w=xy=x\left(-\frac{1}{2}x+160\right)=-\frac{1}{2}x^2+160x=-\frac{1}{2}(x-160)^2+12\,800$.

∵$-\frac{1}{2}<0$，对称轴为直线$x=160$，

∴在$170\leqslant x\leqslant240$范围内，w随x的增大而减小.

∴当x=170时，w取得最大值，最大值为12 750.





关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

答：宾馆标准房的价格定为 170 元时，客房的日营业额最大，最大为 12 750 元.

**专项 2**

**1.** 解：(1)由题意联立

$$\begin{cases} y=-x^2-2x+a, \\ y=\dfrac{1}{2}x-a. \end{cases}$$ 整理得 $2x^2+5x-4a=0$

$0$，由 $25+32a>0$，解得 $a>-\dfrac{25}{32}$.

$\because a\neq 0$，$\therefore a>-\dfrac{25}{32}$ 且 $a\neq 0$.

令 $x=0$，得 $y=a$，$\therefore A(0,a)$.

由 $y=-(x+1)^2+1+a$，得 $M(-1,1+a)$.

(2)设直线 $MA$ 为 $y=kx+a$，代入 $A(0,a)$，$M(-1,1+a)$，得 $\begin{cases} a=b, \\ 1+a=-k+b. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k=-1, \\ b=a. \end{cases}$ $\therefore$ 直线 $MA$ 为 $y=-x+a$. 联立 $\begin{cases} y=-x+a, \\ y=\dfrac{1}{2}x-a. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=\dfrac{4a}{3}, \\ y=-\dfrac{a}{3}. \end{cases}$

$\therefore N\left(\dfrac{4a}{3},-\dfrac{a}{3}\right)$. 由于 $P$ 点是 $N$ 点关于 $y$ 轴的对称点，则点 $P\left(-\dfrac{4a}{3},-\dfrac{a}{3}\right)$，代入 $y=-x^2-2x+a$，得 $-\dfrac{a}{3}=-\dfrac{16}{9}a^2+\dfrac{8}{3}a+a$，解得 $a=\dfrac{9}{4}a$ 或 $a=0$(舍去).

$\therefore A\left(0,\dfrac{9}{4}\right)$，$C\left(0,-\dfrac{9}{4}\right)$，$P\left(-3,-\dfrac{3}{4}\right)$，$M\left(-1,\dfrac{13}{4}\right)$，$N=\dfrac{9}{2}$.

$\therefore S_{\triangle PCD}=S_{\triangle PEC}-S_{\triangle DEC}=\dfrac{1}{2}AC\cdot|x_P|-\dfrac{1}{2}AC\cdot|x_D|=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{9}{2}\times 3-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{9}{2}\times 1=\dfrac{9}{2}$.

(3)存在. ①当点 $Q_1$ 在 $y$ 轴左侧时，由四边形 $AQ_1CN$ 为平行四边形，得 $AC$ 与 $Q_1N$ 相互平分，则点 $Q_1$ 与 $N$ 关于原点 $(0,0)$ 中心对称，而 $N\left(\dfrac{4a}{3},-\dfrac{a}{3}\right)$，故 $Q_1\left(-\dfrac{4a}{3},\dfrac{a}{3}\right)$，代入 $y=-x^2-2x+a$，得 $\dfrac{a}{3}=-\dfrac{16}{9}a^2+\dfrac{8}{3}a+a$，解得 $a=\dfrac{15}{8}$ 或 $a=0$(舍去)，$\therefore Q_1\left(-\dfrac{5}{2},\dfrac{5}{8}\right)$. ②当点 $Q_2$ 在 $y$ 轴右侧时，由四边形 $ACQ_2N$ 为平行四边形，得 $NQ_2\parallel AC$ 且 $NQ_2=AC$，而 $N\left(\dfrac{4a}{3},-\dfrac{a}{3}\right)$，$A(0,a)$，$C(0,-a)$，故 $Q_2\left(\dfrac{4a}{3},-\dfrac{7a}{3}\right)$，代入 $y=-x^2-2x+a$，得 $-\dfrac{7a}{3}=-\dfrac{16}{9}a^2-\dfrac{8}{3}a+a$，解得 $a=\dfrac{3}{8}$ 或 $a=0$(舍去)，$\therefore Q_2\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{7}{8}\right)$.

$\therefore$ 当点 $Q$ 的坐标为 $\left(-\dfrac{5}{2},\dfrac{5}{8}\right)$ 或 $\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{7}{8}\right)$ 时，$Q,A,C,N$ 四点能构成平行四边形.

**2.** 解：(1)根据题意，得 $\begin{cases} 1+b+c=0, \\ c=2, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} b=-3, \\ c=2, \end{cases}$

$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y=x^2-3x+2$.

(2)当 $y=3$ 时，由 $y=x^2-3x+2$ 得 $y=2$，可知抛物线 $y=x^2-3x+2$ 过点 $(3,2)$，

$\therefore$ 将原抛物线沿 $y$ 轴向下平移 1 个单位后过点 $C$.

$\because$ 平移后抛物线的表达式为 $y=x^2-3x+1$.

(3)假设存在点 $N$，则点 $N$ 在抛物线 $y=x^2-3x+1$ 上，可设 $N$ 点坐标为 $(x_0,x_0^2-3x_0+1)$. 由(2)知，$BB_1=DD_1=1$.

将 $y=x^2-3x+1$ 配方得

$y=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}$，

$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x=\dfrac{3}{2}$.

当 $0<x_0<\dfrac{3}{2}$ 时，如图①，

$\because S_{\triangle NBB_1}=2S_{\triangle NDD_1}$，

$\therefore \dfrac{1}{2}\times 1\times x_0=2\times\dfrac{1}{2}\times 1\times\left(\dfrac{3}{2}-x_0\right)$.

$\therefore x_0=1$. 此时 $x_0^2-3x_0+1=-1$，

$\therefore N$ 的坐标为 $(1,-1)$.

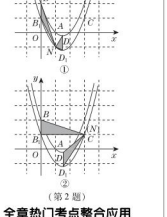
当 $x_0>\dfrac{3}{2}$ 时，如图②，

同理可得 $\dfrac{1}{2}\times 1\times x_0=2\times\dfrac{1}{2}\times 1\times\left(x_0-\dfrac{3}{2}\right)$，

$\therefore x_0=3$，此时 $x_0^2-3x_0+1=1$.

$\therefore N$ 的坐标为 $(3,1)$.

综上，符合条件的点 $N$ 的坐标为 $(1,-1)$，$(3,1)$.



(第 2 题)

## 全章热门考点整合应用

**1.** 解：(1)根据题意，得 $\begin{cases} m^2+4m-3=2, \\ m+2\neq 0. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} m=-5 \text{ 或 } 1, \\ m\neq -2. \end{cases}$

$\therefore m=-5$ 或 $m=1$.

(2)$\because$ 函数图象的开口向上，

$\therefore m+2>0$，$m>-2$，$\therefore m=1$.

$\therefore$ 当 $m=1$ 时，该函数图象的开口向上.

(3)$\because$ 函数有最大值，$\therefore m+2<0$，$\therefore m<-2$，$\therefore m=-5$.

$\therefore$ 当 $m=-5$ 时，该函数有最大值.

**2.** D　**3.** B

**4.** 解：(1)当 $a^2+3a+2=0$ 时，$a_1=-1$，$a_2=-2$. 当 $a=-1$ 时，$y=\dfrac{1}{4}$，与 $x$ 轴无交点；当 $a=-2$ 时，$y=-x+\dfrac{1}{4}$，与 $x$ 轴有一个交点. 当 $a^2+3a+2\neq 0$，即 $a\neq -1$ 且 $a\neq -2$ 时，函数 $y=(a^2+3a+2)x^2+(a+1)x+\dfrac{1}{4}$ 为二次函数.

要使函数图象与 $x$ 轴有交点，

则 $(a+1)^2-4(a^2+3a+2)\times\dfrac{1}{4}\geqslant 0$，

解得 $a\leqslant -1$. $\therefore a<-1$ 且 $a\neq -2$.

故当 $a<-1$ 且 $a\neq -2$ 时，二次函数的图象与 $x$ 轴总有交点.

综上所述，当 $a<-1$ 时，此函数的图象与 $x$ 轴总有交点.

(2)$\because x_1+x_2=-\dfrac{a+1}{a^2+3a+2}$，

$x_1x_2=\dfrac{1}{a^2+3a+2}$，

$\therefore \dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}=-4(a+1)=a^2-3$.

$\therefore a^2+4a+1=0$.

解得 $a_1=-2-\sqrt{3}$，$a_2=-2+\sqrt{3}$.

又 $\because -2+\sqrt{3}>-1$，即当 $a=-2+\sqrt{3}$ 时，二次函数的图象与 $x$ 轴无交点，故舍去此值. $\therefore a=-2-\sqrt{3}$.

**5.** 解：(1)$\because$ 三块矩形区域的面积相等，

$\therefore$ 矩形 $AEFD$ 面积是矩形 $BCFE$ 面积的 2 倍. $\therefore AE=2BE$. 设 $BE=a$ 米，则 $AE=2a$ 米. $\therefore 8a+2x=80$.

$\therefore a=-\dfrac{1}{4}x+10$，$2a=-\dfrac{1}{2}x+20$.

$\therefore y=\left(-\dfrac{1}{2}x+20\right)x+\left(-\dfrac{1}{4}x+10\right)x=-\dfrac{3}{4}x^2+30x$.

$\because a=-\dfrac{1}{4}x+10>0$，$\therefore x<40$，

则 $y=-\dfrac{3}{4}x^2+30x(0<x<40)$.

(2)$\because y=-\dfrac{3}{4}x^2+30x=-\dfrac{3}{4}(x-20)^2+300(0<x<40)$，且二次项系数为 $-\dfrac{3}{4}<0$，

$\therefore$ 当 $x=20$ 时，$y$ 有最大值，最大值为 300.

**6.** 解：(1)由题意，得该抛物线过点 $E(1,1.4)$ 和点 $B(6,0.9)$，代入 $y=ax^2+bx+0.9$，得 $\begin{cases} a+b+0.9=1.4, \\ 36a+6b+0.9=0.9, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} a=-0.1, \\ b=0.6. \end{cases}$ $\therefore$ 该抛物线对应的函数表达式是 $y=-0.1x^2+0.6x+0.9$.

(2)把 $x=3$ 代入 $y=-0.1x^2+0.6x+0.9$，得 $y=-0.1\times 3^2+0.6\times 3+0.9=1.8$.

即小华的身高是 1.8 m.

**7.** 解：(1)在给定的直角坐标系下，设最高点为 $A$，入水点为 $B$，抛物线对应的函数表达式为 $y=ax^2+bx+c$. 由题意，知 $O(0,0)$，$B(2,-10)$，且顶点 $A$ 的纵坐标为 $\dfrac{2}{3}$.

$\therefore \begin{cases} c=0, \\ \dfrac{4ac-b^2}{4a}=\dfrac{2}{3}, \\ 4a+2b+c=-10. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} a=-\dfrac{25}{6}, \\ b=\dfrac{10}{3}, \\ c=0. \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=-\dfrac{3}{2}, \\ b=-2, \\ c=0. \end{cases}$

$\because -\dfrac{b}{2a}>0$，$a<0$，

$\therefore b>0$，$\therefore a=-\dfrac{25}{6}$，$b=\dfrac{10}{3}$.

$\therefore y=-\dfrac{25}{6}x^2+\dfrac{10}{3}x$.

(2)当运动员在空中距池边的水平距离为 $3-\dfrac{3}{5}=m$ 时，$x=3-\dfrac{3}{5}-2=\dfrac{8}{5}$，

$y=\left(-\dfrac{25}{6}\right)\times\left(\dfrac{8}{5}\right)^2+\dfrac{10}{3}\times\dfrac{8}{5}=-\dfrac{16}{3}$.

$\because$ 此时运动员距水面的高度为 $10-\dfrac{3}{5}=\dfrac{14}{3}$(m).

$\therefore \dfrac{14}{3}\leqslant 5$，$\therefore$ 此次跳水会出现失误.

**8.** 解：(1)$y=(x-5)\left(100-\dfrac{x-6}{0.5}\times 5\right)=-10x^2+210x-800$，

故 $y$ 与 $x$ 的函数关系式为 $y=-10x^2+210x-800$.

(2)要使当天销售利润不低于 240 元，则 $y\geqslant 240$，即 $-10x^2+210x-800=240$，

解得 $x_1=8$，$x_2=13$.

$\because -10<0$，$\therefore$ 抛物线的开口向下.

$\therefore$ 当天销售单价所在的范围为 $8\leqslant x\leqslant 13$.

(3)$\because$ 每件文具的利润不超过 80%，

$\therefore \dfrac{x-5}{5}\leqslant 0.8$，得 $x\leqslant 9$.

$\therefore 6\leqslant x\leqslant 9$.

由(1)得 $y=-10x^2+210x-800=-10(x-10.5)^2+302.5$，

$\because$ 对称轴为直线 $x=10.5$，且抛物线开口向下，

$\therefore$ 当 $x=9$ 时，取得最大值，此时 $y=280$.

**答**：要想当天获得利润最大，每件文具售价为 9 元，最大利润为 280 元.

**9.** 解：(1)设该出租公司这批对外出租的货车共有 $x$ 辆，则公司这批对外出租的货车每辆的租金为 $\left(1+\dfrac{1}{5}x\right)$ 元，

根据题意，得 $\dfrac{1\,500}{x-10}\cdot\left(1+\dfrac{1}{5}x\right)=\dfrac{4\,000}{x}$，

解得 $x=20$. 经检验，$x=20$ 是分式方程的根. $\therefore 1\,500\div(20-10)=150$(元).

**答**：该出租公司这批对外出租的货车共有 20 辆，该季每辆货车的日租金是 150 元.

(2)设每辆货车的日租金上涨 $a$ 元，该出租公司的日租金总收入为 $W$ 元.

根据题意，

得 $W=\left[a+150\times\left(1+\dfrac{1}{5}\right)\right]\cdot\left(20-\dfrac{a}{20}\right)=-\dfrac{1}{20}a^2+10a+4\,000=-\dfrac{1}{20}(a-100)^2+4\,500$.

$\because -\dfrac{1}{20}<0$，$\therefore$ 当 $a=100$ 时，$W$ 取得最大值.

**答**：每辆货车的日租金上涨 100 元时，该出租公司的日营业额最大.

**10.** 解：设 $AC=x$，则 $BC=2-x$.

$\because \triangle ACD$ 和 $\triangle BCE$ 都是等腰直角三角形，

$\therefore CD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$，$CE=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(2-x)$，$\angle DCA=\angle ECB=45°$.

$\therefore \angle DCE=180°-45°-45°=90°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle DCE$ 中，由勾股定理，得 $DE^2=DC^2+CE^2=\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}x\right]^2+\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}(2-x)\right]^2=x^2-2x+2=(x-1)^2+1$.

$\therefore$ 当 $x=1$ 时，$DE^2$ 有最小值 1，此时 $DE=1$. 故 $DE$ 长的最小值为 1.

**11.** 解：(1)$y=7.5x-(2.7x+0.9x^2+0.3x)=-0.9x^2+4.5x$.

(2)设 3 年内每年的平均收益为 $z$ 万元，根据题意，得 $z=7.5x-\left(2.7x+\dfrac{0.9x^2}{3}+0.3x\right)=-0.3x^2+6.3x=-0.3(x-10.5)^2+33.075$.

∴并不是面积越大收益就越大，当大棚面积为 10.5 公顷时可以获得最大收益.

建议：(答案不唯一)当大棚面积超过 10.5 公顷时，扩大面积会使收益下降，修建面积不宜盲目扩大.

**12.** 三

**13.** B　**点拨**：$\because$ 抛物线开口向下，$\therefore a<0$.

$\because$ 抛物线的对称轴为直线 $x=1$，

$\therefore -\dfrac{b}{2a}=1$，$\therefore b=-2a>0$.

$\because$ 抛物线与 $y$ 轴的交点在 $x$ 轴上方，$\therefore c>0$. $\therefore abc<0$，故①正确.

$\because b=-2a$，$\therefore a+\dfrac{1}{2}b=a-a=0$.

$\because c>0$，$\therefore a+\dfrac{1}{2}b+\dfrac{1}{2}c>0$，故②错误.

$\because C(0,c)$，$OA=OC$，$\therefore A(-c,0)$.

把 $A(-c,0)$ 的坐标代入 $y=ax^2+bx+c$，得 $ac^2-bc+c=0$.

$\because ac-b+1=0$，故③错误.

$\because A(-c,0)$，对称轴为直线 $x=1$，

$\therefore B(2+c,0)$.

$\because 2+c$ 是关于 $x$ 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根，故④正确.

**14.** 解：(1)把 $A(4,0)$ 的坐标代入 $y=-x^2+bx+3$，得 $-16+4b+3=0$，解得 $b=\dfrac{13}{4}$.


第 14 题图改

∴此二次函数的表达式为 $y=-x^2+\dfrac{13}{4}x+3$，点 $B$ 的坐标为 $(0,3)$.

(2)假设在 $x$ 轴上存在点 $P$，使得 $\triangle PAB$ 是等腰三角形. 当 $AB$ 为底边时，设点 $P(x,0)$，则根据勾股定理和已知条件可得 $x^2+3^2=(4-x)^2$，解得 $x=\dfrac{7}{8}$，

$\therefore P$ 的坐标为 $\left(\dfrac{7}{8},0\right)$；

当 $BP$ 为底边时，$AP=AB=\sqrt{4^2+3^2}=5$，

$\therefore P$ 的坐标为 $(-1,0)$ 或 $(9,0)$；

当 $AP$ 为底边时，易知点 $P$ 的坐标为 $(-4,0)$. 即在 $x$ 轴上存在点 $P$，使得 $\triangle PAB$ 是等腰三角形，点 $P$ 的坐标为 $\left(\dfrac{7}{8},0\right)$或 $(-1,0)$或 $(9,0)$或 $(-4,0)$.

# 第 2 章　简单事件的概率

## 2.1　事件的可能性

**1.** C　**2.** B　**3.** D　**4.** B　**5.** B　**6.** A　**7.** D　**8.** C

**9.** 点拨：根据题意画树状图，如图所示.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1号库位 | $A$ | | $B$ | | $C$ | | |
| 2号库位 | $C$ | $D$ | $B$ | $D$ | $B$ | $C$ | |
| 3号库位 | $D$ | $C$ | $D$ | $B$ | $C$ | $B$ | |

(第 9 题)

所有可能的结果有 6 种，即共有 6 种坐法.

**10.** B　**11.** D

**12.** 错解一：两个袋中摸到白球的可能性一样大，都是 50%.

**错解二**：A 袋中摸到白球的可能性大，因为 A 袋中白球的个数比 B 袋中白球的个数多.

**诊断**：“摸出白球”的可能性大小与白球的个数与总个数的比有关.

**正解**：A，B 两个袋子内白球的可能性大，因为在 A 袋中摸到白球的可能性是 0.4，在 B 袋中摸到白球的可能性是 $\dfrac{2}{3}$，而 $0.4<\dfrac{2}{3}$，所以 B 袋中摸到白球的可能性大.

**13.** 解：不可能事件：①⑤⑦；随机事件：②③④⑥.(分类不唯一)

**14.** 解：(1)红色，因为红球最多.

(2)一样.

(3)从口袋里取 2 个红球出来.

**点拨**：(3)题答案不唯一，合理即可.

**15.** 解：(1)每个小组共比赛 6 场.

(2)随机事件.

**16.** 解：(1)不可能事件. 理由如下：

设小明的爸爸用 $x$ 分钟追上小明，则 $80(x+5)=100x$，解得 $x=20$. 此时 $80(x+5)=80\times(20+5)=2\,000>1\,000$，说明这时小明已经回到学校了，故小明的爸爸没有在途中追上小明，所以这个事件是不可能事件.

**方法技律**：解答本题运用了**方程思想**，先列出方程求出爸爸追上小明所需要的时间，然后根据二者事件的概念进行判断即可.

## 2.2　简单事件的概率

### 第 1 课时　概　率

**1.** D　**2.** D

**3.** (1)1　(2)0　$(3)0<P(A)<1$

(4)1；0；$\dfrac{4}{9}$；0

**4.** D　**5.** A　**6.** A　**7.** A　**8.** D　**9.** D　**10.** A

**11.** 解：(1)发生的可能性很大，但不一定发生与闪客件相配

(2)发生的可能性很小与乙事件相配

(3)发生与不发生的可能性一样与甲事件相配

**12.** 解：(1)设口袋里黄球的个数为 $x$，根据题意得 $\dfrac{5}{4+5+x}=\dfrac{1}{3}$，解得 $x=6$. 经检验，$x=6$ 是原方程的解且符合题意.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

所以口袋里黄球的个数是 6.

(2) $P$(摸出红球) $=\frac{4}{4+5+6}=\frac{4}{15}$.

**13.** 解:(1)∵ 乙射击的总次数是 12,且由题图可知不少于 9 环的有 7 次,

∴ 估计乙射击成绩不少于 9 环的概率是 $\frac{7}{12}$.

(2) $\bar{x}_{乙}=\frac{2\times7+3\times8+6\times9+1\times10}{12}=8.5$(环),

$S^2_{乙}=\frac{1}{12}[(7-8.5)^2\times2+(8-8.5)^2\times3+(9-8.5)^2\times6+(10-8.5)^2\times1]=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$.

∵ $\bar{x}_{甲}=\bar{x}_{乙}$, $S^2_{甲}<S^2_{乙}$, ∴ 甲的射击成绩更稳定.

**14.** 解:(1) 4;2 或 3

(2) 根据题意得 $\frac{6+m}{10}=\frac{4}{5}$,解得 $m=2$,

所以 $m$ 的值为 2.

## 第 2 课时　用列表法求概率

**1.** $\frac{2}{3}$　**2.** A　**3.** D

**4.** $\frac{1}{12}$　**点拨**:列表如下:

| 第一次 \ 第二次 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | (1,1) | (2,1) | (3,1) | (4,1) | (5,1) | (6,1) |
| 2 | (1,2) | (2,2) | (3,2) | (4,2) | (5,2) | (6,2) |
| 3 | (1,3) | (2,3) | (3,3) | (4,3) | (5,3) | (6,3) |
| 4 | (1,4) | (2,4) | (3,4) | (4,4) | (5,4) | (6,4) |
| 5 | (1,5) | (2,5) | (3,5) | (4,5) | (5,5) | (6,5) |
| 6 | (1,6) | (2,6) | (3,6) | (4,6) | (5,6) | (6,6) |

由表知,共有 36 种可能结果,其中第二次出现的点数是第一次出现的点数的 2 倍的有 3 种结果,所以第二次出现的点数是第一次出现的点数的 2 倍的概率为 $\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$.

**5.** A

**6.** B　**点拨**:小强和小华玩“剪刀、石头、布”游戏,所有可能出现的结果列表如下:

| 小华 \ 小强 | 石头 | 剪刀 | 布 |
|---|---|---|---|
| 石头 | (石头,石头) | (石头,剪刀) | (石头,布) |
| 剪刀 | (剪刀,石头) | (剪刀,剪刀) | (剪刀,布) |
| 布 | (布,石头) | (布,剪刀) | (布,布) |

由表格可知,共有 9 种等可能情况,其中平局的有 3 种,

故小强和小华平局的概率为 $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

**7.** D　**8.** C　**9.** B

**10.** 错误答案:A

**诊断**:20 张扑克牌中有奖的有 5 张,该参与者前两次翻牌均获奖,而翻过的牌不能再翻,因此剩下的 18 张扑克牌中,有奖的商标牌有 3 张,故他第三次翻牌获奖的概率是 $\frac{3}{18}=\frac{1}{6}$,而不是 $\frac{1}{4}$.




**正确答案**:C

**11.** 解:(1) 8 名学生中至少有三类垃圾投放正确的概率为 $\frac{5}{8}$.

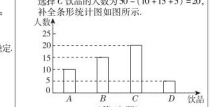
(2) 列表如下:

| 第一名 \ 第二名 | A | C | F | G |
|---|---|---|---|---|
| A | — | CA | FA | GA |
| C | AC | — | FC | GC |
| F | AF | CF | — | GF |
| G | AG | CG | FG | — |

**12.** 解:(1) 这个班级有 15 × 30% = 50(名)同学,

选择 $C$ 饮品的人数为 50 − (10 + 15 + 5) = 20,

补全条形统计图如图所示.




(第 12 题)

(2) $\frac{10\times0+15\times2+20\times3+5\times4}{50}=2.2$ (元).

**答**:该班同学每天用于饮品的人均花费是 2.2 元.

(3) 列表如下:

| 第一名 \ 第二名 | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| A | — | (B,A) | (C,A) | (D,A) | (E,A) |
| B | (A,B) | — | (C,B) | (D,B) | (E,B) |
| C | (A,C) | (B,C) | — | (D,C) | (E,C) |
| D | (A,D) | (B,D) | (C,D) | — | (E,D) |
| E | (A,E) | (B,E) | (C,E) | (D,E) | — |

由表格可知,共有 20 种等可能结果,其中恰好抽到 2 名班长的有 2 种结果,所以恰好抽到 2 名班长的概率为 $\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$.

## 第 3 课时　用画树状图法求概率

**1.** C　**2.** A　**3.** D

**5.** D　**点拨**:画树状图如图:




(第 8 题)

由树状图可知,共有 8 种等可能的结果,其中至少有两校硬币正面向上的有 4 种,所以所求概率为 $\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$,故选 D.

**6.** C　**7.** A

**8.** 解:(1) 画树状图如图所示.




(第 8 题)

共有 12 种等可能的结果.

(2) 由勾股数的定义可知 $B$,$C$,$D$ 卡片上的数都是勾股数,故抽到的两张卡片上的数都是勾股数的概率为 $\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$.

所以抽到的两张卡片上的数都是勾股数的概率为 $\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$.

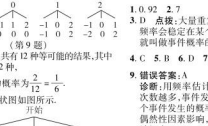
**点拨**:本题易忽略“放回”或“不放回”这一过程而致错.需注意:第一次“放回”与“不放回”,直接影响第二次等可能的结果.

**9.** 解:(1) 由①得 $x>-2$,由②得 $x\leqslant2$,

∴ 不等式组的解集为 $-2<x\leqslant2$.

∵ 它的所有整数解为 $-1$,0,1,2.

(2) 画树状图如图所示.

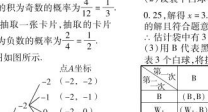



(第 9 题)

由树状图可知,共有 12 种等可能的结果,其中积为正数的有 2 种,

∴ 积为正数的概率为 $\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.

**10.** 解:(1) 画树状图如图所示.




(第 10 题)

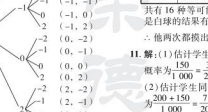
共有 12 种等可能的结果.

(2)∵ 两个数字的积为奇数的有 4 种,

∴ 两个数字的积为奇数的概率为 $\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$.

**11.** 解:(1) 随机抽取一张卡片,抽取的卡片正面的数字为负数的概率为 $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

(2) 画树状图如图所示.




(第 11 题)

由树状图可知,共有 16 种等可能的结果,其中点 $A$ 在直线 $y=2x$ 上的结果有 2 种,

∴ 点 $A$ 在直线 $y=2x$ 上的概率为 $\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$.

**12.** 解:(1) 画树状图如图所示.




(第 12 题)

(2) 由(1) 可知三次传球后,球回到甲脚下的概率为 $\frac{3}{8}=\frac{1}{4}$.

(3) 由(1) 可知,球传到乙脚下的概率为 $\frac{3}{8}$,而球回到甲脚下的概率为 $\frac{1}{4}$,且 $\frac{1}{4}<\frac{3}{8}$,所以球传到乙脚下的概率大.

## 2.3　用频率估计概率

**1.** 0.92　**2.** 7

**3.** D　**点拨**:大量重复试验时,某事件发生的频率会稳定在某个常数的附近,这个常数就叫做事件概率的估计值.

**4.** C　**5.** B　**6.** D　**7.** D　**8.** $\frac{1}{6}$

**9.** 错误答案:A

**诊断**:用频率估计概率时,要注意试验的次数越多,事件发生的频率就会越接近这个事件发生的概率,试验的次数太少易受偶然性因素影响,此时的频率不能用来估计概率.

**正确答案**:D

**10.** 解:(1) 0.25;0.25　**点拨**:251 ÷ 1 000 = 0.251,保留两位小数,表格中应填 0.25;

∵ 大量重复试验中,事件发生的频率逐渐稳定到 0.25,附近,∴ 估计从袋中摸出一个球是黑球的概率是 0.25.

(2) 设袋中白球有 $x$ 个,由题意得 $\frac{1}{1+x}=0.25$,解得 $x=3$,经检验,$x=3$ 是原方程的解且符合题意,

∴ 估计袋中有 3 个白球.

(3) 用 B 代表黑球,$W_1$,$W_2$,$W_3$ 分别代表 3 个白球,将摸球情况列表如下:

| 第一次 \ 第二次 | B | $W_1$ | $W_2$ | $W_3$ |
|---|---|---|---|---|
| B | (B,B) | (B,$W_1$) | (B,$W_2$) | (B,$W_3$) |
| $W_1$ | ($W_1$,B) | ($W_1$,$W_1$) | ($W_1$,$W_2$) | ($W_1$,$W_3$) |
| $W_2$ | ($W_2$,B) | ($W_2$,$W_1$) | ($W_2$,$W_2$) | ($W_2$,$W_3$) |
| $W_3$ | ($W_3$,B) | ($W_3$,$W_1$) | ($W_3$,$W_2$) | ($W_3$,$W_3$) |

共有 16 种等可能的结果,其中两个球都是白球的结果有 9 种,

∴ 他两次都摸出白球的概率为 $\frac{9}{16}$.

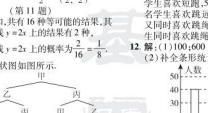
**11.** 解:(1) 估计学生同时喜欢短跑和跳绳的概率为 $\frac{150}{1\,000}=\frac{3}{20}$.

(2) 估计学生同时喜欢三个项目的概率为 $\frac{200+150}{1\,000}=\frac{7}{20}$.

(3) 喜欢长跑的 700 名学生中,有 150 名学生喜欢短跑,550 名学生喜欢跳绳,200 名学生喜欢跳远,所以喜欢长跑的学生又同时喜欢跳绳的可能性最大.即该学生同时喜欢跳绳的可能性最大.

**12.** 解:(1) 100;600

(2) 补全条形统计图如图所示.




(第 12 题)

108°

(3) $\frac{3}{10}$

## 阶段方法技巧训练

### 专训 1

**1.** 解:(1) $P$(摸出一个球是黄球) $=\frac{5}{5+13+22}=\frac{1}{8}$.

(2) 设取出了 $x$ 个黑球,则放入了 $x$ 个黄球,由题意得 $\frac{5+x}{5+13+22}=\frac{1}{3}$,

解得 $x\geqslant\frac{25}{3}$.

∵ $x$ 为正整数,∴ $x$ 最小取 9.

∴ 至少取出了 9 个黑球.

**2.** 解:(1) $450\times\frac{18}{50}=162$(人).

**答**:估计体育测试成绩为 25 分的学生有 162 人.

(2) 列表如下:

| 第一次 \ 第二次 | 甲 | 乙 | 丙 | 丁 |
|---|---|---|---|---|
| 甲 | — | (乙,甲) | (丙,甲) | (丁,甲) |
| 乙 | (甲,乙) | — | (丙,乙) | (丁,乙) |
| 丙 | (甲,丙) | (乙,丙) | — | (丁,丙) |
| 丁 | (甲,丁) | (乙,丁) | (丙,丁) | — |

由表格可知,共有 12 种等可能的结果.

∵ 丙、丁分到一组时,甲、乙也恰好在同一组,

∴ 甲和乙恰好分在同一组的结果有 4 种,

∴ 甲和乙恰好分在同一组的概率为 $\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$.

**3.** 解:(1) 画树状图如图所示.




第 3(1)题

∴ $P$(足球踢到了小华处) $=\frac{1}{4}$.

(2) 应从小明开始踢.

理由如下:画树状图如图所示.




第 3(2)题

若从小明开始踢,则 $P$(小强踢到了小华处) $=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$.

同理,若从小强开始踢,则 $P$(小强踢到了小华处) $=\frac{3}{8}$;若从小华开始踢,则 $P$(小华踢到了小华处) $=\frac{3}{8}$.

∵ $\frac{1}{4}<\frac{3}{8}$,∴ 应从小明开始踢.

**4.** 解:(1) 估计出现“和为 7”的概率约为 0.33.

(2) 列表如下:

| 和 \ 甲 / 乙 | 2 | 3 | 4 | $x$ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | — | 5 | 6 | $2+x$ |
| 3 | 5 | — | 7 | $3+x$ |
| 4 | 6 | 7 | — | $4+x$ |
| $x$ | $x+2$ | $x+3$ | $x+4$ | — |

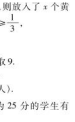
由表格可知,一共有 12 种等可能的结果.

由(1) 可知,出现“和为 7”的概率约为 0.33,0.33 × 12 = 3.96 ≈ 4,∴ 出现“和为 7”的约有 4 种等可能结果.若 $2+x=7$,则 $x=5$,符合题意;若 $3+x=7$,则 $x=4$,不合题意;若 $4+x=7$,则 $x=3$,不合题意.

∴ $x=5$.

### 专训 2

**1.** 解:(1) 画树状图如图所示.




(第 1 题)

∴ $(x,y)$ 所有可能出现的结果总数是 16.

(2) 公平.理由如下:$x+y$ 为奇数的结果数为 8,$x+y$ 为偶数的结果数为 8,

∴ 甲获胜的概率 $=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$,乙获胜的概率 $=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$.

∴ 甲获胜的概率 = 乙获胜的概率.

∴ 这个游戏对双方公平.

**2.** 解:(1) 90

(2) 不公平.理由:列表如下.

| 积 \ 转盘组 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 2 | 4 | 6 | 8 |
| 3 | 3 | 6 | 9 | 12 |
| 4 | 4 | 8 | 12 | 16 |

由表可知共有 16 种等可能的结果,且指针所指扇形上的数字之积为偶数的有 12 种,奇数的有 4 种,则指针所指扇形上的数字之积为偶数的概率是 $\frac{12}{16}=\frac{3}{4}$,指针所指扇形上的数字之积为奇数的概率是 $\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$.

因为 $\frac{3}{4}>\frac{1}{4}$,

所以游戏规则对双方不公平.





关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

**3**. 解：(1)$\frac{3}{4}$

(2)游戏不公平. 理由：

列表如下：

| 小小 \ 说明 | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ |
|---|---|---|---|---|
| $A$ | — | $(A,B)$ | $(A,C)$ | $(A,D)$ |
| $B$ | $(B,A)$ | — | $(B,C)$ | $(B,D)$ |
| $C$ | $(C,A)$ | $(C,B)$ | — | $(C,D)$ |
| $D$ | $(D,A)$ | $(D,B)$ | $(D,C)$ | — |

共有 12 种结果，每种结果出现的可能性相同，摸出的两张牌面形既是轴对称图形又是中心对称图形的结果有 2 种，即$(A,C)$，$(C,A)$，∴ $P$(小亮获胜)$=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}\neq\frac{1}{2}$，∴ 游戏不公平.

修改的游戏规则：若摸出的两张牌面图形都是中心对称图形，则小明获胜，否则小亮获胜.

**点拨**：修改的游戏规则不唯一，合理即可.

## 2.4 概率的简单应用

**1**. D **2**. C **3**. A **4**. D **5**. A **6**. C

**7**. A **点拨**：根据题意可知，密码锁所设密码的最后那个数字是 0 ~ 9 这十个数字中的一个，因此，一次就能打开该密码锁的概率是$\frac{1}{10}$，故选 A.

**8**. B

**9**. C **点拨**：画树状图如图所示.




（第 9 题）

由树状图可知，共有 9 种等可能的结果.

由题意知，$\frac{a}{2}b^2-4a\leqslant 0$，即 $b^2\leqslant 4a$ 时，乙获胜，

∴ 能使乙获胜的有 4 种结果，

∴ 乙获胜的概率为$\frac{4}{9}$.

**10**. 解：(1)$(m,n)$ 所有可能出现的结果：(1,1)，(1,2)，(1,3)，(2,1)，(2,2)，(2,3)，(3,1)，(3,2)，(3,3).

(2)不公平. 理由如下：

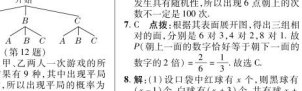
数字之和为奇数的概率$=\frac{4}{9}$，数字之和为偶数的概率$=\frac{5}{9}$.

∵ $\frac{4}{9}\neq\frac{5}{9}$，∴ 这个游戏不公平.

**11**. 解：(1)列表如下：

| 个位 \ 十位数字 | 1 | 4 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 11 | 14 | 17 | 18 |
| 4 | 41 | 44 | 47 | 48 |
| 7 | 71 | 74 | 77 | 78 |
| 8 | 81 | 84 | 87 | 88 |

或画树状图如图所示.




（第 11 题）

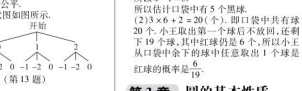
所有可能的两位数为 11，14，17，18，41，44，47，48，71，74，77，78，81，84，87，88.

(2)所有可能的两位数共有 16 个，其中算术平方根大于 4 且小于 7 的有 6 个，分别为 17，18，41，44，47，48，则所求概率$P=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$.

**12**. 解：(1)列表：

| 乙 \ 甲 | $A$ | $B$ | $C$ |
|---|---|---|---|
| $A$ | $(A,A)$ | $(B,A)$ | $(C,A)$ |
| $B$ | $(A,B)$ | $(B,B)$ | $(C,B)$ |
| $C$ | $(A,C)$ | $(B,C)$ | $(C,C)$ |

或画树状图如图所示.



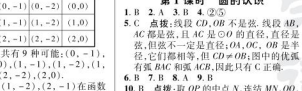

（第 12 题）

(2)由(1)得，甲、乙两人一次游戏的所有等可能的结果有 9 种，其中出现平局的结果有 3 种，所以出现平局的概率为$\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

公平. 理由：甲、乙获胜的概率均为$\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$，

所以这个游戏公平.

**13**. 解：(1)画树状图如图所示.




（第 13 题）

或列表：

| 结果 \ 乙袋 / 甲袋 | $-1$ | $-2$ | $0$ |
|---|---|---|---|
| 0 | $(0,-1)$ | $(0,-2)$ | $(0,0)$ |
| 1 | $(1,-1)$ | $(1,-2)$ | $(1,0)$ |
| 2 | $(2,-1)$ | $(2,-2)$ | $(2,0)$ |

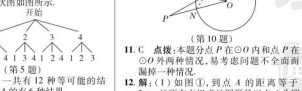
∴ 点 $M(x,y)$ 共有 9 种可能：$(0,-1)$，$(0,-2)$，$(0,0)$，$(1,-1)$，$(1,-2)$，$(1,0)$，$(2,-1)$，$(2,-2)$，$(2,0)$.

(2)∵ 只有点 $(1,-2)$，$(2,-1)$ 在函数$y=-\frac{2}{x}$的图象上，∴ 点 $M(x,y)$ 在函数$y=-\frac{2}{x}$的图象上的概率为$\frac{2}{9}$.

## 全章热门考点整合应用

**1**. B **2**. D **3**. $\frac{4}{9}$ **4**. C

**5**. C **点拨**：画树状图如图所示.




（第 5 题）

由树状图可知，一共有 12 种等可能的结果，其中使 $ac\leqslant 4$ 的有 6 种结果，

∴ 关于 $x$ 的一元二次方程 $ax^2+4x+c=0$ 有实数解的概率为$\frac{1}{2}$.

**6**. 解：(1)2 点朝上的概率$=\frac{9}{60}=\frac{3}{20}$.

5 点朝上的概率$=\frac{20}{60}=\frac{1}{3}$.

(2)小军的说法不正确.

因为 3 点朝上的概率为$\frac{1}{10}$，不能说明 3 点朝上这一事件发生的概率就是$\frac{1}{10}$，只有当试验的次数足够多时，该事件发生的频率才稳定在事件发生的概率附近，才可以将这个频率的稳定值作为该事件发生的概率.

(3)小刚的说法不正确. 因为随机事件的发生具有随机性，所以出现 6 点朝上的次数不一定是 100 次.

**7**. C **点拨**：根据其表面展开图，得出三组相对的面，分别是 6 和 3，4 和 2，8 和 1. 故 $P$(朝上一面的数字恰好等于朝下一面的数字的 2 倍)$=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$，故选 C.

**8**. 解：(1)设口袋中红球有 $x$ 个，则黑球有$(x-1)$个，白球有$(x+3)$个，共有球 $x+(x-1)+(x+3)=3x+2(个)$.

根据题意，得$\frac{x-1}{3x+2}=\frac{1}{4}$，解得 $x=6$. 经检验，$x=6$ 是原方程的解且符合题意.

所以口袋中红球有 6 个.

(2)$3\times 6+2=20$(个). 即口袋中共有球 20 个. 小王取出第一个球后不放回，还剩下 19 个球，其中红球仍是 6 个，所以小王从口袋中余下的球中任意取出 1 个球是红球的概率是$\frac{6}{19}$.

# 第 3 章 圆的基本性质

## 3.1 圆

### 第 1 课时 圆的认识

**1**. B **2**. A **3**. B **4**. ②⑤

**5**. C **点拨**：线段 $CD$、$OB$ 不是弦. 线段 $AB$、$AC$ 都是弦，且 $AC$ 是 $\odot O$ 的直径，直径是弦，但弦不一定是直径；$OA$、$OC$、$OB$ 是半径，它们都相等，但 $CD\neq OB$；图中的优弧有弧 $BAC$ 和弧 $ACB$，因此共有 C 正确.

**6**. B **7**. B **8**. A **9**. B

**10**. B **点拨**：取 $OP$ 的中点 $N$，连结 $MN$、$OQ$，如图. 可判断 $MN$ 为 $\triangle POQ$ 的中位线，则$MN=\frac{1}{2}OQ=1$，∴ 点 $M$ 在以 $N$ 为圆心，1 为半径的圆上，即点 $M$ 在 $ON$ 上时，$OM$ 最小，最小值为 1.




（第 10 题）

**11**. C **点拨**：本题分点 $P$ 在 $\odot O$ 内和点 $P$ 在 $\odot O$ 外两种情况，易考虑问题不全而漏掉一种情况.

**12**. 解：(1)如图①，到点 $A$ 的距离等于 3 cm 的所有点组成的图形是以点 $A$ 为圆心，3 cm 为半径的圆，到点 $B$ 的距离等于 2 cm 的所有点组成的图形是以点 $B$ 为圆心，2 cm 为半径的圆.




（第 12 题）

(2)如图②，以点 $A$ 为圆心，3 cm 为半径的 $\odot A$ 与以点 $B$ 为圆心，2 cm 为半径的 $\odot B$ 的交点，即 $C$、$D$ 两点即为所求.

(3)如图③，以点 $A$ 为圆心，3 cm 为半径的 $\odot A$ 的内部与以点 $B$ 为圆心，2 cm 为半径的 $\odot B$ 的内部的公共部分(不包括边界的阴影部分)即为所求.

(4)如图④，以点 $A$ 为圆心，3 cm 为半径的 $\odot A$ 的外部与以点 $B$ 为圆心，2 cm 为半径的 $\odot B$ 的内部的公共部分(不包括边界的阴影部分)即为所求.

**13**. 解：∵ 点 $O'$ 的坐标为$(1,1)$，且 $\odot O'$ 经过坐标原点，

∴ $\odot O'$ 的半径 $OO'=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.

∵ 点 $P$ 的坐标为$(-1,1)$，

∴ $PO'=2$. 同理，$QO'=1$，$RO'=\sqrt{2}$.

∵ $PO'>\sqrt{2}$，$QO'<\sqrt{2}$，$RO'=\sqrt{2}$，

∴ 点 $P$ 在 $\odot O'$ 外，点 $Q$ 在 $\odot O'$ 内，点 $R$ 在 $\odot O'$ 上.

**14**. 解：(1)∵ $AB=3$ cm $<4$ cm，

∴ 点 $B$ 在 $\odot A$ 内.

∵ $AD=4$ cm，∴ 点 $D$ 在 $\odot A$ 上.

如图，连结 $AC$，∵ $CD=90°$，

∴ $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$(cm).

∵ 5 cm $>4$ cm，∴ 点 $C$ 在 $\odot A$ 外.

(2)由题意可知，点 $B$ 一定在 $\odot A$ 内，点 $C$ 一定在 $\odot A$ 外，

∴ $AB<r<AC$，即 3 cm $<r<5$ cm.

∴ 满足条件的 $\odot A$ 的半径 $r$ 的取值范围是 3 cm $<r<5$ cm.




（第 14 题）　（第 15 题）

**15**. 解：(1)点 $C$ 在以 $AB$ 为直径的圆上.

理由：如图，连结 $MC$、$MD$. 由折叠的性质知 $\angle DAC=\angle DAO$，$AD=AM$.

∵ $AB/\!/CD$，∴ $\angle DCA=\angle BAC$.

∵ $\angle DAC=\angle DCA$，∴ $AD=CD$.

∵ $AD=AM=MB$，

∴ $CD=AM=MB$，

∴ 四边形 $AMCD$ 和四边形 $CDMB$ 是平行四边形，∴ $MC=AD$，$MD=BC$.

∵ $AD=BC$，

∴ $MC=MD=AD=BC=MA=MB$，

∴ 点 $C$ 在以 $AB$ 为直径的圆上.

(2)由(1)得四边形 $AMDC$ 是等边三角形. 如图，过点 $D$ 作 $DE\perp AB$ 于点 $E$.

由勾股定理得 $DE=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$，

∴ 梯形 $ABCD$ 的面积为$\frac{1}{2}\times(2+4)\times\sqrt{3}=3\sqrt{3}$.

### 第 2 课时 圆的半径的应用

**1**. 解：$OE=OF$.

理由如下：连结 $OA$、$OB$，∵ $OA=OB$，∴ $\angle OAB=\angle OBA$. 同理，$\angle OAE=\angle OBF$.

又∵ $AE=BF$，∴ $\triangle OAE\cong\triangle OBF$(SAS).

∴ $OE=OF$.

**2**. 解：(1)∵ $AB=OC$，$OB=OC$，

∴ $AB=OB$，∴ $\angle AOB=\angle A=20°$.

(2)∵ $\angle OBE=\angle A+\angle AOB$，

∴ $\angle OBE=2\angle A$.

∵ $OB=OE$，∴ $\angle OBE=\angle E$.

∴ $\angle E=2\angle A$.

∵ $\angle EOD=\angle A+\angle E=3\angle A=60°$.

**3**. 解：(1)在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$AB=10$，$BC=8$，

由勾股定理得 $AC=6$，所以点 $A$ 在 $\odot C$ 上.

由 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}CD\cdot AB=\frac{1}{2}AC\cdot BC$，

得 $CD=4.8<6$，所以点 $D$ 在 $\odot C$ 内.

又因为 $BC=8>6$，所以点 $B$ 在 $\odot C$ 外.

(2)连结 $CO$，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$O$ 为斜边 $AB$ 的中点，所以 $CO=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 10=5$.

所以当 $\odot C$ 的半径为 5 时，点 $O$ 在 $\odot C$ 上.

(3)$AC=6$，$OC=5$，$BC=8$，以点 $C$ 为圆心，$r$ 为半径作圆. 因为 $BC>AC>OC$，所以满足条件的半径 $r$ 的取值范围是 $5<r<8$.

**4**. 解：该船应按射线 $AB$ 方向驶离危险区域.

理由如下：如图，连结 $AB$，$D$ 并延长交 $\odot A$ 于点 $C$，在 $\odot A$ 上任取一点 $D$，$D$ 异于 $C$，且不是 $C$ 关于 $A$ 的对称点，连结 $BD$、$AD$.




（第 4 题）

在 $\triangle ADB$ 中，$AB+AD>BD$.

∵ $AB=AC=AD+AB=BC$，

∴ $AB+BD>AB+BC$，∴ $BD>BC$.

当点 $D$ 是 $C$ 关于 $A$ 的对称点时，$BD=BA+AD=BA+AC>BC$，∴ $BD>BC$.

∴ 为了尽快驶离危险区域，该船应按射线 $AB$ 方向航行.

**点拨**：本题运用了**定根思想**，将实际问题转化为数学问题. 其中两个一点到圆上的最小距离为以圆心为端点，过该点的射线与圆相交的点与该点之间的线段长度.

### 第 3 课时 确定圆的条件

**1**. D

**2**. D **点拨**：因为 $3+5>7$，所以只有 D 中的三个点绝对不在同一条直线上，所以能确定一个圆.

**3**. C

**4**. B **点拨**：过点 $A$、$B$ 且半径为 3 cm 的圆的圆心应当在线段 $AB$ 的垂直平分线上，且到 $A$、$B$ 两点的距离为 3 cm，这样的圆心有 2 个. 故选 B.

**5**. B **6**. D **7**. B **8**. B **9**. C

**10**. B **点拨**：如图，过点 $A$ 作 $BC$ 边的垂线交 $BC$ 于点 $D$，过点 $B$ 作 $AC$ 边的垂线交 $AD$ 于点 $O$，则点 $O$ 为圆形纸片的圆心.

设 $\odot O$ 的半径为 $R$，

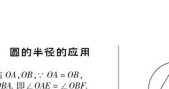
由等边三角形的性质知 $\angle OBC=30°$，

∴ $OB=R$，∴ 易得 $OD=\frac{1}{2}R$，

∴ $BD=\frac{\sqrt{3}}{2}R$，∴ $BC=2BD=\sqrt{3}R$.

∵ $BC=12$ cm，∴ $R=\frac{12}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}$(cm).

故选 B.




（第 10 题）




（第 11 题）

**11**. C **点拨**：由题意可得，存在两种情况. 当$\triangle ABC$ 为钝角三角形时，如图中的$\triangle ABC$.



第 11 题解答

∵ 点 $O$ 是等腰三角形 $A_1BC$ 的外心，且$\angle BOC=60°$，底边$BC=2$，$OB=OC$，∴ $\triangle OBC$ 为等边三角形，∴ $OB=OC=BC=2$. 连结 $OA_1$，交 $BC$ 于点 $D$. 易得 $OA_1\perp BC$.

∴ $CD=1$，∴ $OD=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$.

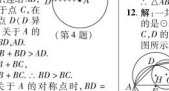
∵ $S_{\triangle A_1BC}=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot A_1D=\frac{BC\cdot A_1D}{2}=\frac{2\times(2-\sqrt{3})}{2}=2-\sqrt{3}$；

当$\triangle ABC$ 为锐角三角形时，如图中的$\triangle A_2BC$. 连结 $OA_2$，易知 $A_1$、$O$、$A_2$ 三点共线.

∵ $BC=2$，$OD=\sqrt{3}$，∴ $S_{\triangle A_2BC}=\frac{BC\cdot A_2D}{2}=\frac{2\times(2+\sqrt{3})}{2}=2+\sqrt{3}$.

∴ $\triangle ABC$ 的面积为 $2-\sqrt{3}$ 或 $2+\sqrt{3}$.

**12**. 解：一共能画出四个圆，其中过点 $A$、$C$、$D$ 的是 $\odot O$，过点 $A$、$B$、$C$ 的是 $\odot O'$，过点 $B$、$C$、$D$ 的是 $\odot G$，过点 $A$、$B$、$C$ 的是 $\odot H$，如图所示.




（第 12 题）




（第 13 题）

**13**. 解：(1)如图，$\odot O$ 即为所求作的$\triangle ABC$ 的外接圆.

(2)如图，连结 $AO$、$BO$.

∵ $AB=AC=6$ cm，$\angle BAC=120°$，点 $O$ 是$\triangle ABC$ 的外心，易得 $AO$ 平分 $\angle BAC$，

∴ $\angle BAO=\angle CAO=60°$.

∵ $AO=BO$，

∴ $\triangle ABO$ 是等边三角形，

∴ $AO=6$ cm，即 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 6 cm.

**14**. 证明：(1)∵ $AB=AC$，

∴ $\angle B=\angle ACB$.

∵ $AE/\!/BC$，∴ $\angle EAC=\angle ACB$.

∴ $\angle B=\angle EAC$.

在$\triangle ABD$ 和$\triangle CAE$ 中，$\begin{cases}AB=CA,\\ \angle B=\angle EAC,\\ BD=AE,\end{cases}$

∴ $\triangle ABD\cong\triangle CAE$(SAS).

∴ $AD=CE$.

(2)连结 $AO$ 并延长交 $BC$ 于点 $H$.

∵ $AB=AC$，$OA$ 为半径，

∴ $AH\perp BC$，∴ $BH=CH$.

∵ $AD=AG$，∴ $DH=GH$.

∴ $BH-DH=CH-GH$，即 $BD=CG$.

∵ $BD=AE$，∴ $CG=AE$.

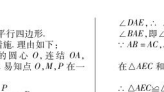
关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

又∵ $CG/\!/AE$，

∴ 四边形 $AGCE$ 是平行四边形.

**15.** 解：不同采取聚急措施. 理由如下：

作出圆弧所在圆的圆心 $O$，连结 $OA$，$OA_1$，$OM$，如图所示. 易知点 $O$，$M$，$P$ 在一条直线上.




（第 15 题）

由圆的对称性可得 $AM=MB=30$ m.

在 Rt△$AMO$ 中，由勾股定理可得

$AO^2=AM^2+MO^2$，即 $AO^2=30^2+(AO-18)^2$，∴ $AO=34$ m.

∵ $PN=4$ m，$OP=AO=34$ m，∴ $ON=30$ m. 在 Rt△$ONA_1$ 中，由勾股定理可得 $A_1N^2=A_1O^2-ON^2$，即 $A_1N^2=34^2-30^2$，

∴ $A_1N=16$ m，∴ $A_1B_1=32$ m.

∵ 32 m > 30 m，∴ 不用采取聚急措施.

## 3.2 图形的旋转

### 第 1 课时 旋转的认识

**1.** B **2.** D

**3.** B　**点拨**：本题是以平面直角坐标系为背景，利用旋转变换前设计的图形循环规律题，解题的关键是发现点 $D$ 在旋转变换中位置的变化情况，总结出一般规律. 解题的一般步骤：(1) 利用菱形的性质和中点公式求出点 $D$ 的坐标；(2) 探索点 $D$ 的位置变化是 8 秒循环一次；(3) 确定 60 秒经历多少次循环以及最后 $D$ 点的位置；(4) 由点 $D$ 的位置确定点 $D$ 的坐标.

**4.** B　**5.** 90°　**6.** D　**7.** A　**8.** D

**9.** A　**点拨**：连结 $BC'$.

∵ 旋转角 $\angle BAB'=45°$，∴ $\angle BAD'=45°$，

∴ $B$ 在对角 $AC'$ 上.

∵ $BC'=AB'=3$，

∴ 在 Rt△$AB'C'$ 中，$AC'=\sqrt{AB'^2+B'C'^2}=3\sqrt{2}$，∴ $BC'=3\sqrt{2}-3$.

在等腰直角三角形 $OBC'$ 中，$OB=BC'=3\sqrt{2}-3$，∴ $OC'=6-3\sqrt{2}$，∴ $OD'=3-OC'=3\sqrt{2}-3$，∴ 四边形 $ABOD'$ 的周长 $=AB+BO+OD'+AD'=6\sqrt{2}$. 故选 A.

**10.** 错误答案：A

**诊断**：本题没有明确旋转方向，旋转可以顺时针旋转也可以逆时针旋转，解题时容易只考虑一种情况而漏解.


第10题微课

**正确答案**：B

**11.** (1) 证明：∵ $CA'=BA'$，

∴ $\angle EAF'=\angle BAC$.

∵ 将线段 $AC$ 绕 $A$ 点旋转到 $AF$ 的位置，

∴ $AF=AC$.

在△$AEF$ 和△$ABC$ 中，$\begin{cases}AE=AB,\\ \angle EAF=\angle BAC,\\ AF=AC,\end{cases}$

∴ △$AEF\cong$△$ABC$(SAS)，∴ $EF=BC$.

(2) 解：∵ $AB=AE$，$\angle ABC=65°$，

∴ $\angle AEB=\angle ABC=65°$，

∴ $\angle BAE=180°-65°\times2=50°$.

∴ $\angle FAG=50°$.

∴ $\angle AEF\cong\angle ABC$，∴ $\angle F=\angle ACB=28°$.

∴ $\angle FGC=\angle FAG+\angle F=50°+28°=78°$.

**12.** (1) 证明：由旋转的性质，得 △$ABC\cong$△$ADE$，∴ $AB=AD$，$AC=AE$，$\angle BAC=\angle DAE$，∴ $\angle BAC+\angle BAE=\angle DAE+\angle BAE$，即 $\angle DAC=\angle BAD$.

∵ $AB=AC$，∴ $AD=AE$.

在△$AEC$ 和△$ADB$ 中，$\begin{cases}AE=AD,\\ \angle CAE=\angle BAD,\\ AC=AB,\end{cases}$

∴ △$AEC\cong$△$ADB$(SAS).

(2) 解：∵ 四边形 $ADFC$ 是菱形，∴ $AC/\!/DF$，∴ $\angle DBA=\angle BAC=45°$.

∵ $AB=AD$，∴ $\angle BDA=\angle DBA=45°$，

∴ △$ABD$ 为直角边长为 2 的等腰直角三角形，∴ $BD^2=2AB^2$，即 $BD=2\sqrt{2}$.

∵ $AD=DF=FC=AC=AB=2$，

∴ $BF=BD-DF=2\sqrt{2}-2$.

**13.** 【发现证明】证明：由旋转可得 $AE=AG$，$BE=DG$，$\angle B=\angle ADG=90°$，$\angle EAG=90°$，∴ $\angle ADC+\angle ADG=180°$，

∴ $G$，$D$，$C$ 三点共线.

∵ $\angle EAF=45°$，∴ $\angle GAF=45°$，

∴ $\angle FAE=\angle GAF$.

又∵ $AF=AF$，∴ △$AFE\cong$△$AFG$(SAS).

∴ $EF=GF$.

∵ $GF=GD+DF=BE+DF$，

∴ $EF=BE+FD$.

【类比引申】解：$\angle EAF=\dfrac{1}{2}\angle BAD$

理由如下：如图①，将△$ABE$ 绕点 $A$ 逆时针旋转 $\angle BAD$ 的度数至△$ADG$，由旋转可得 $AE=AG$，$BE=DG$，$\angle B=\angle ADG$，$\angle BAE=\angle DAG$.

∵ $\angle B+\angle ADC=180°$，

∴ $\angle ADC+\angle ADG=180°$，

∴ $G$，$D$，$C$ 三点共线.

∵ $\angle BAE=\angle DAG$，∴ $\angle BAD=\angle EAG$.

∵ $\angle EAF=\dfrac{1}{2}\angle BAD$，∴ $\angle FAE=\angle GAF$.

又∵ $AF=AF$，∴ △$AFE\cong$△$AFG$(SAS).

∴ $EF=GF$.

∵ $GF=GD+DF=BE+DF$，

∴ $EF=BE+FD$.

【探究应用】解：∵ $\angle BAD=150°$，$\angle DAE=90°$，∴ $\angle BAE=60°$.

又∵ $\angle B=60°$，∴ △$ABE$ 是等边三角形，∴ $BE=AB=80$ 米.

如图②，连结 $AF$，过 $A$ 作 $AH\perp CD$，交 $CD$ 的延长线于 $H$.

∵ $\angle ADC=120°$，

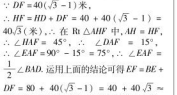
∴ 在 Rt△$AHD$ 中，$\angle DAH=30°$，

∵ $AD=80$ 米，∴ 易知 $HD=\dfrac{1}{2}AD=40$ 米，

∴ $AH=\sqrt{AD^2-DH^2}=40\sqrt{3}$ 米.

∵ $DF=40(\sqrt{3}-1)$ 米，

∴ $HF=HD+DF=40+40(\sqrt{3}-1)=40\sqrt{3}$(米)，∴ 在 Rt△$AHF$ 中，$AH=HF$，∴ △$HAF$ = 45°，∴ $\angle DAF=15°$，∴ $\angle EAF=90°-15°=75°$，∴ $\angle EAF=\dfrac{1}{2}\angle BAD$. 运用上面的结论可得 $EF=BE+DF=80+40(\sqrt{3}-1)=40+40\sqrt{3}\approx109$(米). 即这条道路 $EF$ 的长约为 109 米.




①　②

（第 13 题）

### 第 2 课时 旋转作图

**1.** C　**2.** D　**3.** D

**4.** 解：(1) 如图所示.　(2) 如图所示.




（第 4 题）

(3) 如图，$S_{\triangle AB_2D}=4\times4-\dfrac{1}{2}\times2\times4-\dfrac{1}{2}\times2\times2-\dfrac{1}{2}\times2\times4=6$.

**5.** (1) 证明：由题意得 △$ADC\cong$△$BOC$，∴ $DC=OC$.

又∵ $\angle DCO=60°$，∴ △$COD$ 是等边三角形.

(2) 解：△$AOD$ 是直角三角形.

理由：∵ $\alpha=\angle ADC=150°$，$\angle ODC=60°$，

∴ $\angle ADO=90°$.

∴ △$AOD$ 是直角三角形.

(3) 解：$\angle AOD=360°-110°-60°-\alpha=190°-\alpha$，$\angle ADO=\alpha-60°$，$\angle DAO=180°-(190°-\alpha)-(\alpha-60°)=50°$.

若 $\angle ADO=\angle AOD$，则 $\alpha-60°=190°-\alpha$，∴ $\alpha=125°$；

若 $\angle AOD=\angle DAO$，

则 $\alpha-60°=50°$，∴ $\alpha=110°$；

若 $\angle ADO=\angle DAO$，则 $190°-\alpha=50°$，

∴ $\alpha=140°$.

综上所述，当 $\alpha=125°$ 或 $110°$ 或 $140°$ 时，△$AOD$ 是等腰三角形.

## 阶段方法技巧训练(一)

**专训**

**1.** 解：利用平移的知识，将除去小路其余的部分通过平移组合成一个新的长方形，其长为 49 m，宽为 29 m，所以种来面积为 $49\times29=1\,421$(m$^2$)，

答：种植花草部分的面积是 1 421 m$^2$.

**2.** 解：利用平移的知识，将五个小长方形的边通过平移组合成一个大的长方形，则此长方形恰与五个形 $ABCD$ 重合，

∴ $AC=10$，$BC=8$，∴ $AB=\sqrt{10^2-8^2}=6$.

∴ 长方形 $ABCD$ 的周长为 $(6+8)\times2=28$.

答：图中的五个小长方形的周长之和是 28.

**3.** 解：知道. 由平移的性质知，$AB/\!/CE$，$CD/\!/BF$，

∴ 四边形 $ABEC$ 是平行四边形.

∴ $BE=AC$，$\angle DCE=\angle AOC=60°$.

∵ $AB=CE$，$AB=CD$，∴ $CE=CD$，

∴ △$CED$ 是等边三角形，∴ $DE=CE=AB$.

根据二角形的三边关系知 $BE+BD>DE$，

∴ $AC+BD>AB$.

**4.** C　**5.** C

**6.** 解：如图，将 △$PCD$ 绕点 $D$ 顺时针旋转 90°，使 $CD$ 与 $AD$ 重合，得到△$QAD$，连结 $PQ$，则△$PDQ$ 是一个等腰直角三角形.

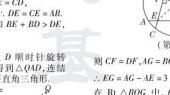
∴ $QD=PD=2$，$QA=PC=3$.

∴ 在等腰直角三角形 $PDQ$ 中，$PQ^2=DP^2+DQ^2=8$.

在△$PAQ$ 中，$PA^2+PQ^2=1+8=9=AQ^2$，

∴ △$APQ$ = 90°.

∴ $\angle APD=\angle APQ+\angle DPQ=90°+45°=135°$.




（第 6 题）

**7.** 3　**8.** $\sqrt{3}$　**9.** 42

**10.** $\sqrt{3}+1$　**点拨**：如图，连结 $BN$，设 $CA$ 与 $BM$ 相交于点 $D$，由题意易得 △$BCN$ 为等边三角形，∴ $BN=NC=NM$，∠$BNM=60°+90°=150°$.

∴ $\angle NBM=\angle NMB=15°$，

∴ $\angle CBM=60°-15°=45°$，

∴ $\angle CDB=90°$.

∴ △$CBD$ 为等腰直角三角形，△$CDM$ 为含 30°角的直角三角形，再根据 $BC=\sqrt{2}$ 可求得 $BD=CD=1$，$DM=\sqrt{3}$，最终求得 $BM=DM+BD=\sqrt{3}+1$.

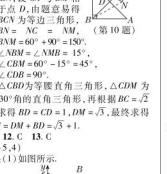



（第 10 题）

**11.** B　**12.** C　**13.** C

**14.** $-5\sqrt{3}$

**15.** 解：(1) 如图所示.




（第 15 题）

(2) 旋转角为 90°. ②$B_2(6,2)$.

**16.** C　**17.** 3 − $\sqrt{5}$

**18.** 解：(1) 将题图①中的△$ADE$ 绕点 $D$ 逆时针旋转 90°得题图②.

(2) 设△$ADE$ 绕点 $D$ 逆时针旋转 90°得 △$GDF$，则 $S_{\triangle ADE}=S_{\triangle BDG}$. 由旋转知，$\angle ADG=90°$，$BD=AD=5$，

∴ $BDG=90°$，

∴ $S_{\triangle BDG}=\dfrac{1}{2}BD\cdot DG=\dfrac{1}{2}\times6\times5=15$.

∴ $S_1+S_2=15$.

## 3.3 垂径定理

### 第 1 课时 垂径定理

**1.** A　**2.** D　**3.** B　**4.** A　**5.** A

**6.** C　**点拨**：如图，过点 $O$ 作 $OF\perp CD$ 于点 $F$，$OG\perp AB$ 于点 $G$，连结 $OB$，$OD$，$OE$，




（第 6 题）

则 $CF=DF$，$AG=BG=\dfrac{1}{2}AB=3$，

∴ $EG=AG-AE=3-1=2$.

在 Rt△$BOG$ 中，$OG=\sqrt{OB^2-BG^2}=\sqrt{13-9}=2$，∴ $EG=OG$.

∴ $\angle OEG=45°$，$OE=\sqrt{2}OG=2\sqrt{2}$.

∵ $\angle DEB=75°$，∴ $\angle OEF=30°$.

∴ 易得 $OF=\dfrac{1}{2}OE=\sqrt{2}$.

在 Rt△$ODF$ 中，$DF=\sqrt{OD^2-OF^2}=\sqrt{13-2}=\sqrt{11}$，∴ $CD=2DF=2\sqrt{11}$.

**7.** B

**8.** $\dfrac{1}{2}$　**点拨**：连结 $OD$. 设 $O$ 的半径为 $r$.

∵ $CD\perp OC$，∴ $\angle OCD=90°$.

∴ $CD=\sqrt{OD^2-OC^2}=\sqrt{r^2-OC^2}$.

当 $OC$ 的值最小时，$CD$ 的值最大，

而 $OC\perp AB$ 时，$OC$ 最小，此时 $OC=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{1}{2}$，

∴ $CD=\sqrt{r^2-\left(\dfrac{1}{2}AB\right)^2}$，

∴ $CD$ 的最大值为 $\sqrt{r^2-\left(r^2-\dfrac{1}{4}AB^2\right)}=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{1}{2}$.

**9.** 7$\sqrt{2}$　**点拨**：连结 $OB$，$OC$，$BC$，$PB$，作 $CH\perp AB$ 于点 $H$.

∵ $MN\perp AB$ 于点 $E$，∴ $PA=PB$，

∴ $PA+PC=PB+PC$.

∵ 两点之间线段最短，

∴ 当点 $P$ 为 $BC$ 与 $MN$ 的交点时，$PA+PC$ 的值最小.

根据垂径定理，得 $BE=\dfrac{1}{2}AB=4$，$CF=\dfrac{1}{2}CD=3$，

∴ $OE=\sqrt{OB^2-BE^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$，

$OF=\sqrt{OC^2-CF^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$，

∴ $CH=OE+OF=3+4=7$，$BH=BE+EH=BE+CF=4+3=7$. 在 Rt△$BCH$ 中，根据勾股定理，得 $BC=7\sqrt{2}$，即 $PA+PC$ 的最小值为 $7\sqrt{2}$.

**10.** 错误答案：D

**诊断**：根据垂径定理，可知①②③一定正确；因为 $CD$ 不一定平分 $OB$，所以④不一定正确. 本题的易错之处是对垂径定理理解不透，开且把图形画得比较特殊，因而误认为 $CD$ 平分 $OB$.

**正确答案**：C

**解题启示**：几何问题中，图形对分析解题思路起着重要的作用，因此在画图时，使画出的图形能符合题意的基础上，力求直观、清楚，特别地，不能画成特殊情况，以免在解题时产生错觉.

**11.** (1) 证明：如图，过点 $O$ 作 $OE\perp AB$ 于点 $E$，则 $CE=DE$，$AE=BE$.

∴ $AE-CE=BE-DE$，即 $AC=BD$.

(2) 解：如图，连结 $OA$，$OC$.

∵ $OE\perp AB$，圆心 $O$ 到直线 $AB$ 的距离为 6，∴ $OE=6$.

∴ $CE=\sqrt{OC^2-OE^2}=\sqrt{8^2-6^2}=2\sqrt{7}$，

$AE=\sqrt{OA^2-OE^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$.

∴ $AC=AE-CE=8-2\sqrt{7}$.




（第 11 题）　（第 12 题）

**12.** 解：如图，作 $CE\perp AB$ 于点 $E$，

∵ $CE$ 为△$ABC$ 斜边上的高，$AE=DE$.

在 Rt△$ABC$ 中，$AC=6$ cm，$BC=8$ cm，

∴ $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$(cm).

设 $CE=x$ cm，

∵ $\dfrac{1}{2}AB\cdot CE=\dfrac{1}{2}AC\cdot BC$，

∴ $\dfrac{1}{2}\times10\cdot x=\dfrac{1}{2}\times6\times8$，

∴ $x=4.8$. 即 $CE=4.8$ cm.

∵ $CE\perp AB$，∴ 在 Rt△$ACE$ 中，$AE=\sqrt{AC^2-CE^2}=3.6$ cm，

∴ $AD=2AE=7.2$ cm.

**13.** (1) 解：$OE=\sqrt{OC^2-CE^2}=4$.

(2) 证明：∵ $CP$ 平分 $\angle OCD$，

∴ $\angle OCP=\angle DCP$.

∵ $OC=OP$，∴ $\angle OCP=\angle OPC$.

∴ $\angle DCP=\angle OPC$.

∴ $OP/\!/CD$.

**14.** 解：(1) ∵ 直径 $AB=26$ m，$OD=13$ m.

∵ $OE\perp CD$，∴ $DE=\dfrac{1}{2}CD$.

∵ $OE:CD=5:24$，∴ $OE:ED=5:12$.

设 $OE=5x$ m，则 $ED=12x$ m，

在 Rt△$ODE$ 中，$(5x)^2+(12x)^2=13^2$，

解得 $x=1$.

∴ $CD=2DE=2\times12\times1=24$(m).

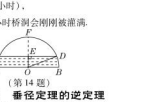
(2) 由(1) 得 $OE=1\times5=5$(m).

延长 $OE$ 交 $\odot O$ 于点 $F$，如图.

∴ $EF=OF-OE=13-5=8$(m)，

∴ $\dfrac{8}{5}=2$(小时)，

即经过 2 小时桥洞会刚刚被淹满.




（第 14 题）

### 第 2 课时 垂径定理的逆定理

**1.** D　**2.** A　**3.** D　**4.** C　**5.** A　**6.** C　**7.** B

**8.** C

**9.** 25　**点拨**：设圆的圆心为 $O$，连结 $OA$，$OC$，$OC$ 与 $AB$ 交于点 $D$，设 $\odot O$ 的半径为 $R$，在 Rt△$AOD$ 中利用勾股定理即可解决问题.

**10.** 8

**11.** 15°或 75°

**点拨**：如图，当圆心 $O$ 在 $\angle AOB$ 的内部时，过点 $A$ 作直径 $AD$，连结 $OC$，$OB$，取 $AB$，$AC$ 的中点分别为点 $E$，$F$，连结 $OE$，$OF$. 由垂径定理得 $AE=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{1}{2}OA$，$OF=\dfrac{1}{2}AC$.

∵ 易得 $\angle BAO=30°$，$\angle CAO=45°$，

∴ $\angle CAB=15°$.

同理可得，当圆心 $O$ 在 $\angle CAB_1$ 的内部时，$\angle CAB_1=75°$.

**易错总结**：在求两条弦的夹角时，容易忽略圆的轴对称性而造成漏解. 一般地，分类标准为圆心 $O$ 在角的外部和圆心 $O$ 在角的内部. 例如，本题分为圆心 $O$ 在 $\angle CAB$ 的内部和圆心 $O$ 在 $\angle CAB$ 的外部两种情况.




（第 11 题）　（第 12 题）

**12.** 解：△$AEF$ 是等腰三角形.

证明如下：如图，连结 $OM$，$ON$，$OM$ 交 $AB$ 于点 $P$，$ON$ 交 $AC$ 于点 $Q$.

∵ $M$，$N$ 分别为 $\overset{\frown}{AB}$，$\overset{\frown}{AC}$ 的中点，





关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore OM \perp AB, ON \perp AC$，

$\because \angle MPE = \angle NQF = 90°$，

$\therefore \angle PEM = 90° - \angle M, \angle QFN = 90° - \angle N.$

$\because OM = ON, \therefore \angle M = \angle N,$

$\therefore \angle PEM = \angle QFN.$

$\therefore \angle AEF = \angle PEM, \angle AFE = \angle QFN,$

$\therefore \angle AEF = \angle AFE,$

$\therefore AE = AF$，即 $\triangle AEF$ 是等腰三角形.

**13.** **解：**(1) 连结 $OB$.

$\because OD$ 过圆心，且 $D$ 是弦 $BC$ 的中点，

$\therefore OD \perp BC, BD = \frac{1}{2}BC = 6.$

在 Rt $\triangle OBD$ 中，由勾股定理得 $OD^2 + BD^2 = BO^2$，

$\therefore OD^2 + 6^2 = 10^2, \therefore OD = 2\sqrt{17}.$

(2) 设 $BE = x$，则 $EO = \sqrt{2}x, ED = 6 - x$. 在 Rt $\triangle EOD$ 中，由勾股定理得 $OD^2 + ED^2 = EO^2$，

$\therefore (2\sqrt{7})^2 + (6 - x)^2 = (\sqrt{2}x)^2.$

解得 $x_1 = -16$（舍去），$x_2 = 4.$

$\therefore ED = 2.$

**14.** **解：**如图，连结 $DO$ 并延长交 $BC$ 于 $F$.

$\because D$ 为 $\overset{\frown}{BAC}$ 的中点，$\therefore \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{CD}$，

$\therefore DF \perp CB,$

$\therefore CF = \frac{1}{2}BC = 4.$

$\because DE \perp AC, \therefore \angle DEO = \angle OFC = 90°.$

$\because \angle DOE = \angle COF, OC = OD,$

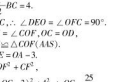
$\therefore \triangle DOE \cong \triangle COF(\mathrm{AAS}).$

$\therefore OF = OE = 0A - 3.$

$\because OC^2 = OF^2 + CF^2,$

$\therefore OC^2 = (OC - 3)^2 + 4^2, \therefore OC = \frac{25}{6}.$

$\therefore \odot O$ 的半径为 $\frac{25}{6}$.



(第 14 题)

**15.** **解：**分两种情况：(1) 点 $O$ 在 $\triangle ABC$ 的内部，如图①，过点 $A$ 作 $AD \perp BC$ 于点 $D$，连结 $OB$.

$\because AB = AC, \therefore BD = DC$，即 $AD$ 垂直平分 $BC$，

$\therefore AD$ 经过圆心 $O$.

则 $AD = AO + OD = 14 + 6 = 20(\mathrm{cm})$.

在 Rt $\triangle OBD$ 中，$BD^2 = OB^2 - OD^2 = 14^2 - 6^2 = 160.$

在 Rt $\triangle ABD$ 中，$AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = \sqrt{20^2 + 160} = 4\sqrt{35}(\mathrm{cm}).$

(2) 点 $O$ 在 $\triangle ABC$ 的外部，如图②.

连结 $AO$ 交 $BC$ 于点 $D$，连结 $OB, OC$.

$\because AB = AC, OB = OC, AO = AO,$

$\therefore \triangle ABO \cong \triangle ACO,$

$\therefore BAD = \angle CAD.$

又 $\because AD = AD, \therefore \triangle ABD \cong \triangle ACD,$

$\therefore BD = DC, \therefore AD$ 垂直平分 $BC.$

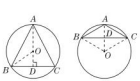
$\therefore OD = 6$ cm,

$\therefore AD = OA - OD = 14 - 6 = 8(\mathrm{cm}).$

在 Rt $\triangle OBD$ 中，$BD^2 = OB^2 - OD^2 = 14^2 - 6^2 = 160.$ 在 Rt $\triangle ABD$ 中，

$AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = \sqrt{8^2 + 160} = 4\sqrt{14}(\mathrm{cm}).$

综上可知，$AB$ 的长为 $4\sqrt{35}$ cm 或 $4\sqrt{14}$ cm.



(第 15 题)

## 阶段方法技巧训练（二）

**专训**

**1.** **解：**如图，连结 $CM$，作 $MN \perp CD$ 于 $N$，$CH \perp OA$ 于 $H$.

$\because$ 四边形 $OCDB$ 是平行四边形，$B$ 点的坐标是 $(8, 0)$，

$\therefore CD = OB = 8, CN = MH, CH = MN.$

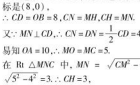
又 $\because MN \perp CD, \therefore CN = DN = \frac{1}{2}CD = 4.$

易知 $OA = 10, \therefore MO = MC = 5.$

在 Rt $\triangle MNC$ 中，$MN = \sqrt{CM^2 - CN^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3, \therefore CH = 3,$

又 $OH = OM - MH = 5 - 4 = 1.$

$\therefore C$ 的坐标为 $(1, 3)$.



(第 1 题)

**2.** **解：**如图，过点 $C$ 作 $CE \perp AB$ 交 $\odot O$ 于点 $E$，交 $AB$ 于点 $F$，连结 $EM, EO.$

由 $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{BD}$，易得 $D, O, E$ 在一条直线上，且 $DE$ 为 $\odot O$ 的直径.

由垂径定理知 $EF = CF$，易证 $EM = CM.$

$\because EM + DM > DE,$

$\therefore CM + DM > DE.$

故当点 $M$ 运动到圆心 $O$ 时，$CM + DM$ 的值最小，最小值等于圆的直径，为 8 cm.



(第 2 题)

**3.** **证明：**过点 $O$ 作 $OE \perp CD$ 于点 $E$，则 $CE = DE.$

$\because OA = OB, \therefore AE = BE.$

$\therefore AE - CE = BE - DE,$

$\therefore AC = BD.$

**4.** **解：**如图，设圆弧形桥拱 $AB$ 所在圆的圆心为 $O$，连结 $OA, OB, ON$，作 $OD \perp AB$ 于点 $D$，交 $\odot O$ 于点 $C$，交 $MN$ 于点 $H$，由垂径定理可知，$D$ 为 $AB$ 的中点.

设 $OA = r$ 米，则 $OD = OC - DC = (r - 2.4)$ 米，$AD = \frac{1}{2}AB = 3.6$ 米.

在 Rt $\triangle AOD$ 中，$OA^2 = AD^2 + OD^2$，

即 $r^2 = 3.6^2 + (r - 2.4)^2$，

解得 $r = 3.9.$

在 Rt $\triangle OHN$ 中，$OH = \sqrt{ON^2 - NH^2} = \sqrt{3.9^2 - 1.5^2} = 3.6$(米).

所以 $FN = DH = OH - OD = 3.6 - (3.9 - 2.4) = 2.1$(米).

因为 $2.1$ 米 $> 2$ 米，

所以此货船能顺利通过这座拱桥.



### 3.4 圆心角

**1.** **D** **2.** **C** **3.** **C** **4.** **B**

**5.** **D** **点拨：**作出图形，有两种情况.



(第 5 题)

如图①，$\because OC = OE, \angle COE = 40°,$

$\therefore \angle C = \angle E = \frac{1}{2} \times (180° - 40°) = 70°.$

又 $\because CE // AB, \therefore \angle BOD = \angle C = 70°$；

如图②，$\because OC = OE, \angle COE = 40°,$

$\therefore \angle C = \angle E = \frac{1}{2} \times (180° - 40°) = 70°.$

又 $\because CE // AB, \therefore \angle COB = \angle C = 70°,$

$\therefore \angle BOD = 180° - 70° = 110°.$

综上，$\angle BOD$ 的度数是 $70°$ 或 $110°$. 故选 D.

**6.** **C** **7.** **D** **8.** **A**

**9.** $\frac{48}{5}$ **点拨：**连结 $OA, OB, OD$ 交 $AF$ 于 $G$，如图.

$\because AB \perp CD, \therefore AE = BE = \frac{1}{2}AB = 3.$

设 $\odot O$ 的半径为 $r$，则 $OE = r - 1, OA = r.$

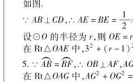
在 Rt $\triangle OAE$ 中，$3^2 + (r - 1)^2 = r^2$，解得 $r = 5. \therefore \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BD}, \therefore OB \perp AF, AG = FG.$

在 Rt $\triangle OAG$ 中，$AG^2 + OG^2 = 5^2$，①

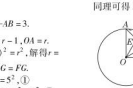
在 Rt $\triangle ABG$ 中，$AG^2 + (5 - OG)^2 = 6^2$，②

解由①②组成的方程组得到 $AG = \frac{24}{5},$

$\therefore AF = 2AG = \frac{48}{5}.$



(第 9 题)



(第 11 题)

**10.** **A**

**11.** **C** **点拨：**如图，连结 $BO$，过点 $O$ 作 $OE \perp AB$ 于点 $E$，

由题意可得 $EO = \frac{1}{2}BO, AB // DC,$

$\therefore$ 易得 $\angle EBO = 30°,$

$\therefore \angle BOC = 150°$，即 $\overset{\frown}{BC}$ 的度数是 $150°.$

**12.** **错误答案：**A 或 B

**错因分析：**对于“在同圆或等圆中，如果两个圆心角、两条弧、两条弦、两个弦心距中有一对是相等，那么它们所对应的其余各对量都相等”这一性质中反映的各对量之间的关系判断不准，从而导致错误.

**正确答案：**C

**13.** (1) **解：**$\triangle AOC$ 是等边三角形. 理由如下：

$\because \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CD}, \therefore \angle AOC = \angle COD = 60°.$

又 $\because OA = OC, \therefore \triangle AOC$ 是等边三角形.

(2) 证明：$\because \angle BOD = 180° - \angle AOC - \angle COD,$

$\therefore \angle BOD = 180° - 60° - 60° = 60°.$

又 $\because OB = OD, \therefore \triangle OBD$ 为等边三角形.

$\therefore \angle D = 60°. \therefore \angle D = \angle COD. \therefore OC // BD.$

**14.** (1) **证明：**连结 $AF$，则 $AB = AF$，

$\therefore \angle ABF = \angle AFB.$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AD // BC.$

$\therefore \angle EAF = \angle AFB, \angle GAE = \angle ABF.$

$\therefore \angle GAE = \angle EAF. \therefore \overset{\frown}{GE} = \overset{\frown}{EF}.$

(2) 解：$\because \overset{\frown}{BF}$ 的度数为 $50°$，

$\therefore \angle BAF = 50°.$

$\therefore \angle ABF = \angle AFB = 65°.$

又 $\because AB // CD, \therefore \angle ABF + \angle C = 180°.$

$\therefore \angle C = 180° - \angle ABF = 115°.$

**15.** **证明：**如图，连结 $AC, BD.$

$\because C, D$ 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的三等分点，

$\therefore \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{BD}. \therefore AC = CD = BD,$

$\angle AOC = \angle COD = \angle BOD.$

又 $\because \angle AOB = 90°,$

$\therefore \angle AOC = \angle COD = \angle BOD = 30°.$

$\therefore OA = OB = OC = OD,$

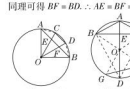
$\therefore \angle OAB = \angle OBA = 45°,$

$\therefore \angle AEC = \angle AOC + \angle OAB = 75°.$

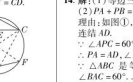
$\therefore OA = OC, \angle AOC = 30°,$

$\therefore \angle ACE = \frac{1}{2} \times (180° - 30°) = 75° = \angle AEC. \therefore AE = AC.$

同理可得 $BF = BD. \therefore AE = BF = CD.$



(第 15 题)



(第 16 题)

**16.** (1) **证明：**如图，连结 $BD, CD.$

$\because AB = AC, \therefore \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC}.$

$\because AD$ 是 $\odot O$ 的直径，$\therefore \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{CD},$

$\therefore BD = CD.$

又 $\because AD = AD, \therefore \triangle ABD \cong \triangle ACD,$

$\therefore BAD = \angle CAD.$

$\therefore AD$ 平分 $\angle BAC.$

(2) 解：如图，连结 $BO, CO, GO, FO.$ 由 (1) 可知 $AD \perp BC,$

$\therefore AD$ 垂直平分 $BC.$

$\therefore$ 点 $E$ 是 $OA$ 的中点，

$\therefore BA = OB = AC = OC = OA.$

$\therefore \triangle BOA, \triangle AOC$ 都是等边三角形.

$\therefore \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{CD}, \therefore \angle BOD = \angle COD = 180° - \angle AOC = 120°.$

又 $\because$ 点 $F$ 是 $\overset{\frown}{CD}$ 的中点，

$\therefore \angle COF = \angle FOD = \frac{1}{2}\angle COD = 60°.$

$\therefore \angle BOF = 180°. \therefore BF$ 是 $\odot O$ 的直径.

又 $\because$ 点 $G$ 是 $\overset{\frown}{BF}$ 的中点，$\therefore \angle FOG = 90°.$

$\therefore \odot O$ 的半径为 $1, \therefore GF = \sqrt{2}.$

### 3.5 圆周角

#### 第 1 课时　圆周角和圆心角、弧的关系

**1.** **C** **2.** $4\sqrt{2}$ **3.** $C$ 与 $\odot D$ 与 $\angle A$ 与 $\angle B$ **3.** **B**

**4.** **C** **5.** **D** **6.** **A** **7.** **B**

**8.** **D** **9.** **C** **10.** **D**

**11.** **A** **点拨：**因为直径 $AB$ 垂直于弦 $CD$，所以 $CE = DE.$

因为 $\angle A = 22.5°$，所以 $\angle COE = 45°.$

因为 $OC = 6$，由勾股定理得 $CE = 3\sqrt{2}$，

所以 $CD = 6\sqrt{2}$，故选 A.

本题容易因忽视勾股定理的运用而出错.

**12.** **证明：**因为圆周角 $\angle CAB$ 与圆心角 $\angle BOC$ 同是 $\overset{\frown}{BC}$ 所对的角，

所以 $\angle BOC = 2\angle BAC.$

因为圆周角 $\angle ACD$ 与圆心角 $\angle AOD$ 同是 $\overset{\frown}{AD}$ 所对的角，所以 $\angle AOD = 2\angle ACD.$

在 Rt $\triangle ACE$ 中，$\angle BAC + \angle ACD = 90°,$

所以 $\angle BOC + \angle AOD = 2\angle BAC + 2\angle ACD = 2(\angle BAC + \angle ACD) = 2 \times 90° = 180°.$

**点拨：**利用圆周角定理可使问题转化，如本题中，利用圆周角定理，可把证明“$\angle BOC + \angle AOD = 180°$”转化为证明“$\angle BAC + \angle ACD = 90°$”，前证明后者，利用“直角三角形两锐角互余”即可轻松解决.

**13.** **证明：**(1) $\because AB = CD, \therefore \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD},$

即 $\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{AC}. \therefore \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC}.$

(2) $\because \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC}, \therefore AD = BC.$

$\because \angle ADE = \angle CBE, \angle DAE = \angle BCE,$

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CBE(\mathrm{ASA}). \therefore AE = CE.$

**14.** **解：**(1) 等边三角形

(2) $PA + PB = PC$.

理由：如图①，在 $PC$ 上截取 $PD = PA$，

连结 $AD.$

$\because \angle APC = 60°, \therefore \triangle PAD$ 是等边三角形.

$\therefore PA = AD, \angle PAD = 60°.$

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形，$\therefore AB = AC,$

$\angle BAC = 60°. \therefore \angle PAD = \angle BAC.$

$\therefore \angle PAB = \angle DAC.$

$\therefore \triangle PAB \cong \triangle DAC, \therefore PB = DC.$

$\therefore PD + DC = PC, \therefore PA + PB = PC.$

(3) 当点 $P$ 为 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点时，四边形 $APBC$ 的面积最大. 如图②，过点 $P$ 作 $PE \perp AB$，垂足为 $E$，过点 $C$ 作 $CF \perp AB$，垂足为 $F.$

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形，$\therefore F$ 为 $AB$ 的中点，且 $CF$ 过圆心 $O.$

$\because S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2}AB \cdot PE, S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CF,$

$\therefore S_{\text{四边形}APBC} = \frac{1}{2}AB \cdot (PE + CF)$. 当点 $P$ 为 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点时，点 $E$ 与点 $F$ 重合，$PE + CF = PC$，$PC$ 为 $\odot O$ 的直径. $\therefore$ 此时四边形 $APBC$ 的面积最大. 易求得 $AB = \sqrt{3}$，

$\therefore$ 四边形 $APBC$ 的最大面积 $= \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 2 = \sqrt{3}.$

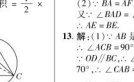


(第 14 题)

#### 第 2 课时　圆周角和圆的性质

**1.** **D** **2.** **C** **3.** **C** **4.** **A** **5.** **D** **6.** **D**

**7.** **2** **点拨：**圆，根据轴对称性质，作出点 $A$ 关于直径 $CD$ 所在直线的对称点 $M$，连结 $MB$ 交 $CD$ 于点 $P'$，连结 $AP'$，易得 $PA + PB$ 的最小值 $= P'A + P'B = BM$，$\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{MD}$，作直径 $BN$，连结 $MN$，$\therefore \angle BMN = 90°.$



(第 7 题)

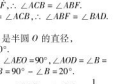
**8.** **D** **9.** **B** **10.** **B**

**11.** $60°$ 或 $120°$ **点拨：**如图，当点 $P(P_1)$ 在弦 $AB$ 所对的优弧上时，过点 $O$ 作 $OC \perp AB$ 于点 $C$，连结 $OA, OB$. 由垂径定理可得 $AC = 3\sqrt{2}$. 在 Rt $\triangle OAC$ 中，$OC = \sqrt{OA^2 - AC^2} = 2$，易得 $\angle OAC = 30°.$

因为 $OA = OB$，所以 $\angle OBC = \angle OAC = 30°.$

所以 $\angle AOB = 120°$，所以 $\angle AP_1B = 60°.$

同理当点 $P(P_2)$ 在弦 $AB$ 所对的劣弧上时，$\angle AP_2B = 120°.$



(第 11 题)

**易错总结：**对于“图形不明确型”问题，在解答时一般要进行分类讨论. 一条弦（非直径）所对的圆周角有两种情况：顶点在优弧上的圆周角和顶点在劣弧上的圆周角，解题时要分情况求解，否则容易漏解. 例如本题应分两种情况，点 $P$ 在弦 $AB$ 所对的优弧上和点 $P$ 在弦 $AB$ 所对的劣弧上.

**12.** **证明：**(1) $\because BC$ 是半圆 $O$ 的直径，$\therefore \angle BAC = 90°. \therefore \angle BAD + \angle CAD = 90°.$

又 $\because AD \perp BC, \therefore \angle ABC + \angle CAD = 90°.$

$\therefore \angle BAD = \angle ACB.$

(2) $\because \overset{\frown}{BA} = \overset{\frown}{AF}, \therefore \angle ACB = \angle ABF.$

又 $\because \angle BAD = \angle ACB, \therefore \angle ABF = \angle BAD.$

$\therefore AE = BE.$

**13.** **解：**(1) $\because AB$ 是半圆 $O$ 的直径，

$\therefore \angle ACB = 90°.$

$\because OD // BC, \therefore \angle AEO = 90°, \angle ADO = \angle B = 70°, \therefore \angle CAB = 90° - \angle B = 20°.$

$\therefore OA = OD, \therefore \angle DAO = \angle ADO = \frac{1}{2} \times (180° - \angle AOD) = 55°,$

$\therefore \angle CAD = \angle DAO - \angle CAB = 35°.$

(2) $\because$ 在 Rt $\triangle ACB$ 中，$AB = 4, AC = 3,$

$\therefore BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}.$

$\because$ 点 $O$ 是 $AB$ 的中点，$OD // BC,$

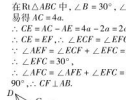
$\therefore OE = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{7}}{2}.$

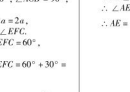
$\because OD = OA = \frac{1}{2}AB = 2, DE = OD - OE,$

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore DE=2-\frac{\sqrt{7}}{2}$.

**14. 证明**:(1)∵ $AB$ 是⊙$O$ 的直径,∴ $\angle ACB=90°$.
∵ $\triangle AEF$ 为等边三角形,
∴ $\angle CAB=\angle EFA=60°$,
∴ $\angle R=90°-\angle CAB=30°$.
∵ $\angle EFA=\angle B+\angle FDB$,
∴ $\angle FDB=\angle B=30°$,
∴ $\triangle DFB$ 是等腰三角形.
(2)如图,过点 $A$ 作 $AM\perp DF$ 于点 $M$,过 $AF=2a$.
∵ $\triangle AEF$ 是等边三角形,
∴ $FM=EM=a$,$AM=\sqrt{3}a$.
在 Rt△$DAM$ 中,$AD=\sqrt{7}AF=2\sqrt{7}a$,$AM=\sqrt{3}a$,∴ $DM=\sqrt{AD^2-AM^2}=5a$.
∴ $BF=DF=6a$,
∴ $AB=AF+BF=8a$.
在 Rt△$ABC$ 中,$\angle B=30°$,$\angle ACB=90°$,易得 $AC=4a$.
∴ $CE=AC-AE=4a-2a=2a$,
∴ $CE=EF$,∴ $\angle ECF=\angle EFC$.
∵ $\angle AEF=\angle ECF+\angle EFC=60°$,
∴ $\angle EFC=30°$,
∴ $\angle AFC=\angle AFE+\angle EFC=60°+30°=90°$,∴ $CF\perp AB$.

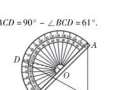

(第 14 题)


(第 15 题)

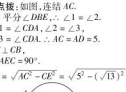
**15. 解**:(1)∵ $AB$ 为⊙$O$ 的直径,
∴ $\angle ACB=\angle ADB=90°$.
∵ $CD$ 平分 $\angle ACB$,
∴ $\angle ACD=\angle BCD=45°$,
∴ $AD=BD$.
∵ $AC=6$,$BC=8$,
∴ $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=10$.
又∵ $AD^2+BD^2=AB^2$,
∴ $AD=BD=5\sqrt{2}$,
∴ $S_{四边形ADBC}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}\times 6\times 8+\frac{1}{2}\times 5\sqrt{2}\times 5\sqrt{2}=49$.
②如图,作 $AE\perp CD$ 于点 $E$,由(1)①知 $\angle ACD=45°$,
∴ $\triangle CAE$ 为等腰直角三角形,
∴ $CE=AE$.
又∵ $AC=6$,∴ $CE=AE=3\sqrt{2}$,
∴ $DE=\sqrt{AD^2-AE^2}=4\sqrt{2}$,
∴ $CD=CE+DE=7\sqrt{2}$.
(2)$CA+CB$ 的最大值为 $10\sqrt{2}$.

## 3.6 圆内接四边形

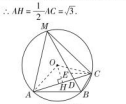
**1.** D **2.** B **3.** B **4.** A **5.** C
**6.** $61°$ **点拨**:如图,取 $AB$ 的中点为 $O$,连结 $OD$,
∵ 直角三角尺 $ABC$ 的斜边 $AB$ 与量角器的直径恰好重合,∴ 点 $A$,$D$,$B$,$C$ 共圆,
∴ 点 $D$ 对应的刻度是 $58°$,
∵ $BOD=58°$,
∴ $\angle BCD=\frac{1}{2}\angle BOD=29°$,
∴ $\angle ACD=90°-\angle BCD=61°$.


(第 6 题)

**7.** $52°$ **8.** $105°$
**9.** $40°$ **点拨**:∵ $\angle EBF=\angle A+\angle E=55°+30°=85°$,∴ $\angle ADC=\angle EBF=85°$. 在△$ADF$ 中,$\angle F=180°-\angle A-\angle ADC=180°-55°-85°=40°$.
**10.** G
**11.** D **点拨**:如图,连结 $AC$.
∵ $BA$ 平分 $\angle DBE$,∴ $\angle 1=\angle 2$.
∵ $\angle 1=\angle CDA$,$\angle 2=\angle 3$,
∴ $\angle 3=\angle CDA$,∴ $AC=AD=5$.
∵ $AE\perp CB$,
∴ $\angle ACC=90°$.
∴ $AE=\sqrt{AC^2-CE^2}=\sqrt{5^2-(\sqrt{13})^2}=2\sqrt{3}$.


(第 11 题)

**12.** D **点拨**:点 $B$ 可能在弦 $AC$ 所对的优弧上,也可能在弦 $AC$ 所对的劣弧上.本题没有给出图形,其易错之处在于画图时考虑不全而漏解.
**13. 解**:由题意知四边形 $AOMB$ 为⊙$C$ 的内接四边形,
∴ $\angle BAO=180°-\angle BMO=180°-120°=60°$.
∵ $\angle AOD=90°-\angle BAO=90°-60°=30°$.
在 Rt△$ABO$ 中,易知 $OA=3$,
易得 $AB=2OA=6$.
∴ $AC=BC=3$,
$OB=\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3}$.
∴⊙$C$ 的半径为 3,
点 $B$ 的坐标是 $(-3\sqrt{3},0)$.
**14.** (1)**解**:如图,连结 $OA$,$OC$,作 $OH\perp AC$ 于点 $H$,∴ $AH=\frac{1}{2}AC=\sqrt{3}$.

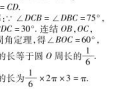

(第 14 题)

∵ $\angle ABC=120°$,
∴ $\angle AMC=180°-\angle ABC=60°$.
∴ $\angle AOC=2\angle AMC=120°$.
易得 $\angle AOH=\frac{1}{2}\angle AOC=60°$,
∴ $\angle OAH=30°$,易得 $OA=2OH$,
∴ $OH^2+(\sqrt{3})^2=(2OH)^2$.
∴ $OH=1$,
∴ $OA=2$.
即⊙$O$ 半径的长为 2.
(2)**证明**:如图,在 $BM$ 上截取 $BE=BC$,连结 $CE$.∵ $BM$ 平分 $\angle ABC$,$\angle ABC=120°$,∴ $\angle MBC=\frac{1}{2}\angle ABC=60°$.
又∵ $BE=BC$,∴ △$EBC$ 是等边三角形.
∴ $CE=CB=BE$,$\angle CEB=60°$.
∴ $\angle MEC=180°-\angle CEB=120°$.
∴ $\angle ABC=\angle MEC$.
在△$ABC$ 和△$MEC$ 中,$\begin{cases}\angle ABC=\angle MEC,\\ \angle BAC=\angle EMC,\\ CB=CE,\end{cases}$
∴ △$ABC$≌△$MEC$(AAS).∴ $AB=ME$.
∴ $ME+EB=BM$,∴ $AB+BC=BM$.

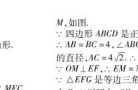
**15. 证明**:(1)∵ 四边形 $ABCD$ 是⊙$O$ 的内接四边形,∴ $\angle A+\angle BCD=180°$.
又∵ $\angle DCE+\angle BCD=180°$,
∴ $\angle A=\angle DCE$.∵ $DC=DE$,
∴ $\angle DCE=\angle AEB$.∴ $\angle A=\angle AEB$.
(2)∵ $\angle A=\angle AEB$,
∴ $AB$ 是等腰三角形.
∵ $OE\perp CD$,∴ $CF=DF$.
∵ $OE$ 是 $CD$ 的垂直平分线.
∴ $ED=EC$.
又∵ $DC=DE$,∴ $DC=DE=EC$.
∴ △$DCE$ 是等边三角形.
∴ $\angle AEB=60°$,
∴ △$ABE$ 是等边三角形.
**16.** (1)**证明**:∵ 四边形 $ABCD$ 内接于圆 $O$,
∴ $\angle DCB+\angle BAD=180°$.
∵ $\angle BAD=105°$,
∴ $\angle DCB=180°-105°=75°$.
∵ $DBC=75°$,
∴ $\angle DCB=\angle DBC=75°$,
∴ $BD=CD$.
(2)**解**:∵ $\angle DCB=\angle DBC=75°$,
∴ $\angle BDC=30°$.连结 $OB$,$OC$,由圆周角定理,得 $\angle BOC=60°$,
∴ $\overset{\frown}{BC}$ 长等于圆 $O$ 周长的 $\frac{1}{6}$.
∴ $\overset{\frown}{BC}$ 的长为 $\frac{1}{6}\times 2\pi\times 3=\pi$.

## 3.7 正多边形

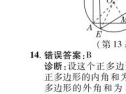
**1.** C **2.** C **3.** C **4.** C
**5.** D **点拨**:如图,过点 $B$ 作 $BG\perp AC$ 于点 $G$.


(第 5 题)

∵ 在正六边形 $ABCDEF$ 中,$\angle ABC=(6-2)\times 180°\div 6=120°$,$AB=BC$,
∴ $AC=\frac{1}{2}AC=\sqrt{3}$,$\angle BAC=\angle BCA=30°$.
易得 $AB=2$,即边长为 2.
**6.** C
**7.** B **点拨**:由题意知小华所走路线构成一个多边形,∵ 该多边形的外角和为 360°,每一个外角为 24°,∴ 该多边形的边数为 360°÷24°=15.∴ 小华一共走了 15×10=150(米).故选 B.
**8.** B **9.** A **10.** A
**11.** D **点拨**:由已知得△$OAB$ 为等边三角形,又 $OC\perp AB$,所以只得选项 A,B,C 都正确,用排除法可得错误的是 D.由同弧所对的圆周角等于这条弧所对的圆心角的一半可得错误的是 D.
**12.** C
**13.** $2\sqrt{6}$ **点拨**:连结 $AC$,$OE$,作 $OM\perp EF$ 于 $M$,如图.
∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形,
∴ $AB=BC=4$,$\angle ABC=90°$.∴ $AC$ 是⊙$O$ 的直径,$AC=4\sqrt{2}$.∴ $OE=AO=2\sqrt{2}$.
∵ $OM\perp EF$,∴ $EM=MF$.
∴ △$EFG$ 是等边三角形,∴ $\angle GEF=60°$.
在 Rt△$OME$ 中,$OE=2\sqrt{2}$,易得 $\angle OEM=\frac{1}{2}\angle GEF=30°$,易得 $OM=\sqrt{2}$.
∴ $EM=\sqrt{OE^2-OM^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{6}$.∴ $EF=2\sqrt{6}$.


(第 13 题)

**14. 错误答案**:B
**诊断**:设这个正多边形的边数为 $n$.因为正多边形的内角和为 $(n-2)\cdot 180°$,正多边形的外角和为 360°,根据题意,得 $(n-2)\cdot 180°=360°\times 2$,解得 $n=6$,故这个正多边形为正六边形.边长为 2 的正六边形可以分成六个边长为 2 的正三角形,所以正多边形的半径等于 2.产生错误的原因是认为正多边形的边心距是正多边形的半径,计算得出错误的结果$\sqrt{3}$,最后导致错选 B.
**正确答案**:A
**15. 解**:如图,四边形 $ABCD$ 即为所求作的四边形.

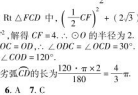

(第 15 题)


(第 16 题)

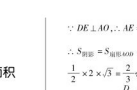
**16. 解**:如图,连结 $OA$,$OB$,$OC$,设 $OA'$ 交 $AB$ 于点 $K$,$OC'$ 交 $CD$ 于点 $M$.
∵ $\angle AOB=\angle A'OC'=\angle AOC=120°-\angle AOC'$,
$\angle MOC=\angle AOM-\angle AOC=120°-\angle AOC$,
∴ $\angle AOK=\angle MOC$.
易得 $\angle AOK=\angle MCO=60°$,
$OA=OC$,∴ △$AOK$≌△$COM$.
∴ $S_{△边形OKBCM}=S_{四边形AKCO}=2S_{△OBC}$.
易得 $S_{阴影}=S_{正六边形ABCDEF}-S_{四边形OKBCM}=6S_{△OBC}-2S_{△OBC}=4S_{△OBC}$.
∴ $\frac{S_{△边形OKBCM}}{S_{△OBC}}=\frac{2S_{△OBC}}{4S_{△OBC}}=\frac{1}{2}$.即重叠部分的面积与阴影部分的面积之比为1∶2.
**17. 证明**:∵ $AF=AG$,$\angle FAG=108°$,
∴ $\angle F=\angle G=36°$.
∵ $CF=CA$,$DG=DA$,
∴ $\angle FAC=\angle GAD=36°$.
∴ $\angle CAD=36°$.
∴ $BC=CD=DE$.
∵ $\angle ACD=\angle FAC+\angle F=72°$,
∴ $\angle GAD=36°$,∴ $\overset{\frown}{AED}$ 所对的圆心角为 144°,$\overset{\frown}{DE}$ 所对的圆心角为 72°.
易得 $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{DE}$,∴ $AE=DE$.
同理可得 $AB=BC$,
∴ $AB=BC=CD=DE=EA$.
∴ 点 $A$,$B$,$C$,$D$,$E$ 是⊙$O$ 的五等分点.
∴ 五边形 $ABCDE$ 是正五边形.
**18. 解**:(1)60° (2)90°;108°
(3)$APN=\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$.

## 3.8 弧长及扇形的面积

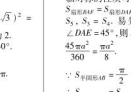
**1.** C **2.** D **3.** C
**4.** $\frac{4}{3}\pi$ **点拨**:连结 $DF$,$OD$.
∵ $CF$ 是⊙$O$ 的直径,∴ $\angle CDF=90°$.
∵ $\angle ADC=60°$,∴ $\angle A=90°$,
∴ $\angle ACD=30°$.易得 $CD=2AD=2\sqrt{3}$.
∵ $CD$ 平分 $\angle ACB$,
∴ $\angle DCF=30°$.易得 $DF=\frac{1}{2}CF$.
在 Rt△$FCD$ 中,$\left(\frac{1}{2}CF\right)^2+(2\sqrt{3})^2=CF^2$,解得 $CF=4$.∴⊙$O$ 的半径为 2.
∵ $OC=OD$,∴ $\angle ODC=\angle OCD=30°$.
∴ $\angle COD=120°$.
∴ 劣弧 $\overset{\frown}{CD}$ 的长为 $\frac{120\cdot\pi\times 2}{180}=\frac{4}{3}\pi$.
**5.** C **6.** A **7.** C
**8.** D **点拨**:如图,作 $DH\perp AE$ 于 $H$,


(第 8 题)

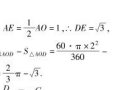
∵ $\angle AOB=90°$,$OA=3$,$OB=2$,
∴ $AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=\sqrt{13}$.
由旋转的性质可知,$OE=OB=2$,$OF=OA=3$,$DE=EF=AB=\sqrt{13}$,
∴ $AE=5$.易证△$DHE$≌△$EOF$,
∴ $DH=OE=2$.∴ 阴影部分的面积 $=$△$ADE$ 的面积 $+$△$EOF$ 的面积 $+$ 扇形 $AOF$ 的面积 $-$ 扇形 $DEF$ 的面积 $=\frac{1}{2}\times 5\times 2+\frac{1}{2}\times 2\times 3+\frac{90\times\pi\times 3^2}{360}-\frac{90\times\pi\times 13}{360}=8-\pi$.
**9.** B
**10.** 解:∵ $\overset{\frown}{AB}$ 所对的圆周角为 30°,
∴ $\overset{\frown}{AB}$ 所对的圆心角为 60°,
∴ $\overset{\frown}{AB}$ 的长 $=\frac{60\times\pi\times 30}{180}=10\pi$(cm).
**易错总结**:在公式 $l=\frac{n\pi R}{180}$ 与 $S_{扇形}=\frac{n\pi R^2}{360}$ 中,$n^\circ$ 是圆心角的度数,而题干给出的是圆周角的度数,不能直接代入公式计算,要求出圆心角的度数后再代入公式计算.
本题易错解为 $l=\frac{30\times\pi\times 30}{180}=5\pi$(cm).
**11.** 解:(1)如图,连结 $OD$,$OC$,
∵ $C$,$D$ 是半圆 $O$ 上的三等分点,
∴ $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{BC}$,∴ $\angle AOD=\angle DOC=\angle COB=60°$,∴ $\angle CAB=30°$.
∵ $DE\perp AB$,∴ $\angle AEF=90°$,
∴ $\angle AFE=90°-30°=60°$.
(2)∵ $AB=4$,∴ $OA=2$.
由(1)知,$\angle AOD=60°$,∵ $OA=OD$,
∴ △$AOD$ 是等边三角形,∴ $AD=OA=2$.


(第 11 题)

∵ $DE\perp AO$,∴ $AE=\frac{1}{2}AO=1$,∴ $DE=\sqrt{3}$,
∴ $S_{阴影}=S_{扇形AOD}-S_{△AOD}=\frac{60\cdot\pi\times 2^2}{360}-\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3}=\frac{2}{3}\pi-\sqrt{3}$.


(第 11 题)

**12.** C
**13.** 解:如图,连结 $AE$ 并延长交弧 $BD$ 于点 $F$,连结 $BE$.由轴对称的性质可知 $S_{扇形BAF}=S_{扇形DAF}$,$S_1=S_2=S_3$,$S_4=S_5$.易知 $\angle BAE=\angle DAE=45°$,则 $S_{扇形BAF}=\frac{45\pi a^2}{360}=\frac{\pi a^2}{8}$.


第13题视频

∵ $S_{半圆BEA}=\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{\pi a^2}{8}$,
∴ $S_{半圆BEA}=S_{扇形BAF}$.
∵ $S_1+S_4=S_2+S_5=S_3$,
又∵ $S_1+S_4+S_{半圆BEA}-S_{△ABE}=\frac{\pi a^2}{8}-\frac{a^2}{4}$,∴ $S_{阴影}=S_1+S_2+S_3+S_4=2(S_1+S_4)=2\left(\frac{\pi a^2}{8}-\frac{a^2}{4}\right)=\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)a^2$.


(第 13 题)

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

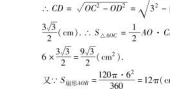
$$\frac{90\pi\times(2\sqrt{3})^2}{360}-\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{3}=3\pi-2\sqrt{3}.$$

## 章末整合提升训练

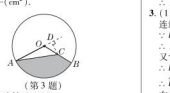
**专训 1**

1. C　2. 2

3. 解：如图，过点 $C$ 作 $CD\perp AO$，交 $AO$ 的延长线于点 $D$.
∵ $OB=OA=6$ cm，$C$ 为 $OB$ 的中点，
∴ $OC=3$ cm.
∵ $\angle AOB=120°$，
∴ $\angle COD=60°$. ∴ $\angle OCD=30°$.
易得 $OD=\frac{1}{2}OC=\frac{3}{2}$ cm.
∴ $CD=\sqrt{OC^2-OD^2}=\sqrt{3^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$(cm). ∴ $S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}AO\cdot CD=\frac{1}{2}\times6\times\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{2}$(cm$^2$).
又∵ $S_{扇形AOB}=\frac{120\pi\cdot6^2}{360}=12\pi$(cm$^2$)，
∴ $S_{阴影}=S_{扇形AOB}-S_{\triangle AOC}=12\pi-\frac{9\sqrt{3}}{2}=\frac{24\pi-9\sqrt{3}}{2}$(cm$^2$).


（第 3 题）

4. 解：如图，连结 $OA$，$OB$.
∵ $AB/\!/CD$，
∴ $S_{\triangle ABE}=S_{\triangle AOB}$，
$S_{阴影}=S_{扇形AOB}$.
∵ $AB=\frac{1}{2}CD=AO=OB=2$ cm，
∴ $\triangle OAB$ 是等边三角形，
∴ $\angle AOB=60°$.
∴ $S_{扇形AOB}=\frac{60\pi\cdot2^2}{360}=\frac{2}{3}\pi$(cm$^2$)，


（第 4 题）

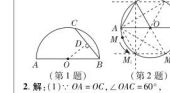
即阴影部分的面积为 $\frac{2}{3}\pi$ cm$^2$.

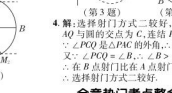
**点拨**：本题利用 $\triangle AEB$ 的面积等于 $\triangle AOB$ 的面积，将阴影部分面积转化为易求面积，体现了“等积变形法”的运用.

5. (1) 证明：∵ $\angle AOB=\angle COD=90°$，
即 $\angle AOC+\angle AOD=\angle BOD+\angle AOD$，
∴ $\angle AOC=\angle BOD$.
又∵ $AO=BO$，$CO=DO$，∴ $\triangle AOC\cong\triangle BOD$.
∴ $AC=BD$.
(2) 解：由 (1) 知 $\triangle AOC\cong\triangle BOD$，易得阴影部分的面积 = 扇形 $AOB$ 的面积 − 扇形 $COD$ 的面积.
则 $S_{阴影}=\frac{90\pi\cdot OA^2}{360}-\frac{90\pi\cdot OC^2}{360}=\frac{90\pi(OA^2-OC^2)}{360}=\frac{90\pi(2^2-1^2)}{360}=\frac{3}{4}\pi$(cm$^2$).

**专训 2**

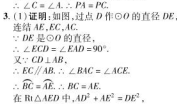
1. 解：(1) 如图，作 $OD\perp BC$ 于 $D$.
由垂径定理知，点 $D$ 是 $BC$ 的中点，即 $BD=\frac{1}{2}BC$.
∵ $OB=\frac{1}{2}AB=5$ cm，$OD=4$ cm，
由勾股定理，得 $BD=\sqrt{OB^2-OD^2}=3$ cm，
∴ $BC=2BD=6$ cm.
(2) 设经过 $t$ s，$\triangle BPC$ 是等腰三角形.
①当 $PC$ 为底边时，有 $BP=BC$，即 $10-t=6$，解得 $t=4$；
②当 $BC$ 为底边时，有 $PC=PB$，易得此时 $P$ 点与 $O$ 点重合，$t=5$.
∴ 经过 4 s 或 5 s，$\triangle BPC$ 是等腰三角形.


（第 1 题）


（第 2 题）

2. 解：(1) $\because OA=OC$，$\angle OAC=60°$，
∴ $\triangle AOC$ 为等边三角形，
∴ $\angle AOC=60°$.
(2) 如图，①作点 $C$ 关于直径 $AB$ 的对称点 $M_1$，连结 $AM_1$，$OM_1$，易得 $S_{\triangle M_1AO}=S_{\triangle CAO}$，
$\angle AOM_1=60°$，∴ $\overset{\frown}{AM_1}=\frac{4\pi}{180}\times60=\frac{4}{3}\pi$.
∴ 当点 $M$ 运动到 $M_1$ 时，$S_{\triangle MAO}=S_{\triangle CAO}$，
此时点 $M$ 经过的弧长为 $\frac{4}{3}\pi$.
②过点 $M_1$ 作 $M_1M_2/\!/AB$ 交 $\odot O$ 于点 $M_2$，连结 $AM_2$，$OM_2$，易得 $S_{\triangle M_2AO}=S_{\triangle CAO}$，
$\angle OM_1M_2=\angle OM_2M_1=60°$.
又∵ $OM_1=OM_2=OC=OA$，∴ $M_1OM_2=60°$.
∴ $\angle AOM_2=120°$. ∴ $\overset{\frown}{AM_2}=\frac{4\pi}{180}\times120=\frac{8}{3}\pi$.
∴ 当点 $M$ 运动到 $M_2$ 时，$S_{\triangle MAO}=S_{\triangle CAO}$，此时点 $M$ 经过的弧长为 $\frac{8}{3}\pi$.
③过点 $C$ 作 $CM_3/\!/AB$ 交 $\odot O$ 于点 $M_3$，连结 $AM_3$，$OM_3$，易得 $S_{\triangle M_3AO}=S_{\triangle CAO}$，
$\angle AOM_3=120°$，
∴ $\overset{\frown}{AM_3}=\frac{4\pi}{180}\times240=\frac{16}{3}\pi$.
∴ 当点 $M$ 运动到 $M_3$ 时，$S_{\triangle MAO}=S_{\triangle CAO}$，此时点 $M$ 经过的弧长为 $\frac{16}{3}\pi$.
④当点 $M$ 运动到 $C$ 时，$M$ 与 $C$ 重合，$S_{\triangle MAO}=S_{\triangle CAO}$，此时点 $M$ 经过的弧长为 $\frac{4\pi}{180}\times300=\frac{20}{3}\pi$. 综上所述，当 $S_{\triangle MAO}=S_{\triangle CAO}$ 时，动点 $M$ 所经过的弧长为 $\frac{4}{3}\pi$ 或 $\frac{8}{3}\pi$ 或 $\frac{16}{3}\pi$ 或 $\frac{20}{3}\pi$.

3. 解：台风会影响 $B$ 市，理由：如图，过 $B$ 作 $BH\perp PQ$ 于 $H$，在 $Rt\triangle BHP$ 中，由题意易知，$BP=320$ km，$\angle BPQ=30°$. 易得 $BH=\frac{1}{2}BP=160$ km $<200$ km.
∴ 台风会影响 $B$ 市.
以 $B$ 为圆心，200 km 为半径作圆，交 $PQ$ 于 $P_1$，$P_2$ 两点，连结 $BP_1$，由垂径定理知 $P_1P_2=2P_1H$.
在 $Rt\triangle BHP_1$ 中，$BP_1=200$ km，
$BH=160$ km，
∴ $P_1H=\sqrt{200^2-160^2}=120$(km).
∴ $P_1P_2=2P_1H=240$ km. ∴ 台风影响 $B$ 市的时间为 $240\div30=8$(h).
**点拨**：本题在图形中画出圆，可以非常直观地构造数学模型，然后利用垂径定理来解即可.


（第 3 题）


（第 4 题）

4. 解：选择射门方式二较好，理由如下：设 $AQ$ 与圆的交点为 $C$，连结 $PC$，如图所示.
∵ $\angle PCQ$ 是 $\triangle PAC$ 的外角，∴ $\angle PCQ>\angle A$.
又∵ $\angle PCQ=\angle B$，∴ $\angle B>\angle A$.
∴ 在 $B$ 点射门比在 $A$ 点射门好.
∴ 选择射门方式二较好.

## 全章热门考点整合应用

1. D

2. (1) 证明：∵ $BM\perp AB$，$CD\perp BE$，∴ $CD\perp AB$.
∵ $\overset{\frown}{DA}=\overset{\frown}{CA}$，∴ $\overset{\frown}{DA}=\overset{\frown}{DC}=\overset{\frown}{CA}$，∴ $\overset{\frown}{DA}=\overset{\frown}{CA}=\overset{\frown}{CD}$.
∴ $AD=AC=CD$. ∴ $\triangle ACD$ 是等边三角形.
(2) 解：过 $O$ 作 $ON\perp AD$ 于点 $N$，则 $AN=ND$.
由 (1) 知 $\triangle ACD$ 是等边三角形，∴ $\angle DAC=60°$. ∵ $AD=AC$，$CD\perp AB$，∴ $\angle DAB=30°$.
易得 $BE=\frac{1}{2}AE$，$ON=\frac{1}{2}AO$. 设 $\odot O$ 的半径为 $r$，易得 $ON=\frac{1}{2}r$，∴ $DN=AN=\frac{\sqrt{3}}{2}r$，
∴ $EN=2+\frac{\sqrt{3}}{2}r$，$AE=2+\sqrt{3}r$，∴ $BE=\frac{1}{2}AE=\frac{\sqrt{3}r+2}{2}$. 在 $Rt\triangle NEO$ 与 $Rt\triangle BEO$ 中，$OE^2=ON^2+NE^2=OB^2+BE^2$，即 $\left(\frac{r}{2}\right)^2+\left(2+\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)^2=r^2+\left(\frac{\sqrt{3}r+2}{2}\right)^2$，∴ $r=2\sqrt{3}$（$r=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 舍去），∴ $OE^2=\left(\frac{r}{2}\right)^2+\left(2+\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)^2=28$.
又∵ $OE>0$，∴ $OE=2\sqrt{7}$.

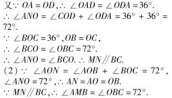
3. 解：∵ $\angle AOC=40°$，$AO=OC$，
∴ $\angle OBC=\angle OCB=\frac{1}{2}\times(180°-40°)=70°$.
∴ $\angle ACO=\frac{1}{2}\times(180°-40°)=70°$.
连结 $OD$. ∵ $D$ 是 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点，
∴ $\angle COD=\frac{1}{2}\angle BOC=70°$.
又∵ $OC=OD$，∴ $\angle OCD=\frac{180°-70°}{2}=55°$. ∴ $\angle ACD=\angle ACO+\angle OCD=70°+55°=125°$.

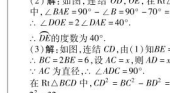
4. 解：(1)12,$\sqrt{3}$
(2) 连结 $OA$. ∵ $OA=OB$，$OA=OD$，
∴ $\angle BAO=\angle B$，$\angle DAO=\angle D$.
∴ $\angle BAD=\angle BAO+\angle DAO=\angle B+\angle D$.
又∵ $\angle B=30°$，$\angle D=20°$，∴ $\angle BAD=50°$.
∴ $\angle BOD=2\angle BAD=100°$.

5. 解：如图，过点 $A$ 作 $AC\perp ON$，垂足为 $C$.
由 $\angle MON=30°$，$OA=80$ m，
易得 $AC=40$ m. 以点 $A$ 为圆心，50 m 为半径作圆交 $ON$ 于 $B$，$D$ 两点，连结 $AB$，$AD$.
当第一台拖拉机到 $B$ 点时对小学开始产生噪音影响，
∵ $AB=50$ m，∴ 由勾股定理得 $BC=30$ m，
第一台拖拉机到 $D$ 点时对小学产生的噪音影响刚好消失，易得 $CD=30$ m.
∵ 两台拖拉机相距 30 m，
∴ 第一台拖拉机到 $D$ 点时第二台拖拉机在 $C$ 点，还需前行 30 m 后才对小学没有噪音影响. ∴ 影响时间是 $90\div5=18$(s)，即这两台拖拉机沿 $ON$ 方向行驶时给小学带来噪音影响的时间是 18 s.


（第 5 题）

6. 证明：(1) 如图，连结 $OA$，$OD$，易得 $\angle AOB=\angle BOC=\angle COD=360°\div10=36°$，
∴ $\angle AOD=\angle AOB+\angle BOC+\angle COD=36°\times3=108°$.
又∵ $OA=OD$，∴ $\angle OAD=\angle ODA=36°$.
∵ $\angle ANO=\angle COD+\angle ODA=36°+36°=72°$.
∵ $\angle BOC=36°$，$OB=OC$，
∴ $\angle BCO=\angle OBC=72°$.
∴ $\angle ANO=\angle BCO$. ∴ $MN/\!/BC$.
(2) ∵ $\angle AON=\angle AOB+\angle BOC=72°$，$\angle ANO=72°$，∴ $AN=AO=OB$.
∵ $MN/\!/BC$，∴ $\angle AMB=\angle OBC=72°$.
易得 $\angle ABM=\frac{180°-36°}{2}=72°$.
∴ $\angle ABM=\angle AMB$. ∴ $AB=AM$.
∵ $AB=BC$，∴ $AM=BC$. ∴ $AN=AM+MN=BC+MN$. ∴ $MN+BC=OB$.

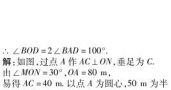

（第 6 题）


（第 7 题）

7. 解：(1) 在 $\odot O$ 中，$\angle A=\angle D$.
∵ $\angle AEB=\angle DEC$，$AE=DE$，
∴ $\triangle AEB\cong\triangle DEC$. ∴ $EB=EC$.
又∵ $BC=CF$，∴ $BE=CE=BC$.
∴ $\triangle EBC$ 为等边三角形. ∴ $\angle CEB=60°$.
(2) ∵ $OF\perp AC$，∴ $AF=CF$.
∵ $\triangle EBC$ 为等边三角形，
∴ $\angle EGF=60°$. ∴ $\angle EGF=30°$.
又 $EG=2$，易得 $EF=1$.
∴ $AF=ED=3$. ∴ $CF=AF=4$.
∴ $AC=8$，$CE=5$. ∴ $BC=5$.
如图，作 $BM\perp AC$ 于点 $M$，
∵ $\angle BCM=60°$，∴ $\angle MBC=30°$.
易得 $CM=\frac{1}{2}BC=\frac{5}{2}$. $BM=\sqrt{BC^2-CM^2}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$，$AM=AC-CM=\frac{11}{2}$.
∴ $AB=\sqrt{AM^2+BM^2}=7$.

8. B　9. A

10. $\sqrt{3}+\pi$　**点拨**：如图，过点 $O$ 作 $OF\perp AB$ 于点 $F$.


（第 10 题）

∵ $\angle AOB=120°$，$OA=OB$，
∴ $\angle OAB=\angle OBA=30°$.
∵ $OC\perp OA$，∴ $\angle AOD=90°$.
易得 $\angle BOC=30°$，$AD=2OD$，$OF=\frac{1}{2}OA=\sqrt{3}$，在 $Rt\triangle OAD$ 中，$OD^2+(2\sqrt{3})^2=(2OD)^2$，解得 $OD=2$，∴ $AD=4$. 在 $Rt\triangle AOF$ 中，$AF^2+(\sqrt{3})^2=(2\sqrt{3})^2$，解得 $AF=3$，易得 $AB=6$，
∴ $BD=2$. ∴ $S_{阴影}=S_{\triangle AOD}+S_{扇形BOC}-S_{\triangle BOD}=\frac{2\sqrt{3}\times2}{2}+\frac{30\times\pi\times(2\sqrt{3})^2}{360}-\frac{2\times\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}+\pi$.

11. (1) 证明：如图，连结 $AE$，∵ $AC$ 为直径，
∴ $\angle AEC=90°$. ∴ $AE\perp BC$.
∵ $AB=AC$，∴ $BE=CE$.
(2) 解：如图，连结 $OD$，$OE$，在 $Rt\triangle ABE$ 中，$\angle BAE=90°-\angle B=90°-70°=20°$，
∴ $\angle DOE=2\angle DAE=40°$.
∵ $\overset{\frown}{DE}$ 的度数为 40°.
(3) 解：如图，连结 $CD$，由 (1) 知 $BE=CE$，∵ $BC=2BE=6$，设 $AC=x$，则 $AD=x-2$.
∵ $AC$ 为直径，∴ $\angle ADC=90°$.
在 $Rt\triangle BCD$ 中，$CD^2=BC^2-BD^2=6^2-2^2=32$.
在 $Rt\triangle ADC$ 中，$x^2+CD^2=AC^2$，
∴ $(x-2)^2+32=x^2$.
解得 $x=9$，即 $AC$ 的长为 9.


（第 11 题）

12. C

## 第 4 章　相似三角形

### 4.1　比例线段

#### 第 1 课时　成比例线段

1. B　2. D　3. A　4. $\frac{1}{2}$

5. $\frac{3}{2}$　**点拨**：由比例的性质，得 $c=\frac{2}{3}a,b=\frac{5}{6}a$，所以 $\frac{b+c}{a}=\frac{5}{6}a+\frac{2}{3}a=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$.

6. 3　7. D　8. B　9. D　10. A　11. B

12. D　13. B

14. $\left(\frac{1}{3},0\right)$ 或 $(\sqrt{3},0)$ 或 $(9,0)$

15. $\frac{35}{3}$　**点拨**：由题意知 $a:b=c:x$，∴ $x=\frac{bc}{a}$. 又∵ $a=3$，$b=5$，$c=7$，∴ $x=$



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\frac{5\times7}{3}=\frac{35}{3}$.

**易错总结**：要求 $a,b,c$ 的第四比例项 $x$，就有 $a:b=c:x$，$\therefore x=\frac{bc}{a}$，切勿看到线段成比例就分类讨论，从而造成错误.

**16.** 解：(1) 设 $AD=x$，则 $BD=24-x$，

由 $\frac{AD}{BD}=\frac{AE}{EC}$ 得 $\frac{x}{24-x}=\frac{5}{10}$，解得 $x=9$.

$\therefore AD=9$.

(2) 由 $AB=24$，$AD=9$ 得 $BD=15$，

$\therefore \frac{AB}{BD}=\frac{24}{15}=\frac{8}{5}$，

又 $\because \frac{AC}{EC}=\frac{6+10}{10}=\frac{8}{5}$，$\therefore \frac{AB}{BD}=\frac{AC}{EC}$.

**17.** 解：(1) 设 $\frac{a}{3}=\frac{b}{4}=\frac{c}{6}=k(k\neq0)$，

则 $a=5k$，$b=4k$，$c=6k$，

所以 $\frac{2a+b}{3c}=\frac{10k+4k}{18k}=\frac{7}{9}$.

(2) 设为 $\triangle ABC$ 的周长为 90，所以 $a+b+c=90$，即 $5k+4k+6k=90$，解得 $k=6$，

所以 $a=30$，$b=24$，$c=36$.

**18.** 解：$\triangle ABC$ 为等边三角形. 理由如下：

$\because a,b,c$ 是 $\triangle ABC$ 的三边长，

$\therefore a+b+c\neq0$.

又 $\because \frac{a-b}{b}=\frac{b-c}{c}=\frac{c-a}{a}$，

$\therefore \frac{a-b}{b}=\frac{b-c}{c}=\frac{c-a}{a}=\frac{a-b+b-c+c-a}{a+b+c}=0$.

$\therefore a=b=c$，$\triangle ABC$ 为等边三角形.

**19.** 解：线段 $AB$，$AC$，$BC$，$CD$ 对应成比例，且 $\frac{AB}{AC}=\frac{BC}{CD}$ 验证如下：根据三角形的面积公式，得 $\frac{1}{2}AB\cdot CD=\frac{1}{2}AC\cdot BC$，

$\therefore AB\cdot CD=AC\cdot BC$，即 $\frac{AB}{AC}=\frac{BC}{CD}$.

## 第 2 课时　黄金分割

**1.** C　**2.** C　**3.** C　**4.** D

**5.** D　**点拨**：设正方形的边长为 2，先根据正方形的性质以及勾股定理，求得 $DF$ 的长为 $\sqrt{5}$，再根据 $BF=GF$ 求得 $CG=\sqrt{5}-1$，最后根据 $CG$ 与 $CD$ 的比为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，可判断出矩形 $DCGH$ 为黄金矩形.

**6.** 解：(1) 设 $\frac{a}{3}=\frac{b}{2}=\frac{c}{5}=k(k\neq0)$，

$\therefore a=3k$，$b=2k$，$c=6k$.

$\because a+2b+c=26$，$\therefore 3k+4k+6k=26$，

解得 $k=2$，$\therefore a=6$，$b=4$，$c=12$.

(2) $\because$ 线段 $x$ 是线段 $a$，$b$ 的比例中项，

$\therefore x^2=ab$，

又 $\because a=6$，$b=4$，$\therefore x=2\sqrt{6}$ (负值舍去).

**7.** (1) 解：如图，$\because P$ 为边 $AB$ 的中点，

$\therefore AP=\frac{1}{2}AB=1$.

$\therefore DP=\sqrt{AP^2+AD^2}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$.

$\because PF=PD=\sqrt{5}$.

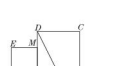
$\therefore FA=PF-AP=\sqrt{5}-1$，$\therefore MA=FA=\sqrt{5}-1$，$DM=AD-MA=3-\sqrt{5}$.

(2) 证明：$\because AM^2=(\sqrt{5}-1)^2=6-2\sqrt{5}$，

$AD\cdot DM=2(3-\sqrt{5})=6-2\sqrt{5}$，

$\therefore AM^2=AD\cdot DM$.

(3) 解：能. 图中的点 $M$ 为线段 $AD$ 的黄金分割点.



(第 7 题)

## 4.2　由平行线截得的比例线段

**1.** B　**2.** B　**3.** $\frac{3}{5}$　**4.** 15；12

**5.** C　**6.** B　**7.** B

**8.** B　**点拨**：过 $O$ 作 $OG\parallel BC$，交 $AC$ 于 $G$.

$\because O$ 是 $BD$ 的中点，$\therefore G$ 是 $DC$ 的中点.

又 $\because AD:DC=1:2$，$\therefore AD=DG=GC$.

$\because AG:GC=2:1$，

$\therefore OG\parallel BC$，$\triangle AO:OE=AG:GC=2:1$.

$\therefore S_{\triangle AOE}:S_{\triangle BOE}=2:1$.

设 $S_{\triangle AOE}=S$，则 $S_{\triangle AOB}=2S$，$S_{\triangle ABE}=3S$.

又 $\because BD=OD$，$\therefore S_{\triangle AOD}=2S$，$S_{\triangle ABD}=4S$.

$\therefore S_{\triangle BDC}=2S_{\triangle ABD}=8S$，$S_{四边形DCOE}=7S$.

$\therefore S_{\triangle AEC}=9S$，$\therefore \frac{BE}{EC}=\frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle AEC}}=\frac{3S}{9S}=\frac{1}{3}$.

**9.** $\frac{10}{3}$　**点拨**：由 $DE$ 与 $BC$ 平行，得比例式求出 $AE$ 的长，再由 $DF$ 与 $CE$ 平行，得比例式求出 $EF$ 的长.

**10.** 错误答案：B 或 D 或 A

**诊断**：运用平行线分线段成比例的基本事实时，往往会因为没有找准对应关系而导致错选其他答案. 解题时一定要注意.

**正确答案**：C

**11.** 解：$\because DE\parallel AC$，$BE=6$ cm，$EC=10$ cm，

$\therefore \frac{BD}{DA}=\frac{BE}{EC}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.

又 $\because DF\parallel BC$，$\therefore \frac{FC}{FA}=\frac{BD}{DA}=\frac{3}{5}$.

$\therefore FA=FC+3$ cm，

$\therefore FA=FC+3=\frac{FC}{FC+3}=\frac{3}{5}$.

$\therefore FC=4.5$ cm.

**12.** 证明：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AB\parallel CD$，$AD\parallel BC$.

$\therefore \frac{BO}{OE}=\frac{AO}{OC}$，$\frac{AO}{OC}=\frac{DO}{OF}$，

$\therefore \frac{BO}{OE}=\frac{OF}{BO}$，即 $BO^2=OF\cdot OE$.

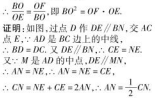
**13.** 证明：如图，过点 $D$ 作 $DE\parallel BN$，交 $AC$ 于点 $E$，$\because AD$ 是 $BC$ 边上的中线，

$\therefore BD=DC$. 又 $\because DE\parallel BN$，$\therefore CE=NE$.

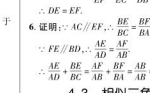
又 $\because M$ 是 $AD$ 的中点，$\therefore DE\parallel MN$，

$\therefore AN=NE$，$\therefore AN=NE=CE$，

$\therefore CN=NE+CE=2AN$，$\therefore AN=\frac{1}{2}CN$.



(第 13 题)



(第 14 题)

**14.** 证明：如图，过点 $C$ 作 $CE\parallel DA$，交 $BA$ 的延长线于点 $E$. $\because \angle1=\angle E$，$\angle2=\angle3$.

$\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，

$\therefore \angle1=\angle2$. $\therefore \angle3=\angle E$. $\therefore AC=AE$.

又 $\because AD\parallel CE$，$\therefore \frac{AB}{BD}=\frac{BD}{DC}$，$\therefore \frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$.

## 阶段方法技巧训练(一)

**专训**

**1.** (1) 证明：$\because DE\parallel BC$，$EF\parallel AB$，$\therefore$ 四边形 $DEFB$ 为平行四边形. $\therefore DE=BF$.

$\because DE\parallel BC$，$\therefore \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$.

$\because EF\parallel AB$，

$\therefore \frac{AE}{AC}=\frac{BF}{BC}$，$\therefore \frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$，$\therefore \frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}$.

(2) 解：$\because AD:DB=3:5$，

$\therefore BD:AB=5:8$.

$\because DE\parallel BC$，$\therefore CE:AC=BD:AB=5:8$.

$\because EF\parallel AB$，$\therefore CF:CB=CE:AC=5:8$.

**2.** (1) 证明：$\because DE\parallel BC$，$\therefore \frac{PD}{PB}=\frac{PE}{PC}$.

$\because PD\cdot PC=PE\cdot PB$，

$\therefore DF\parallel AC$，$\therefore \frac{PF}{PC}=\frac{PD}{PA}$.

$\therefore PD\cdot PC=PF\cdot PA$.

$\therefore PE\cdot PB=PF\cdot PA$，$\therefore \frac{PE}{PF}=\frac{PA}{PB}$.

**3.** 证明：$\because EF\parallel CD$，$\therefore \frac{AF}{AD}=\frac{AE}{AC}$.

$\because DE\parallel BC$，$\therefore \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$，$\therefore \frac{AF}{AD}=\frac{AD}{AB}$.

**4.** 证明：(1) $\because \triangle ABC$ 与 $\triangle DCE$ 都是等边三角形，

$\therefore AC=BC$，$CE=CD$，$\angle ACB=\angle DCE=60^\circ$.

$\therefore \angle DCE+\angle ACD=\angle ACB+\angle ACD$，

即 $\angle ACE=\angle BCD$.

$\therefore \triangle ACE\cong\triangle BCD(SAS)$.

(2) $\because \triangle ACE\cong\triangle BCD$，$\therefore \angle BDC=\angle AEC$.

又 $\because \angle GCD=180^\circ-\angle ACB-\angle DCE=60^\circ=\angle ACE$，$CD=CE$，

$\therefore \triangle GCD\cong\triangle FCE(ASA)$.

$\therefore CG=CF$. $\therefore \triangle CFG$ 为等边三角形.

$\therefore \angle CFG=\angle DCE=60^\circ$.

$\therefore GF\parallel CE$，$\therefore \frac{AC}{AE}=\frac{GF}{FE}$.

**5.** 证明：$\because DE\parallel BC$，$\therefore \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$.

$\because D$ 为 $AB$ 的中点，

$\therefore AD=DB$，即 $\frac{AD}{DB}=1$.

$\therefore CF\parallel BA$，$\therefore \frac{DE}{EF}=\frac{AE}{EC}=\frac{AD}{DB}=1$.

$\therefore DE=EF$.

**6.** 证明：$\because AC\parallel EF$，$\therefore \frac{BE}{BC}=\frac{EF}{BA}$.

$\because FE\parallel BD$，$\therefore \frac{AE}{AD}=\frac{AF}{AB}$.

$\therefore \frac{AE}{AD}+\frac{BE}{BC}=\frac{AF}{AB}+\frac{EF}{BA}=\frac{AB}{AB}=1$.

## 4.3　相似三角形

**1.** D　**2.** C　**3.** $\angle ACB;\angle B$　**4.** B　**5.** C

**6.** $\sqrt{2}$∶1　**7.** D　**8.** D　**9.** C　**10.** C

**11.** C　**点拨**：$\because AD:DC=1:2$，$AC=6$，

$\therefore AD=2$，当 $DE\parallel BC$ 时，$\frac{AD}{AC}=\frac{AE}{AB}$，即 $\frac{2}{6}=\frac{AE}{9}$，解得 $AE=3$；当 $\angle ADE=\angle B$ 时，$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$，即 $\frac{2}{9}=\frac{AE}{6}$，解得 $AE=\frac{4}{3}$.

故选 C.

**12.** A　**点拨**：本题易因不能准确找出相似三角形的对应边，从而不能准确写出对应线段所成的比例式而致错.

**13.** 解：$\because \triangle ABE\backsim\triangle DEF$，$\therefore \frac{AE}{DF}=\frac{AB}{DE}$.

$\therefore \frac{9}{DF}=\frac{6}{2}$，$\therefore DF=3$，

$\therefore EF=\sqrt{ED^2+FD^2}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$.

**14.** 解：$\because AB=AC$，$\angle BAC=40^\circ$，

$\therefore \angle ABC=\angle ACB=70^\circ$.

$\because ABD\backsim\triangle EAD$，

$\therefore \angle DEA=\angle DBA=180^\circ-70^\circ=110^\circ$.

**15.** 解：(1) $\because \triangle DOC$ 与 $\triangle EOA$ 相似，

$\therefore \frac{DC}{EA}=\frac{OC}{OA}=2$. $\therefore OC=2OA$. $\therefore$ 当点 $O$ 运动到距 $A$ 点的距离是 $AC$ 的三分之一时，$\triangle DOC$ 与 $\triangle EOA$ 的相似比为 2.

(2) 当点 $O$ 运动到 $AC$ 的中点时，$\triangle DOC\cong\triangle EOA$.

(3) 当点 $O$ 运动到 $AC$ 的中点时，点 $E$ 与点 $B$ 重合，此时 $\triangle DOC\cong\triangle EOA$，相似比为 1∶1. 当点 $F$ 是 $BC$ 的中点时，易得 $\triangle DFC\cong\triangle EFB$，$\therefore BE=DC$，

又 $\because AB=DC$，$\therefore BE=\frac{1}{2}AE$.

$\therefore \triangle DOC$ 与 $\triangle EOA$ 的相似比为 1∶2.

**16.** 解：$\because ON=\frac{1}{3}AC=2$，

$\therefore BC=\sqrt{4AC^2-AC^2}=\sqrt{10^2-8^2}=6$.

$\because \triangle AEP\backsim\triangle ABC$，$\therefore \frac{AP}{PE}=\frac{AC}{BC}$，

即 $\frac{x}{y}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$，$\therefore y=\frac{3}{4}x$.

## 4.4　两个三角形相似的判定

### ※第 1 课时　用平行线判定

**1.** A　**2.** B　**3.** C　**4.** B

**5.** $\triangle ECF\backsim\triangle EBA$(答案不唯一)　**6.** B

**7.** C　**点拨**：$\because DN\parallel BM$，$\therefore \triangle AMN\backsim\triangle ABM$.

$\therefore \frac{DN}{BM}=\frac{AN}{AM}$.

$\because NE\parallel MC$，$\therefore \triangle ANE\backsim\triangle AMC$.

$\therefore \frac{NE}{MC}=\frac{AN}{AM}$，$\therefore \frac{DN}{BM}=\frac{NE}{MC}$.

**8.** B

**9.** C　**点拨**：根据相似三角形的判定，可得 $\triangle ABE\backsim\triangle DBC$，$\triangle ABE\backsim\triangle DAB$，根据相似三角形的性质，可得答案. 解答相似三角形问题时，要善于从复杂的图形中抽象出基本图形——$\lambda$ 型或 $\Delta$ 型，然后利用相似三角形的性质求解.

**10.** **点拨**：如图，由 $DH\parallel EG$ 交 $AB$ 于点 $H$，则 $\triangle AEG\backsim\triangle ADH$.

$\therefore \frac{AE}{AD}=\frac{EG}{DH}$.

$\because EF\perp AC$，$\angle C=90^\circ$，

$\therefore EF\parallel CB$. $\because EF\perp AC$，

$\therefore EF\parallel CD$.

$\therefore \triangle AEF\backsim\triangle ADC$.

$\therefore \frac{AE}{AD}=\frac{EF}{CD}$，$\frac{EG}{DH}=\frac{EF}{CD}$.

$\therefore EG=EF$，$\therefore DH=CD$.

设 $DH=x$，则 $CD=x$.

$\because BC=12$，$\therefore BD=12-x$.

$\because EF\perp AC$，$EF\perp EG$，$DH\parallel EG$，

$\therefore EG\parallel AC//DH$. $\therefore \triangle BDH\backsim\triangle BCA$.

$\therefore \frac{DH}{AC}=\frac{BD}{BC}$，即 $\frac{x}{6}=\frac{12-x}{12}$，解得 $x=4$.



(第 10 题)

$\therefore CD=4$.

**11.** (1) 证明：$\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，$\therefore AD\parallel BC$.

$\therefore \triangle MBE=\triangle MDA$，$\angle DAM=\angle MEB$.

$\therefore \triangle AMD\backsim\triangle EMB$.

(2) 解：$\because AD\parallel BC$，$\therefore \angle FDN=\angle NBE$，$\angle DFN=\angle BEN$，$\therefore \triangle FND\backsim\triangle ENB$.

$\therefore \frac{FD}{BE}=\frac{DN}{BN}$.

$\because M,N$ 为 $BD$ 的三等分点，

$\therefore \frac{DN}{BN}=\frac{1}{2}$，$\therefore \frac{FD}{BE}=\frac{1}{2}$.

**12.** (1) 证明：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\therefore OA=OC$，$AB\parallel CD$.

$\therefore \angle OAE=\angle OCF$.

在 $\triangle AOE$ 和 $\triangle COF$ 中，$\begin{cases}\angle OAE=\angle OCF,\\ OA=OC,\\ \angle AOE=\angle COF,\end{cases}$

$\therefore \triangle AOE\cong\triangle COF(ASA)$.

$\therefore OE=OF$.

(2) 解：过点 $O$ 作 $ON\parallel BC$ 交 $AB$ 于点 $N$，易得 $\triangle AON\backsim\triangle ACB$，$\triangle ONE\backsim\triangle MBE$.

$\therefore \frac{ON}{MB}=\frac{AN}{AB}=\frac{OA}{AC}=\frac{1}{2}$，$\frac{ON}{MB}=\frac{NE}{BE}$.

$\therefore ON=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AD=2$，$BN=\frac{1}{2}AB=3$.

$\therefore \frac{2}{1}=\frac{3-BE}{BE}$，解得 $BE=1$.

**13.** (1) 设直线 $BC$ 的表达式为 $y=kx+b$，将 $B(0,4)$，$C(-3,0)$ 的坐标分别代入得 $\begin{cases}b=4,\\ -3k+b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=\frac{4}{3},\\ b=4.\end{cases}$


第13题图像

(2) $\because$ 将 $\triangle AMN$ 沿直线 $MN$ 翻折，点 $A$ 恰好落在 $BC$ 边上点 $D$ 处，如图①所示，

$\therefore AM=DM$，$AN=DN$.

根据题意可知 $AM=AN=t$，$\therefore$ 四边形 $ANDM$ 为菱形. $\therefore DN\parallel AC$.

$\therefore \triangle BDN\backsim\triangle BCA$. $\therefore \frac{DN}{AC}=\frac{BN}{AB}$.

易知 $OA=OC=3$，$OB=4$，$\therefore AB=5$.

$\therefore \frac{t}{6}=\frac{5-t}{5}$，解得 $t=\frac{30}{11}$.

$\therefore DN=\frac{30}{11}$，$\therefore s_{菱形}=\frac{15}{11}$.

(3) 点 $D$ 在直线 $BC$ 上，$\because y_D=\frac{4}{3}\times\left(-\frac{15}{11}\right)+4=\frac{24}{11}$，$\therefore D\left(-\frac{15}{11},\frac{24}{11}\right)$.



①



②



③
(第 13 题)

(3) 当 $0\leqslant t\leqslant5$ 时，如图②所示. 过点 $N$ 作 $NG\perp AM$，垂足为 $G$，

$\therefore \triangle ANG\backsim\triangle ABO$.

$\therefore \frac{NG}{BO}=\frac{AN}{AB}$，即 $\frac{NG}{4}=\frac{t}{5}$.

$\therefore NG=\frac{4}{5}t$.

$\therefore S=\frac{1}{2}\times t\times\frac{4}{5}t=\frac{2}{5}t^2$；

当 $5<t\leqslant10$ 时，如图③所示，过点 $N$ 作 $NF\perp AM$，垂足为 $F$.

$\because \triangle CNF\backsim\triangle CBO$. $\therefore \frac{NF}{BO}=\frac{CN}{CB}$.

$\therefore NF=\frac{4}{5}(10-t)$.

$\therefore S=\frac{1}{2}\times6\times4-\frac{1}{2}\times(6-t)\times\frac{4}{5}(10-t)=-\frac{2}{5}t^2+\frac{32}{5}t-12$.

$\therefore S=\begin{cases}\frac{2}{5}t^2(0\leqslant t\leqslant5),\\ -\frac{2}{5}t^2+\frac{32}{5}t-12(5<t\leqslant6).\end{cases}$

**点拨**：(1) 利用**待定系数法**即可解决问题；(3) 利用**分类讨论思想**将 $\triangle ABC$ 在直线 $MN$ 右侧部分分成 $\triangle AMN$ 或四边形 $ABNM$ 两种情况讨论. 本题注意方程思想的应用.

## 第 2 课时　用角的关系判定三角形相似

**1.** A　**2.** D　**3.** C

**4.** C　**点拨**：如图，当 $PD//BC$ 时，$\triangle APD\backsim\triangle ACB$；当 $PE//AB$ 时，$\triangle EPC\backsim\triangle BAC$；当 $PF\perp AB$ 时，$\triangle APF\backsim\triangle ABC$，故过点 $P$ 的 $\triangle ADE$ 的“相似线”最多有 3 条. 故选 C.




**5.** B　**6.** B

**7.** C　**点拨**：连结 $EF$，$\because$ 四边形 $EGFH$ 为菱形，$\therefore EF\perp GH$，设线段 $EF$，$GH$ 交于点 $O$，易得 $O$ 为 $AD$ 中点.

$\because AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=4\sqrt{5}$，$\therefore AO=\frac{1}{2}AC=2\sqrt{5}$. 易知 $\triangle ABC\backsim\triangle AOE$，

$\therefore \frac{AO}{AC}=\frac{AE}{AB}$，即 $\frac{2\sqrt{5}}{4\sqrt{5}}=\frac{AE}{8}$，解得 $AE=4$.

**8.** A　**点拨**：过点 $F$ 作 $FG\perp AB$ 于点 $G$.

$\because \angle ACB=90^\circ$，$\therefore \angle CAF+\angle CFA=90^\circ$.

$\because CD\perp AB$，$\therefore \angle CDA=90^\circ$，$\angle FAD+\angle AED=90^\circ$.

$\therefore AF$ 平分 $\angle CAB$，$\therefore \angle CAF=\angle FAD$.

$\because \angle CFA=\angle AED=\angle CEF$，$\therefore CE=CF$.

$\because AF$ 平分 $\angle CAB$，$AC\perp$ 于 $C$，$AG\perp$ 于 $G$，$\therefore FC=FG$.

$\because \angle B=\angle B$，$\angle FGB=\angle ACB=90^\circ$，

$\therefore \triangle BFG\backsim\triangle BAC$. $\therefore \frac{BF}{AB}=\frac{FG}{AC}$.

$\because AC=3$，$AB=5$，$\therefore AC:AB=3:5$.

$\therefore BC=4$. $\therefore \frac{4-CF}{5}=\frac{CF}{3}$，

$\therefore FC=\frac{3}{2}$，即 $CE$ 的长为 $\frac{3}{2}$.

**9.** B　**点拨**：如图，设 $EM$ 交 $CD$ 于点 $G$.



(第 9 题)





关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

∵四边形 $ABCD$ 是正方形，$AB=12$，$BM=5$，$\therefore MC=12-5=7$。

∵ $ME\perp AM$，$\therefore\angle AME=90°$，

$\therefore\angle AMB+\angle CMG=90°$。

∵ $\angle AMB+\angle BAM=90°$，

$\therefore\angle BAM=\angle CMG$。

∵ $\angle B=\angle C=90°$，$\therefore\triangle ABM\sim\triangle MCG$。

$\dfrac{AB}{MC}=\dfrac{BM}{CG}$，即 $\dfrac{12}{7}=\dfrac{5}{CG}$，解得 $CG=\dfrac{35}{12}$。

$\therefore DG=12-\dfrac{35}{12}=\dfrac{109}{12}$。

∵ $AE//BC$，$\therefore\angle E=\angle CMG$，$\angle EDG=\angle C$，

$\therefore\triangle MCG\backsim\triangle EDG$。

即 $\dfrac{MC}{ED}=\dfrac{CG}{DG}$，即 $\dfrac{7}{ED}=\dfrac{\frac{35}{12}}{\frac{109}{12}}$，解得 $DE=\dfrac{109}{5}$。

**10.** C　**点拨**：$\therefore\triangle BPC$ 是等边三角形，

$\therefore BP=PC=BC$，$\angle PBC=\angle PCB=\angle BPC=60°$。

在正方形 $ABCD$ 中，

$\therefore AB=BC=CD$，$\angle A=\angle ADC=\angle BCD=90°$，

$\therefore\angle ABE=\angle DCF=30°$，

易得 $BE=2AE$；故①正确；

$\therefore PC=CD$，$\angle PCD=30°$，

$\therefore\angle PDC=75°$，$\therefore\angle PDF=15°$。

$\therefore\angle DBA=45°$，$\therefore\angle PBD=15°$，

$\therefore\angle FDP=\angle PBD$，易得 $\angle DFP=\angle BPC=60°$，

$\therefore\triangle DFP\backsim\triangle BPH$；故②正确；

$\therefore\angle FDP=\angle PBD=15°$，$\angle ADB=45°$，

$\therefore\angle PDB=30°$，而 $\angle DPF=60°$，

$\therefore\angle PFD\neq\angle PDB$，

$\therefore\triangle PFD$ 与 $\triangle PDB$ 不相似；故③错误；

$\therefore\angle PDH=\angle PCD=30°$，$\angle DPH=\angle DPC$，

$\therefore\triangle DPH\backsim\triangle CPD$，$\therefore\dfrac{DP}{PC}=\dfrac{PH}{DP}$，

$\therefore DP^2=PH\cdot PC$，故④正确；故选 C。

**11.** 错误答案：2

**诊断**：根据题意，知 $\triangle AEF$ 与 $\triangle ABC$ 相似，由于不是没有说明对应关系，故求用分类讨论思想. 有两种可能：


第11题图

（1）$\triangle AEF\backsim\triangle ABC$，

（2）$\triangle AEF\backsim\triangle ACB$.

**正确答案**：2 或 4.5

**12.** 解：(1) $\triangle ADE\backsim\triangle BDE$，$\triangle ABC\backsim\triangle BDC$.

(2) 证明 $\triangle ADE\backsim\triangle BDE$. 证明如下：

∵ $AB=AC$，$\angle A=36°$，

$\therefore\angle ABC=\angle C=72°$.

∵ $BD$ 为角平分线，

$\therefore\angle ABD=\dfrac{1}{2}\angle ABC=36°=\angle A$.

又∵ $\angle AED=\angle BED=90°$，$ED=ED$，

$\therefore\triangle ADE\cong\triangle BDE$(AAS)，

证明 $\triangle ABC\backsim\triangle BDC$. 证明如下：

∵ $AB=AC$，$\angle A=36°$，

$\therefore\angle ABC=\angle C=72°$.

∵ $BD$ 为角平分线，

$\therefore\angle DBC=\dfrac{1}{2}\angle ABC=36°=\angle A$.

又∵ $\angle C=\angle C$，$\therefore\triangle ABC\backsim\triangle BDC$.

**13.** (1) **证明**：∵ $DB$ 平分 $\angle ADC$，

∵ $\angle ADB=\angle BDC$，

$\therefore\angle ABD\backsim\angle BCD$，$\therefore\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{BD}{CD}$

$\therefore BD^2=AD\cdot CD$.

(2) **解**：∵ $BM//CD$，∴ $\angle MBD=\angle BDC$.

又∵ $\angle ADB=\angle BDC$，

∴ $\angle ADB=\angle MBD$，∴ $BM=MD$.

∵ $\angle MBD=90°$，

∴ $\angle MAB+\angle ADB=90°$，$\angle MBA+\angle MBD=90°$，∴ $\angle MAB=\angle MBA$.

∴ $MD=BM=AM=4$.

∵ $BD^2=AD\cdot CD$，且 $CD=6$，$AD=8$，

∴ $BD^2=48$，∴ $BC^2=BD^2-CD^2=12$.

∵ $MC^2=MH^2+BC^2=28$，∴ $MC=2\sqrt{7}$.

∵ $BM//CD$，∴ $\triangle NMB\backsim\triangle NCD$，$\angle NBM=\angle NDC$，∴ $\triangle MNB\backsim\triangle CND$.

∴ $\dfrac{BM}{CD}=\dfrac{MN}{CN}=\dfrac{2}{3}$.

即 $\dfrac{MN}{2\sqrt{7}-MN}=\dfrac{2}{3}$，解得 $MN=\dfrac{4}{5}\sqrt{7}$.

**14.** 解：(1) 由旋转知，$AB=AD$，$\angle DAB=90°$，

∴ $\angle ABD=\angle ADB=45°$.

由平移知 $DF//AB$，

∴ $\angle BDF=\angle ABD$，∴ $\angle BDF=45°$.

(2) 由平移知 $EG//AC$，$EG=AC$，

∴ 四边形 $ACGE$ 是平行四边形.

又∵ $\angle C=90°$，∴ 四边形 $ACGE$ 是矩形，

∴ $EAC=90°$，$AE=CG$.

又∵ $\angle DAB=90°$，

∴ $\angle EAB+\angle EAD=\angle CAB+\angle EAB$，

∴ $\angle EAD=\angle CAB$.

由(1)知 $DF//AB$，∴ $\angle EDA+\angle DAB=180°$，

∴ $\angle EDA=90°$，∴ $DA=EA=CA$，

∴ $\triangle AED\backsim\triangle ABC$，$\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AD}{AC}$.

由题意知 $AD=AB=10$，

$\dfrac{AE}{10}=\dfrac{10}{8}$，∴ $AE=\dfrac{25}{2}$，∴ $CG=\dfrac{25}{2}$.

**15.** (1) **证明**：∵ $GE//DF$，

∴ $\angle EGF=\angle DFG$. 由折叠的性质可知：$GD=GE$，$DF=EF$，$\angle DGF=\angle EGF$，

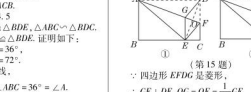
∴ $\angle DGF=\angle DFG$，∴ $GD=DF$.

∴ $GD=GE=DF=EF$.

∴ 四边形 $EFDG$ 是菱形.

(2) **解**：$EG^2=\dfrac{1}{2}GF\cdot AF$. 理由：

如图①，连结 $DE$，交 $AF$ 于点 $O$.


（第15题）

∵ 四边形 $EFDG$ 是菱形，

∴ $GF\perp DE$，$OG=OF=\dfrac{1}{2}GF$.

∵ $\angle DOF=\angle ADF=90°$，

$\angle OFD=\angle DFA$，

∴ $\triangle DOF\backsim\triangle ADF$，∴ $\dfrac{DF}{AF}=\dfrac{OF}{DF}$

∴ $DF^2=OF\cdot AF$.

∵ $OF=\dfrac{1}{2}GF$，$DF=EG$，

∴ $EG^2=\dfrac{1}{2}GF\cdot AF$.

(3) **解**：如图②，过点 $G$ 作 $GH\perp DC$，垂足为 $H$. 易得 $GH=CE$.

由(2)知，$EG^2=\dfrac{1}{2}GF\cdot AF$，$AG=6$，$EG=2\sqrt{5}$，

∴ $20=\dfrac{1}{2}GF(GF+6)$.

整理得 $GF^2+6GF-40=0$.

解得 $GF=4$ 或 $GF=-10$(舍去).

∵ $DF=GE=2\sqrt{5}$，$AF=AG+GF=6+4=10$，∴ $AD=\sqrt{AF^2-DF^2}=4\sqrt{5}$.

∵ $GH\perp DC$，$AD\perp DC$，∴ $GH//AD$.

∴ $\triangle FGH\backsim\triangle FAD$，∴ $\dfrac{GH}{AD}=\dfrac{GF}{AF}$，

即 $\dfrac{GH}{4\sqrt{5}}=\dfrac{4}{10}$，∴ $GH=\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$.

∴ $BE=AD-GH=4\sqrt{5}-\dfrac{8\sqrt{5}}{5}=\dfrac{12\sqrt{5}}{5}$

## 第 3 课时　用边角关系判定三角形相似

**1.** C　**2.** C　**3.** B

**4.** D　**点拨**：根据两角对应相等的两个三角形相似，可知 A，B 正确；根据两边对应成比例且夹角相等的两个三角形相似，可知 C 正确，而 D 选项给出的不是对应边，因此 D 是错误的，故选 D.

**5.** B　**6.** 4 cm　**7.** $\dfrac{4}{3}$

**8.** C　**点拨**：∵ 四边形 $EFGB$ 是正方形，$EB=2$，∴ $FG=EB=2$，$\angle FGB=90°$.

∵ 四边形 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形，$H$ 为 $AD$ 的中点，

∴ $AD=4$，$AH=2$，$\angle BAD=90°$.

∴ $HN=AH=FG$，$NH=GF$.

又∵ $AN//CNF$，

∴ $\triangle ANH\backsim\triangle GNF$(AAS)，故①正确.

∴ $\triangle ANH\backsim\triangle GNF$，∴ $AHN=HFG$.

∵ $AG+FG=2=AH$，∴ $AF=\sqrt{2}FG=\sqrt{2}AH$.

∴ $\angle AFH\neq\angle AHF$.

∴ $\angle AFN\neq\angle HFG$，故②错误.

∵ $\triangle ANH\backsim\triangle GNF$，∴ $AN=\dfrac{1}{2}AG=1$.

∵ $GM=BC=4$，∴ $\dfrac{AH}{AN}=\dfrac{GM}{AG}=2$.

又∵ $\angle HAN=\angle AGM=90°$，

∴ $\triangle AHN\sim\triangle GMA$. ∴ $\angle AHN=\angle AMG$.

∵ $AD//GM$，∴ $\angle HAK=\angle AMG$.

∴ $\angle AHK=\angle HAK$，∴ $AK=HK$.

∴ $AK+HK=NK$，∴ $HN=2NK$.

∵ $FN=HN$，∴ $FN=2NK$，故③正确.

易知四边形 $ADMG$ 是矩形. ∴ $DM=AG=2$.

∴ $S_{\triangle AFN}=\dfrac{1}{2}AN\cdot FG=\dfrac{1}{2}\times1\times2=1$，

$S_{\triangle ADM}=\dfrac{1}{2}AD\cdot DM=\dfrac{1}{2}\times4\times2=4$，

∴ $S_{\triangle AFN}:S_{\triangle ADM}=1:4$，故④正确.

故选 C.

**9.** **解**：$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 不一定相似. 理由如下：因为 $\angle A=\angle A'=50°$，但不知道 $\dfrac{AC}{A'C'}$ 是否等于 $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{1}{2}$，所以根据已知条件不能确定 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 是否相似.

**易错总结**：根据边角对应关系判断两个三角形相似，应具备“两边对应成比例，且夹角相等”，本题中虽然 $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{1}{2}$，但 $BC$，$B'C'$ 分别是 $\angle A$，$\angle A'$ 的对边，不满足“两边对应成比例，且夹角相等”，故不能由此来判定 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 相似.

**10.** **证明**：(1) 如图①，∵ 四边形 $ABCD$ 为正方形，∴ $AB=AD$，$\angle BAD=90°$.

∴ $\angle1+\angle2=90°$，

∵ $BE\perp AP$，$DF\perp AP$，

∴ $\angle BEA=\angle AFD=90°$.

∴ $\angle2+\angle3=90°$，∴ $\angle1=\angle3$.

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle DAF$ 中，$\begin{cases}\angle1=\angle3,\\ AB=DA,\\ \angle BEA=\angle AFD,\end{cases}$

∴ $\triangle ABE\cong\triangle DAF$，∴ $BE=AF$，

∴ $EF=AE-AF=AE-BE$.

(2) 如图②，由(1)知 $AF=BE$，

$\dfrac{AF}{BF}=\dfrac{DE}{BE}$，即 $\dfrac{BE}{BF}=\dfrac{DE}{AE}$，∴ $\dfrac{BE}{DE}=\dfrac{BF}{AF}$.

设 $\dfrac{BE}{DE}=\dfrac{BF}{AF}=k$，则 $BE=kBF$，$DF=kAF$，

∴ $EF=\sqrt{BF^2-BE^2}=\sqrt{1-k^2}BF$，$AF=\sqrt{AD^2-DF^2}=\sqrt{1-k^2}AD$.

∴ $\dfrac{EF}{AD}=\dfrac{BF}{AF}=\dfrac{BE}{DE}=k$.

又∵ $\angle BEF=\angle AFD=90°$，

∴ $\triangle BEF\backsim\triangle DFA$，∴ $\angle4=\angle3$.

∵ $\angle1=\angle3$，∴ $\angle4=\angle1$.

∵ $\angle1+\angle BPA=90°$，$\angle5+\angle BPA=90°$，∴ $\angle5=\angle1$，∴ $\angle4=\angle5$.

即 $BE$ 平分 $\angle FBP$，而 $BE\perp EP$，

∴ $EF=EP$.


（第10题）

**11.** **解**：(1) 由题意知，$AD=BC=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

∴ $AD^2=\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2=\dfrac{5+1-2\sqrt{5}}{4}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

∴ $AB=AC=1$，

∴ $CD=AC-AD=1-\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

∴ $AC\cdot CD=1\times\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

∴ $AD^2=AC\cdot CD$.

(2) ∵ $AD=BC$，$AD^2=AC\cdot CD$，

∴ $BC^2=AC\cdot CD$，即 $\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{CD}{BC}$.

又∵ $\angle C=\angle C$，∴ $\triangle BCD\backsim\triangle ACB$.

∴ $\dfrac{BD}{CB}=\dfrac{AB}{AC}=1$，∴ $\angle DBC=\angle A$.

∴ $DB=CB=AD$.

∴ $\angle A=\angle ABD$，$\angle C=\angle BDC$.

设 $\angle A=x$，则 $\angle ABD=x$，$\angle DBC=x$，$\angle C=\angle BDC=2x$. ∵ $\angle A+\angle ABC+\angle C=180°$，∴ $x+2x+2x=180°$.

解得 $x=36°$，∴ $\angle ABD=36°$.

**12.** **证明**：(1) 如图，连结 $BC$，$OB$，$OC$.

∵ $AB$，$AC$ 是 $\odot O$ 的两条弦，且 $AB=AC$，

∴ $A$ 在 $BC$ 的垂直平分线上.

∵ $OB=OC$，∴ $O$ 在 $BC$ 的垂直平分线上，∴ $AO$ 垂直平分 $BC$，∴ $BD=CD$.


（第12题）

(2) ∵ $AB^2=AO\cdot AD$，∴ $\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AO}{AB}$

∵ $\angle BAO=\angle DAB$，

∴ $\triangle ABO\backsim\triangle ADB$，∴ $\angle OBA=\angle ADB$.

∵ $OA=OB$，∴ $\angle OBA=\angle OAB$.

∴ $\angle OAB=\angle BDA$，∴ $AB=BD$.

∵ $AB=AC$，$BD=CD$，∴ $AB=AC=BD=CD$，

∴ 四边形 $ABDC$ 是菱形.

**13.** **解**：(1) 设直线 $AB$ 对应的函数表达式为 $y=kx+b$.

由题意得 $\begin{cases}b=6,\\ 8k+b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-\dfrac{3}{4},\\ b=6.\end{cases}$

所以直线 $AB$ 对应的函数表达式为 $y=-\dfrac{3}{4}x+6$.

(2) 由题意得 $AO=6$，$BO=8$，可得 $AB=10$，所以 $AP=t$，$AQ=10-2t$.

如图①，∵ $APQ=\angle OAB$，当 $\dfrac{AP}{AO}=\dfrac{AQ}{AB}$ 时，

△$APQ\backsim\triangle AOB$，

所以 $\dfrac{t}{6}=\dfrac{10-2t}{10}$，解得 $t=\dfrac{30}{11}$.

如图②，∵ $APQ=\angle BAO$，当 $\dfrac{AP}{AB}=\dfrac{AQ}{AO}$ 时，

△$AQP\backsim\triangle AOB$，

所以 $\dfrac{t}{10}=\dfrac{10-2t}{6}$，解得 $t=\dfrac{50}{13}$.

综上可知，当 $t$ 为 $\dfrac{30}{11}$ 或 $\dfrac{50}{13}$ 时，△$APQ$ 与 △$AOB$ 相似.


（第13题）

## 第 4 课时　用三边关系判定三角形相似

**1.** B　**2.** C　**3.** C　**4.** D

**5.** B　**点拨**：分以下两种情况讨论：(1) 若最 45 cm 的铝材，设最下的两段长分别为 $x$ cm，$y$ cm($x\leqslant y$)，由题意得 $\begin{cases}\dfrac{24}{x}=\dfrac{30}{y},\\ \dfrac{36}{27}\text{或}\dfrac{24}{x}=\dfrac{30}{27}=\dfrac{36}{y}\end{cases}$(注：27 cm 不可能是最小边长)，由①解得 $x=18$，$y=22.5$，符合题意；由②解得 $x=\dfrac{108}{5}$，$y=\dfrac{162}{5}$，而 $x+y=\dfrac{108}{5}+\dfrac{162}{5}=\dfrac{270}{5}=54>45$，不合题意，舍去.

(2) 若最 27 cm 的铝材，设截下的两段长分别为 $a$ cm，$b$ cm($a<b$)，由题意得 $\begin{cases}\dfrac{24}{a}=\dfrac{30}{b}=\dfrac{36}{45}\text{(注：45 cm 只能是最大边长)},\\ a+b+30\geqslant37.5,\\ a+b+30\leqslant67.5>27,\end{cases}$ 解得 $a=30$，$b=37.5$，而 $a+b+30+37.5=67.5>27$，不合题意，舍去. 综上可知，截法只有 1 种.

**6.** B　**7.** C　**8.** B

**9.** **点拨**：当直角三角形的两直角边长分别为 6，8，且另一个与它相似的直角三角形的两直角边长分别为 3，4 时，$x$ 的值为 5；当 8，4 为对应边的长且为两直角三角形的斜边长时，$x$ 的值为 $\dfrac{4}{3}$；故 $x$ 的值可以为 5 或 $\sqrt{7}$. 此题易忽略第二种情况.

**10.** **证明**：∵ $D$，$E$ 分别为 $OA$，$OB$ 的中点，

∴ $DE$ 是 $\triangle AOB$ 的中位线，

∴ $DE=\dfrac{1}{2}AB$，即 $\dfrac{DE}{AB}=\dfrac{1}{2}$. 同理可得 $\dfrac{EF}{BC}=\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{FD}{CA}=\dfrac{1}{2}$，∴ $\dfrac{DE}{AB}=\dfrac{EF}{BC}=\dfrac{FD}{CA}=\dfrac{1}{2}$.

∴ $\triangle DEF\backsim\triangle ABC$.

**11.** **证明**：设正方形 $ABCD$ 的边长为 $a$.

∵ 四边形 $ABCD$ 为正方形，

∴ $AD=BC=CD=a$.

又∵ $Q$ 是 $CD$ 的中点，∴ $DQ=CQ=\dfrac{1}{2}a$.

∵ $BP=3PC$，∴ $PC=\dfrac{1}{4}a$.

∴ $AQ=\sqrt{a^2+\dfrac{a^2}{4}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}a$，

$PQ=\sqrt{\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{a^2}{16}}=\dfrac{\sqrt{5}}{4}a$.

∴ $\dfrac{AQ}{PQ}=\dfrac{AD}{PC}=\dfrac{AQ}{PQ}=2$. ∴ △$ADQ\backsim\triangle QCP$.

**12.** **解**：(1) △$ACF$ 与 △$GCA$ 相似. 理由如下：设正方形 $ABCD$，$CDEF$，$EFGH$ 的边长为 $a$，则 △$ACF$ 的三边长分别为 $AC=\sqrt{2}a$，$CF=a$，$AF=\sqrt{5}a$，

△$ACG$ 的三边长分别为 $AC=\sqrt{2}a$，$CG=2a$，$AG=\sqrt{10}a$.

∴ $\dfrac{CF}{AC}=\dfrac{a}{\sqrt{2}a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\dfrac{AC}{CG}=\dfrac{\sqrt{2}a}{2a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\dfrac{AF}{AG}=\dfrac{\sqrt{5}a}{\sqrt{10}a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. ∴ $\dfrac{CF}{AC}=\dfrac{AC}{CG}=\dfrac{AF}{AG}$.

∴ △$ACF\backsim\triangle GCA$.

(2) ∵ △$ACF\backsim\triangle GCA$，∴ $\angle1=\angle CAF$，

∵ $\angle1+\angle2=\angle CAF+\angle2=\angle ACB=45°$.

**13.** (1) **证明**：根据勾股定理得 $AB=2\sqrt{5}$，$AC=\sqrt{5}$，$BC=5$，易得 $AB^2+AC^2=BC^2$，根据勾股定理的逆定理得 $\triangle ABC$ 为直角三角形.

(2) **解**：△$ABC$ 和 △$DEF$ 相似.

理由如下：根据勾股定理得 $DE=4\sqrt{2}$，$DF=2\sqrt{2}$，$EF=2\sqrt{10}$，又 $AB=2\sqrt{5}$，$AC=\sqrt{5}$，$BC=5$，∴ $\dfrac{AB}{DE}=\dfrac{AC}{DF}=\dfrac{BC}{EF}=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$，

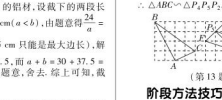
∴ △$ABC\backsim\triangle DEF$.

(3) **解**：如图，连结 $P_2P_3$，$P_2P_4$，$P_3P_4$，则 △$P_2P_3P_4$ 符合要求.

证明如下：∵ $P_2P_3=\sqrt{10}$，$P_2P_4=\dfrac{1}{2}P_1P_3=2\sqrt{5}$，$AB=2\sqrt{5}$，$AC=\sqrt{5}$，$BC=5$，

∴ $\dfrac{P_2P_3}{BC}=\dfrac{P_3P_4}{AC}=\dfrac{P_2P_4}{AB}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

∴ △$ABC\backsim\triangle P_2P_3P_4$.


（第13题）

## 阶段方法技巧训练(二)

**专训**

**1.** (1) **证明**：在正方形 $ABCD$ 和正方形 $BPEF$ 中，$AB=BC$，$BP=BF$，$\angle PBE=\angle FBC=45°$，$\therefore\angle CFE=90°$，∴ $AP=CF$.

∴ △$APE\cong\triangle CFE$(SAS)，∴ $EA=EC$.

(2) **解**：①△$ACE$ 为直角三角形.

理由如下：在正方形 $BPEF$ 中，$\angle BPE=90°$，∴ $\angle APE=90°$.

∵ 点 $P$ 为 $AB$ 的中点，∴ $AP=BP$.

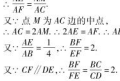
∵ $BP=PE$，∴ $AP=PE$.





关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \angle PAE=\angle PEA=45°$.
在正方形 $ABCD$ 中，$\angle CAB=45°$，
$\therefore \angle CAE+90°=\angle CAB$. 为真命题.
②：$EP$ 平分 $\angle AEC$，$\therefore \angle AEP=\angle CEP$.
在正方形 $BPEF$ 中，$PE/\!/BF$，
$\therefore \angle CEP=\angle ECF$. $\therefore \angle AEP=\angle ECF$.
$\because \angle APE+\angle EFC=90°$，
$\therefore \triangle APE\backsim\triangle EFC$. $\therefore \dfrac{AP}{EF}=\dfrac{PE}{FC}$.
$\therefore \dfrac{a-b}{b}=\dfrac{b}{a+b}$. $\therefore a^2=2b^2$.
$\therefore a=\sqrt{2}b$（负值舍去）. $\therefore a:b=\sqrt{2}:1$.


（第 1 题）

如图，连结 $BE$，易得 $BE=\sqrt{2}\ BP=\sqrt{2}\ b$，
$\angle EBF=45°$，
$\therefore BE=BC$.
$\therefore \angle BEC=\angle ECF$.
$\because \angle EBF=\angle BEC+\angle ECF=2\angle ECF$.
$\therefore \angle AEC=2\angle CEP$，$\angle CEP=\angle ECF$，
$\therefore \angle AEC=\angle EBF=45°$.

**解后反思**：(1) 判断一个三角形为直角三角形，有如下方法：①判断两较小边长的平方和与最大边长的平方相等；②两个较小角的和为 90°；③一边上的中线等于该边的一半.
(2) 要求两线段长的近值，可以直接求出两线段长，然后求比值；也可通过勾股定理或相似得出关于这两线段长的等式，化简得两线段长的比值.

**2.** 证明：$\because BD/\!/AC$，$\therefore \angle DBA=\angle CAE$.
$\because AB=3CA$，$BD=3AE$，
$\therefore \dfrac{AB}{CA}=\dfrac{BD}{AE}=3$，$\therefore \triangle ABD\backsim\triangle CAE$.

**3.** 证明：$\because AD=6.4$，$CD=1.6$，
$\therefore AC=AD-CD=6.4-1.6=4.8$.
$\because \dfrac{AC}{CD}=\dfrac{4.8}{1.6}=3$.
$\because \dfrac{BC}{CE}=\dfrac{9.3}{3.1}=3$，$\therefore \dfrac{AC}{CD}=\dfrac{BC}{CE}$.
$\therefore BC\perp AD$，$\therefore \angle ACB=\angle DCE=90°$.
$\therefore \triangle ABC\backsim\triangle DEC$.

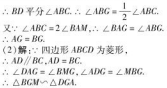
**4.** 证明：$\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 的高，$\therefore AD\perp BD$.
又 $\because E,F$ 分别是 $AB,AC$ 的中点，
$\therefore$ 在 $Rt\triangle ABD$ 中，$DE$ 为斜边 $AB$ 上的中线，$\therefore DE=\dfrac{1}{2}AB$，即 $\dfrac{DE}{AB}=\dfrac{1}{2}$.
同理可得 $\dfrac{DF}{AC}=\dfrac{1}{2}$.
$\therefore EF$ 为 $\triangle ABC$ 的中位线，
$\therefore EF=\dfrac{1}{2}BC$，即 $\dfrac{EF}{BC}=\dfrac{1}{2}$.
$\therefore \dfrac{DE}{AB}=\dfrac{EF}{BC}=\dfrac{DF}{AC}$. $\therefore \triangle DEF\backsim\triangle ABC$.

**5.** 证明：方法一：过点 $C$ 作 $CF/\!/AB$，交 $DE$ 于点 $F$，∴ $\triangle CDF\backsim\triangle BDE$.
$\therefore \dfrac{CF}{BE}=\dfrac{CD}{BD}$.
∵ 点 $M$ 为 $AC$ 边的中点，∴ $AM=CM$.
∵ $CF/\!/AB$，∴ $\angle A=\angle MCF$.
又 ∵ $\angle AME=\angle CMF$，∴ $\triangle AME\cong\triangle CMF$.
∴ $AE=CF$.
∵ $AE=\dfrac{1}{4}AB$，$BE=AB-AE$，
∴ $BE=3AE$. ∴ $\dfrac{AE}{BE}=\dfrac{1}{3}$. ∴ $\dfrac{CF}{BE}=\dfrac{1}{3}$.
∴ $\dfrac{CD}{BD}=\dfrac{1}{3}$，即 $BD=3CD$.
又 ∵ $BD=BC+CD$，∴ $BC=2CD$.
方法二：过点 $C$ 作 $CF/\!/DE$，交 $AB$ 于点 $F$，
∴ $\dfrac{AE}{AF}=\dfrac{AM}{AC}$.
∵ 点 $M$ 为 $AC$ 边的中点，∴ $AC=2AM$. ∴ $2AE=AF$. ∴ $AE=EF$.
又 ∵ $\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{1}{4}$，∴ $\dfrac{BF}{EF}=2$.
又 ∵ $CF/\!/DE$，∴ $\dfrac{BF}{FE}=\dfrac{BC}{CD}=2$.
∴ $BC=2CD$.
方法三：过点 $E$ 作 $EF/\!/BC$，
交 $AC$ 于点 $F$，∴ $\triangle AEF\backsim\triangle ABC$.
∵ $AE=\dfrac{1}{4}AB$，∴ $\dfrac{EF}{BC}=\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AF}{AC}$.
∴ $\dfrac{EF}{BC}=\dfrac{AF}{AC}=\dfrac{1}{4}$.
∴ $EF=\dfrac{1}{4}BC$，$AF=\dfrac{1}{4}AC$.
又 ∵ $AM=MC$，∴ $MF=\dfrac{1}{2}MC$.
∵ $EF/\!/CD$，∴ $\angle EFM=\angle DCM$，$\angle FEM=\angle D$，∴ $\triangle EFM\backsim\triangle DCM$.
∴ $\dfrac{EF}{CD}=\dfrac{MF}{MC}=\dfrac{1}{2}$. ∴ $EF=\dfrac{1}{2}CD$.
∴ $BC=2CD$.
方法四：过点 $A$ 作 $AF/\!/BD$，
交 $DE$ 的延长线于点 $F$，
∴ $\angle F=\angle D$，$\angle FAE=\angle B$.
∴ $\triangle AEF\backsim\triangle BED$. ∴ $\dfrac{AE}{BE}=\dfrac{AF}{BD}$.
∵ $AE=\dfrac{1}{4}AB$，∴ $AE=\dfrac{1}{3}BE$. ∴ $AF=\dfrac{1}{3}BD$.
由 $AF/\!/CD$，$AM=MC$，
易证得 $\triangle AFM\cong\triangle CDM$. ∴ $AF=CD$.
∴ $CD=\dfrac{1}{3}BD$. ∴ $BC=2CD$.
**点拨**：由已知线段的比，求另外两线段的比，通常通过添加平行线，构造相似三角形来求解.

## 4.5 相似三角形的性质及其应用

### 第 1 课时 相似三角形对应线段的性质

**1.** A **2.** C **3.** $\dfrac{6}{5}$ **4.** D **5.** A **6.** D
**7.** B **点拨**：如图，连结 $AG$ 并延长交 $BC$ 于点 $M$，根据题意，可知 $M$ 是 $BC$ 的中点，由 $GF/\!/BC$ 得 $\triangle ADG\backsim\triangle AMB$，


（第 7 题）

则 $\dfrac{DG}{BM}=\dfrac{AG}{AM}=\dfrac{2}{3}$，
$\therefore GP=\dfrac{2}{3}BM=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{BC}{2}=\sqrt{3}$. 故选 B.
**8.** 解：$\because AE=3$，$EC=1$，$AD=2$，$BD=4$，
$\therefore AC=4$，$AB=6$，
$\therefore \dfrac{AE}{AB}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$，
$\therefore \dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AD}{AC}$.
又 $\because \angle EAD=\angle BAC$，∴ $\triangle AED\backsim\triangle ABC$，
$\therefore \dfrac{AG}{AF}=\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{1}{2}$，即 $AF:AC=2$.
**9.** 证明：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，
∴ $AD/\!/BC$，$AD=BC$.
方法二：过点 $D$ 作 $DE/\!/AB$，交 $BC$ 于点 $E$，
∴ 点 $F$ 是 $BC$ 的中点，∴ $CF=\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{1}{2}AD$.
∵ $AD/\!/BC$，∴ $\angle DAH=\angle FCH$，$\angle ADH=\angle CFH$，∴ $\triangle AHD\backsim\triangle CHF$，
$\therefore \dfrac{AH}{CH}=\dfrac{AD}{CF}=2$，即 $AH=2CH$.
同理可得 $\triangle AEG\backsim\triangle CDG$，$\dfrac{AG}{CG}=\dfrac{AE}{CD}=\dfrac{1}{2}$，
即 $CG=2AG$，∴ $AC=3CH=3AG$，
∴ $AG=GH=CH$.

### 第 2 课时 相似三角形对应周长、面积的性质

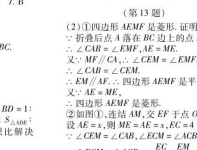
**1.** B **2.** B **3.** C **4.** A **5.** C **6.** D **7.** B
**8.** C **9.** A
**10.** 解：因为 $S_{\triangle ADE}:S_{四边形DBCE}=1:4$，
所以 $S_{\triangle ADE}:S_{\triangle ABC}=1:5$.
因为 $DE/\!/BC$，所以 $\triangle ADE\backsim\triangle ABC$.
所以 $\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.
所以 $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{1}{\sqrt{5}-1}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$.
**易错总结**：此题易错计算为 $AD:BD=1:2$，要求 $AD:BD$ 的值，关键是求 $S_{\triangle ADE}:S_{\triangle DBE}$ 的值，根据三角形的面积比解决问题.
**11.** (1) **证明**：∵ 四边形 $ABCD$ 为菱形，
∴ $BD$ 平分 $\angle ABC$. ∴ $\angle ABG=\dfrac{1}{2}\angle ABC$.
又 ∵ $\angle ABC=2\angle BAM$，∴ $\angle BAG=\angle ABG$.
∴ $AG=BG$.
(2) **解**：∵ 四边形 $ABCD$ 为菱形，
∴ $AD/\!/BC$，$AD=BC$.
∴ $\angle DAG=\angle BMG$，$\angle ADG=\angle MBG$.
∴ $\triangle BGM\backsim\triangle DGA$.
∵ $M$ 为 $BC$ 的中点，
∴ $BM=\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{1}{2}AD$，
即 $\triangle BGM$ 与 $\triangle DGA$ 的相似比为 $1:2$，
∴ $S_{\triangle BGM}:S_{\triangle DGA}=1:4$.
∵ $S_{\triangle BGM}=1$，∴ $S_{\triangle DGA}=4$.
**12.** (1) **证明**：∵ 四边形 $ABCD$ 为正方形，
∴ $AD/\!/BE$，∴ $\angle 1=\angle 2$.
又 ∵ $\angle AFD=\angle B=90°$，∴ $\triangle ABE\backsim\triangle DFA$.
(2) **解**：∵ $E$ 是 $BC$ 的中点，∴ $BE=EC=1$，∴ $AE=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$.
∵ $\triangle ABE\backsim\triangle DFA$，
∴ $\dfrac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle DFA}}=\left(\dfrac{AE}{AD}\right)^2=\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2=\dfrac{5}{4}$.
∵ $S_{\triangle ABE}=\dfrac{1}{2}\times2\times1=1$，∴ $S_{\triangle DFA}=\dfrac{4}{5}$.
由题意知 $S_{四边形CDFE}=S_{正方形ABCD}-S_{\triangle ABE}-S_{\triangle DFA}=4-1-\dfrac{4}{5}=\dfrac{11}{5}$.
**13.** 解：(1) ∵ 折叠后点 $A$ 落在 $AB$ 边上的点 $D$ 处，∴ $EF\perp AB$，$\triangle AEF\cong\triangle DEF$，
∴ $S_{\triangle AEF}=S_{\triangle DEF}$.
∵ $S_{四边形BCEF}=3S_{\triangle EDF}$，
$S_{四边形BCEF}=3S_{\triangle AEF}$.
∵ $S_{\triangle ACE}=S_{\triangle AEF}+S_{四边形BCEF}$，
$S_{\triangle ACE}=S_{\triangle AEF}+3S_{\triangle AEF}=4S_{\triangle AEF}$.
∴ $\dfrac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ACE}}=\dfrac{1}{4}$.
∵ $EF/\!/CA$，∴ $\angle EAF=\angle ACB=90°$，
∴ $\triangle AEF\backsim\triangle ABC$.
∴ $\dfrac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}}=\left(\dfrac{AE}{AB}\right)^2=\left(\dfrac{AE}{AE}\right)^2=\dfrac{1}{4}$.
在 $Rt\triangle ABC$ 中，∵ $\angle ACB=90°$，
$AC=4$，$BC=3$，∴ $AB=\sqrt{4^2+3^2}=5$.
∴ $\left(\dfrac{AE}{5}\right)^2=\dfrac{1}{4}$. ∴ $AE=\dfrac{5}{2}$.


（第 13 题）

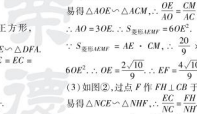
(2) ①四边形 $AEMF$ 是菱形. 证明如下：
∵ 折叠后点 $A$ 落在 $BC$ 边上的点 $M$ 处，
∴ $\angle CAB=\angle EMF$，$AE=ME$.
又 ∵ $MF/\!/CA$，∴ $\angle CEM=\angle EMF$.
∴ $\angle CAB=\angle CEM$.
∴ $EM/\!/AF$. ∴ 四边形 $AEMF$ 是平行四边形.
又 ∵ $AE=ME$，
∴ 四边形 $AEMF$ 是菱形.
②如图①，连结 $AM$，交 $EF$ 于点 $O$.
设 $AE=x$，则 $ME=AE=x$，$EC=4-x$.
∵ $\angle CEM=\angle CAB$，$\angle ECM=\angle ACB=90°$，
∴ $\triangle ECM\backsim\triangle ACB$. ∴ $\dfrac{EC}{AC}=\dfrac{EM}{AB}$.
∴ $\dfrac{4-x}{4}=\dfrac{x}{5}$. 解得 $x=\dfrac{20}{9}$.
∴ $AE=ME=\dfrac{20}{9}$，$EC=\dfrac{16}{9}$.
在 $Rt\triangle ECM$ 中，∵ $\angle ECM=90°$，
∴ $CM^2=EM^2-EC^2$，即 $CM=\sqrt{EM^2-EC^2}=\sqrt{\left(\dfrac{20}{9}\right)^2-\left(\dfrac{16}{9}\right)^2}=\dfrac{4}{3}$.
∵ 四边形 $AEMF$ 是菱形，
∴ $OE=OF$，$OA=OM$，$AM\perp EF$，
∵ $S_{菱形AEMF}=4S_{\triangle AOE}=2OE\cdot AO$.
易得 $\triangle AOE\backsim\triangle ACM$，∴ $\dfrac{OE}{CM}=\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{1}{3}$.
∴ $AO=3OE$. ∴ $S_{菱形AEMF}=6OE^2$.
∵ $S_{菱形AEMF}=AE\cdot CM$，∴ $\dfrac{20}{9}\times\dfrac{4}{3}=6OE^2$.
∴ $OE=\dfrac{2\sqrt{10}}{9}$. ∴ $EF=\dfrac{4\sqrt{10}}{9}$.
(3) 如图②，过点 $F$ 作 $FH\perp CB$ 于点 $H$，
易得 $\triangle NCE\backsim\triangle NHF$，∴ $\dfrac{EC}{FH}=\dfrac{NE}{NH}$.
∵ $NC=1$，$EC=\dfrac{4}{3}$，∴ $\dfrac{7}{FH}=\dfrac{4}{3}$.
设 $FH=x$，则 $NH=\dfrac{7}{4}x$.
∴ $CH=\dfrac{7}{4}x-1$.
∵ $BC=3$，∴ $BH=BC-CH=3-\left(\dfrac{7}{4}x-1\right)=4-\dfrac{7}{4}x$.
易得 $\triangle BHF\backsim\triangle BCA$，∴ $\dfrac{HF}{BH}=\dfrac{AC}{BC}$. 即 $\dfrac{x}{4-\dfrac{7}{4}x}=\dfrac{4}{3}$. 解得 $x=\dfrac{8}{5}$.
∴ $\triangle BHF\backsim\triangle BCA$，∴ $\dfrac{HF}{CA}=\dfrac{BF}{BA}$.
即 $HF\cdot BA=CA\cdot BF$. ∴ $\dfrac{8}{5}\times5=4BF$.
∴ $BF=2$. ∴ $AF=3$. ∴ $\dfrac{AF}{BF}=\dfrac{3}{2}$.

### 第 3 课时 相似三角形的性质在测量中的应用

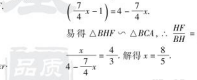
**1.** B **2.** C
**3.** 5.5 **点拨**：根据“两角对应相等的两个三角形相似”，可知 $\triangle EDF\backsim\triangle CDB$，则 $\dfrac{BC}{EF}=\dfrac{CD}{DE}$，即 $\dfrac{AB-1.5}{1}=\dfrac{8}{2}$，解得 $AB=5.5$ m.
**4.** B **5.** C **6.** 8 m **7.** A
**8.** 解：设关于 $O$ 的对称点为 $M$. 如图，由光的反射定律知，延长 $GC,FA$ 相交于点 $M$，连结 $OF$ 并延长交 $OC$ 于点 $H$，连结 $OM$，易得 $GF=BD$，$OH=BF=DG$，$OM=OE$.


（第 8 题）

易知 $GF/\!/AC$，∴ $\triangle MAC\backsim\triangle MFG$，
$\triangle MAO\backsim\triangle MFH$. ∴ $\dfrac{AC}{FG}=\dfrac{MA}{MF}=\dfrac{MO}{MH}$，
即 $\dfrac{AC}{BD}=\dfrac{OE}{MH}=\dfrac{OE}{MO+OH}=\dfrac{OE}{OE+BF}$.
∴ $\dfrac{OE}{OE+1.6}=\dfrac{2}{2.1}$. 解得 $OE=32$(m).
**答**：楼的高度 $OE$ 为 32 m.
**9.** 解：方法一：如图①，构造全等三角形. 在同岸边作 $BC\perp AB$，在 $BC$ 上取一点 $O$，使 $BO=OC$，连结 $AO$ 并延长，过 $C$ 作 $BC$ 的垂线交 $AO$ 的延长线于点 $D$，则 $\triangle ABO\cong\triangle DCO$，所以 $AB=CD$. 测量出 $CD$ 的长，即可得到河宽 $AB$.


（第 9 题）

方法二：如图②，构造相似三角形. 在河岸边作 $BC\perp AB$，在 $BC$ 上取一点 $O$，使 $BO=2OC$，连结 $AO$ 并延长，过 $C$ 作 $BC$ 的垂线交 $AO$ 的延长线于点 $D$，则 $\triangle ABO\backsim\triangle DCO$，所以 $\dfrac{AB}{CD}=\dfrac{BO}{OC}=2$，即 $AB=2CD$. 测量出 $CD$ 的长，即可求出河宽 $AB$.（答案不唯一）
**10.** 解：(1) 如图，沿着旗杆 $AB$ 的影子竖立标杆，使标杆 $CD$ 影子的顶端正好与旗杆影子的顶端重合.


（第 10 题）

(2) 用皮尺测量旗杆的影长 $BE=a$ m，标杆的影长 $DE=b$ m，标杆的高 $CD=c$ m.
易得 $\triangle EDC\backsim\triangle EBA$，所以 $\dfrac{AB}{CD}=\dfrac{EB}{ED}$，
即 $\dfrac{c}{AB}=\dfrac{b}{a}$，所以 $AB=\dfrac{ac}{b}$ m，
即旗杆的高为 $\dfrac{ac}{b}$ m.
**点拨**：方案不唯一，合理即可.
**11.** 解：由题意得 $\angle CAD=\angle MND=90°$，$\angle CDA=\angle MDN$，
∴ $\triangle CAD\backsim\triangle MND$. ∴ $\dfrac{CA}{MN}=\dfrac{AD}{ND}$.
∴ $\dfrac{1.6}{MN}=\dfrac{1\times0.8}{(5+1)\times0.8}=\dfrac{1}{6}$. $MN=9.6$ m.
又 ∵ $\angle EBF=\angle MNF=90°$，$\angle EFB=\angle MFN$，
∴ $\triangle EFB\backsim\triangle MFN$. ∴ $\dfrac{EB}{MN}=\dfrac{BF}{NF}$.
∴ $\dfrac{EB}{9.6}=\dfrac{2\times0.8}{(2+9)\times0.8}$.
∴ $EB=1.75$ m.
∴ 小华的身高 $BE$ 约为 1.75 m.

## 4.6 相似综合题

**1.** D **2.** A **3.** A **4.** C
**5.** B **点拨**：相似比是有顺序的，求相似比或利用相似比解答问题时，要特别注意两个相似多边形各顶点的排列顺序.
**6.** C **点拨**：∵ 四边形 $ABCD$ 与四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 相似，∴ $\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{CD}{C_1D_1}$.
又 ∵ $AB=12$，$CD=15$，$A_1B_1=9$，
∴ $C_1D_1=\dfrac{9\times15}{12}=\dfrac{45}{4}$，故选 C.
**7.** C **8.** C
**9.** 解：这种说法不正确. 比如，如图所示的两个菱形，每个菱形的边长都是相等的，但它们的各角并不是对应相等的，所以它们不相似.


（第 9 题）

**10.** 解：∵ 四边形 $ABCD\backsim$ 四边形 $EFGH$，∴ $\angle A=62°$，$\angle F=\angle B=70°$，$\angle D=\angle H=140°$.
又 ∵ $\angle E+\angle F+\angle G+\angle H=360°$，
∴ $\angle G=88°$.
∵ 四边形 $ABCD\backsim$ 四边形 $EFGH$，
∴ $\dfrac{AB}{EF}=\dfrac{BC}{FG}=\dfrac{AD}{EH}=\dfrac{CD}{GH}$. ∴ $AB=22.5$，$BC=21$.
**11.** 解：(1) ∵ 多边形 $ABCDEF\backsim$ 多边形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$，且 $\angle A=\angle C_1$，$\angle D$ 和 $\angle D_1$，$\angle E$ 和 $\angle E_1$ 是对应角，
∴ $\angle C=95°$，$\angle D=135°$，$\angle E=120°$. 由多边形内角和定理，知 $\angle F=720°-(135°+120°+95°+135°+120°)=115°$.
(2) ∵ 多边形 $ABCDEF$ 和多边形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的相似比是 $1:1.5$，且 $CD=15$ cm，
∴ $C_1D_1=15\times1.5=22.5$(cm).
**12.** 解：(1) 矩形 $ABCD$，$BCFE$，$AEML$，$GMFH$，$LGPN$ 的长、宽之比相等. 理由如下：
设矩形纸的宽 $BC=a$，长 $AB=\sqrt{2}a$，



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

则有 $BE=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，$AE=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，$ME=\frac{a}{2}$，

$MF=\frac{a}{2}$，$HF=\frac{\sqrt{2}}{4}a$，$LG=\frac{\sqrt{2}}{4}a$，$LN=\frac{a}{4}$，

$\therefore \frac{AB}{BC}=\frac{\sqrt{2}a}{a}=\sqrt{2}$，$\frac{BC}{BE}=\frac{a}{\frac{\sqrt{2}}{2}a}=\sqrt{2}$，

$\frac{AE}{ME}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\frac{a}{2}}=\sqrt{2}$，$\frac{MF}{HF}=\frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{4}a}=\sqrt{2}$，$\frac{LG}{LN}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}a}{\frac{a}{4}}=\sqrt{2}$，

$\therefore$ 五个矩形的长、宽之比相等.

(2)这些大小不同的矩形都相似.

**点拨**：此类题目只要按照题目的要求一步一步思考，将操作过程转换为数量关系，根据线段的比的定义即可解题.

**13.** 解：若截 30 cm 的钢筋，设截下的两段长分别为 $a$ cm 和 $b$ cm（$a<b$），则有 $\frac{20}{a}=\frac{b}{60}$，

$\frac{50}{b}=\frac{60}{50}$，解得 $a=\frac{50}{3}$，$b=\frac{125}{3}$，

$\therefore a+b=\frac{50}{3}+\frac{125}{3}=\frac{175}{3}>30$，

∴此截法不成立. 若截 50 cm 的钢筋，设截下的两段长分别为 $x$ cm 和 $y$ cm（$x<y$），则有 $\frac{20}{x}=\frac{50}{30}=\frac{60}{y}$，解得 $x=12$，$y=36$. $\therefore x+y=12+36=48<50$，∴此截法成立.

$\frac{20}{x}=\frac{50}{y}=\frac{60}{30}$，解得 $x=10$，$y=25$.

$\therefore x+y=10+25=35<50$，

∴此截法成立. 因此有两种截法.

$50-48=2$（cm），$50-35=15$（cm），

∴用余料最少的裁法裁出的三边长分别为 12 cm，30 cm，36 cm.




## 4.7 图形的位似

**1.** D

**2.** D　**点拨**：平移是把一个图形整体沿某一直线方向移动，会得到一个新的图形，新图形与原图形的形状和大小完全相同，则平移变换是等距变换；旋转前、后的图形全等，则旋转变换是等距变换；成轴对称的两个图形全等，则轴对称变换是等距变换；位似变换的两个图形是相似形，则位似变换不一定是等距变换，故选 D.

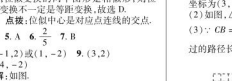
**3.** B　**点拨**：位似中心是对应点连线的交点.

**4.** C　**5.** A　**6.** $\frac{2}{5}$　**7.** B

**8.** $(-1,2)$或$(1,-2)$　**9.** $(3,2)$

**10.** $(4,-2)$

**11.** 解：如图.




（第 11 题）

**易错总结**：此题易忽略其中一种情况，当题中对位似图形的位置没有限制条件时，一定要考虑全面.

**12.** 解：法

理由如下：∵ $E$，$F$ 分别是 $OA$，$OB$ 的中点，∴ $FE=\frac{1}{2}AB$，$FE/\!/AB$.

∵ $G$，$H$ 分别是 $OC$，$OD$ 的中点，

∴ $HG=\frac{1}{2}CD$，$HG/\!/CD$.

同理 $FG=\frac{1}{2}BC$，$EH=\frac{1}{2}AD$，

$\frac{EF}{AB}=\frac{FG}{CD}=\frac{GH}{CD}=\frac{HE}{AD}=\frac{1}{2}$，

∴四边形 $ABCD$ 是平行四边形，∴ $AB=CD$，$AD/\!/CD$，$EF=HG$，$FE/\!/HG$.

∴四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

∵ $FE/\!/AB$，∴ $\angle OEF=\angle OAB$.

同理 $\angle OEH=\angle OAD$，

∴ $\angle HEF=\angle OAB$，同理，$\angle EFG=\angle ABC$，$\angle FGH=\angle BCD$，$\angle GHE=\angle CDA$，∴四边形 $EFGH\sim$四边形 $ABCD$.

又∵各对应点的连线相交于点 $O$，

∴ $ABCD$ 与四边形 $EFGH$ 是位似图形，$O$ 为位似中心.

**13.** 解：(1)$AC/\!/A'C'$. 理由如下：∵△$ABC$ 与△$A'B'C$ 是位似图形，∴△$ABC\sim$△$A'B'C$，∴$\angle A=\angle C'A'B'$，∴$AC/\!/A'C'$.

(2)由(1)知△$ABC\sim$△$A'B'C'$，

∴ $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}$，∵ $AB=2A'B'$，

∴ $\frac{AC}{A'C'}=\frac{2}{1}$，又∵△$ABC$ 与△$A'B'C'$ 是位似图形，∴ $\frac{OC}{OC'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{2}{1}$.

∵ $OC'=5$，∴ $OC=10$，

∴ $CC'=OC-OC'=10-5=5$.

**14.** 解：(1)△$ABC$ 与△$FGC$ 是位似图形，位似中心是点 $C$，

在矩形 $ABCD$ 中，$AD/\!/BC$，

∴ $\angle FAD=\angle FCE$，$\angle FDA=\angle FEC$.

∴△$AFD\sim$△$CFE$，∴ $\frac{CF}{AF}=\frac{CE}{AD}$

又∵ $AD=BC$，∴ $\frac{CF}{AF}=\frac{CE}{BC}$

∵ $\angle ABC=90°$，$OE\perp BC$，∴ $OE/\!/AB$.

又∵ $OA=OC$，∴ $CE=\frac{1}{2}BC$，

∴ $\frac{CF}{AF}=\frac{1}{2}$，∴ $\frac{CF}{AC}=\frac{1}{3}$，

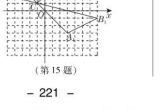
即△$ABC$ 与△$FGC$ 的位似比为 3∶1.

(2)$CF:BC=1:4$.

**15.** 解：(1)如图，点 $A_1$，$B_1$，$C$ 为所作，点 $A_1$ 的坐标为 $(3,-3)$.

(2)如图，点 $A_2$，$B_2$，$C$ 为所作.

(3)∵ $CB=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$，∴点 $B$ 经过的路径长为 $\frac{90\cdot\pi\cdot\sqrt{17}}{180}=\frac{\sqrt{17}}{2}\pi$.




（第 15 题）

# 章末整合提升训练

## 专训 1

**1.** 证明：过点 $C$ 作 $CM/\!/AB$ 交 $DF$ 于点 $M$，

∴△$CMF\sim$△$BDF$，∴ $\frac{BF}{CF}=\frac{BD}{CM}$

又∵ $CM/\!/AD$，

∴ $\angle A=\angle ECM$，$\angle ADE=\angle CME$.

∴△$ADE\sim$△$CME$，∴ $\frac{AE}{EC}=\frac{AD}{CM}$.

∵ $D$ 为 $AB$ 的中点，

∴ $\frac{BD}{CM}=\frac{AD}{CM}=\frac{BF}{CF}=\frac{AE}{EC}$，

即 $AE\cdot CF=BF\cdot EC$.

**2.** 证明：∵ $DM\perp BC$，$BC\perp BC=90°$，

∴ $\angle B+\angle BEM=90°$，$\angle D+\angle DEA=90°$，

∵ $\angle BEM=\angle DEA$，∴ $\angle B=\angle D$.

又∵ $M$ 为 $BC$ 的中点，$BC=90°$，

∴ $BM=AM$，∴ $\angle B=\angle BAM$.

∴ $\angle BAM=\angle D$. 即 $\angle EAM=\angle D$.

又∵ $\angle AME=\angle DMA$，

∴△$AME\sim$△$DMA$.

∴ $\frac{AM}{MD}=\frac{ME}{AM}$，∴ $AM^2=MD\cdot ME$.

**3.** 证明：如图，连结 $PM$，$PN$.

∵ $MN$ 是 $\angle APB$ 的平分线，

∴ $\angle MA=MP$，$NA=NB$.

∴ $\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$.

又∵△$ABC$ 是等边三角形，

∴ $\angle B=\angle C=\angle 1+\angle 3=60°$.

∴ $\angle 2+\angle 4=60°$，∴ $\angle 5+\angle 6=120°$.

∵ $\angle 6+\angle 7=180°-\angle C=120°$，

∴ $\angle 5=\angle 7$. ∴△$BPM\sim$△$CPN$.

∴ $\frac{BP}{CN}=\frac{BM}{CP}$ 即 $BP\cdot CP=BM\cdot CN$.




（第 3 题）

**4.** 证明：(1)∵ $AB=AC$，∴ $\angle ABC=\angle ACB$.

∵ $DE\perp BC$，∴ $\angle ABC+\angle EDB=180°$，

$\angle ACE+\angle FED=180°$，∴ $\angle FED=\angle EDB$.

∵ $\angle EDF=\angle DBE$，∴ $\angle DEF\sim\angle BDE$.

(2)由△$DEF\sim$△$BDE$ 得 $\frac{DE}{BD}=\frac{EF}{DE}$，

∴ $DE^2=DB\cdot EF$.

又由△$DEF\sim$△$BDE$，得 $\angle GED=\angle DFE$，

∵ $\angle GDE=\angle EDF$，∴△$GDE\sim$△$EDF$.

∴ $\frac{DG}{DE}=\frac{DE}{DF}$，∴ $DE^2=DG\cdot DF$.

∴ $DG\cdot DF=DB\cdot EF$.

**5.** 证明：(1)∵四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

∴ $\angle B=\angle D$. ∵ $AM\perp BC$，$AN\perp CD$，

∴ $\angle AMB=\angle AND=90°$，

∴△$AMB\sim$△$AND$.

(2)由△$AMB\sim$△$AND$ 得 $\frac{AM}{AN}=\frac{AB}{AD}$，

∴ $BAM=\angle DAN$.

又∵ $AD=BC$，∴ $\frac{AM}{AN}=\frac{AB}{BC}$

∵ $AM\perp BC$，$AD/\!/BC$，

∴ $\angle MAD=\angle AMB=90°$.

∴ $\angle B+\angle BAM=\angle MAN+\angle NAD=90°$.

∴ $\angle B=\angle MAN$.

∴ $\angle AMN=\angle BAC$，∴ $\frac{AM}{AC}=\frac{MN}{AC}$

**6.** 证明：∵ $AD\perp BC$，$DE\perp AB$，

∴ $\angle ADB=\angle AED=90°$.

又∵ $\angle BAD=\angle DAE$，∴△$ABD\sim$△$ADE$.

∴ $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AD}$ 即 $AD^2=AE\cdot AB$. 同理可得 $AD^2=AF\cdot AC$，∴ $AE\cdot AB=AF\cdot AC$.

∴ $\frac{AE}{AF}=\frac{AC}{AB}$.

**7.** 证明：如图，连结 $PC$，∵ $AB=AC$，$AD\perp BC$，∴ $AD$ 垂直平分 $BC$，$\angle ABC=\angle ACB$.

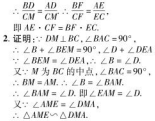
∵ $BP=CP$，∴ $\angle 1=\angle 2$，∴ $\angle ABC-\angle 1=\angle ACB-\angle 2$，即 $\angle 3=\angle 4$.

∵ $CF/\!/AB$，∴ $\angle 3=\angle F$，∴ $\angle 4=\angle F$.

又∵ $\angle CPF=\angle CPE$，∴△$CPF\sim$△$EPC$.

∴ $\frac{CP}{PE}=\frac{PF}{CP}$，即 $CP^2=PF\cdot PE$.

∵ $BP=CP$，∴ $BP^2=PE\cdot PF$.




（第 7 题）

## 专训 2

**1.** (1)证明：∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AD/\!/BC$，$AD=BC$.

∴△$EBF\sim$△$EAD$，∴ $\frac{BF}{AD}=\frac{EB}{EA}$.

∵ $BE=AB$，∴ $\frac{BF}{AD}=\frac{EB}{EA}=\frac{1}{2}$.

∴ $BF=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}BC$，∴ $BF=CF$.

(2)解：∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AD/\!/BC$，△$FGC\sim$△$DGA$.

∴ $\frac{FG}{DG}=\frac{FC}{DA}$，即 $\frac{FG}{DG}=\frac{1}{2}$，解得 $FG=2$.

**2.** 解：相似. 理由如下：因为 $\frac{EO}{BO}=\frac{DO}{CO}$，

∠$BOE=\angle COD$，∠$DOE=\angle COB$，

所以△$BOE\sim$△$COD$，△$DOE\sim$△$COB$.

所以∠$EBO=\angle DCO$，∠$DEO=\angle CBO$.

因为∠$ADE=\angle DCO+\angle DEO$，∠$ABC=\angle EBO+\angle CBO$，

所以∠$ADE=\angle ABC$.

又因为∠$A=\angle A$，

所以△$ADE\sim$△$ABC$.

**3.** 证明：∵ $BAC=90°$，$AD\perp BC$ 于点 $D$，

∴ $\angle BAC=\angle ADB=90°$.

又∵ $\angle CBA=\angle ABD$，

∴△$ABC\sim$△$DBA$.

∴ $\frac{AB}{DB}=\frac{BC}{BA}$，∴ $BAD=BC$.

∵ $AD\perp BC$ 于点 $D$，$E$ 为 $AC$ 的中点，

∴ $DE=EC$. ∴ $\angle BDF=\angle CDE=\angle C$.

∵ $\angle BDF=\angle BAD$.

又∵ $\angle F=\angle F$，∴△$DBF\sim$△$ADF$.

∴ $\frac{DB}{AD}=\frac{DF}{AF}$，∴ $\frac{AB}{AC}=\frac{DF}{AF}$.

**4.** 解：(1)∵△$DAB=\angle EAC$，

∴ $\angle DAB+\angle BAC=\angle EAC+\angle BAC$.

∴ $\angle ADE=\angle ABC$.

又∵ $\angle A=\angle A$，

∴△$ADE\sim$△$ABC$.

(2)∵△$ADE\sim$△$ABC$，∴ $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$.

又∵ $\angle DAB=\angle EAC$，

∴△$ADB\sim$△$AEC$，∴ $\frac{AD}{AE}=\frac{BD}{CE}$.

## 专训 3

**1.** 证明：∵ $EC'/\!/EC$，

∴ $\angle C'EO=\angle CEO$，△$OCE\sim$△$OC'E'$.

∴ $\frac{CE}{C'E'}=\frac{OE}{OE'}$，

∴ $E'D'/\!/ED$，

∴ $\angle D'E'O=\angle DEO$，△$DOE\sim$△$D'OE'$，

∴ $\frac{DE}{D'E'}=\frac{OE}{OE'}$，∠$CED=\angle C'E'D'$，

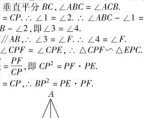
∴ $\frac{CE}{C'E'}=\frac{DE}{D'E'}$，

∴△$CED\sim$△$C'E'D'$.

又∵△$CDE$ 是等边三角形，

∴△$C'D'E'$ 是等边三角形.

**2.** 解：如图，在 $AB$ 边上任取一点 $D'$，过点 $D'$ 作 $D'E'\perp BC$ 于点 $E'$，在 $BC$ 上截取 $E'F'=DE$，$F'E'=D'E'$，过点 $F'$ 作 $F'G'\perp BC$，过点 $D'$ 作 $D'H\perp F'G'$ 于点 $H$，过点 $D$ 作 $DI/\!/D'E'$ 交 $BC$ 于点 $E$，则四边形 $DEFG$ 为△$ABC$ 的内接矩形，且 $DE:EF=1:2$.




（第 2 题）

**3.** (1)证明：∵ $DE/\!/BC$，

∴△$ACQ\sim$△$AEP$，△$ADP\sim$△$ABQ$.

∴ $\frac{PE}{QC}=\frac{AP}{AQ}$，$\frac{DP}{BQ}=\frac{AP}{AQ}$，∴ $\frac{DP}{BQ}=\frac{PE}{QC}$.

(2)①解：$MN=\frac{\sqrt{2}}{9}$.

②证明：∵ $\angle B+\angle C=90°$，$\angle CEF+\angle C=90°$，∴ $\angle B=\angle CEF$.

又∵ $\angle BGD=\angle EFC=90°$，

∴△$BGD\sim$△$EFC$，∴ $\frac{DG}{CF}=\frac{BG}{EF}$.

∴ $DG\cdot EF=CF\cdot BG$.

又∵四边形 $DEFG$ 是正方形，$DG=GF=EF$，∴ $GF^2=CF\cdot BG$.

由(1)易得 $\frac{BM}{MN}=\frac{EN}{NF}$，

∴ $\left(\frac{MN}{GF}\right)^2=\frac{DM}{BG}\cdot\frac{EN}{CF}$.

即 $\frac{MN^2}{FG^2}=\frac{DM}{BG}\cdot\frac{EN}{CF}$.

∴ $MN^2=DM\cdot EN$.

# 全章热门考点整合应用

**1.** C　**2.** 20 m

**3.** 解：四边形 $ABCD$ 与四边形 $A'B'C'D'$ 相似. 理由如下：由已知条件知，$\angle ADC=\angle A'D'C'$，$\angle C=\angle C'$，$\angle ABC=\angle A'B'C'$，$\angle A=\angle A'$，且 $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DA}{D'A'}=\frac{4}{3}$，所以四边形 $ABCD$ 与四边形 $A'B'C'D'$ 相似.

**4.** 解：如图，过点 $B$ 作 $BM\perp x$ 轴于点 $M$，过点 $B'$ 作 $B'N\perp x$ 轴于点 $N$，则△$CBM\sim$△$CB'N$，所以 $MC:NC=BM:B'N=BC:B'C$.

又由已知条件知 $NC=a+1$，$B'N=-b$，$BC:B'C=1:2$，

所以 $MC:(a+1)=BM:(-b)=1:2$.

所以 $MC=\frac{1}{2}(a+1)$，$BM=-\frac{b}{2}$.

所以 $MO=\frac{1}{2}(a+1)+1=\frac{a+3}{2}$.

所以点 $B$ 的坐标为 $\left(-\frac{a+3}{2},-\frac{b}{2}\right)$




（第 4 题）

**5.** 解：(1)∵ $DE/\!/BC$，∴ $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$，∴ $\frac{8-2x}{8}=\frac{y}{6}$，∴ $y=-\frac{3}{2}x+6\,(0\le x\le 4)$.

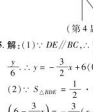
(2)∵ $S_{\triangle BDE}=\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot y=\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot\left(6-\frac{3}{2}x\right)=-\frac{3}{2}(x-2)^2+6$，

∴ $-\frac{3}{2}(x-2)^2\le 0$，∴ $-\frac{3}{2}(x-2)^2+6\le 6$，∴当 $x=2$ 时，$S_{\triangle BDE}$ 有最大值，最大值为 6.

**6.** (1)证明：如图，∵ $D$ 是 $BC$ 边上的中点，$DE\perp BC$，∴ $EB=EC$，∴ $\angle B=\angle 1$.

又∵ $AD=AE$，∴ $\angle AED=\angle 2$，

∴△$ABC\sim$△$FCD$.




（第 6 题）

(2)解：如图，过点 $A$ 作 $AM\perp CB$ 于点 $M$.

∵ $D$ 是 $BC$ 边上的中点，∴ $BC=2CD$.

由(1)知△$ABC\sim$△$FCD$，

∴ $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle FCD}}=\left(\frac{BC}{CD}\right)^2=\frac{4}{1}$.

又∵ $S_{\triangle FCD}=5$，∴ $S_{\triangle ABC}=20$.

∵ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AM$，

∴ $AM=\frac{2S_{\triangle ABC}}{BC}=\frac{2\times 20}{10}=4$.

∵ $DE\perp BC$，$AM\perp BC$，

∴ $ED/\!/AM$，

∴△$BDE\sim$△$BMA$，∴ $\frac{DE}{AM}=\frac{BD}{BM}$

由 $AD=AE$，$AM\perp BC$，

知 $DM=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{4}BC=\frac{5}{2}$，

∴ $\frac{DE}{4}=\frac{5}{5+\frac{5}{2}}$，∴ $DE=\frac{8}{3}$.

**7.** (1)解：在矩形 $ABCD$ 中，$AD/\!/CF$，

∴△$DAF\sim$△$AFC$.

∵ $AF$ 平分 $\angle DAC$，∴ $\angle DAF=\angle CAF$.

∴ $\angle FAC=\angle AFC$，∴ $AC=CF$.

∵ $AB=4$，$BC=3$，

∴ $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$.

∴ $CF=5$.

∵ $DAE=\angle CFE$，$\angle DEA=\angle CEF$，

∴△$ADE\sim$△$FCE$. ∴ $\frac{AD}{CF}=\frac{DE}{CE}$





关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

设 $DE=x$，则 $\frac{3}{5}=\frac{x}{4-x}$，

解得 $x=\frac{3}{2}$，$\therefore DE=\frac{3}{2}$.

(2)**证明**：$\because AD/\!/AH$，$AH/\!/DF$，

$\therefore$ 四边形 $ADFH$ 是平行四边形.

$\because AD=FH=3$，$\because CH=2$，$BH=5$.

$\because AD/\!/BH$，$\therefore \angle DBC=\angle CHG$，$\angle DAG=\angle BHG$，$\therefore \triangle ADG\backsim\triangle HBG$.

$\therefore \frac{DG}{BG}=\frac{AD}{BH}$，$\therefore \frac{DG}{5-DG}=\frac{3}{5}$，$\therefore DG=\frac{15}{8}$.

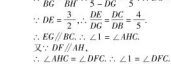
$\therefore DE=\frac{3}{2}$，$\therefore \frac{DE}{DG}=\frac{DC}{DB}=\frac{4}{5}$.

$\therefore EG/\!/BC$，$\therefore \angle 1=\angle AHC$.

又$\because DF/\!/AH$，

$\therefore \angle AHC=\angle DFC$，$\therefore \angle 1=\angle DFC$.

**8.** **解**：(方法一：作延长线)延长 $AD$，与地面交于点 $M$，如图①.



(第 8 题)

由 $AM/\!/FH$ 知 $\angle AMB=\angle FHG$.

又因为 $AB\perp BG$，$FG\perp BG$，$DC\perp BG$，

所以 $\triangle ABM\backsim\triangle DCM\backsim\triangle FGH$.

所以 $\frac{AB}{BM}=\frac{DC}{CM}=\frac{FG}{GH}$.

因为 $CD=2$ m，$FG=1.2$ m，$GH=2$ m，

所以 $\frac{2}{CM}=\frac{1.2}{2}$，解得 $CM=\frac{10}{3}$ m.

因为 $BC=4$ m，

所以 $BM=BC+CM=4+\frac{10}{3}=\frac{22}{3}$(m).

所以 $\frac{AB}{\frac{22}{3}}=\frac{1.2}{2}$，解得 $AB=4.4$ m.

故这棵树的高度是 4.4 m.

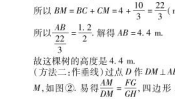
(方法二：作垂线)过点 $D$ 作 $DM\perp AB$ 于点 $M$，如图②. 易得 $\frac{AM}{DM}=\frac{FG}{GH}$，四边形 $BCDM$ 是矩形，$\therefore BM=CD=2$ m.

而 $DM=BC=4$ m，$AM=AB-BM=(AB-2)$ m，$FG=1.2$ m，$GH=2$ m，

所以 $\frac{AB-2}{4}=\frac{1.2}{2}$，解得 $AB=4.4$ m.

故这棵树的高度是 4.4 m.

**9.** **解**：如图，过点 $A$ 作 $AF\perp DE$，垂足为 $F$，并延长交 $BC$ 于点 $G$，$DE=6\times4=24$(m).




(第 9 题)

$\because DE/\!/BC$，$\therefore \triangle ADE\backsim\triangle ABC$.

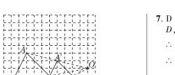
$\because AF\perp DE$，$DE/\!/BC$，$\therefore AG\perp BC$.

$\therefore \frac{AF}{AG}=\frac{DE}{BC}=\frac{30}{AG}=\frac{24}{60}$.

解得 $AG=75$ m，$\therefore FG=AG-AF=75-30=45$(m).

即河的宽度为 45 m.

**10.** **解**：画出图形，如图中的 $\triangle A'B'C'$ 即为所求作的图形.



(第 10 题)

**11.** (1)**解**：$\because AP$ 平分 $\angle BAC$，

$\therefore \angle PAC=\frac{1}{2}\angle BAC$.

又$\because AQ$ 平分 $\angle CAD$，$\therefore \angle CAQ=\frac{1}{2}\angle CAD$.

$\therefore \angle PAC+\angle CAQ=\frac{1}{2}\angle BAC+\frac{1}{2}\angle CAD=\frac{1}{2}(\angle BAC+\angle CAD)$.

又$\because \angle BAC+\angle CAD=180°$，

$\therefore \angle PAC+\angle CAQ=90°$，即 $\angle PAQ=90°$.

(2)**证明**：由(1)知 $\angle PAQ=90°$，

又$\because M$ 是线段 $PQ$ 的中点，

$\therefore PM=AM$，$\therefore \angle APM=\angle PAM$.

$\because \angle APM=\angle B+\angle BAP$，$\angle PAM=\angle CAM+\angle PAC$，$\angle BAP=\angle PAC$，$\therefore \angle B=\angle CAM$.

又$\because \angle AMC=\angle BMA$，

$\therefore \triangle ACM\backsim\triangle BMA$，$\therefore \frac{CM}{AM}=\frac{AM}{BM}$.

$\therefore AM^2=CM\cdot BM$，即 $PM^2=CM\cdot BM$.

## 下 册

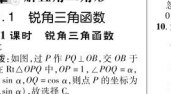
# 第 1 章　解直角三角形

## 1.1　锐角三角函数

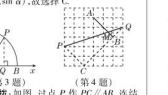
### 第 1 课时　锐角三角函数

**1.** C　**2.** C

**3.** C　**点拨**：如图，过 $P$ 作 $PQ\perp OB$，交 $OB$ 于点 $Q$，在 $Rt\triangle OPQ$ 中，$OP=1$，$\angle POQ=\alpha$，$\therefore PQ=\sin\alpha$，$OQ=\cos\alpha$，则点 $P$ 的坐标为 $(\cos\alpha,\sin\alpha)$，故选择 C.




(第 3 题)




(第 4 题)

**4.** D　**点拨**：如图，过点 $P$ 作 $PC/\!/AB$，连结 $QC$. 则 $\angle QMB=\angle P$.

借助网格可判断 $\angle C=90°$，

$\therefore \tan\angle QMB=\tan P=\frac{QC}{PC}=2$. 故选 D.

**5.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$或$\frac{2\sqrt{5}}{5}$　**点拨**：若 $\angle B=90°$，设 $AB=x$，则 $AC=2x$，所以 $BC=\sqrt{(2x)^2-x^2}=\sqrt{3}x$，所以 $\cos C=\frac{BC}{AC}=\frac{\sqrt{3}x}{2x}=\frac{\sqrt{3}}{2}$；若 $\angle A=90°$，设 $AB=x$，则 $AC=2x$，所以 $BC=\sqrt{(2x)^2+x^2}=\sqrt{5}x$，所以 $\cos C=\frac{BC}{AC}=\frac{2x}{\sqrt{5}x}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$；综上所述，$\cos C$ 的值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$或$\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

**6.** A

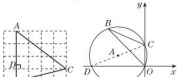
**7.** D　**点拨**：如图，过点 $C$ 作 $CD\perp AB$ 于点 $D$，则 $\angle ADC=90°$，

$\therefore AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

$\therefore \sin\angle BAC=\frac{CD}{AC}=\frac{4}{5}$.




(第 7 题)




(第 8 题)

**8.** D　**点拨**：如图，作直径 $CD$. 在 $Rt\triangle OCD$ 中，$CD=6$，$OC=2$，则 $OD=\sqrt{CD^2-OC^2}=4\sqrt{2}$，

$\therefore \tan\angle CDO=\frac{OC}{OD}=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

由圆周角定理得 $\angle OBC=\angle CDO$，

$\therefore \tan\angle OBC=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

**9.** **解**：$\because$ 方程 $2x^2-5x+2=0$ 的解是 $x_1=2$，$x_2=\frac{1}{2}$，

又$\because 0<\cos\alpha<1$($\alpha$ 为锐角)，

$\therefore \cos\alpha=\frac{1}{2}$.



第 9 题答图

**常见错解**：$\because$ 方程 $2x^2-5x+2=0$ 的解是 $x_1=2$，$x_2=\frac{1}{2}$，$\therefore \cos\alpha=2$ 或 $\cos\alpha=\frac{1}{2}$.

忽略了 $\cos\alpha$($\alpha$ 为锐角)的取值范围是 $0<\cos\alpha<1$.

**10.** **解**：(1)$\because DE/\!/BC$，$\therefore \triangle ADE\backsim\triangle ABC$，

$\therefore \frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}$.

又$\because DE=3$，$BC=9$，$\therefore \frac{AD}{AB}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

(2)根据(1)中 $\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}$，

得 $\frac{AD}{AD+BD}=\frac{DE}{BC}$.

$\because BD=10$，$DE=3$，$BC=9$，

$\therefore \frac{AD}{AD+10}=\frac{3}{9}$，

解得 $AD=5$，$\therefore AB=15$.

$\therefore \sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$.

**11.** (1)**证明**：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\therefore AD=BC$，$AD/\!/BC$.

$\because DE=AD$，$\therefore DE=BC$，$DE/\!/BC$.

$\therefore$ 四边形 $BCED$ 是平行四边形.

(2)**解**：连结 $BE$.

$\because DA=DB=2$，$DE=AD$，

$\therefore DE=2$，且 $BD=\frac{1}{2}AE$.

$\therefore \angle ABE=90°$，$AE=4$.

$\therefore \cos A=\frac{AB}{AE}=\frac{1}{4}$.

$\therefore AB=\frac{1}{4}AE=\frac{1}{4}\times4=1$.

$\therefore BE=\sqrt{AE^2-AB^2}=\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$，

即点 $B$ 到点 $E$ 的距离为 $\sqrt{15}$.

**12.** (1)**证明**：$\because$ 四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$，

$\therefore \angle CDA=\angle ABE$，

$\because \widehat{BF}=\widehat{AD}$，$\therefore \angle DCA=\angle BAE$，

$\therefore \triangle ADC\backsim\triangle EBA$.

(2)**解**：$\because A$ 是 $\widehat{BDC}$ 的中点，

$\therefore \widehat{AB}=\widehat{AC}$，$AB=AC=8$.

$\because \triangle ADC\backsim\triangle EBA$，

$\therefore \angle CAD=\angle AEC$，$\frac{DC}{AB}=\frac{AC}{AE}$，即 $\frac{5}{8}=\frac{8}{AE}$，

$\therefore AE=\frac{64}{5}$，

$\therefore \tan\angle CAD=\tan\angle AEC=\frac{AC}{AE}=\frac{8}{\frac{64}{5}}=\frac{5}{8}$.

**13.** **解**：(1)过点 $A$ 作 $AE\perp x$ 轴于点 $E$，

设反比例函数的表达式为 $y=-\frac{k}{x}$，

$\therefore AE\perp x$ 轴，$\angle AEO=90°$.

在 $Rt\triangle AEO$ 中，$AO=5$，

$\sin\angle AOC=\frac{3}{5}$，$\therefore \angle AEO=90°$，

$\therefore AE=AO\cdot\sin\angle AOC=3$，

$OE=\sqrt{AO^2-AE^2}=4$，

$\therefore$ 点 $A$ 的坐标为 $(-4,3)$.

$\because A(-4,3)$ 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象上，$\therefore 3=\frac{k}{-4}$，解得 $k=-12$.

$\therefore$ 反比例函数的表达式为 $y=-\frac{12}{x}$.

(2)$\because$ 点 $B(m,-4)$ 在反比例函数 $y=-\frac{12}{x}$ 的图象上，$\therefore -4=-\frac{12}{m}$，

解得 $m=3$，$\therefore$ 点 $B$ 的坐标为 $(3,-4)$.

设直线 $AB$ 的表达式为 $y=ax+b$，

将点 $A(-4,3)$，点 $B(3,-4)$ 的坐标代入 $y=ax+b$ 中，得

$\begin{cases}3=-4a+b,\\-4=3a+b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-1,\\b=-1.\end{cases}$

$\therefore$ 一次函数表达式为 $y=-x-1$.

$\because$ 一次函数 $y=-x-1$ 中 $y=0$，

则 $0=-x-1$，解得 $x=-1$，

即点 $C$ 的坐标为 $(-1,0)$.

$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}OC\cdot(y_A-y_B)=\frac{1}{2}\times1\times[3-(-4)]=\frac{7}{2}$.

### 第 2 课时　特殊角的三角函数值

**1.** C　**2.** D　**3.** A　**4.** C

**5.** A　**点拨**：$\because$ 点 $O$ 在 $\triangle ABC$ 内，且到三个顶点的距离相等，$\therefore$ 点 $O$ 是 $\triangle ABC$ 的外心，

$\therefore \angle BOC=2\angle BAC$.

$\because \angle BOC=120°$，

$\therefore \angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC=60°$.

$\therefore \tan\angle BAC=\tan 60°=\sqrt{3}$. 故选 A.

**6.** A　**7.** B　**8.** 30°　**9.** A　**10.** B

**11.** D　**点拨**：可取 $\angle A=60°$，则 $\tan A=\sqrt{3}$，$\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos A=\frac{1}{2}$，

$\therefore \tan A>\sin A>\cos A$.

**12.** 错解：在 $\triangle ABC$ 中，

$\because \frac{BC}{AB}=\sin A$，

$\therefore BC=AB\cdot\sin A=2\sin 60°=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

**诊断**：错解的原因是忽略了锐角三角函数使用的前提条件是在直角三角形中. 本题中没有明确指出 $\triangle ABC$ 是直角三角形，因此，不能直接得到 $\frac{BC}{AB}=\sin A$，必须通过添加辅助线构造出直角三角形，再利用三角函数的定义来解决.

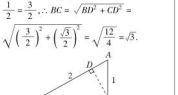
**正解**：过点 $C$ 作 $CD\perp AB$ 于点 $D$，如图所示. 在 $Rt\triangle ADC$ 中，

$\because \cos A=\frac{AD}{AC}$，$\sin A=\frac{CD}{AC}$，

$\therefore AD=AC\cdot\cos A=1\times\cos 60°=\frac{1}{2}$，

$CD=AC\cdot\sin A=1\times\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

在 $Rt\triangle BDC$ 中，$BD=AB-AD=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，$\therefore BC=\sqrt{BD^2+CD^2}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{12}{4}}=\sqrt{3}$.




(第 12 题)

**13.** **解**：(1)原式 $=\frac{1}{4}+2-2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}=\frac{1}{4}+2-\sqrt{3}+\sqrt{3}=\frac{9}{4}$.

(2)原式 $=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\times1}{\frac{\sqrt{3}}{3}}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1$.

(3)原式 $=\frac{1}{2}-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{2}{2}=1$.

**14.** 锐;1;1;1.　(1)1

(2)$\because \sin A=\frac{a}{c}$，$\sin B=\frac{b}{c}$，

$a^2+b^2=c^2$，

$\therefore \sin^2A+\sin^2B=\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}=\frac{a^2+b^2}{c^2}=1$.

(3)$\because \angle A+\angle B=90°$，

$\therefore \sin^2A+\sin^2B=1$，

又$\because \angle A$，$\angle B$ 均为锐角，且 $\sin A=\frac{5}{13}$，

$\therefore \sin B=\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=\frac{12}{13}$.

**15.** **解**：在 $Rt\triangle ABC$ 中，$PE\perp AB$，$PF\perp BC$，

$\because \angle A=30°$，$AC=\frac{BC}{\tan A}=2\sqrt{3}$，

则 $EF=AC=2\sqrt{3}$.

$\because \angle E=45°$，

$\therefore FC=EF\cdot\sin E=\sqrt{6}$，

$\therefore AF=AC-FC=2\sqrt{3}-\sqrt{6}$.

**16.** **解**：(1)$\because A(0,b)$，$D(\sqrt{3}b,0)$，

$\therefore \tan\angle ADO=\frac{b}{\sqrt{3}b}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore \angle ADO=30°$.

(2)如图，过 $B$ 作 $BM\perp y$ 轴于 $M$，过 $C$ 作 $CN\perp y$ 轴于 $N$.

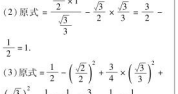
设点 $B$ 和点 $C$ 的横坐标分别为 $m$，$n$，则 $AB=\frac{2\sqrt{3}m}{3}$，$AC=\frac{2\sqrt{3}n}{3}$，

$\therefore AB\cdot AC=\frac{2\sqrt{3}m}{3}\cdot\frac{2\sqrt{3}n}{3}=\frac{4mn}{3}=4$，

$\therefore mn=3$.

又$\because m$，$n$ 为方程 $-\frac{\sqrt{3}}{3}x+b=\frac{k}{x}$ 的两根，

$\therefore mn=\sqrt{3}k$，$\therefore 3=\sqrt{3}k$，$\therefore k=\sqrt{3}$.




(第 16 题)

## 1.2　锐角三角函数的计算

**1.** C　**2.** A　**3.** B　**4.** D　**5.** D　**6.** A

**7.** D　**点拨**：易得 $\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{5}{13}$，再用计算器算求 $\angle A$.

**8.** 27.8°　**9.** C　**10.** C　**11.** A

**12.** **解**：$\sin 35°29'\approx0.580$.

**点拨**：易错误地认为 $35°29'=35.29°$，而计算出错，$35°29'=35.48°\neq35.29°$.

**13.** **解**：(1)$\because \sin\angle B_1A_1C_1=\frac{B_1C_1}{A_1B_1}$，

$\sin\angle B_2A_2C_2=\frac{B_2C_2}{A_2B_2}$，

$\sin\angle B_3A_3C_3=\frac{B_3C_3}{A_3B_3}$，

$AB_1=AB_2=AB_3$，$B_1C_1<B_2C_2<B_3C_3$，

$\therefore \frac{B_1C_1}{AB_1}<\frac{B_2C_2}{AB_2}<\frac{B_3C_3}{AB_3}$，

$\therefore \sin\angle B_1A_1C_1<\sin\angle B_2A_2C_2<\sin\angle B_3A_3C_3$.

即锐角的正弦值随角度的增大而增大.

(2)$\because \cos\angle B_1A_1C=\frac{AC_1}{AB_1}$，

$\cos\angle B_2A_2C=\frac{AC_2}{AB_2}$，

$\cos\angle B_3A_3C=\frac{AC_3}{AB_3}$，

$AB_1>AB_2>AB_3$，

$\therefore \frac{AC_1}{AB_1}<\frac{AC_2}{AB_2}<\frac{AC_3}{AB_3}$，

$\therefore \cos\angle B_1AC>\cos\angle B_2AC>\cos\angle B_3AC$.

即锐角的余弦值随角度的增大而减小.

(3)$\sin 18°<\sin 34°<\sin 50°<\sin 62°<\sin 88°$，

$\cos 88°<\cos 62°<\cos 50°<\cos 34°<\cos 18°$.

**14.** **解**：(1)$\because PE\perp AB$，$PF\perp BC$，

$\therefore \sin\angle EBP=\frac{PE}{BP}=\sin 40°$，$\sin\angle FBP=\frac{PF}{BP}=\sin 20°$.

又$\because \sin 40°>\sin 20°$，

$\therefore \frac{PE}{BP}>\frac{PF}{BP}$，

$\therefore PE>PF$.

(2)$\because \alpha$，$\beta$ 都是锐角，且 $\alpha>\beta$，

$\therefore \sin\alpha>\sin\beta$.

又$\because \sin\angle EBP=\frac{PE}{PB}=\sin\alpha$，





关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\sin\angle FBP=\frac{PF}{PB}=\sin\beta$,

$\therefore\frac{PE}{PB}>\frac{PF}{PB}$, $\therefore PE>PF$.

**15.** 解：(1) $\because\angle CGD=42°$，$\angle C=90°$，

$\therefore\angle CDG=90°-42°=48°$.

$\because DG/\!/EF$，$\therefore\angle DEF=\angle CDG=48°$.

(2) $\because$ 点 $H$、$B$ 的读数分别为 4，13.4，

$\therefore HB=13.4-4=9.4$(cm)，

$\therefore BC=HB\cdot\cos 42°\approx 9.4\times 0.74\approx 6.96$(cm).

答：$BC$ 的长约为 6.96 cm.

**16.** 解：(1) 如图，过 $C$ 作 $AB$ 的垂线，设垂足为 $D$，根据题意可得 $\angle ACD=42°$，$\angle BCD=55°$.

设 $CD$ 的长为 $x$ 海里，在 Rt$\triangle ACD$ 中，$\tan 42°=\frac{AD}{CD}$，则 $AD=x\cdot\tan 42°$ 海里，

在 Rt$\triangle BCD$ 中，$\tan 55°=\frac{BD}{CD}$，

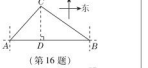
则 $BD=x\cdot\tan 55°$ 海里，

$\because AB=AD+BD=80$ 海里，

$\therefore x\cdot\tan 42°+x\cdot\tan 55°=80$，

解得 $x\approx 34.4$，

即海轮在航行过程中与灯塔 $C$ 的最短距离约为 34.4 海里.




(第 16 题)

(2) 在 Rt$\triangle BCD$ 中，$\cos 55°=\frac{CD}{BC}$，

$\therefore BC=\frac{CD}{\cos 55°}\approx 60$(海里)，即海轮在 $B$ 处时与灯塔 $C$ 的距离约是 60 海里.

## 阶段方法技巧训练

### 专训 1

**1.** $\frac{4}{5}$

**2.** 解：$\because AD\perp BC$，$\therefore\tan\angle BAD=\frac{BD}{AD}$

$\because\tan\angle BAD=\frac{3}{4}$，$AD=12$，

$\therefore\frac{3}{4}=\frac{BD}{12}$，$\therefore BD=9$.

$\therefore CD=BC-BD=14-9=5$，

$\therefore$ 在 Rt$\triangle ADC$ 中，

$AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=\sqrt{12^2+5^2}=13$，

$\therefore\sin C=\frac{AD}{AC}=\frac{12}{13}$.

**3.** 解：(1) 解方程组 $\begin{cases}y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2},\\ y=2x,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=1,\\ y=2x,\end{cases}$

$\therefore$ 点 $B$ 的坐标为 $(1,2)$.

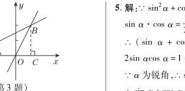
(2) 如图，过点 $B$ 作 $BC\perp x$ 轴于点 $C$，由 $\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}=0$，解得 $x=-3$，则 $A(-3,0)$，

$\therefore OA=3$，$\therefore AC=OA+OC=4$，

$\therefore AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=2\sqrt{5}$，

$\therefore\sin\angle BAC=\frac{BC}{AB}=\frac{2}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

即 $\sin\angle BAO=\frac{\sqrt{5}}{5}$.




(第 3 题)

**4.** D　**5.** B　**6.** 30°　**7.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

**8.** 解：$\because b^2=(c+a)(c-a)$，$\therefore b^2=c^2-a^2$，即 $c^2=a^2+b^2$，$\therefore\triangle ABC$ 是直角三角形.

$\because 5b-4c=0$，$\therefore 5b=4c$，

则 $\frac{b}{c}=\frac{4}{5}$，设 $b=4k$，则 $c=5k$，

那么 $a=3k$.

$\therefore\sin A+\sin B=\frac{3k}{5k}+\frac{4k}{5k}=\frac{7}{5}$.

**9.** 解：$\because CD$ 是斜边 $AB$ 上的中线，

$\therefore CD=AD=BD$，$\therefore\angle DCB=\angle B$.

$\because\angle ACD+\angle DCB=90°$，

$\angle ACD+\angle CAH=90°$，

$\therefore\angle DCB=\angle CAH=\angle B$.

在 Rt$\triangle ACH$ 中，$AH=2CH$，$\therefore AC=\sqrt{5}CH$.

$\therefore\sin B=\sin\angle CAH=\frac{CH}{\sqrt{5}CH}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

### 专训 2

**1.** 解：(方法一) 原式 $=$

$\frac{(\sin A-3\cos A)\div\cos A}{(4\sin A+\cos A)\div\cos A}=\frac{\frac{\sin A}{\cos A}-3}{\frac{4\sin A}{\cos A}+1}=\frac{\tan A-3}{4\tan A+1}$.

$\because\frac{\sin A}{\cos A}=4$，$\therefore$ 原式 $=\frac{4-3}{4\times 4+1}=\frac{1}{17}$.

(方法二)：$\because\frac{\sin A}{\cos A}=4$，$\therefore\sin A=4\cos A$.

$\therefore$ 原式 $=\frac{4\cos A-3\cos A}{4\times 4\cos A+\cos A}=\frac{\cos A}{17\cos A}=\frac{1}{17}$.

**2.** 解：$\because\sin\alpha=\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=\frac{1}{2}$，

即 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}$.

$\therefore 1-2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}$，

即 $2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}$.

$\therefore(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

又 $\because\alpha$ 为锐角，$\therefore\sin\alpha+\cos\alpha>0$.

$\therefore\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

**3.** C　**点拨：**$\because(45°-\alpha)+(45°+\alpha)=90°$，$\therefore\sin(45°-\alpha)=\cos(45°+\alpha)$，$\sin^2(45°-\alpha)+\sin^2(45°+\alpha)=\cos^2(45°+\alpha)+\sin^2(45°+\alpha)=1$.

**4.** 解：由 $1^\circ\cdot\tan 2^\circ\cdot\tan 3^\circ\cdot\cdots\cdot\tan 88^\circ\cdot\tan 89^\circ=(\tan 1^\circ\cdot\tan 89^\circ)\cdot(\tan 2^\circ\cdot\tan 88^\circ)\cdot\cdots\cdot(\tan 44^\circ\cdot\tan 46^\circ)\cdot\tan 45^\circ=1$.

**点拨：**互余的两角的正切值的积为 1，即若 $\alpha+\beta=90°$，则 $\tan\alpha\cdot\tan\beta=1$.

**5.** 解：$\because\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，

$\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{12}{25}$，

$\therefore(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=1+2\times\frac{12}{25}=\frac{49}{25}$.

$\because\alpha$ 为锐角，$\therefore\sin\alpha+\cos\alpha>0$.

$\therefore\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{7}{5}$.

又 $\because\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{12}{25}$，

$\therefore$ 以 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$ 为根的一元二次方程为 $x^2-\frac{7}{5}x+\frac{12}{25}=0$.

**6.** 解：$\because\alpha$ 是方程 $2x^2-7x+3=0$ 的一个根，$\therefore$ 由求根公式，得

$\sin\alpha=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\times 2\times 3}}{2\times 2}=\frac{7\pm 5}{4}$，$\therefore\sin\alpha=\frac{1}{2}$ 或 $\sin\alpha=3$(不符合题意，舍去).

$\because\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，

$\therefore\cos^2\alpha=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$.

又 $\because\alpha$ 为锐角，$\therefore\cos\alpha>0$，$\therefore\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\therefore\frac{\sqrt{1-2\sin\alpha\cos\alpha}}{\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}}=\frac{}{\sqrt{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}}=|\sin\alpha-\cos\alpha|=\left|\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

## 1.3　解直角三角形

### 第 1 课时　解直角三角形

**1.** D　**2.** D

**3.** C　**点拨：**因为 $AB=AC$，$\angle C=72°$，所以 $\angle ABC=\angle C=72°$，所以 $\angle A=180°-\angle ABC-\angle C=180°-72°-72°=36°$.

因为 $DE\perp AB$，$D$ 是 $AB$ 中点，所以 $DE$ 是线段 $AB$ 的垂直平分线，所以 $AD=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 4=2$，$AE=BE$，所以 $\angle ABE=\angle A=36°$，所以 $\angle CBE=\angle ABC-\angle ABE=72°-36°=36°$.

所以 $\angle BEC=180°-\angle CBE-\angle C=180°-36°-72°=72°$，

所以 $\angle BEC=\angle C$，所以 $BC=BE$.

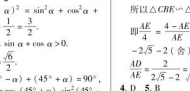
因为 $\angle C=\angle G$，$\angle A=\angle EBC=36°$，

所以 $\triangle CBE\backsim\triangle CAB$，于是 $\frac{CB}{CA}=\frac{CE}{CB}$，

即 $\frac{AE}{4}=\frac{4-AE}{AE}$，解得 $AE=2\sqrt{5}-2$ 或 $-2\sqrt{5}-2$(舍). 故 Rt$\triangle ADE$ 中，$\cos A=\frac{AD}{AE}=\frac{2}{2\sqrt{5}-2}=\frac{1}{\sqrt{5}-1}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$，故选 C.

**4.** D　**5.** B

**6.** 2　**点拨：**过点 $A$ 作 $AD\perp BC$，垂足为 $D$，如图所示.




(第 6 题)

设 $AC=x$，则 $AB=\sqrt{2}x$.

在 Rt$\triangle ACD$ 中，$AD=AC\cdot\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}x$，

$CD=AC\cdot\cos C=\frac{\sqrt{2}}{2}x$；

在 Rt$\triangle ABD$ 中，$AB=\sqrt{2}x$，$AD=\frac{\sqrt{2}}{2}x$，

$\therefore BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}x$.

$\therefore BC=BD+CD=\frac{\sqrt{6}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}x=\sqrt{6}+\sqrt{2}$.

$\therefore x=2$，即 $AC=2$.

**7.** D

**8.** C　**点拨：**$\because\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{4}{5}$，

$\therefore$ 设 $BC=4x$，$AB=5x$，

又 $\because AC^2+BC^2=AB^2$，$\therefore 6^2+(4x)^2=(5x)^2$，解得 $x=2$ 或 $x=-2$(舍)，则 $BC=4x=8$(cm)，故选 C.

**9.** C　**点拨：**先根据已知求边长 $BC$，再根据点 $P$ 和点 $Q$ 的速度表示 $BP$ 和 $BQ$ 的长，设点 $PBQ$ 的面积为 $S$，利用直角三角形的面积公式列关于 $S$ 与 $t$ 的函数关系式，并求最值即可.

**10.** 解：在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle B=90°$，

$\therefore AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}$.

$\therefore\tan A=\frac{BC}{AB}=\frac{3}{5}$，

$\cos A=\frac{AB}{AC}=\frac{5}{\sqrt{34}}=\frac{5\sqrt{34}}{34}$.

**易错总结：**本题中已指出 $\angle B=90°$，所以 $AC$ 为斜边，而受习惯的影响，常误以为 $\angle C$ 的对边 $AB$ 是斜边. 因此，解题时应认真审题，注意题给条件，分清斜边和直角边，以防出错.

**11.** 解：(1) $\because\angle A=60°$，$\angle ADE=90°$，

$AB=6$，$\tan A=\frac{BE}{AB}$，

$\therefore E=30°$，$BE=6\cdot\tan 60°=6\sqrt{3}$.

又 $\because\angle DCE=90°$，$CD=4$，$\sin E=\frac{CD}{CE}$，

$\angle E=30°$，$\therefore CE=\frac{4}{\frac{1}{2}}=8$，

$\therefore BC=BE-CE=6\sqrt{3}-8$.

(2) $\because AB=AE=90°$，$AB=6$，

$\sin A=\frac{4}{5}=\frac{BE}{AE}$，

$\therefore$ 设 $BE=4a$，则 $AE=5a$，得 $AB=3a$，

$\therefore 3a=6$，得 $a=2$，$\therefore BE=8$，$AE=10$，

$\therefore\tan E=\frac{AB}{BE}=\frac{6}{8}=\frac{BD}{DE}=\frac{4}{DE}$，

解得 $DE=\frac{16}{3}$，

$\therefore AD=AE-DE=10-\frac{16}{3}=\frac{14}{3}$，

即 $AD$ 的长是 $\frac{14}{3}$.

**12.** 解：(1) 过点 $A$ 作 $AE\perp BC$ 于点 $E$，$\because\cos C=\frac{2}{\sqrt{5}}$，$\therefore\angle C=45°$.

在 Rt$\triangle ACE$ 中，$CE=AC\cdot\cos C=1$，$\therefore AE=CE=1$.

在 Rt$\triangle ABE$ 中，$\tan B=\frac{1}{3}$，即 $\frac{AE}{BE}=\frac{1}{3}$，




$\therefore BE=3AE=3$，$\therefore BC=BE+CE=4$.

(2) $\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 的中线，$\therefore CD=\frac{1}{2}BC=2$，$\therefore DE=CD-CE=1$.

$\because AE\perp BC$，$DE=AE$，$\therefore\angle ADC=45°$，

$\therefore\sin\angle ADC=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**13.** (1) **证明：**连结 $BD$，如图①所示.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

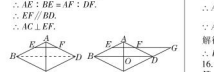
$\therefore AB=AD$，$AC\perp BD$.

$\because BE=DF$，$\therefore AE=AF$.

$\because AE\perp BE=AF\perp DF$，

$\therefore EF/\!/BD$.

$\therefore AC\perp EF$.




(第 13 题)

(2) 解：如图②所示.

由(1) 得 $EG/\!/BD$，$\therefore\angle G=\angle CDB$.

又 $\because\angle ADO=\angle CDB$，$\therefore\angle G=\angle ADO$.

$\therefore\tan G=\tan\angle ADO=\frac{OA}{OD}=\frac{1}{2}$.

$\therefore OA=\frac{1}{2}OD$，$\therefore BD=4$，$\therefore OD=2$.

$\therefore OA=1$，即 $AO$ 的长为 1.

**14.** 解：(1) $\because DH\perp AB$，$\therefore\angle CHD=\angle CBA=90°$，又 $\because\angle HCD=\angle BCA$，

$\therefore\triangle DHC\backsim\triangle ABC$，$\therefore\frac{DC}{AC}=\frac{HC}{BC}$.

$\because AC=3CD$，$BC=3$，$\therefore CH=1$.

$\therefore BH=BC+CH=4$.

在 Rt$\triangle BHD$ 中，$\cos\angle HBD=\frac{BH}{BD}$，

$\therefore BD\cdot\cos\angle HBD=BH=4$.

(2) 方法一：$\because\angle A=\angle CBD$，$\angle ABC=\angle BHD$，

$\therefore\triangle ABC\backsim\triangle BHD$，$\therefore\frac{BC}{HD}=\frac{AB}{BH}$.

$\therefore\triangle ABC\backsim\triangle DHC$，

$\therefore\frac{AB}{DH}=\frac{AC}{DC}=\frac{3}{1}$，$\therefore AB=3DH$，

$\therefore\frac{3DH}{DH}=4$，$\therefore DH=2$，$\therefore AB=6$.

方法二：$\because\angle CBD=\angle A$，$\angle BDC=\angle ADB$，

$\therefore\triangle CDB\backsim\triangle BDA$，

$\therefore\frac{CD}{BD}=\frac{BD}{AD}$，即 $BD^2=CD\cdot AD$.

$\because BD^2=CD\cdot 4CD=4CD^2$.

$\therefore BD=2CD$.

$\therefore\triangle CDB\backsim\triangle BDA$，$\therefore\frac{CD}{BD}=\frac{BC}{AB}$

$\therefore\frac{CD}{2CD}=\frac{3}{AB}$，$\therefore AB=6$.

### 第 2 课时　用解直角三角形解坡度问题

**1.** A　**2.** 1.02　**3.** A　**4.** B　**5.** 12

**6.** 解：$\because$ 斜坡 $AB$ 的坡度为 $1:\sqrt{3}$，

$\therefore\tan\angle ABE=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore\angle ABE=30°$.

在 Rt$\triangle AEB$ 中，$AB=200$，$\therefore AE=\frac{1}{2}AB=100$.

$\because AC=20$，$\therefore CE=AE-AC=80$.

$\because$ 斜坡 $CD$ 的坡度为 $1:4$，

$\therefore\frac{CE}{DE}=\frac{1}{4}$，即 $\frac{80}{DE}=\frac{1}{4}$，解得 $DE=320$.

$\therefore CD=\sqrt{CE^2+DE^2}=\sqrt{80^2+320^2}=80\sqrt{17}$(米).

答：斜坡 $CD$ 的长是 $80\sqrt{17}$ 米.

**7.** 解：设 $DH=x$ 米，

$\because\angle CDH=60°$，$\angle H=90°$，

$\therefore CH=DH\cdot\tan 60°=\sqrt{3}x$ 米.

$\because BH=BC+CH=(2+\sqrt{3}x)$ 米.

在 Rt$\triangle ABH$ 中，$\angle H=90°$，$\angle A=30°$，

$\therefore AH=\frac{BH}{\tan 30°}=\sqrt{3}BH=(2\sqrt{3}+3x)$ 米.

$\because AH=AD+DH$，$\therefore 2\sqrt{3}+3x=20+x$.

$\therefore 2x=10-\sqrt{3}$.

$\therefore BH=2+\sqrt{3}\times(10-\sqrt{3})=10\sqrt{3}-1\approx 16.3$(米).

答：立柱 $BH$ 的长约为 16.3 米.

**8.** 解：由 $AE\perp BC$，$DF\perp BC$，

易得四边形 $AEFD$ 是矩形.

$\therefore AD=EF=3$.

$\because$ 坡角 $\alpha=45°$，$\beta=30°$，

$\therefore BE=\frac{AE}{\tan\alpha}=\frac{6}{\tan 45°}=\frac{6}{1}=6$，

$CF=\frac{DF}{\tan\beta}=\frac{6}{\tan 30°}=\frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=6\sqrt{3}$.

$\therefore BC=BE+EF+CF=6+3+6\sqrt{3}=9+6\sqrt{3}$(m).

即 $BC$ 的长为 $(9+6\sqrt{3})$ m.

**9.** 解：(1) 作 $BH\perp AF$ 于 $H$，如图，易得四边形 $BEFH$ 为矩形，

$\therefore EF=BH$.

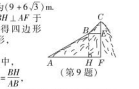
在 Rt$\triangle ABH$ 中，

$\sin\angle BAH=\frac{BH}{AB}$，

$\therefore BH=AB\cdot\sin\angle BAH\approx 800\times\sin 30°=400$(米).

$\therefore EF=BH=400$ 米.

答：$AB$ 段山坡的高度 $EF$ 为 400 米.




(第 9 题)

(2) 在 Rt$\triangle CBE$ 中，$\because\sin\angle CBE=\frac{CE}{BC}$，

$\therefore CE=BC\cdot\sin\angle CBE\approx 200\times\sin 45°=100\sqrt{2}\approx 141.4$(米).

$\therefore CF=CE+EF\approx 141.4+400=541$(米).

答：山峰的高度 $CF$ 约为 541 米.

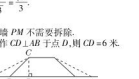
**10.** 解：(1) $\because$ 新坡面的坡度为 $1:\sqrt{3}$，

$\therefore\tan\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$\therefore\alpha=30°$.

(2) 该文化墙 $PM$ 不需要拆除.

理由：如图，作 $CD\perp AF$ 于点 $D$，则 $CD=6$ 米.




(第 10 题)

$\because$ 新坡面的坡度为 $1:\sqrt{3}$，

$\therefore\tan\angle CAD=\frac{CD}{AD}=\frac{6}{AD}=\frac{1}{\sqrt{3}}$，

解得 $AD=6\sqrt{3}$ 米.

$\because$ 坡面 $BC$ 的坡度为 $1:1$，

$\therefore BD=CD=6$ 米.

$\therefore AB=AD-BD=(6\sqrt{3}-6)$ 米.

又 $\because PB=8$ 米，





关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore PA = PB - AB = 8 - (6\sqrt{3} - 6) = 14 - 6\sqrt{3} \approx 14 - 6 \times 1.732 \approx 3.6$(米).
$\because 3.6 > 3$,∴ 该文化墙 *PM* 不需要拆除.

## 第 3 课时　用解直角三角形解方位角问题

**1.** D　**2.** 没有超速　**3.** B

**4.** B　**点拨**：根据题意易得 $\angle CAB = 65° - 20° = 45°$，$\angle ACB = 40° + 20° = 60°$，$AB = 30\sqrt{2}$ km.
如图，过点 *B* 作 $BE \perp AC$ 于点 *E*，




（第 4 题）

$\therefore \angle AEB = \angle CEB = 90°$.
在 Rt△*ABE* 中，$\because \angle EAB = 45°$，
$AB = 30\sqrt{2}$ km，$\therefore AE = BE = AB \cdot \sin 45° = 30\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 30$(km).
在 Rt△*CBE* 中，$\because \angle ACB = 60°$，
$\therefore CE = \frac{BE}{\tan 60°} = \frac{30}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{3}$(km).
$\therefore AC = AE + CE = (30 + 10\sqrt{3})$ km.

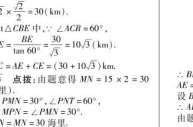
**5.** $15\sqrt{3}$　**点拨**：由题意得 $MN = 15 \times 2 = 30$(海里)，
$\because \angle PMN = 30°$，$\angle PNT = 60°$，
$\therefore \angle MPN = \angle PMN = 30°$.
$\therefore PN = MN = 30$ 海里.
$\because PTN = 90°$，$\therefore PT = PN \cdot \sin \angle PNT = 30 \times \sin 60° = 30 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}$(海里).

**6.** 解：(1) 作 *BD* ⊥ *CA*，交 *CA* 的延长线于 *D*，
由题意得，$\angle BAD = 45°$，$\angle BCA = 30°$，
$\therefore \angle CBA = \angle BAD - \angle BCA = 15°$.
(2) 设 $BD = x$ m，
$\because \angle BCA = 30°$，$\therefore CD = \frac{BD}{\tan 30°} = \sqrt{3}x$ m，
$\because \angle BAD = 45°$，$\therefore AD = BD = x$ m，
则 $\sqrt{3}x - x = 60$，解得 $x = \frac{60}{\sqrt{3} - 1} \approx 82$，
$\therefore$ 这段河的宽约为 82 m.

**7.** 解：没有触礁的危险. 理由如下：
作 *PC* ⊥ *AB*，交 *AB* 的延长线于 *C*，$\angle PAC = 30°$，$\angle PBC = 45°$，*AB* = 8 海里，
设 $PC = x$ 海里，
在 Rt△*PBC* 中，$\because \angle PBC = 45°$，
$\therefore \triangle PBC$ 为等腰直角三角形，
$\therefore BC = PC = x$ 海里，
在 Rt△*PAC* 中，$\because \tan \angle PAC = \frac{PC}{AC}$，
$\therefore AC = \frac{PC}{\tan 30°}$ 海里，即 $8 + x = \frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{3}}$，
解得 $x = 4(\sqrt{3} + 1) \approx 10.92$，
即 $PC \approx 10.92$ 海里，
$\because 10.92 > 10$，∴ 海轮继续向正东方向航行，没有触礁的危险.

**8.** 解：(1) 作 $PC \perp AB$ 于 *C*，
则 $\angle PCA = \angle PCB = 90°$.
由题意得 $PA = 120$ 海里，$\angle A = 30°$，
$\therefore PC = \frac{1}{2}PA = 60$ 海里.
在 Rt△*PBC* 中，$\angle B = 45°$，
$\therefore PB = \frac{PC}{\sin 45°} = \frac{60}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 60\sqrt{2}$(海里).
**答**：收到求救讯息时事故渔船 *P* 与救助船 *B* 之间的距离为 $60\sqrt{2}$ 海里.
(2) 救助船 *A* 所用的时间为 $\frac{120}{40} = 3$(时)，
救助船 *B* 所用的时间为 $\frac{60\sqrt{2}}{30} = 2\sqrt{2}$(时).
$\because 3 > 2\sqrt{2}$，∴ 救助船 *B* 先到达.

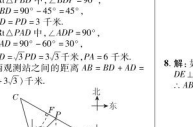
**9.** 解：(1) 由题意得 $\angle CAB = 30°$，$\angle ACB = 90° - \beta = 20°$ 海里，$\therefore AB = 2BC = 40$(海里).
**答**：渔船 *B* 航行的距离是 40 海里.
(2) 如图，过 *B* 作 *BE* ⊥ *AE* 于 *E*，过 *D* 作 *DH* ⊥ *AE*，交 *AE* 延长线于 *H*，延长 *CB* 交 *DH* 于 *G*，则四边形 *AEBC* 和四边形 *BEHG* 是矩形.




（第 9 题）

$\therefore BE = GH = AC = AB \cdot \cos 30° = 20\sqrt{3}$ 海里，$AE = BC = 20$ 海里.
设 $BG = EH = x$ 海里，
$\therefore AH = (x + 20)$ 海里.
由题意易得 $\angle BDG = 60°$，$\angle ADH = 45°$，
$\therefore DG = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ 海里，$DH = AH$.
$\therefore 20\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}x = x + 20$，解得 $x = 20\sqrt{3}$.
$\therefore BG = 20\sqrt{3}$ 海里，$AH = (20 + 20\sqrt{3})$ 海里.
$\therefore BD = \frac{BG}{\sin 60°} = 40$(海里)，
$AD = \sqrt{2}AH = (20\sqrt{2} + 20\sqrt{6})$(海里).
**答**：中国渔政船此时到 *A* 渔船的距离为 $(20\sqrt{2} + 20\sqrt{6})$ 海里，到 *B* 渔船的距离为 40 海里.

**10.** 解：(1) 如图，过点 *P* 作 *PD* ⊥ *AB* 于点 *D*.
在 Rt△*PBD* 中，$\because BDP = 90°$，
$\therefore PBD = 90° - 45° = 45°$.
$\therefore BD = PD = 3$ 千米.
在 Rt△*PAD* 中，$\because ADP = 90°$，
$\therefore PAD = 90° - 60° = 30°$.
$\therefore AD = \sqrt{3}PD = 3\sqrt{3}$ 千米，*PA* = 6 千米.
∴ 两艘测法之间的距离 $AB = BD + AD = (3 + 3\sqrt{3})$ 千米.



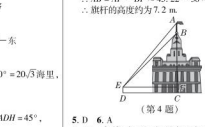

（第 10 题）

(2) 如图，过点 *B* 作 *BF* ⊥ *AC* 于点 *F*.
根据题意得 $\angle ABC = 105°$，
在 Rt△*ABF* 中，$\angle AFB = 90°$，$\angle BAF = 30°$，
$\therefore BF = \frac{1}{2}AB = \frac{3 + 3\sqrt{3}}{2}$ 千米，
$AF = \frac{\sqrt{3}}{2}AB = \frac{3\sqrt{3} + 9}{2}$ 千米.
在 △*ABC* 中，$\angle C = 180° - \angle BAC - \angle ABC = 45°$.
在 Rt△*BCF* 中，$\angle BFC = 90°$，$\angle C = 45°$，
$\therefore CF = BF = \frac{3 + 3\sqrt{3}}{2}$ 千米，
$\therefore AF + CF - AP = 3\sqrt{3}$ 千米.
故小船沿途考察的时间为 $3\sqrt{3} \div \sqrt{3} = 3$(小时).

## 第 4 课时　用解直角三角形解视角问题

**1.** B　**2.** C　**3.** 14. 4

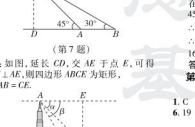
**4.** 7. 2 m　**点拨**：如图，根据题意得 *EF* ⊥ *AC*，*CD* // *FE*，∴ 四边形 *CDEF* 是矩形.
由题意知 $\angle BEF = 45°$，∴ $\angle EBF = 45°$，
∴ *CD* = *EF* = *FB* = 38 m.
在 Rt△*AEF* 中，*AF* = *EF* · $\tan 50° \approx 38 \times 1.19 = 45.22$(m)，
∴ *AB* = *AF* − *BF* ≈ 45. 22 − 38 = 7. 2(m).
∴ 旗杆的高度约为 7. 2 m.




（第 4 题）

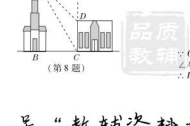
**5.** D　**6.** A

**7.** C　**点拨**：如图，由题意可知 *CE* // *BD*，
∴ $\angle CBA = 30°$，$\angle CAD = 45°$，且 *CD* = 3 000 m，
在 Rt△*ACD* 中，*AD* = *CD* = 3 000 m，在 Rt△*BCD* 中，$BD = \frac{CD}{\tan \angle CBA} = \frac{3\,000}{\frac{\sqrt{3}}{3}}$
$3\,000\sqrt{3}$(m)，
∴ *AB* = *BD* − *AD* = $3\,000\sqrt{3} - 3\,000 = 3\,000(\sqrt{3} - 1)$(m)，故选 C.




（第 7 题）

**8.** 解：如图，延长 *CD*，交 *AE* 于点 *E*，可得 *DE* ⊥ *AE*，则四边形 *ABCE* 为矩形，
∴ *AB* = *CE*.




（第 8 题）

在 Rt△*AED* 中，*AE* = *BC* = 40 m，$\angle EAD = 45°$，∴ *ED* = 40 m.
在 Rt△*ABC* 中，$\angle ACB = 60°$，*BC* = 40 m，
∴ *AB* = *BC* · $\tan 60° = 40\sqrt{3} = 69.3$(m).
则 *CD* = *EC* − *ED* = *AB* − *ED* = $40\sqrt{3} - 40 = 29.3$(m).
**答**：这两座建筑物 *AB*，*CD* 的高度分别为 69. 3 m，29. 3 m.

**9.** 解：过点 *C* 作 $CD \perp AB$ 于点 *D*.
在 Rt△*BCD* 中，*BD* = 9 m，
∴ *BCD* = 45°，则 *CD* = *BD* = 9 m.
在 Rt△*ACD* 中，*CD* = 9 m，$\angle ACD = 37°$，
则 *AD* = *CD* · $\tan 37° \approx 9 \times 0.75 = 6.75$(m).
所以 *AB* = *AD* + *BD* = 15. 75 m，
整个过程中国旗上升的高度约为 15. 75 − 2. 25 = 13. 5(m)，
因为耗时 45 s，
所以上升速度约为 $\frac{13.5}{46} \approx 0.3$(m/s).
**答**：国旗匀速上升的速度约为 0. 3 m/s.

**10.** 解：如图，作 *BF* ⊥ *AE* 于点 *F*. 则 *BF* = *DE*.
在 Rt△*ABF* 中，$\sin \angle BAF = \frac{BF}{AB}$，
则 $BF = AB \cdot \sin \angle BAF \approx 10 \times \frac{3}{5} = 6$(m).
在 Rt△*CDB* 中，$\tan \angle CBD = \frac{CD}{BD}$，则 $CD = BD \cdot \tan 65° \approx 10 \times \frac{15}{7} \approx 21$(m).
则 *CE* = *DE* + *CD* = *BF* + *CD* = 6 + 21 = 27(m).
所以大楼 *CE* 的高度约是 27 m.




（第 10 题）

**11.** 解：(1) 在 Rt△*EHF* 中，$\angle HEF = 90°$，$\angle HFE = 45°$，
∴ *HE* = *EF* = *AB* = 10 米.
∴ *BH* = *BE* + *HE* = 1. 5 + 10 = 11. 5(米).
**答**：比树 *BH* 的高为 11. 5 米.
(2) 在 Rt△*EGD* 中，$\angle GED = 60°$，
∴ *DG* = *DE* · $\tan 60° = 15\sqrt{3}$ *DE* 米.
设 *DE* = *x* 米，则 $DG = \sqrt{3}x$ 米.
在 Rt△*GFD* 中，$\angle GDF = 90°$，$\angle GFD = 45°$，∴ *GD* = *DF* = *EF* + *DE*.
∴ $\sqrt{3}x = 10 + x$，解得 $x = 5\sqrt{3} + 5$.
∴ *CG* = *DG* + *DC* = $\sqrt{3}(5\sqrt{3} + 5) + 1.5 = 16.5 + 5\sqrt{3} \approx 25$(米).
**答**：教学楼 *CG* 的高约为 25 米.

## 第 5 课时　用解直角三角形解一般问题

**1.** C　**2.** D　**3.** 1. 5　**4.** 60　**5.** 69

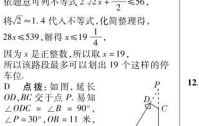
**6.** 19　**点拨**：如图，




（第 6 题）

$\because CE = 2$，*DE* = 5，且 $\angle BCE = \angle CBE = \angle ABD = \angle ADB = 45°$，
∴ *BE* = *CE* = 2，*BD* = *DE* − *BE* = 3，
∴ $BC = 2 \div \sin 45° = 2\sqrt{2}$.
在 Rt△*ABD* 中，*BD* = 3，$\angle ADB = 45°$，
*AB* = *BD* · $\sin 45° = 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$，
设至多可对 *x* 个停车位，
依题意可列不等式 $2\sqrt{2}x + \frac{3\sqrt{2}}{2} \leqslant 56$，
将 $\frac{\sqrt{2}}{2} = 1$ 代入不等式，化简整理得，
$28x \leqslant 539$，解得 $x \leqslant 19\frac{1}{4}$，
因为 *x* 是正整数，所以取 $x = 19$，
所以该路段最多可以划出 19 个这样的停车位.

**7.** D　**点拨**：如图，延长 *OD*，*BC* 交于点 *P*. 易知 $\angle ODC = \angle B = 90°$，$\angle P = 30°$，*OB* = 11 米，*CD* = 2 米，



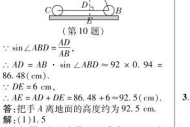

（第 7 题）

在 Rt△*CPD* 中，$DP = \frac{DC}{\tan 30°} = 2\sqrt{3}$ 米，$PC = \frac{CD}{\sin 30°} = 4$ 米.
∵ $\angle P = \angle P$，$\angle PDC = \angle B = 90°$，
∴ △*PDC* ∽ △*PBO*，∴ $\frac{PD}{PB} = \frac{OB}{OB'}$，
∴ $PB = \frac{PD \cdot OB}{CD} = \frac{2\sqrt{3} \times 11}{2} = 11\sqrt{3}$(米)，
∴ *BC* = *PB* − *PC* = $(11\sqrt{3} - 4)$ 米.

**8.** $6\sqrt{2}$

**9.** 解：(1) 在 Rt△*ABD* 中，*AD* = 24 m，$\angle B = 31°$，∴ $\tan 31° = \frac{AD}{BD}$，即 $BD \approx \frac{24}{0.6} = 40$(m)，
在 Rt△*ACD* 中，*AD* = 24 m，$\angle ACD = 50°$，
∴ $\tan 50° = \frac{AD}{CD}$，即 $CD \approx \frac{24}{1.2} = 20$(m)，
∴ *BC* = *BD* − *CD* ≈ 40 − 20 = 20(m)，
则 *B*，*C* 的距离约为 20 m.
(2) 根据题意得 $20 \div 2 = 10$(m/s) < 15 m/s，故此车没有超速.

**10.** 解：如图，过点 *A* 作 *AD* ⊥ *BC* 于点 *D*，延长 *AD* 交地面于点 *E*.




（第 10 题）

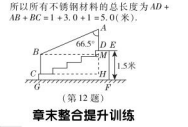
∵ $\sin \angle ABD = \frac{AD}{AB}$，
∴ *AD* = *AB* · $\sin \angle ABD \approx 92 \times 0.94 = 86.48$(cm).
∵ *DE* = 6 cm，
∴ *AE* = *AD* + *DE* = 86. 48 + 6 = 92. 5(cm).
**答**：把手 *A* 离地面的高度约为 92. 5 cm.

**11.** 解：(1) 1. 5
(2) 如图，过 *C* 点作 *CM* 垂直地面于点 *M*，作 *CE* 垂直 *OD* 于点 *E*，
则在 Rt△*CEO* 中，$\angle CEO = 90°$，
∴ $\cos \angle COE = \frac{OE}{OC}$，
∴ *OE* = *OC* · $\cos \angle COE$，
∵ *OB* = *OC* = 3 m，$\angle COE = 55°$，
∴ *OE* = 3 · $\cos 55° \approx 1.7$(m)，
∴ *ED* = 3 + 0. 6 − 1. 7 = 1. 9(m)，
∴ *CM* = *ED* ≈ 1. 9 m，
∵ 成人的“安全高度”为 2 m，
∴ 此人是安全的.




（第 11 题）

**12.** 解：(1) 由题图可知 $DH = \frac{4}{5}EF$，
∴ $DH = \frac{4}{5} \times 1.5 = 1.2$(米).
∴ 点 *D* 与点 *C* 的高度差为 1. 2 米.
(2) 如图，过 *B* 作 *BM* ⊥ *AD*，交 *AD* 延长线于 *M*，
在矩形 *BCHM* 中，*MH* = *BC* = 1 米，
*AM* = *AD* + *DH* − *MH* = 1 + 1. 2 − 1 = 1. 2(米)，
在 Rt△*AMB* 中，$AB = \frac{AM}{\cos 66.5°} \approx 3.0$ 米，
所以所有不锈钢材料的总长度为 *AD* + *AB* + *BC* + 1 + 3. 0 + 1 = 5. 0(米).




（第 12 题）

# 章末综合提升训练

## 专训 1

**1.** 解：∵ $a = 2\sqrt{3}$，$b = 6$，
∴ $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{12 + 36} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$.
∵ $\tan A = \frac{a}{b} = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$，
∴ $\angle A = 30°$，∴ $B = 60°$.

**2.** 解：∵ *AB* = 13，*AC* = 12，∴ $\angle ACB = 90°$，
∴ $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5$.
∴ $\sin \angle BAC = \frac{BC}{AB} = \frac{5}{13}$.
过点 *B* 作 *BD* ⊥ *MC* 于点 *D*，
设点 *B* 到直线 *MC* 的距离为 *d*，则 $BD = d$，
∵ $\angle BCM = \angle BAC$，
∴ $\sin \angle BAC = \sin \angle BCM$.
∴ $\sin \angle BCM = \frac{d}{BC} = \frac{5}{13}$，
即 $\frac{d}{5} = \frac{5}{13}$，∴ $d = \frac{25}{13}$.
即点 *B* 到直线 *MC* 的距离为 $\frac{25}{13}$.

**3.** 解：(1) 由题意知 $\sin C = \frac{AB}{AC}$，
即 $\frac{1}{2} = \frac{3}{AC}$，则 *AC* = 6.
(2) 由题意知 $\tan C = \frac{AB}{BC}$，即 $\frac{3}{3} = \frac{3}{BC}$，
则 $BC = 3\sqrt{3}$.

**4.** 解：∵ $\angle C = 90°$，$\angle BDC = 45°$，
$BC = 3$，∴ $CD = 3$.
∵ $\angle A = 30°$，$BC = 3$，



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\therefore \tan A=\frac{BC}{AC}=\frac{3}{AC}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，即 $AC=3\sqrt{3}$.

$\therefore AD=AC-CD=3\sqrt{3}-3$.

**5.** 解：$\because \angle B=45°$，$\angle C=90°$，$c=10$，

$\therefore \angle A=45°$，$a=b=5\sqrt{2}$.

**6.** 解：$\because \angle C=90°$，$\angle B=30°$，$AB=4\sqrt{3}$，

$\therefore \angle CAB=60°$，$AC=AB\cdot\sin 30°=4\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=2\sqrt{3}$.

又 $\because AD$ 是 $\angle BAC$ 的平分线，

$\therefore \angle CAD=30°$.

$\therefore \cos\angle CAD=\frac{AC}{AD}=\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{AD}$，

$\therefore AD=4$.

**7.** 解：过点 $D$ 作 $CD$ 的垂线交 $BC$ 于点 $E$，如图. 在 Rt△$CDE$ 中，

$\because \tan\angle BCD=\frac{1}{3}=\frac{DE}{CD}$，

∴可设 $DE=k$，则 $CD=3k$.

$\because CD\perp AC$，$DE\perp AC$.

又∵点 $D$ 为 $AB$ 的中点，

∴点 $E$ 为 $BC$ 的中点. $\therefore DE=\frac{1}{2}AC$.

$\therefore AC=2DE=2k$.

在 Rt△$ACD$ 中，$\angle ACD=90°$，

$\therefore CD=2k,\sqrt{3}k=3$，

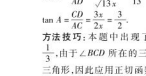
$\therefore AD=\sqrt{AC^2+CD^2}=\sqrt{4k^2+9k^2}=\sqrt{13}k$.

$\sin A=\frac{CD}{AD}=\frac{3k}{\sqrt{13}k}=\frac{3\sqrt{13}}{13}$，

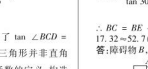
$\cos A=\frac{AC}{AD}=\frac{2k}{\sqrt{13}k}=\frac{2\sqrt{13}}{13}$，

$\tan A=\frac{CD}{AC}=\frac{3k}{2k}=\frac{3}{2}$.

**方法技巧**：本题中出现了 $\tan\angle BCD=\frac{1}{3}$，由于 $\angle BCD$ 所在的三角形并非直角三角形，因此应用正切函数的定义，构造出一个与之相关的直角三角形进行求解.



（第 7 题）



（第 8 题）

**8.** 解：如图，过点 $D$ 作 $DH\perp AC$ 于点 $H$.

$\because \angle CED=45°$，$DH\perp EC$，$DE=\sqrt{2}$，

$\therefore EH=DE\cdot\cos 45°=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=1$，

$\therefore DH=1$.

又 $\because \angle DCE=30°$，

$\therefore HC=\frac{DH}{\tan 30°}=\sqrt{3}$，$CD=\frac{DH}{\sin 30°}=2$.

$\because \angle AEH=\angle CED=45°$，$\angle BAC=90°$，$BE=2\sqrt{2}$，

$\therefore AB=AE=2$，

$\therefore AC=AE+EH+HC=2+1+\sqrt{3}=3+\sqrt{3}$，

$\therefore S_{四边形ABCD}=\frac{1}{2}\times 2\times(3+\sqrt{3})+\frac{1}{2}\times 1\times(3+\sqrt{3})=\frac{3\sqrt{3}+9}{2}$

**方法技巧**：题目中所给的有直角和 30°，45°角，因此我们可以通过构造另一个直角三角形，然后运用特殊角的三角函数值求出某些边的长，进而求出四边形的面积.

**9.** 解：(1) 将方程整理，得 $(c-a)x^2+2bx+(a+c)=0$，则 $(2b)^2-4(c-a)(a+c)=4(b^2+a^2-c^2)$.

∵方程有两个相等的实数根，

$\therefore 4(b^2+a^2-c^2)=0$，即 $b^2+a^2=c^2$.

∴△$ABC$ 为直角三角形.

(2) 由 $3c=a+3b$，得 $a=3c-3b$. ①

将①代入 $a^2+b^2=c^2$，得 $(3c-3b)^2+b^2=c^2$.

$\therefore 4c^2-9bc+5b^2=0$，即 $(4c-5b)(c-b)=0$. 由①可知，$b\neq c$，$\therefore 4c=5b$.

$\therefore b=\frac{4}{5}c$. ②

将②代入①，得 $a=\frac{3}{5}c$.

∴在 Rt△$ABC$ 中，$\sin A+\sin B=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}=\frac{7}{5}$.

## 专训 2

**1.** 解：车门不会碰到墙. 理由如下：

过点 $A$ 作 $AC\perp OB$，垂足为 $C$，

在 Rt△$ACO$ 中，$\because AOC=40°$，$AO=1.2$ m，

$\therefore AC=AO\cdot\sin\angle AOC\approx 1.2\times 0.64=0.768$(m).

∵汽车靠墙一侧 $OB$ 与墙 $MN$ 平行且距离为 0.8 m，0.768 < 0.8，∴车门不会碰到墙.

**2.** 解：如图，过点 $D$ 作 $DF\perp AB$ 于点 $F$，过点 $C$ 作 $CH\perp DF$ 于点 $H$，

则 $DE=BF=CH=10$ m.

在 Rt△$ADF$ 中，$\because AF=80-10=70$(m)，

$\angle ADF=45°$，$\therefore DF=BE=AF=70$ m.

在 Rt△$CDE$ 中，$\because DE=10$ m，$\angle DCE=30°$，

$\therefore CE=\frac{DE}{\tan 30°}=\frac{10}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=10\sqrt{3}$(m)，

$\therefore BC=BE-CE=70-10\sqrt{3}\approx 70-17.32\approx 52.7$(m).

**答**：障碍物 $B$，$C$ 两点间的距离约为 52.7 m.



（第 2 题）

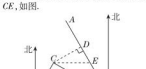
**3.** 解：(1) 由题意得 $\angle BOC=30°$，

$\angle CBO=60°$，

$\therefore \angle BCO=90°$，从而 $BC=OB\cdot\cos 60°=120\times\frac{1}{2}=60$(km).

∴快艇从港口 $B$ 到小岛 $C$ 需要的时间为 $\frac{60}{60}=1$(h).

(2) 作 $CD\perp OA$ 于 $D$，设相遇处为点 $E$，连结 $CE$，如图.



（第 3 题）

$OC=OB\cdot\cos 30°=60\sqrt{3}$ km，$CD=\frac{1}{2}OC=30\sqrt{3}$ km，$OD=OC\cdot\cos 30°=90$ km.

$\therefore DE=(90-3x)$ km.

$\because CE=60$ km，$CD^2+DE^2=CE^2$，

$\therefore (30\sqrt{3})^2+(90-3x)^2=60^2$，

$\therefore x=20$ 或 $x=40$，

当速度为 20 km/h 时，$OE=3\times 20=60$(km)，当速度为 40 km/h 时，$OE=3\times 40=120$(km).

$\because x=20$，相遇处与港口 $O$ 的距离为 60 km，或 $x=40$，相遇处与港口 $O$ 的距离为 120 km.

**4.** 解：延长 $AD$ 交 $BC$ 的延长线于 $G$，作 $DH\perp BG$ 于 $H$，如图所示.



（第 4 题）

在 Rt△$DHC$ 中，$\angle DCH=60°$，$CD=4$，

则 $CH=CD\cdot\cos\angle DCH=4\times\cos 60°=2$，

$DH=CD\cdot\sin\angle DCH=4\times\sin 60°=2\sqrt{3}$，

$\therefore DH\perp BG$，$\angle G=30°$，

$\therefore HG=\frac{DH}{\tan G}=\frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=6$，

$\therefore CG=CH+HG=2+6=8$，

设 $AB=x$ m，

$\because AB\perp BG$，$\angle G=30°$，$\angle BCA=45°$，

$\therefore BC=x$，$BG=\frac{AB}{\tan G}=\frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\sqrt{3}x$，

$\therefore BG-BC=CG$，∴$\sqrt{3}x-x=8$，

解得 $x\approx 11$.

**答**：电线杆的高约为 11 m.

**5.** 解：如图，过点 $A$ 作 $AF\perp BC$ 于点 $F$.

在 Rt△$ABF$ 中，$\angle ABF=\alpha=60°$，

$\therefore AF=AB\cdot\sin 60°=20\times\frac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$(m).

在 Rt△$AEF$ 中，$\angle AEF=\beta=45°$，

$\therefore AE=\frac{AF}{\sin\angle AEF}=\frac{10\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=10\sqrt{6}$(m).

**答**：改造后的坡长 $AE$ 为 $10\sqrt{6}$ m.



（第 5 题）

**6.** 解：(1)30;45

(2) ∵ $BP\perp AC$，∴ $\angle BPA=\angle BPC=90°$.

∵ $\angle C=45°$，∴ $BP=CP$.

∵ $\angle BAC=30°$，∴ $AP=\frac{BP}{\tan 30°}=\sqrt{3}BP$.

∵ $CP+AP=AC$，∴ $BP+\sqrt{3}BP=10$，

解得 $BP=5\sqrt{3}-5$(海里).

**答**：观测站 $B$ 到 $AC$ 的距离 $BP$ 为 $(5\sqrt{3}-5)$ 海里.

**7.** 解：过点 $C$ 作 $CD\perp AB$ 于 $D$.

在 Rt△$BCD$ 中，$BD=31$ 米，

$\angle BCD=45°$，则 $CD=BD=31$ 米.

在 Rt△$ACD$ 中，$CD=31$ 米，

$\angle ACD=32°$，

则 $AD=CD\cdot\tan 32°\approx 31\times 0.6=18.6$(米).

所以 $AB=AD+BD\approx 18.6+31=50$(米)，

即楼 $AB$ 的高度约为 50 米.

**8.** 解：∵ $\angle CBE=45°$，$CE\perp AE$，

∴ $CE=BE=21$ 米，

$AE=AB+BE=6+21=27$(米).

在 Rt△$ADE$ 中，∵ $\angle DAE=30°$，

∴ $DE=AE\times\tan 30°=27\times\frac{\sqrt{3}}{3}=9\sqrt{3}$(米)，

∴ $CD=CE-DE=(21-9\sqrt{3})$米.

即该环最上端与下端之间的距离 $CD$ 为 $(21-9\sqrt{3})$ 米.

## 专训 3

**1.** 解：作 Rt△$ABE$ 中，$\angle BEA=90°$，

$\angle BAE=45°$，$BE=20$ 米，

$\therefore AE=20$ 米.

在 Rt△$BEF$ 中，$\angle BEF=90°$，$\angle F=30°$，

$BE=20$ 米，$\therefore EF=\frac{BE}{\tan 30°}=\frac{20}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=20\sqrt{3}$（米）. $\therefore AF=EF-AE=20\sqrt{3}-20\approx 20\times 1.732-20=14.64\approx 15$(米).

即 $AF$ 的长度约是 15 米.

**2.** 解：分两种情况：

(1) 如图①，在 Rt△$ADB$ 中，$CD=30$ 千米，$BC=60$ 千米.

$\because \tan\angle OCB=\frac{OB}{OC}=\frac{1}{2}$，$\therefore OB=\frac{1}{2}$.

∴点 $B$ 的坐标是 $\left(\frac{1}{2},0\right)$.

把 $B\left(\frac{1}{2},0\right)$ 的坐标代入 $y=kx-1$，

得 $\frac{1}{2}k-1=0$. 解得 $k=2$.

(2) 由(1) 知直线 $AB$ 对应的函数关系式为 $y=2x-1$，所以△$AOB$ 的面积 $S$ 与 $x$ 的函数关系式是 $S=\frac{1}{2}\cdot OB\cdot y=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}(2x-1)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$.

**3.** 解：(1) 点 $A$ 坐标为 $(1,4)$，

设抛物线对应的函数表达式为 $y=a(x-1)^2+4$，

把 $C(3,0)$ 的坐标代入抛物线对应的函数表达式，可得 $a(3-1)^2+4=0$，

解得 $a=-1$.

故抛物线对应的函数表达式为 $y=-(x-1)^2+4$，即 $y=-x^2+2x+3$.

(2) 依题意有 $OC=3$，$OE=4$，

∴ $CE=\sqrt{OC^2+OE^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$，

当 $CPQ$ 与 $\triangle COE$ 相似时，

∵ $\cos\angle QCP=\frac{PC}{CQ}=\frac{OC}{CE}$，

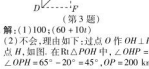
∴ $\frac{3-t}{2t}=\frac{3}{5}$，解得 $t=\frac{15}{11}$.

当 $CPQ=90°$ 时，

∵ $\cos\angle QCP=\frac{CQ}{PC}=\frac{OC}{CE}$，∴ $\frac{2t}{3-t}=\frac{3}{5}$，

解得 $t=\frac{9}{13}$. ∴ 当 $t=\frac{15}{11}$ 或 $t=\frac{9}{13}$ 时，△$PCQ$ 为直角三角形.

**3.** 解：(1) 如图，过点 $B$ 作 $BD\perp x$ 轴于点 $D$.



（第 3 题）

∵ $CA\perp CB$，

∴ $\angle BCD+\angle ACO=\angle BCD+\angle CBD=90°$. ∴ $\angle ACO=\angle CBD$.

∵ $\angle AOC=\angle CDB=90°$，$AC=CB$，

∴ △$AOC\cong$△$CDB$(AAS).

∴ $DB=OC=3$，$CD=AO$.

∵ $\cos\angle ACO=\frac{OC}{AC}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

∴ $AC=\frac{OC}{\cos\angle ACO}=\frac{3}{\frac{\sqrt{5}}{5}}=3\sqrt{5}$.

∴ $CD=AO=\sqrt{AC^2-OC^2}=\sqrt{(3\sqrt{5})^2-3^2}=6$.

∴ $OD=OC+CD=3+6=9$.

∴ $B(-9,3)$. 把 $B$ 点坐标代入 $y=\frac{m}{x}$，得 $m=-9\times 3=-27$.

∴反比例函数的表达式为 $y=-\frac{27}{x}$.

(2) 当 $x<0$ 时，$kx+b<\frac{m}{x}$ 的解集为 $-9<x<0$.

**4.** 解：(1) 在 Rt△$AOB$ 中，$OB=2$，

∵ $\tan\angle AOB=\frac{AB}{OB}=\frac{3}{2}$，

∴ $AB=\frac{3}{2}\times 2=3$，∴ $A(2,3)$，

将 $A(2,3)$ 的坐标代入 $y=\frac{k}{x}$，

得 $k=6$.

(2) 易知点 $E$ 纵坐标为 $\frac{3}{2}$，由点 $E$ 在反比例函数 $y=\frac{6}{x}$ 的图象上，求出点 $E$ 的坐标为 $\left(4,\frac{3}{2}\right)$，结合 $A$ 点坐标为 $(2,3)$，求出直线 $AE$ 对应的函数表达式为 $y=-\frac{3}{4}x+\frac{9}{2}$.

(3) 结论：$AN=ME$. 理由：在表达式 $y=-\frac{3}{4}x+\frac{9}{2}$ 中，令 $y=0$ 可得 $x=6$，令 $x=0$ 可得 $y=\frac{9}{2}$，∴点 $M(6,0)$，$N\left(0,\frac{9}{2}\right)$.

方法一：如图，延长 $DA$ 交 $y$ 轴于点 $F$，则 $AF\perp ON$，且 $AF=2$，$OF=3$，

∴ $NF=ON-OF=\frac{3}{2}$.

根据勾股定理可得 $AN=\frac{5}{2}$.

∵ $CM=6-4=2$，$EC=\frac{3}{2}$，

∴根据勾股定理可得 $EM=\frac{5}{2}$，





关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

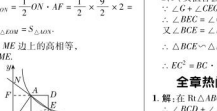
$\therefore AN=ME$.

方法二：如图，连结 $OE$，延长 $DA$ 交 $y$ 轴于点 $F$，则 $AF\perp ON$，且 $AF=2$，

$\because S_{\triangle EOM}=\frac{1}{2}\cdot OM\cdot EC=\frac{1}{2}\times 6\times\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$，$S_{\triangle AON}=\frac{1}{2}\cdot ON\cdot AF=\frac{1}{2}\times\frac{9}{2}\times 2=\frac{9}{2}$，$\therefore S_{\triangle EOM}=S_{\triangle AON}$.

$\therefore AN$ 和 $ME$ 边上的高相等，

$\therefore AN=ME$.



（第 4 题）

**5.** 解：设一元二次方程有两个相等的实数根，$\because(-10\cos\alpha)^2-4\times 5\times(-7\cos\alpha+6)=0$，

解得 $\cos\alpha=-2$（舍去）或 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$.

设在一内角为 $\alpha$ 的直角三角形中，$\alpha$ 的邻边长为 $3k(>0)$，

$\therefore$ 斜边长为 $5k$，则 $\alpha$ 的对边长为 $\sqrt{(5k)^2-(3k)^2}=4k$，$\therefore\sin\alpha=\frac{4}{5}$，

则菱形一边上的高为 $10\sin\alpha=8$ cm，

$\therefore S_{\text{菱形}}=10\times 8=80(\text{cm}^2)$.

**6.** (1)**证明**：$\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，

$\therefore\angle BAD=\angle DAC$.

$\because\angle ADE=\angle BAD+\angle B$，

$\angle DAE=\angle CAD+\angle CAE$，且 $\angle B=\angle CAE$，

$\therefore\angle ADE=\angle DAE$，$\therefore AE=EA$.

$\because ED$ 为 $\odot O$ 的直径，$\therefore\angle DFE=90°$，

$\therefore EF\perp AD$，$\therefore$ 点 $F$ 是 $AD$ 的中点.

(2)**解**：如图，连结 $DM$，则 $DM\perp AE$.

设 $EF=4k$，$DF=3k$，

则 $ED=\sqrt{EF^2+DF^2}=5k$.

$\because\frac{1}{2}AD\cdot EF=\frac{1}{2}AE\cdot DM$，

$\therefore DM=\frac{AD\cdot EF}{AE}=\frac{6k\cdot 4k}{5k}=\frac{24}{5}k$，

$\because ME=\sqrt{DE^2-DM^2}=\frac{7}{5}k$，

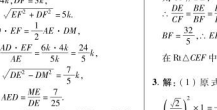
$\therefore\cos\angle AED=\frac{ME}{DE}=\frac{7}{25}$.

(3)**解**：$\because CAE=\angle B$，$\angle AEC=\angle BEA$，

$\therefore\triangle AEC\backsim\triangle BEA$，$\therefore AE:BE=CE:AE$，

$\therefore AE^2=CE\cdot BE$，$\therefore(5k)^2=\frac{5}{2}k\cdot(10+5k)$.

$\because k>0$，$\therefore k=2$，$\therefore CD=\frac{5}{2}k=5$.



（第 6 题）

**7.** (1)**证明**：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore\angle D=\angle DCG=90°$，

$\because$ 点 $E$ 是 $CD$ 的中点，$\therefore DE=CE$.

$\because\angle DEF=\angle CEG$，$\triangle EDF\cong\triangle ECG$，

$\therefore EF=EG$.

又 $\because BE\perp FG$，$\therefore BE$ 是 $FG$ 的中垂线，

$\therefore BF=BG$.

(2)**解**：$\because BF=BG$，$\therefore\angle BFG=\angle G$，

$\because\tan\angle BFG=\tan G=\sqrt{3}$，设 $CG=x$，则 $CE=\sqrt{3}x$，$\therefore S_{\triangle CGE}=\frac{\sqrt{3}}{2}x^2=6\sqrt{3}$，解得 $x=2\sqrt{3}$（负值舍去），$\therefore CG=2\sqrt{3}$，$CE=6$.

$\because\angle F+\angle CGE=90°$，$\angle CEG+\angle BEC=90°$，

$\therefore\angle BEC=\angle G$.

又 $\angle BCE=\angle ECG=90°$，

$\therefore\triangle BCE\backsim\triangle ECG$，$\therefore\frac{EC}{BC}=\frac{CG}{EC}$.

$\therefore EC^2=BC\cdot CG$，$\therefore BC=6\sqrt{3}$，$\therefore AD=6\sqrt{3}$.

## 全章热门考点整合应用

**1.** 解：在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，$\because\angle ACB=90°$，

$\therefore\angle BCD+\angle ACD=90°$，

$\because\angle D+\angle ACD=\angle ACD+\angle A=90°$，

$\therefore\angle BCD=\angle A$.

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，由勾股定理，得 $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=10$，

$\therefore\sin\angle BCD=\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{4}{5}$，

$\cos\angle BCD=\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{3}{5}$，

$\tan\angle BCD=\tan A=\frac{BC}{AC}=\frac{4}{3}$.

**2.** 解：$\because\sin B=\frac{3}{5}$，$\therefore AC\backsim 9:00$，$DE\perp AB$，

$\therefore\sin B=\frac{DE}{DB}=\frac{AC}{AB}=\frac{3}{5}$.

设 $DE=CD=3k$，则 $DB=5k$，

$\because CB=8k$，$AC=6k$，$AB=10k$，

$\therefore AC+CD=9$，$\therefore 6k+3k=9$，

$\therefore k=1$，

$\therefore DE=3$，$DB=5$，

$\therefore BE=\sqrt{5^2-3^2}=4$.

过点 $C$ 作 $CF\perp AB$ 于点 $F$，

则 $CF\parallel DE$，

$\therefore\frac{DE}{CF}=\frac{BE}{BF}=\frac{BD}{BC}=\frac{5}{8}$，求得 $CF=\frac{24}{5}$，

$BF=\frac{32}{5}$，$\therefore EF=\frac{12}{5}$.

在 $\text{Rt}\triangle CEF$ 中，$CE=\sqrt{CF^2+EF^2}=\frac{12}{5}\sqrt{5}$.

**3.** 解：(1) 原式 $=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\times 1=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$.

(2) 原式 $=\frac{1}{4}\times 1^2+\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}-3\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}-1=\frac{1}{4}+4-3\times\frac{3}{4}+2-1=\frac{1}{4}+4-\frac{9}{4}+2-1=3$.

**4.** 解：设 $CE=y$，(1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，$\therefore AB=CD=4$，$BC=AD=5$，$\angle B=\angle BCD=\angle D=90°$.

$\because BP=4$，$CE=y$，

$\therefore PC=5-a$，$DE=4-y$，

$\because AP\perp PE$，$\therefore\angle APE=90°$，

$\therefore\angle APB+\angle CPE=90°$，

$\because\angle APB+\angle BAP=90°$，

$\therefore\angle CPE=\angle BAP$，

$\therefore\triangle ABP\backsim\triangle PCE$，$\therefore\frac{BP}{CE}=\frac{AB}{PC}$，

$\therefore y=\frac{-a^2+5a}{4}$，即 $CE=\frac{-a^2+5a}{4}$.

(2) 四边形 $APFD$ 是菱形，理由如下：当 $a=3$ 时，$y=\frac{-3^2+5\times 3}{4}=\frac{3}{2}$，即 $CE=\frac{3}{2}$，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore AD\parallel BF$，$\therefore\triangle AED\backsim\triangle FEC$，

$\therefore\frac{AD}{CF}=\frac{DE}{CE}$，$\therefore CF=3$，

易求 $PC=2$，$\therefore PF=PC+CF=5$.

$\because PF=AD$，$\therefore$ 四边形 $APFD$ 是平行四边形，在 $\text{Rt}\triangle APB$ 中，$AB=4$，$BP=3$，$\therefore AB=90°$，$\therefore AP=5=PF$，

$\therefore$ 四边形 $APFD$ 是菱形.

(3) 根据 $\tan\angle PAE=\frac{1}{2}$ 可得 $\frac{AP}{PE}=2$，

由 (1) 得 $\triangle ABP\backsim\triangle PCE$，$\therefore\frac{BP}{CE}=\frac{AB}{PC}=\frac{AP}{PE}=2$，得 $\frac{a}{4-y}=2$ 或 $\frac{a}{y-4}=2$，

解得 $a=3$，$y=1.5$ 或 $a=7$，$y=3.5$.

$\because a=3$ 或 7.

**5.** 解：(1) 相等. 理由如下：

由已知条件易知，$\angle QPB=90°-24.5°=65.5°$，$\angle PQB=90°-41°=49°$，

$\therefore\angle PBQ=180°-65.5°-49°=65.5°$.

$\therefore\angle PBQ=\angle BPQ$，$\therefore BQ=PQ$.

(2) 由 (1)，得 $BQ=PQ=1200$ m.

由已知条件易知 $\angle AQP=90°-49°=41°$.

在 $\text{Rt}\triangle APQ$ 中，$AQ=\frac{PQ}{\cos\angle AQP}=\frac{1200}{0.75}=1600$(m).

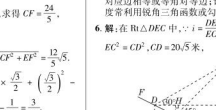
又 $\because\angle AQB=\angle AQP+\angle PQB=90°$，

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle AQB$ 中，$AB=\sqrt{AQ^2+BQ^2}\approx\sqrt{1600^2+1200^2}=2000$(m).

$\therefore A$，$B$ 间的距离约是 2 000 m.

**点拨**：证明线段相等常利用全等三角形的对应边相等或等角对等边；计算线段的长度常利用锐角三角函数或勾股定理.

**6.** 解：在 $\text{Rt}\triangle DEC$ 中，$\because i=\frac{DE}{EC}=\frac{1}{2}$，$DE^2+EC^2=CD^2$，$CD=20\sqrt{5}$ 米，



（第 6 题）

$\therefore DE^2+(2DE)^2=(20\sqrt{5})^2$，

解得 $DE=20$ 米.

$\therefore EC=40$ 米.

如图，过点 $D$ 作 $DG\perp AB$ 于点 $G$，过点 $C$ 作 $CH\perp DG$ 于点 $H$，则四边形 $DEBG$，四边形 $DECH$，四边形 $BCHG$ 都是矩形，$\therefore BG=CH=DE=20$ 米，$DH=CE=40$ 米，$GH=BC$.

$\because\angle ACB=45°$，$AB\perp BC$，

$\therefore AB=BC$.

设 $AB=BC=x$ 米，则 $AG=(x-20)$ 米，$DG=(x+40)$ 米.

在 $\text{Rt}\triangle ADG$ 中，$\tan\angle ADG=\frac{AG}{DG}$，

$\therefore\frac{x-20}{x+40}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，解得 $x=50+30\sqrt{3}$.

$\therefore AB=(50+30\sqrt{3})$ (米).

答：楼 $AB$ 的高度为 $(50+30\sqrt{3})$ 米.

**7.** 解：如图，过点 $C$ 作 $CD\perp AB$，垂足为 $D$.

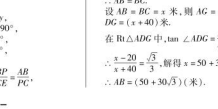
在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中，$\because AC=2\sqrt{3}$，$\angle A=30°$，

$\therefore CD=\frac{1}{2}AC=\sqrt{3}$，$AD=AC\cdot\cos 30°=2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3$.

在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中，$\frac{CD}{DB}=\tan B=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore DB=\frac{2CD}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=2$，

$\therefore AB=AD+DB=3+2=5$.



（第 7 题）

**8.** 解：方法一：如图①，过点 $B$ 作 $BE\perp AD$ 交 $DC$ 于点 $E$，过点 $E$ 作 $EF\perp AB$ 交 $AD$ 于点 $F$，则 $BE\perp AB$，$AB\perp AD$.



第8题答案

四边形 $ABEF$ 是矩形.

$\therefore EF=AB$，$AF=BE$.

$\because\angle ABC=120°$，$\therefore\angle CBE=120°-90°=30°$，$\angle B=180°-120°=60°$.

在 $\text{Rt}\triangle BCE$ 中，

$BE=\frac{BC}{\cos\angle CBE}=\frac{50\sqrt{3}}{\cos 30°}=\frac{50\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=100$，

$EC=BC\cdot\tan\angle CBE=50\sqrt{3}\times\tan 30°=50\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=50$.

在 $\text{Rt}\triangle DEF$ 中，$DF=\frac{EF}{\tan D}=\frac{AB}{\tan 60°}=\frac{30\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=30$.

$\therefore AD=AF+DF=BE+DF=100+30=130$.

$\because S_{\text{四边形}ABED}=S_{\text{梯形}ABED}+S_{\triangle BCE}=\frac{1}{2}(AD+BE)\cdot AB+\frac{1}{2}BC\cdot EC=\frac{1}{2}\times(130+100)\times 30\sqrt{3}+\frac{1}{2}\times 50\sqrt{3}\times 50=4700\sqrt{3}$.



①



②

（第 8 题）

方法二：如图③，延长 $DA$，$CB$ 交于点 $E$，则 $\angle ABE=180°-\angle ABC=60°$，

$\angle E=90°-\angle ABE=30°$.

在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中，

$AE=AB\cdot\tan 60°=30\sqrt{3}\times\sqrt{3}=90$，

$BE=\frac{AB}{\cos 60°}=\frac{30\sqrt{3}}{\frac{1}{2}}=60\sqrt{3}$.

$\therefore CE=BE+BC=60\sqrt{3}+50\sqrt{3}=110\sqrt{3}$.

在 $\text{Rt}\triangle DCE$ 中，$DC=CE\cdot\tan 30°=110\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=110$.

$\therefore S_{\text{四边形}ABCD}=S_{\triangle DCE}-S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}DC\cdot CE-\frac{1}{2}AB\cdot AE=\frac{1}{2}\times 110\times 110\sqrt{3}-\frac{1}{2}\times 30\sqrt{3}\times 90=4700\sqrt{3}$.

# 第 2 章　直线与圆的位置关系

## 2.1　直线与圆的位置关系

### 第 1 课时　直线与圆的位置关系

**1.** (1) 1　(2) 1　$<d<3$

**2.** B　**3.** C　**4.** C　**5.** C　**6.** D　**7.** B　**8.** C

**9.** 8 cm　$<AB\leqslant 10$ cm

**10.** (1, 1) 或 (3, 1) 或 (2, 0) 或 (2, 2)

**11.** 解：(1) 如图，$\odot P$ 为所求的圆.

(2) $BC$ 与 $\odot P$ 相切. 证明：

如图，过 $P$ 作 $PD\perp BC$，交 $BC$ 于点 $D$.

$\because CP$ 为 $\angle ACB$ 的平分线，且 $PA\perp AC$，$PD\perp CB$，$\therefore PD=PA$.

$\because PA$ 为 $\odot P$ 的半径，

$\therefore$ 点 $D$ 为 $\odot P$ 的半径，即圆心 $P$ 到 $BC$ 的距离等于 $\odot P$ 的半径.

$\therefore BC$ 与 $\odot P$ 相切.



（第 11 题）

**12.** 解：(1) $BC$ 与 $\odot O$ 相切.

理由：连结 $OD$.

$\because AD$ 是 $\angle BAC$ 的平分线，

$\therefore\angle BAD=\angle CAD$.

又 $\because OD=OA$，$\therefore\angle OAD=\angle ODA$.

$\therefore\angle CAD=\angle ODA$，$\therefore OD\parallel AC$.

$\therefore\angle ODB=\angle C=90°$，即 $OD\perp BC$.

$\therefore D$ 到直线 $BC$ 的距离等于 $\odot O$ 的半径，

$\therefore BC$ 与 $\odot O$ 相切.

(2) 设 $OF=OD=x$，

则 $OB=OF+BF=x+2$，

根据勾股定理，得 $OB^2=OD^2+BD^2$，

即 $(x+2)^2=x^2+12$.

解得 $x=2$. 即 $OD=OF=2$.

$\therefore OB=2+2=4$.

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ODB$ 中，$OD=\frac{1}{2}OB=2$，

$\therefore\angle B=30°$，$\therefore\angle DOB=60°$.

$\therefore S_{\text{扇形}DOF}=\frac{1}{2}\times\pi\times 2^2=\frac{2\pi}{3}$，

则阴影部分的面积为 $S_{\triangle DOB}-S_{\text{扇形}DOF}=\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3}=2\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3}$.

故阴影部分的面积为 $2\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3}$.

**13.** 解：(1) 如图①，过点 $O$ 作 $OF\perp AM$ 于点 $F$，当 $OF=2$ 时，$\odot O$ 与 $AM$ 相切，此时 $OA=4$，故 $AD=x=2$.

(2) 如图②，过点 $O$ 作 $OG\perp AM$ 于点 $G$，$\because OB=OC=2$，$\angle BOC=90°$，

$\therefore BC=2\sqrt{2}$，

$\because BG=CG=\frac{1}{2}BC=\sqrt{2}$，$\therefore OG=\sqrt{2}$.

$\because AO=3$，

$\therefore OA=2OG=2\sqrt{2}$.

$\therefore AD=x=2\sqrt{2}-2$.



①



②

（第 13 题）

**14.** 解：(1) 如图，过点 $O$ 作 $OC\perp AB$ 于点 $C$.

当 $\odot O$ 与 $AB$ 相切时，$OC=1$，$\because OA=2$，

$\therefore\angle BAO=30°$，$\therefore OB=\frac{1}{2}OA=2B$.

由 $OA^2+OB^2=AB^2$，得 $2^2+b^2=(2b)^2$.

$\because b>0$，$\therefore b=\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

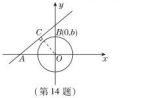
故当 $b=\frac{2}{3}\sqrt{3}$ 时，$\odot O$ 与 $AB$ 相离；

当 $b=\frac{2}{3}\sqrt{3}$ 时，$\odot O$ 与 $AB$ 相切；

当 $0<b<\frac{2}{3}\sqrt{3}$ 时，$\odot O$ 与 $AB$ 相交.

(2) 设直线 $AB$ 的表达式为 $y=kx+\frac{2}{3}\sqrt{3}$，把 $(-2,0)$ 代入解得 $k=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$\therefore$ 直线 $AB$ 的表达式为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{2}{3}\sqrt{3}$.



（第 14 题）

### 第 2 课时　切线的判定

**1.** C　**2.** D　**3.** A　**4.** B　**5.** A　**6.** D　**7.** A

**8.** A　**点拨**：$\odot O$ 与 $AC$ 相切于点 $D$，

$\because OD\perp AC$，$\therefore\angle ADO=90°$.

$\because AD=\sqrt{3}OD$，$\therefore\tan A=\frac{OD}{AD}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore\angle A=30°$.

$\because BD$ 平分 $\angle ABC$，$\therefore\angle OBD=\angle CBD$.

$\because OB=OD$，$\therefore\angle OBD=\angle ODB$.

$\therefore\angle ODB=\angle CBD$，$\therefore OD\parallel BC$.

$\therefore\angle C=\angle ADO=90°$.

$\therefore\angle ABC=60°$，$BC=\frac{1}{2}AB=6$.

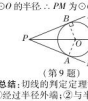
$\therefore\angle CBD=30°$.

$\therefore CD=\frac{\sqrt{3}}{3}BC=\frac{\sqrt{3}}{3}\times 6=2\sqrt{3}$.

**9.** 证明：如图，连结 $OA$，过点 $O$ 作 $OB\perp PM$ 于点 $B$. $\because PN$ 与 $\odot O$ 相切于点 $A$，$\therefore OA\perp PN$，$OA$ 是 $\odot O$ 的半径. $\therefore$ 点 $O$ 在 $\angle MPN$ 的平分线上，$\therefore OB=OA$. $\therefore$ 点 $O$ 到直线 $PM$ 的距离等于 $\odot O$ 的半径. $\therefore PM$ 为 $\odot O$ 的切线.



第9题答案



（第 9 题）

**易错总结**：切线的判定定理需满足两个条件：①经过半径外端；②与半径垂直，这两个条件缺一不可. 证明一条直线是圆的切线时，如果直线和圆未明确是否有公共





关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

点，应“作垂直，证平行”．而本题易错解为“连半径，证垂直”．

**10.**（1）**证明**：连结 $OB$．

$\because AB=AC$，$\therefore \angle ABC=\angle ACB$．

$\because \angle ACB=\angle OCD$，$\therefore \angle ABC=\angle OCD$．

$\because OD\perp AO$，$\therefore \angle COD=90°$．

$\therefore \angle D+\angle OCD=90°$．

$\therefore \angle D+\angle ABC=90°$．

$\because OB=OD$，$\therefore \angle OBD=\angle D$．

$\therefore \angle OBD+\angle ABC=90°$，即 $\angle ABO=90°$．

$\therefore AB\perp OB$．

又 $\because B$ 在 $\odot O$ 上，

$\therefore$ 直线 $AB$ 与 $\odot O$ 相切．

（2）$\dfrac{2}{3}$　**点拨**：$\because \angle ABO=90°$，

$\therefore OA=\sqrt{AB^2+OB^2}=\sqrt{5^2+12^2}=13$．

$\because AC=AB=5$，

$\therefore OC=OA-AC=8$．

$\therefore \tan\angle BDO=\dfrac{OC}{OD}=\dfrac{8}{12}=\dfrac{2}{3}$．

**11. 证明**：过点 $D$ 作 $DE\perp AC$，垂足为 $E$．

$\because AD$ 平分 $\angle BAC$，$BD\perp AB$，$DE\perp AC$，

$\therefore DE=DB$．即 $DE$ 是 $\odot O$ 的半径．

$\therefore AC$ 与 $\odot D$ 相切．

**12. 解**：（1）$\because AF$ 与 $\odot O$ 相切于点 $A$，

$\therefore AF\perp OA$，即 $\angle OAF=90°$．

又 $\because \angle F=30°$，

$\therefore \angle BOA=90°-30°=60°$．

$\therefore \angle ADB=\dfrac{1}{2}\angle AOB=30°$．

（2）$\because BD$ 是 $\odot O$ 的直径，

$\therefore \angle BAD=90°$．

$\because \angle BAC=120°$，$\therefore \angle DAC=30°$．

$\because \angle DBC=\angle DAC=30°$．

$\because \angle F=30°$，$\therefore \angle F=\angle DBC$．

$\therefore AF\parallel BC$．

又 $\because AF\perp OA$，$\therefore OA\perp BC$．

$\because BE=CE=\dfrac{1}{2}BC=4$．$\therefore AB=AC$．

$\because \angle AOB=60°$，$OA=OB$，

$\therefore \triangle AOB$ 是等边三角形．$\therefore AB=OB$．

$\because \angle OBE=30°$，

$\therefore OE=\dfrac{1}{2}OB$，$BE=\sqrt{3}OE=4$．

$\therefore OE=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore AC=AB=OB=2OE=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$．

**13.**（1）**证明**：连结 $OD$．

$\because$ 四边形 $OBEC$ 是平行四边形，

$\therefore OC\parallel BE$．

$\therefore \angle AOC=\angle OBE$，$\angle COD=\angle ODB$．

$\because OB=OD$，$\therefore \angle OBD=\angle ODB$，

$\therefore \angle DOC=\angle AOC$．

在 $\triangle COD$ 和 $\triangle COA$ 中，$\begin{cases}OC=OC,\\ \angle COD=\angle COA,\\ OD=OA,\end{cases}$

$\therefore \triangle COD\cong\triangle COA$．

$\therefore \angle CDO=\angle CAO=90°$．

又 $\because D$ 在 $\odot O$ 上，

$\therefore CF$ 是 $\odot O$ 的切线．

（2）**解**：$\because \angle F=30°$，$\angle ODF=90°$，

$\therefore \angle DOF=60°$，$\therefore \angle AOD=120°$．

$\therefore \angle DOB=60°$，$OD=OB$，

$\therefore \triangle OBD$ 是等边三角形，

$\therefore \angle DBO=60°$，$OB=BD$．

易证 $\triangle EDC\cong\triangle ECD=30°$，

$\therefore ED=EC$．

$\because$ 四边形 $EBOC$ 是平行四边形，

$\therefore EC=ED=BD=DB$．

$\therefore ER=4$，$\therefore DR=2$．

$\therefore OB=OD=OA=2$．

$\because \angle AOC=\angle COD$，

$\therefore \angle AOC=60°$．

在 $\mathrm{Rt}\triangle AOC$ 中，

$\because \angle OAC=90°$，$OA=2$，$\angle AOC=60°$，

$\therefore \angle OCA=30°$，$OC=4$．

$\therefore AC=\sqrt{OC^2-OA^2}=2\sqrt{3}$．

$\therefore S_{\text{阴影}}=2S_{\triangle AOC}-S_{\text{扇形}AOB}=2\times\dfrac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{3}-\dfrac{1}{3}\times\pi\times 2^2=4\sqrt{3}-\dfrac{4\pi}{3}$．

## 2.2　切线长定理

**1.** B　**2.** B　**3.** D　**4.** C　**5.** B　**6.** C　**7.** A　**8.** C

**9.** A　**点拨**：如图，连结 $OC$，$OD$，$OE$．

$\because BC$ 切 $\odot O$ 于点 $E$，$AC$ 切 $\odot O$ 于点 $D$，

$\therefore OE\perp BC$，$OD\perp AC$．

$\because \angle OEB=\angle OEC=\angle ODC=\angle ODA=\angle ACB=90°$，

$\therefore$ 四边形 $ODCE$ 是矩形．

又 $\because DO=OE$，$\therefore$ 四边形 $ODCE$ 是正方形．

$\therefore \angle A=\angle B=45°$，

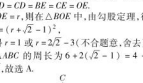
$\therefore \triangle AOD$ 与 $\triangle BOE$ 都是等腰直角三角形．

$\therefore AD=CD=BE=CE=OE$．

设 $OE=r$，则在 $\triangle BOE$ 中，由勾股定理，得 $2r^2=(r+\sqrt{2}-1)^2$，

解得 $r=1$ 或 $r=2\sqrt{2}-3$（不合题意，舍去）．

$\therefore \triangle ABC$ 的周长为 $6+2(\sqrt{2}-1)=4+2\sqrt{2}$，故选 A．



（第 9 题）

**10.**（1）**证明**：如图，连结 $OD$．

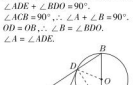
$\because DE$ 是 $\odot O$ 的切线，$\therefore OD\perp DE$．

$\therefore \angle ADE+\angle BDO=90°$．

$\because \angle ACB=90°$，$\therefore \angle A+\angle B=90°$．

$\because OD=OB$，$\therefore \angle B=\angle BDO$．

$\therefore \angle A=\angle ADE$．



（第 10 题）

（2）**解**：如图，连结 $CD$．

$\because \angle ADE=\angle A$，$\therefore AE=DE$．

$\because BC$ 是 $\odot O$ 的直径，$\angle ACB=90°$，

$\therefore EC$ 是 $\odot O$ 的切线．

$\because ED=EC$，$\therefore AE=EC$．

$\therefore DE=5$，$\therefore AC=2DE=10$．

$\because BC$ 是 $\odot O$ 的直径，

$\therefore \angle CDB=\angle CDA=90°$．

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADC$ 中，$DC=\sqrt{10^2-8^2}=6$．

设 $BD=x$，在 $\mathrm{Rt}\triangle BDC$ 中，$BC^2=x^2+6^2$；

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$BC^2=(x+8)^2-10^2$，

$\therefore x^2+6^2=(x+8)^2-10^2$，

解得 $x=\dfrac{9}{2}$．

$\therefore BC=\sqrt{6^2+\left(\dfrac{9}{2}\right)^2}=\dfrac{15}{2}$．

**11.**（1）$\because PA$ 切 $\odot O$ 于点 $A$，$PB$ 切 $\odot O$ 于点 $B$，

$\therefore PA=PB$，$\angle PAC=90°$．

$\because \angle APB=60°$，

$\therefore \triangle APB$ 是等边三角形．

$\therefore \angle BAP=60°$．

$\therefore \angle BAC=90°-\angle BAP=30°$．

（2）作 $OD\perp AB$ 于点 $D$，如图所示，

则 $AD=BD=\dfrac{1}{2}AB$．



（第 11 题）

由（1）得 $\triangle APB$ 是等边三角形，

$\therefore AB=PA=1$．$\therefore AD=\dfrac{1}{2}$．

$\because \angle BAC=30°$，

$\therefore AD=\sqrt{3}OD=\dfrac{1}{2}$．

$\therefore OD=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$．

即点 $O$ 到弦 $AB$ 的距离为 $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$．

**12.**（1）$\triangle ABC$ 是直角三角形．

证明：$\because AB$，$BC$，$CD$ 分别与 $\odot O$ 相切于点 $E$，$F$，$G$，

$\therefore \angle OBE=\angle OBF=\dfrac{1}{2}\angle EBF$，$\angle OCG=\angle OCF=\dfrac{1}{2}\angle GCF$．

$\therefore AB\parallel CD$，

$\therefore \angle EBF+\angle GCF=180°$，

$\therefore \angle OBF+\angle OCF=90°$．

$\therefore \angle BOC=90°$．

$\therefore \triangle OBC$ 是直角三角形．

（2）$\because$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle BOC$ 中，$BO=6$，$CO=8$，

$\therefore BC=\sqrt{BO^2+CO^2}=10$．

（3）$\because BC$ 与 $\odot O$ 相切于点 $F$，

$\therefore OF\perp BC$．

易知 $OF=\dfrac{BO\cdot CO}{BC}=\dfrac{6\times 8}{10}=4.8$．

**13.**（1）**证明**：连结 $OE$，

$\because AM$，$DE$ 是 $\odot O$ 的切线，

$\therefore DA=DE$，易证 $\triangle AOD\cong\triangle EOD$，

$\therefore \angle AOD=\angle EOD=\dfrac{1}{2}\angle AOE$，

又 $\because \angle ABE=\dfrac{1}{2}\angle AOE$，

$\therefore \angle AOD=\angle ABE$，$\therefore OD\parallel BE$．

（2）**解**：$OF=\dfrac{1}{2}CD$．理由：

$\because AM$，$BN$，$DC$ 是 $\odot O$ 的切线，

$\therefore AD=DE$，$BC=CE$，

$\therefore AD+BC=DE+CE$．

即 $AD+BC=DC$．

由 $AB$ 是 $\odot O$ 的直径，且点 $F$ 是 $CD$ 的中点，

易得 $OF=\dfrac{1}{2}(AD+BC)=\dfrac{1}{2}DC$．

即 $OF=\dfrac{1}{2}DC$．

## 2.3　三角形的内切圆

**1.** C　**2.** B

**3.** C　**点拨**：根据勾股定理得，斜边长为 $\sqrt{8^2+15^2}=17$（步），

则易得该直角三角形能容纳的圆形（内切圆）半径为 $\dfrac{8+15-17}{2}=3$（步），即直径为 6 步．故选 C．

**4.** D

**5.** A　**点拨**：$\because AB=5$，$BC=13$，$CA=12$，

$\therefore AB^2+CA^2=BC^2$．

$\therefore \triangle ABC$ 为直角三角形，且 $\angle A=90°$．

$\because AB$，$AC$ 与 $\odot O$ 分别相切于点 $F$，$E$，

$\therefore OF\perp AB$，$OE\perp AC$．

易知四边形 $OFAE$ 为正方形．

设 $OE=r$，则 $AE=AF=r$，

$\therefore \triangle ABC$ 的内切圆 $\odot O$ 与 $BC$，$CA$，$AB$ 分别相切于点 $D$，$E$，$F$，

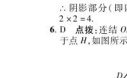
$\therefore BD=BF=5-r$，$CD=CE=12-r$．

$\therefore 5-r+12-r=13$．

$\therefore r=\dfrac{5+12-13}{2}=2$．

$\therefore$ 阴影部分（即四边形 $AEOF$）的面积是 $2\times 2=4$．

**6.** D　**点拨**：连结 $OA$，$OE$，$OD$，$OB$，$OR$ 交 $DE$ 于点 $H$，如图所示．



（第 6 题）

$\because$ 等腰三角形 $ABC$ 的内切圆 $\odot O$ 与 $AB$，$BC$，$CA$ 分别相切于点 $D$，$E$，$F$，

$\therefore AO$ 平分 $\angle BAC$，$OE\perp BC$，$OD\perp AB$，$BE=BD$．

$\therefore AB=AC$，$\therefore AO\perp BC$．

$\therefore$ 点 $A$，$O$，$E$ 共线，即 $AE\perp BC$．

$\therefore BE=CE=3$．

$\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 中，$AE=\sqrt{5^2-3^2}=4$．

$\because BD=BE=3$，$\therefore AD=2$．

设 $\odot O$ 的半径为 $r$，则 $OD=OE=r$，$AO=4-r$．

$\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle AOD$ 中，$r^2+2^2=(4-r)^2$，

解得 $r=\dfrac{3}{2}$．

$\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle BOE$ 中，

$OB=\sqrt{3^2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$．

$\because BE=BD$，$OE=OD$，

$\therefore OB$ 垂直平分 $DE$．

$\therefore DH=EH$，$DE=2DH$．

易知 $\dfrac{1}{2}HE\cdot OB=\dfrac{1}{2}OE\cdot BE$，

$\therefore HE=\dfrac{OE\cdot BE}{OB}=\dfrac{3\times\dfrac{3}{2}}{\dfrac{3\sqrt{5}}{2}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$．

$\therefore DE=2EH=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$．

**7.** C　**8.** C

**9. 证明**：连结 $BI$．

$\because I$ 是 $\triangle ABC$ 的内心，

$\therefore BI$ 平分 $\angle ABC$．$\therefore \angle IBH=\angle CBI$．

又 $\because AD\perp AC$，$\therefore \angle BAD=\angle DAC$．

$\because \angle DAC$ 与 $\angle DBC$ 均为 $\overset{\frown}{DC}$ 所对的圆周角，$\therefore \angle DAC=\angle DBC$．

$\therefore \angle ABI+\angle BAD=\angle CBI+\angle DBC$，

$\therefore \angle BID=\angle IBD$．$\therefore DI=DB$．

**10.**（1）**证明**：连结 $AO$，$OD$，

$\because AB=AC$，$\therefore AO$ 的延长线垂直于 $BC$．

$\because D$ 是 $\odot O$ 的切点，$\therefore OD\perp BC$．

$\therefore A$，$O$，$D$ 三点共线，即 $AD\perp BC$．

$\therefore BD=CD$．

易知 $BD=BF$，$CD=CE$，

$\therefore BF=CE$．

（2）**解**：$\because AC$，$BC$ 与 $\odot O$ 相切，

$\therefore CD=CE=2\sqrt{3}$，由（1）知 $AD\perp BC$，

$\therefore \triangle ADC$ 是直角三角形．

由 $\angle C=30°$，易得 $AC=4$．

**11.**（1）$\because BC=5$，$AC=6$，$AB=9$，

$\therefore p=\dfrac{BC+AC+AB}{2}=\dfrac{5+6+9}{2}=10$．

$\therefore S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{10\times 5\times 4\times 1}=10\sqrt{2}$．

故 $\triangle ABC$ 的面积是 $10\sqrt{2}$．

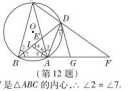
（2）易知 $S=\dfrac{1}{2}r(AB+BC+AC)$，

$\therefore 10\sqrt{2}=\dfrac{1}{2}r(9+5+6)$．

解得 $r=\sqrt{2}$．

故 $\triangle ABC$ 的内切圆半径 $r=\sqrt{2}$．

**12.**（1）**证明**：如图所示．



（第 12 题）

$\because$ 点 $I$ 是 $\triangle ABC$ 的内心，$\therefore \angle 2=\angle 7$．

$\because DG\perp AF$ 于点 $G$，$\angle 1=\dfrac{1}{2}\angle ADF$．

$\because \angle ADF$ 是 $\odot O$ 的内接四边形 $ABCD$ 的外角，

$\therefore \angle ADF=\angle ABC$．$\therefore \angle 1=\angle 2$．

$\because \angle 3=\angle 2$，$\therefore \angle 1=\angle 3$．

$\therefore DG\parallel AC$．

（2）**证明**：$\because$ 点 $I$ 是 $\triangle ABC$ 的内心，

$\therefore \angle 5=\angle 6$，$\angle 2=\angle 7$．

$\because \angle 3=\angle 2$，$\therefore \angle 7=\angle 3$．

$\because \angle 4=\angle 7+\angle 5=\angle 3+\angle 6$，

$\therefore \angle 4=\angle DAI$，$\therefore AD=ID$．

（3）**解**：$\because DE=4$，$BE=5$，

$\therefore BD=DE+BE=9$．

$\because \angle 3=\angle 7$，$\angle ADE=\angle BDA$，

$\therefore \triangle DAE\backsim\triangle DBA$．

$\therefore AD:DB=DE:DA$，

即 $AD:9=4:AD$．

$\therefore AD=6$（负值舍去）．

$\therefore DI=6$．$\therefore BI=BD-DI=9-6=3$．

**13.**（1）如图，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$BC=6$ cm，$CA=8$ cm，$\angle C=90°$．

由勾股定理得 $AB=10$ cm，

设 $\odot O$ 的半径为 $r$，连结 $AO$，$BO$，$CO$，

则有 $S_{\triangle ABO}+S_{\triangle BOC}+S_{\triangle AOC}=\dfrac{1}{2}AC\times BC$，

即 $\dfrac{1}{2}AB\times r+\dfrac{1}{2}BC\times r+\dfrac{1}{2}AC\times r=\dfrac{1}{2}AC\times BC$，

$\therefore 2r=\dfrac{6\times 8}{6+8+10}$．

$\therefore r=2$ cm．

（2）如图，设 $\odot O$ 与 $\triangle ABC$ 三边的切点分别为 $D$，$E$，$F$，

设 $BD=BE=x$ cm，

则 $CD=CF=(6-x)$ cm，

由（1）知 $\odot O$ 的半径为 2 cm，

易知 $6-x+2=x$，$\therefore x=4$，即 $BD=4$ cm．

$\because$ 点 $O$ 从点 $C$ 到 $A$ 的时间为 $8\div 2=4(s)$，

$\therefore$ 点 $P$ 移动的路程为 4 cm，

$\therefore$ 当点 $Q$ 移动到点 $A$ 时，点 $P$ 移动到点 $D$，即点 $P$ 在 $\odot O$ 上．

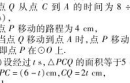
（3）设经过 $t$ s，$\triangle PCQ$ 的面积等于 5 $\text{cm}^2$，

则 $PC=(6-t)$ cm，$CQ=2t$ cm，

$\therefore \dfrac{1}{2}(6-t)\times 2t=5$，

解得 $t=1$ 或 $t=5$（大于 4，故舍去），

故经过 1 s，$\triangle PCQ$ 的面积等于 5 $\text{cm}^2$．



（第 13 题）

## 章末综合提升训练

**专训 1**

**1. 解**：$CD$ 与 $\odot O$ 相切，理由如下：如图，连结 $CO$，并延长交 $\odot O$ 于 $E$，连结 $AE$．

$\because CE$ 是直径，$\therefore \angle EAC=90°$．

$\therefore \angle E+\angle ACE=90°$．

$\because CA=CB$，$\therefore \angle B=\angle CAB$．

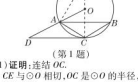
$\because AB\parallel CD$，$\therefore \angle ACD=\angle CAB$．

$\therefore \angle B=\angle E$，$\therefore \angle ACD=\angle E$．

$\therefore \angle ACE+\angle ACD=90°$，即 $OC\perp DC$．

又 $\because OC$ 为 $\odot O$ 的半径，

$\therefore CD$ 与 $\odot O$ 相切．



（第 1 题）

**2.**（1）**证明**：连结 $OC$．

$\because CE$ 与 $\odot O$ 相切，$OC$ 是 $\odot O$ 的半径，

$\therefore OC\perp CE$．

$\therefore \angle OCA+\angle ACE=90°$．

$\because OA=OC$，$\therefore \angle A=\angle OCA$．

$\because \angle ACE+\angle A=90°$，

$\therefore OD\perp AB$，$\therefore \angle ODA+\angle A=90°$．

$\therefore \angle ODA=\angle OCE$，

$\therefore \angle CDE+\angle A=90°$．

$\therefore \angle CDE=\angle ACE$．$\therefore EC=ED$．

（2）**解**：$\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径，

$\therefore \angle ACB=\angle DCF=90°$．

在 $\mathrm{Rt}\triangle DCF$ 中，$\angle DCF+\angle ECF=90°$，$\angle DCE+\angle CDE$，

$\therefore \angle CDE+\angle ECF=90°$．

$\therefore \angle CDE+\angle F=90°$．

$\therefore \angle ECF=\angle F$．$\therefore EC=EF$．

$\therefore EF=3$，$\therefore DE=3$．

$\therefore OA=4$，$\therefore OC=OA=4$，$AB=2OA=8$．

$\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle OCE$ 中，$OE=\sqrt{OC^2+EC^2}=$



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

$\sqrt{4^2+3^2}=5$. $\therefore OD=OE-DE=5-3=2$.

$\therefore$ 在 Rt $\triangle OAD$ 中，$AD=\sqrt{OA^2+OD^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$.

$\because \angle A=\angle A$，$\angle ACB=\angle AOD=90°$，

$\therefore \triangle AOD\backsim\triangle ACB$.

即 $\frac{OA}{AC}=\frac{AD}{AB}$，即 $\frac{4}{AB}=\frac{2\sqrt{5}}{8}$，

解得 $AC=\frac{16\sqrt{5}}{5}$.

**3.** (1) **证明**：如图，连结 $BC$，$OC$，$OE$.

$\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径，

$\therefore \angle ACB=\angle BCD=90°$.

在 Rt$\triangle BDC$ 中，

$\because BE=ED$，

$\therefore DE=EC=BE$.

又 $\because OC=OB$，$OE=OE$，

$\therefore \triangle OCE\cong\triangle OBE$ (SSS).

$\therefore \angle OCE=\angle OBE$.

$\because BD$ 是 $\odot O$ 的切线，

$\therefore \angle ABD=90°$.

$\therefore \angle OCE=\angle ABD=90°$.

$\therefore OC$ 为 $\odot O$ 的半径，

$\therefore EC$ 是 $\odot O$ 的切线.

(2) **解**：$\because OA=OB$，$BE=DE$，

$\therefore OE$ 为 $\triangle ABD$ 的中位线，$\therefore AD/\!/OE$.

$\therefore \angle D=\angle OEB$.

$\because \angle D=30°$，$\therefore \angle OEB=30°$，

$\therefore \angle OBE=60°$.

易知 $\angle COE=\angle BOE$，$\because \angle BOC=120°$.

$\therefore AB=4\sqrt{3}$，$\therefore OB=\frac{1}{2}AB=2\sqrt{3}$.

$\therefore BE=2\sqrt{3}\times\sqrt{3}=6$. $\therefore S_{\text{四边形}OBEC}=2S_{\triangle OBE}=2\times\frac{1}{2}\times6\times2\sqrt{3}=12\sqrt{3}$.

$\therefore S_{\text{阴影}}=S_{\text{四边形}OBEC}-S_{\text{扇形}BOC}=12\sqrt{3}-\frac{120\cdot\pi\times(2\sqrt{3})^2}{360}=12\sqrt{3}-4\pi$.


(第 3 题)

**专题 2**

**1. 解**：修建的这条水渠不会穿过公园.

理由：如图，过点 $C$ 作 $CD\perp AB$，垂足为 $D$.

$\because \angle CBA=90°-45°=45°$，

$\therefore \triangle BDC=45°$，$CD=BD$.

设 $CD=x$ km，则 $BD=x$ km.

由 $\angle CAB=90°-60°=30°$，知 $AC=2x$，

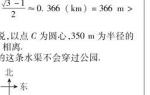
$\therefore AD=\sqrt{(2x)^2-x^2}=\sqrt{3}x$，

$\therefore \sqrt{3}x+x=1$. 解得 $x=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$.

即 $CD=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\approx0.366$ (km) $=366$ m $>350$ m，

也就是说，以点 $C$ 为圆心，350 m 为半径的圆与 $AB$ 相离.

$\therefore$ 修建的这条水渠不会穿过公园.



(第 1 题)

**2. 解**：$\because$ 圆锥形漏斗的底面半径为 20 cm，高为 $40\sqrt{2}$ cm，

$\therefore$ 圆锥的母线长为 $\sqrt{20^2+(40\sqrt{2})^2}=60$(cm).

设圆锥的侧面展开图的圆心角为 $n°$，则有 $\frac{n\pi\times60}{180}=2\pi\times20$，解得 $n=120$.

方案一：如图①，扇形的半径为 60 cm，矩形的宽为 60 cm，易求得矩形的长为 $60\sqrt{3}$ cm. 当 $AB=60$ cm，$BC=60\sqrt{3}$ cm 时，$S_{\text{矩形}ABCD}=3\,600\sqrt{3}$ cm$^2$.

方案二：如图②，扇形与矩形的两边相切，有一边重合，易求得矩形的宽为 60 cm，长为 $30+60=90$(cm)，此时矩形的面积为 $90\times60=5\,400$(cm$^2$).

$\because 3\,600\sqrt{3}>5\,400$，

$\therefore$ 方案二所用材料最省. 即选长为90 cm，宽为 60 cm 的矩形铁皮，才能使所用材料最省.



(第 2 题)

**3. 解**：(1) 线段 $AB$ 长度的最小值为 4. 理由如下：连结 $OP$.

$\because AB$ 切 $\odot O$ 于 $P$，$\therefore OP\perp AB$.

取 $AB$ 的中点 $C$，连结 $OC$，则 $AB=2OC$，

当 $OC=OP$ 时，$OC$ 最短，

即 $AB$ 最短，此时 $AB=4$.

(2) 假设存在符合条件的点 $Q$.

如图①，设四边形 $APOQ$ 为平行四边形，

$\because \angle APO=90°$，

$\therefore$ 四边形 $APOQ$ 为矩形.

又 $\because OP=OQ$，

$\therefore$ 四边形 $APOQ$ 为正方形.

$\therefore OQ=OA$，$\angle QOA=45°$.

在 Rt$\triangle OQA$ 中，根据 $OQ=2$，$\angle AOQ=45°$，得 $Q$ 点的坐标为 $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$.

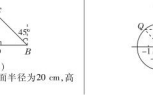
如图②，设四边形 $APOQ$ 为平行四边形，则 $QQ'/\!/PA$，$PQ'/\!/OA$，

$\because PQ'\bot AP$，$\therefore PQ'\bot$ 轴.

设 $PQ'$ 交 $y$ 轴于点 $H$，

在 Rt$\triangle OHQ$ 中，根据 $OQ=2$，$\angle HQO=45°$，得 $Q$ 点的坐标为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

$\therefore$ 符合条件的点 $Q$ 的坐标为 $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ 或 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.



(第 3 题)

**4. 解**：如图，设 $PQ$ 与 $\odot O$ 相切于点 $H$，过点 $P$ 作 $PE\perp BC$，垂足为 $E$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 中，$AD/\!/BC$，

$\angle ABC=90°$，$\therefore PE=AB$.

由题意可知 $AP=BE=1$，$CQ=2t$，

$\therefore BQ=BC-CQ=22-2t$，$EQ=BQ-BE=22-2t-t=22-3t$.

$\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径，$\angle ABC=\angle DAB=90°$，

$\therefore AD$，$BC$ 为 $\odot O$ 的切线.

$\because PQ$ 切 $\odot O$ 于 $H$，

$\therefore AP=PH$，$HQ=BQ$.

$\therefore PQ=PH+HQ=AP+BQ=1+22-2t=22-t$.

在 Rt$\triangle PEQ$ 中，$PE^2+EQ^2=PQ^2$，

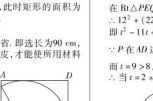
$\therefore 12^2+(22-3t)^2=(22-t)^2$.

即 $t^2-11t+18=0$. 解得 $t_1=2$，$t_2=9$.

$\because P$ 在 $AD$ 边运动的时间为 $\frac{AD}{1}=\frac{8}{1}=8$(s)，

而 $t=9>8$，$\therefore t=9$ 舍去.

$\therefore$ 当 $t=2$ s 时，$PQ$ 与 $\odot O$ 相切.



(第 4 题)

## 全章热门考点整合应用

**1. 解**：(1) 根据平行线间的距离相等，则点 $O$ 到 $CD$ 的距离为点 $A$ 到 $CD$ 的距离. 根据 $\angle D=60°$，$AD=m$，利用直角三角形中“30°角所对的直角边等于斜边的一半”及勾股定理，得点 $O$ 到 $CD$ 的距离是 $\frac{\sqrt{3}}{2}m$.

(2) 当 $m=6$ 时，$\frac{\sqrt{3}}{2}m=3\sqrt{3}>5$，

故 $\odot O$ 与 $CD$ 相离.

(3) 因为当点 $C$ 在圆上时，$m=\frac{1}{2}AB=5$；

当线段 $CD$ 与 $\odot O$ 相切时，$m=\frac{10}{3}$，

所以若 $\odot O$ 与线段 $CD$ 有两个公共点，则 $m$ 的取值范围是 $5\leqslant m<\frac{10}{3}$.

**2.** 76° **3.** A **4.** C

**5. 解**：(1) 连结 $OB$.

$\because BC$ 是 $\odot O$ 的切线，$\therefore OB\bot BC$.

$\because$ 四边形 $OABC$ 是平行四边形，

$\therefore OA/\!/BC$，$AB/\!/OC$.

$\therefore OB\bot OA$，$\angle BOD=\angle ABO$.

又 $\because OA=OB$，

$\therefore \angle AOB$ 是等腰直角三角形.

$\therefore \angle ABO=45°$.

$\therefore \angle BOD=45°$.

$\because \overset{\frown}{BD}$ 的度数为 45°.

(2) 如图，连结 $OE$，过点 $O$ 作 $OH\bot EC$ 于点 $H$，设 $EH=x$.

$\because OH\bot EC$，$\therefore EF=2HE=2x$.

$\because$ 四边形 $OABC$ 是平行四边形，且 $EF=AB$，

$\therefore AB=CO=EF=2x$.

由 (1) 知 $\triangle AOB$ 是等腰直角三角形，

$\therefore OA=\sqrt{2}x$，

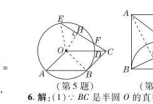
$\therefore OE=OA=\sqrt{2}x$.

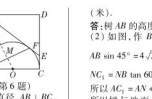
$\therefore HO=\sqrt{OE^2-EH^2}=\sqrt{2x^2-x^2}=x$.

$\therefore OC=2OH$.

又 $\because \triangle OHC$ 是直角三角形，

$\therefore \angle OCE=30°$.


(第 5 题)


(第 6 题)

**6. 解**：(1) $\because BC$ 是半圆 $O$ 的直径，$AB\bot BC$，$DC\bot BC$，$\therefore AB$，$CD$ 都是半圆 $O$ 的切线.

$\because AF=AB=4$，$EF=EC$.

设 $EC=x$，则 $EF=x$，$DE=4-x$，

$\therefore AE=4+x$.

在 Rt$\triangle ADE$ 中，$4^2+(4-x)^2=(4+x)^2$，

解得 $x=1$. $\therefore DE=3$.

$\therefore S_{\triangle ADE}=\frac{1}{2}\times3\times4=6$.

(2) $\triangle ADE$ 的面积是 6.

(2) 连结 $AO$ 交 $BF$ 于点 $M$，如图，则 $AO=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$，由 $AB$，$AF$ 都是半圆 $O$ 的切线，易得 $AO\bot BF$.

$\because BM=MF$，

$\therefore \angle BAO=\angle MAO$，$\angle ABO=\angle AMB=90°$，

$\therefore \triangle ABO\backsim\triangle AMB$.

即 $\frac{AO}{AB}=\frac{BM}{BO}$.

$\therefore MF=BM=\frac{AB\cdot OB}{AO}=\frac{4\times2}{2\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

$\therefore BF=\frac{8\sqrt{5}}{5}$.

# 第 3 章　三视图与表面展开图

## 3.1 投　影

### 第 1 课时　平行投影

**1.** 解：如图.



(第 1 题)

**2.** C **3.** A **4.** D **5.** B **6.** A **7.** 10 米

**8.** 15 cm　**点拨**：构造直角三角形，设皮球的直径为 $d$，则 $d=10\sqrt{3}\times\sin60°=10\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=15$ (cm).

**9.** 解：不正确.

**诊断**：同一时刻，太阳光下物体上的点和影子上对应点的连线互相平行. 这一点非常重要，解题时常忽略这一点而造成错误.

**10.** 解：(1) 如图，

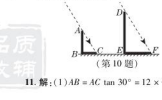
$EF$ 为此时 $DE$ 在阳光下的影子.

(2) 由题意得 $\triangle ABC\backsim\triangle DEF$，

$\therefore \frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}$，即 $\frac{5}{DE}=\frac{3}{6}$.

解得 $DE=10$ m.

$\therefore DE$ 的长为 10 m.


(第 10 题)

**11.** 解：(1) $AB=AC\tan30°=12\times\frac{\sqrt{3}}{3}=4\sqrt{3}$ (米).

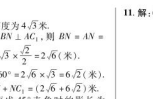
答：树 $AB$ 的高度为 $4\sqrt{3}$ 米.

(2) 如图，作 $BN\perp AC_1$，则 $BN=AN=AB\sin45°=4\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{6}$ (米).

$NC_1=NB\tan60°=2\sqrt{6}\times\sqrt{3}=6\sqrt{2}$ (米).

所以 $AC_1=AN+NC_1=(2\sqrt{6}+6\sqrt{2})$ 米.

所以树与地面成 45° 夹角时的影长为 $(2\sqrt{6}+6\sqrt{2})$ 米.



(第 11 题)

**12.** (1) **解**：$AC$ 的投影是 $AD$，$CD$ 的投影是点 $D$，$BC$ 的投影是 $BD$.

(2) **证明**：①易证得 $\triangle BCD\backsim\triangle BAC$，可得 $\frac{BC}{BA}=\frac{BD}{BC}$，即 $BC^2=BD\cdot AB$；

②易证得 $\triangle ACD\backsim\triangle CBD$，可得 $\frac{CD}{BD}=\frac{AD}{CD}$，

则 $CD^2=AD\cdot BD$.

**13. 解**：连立如图所示的示意图. 设 $AB$ 为小亮，$CD$ 为小明，$GF$ 为小明在墙上的影子，

∵ 太阳光线是平行的，

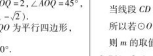
∴ $AE/\!/CG$，过 $F$ 作 $FH/\!/CG$，

则 $CH=FG=0.6$ m.

易知 $\triangle ABE\backsim\triangle HDF$，∴ $\frac{AB}{BE}=\frac{HD}{DF}$，

即 $\frac{1.6}{2.4+\frac{1.8}{1.8}}=\frac{HD}{1.8}$. ∴ $HD=1.2$ m.

即小明的身高为 $1.2+0.6=1.8$ (m).

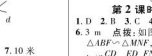


(第 13 题)

### 第 2 课时　中心投影

**1.** D **2.** B **3.** C **4.** D **5.** C

**6.** 3 m　**点拨**：如图，易知 $\triangle ABE\backsim\triangle CDE$，$\triangle ABF\backsim\triangle MNF$，根据相似三角形的性质知道 $\frac{CD}{AB}=\frac{ED}{EB}=\frac{EN}{EB}=\frac{FN}{FB}=\frac{MN}{AB}$，即可得到结论.



(第 6 题)

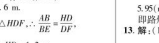
**7.** B **8.** D

**9.** 错误答案：C

**诊断**：本题考查的是中心投影的特点，即影子与光源应在物体的异侧，由选项可知，只有 B 选项符合题意.

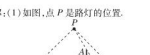
**正确答案**：B

**10.** 解：如图.



(第 10 题)

**11.** 解：(1) 如图，点 $P$ 是路灯的位置.



(第 11 题)

(2) 如图，线段 $MC$ 表示小明.

**12.** 解：依题意，得 $AB\perp BH$，$CD\perp BH$，$FG\perp BH$. 在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CDE$ 中，

$\because AB\perp BH$，$CD\perp BH$，

$\therefore \angle B=\angle CDE=90°$.

又 $\because \angle CED=\angle AEB$，

$\therefore \triangle ABE\backsim\triangle CDE$. $\therefore \frac{CD}{AB}=\frac{DE}{DE+BD}$.

同理可得 $\triangle ABH\backsim\triangle FHG$，

$\therefore \frac{FG}{AB}=\frac{GH}{HG+DG+BD}$.

又 $\because CD=FG=1.7$ m，

$\therefore \frac{DE}{DE+BD}=\frac{GH}{HG+DG+BD}$.

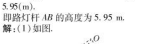
$\because DE=3$ m，$DG=5$ m，$GH=5$ m，

$\therefore \frac{3}{3+BD}=\frac{5}{5+5+BD}$. 解得 $BD=7.5$ m.

$\therefore AB=\frac{CD}{DE}\cdot(DE+BD)=\frac{1.7\times(3+7.5)}{3}=5.95$(m).

即路灯杆 $AB$ 的高度为 5.95 m.

**13.** 解：(1) 如图.



(第 13 题)

(2) 设小明原来的速度为 $x$ m/s，则 $CE=2x$ m，$AM=AF-MF=(4x-1.2)$ m，$EC=2\times1.5x=3x$(m)，$BM=AB-AM=12-(4x-1.2)=13.2-4x$(m).

由题易知 $\triangle OCE\backsim\triangle OAM$，$\triangle OEG\backsim\triangle OMB$.

$\therefore \frac{CE}{AM}=\frac{OE}{OM}=\frac{EG}{MB}=\frac{OE}{OM}$.

$\therefore \frac{CE}{AM}=\frac{EG}{BM}$，即 $\frac{2x}{13.2-4x}=\frac{3x}{13.2-4x}$. 解得 $x_1=1.5$，$x_2=0$，经检验 $x_1=1.5$，$x_2=0$ 都为原方程的解，但 $x_2=0$ 不符合题意，应舍去. $\therefore x=1.5$.

即小明原来的速度为 1.5 m/s.

## 阶段方法技巧训练

**专训**

**1.** B　**点拨**：题图①中影子的方向不同，是在灯光下的影子；题图②中影子的方向相同，且影长与树高成正比，是在阳光下的影子.

**2.** 解：(1) 题图②反映了阳光下的情形，题图①反映了路灯下的情形.

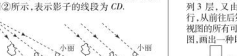
(2) 如图，图①中过影子顶端与树顶端的直线相交于一点，符合中心投影的特点，因此图①反映了路灯下的情形；图②中过影子顶端与树顶端的直线平行，符合平行投影的特点，因此图②反映了阳光下的情形.

(3) 路灯下小丽的影子如图①所示，表示




关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

影子的线段为 $AB$；阳光下小丽的影子如图②所示，表示影子的线段为 $CD$.




①　②

（第 2 题）

**3. C　4.** $4\sqrt{3}$

**5.** 解：设路灯的高度为 $x$ m，$OC=y$ m，由题意知当人在 $A$ 点时，影长 $AB$ 与人的身高 $AE$ 重合，当人在 $B$ 点时，影长 $BC=2+0.5=2.5$(m).

易知 $\frac{x}{1.6}=\frac{x}{BC}$，$\frac{1.6}{x}=\frac{0.5}{AB}$，即 $\begin{cases}\frac{x}{1.6}=\frac{y}{2.5},\\ \frac{1.6}{x}=\frac{y-2.5}{2},\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=8,\\ y=12.5.\end{cases}$　即路灯的高度为 8 m.

## 3.2　简单几何体的三视图

### 第 1 课时　直棱柱的三视图

**1.** 1　**2.** A　**3.** A　**4.** B　**5.** A　**6.** A

**7.** 解：(1)4　(2)略

**8.** 解：(1)略　(2)57 $cm^2$

### 第 2 课时　旋转体的三视图

**1.** C　**2.** A　**3.** C

**4.** B　**点拨**：A，C，D 三种几何体的三视图中，同时具有正方形和圆的不存在，所以这三种几何体中无论哪一种都不能堵住空洞，而几何体 B 的主视图是正方形，俯视图是圆，所以它既可以堵住方形空洞又可以堵住圆形空洞，故选 B.

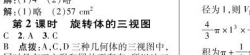
**5.** B　**6.** C　**7.** A　**8.** C　**9.** A　**10.** A

**11.** C　**点拨**：根据俯视图的概念和看到的应都应用实线表示在三视图中，看不到，又实际存在的，又没有被其他边挡住的边用虚线表示在三视图中，即可确定答案.


第11题图

**12.** 解：(1)——B；(2)——C；(3)——A.

**13.** 解：几何体的主视图、左视图、俯视图如图所示.




（第 13 题）　（第 14 题）

**14.** 解：(1)如图所示.

(2) $V=\pi r^2\cdot h=\pi\times8^2\times5\approx320\pi(m^3)$.

**答**：这个粮仓最多可以存放 $320\pi$ $m^3$ 粮食.

**15.** 解：(1)91

(2)第 $n$ 个图形中看不见的小立方体的个数为 $(n-1)^3$.

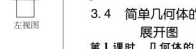
## 3.3　由三视图描述几何体

**1.** A　**2.** D　**3.** A　**4.** D

**5.** C　**点拨**：“粮仓”的体积为 $3^2\pi\times4+\frac{1}{3}\times3^2\pi\times(7-4)=45\pi(m^3)$.

**6.** A　**7.** B

**8.** 解：(1)由主视图可看出，此几何体有 3 列，从左往右第 1 列 1 层，第 2 列 2 层，第 3 列 3 层，又由俯视图可知，此几何体有 2 行，从前往后第 1 行 3 列，第 2 行 2 列，则左视图的所有可能的结果有以下 5 种情形(如图，画出一种即可)：



（第 8 题）

(2)把以上五种情况下的几何体分别画出来，可得组成几何体的小正方体的个数可能是 8，9，10，11，即 $n=8,9,10,11$.

**9.** 解：(1)正六棱柱

(2)由三视图可知该几何体的上、下底面是边长为 5 cm 的正六边形，侧面是 6 个边长为 5 cm 的正方形，则该几何体的表面积为

$6\times5^2\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times2+6\times5\times5=75\sqrt{3}+150=75(\sqrt{3}+2)\approx280(cm^2)$.

**10.** 解：由已知可得这几何体是一个下部为圆柱，上部为 $\frac{1}{4}$ 球的组合体，且下部圆柱的底面半径为 1，高为 1，上部 $\frac{1}{4}$ 球的半径为 1，则 $V_{圆柱}=\pi\times1^2\times1=\pi$，$V_{\frac{1}{4}球}=\frac{4}{3}\pi\times1^3\times\frac{1}{4}=\frac{\pi}{3}$. 故此几何体的体积为 $\pi+\frac{1}{3}\pi=\frac{4}{3}\pi$.

**11.** 解：(1)此模型由两个长方体组成，上面是一个小长方体，下面是一个大长方体.

(2)模型的体积 $=5\times10\times2+3\times1.5\times30=309(m^3)$，则该模型的质量 $=309\times360=111\ 240(kg)$.

(3)模型的表面积 $=2\times3\times2+2\times1.5\times2+10\times5\times2+5\times6\times2+6\times10\times2=298(m^2)$，$298\div4=74.5(kg)$.

故需要油漆 74.5 kg.

**12.** 解：(1)过点 $E$ 作 $EH\perp FG$ 于点 $H$，

在 Rt△$EHF$ 中，$EF=4$ cm，$\angle EFH=45°$，

$\therefore EH=EF\cdot\sin\angle EFH=4\sin45°=2\sqrt{2}$(cm). 易知 $AB=EH=2\sqrt{2}$ cm.

(2)直三棱柱的体积 $=S_{△EFG}\cdot AD=\frac{1}{2}\times12\times2\sqrt{2}\times8=96\sqrt{2}(cm^3)$.

## 3.4　简单几何体的表面展开图

### 第 1 课时　几何体的展开图

**1.** B　**2.** D　**3.** A　**4.** C 或 E　**5.** C

**6.** B　**规律总结**：

| 名称 | 立体图形 | 展开图 | 底面形状 | 侧面形状 | 侧面展开图形状 |
|---|---|---|---|---|---|
| 正方体 | | | 正方形 | 正方形 | 长方形 |
| 长方体 | | | 长方形 | 长方形 | 长方形 |
| 五棱柱 | | | 五边形 | 长方形 | 长方形 |

**7.** B　**8.** C　**9.** C　**10.** B　**11.** C

**12.** 解：(1)该侧面的面积为 $3\times1\times2+3\times2\times2+2\times1\times2=22(m^2)$.

(2)该铁皮能做成一个长方体盒子，画立体图形略. 该长方体盒子的长为 3 m，宽为 2 m，高为 1 m，所以它的体积为 $3\times2\times1=6(m^3)$.

**13.** 解：如图，连结 $OB$，过点 $O$ 作 $OE\perp AB$，垂足为 $E$，交 $\overset{\frown}{AB}$ 于 $F$，由垂径定理知，$E$ 是 $AB$ 的中点，$F$ 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点，从而 $EF$ 是弓形的高，

$AE=\frac{1}{2}AB=2\sqrt{3}$ m，故 $EF=2$ m.

设 $\overset{\frown}{AB}$ 所在圆的半径为 $R$ m，

则 $OE=(R-2)$ m.

在 Rt△$AOE$ 中，由勾股定理，

得 $R^2=(R-2)^2+(2\sqrt{3})^2$，

解得 $R=4$，所以 $OE=OF-EF=2$ m，

所以 $AO=2OE$.

在 Rt△$AEO$ 中，$AO=2OE$，

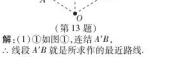
所以 $\angle OAE=30°$.

所以 $\angle AOE=60°$，

易知 $\angle AOB=120°$，

所以 $\overset{\frown}{AB}$ 的长为 $\frac{120\times4\pi}{180}=\frac{8\pi}{3}$(m).

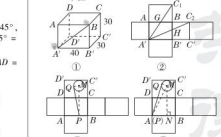
故覆盖棚顶的帆布的面积为 $\frac{8\pi}{3}\times60=160\pi(m^2)$.




（第 13 题）

**14.** 解：(1)①如图①，连结 $A'B$，

∴线段 $A'B$ 就是所求作的最近路线.




（第 14 题）

②画种植灯路线如图②所示.

由题意可得 Rt△$A'C'C_2$ 中，路线 $A'HC_2$ 的长为 $\sqrt{A'C'^2+C'C_2^2}=\sqrt{70^2+30^2}=\sqrt{5\,800}=10\sqrt{58}$(dm)，

Rt△$A'B'C_1$ 中，路线 $A'GC_1$ 的长为 $\sqrt{40^2+60^2}=20\sqrt{13}$(dm)，$20\sqrt{13}<10\sqrt{58}$.

∴路线 $A'GC_1$ 更近.

(2)连结 $MQ$，

∵ $PQ$ 与 $\odot M$ 的切线，点 $Q$ 为切点，

∴ $MQ\perp PQ$，∴在 Rt△$PQM$ 中，有 $PQ^2=MP^2-QM^2=MP^2-100$，

当 $MP\perp AB$ 时，$MP$ 最短，$PQ$ 取得最小值，如图③.

此时 $MP=30+20=50$(dm)，∴ $PQ=\sqrt{PM^2-QM^2}=\sqrt{50^2-10^2}=20\sqrt{6}$(dm)；

当点 $P$ 与点 $A$ 重合时，$MP$ 最长，$PQ$ 取得最大值，如图④，过点 $M$ 作 $MN\perp AB$，垂足为 $N$，

由题意可得 $PN=25$ dm，$MN=50$ dm，

∴ Rt△$PMN$ 中，$MP^2=AN^2+MN^2=25^2+50^2$，∴ Rt△$PQM$ 中，$PQ=\sqrt{MP^2-QM^2}=\sqrt{25^2+50^2-10^2}=55$(dm)，

综上所述，$PQ$ 长度的取值范围是 $20\sqrt{6}$ dm≤$PQ$≤55 dm.

### 第 2 课时　圆锥的展开图及相关计算

**1.** A　**2.** C　**3.** A

**4.** B　**点拨**：根据扇形的圆心角的度数和直径 $BC$ 的长度或扇形的半径，然后确定扇形的弧长，根据圆锥的底面周长等于扇形的弧长列式求解即可.

**5.** C　**6.** D　**7.** D　**8.** D　**9.** C　**10.** 5

**11.** 错误答案：B

**诊断**：误认为只斜边所在直线为轴将直角三角形旋转一周所形成的几何体的立面积是两个共底面的圆锥的侧面积与一个底面积之和.

**正确答案**：C

**12.** 解：(1)设圆锥的母线长是 $R$，底面半径是 $r$，

由题意得 $\pi R=2\pi r$，所以 $R=2r$，

即 $R:r=2:1$.

(2)易知 $\angle CAO=\angle BAO$，$AO\perp BC$，

在 Rt△$AOB$ 中，$2OB=AB$，

所以 $\angle OAB=30°$，所以 $\angle BAC=60°$.

(3)由(1)知 $R=2r$，即 $AB=2OB$.

因为 $AB^2=AO^2+OB^2$，

所以 $(2OB)^2=(3\sqrt{3})^2+OB^2$，

解得 $OB=3$ cm，所以 $AB=6$ cm，

所以 $S_{侧}=\pi\times3\times6=18\pi(cm^2)$，

即圆锥的侧面积为 $18\pi$ $cm^2$.

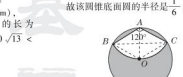
**13.** 解：(1)如图，设圆心为 $O$，连结 $OA$，$OB$，$OC$，$BC$. 易知 $AB=\frac{1}{2}$ m，

∴扇形 $BAC$ 的面积为 $\frac{120\times\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^2}{360}=\frac{\pi}{12}(m^2)$.

∵被剪掉的阴影部分的面积为 $\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{6}(m^2)$.

(2)设该圆锥底面圆的半径为 $r$ m，则 $\frac{120\times\pi\times\frac{1}{2}}{180}=2\pi r$，解得 $r=\frac{1}{6}$.

故该圆锥底面圆的半径是 $\frac{1}{6}$ m.




（第 13 题）

**14.** (1)证明：在正方形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=90°$，

∵△$BEC$ 绕点 $B$ 逆时针旋转 90° 得到△$BFA$，

∴△$ABF\cong$△$CBE$.

∴ $EA\,'B=\angle ECB$，$\angle ABF=\angle CBE=90°$，$AF=CE$.

∴ $\angle AFB+\angle FAB=90°$.

∵线段 $FA$ 绕点 $F$ 顺时针旋转 90° 得线段 $FG$，

∴ $\angle AFB+\angle CFG=\angle AFG=90°$.

∴ $\angle CFG=\angle FAB=\angle ECB$.

∴ $EC/\!/FG$.

∵ $AF=CE$，$AF=FG$，∴ $CE=FG$.

∴四边形 $EFGC$ 是平行四边形.

∴ $EF/\!/CG$.

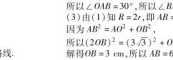
(2)解：∵ $AD=2$，$AB=AD$，$E$ 是 $AB$ 的中点，∴ $BF=BE=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times2=1$.

∴ $AF=\sqrt{AB^2+BF^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$.

由平行四边形的性质易得△$FEC$ 边△$CGF$，∴ $S_{△FEC}=S_{△CGF}$.

∴ $S_{阴影}=S_{扇形ABC}+S_{△ABF}+S_{△FEC}-S_{扇形AFG}=\frac{90\cdot\pi\cdot2^2}{360}+\frac{1}{2}\times2\times1+\frac{1}{2}\times(1+2)\times1-\frac{90\cdot\pi\cdot(\sqrt{5})^2}{360}=\frac{5}{2}-\frac{\pi}{4}$.

**15.** 解：(1)裁剪方案示意图如图所示：




（第 15 题）

(2)使得正方形获度的利用率最高的裁剪方案如图①所示，连结 $BD$. 设圆 $O$ 的半径为 $r$ cm，扇形的半径为 $R$ cm，则有 $\frac{90\times\pi\times R}{180}=2r\times\pi$，∴ $R=4r$.

∵正方形的边长为 40 cm，

∴ $BD=40\sqrt{2}$ cm. 易求得 $R+r+\sqrt{2}r=BD$.

即 $4r+r+\sqrt{2}r=40\sqrt{2}$.

∴ $r=\frac{200\sqrt{2}-80}{23}$. 则此时圆锥模型底面圆的半径为 $\frac{200\sqrt{2}-80}{23}$ cm.

**点拨**：(1)的答案不唯一.

## 全章热门考点整合应用

**1.** A　**点拨**：太阳光线是平行光线，由于摆放的位置不同，矩形木板在地面上形成的投影可能是 B，C 或 D. 故选 A.

**2.** 解：如图，过点 $C$ 作 $CE\perp AB$，垂足为 $E$，则 $EC=BD=200$ m，$BE=CD=2$ m.

设 $AB=x$ m，则 $AE=(x-2)$ m.

由题意，知 $\frac{AE}{EC}=\frac{1}{20}$，即 $\frac{x-2}{20}=\frac{1}{2}$.

解得 $x=12$，故旗杆的高度为 12 m.




（第 2 题）

**点拨**：本题旗杆的影子不都在地面上，故不能盲目地根据物体的高度与影长成正比来列方程.

**3.** 解：由题意，知 $EF/\!/BC$，$EF=22$ cm $=0.22$ m，$MN=10$ cm $=0.1$ m，$MB=20$ m，

∴△$OEF\sim$△$OBC$，

∴ $\frac{EF}{BC}=\frac{MN}{MB}$，即 $\frac{0.22}{BC}=\frac{0.1}{20}$，

解得 $BC=44$ m.

∴建筑物 $A$ 的高为 44 m.

**4.** 解：(1)画投影略.

(2)易知 $\frac{AB}{DB}=\frac{BC}{DE}$，

∴ $\frac{1.1}{12.1}=\frac{1.65}{DE}$，

∴ $DE=18.15$ m $=18.2$ (m).

故教学楼 $DE$ 的高度约为 18.2 m.

**5.** 解：设路灯的高为 $x$ m，

∵ $GH\perp BD$，$AB\perp BD$，∴ $GH/\!/AB$，

∴△$EGH\sim$△$EAB$，

∴ $\frac{GH}{AB}=\frac{EH}{EB}$①，

同理△$FGH\sim$△$FCD$，

∴ $\frac{GH}{CD}=\frac{FH}{FD}$②，

∴ $\frac{EH}{EB}=\frac{FH}{FD}=\frac{EB+FD}{EB+FD}=1$，

∴ $\frac{3}{EB}=\frac{4.5}{EB+4.5}$，解得 $EB=11$ 米，

代入①得 $\frac{1.8}{x}=\frac{3}{11}$，解得 $x=6.6$.

∴路灯的高为 6.6 米.

**6.** C　**7.** C

**8.** 解：如图.




（第 8 题）

**9.** B

**10.** 解：如图.



（第 10 题）

**11.** B

**12.** 解：这样的几何体不是只有一种，它最少需要 10 个小立方体，最多需要 16 个小立方体.

**13.** 解：该几何体是直四棱柱.

由三种视图知，棱柱底面菱形的对角线的长分别为 4 cm，3 cm. 易求得菱形的边长为 $\frac{5}{2}$ cm，故此四棱柱的侧面积为 $\frac{5}{2}\times8\times4=80(cm^2)$.

**14.** B　**15.** A

**16.** 解：(1)如果画 A 是长方体的上面，那么面 C 会在下面.

(2)如果面 F 是长方体的后面，从左面看是面 B，那么面 C 或面 D 会在上面.

(3)从右面看是面 A，从上面看是面 E，那么面 B 或面 D 或面 C 会在面.

**17.** 解：(1)六棱柱.

(2)侧面积 $=(2+4)\cdot ab=6ab$.

**18.** B　**19.** A





关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

# 上 册

## 第 1 章达标检测卷

一、1. B　2. C

3. B　**点拨**：根据“左加右减，上加下减”，可得 B 选项正确.

4. B　5. D　6. C

7. D　**点拨**：$c<0$，若示取函数图象在 $x$ 轴下面的部分，$1-(-1)=2$，所以函数图象与 $x$ 轴的另一个交点为 $(3,0)$，故选 D.

8. A　9. C

10. A　**点拨**：易知 $\triangle DEB$ 为等边三角形，

$\because \angle EDB=60°$.

又 $\because EF\perp DE$，$\therefore \angle EFD=30°$.

$\therefore DF=2DE=2BD=2(2-x)$.

在 $Rt\triangle DEF$ 中，由勾股定理，得 $EF=\sqrt{DF^2-DE^2}=\sqrt{4(2-x)^2-(2-x)^2}=\sqrt{3}(2-x)$，

$\therefore y=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}(2-x)\times(2-x)=\frac{\sqrt{3}}{2}(x-2)^2(0\leqslant x<2)$. 故选 A.

二、11. 高；$(0,15)$　12. $-1$；增大　13. 15

14. $x_1=-2$，$x_2=6$　15. $x<-2$ 或 $x>8$

16. 9　17. ①④

18. $\frac{27}{2}$　**点拨**：由题意知抛物线 $m$ 的对称轴为直线 $x=-3$，可设抛物线 $m$ 的表达式为 $y=\frac{1}{2}(x+3)^2+h$.

∵抛物线 $m$ 经过原点，

$\therefore 0=\frac{1}{2}\times3^2+h$，$\therefore h=-\frac{9}{2}$.

∴顶点 $P$ 的坐标为 $\left(-3,-\frac{9}{2}\right)$.

又∵点 $Q$ 的坐标为 $\left(-3,\frac{1}{2}\times3^2\right)$，

即 $\left(-3,\frac{9}{2}\right)$，∴点 $P$ 与点 $Q$ 关于 $x$ 轴对称，

$\therefore S_{\text{阴影}}=|-3|\cdot\left|\frac{9}{2}\right|=3\times\frac{9}{2}=\frac{27}{2}$.

三、19. **解**：(1) 将 $A(-1,-1)$，$B(3,-9)$ 的坐标分别代入 $y=ax^2-4x+c$，

得 $\begin{cases}a+4+c=-1,\\9a-12+c=-9.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\c=-6.\end{cases}$

解得该二次函数的表达式为 $y=x^2-4x-6$.

∵$y=x^2-4x-6=(x-2)^2-10$，

∴该抛物线的对称轴为直线 $x=2$，顶点为 $(2,-10)$.

(2) ∵点 $P(m,m)$ 在该函数的图象上，

∴$m^2-4m-6=m$，∴$m_1=6$，$m_2=-1$.

∵$m$ 的值为 6 或 $-1$.

20. **解**：(1) ∵$S_{\triangle PBQ}=\frac{1}{2}PB\cdot BQ$，$PB=AB-AP=(18-2x)\text{cm}$，$BQ=x\text{ cm}$，

∴$y=\frac{1}{2}(18-2x)x$，

即 $y=-x^2+9x(0<x\leqslant4)$.

(2) 由 (1) 知 $y=-x^2+9x$，

∵$y=-\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{81}{4}$，

∵当 $0<x\leqslant\frac{9}{2}$ 时，$y$ 随 $x$ 的增大而增大，

而 $0<x\leqslant4$，

∴当 $x=4$ 时，$y_{\text{最大值}}=20$，即 $\triangle PBQ$ 的最大面积是 20 $\text{cm}^2$.

21. **解**：(1) 设二次函数的表达式为 $y=a(x-2)^2-8$.

将 $A(0,-6)$ 的坐标代入得 $4a-8=-6$，

∴$a=\frac{1}{2}$.

∴$y=\frac{1}{2}(x-2)^2-8$，

即 $y=\frac{1}{2}x^2-2x-6$.

(2) 作点 $A$ 关于 $x$ 轴的对称点 $E(0,6)$，连结 $BE$ 交 $x$ 轴于点 $P$，

连结 $PA$，此时 $PA+PB$ 最小.

设直线 $BE$ 的表达式为 $y=kx+b$，则 $\begin{cases}2k+b=-8,\\b=6.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-7,\\b=6.\end{cases}$

∴$y=-7x+6$. 当 $y=0$ 时，$x=\frac{6}{7}$，

∴点 $P$ 的坐标为 $\left(\frac{6}{7},0\right)$.

22. **解**：(1) 设抛物线的表达式为 $y=ax^2$.

∵抛物线关于 $y$ 轴对称，$AB=20$ 米，$CD=10$ 米，

∴点 $B$ 的横坐标为 10.

设点 $B(10,n)$，则点 $D(5,n+3)$.

将 $B$，$D$ 两点的坐标分别代入表达式，得 $\begin{cases}n=100a,\\n+3=25a.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}n=-4,\\a=-\frac{1}{25}.\end{cases}$ ∴$y=-\frac{1}{25}x^2$.

(2) ∵货船过拱桥时右侧的横坐标为 $x=3$，

∴当 $x=3$ 时，$y=-\frac{1}{25}\times9=-\frac{9}{25}$.

∴点 $B$ 的纵坐标为 $-4$，

$|-4|-\left|-\frac{9}{25}\right|=3.64>3.6$.

∴当水位在正常水位时，此船能顺利通过这座拱桥.

23. **解**：(1) 当 $0<x\leqslant20$ 且 $x$ 为整数时，$y=40$；

当 $20<x\leqslant60$ 且 $x$ 为整数时，$y=-\frac{1}{2}x+50$；

当 $x>60$ 且 $x$ 为整数时，$y=20$.

(2) 设所获利润为 $w$ 元.

当 $0<x\leqslant20$ 且 $x$ 为整数时，$y=40$，

∴$w_{\text{最大}}=(40-16)\times20=480$.

当 $20<x\leqslant60$ 且 $x$ 为整数时，$y=-\frac{1}{2}x+50$，

∴$w=(y-16)x=\left(-\frac{1}{2}x+50-16\right)x=-\frac{1}{2}x^2+34x=-\frac{1}{2}(x-34)^2+578$.

∵$-\frac{1}{2}<0$，

∴当 $x=34$ 时，$w$ 最大，最大值为 578.

答：一次性批发 34 件时，工厂获利最大，最大利润是 578 元.

24. **解**：(1) 设抛物线的表达式为 $y=ax^2+kx+c$，

∵$A(1,0)$，$B(0,3)$，$C(-4,0)$，

∴$\begin{cases}a+b+c=0,\\c=3,\\16a-4b+c=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-\frac{3}{4},\\b=-\frac{9}{4},\\c=3.\end{cases}$

∴经过 $A$，$B$，$C$ 三点的抛物线的表达式为 $y=-\frac{3}{4}x^2-\frac{9}{4}x+3$.

(2) 存在. 以 $CA$，$CB$ 为邻边时. 如图，∵$OA=1$，$OC=4$，$OA=1$，

∴$BC=AC=5$，当 $BP$ 平行且等于 $AC$ 时，四边形 $ACBP$ 为菱形，

∴$BP=AC=5$，且点 $P$ 到 $x$ 轴的距离等于 $OB$，

∴点 $P$ 的坐标为 $(5,3)$；

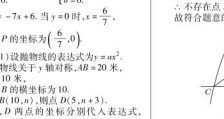
以 $AB$，$AC$ 为邻边时，$AC\neq AB$，

∴不存在点 $P$ 使四边形 $ABPC$ 为菱形；

以 $BA$，$BC$ 为邻边时，$BA\neq BC$，

∴不存在点 $P$ 使四边形 $ABCP$ 为菱形.

故符合题意的点 $P$ 的坐标为 $(5,3)$.




（第 24 题）

(3) 设直线 $PA$ 的函数表达式为 $y=kx+m(k\neq0)$，

∵$A(1,0)$，$P(5,3)$，

∴$\begin{cases}k+m=0,\\5k+m=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=\frac{3}{4},\\m=-\frac{3}{4}.\end{cases}$

∴直线 $PA$ 的函数表达式为 $y=\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}$，当点 $M$ 与点 $P$，$A$ 不在同一直线上时，根据三角形的三边关系知 $|PM-AM|<PA$，当点 $M$ 与点 $P$，$A$ 在同一直线上时，$|PM-AM|=PA$，

∴当点 $M$ 与点 $P$，$A$ 在同一直线上时，$|PM-AM|$ 的值最大，即点 $M$ 为直线 $PA$ 与抛物线的交点.

解方程组 $\begin{cases}y=\frac{3}{4}x-\frac{3}{4},\\y=-\frac{3}{4}x^2-\frac{9}{4}x+3,\end{cases}$

得 $\begin{cases}x_1=1,\\y_1=0,\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=-5,\\y_2=-\frac{9}{2}.\end{cases}$

∴当点 $M$ 的坐标为 $(1,0)$ 或 $\left(-5,-\frac{9}{2}\right)$ 时，$|PM-AM|$ 的值最大，$|PM-AM|$ 的最大值为 5.

## 第 2 章达标检测卷

一、1. D　2. C　3. B　4. D　5. D

6. B　7. B　8. C　9. B

10. A　**点拨**：列表：

| $P(x,y)$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | (1,1) | (1,2) | (1,3) | (1,4) | (1,5) | (1,6) |
| 2 | (2,1) | (2,2) | (2,3) | (2,4) | (2,5) | (2,6) |
| 3 | (3,1) | (3,2) | (3,3) | (3,4) | (3,5) | (3,6) |
| 4 | (4,1) | (4,2) | (4,3) | (4,4) | (4,5) | (4,6) |
| 5 | (5,1) | (5,2) | (5,3) | (5,4) | (5,5) | (5,6) |
| 6 | (6,1) | (6,2) | (6,3) | (6,4) | (6,5) | (6,6) |

共有 36 种等可能的情况，点 $P(x,y)$ 落在抛物线 $y=-x^2+3x$ 上的情况有 (1,2)，(2,2) 2 种. ∴点 $P$ 在抛物线 $y=-x^2+3x$ 上的概率为 $\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$. 故选 A.

二、11. ③⑤；①③④；②　12. $\frac{2}{5}$

13. $\frac{2}{3}$　14. $A$　15. 10　16. $\frac{3}{16}$

17. $-\frac{4}{5}$　**点拨**：在平面直角坐标系中描出这五个点，任取三个点共有 10 种等可能的情况，其中能构成三角形的有 8 种情况. 因此 $P$（任取三点能构成三角形）$=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$.

18. $\frac{2}{5}$　**点拨**：不等式组 $\begin{cases}2x+3<4,\\3x-1>-11\end{cases}$ 的解集为 $-\frac{10}{3}<x<-\frac{1}{2}$. 要使函数 $y=\frac{1}{2x^2+2x}$ 有意义，则分母 $2x^2+2x\neq0$，解得 $x\neq0$ 且 $x\neq-1$. 在所给的五个数 $-3$，$-2$，$-1$，$0$，$4$ 中，$-3$ 与 $-2$ 既满足 $-\frac{10}{3}<x<-\frac{1}{2}$，又满足 $x\neq0$ 且 $x\neq-1$，故所求概率为 $\frac{2}{5}$.

三、19. **解**：(1) 设袋子里有 $x$ 个黄球，根据题意得 $\frac{x}{4+5+x}=\frac{1}{4}$. 解得 $x=3$. 经检验，$x=3$ 是分式方程的解，所以袋子里黄球的个数是 3.

(2) 小红意指出一个球是红色的概率为 $\frac{4}{4+5+3}=\frac{1}{3}$.

20. **解**：(1) 正确，理由：当试验次数很大时可以用频率估计概率.

(2) ①不正确，理由：当试验次数不够大时，频率不一定接近概率.

21. **解**：(1) 补全表格如下：

| 甲<br>乙 | 积 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | | 2 | 4 | 6 | 8 |
| 3 | | 3 | 6 | 9 | 12 |

(2) $\frac{1}{12}$；$\frac{2}{3}$

(3) 从 1～12 这 12 个整数中，随机选取 1 个，该数不是 (1) 中所填数字的有 5，7，10，11，∴所求的概率为 $\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$.

22. **解**：(1) 两次传球的所有结果有 4 种，分别是 $A\to B\to C$，$A\to B\to A$，$A\to C\to B$，$A\to C\to A$，每种结果发生的可能性相等，球恰在 $B$ 手中的结果只有 1 种，所以两次传球后，球恰在 $B$ 手中的概率是 $\frac{1}{4}$.

(2) 由树状图（如图）可知，三次传球的所有结果有 8 种，且每种结果发生的可能性相等.

其中，三次传球后，球恰在 $A$ 手中的结果有 2 种，所以三次传球后，球恰在 $A$ 手中的概率是 $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$.




（第 22 题）

23. **解**：(1) 200；35

补全条形统计图如图①所示.




(2) 估计去 B 景区旅游的居民约有 1 200 × 35% = 420(人).

(3) 画树状图如图②所示.

由树状图知，共有 12 种等可能结果，其中选到 A，C 两个景区的有 2 种结果，所以选到 A，C 两个景区的概率为 $\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.

24. **解**：(1) 30；0.250　(2) 0.25

(3) 这个游戏对双方是不公平的，有利于乙方.

列表如下：

| 和<br>方块 | 红桃 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | 2 | 3 | 4 |
| 2 | | 3 | 4 | 5 |
| 3 | | 4 | 5 | 6 |

所有等可能的结果有 9 种，其中甲方赢的结果有 2 种，乙方赢的结果有 3 种，

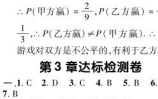
∴$P$（甲方赢）$=\frac{2}{9}$，$P$（乙方赢）$=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$，∴$P$（乙方赢）$\neq P$（甲方赢），∴这个游戏对双方是不公平的，有利于乙方.

## 第 3 章达标检测卷

一、1. C　2. D　3. C　4. B　5. B　6. D

7. B

8. A　**点拨**：∵扇形 $AOB$ 的圆心角为 90°，半径为 2 cm，∴扇形 $AOB$ 的面积为 $\frac{90\pi\times2^2}{360}=\pi(\text{cm}^2)$，两个半圆的面积均为 $\frac{1}{2}\times\pi\times1^2=\frac{\pi}{2}(\text{cm}^2)$.




（第 8 题）

如图，连结 $OD$，$BD$，$DA$，

易知 $A$，$B$，$D$ 三点共线. 易得 $BD=OD=DA=\sqrt{2}$ cm，且两个半圆形内的 4 个小弓形面积相等.

在半圆形 $OA$ 中，$S_{\text{弓形}AB}=\frac{1}{2}(S_{\text{半圆形}OA}-S_{\triangle OAB})=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\cdot1^2-1\right)\text{cm}^2$，∴$S_{\text{阴影}}=S_{\text{扇形}AOB}-S_{\triangle AOB}-2S_{\text{弓形}AB}=\pi-\frac{1}{2}\times2\times2-2\times\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\cdot1^2-1\right)=\frac{\pi}{2}-1(\text{cm}^2)$.

9. C　**点拨**：当动点 $P$ 在 $OC$ 上运动时，$\angle APB$ 逐渐变小；当动点 $P$ 在 $\overset{\frown}{CD}$ 上运动时，$\angle APB$ 不变；当动点 $P$ 在 $DO$ 上运动时，$\angle APB$ 逐渐变大.

10. A

二、11. 50　12. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　13. 6　14. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

15. $3\sqrt{2}$ cm

16. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$　**点拨**：在 $Rt\triangle AOB$ 中，由 $\angle AOB=30°$，易得 $OA=2AB=2$. 过点 $B$ 作 $BD\perp OA$ 于点 $D$，在 $Rt\triangle ABD$ 中，易得 $AD=\frac{1}{2}$，$BD=\frac{\sqrt{3}}{2}$，∴$OD=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，∴点 $B$ 的坐标是 $\left(-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. 由三角尺 $AOB$ 绕点 $O$ 顺时针旋转 90° 得到 $\triangle A'OB'$，易得点 $B'$ 的坐标是 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$.

17. $\frac{5}{2}\pi-4$

18. 5；$5\sqrt{2}$　**点拨**：分情况讨论：如图①，当 $\angle ODB=90°$，即 $CD\perp AB$ 时，

可得 $AD=BD$，∴$CD$ 垂直平分 $AB$，

∴$AC=BC$.

又∵$AB=AC$，∴$\triangle ABC$ 是等边三角形.

易得 $\angle DBO=30°$.

由 $OB=5$，

易得 $BD=\frac{5}{2}OB=\frac{5\sqrt{3}}{2}$，

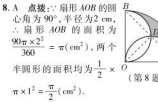
∴$BC=AB=2BD=5\sqrt{3}$.

如图②，当 $\angle DOB=90°$ 时，

可得 $\angle BOC=90°$，又 $OB=OC$，

∴$\triangle BOC$ 是等腰直角三角形.

∴$BC=\sqrt{2}OB=5\sqrt{2}$.




（第 18 题）

三、19. **证明**：连结 $BM$. ∵$AP\perp BC$，

∴$\angle CAP+90°-\angle C$.

∵$AM$ 为 $\odot O$ 的直径，∴$\angle ABM=90°$，

∴$\angle BAM+90°-\angle M$.

又∵$\angle M=\angle C$，

∴$\angle BAM=\angle CAP$.

20. **解**：(1) 作图略.

(2) 作直径 $AD$，连结 $BD$.

∵$AD$ 是直径，∴$\angle ABD=90°$.

∵$\angle D=\angle C=45°$，∴$AB=BD=2$.

∴$AD=\sqrt{AB^2+BD^2}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，

即 $\triangle ABC$ 的外接圆 $O$ 的直径为 $2\sqrt{2}$.

21. **解**：(1) $\triangle AB'C'$ 如图所示.

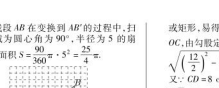
(2) 根据网格图，可知 $AB=\sqrt{3^2+4^2}=5$.





关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

易知线段 $AB$ 在变换到 $AB'$ 的过程中，扫过区域为圆心角为 $90°$，半径为 5 的扇形，其面积 $S=\frac{90}{360}\pi\cdot5^2=\frac{25}{4}\pi$.



（第 21 题）

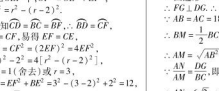
**22.** (1) **证明**：$\because C$ 是 $\overset{\frown}{BD}$ 的中点，$\therefore \overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{BC}$，
$\therefore AB$ 是 $\odot O$ 的直径，且 $CF\perp AB$，
$\therefore \overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BF}$，$\therefore \overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{BF}$，$\therefore CD=BF$.
在 $\triangle BFG$ 和 $\triangle CDG$ 中，
$\because \begin{cases}\angle F=\angle CDG,\\ \angle FGB=\angle DGC,\\ BF=CD,\end{cases}$
$\therefore \triangle BFG\cong\triangle CDG$(AAS).
(2) **解**：连结 $OF$，设 $\odot O$ 的半径为 $r$，
$\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径，
$\therefore \angle ADB=90°$.
$\because BD^2=AB^2-AD^2$，即 $BD^2=(2r)^2-2^2$.
在 $\mathrm{Rt}\triangle OEF$ 中，$OE^2=OF^2+EF^2$，
即 $EF^2=r^2-(r-2)^2$.
由 (1) 知 $\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BF}$，$\therefore \overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{CF}$，
$\therefore BD=CF$，易得 $EF=CE$，
$\therefore BD^2=CE^2=(2EF)^2=4EF^2$，
即 $(2r)^2-2^2=4[r^2-(r-2)^2]$，
解得 $r=1$（舍去）或 $r=3$，
$\therefore BE^2=EF^2+BE^2=3^2-(3-2)^2+2^2=12$，
$\therefore BF=2\sqrt{3}$.

**23.** **解**：(1) 设 $\angle CBF=n°$，
$\because \overset{\frown}{CF}$ 的长为 $\frac{2}{3}\pi$，半径 $R=BC=AD=2$，
$\therefore \frac{n\pi\times2}{180}=\frac{2}{3}\pi$，$\therefore n=60$，
即 $\angle CBF$ 的度数为 60°.
(2) $\because \angle CBF=60°$，且四边形 $ABCD$ 为矩形，$\therefore \angle ABF=30°$.
在 $\mathrm{Rt}\triangle ABF$ 中，易得 $AF=\frac{1}{2}BF=\frac{1}{2}AD=1$，
$\therefore AB=\sqrt{BF^2-AF^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$.
易知 $S_{\text{扇形}CBF}=\frac{60\times\pi\times2^2}{360}=\frac{2}{3}\pi$，
$S_{\text{矩形}ABCD}=AD\cdot AB=2\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$，
$S_{\triangle ABF}=\frac{1}{2}AF\cdot AB=\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，
$\therefore S_{\text{阴影}}=S_{\text{矩形}ABCD}-(S_{\text{扇形}CBF}+S_{\triangle ABF})=2\sqrt{3}-\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{2}{3}\pi$.

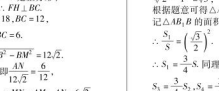
**24.** (1) **证明**：过点 $O$ 作 $OH\perp CD$ 于点 $H$，易得 $H$ 为 $CD$ 的中点，
$\because CE\perp CD$，$CF\perp CD$，$\therefore EC//OH//FD$，
易得 $O$ 为 $EF$ 的中点，即 $OE=OF$.
又 $\because OA=OB$，
$\therefore AE=OA-OE=OB-OF=BF$，
即 $AE=BF$.
(2) **解**：四边形 $CDFE$ 的面积为定值. 证明如下：$\because$ 动弦 $CD$ 在滑动的过程中，条件 $EC\perp CD$，$FD\perp CD$ 不变，$\therefore CE//DF$ 不变. 由此可知，四边形 $CDFE$ 为直角梯形或矩形，易得 $S_{\text{四边形}CDFE}=OH\cdot CD$. 连结 $OC$，由勾股定理得 $OH=\sqrt{OC^2-CH^2}=\sqrt{\left(\frac{12}{2}\right)^2-\left(\frac{8}{2}\right)^2}=2\sqrt{5}$（cm），
又 $\because CD=8$ cm，$\therefore S_{\text{四边形}CDFE}=OH\cdot CD=2\sqrt{5}\times8=16\sqrt{5}(\text{cm}^2)$，是常数. 综上，四边形 $CDFE$ 的面积为定值，为 $16\sqrt{5}\,\text{cm}^2$.

## 第 4 章达标检测卷

**一.1.** D　**2.** B　**3.** C　**4.** B　**5.** C
**6.** B　**点拨**：$\because AB\perp BC$，$CD\perp BC$，
$\therefore ABC=\angle DCE=90°$.
又 $\because \angle AEB=\angle DEC$，
$\therefore \triangle ABE\backsim\triangle DCE$.
$\therefore \frac{AB}{DC}=\frac{BE}{CE}$，即 $\frac{AB}{20}=\frac{20}{10}$，$\therefore AB=40$ m.
**7.** A　**8.** B
**9.** D　**点拨**：如图，过点 $A$ 作 $AM\perp BC$ 于点 $M$，交 $DG$ 于点 $N$，延长 $GF$ 交 $BC$ 于点 $H$.
$\because AB=AC$，$AD=AG$，
$\therefore AD=AG=AC$.
又 $\because BAC=\angle DAG$，$\therefore \triangle ADG\backsim\triangle ABC$.
$\therefore \angle ADG=\angle B$，$\therefore DG//BC$.
$\because AN\perp DG$.
$\therefore$ 四边形 $DEFG$ 是正方形，
$\therefore FG\perp DG$，$\therefore FH\perp BC$.
$\because AB=AC=18$，$BC=12$，
$\therefore BM=\frac{1}{2}BC=6$.
$\therefore AM=\sqrt{AB^2-BM^2}=12\sqrt{2}$.
$\because \frac{AN}{AM}=\frac{DG}{BC}$，即 $\frac{AN}{12\sqrt{2}}=\frac{6}{12}$，
$\therefore AN=6\sqrt{2}$，$\therefore MN=AM-AN=6\sqrt{2}$.
易得四边形 $GHMN$ 为矩形，
$\therefore GH=MN=6\sqrt{2}$.
$\therefore FH=GH-GF=6\sqrt{2}-6$. 故选 D.



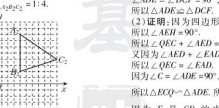
（第 9 题）



（第 10 题）

**10.** D　**点拨**：$\because \triangle ABE$ 是等腰直角三角形，$EM$ 平分 $\angle AEB$，$\therefore EM$ 是 $AB$ 边上的中线，$\therefore EM=\frac{1}{2}AB$.
$\because D$，$N$ 分别是 $BC$，$AC$ 的中点，
$\therefore DN$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线，$\therefore DN=\frac{1}{2}AB$，
$DN//AB$，$\therefore EM=DN$. ①正确.
$\because DN//AB$，$\therefore \triangle CDN\backsim\triangle CBA$.
$\therefore \frac{S_{\triangle CDN}}{S_{\triangle CBA}}=\left(\frac{DN}{AB}\right)^2=\frac{1}{4}$.
$\therefore S_{\triangle CDN}=\frac{1}{3}S_{\text{四边形}ABDN}$. ②正确.
如图，连结 $DM$，$FN$，则 $DM$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线，$\therefore DM=\frac{1}{2}AC$，$DM//AC$.
$\therefore$ 四边形 $AMDN$ 是平行四边形.
$\therefore \angle AMD=\angle AND$.
易知 $\angle ANF=90°$，$\angle AME=90°$，
$\therefore \angle EMD=\angle DNF$.
$\because FN$ 是 $AC$ 边上的中线，
$\therefore FN=\frac{1}{2}AC$，$\therefore DM=FN$.
又 $\because EM=DN$，
$\therefore \triangle DEM\cong\triangle FDN$.
$\therefore DE=DF$，$\angle FDN=\angle DEM$. ③正确.
$\because MDN+\angle AMD=180°$，
$\therefore \angle EDF=\angle MDN-(\angle EDM+\angle FDN)=180°-\angle AMD-(\angle EDM+\angle DEM)=180°-(\angle AMD+\angle EDM+\angle DEM)=180°-(180°-\angle AME)=180°-(180°-90°)=90°$.
$\therefore DE\perp DF$. ④正确. 故选 D.

**二.11.** $\frac{13}{20}$　**点拨**：$\because \frac{b}{a}=\frac{7}{13}$，
$\therefore$ 设 $a=13x$，$b=7x$，
则 $\frac{a}{a+b}=\frac{13x}{13x+7x}=\frac{13}{20}$.
**12.** 4.5　**13.** $S_1=S_2$　**14.** (2, 1)
**15.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$　**16.** 5. 1 m　**17.** $\frac{16}{3}$ 或 3
**18.** $\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(\frac{3}{4}\right)^n$　**点拨**：在正三角形 $ABC$ 中，$AB_1\perp BC$，
$\therefore BB_1=\frac{1}{2}BC=1$.
在 $\mathrm{Rt}\triangle ABB_1$ 中，$AB_1=\sqrt{AB^2-BB_1^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$，
根据题意可得 $\triangle AB_1B_2\backsim\triangle AB_2B_3$，
记 $\triangle AB_1B$ 的面积为 $S$，
$\therefore \frac{S_1}{S}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$，
$\therefore S_1=\frac{3}{4}S$. 同理可得 $S_2=\frac{3}{4}S_1$，
$S_3=\frac{3}{4}S_2$，$S_4=\frac{3}{4}S_3$，…
又 $\because S=\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，
$\therefore S_1=\frac{3}{4}S=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{3}{4}$，
$S_2=\frac{3}{4}S_1=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(\frac{3}{4}\right)^2$，
$S_3=\frac{3}{4}S_2=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(\frac{3}{4}\right)^3$，
$S_4=\frac{3}{4}S_3=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(\frac{3}{4}\right)^4$，…，
$S_n=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(\frac{3}{4}\right)^n$.
**三.19.** **解**：由为四边形 $ABCD\backsim$ 四边形 $EFGH$，所以 $\angle H=\angle D=95°$，则 $\angle\alpha=360°-95°-118°-67°=80°$. 再由 $x:7=12:6$，解得 $x=14$.
**20.** **解**：(1) 如图，$\triangle A_1B_1C_1$ 即为所求.
(2) 如图，$\triangle A_2B_2C_2$ 即为所求.
(3) $S_{\triangle A_1B_1C_1}:S_{\triangle A_2B_2C_2}=1:4$.



（第 20 题）

**21.** (1) **证明**：$\because AB//FC$，$\therefore \angle A=\angle ECF$.
又 $\because \angle AED=\angle CEF$，且 $DE=FE$，
$\therefore \triangle ADE\cong\triangle CFE$.
(2) **解**：方法一：$\because AB//FC$，
$\therefore \triangle GBD\backsim\triangle GCF$，$\therefore \frac{GB}{GC}=\frac{BD}{CF}$.
$\therefore \frac{2}{2+4}=\frac{1}{CF}$，$\therefore CF=3$.
由 (1) 得 $\triangle ADE\cong\triangle CFE$，
$\therefore AD=CF=3$，
$\therefore AB=AD+BD=3+1=4$.
方法二：如图，取 $BC$ 的中点 $H$，连结 $EH$.
$\because \triangle ADE\cong\triangle CFE$，



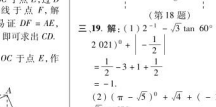
（第 21 题）

$\therefore AE=CE$. $\because EH$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线，
$\therefore EH//AB$，且 $EH=\frac{1}{2}AB$.
$\therefore \triangle GBD\backsim\triangle GHE$.
$\therefore \frac{DB}{EH}=\frac{GB}{GH}=\frac{1}{EH}=\frac{2}{2+2}$.
$\therefore EH=2$. $\therefore AB=2EH=4$.
**22.** **解**：由题意可得 $DE//BC$，
所以 $\triangle ADE\backsim\triangle ABC$，
所以 $\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}$，即 $\frac{AD}{AD+DB}=\frac{DE}{BC}$.
因为 $AD=16$ m，$BC=50$ m，$DE=20$ m，
所以 $\frac{16}{16+DB}=\frac{20}{50}$，
所以 $DB=24$ m.
所以这条河的宽度为 24 m.
**23.** **解**：(1) 由题意可知 $BE=2t$，$CF=4t$，$CE=12-2t$.
因为 $\triangle CEF$ 是等腰直角三角形，$\angle ECF$ 是直角，所以 $CE=CF$.
所以 $12-2t=4t$，解得 $t=2$.
所以当 $t=2$ 时，$\triangle CEF$ 是等腰直角三角形.
(2) 根据题意，可分为两种情况：
①若 $\triangle EFC\backsim\triangle ACD$，则 $\frac{EC}{AC}=\frac{FC}{CD}$，
所以 $\frac{12-2t}{12}=\frac{4t}{24}$，解得 $t=3$，
即当 $t=3$ 时，$\triangle EFC\backsim\triangle ACD$.
②若 $\triangle FEC\backsim\triangle ACD$，则 $\frac{FC}{AC}=\frac{EC}{CD}$，
所以 $\frac{4t}{12}=\frac{12-2t}{24}$，解得 $t=1.2$，
即当 $t=1.2$ 时，$\triangle FEC\backsim\triangle ACD$.
综上，当 $t$ 为 3 或 1.2 时，以点 $E$，$C$，$F$ 为顶点的三角形与 $\triangle ACD$ 相似.
**24.** (1) **证明**：因为 $AD=DC$，
$\angle ADE=\angle DCF=90°$，$DE=CF$，
所以 $\triangle ADE\cong\triangle DCF$.
(2) **证明**：因为四边形 $AEHG$ 是正方形，
所以 $\angle AEH=90°$.
所以 $\angle QEC+\angle AED=90°$.
又因为 $\angle AED+\angle EAD=90°$，
所以 $\angle QEC=\angle EAD$.
因为 $\angle C=\angle ADE=90°$，
所以 $\triangle ECQ\backsim\triangle ADE$. 所以 $\frac{CQ}{DE}=\frac{EC}{AD}$.
因为 $E$ 是 $CD$ 的中点，所以 $EC=DE=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}AD$. 所以 $\frac{EC}{AD}=\frac{1}{2}$.
因为 $DE=CF$，所以 $\frac{CQ}{DE}=\frac{CQ}{CF}=\frac{1}{2}$.
即 $Q$ 是 $CF$ 的中点.
(3) **解**：$S_1+S_2=S_3$ 成立.
理由如下：因为 $\triangle ECQ\backsim\triangle ADE$，
所以 $\frac{CQ}{DE}=\frac{QE}{AE}$. 所以 $\frac{CQ}{CE}=\frac{QE}{AE}$.
因为 $\angle C=\angle AEQ=90°$，
所以 $\triangle ECQ\backsim\triangle AEQ$.
所以 $\triangle AEQ\backsim\triangle EQC\backsim\triangle ADE$.
所以 $\frac{S_1}{S_3}=\left(\frac{EQ}{AQ}\right)^2$，$\frac{S_2}{S_3}=\left(\frac{AE}{AQ}\right)^2$.
所以 $\frac{S_1}{S_3}+\frac{S_2}{S_3}=\left(\frac{EQ}{AQ}\right)^2+\left(\frac{AE}{AQ}\right)^2=\frac{EQ^2+AE^2}{AQ^2}$.
在 $\mathrm{Rt}\triangle AEQ$ 中，由勾股定理，得 $EQ^2+AE^2=AQ^2$，
所以 $\frac{S_1}{S_3}+\frac{S_2}{S_3}=1$，即 $S_1+S_2=S_3$.

## 卜 册

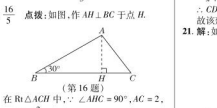
## 第 1 章达标检测卷

**一.1.** D　**2.** D　**3.** A
**4.** C　**点拨**：对于①，可由 $AB=BC\cdot\tan\angle ACB$ 求出 $AB$ 两点间的距离；对于②，由 $BC=\frac{AB}{\tan\angle ACB}$，$BD=\frac{AB}{\tan\angle ADB}$，$BD-BC=CD$，可求出 $A$，$B$ 两点间的距离；对于③，易知 $\triangle DEF\backsim\triangle DBA$，则 $\frac{DE}{DB}=\frac{EF}{AB}$，可求出 $A$，$B$ 两点间的距离；对于④无法求得 $A$，$B$ 两点间的距离，故有①②③共 3 组，故选 C.
**5.** D　**6.** A
**7.** A　**点拨**：过点 $A$ 作 $AE\perp BC$ 于点 $E$，过 $D$ 作 $DF\perp BC$，交 $BC$ 延长线于点 $F$，所以 $\triangle ABE$ 可得 $AE=4\sqrt{2}$，易证 $DF=AE$，$\therefore DF=4\sqrt{2}$，再解 $\mathrm{Rt}\triangle DCF$ 即可求出 $CD$.
**8.** D　**9.** A
**10.** D　**点拨**：如图，作 $AE\perp OC$ 于点 $E$，作 $AF\perp OB$ 于点 $F$.
$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，
$\therefore \angle ABC=90°$.
$\because \angle ABC=\angle AEC$，
$\angle BCO=x$，
$\therefore \angle EAB=x$.
$\because FBA=x$，
$\therefore AB=a$，$AE=AB\sin x=a\sin x$，
$AF=FB+BO=a\cos x+b\sin x$.



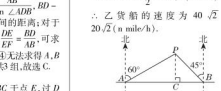
（第 10 题）

**二.11.** 3　**12.** $\frac{4}{5}$　**13.** 26 m
**14.** $(15\sqrt{3}+15)$　**15.** $\frac{4}{3}$
**16.** $\frac{16}{5}$　**点拨**：如图，作 $AH\perp BC$ 于点 $H$.



（第 16 题）

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACH$ 中，$\because \angle AHC=90°$，$AC=2$，
$\cos C=\frac{3}{5}$，
$\therefore \frac{CH}{AC}=\frac{3}{5}$，$\therefore CH=\frac{6}{5}$.
$\therefore AH=\sqrt{AC^2-CH^2}=\sqrt{2^2-\left(\frac{6}{5}\right)^2}=\frac{8}{5}$.
在 $\mathrm{Rt}\triangle ABH$ 中，
$\because \angle AHB=90°$，$\angle B=30°$，
$\therefore AB=2AH=\frac{16}{5}$.
**17.** $750\sqrt{2}$ m　**点拨**：过点 $A$ 作 $AD\perp BC$，垂足为 $D$，在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 中，$\angle ACD=75°-30°=45°$，$AC=30\times25=750$ (m)，$\therefore AD=AC\cdot\sin45°=375\sqrt{2}$ (m). 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，$\because \angle B=30°$，$\therefore AB=2AD=750\sqrt{2}$ (m). 即小山东西两侧 $A$，$B$ 两点间的距离为 $750\sqrt{2}$ m.
**18.** $20\sqrt{2}$ n mile/h　**点拨**：如图，作 $PC\perp AB$ 于点 $C$.
$\because$ 甲货船从 $A$ 港出发，沿北偏东 60° 的方向以 40 n mile/h 的速度航行，
$\therefore AP=40\times\frac{1}{2}=20$ (n mile)，
$\therefore \angle PAC=30°$，$PC=AP\cdot\sin30°=80\times\frac{1}{2}=40$ (n mile).
$\because$ 乙货船从 $B$ 港出发，沿西北方向航行，
$\therefore \angle PBC=45°$.
$\therefore PB=PC\div\frac{\sqrt{2}}{2}=40\sqrt{2}$ (n mile).
$\therefore$ 乙货船的速度为 $40\sqrt{2}\div2=20\sqrt{2}$ (n mile/h).



（第 18 题）

**三.19.** **解**：(1) $2^{-1}-\sqrt{3}\tan60°+(\pi-2021)^0+\left|-\frac{1}{2}\right|$
$=\frac{1}{2}-3+1+\frac{1}{2}$
$=-1$.
(2) $(\pi-\sqrt{5})^0+\sqrt{4}+(-1)^{2021}-\sqrt{3}\tan60°$
$=1+2-1-3$
$=-1$.
**20.** **解**：设 $CE=x$ m. 由题意可知，$\triangle BCE$ 为等腰直角三角形. $\therefore BE=CE=x$ m.
在 $\mathrm{Rt}\triangle ACE$ 中，$\tan\angle CAE=\frac{CE}{AE}$，
即 $\tan30°=\frac{x}{x+100}$，
$\therefore \frac{x}{x+100}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. 解得 $x=136.6$.
$\therefore CD=CE+ED=138$ m.
故该建筑物的高度约为 138 m.
**21.** **解**：如图，过点 $A$ 作 $AD\perp BC$ 于点 $D$.



（第 21 题）

由题意可知 $BC=1.5\times40=60$ (米)，$\angle ABD=30°$，$\angle ACD=60°$，
$\therefore \angle BAC=\angle ACD-\angle ABC=30°$.
$\therefore \angle ABC=\angle BAC$. $\therefore AC=BC=60$ 米.



关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

在 Rt△$ACD$ 中，$\angle ACD=60°$，

$\therefore AD=AC\cdot\sin 60°=60\times\frac{\sqrt{3}}{2}=30\sqrt{3}$（米）.

**答**：此段河流河面的宽度为 $30\sqrt{3}$ 米.

**22.** **解**：过点 $B$ 作 $BF\perp AD$ 于点 $F$，则四边形 $BFEC$ 是矩形，

$\therefore BF=CE=5\text{ m}$，$EF=BC=10\text{ m}$.

在 Rt △$ABF$ 中，$\angle BAF=35°$，

$\tan\angle BAF=\frac{BF}{AF}$，

$\therefore AF=\frac{BF}{\tan 35°}\approx\frac{5}{0.70}\approx 7.14\text{（m）}$.

∵ 斜坡 $CD$ 的坡度 $i=1:1.2$，

$\therefore\frac{CE}{ED}=\frac{1}{1.2}$.

$\therefore ED=1.2CE=1.2\times 5=6\text{（m）}$.

$\therefore AD=AF+FE+ED\approx 7.14+10+6\approx 23.1\text{（m）}$.

故 $AD$ 的长度约为 23.1 m.

**23.** **解**：(1) 如图.

(2) 如图，连结 $BD$，

∵ $\angle BED=90°$，

$BE=DE=1$，

∴ $\angle EBD=\angle EDB=45°$，

$BD=\sqrt{BE^2+DE^2}=$

$\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.

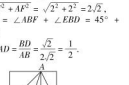
易知 $BF=AF=2$，$\angle BFA=90°$.

∴ $\angle ABF=\angle BAF=45°$，

$AB=\sqrt{BF^2+AF^2}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，

∴ $\angle ABD=\angle ABF+\angle EBD=45°+45°=90°$.

∴ $\tan\angle BAD=\frac{BD}{AB}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$.



（第 23 题）

**24.** (1) **证明**：∵ $AB=CD=136$ cm，

$OA=OC=51$ cm，

∴ $OB=OD=85$ cm. ∵ $\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{3}{5}$，

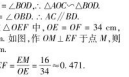
又∵ $\angle AOC=\angle BOD$，∴ $\triangle AOC\sim\triangle BOD$.

∴ $\angle OAC=\angle OBD$，∴ $AC/\!/BD$.

(2) **解**：在 $\triangle OEF$ 中，$OE=OF=34$ cm，$EF=32$ cm. 如图，作 $OM\perp EF$ 于点 $M$，则 $EM=16$ cm.

∴ $\cos\angle OEF=\frac{EM}{OE}=\frac{16}{34}\approx 0.471$.

∴ $\angle OEF\approx 61.9°$.



（第 24 题）

(3) **解**：小红的连衣裙垂挂在衣架上会碰到地面. 理由如下：

易得 $\angle ABD=\angle OEF\approx 61.9°$.

如图，过点 $A$ 作 $AH\perp BD$ 于点 $H$.

在 Rt△$ABH$ 中，∵ $\sin\angle ABD=\frac{AH}{AB}$，

∴ $AH=AB\cdot\sin\angle ABD\approx 136\times\sin 61.9°\approx 136\times 0.882\approx 120\text{（cm）}$.

∵ 小红的连衣裙穿在衣架上的总长度 122 cm 大于晒衣架的高度 120 cm，

∴ 小红的连衣裙垂挂在晒衣架上会碰到地面.

## 第 2 章达标检测卷

**一.** 1. B　2. C　3. C

**4.** C　**点拨**：∵ $AB$ 是 $\odot O$ 的直径，

∴ $\angle ACB=90°$.

∵ $\angle CAB=30°$，

∴ $BC=\frac{1}{2}AB=R$，$\angle ABC=60°$.

∴ $\angle CBD=120°$，

则 $\angle D=180°-\angle CBD-\angle BCD=30°$.

∴ $BD=BC=R$，故选 C.

**5.** B

**6.** B　**点拨**：由 $\angle B=50°$，$\angle C=60°$ 可求出 $\angle A=70°$，则易求得 $\angle EOF=110°$，

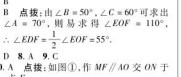
∴ $\angle EDF=\frac{1}{2}\angle EOF=55°$.

**7.** D　**8.** A　**9.** C

**10.** A　**点拨**：如图①，作 $MF//AO$ 交 $ON$ 于点 $F$，

由点 $O$ 是线段 $AE$ 上的一个动点，当 $AM=MD$ 时，

易证 $S_1=S_3+S_2$，故选项 A 不一定成立.



①　②

（第 10 题）

易证 $\triangle A=\angle D=90°$，$\angle AOM=\angle DMN$，

∴ $\triangle AOM\sim\triangle DMN$，故选项 B 成立.

如图②，作 $BP\perp MN$ 于点 $P$，

先证 $\triangle MBP\cong\triangle MPB'$，

再证 Rt△$BPN\cong$Rt△$BCN$，

由此易得 $\angle MBN=45°$，$MN=AM+CN$.

故选项 C，D 成立. 综上所述，选项 A 不一定成立，故选 A.

**二.** **11.** 1 cm 或 5 cm　**12.** 30　**13.** $6\pi$

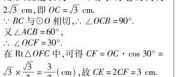
**14.** 3　**点拨**：过 $O$ 作 $OF\perp AC$ 于 $F$，连结 $OC$，如图. 则 $CE=2CF$. 根据 $\triangle ABC$ 为等边三角形，且边长为 4 cm，易求得它的高为 $2\sqrt{3}$ cm，即 $OC=\sqrt{3}$ cm.

∵ $BC$ 与 $\odot O$ 相切，∴ $\angle OCB=90°$.

又∵ $\angle ACB=60°$，

∴ $\angle OCF=30°$.

在 Rt△$OFC$ 中，可得 $CF=OC\cdot\cos 30°=\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}$（cm），故 $CE=2CF=3$ cm.



（第 14 题）　（第 17 题）

**15.** 3　**16.** 65°

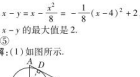
**17.** 2　**点拨**：如图，连结 $OA$，过点 $O$ 作 $OC\perp AP$ 于点 $C$，所以 $\angle ACO=90°$，$AC=\frac{1}{2}AP$. 易证△$OAC\sim$△$APB$，所以 $\frac{OA}{AP}=\frac{AC}{PB}$，即 $\frac{4}{x}=\frac{\frac{x}{2}}{y}$，所以 $y=\frac{x^2}{8}$.

所以 $x-y=x-\frac{x^2}{8}=-\frac{1}{8}(x-4)^2+2$，

所以 $x-y$ 的最大值是 2.

**18.** ①③⑤

**三.** **19.** **解**：(1) 如图所示.



（第 19 题）

(2) $AB$ 与 $\odot O$ 相切.

证明：作 $OD\perp AB$ 于点 $D$，如图所示.

∵ $BO$ 平分 $\angle ABC$，$\angle ACB=90°$，$OD\perp AB$，

∴ $OD=OC$. ∴ $AB$ 与 $\odot O$ 相切.

**20.** (1) **证明**：如图，连结 $OD$.

∵ $BC$ 是 $\odot O$ 的切线，$D$ 为切点，

∴ $OD\perp BC$.

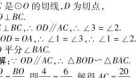
∵ $AC\perp BC$，∴ $OD/\!/AC$，∴ $\angle 3=\angle 2$.

又∵ $OD=OA$，∴ $\angle 1=\angle 3$，∴ $\angle 1=\angle 2$.

∴ $AD$ 平分 $\angle BAC$.

(2) **解**：∵ $OD/\!/AC$，∴ $\triangle BOD\sim\triangle BAC$.

∴ $\frac{BO}{AC}=\frac{BD}{AB}$，即 $\frac{4}{AC}=\frac{6}{10}$，解得 $AC=\frac{20}{3}$.



（第 20 题）

**21.** (1) **证明**：连结 $AE$，$OE$，如图所示.

∵ $AB$ 为 $\odot O$ 的直径，

∴ $\angle ADB=\angle AEB=90°$.

∴ $AE\perp BC$，$AC\perp BD$.

∴ $AB=AC$，$BC=6$，∴ $BE=CE=3$.

∵ $OA=OB$，∴ $OE$ 是△$ABC$ 的中位线.

∴ $OE/\!/AC$，∴ $OE\perp BD$.

∵ $EF$ 是 $\odot O$ 的切线，∴ $OE\perp EF$.

∴ $BD//EF$.

∵ $BE=CE$，∴ $CF=DF$.

∴ $EF$ 是△$CDB$ 的中位线.

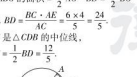
(2) **解**：∵ $\angle AEB=90°$，

∴ $AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$.

∵ △$ABC$ 的面积 $=\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}BC\cdot AE$，

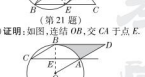
∴ $EF=\frac{1}{2}CDB$ 的中位线，

∴ $EF=\frac{1}{2}BD=\frac{12}{5}$.



（第 21 题）

**22.** (1) **证明**：如图，连结 $OB$，$OC$ 于点 $E$.



（第 22 题）

∵ $\angle C=30°$，$\angle C=\frac{1}{2}\angle BOA$，

∴ $\angle BOA=60°$.

∵ $\angle OAC=30°$，∴ $\angle AEO=90°$.

∵ $BD/\!/AC$，∴ $\angle DBE=\angle AEO=90°$.

∴ $OB\perp BD$. ∴ $BD$ 是 $\odot O$ 的切线.

(2) **解**：∵ $AC/\!/BD$，

∴ $\angle D=\angle OAC=30°$.

∵ $\angle OBD=90°$，$OB=8$，

∴ $BD=\sqrt{3}OB=8\sqrt{3}$.

∴ $S_{\text{阴影}}=S_{\triangle BOD}-S_{\text{扇形}BOB}=\frac{1}{2}\times 8\times 8\sqrt{3}-\frac{60\cdot\pi\times 8^2}{360}=32\sqrt{3}-\frac{32\pi}{3}$

**23.** (1) **证明**：如图，连结 $OB$.

∵ $AO=BO$，$AB\perp PO$，

∴ $\angle AOP=\angle POB$.

在△$AOP$ 和△$BOP$ 中，$\begin{cases}OA=OB,\\ \angle AOP=\angle BOP,\\ PO=PO,\end{cases}$

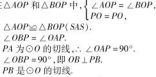
∴ △$AOP\cong\triangle BOP$（$SAS$）.

∴ $\angle OBP=\angle OAP$.

∵ $PA$ 为 $\odot O$ 的切线，∴ $\angle OAP=90°$.

∴ $\angle OBP=90°$，即 $OB\perp PB$.

∴ $PB$ 是 $\odot O$ 的切线.



（第 23 题）

(2) **证明**：如图，连结 $AE$.

∵ $PA$ 为 $\odot O$ 的切线，

∴ $\angle PAE+\angle OAE=90°$.

∵ $AD\perp ED$，∴ $\angle EAD+\angle AED=90°$.

∵ $OE=OA$，∴ $\angle OAE=\angle AED$.

∴ $\angle PAE=\angle DAE$，即 $AE$ 平分 $\angle PAD$.

∵ $PA$，$PB$ 为 $\odot O$ 的切线，

∴ $PD$ 平分 $\angle APB$，交 $\odot O$ 于 $AB$ 的平分线于点 $E$.

∴ $E$ 为△$PAB$ 的内心.

(3) **解**：∵ $PA$ 为 $\odot O$ 的切线，$AC$ 为 $\odot O$ 的直径，

∴ $\angle PAB+\angle BAC=90°$，$\angle C+\angle BAC=90°$.

∴ $\angle PAB=\angle C$.

∴ $\cos C=\cos\angle PAB=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

在 Rt△$ABC$ 中，$\cos C=\frac{BC}{AC}=\frac{1}{AC}=\frac{\sqrt{10}}{10}$，

∴ $AC=\sqrt{10}$. ∴ $AO=\frac{\sqrt{10}}{2}$.

∵ $\angle DPA+\angle PAD=90°$，

$\angle PAD+\angle BAC=90°$，

∴ $\angle DPA=\angle BAC$.

又∵ $\angle PAO=\angle ABC=90°$，

∴ △$PAO\sim$△$ABC$. ∴ $\frac{PO}{AC}=\frac{AO}{BC}$，

∴ $PO=\frac{AO}{BC}\cdot AC=\frac{\frac{\sqrt{10}}{2}}{1}\times\sqrt{10}=5$.

**24.** **解**：(1) 105

(2) 当 $O_1A_1$，$C_1$ 恰好在同一直线上时，设 $\odot O_1$ 与 $l_1$ 的切点为 $E$，

连结 $OO_1$，$O_1E$，可得 $O_1E=2$ cm，$O_1E\perp l_1$.

在 Rt△$A_1O_1E$ 中，

∵ $A_1O_1=4$ cm，$C_1D_1=4\sqrt{3}$ cm，

∴ $\tan\angle C_1A_1D_1=\sqrt{3}$，

∴ $\angle C_1A_1D_1=60°$.

在 Rt△$A_1O_1E$ 中，$\angle O_1A_1E=\angle C_1A_1D_1=60°$，

∴ $A_1E=\frac{2}{\tan 60°}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$（cm）.

∵ $A_1E=4A_1-OO_1-2=t-2$（cm），

∴ $t-2=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

∴ $t=\frac{2\sqrt{3}}{3}+2$.

即圆心 $O$ 移动的距离为 $(2\sqrt{3}+6)$ cm.

(3) ①当直线 $AC$ 与 $\odot O$ 第一次相切时，设移动时间为 $t_1$ s，如图，此时 $\odot O$ 移动到 $\odot O_1$ 的位置，矩形 $ABCD$ 移动到矩形 $A_2B_2C_2D_2$ 的位置.

设 $\odot O_1$ 与直线 $l_1$，$A_2C_2$ 分别相切于点 $F$，$G$，连结 $O_2F$，$O_2G$，$O_2A_2$，$OO_2$，

∴ $O_2F\perp l_1$，$O_2G\perp A_2C_2$.

由(2)得 $\angle C_2A_2D_2=60°$，

∴ $\angle GA_2F=120°$，

∴ $\angle O_2A_2F=60°$.

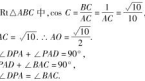
在 Rt△$A_2O_2F$ 中，$O_2F=2$ cm，

∴ $A_2F=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ cm.

∵ $OO_2=3t_1$ cm，$AF=AA_2+A_2F=\left(4t_1+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$cm，

∴ $4t_1+\frac{2\sqrt{3}}{3}-3t_1=2$，

解得 $t_1=2-\frac{2\sqrt{3}}{3}$.



（位置一）　（位置二）　（位置三）

（第 24 题）

②当直线 $AC$ 与 $\odot O$ 第二次相切时，设移动时间为 $t_2$ s.

记第一次相切时为位置一，点 $O_1$，$A_1$，$C_1$ 共线时为位置二，第二次相切时为位置三.

由题意知，从位置一到位置二所用时间与从位置二到位置三所用时间相等.

∴ $\frac{2\sqrt{3}}{3}+2-\left(2-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=t_2-\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}+2\right)$，

解得 $t_2=2+2\sqrt{3}$.

综上所述，当 $d<2$ 时，$t$ 的取值范围是

$2-\frac{2\sqrt{3}}{3}<t<2+2\sqrt{3}$.

## 第 3 章达标检测卷

**一.** 1. D　2. D　3. B　4. A　5. D

**6.** D　**点拨**：正投影的长度与木棒的摆放位置有关系，但无论怎样摆，正投影的长都不会超过 1. 2 m. 故选 D.

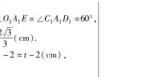
**7.** B　**8.** B　**9.** B　**10.** B

**二.** **11.** 正方体　**12.** 6 cm$^2$　**13.** 2. 12 m

**14.** 春　**15.** 6　**16.** 3. 24 m$^2$

**17.** 120　**18.** 2

**三.** **19.** **解**：如图所示.



主视图　左视图

俯视图

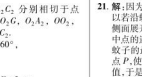
（第 19 题）

**20.** **解**：$\frac{AB}{BC}=\frac{4}{1.6}=\frac{5}{4}$，$PM+\frac{MN}{5}=1.2+0.8\times\frac{4}{5}=1.84$，易知 $\frac{PQ}{1.84}=\frac{5}{4}$，

解得 $PQ=2.3$.

**答**：木杆 $PQ$ 的长度为 2. 3 米.

**21.** **解**：因为使用发与蚊子在相对的位置上，所以若拍蚊子所在的母线将圆柱形容器的侧面展开，则使蚊在展开图矩形相对两边中点的连线上，如图所示. 要使苹果摇摆蚊子的最短距离，实际上是在 $EF$ 上找一点 $P$，使 $PA+PB$ 的值最小. 求这个最小值，于是作点 $A$ 关于 $EF$ 的对称点 $A'$，连结 $A'B$，则 $A'B$ 与 $EF$ 的交点就是点 $P$，过 $B$ 作 $BM\perp AA'$ 于点 $M$. 易知 $A'M=1.2$ m，$BM=0.5$ m，所以在 Rt△$A'MB$ 中，$A'B=\sqrt{A'M^2+BM^2}=1.3$ m，因为 $A'B=A'P+PB=AP+PB$，所以早虎捕捉蚊子所走的最短路程为 1. 3 m.



（第 21 题）　（第 23 题）

**22.** **解**：(1) 由已知，易求得 $OB=4$，$\angle BOD=120°$. ∴ $S_{\text{阴影}}=\frac{1}{3}\times\pi\times 4^2=\frac{16}{3}\pi$.

(2) 设圆底圆锥底面的半径为 $r$，则 $\frac{2}{3}\times\pi\times 4=2\pi r$，解得 $r=\frac{4}{3}$.

**23.** **解**：(1) 圆锥

(2) 全面积 $S=12\pi+4\pi=16\pi$.

(3) 如图将圆锥侧面展开，易知 $C$ 为弧 $BB'$ 中点，线段 $BB'$ 为所求的最短路程. 由条件易得，$\angle BAB'=120°$，$AC\perp BB'$，

$\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BAB'$，所以 $\angle BAD=60°$，

所以 $BD=AB\sin 60°=3\sqrt{3}$.

**24.** **解**：由题意可知 $OD=OE$，

∵ $\angle OAE=90°$，∴ $\angle OEO=45°$.

又∵ $\angle ABE=90°$，∴ $\angle BAE=45°$.

∴ $AB=BE$，即 $AB=BO+OE$.

连结 $CD$，易知 $C$，$D$，$O$ 三点在同一直线上. 在△$ABF$ 和△$COF$ 中，$\angle ABF=\angle COF=90°$，$\angle AFB=\angle CFO$，

∴ △$ABF\sim$△$COF$. ∴ $\frac{AB}{BF}=\frac{CO}{OF}$，

即 $\frac{BO+OE}{BO+OF}=\frac{CD+OD}{OF}$，

∴ $\frac{BO+0.8}{BO+3}=\frac{1.2+0.8}{3}$. ∴ $BO=3.6$. 经检验 $BO=3.6$ 是方程的解，

∴ $AB=3.6+0.8=4.4$，即圆墙 $AB$ 的高度为 4. 4 m.





关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料

典点

练准知识 练通考点
练透方法 练出高分





提分一定有方法！

绿色印刷产品

关注荣德基微信公众号，获取新资讯。
荣德基官方网站：http://www.rudder.com.cn
荣德基天猫旗舰店：http://rongdeji.tmall.com
客服热线：182 1039 5892

荣德基
初中频道

本书导学号
1858154

ISBN 978-7-5450-6680-7
9 787545 066807 01>
定价：45.90元

关注微信公众号“教辅资料站”获取更多学习资料